MODELOWANIE DETERMINISTYCZNE

Przydatne materiały do projektu

1. numpy – algebra liniowa,
2. matplotlib – podstawowe wizualizacje, w ramach rozszerzenia matplotlib.animation.
3. Jupyter Notebooks – do tworzenia interaktywnych notatek i prezentacji kodu.
4. Overleaf – darmowy edytor LaTeX online.
5. Notatniki na mojej stronie.
6. GitHub – repozytoria i wersjonowanie kodu. Dla osób nie lubiących pracować w terminalu polecam GitHub Desktop

1 Opis projektu

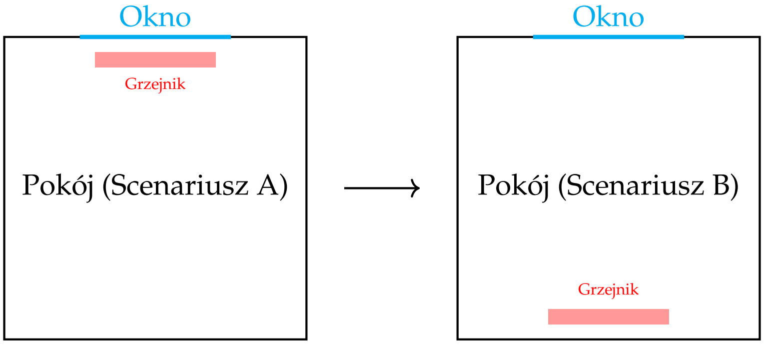
W ramach tego projektu zmierzycie się z konkretnym problemem inżynierskim: jak efektywnie ogrzać mieszkanie, minimalizując koszty i maksymalizując komfort? Wykorzystacie równanie ciepła i metody numeryczne, aby stworzyć symulację zachowania temperatury w różnych układach pomieszczeń. Celem jest sprawdzenie, czy popularne mity dotyczące ogrzewania (np. lokalizacja kaloryfera, zakręcanie grzejników przy wyjściu) mają sens fizyczny, czy są jedynie przyzwyczajeniami.

1.1 Problemy badawcze

Proponujemy następujące zagadnienia związane z ciepłem. **Proszę wybrać co najmniej dwa problemy do rozwiązania.**

1. Czy grzejnik musi być pod oknem?

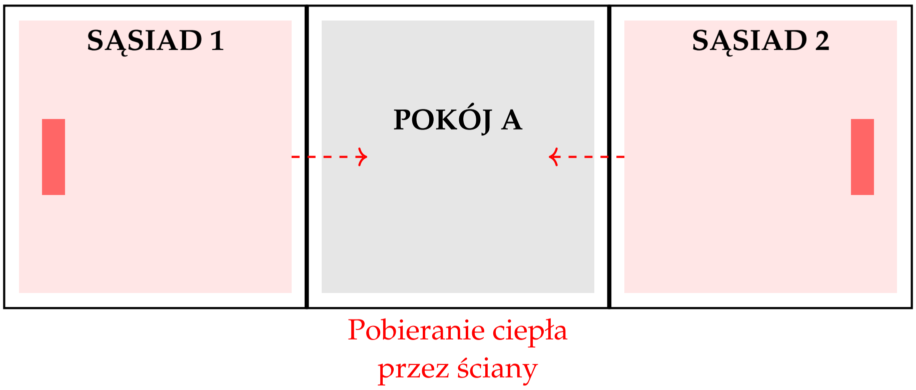
W większości polskich domów możemy zauważyć, że kaloryfery znajdują się w bezpośrednim sąsiedztwie okien. Sprawdź co się stanie jeżeli zmienisz ich położenie (np. na przeciwległą ścianę). Ten eksperyment sugerujemy przeprowadzić na schemacie jednopokojowym.



