



*Московский физико-технический институт  
(государственный университет)*

# ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

## ТОМ 2 ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Версия: 16 мая 2019 г.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

# ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ

В трёх томах

*Рекомендовано  
Учебно-методическим объединением  
высших учебных заведений Российской Федерации  
по образованию в области прикладных математики и физики  
в качестве учебного пособия для студентов вузов  
по направлению подготовки «Прикладные математика и физика»*

## Том 2 Электричество и магнетизм

Под редакцией  
проф. А. В. МАКСИМЫЧЕВА

МОСКВА  
МФТИ  
2019

УДК 53(075)

ББК 22.3я73

Л12

А в т о р ы:

М. Г. Никулин, П. В. Попов, Д. А. Александров, Н. С. Берюлёва,  
В. П. Кириллов, Г. Р. Локшин, А. А. Нозик, . . .

Р е ц е н з е н т ы:

Кафедра общей физики

Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»  
(зав. кафедрой доктор физико-математических наук,  
профессор *Н. П. Калашников*)

Зав. отделом оптики ФИАН

доктор физико-математических наук, профессор *А. В. Масалов*

**Лабораторный практикум по общей физике:** учеб. пособие. В трёх томах. **Т. 2. Электричество и магнетизм** / Никулин М. Г., Попов П. В., Александров Д. А. и др.; под ред. А. В. Максимычева. — М.: МФТИ, 2019. — ?? с.  
ISBN 978-5-7417-0507-0

Представлены лабораторные работы по электричеству и магнетизму для студентов II курса (3-го семестра) МФТИ. Работы распределены по ключевым разделам курса общей физики. Каждый раздел содержит теоретическое введение по рассматриваемому кругу физических явлений. Теоретические введения и описания составлены с таким расчётом, чтобы студент мог получить ясное представление о лабораторной работе и изучаемом явлении и в том случае, когда выполнение работы опережает теоретический курс.

Книга снабжена необходимым справочным материалом.

Для физических, инженерно-физических и физико-технических специальностей вузов.

Табл. ?? . Ил. ??.

**УДК 53(075)**

**ББК 22.3я73**

**ISBN 978-5-7417-0507-0 (Т.2)**  
**ISBN 978-5-7417-0200-7**

© М. Г. Никулин, П. В. Попов, Д. А. Александров, Н. С. Берюлёва, В. П. Кириллов, Г. Р. Локшин, А. А. Нозик, 2019

© Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (государственный университет)», 2019

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Р а з д е л I. Измерения электрических и магнитных полей 7

1. Единицы измерения в электродинамике . . . . .	7
1.1. Абсолютная (гауссова) система единиц . . . . .	8
1.2. Система СИ . . . . .	10
1.3. Уравнения электродинамики в произвольной системе единиц . . . . .	12
1.4. Перевод между системами единиц . . . . .	14
Работа 3.1.1. Магнитометр . . . . .	18
Работа 3.1.2. Абсолютный вольтметр . . . . .	25
Работа 3.1.3. Измерение магнитного поля Земли. . . . .	30

## Р а з д е л II. Колебания в электрических цепях 41

1. Свободные колебания . . . . .	43
1.1. Затухающие колебания (случай $0 < \gamma < \omega_0$ ) . . . . .	44
1.2. Критический режим (случай $\gamma = \omega_0$ ) . . . . .	50
1.3. Аperiodический режим (случай $\gamma > \omega_0$ ) . . . . .	51
2. Вынужденные колебания . . . . .	52
2.1. Метод комплексных амплитуд . . . . .	52
2.2. Векторные диаграммы . . . . .	55
2.3. Вычисление мощности в методе комплексных амплитуд . . . . .	57
3. Резонанс . . . . .	58
3.1. Резонанс напряжений в последовательном контуре . . . . .	58
3.2. Резонанс токов в параллельном контуре . . . . .	63
4. Установление вынужденных колебаний . . . . .	66
5. Автоколебания . . . . .	69
5.1. Автоколебания в системах с одной степенью свободы . . . . .	69
5.2. Автоколебания в вырожденных системах . . . . .	71
Работа 3.2.1. Сдвиг фаз в цепи переменного тока . . . . .	74
Работа 3.2.2. Резонанс напряжений в последовательном контуре . . . . .	79
Работа 3.2.3. Резонанс токов в параллельном контуре. . . . .	88
Работа 3.2.4. Свободные колебания в электрическом контуре . . . . .	96
Работа 3.2.5. Вынужденные колебания в электрическом контуре . . . . .	101

Работа 3.2.6.	Изучение гальванометра . . . . .	108
Работа 3.2.7.	Дробовой шум. Эффект Шоттки . . . . .	121
Работа 3.2.8.	Релаксационные колебания . . . . .	130

### **Р а з д е л III. Носители электрического тока** **139**

1.	Движение свободных частиц во внешних полях . . . . .	140
1.1.	Движение в однородном магнитном поле . . . . .	140
1.2.	Дрейф в скрещенных полях . . . . .	142
2.	Ток в вакуумном диоде. . . . .	143
2.1.	«Закон $3/2$ » для вакуумного диода . . . . .	144
3.	Движение носителей заряда в металлах и полупроводниках. . . . .	146
3.1.	Зонная модель . . . . .	146
3.2.	Закон Ома . . . . .	148
4.	Эффект Холла и магнетосопротивление. . . . .	150
4.1.	Тензор проводимости в магнитном поле . . . . .	150
4.2.	Измерение проводимости в магнитном поле . . . . .	152
4.3.	Магнетосопротивление . . . . .	154
Работа 3.3.1.	Измерение удельного заряда электрона методами магнитной фокусировки и магнетрона . . . . .	156
Приложение.	Движение электрона в цилиндрическом магнетроне . . . . .	164
Работа 3.3.2.	Исследование вольт-амперной характеристики ва- куумного диода . . . . .	165
Работа 3.3.3.	Опыт Милликена . . . . .	171
Работа 3.3.4.	Эффект Холла в полупроводниках. . . . .	178
Работа 3.3.5.	Эффект Холла в металлах. . . . .	183
Работа 3.3.6.	Влияние магнитного поля на проводимость полу- проводников. . . . .	188
Приложение.	Принцип действия милливеберметра. . . . .	192

### **Р а з д е л IV. Магнитные свойства вещества** **195**

1.	Магнитное поле в веществе. . . . .	195
2.	Свойства магнитных сред. . . . .	196
2.1.	Диамагнетизм . . . . .	196
2.2.	Парамагнетизм . . . . .	198
2.3.	Ферромагнетизм . . . . .	200
3.	Ферромагнитный гистерезис. . . . .	202
4.	Измерение напряжённости и индукции магнитного поля . . . . .	205
4.1.	Размагничивающий фактор . . . . .	205

4.2.	Измерения в тороидальном образце . . . . .	206
4.3.	Поле в зазоре электромагнита . . . . .	206
4.4.	Измерение индукции в образце . . . . .	207
5.	Энергия и силы в магнитном поле . . . . .	208
5.1.	Энергия поля . . . . .	208
5.2.	Силы в магнитном поле . . . . .	209
Работа 3.4.1.	Диа- и парамагнетики . . . . .	211
Приложение.	Стержень в поперечном магнитном поле . . . . .	216
Работа 3.4.2.	Закон Кюри–Вейсса . . . . .	217
Работа 3.4.3.	Точка Кюри . . . . .	221
Работа 3.4.4.	Петля гистерезиса (статический метод) . . . . .	227
Работа 3.4.5.	Петля гистерезиса (динамический метод) . . . . .	235
Работа 3.4.6.	Параметрический резонанс в контуре с нелинейной индуктивностью . . . . .	242

## **Р а з д е л V. Плазма. Газовый разряд 253**

1.	Введение. . . . .	253
2.	Основные характеристики плазмы . . . . .	255
2.1.	Плазменная частота . . . . .	256
2.2.	Дебаевский радиус . . . . .	257
2.3.	Плазменное экранирование . . . . .	257
2.4.	Идеальная и неидеальная плазма . . . . .	260
2.5.	Диэлектрическая проницаемость плазмы . . . . .	261
3.	Исследование плазмы с помощью зондов . . . . .	262
3.1.	Плавающий потенциал . . . . .	262
3.2.	Измерения методом одиночного зонда . . . . .	264
3.3.	Измерения с помощью двойного зонда . . . . .	267
Работа 3.5.1.	Изучение плазмы газового разряда в неоне . . . . .	270
Работа 3.5.2.	Изучение плазмы индукционного газового разряда . . . . .	273
Приложение.	Газовый разряд. . . . .	281

## **Р а з д е л VI. Спектральный анализ 291**

1.	Линейные фильтры. Частотная характеристика . . . . .	291
1.1.	Линейные стационарные фильтры . . . . .	292
2.	Спектральное разложение . . . . .	294
2.1.	Спектр периодического процесса . . . . .	296
2.2.	Спектр непериодического процесса . . . . .	298
2.3.	Соотношение неопределённостей . . . . .	300

2.4.	Спектральный метод в задаче линейной фильтрации	301
2.5.	Физический смысл спектрального разложения . . .	302
3.	Свойства преобразования Фурье. . . . .	304
4.	Модуляция . . . . .	308
4.1.	Виды модуляции . . . . .	308
4.2.	Спектры модулированных сигналов . . . . .	310
4.3.	Детектирование модулированных сигналов . . . . .	313
5.	Синтез сигналов . . . . .	315
Работа 3.6.1.	Спектральный анализ электрических сигналов . . . .	319
Работа 3.6.2.	Синтез гармонических сигналов. . . . .	324

## **Р а з д е л VII. Переменные электромагнитные поля 329**

1.	Уравнения Максвелла в веществе. . . . .	329
2.	Электромагнитные волны. . . . .	331
2.1.	Волны в безграничной среде . . . . .	332
2.2.	Распространение волн в волноводах . . . . .	332
3.	Квазистационарное приближение . . . . .	335
3.1.	Скин-эффект . . . . .	336
Работа 3.7.1.	Скин-эффект в полном цилиндре. . . . .	339
Работа 3.7.2.	Электромагнитные волны в волноводе. . . . .	346
Приложение. Обработка экспериментальных данных:		
	сводка результатов . . . . .	353
Приложение. Основные сведения о комплексных числах. . . . .		361
Приложение. Таблицы физических величин . . . . .		364

# ИЗМЕРЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

## 1. Единицы измерения в электродинамике

При изучении нового класса физических явлений перед исследователем неизбежно встаёт проблема выбора единиц измерения и эталонов новых физических величин.

Проводя измерения, исследователь в первую очередь пользуется некоторым базовым набором эталонов (например, секунда, метр и килограмм), и в идеале новые единицы измерения должны определяться через базовые. Однако пока законы, описывающие новое явление, остаются не понятыми, выбор новых единиц измерения происходит по большому счету *произвольно*. Когда связь между «новыми» и «старыми» явлениями устанавливается прочно, эти искусственно введённые эталоны становятся избыточными, поскольку могут быть сведены к базовым. Однако, поскольку главным условием выбора единиц служит, как правило, их *практическое удобство* и непосредственная *привязка к методикам измерения* — они часто остаются в употреблении, а порой заносятся и в международные стандарты.

Например, на заре исследования тепловых явлений было создано множество температурных шкал. Лишь позднее, когда была установлена связь температуры с энергией идеального газа, все эти шкалы оказались по сути избыточны: в качестве единиц измерения температуры можно использовать единицы измерения энергии (например, джоули). Тем не менее, по историческим причинам в международную систему СИ вошла «независимая» единица измерения температуры — *кельвин*. Из-за этого во всех термодинамических формулах приходится иметь дело с «лишней» переводной константой — *постоянной Больцмана*:

$$k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К.}$$

Аналогичная ситуация имела место и при исследовании электричества и магнетизма. Более того, пока не было установлено единство электромагнитных явлений, в каждой из этих областей была внедрена своя независимая система единиц. Последующие попытки переработать и оптимизировать систему электромагнитных единиц, чтобы избавить её от нефизичных констант, имели весьма ограниченный успех, поскольку яв-



ление быстро нашло широкое практическое применение и поменять что-либо радикально было уже невозможно. В результате в качестве международного стандарта была принята система (СИ), содержащая «лишнюю» базовую единицу — *ампер*. При этом в теоретических работах, не привязанных непосредственно к технике, сохранилась в употреблении гауссова система (СГС), не содержащая избыточных эталонов (такие системы единиц называют *абсолютными*). При это возникает весьма неприятная особенность: в разных системах различными оказываются не только *единицы измерения* (как в механике), но и *формулы*, их связывающие.

Практическая направленность этой книги вынуждает и нас придерживаться в основном системы СИ (все лабораторные приборы проградуированы именно в СИ). По умолчанию все формулы даны в системе СИ, если не указано иное. В работах данного раздела системы СИ и СГС используются совместно. В разделе V, посвящённом физике плазмы, используется традиционная для этой области система единиц СГС.

### 1.1. Абсолютная (гауссова) система единиц

Построим абсолютную систему единиц электродинамики, базирующуюся исключительно на механических эталонах. За основу примем два твёрдо установленных закона: Кулона и Ампера.

По сравнению с механикой, существенно новым понятием является **электрический заряд**. Согласно закону Кулона, сила взаимодействия двух одинаковых точечных зарядов пропорциональна квадрату заряда  $q$  и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  между ними:

$$F_K = k_q \cdot \frac{q^2}{4\pi r^2}, \quad (1.1)$$

где  $k_q$  — некоторая константа. Коэффициент  $4\pi$  в знаменателе поставлен из эстетических соображений, чтобы подчеркнуть, что зависимость  $\propto 1/r^2$  в законе Кулона (и в законе всемирного тяготения) возникает как площадь сферы в трёхмерном пространстве.

На закон (1.1) можно смотреть как на *определение* того, что такое электрический заряд.

Константа  $k_q$  может быть выбрана *произвольным* образом. При этом, если мы не хотим вводить никаких дополнительных единиц измерения, она должна быть *безразмерна*. В гауссовой системе полагают  $k_q = 4\pi$ . Неплох также вариант  $k_q = 1$ , сохраняющий «сферичность» закона Кулона. Он предлагался в своё время Лоренцем и другими известными физиками, но не прижился.

Тогда (1.1) позволяет ввести единицу заряда с размерностью

$$[q] = [F^{1/2}r] = \frac{M^{1/2}L^{3/2}}{T}.$$

Здесь  $(M, L, T)$  — размерности базовых единиц массы, длины и времени соответственно. По историческим причинам наибольшее распространение получила абсолютная система с единицами *сантиметр-грамм-секунда* (СГС). Тогда единицу заряда можно определить как

$$1 \text{ ед. СГС заряда} = \frac{\text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2}}{c}.$$

Закон Ампера говорит о силовом взаимодействии *токов* — то есть *движущихся* зарядов. Его можно сформулировать следующим образом: сила взаимодействия двух параллельных проводников на единицу их длины пропорциональна квадрату заряда, проходящему через них в единицу времени (т. е. току  $I = q/t$ ), и обратно пропорциональна расстоянию между ними:

$$\frac{F_A}{l} = k_I \frac{I^2}{2\pi r} \quad (1.2)$$

( $2\pi r$  — длина окружности радиуса  $r$  вокруг провода).

Здесь уже все входящие в формулу величины вполне определены, поэтому константа  $k_I$  не может быть произвольной — её значение должно быть получено *из опыта*. Найдём её размерность:

$$[k_I] = \left[ \frac{F}{q^2} t^2 \right] = \frac{T^2}{L^2}.$$

То есть  $k_I$  есть величина, обратная квадрату некоторой скорости. Положим

$$k_I = \frac{k_q}{c^2}, \quad (1.3)$$

где  $c$  — константа, которую можно назвать **электродинамической постоянной**, так как она связывает взаимодействия неподвижных и движущихся зарядов. Отметим, что соотношение 1.3 должно выполняться для всех систем измерения.

Как мы знаем сегодня, электродинамическая постоянная, равная  $c \approx 3 \cdot 10^{10}$  см/с, — не что иное как **скорость света**, то есть максимальная скорость распространения всех известных науке взаимодействий. В настоящее время эта константа относится к числу *фундаментальных* и ей приписывают *точное* значение  $c \equiv 299\,792\,458$  м/с и используют для определения эталона метра через эталон секунды.

Таким образом, выбранные нами в качестве базовых законы Кулона и Ампера выглядят как

$$F_K = \frac{q_1 q_2}{r^2}, \quad F_A = \frac{2I_1 I_2}{rc^2} l. \quad (1.4)$$

Теперь можно определить и остальные электродинамические величины.

Напряжённость электрического поля определяют (во всех системах) как отношение силы Кулона к заряду:

$$E = \frac{F}{q}, \quad [E] = \frac{M^{1/2}}{L^{1/2}T} = \frac{\Gamma^{1/2}}{\text{см}^{1/2} \cdot \text{с}}.$$

Индукцию магнитного поля можно определить как отношение силы на единицу длины провода к току в нём:

$$B = k_B \cdot \frac{F_A/l}{I}. \quad (1.5)$$

Выбор коэффициента  $k_B$  опять-таки за нами. Зная о единстве электрического и магнитного полей, его стоит выбрать таким, чтобы их размерности *совпадали*:

$$[B] = [k_B] \cdot \left[ \frac{F}{Il} \right] = [k_B] \cdot \frac{T}{L} [E]$$

Видно что  $k_B$  в таком случае должен иметь размерность скорости:  $[k_B] = L/T$ , поэтому уместно положить  $k_B = c$ . Тогда формулу для силы Ампера в терминах  $B$  можно записать как

$$F_A = \frac{1}{c} IBl. \quad (1.6)$$

Закон Ампера (1.4) получится, если поле прямого провода вычисляется как

$$B_{\text{пр}} = \frac{2I}{cr}.$$

Итак, на основе законов Кулона и Ампера мы определили единицы измерения всех основных электродинамических величин: электрического заряда, электрического и магнитного полей. Кроме того, *теория размерностей* позволила нам попутно установить существование фундаментальной константы — электродинамической постоянной  $c$ .

## 1.2. Система СИ

Абсолютная система, предложенная выше, не могла быть разработана во времена Ампера и Кулона, когда еще не было осознано единство электрических и магнитных явлений.

Следуя системе СИ, выберем закон Ампера в качестве определения того, что такое **электрический ток**. Помимо базовых единиц (*метр–килограмм–секунда*), СИ определяет *независимый* эталон тока: при токе в 1 *ампер* два тонких провода на расстоянии 1 м взаимодействуют с силой  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на 1 м их длины. Это значит, что константа  $k_I$

в законе (1.2), которую называют **магнитной постоянной** и традиционно обозначают как  $\mu_0$ , выбрана равной

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2.$$

Закон Ампера в этих единицах:

$$F_A = \mu_0 \frac{I_1 I_2 l}{2\pi r}. \quad (1.7)$$

Последствием введения лишнего эталона будет то, что во все «магнитные» формулы войдёт дополнительная *размерная константа*  $\mu_0$ , заданная *точно*. Она не имеет явного физического смысла, а её единственная функция — перевод между единицами измерения. Зато «ампер» — очень удобная единица измерения тока: в частности, характерные значения токов в большинстве бытовых электроприборов варьируются в пределах  $10^{-2} \div 10^2 \text{ А}$ .

Имея эталон тока, можно определить единицу измерения заряда — *кулон*,  $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$ . При таком подходе константа  $k_q$  в законе Кулона (1.1) может быть определена из опыта. Как мы уже обсуждали выше, опыт даёт результат (1.3), поэтому  $k_q = \mu_0 c^2$ . Традиционно вводят обозначение

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} \approx 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2}. \quad (1.8)$$

Величину  $\varepsilon_0$  называют **электрической постоянной**. Она также является просто переводной константой, не имеющей явного физического смысла. Физический смысл имеет электродинамическая постоянная (она же скорость света в вакууме):

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}.$$

Таким образом, закон Кулона в системе СИ имеет вид

$$F_K = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2}. \quad (1.9)$$

Наконец, константа  $k_B$  в определении индукции магнитного поля (1.5) принимается равной единице. Поэтому справедлива формула

$$F_A = IBl. \quad (1.10)$$

Поле прямого провода вычисляется как

$$B_{\text{пр}} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

Наконец, выразим единицы измерения полей:

$$[E] = \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = \frac{\text{В}}{\text{м}} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{с}^3}.$$

Здесь  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж}/1 \text{ Кл}$  — единица напряжения *вольт*. Единица индукции магнитного поля *тесла*:

$$[B] \equiv \text{Тл} = \frac{\text{Н}}{\text{А}^2} \cdot \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{кг}}{\text{А} \cdot \text{с}^2}.$$

Видно, что размерности  $E$  и  $B$  в системе СИ разные. Их отношение имеет размерность скорости:  $[E/B] = \text{м}/\text{с}$ .

**Замечание.** Согласно решению международной комиссии по стандартам с 2019 года планируется принять новые определения базовых единиц СИ, в том числе и ампера. Его величина будет устанавливаться фиксацией численного значения *элементарного электрического заряда*, которое планируется принять равным

$$e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ А} \cdot \text{с} \text{ (точно)}.$$

При таком определении электрическая постоянная  $\varepsilon_0$  и, следовательно, магнитная постоянная  $\mu_0$  станут *измеряемыми* величинами.

### 1.3. Уравнения электродинамики в произвольной системе единиц\*

Основными уравнениями электродинамики являются уравнения Максвелла для электромагнитного поля, а также выражение для силы Лоренца, связывающее эту теорию с механикой. Запишем эти уравнения для вакуума в произвольной системе единиц (ограничимся дифференциальной формой):

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = k_q \rho, \quad (1.11)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (1.12)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{k_B} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.13)$$

$$\frac{1}{k_B} \operatorname{rot} \mathbf{B} = k_I \left( \mathbf{j} + \frac{1}{k_q} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right); \quad (1.14)$$

$$\mathbf{F}_\text{Л} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{k_B} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (1.15)$$

Поясним кратко, почему коэффициенты будут именно такими.

---

\*Если читатель ещё не знаком с системой уравнений Максвелла, этот параграф можно пропустить.

В уравнении (1.11) (*теорема Гаусса*) стоит коэффициент  $k_q$ , поскольку из него непосредственно следует закон Кулона  $E = k_q \frac{q}{r^2}$ .

Одинаковые коэффициенты  $1/k_B$  в уравнениях (1.13) (*закон электромагнитной индукции Фарадея*) и (1.15) (*сила Лоренца*) отражают известную связь этих явлений (см. [1, §64]).

В постоянном поле ( $\partial/\partial t = 0$ ) уравнение (1.14) представляет собой *теорему о циркуляции магнитного поля*. Из неё, в частности, может быть выведен *закон Био–Савара* (см. [2, §3.3]):

$$\mathbf{B} = k_B k_I \oint \frac{\mathbf{j} \times \mathbf{r} dV}{4\pi r^3} = k_B k_I \oint \frac{Id\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}.$$

Поле прямого провода равно  $B = k_B k_I \frac{I}{2\pi r}$ , что в совокупности с (1.15) даёт закон Ампера для двух параллельных токов:

$$F_A = \frac{1}{k_B} I_1 B_2 l = k_I \frac{2I_1 I_2}{4\pi r} l.$$

Наконец, второе слагаемое в правой части (1.14) (*ток смещения*) вводится в теорию для того, чтобы выполнялся *закон сохранения заряда*. Если взять дивергенцию от (1.14), должно получиться *уравнение непрерывности*:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

(так как  $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{B} \equiv 0$ ), что с учётом (1.11) и объясняет выбор множителя  $1/k_q$  перед плотностью тока смещения  $\partial \mathbf{E}/\partial t$ .

Если заряды и токи в системе отсутствуют, то система уравнений Максвелла переходит, как известно, в *волновое уравнение* для электрического и магнитного полей. В частности,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{k_q}{k_I} \nabla^2 \mathbf{E}.$$

В вакууме электромагнитные волны распространяются со скоростью  $c$ , поэтому, как уже говорилось выше, в любой системе единиц должно выполняться соотношение (1.3):  $k_q/k_I = c^2$ .

В таблице 1.1 перечислены возможные комбинации коэффициентов  $k_q$ ,  $k_I = k_q/c^2$  и  $k_B$  для наиболее часто встречающихся систем единиц измерения (также приведены коэффициенты перед током в правой части (1.14)  $k_B k_I$  и перед током смещения  $k_B k_I/k_q$ ). Помимо рассмотренных выше СИ и СГС, здесь для справки представлены системы:

- СГСЭ — система с эталонами *сантиметр-грамм-секунда*, в которой закон Кулона и сила Лоренца не содержат дополнительных постоянных:  $F_K = q_1 q_2 / r^2$ ,  $F_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ .

- СГСМ — система с эталонами *сантиметр-грамм-секунда*, в которой закон Ампера и сила Лоренца не содержат дополнительных постоянных:  $F_A = I_1 I_2 / r^2$ ,  $F_L = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ .
- рационализованная МКС — предложенная в начале XX в. Лоренцем система с эталонами *метр-килограмм-секунда*, в которой уравнения Максвелла содержат единственную константу — скорость света  $c$ .

Эти системы на сегодня практически полностью вытеснены системами СИ и СГС, причём использование последней ограничено в основном теоретической физикой.

Таблица 1.1. Коэффициенты в различных системах единиц

	$k_q$	$k_I$	$k_B$	$k_B k_I$	$\frac{k_B k_I}{k_q}$
СИ	$\frac{1}{\varepsilon_0}$	$\mu_0$	1	$\mu_0$	$\varepsilon_0 \mu_0$
СГС (гауссова)	$4\pi$	$\frac{4\pi}{c^2}$	$c$	$\frac{4\pi}{c}$	$\frac{1}{c}$
СГСЭ	$4\pi$	$\frac{4\pi}{c^2}$	1	$\frac{4\pi}{c^2}$	$\frac{1}{c^2}$
СГСМ	$4\pi c^2$	$4\pi$	1	$4\pi$	$\frac{1}{c^2}$
МКС (рационализованная)	1	$\frac{1}{c^2}$	$c$	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{c}$

#### 1.4. Перевод между системами единиц

Установим связи между наиболее часто употребляемыми единицами в системах СИ и гауссовой СГС. Прежде напомним соответствия между важнейшими механическими единицами:

$$1 \text{ Н} = 10^5 \frac{\text{г} \cdot \text{см}}{\text{с}^2} \equiv 10^5 \text{ дин}, \quad 1 \text{ Дж} = 10^7 \text{ дин} \cdot \text{см} \equiv 10^7 \text{ эрг}.$$

**Сила тока.** По определению, проводка с током  $I = 1 \text{ А}$  на расстоянии  $r = 1 \text{ м}$  взаимодействует с силой  $F/l = 2 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ . Пользуясь формулой (1.4), находим соответствующий ток в единицах СГС:

$$I = c \sqrt{\frac{F}{2l} r} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{М}}{\text{с}} \cdot \sqrt{10^{-7} \text{ Н}} = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{сМ}}{\text{с}} \cdot \sqrt{10^{-2} \text{ дин}} = 3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГС}.$$

Таким образом,

$$1 \text{ А} = 3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГС}, \quad \text{или} \quad 1 \text{ ед. СГС} = \frac{1}{3} 10^{-9} \text{ А}.$$

Все единицы измерения абсолютной системы могут быть выражены через базовые (сантиметр, грамм, секунда). В частности, для тока

$$1 \text{ ед. СГС тока} = \frac{\text{г}^{1/2} \cdot \text{см}^{3/2}}{\text{с}^2}.$$

Видно, что базовые размерности СГС не очень эстетичны, поэтому, как правило, пишут просто: «ед. СГС». Иногда для единицы тока используется название *статампер* (статА, statА).

**Заряд.** Поскольку заряд в обеих системах определяется по одной и той же формуле  $dq = Idt$ , имеем очевидную связь

$$1 \text{ Кл} = 3 \cdot 10^9 \text{ ед. СГС}, \quad \text{или} \quad 1 \text{ ед. СГС} = \frac{1}{3} 10^{-9} \text{ Кл}.$$

Элементарный заряд (заряд электрона):

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} = 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС}.$$

В иностранной литературе для абсолютной единицы заряда используется название *франклин* (Фр, Fr) или *статкулон* (statC).

**Потенциал.** В системе СИ разность потенциалов (напряжение) между точками равно  $U[\text{СИ}] = 1 \text{ В}$ , если работа  $A = qU$  по перемещению заряда 1 Кл равна 1 Дж. Поэтому

$$1 \text{ В} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{Кл}} = \frac{1}{300} \text{ ед. СГС}, \quad 1 \text{ ед. СГС} = 300 \text{ В}.$$

Абсолютную единицу напряжения называют иногда *статвольт* (статВ, statV).

**Магнитное поле.** Единицы измерения магнитных полей (магнитной индукции  $B$ ) в СИ и СГС называются соответственно *тесла* (Тл) и *гаусс* (Гс).

Для их связи воспользуемся законом Ампера: в СИ  $F = IBl$ , и в СГС  $F = \frac{1}{c} IBl$ . Тогда полагая  $l = 1 \text{ м}$ ,  $I = 1 \text{ А}$ ,  $F = 1 \text{ Н}$  и, соответственно,  $B = 1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}}$ , находим

$$B = \frac{cF}{Il} = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 10^5}{3 \cdot 10^9 \cdot 10^2} = 10^4 \text{ ед. СГС}.$$

Таким образом,

$$1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}.$$



Напряжённость магнитного поля  $H$  в вакууме выражается как  $H = B/\mu_0$  (ед. СИ) и  $H = B$  (ед. СГС). Для единиц измерения в СИ имеем:  $[H] = \frac{\text{Тл}}{\text{Н/А}^2} = \frac{\text{А}}{\text{м}}$ . В СГС единицы измерения напряжённости и индукции совпадают, но по историческим причинам имеют разные названия:  $H$  измеряется в *эрстедах* (Э), причём  $1 \text{ Э} \equiv 1 \text{ Гс}$ . Связь между единицами в разных системах:

$$1 \frac{\text{А}}{\text{м}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^4 \text{ Э} \approx 12,6 \cdot 10^{-3} \text{ Э}.$$

**Ёмкость.** Определения ёмкости в обеих системах одинаковы:  $C = q/U$ . Единица СИ измерения ёмкости — *фарад* (Ф), в СГС ёмкость выражается в *сантиметрах* (проверьте!):

$$1 \text{ Ф} = 1 \frac{\text{Кл}}{\text{В}} = \frac{3 \cdot 10^9}{1/300} = 9 \cdot 10^{11} \text{ см}, \quad 1 \text{ см} \approx 1,1 \text{ пФ}.$$

Заметим, что формулы для ёмкости конденсатора заданной формы разные! Например, для плоского конденсатора

$$\text{СИ: } C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \quad \text{СГС: } C = \frac{S}{4\pi d}.$$

**Индуктивность.** Индуктивность — коэффициент пропорциональности между током  $I$  в контуре и потоком магнитного поля  $\Phi$  через него. В СИ и СГС индуктивность определяется *по-разному*(!):

$$\text{СИ: } \Phi = LI, \quad \text{СГС: } \Phi = \frac{1}{c} LI.$$

Единица измерения в СИ называется *генри* (Гн). Задавая, как обычно, единичные значения величин в системе СИ, пересчитаем их в СГС:

$$L = \frac{c\Phi}{I} = \frac{3 \cdot 10^{10} \frac{\text{см}}{\text{с}} \cdot 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2}{1 \text{ А}} = \frac{3 \cdot 10^{10} \cdot 10^4 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^9} = 10^9 \text{ ед. СГС}.$$

Нетрудно проверить (проверьте), что индуктивности в СГС также имеет размерность длины:

$$1 \text{ Гн} = 10^9 \text{ см}, \quad 1 \text{ см} = 1 \text{ нГн}.$$

Связь между другими часто встречающимися величинами и основные электродинамические формулы в системах СИ и СГС можно найти в таблицах 2 и 3 Приложения к сборнику (стр. ??).

**Упражнение.** Избавьтесь от «лишней» константы  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$  в законе всемирного тяготения  $F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$  и постройте единицу измерения массы, основанную только на эталонах длины и времени.

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — § 85.
2. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — стр. 407–413.
3. \**Каршенбойм С.Г.* Фундаментальные физические константы: роль в физике и метрологии и рекомендованные значения // *УФН*. — 2005. — Т. 75, № 3. — С. 271.

### Работа 3.1.1

## Магнитометр

**Цель работы:** определить горизонтальную составляющую магнитного поля Земли и установить количественное соотношение между единицами электрического тока в системах СИ и СГС.

**В работе используются:** магнитометр, осветитель со шкалой, источник питания, вольтметр, электромагнитный переключатель, конденсатор, намагниченный стержень, прибор для определения периода крутильных колебаний, секундомер, рулетка, штангенциркуль.

Магнитометром называют прибор для магнитных измерений, например компас, теодолит, веберметр и пр. С помощью магнитометров измеряют намагниченность ферромагнетиков, напряжённость магнитных полей, исследуют магнитные аномалии. Разработаны магнитометры различных конструкций: магнитостатические, электромагнитные, магнитодинамические, индукционные, резонансные. Эталонные магнитометры позволяют измерять горизонтальную и вертикальную составляющие напряжённости магнитного поля Земли с точностью  $10^{-6}$  Э.

В нашей установке с помощью электромагнитного магнитометра измеряется горизонтальная составляющая земного магнитного поля и абсолютным образом определяется сила тока по его магнитному действию.

### Экспериментальная установка

Магнитометр (рис. 1) состоит из нескольких последовательно соединённых круговых витков К, расположенных вертикально. В центре кольца К радиусом  $R$  на тонкой неупругой вертикальной нити подвешена короткая магнитная стрелка С. Жёстко связанная со стрелкой крыльчатка погружена в масло и служит для демпфирования колебаний.



Рис. 1. Схема магнитометра

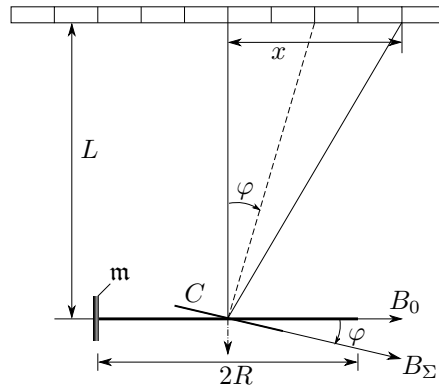


Рис. 2. Схема измерения угла отклонения магнитной стрелки

В отсутствие других магнитных полей стрелка располагается по направлению горизонтальной составляющей земного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ , т. е. лежит в плоскости магнитного меридиана.

Прибор настраивают с помощью световых зайчиков, отражённых от двух зеркал:  $\mathcal{Z}_1$ , прикреплённого к стрелке (подвижный зайчик), и  $\mathcal{Z}_2$ , расположенного в плоскости кольца  $K$  и жёстко связанного с ним (неподвижный зайчик). Оба зеркала освещаются одним и тем же осветителем  $O$ . Вращением кольца вокруг вертикальной оси можно совместить оба зайчика. При этом плоскость витков совпадает с плоскостью магнитного меридиана.

При появлении дополнительного горизонтального магнитного поля  $\mathbf{B}_\perp$  стрелка  $C$  установится по равнодействующей обоих полей  $\mathbf{B}_\Sigma$  (рис. 2). В нашей установке дополнительное поле может быть создано либо малым ферромагнитным стержнем, расположенным на кольце на его горизонтальном диаметре ( $\mathbf{B}_1$ ), либо током, проходящим по кольцу ( $\mathbf{B}_2$ ). В обоих случаях дополнительное поле можно считать однородным, так как размеры стрелки много меньше радиуса кольца.

Поле намагниченного стержня вдали от него может быть приближённо вычислено как поле точечного диполя:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( 3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right),$$

где  $\mathbf{m}$  — магнитный момент стержня,  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, проведённый из центра диполя в точку наблюдения. На оси, перпендикулярной стержню, имеем

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}}{R^3}, \quad (1)$$

где  $R$  — радиус кольца.

Магнитное поле в центре кольца с током  $I$  по закону Био и Савара равно

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R} N. \quad (2)$$

Здесь  $N$  — число витков в кольце,  $I$  — сила тока в единицах СИ (амперах).

Измерив угол отклонения стрелки  $\varphi$ , можно связать поля  $B_0$  и  $B_\perp$  ( $B_1$  или  $B_2$ ):

$$B_\perp = B_0 \cdot \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

### Определение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли

Для определения горизонтальной составляющей земного магнитного поля  $B_0$  тонкий короткий намагниченный стержень устанавливается в отверстие Р на горизонтальном диаметре кольца (рис. 1). Измерив тангенс угла отклонения стрелки

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{x_1}{2L}, \quad (4)$$

можно с помощью уравнений (1), (3) и (4) рассчитать поле  $B_0$ , если исключить величину  $\mathbf{m}$  — магнитный момент стержня.

Для исключения магнитного момента предлагается измерить период крутильных колебаний стержня в поле Земли. Подвешенный горизонтально за середину на тонкой длинной нити стержень в положении равновесия установится по полю Земли (упругость нити пренебрежимо мала). Если ось стержня отклонить в горизонтальной плоскости от направления  $B_0$  на малый угол  $\alpha$ , то под действием возвращающего механического момента

$$M_{\text{мех}} = |\mathbf{m} \times \mathbf{B}| = \mathbf{m} B_0 \sin \alpha \approx \mathbf{m} B_0 \alpha$$

стержень с моментом инерции  $J$  в соответствии с уравнением

$$J \ddot{\alpha} + \mathbf{m} B_0 \alpha = 0$$

будет совершать крутильные колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathbf{m} B_0}}. \quad (5)$$

Момент инерции цилиндрического стержня относительно оси вращения

$$J = m \left( \frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right) = \frac{ml^2}{12} \left[ 1 + 3 \left( \frac{r}{l} \right)^2 \right], \quad (6)$$

где  $m$  — масса стержня,  $l$  — длина, а  $r$  — его радиус.

Таким образом, рассчитав момент инерции  $J$  и измерив тангенс угла отклонения стрелки  $\varphi_1$  и период малых крутильных колебаний стержня  $T$ , можно с помощью формул (1), (3), (4) и (5) определить горизонтальную составляющую магнитного поля Земли:

$$B_0 = \frac{2\pi}{TR} \sqrt{\frac{\mu_0 J l}{2\pi R x_1}} \quad [\text{ед. СИ}]. \quad (7)$$

Поскольку магнитометр установлен в железобетонном здании, магнитное поле в нём может не только сильно отличаться от поля Земли, но и заметно меняться от места к месту, поэтому период колебаний следует измерять непосредственно *вблизи магнитометра*. Кроме того, для обеспечения максимальной однородности магнитного поля в области измерений следует устранить (удалить на максимальное расстояние) возможные источники сильного магнитного поля: источники питания, токонесущие провода, сотовые телефоны, металлические предметы и т. п.

### Определение электродинамической постоянной

Ток в цепи кольца можно измерить двумя независимыми способами: по магнитному действию тока на стрелку магнитометра и по заряду, протекающему через цепь в единицу времени. Первый способ измерения соответствует тому, как эталон тока определён в системе СИ, а второй — в гауссовой системе (СГС). По отношению результатов этих измерений можно определить электродинамическую постоянную  $c$ .

Пропуская некоторый ток через витки магнитометра, измерим тангенс угла отклонения стрелки ( $\text{tg } \varphi_2 = x_2/2L$ ) и по формулам (2) и (3) рассчитаем силу тока

$$I = \frac{2B_0 R}{\mu_0 N} \text{tg } \varphi_2 \quad [\text{ед. СИ}]. \quad (8)$$

Величина  $A = 2B_0 R/(\mu_0 N)$  является постоянной прибора в данном месте земной поверхности (точнее, в данном месте комнаты — с учётом многочисленных сторонних источников магнитного поля).

Тот же ток можно измерить абсолютным образом по прошедшему в единицу времени заряду, что соответствует определению эталона тока в гауссовой системе (СГС). Если разрядить конденсатор известной ёмкости  $C$ , заряженный до напряжения  $U$ , через витки, то через них протечёт заряд  $q = CU$  (рис. 3). Если  $\nu$  раз в секунду последовательно заряжать конденсатор от источника и разряжать через витки, то через них за секунду протечёт заряд  $CU\nu$ . Средний ток, прошедший через витки, равен при этом

$$I = CU\nu \quad [\text{абс. ед.}] \quad (9)$$

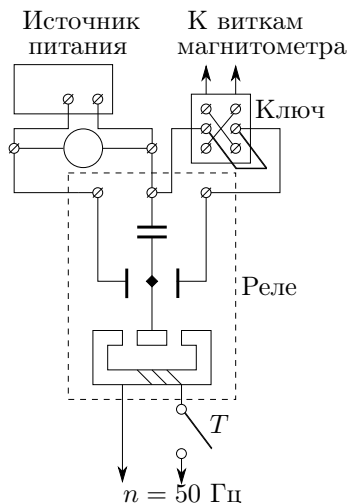


Рис. 3. Схема питания катушки магнитометра

Таким образом, абсолютное измерение тока сводится к нахождению величин  $C$  и  $U$ , которые тоже могут быть определены абсолютным образом. Так, ёмкость плоского конденсатора можно вычислить из его размеров, то есть опираясь только на единицу длины. Разность потенциалов также может быть определена абсолютным образом, например, через силу, действующую на пластину заряженного конденсатора, как это делается в абсолютном вольтметре (см. работу 3.1.2). Мы, однако, не будем полностью проводить эту программу, а ограничимся только указанием на возможность её выполнения.

Итак, для вычисления абсолютного значения тока по (9) необходимо измерить напряжение  $U$  на конденсаторе известной ёмкости  $C$ . Напряжение необходимо выразить его в единицах СГС (измерительные приборы, как правило, проградуированы в единицах СИ:  $1 \text{ В} \approx \frac{1}{300}$  ед. СГС). Ёмкость конденсатора  $C$  [см] должна быть выражена в сантиметрах ( $1 \text{ Ф} \approx 9 \cdot 10^{11} \text{ см}$ ).

По отношению численных значений одного и того же тока, выраженных в единицах СИ и СГС (гауссовой) по формулам (8) и (9) соответственно, можно определить значение электродинамической постоянной:

$$c \left[ \frac{\text{м}}{\text{с}} \right] = \frac{1}{10} \frac{I_{\text{[СГС]}}}{I_{\text{[СИ]}}} \quad (10)$$

Предлагаем читателю самостоятельно получить соотношение (10), исходя из определения ампера и абсолютной (гауссовой) единицы тока.

