FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

71.15 Modelos y Optimización II

Trabajo Práctico Nº 2
Gestión de Stocks

Ayudante: Lixin Ge

Año y Cuatrimestre: 2014 2°C

Fecha de entrega: 23/10/14

Integrantes:

Yi Cheng Zhang	92333	ycgzhang@gmail.com
Diego Montoya	91939	diegormontoya@gmail.com
Damián Finkelstein	93606	damfinkel@gmail.com
Ignacio Bayetto	88896	ibayetto@gmail.com
María Inés Parnisari	92235	maineparnisari@gmail.com

Índice

Ejercicio N° 1

Enunciado

Una empresa que comercializa un producto cuenta con la siguiente información acerca del mismo:

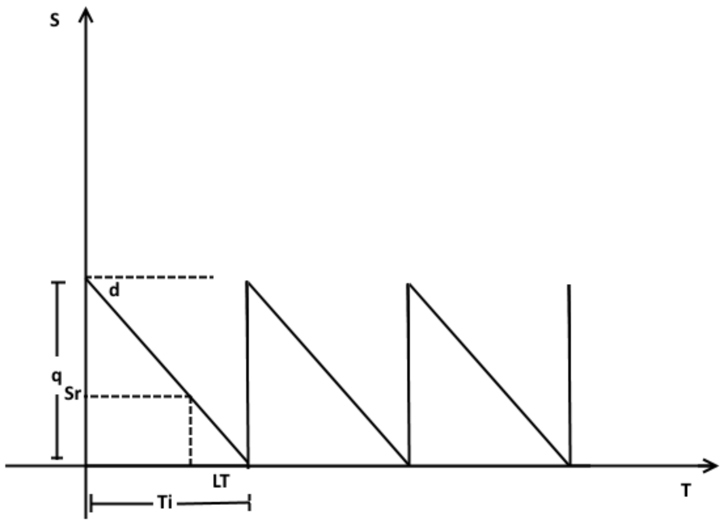
- Costo de adquisición: 40 $ por unidad
- Ventas: 1.000 unidades mensuales, en forma constante
- Costo administrativo de una orden de compra: 4.000 $
- Costo anual de almacenamiento por unidad: 540 $
- Lead time: 2 días

Se pide:

a) Plantear modelo e hipótesis.
b) Determinar el tamaño del lote óptimo de compra.
c) Determinar el intervalo de tiempo entre dos reaprovisionamientos sucesivos.
d) Calcular el costo total esperado óptimo anual.
e) Calcular el número de pedidos que habrá que realizar en un año.
f) Calcular el stock de reorden. Considerar 20 días laborables por mes.
g) Si se impone la restricción de que al finalizar el año no debe quedar stock remanente, ¿cuál sería el lote óptimo de compra y cuál sería el costo total esperado anual?

Modelo

Modelo Básico



Hipótesis

1) Se administra un único ítem o producto.
2) La demanda es conocida y se efectúa a una tasa constante.
3) La demanda es independiente.

4) La reposición es instantánea.
5) El horizonte de planeamiento es a largo plazo.
6) No se admite déficit del producto.
7) No hay stock de protección.
8) Tanto C_1 , b y K son independientes de la cantidad a solicitar (q).
9) No hay restricciones que limiten la decisión acerca del tamaño del lote a solicitar.
10) El producto se mide en unidades continuas.

Ejercicios

Del enunciado se obtienen los siguientes datos:

b = 40 $\frac{\$}{u}$; LT = 2 días = 0,0083 año; D = 1000 $\frac{u}{mes}$ = 12000 $\frac{u}{año}$; K = 4000 \$ y C_1 = 540 $\frac{\$}{u\ año}$

b) Determinar el tamaño del lote óptimo de compra.

$$q_0 = \sqrt{\frac{2\ K\ D}{T\ C_1}} = \sqrt{\frac{2\ 4000\ \$\ 12000\ \frac{u}{año}}{1\ 540\ \frac{\$}{u\ año}}} = 421{,}64\ u$$

c) Determinar el intervalo de tiempo entre dos reaprovisionamientos sucesivos.

$$n = \frac{T}{T_i} = \frac{D}{q_0} \Rightarrow \frac{1}{T_i} = \frac{12000\ \frac{u}{año}}{421{,}64\ u} = 0{,}035\ año = \frac{8{,}43}{días}$$

d) Calcular el costo total esperado óptimo anual.

$$CTE_0 = b\ .D + \sqrt{2\ K\ D\ T\ C_1} = 40\ \frac{\$}{u}\ 12000\ \frac{u}{año} + \sqrt{2\ 4000\ \$\ 12000\ \frac{u}{año}\ 1\ 540\ \frac{\$}{u\ año}}$$
$$= 707683{,}99\ \frac{\$}{año}$$

e) Calcular el número de pedidos que habrá que realizar en un año.

$$n = \frac{T}{T_i} = \frac{D}{q_0} = \frac{12000\ \frac{u}{año}}{421{,}64\ u} = 28{,}46\ \frac{1}{año}$$

f) Calcular el stock de reorden. Considerar 20 días laborables por mes.

$$S_r = LT\ d = 0{,}0083\ año\ 12000\ \frac{u}{año} = 99{,}6\ u$$

g) Si se impone la restricción de que al finalizar el año no debe quedar stock remanente, ¿cuál sería el lote óptimo de compra y cuál sería el costo total esperado anual?

Dado que se realizan $28,46$ pedidos al año (n = $28,46\ \frac{1}{año}$) y que no debe quedar stock remanente debemos analizar qué pasa con un $n_1 = 28\frac{1}{año}$ y con $n_2 = 29\ \frac{1}{año}$ y quedarnos con el que nos haga menor el costo total esperado anual.

Para n_1:

$$n_1 = \frac{T}{T_i} = \frac{D}{q_1} \Rightarrow q_1 = 428,57\, u$$

$$CTE_1 = b\,.\,D + \frac{1}{2}\, q_1 C_1\, T + K\,\frac{D}{q_1}$$
$$= 40\,\frac{\$}{u}\, 12000\,\frac{u}{año} + \frac{1}{2}\, 428,57\, u\, 540\,\frac{\$}{u\ año}\, 1 + 4000\,\$\,\frac{12000\,\frac{u}{año}}{428,57\, u}$$
$$= 707714,27\,\frac{\$}{año}$$

Para n_2:

$$n_2 = \frac{T}{T_i} = \frac{D}{q_2} \Rightarrow q_2 = 413,79\, u$$

$$CTE_2 = b\,.\,D + \frac{1}{2}\, q_1 C_1\, T + K\,\frac{D}{q_1}$$
$$= 40\,\frac{\$}{u}\, 12000\,\frac{u}{año} + \frac{1}{2}\, 413,79\, u\, 540\,\frac{\$}{u\ año}\, 1 + 4000\,\$\,\frac{12000\,\frac{u}{año}}{413,79\, u}$$
$$= 707724,17\,\frac{\$}{año}$$

Como $CTE_1 < CTE_2$ nos quedamos con n_1. Por lo tanto:

$$n = 28\frac{1}{año}\ ; q = 428,57\, u\ ; CTE = 707714,27\,\frac{\$}{año}$$

Ejercicio N° 2

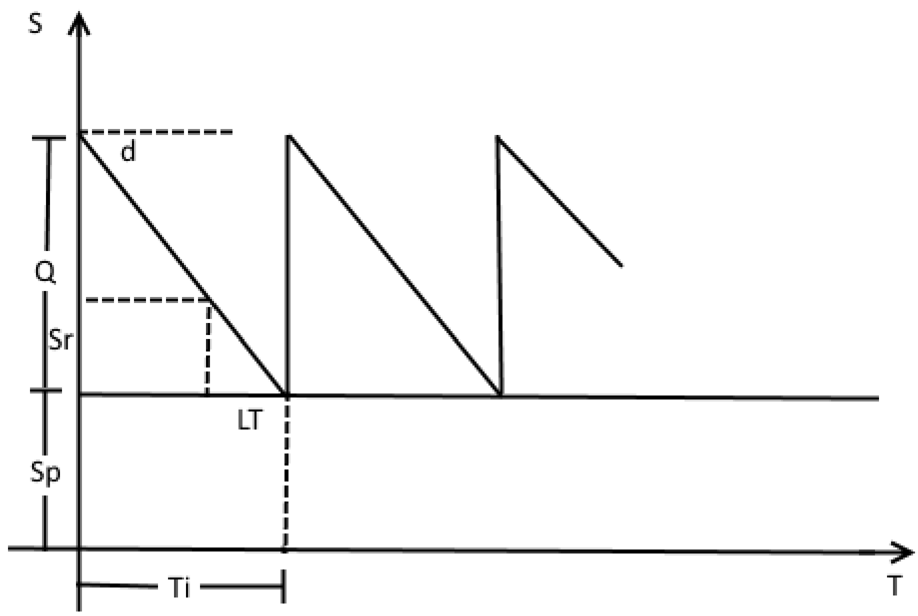
Enunciado

Si en el Ejercicio 1 cada unidad del producto ocupara una superficie de 2 m^2 y la disponibilidad máxima del almacén fuera de 1.500 m^2, sabiendo además que la empresa cuenta con un stock de seguridad equivalente a 5 días de demanda, se pide:

a) Plantear modelo e hipótesis.
b) Determinar el tamaño del lote óptimo de compra.
c) Calcular el costo total esperado óptimo anual.
d) Calcular el stock de reorden. Considerar 20 días laborables por mes.
e) Calcular el costo total esperado anual si se dispusiera solamente de 1.100 m^2 para el almacenamiento del producto.

Modelo

Modelo Básico con Stock de Protección



Hipótesis

1) Se administra un único ítem o producto.
2) La demanda es conocida y se efectúa a una tasa constante.
3) La demanda es independiente.
4) La reposición es instantánea.
5) El horizonte de planeamiento es a largo plazo.
6) No se admite déficit del producto.
7) Hay stock de protección.
8) Tanto C_1 , b y K son independientes de la cantidad a solicitar (q).

9) No hay restricciones que limiten la decisión acerca del tamaño del lote a solicitar.
10) El producto se mide en unidades continuas.

