CAPÍTULO 1

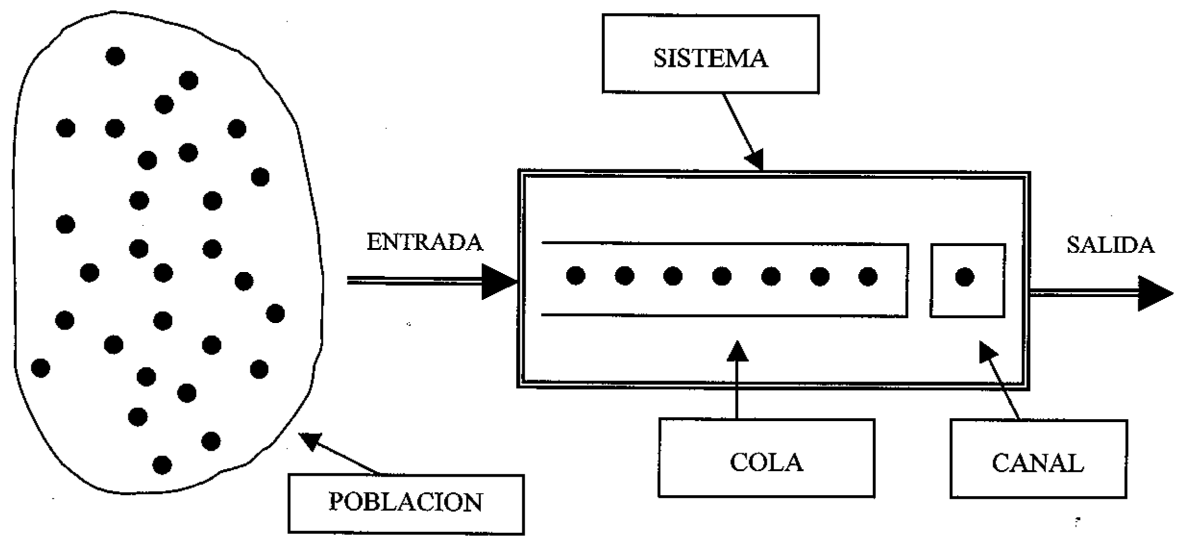
INTRODUCCIÓN

1. FENÓMENOS DE ESPERA Y TEORÍA DE COLAS

Los fenómenos de "congestión" o "espera" están relacionados con los procesos estocásticos y pueden describirse como sistemas integrados por uno o más "centros de atención" en donde se brinda un servicio. Cada centro de atención (llamado también "unidad de servicio") es, a su vez, un sistema constituido por:

- "canales" (o "servidores"), que son las entidades que prestan el servicio, y
- "clientes" (o "usuarios"), que son las entidades que reciben el servicio.

En un momento determinado, los clientes pueden estar siendo atendidos en uno de los canales o, si todos ellos están ocupados, esperando ser atendidos en una línea de espera (o "cola").



Los clientes, que provienen de una población con determinadas características, llegan al sistema e ingresan a él para recibir el servicio. Si hay algún canal desocupado en el momento del ingreso, el cliente recibirá el servicio inmediatamente; en caso contrario, esperará su turno en una cola. Es decir, las colas se forman cuando la demanda de un servicio dado en un intervalo de tiempo excede la capacidad para proveerlo.

Una vez atendidos, los clientes abandonan el centro y pueden pasar a otro centro de atención en el mismo sistema, o bien retirarse, ya sea definitivamente o parcialmente (incorporándose nuevamente a la población fuente de la que provienen, para recibir nuevamente el servicio en un futuro).

El problema que enfrenta con frecuencia el administrador del sistema es establecer un balance apropiado entre los costos asociados a la espera de los usuarios y los costos vinculados con la mejora del servicio (más servidores, mayor velocidad de atención, etc.). Este problema resultaría sencillo si los clientes arribaran a intervalos fijos y conocidos y si, además, la duración del servicio fuera también determinística. Por ejemplo, en una línea de montaje (en donde el grado de aleatoriedad del proceso de fabricación es típicamente bajo), se puede llegar a balancear exactamente la capacidad de servicio con la llegada de clientes (en este caso, productos). Sin embargo, en la mayoría de los procesos de atención, los tiempos entre arribos de clientes y los tiempos de los servicios no son predecibles. En estas condiciones se aplica la denominada "teoría de colas" para predeterminar el comportamiento del sistema bajo diferentes alternativas.

La teoría de colas proporciona una metodología de formulación de modelos matemáticos que describen sistemas de espera. Obviamente, el número de casos diferentes que se pueden presentar es virtualmente infinito, por lo que estudiaremos sólo aquellos sistemas que describan los procesos más generales, y que son los que pueden formularse como cadenas markovianas de primer orden. Además, analizaremos estos modelos para describir el comportamiento de los sistemas en régimen permanente, a través de variables tales como la longitud promedio de la cola, el tiempo de espera promedio de un cliente para recibir el servicio, el tiempo de permanencia en el sistema, etcétera. Esta información, juntamente con los costos relevantes, permitirá al directivo determinar los valores apropiados de las variables de decisión. Las variables de decisión típicas en los sistemas de colas están referidas a la capacidad del servicio (número de canales, velocidad de atención del canal) o a la capacidad de espera (número de lugares).

Para el análisis en régimen transitorio de los sistemas de colas y para situaciones de gran complejidad, los métodos cuantitativos a través de la solución analítica del problema dejan de ser eficaces. En estos casos, es posible obtener los estimadores deseados mediante la técnica de "Simulación". La práctica de la simulación constituye una disciplina en su propio derecho.

La teoría de colas se aplica al estudio de sistemas de transporte (aeropuertos, puertos, túneles, estaciones terminales de ómnibus o de trenes, estaciones de peaje de autopistas, etc.), sistemas de computación (unidades de procesamiento central, canales, impresoras, teleprocesamiento, etc.), redes de comunicación (telefonía, internet, etc.), procesos de fabricación de productos, sistemas administrativos, procesos de carga y descarga de materiales, y en innumerables sistemas de servicio de la vida cotidiana (bancos, comercios, ascensores, supermercados, centros de fotocopiado, de alquiler de autos, restaurantes, etc.). En la tabla 1.1 se muestran algunos ejemplos de sistemas a los que es aplicable la teoría de colas.

Los primeros estudios formales sobre el tema fueron realizados por Agner Krarup Erlang, un científico danés, a partir de su trabajo en la Compañía Telefónica de Copenhague. Erlang comenzó a estudiar los problemas probabilísticos que surgieron en el contexto de las llamadas telefónicas, y en particular los tiempos de espera de los usuarios que intentaban realizar un llamado telefónico en un pueblo a través de la operadora local. Su primer trabajo se publicó en 1909 y se llamó *La teoría de la probabilidad y las conversaciones telefónicas*. En el año 1917 proporcionó la fórmula matemática para la determinación del tiempo de espera en un sistema de servicios, bajo ciertas condiciones operativas.

SISTEMAS	EJEMPLO	CLIENTES	CANALES
TRANSPORTE	• PUERTOS	BARCOS	MUELLES
	• AEROPUERTOS	AVIONES	PISTAS
	• AUTOPISTAS	AUTOMÓVILES	CASILLAS DE PEAJE
	• TERMINALES	ÓMNIBUS	PLATAFORMA
	• CARGA Y DESCARGA	CAMIONES	ISLAS
COMPUTACIÓN	• PROCESAMIENTO	TRABAJOS	CPU
	• IMPRESIÓN	TRABAJOS	IMPRESORAS
TELEFONÍA	• CENTRALES	LLAMADOS	LÍNEAS
PRODUCCIÓN	• ELABORACIÓN	PRODUCTOS	MAQUINAS
	• REPARACIÓN	SOLICITUDES	OPERARIOS
	• CONTROL DE CALIDAD	PRODUCTOS	INSPECTORES
ATENCIÓN AL PÚBLICO	• BANCOS	PERSONAS	CAJEROS
	• SUPERMERCADOS	PERSONAS	CAJEROS
	• ESTACIONES DE SERVICIO	AUTOMÓVILES	SURTIDORES
	• NEGOCIOS	PERSONAS	EMPLEADOS
	• ATENCIÓN MÉDICA	PACIENTES	AMBULANCIAS
	• ALQUILER DE AUTOS	PERSONAS	EMPLEADOS
ADMINISTRACIÓN	• DPTO. COMPRAS	SOLICITUDES	COMPRADORES
	• JUZGADOS	CAUSAS	JUECES

TABLA 1.1 Ejemplos de sistemas de colas

2. POBLACIÓN

Es el conjunto de usuarios potenciales del sistema. El tamaño de la población puede ser finito o infinito. Si la población es finita pero lo suficientemente grande como para que la llegada de un cliente no afecte el valor de la probabilidad de otra llegada, se considera infinita.

3. ARRIBOS

La llegada de clientes al sistema puede ser determinística, es decir a intervalos entre arribos conocidos (ya sean iguales o desiguales) o aleatoria, es decir a intervalos desiguales que responden a una determinada distribución de probabilidad.

En la mayoría de los sistemas de colas del mundo real los procesos de arribos de clientes son aleatorios. Además, a menudo los intervalos entre llegadas son estadísticamente independientes y estacionarios a lo largo de prolongados períodos de tiempo, por lo que se pueden suponer poissonianos. En particular, salvo mención en contrario, en los sistemas que formularemos en este texto supondremos que los procesos de arribo son de tipo Poisson.

4. IMPACIENCIA

Cuando la población de clientes es de seres humanos se puede producir el denominado fenómeno de "impaciencia". La impaciencia se verifica cuando algunos usuarios que arriban al sistema se retiran sin recibir el servicio porque consideran que el tiempo de espera será suficientemente largo. Distinguiremos dos tipos de impaciencia:

a. la que se da cuando un cliente que arriba, observa la cantidad de gente que está delante de él esperando y en función de ello toma la decisión de incorporarse o no al sistema, y

b. la que se da cuando un cliente que arriba, ingresa al sistema, y al cabo de un tiempo toma la decisión de seguir esperando o no.

El primer caso se manifiesta, en general, cuando los clientes tienen experiencia en el funcionamiento del sistema. Antes de incorporarse, el cliente estima, en base a la cantidad de gente que está dentro del sistema y a la velocidad de atención de los canales, cuánto tiempo deberá esperar hasta ser atendido.

El segundo tipo de impaciencia se presenta normalmente cuando los usuarios no tienen conocimiento previo de la operatividad del sistema, por lo que la cantidad de clientes esperando no es un parámetro de estimación suficiente. En consecuencia, el cliente se incorpora y, a medida que transcurre el tiempo, se va formando una mejor idea de cuánto tiempo le falta aún para recibir su servicio, y en función de ello decide abandonar el sistema o seguir esperando.

5. CAPACIDAD

Es el número máximo de clientes que puede permanecer en el sistema simultáneamente (en espera y atendiéndose).

Cuando un sistema no tiene límite en el número de clientes permitidos tiene capacidad infinita y se dice que el sistema es de "cola infinita" o "capacidad infinita". En caso contrario, el sistema es de "cola (o capacidad) finita".

Si un cliente que arriba a un sistema de capacidad finita encuentra que éste está completo, no puede ingresar, por lo que se retirará sin recibir el servicio. Si al cliente se le permitiera esperar afuera, significaría que la capacidad real del sistema es mayor a la física, por lo que debe considerarse como capacidad a la cantidad total máxima de usuarios capaces de permanecer en atención o cola simultáneamente, ya sea dentro o fuera de las instalaciones físicas del sistema.

6. MODO DE ARRIBO

Los usuarios pueden llegar en forma individual o en masa (modo "*batch*"). En la mayoría de los sistemas que estudiaremos se hará la suposición de que los procesos de llegada son del tipo Poisson, lo que implica arribos individuales.

Aun en muchos casos en donde se producen arribos masivos, se puede considerar al grupo como un cliente individual a los efectos de los cálculos. Un ejemplo de ello es el de un restaurante en donde la unidad considerada como cliente puede ser cada grupo de comensales que compartirá la mesa.

7. PRIORIDAD DE ATENCIÓN

Existen diversos criterios de atención en lo que se refiere al orden de selección de clientes para brindar el servicio. Ellos son:

Base FIFO (*first in, first out*)

Los clientes se atienden según el orden de llegada; es decir, el que primero llega, primero se sirve. Esta disciplina de atención es la más habitual y constituye la cola típica, en donde el último cliente que arriba al sistema se ubica en el último lugar de la cola.

Cabe mencionar que no siempre existe una cola física, pero ocurre como si la hubiera. Por ejemplo, si al llegar a un comercio, se saca un número, el proceso de atención es exactamente el mismo que habría si la cola fuera real.

Base LIFO (*last in, first out*)

En este caso, el último individuo que arriba es el primero en ser atendido. La línea de espera, en este caso, se denomina "pila".

Un ejemplo de esta disciplina de atención lo constituye un sistema de control de calidad de un producto que se va apilando para ser inspeccionado. El inspector selecciona siempre al producto que está posicionado más arriba en la pila.

Base SIRO (*service in random order*)

Es una selección aleatoria de los clientes para brindarles el servicio. Supongamos un telar en donde las máquinas se traban en forma aleatoria. Los operarios destrabadores deambulan por la planta, y cuando observan una máquina parada la destraban. Aquí, los operarios no están teniendo en consideración cuál fue la máquina que se trabó primero.

Base con PRIORIDADES

Se establecen criterios de atención conforme a los atributos de los clientes. Por ejemplo, en un aeropuerto en donde los aviones (clientes) utilizan las pistas (canales) para despegar y para aterrizar, típicamente tienen prioridad de uso aquellos que están necesitando las pistas para aterrizar sobre los que las requieren para despegar. A su vez, puede existir un sistema de prioridad para los aviones de mayor envergadura que están sobrevolando el aeropuerto con respecto a los de menor tamaño. Y, por supuesto, aquellos que soliciten la pista aterrizar en condiciones de emergencia, tendrán prioridad absoluta.

Las prioridades pueden ser relativas o absolutas. Supongamos un sistema con dos tipos de prioridad (A y B), en donde A tiene prioridad de servicio respecto a B. En un sistema de un solo canal con prioridad relativa, si se está atendiendo a un cliente tipo B cuando llega un A, se termina de atender al cliente B, antes de comenzar la atención del A. En cambio, si la prioridad es absoluta, en el momento del arribo de un A, se deja de atender al B, se le da el servicio al A, y luego se continúa el servicio que se le estaba realizando al B.

8. DURACIÓN DEL SERVICIO

El tiempo requerido por un canal para atender a un cliente puede ser una variable determinística (tiempos constantes o variables) o aleatoria con distribución de probabilidad conocida.

En la mayoría de los sistemas de colas del mundo real los procesos de servicios de clientes son aleatorios. Además, los tiempos de servicios son estadísticamente independientes y estacionarios a lo largo de prolongados períodos de tiempo, por lo que se pueden suponer poissonianos. En los sistemas que formularemos en este contexto, supondremos que los procesos de servicio son de tipo Poisson.

9. MODO DE ATENCIÓN

Un canal puede realizar servicios en forma simple o múltiple (en masa). En la mayoría de los sistemas reales, el modo de atención es individual, por lo que en general haremos esta suposición en los modelos matemáticos que desarrollaremos.

En muchos casos prácticos de servicio masivo es factible hacer la suposición de atención individual, asumiendo simplemente que el grupo constituye un cliente a los efectos de los cálculos.

10. PROCESOS POISSON

Los procesos Poisson son procesos markovianos, es decir aquellos que describen fenómenos aleatorios de sistemas dinámicos que evolucionan a través de un parámetro "t" (denominado "continuo"). En los procesos Poisson tenemos un continuo (en general el tiempo) sobre el que se van dando eventos en forma estadísticamente independiente y con independencia del comienzo del parámetro.

Los procesos poissonianos tienen dos distribuciones que los describen:

a. La distribución Poisson, en donde la variable es el número de eventos que se produce en un intervalo determinado de continuo.

b. La distribución Gamma, en la que la variable es el intervalo de continuo necesario para que se verifique un número determinado de eventos. En particular, cuando la variable es el intervalo de continuo requerido para que se verifique un número discreto de eventos, la distribución se conoce con el nombre de distribución Erlang. Más particularmente, cuando la variable es el intervalo de continuo necesario para que se verifique un solo suceso, la distribución es conocida como distribución Exponencial.

<u>Distribución Poisson</u>

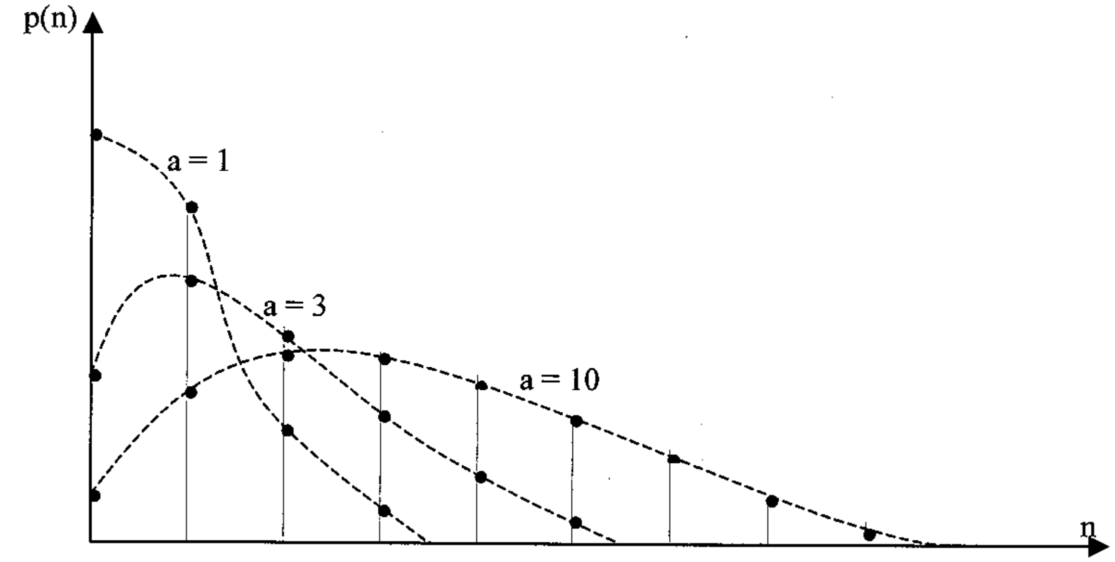
La probabilidad de que se produzcan "n" eventos en un intervalo "t" está dada por:

$$p(n) = \frac{(\lambda \Delta t)^n \cdot e^{-\lambda \Delta t}}{n!}$$

siendo $n = 0, 1, 2, \ldots$ y $\lambda > 0$.

La media de esta distribución es $a = \lambda . t$, y el desvío estándar $\sigma = \sqrt{\lambda t}$. En la unidad de tiempo (es decir para $t = 1$), la media de esta distribución es $a = \lambda$.

A continuación se muestra la forma de la distribución Poisson para distintos valores de medias "a".



Los procesos Poisson tienen la particularidad de que la probabilidad de que se de un evento en un intervalo de tiempo muy pequeño es λt y la probabilidad de que no se de el evento es $1 - \lambda \Delta t$. Esto se demuestra de la siguiente forma:

La probabilidad Poisson de que se produzcan "n" eventos en un intervalo de tiempo Δt, tal como se ha visto más arriba, está dada por:

$$p(n) = \frac{(\lambda \Delta t)^n \cdot e^{-\lambda \Delta t}}{n!}$$

Entonces, la probabilidad de que en el intervalo de tiempo Δt no se verifique ningún evento está dada por

$$p(0) = \frac{(\lambda \Delta t)^0 \cdot e^{-\lambda \Delta t}}{0!} = e^{-\lambda \Delta t} \qquad \textbf{(1)}$$

y la probabilidad de que de un evento es

$$p(1) = \frac{(\lambda \Delta t)^1 \cdot e^{-\lambda \Delta t}}{1!} = \lambda \Delta t \cdot e^{-\lambda \Delta t} \qquad \textbf{(2)}$$

Tomando un período de tiempo Δt suficientemente chico para que en ese intervalo no se pueda producir más de un evento (o de manera tal de suponer que $\Delta t^2 \approx 0$), tendremos que:

$$p(0) + p(1) = 1$$

$$e^{-\lambda\Delta t} + \lambda\Delta t . e^{-\lambda\Delta t} = 1$$

$$e^{-\lambda\Delta t}(1+\lambda\Delta t) = 1$$

$$e^{-\lambda\Delta t} = \frac{1}{1+\lambda\Delta t}$$

Multiplicando y dividiendo el segundo término por (1- $\lambda\Delta t$):

$$e^{-\lambda\Delta t} = \frac{1-\lambda\Delta t}{(1+\lambda\Delta t).(1-\lambda\Delta t)} = \frac{1-\lambda\Delta t}{1^2-(\lambda\Delta t)^2} = 1-\lambda\Delta t$$

Luego, como $e^{-\lambda\Delta t}$ es igual a p(0) como se indica en (1), tendremos que

$$p(0) = 1-\lambda\Delta t$$

y, por lo tanto

$$p(1) = \lambda\Delta t$$

<u>Distribución Gamma</u>

La distribución Gamma sustenta una relación con la Poisson que surge de intercambiar parámetro por variable. Puede asumir una gran variedad de formas por lo que se puede acomodar a diversos conjuntos de datos observados.

En particular, en los sistemas de colas interesa la distribución Exponencial, en donde la variable se refiere a la porción de continuo que debe transcurrir para que se verifique un suceso (es decir la porción de continuo entre dos sucesos). La función distribución de probabilidad de la distribución exponencial está dada por la siguiente expresión:

$$f(t) = \lambda.e^{-\lambda t}$$

cuya media es $\frac{1}{\lambda}$

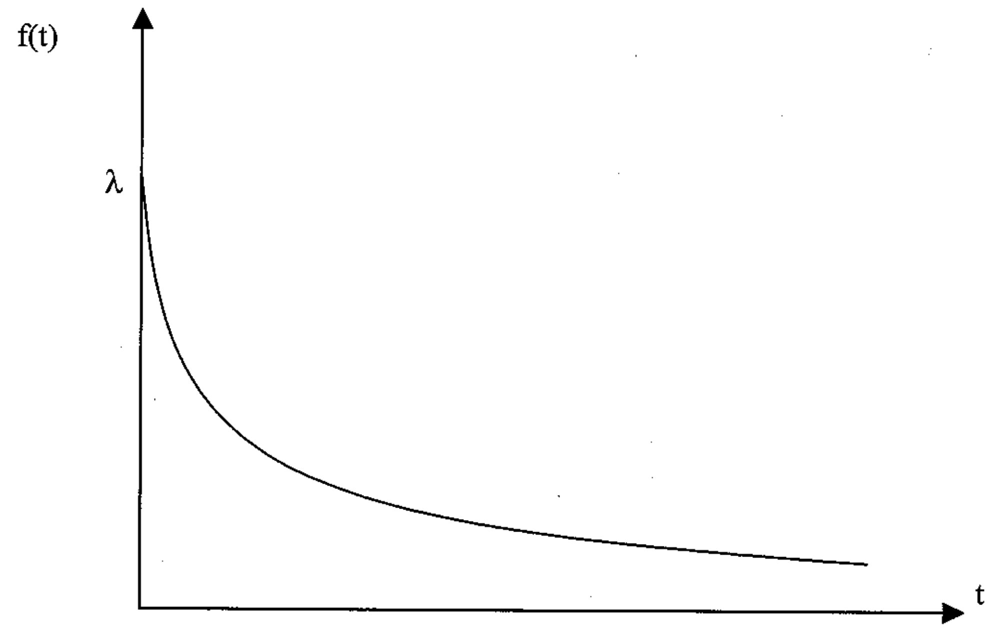
y cuyo desvío estándar también es $\frac{1}{\lambda}$

La forma gráfica de esta distribución se muestra en el gráfico de la siguiente página.

Como se dijo anteriormente, los procesos de arribos y de servicios en los sistemas de colas son del tipo Poisson.

Si el proceso de arribos es de tipo Poisson significa que la variable "tiempo entre dos arribos sucesivos" tiene distribución exponencial y la variable "número de clientes que arriban por unidad de tiempo" tiene distribución Poisson. Esta relación entre variables se puede demostrar en forma sencilla como sigue. Hemos visto que

$$p(n) = \frac{(\lambda\Delta t)^n \cdot e^{-\lambda\Delta t}}{n!}$$



Ahora bien, si una llegada ocurre en el instante cero, el tiempo que transcurre hasta el próximo arribo es menor que t si y solo si hay por lo menos un arribo en el intervalo (0,t). Por consiguiente, llamando IA al intervalo entre arribos tendremos:

$$P(IA < t) = F(t) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(\lambda\Delta t)^n \cdot e^{-\lambda\Delta t}}{n!} = 1 - p(0) = 1 - \frac{(\lambda t)^0 \cdot e^{-\lambda t}}{0!} = 1 - e^{-\lambda t}$$

Como F(t) es la acumulada de IA, la distribución de IA será:

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

En definitiva, suponiendo un proceso Poisson, la variable "número de arribos por unidad de tiempo" tendrá distribución Poisson con media λ y la variable "tiempo entre arribos" tendrá distribución exponencial con media $T_a = 1/\lambda$.

Del mismo modo, si el proceso de servicios en los canales es Poisson, significa que la variable "cantidad de servicios que puede realizar un canal por unidad de tiempo" (o "velocidad del servicio") tiene distribución Poisson con una media que llamaremos μ, mientras que la variable "duración del servicio" tiene distribución exponencial con media $T_S = 1/\mu$.

11. INGRESO Y EGRESO DE CLIENTES

En los sistemas de capacidad finita o de población impaciente, no todos los clientes que arriban al sistema ingresan.

Al número promedio de clientes que ingresan efectivamente al sistema lo llamaremos $\overline{\lambda}$, mientras que al número promedio de clientes rechazados (es decir, que no ingresan al sistema), lo llamaremos $\overline{R}$.

Por su parte, al número promedio de clientes atendidos que egresan del sistema lo llamaremos $\overline{\mu}$.

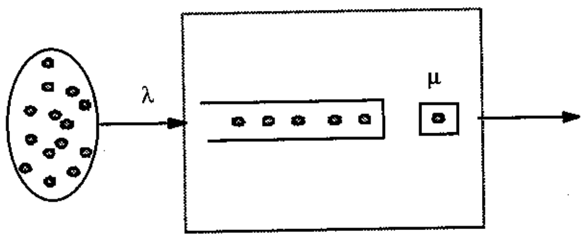
Finalmente, a la tasa de clientes que ingresaron al sistema pero que decidieron abandonarlo sin recibir el servicio la llamaremos $\overline{A}$.

El estado del sistema se modifica solamente con ingresos y egresos de clientes. Los sistemas de colas son del tipo de los denominados procesos de "nacimiento-muerte", en donde un ingreso representa un nacimiento y un egreso una muerte.

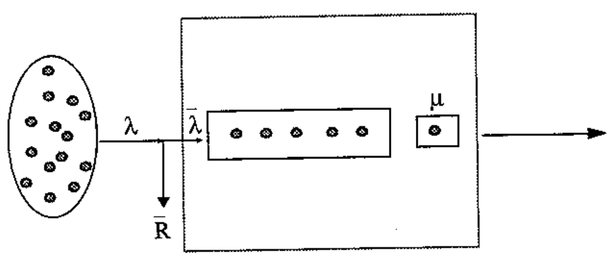
12. ESTRUCTURA DE SISTEMAS SIMPLES

Las disposiciones de los sistemas más sencillos de colas son las que se indican a continuación:

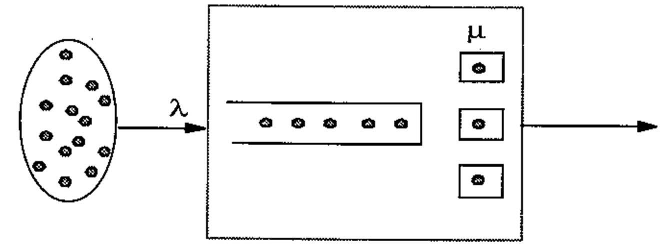
1. Cola simple, capacidad infinita, un canal de atención:



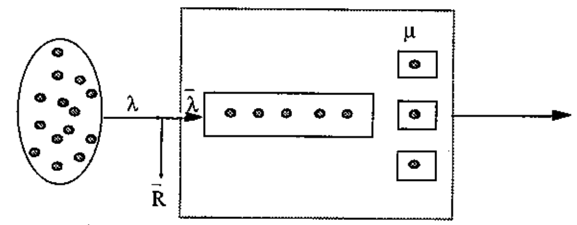
2. Cola simple, capacidad finita, un canal de atención:



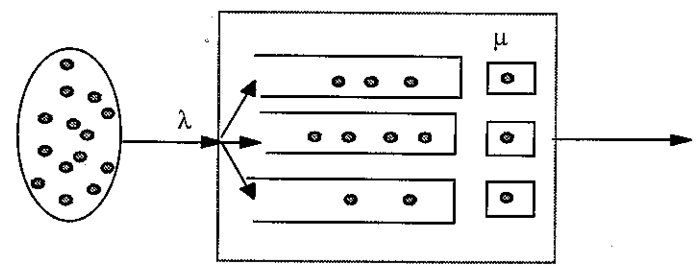
3. Cola simple, capacidad infinita, canales múltiples en paralelo:



4. Cola simple, capacidad finita, canales múltiples en paralelo:



5. Varias colas, una para cada canal dispuesto en paralelo:



Este último caso puede considerarse como un sistema constituido por varios centros de un canal simple.

13. NOTACIÓN KENDALL

La notación de Kendall es muy útil para especificar las características descriptivas de una unidad operativa de un sistema de colas. Es una notación de 6 posiciones:

1 / 2 / 3 / 4 / 5 /(6)

1) La posición 1 se refiere al patrón de arribos al sistema. En particular, puede ser
   - P: Proceso de Poisson (a veces indicado con "M")
   - D: Proceso determinístico
   - G: Cualquier otro proceso
2) La posición 2 indica el patrón de servicios en los canales, pudiendo ser alguno de los siguientes:
   - P: Proceso de Poisson (a veces indicado con "M")
   - D: Proceso determinístico
   - G: Cualquier otro proceso
3) La tercera posición indica el número de canales de atención dispuestos en paralelo en la unidad operativa.
4) La cuarta posición se refiere a la capacidad de la unidad operativa del sistema. Si no se indica nada en esta posición se asume que es de capacidad infinita.
5) La quinta posición se refiere a la disciplina de la cola:
   - FIFO: *First In, First Out* (primero que arriba, primero se atiende)
   - LIFO: *Last In, First Out* (último que arriba, primero se atiende)
   - SIRO: *Service In Random Order* (selección aleatoria)
   - PRIO: Sistema de prioridades
   - G: Cualquier otra modalidad de atención

   Si no se especifica nada en la posición 5, se asume que la disciplina es del tipo FIFO.
6) La última posición (indicada entre paréntesis) se refiere al tamaño de la población. Si no se indica, el tamaño de la población es infinito.

De este modo, el sistema P/P/1/5/(10), por ejemplo, se refiere a una unidad operativa (centro de atención) de un sistema de colas con arribo Poisson, servicio Poisson, un canal de atención, cinco lugares como máximo dentro del centro (es decir cuatro posiciones de cola), modalidad FIFO y tamaño de la población igual a 10.

El sistema P/P/3/SIRO, indica procesos de arribo y servicio Poisson, tres canales dispuestos en paralelo, capacidad infinita (es decir, sin restricciones en la cola), disciplina de selección de clientes aleatoria y población infinita.

Finalmente, el sistema P/D/4/(25), se refiere a una unidad operativa con arribos de tipo Poisson, servicios determinísticos, cuatro canales en paralelo, modalidad FIFO, capacidad infinita y población finita e igual a 25.

14. NOTACIÓN A UTILIZAR

- λ: Número promedio de clientes que arriban al sistema por unidad de tiempo (tasa promedio de arribos)
- T_a: Intervalo promedio entre arribos de clientes (llamado también tiempo promedio de arribos)

  $$T_a = \frac{1}{\lambda}$$
- μ: Número promedio de clientes que puede atender un canal por unidad de tiempo (velocidad promedio de atención).
- T_s: Duración promedio del servicio (o Tiempo promedio de atención)

  $$T_s = \frac{1}{\mu}$$
- ρ: Factor de tránsito (o de tráfico)

  $$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$
- n: Estado del sistema (es la cantidad de clientes que hay dentro del sistema en un momento determinado).
- p(n): Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado "n".
- p(i/n): Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema ingrese a él cuando el estado del sistema es "n".
- N: Capacidad del sistema (cantidad máxima de clientes que puede haber en el sistema, tanto en los canales como en la cola).
- M: Cantidad de canales dispuestos en paralelo en la unidad operativa de atención.
- H: Número promedio de canales activos
- L_C: Longitud promedio de la cola (número esperado de clientes esperando ser atendidos).

  $$L_C = \sum_{M+1}^{N} (n - M).p(n)$$
- L: Longitud promedio del sistema (número esperado de clientes dentro del sistema).

  $$L = \sum_{0}^{N} n.p(n)$$

  Además: $L = L_C + H$
- λ_n: Tasa promedio de ingreso de clientes al sistema cuando el estado del mismo es "n". En términos generales:

  $$\lambda_n = \lambda \cdot p(i/n)$$
- μ_n: Tasa promedio de egreso de clientes del sistema cuando el estado del mismo es "n".

- $\bar{\lambda}$: Tasa promedio de ingreso de clientes al sistema. En forma general, tendremos que

$$\bar{\lambda} = \sum_{0}^{N} \lambda_n p(n)$$

- $\bar{\mu}$: Tasa promedio de egreso del sistema de clientes que recibieron el servicio. En forma general:

$$\bar{\mu} = \sum_{0}^{N} \mu_n p(n)$$

También: $\bar{\mu} = \mu \cdot H$

- PA: Porcentaje de actividad del canal

$$PA = \frac{H}{M}$$

- W_C: Tiempo promedio de espera en cola de un cliente.

$$W_C = \frac{L_C}{\bar{\lambda}}$$

- W: Tiempo promedio de permanencia en el sistema de un cliente.

$$W = W_C + T_S$$

o también:

$$W = \frac{L}{\bar{\lambda}}$$

La expresión anterior es la fórmula de Little, y establece que el tiempo promedio de residencia en el sistema está dado por la relación entre el número promedio de clientes que permanece en el mismo y el flujo de circulación de clientes que pasa por él.

- $\omega_C(t)$: Probabilidad de que un cliente tenga que esperar un tiempo superior a "t" en la cola

$$\omega_C(t) = p(W_C > t)$$

- $\omega(t)$: Probabilidad de que un cliente tenga que permanecer un tiempo superior a "t" en el sistema.

$$\omega(t) = p(W > t)$$

- $\bar{R}$: Tasa promedio de clientes rechazados (por capacidad finita o por impaciencia).

$$\bar{R} = \lambda - \bar{\lambda}$$

- PR: Porcentaje de rechazos del sistema

$$PR = \frac{\bar{R}}{\lambda}$$

- $\bar{A}$: Tasa promedio de clientes que abandonan el sistema sin recibir el servicio.

$$\bar{\lambda} = \bar{\mu} + \bar{A}$$

- PAB: Porcentaje de abandonos del sistema

$$PAB = \frac{\bar{A}}{\bar{\lambda}}$$

- λ_r: Número promedio de veces por unidad de tiempo que un mismo cliente requiere un servicio en el sistema (aplicable a sistemas de población finita).
- U (o T_r): Tiempo promedio que transcurre para que un cliente solicite un servicio desde que sale del sistema (aplicable a sistemas de población finita).

$$U = \frac{1}{\lambda_r}$$

- N': Tamaño de la población
- J: Número promedio de clientes fuera del sistema (aplicable a población finita)
- D: Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema tenga que esperar para recibir el servicio.
- x: Factor de servicio de un sistema de población finita

$$x = \frac{T_S}{T_S + U}$$

- F: Factor de eficiencia de un sistema de población finita

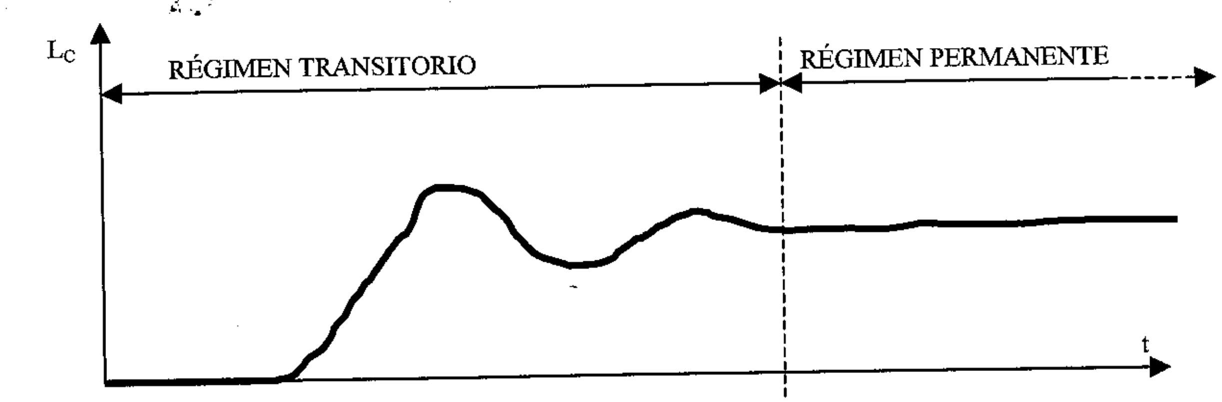
$$F = \frac{T_S + U}{T_S + U + W_C}$$

- α: Coeficiente de impaciencia promedio de la población de clientes del sistema.