## ЗАДАНИЕ

### А. Измерение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли

В этом упражнении предлагается измерить угол отклонения магнитной стрелки в поле намагниченного стержня и период колебаний этого стержня в поле Земли. По результатам измерений рассчитывается горизонтальная составляющая магнитного поля Земли.

1. Включите осветитель и получите на горизонтальной шкале два чётких световых «зайчика». Плавным поворотом кольца К (рис. 1) вокруг вертикальной оси добейтесь совмещения зайчиков. Их чёткость можно подрегулировать перемещением линзы Л вдоль оси осветителя.
2. В отверстие Р на горизонтальном диаметре кольца (рис. 1) вставьте намагниченный стержень и измерьте смещение подвижного зайчика  $x_1$  (рис. 2). Поменяв ориентацию стержня в гнезде, измерьте отклонение зайчика в другую сторону. При незначительном расхождении усредните результаты, при значительном ( $> 5\%$ ) следует устранить причины расхождения.
3. Измерьте расстояние  $L$  от шкалы до зеркала.
4. Измерьте период малых колебаний стержня  $T$  в магнитном поле Земли.

Для этого поставьте стеклянный сосуд *вблизи* магнитометра и опустите на дно привязанный за середину намагниченный стержень. Плавным поворотом спицы, на которой закреплена нить, чуть приподнимите стержень и приближённо определите период малых крутильных колебаний.

Оцените погрешность измерения времени и рассчитайте количество колебаний, необходимое для измерения периода с погрешностью не более 1%. Учтите, что при визуальных наблюдениях основной вклад в погрешность вносит точность фиксации крайних положений стержня.

5. С помощью штангенциркуля измерьте линейные размеры стержня; запишите массу стержня и параметры магнитометра.
6. Рассчитайте величину горизонтальной составляющей магнитного поля Земли  $B_0$  и оцените погрешность результата. Сравните результат со справочными данными.



### Б. Измерение электродинамической постоянной

В этом упражнении предлагается по углу отклонения магнитной стрелки в поле кругового тока и известному полю Земли рассчитать ток в системе СИ, а по известным напряжению и параметрам вибратора рассчитать ток в гауссовой системе (СГС); по результатам измерений определить электродинамическую постоянную (скорость света в вакууме).

7. Уберите намагниченный стержень из гнезда магнитометра и соберите электрическую схему, изображённую на рис. 3.
8. Убедитесь, что зайчики совмещены в отсутствие тока через витки.
9. Включите в сеть источник питания и установите рабочее напряжение  $U \approx 90\text{--}100\text{ В}$ .
10. Замкнув ключ, подключите к цепи витки магнитометра.
11. Включив кнопкой К электровибратор, измерьте напряжение  $U$  на конденсаторе и отклонение  $x_2$  зайчика на шкале. Поменяв полярность с помощью ключа, повторите измерения.
12. Запишите характеристики приборов и параметры  $N$ ,  $C$  и  $\nu$ , указанные на установке.
13. Рассчитайте токи по формулам (8) и (9). Вычислите электродинамическую постоянную  $c$  и оцените погрешность результата.

### Контрольные вопросы

1. Получите формулу (2) для магнитного поля в центре кругового витка с током.
2. Как изменится поле (1), создаваемое ферромагнитным стержнем в центре кольца, если ориентировать его в плоскости кольца в направлении центра?
3. Каким должно быть внутреннее сопротивление источника напряжения, чтобы ёмкость успевала разряжаться между замыканиями вибратора?
4. В работе измеряется не поле Земли, а поле внутри здания. Влияет ли это на точность определения электродинамической постоянной?
5. Пользуясь определениями эталонов тока в системах СИ и СГС, докажете соотношение (10).
6. Получите теоретически соотношения между единицами СИ и СГС для 1) напряжённости магнитного поля, 2) индукции магнитного поля, 3) магнитного потока. Как называются соответствующие единицы?

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 50–55.
2. *Калашиников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003. — §§ 83, 89, 125.

## Работа 3.1.2

### Абсолютный вольтметр

**Цель работы:** установить количественное соотношение между единицами электрического напряжения в системах СИ и СГС.

**В работе используются:** экспериментальный электростатический вольтметр, разновес, обычный электростатический вольтметр, выпрямитель, ключ.

Измерив силу притяжения двух электродов, к которым приложено электрическое напряжение, можно определить величину этого напряжения. На этом основан принцип действия электростатического вольтметра. Сила притяжения его электродов измеряется путём сравнения с какой-нибудь механической силой, например с силой упругой деформации спиральной пружины. Так действуют обычные электростатические вольтметры, широко применяемые в технике измерений. В данной работе электрическая сила притяжения двух пластин плоского конденсатора сравнивается с весом гирек при помощи аналитических весов.

В системе СГС единица электрического заряда определяется через основные единицы: сантиметр, грамм и секунду. Поэтому, измеряя одни только механические величины: силу притяжения электродов, их размеры и расстояние между ними, — можно определить скопившийся на них заряд, а следовательно, и разность потенциалов между ними. Такие измерения и используемые для этой цели приборы принято называть абсолютными.

В системе СИ вводится дополнительная основная единица силы тока — ампер. Единица электрического заряда определяется через основные единицы: ампер и секунду. Как всегда в физике, введение добавочных независимых единиц приводит к появлению размерных констант. В формулах электростатики в системе СИ появляется размерная константа  $\epsilon_0$ , называемая *электрической постоянной*. Определение этой константы является одной из задач данной работы.

Обозначим через  $q$  заряд конденсатора и через  $E_1$  — напряжённость однородного электрического поля, создаваемого одной из пластин плоского конденсатора в том месте, где находится вторая пластина (считаем при этом, что расстояние  $d$  между пластинами мало по сравнению с поперечными размерами конденсатора). На вторую пластину действует со стороны первой сила  $F = qE_1$ , равная, конечно, силе действия второй пластины на первую. Напряжённость поля  $E_1$  связана с плотностью электрического заряда  $\sigma = q/S$  соотношением  $E_1 = \sigma/2\epsilon_0$ . Таким обра-

зом,

$$F = \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{q^2}{S}. \quad (1)$$

Для плоского конденсатора  $q = UC = U\varepsilon_0 S/d$ , где  $d$  — расстояние между пластинами. Окончательно получаем

$$F = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}, \quad (2)$$

или

$$U = d \sqrt{\frac{2F}{\varepsilon_0 S}} \quad [\text{ед. СИ}]. \quad (3)$$

Формула (3) определяет в системе СИ связь между напряжением на конденсаторе и силой притяжения его пластин. Нетрудно получить аналогичную формулу в системе СГС. Проводя те же рассуждения, что и выше, найдём

$$U = 2d \sqrt{\frac{2\pi F}{S}} \quad [\text{ед. СГС}]. \quad (4)$$

Опыты при постоянном напряжении на пластинах конденсатора можно использовать для определения электрической постоянной и для измерения коэффициента, переводящего напряжение, выраженное в вольтах, в единицы системы СГС. Квадратичный характер связи между силой и напряжением позволяет измерять с помощью весов и переменные напряжения, например напряжение электрической сети. В нашей установке опыты проводятся только при постоянном напряжении.

### Экспериментальная установка

Основной составной частью экспериментальной установки являются аналитические весы (рис. 1), одна из чашек которых заменена подвижной пластиной 1 плоского воздушного конденсатора. Эта пластина заземлена. Высоковольтная неподвижная пластина 2 помещена внутри заземлённого электростатического экрана 3. Верхняя часть экрана имеет вид кольца, окружающего пластину 1 (охранное кольцо).

Нижние поверхности пластины и кольца лежат в одной плоскости. Так как их потенциалы равны, то они как бы образуют один проводник; электрическое поле оказывается однородным вдоль всей поверхности подвижной пластины, в том числе и у её краев.

Напряжение на конденсатор подаётся от высоковольтного выпрямителя. Высокоомный резистор (3 МОм), вмонтированный в выпрямитель, ограничивает ток короткого замыкания при случайных замыканиях пластин конденсатора. Параллельно пластинам конденсатора включён обычный электростатический вольтметр.

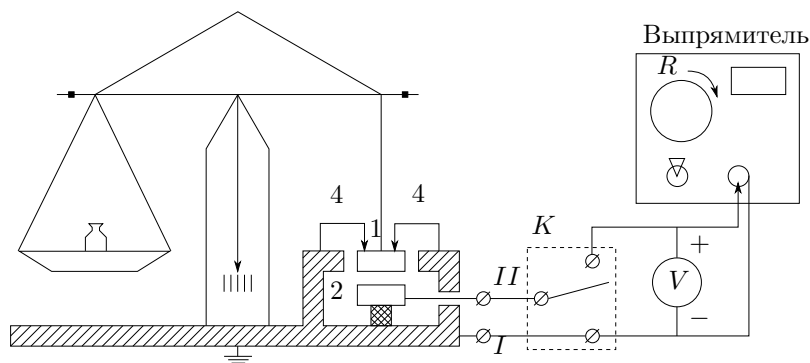


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Измерения проводятся в условиях равновесия электрических и механических сил. Как следует из формулы (2), электрические силы быстро возрастают с уменьшением зазора между пластинами. С другой стороны, механические силы, обеспечивающие равновесие аналитических весов, возрастают при наклонах коромысла крайне медленно. В условиях нашего опыта равновесие весов при равенстве электрических и механических сил оказывается поэтому неустойчивым.

При настройке прибора на левую чашку весов кладётся некоторый перегрузок. При этом положение весов фиксируется тремя контактными винтами 4, расположенными в вершинах равностороннего треугольника (рис. 1 и (2)). Винты упираются в контактные площадки 5, установленные на верхней плоскости подвижной пластины. Напряжение на пластинах регулируется с помощью реостата  $R$  выпрямителя. Электрические силы, действующие на пластину 1, возрастают по мере увеличения потенциала неподвижной пластины. В тот момент, когда эти силы сравниваются с весом перегрузка, коромысло теряет устойчивость и подвижная пластина «прилипает» к неподвижной. Этот момент фиксируется по движению стрелки весов.

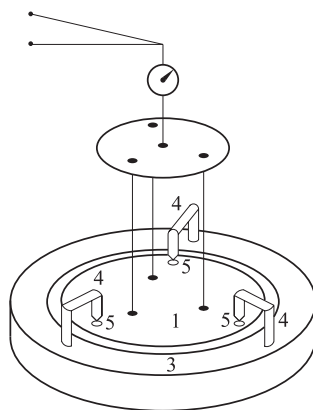


Рис. 2. Конструкция крепления подвижной пластины конденсатора

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать связь между силой притяжения пластин и разностью потенциалов между ними для определения электрической постоянной  $\varepsilon_0$  и коэффициента перевода единиц напряжения из системы СГС в систему СИ.

### Внимание!

Регулировка измерительного конденсатора требует определённых навыков и может производиться *только лаборантом или механиком*. Студент проверяет регулировку пластин визуально, не меняя их настройку самостоятельно.

1. Перед началом работы рассчитайте по формуле (2) максимально допустимую нагрузку, исходя из предела измерений электростатического вольтметра. Расстояние между пластинами  $d$  и площадь пластин  $S$  указаны на установке.
2. Соберите схему согласно рис. 1.

По уровню, расположенному на основании весов, проверьте, занимает ли платформа весов горизонтальное положение. При этом подвижная пластина измерительного конденсатора должна располагаться в центре охранного кольца, не касаясь его. При обнаружении неисправностей обратитесь к лаборанту.

Проверьте регулировку положения равновесия коромысла ненагруженных весов. Для этого следует отключить пластины конденсатора от выпрямителя и соединить их друг с другом (ключ  $K$  на рис. 1 переводится в нижнее положение). Осторожно, чтобы не сбить опорные призмы коромысла, освободите весы от арретира. В положении равновесия при закороченных пластинах упорные штифты должны быть близки к контактными пластинам и должны касаться их при незначительных ( $\sim 10$  мг) перегрузках на левой чашке весов.

При необходимости проведите регулировку положения коромысла весов. Для этого снова арретируйте весы и, перемещая тарировочные гайки, расположенные на концах коромысла, добейтесь того, чтобы стрелка весов оказалась на нулевом делении шкалы. Поворот гаек и изменение груза на чашке весов *всегда производятся при арретированных весах*, а проверка положения коромысла — когда весы сняты с арретира. Для изменения груза открываются боковые дверцы весов (фронтальная дверца открывается только на время ремонта).

3. Исследуйте зависимость силы притяжения пластин от напряжения на конденсаторе. Для измерения напряжения применяется электро-

статический вольтметр (вольтметр, вмонтированный в выпрямитель, для измерений не используется).

Переведите ключ  $K$  в положение измерения. Положите на левую чашку весов груз, равный примерно 0,1 от максимально допустимого. При этом подвижная пластина должна прижаться к упорным штифтам. Подберите напряжение, приводящее к потере устойчивости весов. Оно соответствует моменту начала движения стрелки весов.

Рекомендуется уточнить это напряжение 2–3 раза, каждый раз всё медленнее поворачивая ручку реостата  $R$ . Перед каждым измерением напряжения следует закорачивать пластины конденсатора ключом  $K$ , чтобы снять с пластин остаточный заряд.

Проведите такие измерения не менее чем в десяти точках, равномерно расположенных в рабочем диапазоне нагрузок.

4. Сразу после измерений изобразите результаты на графике в координатах  $F$ ,  $U^2$ . Если полученные точки в пределах ошибок опыта ложатся на прямую линию, эксперимент можно закончить. Если прямой линии не получилось, следует найти и устранить ошибку.
5. По наклону прямой  $F(U^2)$  рассчитайте значение электрической постоянной  $\epsilon_0$ .
6. Используйте результаты измерений для определения коэффициента перевода единиц напряжения из системы СГС в систему СИ. Напряжение в единицах СГС может быть вычислено по формуле (4), а показания электростатического вольтметра позволяют определить это напряжение в вольтах. Изобразите полученные результаты на графике в координатах  $U [\text{СГС}] = f(U [\text{СИ}])$  и по наклону прямой, проведённой через экспериментальные точки, определите коэффициент пересчёта напряжений.

### Контрольные вопросы

1. Получите теоретически соотношения между единицами СИ и СГС для 1) заряда, 2) напряжения, 3) напряжённости электрического поля, 4) ёмкости конденсатора.
2. Оцените ошибку, возникающую вследствие того, что равновесие весов устанавливалось при наличии небольшого зазора между штифтами и контактными пластинами, а измерения производятся при отсутствии этого зазора.
3. Покажите, что электростатический вольтметр пригоден для измерения как постоянного, так и переменного напряжения.
4. Покажите, что измерения на переменном токе определяют именно эффективное значение его напряжения.

5. Чем определяется интервал частот, в котором можно измерять переменные напряжения с помощью электростатического вольтметра?

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество — М.: Наука, 1983, § 125.
2. *Калашиников С.Г.* Электричество. — М.: Наука, 1977, §§ 5, 6, 26.

### Работа 3.1.3

## Измерение магнитного поля Земли

**Цель работы:** исследовать свойства постоянных неодимовых магнитов; измерить с помощью них горизонтальную и вертикальную составляющие индукции магнитного поля Земли и магнитное наклонение.

**В работе используются:** неодимовые магниты; тонкая нить для изготовления крутильного маятника; медная проволока; электронные весы; секундомер; измеритель магнитной индукции; штангенциркуль; брусок, линейка и штатив из немагнитных материалов; набор гирь и разновесов.

### Свойства точечного магнитного диполя

Простейший магнитный диполь может быть образован витком с током или постоянным магнитом. По определению, магнитный момент  $\mathbf{m}$  тонкого витка площадью  $S$  с током  $I$  равен (в системе СИ):

$$\mathbf{m} = IS, \quad (1)$$

где  $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$  — вектор площади контура, образующий с направлением тока правовинтовую систему,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к площадке (это же направление  $\mathbf{m}$  принимается за направление  $S \rightarrow N$  от южного  $S$  к северному  $N$  полюсу магнита). Если размеры контура с током или магнитной стрелки малы по сравнению с расстоянием до диполя, то соответствующий магнитный диполь  $\mathbf{m}$  называют *элементарным* или *точечным*.

Магнитное поле точечного диполя определяется по формуле, аналогичной формуле для поля элементарного электрического диполя:

$$\mathbf{B}_{\text{дип}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right). \quad (2)$$

Во внешнем магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$  на точечный магнитный диполь  $\mathbf{m}$  действует механический момент сил:

$$\mathcal{M} = [\mathbf{m} \times \mathbf{B}]. \quad (3)$$

При этом потенциальная энергия, которой обладает диполь с постоянным  $\mathbf{m}$ , равна

$$W = -(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}). \quad (4)$$

Когда диполь ориентирован вдоль внешнего поля ( $\mathbf{m} \parallel \mathbf{B}$ ), он находится состояния *равновесия* ( $\mathcal{M} = 0$ ). При этом *устойчивым* будет только состояние, в котором диполь *сонаправлен* с полем  $\mathbf{m} \uparrow\uparrow \mathbf{B}$ , поскольку его потенциальная энергия достигает *минимума* ( $W_{\min} = -\mathbf{m}B$ ). При противоположной ориентации энергия будет иметь максимум ( $W_{\max} = \mathbf{m}B$ ) и состояние равновесия будет неустойчивым.

**Замечание.** В системе СГС формулы (1), (2) имеют соответственно вид

$$\mathbf{m} = \frac{1}{c} I \mathbf{S}, \quad \mathbf{B}_{\text{дип}} = \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}.$$

Формулы (3) и (4) в СИ и СГС совпадают.

Последнее обстоятельство делает выражение (4) удобным для сопоставления единиц измерения магнитного момента  $\mathbf{m}$ :

- СИ:  $[\mathbf{m}] = [W]/[B] = \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$ ;
- СГС:  $[\mathbf{m}] = [W]/[B] = \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}} = 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$ .

В *неоднородном* внешнем поле выражение для энергии постоянного диполя (4) сохраняется. При этом кроме момента сил на диполь действует ещё и сила:

$$\mathbf{F} = -\nabla W = (\mathbf{m} \cdot \nabla) \mathbf{B}, \quad (5)$$

где  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$  — векторный оператор «набла» (оператор Гамильтона). В частности, проекция (5) на ось  $x$  имеет вид

$$F_x = m_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + m_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + m_z \frac{\partial B_x}{\partial z}.$$

Таким образом, из (3)—(5) следует, что *свободный* магнитный диполь в неоднородном магнитном поле ориентируется вдоль силовых линий магнитного поля и втягивается в область более сильного поля, поскольку это ведёт к уменьшению энергии диполя.

Выражения (2) и (5) позволяют рассчитать силу взаимодействия магнитов с моментами  $\mathbf{m}_1$  и  $\mathbf{m}_2$  в рамках модели точечных диполей. В частном случае, когда моменты двух небольших магнитов направлены вдоль



соединяющей их прямой  $\mathbf{m}_{1,2} \parallel \mathbf{r}$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор между ними, магниты взаимодействуют с силой

$$F_{12} = \mathbf{m}_1 \frac{\partial B_2}{\partial r} = \mathbf{m}_1 \frac{\partial(2\mathbf{m}_2/r^3)}{\partial r} = -\frac{6\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2}{r^4} \quad (\text{ед. СГС}). \quad (6)$$

(мы использовали запись в системе СГС, поскольку она компактнее; при использовании системы СИ (6) нужно домножить на  $\mu_0/4\pi$ ). Здесь магниты притягиваются, если их магнитные моменты сонаправлены ( $\mathbf{m}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{m}_2$ ) и отталкиваются, если направлены противоположно ( $\mathbf{m}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{m}_2$ ).

Если магнитные моменты направлены перпендикулярно соединяющей их прямой  $\mathbf{m}_{1,2} \perp \mathbf{r}$ , то нетрудно показать, что сила их взаимодействия окажется в два раза меньше и будет иметь обратный знак:

$$F_{12} = \frac{3\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2}{r^4} \quad (\text{ед. СГС})$$

(диполи притягиваются при  $\mathbf{m}_1 \uparrow\downarrow \mathbf{m}_2$  и отталкиваются при  $\mathbf{m}_1 \uparrow\uparrow \mathbf{m}_2$ ).

### Экспериментальная установка

В работе используются неодимовые магниты шарообразной формы.

**Замечание.** «Неодимовые» магниты, состоящие из соединения неодим-железо-бор (NdFeB), впервые были получены в 1983 году и на сегодняшний день являются самыми мощными постоянными магнитами. С их помощью которых можно поднимать грузы порядка тонны. Они нашли широкое применение в изготовлении жёстких дисков, DVD-приводов, звуковых динамиков, магнитных томографов и др.

Для проведения эксперимента важно, что а) вещество, из которого изготовлены магниты, является *магнитожёстким* материалом; б) шары намагничены однородно.

«Магнитожёсткость» материала (см. подробнее Раздел IV) означает, что магнитные моменты шаров в процессе работы не изменяются под действием внешних магнитных полей, т.е. шар ведёт себя как постоянный («жёсткий») диполь. В том числе, магнитные моменты не изменяются при контакте магнитов друг с другом.

Магнитное поле однородно немагниченного шара радиусом  $R$  может быть вычислено точно. На расстояниях  $r \geq R$  от центра шара оно совпадает с полем *точечного* магнитного диполя (2), расположенного в центре, магнитный момент  $\mathbf{m}$  которого совпадает с полным моментом шара. Внутри шара магнитное поле однородно: с помощью формулы (2) и условия непрерывности нормальной компоненты индукции на поверхности шара нетрудно получить, что при  $r < R$

$$\mathbf{B}_0 = \frac{\mu_0 \mathbf{m}}{2\pi R^3} \quad (7)$$

(в ед. СГС  $\mathbf{B}_0 = 2\mathbf{m}/R^3$ ).

В качестве ещё одной характеристики материала магнита используют остаточную намагниченность  $M$ . По определению, намагниченность равна *объёмной плотности магнитного момента*, поэтому для однородно намагниченного шара

$$\mathbf{m} = MV, \quad (8)$$

где  $V = \frac{4\pi}{3}R^3$  — объём магнита. Величину  $B_r = \mu_0 M$  называют *остаточной индукцией* материала (в ед. СГС  $B_r = 4\pi M$ ).

Из (2) нетрудно видеть, что индукция  $B_p$  на *полюсах* однородно намагниченного шара направлена по нормали к поверхности и совпадает поэтому с индукцией внутри шара  $B_p = B_0$ . Как следует из (7), величина  $B_p$  связана с остаточной индукцией  $B_r$  соотношением

$$B_p = B_0 = \frac{2}{3}B_r. \quad (9)$$

**Замечание.** Электрическим аналогом магнитного шара из магнитожёсткого материала является диэлектрический шар, изготовленный из *электрета* — материала с «замороженной» поляризацией. По своей топологии внешнее поле шара из электрета не отличается от поля постоянного шарообразного магнита. В электрическом поле он ведёт себя точно также, как магнитный шар в магнитном поле. Формулы, описывающие взаимодействие постоянных шарообразных магнитов между собой и с магнитным полем, идентичны соотношениям для электрических диполей в электрическом поле.

### Определение магнитного момента магнитных шариков

**Метод А.** Величину магнитного момента  $\mathbf{m}$  двух одинаковых шариков можно рассчитать, зная их массу  $m$  и определив максимальное расстояние  $r_{\max}$ , на котором они ещё удерживают друг друга в поле тяжести (см. рис. 1). При максимальном расстоянии сила тяжести шариков  $mg$  равна силе их магнитного притяжения. Когда векторы двух магнитных моментов ориентированы вертикально, из (6) имеем:

$$\mathbf{m} = \sqrt{\frac{m g r_{\max}^4}{6}} \quad (\text{ед. СГС}). \quad (10)$$

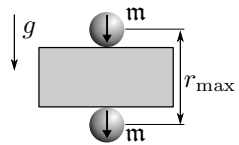


Рис. 1. Измерение магнитных моментов шариков

По величине  $\mathbf{m}$  с помощью (2) можно рассчитать величину индукции  $B$  вблизи любой точки на поверхности шара радиуса  $R$ . Максимальная величина индукции наблюдаются на полюсах (см. (9)).

**Метод Б.** Величину магнитного момента шариков можно определить также по силе их сцепления. Она определяется как сила, необходимая для разрыва двух сцепившихся магнитных шариков. Сила сцепления максимальна, если шары соединяются своими противоположными полюсами (магнитные моменты сонаправлены).

Максимальную силу сцепления можно определить по весу магнитной цепочки, которую способен удерживать самый верхний магнитный шарик. Если цепь состоит из одинаковых магнитных шариков (см. рис. 2а), то при определённой длине она отрывается от верхнего шарика. При этом, учитывая, что сила притяжения убывает как  $F \propto 1/r^4$ , где  $r$  — расстояния между центрами шаров, для расчёта прочности цепочки достаточно учитывать силу взаимодействия верхнего шара с 3–4 ближайшими соседями.

Сила сцепления (6) двух одинаковых шаров радиусами  $R$  с магнитными моментами  $m$  равна

$$F_0 = \frac{6m^2}{(2R)^4} = \frac{3m^2}{8R^4} \quad (\text{ед. СГС}). \quad (11)$$

Тогда минимальный вес цепочки, при которой она оторвётся от верхнего шарика равен:

$$F = F_0 \left( 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right) \approx 1,08 F_0. \quad (12)$$

(мы ограничились четырьмя членами ряда; точность такого приближения предлагается оценить самостоятельно). Отметим, что не обязательно составлять цепочку только из одинаковых шариков: на расстояниях, превышающих 20–30 диаметров шариков, можно подцепить любой груз, притягиваемый магнитом (см. рис. 2б), — на результат это не повлияет, в чём несложно убедиться экспериментально.

### Измерение горизонтальной составляющей индукции магнитного поля Земли

Магнитное поле Земли в настоящей работе измеряется по периоду крутильных колебаний «магнитной стрелки» вокруг вертикальной оси.

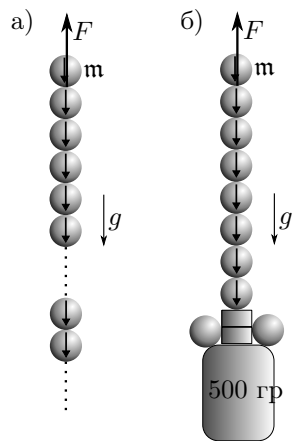


Рис. 2. Альтернативный метод измерения магнитных моментов шариков

«Магнитная стрелка» образована сцепленными друг с другом  $n$  намагниченными шариками. С помощью  $\Lambda$ -образного подвеса стрелка подвешена в горизонтальном положении (см. рис. 3). Для крепления нити в работе используется штатив, изготовленный из немагнитного материала.

Магнитные моменты всех шариков направлены в одну сторону вдоль оси «стрелки». Под действием механического момента сил (3), действующего на стрелку со стороны поля Земли, стрелка стремится повернуться по горизонтальной составляющей магнитного поля Земли  $B_{\parallel}$  в направлении Юг—Север.

При отклонении стрелки на угол  $\theta$  от равновесного положения в горизонтальной плоскости возникают крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стрелки. Если пренебречь упругостью нити, то уравнение крутильных колебаний такого маятника определяется возвращающим моментом сил

$$\mathcal{M} = -m_n B_{\parallel} \sin \theta$$

и моментом инерции  $J_n$  «стрелки» относительно оси вращения. При малых амплитудах ( $\sin \theta \approx \theta$ ) уравнение колебаний стрелки имеет вид:

$$J_n \ddot{\theta} + m_n B_{\parallel} \theta = 0.$$

Отсюда находим период малых колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_n}{m_n B_{\parallel}}}. \quad (13)$$

Здесь  $m_n = n\mathbf{m}$  — полный магнитный момент магнитной «стрелки», составленной из  $n$  шариков. Момент инерции  $J_n$  стрелки из  $n$  шариков с хорошей точностью равен моменту инерции тонкого однородного стержня массой  $m_n = nt$  и длиной  $\ell_n = n \cdot 2R$ :

$$J_n \approx \frac{1}{12} m_n \ell_n^2 = \frac{1}{3} n^3 m R^2. \quad (14)$$

Таким образом, период колебаний маятника оказывается пропорциональным числу шаров  $n$ , составляющих «стрелку»:

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{m R^2}{3m B_{\parallel}}} \cdot n. \quad (15)$$



Рис. 3. Крутильный маятник во внешнем магнитном поле

При выводе (15) предполагалось, что магнитный момент — величина *аддитивная*: полный магнитный момент системы магнитов равен векторной сумме магнитных моментов шариков. Экспериментальное подтверждение этой зависимости ( $T \propto n$ ) будет являться подтверждением справедливости предположений о магнитожёсткости материала магнитов и, следовательно, аддитивности их магнитных моментов.

### Измерение вертикальной составляющей индукции магнитного поля Земли. Магнитное наклонение.

Для измерения вертикальной  $B_{\perp}$  составляющей вектора индукции поля Земли используется та же установка, что и для измерения горизонтальной составляющей с тем лишь отличием, что подвешенная магнитная «стрелка» закрепляется на нити в одной точке. В этом случае стрелка, составленная из чётного числа одинаковых шариков и подвешенная за середину, расположится не горизонтально, а под некоторым углом к горизонту (см. рис. 4а). Это связано с тем, что вектор  $\mathbf{B}$  индукции магнитного поля Земли не горизонтален, а образует с горизонтом некоторый угол  $\beta$ , зависящий от географической широты  $\varphi$  места, где проводится опыт. Величина угла  $\beta$  называется **магнитным наклонением**.

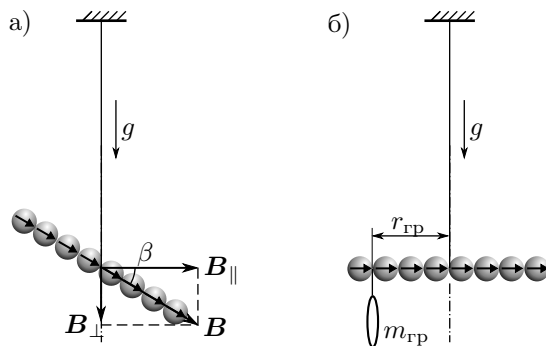


Рис. 4. Измерение вертикальной составляющей поля и магнитного наклонения

С помощью небольшого дополнительного грузика стрелку можно «выровнять», расположив её горизонтально (см. рис. 4б): в этом случае момент силы тяжести груза относительно точки подвеса будет равен моменту сил, действующих на «стрелку» со стороны вертикальной составляющей магнитного поля Земли. Если масса уравнивающего груза равна  $m_{\text{гр}}$ , плечо силы тяжести  $r_{\text{гр}}$ , а полный магнитный момент стрелки  $\mathbf{m}_n = n\mathbf{m}$ , то в равновесии:

$$\mathcal{M}_n = m_{\text{гр}} g r_{\text{гр}} = n m B_{\perp}. \quad (16)$$

Видно, что момент  $M_n$  силы тяжести уравнивающего груза пропорционален числу  $n$  шариков, образующих магнитную «стрелку»:  $M \propto n$ .

### Внимание!

Магнитные предметы (ножницы, металлическая линейка, корпуса приборов, мобильные телефоны и др.), близко расположенные к экспериментальной установке, могут существенно искажать результаты опыта по измерению индукции магнитного поля Земли.

## ЗАДАНИЕ

### I. Определение магнитного момента, намагничённости и остаточной магнитной индукции вещества магнитных шариков

1. Измерьте диаметр шариков и взвесьте их на весах. Имейте ввиду, что весы могут давать некорректные показания, если магниты класть непосредственно на платформу весов!
2. С помощью магнетометра измерьте индукцию поля  $B_p$  на полюсах шарика.
3. Проложите между двумя магнитными шариками брусок из немагнитного материала. Подкладывая между бруском и верхним магнитиком листы бумаги (см. рис. 1), определите, на каком максимальном расстоянии  $r_{\max}$  шарики удерживают друг друга в поле тяжести Земли.
4. Рассчитайте величину магнитного момента магнитика  $m$  (см. описание метода А). Оцените погрешность измерений.
5. Используя дополнительные шарики, составьте цепочку из 20–30 шариков и, с помощью неодимовых магнитов в форме параллелепипедов, подсоедините цепочку к гире и разновесам, так, чтобы общая масса системы составила  $\sim 500$  г (рис. 26). Добавляя или удаляя шарики (шарики можно примагничивать непосредственно к гире), подберите минимальный вес системы цепочки с гирей, при котором она отрывается от верхнего шарика.
6. С помощью весов определите вес оторвавшейся цепочки с гирей.
7. Рассчитайте силу сцепления двух шаров (см. описание метода Б) и определите магнитный момент шарика  $m$ . Оцените погрешность результата.
8. Сравните значения магнитных моментов, полученные двумя методами. Какой метод даёт более точный результат?
9. Рассчитайте величину намагничённости материала шариков  $M$  и остаточную индукцию магнитного поля  $B_r$ . Сравните значение  $B_r$  с табличными для соединения NdFeB.

10. Рассчитайте индукцию  $B_p$  у полюсов шарика (см. (9)). Сравните расчетное  $B_p$  значение с измеренным. При сильном расхождении результатов повторите измерения.

## II. Определение горизонтальной составляющей магнитного поля Земли

11. Соберите крутильный маятник (рис. 3) из 12 магнитных шариков и подвесьте его к немагнитному штативу. Используя  $\Lambda$ -образный подвес, установите «магнитную стрелку» в горизонтальное положение (юстировка системы).

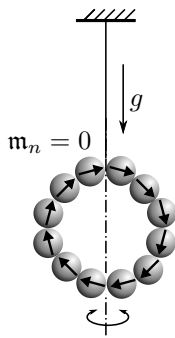


Рис. 5. Магнитная «стрелка», свернутая в кольцо

12. Возбудите крутильные колебания маятника вокруг вертикальной оси и определите их период. Оцените влияние упругости (модуля кручения) нити на период колебаний, возбудив крутильные колебания «стрелки», свернутой в кольцо (магнитный момент такого кольцообразного маятника равен нулю) (см. рис. 5). Убедитесь, что упругость нити при расчете периода колебаний можно не учитывать.
13. Исследуйте зависимость периода  $T$  крутильных колебаний «стрелки» от количества магнитных шариков  $n$ , составляющих «стрелку». Измерения проведите для значений  $n = 3, 4, 5, \dots, 12$ . Не забывайте для каждого значения  $n$  юстировать систему, выставляя перед каждым измерением «стрелку» горизонтально!
14. Постройте график экспериментальной зависимости  $T(n)$ . Убедитесь в линейности этой зависимости. По значению углового коэффициента рассчитайте величину горизонтальной составляющей магнитного поля Земли (см. (15)). Оцените погрешность результата.

## III. Определение вертикальной составляющей магнитного поля Земли

15. Изготовьте магнитную «стрелку» из  $n = 10$  шариков и подвесьте её за середину с помощью нити на штативе (см. рис. 4a).

16. Определите механический момент сил, действующий со стороны магнитного поля Земли на *горизонтально* расположенную магнитную «стрелку». Для этого, с помощью одного или нескольких кусочков проволоки, уравновесьте «стрелку» в горизонтальном положении (см. рис. 46).
17. С помощью весов определите массу уравнивающего груза  $m_{гр}$
18. Из условия равновесия рассчитайте механический момент сил  $M$ , действующих на горизонтальную «стрелку» со стороны поля Земли. Измерения момента сил проведите для чётных значений  $n = 4, 6, 8, 10, 12$ .
19. Постройте график экспериментальной зависимости  $M(n)$ . Убедитесь в линейности этой зависимости. Сделайте вывод о применимости приближения аддитивности магнитных моментов для используемых в работе магнитов. По значению углового коэффициента аппроксимирующей прямой рассчитайте величину вертикальной составляющей  $B_{\perp}$  магнитного поля Земли. Оцените погрешность результата.
20. Используя результаты измерений  $B_{\perp}$  и  $B_{\parallel}$ , определите магнитное наклонения  $\beta$  и полную величину индукции магнитного поля Земли на широте Долгопрудного.
21. Сравните полученное значение наклонения  $\beta$  с расчётным, в предположении, что магнитное поле Земли есть поле однородно намагниченного вдоль оси вращения шара. Оцените также полный магнитный момент  $m_3$  Земли.
22. Сравните полученные в работе результаты со справочными данными параметров магнитного поля Земли в Московском регионе.

### Контрольные вопросы

1. Что такое магнитный момент? В каких единицах он измеряется (в СИ и СГС)?
2. Какой ток  $I$  должен циркулировать по плоскому витку радиусом, равным радиусу используемых в работе магнитных неодимовых шариков, чтобы его магнитный момент оказался равен магнитному моменту этих шариков? Расчёт проведите в системах СИ и СГС.
3. Какие силы действуют на точечный магнитный диполь в неоднородном внешнем магнитном поле?
4. По найденному в эксперименте значению магнитного момента неодимовых шариков, рассчитайте энергию и силу взаимодействия двух находящихся в контакте шариков, моменты которых ориентированных а) вдоль, или б) перпендикулярно соединяющих их прямой.



5. Как сила сцепления двух одинаковых неодимовых шарообразных магнитов зависит от их диаметров? Оцените силу сцепления двух неодимовых шаров диаметром  $D = 3$  см каждый.
6. Покажите, что поле внутри однородно намагниченного шара радиуса  $R$  однородно и равно  $\mathbf{B}_0 = 2\mathbf{m}/R^3$ , где  $\mathbf{m}$  — полный магнитный момент шара.
7. Найдите зависимость индукции магнитного поля  $B(\theta)$  от угла  $\theta$  вблизи поверхности однородно намагниченного шара (полярный угол  $\theta$  отсчитывается от северного полюса шара).
8. Приведите примеры материалов, используемых для изготовления постоянных магнитов. Каковы их характеристики? Используя табличные данные, покажите, что намагниченность используемых в работе шариков можно считать практически постоянной.
9. Изменяется ли намагниченность постоянных магнитов с течением времени? Как размагнитить постоянный магнит? Как размагнитить намагниченный в поле магнита стальной инструмент (отвёртку, пинцет)?
10. Получите точные значения момента инерции крутильного маятника  $J_n$  относительно оси вращения, составленного из  $n$  шариков и сравните их с соответствующими значениями момента инерции, рассчитанными по приближённой формуле для тонкого стержня (14). При каком числе  $n$  отличие будет составлять менее 1%?
11. Для чего в конструкции крутильного маятника используется  $\Lambda$ -образный подвес?
12. Получите формулу для периода крутильных колебаний горизонтальной магнитной стрелки вблизи положения равновесия.
13. Поясните опыт, с помощью которого выясняется влияние упругости нити на период крутильных колебаний.
14. Неодимовый шарообразный магнит диаметром  $D = 6$  см разрезали пополам. Какую минимальную силу надо приложить, чтобы оторвать (без сдвига) одну половинку от другой?

### Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §52, 57, 58, 74.
2. Кингсеп А.С., Локишин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2007. — Ч. II §4.4, 5.3, 7.2.
3. Кириченко Н.А. Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — §3.4, 4.2.

## Раздел II

# КОЛЕБАНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

В этом разделе мы рассмотрим колебания токов (зарядов, напряжений) в электрических цепях, включающих в себя резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности. Такие цепи — *колебательные контуры* — являются системами с одной степенью свободы и математически описываются дифференциальными уравнениями второго порядка. В колебательных контурах могут возникать *свободные* затухающие колебания, а также *вынужденные* колебания, возбуждаемые внешней ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону.

Будут рассмотрены также *автоколебания* в таких системах, возникающие при определённых *условиях возбуждения*, если используется постоянный (не синусоидальный) источник ЭДС, периодически компенсирующий потери колебательной энергии контура. Кроме того, будут рассмотрены автоколебания в системах, не содержащих одного из накопителей колебательной энергии (ёмкости или индуктивности), называемых *вырожденными* колебательными системами и описываемых дифференциальными уравнениями первого порядка.

Изложение материала ориентировано на его применение в лабораторном практикуме. Более детальное рассмотрение электрических колебаний можно найти в рекомендуемой литературе.

Мы будем рассматривать относительно низкочастотные колебания, когда выполняется условие *квазистационарности*. Квазистационарность означает, что в каждый момент времени значения тока  $I$  практически одинаковы во всех элементах цепи, соединённых последовательно, то есть изменения токов во времени происходят настолько медленно, что распространение электродинамических взаимодействий, которое происходит со скоростью, близкой к скорости света в вакууме  $c$ , можно считать *мгновенным*. Условие квазистационарности выполнено, если время  $\Delta t = l/c$  распространения электромагнитного возмущения на расстояние  $l$  порядка геометрических размеров цепи, много меньше характерного времени изменения тока (например, периода колебаний  $T$ ):

$$l/c \ll T,$$

(или для частоты колебаний  $\nu = 1/T \ll c/l$ ). На практике для колебательного контура величина  $l$  совпадает с длиной провода, из которого

изготовлена обмотка катушки индуктивности. При  $l = 1$  м условие квазистационарности хорошо выполняется при частотах  $\nu \ll 3 \cdot 10^8$  Гц.

Выполнение условия квазистационарности позволяет при расчёте цепей переменного тока использовать закон Ома для замкнутой цепи и закон сохранения заряда. Следствием этих двух законов являются два правила Кирхгофа: 1) в каждой точке разветвления проводов алгебраическая сумма токов равна нулю; 2) для любого замкнутого контура сумма падений напряжений на отдельных участках равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре.

Мы будем рассматривать, в основном, идеализированные цепи переменного тока, в которых всё омическое сопротивление сосредоточено в резисторе, некомпенсированные заряды расположены только на обкладках конденсатора, а всё магнитное поле, связанное с током в цепи, локализовано в катушке индуктивности. Более детальный учёт омических потерь в конденсаторах и катушках индуктивности будет проведён в описаниях лабораторных работ, посвящённых изучению колебаний в цепях переменного тока, где эти потери могут играть заметную роль.