Ejercicios

Del ejercicio 1 se obtienen los siguientes datos:

b = 40 $\frac{\$}{u}$; LT = 2 días = 0,0083 año; D = 1000 $\frac{u}{mes}$ = 12000 $\frac{u}{año}$; K = 4000 \$ y C_1 = 540 $\frac{\$}{u\ año}$

Además se especifica que cada unidad del producto ocupa una superficie de 2 m^2, el almacén posee una capacidad máxima de 1500 m^2 y se cuenta con un $S_p = 250\, u$ (equivalente a 5 días de demanda tomando 240 días por año).

b) Determinar el tamaño del lote óptimo de compra.

$$q_0 = \sqrt{\frac{2\ K\ D}{T\ C_1}} = \sqrt{\frac{2\ 4000\ \$\ 12000\ \frac{u}{año}}{1\ 540\ \frac{\$}{u\ año}}} = 421{,}64\ u$$

c) Calcular el costo total esperado óptimo anual.

$$\begin{aligned} CTE_0 &= b\,.\,D + \sqrt{2\ K\ D\ T\ C_1} + S_p\, C_1\, T \\ &= 40\ \frac{\$}{u}\ 12000\ \frac{u}{año} + \sqrt{2\ 4000\ \$\ 12000\ \frac{u}{año}\ 1\ 540\ \frac{\$}{u\ año}} + 250\ \text{u}\ 540\ \frac{\$}{u\ año}\ 1 \\ &= 480000\ \frac{\$}{año} + 227683{,}9915\ \frac{\$}{año} + 135000\ \frac{\$}{año} \\ &= 842683{,}9915\ \frac{\$}{año} \end{aligned}$$

d) Calcular el stock de reorden. Considerar 20 días laborables por mes.

$$S_r = LT\ d + S_p = 0{,}0083\ año\ 12000\ \frac{u}{año} + 250\ u = 349{,}6\ u$$

e) Calcular el costo total esperado anual si se dispusiera solamente de 1100 m^2para el almacenamiento del producto.

Sabiendo que: $q_0 + S_p = 421{,}64\, u + 250\, u = 671{,}64\, u$

Voy a ocupar un espacio de: 671,64 u 2 $\frac{m^2}{u}$ = 1343,28 m^2

Por lo que el espacio para almacenamiento (1100 m^2) no sería suficiente. Por lo tanto, si se mantiene el nivel de stock de protección voy a tener que recalcular el q para que los productos entren en el almacén.

1100 m^2 - 250 u 2 $\frac{m^2}{u}$ = 600 m^2

Voy a disponer de 600 m^2 para q. Entonces:

Si 1 u ocupa 2 m^2, 600m^2representan 300u.

$$q = 300\,u$$

Por último:

$CTE\ = b\,.D + \frac{1}{2} q\ C_1\ T + K\ \frac{D}{q} + C_1\ S_p\ T$

$$= 40\ \frac{\$}{u}\ 12000\ \frac{u}{año} + \frac{1}{2}\ 300\ u\ 540\ \frac{\$}{u\ año}\ 1 + 4000\ \$\ \frac{12000\ \frac{u}{año}}{300\ u} +\ 540\ \frac{\$}{u\ año}\ 250\ u\ 1$$

$$=\ 856000\ \frac{\$}{año}$$

Ejercicio N° 3

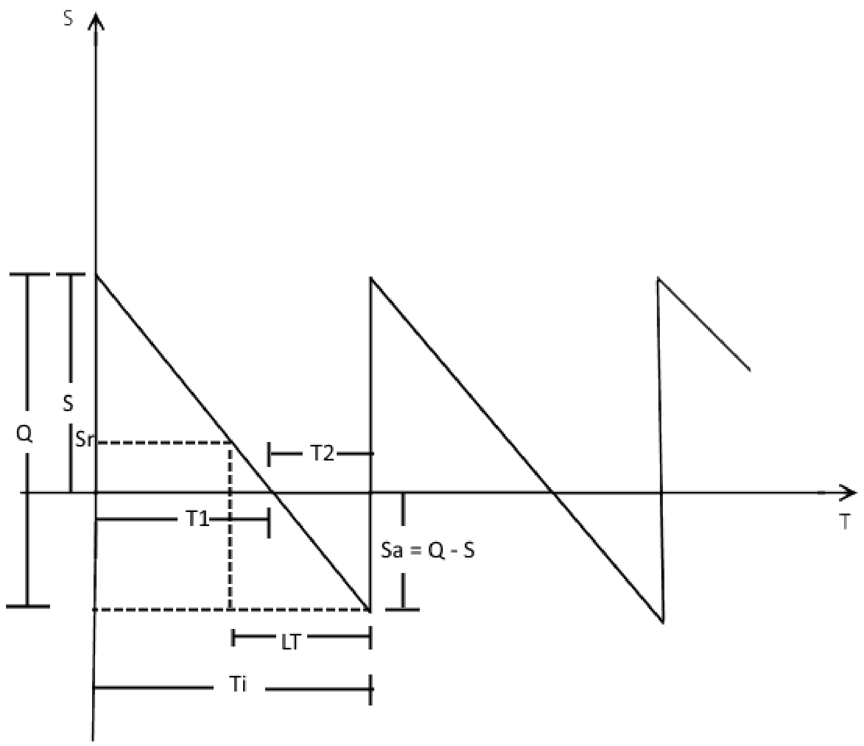
Enunciado

Si en el Ejercicio 1, la empresa admitiera agotamiento siendo este costo de 2.100 $ por unidad y por año, se pide:

a) Plantear modelo e hipótesis.
b) Determinar el tamaño del lote óptimo de compra.
c) Determinar el intervalo de tiempo entre dos reaprovisionamientos sucesivos.
d) Calcular el costo total esperado óptimo anual.
e) Calcular el número de pedidos que habrá que realizar en un año.
f) Determinar la cantidad máxima de unidades a mantener en stock.
g) Determinar la cantidad máxima de unidades agotadas.
h) Calcular el stock de reorden. Considerar 20 días laborables por mes.
i) Calcular el período de tiempo durante el cual se mantienen las unidades en inventario y el período de déficit de las mismas.

Modelo

Modelo Básico con Admisión de Agotamiento



Hipótesis

1) Se administra un único ítem o producto.
2) La demanda es conocida y se efectúa a una tasa constante.
3) La demanda es independiente.

4) La reposición es instantánea.
5) El horizonte de planeamiento es a largo plazo.
6) Se admite déficit del producto.
7) No hay stock de protección.
8) Tanto C_1 , b y K son independientes de la cantidad a solicitar (q).
9) No hay restricciones que limiten la decisión acerca del tamaño del lote a solicitar.
10) El producto se mide en unidades continuas.

Ejercicios

Del ejercicio 1 se obtienen los siguientes datos:

b = 40 $\frac{\$}{u}$; LT = 2 días = 0,0083 año; D = 1000 $\frac{u}{mes}$ = 12000 $\frac{u}{año}$; K = 4000 \$ y C_1 = 540 $\frac{\$}{u\ año}$

Además se especifica que la empresa admite agotamiento siendo este costo 2100 \$ por unidad y por año, es decir $C_2 = 2100\ \frac{\$}{u\ año}$.

a) Determinar el tamaño del lote óptimo de compra.

$$q_0 = \sqrt{\frac{2\ K\ D}{T\ C_1}}\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}} = \sqrt{\frac{2\ 4000\ \$\ 12000\ \frac{u}{año}}{1\ 540\ \frac{\$}{u\ año}}}\sqrt{\frac{540\ \frac{\$}{u\ año} + 2100\ \frac{\$}{u\ año}}{2100\ \frac{\$}{u\ año}}} = 472{,}7495\ u$$

b) Determinar el intervalo de tiempo entre dos reaprovisionamientos sucesivos.

$$n = \frac{T}{T_i} = \frac{d}{q} \Rightarrow T_i = \frac{T\ q_0}{d} = \frac{1\ 472{,}7495\ u}{12000\ \frac{u}{año}} = \frac{0{,}03939}{año}$$

c) Calcular el costo total esperado óptimo anual.

$$CTE_0 = b\,.\,D + \sqrt{2\ K\ D\ T\ C_1}\ \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}}$$

$$= 40\ \frac{\$}{u}\ 12000\ \frac{u}{año} + \sqrt{2\ 4000\ \$\ 12000\ \frac{u}{año}\ 1\ 540\ \frac{\$}{u\ año}}\ \sqrt{\frac{2100\ \frac{\$}{\text{u año}}}{540\ \frac{\$}{u\ año} + 2100\ \frac{\$}{u\ año}}}$$

$$= 480000\ \frac{\$}{año} + 227683{,}9915\ \frac{\$}{año}\ 0{,}89188$$

$$= 683067{,}3869\ \frac{\$}{año}$$

d) Calcular el número de pedidos que habrá que realizar en un año.

$$n = \frac{T}{T_i} = \frac{1}{0{,}03939\ año} = 25{,}3872\ \frac{1}{año}$$

e) Determinar la cantidad máxima de unidades a mantener en stock.

$$S_0 = \sqrt{\frac{2\ K\ D}{T\ C_1}} \sqrt{\frac{C_2}{C_1 +\ C_2}} = \sqrt{\frac{2\ 4000\ \$\ 12000\ \frac{u}{año}}{1\ 540\ \frac{\$}{u\ año}}}\ \sqrt{\frac{2100\ \frac{\$}{\text{u año}}}{540\ \frac{\$}{u\ año} +\ 2100\ \frac{\$}{u\ año}}}$$

$$= 376{,}0507\ \text{u}$$

f) Determinar la cantidad máxima de unidades agotadas.

$$S_a = Q_o -\ S_0 = 472{,}7495\ u - 376{,}0507\ u = 96{,}6988\ u$$

g) Calcular el stock de reorden. Considerar 20 días laborables por mes.

$$S_r = LT\ d - (Q_o -\ S_0) =\ 0{,}0083\ año\ 12000\ \frac{u}{año} -\ 96{,}6988\ u = 2{,}9012\ u$$

h) Calcular el período de tiempo durante el cual se mantienen las unidades en inventario y el período de déficit de las mismas.

$$T_1 =\ \frac{S +\ T_i}{Q} = \frac{376{,}0507\ u + 0{,}03939\ año}{472{,}7495\ u} = 0{,}03133\ año$$

$$T_2 =\ \frac{(Q - S)\ T_i}{Q} = \frac{96{,}6988\ u\ 0{,}03939\ año}{472{,}7495\ u} = 0{,}008057\ año$$

Ejercicio N° 4

Enunciado

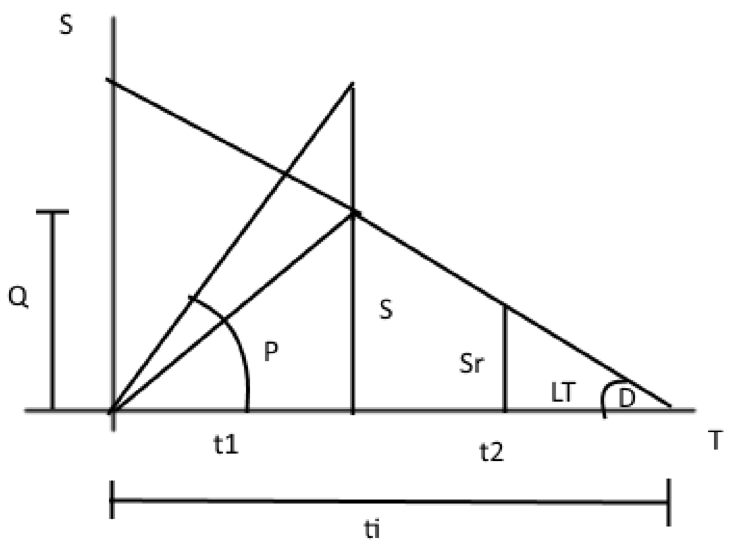
Una fábrica debe programar la elaboración de uno de los insumos del artículo final que produce. El consumo de dicho insumo es de 20.000 unidades por año, que se requieren en forma uniforme a lo largo del mismo. El costo de set-up es de 6.000 $ y el costo de almacenamiento es de 20 $ por unidad y por año. La fabricación del artículo se realiza a razón de 5.000 unidades por mes.

