CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1. CONCEPTOS

El control de las existencias es una de las funciones de mayor importancia en la administración de los sistemas empresariales tanto productivos como comerciales. Esto se debe a que ellas representan una considerable inversión en capital de trabajo. La Investigación Operativa ha prestado especial interés en la formulación y resolución de modelos matemáticos que permitan optimizar las operaciones de almacenamiento de mercadería en cualquiera de las etapas de producción o distribución.

En este texto, utilizaremos en forma indistinta los términos "*stocks*", "inventarios" y "existencias" para referirnos a todos aquellos recursos materiales utilizables, considerados como bienes de cambio (es decir, materias primas, artículos semielaborados, productos terminados, materiales indirectos, etc.) que se encuentran almacenados durante un período de tiempo a la espera de ser utilizados o vendidos en un futuro próximo.

En los sistemas empresariales existe en general oposición de intereses entre los distintos sectores de la organización, quienes trabajan normalmente con objetivos contrapuestos. Particularmente, la administración de inventarios tiene un alto impacto en Producción, Marketing y Finanzas. El área productiva pretende niveles de inventarios adecuados a sus recursos de fabricación y a sus estándares de producción; el sector comercial requiere niveles altos de *stocks* a fin de satisfacer la demanda; finalmente, el área financiera aspira a que las existencias sean lo más bajas posibles para minimizar el dinero inmovilizado. En consecuencia, la gerencia a cargo del abastecimiento deberá tratar de balancear adecuadamente estos intereses en conflicto determinando los niveles de inventarios más apropiados para la empresa en su conjunto.

En la Figura 1 se puede observar una estructura empresarial productiva básica. El proceso comienza con la adquisición de materias primas (MP), suministros o materiales indirectos (MI) y repuestos (RE) al mercado proveedor de dichos bienes, lo que requiere su almacenamiento en depósitos especialmente preparados para tal fin. Estos materiales ingresan al sistema productivo, en donde seguramente existe la necesidad de realizar almacenamientos intermedios entre las diferentes etapas operativas en los denominados depósitos de productos semielaborados (SE).

Una vez fabricados, los artículos que tengan la calidad adecuada para ser comercializados pasarán a un almacén de productos terminados (PT), mientras que los que no cumplan con las especificaciones requeridas se almacenarán en los depósitos de mercadería "fuera de especificación" (FE). Algunos de estos productos serán recuperables, por lo que se reintegrarán al proceso productivo, mientras que otros, los no reprocesables (*scrapp*), se venderán como rezago. Luego comienza el proceso de distribución de los productos desde la empresa al mercado comprador; en algunos casos se realiza en forma directa y en otros a través de depósitos comerciales (DC), convenientemente localizados para abastecer la demanda.

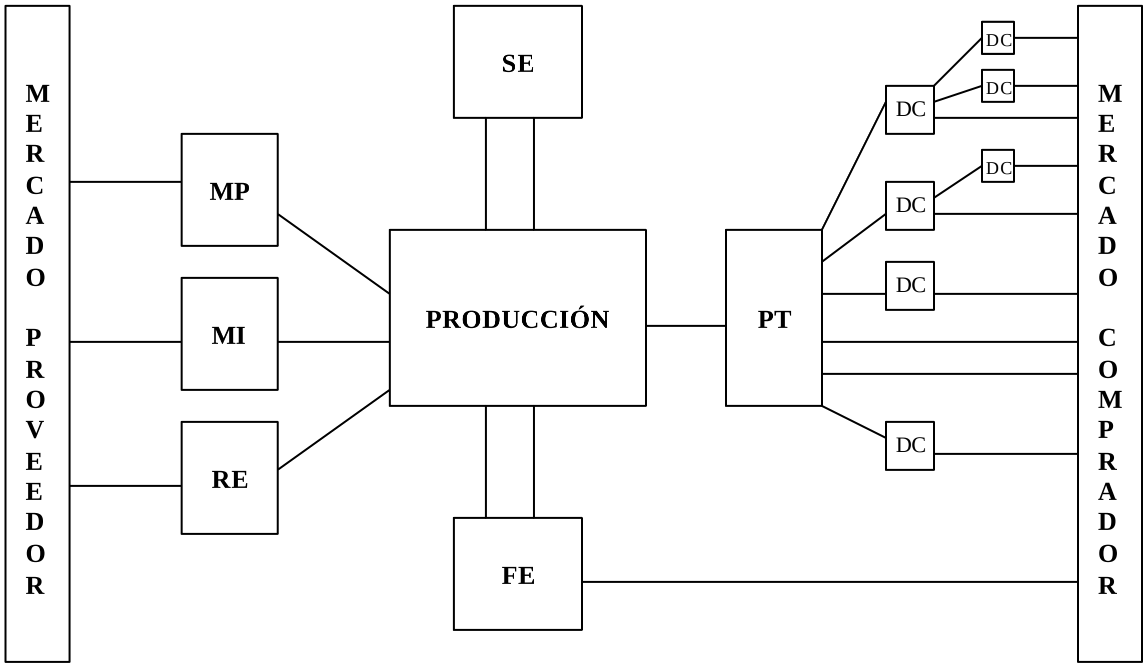


Figura 1

Llamaremos almacenes primarios a aquellos cuya mercadería ingresante proviene de sectores externos de la empresa (proveedores) y almacenes secundarios a aquellos cuya mercadería ingresante proviene de sectores internos de la empresa. Los almacenes de materias prima (MP), de materiales indirectos (MI) y de repuestos (RE) son típicamente depósitos primarios, mientras que los de productos semielaborados (SE) y terminados (PT) son depósitos secundarios.

La estructura correspondiente al almacenamiento de mercaderías de una empresa comercial es mucho más sencilla. Consiste simplemente en uno o varios depósitos primarios para lograr la distribución de los productos desde los productores (mercado proveedor) a los consumidores (mercado comprador).

En los sistemas de *stocks*, el ingreso a los almacenes (o *input*) está dado por la reposición de mercadería que se solicita a través de pedidos (u órdenes) de reposición. Las órdenes de reposición de los almacenes primarios se llaman Órdenes de Compra, mientras que las de los almacenes secundarios se denominan Órdenes de Fabricación.

La salida de los almacenes (o *output*) está dada por la mercadería que egresa como consecuencia de la demanda a través de Órdenes de Entrega (a sectores internos subsiguientes en la cadena) u Órdenes de Venta (a los clientes).

La base de la administración de los inventarios radica en el conocimiento del tipo de demanda que tendrá el producto. En algunos casos, la demanda está sujeta directamente a los requerimientos del mercado y, en consecuencia, es independiente del proceso productivo. Se dice entonces que estos artículos son de “demanda independiente”, y un ejemplo de ellos son los productos terminados. Cuando, por el contrario, la demanda de un componente depende de la demanda de otro componente de mayor nivel en la estructura de producto, se dice que es “dependiente”. Por ejemplo, en la industria automotriz, la demanda de neumáticos es dependiente de la de los automóviles, siendo la de estos últimos una demanda independiente.

Otra consideración importante es la aleatoriedad de los ingresos y egresos del sistema. En los casos de certeza, o en donde el grado de aleatoriedad es suficientemente bajo, la resolución de los problemas se hace mediante técnicas cuantitativas, mientras que, en situaciones en las que la demanda es más incierta, se resuelven generalmente a través de métodos de simulación.

2. FUNCIÓN DE LOS STOCKS

Las empresas mantienen inventarios básicamente para poder realizar sus actividades productivas y comerciales o distributivas, ya que a través de los mismos se absorben fluctuaciones de entrega, demanda y fabricación. Es claro que los stocks pueden considerarse, en muchas oportunidades, como un mal necesario, ya que representan un capital ocioso. Pero, debe abastecerse un requerimiento y existen diferencias en el tiempo y en la distribución física entre el suministro de un producto y la demanda del mismo, debido a los desniveles existentes entre los distintos centros de producción, la aleatoriedad de las ventas, los imprevistos, los retrasos o adelantos en las entregas por parte de los proveedores, etc. La mayoría de los procesos físico-económicos son de naturaleza estocástica, y esta aleatoriedad se verifica tanto en el suministro como en la demanda. Las existencias se utilizan, entonces, como un “amortiguador” entre ellos (Figura 2).

Figura 2

Una función importante de los stocks es la de absorber desfasajes estacionales entre niveles de producción y niveles de demanda. El hecho de trabajar con un nivel de producción constante implica trabajar con un nivel de recursos de fabricación también uniforme, especialmente de la mano de obra. Con una demanda estacional, se puede acumular el producto durante los períodos de menor demanda ($+\Delta S$) para satisfacer las necesidades de los períodos de mayores ventas ($+\Delta S$), como se muestra en la Figura 3. Esto evitaría, por ejemplo, los altos costo de indemnización por despido y de contratación en los que se incurriría si hubiera que adecuar el nivel de los recursos humanos de producción al de la demanda estacional.

Por otra parte, los inventarios se utilizan para absorber situaciones imprevistas, tales como huelgas, siniestros, interrupciones de planta no programadas, etc., o situaciones previstas, como por ejemplo cierre por vacaciones, paradas programadas de mantenimiento, etc.

En muchas ocasiones se acumula mercadería a fin de conseguir descuentos en los precios de compra por mayores cantidades que ofrecen los proveedores.

Asimismo, en las oportunidades en las que el costo de transporte está a cargo de la empresa que adquiere la mercadería, como ocurre en muchos casos de importaciones, a menudo conviene transportar mayores cantidades, lo que requiere entonces almacenar más productos.

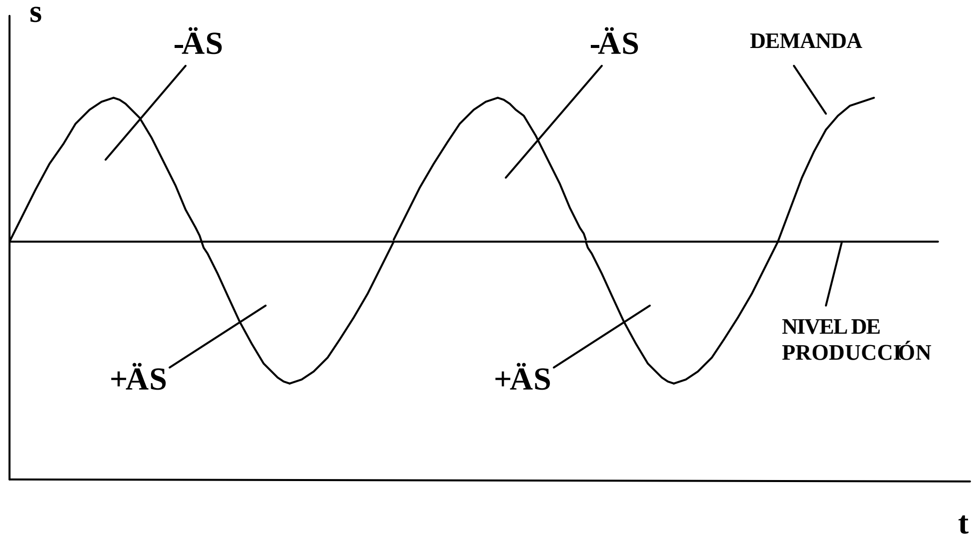


Figura 3

Además, en períodos inflacionarios, los stocks permiten a la empresa protegerse contra cambios bruscos de precios.

Finalmente, bs almacenes de productos semielaborados permiten absorber variaciones de fabricación entre los distintos centros productivos. Esto es importante por cuanto otorgan a estos centros cierto grado de independencia de fabricación. Si bien la tendencia actual para la administración de productos de demanda independiente en diversas industrias es la de operar con sistemas con inventarios mínimos (tales como los denominados *Just-In-Time* o *Lean*), especialmente para productos semielaborados, para muchas otras industrias que no pueden permitirse una inversión estructural importante o en las que -como en nuestro país- existe un alto porcentaje de aleatoriedad e incertidumbre en los procesos productivos, esto depósitos intermedios dan un grado de libertad importante para el desarrollo de las actividades.

Para resumir, podemos decir que la función principal de los stocks es la de absorber las fluctuaciones de demanda, fabricación y distribución que se verifican como consecuencia de la aleatoriedad de los procesos y por las diferencias en el tiempo y en la distribución física entre la oferta y la demanda.

3. MODELIZACIÓN DE SISTEMAS DE INVENTARIOS

La implantación de un modelo matemático de decisión que describa el comportamiento del sistema a estudiar y que optimice su operación constituye una base importante en la administración de los stocks.

Los sistemas de inventarios son tan variados e involucran situaciones y consideraciones tan diferentes que sería imposible enunciar aquí un modelo para describir cada caso en particular. Por lo tanto, se analizarán únicamente aquellos problemas más generales al solo efecto de mostrar la metodología de aplicación de la Investigación Operativa para formular, resolver y analizar los modelos de stocks.

El procedimiento a seguir consiste en el planteo sistemático de las siguientes etapas:

I. Definición

En esta etapa se deberán desarrollar las siguientes actividades:

- ✓ Establecer el alcance del problema, identificando los artículos que se estudiarán, su condición en el proceso producción-distribución (materia prima, semielaborado, producto terminado, etc.), su vinculación con otros productos y su situación en la estructura de productos (de demanda dependiente o independiente).
- ✓ Plantear los interrogantes a responder mediante la utilización del modelo. A menudo la variable de decisión es la cantidad de unidades a solicitar (llamada "lote") en la orden de compra o de producción. Sin embargo, en otras ocasiones lo que se desea controlar es el denominado "nivel de reorden" (cantidad de stock a partir de la cual se emite la orden de reposición), o el stock de protección (cantidad mínima permanente a mantener en inventarios por razones de seguridad), o el capital de dinero a inmovilizar, o el numero de órdenes a emitir en un período determinado. Adicionalmente, se puede determinar el costo total asociado al proceso, la frecuencia de los pedidos y la oportunidad para efectuarlos.
- ✓ Definir claramente el objeto del problema. En general se intenta minimizar el costo total que resulta de considerar todos los costos que intervienen en el proceso de almacenamiento de la mercadería. Otro objetivo puede consistir en minimizar el monto de capital de dinero a inmovilizar en inventarios.
- ✓ Identificar las restricciones que el medio impone al sistema en estudio. Habitualmente se presentan restricciones físicas (por ejemplo por limitación de espacio o de capacidad de fabricación), financieras (por limitaciones de dinero a inmovilizar), administrativas (por limitaciones de la cantidad de órdenes a emitir) y operativas (por ejemplo, por limitaciones impuestas por los proveedores).

II. Modelización

En este paso se procede a realizar un relevamiento más detallado del sistema físico y de su comportamiento, como así también del flujo de información necesario para la formulación de políticas y de la toma de decisiones.

Luego se lleva a cabo la modelización propiamente dicha. En primer lugar se establecen las hipótesis o supuestos simplificativos que permitan representar el sistema físico real a través de un modelo matemático que contemple solamente los aspectos fundamentales y relacionados con el objetivo del problema, excluyendo aquellos otros factores que no afecten la decisión. En esta etapa se deben establecer cuáles serán las variables y cuáles los parámetros del modelo.

Posteriormente se procede a efectuar la formulación matemática del objetivo ("funcional") del problema que se ha planteado en la etapa anterior. En general, como se mencionó más arriba, la expresión cuantitativa a optimizar en los modelos de inventarios es el costo total del proceso, que tiene -básicamente- dos componentes (como puede observarse en la Figura 4):

- Una función creciente con respecto a la variable de decisión, y
- Una función decreciente con respecto a la variable de decisión.

Si la variable de decisión fuera, por ejemplo, el lote de compra de un determinado artículo, el término creciente del funcional podría ser el costo de inmovilizar el capital, y la función decreciente, el costo de emisión de órdenes de compra.

Finalmente, deberán formularse matemáticamente las restricciones del sistema (llamadas condiciones de vínculo) consideradas en la etapa de definición.

Una de las características de las variables que intervienen en este tipo de modelos es su condición de “no negatividad”, debido a la naturaleza física de las mismas.

En consecuencia, los modelos de inventarios quedan habitualmente representados como programas matemáticos, no restringidos o restringidos, es decir integrados por:

- Un funcional
- Condiciones de vínculo (en los casos de los programas matemáticos restringidos)
- Condiciones de las variables

En general, para los problemas de stocks, la relación entre las variables en la función objetivo es de tipo no lineal. Cuando hay restricciones, éstas pueden ser tanto lineales como no lineales.

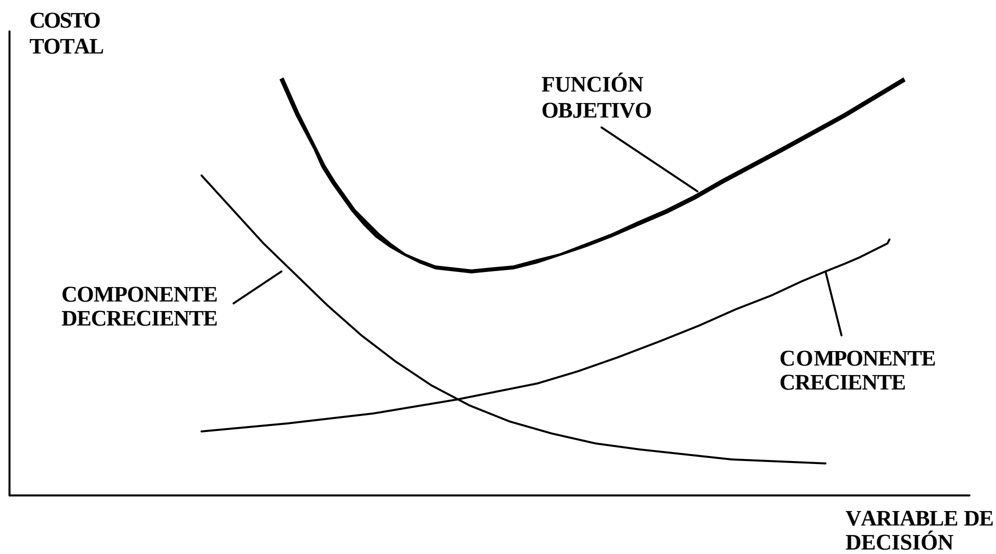


Figura 4

III. <u>Resolución</u>

La resolución de los modelos de stocks se realiza tanto con técnicas analíticas (métodos cuantitativos) como numéricas (métodos de simulación).

En el presente contexto, se estudiará principalmente la primera de ellas, es decir la obtención analítica de los niveles de actividad de las variables que optimicen la función objetivo, satisfaciendo las condiciones de vínculo (si las hubiere) y las condiciones de las variables (como la de no-negatividad). Cabe mencionar, sin embargo, que la práctica de la simulación provee un marco adecuado para resolver modelos, especialmente cuando el problema en estudio es muy complicado y de naturaleza estocástica.

En algunos problemas de planeamiento de producción con períodos múltiples se plantean problemas lineales que se resuelven con Programación Lineal. Sin embargo, en la mayoría de los problemas, como se mencionó anteriormente, la relación entre las variables en el funcional, y en algunos casos también de las restricciones, son de naturaleza no lineal, por lo que se aplicarán entonces técnicas de Programación No Lineal.

Una vez resuelto el problema y obtenida la solución óptima se puede proceder a hacer un análisis postoptimal de sensibilidad. Una desviación de la variable de decisión con respecto al valor óptimo representa un costo determinable cuantitativamente (ver Figura 5). Además, si la gerencia define un incremento tolerable de costo, es posible determinar un "intervalo de operación" para la variable de decisión (ver Figura 6).

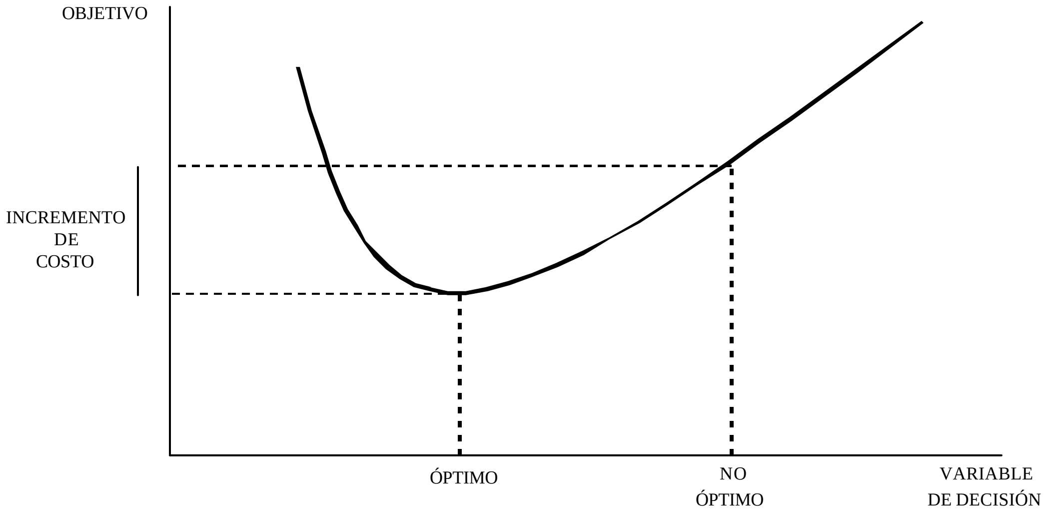


Figura 5

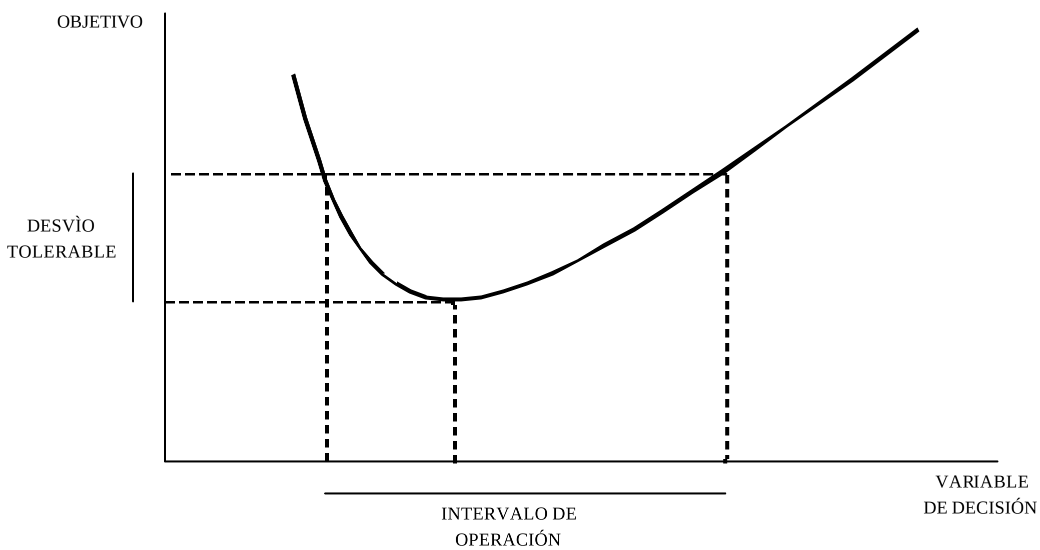


Figura 6

Otros estudios que se pueden realizar con los modelos de stocks son los análisis paramétricos; esto es, determinar el rango de variación de los parámetros dentro de los cuales se cumplen determinadas condiciones operativas del sistema.

Los sistemas computarizados facilitan el procesamiento de la información básica de las variables de entrada del modelo (parámetros), y proveen una rápida resolución del problema, tanto mediante técnicas cuantitativas como de simulación.

El sistema LINGO (de LINDO Systems Inc.) es un lenguaje de programación para modelizar y resolver problemas de optimización. Constituye una herramienta simple y, en este contexto se utilizará para resolver algunos de los ejemplos planteados. Se aplicará aquí solamente la estructura de solución del sistema, pero no en el lenguaje de modelización.

El LINGO dispone de cuatro optimizadores (o *solvers*) que utilizan para solucionar diversos tipos de modelos. Ellos son el directo, el lineal, el no lineal y el de programación entera (que trabaja con el algoritmo de *branch and bound*).

La función objetivo en el lenguaje LINDO se expresa en la forma:

MAX = expresión;

o bien:

MIN = expresión;

Las restricciones se expresan con restricciones de igual (=), menor o igual (<=), o mayor o igual (>=). Los operadores típicos son:

* Multiplicación
/ División
+ Suma
- Resta
^ Potencia

Luego de cada restricción, incluyendo también las de los datos de los parámetros, se debe agregar un punto y coma (;) para que el sistema interprete que la misma se ha terminado de formular. No es necesario que los términos independientes estén dispuestos a la derecha del signo de la restricción, como sucede con otros sistemas de programación matemática (por ejemplo, con el LINDO).

Las variables que utiliza el LINGO pueden ser continuas o enteras. Por defecto, todas las variables son continuas y no negativas. Sin embargo, este criterio se puede modificar mediante funciones de dominio de variables, tales como:

@FREE(X): hace que la variable X sea irrestricta.

@GIN(X): hace que la variable X sea entera.

@BIN(X): hace que la variable X sea binaria.

@BND(a,X,b): hace que la variable X esté comprendida entre “a” y “b”.

El formato de salida que exhibe el sistema es similar los del sistema LINDO y de otros sistemas de programación lineal. Básicamente, la salida tiene la siguiente forma:

```
Global optimal solution found at step:     n
Objective value:                     xxxxxxx

Variable          Value       Reduced Cost
     X1        xxxxxxxx          xxxxxxxxx
     X2        xxxxxxxx          xxxxxxxxx

    Row    Slack or Surplus       Dual Price
      1        xxxxxxxx          xxxxxxxxx
      2        xxxxxxxx          xxxxxxxxx
```

Es decir, primero muestra el número de iteraciones necesarias para obtener la solución óptima, y luego da el valor del funcional. Posteriormente, en una primera sección, se exponen las variables del problema con el valor que asumen en la columna indicada bajo el titulo "Value" y su costo reducido (o costo de oportunidad) en la columna indicada con "Reduced Cost".

En la segunda sección, la salida muestra las restricciones con su sobrante o excedente, en la columna indicada con el título "Slack or Surplus" y su valor marginal (o precio sombra) indicado como "Dual Price".

IV. Instalación

Antes de implementar el modelo será necesario validarlo conjuntamente con los usuarios del sector de Abastecimientos de la empresa, a los efectos de verificar que responda al comportamiento del sistema real. Algunas veces habrá que replantear las hipótesis y otras se deberá reformular el modelo recurrentemente hasta lograr un modelo práctico y útil que responda a las características de la realidad que se está estudiando.

A partir de la operación del modelo, la dirección contará con una herramienta sumamente eficaz para establecer las políticas de inventarios más adecuadas, tomar decisiones respecto a programas de fabricación o a planes comerciales y financieros. Para ello, no sólo habrá que instalar el modelo de decisión sino también el sistema de información asociado a él, de manera de efectuar la carga de datos en el momento adecuado, con la calidad requerida para poder proceder a informar los resultados a quien corresponda cuando sea oportuno.

4. PROCESOS DE ALMACENAMIENTO

La cantidad de unidades mantenidas en stock tiene generalmente un comportamiento cíclico. Comenzando en un instante determinado, el nivel de stock se reduce a medida que se retiran unidades para satisfacer la demanda. Cuando el nivel ha bajado demasiado, se emite un pedido que, cuando se verifica, eleva el nivel de inventario, repitiéndose nuevamente el ciclo como se observa en la Figura 7. Desde que se emite la orden hasta que se efectúa físicamente la reposición transcurre un tiempo que llamaremos "tiempo de reaprovisionamiento" (o "plazo de entrega", o también "*lead time*"). En algunas ocasiones la reposición (ingreso de mercaderías al depósito) no se hace en forma instantánea sino que, por el contrario, se verifica durante un intervalo de tiempo (Figura 8).

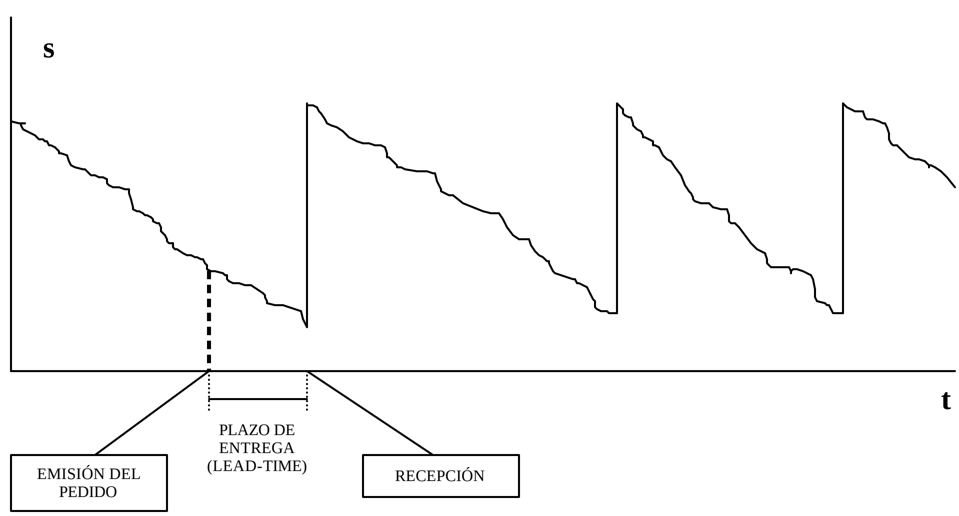


Figura 7

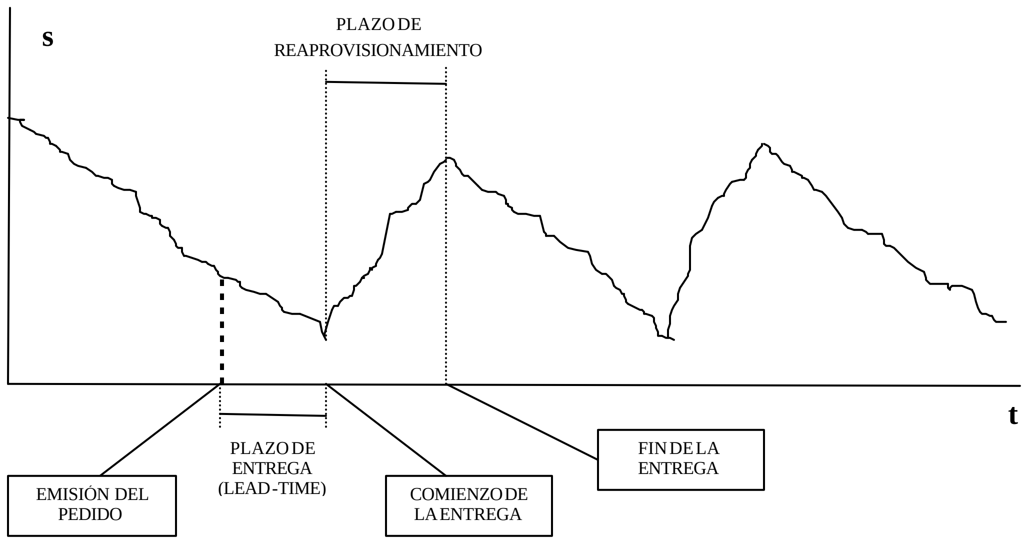


Figura 8

5. DEMANDA

Como ya se ha mencionado, una distinción crucial en las empresas productivas radica en el comportamiento de la demanda que interviene en el proceso. La demanda "independiente" es la que está influida por las condiciones de mercado, fuera del control de la fábrica. En cambio, la demanda "dependie nte" está relacionada a la demanda de otro ítem. Los productos que tienen demanda independiente llevan a una filosofía de administración de stocks enfocada al "reaprovisionamiento", es decir a los modelos de stocks que veremos en este texto, mientras que los ítems con demanda dependiente se orientan a un enfoque que apunta a la "requisición", es decir a los sistemas de Planeamiento de Requisición de Materiales ("MRP") y de Justo a Tiempo ("*Just in Time*").

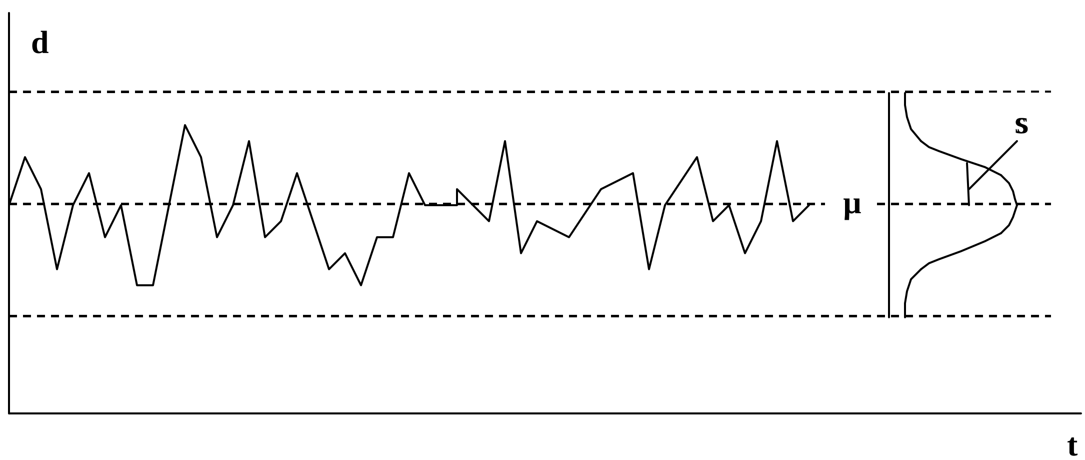


Figura 9

Adicionalmente, es importante considerar la aleatoriedad de la demanda. En algunos casos la demanda tiene un comportamiento estocástico, mientras que en otros su naturaleza es prácticamente determinística. En la figura 9 se puede observar una demanda aleatoria con distribución normal con media μ y desvío estándar ó. En la Figura 10 la demanda es constante y tiene un comportamiento determinístico. Estos dos casos se corresponden con artículos de demanda independiente.

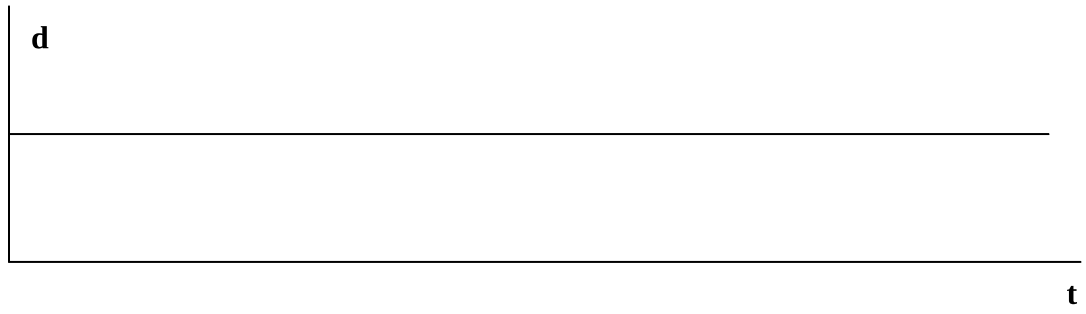


Figura 10

En la Figura 11 se observa un caso típico de demanda dependiente y determinística, en donde el ítem en estudio es un componente que se requiere cuando se fabrica un lote de un producto del nivel superior en la estructura de producto. Finalmente, la Figura 12 muestra la evolución en función del tiempo de una demanda aleatoria y dependiente.

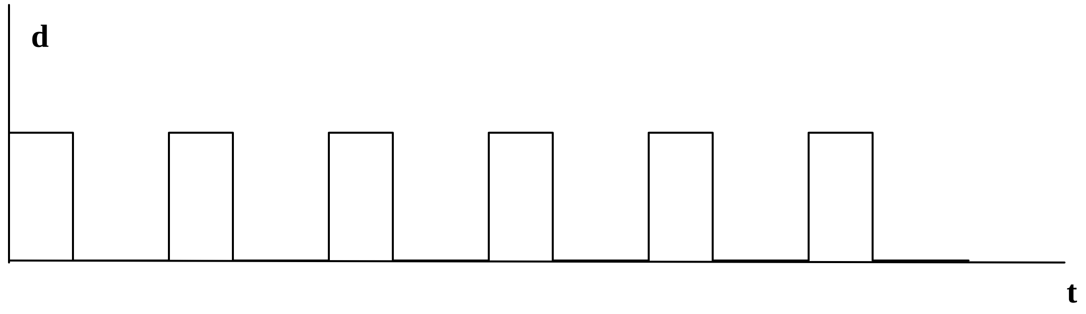


Figura 11

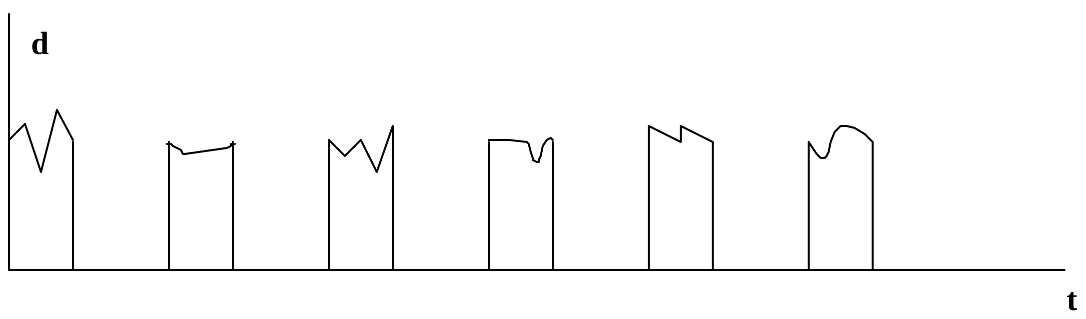


Figura 12

6. COSTOS ASOCIADOS A LAS DECISIONES DE STOCKS

Costo de Adquisición (b)

Representa el costo unitario del producto que se adquiere. Está expresado en unidades monetarias por unidad física del producto adquirido ($/u). En el caso de productos de depósitos primarios (es decir de productos adquiridos a terceros), representa el costo unitario de compra. Puede incluir el transporte si ha sido entregado por el proveedor y los costos variables de la recepción y del control de calidad.

Para los productos de almacenes secundarios (es decir, los fabricados en la propia empresa), el costo de adquisición es el costo directo en el que se incurre hasta esa etapa del proceso; es decir, además del costo de los materiales, incluye la mano de obra y los gastos generales de fabricación directos.

El costo de adquisición puede ser constante en función de la cantidad "q" adquirida (Figura 13) o variable, como sería en el caso de que el proveedor ofrezca descuentos discretos o continuos por cantidad (Figuras 14 y 15, respectivamente).

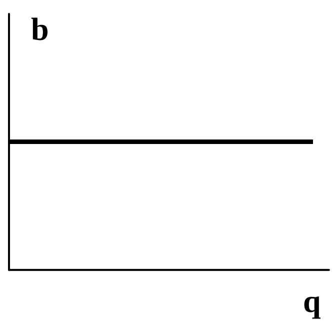


Figura 13

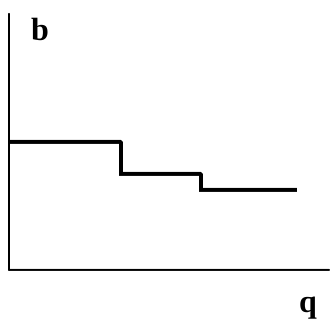


Figura 14

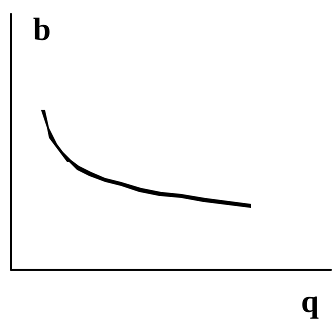


Figura 15

Costo de almacenamiento de mantenimiento (c_1)

Es el costo en el que se incurre por tener una unidad almacenada del producto durante un período de tiempo. Está expresado en unidades monetarias por unidad física de producto y por unidad de tiempo. Este costo es un costo de oportunidad y está integrado básicamente por dos componentes: el costo operativo de mantenimiento en stock (que indicaremos como "c'_1") y el costo de capital inmovilizado.

El primero de ellos es un costo explícito que incluye:

- costos de espacio de almacenamiento (alquileres, seguros, etc.),
- costos de manipulación,
- impuesto a los inventarios, si es aplicable,
- costos de mantenimiento físico de los productos (refrigeración, calefacción, humidificación, etc.),
- costos de depreciación, deterioros, hurto, evaporación, perecidad, obsolescencia, etc.
- costos administrativos de llevar registro de inventarios, etc.

El capital inmovilizado es el costo en el que se incurre por el hecho de tener inmovilizado el producto durante un período de tiempo y no poder obtener beneficios en alguna oportunidad de inversión con el capital que representa el costo de adquisición del producto.

Luego, el costo de mantenimiento en stock se pude expresar como:

$$c_1 = c_1' + b\ i$$

en donde "i" es la tasa de inmovilización de capital (puede ser, por ejemplo, el costo del dinero o la tasa de retorno sobre la inversión de capital).

El costo de almacenamiento puede ser constante en función del tamaño del lote (Figura 16) o, como ocurre en ciertas ocasiones, variable en forma escalonada (creciente o decreciente), debido por ejemplo a efectos de economía de escala (Figura 17).

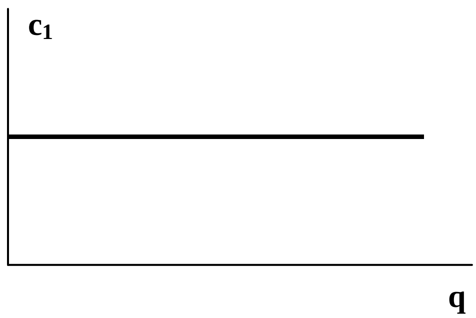


Figura 16

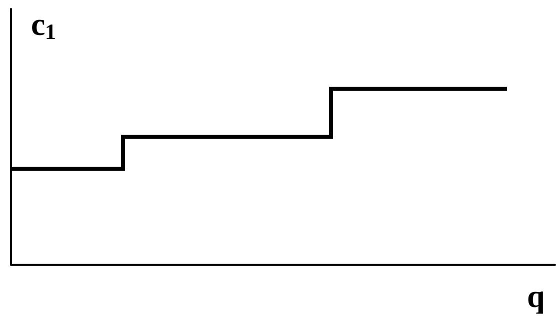


Figura 17

Costo de agotamiento o de déficit (c_2):

Es el costo en el que se incurre cuando se agotan las existencias y, en consecuencia, no se puede satisfacer la demanda del producto. Puede estar expresado en unidades monetarias por unidad física de producto y por unidad de tiempo, en unidades monetarias por unidad física de producto, en unidades monetarias por cada vez que se alcanza el agotamiento, o en una combinación de ellas. Este costo incluye los siguientes conceptos:

a) Para productos terminados:

- el costo debido al retraso, si se permite un diferimiento en las entregas (como ser el costo por pérdida de imagen o reputación, multas por compromisos no cumplidos, etc.), y
- el lucro cesante por pérdidas de ventas si no se admite diferimiento, etc.

b) Para productos adquiridos:

- el costo de parada de planta o de equipos por el hecho de no disponer del material para procesar,
- el costo de apresuramiento (compras de urgencia o emergencia),
- el costo por pérdida de tiempo de producción y, en general, por mantener los recursos de fabricación ociosos hasta la disponibilidad del material,
- el costo de horas extras para recuperar el tiempo perdido, y
- el costo de mermas en la producción hasta alcanzar el estado de régimen, etc.

Costo de orden (k)

Es el costo en el que se incurre por cada pedido que se emite. Está expresado en unidades monetarias por pedido. En el caso de los artículos adquiridos a terceros es el costo de la emisión de la orden de compra, que incluye:

- el costo administrativo de preparación y emisión de la orden: selección de proveedores, consultas, licitaciones, seguimiento, correo,
- el costo de recepción del lote,
- el costo de control de calidad si es un control por muestreo, independiente de la cantidad recibida, y
- el costo administrativo de pago de facturas al proveedor, etc.

Para los artículos elaborados internamente, es el costo de la orden de fabricación, incluyendo:

- el costo de lanzamiento de un lote de fabricación (costo de "*set-up*") que comprende la puesta en punto de los equipos, el acondicionamiento de las maquinas, la preparación física de los puestos de trabajo, etc.,
- el costo asociado a las pérdidas por comienzo de fabricación, por ejemplo por mayor merma o menor rendimiento, y
- el costo administrativo de la emisión y seguimiento de la orden de trabajo.

En general, este costo es fijo en términos de cantidad de unidades a adquirir (ver Figura 18). No obstante ello, en algunas ocasiones puede ser variable en base a cambios estructurales que afecten a la orden, tal como se puede observar en la Figura 19.

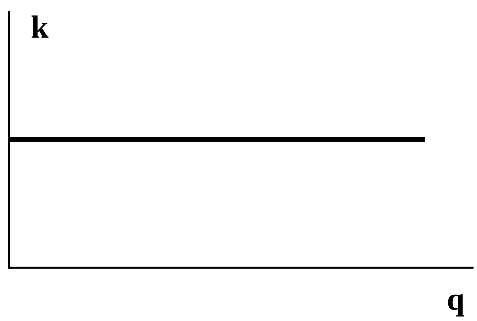


Figura 18

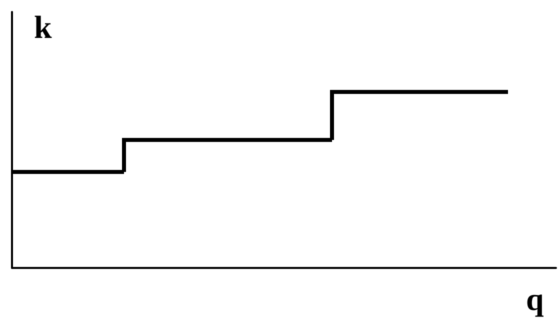


Figura 19

7. MINIMIZACIÓN DEL COSTO TOTAL

Como se menciono anteriormente, en la mayoría de los sistemas en estudio interesa conocer la cantidad de unidades a solicitar de manera de hacer mínimo el costo total esperado.

Supongamos un producto que tiene una determinada demanda anual. Una alternativa extrema de solución sería adquirir una sola vez toda esa cantidad y entregarla en la medida que se solicite (Figura 20). Esto llevaría a un enorme costo total de almacenamiento, ya que se requeriría una gran cantidad de lugar de almacenamiento, seguros, etc., a la vez que se necesitaría inmovilizar un capital muy significativo. En contraposición, el costo de orden sería, en este caso, muy bajo debido a que se emitiría un solo pedido.

En el otro extremo, se podría decidir adquirir el producto en forma unitaria; es decir emitir una orden por cada unidad que se demanda (Figura 21). Ello implicaría un costo de mantenimiento muy bajo, ya que prácticamente no se mantiene stock del producto, pero resultaría extremadamente alto el costo total de orden porque habría que emitir muchos pedidos y efectuar su seguimiento, recepción, control de calidad, cancelación del pago, etc., por cada unidad que se demande.

Entre estas dos alternativas extremas, existirá seguramente una solución intermedia que sea óptima (es decir, que minimice el costo total interviniente). Para ello se recurre a la formulación de modelos matemáticos, tal como los que se ejemplifican en los siguientes capítulos.

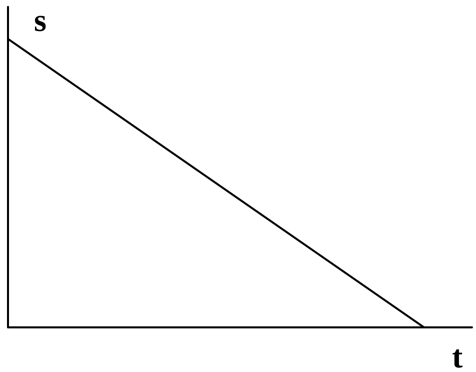


Figura 20

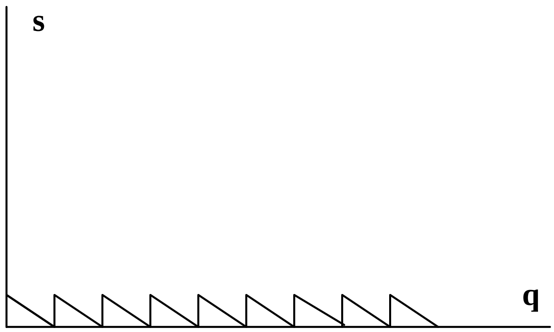


Figura 21

CAPÍTULO 2

CASO BÁSICO

1. FORMULACIÓN

Comenzaremos con el desarrollo de un modelo matemático que describe un proceso simple de almacenamiento con el fin de explicar el procedimiento de modelización y su resolución.

El objetivo del problema que se encarará es determinar el tamaño del lote de adquisición de un producto que minimice el costo total esperado

HIPÓTESIS

Se tomarán las siguientes hipótesis de trabajo:

1. Se administra un único ítem.
2. El producto es de demanda independiente.
3. La demanda es conocida y se efectúa a tasa constante.
4. El plazo de entrega ("*lead time*") del producto solicitado, es decir el tiempo que transcurre desde que se emite la orden hasta que se recibe el producto, es conocido y constante.
5. La reposición se hace exactamente cuando el nivel de stock es cero; es decir no hay stock de protección.
6. El reaprovisionamiento es instantáneo. Esto significa que la tasa de reposición es infinita.
7. El horizonte de planeamiento es de largo plazo.
8. El costo de agotamiento es infinitamente alto; es decir, no está permitido el déficit del producto.
9. El costo unitario de adquisición "b", el costo unitario de almacenamiento "c_1" y el costo del pedido "k" son independientes de la cantidad a pedir "q".
10. No hay restricciones que limiten la decisión a tomar sobre el tamaño del lote.
11. Todos los parámetros monetarios están expresados en moneda constante.
12. El producto en estudio se mide en una unidad continua (litros, kilogramos, etc.). Para cantidades relativamente grandes, esta hipótesis de trabajo no introduce prácticamente error alguno aúnen el caso de que el ítem en cuestión se mida en realidad en unidades discretas.

PARÁMETROS

- D: Demanda del producto, referida a un período estratégico de tiempo (año, semestre, etc.). Es muy habitual en la práctica utilizar el año como unidad de referencia. Utilizaremos la letra "d" para indicar la tasa de demanda, es decir la demanda expresada en una unidad de tiempo más corto (días, semanas, etc.).
- b: Costo unitario de adquisición.
- c_1: Costo unitario de almacenamiento.
- k: Costo de una orden.
- T = 1: Parámetro de dimensionamiento que sirve para referenciar todos los parámetros temporales a la misma unidad de tiempo (es decir a la unidad estratégica). Su unidad es igual a 1 pedido.
- LT = Lead Time.

VARIABLES

- q: Tamaño del lote. Constituye para este caso la variable de decisión básica.
- t: Intervalo de un ciclo. Es el tiempo que transcurre entre dos reaprovisionamientos sucesivos.
- CTE: Costo total esperado referido al período estratégico de tiempo.
- SR: Stock de reorden (llamado también "punto de pedido").

MODELIZACIÓN

Siendo la demanda continua y constante, el nivel de stock evoluciona como se indica en la Figura 1. El costo total esperado será la suma de los costos totales de adquisición, de almacenamiento y de orden. Para un ciclo cualquiera “i”, el costo total de adquisición será

$$b \cdot q$$

Teniendo en cuenta que hay “q” unidades almacenadas al comenzar el ciclo y cero al finalizar el mismo, el costo total de almacenamiento para el ciclo será:

$$\frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot t$$

es decir un promedio de “q/2” unidades almacenadas durante el período, a un costo “c_1” cada una de ellas y durante un tiempo “t”.

Finalmente, el costo total de orden es simplemente

$$k$$

ya que se emite un solo pedido por ciclo. En consecuencia:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot t + k \qquad \textbf{(1)}$$

El número de ciclos por período de referencia (tomaremos como ejemplo un año) es el cociente entre la demanda "D" anual y la cantidad solicitada en cada ciclo "q"; o también el cociente entre el parámetro "T" (equivalente a 1) y "t" (duración de un ciclo, expresada en unidad de año).

$$n = \frac{D}{q} = \frac{T}{t} \qquad \textbf{(2)}$$

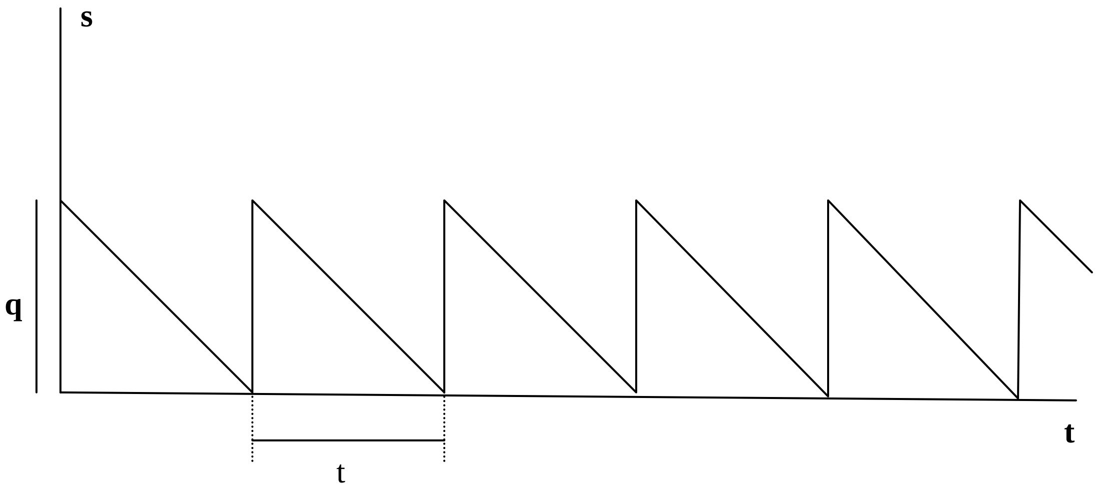


Figura 1

Luego, el costo total esperado anual resultará de multiplicar el costo total esperado de un ciclo (1) por la cantidad de ciclos (2), es decir:

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} \qquad \textbf{(3)}$$

Esta expresión constituye la función objetivo a minimizar, siendo "q" la variable de decisión a determinar. En la Figura 2 se grafica el "CTE" en ordenadas y "q" en abcisas. El primer término de (3) es independiente del lote y, en consecuencia, una constante. El costo total de mantenimiento, o sea el segundo término de la expresión, es una recta que pasa por el origen de coordenadas. Finalmente, el último término es una hipérbola. La curva correspondiente al Costo Total Esperado es la suma de las tres anteriores.

Para hallar el valor mínimo del funcional, como hemos supuesto que la variable "q" es continua, habrá que derivar la función (3) con respecto de "q" e igual a cero:

$$\frac{\partial CTE}{\partial q} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - k \cdot \frac{D}{q^2} = 0$$

Como la derivada segunda es positiva, tendremos un mínimo en ese punto. Despejando "q":

$$\boxed{q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}}} \qquad \textbf{(4)}$$

Este es el tamaño de lote óptimo, también llamado cantidad económica de adquisición. La expresión (4) se conoce con el nombre de fórmula de Wilson.

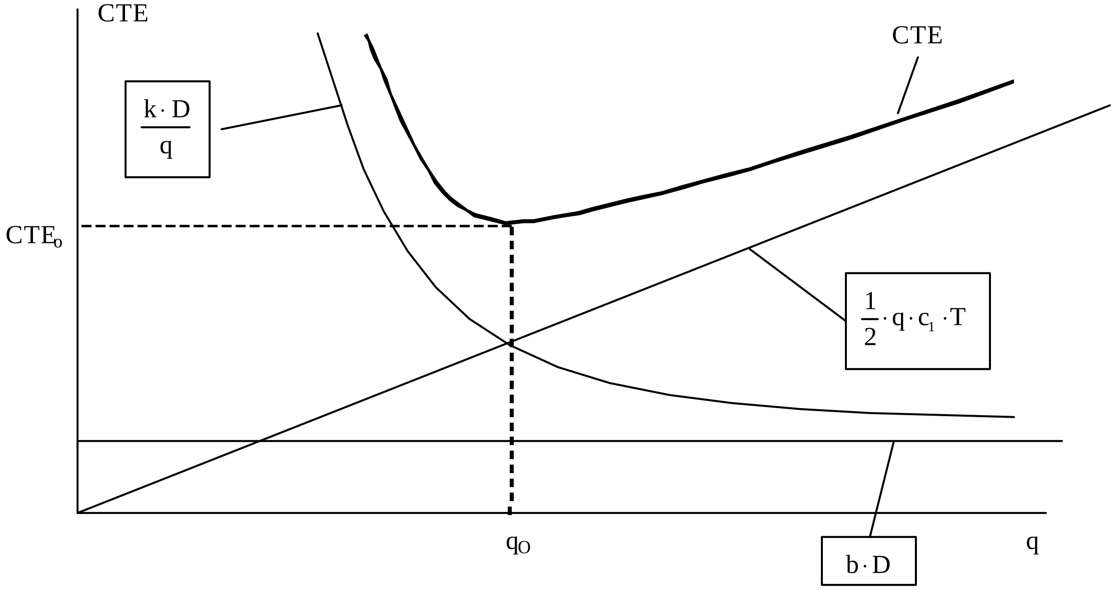


Figura 2

Para hallar la formulación analítica del Costo Total Esperado óptimo, se reemplaza "q_0" en la expresión (3) del CTE, como sigue:

$$CTE_o = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{\sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}}}$$

$$CTE_o = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot c_1 \cdot T + k \cdot D \cdot \sqrt{\frac{T \cdot c_1}{2 \cdot k \cdot D}}$$

Introduciendo en la raíz del segundo término el producto c_1 T y en la del tercer término el producto k D, y multiplicando por 2 en el numerador y en el denominador de esta última raíz:

$$CTE_o = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1}} \qquad \textbf{(5)}$$

Del mismo modo, a partir de la expresión (2), pueden determinarse los valores óptimos del intervalo "t" y del número de pedidos a efectuar en el período de referencia (por ejemplo, año):

$$t_o = \frac{T}{D} \cdot q_o = \frac{T}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{D \cdot c_1}} \qquad \textbf{(6)}$$

$$n_o = \frac{D}{q_o} = D \cdot \sqrt{\frac{T \cdot c_1}{2 \cdot k \cdot D}} = \sqrt{\frac{T \cdot c_1 \cdot D}{2 \cdot k}} \qquad \textbf{(7)}$$

Finalmente, podría determinarse el stock de reorden o punto de pedido, que es el nivel de stock que hace que, una vez alcanzado, se emita la orden de reposición (compra o fabricación).

En la Figura 3, se puede observar que, conocida la tasa de la demanda “d” y el *‘Lead Time’* (LT), el stock de pedido será:

$$S_R = LT \cdot d \qquad \textbf{(8)}$$

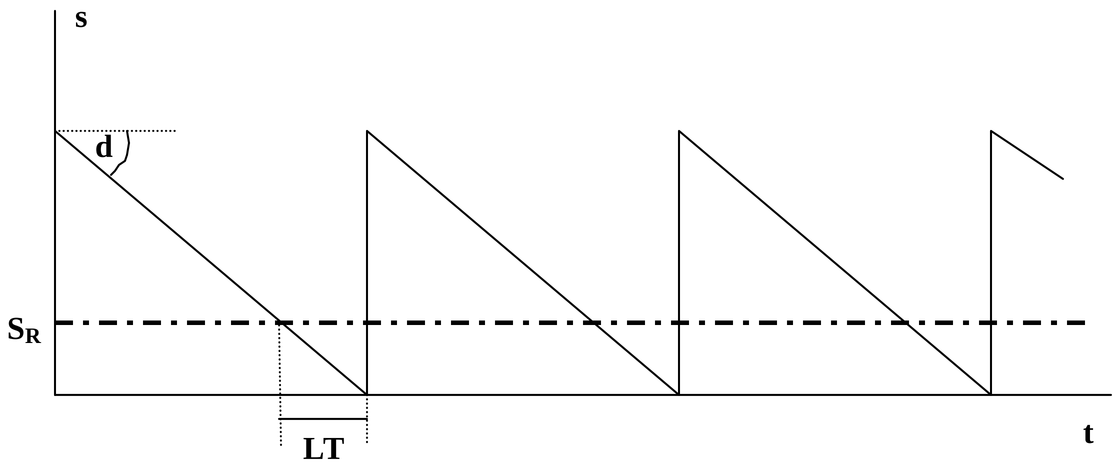


Figura 3

Este modelo matemático fue formulado inicialmente en el año 1915 por el ingeniero Ford Whitman Harris, de la empresa Westinghouse Corporation, en un artículo titulado *"How many parts to make at once”*, pero ha sido divulgado en los ámbitos académicos y científicos más adelante por R. H. Wilson, un reconocido consultor de empresas, quien agregó al modelo de Harris el concepto del punto de pedido.

2. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

El análisis de sensibilidad permite determinar el costo que se verifica por solicitar un lote diferente al de la solución óptima, permitiendo además establecer cuáles son los datos que deben determinarse con mayor exactitud. Por otra parte, el hecho de disponer de un intervalo de valores para la variable de decisión le da al tomador de decisiones cierta flexibilidad para trabajar.

Como simplificación, formularemos la hipótesis de que las variaciones en el costo de adquisición no producen desviaciones con respecto al lote óptimo. Es decir, mantendremos el supuesto de que el costo de adquisición unitario no depende del tamaño del lote, y agregaremos además el supuesto de que el costo de almacenamiento comprende solamente el costo operativo de mantenimiento:

$$c_1 = c'_1$$

En consecuencia, podremos tomar en este estudio el Costo Variable Total (ver Figura 4), que es el que incluye solo aquellos componentes de costo que sean función de la variable "q":

$$CVT = \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} \qquad \textbf{(9)}$$

La expresión del lote óptimo sigue siendo:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}}$$

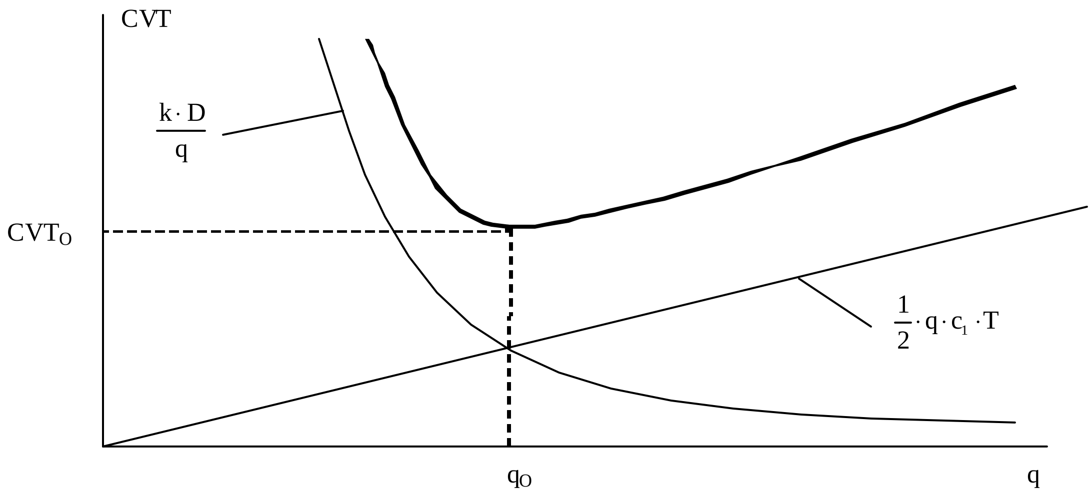


Figura 4

Reemplazando la expresión de Wilson en (9):

$$CVT_o = \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} \qquad \textbf{(10)}$$

Un lote "q" que constituya una desviación con respecto al lote óptimo genera un costo variable total CVT (ver Figura 5). Esta cantidad se puede expresar en función del lote óptimo a través de un coeficiente "á":

$$q = \alpha \cdot q_o \qquad \textbf{(11)}$$

El coeficiente "á" indica, entonces, el apartamiento respecto del lote óptimo, toma siempre un valor positivo y puede ser mayor, igual o menor a 1. Cuando es menor a uno, se está solicitando por defecto, cuando es igual a 1 se está solicitando el óptimo y, finalmente, cuando es mayor a 1 se está ordenando por exceso.

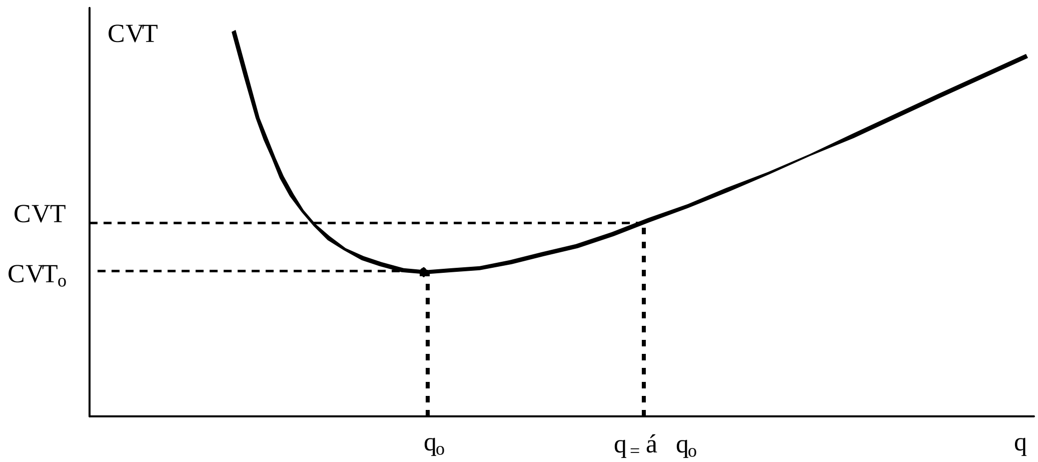


Figura 5

El hecho de solicitar una cantidad distinta a q_o implica que se incurre en un costo CVT mayor, por supuesto, que el CVT_o que se tendría solicitando el lote óptimo. Llamaremos "ë" al aumento relativo de costo; es decir, al cociente entre estos dos costos. Esta expresión, que se llama "relación de sensibilidad", es obviamente mayor o igual a uno:

$$\lambda = \frac{CVT}{CVT_o} \geq 1 \qquad \textbf{(12)}$$

Para expresar la relación de sensibilidad en función del coeficiente de desviación "á", se reemplaza (11) en (9), y se procede operando como sigue:

$$CVT(q) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot q_o \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{\alpha \cdot q_o} = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{\alpha} \cdot \sqrt{\frac{T \cdot c_1}{2 \cdot k \cdot D}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot c_1 \cdot T} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot c_1 \cdot T}$$

$$= \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot c_1 \cdot T} \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \right) = CVT_o \cdot \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2 \cdot \alpha} \right) = \frac{CVT_o}{2} \cdot \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$$

Luego, pasando CVT_o al otro lado de la ecuación, tendremos que la relación de sensibilidad "ë" es:

$$\lambda = \frac{CVT}{CVT_o} = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \qquad \textbf{(13)}$$

Puede calcularse también el error relativo “å”:

$$\varepsilon = \frac{CVT - CVT_o}{CVT_o} = \frac{CVT}{CVT_o} - 1 = \lambda - 1$$

Entonces:

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - 1} \qquad \textbf{(14)}$$

Para analizar la sensibilidad de este modelo, tomemos por ejemplo una variación de un 25% en exceso respecto del lote óptimo, es decir á = 1,25. Esto daría un error relativo de 2,5%. Si, en cambio, consideráramos una variación de un 25% pero en defecto respecto del óptimo (o sea á = 0,75), tendríamos un error de 4,17%.

Del ejemplo precedente pueden extraerse dos conclusiones importantes:

1. El modelo es poco sensible, ya que para grandes variaciones de la variable de decisión “q” el error en el costo variable total es bajo.

2. Hay mayor sensibilidad a izquierda que a derecha. Es decir que, a igual apartamiento respecto del lote óptimo, pidiendo por defecto se logra un mayor costo que pidiendo por exceso.

En la práctica no siempre se solicita el “q_o”. En muchas ocasiones existen limitaciones que obligan a solicitar cantidades diferentes a la óptima, tales como restricciones físicas de espacio, financieras, operativas, etc.

Otro motivo que lleva a apartarse del lote óptimo es la errónea estimación de los parámetros del modelo, especialmente los referidos a costos. Llamemos c_1, k y D a los valores reales de los parámetros, y c'_1, k' y D' a los valores estimados y con los cuales el operador del modelo trabaja para optimizar el proceso. Esto implica operar con una curva de costos distinta de la real y, en consecuencia, se pedirá una cantidad q_o' que produce una variación de costo

$$ÄCVT = CVT – CVT_o$$

En la Figura 6 se muestra esta variación.

Sobre la curva real, la cantidad “q'_o” es una cantidad q = á·q_o. Podemos expresar los valores de cálculo de los parámetros en función de los valores reales de los mismos, del siguiente modo:

$$c'_1 = \beta \cdot c_1 \qquad \textbf{(15)}$$

$$k' = \gamma \cdot k \qquad \textbf{(16)}$$

$$D' = \delta \cdot D \qquad \textbf{(17)}$$

en donde “â”, “ã” y “ä” son coeficientes de desviación con respecto a los valores reales del costo de almacenamiento, del costo de orden y de la demanda, respectivamente. Estos valores toman siempre un valor positivo.

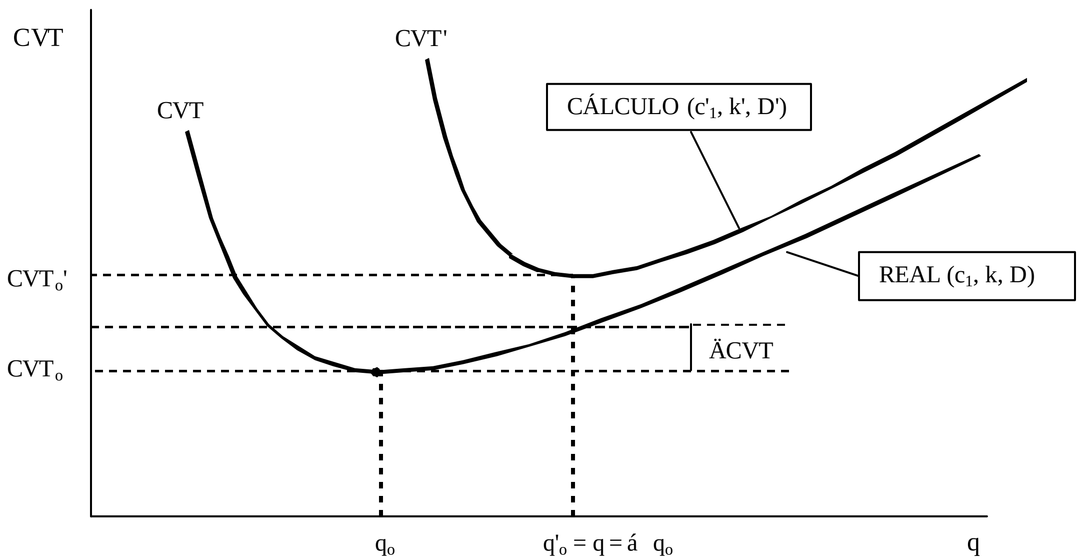


Figura 6

Podemos expresar la relación de sensibilidad en función de estos coeficientes, procediendo del siguiente modo:

$$q = q'_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k' \cdot D'}{T \cdot c_1'}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot k \cdot \delta \cdot D}{T \cdot \beta \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma \cdot \delta}{\beta}} = q_o \cdot \sqrt{\frac{\gamma \cdot \delta}{\beta}}$$

Pero, como por la relación (11):

$$q = \alpha \cdot q_o$$

tendremos que

$$\boxed{\alpha = \sqrt{\frac{\gamma \cdot \delta}{\beta}}} \qquad \textbf{(18)}$$

Reemplazando (18) en (13) y (14) tendremos que el aumento y el error relativos son:

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{\gamma \cdot \delta}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\gamma \cdot \delta}} \right)$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{\gamma \cdot \delta}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{\gamma \cdot \delta}} \right) - 1} \qquad \textbf{(19)}$$

Un concepto sumamente útil en la administración de stocks es el del “intervalo de operación”. Si la gerencia define un incremento tolerable de costo ÄCVT, o bien un error permisible “å”, se puede entonces determinar el intervalo de operación, es decir un rango entre un valor mínimo y un valor máximo del lote a solicitar dentro de los cuales no se excederá la variación de costo admitido (ver Figura 7). Para ello, a partir de la expresión (14) el valor de “á”, como sigue:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} - 1$$

De donde:

$$2 \cdot \alpha \cdot (\varepsilon + 1) = \alpha^2 + 1$$

Entonces:

$$\alpha^2 - (2 \cdot \varepsilon + 2) \cdot \alpha + 1 = 0$$

Despejando “á” de la función cuadrática:

$$\alpha_{1,2} = \frac{(2 \cdot \varepsilon + 2) \pm \sqrt{(2 \cdot \varepsilon + 2)^2 - 4}}{2}$$

y, simplificando:

$$\alpha_{1,2} = \varepsilon + 1 \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 2 \cdot \varepsilon}$$

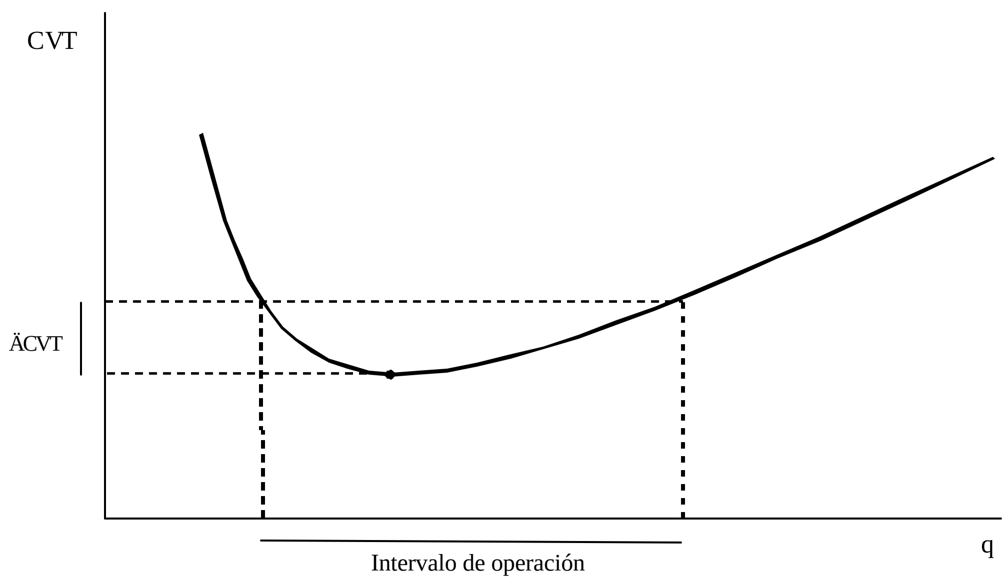


Figura 7

3. RESTRICCIONES

En los sistemas de stocks pueden existir restricciones físicas (tales como disponibilidad del lugar para el almacenamiento de los productos), operativas (por ejemplo, la capacidad de producción, el tiempo de preparación de los lotes, etc.), administrativas (el número de órdenes a emitir en un período de tiempo), financieras (el total de dinero promedio o máximo a inmovilizar), de condiciones de las variables (por ejemplo, variables discretas), etc. que limiten el tamaño del lote. Veremos a continuación algunos ejemplos de formulación:

Restricción de superficie:

Supongamos un caso de un producto no apilable, en donde se verifican todas las hipótesis mencionadas excepto en el hecho de que existe una restricción de superficie. Llamaremos:

s: superficie ocupada por cada unidad del artículo, y

S: superficie total disponible.

La condición de vínculo que se plantea es:

$$s \cdot q \leq S$$

En primer lugar se debe calcular el lote económico de adquisición:

$$\boxed{q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}}}$$

Si la restricción se satisface, obviamente este lote será el óptimo. Si en cambio no se cumple (ver Figura 8), habrá que pedir un valor q* que satisface la igualdad en la restricción impuesta al mínimo costo posible:

$$q^* = \frac{S}{s}$$

Restricción de monto máximo a inmovilizar:

La expresión matemática de una restricción de capital de dinero máximo de dinero a inmovilizar será:

$$b \cdot q \leq TM$$

en donde TM es el capital máximo admisible a inmovilizar. Nuevamente, se debería verificar en primer lugar si la cantidad óptima que surge de la expresión (4) de Wilson satisface la restricción. Si no lo hace, el lote q* a solicitar será obviamente:

$$q^* = \frac{TM}{b}$$

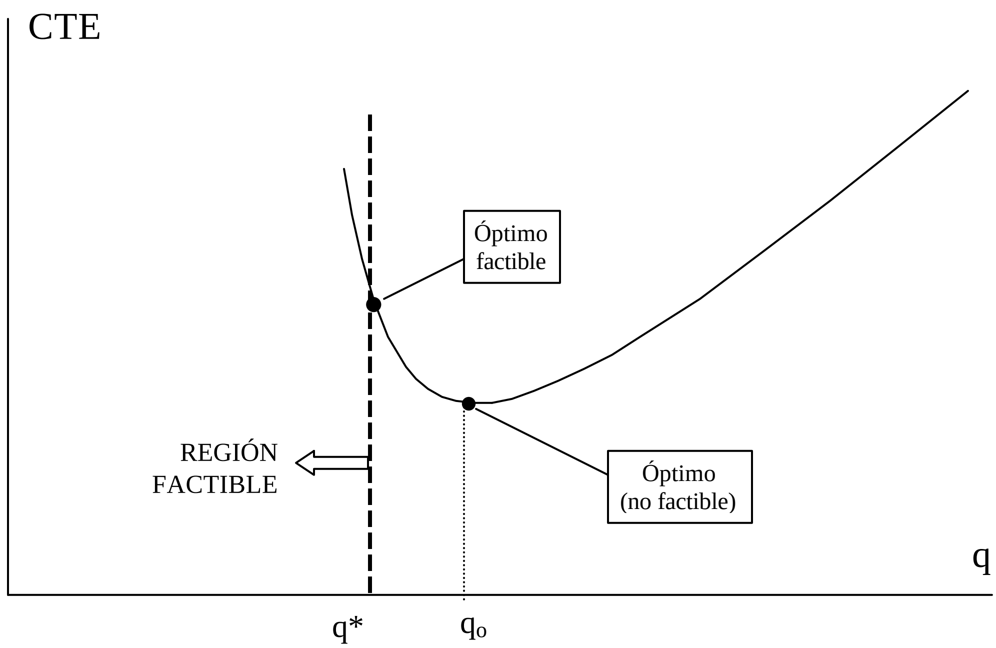


Figura 8

Aquí también el tamaño del lote está restringido superiormente, como el caso que se observa en la Figura 8.

Restricción de cantidad de órdenes a emitir:

Una restricción de cantidad de órdenes a emitir quedará expresada como sigue:

$$\frac{D}{q} \leq TO$$

en donde TO es el número máximo de órdenes "n" a emitir en el período de referencia. Si la restricción no se cumple, significa que habrá que solicitar una cantidad de unidades igual a

$$q^* = \frac{D}{TO}$$

En este caso, la variable "q" está limitada inferiormente, como se ve en la Figura 9.

Restricción de variable entera:

Un ejemplo de restricción por la naturaleza de las variables puede ser el caso en que se imponga la limitación de que al finalizar el período de referencia (por ejemplo un año) el stock deba ser cero. Esto implica que el número de ciclos (cantidad de órdenes a emitir en el año) sea un número entero.

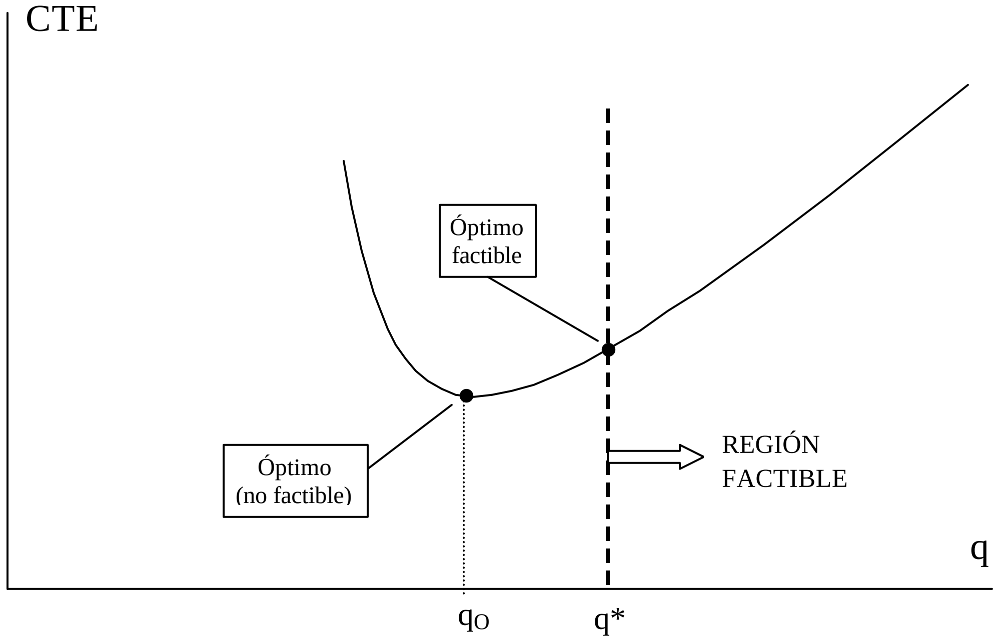


Figura 9

Aquí, una vez más, habrá que verificar si el número de ciclos óptimo obtenido, es decir

$$n_o = \frac{D}{q_o}$$

es directamente discreto. Si fuera así, obviamente se deberá solicitar ese lote óptimo. Sin embargo, normalmente surge que el número óptimo de pedidos a emitir en el año no es discreto, como sería el ejemplo mostrado en la Fig. 10, en donde “n” es igual a, por ejemplo, 3,25. Esta situación se da con una empresa en marcha, en donde la cantidad remanente al finalizar el período se utiliza el próximo.

Sin embargo, impuesta la restricción de que el stock final deba ser igual a cero, debido por ejemplo al hecho de que la empresa termina la actividad relacionada al producto en cuestión, se debería ordenar un número entero de veces. Es decir, si el resultado hubiera sido 3,25 habrá que ordenar o bien 3 veces (Figura 11) o bien 4 veces (Figura 12), lo que más convenga en términos de costo total esperado.

Si se pidiera 3 veces por año, el lote a solicitar debería ser:

$$q(3) = \frac{D}{3}$$

generando un costo total igual a:

$$CTE(3) = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q(3) \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q(3)}$$

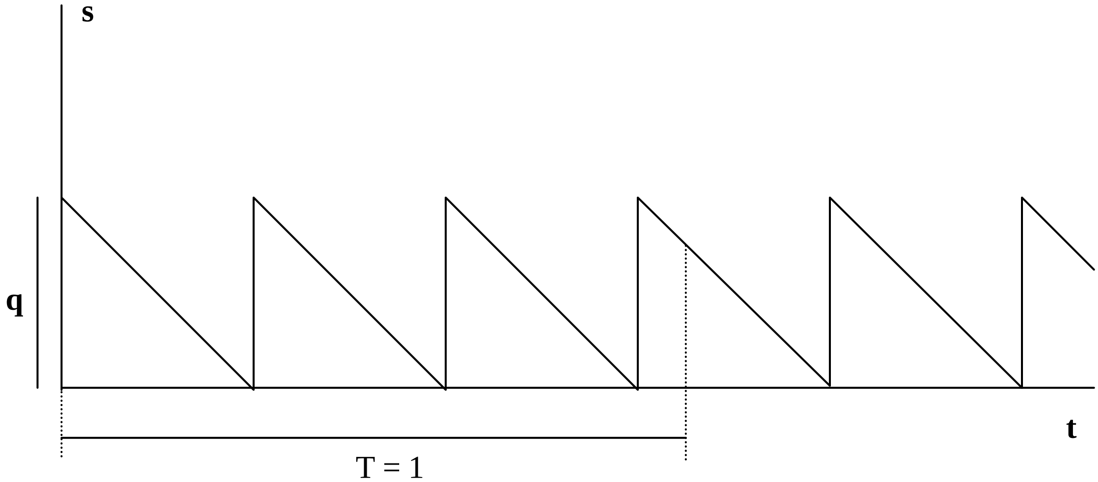


Figura 10

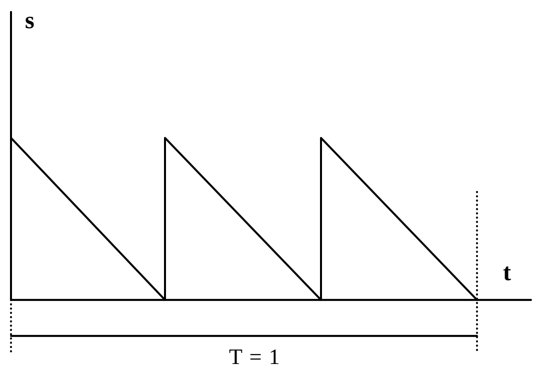


Figura 11

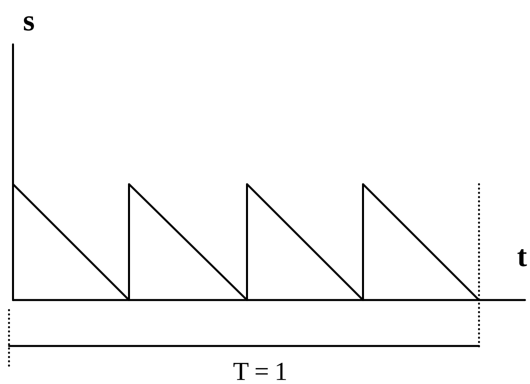


Figura 12

Por su parte, se pidiera 4 veces por año, el lote a solicitar sería:

$$q(4) = \frac{D}{4}$$

incurriéndose en un costo total esperado:

$$CTE(4) = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q(4) \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q(4)}$$

Se deberían comparar, entonces el CTE(3) con el CTE(4) y solicitar el lote que genere el menor costo. En la Figura 12, se muestra la curva de costos, que para el ejemplo sería discreta, y se indican los CTE para q(3) y q(4). Si la situación fuera la graficada, debería pedirse el producto tres veces por año.

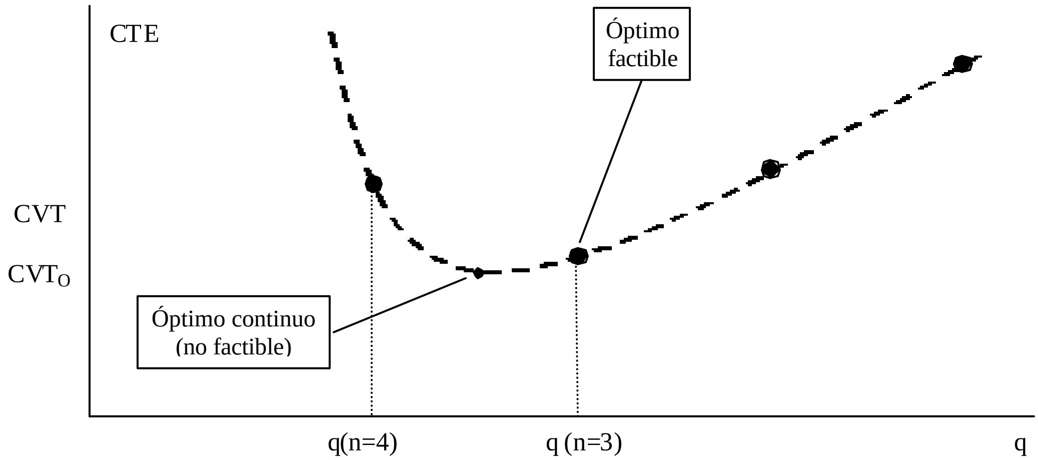


Figura 12

Ejemplo 2.1:

Una empresa distribuye un producto, para el cual se dispone de los siguientes datos:

- *Ventas: 10 Kg. por semana, en forma constante.*
- *Costo de orden: $10 por pedido.*
- *Tasa de inmovilización de capital: 25% por año.*
- *Costo operativo de mantenimiento: despreciable.*
- *Precio de compra: 100 $/kg.*

Considerando 50 semanas por año, determinar:

a. el tamaño económico de compra,
b. el intervalo de tiempo entre pedidos,
c. el costo total esperado anual,
d. el nivel de reorden, si se sabe que el plazo de entrega es de 0,5 semanas.

Solución:

En primer lugar se calcular los valores de los parámetros en unidades coherentes y, luego, se reemplaza en las expresiones de las variables a calcular.

$$D = 10\frac{\text{Kg}}{\text{sem}} \cdot 50\frac{\text{sem}}{\text{año}} = 500\frac{\text{Kg}}{\text{año}}$$

$$c_1 = 100\frac{\$}{\text{Kg}} \cdot 0{,}25\frac{1}{\text{año}} = 25\frac{\$}{\text{año} \cdot \text{Kg}}$$

El lote económico de adquisición es:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 500}{1 \cdot 25}} = \sqrt{\frac{10.000}{25}} = 20 \frac{\text{Kg}}{\text{pedido}}$$

El intervalo entre pedidos:

$$t_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{D \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10 \cdot 1}{500 \cdot 25}} = 0{,}04 \text{ año} \cong 2 \text{ sem}$$

El costo total esperado:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} = 100 \cdot 500 + \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 500 \cdot 1 \cdot 25} = 50.500 \frac{\$}{\text{año}}$$

Finalmente, el stock de reorden:

$$S_R = 0{,}5 \text{sem} \cdot 10 \frac{\text{Kg}}{\text{sem}} = 5 \text{Kg}$$

El planteo del modelo, utilizando el sistema de programación matemática LINGO, se indica a continuación:

```
MIN = CTE;
CTE = b * D + 0.5 * c1 * q * T + k * D /q;
n = D / q;
t1 = q / D * T;
Sr = LT * D / 50;
c1 = c1op + b * i;
b = 100;
i = 0.25;
D = 500;
c1op= 0.0;
k = 10;
LT = 0.5;
T=1;
END
```

En la primera parte se ha expuesto la formulación matemática del problema, y a continuación se han formulado los datos.

La solución del problema en el formato LINDO se indica a continuación. En la primera parte, se muestra el valor de los parámetros y de las variables correspondientes a la solución óptima y sus costos de oportunidad, mientras que en la segunda parte se muestran los valores de las variables débiles (es decir las que transforman inecuaciones en ecuaciones) correspondientes a cada restricción, con sus valores marginales. Obviamente, en este caso (en donde todas las restricciones son de igual) los valores de las variables débiles son siempre cero.

```
Local optimal solution found at step:            10
 Objective value:                              50500.00

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        50500.00           0.0000000
                              B        100.0000           0.0000000
                              D        500.0000           0.0000000
                             C1        25.00000           0.0000000
                              Q        20.00000           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        10.00000           0.0000000
```

```
            N        25.00000           0.0000000
           T1       0.0400000           0.0000000
           SR        5.000000           0.0000000
           LT       0.5000000           0.0000000
         C1OP       0.0000000           0.0000000
            I       0.2500000           0.0000000

          Row    Slack or Surplus      Dual Price
            1        50500.00           -1.000000
            2       0.0000000           -1.000000
            3       0.0000000           0.0000000
            4       0.0000000           0.0000000
            5       0.0000000           0.0000000
            6       0.0000000           -9.999999
            7       0.0000000           -502.5000
            8       0.0000000           -999.9999
            9       0.0000000           -100.5000
           10       0.0000000           -9.999999
           11       0.0000000           -25.00000
           12       0.0000000           0.0000000
           13       0.0000000           -250.0000
```

En la primera parte (*Variable*), la columna "*Value*" muestra los valores de todas las variables, esto es los valores obtenidos para las incógnitas (variables de salida) en la solución óptima y los valores fijados para los parámetros (variables de entrada). La columna "*Reduced Cost*" se refiere al incremento de CTE por el hecho de activar las variables en una unidad (no relevante en este ejemplo).

En la segunda sección del informe, el sistema enumera las restricciones (*Rows*) en el orden en que se han introducido. Así, la primera restricción se corresponde al CTE, la segunda al número de ciclos "n", etc.

