

## Índice

Unidad 1: Lógica y teoría de conjuntos .....	2
1. Definiciones .....	2
2. Leyes de la lógica .....	2
3. Reglas de inferencia.....	3
4. Lógica de predicados .....	3
5. Teoría de conjuntos.....	3
Unidad 2: Inducción matemática .....	4
1. Métodos para demostrar la verdad de una implicación .....	4
2. Inducción matemática .....	4
Unidad 3: Relaciones de recurrencia.....	4
1. Ecuaciones de recurrencia homogéneas.....	5
2. Ecuaciones de recurrencia no homogéneas .....	5
3. Sucesiones importantes.....	5
Unidad 4: Relaciones .....	6
1. Definiciones .....	6
2. Propiedades de las relaciones.....	6
3. Matriz de una relación.....	6
4. Relaciones de equivalencia y de orden.....	6
5. Elementos particulares.....	7
Unidad 5: Álgebras de Boole .....	7
1. Definiciones y axiomas .....	7
2. Funciones booleanas .....	8
3. Propiedades de los átomos.....	9
4. Mapa de Karnaugh .....	9
5. Isomorfismos entre álgebras de Boole .....	10
Unidad 6: Teoría de grafos.....	10
1. Definiciones de grafos y digrafos .....	10
2. Aristas, vértices, caminos y grafos.....	10
3. Grafos de Euler .....	12
5. Representación de grafos por matrices .....	13
6. Niveles .....	14
7. Algoritmos de camino mínimo.....	14
Unidad 7: Árboles .....	15
1. Definiciones .....	15
2. Árboles generadores.....	16
3. Algoritmos para hallar un árbol generador mínimo .....	16
Unidad 8: Redes de transporte.....	16
1. Definiciones .....	16
2. Algoritmo de Ford-Fulkerson .....	17

# Unidad 1: Lógica y teoría de conjuntos

## 1. Definiciones

Lógica: estudio de las formas correctas de pensar o razonar.

Proposición: afirmación que es verdadera o falsa, pero no ambas.

Proposición primitiva: proposición que no se puede descomponer en otras dos o más proposiciones. Siempre son afirmativas.

Proposición compuesta: proposición formada por dos o más proposiciones relacionadas mediante conectivas lógicas.

Tablas de verdad:

p	q	$\neg p$ (NOT)	$p \wedge q$ (AND)	$p \vee q$ (OR)	$p \underline{\vee} q$ (XOR)	$p \rightarrow q$ (IF)	$p \leftrightarrow q$ (IIF)	$p \downarrow q$ (NOR)	$p \mid q$ (NAND)
V	V	F	V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V	F	F	V
F	F	V	F	F	F	V	V	V	V

Nota: n proposiciones  $\rightarrow 2^n$  líneas de tabla.

Negación: no, nunca, jamás, no es cierto que.

Conjunción: y, e, pero, como, aunque, sin embargo, mientras.

Disyunción: o, a menos que.

Disyunción excluyente: o bien.

Implicación: cuando, siempre que.

Doble implicación: si y sólo si (sii), cuando y solo cuando.

$\{\}$  y  $\{\downarrow\}$  son los únicos conjuntos adecuados de un solo conectivo diádico.

" $p \Rightarrow q$ "	" $p \Leftrightarrow q$ "
<ul style="list-style-type: none"> <li>Si p, entonces q.</li> <li>p implica q.</li> <li>p solo si q.</li> <li>p es el antecedente, q es el consecuente.</li> <li>q es necesario para p.</li> <li>p es suficiente para q.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>p es necesario y suficiente para q.</li> <li>p si y solo si q.</li> </ul>

Tautología: proposición que es verdadera siempre.

Contradicción: proposición que es falsa siempre.

Contingencia: proposición que puede ser verdadera o falsa, dependiendo de los valores de las proposiciones que la componen.

- $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $(p \underline{\vee} q) \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$
- $a \rightarrow (b \wedge c) \equiv (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c)$
- $(p \vee q) \rightarrow t \equiv (p \rightarrow t) \vee (q \rightarrow t)$

## 2. Leyes de la lógica

1) Ley de la doble negación	$\neg \neg p \equiv p$
2) Ley de conmutatividad	a) $p \vee q \equiv q \vee p$ b) $p \wedge q \equiv q \wedge p$
3) Ley de asociatividad	a) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

	b) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
4) Ley de distributividad	a) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ c) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
5) Ley de idempotencia	a) $p \vee p \equiv p$ b) $p \wedge p \equiv p$
6) Ley del elemento neutro	a) $p \vee F_0 \equiv p$ b) $p \wedge T_0 \equiv p$
7) Leyes de De Morgan	a) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ b) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$
8) Ley del inverso	a) $p \vee \neg p \equiv T_0$ b) $p \wedge \neg p \equiv F_0$
9) Ley de dominancia	a) $p \vee T_0 \equiv T_0$ b) $p \wedge F_0 \equiv F_0$
10) Ley de absorción	a) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ b) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Dual de S: Sea S una proposición. Si S *no contiene* conectivas lógicas distintas de  $\wedge$  y  $\vee$  entonces el dual de S ( $S^d$ ), se obtiene de reemplazar en S todos los  $\wedge$  ( $\vee$ ) por  $\vee$  ( $\wedge$ ) y todas las  $T_0$  ( $F_0$ ) por  $F_0$  ( $T_0$ ). Sean s y t dos proposiciones tales que  $s \equiv t$ , entonces  $s^d \equiv t^d$ .

- ✓ Recíproca:  $(q \rightarrow p)$  es la recíproca de  $(p \rightarrow q)$
- ✓ Contra-recíproca:  $(\neg q \rightarrow \neg p)$  es la contra-recíproca de  $(p \rightarrow q)$
- ✓ Inversa:  $(\neg p \rightarrow \neg q)$  es la inversa de  $(p \rightarrow q)$

### 3. Reglas de inferencia

<b>Modus ponens o Modus ponendo ponens</b>	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$
<b>Modus tollens o Modus tollendo tollens</b>	$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$

### 4. Lógica de predicados

Función proposicional: expresión que contiene una o más variables que al ser sustituidas por elementos del universo dan origen a una proposición.

Universo: Son las ciertas opciones “permisibles” que podré reemplazar por la variable.

Cuantificador universal: proposición que es verdadera para todos los valores de  $x$  en el universo.

$$\forall x (P(x)) \Rightarrow \dots P(-1) \wedge P(0) \wedge P(1) \wedge \dots$$

Cuantificador existencial: proposición en que existe un elemento  $x$  del universo tal que la función proposicional es verdadera.

$$\exists x (P(x)) \Rightarrow \dots P(-1) \vee P(0) \vee P(1) \vee \dots$$

- ✓  $\exists x [p(x) \wedge q(x)] \Rightarrow \exists x p(x) \wedge \exists x q(x)$
- ✓  $\exists x [p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$
- ✓  $\forall x [p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow \forall x p(x) \wedge \forall x q(x)$
- ✓  $\forall x p(x) \vee \forall x q(x) \Rightarrow \forall x [p(x) \vee q(x)]$
- ✓  $\exists x [p(x) \wedge q(x)] \neq \exists x p(x) \wedge q(x)$

#### Negación de proposiciones cuantificadas:

- $\neg[\forall x p(x)] \equiv \exists x \neg p(x)$
- $\neg[\exists x p(x)] \equiv \forall x \neg p(x)$

### 5. Teoría de conjuntos

Conjunto de partes: dado un conjunto A,  $p(A)$  es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A, incluidos A y  $\emptyset$ . Si A tiene n elementos,  $p(A)$  tendrá  $2^n$  elementos. *Ejemplo*:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

$$A = \{x : x \in A\}$$

$$P(A) = \{S : S \subset A\}$$

$$S \subset A \Leftrightarrow \forall x \in S: x \in A$$

Pertenencia: un elemento “pertenece” a un conjunto.

Inclusión: un conjunto está “incluido” en un conjunto.