Se pide:

a) Plantear modelo e hipótesis.
b) Determinar el tamaño del lote óptimo de fabricación.
c) Determinar el intervalo de tiempo entre dos reaprovisionamientos sucesivos.
d) Calcular el costo total esperado óptimo anual.
e) Calcular el número de órdenes de fabricación que habrá que emitir por año.
f) Determinar el tamaño del stock máximo.
g) Calcular el período de fabricación y el período durante el cual hay demanda solamente.
h) Calcular el stock de reorden, teniendo en cuenta que el lead time es de 2 días. Considerar 20 días laborables por mes.

Modelo

Modelo de reposición no instantáneo



Hipótesis

1) Se produce un único ítem o producto.
2) La demanda es conocida y se efectúa a una tasa constante.
3) La producción es conocida y se efectúa a una tasa constante.
4) La producción es independiente.
5) La demanda es independiente.

6) La reposición no es instantánea.
7) El horizonte de planeamiento es a largo plazo.
8) No se admite déficit del producto.
9) No hay stock de protección.
10) Tanto C_1 , b y K son independientes de la cantidad a solicitar (q).
11) No hay restricciones que limiten la decisión acerca del tamaño del lote a solicitar.
12) El producto se mide en unidades continuas.

Ejercicios

Del enunciado se obtienen los siguientes datos:

D = 20000 $\frac{u}{año}$; P = 5000$\frac{u}{mes}$ = 60000 $\frac{u}{año}$; K = 6000 \$ y C1 =20 $\frac{\$}{u*año}$

Se asume b = 0.

b) Determinar el tamaño del lote óptimo de fabricación.

$$q_0 = \sqrt{\frac{2\ K\ D}{T\ \ C_1\ \left(1-\frac{D}{P}\right)}} = \sqrt{\frac{2*6000\,\$*20000\ \frac{u}{año}}{1\ *\ 20\ \frac{\$}{u*año}\ *\ \left(1-\frac{20000\frac{u}{año}}{60000\frac{u}{año}}\right)}} = 4242.640687\ u$$

c) Determinar el intervalo de tiempo entre dos reaprovisionamientos sucesivos.

$$ti = \frac{T}{D} = q_0 = \frac{1}{20000\frac{u}{año}} * 4242.640687 = 0.21213\ años$$

d) Calcular el costo total esperado óptimo anual.

$$CTE_0 = b\,.D + \sqrt{2\ K\ D\ T\ C_1(1-D/P)}$$
$$= 0*20000\frac{u}{año} + \sqrt{2*6000\,\$*20000\frac{u}{año}*1*20\frac{\$}{u*año}*(1-\frac{20000\frac{u}{año}}{60000\frac{u}{año}})}$$
$$= 56568.54249\ \frac{\$}{año}$$

e) Calcular el número de pedidos que habrá que realizar en un año.

$$n = \frac{D}{q_0} = \frac{20000\ \frac{u}{año}}{4242.640687\ u} = 4.7140\ \frac{1}{año}$$

f) Determinar el tamaño del stock máximo.

$$S = \frac{q_0}{P} * (P - D) = \frac{4242.640687\ u}{60000 \frac{u}{año}} * \left(60000 \frac{u}{año} - 20000 \frac{u}{año}\right) = 2828.427u$$

g) Calcular el período de fabricación y el período durante el cual hay demanda solamente.

$$t1 = \frac{S}{P - D} = \frac{2828.427\ u}{40000\ \frac{u}{año}} = 0.0707\ años$$

$$t2 = ti - t1 = 0.21213\ años - 0.0707\ años = 0.14142\ años$$

h) Calcular el stock de reorden, teniendo en cuenta que el lead time es de 2 días. Considerar 20 días laborables por mes.

$$LT = 2\ días * \frac{1\ año}{20\ días * 12} = 0.00833\ año$$

$$S_{r(LT<t2)} = LT * D = 0{,}00833\ año * 20000\ \frac{u}{año} = 166.6\ u$$

Ejercicio N° 5

Enunciado

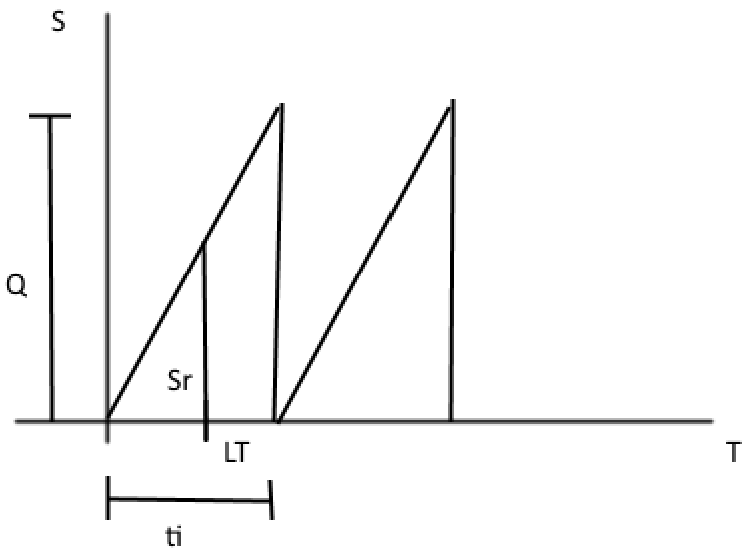
Una empresa está planificando la elaboración de una nueva bebida gaseosa, por lo que deberá diseñar el tanque especial para el enfriamiento de dicha bebida, logrando una temperatura ideal antes de pasar al sector de embotellamiento. Esta bebida será producida a una tasa constante de 100 m3 por hora. La descarga de la bebida hacia el sector de embotellamiento se hará a través de un caño especialmente diseñado utilizando tecnología de última generación, logrando velocidades tan altas como para poder suponer que es instantánea. El costo directo de la bebida producida es de 2 $ por m3. La tasa de interés puede estimarse en un 10% mensual. El costo de preparación de las válvulas para una descarga es de 6 $.

Se pide:

a) Plantear modelo e hipótesis.
b) Dimensionar el tanque, si el objetivo es minimizar el costo total esperado.
c) Calcular cuántas descargas se harán en el año.
d) Calcular el stock de reorden teniendo en cuenta que LT = 10 horas (Asumir que la producción será de 24 horas por día y 365 días por año).
e) Calcular el costo total esperado óptimo anual.

Modelo

Modelo de reaprovisionamiento constante.



Hipótesis

1) Se produce un único ítem o producto.
2) La demanda se supone infinita.
3) La producción es conocida y se efectúa a una tasa constante.

4) La producción es independiente.
5) La reposición es instantánea.
6) El horizonte de planeamiento es a largo plazo.
7) No se admite déficit del producto.
8) No hay stock de protección.
9) Tanto C_1 , b y K son independientes de la cantidad a solicitar (q).
10) No hay restricciones que limiten la decisión acerca del tamaño del lote a solicitar.
11) El producto se mide en unidades continuas.

Ejercicios

Del enunciado se obtienen los siguientes datos:

b = 2 $\frac{\$}{m^3}$; P = 100 $\frac{m^3}{h}$; K = 6 \$ y TI = $\frac{0.1}{mes}$ = $\frac{0.000138888}{h}$

Se asume C1' = 0.

b) Dimensionar el tanque, si el objetivo es minimizar el costo total esperado.

$$C1 = C1' + TI * b = \frac{0.000138888}{h} * 2\ \frac{\$}{m^3} = \frac{0.000277777\ \$}{h * m^3}$$

$$q_0 = \sqrt{\frac{2\ K\ P}{T\ C_1}} = \sqrt{\frac{2 * 6\ \$ * 100\ \frac{m^3}{h}}{1\ * \ \frac{0.000277777\ \$}{h * m^3}}} = 2078.4639\ m^3$$

c) Calcular cuántas descargas se harán en el año.

$$n = \frac{P}{q_0} = \frac{100\ \frac{m^3}{h}}{2078.4639\ m^3} = \frac{0{,}0481}{año} = \frac{12640.68}{año}$$

d) Calcular el stock de reorden teniendo en cuenta que LT = 10 horas (Asumir que la producción total será de 24 horas por día y 365 días por año)

$$ti = \frac{\mathrm{q_0} \ * \mathrm{T}}{\mathrm{P}} = \frac{2078.4639\ \mathrm{m}^3 * 1}{100\ \ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}} = 20.784639\ \mathrm{h}$$

$$S_R = (\mathrm{ti} - \mathrm{LT}) * \mathrm{P} = (20.784639\ \mathrm{h} - 10\ \mathrm{h}) * 100\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}} = 1078.4639\ \mathrm{m}^3$$

e) Calcular el costo esperado óptimo anual.

$$CTE_{0\,hora} = b\,.P + \sqrt{2\,K\,P\,T\,C_1} = 2\,\frac{\$}{m^3} * 100\,\frac{m^3}{h} + \sqrt{2 * 6\$ * 100\,\frac{m^3}{h} * 1 * 0.000277777\,\frac{\$}{h * m^3}}$$

$$= 200.5773495\,\frac{\$}{h}$$

$$CTE_{0\,anual} = 200.5773495\,\frac{\$}{h} * \frac{1\text{h}}{24 * 30 * 365 * \text{año}} = 7.6323\,\frac{\$}{\text{año}}$$

Ejercicio N° 6

Enunciado

Describir detalladamente el procedimiento a seguir para la búsqueda del costo total esperado mínimo en un problema de inventarios, de un solo ítem, demanda constante, agotamiento no admitido, para el caso de que exista una disminución discreta de los precios de adquisición del ítem por aumento de la cantidad ordenada. Considerar la existencia de dos descuentos (tres precios), a saber:

- Para una cantidad a adquirir entre 0 y Q1, el precio de adquisición es b1.
- Para un lote comprendido entre Q1 y Q2, el precio de adquisición es b2.
- Para un lote mayor a Q2, el precio de adquisición es b3.