Los valores marginales (*Dual Prices*) muestran la variación que se verificaría en la función objetivo (CTE) por el hecho de modificar en una unidad los términos independientes de las restricciones. Un valor marginal negativo para una restricción de igual en un problema de minimización significa el aumento en el funcional por cada unidad que se incrementara la restricción. Es entonces interesante observar que si se aumentara en una unidad la demanda ("D") (ecuación 9), el CTE aumentaría en $100,50. Del mismo modo, si el costo operativo de mantenimiento (ecuación 10) fuera de 1$ (en la actualidad es nulo), el costo total esperado anual se incrementaría en aproximadamente $10. Finalmente, si el costo de orden (ecuación 11) fuera de $11, en lugar de los $10 actuales, el CTE aumentará en $25.

<u>Ejemplo 2.2</u>:

Una empresa, que comercializa un cemento especial, tiene un depósito cerca de un puerto marítimo. El costo de cada tonelada de cemento es de $100 y se puede suponer un coto financiero del 18% anual. Se dispone, además, de los siguientes datos:

- ✓ *Costos operativos de almacenamiento: 7 $ por tonelada y por año.*
- ✓ *Costo administrativo de una orden de compra: $248,29.*
- ✓ *Costos de traslado de la carga del puerto a la planta: $900.*
- ✓ *Costos de inspección e ingreso a almacén: $100.*

La empresa tiene un solo cliente para este producto, que trabaja con un sistema JIT y que requiere que se le entreguen 200 toneladas diarias de cemento los 365 días del año.

Determinar el lote óptimo de compra, el Costo Total Esperado anual y cada cuánto tiempo se debe recibir la carga.

Solución:

$$D = 200\frac{\text{tn}}{\text{día}} \cdot 365\frac{\text{días}}{\text{año}} = 73.000\frac{\text{tn}}{\text{año}}$$

$$c_1 = 7\frac{\$}{\text{tn} \cdot \text{año}} + 100\frac{\$}{\text{tn}} \cdot 0{,}18\frac{1}{\text{año}} = 25\frac{\$}{\text{tn} \cdot \text{año}}$$

$$k = 248{,}29 + 900 + 100 = 1.248{,}29\frac{\$}{\text{orden}}$$

El lote económico de adquisición es, entonces:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.248{,}29 \cdot 73000}{1 \cdot 25}} = 2.700\frac{\text{tn}}{\text{orden}}$$

El costo total esperado:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} = 100 \cdot 73.000 + \sqrt{2 \cdot 1.248{,}290 \cdot 73.000 \cdot 1 \cdot 25} = 7.367.500\frac{\$}{\text{año}}$$

$$t_o = \frac{q_o}{D} \cdot T = \frac{2.700}{73.000}\text{año} = 0.0369863\,\text{año} \cong 13{,}5\,\text{días}$$

Formulado y resuelto por LINGO:

```
MIN = CTE;
CTE = b* D + 0.5 * c1 * q * T + k * D /q;
n = D / q;
t1 = q / D * T;
c1 = c1op + b * i;
b = 100;
i = 0.18;
D = 73000;
c1op= 7;
k = 1248.29;
T=1;
END
```

```
Local optimal solution found at step:             57
 Objective value:                           7367500.

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        7367500.           0.0000000
                              B        100.0000           0.0000000
                              D        73000.00           0.0000000
                             C1        25.00000           0.0000000
                              Q        2700.003           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        1248.290           0.0000000
                              N        27.03701           0.0000000
                             T1       0.0369863           0.0000000
                             LT        1.234568           0.0000000
                           C1OP        7.000000           0.0000000
                              I       0.1800000           0.0000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1       7367500.0           -1.000000
                              2       0.0000000           -1.000000
```

3	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	-1350.001
7	0.0000000	-73243.00

Ejemplo 2.3:

Una empresa de computación trabaja con el criterio óptimo de compra para una de sus plaquetas de comunicación. El modelo de computadora TURBO786 utiliza 2 de estas plaquetas, mientras los modelos AXIS 886 e YNOS 996 utilizan 4 y 8 unidades cada uno, respectivamente.

El costo de adquisición de la plaqueta es de $96, y el costo unitario anual de mantenimiento de cada unidad es la tercera parte de su costo de adquisición.

La demanda anual de cada una de las computadoras es la siguiente:

TURBO786: 250 unidades

AXIS 886: 100 unidades

YNOS 996: 10 unidades.

Adicionalmente, se requieren 20 plaquetas por año para el sector de Mantenimiento Técnico.

El costo total esperado para esta plaqueta es de $100.000.

El proveedor de este componente, por razones de programación de la producción, estaría dispuesto a hacer una rebaja de $2 por unidad si se redujera a la mitad el número de pedidos anuales que actualmente efectúa la empresa. Determinar si conviene o no aceptar el descuento.

Solución:

Los parámetros son:

$b = 96$ \$/unidad

$D = 2 \quad 250 + 4 \quad 100 + 8 \quad 10 + 20 = 1.000$ unidades

$c_1 = 96 / 3 = 32$ \$/(unidad   año)

Dado que se trabaja con un criterio de optimización, el costo total esperado actual es el mínimo:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} \quad = 96 \cdot 1.000 + \sqrt{2 \cdot k \cdot 1.000 \cdot 1 \cdot 32} = 100.000$$

Despejando:

$$k = 250$$

Luego, el tamaño de lote actual es:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 250 \cdot 1.000}{1 \cdot 32}} = 125$$

El número de órdenes que se piden es:

$$n_o = \frac{D}{q_o} = \frac{1.000}{125} = 8$$

La propuesta del proveedor consiste en reducir a 4 el número de pedidos, por lo que el lote de compra debería ser de:

$$q = \frac{D}{4} = \frac{1.000}{4} = 250$$

El Costo Total Esperado con la propuesta del proveedor será entonces:

$$CTE' = b' \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot q \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} = 94 \cdot 1.000 + \frac{1}{2} \cdot \frac{94}{3} \cdot 250 \cdot 1 + 250 \cdot \frac{1.000}{250} = 98.916{,}67$$

En consecuencia, conviene aceptar la propuesta.

Ejemplo 2.4:

Una terminal automotriz produce dos modelos de automóviles (SP y GR) que utilizan el mismo tipo de neumático. Esta empresa, que opera con una política óptima de inventarios para la administración del stock de neumáticos, dispone de los siguientes datos:

- *La producción de los automóviles puede considerarse constante, estimándose en 40 unidades mensuales para el modelo SP y 30 unidades para el modelo GR.*
- *El precio de cada neumático es de $80.*
- *El costo de cada orden de compra es de $23.*
- *El costo operativo de mantenimiento anual es de $2 por neumático.*
- *La tasa de inmovilización de capital es del 10% anual.*

El proveedor de neumáticos está dispuesto a ofrecer un descuento si la empresa reduce la cantidad de pedidos a uno por mes. Determinar cuál debería ser el descuento mínimo que deberá ofrecer el proveedor a fin de que convenga aceptar la propuesta.

Solución:

Los valores de los parámetros son:

$$D = (40 + 30) \cdot 5 \cdot 12 = 4.200 \ \frac{\text{neum}}{\text{año}}$$

$$b = 80 \ \frac{\$}{\text{neum}}$$

$$k = 23 \ \frac{\$}{\text{pedido}}$$

$$c_1 = c_1^{'} + b \cdot i = 2 + 80 \cdot 0{,}1 = 10 \ \frac{\$}{\text{año} \cdot \text{neum}}$$

Actualmente la empresa opera con una política óptima de inventarios, es decir está solicitando:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \cdot 4.200}{1 \cdot 10}} = 139 \ \frac{\text{neum}}{\text{pedido}}$$

Es decir, se están realizando

$$n_o = \frac{D}{q_o} = \frac{4.200}{139} = 30{,}22 \ \frac{\text{pedidos}}{\text{año}}$$

siendo el Costo Total Esperado:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} = 80 \cdot 4.200 + \sqrt{2 \cdot 23 \cdot 4.200 \cdot 1 \cdot 10} = 337.389{,}96 \ \frac{\$}{\text{año}}$$

Si, en cambio, se aceptara la propuesta habría que solicitar 12 veces al año la siguiente cantidad de neumáticos:

$$q = \frac{D}{n} = \frac{4.200}{12} = 350 \ \frac{\text{neum}}{\text{pedido}}$$

Llamaremos b' al precio máximo de compra que se debería pagar al proveedor, si se acepta la oferta. Para que sea conveniente la propuesta, el costo actual debe ser mayor al que se tendría si se pidieran lotes de 350 unidades; es decir:

$$337.389{,}96 \geq b' \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(c'_1 + b' \cdot i\right) \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} = b' \cdot 4.200 + \frac{1}{2} \cdot 350 \cdot \left(2 + b' \cdot 0{,}1\right) \cdot 1 + 23 \cdot \frac{4.200}{350}$$

Despejando:

$$79{,}85 \geq b'$$

Esto significa que el descuento del proveedor debe ser:

$$79{,}85 \geq b \cdot \left(1 - dto\right) = 80 \cdot \left(1 - dto\right) \qquad \Rightarrow \qquad dto \geq 0{,}19\%$$

<u>Ejemplo 2.5</u>:

Una empresa que comercializa juguetes sabe que el costo de solicitar la muñeca BELU es de $50 y que le costo de mantenerla en stock es del 10% sobre el precio de compra.

Sabiendo que la demanda de las muñecas BELU es de 20.000 unidades por año, que actualmente se opera con el criterio de lote óptimo y que se emiten 5 pedidos por año, determinar si conviene aceptar un descuento de un 5% que ofrecería el proveedor si se compraran estas muñecas trimestralmente.

Solución:

Debido a que actualmente se está administrando con el criterio de lote óptimo, el tamaño del mismo es:

$$n_o = \frac{D}{q_o} = \frac{20.000}{5} = 4.000$$

Entonces, se puede determinar el costo de adquisición actual:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot (c'_1 + b \cdot i)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 20.000}{1 \cdot 0{,}1 \cdot b}} = 4.000$$

Despejando:

$b = 1{,}25$

y, en consecuencia:

$c_1 = 0{,}125$

El valor del Costo Total Esperado es, entonces:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot (c'_1 + b \cdot i)} = 1{,}25 \cdot 20.000 + \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 20.000 \cdot 0{,}125} = 25.500$$

Si, en cambio, se acepta la propuesta del proveedor (es decir, comprar 4 veces por año) habría que solicitar la siguiente cantidad de muñecas:

$$q = \frac{D}{n} = \frac{20.000}{4} = 5.000$$

El costo de compra y, como consecuencia, el costo de almacenamiento sería:

$$b' = 0{,}95 \cdot 1{,}25 = 1{,}1875$$

$$c'_1 = 0{,}1 \cdot b' = 0{,}11875$$

En tal condición, el valor del Costo Total Esperado sería:

$$CTE' = b' \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c'_1 \cdot q \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} = 1{,}1875 \cdot 20.000 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}11875 \cdot 5.000 \cdot 1 + 50 \cdot \frac{20.000}{5.000}$$

$$= 24.246{,}88$$

Por lo tanto, convendría aceptar el descuento y solicitar las 5.000 muñecas cada cuatro meses.

<u>Ejemplo 2.6</u>:

Considerar el Ejemplo 2.1 para responder los siguientes interrogantes:

a) Suponiendo que se admite un incremento de costo total anual de 0,5% respecto del óptimo, determinar entre qué valores de lote se puede operar para no excederse de dicho aumento permisible.

b) Si no se quiere inmovilizar en promedio más de $ 900 en stocks, ¿cuál será el impacto que esta decisión produce sobre el Costo Total Esperado?

c) Si hubiera, en cambio, una restricción de no emitir más de 20 pedidos en el año, calcular el nuevo costo total.

Solución:

a) Un incremento de un 0,5 % en el costo total respecto del óptimo implica:

$$\frac{CTE}{CTE_o} = 1{,}005$$

Luego:

$$CTE = 1{,}005 \cdot CTE_o = 1{,}005 \cdot 50.500 = 50.752{,}5$$

Como la variación de costo total esperado es de 252,5 $/año, tendremos que:

$$\Delta CTE = CTE - CTE_o = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} - CTE_o = 252{,}5$$

Reemplazando:

$$100 \cdot 500 + \frac{1}{2} \cdot q \cdot 25 \cdot 1 + 10 \cdot \frac{500}{q} - b \cdot D - 50.500 = 252{,}5$$

Despejando "q":

$$12{,}5 \cdot q^2 - 752{,}5 \cdot q + 5.000 = 0$$

Resolviendo, tendremos que:

$$q_1 \cong 7{,}61 \text{ Kg}$$

$$q_2 \cong 52{,}60 \text{ Kg}$$

Es decir, siempre que 7,61 q 52,60 el incremento de costo no será mayor al 0,5%.

b) El total de dinero inmovilizado es el producto

$b \cdot q$

y se da al principio de cada ciclo. Al finalizar el ciclo, el capital inmovilizado es cero. En consecuencia, tendremos que el promedio será:

$$TI = \frac{b \cdot q}{2}$$

Dado que este valor no debe ser superior a \$500, en promedio, será:

$$TI = \frac{100 \cdot q}{2} \leq 500 \qquad \Rightarrow \qquad q \leq 10 \ \text{Kg/orden}$$

Luego, el CTE por pedir 10 Kg será:

$$CTE(10) = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} = 100 \cdot 500 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 25 \cdot 1 + 10 \cdot \frac{500}{10} = 50.625$$

Es decir un incremento de costo total esperado de

$$\Delta CTE = 50.625 - 50.500 = 125$$

c) La restricción impuesta es

$$n = \frac{D}{q} \leq 20$$

lo que implica que q 25

El CTE por solicitar 25 Kg. será, entonces:

$$CTE(25) = 100 \cdot 500 + \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 25 \cdot 1 + 10 \cdot \frac{500}{25} = 50.512{,}5$$

Ejemplo 2.7:

Una empresa fabricante de fotocopiadoras está llevando un control de existencias en el almacén de un componente muy especial. Las características del mismo son las siguientes:

- ✓ *Reaprovisionamiento: instantáneo.*
- ✓ *Demanda: 200 unidades por año.*
- ✓ *Costo de setup: \$1.200.*
- ✓ *Costo de mantenimiento: se sabe que está comprendido entre \$35 y \$55 por año por cada componente.*

Tomando como valor de cálculo para el costo de mantenimiento anual un valor igual a 40\$/unidad, calcular:

a) *el lote óptimo de fabricación,*

b) *la cantidad de órdenes de fabricación a emitir por año,*

c) *el lote óptimo si se impone la condición de que al cabo de un año el stock remanente sea nulo, y*

d) *el incremento porcentual de costo que se tendría si se solicitara un 30% más que el lote calculado en el punto a).*

Solución:

Los valores de los parámetros son:

$$D = 200 \ \frac{u}{año}$$

$$k = 1200 \ \frac{\$}{pedido}$$

$$c_1 = 40 \ \frac{\$}{año \cdot u}$$

a) Cálculo de lote óptimo:

$$q_O = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.200 \cdot 200}{1 \cdot 40}} = 109{,}54 \ \frac{u}{pedido}$$

Como la variable "q" tiene que ser discreta, se puede redondear al entero próximo superior ya que el lote óptimo calculado tiene un decimal mayor a 0,5. Esto es debido al menor costo de desvío cuando a igualdad de desvío, se pide por exceso en lugar de hacerlo por defecto. Es decir, el lote óptimo para este ejemplo es de 110 unidades.

Si el valor calculado del lote óptimo hubiera dado un valor con un decimal menor a 0,5 se debería haber calculado el CTE para el "q" entero próximo inferior (109) y el CTE para el "q" entero superior (110), y seleccionar como óptimo al lote correspondiente al menor costo total. Sin embargo, el error que se cometería por redondear directamente al entero may cercano -es decir al próximo inferior- en el caso de que el óptimo fuera en realidad el entero próximo superior, es prácticamente despreciable por tratarse de una cantidad grande de unidades. Si, en cambio, estuviéramos trabajando con pocas unidades, seria siempre necesario calcular los CTE para cada entero adyacente, como se indicó más arriba.

b) Cantidad de órdenes anuales:

$$n_o = \frac{D}{q_o} = \frac{200}{110} \cong 1{,}82$$

El valor de "n" no debe redondearse nunca a enteros. Observar que si se redondeara a 2 pedidos por año, implicaría que se piden 100 unidades y no las 110 que se corresponden con el óptimo. Esto es así, ya que estamos suponiendo que la empresa está en marcha y seguirá funcionando al finalizar el año.

c) La restricción de que el stock remanente al finalizar el año sea nulo (esto podría darse si, por ejemplo, la empresa deja de funcionar al cabo de un año) implica que "n" sea discreta; esto es, exactamente uno o dos pedidos por año. En consecuencia deben calcularse los costos totales esperados para las cantidades correspondientes.

- Para n = 2 tendremos:

$$\frac{D}{q} = 2 \qquad \Rightarrow \qquad q = \frac{200}{2} = 100$$

y, por lo tanto:

$$CTE(100) = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 40 \cdot 1 + 1.200 \cdot \frac{200}{100} = 4.400\ \$/\text{año}$$

- Para n = 1:

$$\frac{D}{q} = 1 \Rightarrow \qquad q = \frac{200}{1} = 200$$

y, por lo tanto:

$$CTE(200) = \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 40 \cdot 1 + 1.200 \cdot \frac{200}{200} = 5.200\ \$/\text{año}$$

Luego, en este caso, conviene hacer dos pedidos de 100 unidades por año.

d) Aumento porcentual solicitando un 30% más del óptimo: Esto implica que "α" es igual a 1,30. Luego:

$$\lambda = \frac{CVT}{CVT_O} = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1{,}30 + \frac{1}{1{,}30} \right) = 1{,}0346$$

Significa un incremento de un 3,46%.

<u>Ejemplo 2.8</u>:

Para el problema del ejemplo 2.7, habiendo considerado para el cálculo que el valor del costo de almacenamiento es de $40 por año:

1. *Determinar el error que se cometería si el costo de mantenimiento real fuera 45 $/año por cada unidad.*
2. *Ídem, si sucediera lo más desfavorable.*
3. *Establecer cuál debería ser el valor del costo de mantenimiento para utilizar en el cálculo del lote óptimo a fin de que el error que se cometa en el caso más desfavorable sea mínimo.*

Solución:

1) Los parámetros son los siguientes:

ã = 0, debido a que no hay variación en la estimación del costo de orden “k”

ä = 0, debido a que no hay variación en la estimación de la demanda “D”

c'_1= 40, es el valor utilizado para realizar el cálculo del costo de almacenamiento

c_1 = 45, valor real del costo de almacenamiento.

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{\beta}} + \sqrt{\beta} \right) - 1$$

Dado que:

$$\beta = \frac{c'_1}{c_1} = \frac{40}{45} = 0{,}8\widehat{8}$$

tendremos:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{0{,}8\widehat{8}}} + \sqrt{0{,}8\widehat{8}} \right) - 1 = 0{,}0017$$

Es decir, se cometería un error de 0,17%.

2) El caso más desfavorable se daría, o bien si el costo de almacenamiento real fuera igual a 35, o bien igual a 55.

En el primer caso, es decir cuando c_1 = 35, tendremos:

$$\beta_1 = \frac{c'_1}{c_1} = \frac{40}{35} = 1{,}1429$$

y, por lo tanto:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{1{,}1429}} + \sqrt{1{,}1429} \right) - 1 = 0{,}0022$$

es decir un error de 0,22%.

En el segundo caso, o sea cuando c_1 = 55, tendremos:

$$\hat{a}_2 = \frac{c'_1}{c_1} = \frac{40}{55} = 0{,}7272$$

y, por lo tanto:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{0{,}7272}}+\sqrt{0{,}7272}\right)-1 = 0{,}0127$$

En este caso el error sería igual a 1,27%.

En consecuencia, lo peor que podría pasar es la segunda situación (error de 1,27%), es decir que el valor real de c_1 fuera 55 \$/u.año.

3. Si el valor real del costo de mantenimiento c_1 fuera igual 35 (una de las situaciones más desfavorables), la expresión de â sería:

$$\beta_1 = \frac{c'_1}{35}$$

y la del error:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{\beta_1}}+\sqrt{\beta_1}\right)-1$$

Si, en cambio, el valor real del costo de mantenimiento c_1 fuera igual 55 (la otra situación más desfavorable), la expresión de â sería:

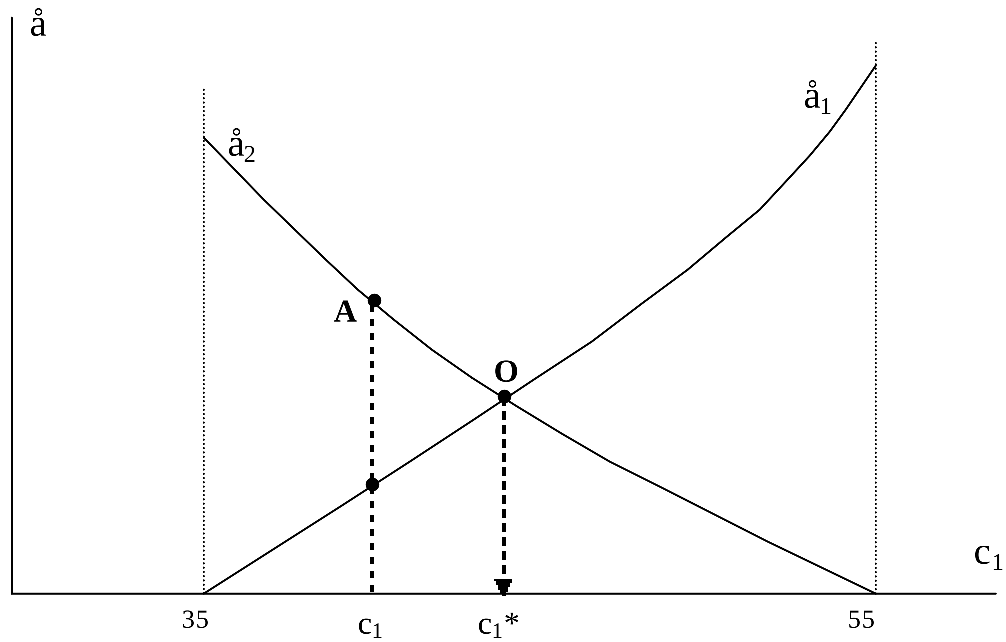
$$\beta_2 = \frac{c'_1}{55}$$

y la del error:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{\beta_2}}+\sqrt{\beta_2}\right)-1$$

Las curvas de error å$_1$ y å$_2$ se grafican en la figura siguiente. Para un valor cualquiera de c_1, tendremos que el error que se comete en el caso más desfavorable es el mayor valor entre å$_1$ y å$_2$ (punto A). Haciendo extensivo este concepto para todos los valores posibles, tendremos que dicho error está dado por los mínimos de los máximos errores. En consecuencia, el mínimo error para la situación más desfavorable se tendrá cuando å$_1$ es igual a å$_2$ (punto O). Luego:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{\beta_1}}+\sqrt{\beta_1}\right)-1 = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{\beta_2}}+\sqrt{\beta_2}\right)-1$$



Elevando al cuadrado ambas expresiones y simplificando:

$$\beta_1 + \frac{1}{\beta_1} + 2 = \beta_2 + \frac{1}{\beta_2} + 2$$

Operando:

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{1}{\beta_2} - \frac{1}{\beta_1}$$

$$\beta_1 - \beta_2 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 \cdot \beta_2}$$

$$\beta_1 \cdot \beta_2 = 1$$

Reemplazando:

$$\frac{c'_1}{35} \cdot \frac{c'_1}{55} = 1$$

Despejando c'_1:

$$c'_1 = \sqrt{35 \cdot 35} = 43{,}87$$

Es decir, el valor a utilizar para los cálculos deberá ser la media geométrica de los límites entre los que puede variar el parámetro.

Ejemplo 2.9:

La compañía RAM adquirirá de un nuevo proveedor un componente que va a utilizar para la producción de uno de sus sistemas.

Se sabe que el precio de adquisición de cada componente es de \$6,25, que la demanda anual (relativamente constante) puede variar entre 80.000 y 120.000 sistemas, que el costo de cada pedido es de \$25 y que la política de costo de inventarios que utiliza RAM es cargar el 20% del costo de compra como costo anual de mantenimiento.

El gerente de Marketing de RAM estima que el valor más probable de venta estará alrededor de 100.000 unidades por año, por lo que se decidió tomar ese valor a los efectos de definir la política de inventario.

1) Asumiendo que el costo operativo de mantenimiento es nulo, determinar:

a. la cantidad óptima a solicitar en cada pedido a fin de minimizar el costo total.

b. el costo total asociado a ese lote óptimo

c. el número de pedidos que habrá que hacer en el año.

2) Suponiendo que RAM opera 50 semanas por año y 6 días a la semana, y sabiendo que el plazo de entrega es de 4 días, calcular el punto de reorden asociado con la política óptima.

3) Calcular el máximo error porcentual en el costo variable total que se puede cometer como consecuencia de la estimación de la demanda.

4) Si la empresa RAM decidiera efectuar 25 pedidos en el año, determinar el impacto que esa polìtica tendría en el costo.

Solución:

$$D = 100.000 \ \frac{\text{un.}}{\text{año}}$$

$$k = 25 \ \frac{\$}{\text{pedido}}$$

$$LT = 4 \text{ días}$$

$$b = 6{,}25 \ \frac{\$}{\text{un.}}$$

$$c_1 = 6{,}25 \cdot 0{,}2 = 1{,}25 \ \frac{\$}{\text{año} \cdot \text{un.}}$$

1) El lote económico de adquisición es:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 100.000}{1 \cdot 1{,}25}} = 2.000 \frac{\text{un.}}{\text{pedido}}$$

El costo total esperado:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} = 6{,}25 \cdot 100.000 + \sqrt{2 \cdot 25 \cdot 100.000 \cdot 1 \cdot 1{,}25} = 627.500 \frac{\$}{\text{año}}$$

El intervalo entre pedidos (expresado en año):

$$t_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{D \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 1}{100.000 \cdot 1{,}25}} = 0{,}02 \text{ año}$$

2) El stock de reorden:

$$S_R = LT \cdot d = 4 \text{ días} \cdot 100.000 \frac{u}{\text{año}} \cdot \frac{1}{300} \frac{\text{año}}{\text{días}} = 1.333{,}3\widehat{3} \text{ un.}$$

3) El máximo error porcentual en el CVT por el error en la estimación de la demanda:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) - 1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\delta} + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \right) - 1$$

Siendo D' el valor de cálculo de la demanda, tendremos los siguientes valores de δ como casos más desfavorables:

$$100.000 = \delta_1 \cdot 80.000 \qquad \Rightarrow \qquad \delta_1 = \frac{100.000}{80.000}$$

$$100.000 = \delta_2 \cdot 120.000 \qquad \Rightarrow \qquad \delta_2 = \frac{100.000}{120.000}$$

Llamando ε_1 al error que se cometería en el caso de que la demanda real fuera igual a 80.000:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\delta_1} + \frac{1}{\sqrt{\delta_1}} \right) - 1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{100.000}{80.000}} + \sqrt{\frac{80.000}{100.000}} \right) - 1 = 0{,}62\%$$

y ε_2 al error que se cometería en el caso de que la demanda real fuera igual a 120.000:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\delta_2} + \frac{1}{\sqrt{\delta_2}} \right) - 1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{100.000}{120.000}} + \sqrt{\frac{120.000}{100.000}} \right) - 1 = 0{,}41\%$$

Luego el error que se cometería sería 0,62% (es decir, el más desfavorable de los dos casos más desfavorables).

4) Finalmente, efectuar 25 pedidos en el año implica que el lote a adquirir sea:

$$q = \frac{100.000}{25} = 4.000 \text{ un.}$$

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} = 6{,}25 \cdot 100.000 + \frac{1}{2} \cdot 4.000 \cdot 1{,}25 \cdot 1 + 25 \cdot \frac{100.000}{4.000} = 628.125 \frac{\$}{\text{año}}$$

Luego:

$$\Delta CTE = 625 \frac{\$}{\text{año}}$$

Ejemplo 2.10:

Una empresa está pidiendo un lote que implica un costo adicional del 2% con respecto del costo óptimo. Calcular el porcentaje de desviación de la cantidad pedida con respecto a la óptima.

Solución:

La relación de sensibilidad es igual a 1,02. Entonces:

$$\lambda = \frac{CVT}{CVT_o} = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) = 1{,}02$$

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2{,}04 \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} = 2{,}04$$

Entonces:

$$\alpha^2 - 2{,}04 \cdot \alpha + 1 = 0$$

Despejando á de la función cuadrática:

$$\alpha_{1,2} = \frac{2{,}04 \pm \sqrt{2{,}04^2 - 4}}{2}$$

Luego:

$$\alpha_1 = 1{,}22$$

$$\alpha_2 = 0{,}82$$

Es decir, se está solicitando un lote que es, o bien un 22 % mayor, o un 18% menor que el óptimo.

Ejemplo 2.11:

Un producto, cuya demanda anual es de 18.000 unidades, se adquiere a un costo unitario de $1.000. El costo de almacenamiento por unidad y por año es de $1.200, mientras que el costo de ordenar una compra es de $400.000.

1) Calcular el lote económico de compra, el Costo Total Esperado anual y el número de pedidos a emitir por año.

2) Si el lead time de compra es de un mes,¿cuál deberá ser el stock de reorden?.

3) Determinar el incremento de costo total que se verificaría si existiera una restricción de capital a inmovilizar promedio de 1.500.000.

4) Si se impone la restricción de que al finalizar el año no debe quedar stock remanente,¿cuál sería el lote de compra óptimo y cuál el Costo Total Esperado?.

Solución:

1) Siendo los parámetros del problema:

b = 1.000;

D = 18.000;

c_1 = 1.200;

k = 400.000;

LT = 0,0833;

El lote óptimo será:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 400.000 \cdot 18.000}{1 \cdot 1.200}} \cong 3.464,10$$

y, el número de órdenes que se piden es:

$$n_o = \frac{D}{q_o} = \frac{18.000}{3.464,10} \cong 5,20$$

Por su parte, el costo total esperado es:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} = 1000 \cdot 18000 + \sqrt{2 \cdot 40.0000 \cdot 18.000 \cdot 1 \cdot 1.200} = 22.156.922$$

2) La expresión del Stock de reorden será:

$$S_R = LT \cdot d = 1 \cdot \frac{18.000}{12} = 1.500$$

Formulando y resolviendo con LINGO para resolver los puntos 1) y 2), tendremos

```
MIN = CTE ;

CTE = b*D + 0.5*q*c1*T + k*D/q;
TIP = 0.5*q* b;
n = D/ ;
SR = LT*D;

T = 1;
b = 1000;
D = 18000;
c1 = 1200;
k = 400000;
LT = 1/12;
END
```

```
Local optimal solution found at step:            76
 Objective value:                          0.2215692E+08

                     Variable           Value        Reduced Cost
                          CTE       0.2215692E+08       0.0000000
                            B        1000.000           0.0000000
                            D        18000.00           0.0000000
                            Q        3464.101           0.0000000
                           C1        1200.000           0.0000000
                            T        1.000000           0.0000000
                            K        400000.0           0.0000000
                          TIP        1732051.           0.0000000
                            N        5.196153           0.0000000
                           SR        1500.000           0.0000000
                           LT       0.8333333E-01       0.0000000

                          Row    Slack or Surplus      Dual Price
                            1       0.2215692E+08      -1.000000
                            2       0.0000000          -1.000000
                            3       0.0000000           0.0000000
                            4       0.0000000           0.0000000
                            5       0.0000000           0.0000000
                            6       0.0000000          -2078461.
                            7       0.0000000          -18000.00
                            8       0.0000000          -1115.470
                            9       0.0000000          -1732.051
                           10       0.0000000          -5.196152
                           11       0.0000000           0.0000000
```

3) Si se impone la restricción de capital inmovilizado promedio

$$TIP = \frac{1}{2} \cdot b \cdot q = \frac{1}{2} 1.000 \cdot q = 1.500.000$$

implica que se debe solicitar una cantidad q = 3.000 unidades. En este caso el CTE será:

$$CTE' = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot q \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} \quad = 1.000 \cdot 18.000 + \frac{1}{2} \cdot 1.200 \cdot 3.000 \cdot 1 + 400.000 \cdot \frac{18.000}{3.000} =$$
$$= 22.200.000$$

Es decir, la diferencia de CTE será de, aproximadamente, $43.078 anuales.

Con el sistema LINGO, introduciendo la restricción TIP ≤ 1.500.000, tendremos la solución siguiente.

```
Local optimal solution found at step:            28
 Objective value:                          0.2220000E+08
```

```
Variable          Value        Reduced Cost
     CTE       0.2220000E+08       0.0000000
       B        1000.000           0.0000000
       D        18000.00           0.0000000
       Q        3000.000           0.0000000
      C1        1200.000           0.0000000
       T        1.000000           0.0000000
       K        400000.0           0.0000000
     TIP        1500000.           0.0000000
       N        6.000000           0.0000000
      SR        1500.000           0.0000000
      LT       0.8333333E-01       0.0000000

     Row    Slack or Surplus      Dual Price
       1       0.2220000E+08       -1.000000
       2       0.0000000           -1.000000
       3       0.0000000          -0.3999999
       4       0.0000000           0.0000000
       5       0.0000000           0.0000000
       6       0.0000000           -1800000.
       7       0.0000000           -18600.00
       8       0.0000000           -1133.333
       9       0.0000000           -1500.000
      10       0.0000000           -6.000000
      11       0.0000000           0.0000000
      12       0.0000000           0.0000000
```

4) En la formulación original del problema, el número óptimo de pedidos era de 5,20 por año. Imponer la restricción de que el stock al finalizar el año sea nulo significa que el valor del número de pedidos debe ser exactamente entero. Como originalmente, este valor es igual a 5,20 habrá que calcular el CTE para “n” igual a 5 y para “n” igual a 6, lo que implicaría solicitar, respectivamente, las siguientes cantidades:

$$q(5) = \frac{D}{5} = \frac{18.000}{5} = 3.600$$

$$q(6) = \frac{D}{6} = \frac{18.000}{6} = 3.000$$

Los costos totales esperados respectivos serán:

$$CTE(5) = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot q \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} = 1.000 \cdot 18.000 + \frac{1}{2} \cdot 1.200 \cdot 3.600 \cdot 1 + 400.000 \cdot \frac{18.000}{3.600} =$$
$$= 22.160.000$$

$$CTE(6) = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot q \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} = 1.000 \cdot 18.000 + \frac{1}{2} \cdot 1.200 \cdot 3.000 \cdot 1 + 400.000 \cdot \frac{18.000}{3.000} =$$
$$= 22.200.000$$

En consecuencia, la solución óptima sería pedir 5 veces por año una cantidad igual a 3.600 unidades por pedido.

Para resolver este problema utilizando el sistema LINGO, a la formulación original hay que agregar simplemente la condición de que la variable “n” sea entera. En el LINGO esta instrucción se da con el comando @gin(x), en donde x es la variable que se quiere hacer entera. En el ejemplo, la instrucción será @gin(n), tal como se observa en la siguiente formulación:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*q*c1*T + k*D/q;
TIP = 0.5*q*b;
n = D/q;
SR = LT*D;

T = 1;
b = 1000;
D = 18000;
c1 = 1200;
k = 400000;
LT = 1/12;
@gin(n);
END
```

Resolviendo, tendremos:

```
Local optimal solution found at step:            64
 Objective value:                         0.2216000E+08
 Branch count:                                     1

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE       0.2216000E+08       0.0000000
                              B        1000.000           0.0000000
                              D        18000.00           0.0000000
                              Q        3600.000           0.0000000
                             C1        1200.000           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        400000.0           0.0000000
                            TIP        1800000.           0.0000000
                              N        5.000000           -7856.380
                             SR        1500.000           0.0000000
                             LT       0.8333333E-01       0.0000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1       0.2216000E+08       -1.000000
                              2      -0.2991147E-03       -1.000000
                              3       0.0000000           0.0000000
                              4       0.0000000           -7856.380
                              5       0.0000000           0.0000000
                              6       0.0000000           -2160000.
                              7       0.0000000           -18000.00
                              8       0.0000000           -1113.293
                              9       0.0000000           -1800.000
                             10       0.0000000           -5.000000
                             11       0.0000000           0.0000000
```

CAPÍTULO III

STOCK DE PROTECCIÓN

1. CONCEPTOS

El Stock de Protección es un nivel de existencias que se mantiene a los fines de absorber situaciones imprevistas de cualquier naturaleza, tales como huelgas, accidentes, condiciones climáticas adversas, conflictos sociales, cambios políticos bruscos, etc., incluyendo las fluctuaciones imprevistas de demanda y de plazos de reposición que surjan como consecuencia de dichas situaciones.

El Stock de Protección, también llamado Stock de Seguridad, se utiliza en algunos casos para absorber la aleatoriedad de la demanda o del tiempo de reaprovisionamiento, cuando la demanda es aleatoria. Los sistemas de inventarios que lo utilizan son aquellos en los cuales el costo de agotamiento es muy alto (por ejemplo materia prima), o cuando se quiere mantener un excelente nivel de servicio (es decir, aún en las peores circunstancias se sigue satisfaciendo la demanda).

Las existencias de seguridad no deben nunca ser determinadas para cubrir ineficiencias operativas o administrativas.

Este stock se mide tanto en unidades físicas del producto como en tiempo. En este último caso, es el tiempo que puede abastecerse la demanda con dicho inventario. Por ejemplo, un stock de seguridad de 2 meses implica que, sin ningún tipo de reaprovisionamiento, se puede satisfacer la demanda del producto durante 2 meses, antes de llegar al agotamiento.

El stock de protección incrementa, por supuesto, el costo de mantenimiento, y por lo tanto debe determinarse con mucho cuidado. Hay varias técnicas para determinarlo, pero en general se establece políticamente (por ejemplo, fijando un factor de servicio) mediante técnicas estadísticas, u optimalmente mediante técnicas de simulación.

2. FORMULACIÓN

<u>HIPÓTESIS</u>

1. Se administra un único ítem.
2. El producto es de demanda independiente.
3. La demanda es conocida y constante.
4. El plazo de entrega ("*lead time*") es conocido y constante.
5. Se mantiene un stock de seguridad, es decir una cantidad de unidades en stock que no se utiliza operativamente sino que, por el contrario, se mantiene únicamente para hacer uso de ella sólo frente a situaciones completamente imprevistas en términos de planeamiento.

6. La reposición es instantánea; es decir, la tasa de reaprovisionamiento es infinita.
7. El horizonte de planeamiento es a largo plazo.
8. No se admite agotamiento.
9. Los parámetros de costos son independientes de la cantidad a pedir "q".
10. No hay restricciones.
11. Todos los parámetros monetarios están expresados en moneda constante.
12. El producto en estudio se mide en una unidad continua (litros, kilogramos, etc.).

PARÁMETROS

- D: Demanda del producto, referida a un período estratégico de tiempo (año, semenstre, etc.).
- b: Costo unitario de adquisición.
- c_1: Costo unitario de almacenamiento.
- k: Costo de una orden.
- T = 1
- S_P: Stock de protección.
- LT = Lead Time.

VARIABLES

- q: Tamaño del lote. Constituye para este caso la variable de decisión básica.
- t: Intervalo de un ciclo. Es el tiempo que transcurre entre dos reaprovisionamientos sucesivos.
- CTE: Costo total esperado referido al período estratégico de tiempo.
- SR: Stock de reorden (llamado también "punto de pedido").
- S: Stock máximo.

MODELIZACIÓN

Siendo la demanda constante y el plazo de entrega fijo, el gráfico del stock en función del tiempo es el que se indica en la Figura 1. Para un ciclo "i" cualquiera, tendremos que el costo total esperado está dado por la expresión:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot t + k + S_P \cdot c_1 \cdot t \qquad \textbf{(1)}$$

Multiplicando esta expresión por el número de ciclos "n" por período de referencia

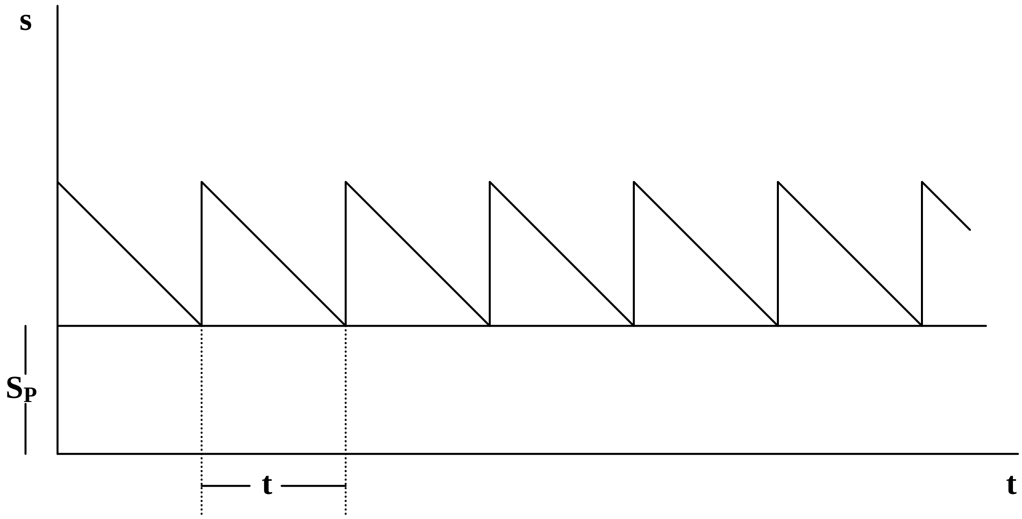


Figura 1

$$n = \frac{D}{q} = \frac{T}{t} \qquad \textbf{(2)}$$

tendremos:

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} + S_P \cdot c_1 \cdot T \qquad \textbf{(3)}$$

Esta es la función objetivo a minimizar, y “q” es la variable a determinar. En la Figura 2 se grafica el "CTE" en ordenadas y “q”" en abcisas. El primer término y el último son independientes del lote y, en consecuencia, constantes. Al igual que en el modelo anterior, el costo total de mantenimiento queda representado por una recta que pasa por el origen de coordenadas, mientras que el costo total de orden constituye gráficamente una hipérbola. La curva correspondiente al Costo total Esperado es la suma de las cuatro componentes citadas.

Procediendo de igual manera que en el desarrollo del modelo anterior, para hallar el lote a solicitar que minimice el funcional, habrá que derivar la función objetivo con respecto a “q” e igual a cero. Si la derivada segunda es positiva, tendremos entonces un mínimo en ese punto.

$$\frac{\partial CTE}{\partial q} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - k \cdot \frac{D}{q^2} = 0$$

Como se observa, la derivada segunda es positiva, por lo que espejando “q” obtendremos su valor óptimo:

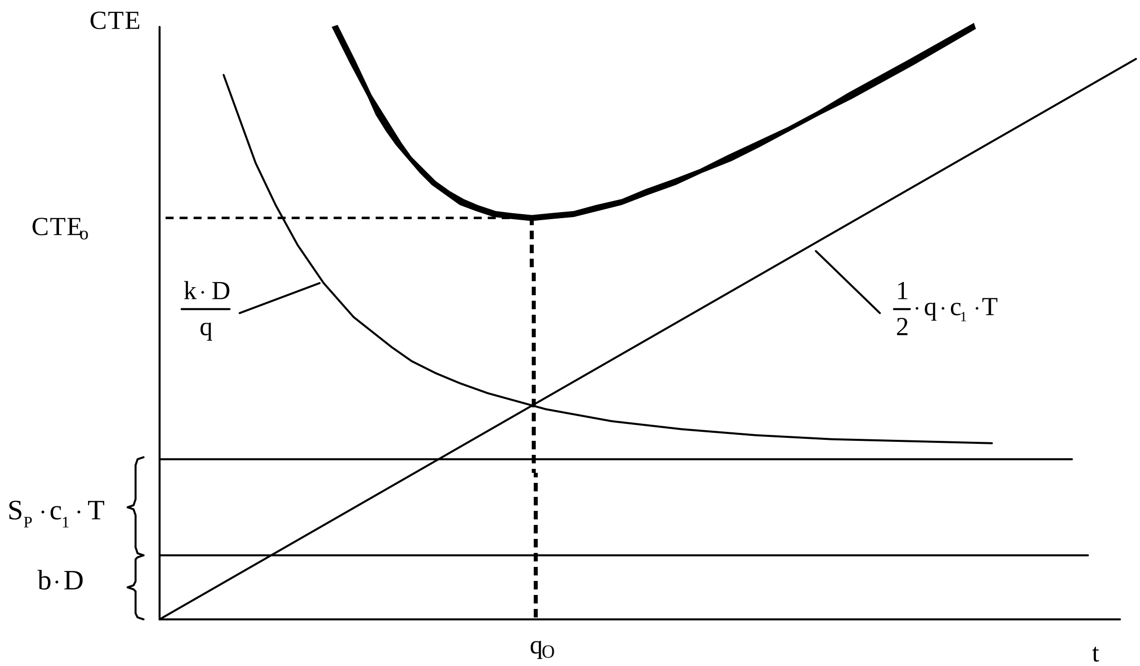


Figura 2

$$\boxed{q_O = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}}} \qquad \textbf{(4)}$$

Analizando la expresión, se concluye que el tamaño óptimo del lote es independiente del nivel del stock de protección fijado.

Para hallar la formulación analítica del Costo Total Esperado, se reemplaza q_0 en la expresión (3) del CTE, como sigue:

$$CTE_O = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{\sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}}} + S_P \cdot c_1 \cdot T$$

$$CTE_O = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot c_1 \cdot T + k \cdot D \cdot \sqrt{\frac{T \cdot c_1}{2 \cdot k \cdot D}} + S_P \cdot c_1 \cdot T$$

Introduciendo en la primera raíz c_1 T y en la segunda k D y multiplicando por 2 en el numerador y en el denominador del tercer término de la expresión:

$$CTE_O = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} + S_P \cdot c_1 \cdot T$$

Por lo tanto:

$$\boxed{CTE_O = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} + S_P \cdot c_1 \cdot T} \quad \textbf{(5)}$$

Del mismo modo, se pueden determinar el valor óptimo del intervalo "t"

$$t_O = \frac{T}{D} \cdot q_O = \frac{T}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{D \cdot c_1}} \quad \textbf{(6)}$$

y del número de pedidos "n" a efectuar en el año (o en el período de referencia que se tome):

$$n_O = \frac{D}{q_O} = D \cdot \sqrt{\frac{T \cdot c_1}{2 \cdot k \cdot D}} = \sqrt{\frac{T \cdot c_1 \cdot D}{2 \cdot k}} \quad \textbf{(7)}$$

Finalmente, para el cálculo del stock de reorden (ver Figura 3), se debe sumar el stock de protección a la demanda del plazo de entrega:

$$S_R = LT \cdot d + S_P \quad \textbf{(8)}$$

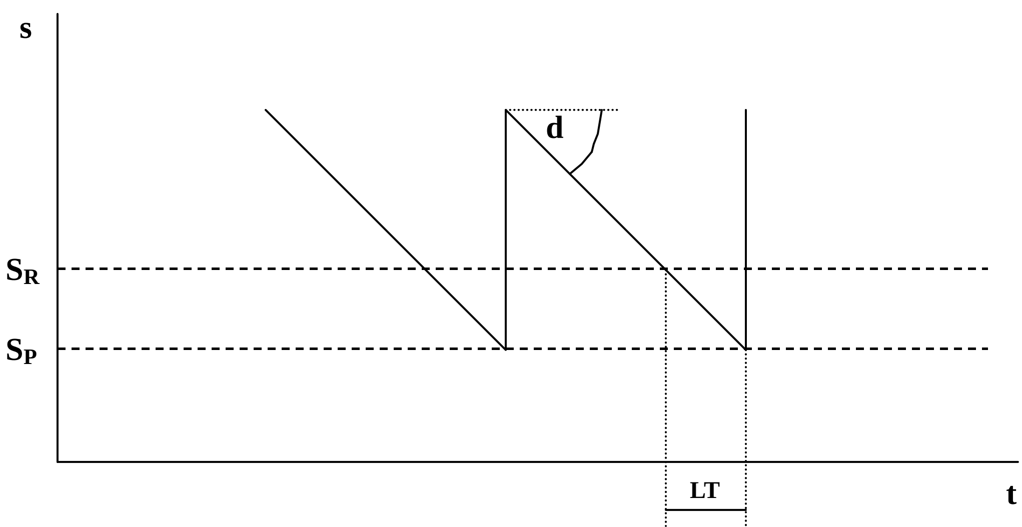


Figura 3

3. MÉTODOS DE SIMULACIÓN PARA DETERMINAR NIVELES DE STOCK DE SEGURIDAD.

La técnica de la simulación es muy poderosa y se utiliza para el estudio de sistemas dinámicos complejos de inventarios, en donde intervienen componentes aleatorios.

La simulación es una técnica que imita la operación del sistema del mundo real a medida que éste evoluciona sobre un parámetro (en general, el tiempo). En lo que se refiere a los sistemas de stocks, la simulación se usa para resolver problemas de egreso (demanda) aleatorio, de ingreso (reaprovisionamiento, plazo de entrega, etc.) aleatorio, de situaciones de riesgo que puedan establecerse estadísticamente y que afecten el proceso de entrega de la mercadería a los clientes, etc.

En el presente capítulo, en donde estamos suponiendo sistemas de demanda determinística, plantearemos un ejemplo de aplicación de la técnica de simulación para la determinación del nivel apropiado de stock de seguridad frente a situaciones de riesgo determinables estadísticamente. En el capítulo 9, se verán ejemplos de demanda aleatoria, por lo que no serán tratados en aquí.

Ejemplo 3.1:

Una empresa dispone de los siguientes datos para la administración de uno de sus productos terminados:

- ✓ *Costo mensual de seguros: 10 \$/unidad*
- ✓ *Demanda anual: 12.000 unidades*
- ✓ *Costo de alquiler: 15 \$/m^3 por mes*
- ✓ *Costo administrativo de procesamiento de un pedido, cualquiera sea el lote: \$1.000*
- ✓ *Costo de inspección de un lote: \$3.000*
- ✓ *Volumen ocupado por cada unidad: 2 m^3*
- ✓ *Costo mensual de mantenimiento térmico del producto: 0,5 \$/m^3*
- ✓ *Costo directo: 40 \$/unidad*
- ✓ *Stock de seguridad: equivalente a 5 días de demanda*
- ✓ *Lead Time: 2 días*
- ✓ *Disponibilidad máxima de almacén para este producto: 1.900 m^3*
- ✓ *Tasa de interés mensual: 10%*
- ✓ *Días laborables por mes: 20*

Determinar:

a) *el tamaño del lote óptimo de producción,*
b) *el stock de reorden, y*
c) *el costo total esperado si se dispusiera solamente de 1.300 m^3 para el almacenamiento de este producto.*

Solución:

En primer lugar se calculan los valores de los parámetros del problema. Para ello se debe tener en cuenta que, en este caso, el costo de mantenimiento está dado por el costo operativo de almacenamiento (seguros, alquiler y mantenimiento térmico) y por el capital inmovilizado. Por otra parte, el costo administrativo de emisión de la orden y el costo de la inspección forman parte del costo de la orden.

$$b = 40\ \frac{\$}{u}$$

$$c_1 = 10\ \frac{\$}{u \cdot mes} + 15\ \frac{\$}{mes \cdot m^3} \cdot 2\frac{m^3}{u} + 0{,}5\ \frac{\$}{mes \cdot m^3} \cdot 2\ \frac{m^3}{u} + 40\ \frac{\$}{u} \cdot 0{,}1\ \frac{1}{mes} = 45\ \frac{\$}{u \cdot mes}$$

$$k = 1.000\ \frac{\$}{orden} + 3.000\ \frac{\$}{orden} = 4.000\ \frac{\$}{orden}$$

$$D = 12.000\ \frac{u}{año} = 1.000\ \frac{u}{mes}$$

$$S_P = 12.000\ \frac{u}{año} \cdot 1\ \frac{año}{240\,días} \cdot 5\,días = 250\ u$$

$$Capacidad = \frac{1.900\ m^3}{2\ m^3/u} = 950\ u$$

La cantidad óptima a solicitar es:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4000 \cdot 1000}{1 \cdot 45}} = 421{,}64\ \frac{u}{lote} \cong 422\ \frac{u}{lote}$$

Luego, el stock máximo de almacén requerido será:

$$S = q_o + S_P = 422 + 250 = 672\ u$$

Como se observa, la capacidad de almacenamiento (950 u) no es limitante. El Costo Total Esperado óptimo es:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} + S_P \cdot c_1 \cdot T$$

$$CTE_o = 40 \cdot 1000 + \sqrt{2 \cdot 4.000 \cdot 1.000 \cdot 1 \cdot 45} + 250 \cdot 45 \cdot 1 \cong 70.224\ \frac{\$}{mes}$$

b) El Stock de Reorden es:

$$S_R = LT \cdot d + S_P = 2 \cdot \frac{1.000}{20} + 250 = 350\ u$$

c) La capacidad de almacenamiento fuera solamente de 1.300 m3, es decir de $\frac{1.300\ m^3}{2\ m^3/u} = 650\ u$, el lote calculado no podría solicitarse. En consecuencia, para calcular el lote tendremos que:

$$q + 250 \leq 650 \quad \Rightarrow \quad q \leq 400\ u$$

Es decir, el lote a pedir debe ser igual a 400 u, lo que dará el siguiente Costo Total Esperado:

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} + S_P \cdot c_1 \cdot T$$

$$CTE = 40 \cdot 1000 + \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot 45 \cdot 1 + 4000 \cdot \frac{1000}{400} + 250 \cdot 45 \cdot 1 = 70250 \ \frac{\$}{mes}$$

Formulado y resuelto el problema con LINGO (puntos a) y b)):

```
MIN = CTE;
CTE = b * D + 0.5 * c1 * q * T + k * D /q + Sp * c1 * T;
n = D / q;
t1 = q / D * T;
Sr = LT * D + Sp;
c1 = c1op + b * i;
b = 40;
i = 0.10;
D = 1000;
c1op= 41;
k = 4000;
LT = 2/20;
T=1;
Sp = 250;
q < 950;
END
```

```
Local optimal solution found at step:             12
 Objective value:                           70223.67

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        70223.67           0.0000000
                              B        40.00000           0.0000000
                              D        1000.000           0.0000000
                             C1        45.00000           0.0000000
                              Q        421.6370           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        4000.000           0.0000000
                             SP        250.0000           0.0000000
                              N        2.371708           0.0000000
                             T1       0.4216370           0.0000000
                             SR        350.0000           0.0000000
                             LT       0.1000000           0.0000000
                           C1OP        41.00000           0.0000000
                              I       0.1000000           0.0000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        70223.67           -1.000000
                              2       0.0000000           -1.000000
                              3       0.0000000           0.0000000
                              4       0.0000000           0.0000000
                              5       0.0000000           0.0000000
                              6       0.0000000           -460.8185
                              7       0.0000000           -1046.082
                              8       0.0000000           -18432.74
                              9       0.0000000           -49.48683
                             10       0.0000000           -460.8185
                             11       0.0000000           -2.371708
                             12       0.0000000           0.0000000
                             13       0.0000000           -20736.83
                             14       0.0000000           -45.00000
                             15        528.3630           0.0000000
```

Agregando la restricción de capacidad del punto c):

```
MIN = CTE;
CTE = b * D + 0.5 * c1 * q * T + k * D /q + Sp * c1 * T;
n = D / q;
t1 = q / D * T;
```

```
Sr = LT * D + Sp;
c1 = c1op + b * i;
b = 40;
i = 0.10;
D = 1000;
c1op= 41;
k = 4000;
LT = 2/20;
T=1;
Sp = 250;
q < 400;
END

Local optimal solution found at step:              6
 Objective value:                           70250.00

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        70250.00           0.0000000
                              B        40.00000           0.0000000
                              D        1000.000           0.0000000
                             C1        45.00000           0.0000000
                              Q        400.0000           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        4000.000           0.0000000
                             SP        250.0000           0.0000000
                              N        2.500000           0.0000000
                             T1       0.4000000           0.0000000
                             SR        350.0000           0.0000000
                             LT       0.1000000           0.0000000
                           C1OP        41.00000           0.0000000
                              I       0.1000000           0.0000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        70250.00           -1.000000
                              2       0.0000000           -1.000000
                              3       0.0000000           0.0000000
                              4       0.0000000           0.0000000
                              5       0.0000000           0.0000000
                              6       0.0000000           -450.0000
                              7       0.0000000           -1045.000
                              8       0.0000000           -18000.00
                              9       0.0000000           -50.00000
                             10       0.0000000           -450.0000
                             11       0.0000000           -2.500000
                             12       0.0000000           0.0000000
                             13       0.0000000           -20250.00
                             14       0.0000000           -45.00000
                             15       0.0000000            2.499998
```

Ejemplo 3.2:

Una empresa ha ganado una licitación por 50.000 unidades de un producto que deberá entregar uniformemente por un período de un año. En la actualidad no se posee ninguna unidad de dicho producto, y una vez finalizado el año, el stock remanente debe ser cero. Las condiciones contractuales estipulan que durante el año de abastecimiento, la empresa deberá mantener un stock de seguridad de 10.000 unidades, excepto sobre el final del contrato (en donde se acepta que se vaya entregando uniformemente el producto hasta agotar el stock exactamente cuando termina el año).

El objetivo es determinar el lote de compra que minimice el Costo Total Esperado. Se conocen los siguientes datos:

a) Costo de almacenamiento anual por unidad: $ 2,5

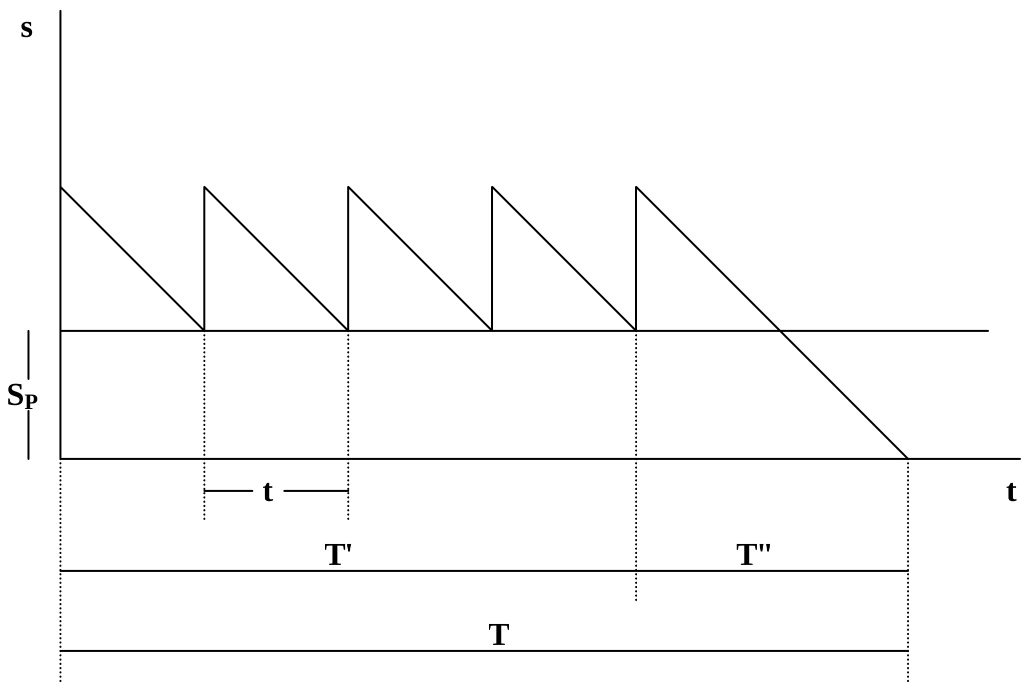
b) Costo de cada orden de compra: $ 100

Se pide:

1. *Diseñar un modelo matemático que permita optimizar el lote de compra.*
2. *Calcular los valores óptimos del lote, del Costo Total Esperado, de la cantidad de pedidos a efectuar en el año y del tiempo entre dos pedidos sucesivos.*
3. *¿Cómo se modificaría el problema si el costo de la orden fuera de $120?*

Solución:

Indicaremos con un apóstrofe (’) a los parámetros del período correspondiente a la operación normal, y con un doble apóstrofe (”) a los correspondientes al período final (último ciclo).



Los parámetros son:

$$D = 50.000 \frac{u}{año}$$

$$c'_1 = 2,5 \frac{\$}{año \cdot un.}$$

$$k = 100 \frac{\$}{orden}$$

En el último ciclo se debe satisfacer un 20% de la demanda (es decir, D”=10000 unidades). Este ciclo tiene una duración de 0,2 año, por lo que el parámetro T” es igual a un 20% de T, es decir:

T” = 0,20 T

y, por consiguiente:

T’ = 0,80 T

La demanda durante los ciclos operativos normales será D’ = 40.000.
Para cada ciclo operativo tendremos:

$$CTE'_i = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot q \cdot t + k + S_P \cdot c_1 \cdot t$$

La cantidad de ciclos operativos serán:

$$n = \frac{D'}{q} = \frac{0{,}8\,T}{t}$$

y, por lo tanto, el costo total esperado para los ciclos operativos es:

$$CTE' = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot q \cdot 0{,}8\ T + k \cdot \frac{D'}{q} + S_P \cdot c_1 \cdot 0{,}8\,T$$

Derivando:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D'}{0{,}8T \cdot c_1}}$$

Se puede observar que el lote económico resulta independiente del tamaño del Stock de protección. La única restricción para que el stock final sea nulo es que el número de ciclos operativos normales (“n”) sea un valor entero. Si esto no se verifica, habrá que calcular el CTE para el valor de q que haga a n entero (redondeando hacia arriba) y el CTE para el valor de “q” que haga a n entero (redondeando hacia abajo). El “q” óptimo será el que se corresponda al menor CTE.

Por su parte, el costo total esperado para el ciclo final será:

$$CTE'' = \frac{S_P}{2} \cdot c_1 \cdot 0{,}2T$$

El costo total esperado es la suma de CTE’ y CTE”:

$$CTE = CTE' + CTE''$$

Para el ejemplo tendremos:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D'}{0{,}8T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 100 \cdot 40.000}{0{,}8 \cdot 2{,}5}} = 2.000$$

En este caso, el número de períodos es entero, es decir:

$$n = \frac{40.000}{2.000} = 20$$

El costo total esperado óptimo será:

$$CTE_o = \sqrt{2 \cdot k \cdot D' \cdot c_1 \cdot 0{,}8} + S_P \cdot c_1 \cdot 0{,}8 + \frac{1}{2} \cdot S_P \cdot c_1 \cdot 0{,}2 =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 100 \cdot 40.000 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}8} + 10.000 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}8 + \frac{1}{2} \cdot 10.000 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}2 = 26.500$$

Suponiendo que el costo de orden fuera de \$120:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D'}{0{,}8T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 120 \cdot 40.000}{0{,}8 \cdot 2{,}5}} = 2.190{,}89$$

$$n = \frac{40.000}{2.190.89} = 18{,}26$$

En este caso hay que probar con

$$q = \frac{40.000}{18} = 2.222{,}22$$

y con

$$q = \frac{40.000}{19} = 2.105{,}26$$

El costo total esperado para q = 2.222,22 es:

$$CTE_o = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 2.222{,}22 \cdot 0{,}8 + 120 \cdot \frac{40.000}{2.222{,}22} + 10.000 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}8 + \frac{10.000}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}2 = 26.882{,}22$$

mientras que el CTE para q = 2.105,26 es:

$$CTE_o = \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 2.105{,}26 \cdot 0{,}8 + 120 \cdot \frac{40.000}{2.105{,}26} + 10.000 \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}8 + \frac{10.000}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}2 = 26.885{,}26$$

En consecuencia, el lote óptimo es 2.222,22 unidades.

Ejemplo 3.3:

Una empresa, que trabaja con el criterio de bte óptimo, recibe semanalmente un producto que se transporta por río y que se descarga en su propio muelle. El producto se destina a un único cliente, con el que se ha firmado un convenio de entrega, a razón de 20 unidades por día.

Las únicas razones por la cuales se puede afectar el reaprovisionamiento del producto son el estado del río en el día que debería llegar el barco con la carga, y si el barco que *hace la entrega requiere o no una reparación ese día. Los estados del río se pueden clasificar en 2 categorías:*

I: INTRANSITABLE: probabilidad 15%

T: TRANSITABLE: 85%

Si el río se encuentra en el estado "I", la probabilidad de que el día siguiente se encuentre en el mismo estado "I" es de 30%.

El barco que realiza la entrega requiere una reparación, en promedio, cada 25 semanas, según un proceso Poisson (distribución exponencial). A su vez, el número de días requeridos para la reparación es también un proceso Poisson (distribución Poisson) de media 1 día.

Suponiendo que el costo de mantenimiento es de 0,3$ por unidad por día, que la multa diaria por cada día de atraso en la entrega es de $1.000, y que la empresa quiere determinar el stock de seguridad en múltiplos de 20 unidades, simular el proceso comenzando con un Stock de Protección igual a 40 unidades.

Solución:

Se simula a intervalos de tiempo fijos, iguales a una semana. Para cada arribo semanal se simula el estado del río.

Se toma un número aleatorio entre 0,00 y 0,99. Para un número valor del número aleatorio comprendido entre 0,00 y 0,14, el río estará intransitable y, en consecuencia, no podrá realizarse la entrega programada en ese día; en caso contrario (número aleatorio entre 0,15 y 0,99), se realiza la entrega.

Si el río está intransitable un día, se simula el estado para el día próximo. Para ello, se toma otro número aleatorio; si éste está comprendido entre 0,00 y 0,29, el río continuará intransitable; en caso contrario (entre 0,30 y 0,99) el estado del río mejorará.

Para simular, los problemas del barco que realiza la entrega, se deben simular las dos siguientes variables:

- Próxima necesidad de reparación: Se toma un número aleatorio "r" en el dominio (0-1), por ejemplo de dos dígitos decimales, y se calcula el número de días que transcurren hasta la próxima reparación. Considerando que la distribución estadística es exponencial, se aplica la siguiente expresión:

$$\text{Próxima Reparación} = T_S \cdot \ln \frac{1}{r}$$

  en donde T_S es el tiempo promedio que transcurre entre reparaciones (25 semanas). Como simplificación se redondeará al número entero más cercano del valor calculado.

- Número de días requeridos para la reparación del barco. Se toma un número aleatorio de 3 dígitos. Considerando que se trata de una distribución Poisson de media $\lambda = 1$ día, se ingresa en una tabla de distribución Poisson o Poisson acumulada, a fin de determinar el rango correspondiente a cada valor:

Número Aleatorio	**000 - 367**	**368 - 735**	**736 - 919**	**920 - 980**	**981 - 995**	**996 - 998**	**999**
Número de días	0	1	2	3	4	5	6

Así, por ejemplo, si el número aleatorio obtenido se encuentra entre 000 y 367, la reparación se hace inmediatamente, por lo que no hay retraso en la entrega. Si, en cambio, el número obtenido está en el rango que va de 368 a 735, la reparación requerirá 1 día; y así sucesivamente.

Los costos semanales, asociados a cada semana serán:

- Entregas en el día programado:

$$40\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 7\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}=84\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con 1 día de atraso:

$$\frac{40-20}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 1\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}+40\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 6\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}=75\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con dos días de atraso:

$$\frac{40-0}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 2\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}+40\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 5\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}=72\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con tres días de atraso:

$$\frac{40-0}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 2\frac{\text{día}}{\mathrm{sem}}+1.000\frac{\$}{\text{día}}\cdot 1\frac{\text{día}}{\mathrm{sem}}+40\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 4\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}=1.060\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con cuatro días de atraso:

$$\frac{40-0}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 2\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}+1.000\frac{\$}{\text{día}}\cdot 2\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}+40\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 3\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}=2.048\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con cinco días de atraso:

$$\frac{40-0}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 2\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}+1.000\frac{\$}{\text{día}}\cdot 3\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}+40\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 2\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}=3.036\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con seis días de atraso:

$$\frac{40}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 2\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}+1.000\frac{\$}{\text{día}}\cdot 4\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}+40\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 1\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}=4.024\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con siete días de atraso:

$$\frac{40-0}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot\text{día}}\cdot 2\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}+1.000\frac{\$}{\text{día}}\cdot 5\frac{\text{días}}{\mathrm{sem}}=5.012\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

Luego de simular 520 semanas, el costo promedio semanal es de $103,31.

Semana	Estado día de arribo	Estado día 2	Estado día 3	Estado día 4	Estado día 5	Estado día 5	PROXIMO MANTEN.	Días Manten.	Nro.de días	Costo
0							0,56 14			
1	0,69 T									84,00
2	0,69 T									84,00
3	0,57 T									84,00
4	0,48 T									84,00
5	0,11 I									84,00
6	0,18 T									84,00
7	0,30 T									84,00
8	0,56 T									84,00
9	0,91 T									84,00
10	0,71 T									84,00
11	0,84 T									84,00
12	0,76 T									84,00
13	0,00 I	0,40 T							1	75,00
14	0,85 T						0,18 57	157 0	0	84,00
15	0,98 T									84,00
16	0,40 T									84,00
17	0,79 T									84,00
18	0,66 T									84,00
19	0,11 I	0,92 T							1	75,00
20	0,58 T									84,00
21	0,75 T									84,00
22	0,69 T									84,00
23	0,17 T									84,00
24	0,82 T									84,00
25	0,16 T									84,00
26	0,64 T									84,00
27	0,68 T									84,00
28	0,18 T									84,00
29	0,43 T									84,00
30	0,36 T									84,00
31	0,74 T									84,00
32	0,37 T									84,00
33	0,41 T									84,00
34	0,04 I	0,27 I	0,42 T						2	72,00
35	0,90 T									84,00
36	0,33 T									84,00
37	0,55 T									84,00
38	0,55 T									84,00
39	0,57 T									84,00
40	0,73 T									84,00
41	0,54 T									84,00
42	0,50 T									84,00
43	0,83 T									84,00
44	0,27 T									84,00
45	0,93 T									84,00
46	0,05 I									84,00
47	0,09 I	0,11 I	0,41 T						2	72,00
48	0,49 T									84,00
49	0,64 T									84,00
50	0,97 T									84,00
51	0,03 T	0,60 T							1	75,00
52	0,99 T									84,00
53	0,78 T									84,00
54	0,92 T									84,00
55	0,36 T									84,00
56	0,59 T									84,00
57	0,23 T									84,00
58	0,64 T						0,12 111	984 4	4	2.048,00
59	0,59 T									84,00
60	0,68 T									84,00
61	0,09 I									84,00
62	0,82 T									84,00
63	0,18 T									84,00
64	0,40 T									84,00
65	0,46 T									84,00
66	0,76 T									84,00

67	0,07	I	0,57 T					1	75,00
68	0,35	T							84,00
69	0,70	T							84,00
70	0,01	I	0,23 I 0,04 I 0,85 T					3	1.060,00
71	0,70	T							84,00
72	0,12	I	0,23 I 0,21 I 0,82 T					3	1.060,00
73	0,38	T							84,00
74	0,58	T							84,00
75	0,03	I	0,80 T					1	75,00
76	0,66	T							84,00
77	0,33	T							84,00
78	0,58	T							84,00
79	0,59	T							84,00
80	0,94	T							84,00
81	0,98	T							84,00
82	0,78	T							84,00
83	0,32	T							84,00
84	0,54	T							84,00
85	0,19	T							84,00
86	0,73	T							84,00
87	0,37	T							84,00
88	0,46	T							84,00
89	0,96	T							84,00
90	0,33	T							84,00
91	0,29	T							84,00
92	0,80	T							84,00
93	0,01	I	0,22 I 0,83 T					2	72,00
94	0,76	T							84,00
95	0,31	T							84,00
96	0,36	T							84,00
97	0,24	T							84,00
98	0,96	T							84,00
99	0,52	T							84,00
100	0,71	T							84,00
101	0,43	T							84,00
102	0,78	T							84,00
103	0,68	T							84,00
104	0,35	T							84,00
105	0,63	T							84,00
106	0,82	T							84,00
107	0,78	T							84,00
108	0,91	T							84,00
109	0,95	T							84,00
110	0,76	T							84,00
111	0,98	T		0,76	118	810	2	2	72,00
112	0,46	T							84,00
113	0,18	T							84,00
114	0,24	T							84,00
115	0,28	T							84,00
116	0,64	T							84,00
117	0,38	T							84,00
118	0,58	T		0,45	138	160	0	0	84,00
119	0,24	T							84,00
120	0,44	T							84,00
121	0,07	I	0,41 T					1	75,00
122	0,38	T							84,00
123	0,87	T							84,00
124	0,17	T							84,00
125	0,88	T							84,00
126	0,70	T							84,00
127	0,55	T							84,00
128	0,40	T							84,00
129	0,64	T							84,00
130	0,05	I	0,47 T					1	75,00
131	0,83	T							84,00
132	0,53	T							84,00
133	0,76	T							84,00
134	0,23	T							84,00
135	0,07	I	0,01 I 0,61 T					2	72,00
136	0,49	T							84,00
137	0,75	T							84,00
138	0,37	T		0,29	169	930	3	3	1.060,00
139	0,84	T							84,00
140	0,72	T							84,00

141	0,06	I	0,32	T									1	75,00
142	0,53	T												84,00
143	0,81	T												84,00
144	0,93	T												84,00
145	0,81	T												84,00
146	0,95	T												84,00
147	0,52	T												84,00
148	0,75	T												84,00
149	0,11	I	0,44	T									1	75,00
150	0,53	T												84,00
151	0,82	T												84,00
152	0,54	T												84,00
153	0,91	T												84,00
154	0,02	I	0,68	T									1	75,00
155	0,86	T												84,00
156	0,46	T												84,00
157	0,54	T												84,00
158	0,24	T												84,00
159	0,76	T												84,00
160	0,12	I	0,34	T									1	75,00
161	0,68	T												84,00
162	0,78	T												84,00
163	0,55	T												84,00
164	0,76	T												84,00
165	0,43	T												84,00
166	0,79	T												84,00
167	0,79	T												84,00
168	0,93	T												84,00
169	0,86	T							0,61	181	733	1	1	75,00
170	0,87	T												84,00
171	0,70	T												84,00
172	0,39	T												84,00
173	0,61	T												84,00
174	0,68	T												84,00
175	0,59	T												84,00
176	0,56	T												84,00
177	0,34	T												84,00
178	0,37	T												84,00
179	0,44	T												84,00
180	0,10	I	0,84	T									1	75,00
181	0,45	T							0,12	234	576	1	1	75,00
182	0,71	T												84,00
183	0,99	T												84,00
184	0,08	I	0,23	I	0,25	I	0,3	T					3	1.060,00
185	0,47	T												84,00
186	0,18	T												84,00
187	0,22	T												84,00
188	0,18	T												84,00
189	0,09	I	0,92	T									1	75,00
190	0,50	T												84,00
191	0,03	I	0,96	T									1	75,00
192	0,87	T												84,00
193	0,97	T												84,00
194	0,33	T												84,00
195	0,38	T												84,00
196	0,54	T												84,00
197	0,40	T												84,00
198	0,83	T												84,00
199	0,01	I	0,23	I	0,68	T							2	72,00
200	0,69	T												84,00
201	0,99	T												84,00
202	0,52	T												84,00
203	0,35	T												84,00
204	0,19	T												84,00
205	0,67	T												84,00
206	0,17	T												84,00
207	0,22	T												84,00
208	0,80	T												84,00
209	0,57	T												84,00
210	0,64	T												84,00
211	0,75	T												84,00
212	0,79	T												84,00
213	0,25	T												84,00
214	0,14	I	0,57	T									1	75,00

215	0,15	T								84,00
216	0,51	T								84,00
217	0,18	T								84,00
218	0,97	T								84,00
219	0,29	T								84,00
220	0,18	T								84,00
221	0,51	T								84,00
222	0,99	T								84,00
223	0,89	T								84,00
224	0,63	T								84,00
225	0,19	T								84,00
226	0,74	T								84,00
227	0,87	T								84,00
228	0,62	T								84,00
229	0,40	T								84,00
230	0,21	T								84,00
231	0,55	T								84,00
232	0,80	T								84,00
233	0,64	T								84,00
234	0,29	T			0,41	256	943	3	3	1.060,00
235	0,08	I	0,33	T					1	75,00
236	0,74	T								84,00
237	0,38	T								84,00
238	0,71	T								84,00
239	0,16	T								84,00
240	0,88	T								84,00
241	0,41	T								84,00
242	0,47	T								84,00
243	0,74	T								84,00
244	0,44	T								84,00
245	0,42	T								84,00
246	0,17	T								84,00
247	0,57	T								84,00
248	0,77	T								84,00
249	0,50	T								84,00
250	0,42	T								84,00
251	0,36	T								84,00
252	0,79	T								84,00
253	0,50	T								84,00
254	0,24	T								84,00
255	0,11	I	0,98	T					1	75,00
256	0,86	T			0,89	259	907	2	2	72,00
257	0,63	T								84,00
258	0,51	T								84,00
259	0,09	I	0,47	T	0,51	276	469	1	1	75,00
260	0,46	T								84,00
261	0,15	T								84,00
262	0,22	T								84,00
263	0,01	I	0,64	T					1	75,00
264	0,04	I	0,44	T					1	75,00
265	0,39	T								84,00
266	0,43	T								84,00
267	0,71	T								84,00
268	0,91	T								84,00
269	0,05	I	0,35	T					1	75,00
270	0,43	T								84,00
271	0,58	T								84,00
272	0,43	T								84,00
273	0,25	T								84,00
274	0,35	T								84,00
275	0,85	T								84,00
276	0,40	T			0,04	356	365	0	0	84,00
277	0,11	T								84,00
278	0,38	I	0,58	T					1	75,00
279	0,76	T								84,00
280	0,33	T								84,00
281	0,93	T								84,00
282	0,19	T								84,00
283	0,31	T								84,00
284	0,08	I	0,88	T					1	75,00
285	0,11	I	0,59	T					1	75,00
286	0,63	T								84,00
287	0,55	T								84,00
288	0,90	T								84,00

289	0,01	I	0,18	I	0,77	T					2	72,00
290	0,79	T										84,00
291	0,55	T										84,00
292	0,17	T										84,00
293	0,23	T										84,00
294	0,42	T										84,00
295	0,18	T										84,00
296	0,44	T										84,00
297	0,15	T										84,00
298	0,53	T										84,00
299	0,27	T										84,00
300	0,19	T										84,00
301	0,25	T										84,00
302	0,86	T										84,00
303	0,42	T										84,00
304	0,62	T										84,00
305	0,88	T										84,00
306	0,82	T										84,00
307	0,48	T										84,00
308	0,47	T										84,00
309	0,96	T										84,00
310	0,95	T										84,00
311	0,95	T										84,00
312	0,53	T										84,00
313	0,25	T										84,00
314	0,62	T										84,00
315	0,03	I	0,81	T							1	75,00
316	0,64	T										84,00
317	0,13	I	0,12	I	0,66	T					2	72,00
318	0,73	T										84,00
319	0,83	T										84,00
320	0,75	T										84,00
321	0,51	T										84,00
322	0,00	I	0,14	I	0,44	T					2	72,00
323	0,74	T										84,00
324	0,13	I	0,94	T							1	75,00
325	0,74	T										84,00
326	0,65	T										84,00
327	0,08	I	0,73	T							1	75,00
328	0,59	T										84,00
329	0,62	T										84,00
330	0,53	T										84,00
331	0,93	T										84,00
332	0,20	T										84,00
333	0,78	T										84,00
334	0,73	T										84,00
335	0,08	I	0,64	T							1	75,00
336	0,13	I	0,38	T							1	75,00
337	0,23	T										84,00
338	0,21	T										84,00
339	0,67	T										84,00
340	0,14	I	0,87	T							1	75,00
341	0,49	T										84,00
342	0,21	T										84,00
343	0,74	T										84,00
344	0,16	T										84,00
345	0,03	I	0,25	I	0,49	T					2	72,00
346	0,61	T										84,00
347	0,48	T										84,00
348	0,78	T										84,00
349	0,51	T										84,00
350	0,43	T										84,00
351	0,75	T										84,00
352	0,09	I	0,50	T							1	75,00
353	0,66	T										84,00
354	0,40	T										84,00
355	0,21	T										84,00
356	0,40	T					0,40	379	406	1	1	75,00
357	0,32	T										84,00
358	0,36	T										84,00
359	0,50	T										84,00
360	0,33	T										84,00
361	0,51	T										84,00
362	0,84	T										84,00

363	0,70	T						84,00
364	0,15	T						84,00
365	0,98	T						84,00
366	0,89	T						84,00
367	0,07	I 0,71 T					1	75,00
368	0,28	T						84,00
369	0,53	T						84,00
370	0,70	T						84,00
371	0,41	T						84,00
372	0,63	T						84,00
373	0,33	T						84,00
374	0,47	T						84,00
375	0,17	T						84,00
376	0,26	T						84,00
377	0,11	I 0,30 T	0,26	411	962	3	3	1.060,00
378	0,50	T						84,00
379	0,11	I 0,53 T					1	75,00
380	0,89	T						84,00
381	0,22	T						84,00
382	0,13	I 0,19 I 0,30 T					2	72,00
383	0,32	T						84,00
384	0,76	T						84,00
385	0,21	T						84,00
386	0,43	T						84,00
387	0,89	T						84,00
388	0,87	T						84,00
389	0,49	T						84,00
390	0,30	T						84,00
391	0,04	I 0,65 T					1	75,00
392	0,66	T						84,00
393	0,61	T						84,00
394	0,17	T						84,00
395	0,54	T						84,00
396	0,55	T						84,00
397	0,72	T						84,00
398	0,28	T						84,00
399	0,84	T						84,00
400	0,11	I 0,01 I 0,13 I 0,27 I 0,25 I 0,31 T					4	2.048,00
401	0,52	T						84,00
402	0,25	T						84,00
403	0,87	T						84,00
404	0,10	I 0,07 I 0,04 I 0,72 T					2	72,00
405	0,08	I 0,50 T						84,00
406	0,70	T						84,00
407	0,86	T						84,00
408	0,12	I 0,85 T					1	75,00
409	0,15	T						84,00
410	0,99	T						84,00
411	0,82	T	0,13	462	365	0	0	84,00
412	0,75	T						84,00
413	0,03	I 0,01 I 0,89 T					2	72,00
414	0,86	T						84,00
415	0,14	I 0,65 I 0,25 I 0,13 I 0,51 T					3	1.060,00
416	0,93	T						84,00
417	0,20	T						84,00
418	0,35	T						84,00
419	0,01	I 0,87 T					1	75,00
420	0,32	T						84,00
421	0,70	T						84,00
422	0,78	T						84,00
423	0,72	T						84,00
424	0,51	T						84,00
425	0,58	T						84,00
426	0,06	I 0,22 I 0,60 T					2	72,00
427	0,63	T						84,00
428	0,17	T						84,00
429	0,94	T						84,00
430	0,35	T						84,00
431	0,80	T						84,00
432	0,10	I 0,80 T					1	75,00
433	0,20	T						84,00
434	0,98	T						84,00
435	0,81	T						84,00
436	0,72	T						84,00

437	0,84	T										84,00
438	0,77	T										84,00
439	0,36	T										84,00
440	0,35	T										84,00
441	0,73	T										84,00
442	0,48	T										84,00
443	0,44	T										84,00
444	0,92	T										84,00
445	0,26	T										84,00
446	0,35	T										84,00
447	0,07	I	0,18	I	0,92	T					2	72,00
448	0,56	T										84,00
449	0,62	T										84,00
450	0,49	T										84,00
451	0,72	T										84,00
452	0,13	I	0,48	T							1	75,00
453	0,21	T										84,00
454	0,43	T										84,00
455	0,18	T										84,00
456	0,38	T										84,00
457	0,09	I	0,99	T							1	75,00
458	0,23	T										84,00
459	0,80	T										84,00
460	0,77	T										84,00
461	0,29	T										84,00
462	0,14	I	0,14	I	0,74	T	0,77	469	992	4	2	72,00
463	0,78	T										84,00
464	0,55	T										84,00
465	0,99	T										84,00
466	0,68	T										84,00
467	0,11	I	0,08	I	0,66	T	0,67	477	845	2	2	72,00
468	0,58	T										84,00
469	0,16	T										84,00
470	0,85	T										84,00
471	0,23	T										84,00
472	0,97	T										84,00
473	0,13	I	0,56	T							1	75,00
474	0,84	T										84,00
475	0,55	T										84,00
476	0,09	I	0,36	T							1	75,00
477	0,82	T					0,13	528	401	1	1	75,00
478	0,90	T										84,00
479	0,66	T										84,00
480	0,32	T										84,00
481	0,56	T										84,00
482	0,14	I	0,46	T							1	75,00
483	0,38	T										84,00
484	0,57	T										84,00
485	0,05	I	0,35	T							1	75,00
486	0,01	I	0,50	T							1	75,00
487	0,69	T										84,00
488	0,33	T										84,00
489	0,09	I	0,25	I	0,52	T					2	72,00
490	0,70	T										84,00
491	0,48	T										84,00
492	0,21	T										84,00
493	0,23	T										84,00
494	0,60	T										84,00
495	0,61	T										84,00
496	0,51	T										84,00
497	0,63	T										84,00
498	0,50	T										84,00
499	0,14	I	0,78	T							1	75,00
500	0,36	T										84,00
501	0,00	I	0,81	T							1	75,00
502	0,68	T										84,00
503	0,93	T										84,00
504	0,13	I	0,36	T							1	75,00
505	0,50	T										84,00
506	0,07	I	0,97	T							1	75,00
507	0,54	T										84,00
508	0,77	T										84,00
509	0,53	T										84,00
510	0,86	T										84,00

511	0,78	T								84,00
512	0,34	T								84,00
513	0,97	T								84,00
514	0,97	T								84,00
515	0,58	T								84,00
516	0,42	T								84,00
517	0,30	T								84,00
518	0,34	T								84,00
519	0,04	I	0,58	T					1	75,00
520	0,06	I	0,12	I	0,23	I	0,9	T	2	72,00
									Costo Promedio:	103,31

Este proceso se repite para una cantidad diferente de Stock de Seguridad, y se vuelve a calcular el costo promedio semanal. Por ejemplo para S_S = 60, si el costo decrece se continúa con S_S = 80, así sucesivamente hasta ver que el costo semanal promedio se incrementa.

Si, en cambio para S_S = 60, el costo total se incrementara se prueba con S_S = 20, y si decrece, luego con 0.

Para S_S = 60, los costos semanales correspondientes son:

- Entregas en el día programado:

$$60\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 7\frac{\mathrm{días}}{\mathrm{sem}}=126\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con un día de atraso:

$$\frac{60-40}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 1\frac{\mathrm{día}}{\mathrm{sem}}+60\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 6\frac{\mathrm{días}}{\mathrm{sem}}=111\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con dos días de atraso:

$$\frac{60-20}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 2\frac{\mathrm{día}}{\mathrm{sem}}+60\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 5\frac{\mathrm{días}}{\mathrm{sem}}=102\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con tres días de atraso:

$$\frac{60-0}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 3\frac{\mathrm{día}}{\mathrm{sem}}+60\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 4\frac{\mathrm{días}}{\mathrm{sem}}=99\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con cuatro días de atraso:

$$\frac{60-0}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 3\frac{\mathrm{día}}{\mathrm{sem}}+1.000\frac{\$}{\mathrm{día}}\cdot 1\frac{\mathrm{dia}}{\mathrm{sem}}+60\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 3\frac{\mathrm{días}}{\mathrm{sem}}=1.081\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con cinco días de atraso:

$$\frac{60-0}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 3\frac{\mathrm{día}}{\mathrm{sem}}+1.000\frac{\$}{\mathrm{día}}\cdot 2\frac{\mathrm{dia}}{\mathrm{sem}}+60\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 2\frac{\mathrm{días}}{\mathrm{sem}}=2.063\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con seis días de atraso:

$$\frac{60-0}{2}\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 3\frac{\mathrm{día}}{\mathrm{sem}}+1.000\frac{\$}{\mathrm{día}}\cdot 3\frac{\mathrm{dia}}{\mathrm{sem}}+60\,\mathrm{u}\cdot 0{,}3\frac{\$}{\mathrm{u}\cdot \mathrm{día}}\cdot 1\frac{\mathrm{días}}{\mathrm{sem}}=3.045\frac{\$}{\mathrm{sem}}$$

- Entregas con siete días de atraso:

$$\frac{60-0}{2}\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 3\frac{\text{día}}{\text{sem}}+1.000\frac{\$}{\text{día}}\cdot 4\frac{\text{dia}}{\text{sem}}=4.027\frac{\$}{\text{sem}}$$

Simulando el proceso para $S_S = 60$, el costo semanal esperado es igual a \$126,86.

Para $S_S = 20$, tendremos que los costos son:

- Entregas en el día programado:

$$20\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 7\frac{\text{días}}{\text{sem}}=42\frac{\$}{\text{sem}}$$

- Entregas con un día de atraso:

$$\frac{20-0}{2}\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 1\frac{\text{día}}{\text{sem}}+20\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 6\frac{\text{días}}{\text{sem}}=39\frac{\$}{\text{sem}}$$

- Entregas con dos días de atraso:

$$\frac{20-0}{2}\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 1\frac{\text{día}}{\text{sem}}+1.000\frac{\$}{\text{día}}\cdot 1\frac{\text{día}}{\text{sem}}+60\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 5\frac{\text{días}}{\text{sem}}=1.093\frac{\$}{\text{sem}}$$

- Entregas con tres días de atraso:

$$\frac{20-0}{2}\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 1\frac{\text{día}}{\text{sem}}+1.000\frac{\$}{\text{día}}\cdot 2\frac{\text{día}}{\text{sem}}+60\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 4\frac{\text{días}}{\text{sem}}=2.075\frac{\$}{\text{sem}}$$

- Entregas con cuatro días de atraso:

$$\frac{20-0}{2}\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 1\frac{\text{día}}{\text{sem}}+1.000\frac{\$}{\text{día}}\cdot 3\frac{\text{día}}{\text{sem}}+60\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 3\frac{\text{días}}{\text{sem}}=3.057\frac{\$}{\text{sem}}$$

- Entregas con cinco días de atraso:

$$\frac{20-0}{2}\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 1\frac{\text{día}}{\text{sem}}+1.000\frac{\$}{\text{día}}\cdot 4\frac{\text{día}}{\text{sem}}+60\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 2\frac{\text{días}}{\text{sem}}=4.039\frac{\$}{\text{sem}}$$

- Entregas con seis días de atraso:

$$\frac{20-0}{2}\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 1\frac{\text{día}}{\text{sem}}+1.000\frac{\$}{\text{día}}\cdot 5\frac{\text{día}}{\text{sem}}+60\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 1\frac{\text{días}}{\text{sem}}=5.021\frac{\$}{\text{sem}}$$

- Entregas con siete días de atraso:

$$\frac{20-0}{2}\,u\cdot 0{,}3\frac{\$}{u\cdot \text{día}}\cdot 1\frac{\text{día}}{\text{sem}}+1.000\frac{\$}{\text{día}}\cdot 6\frac{\text{dia}}{\text{sem}}=6.003\frac{\$}{\text{sem}}$$

Simulando el proceso, el costo semanal esperado para $S_P = 20$ es igual a \$121,08.
En consecuencia, en las condiciones del problema, el Stock de Protección óptimo es de 40 unidades.

CAPÍTULO IV

SISTEMAS CON AGOTAMIENTO ADMITIDO

1. CONCEPTOS

El agotamiento (o escasez) de las existencias se verifica cuando no quedan más unidades disponibles para satisfacer la demanda. En tales circunstancias, se incurre en un costo que se denomina "costo de agotamiento" y que puede ser variable (dependiente o no del tiempo de insatisfacción de la demanda), fijo, o una combinación de ellos.

El costo de agotamiento es, en muchas ocasiones, excesivamente alto. En el caso de una refinería de petróleo, por ejemplo, el costo de quedarse sin crudo para procesar es infinitamente alto, no solo por el enorme lucro cesante en el que se incurriría, sino también por el excesivo costo que implica salir del estado de régimen. En estas circunstancias, las empresas recurren a sistemas con un stock de protección suficiente (como los vistos en el capítulo anterior) como para evitar el agotamiento.

Sin embargo, hay muchas situaciones en donde el costo de agotamiento es razonable y en las que se permite trabajar con períodos de tiempo durante los cuales no se cubre la demanda en el momento requerido.

El hecho de no satisfacer la demanda puede llevar a una postergación de la entrega de la mercadería solicitada o, directamente a la anulación (pérdida) definitiva de la entrega. Los casos que veremos suponen que hay postergación de las entregas.

2. COSTO UNITARIO DEPENDIENTE DEL TIEMPO DE AGOTAMIENTO

HIPÓTESIS

1. Se administra un único producto terminado.
2. El ítem en cuestión es un producto terminado y de demanda independiente.
3. La demanda es conocida y constante.
4. El plazo de entrega ("*lead time*") es conocido y constante.
5. La reposición es instantánea; es decir, la tasa de reaprovisionamiento es infinita.
6. El horizonte de planeamiento es a largo plazo.
7. El agotamiento está permitido. Es decir, se admite un diferimiento en las entregas pero sin perder las ventas. La empresa, entonces, está dispuesta a hacer frente a la falta de stocks asumiento un costo c_2 por unidad de tiempo por cada unidad de producto demandado no satisfecho inmediatamente. Los parámetros de costos son independientes de la cantidad a pedir "q".

8. No hay restricciones.
9. Todos los parámetros monetarios están expresados en moneda constante.
10. El producto en estudio se mide en una unidad continua (litros, kilogramos, etc.).
11. Se asume que el costo de agotamiento está dado solamente por el costo en el que se incurre por unidad de tiempo de déficit. Es decir, no hay costo fijo de agotamiento, ni costo por cantidad de unidades agotadas independiente del tiempo.

PARÁMETROS

- D: Demanda del producto, referida a un período estratégico de tiempo (año, semenstre, etc.).
- b: Costo unitario de adquisición.
- c_1: Costo unitario de almacenamiento.
- c_2: Costo unitario de agotamiento por unidad de tiempo de postergación.
- k: Costo de una orden.
- T = 1
- S_P: Stock de protección.
- LT = Lead Time.

VARIABLES

- q: Tamaño del lote. Constituye para este caso la variable de decisión básica.
- t: Intervalo de un ciclo. Es el tiempo que transcurre entre dos reaprovisionamientos sucesivos.
- t_1: Período de entrega de mercadería.
- t_2: Período de déficit de mercadería.
- CTE: Costo total esperado referido al período estratégico de tiempo.
- S_A: Cantidad máxima de unidades agotadas.
- S_R: Stock de reorden (llamado también "punto de pedido").
- S: Stock máximo.

MODELIZACIÓN

Siendo la demanda constante y el plazo de entrega fijo, el gráfico del stock en función del tiempo es el que se indica en la Figura 1. Una vez alcanzado el nivel cero, la empresa no satisface los pedidos en forma inmediata, pero los acumula de manera que cuando recibe el producto no solo repone la cantidad insatisfecha (correspondiente a los pedidos pendientes) sino también el nivel de stock inicial (es decir, el nivel máximo “S”).

Para un ciclo “i” cualquiera, tendremos entonces dos períodos de tiempo bien diferenciados: un período “t_1” en donde hay existencias y por lo tanto entrega de mercadería, y un período “t_2” de agotamiento.

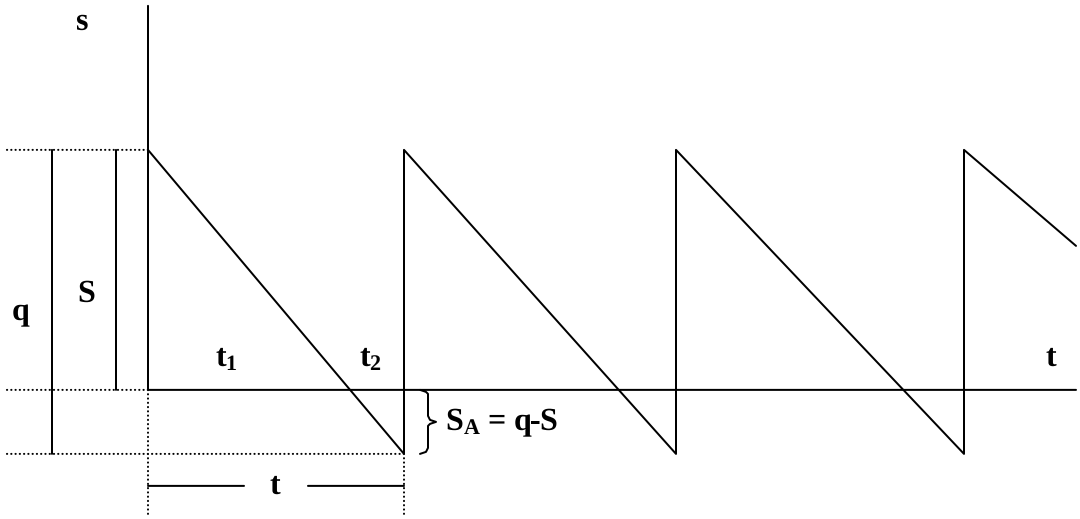


Figura 1

Luego, el costo total esperado del ciclo está dado por la expresión:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot S \cdot c_1 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot (q - S) \cdot c_2 \cdot t_2 + k \qquad \textbf{(1)}$$

Las variables t_1 y t_2 se pueden expresar en función de t, por relación de triángulos, como sigue:

$$\frac{S}{q} = \frac{t_1}{t} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{S \cdot t}{q} \qquad \textbf{(2)}$$

$$\frac{(q - S)}{q} = \frac{t_2}{t} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{(q - S) \cdot t}{q} \qquad \textbf{(3)}$$

Reemplazando (2) y (3) en (1), la expresión del costo total para un ciclo será:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot S^2 \cdot c_1 \cdot \frac{t}{q} + \frac{1}{2} \cdot (q - S)^2 \cdot c_2 \cdot \frac{t}{q} + k \qquad \textbf{(4)}$$

Multiplicando esta expresión por el número de ciclos "n" por período de referencia

$$n = \frac{D}{q} = \frac{T}{t} \qquad \textbf{(5)}$$

tendremos:

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2}{q} \cdot c_1 \cdot T + \frac{1}{2} \cdot \frac{(q - S)^2}{q} \cdot c_2 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} \qquad \textbf{(6)}$$

Esta es la función objetivo a minimizar, en donde "q" y “S” son las variables a determinar. La diferencia entre ellas es el número máximo de unidades agotadas por ciclo:

$$S_A = q - S \tag{7}$$

Para hallar los valores óptimos de “q” y “S”, se debe derivar la expresión (6) con respecto a cada una de ellas e igualar a cero. De esta forma se obtiene un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Si las derivadas segundas son positivas, habremos encontrado el mínimo de la función. Derivando con respecto de “q”:

$$\frac{\partial CTE}{\partial q} = \frac{-S^2 \cdot c_1 \cdot T}{2 \cdot q^2} + \frac{2 \cdot (q-S) \cdot q - (q-S)^2}{2 \cdot q^2} \cdot c_2 \cdot T - \frac{k \cdot D}{q^2} = 0$$

$$= \frac{-S^2 \cdot c_1 \cdot T}{2} + \frac{2 \cdot q^2 - 2 \cdot S \cdot q - q^2 + 2 \cdot q \cdot S - S^2}{2} \cdot c_2 \cdot T - k \cdot D = 0$$

$$= \frac{-S^2 \cdot c_1 \cdot T}{2} + \frac{q^2 - S^2}{2} \cdot c_2 \cdot T - k \cdot D = 0$$

$$\frac{T}{2} \cdot \left\{ -S^2 \cdot c_1 + (q^2 - S^2) \cdot c_2 \right\} = k \cdot D$$

$$-S^2 \cdot c_1 + (q^2 - S^2) \cdot c_2 = \frac{k \cdot D}{T}$$

$$-S^2 \cdot c_1 + q^2 \cdot c_2 - S^2 \cdot c_2 = \frac{k \cdot D}{T}$$

Derivando ahora con respecto a “S”:

$$q^2 \cdot c_2 - S^2 \cdot (c_1 + c_2) = \frac{2 \cdot k \cdot D}{T} \tag{8}$$

Derivando ahora con respecto a “S”:

$$\frac{\partial CTE}{\partial S} = \frac{S \cdot c_1 \cdot T}{q} - \frac{(q-S)}{q} \cdot c_2 \cdot T = 0$$

$$S \cdot c_1 - q \cdot c_2 + S \cdot c_2 = 0$$

$$S \cdot (c_1 - c_2) - q \cdot c_2 = 0$$

$$S = \frac{q \cdot c_2}{c_1 + c_2} \tag{9}$$

Como se puede observar, ambas derivadas son positivas, por lo que tendremos un mínimo. Reemplazando (9) en (8):

$$q^2 \cdot c_2 - \frac{q^2 \cdot c_2^2}{(c_1 + c_2)^2} \cdot (c_1 + c_2) = \frac{2 \cdot k \cdot D}{T}$$

$$q^2 \cdot \left\{ c_2 - \frac{c_2^2}{(c_1 + c_2)} \right\} = \frac{2 \cdot k \cdot D}{T}$$

$$q^2 \cdot \left\{ \frac{c_2 \cdot (c_1 + c_2) - c_2^2}{(c_1 + c_2)} \right\} = \frac{2 \cdot k \cdot D}{T}$$

$$q^2 \cdot \left\{ \frac{c_2 \cdot c_1 + c_2^2 - c_2^2}{(c_1 + c_2)} \right\} = \frac{2 \cdot k \cdot D}{T}$$

$$q^2 \cdot \left\{ \frac{c_2 \cdot c_1}{(c_1 + c_2)} \right\} = \frac{2 \cdot k \cdot D}{T}$$

$$q_O = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D \cdot (c_1 + c_2)}{T \cdot c_1 \cdot c_2}}$$

Es decir:

$$\boxed{q_O = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}}} \qquad \textbf{(10)}$$

Esta es la expresión del lote óptimo de adquisición. Analizando la segunda raíz, observamos que en el caso de que c_2 fuera infinitamente grande (es decir, si no se admitiera agotamiento) la raíz tendería a 1, por lo que estaríamos en el caso del sistema básico desarrollado.

Para hallar la expresión del valor óptimo de la cantidad máxima a almacenar (“S”), reemplazamos (10) en (9):

$$S_o = \frac{q_o \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}} \cdot \frac{c_2}{c_1 + c_2}$$

Luego:

$$\boxed{S_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}}} \qquad \textbf{(11)}$$

Es decir:

$$S_o = \frac{q_o \cdot c_2}{c_1 + c_2}$$

Aquí también se puede ver que si c_2 tiende a infinito, la segunda raíz tendería a 1 y, en consecuencia, la cantidad máxima a almacenar óptima coicidiría con el lote óptimo, tal como ocurre en el caso básico desarrollado.

Finalmente, para determinar la cantidad máxima agotada óptima por período dada por la expresión (7):

$$S_{A\,o} = q_o - S_o = q_o - \frac{q_o \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{q_o \cdot (c_1 + c_2) - q_o \cdot c_2}{c_1 + c_2} = \frac{q_o \cdot c_1 + q_o \cdot c_2 - q_o \cdot c_2}{c_1 + c_2}$$

Entonces:

$$\boxed{S_{Ao} = q_o \cdot \frac{c_1}{c_1 + c_2}} \qquad \textbf{(12)}$$

Para hallar la formulación analítica del Costo Total Esperado, se reemplazan los valores de q_o y de S_o en la expresión (6) del CTE, como sigue:

$$CTE_o = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_o^{\,2}}{q_o} \cdot c_1 \cdot T + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_{AO}^2}{q_o} \cdot c_2 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q_o} \qquad \textbf{(13)}$$

El segundo término es igual a:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1} \cdot \frac{c_2}{c_1 + c_2} \cdot \sqrt{\frac{T \cdot c_1}{2 \cdot k \cdot D}} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}} \cdot c_1 \cdot T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}}$$

Por su parte el tercer término de (13) es:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q_o^2}{q_o} \cdot \frac{c_1^2}{(c_1 + c_2)^2} \cdot c_2 \cdot T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}} \cdot \frac{c_1^2}{(c_1 + c_2)^2} \cdot c_2 \cdot T =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}} \cdot \frac{c_1}{c_1 + c_2}$$

Finalmente el cuarto término es:

$$k \cdot D \cdot \sqrt{\frac{T \cdot c_1}{2 \cdot k \cdot D}} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}}$$

Luego, el Costo Total Esperado óptimo (13) será:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{c_2}{c_1 + c_2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{c_1}{c_1 + c_2} + \frac{1}{2} \right]$$

Dado que la expresión del corchete queda igual a 1, tendremos:

$$\boxed{CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}}} \qquad \textbf{(14)}$$

Puede observarse, nuevamente, que cuando c_2 es infinitamente grande la segunda raíz tiende a uno, por lo que la expresión del CTE_o quedaría igual a la del caso básico. Para valores finitos de c_2 la raíz es menor a uno, por lo que el CTE_o es menor que el CTE_o del caso básico. De aquí se infiere que, siempre que se admita agotamiento y que sea factible postergar entregas sin perder ventas, conviene (en términos económicos) trabajar parte del tiempo en déficit.

Para hallar los valores del resto de las variables (esto es n_o, t_o, t_{1o} y t_{2o}) basta con reemplazar los valores de q_o y S_o en las expresiones correspondientes.

Finalmente, tal como puede verse en la Figura 2, tendremos que el Stock de Reorden, conocido el plazo de entrega LT de un lote, es:

$$S_R = LT \cdot d - S_{A_O} \qquad \textbf{(15)}$$

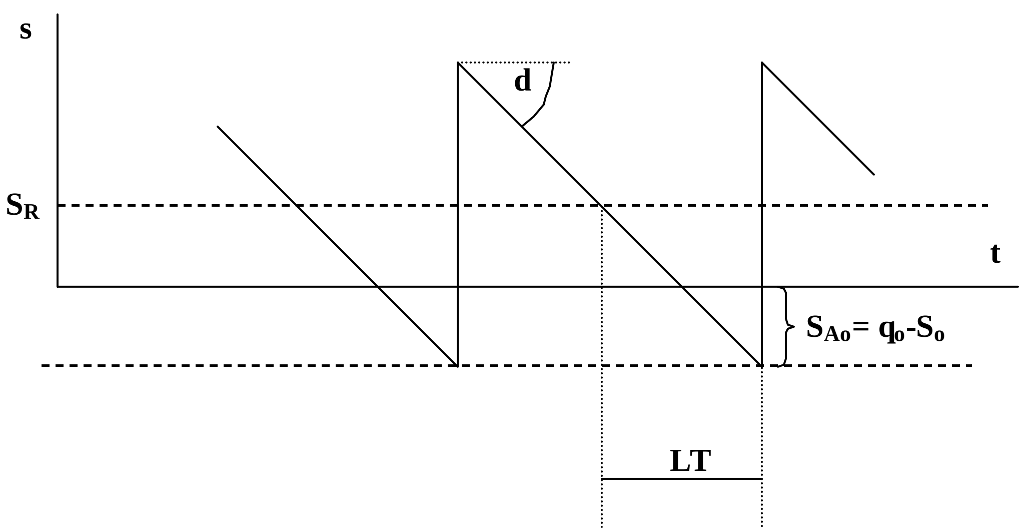


Figura 3

3. AGREGADO DE COSTO INDEPENDIENTE DEL TIEMPO

Asumiremos las mismas hipótesis que en el caso anterior, con excepción de la última: Cada vez que se llega a la condición de agotamiento, se incurre también en un costo f_2 por cada unidad agotada. Las expresiones del Costo Total Esperado para un ciclo y para "n" ciclos serán en este caso, respectivamente:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot S \cdot c_1 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot (q - S) \cdot c_2 \cdot t_2 + k + S_A \cdot f_2$$

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2}{q} \cdot c_1 \cdot T + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_A{}^2}{q} \cdot c_2 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} + S_A \cdot f_2 \cdot \frac{D}{q} \qquad \textbf{(16)}$$

Teniendo en cuenta que

$$S = q - S_A$$

y derivando con respecto a "S_A" y a "q" (o bien con respecto a "S" y a "q"), y operando matemáticamente de similar forma que en el caso anterior, se llega a las siguientes expresiones finales:

$$\boxed{q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1} - \frac{(f_2 \cdot D)^2}{c_1 \cdot (c_1 + c_2)}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}}} \qquad \textbf{(17)}$$

$$\boxed{S_{A\,o} = \frac{c_1 \cdot q_o - f_2 \cdot D}{c_1 + c_2}} \qquad \textbf{(18)}$$

y, por supuesto:

$$S_o = q_o - S_{A_O} \qquad \textbf{(19)}$$

4. AGREGADO DE COSTO FIJO POR CADA SITUACIÓN DE DÉFICIT

Si se agrega al caso anterior la condición de un costo fijo F en el cual se incurre por el simple hecho de llegar a la condición de agotamiento, tendremos que la expresión del Costo Total Esperado para un ciclo es:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot S \cdot c_1 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot (q - S) \cdot c_2 \cdot t_2 + k + S_A \cdot f_2 \cdot t + F$$

y, para "n" ciclos:

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2}{q} \cdot c_1 \cdot T + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_A{}^2}{q} \cdot c_2 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} + S_A \cdot f_2 \cdot \frac{D}{q} + F \cdot \frac{D}{q} \qquad \textbf{(20)}$$

Operando, se arriba a las expresiones óptimas finales de "q", "S_A" y "S":

$$\boxed{q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot (k + F) \cdot D}{T \cdot c_1} - \frac{(f_2 \cdot D)^2}{c_1 \cdot (c_1 + c_2)}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}}} \qquad \textbf{(21)}$$

$$\boxed{S_{A\,o} = \frac{c_1 \cdot q_o - f_2 \cdot D}{c_1 + c_2}} \qquad \textbf{(22)}$$

$$S_o = q_o - S_{A_O} \qquad \textbf{(23)}$$

Ejemplo 4.1:

Una empresa adquiere un tipo de válvula que se utiliza a razón de 200 por año. Se tienen los siguientes datos:

El costo de cada válvula es de \$50 y el costo de la orden de compra es de \$5.

El costo de mantener anualmente el inventario es de \$0,10 por unidad.

El costo de agotamiento es de \$10 por unidad y por año.

El "lead time" es de 4 meses.

a) Encontrar el lote óptimo

b) Determinar la cantidad máxima de válvulas a mantener en stock y el punto de reorden.

c) Calcular el período durante el cual se mantienen las válvulas en inventario y el período de déficit de las mismas.

d) ¿Cómo se modificarían los puntos a) y b) del problema si, además del costo de agotamiento variable en el tiempo se agrega un costo de \$0,02 por cada unidad agotada?

Solución:

a) Lote óptimo de compra:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 200}{1 \cdot 0{,}1}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}1 + 10}{10}} = 142{,}13$$

b) Agotamiento máximo:

$$S_{A_O} = c_1 \cdot q_o \cdot \frac{1}{c_1 + c_2} = 1{,}41$$

El stock máximo de válvulas será, entonces:

$$S_o = q_o - S_A = 140{,}72$$

y, en consecuencia, el punto de pedido es:

$$S_R = LT \cdot d - (q_o - S_o) = 0{,}3\widehat{3} \cdot 200 - (142{,}13 - 140{,}72) = 65{,}26$$

c) Períodos del ciclo:

En primer lugar se calculan los valores óptimos del número de pedidos y de la duración del ciclo:

$$n_o = \frac{D}{q_o} = \frac{200}{142{,}13} = 1{,}41$$

$$t_o = \frac{T}{n_o} = \frac{1}{1{,}41} = 0{,}71$$

Luego, el período de inventario es:

$$t_{1o} = \frac{S_o \cdot t}{q_o} = \frac{140{,}72 \cdot 0{,}71}{142{,}13} \cong 0{,}70$$

y el período de agotamiento:

$$t_{2o} = \frac{(q_o - S_o) \cdot t}{q_o} = \frac{(142{,}13 - 140{,}72) \cdot 0{,}71}{142{,}13} \cong 0{,}01$$

El modelo, planteado y resuelto con el sistema LINGO para este problema, se muestra a continuación:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*S^2/q *c1 * T + k * D/q + 0.5 * Sa^2/ q * c2 * T ;
n = D / q;
Sa = q-S;
ti = q/D * T;
ti = t1 + t2;
t1 = S * ti/ q;
Sr = LT * d - Sa;
c1 = c1op + i * b;

T = 1;
b = 50;
i = 0;
D = 200;
c1op = 0.1;
k = 5;
LT = 4/12;
c2 = 10;
END
```

```
Local optimal solution found at step:             29
 Objective value:                              10014.07

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        10014.07           0.0000000
                              B        50.00000           0.0000000
                              D        200.0000           0.0000000
                              S        140.7195           0.0000000
                              Q        142.1267           0.6847390E-07
                             C1       0.1000000           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        5.000000           0.0000000
                             SA        1.407190           0.0000000
                             C2        10.00000           0.0000000
                              N        1.407195           0.0000000
                             TI       0.7106334           0.0000000
                             T1       0.7035975           0.0000000
                             T2       0.7035949E-02       0.0000000
                             SR        65.25948          -0.6179029E-05
                             LT       0.3333333           0.0000000
                           C1OP       0.1000000           0.0000000
                              I       0.0000000           0.0000000
```

```
Row     Slack or Surplus       Dual Price
  1         10014.07           -1.000000
  2        0.0000000           -1.000000
  3        0.0000000           0.0000000
  4        0.0000000         -0.9901002E-01
  5        0.0000000           0.0000000
  6        0.0000000           0.0000000
  7        0.0000000           0.0000000
  8        0.0000000         -0.6179029E-05
  9        0.0000000           -69.66312
 10        0.0000000           -7.035975
 11        0.0000000           -200.0000
 12        0.0000000           -3483.156
 13        0.0000000           -50.03518
 14        0.0000000           -69.66312
 15        0.0000000           -1.407195
 16        0.0000000         -0.1235806E-02
 17        0.0000000         -0.6966263E-02
 18        0.0000000         -0.6966119E-02
 19        0.0000000           -1.980198
 20        0.0000000           -1.407302
```