Wskazówka: *Zbadaj funkcję odchylenia standardowego temperatury* $\sigma_u := \sigma_u(r)$ *w zależności od odległości* r *grzejnika od okna. Zastanów się o czym mówi nam odchylenie standardowe i dlaczego akurat* *ta wielkość może być przydatna? Zastanów się nad sposobami wizualizacji $\sigma_u := \sigma_u(r, d)$, gdzie d to wielkość charakteryzująca rozmiar grzejnika. Jak wyglądają te wyniki dla średniej temperatury μ_u?*

2. Pasożytnictwo cieplne - nie grzeję, bo robi to już sąsiad

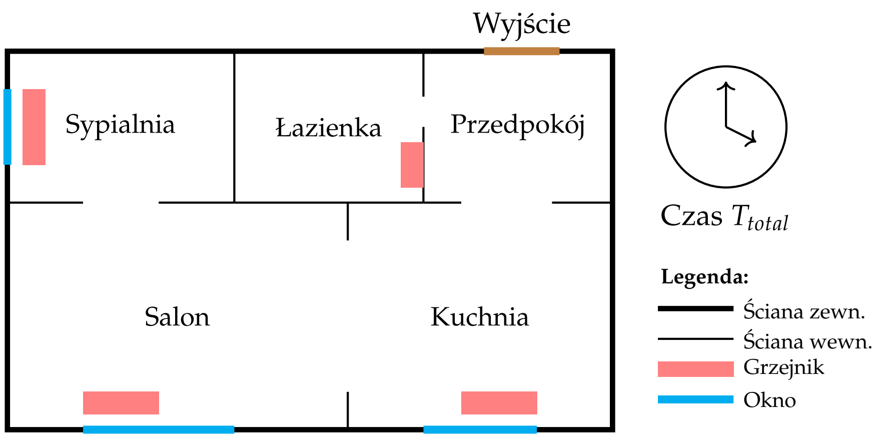
"Pasożytnictwo cieplne" to praktyka polegająca na pobieraniu ciepła od sąsiadów bez używania własnych grzejników. Zadajemy sobie pytanie jak takie zachowania wpływają na zużycie energii osób grzejących oraz efektywną temperaturę otrzymywaną w mieszkaniu osoby pośrodku. Ten eksperyment sugerujemy przeprowadzić na schemacie trzypokojowym.



Wskazówka: *Porównaj całkowite zużycie energii $\Psi := \Psi(T)$ potrzebne do utrzymania zadanej temperatury w pokoju A w dwóch scenariuszach: (1) sąsiedzi grzeją u siebie, (2) sąsiedzi mają wyłączone grzejniki. W obu przypadkach zbadaj różne strategie ogrzewania pokoju A.*

3. Czy wyłączać grzejniki przed wyjściem z domu?

W trosce o finanse, wielu z nas wyłącza ogrzewanie przed wyjściem z domu. Jednakże wracając, musimy na nowo ograć mieszkanie. Wykonaj eksperyment, w którym sprawdzisz czy bardziej opłaca się zostawić odkręcony kaloryfer (na jakim pokrętle?) czy może ograć mieszkanie na nowo. Rozważ przypadki, gdy na dworze jest bardzo zimno, zimno i chłodno (zdefiniuj co to znaczy). Dla tego eksperymentu musisz stworzyć szkic mieszkania / domu, który chcesz zbadać (możesz np. zrobić swoje mieszkanie, przykładowy schemat poniżej).



Wskazówka: *Zdefiniuj stały przedział czasu T_{total} obejmujący wyjście z domu i powrót. Porównaj wartość funkcjonału energii $\Psi(T_{total})$ dla strategii ciągłego grzania oraz strategii "wychładzanie + dogrzewanie". Zwróć uwagę nie tylko na energię, ale też na czas potrzebny do odzyskania komfortu cieplnego po powrocie. Warto zwizualizować zmianę średniej temperatury w istotnych dla Ciebie pomieszczeniach (np. sypialnia, salon).*

4. Wymyśl swój własny problem

Jeżeli przychodzi Ci do głowy ciekawe pytanie to zachęcam do wymyślenia swojego własnego eksperymentu i opisania wyników.