Graficar el CTE = f(q) para cada una de las alternativas que surgen del análisis

Modelo

Modelo descuento por cantidad (ó corte de precio)

Hipótesis

1) Considero $\mathbf{b_1 > b_2 > b_3}$ (a mayor cantidad de lote, menor precio por unidad)

Resolución

Planteo los q óptimos y los CTE:

$$q_{0_1} = \sqrt{\frac{2 * k * d}{T\,({C_1}' + b_1 * i)}}$$

$$q_{0_2} = \sqrt{\frac{2 * k * d}{T\,({C_1}' + b_2 * i)}}$$

$$q_{0_3} = \sqrt{\frac{2 * k * d}{T\,({C_1}' + b_3 * i)}}$$

$$CTE_{0_1} = b_1 * D + \sqrt{2 * k * d * T * ({C_1}' + b_1 * i)}$$

$$CTE_{0_2} = b_1 * D + \sqrt{2 * k * d * T * ({C_1}' + b_2 * i)}$$

$$CTE_{0_3} = b_1 * D + \sqrt{2 * k * d * T * ({C_1}' + b_3 * i)}$$

Podemos observar que los “q_0” son inversamente proporcionales a “b”, mientras que los “CTE” son directamente proporcionales a “b”:

$$b_1 > b_2 > b_3$$

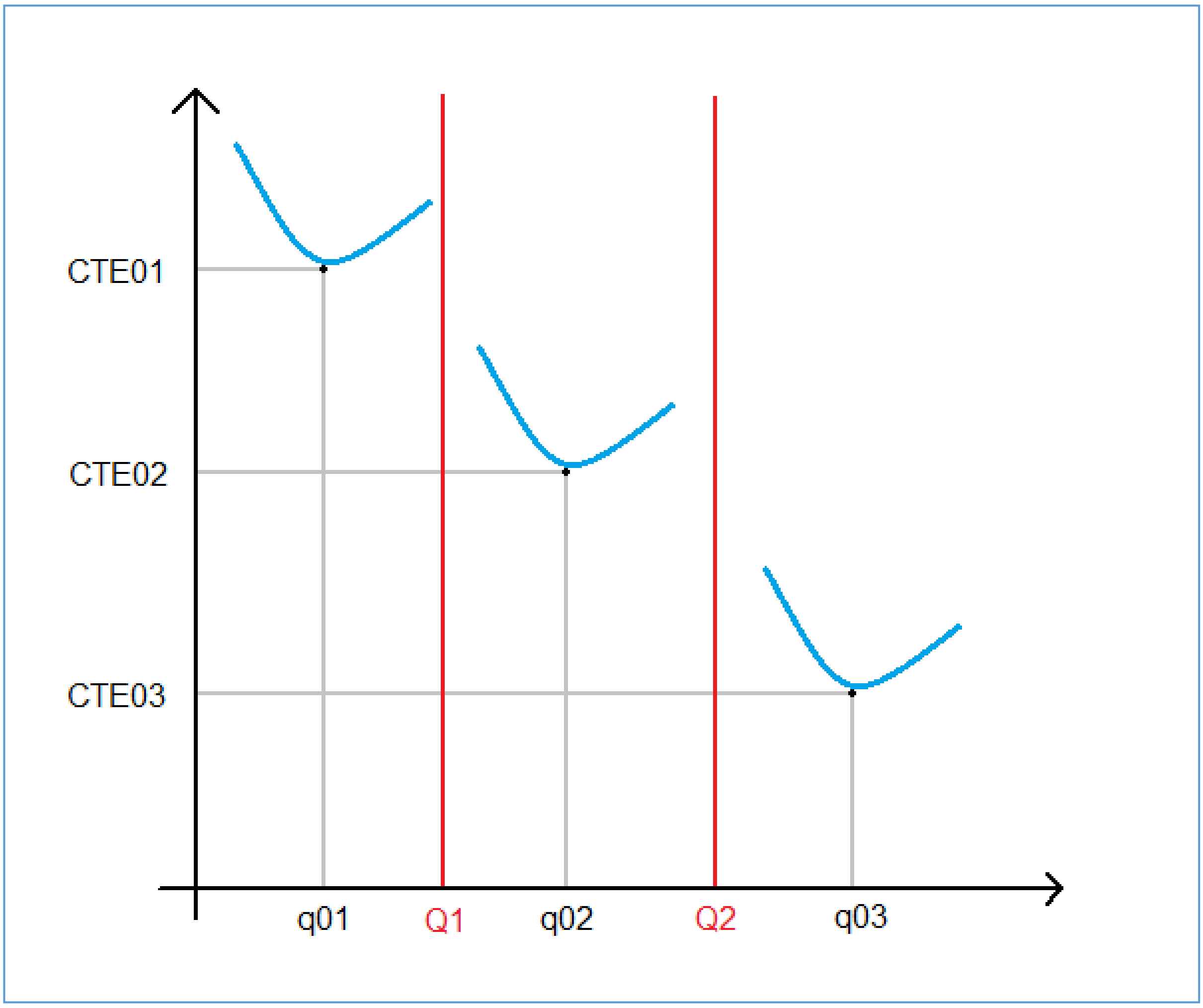
$$q_{0_1} < q_{0_2} < q_{0_3}$$

$$CTE_{0_1} > CTE_{0_2} > CTE_{0_3}$$

Entonces, dependiendo de los rangos en que cae q_0, tenemos 3 casos.

Caso 1:

$$q_{0_3} \geq Q_2$$

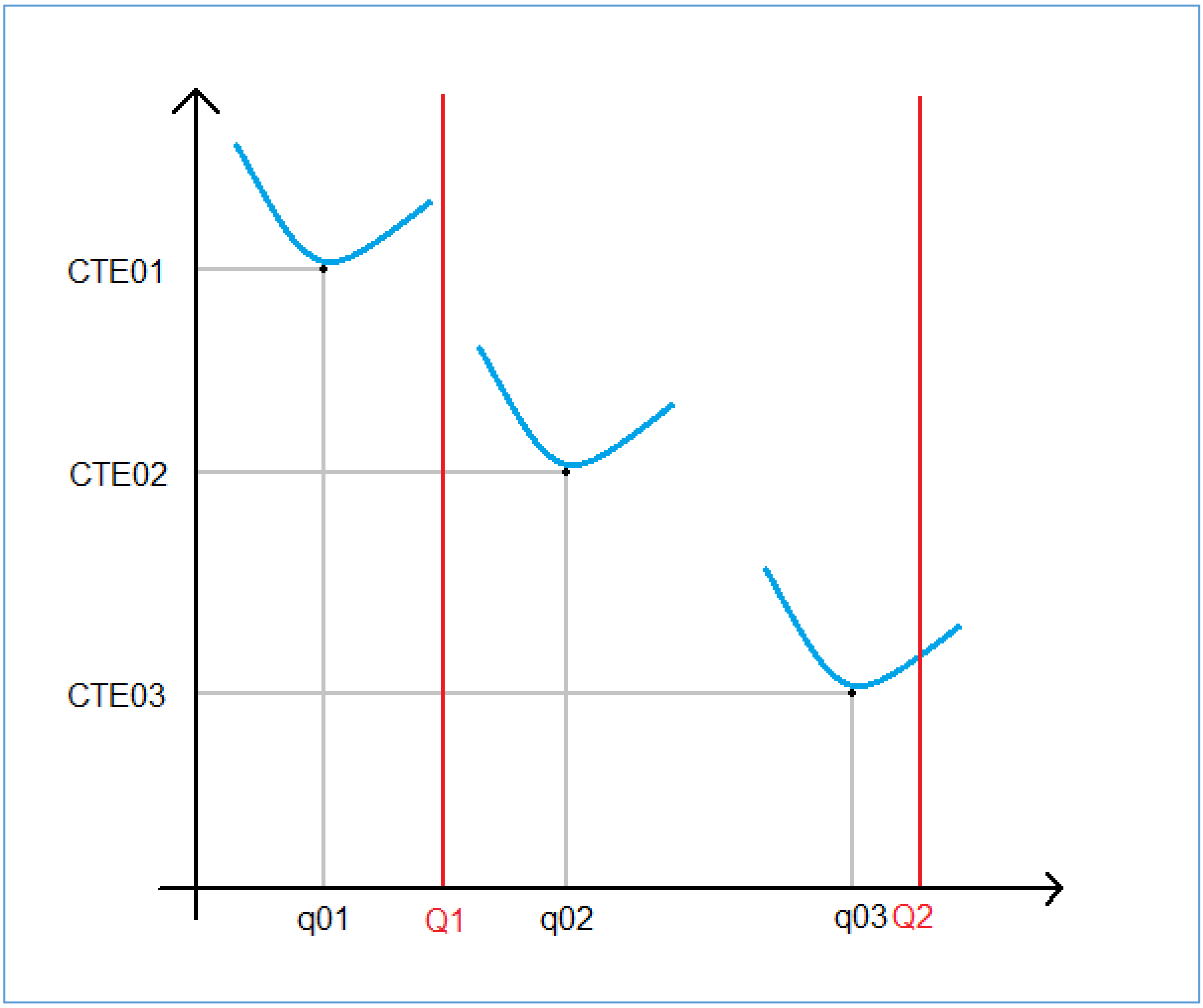


Como q_{03} (tiene el menor CTE) está en su rango, directamente es el óptimo.

Si $q_{03} < Q_2$, puede darse que el q_{02} es mayor a Q_1, en cuyo caso al estar en su rango hay que comparar el valor de CTE_3 en el punto Q_2 y ver cuál es el menor. Pasamos al siguiente caso.