15. RÉGIMEN PERMANENTE Y RÉGIMEN TRANSITORIO

Cuando el valor de las variables depende de las condiciones iniciales en las que se encontraba el sistema cuando comenzó el proceso de observación, se dice que el sistema está en régimen transitorio (o transiente).

Supongamos que en un sistema de tres canales dispuestos en paralelo se desea determinar la longitud promedio de la cola. Si inicialmente el sistema estaba vacío, el valor de la longitud "promedio" de cola podría tener un comportamiento como el indicado en el gráfico:



Es decir, transcurre un tiempo hasta que las variables se estabilizan y ya no dependen del instante inicial. Se dice que, a partir de ese momento, el sistema alcanza el régimen permanente (o estacionario).

Los modelos que formularemos en nuestro estudio supondrán que los sistemas que describen se encuentran en régimen permanente. Es decir, el valor de las variables, tales como p(n), L_C, L, W, W_C, etc., son independientes del tiempo.

16. ECUACIÓN DE ESTADO DE RÉGIMEN PERMANENTE

Asumiremos que los procesos de arribo y de servicio son de tipo Poisson. Además, se considerará un intervalo de tiempo Δt lo suficientemente pequeño como para que la probabilidad de que se produzca más de un evento en ese intervalo sea cero (o como para suponer que $\Delta t^2 \Rightarrow 0$).

En estas condiciones, la probabilidad de que se produzca un ingreso en el intervalo t,t+Δt cuando el estado del sistema es "n", está dada por la expresión:

- $p(\text{ingreso}/n) = \lambda_n . \Delta t$

por lo que la probabilidad de que no se produzca un ingreso en ese intervalo es:

- $p(\text{no ingreso}/n) = 1 - \lambda_n . \Delta t$

Por su parte, la probabilidad de que se produzca un egreso del sistema en el intervalo t, t+Δt cuando el estado del mismo es "n", está dada por la siguiente expresión:

- $p(\text{egreso}/n) = \mu_n . \Delta t$

por lo que la probabilidad de que no se produzca un ingreso en ese intervalo es:

- $p(\text{no egreso}/n) = 1 - \mu_n . \Delta t$

Si el sistema se encuentra en el estado "n" en el instante "t+Δt", solamente lo pudo hacer desde los estados "n", "n+1" o "n-1" en el instante "t", ya que durante el intervalo Δt no se puede producir más de un evento. Es decir, debió haber ocurrido alguna de las siguientes posibilidades:

a. El sistema se encontraba en el estado "n-1" en el instante "t" y durante el intervalo Δt se produjo un ingreso y ningún egreso.

b. El sistema se encontraba en el estado "n" en el instante "t" y no se produjo ningún ingreso ni ningún egreso durante el intervalo Δt.

c. El sistema se encontraba en el estado "n+1" en el instante "t" y, durante el intervalo Δt, se produjo un egreso y ningún ingreso.

Como estos tres caminos son mutuamente excluyentes, la probabilidad de que haya "n" clientes en el instante t+Δt puede ser expresada como suma de tres probabilidades compuestas que son, respectivamente: la probabilidad de estar en el estado "n-1" en el instante "t", por la probabilidad de que se produzca un ingreso y por la probabilidad de que no se produzca ningún egreso, más la probabilidad de estar en el estado "n" en el instante "t", por la probabilidad de que se no se produzca ningún ingreso ni ningún egreso, más la probabilidad de estar en el estado "n+1" en el instante "t" por la probabilidad de que se produzca un egreso y que no se produzca ningún ingreso. Es decir:

$$\begin{aligned} p(n, t+\Delta t) = {} & p(n-1, t) \cdot \lambda_{n-1}\, \Delta t \cdot [1 - \mu_{n-1}\, \Delta t] + p(n, t) \cdot [1 - \lambda_n\, \Delta t] \cdot [1 - \mu_n\, \Delta t] \\ & + p(n+1, t) \cdot \mu_{n+1}\, \Delta t \cdot [1 - \lambda_{n+1}\, \Delta t] \end{aligned}$$

Luego, considerando que Δt^2 es igual a cero:

$$p(n, t+\Delta t) = p(n-1, t) \cdot \lambda_{n-1} \cdot \Delta t + p(n, t) - p(n, t) \cdot [\lambda_n\, \Delta t + \mu_n\, \Delta t] + p(n+1, t) \cdot \mu_{n+1}\, \Delta t$$

Si el sistema se encuentra en estado de régimen permanente significa que los valores de las probabilidades son independientes del tiempo, esto es:

$$p(n,t+\Delta t) = p(n,t) = p(n)$$

Por lo tanto:

$$p(n) = p(n-1) \cdot \lambda_{n-1}\, \Delta t + p(n) - p(n) \cdot [\lambda_n + \mu_n] \cdot \Delta t + p(n+1) \cdot \mu_{n+1}\, \Delta t$$

Pasando p(n) al otro lado de la ecuación:

$$0 = p(n-1) \cdot \lambda_{n-1} \cdot \Delta t . - p(n) \cdot [\lambda_n + \mu_n] \cdot \Delta t + p(n+1) \cdot \mu_{n+1} \cdot \Delta t$$

Finalmente, simplificando los Δt, tendremos la denominada "ecuación de estado de régimen permanente":

$$\boxed{0 = p(n-1) \cdot \lambda_{n-1} - p(n) \cdot [\lambda_n + \mu_n] + p(n+1) \cdot \mu_{n+1}}$$

Aplicando esta expresión para los distintos estados posibles que puede asumir un sistema, tendremos:

- Para n = 0: El primer término se anula ya que no existe el estado -1, y μ_0 también se anula ya que si no hay nadie en el sistema la tasa promedio de egresos es cero.

$$0 = -p(0) \cdot \lambda_0 + p(1) \cdot \mu_1$$

y, en consecuencia,

$$p(1) = p(0) \cdot \frac{\lambda_0}{\mu_1}$$

- Para n = 1:

$$0 = p(0)\cdot\lambda_0 - p(1)\cdot\lambda_1 - p(1)\cdot\mu_1 + p(2)\cdot\mu_2$$

Reemplazando la expresión de p(1) de arriba

$$0 = p(0)\cdot\lambda_0 - p(1)\cdot\lambda_1 - p(0)\cdot\frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot\mu_1 + p(2)\cdot\mu_2$$

y simplificando, por un lado μ_1, y por el otro $p(0)\lambda_0$ con $-p(0)\lambda_0$ tendremos

$$p(2) = p(1)\cdot\frac{\lambda_1}{\mu_2}$$

- Para n = 2:

$$0 = p(1).\lambda_1 - p(2).\lambda_2 - p(2).\mu_2 + p(3).\mu_3$$

$$0 = p(1)\cdot\lambda_1 - p(2)\cdot\lambda_2 - p(1)\cdot\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdot\mu_2 + p(3)\cdot\mu_3$$

$$\therefore\quad p(3) = p(2)\cdot\frac{\lambda_2}{\mu_3}$$

- Para n = 3:

$$0 = p(2)\cdot\lambda_2 - p(3)\cdot\lambda_3 - p(3)\cdot\mu_3 + p(4)\cdot\mu_4$$

$$0 = p(2)\cdot\lambda_2 - p(3)\cdot\lambda_3 - p(2)\cdot\frac{\lambda_2}{\mu_3}\cdot\mu_3 + p(4)\cdot\mu_4$$

$$\therefore\quad p(4) = p(3)\cdot\frac{\lambda_3}{\mu_4}$$

Siguiendo el mismo procedimiento, tendremos que

- Para n = 4: $p(5) = p(4)\cdot\frac{\lambda_4}{\mu_5}$

- Para n = 5: $p(6) = p(5)\cdot\frac{\lambda_5}{\mu_6}$

y, en general, reemplazando para un valor n-1, tendremos la ecuación simplificada de estado de régimen permanente:

$$\boxed{p(n) = p(n-1)\cdot\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}}$$

CAPÍTULO 2

SISTEMAS DE UN SOLO CANAL

1. SISTEMA DE UN SOLO CANAL, CAPACIDAD INFINITA Y POBLACIÓN INFINITA

<u>HIPÓTESIS</u>

a. El proceso de arribos de clientes al sistema es de tipo Poisson.
b. El proceso de servicio es también de tipo Poisson.
c. El sistema se encuentra en condiciones estables; es decir, ha alcanzado condiciones de equilibrio de sus variables (régimen permanente).
d. Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.
e. La disciplina de atención es FIFO.
f. Se dispone de un solo canal de atención.
g. La capacidad del sistema es ilimitada (cola infinita).
h. Los clientes que llegan al sistema no presentan impaciencia.
i. La población de clientes potenciales del sistema es infinita

<u>PARÁMETROS</u>

- λ: Número promedio de clientes que arriban al sistema por unidad de tiempo (tasa promedio de arribos). En lugar de este parámetro se puede dar como dato su inversa (intervalo promedio entre arribos de clientes)

$$\left(T_a = \frac{1}{\lambda}\right)$$

- μ: Número promedio de clientes que puede atender un canal por unidad de tiempo (velocidad promedio de atención). En lugar de este parámetro se puede dar como dato su inversa (duración promedio del servicio)

$$\left(T_s = \frac{1}{\mu}\right)$$

- M = 1 Un solo canal de atención.

<u>VARIABLES</u>:

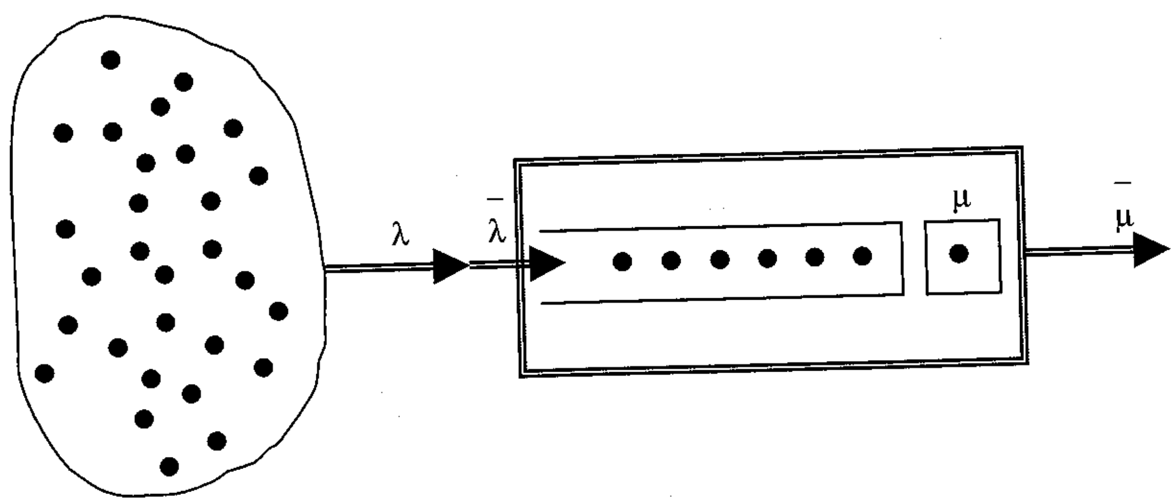
- p(n): Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado "n".

- L: Longitud promedio del sistema (número esperado de clientes dentro del sistema).
- L_C: Longitud promedio de la cola (número esperado de clientes esperando ser atendidos).
- $\bar{\lambda}$: Tasa promedio de ingreso de clientes al sistema.
- $\bar{\mu}$: Tasa promedio de egreso de clientes del sistema.
- W_C: Tiempo promedio de espera en cola de un cliente.
- W: Tiempo promedio de permanencia en el sistema de un cliente.
- $\omega_C(t)$: Probabilidad de que un cliente tenga que esperar un tiempo superior a "t" en la cola.
- $\omega(t)$: Probabilidad de que un cliente tenga que permanecer un tiempo superior a "t" en el sistema.

NOTACIÓN KENDALL

P/P/1

REPRESENTACIÓN GRÁFICA



MODELIZACIÓN

Determinación de p(n)

Para el cálculo de los valores de las probabilidades asociadas a los diferentes estados que puede adoptar el sistema se parte de la ecuación de estado de régimen permanente, y se procede a reemplazar los valores de λ_n y μ_n para cada "n".

Recordemos que λ_n (tasa de ingreso para un estado "n" determinado) es igual a la tasa promedio de arribos λ multiplicada por la probabilidad de ingresar al sistema cuando el estado es "n", es decir:

$$\lambda_n = \lambda \cdot p(i/n)$$

Dado que no hay impaciencia ni restricciones de capacidad en el sistema, la probabilidad de ingresar es 1 para cualquier "n", por lo que la tasa de arribos promedio λ_n es siempre igual a la tasa de arribos promedio λ.

Por su parte, la tasa de egresos μ_n es cero cuando el sistema está vacío (n = 0). Para cualquier otro valor de "n", la tasa esperada de egresos es igual a la velocidad promedio de atención del canal, es decir, μ.

En definitiva, para este modelo será:

$$\lambda_n = \lambda \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \mu & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Reemplazando, entonces, en la ecuación de estado de régimen permanente

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p(n-1)}$$

- Para n = 1: $p(1) = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p(0) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(1) = \rho \cdot p(0)$
- Para n = 2: $p(2) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot p(1) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(0) \cdot \frac{\lambda}{\mu} \quad \Rightarrow \quad p(2) = \rho^2 \cdot p(0)$
- Para n = 3: $p(3) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot p(2) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(0) \cdot \frac{\lambda^2}{\mu^2} \quad \Rightarrow \quad p(3) = \rho^3 \cdot p(0)$

Procediendo de igual manera para el resto de los estados, y por el principio de inducción completa, se demuestra que:

$$\boxed{p(n) = \rho^n \cdot p(0)} \qquad \textbf{(1)}$$

Para hallar el valor de p(0), sabemos que

$$\sum_0^\infty p(n) = 1$$

Entonces:

$$\sum_0^\infty \rho^n \cdot p(0) = 1 \qquad \therefore \qquad p(0) \cdot \sum_0^\infty \rho^n = 1$$

y, por lo tanto:

$$p(0) = \frac{1}{\sum_{0}^{\infty} \rho^n}$$

La serie geométrica $\sum_{0}^{\infty} \rho^n$ debe ser convergente, ya que p(0) debe estar acotada entre 0 y 1.

Recordando que la expresión de una serie geométrica es igual a la razón elevada al primer término de la serie multiplicado por la razón elevada al número de términos menos 1, todo dividido por la razón menos 1:

$$\sum_{0}^{\infty} \rho^n = \frac{\rho^0 \cdot (\rho^\infty - 1)}{\rho - 1}$$

Para que la serie converja, se debe cumplir que $\rho < 1$, de manera que

$$\sum_{0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1-\rho} \qquad \textbf{(2)}$$

Reemplazando en la expresión de p(0), tendremos:

$$p(0) = \frac{1}{\frac{1}{1-\rho}} \quad \Rightarrow \quad p(0) = 1 - \rho \qquad \textbf{(3)}$$

Finalmente, reemplazando en (1), se obtiene la expresión general de p(n):

$$\boxed{p(n) = \rho^n \cdot (1-\rho)} \qquad \textbf{(4)}$$

La condición de $\rho < 1$, es decir $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ o, mejor, $\lambda < \mu$, surge del hecho de que los clientes del sistema son cautivos, ya que no hay impaciencia ni existen restricciones de capacidad.

La velocidad promedio de atención del canal debe ser mayor que la tasa de arribo promedio de clientes al sistema. De no ser así, el sistema no tendría capacidad suficiente para atender el requerimiento de servicios, y la cola crecería indefinidamente, no alcanzándose nunca la condición de equilibrio.

Un valor que, a menudo resulta práctico conocer, es la probabilidad de tener más de una cantidad "k" de clientes en el sistema, es decir p(n>k).

$$p(n > k) = \sum_{k+1}^{\infty} p(n)$$

Reemplazando el valor de p(n) de la expresión (4):

$$p(n > k) = \sum_{k+1}^{\infty} \rho^n \cdot (1-\rho) = (1-\rho) \cdot \sum_{k+1}^{\infty} \rho^n = (1-\rho) \cdot \frac{\rho^{k+1} \cdot (\rho^\infty - 1)}{\rho - 1} = (1-\rho) \cdot \frac{\rho^{k+1}}{(1-\rho)}$$

$$\therefore \quad p(n > k) = \rho^{k+1}$$

Del mismo modo, la probabilidad de que haya en el sistema k o más clientes es:

$$p(n \geq k) = \rho^k$$

<u>Determinación de L</u>:

La longitud del sistema es una variable aleatoria cuya media (L) es el valor esperado de que en el sistema haya "n" clientes. Es decir:

$$L = \sum_{0}^{\infty} n \cdot p(n)$$

Reemplazando la expresión de p(n) conforme a (4):

$$L = \sum_{0}^{\infty} n \cdot \rho^n \cdot (1-\rho) = (1-\rho) \cdot \sum_{0}^{\infty} n \cdot \rho^n \qquad \textbf{(5)}$$

Para determinar el valor de la serie geométrica $\sum_{0}^{\infty} n \cdot \rho^n$, se deriva (2) en ambos lados, de manera que:

$$\sum_{0}^{\infty} n \cdot \rho^{n-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

y, multiplicando por ρ ambos términos, tenemos el valor buscado de la serie geométrica:

$$\sum_{0}^{\infty} n \cdot \rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Por lo tanto, reemplazando en (5):

$$L = (1-\rho) \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad \textbf{(6)}$$

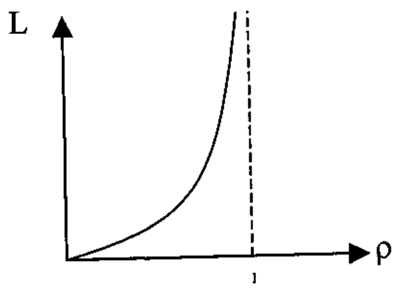
Finalmente, podemos expresar L en función de los parámetros λ y μ:

$$L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\lambda}{\mu \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)}$$

Es decir:

$$\boxed{L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}} \qquad \textbf{(7)}$$

Vemos que cuando $\mu = \lambda$, la longitud del sistema crece indefinidamente. Esto también lo podemos observar graficando la expresión (6):



Determinación de L_C:

La longitud de la cola es una variable aleatoria cuya media es la esperanza matemática de que haya n-1 clientes en cola (ya que hay un solo canal).

$$L_C = \sum_{1}^{\infty}(n-1)\cdot p(n) = \sum_{1}^{\infty} n \cdot p(n) - \sum_{1}^{\infty} p(n) = \sum_{0}^{\infty} n \cdot p(n) - [1 - p(0)] = L - [1 - p(0)]$$

Por (3):

$$L_C = L - \rho \qquad \textbf{(8)}$$

También podemos expresar L_C en función de los parámetros, de la siguiente forma:

$$L_C = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\lambda \cdot \mu - \lambda \cdot (\mu - \lambda)}{(\mu - \lambda)\cdot \mu} = \frac{\lambda^2}{(\mu - \lambda)\cdot \mu}$$

Determinación de H:

H es el número promedio de canales activos. Para el estado n = 0 no hay canales ocupados, mientras que para cualquier otro estado, hay un canal ocupado. En consecuencia, la expresión, en función de las probabilidades de estado, es la siguiente:

$$H = \sum_{1}^{\infty} p(n) = 1 - p(0)$$

y teniendo en cuenta (3):

$$H = \rho \qquad \textbf{(9)}$$

El valor de H también se puede interpretar como el número promedio de clientes atendiéndose en el sistema, por lo que se puede calcular como diferencia entre L y L_C. En efecto, el número promedio de clientes (L) es la suma del número promedio de clientes esperando en cola (L_C) más el número promedio de clientes atendiéndose, es decir:

$$\boxed{L = L_C + H}$$

Como tenemos un solo canal, tendremos que el porcentaje de actividad del canal es

$$PA = \frac{H}{M} = \frac{\rho}{1} = \rho$$

lo que resulta obvio, ya que el porcentaje de inactividad del canal, es decir la probabilidad p(0), es igual a 1-ρ.

Consideraciones del estado de régimen permanente:

La tasa promedio de ingreso de clientes al sistema $\bar{\lambda}$, está dada por la expresión:

$$\bar{\lambda} = \sum_{0}^{\infty} \lambda_n p(n)$$

pero como $\lambda_n = \lambda \ \forall n$, tendremos que:

$$\bar{\lambda} = \sum_{0}^{\infty} \lambda \cdot p(n) = \lambda \qquad \textbf{(10)}$$

Esto se debe a que no hay restricciones de capacidad en el sistema y a que los clientes no presentan el fenómeno de impaciencia. O sea, todos los clientes que arriban al sistema ingresan en él.

Por su parte, la tasa promedio de egreso de clientes del sistema $\bar{\mu}$, está dada por la expresión

$$\bar{\mu} = \sum_{0}^{\infty} \mu_n \cdot p(n)$$

Pero como μ_0 es igual a cero para n = 0 e igual a μ para cualquier otro valor de "n", tendremos que:

$$\bar{\mu} = \sum_{1}^{\infty} \mu \cdot p(n) = \mu \cdot [1 - p(0)] \qquad \textbf{(11)}$$

Esto significa que la tasa promedio de egresos de clientes del sistema es igual a la velocidad promedio de atención del canal siempre que el mismo esté activo. La expresión (11) puede expresarse en su forma universal como:

$$\bar{\mu} = \mu \cdot H$$

que indica que la tasa promedio de egresos es igual a la velocidad de atención de un canal multiplicada por la cantidad promedio de canales trabajando.

Si el sistema se encuentra en equilibrio, la tasa promedio de ingreso $\bar{\lambda}$ debe ser igual a la tasa promedio de egreso $\bar{\mu}$:

$$\bar{\lambda} = \bar{\mu}$$

Teniendo en cuenta (10) y (11):

$$\lambda = \mu \cdot [1 - p(0)]$$

$$\rho = 1 - p(0)$$

A esta última expresión se había arribado en (3).

El hecho de que el porcentaje de utilización del canal sea siempre menor que el 100% (esto es, $\rho < 1$) se debe a la aleatoriedad del funcionamiento del sistema, ya que siempre existirán períodos de tiempo en los que el canal está ocioso.

Los arribos que se producen no están espaciados uniformemente en el tiempo, habiendo períodos que tienen mayor cantidad de arribos que otros. De igual manera, los tiempos de servicio varían en el tiempo.

En determinados momentos el canal estará ocioso y en otros se tendrá una línea de espera mayor que la promedio. Cuando se producen los períodos pico, no hay margen de velocidad de atención extra para balancear los arribos, ya que en los períodos de menor trabajo, la capacidad de realizar servicio no se puede almacenar para ser usada cuando la demanda sea mayor.

A medida que la capacidad de servicio excede la tasa de arribos, se produce inactividad (tiempo ocioso) en el canal. Grandes cantidades de tiempo ocioso son indeseables (aunque inevitables) para los administradores de los sistemas de colas. Cuando sea posible, este tiempo ocioso del canal debería utilizarse en alguna otra actividad productiva. En algunos sistemas, sin embargo, los tiempos ociosos son deseables (como en el caso de un departamento de bomberos).

En definitiva, cuando se dimensiona un sistema P/P/1, debe tenerse en cuenta que la velocidad promedio de atención del canal sea mayor que la tasa promedio de arribo de clientes al sistema.

Determinación de W_C

El tiempo medio promedio de espera en cola de un cliente está dado por la relación entre la longitud promedio de la cola (L_C) y el flujo de clientes que circula por la cola $\bar{\lambda}$ (o $\bar{\mu}$). Esta es una expresión universal aplicable a una unidad operativa de cola simple:

$$\boxed{W_C = \frac{L_C}{\bar{\lambda}}} \qquad \textbf{(12)}$$

Como, para este sistema, la tasa de arribo promedio λ coincide con la tasa de ingreso promedio $\bar{\lambda}$, tendremos:

$$\boxed{W_C = \frac{L_C}{\lambda}}$$

Esta expresión, en función de los parámetros, resulta:

$$W_C = \frac{\lambda^2}{\mu \cdot (\mu - \lambda) \cdot \lambda} = \frac{\lambda}{\mu \cdot (\mu - \lambda)}$$

Determinación de W

El tiempo promedio de permanencia en el sistema es igual al tiempo promedio de espera en cola más el tiempo de promedio de atención:

$$W = W_C + T_S \qquad \textbf{(13)}$$

que, expresado en función de los parámetros, queda:

$$W = \frac{\lambda}{\mu \cdot (\mu - \lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda + (\mu - \lambda)}{\mu \cdot (\mu - \lambda)} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

También se verifica la expresión de Little:

$$\boxed{W = \frac{L}{\bar{\lambda}}}$$

que, en este caso es

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

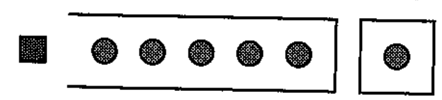
Determinación de $\omega(t)$:

Llamemos $\omega(t)$ a la probabilidad de que un cliente tenga que permanecer en el sistema un tiempo superior a "t", o sea $\omega(t) = p(W > t)$.

Para deducir esta expresión, llamaremos $\varphi(W)$ a la función densidad de probabilidad de permanecer en el sistema un tiempo comprendido entre W y dW+W.

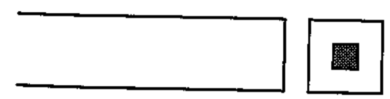
La función $\varphi(W)$ será la sumatoria para todo "n" (n = 0, 1, 2, ...) de una probabilidad condicional formada por tres probabilidades:

1) Probabilidad de que, cuando arriba el cliente, el sistema se encuentre en el estado "n":



$$p(n) = (1 - \rho) \cdot \rho^n$$

2) Probabilidad de que en el tiempo W se realicen "n" servicios:



$$p(n, W) = \frac{(\mu . W)^n \cdot e^{-\mu . W}}{n!}$$

3) Probabilidad de que en el intervalo dW se realice un servicio:

$$p(\text{servicio}) = \mu.dW$$

Luego:

$$\varphi(W) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\cdot\rho^n \cdot \frac{(\mu.W)^n \cdot e^{-\mu.W}}{n!} \cdot \mu\, dW$$

$$\varphi(W) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\rho)\cdot \frac{(\lambda.W)^n . e^{-\mu.W}}{n!} \cdot \mu\, dW$$

$$\varphi(W) = (1-\rho)\cdot e^{-\mu.W}\cdot \mu\, dW \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \frac{(\lambda.W)^n}{n!} \qquad \textbf{(14)}$$

Ahora bien, como $\frac{(\lambda\cdot W)^n . e^{-\lambda.W}}{n!}$ es la probabilidad de que se produzcan "n" arribos en el tiempo W, tendremos que:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(\lambda.W)^n . e^{-\lambda.W}}{n!} = 1$$

y, entonces:

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{(\lambda.W)^n}{n!} = e^{\lambda.W}$$

Luego, reemplazando en (14):

$$\begin{aligned}\varphi(W) &= (1-\rho)\cdot e^{-\mu.W}\cdot \mu\, dW \cdot e^{\lambda.W}\\ &= (\mu-\lambda)\cdot e^{-(\mu-\lambda).W}\cdot dW\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}\varpi(t) = p(W>t) &= \int_t^{\infty}\varphi(W) = \int_t^{\infty}(\mu-\lambda)\cdot e^{-(\mu-\lambda).W}\cdot dW\\ &= \int_t^{\infty} e^{-(\mu-\lambda).W}\cdot d[(\mu-\lambda)W] = -e^{-(\mu-\lambda).W}\Big]_t^{\infty} = e^{-(\mu-\lambda).t}\end{aligned}$$

Es decir,

$$\boxed{\varpi(t) = p(W>t) = e^{-(\mu-\lambda).t}} \qquad \textbf{(15)}$$

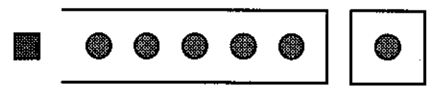
Determinación de $\omega_C(t)$:

Llamemos $\omega_C(t)$ a la probabilidad de que un cliente tenga que esperar en la cola un tiempo superior a "t", o sea $\omega_C(t) = p(W_C > t)$.

Para deducir esta expresión, llamaremos $\varphi(W_C)$ a la función densidad de probabilidad de esperar en cola un tiempo comprendido entre W_C y dW_C+W_C.

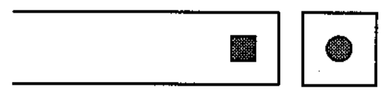
La función $\varphi_C(W_C)$ será la sumatoria para todos los estados (n = 1, 2, 3, ...), con excepción del estado n = 0, de una probabilidad condicional formada por tres probabilidades:

1) Probabilidad de que cuando arriba el cliente el sistema se encuentre en el estado "n":



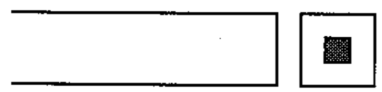
$$p(n) = (1-\rho)\cdot\rho^n$$

2) Probabilidad de que en el tiempo W_C se atiendan "n-1" clientes:



$$p(n-1, W_C) = \frac{(\mu.W_C)^{n-1} . e^{-\mu.W_C}}{(n-1)!}$$

3) Probabilidad de que en el intervalo dW_C se realice un servicio:



$$p(\text{servicio}) = \mu\cdot dW$$

Luego:

$$\varphi(W_C) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho)\cdot\rho^n \cdot \frac{(\mu.W_C)^{n-1} . e^{-\mu.W_C}}{(n-1)!}\cdot \mu\, dW_C$$

$$\varphi(W_C)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho)\cdot\rho\cdot\rho^{n-1}\cdot\frac{(\mu.W_C)^{n-1}.\,e^{-\mu.W_C}}{(n-1)!}\cdot\mu\,dW_C$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\rho)\cdot\rho\cdot\frac{(\lambda.W_C)^{n-1}.\,e^{-\mu.W_C}}{(n-1)!}\cdot\mu\,dW_C$$

$$\varphi(W_C)=(1-\rho)\cdot\rho\cdot e^{-\mu.W_C}\cdot\mu\,dW_C\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{(\lambda.W_C)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\varphi(W_C)=(\mu-\lambda)\cdot\rho\cdot e^{-\mu.W_C}\cdot dW_C\sum_{n=1}^{\infty}\cdot\frac{(\lambda.W_C)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad \textbf{(16)}$$

Ahora bien, como $\frac{(\lambda.W_C)^{n-1}\cdot e^{-\lambda.W_C}}{(n-1)!}$ es la probabilidad de que se produzcan "n-1" arribos en el tiempo W_C, tendremos que:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(\lambda\cdot W_C)^{n-1}\cdot e^{-\lambda.W_C}}{(n-1)!}=1$$

por lo que

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{(\lambda\cdot W_C)^{n-1}}{(n-1)!}=e^{\lambda.W_C}$$

Luego, reemplazando en (16):

$$\varphi(W_C)=(\mu-\lambda)\cdot\rho\cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot W_C}\cdot dW_C=$$
$$=\rho\cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot W_C}\cdot d[(\mu-\lambda)\cdot W_C]$$

En consecuencia:

$$\varpi_C(t)=p(W_C>t)=\int_t^{\infty}\varphi(W_C)=\int_t^{\infty}\rho\cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot W_C}\cdot d[(\mu-\lambda)\cdot W_C]$$
$$=-\rho\cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot W_C}\Big]_t^{\infty}=\rho\cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot t}$$

Es decir,

$$\boxed{\varpi_C(t)=p(W_C>t)=\rho\cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot t}} \qquad \textbf{(17)}$$

Particularmente, la probabilidad de que un cliente que arriba al sistema tenga que esperar es:

$$\varpi_C(0)=p(W_C>0)=\rho\cdot e^{-(\mu-\lambda)\cdot 0}=\rho$$

ANÁLISIS ECONÓMICO:

En muchas ocasiones, la velocidad media de atención del canal es una variable de decisión. Es decir, es factible modificar μ para lograr un balance adecuado entre el costo de mejorar el servicio y el costo asociado a la espera o permanencia de clientes dentro del sistema. Llamemos:

- c_e: Costo derivado de mantener una unidad en el sistema en la unidad de tiempo $\left(\frac{\$}{t\cdot cl}\right)$
- c_S: Costo por unidad de tiempo por atender a una velocidad unitaria $\left(\frac{\$}{t\cdot\frac{cl}{t}}\right)$

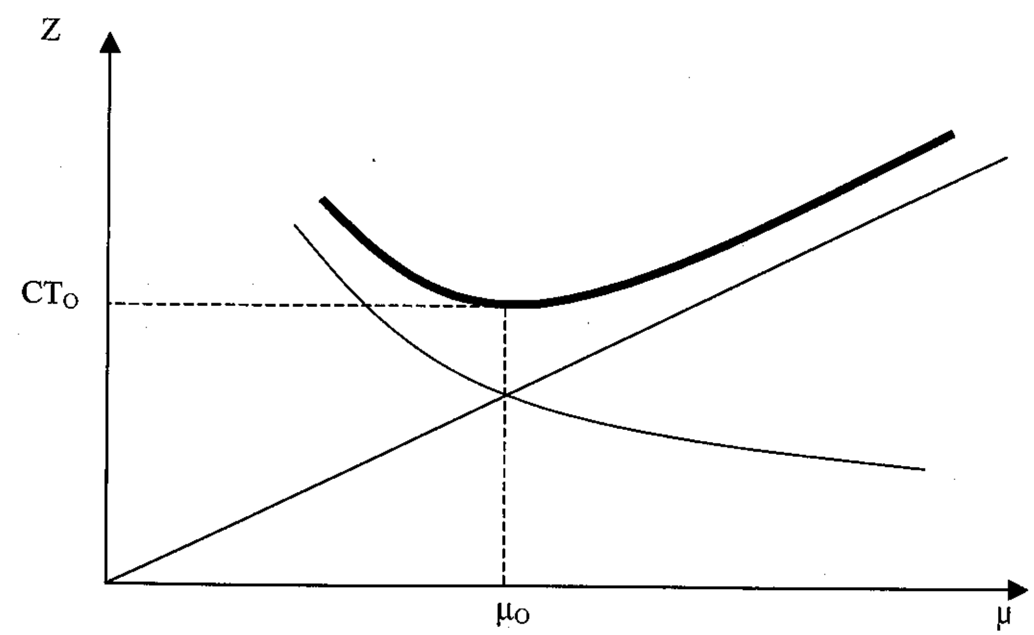
Luego, la función objetivo queda planteada de la siguiente forma:

$$Z=c_e\cdot L+c_s\cdot\mu \quad\rightarrow\quad \text{Min}$$

Reemplazando el valor de L, según la expresión (7):

$$Z=c_e\cdot\frac{\lambda}{\mu-\lambda}+c_s\cdot\mu \quad\rightarrow\quad \text{Min}$$

La primera componente es decreciente en función de μ, mientras que la segunda es creciente y lineal. Gráficamente:



Para hallar el costo mínimo en forma analítica, se deriva Z con respecto a μ y se iguala a cero. Si la derivada segunda es positiva, entonces tendremos un mínimo en ese punto.

$$\frac{\partial Z}{\partial \mu} = -c_e \cdot \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)^2} + c_s = 0$$

Efectivamente, la derivada segunda será positiva. Luego:

$$c_e \cdot \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)^2} = c_s$$

$$(\mu-\lambda)^2 = \lambda \cdot \frac{c_e}{c_s}$$

$$(\mu-\lambda) = \pm\sqrt{\lambda \cdot \frac{c_e}{c_s}}$$

Como para este sistema debe ser $\rho < 1$, es decir $\lambda < \mu$, la diferencia $(\mu\text{-}\lambda)$ debe ser mayor a cero.

En consecuencia, se debe considerar solamente el signo positivo de la raíz:

$$\boxed{\mu_O = \lambda + \sqrt{\lambda \cdot \frac{c_e}{c_s}}} \qquad \textbf{(18)}$$

Otra variable que el tomador de decisiones de un sistema P/P/1 podría controlar es la tasa de llegadas al sistema (por ejemplo a través de la publicidad), aunque es mucho menos habitual. Supongamos que fuera conocida la función de costo por aumento de tasa promedio de arribos $P = f(\lambda)$, y el beneficio unitario "u" por cada cliente atendido.