1.2 Wstęp teoretyczny - ewolucja temperatury w pomieszczeniu

Klasyczne podejście do rozwiązywania zagadnień z przewodnictwem cieplnym prowadzi do następującego, jednorodnego równania różniczkowego cząstkowego opisującego zmianę temperatury $u := u(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u = \alpha(\partial_{xx} + \partial_{yy})u, \tag{1}$$

gdzie $\alpha > 0$ to współczynnik przewodnictwa cieplnego. Jednakże, zauważmy że model ten nie uwzględnia wkładu wynikającego z ogrzewania pomieszczenia grzejnikiem. Aby wyznaczyć ten wkład, skorzystamy z definicji mocy grzejnika P. Mianowicie, wyrazimy ją jako ilość ciepła (oddanego) Q w stosunku do czasu grzania Δt

$$P = \frac{Q}{\Delta t} \tag{2}$$

Z drugiej strony (z bilansu cieplnego) wiemy, że do zmiany temperatury (o wartość $\delta u = u(x, t + \Delta t) - u(x,t)$) obszaru o rozmiarze A wypelnionego powietrzem o gęstości ρ, cieple wlaściwym c, masie m, musimy oddać ciepło Q o wartości

$$Q = m \cdot c \cdot \delta u = A \cdot \rho \cdot c \cdot \delta u \tag{3}$$

Wstawiając (3) do (2) otrzymujemy dla małych wartości Δt

$$P = \rho \cdot A \cdot c \cdot \frac{\delta u}{\Delta t} = \rho \cdot A \cdot c \cdot \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x,t)}{\Delta t} \approx \rho \cdot A \cdot c \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \tag{4}$$

Teraz wystarczy przerzucić odpowiednie wyrazy w (4) na lewą stronę aby dowiedzieć się, że zmiana temperatury przez ogrzewanie grzejnikiem spełnia

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{P}{\rho \cdot A \cdot c} \tag{5}$$

Zauważmy, że gęstość powietrza ρ przy stałym ciśnieniu p zależy jawnie od temperatury $\rho = \frac{p}{ru}$, gdzie przez r oznaczyliśmy indywidualną stałą gazową dla suchego powietrza. Ostatecznie, po wstawieniu do równania (5) daje nam to

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{P \cdot r}{p \cdot A \cdot c} u \tag{6}$$

Oczywiście równanie (6) dobrze opisuje sytuację tylko w miejscu, w którym mamy grzejnik. Ponadto w większości współczesnych kaloryferów znajduje się termostat - urządzenie, którego celem jest wyłączenie ogrzewania, gdy tylko średnia temperatura w pomieszczeniu osiągnie ustalony poziom. Aby połączyć opisy (1) oraz (6) z poprzednią uwagą możemy napisać równanie

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \alpha \Delta u + u \cdot \frac{P \cdot r}{p \cdot A \cdot c} \Theta(x, u), \tag{7}$$

gdzie Θ to funkcja typu indykator - wynosi 0 jeżeli w danym punkcie x nie znajduje się grzejnik lub gdy temperatura w pomieszczeniu osiągnęła poziom graniczny, w przeciwnym wypadku przyjmuje wartość 1.

1.3 Wstęp teoretyczny - co się dzieje na ścianach i oknach?

Aby wyznaczyć warunek brzegowy, musimy rozważyć bilans przepływu ciepła na granicy ośrodka. Zgodnie z *prawem Fouriera*, strumień ciepła Q_{wew} dopływający do wewnętrznej powierzchni ściany lub okna z wnętrza pokoju jest proporcjonalny do gradientu temperatury w kierunku normalnym do brzegu:

$$Q_{wew} = -\alpha \frac{\partial u}{\partial n}, \tag{8}$$

gdzie α to przewodność cieplna powietrza, a n to wektor normalny skierowany na zewnątrz.

Ponownie, z bilansu cieplnego, ilość ciepła Q_{zew} uciekającego z pomieszczenia (przez ścianę albo okno o lokalnej masie m i cieple właściwym c) jest proporcjonalna do różnicy temperatur między powierzchnią ściany lub okna po jednej stronie (u_1) a temperaturą ściany lub okna po drugiej stronie (u_2):

$$Q_{zew} = m \cdot c \cdot (u_1 - u_2) =: \lambda(u_1 - u_2), \tag{9}$$

gdzie λ to współczynnik przenikania ciepła przez ścianę lub okno (zależący od jej grubości i materiału izolacyjnego).