Caso 2:

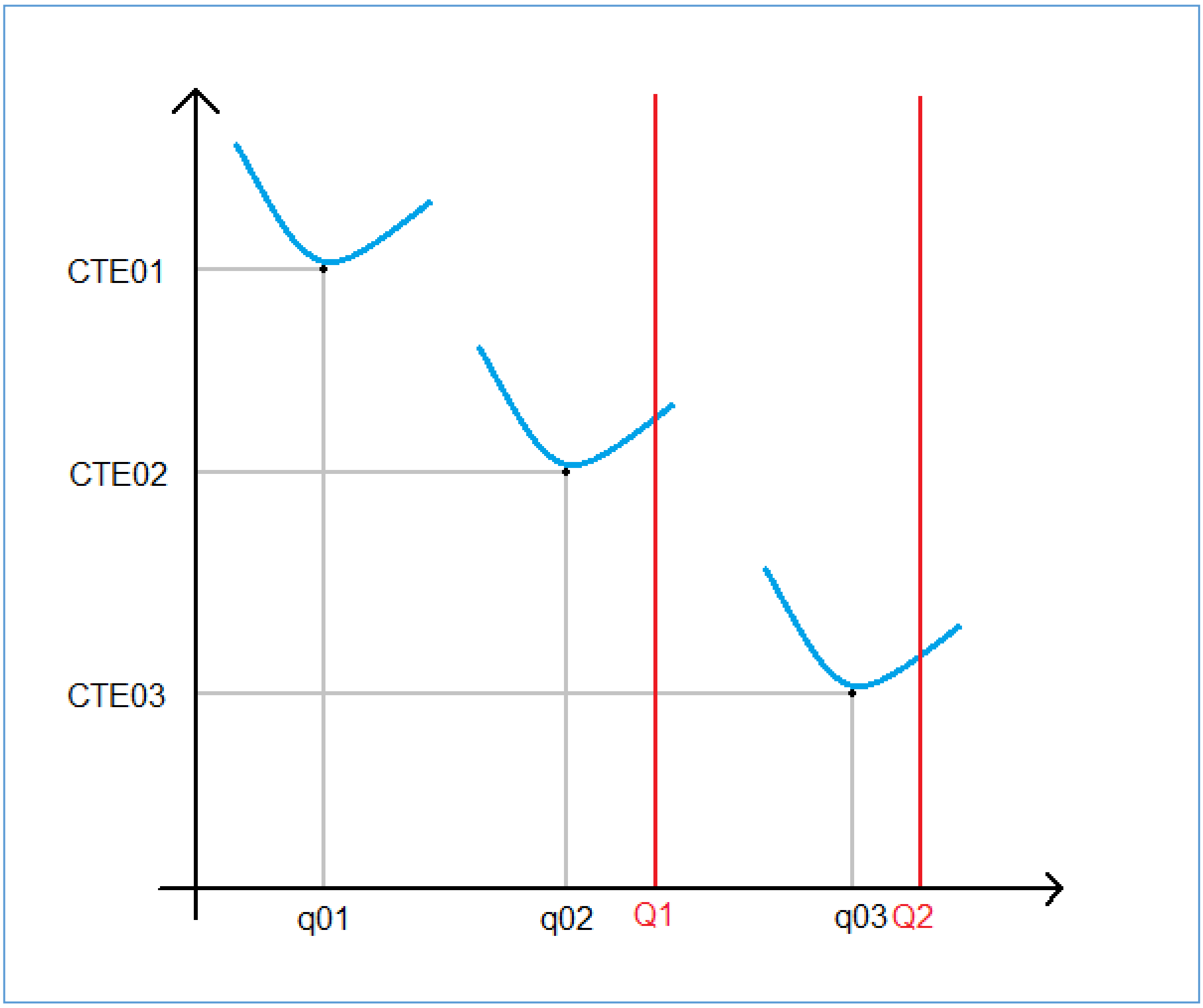
$$Q_2 > q_{0_2} \geq Q_1$$



En este caso tenemos que analizar qué costo es inferior: CTE_{02} ó $CTE(Q_2,b_3)$ (la intersección entre la curva de costo de 3 y Q_2).

Si el q_{02} no se encuentra en el rango, entonces hay que analizar la siguiente forma:
$q_{02} < Q_1$ (y $q_{03} < Q_2$), estamos en el caso 3.

Caso 3:



En este caso, debemos comparar el CTE_{01} con $CTE(Q_1,b_2)$ (intersección de la curva de costo 2 con Q_1) y con $CTE(Q_2,b_3)$ (intersección de la curva de costo 3 con Q_2), quedándonos con el menor de ellos como solución.

Ejercicio N° 7

Enunciado

Describir detalladamente el procedimiento a seguir para la búsqueda del costo total esperado mínimo en un problema de inventarios, de un solo ítem, demanda constante, agotamiento no admitido, para el caso de que el costo de mantenimiento se modifique, incrementándose, para determinados rangos de lote de adquisición. Considerar dos lotes de corte Q1 y Q2, tal que:

- Para una cantidad a adquirir entre 0 y Q1, el costo de mantenimiento es c1.
- Para un lote comprendido entre Q1 y Q2, el costo de mantenimiento es c2.
- Para un lote mayor a Q2, el costo de mantenimiento es c3.

Graficar el CTE = f(q) para cada una de las alternativas que surgen del análisis.

Modelo

Modelo descuento por cantidad (ó corte de precio)

Hipótesis

1) Considero $\mathbf{c_1 < c_2 < c_3}$

Resolución

Planteo los q óptimos y los CTE:

$$q_{0_1} = \sqrt{\frac{2 * k * d}{T * C_1}}$$

$$q_{0_2} = \sqrt{\frac{2 * k * d}{T * C_2}}$$

$$q_{0_3} = \sqrt{\frac{2 * k * d}{T * C_3}}$$

$$CTE_{0_1} = b_1 * D + \sqrt{2 * k * d * T * C_1}$$

$$CTE_{0_2} = b_1 * D + \sqrt{2 * k * d * T * C_2}$$

$$CTE_{0_3} = b_1 * D + \sqrt{2 * k * d * T * C_3}$$

Podemos observar que los "q_0" son inversamente proporcionales a "c", mientras que los "CTE" son directamente proporcionales a "c":

$$c_1 < c_2 < c_3$$

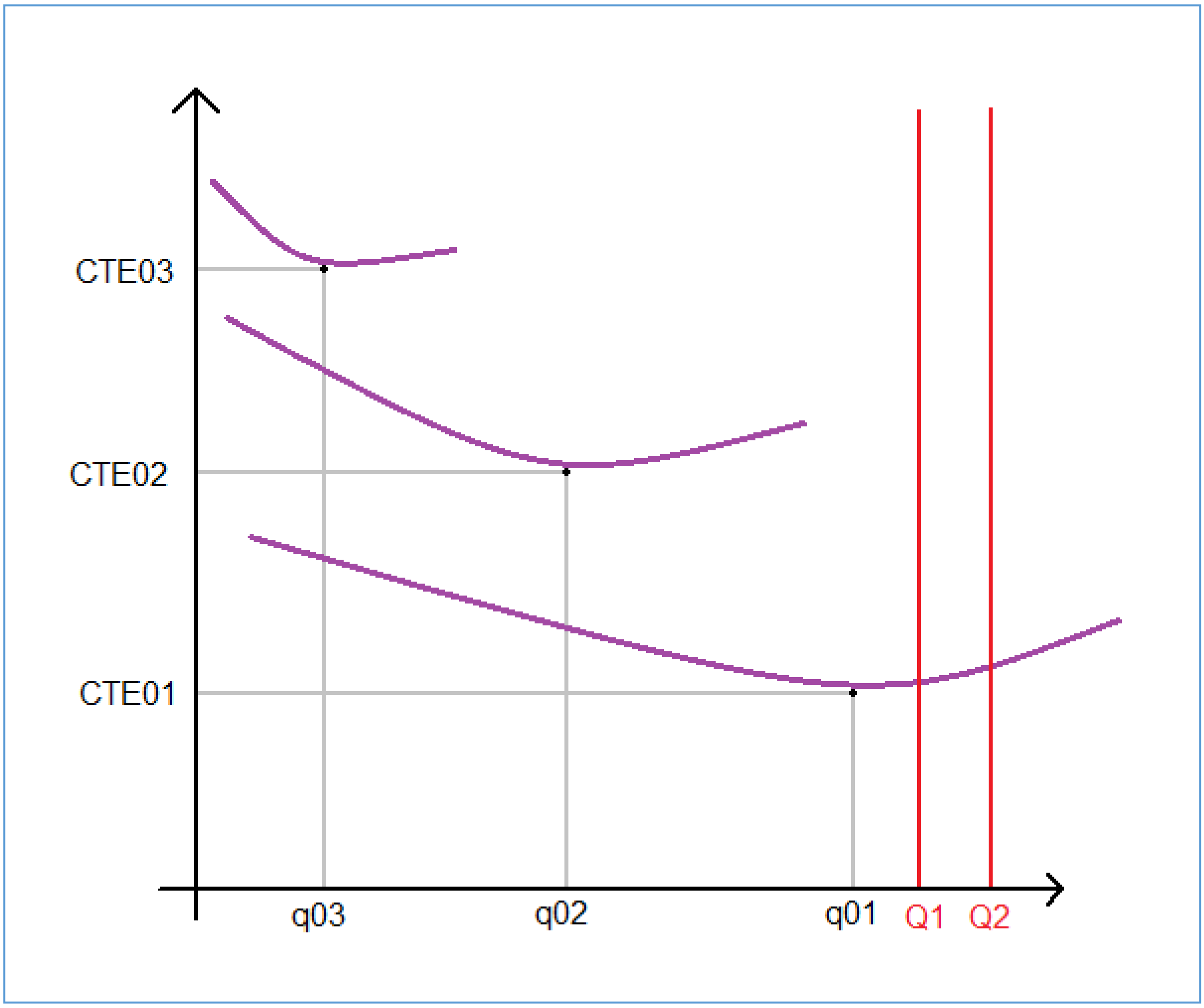
$$q_{0_1} > q_{0_2} > q_{0_3}$$

$$CTE_{0_1} < CTE_{0_2} < CTE_{0_3}$$

Entonces, dependiendo de los rangos en que cae q_0, tenemos 4 casos.

Caso 1:

$$q_{0_1} \leq Q_1$$

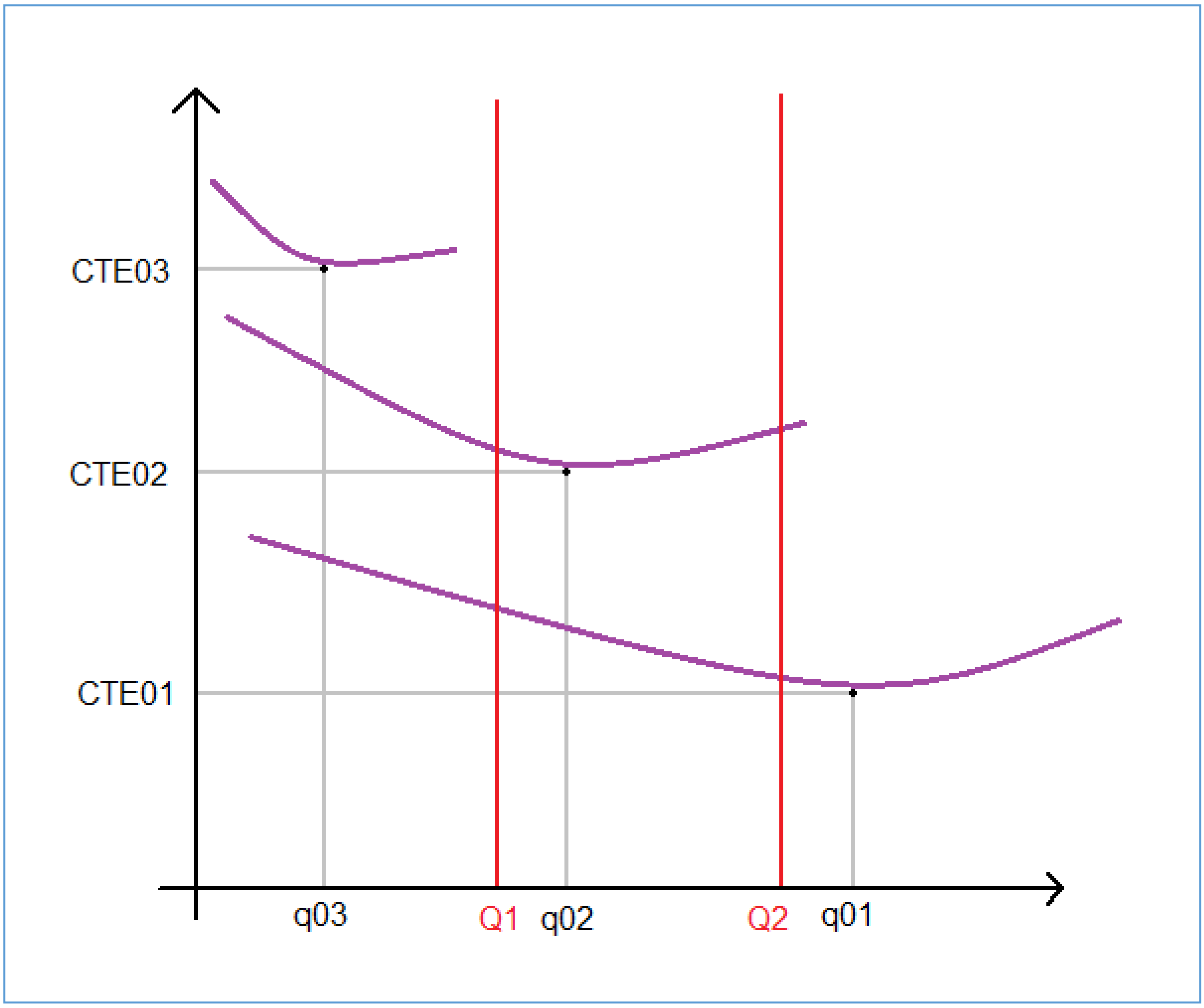


Puede observarse que para este caso al estar q_{01} (que tiene el menor CTE) en su rango, este es el óptimo directamente.

Si $q_{01} > Q_1$ puede darse que el q_{02} es mayor a Q_1 y menor igual a Q_2, en cuyo caso al estar en su rango hay que comparar el valor de CTE_{02} con el valor de CTE en el punto Q_1, y ver cuál es el menor (siguiente caso).

Caso 2:

$$Q_1 < q_{0_2} \leq Q_2$$

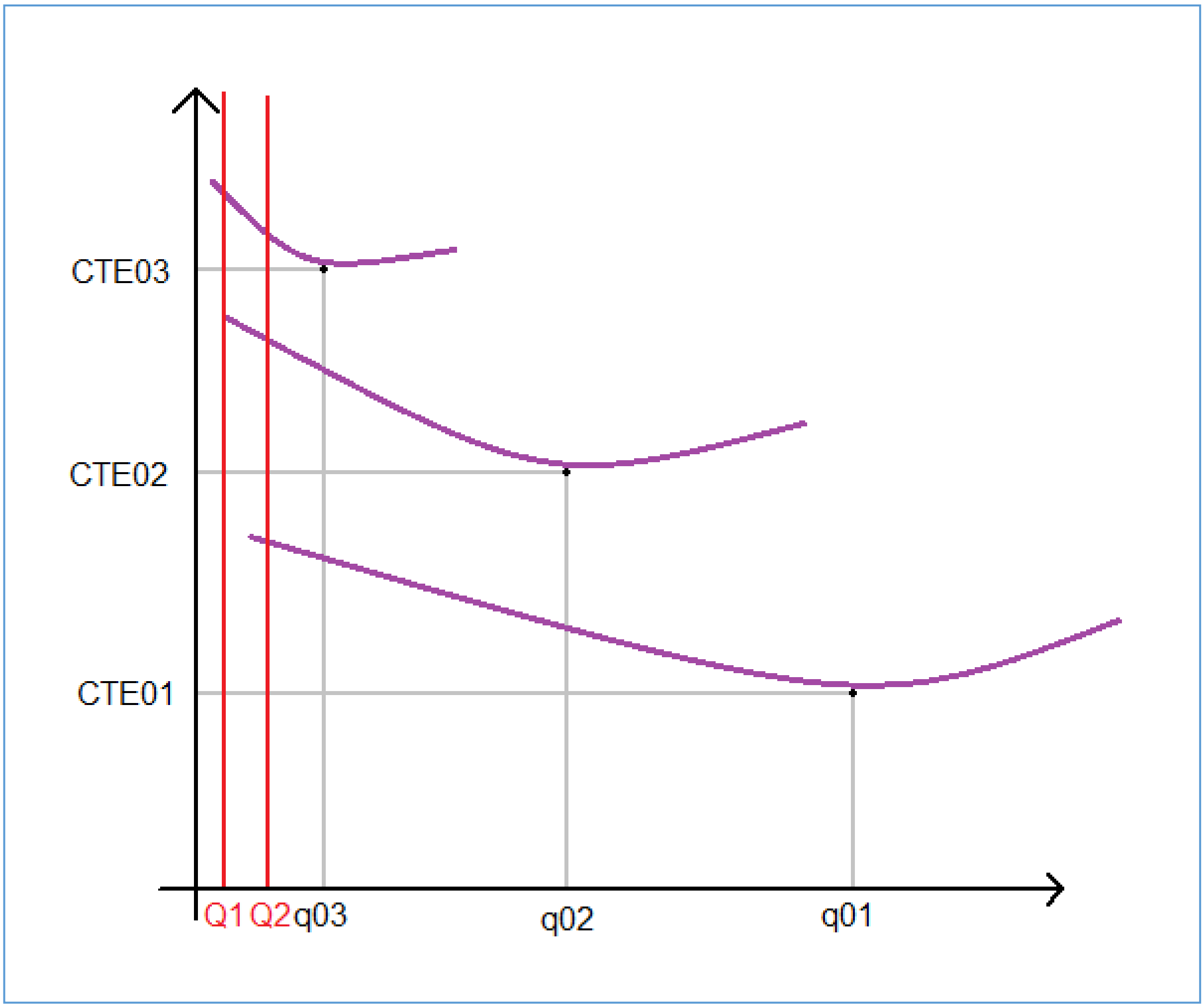


En este caso tenemos que analizar qué costo es inferior: CTE_{02} ó $CTE(Q_1,c_1)$ (la intersección entre la curva de costo de 1 y Q_1).

Si el q_{02} no se encuentra en el rango, entonces hay que analizar la siguiente forma: $q_{03} >= Q_2$, pasando al caso 3.

Caso 3:

$$Q_2 \leq q_{0_3}$$

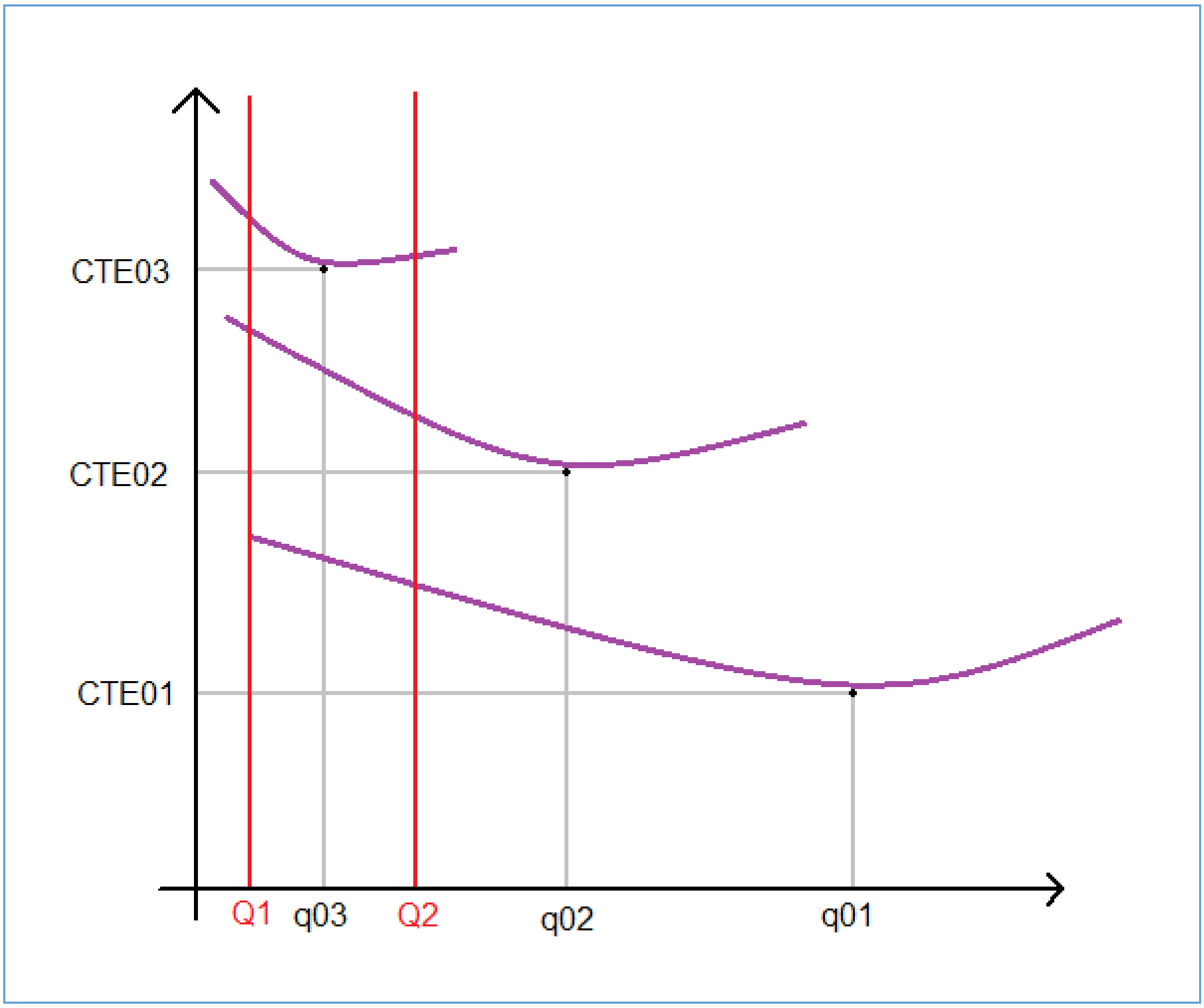


En este caso, debemos comparar el CTE_{03} con $CTE(Q_1,c_1)$ (intersección de la curva de costo 1 con Q_1) y $CTE(Q_2,c_2)$ (intersección de la curva de costo 2 con Q_2), quedándonos con el menor de ellos como solución.