El funcional de este problema sería:

$$Z = u \cdot \lambda - f(\lambda) \quad \rightarrow \quad \text{Max}$$

Para resolver, habrá que derivar Z con respecto a λ e igual cero. Si la derivada segunda es negativa, habremos encontrado el máximo.

Supongamos un ejemplo en donde la función P esté dada por $P = c_2 \cdot \lambda^2$. Luego, la función objetivo está dada por

$$Z = u \cdot \lambda - c_2 \cdot \lambda^2 \quad \rightarrow \quad \text{Max}$$

Derivando Z con respecto a la variable de decisión (tasa promedio de arribo de clientes), e igualando a cero tendríamos:

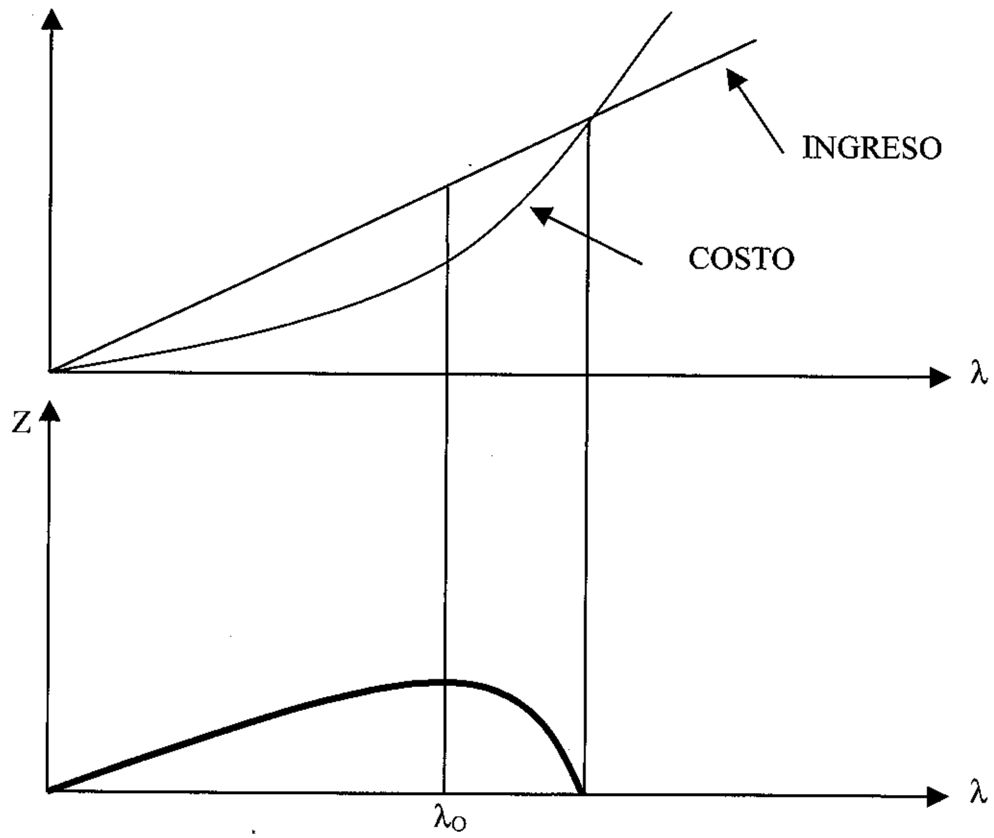
$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = u - 2 \cdot c_2 \cdot \lambda = 0$$

Como la segunda derivada es negativa, tendremos un máximo en este punto.

Despejando, obtenemos el valor óptimo:

$$\lambda_O = \frac{u}{2 \cdot c_2}$$

Los gráficos de la función de ingresos y costos, por un lado, y de la función objetivo que representa la utilidad, por el otro, se indican en la siguiente página .



EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 2.1

A un sistema P/P/1, sin impaciencia, arriba un cliente cada 12 minutos, en promedio. La duración media del servicio es de 10 minutos. Determinar:

a. *Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema no tenga que esperar para recibir el servicio.*
b. *Porcentaje de ocupación del canal.*
c. *Probabilidad de que un cliente que llega al sistema encuentre que hay más de tres personas esperando en cola.*
d. *Probabilidad de que haya menos de dos personas en el sistema.*

e. *Número promedio de clientes dentro del sistema.*

f. *Número promedio de clientes esperando ser atendidos.*

g. *Ingreso de caja esperado, si cada servicio se cobra $50.*

h. *Tiempo de espera promedio de un cliente en cola.*

i. *Tiempo promedio de permanencia de un cliente dentro del sistema.*

j. *Probabilidad de que un cliente permanezca dentro del sistema más de 5 minutos.*

k. *Probabilidad de que un cliente tenga que esperar en cola más de 3 minutos.*

l. *La velocidad óptima de atención, suponiendo que el lucro cesante es de 20$/h por cada cliente que se encuentre dentro del sistema, y el costo por atender a una velocidad de 1 cl/h es de $15/h.*

Resolución:

En primer lugar se calculan los parámetros. En este caso se pasan todas las unidades a hora para trabajar con valores más cómodos.

$$\lambda = \frac{1}{12}\frac{cl}{min}\cdot 60\frac{cl}{h} = 5\frac{cl}{h}$$

$$\mu = \frac{1}{10}\frac{cl}{min}\cdot 60\frac{cl}{h} = 6\frac{cl}{h}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6} = 0{,}8333$$

a) La probabilidad de no esperar es la probabilidad de cero.

$$p(0) = 1-\rho = 0{,}1667$$

b) El porcentaje de ocupación del canal es ρ, es decir 83,33%.

c) La probabilidad de que un cliente que llega al sistema encuentre que hay más de tres personas esperando en cola es igual a la probabilidad de que haya cuatro o más en el sistema. Luego:

$$p(n \geq 4) = \rho^4 = 0{,}4823$$

d) La probabilidad de que encuentre que hay menos de dos personas en el sistema es la probabilidad de cero más la probabilidad de uno:

$$p(1) = \rho \cdot p(0) = 0{,}8333 \cdot 0.1667 = 0{,}1389$$

$$\therefore\quad p(n \leq 1) = p(0) + p(1) = 0.1667 + 0{,}1389 = 0{,}3056$$

e) La longitud promedio del sistema es:

$$L = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = \frac{5}{6-5} = 5\ cl$$

f) La longitud promedio de la cola es:

$$L_C = L - \rho = 5 - 0{,}8333 = 4{,}1667\ cl$$

g) El ingreso esperado será:

$$Ingreso = u\cdot\overline{\lambda} = u\cdot\lambda = 50\cdot 5 = 250\frac{\$}{h}$$

h) El tiempo promedio de espera en cola es:

$$W_C = \frac{L_C}{\overline{\lambda}} = \frac{4{,}1667}{5} = 0{,}83333\ h = 50\ min$$

i) El tiempo promedio de permanencia dentro del sistema es:

$$W = W_C + T_S = 0{,}8333 + 0{,}1667 = 1\ h = 60\ min$$

j) La probabilidad de que un cliente permanezca en el sistema más de 5 minutos (0,08333 hora) es:

$$\varpi(0{,}08333) = e^{-(6-5).0{,}0833} = 0{,}9200 = 92\%$$

j) La probabilidad de que un cliente espere en cola más de 3 minutos (0,05 hora) es:

$$\varpi_C(0{,}05) = 0.1667\cdot e^{-(6-5).0.05} = 0{,}7927 = 79{,}27\%$$

l) La velocidad óptima de atención es:

$$\mu_O = \lambda + \sqrt{\lambda\cdot\frac{c_e}{c_s}} = 5 + \sqrt{5\cdot\frac{20}{15}} = 7{,}5820\ \frac{cl}{h}$$

Ejemplo 2.2

Una empresa de transportes tiene su propio centro de lavado de ómnibus. El centro puede lavar a razón de un solo vehículo por vez, pero puede disponer de hasta 8 operarios para esta tarea.

El tiempo promedio de lavado de un ómnibus depende de la cantidad de operarios asignados a la operación de lavado, y responde a la siguiente expresión (en horas):

$$T_S = 0{,}5\cdot e^{-0{,}1\cdot n} \quad para\ n \geq 1,$$

en donde "n" es la cantidad de operarios asignados.

La tasa promedio de arribos de ómnibus al sistema es de 2,5 por hora. Se sabe que el costo de un ómnibus no operativo es de $30 por hora, mientras que el salario de cada operario es de $15 por hora.

Determinar la cantidad mínima requerida y la cantidad óptima de operarios a asignar a la operación de lavado.

Resolución:

En primer lugar se calculan el tiempo de atención y la velocidad de servicio promedios para cada valor de "n":

n	T_s	μ
1	0,45	2,21
2	0,41	2,44
3	0,37	2,70
4	0,34	2,98
5	0,30	3,30
6	0,27	3,64
7	0,25	4,03
8	0,22	4,45

Como se debe cumplir que $\lambda < \mu$, habrá que disponer como mínimo de 3 operarios en este sistema.

Para calcular el número óptimo, se plantea el funcional:

$$Z = 30 \cdot L + 15 \cdot n \quad \Rightarrow \quad Min$$

y se calcula su valor para n = 3, 4, ... hasta observar que el valor del funcional aumenta. Cuando ello ocurre, el último valor de "n" es el óptimo, debido a que existe un único mínimo (ya que Z tiene una componente creciente y otra creciente).

- Para n = 3: $L = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{2{,}50}{2{,}70 - 2{,}50} = 12{,}50 \quad \Rightarrow \quad Z = 30 \cdot 12{,}50 + 15 \cdot 3 = 420 \dfrac{\$}{h}$
- Para n = 4: $L = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{2{,}50}{2{,}98 - 2{,}50} = 5{,}21 \quad \Rightarrow \quad Z = 30 \cdot 5{,}21 + 15 \cdot 4 = 216{,}3 \dfrac{\$}{h}$
- Para n = 5: $L = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{2{,}50}{3{,}30 - 2{,}50} = 3{,}125 \quad \Rightarrow \quad Z = 30 \cdot 3{,}125 + 15 \cdot 5 = 168{,}75 \dfrac{\$}{h}$
- Para n = 6: $L = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{2{,}50}{3{,}64 - 2{,}50} = 2{,}19 \quad \Rightarrow \quad Z = 30 \cdot 2{,}19 + 15 \cdot 6 = 155{,}7 \dfrac{\$}{h}$
- Para n = 7: $L = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{2{,}50}{4{,}03 - 2{,}50} = 1{,}63 \quad \Rightarrow \quad Z = 30 \cdot 1{,}63 + 15 \cdot 7 = 153{,}9 \dfrac{\$}{h}$
- Para n = 8: $L = \dfrac{\lambda}{\mu - \lambda} = \dfrac{2{,}50}{4{,}45 - 2{,}50} = 1{,}28 \quad \Rightarrow \quad Z = 30 \cdot 1{,}28 + 15 \cdot 8 = 158{,}4 \dfrac{\$}{h}$

En consecuencia, el número óptimo de operarios es 7.

Ejemplo 2.3

Una empresa tiene un sector de reparación de computadoras personales en donde trabaja un técnico que, en promedio, repara a razón de 1 computadora cada 2 días y cobra un sueldo de \$4.000. Se está evaluando la posibilidad de asignar un ayudante, con un sueldo de \$2.000 por mes, que permitirá que el sector pueda reparar en promedio, 2 computadoras cada 3 días.

El sector recibe un promedio de 12 computadoras personales por mes para reparar, y se supone que el lucro cesante de cada computadora descompuesta es de \$1.000 por mes.

a. Determinar si conviene hacer el cambio.

b. ¿Cuál es el lucro cesante mínimo que justifica la incorporación del ayudante?

Resolución:

λ = 12 PC/mes

a) En la situación actual, tendremos que μ = 15 PC/mes. En consecuencia, el costo total será:

$$Z = 1000 \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} + 4000 = 8000 \frac{\$}{\text{mes}}$$

Con el ayudante, la velocidad de atención se incrementa a μ = 20 PC/mes, por lo que el costo total es de:

$$Z = 1000 \cdot \frac{\lambda}{\mu - \lambda} + 6000 = 7500 \frac{\$}{\text{mes}}$$

En consecuencia, conviene contratar al ayudante.

b) El lucro cesante mínimo (LC_{min}) para que convenga hacer el cambio será un valor tal que el costo total actual sea mayor que el costo total con el ayudante; es decir:

$$LC_{min} \cdot \frac{12}{15 - 12} + 4000 \geq LC_{min} \cdot \frac{12}{20 - 12} + 6000$$

$$LC_{min} \cdot 4 + 4000 \geq LC_{min} \cdot 1{,}5 + 6000$$

$$LC_{min} \cdot 2{,}5 \geq 2000 \quad \Rightarrow \quad LC_{min} \geq 800 \frac{\$}{mes}$$

2. SISTEMA DE UN SOLO CANAL, CAPACIDAD FINITA Y POBLACIÓN INFINITA

HIPÓTESIS

a. El proceso de arribos de clientes al sistema es de tipo Poisson.

b. El proceso de servicio de los clientes es también de tipo Poisson.

c. El sistema se encuentra en condiciones estables; es decir, ha alcanzado condiciones de equilibrio de sus variables (régimen permanente).

d. Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.

e. La disciplina de atención es FIFO.

f. Se dispone de un solo canal de atención.

g. La capacidad del sistema está limitada a un valor N (cola finita).

h. Los clientes que llegan al sistema no presentan impaciencia.

i. La población de clientes potenciales del sistema es infinita

PARÁMETROS

- λ: Número promedio de clientes que arriban al sistema por unidad de tiempo (tasa promedio de arribos). En lugar de este parámetro se puede dar como dato su inversa (Intervalo promedio entre arribos de clientes)

$$\left(T_a = \frac{1}{\lambda}\right)$$

- μ: Número promedio de clientes que puede atender un canal por unidad de tiempo (velocidad promedio de atención). En lugar de este parámetro se puede dar como dato su inversa (Duración promedio del servicio)

$$\left(T_s = \frac{1}{\mu}\right)$$

- M = 1 Un solo canal de atención.
- N: Capacidad del sistema (cantidad máxima de clientes en el sistema).

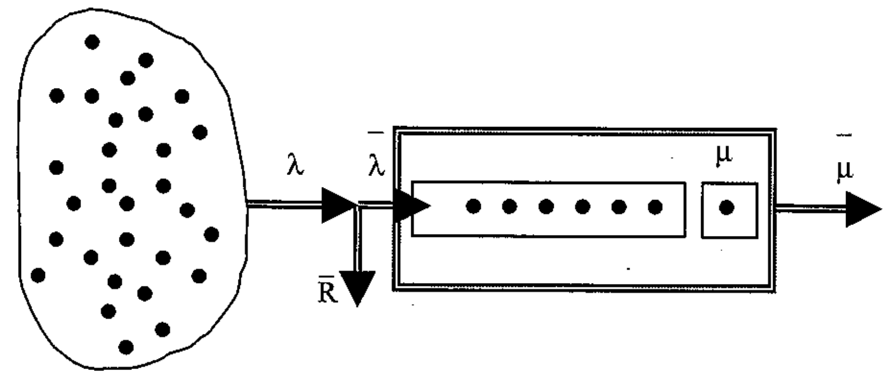
VARIABLES:

- p(n): Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado "n".
- L: Longitud promedio del sistema (número esperado de clientes dentro del sistema).
- L_C: Longitud promedio de la cola (número esperado de clientes esperando ser atendidos).
- $\bar{\lambda}$: Tasa promedio de ingreso de clientes al sistema.
- $\bar{\mu}$: Tasa promedio de egreso de clientes del sistema.
- W_C: Tiempo promedio de espera en cola de un cliente.
- W: Tiempo promedio de permanencia en el sistema de un cliente.
- $\bar{R}$: Tasa promedio de clientes rechazados.
- PR: Porcentaje de rechazos del sistema

NOTACIÓN KENDALL

P/P/1/N

REPRESENTACIÓN GRÁFICA



MODELIZACIÓN

Determinación de p(n)

Para el cálculo de los valores de las probabilidades asociadas a los diferentes estados que puede adoptar el sistema, se parte de la ecuación de estado de régimen permanente, y se procede a reemplazar los valores de λ_n y μ_n para cada "n". En este caso, el número de estados posibles es finito e igual a N+1 (desde n = 0 hasta n = N).

Recordemos que λ_n (tasa de ingreso para un estado "n" determinado) es igual a la tasa promedio de arribos λ multiplicada por la probabilidad de ingresar al sistema cuando el estado es "n", es decir:

$$\lambda_n = \lambda \cdot p(i/n)$$

La probabilidad de ingresar es siempre 1, excepto cuando el sistema está completo (o sea cuando n = N), en cuyo caso la probabilidad es cero.

Por su parte, la tasa de egresos μ_n es cero cuando el sistema está vacío (n = 0). Para cualquier otro valor de "n", la tasa esperada de egresos es igual a la velocidad promedio de atención del canal, es decir, μ.

En definitiva, para este modelo será:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n = 0,1,2,3,.... \\ 0 & n = N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \mu & n = 1,2,3,....,N \end{cases}$$

Reemplazando, entonces, en la ecuación de estado de régimen permanente

$$\boxed{p(n)=\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\cdot p(n-1)}$$

- Para n = 1: $p(1)=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot p(0)=\frac{\lambda}{\mu}\cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(1)=\rho\cdot p(0)$
- Para n = 2: $p(2)=\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdot p(1)=\frac{\lambda}{\mu}\cdot p(0)\cdot\frac{\lambda}{\mu} \quad \Rightarrow \quad p(2)=\rho^2\cdot p(0)$
- Para n = 3: $p(3)=\frac{\lambda_2}{\mu_3}\cdot p(2)=\frac{\lambda}{\mu}\cdot p(0)\frac{\lambda^2}{\mu^2} \quad \Rightarrow \quad p(3)=\rho^3\cdot p(0)$

Procediendo de igual manera para el resto de los estados, llegaremos a la formulación de la ecuación de estado para n = N:

$$p(N)=\rho^N\cdot p(0)$$

En forma general:

$$\boxed{p(n)=\rho^n\cdot p(0)} \qquad \textbf{(19)}$$

Para hallar el valor de p(0), sabemos que

$$\sum_0^N p(n)=1$$

Entonces:

$$\sum_0^N \rho^n\cdot p(0)=1 \qquad \therefore \qquad p(0)\cdot\sum_0^N \rho^n=1$$

y, por lo tanto:

$$p(0)=\frac{1}{\sum_0^N \rho^n} \qquad \textbf{(20)}$$

La serie geométrica $\sum_0^N \rho^n$ es convergente, ya que es una serie finita. Por lo tanto, en este caso la relación entre los parámetros λ y μ puede ser cualquiera. Esto significa que el sistema alcanza un valor de equilibrio independientemente del valor de ρ.

Recordando que la expresión de una serie geométrica es igual a la razón elevada al primer término de la serie multiplicada por la razón elevada al número de términos menos 1, todo dividido por la razón menos 1:

$$\sum_0^N \rho^n=\frac{\rho^0\cdot\left(\rho^{N+1}-1\right)}{\rho-1}=\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho} \qquad \textbf{(21)}$$

Reemplazando en la expresión de p(0), tendremos:

$$p(0)=\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \qquad \textbf{(22)}$$

Finalmente, reemplazando en (19), tendremos la expresión general de p(n):

$$\boxed{p(n)=\rho^n\cdot\frac{(1-\rho)}{(1-\rho)^{N+1}}} \qquad \textbf{(23)}$$

En el caso particular de que ρ sea igual a 1, se debe aplica L´Hôpital en la expresión (22) para calcular p(0), de manera que:

$$p(0)=\lim_{\rho\to 1}\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}=\frac{1}{N+1}$$

<u>Determinación de L</u>:

La longitud del sistema es una variable aleatoria cuya media (L) es el valor esperado de que en el sistema haya "n" clientes. Es decir:

$$L=\sum_0^N n\cdot p(n)$$

Reemplazando la expresión de p(n) de (23):

$$L=\sum_0^N n\cdot\rho^n\cdot\frac{(1-\rho)}{(1-\rho)^{N+1}}=\frac{(1-\rho)}{(1-\rho)^{N+1}}\cdot\sum_0^N n.\rho^n \qquad \textbf{(24)}$$

Para determinar el valor de la serie geométrica $\sum_0^N n\cdot\rho^n$, se deriva (21) en ambos lados, de manera que:

$$\sum_0^N n.\rho^{n-1}=\frac{-(N+1)\cdot\rho^N\cdot(1-\rho)+1-\rho^{N+1}}{(1-\rho)^2}$$

y, multiplicando por ρ en ambos términos, tenemos el valor buscado de la serie geométrica:

$$\sum_0^N n\cdot\rho=\rho\cdot\frac{(-N\cdot\rho^N-\rho^N)\cdot(1-\rho)+1-\rho^{N+1}}{(1-\rho)^2}$$

Por lo tanto, reemplazando en (24):

$$L=\frac{(1-\rho)}{(1-\rho)^{N+1}}\rho\cdot\frac{(-N\cdot\rho^{N}-\rho^{N}+N\cdot\rho^{N+1}+\rho^{N+1}+1-\rho^{N+1}}{(1-\rho)^{2}}$$

$$L=\rho\cdot\frac{1-(N+1)\cdot\rho^{N}+N\cdot\rho^{N+1}}{(1-\rho)\cdot(1-\rho)^{N+1}} \qquad \textbf{(25)}$$

Observando esta expresión, vemos que para

$$\rho<<1 \quad\Rightarrow\quad \rho^{N}\cong 0 \quad\Rightarrow\quad L\cong\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\rho\cdot(1+\rho)}{(1-\rho^{2})}\cong\rho\cdot(1+\rho)=\rho+\rho^{2}$$

$\rho>>1 \quad\Rightarrow$ el valor 1 es despreciable frente a ρ^{N} por lo que

$$L\cong\rho\cdot\frac{\left[-\rho^{N}\cdot(N+1)+N\cdot\rho^{N+1}\right]}{(-\rho)\cdot(-\rho^{N+1})}=\frac{-\rho^{N}\cdot(N+1)+N\cdot\rho^{N+1}}{\rho^{N+1}}$$

$$L=\frac{\rho^{N}\cdot(-N-1+N\cdot\rho\ )}{\rho^{N+1}}=\frac{-N-1+N\rho}{\rho}\cong\frac{N\rho}{\rho}=N$$

$\rho=1 \quad\Rightarrow\quad$ por L'Hôpital

$$\lim_{\rho\to1}L=\lim_{\rho\to1}\frac{\rho-(N+1)\cdot\rho^{N+1}+N\cdot\rho^{N+2}}{1-\rho^{N+1}-\rho+\rho^{N+2}}=$$

$$=\lim_{\rho\to1}\frac{-(N+1)^{2}\cdot\rho^{N}+N\cdot(N+2)\cdot\rho^{N+1}}{-(N+1)\cdot\rho^{N}-1+(N+2)\cdot\rho^{N+1}}=$$

$$=\lim_{\rho\to1}\frac{-(N+1)^{2}\cdot N\cdot\rho+N\cdot(N+2)\cdot(N+1)\cdot\rho^{N}}{-N\cdot(N+1)\cdot\rho^{N-1}+(N+1)\cdot(N+2)\cdot\rho^{N}}=$$

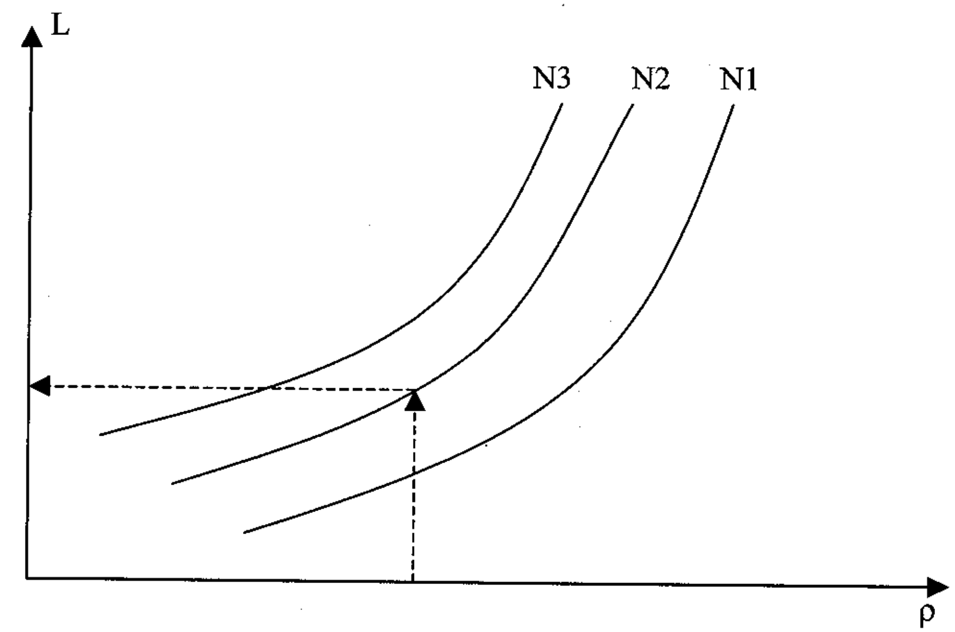
$$=\frac{-(N+1)^{2}\cdot N+N\cdot(N+2)\cdot(N+1)}{-N\cdot(N+1)+(N+1)\cdot(N+2)}=\frac{-(N+1)\cdot N+N\cdot(N+2)}{-N+N+2}=$$

$$=\frac{-N^{2}-N+N^{2}+2N}{2}=\frac{N}{2}$$

Existen tablas y ábacos para determinar la longitud promedio del sistema, conociendo N y ρ.

Para utilizar los ábacos, cuya forma se indica en la siguiente tabla, se ingresa con el valor de ρ (ya que λ y μ son habitualmente datos). Se traza una vertical hasta cortar al valor de N correspondiente al problema.

Finalmente se dibuja una horizontal hasta el eje de las ordenadas, en donde se lee el valor de L (longitud promedio del sistema).



Determinación de L_C:

La longitud de la cola es una variable aleatoria cuya media es la esperanza matemática de que haya n-1 clientes en cola (ya que hay un solo canal).

$$L_{C}=\sum_{1}^{N}(n-1)\cdot p(n)=\sum_{1}^{N}n\cdot p(n)-\sum_{1}^{N}p(n)=\sum_{0}^{N}n\cdot p(n)-[1-p(0)]=L-[1-p(0)]$$

Por (22):

$$L_{C}=L-1+\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$$

Podemos expresar L_C en función de ρ y N, de la siguiente forma:

$$L_{C}=\rho\cdot\frac{1-(N+1)\cdot\rho^{N}+N\cdot\rho^{N+1}}{(1-\rho)\cdot(1-\rho)^{N+1}}-1+\frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}$$

$$L_{C}=\frac{\rho\cdot\left[1-(N+1)\cdot\rho^{N}+N\cdot\rho^{N+1}\right]-(1-\rho)\cdot(1-\rho^{N+1})+(1-\rho)^{2}}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^{N+1})}$$

$$L_{C}=\frac{\rho-(N+1)\cdot\rho^{N+1}+N\cdot\rho^{N+2}-1+\rho^{N+1}+\rho-\rho^{N+2}+1-2\rho+\rho^{2}}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^{N+1})}$$

$$L_C = \frac{\rho^2 \cdot \left[-(N+1)\cdot\rho^{N-1} + N\cdot\rho^N + \rho^{N-1} + 1 - \rho^N\right]}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^{N+1})}$$

$$L_C = \frac{\rho^2 \cdot \left[\rho^{N-1}\cdot(-N-1+1) + N\cdot\rho^N + 1 - \rho^N\right]}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^{N+1})}$$

$$L_C = \rho^2 \cdot \frac{1 - N\cdot\rho^{N-1} + N\cdot\rho^N}{(1-\rho)\cdot(1-\rho)^{N+1}}$$

<u>Determinación de H</u>:

H es el número promedio de canales activos. Para el estado n = 0 no hay canales ocupados, mientras que para cualquier otro estado, hay un canal ocupado. En consecuencia, la expresión, en función de las probabilidades de estado, es la siguiente:

$$H = \sum_{1}^{N} p(n) = 1 - p(0)$$

Se debe recordar que siempre se mantiene la siguiente relación entre variables:

$$L = Lc + H$$

Como tenemos un solo canal, tendremos que el porcentaje de actividad del canal es

$$PA = \frac{H}{M} = 1 - p(0)$$

<u>Consideraciones del estado de régimen permanente</u>:

La tasa promedio de ingreso de clientes al sistema $\bar{\lambda}$, está dada por la expresión

$$\bar{\lambda} = \sum_{0}^{N} \lambda_n \cdot p(n)$$

pero como $\lambda_n = \lambda$ para n = 0, 1, 2, 3, …, N-1, y dado que $\lambda_N = 0$, tendremos:

$$\bar{\lambda} = \sum_{0}^{N} \lambda_n \cdot p(n) = \sum_{0}^{N-1} \lambda\cdot p(n) = \lambda\cdot\sum_{0}^{N-1} p(n) = \lambda\cdot\left[1 - p(N)\right] \qquad \textbf{(26)}$$

Esto resulta obvio, ya que la tasa efectiva de ingresos al sistema $\bar{\lambda}$ es la tasa promedio de arribos multiplicada por la probabilidad de ingresar al sistema [1-p(N)].

Por su parte, la tasa promedio de egreso de clientes del sistema $\bar{\mu}$, está dada por la expresión:

$$\bar{\mu} = \sum_{0}^{\infty} \mu_n \cdot p(n)$$

Pero como μ_0 es igual a cero para n = 0 e igual a μ para cualquier otro valor de "n", tendremos que:

$$\bar{\mu} = \sum_{1}^{\infty} \mu \cdot p(n) = \mu \cdot \left[1 - p(0)\right] \qquad \textbf{(27)}$$

Es decir:

$$\bar{\mu} = \mu \cdot H$$

Si el sistema se encuentra en equilibrio, la tasa promedio de ingreso $\bar{\lambda}$ debe ser igual a la tasa promedio de egreso $\bar{\mu}$:

$$\bar{\lambda} = \bar{\mu}$$

Teniendo en cuenta (26) y (27):

$$\lambda\cdot\left[1 - p(N)\right] = \mu\cdot\left[1 - p(0)\right]$$

con lo que, otra expresión del factor de tránsito resulta:

$$\rho = \frac{1 - p(0)}{1 - p(N)}$$

El número promedio de clientes rechazados por unidad de tiempo $\bar{R}$ es igual a la tasa promedio de arribos λ multiplicada por la probabilidad de no ingresar [p(N)], es decir:

$$\bar{R} = \lambda \cdot p(N)$$

$$\bar{R} = \lambda\cdot\rho^N \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \qquad \textbf{(28)}$$

Es obvio, también, que

$$\lambda = \bar{\lambda} + \bar{R}$$

Por su parte, el porcentaje de rechazos será:

$$PR = \frac{\bar{R}}{\lambda}$$

<u>Determinación de W_C</u>

El tiempo medio promedio de espera en cola de un cliente está dado por la relación entre la longitud promedio de la cola (L_C) y el flujo de clientes que circula por la cola $\bar{\lambda}$ (o $\bar{\mu}$):

$$W_C = \frac{L_C}{\overline{\mu}} = \frac{L_C}{\mu \cdot [1 - p(0)]} = \frac{L_C}{\mu \cdot \left[1 - \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right]}$$

Determinación de W

El tiempo promedio de permanencia en el sistema es igual al tiempo promedio de espera en cola más el tiempo de promedio de atención:

$$W = W_C + T_S$$

ANÁLISIS ECONÓMICO:

Un problema que se puede plantear en sistemas de capacidad finita es el de balancear las pérdidas por ingresos no percibidos (debido a clientes que se retiran sin ser atendidos) y el costo asociado a los lugares de espera (alquiler, amortización, impuestos, etc.). Llamemos:

- c_L: Costo de cada lugar de cola $\left(\frac{\$}{\text{lugar} \cdot t}\right)$
- u: precio de venta de cada servicio $\left(\frac{\$}{\text{cl}}\right)$

La función objetivo para el problema así formulado es:

$$Z = c_L \cdot (N-1) + u \cdot \overline{R} \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

Reemplazando $\overline{R}$, según la expresión (28):

$$Z = c_L \cdot (N-1) + u \cdot \lambda \cdot \rho^N \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \Rightarrow \text{Min}$$

La primera componente es creciente y lineal en función de N, mientras que la segunda es decreciente.

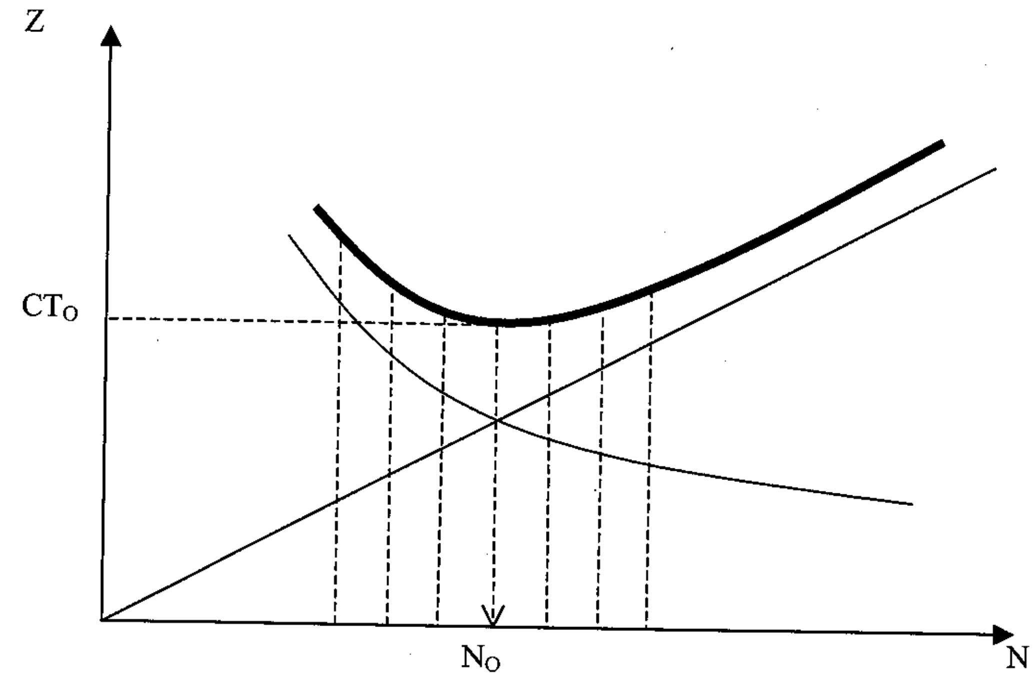
En la próxima página se puede observar gráficamente la función de Z.

Como la variable N es discreta no se deriva para hallar el mínimo. El procedimiento consiste en calcular el valor de Z para N = 1 (sin cola) luego para N = 2 (un lugar en cola). Si el funcional Z_2 es menor que Z_1 se prosigue el cálculo para N = 3, 4, etc. hasta que se encuentre que la curva de costos cambia el sentido y comienza a crecer.

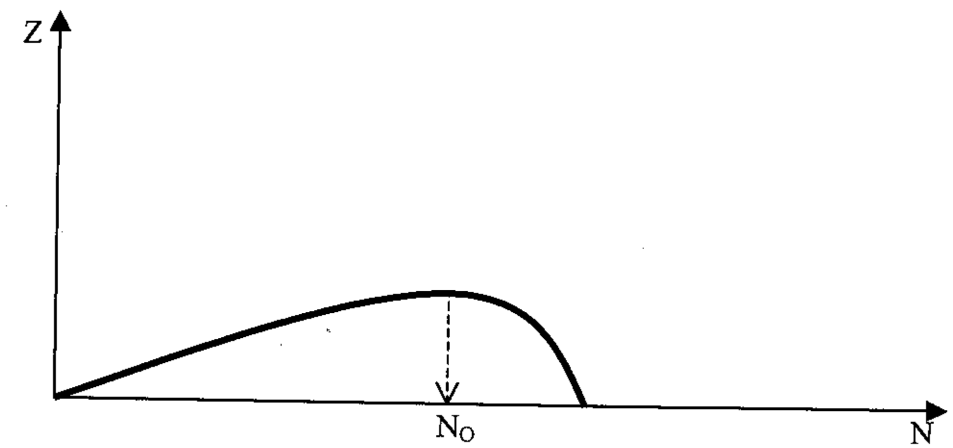
Este mismo problema se pudo haber planteado también como un problema de beneficios a maximizar:

$$Z = u \cdot \overline{\mu} - c_L \cdot (N-1) \quad \rightarrow \quad \text{Max}$$

cuyo resultado óptimo, obviamente, debe ser el mismo.