Z zasady zachowania energii, strumień dopływający do ściany musi być równy strumieniowi przez nią przenikającemu ($Q_{wew} = Q_{zew}$). Otrzymujemy zatem równość:

$$-\alpha \frac{\partial u}{\partial n} = \lambda(u_1 - u_2). \tag{10}$$

Przekształcając to równanie tak, aby po lewej stronie otrzymać pochodną normalną, dostajemy jawną postać warunku brzegowego:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\lambda}{\alpha}(u_1 - u_2). \tag{11}$$

2 Założenia merytoryczne projektu

2.1 Analiza matematyczno-fizyczna

Rozpatrujemy następujące zagadnienie przewodnictwa cieplnego w domu opisanym przez ograniczony, spójny obszar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u + f_i(x,u), & x \in R_i,\ t \in [0,T], \quad i \in \{1,\dots,N_{rooms}\} & (12)\\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = g_i(x,t,u), & x \in W_i,\ t \in [0,T], \quad i \in \{1,\dots,N_{windows}\} & (13)\\
\dfrac{\partial u}{\partial n} = h_i(x,u), & x \in \mathcal{W}_i,\ t \in [0,T], \quad i \in \{1,\dots,N_{walls}\} & (14)\\
u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. & (15)
\end{cases}
$$

gdzie:

- $u := u(x,t)$ to temperatura (wyrażona w Kelwinach) w punkcie $x \in \Omega$ i czasie $t \in [0,T]$. Zakładamy, że temperatura w mieszkaniu podlega dobrze znanemu równaniu przewodnictwa cieplnego (12) ze współczynnikiem α. Zauważmy, że ostatnie równanie (15) oznacza, iż u_0 to początkowy rozkład temperatury w mieszkaniu.

- Obszar Ω rozkłada się na rozłączne zbiory: R_i - pokoje, W_i - okna, $\mathcal{W}_i$ - ściany. W szczególności

$$
\Omega = \left(\bigcup_{i\in\{1,\dots,N_{rooms}\}} R_i \right) \cup \left(\bigcup_{i\in\{1,\dots,N_{windows}\}} W_i \right) \cup \left(\bigcup_{i\in\{1,\dots,N_{walls}\}} \mathcal{W}_i \right)
$$

- Dodatnie liczby naturalne $N_{rooms}, N_{windows}, N_{walls}, N_{radiators}$ oznaczają kolejno ilości pokoi, okien, ścian i grzejników.

- Wyrażenie $f_i := f_i(x,u)$ jest źródłem ciepła (grzejnik, farelka). Oznaczamy zbiór strategii: $S = \{S_1, S_2, \dots, S_{N_{radiators}}\}$ - to znaczy zestaw temperatur odpowiadających zakresom dla ustalonych wartości na„pokrętełach” grzejnika. W szczególności będziemy modelować ciepło dostarczane przez grzejnik f_i jako funkcję daną jawnym wzorem poniżej:

$$
f_i(x,u) = \begin{cases} u \cdot \frac{P\cdot r}{p\cdot|\mathcal{R}_i|\cdot c} & x \in \mathcal{R}_i, \quad \frac{1}{|R_i|}\int_{R_i} u(x,t)\,dx \le S_i \\ 0 \end{cases}
$$

  Oznaczając przez $\mathcal{R}_i \subset R_i$ obszar umiejscowienia grzejnika (o mocy P - zakładamy, że wszystkie grzejniki w domu mają tę samą moc) w pokoju R_i możemy zauważyć, że powyższa definicja oznacza tylko tyle, iż ciepło jest produkowane tylko i wyłącznie dla $x \in \mathcal{R}_i$ (ciepło jest „produkowane” tylko tam gdzie znajdują się grzejniki) i tylko wtedy, gdy średnia temperatura w pokoju R_i jest poniżej ustalonej (przez pokrętło) temperatury granicznej S_i.
  UWAGA: Jeżeli w danym pokoju nie ma grzejnika to $f_i \equiv 0$.

- Poprzez równania (13) modelujemy temperaturę na oknach. Zwróc uwagę, że robiąc pewne założenia na materiał, z którego jest wykonane okno, funkcje g_i mogą zostać opisane dokładnie tak jak we wstępie teoretycznym. Odpowiednie stałe można znaleźć w internecie.