d) Si existiera, además, un costo fijo de \$0,02 por unidad agotada, tendríamos:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1} - \frac{(f_2 \cdot D)^2}{c_1 \cdot (c_1 + c_2)}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 200}{1 \cdot 0{,}1_1} - \frac{(0{,}02 \cdot 200)^2}{0{,}1 \cdot (0{,}1 + 10)}} \cdot \sqrt{\frac{0{,}1 + 10}{10}} = 142.07$$

$$S_{Ao} = \frac{c_1 \cdot q_o - f_2 \cdot D}{c_1 + c_2} = \frac{0.1 \cdot 142{,}07 - 0{,}02 \cdot 200}{0.1 + 10} = 1{,}01$$

$$S_O = q_O - S_{AO} = 141{,}06$$

El modelo formulado en LINGO, agregando el costo variable de f_2 y resolviendo:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*S^2/q *c1 * T + k * D/q + 0.5 * Sa^2/ q * c2 * T + Sa * f2 * D/q;
n = D / q;
Sa = q-S;
ti = q/D * T;
ti = t1 + t2;
t1 = S * ti/ q;
Sr = LT * d - Sa;
c1 = c1op + i * b;

T = 1;
b = 50;
i = 0;
D = 200;
c1op = 0.1;
k = 5;
LT = 4/12;
c2 = 10;
f2 = 0.02;
END
```

```
Local optimal solution found at step:            33
 Objective value:                          10014.11

                   Variable          Value        Reduced Cost
                        CTE       10014.11           0.0000000
                          B       50.00000           0.0000000
                          D       200.0000           0.0000000
                          S       141.0598           0.0000000
                          Q       142.0703           0.1603806E-07
                         C1      0.1000000           0.0000000
                          T       1.000000           0.0000000
```

K	5.000000	0.0000000
SA	1.010563	0.0000000
C2	10.00000	0.0000000
F2	0.2000000E-01	0.0000000
N	1.407753	0.0000000
TI	0.7103517	0.0000000
T1	0.7052989	0.0000000
T2	0.5052814E-02	0.0000000
SR	65.65610	0.2088120E-05
LT	0.3333333	0.0000000
C1OP	0.1000000	0.0000000
I	0.0000000	0.0000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	10014.11	-1.000000
2	0.0000000	-1.000000
3	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	-0.9928879E-01
5	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	0.0000000
8	0.0000000	0.2088120E-05
9	0.0000000	-70.02820
10	0.0000000	-7.038761
11	0.0000000	-200.0000
12	0.0000000	-3501.410
13	0.0000000	-50.03534
14	0.0000000	-70.02820
15	0.0000000	-1.407753
16	0.0000000	0.4176240E-03
17	0.0000000	-0.3594123E-02
18	0.0000000	-1.422623

Ejemplo 4.2:

Si en el problema 2.8, la empresa RAM admitiera agotamiento, y sabiendo que el costo anual por unidad agotada de componentes es de \$20, determinar cuál sería el lote óptimo, la cantidad máxima de unidades agotadas, el costo total asociado al lote óptimo, el tiempo entre pedidos y la cantidad de pedidos que se deben efectuar por año.

Solución:

$$D = 100.000 \ \frac{\text{un.}}{\text{año}}$$

$$k = 25 \ \frac{\$}{\text{pedido}}$$

$$LT = \frac{4}{300} \ \frac{\text{días}}{\text{días/año}} = 0{,}01\widehat{3}\,\text{año}$$

$$b = 6{,}25 \ \frac{\$}{\text{un.}}$$

$$c_1 = 6{,}25 \cdot 0{,}2 \ \frac{\$}{\text{año} \cdot \text{un.}} = 1{,}25 \ \frac{\$}{\text{año} \cdot \text{un.}}$$

$$c_2 = 20 \ \frac{\$}{\text{año} \cdot \text{un.}}$$

a) Lote óptimo de compra:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 100.000}{1 \cdot 1{,}25}} \cdot \sqrt{\frac{1{,}25 + 20}{20}} = 2.061{,}60$$

b) Agotamiento máximo:

$$S_{A_O} = c_1 \cdot q_o \cdot \frac{1}{c_1 + c_2} = 1{,}25 \cdot 2.061{,}60 \cdot \frac{1}{1{,}25 + 20} = 1.212{,}07$$

c) Costo Total Esperado óptimo:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}} = 627.425{,}4$$

d) tiempo entre pedidos:

$$t_o = \frac{q_o \cdot T}{D} \cong 0{,}021$$

e) Períodos del ciclo:

$$n_o = \frac{D}{q_o} = 48{,}51$$

Formulado y resuelto el problema con el sistema LINGO, tendremos:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*S^2/q *c1 * T + k * D/q + 0.5 * Sa^2/ q * c2 * T + Sa * f2 * D/q;
n = D / q;
Sa = q-S;
ti = q/D * T;
ti = t1 + t2;
t1 = S * ti/ q;
Sr = LT * d - Sa;
c1 = c1op + i * b;

T = 1;
b = 6.25;
i = 0.2;
D = 100000;
c1op = 0;
k = 25;
LT = 4/300;
c2 = 20;
f2 = 0.0;
END
```

```
Local optimal solution found at step:              36
 Objective value:                             627425.4

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        627425.4           0.0000000
                              B        6.250000           0.0000000
                              D        100000.0           0.0000000
```

S	1940.286	0.0000000
Q	2061.554	0.3426820E-07
C1	1.250000	0.0000000
T	1.000000	0.0000000
K	25.00000	0.0000000
SA	121.2681	-0.1476073E-05
C2	20.00000	0.0000000
F2	0.0000000	0.0000000
N	48.50710	0.0000000
TI	0.2061554E-01	0.0000000
T1	0.1940286E-01	0.0000000
T2	0.1212681E-02	0.0000000
SR	1212.065	0.0000000
LT	0.1333333E-01	0.0000000
C1OP	0.0000000	0.0000000
I	0.2000000	0.0000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	627425.4	-1.000000
2	0.0000000	-1.000000
3	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	-1.176471
5	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	0.0000000
8	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	-913.0756
10	0.0000000	-1212.679
11	0.0000000	-100182.6
12	0.0000000	-5706.722
13	0.0000000	-6.262127
14	0.0000000	-913.0756
15	0.0000000	-48.50710
16	0.0000000	0.0000000
17	0.0000000	-3.566714
18	0.0000000	-5882.363

Ejemplo 4.3:

Si en el problema 4.2, además del costo de agotamiento c_2 por unidad agotada en el año hubiera un costo f_2 por componente agotado, y un costo fijo F por cada vez que se incurre en el agotamiento, calcular el lote óptimo qo, la cantidad máxima de unidades agotadas, y el stock máximo de almacenamiento. Asumir los siguientes datos:
$f_2 = 0{,}01$ \$/unidad
F = \$ 200

Solución:

Aplicando las expresiones (21), (22) y (23), tendremos:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot (k + F\cdot) \cdot D}{T \cdot c_1} - \frac{(f_2 \cdot D)^2}{c_1 \cdot (c_1 + c_2)}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}} = 6.181{,}42$$

$$S_{A\,o} = \frac{c_1 \cdot q_o - f_2 \cdot D}{c_1 + c_2} = 316{,}55$$

$$S_o = q_o - S_{A_O} = 5.864{,}87$$

Resolviendo este mismo problema con el sistema LINGO (se muestra solamente la parte correspondiente a las variables del informe de salida):

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*S^2/q *c1 * T + k * D/q + 0.5 * Sa^2/ q * c2 * T + Sa * f2 * D/q + F *
D/q;
n = D / q;
Sa = q-S;
ti = q/D * T;
ti = t1 + t2;
t1 = S * ti/ q;
c1 = c1op + i * b;

T = 1;
b = 6.25;
i = 0.2;
D = 100000;
c1op = 0;
k = 25;
c2 = 20;
f2 = 0.01;
F = 200;
END

Local optimal solution found at step:              21
 Objective value:                          632331.1

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        632331.1           0.0000000
                              B        6.250000           0.0000000
                              D        100000.0           0.0000000
                              S        5864.868           0.0000000
                              Q        6181.422           0.2370775E-07
                             C1        1.250000           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        25.00000           0.0000000
                             SA        316.5539           0.2819657E-06
                             C2        20.00000           0.0000000
                             F2       0.1000000E-01       0.0000000
                              F        200.0000           0.0000000
                              N        16.17751           0.0000000
                             TI       0.6181422E-01       0.0000000
                             T1       0.5864868E-01       0.0000000
                             T2       0.3165539E-02       0.0000000
                           C1OP       0.0000000           0.0000000
                              I       0.2000000           0.0000000
```

CAPÍTULO V

REPOSICIÓN NO INSTANTÁNEA

1. CONCEPTOS

Tal como hemos visto, un sistema de inventarios comprende un ingreso (suministro) al depósito y un egreso (demanda) del mismo.

Figura 1

El suministro, también llamado reposición o reaprovisionamiento, puede provenir de una fuente externa (proveedor) o de una fuente interna (la propia empresa) y se puede efectuar a tasa finita (cuando lleva un tiempo realizarlo) o infinita (cuando es instantáneo).

La reposición instantánea, o de tasa infinita, se verifica típicamente cuando el proveedor es externo. En los casos planteados hasta el momento, hemos supuesto que el reaprovisionamiento al depósito era de este tipo, en donde el gráfico "s-t", cuando no había déficit, era del tipo como el que se indica a continuación:

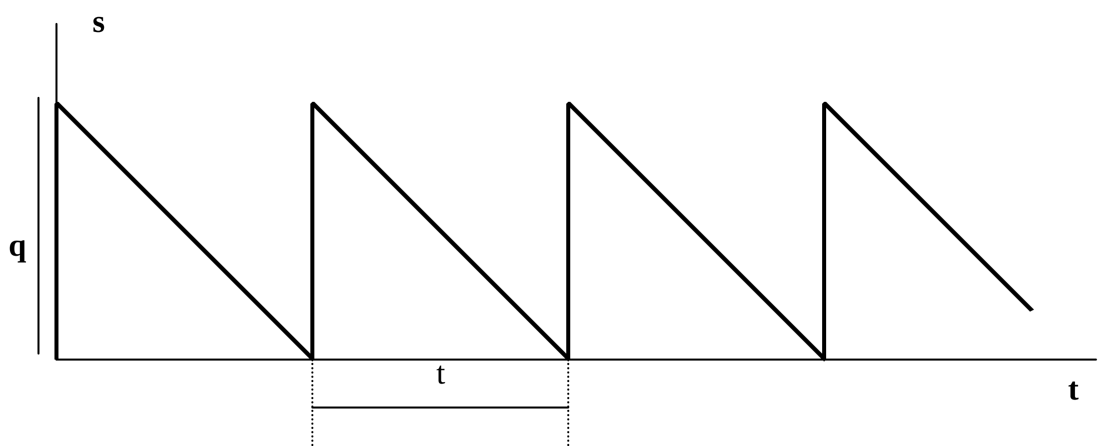


Figura 2

Estudiaremos a continuación un sistema de stocks en donde la reposición del producto al almacén no es instantánea, sino que -por el contrario- se efectúa a una tasa finita y constante. Este caso es aplicable generalmente para productos terminados o semielaborados, es decir, cuando el ítem en cuestión se produce internamente en la empresa e ingresa al depósito a medida que se va fabricando.

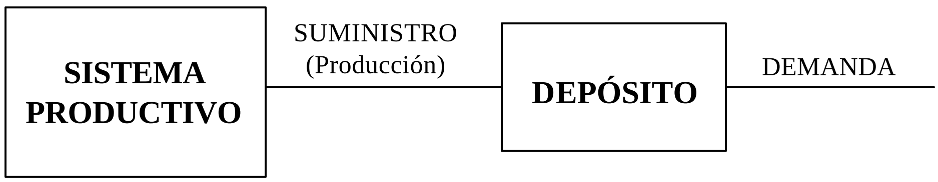


Figura 3

En la Figura 4 se observa la relación “s-t” para un sistema de reaprovisionamiento instantáneo, sin agotamiento. Cuando el nivel de stock llega a cero comienza el reaprovisionamiento de la mercadería. Asumiendo que la tasa de demanda del producto es finita y constante durante todo el período “t”, habrá un período de tiempo t_{1p} en donde se verifica el ingreso de la mercadería a una tasa finita. Una vez completada la entrega del pedido solicitado, se interrumpe el aprovisionamiento y habrá solamente demanda (período t_{1d}).

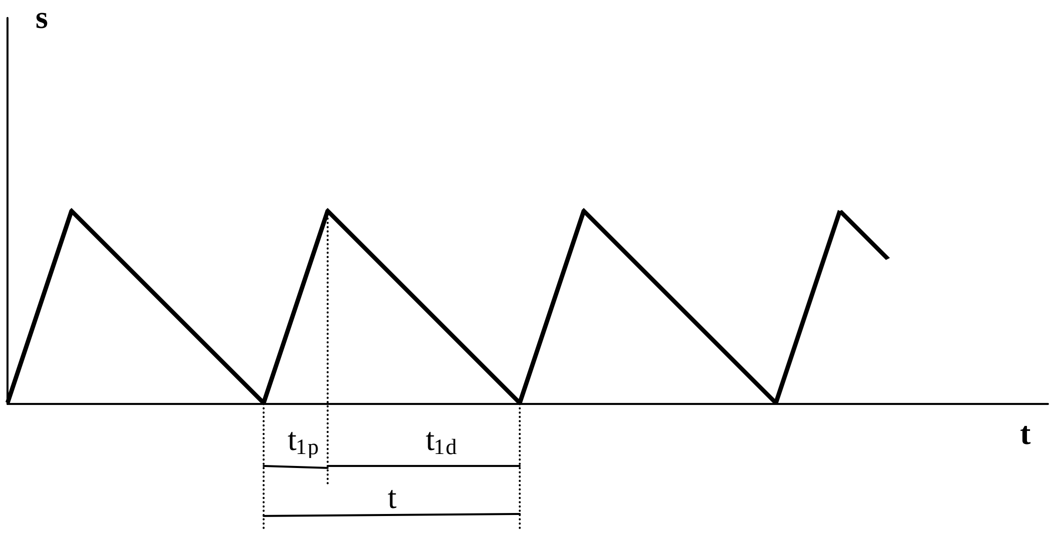


Figura 4

Para una mejor comprensión del proceso, en la Figura 5 se han superpuesto los dos casos. Con líneas punteadas se grafica la evolución del nivel de inventarios para el caso de reaprovisionamiento instantáneo de la Figura 1, mientras que con trazos completos se ilustra el caso de reaprovisionamiento no instantáneo de la Figura 4. Se observa claramente que el nivel de stock máximo y, en consecuencia, las dimensiones físicas requeridas del depósito son menores para el segundo caso.

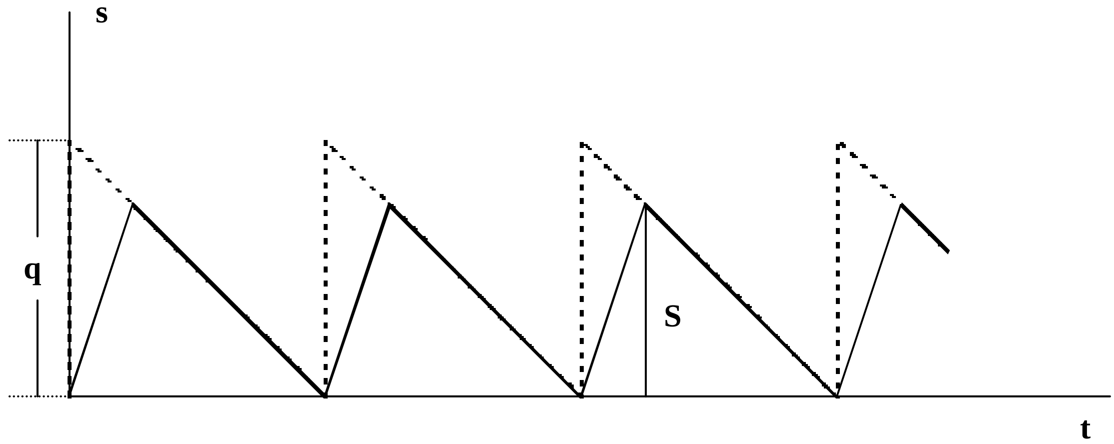


Figura 5

2. REPOSICIÓN NO INSTANTÁNEA SIN ADMISIÓN DE AGOTAMIENTO Y SIN STOCK DE PROTECCIÓN.

HIPÓTESIS

1. Se administra un único producto terminado.
2. El producto es de demanda independiente.
3. La demanda es conocida y constante.
4. El plazo de entrega ("*lead time*") es conocido y constante.
5. La reposición es no instantánea; es decir, la tasa de reaprovisionamiento es finita. El abastecimiento del producto se efectúa durante un período de tiempo t_{1p} durante el cual el ingreso se hace a una tasa “p” y el egreso a una tasa “d”. Una vez finalizado el aprovisionamiento de ese ciclo, habrá solamente egreso de mercadería a la tasa de demanda “d” durante el período t_{1d}.
6. El horizonte de planeamiento es a largo plazo.
7. El agotamiento no está permitido.
8. No hay restricciones.
9. Todos los parámetros monetarios están expresados en moneda constante.
10. El producto en estudio se mide en una unidad continua (litros, kilogramos, etc.).
11. No hay stock de protección.

PARÁMETROS

- D: Demanda del producto, referida a un período estratégico de tiempo (año, semenstre, etc.). Con la letra "d" denotaremos la tasa de demanda, es decir la demanda expresada en una unidad de tiempo más corto (días, semanas, etc.).

- P: Reposición referida a un período estratégico de referencia para la planificación (por ejemplo, año, semestre, etc.). Asimismo, denotaremos con "p" a la tasa de reposición con referencia a una unidad de tiempo menor (por ejemplo, días, semanas, etc.).
- b: Costo unitario de adquisición.
- c_1: Costo unitario de almacenamiento.
- k: Costo de una orden.
- T = 1
- LT = Lead Time.

VARIABLES

- q: Tamaño del lote. Constituye para este caso la variable de decisión básica.
- t: Intervalo de un ciclo. Es el tiempo que transcurre entre dos reaprovisionamientos sucesivos.
- t_{1p}: Período de reaprovisionamiento.
- t_{1d}: Período durante el cual no hay ingreso al depósito.
- CTE: Costo total esperado referido al período estratégico de tiempo.
- S: Stock máximo.
- SR: Stock de reorden.

MODELIZACIÓN

Durante el período t_{1p}, siendo la tasa de ingreso igual a "p" y la tasa de egreso igual a "d", el nivel de stock crecerá a una tasa "p-d". Una vez ingresada al almacén toda la mercadería solicitada (es decir la cantidad "q") el nivel de inventarios será "S". A partir de ese momento se interrumpe el aprovisionamiento y comenzará a disminuir el nivel de las existencias a una tasa "d" durante el período t_{1d} hasta alcanzarse el nivel cero, en donde comienza nuevamente el reaprovisionamiento, repitiéndose nuevamente el ciclo, tal como se grafica en la Figura 6.

Para un ciclo "i" cualquiera, tendremos entonces dos períodos de tiempo bien diferenciados: un período t_{1p} en donde hay ingresos y egresos, y un período t_{1d} durante el cual hay egresos solamente.

El costo total esperado del ciclo está dado por la expresión:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot S \cdot c_1 \cdot t + k \qquad \textbf{(1)}$$

El nivel máximo de stock "S" se pude poner en función de el lote de adquisición "q". En la Figura 7, en la que se ha indicado un solo ciclo, se observa el lote "q" sobre el eje de ordenadas. En el período t_{1p}, que es el período de reaprovisionamiento, se debe ingresar al depósito la cantidad "q" solicitada. La línea discontinua indica la evolución del nivel de reposición que se produce a una tasa "p" hasta alcanzar la cantidad "q". En consecuencia:

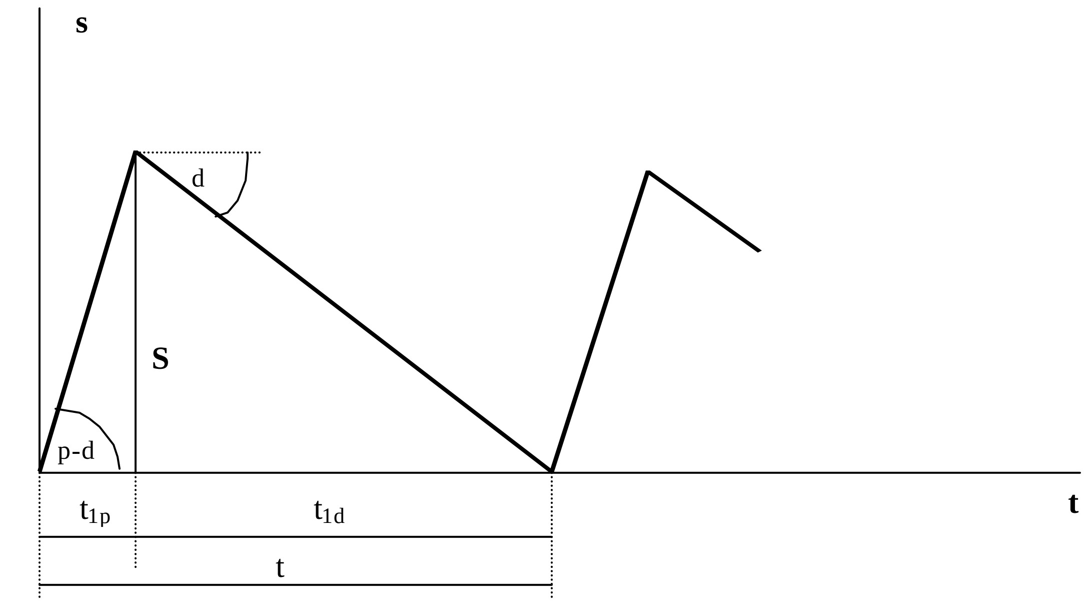


Figura 6

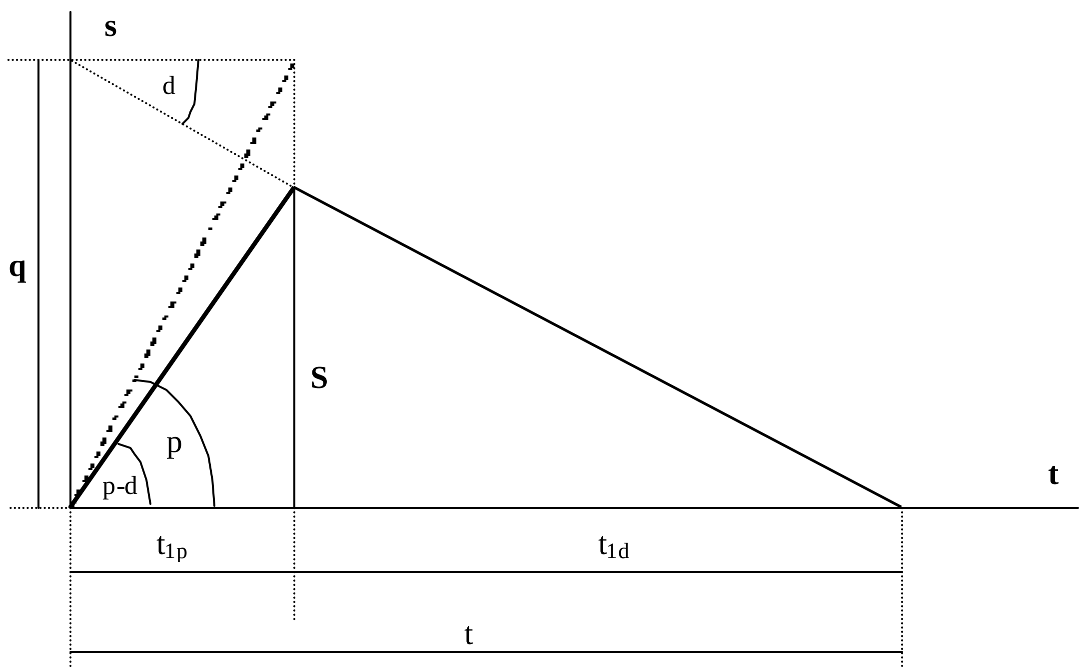


Figura 7

$$q = p \cdot t_{1p} \qquad \Rightarrow \qquad t_{1p} = \frac{q}{p} \tag{2}$$

Además:

$$S = (p - d) \cdot t_{1p} \tag{3}$$

Luego

$$S = (p - d) \cdot \frac{q}{p}$$

Es decir:

$$\boxed{S = q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} \tag{4}$$

Reemplazando en (1), tendremos que el costo total esperado del ciclo está dado por la expresión:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot c_1 \cdot t + k \tag{5}$$

Multiplicando esta expresión por el número de ciclos "n" que hay en cada período de referencia

$$n = \frac{D}{q} = \frac{T}{t}$$

tendremos:

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} \tag{6}$$

Para hallar el valor de "q" que minimice el funcional, se deriva esta función con respecto a "q", se iguala a cero:

$$\frac{\partial CTE}{\partial q} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot T - k \cdot \frac{D}{q^2} = 0$$

Como la derivada segunda es positiva, tendremos un mínimo en ese punto. Despejando "q", tendremos la expresión del lote óptimo:

$$\boxed{q_O = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}}} \tag{7}$$

Para hallar la formulación analítica del Costo Total Esperado óptimo, se reemplaza q_o en la expresión del CTE, como sigue:

$$CTE_o = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot T + k \cdot \frac{D}{\sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}}}$$

$$CTE_o = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot T + k \cdot D \cdot \sqrt{\frac{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}{2 \cdot k \cdot D}}$$

Introduciendo en la primera raíz el producto $c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) T$ y en la segunda k D, y multiplicando por 2 en el numerador y en el denominador del tercer término de la expresión:

$$CTE_o = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} \qquad \textbf{(8)}$$

Del mismo modo, a partir de la expresión (2), pueden determinarse los valores óptimos del intervalo "t", del período de ingreso ("t_{1p}") y del número de pedidos a efectuar en el período de referencia (por ejemplo, año):

$$t_o = \frac{T}{D} \cdot q_o = \frac{T}{D} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{D \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} \qquad \textbf{(9)}$$

$$t_{1p} = \frac{q_o}{p} = \frac{\sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}}}{p} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(p^2 - d \cdot p\right)}} \qquad \textbf{(10)}$$

$$n_o = \frac{D}{q_O} = D \cdot \sqrt{\frac{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}{2 \cdot k \cdot D}} = \sqrt{\frac{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot D}{2 \cdot k}} \qquad \textbf{(11)}$$

Para determinar el stock de reorden (punto de pedido), debe observarse si el plazo de entrega "LT" (*Lead Time*) es menor o igual a "t-t_{1p}" (ver Figura 8) o si es mayor a dicho valor (Figura 9).

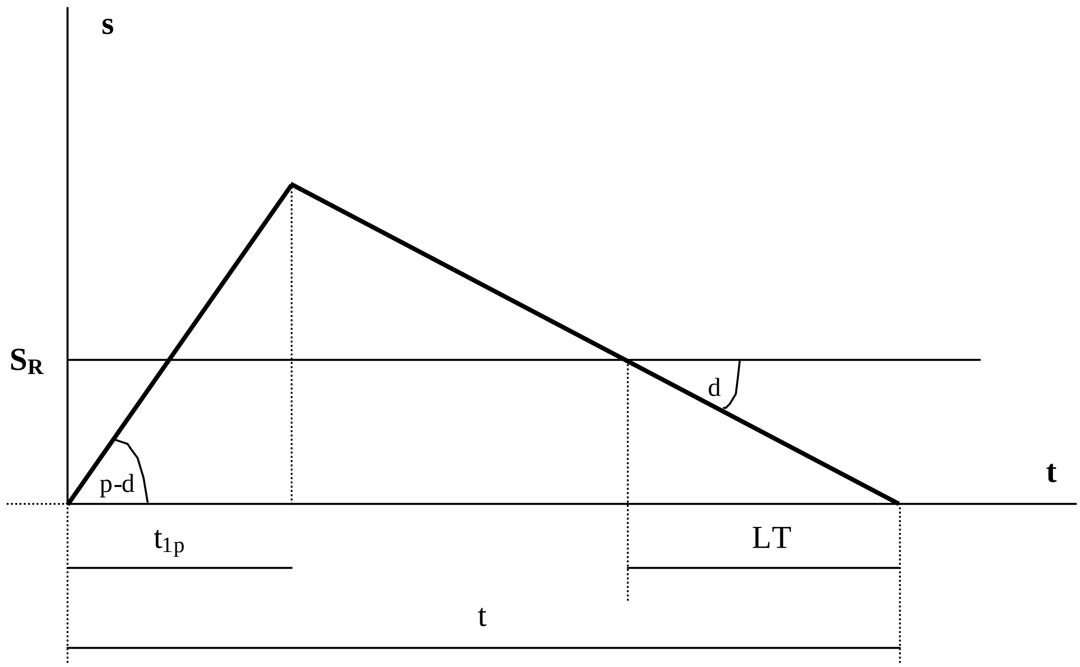


Figura 8

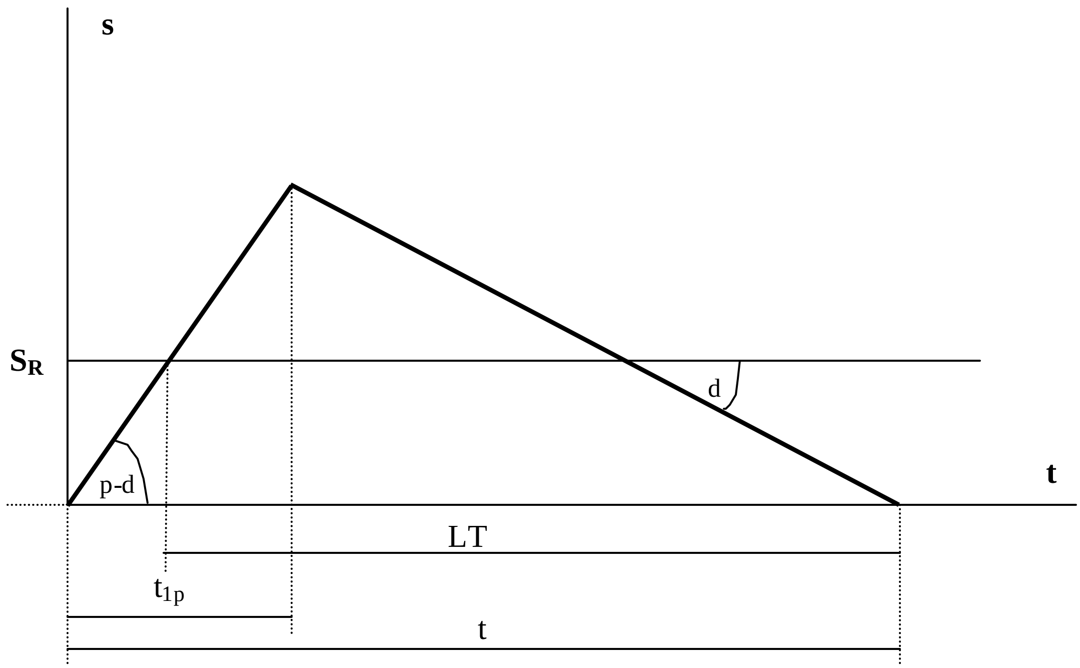


Figura 9

- Si $LT \leq t - t_{1P} \quad \Rightarrow \quad S_R = LT \cdot d$ **(12)**
- Si $LT > t - t_{1P} \quad \Rightarrow \quad S_R = (t - LT) \cdot (p - d)$ **(13)**

Para finalizar el análisis de este caso, cabría mencionar que, para ser aplicable el modelo desarrollado, obviamente la tasa de reaprovisionamiento "p" debe ser mayor que la de demanda "d". En los casos ideales en que las tasas de suministro y de extracción coinciden, no se mantienen inventarios (ampliaremos este concepto más adelante cuando se vean los sistemas "*Just-In-Time*"). Por último, si la demanda fuera mayor que el aprovisionamiento, se estaría permanentemente en déficit; además de contradecir las hipótesis, esto no sería lógico y nos estaría indicando, por ejemplo, que la empresa debería incrementar su capacidad de producción.

3. REPOSICIÓN NO INSTANTÁNEA CON STOCK DE PROTECCIÓN.

Asumiremos las mismas hipótesis que en el caso anterior, con excepción de la última: Se trabaja con un stock de seguridad S_S a fin de absorver imprevistos.

El gráfico del stock en función del tiempo es el que se indica en la Figura 10. Para un ciclo "i" cualquiera, tendremos que el costo total esperado está dado por la expresión:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot S \cdot c_1 \cdot t_{1p} + k + S_P \cdot c_1 \cdot t \qquad \textbf{(14)}$$

Pero como

$$S = q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

será:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot t + k + S_P \cdot c_1 \cdot t$$

Multiplicando esta expresión por el número de ciclos "n", tendremos la expresión del costo total esperado para el período de referencia:

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} + S_P \cdot c_1 \cdot T \qquad \textbf{(15)}$$

Derivando con respecto a la variable de decisión "q", nos permite llegar a la expresión del lote óptima, la que por supuesto coincide con la (4) anteriormente vista.

$$\boxed{q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}}}$$

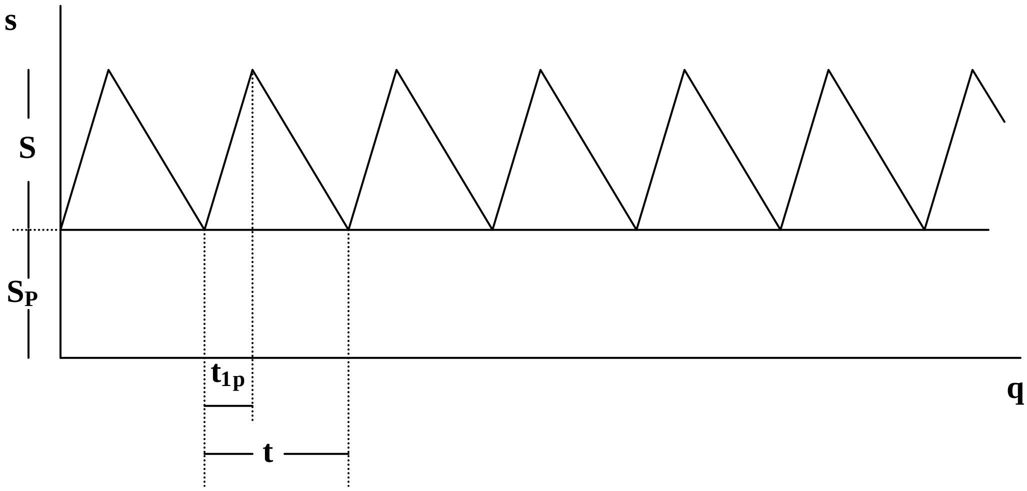


Figura 10

Reemplazando el lote óptimo en (15) y operando matemáticamente, tendremos la expresión del costo total esperado óptimo:

$$\boxed{CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} + S_P \cdot c_1 \cdot T} \qquad \textbf{(17)}$$

El resto de las variables ("n", "t_{1p}", "t", etc.) se obtienen tal como hemos visto en los casos anteriores reemplazando el valor del lote óptimo en las expresiones correspondientes. Por su parte, el Stock de reorden se calcula de la siguiente forma:

- Si $LT \leq t - t_{1P} \;\Rightarrow\; S_R = LT \cdot d + S_P$
- Si $LT > t - t_{1P} \;\Rightarrow\; S_R = (t - LT) \cdot (p - d) + S_P$

4. REPOSICIÓN NO INSTANTÁNEA CON ADMISIÓN DE AGOTAMIENTO.

Formularemos ahora un caso similar a los planteados, con la diferencia de que se permite entregar pedidos atrasados, siendo el costo unitario de déficit variable con el tiempo. El gráfico "s-t" se indica en la Figura 11.

Aquí habrá un período de existencias físicas y otro de agotamiento. Por su parte, habrá también un tiempo de reaprovisionamiento y un tiempo sin reaprovisionamiento. En la Figura 12 se ve un ciclo con un grado mayor de detalle. Llamando:

t_{1p}: período de tiempo con existencias y en reaprovisionamiento.

t_{1d}: período de tiempo con existencias y sin reaprovisionamiento

t_{2p}: período de tiempo en agotamiento y reaprovisionamiento.

t_{2d}: período de tiempo en agotamiento y sin reaprovisionamiento

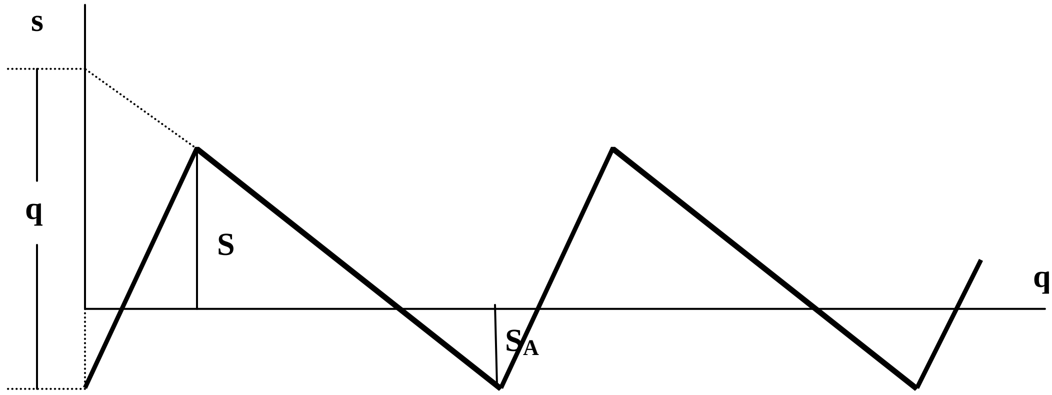


Figura 11

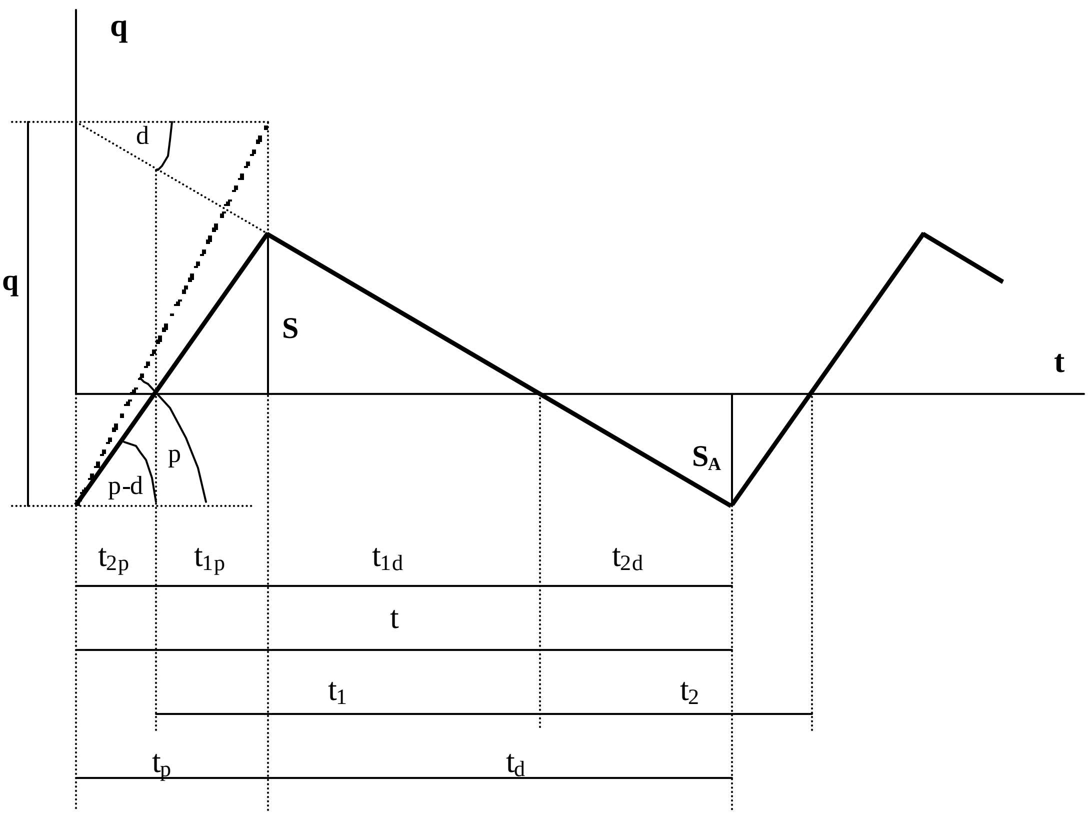


Figura 12

Luego, tendremos:

$t_1 = t_{1p} + t_{1d}$ período de existencias

$t_2 = t_{2p} + t_{2d}$ período de agotamiento

$t_p = t_{1p} + t_{1d}$ período de reabastecimiento (producción)

$t_d = t_{1p} + t_{1d}$ período sin reabastecimiento (demanda solamente).

El costo total esperado de un ciclo será:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot S \cdot c_1 \cdot \left(t_{1p} + t_{1d}\right) + k + \frac{1}{2} \cdot S_A \cdot c_2 \cdot \left(t_{2p} + t_{2d}\right) \qquad \textbf{(18)}$$

Teniendo en cuenta las relaciones de triángulos siguientes:

$$q = (t_{1p} + t_{2p}) \cdot p \qquad \textbf{(19)}$$

$$S + S_A = (t_{1p} + t_{2p}) \cdot (p - d) \qquad \textbf{(20)}$$

Luego:

$$S + S_A = \frac{q}{p} \cdot (p - d) = q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \qquad \textbf{(21)}$$

Es decir:

$$S = \frac{q}{p} \cdot (p - d)$$

$$\boxed{S = q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) - S_A} \qquad \textbf{(22)}$$

Además:

$$\frac{S_A}{S + S_A} = \frac{t_{2d} + t_{2p}}{t} \qquad \Rightarrow \qquad t_{2d} + t_{2p} = \frac{S_A}{S + S_A} \cdot t \qquad \textbf{(23)}$$

y, teniendo en cuenta 21:

$$t_{2d} + t_{2p} = \frac{S_A}{q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} \cdot t \qquad \textbf{(24)}$$

Por otra parte:

$$\frac{S}{S + S_A} = \frac{t_{1p} + t_{1d}}{t} \qquad \Rightarrow \qquad t_{1p} + t_{1d} = \frac{S}{S + S_A} \cdot t \qquad \textbf{(25)}$$

y, en consecuencia:

$$t_{1p} + t_{1d} = \frac{S}{q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} \cdot t \qquad \textbf{(26)}$$

Reemplazando (22), (24) y (26) en (18), multiplicando por "n", tendremos la expresión del CTE:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot \frac{S^2 \cdot c_1}{q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} \cdot t + k + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_A^2 \cdot c_2}{(S + S_A)} \cdot t$$

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left[q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) - S_A\right]^2 \cdot c_1 \cdot T}{q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} + \frac{k \cdot D}{q} + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_A^2 \cdot c_2 \cdot T}{q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} \qquad \textbf{(27)}$$

Derivando con respecto a las variables "q" y "S_A" e igualando a cero, queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Despejando, se llega a las siguientes expresiones:

$$\boxed{q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}}} \qquad \textbf{(28)}$$

$$\boxed{S_{A_O} = \frac{c_1 \cdot q_o \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}{c_1 + c_2}} \qquad \textbf{(29)}$$

Reemplazando en (22), obtendremos la expresión del stock máximo óptimo:

$$\boxed{S_o = q_o \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) - S_{A_O}} \qquad \textbf{(30)}$$

Es decir:

$$S_o = q_o \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot \left(1 - \frac{c_1}{(c_1 + c_2)}\right) \qquad \textbf{(31)}$$

mientras que reemplazando en (27), se llega al Costo Total Esperado óptimo:

$$CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}} \qquad \textbf{(32)}$$

Cabe observar de esta fórmulas que cuando $p \quad \infty$, pero "c_2" toma un valor finito, estamos en el caso de agotamiento con reposición instantáneo visto anteriormente. Por otra parte si "p" es finito y $c_2 \quad \infty$, el cociente $(c_1+c_2)/c_2$ tiende a 1 y el cociente $c_1/(c_1+c_2)$ tiende a cero, con lo que estaríamos en el caso de reposición no instantánea sin agotamiento permitido. Finalmente, si ambos parámetros (tasa de reaprovisionamiento y costo de agotamiento) tienden a infinito, nos encontraríamos en el modelo básico.

El resto de los valores óptimos de las variables características ("n", "t", "t_{1p}", t_{1d}", "t_{2p}", t_{2d}") surgen de reemplazar los valores óptimos calculados de "q" y de "S_A" en las expresiones correspondientes que se determinan por relaciones de triángulos.

Para determinar el stock de reorden, puede ocurrir que el plazo de entrega ("lead time") sea menor o igual a "t_d", o que sea mayor a ese intervalo (ver Figura 13).

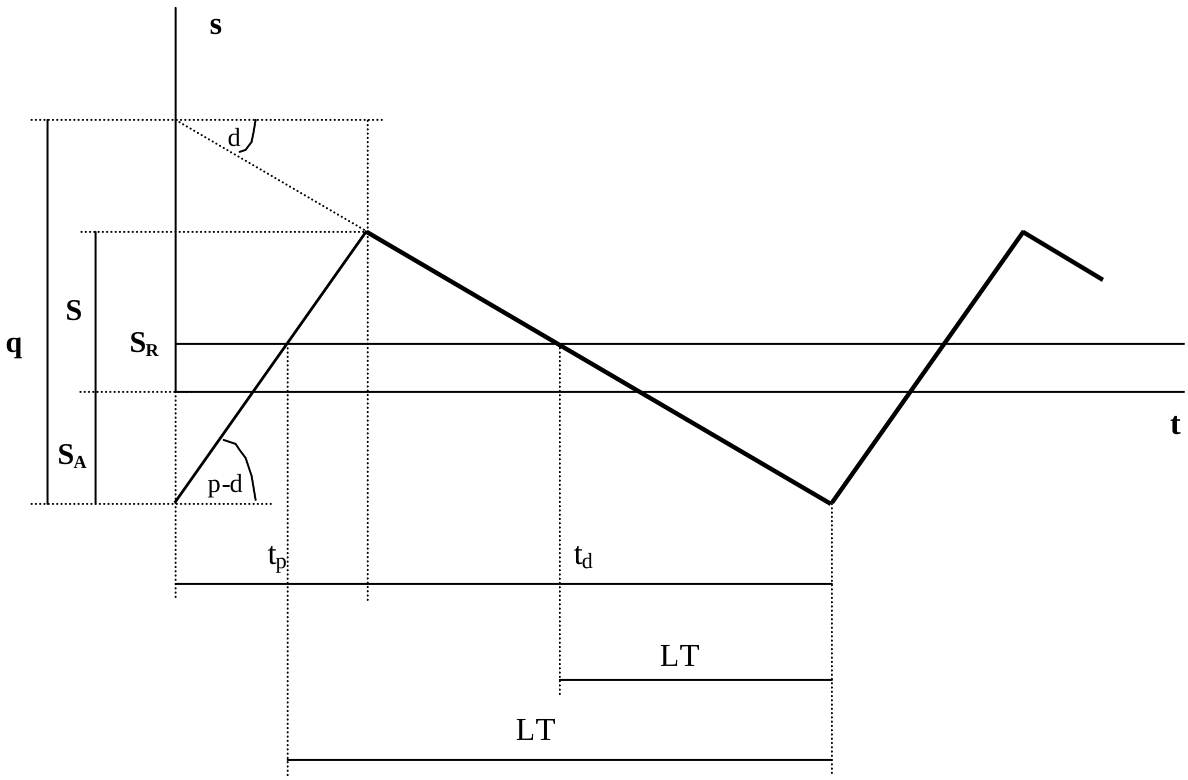


Figura 13

- Si $LT \le t_d \quad \Rightarrow \quad S_R = LT \cdot d - S_A$ **(33)**
- Si $LT > t_d \quad \Rightarrow \quad S_R = (t - LT) \cdot (p - d) - S_A$ **(34)**

5. REPOSICIÓN NO INSTANTÁNEA CON COSTOS DE AGOTAMIENTO DE DISTINTO TIPO

Formularemos ahora un caso general de agotamiento con reposición no instantánea, que contemple un costo de agotamiento "c_2" (por unidad y por unidad de tiempo), un costo de agotamiento "f_2" (por cada unidad agotada) y un costo fijo por cada vez que se llega al agotamiento "F_2". En este caso las expresión del costo total esperado para un ciclo será:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot S \cdot c_1 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot S_A \cdot c_2 \cdot t_2 + k + S_A \cdot f_2 + F_2$$

Considerando que:

$$S = q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

y las relaciones de los períodos del ciclo vistas más arriba, tendremos:

$$\boxed{CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left[q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) - S_A\right]^2}{q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} \cdot c_1 \cdot T + \frac{1}{2} \cdot \frac{S_A{}^2}{q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} \cdot c_2 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} + S_A \cdot f_2 \cdot \frac{D}{q} + F_2 \cdot \frac{D}{q}} \quad \textbf{(35)}$$

Procediendo de igual manera que en los modelos anteriores, es decir derivando esta expresión con respecto a las variables "q" y "S_A" (o bien "q" y "S"), igualando a cero y despejando, se llega a:

$$\boxed{q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot (k + F_2 \cdot I_F) \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} - \frac{(f_2 \cdot D)^2}{c_1 \cdot (c_1 + c_2)}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}}} \quad \textbf{(36)}$$

$$\boxed{S_{A\,o} = \frac{(c_1 \cdot q_o - f_2 \cdot D) \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}{(c_1 + c_2)}} \quad \textbf{(37)}$$

$$\boxed{S_o = q_o \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) - S_{A\,O}} \quad \textbf{(38)}$$

6. MODELO GENERAL DE STOCK PARA DETERMINACIÓN DEL LOTE ÓPTIMO DE ADQUISICIÓN

Podríamos formular, entonces, un modelo general para la determinación del lote óptimo de adquisición, si al caso anterior se le agregara el stock de seguridad.

Obviamente cuando hay stock de seguridad no se admite agotamiento Las expresiones generales serán entonces:

$$CTE = b\cdot D + \frac{1}{2}\cdot\frac{\left[q\cdot\left(1-\frac{d}{p}\right)-S_A\right]^2}{q\cdot\left(1-\frac{d}{p}\right)}\cdot c_1\cdot T + \frac{1}{2}\cdot\frac{S_A{}^2}{q\cdot\left(1-\frac{d}{p}\right)}\cdot c_2\cdot T + k\cdot\frac{D}{q} + S_A\cdot f_2\cdot\frac{D}{q} + F_2\cdot\frac{D}{q} + S_P\cdot c_1\cdot T \qquad \textbf{(39)}$$

Procediendo de igual manera que en los modelos anteriores se llega a:

$$q_o = \sqrt{\frac{2\cdot(k+F_2\cdot)\cdot D}{T\cdot c_1\cdot\left(1-\frac{d}{p}\right)} - \frac{(f_2\cdot D)^2}{c_1\cdot(c_1+c_2)}}\cdot\sqrt{\frac{c_1+c_2}{c_2}} \qquad \textbf{(40)}$$

$$S_{A\,o} = \frac{(c_1\cdot q_o - f_2\cdot D)\cdot\left(1-\frac{d}{p}\right)}{(c_1+c_2)} \qquad \textbf{(41)}$$

$$S_o = q_o\cdot\left(1-\frac{d}{p}\right) - S_{A_O} \qquad \textbf{(42)}$$

$$S_{MÁXo} = S_p + S_O \qquad \textbf{(43)}$$

La formulación de este modelo general utilizando el sistema LINGO es la siguiente:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 1/2 *(q*(1-d/p)-Sa)^2/(q*(1-d/p))*c1*T + 1/2 * Sa^2 / (q*(1-d/p))*c2*T
      + k * D / q + Sa * f2 * D/q + F * D / q + Sp * c1 * T;

c1 = c1op + i*b;
T = 1;
n = D / q;
S = q * (1-d/p) - Sa;
Smax = S + Sp;
ti = t1 + t2;
t1 = t1d + t1p;
t2 = (t2d + t2p);
ti = q/D * T;
t1p = S / (p-d);
t1d = S / d;
t2p =  Sa / (p-d);
t2d = Sa / d;
tp = t1p + t2p;
td = t1d + t2d;
c1 = c1op + i * b;
```

Ejemplo 5.1:

Un fabricante ensambla bicicletas empleando partes compradas a proveedores. Un técnico tarda 8 hs en preparar la línea de montaje.

Las partes se recogen en las instalaciones de los subcontratistas el día anterior a que comienza la tanda de producción. Para ello se contrata un servicio de flete que provee un camión con chofer y ayudante, cuyo costo es de 30$ por hora. El trabajo de recolección de partes lleva dos horas de flete.

El armado de las bicicletas lo hacen cuatro operarios a razón de 12 bicicletas por día. La demanda anual de bicicletas es de 800 unidades.

El valor de las partes componentes de una bicicleta completa es de $108. El costo horario del técnico es de $12, mientras que el de cada operario que trabaja en la línea es de $10 por hora. El costo de oportunidad sobre el capital invertido es del 18% anual, pudiendo suponerse nulo el costo operativo de mantenimiento en stock.

La fábrica trabaja 250 días por año en turnos de 8 horas diarias.

Calcular:

a) la política óptima de reposición de las bicicletas y el costo total anual.

b) el número de corridas de montaje que se deben realizar anualmente.

c) el período de montaje de cada tanda de producción.

Solución:

Siendo los parámetros:

$$k = 8\,\frac{\text{hh}}{\text{orden}} \cdot 12\,\frac{\$}{\text{hh}} + 2\,\frac{\text{h}}{\text{orden}} \cdot 30\,\frac{\$}{\text{h}} = 156\ \$/\text{orden}$$

$$b = 108\,\frac{\$}{\text{bicleta}} + 4\ \text{op} \cdot 10\,\frac{\$}{\text{h} \cdot \text{op}} \cdot 8\,\frac{\text{hs}}{\text{día}} \cdot \frac{1}{12}\,\frac{\text{día}}{\text{bicicleta}} = 134{,}67\,\frac{\$}{\text{bicicleta}}$$

$$c_1 = 134{,}67\,\frac{\$}{\text{bicicleta}} \cdot 0{,}18\,\frac{1}{\text{año}} = 24{,}24\,\frac{\$}{\text{bicicleta} \cdot \text{año}}$$

$$p = 12\ \text{bicicletas}/\text{día}$$

$$d = \frac{800\ \text{bicicletas}/\text{año}}{250\ \text{días}/\text{año}} = 3{,}2\,\frac{\text{bicicletas}}{\text{día}}$$

tendremos que el lote óptimo de producción es:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \dfrac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 156 \cdot 800}{1 \cdot 24{,}24 \cdot \left(1 - \dfrac{3{,}2}{12}\right)}} \cong 118{,}5\ \text{bicicletas}/\text{orden}$$

y el costo total esperado óptimo anual:

$$CTE_o = 134{,}67 \cdot 800 + \sqrt{2 \cdot 156 \cdot 800 \cdot 1 \cdot 24{,}24 \cdot \left(1 - \frac{3{,}2}{12}\right)} = 109.842{,}39\ \$/\text{año}$$

Por su parte, la cantidad óptima de órdenes de fabricación por año es:

$$n_o = \frac{D}{q_o} = \frac{800}{118{,}5} = 6{,}75$$

Finalmente, el período de fabricación es:

$$t_{1o} = \frac{q_o}{p} = \frac{118{,}5}{12} = 9{,}88 \text{ días}$$

La formulación y resolución del problema utilizando el sistema LINGO es:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*S*c1*T + k*D/q;
n = D / q;
S = q * (1-d/p);
ti = t1d + t1p;
ti = q/D*T;
t1p = S / (p-d);
t1d = S / d;
c1 = c1op + i * b;

T = 1;
b = 134.67;
i = 0.18;
p = 12 * 250;
D = 800;
c1op = 0;
k = 156;
END
```

```
Local optimal solution found at step:            15
 Objective value:                           109842.4

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        109842.4           0.0000000
                              B        134.6700           0.0000000
                              D        800.0000           0.0000000
                              S        86.89630        -0.2929688E-06
                             C1        24.24060           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        156.0000           0.0000000
                              Q        118.4950           0.0000000
                              N        6.751342           0.0000000
                              P        3000.000           0.0000000
                             TI       0.1481187           0.0000000
                            T1D       0.1086204           0.0000000
                            T1P       0.3949832E-01       0.0000000
                           C1OP       0.0000000           0.0000000
                              I       0.1800000           0.0000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        109842.4           -1.000000
                              2       0.0000000           -1.000000
                              3       0.0000000           0.0000000
                              4       0.0000000           -12.12030
                              5       0.0000000           0.0000000
                              6       0.0000000           0.0000000
                              7       0.0000000           0.0000000
                              8       0.0000000           0.0000000
```

9	0.0000000	-43.44815
10	0.0000000	-1053.209
11	0.0000000	-807.8207
12	0.0000000	-5851.163
13	0.0000000	-0.1276617
14	0.0000000	-135.5078
15	0.0000000	-43.44815
16	0.0000000	-6.751342

Ejemplo 5.2:

La empresa CEM tiene una demanda anual de 10.000 Kg. para uno de sus productos. El costo directo del mismo es de 96 $/Kg., mientras que el costo de almacenamiento representa anualmente el 10% del costo directo.

La empresa trabaja actualmente con el criterio del lote óptimo y emite anualmente 5 pedidos de fabricación.

El producto se elabora a razón de 400 Kg. por día.

Se está evaluando una reconversión de la planta que exigiría que el producto se fabricara solamente 4 veces en el año, pero que reduciría el costo directo en 0,5 $/Kg. Suponiendo 250 días laborales en el año, determinar si conviene efectuar el cambio.

Solución:

Se determinan en primer lugar los parámetros:

$$b = 96 \text{ \$/kg}$$

$$c_1 = 96 \text{ \$/kg} \cdot 0{,}1\ 1/\text{año} = 9{,}6 \text{ \$/kg año}$$

$$P = 400 \text{ kg/día} \cdot 250 \text{ días/año} = 100.000 \text{ kg/año}$$

$$D = 10.000 \text{ kg/año}$$

Actualmente se emiten 5 pedidos; es decir:

$$n_O = \frac{D}{q_O} = 5 \Rightarrow \qquad q_O = \frac{D}{n_O} = \frac{10.000}{5} = 2.000 \text{ kg/pedido}$$

Luego:

$$q_O = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot 10.000}{1 \cdot 9{,}6 \cdot \left(1 - \frac{10.000}{100.000}\right)}} = 2.000 \text{ kg/pedido}$$

Despejando el valor de “k”:

$$k = 1.728 \text{ \$/pedido}$$

El CTE anual óptimo será:

$$CTE_O = 96 \cdot 10.000 + \sqrt{2 \cdot 1.728 \cdot 10.000 \cdot 1 \cdot 9{,}6 \cdot \left(1 - \frac{10.000}{100.000}\right)} = 977.280 \ \$/\text{año}$$

Por su parte, si se reconvierte el proceso tendremos:

$$b' = 95{,}5 \ \$/\text{kg}$$

$$c'_1 = 9{,}5 \ \$/\text{kg año}$$

$$n = \frac{D}{q} = 4 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{D}{4} = \frac{10.000}{4} = 2.500 \text{ kg/pedido}$$

Con este lote, el costo total esperado será:

$$CTE = b' \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot c'_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{q}$$

$$CTE = 95{,}5 \cdot D + \frac{1}{2} \cdot 2.500 \cdot \left(1 - \frac{10.000}{100.000}\right) \cdot 9{,}5 \cdot 1 + 1.728 \cdot \frac{10.000}{2.500} = 972.655 \ \$/\text{año}$$

En consecuencia, conviene el cambio.

Ejemplo 5.3:

Para el problema anterior, calcular el valor del costo directo que hace indiferente la decisión de mantener la situación actual o reconvertir el proceso.

Solución:

El valor de b’ solicitado es tal que el nuevo costo total esperado es igual al anterior, es decir:

$$977.280 = b' \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot q \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} = b' \cdot 10.000 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 \cdot b' \cdot 2.500 \cdot 0{,}9 \cdot 1 + 1.728 \cdot \frac{10.000}{2.500}$$

Despejando, tendremos entonces que

b’ = 95,9573

Ejemplo 5.4:

Una empresa que fabrica y vende un tipo especial de parlante supone que su venta anual para los próximos años estará muy próxima a 60.000 unidades.

Debido a restricciones de fabricación, ya que la empresa se dedica también a la fabricación de otros elementos de sonido, se decidió adquirir la mitad de los parlantes a un proveedor externo, que los fabricará con idénticas características a los propios.

A la empresa le cuesta $30 producir el parlante, mientras que el precio del proveedor es de $34,80.

El costo de cada orden de compra es de $35, mientras que el costo de set-up es de $50. Se supone que el costo anual de conservar los inventarios es el 15% del precio de producción o de compra.

La tasa de fabricación de los parlantes es de 12.500 por mes.

Determinar:

a) el lote óptimo de compra al proveedor externo.

b) el lote óptimo de fabricación.

c) el costo total de stocks para este tipo de parlante.

d) el número de órdenes de compra y de fabricación a emitir por año.

Solución:

a) Los parámetros para la compra son:

$b = 34{,}80\ \$/\text{parlante}$

$c'_1 = 0$

$i = 0{,}15$

$k = 35\ \$/\text{orden}$

$c_1 = c'_1 + b \cdot i = 34{,}80\ \$/\text{parlante} \cdot 0{,}15/\text{año} = 5{,}22\ \$/\text{parlantes año}$

$D = 30.000\ \text{parlantes}/\text{año}$

En consecuencia, el lote óptimo de compra es:

$$q_{oC} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 35 \cdot 30.000}{1 \cdot 5{,}22}} = 634{,}27\ \text{unidades}/\text{orden}$$

b) Los parámetros para la fabricación son:

$b = 30\ \$/\text{parlante}$

$c'_1 = 0$

$i = 0{,}15$

$k = 50\ \$/\text{orden}$

$c_1 = c'_1 + b \cdot i = 30\ \$/\text{parlante} \cdot 0{,}15/\text{año} = 4{,}5\ \$/\text{parlantes año}$

$D = 30.000\ \text{parlantes}/\text{año}$

$P = 12.500\ \text{parlantes}/\text{mes} \cdot 12\ \text{meses}/\text{año} = 150.000\ \text{parlantes}/\text{año}$

En consecuencia, el lote óptimo de fabricación es:

$$q_{oF} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 30.000}{1 \cdot 4{,}55 \cdot \left(1 - \frac{30.000}{150.000}\right)}} = 912{,}87 \text{ unidades / orden}$$

c) Costo total esperado óptimo:

$$CTE_o = 34{,}8 \cdot 30.000 + \sqrt{2 \cdot 35 \cdot 30.000 \cdot 1 \cdot 5{,}22} +$$
$$+ 30 \cdot 30.000 + \sqrt{2 \cdot 50 \cdot 30.000 \cdot 1 \cdot 4{,}5 \cdot \left(1 - \frac{30.000}{150.000}\right)} = 1.950.597{,}3 \text{ \$ / año}$$

d) Cantidades de órdenes a emitir por año:

- de compra: $n_{oC} = \frac{D}{q_{oC}} = \frac{30.000}{634{,}27} = 47{,}30$
- de fabricación: $n_{oF} = \frac{D}{q_{oF}} = \frac{30.000}{912{,}87} = 32{,}86$

Ejemplo 5.5:

Una empresa fabrica motores eléctricos en una línea continua de ensamble que opera a una velocidad de 120 unidades por día. Uno de los componentes del motor (parte XA22) se fabrica en el sector torneado a razón de 400 unidades por día.

Debido a que la operación del torno es mayor que la de la línea, ahí se manejan varias operaciones, incluyendo la producción de otras partes para los motores.

Cuando se está fabricando el componente XA22 se entrega directamente a la línea de montaje. Cuando no es así, la línea obtiene el componente de inventario.

Dada la siguiente información para el componente XA22 y sabiendo que se opera 250 días por año, determinar la cantidad económica de producción para el componente, su punto de reorden y el costo total esperado:

- ✓ *Costo de mantenimiento de inventario por cada componente: 2 $ por año.*
- ✓ *Costo de preparación de un lote: $110.*
- ✓ *Lead Time: 10 días de trabajo.*
- ✓ *Stock de seguridad: equivalente a 15 días*

Solución:

Los parámetros del problema para el componente XA22 son:

$$c_1 = 2 \frac{\$}{\text{comp.año}}$$

$$k = 110 \ \frac{\$}{\text{pedido}}$$

$$LT = 10 \text{ días}$$

$$S_P = 15 \text{ días} \cdot 120 \frac{\text{comp.}}{\text{día}} = 1.800 \text{ comp.}$$

$$p = 400 \ \frac{\text{comp}}{\text{día}}$$

$$d = 120 \ \frac{\text{comp}}{\text{día}}$$

$$D = 120 \ \frac{\text{comp}}{\text{día}} \cdot 250 \frac{\text{días}}{\text{año}} = 30.000 \frac{\text{comp}}{\text{año}}$$

El lote económico de producción será:

$$q_O = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 110 \cdot 30.000}{1 \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{120}{400}\right)}} = 2.171{,}24 \ \frac{\text{comp.}}{\text{lote}}$$

El stock operativo máximo óptimo es:

$$S_o = q_o \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) = 2.171{,}24 \cdot \left(1 - \frac{120}{400}\right) = 1.519{,}87 \text{ comp.}$$

El stock máximo óptimo será la suma del stock operativo más el stock no operativo (stock de seguridad):

$$S_{MAX_O} = S_S + S_o = 1.800 + 1.519{,}87 = 3.319{,}87 \text{ comp.}$$

El período de reaprovisionamiento (en días) es:

$$t_{1p_O} = \frac{q_o}{p} = \frac{2.171{,}24}{400} = 5{,}43$$

La cantidad de días de un ciclo es:

$$t_o = \frac{q_o}{D} \cdot T = \frac{2.171{,}24}{120} \cdot 1 = 18{,}09$$

Esto significa que el período de demanda solamente es de 12,66 días. Dado que este tiempo es mayor que el plazo de entrega (10 días), tendremos que la expresión y el valor del stock de reorden son:

$$S_R = S_S + LT \cdot d = 1.800 + 10 \cdot 120 = 3.000 \text{ comp.}$$

Como el costo directo (b) del producto no es dato, calcularemos el costo total esperado variable óptimo:

$$CVE_O = \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} + S_P \cdot c_1 \cdot T =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 110 \cdot 30.000 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(1 - \frac{120}{400}\right)} + 1.800 \cdot 2 \cdot 1 = 6.639{,}74 \frac{\$}{\text{año}}$$

El problema formulado y resuelto por LINGO, expresando las variables de tiempo en unidades de año, es el siguiente:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*S*c1*T + k*D/q + Sp*c1*T;
n = D / q;
S = q * (1-d/p);
ti = td + tp;
ti = q/D*T;
tp = S / (p-d);
td = S / d;
c1 = c1op + i * b;
! Si LT <= td aplicar la fórmula siguiente;
Sr1 = (LT * d + Sp);
! Si LT > td aplicar la fórmula siguiente;
! Sr2 = (ti - LT) * (p - d) + Sp);

T = 1;
b = 0;
i = 0;
p = 400 * 250;
D = 120 * 250;
c1op = 2;
k = 110;
Sp = 15 * 120;
LT = 10 / 250;
END
```

```
Local optimal solution found at step:            55
 Objective value:                           6639.737
```

Variable	Value	Reduced Cost
CTE	6639.737	0.0000000
B	0.0000000	0.0000000
D	30000.00	0.0000000
S	1519.868	0.0000000
C1	2.000000	0.0000000
T	1.000000	0.0000000
K	110.0000	0.0000000
Q	2171.240	-0.4123619E-08
SP	1800.000	0.0000000
N	13.81699	0.0000000
P	100000.0	0.0000000
TI	0.7237468E-01	0.0000000
TD	0.5066228E-01	0.0000000
TP	0.2171240E-01	0.0000000
C1OP	2.000000	0.0000000
I	0.0000000	0.0000000
SR1	3000.000	0.0000000
LT	0.4000000E-01	0.0000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	6639.737	-1.000000
2	0.0000000	-1.000000

3	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	-1.000000
5	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	0.0000000
7	0.0000000	0.0000000
8	0.0000000	0.0000000
9	0.0000000	-2559.934
10	0.0000000	0.0000000
11	0.0000000	-5119.868
12	0.0000000	-30000.00
13	0.0000000	0.0000000
14	0.0000000	-0.6513721E-02
15	0.0000000	-0.2894988E-01
16	0.0000000	-2559.934
17	0.0000000	-13.81699
18	0.0000000	-2.000000
19	0.0000000	0.0000000

Ejemplo 5.6:

Una Compañía fabricante de monitores para computadoras, tiene una capacidad de fabricación de un tipo monitor especial de 1.000 por mes. La demanda anual se estima en 8.000 unidades.

Si en algún momento no se puede satisfacer la demanda se incurre en un costo de $200 por unidad por mes de atraso. El costo directo de los monitores es de $600, el costo operativo de mantener una unidad almacenada durante un mes es de $10, la tasa de inmovilización de capital es del 10% anual, y el costo de preparar una tanda de producción es de $15.000. El "lead-time" de fabricación de los monitores es de 10 días (suponer 360 días por año).

Calcular el lote óptimo de fabricación, el costo total esperado anual (graficándolo en función del lote), la cantidad de válvulas que se tendrán pendientes de entrega y el stock de reorden. Dimensionar el almacén.

Solución:

Se asume que la empresa elabora los monitores a su capacidad máxima, a fin de optimizar la utilización de sus recursos de fabricación. Tomando los siguientes valores para los parámetros:

p = 12.000 monitores por año (equivalente a 1.000 monitores por mes).

