1-(a) What is the size of vector w and y? (10pt)

$$W = \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$\therefore$ W is $(d+1) \times 1$ matrix

y is $n \times 1$ matrix

1-(b) What is the size of matrix A? Write A. (10pt)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^d \\ 1 & & & & x_2^d \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^d \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A is $n \times (d+1)$ matrix.

1-(c) Let $d+1=n$, then, A becomes a square matrix. Compute the determinant of A. (40pt in total, Derivation: 30pt, Answer: 10pt)

1. 단위행렬 I에 대해 $\det(I)=1$ 이다.
2. 대각행렬의 det는 각 요소의 곱과 같다.
3. 행교환시 det의 부호가 역전된다.
4. 하나의 row에 대해 분리해서 적을 수 있다.

ex). $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}$$

$n \times n$ matrix A에 대해 determinant를 구할 때 $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{vmatrix}$와 같은 행렬식이 0이 되는 것처럼 모든 값이 0인 행이나 열이 존재하면 그 분리된 행렬식은 0이 된다. 이를 고려하여 0이 되지 않는 행렬식만 적으면 오직 한 열과 한 행에서 하나의 요소만이 0이 아닌 $n!$개의 행렬식으로 분리된다.

행교환을 통해 대각행렬로 만들어서 각 요소의 곱을 구해보자. 단 이때 행교환에 의한 부호를 의식하자.

$$\det A = \sum_{k=1}^{n!} \pm a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots a_{n\omega} \quad \text{that } (\alpha, \beta, \dots, \omega) \text{ is perm of } (1, 2, \dots, n)$$

만약 $n \times n$행렬의 det를 $(n-1)\times(n-1)$의 determinant로 표현하면 수학적 귀납법에 의해 2×2까지 줄일 수 있고 그러면 det를 계산할 수 있다.

이를 위해 $C_{ij} = A$에서 i번째 row와 j번째 column을 지운 행렬의 행렬식이라 하자.

이렇게 나온 C_{ij}는 $\pm a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots a_{n\omega}$에서 한 요소를 뺀 행렬식과 같게 된다.

$$\therefore \det A = \sum_{k=1}^{n!} \pm a_{1\alpha} a_{2\beta} \cdots a_{n\omega} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} C_{1k}$$ 와 같이 정리할 수 있다.

방데르몽드 행렬에 대해 n×n matrix 에 행렬식은

det $V_n = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$ 이다.

proof. 수학적 귀납법을 이용해보자.

Step 1. n=1 일 경우 det $V_1 = |1| = 1$

n=2 일 경우 det $V_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$

따라서 초기조건이 성립한다.

Step 2. let det $V_k = \prod_{1\le i<j\le k}(x_j - x_i)$

Step 3. det V_{k+1} 은 여인수 공식에 의해 (k+1) 행을 기준으로 전개하면

det $V_{k+1} = 1\cdot C_{(k+1)\cdot 1} + x\cdot C_{k+1\cdot 2} + x^2\cdot C_{k+1\cdot 3} + \cdots + x^k\cdot C_{(k+1)(k+1)}$.

이 된다.

이때 x에 $x_1 \cdots x_k$ 를 대입하면 동일한 두 행이 생기므로 det = 0 이 된다.

이를 표현하면 det $V_{k+1} = C(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)$ 이다.

한편 x^k의 계수 $C_{(k+1)(k+1)}$ 은 (k+1), (k+1) 에 대한 여인수이므로

$C_{(k+1)(k+1)} = (-1)^{(k+1)+(k+1)}$ det $V_k = \prod_{1\le i<j\le k}(x_j - x_i)$ 이다.

따라서 det $V_{k+1} = \left[\prod_{1\le i<j\le k}(x_j - x_i)\right]\left[(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_k)\right]$ 이 성립한다

따라서 $V_{k+1} = \prod_{1\le i<j\le k+1}(x_j - x_i)$ 가 성립하므로 수학적 귀납법에 의해

det $V_n = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j - x_i)$ 이 성립한다.

1-(d) What is the condition that makes the determinant of A non-zero? (10pt)

colums of A are linearly independent

or A is invertible

or $Ax=0$ have a trivial solution.

1-(e) Assume that the determinant of A is non-zero, then, what is the solution of linear equation, $A\mathrm{w} = \mathrm{y}$, with respect to w? (10pt)

A is invertible thus $A^{-1}Aw = A^{-1}y$

$Iw = A^{-1}y$

$w = A^{-1}y$.

2. (20pt)

Suppose that $n > d+1$. Then, we cannot compute the inverse of A since A is not a square matrix. In this case, how can we solve the linear equation $A\mathbf{w} = \mathbf{y}$?

If columns of A is linearly dependent, there can be infinite number of w,

if columns of A is linearly independent ... ①

let $\vec{v} \in Nul(A^TA)$

$= A^TA\,\vec{v} = \vec{0}$

then $\vec{v}^T A^T A\vec{v} = \vec{v}^T\vec{0} = \vec{0}$

$\therefore \vec{v}^TA^T = (A\vec{v})^T$

$\therefore (A\vec{v})^T A\vec{v} = (A\vec{v})\cdot(A\vec{v}) = 0$

$\therefore A\vec{v} = \vec{0}$

$\therefore$ if $\vec{v} \in Nul(A^TA)$ then $\vec{v} \in Nul(A)$

because of ①, $A\vec{v} = 0$ $\vec{v} = 0$

$\therefore Nul(A^TA) = Nul(A) = \{\vec{0}\}$

$\therefore \vec{v}$ is only solution for $A^TA\vec{v} = 0$

$\therefore A^TA$ is linearly independent.

A^TA is $d+1 \times d+1$ square matrix and columns of A^TA is linearly independent, A^TA is invertible.

$\therefore Aw = y$

$A^TAw = A^Ty$

$(A^TA)^{-1}(A^TA)w = (A^TA)^{-1}A^Ty$

$w = (A^TA)^{-1}A^Ty$