Условие квазистационарности позволяет считать элементы цепи *точечными* и использовать следующие связи между током  $I$  и напряжением  $U$ : для резистора с сопротивлением  $R$

$$U_R = IR; \quad (2.1)$$

для конденсатора с ёмкостью  $C$  (когда ток  $I$  направлен к положительно заряженной пластине):

$$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU_C}{dt}; \quad (2.2)$$

для катушки с коэффициентом самоиндукции  $L$ :

$$U_L = L \frac{dI}{dt}. \quad (2.3)$$

Энергия колебаний такой идеализированной цепи оказывается сосредоточена электрическом поле конденсатора и магнитном поле катушки:

$$W = W_C + W_L, \quad W_C = \frac{CU_C^2}{2}, \quad W_L = \frac{LI^2}{2}. \quad (2.4)$$

Диссипация электромагнитной энергии (превращение в тепло) происходит на резисторе по закону Джоуля–Ленца

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{U_R^2}{R}. \quad (2.5)$$

В случае цепей *постоянного* тока правила Кирхгофа дают возможность получить полную систему *линейных алгебраических уравнений*, из

решения которой могут быть найдены все неизвестные токи (заряды, напряжения). При расчёте цепи *переменного* тока, используя эти правила для произвольного момента времени, мы получаем систему *линейных дифференциальных уравнений*, которые позволяют найти временную зависимость токов (зарядов, напряжений) в данной цепи. В частном случае, когда речь идёт о вынужденных стационарных колебаниях, нет необходимости каждый раз решать дифференциальные уравнения: для этих случаев используется стандартный *метод комплексных амплитуд* или *метод векторных диаграмм*.

## 1. Свободные колебания

Рассмотрим электрический контур, состоящий из последовательно соединённых резистора  $R$ , конденсатора  $C$  и катушки индуктивности  $L$  (рис. 2.1).

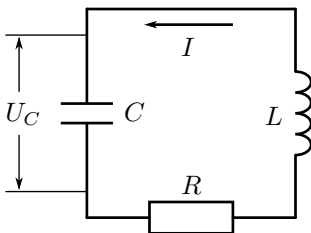


Рис. 2.1. Последовательный колебательный контур

Сумма падений напряжения на элементах цепи в отсутствии внешней ЭДС равна нулю:

$$RI + U_C + L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (2.6)$$

Подставив в уравнение (2.6) выражения для  $I$  и  $dI/dt$  из (2.2), приходим к уравнению

$$CL \frac{d^2 U_C}{dt^2} + CR \frac{dU_C}{dt} + U_C = 0.$$

Разделим это уравнение на  $CL$  и введём обозначения:

$$\gamma = \frac{R}{2L}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad (2.7)$$

где  $\gamma$  — коэффициент затухания,  $\omega_0$  — собственная круговая частота колебательного контура. Прилагательное «*круговая*» в дальнейшем для сокращения записи будем опускать. Введём также период собственных колебаний  $T_0$ :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (2.8)$$

Уравнение для напряжения на конденсаторе  $U_C$  в колебательном контуре принимает теперь вид:

$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = 0, \quad (2.9)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Легко показать, что так же выглядят уравнения для других величин, характеризующих колебания в контуре:  $I$ ,  $q$ ,  $U_R$ ,  $U_L$ . Впрочем, решив уравнение (2.9), можно получить выражение для тока  $I$  по формуле (2.2), заряда  $q$  — по формуле  $q = CU_C$ , а напряжений  $U_R$  и  $U_L$  — по формулам (2.1) и (2.3).

Отметим, что линейными дифференциальными уравнениями второго порядка вида (2.9) описывается обширный класс колебательных систем как электрических, так и механических. Механические колебания изучались ранее в рамках семинарского и лабораторного практикумов, на что мы будем рассчитывать при дальнейшем изложении, сокращая некоторые выкладки.

Для решения уравнения (2.9) введём вспомогательную переменную  $U(t)$ , положив

$$U_C(t) = U(t)e^{-\gamma t}. \quad (2.10)$$

При этом из (2.9) получаем уравнение

$$\ddot{U} + \omega_1^2 U = 0, \quad (2.11)$$

где

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2. \quad (2.12)$$

В зависимости от соотношения между коэффициентом затухания  $\gamma$  и собственной частотой  $\omega_0$  решение  $U(t)$  уравнения (2.11) и, соответственно, напряжение на конденсаторе  $U_C(t)$  по-разному меняется во времени. Возможны три варианта, которые мы рассмотрим отдельно.

### 1.1. Затухающие колебания (случай $0 < \gamma < \omega_0$ )

С учётом определений (2.7) условие реализации режима затухающих колебаний в рассматриваемом  $LCR$ -контуре принимает вид:

$$0 < R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_{\text{кр}}, \quad (2.13)$$

где  $R_{\text{кр}}$  — критическое сопротивление. Для удобства записи последующих выкладок введём также величину

$$\rho = \frac{1}{2}R_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.14)$$

которую в радиотехнике принято называть волновым сопротивлением контура.

При выполнении условия (2.13) из формулы (2.12) следует, что  $\omega_1^2 > 0$  и, значит, уравнение (2.11) описывает гармонические колебания величины  $U(t)$  с амплитудой  $A$ , круговой частотой  $\omega_1$  и начальной фазой  $\varphi_0$ :

$$U(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_0).$$

Теперь с учётом (2.10) для напряжения  $U_C(t)$  на конденсаторе можно записать решение исходного уравнения (2.9) в виде

$$U_C(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (2.15)$$

В этом выражении, представляющем **затухающие колебания** напряжения на конденсаторе  $U_C(t)$ , множитель  $Ae^{-\gamma t}$  перед периодической функцией  $\cos(\omega_1 t + \varphi_0)$  называется **амплитудой** затухающих колебаний, а аргумент этой функции  $\omega_1 t + \varphi_0$  — **фазой** затухающих колебаний. Выражение (2.15) содержит две постоянные интегрирования дифференциального уравнения (2.9): *начальную амплитуду*  $A$  и *начальную фазу*  $\varphi_0$ , определяемые начальными условиями задачи, то есть значениями амплитуды и фазы  $U_C(t)$  при  $t = 0$ . Величина

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (2.16)$$

в этом случае представляет *круговую частоту свободных* (или *собственных*) затухающих колебаний (не путать с собственной частотой  $\omega_0$ ).

В качестве примера рассмотрим случай, когда в начальный момент ( $t = 0$ ) ток в контуре  $I(0) = 0$ , а напряжение на конденсаторе  $U_C(0) = U_0$ , то есть конденсатор имеет заряд  $q(0) = q_0 = CU_0$ . С учётом (2.16) и (2.2) это означает, что для уравнения (2.9) приняты начальные условия:

$$\begin{aligned} U_C(0) &= U_0 = A \cos \varphi_0, \\ \dot{U}_C(0) &= I(0)/C = -\gamma A \cos \varphi_0 - \omega_1 A \sin \varphi_0 = 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Второе из условий (2.17) даёт  $\operatorname{tg} \varphi_0 = -\gamma/\omega_1$  и, следовательно,

$$\cos \varphi_0 = \pm \frac{\omega_1}{\omega_0}, \quad \sin \varphi_0 = \mp \frac{\gamma}{\omega_0}. \quad (2.18)$$

Выбор знака здесь не ограничивает общности решения. Выберем верхние знаки в (2.18). В этом случае при положительной постоянной интегрирования  $A$  после замыкания цепи, как станет видно из приведённых ниже формул, будет происходить разрядка конденсатора. Начальные амплитуда  $A$  и фаза  $\varphi_0$  затухающих колебаний напряжения  $U_C(t)$  на конденсаторе в представлении (2.15) выражаются теперь через заданное начальное

значение напряжения на конденсаторе  $U_0$  и характеристики контура  $\gamma$  и  $\omega_1$ :

$$U_C = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad A = \frac{\omega_0}{\omega_1} U_0, \quad \varphi_0 = -\operatorname{arctg} \frac{\gamma}{\omega_1}. \quad (2.19)$$

Для тока  $I(t)$  в контуре с учётом (2.2) получаем

$$I(t) = I_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \pi/2), \quad I_0 = \frac{A}{\rho}, \quad (2.20)$$

где  $I_0$  и  $\pi/2$  — начальные значения амплитуды и фазы затухающих колебаний тока соответственно. Из (2.20) видно, что волновое сопротивление контура  $\rho$ , определяемое формулой (2.14), есть отношение *амплитуд* колебаний напряжения на конденсаторе и тока в контуре.

**Фазовые траектории затухающего осциллятора.** Заметим, что формулу (2.15) можно представить и в другом виде:

$$U_C(t) = e^{-\gamma t} (a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t),$$

где две новые постоянные  $a$  и  $b$  связаны с постоянными  $A$  и  $\varphi_0$  соотношениями

$$a = A \cos \varphi_0, \quad b = -A \sin \varphi_0.$$

При этом окончательные формулы для напряжения  $U_C(t)$  и тока  $I(t)$ , выраженные через  $U_0$  и характеристики контура, принимают вид:

$$\begin{aligned} U_C(t) &= U_0 e^{-\gamma t} \left[ \cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right], \\ I(t) = C \dot{U}_C &= -\frac{U_0 \omega_0}{\rho \omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Из формул (2.21) следует параметрическое представление *траектории системы на фазовой плоскости* переменных  $(U_C, I)$ . Задание этих двух величин полностью определяет состояние системы в момент времени  $t$ .

На рис. 2.2а показаны *в безразмерных переменных* зависимости (2.21) напряжения и тока в контуре от времени в режиме свободных затухающих колебаний: сплошная линия  $u(x) = U_C(x)/U_0$ , где  $x = \omega_1 t/2\pi$ , соответствует напряжению на конденсаторе  $U_C(t)$ , а штриховая линия  $j(x) = \rho I(x)/U_0$  — току в контуре  $I(t)$ . На рис. 2.2б показана фазовая траектория этих колебаний на плоскости переменных  $(u, j)$ , представляющая собой скручивающуюся к точке  $(0, 0)$  спираль.

**Период затухающих колебаний.** Из формул (2.15), (2.20) и рис. 2.2 видно, что затухающие при условии  $0 < \gamma < \omega_0$  колебания напряжения и

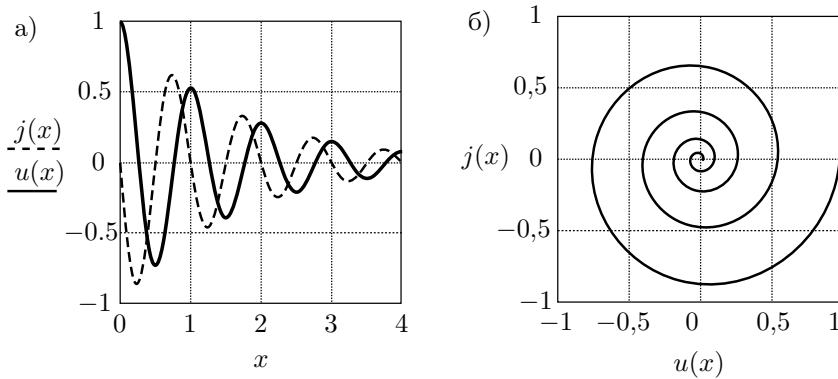


Рис. 2.2. Затухающие колебания при  $\gamma/\omega_0 = 0,1$ : а) ток в контуре  $j(x)$  и напряжение на конденсаторе  $u(x)$ , б) траектория системы на фазовой плоскости  $j(u)$

тока не являются, строго говоря, периодическими функциями времени. Однако эти величины дважды за время

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \gamma^2/\omega_0^2}} \quad (2.22)$$

проходят через нуль. А поскольку, согласно (2.2), нули функции  $I(t)$  являются нулями функции  $dU_C/dt$ , то величина  $T_1$  есть также время между двумя последовательными максимумами (или минимумами) напряжения  $U_C(t)$ . Ясно, что экстремумы функции  $I(t)$  чередуются с тем же периодом  $T_1$ . Отсюда возникает основание назвать величину  $T_1$  *периодом затухающих колебаний*.

Взаимное расположение нулей и экстремумов  $I(t)$  и  $U_C(t)$  легко понять из энергетических соображений. Действительно, запасённая в контуре электромагнитная энергия заключена в электрическом поле конденсатора и магнитном поле катушки индуктивности, так что максимумы электрической энергии (экстремумы  $U_C(t)$ ) достигаются в нулях  $I(t)$ , а максимумы магнитной энергии (экстремумы  $I(t)$ ) достигаются в нулях  $U_C(t)$ . Все экстремумы при этом не находятся на серединах временных интервалов между соответствующими нулями, а сдвинуты влево на некоторую величину, возможность определить которую предоставляется читателю.

Из (2.22) следует, что  $T_1 > T_0$ , то есть наличие потерь в контуре, обусловленных сопротивлением  $R$  и представленных коэффициентом  $\gamma$ , приводит к увеличению периода (уменьшению частоты) колебаний.

Отметим, что конденсатор и катушку индуктивности можно рассматривать как два накопителя, между которыми происходит перекачка



энергии в процессе колебаний (см. формулы (2.4)). Такая же ситуация имеет место и в других колебательных системах с одной степенью свободы, описываемых уравнениями вида (2.9).

**Характеристики затухающих колебаний.** В качестве характеристик процесса затухания колебаний помимо коэффициента затухания  $\gamma$  используют *время затухания*

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R}, \quad (2.23)$$

то есть время, за которое амплитуда колебаний убывает в  $e$  раз, а также *логарифмический декремент*

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \gamma T_1, \quad (2.24)$$

где  $U_k$  и  $U_{k+1}$  — два последовательных максимальных отклонения рассматриваемой величины (например, напряжения на конденсаторе  $U_C$ ) в одну сторону от оси абсцисс. Из формул (2.23), (2.24) следует связь между логарифмическим декрементом  $\Theta$  и числом полных колебаний  $N_\tau = \tau/T_1$  за время затухания  $\tau$ :

$$\Theta = \frac{1}{N_\tau}. \quad (2.25)$$

Таким образом, логарифмический декремент затухания  $\Theta$  равен обратному числу  $N_\tau$  периодов  $T_1$ , за которое амплитуда колебаний уменьшается в  $e$  раз.

На практике для определения  $\Theta$  удобно использовать отношение максимальных отклонений, разделённых целым числом  $n$  периодов  $T_1$  (см. рис. 2.2). В этом случае

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}. \quad (2.26)$$

Формулы (2.24)–(2.26) показывают, что максимумы (или минимумы) функции  $U_C(t)$  образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем

$$U_{k+1}/U_k = e^{-\Theta}. \quad (2.27)$$

Такую же прогрессию образуют и экстремумы функции  $I(t)$ .

Логарифмический декремент определяет *шаг спирали затухающего колебания* на фазовой плоскости. Действительно, из формулы (2.27) следует соотношение

$$U_k - U_{k+1} = U_k (1 - e^{-\Theta}). \quad (2.28)$$

Рекомендуем читателю проверить, что кривые на рис. 2.2 действительно соответствуют  $\gamma/\omega_0 = 0,1$ .

**Добротность колебательного контура.** С логарифмическим декрементом связана ещё одна характеристика колебательного контура — его добротность  $Q$ :

$$\begin{aligned} Q &\equiv \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\pi}{\gamma T_1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_{\text{кр}}^2}{R^2} - 1} = \sqrt{\frac{\rho^2}{R^2} - \frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Как правило, о добротности говорят только когда она достаточно велика, то есть  $Q \gg 1$ . Такой добротностью обладают колебательные контуры со *слабым* затуханием, представляющие большой практический интерес. Для них имеет место сильное неравенство

$$0 < \gamma \ll \omega_0, \quad (2.30)$$

или, в терминах параметров контура,

$$0 < R \ll R_{\text{кр}}. \quad (2.31)$$

Малость отношения  $\gamma/\omega_0$  (или  $R/R_{\text{кр}}$ ) позволяет, *пренебрегая вторыми и выше степенями в разложениях по этой малой величине*, упростить используемые формулы. Например, в этом приближении, заменив  $\omega_1$  и  $T_1$  соответственно на  $\omega_0$  и  $T_0$ , можно напряжение на ёмкости и ток в контуре (2.21) представить в виде

$$\begin{aligned} U_C(t) &\approx U_0 e^{-\gamma t} [\cos \omega_0 t + \frac{\gamma}{\omega_0} \sin \omega_0 t], \\ I(t) &\approx -\frac{U_0}{\rho} e^{-\gamma t} \sin \omega_0 t, \end{aligned} \quad (2.32)$$

а добротность  $Q$  связать с характеристиками контура соотношениями

$$Q \approx \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\pi}{\gamma T_0} = \frac{\tau \omega_0}{2} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\rho}{R} \gg 1. \quad (2.33)$$

В дальнейшем, говоря о контурах с добротностью  $Q \gg 1$ , будем использовать подходящую для решаемой задачи формулу из (2.33), применяя для упрощения знак « $\approx$ ». При этом не следует забывать, что это вносит относительную погрешность порядка  $1/Q^2$ .

**Энергетический смысл добротности.** В энергетическом смысле добротность  $Q$  колебательной системы (механической, электрической, оптической и т. д.) определяется как *отношение запасённой в ней энергии*  $W_0$

к потере  $\Delta W_1$  энергии за время  $T/2\pi$  (время изменения фазы колебания на 1 радиан):

$$Q = \frac{W_0}{\Delta W_1} = 2\pi \frac{W_0}{\Delta W_T}, \quad (2.34)$$

где  $\Delta W_T$  — потеря энергии за период  $T$ .

При вычислении  $\Delta W_T$  воспользуемся формулами (2.21) для представленных на рис. 2.2 затухающих колебаний в рассматриваемом  $LCR$ -контуре. Тот факт, что они получены для конкретных начальных условий ( $U_C(0) = U_0$ ,  $I(0) = 0$ ), не скажется, естественно, на общности результата. Пусть в момент времени  $t_0$  ток в контуре  $I(t_0) = 0$ , а напряжение на конденсаторе экстремально:  $U_C(t_0) = \pm U_0 e^{-\gamma t_0}$ . Тогда ток равен нулю и в момент  $t_0 + T_1$ . В эти моменты времени в электрическом поле конденсатора сосредоточена вся энергия контура. В момент  $t_0$  она равна

$$W_0 = \frac{CU_C^2(t_0)}{2}.$$

При этом потеря энергии за период

$$\Delta W_T = W(t_0) - W(t_0 + T_1) = (1 - e^{-2\gamma T_1}) W_0. \quad (2.35)$$

Формула (2.35) справедлива и для моментов времени  $t \neq t_0$ , однако, как уже говорилось выше при обсуждении нулей и экстремумов  $I(t)$  и  $U_C(t)$ , электромагнитная энергия в этом случае распределяется между конденсатором и катушкой индуктивности, составляя в сумме величину  $W(t) = W_C(t) + W_L(t)$ .

В случае *слабого* затухания, когда выполняются неравенства (2.30), формулу (2.35) можно упростить. В первом порядке по малому параметру  $\gamma/\omega_0 \ll 1$  из (2.35) имеем  $\Delta W_T \approx 2\gamma T_1 W_0 \approx 4\pi \frac{\gamma}{\omega_0} W_0$ , так что

$$Q = 2\pi \frac{W_0}{\Delta W_T} \approx \frac{\omega_0}{2\gamma}.$$

Таким образом, для «энергетической» добротности (2.34) теперь приходим к формулам (2.33), полученным в случае *слабого* затухания из введённого в общем случае *затухающих* колебаний выражения для добротности (2.29).

## 1.2. Критический режим (случай $\gamma = \omega_0$ )

В этом случае параметры контура связаны соотношениями

$$R = R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.36)$$

а уравнение (2.11) и его решение принимают вид:  $\ddot{U} = 0, U(t) = a_1 + a_2 t$ . Соответственно, напряжение на конденсаторе

$$U_C(t) = (a_1 + a_2 t)e^{-\gamma t}, \quad (2.37)$$

где постоянные интегрирования  $a_1$  и  $a_2$  определяются начальными условиями задачи. Если, как в п. 1.1, приняты начальные условия  $U_C(0) = U_0, I(0) = 0$ , то для напряжения на конденсаторе и тока в контуре с учётом формул (2.10) и (2.2) получаем выражения:

$$U_C(t) = U_0(1 + \gamma t)e^{-\gamma t}, \quad I(t) = -\frac{U_0}{\rho}\gamma t e^{-\gamma t}. \quad (2.38)$$

Отметим, что на практике этот режим, требующий строгого выполнения условия  $\gamma = \omega_0$ , не может быть точно реализован. Он имеет значение как пограничный между режимом затухающих колебаний и рассматриваемого далее режимом аperiodического затухания.

### 1.3. Аperiodический режим (случай $\gamma > \omega_0$ )

В этом режиме  $\omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 < 0$ , так что для описания системы удобно перейти от тригонометрических функций к гиперболическим функциям, введя вместо мнимой теперь величины  $\omega_1$  действительную величину

$$\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = \omega_0 \sqrt{R^2/R_{\text{кр}}^2 - 1}. \quad (2.39)$$

Видно, что аperiodический режим реализуется, если параметры контура удовлетворяют условию

$$R > R_{\text{кр}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.40)$$

С помощью подстановки нетрудно убедиться, что общее решение уравнения (2.11) имеет при этом вид  $U(t) = b_1 e^{\alpha t} + b_2 e^{-\alpha t}$ , где постоянные величины  $b_1$  и  $b_2$  определяются начальными условиями. Соответственно, напряжение на конденсаторе:

$$U_C(t) = e^{-\gamma t}(b_1 e^{\alpha t} + b_2 e^{-\alpha t}).$$

При начальных условиях  $U_C(0) = U_0, I(0) = 0$  получим

$$\begin{aligned} U_C(t) &= U_0 e^{-\gamma t} \left[ \text{ch } \alpha t + \frac{\gamma}{\alpha} \text{sh } \alpha t \right], \\ I(t) &= -\frac{U_0}{\rho} \frac{\omega_0}{\alpha} e^{-\gamma t} \text{sh } \alpha t. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Графики, соответствующие формулам (2.41), а также фазовая траектория системы в аperiodическом режиме показаны в безразмерных

переменных на рис. 2.3. На рис. 2.3а сплошная линия  $u(x) = U_C(x)/U_0$ , где  $x = \alpha t$ , соответствует напряжению на конденсаторе  $U_C(t)$ , а штриховая линия  $j(x) = \rho I(x)/U_0$  — току в контуре  $I(t)$ . На рис. 2.3б показана фазовая траектория этих колебаний на плоскости переменных  $(u, j)$ , представляющая собой короткий отрезок спирали.

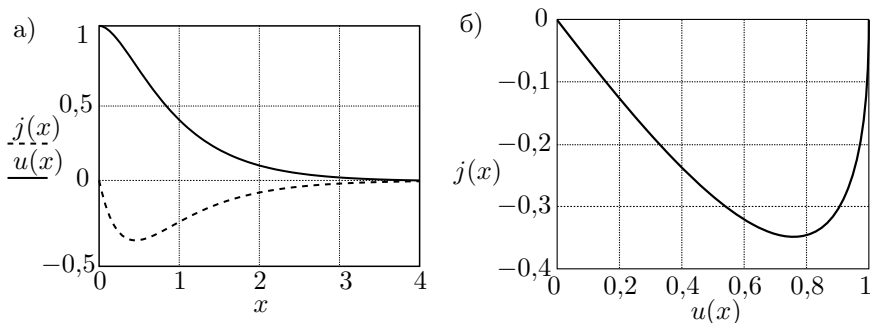


Рис. 2.3. Аперидический режим ( $\gamma > \omega_0$ ) при  $\gamma/\omega_0 = 1,1$ : а) ток в контуре  $j(x)$  и напряжение на конденсаторе  $u(x)$ , б) траектория системы на фазовой плоскости  $j(u)$ .

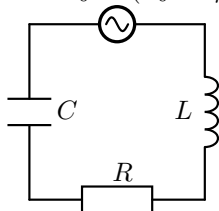
Как видно из рис. 2.3а, при выбранных начальных условиях в аперидическом режиме напряжение на емкости убывает монотонно, а ток перед монотонным убыванием совершает колебание, не меняя направления. Нетрудно показать, что в этом режиме при любых начальных условиях система стремится к равновесному состоянию  $U_C = 0$ ,  $I = 0$ . При этом возможно не более одного прохождения через экстремальное состояние, как на рис. 2.3, и не более одного — через равновесное.

## 2. Вынужденные колебания

### 2.1. Метод комплексных амплитуд

Рассмотрим процессы, протекающие в контуре, подключённом к источнику внешней ЭДС, изменяющейся по гармоническому закону:  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Соответствующая схема представлена на рис. 2.4.

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$



Потерями в конденсаторе и в катушке индуктивности в аналитических выкладках будем по-прежнему пренебрегать. Потери в катушке индуктивности учтём ниже в п. 2.2 при рассмотрении векторных диаграмм.

Для напряжения на конденсаторе  $U_C(t)$  вместо (2.9) получим теперь уравнение

$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = \omega_0^2 \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (2.42)$$

Рис. 2.4. Последовательный контур с внешней гармонической ЭДС

Решение *линейного* дифференциального уравнения (2.42) с правой частью состоит из общего решения однородного уравнения и какого-либо частного решения данного уравнения с правой частью. Как показано в предыдущем разделе, собственные свободные колебания контура (общее решение) при любых начальных условиях экспоненциально затухают. Со временем их амплитуда становится пренебрежимо малой, и в системе остаются только вынужденные колебания (частное решение), обусловленные действием внешней ЭДС.

Для нахождения этого частного решения воспользуемся **методом комплексных амплитуд**. Данный метод основан на следующем утверждении: *пусть некоторая комплексная функция  $\mathbf{f}(t)$  является решением линейного дифференциального уравнения с вещественными коэффициентами и комплексной правой частью; тогда вещественная часть этой функции  $\text{Re } \mathbf{f}(t)$  является решением того же уравнения, в правой части которого стоит вещественная часть прежнего выражения, а мнимая часть  $\text{Im } \mathbf{f}(t)$  — решением уравнения с мнимой правой частью*.

Перейдём к комплексному представлению колебаний и запишем уравнение (2.42) в комплексной форме, обозначая комплексные величины как «векторы»:

$$\begin{aligned} U_C &= \text{Re } \mathbf{U}_C, & \mathbf{U}_C &= \text{Re } \mathbf{U}_C + i \text{Im } \mathbf{U}_C, \\ \mathcal{E} &= \text{Re } \boldsymbol{\mathcal{E}}, & \boldsymbol{\mathcal{E}} &= \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} = \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\ddot{\mathbf{U}}_C + 2\gamma \dot{\mathbf{U}}_C + \omega_0^2 \mathbf{U}_C = \omega_0^2 \boldsymbol{\mathcal{E}}. \quad (2.44)$$

Комплексный множитель  $\boldsymbol{\mathcal{E}}_0 = \mathcal{E}_0 e^{i\varphi_0}$ , стоящий перед  $e^{i\omega t}$ , называется **комплексной амплитудой** (в данном случае это относится к внешней ЭДС).

Решив уравнение (2.44), мы получим комплексное выражение для напряжения на конденсаторе  $\mathbf{U}_C$ . *Вещественная часть* этого решения  $\text{Re } \mathbf{U}_C$  и является решением исходного уравнения (2.42). Будем искать решение уравнения (2.44) в виде:

$$\mathbf{U}_C(t) = \mathbf{U}_{C0} e^{i\omega t}, \quad (2.45)$$

где  $\mathbf{U}_{C0}$  — комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе, не зависящая от времени. Подставляя (2.45) в (2.44) находим  $\mathbf{U}_{C0}$ , и далее, используя формулы (2.2), (2.1), (2.3), — комплексные амплитуды тока в контуре и напряжений на сопротивлении и индуктивности:

$$\mathbf{U}_{C0} = \frac{\boldsymbol{\mathcal{E}}_0}{i\omega C Z}, \quad Z = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right), \quad (2.46)$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \quad U_{R0} = \frac{R\mathcal{E}_0}{Z}, \quad U_{L0} = i\omega L \frac{\mathcal{E}_0}{Z}. \quad (2.47)$$

Комплексная величина  $Z$  в формулах (2.46)–(2.47) называется **комплексным сопротивлением**, или **импедансом**, последовательного контура. Можно определить импеданс каждого отдельного элемента контура:

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (2.48)$$

Обратим внимание, что множители  $i\omega$  и  $1/i\omega$  возникают соответственно при дифференцировании и интегрировании по времени комплексной гармонической функции  $e^{i\omega t}$ .

В новых обозначениях уравнения (2.46)–(2.47) принимают вид:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \quad U_{R0} = Z_R I_0, \quad U_{C0} = Z_C I_0, \quad U_{L0} = Z_L I_0. \quad (2.49)$$

Выражения (2.49) представляют обобщение закона Ома для переменных токов, где роль сопротивлений играют импеданс контура  $Z$  и импедансы его отдельных элементов  $Z_C$ ,  $Z_L$ ,  $Z_R$ .

Важно отметить, что импеданс контура  $Z$  не зависит от начальных условий, не содержит величин ни токов, ни напряжений, а определяется свойствами всех элементов, соединённых в контур, и частотой синусоидальной ЭДС, к которой он подключён. Таким образом, *импеданс  $Z$  является характеристикой колебательного контура на заданной частоте*.

Правила сложения импедансов отдельных элементов схемы при последовательном и параллельном включении — *те же, что и для обыкновенных сопротивлений*.

Выражение для импеданса контура  $Z$  содержит действительную часть

$$\operatorname{Re} Z = R,$$

называемую **активным** сопротивлением контура, и мнимую часть

$$\operatorname{Im} Z = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$

носящую название **реактивного** сопротивления. Импедансы реальных конденсаторов и катушек самоиндукции содержат кроме мнимой части, также и действительную часть. Действительная часть импеданса определяется необратимыми потерями энергии, которые могут быть связаны как с *омическим* сопротивлением проводников, так и с другими причинами: с утечками и диэлектрическими потерями в конденсаторах, с токами перемagnetничивания и токами Фуко в магнитных сердечниках

катушек самоиндукции. Потери в конденсаторах и в катушках самоиндукции зависят как от частоты, так и от амплитуды проходящего через них тока. Поэтому, приводя величины эквивалентного сопротивления потерь в этих элементах, следует указывать частоту и амплитуду тока, при которых данные величины были измерены.

Импедансы контура и его отдельных элементов — комплексные числа — могут быть представлены в показательной форме:

$$Z = Z_0 e^{i\psi} \quad (2.50)$$

где  $Z_0 = |Z|$  — модуль комплексного числа,  $\psi = \arg Z$  — его аргумент (фаза). Для импеданса рассматриваемого последовательного контура при этом находим:

$$Z_0 = \sqrt{\operatorname{Re} Z^2 + \operatorname{Im} Z^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{R}{\cos \psi_I}, \quad (2.51)$$

$$\operatorname{tg} \psi_I = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (2.52)$$

Ток в контуре и напряжения на отдельных его элементах теперь могут быть получены по формулам (2.46)–(2.49). Например, действительная часть тока в контуре

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos \psi_I \cos(\omega t + \varphi_0 - \psi_I). \quad (2.53)$$

Как видно из этой формулы, угол  $\psi_I$ , определяемый отношением мнимой и действительной частей импеданса, представляет собой сдвиг фаз между напряжением на последовательном контуре и током в нём, причём *положительные значения угла  $\psi_I$  соответствуют отставанию фазы тока, а отрицательные — опережению*. В общем случае, когда к источнику последовательно подключены резистор, конденсатор и катушка самоиндукции, сдвиг фазы тока  $\psi_I$  лежит в пределах  $-\pi/2 < \psi_I < \pi/2$ . Из формулы (2.53) также видно, что от угла  $\psi_I$  зависит амплитуда тока, а следовательно, и средняя мощность активных потерь в контуре

$$P = \langle I^2 R \rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2R} \cos^2 \psi_I, \quad (2.54)$$

где угловые скобки означают усреднение по периоду колебаний.

## 2.2. Векторные диаграммы

Решения, полученные методом комплексных амплитуд, допускают простую геометрическую интерпретацию. Комплексное число, например, напряжение  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\omega t} = \mathcal{E}_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)}$ , представляется в комплексной плоскости вектором, длина которого равна  $\mathcal{E}_0$  — амплитуде напряжения  $\mathcal{E}(t)$ , а угол, составляемый этим вектором с вещественной осью,



равен  $\omega t + \varphi_0$  — фазе напряжения  $\mathcal{E}(t)$ . Вектор  $\mathcal{E}$  вращается с угловой скоростью  $\omega$  против часовой стрелки. Удобно перейти к системе координат, которая сама вращается с угловой скоростью  $\omega$ . В этой системе вектор  $\mathcal{E}$  будет представлен покоящимся вектором  $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0 e^{i\varphi_0}$ , а векторы  $I_0$ ,  $U_{C0}$ ,  $U_{R0}$  и  $U_{L0}$  будут неподвижны, но окажутся сдвинутыми по углу относительно вектора  $\mathcal{E}_0$ . Вектор  $I_0$ , как показано выше, сдвинут от вектора  $\mathcal{E}_0$  на угол  $\psi_I$ , определяемый формулами (2.51)–(2.52).

Положения остальных векторов легко определить по формулам (2.46). Так, наличие множителя  $1/i = e^{-i\pi/2}$  в первом равенстве (2.46) означает, что вектор  $I_0$  опережает по углу на  $\pi/2$  вектор  $U_{C0}$ , то есть ток опережает напряжение на конденсаторе по фазе на  $\pi/2$ . Аналогично, множитель  $i = e^{i\pi/2}$  в третьем равенстве в (2.47) показывает, что напряжение на индуктивности  $U_{L0}$  опережает по фазе ток  $I_0$  на угол  $\pi/2$ . Наконец, из второго равенства в (2.47) видно, что вектор  $U_{R0}$  совпадает по направлению с вектором  $I_0$ , и, значит, напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током  $I_0$ . Построенные таким образом диаграммы называются *векторными*.

В качестве примера построим векторную диаграмму тока и напряжений для последовательного контура. Рассмотрим схему, изображённую на рис. 2.5. К источнику переменного напряжения  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$  последовательно подключены резистор  $R$ , катушка индуктивности  $L$ , действительная часть импеданса которой равна  $r_L$ , и ёмкость  $C$ . Активное сопротивление  $r_L$  катушки индуктивности, которое с целью упрощения не учитывалось выше при аналитическом решении задачи и будет учтено в описаниях соответствующих лабораторных работ, легко может быть найдено в представленной на рисунке «схеме четырёх вольтметров» с использованием векторной диаграммы. Вольтметры измеряют напряжения на элементах цепи, амперметр измеряет ток. Поскольку во всех элементах цепи ток  $I$  одинаков, удобно положить его фазу равной нулю и отсчитывать от неё фазы напряжений на всех элементах цепи, определив затем фазу между напряжением на контуре и током.

Отложим вектор  $I$  вдоль оси ординат (рис. 2.5б). Напряжение на резисторе совпадает по фазе с током, поэтому вектор  $U_R$  также будет направлен вдоль оси ординат. Напряжение на конденсаторе (без потерь) отстаёт по фазе от тока на угол  $\pi/2$ , поэтому вектор  $U_C$  направлен перпендикулярно вектору  $I$  в сторону положительных значений абсцисс. Векторное равенство напряжений  $U_{L+R} = U_L + U_R$  позволяет построить треугольник по трём сторонам. Для этого сделаем две насечки: первую — радиусом, равным модулю вектора  $U_{L+R}$ , из начала этого вектора (начала координат), вторую — радиусом, равным модулю вектора  $U_L$ , из конца вектора  $U_R$ . Точка пересечения насечек определяет положение векторов  $U_{L+R}$  и  $U_L$  на диаграмме. Сложив векторы  $U_{L+R}$

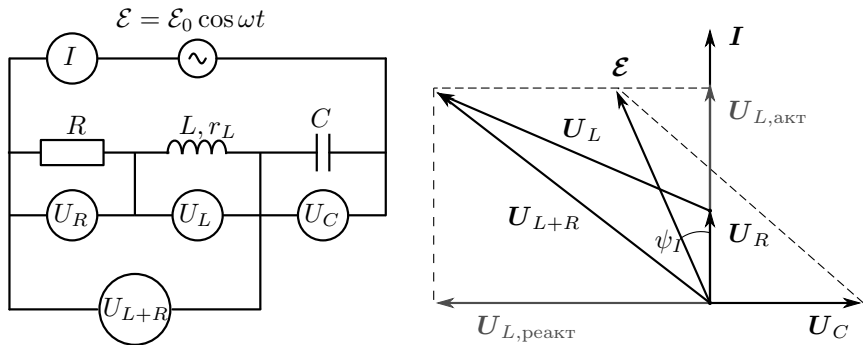


Рис. 2.5. Схема измерения (а) и векторная диаграмма (б) для последовательного контура

и  $U_C$ , получим вектор  $\mathcal{E}$  входного напряжения на контуре. Угол  $\psi_I$  показывает, каков сдвиг фаз между током и напряжением в цепи. Разложим теперь вектор  $U_L$  по осям координат. Проекция  $U_L$  на ось ординат позволяет определить  $U_{L,\text{акт}}$  — напряжение на активной части импеданса катушки, а проекция на ось абсцисс даёт реактивную часть  $U_{L,\text{реакт}}$ . Поделив эти напряжения на ток  $I$ , найдём действительную  $r_L$  и мнимую  $\omega L$  части импеданса катушки.

### 2.3. Вычисление мощности в методе комплексных амплитуд

Используем метод комплексных амплитуд для вычисления средней тепловой мощности, выделяющейся на некотором элементе цепи. Пусть известны комплексные амплитуды тока  $I_0 = I_0 e^{i\psi_I}$  и напряжения  $U_0 = A e^{i\psi_U}$  на некотором элементе. По закону Джоуля–Ленца имеем

$$P = \langle U \cdot I \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \text{Re } U \cdot \text{Re } I dt, \quad (2.55)$$

где  $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$ ,  $I(t) = I_0 e^{i\omega t}$  — комплексные представления функций напряжения и тока.

Воспользуемся известной формулой, выражающей действительную часть числа через комплексное сопряжение:

$$\text{Re } U = \frac{U + U^*}{2}, \quad \text{Re } I = \frac{I + I^*}{2}. \quad (2.56)$$

Подстановка в (2.55) и раскрытие скобок даст под знаком интеграла 4 слагаемых вида  $UI$ ,  $U^*I^*$ ,  $UI^*$  и  $U^*I$ . Первые два после имеют удвоенную частоту и поэтому после интегрирования за период обратятся в

нуль:

$$\int \mathbf{U} \mathbf{I} dt = \mathbf{U}_0 \mathbf{I}_0 \int_0^T e^{2i\omega t} dt = 0, \quad \int \mathbf{U}^* \mathbf{I}^* dt = \mathbf{U}_0 \mathbf{I}_0 \int_0^T e^{-2i\omega t} dt = 0.$$

Слагаемое  $\mathbf{U} \mathbf{I}^* = \mathbf{U}_0 e^{i\omega t} \mathbf{I}_0^* e^{-i\omega t} = \mathbf{U}_0 \mathbf{I}_0^*$  не зависит от времени. Аналогично  $\mathbf{U}^* \mathbf{I} = \mathbf{U}_0^* \mathbf{I}_0$ . Поэтому для средней мощности имеем

$$P = \frac{1}{4} (\mathbf{U}_0 \mathbf{I}_0^* + \mathbf{U}_0^* \mathbf{I}_0).$$

Пользуясь еще раз представлением (2.56), полученное можно окончательно записать в следующем компактном виде:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \mathbf{U}_0 \mathbf{I}_0^* = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \Delta\psi, \quad (2.57)$$

где, напомним,  $U_0$  и  $I_0$  — амплитуды тока и напряжения на элементе,  $\Delta\psi = \psi_U - \psi_I$  — разность фаз между напряжением и током в нём.

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться, что формула (2.57), примененная ко всему контуру, приводит к полученному выше результату (2.54).

В электротехнике часто используется понятие **действующего** (или **эффективного**) значения напряжения и тока. В общем случае они определяются как *среднеквадратичные* значения соответствующих величин:

$$I_{\text{эфф}} \equiv \sqrt{\langle I^2(t) \rangle}, \quad U_{\text{эфф}} \equiv \sqrt{\langle U^2(t) \rangle}. \quad (2.58)$$

Для гармонических колебаний имеем  $U_{\text{эфф}} = U_0/\sqrt{2}$  и  $I_{\text{эфф}} = I_0/\sqrt{2}$ , так что в этих обозначениях формула (2.57) запишется как

$$P = U_{\text{эфф}} I_{\text{эфф}} \cos \Delta\psi. \quad (2.59)$$

### 3. Резонанс

#### 3.1. Резонанс напряжений в последовательном контуре

В предыдущем разделе были получены выражения (2.46)–(2.47), описывающие в комплексной форме вынужденные колебания в последовательном контуре под действием внешней гармонической ЭДС. Там же указывалось, что эти колебания устанавливаются в системе *после затухания собственных свободных колебаний контура*. Процесс установления вынужденных колебаний будет рассмотрен отдельно в п. 4 данного раздела. Для исследования вынужденных колебаний и резонанса запишем *вещественные части* решений (2.46)–(2.47), положив для сокращения записи равной нулю начальную фазу:  $\varphi_0 = 0$ . В результате приходим

к уравнениям:

$$I(t) = \frac{U_R(t)}{R} = I_\omega \cos(\omega t - \psi_I), \quad I_\omega = \frac{\mathcal{E}_0}{Z_0}, \quad (2.60)$$

$$Z_0 = R \sqrt{1 + \left[ \frac{\rho}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right]^2}, \quad \psi_I = \arctg \left[ \frac{\rho}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right], \quad (2.61)$$

$$U_C(t) = U_{C\omega} \cos(\omega t - \psi_C), \quad U_{C\omega} = \mathcal{E}_0 \frac{\rho}{Z_0} \frac{\omega_0}{\omega}, \quad \psi_C = \psi_I + \pi/2, \quad (2.62)$$

$$U_L(t) = U_{L\omega} \cos(\omega t - \psi_L), \quad U_{L\omega} = \mathcal{E}_0 \frac{\rho}{Z_0} \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \psi_L = \psi_I - \pi/2. \quad (2.63)$$

Отметим, что аналитическое выражение из (2.61) для фазового сдвига  $\psi_I$  между внешней ЭДС и током в контуре легко упрощается в наиболее интересной области, лежащей вблизи собственной частоты контура  $\omega_0$ , а фазовые сдвиги  $\psi_C$  и  $\psi_L$  связаны с  $\psi_I$  простыми соотношениями из (2.62) и (2.63). Напомним также, что согласно формуле (2.54) от угла  $\psi_I$  зависит средняя мощность активных потерь в контуре.