Pero puede darse un caso más, que es $q_{03} < Q_2$.

Caso 4:

$$q_{0_3} < Q_2$$



En este caso, debemos comparar el CTE(Q_1,c_1) (intersección de la curva de costo 1 con Q_1) y CTE(Q_2,c_2) (intersección de la curva de costo 2 con Q_2), quedándonos con el menor de ellos como solución.

Ejercicio N° 8

Enunciado

Describir detalladamente el procedimiento a seguir para la búsqueda del costo total esperado mínimo en un problema de inventarios, de un solo ítem, demanda constante, agotamiento no admitido, para el caso de que el costo de orden se modifique, incrementándose, para determinados rangos de lote de adquisición. Considerar dos lotes de corte Q1 y Q2, tal que:

- Para una cantidad a adquirir entre 0 y Q1, el costo de orden es k1.
- Para un lote comprendido entre Q1 y Q2, el costo de orden es k2.
- Para un lote mayor a Q2, el costo de orden es k3.

Graficar el CTE = f(q) para cada una de las alternativas que surgen del análisis.

Modelo

Modelo de incremento de coste de orden según lote de adquisición.

Hipótesis

Tanto C_1 como b, son independientes de la cantidad a solicitar (q).

Considero $\mathbf{k_1 < k_2 < k_3}$ ya que el costo de orden va aumentando.

Resolución

Planteo los q y los CTE óptimos:

$$q_{0_1} = \sqrt{\frac{2 * k_1 * D}{T * C_1}}$$

$$q_{0_2} = \sqrt{\frac{2 * k_2 * D}{T * C_1}}$$

$$q_{0_3} = \sqrt{\frac{2 * k_3 * D}{T * C_1}}$$

$$CTE_{0_1} = b * D + \sqrt{2 * k_1 * D * T * C_1}$$

$$CTE_{0_2} = b * D + \sqrt{2 * k_2 * D * T * C_1}$$

$$CTE_{0_3} = b * D + \sqrt{2 * k_3 * D * T * C_1}$$

Podemos observar que tanto los “q_0”como los “CTE” son directamente proporcionales al valor de “k”, por lo tanto:

$$k_1 < k_2 < k_3$$

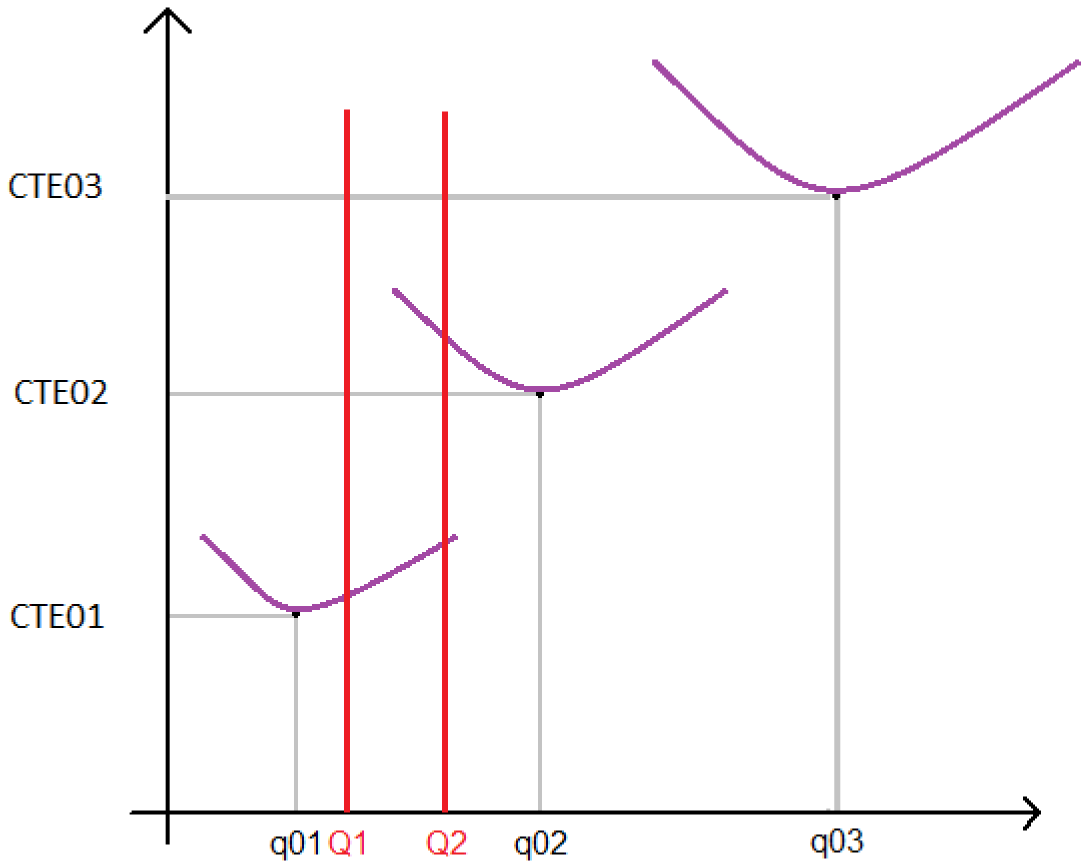
$$q_{0_1} < q_{0_2} < q_{0_3}$$

$$CTE_{0_1} < CTE_{0_2} < CTE_{0_3}$$

Entonces, dependiendo de los rangos en que cae q_0, tenemos 3 casos.

Caso 1:

$$q_{0_1} \leq Q_1$$

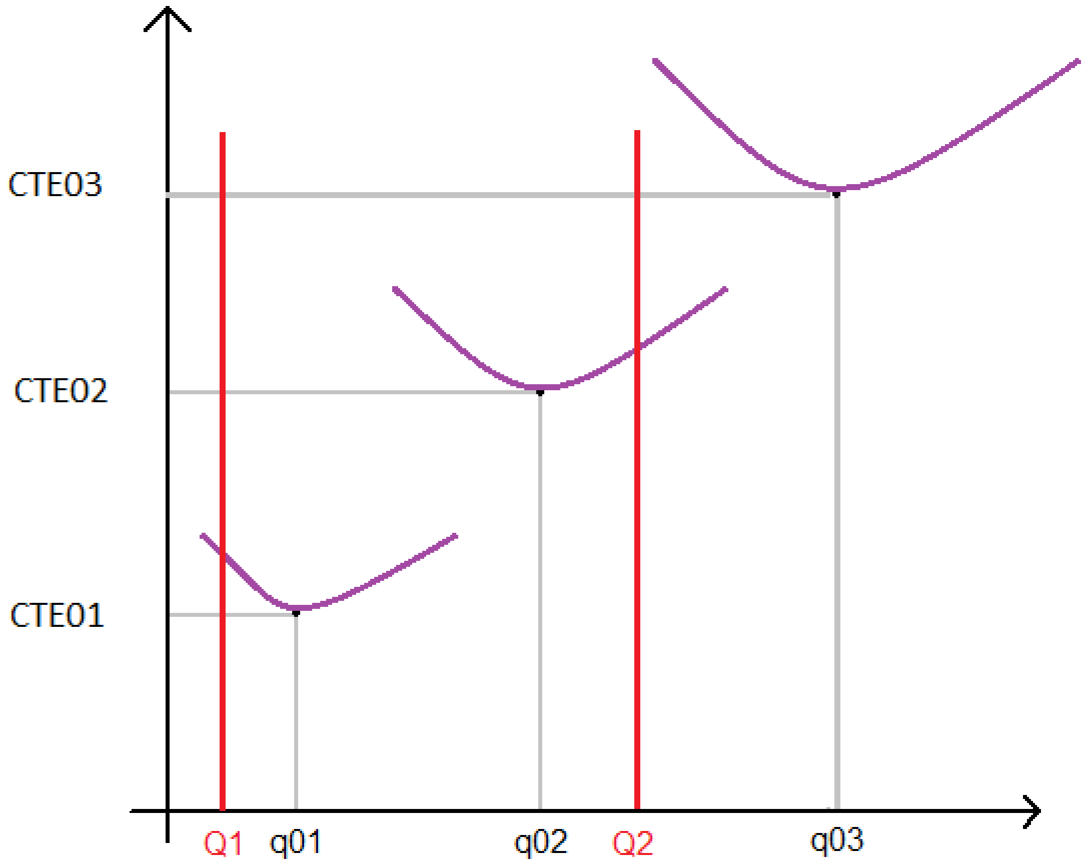


Puede observarse que para este caso al estar q_{01} (que tiene el menor CTE) en su rango, este es el óptimo directamente.

Si $q_{01} > Q_1$ se deberá verificar que el valor de q_{02} sea menor que el límite Q2, pasando al siguiente caso.

Caso 2:

$$q_{0_2} \leq Q_2$$

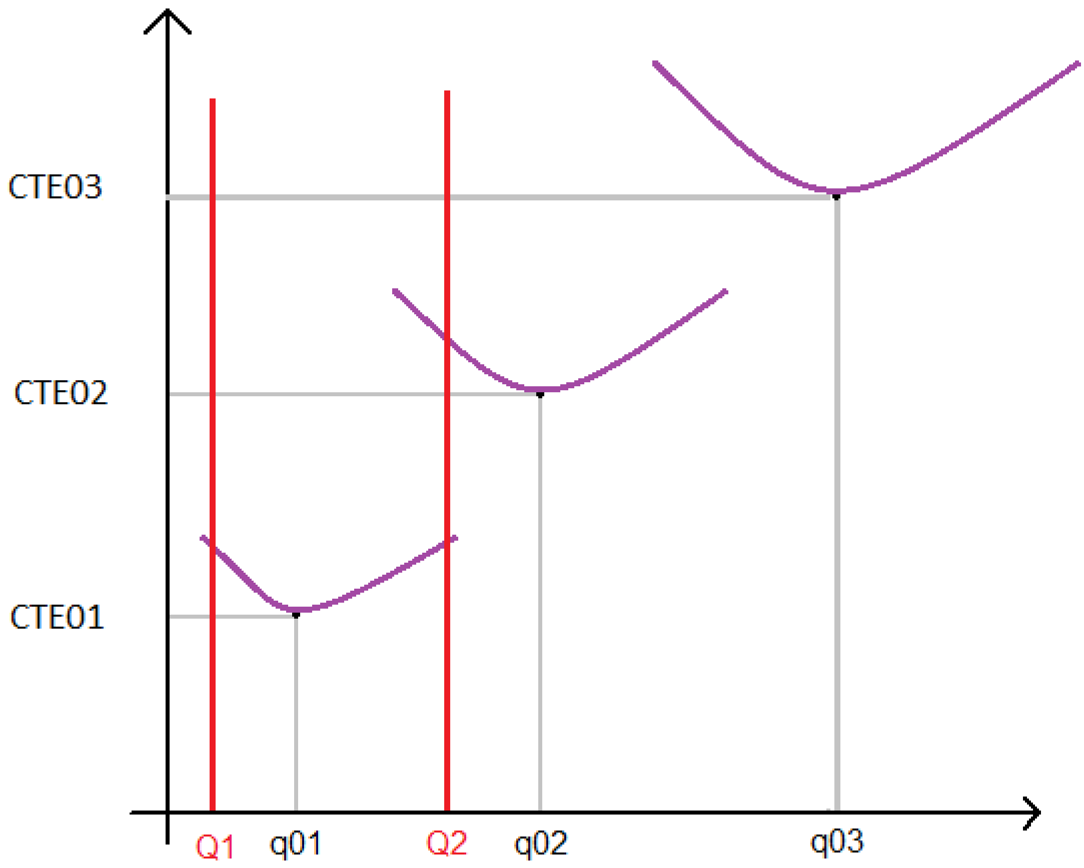


En este caso tenemos que analizar qué costo es inferior: CTE_{02} o CTE (Q_1,k_1) (la intersección entre la curva de costo de 1 y Q_1).