El gráfico de la función objetivo de maximización se indica a continuación:



Otro caso que se podría plantear con relación a un sistema P/P/1/N es el de determinar la velocidad óptima que debería tener el canal para minimizar las pérdidas por ingresos no percibidos y el costo de proveer una mayor velocidad de atención.

El funcional de un problema así planteado es:

$$Z = c_s \cdot \mu + u \cdot \overline{R} \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 2.4

A un sistema P/P/1/10, sin impaciencia, arriba un cliente cada 5 minutos, en promedio. La duración media del servicio es de 6 minutos. Determinar:

a. Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema no tenga que esperar para recibir el servicio.

b. Porcentaje de ocupación del canal.

c. Probabilidad de que un cliente que llega al sistema encuentre que hay tres o más personas esperando en el sistema.

d. Probabilidad de que haya menos de dos personas en el sistema.

e. Número promedio de clientes dentro del sistema.

f. Número promedio de clientes esperando ser atendidos.

g. Ingreso de caja esperado, si cada servicio se cobra $30.

h. Tiempo de espera promedio de un cliente en cola.

i. Tiempo promedio de permanencia de un cliente dentro del sistema.

Resolución:

Los problemas de capacidad finita se pueden resolver aplicando las fórmulas, utilizando las tablas o modelizando cada caso.

Para resolver este caso utilizaremos las fórmulas vistas. En primer lugar, se calculan los parámetros:

$$\lambda = \frac{1}{5}\frac{\text{cl}}{\text{min}} \cdot 60\frac{\text{cl}}{\text{h}} = 12\frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

$$\mu = \frac{1}{6}\frac{\text{cl}}{\text{min}} \cdot 60\frac{\text{cl}}{\text{h}} = 10\frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{10} = 1{,}20$$

a) La probabilidad de no esperar es la probabilidad de cero:

$$p(0) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{11}} = 0{,}0310$$

b) El porcentaje de ocupación del canal es 1-p(0), es decir 96,89%.

c) La probabilidad de que un cliente que llega al sistema encuentre que hay tres o más personas es igual a 1 - p(2) - p(1) - p(0):

$$p(1) = \rho^1 \cdot p(0) = 0{,}0372$$

$$p(2) = \rho^2 \cdot p(0) = 0{,}0446$$

$$p(n \geq 3) = 1 - p(2) - p(1) - p(0) = 1 - 0{,}1128 = 0{,}8872$$

d) La probabilidad de que encuentre menos de dos personas en el sistema es la probabilidad de cero más la probabilidad de uno:

$$\therefore \quad p(n \leq 1) = p(0) + p(1) = 0{,}0310 + 0{,}0372 = 0{,}0682$$

e) La longitud promedio del sistema es:

$$L = \rho \cdot \frac{1-(N+1)\cdot\rho^N + N\cdot\rho^{N+1}}{(1-\rho)\cdot(1-\rho)^{N+1}} = 6{,}7107 \text{ cl}$$

f) La longitud promedio de la cola es:

$$L_C = \rho^2 \cdot \frac{1-N\cdot\rho^{N-1} + N\cdot\rho^N}{(1-\rho)\cdot(1-\rho)^{N+1}} = 5{,}7418 \text{ cl}$$

g) El ingreso esperado será:

$$\text{Ingreso} = u \cdot \bar{\lambda} = u \cdot \mu \cdot H = 30 \cdot 10 \cdot 0{,}9689 = 290{,}67\frac{\$}{\text{h}}$$

h) El tiempo promedio de espera en cola es:

$$W_C = \frac{L_C}{\bar{\lambda}} = \frac{4{,}1667}{9{,}689} = 0{,}43\text{ h} = 25{,}8 \text{ min}$$

i) El tiempo promedio de permanencia dentro del sistema es:

$$W = W_C + T_S = 0{,}43 + 0{,}10 = 0{,}53 \text{ h} = 31{,}8 \text{ min}$$

Ejemplo 2.5

A un sistema de colas, con capacidad limitada a un máximo de 4 clientes, arriban usuarios a una tasa media de 6 por hora, siendo la velocidad promedio de atención 8 clientes por hora. Si cada servicio se abona $100, determinar el lucro cesante por el hecho de que los clientes se retiren sin ser atendidos. Calcular también la longitud promedio del sistema y de la cola, como así también el tiempo promedio dentro del sistema que permanece un cliente.

Resolución:

Como la capacidad N es relativamente pequeña se puede deducir el modelo sin necesidad de aplicar las fórmulas.

En efecto, a partir de la ecuación de estado de régimen permanente tenemos:

$$p(1) = \rho \cdot p(0)$$
$$p(2) = \rho^2 \cdot p(0)$$
$$p(3) = \rho^3 \cdot p(0)$$
$$p(4) = \rho^4 \cdot p(0)$$

Además:

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) = 1$$

Este es un sistema de 5 ecuaciones con 5 incógnitas. Para resolver, se reemplazan los valores de las probabilidades de los estados en la última ecuación:

$$p(0) + \rho \cdot p(0) + \rho^2 \cdot p(0) + \rho^3 \cdot p(0) + \rho^4 \cdot p(0) = 1$$

Despejando:

$$p(0) = \frac{1}{\rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4} = \frac{1}{\frac{6}{8} + \left(\frac{6}{8}\right)^2 + \left(\frac{6}{8}\right)^3 + \left(\frac{6}{8}\right)^4} = 0{,}327785$$

Luego,

$$p(1) = 0{,}245839$$
$$p(2) = 0{,}184379$$
$$p(3) = 0{,}138284$$
$$p(4) = 0{,}103713$$

La tasa efectiva de ingreso de clientes al sistema $\bar{\lambda}$ es igual a:

$$\bar{\lambda} = \lambda \cdot [1 - p(4)] = 6 \cdot 0{,}896287 = 5{,}377721 \frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

que, obviamente, es igual a $\bar{\mu}$:

$$\bar{\mu} = \mu \cdot [1 - p(0)] = 8 \cdot 0{,}67221 = 5{,}377721 \frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

y la tasa de rechazos $\bar{R}$:

$$\bar{R} = \lambda \cdot p(4) = 6 \cdot 0{,}103713 = 0{,}62227913 \frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

que, por supuesto es igual a $\lambda - \bar{\lambda}$

El lucro cesante (LC), en este caso, es lo que se deja de percibir por el hecho de existir la restricción de capacidad:

$$LC = 100 \cdot \bar{R} = 62{,}227913 \frac{\$}{\text{h}}$$

La longitud promedio del sistema es:

$$L = 0.p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4)$$
$$= 0{,}245839 + 2 \cdot 0{,}184379 + 3 \cdot 0{,}138284 + 4 \cdot 0{,}103713 = 1{,}444302$$

La longitud promedio de la cola es:

$$L_C = 1 \cdot p(2) + 2 \cdot p(3) + 3 \cdot p(4) = 1 \cdot 0{,}184379 + 2 \cdot 0{,}138284 + 3 \cdot 0{,}103713 = 0{,}772087$$

Por su parte, el tiempo promedio de espera en cola es:

$$W_C = \frac{L_C}{\bar{\lambda}} = \frac{0{,}772087}{5{,}377721} = 0{,}064876 \text{ h}$$

y el tiempo de permanencia promedio de un cliente en el sistema:

$$W = W_C + \frac{1}{\mu} = 0{,}064876 + \frac{1}{8} = 0{,}189876 \text{ h}$$

Este valor también se pudo haber determinado a partir de la ecuación de Little, como relación entre la longitud promedio del sistema y la tasa efectiva de ingreso de clientes que pasa por el sistema.

Ejemplo 2.6

En un sistema P/P/1/N, con λ = 2 cl/día, μ = 2 cl/día, se tiene que el costo de cada lugar de cola por día es de \$10, y el ingreso por cada servicio realizado es de \$100. Calcular el número óptimo de lugares de cola.

Resolución:

La expresión del funcional (expresado en términos de costos) será:

$$Z = 10 \cdot (N - 1) + 100 \cdot \bar{R} \quad \to \text{Min}$$

Para resolver este caso, se iterará para distintos valores de N, y utilizaremos, en cada caso, las tablas.

- Comenzando con N = 1:

$$\rho = 1 \Rightarrow \quad p(0) = 0{,}50 \quad \therefore \quad p(N) = p(1) = 0{,}50 \quad \Rightarrow$$

$$\bar{R} = \lambda \cdot p(N) = 1 \quad \Rightarrow \quad Z = \$\ 100$$

- Para $N = 2$:

$$\rho = 1 \Rightarrow \ p(0) = 0,3333 \ \therefore \ p(N) = p(2) = 0,3333 \ \Rightarrow$$

$$\overline{R} = \lambda \cdot p(N) = 0,6667 \ \Rightarrow \ Z = \$ \ 76,67$$

- Como Z_2 es menor que Z_1, seguimos iterando para $N = 3$:

$$\rho = 1 \Rightarrow \ p(0) = 0,25 \ \therefore \ p(N) = p(3) = 0,25 \ \Rightarrow$$

$$\overline{R} = \lambda \cdot p(N) = 0,50 \ \Rightarrow \ Z = \$ \ 70,00$$

- Para $N = 4$:

$$\rho = 1 \Rightarrow \ p(0) = 0,20 \ \therefore \ p(N) = p(4) = 0,20 \ \Rightarrow$$

$$\overline{R} = \lambda \cdot p(N) = 0,40 \ \Rightarrow \ Z = \$ \ 70,00$$

- Finalmente, para $N = 5$, vemos que el costo crece:

$$\rho = 1 \Rightarrow \ p(0) = 0,1667 \ \therefore \ p(N) = p(4) = 0,1667 \ \Rightarrow$$

$$\overline{R} = \lambda \cdot p(N) = 0,33 \ \Rightarrow \ Z = \$ \ 73,33$$

Es decir, hay una solución alternativa óptima entre:

$N = 3$ (es decir, dos lugares de cola), y

$N = 4$ (es decir, tres lugares de cola).

3. SISTEMAS DE UN SOLO CANAL CON IMPACIENCIA

HIPÓTESIS

a. El proceso de arribos de clientes al sistema es de tipo Poisson.

b. El proceso de servicio de es también de tipo Poisson.

c. El sistema se encuentra en condiciones estables; es decir, ha alcanzado condiciones de equilibrio de sus variables (régimen permanente).

d. Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.

e. La disciplina de atención es FIFO.

f. Se dispone de un solo canal de atención.

g. La capacidad del sistema es ilimitada (cola infinita).

h. Los clientes que llegan al sistema presentan impaciencia el fenómeno de impaciencia, del tipo que toma la decisión antes de ingresar al sistema.

i. Una vez ingresados al sistema, los clientes no lo abandonan hasta recibir el servicio en el canal.

j. Supondremos que la expresión de la probabilidad de ingresar al sistema es:

$$p(i/n) = e^{-\frac{\alpha \cdot n}{\mu}}$$

en donde α es un coeficiente de impaciencia. Llamaremos a esta expresión γ^{2n}, o sea:

$$e^{-\frac{\alpha \cdot n}{\mu}} = \gamma^{2 \cdot n}$$

de manera que $\gamma^2 = e^{-\frac{\alpha}{\mu}}$ es la probabilidad de que un cliente que arriba al sistema ingrese en él cuando el estado del mismo es $n = 1$.

k. La población de clientes potenciales del sistema es infinita.

PARÁMETROS

- λ: Número promedio de clientes que arriban al sistema por unidad de tiempo (tasa promedio de arribos). En lugar de este parámetro se puede dar como dato su inversa (intervalo promedio entre arribos de clientes)

$$\left(T_a = \frac{1}{\lambda} \right)$$

- μ: Número promedio de clientes que puede atender un canal por unidad de tiempo (velocidad promedio de atención). En lugar de este parámetro se puede dar como dato su inversa (duración promedio del servicio)

$$\left(T_s = \frac{1}{\mu} \right)$$

- $M = 1$ Un solo canal de atención.
- α: Coeficiente de impaciencia promedio de la población.

VARIABLES:

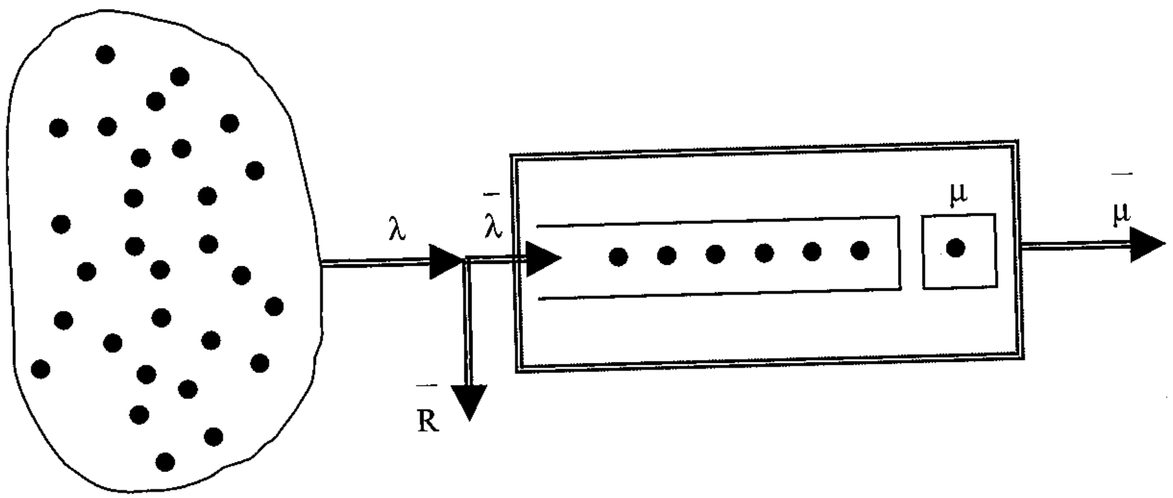
- $p(n)$: Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado "n".
- γ^2: Probabilidad de que un cliente con impaciencia α se incorpore al sistema cuando el estado del mismo es $n = 1$.
- L: Longitud promedio del sistema (número esperado de clientes dentro del sistema).
- L_C: Longitud promedio de la cola (número esperado de clientes esperando ser atendidos).
- $\overline{\lambda}$: Tasa promedio de ingreso de clientes al sistema.
- $\overline{\mu}$: Tasa promedio de egreso de clientes del sistema.
- W_C: Tiempo promedio de espera en cola de un cliente.
- W: Tiempo promedio de permanencia en el sistema de un cliente.

NOTACIÓN KENDALL

P/P/1

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

El siguiente esquema representa a un sistema como el que se está estudiando.



MODELIZACIÓN

Determinación de p(n)

Recordemos que λ_n (tasa de ingreso para un estado "n" determinado) es igual a la tasa promedio de arribos λ multiplicada por la probabilidad de ingresar al sistema cuando el estado es "n", es decir:

$$\lambda_n = \lambda \cdot p(i/n)$$

Por lo tanto:

$$\lambda_n = \lambda \cdot \gamma^{2 \cdot n}$$

Por su parte, la tasa de egresos μ_n es cero cuando el sistema está vacío (n = 0). Para cualquier otro valor de "n", la tasa esperada de egresos es igual a la velocidad promedio de atención del canal, es decir, μ.

En definitiva, para este modelo tendremos:

$$\lambda_n = \lambda \cdot \gamma^{2 \cdot n} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \mu & n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Reemplazando, entonces, en la ecuación de estado de régimen permanente

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p(n-1)}$$

- Para n = 1: $p(1) = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p(0) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(1) = \rho \cdot p(0)$
- Para n = 2: $p(2) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot p(1) = \frac{\lambda \cdot \gamma^2}{\mu} \cdot p(0) \frac{\lambda}{\mu} \quad \Rightarrow \quad p(2) = \rho^2 \cdot \gamma^2 \cdot p(0)$
- Para n = 3: $p(3) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot p(2) = \frac{\lambda \cdot \gamma^4}{\mu} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot \gamma^2 \cdot p(0) \Rightarrow \quad p(3) = \rho^3 . \gamma^6 \cdot p(0)$
- Para n = 4: $p(4) = \frac{\lambda_3}{\mu_4} \cdot p(3) = \frac{\lambda \cdot \gamma^6}{\mu} \cdot \frac{\lambda^3}{\mu^3} \cdot \gamma^6 \cdot p(0) \Rightarrow \quad p(4) = \rho^4 . \gamma^{12} \cdot p(0)$

Por inducción completa, se demuestra que:

$$\boxed{p(n) = \rho^n \cdot \gamma^{n \cdot (n-1)} \cdot p(0)} \qquad \textbf{(29)}$$

Observando la expresión anterior, vemos que a medida que aumenta "n" la probabilidad p(n) decrece mucho más rápidamente que para el caso sin impaciencia.

Como

$$\sum_0^\infty p(n) = 1$$

tendremos que:

$$\sum_0^\infty \rho^n \cdot \gamma^{n \cdot (n-1)} \cdot p(0) = 1$$

Luego

$$p(0) = \frac{1}{\sum_0^\infty \rho^n \cdot \gamma^{n \cdot (n-1)}}$$

Llamaremos:

$$\sum_{0}^{\infty} \rho^{n} \cdot \gamma^{n \cdot (n-1)} = \Theta(\rho, \gamma)$$

de manera que:

$$p(0) = \frac{1}{\Theta(\rho, \gamma)} \qquad \textbf{(30)}$$

Por el criterio de convergencia de Cauchy se puede demostrar que la serie $\Theta(\rho,\gamma)$ converge. En efecto, como

$$\gamma^{n} = e^{-\frac{\alpha}{2\mu} \cdot n}$$

tendremos que

$$\gamma^{n \cdot (n-1)} = e^{-\frac{\alpha}{2\mu} \cdot n \cdot (n-1)}$$

Esta es una función exponencial negativa que disminuye muy rápidamente a medida que "n" aumenta.

Existen ábacos y tablas para calcular la función $\Theta(\rho,\gamma)$. Uno de los ábacos utiliza un par de ejes cartesianos, en donde la función inversa de p(0) está indicada en las ordenadas, y ρ en abcisas.

Los valores de γ, variando de 0 a 1, están representados por una serie de curvas.

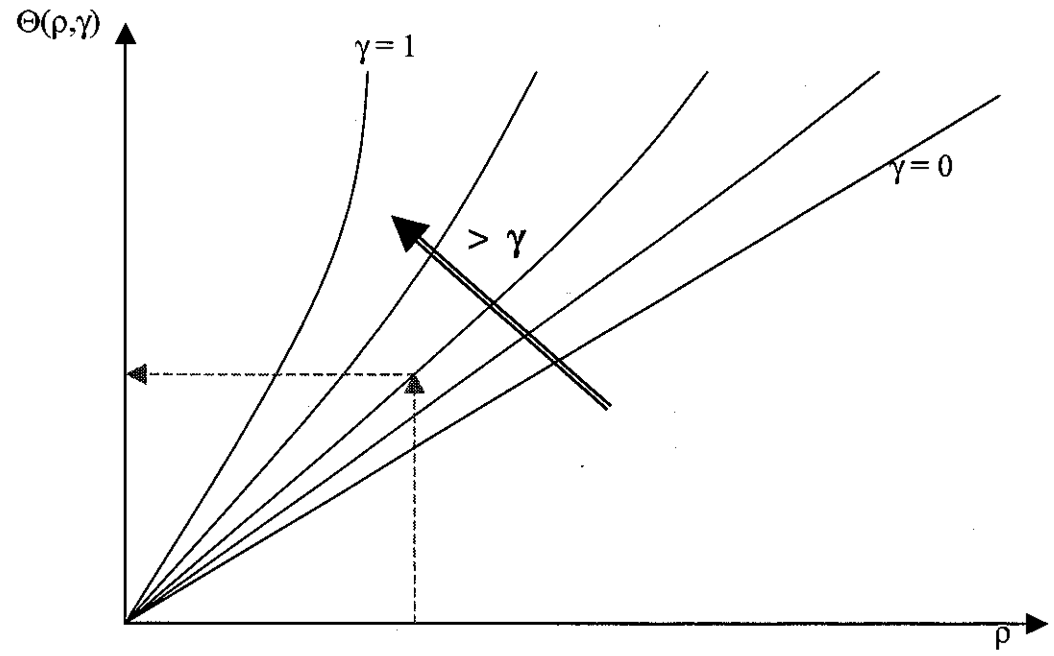
Para utilizar los ábacos se ingresa con los valores de dos parámetros para obtener un tercer valor, que es el valor de la variable que se desea obtener.

Para este problema, habitualmente, la variable la constituye la función inversa de la probabilidad de cero $\Theta(\rho,\gamma)$, mientras que "ρ" es dato y "α"(a partir del cual se puede obtener fácilmente γ) también es dato.

En este caso se ingresa con el valor de "ρ", trazando una vertical hasta intersecar a la curva correspondiente al valor de "γ" del problema. En ese punto se traza una horizontal hasta el eje de las ordenadas, en donde se lee el valor de la función $\Theta(\rho,\gamma)$.

La inversa de $\Theta(\rho,\gamma)$ es p(0). Finalmente, con el valor de p(0) se puede reemplazar en (29) para obtener el valor de cualquier probabilidad de estado del sistema.

En el caso de que el valor de "γ" correspondiente a los datos del problema quede comprendido entre dos curvas, habrá que interpolar los valores correspondientes.



Las tablas son más precisas y, si están disponibles, su uso es más conveniente. En este texto se dan las tablas correspondientes a un amplio rango de variación del parámetro "ρ". Obviamente, si los valores de "γ" o de "ρ" tienen más de un decimal, habrá que interpolar para calcular las variables.

Determinación de L:

La longitud del sistema es una variable aleatoria cuya media (L) es el valor esperado de que en el sistema haya "n" clientes. Es decir:

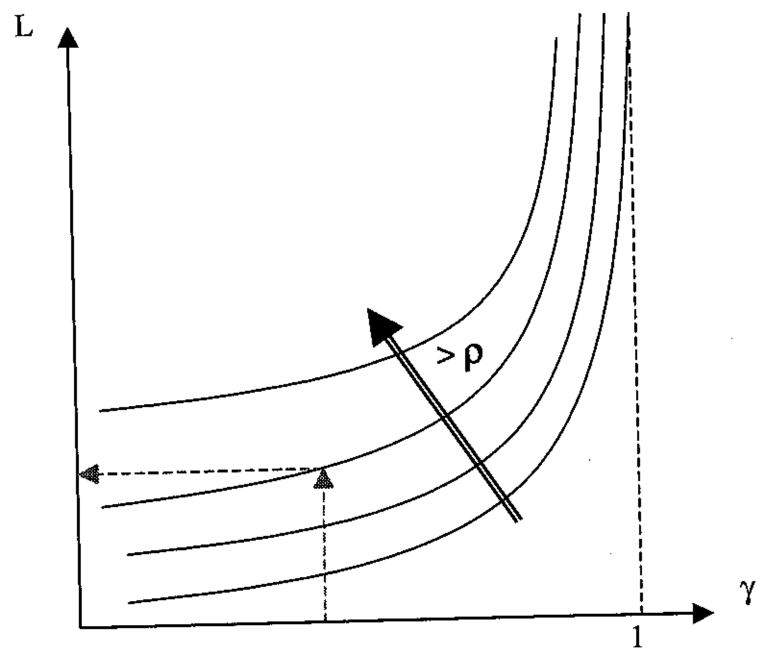
$$L = \sum_{0}^{\infty} n \cdot p(n) \qquad \textbf{(31)}$$

Reemplazando la expresión de p(n) de (1):

$$L = \sum_{0}^{\infty} n \cdot \rho^{n} \cdot \gamma^{n \cdot (n-1)} p(0) \qquad \textbf{(32)}$$

Dado que esta serie geométrica resulta compleja de resolver analíticamente, se pueden utilizar ábacos, tablas o, simplemente reemplazar en la expresión (3) hasta un valor de "n" tal que la $p(n) \to 0$.

Los ábacos tienen el valor de "L" en ordenadas, "γ" en abcisas y "ρ" en curvas. Se ingresa con dos de los parámetros (normalmente "γ" y "ρ") para determinar el valor de "L". Al final del texto se proporcionan las tablas para un amplio rango de valores de parámetros. Tanto en los ábacos como en las tablas, habrá que interpolar si es necesario.



Determinación de L_C:

La longitud promedio de la cola, se puede calcular de la siguiente forma:

$$L_C = \sum_1^{\infty}(n-1)\cdot p(n) = \sum_1^{\infty} n\cdot p(n) - \sum_1^{\infty} p(n) = \sum_0^{\infty} n\cdot p(n) - [1-p(0)] = L - [1-p(0)]$$

Determinación de H:

El número promedio de canales activos está dado por la siguiente expresión

$$H = \sum_1^{\infty} p(n) = 1 - p(0)$$

También se puede calcular a partir de la fórmula universal:

$$L = L_C + H$$

Dado que el sistema es de un solo canal, el porcentaje de actividad del canal es:

$$PA = \frac{H}{M} = \frac{[1-p(0)]}{1} = 1 - p(0)$$

Consideraciones del estado de régimen permanente:

La tasa promedio de ingreso de clientes al sistema $\bar{\lambda}$, está dada por la expresión:

$$\bar{\lambda} = \sum_0^{\infty} \lambda_n \cdot p(n)$$

pero como $\lambda_n = \lambda.\gamma^{2n}$, tendremos que:

$$\bar{\lambda} = \sum_0^{\infty} \lambda\cdot\gamma^{2n}\cdot p(n) = \lambda\cdot\sum_0^{\infty}\gamma^{2n}\cdot p(n)$$

y

$$\bar{\lambda} = \lambda\cdot p(0) + \lambda\cdot\sum_1^{\infty}\gamma^{2n}\cdot p(n) \qquad \textbf{(33)}$$

Por su parte, la tasa promedio de egreso de clientes del sistema $\bar{\mu}$, está dada por la expresión

$$\bar{\mu} = \sum_0^{\infty}\mu_n\cdot p(n)$$

Pero como μ_0 es igual a cero para n = 0 e igual a μ para cualquier otro valor de "n", tendremos que:

$$\bar{\mu} = \sum_1^{\infty}\mu\cdot p(n) = \mu\cdot[1-p(0)] \qquad \textbf{(34)}$$

o sea:

$$\bar{\mu} = \mu\cdot H$$

Si el sistema se encuentra en equilibrio, la tasa promedio de ingreso $\bar{\lambda}$ de debe ser igual a la tasa promedio de egreso $\bar{\mu}$:

$$\bar{\lambda} = \bar{\mu}$$

Teniendo en cuenta (33) y (34):

$$\lambda\cdot p(0) + \lambda\cdot\sum_1^{\infty}\gamma^{2n}\cdot p(n) = \mu\cdot[1-p(0)] \qquad \textbf{(35)}$$

Para el caso particular de que $\gamma \to 0$, es decir, cuando la probabilidad de ingresar es muy pequeña, la expresión (35) queda:

$$\lambda \cdot p(0) = \mu \cdot [1 - p(0)]$$
$$p(0) \cdot (\rho + 1) = 1$$
$$p(0) = \frac{1}{1+\rho}$$

o lo que es lo mismo:

$$H(\rho, \gamma) = 1 + \rho$$

En cambio, para el caso de que $\gamma \to 1$, es decir, cuando la probabilidad de ingresar es muy alta, la expresión (35) queda:

$$\lambda \cdot p(0) + \lambda \cdot \sum_{1}^{\infty} \gamma^{2n} \cdot p(n) = \mu \cdot [1 - p(0)]$$

Pero

$$\sum_{1}^{\infty} \gamma^{2n} \cdot p(n) \cong \sum_{1}^{\infty} p(n) = 1 - p(0)$$

Por lo tanto:

$$\lambda = \mu \cdot [1 - p(0)]$$
$$\rho = 1 - p(0)$$
$$\therefore \quad p(0) = 1 - \rho$$

o, lo que es lo mismo:

$$H(\rho, \gamma) = \frac{1}{1-\rho}$$

Por otra parte, se puede determinar la tasa promedio de clientes que se retiran sin haber ingresado al sistema como consecuencia de la impaciencia

$$\overline{R} = \lambda - \overline{\lambda}$$

así como el porcentaje de clientes que se retiran, siendo este valor la relación entre el número promedio de clientes rechazados y la tasa de arribos promedio al sistema:

$$PR = \frac{\overline{R}}{\lambda}$$

Determinación de W_C

El tiempo medio promedio de espera en cola de un cliente está dado por:

$$W_C = \frac{L_C}{\overline{\lambda}} = \frac{L_C}{\overline{\mu}}$$

Es decir:

$$\boxed{W_C = \frac{L_C}{\mu \cdot H}}$$

Determinación de W

El tiempo promedio de permanencia en el sistema es igual al tiempo promedio de espera en cola más el tiempo de promedio de atención:

$$W = W_C + T_S$$

ANÁLISIS ECONÓMICO:

En un problema de esta naturaleza, la variable de decisión es la velocidad media de atención del canal. Esto significa que, siendo:

- u: Ingreso por venta del servicio $\left(\frac{\$}{cl}\right)$
- c_s: Costo por unidad de tiempo por atender a una velocidad unitaria $\left(\frac{\$}{t \cdot \frac{cl}{t}}\right)$

el valor de la función objetivo será:

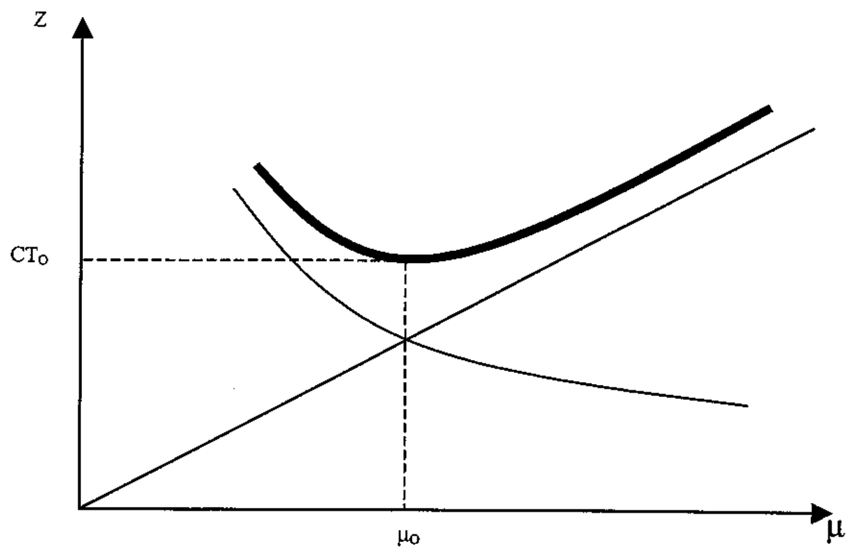
$$Z = u \cdot \overline{R} + c_s \cdot \mu \quad \to \quad \text{Min}$$

en donde

$$\overline{R} = \lambda - \overline{\mu} = \lambda - \mu\left[1 - \frac{1}{\Theta(\rho, \gamma)}\right]$$

por lo que:

$$Z = u \cdot \left\{\lambda - \mu\left[1 - \frac{1}{\Theta(\rho, \gamma)}\right]\right\} + c_s \cdot \mu \quad \to \quad \text{Min}$$



EJEMPLO DE APLICACIÓN

Ejemplo 2.7

A un sistema P/P/1, con impaciencia, arriban 8 clientes por hora, en promedio. La velocidad promedio de atención del canal es de 10 cl/h. Se ha determinado que la probabilidad de ingresar al sistema para un estado "n" está dada por la expresión:

$$p(i/n) = e^{-\frac{\alpha \cdot n}{\mu}}$$

siendo el coeficiente de impaciencia para esta población $\alpha = 2$.

Calcular:

a. *Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema no tenga que esperar para recibir el servicio.*
b. *Porcentaje de ocupación del canal.*
c. *Probabilidad de que un cliente que llega al sistema encuentre más de dos personas esperando en cola.*
d. *Número promedio de clientes dentro del sistema.*
e. *Número promedio de clientes esperando en cola.*
f. *Ingreso de caja esperado, si cada servicio se cobra $50.*
g. *Lucro cesante esperado.*
h. *Tiempo de espera promedio de un cliente en cola.*
i. *Tiempo promedio de permanencia de un cliente dentro del sistema.*

Resolución:

Siendo:

$$\lambda = 8\,\frac{cl}{h} \;\; y \;\; \mu = 10\,\frac{cl}{h}$$

tendremos que:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{8}{10} = 0{,}80$$

Por otra parte, se puede calcular el valor de γ, de la siguiente forma:

$$\gamma^{2 \cdot n} = e^{-\frac{\alpha \cdot n}{\mu}} \;\Rightarrow\; \gamma^2 = e^{-\frac{\alpha}{\mu}} \;\Rightarrow\; \gamma = e^{-\frac{\alpha}{2 \cdot \mu}}$$

$$\therefore \quad \gamma = e^{-\frac{2}{2 \cdot 10}} = e^{-0{,}1} = 0{,}9048 \cong 0{,}90$$

a) La probabilidad de no esperar es la probabilidad de cero. Se entra en tablas (o en ábacos) para calcular el valor de $\Theta(\rho,\gamma)$ con $\rho = 0{,}80$ y $\gamma = 0{,}90$. El valor encontrado es 2,76, por lo que el valor de la probabilidad de cero es:

$$p(0) = \frac{1}{2{,}76} = 0{,}3623$$

b) El porcentaje de ocupación del canal es:

$$PO = \frac{H}{M} = \frac{1 - 0{,}3623}{1} = 0{,}6377$$

c) La probabilidad de que un cliente que llega al sistema encuentre que hay más de dos personas es:

$$p(n \geq 3) = 1 - p(0) - p(1) - p(2)$$

Para calcular la probabilidad de que haya uno o dos clientes, planteamos la expresión:

$$\boxed{p(n) = \rho^n \cdot \gamma^{n \cdot (n-1)} \cdot p(0)}$$

Luego:

$$p(1) = 0{,}8^1 \cdot 0{,}9^{1 \cdot (1-1)} \cdot 0{,}3623 = 0{,}2898$$

$$p(2) = 0{,}8^2 \cdot 0{,}9^{2 \cdot (2-1)} \cdot 0{,}3623 = 0{,}1878$$

Finalmente:

$$p(n \geq 3) = 1 - 0{,}3623 - 0{,}2898 - 0{,}1878 = 0{,}1601$$

d) Para encontrar longitud promedio del sistema entramos en tablas (o en ábacos), con $\rho = 0{,}80$ y $\gamma = 0{,}90$, encontrando que $L = 1{,}23$ cl.

e) La longitud promedio de la cola es:

$$L_C = L - [1 - p(0)] = 1{,}23 - 0{,}64 = 0{,}59\,\text{cl}$$

f) El ingreso esperado será:

$$\text{Ingreso} = u \cdot \bar{\mu} = u \cdot \mu \cdot H = 50 \cdot 10 \cdot 0{,}6377 = 368{,}85 \frac{\$}{h}$$

g) El lucro cesante es:

$$LC = u \cdot \bar{R} = u \cdot (\lambda - \bar{\lambda}) = 50 \cdot (8 - 6{,}377) = 81{,}15 \frac{\$}{h}$$

h) El tiempo promedio de espera en cola es:

$$W_C = \frac{L_C}{\bar{\mu}} = \frac{0{,}59}{6{,}3770} = 0{,}0925\,h = 5{,}55\,\text{min}$$

i) El tiempo promedio de permanencia dentro del sistema es:

$$W = W_C + T_S = 0{,}0925 + 0{,}10 = 0{,}1925\,h = 11{,}55\,\text{min}$$

OTRO EJEMPLO DE MODELIZACIÓN Y RESOLUCIÓN DE POBLACIÓN CON IMPACIENCIA.

<u>Ejemplo 2.8</u>:

Un taller de reparación de automóviles tiene una capacidad de reparación de 5 autos por día. El sector recibe por día 10 clientes, pero éstos tienen impaciencia. Ha sido posible determinar que la probabilidad de que un cliente que llega al taller deje su auto para arreglar está dada por la expresión:

$$p(i/n) = 1 - \frac{n}{3}$$

siendo "n" la cantidad de autos en el taller en el instante de arribo de un cliente.

Formular un modelo matemático que permita determinar las probabilidades asociadas, la ganancia esperada del taller (suponiendo que, en promedio, cada automóvil deja una ganancia de \$150), la longitud de cola promedio y el tiempo promedio que transcurre desde que un cliente deja su auto en el taller hasta que éste está reparado (asumiendo 8 horas de trabajo por día).