Следует подчеркнуть, что в выражениях (2.60)–(2.63) не учтены «паразитные» индуктивности и емкости реактивных элементов схемы, а также возможные потери энергии в них. Необходимые уточнения будут сделаны в описаниях соответствующих лабораторных работ.

Важно также отметить, что «по умолчанию» в нашем рассмотрении пренебрегалось внутренним сопротивлением источника ЭДС, то есть считалось, что он является *генератором напряжения*, который по определению обладает *нулевым внутренним сопротивлением*. В этом случае амплитуда  $\mathcal{E}_0$  не зависит от меняющегося с частотой сопротивления нагрузки — последовательного колебательного контура.

Анализ формул (2.60)–(2.63) позволяет сделать следующие выводы.

1) При заданных параметрах  $\mathcal{E}_0$  и  $\omega$  внешнего источника напряжения зависимости амплитуд и фаз тока и напряжений в системе от частоты — *амплитудные и фазовые характеристики системы* — определяются двумя безразмерными величинами:  $\rho/R$  и  $\omega/\omega_0$ . Как следует из формул (2.33) для контура со *слабым* затуханием (добротность  $Q \gg 1$ ), имеет место равенство  $\rho/R \approx Q$ .

2) Поведение системы носит резонансный характер: при  $\omega = \omega_0$ , когда мнимая часть импеданса контура  $\text{Im } Z = 0$  и, соответственно,

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \rho, \quad \text{Im } Z = 0, \quad Z_0 = R, \quad \psi_I = 0, \quad (2.64)$$

амплитуды тока и напряжения на сопротивлении  $R$  достигают максимальных значений:

$$I_{\omega_0} = \mathcal{E}_0/R, \quad U_{R\omega_0} = R I_{\omega_0} = \mathcal{E}_0 \quad (2.65)$$

и совпадают по фазе с ЭДС. Таким образом, последовательный контур на собственной частоте  $\omega_0$  представляет для внешней ЭДС чисто активную нагрузку, на которой согласно (2.54) выделяется мощность  $P_{\max} = \mathcal{E}_0^2/2R$ .

3) Наиболее ярко резонансный характер вынужденных колебаний в *последовательном* контуре проявляется в напряжениях на конденсаторе и индуктивности, которые при  $\omega = \omega_0$  в  $\rho/R$  раз превышают напряжение  $\mathcal{E}_0$  по амплитуде и сдвинуты по фазе от него на  $\mp\pi/2$  соответственно и, значит, находятся в противофазе друг с другом. Последние утверждения, правда, относятся к идеальному случаю отсутствия потерь в этих элементах. При высокой добротности  $Q \gg 1$  амплитуды напряжений  $U_C(t)$  и  $U_L(t)$  значительно превышают амплитуду  $\mathcal{E}_0$  напряжения на контуре. По этой причине резонанс в последовательном контуре называется *резонансом напряжений*.

4) Наличие множителей  $(\omega_0/\omega)^{\pm 1}$  в формулах (2.62), (2.63) приводит к тому, что *максимумы* напряжений на конденсаторе и индуктивности равны друг другу, превышают  $\frac{\rho}{R}\mathcal{E}_0$  и сдвинуты в разные стороны от собственной частоты контура  $\omega_0$ :

$$U_{C\omega}^{\text{рез}} = U_{L\omega}^{\text{рез}} = \frac{\rho}{R}\mathcal{E}_0 \left[ 1 - \frac{\rho^2}{4R^2} \right]^{-1/2}, \quad (2.66)$$

Частоты, на которых достигаются *максимальные* значения величин, характеризующих вынужденные колебания в различных колебательных системах, принято называть **резонансными**. В последовательном колебательном контуре максимум тока  $I$  и напряжения на сопротивлении  $U_R$  достигается на собственной частоте контура:

$$\omega_R^{\text{рез}} = \omega_0. \quad (2.67)$$

Для напряжения на конденсаторе  $U_C$  резонансной является частота

$$\omega_C^{\text{рез}} = \omega_0 \left( 1 - \frac{\rho^2}{2R^2} \right)^{+1/2}, \quad (2.68)$$

для напряжения на индуктивности  $U_L$  — частота

$$\omega_L^{\text{рез}} = \omega_0 \left( 1 - \frac{\rho^2}{2R^2} \right)^{-1/2}, \quad (2.69)$$

причём  $\omega_C^{\text{рез}} \cdot \omega_L^{\text{рез}} = \omega_0^2$ . Рекомендуем читателям убедиться в справедливости формул (2.66)–(2.69) самостоятельно.

На рис. 2.6 приведены в *безразмерном виде* кривые зависимостей от  $x \equiv \omega/\omega_0$  амплитуды тока  $j(x) \equiv RI_\omega/\mathcal{E}_0$  (рис. 2.6 а) и амплитуды

напряжения на конденсаторе  $u(x) \equiv U_{C\omega}/\mathcal{E}_0$  (рис. 2.6б). Эти кривые называются *амплитудными резонансными кривыми* последовательного колебательного контура. Важными характеристиками резонансных кривых являются *максимальное значение амплитуды* соответствующей величины и *ширина резонансной кривой*, при которой амплитуда этой величины уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз по сравнению со своим максимальным значением (мощность сигнала уменьшается в 2 раза). В частности, по этим характеристикам можно определить добротность колебательного контура  $Q$ . Как видно из формул (2.60)–(2.63) и рис. 2.6б, она равна отношению максимального значения напряжения на конденсаторе  $U_C^{\text{рез}}$  к его статическому ( $\omega = 0$ ) значению  $\mathcal{E}_0$ :  $Q = U_C^{\text{рез}}/\mathcal{E}_0$ .

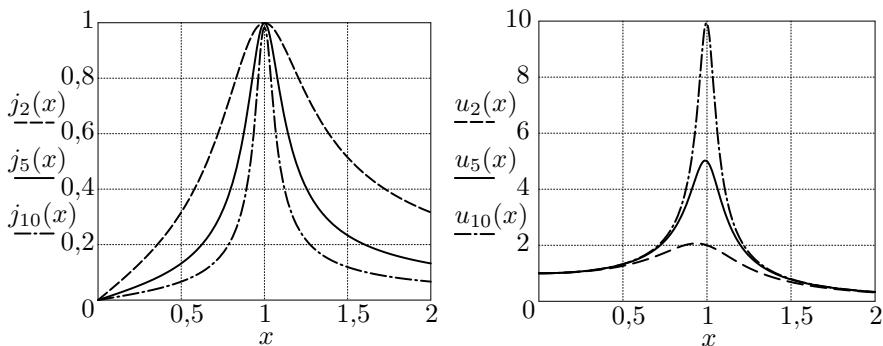


Рис. 2.6. Амплитудные резонансные кривые а) тока  $j = RI\omega/\mathcal{E}_0$  и б) напряжения  $u = U_{C\omega}/\mathcal{E}_0$  последовательного колебательного контура в безразмерных переменных ( $x = \omega/\omega_0$ ) при  $\rho/R = 2, 5$  и  $10$ .

Как уже отмечалось, о резонансе, как правило, говорят, если добротность  $Q$  колебательного контура достаточно велика и, следовательно, выполняются соотношения (2.32). Наибольший практический интерес представляет случай, когда отклонение  $\Delta\omega \equiv \omega - \omega_0$  частоты внешней ЭДС от собственной частоты контура с добротностью  $Q = \rho/R \gg 1$  удовлетворяет сильному неравенству

$$|\Delta\omega| \ll \omega_0. \quad (2.70)$$

При этом в первом порядке малости по *относительной расстройке частоты*  $\Delta\omega/\omega_0$

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}, \quad (2.71)$$

что позволяет упростить выражения (2.61) и представить их в виде

$$Z_0 = R\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}, \quad \psi_I = \arctg(\tau\Delta\omega), \quad (2.72)$$

где по определению (2.23)  $\tau = 1/\gamma$  — время затухания колебательного контура. Соответственно упрощаются и выражения для амплитуд  $I_\omega$ ,  $U_{C\omega}$  и  $U_{L\omega}$  в остальных формулах (2.60)–(2.63), в которые входит импеданс контура  $Z_0$ :

$$\begin{aligned} I_\omega &= \frac{\mathcal{E}_0}{R\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \\ U_{C\omega} &= \frac{\omega_0}{\omega} \frac{Q\mathcal{E}_0}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \\ U_{L\omega} &= \frac{\omega}{\omega_0} \frac{Q\mathcal{E}_0}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

В резонансе, когда для высокочастотного контура  $\omega = \omega_0$  ( $\Delta\omega = 0$ ), выражения для амплитуд тока и напряжений на ёмкости и индуктивности, фазовых сдвигов  $\psi$  и их производных по частоте  $\psi' = d\psi/d\omega$  принимают вид:

$$\begin{aligned} I_\omega(\omega_0) &= \frac{\mathcal{E}_0}{R}, \quad \psi_I(\omega_0) = 0, \\ U_{C\omega}(\omega_0) &= Q\mathcal{E}_0, \quad \psi_C(\omega_0) = \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} U_{L\omega}(\omega_0) &= Q\mathcal{E}_0, \quad \psi_L(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}, \\ \psi'_I(\omega_0) &= \psi'_L(\omega_0) = \psi'_C(\omega_0) = \tau. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Напомним, что резонансные значения напряжений на ёмкости и индуктивности не строго равны  $Q\mathcal{E}_0$  и достигаются не строго на частоте  $\omega_0$ . Соответствующие относительные поправки, как это следует из формул (2.66), в рассматриваемом случае высокой добротности, когда  $Q \approx \rho/R \gg 1$ , составляют доли малой величины  $Q^{-2}$  и не учтены в (2.74).

При отклонении  $\Delta\omega = \omega - \omega_0 = \Delta\omega_\gamma$  таком, что выполняется условие

$$\Delta\omega_\gamma = \pm\gamma, \quad \text{или} \quad \tau\Delta\omega_\gamma = \pm 1, \quad (2.76)$$

амплитуда тока  $I_\omega$ , как видно из формул (2.72)–(2.73), уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз относительно своей максимальной (резонансной) величины, а фаза  $\psi_I$  изменяется на угол  $\pm\pi/4$ . Аналогичные изменения происходят с амплитудами  $U_{C\omega}$ ,  $U_{L\omega}$  и фазами  $\psi_C$ ,  $\psi_L$  напряжений на ёмкости и индуктивности: амплитуды уменьшаются в  $\sqrt{2}$  раз, а фазы меняются на угол  $\pm\pi/4$  по отношению к своим резонансным значениям.

Величина  $\delta\omega \equiv 2|\Delta\omega_\gamma| = 2\gamma = 2/\tau$  представляет собой важную характеристику высокочастотного колебательного контура — ширину резонансной кривой  $U_C(\omega)$ , по которой с учётом соотношений

$Q = \omega_0/2\gamma = \tau\omega_0/2$  из (2.32), зная собственную частоту  $\omega_0$ , можно найти добротность контура

$$Q = \frac{\omega_0}{\delta\omega}. \quad (2.77)$$

Ширину резонансной кривой и добротность можно определить и по фазово-частотным характеристикам контура. Например, тангенс угла наклона кривой  $\psi_C(\omega)$  в точке резонанса согласно (2.62) равен времени затухания  $\tau = 2/\delta\omega$ , а расстояние по оси  $\omega$  между точками, в которых фаза  $\psi_C$  меняется от  $\pi/4$  до  $3\pi/4$ , равно  $2/\tau = \delta\omega$ .

Отметим, что в соотношении  $\tau \cdot \delta\omega \sim 1$ , которому подчиняется произведение времени затухания и ширины резонансной кривой колебательного контура, проявляется фундаментальное *соотношение неопределённостей*, связывающее, в частности, «время жизни»  $\tau$  некоторого осциллятора (квантового или классического) с шириной  $\delta\omega$  спектра его излучения (см., например, [3, §17.4.8], а также Раздел VI, п. 2.3).

### 3.2. Резонанс токов в параллельном контуре

Рассмотрим теперь вынужденные колебания в параллельном контуре, одна из ветвей которого содержит индуктивность  $L$  и сопротивление  $R$ , а другая — ёмкость  $C$  (рис. 2.7).

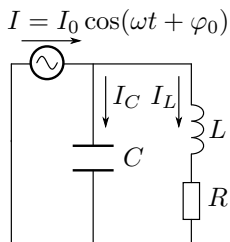


Рис. 2.7. Параллельный контур с внешним гармоническим источником тока

Контур подключён к источнику ЭДС, задающему во внешней цепи ток, изменяющийся по гармоническому закону:  $I = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ . Таким образом, мы предполагаем, что внутреннее сопротивление источника столь велико, что он является *генератором тока*, который по определению обладает *бесконечно большим внутренним сопротивлением*. Потерями в катушке индуктивности и конденсаторе будем, как и ранее, пренебрегать. Необходимые уточнения будут сделаны в описаниях соответствующих лабораторных работ.

Воспользуемся формулами для импедансов элементов цепи (2.48) и правилами сложения сопротивлений. Для комплексных амплитуд токов в ёмкостной  $I_C$  и индуктивной  $I_L$  ветвях контура, а также для напряжения  $U$  на контуре (совпадающем в нашем приближении с напряжением



на конденсаторе) при нулевой начальной фазе тока  $\varphi_0 = 0$  получаем выражения:

$$\begin{aligned} I_C &= I \frac{Z_{LR}}{Z_C + Z_{LR}} = I_0 \frac{1 + i \frac{\rho\omega}{R\omega_0}}{1 + i \frac{\rho}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}, \\ I_L &= I \frac{Z_C}{Z_C + Z_{LR}} = I_0 \frac{-i \frac{\rho\omega_0}{R\omega}}{1 + i \frac{\rho}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}, \\ U &= I \frac{Z_C Z_{LR}}{Z_C + Z_{LR}} = I_0 \frac{\rho^2}{R} \frac{1 - i \frac{R\omega_0}{\rho\omega}}{1 + i \frac{\rho}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

где  $Z_C = \frac{1}{i\omega C}$  и  $Z_{LR} = R + i\omega L$  — импедансы емкостной и индуктивной ветвей параллельного контура соответственно.

Ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая контура с высокой добротностью вблизи резонансной частоты, когда  $Q \approx \rho/R \gg 1$ , выполняется условие (2.70) и применимо разложение (2.71). При этом вещественные части комплексных амплитуд (2.78) можно представить в виде

$$\begin{aligned} I_C(t) &= QI_0 \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\cos(\omega t - \psi_C)}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \quad \psi_C = \arctg(\tau\Delta\omega) - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{Q}, \\ I_L(t) &= QI_0 \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\cos(\omega t - \psi_L)}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \quad \psi_L = \arctg(\tau\Delta\omega) + \frac{\pi}{2}, \\ U(t) &= Q\rho I_0 \frac{\cos(\omega t - \psi_U)}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \quad \psi_U = \arctg(\tau\Delta\omega) + \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1}{Q}. \end{aligned} \quad (2.79)$$

При резонансе, когда в принятом выше приближении  $\omega = \omega_0$ ,  $\Delta\omega = 0$ , амплитуды токов в ветвях контура, напряжения на нём, фазовые сдвиги  $\psi$  и их производные по циклической частоте  $\psi' = d\psi/d\omega$  принимают вид:

$$\begin{aligned} I_{C\omega}(\omega_0) &= QI_0, \quad \psi_C(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{Q}, \\ I_{L\omega}(\omega_0) &= QI_0, \quad \psi_L(\omega_0) = \frac{\pi}{2}, \\ U_{\omega}(\omega_0) &= Q^2 R I_0, \quad \psi_U(\omega_0) = \frac{1}{Q}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\psi'_C(\omega_0) = \psi'_L(\omega_0) = \psi'_U(\omega_0) = \tau. \quad (2.81)$$

Из формул (2.80) следует, что на частоте  $\omega_0$  токи  $I_C$  и  $I_L$  в ёмкостной и индуктивной ветвях контура в  $Q$  раз превышают ток  $I$  во внешней цепи. При этом ток  $I_C$  опережает внешний ток  $I$  по фазе почти на  $\pi/2$ ,

а ток  $I_L$  — отстаёт на  $\pi/2$ . Между собой токи  $I_C$  и  $I_L$  сдвинуты по фазе на угол, близкий к  $\pi$ . Можно сказать, что токи  $I_C$  и  $I_L$  образуют контурный ток, последовательно обтекающий элементы контура и в  $Q$  раз превышающий по амплитуде внешний ток  $I$ . Последнее обстоятельство послужило поводом назвать резонанс в параллельном контуре *резонансом токов*.

Отметим, однако, что максимальные значения токов в контуре не строго равны  $QI_0$  и достигаются не строго на частоте  $\omega_0$ . Соответствующие относительные поправки, как и в случае резонанса напряжения, обусловлены входящими в выражения (2.79) для токов  $I_C$ ,  $I_L$  множителями  $(\omega_0/\omega)^{\pm 1}$  и составляют доли малой величины  $Q^{-2}$ .

Из формул (2.78) вытекает, что на частоте  $\omega_0$  импеданс контура  $Z(\omega_0) = U(\omega_0)/I_0$  является почти чисто активным. В пренебрежении малыми поправками порядка  $Q^{-2}$  его модуль и фаза относительно внешнего тока соответственно равны:

$$|Z(\omega_0)| = Q^2 R, \quad \psi_Z(\omega_0) = \frac{1}{Q}. \quad (2.82)$$

Как видим, сопротивление контура в резонансе в  $Q^2$  раз превышает его активное сопротивление  $R$ . Это свойство параллельного контура широко используется в радиотехнике.

По формулам (2.80) легко построить векторную диаграмму для резонанса токов в рассмотренном выше параллельном контуре, в котором не учитывались потери в конденсаторе и катушке индуктивности. Подобная диаграмма показана на рис. 2.8, где, однако, для компактности изображения существенно уменьшен масштаб по горизонтальной оси.

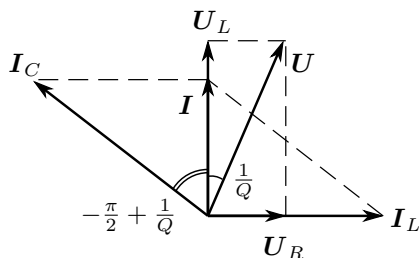


Рис. 2.8. Векторная диаграмма при резонансе токов

По оси ординат диаграммы отложен внешний ток  $I$ . Напряжение на конденсаторе, равное напряжению на контуре  $U$ , с учётом принятого правила знаков отстаёт по фазе от тока  $I$  на угол  $Q^{-1}$ . Ток  $I_C$  через конденсатор (без потерь) опережает по фазе напряжение  $U$  на  $\pi/2$ . Ток

через индуктивность  $I_L$  отстаёт от внешнего тока  $I$  по фазе на  $\pi/2$ . Напряжение  $U_R$  на сопротивлении совпадает по фазе с током  $I_L$ , напряжение  $U_L$  на индуктивности (без потерь) опережает ток  $I_L$  на  $\pi/2$ . Как видим, контур с активными потерями только в индуктивной ветви проявляет ёмкостную реакцию: напряжение на контуре отстаёт по фазе от тока. Учёт потерь в катушке индуктивности и конденсаторе несколько изменит векторную диаграмму на рис. 2.8, что будет рассмотрено в соответствующих лабораторных работах.

Таким образом, условия резонанса токов в параллельном контуре и резонанса напряжений в последовательном высокодобротном контуре совпадают:  $\omega = \omega_0$ . Но, если в последовательном контуре резонансное сопротивление контура равно чисто активному сопротивлению цепи  $R$  и минимально, обеспечивая максимум тока при заданном внешнем напряжении, то в параллельном контуре резонансное сопротивление контура почти чисто активное, обратно пропорционально  $R$  и в  $Q^2$  раз его превышает, обеспечивая максимум напряжения на контуре при заданном внешнем токе. Сдвиг фаз между напряжением и током при резонансе напряжений всегда отсутствует, а при резонансе токов он близок к нулю только, если  $Q \gg 1$ .

#### 4. Установление вынужденных колебаний

Рассмотрим процесс установления вынужденных колебаний в *высокодобротном последовательном контуре*. Общее решение уравнения (2.44) представляет собой сумму решения (2.15), содержащего две постоянные, зависящие от начальных условий задачи, и частного решения (2.62). При наличии внешнего источника в качестве начальных естественно выбрать «нулевые» условия:  $U_C(0) = 0$ ,  $\dot{U}_C(0) = 0$ , а решение искать в виде

$$U_C(t) = U_{C\omega} \sin(\omega t - \psi_I) - Ae^{-\gamma t} \sin(\omega_1 t - \varphi_0), \quad (2.83)$$

где  $U_{C\omega}$  и  $\psi_I$  — зависящие от частоты  $\omega$  амплитуда и фаза вынужденных колебаний, определяемые формулами (2.60)–(2.63). Из начальных условий при этом получаем систему уравнений, которая позволяет найти постоянные величины  $A$  и  $\varphi_0$ :

$$U_{C\omega} \sin \psi_I = A \sin \varphi_0, \quad U_{C\omega} \omega \cos \psi_I = A(\gamma \sin \varphi_0 + \omega_1 \cos \varphi_0).$$

Для резонансного случая  $\omega = \omega_0$ , когда  $\psi_I = 0$ , а  $U_{C\omega} = Q\mathcal{E}_0$ , из уравнений (4) получаем искомые константы  $\varphi_0 = 0$  и  $A = Q\mathcal{E}_0\omega_0/\omega_1$ , а далее из уравнения (2.83) — *точное решение* задачи об установлении вынужденных колебаний на резонансной частоте в последовательном контуре с высокой добротностью при «нулевых» начальных условиях:

$$U_C(t) = Q\mathcal{E}_0 \left[ \sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t \right]. \quad (2.84)$$

В общем случае при  $\omega_1 \approx \omega_0$  уравнение такого вида описывает биения двух гармонических сигналов *близких* частот с экспоненциально убывающей амплитудой одного из них. Появление биений связано с тем, что разность фаз этих сигналов медленно меняется со временем:  $\Delta\varphi = (\omega_0 - \omega_1)t$ , — и при нулевой разности фаз сигналы вычитаются друг из друга, а при расхождении фаз на  $\pi$  радиан — складываются. В случае *высокодобротного контура*, в котором  $\gamma \ll \omega_0$ ,  $\omega_0 - \omega_1 \approx \gamma^2/2\omega_0$ , набег фазы за время  $\tau = 1/\gamma$  затухания свободных колебаний  $\Delta\varphi \approx (\gamma^2/2\omega_0)\tau = \gamma/2\omega_0 \ll 1$ , так что биения не успевают проявиться. Процесс установления вынужденных колебаний на резонансной частоте при этом можно представить в простейшем виде:

$$U_C(t) = Q\mathcal{E}_0(1 - e^{-\gamma t}) \sin \omega_0 t. \quad (2.85)$$

При отклонении частоты  $\omega$  внешней ЭДС от собственной частоты  $\omega_0$  ограничимся рассмотрением наиболее интересного случая, когда мала относительная расстройка частоты:  $|\Delta\omega|/\omega_0 \ll 1$ . Тогда строгое решение первого уравнения системы (4) имеет вид:  $\varphi_0 = \psi_I$ ,  $A = \mathcal{E}_\omega$ , — а второе из уравнений (4) приводит к равенству  $\gamma \operatorname{tg} \psi_I = \omega - \omega_1$ , которое с учётом (2.72), (2.73) и (2.16) удовлетворяется с относительной погрешностью  $\approx 0,1Q^{-2}$ . Таким образом, в высокодобротном контуре при малой относительной расстройке частоты внешней ЭДС установление вынужденных колебаний подчиняется уравнениям

$$U_C(t) = \frac{Q\mathcal{E}_0\omega_0/\omega}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}} [\sin(\omega t - \psi_I) - e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t - \psi_I)], \quad (2.86)$$

$$\psi_I = \arctg(\tau\Delta\omega).$$

Уравнения (2.86), как и уравнение (2.84) в общем случае, описывают биения двух гармонических сигналов близких частот с экспоненциально убывающей амплитудой одного из них. При этом за время  $\tau$  затухания сигнала с частотой  $\omega_0$  разность фаз сигналов  $\Delta\varphi = \tau\Delta\omega = 2\Delta\omega/\delta\omega$ . Следовательно, при достаточно малой расстройке  $|\Delta\omega| \ll \delta\omega/2$  где  $\delta\omega \ll \omega_0$  — ширина резонансной кривой *высокодобротного контура*, биения проявляться не будут. Установление вынужденных колебаний будет при этом проходить, подчиняясь уравнению, подобному (2.85):

$$U_C(t) = Q\mathcal{E}_0 \frac{\omega_0}{\omega} (1 - e^{-\gamma t}) \sin(\omega_0 t - \tau\Delta\omega). \quad (2.87)$$

Как видно из формул (2.85), (2.87) в резонансе и при малом отклонении от него (по сравнению с шириной резонансной кривой) амплитуда вынужденных колебаний со временем возрастает, экспоненциально приближаясь к величине  $Q\mathcal{E}_0\omega_0/\omega$ .

По осциллограмме сигнала нетрудно определить логарифмический декремент затухания  $\Theta$ , период колебаний  $T_1$  и рассчитать коэффициент затухания  $\gamma$ . Проиллюстрируем эту процедуру, построив на рис. 2.9 зависимость  $U_C(t)$  по формуле (2.87) в безразмерных координатах  $x = \omega_0 t$ ,  $u(x) = U_C(x)/Q\mathcal{E}_0$ . Рассмотрим два момента времени  $t_1$  и  $t_2$ , разделённые целым числом  $n$  периодов  $T_1$ . Амплитуды колебаний  $U_k = U_C(t_1)$  и  $U_{k+n} = U_C(t_2)$  при этом соответственно равны:

$$U_k = Q\mathcal{E}_0(1 - e^{-\gamma t_1}), \quad U_{k+n} = Q\mathcal{E}_0(1 - e^{-\gamma(t_1+nT_1)}).$$

Из этих выражений по формулам (2.24), (2.26) находим логарифмический декремент:

$$\Theta = \frac{1}{n} \ln \frac{U_\infty - U_k}{U_\infty - U_{k+n}}, \quad U_\infty = Q\mathcal{E}_0. \quad (2.88)$$

Измерив затем по осциллограмме реальный период  $T_1$ , определяем по формуле (2.29) коэффициент затухания  $\gamma = \Theta/T_1$ .

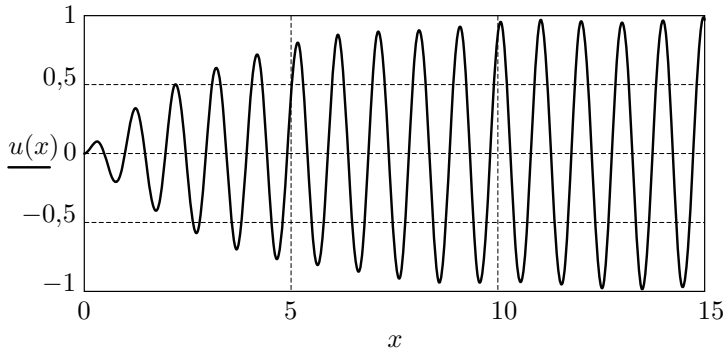


Рис. 2.9. Установление вынужденных колебаний вблизи резонанса ( $|\Delta\omega| \ll \gamma = \delta\omega/2$ ). График приведен для  $\gamma = 0,05\omega_0$ ,  $\Delta\omega = 0,01\omega_0$ .

Если расстройка  $\Delta\omega$  высокочастотного контура сопоставима с полушириной резонансной кривой:  $|\Delta\omega| \approx \gamma = \delta\omega/2 \ll \omega_0$ , — то установление вынужденных колебаний на начальной стадии процесса длительно. Сопровождается биениями с частотой  $|\Delta\omega| = |\omega - \omega_0|$  согласно уравнениям (2.86). Вид колебаний в этом случае представлен на рис. 2.10 в безразмерных координатах  $x = \omega_0 t$ ,  $u(x) = U_C(x)/Q\mathcal{E}_0$ . Амплитуда колебаний при этом то растёт, то падает, причём максимумы амплитуд постепенно уменьшаются. Лишь когда экспонента  $e^{-\gamma t}$  достаточно затухнет, биения прекратятся, и колебания станут синусоидальными с амплитудой, определяемой формулой (2.86), в чём можно убедиться по графику на рис. 2.10.

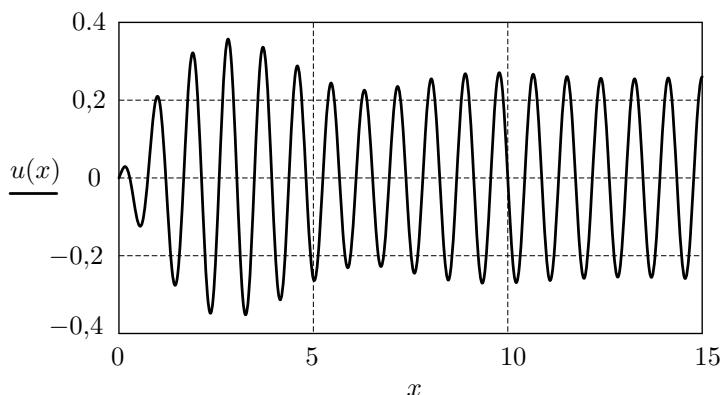


Рис. 2.10. Биения при установлении колебаний ( $\Delta\omega \approx \gamma = \delta\omega/2$ ). Расчет для  $\gamma = 0,05\omega_0$ ,  $\Delta\omega = 0,15\omega_0$

## 5. Автоколебания

### 5.1. Автоколебания в системах с одной степенью свободы

В предыдущих разделах были рассмотрены свободные и вынужденные колебания в диссипативных системах с одной степенью свободы, подчиняющихся дифференциальным уравнениям второго порядка вида (2.9) и (2.42) соответственно. Диссипация энергии, обусловленная наличием резистивных элементов в этих системах, в первом случае приводила к затуханию колебаний, а во втором — компенсировалась энергией, поступающей от внешнего источника синусоидального напряжения (или тока). Однако колебания в системе с одной степенью свободы при определённых условиях можно поддерживать, используя и *постоянный* (не синусоидальный) источник энергии, который периодически компенсирует потери колебательной энергии по входящей в систему цепи *обратной связи*. Такие системы называются *автоколебательными*, а протекающие в них процессы — *автоколебаниями*. Форма и период автоколебаний определяются свойствами самой системы, чем автоколебания существенно отличаются от обычных вынужденных колебаний

Для определения условий возбуждения автоколебаний в диссипативной системе с одной степенью свободы воспользуемся уравнением изменения энергии системы (2.5):

$$\frac{dW}{dt} = -P(t), \quad (2.89)$$

где  $W = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{q^2}{2C}$  — энергия, запасённая в колебательном контуре, а  $P(t)$  — мощность потерь. Интегрируя (2.89) по периоду колебаний  $T$ ,

приходим к равенству

$$W = W_0 - \int_0^T P(t) dt, \quad (2.90)$$

где  $W_0$  — энергия системы в некоторый момент времени, принятый за начало отсчёта. В обычной — диссипативной — системе  $P(t) = RI^2(t) > 0$ , так что автоколебания невозможны. Если же мощность потерь  $P(t)$  в системе можно сделать *знакопеременной*, то подбором режима работы системы можно обеспечить энергетический баланс:

$$\int_0^T P(t) dt = 0, \quad (2.91)$$

и, следовательно, возбудить в системе автоколебания. Отрицательные «потери», естественно, реализуются за счёт совершения работы внешним источником над системой.

Выполнение условия (2.91) возможно, например, в *нелинейной* колебательной системе, в которой сопротивление  $R = \frac{dU}{dI}$  является функцией тока:  $R = R(I)$ , причём *знакопеременной*. То есть для автоколебательно-го режима необходима возможность реализации отрицательного дифференциального сопротивления цепи:

$$R_{\text{диф}} = \frac{dU}{dI} < 0.$$

Иными словами, вольт-амперная характеристика  $I(U)$  элемента должна обладать «спадающими» участками (участками с отрицательным наклоном). Примеры таких характеристик приведены на рис. 2.11(а, б). Ими обладают, например, газоразрядная лампа (а) и туннельный диод (б). Обычно характеристики вида (а) называют *S*-образными, а вида (б) — *N*-образными.

Форма автоколебаний зависит от добротности колебательного контура. При большой добротности характер протекающих процессов почти не изменяется по сравнению с тем, как они протекали бы в системе без поступления энергии от источника: период и форма автоколебаний будут близки к периоду и форме собственных колебаний. Это связано с тем, что в этом случае от постоянного источника поступает энергия, составляющая малую долю полной энергии колебательной системы. При малой добротности колебательной системы для поддержания колебаний от постоянного источника должна поступать энергия, сопоставимая с энергией колебаний. В этом случае форма автоколебаний может значи-

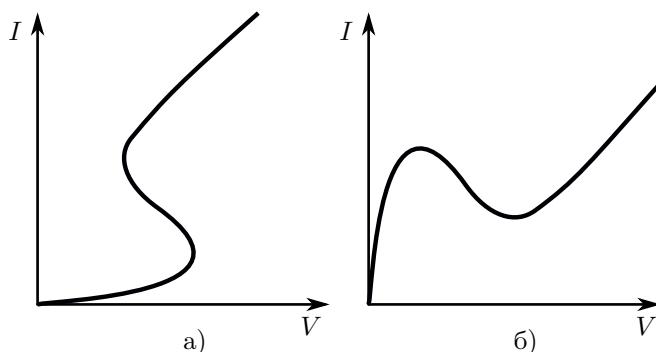


Рис. 2.11. Вольт-амперные характеристики с «падающими» участками: а)  $S$ -образным, б)  $N$ -образным.

тельно отличаться от синусоидальной. Наконец, в аperiodической системе, в которой за период автоколебаний теряется вся накопленная энергия, автоколебания становятся **релаксационными** и могут по форме очень сильно отличаться от колебаний синусоидальных.

## 5.2. Автоколебания в вырожденных системах

Автоколебательная система, не содержащая одного из накопителей колебательной энергии (например, индуктивности или емкости), называется **вырожденной**. Колебания в такой системе описываются дифференциальным уравнением первого порядка и могут быть только *релаксационными*.

В качестве примера рассмотрим представленную на рис. 2.12(а, б) вырожденную автоколебательную систему, содержащую источник постоянного напряжения  $U$ , ёмкость  $C$ , сопротивление  $R$  и нелинейный элемент с  $S$ -образной вольт-амперной характеристикой  $I_S(U)$ .

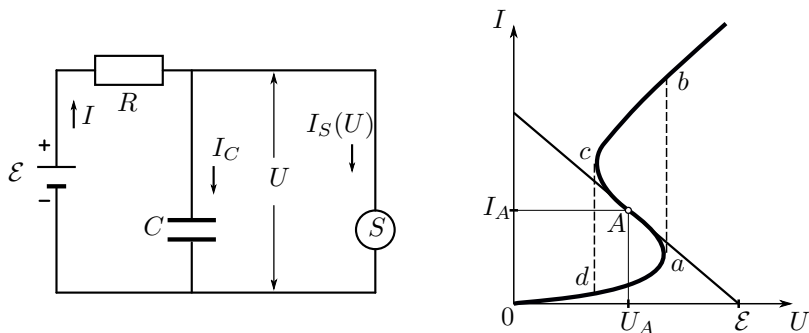


Рис. 2.12. Вырожденная автоколебательная  $RC$ -система



Уравнения, описывающие поведение этой системы релаксационного типа, имеют вид:

$$RI + U = \mathcal{E}, \quad I = I_C + I_S, \quad I_C = C \frac{dU}{dt}, \quad I_S = I_S(U). \quad (2.92)$$

Следовательно,

$$\tau_C \frac{dU}{dt} = \mathcal{E} - U - RI_S(U), \quad (2.93)$$

где  $\tau_C = RC$  — характерное время разрядки конденсатора.

В стационарном состоянии, когда  $dU/dt = 0$ , должно выполняться равенство

$$I_S(U) = \frac{\mathcal{E} - U}{R}. \quad (2.94)$$

Правая часть здесь представляет *нагрузочную прямую*, точки пересечения которой с вольт-амперной характеристикой  $I_S(U)$  определяют стационарные состояния системы. На рис. 2.126) параметры  $\mathcal{E}$  и  $R$  выбраны так, чтобы стационарное состояние  $A(U_A, I_A)$  лежало на падающей ветви вольт-амперной характеристики, где возможен автоколебательный режим.

Покажем, что состояние  $I_A = I(U_A)$  может быть *неустойчивым*. Для этого дадим малое приращение  $\Delta U$  переменной  $U$  в точке  $U_A$  и представим в линейном приближении по  $\delta U$  вольт-амперную характеристику  $I_S(U)$  вблизи стационарного состояния  $U_A$ :

$$I_S(U_A + \delta U) \approx I_S(U_A) + I'_S \delta U, \quad (2.95)$$

где  $I'_S = \left. \frac{dI_S}{dU} \right|_{U_A}$  — наклон вольт-амперной характеристики в точке  $U_A$ . Подстановка этого выражения в (2.93) приводит к уравнению

$$\tau_C \frac{d\delta U}{dt} = -(1 + RI'_S) \delta U, \quad (2.96)$$

из которого видно, что при условии

$$I'_S < -\frac{1}{R} \quad (2.97)$$

возмущение  $\delta U$  со временем экспоненциально нарастает, и, значит, стационарное состояние  $I_A = I_S(U_A)$  является неустойчивым.

Если выполнено условие неустойчивости, система будет совершать *релаксационные автоколебания*. Их фазовая траектория на рис. 2.126) является замкнутой и состоит из плавных участков  $da$  и  $bc$  вольт-амперной характеристики между напряжениями  $U_1$  и  $U_2$ , соединённых двумя вертикальными участками  $ab$  и  $cd$ , показанными на рисунке штриховыми линиями. Формально вертикальные участки соответствуют *скачкам*

тока, которые возможны только при отсутствии индуктивностей в системе, исходно заложенной в данной идеализированной модели. Учёт малой «паразитной» индуктивности элементов схемы, приводящей к конечной скорости скачков, добавляет ещё одно дифференциальное уравнение первого порядка. Система, таким образом, перестаёт быть вырожденной, а в такой системе заведомо возможен автоколебательный процесс.

Аналогичным образом можно показать, что условие возбуждения автоколебаний в вырожденной  $RL$ -системе: соединённых последовательно с источником постоянного напряжения резистора, индуктивности и элемента с  $N$ -образной вольт-амперной характеристикой, — имеет вид неравенства (2.97), в котором вместо  $I'_S(U_A)$  стоит  $I'_N(U_A)$  — крутизна падающего участка  $N$ -образной вольт-амперной характеристики в рабочей точке ( $U_A$ ).

### Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§122–124, 126, 127, 129, 130.
2. Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2007. — §§8.1–8.3.
3. Кириченко Н.А. Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — Гл. 17.
4. Горелик Г.С. Колебания и волны. — М.: Физматлит, 1959. — Гл. I–III.
5. Физический энциклопедический словарь / под. ред. Прохорова А.М. — М.: Советская энциклопедия, 1983. — С. 629.

### Работа 3.2.1

## Сдвиг фаз в цепи переменного тока

**Цель работы:** изучить влияние активного сопротивления, индуктивности и ёмкости на сдвиг фаз между током и напряжением в цепи переменного тока.

**В работе используются:** генератор звуковой частоты (ЗГ), двухканальный осциллограф (ЭО), магазин ёмкостей, магазин сопротивлений, катушка индуктивности, резисторы, универсальный измеритель импеданса (*LCR*-метр).

Перед выполнением данной работы необходимо ознакомиться с теоретическим Введением к разделу (пп. 2, 3.1).

Удобным, хотя и не очень точным, прибором для измерения фазовых соотношений служит электронный осциллограф. Можно предложить два способа измерения разности фаз.

В первом способе два сигнала  $U_1$  и  $U_2$  подаются на горизонтальную (канал  $X$ ) и вертикальную (канал  $Y$ ) развёртки осциллографа. Смещение луча по горизонтали и вертикали определяется выражениями

$$x = x_0 \cos \omega t, \quad y = y_0 \cos(\omega t + \psi),$$

где  $\psi$  — сдвиг фаз между напряжениями  $U_1$  и  $U_2$ , а  $x_0$  и  $y_0$  — амплитуды напряжений, умноженные на коэффициенты усиления соответствующих каналов осциллографа. Исключив время, после несложных преобразований найдём:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 + \frac{2xy}{x_0 y_0} \cos \psi = \sin^2 \psi.$$

Полученное выражение определяет эллипс, описываемый электронным лучом на экране осциллографа (рис. 1). Ориентация эллипса зависит как от искомого угла  $\psi$ , так и от усиления каналов осциллографа. Для расчёта сдвига фаз можно измерить отрезки  $2y_{x=0}$  и  $2y_0$  (или  $2x_{y=0}$  и  $2x_0$ , на рисунке не указанные) и, подставляя эти значения в уравнение эллипса, найти

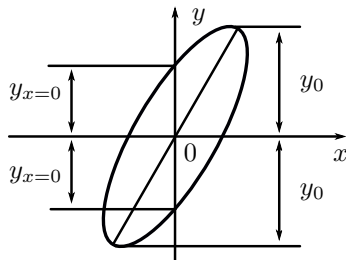


Рис. 1. Эллипс на экране осциллографа

$$\psi = \pm \arcsin \left( \frac{y_{x=0}}{y_0} \right). \quad (1)$$

Для правильного измерения отрезка  $2y_{x=0}$  важно, чтобы *центр эллипса лежал на оси  $y$* .

Второй способ заключается в непосредственном измерении сдвига фаз между сигналами на экране двухканального осциллографа. Напряжения  $U_1$  и  $U_2$  одновременно подаются на входные каналы ЭО при включенной внутренней горизонтальной развертке. При этом сигналы одновременно отображаются на экране. Измерение разности фаз в таком случае удобно проводить следующим образом:

- 1) подобрать частоту горизонтальной развёртки, при которой на экране укладывается чуть больше половины периода синусоиды;
- 2) отцентрировать горизонтальную ось;
- 3) измерить расстояние  $x_0$  (см. рис. 2) между нулевыми значениями *одного* из сигналов, что соответствует разности фаз  $\pi$ ;
- 4) измерить расстояние  $x$  между нулевыми значениями двух синусоид и пересчитать в сдвиг по фазе:  $\psi = \pi x / x_0$ . На рис. 2 синусоиды на экране ЭО сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ .

### Экспериментальная установка

Схема установки для исследования сдвига фаз между током и напряжением в цепи переменного тока представлена на рис. 2. Эталонная катушка  $L$ , магазин ёмкостей  $C$  и магазин сопротивлений  $R$  соединены последовательно и через дополнительное сопротивление  $r$  подключены к источнику синусоидального напряжения — звуковому генератору (ЗГ).

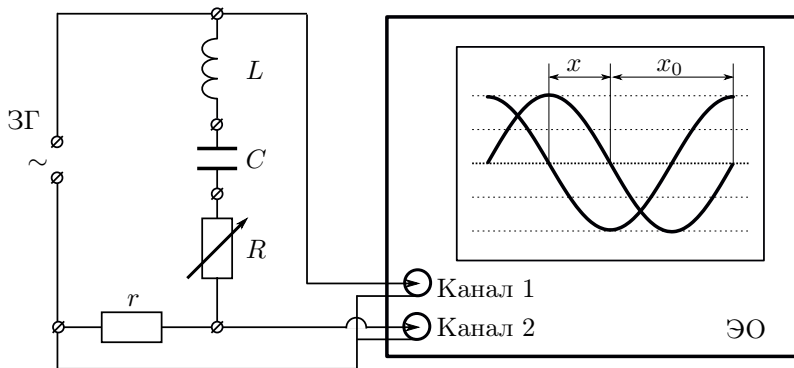


Рис. 2. Схема установки для исследования сдвига фаз между током и напряжением

Сигнал, пропорциональный току, снимается с сопротивления  $r$ , пропорциональный напряжению — с генератора. Оба сигнала подаются на

осциллограф (ЭО), имеющий два канала вертикального отклонения. Измерение разности фаз можно проводить одним из двух описанных выше способов.

На практике часто используются устройства, называемые **фазовращателями**, которые позволяют изменять фазу напряжения в широких пределах ( $0 < \psi < \pi$ ). Схема фазовращателя, применяемого в данной работе, изображена на рис. 3. Она содержит два одинаковых резистора  $R_1$ , смонтированных на отдельной плате, магазин сопротивлений  $R$  и магазин ёмкостей  $C$ .

Найдём, как зависит сдвиг фаз между входным напряжением  $U_{\text{вх}} = U_0 \cos \omega t$  (точки 1 и 2 на рис. 3) и выходным напряжением  $U_{\text{вых}}$  (точки 3 и 4) от соотношения между импедансами сопротивления  $R$  и ёмкости  $C$ . Для соответствующих комплексных амплитуд имеет место соотношение (получите самостоятельно):

$$U_{\text{вых}} = \frac{U_{\text{вх}}}{2} \frac{R + \frac{i}{\omega C}}{R - \frac{i}{\omega C}}. \quad (2)$$

Числитель и знаменатель (2) — комплексно-сопряжённые величины, модули которых одинаковы. Поэтому амплитуда выходного напряжения не зависит от  $R$ , и всегда равна  $U_0/2$ . Сдвиг фаз между выходным и входным напряжениями равен

$$\psi = \arg \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = 2 \arctg \frac{1}{\omega RC}. \quad (3)$$

Он может меняться от  $\psi = \pi$  при  $R \rightarrow 0$  до  $\psi = 0$  при  $R \rightarrow \infty$ .

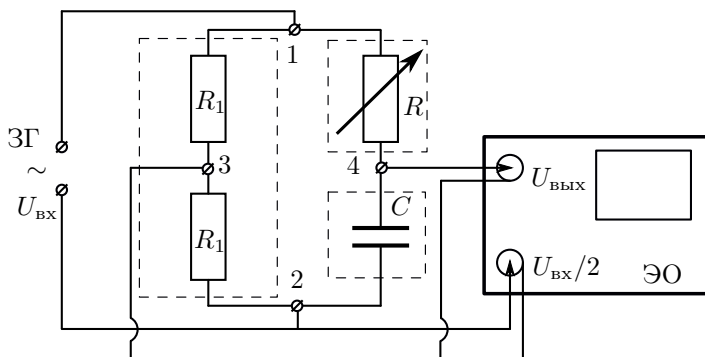


Рис. 3. Схема установки для исследования фазовращателя

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимости сдвига фаз между током и напряжением от сопротивления в  $RC$ - и в  $RL$ -цепи; определить добротность колебательного контура, сняв зависимость сдвига фаз от частоты вблизи резонанса, определить диапазон работы фазовращателя.

### Исследование сдвига фаз в $RC$ -цепи

1. Ознакомьтесь с устройством используемых в работе приборов по техническому описанию. Соберите схему согласно рис. 2.
2. В схеме, собранной по рис. 2, закоротите катушку, подключив оба провода, идущих к катушке, на одну клемму. Установите  $C = 0,5$  мкФ,  $\nu = 1$  кГц (см. рекомендации на установке) и рассчитайте реактивное сопротивление цепи  $X_1 = 1/(\omega C)$  (циклическая частота  $\omega = 2\pi\nu$ ).
3. Увеличивая сопротивление  $R$  от нуля до  $\sim 10 \cdot X_1$ , проведите измерения сдвига фаз  $\psi$  для 6–8 значений  $R$ . Предварительно подберите шаги  $\Delta R$ , для которых приращения сдвиги синусоид на экране осциллографа  $x$  будут примерно равномерно лежать в диапазоне от 0 до  $x_0$ .

При изменениях параметров цепи периодически проверяйте положение нулевой линии синусоиды.

### Исследование сдвига фаз в $RL$ -цепи

4. В схеме, собранной согласно 2, закоротите магазин ёмкостей. Установите  $L = 50$  мГн,  $\nu = 1$  кГц (см. рекомендации на установке). Рассчитайте реактивное сопротивление цепи  $X_2 = \omega L$ .
5. Меняя сопротивление  $R$  от 0 до  $\sim 10X_2$  (или до  $R_{\max}$ , указанного на установке), проведите измерения сдвига фаз  $\psi$  для 6–8 значений  $R$ .

### Исследование зависимости сдвига фаз от частоты в $RLC$ -цепи

6. В цепи, собранной согласно рис. 2, установите значения  $R = 0$ ,  $L = 50$  мГн,  $C = 0,5$  мкФ (см. рекомендации на установке). Рассчитайте резонансную частоту  $\nu_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$ .
7. Подбирая частоту ЗГ, добейтесь резонанса. При резонансе должен наблюдаться нулевой сдвиг фаз  $\psi = 0$  (почему?). При этом нулевые значения двух синусоид должны совместиться (а при равенстве амплитуд синусоиды полностью совпадают).
8. Меняя частоту в обе стороны от резонансного значения, снимите зависимость сдвига фаз от частоты. С изменением частоты меняется

расстояние  $x_0$ , которое занимает половина периода синусоиды, поэтому разумно каждый раз фиксировать отношение  $x/x_0$ . Вблизи резонанса ( $|\psi| < \pi/3$ ) точки должны лежать чаще.

9. Повторите измерения для сопротивления  $R = 100 \text{ Ом}$ .
10. С помощью лабораторного  $LCR$ -метра измерьте сопротивление  $r$ , а также индуктивность  $L$  и активное сопротивление катушки  $R_L$ . Сравните измеренные значения с указанными на установке.

### Исследование работы фазовращателя

11. Соберите схему, изображённую на рис. 3. Убедитесь, что выход ЗГ заземлён. Установите  $C = 0,5 \text{ мкФ}$ ,  $\nu = 1 \text{ кГц}$  (см. рекомендации на установке). Оцените визуально диапазон изменения сдвига фаз при изменении  $R$  от 0 до 10 кОм. Подберите сопротивление  $R$ , при котором сдвиг фаз равен  $\pi/2$ .

### Обработка результатов

12. По результатам измерений сдвига фаз в  $RC$ -цепи постройте график  $\text{tg } \psi = f[1/(\omega C R_\Sigma)]$ . Здесь  $R_\Sigma = R + r$  — суммарное активное сопротивление цепи. Получите теоретическую зависимость и изобразите её на том же графике. Проанализируйте соответствие теории и результатов измерения.
13. Постройте график зависимости  $\text{tg } \psi = f(\omega L/R_\Sigma)$  для  $RL$ -цепи (здесь  $R_\Sigma = R + r + R_L$ ). Сравните график с теоретическим.
14. Постройте на одном листе графики  $|\psi| = f(\nu/\nu_0)$  (фазово-частотные характеристики контура) для  $R = 0$  и 100 Ом (величину  $\psi$  удобно откладывать в долях  $\pi$ ).

Определите по графикам добротность контура:  $Q = \nu_0/(2\Delta\nu)$ , где  $2\Delta\nu/\nu_0$  — ширина графика при сдвиге фаз  $\psi = \pi/4$ .

15. Сравните добротность, определённую графически, с расчётом через параметры  $L$ ,  $C$  и  $R$ .
16. Постройте векторную диаграмму для фазовращателя; с её помощью рассчитайте сопротивление магазина  $R$ , при котором сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями равен  $\pi/2$ . Сравните расчёт с измеренным значением.
17. Оцените погрешности опыта и сделайте выводы по результатам измерений.

### Контрольные вопросы

1. Что такое импеданс электрической цепи? Как складываются импедансы при последовательном и параллельном соединении элементов?

2. Получите формулу (1) для измерения разности фаз по форме эллипса.
3. Получите выражение (2) для комплексной амплитуды напряжения на выходе фазовращателя.
4. Дайте определение добротности колебательного контура. Опишите известные вам способы измерения добротности.
5. Получите связь добротности  $Q$  колебательного контура с шириной  $\Delta\nu/\nu_0$  его фазово-частотной характеристики  $\psi(\nu/\nu_0)$ .
6. Как связаны фазы колебаний токов и напряжений при резонансе а) в последовательном контуре, б) в параллельном контуре?

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015.. — §§ 129, 130.
2. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003.. — §§ 220, 227, 228.

### Работа 3.2.2

## Резонанс напряжений в последовательном контуре

**Цель работы:** исследование резонанса напряжений в последовательном колебательном контуре с изменяемой ёмкостью, включающее получение амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик, а также определение основных параметров контура.

**В работе используются:** генератор сигналов, источник напряжения, нагрузкой которого является последовательный колебательный контур с переменной ёмкостью, двухлучевой осциллограф, цифровые вольтметры.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с основами теории электрических колебаний (см. Введение пп. 2, 3.1). Необходимые дополнения применительно к реальным элементам колебательного контура будут приведены ниже.

### Экспериментальная установка

В данной работе изучаются резонансные явления в последовательном колебательном контуре (резонанс напряжений). Схема экспериментального стенда показана на рис. 1. Синусоидальный сигнал от генератора поступает на вход *управляемого напряжением источника напряжения*



(см., напр., [3]), собранного на операционном усилителе, питание которого осуществляется встроенным блоком-выпрямителем от сети  $\sim 220$  В (цепь питания на схеме не показана). *Источник напряжения* (источник с нулевым внутренним сопротивлением) обеспечивает с высокой точностью постоянство амплитуды сигнала  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$  на меняющейся по величине нагрузке — последовательном колебательном контуре, изображенном на рис. 1 в виде эквивалентной схемы.

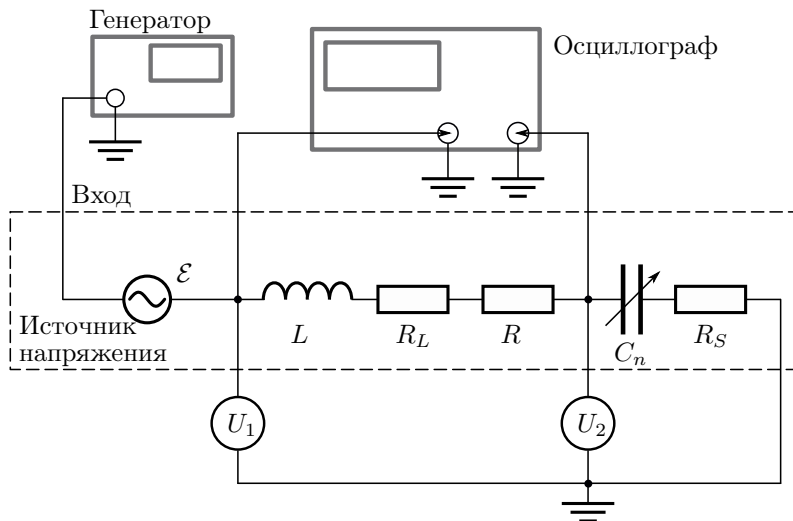


Рис. 1. Схема экспериментального стенда

Источник напряжения, колебательный контур и блок питания заключены в отдельный корпус, отмеченный на рисунке штриховой линией. На корпусе имеются коаксиальные разъемы «Вход», « $U_1$ » и « $U_2$ », а также переключатель магазина ёмкостей  $C_n$  с указателем номера  $n = 1, 2, \dots, 7$ . Величины ёмкостей  $C_n$  указаны на установке. Напряжение  $\mathcal{E}$  на контуре через разъем « $U_1$ » попадает одновременно на канал 1 осциллографа и вход 1-го цифрового вольтметра. Напряжение на конденсаторе  $U_C$  подаётся через разъем « $U_2$ » одновременно на канал 2 осциллографа и вход 2-го цифрового вольтметра.

**Особенности реальных элементов цепи.** Колебательный контур нашей установки собран из стандартных элементов, используемых в современных радиоэлектронных цепях. Известно, что в реальных конденсаторах и, особенно, в катушках индуктивности происходят *необратимые потери* энергии, обусловленные различными причинами. К ним относятся: утечки и диэлектрические потери в конденсаторах, вихревые токи и потери на перемагничивание в сердечниках катушек индуктивности, оми-

ческие потери в проводниках, растущие с частотой за счёт скин-эффекта, и др. Рост потерь приводит к увеличению действительных частей комплексных сопротивлений элементов контура, и, значит, к изменению его резонансных свойств, в частности, к уменьшению добротности  $Q$ .

Потери в элементах контура зависят как от частоты, так и от амплитуды тока (напряжения), температуры и ряда других факторов, например, от вида диэлектрика конденсатора, сердечника катушки и т. д. От перечисленных факторов в общем случае зависят и основные параметры контура: индуктивность  $L$ , ёмкость  $C$  и суммарное активное сопротивление  $R_\Sigma$ .

В нашем контуре катушка индуктивности  $L$  на ферритовом каркасе обладает малым сопротивлением по постоянному току и высокой собственной резонансной частотой  $\nu_{L0} \geq 1,3$  МГц. В общем случае каждая катушка, помимо индуктивности  $L$ , характеризуется также собственной (межвитковой) ёмкостью  $C_L$  и активным сопротивлением потерь  $R_L$ , распределёнными по её длине. Принимается, что эти величины сосредоточены в отдельных элементах схемы, образующих с индуктивностью  $L$  замкнутую колебательную цепь с собственной резонансной частотой  $\nu_{L0} = 1/2\pi\sqrt{LC_L}$ . Вследствие влияния ёмкости  $C_L$  при измерении на частоте  $\nu$  определяется не истинная индуктивность  $L$ , а эффективное значение индуктивности  $L_{\text{эфф}} = L/(1 - \nu^2/\nu_0^2)$ , которое может заметно отличаться от истинной величины  $L$ . В рабочем диапазоне частот нашего контура выполняется неравенство  $\nu \ll \nu_0$ , так что в эквивалентной схеме контура на рис. 1 индуктивность представлена своим истинным значением  $L$  и активным сопротивлением  $R_L$ .

Полипропиленовые конденсаторы с ёмкостями  $C_n$  ( $n = 1 \dots 7$ ), входящие в комплект магазина ёмкостей, в рабочем диапазоне частот имеют пренебрежимо малые собственные индуктивности (менее  $10^{-5}$  мГн на 1 см общей длины обкладок и выводов) и относительно малые активные потери. Для оценки возможного вклада активных потерь в конденсаторах в общий импеданс контура воспользуемся представлением конденсатора с ёмкостью  $C$  последовательной эквивалентной схемой, показанной на рис. 2а. На этой схеме  $R_S$  — так называемое *эквивалентное последовательное сопротивление* (ЭПС), обусловленное, главным образом, электрическим сопротивлением материала обкладок и выводов конденсатора и контактов между ними, а также потерями в диэлектрике. Из эквивалентной схемы и векторной диаграммы к ней (рис. 2б) видно, что активные потери в конденсаторе, пропорциональные косинусу угла  $\varphi$  сдвига фаз между током и напряжением на ёмкости, убывают с ростом  $\varphi$  и, соответственно, с уменьшением угла  $\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi$ . Потери в конденсаторе принято характеризовать величиной  $\text{tg } \delta$ , обычно приводимой в документации к изделию. Из рис. 2 и закона Ома получаем выражение для ЭПС

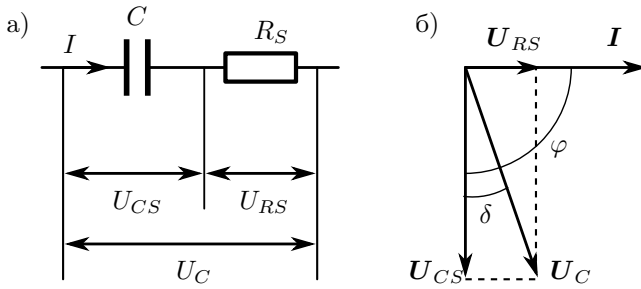


Рис. 2. Последовательная эквивалентная схема конденсатора с потерями.

на циклической частоте  $\omega = 2\pi\nu$  в виде

$$R_S = \frac{U_{RS}}{I} = \frac{U_{RS}}{\omega C U_{CS}} = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\omega C}. \quad (1)$$

Конденсаторы магазина ёмкостей  $C_n$  в интересующем нас диапазоне частот имеют  $\operatorname{tg} \delta < 10^{-3}$ , что является очень хорошим (низким!) показателем для конденсаторов с твёрдым диэлектриком.

**Свойства колебательного контура.** В колебательный контур наших установок добавлен постоянный резистор  $R$  (см. рис. 1), снижающий его добротность. Это сделано для упрощения процедур получения и обработки резонансных кривых. Таким образом, суммарное активное сопротивление контура принимается равным

$$R_\Sigma = R + R_L + R_S. \quad (2)$$

Добротность контуров, тем не менее, остаётся достаточно высокой, чтобы можно было пользоваться формулами (2.33), в которых надо учитывать суммарное активное сопротивление контура:

$$Q = \frac{\rho}{R_\Sigma} = \frac{\omega_0 L}{R_\Sigma} = \frac{1}{\omega_0 C R_\Sigma} \gg 1. \quad (3)$$

Сильное неравенство в (4) в рабочем диапазоне частот выполняется для всех контуров, используемых в работе.

Для импедансов ёмкости  $Z_C$ , индуктивности  $Z_L$  и последовательного контура  $Z = Z_L + R + Z_C$  с учётом (1), (2) получаем выражения:

$$Z_C = R_S - \frac{i}{\omega C}, \quad Z_L = R_L + i\omega L, \quad Z = R_\Sigma + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right). \quad (4)$$

Комплексные амплитуды тока в контуре  $I = E/Z$  и напряжений на сопротивлении  $U_R = RI$ , ёмкости  $U_C = Z_C I$  и индуктивности  $U_L = Z_L I$

при нулевой начальной фазе  $\varphi_0$  напряжения на контуре  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i\varphi_0}$  по формулам (2.46), (2.47) с учётом (1)–(4) удобно записать в виде

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R_\Sigma} \frac{1}{1 + iQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}, \quad (5)$$

$$U_C = -iQ\mathcal{E}_0 \frac{\omega_0}{\omega} \frac{1 + i \operatorname{tg} \delta}{1 + iQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}, \quad (6)$$

$$U_L = iQ\mathcal{E}_0 \frac{\omega}{\omega_0} \frac{1 - iR_L/\rho}{1 + iQ(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}. \quad (7)$$

Эти формулы уточняют результаты (2.46)–(2.47) и (2.60)–(2.63), полученные без учёта потерь в конденсаторе и в катушке индуктивности. Отметим, однако, что указанными потерями, представленными мнимыми добавками в числителях формул (6) и (7), при условиях  $Q \gg 1$  и  $\operatorname{tg} \delta \gg 10^{-3}$  можно пренебречь. В то же время вклад этих потерь в суммарное активное сопротивление контура  $R_\Sigma$ , вблизи резонанса составляющий приблизительно  $\approx R_L + \rho \operatorname{tg} \delta$ , можно оценить только по результатам эксперимента.

Основные особенности резонанса в последовательном контуре, называемого также *резонансом напряжений* из-за увеличения в  $Q$  раз напряжений на ёмкости  $U_C$  и индуктивности  $U_L$  по отношению к внешнему напряжению  $\mathcal{E}_0$ , следуют из анализа формул (5)–(7). Подробно этот вопрос рассматривался в п. 3.1 Введения к разделу.

Наибольший практический интерес представляет случай, когда отклонение  $\delta\omega = \omega - \omega_0$  частоты внешней ЭДС от собственной частоты контура  $\omega_0$  удовлетворяет сильному неравенству

$$|\Delta\omega| \ll \omega_0. \quad (8)$$

При этом в первом порядке малости по относительной расстройке частоты  $\Delta\omega/\omega_0$

$$\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}, \quad (9)$$

что позволяет упростить выражения (5)–(7), и представить вещественные части комплексных амплитуд и соответствующих им фаз в виде:

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R_\Sigma} \frac{\cos(\omega t - \psi_I)}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \quad \psi_I = \arctg(\tau\Delta\omega), \quad (10)$$

$$U_C = Q\mathcal{E}_0 \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\cos(\omega t - \psi_C)}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \quad \psi_C = \psi_I + \frac{\pi}{2} - \delta, \quad (11)$$

$$U_L = Q\mathcal{E}_0 \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\cos(\omega t - \psi_L)}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \quad \psi_L = \psi_I - \frac{\pi}{2} + \frac{R_L}{\rho}. \quad (12)$$

В выражениях (11), (12) мы сохранили в прежнем виде множители с отношениями частот в амплитудах и учли только линейные по малым величинам  $R_L/\rho$  и  $\delta$  поправки в фазах, причём величину  $\delta$  сохранили исключительно для общности, положив её константой.

При резонансе, когда для высокочастотного контура можно положить  $\omega = \omega_0$  ( $\Delta\omega = 0$ ), выражения для модулей комплексных амплитуд тока и напряжения на ёмкости, и их фаз принимают вид (ср. (2.74)):

$$I(\omega_0) = \frac{U_R}{R} = \frac{\mathcal{E}_0}{R_\Sigma}, \quad \varphi_I(\omega_0) = 0, \quad (13)$$

$$U_C(\omega_0) = Q\mathcal{E}_0, \quad \psi_C(\omega_0) = \frac{\pi}{2} - \delta; \quad (14)$$

$$U_L(\omega_0) = Q\mathcal{E}_0, \quad \psi_L(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} + \frac{R_L}{\rho}. \quad (15)$$

Из полученных соотношений следует, что на частоте  $\omega_0$ , где импеданс контура  $Z$  становится чисто активным и равным  $R_\Sigma$ , амплитуда тока достигает максимального значения  $I_{\max} = \mathcal{E}_0/R_\Sigma$ . Напряжения  $U_L$  и  $U_C$  на индуктивности и ёмкости на частоте  $\omega_0$  находятся почти в противофазе и в  $Q$  раз превышают по амплитуде напряжение  $\mathcal{E}$  внешней ЭДС. Напомним, однако, что максимальные (резонансные) значения напряжений на индуктивности и ёмкости не строго равны  $Q\mathcal{E}_0$  и достигаются не строго на частоте  $\omega_0$ . Соответствующие поправки, обусловленные множителями  $(\omega_0/\omega)^{\pm 1}$  в амплитудах и малыми добавками к фазам в выражениях для  $U_C$  (11) и  $U_L$  (12), имеют порядок малости  $Q^{-2}$ .

При отклонении  $\Delta\omega$  частоты внешней ЭДС от  $\omega_0$  таким, что выполняется условие

$$\tau\Delta\omega = \pm 1, \quad (16)$$

амплитуда тока  $I$ , как видно из (10), уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз относительно своей максимальной (резонансной) величины, а фаза  $\psi_I$  изменяется на угол  $\pm\pi/4$ . В этой же точке, если не учитывать поправки порядка  $Q^{-1}$ , происходят аналогичные изменения амплитуд  $U_C$ ,  $U_L$  и фаз  $\psi_C$ ,  $\psi_L$  напряжений на ёмкости и индуктивности: амплитуды уменьшаются в  $\sqrt{2}$  раз, а фазы меняются на угол  $\pm\pi/4$  по отношению к своим резонансным значениям.

Величина  $\delta\omega = 2|\Delta\omega| = 2/\tau$  представляет собой важную характеристику колебательного контура — *ширину резонансной кривой*  $U_C(\omega)$  на уровне  $U_C(\omega_0)/\sqrt{2}$ , по которой можно определить время затухания  $\tau = 2/\delta\omega$  и, зная резонансную частоту  $\omega_0$ , найти добротность контура  $Q = \omega_0/\delta\omega$ .

Эти же параметры можно определить по фазово-частотной характеристике: расстояние по оси  $\omega$  между точками, в которых фаза  $\varphi_C$  меняется от  $-\pi/4$  до  $3\pi/4$ , согласно (11) равно  $2/\tau$ , а тангенс угла наклона

функции  $\varphi_C(\omega)$  в точке резонанса согласно (2.75) определяет время затухания  $\tau$ .

В нашем эксперименте резонансные явления в последовательном колебательном контуре исследуются по напряжению на контуре  $\mathcal{E}$  и напряжению на ёмкости  $U_C$  (см. рис. 1), а также по фазовым сдвигам между ними.

## ЗАДАНИЕ

1. Проведите настройку экспериментального стенда по техническому описанию установки. В двухканальном режиме работы осциллографа установите общее начало отсчёта  $Y_1(t)$ ,  $Y_2(t)$  вблизи левого края средней линии экрана. В качестве синхронизирующего сигнала выберите напряжение  $\mathcal{E}(t)$  при начальных условиях:  $\mathcal{E}(0) = 0$ ,  $\dot{\mathcal{E}}(0) < 0$ .
2. Установите с максимальной точностью на выходе генератора (на входе схемы) эффективное значение напряжения  $\mathcal{E}$ , указанное преподавателем (в пределах  $30 \div 300$  мВ). Меняя частоту  $\nu = \omega/2\pi$  генератора, убедитесь по осциллографу и вольтметрам, что у синусоиды  $U_C(t)$  меняется амплитуда и фаза относительно начала координат, тогда как синусоида  $\mathcal{E}(t)$  — синхронизирующий сигнал — «привязана» к началу отсчёта при начальных условиях:  $\mathcal{E}(0) = 0$ ,  $\dot{\mathcal{E}}(0) < 0$  — а её амплитуда  $\mathcal{E}_0$  остаётся неизменной с относительной погрешностью не менее 1%.
3. Для контуров с 7 различными ёмкостями  $C_n$ , меняя их с помощью переключателя на блоке, измерьте резонансные частоты  $\nu_{0n}$  и напряжения  $U_C(\nu_{0n})$  при установленном в п. 2 напряжении  $\mathcal{E}$  на выходе генератора. Регистрируйте также напряжения  $\mathcal{E}(\nu_{0n})$ , игнорируя отклонения в пределах относительной погрешности 1%. Приближение к резонансу удобно наблюдать по фигуре Лиссажу на экране осциллографа в режиме  $X-Y$ . При этом фигура Лиссажу представляет собой эллипс, оси которого на собственной частоте  $\nu_{0n}$  направлены по  $X$  и  $Y$ . Напомним, что максимальные значения напряжения  $U_C(\nu)$  достигаются на частотах, несколько отличных от собственных частот  $\nu_{0n}$ .
4. \*Проведите измерения п. 3 ещё для двух напряжений  $\mathcal{E}$  из интервала  $30 \div 300$  мВ, существенно отличающихся друг от друга и от напряжения, использованного в п. 3.
5. Для контуров с двумя разными ёмкостями (по указанию преподавателя) измерьте амплитудно-частотные характеристики  $U_C(\nu)$  для значений  $U_C(\nu) \geq 0,6U_C(\nu_{0n})$  (всего 16–18 точек по обе стороны от резонанса) при том же напряжении  $\mathcal{E}$ , что и в п. 3.

---

\*Дополнительное упражнение, выполняется по указанию преподавателя.

6. Для тех же двух контуров измерьте фазово-частотные характеристики  $\psi_C(\nu)$  для значений  $U_C(\nu) \geq 0,3U_C(\nu_{0n})$  (всего 16–18 точек по обе стороны от резонанса) при том же напряжении  $\mathcal{E}$ , что и в п. 3.

Перед выполнением этого задания проверьте настройки осциллографа: синхронизирующий сигнал  $\mathcal{E}(t)$ , как указано в п. 2, должен был «привязан» к общему началу отсчёта времени и напряжений на экране, лежащему на оси  $X$  координатной сетки экрана. На той же оси должны располагаться нули сигналов  $\mathcal{E}(t)$  и  $U_C(t)$ . Если это не так, то следует повторить процедуру центрировки горизонтальных осей каналов по техническому описанию.

Расстояние  $x$  от начала отсчёта до точки первого обращения в нуль напряжения  $U_C(t)$  на участке спада характеризует разность фаз  $\Delta\varphi$  сигналов  $\mathcal{E}(t)$  и  $U_C(t)$ . Эта величина, выраженная в радианах, даётся формулой  $\Delta\varphi = \frac{x}{x_0}\pi$ , где  $x_0$  — расстояние от начала отсчёта до точки первого обращения в нуль напряжения  $\mathcal{E}(t)$  на участке подъёма, соответствующее полупериоду этого сигнала.

### Обработка и представление результатов

7. Результаты измерений п. 3 внесите в таблицу:

$C_n$ , нФ	$f_{0n}$ , кГц	$U_C$ , В	$\mathcal{E}$ , В	$L$ , мкГн	$Q$	$\rho$ , Ом	$R_\Sigma$ , Ом	$R_{S\max}$ , Ом	$R_L$ , Ом	$I$ , мА
$C_1$										
...										
$C_7$										
Среднее										
Среднекв. отклонение										
Коэфф. Стьюдента $t_{n\alpha}, n = 7, \alpha = 0,05$										
Погрешность										

Роров: Строку "коэффициент Стьюдента" нужно убрать. В нашем курсе они не используются и не объясняются (либо нужно объяснить здесь!)

В первый столбец запишите значения ёмкостей  $C_n$ , приведённые в таблице на корпусе блока «Резонанс напряжений». Для каждого значения  $C_n$  по формулам вводной части и данным эксперимента проведите последовательно расчёт  $L$ ,  $Q$ ,  $\rho$ ,  $R_\Sigma$ ,  $R_{S\max} = 10^{-3}\rho$ ,  $R_L$ ,  $I$ . Затем рассчитайте средние значения  $\langle L \rangle$  и  $\langle R_L \rangle$  и их случайные погрешности  $\Delta L$  и  $\Delta R_L$ .

Оцените относительный вклад активных потерь в конденсаторах (представленных в таблице сопротивлением  $R_{S\max}$ , рассчитанным для максимального значения  $\operatorname{tg} \delta = 10^{-3}$ ) в суммарное активное сопротивление контура. Оцените влияние погрешностей приборов на результаты измерений.

8. \*Выполните задание п. 7 для данных, полученных в п. 4. Сравните с результатами п. 7. Объясните причины расхождения результатов, если они обнаружатся.
9. По данным измерений п. 5 постройте на одном графике амплитудно-частотные характеристики  $U_C(\nu)$  для выбранных контуров. Проведите сравнительный анализ характеристик.
10. По данным измерений п. 5 постройте на одном графике амплитудно-частотные характеристики в безразмерных координатах  $x \equiv \nu/\nu_{0n}$ ,  $y \equiv U_C(x)/U_C(1)$ . По ширине резонансных кривых на уровне 0,707 определите добротности  $Q$  соответствующих контуров. Оцените погрешности. Сравните эти величины с данными п. 7.
11. По данным измерений п. 6 постройте на одном графике фазово-частотные характеристики в координатах  $x \equiv \nu/\nu_{0n}$ ,  $y \equiv \varphi_C/\pi$  для выбранных контуров. По этим характеристикам определите добротности контуров одним из двух способов: по расстоянию между точками по оси  $x$ , в которых  $y$  меняется от  $1/4$  до  $3/4$ , равному  $1/Q$ , или по формуле  $Q = 0,5 \frac{d\varphi_C}{dx}$  при  $x = 0$ . Оцените погрешности. Сравните с результатами пп. 7, 10.
12. Постройте зависимость  $R_L(\nu_{0n})$  в системе координат с началом в точке  $(0,6\nu_{07}; 0)$ ; нанесите на график прямую  $\langle R_L \rangle$ . Назовите возможные причины изменения  $R_L$  с частотой.
13. Постройте векторную диаграмму тока и напряжений для контура с наименьшей добротностью в резонансном состоянии. Ось абсцисс направьте по вектору  $\mathcal{E}$ . Масштаб изображения по этой оси для напряжения сделайте в 3 раза более крупным, чем по оси абсцисс.

### Контрольные вопросы

1. Что такое импеданс электрической цепи? Как складываются импедансы при последовательном и параллельном соединении элементов?
2. Дайте определение добротности колебательного контура. Опишите известные вам способы измерения добротности.
3. Дайте энергетическое определение добротности колебательного контура.
4. Объясните, почему оси эллипса на экране осциллографа (п. 3) при условии  $\omega = \omega_0$  ориентированы вдоль направлений X, Y.
5. Как оценить добротность контура по векторной диаграмме в п. 13?
6. По каким причинам потери в контуре зависят от частоты?
7. Зависит ли добротность контура от амплитуды сигнала и, если зависит, то по каким причинам?
8. Получите выражение для частоты  $\omega_m$ , на которой напряжение  $U_C$  достигает максимума. Чему равна соответствующая амплитуда напряжения  $U_C(\omega_m)$ ?



### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§126, 127.
2. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — §§17.1–17.3.
3. *Титце У., Шенк К.* Полупроводниковая схемотехника. — Т. II. — М.: ДМК Пресс, 2007. 12.1.

### Работа 3.2.3

## Резонанс токов в параллельном контуре

**Цель работы:** исследование резонанса токов в параллельном колебательном контуре с изменяемой ёмкостью, включающее получение амплитудно-частотных и фазово-частотных характеристик, а также определение основных параметров контура.

**В работе используются:** генератор сигналов, источник напряжения, нагрузкой которого является последовательный колебательный контур с переменной ёмкостью, двулучевой осциллограф, цифровые вольтметры.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с основами теории электрических колебаний (см. Введение пп. 2, 3.2). Необходимые дополнения применительно к реальным элементам колебательного контура будут приведены ниже.

### Экспериментальная установка

В данной работе изучаются резонансные явления в параллельном колебательном контуре (резонанс токов). Блок-схема экспериментального стенда показана на рис. 1. Синусоидальный сигнал от генератора поступает на вход *управляемого напряжением источника тока* (см., например, [1]), собранного на операционном усилителе с полевым транзистором, питание которых осуществляется встроенным блоком-выпрямителем от сети  $\sim 220$  В (цепи питания на схеме не показаны). Внутреннее (выходное) сопротивление источника тока, бесконечно большое в идеальном случае, в нашей схеме составляет несколько ГОм. Это обеспечивает постоянство амплитуды тока  $I$  на меняющейся нагрузке — параллельном контуре, изображенном на рис. 1 в виде эквивалентной схемы.

Источник тока, колебательный контур и блок питания заключены в отдельный корпус, отмеченный на рисунке штриховой линией. На корпусе имеются коаксиальные разъёмы «Вход», « $U_1$ » и « $U_2$ », а также переключатель магазина ёмкостей  $C_n$ ,  $n = 1 \dots 7$ . Величины ёмкостей  $C_n$  и

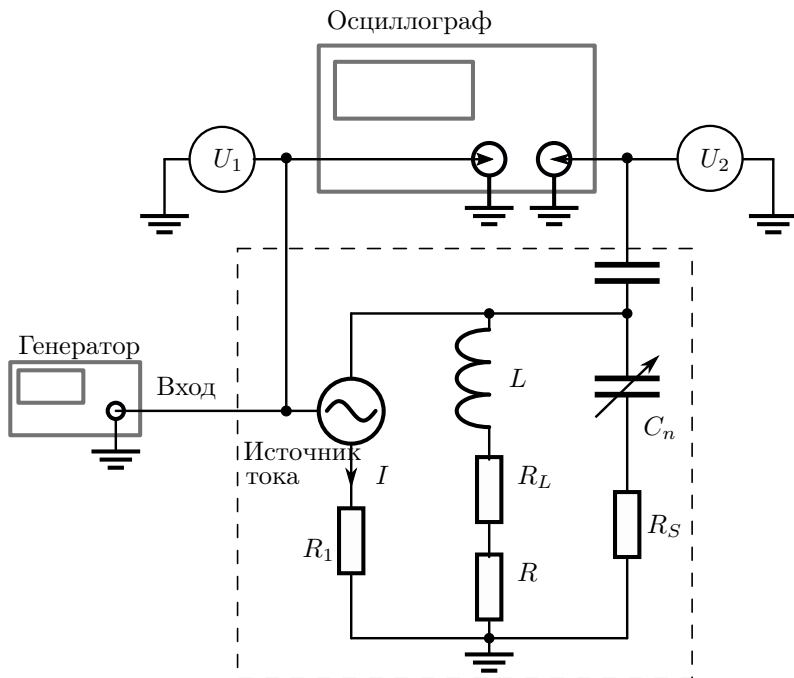


Рис. 1. Блок-схема экспериментального стенда

сопротивления  $R_1$  указаны на установке. Напряжение  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$  от генератора поступает на вход источника тока. Это же напряжение через разъём « $U_1$ » подаётся на канал 1 осциллографа и на вход вольтметра 1. Переменное напряжение на сопротивлении  $R_1$  в используемой схеме равно напряжению  $\mathcal{E}$  на выходе генератора и совпадает с ним по фазе. Следовательно, ток  $I$  во внешней цепи параллельного контура определяется формулами:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = I_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R_1}. \quad (1)$$

Напряжение на контуре  $U$ , совпадающее с напряжением на конденсаторе  $U_C$ , поступает со знаком «-» через разделительный конденсатор и разъём « $U_2$ » на канал 2 осциллографа, а также на вход вольтметра 2.

Колебательный контур нашей установки собран из стандартных элементов, используемых в современных радиоэлектронных цепях. Характеристики реальных элементов представлены в описании работы 3.2.2. Для понимания дальнейшего изложения читателю рекомендуется ознакомиться с разделом «Особенности реальных элементов цепи»

на стр. 80. С учётом приведённых в указанном материале результатов получаем выражения для импедансов ёмкостной  $Z_C$  и индуктивной  $Z_L$  ветвей параллельного колебательного контура:

$$Z_C = R_S - \frac{i}{\omega C}, \quad Z_L = R + R_L + i\omega L, \quad (2)$$

где  $R_S \equiv \frac{\operatorname{tg} \delta}{\omega C}$  и  $R_L$  — активные части импедансов конденсатора и катушки индуктивности соответственно, а  $R$  величина постоянного активного сопротивления, добавленного в индуктивную ветвь колебательного контура для снижения его добротности с целью упрощения процедур получения и обработки резонансных кривых. Конденсаторы магазина ёмкостей  $C_n$  в интересующем нас диапазоне частот имеют относительно малые потери: для них  $\operatorname{tg} \delta < 10^{-3}$ .

Добротность  $Q$  контуров в наших установках является достаточно высокой, чтобы можно было пользоваться формулами (2.32) и (2.78), в которых, однако, надо учитывать, что суммарное активное сопротивление контура в этом случае даётся формулой

$$R_\Sigma = R + R_L + R_S \quad (3)$$

и, следовательно,

$$Q = \frac{\rho}{R_\Sigma} = \frac{\omega_0 L}{R_\Sigma} = \frac{1}{\omega_0 C R_\Sigma} \gg 1. \quad (4)$$

Сильное неравенство в (4) в рабочем диапазоне частот выполняется для всех контуров, используемых в работе.

Комплексные амплитуды токов в ёмкостной  $I_C$  и индуктивной  $I_L$  ветвях контура, а также напряжения  $U$  на контуре, положив без ограничения общности  $\varphi_0 = 0$  в выражении для внешнего тока  $I = I_0 e^{i\varphi_0}$  и используя формулы (2.78) с учётом (1)–(4), удобно представить в виде:

$$I_C = I \frac{Z_{LR}}{Z_C + Z_{LR}} = iQI_0 \frac{\frac{\omega}{\omega_0} - i\frac{R+R_L}{\rho}}{1 + iQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}, \quad (5)$$

$$I_L = I \frac{Z_C}{Z_C + Z_{LR}} = -iQI_0 \frac{\frac{\omega_0}{\omega}(1 + \operatorname{tg} \delta)}{1 + iQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}, \quad (6)$$

$$U = I \frac{Z_C Z_{LR}}{Z_C + Z_{LR}} = Q\rho I_0 \frac{[1 - i\frac{\omega_0}{\omega}\frac{R+R_L}{\rho}](1 + i\operatorname{tg} \delta)}{1 + iQ(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}. \quad (7)$$

Из формул (6), (7) следует, что потерями в конденсаторах, явно представленных величиной  $\operatorname{tg} \delta < 10^{-3}$  можно пренебречь. В то же время

необходимость учёта вклада этих потерь в суммарное активное сопротивление контура  $R_\Sigma$  вблизи резонанса, примерно равного  $\rho \operatorname{tg} \delta$ , можно будет оценить только по результатам эксперимента.