### **Operaciones entre conjuntos:**

Unión:  $A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$

Intersección:  $A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$

Diferencia:  $A - B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$

Diferencia simétrica:  $A \Delta B = \{x \in U : x \in A \cup B \wedge x \notin A \cap B\}$

Complemento:  $\bar{A} = \{x \in U : x \notin A\}$

**Leyes del álgebra de conjuntos:** Para cualquier  $A, B \subseteq U$ :

Leyes conmutativas	$A \cap B = B \cap A$ $A \cup B = B \cup A$
Leyes asociativas	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$
Leyes distributivas	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Leyes de idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$
Leyes de identidad	$A \cup \emptyset = A$ $A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$ $A \cap U = A$
Complementación doble	$\bar{\bar{A}} = A$
Leyes del complemento	$A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$
Leyes de De Morgan	$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

## **Unidad 2: Inducción matemática**

### 1. Métodos para demostrar la verdad de una implicación

1) Método directo:  $V \rightarrow V$

2) Método indirecto:

a) Por el contrarrecíproco:  $F \leftarrow F$

b) Por el absurdo: supongo el antecedente verdadero y el consecuente falso y busco llegar a una contradicción de proposiciones.

### 2. Inducción matemática

$$\left. \begin{array}{l} \text{I) } P(1) \\ \text{II) } P(h) \rightarrow P(h+1) \end{array} \right\} \boxed{\forall x (x \in \mathbb{N} \rightarrow P(x))}$$

## **Unidad 3: Relaciones de recurrencia**

Orden de una relación: mayor subíndice – menor subíndice.

## 1. Ecuaciones de recurrencia homogéneas

Sea la ecuación  $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0$  (\*). Resolverla significa:

- I) Hallar las raíces de la ecuación característica de (\*):  $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$
- II) Utilizar los teoremas siguientes para hallar la solución.

**Teorema 1:** si  $t_n$  y  $s_n$  son soluciones de la ecuación (\*), entonces  $r_n = At_n + Bs_n$  también es solución de (\*)  $\forall A, B \in \mathbb{R}$ .

**Teorema 2:** si  $r_0$  es raíz de la ecuación característica, entonces  $r_0^n$  es solución de (\*).

**Teorema 3:** si  $r_1$  y  $r_2$  ( $r_1 \neq r_2$ ) son soluciones de la ecuación característica, entonces  $s_n = Ar_1^n + Br_2^n$  es solución de (\*) y  $\forall a_0, a_1 \in \mathbb{R} \exists A, B \in \mathbb{R}: \begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_1 = a_1 \end{cases}$

**Teorema 4:** si  $r_0$  ( $r_0 \neq 0$ ) es raíz doble de la ecuación característica, entonces  $s_n = nr_0^n$  es solución de (\*).

**Teorema 5:** si  $r_0$  ( $r_0 \neq 0$ ) es raíz triple de la ecuación característica, entonces  $s_n = Ar_0^n + Bnr_0^n$  es solución de (\*) y  $\forall a_0, a_1 \in \mathbb{R} \exists A, B \in \mathbb{R}: \begin{cases} s_0 = a_0 \\ s_1 = a_1 \end{cases}$

## 2. Ecuaciones de recurrencia no homogéneas

Sea la ecuación  $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = f(n)$  (\*), con  $f(n) \neq 0$ . Resolverla significa:

- I) Resolver la ecuación homogénea asociada y obtener  $a_n^H$ .
- II) Hallar una solución particular de la ecuación (\*),  $a_n^P$ .
- III) La solución general será:  $a_n = a_n^H + a_n^P$

**Nota:** en la solución particular propuesta no debe haber sumandos que aparecen en la solución de la ecuación homogénea.

f(n)	$a_n^P$ propuesta
$ka^n$ (a no es raíz de la ecuación característica)	$ka^n$
$ka^n$ (a es raíz de multiplicidad t de la ecuación característica)	$kn^t a^n$
Polinomio de grado k y 1 no es raíz de la ecuación característica	Polinomio genérico de grado k
Polinomio de grado k y 1 es raíz de multiplicidad t de la ecuación característica	Polinomio genérico de grado k multiplicado por $n^t$
A. sin ( $a_n$ ) ó B. cos ( $a_n$ )	C. sen( $a_n$ ) + D. cos( $a_n$ )

**Caso especial 1:**  $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = f_1(n) + f_2(n)$

- I) Proponer una solución  $a_n^{P1}$  para  $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = f_1(n)$
- II) Proponer una solución  $a_n^{P2}$  para  $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = f_2(n)$
- III) La solución será  $a_n^{P1} + a_n^{P2}$ .

**Caso especial 2:**  $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = f_1(n) \cdot f_2(n)$

- I) Proponer una solución  $a_n^{P1}$  para  $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = f_1(n)$
- II) Proponer una solución  $a_n^{P2}$  para  $a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k} = f_2(n)$
- III) La solución será  $a_n^{P1} \cdot a_n^{P2}$ . Luego, comparar con la solución del homogéneo y arreglar si es necesario.

## 3. Sucesiones importantes

Interés	Fibonacci	Torres de Hanoi	Desarreglos
$a_n = 1, 12, a_{n-1}$	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$	$h_n = 2h_{n-1} + 1$	$d_n = (n-1) \cdot (d_{n-1} + d_{n-2})$

## Unidad 4: Relaciones

### 1. Definiciones

Producto cartesiano:  $A \times B = \{(x, y) : x \in A \wedge y \in B\}$

Relación n-aria: dado un conjunto A se llama relación R en conjunto A  $\Leftrightarrow R \subseteq A \times A$ . Una relación se puede definir por extensión (mencionando todos sus elementos) o por comprensión (dando una característica de los elementos).

Relación 'R': Siendo  $x \in A, y \in A$ , decimos que  $xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$ .

Relación inversa: dada  $R \subseteq A \times B$ , la relación inversa  $R^{-1}$  es tal que:  $R^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in R\}$

#### Repaso de funciones

Sean A y B dos conjuntos. Una relación es función si:

$\nexists a \in A / f(a) = b_0 \wedge f(a) = b_1 \quad (b_0, b_1 \in B \quad b_0 \neq b_1)$  (No existe elemento del dominio que tenga dos imágenes)

Sea  $f: A \rightarrow B$  función,  $a \in A, b \in B$ :

- ❖ f es inyectiva  $\Leftrightarrow a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$  (Para puntos distintos del dominio, distintas imágenes)
- ❖ f es sobreyectiva  $\Leftrightarrow \forall b \in B, \exists a \in A / f(a) = b$  (La imagen de A es todo B)
- ❖ f es biyectiva  $\Leftrightarrow$  f es inyectiva y sobreyectiva (Si es biyectiva existe la inversa)

### 2. Propiedades de las relaciones

Sea R una relación en el conjunto A.

- 1) R es *reflexiva*  $\Leftrightarrow \forall x \in A: xRx$
- 2) R es *simétrica*  $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : (xRy \rightarrow yRx)$
- 3) R es *transitiva*  $\Leftrightarrow \forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz$
- 4) R es *antisimétrica*  $\Leftrightarrow \forall x, y \in A : (xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$

*Nota*: Todo elemento cumple las tres primeras consigo mismo. Cuidado con la 4ª: no simétrica  $\neq$  antisimétrica.

### 3. Matriz de una relación

Sea R una relación en un conjunto *finito* A. La misma puede representarse matricialmente por:

$M(R) \in \{0,1\}^{n \times n}$  siendo  $n=|A|$  definida por  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i R a_j \\ 0 & \text{si } a_i \not R a_j \end{cases}$

Relación de orden entre matrices booleanas:  $C \leq D \Leftrightarrow c_{ij} \leq d_{ij} \quad \forall i, j : 1 \leq i, j \leq n$ . Es decir, una matriz C es menor a D si D tiene al menos los mismos 1 en las mismas posiciones que C.