- Poprzez równania (14), modelujemy wymianę ciepła przez ściany. Zwróć uwagę, że robiąc pewne założenia na materiał, z których jest wykonana ściana, funkcje h_i mogą zostać opisane dokładnie tak jak we wstępie teoretycznym. Odpowiednie stałe można znaleźć w internecie.

- Do zmierzenia zużycia energii polecamy funkcję zliczającą ciepło wydzielone podczas eksperymentu
$$\Psi(t) = \int_0^t \int_\Omega f(x, u(x,s))\, dx\, ds$$
Zauważmy, że Ψ jest funkcją niemalejącą. Za ostateczny wynik eksperymentu uznajemy wartość $\Psi(T)$.
UWAGA: Wewnętrzną całkę dyskretyzujemy za pomocą sumy, `np.sum()`, przemnożonej przez kwadrat kroku h_x^2. Zewnętrzną całkę dyskretyzujemy za pomocą sumy przemnożonej przez krok h_t.

- Do analizy średniej temperatury definiujemy:
$$\mu_u(t) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u(x,t)\, dx.$$
UWAGA: Tutaj proszę przejść na stopnie Celsjusza, a następnie skorzystać choćby z `np.mean()`.

- Do analizy równomierności rozkładu temperatury (komfortu cieplnego) definiujemy odchylenie standardowe temperatury w chwili t:
$$\sigma_u(t) = \sqrt{\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \left(u(x,t) - \mu_u(t)\right)^2\, dx}.$$
UWAGA: Tutaj proszę przejść na stopnie Celsjusza, a następnie skorzystać choćby z `np.std()`.

- Wszystkie wspomniane wielkości fizyczne należy znaleźć w internecie / tablicach fizycznych.

2.2 Analiza numeryczna

- Jak już zwróciliśmy uwagę w poprzedniej części, traktujemy dom Ω jako rozłączną sumę mnogościową jego poszczególnych elementów (pokoi R_i, okien W_i, ścian $\mathcal{W}_i$). W celu dyskretyzacji możemy przyjąć że cały badany obszar Ω jest prostokątem. Wtedy jako dyskretyzację przestrzenną przyjmujemy siatkę równoodległą z krokiem $h_x > 0$.

- Dla każdego z eksperymentów ustalamy indywidualnie czas ewolucji T. Oś czasu dyskretyzujemy za pomocą siatki równoodległej z krokiem $h_t > 0$.

- W celu rozwiązania równania (12) sugerujemy posługiwać się niejawnym schematem numerycznym wynikającym z metody różnic skończonych (finite difference method). To umożliwia branie większego kroku czasowego h_t i w efekcie szybszy czas wykonywania eksperymentów.

- Przeprowadzenie niektórych eksperymentów może być bardzo trudne, albo wręcz niemożliwe korzystając z wielokrotnie zagnieżdżonych pętli `for`, dlatego sugerujemy wektoryzację obliczeń (tj. działania macierzowe).

- Każdy eksperyment powinien być poprzedzony analizą błędu (bądź jego indykatora) w danym frameworku. Na podstawie odpowiednich wykresów należy wybrać kroki h_x, h_t.

3 Założenia techniczne projektu

- Produktami końcowymi projektu są: *repozytorium (GitHub)* oraz *raport (pdf)* lub *aplikacja webowa (Streamlit)*