D: 8.000 monitores por año

c_2: 2.400 \$/monitor·año (equivalente a 200 \$/monitores·mes)

$$c_1 = 10\ \$/\text{monitor. mes} \cdot 12\ \text{meses / año} + 600\ \$/\text{monitor} \cdot 0{,}1\ /\text{año} = 180\ \$ / \text{monitor .año}$$

k = 15.000 \$/orden

LT = 0,2778 año (equivalente a 10 días)

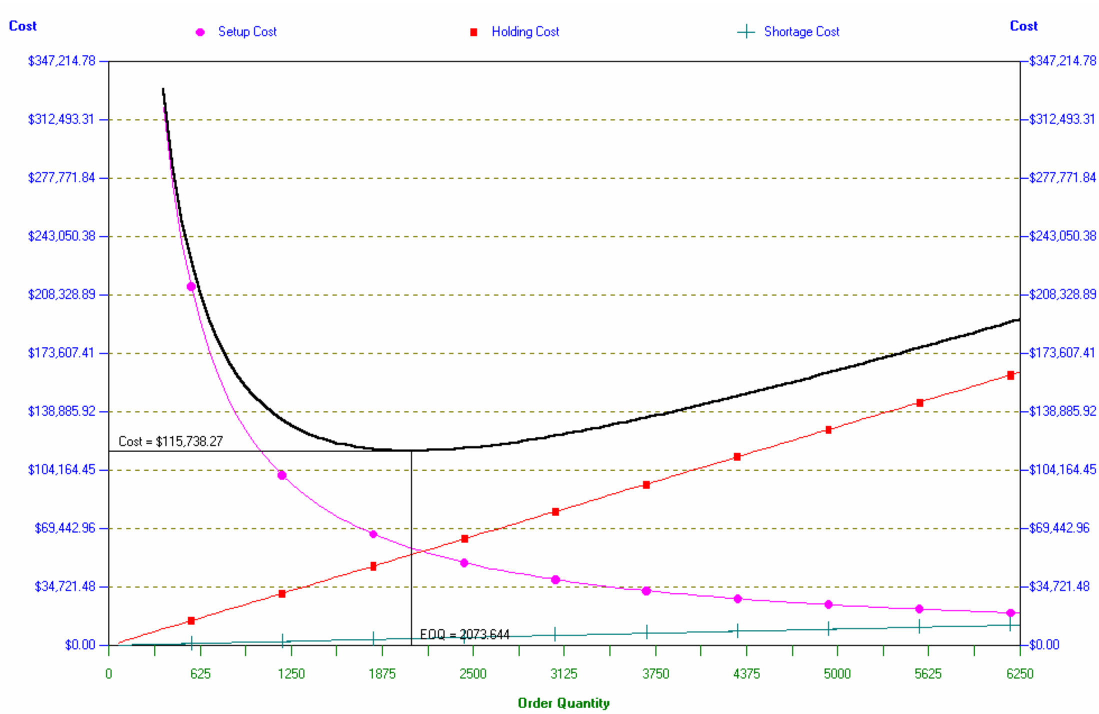
$$q_O = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{c_1 + c_2}{c_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 15.000 \cdot 8.000}{1 \cdot 180 \cdot \left(1 - \frac{8.000}{12.000}\right)}} \cdot \sqrt{\frac{180 + 2.400}{2.400}} = 2074 \text{ monitores}$$

El costo anual óptimo:

$$CTE = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)} \cdot \sqrt{\frac{c_2}{c_1 + c_2}} =$$

$$= 600 \cdot 8.000 + \sqrt{2 \cdot 15.000 \cdot 8.000 \cdot 1 \cdot 180 \cdot \left(1 - \frac{8.000}{12.000}\right)} \cdot \sqrt{\frac{2.400}{180 + 2.400}} = 115.738{,}30 \frac{\$}{\text{año}}$$

El gráfico del CTE en función de "q":



La cantidad máxima de unidades agotadas:

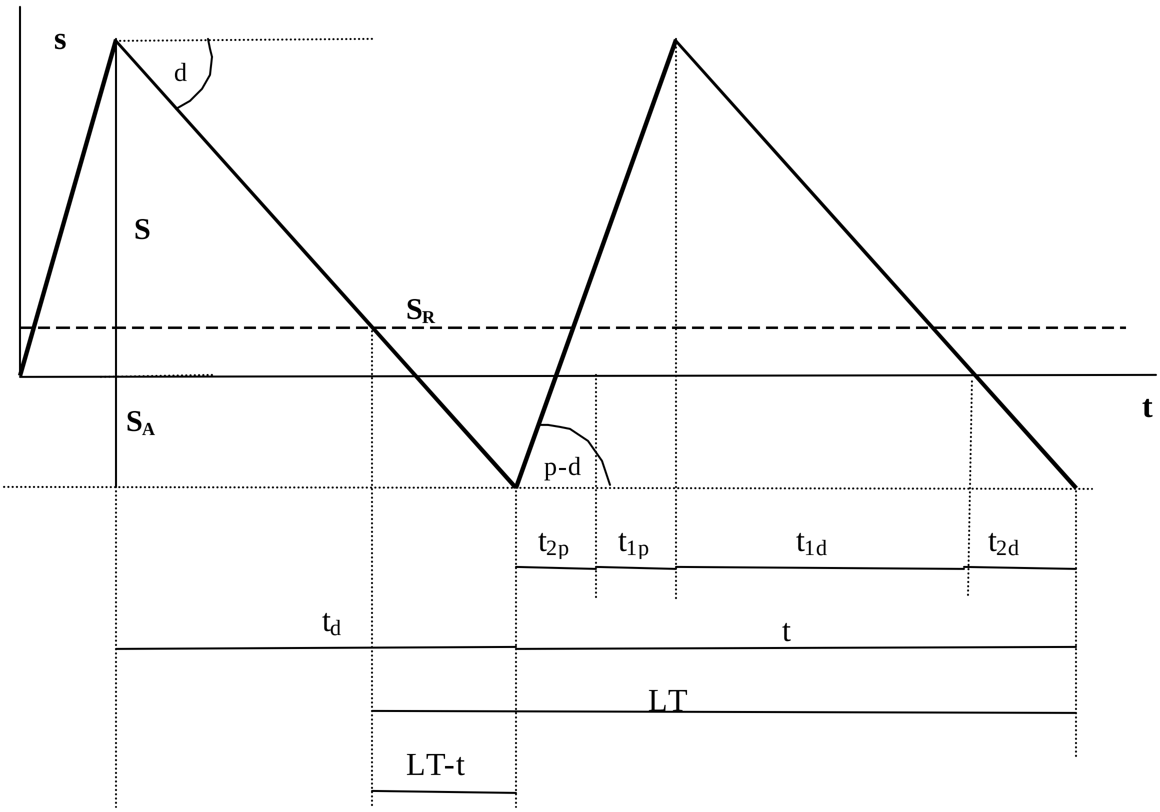
$$S_{A_O} = \frac{c_1 \cdot q_o \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}{c_1 + c_2} = \frac{180 \cdot 2.074 \cdot \left(1 - \frac{8.000}{12.000}\right)}{180 + 2.400} = 48{,}23 \text{ monitores}$$

El tiempo total de un ciclo:

$$t_o = \frac{q_o}{D} = \frac{2.074}{8.000} = 0.25925 \text{ año}$$

La dimensión del depósito:

$$S_o = q_o \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) - S_{A_O} = 2.074 \cdot \left(1 - \frac{8.000}{12.000}\right) - 48.23 = 643$$



Para determinar el período de demanda, por relaciones de triángulos se tiene:

$$S + S_A = t_d \cdot d$$

De donde:

$$t_d = \frac{S + S_A}{d} = \frac{643 + 48{,}23}{8.000} = 0{,}0864$$

En este caso el LT es mayor que un ciclo completo, pero menor que t + t_d. En consecuencia, se debe pedir cuando el nivel de stock se está decrementando (en período de demanda solamente), tal como puede observarse en la Figura.

Luego:

$$S_R = (LT - t) \cdot d - S_A = 0{,}01856 \cdot 8.000 - 48{,}23 \cong 100 \text{ monitores}$$

Este ejemplo se ha resuelto también con el sistema LINGO:

```
MIN = CTE;
CTEi = b*q + 0.5*S*c1*t1 + k + 0.5*Sa*t2*c2;
CTE = CTEi * n;
n = D / q;
S = q * (1-d/p) - Sa;
t = t1 + t2;
t1 = t1d + t1p;
t2 = (t2d + t2p);
t = q/D;
t1p = S / (p-d);
t1d = S / d;
t2p =  Sa / (p-d);
t2d = Sa / d;
tp = t1p + t2p;
td = t1d + t2d;
Sr1 = (LT–t) * d - Sa;
c1 = c1op + i * b;

b = 0;
i = 0;
p = 12000;
D = 8000;
c1op = 180;
k = 15000;
LT = 0.2778;
c2 = 2400;
END
```

```
Local optimal solution found at step:            40
 Objective value:                           115738.3
 Branch count:                                     0

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE       115738.30           0.0000000
                           CTEI        30000.00         -0.1021705E-06
                              B       0.0000000           0.0000000
                              Q        2073.644           0.0000000
                              S        642.9904           0.0000000
                             C1        180.0000           0.0000000
                             T1       0.2411214           0.0000000
                              K        15000.00           0.0000000
                             SA        48.22428           0.0000000
                             T2       0.0180841           0.7532586E-02
                             C2        2400.000           0.0000000
                              T       0.2592055           0.0000000
                              N        3.857943           0.0000000
                              D        8000.000           0.0000000
                              P        12000.00           0.0000000
                            T1D       0.0803738          0.0000000
                            T1P       0.1607476           0.0000000
                            T2D       0.0060280           0.0000000
                            T2P       0.0120561           0.0000000
                             TP       0.1728037           0.0000000
                             TD       0.0864018           0.0000000
                            SR1        100.1700           0.0000000
                             LT       0.2778000           0.0000000
                           C1OP        180.0000           0.0000000
                              I       0.0000000           0.0000000
```

<u>Ejemplo 5.7</u>:

Dados los siguientes datos (en unidades de tiempo coherentes) para un sistema de stock:

b = 6
i = 0,05
P = 1.500
D = 500
c'_1 = 1,50
k = 2.000

y suponiendo que hay un costo por cada unidad que no se satisface de $5 (independientemente del tiempo de agotamiento),

1. Resolver el modelo con el sistema LINGO.

2. ¿Cuál sería el resultado si el beneficio marginal fuera de $4?

Solución:

Este es ejemplo, del mismo modo que ocurriría en un caso de pérdida de ventas por agotamiento, existen dos alternativas: trabajar todo el tiempo con existencias, o bien todo el tiempo en agotamiento.

1) Para $f_2 = 5$

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 1/2 *(q*(1-d/p)-Sa)^2/(q*(1-d/p))*c1*T + 1/2 * Sa^2 / (q*(1-d/p))*c2*T
+ k * D / q + Sa * f2 * D/q + F * D / q;

c1 = c1op + i*b;
T = 1;
n = D / q;
S = q * (1-d/p) - Sa;
Smax = S + Sp;
ti = t1 + t2;
t1 = t1d + t1p;
t2 = (t2d + t2p);
ti = q/D * T;
t1p = S / (p-d);
t1d = S / d;
t2p =  Sa / (p-d);
t2d = Sa / d;
tp = t1p + t2p;
td = t1d + t2d;
c1 = c1op + i * b;

b = 6;

i = 0.05;

p = 1500;

D = 500;

c1op = 1.5;

k = 2000;

c2 = 0;

f2= 5;

F = 0;

END

Local optimal solution found at step:           147
 Objective value:                              4549.193
```

```
Local optimal solution found at step:          44
 Objective value:                           4549.193

                    Variable           Value        Reduced Cost
                         CTE        4549.193           0.0000000
                           B        6.000000           0.0000000
                           D        500.0000           0.0000000
                           Q        1290.994        -0.2113475E-07
                           P        1500.000           0.0000000
                          SA       0.0000000           0.1364242
                          C1        1.800000           0.0000000
                           T        1.000000           0.0000000
                          C2       0.0000000           0.0000000
                           K        2000.000           0.0000000
                          F2        5.000000           0.0000000
                           F       0.0000000           0.0000000
                        C1OP        1.500000           0.0000000
                           I       0.5000000E-01       0.0000000
                           N       0.3872984           0.0000000
                           S        860.6629           0.0000000
                          TI        2.581989           0.0000000
                          T1        2.581989           0.0000000
                          T2       0.0000000           0.0000000
                         T1D        1.721326           0.0000000
                         T1P       0.8606629           0.0000000
                         T2D       0.0000000           0.0000000
                         T2P       0.0000000           0.0000000
                          TP       0.8606629           0.0000000
                          TD        1.721326           0.0000000
```

Como se observa, con un valor de $f_2 = 5$, no conviene agotar.

2) Para $f_2 = 4$, resolviendo:

```
Local optimal solution found at step:          69
 Objective value:                           4333.510

                    Variable           Value        Reduced Cost
                         CTE        4333.510           0.0000000
                           B        6.000000           0.0000000
                           D        500.0000           0.0000000
                           Q        1470113.        -0.2394200E-08
                           P        1500.000           0.0000000
                          SA        979334.6           0.3584729E-08
                          C1        1.800000           0.0000000
                           T        1.000000           0.0000000
                          C2       0.0000000           0.0000000
                           K        2000.000           0.0000000
                          F2        4.000000           0.0000000
                           F       0.0000000           0.0000000
                        C1OP        1.500000           0.0000000
                           I       0.5000000E-01       0.0000000
                           N       0.3401099E-03       0.0000000
                           S        740.7878           0.0000000
                          TI        2940.226           0.0000000
                          T1        2.222363           0.0000000
                          T2        2938.004           0.0000000
                         T1D        1.481576           0.0000000
                         T1P       0.7407878           0.0000000
                         T2D        1958.669           0.0000000
                         T2P        979.3346           0.0000000
                          TP        980.0754           0.0000000
                          TD        1960.151           0.0000000
```

Vemos que, con dicho valor de f_2, conviene trabajar en agotamiento permanente.

CAPÍTULO VI

REAPROVISIONAMIENTO CONSTANTE

1. CONCEPTOS

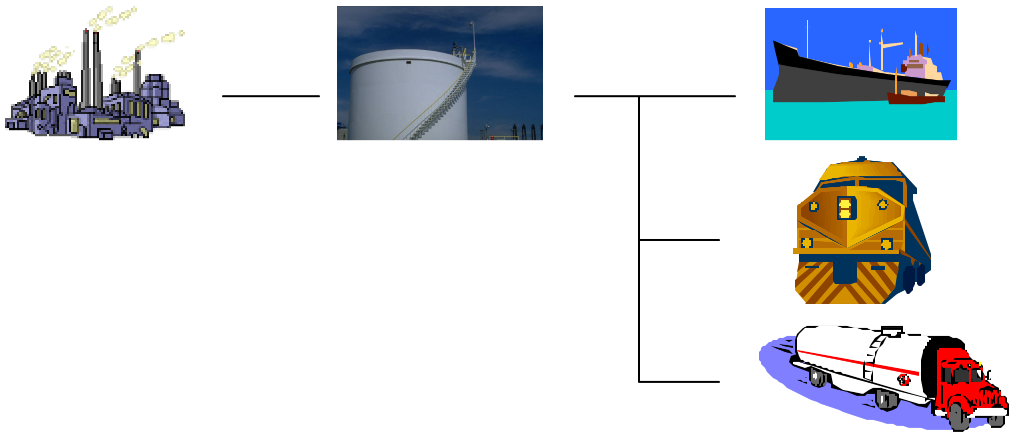
En los capítulos anteriores hemos estudiado sistemas en los cuales la demanda era constante y permanente, mientras que el ingreso de mercaderías al depósito era discontinuo y se realizaba, o bien en forma instantánea o bien durante un período de tiempo, a un tasa de ingreso mayor que la de la demanda (Figura 1).

Figura 1

En este capítulo analizaremos sistemas en los que, por el contrario, el ingreso es permanente y constante, mientras que la descarga se realiza ya sea de manera instantánea o durante un período de tiempo a una tasa mayor que la tasa de ingreso (Figura 2). El objetivo del problema es, entonces, determinar el lote de descarga del depósito que minimice el costo total esperado.

Figura 2

Estos casos son muy comunes en los procesos químicos continuos, tales como refinerías de petróleo y muchas plantas químicas y petroquímicas, en los que la producción es constante y permanente, el producto se almacena generalmente en tanques y, con cierta frecuencia el contenido de estos depósitos se descarga en algún medio de transporte del producto (por ejemplo en barcos, trenes o camiones-tanque).



2 DESCARGA INSTANTÁNEA SIN STOCK DE PROTECCIÓN Y SIN CAPACIDAD DE VACÍO DE SEGURIDAD.

HIPÓTESIS

1. Se administra un único producto terminado.
2. El suministro (que también llamaremos "producción") es conocido y se efectúa a tasa constante.
3. La demanda se satisface descargando el material del almacén mediante lotes, a intervalos regulares de tiempo.
4. El plazo de descarga, es decir el tiempo que transcurre entre el instante que se solicita la descarga hasta que la misma se lleva a cabo ("*lead time*"), es conocido y constante.
5. La descarga del producto se hace exactamente hasta el nivel de stock cero; es decir no hay stock de protección.
6. La descarga es instantánea. Esto significa que la tasa de descarga (o demanda) es infinita.
7. El horizonte de planeamiento es a largo plazo.
8. El costo de agotamiento es infinitamente alto; es decir, no está permitido el déficit del producto.
9. El costo unitario de adquisición "b", el costo unitario de almacenamiento "c_1" y el costo del pedido "k" son independientes de la cantidad a pedir "q".
10. No hay restricciones que limiten la decisión que se tome sobre el tamaño del lote.
11. Todos los parámetros monetarios están expresados en moneda constante.
12. El producto en estudio se mide en una unidad continua (litros, kilogramos, etc.).

PARÁMETROS

- P: Producción referida a un período estratégico de tiempo (año, semestre, etc.). Utilizaremos la letra "p" para indicar la tasa de producción cuando está expresada en una unidad de tiempo más corto (días, semanas, etc.). La producción total del período de referencia "P" es igual a la demanda "D" total del producto en dicho período.

- b: Costo unitario de adquisición.
- c_1: Costo unitario de almacenamiento.
- k: Costo de una orden de descarga.
- T = 1
- LT = Lead Time.

VARIABLES

- q: Tamaño del lote de descarga.
- t: Intervalo de un ciclo. Es el tiempo que transcurre entre dos descargas sucesivas.
- CTE: Costo total esperado referido al período estratégico de tiempo.
- S_R: Stock de reorden o "punto de pedido"). Es el nivel de existencias para el cual, una vez alcanzado, se emite la orden de descarga.

MODELIZACIÓN

Siendo la producción continua y constante, el nivel de stock evoluciona como se indica en la Figura 3.

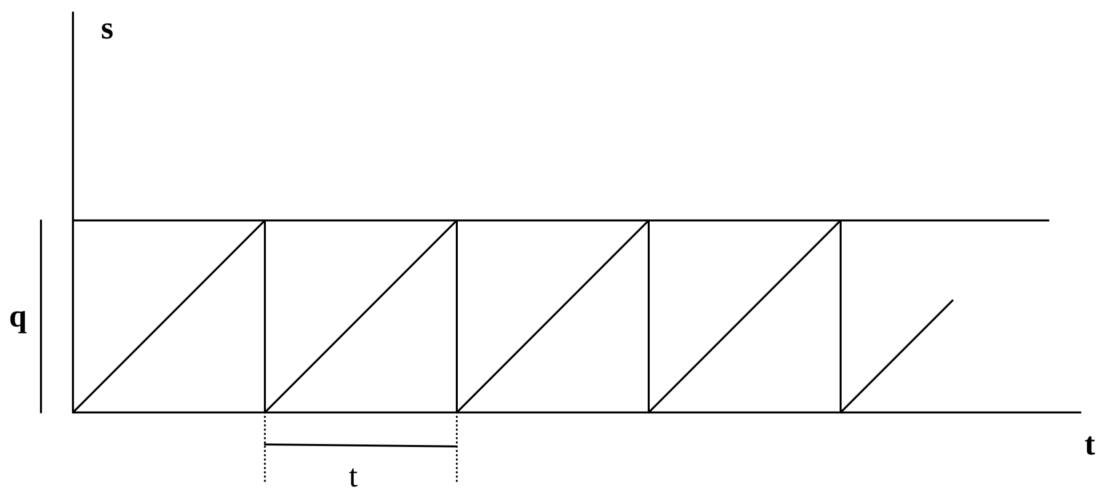


Figura 3

El costo total esperado para un ciclo es:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot t + k \qquad \textbf{(1)}$$

El número de ciclos por período de referencia (tomaremos como ejemplo un año) es el cociente entre la producción "P" anual y la cantidad descargada en cada ciclo "q"; o también el cociente entre "T" (equivalente a 1) y "t".

$$n = \frac{P}{q} = \frac{T}{t} \qquad \textbf{(2)}$$

Luego, el costo total esperado anual será:

$$CTE = b \cdot P + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{P}{q} \qquad \textbf{(3)}$$

Derivando con respecto a "q" e igualando a cero se obtiene la expresión del lote total de descarga (fórmula de Wilson):

$$\boxed{q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot P}{T \cdot c_1}}} \qquad \textbf{(4)}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot P \cdot T \cdot c_1}} \qquad \textbf{(5)}$$

Para hallar el resto de las variables características, simplemente habrá que reemplazar el valor del tamaño económico de descarga en la correspondiente expresión cuantitativa.

Finalmente, conocido el plazo de descarga (LT), se podrá determinar el stock de reorden mediante la siguiente expresión, haciendo referencia a la Figura 4:

$$S_R = q_o - LT \cdot p \qquad \textbf{(6)}$$

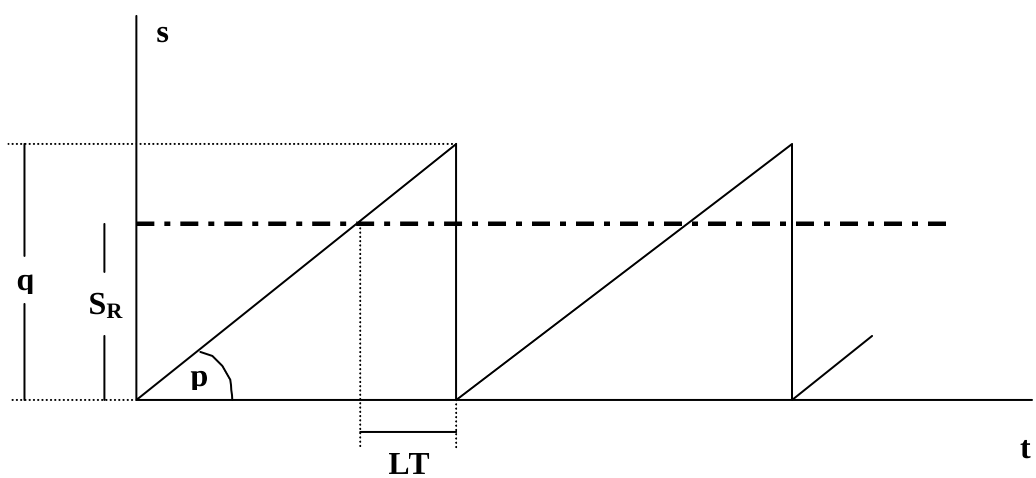


Figura 4

La formulación del modelo planteado, utilizando el sistema LINGO sería la siguiente:

```
MIN = CTE;
CTE = b* P + 0.5 * c1 * q * T + k * P /q;
n = P / q;
ti = q / P * T;
```

```
Sr = q - LT * p;
c1 = c1op + b * i;
T = 1;
END
```

3. STOCK DE SEGURIDAD

Modificando la quinta hipótesis del caso anterior para considerar un Stock de seguridad S_P que se desea mantener a fin de poder utilizarlo en situaciones imprevistas (Figura 5), el modelo quedaría formulado como sigue:

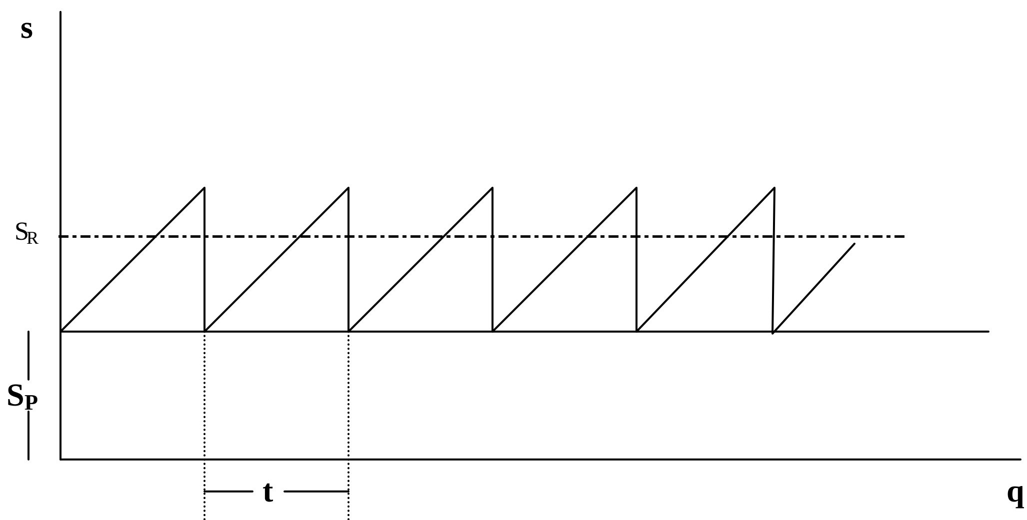


Figura 5

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot t + k + S_P \cdot c_1 \cdot t \qquad \textbf{(7)}$$

$$n = \frac{P}{q} = \frac{T}{t}$$

$$CTE = b \cdot P + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{P}{q} + + S_P \cdot c_1 \cdot T \qquad \textbf{(8)}$$

$$\boxed{q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot P}{T \cdot c_1}}} \qquad \textbf{(9)}$$

$$\boxed{CTE_o = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot P \cdot T \cdot c_1} + S_P \cdot c_1 \cdot T} \qquad \textbf{(10)}$$

$$n_o = \frac{P}{q_o} = \frac{T}{t_o}$$

$$S_R = S_P + q_o - LT \cdot p \qquad \textbf{(11)}$$

siendo el stock máximo:

$$S_{MAX} = S_P + q_o$$

La formulación del modelo planteado, utilizando el sistema LINGO sería la siguiente:

```
MIN = CTE;
CTE = b* P + 0.5 * c1 * q * T + k * P /q + Sp * c1 * T;
n = P / q;
ti = q / P * T;
Sr = Sp + q - LT * p;
c1 = c1op + b * i;
T = 1;
END
```

4. VACÍO DE SEGURIDAD DE SEGURIDAD

Para dimensionar el depósito en los problemas de reaprovisionamiento constante es común considerar un “vacío de protección”, es decir un espacio de almacenamiento extra que esté disponible para casos de atrasos imprevistos de los medios de descarga o, incluso, para un caso de incremento imprevisto en la producción. Estas situaciones generarían un desbordamiento del depósito o la detención de la producción, con los altos costos asociados a ellas.

Las técnicas más comunes para determinar el nivel del espacio extra de protección, al igual que en la determinación del stock de seguridad, se basan en la simulación.

Suponiendo el caso anterior, en donde también hay stock de seguridad para absorber imprevistos en la demanda, la situación queda graficada en la figura 6.

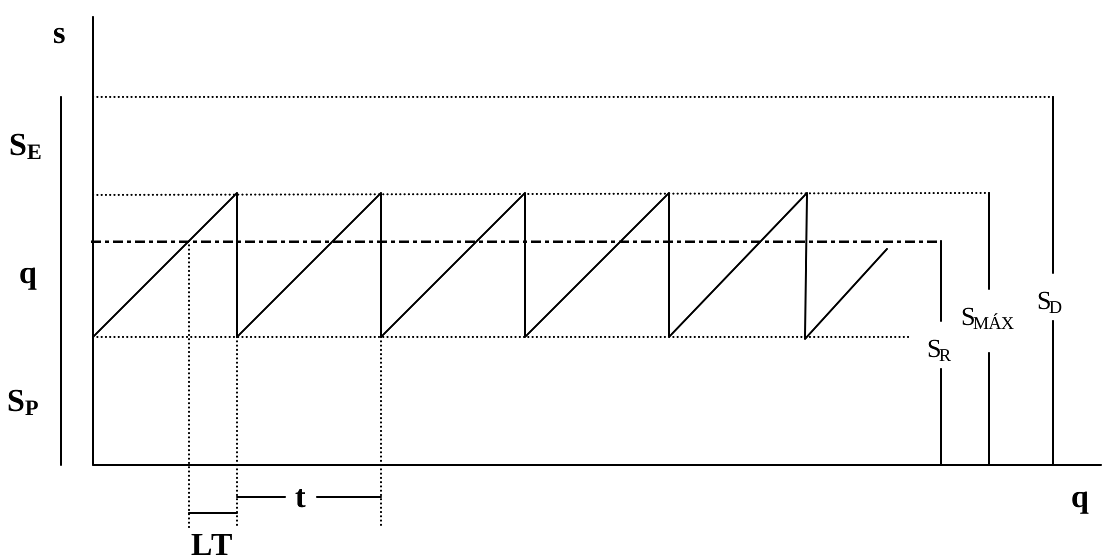


Figura 6

Llamando S_E al vacío de seguridad, tendremos que el stock para el cual se deberá dimensionar el depósito (S_D) será:

$$S_D = S_{MAX} + S_E$$

5. DESCARGA NO INSTANTÁNEA

Cuando la salida del producto del depósito no es instantánea, sino que, por el contrario, se efectúa a una tasa finita y constante "d", el nivel de stock a lo largo del tiempo (en el caso de trabajar sin stock de seguridad) evoluciona como se indica en la Figura 7.

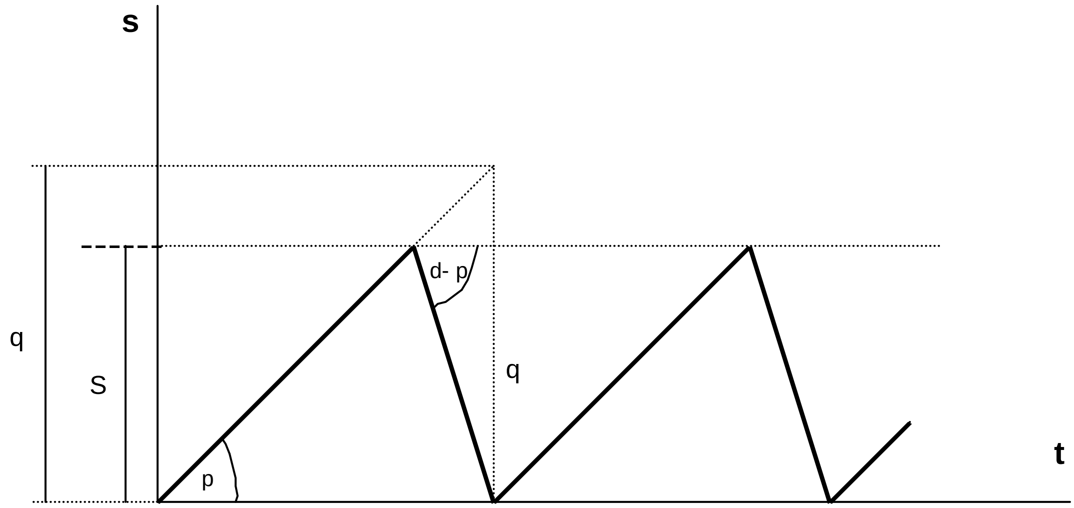


Figura 7

El costo total esperado para un período es:

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot S \cdot c_1 \cdot t + k \qquad \textbf{(12)}$$

La figura 8 es una magnificación de un ciclo. Se puede ver, por relación de triángulos, que:

$$t_{1d} \cdot d = q$$

$$S = t_{1d} \cdot (d - p)$$

Luego:

$$S = \frac{q}{d} \cdot (d - p)$$

Es decir

$$\boxed{S = q \cdot (1 - \frac{p}{d})} \qquad \textbf{(13)}$$

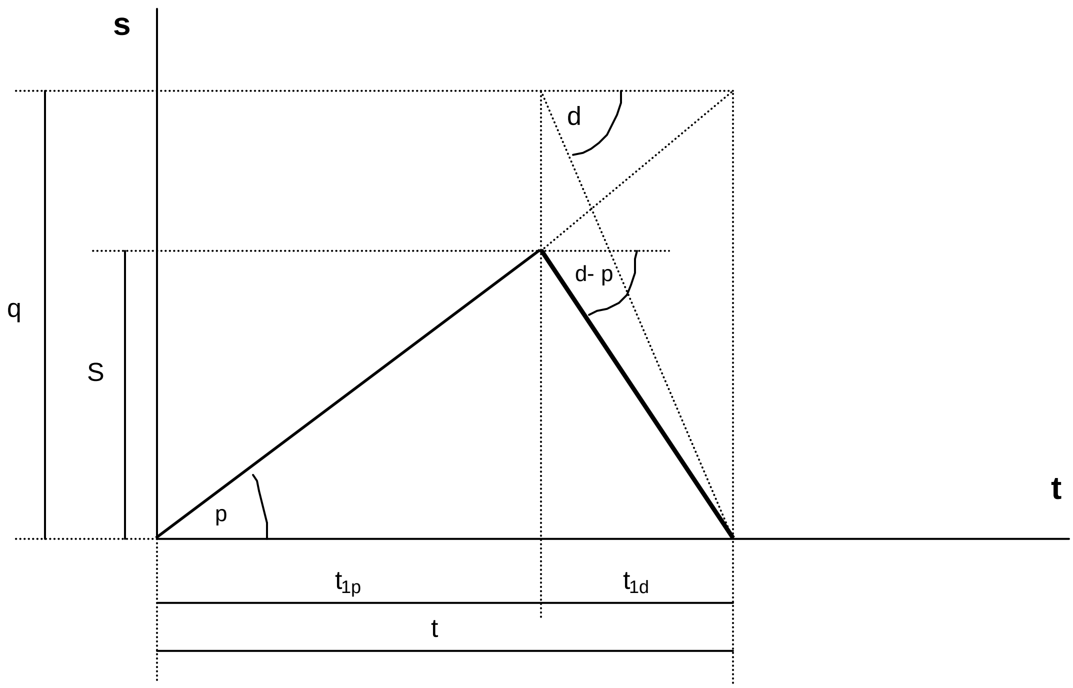


Figura 8

Reemplazando en (12):

$$CTE_i = b \cdot q + \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(1 - \frac{p}{d}\right) \cdot c_1 \cdot t + k$$

Teniendo en cuenta que el número de ciclos en el período de referencia es:

$$n = \frac{P}{q} = \frac{T}{t}$$

tendremos que:

$$CTE = b \cdot P + \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(1 - \frac{p}{d}\right) \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{P}{q} \qquad \textbf{(14)}$$

Derivando con respecto a "q", igualando a cero y despejando el valor del lote de descarga, se llega a la expresión:

$$\boxed{q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot P}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{p}{d}\right)}}} \qquad \textbf{(15)}$$

Reemplazando (15) en las expresiones correspondientes al resto de las variables, se podrán obtener los valores óptimos de las mismas.

Cabe mencionar que, para ser aplicable este modelo, la tasa de descarga debe ser mayor a la de reaprovisionamiento. En los casos ideales en que las tasas de suministro y de extracción coincidan, no se mantienen inventarios. Por último, si la descarga fuera menor que el aprovisionamiento, se llegaría a exceder la capacidad del recurso del almacenamiento y se desbordaría el tanque, por lo que esta situación no debe darse en la práctica.

Para el cálculo del stock de reorden tendremos las dos siguientes posibilidades:

a) que el "lead-time" sea menor que "t_{1p}" (es decir cuando el nivel de inventarios está descendiendo, ver Figura 9). La expresión, en este caso, del S_R es:

$$S_R = p \cdot (t_{1P} - LT) \qquad \textbf{(16)}$$

b) que el "lead-time" sea menor que "t_{1p}" (o sea cuando el nivel de inventarios está subiendo, ver Figura 10). Aquí tendremos que:

$$S_R = (LT - t_{1P}) \cdot (d - p) \qquad \textbf{(17)}$$

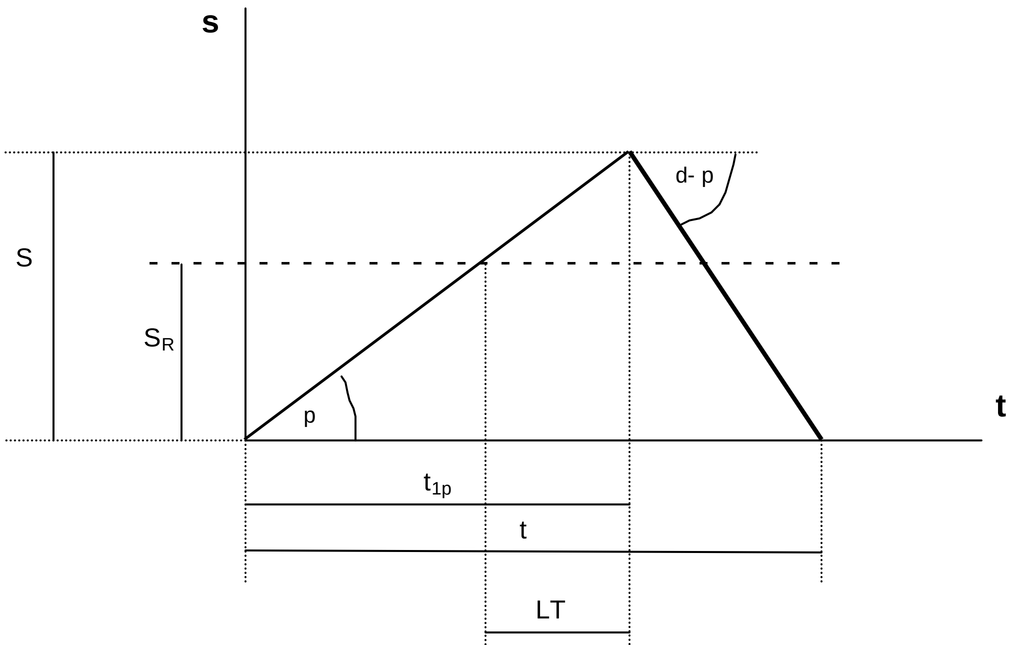


Figura 9

El caso aquí planteado también podría considerarse con ciertas variaciones, tales como con stock de seguridad, con vacío de seguridad, o ambos.

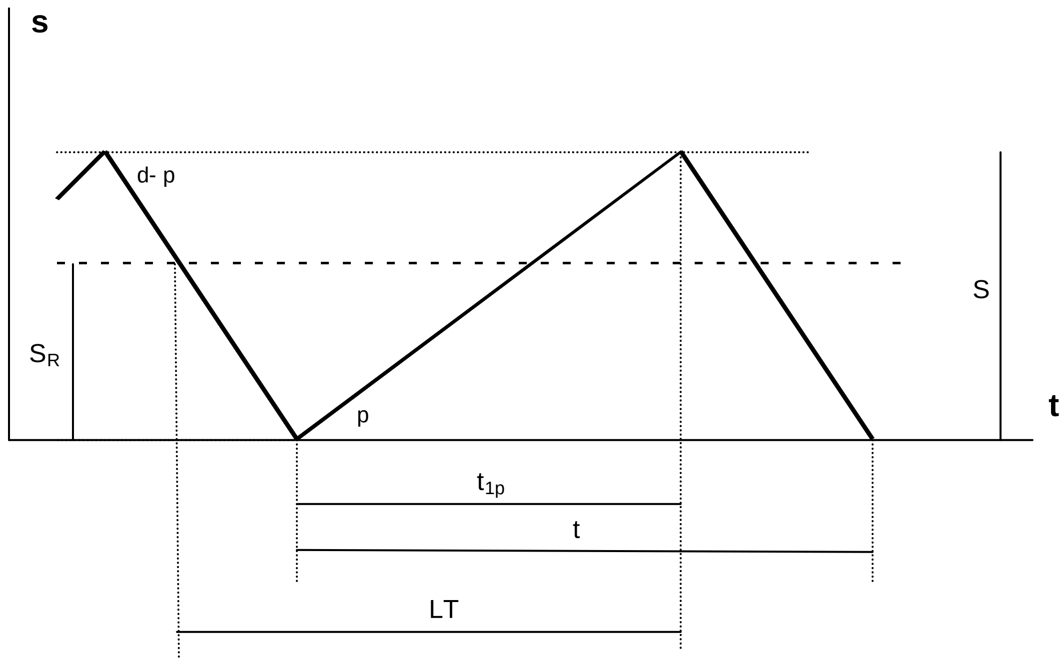


Figura 10

Ejemplo 6.1:

Una refinería produce gas oil en forma continua a razón de 1.000 m^3 por día, que se va almacenando en un tanque. El costo mensual operativo de almacenamiento del producto es de 3,6 \$/m^3, y la tasa de inmovilización de capital se puede suponer igual a 1% mensual. El costo directo del m^3 de gas oil es de \$40. El contenido del tanque se descarga sobre una barcaza que arriba al muelle de la refinería a los 2 días de haberse efectuado la orden al departamento marítimo de la refinería. El costo de descarga (tasas por utilización del muelle, preparación de tuberías, etc.) es de \$6.000.

Considerando 30 días por mes, y suponiendo que la descarga del contenido del tanque en la barcaza es prácticamente instantánea:

a. dimensionar el tanque,

b. determinar el intervalo de tiempo entre dos descargas sucesivas,

c. calcular el costo total esperado mensual,

d. establecer el punto de pedido para emitir la orden de descarga.

Solución:

Siendo los parámetros:

$$P = 1.000 \frac{m^3}{día} \cdot 30 \frac{días}{mes} = 30.000 \frac{m^3}{mes}$$

$b = 40 \text{ \$/m}^3$

$$c_1 = 3{,}6 \frac{\$}{m^3 \cdot mes} + 40 \frac{\$}{m^3} \cdot 0{,}01 \frac{1}{mes} = 4{,}0 \frac{\$}{m^3 \cdot mes}$$

$k = 6.000 \text{ \$/descarga}$

El lote económico de descarga, y por lo tanto el tamaño requerido de tanque, tanto para la refinería como para la barcaza, es:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot P}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.000 \cdot 30.000}{1 \cdot 4{,}0}} \cong 9.486.83 \ m^3$$

El intervalo entre descargas:

$$t_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{P \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6.000 \cdot 1}{30.000 \cdot 4{,}0}} = 0{,}3162 \text{ mes} \cong 9{,}5 \text{ días}$$

El costo total esperado:

$$CTE_o = b \cdot P + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_1} = 40 \cdot 30.000 + \sqrt{2 \cdot 6.000 \cdot 30.000 \cdot 1 \cdot 4} = 1.237.947 \ \frac{\$}{mes}$$

Finalmente, el stock de reorden:

$$S_R = 9.486 - \frac{2 \text{ días}}{30 \text{ días / mes}} \cdot 30.000 \frac{m^3}{mes} = 7.486{,}83 m^3$$

Formulado y resuelto este caso utilizando el sistema LINGO:

```
MIN = CTE;
CTE = b* P + 0.5 * c1 * q * T + k * P /q;
n = P / q;
ti = q / P * T;
Sr = q - LT * p;
c1 = c1op + b * i;
!Datos;
b = 40;
i = 0.01;
P = 30000;
c1op= 3.6;
k = 6000;
LT = 2 / 30;
T = 1;
END
```

```
Local optimal solution found at step:             13
 Objective value:                           1237947.

                          Variable           Value        Reduced Cost
                               CTE        1237947.           0.0000000
                                 B        40.00000           0.0000000
                                 P        30000.00           0.0000000
                                C1        4.000000           0.0000000
                                 Q        9486.832           0.0000000
                                 T        1.000000           0.0000000
                                 K        6000.000           0.0000000
                                 N        3.162278           0.0000000
```

TI	0.3162277	0.0000000
SR	7486.832	0.0000000
LT	0.6666667E-01	0.0000000
C1OP	3.600000	0.0000000
I	0.1000000E-01	0.0000000

Ejemplo 6.2:

La petroquímica SAPA está planificando la elaboración de un nuevo producto (el "JP1"), por lo que deberá diseñar el tanque para su almacenamiento.

El "JP1" será producido a una tasa constante de $4{,}1\widehat{6}$ *m^3 por hora. La descarga del tanque se realizará sobre un tren con vagones-tanque, que llegará a la plataforma de carga con la frecuencia que se establezca.*

El tanque tendrá un controlador automático de nivel, de manera que, una vez alcanzado un stock determinado ("nivel de alarma"), emitirá una señal para que se proceda a regular todo el sistema de válvulas y a preparar y posicionar los vagones en las plataformas de carga.

Se estima que el tiempo de preparación (desde la emisión de la señal hasta el comienzo de la descarga) será de 36 hs. Estos preparativos tendrán un costo de $60.

Por razones de seguridad se requiere que el tanque no se llene más del 65% de su capacidad. Además, el tanque tendrá un fondo no utilizable del orden del 5% de su volumen total.

La gerencia comercial estableció un stock de protección equivalente a 3 días de producción.

El costo directo del "JP1" producido será de $10 por m^3. La tasa de interés mensual puede estimarse en un 10% mensual.

Asumiendo que la producción será continua las 24 horas del día durante los 360 días del año:

1) Dimensionar el tanque, si el objetivo es minimizar el costo total.

2) Calcular cuántas descargas se harán en el año.

3) Determinar el nivel de alarma.

4) Calcular el número de vagones que se requerirán cada vez que se hace una descarga del tanque, si cada vagón tiene una capacidad de 40 m^3.

Solución:

Siendo los parámetros del problema:

$$p = 4{,}1\widehat{6}\ \mathrm{m^3/h} \Rightarrow P = 4{,}1\widehat{6}\ \mathrm{m^3/h} \cdot 24\ \mathrm{h/día} \cdot 360\ \mathrm{días/año} = 36.000\ \mathrm{m^3/año}$$

$$LT = 36\ \mathrm{hs}$$

$$k = 60\ \$/\mathrm{orden}$$

$$S_E = 0{,}35\ S_D$$

$$S_F = 0{,}05\ S_D$$

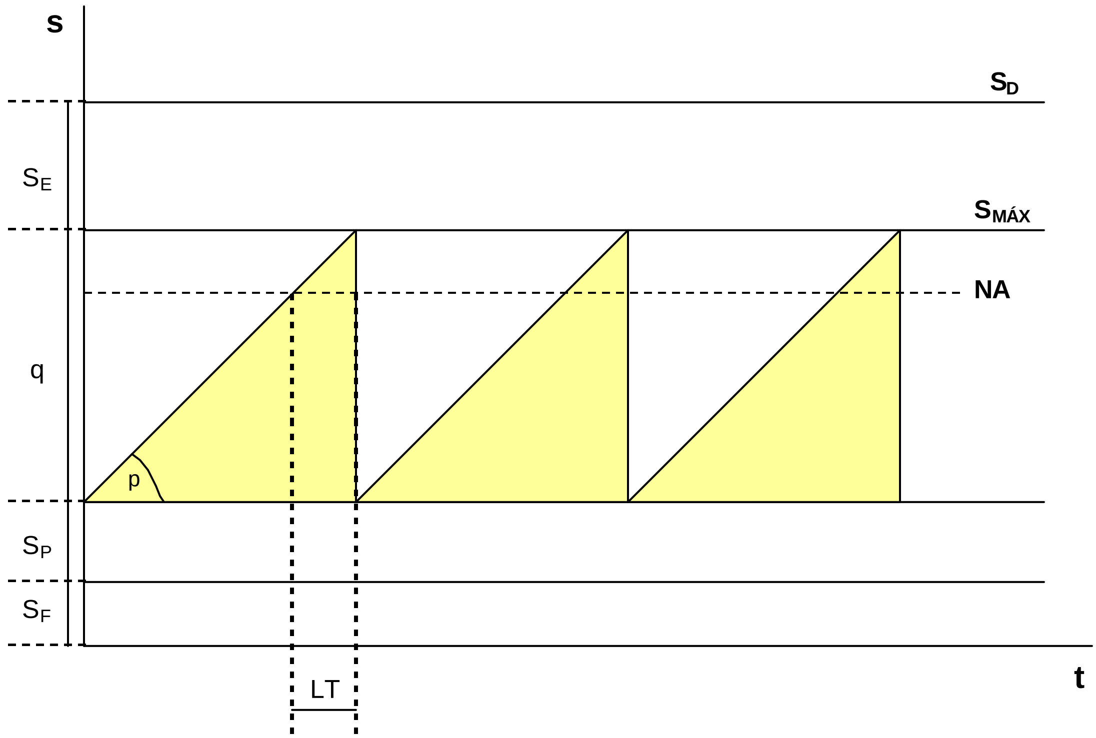
$$S_P = 3\ \mathrm{días} \cdot 4.1\widehat{6}\ \mathrm{m^3/h} \cdot 24\ \mathrm{h/día} = 300\ \mathrm{m^3}$$

$$b = 10\ \$/\mathrm{m^3}$$

$$i = 0{,}1/\mathrm{mes} = 1{,}2\ /\mathrm{año}$$

$$c_{1op} = 0$$

$$c_1 = c_{1op} + b \cdot i = 0 + 10 \cdot 1{,}2 = 12\$ /(m^3 \text{año})$$



tendremos que:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \cdot 36.000}{1 \cdot 12}} = 600$$

lo que genera un costo total esperado anual de \$367.200. El tanque tendrá que tener la siguiente dimensión total:

$$S_D = S_F + S_S + q_o + S_E$$

$$S_D = 0{,}05 \cdot S_D + 300 + 600 + 0{,}35 \cdot S_D$$

Entonces:

$$S_D \cdot (1 - 0{,}05 - 0{,}35) = 900$$

$$S_D = \frac{900}{0{,}6} = 1.500 \text{ m}^3$$

Esto implica que el Stock de fondo es de 75 m^3 y el volumen de seguridad del tanque es de 525 m^3. El Stock máximo será:

$$S_{MAX} = S_F + S_S + q_o = 75 + 300 + 600 = 975 \text{ m}^3$$

2) El número de descargas a realizar por año será:

$$n_o = \frac{P}{q_o} = \frac{36.000}{600} = 60$$

3) El nivel de alarma (punto de pedido) está dado por la siguiente expresión:

$$NA = S_{MAX} - LT \cdot p = 975 - 36 \cdot 4.1\overset{\frown}{6} = 825\ m^3$$

4) El número de vagones necesarios para cada descarga se calcula dividiendo el tamaño de la descarga por la capacidad de cada vagón:

$$nv = \frac{q_o}{40} = \frac{600}{40} = 15$$

Ejemplo 6.3:

Determinar cómo se modificaría el problema del ejemplo 6.2 si la tasa de vaciado del tanque fuera de $41,6\overset{\frown}{6}$ *m^3 por hora.*

Solución:

Considerando los parámetros:

$$p = 4,1\overset{\frown}{6}\ m^3/h$$

$$d = 41,6\overset{\frown}{6}\ m^3/h$$

la expresión del lote óptimo, según (15), es:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{p}{d}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 60 \cdot 36000}{1 \cdot 12 \cdot \left(1 - \frac{4,1\overset{\frown}{6}}{41,6\overset{\frown}{6}}\right)}} = 632,4555$$

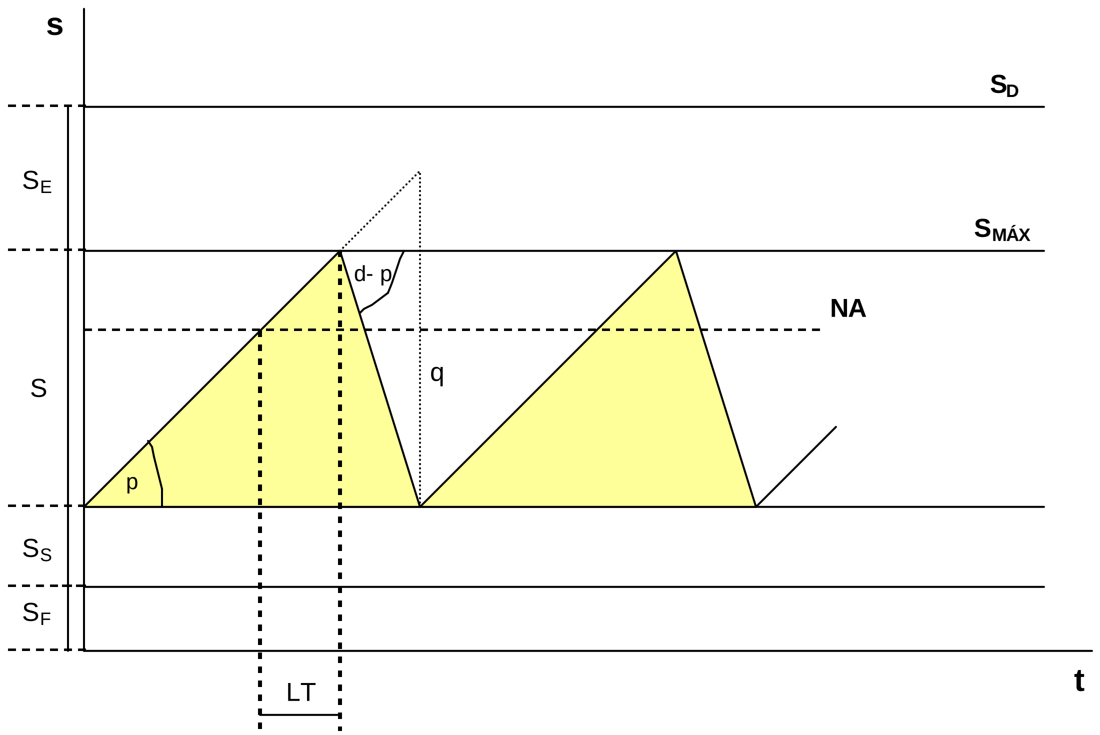
por lo que el stock máximo óptimo será:

$$S_o = q_o \cdot \left(1 - \frac{p}{d}\right) = 632,4555 \cdot 0,9 = 569,21$$

El stock de dimensionamiento es:

$$S_D = S_F + S_S + S_o + S_E$$

$$S_D = 0,05 \cdot S_D + 300 + 569,21 + 0,35 \cdot S_D$$



Entonces:

$$S_D \cdot (1 - 0{,}05 - 0{,}35) = 860{,}21$$

$$S_D = \frac{869{,}21}{0{,}6} = 1.448{,}68\ m^3$$

Esto implica que el Stock de fondo es de 72,43 m^3 y el volumen de seguridad del tanque es de 507,04 m^3. El Stock máximo será:

$$S_{MAX} = S_F + S_S + S_o = 72{,}43 + 300 + 600 = 941{,}64\ m^3$$

2) El número de descargas a realizar por año será:

$$n_o = \frac{P}{q_o} = \frac{36000}{632.4555} = 56{,}92$$

3) El nivel de alarma está dado por la siguiente expresión:

$$NA = S_{MAX} - LT \cdot p = 941{,}64 - 36 \cdot 4.1\widehat{6} = 791{,}64\ m^3$$

4) El número de vagones necesarios para cada descarga se calcula tomando el entero superior que resulta de dividir el tamaño de la descarga por la capacidad de cada vagón:

$$\frac{q_o}{40} = \frac{632,4555}{40} = 15,81$$

Es decir, se necesitan 16 vagones.

CAPÍTULO VII

PARÁMETROS VARIABLES CON CANTIDAD A ADQUIRIR

1. CONCEPTOS

Hasta aquí hemos considerado que los parámetros económicos (precio de adquisición “b”, costo de orden “k” y costo de mantenimiento en stock “c_1”), no se modificaban en función del lote a ordenar “q”. Sin embargo, en la práctica esto suele ocurrir con frecuencia. Habitualmente, los valores de los parámetros son continuos dentro de un rango determinado y se produce una variación discreta en ellos para valores superiores al límite superior del rango. La variación puede ser para todos los productos adquiridos, o en forma incremental. También existen casos en donde se puede verificar una variación continua.

2. PRECIO DE ADQUISICIÓN VARIABLE CON DESCUENTOS DISCRETOS

Para productos adquiridos a terceros, el proveedor a menudo suele ofrecer un descuento por cantidad, de manera que cuanto mayor sea el número de unidades solicitadas menor será el precio, dentro de ciertos rangos y conforme a una política de ventas determinada. Esta situación se verifica también para productos terminados o semi-elaborados ya que a mayor lote de fabricación, en general, los costos directos son menores, debido a un mejor aprovechamiento de los recursos de producción.

Formularemos a continuación un ejemplo teórico de descuento de precios por cantidad adquirida.

<u>HIPÓTESIS</u>

1. Se administra un único ítem.
2. El producto es de demanda independiente.
3. La demanda es conocida y se efectúa a tasa constante.
4. El plazo de entrega ("lead time") del producto solicitado.
5. La reposición se hace exactamente cuando el nivel de stock es cero; es decir no hay stock de protección.
6. La reposición es instantánea.
7. El planeamiento es a largo plazo.
8. El costo de agotamiento es infinitamente alto; es decir, no se admite déficit.
9. El costo unitario de adquisición "b" varía con relación a “q” según la siguiente ley de descuentos:

- Para una cantidad a adquirir comprendida entre 0 y Q_1, el precio de adquisición es "b_1".
- Para un lote de adquisición comprendido entre Q_1 y Q_2, el precio de adquisición es "b_2" para todas las unidades adquiridas.
- Para un lote mayor a Q_2, el precio de adquisición es "b_3" para todas las unidades adquiridas

10. El costo unitario de almacenamiento "c_1" y el costo del pedido "k" son independientes de la cantidad a pedir "q".
11. No hay restricciones.
12. Todos los parámetros monetarios están expresados en moneda constante.
13. El producto en estudio se mide en una unidad continua.

PARÁMETROS

- D: Demanda del producto, referida a un período estratégico de tiempo (año, semestre, etc.).
- b: Costo unitario de adquisición.
- c_1: Costo unitario de almacenamiento.
- k: Costo de una orden.
- T = 1
- LT = Lead Time.

VARIABLES

- q: Tamaño del lote.
- t: Intervalo de un ciclo.
- CTE: Costo total esperado.
- S_R: Stock de reorden.

MODELIZACIÓN

Para formular el modelo, llamaremos:

- $CTE_{(i)}$: Costo total esperado si el costo unitario de adquisición es "b_i".
- q_{oi}: tamaño del lote óptimo si el costo unitario de adquisición es "b_i".

La política de variación de precios del caso propuesto es la representada en la Figura 1. Dado que el costo de adquisición "b" es variable con respecto a "q", se debe expresar el costo unitario de almacenamiento en función de sus ~~componentes~~ dos componentes (costo operativo de mantenimiento y costo de capital inmovilizado):

$$c_1 = c'_1 + b \cdot i$$

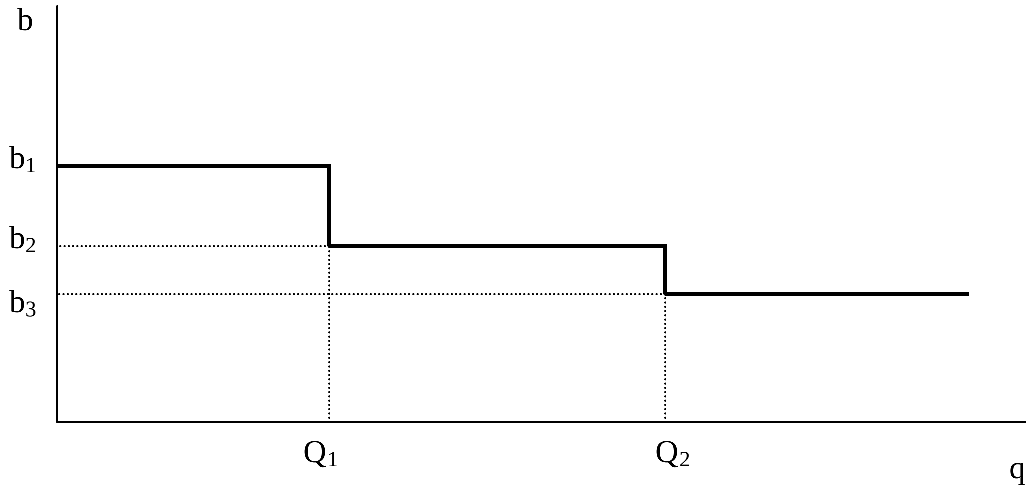


Figura 1

Siendo las expresiones de $CTE_{(i)}$, q_{oi} y CTE_{oi}:

$$CTE_{(i)} = b_i \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot (c'_1 + b_i \cdot i) \cdot T + k \cdot \frac{D}{q}$$

$$q_{oi} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot (c'_1 + b_i \cdot i)}}$$

$$CTE_{oi} = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot (c'_1 + b_i \cdot i)}$$

y, dado que:

$$b_1 > b_2 > b_3$$

tendremos:

$$CTE_{(1)} > CTE_{(2)} > CTE_{(3)} \qquad \textbf{(1)}$$

$$q_{o1} < q_{o2} < q_{o3} \qquad \textbf{(2)}$$

$$CTE_{o1} > CTE_{o2} > CTE_{o3} \qquad \textbf{(3)}$$

Observando las expresiones (1), (2) y (3) podemos determinar que las curvas de costos para b_1, b_2 y b_3 son como las indicadas en la Figura 2.

Analizaremos a continuación todas las situaciones que podrían darse con relación a los precios de corte Q_1 y Q_2:

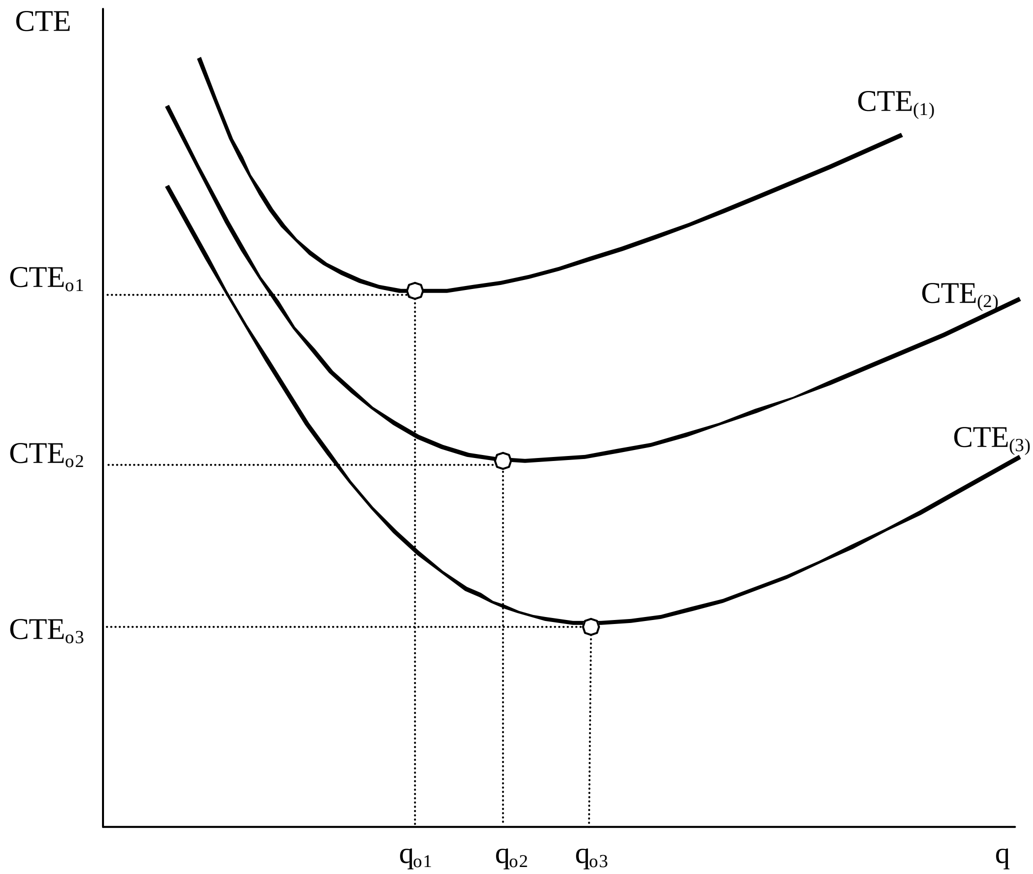


Figura 2

1) Si el lote óptimo correspondiente al precio b_3 (es decir "q_{o3}") es mayor o igual a la cantidad "Q_2", sin duda, lo óptimo es solicitar "q_{o3}", ya que esa es la cantidad que produce el menor Costo Total Esperado. En efecto, por la relación (3), el menor CTE de los tres mínimos parciales factibles es el CTE_{o3} (es decir, el costo de solicitar una cantidad q_{o3} al precio b_3). La curva de costos correspondiente a este caso está graficada en la Figura 3.

2) En cambio, si "q_{o3}" es menor a "Q_2", pueden darse dos casos:

   a) Que q_{o2} sea mayor o igual a la cantidad "Q_1" (Figura 4). Entre los dos mínimos relativos factibles, se puede asegurar que el CTE_{o2} es menor que el CTE_{o1} (según lo analizado en (3), pero no que sea menor que el costo de solicitar una cantidad "Q_2" al precio "b_3". En consecuencia, habrá que comparar:

$$CTE(b_3, Q_2) = b_3 \cdot D + \frac{1}{2} \cdot Q_2 \cdot (c'_1 + b_3 \cdot i) \cdot T + k \cdot \frac{D}{Q_2}$$

con

$$CTE_{o2} = b_2 \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot (c'_1 + b_2 \cdot i)}$$

y elegir el lote que dé el menor costo, es decir "Q_2" si CTE(b_3,Q_2) es menor o "q_{o2}", se el CTE_{o2} es menor.

b) Que "q_{02}" sea menor a la cantidad "Q_1" (Figura 5). En este caso habrá que comparar:

$$CTE(b_3, Q_2) = b_3 \cdot D + \frac{1}{2} \cdot Q_2 \cdot (c'_1 + b_3 \cdot i) \cdot T + k \cdot \frac{D}{Q_2}$$

con

$$CTE(b_2, Q_1) = b_2 \cdot D + \frac{1}{2} \cdot Q_1 \cdot (c'_1 + b_2 \cdot i) \cdot T + k \cdot \frac{D}{Q_1}$$

y con

$$CTE_{o1} = b_1 \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot (c_1 + b_1 \cdot i)}$$

y elegir el lote que dé el menor costo; es decir "Q_2" si CTE(b_3,Q_2) es el menor, "Q_1" si CTE(b_2,Q_1) es el menor, o "q_{o1}" si CTE_{o1} es el menor.

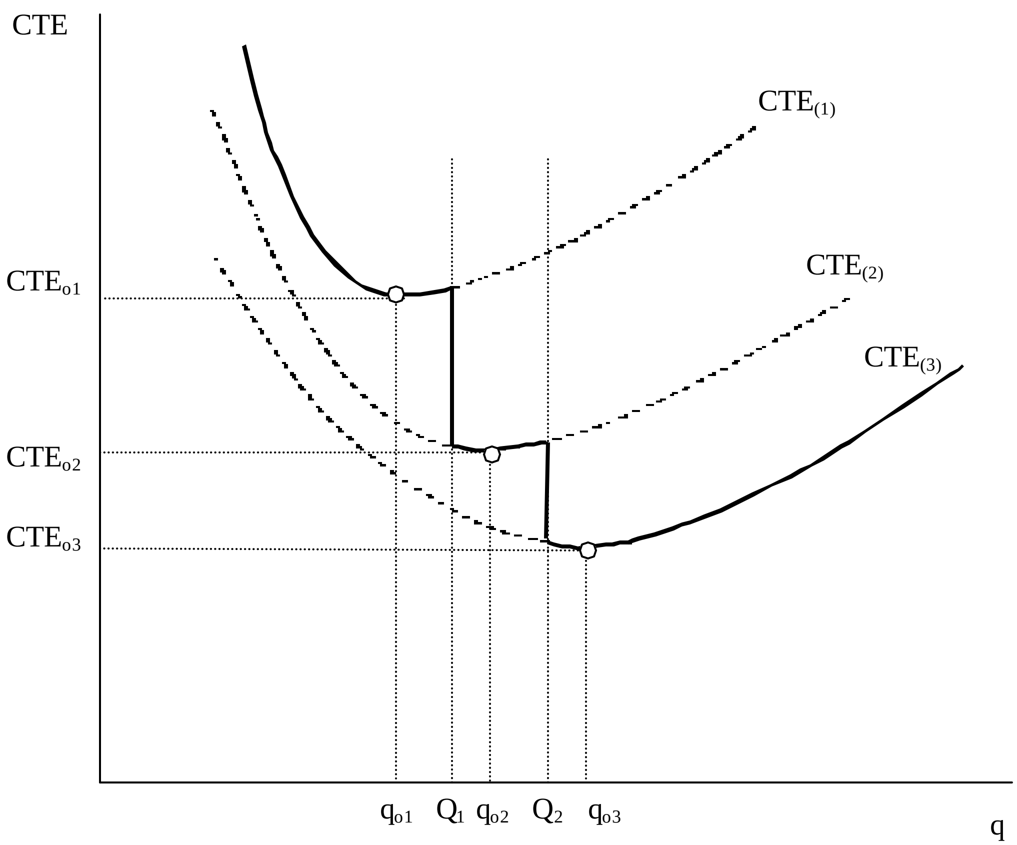


Figura 3

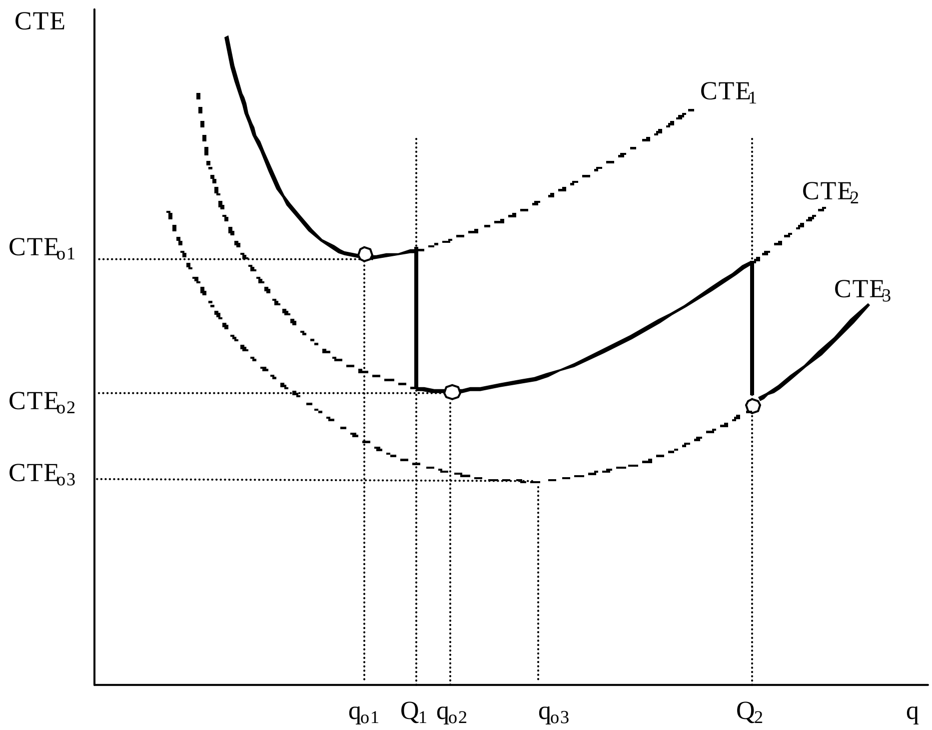


Figura 4

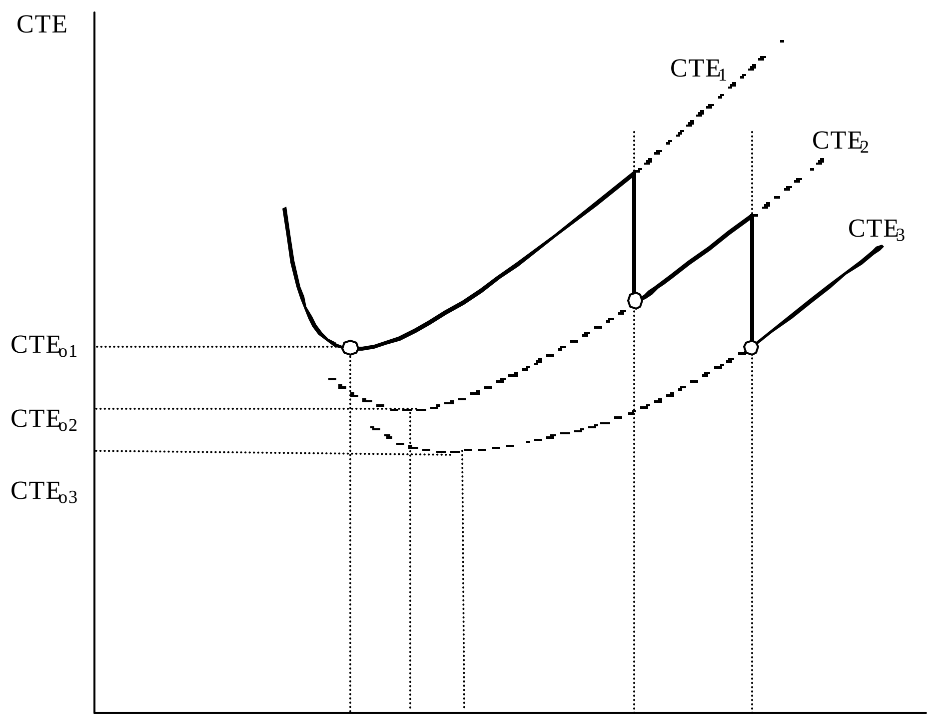


Figura 5

Para resumir, el procedimiento a seguir en el caso de variaciones de costo de adquisición (por ejemplo descuentos en los precios de compra) por cantidad, cuando hay dos lotes de corte Q_1 y Q_2, es el siguiente:

- Calcular el lote óptimo q_{o3}.
- Comparar q_{o3} con Q_2.

    1) Si q_{o3} es mayor o igual que Q_2, se debe pedir q_{o3}.
    2) Si q_{o3} es menor que Q_2, se debe calcular el lote óptimo q_{o2} y compararlo con Q_1.
        a) Si q_{o2} es mayor o igual que Q_1, se debe comparar el CTE_{o2} con el CTE de pedir un lote Q_2 al precio b_3, y elegir el lote correspondiente al menor costo.
        b) Si q_{o2} es menor a Q_1, se debe comparar el CTE_{o1} con el CTE de solicitar una cantidad Q_1 al precio b_2, y con el CTE de pedir un lote Q_2 al precio b_3, eligiendo el lote correspondiente al menor costo de los tres.

En la Figura 6 se muestra el diagrama de flujo correspondiente.

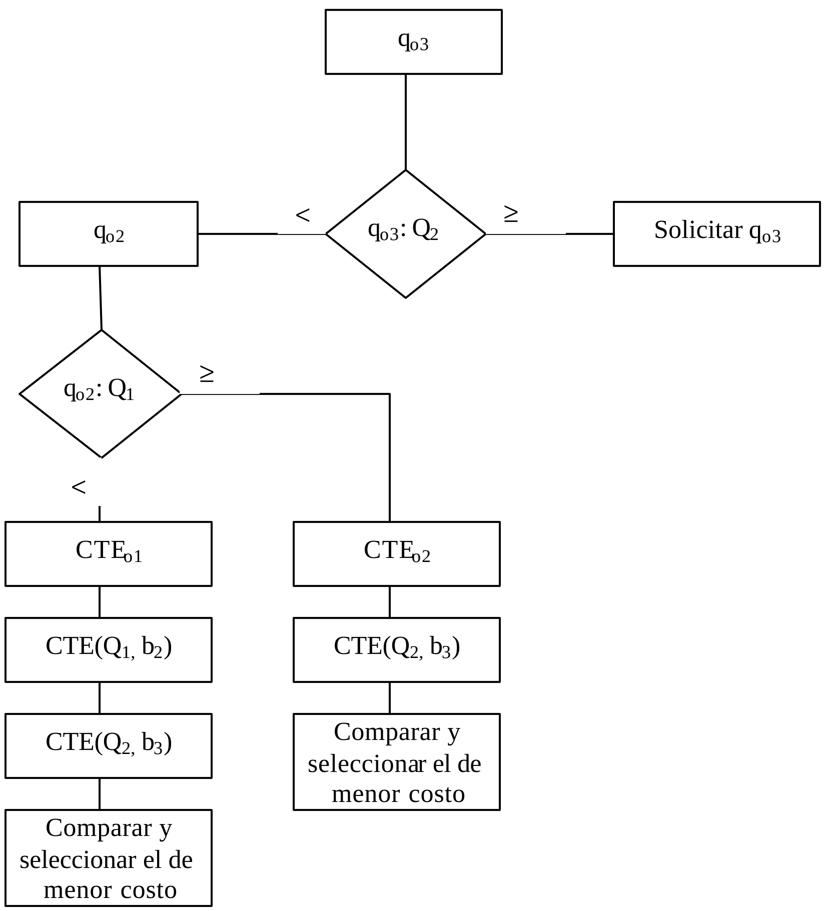


Figura 6

Obviamente, para distintas cantidades de lotes de corte Q_1 habrá que proceder en forma similar; es decir, calculando primero el lote q_{oi} y compararlo con la cantidad Q_{i-1}. Si el primero es mayor o igual a este último, lo óptimo será solicitar el lote q_{oi}; en caso contrario, habrá que calcular el lote q_{oi-1} y compararlo con Q_{i-2}, luego calcular los costos CTE(q_{oi}), CTE(Q_{i-2}, b_{i-1}) y seleccionar el lote correspondiente al del menor costo; y así sucesivamente.

En los casos en que el costo del capital inmovilizado sea despreciable con respecto al costo operativo de mantenimiento (es decir, cuando i = 0), las curvas de costo serán como las indicadas en la Figura 7. En este caso, tendremos que $q_{o3} = q_{o2} = q_{o1} = q_o$, como se indica en la Figura 8, pero el procedimiento es similar al que hemos visto.

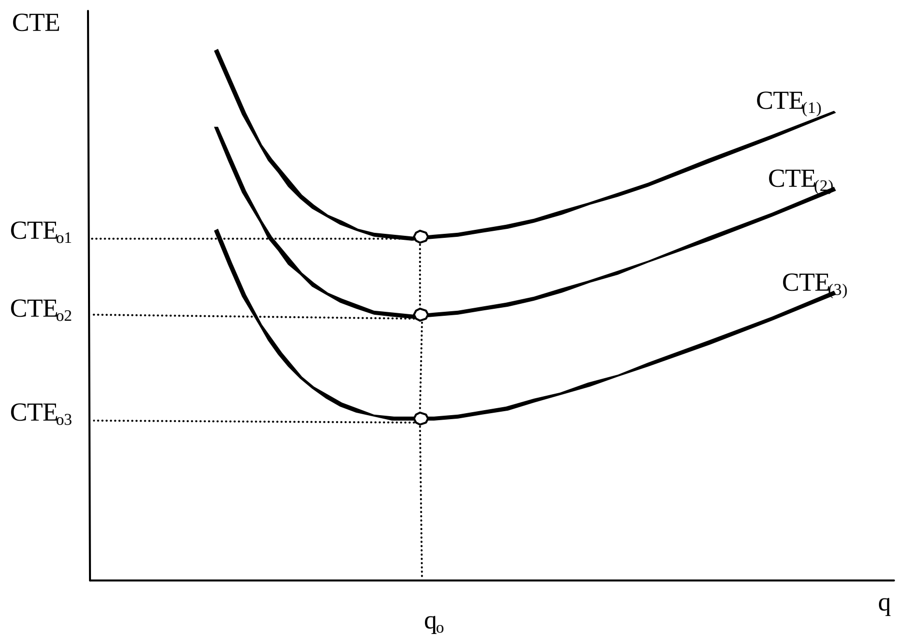


Figura 7

Finalmente, cabe mencionar que los problemas de descuento por cantidad, pueden también estar combinados con problemas de reaprovisionamiento no instantáneo, de stock de protección, de agotamiento y de ingreso constante.

El modelo general para utilizar el sistema LINGO visto en el capítulo anterior, considerando dos descuentos por cantidad, sería el siguiente:

```
MIN = CTE;
CTE = + b*D + 1/2 *(q*(1-d/p)-Sa)^2/(q*(1-d/p))*c1*T + 1/2 * Sa^2 / (q*(1-d/p))*c2*T
+ k * D / q + Sa * f2 * D/q + F * D / q + Sp * c1 * T;

c1 = c1op + i*b;
T = 1;
n = D / q;
S = q * (1-d/p) - Sa;
Smax = S + Sp;
ti = t1 + t2;
t1 = t1d + t1p;
t2 = (t2d + t2p);
ti = q/D * T;
t1p = S / (p-d);
t1d = S / d;
t2p =  Sa / (p-d);
t2d = Sa / d;
tp = t1p + t2p;
td = t1d + t2d;
```

```
c1 = c1op + i * b;