Sea I la matriz identidad de  $n \times n$ . Entonces:

- R es *reflexiva*  $\Leftrightarrow I \leq M(R)$
- R es *simétrica*  $\Leftrightarrow M(R) = M(R)^T$
- R es *antisimétrica*  $\Leftrightarrow M(R) \cdot M(R)^T \leq I$  (el producto se entiende posición por posición)
- R es *transitiva*  $\Leftrightarrow M^2(R) \leq M(R)$

### 4. Relaciones de equivalencia y de orden

Relación de equivalencia ( $\sim$ )	Relación de orden ( $\leq$ )
- Reflexividad	- Reflexividad
- Simetría	- Antisimetría
- Transitividad	- Transitividad

✓ Orden total:  $\forall x, y \in A : (xRy \vee yRx)$ . En el diagrama de Hasse se ve una línea recta.

✓ Orden parcial:  $\exists x, y \in A : (xRy \wedge yRx)$

(Si no es orden total, es orden parcial.)

Clase de equivalencia: sea  $R$  una *relación de equivalencia* en  $A$ . Se llama clase de equivalencia de un  $a \in A$ , al conjunto  $\bar{a} = [a] = \text{cl}[a] = \{x \in A : xRa\}$

**Teorema**: sea  $R$  una relación de equivalencia en  $A$ . Se verifica:

- $\forall a \in A: [a] \subseteq A$
- $\forall a \in A: [a] \neq \emptyset$
- $\forall a, b \in A: aRb \Leftrightarrow [a] = [b]$
- $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset \ (i \neq j)$
- $\cup [a_i] = A$

Conjunto cociente:  $A/R = \{[a] : a \in A\}$ . El conjunto cociente es una partición de  $A$ .

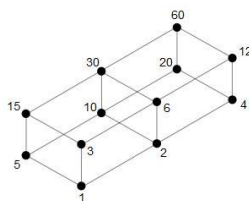
Partición:  $P = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  es una partición del conjunto  $A$  si y solo si:

- 1)  $A_i \neq \emptyset \ \forall i: 1 \leq i \leq n$
- 2)  $A_i \subseteq A \ \forall i: 1 \leq i \leq n$
- 3)  $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$
- 4)  $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j, 1 \leq j \leq n$

Congruencia módulo  $n$ : En  $\mathbb{Z}$ , y para  $n \in \mathbb{N}$ , se define la relación  $aRb \Leftrightarrow n|a-b \Leftrightarrow a-b = nk \ (k \in \mathbb{Z})$

Diagrama de Hasse: representación gráfica simplificada de un conjunto (finito) ordenado parcialmente. Con ellos se eliminan los lazos de reflexividad y los atajos de transitividad. Si dos elementos están relacionados, digamos  $aRb$ , entonces dibujamos  $b$  a un nivel superior de  $a$ .

*Ejemplo*: sea el conjunto  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$  (todos los divisores de 60). Este conjunto está ordenado parcialmente por la relación de divisibilidad. Su diagrama de Hasse puede ser representado como sigue.



## 5. Elementos particulares

Sea  $R$  una relación de orden en  $A$ :

Maximal:  $x_0$  es *maximal* de  $A \Leftrightarrow \nexists x \in A : x_0Rx \ (x_0 \text{ no se relaciona con nadie})$ .

Minimal:  $x_0$  es *minimal* de  $A \Leftrightarrow \nexists x \in A : xRx_0 \ (\text{No hay elementos que se relacionen con el } x_0.)$

Sea  $X$  un subconjunto de  $A$ :

Cota Superior:  $x_0 \in A$  es *Cota Superior* de  $X \Leftrightarrow \forall x \in X : xRx_0$ .

Cota Inferior:  $x_0 \in A$  es *Cota Inferior* de  $X \Leftrightarrow \forall x \in X : x_0Rx$ .

Supremo:  $s \in A$  es el *Supremo* de  $X \Leftrightarrow s$  es la *menor* de todas las cotas superiores  $\Leftrightarrow \forall x \in X : xRs$ .

Ínfimo:  $i \in A$  es *Ínfimo* de  $X \Leftrightarrow i$  es la *mayor* de todas las cotas inferiores  $\Leftrightarrow \forall x \in X : iRx$ .

Máximo:  $M \in A$  es *Máximo* de  $X \Leftrightarrow M$  es supremo de  $X$  y  $M \in X$ .

Mínimo:  $m \in A$  es *Mínimo* de  $X \Leftrightarrow m$  es ínfimo de  $X$  y  $m \in X$ .

## Unidad 5: Álgebras de Boole

### 1. Definiciones y axiomas

Álgebra de Boole: Sea  $K$  ( $|K| \geq 2$ ) un conjunto no vacío que contiene dos elementos especiales, 0 (cero o elemento neutro) y 1 (uno o elemento unidad) sobre el cual definimos las operaciones cerradas  $+$ ,  $\cdot$  y el complemento. Entonces  $\beta=(K, 0, 1, +, \cdot, \bar{\phantom{x}})$  es un Álgebra de Boole si cumple las siguientes condiciones:

A1) Axioma de conmutatividad	$x + y = y + x$ $x \cdot y = y \cdot x$
A2) Axioma de asociatividad	$(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y \cdot z$
A3) Axioma de la doble distributividad	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$
A4) Axioma de existencia de elementos neutros	$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$
A5) Axioma de existencia de complementos	$x + \bar{x} = 1$ $x \cdot \bar{x} = 0$

Expresión dual: se obtiene cambiando todos los  $+$ ( $\cdot$ ) por  $\cdot$ ( $+$ ) y los 0(1) por 1(0).

Principio de dualidad: en toda álgebra de Boole, si una expresión es válida, su expresión dual también lo es.

1) Ley del doble complemento:	$\bar{\bar{x}} = x$
2) Leyes de Morgan:	a) $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ b) $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$
3) Leyes conmutativas:	a) $x + y = y + x$ b) $x \cdot y = y \cdot x$
4) Leyes asociativas:	a) $x + (y + z) = (x + y) + z$ b) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
5) Leyes distributivas:	a) $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$ b) $x \cdot (y + z) = xy + xz$
6) Leyes de idempotencia:	a) $x + x = x$ b) $x \cdot x = x$
7) Leyes de identidad:	a) $x + 0 = x$ b) $x \cdot 1 = x$
8) Leyes de inversos:	a) $x + \bar{x} = 1$ b) $x \cdot \bar{x} = 0$
9) Leyes de acotación:	a) $x + 1 = 1$ b) $x \cdot 0 = 0$
10) Leyes de absorción:	a) $x + xy = x$ $x + \bar{x}y = x + y$ b) $x \cdot (x + y) = x$ $x \cdot (\bar{x} + y) = x \cdot y$

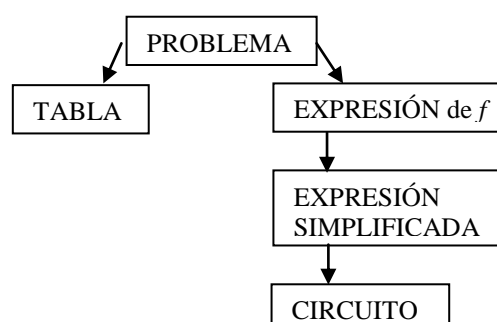
**Observación:**

$$\begin{aligned} \wedge &\equiv \cdot \equiv \cap \\ \vee &\equiv + \equiv \cup \end{aligned}$$

Permitido	Prohibido
✓ $x + y = 0 \rightarrow (x = 0) \wedge (y = 0)$	▪ $x \cdot y = 0 \rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$
✓ $x \cdot y = 1 \rightarrow (x = 1) \wedge (y = 1)$	▪ $x + y = y + z \rightarrow x = z$
✓ $x + \bar{y} = z + \bar{y} \wedge x + y = z + y \rightarrow x = z$	
✓ $x + \bar{y} = x \cdot y \rightarrow x = y$	

## 2. Funciones booleanas

Función booleana:  $f: \{0,1\}^n = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \dots \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ . Dadas  $n$  variables, existen  $2^{2^n}$  funciones booleanas posibles.





