Двойное лучепреломление

Цель работы: изучение зависимости показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякопреломляющем кри­сталле; определение главных показателей преломления no — обыкно­венной и ne — необыкновенной волны в кристалле, наблюдение эф­фекта полного внутреннего отражения.

В работе используются: гелий-неоновый лазер, вращающийся сто­лик с неподвижным лимбом, призма из исландского шпата, поляроид.

# **Теоретическое описание**

При падении световой волны на границу изотропной среды в этой среде от границы распространяется одна волна. Если среда анизотропная, то в ней в общем случае возникают две волны, распространяющиеся от границы в разных направлениях и с разными скоростями. Это явле­ние называется двойным лучепреломлением. Оно было открыто Бартолинусом в 1669 г. в кристаллах исландского шпата, призма из которого исследуется в нашей работе.

**Плоские волны в кристаллах.** Фундаментальные уравнения Макс­велла справедливы без всяких изменений и в кристаллических средах. В отсутствие электрических зарядов и токов они имеют вид

**Если среды прозрачны и однородны, то в них могут распространяться плоские монохроматические волны:**

Здесь ω - круговая частота, k— волновой вектор, а амплитуды*, ,*  постоянны. Вектор *,*  совпадает c , так как . В результате несложных вычислений (1) перейдут в

Введем единичный вектор нормали к фронту волны и скорости распространения фронта в направлении этой нормали v. Тогда и предыдущие соотношения перейдут в

Отсюда видно, что векторы*, ,* взаимно перпендикулярны. Значит, плоские волны в кристалле поперечны в отношении векторов и .

C:\Users\Санек\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\Безымянный-1.wmfОднако в общем случае они не поперечны в отношении вектора . В изотропной среде связь между век­тором напряжённости электрического по­ля, и вектором индукции дается ма­териальным уравнением = ε, где ε — постоянная, не зависящая от направле­ния величина, называемая диэлектриче­ской проницаемостью. Для характеристи­ки оптических свойств анизотропной сре­ды требуется девять величин образу­ющих тензор диэлектрической проницае­мости. Благодаря тензорной связи между и направления этих векторов в кристаллах, вообще говоря, не совпадают. Плоскость (,) обладает тем свойством, что перпендикуляр к ней определяет направление вектора Пойнтинга , т.е. направление распространения световых лучей. Четыре вектора , , , лежат в одной плоскости, перпенди­кулярной вектору H. Взаимное расположение этих векторов показано на рис.1.

**Оптически одноосные кристаллы.** Всю совокупность возможных значений тензора диэлектрической проницаемости можно представить при помощи трехосного эллипсоида. Значение диэлектрической прони­цаемости для любого направления выражается длиной радиуса-вектора эллипсоида, проведенного по C:\Users\Санек\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\Безымянный-1.wmfэтому направлению. Три значения диэлек­трической проницаемости ,, соответствующие осям эллипсоида, называются и соответственно , ,- **главными показателями преломления**.

В системе координат, оси которой совпадают с главными осями эл­липсоида, тензор диэлектрической проницаемости приводится к диаго­нальному виду, и проекции векторов и на оси координат связаны простыми соотношениями:

В оптически одноосном кристалле, каковым является исландский шпат, эллипсоид диэлектрической проницаемости представляет собой эллипсоид вращения. В нем оптическая ось совпадает с осью враще­ния эллипсоида диэлектрических проницаемостей. Для главных значе­ний диэлектрических проницаемостей приняты обозначения:

В дальнейшем нам потребуется связь между проекциями векторов ина оптическую ось кристалла и на плоскость, перпендикулярную оси :

Волну, распространяющуюся в одноосном кристалле, мож­но разделить на две линейно поляризованные волны: обыкно­венную, вектор электрической индукции (которой перпен­дикулярен главному сечению, и необыкновенную, с вектором электрической индукции , ле­жащим в главном сечении (рис. 2).

Главным сечением кристалла называется плоскость, в которой лежит оптическая ось кристалла и нормаль к фронту волны.

Рассмотрим вначале обыкно­венную волну, в которой век­тор перпендикулярен главно­му сечению. Тогда , следовательно,.