Наибольший практический интерес для контуров с *высокой добротностью* ( $Q \gg 1$ ) представляет случай, когда отклонение  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  частоты внешней ЭДС от собственной частоты контура удовлетворяет сильному неравенству

$$|\Delta\omega| \ll \omega_0 \quad (8)$$

При этом в первом порядке малости по относительной расстройке частоты  $\Delta\frac{\omega}{\omega_0}$  выполняется соотношение

$$\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0} \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}, \quad (9)$$

которое позволяет упростить выражения (5)–(7) и представить вещественные части комплексных амплитуд в виде:

$$I_C(t) = QI_0 \frac{\omega}{\omega_0} \frac{\cos(\omega t - \psi_C)}{R\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \quad \psi_C = \arctg(\tau\Delta\omega) - \frac{\pi}{2} + \frac{R + R_L}{\rho}, \quad (10)$$

$$I_L(t) = QI_0 \frac{\omega_0}{\omega} \frac{\cos(\omega t - \psi_L)}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \quad \psi_L = \arctg(\tau\Delta\omega) + \frac{\pi}{2} - \delta, \quad (11)$$

$$U(t) = Q\rho I_0 \frac{\cos(\omega t - \psi_U)}{\sqrt{1 + (\tau\Delta\omega)^2}}, \quad \psi_U = \arctg(\tau\Delta\omega) + \frac{\omega_0}{\omega} \frac{R + R_L}{\rho} - \delta, \quad (12)$$

где  $\tau = 2L/R_\Sigma = 2Q/\omega_0$  — время затухания колебательного контура. В выражениях (10)–(12) мы сохранили в прежнем виде множители с отношениями частот в амплитудах и учли только линейные по малым величинам  $(R + R_L)/\rho$  и  $\delta$  поправки в фазах, причём величину  $\delta$  сохранили исключительно для общности, положив её, однако, константой.

Как видно из выражений (10)–(12), вблизи частоты  $\omega_0$  зависимости амплитуд токов и напряжения на контуре от частоты  $\omega$  несколько различаются, что надо иметь в виду при экспериментальном исследовании резонанса токов *по напряжению на контуре*  $U$ .

Отдельно обратим внимание на тот факт, что зависимость (12) амплитуды напряжения  $U$  на параллельном контуре от частоты  $\omega$  вблизи резонанса в принятом приближении совпадает с аналогичной зависимостью (2.73) амплитуды тока  $I_\omega$  для последовательного контура в том же приближении.

В резонансе, когда для высокودобротного контура можно положить  $\omega = \omega_0$ , амплитуды токов и напряжения (10)–(12), и их фазы принимают

вид:

$$\begin{aligned} I_C(\omega_0) &= QI_0, & \psi_C(\omega_0) &= -\frac{\pi}{2} + Q^{-1} - \operatorname{tg} \delta, \\ I_L(\omega_0) &= QI_0, & \psi_L(\omega_0) &= \frac{\pi}{2} - \delta, \\ U(\omega_0) &= Q\rho I_0, & \psi(\omega_0) &= Q^{-1} - \operatorname{tg} \delta - \delta. \end{aligned} \quad (13)$$

В последнем равенстве мы пренебрегли относительными поправками порядка  $Q^{-2}$  и  $Q^{-1} \operatorname{tg} \delta$ . Из формул (13) следует, что на частоте  $\omega_0$  токи  $I_C$  и  $I_L$  в ёмкостной и индуктивной ветвях контура в  $Q$  раз превышают по амплитуде ток  $I$  во внешней цепи. При этом ток  $I_C$  опережает внешний ток  $I$  по фазе почти на  $\pi/2$ , а ток  $I_L$  — отстаёт от тока  $I$  почти на  $\pi/2$ . Между собой токи  $I_C$  и  $I_L$  сдвинуты по фазе на угол, близкий к  $\pi$ . Можно сказать, что токи  $I_C$  и  $I_L$  образуют контурный ток, последовательно обтекающий элементы контура и в  $Q$  раз превышающий внешний ток  $I$ . Именно последнее обстоятельство послужило поводом назвать резонанс в параллельном контуре «резонансом токов».

Отметим также, что максимальные (резонансные) значения токов в контуре не строго равны  $QI_0$  и достигаются не строго на частоте  $\omega_0$ . Соответствующие относительные поправки составляют доли малой величины  $Q^{-2}$  и связаны с входящим в выражения (10), (11) для вещественных амплитуд токов  $I_C$ ,  $I_L$  множителем  $\frac{\omega}{\omega_0}$ .

Из формул (13) вытекает, что на частоте  $\omega_0$  импеданс контура  $Z(\omega_0) = U(\omega_0)/I_0$  является почти чисто активным. В пренебрежении относительными поправками порядка  $Q^{-2}$  его модуль и фаза относительно внешнего тока определяются формулами:

$$|Z(\omega_0)| = Q\rho = Q^2 R_\Sigma, \quad \psi_Z(\omega_0) = \frac{R + R_L}{\rho} - \delta, \quad (14)$$

которые дополняют формулы (2.82) учётом активных потерь в катушке индуктивности и в конденсаторе.

При отклонении  $\Delta\omega$  частоты внешней ЭДС от частоты  $\omega_0$  таким, что выполняется условие

$$\tau\Delta\omega = \pm 1, \quad (15)$$

амплитуда напряжения  $U$ , как видно из формул (12), уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз относительно своей резонансной величины, а фаза  $\psi_U$  изменяется примерно на угол  $\pm\pi/4$ . Величина  $\delta\omega \equiv 2|\Delta\omega_\gamma| = 2\gamma = 2/\tau$  представляет собой важную характеристику колебательного контура — *ширину резонансной кривой*  $U(\omega)$ , по которой с учётом соотношений  $Q = \omega_0/2\gamma = \tau\omega_0/2$ , зная частоту  $\omega_0$ , можно найти добротность контура

$$Q = \frac{\omega_0}{\delta\omega} \quad (16)$$

Эти же параметры можно определить по фазово-частотной характеристике: тангенс угла наклона  $\psi_U$  в точке  $\omega = \omega_0$  согласно (2.81) определяет время затухания  $\tau$ , а расстояние по оси  $\omega$  между точками, в которых фаза  $\psi_U(\omega)$  меняется от  $-\pi/4$  до  $\pi/4$ , равно  $2/\tau$  с относительной погрешностью порядка  $Q^{-2}$ .

## ЗАДАНИЕ

1. Проведите настройку экспериментального стенда по техническому описанию установки.
2. Меняя частоту  $\nu$  генератора, убедитесь по осциллографу и вольтметрам, что у синусоиды  $U(t)$  меняется амплитуда и фаза относительно начала координат, тогда как синусоида  $\mathcal{E}(t)$  — синхронизирующий сигнал — «привязана» к началу отсчёта при начальных условиях:  $\mathcal{E}(0) = 0$ ,  $\dot{\mathcal{E}}(0) = 0$ , — а её амплитуда остаётся неизменной с относительной погрешностью  $\leq 1\%$ . После этого можно приступить к измерениям.
3. Для контуров с семью различными ёмкостями  $C_n$ , меняя их с помощью переключателя на блоке, измерьте резонансные частоты  $\nu_{0n}$  и напряжения  $U(\nu_{0n})$ . Регистрируйте для контроля также напряжения  $\mathcal{E}$ , игнорируя отклонения в пределах относительной погрешности  $1\%$ . Состояние резонанса определяйте по максимуму напряжения  $U(\nu_{0n})$ , измеряемого вольтметром и наблюдаемого на экране осциллографа. Приближение к резонансу удобно наблюдать по фигуре Лиссажу на экране осциллографа в режиме  $X-Y$ . При этом фигура Лиссажу представляет собой эллипс, вырождающийся в прямую линию с положительным наклоном *почти* на частоте  $\nu_{0n}$ .
4. \*Проведите измерения п. 3 для напряжения, существенно отличающегося от использованного в п. 3, но лежащего в диапазоне  $100 \div 500$  мВ по амплитуде.
5. Для контуров с двумя разными ёмкостями (по указанию преподавателя) снимите амплитудно-частотные характеристики  $U(f)$  для значений  $U(f) \geq 0,6U(\nu_{0n})$  (всего 16–18 точек по обе стороны от резонанса) при том же напряжении  $\mathcal{E}$ , что и в п. 3.
6. Для тех же двух контуров измерьте фазово-частотные характеристики  $\psi_U(f)$  для значений  $U(f) \geq 0,3U(\nu_{0n})$  (всего 16–18 точек по обе стороны от резонанса) при том же напряжении, что и в п. 3. Перед выполнением этой части работы измените с помощью ручек горизонтальной развёртки настройки осциллографа таким образом, чтобы

---

\*Дополнительное упражнение, выполняется по указанию преподавателя.

синхронизирующий сигнал  $\mathcal{E}(t)$  был «привязан» к общему началу отсчёта времени и напряжений на экране, лежащему на оси  $X$  координатной сетки экрана (см. п. 2), и оба сигнала были симметричны относительно этой оси. Если это не так, то следует повторить процедуру центрировки горизонтальных осей каналов по техническому описанию.

Расстояние  $x$  от начала отсчёта до точки первого обращения в нуль напряжения  $U(t)$  на участке спада на осциллограмме характеризует разность фаз  $\Delta\varphi$  сигналов  $U(t)$  и  $\mathcal{E}(t)$ . Эта величина, выраженная в радианах, очевидно, даётся формулой  $\Delta\varphi = \frac{x}{x_0}\pi$ , где  $x_0$  — расстояние от начала отсчёта до точки первого обращения в нуль напряжения  $\mathcal{E}(t)$  на участке подъёма, соответствующее полупериоду этого сигнала.

### Обработка и представление результатов

7. Результаты измерений п. 3 внесите в таблицу:

$C$ , нФ	$f$ , кГц	$U$ , В	$\mathcal{E}$ , В	$L$ , мкГн	$\rho$ , Ом	$ Z_{\text{рез}} $ , Ом	$Q$	$R_{\Sigma}$ , Ом	$R_{S\text{max}}$ , Ом	$R_L$ , Ом
$C_1$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
...	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$C_7$	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Среднее				—						—
Среднекв. отклонение				—						—
Коэфф. Стьюдента $t_{n\alpha}, n = 7, \alpha = 0,05$										
Погрешность				—						—

Роров: Строку "коэффициент Стьюдента" нужно убрать. В нашем курсе они не используются и не объясняются (либо нужно объяснить здесь!)

В первый столбец этой таблицы запишите значения ёмкостей  $C_n$ . Для каждого значения  $C_n$  по формулам вводной части и данным эксперимента проведите *последовательно* расчёт  $L$ ,  $\rho$ ,  $|Z_{\text{рез}}|$ ,  $Q$ ,  $R_{\Sigma}$ ,  $R_{S\text{max}} = 10^{-3}\rho$ ,  $R_L$ . Затем рассчитайте средние значения  $\langle L \rangle$  и  $\langle R_L \rangle$  и их случайные погрешности  $\Delta L$  и  $\Delta R_L$ .

Оцените относительный вклад активных потерь в конденсаторах (представленных в таблице сопротивлением  $R_{S\text{max}}$ , рассчитанным для максимального значения  $\text{tg } \delta = 10^{-3}$ ) в суммарное активное сопротивление контура.

8. \*Выполните задание п. 7 для данных, полученных в п. 4. Сравните с результатами п. 7. Объясните причины расхождения результатов, если они обнаружатся.

9. По данным измерений п. 5 постройте на одном графике амплитудно-частотные характеристики  $U(\nu)$  для выбранных контуров. Проведите сравнительный анализ характеристик.
10. По данным измерений п. 5 постройте на одном графике амплитудно-частотные характеристики в безразмерных координатах  $x \equiv \nu/\nu_{0n}$ ,  $y \equiv U(x)/U(1)$ . По ширине резонансных кривых на уровне 0,707 определите добротности  $Q$  соответствующих контуров. Оцените погрешности. Сравните эти величины с расчётами п. 7.
11. По данным измерений п. 6 постройте на одном графике фазово-частотные характеристики  $\psi_U(\nu)$  в координатах  $x \equiv \nu/\nu_{0n}$ ,  $y \equiv \psi_U/\pi$  для выбранных контуров. По этим характеристикам определите добротности контуров одним из двух способов: по формуле  $Q = \frac{1}{2} \frac{d\varphi_U(x)}{dx}$  при  $x = 1$  или по расстоянию  $1/Q$  между точками оси  $x$ , в которых меняется от  $-1/4$  до  $1/4$ . Оцените погрешности. Сравните с результатами п. 7 и 10.
12. Постройте зависимость  $R_L(\nu_{0n})$  в системе координат с началом в точке  $(0,6\nu_{07}; 0)$  нанесите на график прямую  $\langle R_L \rangle$ . Назовите возможные причины изменения  $R_L$  с частотой.
13. Постройте векторную диаграмму токов и напряжений для контура с наименьшей добротностью в резонансном состоянии. Ось ординат направьте по вектору  $\mathbf{I}$ . Масштаб по этой оси для тока сделайте в 3 раза более крупным, чем по оси абсцисс.

### Контрольные вопросы

1. Что такое импеданс электрической цепи? Как складываются импедансы при последовательном и параллельном соединении элементов?
2. Дайте определение добротности колебательного контура. Опишите известные вам способы измерения добротности.
3. Дайте энергетическое определение добротности колебательного контура.
4. Получите выражение для напряжения на катушке индуктивности в резонансе.
5. Дайте обоснование способам определения добротности по фазово-частотной характеристике.
6. По каким причинам потери в контуре зависят от частоты?
7. Зависят ли потери в контуре от амплитуды сигнала и, если зависят, то по каким причинам?
8. Оцените, на какой частоте  $\omega_m$  эллипс на экране осциллографа в п. 3 вырождается в прямую линию с положительным наклоном.



### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§126, 127.
2. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — §§17.1–17.3.
3. *Титце У., Шенк К.* Полупроводниковая схемотехника. — Т. II. — М.: ДМК Пресс, 2007. 12.1.

### Работа 3.2.4

## Свободные колебания в электрическом контуре

**Цель работы:** исследование свободных колебаний в электрическом колебательном контуре.

**В работе используются:** генератор импульсов, электронное реле, магазин сопротивлений, магазин ёмкостей, катушка индуктивности, электронный осциллограф, универсальный измерительный мост.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с п. 1 введения к данному разделу.

В работе исследуются свободные колебания, возбуждаемые в колебательном  $RLC$ -контуре. Конденсатор контура заряжается поступающими от специального генератора короткими одиночными импульсами, после каждого из которых в контуре возникают свободные затухающие колебания. По картине колебаний, наблюдаемой на экране электронного осциллографа, можно определить период свободных колебаний в контуре и коэффициент затухания, и вычислить параметры колебательного контура. Характеристики контура можно также определить, рассматривая затухающие колебания на фазовой плоскости системы на экране осциллографа.

### Экспериментальная установка

На рис. 1 приведена схема для исследования свободных колебаний в контуре, содержащем постоянную индуктивность  $L$  с активным сопротивлением  $R_L$ , а также переменные сопротивление  $R$  и ёмкость  $C$ , выбираемые из соответствующих «магазинов». Картина колебаний напряжения на ёмкости наблюдается на экране двухканального осциллографа. Выходные разъёмы схемы и входы каналов осциллографа собраны на отдельной панели П.

Для периодического возбуждения колебаний в контуре используется генератор импульсов. С выхода генератора сигналы поступают на колебательный контур через электронное реле, которое содержит диодный *тиристор* и ограничительный резистор. Тиристор без управляющего электрода представляет собой полупроводниковый ключ, открывающийся при напряжении на нём, превышающем пороговое значение, и закрывающийся при любом напряжении другого знака. Благодаря этому генератор отключается от колебательного контура после каждого импульса, и внутреннее сопротивление генератора не влияет на процессы в колебательном контуре.

Каждый импульс заряжает конденсатор  $C$ , после чего в контуре возникают свободные затухающие колебания. Напряжение на конденсаторе поступает на вход канала 1( $X$ ) осциллографа, а напряжение на сопротивлении  $R$ , пропорциональное току  $I$  в контуре, поступает на вход канала 2( $Y$ ). В двухканальном режиме работы осциллографа на экране отображаются оба сигнала одновременно. Наблюдение фазовой плоскости осуществляется в режиме « $X-Y$ ». Входное сопротивление осциллографа велико ( $\approx 1$  МОм), поэтому его влиянием на контур можно пренебречь.

Картину колебаний можно представить не только в координатах  $(t, U_C)$  (см. рис. 2.2а), но и в координатах  $(U_C, dU_C/dt)$  — на фазовой плоскости (см. рис. 2.2б). В этих координатах кривая незатухающих колебаний (при  $\gamma = 0$ ) имеет вид эллипса, а картина затухающих колебаний (при  $\gamma > 0$ ) представляет собой сворачивающуюся спираль. При этом движение точки, отвечающей состоянию системы, по фазовой траектории происходит со временем по часовой стрелке, что соответствует принятому правилу знаков: ток положителен, если заряд конденсатора растёт.

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость периода свободных колебаний контура от ёмкости, зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления, а также определить критическое сопротивление и добротность контура. Правила выполнения работы изложены в техническом описании (ТО), расположенном на столе установки.

### I. Подготовка приборов к работе

1. Для настройки генератора импульсов подключите сначала выходные разъёмы генератора, отмеченные на схеме цифрами 0 и 1, непосредственно к входу канала 1( $X$ ) осциллографа через соответствующие клеммы на панели П.

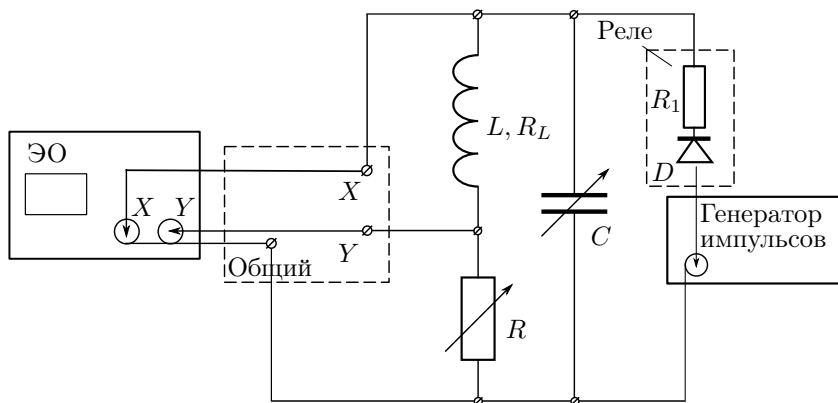


Рис. 1. Схема установки для исследования свободных колебаний

2. Установите на генераторе длительность импульсов  $\tau = 5$  мкс, частоту повторения импульсов  $\nu_0 = 300$  Гц, выходное напряжение  $V = 30$  В.
3. Включите и настройте осциллограф, руководствуясь техническим описанием.
4. Включите генератор, выберите развёртку и усиление канала 1(X) осциллографа в измерительном режиме так, чтобы на экране умещалось несколько импульсов. Проверьте, совпадает ли период повторения импульсов на генераторе с периодом повторения импульсов, измеренным при помощи горизонтальной шкалы осциллографа. При несовпадении периодов прокалибруйте горизонтальную шкалу осциллографа по известному периоду повторения импульсов. Зарегистрируйте наблюдаемую картину.
5. Выключите генератор и осциллограф.

## II. Измерение периодов свободных колебаний

6. Соберите полную схему, представленную на рис. 1. Установите на магазине сопротивлений величину  $R = 0$ ; на магазине ёмкостей — величину  $C = 0,02$  мкФ. Включите генератор и осциллограф. Установите на осциллографе канал 1 в рабочее положение при выключенном канале 2.
7. Подберите частоту внутренней развёртки так, чтобы сигнал на экране был представлен на временном интервале, слегка перекрывающем длительность импульсов генератора  $\tau$ .
8. Измерьте по шкале экрана осциллографа длительность нескольких периодов колебаний контура. Рассчитайте период  $T$  свободных затухающих колебаний.

хающих колебаний.

9. Изменяя ёмкость  $C$  от 0,02 мкФ до 0,9 мкФ, проведите измерения 8–10 значений периодов  $T$  свободных колебаний.

### III. Измерение критического сопротивления и декремента затухания

10. Для данной в работе индуктивности  $L$  рассчитайте ёмкость  $C$ , при которой собственная частота колебаний контура составляет  $\nu_0 = 5$  кГц. Для выбранных значений  $L$  и  $C$  рассчитайте критическое сопротивление контура  $R_{кр}$ . Найденное в эксперименте значение  $R_{кр}$  может отличаться от рассчитанного, так как величина  $L$  задана приближённо.

Роров: Почему бы не измерить значение индуктивности  $LCR$ -метром сразу?

11. Установите на магазине ёмкость, близкую к рассчитанной. Увеличивая сопротивление  $R$  от нуля до  $R_{кр}$ , наблюдайте картину затухающих колебаний на экране осциллографа. Зафиксируйте сопротивление магазина, при котором колебательный режим переходит в апериодический. Сравните значения найденного экспериментально и рассчитанного значения  $R_{кр}$ .

Роров: В ворд-файле этот пункт удален. Зачем?

12. Установите сопротивление  $R \approx 0,1R_{кр}$ . Получите на экране картину затухающих колебаний. Для расчёта логарифмического декремента затухания  $\Theta$  по формуле (2.26) измерьте амплитуды, разделенные целым числом периодов. Расчёт будет тем точнее, чем больше отличаются друг от друга измеряемые амплитуды, однако минимальная амплитуда не должна быть меньше слишком мала (не менее половины большого деления шкалы экрана).
13. Повторите измерения для 6–8 значений  $R$  в интервале  $(0,1 - 0,3)R_{кр}$ .

### IV. Свободные колебания на фазовой плоскости

14. Для наблюдения свободных затухающих колебаний на фазовой плоскости дополнительно к каналу 1(X) осциллографа включите канал 2(Y). Нажмите кнопку CH2 INV и выполните настройку канала синхронизации по ТО к работе. Установите раздельное по высоте расположение осциллограмм на экране, выберите амплитуды сигналов и частоту развёртки каналов так, чтобы оба сигнала были представлены на одном временном интервале, слегка превышающем длительность  $\tau$  импульсов генератора. Зарегистрируйте осциллограмму и сравните её с рис. 2.2а.

Непонят  
пункт!  
Зачем на  
жимать  
кнопку

15. Для наблюдения свободных затухающих колебаний на фазовой плоскости переведите осциллограф в режим « $X-Y$ » (режим внешней развертки). Изменяя чувствительность каналов, выберите удобный масштаб спирали. Если спираль стягивается в точку, уменьшите длительность  $\tau$  импульсов генератора. Зарегистрируйте осциллограмму и сравните её с рис. 2.26. При том же значении ёмкости  $C$ , что и в п. 10, наблюдайте за изменением спирали при увеличении сопротивления  $R$  от  $0,1R_{кр}$  до  $0,3R_{кр}$ . Измерьте максимумы  $X_k$  и  $X_{k+n}$  отклонения витков спирали по одной из осей фазовой плоскости, разделённые целым числом периодов  $n$ , для 6–8 значений  $R$  рабочего диапазона и определите логарифмический декремент затухания  $\Theta$ .
16. Выключите питание установки, после чего отсоедините катушку от цепи. С помощью универсального измерительного моста ( $LCR$ -метра) измерьте омическое сопротивление  $R_L$  и индуктивность  $L$  катушки на частотах 50 Гц, 1 кГц и 5 кГц. Почему результат измерения омического сопротивления катушки зависит от частоты? При необходимости измерьте с помощью  $LCR$ -метра другие параметры установки.

### V. Обработка результатов

17. Рассчитайте экспериментальные значения периодов по результатам измерений п. 9 и теоретические по формуле (2.8). Постройте график  $T_{эксп} = f(T_{теор})$ . Рассчитайте экспериментальные значения периодов по результатам измерений п. 9. Оцените погрешности. Постройте график  $T_{эксп}(C)$ . Нанесите на этот график теоретическую кривую, рассчитанную по формуле (2.8) и сравните результаты.
18. Используя данные измерений в п. 13, рассчитайте величину критического сопротивления  $R_{кр}$  по формуле (2.29). Результат *косвенных измерений в невоспроизводимых условиях* представьте в виде:  $R_{кр} = \langle R_{кр} \rangle \pm \Delta R_{кр}$ , где  $\Delta R_{кр}$  — случайная погрешность, вычисленная с учётом коэффициента Стьюдента  $t_{n,\alpha}$  для  $n$  измерений при доверительном уровне  $\alpha = 0,05$ .
19. Рассчитайте значения логарифмического декремента затухания  $\Theta$  (п. 12) и сопротивления контура  $R_{\Sigma} = R + R_L$ .  
Постройте график в координатах  $1/\Theta^2 = f(1/R_{\Sigma}^2)$ . Убедитесь в линейности зависимости и по наклону прямой определите критическое сопротивление  $R_{кр}$  (см. формулы (2.29)).
20. Рассчитайте теоретическое значение  $R_{кр} = 2\pi\sqrt{L/C}$  и сравните его с измеренным.

Построение графика экспериментальных значений  $T$  теоретических — по формуле (2.8) и по формуле (2.8) и сравните результаты.

Применение коэффициентов

21. Рассчитайте добротность контура  $Q$  для максимального и минимального значений  $\Theta$  по картине затухающих колебаний и сравните с расчётом  $Q$  через параметры контура  $R$ ,  $L$  и  $C$  (2.33).
22. Рассчитайте добротность  $Q = \pi/\Theta$  по спирали на фазовой плоскости.
23. Сведите результаты эксперимента и их погрешности в таблицу:

$L_{\text{кат}}$	$R_{\text{кр}}$			$R$	$Q$		
	Теор.	Подбор	Граф.		Теор.	$f(\Theta)$	Спираль
				max min			

24. Сравните результаты и оцените, какой из методов определения  $R_{\text{кр}}$  и  $Q$  точнее.

### Контрольные вопросы

1. Что такое собственная частота, добротность, логарифмический декремент затухания колебательного контура?
2. Получите выражение для добротности колебательного контура через его параметры  $R$ ,  $L$ ,  $C$ .
3. Как отличаются периоды свободных колебаний с затуханием и без затухания?
4. Что называют фазовой плоскостью?
5. Как определить добротность по картине колебаний в фазовой плоскости?

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 123–124.
2. *Кингсеп А.С., Локишин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2007. — § 2.4.
3. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — § 17.1.
4. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. — М.: Физматлит, 1959. — Гл. II, § 3.

### Работа 3.2.5

## Вынужденные колебания в электрическом контуре

**Цель работы:** исследование вынужденных колебаний и процессов их установления в колебательном контуре.

**В работе используются:** генератор звуковых частот, вольтметр, частотомер, конденсатор, катушка индуктивности, магазин сопротивлений, осциллограф, универсальный измеритель импеданса ( $LCR$ -метр).

Перед выполнением работы следует ознакомиться с теоретическим Введением к разделу (пп. 2–4).

В работе исследуются колебания, возникающие в параллельном электрическом контуре под действием внешней ЭДС, гармонически меняющейся во времени.

При подключении к контуру внешнего синусоидального источника в нём возникают колебания, которые можно представить, как суперпозицию двух синусоид (2.86): первая — с частотой собственных колебаний контура и амплитудой, экспоненциально убывающей со временем; вторая — с частотой внешнего источника и постоянной амплитудой. Со временем *собственные колебания затухают*, и в контуре устанавливаются вынужденные колебания. Амплитуда этих колебаний максимальна при резонансе: совпадении или достаточной близости частоты внешнего сигнала и собственной частоты контура. Зависимость амплитуды установившихся колебаний от частоты внешнего сигнала называется *резонансной кривой*.

#### А. Резонансная кривая колебательного контура

Для экспериментального исследования резонансной кривой тока в параллельном колебательном контуре используется схема, представленная на рис. 1. Синусоидальный сигнал с генератора подаётся на параллельный колебательный контур через небольшую разделительную ёмкость  $C_1$ . Напряжение с конденсатора контура  $C$  поступает на вертикальный вход электронного осциллографа (ЭО). Для измерения резонансной кривой необходимо, чтобы модули импедансов возбуждающей  $Z_{\text{ист}}$  и измеряющей  $Z_{\text{изм}}$  цепей много превосходили модуль импеданса самого контура вблизи резонанса  $Z_{\text{рез}} \sim L/RC$ . С этой целью разделительная ёмкость  $C_1$  выбирается настолько малой, что в рабочем диапазоне частот модуль её импеданса  $|Z_{C_1}| = 1/\omega C_1$  был много больше модуля импеданса контура на частоте  $\omega$ . Таким образом, амплитуда тока в цепи генератора определяется импедансом  $|Z_{C_1}|$ . Эта амплитуда относительно мало меняется в пределах резонансной кривой колебательного контура, что, однако, приводит

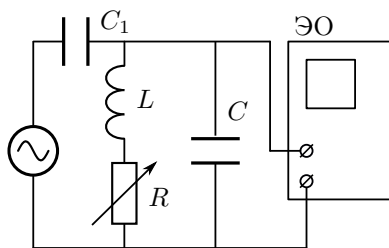


Рис. 1. Схема установки для исследования вынужденных колебаний

к некоторому искажению последней по сравнению со случаем, рассмотренным в п. 3.2, где в качестве генератора предполагается источник тока, обладающий большим и постоянным внутренним сопротивлением во всём исследуемом частотном диапазоне. Входное сопротивление осциллографа (измеряющей цепи) достаточно велико:  $|Z_{\text{изм}}| \approx R_{\text{эо}} \sim 1 \text{ МОм}$ , поэтому его влиянием, как правило, можно пренебречь. Указанные ограничения представляются в виде следующих соотношений:

$$|Z_{C_1}| = \frac{1}{\omega C_1} \gg |Z|_{\text{рез}} = \frac{Q}{\omega_0 C}, \quad R_{\text{эо}} \gg \frac{Q}{\omega_0 C}, \quad (1)$$

где  $Q \approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  — добротность контура, а  $\omega_0$  — его собственная циклическая частота.

По полученной в эксперименте резонансной кривой  $I_C(\omega)/I(\omega)$ , где  $I_C$  — ток через конденсатор в контуре,  $I$  — полный ток в цепи, можно определить его резонансную частоту  $\omega_0$  и добротность  $Q$ . В наиболее грубом приближении, применимом для высокодобротного контура,  $\omega_0$  будет совпадать с максимумом резонансной кривой, а добротность будет определяться её относительной шириной  $Q \approx \omega_0/\delta\omega$  (см. (2.77)).

Для установления более точной аналитической связи воспользуемся методом комплексных амплитуд. С учётом условия (1) исследуемая в работе схема эквивалентна рассмотренному в п. 3.2 случаю резонанса в *параллельном* контуре. Вычислив модуль от первой формулы (2.78), можно получить следующее выражение для резонансной кривой:

$$\frac{I_C(x)}{I(x)} = \sqrt{\frac{1 + Q_0^2 x^2}{1 + Q_0^2 (x - \frac{1}{x})^2}}, \quad (2)$$

где  $x = \omega/\omega_0$ ,  $Q_0 = \frac{\rho}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ .

Из соотношения (2) следует, что на *собственной* частоте  $\omega_0$  ток в *высокодобротном* контуре почти в  $Q \gg 1$  раз превосходит ток во внешней цепи. Именно по этой причине резонанс в параллельном контуре называется *резонансом токов*. Отметим, что напряжение на контуре в принятом здесь приближении имеет ту же амплитудно-частотную характеристику, что и контурный ток:

$$\frac{I_C(\omega)}{I(\omega)} = \frac{CU_C(\omega)}{C_1 U(\omega)},$$

где  $U$  — суммарное напряжение на ёмкости  $C_1$  и колебательном контуре. При этом, как видно, отношение напряжений  $U_C(\omega)/U(\omega)$  в  $C/C_1 \gg 1$  раз меньше, чем отношение токов  $I_C(\omega)/I(\omega)$ .



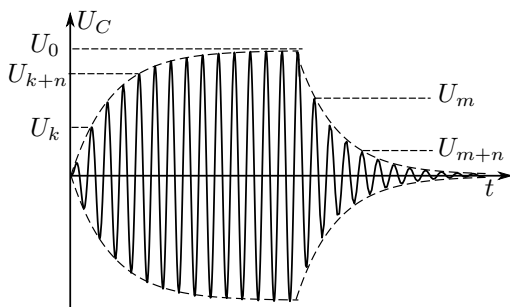


Рис. 2. Нарастание и затухание вынужденных колебаний

Отметим также, что резонанс, то есть максимальный отклик на внешнее воздействие, достигается в данной схеме на частоте, несколько отличной от собственной частоты  $\omega_0$ , в чём можно убедиться при более детальном анализе формул (2) (см. подробнее п. 3.2 Введения). Указанная особенность при не очень большой добротности контура легко регистрируется в эксперименте.

### Б. Процессы установления и затухания колебаний в контуре

Добротность контура может быть определена и другими способами, например, по скорости нарастания амплитуды вынужденных колебаний при резонансе или по скорости затухания свободных колебаний.

Нарастание и затухание колебаний (рис. 2) можно наблюдать на экране осциллографа, если на контур подаются *цуги* — отрезки синусоиды, разделённые интервалами, в течение которых сигнал отсутствует. Чем выше добротность  $Q$ , тем медленнее нарастают и медленнее затухают колебания в контуре. Получить значение  $Q$  можно, измерив логарифмический декремент затухания по скорости нарастания или затухания колебаний. В условиях резонанса огибающая затухающих колебаний — это «перевёрнутая» огибающая нарастающего участка (см. формулу (2.87)). Она может быть использована для расчёта логарифмического декремента затухания по формуле (2.88).

### Экспериментальная установка

Схема установки для исследования вынужденных колебаний приведена на рис. 3. Колебательный контур состоит из конденсатора с ёмкостью  $C$ , катушки с индуктивностью  $L$  и магазина сопротивлений  $R$ . Сигнал, состоящий из отрезков синусоиды (цуги), может генерироваться либо цифровым генератором электрических сигналов произвольной формы, либо комбинацией генератора синусоидального сигнала звукового диапазона (ЗГ) и электронного реле, прерывающего сигнал с заданной

периодичностью. Результирующий сигнал поступает через небольшую ёмкость  $C_1$  на клеммы, смонтированные на отдельной панели. Жирной линией отмечен кабель, содержащий 4 изолированных проводника, идущие от генераторов к двум конденсаторам  $C_1$ , разъёмам «синхр.» (синхронизация) и « $\perp$ » (земля). При подключении контура к клеммам « $\perp$ » и «непр.» на него подаётся непрерывный сигнал — синусоида; если контур подключён к клеммам « $\perp$ » и «цуги» — на контур поступают отрезки синусоиды.

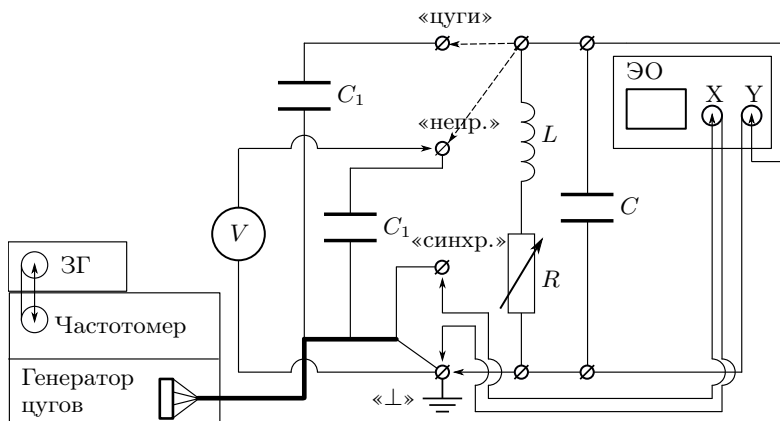


Рис. 3. Схема экспериментальной установки для исследования вынужденных колебаний

Для визуального наблюдения за процессом колебаний напряжение с ёмкости контура  $C$  подаётся на вход электронного осциллографа. Чтобы картина на экране была устойчивой, частота развёртки осциллографа принудительно синхронизируется с частотой повторения цугов. Для этого на генератор развёртки ЭО подаются следующие с частотой повторения цугов управляющие импульсы, формируемые в блоке электронного реле, клемма «синхр.» которого смонтирована на отдельной панели. Для измерений напряжения на ёмкости  $C$  используется цифровой вольтметр  $V$ .

Используя представленную схему в режиме непрерывного синусоидального сигнала, можно по показаниям приборов и известных параметров элементов цепи измерить амплитудную характеристику (резонансную кривую)  $I_C(\omega)/I(\omega)$  в необходимом диапазоне частот. Сравнивая результат измерения с теоретической кривой (2) можно определить характеристики колебательного контура  $\omega_0$  и  $Q$ .

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать резонансные кривые при подаче на колебательный контур непрерывного гармонического сигнала и определить по ним резонансную частоту и добротность контура при двух значениях его активного сопротивления; затем определить добротность, измерив логарифмический декремент затухания при нарастании и при затухании колебаний в режиме генерации цугов.

### I. Подготовка приборов к работе

1. Соберите схему согласно рис. 3 и подключите контур к клеммам « $\perp$ » и «непр.». Включите приборы в сеть. Руководствуясь техническим описанием установки, настройте генератор, осциллограф, проверьте работоспособность источника питания, а также установите необходимые значения на магазинах сопротивлений и индуктивностей.

### II. Исследование резонансных кривых

2. Рассчитайте собственную частоту контура  $\nu_0 = 1/2\pi\sqrt{LC}$ .
3. Изменяя частоту генератора вблизи собственной и наблюдая за синусоидой на экране осциллографа, убедитесь, что в резонансе, когда амплитуда колебаний максимальна, частота колебаний близка к собственной частоте контура. Подберите частоту развёртки осциллографа и амплитуду синхронизации, при которых картина неподвижна.
4. Меняя частоту генератора в обе стороны от резонансной, получите зависимость показаний вольтметра  $U$  от частоты сигнала  $\nu$ . Расчёт добротности ведётся на уровне  $\sim 0,71$  от резонансной амплитуды, поэтому стоит аккуратнее провести измерения в районе этого уровня, а также продолжать измерения по крайней мере до тех пор, пока амплитуда сигнала упадёт до величины 0,3–0,4 от резонансной.
5. Установите на магазине сопротивлений другое значение, заданное преподавателем, и повторите измерения предыдущего пункта.

### III. Процессы установления и затухания колебаний

6. Подключите контур к клеммам «цуги» и « $\perp$ ». Установите нулевое сопротивление магазина.
7. Установите на генераторе собственную частоту контура. Подберите частоту развёртки осциллографа, при которой на экране уместается один цуг колебаний. Убедитесь, что огибающая затухающих колебаний — это перевёрнутая огибающая нарастающего участка. Если они заметно отличаются (реле может внести искажения), то следует уменьшить амплитуду сигнала, поступающего от генератора.

8. Для расчёта добротности по скорости нарастания амплитуды измерьте амплитуды двух колебаний  $U_k$  и  $U_{k+n}$ , разделённых целым числом периодов  $n$ , и амплитуду установившихся колебаний  $U_\infty$  (см. рис. 2).

Перед началом измерений заземлите канал  $Y$ , чтобы уточнить положение горизонтальной оси — начала отсчёта амплитуды. Следует увеличить амплитуду, сместив горизонтальную ось симметрии цуга в нижнюю часть экрана. Расчёт будет тем точнее, чем больше отличаются друг от друга все три амплитуды.

Проведите измерения для 4–5 пар амплитуд.

9. Для определения добротности по скорости затухания измерьте две амплитуды, разделённые целым числом периодов (для 4–5 пар амплитуд).
10. Повторите измерения пп 8, 9 для другого значения сопротивления, заданного преподавателем.
11. Сместите частоту генератора от резонансного значения и получите на экране картину биений. Зарисуйте и объясните эту картину.
12. Отключите приборы от сети и разберите схему.
13. Измерьте активное сопротивление  $R_L$  и индуктивность  $L$  магазина индуктивностей с помощью измерителя импедансов ( $LCR$ -метра) на частотах 50 Гц, 500 Гц и 1500 Гц. По указанию преподавателя используйте  $LCR$ -метр для измерения других параметров установки.

#### IV. Обработка результатов

14. Постройте на одном графике резонансные кривые для использованных значений сопротивления  $R$  в координатах  $U/U_0 = f(\nu/\nu_0)$ , где  $U_0$  — напряжение при резонансной частоте  $\nu_0$ . Сравните резонансные кривые и определите сопротивление катушки индуктивности  $R_L$ .
15. Определите добротность по формуле  $Q \approx \nu_0/(2\delta\nu)$ , где  $2\delta\nu$  — ширина резонансной кривой на уровне 0,707. Сравните теоретическое и экспериментальные значения резонансной частоты.
16. Рассчитайте добротность контура по скорости нарастания и затухания колебаний.
17. Рассчитайте теоретическое значение добротности через параметры контура  $L$ ,  $C$  и  $R$ .
18. Сведите результаты определения  $Q$  в таблицу, где  $R_\Sigma = R_L + R$ :

$R$ , Ом	$R_\Sigma$	$Q$			
		Ширина рез. кривой	Нарастание	Затухание	$f(LCR)$
0					
100					

19. Оцените погрешности, сравните результаты расчётов. Объясните различие результатов, полученных разными методами.

### Контрольные вопросы

1. Опишите известные вам способы измерения добротности колебательного контура.
2. Дайте энергетическое определение добротности колебательной системы.
3. Что называется импедансом электрической цепи? Как складываются импедансы при последовательном и параллельном соединении элементов электрической цепи?
4. С каким «запасом» выполняются условия (1) в данной работе?
5. Выведите формулу (2).

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 122–124.
2. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003. — §§ 207–210.

### Работа 3.2.6

## Изучение гальванометра

**Цель работы:** изучение работы высокочувствительного зеркального гальванометра магнитоэлектрической системы в режимах измерения постоянного тока и электрического заряда.

**В работе используются:** зеркальный гальванометр с осветителем и шкалой, источник постоянного напряжения, делитель напряжения, магазин сопротивлений, эталонный конденсатор, вольтметр, переключатель, ключи, линейка.

*Баллистическим гальванометром* называют электроизмерительный прибор магнитоэлектрической системы, отличающийся высокой чувствительностью к току и сравнительно большим периодом колебаний подвижной системы (рамки).

Главной частью баллистического гальванометра является подвешенная на вертикальной нити рамка, помещённая в поле постоянного магнита. Вырез цилиндрической формы в полюсах магнита и ферромагнитный цилиндр на оси системы делают поле в зазоре радиальным (рис. 1). Скреплённое с рамкой зеркальце служит для измерения угла поворота рамки. К рамке прикреплён полый цилиндр, который сильно увеличивает момент инерции и, следовательно, период колебаний подвижной системы, не очень её утяжеляя. Магнит и подвижная система заключены в защитный кожух. В баллистических гальванометрах применяют сильные постоянные магниты и рамки с большим количеством витков, подвешенные на тонких нитях с малой упругостью.