MINITERMINOS	MAXITERMINOS
$m = x.y.z$	$M = x + y + z$
Forma canónica, normal, normal disyuntiva SP: suma booleana de minitérminos.	Forma canónica, normal, normal conjuntiva PS: producto booleano de maxitérminos.
$f(x,y,z) \equiv$ suma de los minitérminos que dan 1	$f(x,y,z) \equiv$ producto de los maxitérminos que dan 0
Codificación: $x \rightarrow 1, \bar{x} \rightarrow 0$	Codificación: $x \rightarrow 0, \bar{x} \rightarrow 1$

#### Observación:

La suma de los minitérminos de una función  $\equiv$  producto de los maxitérminos que no aparecen en la SP.

$$\Sigma m(0, 1, 3, 5, 7) = \Pi M(2, 4, 6)$$

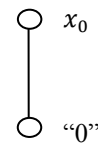
Orden en un álgebra de Boole: sea  $\beta = (K, +, \cdot, 0, 1, -)$  un álgebra de Boole. En K se define:

$$\forall a, b \in K: aRb \Leftrightarrow a \leq b \Leftrightarrow a \cdot b = a \Leftrightarrow a + b = b \Leftrightarrow a \cdot \bar{b} = 0$$

**Teorema:**  $\forall x \in K: 0 \leq x \leq 1$ . Todo álgebra de Boole está acotada.

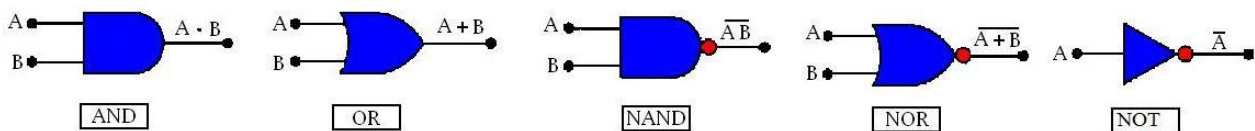
Átomo de un álgebra de Boole:  $x_0 \in B$  ( $x_0 \neq 0$ ) es un átomo de B  $\Leftrightarrow$

$$\forall y \in B: (y \leq x_0 \rightarrow y = 0 \vee y = x_0)$$



**Nota:** Si B tiene  $n$  átomos  $\Rightarrow$  B tiene  $2^n$  elementos.

Circuitos lógicos:



### 3. Propiedades de los átomos

- 1)  $x_0$  átomo  $\Rightarrow \forall y \in B: (y \cdot x_0 = 0 \vee y \cdot x_0 = x_0)$  (El producto de cualquier elemento de B con un átomo es 0 o es el átomo)
- 2)  $x_0, x_1$  átomos distintos  $\Rightarrow x_0 \cdot x_1 = 0$  (Si hay dos átomos distintos el producto entre ellos es 0)
- 3) Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  átomos de B  $\wedge x \in B: (x \cdot x_i = 0 \quad \forall i: 1 \leq i \leq n \Rightarrow x = 0)$  (Si hay un x que multiplicado por cada uno de los átomos da 0, x es el 0)

**Teorema:** sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  los átomos de B. Entonces  $\forall x \in B \exists c_1, c_2, \dots, c_n \in \{0, 1\}$  tales que  $x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ .

**Teorema:**  $\sum_{x_i \in A} x_i = 1$ , con  $x_i$  átomo de B.

**Nota:** Si  $n$  es la cantidad de variables de  $f$ , el número máximo de términos es  $2^n$ .

### 4. Mapa de Karnaugh

Para simplificar una función booleana. Se colorean los cuadrados de los minitérminos correspondientes y luego se escribe cada término, teniendo en cuenta que si un cuadrado tiene un vecino (abajo, arriba, derecha o izquierda) este último no se escribe.

xyzw	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

$$f = \Sigma m(1, 3, 9, 11, 14, 6)$$

$$f = (w \cdot \bar{y} + z \cdot \bar{w} \cdot y)$$

## 5. Isomorfismos entre álgebras de Boole

Isomorfismo entre dos álgebras de Boole: sean  $B_1 = (K_1, +_1, \bullet_1, 0_1, 1_1, \neg)$  y  $B_2 = (K_2, +_2, \bullet_2, 0_2, 1_2, \neg)$  dos álgebras de Boole. Se dice que  $B_1$  y  $B_2$  ( $\#B_1 = \#B_2$ ) son isomorfas  $\Leftrightarrow \exists f: K_1 \rightarrow K_2$  biyectiva tal que:

$$\begin{cases} f(x+_1y) = f(x)+_2f(y) \\ f(x\bullet_1y) = f(x)\bullet_2f(y) \\ f(\overline{x^1}) = \overline{f(x)^2} \end{cases}$$

El número de isomorfismos posibles es  $(\#B_1)!$

*Propiedades:*

- 1)  $f(0_1) = 0_2$
- 2)  $f(1_1) = 1_2$
- 3)  $f(\text{átomo } B_1) = \text{átomo } B_2$
- 4)  $x R_1 y \rightarrow f(x) R_2 f(y)$

## Unidad 6: Teoría de grafos

### 1. Definiciones de grafos y digrafos

Grafo no orientado: terna  $G = (V, A, \delta)$  que representa una relación entre un conjunto finito de Vértices ( $V \neq \emptyset$ ) y otro conjunto finito de Aristas ( $A$ ), y  $\delta$  es la función de incidencia.

$\delta: A \rightarrow X(V)$ , siendo  $X(V) = \{X: X \subseteq V \wedge |X| = 1 \text{ o } 2\}$ .

Si  $\delta(a) = \{u, v\}$  entonces  $\begin{cases} u \text{ y } v \text{ son extremos de } a \\ u \text{ y } v \text{ son vértices adyacentes} \\ a \text{ es incidente en } u \text{ y } v \end{cases}$

Grafo orientado / digrafo: terna  $D = (V, A, \varphi)$  con  $V \neq \emptyset$  que representa una relación entre un conjunto finito de Vértices y otro conjunto finito de Aristas, y  $\varphi$  es la función de incidencia.

$\varphi: A \rightarrow V \times V$ .

Si  $\varphi(a) = (v, w)$  entonces  $\begin{cases} v \text{ es extremo inicial y } w \text{ es extremo final de } a \\ v \text{ y } w \text{ son vértices adyacentes} \\ a \text{ incide positivamente en } w \text{ y negativamente en } v \end{cases}$

### 2. Aristas, vértices, caminos y grafos

#### Aristas

Aristas adyacentes: aristas que tienen un solo extremo en común.

Arista paralelas o múltiples:  $a_1, a_2 \in A$  son aristas paralelas  $\Leftrightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ . Es decir, si  $\varphi$  no es inyectiva.

Lazo o bucle: arista que une un vértice con sí mismo.

Arista incidente: Se dice que "e es incidente en v" si v está en uno de los vértices de la arista e.

Extremo (para digrafos): Un extremo es inicial(final) si es el primer(ultimo) vértice de la arista.

Aristas paralelas (para digrafos): Si  $E.I(a) = E.I(b) \wedge E.F(a) = E.F(b)$  en otro caso son anti paralelas.

Puente: Es la arista que al sacarla el grafo deja de ser conexo.

#### Vértices

Vértices adyacentes: Se dice que "v y w son adyacentes" si existe una arista entre los dos vértices.

✓ Un vértice es adyacente a sí mismo si tiene lazo.

Grado de un vértice:  $gr(v)$  es la cantidad de aristas que inciden en él. Los lazos cuentan doble.

✓ Se dice que un vértice es 'par' o 'impar' según lo sea su grado.

✓  $\sum_{v \in V} gr(v) = 2|A|$

✓ La cantidad de vértices de grado impar es un número par.

✓ Si  $gr(v) = 0$ , v es un vértice aislado.

Grado positivo (para digrafos):  $gr^+(v)$  es la cantidad de veces que se usa el vértice como extremo final.

Grado negativo (para digrafos):  $gr^-(v)$  es la cantidad de veces que se usa el vértice como extremo inicial.