Cabe aclarar que imponer $Q1<q_{02}$ en la condición de este caso es redundante, ya que de no cumplirse (siendo $Q1>q_{02}$) se deberá estar necesariamente en el caso 1.

Si el q_{01} y el $_{q02}$ no se encuentran en sus rangos, entonces se estará necesariamente en el caso 3, donde $q_{01}>Q1$ y $q_{02}>Q2$

Caso 3:



En este caso, debemos comparar el CTE_{03} con $CTE(Q_1,k_1)$ (intersección de la curva de costo 1 con Q_1) y $CTE(Q_2,k_2)$ (intersección de la curva de costo 2 con Q_2), quedándonos con el menor de ellos como solución.

Ejercicio N° 9

Enunciado

Un intermediario de productos elaborados mantiene en stock cantidades de los mismos con el objeto de satisfacer demandas mensuales definidas. Los dos productos esenciales son A y B y poseen las siguientes características:

	Producto A	***Producto B***
Demanda (u./mes)	1500	2000
Costo de orden ($)	500	500
Precio de compra ($/u)	150	100
Tasa de inmovilización mensual	2%	2%
Superficie ocupada en almacén (m^2/u)	0,1	0,6

Calcular los lotes de ambos productos que hagan mínimo el costo total esperado, considerando la existencia de una restricción de superficie disponible de almacén de 450 m^2.

Modelo

Modelo con más de un producto, con una restricción lineal por igual sobre la cantidad en stock.

Hipótesis

a) Se administran dos productos.
b) La demanda es conocida y se efectúa a una tasa constante.
c) La demanda es independiente.
d) La reposición es instantánea.
e) El horizonte de planeamiento es a largo plazo.
f) No se admite déficit del producto.
g) No hay stock de protección.
h) C_{1_i} , b_i y K_i son independientes de la cantidad a solicitar (q_i).
i) El producto se mide en unidades continuas.

Resolución

Definimos T como 1 mes. Asimismo, el costo unitario de cada producto es:

$$C_{1_A} = C'_{1_A} + b_A i_A = 0 + 150 \times 0.02 = 3$$

$$C_{1_B} = C'_{1_B} + b_B i_A = 0 + 100 \times 0.02 = 2$$

El funcional a minimizar es:

$$CTE = b_A D_A + \frac{1}{2} q_A C_{1A} T + \frac{k_A D_A}{q_A} + b_B D_B + \frac{1}{2} q_B C_{1B} T + \frac{k_B D_B}{q_B}$$

Sujeto a la restricción:

$$0{,}1 q_A + 0{,}6 q_B = 450$$

Lo primero que debemos calcular es q_{0_A} y q_{0_B} haciendo caso omiso a la restricción.

$$q_{0_A} = \sqrt{\frac{2k_A D_A}{TC_{1_A}}} = \sqrt{\frac{2 \times 500 \times 1500}{1 \times 3}} = \sqrt{500000} \approx 707{,}1067$$

$$q_{0_B} = \sqrt{\frac{2k_B D_B}{TC_{1_B}}} = \sqrt{\frac{2 \times 500 \times 2000}{1 \times 2}} = \sqrt{1000000} = 1000$$

Luego verificamos si dichos valores cumplen la restricción:

$$0{,}1 \times 707{,}1067 + 0{,}6 \times 1000 = 670{,}71067$$

Como no cumple la restricción, aplicamos el método de Lagrange.

El nuevo funcional es:

$$\begin{aligned} L &= b_A D_A + \frac{1}{2} q_A C_{1A} T + \frac{k_A D_A}{q_A} + b_B D_B + \frac{1}{2} q_B C_{1B} T + \frac{k_B D_B}{q_B} + \lambda[0{,}1 q_A + 0{,}6 q_B - 450] \\ &= 150 \times 1500 + \frac{3}{2} q_A + \frac{500 \times 1500}{q_A} + 100 \times 2000 + q_B + \frac{500 \times 2000}{q_B} + \lambda[0{,}1 q_A + 0{,}6 q_B - 450] \\ &= 425000 + \frac{3}{2} q_A + \frac{750000}{q_A} + q_B + \frac{1000000}{q_B} + \lambda[0{,}1 q_A + 0{,}6 q_B - 450] \end{aligned}$$

Derivando el CTE con respecto a q_A y q_B e igualando a cero, tenemos:

- $\frac{\partial L}{\partial q_A} = \frac{3}{2} - \frac{750000}{q_A^2} + 0{,}1\lambda = 0 \Longrightarrow \boxed{q_A = \sqrt{\frac{750000}{\frac{3}{2} + 0{,}1\lambda}}}$
- $\frac{\partial L}{\partial q_B} = 1 - \frac{1000000}{q_B^2} + 0{,}6\lambda = 0 \Longrightarrow \boxed{q_B = \sqrt{\frac{1000000}{1 + 0{,}6\lambda}}}$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0{,}1 q_A + 0{,}6 q_B - 450 = 0 \Longrightarrow \boxed{0{,}1 q_A + 0{,}6 q_B = 450}$

El sistema de ecuaciones a resolver es entonces:

$$\begin{cases} q_A = \sqrt{\dfrac{750000}{\frac{3}{2} + 0{,}1\lambda}} \\ q_B = \sqrt{\dfrac{1000000}{1 + 0{,}6\lambda}} \\ 0{,}1 q_A + 0{,}6 q_B = 450 \end{cases}$$

Resolviendo iterativamente con distintos valores de λ hasta observar que se cumple la restricción en el igual, llegamos a que, con $\lambda = 2{,}4$, la restricción vale 449,76. Con ese valor de λ tenemos que

$$q_A = \sqrt{\frac{750000}{\frac{3}{2} + 0{,}1 \times 2{,}4}} = 656{,}5321$$

$$q_B = \sqrt{\frac{1000000}{1 + 0{,}6 \times 2{,}4}} = 640{,}1843$$

Ejercicio N° 10

Enunciado

Considerar el Ejercicio 9, sin la existencia de la restricción de superficie disponible. Se pide calcular los lotes de ambos productos que hagan mínimo el costo total esperado, considerando la decisión de que la cantidad máxima de dinero a inmovilizar en stock no supere los $145.800.

	Producto A	**Producto B**
Demanda (u./mes)	1500	2000
Costo de orden ($)	500	500
Precio de compra ($/u)	150	100
Tasa de inmovilización mensual	2%	2%
Superficie ocupada en almacén (m^2/u)	0,1	0,6

Resolución

El funcional a minimizar es:

$$CTE = b_A D_A + \frac{1}{2} q_A C_{1A} T + \frac{k_A D_A}{q_A} + b_B D_B + \frac{1}{2} q_B C_{1B} T + \frac{k_B D_B}{q_B}$$

Sujeto a la restricción:

$$q_A b_A + q_B b_B \leq 1458000$$

Como en el ejercicio n°9, primero verificamos si ${q_0}_A = \sqrt{500000}$ y ${q_0}_B = 1000$ satisfacen la restricción:

$$\sqrt{500000} \times 150 + 1000 \times 1000 = 206066{,}0172$$

Como no la satisfacen, debemos aplicar el método de Lagrange para hallar los valores ${q_0}_A$ y ${q_0}_B$. El funcional a minimizar es:

$$L = b_A D_A + \frac{1}{2} q_A C_{1A} T + \frac{k_A D_A}{q_A} + b_B D_B + \frac{1}{2} q_B C_{1B} T + \frac{k_B D_B}{q_B} + \lambda[q_A b_A + q_B b_B - 145800]$$

$$= 150 \times 1500 + \frac{3}{2} q_A + \frac{500 \times 1500}{q_A} + 100 \times 2000 + q_B + \frac{500 \times 2000}{q_B} + \lambda[150 q_A + 100 q_B - 145800]$$

$$= 425000 + \frac{3}{2} q_A + \frac{750000}{q_A} + q_B + \frac{1000000}{q_B} + \lambda[q_A b_A + q_B b_B - 145800]$$

Derivando el CTE con respecto a q_A y q_B e igualando a cero, tenemos:

- $\frac{\partial L}{\partial q_A} = \frac{3}{2} - \frac{750000}{q_A^2} + 150\lambda = 0 \Longrightarrow \boxed{q_A = \sqrt{\frac{750000}{\frac{3}{2}+150\lambda}}}$
- $\frac{\partial L}{\partial q_B} = 1 - \frac{1000000}{q_B^2} + 100\lambda = 0 \Longrightarrow \boxed{q_B = \sqrt{\frac{1000000}{1+100\lambda}}}$
- $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 150 q_A + 100 q_B - 145800 = 0 \Longrightarrow \boxed{150 q_A + 100 q_B = 145800}$

El sistema de ecuaciones a resolver es entonces:

$$\begin{cases} q_A = \sqrt{\dfrac{750000}{\frac{3}{2} + 150\lambda}} \\ q_B = \sqrt{\dfrac{1000000}{1 + 100\lambda}} \\ 150q_A + 100q_B = 145800 \end{cases}$$

Resolviendo iterativamente con distintos valores de λ hasta observar que se cumple la restricción en el igual, llegamos a que, con $\lambda = 0{,}01$, la restricción vale 145710. Con ese valor de λ tenemos que

$$q_A = \sqrt{\frac{750000}{\frac{3}{2} + 0{,}01 \times 150}} = 500$$

$$q_B = \sqrt{\frac{1000000}{1 + 0{,}01 \times 100}} = 707{,}1067$$