Кроме того, так как и, то можно записать

Таким образом, для обыкновенной волны материальное уравнение имеет такой же вид, как и в изотропной среде. Найдем с помощью этого уравнения скорость распространения обыкновенной волны и соответ­ствующий показатель преломления. Из (2) имеем

учитывая (4), получим:

Таким образом, скорость распространения обыкновенной волны и ее по­казатель преломления не зависят от направления распространения. У необыкновенной волны вектор не параллелен , и связь между ними сложнее, чем в (4).

Для того чтобы найти скорость распространения и показатель пре­ломления необыкновенной волны, достаточно найти связь меж­ду вектором электрической индукции этой волны , и проекцией на него вектора электрического поля волны. Тогда, подставляя в (2), приходим к соотношениям

формально тождественным с соотношениями для обыкновенной волны. Найдем связь между и , - Для этого разложим векторы и на составляющие, параллельные и перпендикулярные оси кристалла:

Учитывая (4), находим

или

где – угол между оптической осью и волновой нормалью (рис.2):

Таким образом, ε и соответственно скорость распространения и показа­тель преломления необыкновенной волны зависят от угла между опти­ческой осью кристалла и направлением распространения волны.

Выпишем выражение для показателя преломления необыкновенной волны через главные показатели преломления , и угол :

При (6) можно упростить:

## **Двойное лучепреломление в призме из исландского шпата.**

Рассмотрим, как по преломлению лучей в кристаллической призме можноC:\Users\Санек\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\Безымянный-1.wmf определить показатели преломления для обыкновенной и необыкновен­ной волны. В работе исследуется одна из двух призм, составляющих поляризатор (рис. 3).

В исследуемой призме ось кристалла лежит в плоскости, параллель­ной верхней грани призмы, причем она параллельна входной грани приз­мы (длинному катету). При этом в обыкновенной волне вектор пер­пендикулярен верхней грани призмы, а в необыкновенной волне век­тор параллелен верхней грани.

Волну, падающую на входную грань призмы, можно представить в ви­де суммы двух ортогональных линей­но поляризованных волн. Преломление этих двух волн на грани призмы мож­но рассматривать независимо. Волна, в которой вектор направлен верти­кально (перпендикулярно верхней гра­ни и оси кристалла), внутри кристал­ла будет распространяться как обык­новенная. Для этой волны выполняет­ся закон Снеллиуса. Волна, в которой векторнаправлен горизонтально, в кристалле будет распространяться как необыкно­венная. Для этой волны также будет выполняться закон Снеллиуса, но с тем отличием, что показатель преломления призмы для нее будет за­висеть от угла между осью кристалла и волновой нормалью.

C:\Users\Санек\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\Безымянный-1.wmfЗначение показателя преломления и угол, под которым преломилась волна в призме, можно найти, измерив угол падения на входную грань призмы и угол у>2 на выходе призмы (рис. 4). Запишем закон Снелли­уса для одной из волн применительно к первой и второй граням призмы:

Учитывая, что угол преломлениясвязан с углом в меж­ду осью кристалла и волновой нормальюсоотношением , находим и :

Для обыкновенной волны не будет зависеть от угла , а для необык­новенной волны зависимость от должна описываться выражением (6).

Показатель преломления призмы из изотропного материала удобно находить по углу наименьшего отклонения луча от первоначального на­правления. Угол отклонения луча призмой минимален для симметричного хода лучей, т.е. когда . Тогда показатель прелом­ления можно рассчитать по формуле

где — угол наименьшего отклонения.

Если призма не изотропная, то этой формулой, строго говоря, можно воспользоваться только для обыкновенной волны, которая, как это было показано ранее, распространяется так же, как и в изотропной среде. Но если учесть, что угол при вершине призмы мал, и при угле наименьшего отклонения преломлённый луч в призме распространяется под углом к оси кристалла близким к , то в качестве оценки формулу (9) можно использовать для определения .

# Экспериментальная установка.

C:\Users\Санек\AppData\Local\Microsoft\Windows\INetCache\Content.Word\Безымянный-2.wmfСхема экспериментальной установ­ки изображена на рис. 5. Источником излучения служит He-Ne лазер ( мкм). Излучение лазера поляризовано линейно за счет нали­чия брюстеровских окошек в кювете лазера. Направление вектора**** в луче можно изменять с помощью поляроида, установленного на выходе лазера. Исследуемая призма из исландского шпата закреплена в центре поворотного столика с неподвижным лимбом для отсчета углов.