- ✓  $\Sigma gr^-(v) = \Sigma gr^+(v) = \#A$
  - ✓  $gr_{total}(v) = gr^+(v) + gr^-(v)$
  - ✓  $gr_{neto}(v) = gr^+(v) - gr^-(v)$
  - ✓ El lazo cuenta como arista incidente positiva y negativamente en el vértice.
- Vértice de aristas múltiples: Es aquel que tiene más de una arista.

## **Caminos**

Camino: sucesión finita no vacía de aristas distintas que contengan a  $v_x$  y  $v_y$  en su primer y último término.

Así:  $\{v_x, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \dots, \{v_n, v_y\}$

Longitud del camino: número de aristas de un camino.

Circuito o camino cerrado: camino en el cual  $v_0 = v_n$ .

Camino simple: camino que no repite vértices.

- ✓  $\forall v, w \in V (v \neq w): (\exists \text{ camino de } v \text{ a } w \Rightarrow \exists \text{ camino simple de } v \text{ a } w)$

Circuito simple: circuito que no repite vértices salvo el primer y último vértice.

Ciclo: circuito simple que no repite aristas.

- ✓ Circuito simple de longitud  $\geq 3$  en grafos ( $\geq 2$  en digrafos) es un ciclo.

*Nota*: Si  $\forall v \in V \text{ } gr(v) \geq 2 \Rightarrow$  el grafo tiene un circuito.

## **Grafos**

Orden de un grafo: Es su número de vértices.

Grafo acíclico: grafo que no tiene ciclos.

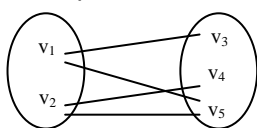
Grafo conexo: grafo tal que dados 2 vértices distintos es posible encontrar un camino entre ellos.  $\forall u, v \in V: (u \neq v \vee \exists \text{ camino de } u \text{ a } v)$

Grafo simple: grafo que carece de aristas paralelas y lazos.

Grafo regular: Aquel con el mismo grado en todos los vértices.

Grafo k-regular:  $G=(V,A,\phi)$  es k-regular  $\Leftrightarrow \forall v \in V: gr(v) = k$

Grafo bipartito: Es aquel con cuyos vértices pueden formarse dos conjuntos disjuntos de modo que no haya adyacencias entre vértices pertenecientes al mismo conjunto.



Grafo  $K_{n,m}$ : grafo bipartito simple con la mayor cantidad de aristas.

- ✓  $\#A_{K_{n,m}} = n \cdot m$

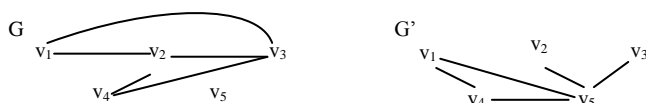
Grafo  $K_n$ : grafo simple con  $n$  vértices y la mayor cantidad de aristas.

- ✓  $\#A_{K_n} = \frac{n(n-1)}{2}$

Grafo completo: grafo simple con mayor cantidad de aristas. Todos están conectados con todos.

- ✓  $\forall v \in V, gr(v) = \#V - 1$ .
- ✓ Si  $G(V,A)$  es completo  $\Rightarrow G$  es regular (No vale la recíproca)
- ✓ Dos grafos completos con mismo  $\#V$  son isomorfos.

Grafo complemento: dado  $G=(V_G, A_G)$  simple se llama grafo complemento a  $\bar{G} = (V_{\bar{G}}, A_{\bar{G}})$  tal que  $\begin{cases} V_{\bar{G}} = V_G \\ A_{\bar{G}} = A_{K_n} - A_G \end{cases}$ . Es el grafo  $G'$  que tiene conectados los vértices no conectados de  $G$  y desconectados los vértices conectados de  $G$ .



- ✓  $G \cup G' =$  Grafo completo.
- ✓ Si dos grafos son complementarios, sus isomorfos también.
- ✓ Sea  $gr_G(v) = k \Rightarrow gr_{G'}(v) = \#V - k - 1$ .

Grafo plano: Aquel que admite una representación bidimensional sin que se crucen sus aristas.

Grafo ponderado: Es el grafo en el cual cada arista tiene asignado un  $n^\circ$  real positivo llamado peso.

Digrafo: Grafo con todas sus aristas dirigidas. Por tanto, los pares de vértices que definen las aristas, son pares ordenados.

Digrafo conexo: Si su grafo asociado es conexo.

Digrafo fuertemente conexo:  $\forall v \in V \exists$  camino que me permite llegar a cualquier otro vértice.

Digrafo k-regular:  $D=(V,A,\phi)$  es k-regular  $\Leftrightarrow \forall v \in V: gr^+(v) = gr^-(v) = k$

Subgrafo de G: Dado  $G = (V, A)$ ,  $G' = (V', A')$  es subgrafo de G si  $V' \subseteq V$  y  $A' \subseteq A$

Grafo parcial de G: Dado  $G = (V, A)$ ,  $G' = (V', A')$  es grafo parcial de G si  $V' \subseteq V$  y  $A' \subseteq A$

Multigrafo: Grafo que tiene alguna arista múltiple.

✓ Un multigrafo se transforma en grafo añadiendo un vértice en mitad de cada arista múltiple.

Pseudografo: Grafo con algún lazo.

### 3. Grafos de Euler

Grafo de Euler: grafo en el cual se puede encontrar un ciclo o un camino de Euler.

- Camino de Euler: camino que no repite aristas.
- Circuito de Euler: circuito que no repite aristas.

**Teorema de Euler:**

❖ Para grafos conexos:

- G tiene un **Camino de Euler**  $\Leftrightarrow$  G tiene exactamente **2** vértices de grado impar.
- G tiene un **Circuito de Euler**  $\Leftrightarrow$  G tiene exactamente **0** vértices de grado impar.

❖ Para digrafos:

- G tiene un **Camino de Euler**  $\Leftrightarrow \exists u, w \in V (u \neq w) \left\{ \begin{array}{l} gr^-(u) = gr^+(u) + 1 \\ gr^+(w) = gr^-(w) + 1 \\ gr^+(v) = gr^-(v) \quad \forall v \in V (v \neq u, v \neq w) \end{array} \right.$
- G tiene un **Circuito de Euler**  $\Leftrightarrow \forall v \in V gr^+(v) = gr^-(v)$

Grafo de Hamilton: grafo en el cual es posible hallar un camino o circuito de Hamilton.

- Camino de Hamilton: Es un camino que no repite vértices. (Puede no pasar por todas las aristas)
- Circuito de Hamilton: Es un circuito que no repite vértices. (Puede no pasar por todas las aristas)

**Teorema de Ore**: Si un grafo es conexo con  $\#V \geq 3$  y  $\forall v, w \in V: gr(v) + gr(w) \geq \#V \Rightarrow G$  es Grafo Hamiltoniano.

**Teorema de Dirac**: un grafo *simple* con  $\#V \geq 3$  es Hamiltoniano si  $\forall v \in V: gr(v) \geq \frac{\#V}{2}$

### 4. Isomorfismos de grafos

Dados  $G=(V, A)$  y  $G'=(V', A')$ , se denomina *isomorfismo de G a G'* a la aplicación biyectiva  $f$  tal que para  $a, b \in V$ ,  $\{a, b\} \in A \Leftrightarrow$  se cumple  $\{f(a), f(b)\} \in A'$ . Es decir, la aplicación que relaciona biyectivamente pares de vértices de A con pares de vértices de A', de modo que los vértices conectados siguen estándolo.

- ✓  $\#V = \#V'$  y  $\#A = \#A'$
- ✓ Se cumple que  $\delta(a) = \delta(f(a))$
- ✓ Si dos grafos son isomorfos, sus complementarios también.
- ✓ G y G' tienen igual cantidad de vértices aislados.
- ✓ G y G' tienen igual cantidad de lazos o bucles.
- ✓ Se mantienen los caminos.
- ✓ Se mantienen los ciclos.
- ✓ Si dos grafos complementarios son isomorfos se los llama auto complementarios.

✓ Dos grafos simples  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos  $\Leftrightarrow$  para cierto orden de sus vértices las  $M_A$  son iguales.

Automorfismo: Es un isomorfismo en sí mismo.  $f(a) = a$ .