<u>Resolución</u>:

$\lambda = 10$ autos/día

$\mu = 5$ autos/día

$\rho = 2$

Para modelizar el problema, se parte de la ecuación de estado de régimen permanente:

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p(n-1)}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lambda_n = \lambda \cdot \left[1 - \frac{n}{3}\right] = \begin{cases} \lambda & n = 0 \\ \frac{2}{3}\lambda & n = 1 \\ \frac{1}{3}\lambda & n = 2 \\ 0 & n = 3 \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \mu & n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

tendremos que:

- Para n = 1: $p(1) = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p(0) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(1) = \rho \cdot p(0)$
- Para n = 2: $p(2) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot p(1) = \frac{2}{3}\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(2) = \frac{2}{3}\rho^2 \cdot p(0)$
- Para n = 3: $p(3) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot p(2) = \frac{1}{3}\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{2}{3}\frac{\lambda^2}{\mu^2} \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(2) = \frac{2}{9}\rho^3 \cdot p(0)$

pero como la suma de las probabilidades de todos los estados posibles es igual a uno:

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) = 1$$

tendremos que:

$$p(0) + \rho \cdot p(0) + \frac{2}{3}\rho^2 \cdot p(0) + \frac{2}{9}\rho^3 \cdot p(0) = 1$$

Despejando:

$$p(0) = \frac{1}{1 + \rho + \frac{2}{3} \cdot \rho^2 + \frac{2}{9} \cdot \rho^3} = \frac{1}{1 + 2 + \frac{2}{3} \cdot 2^2 + \frac{2}{9} \cdot 2^3} = 0{,}1343$$

y por lo tanto:

$p(1) = 0{,}2687$

$p(2) = 0{,}3582$

$p(3) = 0{,}2388$

Para calcular el número de automóviles atendidos por día:

$$\bar{\mu} = \mu \cdot H = \mu \cdot [1 - p(0)] = 5 \cdot 0{,}8657 = 4{,}33 \, \frac{\text{autos}}{\text{día}}$$

Por lo tanto, la ganancia esperada del taller será:

$$\text{Ganancia esperada} = u \cdot \bar{\mu} = 150 \cdot 4{,}33 \cong 649{,}5 \frac{\$}{\text{día}}$$

La longitud promedio del sistema estará dada por:

$$L = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) = 1{,}70 \text{ autos}$$

Para calcular W, se determina primero L_C y luego W_C:

$$L_C = 0 \cdot p(1) + 1 \cdot p(2) + 2 \cdot p(3) = 0{,}84 \text{ autos}$$

$$W_C = \frac{L_C}{\bar{\mu}} = \frac{0{,}84}{4{,}33} = 0{,}1940 \text{ dia} = 1{,}55 \text{ h}$$

$$W = W_C + T_S = (0{,}1940 + 0{,}2) \text{ día} = 0{,}394 \text{ día} = 3{,}15 \text{ h}$$

ABANDONO DE CLIENTES

La impaciencia, se puede evidenciar también a través de clientes que ingresan al sistema y luego de un tiempo abandonan la cola. En estos casos la tasa de abandono de clientes A_n para los distintos estados de "n" es, normalmente, conocida.

Para modelizar un sistema sin restricciones de capacidad y con impaciencia de este tipo, se procede de igual manera que en los casos anteriores, es decir a partir de la ecuación de estado de régimen permanente

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p(n-1)}$$

en donde se deben reemplazar los valores de λ_n y μ_n en la ecuación de estado de régimen permanente, como sigue:

$$\lambda_n = \lambda \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ \mu & \text{para } n = 1 \\ \mu + A_n & \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots. \end{cases}$$

En la medida que aumenta "n", la probabilidad de abandono de los clientes se incrementa mucho.

Esto significa que la p(n) para "n" grande es cero, por lo que se puede suponer, con el objeto de resolver el problema, que habrá un número finito de estados. También se puede dar el caso más general, que es aquel en donde existen ambos tipos de impaciencia, por lo que habrá rechazos y abandonos. Si esto fuera así, los valores de ingresos y egresos esperados para cada "n", a reemplazar en la ecuación de estado, serán:

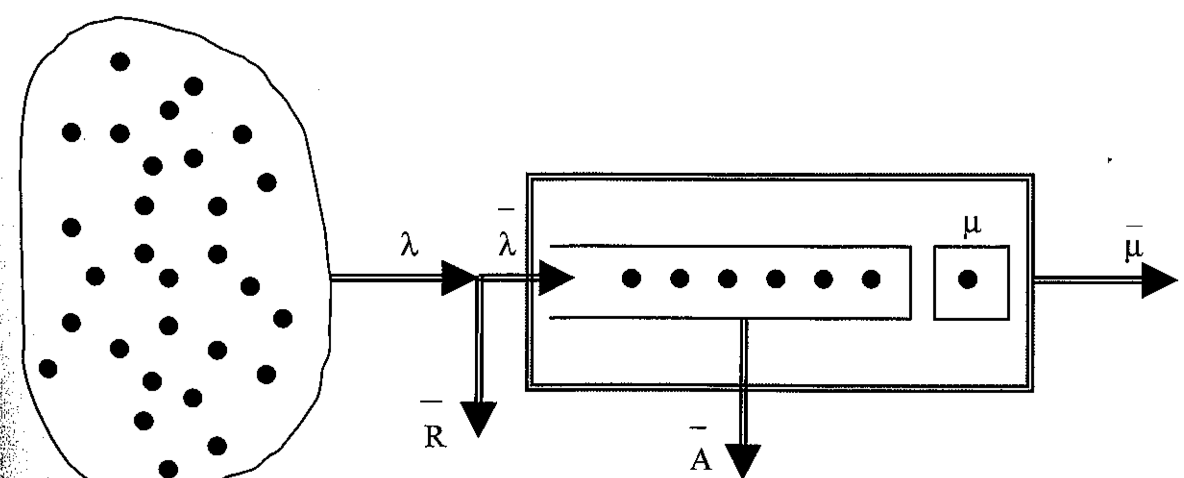
$$\lambda_n = \lambda \cdot p(i/n) \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ \mu & \text{para } n = 1 \\ \mu + A_n & \text{para } n = 2, 3, 4, 5, \ldots. \end{cases}$$

De esta forma, se determinan las probabilidades p(n) en función de los parámetros, luego se calcula la probabilidad de cero, y luego el resto de las variables.

Por supuesto que también se puede dar el caso de impaciencia de ambos tipos conjuntamente con restricciones de capacidad.

En estos casos, la probabilidad de ingresar será la probabilidad combinada de ingresar por impaciencia y la de ingresar por el hecho de que el sistema no esté completo.



Ejemplo 2.9:

Para un sistema de un solo canal se tiene que $\lambda = 2$ cl/h, $\mu = 2$ cl/h y que la tasa de abandonos por hora en función del número de clientes en el sistema es la siguiente:

$$A_n = e^{\frac{n}{2}} \qquad \text{para } n = 2, 3 \text{ y } 4$$

Suponiendo que cuando el estado del sistema es 5 la probabilidad de ingreso es 0 (ya sea por impaciencia o por restricciones de capacidad), calcular las variables características del centro.

Resolución:

$$\lambda_n = \begin{cases} 2 & \text{para } n = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{para } n = 5 \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ 2 & \text{para } n = 1 \\ 2 + e^{\frac{n}{2}} & \text{para } n = 2, 3, 4, 5 \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación de estado tendremos:

- Para $n = 1$: $p(1) = \frac{2}{2} \cdot p(0) = 1 \cdot p(0)$
- Para $n = 2$: $p(2) = \frac{2}{2+e} \cdot p(1) = 0{,}4239 \cdot p(0)$
- Para $n = 3$: $p(3) = \frac{2}{2+e^{3/2}} \cdot p(2) = 0{,}1308 \cdot p(0)$
- Para $n = 4$: $p(4) = \frac{2}{2+e^{2}} \cdot p(3) = 0{,}0279 \cdot p(0)$
- Para $n = 5$: $p(5) = \frac{2}{2+e^{2,5}} \cdot p(4) = 0{,}0039 \cdot p(0)$

La suma de todas las probabilidades es igual a 1:

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 1$$

Entonces,

$$p(0) = \frac{1}{1 + 1 + 0{,}4239 + 0{,}1308 + 0{,}0279 + 0{,}0039} = 0{,}3866$$

por lo que:

$p(1) = 0{,}3866$

$p(2) = 0{,}1639$

$p(3) = 0{,}0506$

$p(4) = 0{,}0108$

$p(5) = 0{,}0015$

Los valores de las variables características serán:

$$L = 0 \cdot p(0) + 1 \cdot p(1) + 2 \cdot p(2) + 3 \cdot p(3) + 4 \cdot p(4) + 5 \cdot p(5) = 0{,}92 \text{ cl}$$

$$L_C = 0 \cdot p(1) + 1 \cdot p(2) + 2 \cdot p(3) + 3 \cdot p(4) + 4 \cdot p(5) = 0{,}30 \text{ cl}$$

$$H = 1 \cdot p(1) + 1 \cdot p(2) + 1 \cdot p(3) + 1 \cdot p(4) + 1 \cdot p(5) = 0{,}62 \text{ cl}$$

$$\overline{R} = 2 \cdot p(5) = 0{,}0030 \frac{\text{cl}}{\text{h}} \cong 0 \frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

$$\overline{A} = 0 \cdot p(0) + 0 \cdot p(1) + e^{1} \cdot p(2) + e^{1,5} \cdot p(3) + e^{2} \cdot p(4) + e^{2,5} \cdot p(5) = 0{,}77 \frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

$$\overline{\lambda} = 2 \cdot [1 - p(5)] = 1{,}997 \frac{\text{cl}}{\text{h}} \cong 2 \frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

$$\overline{\mu} = 2 \cdot [p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)] = 1{,}23 \frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

Observamos que $\overline{\lambda} = \overline{\mu} + \overline{A}$

El tiempo promedio de espera en cola de un cliente, aplicable a todo el conjunto de clientes, tanto los que son atendidos como los que abandonan, es:

$$W_C = \frac{L_C}{\overline{\lambda}} = 0{,}15 \text{ h}$$

Por su parte, el porcentaje de clientes atendidos será:

$$PAT = \frac{1{,}23}{2} = 0{,}615$$

El porcentaje de clientes que abandonan es:

$$PAB = \frac{0{,}77}{2} = 0{,}385$$

El tiempo promedio de permanencia de un cliente que sale atendido es:

$$W = W_C + Ts = 0{,}15 + 05 = 0{,}65 \text{ h}$$

Obviamente, el tiempo promedio de permanencia de un cliente que abandona el sistema es $Wc = 0{,}15$ h.

El tiempo promedio de permanencia del conjunto total de clientes puede calcularse como sigue:

$$W_P = 0{,}65 \cdot 0{,}615 + 0{,}15 \cdot 0{,}385 = 0{,}4575\,\text{h}$$

CAPÍTULO 3

SISTEMAS DE VARIOS CANALES EN PARALELO

1. SISTEMA DE VARIOS CANALES, CAPACIDAD INFINITA Y POBLACIÓN INFINITA

HIPÓTESIS

a. El proceso de arribos de clientes al sistema es de tipo Poisson.
b. El proceso de servicio es también de tipo Poisson.
c. El sistema se encuentra en condiciones estables; es decir, ha alcanzado condiciones de equilibrio de sus variables (régimen permanente).
d. Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.
e. Se forma una sola cola de atención y la disciplina de atención es FIFO.
f. Se dispone de varios canales de atención en la unidad de atención, todos ellos con las mismas características (la velocidad de atención promedio, por ejemplo, es la misma en todos ellos). El primer canal que se desocupa comienza a atender al primer usuario que está esperando en la cola.
g. La capacidad del sistema es ilimitada.
h. Los clientes que llegan al sistema no presentan el fenómeno de impaciencia.
i. La población de clientes potenciales del sistema es infinita

PARÁMETROS

- λ: Número promedio de clientes que arriban al sistema por unidad de tiempo (tasa promedio de arribos). En lugar de este parámetro se puede dar, como dato, su inversa (Intervalo promedio entre arribos de clientes)

  $$\left(T_a = \frac{1}{\lambda}\right)$$

- μ: Número promedio de clientes que puede atender un canal por unidad de tiempo (velocidad promedio de atención). En lugar de este parámetro se puede dar, como dato, su inversa (Duración promedio de un servicio)

  $$\left(T_s = \frac{1}{\mu}\right)$$

- M: Cantidad de canales dispuestos en paralelo.

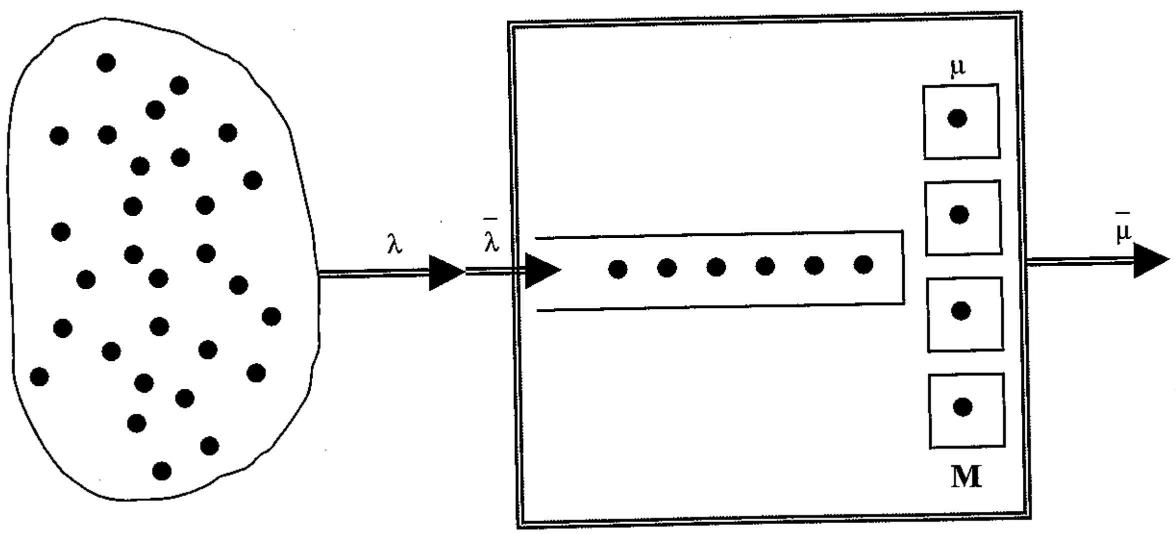
VARIABLES:

- p(n): Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado "n".
- L: Longitud promedio del sistema (número esperado de clientes dentro del sistema).
- L_C: Longitud promedio de la cola (número esperado de clientes esperando ser atendidos).
- $\bar{\lambda}$: Tasa promedio de ingreso de clientes al sistema.
- $\bar{\mu}$: Tasa promedio de egreso de clientes del sistema.
- W_C: Tiempo promedio de espera en cola de un cliente.
- W: Tiempo promedio de permanencia en el sistema de un cliente.
- $\omega_C(t)$: Probabilidad de que un cliente tenga que esperar un tiempo superior a "t" en la cola
- $\omega(t)$: Probabilidad de que un cliente tenga que permanecer un tiempo superior a "t" en el sistema.

NOTACIÓN KENDALL

P/P/M

REPRESENTACIÓN GRÁFICA



MODELIZACIÓN

Determinación de p(n)

Como siempre, para el cálculo de los valores de las probabilidades asociadas a los diferentes estados que puede adoptar el sistema, se parte de la ecuación de estado de régimen permanente, y se procede a reemplazar los valores de λ_n y μ_n para cada "n".

Recordemos que λ_n (tasa de ingreso para un estado "n" determinado) es igual a la tasa promedio de arribos λ multiplicada por la probabilidad de ingresar al sistema cuando el estado es "n", es decir:

$$\lambda_n = \lambda \cdot p(i/n)$$

Dado que no hay impaciencia ni restricciones de capacidad en el sistema, la probabilidad de ingresar es 1 para cualquier "n", por lo que la tasa de arribos promedio λ_n es siempre igual a la tasa de arribos promedio.λ.

Por su parte, la tasa de egresos μ_n es cero cuando el sistema está vacío (n = 0). Cuando hay un cliente en el sistema, hay un canal ocupado y por consiguiente la tasa esperada de egresos es "μ". Cuando hay dos clientes, tendremos dos canales ocupados, por lo que la tasa esperada de egresos será de 2μ. Esto ocurre hasta que "n" es igual a "M". Es decir para $n \leq M$ tendremos que la tasa esperada de egreso será "nμ". Para n > M, dado que hay "M" canales trabajando, la tasa esperada de egresos será Mμ. En resumen:

$$\lambda_n = \lambda \qquad \text{para todo n.}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ n \cdot \mu & \text{para } 1 \leq n < M \\ M \cdot \mu & \text{para } n \geq M \end{cases}$$

Reemplazando, en la ecuación de estado de régimen permanente

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p(n-1)}$$

tendremos que

- Para n = 1: $p(1) = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p(0) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(1) = \rho \cdot p(0)$
- Para n = 2: $p(2) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot p(1) = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot p(0) \cdot \frac{\lambda}{\mu} \quad \Rightarrow \quad p(2) = \frac{\rho^2}{2} \cdot p(0)$
- Para n = 3: $p(3) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot p(2) = \frac{\lambda}{3\mu} \cdot p(0) \cdot \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \quad \Rightarrow \quad p(3) = \frac{\rho^3}{6} \cdot p(0)$
- Para n = 4: $p(4) = \frac{\lambda_3}{\mu_4} \cdot p(3) = \frac{\lambda}{4\mu} \cdot p(0) \cdot \frac{\lambda^3}{6\mu^3} \quad \Rightarrow \quad p(4) = \frac{\rho^4}{24} \cdot p(0)$

....

y en general: $$\boxed{p(n)=\frac{\rho^n}{n!}\cdot p(0)} \quad \text{para } n<M \qquad (1)$$

Siguiendo los reemplazos

- Para $n = M$: $p(M)=\frac{\rho^M}{M!}\cdot p(0)$
- Para $n = M+1$: $p(M+1)=\frac{\rho^{M+1}}{M!\cdot M}\cdot p(0)$
- Para $n = M+2$: $p(M+2)=\frac{\rho^{M+2}}{M!\cdot M^2}\cdot p(0)$
- Para $n = M+3$: $p(M+3)=\frac{\rho^{M+3}}{M!\cdot M^3}\cdot p(0)$

....

y, en general: $p(n)=\frac{\rho^n}{M!\cdot M^{(n-M)}}\cdot p(0)$

es decir: $$\boxed{p(n)=\left(\frac{\rho}{M}\right)^n\frac{M^M}{M!}\cdot p(0)} \quad \text{para } n\geq M \qquad (2)$$

Ahora, para hallar el valor de p(0), se tiene en cuenta que

$$\sum_0^\infty p(n)=1$$

Entonces:

$$\sum_0^{M-1} p(n)+\sum_M^\infty p(n)=1$$

La expresión de p(n) en la primera sumatoria es (1), mientras la de la segunda sumatoria es (2).

$$\sum_0^{M-1}\frac{\rho^n}{n!}\cdot p(0)+\sum_M^\infty\left(\frac{\rho}{M}\right)^n\cdot\frac{M^M}{M!}\cdot p(0)=1$$

y, por lo tanto:

$$p(0)=\frac{1}{\sum_0^{M-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{M^M}{M!}\cdot\sum_M^\infty\left(\frac{\rho}{M}\right)^n} \qquad (3)$$

La primera serie del denominador es convergente, ya que se trata de una serie finita. Como p(0) es un valor acotado entre 0 y 1, la serie geométrica $\sum_M^\infty\left(\frac{\rho}{M}\right)^n$ debe ser convergente, por lo que se debe cumplir que:

$$\boxed{\frac{\rho}{M}<1} \qquad (4)$$

Esto significa que, para este sistema, se debe cumplir que $\rho < M$. De otro modo tendríamos un sistema incapaz de satisfacer la demanda de servicios, la cola crecería indefinidamente y no se alcanzaría el estado de equilibrio. En consecuencia, esta relación debe tenerse en consideración cuando se dimensiona un sistema de estas características (sin restricciones de capacidad y sin impaciencia).

Obsérvese también que este caso es un caso más general que incluye a aquél en donde $M = 1$, en donde se debía cumplir que ρ fuera menor que 1.

La segunda sumatoria del denominador de la expresión (3) será:

$$\sum_M^\infty\left(\frac{\rho}{M}\right)^n=\frac{\left(\frac{\rho}{M}\right)^M\cdot\left[\left(\frac{\rho}{M}\right)^\infty-1\right]}{\frac{\rho}{M}-1}=\frac{-\frac{\rho^M}{M^M}}{-\left(1-\frac{\rho}{M}\right)}=\frac{\rho^M}{M^M\cdot\left(1-\frac{\rho}{M}\right)}=$$

$$=\frac{\rho^M}{M^M\frac{(M-\rho)}{M}}=\frac{\rho^M}{M^{M-1}\cdot(M-\rho)}$$

Reemplazando en la expresión (3) de p(0), y simplificando, tendremos:

$$\boxed{p(0)=\frac{1}{\sum_0^{M-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^M}{(M-1)!\cdot(M-\rho)}}} \qquad (5)$$

Por su parte, reemplazando este valor en las expresiones (1) o (2) nos permitirá determinar la probabilidad asociada a cualquier estado que pueda asumir el sistema.

Un valor que, a menudo resulta práctico conocer, es la probabilidad de que un cliente que arribe al sistema tenga que esperar. Esto es la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado "n" mayor o igual a "M" cuando arriba el cliente, es decir $p(n \geq M)$.

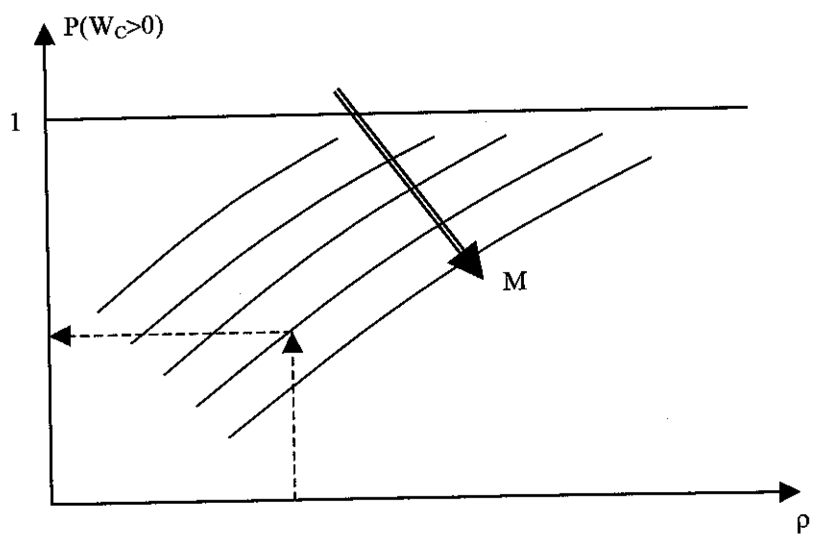
$$p(n\geq M)=\sum_M^\infty p(n)=\sum_M^\infty\left(\frac{\rho}{M}\right)^n\cdot\frac{M^M}{M!}\cdot p(0)$$

que, como hemos visto:

$$p(n \geq M) = \sum_{M}^{\infty} p(n) = \frac{\rho^M}{(M-1)! \cdot (M-\rho)} \cdot p(0) \qquad \textbf{(6)}$$

Existen ábacos y tablas para calcular el valor de la probabilidad de esperar. En los ábacos tenemos en ordenadas $p(n \geq M) = p(W_C > 0)$, en abcisas el factor de tráfico ρ, y curvas para los distintos valores de "M".

En consecuencia, se ingresa con "ρ" y se traza una vertical hasta intersecar la curva "M" correspondiente. Luego se traza una horizontal y se lee el valor buscado en ordenadas.



Determinación de L:

La longitud del sistema es una variable aleatoria cuya media (L) es el valor esperado de que en el sistema haya "n" clientes. Es decir:

$$L = \sum_{0}^{\infty} n.p(n) = \sum_{0}^{M-1} n \cdot \frac{\rho^n}{n!} \cdot p(0) + \sum_{M}^{\infty} n \cdot \frac{M^M}{M!} \cdot \left(\frac{\rho}{M}\right)^n \cdot p(0)$$

Reemplazando el valor de p(0) y resolviendo la serie geométrica (de modo similar al que se planteó para el caso de un solo canal), se llega a la siguiente expresión de L en función de los parámetros del problema:

$$\boxed{L = \frac{\lambda \cdot \mu \cdot \rho^M}{(M-1)! \cdot (M\mu - \lambda)^2} \cdot p(0) + \rho} \qquad (7)$$

Determinación de H y análisis del régimen permanente:

H es el número promedio de canales ocupados. Expresado en función de las probabilidades de estados tendremos que:

$$H = \sum_{0}^{M} n \cdot p(n) + \sum_{M+1}^{\infty} M \cdot p(n)$$

La tasa promedio de ingreso de clientes al sistema $\overline{\lambda}$, está dada por la expresión

$$\overline{\lambda} = \sum_{0}^{\infty} \lambda_n \cdot p(n)$$

pero, como para este problema tenemos que

$$\lambda_n = \lambda \qquad \text{para todo n}$$

tendremos que:

$$\overline{\lambda} = \lambda$$

Por su parte, la tasa promedio de egreso de clientes del sistema $\overline{\mu}$, está dada por la expresión

$$\overline{\mu} = \sum_{0}^{\infty} \mu_n \cdot p(n)$$

Dado que

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ n \cdot \mu & \text{para } 0 \leq n \leq M \\ M \cdot \mu & \text{para } n > M \end{cases}$$

tendremos que

$$\overline{\mu} = \sum_{1}^{M-1} n \cdot \mu \cdot p(n) + \sum_{M}^{\infty} M \cdot \mu \cdot p(n) =$$

$$= \mu \cdot \left[\sum_{1}^{M-1} n \cdot p(n) + \sum_{M}^{\infty} M \cdot p(n) \right] = \mu \cdot H$$

Igualando $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$

será

$$\lambda = \mu \cdot H$$

$$\boxed{H = \rho} \qquad \textbf{(8)}$$

El porcentaje de actividad de cada canal será

$$PA = \frac{H}{M} = \frac{\rho}{M}$$

Determinación de L_C:

La longitud de la cola es una variable aleatoria cuya media es la esperanza matemática de que haya n-M clientes en cola.

$$L_C = \sum_{M}^{\infty} (n - M) \cdot p(n)$$

Resolviendo las series geométricas y operando se llega a que:

$$\boxed{L_C = \frac{\lambda \cdot \mu \cdot \rho^M}{(M-1)! \cdot (M\mu - \lambda)^2} \cdot p(0)} \qquad \textbf{(9)}$$

Determinación de W_C

El tiempo medio promedio de espera en cola de un cliente está dado por la relación entre la longitud promedio de la cola (L_C) y el flujo de clientes que circula por la cola $\bar{\lambda}$ (o $\bar{\mu}$). Como ya hemos mencionado, ésta es una expresión universal aplicable a una cola simple:

$$W_C = \frac{L_C}{\bar{\lambda}}$$

Como, para este sistema, la tasa de arribo promedio λ coincide con la tasa de ingreso promedio $\bar{\lambda}$, tendremos:

$$\boxed{W_C = \frac{L_C}{\lambda}}$$

Determinación de W

El tiempo promedio de permanencia en el sistema es igual al tiempo promedio de espera en cola más el tiempo de promedio de atención:

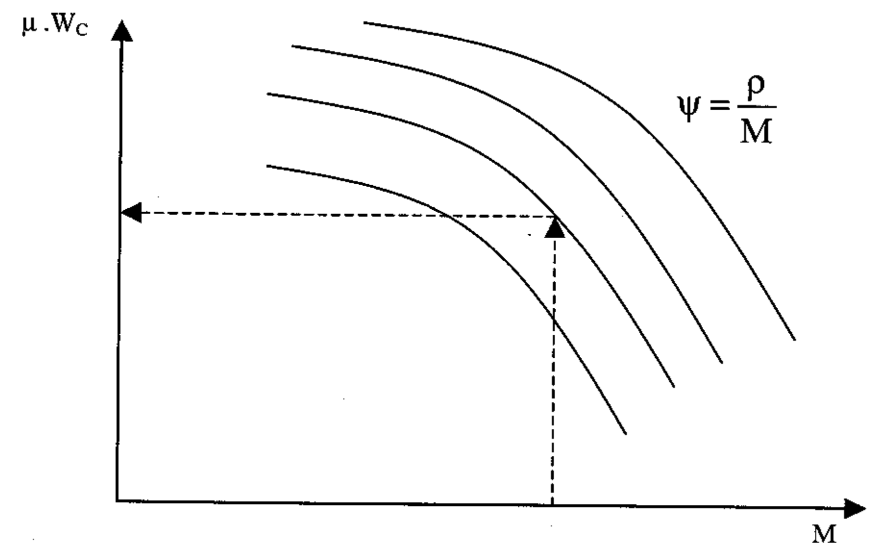
$$W = W_C + T_S$$

que, por supuesto, también se puede calcular aplicando la expresión de Little:

$$\boxed{W = \frac{L}{\bar{\lambda}} = \frac{L}{\lambda}}$$

Utilización de ábacos para determinar los valores de las variables

Los valores de variables se pueden hallar gráficamente mediante la utilización de ábacos a partir de tres parámetros. Uno de los más utilizados es el siguiente:



Típicamente, los parámetros son "M" y "ρ". En tal caso se calcula, en primer lugar, la relación entre "ρ" y "M". A este cociente lo llamaremos "ψ".

Se ingresa luego con el valor de "M" en abcisas, trazando una vertical hasta intersecar a la curva ψ correspondiente. Si es necesario, se debe interpolar.

Luego se traza una horizontal hasta el eje de las ordenadas, en donde se lee el producto $\mu \cdot W_C$. Dividiendo este valor por el parámetro μ se obtiene el tiempo de espera promedio en cola de un cliente W_C.

Con este valor, se puede hallar rápidamente el resto de las variables, entre ellas la longitud de cola promedio

$$L_C = W_C \cdot \lambda$$

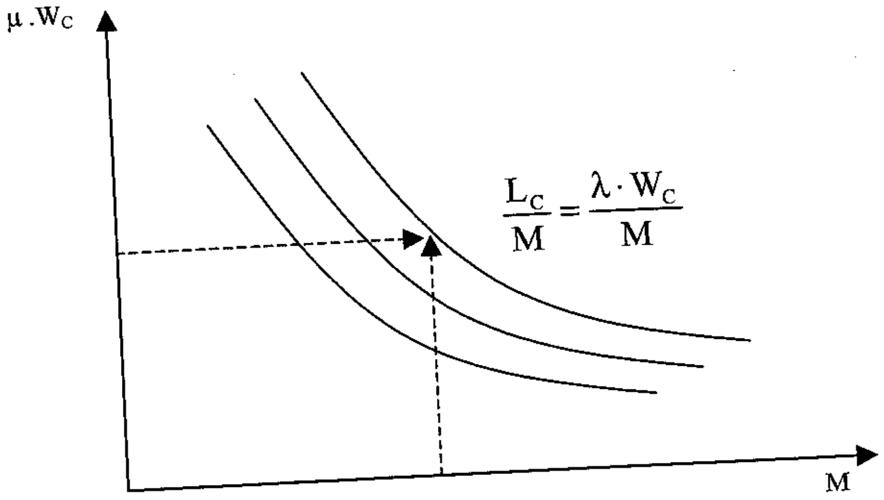
la longitud promedio del sistema

$$L = L_C + H = L_C + \rho$$

y el tiempo de espera promedio en el sistema de un cliente

$$W = W_C + \frac{1}{\mu}$$

El otro ábaco habitual tiene los mismo ejes, pero las curvas dan la relación entre la longitud promedio de la cola (L_C) y el número de canales (M). Este gráfico se utiliza normalmente cuando se intercambian variables por parámetros (por ejemplo, si el tiempo de espera promedio en cola de un cliente "W_C" fuera dato y se quisiera determinar el valor de la tasa promedio de arribos al sistema "λ").



<u>Determinación de $\omega_C(t)$:</u>

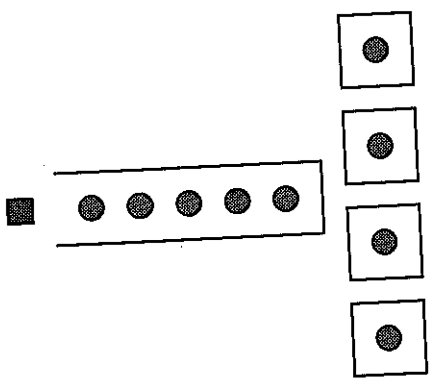
Llamemos:

- $\omega_C(t)$ a probabilidad de que un cliente tenga que esperar en la cola un tiempo superior a "t", o sea $\omega_C(t) = p(W_C > t)$.
- $\varphi(W_C)$ a la función densidad de probabilidad de esperar en cola un tiempo comprendido entre W_C y dW_C+W_C.

La función $\varphi_C(W_C)$ será la sumatoria para todos los estados (n = M, M+1, M+2, M+3, M+4…) de una probabilidad condicional formada por tres probabilidades:

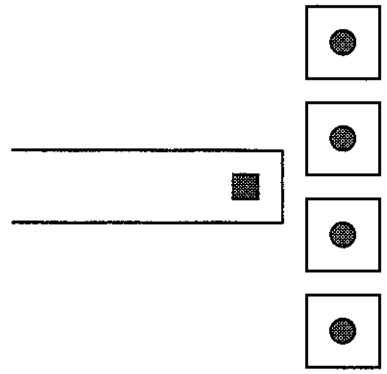
1) Probabilidad de que cuando arriba el cliente el sistema se encuentre en el estado "n":

$$p(n) = \frac{\rho^n}{M! \cdot M^{n-M}} \cdot p(0) \qquad (\text{para } n \geq M)$$



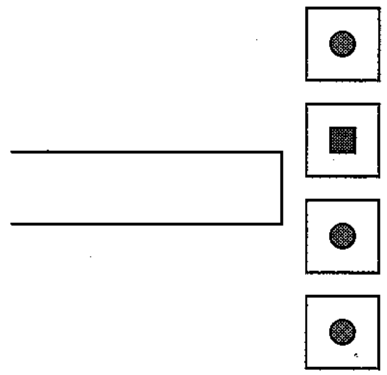
2) Probabilidad de que en el tiempo W_C se atiendan "n-M" clientes:

$$p(n-M, W_C) = \frac{(M\mu \cdot W_C)^{n-M} \cdot e^{-M \cdot \mu \cdot W_C}}{(n-M)!}$$



3) Probabilidad de que en el intervalo dW_C se realice un servicio:

$$p(\text{servicio}) = M\mu \cdot dW$$



Luego:

$$\varphi(W_C) = \sum_M^{\infty} \frac{\rho^n}{M! \cdot M^{n-M}} p(0) \cdot \frac{(M\mu \cdot W_C)^{n-M} \cdot e^{-M\mu . W_C}}{(n-M)!} \cdot M\mu \, dW_C$$

$$\varphi(W_C) = \frac{\left(M\mu \cdot dW_C \cdot e^{-M\mu . W_C} \cdot p(0)\right)}{M!} \cdot \sum_M^{\infty} \frac{(M\mu \cdot dW_C)^{n-M}}{(n-M)! \cdot M^{n-M}} \cdot \rho^n \cdot \rho^{-M} \cdot \rho^M =$$

$$= \frac{\mu . dW_C \cdot e^{-M\mu . W_C} \cdot p(0) \cdot \rho^M}{(M-1)!} \cdot \sum_M^{\infty} \frac{(\lambda \cdot W_C)^{n-M}}{(n-M)!}$$

pero, como $\dfrac{(\lambda.W_C)^{n-M}\cdot e^{-\lambda.W_C}}{(n-M)!}$ es la probabilidad de que se produzcan "n-M" arribos en el tiempo W_C, tendremos que:

$$\sum_{M}^{\infty}\frac{(\lambda\cdot W_C)^{n-M}\cdot e^{-\lambda.W_C}}{(n-M)!}=1$$

por lo que

$$\sum_{M}^{\infty}\frac{(\lambda\cdot W_C)^{n-M}}{(n-M)!}=e^{\lambda\cdot W_C}=e^{\mu\cdot\rho\cdot W_C}$$

Luego, reemplazando en la expresión de $\varphi(W_C)$:

$$\varphi(W_C)=\frac{p(0)\cdot\mu\cdot dW_C\cdot\rho^M}{(M-1)!}\cdot e^{-M\mu.W_C}\cdot e^{\mu.\rho.W_C}=\frac{p(0)\cdot\mu\cdot dW_C\cdot\rho^M}{(M-1)!}\cdot e^{-W_C\cdot\mu\cdot(M-\rho)}$$

En consecuencia:

$$\varpi_C(t)=p(W_C>t)=\int_t^{\infty}\varphi(W_C)=\int_t^{\infty}\frac{p(0)\cdot\mu\cdot dW_C\cdot\rho^M}{(M-1)!}\cdot e^{-W_C\cdot\mu\cdot(M-\rho)}$$

$$=\frac{p(0)\cdot\mu\cdot\rho^M}{(M-1)!}\int_t^{\infty}e^{-W_C\cdot\mu\cdot(M-\rho)}\cdot dW_C=\frac{p(0)\cdot\mu\cdot\rho^M}{(M-1)!}\cdot\left[\frac{e^{-t\cdot\mu\cdot(M-\rho)}}{\mu\cdot(M-\rho)}\right]$$

Es decir,

$$\boxed{\varpi_C(t)=p(W_C>t)=\frac{p(0)\cdot\rho^M\cdot e^{-\mu(M-\rho).t}}{(M-1)!\cdot(M-\rho)}}$$

Particularmente, la probabilidad de que un cliente que arriba al sistema tenga que esperar es:

$$\varpi_C(0)=p(W_C>0)=p(0)\cdot\frac{\rho^M}{(M-1)!\cdot(M-\rho)}$$

Determinación de $\omega(t)$:

Llamando:

- $\omega(t)$ a probabilidad de que un cliente tenga que permanecer en el sistema un tiempo superior a "t", o sea $\omega(t)=p(W>t)$.