Преломляющий угол А призмы (рис. 4) можно рассчитать, если из­вестны угловые координаты нормалей и к преломляющим (рабо­чим) граням призмы, прилежащим преломляющему углу. Грань, про­тиволежащая преломляющему углу, называется основанием призмы. Штриховкой указано направление оптической оси.

Обычно ход лучей в призме таков, что и падающий, и преломлённый лучи отклоняются от нормалей в сторону основания призмы, при этом углы и считаются положительными. Из рис. 4 можно получить

а угол — отклонение преломлённого луча от первоначального направ­ления — определяется по разности отсчётов на лимбе между точками, куда попадает луч в отсутствие призмы, и точкой, куда попадает пре­ломлённый луч.

# Анализ результатов измерений

## Ошибки отсчётов углов и показателей преломления. Равномерное распределение.

В лабораторной работе измеряются углы отражения луча лазера от большого катета α и углов отклонения , обыкновенной и необыкновенной волны. Зная эти углы, можно вычислить соответствующие показатели преломления. Формула для этих вычислений должна включать в себя только измеряемые величины и константы. Вместо выражения

– угол падения на входную грань призмы,

– угол на выходе из призмы,

– преломляющий угол призмы,

– угол между осью кристалла и волновой нормалью).

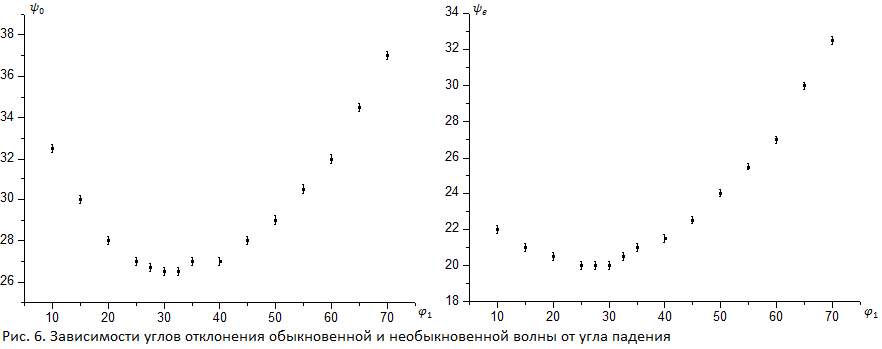
Используя очевидные соотношения (угол равен или ), выпишем рабочую формулу:

По этой формуле программа обработки данных вычисляет зависимости показателей преломления и от угла падения.

Все углы в выражении (11) измеряются с ошибками. Мы будем считать, что ошибки отсчётов углов , , одинаковы, независимы между собой. Ошибка определяется точностью отсчёта угла. Расстояния между делениями в составляет 2мм. Не составляет труда определить координату лазерного пятна с ошибкой 1мм, что соответствует . Ошибка преломляющего угла призмы A вычисляется программой при обработке данных соответствующего эксперимента. Обычно .

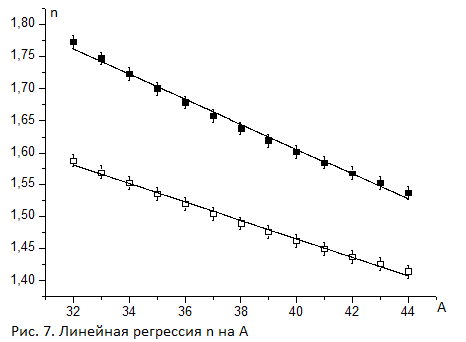
Используя сделанное предположение о некоррелированности ошибок измерений, выпишем обычное выражение для ошибки показателя преломления :

Ошибка значения преломляющего угла является систематической и поэтому будет учтена позднее, при конечном подсчете величин. Это следует сделать, так как эти ошибки зависимы и с ними нельзя работать, применяя обычную теорию. Ошибки показателя преломления слабо, но всё-таки зависят от угла падения и отклонения и . Обычно . Также стоит отметить тот факт, что оборудование сборное, и при подсчете углов мы смотрим равномерно на всю шкалу, поэтому логично считать, что стандартное отклонение в данном случае – корень из дисперсии равномерного распределения, концы которого – границы деления. Например, если цена деления 1 градус, то ошибка будет равна 0,29 градуса. Конечно, речь идёт об ошибке показателя преломления для данного набора измеренных углов или ошибке отдельного измерения. На рис. 6 показана зависимость углов отклонения от угла .