## 5. Representación de grafos por matrices

	<div><div><b>Grafos</b></div><div></div></div>	<div><div><b>Digrafos</b></div><div></div></div>																																																																																																
<div><div>Matriz de adyacencia</div></div>	<div><div><math>M_A \in \mathbb{R}^{n \times n}</math> (<math>n =  V </math>) tal que: <math>M_A = (a_{ij})</math> con <math>a_{ij}</math> = cantidad de aristas con extremos <math>v_i</math> y <math>v_j</math></div><div><div>✓ Matriz simétrica.</div><div>✓ <math>gr(v_i) = \sum a_{ij} + 2 \cdot a_{ii}</math> (<math>i \neq j</math>)</div></div><div><table><tr><td></td><td><b>v<sub>1</sub></b></td><td><b>v<sub>2</sub></b></td><td><b>v<sub>3</sub></b></td><td><b>v<sub>4</sub></b></td><td><b>v<sub>5</sub></b></td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>1</sub></b></td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>→ gr(v<sub>1</sub>)</td></tr><tr><td><b>v<sub>2</sub></b></td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>3</sub></b></td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>4</sub></b></td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>5</sub></b></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr></table><div><div>↓</div><div>gr(v<sub>1</sub>)</div></div></div></div>		<b>v<sub>1</sub></b>	<b>v<sub>2</sub></b>	<b>v<sub>3</sub></b>	<b>v<sub>4</sub></b>	<b>v<sub>5</sub></b>		<b>v<sub>1</sub></b>	0	1	1	0	0	→ gr(v <sub>1</sub> )	<b>v<sub>2</sub></b>	1	1	0	1	0		<b>v<sub>3</sub></b>	1	0	0	2	0		<b>v<sub>4</sub></b>	0	1	2	0	0		<b>v<sub>5</sub></b>	0	0	0	0	0		<div><div><math>M_A \in \mathbb{R}^{n \times n}</math> (<math>n =  V </math>) tal que <math>M_A = (a_{ij})</math> con <math>a_{ij}</math> = cantidad de aristas con E.I en <math>v_i</math> y E.F en <math>v_j</math></div><div><div>✓ No necesariamente simétrica.</div></div><div><table><tr><td></td><td><b>v<sub>1</sub></b></td><td><b>v<sub>2</sub></b></td><td><b>v<sub>3</sub></b></td><td><b>v<sub>4</sub></b></td><td><b>v<sub>5</sub></b></td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>1</sub></b></td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>→ gr<sup>-</sup>(v<sub>1</sub>)</td></tr><tr><td><b>v<sub>2</sub></b></td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>3</sub></b></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>4</sub></b></td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>5</sub></b></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr></table><div><div>↓</div><div>gr<sup>+</sup>(v<sub>1</sub>)</div></div></div></div>		<b>v<sub>1</sub></b>	<b>v<sub>2</sub></b>	<b>v<sub>3</sub></b>	<b>v<sub>4</sub></b>	<b>v<sub>5</sub></b>		<b>v<sub>1</sub></b>	0	0	1	0	0	→ gr <sup>-</sup> (v <sub>1</sub> )	<b>v<sub>2</sub></b>	1	1	0	0	0		<b>v<sub>3</sub></b>	0	0	0	1	0		<b>v<sub>4</sub></b>	0	1	1	0	0		<b>v<sub>5</sub></b>	0	0	0	0	0													
	<b>v<sub>1</sub></b>	<b>v<sub>2</sub></b>	<b>v<sub>3</sub></b>	<b>v<sub>4</sub></b>	<b>v<sub>5</sub></b>																																																																																													
<b>v<sub>1</sub></b>	0	1	1	0	0	→ gr(v <sub>1</sub> )																																																																																												
<b>v<sub>2</sub></b>	1	1	0	1	0																																																																																													
<b>v<sub>3</sub></b>	1	0	0	2	0																																																																																													
<b>v<sub>4</sub></b>	0	1	2	0	0																																																																																													
<b>v<sub>5</sub></b>	0	0	0	0	0																																																																																													
	<b>v<sub>1</sub></b>	<b>v<sub>2</sub></b>	<b>v<sub>3</sub></b>	<b>v<sub>4</sub></b>	<b>v<sub>5</sub></b>																																																																																													
<b>v<sub>1</sub></b>	0	0	1	0	0	→ gr <sup>-</sup> (v <sub>1</sub> )																																																																																												
<b>v<sub>2</sub></b>	1	1	0	0	0																																																																																													
<b>v<sub>3</sub></b>	0	0	0	1	0																																																																																													
<b>v<sub>4</sub></b>	0	1	1	0	0																																																																																													
<b>v<sub>5</sub></b>	0	0	0	0	0																																																																																													
<div><div>Matriz de incidencia</div></div>	<div><div><math>M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}</math> (<math>n =  V , m =  A </math>) tal que <math>M_i = (b_{ij})</math>, con</div><div><math display="block">b_{ij} = \begin{cases} 1 &amp; \text{si } v_i \text{ es extremo de } a_j \text{ (no lazo)} \\ 2 &amp; \text{si } v_i \text{ es extremo de } a_j \text{ (lazo)} \\ 0 &amp; \text{si } a_j \text{ no incide en } v_i \end{cases}</math></div><div><table><tr><td></td><td><b>a<sub>1</sub></b></td><td><b>a<sub>2</sub></b></td><td><b>a<sub>3</sub></b></td><td><b>a<sub>4</sub></b></td><td><b>a<sub>5</sub></b></td><td><b>a<sub>6</sub></b></td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>1</sub></b></td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>← gr(v<sub>1</sub>)</td></tr><tr><td><b>v<sub>2</sub></b></td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>3</sub></b></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>4</sub></b></td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>5</sub></b></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr></table><div><div>  </div><div>2</div></div></div></div>		<b>a<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>3</sub></b>	<b>a<sub>4</sub></b>	<b>a<sub>5</sub></b>	<b>a<sub>6</sub></b>		<b>v<sub>1</sub></b>	1	0	0	0	0	1	← gr(v <sub>1</sub> )	<b>v<sub>2</sub></b>	1	2	1	0	0	0		<b>v<sub>3</sub></b>	0	0	0	1	1	1		<b>v<sub>4</sub></b>	0	0	1	1	1	0		<b>v<sub>5</sub></b>	0	0	0	0	0	0		<div><div><math>M_i \in \mathbb{R}^{n \times m}</math> (<math>n =  V , m =  A </math>) tal que <math>M_i = (b_{ij})</math>, con</div><div><math display="block">b_{ij} = \begin{cases} -1 &amp; \text{si } v_i \text{ es E. I de } a_j \\ 1 &amp; \text{si } v_i \text{ es E. F de } a_j \\ \pm 1 &amp; \text{si } a_j \text{ es lazo de } v_i \\ 0 &amp; \text{si } a_j \text{ no incide en } v_i \end{cases}</math></div><div><table><tr><td></td><td><b>a<sub>1</sub></b></td><td><b>a<sub>2</sub></b></td><td><b>a<sub>3</sub></b></td><td><b>a<sub>4</sub></b></td><td><b>a<sub>5</sub></b></td><td><b>a<sub>6</sub></b></td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>1</sub></b></td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>-1</td><td>← gr<sup>+</sup>(v<sub>1</sub>)=Σa<sub>ij</sub>, (a<sub>ij</sub>&gt;0)</td></tr><tr><td><b>v<sub>2</sub></b></td><td>-1</td><td>±1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>gr<sup>-</sup>(v<sub>1</sub>)=Σa<sub>ij</sub>, (a<sub>ij</sub>&lt;0)</td></tr><tr><td><b>v<sub>3</sub></b></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>-1</td><td>-1</td><td>1</td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>4</sub></b></td><td>0</td><td>0</td><td>-1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td></td></tr><tr><td><b>v<sub>5</sub></b></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td></td></tr></table><div><div>  </div><div>0</div></div></div></div>		<b>a<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>3</sub></b>	<b>a<sub>4</sub></b>	<b>a<sub>5</sub></b>	<b>a<sub>6</sub></b>		<b>v<sub>1</sub></b>	1	0	0	0	0	-1	← gr <sup>+</sup> (v <sub>1</sub> )=Σa <sub>ij</sub> , (a <sub>ij</sub> >0)	<b>v<sub>2</sub></b>	-1	±1	1	0	0	0	gr <sup>-</sup> (v <sub>1</sub> )=Σa <sub>ij</sub> , (a <sub>ij</sub> <0)	<b>v<sub>3</sub></b>	0	0	0	-1	-1	1		<b>v<sub>4</sub></b>	0	0	-1	1	1	0		<b>v<sub>5</sub></b>	0	0	0	0	0	0	
	<b>a<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>3</sub></b>	<b>a<sub>4</sub></b>	<b>a<sub>5</sub></b>	<b>a<sub>6</sub></b>																																																																																												
<b>v<sub>1</sub></b>	1	0	0	0	0	1	← gr(v <sub>1</sub> )																																																																																											
<b>v<sub>2</sub></b>	1	2	1	0	0	0																																																																																												
<b>v<sub>3</sub></b>	0	0	0	1	1	1																																																																																												
<b>v<sub>4</sub></b>	0	0	1	1	1	0																																																																																												
<b>v<sub>5</sub></b>	0	0	0	0	0	0																																																																																												
	<b>a<sub>1</sub></b>	<b>a<sub>2</sub></b>	<b>a<sub>3</sub></b>	<b>a<sub>4</sub></b>	<b>a<sub>5</sub></b>	<b>a<sub>6</sub></b>																																																																																												
<b>v<sub>1</sub></b>	1	0	0	0	0	-1	← gr <sup>+</sup> (v <sub>1</sub> )=Σa <sub>ij</sub> , (a <sub>ij</sub> >0)																																																																																											
<b>v<sub>2</sub></b>	-1	±1	1	0	0	0	gr <sup>-</sup> (v <sub>1</sub> )=Σa <sub>ij</sub> , (a <sub>ij</sub> <0)																																																																																											
<b>v<sub>3</sub></b>	0	0	0	-1	-1	1																																																																																												
<b>v<sub>4</sub></b>	0	0	-1	1	1	0																																																																																												
<b>v<sub>5</sub></b>	0	0	0	0	0	0																																																																																												