Procediendo de manera similar a la vista en el caso anterior, se arriba a la siguiente expresión:

$$\boxed{\varpi(t)=p(W>t)=e^{-\mu\cdot t}\cdot\left[\frac{1+(M\rho)^M\cdot p(0)\cdot\left[1-e^{-\mu\cdot(M-1-M\cdot\rho)\cdot t}\right]}{M!\cdot(1-\rho)\cdot(M-1-M\cdot\rho)}\right]}$$

ANÁLISIS ECONÓMICO:

En los sistemas de colas tipo P/P/M, generalmente la variable de decisión es el número de canales que se debería disponer a los efectos de minimizar el costo total operativo del sistema. Llamando:

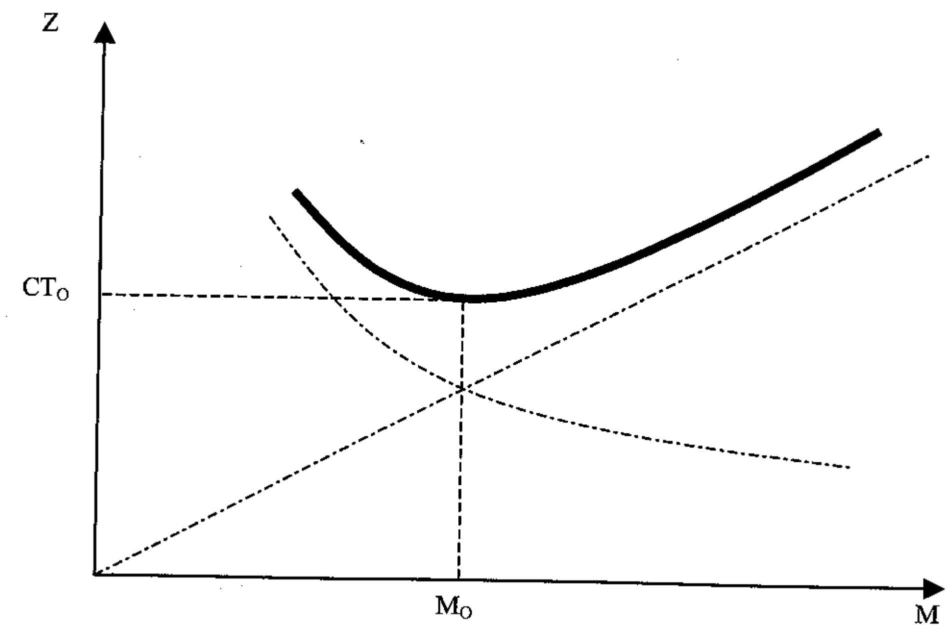
- c_e: Costo derivado de mantener una unidad en el sistema en la unidad de tiempo $\left(\dfrac{\$}{t\cdot cl}\right)$
- c_C: Costo por unidad de tiempo de cada canal $\left(\dfrac{\$}{canal\cdot t}\right)$

tendremos que la función objetivo podría ser:

$$Z=c_e\cdot L+c_C\cdot M \quad\rightarrow\quad Min$$

La primera componente del funcional es decreciente con respecto a M, mientras que la segunda es creciente, por lo que Z tiene un solo mínimo.

Gráficamente:



Dado que la variable de decisión M es discreta, para resolver el problema se va iterando para distintos valores de M. Se comienza con un valor de $M > \rho$. Para ese valor de M se calcula primero la longitud promedio del sistema (L) y el valor de Z.

Posteriormente, se repite para M+1. Si el nuevo valor de Z así calculado disminuye, se prosigue iterando. El proceso se continúa hasta que se observa que la función Z de costo cambia de sentido y comienza a crecer, en cuyo caso se determina el valor óptimo de M.

En otros casos podría ocurrir que el costo c_e esté asociado únicamente a la espera en cola. Si así fuera, la función objetivo debería formularse como:

$$Z = c_e \cdot L_C + c_C \cdot M \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

En los dos ejemplos formulados hemos supuesto que el costo del canal es un costo indirecto. Es decir, se incurre en él tanto cuando el canal está activo como cuando no lo está. Podría ocurrir, por cierto, que el canal genere costo solamente si está activo. En tal caso el funcional podría plantearse como:

$$Z = c_e \cdot L + c_D \cdot M \cdot \frac{H}{M} = c_e \cdot L + c_D \cdot H \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

en donde c_D es el costo por unidad de tiempo de canal activo.

También podría ocurrir que el canal tenga un costo directo (c_C) y un costo indirecto (c_D):

$$Z = c_e \cdot L + c_C \cdot M + c_D \cdot H \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

En otras ocasiones la variable de decisión es la velocidad promedio de atención. Si así fuera, la formulación típica de la función objetivo de un problema P/P/M sería del tipo:

$$Z = c_e \cdot L + c_V \cdot M \cdot \mu \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

en donde c_V es el costo por unidad de tiempo y por unidad de velocidad.

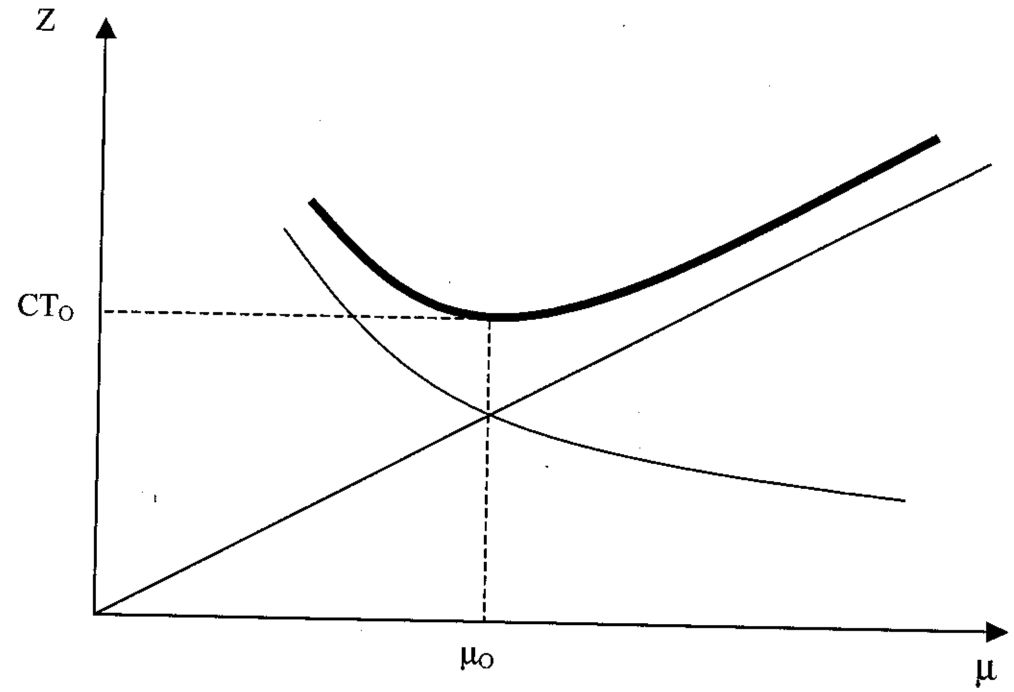
E Esta es una función continua que se podría resolver derivando Z con respecto de μ e igualando a cero. Si la derivada segunda es positiva se habrá encontrado el mínimo.

Sin embargo, como la función es muy compleja, se podría resolver iterando sucesivamente para distintos valores de μ hasta observar que la función cambia el sentido y comienza a crecer.

En la próxima página puede observarse el gráfico correspondiente.

Esta es una función continua que se podría resolver derivando Z con respecto de μ e igualando a cero. Si la derivada segunda es positiva se habrá encontrado el mínimo.

Sin embargo, como la función es muy compleja, se podría resolver iterando sucesivamente para distintos valores de μ hasta observar que la función cambia el sentido y comienza a crecer.



EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 3.1:

A un sistema P/P/4, sin impaciencia, arriba un cliente cada 5 minutos, en promedio. La duración media del servicio es de 10 minutos. Determinar:

a. El número mínimo de canales necesarios para que el sistema pueda funcionar.
b. Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema no tenga que esperar para recibir el servicio.
c. Porcentaje de ocupación del canal.
d. Probabilidad de que haya menos de dos personas en el sistema.
e. Número promedio de clientes esperando ser atendidos.
f. Número promedio de clientes en el sistema.
g. Ingreso de caja esperado, si cada servicio se cobra $50.
h. Tiempo promedio de permanencia de un cliente dentro del sistema.

Resolución:

En primer lugar se calculan los parámetros. En este caso se pasan todas las unidades a hora para trabajar con valores más cómodos.

$$\lambda = \frac{1}{5}\frac{\text{cl}}{\text{min}} \cdot 60\frac{\text{min}}{\text{h}} = 12\frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

$$\mu = \frac{1}{10}\frac{\text{cl}}{\text{min}} \cdot 60\frac{\text{min}}{\text{h}} = 6\frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{6} = 2$$

a) El número mínimo de canales es 3 ya que H debe ser mayor que ρ.

b) La probabilidad de no esperar es la probabilidad de que "n" sea menor o igual que 3.

De tablas (o ábacos) se obtiene la probabilidad de que un cliente tenga que esperar:

$$p(n \geq 4) = 0{,}1739$$

Luego la probabilidad de no esperar es 0,8261

c) El porcentaje de ocupación del canal es ρ / M, es decir 2 / 4 = 0.5 = 50%.

$$\varphi = \frac{\rho}{M} = \frac{2}{4} = 0.50$$

d) La probabilidad de que haya menos de dos personas en el sistema es la probabilidad de cero más la probabilidad de uno:

$$p(0) = \frac{1}{\sum_{0}^{M-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^M}{(M-1)! \cdot (M-\rho)}}$$

$$\therefore \quad p(0) = \frac{1}{\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{(4-1)! \cdot (4-2)}} = 0{,}1304$$

$$y \qquad p(n) = p(0) \cdot \frac{\rho^n}{n!} \quad \Rightarrow \quad p(1) = p(0) \cdot \frac{2^1}{1!} = 0{,}2608$$

Por lo tanto, la probabilidad solicitada es 0,3912

e) De ábacos se obtiene el valor $\mu . W_C = 0{,}0870$. En consecuencia, $W_C = 0{,}0145$

$$L_C = \lambda \cdot W_C = 12 \cdot 0{,}0145 = 0{,}174 \text{ cl}$$

f) La longitud promedio del sistema:

$$L = L_C + \rho = 0{,}1740 + 2 = 2{,}1740 \text{ cl}$$

g) El ingreso esperado será:

$$\text{Ingreso} = u \cdot \overline{\lambda} = 50 \cdot 12 = 600 \frac{\$}{h}$$

h) El tiempo promedio de permanencia dentro del sistema es:

$$W = W_C + T_S = 0{,}0145 + 0{,}1667 = 0{,}1812 \text{ h}$$

Ejemplo 3.2:

El sector de expedición de mercaderías de una empresa tiene plataformas de carga. Al sector arriban en promedio 5 camiones por hora y cada plataforma puede cargar a razón de 2 camiones por hora. Se estima que el lucro cesante por cada camión que se encuentra esperando ser atendido es de 50$ por hora. Cuando el camión está siendo cargado, se considera que está operativo y por lo tanto no incurre en costo. Por su parte, el costo operativo de cada plataforma es de $30. Determinar el número óptimo de plataformas de carga que debería tener el sector.

Resolución:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{2} = 2{,}50$$

Como se debe cumplir que ρ < M, habrá que disponer como mínimo de 3 plataformas.

Para calcular el número óptimo, se plantea el funcional:

$$Z = 50 \cdot L_C + 30 \cdot M \quad \Rightarrow \quad \text{Min}$$

y se calcula su valor para M = 3, 4, … hasta observar que el valor del funcional aumenta. Cuando ello ocurre, el último valor de "n" es el óptimo, debido a que existe un único mínimo (ya que Z tiene una componente creciente y otro creciente). Procediendo, se deduce que el número óptimo de plataformas es igual a cuatro.

M	$\psi = \frac{\rho}{M}$	$\mu . W_C$	W_C	L_C	Z
3	0,833	1,4	0,70	3,50	265
4	0,625	0,21	0,105	0,525	146
5	0,5	0,052	0,026	0,13	156

Ejemplo 3.3:

Una empresa de alquiler de automóviles tiene tres ventanillas para la atención de los clientes. En una franja horaria determinada, al sistema arriban en promedio, conforme un proceso Poisson, 30 clientes por hora. Con la disposición actual, los clientes se reparten proporcionalmente frente a cada una de las tres ventanillas en donde esperan su turno para ser atendidos (se supone que una vez que forman la cola frente a una ventanilla no se pasan a otra). El tiempo promedio de atención de los clientes (distribución exponencial) es de 5 minutos cada uno.

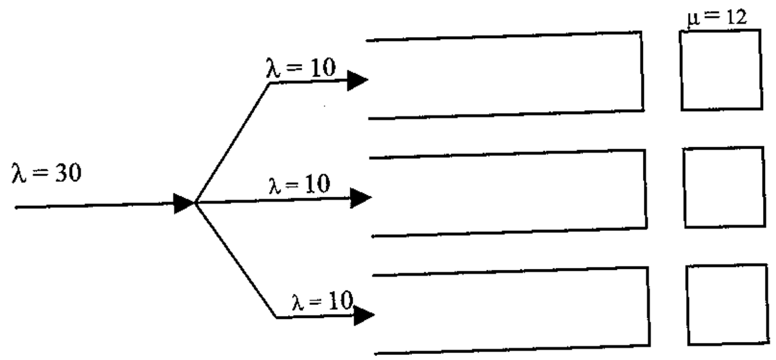
Se está estudiando la posibilidad de disponer de un sistema de cola única para las tres ventanillas. Determinar si conviene hacer el cambio.

Resolución:

La disposición actual consiste en tres subsistemas P/P/1 dispuestos en paralelo, siendo la tasa de arribos para cada uno de ellos igual a un tercio de la tasa de arribos de clientes al sistema.

$\lambda = 10$ cl/hora

$\mu = 12$ cl/hora



En consecuencia, el factor de tránsito para cada subsistema es:

$$\rho = \frac{10}{12} = 0{,}8333$$

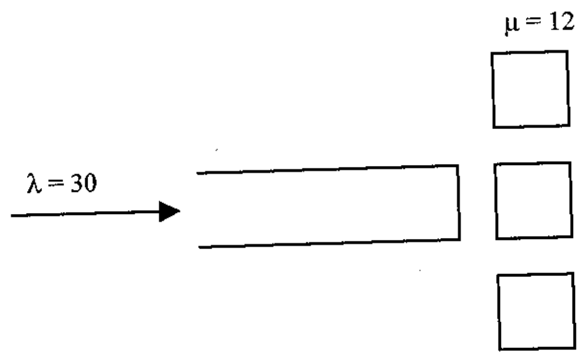
La longitud de cola será:

$$L_C = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{0{,}8333}{1-0{,}8333} - 0{,}8333 = 4{,}1667 \text{ cl}$$

y, por lo tanto, el tiempo de espera promedio de un cliente en cola es:

$$W_C = \frac{L_C}{\lambda} = \frac{4{,}1667}{10} = 0{,}4167 \frac{\text{h}}{\text{cl}}$$

Con la nueva disposición, en cambio, el sistema será P/P/3, con una tasa promedio de arribos de 30 clientes por hora y una velocidad promedio de atención de cada canal de 12 clientes por hora.



$$\rho = \frac{30}{12} = 2{,}50 \quad \text{y} \quad \varphi = \frac{2{,}50}{3} = 0{,}8333$$

Entrando en el ábaco, con $M = 3$ y $\psi = 0{,}833$, determinamos que $\mu W_C \approx 1{,}40$, y por lo tanto $W_C \approx 0{,}1167$ h.

Se llega a la conclusión de que esta disposición es mucho más eficiente que la anterior en términos de tiempo de espera de un cliente.

2. SISTEMA DE VARIOS CANALES, CAPACIDAD FINITA Y POBLACIÓN INFINITA

<u>HIPÓTESIS</u>

a. El proceso de arribos de clientes al sistema es de tipo Poisson.
b. El proceso de servicio es también de tipo Poisson.
c. El sistema se encuentra en condiciones estables; es decir, ha alcanzado condiciones de equilibrio de sus variables (régimen permanente).
d. Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.
e. La disciplina de atención es FIFO.
f. Se dispone de varios canales de atención, todos ellos con las mismas características (la velocidad de atención promedio, por ejemplo, es la misma en todos ellos).
g. La capacidad del sistema está limitada a un valor N. Se forma una sola cola de atención.
h. Los clientes que llegan al sistema no presentan impaciencia.
i. La población de clientes potenciales del sistema es infinita

<u>PARÁMETROS</u>

- λ: Número promedio de clientes que arriban al sistema por unidad de tiempo (tasa promedio de arribos). En lugar de este parámetro se puede dar, como dato, su inversa (Intervalo promedio entre arribos de clientes)

$$\left(T_a = \frac{1}{\lambda}\right)$$

- μ: Número promedio de clientes que puede atender un canal por unidad de tiempo (velocidad promedio de atención). En lugar de este parámetro se puede dar, como dato, su inversa (Duración promedio de un servicio)

$$\left(T_s = \frac{1}{\mu}\right)$$

- M: Cantidad de canales dispuestos en paralelo.
- N: Número máximo de clientes que puede residir en el sistema.

<u>VARIABLES</u>:

- p(n): Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado "n".
- L: Longitud promedio del sistema (número esperado de clientes dentro del sistema).
- L_C: Longitud promedio de la cola (número esperado de clientes esperando ser atendidos).
- $\bar{\lambda}$: Tasa promedio de ingreso de clientes al sistema.
- $\bar{\mu}$: Tasa promedio de egreso de clientes del sistema.

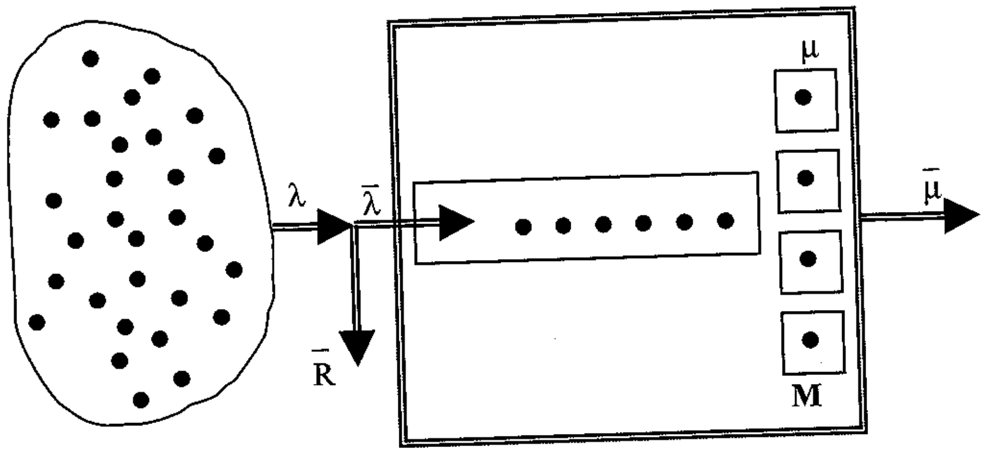
- W_C: Tiempo promedio de espera en cola de un cliente.
- W: Tiempo promedio de permanencia en el sistema de un cliente.
- $\overline{R}$: Tasa promedio de rechazos de clientes.

NOTACIÓN KENDALL

P/P/M/N

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

En la Figura próxima se muestra la representación del sistema, en donde se observa que parte de los clientes que arriban al sistema se retiran sin ser atendidos.



MODELIZACIÓN

Determinación de p(n)

Como siempre, para el cálculo de los valores de las probabilidades asociadas a los diferentes estados que puede adoptar el sistema, se parte de la ecuación de estado de régimen permanente, y se procede a reemplazar los valores de λ_n y μ_n para cada "n".

La tasa de ingresos para un estado "n" determinado λ_n es igual a la tasa promedio de arribos λ multiplicada por la probabilidad de ingresar al sistema cuando el estado es "n", es decir:

$$\lambda_n = \lambda \cdot p(i/n)$$

Dado que hay una restricción de capacidad en el sistema, la probabilidad de ingresar es 1 para cualquier "n", excepto cuando el sistema está completo (para n = N), en donde la probabilidad de ingresar es 0.

Del mismo modo que en el caso anterior de varios canales, la tasa de egresos μ_n es cero cuando el sistema está vacío (n = 0). Cuando hay un cliente en el sistema, hay un canal ocupado y por consiguiente la tasa esperada de egresos es μ. Cuando hay dos clientes, tendremos dos canales ocupados, por lo que la tasa esperada de egresos será de 2·μ. Esto ocurre hasta que "n" es igual a "M". Es decir para n ≤ M tendremos que la tasa esperada de

egreso será "n·μ". Para n > M, dado que hay "M" canales trabajando, la tasa esperada de egresos será M·μ. En resumen:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & para\ n < N \\ 0 & para\ n = N \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & para\ n = 0 \\ n \cdot \mu & para\ 1 \le n < M \\ M \cdot \mu & para\ M \le n \le N \end{cases}$$

Reemplazando, en la ecuación de estado de régimen permanente

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p(n-1)}$$

tendremos que

- Para n = 1: $p(1) = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p(0) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(1) = \rho \cdot p(0)$
- Para n = 2: $p(2) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot p(1) = \frac{\lambda}{2\mu} \cdot p(0) \cdot \frac{\lambda}{\mu} \quad \Rightarrow \quad p(2) = \frac{\rho^2}{2} \cdot p(0)$
- Para n = 3: $p(3) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot p(2) = \frac{\lambda}{3\mu} \cdot p(0) \cdot \frac{\lambda^2}{2\mu^2} \Rightarrow \quad p(3) = \frac{\rho^3}{6} \cdot p(0)$
- Para n = 4: $p(4) = \frac{\lambda_3}{\mu_4} \cdot p(3) = \frac{\lambda}{4\mu} \cdot p(0) \cdot \frac{\lambda^3}{6\mu^3} \Rightarrow \quad p(4) = \frac{\rho^4}{24} \cdot p(0)$

....

y en general: $\boxed{p(n) = \frac{\rho^n}{n!} \cdot p(0)}$ para n < M **(10)**

Siguiendo los reemplazos

- Para n = M: $p(M) = \frac{\rho^M}{M!} \cdot p(0)$
- Para n = M+1: $p(M+1) = \frac{\rho^{M+1}}{M! \cdot M} \cdot p(0)$
- Para n = M+2: $p(M+2) = \frac{\rho^{M+2}}{M! \cdot M^2} \cdot p(0)$

- Para n = M+3: $p(M+3)=\dfrac{\rho^{M+3}}{M!\cdot M^3}\cdot p(0)$

....

y, en general: $p(n)=\dfrac{\rho^n}{M!\cdot M^{(n-M)}}\cdot p(0)$

es decir: $\boxed{p(n)=\left(\dfrac{\rho}{M}\right)^n\cdot\dfrac{M^M}{M!}\cdot p(0)}$ para $M\leq n\leq N$ **(11)**

Ahora, para hallar el valor de p(0), se tiene en cuenta que

$$\sum_0^N p(n)=1$$

Entonces:

$$\sum_0^{M-1}p(n)+\sum_M^N p(n)=1$$

La expresión de p(n) en la primera sumatoria es (10), mientras la de la segunda sumatoria es (11).

$$\sum_0^{M-1}\frac{\rho^n}{n!}\cdot p(0)+\sum_M^N\left(\frac{\rho}{M}\right)^n\cdot\frac{M^M}{M!}\cdot p(0)=1$$

y, por lo tanto:

$$p(0)=\frac{1}{\displaystyle\sum_0^{M-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{M^M}{M!}\cdot\sum_M^N\left(\frac{\rho}{M}\right)^n}\qquad\textbf{(12)}$$

Ambas series del denominador son convergentes, ya que se trata de series finitas. Luego, la relación entre los parámetros puede ser cualquiera. Es decir no es necesario para este sistema que ρ sea menor que M como ocurre cuando no hay restricciones de capacidad.

La segunda sumatoria del denominador de la expresión (12) será:

$$\sum_M^N\left(\frac{\rho}{M}\right)^n=\frac{\left(\frac{\rho}{M}\right)^M\cdot\left[\left(\frac{\rho}{M}\right)^{N-M+1}-1\right]}{\frac{\rho}{M}-1}=\frac{\rho^M\cdot\left[1-\left(\frac{\rho}{M}\right)^{N-M+1}\right]}{M^M\cdot\left(1-\frac{\rho}{M}\right)}$$

Esta expression, multiplicada por $\dfrac{M^M}{M}$, es igual a:

$$\frac{\rho^M\cdot M^M}{M^M\cdot M!}\cdot\frac{\left[1-\left(\frac{\rho}{M}\right)^{N-M+1}\right]}{\frac{(M-\rho)}{M}}=\frac{\rho^M}{(M-1)!}\cdot\left[1-\left(\frac{\rho}{M}\right)^{N-M+1}\right]\cdot\frac{1}{(M-\rho)}$$

Reemplazando en la expresión de p(0), tendremos:

$$\boxed{p(0)=\frac{1}{\displaystyle\sum_0^{M-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^M}{(M-1)!}\cdot\left[1-\left(\frac{\rho}{M}\right)^{N-M+1}\right]\cdot\frac{1}{(M-\rho)}}}\qquad\textbf{(13)}$$

Por su parte, reemplazando este valor en las expresiones (10) y (11) nos permitirá determinar la probabilidad asociada a cualquier estado que pueda asumir el sistema.

La probabilidad de que un cliente que arribe al sistema tenga que esperar es la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado "n" mayor o igual a "M" cuando arriba el cliente, es decir $p(n\geq M)$.

$$p(n\geq M)=\sum_M^N p(n)=\frac{\rho^M}{(M-1)!}\cdot\left[1-\left(\frac{\rho}{M}\right)^{N-M+1}\right]\cdot\frac{1}{(M-\rho)}\cdot p(0)$$

<u>Determinación de L</u>:

La longitud del sistema es una variable aleatoria cuya media (L) es el valor esperado de que en el sistema haya "n" clientes. Es decir:

$$L=\sum_0^N n\cdot p(n)=\sum_0^{M-1}n\cdot\frac{\rho^n}{n!}\cdot p(0)+\sum_M^N n\cdot\frac{M^M}{M!}\cdot\left(\frac{\rho}{M}\right)^n\cdot p(0)$$

Reemplazando el valor de p(0) y resolviendo la serie geométrica, se llega a la siguiente expresión de L en función de los parámetros del problema:

$$\boxed{L=\frac{\frac{\rho}{M}\cdot\rho^M\cdot p(0)}{M!\cdot\left(1-\frac{\rho}{M}\right)^2}\cdot\left[1-\left(\frac{\rho}{M}\right)^{N-M}-(N-M)\cdot\left(\frac{\rho}{M}\right)^{N-M}\cdot\left(1-\frac{\rho}{M}\right)\right]+\rho\cdot\left[1-\left(\frac{\rho}{M}\right)^N\cdot\frac{M^M}{M!}\cdot p(0)\right]}\qquad\textbf{(14)}$$

<u>Determinación de H</u>:

H es el número promedio de canales ocupados. Expresado en función de las probabilidades de estados tendremos que:

$$H=\sum_0^{M-1}n\cdot p(n)+\sum_M^N M\cdot p(n)$$

$$H = \sum_{0}^{M-1} n \cdot \frac{\rho^n}{n!} \cdot p(0) + \sum_{M}^{N} M \cdot \frac{M^M}{M!} \cdot \left(\frac{\rho}{M}\right)^n \cdot p(0)$$

Reemplazando se llega a la expresión:

$$H = \rho \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho}{M}\right)^N \cdot \frac{M^M}{M!} \cdot p(0)\right] \qquad \textbf{(15)}$$

Determinación de L_C:

La longitud de la cola es una variable aleatoria cuya media es la esperanza matemática de que haya n-M clientes en cola.

$$L_C = \sum_{M}^{N} (n - M) \cdot p(n)$$

Resolviendo las series geométricas y operando se llega a que:

$$\boxed{L_C = \frac{\frac{\rho}{M} \cdot \rho^M}{M! \cdot \left(1 - \frac{\rho}{M}\right)^2} \cdot \left[1 - \left(\frac{\rho}{M}\right)^{N-M} - (N-M) \cdot \left(\frac{\rho}{M}\right)^{N-M} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{M}\right)\right] \cdot p(0)} \qquad \textbf{(16)}$$

Análisis del régimen permanente:

La tasa promedio de ingreso de clientes al sistema $\bar{\lambda}$, está dada por la expresión

$$\bar{\lambda} = \sum_{0}^{N} \lambda_n \cdot p(n)$$

pero, como para este problema tenemos que

$$\lambda_n = \lambda \qquad \text{para } n < N$$
$$\lambda_n = 0 \qquad \text{para } n = N$$

tendremos que:

$$\bar{\lambda} = \lambda \cdot [1 - p(N)]$$

Por su parte, la tasa promedio de egreso de clientes del sistema $\bar{\mu}$, está dada por la expresión

$$\bar{\mu} = \sum_{0}^{N} \mu_n \cdot p(n)$$

Dado que

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ n \cdot \mu & \text{para } 0 \le n \le M \\ M \cdot \mu & \text{para } n > M \end{cases}$$

tendremos que

$$\bar{\mu} = \sum_{1}^{M-1} n \cdot \mu \cdot p(n) + \sum_{M}^{N} M \cdot \mu \cdot p(n) =$$
$$= \mu \cdot \left[\sum_{1}^{M-1} n \cdot p(n) + \sum_{M}^{N} M \cdot p(n)\right] = \mu \cdot H$$

Igualando $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$

$$\lambda \cdot [1 - p(N)] = \mu \cdot H$$

$$\boxed{H = \rho \cdot [1 - p(N)]}$$

El porcentaje de actividad de cada canal será

$$PA = \frac{H}{M} = \frac{\rho}{M}$$

El número promedio de clientes rechazados por unidad de tiempo es:

$$\bar{R} = \lambda - \bar{\lambda}$$

o bien:

$$\bar{R} = \lambda \cdot p(N)$$

Determinación de W_C

El tiempo medio promedio de espera en cola de un cliente está dado por la relación entre la longitud promedio de la cola (L_C) y el flujo de clientes que circula por la cola $\bar{\lambda}$ (o $\bar{\mu}$):

$$W_C = \frac{L_C}{\bar{\lambda}}$$

Determinación de W

El tiempo promedio de permanencia en el sistema es igual al tiempo promedio de espèra en cola más el tiempo de promedio de atención:

$$W = W_C + T_S$$

ANÁLISIS ECONÓMICO:

En los sistemas de colas tipo P/P/M/N, la variable de decisión puede ser el número de canales que se debería disponer a los efectos de minimizar el costo total operativo del sistema. Llamando:

- c_e: Costo derivado de mantener una unidad en el sistema en la unidad de tiempo $\left(\frac{\$}{t \cdot cl}\right)$
- c_C: Costo por unidad de tiempo de cada canal $\left(\frac{\$}{canal \cdot t}\right)$

tendremos que la función objetivo podría ser:

$$Z = c_e \cdot L + c_C \cdot M \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

En otros casos, la variable de decisión es el número de lugares de cola que se deben disponer a los efectos de minimizar el costo total como consecuencia de los clientes que no abonan el servicio y el costo de los lugares. Llamando:

- c_L: Costo de cada lugar de cola $\left(\frac{\$}{lugar.t}\right)$
- u: precio de venta de cada servicio $\left(\frac{\$}{cl}\right)$

La función objetivo parea el problema así formulado es:

$$Z = c_L \cdot (N - M) + u \cdot \overline{R} \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

Este mismo problema se pudo haber planteado también como un problema de beneficios a maximizar:

$$Z = u \cdot \overline{\mu} - c_L \cdot (N - M) \quad \rightarrow \quad \text{Max}$$

cuyo resultado óptimo, obviamente, debe ser el mismo.

Finalmente, se podría plantear, con relación a un sistema P/P/M/N, la determinación de la velocidad óptima que debería tener el canal para minimizar las pérdidas por ingresos no percibidos y el costo de proveer una mayor velocidad de atención. Siendo c_s el costo de atención de un canal a una velocidad unitaria, el funcional de un problema así planteado es:

$$Z = c_s \cdot M \cdot \mu + u \cdot \overline{R} \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 3.4:

A un sistema P/P/2/4, sin impaciencia, arriba un cliente cada 5 minutos, en promedio. La duración media del servicio es de 10 minutos. Determinar:

a. Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema no tenga que esperar para recibir el servicio.
b. Porcentaje de ocupación del canal.
c. Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema no pueda ingresar.
d. Tasa promedio de clientes que se retiran sin ser atendidos.
e. Número promedio de clientes esperando ser atendidos.
f. Número promedio de clientes en el sistema.
g. Ingreso de caja esperado, si cada servicio se cobra $50.
h. Tiempo promedio de permanencia de un cliente dentro del sistema.
i. Lucro cesante esperado.