## Линейная регрессия.

Как было сказано ранее, ошибки можно считать по формуле (12), но делать это можно далеко не всегда.

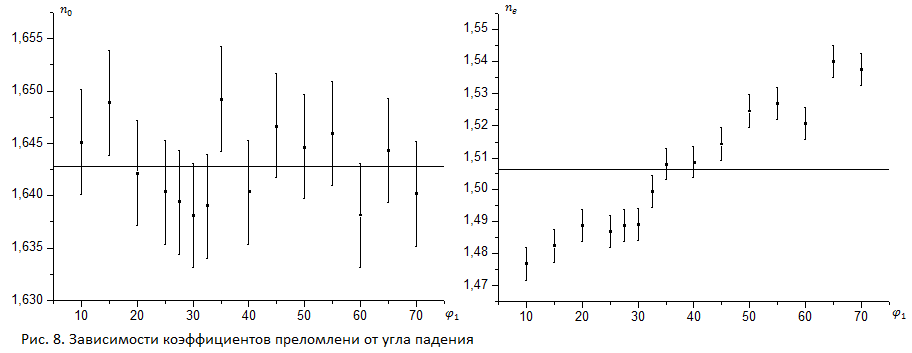
Особое внимание представляет угол A, ошибка которого является систематической и которую было решено учитывать позже. На рис. 7 предоставлены зависимости коэффициентов преломления от угла A. Видно, что в рамках ошибок, прямая хорошо аппроксимирует экспериментальные данные. Коэффициенты регрессии равны -0.019 и -0.015. Использование формулы (12) для ошибки измерения угла A законно.

## Гипотезы и экспериментальные данные.

Как уже отмечалось, теоретическая модель и следующие из неё формулы не учитывают все условия проведения опытов. С точки зрения экспериментатора всякая модель является рабочей гипотезой. Гипотеза будет опровергнута, если провести измерения с достаточной точностью. Можно поставить вопрос следующим образом: достаточно ли полученных данных для опровержения гипотезы? Ответ на этот вопрос желательно подтвердить каким-нибудь числом. Эта проблема формализуется и решается методом математической статистики. Статистическое описание и вероятностные модели применяются к результатам измерений (систематические ошибки игнорируются). Предположим, что мы провели очень много (ансамбль) серий измерений отсчётов углов преломления. Можно поставить вопрос: какова вероятность расхождения полученных данных и гипотезы. Эта вероятность и будет искомым числом. Если вероятность мала, то гипотеза считается опровергнутой.

## -распределение.

В качестве примера гипотезы рассмотрим утверждение: показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волны не зависят от угла поворота призмы, т.е. они постоянны. На рис.8 показаны вычисленные по формуле (11) показатели преломления с ошибками (12) и их наилучшие средние значения. Получившиеся средние показатели преломления, 1,648 для обыкновенной волны () и 1,506 для необыкновенной волны (), неплохо согласуются с табличными значениями. Тем не менее, данные для вызывают сомнения о справедливости сделанного утверждения.

В качестве меры отклонения теоретических значений некоторой величины от экспериментальной мы выберем число

Это число принято называть «хи-квадрат», а критерий оценки гипотезы - «критерий хи-квадрат». Теоретическое значение может являться функцией своих переменных. Например, эта функция может быть линейной (этот случай мы рассмотрим ниже) или более сложной (сплошные кривые, рис. 8). Число является безразмерным, оно равняется сумме квадратов отклонения теоретических точек от экспериментальных, выраженных в единицах ошибок измерений . Для данных, приведённых на рис.7, равняется 4 для и 46 для . Что можно сказать о справедливости гипотезы, зная ?

Для ответа на этот вопрос воспользуемся методами теории вероятностей. Будем считать отклонение измеренных величин *y* от теоретических - случайными. Тогда каждое слагаемое в сумме (13) является случайным и само число тоже является случайной величиной. Найдём функцию распределения значений . Будем считать, что отклонения имеют гауссовскую функцию распределения, т.е. вероятность того, что величина попадает в интервал пропорциональна

Конечно, сделанное предположение о функции распределения ошибок само требует проверки. Тем не менее, при малых отклонениях измеряемых величин (например, углов преломления) от их средних значений () плавная гауссовская функция неплохо описывает вероятность отклонений. Для величины та же вероятность пропорциональна . Вероятность того, что одно слагаемое в сумме (Д3) попадёт в интервал X и X+dX получается при замене , и она пропорциональна

Определим вероятность того, что сумма двух независимых между собой слагаемых в (Д.3) лежит в интервале и . Первое слагаемое может принимать любое значение из интервала , тогда второе равно . Суммируя вероятности всех вариантов, получаем пропорциональность

Для трёх слагаемых функция распределения пропорциональна. Для всей суммы она пропорциональна .