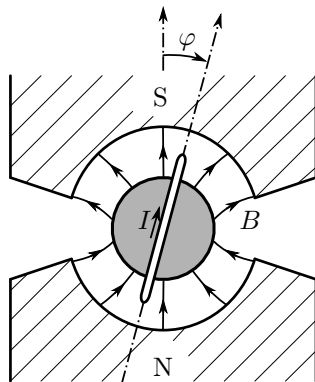


Рис. 1. Рамка с током в магнитном поле

Баллистический гальванометр позволяет измерять как постоянный ток (*стационарный режим*), так и заряд, протекший через рамку за некоторое время (*баллистический режим*). В баллистическом режиме гальванометр может работать, если время протекания заряда много меньше периода собственных колебаний подвижной рамки. Поэтому период колебаний рамки делают большим (5–15 с). Это время учитывает реакцию экспериментатора, которому надо успеть сделать отсчёт максимального отклонения рамки.

### Уравнение движения рамки в магнитном поле

На помещённую в магнитное поле рамку гальванометра, по которой течёт ток, действуют момент сил закрученной нити, момент сил трения (сопротивление воздуха и т. п.) и момент магнитных сил (*сил Ампера*). Последний можно условно разделить на две составляющие: момент, действующий на составляющую тока, обусловленную ЭДС внешней цепи, и тормозящий момент, возникающий благодаря электромагнитной индукции (электромагнитное торможение). Рассмотрим каждый из этих моментов в отдельности.

Роров: Ниже уточнил описание для момента силы Ампера. Все-таки момент сил Ампера один и действует он на результирующий ток в рамке. А вот причины возникновения тока в цепи рамки разные — часть от ЭДС индукции, часть от сторонней ЭДС. Также добавил доп. рисунок.

Механический момент  $M_1$  упругих сил нити пропорционален углу

поворота рамки:

$$M_1 = -D\varphi, \quad (1)$$

где  $D$  — модуль кручения нити, а  $\varphi$  — угол поворота рамки от положения равновесия.

Момент сил вязкого трения пропорционален угловой скорости рамки:

$$M_2 = -\beta_{\text{тр}}\dot{\varphi} \quad (2)$$

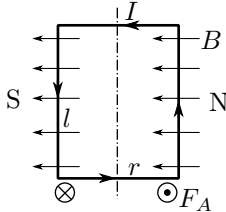


Рис. 2. Силы Ампера, действующие на рамку в магнитном поле где  $S = 2rl$  — площадь одного витка рамки.

Пусть прямоугольная рамка с числом витков  $N$ , обтекаемая по контуру током  $I_\Sigma$ , помещена в магнитное поле с постоянной индукцией  $B$ . Тогда на каждую боковую сторону рамки (см. рис. 2) действуют силы, равные  $F_A = lNB I_\Sigma$ , где  $l$  — длина стороны. Обозначив через  $r$  расстояние от боковой стороны до оси вращения, найдём момент пары сил

$$M_3 = 2rlNB I_\Sigma = BSN I_\Sigma, \quad (3)$$

В рамке, движущейся в магнитном поле с угловой скоростью  $\dot{\varphi}$ , наводится ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -BSN\dot{\varphi}, \quad (4)$$

где  $d\Phi/dt$  — скорость изменения магнитного потока, пронизывающего рамку (при повороте рамки на угол  $d\varphi$  её боковые стороны «заметают» магнитный поток  $d\Phi = 2BN \cdot l \cdot r d\varphi = BSN\dot{\varphi} dt$ ). Пренебрегая самоиндукцией рамки, можно считать, что эта ЭДС вызывает индукционный ток

$$I_{\text{инд}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R_\Sigma},$$

где  $R_\Sigma$  — полное сопротивление цепи, состоящее из сопротивления рамки  $R_0$  и сопротивления внешнего участка цепи  $R$ :

$$R_\Sigma = R_0 + R. \quad (5)$$

Связанный с ЭДС индукции момент:

$$M_3^{\text{инд}} = BSN I_{\text{инд}} = -\frac{(BSN)^2}{R_\Sigma} \dot{\varphi}. \quad (6)$$

Видно, что этот момент всегда тормозит вращение рамки (*электромагнитное торможение*) и по структуре аналогичен (2). Причём обычно электромагнитный тормозящий момент значительно превосходит момент сил трения рамки:  $(BSN)^2/R_\Sigma \gg \beta_{\text{тр}}$ , поэтому далее мы для простоты расчёта пренебрежём величиной  $M_2$ .

Полный ток  $I_\Sigma$  через рамку определяется уравнением цепи рамки. Пусть эта цепь с суммарным сопротивлением  $R_\Sigma$  подключена к некоторому внешнему источнику ЭДС  $\mathcal{E}$ . Тогда, в пренебрежении самоиндукцией рамки и контура, имеем

$$I_\Sigma = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}}}{R_\Sigma} = I + I_{\text{инд}}, \quad (7)$$

где  $I = \mathcal{E}/R_\Sigma$  — составляющая тока, вызванная внешней ЭДС, к которой подключён гальванометр.

Вращение рамки описывается уравнением моментов:

$$J\ddot{\varphi} = M_\Sigma, \quad (8)$$

где  $J$  — момент инерции подвижной системы, а  $M_\Sigma$  — сумма механических моментов, действующих на рамку. Пользуясь формулами формулами (1)–(7), представим (8) в виде:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = KI. \quad (9)$$

Здесь параметры  $\gamma$ ,  $\omega_0$  колебательной системы и коэффициент  $K$  связаны с параметрами гальванометра формулами:

$$K = \frac{BNS}{J}, \quad 2\gamma = \beta_{\text{тр}} + \frac{(BSN)^2}{JR_\Sigma} \approx \frac{(BSN)^2}{JR_\Sigma}, \quad \omega_0^2 = \frac{D}{J}. \quad (10)$$

Отметим, что заменой переменной  $\tilde{\varphi} = \varphi - KI/\omega_0^2$  уравнение (9) приводится к однородному уравнению вида (2.9), описывающему свободные затухающие колебания, рассмотренные п. 1 теоретического Введения к данному разделу.

### Режим измерения постоянного тока

Если через рамку пропускать постоянный ток (достаточно долго, чтобы затухли собственные колебания подвижной системы), то в уравнении (9) можно положить  $\dot{\varphi} = 0$ ,  $\ddot{\varphi} = 0$ , так что угол поворота рамки определится формулами

$$\varphi = \frac{K}{\omega_0^2}I = \frac{BSN}{D}I = S_I I = \frac{I}{C_I}, \quad (11)$$

где величина  $S_I = \varphi/I = BSN/D$  называется *чувствительностью* гальванометра к току, а обратная её величина  $C_I = 1/S_I = D/(BSN)$  — *динамической постоянной* гальванометра.



### Свободные колебания рамки

Исследуем свободное движение рамки, т.е. движение в отсутствие внешних источников, когда  $I = 0$ . В этом случае уравнение (9) для угла поворота рамки  $\varphi$  примет вид

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (12)$$

аналогичный уравнению (2.9), так что мы можем воспользоваться решениями, полученными в п. 1 Введения, учитывая начальные условия рассматриваемой здесь задачи. Примем, что эти условия таковы:

$$\varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \quad (13)$$

т.е. рамке сообщили начальную угловую скорость без заметного начального смещения. Рассмотрим возможные случаи движения рамки.

1.  $\gamma < \omega_0$  (колебательный режим). Решение уравнения (12), удовлетворяющее начальным условиям (13), имеет в этом случае вид

$$\varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t, \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (14)$$

Движение рамки носит колебательный характер и затухает со временем. Период колебаний при этом равен

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2\pi \left[ \frac{D}{J} - \frac{(BSN)^4}{(2JR_\Sigma)^2} \right]^{-1/2}, \quad (15)$$

а коэффициент затухания  $\gamma$  определяется формулами (10) и (5). При малом затухании, когда  $\gamma \ll \omega_0$ ,  $\omega_1 \approx \omega_0$ , движение рамки близко к синусоидальному:

$$\varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (16)$$

2.  $\gamma = \omega_0$  (критический режим). Этот режим реализуется при сопротивлении внешнего участка цепи  $R$ , равном *критическому сопротивлению*:

$$R_{\text{кр}} = R_{\Sigma\text{кр}} - R_0 = \frac{(BSN)^2}{2\sqrt{DJ}} - R_0. \quad (17)$$

Решение уравнения (12) при начальных условиях (13) в этом случае имеет вид

$$\varphi(t) = \dot{\varphi}_0 t e^{-\gamma t}. \quad (18)$$

Движение не имеет колебательного характера: отклонённая после начального толчка подвижная система плавно (экспоненциально) возвращается к нулю.

3.  $\gamma > \omega_0$  (затухание велико — случай переуспокоенного гальванометра). Решение уравнения (12) при этом имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{\dot{\varphi}_0}{\alpha} e^{-\gamma t} \operatorname{sh} \alpha t, \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (19)$$

Движение остаётся аperiодическим, однако подвижная система приближается к равновесию медленнее, чем в критическом режиме.

### Режим измерения заряда

Как уже было отмечено, период свободных колебаний баллистического гальванометра благодаря искусственному увеличению момента инерции рамки оказывается очень большим (порядка десяти секунд). Если пропустить через рамку короткий импульс тока, то можно считать, что весь ток успевает пройти при неотклонённом положении рамки. Рамка, однако, при этом получает толчок, в результате которого возникает движение, описываемое уравнением свободных колебаний (12) при начальных условиях (13).

Для вычисления угловой скорости  $\dot{\varphi}_0$ , полученной в результате толчка, проинтегрируем уравнение (9) по времени от 0 до  $\tau$  — момента окончания токового импульса. В результате приходим к соотношению

$$\dot{\varphi}_0^\tau + 2\gamma\varphi|_0^\tau + \omega_0^2 \int_0^\tau \varphi dt = Kq, \quad (20)$$

где  $q = \int_0^\tau I dt$  — полный электрический заряд, прошедший через рамку гальванометра за время импульса. При малом начальном отклонении рамки и малой длительности импульса можно пренебречь вторым и третьим слагаемыми в (20), связанными соответственно с током индукции и упругостью нити. Уравнение (20) в этом случае принимает вид:

$$\dot{\varphi}(\tau) = Kq. \quad (21)$$

Таким образом, при пропускании короткого импульса тока через баллистический гальванометр начальная угловая скорость движения рамки пропорциональна полному электрическому заряду, прошедшему через рамку за всё время импульса. Подставляя выражения (14), (18) или (19), легко увидеть, что наибольший угол  $\varphi_{\max}$ , на который отклоняется рамка, также пропорционален  $q$ .

Величина  $C_q = q/\varphi_{\max}$  называется *баллистической постоянной* гальванометра. Баллистическая постоянная наряду с динамической является важнейшей характеристикой гальванометра, но в отличие от динамической она существенно зависит от режима работы гальванометра (от

сопротивления цепи). Величина  $S_q = 1/C_q$  называется *чувствительностью гальванометра к заряду*.

Выбирая оптимальный режим работы, приходится одновременно исходить из двух противоречивых требований: желания получить максимальную чувствительность гальванометра к заряду и стремления по возможности сократить время, затрачиваемое на измерения. Расчёт показывает, что максимальный отброс достигается при полном отсутствии затухания (тормозящий индукционный ток отсутствует при обрыве в цепи):

$$\varphi_{\max}^{\text{св}} = \frac{\dot{\varphi}(\tau)}{\omega_0} = \frac{Kq}{\omega_0}. \quad (22)$$

В этом случае, однако, возникшие в результате отброса колебания рамки не будут успокаиваться, и прибор не скоро сможет быть использован для повторных измерений. Поэтому обычно заботятся о том, чтобы затухание гальванометра не было слишком малым. Кроме того, отметим, что затухание приводит к тому, что зайчик начинает вести себя более спокойно и слабее реагирует на посторонние электрические и механические импульсы.

Как правило, удобнее всего работать в режиме, близком к критическому. При этом обеспечивается и быстрое затухание колебаний, и чувствительность прибора достаточно велика. Как следует из (18), в случае критического затухания

$$\varphi_{\max}^{\text{кр}} = \frac{Kq}{\omega_0 e}. \quad (23)$$

Таким образом, в критическом режиме максимальное отклонение зайчика в  $e$  раз меньше, чем в режиме свободных колебаний. Отсюда, в частности, следуют соотношения между баллистическими постоянными и чувствительностями гальванометра, работающего в режиме свободных колебаний и в критическом режиме:

$$\frac{C_q^{\text{кр}}}{C_q^{\text{св}}} = \frac{S_q^{\text{св}}}{S_q^{\text{кр}}} = e. \quad (24)$$

## А. Определение динамической постоянной гальванометра

### Экспериментальная установка

Схема для исследования гальванометра в стационарном режиме представлена на рис. 3. Постоянное напряжение  $U$  снимается с блока питания и измеряется вольтметром  $V$ . Ключ  $K_3$  позволяет менять направление тока через гальванометр  $\Gamma$ , делитель напряжения — менять величину тока в широких пределах. Ключ  $K_2$  служит для включения гальванометра, кнопка  $K_1$  — для его успокоения. Магазин сопротивлений  $R$  позволяет менять режим работы гальванометра от колебательного до апериодического.

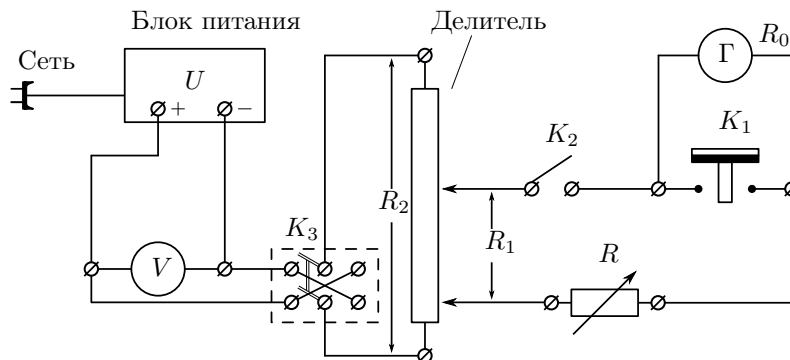


Рис. 3. Схема установки для работы гальванометра в стационарном режиме

При  $R_1 \ll R, R_0, R_2$  сила тока, протекающего через гальванометр, может быть вычислена как

$$I = \frac{R_1}{R_2} \frac{U_0}{R + R_0},$$

где  $U_0$  — показания вольтметра,  $R_1/R_2$  — положение делителя,  $R$  — сопротивление магазина,  $R_0$  — внутреннее сопротивление гальванометра.

Угол отклонения рамки от положения равновесия измеряется с помощью осветителя, зеркальца, укрепленного на рамке, и шкалы, на которую отбрасывается луч света от зеркальца. Координата  $x$  светового пятна на шкале связана с углом  $\varphi$  отклонения рамки формулой

$$x = a \operatorname{arctg} 2\varphi,$$

где  $a$  — расстояние от шкалы до зеркальца. При малых углах можно считать, что  $\varphi = x/2a$ . Динамическую постоянную

$$C_I = \frac{I}{\varphi} = \frac{2aI}{x}, \quad (25)$$

как правило, выражают в единицах  $\left[ \frac{\text{А}}{\text{мм/м}} \right]$  (ток  $I$  измеряется в амперах,  $x$  — в миллиметрах,  $a$  — в метрах).

## Б. Определение критического сопротивления гальванометра

Критическим сопротивлением баллистического гальванометра называется сопротивление его электрической цепи  $R_{\text{кр}}$ , при котором после начального толчка подвижная система почти экспоненциально возвращается к нулю, подчиняясь уравнению (17). На практике критический режим, требующий строгого выполнения условия  $\gamma = \omega_0$ , не может быть

точно реализован и имеет значение как пограничный между режимом затухающих колебаний ( $\gamma < \omega_0$ ) и режимом аperiodического затухания ( $\gamma > \omega_0$ ).

Измерение критического сопротивления гальванометра можно выполнить с помощью той же схемы (рис. 3).

При больших  $R$  свободное движение рамки имеет колебательный характер. С уменьшением  $R$  затухание увеличивается (см. (5), (10)), и колебательный режим переходит в аperiodический.

В качестве характеристики процесса затухания колебаний рамки гальванометра воспользуемся представленным формулой (2.24) логарифмическим декрементом затухания

$$\Theta = \gamma T_1 = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}}, \quad (26)$$

где  $x_n$  и  $x_{n+1}$  — два последовательные отклонения колеблющейся величины в одну сторону. Измеряя зависимость  $\Theta(R)$  логарифмического декремента затухания от сопротивления внешней цепи  $R$ , можно найти критическое сопротивление  $R_{кр}$  как параметр зависимости, которая следует из выражений (15), (17) и (26):

$$\frac{4\pi^2}{\Theta^2(R)} = \frac{\omega_0^2}{\gamma^2} - 1 = \left( \frac{R + R_0}{R_{кр} + R_0} \right)^2 - 1. \quad (27)$$

## **В. Определение баллистической постоянной и критического сопротивления гальванометра, работающего в баллистическом режиме**

Для изучения работы гальванометра в режиме измерения заряда (в баллистическом режиме), используется схема, представленная на рис. 4.

Система ключей устроена так, что нормально ключ  $K_2$  замкнут, а ключи  $K_3$  и  $K_4$  разомкнуты. При нажатии на кнопку  $K_0$  сначала размыкается ключ  $K_2$ , затем замыкается  $K_3$  и через некоторое время —  $K_4$ . При нормальном положении кнопки  $K_0$  конденсатор  $C$  заряжается до напряжения  $U_C$  и получает заряд  $q$ :

$$U_C = \frac{R_1}{R_2} U_0, \quad q = C U_C = \frac{R_1}{R_2} U_0 C.$$

При нажатии на ключ  $K_0$  конденсатор отключается от источника постоянного напряжения (размыкается ключ  $K_2$ ) и подключается к гальванометру (замыкается ключ  $K_3$ ).

Ёмкость конденсатора выбрана так, что к моменту замыкания ключа  $K_4$  весь заряд успевает пройти через гальванометр, и рамка получает начальную скорость  $\dot{\varphi}(\tau)$  (см. (21)). При этом можно считать, что отклонение рамки, происходящее за время, протекающее между замыканием

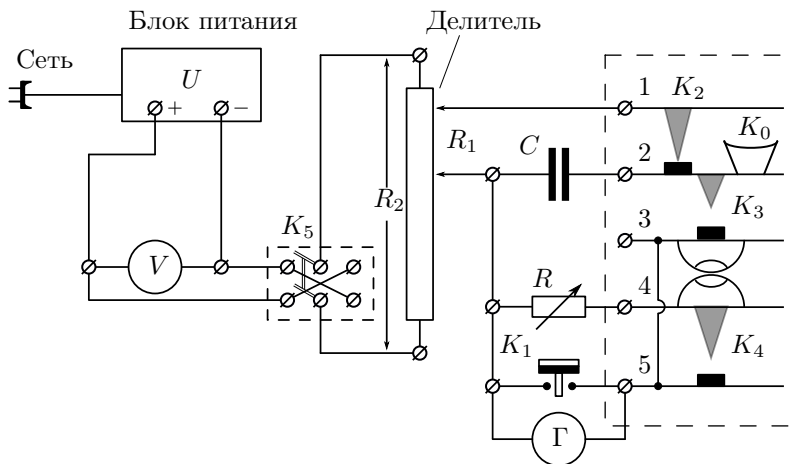


Рис. 4. Схема установки для определения баллистической постоянной

ключей  $K_3$  и  $K_4$ , равно нулю. При замыкании ключа  $K_4$  гальванометр шунтируется внешним сопротивлением  $R$ , и в зависимости от величины этого сопротивления движение рамки описывается одним из уравнений: (14), (16), (18) или (19).

Первый отброс зайчика  $\varphi_{\max}$  после нажатия на кнопку  $K_0$  зависит от сопротивления внешней цепи, подключённой к гальванометру. Для определения  $R_{\text{кр}}$  используется то обстоятельство, что в критическом режиме максимальное отклонение зайчика в  $\epsilon$  раз меньше, чем у гальванометра без затухания (см. (20) и (21)).

Следует помнить, что наблюдать колебания рамки при полном отсутствии затухания, конечно, невозможно, так как даже при разомкнутой внешней цепи ( $R = \infty$ ) остаётся трение в подвеске и трение рамки о воздух. Величину максимального отклонения рамки гальванометра без затухания  $\varphi_{\max}^{\text{св}}$  можно, однако, рассчитать, если при разомкнутой цепи измерить реальное максимальное отклонение рамки  $\varphi_0$  и логарифмический декремент затухания  $\Theta_0$  (при  $R = \infty$  величина  $\Theta_0$  определяется только внутренним трением в рамке). Из уравнений (14) и (26) при  $\gamma \ll \omega_0$  вытекают равенства

$$\varphi_0 = \varphi(T_1/4) = \varphi_{\max}^{\text{св}} e^{-\Theta_0/4},$$

так что максимальное отклонение рамки гальванометра без затухания

$$\varphi_{\max}^{\text{св}} = \varphi_0 e^{\Theta_0/4} \approx \varphi_0 \left( 1 + \frac{\Theta_0}{4} \right). \quad (28)$$

Баллистическая постоянная гальванометра  $C_q^{\text{кр}} \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{мм/м}} \right]$  определяется

при критическом сопротивлении ( $R = R_{\text{кр}}$ ):

$$C_q^{\text{кр}} = \frac{q}{\varphi_{\text{кр}}^{\text{кр}}} = 2a \frac{R_1}{R_2} \frac{CU_0}{x_{\text{кр}}^{\text{кр}}}, \quad (29)$$

где  $x_{\text{кр}}^{\text{кр}}$  — величина первого отброса в критическом режиме, выраженная в делениях шкалы (мм),  $a$  — расстояние от зеркала до шкалы, выраженное в метрах, произведение  $CU_0$  — заряд, выраженный в кулонах.

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается определить динамическую постоянную  $C_I$ , критическое сопротивление  $R_{\text{кр}}$  и оценить линейность шкалы гальванометра, работающего в стационарном (токовом) режиме; определить баллистическую постоянную  $C_q$  и критическое сопротивление  $R_{\text{кр}}$  гальванометра, работающего в баллистическом режиме (режиме измерения заряда).

### I. Подготовка приборов к работе

1. Настройте осветитель гальванометра: для этого перемещая штатив со шкалой вдоль луча, добейтесь появления на шкале чёткой вертикальной риски. Перемещая штатив (или шкалу) перпендикулярно лучу, совместите риску с нулевым делением шкалы. Настроив, временно отключите осветитель от сети.
2. Установите делитель на небольшое выходное напряжение ( $\frac{R_1}{R_2} \approx \frac{1}{5000}$  или  $\frac{R_1}{R_2} \approx \frac{1}{2000}$ ), а сопротивление магазина установите близким к максимальному ( $R \approx 50$  кОм).
3. Соберите электрическую цепь согласно рис. 3 (кнопка  $K_1$  вмонтирована в блок питания).
4. При разомкнутых ключах  $K_2$  и  $K_3$  включите в сеть блок питания и, убедившись, что шкала вольтметра  $V$  выбрана правильно, замкните ключ  $K_3$ .
5. Включите осветитель гальванометра.
6. Замкните ключ  $K_2$  и, не меняя положения делителя, подберите сопротивление магазина, при котором зайчик отклоняется почти на всю шкалу.

### II. Определение динамической постоянной

7. Измерьте зависимость отклонения зайчика  $x$  от сопротивления магазина  $R$ , увеличивая сопротивление магазина, но не меняя делителя. Запишите показания вольтметра  $U_0$ , положение делителя  $R_1/R_2$ , величину  $R_2$  и внутреннее сопротивление гальванометра  $R_0$ , указанное на установке.

### III. Определение критического сопротивления

8. В схеме, собранной по рис. 3, вновь установите такое значение  $R$ , при котором зайчик отклоняется почти на всю шкалу.
9. Разомкните ключ  $K_2$  и наблюдайте свободные колебания рамки. Для быстрого торможения рамки замыкайте ключ  $K_3$  в момент прохождения зайчика через ноль. Измерьте два последовательных отклонения зайчика в одну сторону для расчёта логарифмического декремента затухания  $\Theta_0$  разомкнутого гальванометра (см. (26)).
10. Измерьте период  $T_0$  свободных колебаний рамки (приблизённо).
11. Снова замкните ключ  $K_2$  и убедитесь, что зайчик находится на краю шкалы. Теперь разомкните ключ  $K_3$ . Колебания рамки затухнут быстрее, так как тормозящий движение ток увеличился с уменьшением сопротивления цепи.
12. Подберите *наибольшее* сопротивление магазина  $R$ , при котором при размыкании ключа  $K_3$  зайчик не переходит за нулевое значение (при этом для большей точности каждый раз следует подбирать положение делителя так, чтобы в стационарном положении зайчик отклонялся почти на всю шкалу). Это наибольшее сопротивление близко к критическому сопротивлению  $R_{кр}$ .
13. Установите сопротивление магазина  $R \approx 3R_{кр}$  и подберите делитель так, чтобы в стационарном режиме зайчик отклонялся почти на всю шкалу. Для расчёта декремента затухания  $\Theta$  измерьте два последовательных отклонения зайчика в одну сторону после размыкания ключа  $K_3$ .
14. Повторите измерения п. 13 для 8–10 других значений  $R$ , постепенно увеличивая сопротивление магазина до  $10R_{кр}$  (в интервале  $(3-6)R_{кр}$  точки должны лежать почаще).

### IV. Баллистический режим

15. Соберите схему по рис. 4. Установите на магазине сопротивление  $R = 50$  кОм. Включите в сеть блок питания и замкните ключ  $K_5$ .
16. Для измерения первого отброса зайчика в режиме свободных колебаний ( $R = \infty$ ) разомкните цепь  $R$ , отсоединив одну из клемм от магазина.

Подберите делитель так, чтобы при замыкании ключа  $K_0$  первый отброс  $x_{\max}$  соответствовал отклонению зайчика почти на всю шкалу. *Ключ  $K_0$  держите замкнутым, когда считываете результат!*

17. Вновь подключите магазин  $R$ . Получите зависимость первого отброса от величины  $R$  (положения делителя не менять!). В критическом



режиме первый отброс в  $\epsilon$  раз меньше, чем в режиме свободных колебаний. Поэтому уменьшайте  $R$  до тех пор, пока первый отброс уменьшится до  $1/3$ – $1/4$  от максимальной величины.

18. Запишите положение делителя  $R_1/R_2$  и значение ёмкости  $C$ . Измерьте расстояние  $a$  от шкалы до зеркальца гальванометра.
19. Разберите схему.

### V. Обработка результатов

20. По данным п. 7 рассчитайте токи  $I$  и постройте график  $I(x)$ . Оцените линейность шкалы гальванометра. По наклону прямой рассчитайте динамическую постоянную  $C_I [\frac{\text{А}}{\text{мм/м}}]$ , а также чувствительность гальванометра к току  $S_I = 1/C_I [\frac{\text{мм/м}}{\text{А}}]$ .
21. По данным пп. 8, 9 рассчитайте логарифмический декремент затухания  $\Theta_0$  разомкнутого гальванометра.
22. По данным пп. 12–14 составьте таблицу, в первой строке которой внесите 7–10 выбранных значений  $R$ , во второй — соответствующие этим значениям  $R$  измеренные величины  $\Theta(R)$ , в третьей строке — рассчитанные по формуле (27) значения  $R_{\text{кр}}$ . Результат косвенного измерения величины критического сопротивления гальванометра представьте в виде  $R_{\text{кр}} = \bar{R}_{\text{кр}} \pm t_{\alpha n} \Delta R_{\text{кр}}$ , где  $\bar{R}_{\text{кр}}$  — среднее значение  $R_{\text{кр}}$ ,  $\Delta R_{\text{кр}}$  — случайная погрешность, а  $t_{\alpha n}$  — коэффициент Стьюдента для доверительного уровня  $\alpha$  и числа измерений  $n$ .

Роров: Этот пункт нужно убрать. Во-первых, коэффициентов Стьюдента у нас нет в программе. Во-вторых, использование их здесь **не корректно**. У нас *зависимость*  $\Theta(R)$ , а не серия однотипных измерений, поэтому  $R_{\text{кр}}$  нужно искать по МНК. Вместо этого см. ниже

По данным п. 14 постройте график в координатах  $1/\Theta^2 = f[(R + R_0)^2]$ . Убедитесь в его линейности и определите наклон наилучшей прямой. Пользуясь (27), определите критическое сопротивление  $R_{\text{кр}}$ . Оцените погрешность результата.

23. По данным п. 17 постройте график в координатах  $x_{\text{max}} = f[1/(R + R_0)]$ . Пользуясь соотношением (23) и, учитывая поправку (28), определите по графику критическое сопротивление гальванометра  $R_{\text{кр}}$ .
24. Сравните значения  $R_{\text{кр}}$ , определённые подбором (п. 12), по результатам п. 22 для стационарного режима, и по результатам п. 23 для баллистического режима.

25. Рассчитайте баллистическую постоянную в критическом режиме  $C_q^{\text{кр}} \left[ \frac{\text{Кл}}{\text{мм/м}} \right]$ .
26. Сравните период свободных колебаний гальванометра  $T_0$  (п. 10) и время релаксации  $\tau = R_0 C$ .

### Контрольные вопросы

1. Объясните, почему рамка во внешнем магнитном поле испытывает тормозящий момент. Выведите формулу (6).
2. Дайте определение динамической постоянной гальванометра.
3. Какие режимы движения рамки возможны при работе гальванометра в стационарном режиме? В каком из этих режимов удобно проводить измерения постоянного тока?
4. Как изменяется коэффициент затухания подвижной системы гальванометра при увеличении омического сопротивления его цепи?
5. Почему рамка гальванометра быстро успокаивается при замыкании ключа  $K_1$  (см. рис. 3)?
6. Зачем в полюсах магнита гальванометра делают вырез цилиндрической формы (рис. 1)?
7. В чём заключается баллистический режим работы гальванометра? Дайте определение баллистической постоянной гальванометра.
8. При каких условиях первый отброс гальванометра, работающего в баллистическом режиме, максимален?
9. При больших значениях  $R$  ( $R > 10R_{\text{кр}}$ ) возможно заметное отклонение графика  $1/\Theta^2 = f(R_{\Sigma}^2)$  от прямой. Что следовало бы учесть для объяснения этого отклонения?

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — § 125.
2. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003. — § 56.

### Работа 3.2.7

## Дробовой шум. Эффект Шоттки

**Цель работы:** измерение заряда электрона по дробовому шуму.

**В работе используются:** стенд для измерения дробового шума, состоящий из шумового диода, блока питания, широкополосного усилителя, квадратичного детектора и кварцевого генератора синусоидальных колебаний.

Как хорошо известно, прохождение электрического тока через вакуумную лампу связано с движением электронов, испускаемых накалившимся катодом и движущихся к аноду под действием электрического поля. Прохождение электрического тока не является поэтому непрерывным процессом. Ток состоит из наложения кратковременных импульсов, возникающих при прохождении отдельных электронов. Эти импульсы случайным образом распределены во времени, вследствие чего электрический ток флуктуирует. При этом на средний — постоянный — ток накладывается флуктуационный шум. Наличие в токе шумовой составляющей, связанной с дискретностью заряда электронов, носит название *эффекта Шоттки* (1918). Это один из немногих способов измерения абсолютного заряда электрона, наряду с опытом Милликена и электролизом. Флуктуации анодного тока — при заданной его величине — пропорциональны заряду электрона, поэтому, исследуя их, можно измерить заряд электрона.

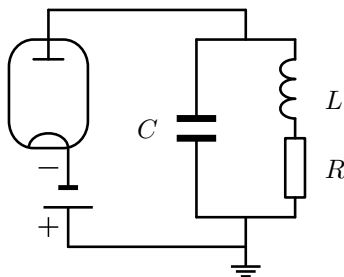


Рис. 1. Схема включения колебательного контура

Рассмотрим, как меняется во времени ток, проходящий во внешней цепи электронной лампы (диода), при движении через неё отдельного электрона. Пока из катода не вылетит электрон, тока в цепи лампы нет. Ток появляется, когда электрон покидает катод, и кончается, когда он приходит на анод. Распределение этого тока во времени носит сложный характер, зависящий от геометрии электродов, от распределения потенциалов в межэлектродном пространстве и от скорости электронов.

В дальнейшем нас не будет интересовать форма токового импульса. Нам достаточно знать, что этот импульс является очень кратковременным ( $\sim 10^{-8}$  с) и что за время этого импульса  $\int I dt = e$ , где  $e$  — заряд электрона. Будем рассматривать режим насыщения диода, когда пространственный заряд в межэлектродном пространстве отсутствует

и анодный ток зависит только от количества электронов, испущенных катодом.

Для обнаружения дробового шума в анодную цепь лампы включена нагрузка — параллельный колебательный контур (рис. 1). Токовый импульс, связанный с прохождением электрона через диод, приводит к зарядке конденсатора  $C$ , который входит в состав контура  $LCR$ . В контуре возникают электрические колебания. Следующие электроны — в зависимости от фазы колебаний контура — усиливают или ослабляют колебательный процесс. Постепенно в контуре возбуждаются колебания, амплитуда и фаза которых случайным образом меняются во времени. Кроме заряда, связанного с колебательным процессом, на конденсаторе есть, конечно, заряд, возникающий из-за наличия среднего тока. Этот заряд нас интересовать не будет. Среднее значение амплитуды колебаний контура может быть найдено из энергетических соображений. Установившееся значение амплитуды определяется тем, что средняя энергия, которую приносят электроны на конденсатор, равна энергии, которая рассеивается в колебательном контуре.

Пусть при электрических колебаниях в контуре мгновенное значение напряжения на конденсаторе равно

$$U = U_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

До пролёта очередного электрона заряд на конденсаторе равен  $q_1 = CU_0 \cos \omega t$ , а после пролёта он принимает значение  $q_2$ :

$$q_2 = q_1 + e = CU_0 \cos \omega t + e. \quad (2)$$

Рассчитывая энергию конденсатора по формуле

$$W = \frac{q^2}{2C}, \quad (3)$$

найдем, что приход электрона увеличивает энергию конденсатора на  $\Delta W$ :

$$\Delta W = \frac{q_2^2 - q_1^2}{2C} = \frac{2eCU_0 \cos \omega t + e^2}{2C}. \quad (4)$$

Пусть в секунду через лампу проходят  $N$  электронов. Полное увеличение средней энергии конденсатора складывается из  $N$  слагаемых, определяемых формулой (4). При этом вклад от первого члена формулы обращается в нуль, так как электроны приходят на конденсатор в произвольные моменты времени, а среднее значение  $\cos \omega t$  равно нулю. Средняя мощность, приносимая электронами на конденсатор, определяется поэтому только вторым слагаемым и равна

$$P = N \frac{e^2}{2C}. \quad (5)$$

Рассчитаем теперь потери в сопротивлении. Проходящий через него ток  $I_R$  складывается из постоянного тока  $I_+$  и колебательного тока контура  $I_~$ . Выделяемая в сопротивлении мощность в среднем равна

$$\langle P_R \rangle = \langle I^2 R \rangle = R \langle (I_+ + I_~)^2 \rangle, \quad (6)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени. Переменная составляющая тока может быть выражена через напряжение на конденсаторе:

$$I_~ = \frac{dq}{dt} = -CU_0\omega \sin \omega t. \quad (7)$$

Подставим (7) в (6), возведем сумму  $I_+$  и  $I_~$  в квадрат и усредним результат по времени. Замечая, что среднее значение  $\langle \sin \omega t \rangle = 0$ , а  $\langle \sin^2 \omega t \rangle = 1/2$ , найдём

$$\langle P_R \rangle = RI_+^2 + R \langle I_~^2 \rangle = RI_+^2 + \frac{1}{2} RC^2 U_0^2 \omega^2. \quad (8)$$

Таким образом, мощность, выделяемая в сопротивлении  $R$ , — это мощность, которую выделяют в нём постоянный ток диода и ток колебаний, возникающий в контуре из-за дробового шума.

Приравняем мощность (5), возбуждаемую электронами в контуре, к мощности  $R \langle I_~^2 \rangle$ , теряемой в сопротивлении из-за наличия колебаний:

$$N \frac{e^2}{2C} = \frac{1}{2} R (CU_0\omega)^2. \quad (9)$$

Заметив, что  $Ne = I_a$ , а амплитудное значение напряжения на конденсаторе  $U_0$  связано с эффективным значением  $U_{\text{эфф}}$  обычным соотношением  $U_{\text{эфф}}^2 = U_0^2/2$ , найдём для заряда электрона  $e$  следующую формулу:

$$e = \frac{2\omega^2 C^3 R U_{\text{эфф}}^2}{I_a}. \quad (10)$$

Таким образом, измеряя ток  $I_a$ , проходящий через диод, и среднеквадратичное напряжение шума на контуре  $U_{\text{эфф}}^2$ , можно определить заряд электрона. Формула (10) может быть записана через добротность контура. Как известно, добротность контура  $Q$  связана с его параметрами формулой

$$Q = \frac{1}{\omega RC}. \quad (11)$$

Окончательная формула для расчёта заряда электрона имеет вид

$$e = \frac{2\omega C^2 U_{\text{эфф}}^2}{I_a Q}. \quad (12)$$

Вернёмся к сделанному при написании формулы (2) предположению о том, что при прохождении электрона через диод заряд конденсатора и, следовательно, его энергия возрастают мгновенно. Как ясно из вывода, это предположение не приводит к ошибкам, если аргумент косинуса в (2) за время прохождения токового импульса меняется незначительно. Уже упоминалось, что время пролёта электрона через диод  $\tau$  по порядку величины равно  $10^{-8}$  с. Контур настроен на частоту  $f \simeq 10^5$  Гц. Следовательно,

$$\omega\tau = 2\pi f\tau \simeq 2\pi \cdot 10^5 \cdot 10^{-8} \approx 10^{-2} \ll 1.$$

### Экспериментальная установка

Блок-схема установки изображена на рис 2. В качестве шумового диода используется диод 2ДЗБ, работающий в режиме насыщения. В его анодную цепь включён параллельный колебательный контур  $LC$ . Активное сопротивление катушки  $L$  играет роль резистора  $R$ . Конденсатор  $C$  непосредственно включён в цепь контура при нижнем положении переключателя « $U_K$ » (его кнопка не нажата). Измерение напряжения на контуре производится квадратичным детектором. Перед измерениями сигнал, поступающий с контура, усиливается усилителем.

Усилитель и квадратичный детектор используются не только для измерения шумовых колебаний контура, но и для других целей. При измерении шумов важно, чтобы на усилитель не попали колебания с генератора, изображённого в правой части схемы. Для этого лучше всего заземлить выход аттенюатора. Это делается нажатием кнопки « $U_{ш}$ », что соответствует на схеме рис. 2 переводу его переключателя в верхнее положение.

Сила анодного тока шумового диода в режиме насыщения определяется эмиссией (а значит, температурой) его катода. Анодный ток  $I_a$  измеряется миллиамперметром и регулируется потенциометром  $R_a$ , ручка которого на панели прибора обозначена « $R_a$ ». Чувствительность измерительной схемы регулируется делителем напряжения  $R_d$ , расположенным между усилителем и квадратичным детектором. Его ручка на панели обозначена « $R_d$ ». На выходе квадратичного детектора установлен микроамперметр. Отклонение стрелки микроамперметра пропорционально квадрату напряжения на входе детектора, поэтому он пригоден для измерения переменных напряжений. Таким образом, показания микроамперметра пропорциональны квадрату шумового напряжения, причём коэффициент пропорциональности зависит от положения реостата  $R_d$  и, вообще говоря, неизвестен. Поэтому при измерениях экспериментатор замечает показание микроамперметра, а затем вместо сигнала с колебательного контура подаёт на вход усилителя калибровочный сигнал с настроенного на ту же частоту генератора. Этот сигнал измеряется вольт-

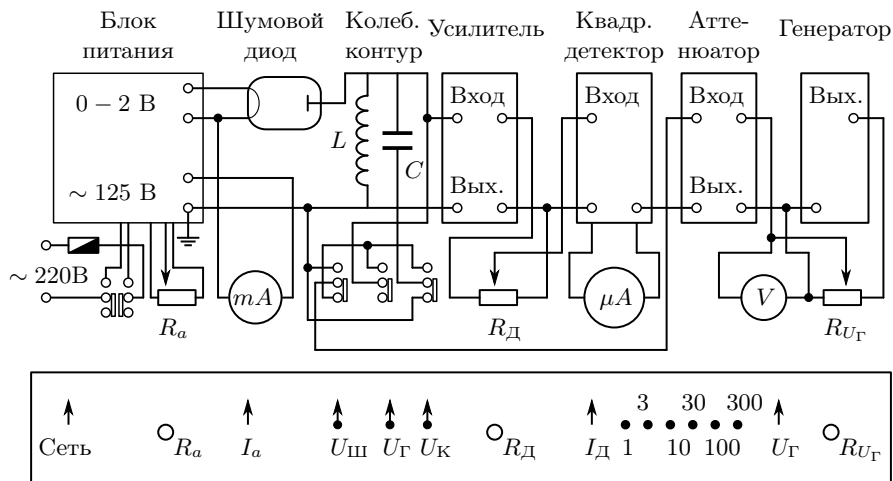


Рис. 2. Блок-схема установки для измерения дробового шума. Внизу изображена нижняя часть передней панели с ручками и кнопками управления

метром (обозначение « $U_{\Gamma}$ » на панели) и ослабляется в точно известное число раз прецизионным аттенюатором. При измерениях напряжение на генераторе подбирается так, чтобы стрелка микроамперметра вернулась к отмеченному делению. В этом случае напряжение шумов равно известному напряжению, подаваемому на усилитель с аттенюатора. Делитель  $R_{\text{д}}$  во время этой процедуры, конечно, нельзя трогать.