! Descuento por cantidad;
q = q1 + q2 + q3;
b = b1 * I1 + b2 * I2 + b3 * I3;
q1 < QI * I1;
q2 > QI * I2;
q2 < QII * I2;
q3 > QII * I3;
q3 < QIII * I3;
I1 + I2 + I3 = 1;
@BIN( I1);
@BIN( I2);
@BIN( I3);
```

siendo los parámetros QI y QII los lotes de corte. El parámetro QIII, por su parte, adquiere un valor arbitrariamente grande.

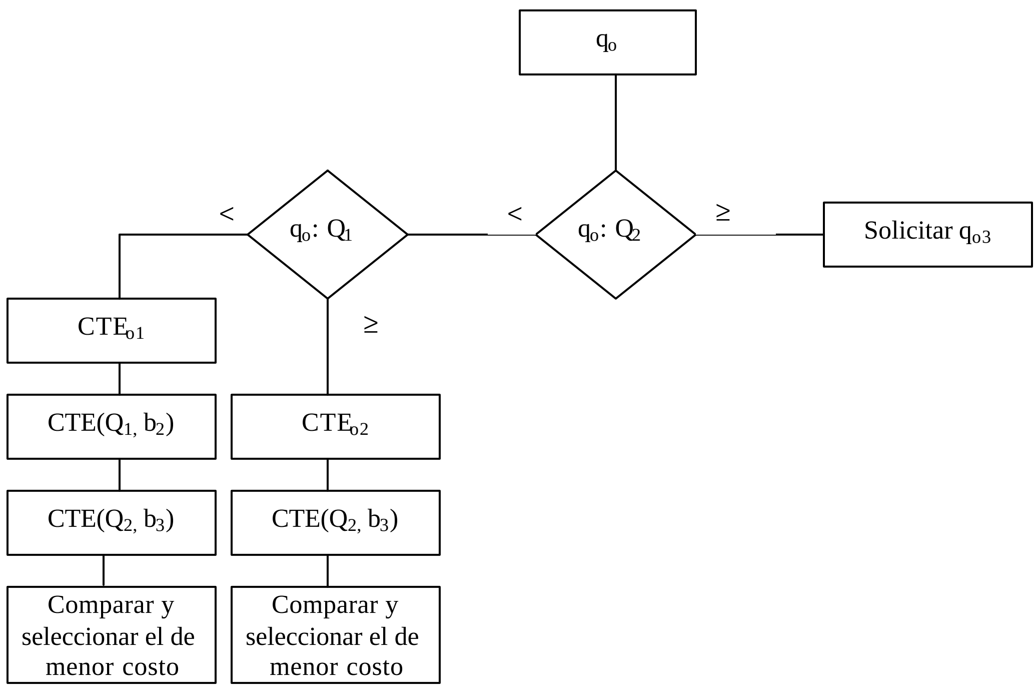


Figura 8

3. DESCUENTOS CONTINUOS DE PRECIO DE ADQUISICIÓN

Podría ocurrir que la variación del precio de adquisición en función del tamaño del lote fuera un decremento continuo (ver Figura 9).

La solución de este caso es más sencilla, generalmente, que la de los problemas con descuentos son discretos. Simplemente se deberá reemplazar la expresión la función

$$b = f(q)$$

en la del costo total esperado:

$$CTE = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot (c'_1 + b \cdot i) \cdot T + k \cdot \frac{D}{q}$$

de manera que:

$$CTE = f(q) \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot \left(c'_1 + f(q) \cdot i\right) \cdot T + k \cdot \frac{D}{q}$$

Esta expresión se deriva con respecto a “q”, se iguala a cero y se despeja así el valor óptimo de la variable “q”.

Un ejemplo de expresión matemática de precio “b” con una ley continua de descuentos de precio por cantidad es el siguiente:

$$b = \frac{A}{B + q}$$

siendo “A” y “B” constantes.

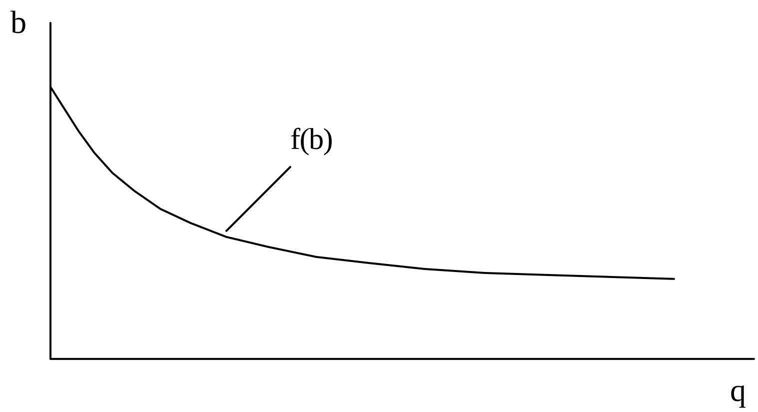


Figura 9

4. COSTO DE MANTENIMIENTO OPERATIVO VARIABLE

En algunas ocasiones, por razones de escala operativa, puede ocurrir que el costo operativo de almacenamiento se modifique dentro de diferentes rangos de tamaño de lote. Para simplificar el caso, tomaremos un solo lote de corte, asumiremos que el costo de almacenamiento c_1 es totalmente operativo (es decir, la tasa de inmovilización de capital la supondremos nula) y tomaremos la siguiente ley (graficada en la Figura 10):

- Para una cantidad a adquirir comprendida entre 0 y Q_1, el costo de mantenimiento es c_{11}.
- Para una cantidad a adquirir mayor que Q_1, el costo de mantenimiento es c_{12}.

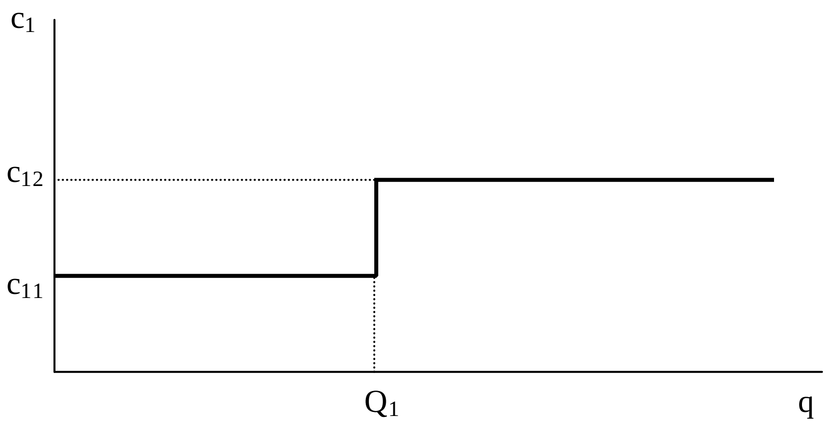


Figura 10

Analizando las expresiones de los costos totales para cada uno de los c_{1i}:

$$CTE_{(i)} = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_{1i} \cdot T + k \cdot \frac{D}{q}$$

podemos observar que

$$CTE_{(1)} < CTE_{(2)} \qquad \textbf{(3)}$$

Asimismo, analizando las expresiones de los lotes óptimos:

$$q_{oi} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_{1i}}}$$

vemos que

$$q_{o1} > q_{o2} \qquad \textbf{(4)}$$

Finalmente, considerando que

$$CTE_{o(i)} = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_{1i}}$$

concluimos que

$$CTE_{o(1)} < CTE_{o(2)} \qquad \textbf{(5)}$$

Es decir, considerando conjuntamente (3), (4) y (5), tendremos que las curvas correspondientes a los costos totales esperados para cada c_{1i} son como las dibujadas en la Figura 11.

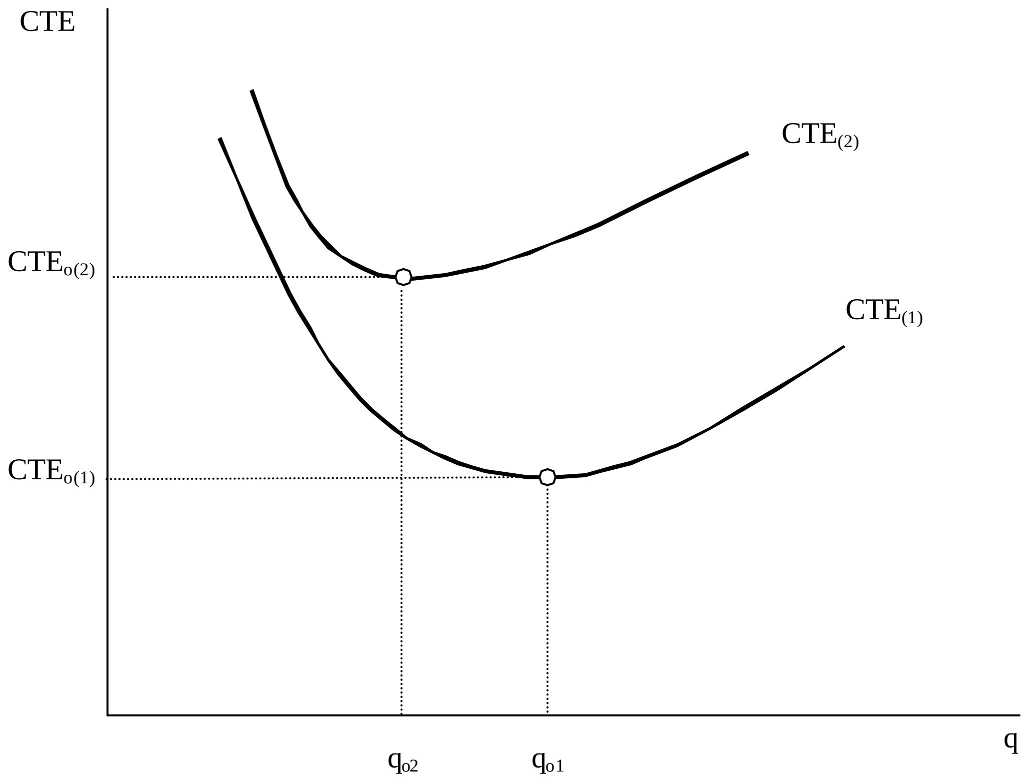


Figura 11

Analizando ahora las posibles situaciones que pueden verificarse:

1) si el lote óptimo q_{o1} es menor o igual a la cantidad Q_1, la curva de costo correspondiente es la graficada en la Figura 12. Aquí, sin duda, lo óptimo es solicita q_{o1} ya que es la cantidad que nos da el menor Costo Total Esperado.

2) si el lote óptimo q_{o1} es mayor a Q_1, pueden darse dos casos

   a) que la cantidad Q_1 sea mayor o igual a q_{o2} (Figura 13). En este caso habrá que adquirir la cantidad Q_1 al costo c_{11}.

   b) que la cantidad Q_1 sea menor a q_{o2} (ver Figura 14). Aquí habrá que comparar los costos:

$$CTE(c_{11}, Q_1) = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot Q_1 \cdot c_{11} \cdot T + k \cdot \frac{D}{Q_1}$$

con

$$CTE_{o2} = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot T \cdot c_{12}}$$

y elegir el lote que dé el menor costo, es decir Q_1 si el $CTE(c_{11}, Q_1)$ es menor o q_{o2} si el CTE_{o2} es menor.

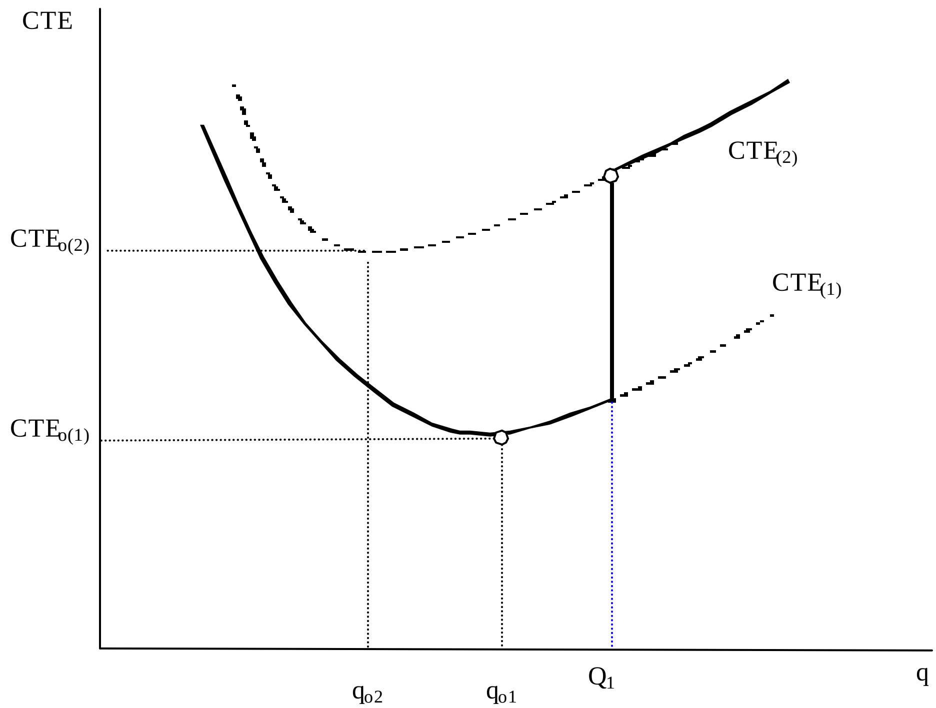


Figura 12

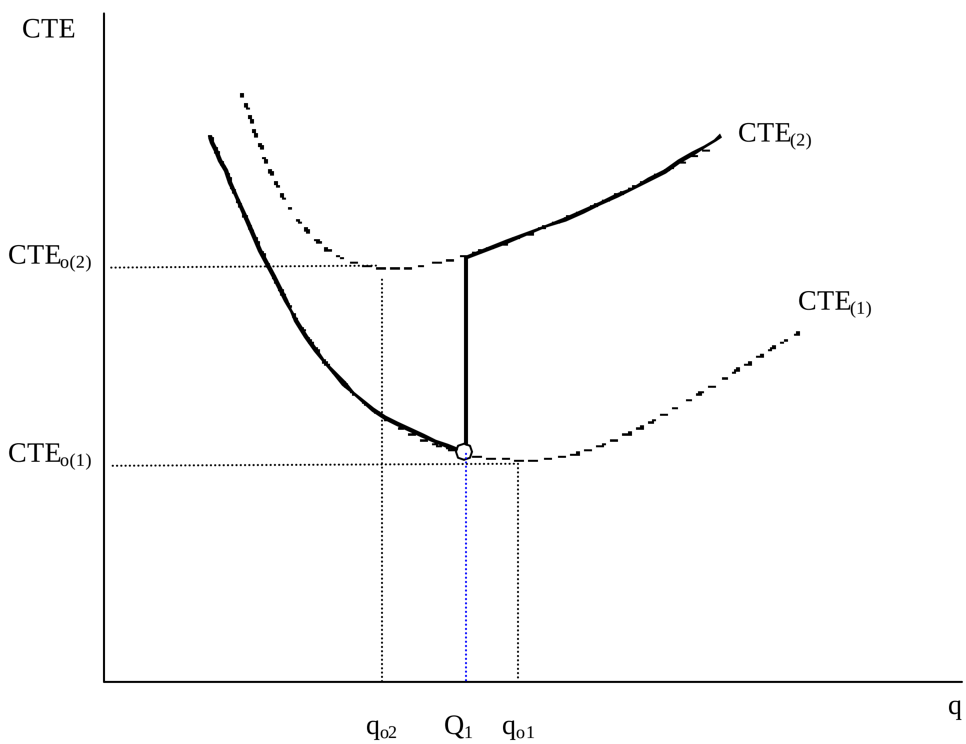


Figura 13

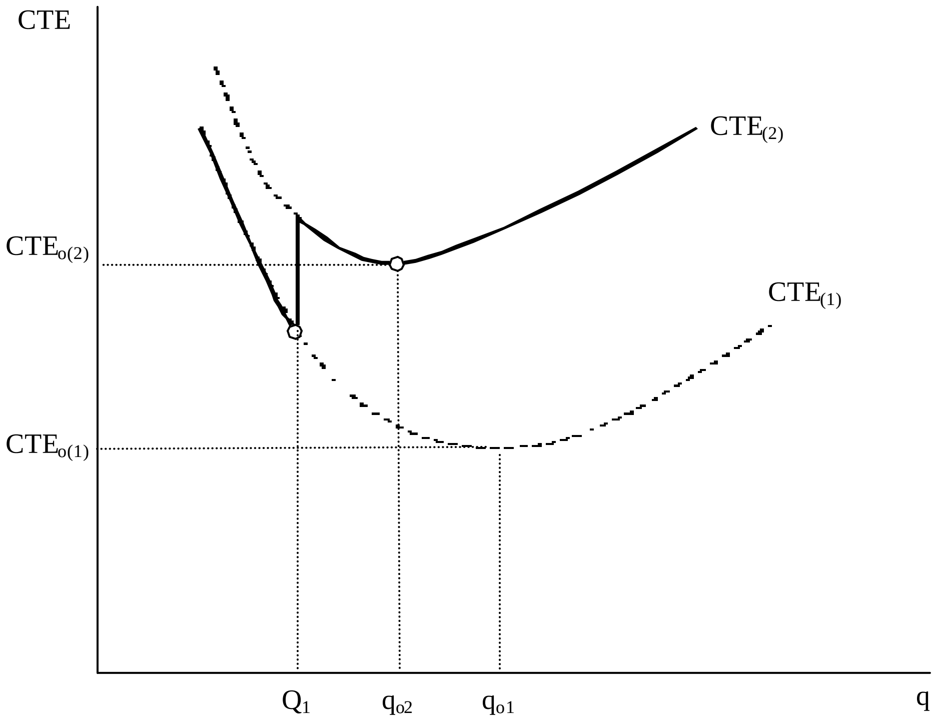


Figura 14

El lector podrá desarrollar, siguiendo el mismo proceso de análisis, otros modelos con más de un lote de corte Q y graficar el diagrama correspondiente al procedimiento de cálculo.

5. COSTO DE ORDEN VARIABLE

También podría ocurrir, por razones de economía de escala, que el costo de orden se modifique para determinados rangos de lote de adquisición. Un ejemplo de ello puede ocurrir cuando el costo de flete para transportar el lote de unidades comprado está a cargo de la empresa adquirente, en donde se puede trasportar en un en un medio de transporte que tiene una capacidad determinada hasta una cantidad de unidades compatible con dicha capacidad, pero para una cantidad mayor se requerirá la contratación de otro medio adicional de transporte, incrementando en consecuencia el costo de orden.

Supongamos un caso para en donde:

- para una cantidad de unidades a adquirir comprendida entre 0 y “Q_1”, el costo de orden es igual a “k_1”, y
- para un lote superior a “Q_1”, el lote es igual a “k_2.

El gráfico correspondiente a la variación de costo de orden, se muestra en la Figura 15.

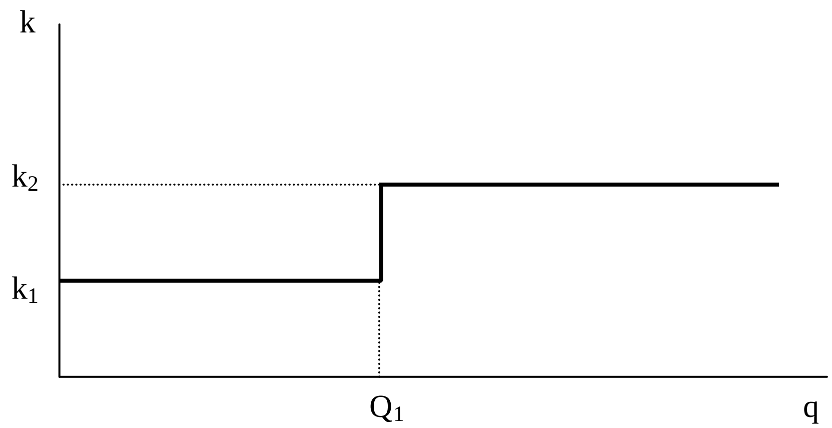


Figura 15

Analizando las expresiones de los costos totales para cada uno de los k_i:

$$CTE_{(i)} = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot q \cdot c_1 \cdot T + k_i \cdot \frac{D}{q}$$

podemos observar que

$$CTE_{(1)} < CTE_{(2)} \qquad \textbf{(6)}$$

Asimismo, analizando las expresiones de los lotes óptimos:

$$q_{oi} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_i \cdot D}{T \cdot c_i}}$$

vemos que

$$q_{o1} < q_{o2} \qquad \textbf{(7)}$$

Finalmente, considerando que

$$CTE_{o(i)} = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k_i \cdot D \cdot T \cdot c_1}$$

concluimos que

$$CTE_{o(1)} < CTE_{o(2)} \qquad \textbf{(8)}$$

Es decir, considerando conjuntamente (6), (7) y (8), tendremos que las curvas correspondientes a los costos totales esperados para cada c1i son como las dibujadas en la Figura 16.

Analizaremos a continuación las posibles situaciones que podrían verificarse para el caso así planteado:

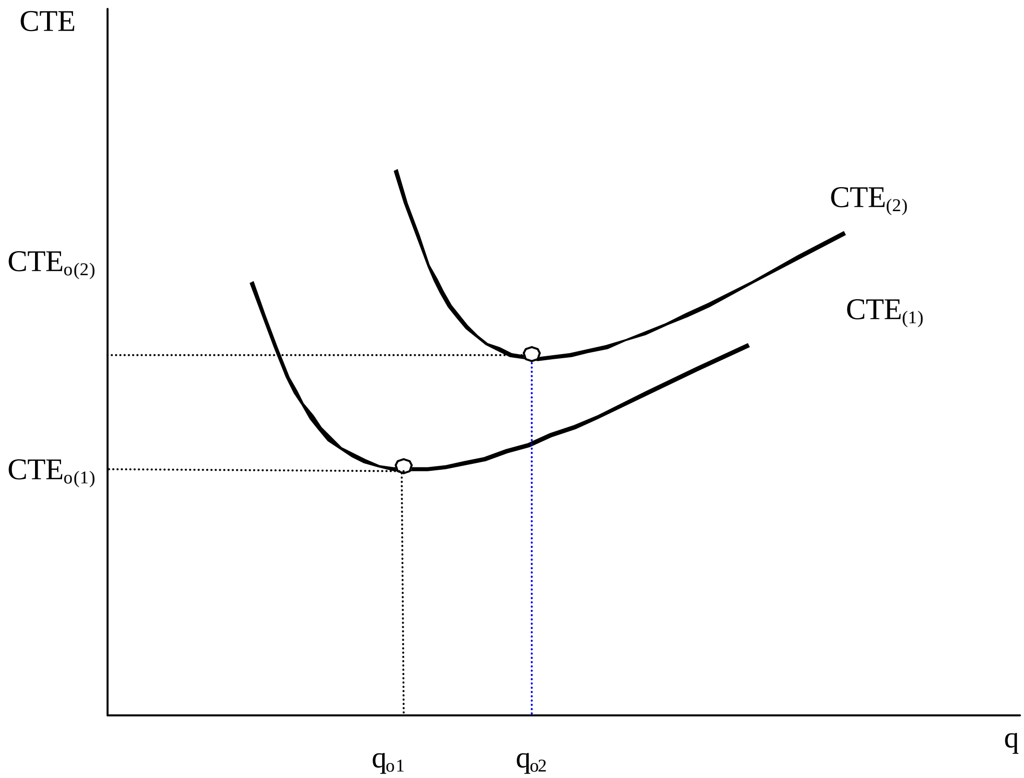


Figura 16

1) si el lote óptimo q_{o1} es menor o igual a la cantidad Q_1, la curva de costo correspondiente es la graficada en la Figura 17 Aquí, sin duda, lo óptimo es solicita q_{o1} ya que es la cantidad que nos da el menor Costo Total Esperado.

2) si el lote óptimo q_{o1} es mayor a Q_1 (Figura 18), habrá que comparar:

$$CTE(k_1, Q_1) = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot Q_1 \cdot c_1 + T + k_1 \cdot \frac{D}{Q_1}$$

con

$$CTE_{o2} = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k_2 \cdot D \cdot T \cdot c_1}$$

y elegir el lote que dé el menor costo, es decir Q_1 si el $CTE(k_1,Q_1)$ es menor o q_{o2} si el CTE_{o2} es menor.

De igual modo que en los casos anteriores, el lector podrá analizar otros casos con más de un lote de corte Q, graficando el diagrama de costos para observar la forma de las curvas de costos y desarrollar el modelo correspondiente siguiendo el mismo proceso de análisis que el visto.

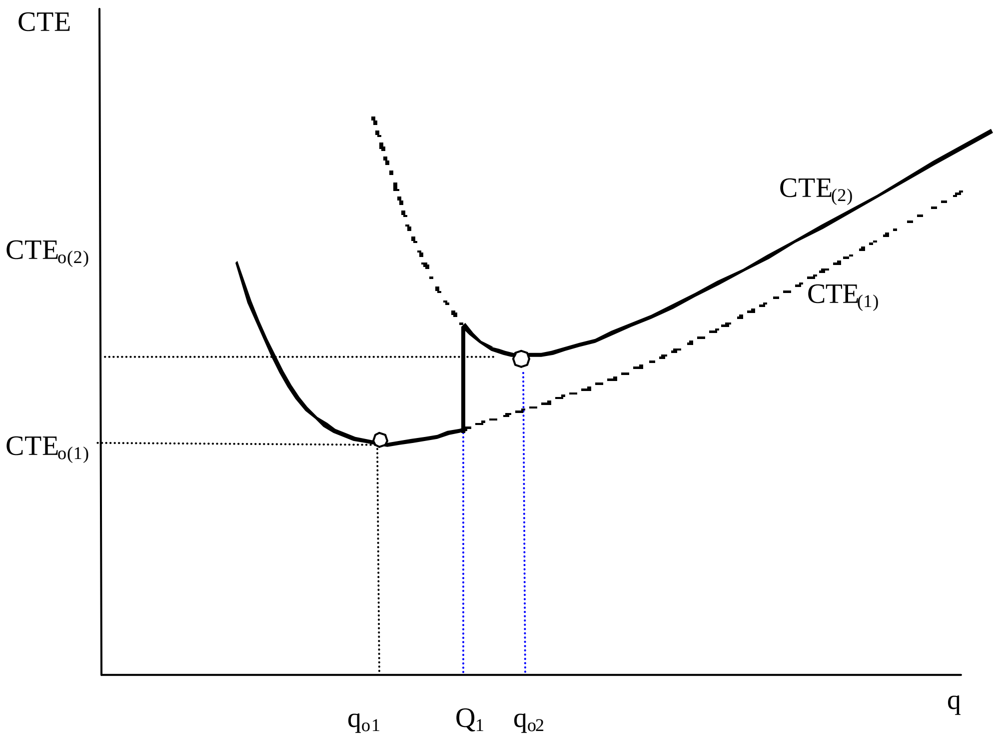


Figura 17

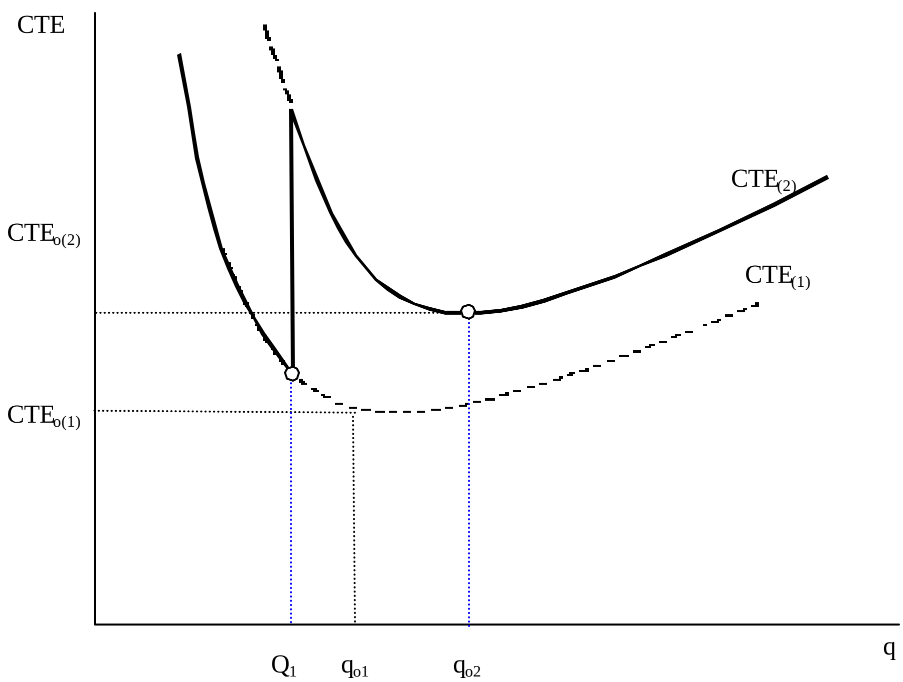


Figura 18

6. DESCUENTOS INCREMENTALES DE COSTOS DE ADQUISICIÓN

Volviendo al problema de descuento de precios de adquisición "b" por cantidad, supondremos que los descuentos son aplicables únicamente para las cantidades en exceso a los lotes de corte. Modificaremos la hipótesis 9 del caso planteado en el punto 2 de este capítulo en la forma siguiente:

- Para una cantidad a adquirir comprendida entre 0 y Q_1, el precio de adquisición es "b_1".
- Para un lote de adquisición comprendido entre Q_1 y Q_2, el precio de adquisición es "b_1" para las primeras Q_1 unidades, y "b_2" para el resto.
- Para un lote mayor a Q_2, el precio de adquisición es b_1" para las primeras Q_1 unidades, "b_2" para las unidades comprendidas entre Q_1 y Q_2, y "b_3" para el resto.

Definiremos a la variable "q" como suma de tres variables:

$$q = q_1 + q_2 + q_3$$

en donde "q_i" es la cantidad de unidades a comprar al precio "b_i".

Si la cantidad a adquirir de q es menor a Q1, se debe activar solamente la variable q1. Si la cantidad a adquirir está comprendida entre Q1 y Q2 se deben activar las variables q1 y q2. Finalmente, si la cantidad a adquirir es mayor a Q2 se deben activar las tres variables qi. En consecuencia se pueden utilizar variables binarias para definir los rangos de estas variables:

$$q_1 \le Q_1 \cdot I_1$$

$$q_2 \le (Q_2 - Q_1) \cdot I_2$$

$$q_3 \le (M - Q_2) \cdot I_3$$

en donde:

- "M" es el valor máximo que puede asumir "q" (si se conoce), o un valor arbitrariamente grande.
- I_1: variable binaria. Cuando se activa permite que se habilite "q_1".
- I_2: variable binaria. Cuando se activa permite que se habilite "q_2".
- I_3: variable binaria. Cuando se activa permite que se habilite "q_3".

Si se habilita la variable q2, la variable q1 debe ser igual a su cota superior Q1, para ello introducimos las restricciones

$$I_1 \ge I_2$$

$$q_1 \ge Q_1 \cdot I_2$$

Del mismo modo, si se habilita q3, las variables q1 y q2 deben estar en su cota superior, por lo que se agregan las restricciones:

$$I_2 \ge I_3$$

$$q_2 \geq (Q_2 - Q_1) \cdot I_3$$

La expresión del costo total esperado a minimizar es:

$$CTE = b_1 \cdot q_1 \cdot \frac{D}{q} + b_2 \cdot q_2 \cdot \frac{D}{q} + b_3 \cdot q_3 \cdot \frac{D}{q} + \frac{1}{2} \cdot q_1 \cdot (c'_1 + b_1 \cdot i) \cdot T + \frac{1}{2} \cdot q_2 \cdot (c'_1 + b_2 \cdot i) \cdot T +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot q_3 \cdot (c'_1 + b_3 \cdot i) \cdot T + k \cdot \frac{D}{q}$$

La formulación matemática de este modelo utilizando el lenguaje del sistema LINGO es:

```
MIN = CTE;
CTE = b1*q1*D/q + b2*q2*D/q + b3*q3*D/q + 0.5*q1*c11*T + 0.5*q2*c12*T + 0.5*q3*c13*T +
      k*D/q;
c11 = c1op + i * b1;
c12 = c1op + i * b2;
c13 = c1op + i * b3;
q = q1 + q2 + q3;
q1 < QI * I1;
q1 > QI * I2;
q2 < (QII-QI) * I2;
q2 > (QII-QI) * I3;
q3 < (QIII-QII) * I3;
@BIN(I1);
@BIN(I2);
@BIN(I3);
I1>I2;
I2>I3;
n = D / q;
ti = q/D * T;
T = 1;
```

Ejemplo 7.1:

Una empresa fabricante de sistemas de componentes de sonido produce sus propios parlantes. La demanda de los sistemas es continua e igual a 4.000 por mes. El costo de lanzamiento de una orden fabricación de parlantes es de 12.000. Los parlantes llegan a la línea de armado de los sistemas de componentes en lotes terminados.

El costo operativo de mantener un parlante en inventario es de 3,00 $ por mes, mientras que la tasa de inmovilización de capital que se ha fijado es del 10% mensual.

El costo unitario de producir un parlante es variable:

- *$11, si se producen menos de 10.000 unidades*
- *$10, si la producción esta comprendida entre 10.000 y 80.000 unidades*
- *$ 9,5, si se fabrican mas de 80.000 parlantes.*

Determinar la cantidad optima de parlantes a fabricar.

Solución:

Asumiremos que cada sistema lleva dos parlantes.

$D = 8.000$ parlantes/mes

$k = 12.000 \quad \$ / \text{lote}$

$c_{1op} = 0{,}30$ \$/mes

$b_1 = 11$ \$ / parlante

$b_2 = 10$ \$ / parlante

$b_3 = 9{,}50$ \$ / parlante

$Q_1 = 10.000$

$Q_2 = 80.000$

Considerando que:

$$c_{1i} = 0{,}30 + b_i \cdot 0{,}10$$

primero se calcula el lote optimo al menor costo (b_3):

$$q_{o3} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot (c'_1 + b_3 \cdot i)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12.000 \cdot 8.000}{1 \cdot (0{,}30 + 9{,}5 \cdot 0{,}10)}} \cong 12.394$$

Como q_{o3} es menor que Q_2, se calcula q_{o2}:

$$q_{o2} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot (c'_1 + b_2 \cdot i)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12.000 \cdot 8.000}{1 \cdot (0{,}30 + 10 \cdot 0{,}10)}} \cong 12.153$$

Dado que este valor es mayor que Q_1, se debe comparar entonces el costo CTE_{o2} con el $CTE(q_2, b_3)$ y seleccionar el lote correspondiente al menor costo total esperado:

$$CTE_{o2} = 10 \cdot 8.000 + \sqrt{2 \cdot 12.000 \cdot 8.000 \cdot 1 \cdot (0{,}3 + 10 \cdot 0{,}10)} = 95.798{,}73 \frac{\$}{mes}$$

$$CTE(Q_2, b_3) = 9{,}50 \cdot 8.000 + \frac{1}{2} \cdot 80.000 \cdot (0{,}30 + 9{,}50 \cdot 0{,}10) \cdot 1 + \frac{120.000 \cdot 8.000}{80.000} = 127.200 \frac{\$}{mes}$$

En consecuencia, el lote a solicitar es q_{o2}.

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*S*c1*T + k*D/q ;

q = q1 + q2 + q3;
b = b1 * I1 + b2 * I2 + b3 * I3;
q1 < QI * I1;
q2 > QI * I2;
q2 < QII * I2;
q3 > QII * I3;
q3 < QIII * I3;
I1 + I2 + I3 = 1;
@BIN( I1);
@BIN( I2);
@BIN( I3);

n = D / q;
S = q * (1-d/p);
ti = q/D * T;
c1 = c1op + i * b;
T = 1;

QI = 10000;
```

```
QII = 80000;
QIII = 999999999;
b1 = 11;
b2 = 10;
b3 = 9.5;
i = 0.1;
p = 9999999999;
D = 8000;
c1op = 0.3;
k = 12000;
END
```

```
Local optimal solution found at step:            47
 Objective value:                          95798.73
 Branch count:                                    1

                    Variable           Value        Reduced Cost
                         CTE        95798.73           0.0000000
                           B        10.00000           0.0000000
                           D        8000.000           0.0000000
                           S        12152.87           0.0000000
                          C1        1.300000           0.0000000
                           T        1.000000           0.0000000
                           K        12000.00           0.0000000
                           Q        12152.88           0.0000000
                          Q1       0.0000000           0.8607643
                          Q2        12152.88           0.0000000
                          Q3       0.0000000           0.2394810E-07
                          B1        11.00000           0.0000000
                          I1       0.0000000           0.0000000
                          B2        10.00000           0.0000000
                          I2        1.000000           0.0000000
                          B3        9.500000           0.0000000
                          I3       0.0000000           -4303.824
                          QI        10000.00           0.0000000
                         QII        80000.00           0.0000000
                        QIII       0.1000000E+10       0.0000000
                           N       0.6582804           0.0000000
                           P       0.1000000E+11       0.0000000
                          TI        1.519110           0.0000000
                        C1OP       0.3000000           0.0000000
                           I       0.1000000           0.0000000
```

Ejemplo 7.2:

Se desea optimizar el tamaño del lote de pintura para unas piezas metálicas. El departamento de Investigación Operativa obtuvo los siguientes datos:

2. *Precio de compra unitario: 500 $/m^3*
3. *Tasa de interés del capital inmovilizado en existencias: 10% anual.*
4. *Costo de selección del proveedor, colocación de la orden de compra y seguimiento: 10$ por pedido.*
5. *Costo anual por obsolescencia: 1% del valor de compra.*
6. *Costo de recepción, control de calidad y traslado a almacén: 35 $/lote.*
7. *Costo de espacio de almacenamiento por cada m^3: 0,4 $/mes.*
8. *Descuento que ofrece el proveedor para compras mayores a 80 m^3: 12%.*
9. *Costos contables de verificación de factura y pago: 7$ por cada compra.*
10. *Insumo de Mano de Obra para pintar cada pieza: 6 hh.*

11. *Costo de Mano de Obra: 12 \$/hh.*
12. *El transporte desde la planta de pintura está a cargo de la empresa. El costo es de \$20 por viaje y se sabe que un lote, cualquiera sea su tamaño se transporta en un solo viaje.*
13. *Seguros contra incendio: 0,05 \$/mes por cada m^3.*
14. *Precio de venta de cada pieza terminada: \$1.500*
15. *Producción anual: 10.000 piezas.*
16. *Requerimiento de pintura por cada pieza: 0,2 m^3.*
17. *Cantidad de lugar disponible para almacenar la pintura: 150 m^3.*
18. *Plazo de entrega (desde la emisión de la orden hasta la ubicación de la pintura en el depósito, lista para ser usada): 15 días.*

Solución:

En primer lugar se hará un análisis de suficiencia de los datos disponibles. Los datos 10, 11, 14 y 18 no son relevantes a los fines del objetivo que se persigue.
El problema es de descuento por cantidad, en donde los parámetros son los siguientes:

- $Q = 80\,m^3$
- $b_1 = 500 \dfrac{\$}{m^3}$ para $q < Q$
- $b_2 = 500 \cdot 0{,}88 = 440 \dfrac{\$}{m^3}$ para $q \geq Q$

El costo operativo de almacenamiento estar'a dado por los costos de obsolescencia, espacio y seguros:

- $c'_{11} = 0{,}01 \cdot 500 \dfrac{\$}{m^3 \cdot año} + 0{,}40 \dfrac{\$}{m^3 \cdot mes} \cdot 12 \dfrac{meses}{año} + 0{,}05 \dfrac{\$}{m^3} \cdot 12 \dfrac{1}{año} = 10{,}40 \dfrac{\$}{m^3 \cdot año}$
- $c'_{12} = 0{,}01 \cdot 440 \dfrac{\$}{m^3 \cdot año} + 0{,}40 \dfrac{\$}{m^3 \cdot mes} \cdot 12 \dfrac{meses}{año} + 0{,}05 \dfrac{\$}{m^3} \cdot 12 \dfrac{1}{año} = 9{,}80 \dfrac{\$}{m^3 \cdot año}$

Por lo tanto, el costo de almacenamiento por m^3 será:

- $c_{11} = c'_{11} + b_1 \cdot i = 10{,}40 + 50 = 60{,}40 \dfrac{\$}{m^3 \cdot año}$
- $c_{12} = c'_{12} + b_2 \cdot i = 9{,}80 + 44 = 53{,}80 \dfrac{\$}{m^3 \cdot año}$

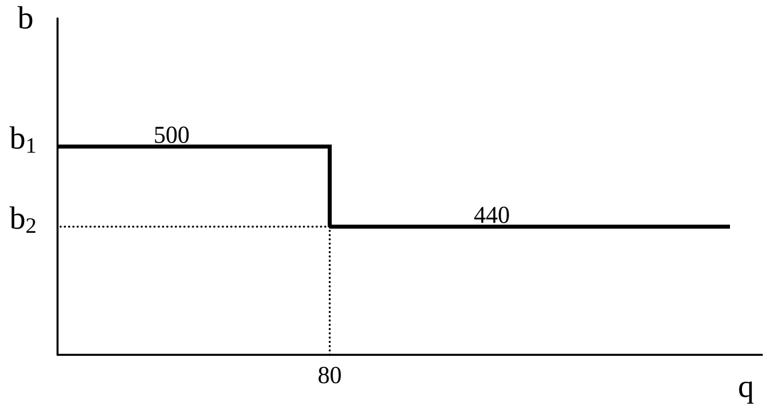
El costo de orden es la suma de los costos de abastecimiento (selección, colocación y seguimiento), de recepción, contables y de transporte:

- $k = 10 + 35 + 7 + 20 = 72 \dfrac{\$}{lote}$

Finalmente, la demanda anual de pintura será:

- $D = 10.000 \dfrac{\text{piezas}}{\text{año}} \cdot 0{,}20 \dfrac{\text{m}^3}{\text{pieza}} = 2.000 \dfrac{\text{m}^3}{\text{año}}$

Este es un problema de descuento por cantidad con un solo lote de corte.



En primer lugar se calcula q_{o2} y se compara con Q

$$q_{o2} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot (c'_1 + b_2 \cdot i)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 72 \cdot 2.000}{1 \cdot (10{,}40 + 440 \cdot 0{,}10)}} = 73{,}17$$

Como q_{o2} es menor que 80, se compara CTE_{01} con $CTE(b_2,Q)$:

$$CTE_{o1} = 500 \cdot 2.000 + \sqrt{2 \cdot 72 \cdot 2.000 \cdot 1 \cdot 60{,}40} = 1.004.170{,}70 \frac{\$}{\text{año}}$$

$$CTE(b_2, Q) = 440 \cdot 2.000 + \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot 53{,}80 \cdot 1 + \frac{72 \cdot 2.000}{80} = 883.952 \frac{\$}{\text{año}}$$

En consecuencia, lo optimo seria solicitar 80 m^3 al precio con descuento. Observemos que la limitación de lugar de almacenamiento no es restrictiva en este caso, ya que se utilizarían solamente $80 \cdot 0{,}20 = 16$ m^3 de los 150 m^3 disponibles.

La formulación y resolución de este problema con el sistema LINGO es la siguiente:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*S*c1*T + k*D/q ;

q = q1 + q2;
b = b1 * I1 + b2 * I2;
c1op = c1op1 * I1 + c1op2 * I2 ;
q1 < QI * I1;
q2 > QI * I2;
q2 < 99999999 * I2;
I1 + I2 = 1;
@BIN( I1);
@BIN( I2);

n = D / q;
S = q * (1-d/p);
ti = q/D * T;
c1 = c1op + i * b;
T = 1;
```

```
b1 = 500;
b2 = 440;
i = 0.1;
p = 9999999999;
D = 2000;
c1op1 = 10.40;
c1op2 = 9.80;
k = 72;
QI = 80;
END


Local optimal solution found at step:            6
 Objective value:                          883952.0
 Branch count:                                    0

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        883952.0           0.0000000
                              B        440.0000           0.0000000
                              D        2000.000           0.0000000
                              S        79.99998           0.0000000
                             C1        53.80000           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        72.00000           0.0000000
                              Q        80.00000           0.0000000
                             Q1       0.0000000            1503.300
                             Q2        80.00000           0.0000000
                             B1        500.0000           0.0000000
                             I1       0.0000000           0.0000000
                             B2        440.0000           0.0000000
                             I2        1.000000           0.0000000
                           C1OP        9.800000           0.0000000
                          C1OP1        10.40000           0.0000000
                          C1OP2        9.800000           0.0000000
                             QI        80.00000           0.0000000
                              N        25.00000           0.0000000
                              P       0.1000000E+11       0.0000000
                             TI       0.4000000E-01       0.0000000
                              I       0.1000000           0.0000000
```

Ejemplo 7.3:

La Compañía Química La Plata adquiere una determinada sustancia química para usarla en uno de sus procesos. La demanda de dicha sustancia es de 1.000 m^3 por mes. El costo de compra es de \$800 por pedido, y el costo operativo mensual de almacenamiento es de \$10 por m^3.

Calcular el lote de compra si el costo unitario depende de la cantidad adquirida como se indica en la siguiente tabla:

Cantidad (m^3)	**Costo (\$/m^3)**
< 250	8,00
250 – 449,99	7,50
500 – 649,99	7,00
650	6,75

Graficar el CTE en función del tamaño de lote.

Solución:

$$D = 1.000 \text{ u / mes}$$

$$k = 800\ \$/\ \text{pedido}$$
$$i = 0$$
$$c_{1op} = 10\ \$/(m^3 mes)$$
$$c_{1i} = c_{1op} = 10\$/(m^3 mes)$$
$$b_1 = 8\ \$/m^3$$
$$b_2 = 7{,}5\ \$/m^3$$
$$b_3 = 7\ \$/m^3$$
$$b_4 = 6{,}75\ \$/m^3$$
$$Q_1 = 250\,m^3$$
$$Q_2 = 450\,m^3$$
$$Q_3 = 650\,m^3$$

Para este problema, independientemente del precio de adquisición, el lote óptimo es el mismo debido a que se está despreciando la parte de capital inmovilizado (i = 0) del costo de almacenamiento. Siguiendo el procedimiento e calcula en primer lugar este valor de q_{oi}:

$$q_{o4} = q_{o3} = q_{o2} = q_{o1} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 800 \cdot 1.000}{1 \cdot 10}} = 400$$

Luego se compara q_{oi} con Q_3. Debido a que el lote óptimo es menor que Q_3 (650 m^3) se compara entonces q_{oi} con Q_2. Como también es menor, se lo compara con Q_1. En este caso, como es mayor, se deben calcular los siguientes CTE:

$$CTE_{o2} = b_2 \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot c_1 \cdot T} = \sqrt{2 \cdot 800 \cdot 1.000 \cdot 10} = 11.500$$

$$CTE(Q_3, b_4) = b_4 \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_3 \cdot T + k \cdot \frac{D}{Q_3} = 6{,}75 \cdot 1.000 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 650 \cdot 1 + 800 \cdot \frac{1.000}{650}$$
$$= 11.230{,}77$$

$$CTE(Q_2, b_3) = b_3 \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_2 \cdot T + k \cdot \frac{D}{Q_2} = 7 \cdot 1.000 + \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 450 \cdot 1 + 800 \cdot \frac{1.000}{450}$$
$$= 11.027{,}78$$

y compararlos. Como resultado, conviene solicitar 450 m^3 a 7,5 $\$/m^3$.

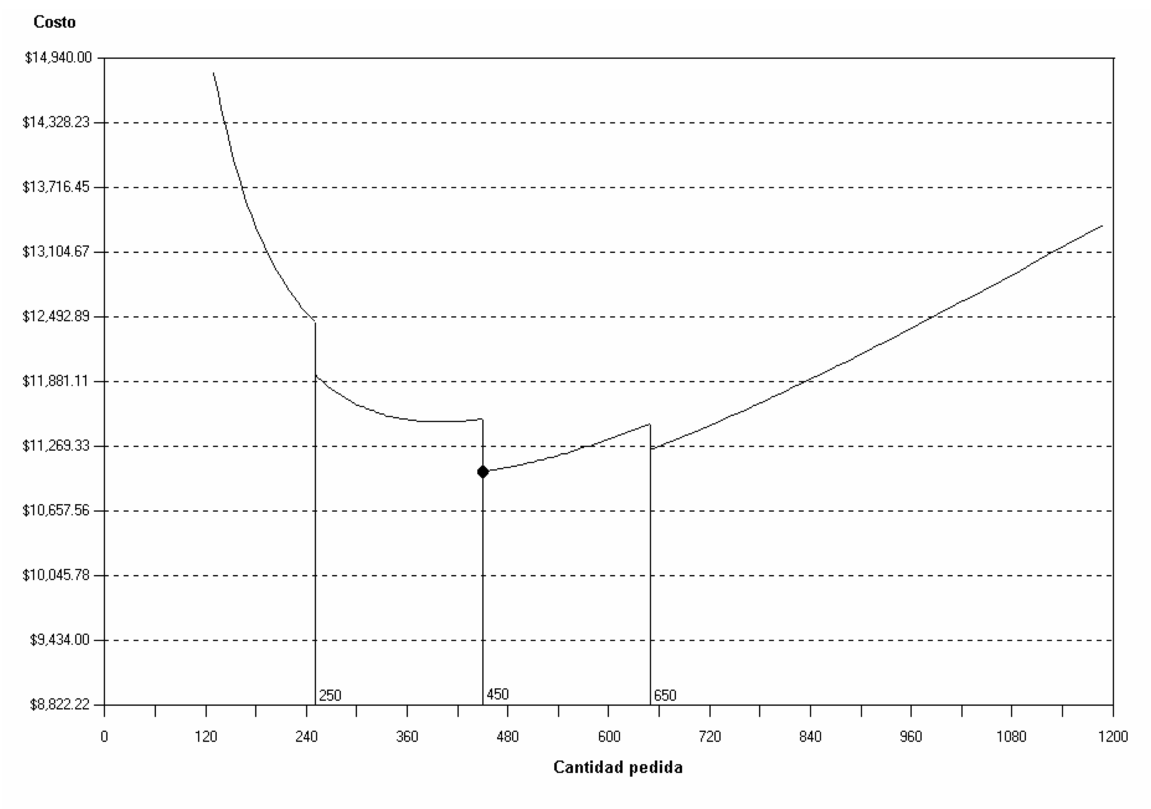
Con el sistema LINGO:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*S*c1*T + k*D/q ;

q = q1 + q2 + q3;
b = b1 * I1 + b2 * I2 + b3 * I3;
q1 < QI * I1;
q2 > QI * I2;
q2 < QII * I2;
q3 > QII * I3;
q3 < QIII * I3;
```

```
q4 > QIII * I4;
q4 < QIV * I4;
I1 + I2 + I3 + I4 = 1;
@BIN( I1);
@BIN( I2);
@BIN( I3);
@BIN( I4);

n = D / q;
S = q * (1-d/p);
ti = q/D * T;
c1 = c1op + i * b;
T = 1;

b1 = 8;
b2 = 7.5;
b3 = 7;
b4 = 6.75;
i = 0;
p = 9999999999;
D = 1000;
c1op = 10;
k = 800;

QI = 250;
QII = 450;
QIII = 650;
QIV = 99999999999;
END

Local optimal solution found at step:            80
 Objective value:                          11027.78
 Branch count:                                    1
```

Variable	Value	Reduced Cost
CTE	11027.78	0.0000000
B	7.000000	0.0000000
D	1000.000	0.0000000
S	450.0000	0.0000000
C1	10.00000	0.0000000
T	1.000000	0.0000000
K	800.0000	0.0000000
Q	450.0000	0.0000000
Q1	0.0000000	1.049383
Q2	0.0000000	0.0000000
Q3	450.0000	0.0000000
B1	8.000000	0.0000000
I1	0.0000000	527.7778
B2	7.500000	0.0000000
I2	0.0000000	0.0000000
B3	7.000000	0.0000000
I3	1.000000	0.0000000
QI	250.0000	0.0000000
QII	450.0000	0.0000000
QIII	650.0000	0.0000000
Q4	0.0000000	0.0000000
I4	0.0000000	-7472.222
QIV	0.1000000E+12	0.0000000
N	2.222222	0.0000000
P	0.1000000E+11	0.0000000
TI	0.4500000	0.0000000
C1OP	10.00000	0.0000000
I	0.0000000	0.0000000
B4	6.750000	0.0000000

Gráficamente:



Ejemplo 7.4:

La empresa Mixer S.A. puede fabricar un producto en uno de sus 3 equipos (A, B y C), cada uno de ellos con capacidades y costos diferentes. La demanda anual del producto es de 12.000 litros y la tasa de inmovilización de capital se puede suponer igual al 20% anual. El costo de preparación de cada lote es de $40. El costo de mantenimiento operativo se puede despreciar.

Adicionalmente se cuenta con los siguientes datos:

Lote (litros)	***A***	***B***	***C***
Lote mínimo (litros)	*200*	*800*	*2.400*
Lote máximo (litros)	*1.000*	*3.000*	*6.000*
Costo directo ($/litro)	*1,20*	*1,18*	*1,16*

Determinar qué equipo deberá utilizarse y el lote óptimo a fin de minimizar el costo total.

Solución:

$$D = 12.000 \text{ litros / año}$$
$$i = 0{,}20$$
$$b_1 = 1{,}20 \text{ \$ / litro}$$
$$b_2 = 1{,}18 \text{ \$ / litro}$$

$b_3 = 1{,}16\ \$/\text{litro}$

Como consecuencia de los costos operativos de los equipos, las cantidades de corte para la formulación del problema serán las siguientes:

$Q_1 = 800\ \text{litros}$

$Q_2 = 2.400\ \text{litros}$

Por lo tanto, se debe calcular en primer lugar el q_{o3}:

$$q_{o3} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_{13}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 12.000}{1 \cdot 0{,}20 \cdot 1{,}16}} = 2.034{,}19$$

Como $q_{o3} < Q_2$, se debe calcular q_{o2}:

$$q_{o2} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_{12}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \cdot 12.000}{1 \cdot 0{,}20 \cdot 1{,}18}} = 2.016{,}88$$

Debido a que $q_{o2} > Q_1$, se calculan los siguientes costos totales:

$$CTE_{o2} = b_2 \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot c_1 \cdot T} = 1{,}18 \cdot 12.000 + \sqrt{2 \cdot 40 \cdot 12.000 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}18} = 14.635{,}98$$

$$CTE(Q_2, b_3) = b_3 \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_{13} \cdot Q_2 \cdot T + k \cdot \frac{D}{Q_2}$$

$$= 1{,}16 \cdot 12.000 + \frac{1}{2} \cdot 1{,}16 \cdot 0{,}20 \cdot 2.400 \cdot 1 + 40 \cdot \frac{12.000}{2.400} = 14.398{,}40$$

y se selecciona el lote correspondiente al menor valor (en este caso, Q_2) que se deberá procesar en el equipo C.

El problema se puede plantear también utilizando el sistema LINGO, como un problema de programación matemática, en donde la variable "q" se define como suma de tres variables "q_1", "q_2" y "q_3", de las cuales solamente se puede activar una de ellas. Para ello, se relaciona a cada una de estas variables "q_i" con una variable binaria "I_i", siendo las variables binarias mutuamente excluyentes.

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*S*c1*T + k*D/q ;

q = q1 + q2 + q3;
b = b1 * I1 + b2 * I2 + b3 * I3;
q1 < QI * I1;
q2 > QI * I2;
q2 < QII * I2;
q3 > QII * I3;
q3 < QIII * I3;
I1 + I2 + I3 = 1;
@BIN( I1);
@BIN( I2);
@BIN( I3);

n = D / q;
S = q * (1-d/p);
ti = q/D * T;
```

```
c1 = c1op + i * b;
T = 1;

b1 = 1.2;
b2 = 1.18;
b3 = 1.16;
i = 0.2;
p = 9999999999;
D = 12000;
c1op = 0;
k = 40;

QI = 800;
QII = 2400;
QIII = 99999999999;
END
```

La resolución de este problema es la siguiente:

```
Local optimal solution found at step:          32
 Objective value:                         14398.40
 Branch count:                                   0

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        14398.40           0.0000000
                              B        1.160000           0.0000000
                              D        12000.00           0.0000000
                              S        2399.997           0.0000000
                             C1       0.2320000           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        40.00000           0.0000000
                              Q        2400.000           0.0000000
                             Q1       0.0000000           0.5466669
                             Q2       0.0000000           0.0000000
                             Q3        2400.000           0.0000000
                             B1        1.200000           0.0000000
                             I1       0.0000000           0.0000000
                             B2        1.180000           0.0000000
                             I2       0.0000000           0.0000000
                             B3        1.160000           0.0000000
                             I3        1.000000           0.0000000
                             QI        800.0000           0.0000000
                            QII        2400.000           0.0000000
                           QIII       0.1000000E+12       0.0000000
                              N        5.000000           0.0000000
                              P       0.1000000E+11       0.0000000
                             TI       0.2000000           0.0000000
                           C1OP       0.0000000           0.0000000
                              I       0.2000000           0.0000000
```

Es decir, se activa la variable "I_3", correspondiente al rango de "q" comprendido entre 2.400 y un valor arbitrariamente grande, adoptando la variable "q" el valor de 2.400.

Ejemplo 7.5:

Cómo se modificaría el problema del ejemplo 7.1, si la tasa de reaprovisionamiento fuera finita e igual a 16.000 parlantes por mes.

Solución:

Es un problema de reaprovisionamiento no instantáneo y descuento por cantidad, en donde los parámetros son:

$D = 8.000 \text{ u/mes}$
$P = 16.000 \text{ u/mes}$
$k = 12.000 \text{ \$/orden}$
$i = 0{,}10$
$c'_1 = 0{,}30 \text{ \$/(u mes)}$
$b_1 = 11 \text{ \$/u}$
$b_2 = 10 \text{ \$/u}$
$b_3 = 9{,}50 \text{ \$/u}$
$Q_1 = 10.000 \text{ u}$
$Q_2 = 80.000 \text{ u}$

Los costos de almacenamiento serán:

$$c_{1i} = c'_1 + b_i \cdot i = 0{,}30 + b_i \cdot 0{,}10$$

En primer lugar se calcula el q_{o3}:

$$q_{o3} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot (c'_1 + b_3 \cdot i) \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12.000 \cdot 8.000}{1 \cdot (0{,}30 + 9{,}50 \cdot 0{,}10) \cdot \left(1 - \frac{8.000}{16.000}\right)}} = 17.527{,}12$$

Como $q_{o3} < Q_2$, se debe calcular q_{o2}:

$$q_{o2} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot (c'_1 + b_2 \cdot i) \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 12.000 \cdot 8.000}{1 \cdot (0{,}30 + 10 \cdot 0{,}10) \cdot \left(1 - \frac{8.000}{16.000}\right)}} = 17.186{,}76$$

Como este valor es mayor que Q_1, se compara CTE_{o2} con $CTE(Q_2,b_3)$ y se selecciona el lote correspondiente al de menor CTE:

$$CTE_{o2} = b_2 \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot (c'_1 + b \cdot i) \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot T} =$$
$$= 10 \cdot 8.000 + \sqrt{2 \cdot 12.000 \cdot 8.000 \cdot (0{,}3 + 10 \cdot 0{,}1) \cdot \left(1 - \frac{8.000}{16.000}\right) \cdot 1} = 91.171{,}39$$

$$CTE(Q_2, b_3) = b_3 \cdot D + \frac{1}{2} \cdot (c'_1 + b_3 \cdot i) \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot Q_2 \cdot T + k \cdot \frac{D}{Q_2} =$$
$$= 9{,}50 \cdot 8.000 + \frac{1}{2} \cdot (0{,}3 + 9{,}50 \cdot 0{,}10) \cdot \left(1 - \frac{8.000}{16.000}\right) \cdot 80.000 \cdot 1 + 12.000 \cdot \frac{8.000}{80.000} =$$
$$= 102.200$$

En consecuencia, el lote óptimo a solicitar es q_{o2}. Utilizando el sistema "LINGO":

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*S*c1*T + k*D/q ;

q = q1 + q2 + q3;
b = b1 * I1 + b2 * I2 + b3 * I3;
q1 < QI * I1;
q2 > QI * I2;
q2 < QII * I2;
q3 > QII * I3;
q3 < QIII * I3;
I1 + I2 + I3 = 1;
@BIN(I1);
@BIN(I2);
@BIN(I3);

n = D / q;
S = q * (1-d/p);
ti = q/D * T;
c1 = c1op + i * b;
T = 1;

b1 = 11;
b2 = 10;
b3 = 9.5;
i = 0.1;
p = 16000;
D = 8000;
c1op = 0.3;
k = 12000;
QI = 10000;
QII = 80000;
QIII = 999999999;
END
```

```
Local optimal solution found at step:            33
 Objective value:                          91171.39
 Branch count:                                    1
```

Variable	Value	Reduced Cost
CTE	91171.39	0.0000000
B	10.00000	0.0000000
D	8000.000	0.0000000
S	8593.378	0.0000000
C1	1.300000	0.0000000
T	1.000000	0.0000000
K	12000.00	0.0000000
Q	17186.76	0.0000000
Q1	0.0000000	0.0000000
Q2	17186.76	0.0000000
Q3	0.0000000	0.0000000
B1	11.00000	0.0000000
I1	0.0000000	8429.671
B2	10.00000	0.0000000
I2	1.000000	0.0000000
B3	9.500000	0.0000000
I3	0.0000000	-4214.833
QI	10000.00	0.0000000
QII	80000.00	0.0000000
QIII	0.1000000E+10	0.0000000
N	0.4654747	0.0000000
P	16000.00	0.0000000
TI	2.148345	0.0000000
C1OP	0.3000000	0.0000000
I	0.1000000	0.0000000

Ejemplo 7.6:

Una empresa de cosméticos produce un compuesto cada vez que se requiera su fabricación a una tasa de 5.000 litros por mes. La producción se va descargando sobre un tanque, desde el cual se extrae el producto para alimentar una máquina embotelladora. Se sabe que el costo directo de este compuesto varía de acuerdo al lote de fabricación que se solicite, conforme a los siguientes datos:

Lote (litros)	***Costo directo ($/litro)***
De 0 a 3.000	*12*
De 3.000 a 5.000	*10*
Mas de 5.000	*9*

Calcular el costo total óptimo, teniendo en cuenta los siguientes datos:

a) La alimentación a la embotelladora es constante e igual a 3.000 botellas por mes.

b) El costo mensual de almacenamiento es de $1 por litro.

c) El contenido de cada botella es de 0,5 litros.

d) El costo de "set-up" es de $5.000.

Solución:

Se trata también de un problema de reaprovisionamiento no instantáneo, con variación de costo de adquisición en función del lote de fabricación. Los parámetros para el cálculo son los siguientes:

$$D = 3.000 \text{ botellas / mes} \cdot 0{,}5 \text{ litros / botella} = 1.500 \text{ litros / mes}$$
$$P = 5.000 \text{ litros / mes}$$
$$k = 5.000 \text{ \$ / orden}$$
$$c_1 = 1 \text{ \$ /(litro mes)}$$
$$b_1 = 12 \text{ \$ / litro}$$
$$b_2 = 10 \text{ \$ / litro}$$
$$b_3 = 9 \text{ \$ / litro}$$
$$Q_1 = 3.000 \text{ litros}$$
$$Q_2 = 5.000 \text{ litros}$$

En primer lugar se calcula el q_{o3}. Cabe mencionar que para este caso $q_{o3} = q_{o2} = q_{o1} = q_{oi}$.

$$q_{oi} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right)}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5.000 \cdot 1.500}{1 \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1.500}{5.000}\right)}} = 4.629{,}10$$

Como $q_{o3} < Q_2$, se debe calcular comparar ahora q_{o2} con Q_1. Dado que $q_{o2} > Q_1$ se debe comparar CTE_{o2} con $CTE(Q_2,b_3)$ y se selecciona el lote correspondiente al de menor CTE:

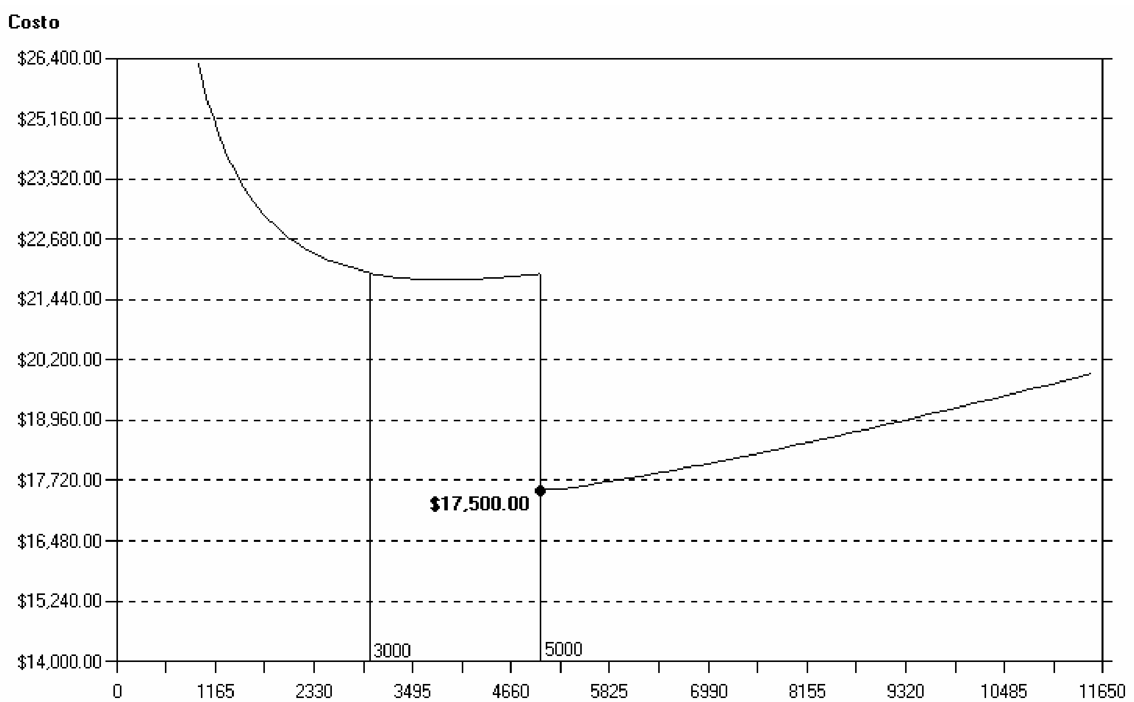
$$CTE_{o2} = b_2 \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot c_1 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot T} =$$

$$= 10 \cdot 1.500 + \sqrt{2 \cdot 5.000 \cdot 1.500 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1.500}{5.000}\right)} = 18.240{,}37$$

$$CTE(Q_2, b_3) = b_3 \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot Q_2 \cdot \left(1 - \frac{d}{p}\right) \cdot T + k \cdot \frac{D}{Q_2} =$$

$$= 9 \cdot 1.500 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 5.000 \cdot \left(1 - \frac{1.500}{5.000}\right) \cdot 1 + 5.000 \cdot \frac{1.500}{5.000} = 16.750$$

Por lo tanto, conviene ordenar 5.000 litros por mes. Gráficamente:



Utilizando el modelo general para el sistema LINGO arriba propuesto, tendremos:

```
MIN = CTE;
CTE = + b*D + 1/2 *(q*(1-d/p)-Sa)^2/(q*(1-d/p))*c1*T + 1/2 * Sa^2 / (q*(1-d/p))*c2*T
+ k * D / q + Sa * f2 * D/q + F * D / q + Sp * c1 * T;

c1 = c1op + i*b;
T = 1;
n = D / q;
S = q * (1-d/p) - Sa;
Smax = S + Sp;
ti = t1 + t2;
t1 = t1d + t1p;
t2 = (t2d + t2p);
ti = q/D * T;
```

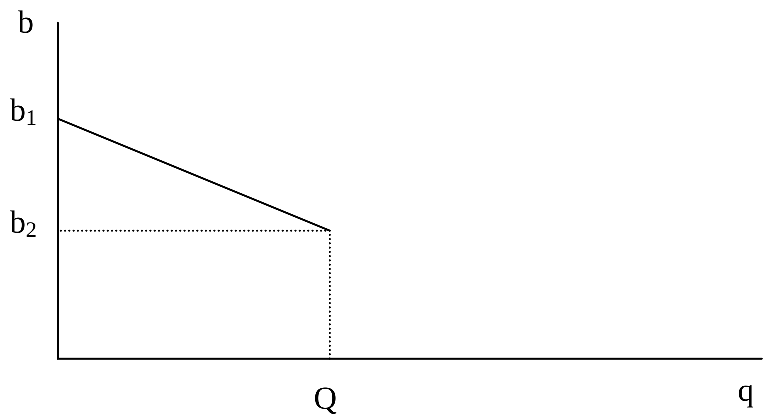
```
t1p = S / (p-d);
t1d = S / d;
t2p =  Sa / (p-d);
t2d = Sa / d;
tp = t1p + t2p;
td = t1d + t2d;
c1 = c1op + i * b;

! Descuento por cantidad;
q = q1 + q2 + q3;
b = b1 * I1 + b2 * I2 + b3 * I3;
q1 < QI * I1;
q2 > QI * I2;
q2 < QII * I2;
q3 > QII * I3;
q3 < QIII * I3;
I1 + I2 + I3 = 1;
@BIN( I1);
@BIN( I2);
@BIN( I3);

b1 = 12;
b2 = 10;
b3 = 9;

QI = 3000;
QII = 5000;
QIII = 999999999;

i = 0;
p = 5000;
D = 1500;
c1op = 1;
k = 5000;
LT = 0;
c2 = 9999999999;
f2= 0;
F = 0;
Sp = 0;
END
```

```
Local optimal solution found at step:              50
 Objective value:                            16750.00
 Branch count:                                      0

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        16750.00           0.0000000
                              B        9.000000           0.0000000
                              D        1500.000           0.0000000
                              Q        5000.000           0.0000000
                              P        5000.000           0.0000000
                             SA       0.3449409E-06       0.0000000
                             C1        1.000000           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                             C2       0.1000000E+11       0.0000000
                              K        5000.000           0.0000000
                             F2       0.0000000           0.0000000
                              F       0.0000000           0.0000000
                             SP       0.0000000           0.0000000
                           C1OP        1.000000           0.0000000
                              I       0.0000000           0.0000000
                              N       0.3000000           0.0000000
                              S        3500.000           0.0000000
                           SMAX        3500.000           0.0000000
                             TI        3.333333           0.0000000
                             T1        3.333333           0.0000000
                             T2       0.0000000           0.0000000
                            T1D        2.333333           0.0000000
                            T1P        1.000000           0.0000000
                            T2D       0.0000000           0.0000000
                            T2P       0.0000000           0.0000000
                             TP        1.000000           0.0000000
                             TD        2.333333           0.0000000
```

Q1	0.0000000	0.5000003E-01
Q2	0.0000000	0.0000000
Q3	5000.000	0.0000000
B1	12.00000	0.0000000
I1	0.0000000	4250.000
B2	10.00000	0.0000000
I2	0.0000000	1500.000
B3	9.000000	0.0000000
I3	1.000000	0.0000000
QI	3000.000	0.0000000
QII	5000.000	0.0000000
QIII	0.1000000E+10	0.0000000
LT	0.0000000	0.0000000

Ejemplo 7.7:

Un proveedor ofrece un descuento especial, de acuerdo a la siguiente ley:



siendo "b" el precio unitario del producto, "q" el tamaño del lote y "Q" la cantidad máxima de unidades que puede suministrar el proveedor. Conocidos los siguientes parámetros:

"k": costo de cada orden de compra,

"c_1": costo de almacenamiento unitario, y

"D": demanda anual del producto,

plantear un modelo matemático que permita determinar el lote económico de compra. Suponer que el costo de capital inmovilizado es nulo.

Solución:

La expresión del CTE es:

$$\mathrm{CTE} = b \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot q \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} \quad \Rightarrow \quad \text{Mín}$$

Siendo:

$$b = b_1 - \frac{b_1 - b_2}{Q} \cdot q$$

y llamando:

$$A = \frac{b_1 - b_2}{Q}$$

de manera que:

$$b = b_1 - A \cdot q$$

tendremos:

$$CTE = (b_1 - A \cdot q) \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot q \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} \quad \Rightarrow \quad \text{Mín}$$

$$CTE = b_1 \cdot D - A \cdot q \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot q \cdot T + k \cdot \frac{D}{q} \quad \Rightarrow \quad \text{Mín}$$

Derivando con respecto a "q" e igualando a cero:

$$\frac{\partial\, CTE}{\partial\, q} = -A \cdot D + \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot T - k \cdot \frac{D}{q^2} = 0$$

Despejando "q":

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 - 2 \cdot A \cdot D}}$$

O sea:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1 - 2 \cdot \left(\frac{b_1 - b_2}{Q}\right) \cdot D}}$$

<u>Ejemplo 7.8</u>:

La ley de descuentos por cantidad que se otorga a la adquisición de una materia prima determinada es la siguiente:

$$b = \lambda \cdot e^{-0.0005\lambda \cdot q}$$

Sabiendo que:

- *Costo operativo de mantenimiento unitario anual: 6 $*
- *Costo de orden: $150*
- *Tasa de interés: 18% anual*
- *Demanda anual: 800 unidades*
- *Parámetro ë: 2*

Formular y resolver el problema utilizando el sistema LINGO, para los dos casos siguientes:

a) la tasa de reaprovisionamiento es infinita.

b) la tasa de reaprovisionamiento es de 200 unidades por mes.

Solución:

a) Para el caso básico:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*q*c1*T+ k*D/q ;
n = D / q;
ti = q/D*T;
c1 = c1op + i * b;
b = L * @exp(- 0.0005 * L * q);
L = 2;
i = 0.18;
T = 1;
D = 800;
c1op = 6;
k = 150;
END
```

La solución del problema es:

```
Local optimal solution found at step:             36
 Objective value:                           2511.012

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        2511.012           0.0000000
                              B        1.551686           0.0000000
                              D        800.0000           0.0000000
                              Q        253.8053           0.0000000
                             C1        6.279303           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        150.0000           0.0000000
                              N        3.152023         -0.1221242E-06
                             TI       0.3172566           0.0000000
                           C1OP        6.000000           0.0000000
                              I       0.1800000           0.0000000
                              L        2.000000           0.0000000
```

b) Para el caso de reaprovisionamiento no instantáneo, siendo la tasa de fabricación anual igual a 2.400 unidades, tendremos:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*S*c1*T+ k*D/q ;
S = q * (1-d/p);
n = D / q;
ti = q/D*T;
c1 = c1op + i * b;
b = L * @exp(- 0.0005 * L * q);
L = 2;
```

```
i = 0.18;
T = 1;
D = 800;
p = 2400;
c1op = 6;
k = 150;
END

Local optimal solution found at step:              34
 Objective value:                            2199.745

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        2199.745           0.0000000
                              B        1.397930           0.0000000
                              D        800.0000           0.0000000
                              S        238.7698           0.0000000
                             C1        6.251627           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        150.0000           0.0000000
                              Q        358.1547           0.8114546E-07
                              P        2400.000           0.0000000
                              N        2.233671           0.0000000
                             TI       0.4476934           0.0000000
                           C1OP        6.000000           0.0000000
                              I       0.1800000           0.0000000
                              L        2.000000           0.0000000
```

Ejemplo 7.9:

Una empresa comercializa un solo producto. Se dispone de los siguientes datos:

- *Costo de emitir una orden de compra: $1.500*
- *Demanda: 100.000 unidades por año*
- *Tasa de inmovilización: 10% anual*
- *Precio de compran: 20$/unidad*

El costo operativo de mantenimiento es variable. Para un lote menor o igual a 4.000 unidades se incurre en un coto unitario anual de $12, mientras que para un lote mayor a esa cantidad el costo es de $8 por unidad y por año.

Calcular el lote óptimo de compra si el objetivo del problema es minimizar el costo total esperado.

Solución:

$$\mathrm{D} = 10000 \text{ u / año}$$
$$\mathrm{k} = 1500 \text{ \$ / orden}$$
$$\mathrm{i} = 0{,}10$$
$$\mathrm{b} = 20 \text{ \$ / u}$$
$$\mathrm{c}'_{11} = 12 \text{ \$ /(u año)}$$
$$\mathrm{c}'_{12} = 18 \text{ \$ /(u año)}$$
$$\mathrm{Q} = 4000 \text{ u}$$

Los costos de almacenamiento respectivos serán:

$$\mathrm{c}_{11} = \mathrm{c}'_{11} + \mathrm{b} \cdot \mathrm{i} = 12 + 20 \cdot 0{,}10 = 14 \text{ \$ /(u año)}$$

$$c_{12} = c'_{12} + b \cdot i = 18 + 20 \cdot 0{,}10 = 20 \ \$/(u \ \text{año})$$

En primer lugar se calcula el q_{o1}:

$$q_{o1} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_{11}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1500 \cdot 10000}{1 \cdot 14}} = 1463{,}85$$

Como $q_{o1} < Q$, el óptimo es q_{o1}. Por su parte, el costo total esperado óptimo será:

$$CTE_{o1} = b \cdot D + \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot c_{11} \cdot T} = 20 \cdot 10000 + \sqrt{2 \cdot 1500 \cdot 10000 \cdot 1 \cdot 14} = 220493{,}9$$

Formulando y resolviendo este problema con el LINGO:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*q*c1*T+ k*D/q ;
n = D / q;
ti = q/D*T;
c11 = c1op1 + i * b;
c12 = c1op2 + i * b;
c1 = c11 * I1 + c12 * I2;
@BIN(I1);
@BIN(I2);
I1 + I2 = 1;
q = q1 + q2;
q1 < QI * I1;
q2 > QI * I2;
q2 < QI * I2;

b = 20;
L = 2;
i = 0.10;
T = 1;
D = 10000;
c1op1 = 12;
c1op2 = 18;
k = 1500;
QI = 4000;
END
```

```
Local optimal solution found at step:           47
 Objective value:                          220493.9
 Branch count:                                    0

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        220493.9           0.0000000
                              B        20.00000           0.0000000
                              D        10000.00           0.0000000
                              Q        1463.850           0.0000000
                             C1        14.00000           0.0000000
                              T        1.000000           0.0000000
                              K        1500.000           0.0000000
                              N        6.831301           0.0000000
                             TI       0.1463850           0.0000000
                            C11        14.00000           0.0000000
                          C1OP1        12.00000           0.0000000
                              I       0.1000000           0.0000000
                            C12        20.00000           0.0000000
                          C1OP2        18.00000           0.0000000
                             I1        1.000000           0.0000000
                             I2       0.0000000            4391.551
                             Q1        1463.850           0.0000000
                             Q2       0.0000000           0.0000000
                             QI        4000.000           0.0000000
                              L        2.000000           0.0000000
```

Ejemplo 7.10:

Una empresa está evaluando la posibilidad de adquirir un depósito adicional con capacidad para almacenar 8.000 unidades de un producto determinado, a un costo fijo de $10.000 por año. Actualmente tiene capacidad para almacenar 4.000 unidades. El costo de almacenamiento unitario anual se puede estimar en $20 por unidad, el costo de una orden es de $10.000 y la demanda anual es de 100.000 unidades.

Suponiendo que el sobrante de capacidad de depósito no se utilizaría para ningún otro producto o actividad, determinar si es conveniente alquilar el nuevo depósito.

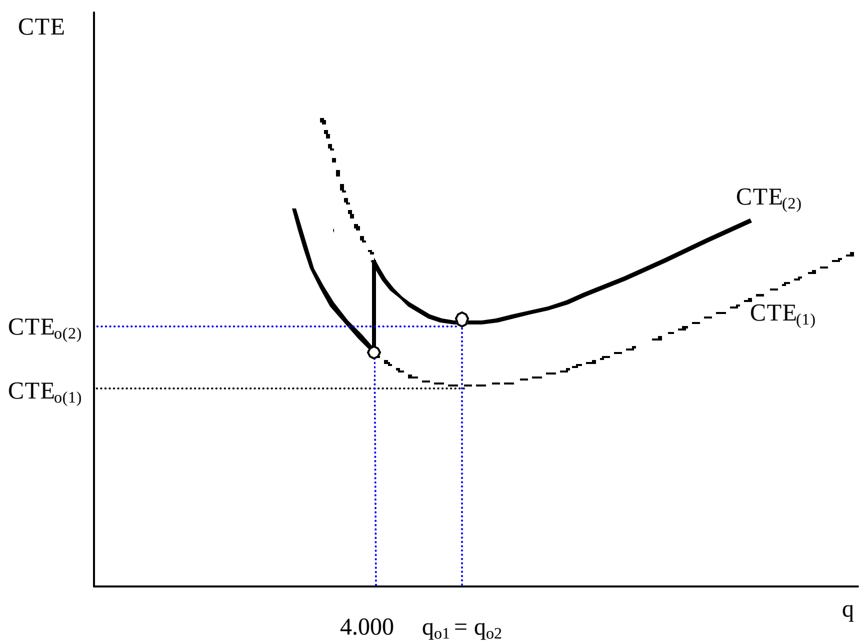
Cuál es la capacidad del depósito actual que haría indiferente alquilar o no el nuevo depósito.

Solución:

En este caso, las curvas de costos son iguales, con la única diferencia de que el CTE_2 (correspondiente al caso de alquilar el nuevo depósito) está desplazado hacia arriba con respecto al CTE_1 (sin alquilar el nuevo depósito) en una cantidad igual al costo fijo. Tendremos que $q_{o1} = q_{o2}$ y que $CTE_1 > CTE_2$.

$$q_{o1} = q_{o2} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_{11}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10.000 \cdot 100.000}{1 \cdot 20}} = 10.000$$

Como el qo es mayor que Q = 4.000 unidades, lo que se debe comparar es el CTE del caso actual con un lote de 4.000 contra el CTE_{o2}:



$$CTE_1(Q_1) = \frac{1}{2} \cdot Q_1 \cdot c_1 \cdot T + k \cdot \frac{D}{Q_1} = \frac{1}{2} \cdot 4.000 \cdot 20 \cdot 1 + 10.000 \cdot \frac{100.000}{4.000} = 290.000$$

$$CTE_{o2} = \sqrt{2 \cdot k \cdot D \cdot c_1 \cdot T} = \sqrt{2 \cdot 10.000 \cdot 100.000 \cdot 1 \cdot 20} + 100.000 = 300.000$$

En consecuencia, no conviene alquilar el nuevo depósito.

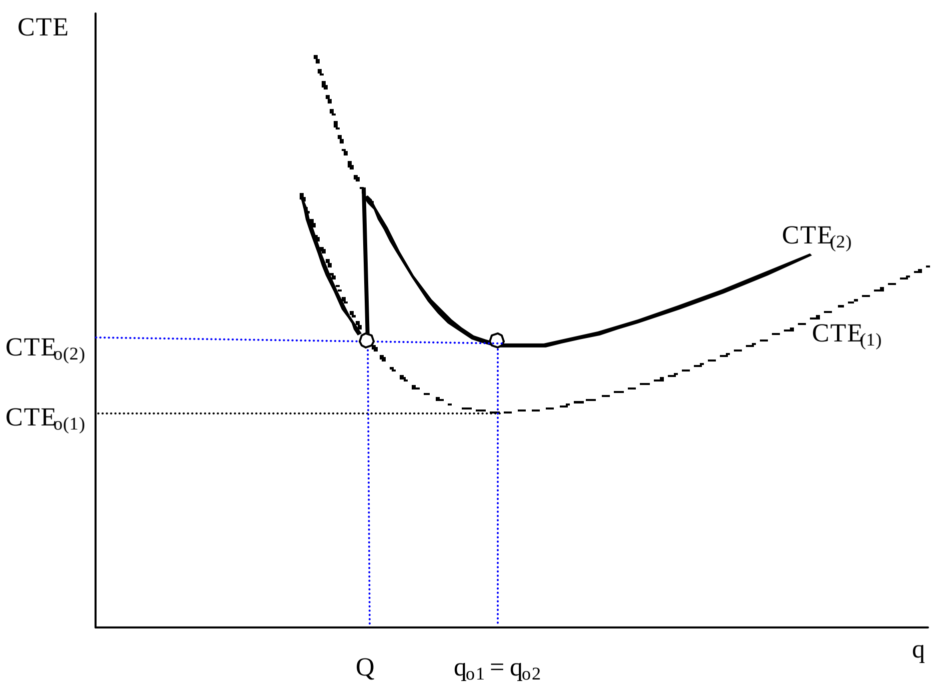
Para responder la segunda pregunta, el punto de indiferencia se tendrá para un valor de Q en la situación actual que genere un costo igual al CTE óptimo si se alquila el nuevo depósito. En consecuencia, se debe igualar:

$$CTE_1(Q_1) = \frac{1}{2} \cdot Q_1 \cdot 20 \cdot 1 + 10.000 \cdot \frac{100.000}{Q_1} = 300.000$$

Despejando Q_1, tendremos:

$Q_1 = 3.819,66$

Esto significa que si el depósito actual tuviera una capacidad inferior a 3.819,66 unidades convendría alquilar el nuevo depósito.



Ejemplo 7.11:

La petroquímica PGN contrata los servicios de una empresa de distribución para retirar "gasolina" de una refinería, que utiliza para uno de sus principales procesos. Esa empresa puede disponer de 3 camiones-tanque especiales para el transporte de la gasolina, *con una capacidad de 1.000 litros cada uno. En cada entrega, PGN puede contratar uno, dos o los tres camiones, de acuerdo a sus necesidades, a un costo de $500 por camión.*

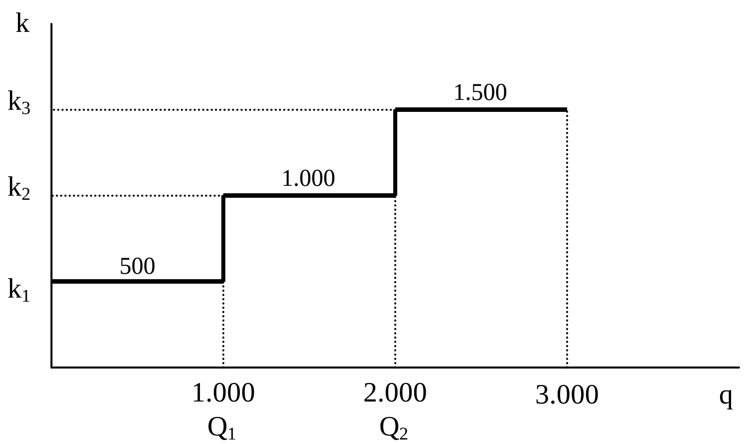
La demanda anual de la gasolina en el proceso es de 225.000 litros y el costo de almacenamiento anual se estima en $100 por litro.

Determinar el lote óptimo de gasolina a comprar, la cantidad de camiones a contratar por pedido y el número de veces que se deberá contratar el servicio por año.

Solución:

Siendo los parámetros:

$Q_1 = 1.000$
$Q_2 = 2.000$
$D = 225.000$
$c_1 = 100$
$k1 = 500$
$k_2 = 1.000$
$k_3 = 1.500$



El proceso de resolución es el siguiente:

1) Se calcula q_{o1}.

2) Se compara q_{o1} *con* Q_1. *Si* q_{o1} *es menor o igual a* Q_1 *se pasa a 3); en caso contrario, se pasa a 4).*

3) El óptimo es q_{o1} *(es decir al costo* k_1*, lo que implica un camión). Se termina el proceso de cálculo.*

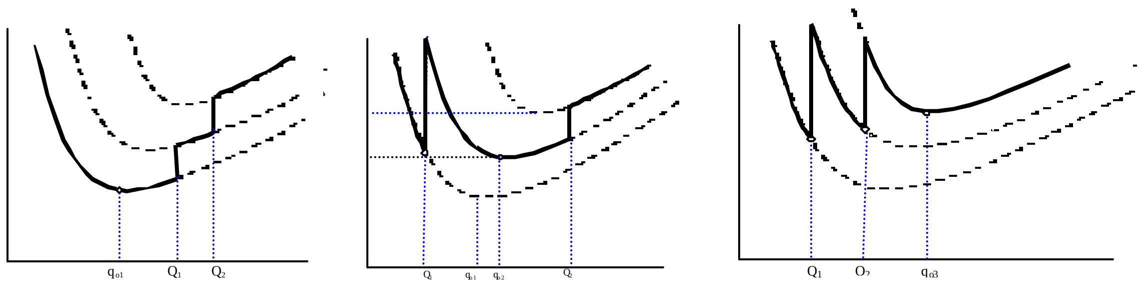
4) Se calcula q_{o2}.

5) Se compara q_{o2} *con* Q_2. *Si* q_{o2} *es menor o igual a* Q_2 *se pasa a 6); en caso contrario, se pasa a 7).*

6) Se compara $CTE(Q_1,k_1)$ *con* $CTE_{o2}(q_{o2},k_2)$. *Se selecciona el lote que corresponda al menor costo. Se termina el proceso de cálculo.*

7) Se compara $CTE(Q_1,k_1)$ *con* $CTE(Q_2,k_2)$ *y con* $CTE_{o3}(q_{o3},k_3)$. *Se selecciona el lote que corresponda al menor costo. Se termina el proceso de cálculo.*

Los gráficos correspondientes de los distintos casos serán:



Empezando con el paso 1), tendremos que q_{o1}= 1500 litros. Como este valor es mayor que Q_1, se calcula q_{o2} = 2.121,32 litros. Como Q_2 es menor que q_{o2}, vamos al paso 7). Efectuando los correspondientes cálculos, tendremos que:

$CTE(q_1,k_1) = 162.500$

$CTE(q_2,k_2) = 212.500$

$CTE(q_{o3},k_3) = 259.807$

Luego, lo óptimo es pedir un camión por viaje. Finalmente, dividiendo la Demanda Total sobre Q_1, tendremos que la cantidad de contrataciones por año es de 225.

Resolviendo con el sistema LINGO:

```
MIN = CTE;
CTE = b*D + 0.5*q*c1*T+ k*D/q ;
n = D / q;
ti = q/D*T;
k = k1 * I1 + k2 * I2 + k3 * I3;
c1 = c1op + b * i;
@BIN(I1);
@BIN(I2);
@BIN(I3);
I1 + I2 + I3 = 1;
q = q1*I1+ q2*I2 + q3*I3;
q1 < QI*I1;
q2 > QI*I2;
q2 < QII*I2;
q3 > QII*I3;
q3 < QIII*I3;

T = 1;
i = 0;
D = 225000;
c1op = 100;
k1 = 500;
k2 = 1000;
k3 = 1500;
QI = 1000;
QII = 2000;
QIII = 99999999;
END
```

```
Local optimal solution found at step:            10
 Objective value:                          162500.0
 Branch count:                                    0

                       Variable           Value        Reduced Cost
                            CTE        162500.0           0.0000000
                              B       0.0000000            225000.0
                              D        225000.0           0.0000000
```

```
         Q        1000.000          0.0000000
        C1        100.0000          0.0000000
         T        1.000000          0.0000000
         K        500.0000          0.0000000
         N        225.0000          0.0000000
        TI      0.4444444E-02       0.0000000
        K1        500.0000          0.0000000
        I1        1.000000          -237500.0
        K2        1000.000          0.0000000
        I2       0.0000000          0.0000000
        K3        1500.000          0.0000000
        I3       0.0000000          0.0000000
      C1OP        100.0000          0.0000000
         I       0.0000000          0.0000000
        Q1        1000.000          0.0000000
        Q2       0.0000000          0.0000000
        Q3       0.0000000           56.25000
        QI        1000.000          0.0000000
       QII        2000.000          0.0000000
      QIII      0.1000000E+09       0.0000000
```

Ejemplo 7.12:

Resolver con el sistema LINGO el problema 7.4, si los costos directos por litro indicados son costos incrementales.

Solución:

```
MIN = CTE;
CTE = b1*q1*D/q + b2*q2*D/q + b3*q3*D/q + 0.5*q1*c11*T + 0.5*q2*c12*T + 0.5*q3*c13*T +
k*D/q;
c11 = c1op + i * b1;
c12 = c1op + i * b2;
c13 = c1op + i * b3;
q = q1 + q2 + q3;
q1 < QI * I1;
q1 > QI * I2;
q2 < (QII-QI) * I2;
q2 > (QII-QI) * I3;
q3 < (QIII-QII) * I3;
@BIN( I1);
@BIN( I2);
@BIN( I3);
I1>I2;
I2>I3;
n = D / q;
ti = q/D * T;
T = 1;

QI = 800;
QII = 2400;
QIII = 9999999;
b1 = 1.2;
b2 = 1.18;
b3 = 1.16;
i = 0.2;
D = 12000;
c1op = 0;
k = 40;
END
```