Полученная нами форма функции распределения суммы (13) не учитывает того обстоятельства, что параметры теоретической зависимости могут подгоняться под экспериментальные данные. Пример априорной гипотезы, т.е. без варьируемых параметров, приведён на рис.6. Для показателей преломления, рис.8, мы выбираем наилучшее среднее значение. Если бы в сумме (13) было слагаемое, то мы положили бы и получили . Поэтому число независимых слагаемых (число степеней свободы - распределения) равно N-1, для линейной зависимости и т.д. Число степеней свободы m: число экспериментальных точек минус число свободных параметров гипотезы. Выпишем нормированную функцию плотности вероятности - распределения:

где - гамма-функция ().

На рис.8 приведены примеры графиков - распределений. Наиболее вероятное значение равно m-2. Вычислим некоторые характеристики случайного набора чисел . Среднее значение и средний квадрат

Среднеквадратическое отклонение чисел от их среднего значения

Проведённый статистический анализ сумм позволяет сделать качественный вывод, что стандартные значение должны располагаться в интервале . Например, для данных на рис.8 m=13 и следует ожидать . Если <, для показателя преломления обыкновенной волны было получено , то скорее всего были завышены ошибки измерений. Следует более точно измерить углы отражения и преломления , например, используя гониометр. Если полученное значение заметно больше , то или были занижены ошибки измерений, или гипотеза не верна, и в следующую гипотезу следует ввести новые параметры.

При оценке вероятности P отклонения экспериментальных данных от теоретической гипотезы полученное значение считается минимальным, т.е. )=.

На рис.10 приведён график P() для m=13 степеней свободы. Вероятность P довольно быстро стремится к нулю при превышении среднего значения m на величину дисперсии . Принято считать гипотезу опровергнутой, если вероятность P меньше 5%. Это событие возникает, если значение превышает , т.е. отличается от среднего значения более, чем на удвоенную величину стандартного отклонения. Таким образом, мы получили простое правило опровержения гипотезы:

Если правило (15) не выполняется, то говорят, что экспериментальных данных недостаточно для опровержения гипотезы.

Приведённые на рис.8 экспериментальные данные и соответствующие гипотезы (m=14, априорная гипотеза) характеризуется , правило (15) выполняется, и измеренные углы преломления не соответствуют формулам, приведённым в описании. При исключении систематической ошибки, связанной с настройкой установки, имеем =6. Правило (15) выполняется для показателя преломления необыкновенной волны (рис.8, m=13, =46), и гипотезу о независимости показателя преломления необыкновенной волны от угла поворота призмы придётся отвергнуть. Ту же гипотезу для показателя преломления обыкновенной волны (по рис.8, m=13, =4) следует сохранить и продолжить по ней расчёты: определить наилучшее значение и его ошибку.

## Параметры гипотезы.

При обработке экспериментальных данных лабораторных работ, для которых гипотезой является линейная функция, рекомендуется отметить на графике измеренные значения и их ошибки. Далее следует на глаз провести наилучшую прямую. Чем меньше ошибка измерений, тем ближе прямая должна подходить к экспериментальной точке. Для двух ошибок, условно по осям и , нужно оставить для расчётов ту, которая даёт минимальное относительное расстояние от экспериментальной точки до прямой (минимум значения ). Эту ошибку следует отложить по оси ординат. Для упрощения расчётов, которое мало меняет результат, ошибку по оси абсцисс можно считать равной нулю. На следующем шаге следует проверить правило (15) и принять решение о прекращении дальнейших вычислений (гипотеза опровергнута) или уточнить значения параметров гипотезы и их ошибки. Как показывает практика, по аккуратно проведённой прямой можно получить вполне удовлетворительные оценки параметров гипотезы.