- W repozytorium powinny się znaleźć następujące elementy
  - **data/** - folder zawierający zestaw wszystkich danych fizycznych użytych do przeprowadzenia poszczególnych eksperymentów numerycznych. Preferowany format danych to .csv lub .json.
  - **.gitignore** - plik tekstowy, który mówi systemowi kontroli wersji Git, które pliki i foldery ma ignorować (nie śledzić) w danym repozytorium, np. pliki tymczasowe, logi, artefakty kompilacji, pliki konfiguracyjne (jak hasła), czy dane użytkownika. Kilka przydatnych templatek można znaleźć tutaj.
  - **notebooks/** - folder zawierający serię notatników .ipynb z wynikami eksperymentów. W szczególności powinny to być głównie wywołania odpowiednich funkcji i klas z pipeline/ wraz z prostym opisem co robią poszczególne komórki kodu.
  - **pipeline/** - folder zawierający serię skryptów .py, do których będziesz odwoływać się w notatnikach. W szczególności skrypty te powinny zostać napisane obiektowo / funkcyjnie. Ty decydujesz ile klas będzie najlepiej użyć. Możesz na przykład stworzyć jedną klasę z większą liczbą funkcji lub kilka mniejszych klas, które będą zarządzane przez tzw. „menedżera" (czyli inną klasę do koordynacji). Dla lepszej czytelności kodu pamiętaj, aby używać docstringów (jeżeli nie wiesz co to, to zapraszam pod ten link).
  - **readme.md** - opis repozytorium, w którym zawarte będą najważniejsze informacje o projekcie (krótki opis merytoryczny, struktura (drzewko) projektu, jak pobrać i odpalić kod z repozytorium, zawartość poszczególnych elementów repozytorium). Polecam przeczytać kilka rad od użytkowników GitHuba, np pod tym linkiem, albo tutaj od code camp.
  - **requirements.txt** - plik tekstowy, który umożliwi automatyczne zainstalowanie wymaganych paczek do odpalenia projektu. Więcej na ten temat w linkach: link od pip, link od jetbrains oraz link od code camp.

- Raport powinien być napisany estetycznie, czytelnie i prostym językiem. W szczególności wnioski powinny być formułowane w taki sposób, aby zrozumiały je osoby nie zagłębione w temat. Sugerujemy aby raport miał następującą strukturę:
  - **Opis praktyczny eksperymentów** - w tej sekcji należy zaprezentować *pytania badawcze*, na które odpowiada przygotowany raport. Dla każdego pytania trzeba napisać *krótki opis metody*, której chcemy użyć, tzn. jakie wielkości fizyczne będziemy mierzyć i dlaczego właśnie te? Jakie są intuicyjne wyniki? Jest to dobre miejsce do przedstawienia grafik pokazujących przyjęty framework (np. *schematy rozważanych układów pomieszczeń z zaznaczonymi grzejnikami, oknami* - może być rysunek w paint). Dla każdego opisu należy również wygenerować i uzupełnić *tabelę użytych wielkości fizycznych* (nazwa stałej fizycznej, wartość oraz link do źródła). Dla każdego eksperymentu określ jaką temperaturę zewnętrzną przyjmujesz, warto zaprezentować dane na wykresie.
  - **Opis matematyczny eksperymentów** - w tej sekcji należy dokładnie opisać użyty *model matematyczny* (równania ewolucji, warunki brzegowe), *schemat numeryczny* (metoda

dyskretyzacji, metoda rozwiązywania problemu dyskretnego).

– **Analiza błędu numerycznego** - w tej sekcji należy bardzo precyzyjnie opisać jaką metrykę błędu (indykatora błędu) przyjmujesz. Dodatkowo jest to miejsce w którym należy zaprezentować wyniki analizy i na ich podstawie wybrać parametry dyskretyzacji

– **Wyniki eksperymentów** - w tej sekcji załączamy prezentacje wyników. Oczekujemy, że wykresy utrzymają odpowiedni poziom estetyki i prostoty (customizacja wykresów oraz jasność przekazu). W przypadku dużej ilości grafik zalecamy korzystanie z galerii wykresów.

– **Podsumowanie i wnioski** - w tej sekcji należy napisać krótkie podsumowanie otrzymanych wyników. Wysoce preferowaną formą jest tabela wraz z krótkim opisem tekstowym.

- Korzystanie ze sztucznej inteligencji nie jest zabronione, ale proszę robić to z głową. W przypadku wykorzystywania sztucznej inteligencji bardzo dobrym pomysłem jest umieszczenie krótkiej notatki do czego została ona użyta. W szczególności prowadzący rezerwują sobie prawo do rozmowy na temat zrozumienia oddanego kodu.

4 Punktacja projektu

Dla porządku podajemy również informację o maksymalnej punktacji za wykonanie poszczególnych etapów (szczegółowo określa je prowadzący laboratorium).

1. Część programistyczno-implementacyjna: **max 9 pkt.**
2. Część matematyczno-modelarska: **max 6 pkt.**