

바르데즈몽드 행렬에 대해 $n \times n$ matrix에 행렬식은
 $\det V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$ 이다.

proof - 수학적 귀납법을 이용해보자.

Step 1. $n=1$ 인 경우 $\det V_1 = |1| = 1$
 $n=2$ 인 경우 $\det V_2 = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$

따라서 표기표로써 성립한다.

Step 2. $\det V_k = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i)$

Step 3. $\det V_{k+1}$ 은 여인식 공리에 의해 $(k+1)$ 행을 기준으로 전개하면

$$\det V_{k+1} = 1 \cdot C_{(k+1),1} + \lambda \cdot C_{k+1,2} + \lambda^2 \cdot C_{k+1,3} + \dots + \lambda^k \cdot C_{(k+1), (k+1)}$$

이 된다.

이때 λ 이 $\lambda_1 \dots \lambda_k$ 중 하나라면 동일한 두 행이 생기므로 $\det = 0$ 이 된다.

다른 모든 경우 $\det V_{k+1} = C \cdot (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k)$ 이다.

한편 λ^k 의 계수 $C_{(k+1), (k+1)}$ 은 $(k+1), (k+1)$ 이 다른 여인식이므로

$$C_{(k+1), (k+1)} = (-1)^{(k+1)+(k+1)} \det V_k = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i) \quad \text{이다}$$

따라서 $\det V_{k+1} = \left[\prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i) \right] [(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k)]$ 이 성립한다

따라서 $V_{k+1} = \prod_{1 \leq i < j \leq k+1} (\lambda_j - \lambda_i)$ 가 성립하므로 수학적 귀납법에 의해

$$\det V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) \quad \text{이 성립한다.}$$