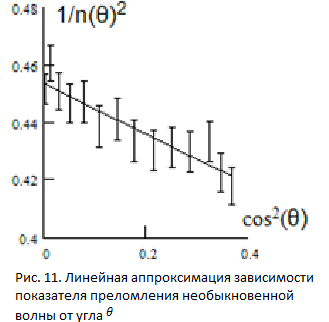
Среднее значение показателя преломления обыкновенной волны (см.рис.8) определяем из условия минимума величины . Используя (7) и полагая , получаем

Чем меньше ошибки измерений, тем с большим весом данная точка входит в окончательный результат. Для примерно одинаковых ошибок, как и следовало ожидать.,

Ошибка среднего значения

Для примерно равных ошибок измерений и, если число экспериментальных точек невелико, то лучше использовать оценку . Обработка данных, показанных на рис.8, привела к результату . Рассчитаем параметры гипотезы для прямой на примере зависимости показателя преломлении необыкновенной волны от угла поворота призмы или угла между волновым вектором и оптической осью кристалла. Из формулы (1) следует, что

- это наша новая гипотеза (см. рис.11). Опишем процедуру оценки параметров гипотезы и их ошибок, принятую в программе обработки данных.

 Опишем процедуру оценки параметров гипотезы и их ошибок, принятую в программе обработки данных.

Введём две функции и , которые для имеющихся углов поворота призмы имеют значения и . Обозначим через и параметры гипотезы, измеренная величина , её ошибка и перепишем выражение (13)

Искомые параметры гипотезы должны обеспечивать минимум (максимум вероятности реализации гипотезы), т.е. , что приведёт к системе двух уравнений

Целесообразно систему уравнений (17) представить в матричной форме. Пусть - вектор параметров гипотезы, -вектор правых частей системы (17), – матрица коэффициентов в левой части:

Система уравнений (17) имеет запись *Aa=b*, и решение *a=B·b*, где *B=A-1*–матрица, обратная *A*. Ошибки параметров гипотезы зависят от ошибок полученных значений показателя преломления необыкновенной волны, которые в свою очередь, определяются ошибками измерения отсчётов углов падения и преломления в данной точке. Ошибки отсчёта углов или показателя преломления независимы в различных точках. В этом случае элементы матрицы *Bnm* имеют смысл коэффициентов корреляции случайных отклонений параметров гипотезы от их средних значений:

Ошибка параметров и равны

Из можно получить ошибку для :

После этого необходимо добавить ошибку угла :

Принцип работы программы и задание для студента

## Ввод данных

В соответствующие таблицы вводятся данные, полученные из эксперимента.

## Проверка юстировки

Оптимальный наклон и подъем прямой для обыкновенной волны ищется по сходным с (17) - (19) формулами, но используется немного другая гипотеза

В этом случае принимая за , за расчет можно вести по формуле (19).

По полученным результатам считается хи-квадрат. Если он очень маленький, то выводится сообщение о завышенных ошибках. Выводится значение хи-квадрат и значение коэффициента преломления обыкновенной волны. Рисуется график, где указаны: экспериментальные точки, ошибки. Также считается средневзвешенное значение коэффициента преломления и строится соответствующая прямая. Студенту предоставляется возможность изменять параметры схемы таким образом, чтобы хи-квадрат стал минимальным, а прямые похожими. После этого следует сравнить оптимизированные параметры. Если разность между углами A получается больше одного градуса, то следует отъюстировать систему заново. Далее из статистики следует, что при обработке данных при помощи метода “Хи-квадрат”, можно получать ошибки. Если изменить угол A таким настолько, чтобы Хи-квадрат изменился на единицу, то полученная разница и будет ошибкой измерения угла A. Студенту предлагается проделать это самостоятельно. Так как для гауссовского распределения ошибок график зависимости хи-квадрат от параметра – парабола, то можно по нескольким точкам построить график зависимости хи-квадрат от угла А и убедиться в этом.

Подсчет коэффициента преломления необыкновенной волны

При помощи формул (17) - (19) производится подсчет коэффициента преломления необыкновенной волны и его ошибка. Выводится его значение и ошибка, данная методом. Строится прямая по формуле (7). Далее студенту требуется вычислить итоговую ошибку коэффициента преломления необыкновенной волны по формуле (22). Так как регрессия линейная, то можно заменить частную производную на коэффициент регрессии.