Propiedad: en la matriz  $M_A(G)^k$ , cada coeficiente  $a_{ij}$  indica la cantidad de caminos de longitud  $k$  que hay entre  $v_i$  y  $v_j$ .

Matriz de conexión: Dados  $G=(V,A,\phi)$  con  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ . Se define la siguiente relación:  
 $\forall v, w \in V: vRw \Leftrightarrow (v = w \vee \exists \text{ un camino de } v \text{ a } w)$ .

$$M_C(G) = [b_{ij}]_{n \times n} = \begin{cases} 1 & \text{si } vRw \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Matriz de adyacencia booleana: sea un grafo  $G=(V,A, \phi)$  con  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ . Se define la matriz de adyacencia de  $G$  a una matriz booleana de  $n \times n$  tal que:

$$M_A(G) = (m_{ij}) \text{ tal que } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ NO es adyacente a } v_j \end{cases}$$

**Matriz de incidencia booleana:** sea un grafo  $G=(V,A, \phi)$  con  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  y  $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ . Se define la matriz de adyacencia de  $G$  a una matriz booleana de  $n \times m$  tal que:

$$M_I(G) = m_{ij} \text{ tal que } m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } a_i \text{ es incidente a } v_j \\ 0 & \text{si } a_i \text{ NO es incidente a } v_j \end{cases}$$

## 6. Niveles

**Vértice alcanzable:** sea  $D=(V,A)$  un digrafo. Se dice que  $w \in V$  se alcanza de  $v \in V \Leftrightarrow \exists$  camino dirigido de  $v$  a  $w$ .

**Niveles de un digrafo:** Un conjunto vértices  $N$  constituye o está en nivel superior a otro conjunto de vértices  $K$  si ningún vértice de  $N$  es alcanzable desde algún vértice de  $K$ .

Dibujar  $M_A$

$i = 1$

while  $M_A$ :

Nivel  $i = v_i$ 's tales que sus filas y columnas en  $M_A$  sean nulas

$M_A = M_A - \{\text{columnas y filas que sean nulas}\}$

$i = i + 1$

Nivel 1: A,G

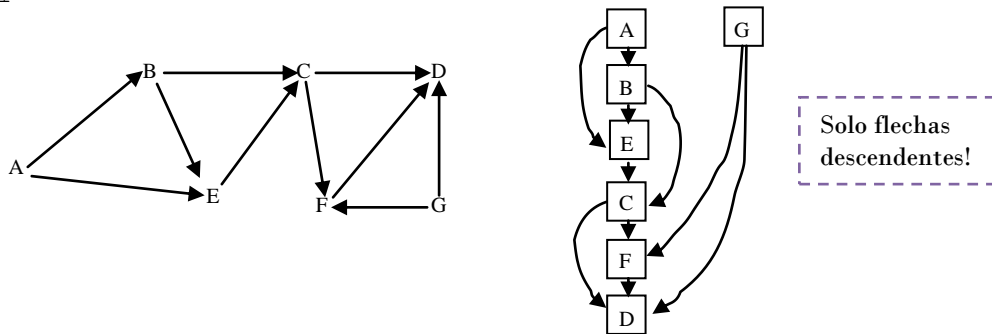
Nivel 2: B

Nivel 3: E

Nivel 4: C

Nivel 5: F

Nivel 6: D



## 7. Algoritmos de camino mínimo

Objetivo: Hallar el camino mínimo de  $S$  a  $L$ :

- $\lambda(v)$  es la etiqueta del vértice  $v$ .
- $i$  es un contador.

### Algoritmo de Moore o BFS (Breadth First Search)

- Dado un grafo o digrafo no ponderado, calcula la distancia entre dos vértices.

$\lambda(S) = 0$

$i = 0$

while (vértices adyacentes a los etiquetados con  $i$  no etiquetados):

$\lambda(v) = i+1$

if ( $L$  is etiquetado): break

$i = i+1$

### Algoritmo de Dijkstra

- Dado un grafo o digrafo con pesos no negativos, calcula caminos mínimos del vértice a todos los vértices.

$\lambda(S) = 0$

for  $v$  in  $V$ :

$\lambda(v) = \infty$

$T = V$

```

while (L ∈ T):
    Elijo v ∈ T con mínimo λ(v) adyacente al último etiquetado
    ∀x / x adyacente v:
        λ(x) = min{λ(x), λ(v) + a(v,x)}
    T = T - {v}

```

### **Algoritmo de Ford**

- Solo para digrafos, acepta pesos negativos y detecta circuitos negativos.

```

λ(S) = 0
for v in V:
    λ(v) = ∞
j = 1
while (j ≠ |V|):
    T = {v ∈ V / v sea adyacente al último etiquetado}
    ∀x ∈ V, ∀v ∈ T :
        λ(v) = min{λ(x), λ(v) + a(v,x)}
    Si no hubo cambios: break
    Else: j = j + 1
return T

```

## **Unidad 7: Árboles**

### 1. Definiciones

**Árbol:**  $G=(V,A)$  es un árbol  $\Leftrightarrow \forall u,v \in V (u = v \vee \exists! \text{ camino simple de } u \text{ a } v)$

**Teorema 1:** dado un grafo  $G=(V,A)$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- G es conexo y acíclico
- G es acíclico y si se le agrega una arista deja de serlo
- G es conexo y si se le elimina una arista deja de serlo
- G es árbol

**Teorema 2:** dado un grafo  $G=(V,A)$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- G es conexo y acíclico
- G es conexo y  $|A| = |V| - 1$
- G es acíclico y  $|A| = |V| - 1$

**Propiedad:** si G es un árbol con  $\#V \geq 2 \Rightarrow$  hay al menos 2 vértices de grado 1.

**Bosque:** un grafo  $G=(V,A)$  es bosque  $\Leftrightarrow$  G es acíclico.

- ✓ Los bosques son grafos no conexos cuyas componentes conexas son árboles.
- ✓  $|A| = |V| - t$ , siendo t la cantidad de árboles del bosque.