```
Local optimal solution found at step:          116
 Objective value:                          14687.37
 Branch count:                                    1
```

Variable	Value	Reduced Cost
CTE	14687.37	0.0000000
B1	1.200000	0.0000000
Q1	800.0000	0.0000000
D	12000.00	0.0000000
Q	3280.028	0.0000000
B2	1.180000	0.0000000
Q2	1600.000	0.0000000
B3	1.160000	0.0000000
Q3	880.0275	0.0000000
C11	0.2400000	0.0000000
T	1.000000	0.0000000
C12	0.2360000	0.0000000
C13	0.2320000	0.0000000
K	40.00000	0.0000000
C1OP	0.0000000	0.0000000
I	0.2000000	0.0000000
QI	800.0000	0.0000000
I1	1.000000	0.0000000
I2	1.000000	0.0000000
QII	2400.000	0.0000000
I3	1.000000	240.5444
QIII	9999999.	0.0000000
N	3.658506	0.6914676E-06
TI	0.2733356	0.0000000

CAPÍTULO VIII

VARIOS ÍTEMS

1. MULTI-ÍTEMS SIN RESTRICCIONES

Cuando se administran varios productos, debe considerarse si existen o no restricciones físicas, operativas, administrativas, financieras, o de cualquier otro tipo, que vinculen las variables de decisión.

Si no existen restricciones, la administración de cada ítem se debe realizar optimizando cada uno de ellos en forma independiente, tal como se mostrará a continuación.

A fin de simplificar la formulación y facilitar la comprensión del tema, consideraremos únicamente dos ítems ("A" y "B"). Obviamente, el análisis que efectuaremos puede hacerse extensivo a múltiples productos.

Como primer ejercicio, asumiremos que, para ambos artículos, se cumplen las hipótesis de trabajo planteadas para el modelo básico visto en el Capítulo II, incluyendo el supuesto de que no existen restricciones que vinculen a las variables.

Los parámetros básicos del problema son, entonces:

- D_i: Demanda del ítem "i" ("A" o "B").
- b_i: Costo unitario de adquisición para cada producto "i".
- c_{1i}: Costo unitario de almacenamiento del artículo "i".
- k_i: Costo de una orden para el ítem "i".

y las variables:

- CTE: Costo Total Esperado.
- q_i: Tamaño del lote del ítem "i".
- n_i: cantidad de ciclos (órdenes a emitir) del producto "i".
- t_i: Intervalo de ciclo para el artículo "i".

Las expresiones del Costo Total Esperado para los ítem "A" y "B"son:

$$CTE_A = b_A \cdot D_A + \frac{1}{2} \cdot q_A \cdot c_{1A} \cdot T + k_A \cdot \frac{D_A}{q_A} \qquad \textbf{(1)}$$

$$CTE_B = b_B \cdot D_B + \frac{1}{2} \cdot q_B \cdot c_{1B} \cdot T + k_B \cdot \frac{D_B}{q_B} \qquad \textbf{(2)}$$

La expresión del CTE será igual a la suma del costo total esperado para el ítem “A” más el costo total esperado para el ítem “B”:

$$CTE = b_A \cdot D_A + \frac{1}{2} \cdot q_A \cdot c_{1A} \cdot T + k_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + b_B \cdot D_B + \frac{1}{2} \cdot q_B \cdot c_{1B} \cdot T + k_B \cdot \frac{D_B}{q_B} \qquad \textbf{(3)}$$

Para minimizar este funcional, se deberá derivar con respecto a cada una de las variables (q_A y q_B) e igualar a cero:

$$\frac{\partial CTE}{\partial q_A} = \frac{1}{2} \cdot c_{1A} \cdot T - k_A \cdot \frac{D_A}{q_A^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{oA} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_A \cdot D_A}{T \cdot c_{1A}}} \qquad \textbf{(4)}$$

$$\frac{\partial CTE}{\partial q_B} = \frac{1}{2} \cdot c_{1B} \cdot T - k_B \cdot \frac{D_B}{q_B^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_{oB} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot D_B}{T \cdot c_{1B}}} \qquad \textbf{(5)}$$

Estas son las mismas expresiones que resultan de tomar los productos en forma totalmente independiente. Por supuesto que el resto de las variables características óptimas (n_{o1}, n_{o2}, t_{o1}, t_{o2}) quedan determinados por los valores óptimos de q_{o1} y q_{o2}. Reemplazando (4) y (5) en (3), y operando, tendremos que el costo total esperado será:

$$CTE_o = b_A \cdot D_A + \sqrt{2 \cdot k_A \cdot D_A \cdot T \cdot c_{1A}} + b_B \cdot D_B + \sqrt{2 \cdot k_B \cdot D_B \cdot T \cdot c_{1B}} \qquad \textbf{(6)}$$

En las Figuras 1 y 2 se han representado gráficamente las curvas de costo y los valores óptimos de tamaño de lote para cada producto, respectivamente.

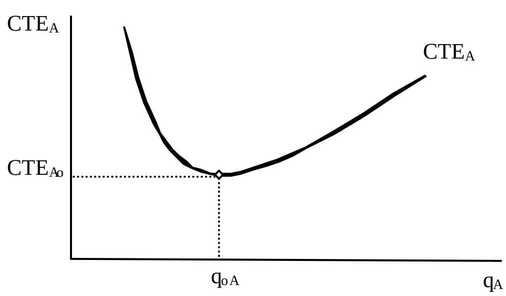


Figura 1

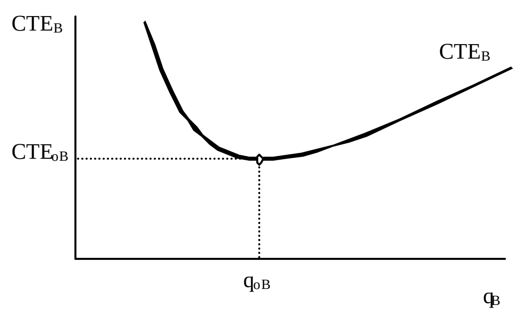


Figura 2

En la Figura 3 se observa la representación, en un par de ejes ortogonales, de los lotes q_{oA} y q_{oB}. La combinación óptima de ellos resulta en el punto (O).

Graficando en tres dimensiones el CTE en función de q_1 y q_2, la figura correspondiente al costo total es un paraboloide (ver Figura 4). Este paraboloide se va haciendo asintótico sobre el eje CTE y se va recostando sobre un plano que pasa por el origen de coordenadas y que se aleja de dicho eje a medida que aumenta el costo. Es decir, proyectando esta figura sobre el plano CTE-q_A nos daría la curva de costos de la Figura 1 desplazada hacia arriba en una cantidad igual a CTE_{oB} (ver Figura 5). Del mismo modo, proyectando la figura sobre el plano CTE-q_B obtendríamos la curva de costos de la Figura 2 desplazada hacia arriba en una cantidad igual a CTE_{oA} (ver Figura 6). Finalmente, si proyectáramos sobre el plano q_A-q_B el punto de costo mínimo (es decir el punto más inferior del paraboloide), tendríamos el punto "O" de las Figura 3 y 4.

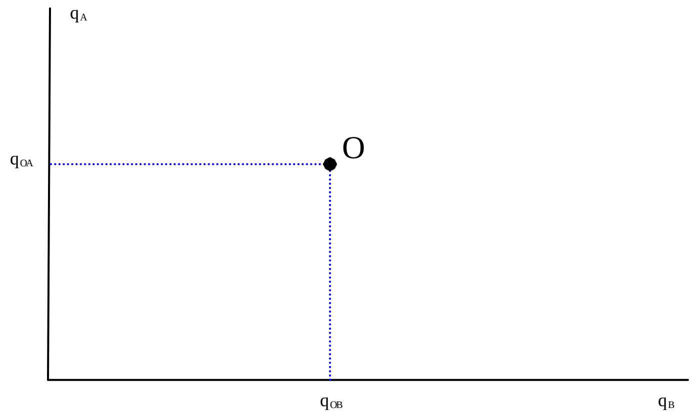


Figura 3

El punto "O" corresponde a la combinación óptima de unidades de "A" y de "B" a adquirir a fin de minimizar el costo total esperado. Si cortáramos al paraboloide con un plano superior al mínimo costo (tal como el mostrado en la Figura 7, y proyectáramos esas trazas sobre el plano q_A-q_B, se obtiene una curva denominadas "curva de isocostos". Esta curva tiene la particularidad de que todos los puntos pertenecientes a ella tienen igual costo total esperado. En consecuencia, en términos de costos, sería indiferente solicitar las cantidades q_A y "q_B" correspondientes a un punto de la curva que otra combinación diferente "q_A-q_B" de otro punto de esa misma curva.

Distintos planos de corte al paraboloide generan distintas curvas de isocostos. Un corte con un plano más alto (es decir con un mayor costo total esperado, por ejemplo CTE_1) resulta en otra curva de isocostos, más desplazada del punto óptimo "O". Si, por el contrario, cortamos con un plano más bajo (es decir, con un menor costo total esperado) obtendríamos otra curva de isocostos, más cercana al punto "O". En la Figura 8 pueden observarse diferentes curvas de isocostos sobre el plano q_A-q_B.

Para trazar una de estas curvas, se puede proceder del siguiente modo:

1. En la Figura 5, se toma un ΔCTE por encima del CTE_o, determinando los puntos A' y A", correspondientes a unos lotes q'_A y q''_A, respectivamente, tal como se puede apreciar en la Figura 9. Estos puntos, por su parte, se corresponden con el lote óptimo del producto B, ya que la curva representada en la Figura supone que se está incurriendo en el CTE óptimo para B.

2. En la Figura 6, se toma el mismo ΔCTE por encima del CTE_o, y se deteminan los puntos B' y B", correspondientes a unos lotes q'_B y q''_B, respectivamente, como se aprecia en la Figura 10. Estos puntos, por su parte, se corresponden con el lote óptimo del producto A, ya que la curva representada en la Figura supone que se está incurriendo en el CTE óptimo para dicho producto A.

3. En un par de ejes ortogonales q_A y q_B (Figura 11), se representan los puntos A'y A" sobre la recta q_{oB}, y los puntos B' y B" sobre la recta q_{oA}. De esta manera se determinan cuatro puntos de la curva de isocostos.

Cabe mencionar que la distancia de A" a O es mayor que la de A' a O, debido a la forma de las curvas de stocks (recordar que la distnacia de q''_A a q_{oA} es mayor que la de q'_A a q_{oA}, tal como se explicó en el capítulo II). Del mismo modo, el segmento B”-O es mayor que el segmento B’-O.

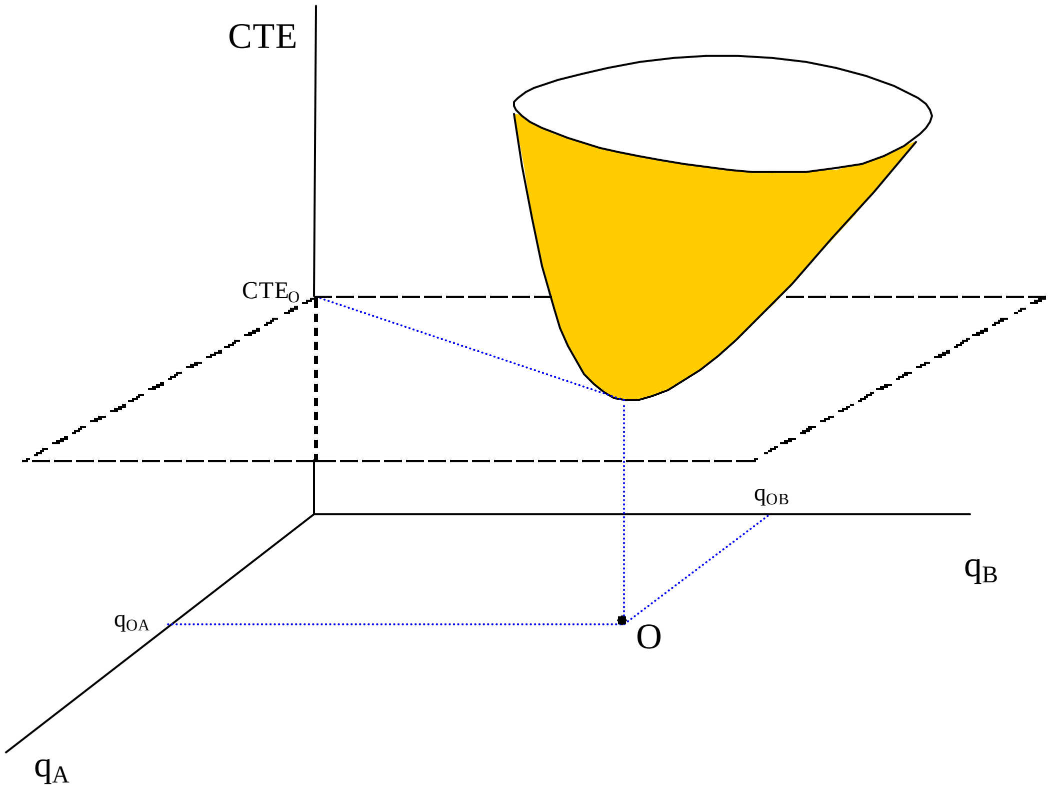


Figura 4

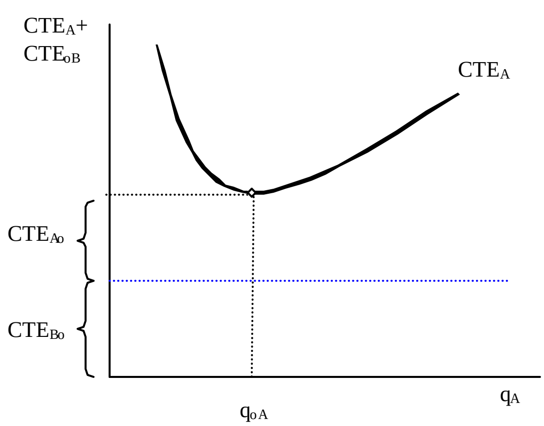


Figura 5

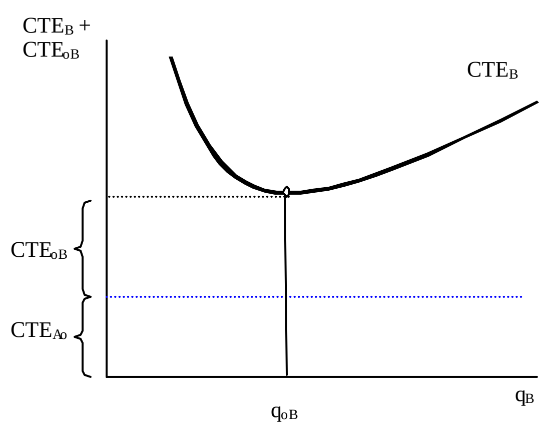


Figura 6

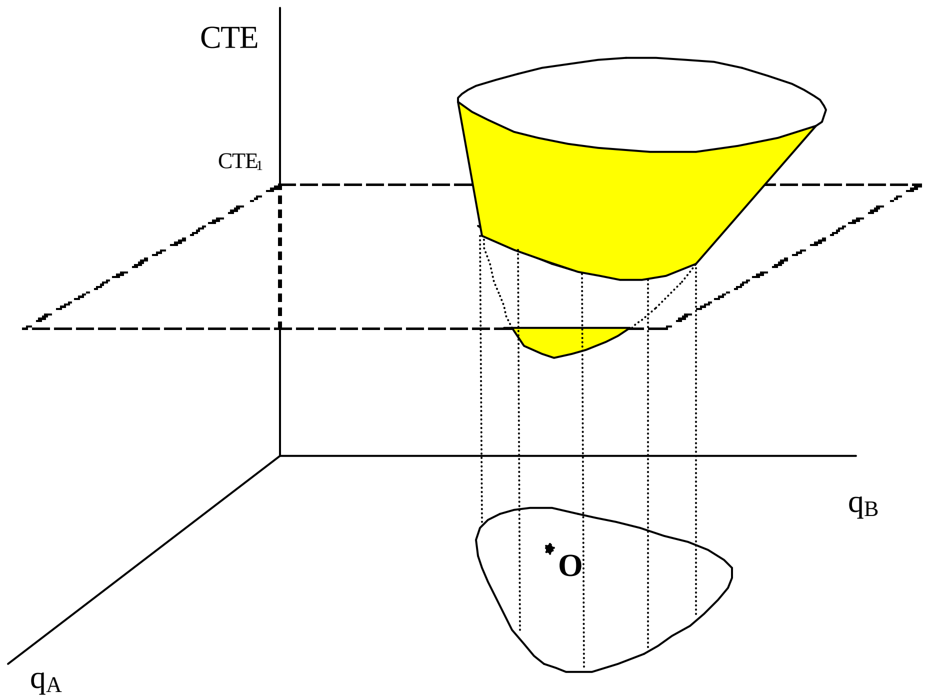


Figura 7

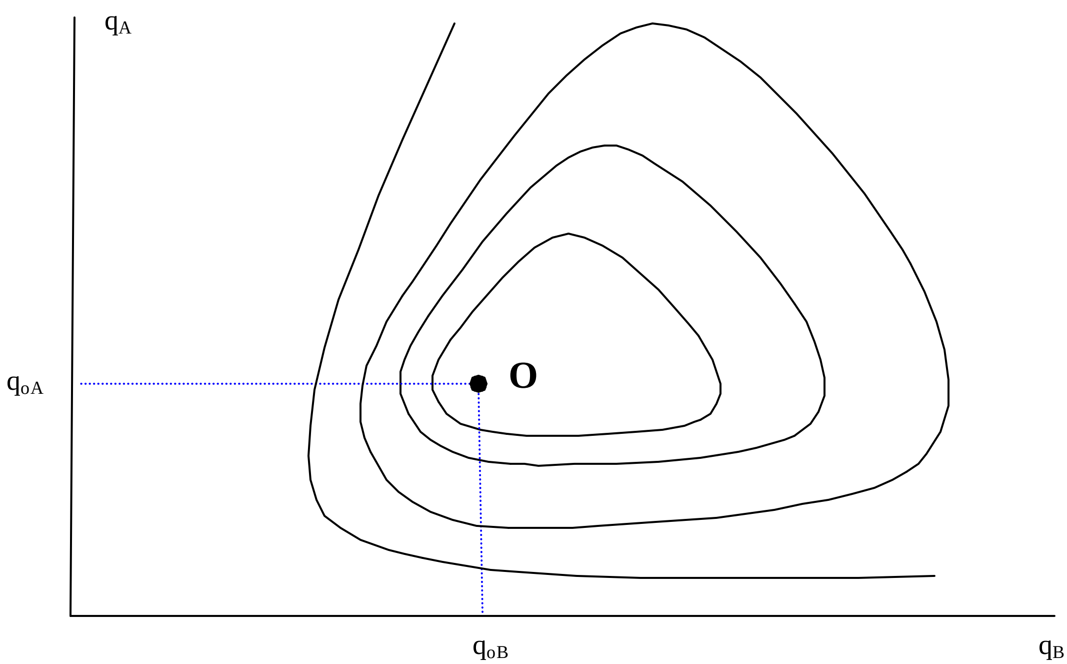


Figura 8

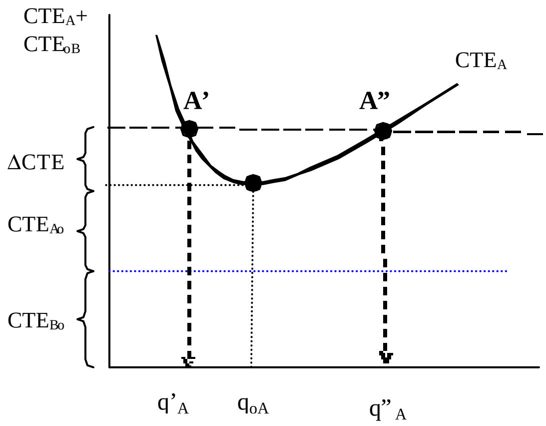


Figura 9

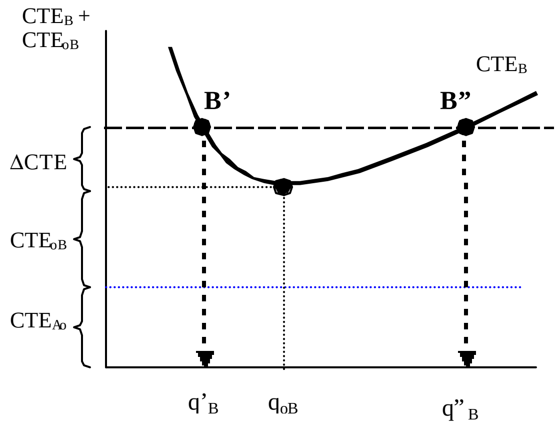


Figura 10

Obviamente, estas curvas se pueden dibujar resolviendo la ecuación:

$$CTE = b_A \cdot D_A + \frac{1}{2} \cdot q_A \cdot c_{1A} \cdot T + k_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + b_B \cdot D_B + \frac{1}{2} \cdot q_B \cdot c_{1B} \cdot T + k_B \cdot \frac{D_B}{q_B}$$

Para un CTE determinado como parámetro, se fija un valor de q_A y se despejan los dos valores correspondientes de q_B de la ecuación cuadrática; o viceversa: se fija un valor de q_B y se despejan los dos valores correspondientes de q_A.

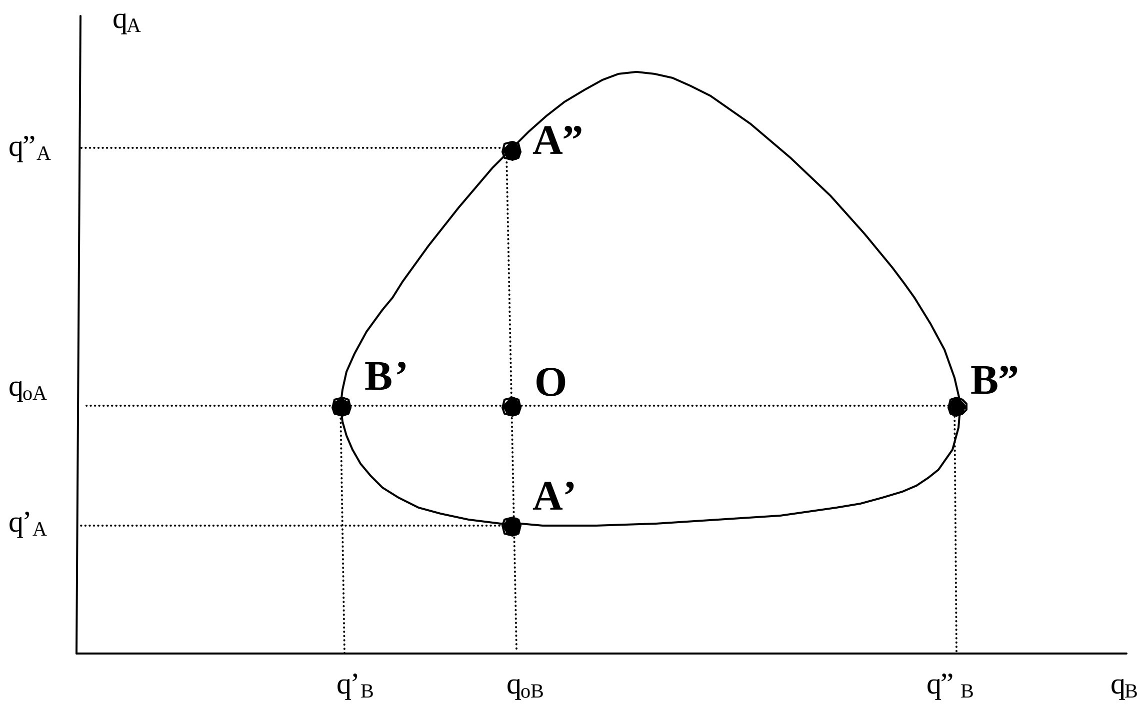


Figura 11

2. SOLUCIÓN DE PROGRAMAS MATEMÁTICOS CON RESTRICCIONES

Muchos programas matemáticos no lineales, como lo son los problemas de stocks con restricciones, se pueden resolver con el concepto de la Función de Lagrange, o con una extensión del mismo: las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT).

Un problema de programación matemática de la siguiente forma:

MIN (o MAX) = $f(x_1, x_2, ..., x_n)$

sujeto a un conjunto de restricciones de igual:

$g_1 (x_1, x_2,..., x_n) = b_1$

$g_2 (x_1, x_2,..., x_n) = b_2$

....

$g_m (x_1, x_2,..., x_n) = b_m$

con todas las variables x_i no negativas, se puede resolver aplicando la Función de Lagrange (también llamada "Lagrangiano"):

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_N) + \sum_{1}^{m} \lambda_i \cdot [g_i(x_1, x_2, ..., x_n) - b_i] \qquad \textbf{(7)}$$

en donde los λ_i se denominan "multiplicadores de Lagrange".

La solución a este problema se encuentra resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta de derivar la función de Lagrange con respecto a cada una de las variables y con respecto a cada uno de los multiplicadores.

- $$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad \textbf{(7)}$$
- $$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \qquad \textbf{(8)}$$

El conjunto de ecuaciones (8) es el sistema de ecuaciones correspondiente a las restricciones del problema.

Por su parte, las condiciones de KKT son aplicables, de manera general, a programas matemáticos de la forma:

MIN (o MAX) = $f(x_1, x_2, ..., x_n)$

sujeto a un conjunto de desigualdades:

$g_1 (x_1, x_2,..., x_n) \leq b_1$

$g_2 (x_1, x_2,..., x_n) \leq b_2$

....

$g_m (x_1, x_2,..., x_n) \leq b_m$

siendo: x_i no negativas.

Planteada la función de Lagrange para el funcional:

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_N) \pm \sum_{1}^{m} \lambda_i \cdot [g_i(x_1, x_2, ..., x_n) - b_i]$$

la solución óptima deberá verificar las siguientes condiciones:

- $\dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ **(9)**
- $\lambda_i \cdot [g_i(x_1, x_2, ..., x_n) - b_i] = 0$ **(10)**
- $\lambda_i \geq 0$ **(11)**

3. MULTI-ÍTEMS CON UNA RESTRICCIÓN DE IGUAL

Plantearemos un caso de minimización de CTE para dos artículos “A” y “B”, con una restricción constituida por una sola ecuación. A título de ejemplo tomaremos una restricción de número de órdenes fija a emitir por año en forma conjunta para los dos productos. Se considerarán las hipótesis planteadas para el modelo básico, y los parámetros del problema son:

a) D_i: Demanda del ítem “i” (“A” o “B”).

b) b_i: Costo unitario de adquisición para cada producto “i”.

c) c_{1i}: Costo unitario de almacenamiento del artículo “i”.

d) k_i: Costo de una orden para el ítem “i”

e) TO: Cantidad de órdenes a emitir,

y las variables :

- CTE: Costo Total Esperado.
- q_i: Tamaño del lote del ítem “i”.
- n_i: cantidad de ciclos (órdenes a emitir) del producto “i”.
- t_i: Intervalo de ciclo para el artículo “i”.

En primer lugar se debe verificar si las expresiones de Wilson satisfacen la restricción de igual. Si es así, esos son los lotes óptimos a solicitar.

Si, en cambio, la restricción no se cumple, para resolver el problema, se plantea el siguiente programa matemático no lineal, conformado por:

✓ Una función objetivo, que consiste en minimizar la expresión:

$$CTE = b_A \cdot D_A + \frac{1}{2} \cdot q_A \cdot c_{1A} \cdot T + k_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + b_B \cdot D_B + \frac{1}{2} \cdot q_B \cdot c_{1B} \cdot T + k_B \cdot \frac{D_B}{q_B}$$

✓ Una condición de vínculo (en este caso se trata de una ecuación no lineal) dada por el número de órdenes fijo a emitir por año:

$$\frac{D_A}{q_A} + \frac{D_B}{q_B} = TO$$

- ✓ Condiciones de no negatividad de las variables q_A y q_B.

Gráficamente el problema se observa en la Figura 12. El punto óptimo (O) surge de plantear la expresiones de Wilson, es decir el correspondiente a q_{oA} y q_{oB}. Lo más probable es que este punto no caiga sobre la curva correspondiente a la restrricción de número de órdenes, por lo que, en ese caso, habrá que encontrar un punto (O*) sobre la curva de isocostos que sea tangente a la curva de la restricción. Es decir, habrá que sacrificar costo hasta encontrar una solución que sea factible, tal como la correspondiente a q^*_A y q^*_B.

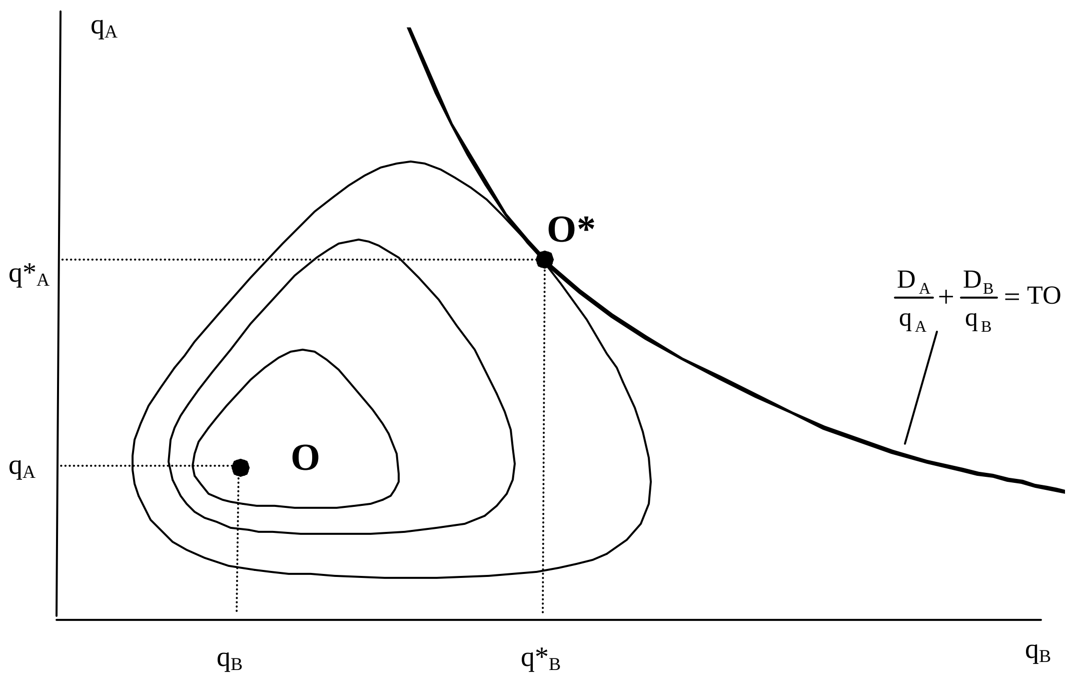


Figura 12

Tal como se explicó más arriba, para resolver el problema analíticamente, se debe aplicar la teoría de los multiplicadores de Lagrange, formulando en primer lugar el Lagrangiano:

$$L = b_A \cdot D_A + \frac{1}{2} \cdot q_A \cdot c_{1A} \cdot T + k_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + b_B \cdot D_B + \frac{1}{2} \cdot q_B \cdot c_{1B} \cdot T + k_B \cdot \frac{D_B}{q_B} + \lambda \cdot \left(\frac{D_A}{q_A} + \frac{D_B}{q_B} - TO \right)$$

Minimizar esta expresión es equivalente a minimizar el programa matemático formulado. En consecuencia, se forma el conjunto de ecuaciones que surge igualar a cero las derivadas de la Función de Lagrange con respecto a cada variable q_i y con respecto al multiplicador λ.

$$\frac{\partial L}{\partial q_A} = \frac{1}{2} \cdot c_{1A} \cdot T - \frac{k_A \cdot D_A}{q_A^2} - \lambda \cdot \frac{D_A}{q_A^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_A = \sqrt{\frac{2 \cdot k_A \cdot D_A + 2 \cdot \lambda \cdot D_A}{T \cdot c_{1A}}} \qquad \textbf{(12)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_B} = \frac{1}{2} \cdot c_{1B} \cdot T - \frac{k_B \cdot D_B}{q_B^2} - \lambda \cdot \frac{D_A}{q_B^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad q_B = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot D_B + 2 \cdot \lambda \cdot D_B}{T \cdot c_{1B}}} \qquad \textbf{(13)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{D_A}{q_A} + \frac{D_B}{q_B} - TO = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{D_A}{q_A} + \frac{D_B}{q_B} = TO \qquad \textbf{(14)}$$

El multiplicador de Lagrange λ es la derivada del Lagrangiano (L) con respecto a la limitación, representando entonces un valor marginal. Si λ es positivo, significa que se reducirá el Costo Total Esperado si se incrementa el número de órdenes a emitir. Este caso es el graficado en la Figura 13. En el punto O, el valor del multiplicador de Lagrange es cero, y a medida que nos acercamos al punto óptimo factible, dicho valor se incrementa.

Si, en cambio, λ es negativo, habrá una reducción de Costo Total Esperado si se disminuye la restricción de número de órdenes a emitir en el año. Este caso es el graficado en la Figura 14. A medida que nos acercamos al punto óptimo factible, el valor absoluto del multiplicador se incrementa.

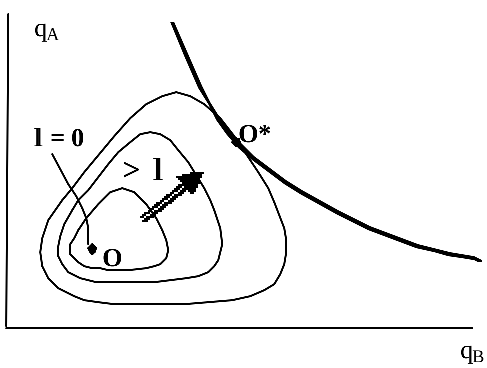


Figura 13

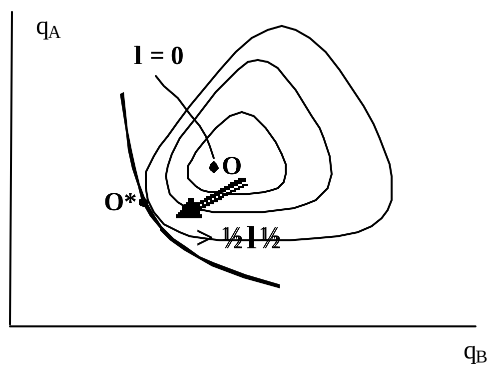


Figura 14

4. MULTI-ÍTEMS CON UNA RESTRICCIÓN DE MENOR O IGUAL.

Plantearemos ahora un caso, también para dos artículos “A” y “B”, pero con una restricción consistente en una desigualdad. Consideraremos una restricción de tipo lineal, como podría ser la cantidad máxima de dinero a inmovilizar en stocks, que llamaremos “TM”.

El programa matemático será entonces, minimizar

$$CTE = b_A \cdot D_A + \frac{1}{2} \cdot q_A \cdot c_{1A} \cdot T + k_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + b_B \cdot D_B + \frac{1}{2} \cdot q_B \cdot c_{1B} \cdot T + k_B \cdot \frac{D_B}{q_B}$$

sujeto a la restricción:

$$b_A \cdot q_A + b_B \cdot q_B \leq TM \qquad \textbf{(15)}$$

En la Figura 15 se ha graficado la restricción (15) en función de los lotes q_A y q_B. Para resolver el problema, tal como se comentó anteriormente, lo primero que deberá hacerse es calcular los lotes óptimos, haciendo caso omiso de las restricciones:

$$q_{oA} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_A \cdot D_A}{T \cdot c_{1A}}}$$

$$q_{oB} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot D_B}{T \cdot c_{1B}}}$$

Si los valores así calculados para “A” y para “B” satisfacen la inecuación (12), entonces esos son valores factibles óptimos (un punto como el “F” en la Figura 15).

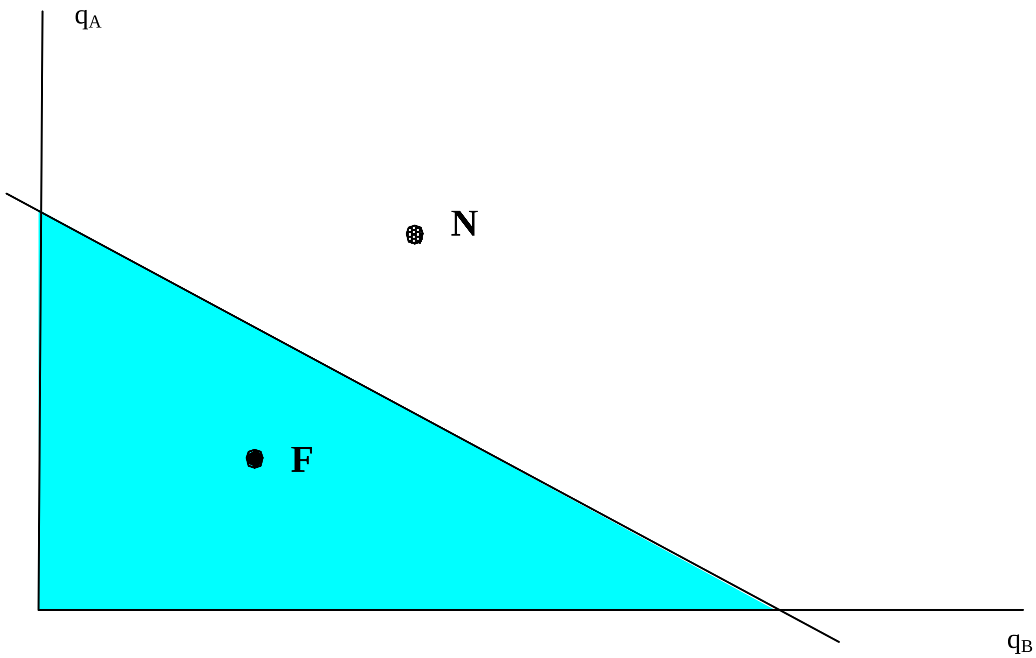


Figura 15

Si, en cambio, no la satisfacen, estaríamos en un punto no factible como el “N”. En este caso habrá que determinar los valores de q_A y q_B que cumplan con la restricción y que lo hagan manteniendo el CTE en el mínimo valor posible. Esto se conseguirá cortando al paraboloide mencionado en el punto anterior con planos de CTE superiores al mínimo, cuyas trazas proyectadas son las distintas curvas de isocostos. Cuanto más alto cortamos, tanto mayor srá el costo. En consecuencia (ver Figura 16), la curva de isocostos que sea tangente a la recta correspondiente a la igualdad de la restricción planteada definirá un punto O* correspondiente a un par de valores factibles (q^*_{oA} y q^*_{oB}) que será el punto operativo de menor costo y, por consiguiente, la solución óptima del problema.

Analíticamente, este problema se plantea aplicando las condiciones de KKT. En el ejemplo planteado, tendremos que el Lagrangiano es:

$$L = b_A \cdot D_A + \frac{1}{2} \cdot q_A \cdot c_{1A} \cdot T + k_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + b_B \cdot D_B + \frac{1}{2} \cdot q_B \cdot c_{1B} \cdot T + k_B \cdot \frac{D_B}{q_B} +$$
$$+ \lambda \cdot \left(b_A \cdot q_A + b_B \cdot q_B - TM \right)$$

Derivando el CTE con respecto a cada una de las variables q, e igualando a cero, tendremos:

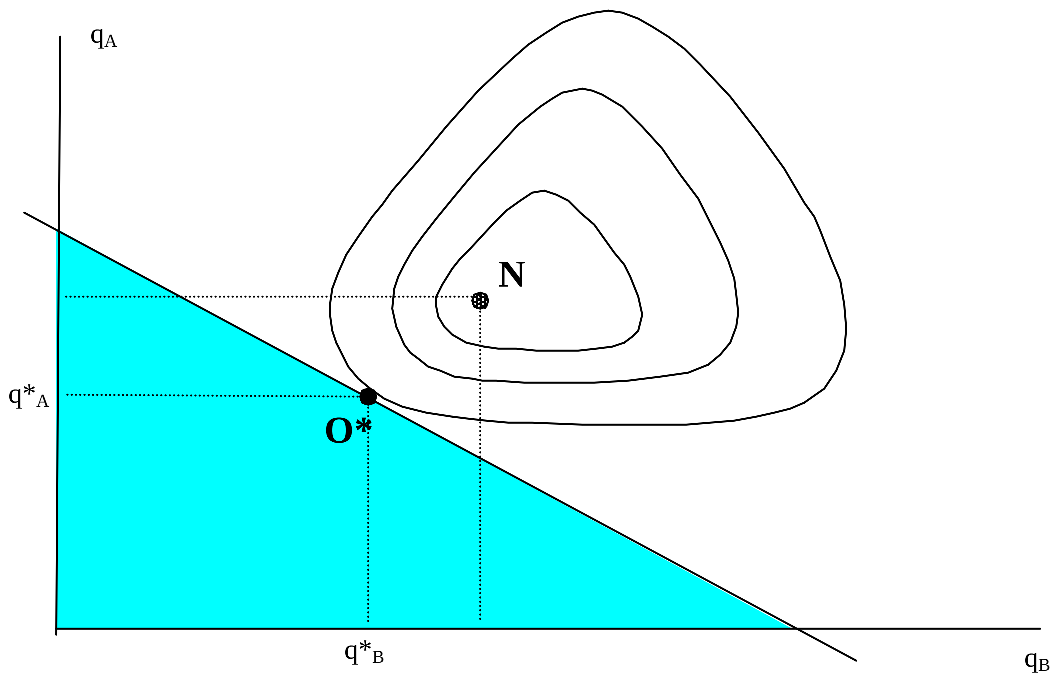


Figura 16

$$\frac{\partial L}{\partial q_A} = \frac{1}{2} \cdot c_{1A} \cdot T - \frac{k_A \cdot D_A}{q_A^2} + \lambda \cdot b_A = 0 \quad \Rightarrow \quad q_A = \sqrt{\frac{2 \cdot k_A \cdot D_A}{T \cdot c_{1A} + 2 \cdot \lambda \cdot b_A}} \qquad \textbf{(16)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_B} = \frac{1}{2} \cdot c_{1B} \cdot T - \frac{k_B \cdot D_B}{q_B^2} + \lambda \cdot b_B = 0 \quad \Rightarrow \quad q_B = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot D_B}{T \cdot c_{1B} + 2 \cdot \lambda \cdot b_B}} \qquad \textbf{(17)}$$

Además, se debe verificar la siguiente condición:

$$\lambda \cdot \left(b_A \cdot q_A + b_B \cdot q_B - TM \right) = 0$$

Es decir, uno de los dos productos debe ser cero, lo que lleva a alguna de las dos situaciones siguientes:

2. Si $\lambda = 0$, la expresión que está dentro del paréntesis es distinta de cero y, considerando que se debe verificar la restricción (15) impuesta, tendremos:

$$b_A \cdot q_A + b_B \cdot q_B < TM$$

Es decir, habrá recurso sobrante de total de dinero a inmovilizar. Los lotes óptimos a solicitar serán:

$$q_{oA} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_A \cdot D_A}{T \cdot c_{1A}}}$$

$$q_{oB} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot D_B}{T \cdot c_{1B}}}$$

Esta solución es un punto tal como el "F" de la Figura 15.

3. Si $\lambda > 0$, implica que la expresión que está dentro del paréntesis es igual a cero, es decir que la solución óptima factible estará sobre la recta

$$b_A \cdot q_A + b_B \cdot q_B = TM$$

Observar que esta expresión es la derivada de la Función de Lagrange con respecto al multiplicador "λ". Para hallar la solución habrá que resolver el sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas siguiente:

$$q_B^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot D_B}{T \cdot c_{1B} + 2 \cdot \lambda \cdot b_B}}$$

$$q_B^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot D_B}{T \cdot c_{1B} + 2 \cdot \lambda \cdot b_B}}$$

$$b_A \cdot q_A^* + b_B \cdot q_B^* = TM$$

En definitiva, un problema como el planteado se debería resolver de la siguiente forma:

a) Calcular los óptimos con la expresión de Wilson.

b) Verificar si se satisface la restricción impuesta con los valores óptimos obtenidos del paso anterior. Si se satisface, se termina el problema; en caso contrario, se debe pasar al punto c.

c) Plantear el Lagrangiano (L), formar un sistema de ecuaciones con las derivadas parciales de dicha función con relación a cada variable "q_i" y con relación al multiplicador "λ", y resolver (ya sea analíticamente o probando en forma iterativa con distintos valores de "λ" hasta observar que se cumple la restricción en el igual).

5. MULTI-ÍTEMS CON VARIAS RESTRICCIONES

Supongamos un problema de dos ítems con dos restricciones: una de disponibilidad física de lugar (lineal) y una de tiempo de preparación de lotes (no lineal). Llamaremos:

- v_A: volumen ocupado por una unidad del producto "A" (por ejemplo en m^3),
- v_B: volumen ocupado por una unidad del producto "B" (por ejemplo en m^3),
- V: volumen total disponible (por ejemplo en m^3),
- t_A: tiempo requerido para preparar un lote del producto "A" (por ejemplo en hs),
- t_B: tiempo requerido para preparar un lote del producto "B" (por ejemplo en hs),
- TD: tiempo total disponible para armar lotes de "A" y de "B" (por ejemplo en hs).

El programa matemático será, entonces, minimizar

$$CTE = b_A \cdot D_A + \frac{1}{2} \cdot q_A \cdot c_{1A} \cdot T + k_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + b_B \cdot D_B + \frac{1}{2} \cdot q_B \cdot c_{1B} \cdot T + k_B \cdot \frac{D_B}{q_B}$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$v_A \cdot q_A + v_B \cdot q_B \leq V \qquad \textbf{(18)}$$

$$t_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + t_B \cdot \frac{D_B}{q_B} \leq TD \qquad \textbf{(19)}$$

En la Figura 17 se grafican las dos restricciones.

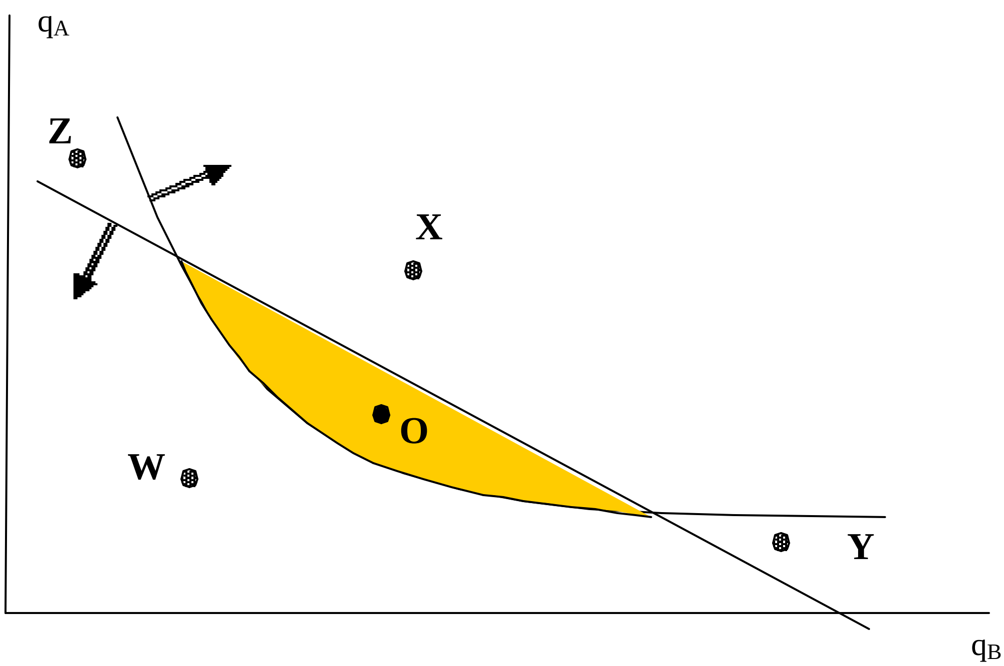


Figura 17

La primera de ellas es una restricción lineal (siendo el semiplano correspondiente a la limitación el que contienen el origen de coordenadas), mientras que la segunda es hiperbólica (estando la porción de región que la satisface por encima de la curva, es decir la que no contiene el origen de coordenadas).

Obviamente, debe formarse un recinto de soluciones factibles como el indicado en la Figura ya que de lo contrario, estaríamos frente a un problema incompatible.Tal como se ha explicado, se deberán calcular en primer lugar los lotes óptimos sin considerar las restricciones, es decir con las expresiones (4) y (5):

$$q_{oA} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_A \cdot D_A}{T \cdot c_{1A}}}$$

$$q_{oB} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot D_B}{T \cdot c_{1B}}}$$

Si estos valores satisfacen ambas restricciones, el problema queda resuelto. Esta situación sería la representada por un punto tal como el “O” de la Figura 17.

Si se satisface la restricción de volumen, pero no la de tiempo de preparación de lotes, estaríamos en un punto tal como el “W” de la referida Figura 17. Si, por el contrario se satisface la restricción de TD pero no la de Volumen, el punto óptimo sin considerar restricciones sería el “X”. Finalmente, si ninguna de las dos restricciones se satisface, tendríamos un punto como el “Y” o como el “Z”. En cualquiera de estos casos habrá que determinar los valores q^*_1 y q^*_2 que cumplan con las restricciones (es decir, una solución que esté dentro del recinto de valores factibles) a la vez que mantiene el CTE al mínimo valor posible. Esto se dará cuando se encuentre la curva de isocostos correspondiente que sea tangente al recinto (ver Figuras 18, 19, 20 y 21).

La solución cuantitativa del problema se realiza aplicando las condiciones de KKT. El Lagrangiano correspondiente es:

$$\begin{aligned} L = {} & b_A \cdot D_A + \frac{1}{2} \cdot q_A \cdot c_{1A} \cdot T + k_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + b_B \cdot D_B + \frac{1}{2} \cdot q_B \cdot c_{1B} \cdot T + k_B \cdot \frac{D_B}{q_B} + \\ & + \lambda_1 \cdot (v_A \cdot q_A + v_B \cdot q_B - V) + \lambda_2 \cdot \left(t_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + t_B \cdot \frac{D_B}{q_B} - TD \right) \end{aligned} \qquad \textbf{(20)}$$

en donde λ_1 es el multiplicador de Lagrange con relación a la restricción de volumen y λ_2 es el multiplicador de Lagrange con relación a la restricción de tiempo de preparación de lotes. La solución óptima deberá verificar, además de las restricciones (18) y (19), las siguientes condiciones:

- $$\frac{\partial L}{\partial q_A} = \frac{1}{2} \cdot c_{1A} \cdot T - \frac{k_A \cdot D_A}{q_A^2} + \lambda_1 \cdot v_A - \frac{\lambda_2 \cdot t_A \cdot D_A}{q_A^2} = 0$$

Despejando:

$$q_A = \sqrt{\frac{2 \cdot k_A \cdot D_A + 2 \cdot \lambda_2 \cdot t_A \cdot D_A}{T \cdot c_{1A} + 2 \cdot \lambda_1 \cdot v_A}} \qquad \textbf{(21)}$$

- $$\frac{\partial L}{\partial q_B} = \frac{1}{2} \cdot c_{1B} \cdot T - \frac{k_B \cdot D_B}{q_B^2} + \lambda_1 \cdot v_B - \frac{\lambda_2 \cdot t_B \cdot D_B}{q_B^2} = 0$$

  Despejando:

$$q_B = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot D_B + 2 \cdot \lambda_2 \cdot t_B \cdot D_B}{T \cdot c_{1B} + 2 \cdot \lambda_1 \cdot v_B}} \qquad \textbf{(22)}$$

- $\lambda_1 \cdot (v_A \cdot q_A + v_B \cdot q_B - V) = 0$ **(23)**

- $\lambda_2 \cdot \left(t_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + t_B \cdot \frac{D_B}{q_B} - TD \right) = 0$ **(24)**

- $\lambda_1 \geq 0$ **(25)**

- $\lambda_2 \geq 0$ **(26)**

Luego:

- Si con $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$ se verifican las restricciones del problema (18) y (19), implica que hay sobrante de volumen y de tiempo de preparación de lotes, y el punto óptimo será uno tal como el indicado con O de la Figura 17.

- Si con $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 > 0$ se verifican (18) y (19), significa que hay sobrante de volumen, se utiliza todo el tiempo de preparación de lotes, y el punto óptimo será uno como el indicado en el punto W* de la Figura 18.

- Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 = 0$ se verifican las restricciones del problema, entonces se utiliza todo el volumen disponible, hay sobrante de tiempo de preparación de lotes, y el punto óptimo será uno como el indicado en el punto X* de la Figura 19.
- Si $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$, implica que ambas restricciones están saturadas, es decir que se está utilizando todo el volumen y todo el tiempo de preparación disponibles. En este caso, el punto óptimo puede ser cualquiera de los puntos Y* o Z* indicados en la Figura 20, que surge de resolver el sistema de ecuaciones siguiente:

$$v_A \cdot q_A + v_B \cdot q_B = V$$

$$t_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + t_B \cdot \frac{D_B}{q_B} = TD$$

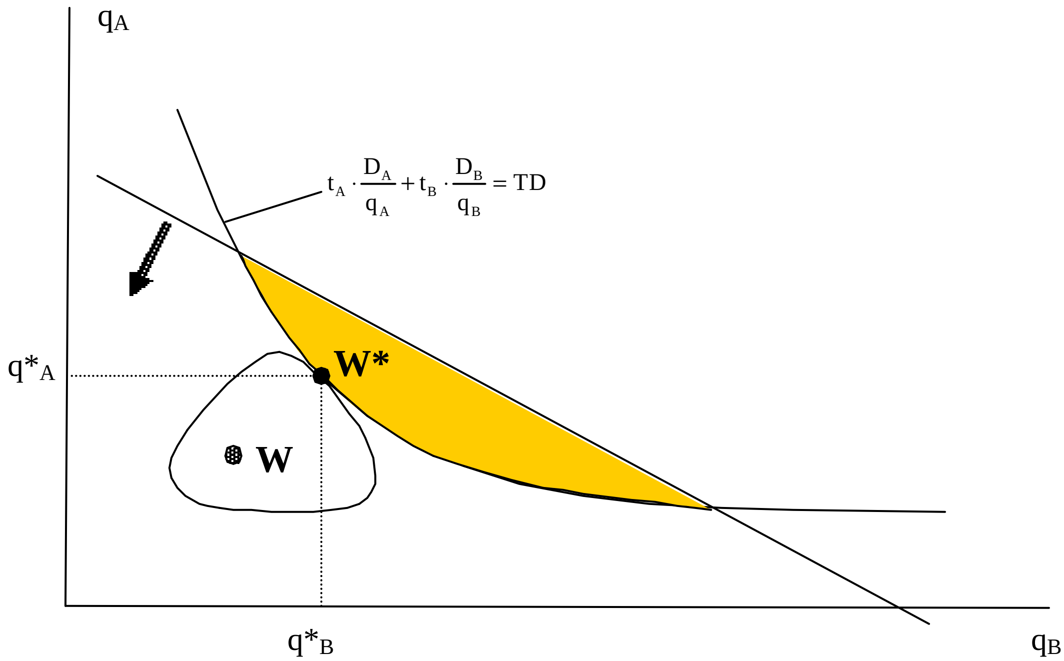


Figura 18

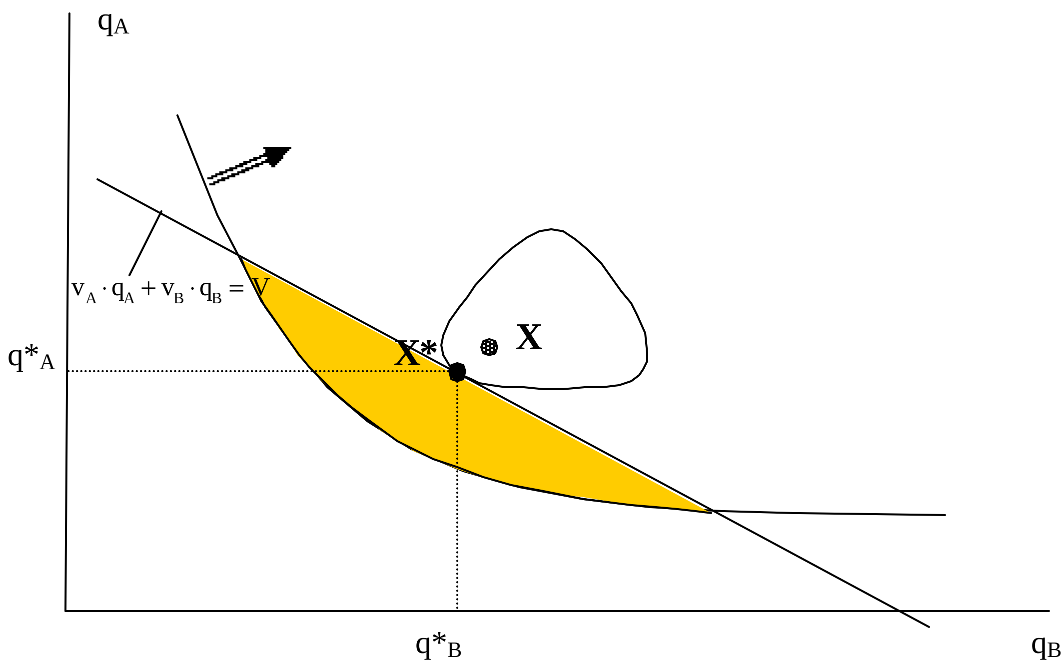


Figura 19

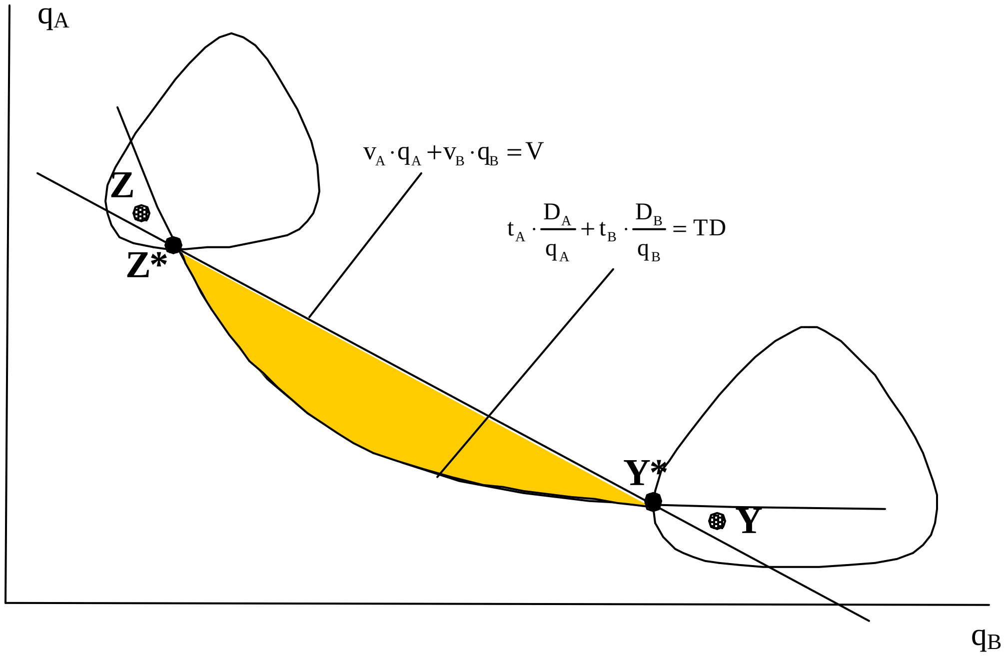


Figura 20

La interpretación físico-económica de los multiplicadores es la siguiente:

- λ_1 es la disminución del CTE por cada unidad incremental de volumen que se pueda disponer, y
- λ_2 es la disminución del CTE por unidad de tiempo incremental de preparación que se pueda adicionar.

5. RESTRICCIONES DE ENTREGAS CONJUNTAS

Desarrollaremos a continuación un ejemplo de un caso interesante, que es el de pedidos conjuntos. Supongamos dos productos que se deben recibir conjuntamente y el mismo número de veces (como podría ser el caso de un mismo proveedor que exige que tanto la recepción del las órdenes de sus clientes como la distribución de los pedidos se hagan simultáneamente para todos los ítems). Esta situación indroduciría la restricción de que el número de pedidos por período de referencia sea el mismo para ambos productos (es decir $n_A = n_B$). En la Fig. 21 se muestra esquemáticamente un ejemplo de cómo sería la evolución de los inventarios para cada uno de los artículos.

Si el problema consiste en minimizar el Costo Total Esperado, el programa matemático consistirá, entonces, en minimizar:

$$CTE = b_A \cdot D_A + \frac{1}{2} \cdot q_A \cdot c_{1A} \cdot T + k_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + b_B \cdot D_B + \frac{1}{2} \cdot q_B \cdot c_{1B} \cdot T + k_B \cdot \frac{D_B}{q_B}$$

sujeto a:

$$n_A = n_B \quad \Rightarrow \quad \frac{D_A}{q_A} = \frac{D_B}{q_B} \quad \Rightarrow \quad D_A \cdot q_B - D_B \cdot q_A = 0$$

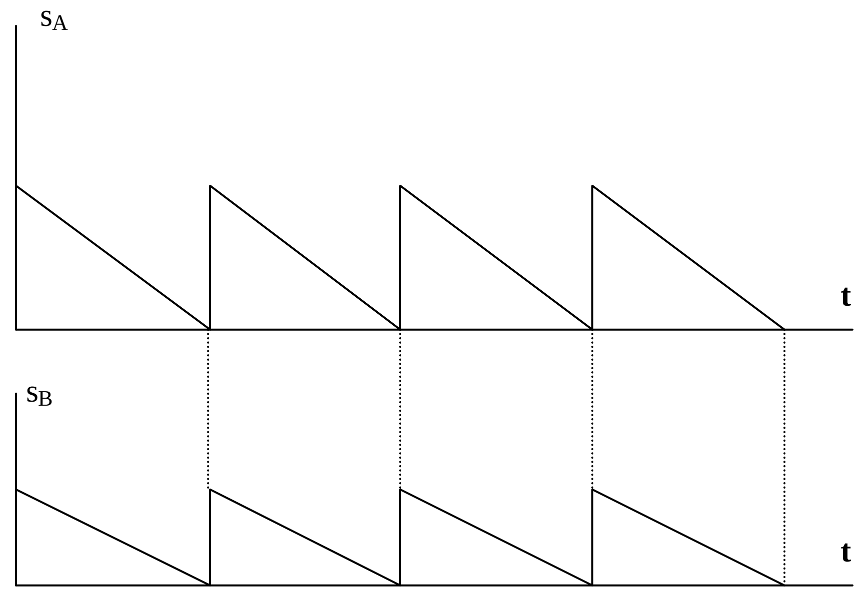


Figura 21

Para resolver analíticamente el problema, en primer lugar se debe verificar si los óptimos de de las expresiones 4) y 5) de Wilson satisfacen la restricción impuesta. Si no es así, se plantea el Lagrangiano y se resuelve, como hemos visto en el punto 3 (restricciones de igual).

$$L = b_A \cdot D_A + \frac{1}{2} \cdot q_A \cdot c_{1A} \cdot T + k_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + b_B \cdot D_B + \frac{1}{2} \cdot q_B \cdot c_{1B} \cdot T + k_B \cdot \frac{D_B}{q_B} + \lambda \cdot (D_A \cdot q_B - D_B \cdot q_A)$$

Derivando con respecto a cada una de las variables y con respecto al multiplicador de Lagrange, e igualando a cero todas estas expresiones, se obtiene el punto óptimo factible (ver Figura 22), dado por las siguientes expresiones de lote óptimo.

$$q_A^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_A \cdot D_A}{T \cdot c_{1A} - 2 \cdot \lambda \cdot D_B}}$$

$$q_B^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot D_B}{T \cdot c_{1A} + 2 \cdot \lambda \cdot D_A}}$$

En el óptimo el número de pedidos de “A” debe ser igual al número de “B”. La interpretación del multiplicador de Lagrange sería la siguiente: por cada pedido de diferencia que pudiera haber entre “A” y “B”, el Costo Total Esperado se reduciría en λ.

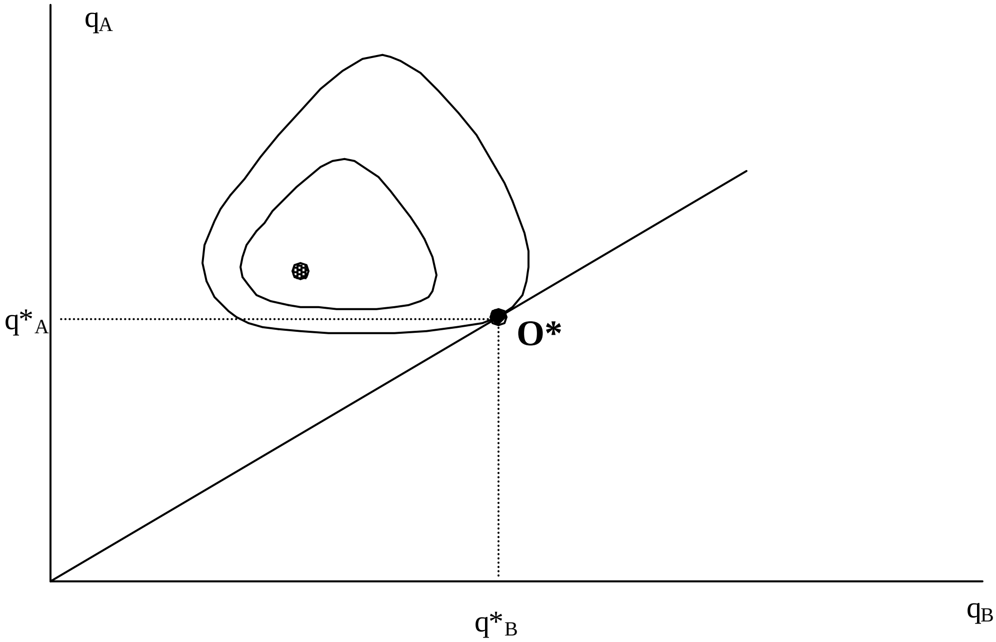


Figura 22

Otro caso de interés con relación al número de pedidos sería el siguiente: Dado que el proveedor es el mismo, las entregas se deben hacer conjuntamente, pero no necesariamente el número de pedidos de “A” debe ser igual al número de pedidos de “B”. Ejemplos de una situación como la descrita se grafican en las Figuras 23 y 24. Aquí la restricción de que el número de entregas de “A” sea igual a una cantidad de veces discreta del número de entregas de “B”, o viceversa, el número de entregas de “B” debe ser igual a una cantidad de veces discreta del número de entregas de “A”.

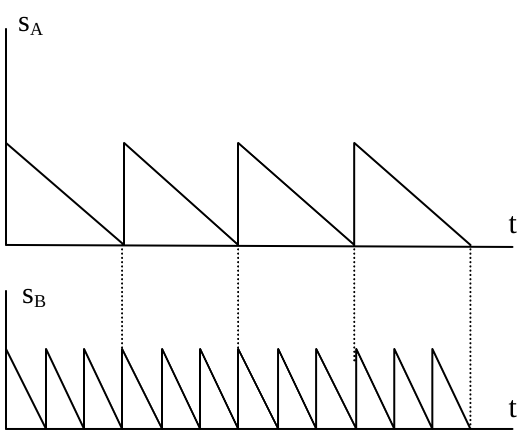


Figura 23

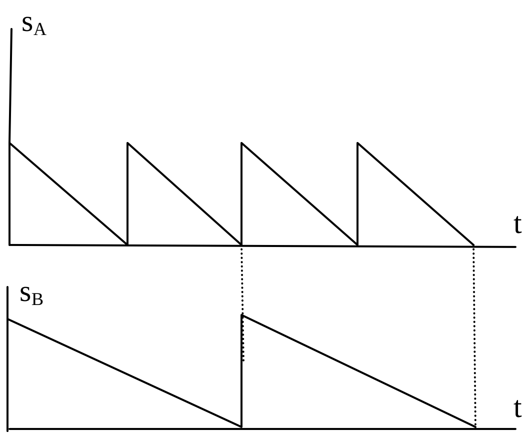


Figura 24

Es decir:

$$n_A = n_B; \quad n_A = 2 \cdot n_B; \quad n_A = 3 \cdot n_B; \quad n_A = 4 \cdot n_B; \quad \ldots$$

o bien:

$$n_B = 2 \cdot n_A; \quad n_B = 3 \cdot n_A; \quad n_B = 4 \cdot n_A; \quad \ldots$$

Para resolver el problema, bastará con explorar las dos soluciones factibles más cercanas a la óptima no factible. Supongamos que el óptimo sin restricciones (es decir el calculado con las expresiones de Wilson) hubiera generado una cantidad de pedidos de “A” y de “B” cuyo cociente fuera no entero, por ejemplo:

$$\frac{n_A}{n_B} = 2{,}45$$

En este caso, la solución óptima factible será el punto correspondiente al menor costo. En consecuencia, habría que comparar el CTE sujeto a la restricción $n_A = 2 \cdot n_B$ contra el CTE sujeto a la restricción $n_A = 3 \cdot n_B$, y seleccionar la solución que dé el menor CTE. El la Figura 25 se muestra la situación del lote óptimo sin restricciones entre las rectas correspondientes a $n_A = 2 \cdot n_B$ y $n_A = 3 \cdot n_B$. En el ejemplo graficado, el óptimo estaría sobre la recta $n_A = 2 \cdot n_B$.

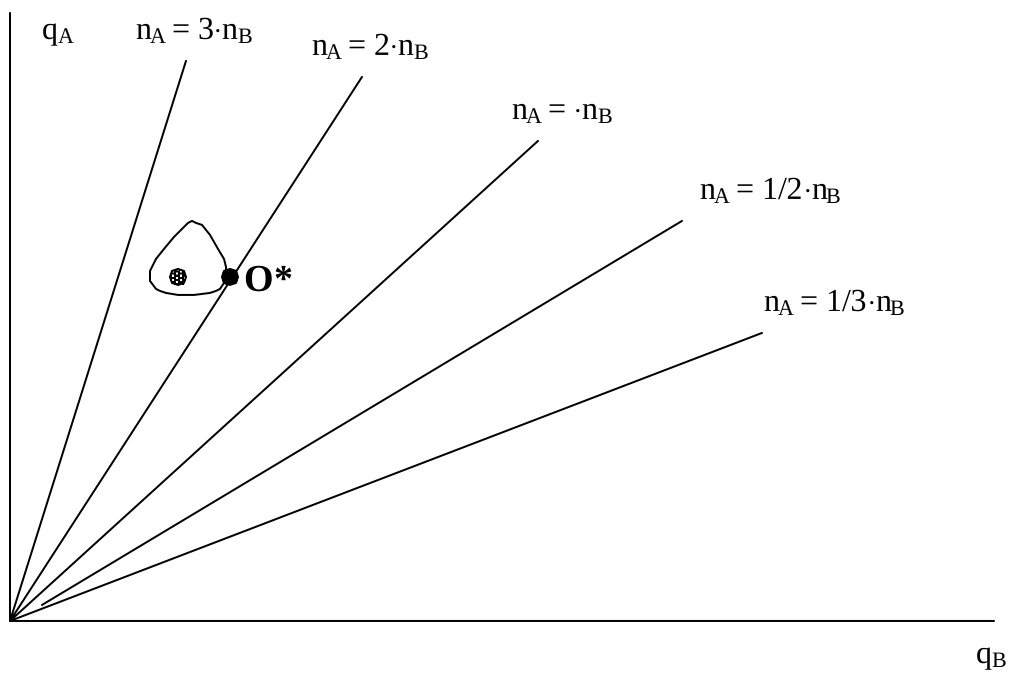


Figura 25

6. MODELO TI-TO

En los problemas de inventarios pueden plantearse otros objetivos diferentes al de minimizar el Costo Total Esperado. Por ejemplo podría perseguirse el fin de minimizar el Costo Total de Dinero Máximo a Inmovilizar, el Costo Promedio de Dinero a Inmovilizar, el Número Total de Ordenes a emitir, el Total de Dinero a gastar en emisiones de órdenes, etc.

Como ejemplo, plantearemos problemas de varios ítems (una cantidad "i" de productos), sujetos a una sola restricción. Asumiremos que se verifican las hipótesis del caso elemental descrito en el Capítulo 2. En particular, describiremos un modelo que se conoce con el nombre de "TI-TO" (Total de dinero promedio a Inmovilizar-Total de Ordenes a emitir), mediante dos casos:

A) <u>OPTIMIZACIÓN DE CANTIDAD TOTAL DE DINERO PROMEDIO A INMOVILIZAR SUJETO A NÚMERO TOTAL DE ÓRDENES A EMITIR.</u>

Asumiendo que se quiere determinar los lotes a adquir para cada uno de los "i" artículos a fin de minimizar el Total de dinero a Inmovilizar (en promedio), sujeto a una restricción fija de órdenes a emitir en un período referencial de tiempo (por ejemplo, un año), tendremos los siguientes parámetros:

- D_i: Demanda del ítem "i".
- b_i: Costo unitario de adquisición para cada producto "i".
- TO: Total de Órdenes a emitir por año.

y las variables:

- TI: Total de dinero a Inmovilizar en promedio.
- q_i: Tamaño del lote del ítem "i".
- n_i: cantidad de ciclos (órdenes a emitir) del producto "i".

El problema es consiste en minimizar:

$$TI = \sum_i \frac{1}{2} \cdot q_i \cdot b_i \quad \Rightarrow \quad \text{Min} \tag{27}$$

sujeto a:

$$TO = \sum_i \frac{D_i}{q_i} \tag{28}$$

Para resolver, se plantea el Lagrangiano:

$$L = \sum_i \frac{1}{2} \cdot q_i \cdot b_i + \lambda \cdot \left[\sum_i \frac{D_i}{q_i} - TO \right] \tag{29}$$

Minimizar esta expresión es equivalente a minimizar (27) sujeta a la restricción (28).

Derivando L con respecto a cada una de las variables "q_i" y con respecto a "λ", igualando a estas expresiones a cero y despejando, tendremos:

- $$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \cdot b_i - \frac{\lambda \cdot D_i}{q_i^2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_{oi} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot D_i}{b_i}} \tag{30}$$

- $$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_i \frac{D_i}{q_i} - TO = 0 \qquad \Rightarrow \qquad TO = \sum_i \frac{D_i}{q_{oi}} \tag{31}$$

Reemplazando (30) en (31):

$$TO = \sum_i \frac{D_i}{\sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot D_i}{b_i}}} = \sum_i \sqrt{\frac{D_i \cdot b_i}{2 \cdot \lambda}} \qquad \Rightarrow \quad \sqrt{2 \cdot \lambda} = \frac{\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i}}{TO} \tag{32}$$

y, despejando λ:

$$\lambda = \frac{\left[\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i}\right]^2}{2 \cdot TO^2} \tag{33}$$

La expresión anterior del multiplicador de Lagrange en función de los parámetros del problema nos permite obtener los valores de los lotes óptimos, reemplazando en las expresiones (30).

Para hallar la expresión de TI óptimo se reemplaza en primer lugar (30) en (27):

$$TI_o = \sum_i \frac{1}{2} \cdot q_{io} \cdot b_i = \sum_i \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot D_i}{b_i}} \cdot b_i = \sqrt{2 \cdot \lambda} \cdot \sum_i \frac{\sqrt{D_i \cdot b_i}}{2}$$

Teniendo en cuenta (32):

$$TI_o = \frac{\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i}}{TO} \cdot \sum_i \frac{\sqrt{D_i \cdot b_i}}{2} \qquad \Rightarrow \quad TI_o = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left[\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i}\right]^2}{TO} \tag{34}$$

Es decir, observando (33) y (34), tendremos:

$$TI_o = \lambda \cdot TO$$

O sea:

$$\lambda = \frac{TI_o}{TO} \tag{35}$$

El multiplicador de Lagrange en este problema representa la disminución que se habría en el Total de dinero Inmovilizado promedio por cada orden adicional que se pudiera emitir. De la expresión (34) se concluye que el producto $TI_o \cdot TO$ es una constante:

$$TI_o \cdot TO = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i} \right]^2 \qquad \textbf{(36)}$$

En la Figura 26 se puede observar la curva TI·TO que representa los valores óptimos de Total de dinero a Inmovilizar en promedio (TI) para los distintos valores de número Total de Ordenes a emitir (TO).

Dado que existe la restricción de emitir un número fijo de órdenes (TO) en el período referencial de tiempo, solicitando los lotes óptimos obtenidos con las expresiones (28) se alcanza el punto óptimo (O) indicado en el gráfico. Cualquier otro punto por encima de la curva (por ejemplo “A”) será factible, pero implica inmovilizar más dinero que el necesario.

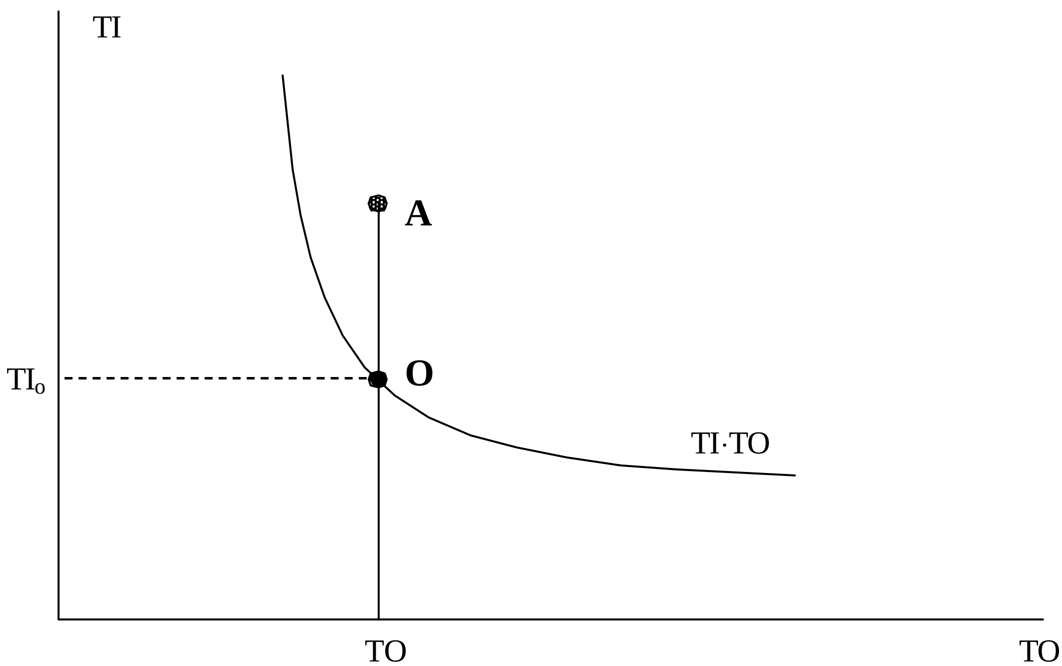


Figura 26

B) <u>OPTIMIZACIÓN DE NÚMERO TOTAL DE ÓRDENES A EMITIR SUJETO A CANTIDAD TOTAL DE DINERO A INMOVILIZAR EN PROMEDIO</u>.

Suponiendo ahora que el objetivo del problema sea determinar el tamaño de los lotes a adquirir a fin de minimizar el Total de Ordenes (TO) a emitir en un período referencial de tiempo, sujeto a una restricción de Total de dinero a Inmovilizar promedio (TI), tendremos que los parámetros serán:

- D_i: Demanda del ítem “i”.

- b_i: Costo unitario de adquisición para cada producto "i".
- TI: Total de dinero a Inmovilizar en promedio.

y las variables:

- TO: Total de Órdenes a emitir por año.:
- q_i: Tamaño del lote del ítem "i".
- n_i: cantidad de ciclos (órdenes a emitir) del producto "i".

La formulación matemática del problema consiste en minimizar el número total de órdenes:

$$TO = \sum_i \frac{D_i}{q_i} \quad \Rightarrow \quad \text{Min} \tag{37}$$

sujeto a:

$$TI = \sum_i \frac{1}{2} \cdot q_i \cdot b_i \tag{38}$$

Planteando el Lagrangiano:

$$L = \sum_i \frac{D_i}{q_i} + \mu \cdot \left[\sum_i \frac{1}{2} q_i \cdot b_i - TI \right] \tag{39}$$

en donde "μ" es el multiplicador de Lagrange de la restricción de Total de dinero a Inmovilizar promedio. Minimizar esta expresión es equivalente a minimizar (37) sujeta a la restricción (38). Derivando "L" con respecto a cada una de las variables "q_i" y a "μ", igualando a estas expresiones a cero y despejando, tendremos:

- $$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{D_i}{q_i^2} + \frac{\mu \cdot b_i}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_{oi} = \sqrt{\frac{2 \cdot D_i}{\mu \cdot b_i}} \tag{40}$$
- $$\frac{\partial L}{\partial \mu} = \sum_i \frac{1}{2} \cdot q_i \cdot b_i - TI = 0 \qquad \Rightarrow \qquad TI = \sum_i \frac{1}{2} \cdot q_i \cdot b_i \tag{41}$$

Reemplazando (40) en (41):

$$TI = \sum_i \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot D_i}{\mu \cdot b_i}} \cdot b_i \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{2 \cdot \mu} = \frac{\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i}}{TI} \tag{42}$$

y, despejando "μ":

$$\mu = \frac{\left[\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i} \right]^2}{2 \cdot TI^2} \tag{43}$$

Esta expresión del multiplicador de Lagrange en función de los parámetros del problema nos permite obtener los valores de los lotes óptimos, cuando es reemplazado en las expresiones (40).

Para hallar la expresión de TO óptimo se reemplaza en primer lugar (40) en (37):

$$TO_o = \sum_i \frac{D_i}{q_{oi}} = \sum_i \frac{D_i}{\sqrt{\frac{2 \cdot D_i}{\mu \cdot b_i}}} = \frac{\sqrt{2 \cdot \mu} \cdot \sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i}}{2}$$

Teniendo en cuenta (42):

$$TO_o = \frac{\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i}}{TI} \cdot \frac{\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i}}{2} \quad \Rightarrow \quad TO_o = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left[\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i}\right]^2}{TI} \qquad \textbf{(44)}$$

Es decir, observando (43) y (44):

$$TO_o = \mu \cdot TI$$

O sea:

$$\mu = \frac{TO_o}{TI} \qquad \textbf{(45)}$$

El significado del multiplicador de Lagrange es el siguiente: μ representa la cantidad de órdenes de menos que se emitirían si se inmovilizara un peso adicional (promedio) en inventarios.

De la expresión (44) se concluye que el producto $TI \cdot TO_o$ es una constante:

$$TI \cdot TO_o = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i}\right]^2 \qquad \textbf{(46)}$$

En la Figura 27 se observa la curva TI·TO que representa los valores óptimos de número Total de Ordenes a emitir (TO) para los distintos valores de Total de dinero a Inmovilizar en promedio (TI).

Dado que existe la restricción de cantidad de dinero a inmovilizar en promedio (TI), solicitando los lotes óptimos obtenidos con las expresiones (40) se alcanza el punto óptimo (O) indicado en el gráfico. Cualquier otro punto por hacia la derecha de la curva (por ejemplo “A”) será factible, pero implica emitir más órdenes que las necesarias.

En definitiva, la curva TI·TO nos da la política óptima a seguir para las diferentes posibilidades de órdenes a emitir y total de dinero a inmovilizar en promedio.

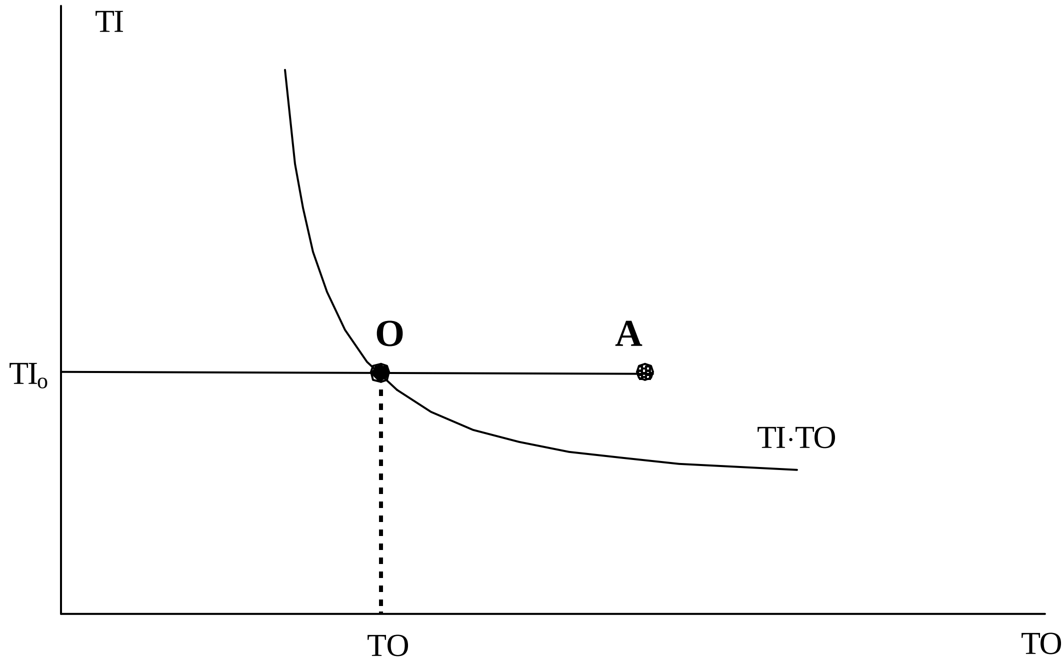


Figura 27

Si no hay restricciones de número de órdenes a emitir, para minimizar TI por supuesto que conviene solicitar el número óptimo que surge de minimizar CTE. Si, para un ítem "i", cualquiera se igualan las expresiones de lote óptimo que surge de minimizar TI con la de lote óptimo que surge de minimizar CTE (fórmula de Wilson), tendremos:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot D}{b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}}$$

Es decir

$$\frac{2 \cdot \lambda \cdot D}{b} = \frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{b \cdot k}{T \cdot c_1} \qquad \textbf{(47)}$$

7. CURVA "ABC"

En el año 1906, un economista italiano llamado Vilfredo Pareto observó que unos pocos individuos de un grupo constituían una proporción muy significativa sobre un elemento de valoración determinado del grupo en su totalidad. En particular, observó que, aproximadamente, el 80% de la riqueza de una población se repartía solamente en alrededor de solamente un 20% de la misma, mientras que el 20% restante de la riqueza se distribuía entre el 80% de dicha población.

Este principio también llamado "20-80" es aplicable a diversas actividades en el ámbito de innumerables sistemas físico-económicos y de ingeniería. Así, por ejemplo, en un proyecto de instalación de sistemas, un esfuerzo relativamente bajo en términos de costos, recursos o tiempo, representa un alto porcentaje del trabajo total a ejectuar, mientras que los pequeños procedimientos a computarizar, constituyen un signifcativo esfuerzo. Del mismo modo, en un una empresa, un muy alto porcentaje del monto total facturado corresponde a un pequeño porcentaje de clientes; etc. Obviamente, estos porcentajes no son estrictamente 20-80%, pero el concepto se verifica en relaciones cercanas a ellos.

En particular, la ley de Pareto es aplicable a los inventarios, y muy particularmente en aquellas empresas que tienen un gran número de ítems diferentes para administrar. El principio "20-80" aplicado a los stocks se denomina "ABC". En general, una pequeña cantidad de los artículos que produce o comercializa la empresa implica un monto muy signifcativo en términos de ventas o de dinero inmovilizado en stocks. Esta condición lleva al principio de clasificación "ABC" en donde los artículos de la empresa se dividen básicamente en tres grupos: "A", "B" y "C".

En la Figura 28 se observa una curva típica "ABC", en donde los inventarios se clasifican con relación a cierta medida de importancia (por ejemplo, capital inmovilizado).

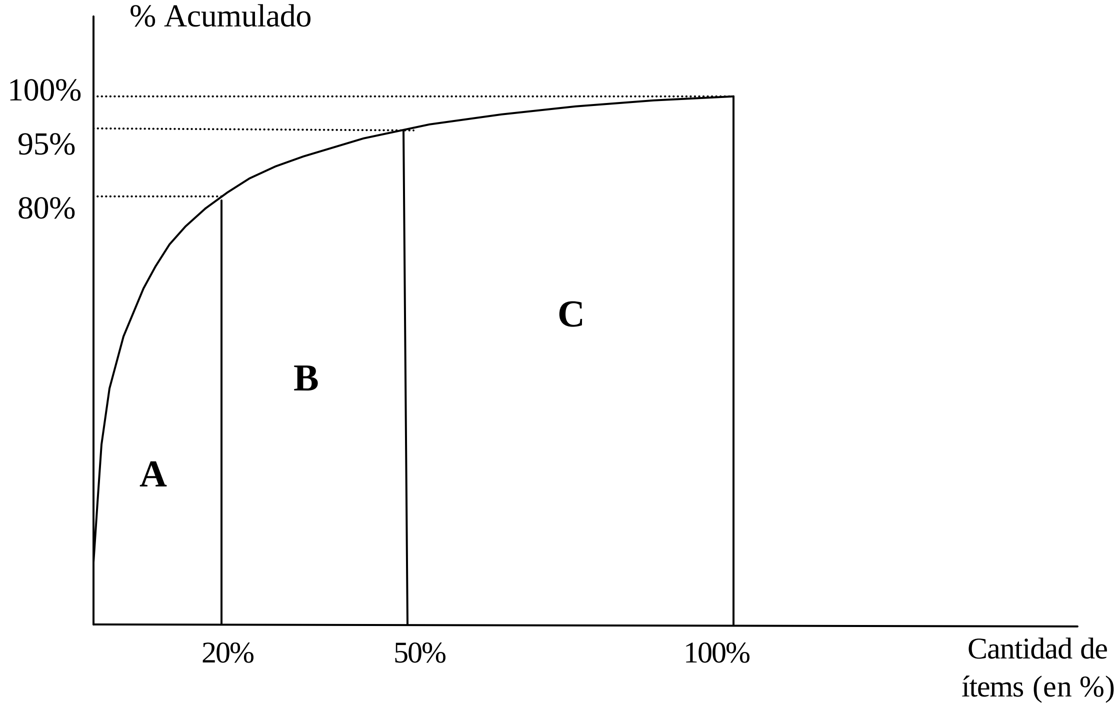


Figura 28

Si bien la determinación de los límites entre las categorías de los artículos o productos es subjetiva, la clase "A" típicamente contiene alrededor de un 20% de los ítems, lo que representa aproximadamente un 80% de la demanda valorizada. Estos productos son los más significativos y, en consecuencia, deberían administrase con mayor dedicación y esfuerzo, incluyendo una revisión continua de los niveles de stock. En general se los requiere con mayor frecuencia y en menor cantidad, tratando de mantener menores niveles de stock de seguridad. Las materias primas son un ejemplo de productos clasificados en el grupo "A".

En el otro extremo, la clase "C" contiene aproximadamente un 50% de los ítems y representa tan solo un 5% de la cantidad inmovilizada (o de la demanda valorizada). Desde que estos productos contribuyen muy poco en el costo total, pueden requerise en mayores cantidades y con menor frecuncia. Ejemplos de artículos de este grupo son materiales indirectos, de bajo precio de adquisición.

Finalmente, entre estas dos clases tenemos el grupo “B”, que típicamente consiste en un 30% de los ítems y representa un 15% del dinero inmovilizado (o de la demanda valorizada).

La clasificación en tres grupos es arbitraria, ya que podrían existir cualquier números de clases. Y, tal como se mencionó anteriormente, los porcentajes de cada categoría varía entre las distintas empresas. Algunas categorizan en un esquema 25-75, otras en 15-85, etc.

Lo importante es el concepto de que la mayor parte de la inmovilización en stocks puede ser muy bien controlada monitoreando con mayor intensidad un bajo porcentaje de los ítems (los correspondientes al grupo “A”).

Para efectuar la agrupación, primero se calcula el total de dinero inmovilizado o la demanda valorizada (según sea el criterio de clasificación) de cada uno de los ítems.

Supongamos el siguiente ejemplo en donde tenemos 12 artículos, para los cuales se conocen los precios de adquisición (“b”) y la demanda anual (“D”), y en donde los productos se clasifican por demanda valorizada. En la tabla I se han calculado dichos valores.

A los productos se los ordena por demanda valorizada en forma decreciente y se calculan los valores (y los porcentajes) acumulados de capital inmovilizado (o de demanda valorizada), tal como se muestra en la tabla II.

Tal como se mencionó, los límites de cada categoría son subjetivos. En este ejemplo se podrían clasificar en el grupo “A” a los ítems 005, 002 y 001, que constituyen sólamente el 25% de los artículos, pero que representan aproximadamente un 76% de demanda acumulada. En el grupo “B” estarían los ítems 008, 004 y 006. Finalmente, en la clase “C” tendríamos a los ítems 010, 009, 011, 003, 012 y 007.

Tabla I

Item	**Precio b**	**Demanda D**	**Demanda Valorizada b·D**	**% sobre Demanda Valorizada**
001	4	340	1.360	10,77
002	12	204	2.448	19,38
003	1	98	98	0,78
004	7	115	805	6,37
005	9	639	5.751	45,54
006	2	222	444	3,52
007	3	21	63	0,50
008	12	89	1.068	8,46
009	5	34	170	1,35
010	10	25	250	1,98
011	50	2	100	0,79
012	9	8	72	0,57
TOTAL			**12.629**	**100,00**

Tabla II

Item	Precio b	Demanda D	Demanda Valorizada b·D	% sobre Demanda Valorizada	% Demanda Valorizada Acumulado	% de Cantidad de Ítems Acumulado
005	9	639	5.751	45,54	45,54	8,33
002	12	204	2.448	19,38	64,92	16,67
001	4	340	1.360	10,77	75,69	25,00
008	12	89	1.068	8,46	84,15	33,33
004	7	115	805	6,37	90,52	41,67
006	2	222	444	3,52	94,04	50,00
010	10	25	250	1,98	96,02	58,33
009	5	34	170	1,35	97,36	66,67
011	50	2	100	0,79	98,16	75,00
003	1	98	98	0,78	98,93	83,33
012	9	8	72	0,57	99,50	91,67
007	3	21	63	0,50	100,00	100,00

Ejemplo 8.1:

Considerando los siguientes datos:

	A	***B***
D (u/año)	*1.000*	*900*
c_1 (\$/(u.año)	*10*	*12*
k (\$/lote)	*200*	*150*

e imponiendo la condición de que se deben emitir anualmente 9 órdenes entre "A" y "B", hallar los lotes óptimos de cada artículo.

Solución:

Haciendo caso omiso de la restricción, los lotes óptimos serían:

$$q_{oA} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_A \cdot D_A}{T \cdot c_{1A}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 200 \cdot 1.000}{1 \cdot 10}} = 200$$

$$q_{oB} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot D_B}{T \cdot c_{1B}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 900}{1 \cdot 12}} = 150$$

que generarían un Costo Total Esperado de 3.800 \$/año, emitiéndose anualmente:

$$n = \frac{D_A}{q_A} + \frac{D_B}{q_B} = \frac{1000}{200} + \frac{900}{150} = 11 \text{ órdenes}$$

Sin embargo, la restricción no se cumple. En consecuencia, se debe proceder como se vió más arriba, resolviendo el sistema de ecuaciones (12), (13) y (14):

$$q_A = \sqrt{\frac{2 \cdot k_A \cdot D_A + 2 \cdot \lambda \cdot D_A}{T \cdot c_{1A}}}$$

$$q_B = \sqrt{\frac{2 \cdot k_B \cdot D_B + 2 \cdot \lambda \cdot D_B}{T \cdot c_{1B}}}$$

$$\frac{D_A}{q_A} + \frac{D_B}{q_B} = TO$$

Los valores óptimos son, entonces:

$$q_A^* = 238{,}32$$

$$q_B^* = 187{,}34$$

$$\lambda = 83{,}99$$

Es decir, se pedirán:

$$n = \frac{1000}{238{,}32} + \frac{900}{187{,}34} = 9 \text{ órdenes}$$

y el Costo Total Esperado será:

$$CTE = \frac{1}{2} \cdot q_A \cdot c_{1A} \cdot T + k_A \cdot \frac{D_A}{q_A} + \frac{1}{2} \cdot q_B \cdot c_{1B} \cdot T + k_B \cdot \frac{D_B}{q_B} = 3.875{,}47 \frac{\$}{\text{año}}$$

Este problema formulado y resuelto con el sistema LINGO, se muestra a continuación.

```
MIN = CTE;

CTE = CTEa + CTEb;
CTEa = 0.5*qa*c1a+ ka*Da/qa;
na = Da / qa;
CTEb = 0.5*qb*c1b+ kb*Db/qb;
nb * qb = Db;

Da = 1000;
c1a = 10;
ka = 200;
Db = 900;
c1b = 12;
kb = 150;

na + nb = n;

n = 9 ;

END


Local optimal solution found at step:           5
 Objective value:                          3875.474
```

```
        Variable           Value        Reduced Cost
             CTE        3875.474           0.0000000
            CTEA        2030.810           0.0000000
            CTEB        1844.664           0.0000000
              BA       0.0000000           0.0000000
              DA        1000.000           0.0000000
              QA        238.3216         -0.1562145E-07
             C1A        10.00000           0.0000000
              KA        200.0000           0.0000000
              NA        4.196011           0.0000000
              BB       0.0000000           0.0000000
              DB        900.0000           0.0000000
              QB        187.3443           0.0000000
             C1B        12.00000           0.0000000
              KB        150.0000           0.0000000
              NB        4.803989           0.0000000
               N        9.000000           0.0000000

             Row    Slack or Surplus      Dual Price
               1        3875.474           -1.000000
               2       0.0000000           -1.000000
               3       0.0000000           -1.000000
               4       0.0000000           -83.98594
               5       0.0000000           0.0000000
               6       0.0000000           -1.000000
               7       0.0000000          -0.4482973
               8       0.0000000           0.0000000
               9       0.0000000           -1000.000
              10       0.0000000           -1.191608
              11       0.0000000           -119.1608
              12       0.0000000           -4.196011
              13       0.0000000           -900.0000
              14       0.0000000           -1.248962
              15       0.0000000           -93.67215
              16       0.0000000           -4.803989
              17       0.0000000            83.98594
              18       0.0000000            83.98594
```

Se puede observar el valor marginal de la restricción en la columna “Dual Price” de las filas 17 y 18.

Ejemplo 8.2:

Determinar los tamaños de lote óptimo para los tres productos indicados en la tabla, si existe una restricción de capacidad máxima de manufactura para los tres productos de 3.000 unidades.

ITEM	***X***	***Y***	***Z***
Demandas anuales	*1.200*	*2.000*	*900*
Costo de orden de fabricación ($)	*80*	*150*	*90*
Costo anual de almacenamiento por unidad	*0,15*	*0,20*	*0,20*

Solución:

El programa matemático consiste en minimizar:

$$CTE = \frac{1}{2} \cdot c_{1X} \cdot q_X \cdot T + k_X \cdot \frac{D_X}{q_X} + \frac{1}{2} \cdot c_{1Y} \cdot q_Y \cdot T + k_Y \cdot \frac{D_Y}{q_Y} + \frac{1}{2} \cdot c_{1Z} \cdot q_Z \cdot T + k_Z \cdot \frac{D_Z}{q_Z}$$

sujeto a la siguiente restricción:

$q_X + q_Y + q_Z \leq 3.000$

Para resolver, se aplican en primer las expresiones de lote óptimo:

$$q_{oX} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_X \cdot D_X}{T \cdot c_{1X}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \cdot 1.200}{1 \cdot 0{,}15}} = 1.131{,}37$$

$$q_{oY} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_Y \cdot D_Y}{T \cdot c_{1Y}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 2.000}{1 \cdot 0{,}20}} = 1.402{,}98$$

$$q_{oZ} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_Z \cdot D_Z}{T \cdot c_{1Z}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 90 \cdot 900}{1 \cdot 0{,}20}} = 900$$

y se observa si se cumple la restricción impuesta. Como la producción total $q_{oX} + q_{oY} + q_{oZ}$ es igual a 3763,42 unidades (es decir, mayor que la limitación), se debe aplicar la función de Lagrange:

$$L = \frac{1}{2} \cdot c_{1X} \cdot q_X \cdot T + k_X \cdot \frac{D_X}{q_X} + \frac{1}{2} \cdot c_{1Y} \cdot q_Y \cdot T + k_Y \cdot \frac{D_Y}{q_Y} + \frac{1}{2} \cdot c_{1Z} \cdot q_Z \cdot T + k_Z \cdot \frac{D_Z}{q_Z} +$$
$$+ \lambda \cdot (q_X + q_Y + q_Z - 3000) \quad \Rightarrow \quad \text{Min}$$

Derivando con respecto a q_X, q_{oY}, q_{oZ} y a λ, e igualando a 0, tendremos:

$$q^*_{oX} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_X \cdot D_X}{T \cdot c_{1X} + 2 \cdot \lambda}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \cdot 1200}{1 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot \lambda}}$$

$$q^*_{oY} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_Y \cdot D_Y}{T \cdot c_{1Y} + 2 \cdot \lambda}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 150 \cdot 2000}{1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot \lambda}}$$

$$q^*_{oZ} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_Z \cdot D_Z}{T \cdot c_{1Z} + 2 \cdot \lambda}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 90 \cdot 900}{1 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot \lambda}}$$

$$q_X + q_Y + q_Z - 3.000 = 0$$

Resolviendo este sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas se llega al siguiente resultado óptimo:

$$q^*_{oX} = 868{,}02$$

$$q^*_{oY} = 1.402{,}98$$

$$q^*_{oZ} = 729$$

$$\lambda = 0{,}05241$$

A continuación se muestra el problema formulado y resuelto con el sistema LINGO.