Resolución:

Teniendo en cuenta los valores de los parámetros en unidades referidas a la unidad hora:

$$\lambda = \frac{1}{5}\frac{cl}{min} \cdot 60 \frac{min}{h} = 12 \frac{cl}{h}$$

$$\mu = \frac{1}{10}\frac{cl}{min} \cdot 60 \frac{min}{h} = 6 \frac{cl}{h}$$

el factor de tráfico es:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{12}{6} = 2$$

a) Para calcular el valor de las probabilidades, se pueden utilizar las fórmulas vistas o, como se formula el modelo a continuación, a partir de la ecuación de estado:

Tendremos que:

$\lambda_n = \lambda$ para n = 0, 1, 2 y 3

$\lambda_n = 0$ para n = 4

y que:

$\mu_n = 0$ para n = 0

$\mu_n = \mu$ para n = 1

$\mu_n = 2 \cdot \mu$ para n = 2, 3 y 4

Luego, reemplazando en la ecuación de estado:

$$p(1) = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p(0) = \rho \cdot p(0)$$

$$p(2) = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu} \cdot p(1) = \frac{\rho}{2} \cdot \rho \cdot p(0) = \frac{\rho^2}{2} \cdot p(0)$$

$$p(3)=\frac{\lambda}{2\cdot\mu}\cdot p(2)=\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho^2}{2}\cdot p(0)=\frac{\rho^3}{4}\cdot p(0)$$

$$p(4)=\frac{\lambda}{2\cdot\mu}\cdot p(3)=\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\rho^3}{4}\cdot p(0)=\frac{\rho^4}{8}\cdot p(0)$$

Como la suma de todas las probabilidades es igual a 1, tendremos:

$$p(0)+\rho\cdot p(0)+\frac{\rho^2}{2}\cdot p(0)+\frac{\rho^3}{4}\cdot p(0)+\frac{\rho^4}{8}\cdot p(0)=1$$

$$p(0)=\frac{1}{1+\rho+\frac{\rho^2}{2}+\frac{\rho^3}{4}+\frac{\rho^4}{8}}=\frac{1}{1+2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{4}+\frac{2^4}{8}}=\frac{1}{9}=0{,}1111$$

y, en consecuencia:

$p(1)=0{,}2222$

$p(2)=0{,}2222$

$p(3)=0{,}2222$

$p(4)=0{,}2222$

La probabilidad de no esperar es la suma de probabilidad de 0 más probabilidad de 1:

$p(\text{no esperar})=0{,}1111+0{,}2222=0{,}3333$

b) El porcentaje de ocupación del canal es H / M

$$H=1\cdot p(1)+2\cdot p(2)+2\cdot p(3)+2\cdot p(4)=0{,}2222+2\cdot 0{,}2222+2\cdot 0{,}2222+2\cdot 0{,}2222$$
$$=1{,}5555$$

$$PO=\frac{H}{M}=\frac{1{,}5555}{2}=0.7777$$

c) La probabilidad de que un cliente que arriba al sistema no pueda ingresar es igual a la probabilidad de 4:

$p(4)=0.2222$

d) El número promedio de clientes por unidad de tiempo que se retiran sin ser atendidos (rechazo) es igual a:

$$\overline{R}=\lambda\cdot p(4)=12\cdot 0.2222=2{,}664\frac{cl}{h}$$

e) Longitud promedio de cola:

$$L_C=1\cdot p(3)+2\cdot p(4)=1\cdot 0{,}2222+2\cdot 0{,}2222=0{,}6666\,cl$$

f) Longitud promedio del sistema:

$$L=L_C+H=0{,}6666+1{,}5555=2{,}2221\,cl$$

A este valor también se pudo haber arribado mediante la expresión:

$$L=1\cdot p(1)+2\cdot p(2)+3\cdot p(3)+4\cdot p(4)=2{,}2222\,cl$$

g) Teniendo en cuenta que

$$\overline{\lambda}=\lambda\cdot[1-p(4)]=12\cdot 0.7778=9{,}3336\frac{cl}{h}$$

que, por supuesto, es igual a:

$$\overline{\mu}=\mu\cdot H=6\cdot 1{,}5555=9{,}3336\frac{cl}{h}$$

El ingreso esperado será:

$$\text{Ingreso}=u\cdot\overline{\lambda}=50\cdot 9{,}3336=466{,}68\frac{\$}{h}$$

h) El tiempo promedio de permanencia dentro del sistema es:

$$W=W_C+T_S=\frac{L_C}{\overline{\lambda}}+T_S=\frac{0{,}6666}{9{,}3336}+0{,}1667=0{,}2381\,h$$

i) El lucro cesante esperado es:

$$\text{Lucro cesante}=u\cdot\overline{R}=50\cdot 2{,}664=133{,}20\frac{\$}{h}$$

3. SISTEMA DE VARIOS CANALES, CAPACIDAD INFINITA, CON IMPACIENCIA.

HIPÓTESIS

a. El proceso de arribos de clientes al sistema es de tipo Poisson.

b. El proceso de servicio es también de tipo Poisson.

c. El sistema se encuentra en condiciones estables; es decir, ha alcanzado condiciones de equilibrio de sus variables (régimen permanente).

d. Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.

e. La disciplina de atención es FIFO.

f. Se dispone de varios canales de atención, todos ellos con las mismas características (la velocidad de atención promedio, por ejemplo, es la misma en todos ellos).

g. La capacidad del sistema es ilimitada.

h. La población de clientes potenciales del sistema es infinita.

i. Los clientes que llegan al sistema presentan impaciencia, del tipo que toma la decisión antes de ingresar al sistema, lo que significa que no hay abandonos una vez que el cliente entró al sistema.

j. Supondremos que la expresión de la probabilidad de ingresar al sistema es:

$p(i/n) = 1$ para $n < M$

$p(i/n) = e^{-\frac{\alpha\cdot(n-M+1)}{\mu}}$ para $n \geq M$

en donde α es un coeficiente de impaciencia. Llamando:

$e^{-\frac{\alpha\cdot(n-M+1)}{\mu}} = \gamma^{2\cdot(n-M+1)}$, tendremos que $\gamma^2 = e^{-\frac{\alpha}{\mu}}$ es la probabilidad de que un cliente que arriba al sistema ingrese en él cuando el estado del mismo es $n = M$.

PARÁMETROS

- λ: Número promedio de clientes que arriban al sistema por unidad de tiempo (tasa promedio de arribos). En lugar de este parámetro se puede dar, como dato, su inversa (intervalo promedio entre arribos de clientes)

$$\left(T_a = \frac{1}{\lambda}\right)$$

- μ: Número promedio de clientes que puede atender un canal por unidad de tiempo (velocidad promedio de atención). En lugar de este parámetro se puede dar, como dato, su inversa (duración promedio de un servicio)

$$\left(T_s = \frac{1}{\mu}\right)$$

- M: Cantidad de canales dispuestos en paralelo.
- α: Coeficiente de impaciencia promedio de la población.

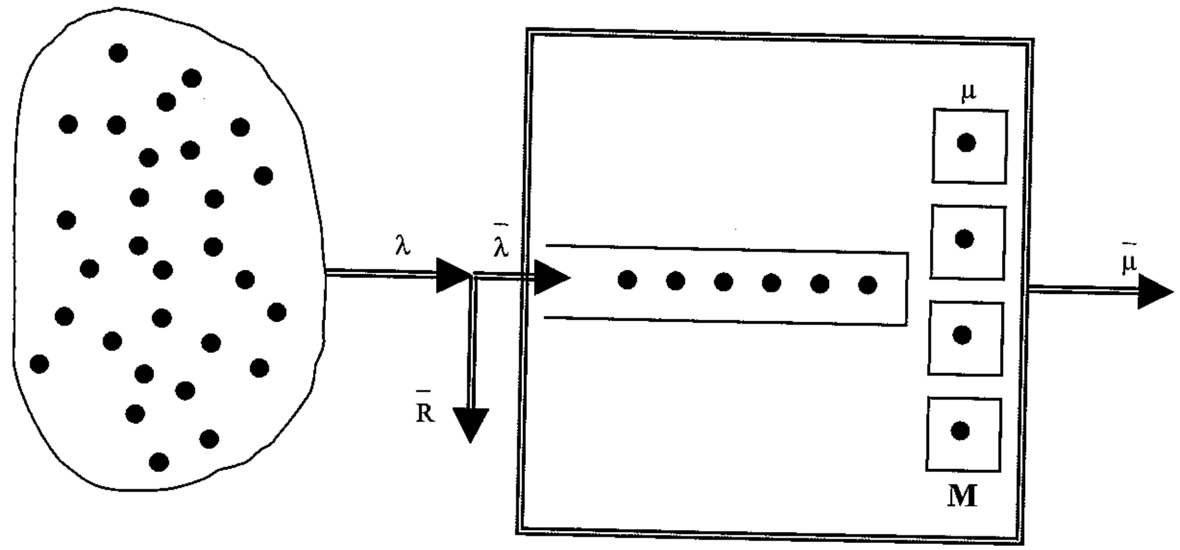
VARIABLES:

- p(n): Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado "n".
- L: Longitud promedio del sistema (número esperado de clientes dentro del sistema).
- L_C: Longitud promedio de la cola (número esperado de clientes esperando ser atendidos).
- $\bar{\lambda}$: Tasa promedio de ingreso de clientes al sistema.
- $\bar{\mu}$: Tasa promedio de egreso de clientes del sistema.
- W_C: Tiempo promedio de espera en cola de un cliente.
- W: Tiempo promedio de permanencia en el sistema de un cliente.

NOTACIÓN KENDALL

P/P/M

REPRESENTACIÓN GRÁFICA



MODELIZACIÓN

Determinación de p(n)

Tendremos que λ_n (tasa de ingreso para un estado "n" determinado) es igual a la tasa promedio de arribos λ multiplicada por la probabilidad de ingresar al sistema cuando el estado es "n", es decir:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & \text{para } n < M \\ \lambda \cdot \gamma^{2\cdot(n-M+1)} & \text{para } n \geq M \end{cases}$$

Por su parte, la tasa de egresos μ_n es cero cuando el sistema está vacío ($n = 0$). Cuando hay un cliente en el sistema, hay un canal ocupado y, por consiguiente, la tasa esperada de egresos es μ. Cuando hay dos clientes, tendremos dos canales ocupados, por lo que la tasa esperada de egresos será de 2μ. Esto ocurre hasta que "n" es igual a "M". Es decir para $n \leq M$ tendremos que la tasa esperada de egreso será "$n\cdot\mu$". Para $n > M$, dado que hay "M" canales trabajando, la tasa esperada de egresos será $M\cdot\mu$. En resumen:

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ n\cdot\mu & \text{para } 1 \leq n < M \\ M\cdot\mu & \text{para } n \geq M \end{cases}$$

Reemplazando, en la ecuación de estado de régimen permanente:

$$\boxed{p(n)=\frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\cdot p(n-1)}$$

tendremos que

- Para n = 1: $p(1)=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot p(0)=\frac{\lambda}{\mu}p(0) \quad\Rightarrow\quad p(1)=\rho\cdot p(0)$
- Para n = 2: $p(2)=\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdot p(1)=\frac{\lambda}{2\mu}\cdot p(0)\frac{\lambda}{\mu} \quad\Rightarrow\quad p(2)=\frac{\rho^2}{2}\cdot p(0)$
- Para n = 3: $p(3)=\frac{\lambda_2}{\mu_3}\cdot p(2)=\frac{\lambda}{3\mu}\cdot p(0)\frac{\lambda^2}{2\mu^2} \quad\Rightarrow\quad p(3)=\frac{\rho^3}{6}\cdot p(0)$
- Para n = 4: $p(4)=\frac{\lambda_3}{\mu_4}\cdot p(3)=\frac{\lambda}{4\mu}\cdot p(0)\frac{\lambda^3}{6\mu^3} \quad\Rightarrow\quad p(4)=\frac{\rho^4}{24}\cdot p(0)$

....

y en general: $\boxed{p(n)=\frac{\rho^n}{n!}\cdot p(0)}$ para $n < M$ **(17)**

Siguiendo los reemplazos:

- Para n = M: $p(M)=\frac{\rho^M\cdot\gamma^0}{M!}\cdot p(0)$
- Para n = M+1: $p(M+1)=\frac{\rho^{M+1}\cdot\gamma^2}{M!\cdot M}\cdot p(0)$
- Para n = M+2: $p(M+2)=\frac{\rho^{M+2}\cdot\gamma^6}{M!\cdot M^2}\cdot p(0)$
- Para n = M+3: $p(M+3)=\frac{\rho^{M+3}\cdot\gamma^{12}}{M!\cdot M^3}\cdot p(0)$

....

y, en general: $p(n)=\frac{\rho^n\cdot\gamma^{(n-M)(n-M+1)}}{M!\cdot M^{(n-M)}}\cdot p(0)$

es decir: $\boxed{p(n)=\left(\frac{\rho}{M}\right)^n\frac{\gamma^{(n-M)\cdot(n-M+1)}\cdot M^M}{M!}\cdot p(0)}$ para $n\geq M$ **(18)**

Ahora, para hallar el valor de p(0), se tiene en cuenta que

$$\sum_0^\infty p(n)=1$$

Entonces:

$$\sum_0^{M-1}p(n)+\sum_M^\infty p(n)=1$$

Reemplazando (17) y (18):

$$\sum_0^{M-1}\frac{\rho^n}{n!}p(0)+\sum_M^\infty\left(\frac{\rho}{M}\right)^n\frac{M^M}{M!}\cdot\gamma^{(n-M)\cdot(n-M+1)}.p(0)=1$$

y, por lo tanto:

$$p(0)=\frac{1}{\sum_0^{M-1}\frac{\rho^n}{n!}+\frac{M^M}{M!}\cdot\sum_M^\infty\left(\frac{\rho}{M}\right)^n\cdot\gamma^{(n-M)\cdot(n-M+1)}} \qquad \textbf{(19)}$$

La primera serie del denominador es convergente, ya que se trata de una serie finita. Por el criterio de convergencia de Cauchy se demuestra que la segunda serie del denominador converge.

Esto significa que, para este sistema, tampoco se debe cumplir que $\rho < M$, ya que en la medida que aumenta "n" la probabilidad de ingreso se reduce notoriamente, y se alcanza el estado de equilibrio independientemente del valor de los parámetros.

Reemplazando (19) en (17) y en (18) tendremos los valores asociados a todos los estados que puede asumir el sistema.

Por su parte, la probabilidad de que un cliente que arribe al sistema tenga que esperar estará dada por:

$$p(n\geq M)=\sum_M^\infty p(n)=\frac{M^M}{M!}\cdot\sum_M^\infty\left(\frac{\rho}{M}\right)^n\cdot\gamma^{(n-M)\cdot(n-M+1)}\cdot p(0)$$

Determinación de L:

La longitud del sistema es una variable aleatoria cuya media (L) es el valor esperado de que en el sistema haya "n" clientes. Es decir:

$$L=\sum_0^\infty n\cdot p(n)=\sum_0^{M-1}n\cdot\frac{\rho^n}{n!}\cdot p(0)+\sum_M^\infty n\cdot\frac{M^M}{M!}\cdot\left(\frac{\rho}{M}\right)^n\cdot\gamma^{(n-M)\cdot(n-M+1)}\cdot p(0)$$

Determinación de H:

H es el número promedio de canales ocupados. Expresado en función de las probabilidades de estados, tendremos que:

$$H = \sum_{0}^{M-1} n \cdot p(n) + \sum_{M}^{\infty} M \cdot p(n)$$

El porcentaje de actividad de cada canal será

$$PA = \frac{H}{M}$$

Determinación de L_C:

La longitud de la cola es una variable aleatoria cuya media es la esperanza matemática de que haya n-M clientes en cola.

$$L_C = \sum_{M}^{\infty} (n - M) \cdot p(n)$$

Determinación de W_C

El tiempo medio promedio de espera en cola de un cliente será:

$$W_C = \frac{L_C}{\bar{\mu}}$$

Es decir:

$$\boxed{W_C = \frac{L_C}{\mu \cdot H}}$$

Determinación de W

El tiempo promedio de permanencia en el sistema es igual al tiempo promedio de espera en cola más el tiempo de promedio de atención:

$$W = W_C + T_S$$

o

$$\boxed{W = \frac{L}{\bar{\mu}}}$$

ANÁLISIS ECONÓMICO:

En los sistemas de colas tipo P/P/M con impaciencia, generalmente la variable de decisión es el número de canales que se debería disponer a los efectos de minimizar el costo total resultante de considerar el lucro cesante debido a clientes que se retiran por impaciencia sin abonar el servicio (u \$/cliente) y el costo del servicio (dado por el costo de los canales).

$$Z = u \cdot \bar{R} + c_C \cdot M \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

Este problema también se podría haber planteado como un caso de maximización de utilidades.

$$Z = u \cdot \bar{\mu} - c_C \cdot M \quad \rightarrow \quad \text{Max}$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 3.5:

A un sistema P/P/2, con impaciencia, arriban 15 clientes por hora, en promedio. La tasa promedio de atención de un canal es también de 15 clientes por hora. La probabilidad de ingreso para un estado "n" mayor o igual a 2 está dada por la expresión:

$$p(i/n) = e^{-\frac{1\cdot(n-M+1)}{\mu}}$$

En otro caso, la probabilidad de ingresar es igual a 1.
Determinar

a. La probabilidad de que un cliente que arriba al sistema tenga que esperar para recibir el servicio.
b. Porcentaje de ocupación de los canales.
c. Número promedio de clientes esperando ser atendidos.
d. Número promedio de clientes en el sistema.
e. Lucro cesante esperado, si cada servicio se cobra \$10.
f. Tiempo promedio de espera de un cliente en la cola.

Resolución:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{15}{15} = 1$$

$$\alpha = 1$$

$$\gamma = e^{-\frac{\alpha}{2\mu}} = 0{,}9672$$

Reemplazando en la ecuación de estado:

- para n = 1: $p(1) = \rho \cdot p(0)$

- para n = 2: $p(2) = \frac{\rho^2}{2} \cdot p(0)$
- para n = 3: $p(3) = \frac{\rho^3}{2 \cdot 2} \cdot \gamma^2 \cdot p(0)$
- para n = 4: $p(4) = \frac{\rho^4}{2 \cdot 2^2} \cdot \gamma^6 \cdot p(0)$
- para n = 5: $p(5) = \frac{\rho^5}{2 \cdot 2^3} \cdot \gamma^{12} \cdot p(0)$
- para n = 6: $p(6) = \frac{\rho^6}{2 \cdot 2^4} \cdot \gamma^{20} \cdot p(0)$
- para n = 7: $p(7) = \frac{\rho^7}{2 \cdot 2^5} \cdot \gamma^{30} \cdot p(0)$
- para n = 8: $p(8) = \frac{\rho^8}{2 \cdot 2^6} \cdot \gamma^{42} \cdot p(0)$

Para valores de "n" mayores a 9 la probabilidad de ingresar es prácticamente nula. En consecuencia, y a fin de simplificar la resolución, podemos plantear la restricción adicional estableciendo que la suma de todas las probabilidades de los 9 estados es igual a 1:

$$p(0) + \rho \cdot p(0) + \frac{\rho^2}{2} \cdot p(0) + \frac{\rho^3}{4} \cdot \gamma^2 \cdot p(0) + \frac{\rho^4}{8} \cdot \gamma^6 \cdot p(0) + \frac{\rho^5}{16} \cdot \gamma^{12} \cdot p(0) +$$

$$\frac{\rho^6}{32} \cdot \gamma^{20} \cdot p(0) + \frac{\rho^7}{64} \cdot \gamma^{30} \cdot p(0) + \frac{\rho^8}{128} \cdot \gamma^{42} \cdot p(0) = 1$$

Despejando:

$$p(0) \cong \frac{1}{1 + \rho + \frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{4} \cdot \gamma^2 + \frac{\rho^4}{8} \cdot \gamma^6 + \frac{\rho^5}{16} \cdot \gamma^{12} + \frac{\rho^6}{32} \cdot \gamma^{20} + \frac{\rho^7}{64} \cdot \gamma^{30} + \frac{\rho^8}{128} \cdot \gamma^{42}} \cong 0{,}35$$

En consecuencia:

$p(1) \cong 0{,}35$

$p(2) \cong 0{,}175$

$p(3) \cong 0{,}0766$

$p(4) \cong 0{,}0313$

$p(5) \cong 0{,}0120$

$p(6) \cong 0{,}0043$

$p(7) \cong 0{,}0014$

$p(8) \cong 0{,}0005$

b) El porcentaje de actividad de los canales es H/2. Para calcular H tendremos que:

$$H = 1\ p(1) + 2\ p(2) + 2\ p(3) + 2\ p(4) + 2\ p(5) + 2\ p(6) + 2\ p(7) + 2\ p(8) = 0{,}9509$$

Por lo tanto, el porcentaje de actividad de cada canal será de 47,55%.

c) La longitud promedio de la cola es:

$$L_C = 1 \cdot p(3) + 2 \cdot p(4) + 3 \cdot p(5) + 4 \cdot p(6) + 5 \cdot p(7) + 6 \cdot p(8) = 0{,}2021\ \text{cl}$$

d) La longitud promedio del sistema:

$$L = \sum_{0}^{8} n \cdot p(i) = 1{,}1530\ \text{cl}$$

Por supuesto que $L = L_C + H$

e) El lucro cesante esperado será igual a la tasa de rechazos por el precio que se cobra el servicio.

Para calcular la tasa de rechazos, determinamos primero la cantidad de clientes que se atienden:

$$\bar{\mu} = \mu \cdot H = 14{,}2635 \frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

$$\bar{R} = \lambda - \bar{\lambda} = \lambda - \bar{\mu} = 15 - 14{,}2635 = 0{,}7365 \frac{\text{cl}}{\text{h}}$$

$$\text{Pérdida esperada} = u \cdot \bar{R} = 10 \cdot 0{,}7365 = 7{,}3650 \frac{\$}{\text{h}}$$

h) El tiempo promedio de espera en cola es:

$$W_C = \frac{L_C}{\bar{\lambda}} = \frac{0{,}2021}{14{,}2635} = 0{,}0142\ \text{h}$$

OTRO EJEMPLO DE MODELIZACIÓN Y RESOLUCIÓN DE POBLACIÓN IMPACIENTE Y VARIOS CANALES

Ejemplo 3.6:

En un taller de reparación de automóviles trabajan dos mecánicos. El tiempo de reparación promedio es de 2 horas. Al taller llega 1 auto por hora, en promedio (distribución exponencial), pero los clientes tienen impaciencia. La probabilidad de que un cliente que llega al taller deje su auto para reparar es la siguiente:

n	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5 o más*
p(ingresar)	*1*	*1*	*0,8*	*0,5*	*0,2*	*0*

siendo "n" la cantidad de autos en el taller en el instante de arribo de un cliente.

Formular un modelo matemático que permita determinar las probabilidades asociadas, la ganancia esperada del taller (suponiendo que, en promedio, cada automóvil deja una ganancia de $150), la longitud de cola promedio y el tiempo promedio que transcurre desde que un cliente deja su auto en el taller hasta que éste está reparado.

Resolución:

$\lambda = 1$ autos/hora

$\mu = 0{,}5$ autos/hora

$M = 2$

$\rho = 2$

Para modelizar el problema, se parte de la ecuación de estado de régimen permanente:

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p(n-1)}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda & n = 0 \text{ y } 1 \\ 0{,}8 \cdot \lambda & n = 2 \\ 0{,}5 \cdot \lambda & n = 3 \\ 0{,}2 \cdot \lambda & n = 4 \\ 0 & n = 5 \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \mu & n = 1 \\ 2 \cdot \mu & n = 2, 3, 4 \text{ y } 5 \end{cases}$$

tendremos que:

- Para $n = 1$: $p(1) = \frac{\lambda_0}{\mu_1} \cdot p(0) = \frac{\lambda}{\mu} p(0) \quad \Rightarrow \quad p(1) = \rho \cdot p(0)$
- Para $n = 2$: $p(2) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} \cdot p(1) = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu} \cdot \rho \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(2) = 0{,}5 \cdot \rho^2 \cdot p(0)$
- Para $n = 3$: $p(3) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} \cdot p(2) = \frac{0{,}8 \cdot \lambda}{2 \cdot \mu} \cdot 0{,}5 \cdot \rho^2 \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(3) = 0{,}2 \cdot \rho^3 \cdot p(0)$
- Para $n = 4$: $p(4) = \frac{\lambda_3}{\mu_4} \cdot p(3) = \frac{0{,}5 \cdot \lambda}{2 \cdot \mu} \cdot 0{,}2 \cdot \rho^3 \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(4) = 0{,}05 \cdot \rho^4 \cdot p(0)$
- Para $n = 5$: $p(5) = \frac{\lambda_4}{\mu_5} \cdot p(4) = \frac{0{,}2 \cdot \lambda}{2 \cdot \mu} \cdot 0{,}05 \cdot \rho^4 \cdot p(0) \quad \Rightarrow \quad p(5) = 0{,}005 \cdot \rho^5 \cdot p(0)$

pero como la suma de las probabilidades de todos los estados posibles es igual a uno:

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 1$$

tendremos que:

$$p(0) + \rho \cdot p(0) + 0{,}5 \cdot \rho^2 \cdot p(0) + 0{,}2 \cdot \rho^3 \cdot p(0) + 0{,}05 \cdot \rho^4 \cdot p(0) + 0{,}005 \cdot \rho^5 \cdot p(0) = 1$$

Despejando:

$$p(0) = \frac{1}{1 + \rho + 0{,}5 \cdot \rho^2 + 0{,}2 \cdot \rho^3 + 0{,}05 \cdot \rho^4 + 0{,}005 \cdot \rho^5} = 0{,}1323$$

y por lo tanto:

$p(1) = 0{,}2646$

$p(2) = 0{,}2646$

$p(3) = 0{,}2116$

$p(4) = 0{,}1058$

$p(5) = 0{,}0212$

Para calcular el número de automóviles atendidos por hora, calculamos primero H:

$$H = 1 \cdot p(1) + 2 \cdot [p(2) + p(3) + p(4) + p(5)] = 1{,}4709 \text{ mecánicos}$$

$$\overline{\mu} = \mu \cdot H = 0{,}5 \cdot 1{,}4709 = 0{,}7354 \, \frac{\text{autos}}{\text{hora}}$$

Por lo tanto, el ingreso esperado del taller será:

$$\text{Ingreso esperado} = u \cdot \overline{\mu} = 150 \cdot 0{,}7354 \cong 110{,}32 \, \frac{\$}{\text{hora}}$$

La longitud promedio de la cola estará dada por:

$$L_C = 1 \cdot p(3) + 2 \cdot p(4) + 3 \cdot p(5) = 0{,}4868 \text{ autos}$$

El tiempo de espera promedio de cada automóvil:

$$W_C = \frac{L_C}{\overline{\mu}} = \frac{0{,}4868}{0{,}7354} = 0{,}662 \text{ h}$$

El tiempo que transcurre desde que ingresa un auto hasta que es reparado:

$$W = W_C + T_S = 0{,}662 + 2 = 2{,}662 \text{ h}$$

ABANDONO DE CLIENTES

La impaciencia, se puede evidenciar también a través de clientes que ingresan al sistema y luego de un tiempo abandonan la cola. En estos casos la tasa de abandono de clientes A_n para los distintos estados de "n" es conocida.

Para modelizar un sistema con impaciencia y abandono, se procede de igual manera que en los casos anteriores, es decir a partir de la ecuación de estado de régimen permanente:

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p(n-1)}$$

en donde se deben reemplazar los valores de λ_n y μ_n, como sigue:

$$\lambda_n = \lambda \cdot p(i/n) \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

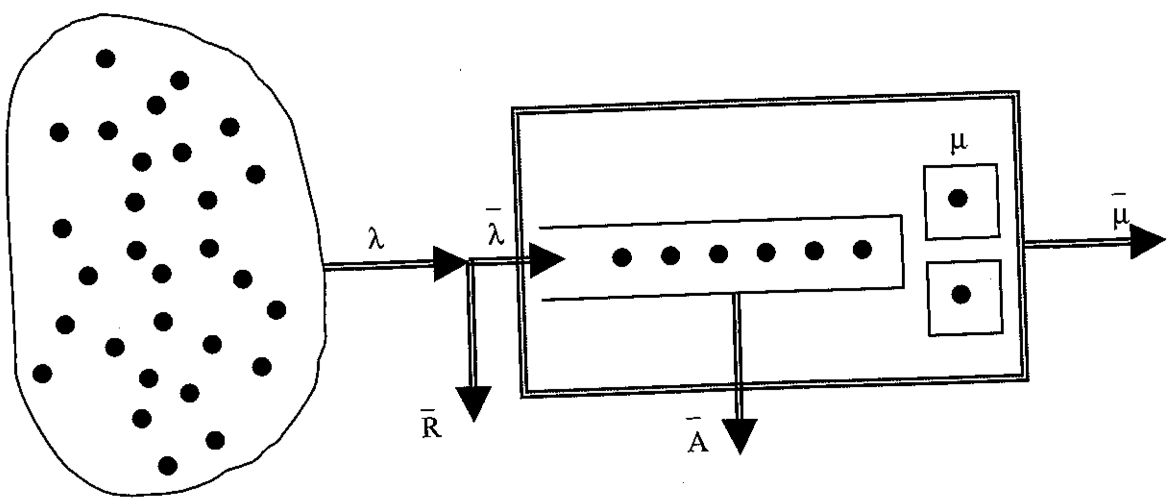
$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ n \cdot \mu & \text{para } 1 < n < M \\ M \cdot \mu + A_n & \text{para } M \leq n \leq N \end{cases}$$

El parámetro N puede ser un valor finito (cola finita) o infinito (cola infinita).

En la medida que aumenta "n", la probabilidad de rechazo y abandono de los clientes se incrementa mucho. Esto significa que la p(n) para "n" grande tiende a cero, por lo que en muchos casos, a los efectos del cálculo, se puede suponer que habrá un número finito de estados.

De esta forma, se determinan las probabilidades p(n) en función de los parámetros, luego se calcula la probabilidad de cero, y luego el resto de las variables.

Por supuesto que también se puede dar el caso de impaciencia de ambos tipos conjuntamente con restricciones de capacidad, como se indica en la próxima figura. En estos casos, la probabilidad de ingresar será la probabilidad combinada de ingresar por impaciencia y la de ingresar por el hecho de que el sistema no esté completo.



CAPÍTULO 4

SISTEMAS DE POBLACIÓN FINITA

1. SISTEMA DE UN SOLO CANAL

Si la población fuente de clientes a un sistema de colas es finita pero suficientemente grande como para que la tasa promedio de arribos no se vea seriamente afectada cuando se produce un nacimiento o una muerte en el sistema, el problema se puede resolver como población infinita.

Si, en cambio, la fuente de usuarios es tan pequeña como para que la llegada de un cliente o la terminación de un servicio, afecte la probabilidad de llegadas futuras, se dice que el problema es de población finita, y deberán hacerse las consideraciones que siguen.

En estos sistemas, los clientes, una vez atendidos, vuelven a formar parte de la población fuente permanente del sistema.

Para estudiar los sistemas de población finita, en lugar de hacerse la observación sobre los clientes que arriban al sistema, ésta se efectúa sobre cada uno de ellos en forma individual. Para ello, trabajaremos con el parámetro T_r (a menudo indicado con la letra "U") que es el tiempo medio entre llegadas de un mismo cliente al sistema; es decir, el tiempo medio de permanencia de un cliente fuera del sistema.

A la inversa de T_r la llamaremos λ_r. Este parámetro es la frecuencia con la que un usuario requiere el servicio en el sistema; es decir, el número promedio de veces que, por unidad de tiempo, un usuario que está fuera del sistema llega al mismo para recibir el servicio.

Llamando N' al tamaño de la población (es decir al número total de clientes dentro y fuera del sistema), cualquier arribo debe provenir de los N'-n clientes que no están en el sistema.

Formularemos aquí solo el caso para el cual no hay restricciones de capacidad del sistema, pero el mismo procedimiento de modelización se puede utilizar para resolver un problema de capacidad finita, limitando el número de estados, tal como se estudió en sistemas de esas características.

HIPÓTESIS

a. El proceso de arribos de clientes al sistema es de tipo Poisson.
b. El proceso de servicio es también de tipo Poisson.
c. El sistema se encuentra en condiciones estables; es decir, ha alcanzado condiciones de equilibrio de sus variables (régimen permanente).
d. Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.
e. La disciplina de atención es FIFO.
f. Se dispone de un solo canal de atención.
g. La capacidad del sistema es ilimitada (cola infinita).

h. Los clientes que llegan al sistema no presentan impaciencia.

i. La población de clientes potenciales del sistema es finita y relativamente pequeña.

PARÁMETROS

- λ_r: Frecuencia de requerimientos de servicios por cliente. En lugar de este parámetro se puede dar como dato su inversa (intervalo de tiempo promedio entre requerimientos de de un cliente)

$$\left(T_r = U = \frac{1}{\lambda_r}\right)$$

- μ: Número promedio de clientes que puede atender un canal por unidad de tiempo (velocidad promedio de atención). En lugar de este parámetro se puede dar como dato su inversa (duración promedio del servicio)

$$\left(T_s = \frac{1}{\mu}\right)$$

- $M = 1$ Un solo canal de atención.
- N': Número total de clientes (tamaño de la población).

VARIABLES:

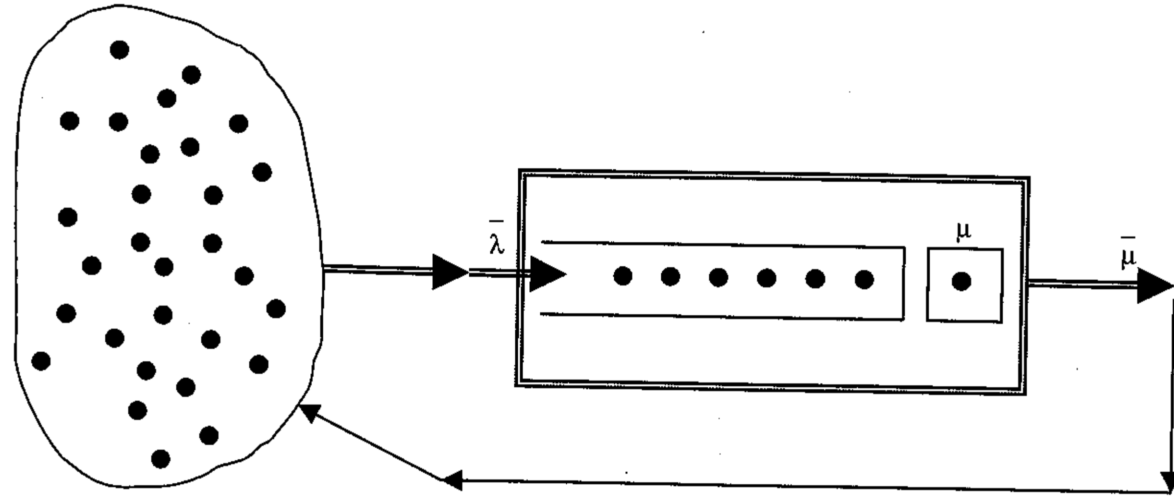
- p(n): Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado "n".
- L: Longitud promedio del sistema (número esperado de clientes dentro del sistema).
- L_C: Longitud promedio de la cola (número esperado de clientes esperando ser atendidos).
- $\bar{\lambda}$: Tasa promedio de ingreso de clientes al sistema.
- $\bar{\mu}$: Tasa promedio de egreso de clientes del sistema.
- W_C: Tiempo promedio de espera en cola de un cliente.
- W: Tiempo promedio de permanencia en el sistema de un cliente.
- J: Número promedio de clientes fuera del sistema.

NOTACIÓN KENDALL

P/P/1/(N')

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

En la figura de la próxima página se muestra la representación esquemática de este sistema.



MODELIZACIÓN

Determinación de p(n)

Como siempre, los valores de las probabilidades asociadas a los diferentes estados que puede adoptar el sistema se calculan a partir de la ecuación de estado de régimen permanente, reemplazando los valores de λ_n y μ_n para cada "n", y luego agregando la ecuación que establece que la suma de las probabilidades es igual al uno.

En forma general, la tasa de ingresos para un estado "n" determinado (λ_n) es igual al número de clientes que están fuera del sistema, es decir (N'-n), multiplicado por la frecuencia con la que cada cliente requiere el servicio y por la probabilidad de ingreso, es decir:

$$\lambda_n = (N'-n) \cdot \lambda_r \cdot p(i/n)$$

En este caso no hay impaciencia ni restricciones de capacidad en el sistema, por lo que la probabilidad de ingresar es 1 para cualquier "n".

Por su parte, la tasa de egresos μ_n es cero cuando el sistema está vacío (n = 0). Para cualquier otro valor de "n", como hay un solo canal, la tasa esperada de egresos es igual a la velocidad promedio de atención del canal, es decir, μ.

En definitiva, para este modelo será:

$$\lambda_n = (N'-n) \cdot \lambda_r \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \mu & n = 1, 2, 3, \ldots. \end{cases}$$

Reemplazando, entonces, en la ecuación de estado de régimen permanente

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} p(n-1)}$$

y llamando ρ_r a la relación entre λ_r y μ, tendremos que:

- Para n = 1: $p(1)=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot p(0)=\frac{\lambda_r}{\mu}\cdot N'\cdot p(0) \quad\Rightarrow\quad p(1)=\rho_r\cdot N'\cdot p(0)$

- Para n = 2: $p(2)=\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdot p(1)=\frac{(N'-1)\cdot\lambda_r}{\mu}\cdot\rho_r\cdot N'\cdot p(0)$

$$p(2)=\left[N'^2-N'\right]\cdot\rho_r^2.p(0) \quad\Rightarrow\quad p(2)=\frac{N'!}{(N'-2)!}\cdot\rho_r^2.p(0)$$

- Para n = 3:

$$p(3)=\frac{\lambda_2}{\mu_3}\cdot p(2)=\frac{(N'-2)\cdot\lambda_r}{\mu}\cdot\frac{N'!}{(N'-2)!}\cdot\rho_r^2\cdot p(0) \Rightarrow \quad p(3)=\frac{N'!}{(N'-3)!}\rho_r^3.p(0)$$

Procediendo de igual manera para el resto de los estados, y por el principio de inducción completa, se demuestra que:

$$\boxed{p(n)=\frac{N'!}{(N'-n)!}\cdot\rho_r^n\cdot p(0)} \qquad \textbf{(1)}$$

Para hallar el valor de p(0), sabemos que

$$\sum_0^{\infty} p(n)=1$$

Entonces:

$$\sum_0^{N'}\frac{N'!}{(N'-n)!}\cdot\rho_r^n\cdot p(0)=1$$

y, por lo tanto:

$$p(0)=\frac{1}{\sum_0^{N'}\frac{N'!}{(N'-n)!}\cdot\rho_r^n} \qquad \textbf{(2)}$$

Como la serie geométrica es finita, es convergente, y por consiguiente la relación entre los parámetros λ_r y μ puede ser cualquiera.

Reemplazando la expresión de p(0) en (1) tendremos la expresión general de p(n):

$$\boxed{p(n)=\frac{N'!}{(N'-n)!}\cdot\rho_r^n\frac{1}{\sum_0^{N'}\frac{N'}{(N'-n)!}\cdot\rho_r^n}} \qquad \textbf{(3)}$$

La probabilidad de esperar D, estará dada por:

$$D=p(n\geq 1)=1-p(0)$$

Determinación de L:

La longitud del sistema es una variable aleatoria cuya media (L) es el valor esperado de que en el sistema haya "n" clientes. Es decir:

$$L=\sum_0^{N'}n.p(n)=\sum_0^{N'}n.\frac{N'!}{(N'-n)!}\cdot\rho_r^n\cdot p(0)$$

Resolviendo la serie geométrica y operando matemáticamente se llega a

$$L=N'-\frac{[1-p(0)]}{\rho_r} \qquad \textbf{(4)}$$

El porcentaje de clientes que se encuentra en el sistema está dado por la relación $\frac{L}{N'}$.