**Arboles con raíz:**  $G=(V,A)$  digrafo conexo es un árbol con raíz  $\Leftrightarrow \begin{cases} \exists r \in V: gr^+(r) = 0 \rightarrow (r = \text{raíz}) \\ \forall v \in V (v \neq r): gr^+(v) = 1 \end{cases}$

**Hoja / terminal:** Vértice sin hijos.

**Vértice interno:** Vértice con hijos.

**Árbol n-ario:** todos los nodos tienen a lo sumo n hijos.

**Árbol n-ario completo:** todos los nodos tienen 0 o n hijos.

**Nivel de un vértice:** número de aristas que le separan de la raíz. La raíz tiene nivel 0.

**Altura de un árbol:** máximo nivel de sus vértices.

**Árbol equilibrado:** las hojas llegan al mismo nivel.

**Teorema:** Si  $T = (V, A)$  es un árbol  $m$ -ario completo con  $i$  vértices internos entonces:  $\begin{cases} \text{Hojas} = (m-1)i + 1 \\ \#V = mi + 1 \end{cases}$

## 2. Árboles generadores

Árbol generador:  $T=(V_T, A_T)$  es un árbol generador de  $G=(V_G, A_G) \Leftrightarrow \begin{cases} T \text{ es árbol} \\ V_T = V_G \\ A_T \subseteq A_G \end{cases}$

Árbol generador minimal: es un árbol generador, de peso mínimo. No es único.

**Teorema:**  $G$  es un grafo no dirigido y conexo  $\Leftrightarrow G$  tiene árbol generador.

## 3. Algoritmos para hallar un árbol generador mínimo

Sea  $G = (V, A)$  un grafo conexo ponderado. Existen dos algoritmos para hallar un árbol generador mínimo de  $G$ .

### Algoritmo de Prim

```
v = vértice cualquiera de G
T = {v}
while (|T| ≠ |V|):
    a = arista de mínimo peso incidente en un v ∈ T y un w ∉ T
    T = T + {w}
return T
```

### Algoritmo de Kruskal

```
a = arista de mínimo peso de G
T = {a}
while (|T| < |V|-1):
    b = arista de mínimo peso tal que b ∉ T y T + {b} es acíclico
    T = T + {b}
return T
```

## Unidad 8: Redes de transporte

### 1. Definiciones

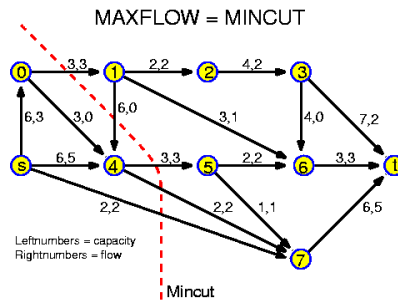
Red de transporte: sea  $G = (V, A)$  un digrafo conexo y sin lazos.  $G$  es una red de transporte si se verifican:

- 1) **Vértice Fuente:**  $\exists!$  vértice  $f \in V$  /  $gr^+(f) = 0$  (no llegan flechas)
- 2) **Vértice Sumidero:**  $\exists!$  vértice  $s \in V$  /  $gr^-(s) = 0$  (no salen flechas)
- 3) **Capacidad de la Arista:**  $\exists$  una función  $C: A \rightarrow N_0$  / si  $a = (v_i, v_j) \in A$ ,  $C(a) = C_{ij}$

Flujo de una red: Si  $G = (V, A)$  es una red de transporte se llama *flujo de  $G$*  a una función  $F: A \rightarrow N_0$  tal que:

- 1)  $\forall a \in A: F(a) \leq C(a)$  (Si  $F(a) = C(a)$  se dice que la arista está *saturada*)
- 2)  $\forall v \in V$  ( $v \neq f$ ,  $v \neq s$ ) se tiene que  $\sum_{w \in V} F(w, v) = \sum_{w \in V} F(v, w)$  (Flujo entrante = Flujo saliente)





**Teorema 1:** Si  $F$  es el flujo asociado a una red de transporte se cumple que  $\sum_{w \in V} F(f, w) = \sum_{w \in V} F(w, s)$   
(Todo lo que sale de la fuente llega al sumidero)

Valor del flujo: suma de los flujos de todas las aristas que salen del vértice fuente:  $\text{val}(F) = \sum_{v \in V} F(f, v)$

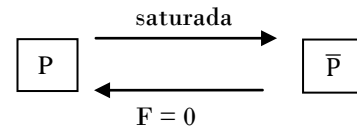
Corte de una red: Un corte  $(P, \bar{P})$  en una red de transporte  $G = (V, A)$  es un conjunto  $P$  tal que: 
$$\begin{cases} P \subset V \\ P \cup \bar{P} = V \\ f \in P, s \in \bar{P} \end{cases}$$

Capacidad de un corte: Se llama capacidad de un corte  $(P, \bar{P})$  al número:  $C(P, \bar{P}) = \sum_{v \in P} \sum_{w \in \bar{P}} C(v, w)$ . Es la suma de todas las aristas incidentes en  $v$  y  $w$  tal que  $v \in P$  y  $w \in \bar{P}$ . (Las aristas por donde pasa el corte).

**Teorema 2:** Sea  $F$  un flujo de la red  $G = (V, A)$  y sea  $(P, \bar{P})$  un corte de  $G$ . Entonces:  $C(P, \bar{P}) \geq \text{val}(F)$

**Teorema 3 (del flujo Máximo y Corte Minimal):** Si  $C(P, \bar{P}) = \text{val}(F) \Rightarrow$  el flujo es máximo y el corte es minimal.

**Teorema 4:**  $C(P, \bar{P}) = \text{val}(F) \Leftrightarrow \begin{cases} F(x, v) = C(x, v) & \forall x \in P, v \in \bar{P} \\ F(v, x) = 0 & \forall v \in \bar{P}, x \in P \end{cases}$



## 2. Algoritmo de Ford-Fulkerson

Se utiliza para hallar el flujo máximo en una red de transporte.

Dada una red de transporte  $G = (V, A)$ , con  $f$  (fuente) y  $s$  (sumidero):

- $\lambda(v)$  función de etiquetación de  $v$ .
- $e_k$  capacidad residual de  $v_k$ .

- 1) Poner en la red un flujo compatible.
- 2) Etiqueto la fuente con  $(\underset{\text{vértice desde donde vine}}{f}, \underset{\text{tipo de etiqueta}}{-}, \underset{\text{capacidad residual}}{\infty})$
- 3) Para cualquier vértice  $x$  adyacente a  $a$ , etiquetamos a  $x$ :
  - a) Si  $C(a, x) - F(a, x) > 0$ , etiquetamos  $x$  con  $(a^+, C(a, x) - F(a, x))$ .
  - b) Si  $C(a, x) - F(a, x) = 0$ , no etiquetamos  $x$ .
- 4) Mientras exista  $(x \neq a)$  en  $V$  tal que  $x$  esté etiquetado y exista una arista  $(x, y)$  tal que  $y$  no esté etiquetado, etiquetamos a  $y$ :
  - a) Si  $C(x, y) - F(x, y) > 0$ , etiquetamos  $y$  como  $(x^+, \min\{C(a, x) - F(a, x); C(x, y) - F(x, y)\})$
  - b) Si  $C(x, y) - F(x, y) = 0$ , no etiquetamos  $y$ .
- 5) Mientras exista  $(x \neq a)$  en  $V$  tal que  $x$  esté etiquetado y exista una arista  $(x, y)$  tal que  $y$  no esté etiquetado, etiquetamos a  $y$ :
  - c) Si  $F(x, y) > 0$ , etiquetamos  $y$  como  $(x^-, \min\{C(a, x) - F(a, x); F(x, y)\})$
  - d) Si  $F(x, y) = 0$ , no etiquetamos  $y$ .