```
MIN = CTEX + CTEY + CTEZ ;
```

```
CTEX = bX * DX + 0.5 * qX * c1X + kX * DX /qX ;
nX = DX / qX ;
CTEY = bY * DY + 0.5 * qY * c1Y + kY * DY /qY ;
nY = DY / qY ;
CTEZ = bZ * DZ + 0.5 * qZ * c1Z + kZ * DZ /qZ ;
nZ = DZ / qZ ;

QT = QX+QY+QZ;

!Datos:
bX = 0;
DX = 1200;
c1X = 0.15;
kX = 80;

bY = 0;
DY = 2000;
c1Y = 0.20;
kY = 150;

bZ = 0;
DZ = 900;
c1Z = 0.20;
kZ = 90;

!Restricción:
QT < 3000;

END
```

```
Local optimal solution found at step:          63
 Objective value:                          713.8377
```

Variable	Value	Reduced Cost
CTEX	175.6981	0.0000000
CTEY	354.1288	0.0000000
CTEZ	184.0107	0.0000000
BX	0.0000000	0.0000000
DX	1200.000	0.0000000
QX	868.0185	0.0000000
C1X	0.1500000	0.0000000
KX	80.00000	0.0000000
NX	1.382459	0.0000000
BY	0.0000000	0.0000000
DY	2000.000	0.0000000
QY	1402.975	0.0000000
C1Y	0.2000000	0.0000000
KY	150.0000	0.0000000
NY	1.425543	0.0000000
BZ	0.0000000	0.0000000
DZ	900.0000	0.0000000
QZ	729.0070	0.0000000
C1Z	0.2000000	0.0000000
KZ	90.00000	0.0000000
NZ	1.234556	0.0000000
QT	3000.000	0.0000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	713.8377	-1.000000
2	0.0000000	-1.000000
3	0.0000000	0.0000000
4	0.0000000	-1.000000
5	0.0000000	0.0000000
6	0.0000000	-1.000000
7	0.0000000	0.0000000
8	0.0000000	-1200.000
9	0.0000000	-0.9216394E-01
10	0.0000000	-434.0092
11	0.0000000	-1.382459
12	0.0000000	-2000.000
13	0.0000000	-0.1069157
14	0.0000000	-701.4873

```
15       0.0000000           -1.425543
16       0.0000000           -900.0000
17       0.0000000          -0.1234556
18       0.0000000           -364.5035
19       0.0000000           -1.234556
20       0.0000000          -0.5241286E-01
21       0.0000000           0.5241286E-01
```

Se observa que el valor marginal de la restricción impuesta es 0,05241

Ejemplo 8.3:

Una pequeña compañía adquiere tres tipos de subcomponentes. La administración estableció que la inversión máxima en estos ítems no debe exceder $ 15.000.

Suponiendo que la tasa de inmovilización es del 20%, calcular los lotes óptimos de compra.

ITEM	***1***	***2***	***3***
Demandas anuales	*1.000*	*1.000*	*2.000*
Costo de orden de fabricación ($)	*50*	*20*	*80*
Costo unitarios de compra	*50*	*40*	*50*

Solución:

El modelo matemático consiste en minimizar:

$$CTE = b_1 \cdot D_1 + \frac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot q_1 \cdot T + k_1 \cdot \frac{D_1}{q_1} + b_2 \cdot D_2 + \frac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot q_2 \cdot T + k_2 \cdot \frac{D_2}{q_2} + b_3 \cdot D_3 + \frac{1}{2} \cdot c_{13} \cdot q_3 \cdot T$$

$$+ k_3 \cdot \frac{D_3}{q_3} \quad \Rightarrow \quad \text{Min}$$

Sujeto a:

$$b_1 \cdot q_1 + b_2 \cdot q_2 + b_3 \cdot q_3 \leq 15.000$$

En primer lugar se calculan los lotes óptimos, con independencia de la restricción:

$$q_{o1} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_1 \cdot D_1}{T \cdot b_1 \cdot i}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 1.000}{1 \cdot 50 \cdot 0{,}20}} = 100$$

$$q_{o2} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_2 \cdot D_2}{T \cdot b_2 \cdot i}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 1.000}{1 \cdot 40 \cdot 0{,}20}} = 70{,}71$$

$$q_{o3} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_3 \cdot D_3}{T \cdot b_3 \cdot i}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \cdot 2.000}{1 \cdot 50 \cdot 0{,}20}} = 178{,}89$$

Con estos lotes se tiene una inversión máxima igual a $16.772,70. Debido a que supera al valor impuesto, se debe formular el Lagrangiano:

$$L = b_1 \cdot D_1 + \frac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot q_1 \cdot T + k_1 \cdot \frac{D_1}{q_1} + b_2 \cdot D_2 + \frac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot q_2 \cdot T + k_2 \cdot \frac{D_2}{q_2} + b_3 \cdot D_3 + \frac{1}{2} \cdot c_{13} \cdot q_3 \cdot T$$
$$+ k_3 \cdot \frac{D_3}{q_3} + \lambda \cdot \left(b_1 \cdot q_1 + b_2 \cdot q_2 + b_3 \cdot q_3 - 15.000\right) \quad \Rightarrow \quad \text{Min}$$

Derivando con respecto a cada variable de decisión y con respecto al multiplicador de Lagrange, y despejando, queda formulado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$q^*_{o1} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_1 \cdot D_1}{T \cdot b_1 \cdot i + 2 \cdot \lambda \cdot b_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 1.000}{1 \cdot 50 \cdot 0{,}20 + 2 \cdot \lambda \cdot 50}}$$

$$q^*_{o2} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_2 \cdot D_2}{T \cdot b_2 \cdot i + 2 \cdot \lambda \cdot b_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 1.000}{1 \cdot 40 \cdot 0{,}20 + 2 \cdot \lambda \cdot 40}}$$

$$q^*_{o3} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_3 \cdot D_3}{T \cdot b_3 \cdot i + 2 \cdot \lambda \cdot b_3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 80 \cdot 2.000}{1 \cdot 50 \cdot 0{,}20 + 2 \cdot \lambda \cdot 50}}$$

cuyo resultado nos lleva a:

$$q^*_{o1} = 89{,}43$$

$$q^*_{o2} = 63{,}24$$

$$q^*_{o3} = 159{,}98$$

$$\lambda = 0{,}025033$$

El valor marginal significa que por cada peso adicional que se pudiera inmovilizar, el costo total esperado disminuiría en, aproximadamente, 0,025$.

Este problema se pudo haber resuelto, por supuesto con un sistema de programación matemática con capacidad de resolución no lineal. Formulando el problema por ejemplo con el sistema LINGO:

```
MIN = CTE1 + CTE2  + CTE3  ;

CTE1 = b1 *D1 + 0.5*q1 *c11 + k1 *D1 /q1 ;
n1 = D1 / q1 ;

CTE2  = b2  *D2  + 0.5*q2  *c12  + k2  *D2  /q2  ;
n2  = D2  / q2  ;

CTE3  = b3  *D3  + 0.5*q3  *c13  + k3  *D3  /q3  ;
n3  = D3  / q3  ;

i = 0.20;
b1 = 50;
D1 = 1000;
c11 = i * b1;
k1 = 50;

b2  = 40;
D2  = 1000;
k2  = 20;
c12 = i * b2;
```

```
b3  = 50;
D3  = 2000;
k3  = 80;
c13 = i*b3;

IT = q1 * b1 + q2 * b2 + q3 * b3 ;
IT < 15000;
END
```

La resolución de este modelo lleva al siguiente resultado:

```
Local optimal solution found at step:            91
 Objective value:                          193375.5

                       Variable           Value        Reduced Cost
                           CTE1        51006.25           0.0000000
                           CTE2        40569.22           0.0000000
                           CTE3        101800.0           0.0000000
                             B1        50.00000           0.0000000
                             D1        1000.000           0.0000000
                             Q1        89.43104           0.0000000
                            C11        10.00000           0.0000000
                             K1        50.00000           0.0000000
                             N1        11.18180           0.0000000
                             B2        40.00000           0.0000000
                             D2        1000.000           0.0000000
                             Q2        63.23730           0.2117961E-06
                            C12        8.000000           0.0000000
                             K2        20.00000           0.0000000
                             N2        15.81345           0.0000000
                             B3        50.00000           0.0000000
                             D3        2000.000           0.0000000
                             Q3        159.9791          -0.1927393E-06
                            C13        10.00000           0.0000000
                             K3        80.00000           0.0000000
                             N3        12.50163           0.0000000
                              I       0.2000000           0.0000000
                             IT        15000.00           0.0000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        193375.5           -1.000000
                              2       0.0000000           -1.000000
                              3       0.0000000           0.0000000
                              4       0.0000000           -1.000000
                              5       0.0000000           0.0000000
                              6       0.0000000           -1.000000
                              7       0.0000000           0.0000000
                              8       0.0000000           -7500.000
                              9       0.0000000           -1011.182
                             10       0.0000000           -50.55909
                             11       0.0000000           -44.71552
                             12       0.0000000           -11.18180
                             13       0.0000000           -1007.907
                             14       0.0000000           -40.31627
                             15       0.0000000           -15.81345
                             16       0.0000000           -31.61865
                             17       0.0000000           -2020.003
                             18       0.0000000           -50.50007
                             19       0.0000000           -12.50163
                             20       0.0000000           -79.98956
                             21       0.0000000          -0.2503263E-01
                             22       0.0000000           0.2503263E-01
```

Ejemplo 8.4:

Una fábrica elabora dos productos "A" y "B". Se sabe que cada unidad de cualquiera de los dos productos ocupa 1 m^2 *de superficie. El tiempo de preparación del herramental y* *de la línea de fabricación de cada lote del artículo "A" insume 10 hs., mientras que el de "B" lleva 15 hs. La disponibilidad de superficie para el almacenamiento de estos dos productos es de 1.200 m² y se ha establecido que el tiempo total de preparación de los lotes no debe superar las 2.500 horas en un año.*

Los datos relevantes para los ítems "A" y "B" son, respectivamente:

- *Demanda anual: 40.000 y 60.000 unidades.*
- *Costo de preparación de lotes 50$/hora y 96$/hora.*
- *Costo de mantenimiento anual por unidad: 4.000 $ y 120$*

Determinar los lotes óptimos de fabricación.

Solución:

Los datos del problema son:

$$D_1 = 40.000 \text{ u / año}$$

$$D_2 = 60.000 \text{ u / año}$$

$$k_1 = 50 \text{ \$ / hora} \cdot 10 \text{ h / lote} = 500 \text{ \$ / lote}$$

$$k_2 = 96 \text{ \$ / hora} \cdot 15 \text{ h / lote} = 1.440 \text{ \$ / lote}$$

$$c_{11} = 4.000 \text{ \$/(u año)}$$

$$c_{12} = 120 \text{ \$/(u año)}$$

$$TPL \le 2.500 \text{ hs / año}$$

$$S \le 1.200 \text{ m}^3$$

Se debe plantear el siguiente programa matemático:

$$CTE = \frac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot q_1 \cdot T + k_1 \cdot \frac{D_1}{q_1} + \frac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot q_2 \cdot T + k_2 \cdot \frac{D_2}{q_2} \quad \Rightarrow \quad \text{Min}$$

Sujeto a:

$$10 \cdot \frac{D_1}{q_1} + 15 \cdot \frac{D_2}{q_2} \le 2.500$$

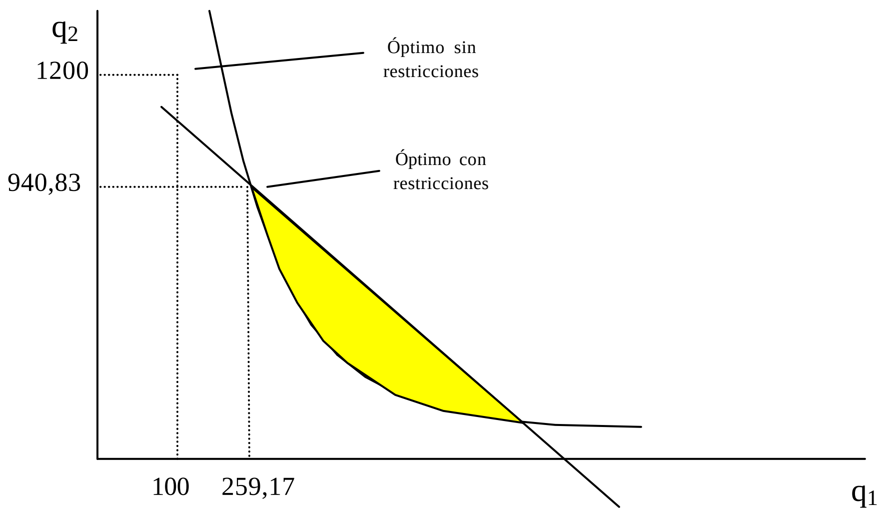
$$1 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 \le 1.200$$

En primer lugar se verifica si los lotes óptimos (sin considerar las restricciones) satisfacen las restricciones.

$$q_{o1} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_1 \cdot D_1}{T \cdot c_{11}}} = 100$$

$$q_{o2} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_2 \cdot D_2}{T \cdot c_{12}}} = 1.200$$

Estos valores nos llevan a inmovilizar 4.750$ por año y a ocupar 1.300 m^3; es decir, no se satisface ninguna de las dos restricciones, tal como se observa en el gráfico, El óptimo sujeto a las limitaciones impuestas estará en donde se cortan las dos curvas, siendo, según las condiciones de KKT, $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 > 0$.



Analíticamente se puede resolver planteando el Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot q_1 \cdot T + k_1 \cdot \frac{D_1}{q_1} + \frac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot q_2 \cdot T + k_2 \cdot \frac{D_2}{q_2} + \lambda \cdot \left[10 \cdot \frac{D_1}{q_1} + 15 \cdot \frac{D_2}{q_2} - 2.500 \right] +$$
$$+ \mu \cdot [q_1 + q_2 - 1.200] \quad \Rightarrow \quad \text{Min}$$

Derivando con respecto a cada variabla y a los multiplicadores, e igualando a cero cada una de las expresiones:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot T - \frac{k_1 \cdot D_1}{q_1^2} - \frac{10 \cdot D_1 \cdot \lambda}{q_1^2} + \mu = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot T - \frac{k_2 \cdot D_2}{q_2^2} - \frac{15 \cdot D_2 \cdot \lambda}{q_2^2} + \mu = 0$$

$$10 \cdot \frac{D_1}{q_1} + 15 \cdot \frac{D_2}{q_2} - 2.500 = 0$$

$$1 \cdot q_1 + 1 \cdot q_2 - 1.200 = 0$$

Resolviendo este sistema de cuatro ecuaciones con 4 incógnitas:

$q^*_{o1} = 259{,}17$

$q^*_{o2} = 940{,}83$

$\lambda = 352{,}3069$

$\mu = 395,8204$

Este problema, formulado y resuelto con el sistema LINGO, se muestra a continuación:

```
MIN = CTE1  + CTE2 ;

CTE1  =  0.5*q1  *c11  + k1  *D1  /q1  ;
n1  = D1  / q1 ;

CTE2  = 0.5*q2  *c12  + k2  *D2  /q2  ;
n2  = D2  / q2  ;

D1  = 40000;
c11  = 4000;
k1  = 500;

D2  = 60000;
c12  = 120;
k2  = 1440;

10*n1+15*n2 = TPL;
q1 + q2 = S;
TPL < 2500;
S < 1200;

END
```

```
Local optimal solution found at step:              3
Objective value:                            743789.7

                       Variable           Value        Reduced Cost
                           CTE1        595506.2           0.0000000
                           CTE2        148283.5           0.0000000
                             Q1        259.1681           0.0000000
                            C11        4000.000           0.0000000
                             K1        500.0000           0.0000000
                             D1        40000.00           0.0000000
                             N1        154.3400           0.0000000
                             Q2        940.8319           0.0000000
                            C12        120.0000           0.0000000
                             K2        1440.000           0.0000000
                             D2        60000.00           0.0000000
                             N2        63.77335           0.0000000
                            TPL        2500.000           0.0000000
                              S        1200.000           0.0000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        743789.7           -1.000000
                              2     -0.3451714E-06        -1.000000
                              3       0.0000000           -3523.069
                              4     -0.3009336E-07        -1.000000
                              5       0.0000000           -5284.603
                              6       0.0000000           -15.52301
                              7       0.0000000           -129.5841
                              8       0.0000000           -154.3400
                              9       0.0000000           -7.147507
                             10       0.0000000           -470.4159
                             11       0.0000000           -63.77335
                             12       0.0000000            352.3069
                             13       0.0000000            395.8204
                             14       0.0000000            352.3069
                             15       0.0000000            395.8204
```

Ejemplo 8.5:

Formular y resolver y determinar el impacto que produciría el hecho de que en el problema anterior se incluya una restricción adicional tipo operativa que establece que los lotes deben ser superiores a 400 unidades pero menores a 1.100 unidades.

Solución:

Para resolver el problema con el sistema LINGO, simplemente se agregan al modelo formulado anteriormente las cuatro restricciones impuestas y se resuelve, como se indica a continuación:

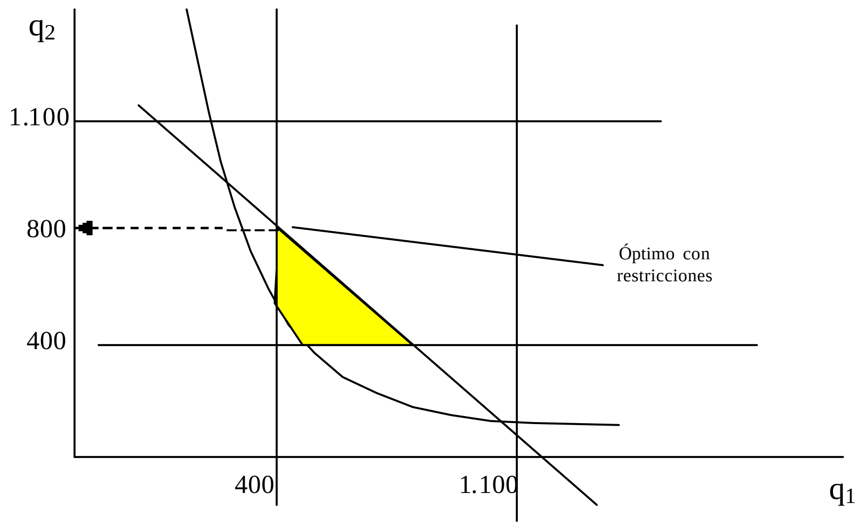
```
MIN = CTE1  + CTE2 ;

CTE1  =  0.5*q1  *c11  + k1  *D1  /q1  ;
n1  = D1  / q1 ;

CTE2  = 0.5*q2  *c12  + k2  *D2  /q2  ;
n2  = D2  / q2  ;

D1  = 40000;
c11  = 4000;
k1  = 500;

D2  = 60000;
c12  = 120;
k2  = 1440;

10*n1+15*n2 = TPL;
q1 + q2 = S;
TPL < 2500;
S < 1200;
q1 < 1100;
q2 < 1100;
q1 > 400;
q2 > 400;

END
```

```
Local optimal solution found at step:              6
 Objective value:                            1006000.

                       Variable           Value        Reduced Cost
                           CTE1        850000.0           0.0000000
                           CTE2        156000.0           0.0000000
                             Q1        400.0000           0.0000000
                            C11        4000.000           0.0000000
                             K1        500.0000           0.0000000
                             D1        40000.00           0.0000000
                             N1        100.0000           0.0000000
                             Q2        800.0000           0.0000000
                            C12        120.0000           0.0000000
                             K2        1440.000           0.0000000
                             D2        60000.00           0.0000000
                             N2        75.00000           0.0000000
                            TPL        2125.000           0.0000000
                              S        1200.000           0.0000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        1006000.          -1.000000
                              2       0.0000000          -1.000000
                              3       0.0000000           0.0000000
                              4       0.0000000          -1.000000
                              5       0.0000000           0.0000000
                              6       0.0000000          -1.250000
                              7       0.0000000          -200.0000
                              8       0.0000000          -100.0000
```

9	0.0000000	-1.800000
10	0.0000000	-400.0000
11	0.0000000	-75.00000
12	0.0000000	0.0000000
13	0.0000000	74.99998
14	375.0000	0.0000000
15	0.0000000	74.99998
16	700.0000	0.0000000
17	300.0000	0.0000000
18	0.0000000	-1950.000
19	400.0000	0.0000000

El valor negativo del valor marginal de la restricción de mínimo de q_1 (restricción 18), está indicando la conveniencia de limitar en menos de 400 unidades.

Gráficamente:



Ejemplo 8.6:

Una empresa que trabaja con un criterio de optimización de sus inventarios, importa dos artículos por un monto anual de US$ 1.000.000, correspondientdo un 40% al artículo “I” y un 60% al artículo “II”.

Existe una restricción financiera de no inmovilizar en promedio más de una cierta cantidad de dinero en estos artículos. Se sabe también que la tasa de interés anual es del 18%.

La demanda anual es de 8.000 unidades para el artículo “I” y de 4.000 para el “II”.

Sabiendo que por cada dólar adicional que se pudiera inmovilizar en inventarios se reduciría el costo total en US$ 0,10125 y que los lotes óptimos para los artículo I y II son respectivamente 1.280 y 640 unidades, determinar cuál es el costo de las órdenes de compra y cuál el monto de inmovilización promedio máximo que se está aplicando.

Solución:

Los parámetros del problema son los siguientes:

$i = 0{,}18$

$D_I = 8.000$
$D_{II} = 4.000$
$\lambda = 0{,}10125$
$q_{oI} = 1.280$
$q_{oII} = 640$

Además se sabe que:

$$b_I \cdot D_I = 400.000 \qquad \Rightarrow \qquad b_I = \frac{400.000}{8.000} = 50$$

$$b_{II} \cdot D_{II} = 600.000 \qquad \Rightarrow \qquad b_{II} = \frac{600.000}{4.000} = 150$$

y, suponiendo que los costos operativos de mantenimiento son nulos, se tiene que:

$$c_{1I} = b_I \cdot i$$

$$c_{1II} = b_{II} \cdot i$$

Por su parte, las variables son k_I, k_{II} y TI. El planteo matemático del problema es el siguiente:

$$CTE = b_I \cdot D_I + \frac{1}{2} \cdot q_I \cdot c_{1I} \cdot T + k_I \cdot \frac{D_I}{q_I} + b_{II} \cdot D_{II} + \frac{1}{2} \cdot q_{II} \cdot c_{1II} \cdot T + k_{II} \cdot \frac{D_{II}}{q_{II}} \quad \Rightarrow \quad Min$$

sujeto a:

$$\frac{1}{2} \cdot b_I \cdot q_I + \frac{1}{2} \cdot b_{II} \cdot q_{II} \leq TI$$

Del enunciado del problema se infiere que la restricción de Total Inmovilizado Promedio no se cumple, ya que el valor marginal de ella es diferente a cero. Como esta limitación no se verifica, el óptimo estará sobre la igualdad, por lo que se plantea el Lagrangiano:

$$L = b_I \cdot D_I + \frac{1}{2} \cdot q_I \cdot b_I \cdot i \cdot T + k_I \cdot \frac{D_I}{q_I} + b_{II} \cdot D_{II} + \frac{1}{2} \cdot q_{II} \cdot b_{II} \cdot i \cdot T + k_{II} \cdot \frac{D_{II}}{q_{II}} +$$
$$+ \lambda \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot b_I \cdot q_I + \frac{1}{2} \cdot b_{II} \cdot q_{II} - TI \right] \Rightarrow Min$$

Derivando con respecto a cada variable y con respecto al multiplicador de Lagrange, e igualando a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial q_I} = \frac{1}{2} \cdot b_I \cdot i \cdot T - \frac{k_I \cdot D_I}{q_I^2} + \lambda \cdot \frac{b_I}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_I^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_I \cdot D_I}{b_I \cdot (i \cdot T + \lambda)}}$$

$$\therefore \qquad 1.280 = \sqrt{\frac{2 \cdot k_I \cdot 8.000}{50 \cdot (0{,}18 \cdot 1 + 0{,}10125)}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_{II}} = \frac{1}{2} \cdot b_{II} \cdot i \cdot T - \frac{k_{II} \cdot D_{II}}{q_{II}^2} + \lambda \cdot \frac{b_{II}}{2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q_{II}^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_{II} \cdot D_{II}}{b_{II} \cdot (i \cdot T + \lambda)}}$$

$$\therefore \qquad 640 = \sqrt{\frac{2 \cdot k_{II} \cdot 4.000}{150 \cdot (0{,}18 \cdot 1 + 0{,}10125)}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \cdot b_I \cdot q_I + \frac{1}{2} \cdot b_{II} \cdot q_{II} - TI = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2} \cdot b_I \cdot q_I + \frac{1}{2} \cdot b_{II} \cdot q_{II} = TI$$

$$\therefore \qquad \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 1.280 + \frac{1}{2} \cdot 150 \cdot 640 = TI$$

Resolviendo este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, se tiene que:

$k_I = 1.440$

$k_{II} = 2.160$

$TI = 80.000$

Ejemplo 8.7:

Una empresa importa dos productos de un mismo proveedor. Los datos son los siguientes:

ITEM	***Demanda anual***	***Precio unitario***	***Costo anual de almacenamiento***
1	*1.000*	*200*	*60*
2	*50*	*1.000*	*150*

La gerencia estableció que cada despacho se debe hacer en forma conjunta y que cada pedido debe incluir cantidades de ambos productos.

El costo de una orden es de $1.000, y se puede suponer que ambos productos lo absorben en forma idéntica.

Determinar el número óptimo de órdenes a emitir por año, y las cantidades de cada uno de los productos.

Cuál sería el resultado si la restricción consistiera en solicitar en forma conjunta, pero no necesarimaente debe contener cantidades de ambos productos.

Solución:

Los datos son, entonces:

$b_1 = 200$; $D_1 = 1.000$; $c_{11} = 60$; $k_1 = 500$;
$b_2 = 1.000$; $D_2 = 50$; $c_{12} = 150$; $k_2 = 500$;

La función objetivo es minimizar:

$$CTE = b_1 \cdot D_1 + \frac{1}{2} \cdot q_1 \cdot c_{11} \cdot T + k_1 \cdot \frac{D_1}{q_1} + b_2 \cdot D_2 + \frac{1}{2} \cdot q_2 \cdot c_{12} \cdot T + k_2 \cdot \frac{D_2}{q_2}$$

y la restricción:

$$\frac{D_1}{q_1} = \frac{D_2}{q_2} \qquad \Rightarrow \qquad D_1 \cdot q_2 - D_2 \cdot q_1 = 0$$

En primer lugar se verifica si los óptimos (sin considerar la restricción impuesta) satisfacen o no la restricción:

$$q_{o1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500 \cdot 1.000}{1 \cdot 60}} \cong 129{,}10$$

$$q_{o2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 500 \cdot 50}{1 \cdot 150}} \cong 18{,}28$$

Esto implica pedir 7,75 veces por año el producto “1” y 2,74 veces el producto “2”. Como no se cumple la restricción impuesta, se plantea el Lagrangiano:

$$L = b_1 \cdot D_1 + \frac{1}{2} \cdot q_1 \cdot c_{11} \cdot T + k_1 \cdot \frac{D_1}{q_1} + b_2 \cdot D_2 + \frac{1}{2} \cdot q_2 \cdot c_{12} \cdot T + k_2 \cdot \frac{D_2}{q_{2B}} + \lambda \cdot (D_2 \cdot q_1 - D_1 \cdot q_2)$$

Luego, se deriva con respecto a cada lote y con respecto al multiplicador, e igualando a cero esas derivadas se obtiene un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$q_1^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_1 \cdot D_1}{T \cdot c_{11} - 2 \cdot \lambda \cdot D_2}}$$

$$q_2^* = \sqrt{\frac{2 \cdot k_2 \cdot D_2}{T \cdot c_{12} + 2 \cdot \lambda \cdot D_1}}$$

$$\frac{D_1}{q_1} = \frac{D_2}{q_2}$$

cuya resolución es:

$$q_1^* = 172{,}13$$
$$q_2^* = 8{,}61$$
$$\lambda = 0{,}2625$$

Se observa que con esta solución se piden aproximadamente 5,81 veces por año para cada producto.

La formulación del problema, y la solución correspondiente, utilizando el sistema LINGO es la siguiente:

```
MIN = CTE1 + CTE2 ;

CTE1 = b1 *D1 + 0.5*q1 *c11 + k1 *D1 /q1 ;
n1 = D1 / q1 ;

CTE2  = b2  *D2  + 0.5*q2  *c12  + k2  *D2  /q2  ;
n2  = D2  / q2  ;

b1 = 200;
D1 = 1000;
c11 = 60;
k1 = 500;

b2  = 1000;
D2  = 50;
k2  = 500;
c12 = 150;
n1 - n2 = 0;
END
```

```
Local optimal solution found at step:             38
 Objective value:                            261619.0

                       Variable           Value        Reduced Cost
                           CTE1        208068.7           0.0000000
                           CTE2        53550.23           0.5960464E-07
                             B1        200.0000           0.0000000
                             D1        1000.000           0.0000000
                             Q1        172.1326           0.0000000
                            C11        60.00000           0.0000000
                             K1        500.0000           0.0000000
                             N1        5.809475           0.0000000
                             B2        1000.000           0.0000000
                             D2        50.00000           0.0000000
                             Q2        8.606629           0.0000000
                            C12        150.0000           0.0000000
                             K2        500.0000           0.0000000
                             N2        5.809475           0.0000000
```

Para responder a la segunda pregunta, se sabe que con los óptimos sin restricción q_{o1} y q_{o2}, las cantidades de pedidos a solicitar serían:

$$n_1 = \frac{D_1}{q_{o1}} = \frac{1.000}{129{,}10} = 7{,}75$$

$$n_2 = \frac{D_2}{q_{o2}} = \frac{50}{18{,}28} = 2{,}74$$

La relación:

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{7{,}75}{2{,}74} = 2{,}81$$

está comprendida entre 2 y 3. Por lo tanto habrá que resolver el problema para $n_1 = 2 \cdot n_2$ y para $n_1 = 3 \cdot n_2$.

Considerando la restricción $n_1 = 2 \cdot n_2$ y resolviendo, tendremos:

CTE = 260.606,60

$q_1^* = 141,42$

$n_1 = 7,0711$

$q_2^* = 14,142$

$n_2 = 3,5355$

Por su parte, considerando la restricción $n_1 = 3 \cdot n_2$ y resolviendo:

CTE = 260.488,10

$q_1^* = 127,13$

$n_1 = 7,8661$

$q_2^* = 19,07$

$n_2 = 2,6220$

En consecuencia, dado que este segundo caso genera un menor CTE, se deberá solicitar 127,13 unidades del producto 1 y 19,07 unidades del producto 2. Cada entrega del producto 2 se deberá hacer cada tres entregas del producto 1.

Ejemplo 8.8:

Un laboratorio de productos químicos debe planificar la compra de dos ítems ("1" y "2") a un único proveedor. Los datos son los siguientes:

ITEM	***Demanda anual***	***Costo de orden***	***Costo anual de almacenamiento***
1	*6.000*	*4,9*	*12*
2	*3.000*	*2,5*	*6*

El proveedor tiene una capacidad máxima de distribución por pedido de 100 unidades del ítem "1" o de 75 unidades del ítem "2" (o una combinación lineal entre las referidas cantidades).

Por otra parte, la Gerencia de Compras estableció que se deberán emitir igual cantidad de órdenes en el año para cada producto.

Solución:

Se debe plantear el siguiente programa matemático:

$$CTE = \frac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot q_1 \cdot T + k_1 \cdot \frac{D_1}{q_1} + \frac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot q_2 \cdot T + k_2 \cdot \frac{D_2}{q_2} \quad \Rightarrow \quad Min$$

Sujeto a:

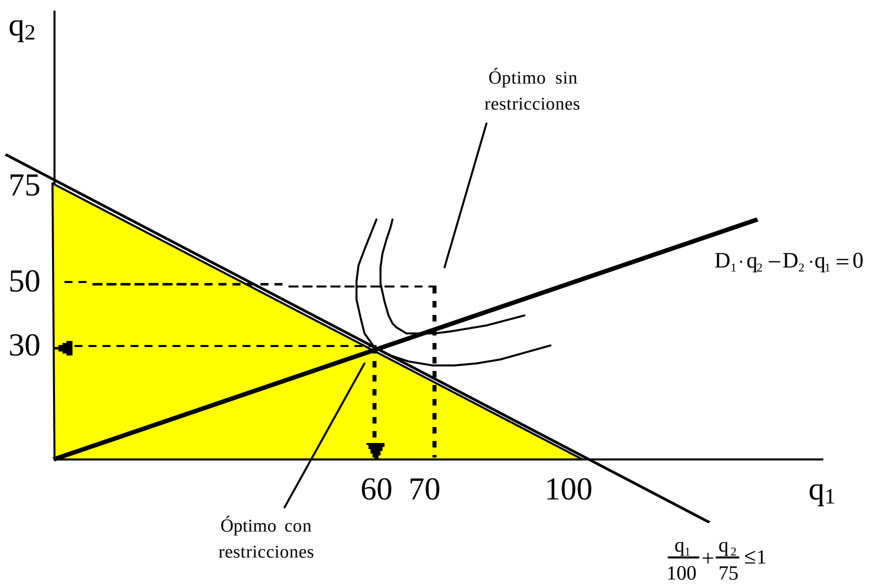
$$\frac{q_1}{100} + \frac{q_2}{75} \le 1$$
$$D_1 \cdot q_2 - D_2 \cdot q_1 = 0$$

En primer lugar se verifica si los lotes óptimos (sin considerar las restricciones) satisfacen las restricciones.

$$q_{o1} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_1 \cdot D_1}{T \cdot c_{11}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4{,}90 \cdot 6000}{1 \cdot 12}} = 70$$

$$q_{o2} = \sqrt{\frac{2 \cdot k_2 \cdot D_2}{T \cdot c_{12}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}50 \cdot 3000}{1 \cdot 6}} = 50$$

Como no se satisfacen las restricciones, el óptimo estará cuando la primera restricción se hace una igualdad, es decir en la intersección de las dos rectas.



De manera que una forma calcular los valores óptimos para este problema es resolviendo el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. El resultado óptimo es, entonces:

$q^*_{o1} = 60$

$q^*_{o2} = 30$

La otra forma, consiste en plantear la función de Lagrange, como sigue:

$$L = \frac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot q_1 \cdot T + k_1 \cdot \frac{D_1}{q_1} + \frac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot q_2 \cdot T + k_2 \cdot \frac{D_2}{q_2} + \lambda \cdot \left(\frac{q_1}{100} + \frac{q_2}{75} - 1 \right) + \mu \cdot \left(\frac{D_1}{q_1} - \frac{D_2}{q_2} \right)$$

Derivando con respecto a las variables e igualando a cero:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{1}{2} \cdot c_{11} \cdot T - \frac{k_1 \cdot D_1}{q_1^2} + \frac{\lambda}{100} - \mu \cdot \frac{D_1}{q_1^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{1}{2} \cdot c_{12} \cdot T - \frac{k_2 \cdot D_2}{q_2^2} + \frac{\lambda}{75} + \mu \cdot \frac{D_2}{q_2^2} = 0$$

$$\frac{q_1}{100} + \frac{q_2}{75} = 1$$

$$D_1 \cdot q_2 - D_2 \cdot q_1 = 0$$

Resolviendo el sistema de 4 ecuaciones con cuatro incógnitas se llega al resultado:

$q^*_{o1} = 60$

$q^*_{o2} = 30$

$\lambda = 290$

$\mu = 0{,}44$

Finalmente, planteando el problema y resolviéndolo que el LINGO:

```
MIN = CTE1 + CTE2;

CTE1 = b1 *D1 + 0.5*q1 *c11 + k1 *D1 /q1 ;
n1 = D1 / q1 ;

CTE2  = b2  *D2  + 0.5*q2  *c12  + k2  *D2  /q2  ;
n2  = D2  / q2  ;

q1/100 + q2/75 < 1;
n1 = n2;

D1 = 6000;
c11 = 12;
k1 = 4.9;

D2  = 3000;
c12  = 6;
k2  = 2.5;

END
```

Variable	Value	Reduced Cost
CTE1	850.0000	0.0000000
CTE2	340.0000	0.0000000
B1	0.0000000	6000.000
D1	6000.000	0.0000000
Q1	60.00000	0.0000000
C11	12.00000	0.0000000
K1	4.900000	0.0000000
N1	100.0000	0.0000000
B2	0.0000000	3000.000
D2	3000.000	0.0000000
Q2	30.00000	0.0000000
C12	6.000000	0.0000000
K2	2.500000	0.0000000
N2	100.0000	0.0000000

```
Row    Slack or Surplus      Dual Price
  1        1190.000           -1.000000
  2       0.0000000           -1.000000
  3       0.0000000          -0.4400001
  4       0.0000000           -1.000000
  5       0.0000000           0.4400001
  6       0.0000000            289.9999
  7       0.0000000           0.4400001
  8       0.0000000          -0.8900000E-01
  9       0.0000000           -30.00000
 10       0.0000000           -100.0000
 11       0.0000000          -0.6866666E-01
 12       0.0000000           -15.00000
 13       0.0000000           -100.0000
```

Ejemplo 8.9:

Se comercializan tres productos "A", "B" y "C", con los siguientes datos:

ITEM	Precio Unitario (b)	Demanda Anual (D_i)
A	350	1.000
B	290	2.300
C	470	950

La política de abastecimiento fijada establece que deben emitirse, conjuntamente, 75 órdenes de compra por año. En función de ello, la Gerencia de Compras está ordenando 25 veces por año para cada producto.

1) Calcular el Total de dinero Inmovilizado promedio actual.

2) Determinar la política óptima a seguir para minimizar la cantidad Total de dinero Inmovilizado promedio.

Solución:

En la siguiente tabla se ha calculado, en la primera columna, la demanda valorizada (es decir el producto b·D), en la segunda columna el lote actual, y en la tercera columna el Total Inmovilizado promedio para cada artículo, todo conforme a la situación actual.

ITEM	$b \times D_i$	q_i	$\frac{b_i \cdot q_i}{2}$
A	350.000	40	7.000
B	667.000	92	13.340
C	446.500	38	8.930
TOTAL INMOVILIZADO PROMEDIO			29.270

Es decir, se están inmovilizando actualmente $29.270, en promedio.

En la siguiente tabla se han consigando los valores de la raiz cuadrada del producto de $D_i \cdot b_i$, se ha totalizado, y elevado al cuadrado:

ITEM	$\sqrt{b_i \cdot D_i}$
A	591,61
B	816,70
C	668,21
$\sum_i \sqrt{b_i \cdot D_i}$	2.076,52
$\left[\sum_i \sqrt{b_i \cdot D_i}\right]^2$	4.311.935,31

En consecuencia:

$$\lambda = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left[\sum_i \sqrt{b_i \cdot D_i}\right]^2}{TO^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4.311.935,31}{75^2} = 383{,}28$$

Con el valor del multiplicador calculamos los lotes óptimos (consignados en la primera columna de la siguiente tabla) que deberá solicitarse, en lugar de las cantidades actuales:

ITEM	$q_{io} = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot D_i}{b_i}}$	$n_{oi} = \frac{D_i}{q_{io}}$	$TI_i = \frac{1}{2} \cdot b_i \cdot q_{io}$
A	46,80	21,37	8.189,00
B	77,97	29,50	11.305,65
C	39,36	24,13	9.249,60
TOTAL		75	28.744,25

Es decir, emitiendo igual cantidad de órdenes por año (75), pero pidiendo los lotes óptimos se inmovilizaría en promedio $525,75 menos por año.

Planteando el problema con el sistema LINGO:

```
MIN = TI  ;
TI = 0.5 * (q1*b1 + q2*b2 + q3*b3);

TO = D1/q1 + D2/q2 + D3/q3 ;

b1 = 350;
b2 = 290;
b3 = 470;
D1 = 1000;
D2 = 2300;
D3 = 950;
TO = 75;
END
```

Resolviendo (tener en consideración las diferencias de redondeo con respecto a la forma de resolución analítica), tendremos:

```
Local optimal solution found at step:            62
 Objective value:                          28746.10

                       Variable           Value        Reduced Cost
                             TI        28746.10           0.0000000
```

```
Q1        46.79935          0.3468635E-05
B1        350.0000          0.0000000
Q2        77.97202          0.2874012E-05
B2        290.0000          0.0000000
Q3        39.36287          0.0000000
B3        470.0000          0.0000000
TO        75.00000          0.0000000
D1        1000.000          0.0000000
D2        2300.000          0.0000000
D3        950.0000          0.0000000

Row    Slack or Surplus      Dual Price
 1        28746.10           -1.000000
 2       0.0000000           -1.000000
 3       0.0000000           -383.2814
 4       0.0000000           -23.39968
 5       0.0000000           -38.98601
 6       0.0000000           -19.68143
 7       0.0000000           -8.189887
 8       0.0000000           -4.915628
 9       0.0000000           -9.737131
10       0.0000000            383.2814
```

Ejemplo 8.10:

Suponiendo que en el ejemplo anterior se quisiera, en cambio, mantener la cantidad de dinero Total Inmovilizado promedio en $29.270, calcular cuál debería ser el tamaño del lote de cada artículo a fin de minimizar la cantidad de órdenes totales del año.

Solución:

ITEM	Precio unitario	Demanda anual	$D_i \cdot b_i$	$\sqrt{D_i \cdot b}$
A	350	1.000	350.000	591,61
B	290	2.300	667.000	816,70
C	470	950	446.500	668,21
$\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i}$				2.076,52
$\mu = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left[\sum_i \sqrt{D_i \cdot b_i}\right]^2}{TI^2}$				0,0025165

ITEM	Precio unitario	Demanda anual	$q_{oi} = \sqrt{\frac{2 \cdot D_i}{\mu \cdot b_i}}$
A	350	1.000	47,65
B	290	2.300	79,39
C	470	950	40,08

Formulando y resolviendo con el sistema LINGO:

```
MIN = TO  ;
TI = 0.5 * (q1*b1 + q2*b2 + q3*b3);
```

```
TO = D1/q1 + D2/q2 + D3/q3 ;

b1 = 350;
b2 = 290;
b3 = 470;
D1 = 1000;
D2 = 2300;
D3 = 950;
TI = 29270;
END


Local optimal solution found at step:            15
 Objective value:                          73.65759

                       Variable           Value        Reduced Cost
                             TO        73.65759           0.0000000
                             TI        29270.00           0.0000000
                             Q1        47.65227           0.8396035E-08
                             B1        350.0000           0.0000000
                             Q2        79.39306           0.3390598E-08
                             B2        290.0000           0.0000000
                             Q3        40.08025           0.0000000
                             B3        470.0000           0.0000000
                             D1        1000.000           0.0000000
                             D2        2300.000           0.0000000
                             D3        950.0000           0.0000000

                            Row    Slack or Surplus      Dual Price
                              1        73.65759           -1.000000
                              2       0.0000000          -0.2516487E-02
                              3       0.0000000           -1.000000
                              4       0.0000000          -0.5995817E-01
                              5       0.0000000          -0.9989581E-01
                              6       0.0000000          -0.5043073E-01
                              7       0.0000000          -0.2098536E-01
                              8       0.0000000          -0.1259556E-01
                              9       0.0000000          -0.2494994E-01
                             10       0.0000000           0.2516487E-02
```

Ejemplo 8.11:

Una empresa elabora 3 productos (P1, P2 y P3) para los cuales se conocen sus precios, demandas anuales y costos de preparación de máquinas por cada orden de producción. Se desea minimizar el total de dinero inmovilizado en inventarios promedio, pero cumpliendo con las restricción fijada por la dirección de la empresa que impone que el total de costo de preparación de máquinas para las órdenes emitidas sea de $490.

ITEM	**Demanda Anual**	**Precio unitario**	**Costo de setup**
P1	2.000	5	40
P2	3.000	3	50
P3	4.000	4	60

Solución:

El programa matemático correspondiente al problema es el que se indica a continuación:

$$TIP = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot q_1 + \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot q_2 \cdot T + \frac{1}{2} \cdot b_3 \cdot q_3 \quad \Rightarrow \quad Min$$

Sujeto a:

$$k_1 \cdot \frac{D_1}{q_1} + k_2 \cdot \frac{D_2}{q_2} + k_3 \cdot \frac{D_3}{q_3} = 490$$

Planteando el lagrangiano, tendremos:

$$L = \frac{1}{2} \cdot b_1 \cdot q_1 + \frac{1}{2} \cdot b_2 \cdot q_2 \cdot T + \frac{1}{2} \cdot b_3 \cdot q_3 + \lambda \cdot \left[k_1 \cdot \frac{D_1}{q_1} + k_2 \cdot \frac{D_2}{q_2} + k_3 \cdot \frac{D_3}{q_3} - 490 \right] \quad \Rightarrow \quad Min$$

Derivando con respecto a cada q_i y con respecto al multiplicador de Lagrange, e igualando a cero cada una de las ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{q_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot b_i - \frac{\lambda \cdot k_i \cdot D_i}{q_i^2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad K_1 \cdot \frac{D_1}{q_1} + K_2 \cdot \frac{D_2}{q_2} + K_3 \cdot \frac{D_3}{q_3} - 490 = 0$$

De donde:

$$q_{oi}^* = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot k_1 \cdot D_1}{b_i}}$$

Resolviendo el sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas, tendremos:

$$q_{o1}^* = 589{,}36$$

$$q_{o2}^* = 1041{,}86$$

$$q_{o3}^* = 1141{,}30$$

$$\lambda = 10{,}8547$$

Este problema, también se ha formulado y resuelto con el sistema LINGO, como sigue:

```
MIN = TIP;
TIP = 0.5 * b1 * q1 + 0.5 * b2 * q2  + 0.5 * b3 * q3  ;

n1 * q1 = D1;
n2  * q2 = D2  ;
n3  * q3 = D3  ;

b1 = 5;
D1 = 2000;
k1 = 40;
b2 = 3;
D2  = 3000;
k2  = 50;
b3 = 4;
D3  = 4000;
k3  = 60;
```

```
CPM = k1 * n1 + k2 * n2 + k3 * n3 ;
CPM = 490;
END


Local optimal solution found at step:            39
 Objective value:                          5318.793

                         Variable           Value        Reduced Cost
                              TIP        5318.793           0.0000000
                               B1        5.000000           0.0000000
                               Q1        589.3638         -0.9457622E-07
                               B2        3.000000           0.0000000
                               Q2        1041.858         -0.6557534E-07
                               B3        4.000000           0.0000000
                               Q3        1141.298           0.0000000
                               N1        3.393490           0.0000000
                               D1        2000.000           0.0000000
                               N2        2.879471           0.0000000
                               D2        3000.000           0.0000000
                               N3        3.504781           0.0000000
                               D3        4000.000           0.0000000
                               K1        40.00000           0.0000000
                               K2        50.00000           0.0000000
                               K3        60.00000           0.0000000
                              CPM        490.0000           0.0000000