Determinación de L_C:

La longitud de la cola es una variable aleatoria cuya media es la esperanza matemática de que haya n-1 clientes en cola (ya que hay un solo canal).

$$L_C=\sum_1^{N'}(n-1)\cdot p(n)=\sum_1^{N'}(n-1)\cdot\frac{N'!}{(N'-n)!}\cdot\rho_r^n\cdot p(0)$$

Resolviendo la serie geométrica y operando matemáticamente se llega a que

$$L_C=N'-\frac{(1+\rho_r)\cdot[1-p(0)]}{\rho_r} \qquad \textbf{(5)}$$

El porcentaje de clientes que se encuentra esperando en cola está dado por la relación entre la longitud promedio de la cola y el tamaño de la población, es decir $\frac{L_C}{N'}$.

Determinación de H:

Habiendo un solo canal, la expresión del número promedio de canales activos en función de las probabilidades de estado es la siguiente:

$$H=\sum_1^{N'}p(n)=1-p(0)$$

El porcentaje de clientes que se encuentra atendiendo está dado por la relación $\frac{H}{N'}$.

Por su parte, como tenemos un solo canal, tendremos que el porcentaje de actividad del mismo es

$$PA=\frac{H}{M}=\frac{1-p(0)}{1}=1-p(0)$$

Determinación de J:

La expresión del número promedio de usuarios que se encuentran fuera del sistema es:

$$J = \sum_{0}^{N'} (N'-n)\cdot p(n) = \sum_{0}^{N'} N'\cdot p(n) - \sum_{0}^{N'} n\cdot p(n) = N'-L$$

como es lógico, ya que el número total de clientes (N') debe ser igual al número promedio de clientes que se encuentra fuera del sistema (J) más el número promedio de clientes que se encuentra dentro del sistema (L).

Por su parte, el porcentaje de clientes que se encuentra fuera del sistema está dado por la relación siguiente:

$$\frac{J}{N'}$$

Consideraciones del estado de régimen permanente:

La tasa promedio de ingreso de clientes al sistema $\bar{\lambda}$, está dada por la expresión

$$\bar{\lambda} = \sum_{0}^{N'} \lambda_n \cdot p(n)$$

pero como $\lambda_n = (N'-n)\cdot\lambda_r \quad \forall n$, tendremos que:

$$\bar{\lambda} = \sum_{0}^{N'} (N'-n)\cdot\lambda_r\cdot p(n) = \sum_{0}^{N'} N'\cdot\lambda_r\cdot p(n) - \sum_{0}^{N'} n\cdot\lambda_r\cdot p(n) = N'\cdot\lambda_r - L\cdot\lambda_r = (N'-L)\cdot\lambda_r = J\cdot\lambda_r$$

Por su parte, la tasa promedio de egreso de clientes del sistema $\bar{\mu}$, está dada por la expresión:

$$\bar{\mu} = \sum_{0}^{\infty} \mu_n \cdot p(n)$$

Pero como μ_0 es igual a cero para n = 0 e igual a μ para cualquier otro valor de "n", tendremos que:

$$\bar{\mu} = \sum_{1}^{\infty} \mu\cdot p(n) = \mu\cdot[1-p(0)]$$

Si el sistema está en equilibrio tendremos que:

$$J\cdot\lambda_r = \mu\cdot[1-p(0)]$$

$$J = \frac{[1-p(0)]}{\rho_r} = \frac{H}{\rho_r}$$

Determinación de W_C

El tiempo medio promedio de espera en cola de un cliente está dado por la relación entre la longitud promedio de la cola (L_C) y el flujo de clientes que circula por la cola $\bar{\lambda}$ (o $\bar{\mu}$):

$$W_C = \frac{L_C}{\bar{\lambda}} = \frac{L_C}{J\cdot\lambda_r}$$

Determinación de W

El tiempo promedio de permanencia en el sistema es igual al tiempo promedio de espera en cola más el tiempo de promedio de atención:

$$W = W_C + T_S$$

ANÁLISIS ECONÓMICO:

Habiendo un solo canal, la variable de decisión habitual es la velocidad media de atención del canal, en donde la función objetivo queda expresada como:

$$Z = c_e\cdot L + c_s\cdot\mu \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

en donde:

- c_e: Costo derivado de mantener una unidad en el sistema en la unidad de tiempo
- c_s: Costo por unidad de tiempo por atender a una velocidad unitaria

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 4.1:

En un sistema P/P/1/(5), cada cliente permanece en promedio 1/2 hora fuera del sistema. La duración media del servicio es de 20 minutos. Determinar:

a. Probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado.
b. Porcentaje de clientes que se encuentran fuera del sistema.
c. Cantidad de clientes que se atienden en el sistema por hora, en promedio.
d. Longitud promedio de la cola.
e. Tiempo de espera promedio de un cliente en cola.
f. Tiempo promedio de permanencia de un cliente dentro del sistema.

Resolución:

$$U = \frac{1}{2}\frac{h}{\text{pedido}} \Rightarrow \lambda_r = 2\frac{\text{pedidos}}{h}$$

$$\mu = 3\ \frac{\text{pedidos}}{\text{h}}$$

$$\rho_r = \frac{\lambda_r}{\mu} = \frac{2}{3} = 0{,}6667$$

a) Cálculo de las probabilidades:

Tendremos que

$$\lambda_n = (N'-n)\cdot\lambda_r = \begin{cases} 5\cdot\lambda_r & \text{para } n=0 \\ 4\cdot\lambda_r & \text{para } n=1 \\ 3\cdot\lambda_r & \text{para } n=2 \\ 2\cdot\lambda_r & \text{para } n=3 \\ 1\cdot\lambda_r & \text{para } n=4 \\ 0 & \text{para } n=5 \end{cases}$$

y

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n=0 \\ \mu & \text{para } n=1, 2, 3, 4 \text{ y } 5 \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación de estado de régimen permanente, tendremos que

- para $n = 1 \Rightarrow p(1) = \rho_r \cdot 5 \cdot p(0)$
- para $n = 2 \Rightarrow p(2) = \rho_r^2 \cdot 20 \cdot p(0)$
- para $n = 3 \Rightarrow p(3) = \rho_r^3 \cdot 60 \cdot p(0)$
- para $n = 4 \Rightarrow p(4) = \rho_r^4 \cdot 120 \cdot p(0)$
- para $n = 5 \Rightarrow p(5) = \rho_r^5 \cdot 120 \cdot p(0)$

Para determinar la p(0):

$$p(0) = \frac{1}{1 + 5\cdot\rho_r + 20\cdot\rho_r^2 + 60\cdot\rho_r^3 + 120\cdot\rho_r^4 + 120\cdot\rho_r^5} = 0{,}0142$$

A este valor, también se pudo haber arribado aplicando la expresión (2) vista más arriba. Luego, la probabilidad de que el sistema se encuentre ocupado es 0,9858

Adicionalmente, los valores del resto de las probabilidades resultan ser los siguientes:

$p(1) = 0{,}0473$

$p(2) = 0{,}1261$

$p(3) = 0{,}2521$

$p(4) = 0{,}3362$

$p(5) = 0{,}2241$

b) La cantidad de clientes que se encuentra, en promedio, fuera del sistema será:

$$J = 5 \,.\, p(0) + 4 \,.\, p(1) + 3 \,.\, p(2) + 2 \,.\, p(3) + 1 \,.\, p(4) = 1{,}4789$$

En consecuencia, el porcentaje de clientes fuera del sistema será:

$$\frac{J}{N'} = \frac{1{,}4789}{5} = 0{,}2958$$

Es decir, el 28,58% de la población.

c) La cantidad de clientes que se atiende en el sistema por hora es $\overline{\mu}$

$$\overline{\mu} = \mu \cdot H = \mu \cdot [1 - p(0)] = 3 \cdot 0{,}9858 = 2{,}9574$$

d) La longitud promedio de la cola es:

$$L_c = 1 \cdot p(2) + 2 \cdot p(3) + 3 \cdot p(4) + 4 \cdot p(5) = 2{,}5353$$

e) El tiempo promedio de espera en cola es:

$$W_C = \frac{L_C}{\overline{\mu}} = \frac{2{,}5353}{2{,}9574} = 0{,}8527\,h$$

i) El tiempo promedio de permanencia dentro del sistema es:

$$W = W_C + T_S = 0{,}8527 + 0{,}3333 = 1{,}1860\ h$$

Ejemplo 4.2:

Un taller tiene disponibles cuatro máquinas idénticas, de las cuales tres trabajan y la tercera se utiliza de "backup", es decir que entra en funcionamiento cuando una de las anteriores sufre un desperfecto. Si hay más de dos máquinas descompuestas el taller debe interrumpir su producción.

El proceso de aparición de un desperfecto en las máquinas es poissoniano y cada máquina sufre, en promedio, un desperfecto por cada 12 horas de funcionamiento.

En el taller existe un equipo de reparación que tarda, en promedio, 3 horas en poner a punto una máquina descompuesta (distribución exponencial).

a. Deducir y calcular las probabilidades asociadas a cada uno de los estados posibles.

b. Determinar la longitud promedio de cola de máquinas averiadas en espera de ser reparadas.

c. Sabiendo que el beneficio horario que produce una máquina en funcionamiento es de $ 1.500, calcular el lucro cesante esperado.

Resolución:

$$\rho_r = \frac{\lambda_r}{\mu} = \frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4}$$

a) Cálculo de las probabilidades:

En primer lugar se determinan los valores de λ_n y μ_n:

$$\lambda_n = (N'-n)\cdot\lambda_r = \begin{cases} 3\cdot\lambda_r & \text{para } n = 0, 1 \\ 2\cdot\lambda_r & \text{para } n = 2 \\ 0 & \text{para } n = 3 \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ \mu & \text{para } n = 1, 2, \text{ y } 3 \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación de estado de régimen permanente, tendremos que:

- para $n = 1 \Rightarrow p(1) = 3\cdot\rho_r.p(0)$
- para $n = 2 \Rightarrow p(2) = 9\cdot\rho_r^2\cdot p(0)$
- para $n = 3 \Rightarrow p(3) = 18\cdot\rho_r^3\cdot p(0)$

Además

$$p(0)+p(1)+p(2)+p(3) = 1$$

Luego:

$$p(0)+3\cdot\rho_r\cdot p(0)+9\cdot\rho_r^2\cdot p(0)+18\cdot\rho_r^3\cdot p(0) = 1$$

por lo que

$$p(0) = \frac{1}{1+3\cdot\rho_r+9\cdot\rho_r^2+18\cdot\rho_r^3} = 0{,}3856$$

Entonces:

$$p(1) = 0{,}2891$$

$$p(2) = 0{,}2168$$

$$p(3) = 0{,}1085$$

b) La longitud de cola es:

$$L_c = 1\cdot p(2)+2\cdot p(3) = 0{,}4338$$

c) Para calcular el lucro cesante, debe tenerse en cuenta que la cantidad de máquinas inactivas que generan pérdida por no producir, para cada uno de los estados es la siguiente. Cuando el estado del sistema es 0, hay 3 máquinas funcionando (y por consiguiente no hay lucro cesante). Cuando el estado es 1, también hay 3 máquinas produciendo, y tampoco se generan pérdidas. Para el estado n = 2, hay solamente dos máquinas funcionando, por lo que se genera lucro cesante por una máquina. Finalmente, para n = 3, la producción del taller se detiene, por lo que se está dejando de percibir el beneficio que podrían producir 3 máquinas. En resumen:

n	i
0	0
1	0
2	1
3	3

Luego,

$$LC = 1\cdot 1500\cdot p(2)+3\cdot 1500\cdot p(3) = 813{,}45\,\frac{\$}{h}$$

2. SISTEMA DE VARIOS CANALES EN PARALELO

HIPÓTESIS

a. El proceso de arribos de clientes al sistema es de tipo Poisson.
b. El proceso de servicio es también de tipo Poisson.
c. El sistema se encuentra en condiciones estables; es decir, ha alcanzado condiciones de equilibrio de sus variables (régimen permanente).
d. Los clientes que llegan al sistema forman una cola simple.
e. La disciplina de atención es FIFO.
f. Se dispone de varios canales de atención, dispuestos en paralelo.
g. Todos los canales tienen iguales características, por lo que se supone que la velocidad promedio de atención es la misma para cada uno de ellos.
h. La capacidad del sistema es ilimitada (cola infinita).
i. Los clientes que llegan al sistema no presentan impaciencia.
j. La población de clientes potenciales del sistema es finita y relativamente pequeña.

PARÁMETROS

- λ_r: Frecuencia de requerimientos de servicios por cliente En lugar de este parámetro se puede dar como dato su inversa (Intervalo de tiempo promedio entre requerimientos de un cliente)

$$\left(T_r = U = \frac{1}{\lambda_r}\right)$$

- μ: Número promedio de clientes que puede atender un canal por unidad de tiempo (velocidad promedio de atención). En lugar de este parámetro se puede dar como dato su inversa (Duración promedio del servicio)

$$\left(T_s = \frac{1}{\mu}\right)$$

- M: Cantidad de canales dispuestos en paralelo.
- N': Número total de clientes (tamaño de la población).

VARIABLES:

- p(n): Probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado "n".
- L: Longitud promedio del sistema (número esperado de clientes dentro del sistema).
- L_C: Longitud promedio de la cola (número esperado de clientes esperando ser atendidos).
- $\bar{\lambda}$: Tasa promedio de ingreso de clientes al sistema.
- $\bar{\mu}$: Tasa promedio de egreso de clientes del sistema.
- W_C: Tiempo promedio de espera en cola de un cliente.
- W: Tiempo promedio de permanencia en el sistema de un cliente.
- H: Número promedio de canales atendiendo (o número promedio de clientes atendiéndose).
- J : Número promedio de clientes fuera del sistema.
- D: Probabilidad de que un cliente que arriba al sistema tenga que esperar para recibir el servicio.

Para este tipo de sistemas se determinan, adicionalmente, las dos siguientes variables:

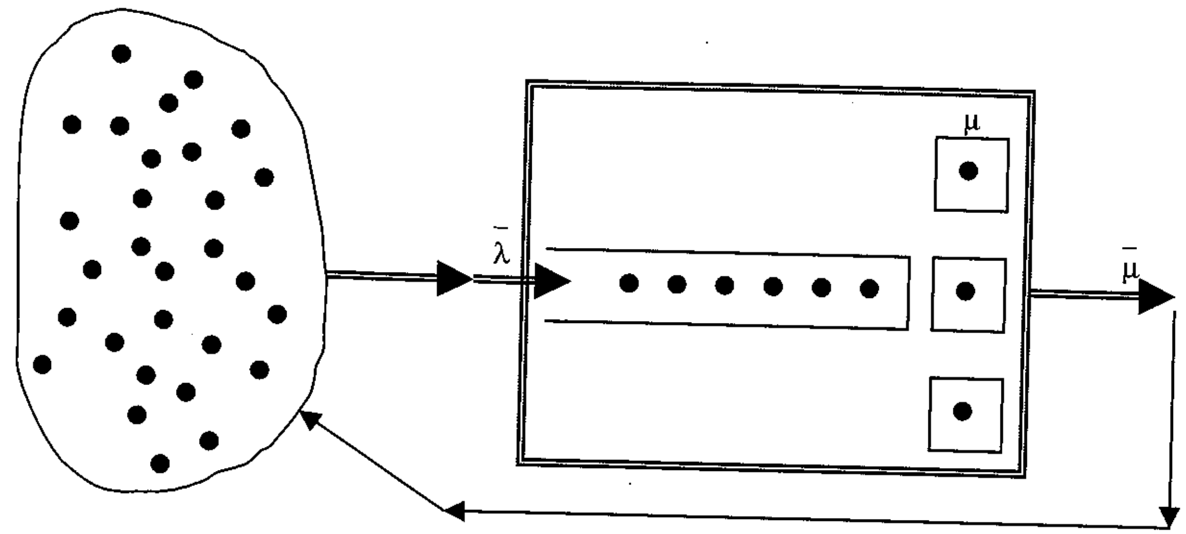
- X : Factor de servicio del sistema.
- F: Factor de eficiencia.

NOTACIÓN KENDALL

P/P/M/(N')

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

A continuación se muestra el gráfico correspondiente al presente caso.



MODELIZACIÓN

Determinación de p(n)

Se parte de la ecuación de estado de régimen permanente, reemplazando los valores de λ_n y μ_n para cada "n".

De manera general, la tasa de ingresos para un estado "n" determinado (λ_n) es igual al número de clientes que están fuera del sistema, es decir (N'-n), multiplicado por la frecuencia con la que cada cliente requiere el servicio y por la probabilidad de ingresar, es decir:

$$\lambda_n = (N'-n) \cdot \lambda_r \cdot p(i/n)$$

Para este ejemplo, no hay impaciencia ni restricciones de capacidad en el sistema, por lo que la probabilidad de ingresar es 1 para cualquier "n".

Por su parte, y dado que el sistema tiene M canales, la tasa de egresos será:

$$\lambda_n = (N'-n) \cdot \lambda_r \qquad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ n \cdot \mu & 1 \leq n < M \\ M \cdot \mu & M \leq n < N' \end{cases}$$

Reemplazando, entonces, en la ecuación de estado de régimen permanente

$$\boxed{p(n) = \frac{\lambda_{n-1}}{\mu_n} \cdot p(n-1)}$$

y llamando ρ_r a la relación entre λ_r y μ, tendremos que:

- Para n = 1

$$p(1)=\frac{\lambda_0}{\mu_1}\cdot p(0)=\frac{\lambda_r}{\mu}\cdot N'\cdot p(0) \qquad \Rightarrow \qquad p(1)=\rho_r\cdot N'\cdot p(0)$$

- Para n = 2

$$p(2)=\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdot p(1)=\frac{(N'-1)\cdot\lambda_r}{2\cdot\mu}\cdot\rho_r\cdot N'\cdot p(0) \qquad \Rightarrow \qquad p(2)=\frac{\left[N'^2-N'\right]}{2}\cdot\rho_r^2\cdot p(0)$$

$$p(2)=\frac{N'!}{(N'-2)!\cdot 2}\cdot\rho_r^2\cdot p(0)$$

- Para n = 3

$$p(3)=\frac{\lambda_2}{\mu_3}\cdot p(2)=\frac{(N'-2)\cdot\lambda_r}{3\cdot\mu}\cdot\frac{N'!}{(N'-2)!\cdot 2}\cdot\rho_r^2\cdot p(0) \Rightarrow \quad p(3)=\frac{N'!}{(N'-3)!\cdot 3\cdot 2}\cdot\rho_r^3\cdot p(0)$$

Procediendo de igual manera para n < M:

$$\boxed{p(n)=\frac{N'!}{(N'-n)!\cdot n!}\cdot\rho_r^n\cdot p(0)}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\boxed{p(n)=C_{N'}^n\cdot\rho_r^n\cdot p(0) \qquad \text{para } n<M} \qquad \textbf{(6)}$$

Operando de igual modo para valores de "n" iguales o mayores a M, tendremos que la expresión de la probabilidad será:

$$\boxed{p(n)=\frac{n!}{M!\cdot M^{n-M}}\cdot\frac{N'!}{(N'-n)!\cdot n!}\cdot\rho_r^n\cdot p(0)}$$

es decir:

$$\boxed{p(n)=\frac{n!}{M!}\cdot\frac{M^M}{M^n}\cdot C_{N'}^n\cdot\rho_r^n\cdot p(0) \qquad \text{para } M\le n\le N'} \qquad \textbf{(7)}$$

Para hallar el valor de p(0), sabemos que

$$\sum_0^{N'}p(n)=1$$

Entonces:

$$\sum_0^{M-1}C_{N'}^n\cdot\rho_r^n\cdot p(0)+\sum_M^{N'}C_{N'}^n\cdot\frac{n!}{M!}\cdot\frac{M^M}{M^n}\cdot\rho_r^n\cdot p(0)=1$$

y, por lo tanto:

$$p(0)=\frac{1}{\sum_0^{M-1}C_{N'}^n\cdot\rho_r^n+\sum_M^{N'}C_{N'}^n\cdot\frac{n!}{M!}\cdot\frac{M^M}{M^n}\cdot\rho_r^n} \qquad \textbf{(8)}$$

Reemplazando la expresión (8) de p(0) en (6) y (7) tendremos la expresiones generales de p(n).

La probabilidad de esperar D, estará dada por:

$$D=p(M\le n<N')=\sum_M^{N'-1}C_{N'}^n\cdot\frac{n!}{M!}\cdot\frac{M^M}{M^n}\cdot\rho_r^n\cdot p(0)$$

Determinación de L:

La longitud del sistema es una variable aleatoria cuya media (L) es el valor esperado de que en el sistema haya "n" clientes. Es decir, su expresión en función de las probabilidades calculadas será:

$$L=\sum_0^{N'}n\cdot p(n)=\sum_0^{M-1}n\cdot p(n)+\sum_M^{N'}n\cdot p(n)=\sum_0^{M-1}n\cdot C_{N'}^n\cdot\rho_r^n\cdot p(0)+\sum_M^{N'}n\cdot C_{N'}^n\cdot\frac{n!}{M!}\cdot\frac{M^M}{M^n}\cdot\rho_r^n\cdot p(0)$$

Por su parte, el porcentaje de clientes que se encuentra en el sistema está dado por la relación $\frac{L}{N'}$.

Determinación de L_C:

La longitud de la cola es una variable aleatoria cuya media es la esperanza matemática de que haya n-M clientes en cola (ya que hay M canales).

$$L_C=\sum_M^{N'}(n-M)\cdot p(n)=\sum_M^{N'}(n-M)\cdot C_{N'}^n\cdot\frac{n!}{M!}\cdot\frac{M^M}{M^n}\cdot\rho_r^n\cdot p(0)$$

El porcentaje de clientes que se encuentra esperando en la cola está dado por la relación entre la longitud promedio de cola y el tamaño de la población, es decir:

$$\frac{L_C}{N'}$$

Determinación de H:

La expresión del número promedio de canales activos en función de las probabilidades de estado es la siguiente:

$$H=\sum_{1}^{M-1} n\cdot p(n)+\sum_{M}^{N'} M\cdot p(n)=\sum_{1}^{M-1} n\cdot C_{N'}^{n}\cdot \rho_r^n \cdot p(0)+\sum_{M}^{N'} M\cdot C_{N'}^{n}\cdot \frac{n!}{M!}\cdot\frac{M^M}{M^n}\cdot \rho_r^n\cdot p(0)$$

La cantidad promedio de canales atendiendo, es decir el número promedio de clientes que se encuentra atendiéndose está dado por la relación

$$\frac{H}{N'}$$

Por su parte, el porcentaje de actividad de cada canal es

$$PA=\frac{H}{M}$$

Determinación de J:

La expresión del número promedio de usuarios que se encuentran fuera del sistema es:

$$J=\sum_{0}^{N'}(N'-n)\cdot p(n)=\sum_{0}^{N'} N'\cdot p(n)-\sum_{0}^{N'} n\cdot p(n)=N'-L$$

Esto es así debido a que el número total de clientes (N') debe ser igual al número promedio de clientes que se encuentra fuera del sistema (J) más el número promedio de clientes que se encuentra dentro del sistema (L).

Finalmente, el porcentaje de clientes que se encuentra fuera del sistema está dado por la relación:

$$\frac{J}{N'}$$

Consideraciones del estado de régimen permanente:

La tasa promedio de ingreso de clientes al sistema $\bar{\lambda}$, está dada por la expresión

$$\bar{\lambda}=\sum_{0}^{N'}\lambda_n\cdot p(n)$$

pero como $\lambda_n=(N'-n)\cdot\lambda_r \quad \forall n$, tendremos que:

$$\bar{\lambda}=\sum_{0}^{N'}(N'-n)\cdot\lambda_r\cdot p(n)=\sum_{0}^{N'} N'\lambda_r\cdot p(n)-\sum_{0}^{N'} n\cdot\lambda_r\cdot p(n)=$$
$$=N'\lambda_r-L\cdot\lambda_r=(N'-L)\cdot\lambda_r=J\cdot\lambda_r$$

Por su parte, la tasa promedio de egreso de clientes del sistema $\bar{\mu}$, está dada por la expresión

$$\bar{\mu}=\sum_{1}^{M-1} n\cdot\mu_n p(n)+\sum_{M}^{N'} M\cdot\mu\cdot p(n)=\mu\cdot H$$

Si el sistema está en equilibrio tendremos que:

$$J\cdot\lambda_r=\mu\cdot H$$

$$J=\frac{H}{\rho_r}$$

Determinación de W_C

El tiempo medio promedio de espera en cola de un cliente está dado por la relación entre la longitud promedio de la cola (L_C) y el flujo de clientes que circula por la cola $\bar{\lambda}$ (o $\bar{\mu}$):

$$W_C=\frac{L_C}{\bar{\lambda}}=\frac{L_C}{J\cdot\lambda_r}$$

Determinación de W

El tiempo promedio de permanencia en el sistema es igual al tiempo promedio de espera en cola más el tiempo de promedio de atención:

$$W=W_C+T_S$$

Por supuesto que esta variable también se puede calcular a partir de la ecuación de Little:

$$W=\frac{L}{\bar{\lambda}}=\frac{L}{J\cdot\lambda_r}$$

Utilización de las tablas de Peck & Hazelwood

Las fórmulas que se deducen de las expresiones arriba indicadas son muy complejas, por lo que su utilización no es conveniente desde el punto de vista práctico.

Si el tamaño de la población N' es relativamente chico, se puede formular el modelo a partir de la ecuación de estado y resolver rápidamente.

En cambio, cuando N' es relativamente grande, tanto en sistemas de un solo canal como en sistemas de canales múltiples en paralelo, conviene utilizar las tablas propuestas por L.G. Peck y R. N. Hazelwood (*"Finite Queueing Tables"*, John Wiley & Sons, Inc., 1958). Las tablas son muy voluminosas, por lo que se anexa en este estudio solamente un par de ejemplos (para N'= 10 y para N' = 50).

Estas tablas definen dos factores: el factor de servicio (X) y el factor de eficiencia (F), cuyas expresiones son:

$$X = \frac{T_S}{T_S + U}$$

$$F = \frac{T_S + U}{T_S + U + W_C}$$

Por su parte, siendo $N' = J + L_C + H$, se demuestra que:

$H = F \cdot N' \cdot X$

$J = F \cdot N' \cdot (1-X)$

$L_C = (1-F) \cdot N'$

Para utilizar las tablas, se ingresa en primer lugar con N', luego con X y finalmente con M, pudiéndose encontrar los valores de la probabilidad de esperar (D) y el del factor de eficiencia (F).

Una vez calculado F, se puede determinar rápidamente (con las expresiones arriba indicadas) los valores del tiempo promedio de espera en cola de un cliente (W_C), de la cantidad promedio de canales activos o número promedio de clientes atendiéndose (H), el número promedio de clientes fuera del sistema (J) y la longitud promedio de la cola (L_C)

A partir de L_C, se puede calcular $L = L_C + H$.

Finalmente, con el valor de W_C se puede calcular $W = W_C + T_S$.

Supongamos que para un sistema con una población de 10 clientes, hay 2 canales con un tiempo medio de atención es de 2 horas, y que el tiempo medio afuera del sistema de un cliente es de 8 horas.

El valor de X para este ejemplo es 0,20. En consecuencia se ingresa en la tabla correspondiente a N'= 10, tal como se puede observar en la porción de tabla expuesta a continuación.

Se debe ubicar el valor de X = 0,20. Para este valor hay definidos diferentes números de canales M. Se selecciona el "M" correspondiente al ejemplo (en este caso 2) y se leen, entonces, los valores de la probabilidad de esperar (69,2%) y el factor de eficiencia (85,4%).

Una vez hallados estos valores, se reemplaza F en las fórmulas arriba enunciadas para completar el cálculo de las variables.

X	M	D	F
0,190	5	0,016	0,999
	4	0,078	0,995
	3	0,269	0,973
	2	0,654	0,873
	1	0,982	0,522
0,200	5	0,020	0,999
	4	0,092	0,994
	3	0,300	0,968
	2	0,692	0,854
	1	0,987	0,497
0,210	5	0,025	0,999
	4	0,108	0,992
	3	0,333	0,961
	2	0,728	0,835
	1	0,990	0,474

Así, para este ejemplo tendremos que:

$W_C = 1,7096$ h

$W = 3,7096$ h

$H = 1,709$ cl

$J = 6,832$ cl

$L_C = 1,457$ cl

$L = 3,166$ cl

$\bar{\mu} = 0,854 \, {}^{cl}/_{h}$

ANÁLISIS ECONÓMICO:

Un objetivo típico a optimizar en este tipo de sistemas es la determinación del número óptimo de canales a disponer con el fin de minimizar el costo que resulta de contemplar el lucro cesante total por clientes que se encuentran dentro del sistema (costo de permanencia) y el costo total de los canales dispuestos, cuya formulación matemática sería:

$$Z = c_e \cdot L + c_C \cdot M \quad \rightarrow \quad \text{Min}$$

en donde:

- c_e: Costo derivado de mantener un cliente en el sistema en la unidad de tiempo.
- c_c: Costo por unidad de tiempo de cada canal.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN:

Ejemplo 4.3:

En un sistema P/P/3/(10), cada cliente permanece en promedio 4 horas fuera del sistema. La duración media del servicio es de 30 minutos. Determinar:

a. Probabilidad de que todos los canales se encuentren ocupados.
b. Porcentaje de clientes que se encuentran fuera del sistema.
c. Cantidad de clientes que se atienden en el sistema por hora, en promedio.
d. Longitud promedio de la cola.
e. Tiempo de espera promedio de un cliente en cola.
f. Tiempo promedio de permanencia de un cliente dentro del sistema.

Resolución:

$$U = 4 \frac{h}{\text{pedido}} \Rightarrow \lambda_r = 0,25 \frac{\text{pedidos}}{h}$$

$$T_s = 0{,}5 \frac{h}{\text{servicio}}$$

$$\rho_r = \frac{\lambda_r}{\mu} = \frac{0{,}25}{2} = 0{,}125$$

En primer lugar se calcula el factor de servicio X:

$$X = \frac{T_S}{T_S + U} = 0{,}1111 \cong 0{,}11$$

Entrando en las tablas de Peck Hazelwood con N'= 10, X = 0,110 y M = 3:

X	M	D	F
0,110	3	0,072	0,997

se determina que D = 0,072 y F = 0,997. Con estos valores se responden a los interrogantes formulados.

a) La probabilidad de que todos los canales se encuentren ocupados es la probabilidad de que un cliente que arriba tenga que esperar:

$D = 7{,}20\ \%$

b) Porcentaje de clientes que se encuentra fuera del sistema

$J = F \cdot N' \cdot (1\text{-}X) = 8{,}8622$

$PJ = \frac{J}{N'} = 0{,}8862$

c) Cantidad de clientes que se atienden en promedio en el sistema:

$H = F \cdot N' \cdot X = 1{,}1078$

$\overline{\mu} = \mu \cdot H = 2{,}2156$

d) Longitud promedio de la cola

$L_C = (1\text{-}F) \cdot N' = 0{,}03$ cl

e) Tiempo promedio de espera (en h):

$$W_C = \frac{T_S + U}{F} - T_S - U = 0{,}0135$$

f) Tiempo promedio de permanencia:

$W = W_C + T_S = 0{,}5135$ h

Ejemplo 4.4:

Una empresa tiene 5 máquinas idénticas que se traban, en promedio, cada 2 horas (proceso Poisson).

La operación de destrabe y puesta en funcionamiento de las máquinas se puede describir como una variable aleatoria de distribución exponencial y con una media igual a 1 hora. Hay dos operarios que llevan a cabo esta actividad. Cada máquina produce una contribución esperada de $500 por hora.

a. Deducir y calcular las probabilidades asociadas a cada uno de los estados posibles.
b. Determinar L, Lc, H y J.
c. Determinar el factor de servicio, el factor de eficiencia y el porcentaje de actividad de cada operario.
d. Calcular el lucro cesante esperado.

Resolución:

$$\rho_r = \frac{\lambda_r}{\mu} = \frac{0{,}5}{1} = 0{,}5$$

a) Cálculo de las probabilidades:

$$\lambda_n = (N'-n) \cdot \lambda_r = \begin{cases} 5 \cdot \lambda_r & \text{para } n = 0 \\ 4 \cdot \lambda_r & \text{para } n = 1 \\ 3 \cdot \lambda_r & \text{para } n = 2 \\ 2 \cdot \lambda_r & \text{para } n = 3 \\ 1 \cdot \lambda_r & \text{para } n = 4 \\ 0 & \text{para } n = 5 \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} 0 & \text{para } n = 0 \\ \mu & \text{para } n = 1, \\ 2 \cdot \mu & \text{para } n = 2, 3, 4 \text{ y } 5 \end{cases}$$

Reemplazando en la ecuación de estado de régimen permanente, tendremos que

- para n = 1 $\Rightarrow$ $p(1) = 5 \cdot \rho_r . p(0)$
- para n = 2 $\Rightarrow$ $p(2) = 10 \cdot \rho_r^2 \cdot p(0)$
- para n = 3 $\Rightarrow$ $p(3) = 15 \cdot \rho_r^3 \cdot p(0)$
- para n = 4 $\Rightarrow$ $p(4) = 15 \cdot \rho_r^4 \cdot p(0)$
- para n = 5 $\Rightarrow$ $p(5) = 7{,}5 \cdot \rho_r^5 \cdot p(0)$

Además

$$p(0) + p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) = 1$$

Luego:

$$p(0)+5\cdot\rho_r\cdot p(0)+10\cdot\rho_r^2\cdot p(0)+15\cdot\rho_r^3\cdot p(0)+15\cdot\rho_r^4\cdot p(0)+7{,}5\cdot\rho_r^5\cdot p(0)=1$$

por lo que

$$p(0)=\frac{1}{1+5\cdot\rho_r+10\cdot\rho_r^2+15\cdot\rho_r^3+15\cdot\rho_r^4+7{,}5\cdot\rho_r^5}=0{,}1105$$

Entonces:

$$p(1)=0{,}2763$$
$$p(2)=0{,}2763$$
$$p(3)=0{,}2073$$
$$p(4)=0{,}1036$$
$$p(5)=0{,}0260$$

b) La longitud del sistema, la longitud de la cola, el número promedio de canales en actividad y el número promedio de máquinas funcionando (es decir, fuera del sistema) son:

$$L=0\cdot p(0)+1\cdot p(1)+2.p(2)+3\cdot p(3)+4\cdot p(4)+5\cdot p(5)=1{,}9948$$

$$L_c=1.p(3)+2\cdot p(4)+3\cdot p(5)=0{,}4922$$

$$H=L-Lc=1{,}5026$$

$$J=N'-L=3{,}0052$$

c) El factor de servicio, el número promedio de máquinas que se reparan por hora, el tiempo medio de espera en cola, el factor de eficiencia y el porcentaje de actividad de cada operario son:

$$X=\frac{T_S}{T_S+U}=0{,}3333$$

$$\overline{\mu}=\mu\cdot H=1{,}5026$$

$$W_C=\frac{L_C}{\overline{\mu}}=0{,}3276$$

$$F=\frac{T_S+U}{T_S+U+W_C}=0{,}9016$$

$$\psi=\frac{H}{M}=0{,}7513$$

d) El lucro cesante esperado es:

$$LC=500\cdot L=997{,}41\frac{\$}{h}$$

CAPÍTULO 5

SISTEMAS COMPLEJOS Y REDES DE COLAS

1. RESOLUCIÓN DE MODELOS DE COLAS COMO CADENAS MARKOVIANAS

Los sistemas de colas constituyen cadenas de Markov regulares e irreductibles. El vector de distribución de estados en régimen permanente de una cadena se puede obtener calculando una potencia grande de la matriz de transición, o bien mediante la ecuación de Chapman-Kolmogorov,

$$V^{i+1}=V^i\cdot P$$

en donde V^i es el vector de distribución de estados para un paso "i" del proceso y P es la matriz de probabilidades de transición de un paso a otro. Es obvio que, en régimen permanente, será $V^i=V^{i+1}$, por lo que la expresión de arriba quedará:

$$V=V\cdot P$$

Además, la suma de las probabilidades de todos los estados debe ser igual a 1:

$$\sum p(n)=1$$

Es decir, las probabilidades de cualquier sistema de colas pueden calcularse resolviendo el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases}[p(1)\quad p(2)\quad p(3)\quad .....\quad p(N)]\cdot P=[p(1)\quad p(2)\quad p(3)\quad .....\quad p(N)]\\ p(1)+p(2)+p(3)+...+p(N)=1\end{cases}$$

en donde una de las ecuaciones del producto matricial debe eliminarse.

Tomemos como ejemplo un sistema P/P/1/2. Los estados posibles son n = 0, 1 y 2.