                              Row    Slack or Surplus      Dual Price
                                1        5318.793           -1.000000
                                2       0.0000000           -1.000000
                                3       0.0000000          -0.7367048
                                4       0.0000000          -0.5209290
                                5       0.0000000          -0.5706491
                                6       0.0000000           -294.6819
                                7       0.0000000          -0.7367048
                                8       0.0000000           -36.83524
                                9       0.0000000           -520.9290
                               10       0.0000000          -0.5209290
                               11       0.0000000           -31.25574
                               12       0.0000000           -570.6491
                               13       0.0000000          -0.5706491
                               14       0.0000000           -38.04327
                               15       0.0000000           -10.85468
                               16       0.0000000            10.85468
```

Ejemplo 8.12:

Para el problema 2.11 (de un solo ítem), calcular la constante TI x TO. Para un número de órdenes igual a 5 por año, la reducción marginal de Total de dinero Inmovilizado promedio con relación al número Total de Órdenes a emitir, y el tamaño de lote óptimo que minimiza el total de dinero a inmovilizar. Repetir los cálculos para 5,1962 órdenes por año.

Solución:

Los parámetros pertinentes del problema 2.11 para resolver este problema son:

b = 1.000;
D = 18.000;
TO = n = 5;

Recordando la expresión de TI x TO:

$$TI \cdot TO = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_i \sqrt{b_i \cdot D_i} \right]^2$$

y como para este problema tenemos un solo ítem:

$$TI \cdot TO = \frac{1}{2} \cdot b \cdot D = \frac{1}{2} \cdot 1.000 \cdot 18.000 = 900.000$$

Para n = 5 tendremos:

$$\lambda = \frac{b \cdot D}{2 \cdot TO^2} = \frac{1.000 \cdot 18.000}{2 \cdot 5^2} = 360.000$$

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot D}{b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 360.000 \cdot 18.000}{1.000}} = 3.600$$

Por su parte, para n = 5,1962 tendremos:

$$\lambda = \frac{b \cdot D}{2 \cdot TO^2} = \frac{1.000 \cdot 18.000}{2 \cdot 5{,}1962^2} \cong 333.333{,}33$$

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot D}{b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 333.327{,}23 \cdot 18.000}{1.000}} \cong 3.464{,}10$$

Este lote, por supuesto es el mismo que el que se obtuvo al minimizar el CTE en el problema 2.10, ya que se está solicitando la cantidad de pedidos óptimo por año.

Si no hay restricciones de número de órdenes a emitir, para minimizar TI por supuesto que conviene solicitar el número óptimo que surge de minimizar CTE. Tal como se vió en el punto 6 del presente capítulo, si se igualan las expresiones de lote óptimo que surge de minimizar TI (problema 8.11) con la de lote óptimo que surge de minimizar CTE (problema 2.10), tendremos:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot \lambda \cdot D}{b}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1}}$$

Es decir:

$$\frac{2 \cdot \lambda \cdot D}{b} = \frac{2 \cdot k \cdot D}{T \cdot c_1} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{b \cdot k}{T \cdot c_1}$$

Para el ejercicio 2.10, teníamos que los parámetros eran:

k = 400.000

c_1 = 1.200

O sea:

$$\lambda = \frac{b \cdot k}{T \cdot c_1} = \frac{1.000 \cdot 400.000}{1 \cdot 1.200} = 333.333{,}33$$

valor éste que coincide, por supuesto, con el calculado más arriba.

Ejemplo 8.13:

Considerar los siguientes datos para una serie de artículos, de los cuales se solicitan actualmente 20 pedidos por año cada uno, y sabiendo que la empresa desea mantener 360 órdenes totales por año.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
Demanda	100	200	500	300	900	8.000	40	780	40	40	900	1.000	1.000	520	80	2.000	60
Precio	20	40	12	450	35	200	850	24	4.600	59	390	45	500	3	14	400	52

Ordenar los artículos según un principio "ABC", calcular el porcentaje de Total de dinero Inmovilizado promedio, establecer una clasificación de los productos, calcular el lote óptimo que minimiza el TI, la cantidad de pedidos óptimos a emitir en el año y el total de dinero óptimo a inmovilizar.

Solución:

En primer lugar se calcula el lote actual "q" y el Total Inmovilizado promedio para cada artículo, como así también su porcentaje sobre el total.

	Demanda	Precio	n	q	TI	% TI
A	100	20	20	5	50	0,05
B	200	40	20	10	200	0,21
C	500	12	20	25	150	0,16
D	300	450	20	15	3375	3,62
E	900	35	20	45	787,5	0,84
F	8.000	200	20	400	40.000	42,86
G	40	850	20	2	850	0,91
H	780	24	20	39	468	0,50
I	40	4.600	20	2	4.600	4,93
J	40	59	20	2	59	0,06
K	900	390	20	45	8.775	9,40
L	1.000	45	20	50	1.125	1,21
M	1.000	500	20	50	12.500	13,40
N	520	3	20	26	39	0,04
O	80	14	20	4	28	0,03
P	2.000	400	20	100	20.000	21,43
Q	60	52	20	3	78	0,08
R	300	31	20	15	232,5	0,25
TOTAL			360		93.317	100,00

Posteriormente, se clasifica conforme al %TI y se calculan los acumulados. Se clasifican los artículos en una de las tres categorías conforme a los porcentajes de TI y luego se calculan los lotes óptimos, el número de veces a solictar cada artículo y el monto de dinero a inmovilizar por cada artículo.

.

	Demanda	Precio	n	q	TI	% TI	% TI Acum		$\sqrt{Di \cdot bi}$	q_o	n_o	TI_o
F	8.000	200	20	400	40.000	42,86	42,86	A	1.264,91	95,77	83,53	9.577,41
P	2.000	400	20	100	20.000	21,43	64,30	A	894,43	33,86	59,06	6.772,25
M	1.000	500	20	50	12.500	13,40	77,69	A	707,11	21,42	46,69	5.353,94
K	900	390	20	45	8.775	9,40	87,10	B	592,45	23,00	39,12	4.485,82
I	40	4.600	20	2	4.600	4,93	92,03	B	428,95	1,41	28,33	3.247,86
D	300	450	20	15	3.375	3,62	95,64	B	367,42	12,36	24,26	2.781,99
L	1.000	45	20	50	1.125	1,21	96,85	B	212,13	71,39	14,01	1.606,18
G	40	850	20	2	850	0,91	97,76	B	184,39	3,29	12,18	1.396,14
E	900	35	20	45	787,5	0,84	98,60	B	177,48	76,79	11,72	1.343,83
H	780	24	20	39	468	0,50	99,10	C	136,82	86,33	9,04	1.035,96
R	300	31	20	15	232,5	0,25	99,35	C	96,44	47,11	6,37	730,18
B	200	40	20	10	200	0,21	99,57	C	89,44	33,86	5,91	677,23
C	500	12	20	25	150	0,16	99,73	C	77,46	97,75	5,12	586,49
Q	60	52	20	3	78	0,08	99,81	C	55,86	16,27	3,69	422,93
J	40	59	20	2	59	0,06	99,87	C	48,58	12,47	3,21	367,83
A	100	20	20	5	50	0,05	99,93	C	44,72	33,86	2,95	338,61
N	520	3	20	26	39	0,04	99,97	C	39,50	199,37	2,61	299,05
O	80	14	20	4	28	0,03	100,00	C	33,47	36,20	2,21	253,39
TOTAL			360		9.3317	100,00	$\sum\sqrt{Di \cdot bi}$		5.451,56		360,00	41.277,09
								λ	114,66			

Se puede observar que el hecho de solicitar los lotes óptimos para 360 órdenes anuales genera una reducción de total de dinero a inmovilzar en promedio igual a 93.317 – 41.277= 52.040 $/año.

Ejemplo 8.14:

Para los siguientes productos se conocen los precios de compra y las demandas:

Ítem	b_i	D_i
1	5	390
2	6	200
3	2	100
4	1	115
5	5	700
6	2	300
7	3	21
8	12	89
9	5	34
10	10	12
11	50	15
12	9	15

1) Graficar la curva “ABC”.

2) Calcular el TI promedio óptimo para ordenar 20 unidades por año. Actualemente se están

pidiendo 10 veces por año cada artículo.

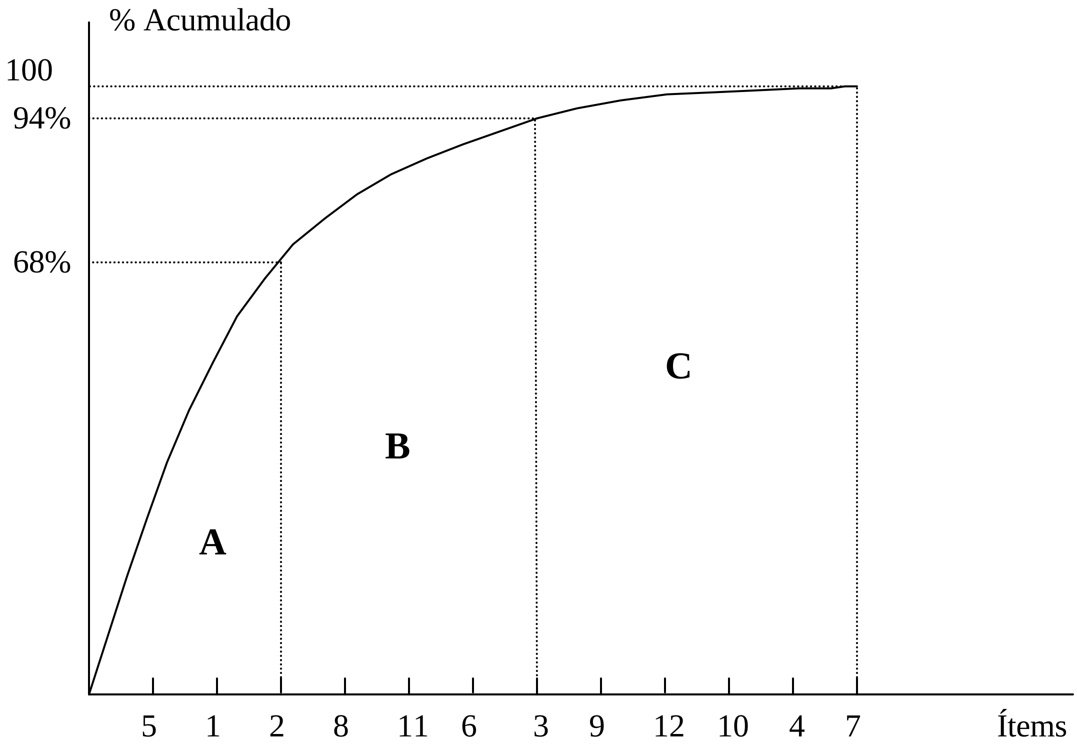
Solución:

Ítem	b_i	D_i	$b_i \cdot D_i$	%	n_i	$q_i = \frac{D_i}{n_i}$	TIP_i
1	5	390	1.950	19.75%	10	39.00	97.50
2	6	200	1.200	12.16%	10	20.00	60.00
3	2	100	200	2.03%	10	10.00	10.00
4	1	115	115	1.17%	10	11.50	5.75
5	5	700	3.500	35.46%	10	70.00	175.00
6	2	300	600	6.08%	10	30.00	30.00
7	3	21	63	0.64%	10	2.10	3.15
8	12	89	1.068	10.82%	10	8.90	53.40
9	5	34	170	1.72%	10	3.40	8.50
10	10	12	120	1.22%	10	1.20	6.00
11	50	15	750	7.60%	10	1.50	37.50
12	9	15	135	1.37%	10	1.50	6.75
Total			9.871	100.00%	120		493.55

Ordenando por demanda valorizada, y calculando los lotes óptimos, tendremos:

Ítem	b_i	D_i	$b_i \cdot D_i$	**%**	**% Acum.**	$\sqrt{b_i \cdot D_i}$	q_{oi}	n_i	TIP_i
5	5	700	3.500	35.46%	35.46%	59.16	28.69	24.40	71.72
1	5	390	1.950	19.75%	55.21%	44.16	21.41	18.21	53.53
2	6	200	1.200	12.16%	67.37%	34.64	14.00	14.29	41.99
8	12	89	1.068	10.82%	78.19%	32.68	6.60	13.48	39.62
11	50	15	750	7.60%	85.79%	27.39	1.33	11.30	33.20
6	2	300	600	6.08%	91.87%	24.49	29.69	10.10	29.69
3	2	100	200	2.03%	93.89%	14.14	17.14	5.83	17.14
9	5	34	170	1.72%	95.61%	13.04	6.32	5.38	15.81
12	9	15	135	1.37%	96.98%	11.62	3.13	4.79	14.08
10	10	12	120	1.22%	98.20%	10.95	2.66	4.52	13.28
4	1	115	115	1.17%	99.36%	10.72	26.00	4.42	13.00
7	3	21	63	0.64%	100.00%	7.94	6.41	3.27	9.62
Total			9.871.00	100.00%		290.94		120.00	352.68
					λ	2.94			

Se observa que los ítems de la parte A (productos 5, 1, 2 y 8) de la curva ABC se deben pedir con más frecuencia. Por el contrario, los productos de menor demanda valorizada, se deben pedir con bastante menos frecuencia.


% Acumulado
100
94%
68%
A
B
C
5
1
2
8
11
6
3
9
12
10
4
7
Ítems

CAPÍTULO IX

DEMANDA ALEATORIA

1. INTRODUCCIÓN

En la mayoría de los sistemas reales la demanda de los productos presenta algún grado de aleatoriedad. Cuando esto ocurre, el riesgo de quedarse sin stock puede ser reducido con un inventario mayor. La tarea del administrador de inventarios es balancear el riesgo de agotamiento contra el costo de mantener un stock adicional.

En aquellos casos en donde la demanda tiene poca dispersión y es relativamente constante, puede tomarse el valor promedio de ella y proceder como hemos hecho en los modelos expuestos en los capítulos anteriores. Cuando, por el contrario, no sea aplicable dicha hipótesis simplificativa, la solución por métodos cuantitativos en general no es muy eficiente, ya que la formulación de los problemas resulta muy compleja. En estos casos, la simulación resulta ser la herramienta más adecuada para resolver los referidos problemas.

No obstante lo comentado en el párrafo anterior, plantearemos algunos sistemas simples de demanda aleatoria a fin de modelizarlos dentro del contexto cuantitativo.

2. PERÍODO ÚNICO. UNIDADES DISCRETAS

Consideremos ahora un problema que consiste en determinar la compra inicial de un producto para satisfacer su demanda durante un período de tiempo dado, y supondremos que la demanda es aleatoria.

Se asume también que el producto se adquiere al comenzar el período. Si al finalizar dicho período no se han vendido (o de alguna forma consumido) todas las unidades, se incurre en un costo -que llamaremos “costo de remanente” o “costo de excente”- por el hecho de haber sobreestimado la demanda; es decir, el producto deja de tener utilidad para la empresa una vez finalizado el período por lo que pierde parte de, o todo, su valor. En consecuencia, el costo de remante (que indicaremos como “c_e”) será la diferencia entre el precio unitario de adquisición (“b”) y el valor unitario de venta al finalizar el período, que indicaremos como “p_R’ y que se llama “precio de reventa” o, también, “valor de rezago”.

$$c_e = b - p_R$$

Si, por el contrario, el producto se agota antes de que termine el período en cuestión, se incurre en un costo de agotamiento por haber subestimado la demanda. Llamaremos “f_2” al costo de agotamiento por unidad. Este costo de déficit se puede evidenciar directamente por pérdida de ventas del producto o (en el caso de que pueda adquirirse en ese momento para satisfacer la demanda) por comprarlo a un precio superior al que habría tenido si se hubiera adquirido al comenzar el período. En este último caso, es sabido que las compras de “urgencia” (y más aún las de “emergencia”) generan un costo considerable.

En consecuencia, el objetivo que se persigue en este problema es la determinación de la cantidad inicial a adquirir de manera tal de minimizar el costo total esperado involucrado.

El modelo que se desarrollará es aplicable, por ejemplo, a la compra de repuestos que se deben adquirir conjuntamente con una máquina o un equipo, a un precio conveniente, en donde el período de tiempo es la vida útil del bien. Este es también el problema que enfrenta un comerciante que debe comprar un producto que se discontinuará próximamente, y al que el proveedor le está ofreciendo una última posibilidad de compra antes del lanzamiento del nuevo producto que reemplazará al actual. Otro ejemplo de aplicación de este modelo es el de un vendedor de diarios y revistas cuando tiene que determinar, como ser, cuántas unidades de un determinado semanario debe comprar a fin de satisfacer la demanda en la semana. De hecho, el caso que se modelizará se conoce habitualmente como el "problema del canillita".

Para formular el modelo, asumiremos las siguientes hipótesis de trabajo:

1. Se administra un solo ítem.
2. El horizonte de planeamiento es de un solo período.
3. El producto es de demanda independiente.
4. La demanda del período es aleatoria y responde a una ley de probabilidades conocida.
5. El artículo se adquiere al comenzar el período.
6. El producto se mide en unidades discretas.
7. El costo de almacenamiento (c_1) es nulo.
8. Hay estabilidad monetaria.

Llamaremos:

x: Demanda del producto referida al período. Tal como se mencionó, la demanda es una variable aleatoria discreta cuya función de distribución de probabilidad es conocida.
b: Costo unitario de adquisición.
p_r: Precio unitario de reventa.
c_e: Costo unitario por excedente (remanente).
f_2: Costo unitario de agotamiento ($/unidad).
S: Cantidad a adquirir al principio del período. Es la variable de decisión.
CTE(S): Costo Total Esperado referido al período de tiempo para una cantidad inicial a adquirir "S".

Durante el período de tiempo t = 1, puede ocurrir que la cantidad "S" adquirida haya sido suficiente, en cuyo caso tendremos, al finalizar el período, una cantidad remanente "S-x" (Figura 1), o que haya sido insuficiente, en cuyo caso habremos acumulado al finalizar el período una demanda de unidades no satisfechas con la adquisición inicial igual a "x-S" (Figura 2).

Llamando p(x) a la probabilidad de que en el período "t" se hayan demandado "x" unidades, tendremos que la expresión del CTE (S) será:

$$\mathrm{CTE}(S) = \sum_{0}^{S} (S - x) \cdot c_e \cdot p(x) + \sum_{S+1}^{\infty} (x - S) \cdot f_2 \cdot p(x) \qquad \textbf{(1)}$$

La expresión anterior es la función objetivo a minimizar. Dado que la variable correspondiente a la cantidad a comprar "S" se mide en números enteros, el CTE mínimo (ver Figura 3) será un valor tal para el cual se cumplen las dos condiciones de optimalidad siguientes:

$$\mathrm{CTE}(S+1) - \mathrm{CTE}(S) \geq 0 \qquad \textbf{(2)}$$

y que

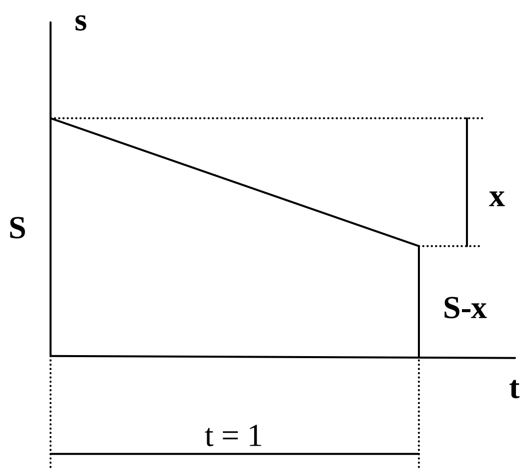


Figura 1

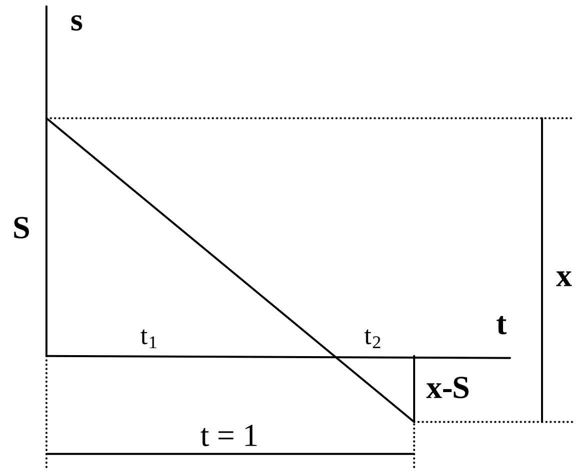


Figura 2

$$\mathrm{CTE}(S-1)-\mathrm{CTE}(S)\geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{CTE}(S)-\mathrm{CTE}(S-1)\leq 0 \qquad \textbf{(3)}$$

Es decir, si se cumplen estas dos condiciones, entonces “S” es óptimo. En consecuencia, para resolver analíticamente el problema nos fundamentaremos en este concepto.

Consideremos la expresión (1). Si es válida para “S”, también lo será para “S+1”; es decir:

$$\mathrm{CTE}(S+1)=\sum_{0}^{S+1}(S+1-x)\cdot c_e\cdot p(x)+\sum_{S+2}^{\infty}(x-S-1)\cdot f_2\cdot p(x) \qquad \textbf{(4)}$$

Pero, por un lado:

$$\sum_{0}^{S+1}(S+1-x)\cdot c_e\cdot p(x)=\sum_{0}^{S}(S+1-x)\cdot c_e\cdot p(x)$$

debido a que estaríamos eliminando un término nulo de la sumatoria.

Por otro lado:

$$\sum_{S+2}^{\infty}(x-S-1)\cdot c_2\cdot p(x)=\sum_{S+1}^{\infty}(x-S-1)\cdot f_2\cdot p(x)$$

ya que estaríamos agregando un término nulo a la sumatoria. En consecuencia, reemplazando en (4), tendremos:

$$\mathrm{CTE}(S+1)=\sum_{0}^{S}(S+1-x)\cdot c_e\cdot p(x)+\sum_{S+1}^{\infty}(x-S-1)\cdot f_2\cdot p(x)$$

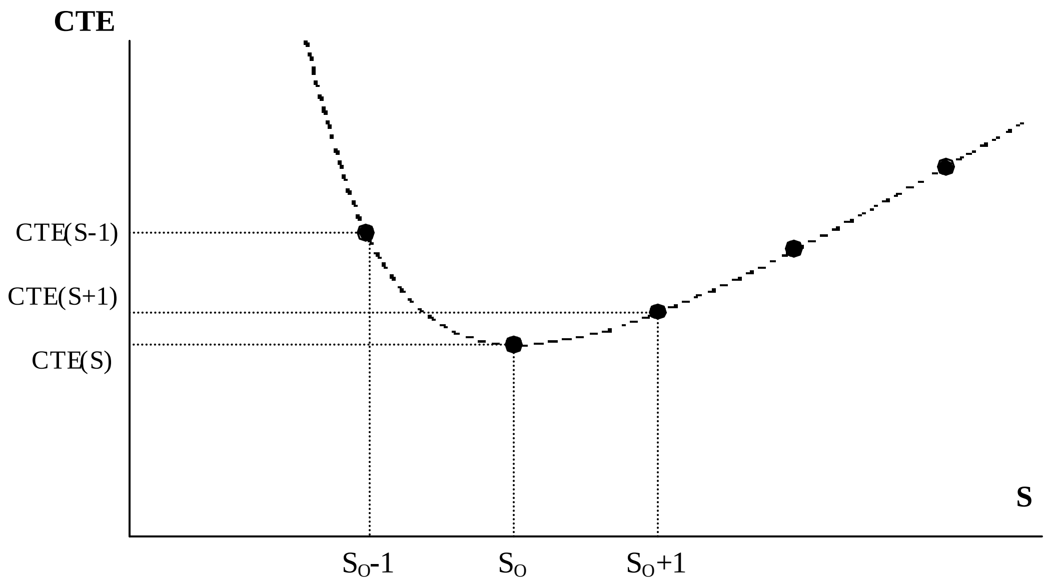


Figura 3

Agrupando:

$$CTE(S+1) = \sum_{0}^{S} (S - x) \cdot c_e \cdot p(x) + \sum_{0}^{S} c_e \cdot p(x) + \sum_{S+1}^{\infty} (x - S) \cdot f_2 \cdot p(x) - \sum_{S+1}^{\infty} f_2 \cdot p(x)$$

Pero, teniendo en cuenta la expresión (1) siguiente:

$$\sum_{0}^{S} (S - x) \cdot c_e \cdot p(x) + \sum_{S+1}^{\infty} (x - S) \cdot f_2 \cdot p(x) = CTE(S)$$

resulta que:

$$CTE(S+1) = CTE(S) + \sum_{0}^{S} c_e \cdot p(x) - \sum_{S+1}^{\infty} f_2 \cdot p(x)$$

Haciendo primero pasaje de términos, y luego operando:

$$CTE(S+1) - CTE(S) = \sum_{0}^{S} c_e \cdot p(x) - \sum_{S+1}^{\infty} f_2 \cdot p(x)$$

$$CTE(S+1) - CTE(S) = c_e \cdot p(x \le S) - f_2 \cdot [1 - p(x \le S)]$$

$$CTE(S+1) - CTE(S) = c_e \cdot p(x \le S) - f_2 + f_2 \cdot p(x \le S)$$

$$CTE(S+1) - CTE(S) = (c_e + f_2) \cdot p(x \le S) - f_2 \qquad \textbf{(5)}$$

Para que “S” sea óptimo, la expresión (5) debe ser mayor o igual a cero, debido al criterio de costo mínimo definido en (2). Entonces:

$$CTE(S_o+1)-CTE(S_o)=(c_e+f_2)\cdot p(x\le S_o)-f_2\ge 0 \qquad \textbf{(6)}$$

Luego:

$$p(x\le S_o)\ge \frac{f_2}{c_e+f_2} \qquad \textbf{(7)}$$

Por su parte, si la expresión (5) es válida para un valor “S”, también lo es para “S-1”. En consecuencia:

$$CTE(S)-CTE(S-1)=(c_e+c_2)\cdot p(x\le S-1)-c_2 \qquad \textbf{(8)}$$

Debido al criterio de minimización definido en (3), para que “S” sea óptimo, la expresión (8) debe ser menor o igual a cero:

$$CTE(S_o)-CTE(S_o-1)=(c_e+f_2)\cdot p(x\le S_o-1)-f_2\le 0 \qquad \textbf{(9)}$$

Luego:

$$p(x\le S_o-1)\le \frac{f_2}{c_e+f_2} \qquad \textbf{(10)}$$

Finalmente, considerando conjuntamente (7) y (10), tendremos que:

$$\boxed{p(x\le S_o-1)\le \frac{f_2}{c_e+f_2}\le p(x\le S_o)} \qquad \textbf{(11)}$$

En definitiva, para hallar la cantidad óptima a adquirir, bastará con encontrar un valor de “S” que satisfaga (11).

Análisis postoptimal

Un análisis interesante que se puede hacer sobre este modelo es el paramétrico; es decir, determinar el rango de validez de los parámetros dentro de los cuales se mantiene la solución óptima obtenida.

Para calcular el límite superior de f_2 (que llamaremos f_{2MAX}), sabemos que éste se dará cuando la condición (6) sea exactamente igual a cero; o dicho de otra forma, cuando la expresión (7) sea la igualdad:

$$p(x\le S_o)=\frac{f_{2MAX}}{c_e+f_{2MAX}}$$

Despejando:

$$f_{2MAX}=\frac{p(x\le S_o)\cdot c_e}{1-p(x\le S_o)} \qquad \textbf{(12)}$$

Esto significa que si f_2 asume este valor máximo, estaremos en una solución alternativa; es decir, tanto S_o como S_o+1 son óptimos. Este caso se ilustra en la Figura.

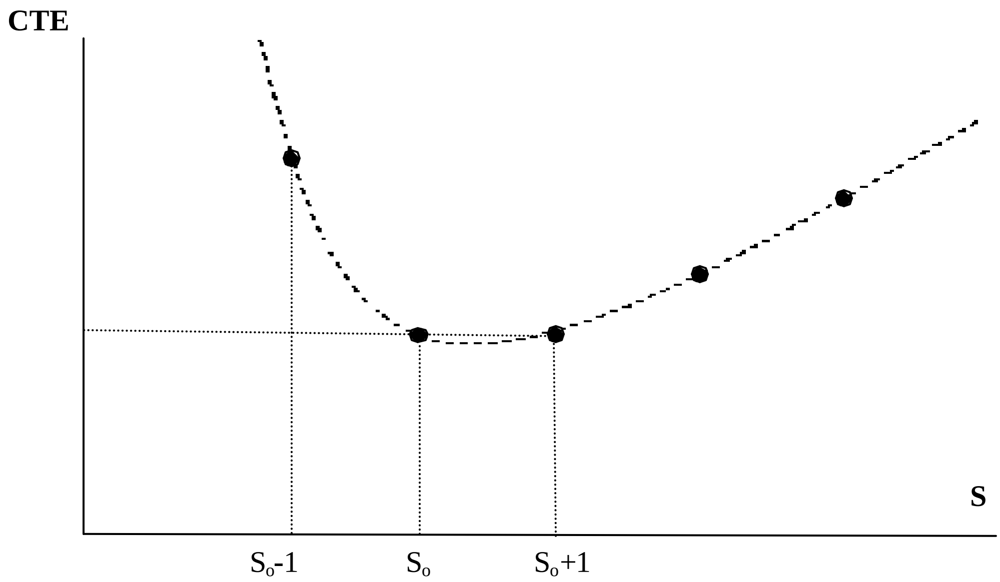


Figura 4

El límite inferior de f_2 (que llamaremos f_{2MIN}) se tendrá cuando la condición (9) sea exactamente igual a cero; o, dicho de otro modo, cuando la expresión (10) sea una igualdad:

$$p(x \leq S_o - 1) = \frac{f_{2MIN}}{c_e + f_{2MIN}}$$

Despejando:

$$f_{2MIN} = \frac{p(x \leq S_o - 1) \cdot c_e}{1 - p(x \leq S_o - 1)} \qquad \textbf{(13)}$$

Esto significa que si f_2 asume este valor mínimo, estaremos en una solución óptima alternativa; es decir, tanto S_o como S_{o-1} son óptimos (ver Figura 5).

Para hallar los límites superiores e inferiores del costo de excedente, procederemos de igual forma, pero considerando ahora que f_2 está en el denominador de la expresión (11). El límite superior (C_{eMAX}) se dará cuando el CTE(S_o) sea igual al CTE(S_o-1); esto es cuando la expresión (9) sea exactamente igual a cero o cuando (10) sea exactamente de signo igual:

$$p(x \leq S_o - 1) = \frac{f_2}{c_{e_{MAX}} + f_2}$$

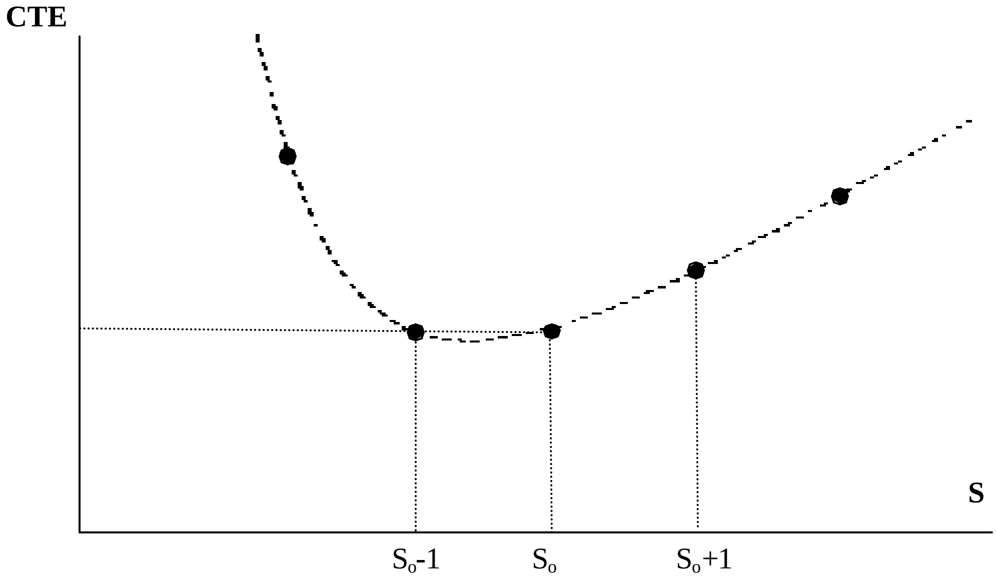


Figura 5

Despejando:

$$c_{eMAX} = \frac{[1 - p(x \le S_o - 1)] \cdot f_2}{p(x \le S_o - 1)} \qquad \textbf{(14)}$$

Cuando se da esta situación estamos en un caso tal como el representado en la Figura 5.

Finalmente, el límite inferior (c_{eMIN}) se tendrá cuando el CTE(S_o) sea igual al CTE(S_o+1); esto es, cuando la expresión (6) sea exactamente igual a cero o cuando (7) sea exactamente de signo igual:

$$p(x \le S_o) = \frac{f_2}{c_{eMIN} + f_2}$$

Despejando:

$$c_{eMIN} = \frac{[1 - p(x \le S_o)] \cdot f_2}{p(x \le S_o)} \qquad \textbf{(15)}$$

Esta última situación es como la graficada en la Figura 4.

3. PERÍODO ÚNICO. UNIDADES CONTINUAS

Cuando la naturaleza de la variable a solicitar "S" es continua (es decir, cuando no se verifica la hipótesis (6) del caso anterior), por extensión tendremos que, conocida la función f(x), la ecuación (11) se convierte en:

$$\boxed{F(x) = \frac{f_2}{c_e + f_2}} \qquad \textbf{(16)}$$

en donde F(x) es la función acumulada de f(x); es decir:

$$F(x) = \int_{o}^{x} f(x) \cdot dx$$

4. PERÍODO ÚNICO. UNIDADES DISCRETAS. COSTO DE MANTENIMIENTO

Si bien no será resuelto aquí, dejaremos planteado un caso que es una extensión del considerado en el punto 1. y es el que se da cuando el costo de mantenimiento en stock c_1 es significativo, de manera que no podría asumirse la hipótesis 7 formulada. La expresión correspondiente al CTE será:

$$CTE(S) = \sum_{0}^{S} (S - x) \cdot c_e \cdot p(x) + \sum_{0}^{S} \frac{S + (S - x)}{2} \cdot c_1 \cdot p(x) + \sum_{S+1}^{\infty} (x - S) \cdot f_2 \cdot p(x) + \sum_{S+1}^{\infty} \frac{S}{2} \cdot c_1 \cdot t_1 \cdot p(x)$$

y, teniendo en cuenta que:

$$\frac{t_1}{1} = \frac{S}{x}$$

tendremos que:

$$CTE(S) = \sum_{0}^{S} (S - x) \cdot c_e \cdot p(x) + \sum_{0}^{S} \left(S - \frac{x}{2} \right) \cdot c_1 \cdot p(x) + \sum_{S+1}^{\infty} (x - S) \cdot f_2 \cdot p(x) + \sum_{S+1}^{\infty} \frac{S^2}{2 \cdot x} \cdot c_1 \cdot p(x)$$

Planteando el criterio de minimización dado por las expresiones (2) y (3), y operando matemáticamente, se llega fácilmente a determinar la relación entre los parámetros que optimiza el problema.

5. PERÍODOS FIJOS. UNIDADES DISCRETAS. STOCK MÁXIMO.

Otro ejemplo de aplicación de demanda aleatoria para ser resuelto cuantitativamente, diferente a los anteriormente planteados en términos de concepto de administración de inventarios, es el caso en el cual se fija un stock máximo, efectuándose la reposición de la mercadería a intervalos fijos de tiempo (por ejemplo un mes, una semana, etc.) y siendo la cantidad adquirida variable en cada intervalo e igual al stock máximo menos las existencias en el momento de la reposición.

Consideraremos básicamente las siguientes hipótesis de trabajo:

1. Se administra un solo ítem.
2. El horizonte de planeamiento es a largo plazo.
3. El producto es de demanda independiente.

4. La demanda del período es aleatoria y responde a una ley de probabilidades conocida.
5. El artículo se adquiere al comenzar cada período y se compran tantas unidades como sean necesarias para completar la capacidad máxima de stock.
6. El producto en estudio se mide en unidades discretas.
7. Existe costo de almacenamiento.
8. Hay estabilidad monetaria.
9. Si se llega al agotamiento, los pedidos se acumulan para ser entregados cuando se recibe la mercadería al comienzo del próximo período, incurriéndose entonces en un costo de agotamiento.
10. Los intervalos de tiempo entre reposición de mercadería son fijos y de longitud unitaria (esto es: t = 1).

El objetivo del problema es encontrar el nivel de stock máximo ("S") que minimice el Costo Total Esperado interviniente en el proceso. En la Figura 6 se puede observar la evolución del stock en función del tiempo para un sistema como el enunciado.

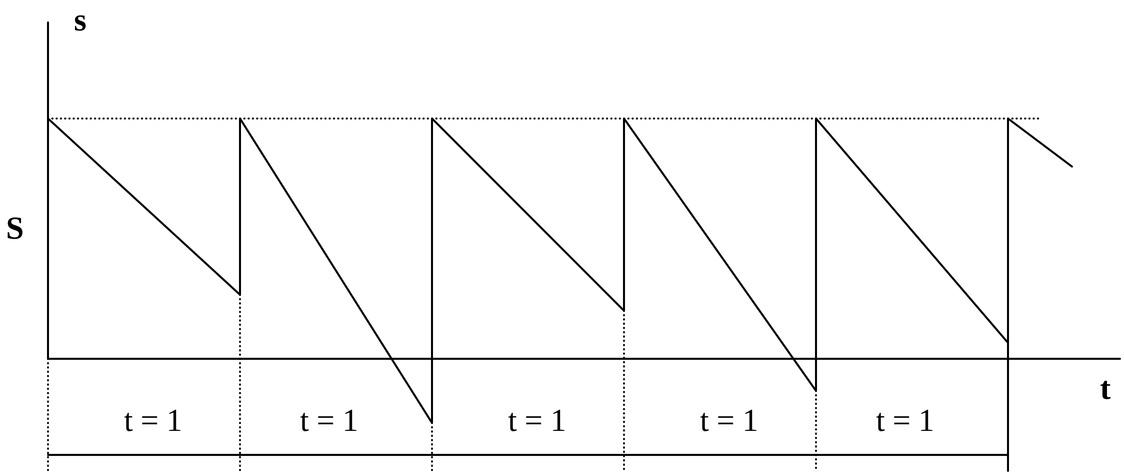


Figura 6

Consideremos ahora un intervalo cualquiera. Al finalizar el período, pudo haberse presentado una de las dos situaciones siguientes:

1) La demanda "x" del intervalo ha sido menor que la cantidad "S" (Figura 7), de manera que el stock final es "S-x". En este caso existe solamente costo de almacenamiento. La cantidad promedio de unidades almacenadas en el período "t" es:

$$\frac{S+(S-x)}{2} = S - \frac{x}{2}$$

2) La demanda "x" del intervalo ha sido mayor que la cantidad "S" (Figura 8). Aquí tendremos costo de almacenamiento durante un tiempo "t_1" y costo de agotamiento durante un tiempo "t_2". La cantidad máxima de unidades agotadas es "x-S" y la cantidad promedio es (x-S)/2.

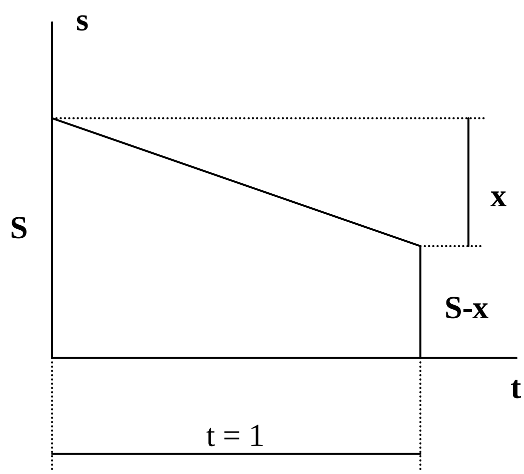


Figura 7

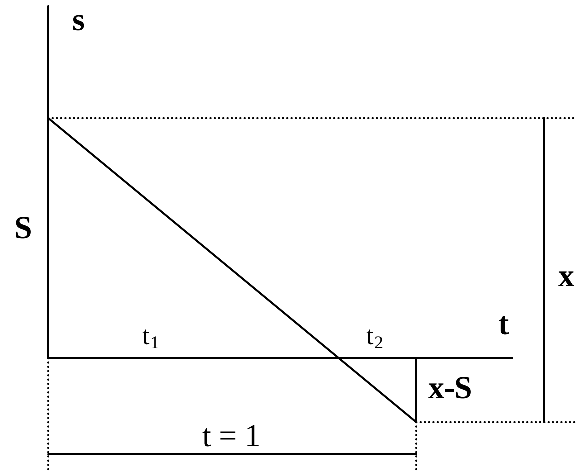


Figura 8

Llamaremos:

c_1: Costo unitario de mantenimiento en stock, en \$/(unidad·tiempo).
c_2: Costo unitario de agotamiento, en \$/(unidad·tiempo).

La expresión del Costo Total Esperado para un stock máximo "S" será:

$$CTE(S) = \sum_{0}^{S} (S - \frac{x}{2}) \cdot c_1 \cdot p(x) + \sum_{S+1}^{\infty} \frac{S}{2} \cdot c_1 \cdot t_1 \cdot p(x) + \sum_{S+1}^{\infty} \frac{(x - S)}{2} \cdot c_2 \cdot t_2 \cdot p(x) \qquad \textbf{(17)}$$

Pero:

$$\frac{t_1}{1} = \frac{S}{x} \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{S}{x} \qquad \textbf{(18)}$$

y también:

$$\frac{t_2}{1} = \frac{x - S}{x} \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \frac{x - S}{x} \qquad \textbf{(19)}$$

Reemplazando (18) y (19) en (17):

$$CTE(S) = \sum_{0}^{S} (S - \frac{x}{2}) \cdot c_1 \cdot p(x) + \sum_{S+1}^{\infty} \frac{S^2}{2 \cdot x} \cdot c_1 \cdot p(x) + \sum_{S+1}^{\infty} \frac{(x - S)^2}{2 \cdot x} \cdot c_2 \cdot p(x) \qquad \textbf{(20)}$$

Esta es la función objetivo a minimizar. De igual manera que para el caso 1, dado que la variable en cuestión es discreta, el stock máximo óptimo será un valor "S" para el cual se cumple:

$$CTE(S + 1) - CTE(S) \geq 0 \qquad \textbf{(21)}$$

y

$$CTE(S) - CTE(S-1) \leq 0 \qquad \textbf{(22)}$$

Ahora bien, si la expresión (20) es válida para “S” también lo es para “S+1”:

$$CTE(S+1) = \sum_{0}^{S+1}(S+1-\frac{x}{2})\cdot c_1 \cdot p(x) + \sum_{S+2}^{\infty}\frac{(S+1)^2}{2\cdot x}\cdot c_1 \cdot p(x) + \sum_{S+2}^{\infty}\frac{(x-S-1)^2}{2\cdot x}\cdot c_2 \cdot p(x) \qquad \textbf{(23)}$$

El primer término de esta expresión es igual a:

$$\sum_{0}^{S+1}(S+1-\frac{x}{2})\cdot c_1 \cdot p(x) = \sum_{0}^{S}(S+1-\frac{x}{2})\cdot c_1 \cdot p(x) + \frac{S+1}{2}\cdot c_1 \cdot p(S+1) =$$

$$= c_1 \cdot \sum_{0}^{S}(S-\frac{x}{2})\cdot p(x) + c_1 \cdot \sum_{0}^{S} p(x) + \frac{S+1}{2}\cdot c_1 \cdot p(S+1) \qquad \textbf{(23.1)}$$

El segundo término de (23) lo podemos expresar como sigue:

$$\sum_{S+2}^{\infty}\frac{(S+1)^2}{2\cdot x}\cdot c_1 \cdot p(x) = \sum_{S+1}^{\infty}\frac{(S+1)^2}{2\cdot x}\cdot c_1 \cdot p(x) - \frac{(S+1)^2}{2\cdot(S+1)}\cdot c_1 \cdot p(S+1) =$$

$$= \frac{c_1}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{S^2}{x}\cdot p(x) + \frac{c_1}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{2\cdot S}{x}\cdot p(x) + \frac{c_1}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x} - c_1 \cdot \frac{(S+1)}{2}\cdot p(S+1) \qquad \textbf{(23.2)}$$

Finalmente, el tercer término de (23) es:

$$\sum_{S+2}^{\infty}\frac{(x-S-1)^2}{2\cdot x}\cdot c_2 \cdot p(x) = \sum_{S+1}^{\infty}\frac{(x-S-1)^2}{2\cdot x}\cdot c_2 \cdot p(x) =$$

$$= \frac{c_2}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{(x-S)^2 - 2\cdot(x-S)+1}{x}\cdot p(x) =$$

$$= \frac{c_2}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{(x-S)^2}{x}\cdot p(x) - \frac{c_2}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{2\cdot(x-S)}{x}\cdot p(x) + \frac{c_2}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x} \qquad \textbf{(23.3)}$$

En consecuencia, reemplazando (23.1), (23.2) y (23.3) en (23), tendremos:

$$CTE(S+1) = c_1 \cdot \sum_{0}^{S}(S-\frac{x}{2})\cdot p(x) + c_1 \cdot \sum_{0}^{S} p(x) + \frac{S+1}{2}\cdot c_1 \cdot p(S+1) +$$

$$+ \frac{c_1}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{S^2}{x}\cdot p(x) + \frac{c_1}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{2\cdot S}{x}\cdot p(x) + \frac{c_1}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x} - c_1 \cdot \frac{(S+1)}{2}\cdot p(S+1) +$$

$$+ \frac{c_2}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{(x-S)^2}{x}\cdot p(x) - \frac{c_2}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{2\cdot(x-S)}{x}\cdot p(x) + \frac{c_2}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}$$

Teniendo en cuenta (20), la expresión anterior queda:

$$CTE(S+1)-CTE(S)=c_1\cdot\sum_0^S p(x)+c_1\cdot\frac{S+1}{2}\cdot p(S+1)+$$
$$+\frac{c_1}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{2\cdot S}{x}\cdot p(x)+\frac{c_1}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}-c_1\cdot\frac{(S+1)}{2}\cdot p(S+1)+$$
$$-\frac{c_2}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{2\cdot(x-S)}{x}\cdot p(x)+\frac{c_2}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}$$

Es segundo término es igual y de sentido contrario al quinto término, por lo que se pueden simplificar.

$$CTE(S+1)-CTE(S)=c_1\cdot\sum_0^S p(x)+c_1\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{S}{x}\cdot p(x)+\frac{c_1}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}-c_2\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{(x-S)}{x}\cdot p(x)+$$
$$+\frac{c_2}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}$$

Aplicando ahora la propiedad distributiva en el cuarto término de la expresión anterior:

$$CTE(S+1)-CTE(S)=c_1\cdot\sum_0^S p(x)+c_1\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{S}{x}\cdot p(x)+\frac{c_1}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}-c_2\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\cdot p(x)+$$
$$+c_2\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{S}{x}\cdot p(x)+\frac{c_2}{2}\cdot\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}$$

Considerando que las sumatorias sobre p(x) son las funciones acumuladas, y sacando denominador común:

$$CTE(S+1)-CTE(S)=c_1\cdot p(x\le S)+\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}\cdot\left[c_1\cdot S+\frac{c_1}{2}+c_2\cdot S+\frac{c_2}{2}\right]-c_2\cdot[1-p(x\le S)]$$

Aplicando propiedad distributiva en el último término:

$$CTE(S+1)-CTE(S)=c_1\cdot p(x\le S)+\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}\cdot\left[c_1\cdot S+\frac{c_1}{2}+c_2\cdot S+\frac{c_2}{2}\right]-c_2+c_2\cdot p(x\le S)$$

Sacando denominador común, y factoreando:

$$CTE(S+1)-CTE(S)=(c_1+c_2)\cdot p(x\le S)+\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}\cdot(c_1+c_2)\cdot\left(S+\frac{1}{2}\right)-c_2$$

Sacando ahora (c_1+c_2) como factor común:

$$CTE(S+1)-CTE(S)=(c_1+c_2)\cdot\left[p(x\le S)+\sum_{S+1}^{\infty}\frac{p(x)}{x}\cdot\left(S+\frac{1}{2}\right)\right]-c_2$$

A la expresión que está dentro del corchete la llamaremos L(S), es decir:

$$L(S) = p(x \leq S) + \sum_{S+1}^{\infty} \frac{p(x)}{x} \cdot \left(S + \frac{1}{2} \right) \quad \textbf{(24)}$$

Tendremos entonces que:

$$CTE(S+1) - CTE(S) = (c_1 + c_2) \cdot L(S) - c_2 \quad \textbf{(25)}$$

Para que “S” sea óptimo, según (21) esta expresión debe ser mayor o igual a cero:

$$CTE(S_o + 1) - CTE(S_o) = (c_1 + c_2) \cdot L(S_o) - c_2 \geq 0 \quad \textbf{(26)}$$

Luego:

$$L(S_o) \geq \frac{c_2}{c_1 + c_2} \quad \textbf{(27)}$$

Ahora bien, si se cumple (25) para “S”, también se cumple para “S-1”:

$$CTE(S) - CTE(S-1) = (c_1 + c_2) \cdot L(S-1) - c_2 \quad \textbf{(28)}$$

Para que “S” sea óptimo, según (22), la expresión (28) debe ser menor o igual a cero:

$$CTE(S_o) - CTE(S_o - 1) = (c_1 + c_2) \cdot L(S_o - 1) - c_2 \leq 0 \quad \textbf{(29)}$$

Despejando:

$$L(S_o - 1) \leq \frac{c_2}{c_1 + c_2} \quad \textbf{(30)}$$

Teniendo en cuenta conjuntamente (26) y (30), tendremos:

$$\boxed{L(S_o - 1) \leq \frac{c_2}{c_1 + c_2} \leq L(S_o)} \quad \textbf{(31)}$$

En consecuencia, para determinar el valor óptimo bastará con calcular la relación de los parámetros que satisfaga la doble condición de (31).

Aquí también podemos estudiar el rango de validez de los parámetros dentro de los cuales se mantiene la solución óptima. Para el costo de agotamiento tendremos que el límite superior, es decir el valor con el cual tendremos una solución alternativa entre S_o y S_o+1 será:

$$\frac{c_{2SUP}}{c_1 + c_{2SUP}} = L(S_o) \quad \Rightarrow \quad c_{2SUP} = \frac{c_1 \cdot L(S_o)}{1 - L(S_o)} \quad \textbf{(32)}$$

mientras que el límite inferior, es decir el valor de c_2 con el que habrá una solución alternativa entre S_o y S_o-1 es:

$$\frac{c_{2INF}}{c_1 + c_{2INF}} = L(S_o - 1) \quad \Rightarrow \quad c_{2INF} = \frac{c_1 \cdot L(S_o - 1)}{1 - L(S_o - 1)} \qquad \textbf{(33)}$$

Finalmente, para el costo de mantenimiento los límites serán:

$$\frac{c_2}{c_{1SUP} + c_2} = L(S_o - 1) \quad \Rightarrow \quad c_{1SUP} = \frac{c_2 \cdot [1 - L(S_o - 1)]}{L(S_o - 1)} \qquad \textbf{(34)}$$

$$\frac{c_2}{c_{1INF} + c_2} = L(S_o) \quad \Rightarrow \quad c_{1INF} = \frac{c_2 \cdot [1 - L(S_o)]}{L(S_o)} \qquad \textbf{(35)}$$

Ejemplo 9.1:

Una empresa desea programar la compra de un componente que se utilizará por una única vez durante un proyecto. El requerimiento de este componente responde a una distribución Poisson con media 4.

El precio de adquisición antes de comenzar el proyecto es de $900 por cada componente, mientras que el de cualquier orden posterior al inicio será de $1.600.

Un componente que quede en existencia al final del proyecto tendrá un valor residual de $800.

Calcular cuántos componentes se deberán adquirir antes de iniciar el proyecto.

Solución:

De la tabla de probabilidades acumuladas F_{Po} obtenemos los siguientes valores:

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**>11**
F(x)	0,018	0,092	0,238	0,433	0,629	0,785	0,889	0,949	0,979	0,992	0,997	0,999	1

Los valores de los parámetros a utilizar son:

$$f_2 = 1.600 - 900 = 700$$

$$c_e = 900 - 800 = 100$$

Se calcula, entonces, la relación:

$$\frac{f_2}{c_e + f_2} = \frac{700}{100 + 700} = 0{,}875$$

Este valor se corresponde a una probabilidad acumulada que se encuentra comprendida entre los valores correspondientes a 5 y 6. En consecuencia, la cantidad óptima a adquirir es igual a 6 unidades.

Ejemplo 9.2:

Una empresa está considerando efectuar una orden para dos turbinas a un proveedor extranjero. En el momento que se efectúa la orden de las turbinas se debe decidir la cantidad a adquirir de un repuesto especial para ellas.

El proveedor suministró la siguiente información con respecto a las probabilidades de rotura del repuesto durante la vida útil (estimada en 5 años) de cada turbina:

- *Probabilidad de cero rotura: 0,7*
- *Probabilidad de una rotura: 0,2*
- *Probabilidad de dos roturas: 0,1*

El repuesto comprado junto con las turbinas cuesta $2.500 mientras que si en el momento de necesitarlo no está disponible, se puede hacer una compra de urgencia pero incurriéndose en un costo de $90.000 por lucro cesante y por mayor precio de compra.

Los repuestos no utilizados tienen un valor de $500 al final de la vida productiva de los equipos.

¿Cuántos repuestos se deben solicitar conjuntamente con las turbinas?

Solución:

En primer lugar se deben calcular las probabilidades de demanda del repuesto durante la vida útil de los dos equipos:

$p(0) = P(0) \cdot P(0) = 0,7 \cdot 0,7 = 0,49$

$p(1) = P(1) \cdot P(0) + P(0) \cdot P(1) = 0,2 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,2 = 0,28$

$p(2) = P(1) \cdot P(1) + P(2) \cdot P(0) + P(0) \cdot P(2) = 0,2 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,7 + 0,7 \cdot 0,1 = 0,18$

$p(3) = P(2) \cdot P(1) + P(1) \cdot P(2) = 0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,04$

$p(4) = P(2) \cdot P(2) = 0,1 + 0,1 = 0,01$

Luego:

x	p(x)	F(x)
0	0,49	0,49
1	0,28	0,77
2	0,18	0,95
3	0,04	0,99
4	0,01	1,00

Los parámetros son:

f_2: 90.000

c_e: 2.500 – 500 = 2.000

Para resolver, se calcula la relación:

$$\frac{f_2}{c_e + f_2} = \frac{90.000}{2.000 + 90.000} = 0,9783$$

Dado que este valor está comprendido entre la función acumulada correspondiente a 2 y a 3, la solución óptima consiste en adquirir 3 repuestos conjuntamente con las turbinas.

Ejemplo 9.3:

Un distribuidor e instalador de equipos de aire acondicionado está planificando la compra de equipos para el último trimestre del año.

La empresa fabricante de una marca determinada de acondicionadores ha informado a sus distribuidores que a fin de año discontinuará el modelo "SE" de 4 toneladas y lo reemplazará por uno nuevo. En consecuencia, el fabricante está ofreciendo a sus distribuidores la oportunidad de hacer una última compra del modelo "SE" a un precio muy favorable ($5.000) a fin de que tengan tiempo de venderlos e instalarlos antes de fin de año.

El distribuidor podrá vender cada equipo "SE" a 8.000 antes de terminar el año, pero una vez notificado el cambio de modelo al público no podrá venderse a más de $4.500, ya que la demanda de este tipo de equipos es muy susceptible a la obsolescencia.

El distribuidor estima que la venta de los equipos modelo "SE" hasta fin de año tiene la siguiente ley de probabilidades:

x	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***>5***
p(x)	*0,14*	*0,48*	*0,20*	*0,12*	*0,04*	*0,02*	*0,00*

Determinar la cantidad de equipos "SE" que el distribuidor deberá pedir al fabricante y hallar el precio de venta máximo hasta el cual es válida la solución encontrada.

Solución:

En primer lugar se calcula la función acumulada de las probabilidades:

x	**p(x)**	**F(x)**
0	0,14	0,14
1	0,48	0,62
2	0,20	0,82
3	0,12	0,94
4	0,04	0,98
5	0,02	1,00
> 5	0,00	1,00

Los parámetros del problema son:

$$f_2 = p_V - b = 8.000 - 5.000 = 3.000$$

$$c_e = b - p_R = 5.000 - 4.500 = 500$$

Luego:

$$\frac{f_2}{c_e + f_2} = \frac{3.000}{500 + 3.000} = 0{,}8571$$

Esto significa que la cantidad óptima a adquirir es igual a 3 equipos de este modelo.

Para calcular el precio de venta máximo, se calcula primero el lucro cesante (f_2) máximo:

$$\frac{f_{2\ MAX}}{500 + f_{2MAX}} = 0{,}94$$

Despejando, el valor máximo de f_2 dentro del cual se mantiene la solución propuesta de 3 componentes es $7.833,33.

En consecuencia, el precio de venta máximo será:

$$p_V = f_{2MAX} + b = 7.833{,}33 + 5.000 = 12.833{,}33$$

Ejemplo 9.4:

Si para el problema 9.1 se supone que la demanda es de distribución normal con una media igual a 10 unidades y un desvío estándar de 2, determinar el lote inicial de compra.

Solución:

Se debe buscar el valor correspondiente a "z" para la función de probabilidad acumulada normal estandarizada F_{N*} para el valor 0,875:

$$\frac{f_2}{c_e + f_2} = F_{N*}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_{N*}(z) = 0{,}875$$

De tablas, se obtiene el valor $z = 1{,}15$. En consecuencia:

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = 1{,}15$$

Es decir:

$$x = \mu + 1{,}15 \cdot \sigma = 10 + 1{,}15 \cdot 2 = 12{,}30$$

Esto significa que se deben comprar 12,30 unidades del producto en cuestión.

Ejemplo 9.5:

Un artículo, cuya demanda mensual está dada por una distribución Poisson, es decir con función de distribución:

$$P_{Po}(x) = \frac{\lambda^x \cdot e^{-\lambda}}{x!}$$

con media l = 3,5, se adquiere hasta completar un "stock máximo" que debe calcularse. Este producto se compra mensualmente y su costo de mantenimiento es de $10 por unidad por mes. Si, cuando se demanda, este artículo no está en stock, se entregará cuando se *recibe, pero incurriéndose en un costo de $90 por cada unidad que no se entregue inmediatamente.*

1. Determinar el stock máximo.
2. Calcular los límites superior e inferior del costo de mantenimiento para que se mantenga la solución óptima encontrada en el punto anterior.

Solución:

En la siguiente tabla, en la segunda columna, se consignan los valores de probabilidad Poisson correspondientes a la media 3,5 para los distintos valores de demanda (columna 1). En la tercera columna se indica la función acumulada F(x). En las columnas siguientes, se muestran los cálculos parciales para la obtención de la función L(S), que es la suma de los valores de la columna 3 y de la columna 6:

x	**p(x)**	**F(x)**	$\frac{p(x)}{x}$	$\sum_{S+1}^{10} \frac{p(x)}{x}$	$\left(S+\frac{1}{2}\right)\cdot\sum_{S+1}^{10} \frac{p(x)}{x}$	**L(S)**
0	0,030	0,030		0,366	0,183	0,213
1	0,106	0,136	0,106	0,260	0,390	0,526
2	0,185	0,321	0,093	0,167	0,418	0,739
3	0,216	0,537	0,072	0,095	0,333	0,870
4	0,189	0,725	0,047	0,048	0,216	0,944
5	0,132	0,858	0,026	0,022	0,121	0,979
6	0,077	0,935	0,013	0,009	0,059	0,994
7	0,039	0,973	0,006	0,003	0,023	0,996
8	0,017	0,990	0,002	0,001	0,009	0,999
9	0,007	0,997	0,001	0,000	0,003	1,000
10	0,002	0,999	0,000	0,000	0,001	1,000

Luego se calcula la relación:

$$\frac{c_2}{c_1 + c_2} = \frac{90}{10+90} = 0{,}90$$

Dado que este valor está comprendido entre el valor de la función L correspondiente a 3 y 4, el óptimo es 4.

Los límites superior e inferior de c_1 dentro de los cuales se mantiene la solución son:

$$c_{1SUP} = \frac{c_2 \cdot [1 - L(S_o - 1)]}{L(S_o - 1)} = \frac{90 \cdot [1 - 0{,}870]}{0{,}870} = \$13{,}45$$

$$c_{1INF} = \frac{c_2 \cdot [1 - L(S_o)]}{L(S_o)} = \frac{90 \cdot [1 - 0{,}944]}{0{,}944)} = \$5{,}34$$

CAPÍTULO X

ADMINISTRACIÓN DE INVENTARIOS

1. PROGRAMACIÓN "MULTI-TIME"

Muchos programas matemáticos requieren vincular variables que corresponden a diferentes períodos de tiempos. Un ejemplo clásico de formulación de modelos de etapas múltiples es el correspondiente a la programación de la producción, con las variables de producción y ventas vinculadas a través de los inventarios. Para un producto determinado que tiene un ingreso a almacén (generado, por ejemplo, por una actividad de producción) y un egreso de almacén (generado por una actividad de venta), y llamando:

S_i: stock final en el período i,

P_i: producción del período i, y

V_i: venta del producto en el período i,

la relación que vincula estas variables para cada período es la siguiente:

$$\boxed{S_i - S_{i-1} - P_i + V_i = 0} \tag{1}$$

Estos problemas se pueden resolver con técnicas de "Programación Dinámica" o, preferentemente, con técnicas de "Programación Matemática" general, utilizando sistemas tales como el LINDO para programas lineales, o el LINGO para programas no lineales.

2. CRITERIOS DE REAPROVISIONAMIENTO CON DEMANDA ALEATORIA

Existen básicamente dos conceptos diferentes para administrar inventarios frente a una demanda aleatoria. Uno de ellos, el más simple, es el denominado sistema "Q" y se basa en una frecuencia de revisión variable con lotes fijos de adquisición. El otro método, conocido como sistema "P", por el contrario, se fundamenta en una administración de frecuencia de revisión fija y cantidades a adquirir variables.

<u>Sistema "Q" (Cantidad "q" constante, tiempo "t" variable).</u>

Este método trabaja con el concepto de stock de reorden. La emisión de la orden de compra (o de producción) se realiza cuando el nivel de inventarios llega al punto de pedido. Debido a que la demanda y el plazo de entrega ("*lead time*") son aleatorios, se adopta generalmente un Stock de Seguridad ("S_P").

Sobre períodos relativamente largos de tiempo, se van determinando periódicamente los valores medios de la demanda y del plazo de entrega. Con el valor promedio obtenido de la demanda, se calcula el lote óptimo de adquisición "q_o" tal como se ha descrito en los capítulos anteriores.

En la Figura 1 se muestra la evolución del stock en función del tiempo para un ítem administrado bajo el sistema "Q". Cuando las existencias llegan al punto de pedido, se solicita el lote óptimo. Como la demanda es aleatoria, se puede producir déficit. Obviamente, incrementar el punto de reorden reduce la probabilidad de llegar al agotamiento, pero aumenta el costo de mantenimiento.

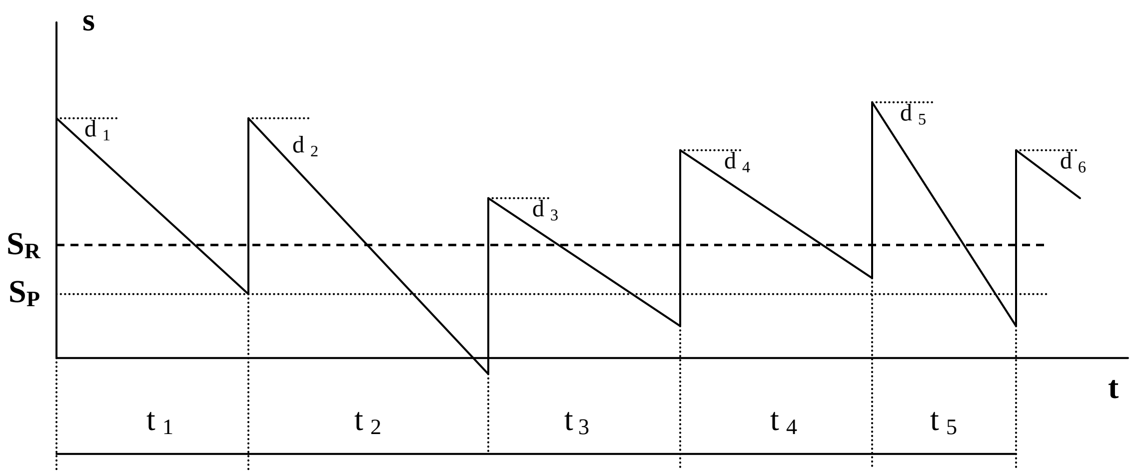


Figura 1

En este caso, hay que considerar el hecho de que la probabilidad de quedar sin stock ocurre solo durante el plazo de entrega. En consecuencia, la determinación del punto de reorden se hace teniendo en cuenta únicamente la variación de demanda durante el "*lead time*", y de manera tal que el stock final sea igual al stock de seguridad fijado (ver Figura 2). Es decir:

$$\boxed{S_R = S_P + \overline{d}_{LT}} \qquad \textbf{(2)}$$

en donde:

$$\overline{d}_{LT} = \overline{d} \cdot \overline{LT}$$

siendo:

$\overline{d}_{LT}$: demanda promedio durante el plazo de entrega a aplicar en el cálculo.

$\overline{d}$: tasa de demanda promedio

$\overline{LT}$: plazo promedio de entrega.

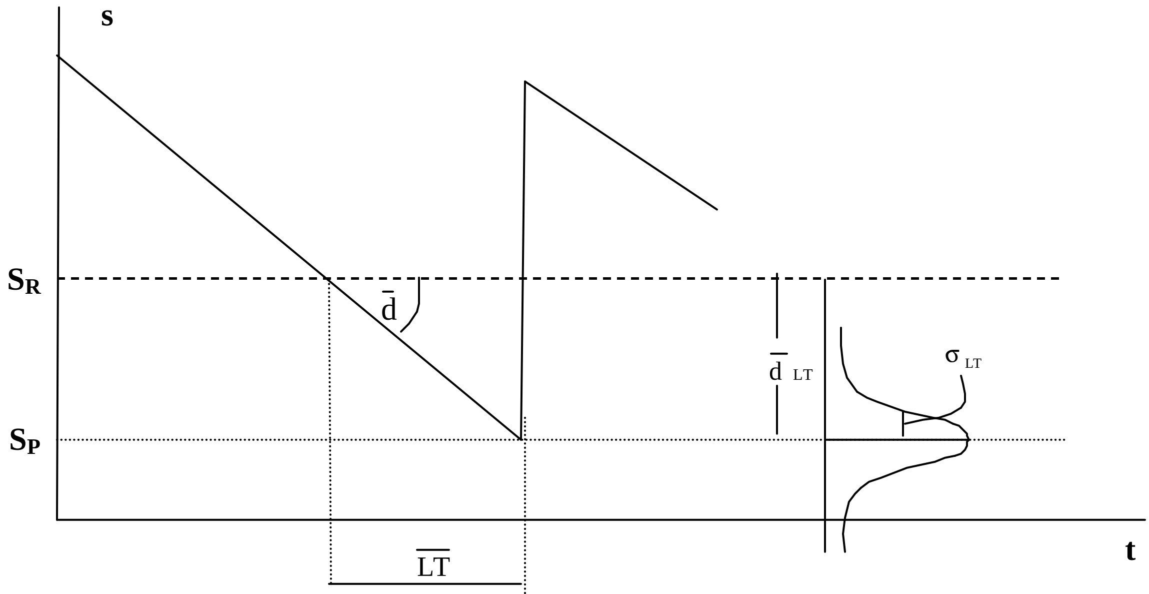


Figura 2

Si la distribución de la variable LT es normal (de media $\bar{d}_{LT}$ y desvío estándar σ_{LT}), tal como se muestra en la Figura 2, el Factor de Servicio (F_S), es decir el porcentaje de demanda que se satisface en forma inmediata sobre la demanda total solicitada durante el plazo de entrega, está dato por:

$$\boxed{F_S = F_{N*}\left(\frac{S_R - \bar{d}_{LT}}{\sigma_{LT}}\right)} \qquad \textbf{(3)}$$

en donde F_{N*} es la función normal estandarizada de la variable aleatoria.

Normalmente, las empresas fijan el Factor de Servicio para el plazo de entrega, y en función de ello, determinan el Stock de Reorden (S_R) y el Stock de seguridad (S_P). De la tabla de la distribución normal estandarizada se obtiene el valor de "z" correspondiente a la expresión (2):

$$z = \frac{S_R - \bar{d}_{LT}}{\sigma_{LT}}$$

y se despeja S_R, de manera que:

$$\boxed{S_R = z \cdot \sigma_{LT} + \bar{d}_{LT}} \qquad \textbf{(4)}$$

Finalmente, el Stock de seguridad será:

$$S_P = S_R - \bar{d} \cdot LT = S_R - \bar{d}_{LT} = z \cdot \sigma_{LT} + \bar{d}_{LT} - \bar{d}_{LT}$$

es decir:

$$\boxed{S_P = z \cdot \sigma_{LT}} \qquad \textbf{(5)}$$

El sistema "Q" es fácil de operar. La determinación de la oportunidad de emitir la emisión de la orden de compra (o de fabricación) es muy sencilla: simplemente se efectúa cuando las existencias llegan al "punto de pedido". Siempre se solicita la misma cantidad (el lote óptimo). Para los cálculos, simplemente se deben determinar los valores promedios de la demanda y del plazo de entrega; con ellos se calcula el lote óptimo y el stock de reorden. Estos valores se van recalculando y ajustando con cierta periodicidad a lo largo del tiempo (por ejemplo, una vez por año).

Si bien el método es muy simple, es poco preciso. En general se aplica para los artículos de la parte "C" de la curva "ABC" o para aquellos productos que tengan muy poca variación de demanda.

<u>Sistema "P" (Tiempo "t" constante, cantidad "q" variable).</u>

Con este método se revisan los stocks con una frecuencia constante, es decir a períodos iguales de tiempo, y se solicita una cantidad de unidades "q" variable en función de la demanda del próximo período y de la demanda del plazo de entrega durante el período actual.

Del mismo modo que en el sistema "Q", se determina un Stock de Protección para absorber fluctuaciones de demanda y de plazo de entrega.

En la Figura 3 se puede observar un ejemplo de la variación del nivel de inventarios "s" en función del tiempo "t", en donde "t_p" (constante) es el período entre revisiones y los "t_i" son los períodos entre ciclos. Obviamente, los "t_i" son diferentes, pero su promedio es igual a "t_p". Los puntos indican el stock que se observa en cada medición.

La cantidad a solicitar para el período siguiente al que se está haciendo la medición debe tener como objetivo que el stock final al finalizar dicho período siguiente sea igual al Stock de Seguridad (S_P). Supongamos que se quiere determinar la cantidad a comprar para un período cualquiera "t_i", y que son conocidos el plazo de entrega (*lead time*) estimado, la tasa de demanda que se tendrá durante el *lead time* (en el período "i-1" en el que se hace la observación) y la tasa de demanda pronosticada para el período "i". Llamaremos:

d_{i-1}: Tasa de demanda para el *lead time* en el período "i-1".

d_i: Tasa de demanda pronosticada para el período "i".

En el gráfico de la Figura 4 se observa la situación para un período "i". En el período anterior ("i-1") se hace la medición del nivel de inventarios que llamaremos "S_M", y se solicitará una cantidad "q", cuyo cálculo se determinará como veremos a continuación. Durante el plazo de entrega ("LT") tendremos una demanda "d_{i-1}", por lo que el nivel de inventario al momento de la recepción del pedido es "S_o". Una vez recibido el pedido, el nivel de inventario se incrementará en una cantidad "q" hasta llegar al valor "S_i". Durante el período "i" habrá una demanda "d_i" que debería dejar el nivel de stocks al finalizar el mismo en una cantidad igual al Stock de Protección.

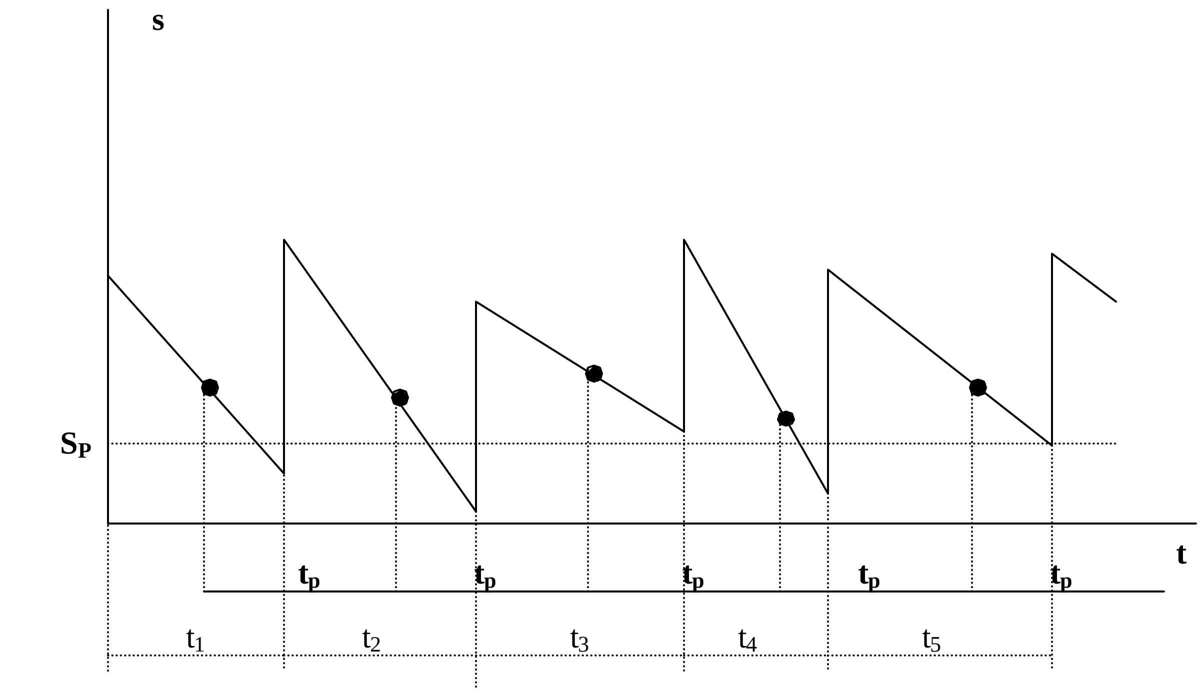


Figura 3

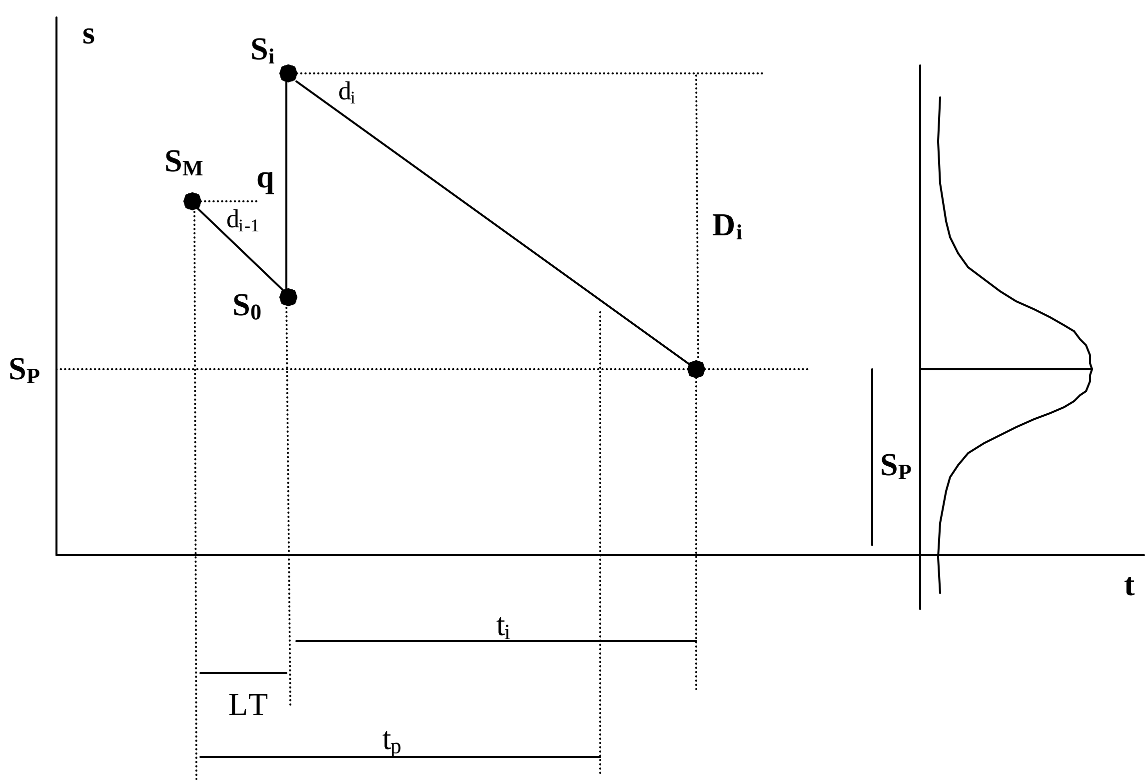


Figura 4

Como puede observarse:

$$S_M = S_o + d_{i-1} \cdot LT \qquad \Rightarrow \qquad S_o = S_M - d_{i-1} \cdot LT$$

Además:

$$S_i = S_o + q$$

y

$$S_i = S_P + d_i \cdot t_i$$

por lo que:

$$S_o + q = S_P + d_i \cdot t_i$$

En consecuencia, la cantidad a solicitar para el período "i" deberá ser:

$$\boxed{q = S_P + d_i \cdot t_i - S_M + d_{i-1} \cdot LT} \qquad \textbf{(6)}$$

Si la mejor estimación de "t_i" que se puede hacer es el valor promedio ($\bar{t}_i$), podemos considerar que $t_p = t_i$, por lo que la expresión (5) queda:

$$\boxed{q = S_P + d_i \cdot t_p - S_M + d_{i-1} \cdot LT} \qquad \textbf{(7)}$$

En el caso de que la tasa de la demanda durante el plazo de entrega en el período de revisión "i-1" sea igual a la tasa esperada de demanda en el período "I", tendremos que:

$$\boxed{q = S_P - S_M + d_i \cdot (t_p + LT)} \qquad \textbf{(8)}$$

También:

$$S_i = S_M - d_{i-1} \cdot LT + q$$

Si la demanda total del período ("D_i") es normal, y suponiendo que la estimación de "d_{i-1}" y de "LT" están bien hechas, la probabilidad de quedar sin stock en un período dado está dada por la expresión:

$$F_{N^*}\left(\frac{S_M - d_{i-1} \cdot LT + q - \bar{D}_i}{\sigma_i}\right) = F_{N^*}\left(\frac{S_i - \bar{D}_i}{\sigma_i}\right) \qquad \textbf{(9)}$$

Fijado un Factor de Servicio (F_S) se puede determinar el Stock de Seguridad (S_P). De la tabla de la distribución normal estandarizada se obtiene el valor de "z" correspondiente:

$$F_S = F_{N^*}\left(\frac{S_i - \bar{D}_i}{\sigma_i}\right) = F_{N^*}\left(\frac{\bar{D}_i + S_P - \bar{D}_i}{\sigma_i}\right) = F_{N^*}\left(\frac{S_P}{\sigma_i}\right) \qquad \textbf{(10)}$$

Por lo tanto:

$$z = \frac{S_P}{\sigma_i} \quad \Rightarrow \quad S_P = z \cdot \sigma_i$$

En resumen, el sistema "P" exige efectuar pronósticos de demanda todos los períodos y hacer un cálculo de lote en cada uno. Por lo tanto, es mucho más complicado de implementar que el sistema "Q"; pero permite hacer una gestión más ajustada de los inventarios. En general se utiliza para la administración de los productos de la parte "A" de la curva "ABC" y para aquellos cuya demanda sea muy aleatoria.

3. SIMULACIÓN

La técnicas de la simulación, que se utilizan para el análisis y el estudio de sistemas de inventarios con variables aleatorias, proporcionan un ámbito de modelización apropiado cuando los métodos analíticos resultan complejos.

La simulación permite establecer niveles de reorden, stocks de seguridad, plazos de revisión apropiados de inventarios, etc., en procesos estocásticos complejos. En general, los métodos numéricos son más fáciles de aplicar que los analíticos y no requieren tantas hipótesis simplificativas, por lo que resultan muy flexibles para representar los sistemas reales. No obstante, se debe señalar que estos métodos son lentos y costosos en términos de resolución, e imprecisos si no se realiza una corrida suficientemente grande como para asegurar que los valores encontrados son confiables desde el punto de vista estadístico.

4. PLANEAMIENTO DE REQUISICIÓN DE MATERIALES

Para el planeamiento y el control de los inventarios de artículos manufacturados, especialmente en cierto tipo de industrias, debe tenerse en cuenta que la demanda de los productos terminados (es decir, los correspondientes al primer nivel de la estructura de producto) es independiente, mientras que sus componentes, partes, subensambles o materia prima (o sea, los correspondientes a niveles inferiores) tienen una demanda que depende de las cantidades del artículo terminado que debe fabricarse, y que se puede calcular a partir de los pronósticos y de los programas de producción de aquel.

Tal como se mencionó en los capítulos anteriores, la técnica del lote óptimo, llamada EOQ (por *Economic Order Quantity*), desarrollada por Harris y posteriormente presentada en ámbitos académicos y perfeccionada por Wilson, es válida solamente para productos de demanda independiente.

Para los artículos de los niveles inferiores, es decir aquellas partes que no están sujetas directamente a las condiciones del mercado, se utiliza un método de administración y control, con asistencia de sistemas computarizados, llamado "MRP" por sus siglas en inglés (*Material Requirement Planning*).

Durante la década de 1940 se comenzaron a desarrollar técnicas "MRP" que incluían conceptos tales como planes maestros de producción, listas de materiales, etc. Sin embargo, dado que estos documentos se preparaban manualmente y que los requerimientos se calculaban también manualmente, los programas no eran eficaces.

La primera computadora comercial se creó en el año 1954, y en poco tiempo los planificadores de inventarios reconocieron su utilidad potencial en este campo. Hacia fines de la década de 1950, American Bosch desarrolló un sistema primitivo de planeamiento de requisición de materiales. Recién en el año 1965 el Dr. Orliky propuso el concepto de demandas dependientes y demandas independientes, y la aplicación del sistema “MRP” para las demandas dependientes.

Durante la década de 1970, el sistema APICS facilitó el planeamiento a largo plazo para el “MRP”. En la década siguiente se desarrolló el denominado MRP II que incluía todos los recursos de manufactura: materiales, humanos, físicos y financieros. La denominación II se hizo para diferenciarlo del MRP tradicional que comenzó a llamarse MRP I.

En la Figura 5 se muestra un ejemplo esquemático de estructura de producto para dos ítems (“A” y “B”). La estructura de producto es una lista que indica la relación jerárquica entre un producto terminado y sus elementos componentes.

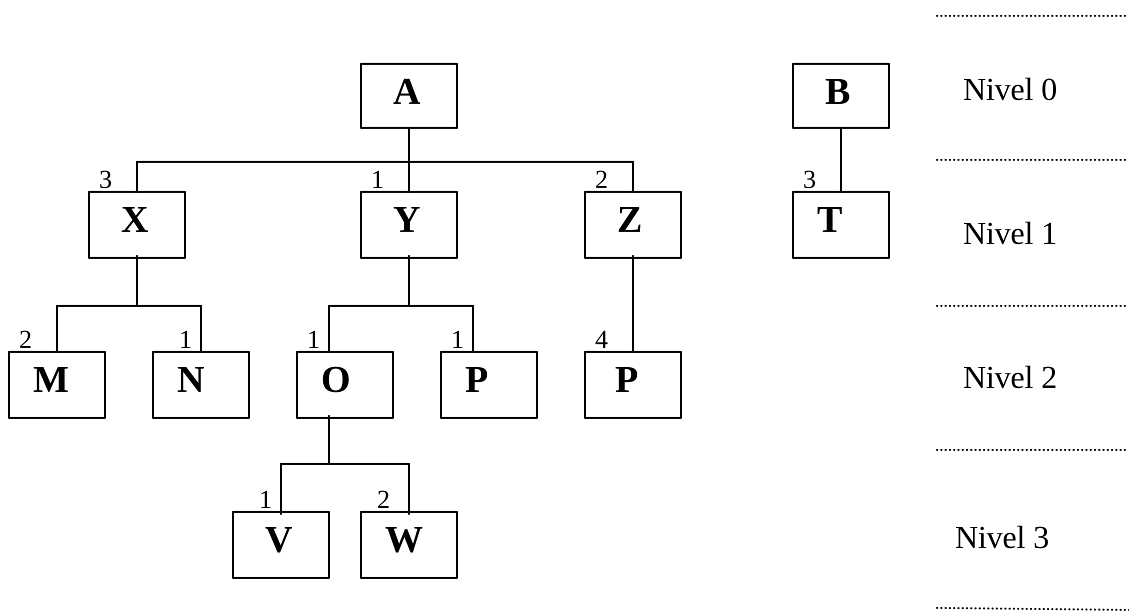


Figura 5

El proceso de descomposición de un producto en sus componentes del nivel inmediato inferior y, a su vez, de cada componente en los subcomponentes que lo forman del siguiente nivel inferior, y así sucesivamente, se denomina “explosión” del producto. En el ejemplo, cada unidad de “A” (nivel 0 de demanda independiente) lleva tres componentes de “X”, un componente de “Y” y dos componente de “Z” (nivel 1).

A su vez, cada componente “X” lleva dos partes de “M” y una de “N” (nivel 2), mientras que cada componente “Y” tiene un subcomponente “O” y, por ejemplo, 1 Kg de Materia Prima “P”. Asimismo, cada subcomponente “O” lleva una parte “V” y dos de “W” (nivel 3). Finalmente, el componente “Z” lleva 4 Kg de materia prima “P”.

Por su parte, el producto “B” (nivel 0) tiene un único componente, que es el “T”, llevando cada unidad de “B” 3 unidades de “T” (nivel 1).

Todos los componentes y subcomponentes (niveles inferiores al nivel 0) son de demanda dependiente.

Algunos componentes y subcomponentes se elaboran o arman en la empresa, por lo que deberán fabricarse en la cantidad necesaria y con la anticipación requerida (considerando el tiempo necesario para su elaboración) para que estén disponibles en la oportunidad que lo requiera la manufactura del correspondiente elemento superior del cual dependen. Otros elementos se adquieren a terceros, y se debe planificar su compra (teniendo en cuenta los plazos de entrega) para, también, tenerlos disponibles en la oportunidad de la elaboración o armado del elemento "padre".

Como ejemplo, en la Figura 6 puede observarse la variación del nivel de inventarios del producto final "B", de demanda independiente, y de su único componente "T", el cual se supone que se adquiere a un proveedor externo. El lote óptimo del producto "B" se fabrica durante el tiempo de fabricación "t_1"; la orden de compra correspondiente se deberá emitir con una anticipación mayor o igual al *lead time* de fabricación LT_B.

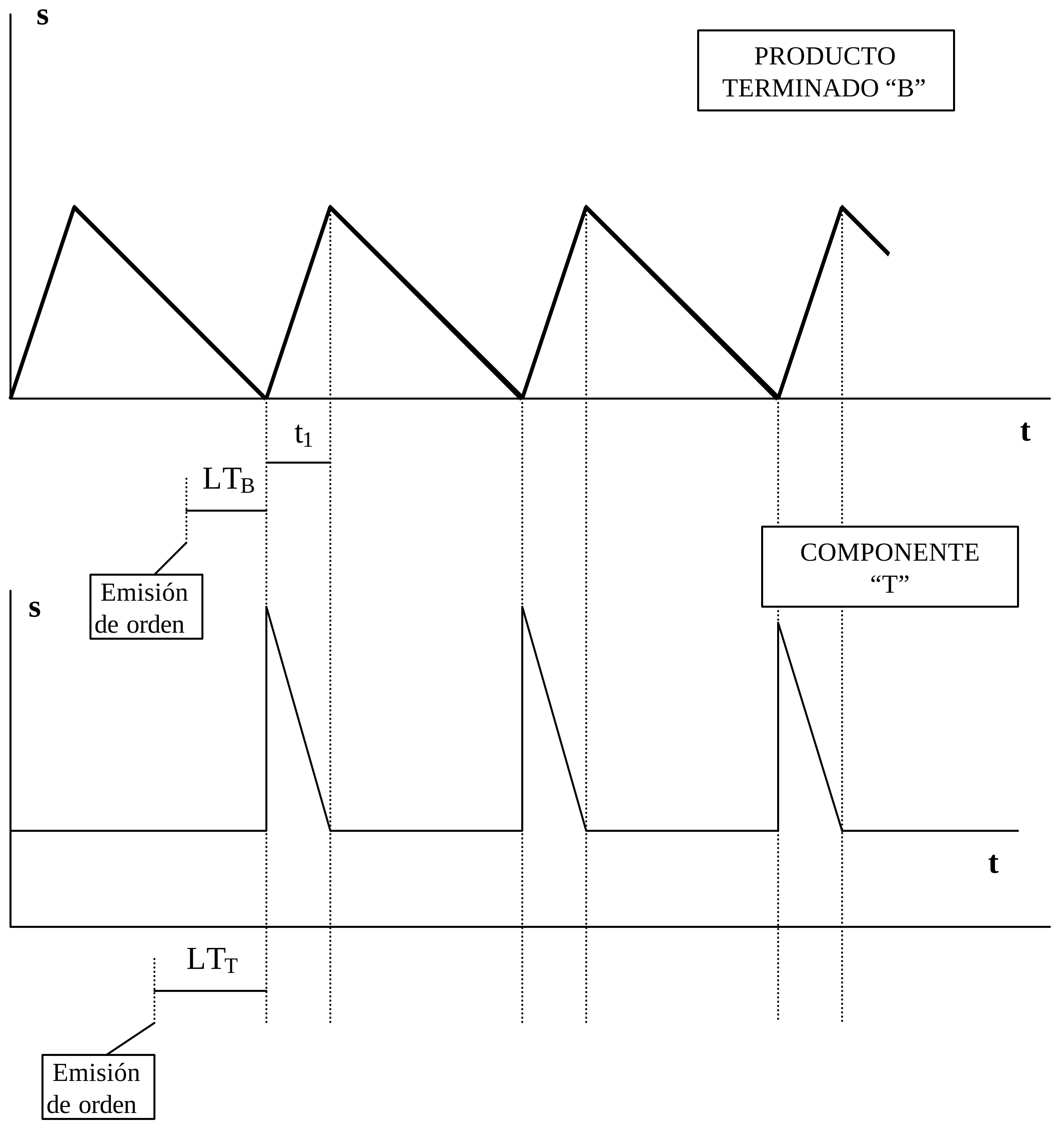


Figura 6

Antes de que comience su fabricación, deberá estar disponible el componente "T", por lo que habrá que tener en cuenta el plazo de entrega (*lead time*) LT_T del proveedor para emitir la orden de compra correspondiente.

Si, en cambio, el componente "T" se fabricara internamente, se puede tener una situación como la indicada en la Figura 7, en donde la reposición del componente "T" no es instantánea.

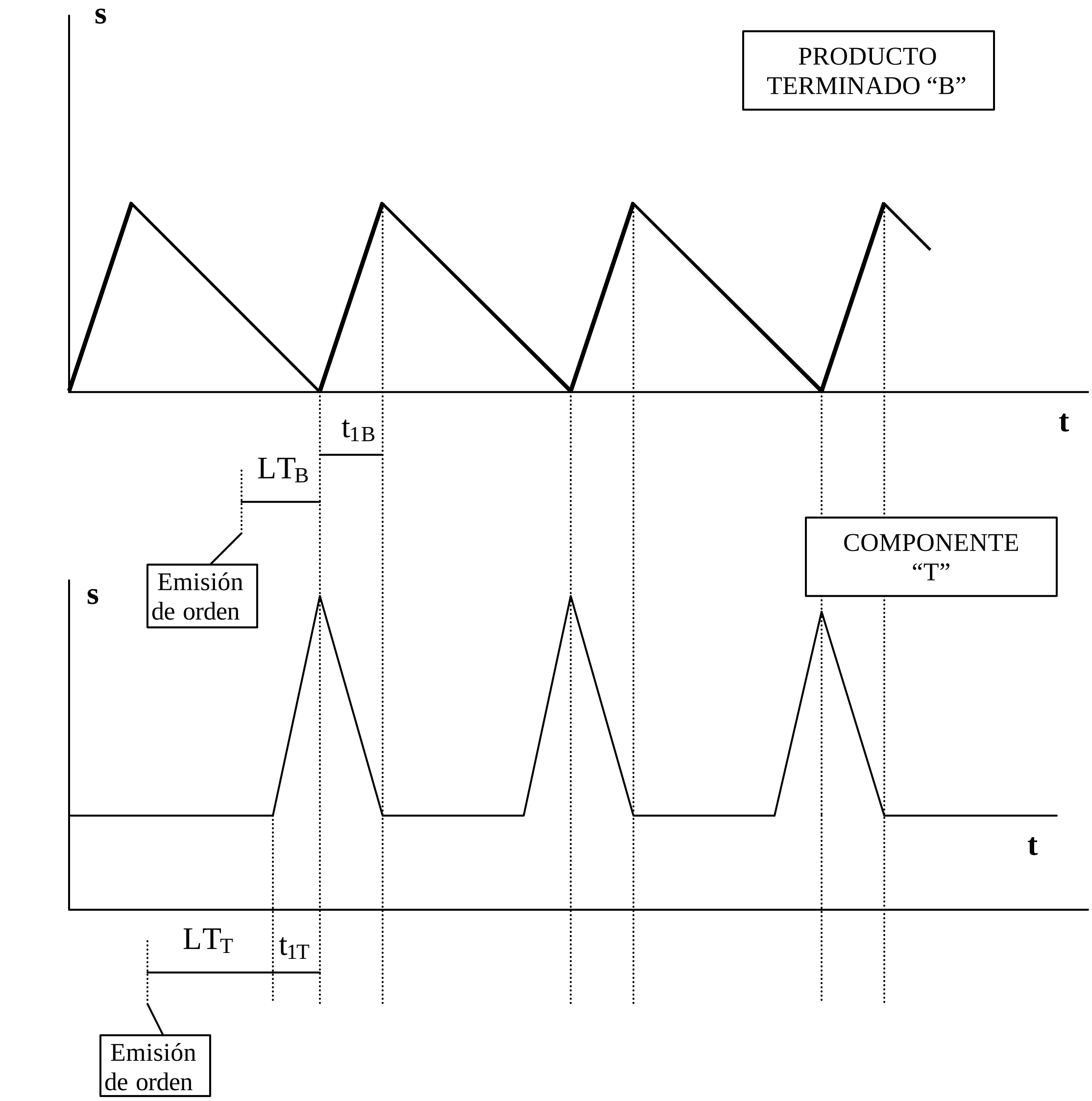


Figura 7

En los sistemas "MRP", el archivo que contiene las estructuras de producto de todos los artículos terminados se denomina "Listas de Materiales" o *"Bill Of Materials"* (BOM).

Los cálculos del planeamiento de los requerimientos de los materiales comienzan con el denominado "Programa Maestro de Producción" (o *"Master Schedule")*, que especifica las demandas de los productos de nivel 0. En función de ellas, tomando la información disponible en la Lista de Materiales (esto es, la cantidad de componentes por cada unidad del elemento del nivel superior) y otra información operativa (cantidad de componentes en inventario y cantidad de componentes pendientes de entrega, si los hubiere, se determina la cantidad neta a pedir.

Adicionalmente, conociendo el plazo de entrega ("*lead time"*), información disponible en la base de datos del producto, se determina la oportunidad de la emisión de la orden de compra (u orden de fabricación). Si el componente debe elaborarse internamente, se debe planificar la producción para que todos los recursos estén disponibles en el momento oportuno, teniendo en cuenta para ello la capacidad de fabricación.

Muchos productos terminados llevan cientos de partes, las que a su vez dependen de otras. Por ejemplo, en la Fig. 5, la materia prima "P" depende de los componente "Y" y "Z" del producto “A”, pero podría depender adicionalmente de otro producto “C” cuya estructura de productos sea la de la Figura 8. En consecuencia, estos sistemas son muy complejos de operar y requieren de un soporte de computación eficiente. Normalmente, habrá que ingresar la siguiente información a un sistema “MRP”:

- ✓ Demanda (órdenes en firme).
- ✓ Pronóstico de ventas.
- ✓ Definición de recursos disponibles.
- ✓ Datos de inventarios y pedidos pendientes de entrega.
- ✓ Definición y estructura de producto.
- ✓ Información de proveedores.
- ✓ Definición del proceso.
- ✓ Datos de costos de producción.

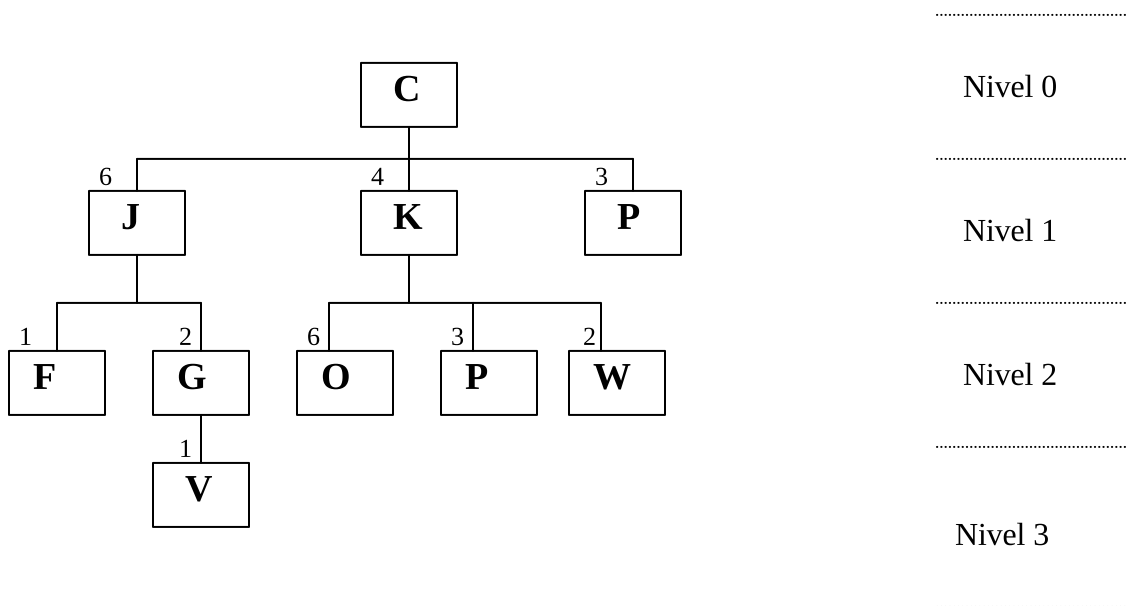


Figura 8

En resumen, el “MRP” (o “MRP I”) es un sistema de planificación de materiales y gestión de stocks que responde a las preguntas de cuánto y cuándo aprovisionarse de los materiales, a fin de dar un enfoque más objetivo, sensible y disciplinado en la determinación de los requerimientos de materiales de la empresa. Para ello el sistema trabaja con dos parámetros básicos: tiempos y capacidades. El sistema calculará las cantidades de cada producto terminado a fabricar (con los lotes óptimos) y las cantidades de los componentes necesarios a fabricar o comprar y de las materias primas a adquirir, así como la oportunidad de realizar la fabricación o compra de todos ellos, a fin de poder satisfacer la demanda de los productos terminados. El sistema garantiza la prevención y solución de errores en el aprovisionamiento de materias primas y en el control de la producción. La utilización de los sistemas “MRP I” implica la planificación de la producción basada en la anticipación, tratando de establecerse qué se debe hacer en el futuro y con qué materiales se cuenta, o en su caso, se necesitarán para poder realizar todas las tareas de producción.

El sistema MRP II proporciona la planificación y el control eficaz de todos los recursos de la producción, dando respuesta no sólo a las preguntas sobre cuánto y cuándo se va a producir, sino también sobre qué recursos se utilizarán para ello. Implica la planificación de todos los elementos que se necesitan para llevar a cabo el plan maestro de producción de los materiales a fabricar y vender, y de las capacidades de fábrica en mano de obra y máquinas.

El MRP II apunta básicamente a la identificación de los problemas de capacidad del plan de producción (disponibilidad de recursos frente al consumo planificado), facilitando la evaluación y ejecución de las modificaciones oportunas en el planificador.

El sistema MRP II ofrece una arquitectura de procesos de planificación, simulación, ejecución y control de la producción para ajustar las capacidades de fabricación, la mano de obra, flujo de materiales, los inventarios, los costos y los plazos de producción.

Es evidente que, para que un sistema "MRP" o "MRP II" funcione adecuadamente, será necesario planificar cuidadosamente la implementación, tener un soporte de computación adecuado (tanto en lo referente al "software" como al "hardware") y disponer de datos precisos y actualizados en la oportunidad adecuada. Asimismo, se requiere un buen conocimiento y un alto compromiso por parte de los usuarios del sistema.

Se ha demostrado en la práctica que la mayoría de las empresas manufactureras pueden obtener tremendos beneficios a partir de un sistema "MRP" o "MRP II" siempre que esté bien instalado y que sea utilizado correctamente. Ejemplos de tipo de industrias apropiadas para este tipo de sistema son la electrodoméstica y electrónica.

Los avances que se verificaron en la computación y en las comunicaciones cambiaron radicalmente la manera de administrar los materiales a partir de la década de 1990. La estrategia competitiva cambió hacia un enfoque de bajos precios, alta calidad y alta variedad, a una gran velocidad, desarrollándose un sistema que se llamó "ERP" (por las siglas en inglés de *Enterprise Requirement Planning* o también *Enterprise Resource Planning*). El ERP incluye implementaciones de sistemas abiertos, arquitecturas de computadoras cliente/servidor, redes locales y expandidas, bases de datos relacionales y sistemas de aplicación con interfases gráficas, amistosas para los usuarios, escritos en lenguajes de cuarta generación.

Las diferencias entre los sistemas "MRP II" y "ERP" se manifiestan en las herramientas tecnológicas. Los sistemas "ERP" conectan todas las plantas y oficinas de un grupo de negocios a través del mundo. Un sistema "ERP" permite a una compañía diseñar productos con entradas suministradas por ingenieros en todo el mundo, establecer fábricas en varias áreas para producir partes y componentes requeridas entre ellas, adquirir materiales de muy diferentes países y compartir información entre todas las partes relacionadas.

5. SISTEMA "JUST-IN-TIME" (o "LEAN")

El sistema "Just-in-Time", conocido también por sus siglas "JIT", es un sistema de administración de la producción basado en el sistema de producción desarrollado por Toyota Motor Company en Japón, que fue concebido e implementado por quien fuera su presidente, Eiji Toyoda, y diseñado por el principal responsable de producción, el ingeniero Taichi Ohno, y por su mano derecha, Shigeo Shingo.

En el medio ambiente japonés de la década de 1950, con falta de espacio y de recursos, los referidos ingenieros de Toyota desarrollaron una aversión a los desperdicios. Ellos consideraban que los inventarios eran un desperdicio de espacio y percibieron el "*scrapp*" y el retrabajo como pérdidas, por lo que lucharon para desarrollar un sistema que les permitiera alcanzar la calidad total. Para desarrollar el sistema, tuvieron en cuenta e integraron técnicas fundamentales y principios universales de la ingeniería industrial, tales como el sistema de producción Ford, el Control de Procesos Estadísticos ("SPC"), los Círculos de calidad ("QC"), el método "SMED" (*Single, Minute Exchange of Die*) y el "TPM" (*Total Productive Maintenance*), entre otros, y generaron otros novedosos conceptos tales como la denominada Manufactura Celular, la Programación Kanban, la Administración de Calidad Total/Six Sigma, y el Rápido *Set-up*.

El "JIT" busca eliminar todas las fuentes de desperdicio en las actividades de producción y todo aquello que no agregue valor a los productos que se elaboran. El método trata de proveer la parte exacta en el lugar adecuado y en el momento oportuno. Esto quiere decir que las partes o componentes de los productos terminados se deben adquirir o producir 'justo a tiempo' (en inglés "just-in-time") eliminando en consecuencia todo tipo de stock de protección y reduciendo al mínimo el stock operativo. El concepto productivo se contrapuso al tradicional de 'por las dudas' (o "just-in-case") en lo que se refiere a la administración de inventarios.

El sistema se desarrolló entre aproximadamente 1949 y 1975, y se popularizó primero en Japón, extendiéndose luego rápidamente a otras empresas manufactureras automotrices, electrónicas y electrodomésticas.

El nombre "Just in Time" surgió como consecuencia de la forma en que el sistema describía cómo deberían ser procesados y movidos los materiales para llegar justo a tiempo para la próxima operación. Sin embargo, a la filosofía también se la conoce como "Tecnología Flujo-Demanda", Producción "*Stockless*", Fabricación de Flujo Continuo (o "CFM" por las iniciales en inglés), Manufactura de Clase Mundial (o "WCM"), "Producción *Lean*" (tal como lo acuñó James Womack, y que se prefiere en la actualidad sobre los demás términos), o directamente como Sistema de Producción Toyota (o "TPS") a partir de la publicación de Yahuhiro Monden en 1983.

Este concepto, que prácticamente es una filosofía de administración, lo transfirió por primera vez a Occidente la empresa Kawasaki en su planta de Nebraska (EE.UU.). Inmediatamente lo implementó General Electric, y en la década de 1980 varias empresas manufactureras lo han aplicado. Sin embargo, la Producción Lean se popularizó en Estados Unidos a partir del estudio que realizó el MIT (Massachusetts Institute of Technology) sobre el cambio de concepto de producción "masiva" a la producción "*lean*", tal como se describió en el libro "La Máquina que Cambió al Mundo", de Womack, Jones & Roos, en 1990. El término "*lean*", que significa "delgado", se utilizó porque los métodos de negocios japoneses utilizaban menores recursos humanos, menos espacio de fábrica, menos materiales y menos tiempo en todos los aspectos de las operaciones.

Tal como se mencionó, el principio básico del sistema "JIT" consiste en fabricar las unidades apropiadas en la cantidad necesaria y en el momento justo. De esta forma, se eliminan o minimizan los inventarios, ya que se fabrican o adquieren unidades sólo cuando se las requiere.

El sistema JIT implica producir bajo pedido, a fin de reducir el costo de la gestión y de los inventarios. El plazo de entrega debe ser mínimo y para ello no se escatima en maquinaria y recursos de fabricación.

Los desperdicios ("muda" en japonés) tienen muchas formas: materiales en espera, espacios no utilizados, equipamiento ocioso e inventarios son algunos ejemplos. La mayoría de los desperdicios son invisibles y su eliminación no es sencilla. Muchas compañías desperdician entre el 70% y el 90% de sus recursos disponibles. La técnica del Sistema de Producción Toyota enfatiza en la identificación de desperdicios para luego utilizar técnicas y herramientas específicas para eliminarlos.

El desperdicio se concibe como "todo aquello que sea distinto de los recursos mínimos absolutos de materiales, máquinas y mano de obra necesarios para agregar valor al producto".

Por su parte el agregar valor implica aumentar el valor del producto ante los ojos del cliente. Algunos ejemplos que agregan valor son: ensamblar, mezclar, fundir, moldear, soldar, tejer y empacar.

Otras actividades que generalmente ocurren en los procesos de fabricación, pero que no agregan valor en sí mismas, por lo que se deben eliminar o minimizar son, por ejemplo: contar, mover, almacenar, programar, inspeccionar y traspasar un producto.

Por ejemplo, el transporte no agrega ningún valor al producto. En lugar de mejorar el transporte se debe minimizar o eliminar (por ejemplo, formando células). Una causa de transporte puede ser un layout deficiente de la planta, o un sobredimensionamiento de lugar de la planta. El movimiento de los trabajadores hacia las máquinas es también un desperdicio (por ejemplo, una inapropiada ubicación de herramientas y partes). Otro desperdicio es la subutilización del personal.

Para el sistema JIT, los inventarios constituyen uno de los más grandes tipos de desperdicio. Además, las existencias esconden otros desperdicios. Tacahii Ohno decía que los inventarios eran "la fuente de todo mal". Los stocks cuestan dinero, requieren vigilancia, mantenimiento y contabilidad, insumen capital, tapan desperdicios, se vuelven obsoletos, consumen espacio y mano de obra, y no agregan valor alguno al producto.

Cualquier tipo de imperfección o problema genera una necesidad para tener inventarios. En consecuencia, no se deben reducir directamente los inventarios, sino que se debe procurar eliminar las causas que los generan.

El "JIT" propone reducir el tiempo de *set-up* (considerado como un desperdicio), idealmente a cero. Resulta evidente que con pequeños *'lead times'* y con poco material en proceso, el sistema productivo es mucho más flexible a cambios en el programa maestro de producción. Además se intenta minimizar, o llevar a cero, el costo de orden "k". Si se trata de productos adquiridos a proveedores, se debe desarrollar una relación cercana con ellos, negociar los contratos a largo plazo para el suministro de materiales, alcanzar un compromiso de entrega "justo a tiempo", etc. Si se trata de órdenes de trabajo, se deben minimizar los costos de *setup*, reduciendo los tiempos de puesta en marcha y preparación de la línea. Esto requiere que se busquen nuevas formas y más eficientes de lanzar una orden de fabricación.

En la producción *Lean*, el valor de un producto está definido por el cliente. Se procura satisfacer los deseos del consumidor al proporcionar un valor máximo al producto a un precio mínimo. La eliminación sistemática del desperdicio reducirá los costos de las operaciones y dará como resultado un producto de calidad que satisfaga las necesidades del cliente en tiempo y precio.

El "Just-in-Time" presenta el enfoque de unidades o centros de trabajo, llamadas células de producción, en las cuales se agrupan las máquinas en familias y se disponen de tal forma que se puedan desarrollar una serie de operaciones secuenciales. Cada célula puede estar instalada para realizar un grupo de productos o uno en particular.

Del mismo modo que con los sistemas "MRP" y "MRP II", se comienza con un programa maestro de producción de los productos terminados. En general, se planifica de uno a tres meses para permitir a los centros de trabajo (o unidades productivas) la planificación de sus respectivos trabajos. En el mes en curso, el programa maestro se nivela a una base diaria; es decir, se procura producir cada día del mes la misma cantidad de cada producto. Se programan pequeños lotes para proveer una carga uniforme en todo el circuito productivo. El tamaño de lote ideal sería 1.

Cada centro de trabajo está perfectamente coordinado con la unidad productiva anterior y posterior. Esta coordinación se materializa a través de tarjetas ("*kanban*", en japonés). Normalmente, las *kanban* van colocadas en unos pequeños contenedores y en ellas se anota el tipo y cantidad de unidades que se requieren en el centro de trabajo el día siguiente.

La célula de trabajo anterior recibe, al finalizar el día, el contenedor vacío y producirá al día siguiente la cantidad de unidades indicadas en la *kanban*. A medida que se van produciendo, las unidades se van colocando en el contenedor; una vez completo éste, el centro deja de producir en ese día y recibirá un nuevo contenedor vacío para el día siguiente.

Es decir, el flujo continuo de productos es un principio fundamental de la filosofía del sistema. Este concepto es el mismo que el de la línea de armado de Henry Ford. La carga fabril uniforme se obtiene mediante el equilibrio de las células productivas.

En resumen, a partir del programa maestro se extraen partes del centro de trabajo anterior en el circuito productivo justo a tiempo y en las cantidades necesarias para la producción. Debido a que no existen inventarios disponibles para cubrir problemas y al hecho de que se fabrica exactamente lo requerido, no puede haber partes defectuosas, ni paradas de planta o fallas en los equipos, ya que eso alteraría el flujo continuo de materiales y produciría consecuencias desastrosas al sistema. Si una unidad productiva se para debido a una rotura de máquina o a problemas de calidad, todas las células precedentes pararán automáticamente su producción cuando los contenedores de las partes se llenen.

Se dice que el proceso de generar los pedidos desde los sectores de entrega hacia atrás, es decir hacia los sectores de recepción en donde se alimenta a la empresa de insumos, es un proceso de tipo "*pull-through*" (es decir, un sistema que jala o tira), lo cual implica que nada se realiza hasta que sea requerido por la siguiente unidad productiva. La visión opuesta a la del sistema *Lean* sería la tradicional de empujar el sistema ("*push-through*"), en donde se tiene una producción programada a partir de la estimación de la demanda, y que hay que cumplir.

El otro aspecto esencial de la producción *Lean* es la gente. Las fábricas tienen personas. Para que funcionen bien, las personas y la tecnología deben integrarse en un sistema que explote las fortalezas y minimice las limitaciones de cada sector. El sistema de producción de Toyota hace énfasis en la participación de los operarios. Usa grupos integrados en las células de trabajo para la motivación, la administración del trabajo a realizar y la resolución de problemas en su unidad productiva.

Los operarios de un centro productivo tienen la responsabilidad de producir partes de calidad justo en el momento que se requieran (ni antes, ni después) para suministrarlas a la próxima célula del proceso productivo. Si no puede alcanzar este objetivo, el proceso se saldrá de balance. Además, a los operarios y empleados se les asigna la responsabilidad de mejorar el sistema, por lo que participan a través de los denominados "círculos de calidad" y otros métodos de sugerencia y de participación, ofreciendo mejoras al proceso productivo.

El enfoque de la programación *Lean* implica la obligación de innovar para mejorar la productividad. El *Kaizen*, concepto de mejora continua que implica a todo el personal, es un avance gradual y lento sin arbitrar grandes recursos. Se espera mucho de los encargados y operarios pero al mismo tiempo se tienen en cuenta sus opiniones y ellos toman también decisiones.

En general, los tamaños de las plantas que implementaron el sistema son mucho menores que los de las convencionales que no lo utilizan, ya que se reduce sustancialmente el espacio requerido. El '*lay-out*' de la planta es muy diferente al de las tradicionales, debido a que el "JIT" mantiene los stocks en el sector productivo de la planta ('*shop floor*') y no en almacenes entre procesos.

El inventario está a la vista para que esté fácilmente disponible para el próximo paso en el proceso. En comparación, típicamente se requiere un tercio del espacio requerido en plantas convencionales.

La calidad es otro aspecto absolutamente esencial en el sistema “JIT”, que apunta a la perfección. El concepto de “perfección” significa que hay oportunidades sin límite para mejorar la utilización de todos los activos. La búsqueda de la mejora de la calidad se debe hacer en forma continua. Por ejemplo, se debe prevenir la ocurrencia de productos defectuosos en lugar de encontrar y reparar los defectos. La aparición de defectos produce la detención del proceso. De esta forma, los problemas de calidad llaman rápidamente la atención de la planta ya que se detiene la línea. El “JIT” está diseñado para exponer errores y corregirlos (en lugar de taparlos con inventarios).

El sistema requiere cero defectos. Nada debe fabricarse sin la seguridad de poder hacerlo sin defectos. En general, se aplica el método “seis-sigma” (tolerancia +/- 3ó).

Se debe trabajar sin interrupciones. Las máquinas deben trabajar con cero averías, cero tiempos muertos en recorridos (es básico el solapamiento de tareas) y cero tiempos muertos en cambio de herramientas.

En conclusión, se podría definir al “JIT” como una aproximación sistemática para identificar y eliminar desperdicios (actividades que no agreguen valor) a través de una mejora continua haciendo fluir al producto, “tirando” en lugar de “empujando” desde los clientes hacia atrás en el proceso productivo, en búsqueda de la perfección. Los elementos básicos de la manufactura *lean* son:

- ✓ Enfoque de satisfacción del cliente, mediante:
  - Calidad de productos y de servicios.
  - Reducción de plazos de entregas.
- ✓ Eliminación de los desperdicios.
- ✓ Confiabilidad del equipamiento y de los otros recursos de fabricación.
- ✓ Flujo continuo.
- ✓ Células productivas.
- ✓ Sistema “pull”.
- ✓ Sistemas *Kanban*.
- ✓ Rápida preparación de lotes (es decir, mínimos *set-ups*).
- ✓ Menores niveles de inventarios a través del proceso de producción (materias primas, materiales en proceso y productos terminados).
- ✓ Reducción de defectos.
- ✓ Estandarización de trabajo.
- ✓ Automatización de los procesos.
- ✓ Administración visual.
- ✓ Control de proceso en la unidad productiva.
- ✓ Participación, lealtad y compromiso de los empleados.

El sistema afecta prácticamente cada aspecto de las operaciones de planta; esto es, el tamaño de los lotes, la programación de las actividades, la distribución de planta (‘*lay-out*’), muy especialmente la calidad, y las relaciones con proveedores y con el personal.

Los mayores beneficios del sistema se obtienen en procesos de producción repetitiva o en masa, es decir la fabricación de productos discretos estandarizados en un gran volumen, en sistemas físico-económicos que puedan ser compatibles con una fabricación a pedido, tales como empresas manufactureras que dispongan de un sistema de ventas mediante distribuidores.

En las fábricas que implementan el sistema *lean* se debe realizar un cambio estructural en el sistema productivo que requiere modificaciones en el diseño de la planta, la ingeniería de proceso, la introducción de sistemas de calidad total, etc.

Puesto que el inventario es un resultado más bien que una causa, las tentativas de atacarlo directamente fallarán. Tales tentativas pueden traer reducciones temporales, o pueden producir resultados no deseados tales como defectos crecientes o plazos de expedición crecientes. Una vez mejorados los procesos, las instalaciones, la calidad y los programas, los inventarios se reducirán.

El concepto '*Lean'* debe ser extendido a proveedores de la planta. Ellos deben hacer las entregas y recibir los contenedores del mismo modo que lo hacen los centros de trabajo internos, por lo que se requiere una completa coordinación. También se les exige que entreguen la mercadería con calidad total. Es decir, se piensa a los proveedores como socios y no como adversarios. Y esto también es extensible a los clientes (especialmente si se trata de otras empresas productivas). Tal vez sea éste uno de los mayores problemas para la implementación del "JIT" en nuestro país, ya que se requiere una integración y coordinación completa, no sólo entre los propios centros de trabajo de la empresa, sino también entre proveedores-empresa-clientes. La cultura y la conducta empresarial y laboral es un elemento clave para el éxito del sistema '*Lean*'.

La transición a un ambiente *lean* no se produce en un corto plazo. Se requiere de una mentalidad de mejora continua para alcanzar las metas de la empresa. El término "mejora continua" significa la mejora incremental de los productos, de los procesos o servicios a lo largo del tiempo, con el objetivo de reducir desperdicios para mejorar la funcionalidad. Recordemos que a Toyota le llevó 25 años desarrollar e implementar completamente el sistema, que –por supuesto- se va mejorando continuamente.

La implementación de esta filosofía de producción incluye la preparación y motivación de la gente, que los empleados estén involucrados, que se comparta la información y las expectativas de administración. Se requiere disciplina, pero –previamente– se requiere un cambio de mentalidad, que se puede lograr a través de la implantación de una cultura orientada a la calidad, que imprima el sello del mejoramiento continuo, así como de flexibilidad a los cambios, que van desde el compromiso con los objetivos de la empresa hasta la inversión en equipo, maquinaria, capacitación, etc. Como ya se mencionó, el *JIT* obliga a una muy buena relación con los proveedores y subcontratistas.

Si bien el sistema es muy difícil y costoso de implementar, los beneficios que se obtienen son muchos en términos de disminución de costos de materiales, de mano de obra, de gastos generales, de inversión en capital de trabajo y en espacio.

No obstante ello, este sistema también tiene aspectos negativos a considerar, entre los cuales el que más puede afectar a una empresa es, paradójicamente, la carencia de inventarios ya que si existe alguna contingencia de pedidos, no se tiene un inventario de seguridad para poder cumplir con estos, lo que provoca una pérdida de venta y, eventualmente, del cliente. Una situación imprevista, como un accidente, o una catástrofe natural, paralizaría la producción, y en consecuencia la entrega. Una huelga (interna o externa a la planta), un piquete, un problema de importación, etc., generaría graves problemas, fácilmente superables si se dispusiera de un stock de protección.

Un segundo aspecto es que es indispensable que tanto los proveedores como los clientes y empresas con las que se tenga relación manejen este mismo sistema de inventarios ya que de no ser así, dicho sistema no cumpliría con sus objetivos y no funcionaría.

Por otra parte, los proveedores no siempre pueden entregar lotes reducidos, por múltiples razones, entre las que podemos destacar costos, logística, localización física, capacidad de distribución, etc. Supongamos un producto que deba ser importado, será despachado en contenedores de una capacidad determinada y con la frecuencia establecida por el medio de transporte y/o los proveedores del exterior.

Es obvio que el sistema tampoco sería aplicable a un producto de consumo masivo, que requiere un enfoque de producción contra stock.

Cada empresa tiene su propio sistema único de productos, de procesos, de gente, y de historia. La forma y motivación de compra de los clientes es completamente distinta para cada producto. Mientras que ciertos principios pueden ser inmutables, la utilización de los sistemas de fabricación no lo es. La estrategia de la fabricación será siempre un proceso difícil, incierto, e individual, y con ella se deberá determinar cuál es el sistema de producción y de inventario para la empresa.

Con relación a los inventarios, se puede decir que constituyen un elemento esencial para las operaciones de fabricación y distribución a los clientes. Es generalmente uno de los activos más grandes en el balance de cualquier compañía. Es cierto que los inventarios son muy costosos e insumen capital que el negocio puede necesitar para el crecimiento. Requieren grandes almacenes y espacio valioso, e incrementan la necesidad de personal. Sin embargo, los stocks pueden responder a muchos propósitos. Permiten, por ejemplo, realizar entregas continuas e inmediatas a los clientes, previenen los caprichos del mantenimiento, permiten mantener niveles de fabricación uniformes frente a cambios en volumen de ventas anuales y fluctuación estacional.

Según estudios comparativos realizados entre empresas similares en varios países, se observó que con inventario excesivo eran líderes en productividad y satisfacción al cliente. La pregunta sería entonces ¿Son los stocks realmente un mal? Los inventarios son el efecto del funcionamiento de un tipo de industria, y se requieren (como cualquier otro tipo de activo) para que la empresa pueda operar.

Los stocks en el nivel adecuado no son un problema. Lo que sí debe eliminarse es el inventario innecesario y excesivo. En este sentido, la Investigación Operativa ha aportado soluciones óptimas mediante la aplicación de modelos matemáticos, tales como algunos de los que se han visto en este libro, con respecto a cuál debe ser el nivel de inventario óptimo a mantener. Es decir, no es el inventario lo que debe minimizarse, sino el costo total que generan los inventarios necesarios para fabricar los productos en la cantidad, calidad y oportunidad requerida por los clientes, optimizando los beneficios corporativos.

En síntesis, una empresa no debe ser obesa, en términos de inventarios, pero tampoco demasiado delgada (‘*lean*’) como para no poder competir en forma ágil y exitosa en el mercado.

Ejemplo 10.1:

Una empresa que fabrica dos productos, A y B, en una misma máquina debe planificar la producción semanal del próximo mes, cuyas demandas máximas y requerimientos mínimos son los siguientes:

Demanda (unidades)	**SEMANA**			
	1	**2**	**3**	**4**
A	90	80	75	110
B	25	55	30	35

Requerimiento mínimo	**SEMANA**

(unidades)	1	2	3	4
A	10	60	55	90
B	10	45	20	30

La disponibilidad de horas semanales de máquina se indica en la siguiente tabla:

DISPONIBILIDAD DE MÁQUINA	SEMANA			
	1	2	3	4
Horas	80	80	70	80

Los datos relativos a tiempos y costos de puesta en marcha de la línea de producción y de materia prima por producto, como así también de los precios de venta y del costo de hora de máquina, se muestran en la próxima tabla:

	A	B
Tiempo de puesta en marcha (hs)	6	5
Costo de puesta en marcha ($)	3.000	4.000
Tiempo de máquina (hs)	0,4	0,8
Costo materiales ($)	15	9
Precio de venta ($)	250	300

El costo de la hora de máquina en producción es de $8. Actualmente se dispone en stock de 20 unidades de A y 30 de B, y al finalizar el mes, el nivel de inventarios debe ser el mismo. El costo unitario de mantenimiento en stock de cada producto es de $3 por semana para A y de $3,5 para B. Cada semana se para la línea para hacer operaciones de limpieza, de manera que si un producto se fabrica en una semana determinada se incurre en el correspondiente costo de puesta en marcha.

El almacén de productos terminados tiene una capacidad para almacenar 200 unidades de A o 150 de B (o una combinación de ellas).

Formular y resolver el modelo matemático si solo se puede fabricar uno de los productos por semana.

Solución:

Definición de variables:

P#i: Producción de # en la semana i (para # igual a A o B).

S#i: Stock de # al finalizar la semana i.

V#i: Venta de # en la semana i.

V#: Venta de # en el mes.

I#i: Variable binaria para indicar si el producto # se elabora o no en la semana i

E#: Variable entera totalizadora que indica la cantidad de semanas que se fabrica el producto #.

T: Tiempo total de máquina utilizado en el mes.

TP: Tiempo de máquina en producción en el mes.

SP#: Stock promedio del mes del producto #.

Formulación:

- Funcional:

MAX 250 VA + 300 VB - 3000 EA - 4000 EB - 8 TP - 15 PA - 9 PB - 3 SPA - 3.5 SPB

Sujeto a:

- Balance de inventarios. En una semana cualquiera, tendremos que el stock inicial más la producción de la semana debe ser igual a la venta de la semana más el stock final.

BIA) SA0 = 20
BSA1) SA0 + PA1 - SA1 - VA1 = 0
BSA2) SA1 + PA2 - SA2 - VA2 = 0
BSA3) SA2 + PA3 - SA3 - VA3 = 0
BSA4) SA3 + PA4 - SA4 - VA4 = 0
BFA) SA4 = 20
BSB0) SB0 = 30
BSB1) SB0 + PB1 - SB1 - VB1 = 0
BSB2) SB1 + PB2 - SB2 - VB2 = 0
BSB3) SB2 + PB3 - SB3 - VB3 = 0
BSB4) SB3 + PB4 - SB4 - VB4 = 0
BFB) SB4 = 30

- Las ventas semanales no pueden superar a la demanda:

DA1) VA1 ≤ 90
DA2) VA2 ≤ 80
DA3) VA3 ≤ 75
DA4) VA4 ≤ 110
DB1) VB1 ≤ 25
DB2) VB2 ≤ 55
DB3) VB3 ≤ 30
DB4) VB4 ≤ 35

- Requerimiento mínimo:

RA1) VA1 ≥ 10
RA2) VA2 ≥ 60
RA3) VA3 ≥ 55
RA4) VA4 ≥ 90

RB1) VB1 ≥ 10
RB2) VB2 ≥ 45
RB3) VB3 ≥ 20
RB4) VB4 ≥ 30

- Restricciones de almacenamiento:

Teniendo en cuenta que la capacidad de almacenamiento es tal que si se almacena solamente producto A se puede tener en stock como máximo 200 unidades y si se almacena solamente producto B se puede tener en stock como máximo 150 unidades, las restricciones de almacenamiento son del tipo:

$$\frac{SA_i}{200} + \frac{SB_i}{150} \leq 1$$

A1) $0.005\ SA1 + 0.004\ SB1 \leq 1$
A2) $0.005\ SA2 + 0.004\ SB2 \leq 1$
A3) $0.005\ SA3 + 0.004\ SB3 \leq 1$
A4) $0.005\ SA4 + 0.004\ SB4 \leq 1$

- Restricciones de habilitación de variables continuas correspondientes a la producción semanal de cada ítem mediante variables binarias. Para ello, tomaremos un valor M arbitrariamente alto que afecte a la variable binaria. En este caso, usaremos M = 500.

BPA1) $PA1 - 500\ IA1 \leq 0$
BPA2) $PA2 - 500\ IA2 \leq 0$
BPA3) $PA3 - 500\ IA3 \leq 0$
BPA4) $PA4 - 500\ IA4 \leq 0$

BPB1) $PB1 - 500\ IB1 \leq 0$
BPB2) $PB2 - 500\ IB2 \leq 0$
BPB3) $PB3 - 500\ IB3 \leq 0$
BPB4) $PB4 - 500\ IB4 \leq 0$

- Restricciones de tiempo total de máquina (en operación y en preparación) de cada período son:

TTM1) $0.4\ PA1 + 6\ IA1 + 0.8\ PB1 + 5\ IB1 \leq 80$
TTM2) $0.4\ PA2 + 6\ IA2 + 0.8\ PB2 + 5\ IB2 \leq 80$
TTM3) $0.4\ PA3 + 6\ IA3 + 0.8\ PB3 + 5\ IB3 \leq 70$
TTM4) $0.4\ PA4 + 6\ IA4 + 0.8\ PB4 + 5\ IB4 \leq 80$

- Cálculo de tiempo total productivo de máquina:

TPM) $0.4PA1 + 0.4PA2 + 0.4PA3 + 0.4PA4 + 0.8PB1 + 0.8PB2 + 0.8PB3 + 0.8PB4 - TP = 0$

- Cálculo de stock promedio. El stock promedio de cada ítem será la suma de S0 + S1 + S2 + S3 + S4 dividido por 5. En consecuencia:

SPA) $-5\ SPA + SA0 + SA1 + SA2 + SA3 + SA4 = 0$

SPB) $-5\ SPB + SB0 + SB1 + SB2 + SB3 + SB4 = 0$

- Fabricación de productos mutuamente excluyente:

RPU1) $IA1 + IB1 \leq 1$
RPU2) $IA2 + IB2 \leq 1$
RPU3) $IA3 + IB3 \leq 1$
RPU4) $IA4 + IB4 \leq 1$

- Totalizadores para venta, producción total y cantidad de semanas que se activa la línea, para cada producto:

BVTA) $- VA + VA1 + VA2 + VA3 + VA4 = 0$
BPTA) $- PA + PA1 + PA2 + PA3 + PA4 = 0$

BTSA) - EA + IA1 + IA2 + IA3 + IA4 = 0

BVTB) - VB + VB1 + VB2 + VB3 + VB4 = 0
BPTB) - PB + PB1 + PB2 + PB3 + PB4 = 0
BTSB) - EB + IB1 + IB2 + IB3 + IB4 = 0

- Condiciones de las variables:

  Las variables son todas no negativas, excepto las I#i que son binarias. Las E# no requieren definirse como enteras porque serán naturalmente enteras.

Resolución (utilizando sistema LINDO):

```
VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

      Z)      106985.5
```

VARIABLE	VALOR	C.REDUCIDO
IA1	1.00	6450.00
IB1	0.00	6875.00
IA2	0.00	-112300.00
IB2	1.00	4000.00
IA3	1.00	6468.00
IB3	0.00	6890.00
IA4	0.00	-112900.00
IB4	1.00	4000.00
VA	345.00	0.00
VB	145.00	0.00
EA	2.00	0.00
EB	2.00	0.00
TP	254.00	0.00
PA	345.00	0.00
PB	145.00	0.00
SPA	62.00	0.00
SPB	19.00	0.00
SA0	20.00	0.00
PA1	185.00	0.00
SA1	115.00	0.00
VA1	90.00	0.00
PA2	0.00	0.00
SA2	35.00	0.00
VA2	80.00	0.00
PA3	160.00	0.00
SA3	120.00	0.00
VA3	75.00	0.00
PA4	0.00	0.00
SA4	20.00	0.00
VA4	100.00	0.00
SB0	30.00	0.00
PB1	0.00	460.70
SB1	5.00	0.00
VB1	25.00	0.00
PB2	80.00	0.00
SB2	30.00	0.00
VB2	55.00	0.00
PB3	0.00	461.70
SB3	0.00	1.40
VB3	30.00	0.00
PB4	65.00	0.00
SB4	30.00	0.00
VB4	35.00	0.00

RESTRICCIÓN	SLACK	P.SOMBRA
BIA)	0.00	247.60
BSA1)	0.00	-248.20
BSA2)	0.00	-248.80
BSA3)	0.00	-249.40

BSA4)	0.00	-250.00
BFA)	0.00	-250.60
BSB0)	0.00	14.00
BSB1)	0.00	-14.70
BSB2)	0.00	-15.40
BSB3)	0.00	-16.10
BSB4)	0.00	-15.40
BFB)	0.00	-16.10
DA1)	0.00	1.80
DA2)	0.00	1.20
DA3)	0.00	0.60
DA4)	10.00	0.00
DB1)	0.00	285.30
DB2)	0.00	284.60
DB3)	0.00	283.90
DB4)	0.00	284.60
RA1)	80.00	0.00
RA2)	20.00	0.00
RA3)	20.00	0.00
RA4)	10.00	0.00
RB1)	15.00	0.00
RB2)	10.00	0.00
RB3)	10.00	0.00
RB4)	5.00	0.00
A1)	0.41	0.00
A2)	0.71	0.00
A3)	0.40	0.00
A4)	0.78	0.00
BPA1)	315.00	0.00
BPA2)	0.00	230.60
BPA3)	340.00	0.00
BPA4)	0.00	231.80
BPB1)	0.00	0.00
BPB2)	420.00	0.00
BPB3)	0.00	0.00
BPB4)	435.00	0.00
TTM1)	0.00	575.00
TTM2)	11.00	0.00
TTM3)	0.00	578.00
TTM4)	23.00	0.00
TPM)	0.00	8.00
SPA)	0.00	0.60
SPB)	0.00	0.70
RPU1)	0.00	0.00
RPU2)	0.00	0.00
RPU3)	0.00	0.00
RPU4)	0.00	0.00
BVTA)	0.00	-250.00
BPTA)	0.00	15.00
BTSA)	0.00	3000.00
BVTB)	0.00	-300.00
BPTB)	0.00	9.00
BTSB)	0.00	4000.00

Ejemplo 10.2:

Un productor compra un elemento electrónico a $15 cada uno. Las ventas de este ítem tienen una distribución normal de media 10.800 unidades por año, con poca variación. Se dispone de los siguientes datos:

- ✓ *Período de reaprovisionamiento promedio: 10 días.*
- ✓ *Demanda diaria promedio: 30 unidades (360 días de trabajo por año).*
- ✓ *Factor de servicio objetivo durante el plazo de entrega: 98%.*
- ✓ *Costo de orden: 1.000$.*
- ✓ *Costo de almacenamiento: $5 por unidad por año.*

✓ *Desvío estándar durante el período de reaprovisionamiento: 15 unidades.*

Determinar el punto de reorden y el lote de pedido.

Solución:

El lote óptimo se calcula con el valor promedio de la demanda:

$$q_o = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot \overline{D}}{T \cdot c_1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.000 \cdot 10.800}{1 \cdot 5}} \cong 2.078$$

Para hallar el Punto de Pedido, tendremos que:

$$F_S = F_{N^*}\left(\frac{S_R - \overline{d}_{LT}}{\sigma_{LT}}\right) = F_{N^*}\left(\frac{S_R - 30 \cdot 10}{15}\right) = 0{,}98$$

De las tablas de la distribución normal estandarizada obtenemos el valor de "z" correspondiente a una probabilidad acumulada de 0,98:

$z \cong 2{,}05$

En consecuencia

$$z = \frac{S_R - 300}{15} = 2{,}05 \qquad \Rightarrow \qquad S_R = 300 + 30{,}75 \cong 331$$

Esto significa que se está manteniendo un stock de seguridad de solamente un poco más de 1 día (31 unidades).

Ejemplo 10.3:

Una empresa realiza la revisión de las existencia a frecuencia constante (mensual). La compra de cada período se calcula en función de las necesidades futuras.

En el momento de la revisión, el inventario del artículo "AX3" es de 1.500 unidades y la tasa de demanda diaria del próximo mes será de 120 unidades en promedio.

a) *Sabiendo que el tiempo de reaprovisionamiento del ítem "AX3" es de 3 días, que el stock de seguridad es de 500 unidades y que la tasa de demanda durante el mes en curso es de 100 unidades por día, determinar la cantidad a solicitar para el próximo período.*

b) *Si la tasa de demanda mensual tiene una distribución normal de media 4.000 unidades, y el desvío estándar de 483 unidades, determinar si el Stock de Seguridad utilizado actualmente es apropiado para un Factor de Servicio ("F_S") del 85%.*

Solución:

a) Aplicando la expresión (6):

$$q = S_P + d_i \cdot t_p - S_M + d_{i-1} \cdot LT = 500 + 120 \cdot 30 - 1.500 + 100 \cdot 3 = 2.900 \text{ unidades}$$

b) Conforme a la expresión (9):

$$F_{N^*}\left(\frac{S_P}{\sigma_i}\right) = 0,85$$

De las tablas de la distribución normal estandarizada se obtiene el valor de "z" correspondiente a una probabilidad de 85%:

$z = 1,0360$

Dado que

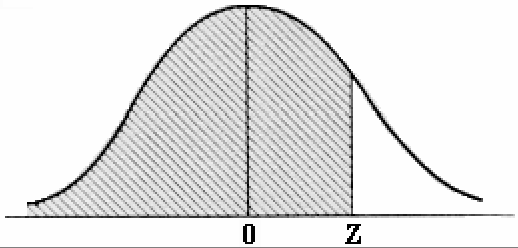
$$S_P = z \cdot \sigma_i$$

Entonces:

$$S_P = 1,036 \cdot 483 = 500$$

Por lo tanto, el stock de protección utilizado es apropiado para ese nivel de confianza.

DISTRIBUCIÓN NORMAL ACUMULADA ES TANDARIZADA $F_{N*}(Z)$



Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91308	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997