Генератор используется не только для калибровки квадратичного детектора, но и для измерения добротности контура. Измерения производятся по методу  $Q$ -метра. Включим в контур генератор  $\Gamma$  (настроенный на собственную частоту контура), как это изображено на рис. 3. Выходное напряжение генератора  $U_{\Gamma}$  целиком падает на активном сопротивлении контура  $R$ . Поэтому  $U_{\Gamma} = IR$ , где  $I$  — ток в контуре. Найдём теперь напряжение  $U_{\text{к}}$ , подаваемое на усилитель и измеряемое квадратичным детектором:

$$U_{\text{к}} = U_{\Gamma} - \frac{I}{i\omega C} = U_{\Gamma} - \frac{U_{\Gamma}}{i\omega RC} \approx \frac{iU_{\Gamma}}{\omega RC}.$$

При написании последнего равенства считалось, что контур обладает высокой добротностью,  $Q = 1/\omega RC \gg 1$ . Заменяя  $1/\omega RC$  через добротность контура, найдём

$$Q = \frac{|U_{\text{к}}|}{|U_{\Gamma}|}. \quad (13)$$

Итак, для измерения добротности контура нужно сравнить напряжение на генераторе с напряжением на катушке самоиндукции. Напря-

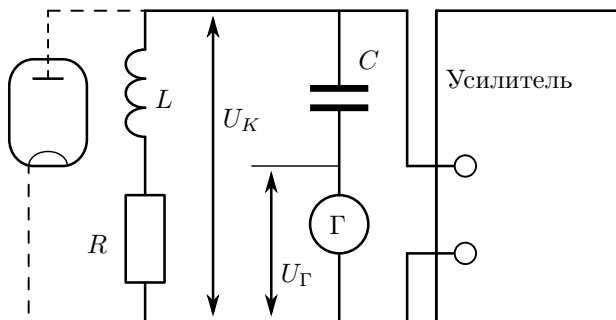


Рис. 3. Схема для измерения добротности колебательного контура

жение на генераторе  $U_{\Gamma}$  измеряется вольтметром генератора (рис. 2). Измерение напряжения на катушке самоиндукции не так просто.

При измерении напряжения  $U_{\kappa}$ , создаваемого генератором на катушке самоиндукции, необходимо учитывать и шумовое напряжение  $U_{\text{ш}}$ , имеющееся на катушке. Это напряжение при измерениях продолжает возбуждаться диодом, так как при измерениях добротности контура диод находится в рабочем режиме. Отключить диод при измерении нельзя, поскольку добротность контура от этого заметно изменится: при измерениях шума контур шунтирован диодом, что снижает его добротность; в этом положении и должна измеряться добротность контура. При включении генератора в контур на вход усилителя поступает не  $U_{\kappa}$ , как показано на рис. 3, и не  $U_{\text{ш}}$ , а их сумма. При этом ток детектора  $I_{\text{д}}$  пропорционален  $\langle (U_{\text{ш}} + U_{\kappa})^2 \rangle$ . Сдвиг фаз между колебаниями  $U_{\text{ш}}$  и  $U_{\kappa}$  непрерывно изменяется. Поэтому

$$I_{\text{д}} \propto \langle (U_{\text{ш}} + U_{\kappa})^2 \rangle = \langle U_{\text{ш}}^2 \rangle + 2\langle U_{\text{ш}}U_{\kappa} \rangle + \langle U_{\kappa}^2 \rangle = \langle U_{\text{ш}}^2 \rangle + \langle U_{\kappa}^2 \rangle,$$

в то время как до включения генератора ток детектора  $I_{\text{д}}$  был пропорционален  $U_{\text{ш}}^2$ .

Таким образом,  $U_{\kappa}^2$  пропорционально *приращению* тока квадратичного детектора, происходящему при включении напряжения  $U_{\Gamma}$ . Чтобы подставить это приращение в формулу (13), оно должно быть пересчитано в напряжение генератора. Это делается следующим образом. Нужно заметить показание квадратичного детектора при нулевом напряжении на выходе генератора. Затем нужно установить на выходе генератора некоторое напряжение  $U_{\Gamma}$  и зафиксировать приращение тока детектора  $\Delta I_{\text{д}}$ , вызванное напряжением генератора. После этого вместо колебательного контура на вход усилителя следует подключить генератор с аттенуатором. Сигнал с генератора и положение аттенуатора нужно подобрать таким образом, чтобы показание микроамперметра было равно



измеренному ранее приращению  $\Delta I_d$ . Показание вольтметра генератора равно искомому напряжению  $U_k$ .

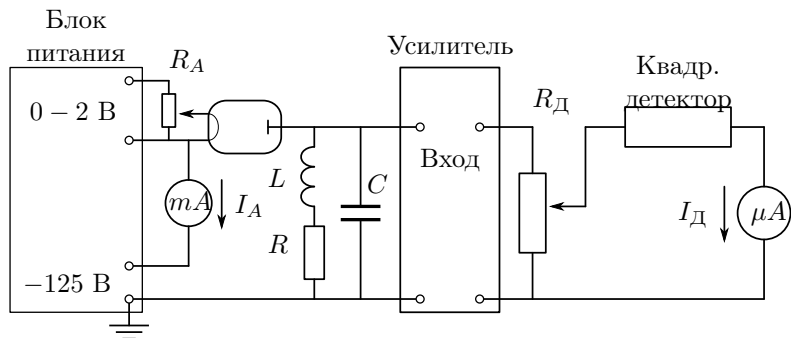


Рис. 4. Схема установки для измерения напряжения шума

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается, измерив напряжение шумов, раскачивающих колебательный контур, и определив добротность этого контура, рассчитать заряд электрона.

### Проверка квадратичности детектора

1. Включите питание стенда (кнопка «Сеть»).
2. Убедитесь в том, что выпрямительная схема с полупроводниковыми диодами действительно имеет квадратичную характеристику. Для этого включите стенд в режим измерения напряжения генератора (кнопка « $U_G$ »). Установите максимальную чувствительность квадратичного детектора (регулятор  $R_d$ ) и выберите предел измерений для вольтметра (кнопка «100» или «300» мкВ аттенюатора). Изменяя выходное напряжение генератора с помощью регулятора напряжения генератора  $R_G$ , измерьте зависимость тока квадратичного детектора  $I_d$  от входного напряжения усилителя  $U_G$ .

### Измерение напряжения шума

3. Включите режим измерения шума (кнопка « $U_{ш}$ »). Электрическая схема для этого случая показана на рис. 4.
4. Установите анодный ток шумового диода  $I_a = 1$  мА, изменяя регулятором  $R_A$  напряжение накала диода.

С помощью регулятора  $R_d$  подберите чувствительность квадратичного детектора так, чтобы стрелка микроамперметра отклонялась на большую часть шкалы. Отметьте значение шумового тока  $I_d$ .

Для пересчёта отклика детектора на шум в единицы напряжения вместо шумового диода подключите к усилителю генератор напряжений (кнопка « $U_r$ »). Измерительная схема приведена на рис. 5.

С помощью регулятора  $R_r$  и аттенюатора (пределы «30», «100» или «300» мкВ) установите *то же значение тока*  $I_d$ , которое было выбрано в режиме измерения шума. Регулятор  $R_d$  во время этой процедуры, конечно, трогать нельзя. Отсчитанное по вольтметру с аттенюатором напряжение  $U_{эфф}$  равно корню квадратному из среднего квадрата напряжения шумов.

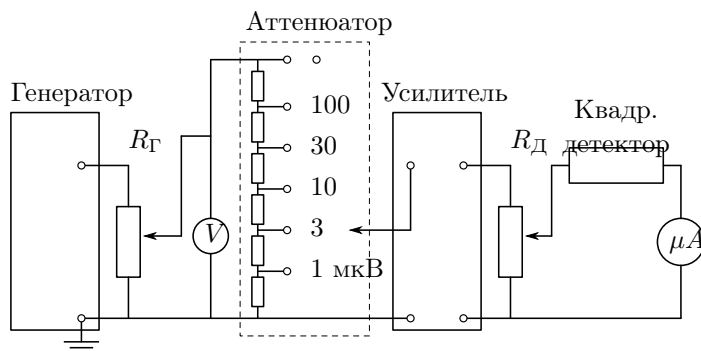


Рис. 5. Схема установки для измерения напряжения на генераторе

### Измерение добротности контура

- При том же анодном токе диода переключите аттенюатор в положение «1» или «3» мкВ. Установите режим измерения напряжения на контуре при его последовательном возбуждении (кнопка « $U_k$ »). При нулевом напряжении на вольтметре подберите чувствительность детектора: регулятором  $R_d$  установите стрелку микроамперметра детектора на любое целое деление. Измерьте *приращение* тока детектора  $\Delta I_d$  при изменении напряжения генератора от нуля до любого напряжения  $V_1$ .

Затем включите режим измерения напряжения на генераторе (кнопка « $U_r$ ») и регулятором  $R_r$  подберите напряжение  $V_2$ , при котором ток квадратичного детектора равен *приращению*  $\Delta I_d$  в режиме измерения сигнала с контура. Добротность контура равна  $Q = V_2/V_1$ .

- Повторите измерения п. 2–3 ещё 5–6 раз при том же анодном токе (можно при другой чувствительности детектора).
- Проведите измерения п. 2–4 при других значениях анодного тока в интервале 1–4 мА.

8. Запишите значения ёмкости и резонансной частоты колебательного контура, указанные на установке.

### Обработка результатов

9. Постройте график зависимости  $I_d = f(U_r^2)$  для проверки характера детектирования.
10. Вычислите среднюю величину заряда электрона для каждого значения тока анода. Представьте результаты в виде таблицы.

$I_a$ , мА	$U_{эфф}$ , мкВ	$\langle Q \rangle$	$e$ , Кл	$\langle e \rangle \pm \Delta e$

11. Определите заряд электрона, используя все полученные результаты, и оцените погрешность. Сравните полученное значение с табличным.

### Литература

1. *Власов В.Ф.* Электронные и ионные приборы. — М.: Связьиздат, 1960, § 13.5.
2. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику. — М.: Наука, 1976, § 5.

## Работа 3.2.8

### Релаксационные колебания

**Цель работы:** изучение вольт-амперной характеристики нормального тлеющего разряда; исследование релаксационного генератора на стабилитроне.

**В работе используются:** стабилитрон СГ-2 (газонаполненный диод) на монтажной панели, амперметр, вольтметр, магазин сопротивлений, магазин ёмкостей, источник питания, осциллограф (ЭО), генератор звуковой частоты (ЗГ).

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с п. 5 Введения к разделу.

Колебательные системы, как правило, имеют два накопителя энергии, между которыми происходит её перекачка. Например, в контуре, содержащем конденсатор и катушку индуктивности, электрическая энергия переходит в магнитную и обратно. Встречаются, однако, колебательные системы, содержащие всего один накопитель энергии. Рассмотрим

в качестве примера электрическую цепь, содержащую конденсатор и сопротивление без самоиндукции. Разряд конденсатора через сопротивление представляет собой аperiodический процесс. Разряду, однако, можно придать периодический характер, возобновляя заряд конденсатора через постоянные промежутки времени. Колебания в этом случае являются совокупностью двух аperiodических процессов — процесса зарядки конденсатора и процесса его разрядки. Такие колебания называются **релаксационными**.

В данной работе роль «ключа», обеспечивающего попеременную зарядку и разрядку конденсатора, играет газоразрядный диод. Зависимость тока от напряжения для газоразрядной лампы не подчиняется закону Ома и характеризуется рядом особенностей (рис. 1). При малых напряжениях лампа практически не пропускает тока (участок ОАВ на рис. 1). Ток в лампе возникает только в том случае, если разность потенциалов на её электродах достигает *напряжения зажигания*  $U_1$ . При этом скачком (участок ВС) устанавливается конечная сила тока  $I_1$  — в лампе возникает *нормальный тлеющий разряд* (см. подробнее Приложение к Разделу V, стр. 281). При дальнейшем незначительном увеличении напряжения сила тока заметно возрастает по закону, близкому к линейному (участок CD). Нормальный тлеющий разряд — стабилизатор напряжения, отсюда второе название лампы — *стабиловольт*.

Если начать уменьшать напряжение на горящей лампе, то при напряжении, равном  $U_1$ , лампа ещё не гаснет, и сила тока продолжает уменьшаться (участок CE на рис. 1). Лампа перестанет пропускать ток лишь при *напряжении гашения*  $U_2$ , которое обычно существенно меньше  $U_1$ . Сила тока при этом скачком падает от значения  $I_2$  ( $I_2 < I_1$ ) до нуля (участок EA).

Характеристика, изображённая на рис. 1, несколько идеализирована. У реальной лампы зависимость  $I(U)$  не вполне линейна. При  $U > U_1$  графики, соответствующие возрастанию и убыванию напряжения, могут не совпадать. Эти отличия, впрочем, носят второстепенный характер и для нашей задачи несущественны.

Рассмотрим схему релаксационного генератора, представленную на рис. 2. Пусть напряжение батареи  $\mathcal{E}$  больше напряжения зажигания  $U_1$ . В обозначениях, принятых на схеме, справедливо уравнение

$$I_C + I(U) = \frac{\mathcal{E} - U}{R}$$

или

$$C \frac{dU}{dt} + I(U) = \frac{\mathcal{E} - U}{R}. \quad (1)$$

В стационарном режиме работы, когда напряжение  $U$  на конденсаторе

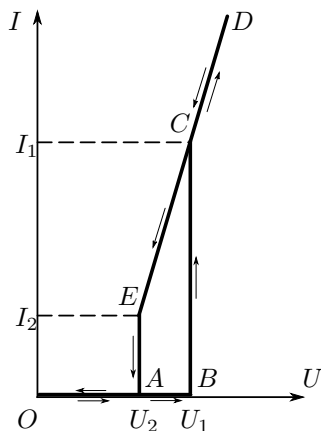


Рис. 1. Вольт-амперная характеристика стабилитрона с последовательно включенным резистором

постоянно и  $dU/dt = 0$ , ток через лампу равен

$$I_{\text{ст}} = \frac{\mathcal{E} - U}{R}. \quad (2)$$

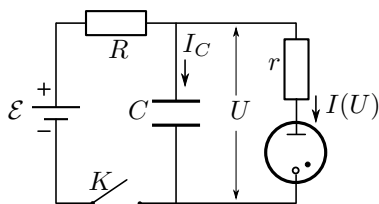


Рис. 2. Принципиальная схема релаксационного генератора

Равенство (2) может быть представлено графически (рис. 3). При разных  $R$  графики имеют вид прямых, пересекающихся в точке  $U = \mathcal{E}$ ,  $I = 0$ . Область, где эти *нагрузочные прямые* пересекают вольт-амперную характеристику лампы, соответствует стационарному режиму — при малых  $R$  (прямая 1) лампа горит постоянно, колебания отсутствуют. Прямая 2, проходящая через точку  $(I_2, U_2)$ , соответствует критическому сопротивлению

$$R_{\text{кр}} = \frac{\mathcal{E} - U_2}{I_2}. \quad (3)$$

При сопротивлении  $R > R_{\text{кр}}$  нагрузочная прямая 3 не пересекает характеристику лампы, поэтому стационарный режим невозможен. В этом

случае в системе устанавливаются колебания.

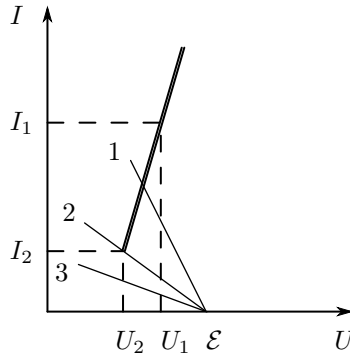


Рис. 3. Режимы работы релаксационного генератора

Рассмотрим, как происходит колебательный процесс. Пусть в начале опыта ключ  $K$  разомкнут (рис. 2) и  $U = 0$ . Замкнём ключ. Конденсатор  $C$  начинает заряжаться через сопротивление  $R$ , напряжение на нём увеличивается (рис. 4). Как только оно достигнет напряжения зажигания  $U_1$ , лампа начинает проводить ток, причём прохождение тока сопровождается разрядкой конденсатора. В самом деле, батарея  $\mathcal{E}$ , подключённая через большое сопротивление  $R$ , не может поддерживать необходимую для горения лампы величину тока. Во время горения лампы конденсатор разряжается, и когда напряжение на нём достигнет потенциала гашения, лампа перестанет проводить ток, а конденсатор вновь начнёт заряжаться. Возникают релаксационные колебания с амплитудой, равной  $(U_1 - U_2)$ .

Рассчитаем период колебаний. Полное время одного периода колебаний  $T$  состоит из суммы времени зарядки  $\tau_3$  и времени разрядки  $\tau_p$ , но если сопротивление  $R$  существенно превосходит сопротивление зажжённой лампы, то  $\tau_3 \gg \tau_p$  и  $T \approx \tau_3$  (этим случаем мы и ограничимся).

Во время зарядки конденсатора лампа не горит ( $I(U) = 0$ ), и уравнение (1) приобретает вид

$$RC \frac{dU}{dt} = \mathcal{E} - U. \quad (4)$$

Будем отсчитывать время с момента гашения лампы, так что  $U = U_2$  при  $t = 0$  (рис. 4). Решив уравнение (4), найдём

$$U = \mathcal{E} - (\mathcal{E} - U_2)e^{-t/RC}. \quad (5)$$

В момент зажигания  $t = \tau_3$ ,  $U = U_1$ , поэтому

$$U_1 = \mathcal{E} - (\mathcal{E} - U_2)e^{-\tau_3/RC}. \quad (6)$$

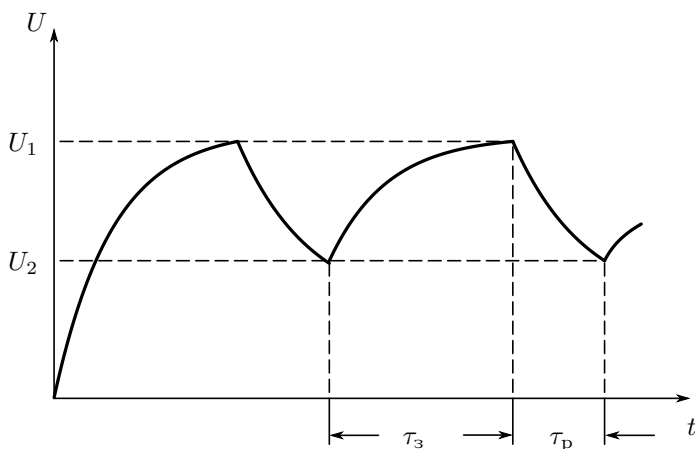


Рис. 4. Осциллограмма релаксационных колебаний

Из уравнений (5) и (6) нетрудно найти период колебаний:

$$T \approx \tau_z = RC \ln \frac{\mathcal{E} - U_2}{\mathcal{E} - U_1}. \quad (7)$$

Развитая выше теория является приближённой. Ряд принятых при расчётах упрощающих предположений оговорен в тексте. Следует иметь в виду, что мы полностью пренебрегли паразитными ёмкостями и индуктивностями схемы. Не рассматривались также процессы развития разряда и деионизация при гашении. Поэтому теория справедлива лишь в тех случаях, когда в схеме установлена достаточно большая ёмкость и когда период колебаний существенно больше времени развития разряда и времени деионизации (практически  $\gg 10^{-5}$  с). Кроме того, потенциал гашения  $U_2$ , взятый из статической вольт-амперной характеристики, может отличаться от потенциала гашения лампы, работающей в динамическом режиме релаксационных колебаний.

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается получить вольт-амперную характеристику стабилитрона и познакомиться с работой релаксационного генератора: определить критическое сопротивление, исследовать зависимость периода колебаний от сопротивления при фиксированной ёмкости и от ёмкости при фиксированном сопротивлении.

### Измерение ВАХ стабилитрона

1. Соберите схему, изображённую на рис. 5. Добавочное сопротивление  $r$  подпаяно между ножкой лампы и соответствующей клеммой

для того, чтобы предохранить стабилитрон от перегорания. Это сопротивление остаётся включённым при всех измерениях. Запишите величину  $r$ , указанную на установке.

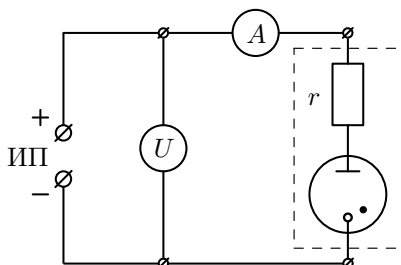


Рис. 5. Схема установки для изучения характеристик стабилитрона

- Установите регулятор источника питания на минимум напряжения и включите источник в сеть.
- Снимите вольт-амперную характеристику стабилитрона с сопротивлением  $r$  при возрастании и убывании напряжения. При этом как можно точнее определите потенциалы зажигания и гашения  $U_1$  и  $U_2$  и соответствующие токи  $I_1$  и  $I_2$ .

#### Осциллограммы релаксационных колебаний

- Соберите релаксационный генератор согласно рис. 6.
- Установите на магазине ёмкостей значение  $C = 0,05$  мкФ, а на магазине сопротивлений  $R = 900$  кОм.
- Включите в сеть осциллограф, звуковой генератор и источник питания и установите напряжение  $\mathcal{E} \approx 1,2 U_1$ .

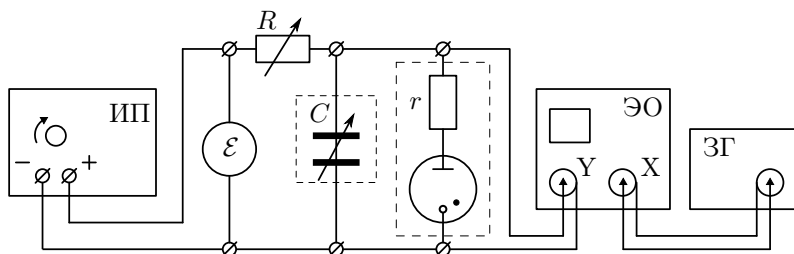


Рис. 6. Схема установки для исследования релаксационных колебаний

- Подберите частоту развёртки ЭО, при которой на экране видна картина пилообразных колебаний (рис. 4).



8. Получив пилу на экране, оцените соотношение между временем зарядки  $\tau_z$  и временем разрядки  $\tau_p$ . Зарисуйте картину колебаний.
9. Уменьшая сопротивление магазина, определите  $R_{кр}$ , при котором пропадают колебания, и сравните его с величиной, рассчитанной по формуле (3). Это сравнение полезно сделать в процессе работы и подумать о причинах расхождения результатов.

Убедитесь, что колебания пропадают не только при уменьшении  $R$  при постоянном  $\mathcal{E}$ , но и при увеличении  $\mathcal{E}$  при постоянном  $R$ , когда это  $R$  не слишком превышает  $R_{кр}$ .

### Фигуры Лиссажу и частота колебаний

10. Восстановите исходные параметры релаксационного генератора:  $C = 5 \cdot 10^{-2}$  мкФ,  $R = 900$  кОм,  $\mathcal{E} \approx 1,2 \cdot U_1$ . Подайте сигнал с генератора на вход  $X$  осциллографа. Меняя частоту ЗГ, получите на экране фигуру Лиссажу без самопересечений, соответствующую отношению частот 1:1.
11. Не меняя параметров релаксационного генератора, уменьшите частоту ЗГ вдвое (втрое) и получите фигуры Лиссажу при соотношении частот 2:1 (3:1). Зарисуйте эти кривые в тетрадь.  
Получите и зарисуйте фигуры Лиссажу при увеличении частоты ЗГ в два и три раза (1:2 и 1:3).
12. При любом целом значении  $R$  из интервала  $(2 - 4) R_{кр}$  снимите с помощью фигур Лиссажу 1:1 зависимость частоты колебаний  $\nu$  от ёмкости  $C$ , меняя величину ёмкости в пределах от  $5 \cdot 10^{-2}$  до  $5 \cdot 10^{-3}$  мкФ.  
Напряжение  $\mathcal{E}$ , необходимое для расчёта теоретического значения периода по формуле (7), следует поддерживать постоянным.
13. Проведите серию измерений  $\nu(R)$  при постоянной ёмкости  $C = 5 \cdot 10^{-2}$ , меняя величину  $R$  от максимального значения до критического.

### Обработка результатов

14. Постройте графики вольт-амперных характеристик  $I(U)$  для системы, состоящей из стабилитрона и дополнительного сопротивления  $r$  (по результатам измерений) и для стабилитрона без сопротивления  $r$  (вычитая падение напряжения на сопротивлении  $r$  при каждом токе). Сравните относительные изменения тока и напряжения на стабилитроне.
15. Рассчитав экспериментальные и теоретические значения периодов, постройте графики  $T_{эксп}(C)$  и  $T_{теор}(C)$  на одном листе. На другом листе постройте графики  $T_{эксп}(R)$  и  $T_{теор}(R)$ .

16. Если наклоны теоретической и экспериментальной прямых заметно отличаются, рассчитайте из экспериментальной прямой динамический потенциал гашения. Потенциалы зажигания можно считать одинаковыми.

### Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются релаксационными?
2. От каких параметров газа зависит напряжение зажигания стабилвольта?
3. Почему напряжение гашения существенно меньше напряжения зажигания?
4. Как по вольт-амперной характеристике стабилвольта и известным параметрам генератора найти ток в лампе в стационарном режиме?
5. Что такое критическое сопротивление релаксационного генератора? От чего оно зависит?
6. Почему критическое сопротивление зависит от величины напряжения  $\mathcal{E}$  на входе генератора? Рассмотрите рис. 3.
7. Почему при малой ёмкости колебания не возникают (лампа не гаснет) даже при  $R > R_{кр}$ ? Оцените «малость» ёмкости, сравнив время релаксации и время деионизации.

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — § 134.
2. *Калашиников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003. — § 244.
3. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959. Гл. IV, § 6.



## Раздел III

# НОСИТЕЛИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Электрический ток представляет собой направленный перенос зарядов. Микрочастицы, осуществляющие этот перенос, называют носителями тока. В конце XIX века в опытах Дж. Дж. Томсона с «катодными лучами» были открыты элементарные носители заряда — электроны. Вскоре были проведены первые измерения величины элементарного заряда: Р. Милликен в опытах в 1908–1916 годов измерял заряд микроскопических капелек масла, помещённых во внешнее электрическое поле. Идея этих опытов проста: если элементарный заряд действительно существует, то величина заряда  $q$  любого тела может принимать только дискретную последовательность значений. Сравнивая между собой заряды капель, можно убедиться в том, что все они кратны одному и тому же числу — элементарному заряду  $e$ :

$$q = 0, \pm e, \pm 2e, \pm 3e, \dots$$

Величина заряда оказалась равной

$$e \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \quad (e \approx 4,8 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС}).$$

Сразу после этого по отклонению «катодных лучей» в магнитном поле была измерена и масса электрона  $m_e \approx 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ .

Направленное движение зарядов в пространстве характеризуется **плотностью тока**:

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{u}, \quad (3.1)$$

где  $n$  — объёмная концентрация носителей,  $\mathbf{u}$  — направленная составляющая средней скорости их движения — **дрейфовая скорость** (хаотическое тепловое движение носителей вклада в ток не даёт). При движении зарядов в веществе дрейфовая скорость, как правило, является результатом баланса действия стороннего электрического поля и сил трения в среде — в таком случае течение тока подчиняется *закону Ома* (см. п. 3.2). В вакууме скорость носителей ограничивается их взаимным электростатическим отталкиванием, а закон Ома оказывается неприменим (см. п. 2).

Свободные заряды — электроны и ионы — могут являться носителями тока в свободном от вещества пространстве (ток в вакуумном диоде, ионный пучок в масс-спектрометре и т.д.). Понятие носителя тока в

*веществе* уже не является столь наглядным. Хотя в металлах и полупроводниках перенос заряда происходит также вследствие перемещения электронов, их движение уже не является движением свободных частиц, как в вакууме. Электроны движутся в сильном периодическом поле, образованном ионами кристаллической решётки, и взаимодействуют между собой, причём это движение и это взаимодействие подчиняются законам квантовой механики. По квантовым законам следует, что перенос заряда можно по-прежнему интерпретировать как движение свободных заряженных частиц (точнее, *квазичастиц*), но масса этих частиц, называемая *эффективной массой*, не совпадает с массой свободного электрона:  $m_e^{\text{эфф}} \neq m_e$ .

Более того, полупроводники и некоторые металлы ведут себя так, будто вместо электронов ток в них переносят некие положительные частицы. Такие квазичастицы получили название *дырки* (англ. holes). В электрических и магнитных полях они ведут себя как частицы с положительным элементарным зарядом  $q_h = +e$  и с некоторой эффективной массой  $m_h^{\text{эфф}} \neq m_e$ . Дырка в некотором смысле подобна «пузырьку», образуемому, если из данной точки удалить электрон.

Таким образом, в физике металлов и полупроводников в качестве носителей тока рассматривают *квазичастицы, не существующие отдельно от рассматриваемого вещества*. Заряд этих носителей численно точно равен элементарному и может быть как отрицательным, так и положительным. В первом случае они по-прежнему называются *электронами* (хотя их масса не равна  $m_e$ ), во втором — *дырками*. В полупроводниках присутствуют оба типа этих носителей. В большинстве металлов имеются только отрицательные носители, но существуют металлы и с дырочным типом проводимости (Zn, Cd).

## 1. Движение свободных частиц во внешних полях

Рассмотрим два простейших примера движения свободных зарядов в вакууме под действием электрического и магнитного полей. Такие условия движения реализуются, например, в электронных вакуумных приборах, таких, как электронно-лучевая трубка или вакуумный диод.

### 1.1. Движение в однородном магнитном поле

Как известно, на заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\mathbf{v}$  в магнитном поле  $\mathbf{B}$ , действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Она перпендикулярна скорости движения, и поэтому не изменяет её абсолютной величины.

Пусть поле  $\mathbf{B}$  постоянно и однородно в пространстве. Если начальная скорость заряда перпендикулярна полю, то траектория его движения — *окружность*, причём

$$m \frac{v^2}{r} = qvB.$$

Отсюда находим радиус траектории (называемый *ларморовским*):

$$r_B = \frac{mv}{qB} = \frac{v}{\omega_B}, \quad (3.2)$$

где

$$\omega_B = \frac{qB}{m} \quad (3.3)$$

— *циклотронная частота* (или *гирочастота*). Такое движение частицы называется *циклотронным вращением*.

Заметим, что циклотронная частота не зависит от энергии частицы, так что в однородном магнитном поле все частицы одного сорта вращаются с *одинаковой* частотой. Частицы с разными знаками заряда вращаются в противоположные стороны.

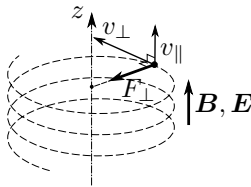


Рис. 3.1. Траектория в параллельных полях  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$

Пусть теперь заряд движется под некоторым углом  $\alpha$  к вектору индукции  $\mathbf{B}$ . Скорость заряда  $\mathbf{v}$  можно разложить на две составляющие, перпендикулярную и параллельную магнитному полю:

$$v_{\perp} = v \sin \alpha, \quad v_{\parallel} = v \cos \alpha.$$

Параллельная составляющая не вызывает появление силы Лоренца, поэтому в проекции на плоскость, перпендикулярную  $\mathbf{B}$ , траектория по-прежнему будет окружностью с радиусом

$$r_B = \frac{v_{\perp}}{\omega_B} = \frac{mv_{\perp}}{qB}. \quad (3.4)$$

В направлении поля  $\mathbf{B}$  сила Лоренца равна нулю, поэтому заряд движется равномерно со скоростью  $v_{\parallel} = \text{const}$ . Таким образом, траектория заряда представляет собой *винтовую линию*.

Наконец, если включить электрическое поле, *параллельное* магнитному  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}$ , то частица будет двигаться с ускорением вдоль оси  $\mathbf{E}$ . На её циклотронное движение в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{B}$ , это никак не повлияет.

**Замечание.** Формула (3.2) может быть обобщена для релятивистских скоростей частицы  $v \lesssim c$ . В общем случае траектория будет окружностью с радиусом  $r_B = \gamma mv/qB$ , где  $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  — релятивистский фактор. Также заметим, что в общем случае заряд, движущийся ускоренно

(в частности, по ларморовской окружности), излучает электромагнитные волны (*циклотронное излучение*). Поэтому результаты здесь получены в предположении, что интенсивность излучения достаточно мала, так что торможением заряда из-за него можно пренебречь.

### 1.2. Дрейф в скрещенных полях

Рассмотрим движение заряда  $q$  во взаимно перпендикулярных однородных электрическом и магнитном полях  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ .

Уравнение движения заряда в таком случае имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Направим ось  $z$  вдоль  $\mathbf{B}$ , а ось  $y$  — вдоль  $\mathbf{E}$ . Тогда, разделив на  $m$ , получим

$$\begin{aligned}\dot{v}_x &= \omega_B v_y, \\ \dot{v}_y &= \frac{q}{m}E - \omega_B v_x, \\ \dot{v}_z &= 0.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Сделаем замену переменной  $v'_x = v_x - V$ , где  $V = qE/(m\omega_B) = E/B$ . Тогда первые два уравнения системы (3.5) сводятся к

$$\dot{v}'_x = \omega_B v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega_B v'_x.$$

Решение — вектор, вращающийся с постоянной угловой скоростью  $\omega_B$ :

$$v'_x = v'_{x0} \cos(\omega_B t + \varphi_0), \quad v_y = v_{y0} \sin(\omega_B t + \varphi_0).$$

Следовательно, в системе отсчёта, движущейся по оси  $x$  со скоростью  $V = E/B$ , траектория частицы будет ларморовской окружностью. Радиус окружности определяется начальной скоростью (точнее, её поперечной к полю составляющей) *в этой системе отсчёта*:  $r = v'_{\perp 0}/\omega_B$ .

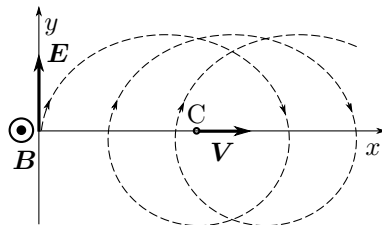


Рис. 3.2. Дрейф центра ларморовской окружности (точка C) в скрещенных полях  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$

Таким образом, движение в скрещенных электрическом и магнитном полях  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  представляет собой наложение ларморовского вращения

в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{B}$ , и смещения с постоянной скоростью центра ларморовской окружности в направлении, перпендикулярном  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  (см. рис. 3.2):

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (3.6)$$

Это явление называют **электрическим дрейфом** в скрещенных полях.

Примечательно, что скорость и направление электрического дрейфа *не зависят от свойств частицы*: ни от массы, ни от величины или знака заряда.

**Альтернативный вывод скорости дрейфа.** Тот же результат можно получить, воспользовавшись формулой для преобразования полей при смене системы отсчёта. В нерелятивистском ( $v \ll c$ ) случае:

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B}.$$

Отметим, что эти соотношения есть не что иное, как условие инвариантности силы Лоренца при смене системы отсчёта. Подберём скорость  $\mathbf{V}$  так, чтобы электрическое поле  $\mathbf{E}'$  в системе, движущейся с этой скоростью, обратилось в нуль:

$$0 = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}.$$

Поскольку  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ , приходим к соотношению (3.6). При переходе в эту систему останется только магнитное поле, поэтому траектория частицы будет *ларморовской (циклотронной) окружностью*. Движение же самой системы будет как раз соответствовать *дрейфу* центра этой окружности поперёк  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ .

**Замечание.** Выражение для дрейфовой скорости получено в *нерелятивистском* приближении. Для их применимости необходимо выполнение условия  $V \ll c$ , то есть электрическое поле должно быть мало по сравнению с магнитным:  $E \ll cB$ . Например, в типичном для лабораторных условий поле  $B = 0,1$  Тл, рассмотренное приближение работает при  $E \ll 30$  кВ/см.

## 2. Ток в вакуумном диоде

Вакуумный диод — это откачанный до высокого вакуума сосуд, в котором разность потенциалов приложена к расположенным в нём электродам: катоду (–) и аноду (+). Электрический ток в диоде представляет собой упорядоченное движение свободных электронов, испускаемых катодом. Важными особенностями такой системы по сравнению с обычным проводником являются *наличие пространственного заряда* и *отсутствие трения* со стороны среды. Как следствие, для вакуумного диода не выполняется закон Ома.



Явление испускания электронов поверхностью твёрдого тела или жидкости называется **электронной эмиссией**. Для удаления электрона из твёрдого вещества в вакуум необходимо совершить работу, называемую **работой выхода**  $A_{\text{вых}}$  (у чистых металлов  $A_{\text{вых}} \sim 1$  эВ). Один из механизмов эмиссии — испускание электронов с поверхности сильно нагретых тел (**термоэлектронная эмиссия**). Доля электронов, обладающих энергией, достаточной для преодоления барьера  $A_{\text{вых}}$ , увеличивается с ростом температуры согласно распределению Больцмана.

Если создать электрическое поле вне металла, направленное к катоду, оно будет увлекать вылетевшие из него электроны и через вакуум потечёт электрический ток. С повышением температуры катода резко возрастает интенсивность эмиссии электронов с него. Это приводит к тому, что в пространстве диода накапливается отрицательный объёмный заряд, который «экранирует» внешнее поле и препятствует ускорению электронов вблизи катода. Из-за этого результирующий ток в диоде оказывается существенно меньше тока, который может в принципе обеспечить эмиссия с катода. Такой режим работы диода называют **режимом объёмного заряда**.

При достижении определённого напряжения дальнейшее нарастание тока практически прекращается — ток достигает предельного значения  $I_{\text{нас}}$ , называемого **током насыщения**. Это обусловлено ограниченностью эмиссионной способности катода. Величина тока насыщения определяется количеством электронов, которое способно выйти из поверхности катода в единицу времени.

### 2.1. «Закон 3/2» для вакуумного диода

Рассмотрим режим объёмного заряда в простейшем случае *плоского* диода. Его электроды представляют собой две параллельные плоскости, между которыми задано напряжение  $U$ . Расстояние  $h$  между электродами много меньше их площади. Направим ось  $x$  перпендикулярно к поверхности катода в сторону анода, совместив начало координат с катодом. Задача становится одномерной: все величины являются функциями только координаты  $x$ .

Запишем для электрического поля *теорему Гаусса* в дифференциальной форме:

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

где  $\rho(x)$  — *плотность электрического заряда*. По определению потенциала электростатического поля имеем

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

Отсюда находим, что  $\varphi(x)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (3.7)$$

Это частный (одномерный) случай *уравнения Пуассона*.

Применим закон сохранения энергии к движению электронов:

$$\frac{mv^2}{2} = e\varphi, \quad (3.8)$$

где  $v$  — средняя скорость движения электронов в точке с потенциалом  $\varphi$ . Здесь мы выбрали начало отсчёта потенциала на катоде  $\varphi(0) = 0$ , а также *пренебрегли начальной (тепловой) скоростью*, с которой вылетает электрон с поверхности катода ( $v_0 = 0$ ). Это допустимо, если приложенное напряжение достаточно велико:  $eU \gg mv_0^2/2$ .

*Плотность тока* в диоде  $j = \rho v$ . В стационарном режиме заряд в диоде нигде не накапливается, поэтому плотность тока всюду одинакова:  $j = \text{const}$ . Выражая с помощью (3.8) плотность зарядов  $\rho$  через  $j$  и подставляя в (3.7), приходим к уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \sqrt{\frac{m}{2e\varphi}} \frac{j}{\varepsilon_0} \quad (3.9)$$

с граничным условием на потенциал анода (относительно катода):

$$\varphi(h) = U. \quad (3.10)$$

Для однозначного решения дифференциального уравнения 2-го порядка необходимо ещё одно граничное условие. В общем случае это должна быть некая связь  $j(E_0)$  между плотностью тока  $j$  и электрическим полем на поверхности катода  $E_0 = -\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0}$ , которую, однако, теоретически установить затруднительно. Задача упрощается, если учесть, что в режиме объёмного заряда плотность тока в диоде значительно меньше максимального тока электронов, который может в принципе обеспечить катод ( $j \ll j_{\text{max}}$ ). В предельном случае можно считать, что сколь угодно малые значения граничного поля  $E_0$  приводят к неограниченному увеличению плотности тока  $j$  (иными словами, эмиссионная способность катода ничем не ограничена). Таким образом, чтобы величина  $j$  оставалась конечной, электрическое поле на катоде необходимо принять равным нулю:

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=0} = 0. \quad (3.11)$$

Это условие также означает, что объёмный заряд вблизи катода *полностью экранирует* приложенное к электродам внешнее поле.

Решением (3.9), удовлетворяющим выбранным граничным условиям (3.10) и (3.11), является функция

$$\varphi(x) = \left( \frac{9}{4} \sqrt{\frac{m}{2e}} \frac{j}{\varepsilon_0} \cdot x^2 \right)^{2/3}. \quad (3.12)$$

Найдём связь между током и напряжением — *вольт-амперную характеристику* — вакуумного диода. Подставляя в (3.12) условие  $\varphi(h) = U$  и учитывая, что полный ток равен  $I = jS$ , где  $S$  — площадь электрода, получим

$$I = AU^{3/2}, \quad (3.13)$$

где для рассматриваемого плоского случая константа равна

$$A = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \frac{S}{h^2} \sqrt{\frac{2e}{m}}. \quad (3.14)$$

Формула (3.13) выражает так называемый «закон 3/2» Чаялда — Ленгмюра.

В реальной системе «закон 3/2» нарушается как при слишком малых напряжениях, когда нельзя пренебрегать начальными тепловыми скоростями электронов, так и при слишком больших напряжениях, когда диод переходит в режим насыщения. В промежуточной области закон хорошо выполняется на опыте, в том числе и для неплоской (например, цилиндрической) геометрии электродов.

**Замечание.** В рассуждениях выше никак не учитывалось магнитное поле, создаваемое направленным движением электронов. Пока ларморовский радиус электронов в собственном поле пучка много меньше расстояния между пластинами, этим фактором можно пренебречь. Однако при сверхсильных токах (десятки кА и более) траектории электронов не смогут оставаться прямыми и «закон 3/2» также нарушается.

### 3. Движение носителей заряда в металлах и полупроводниках

Проводимость большинства твёрдых тел связана с движением электронов. Электроны входят в состав атомов всех тел, однако одни тела не проводят электрический ток (диэлектрики), а другие являются хорошими его проводниками. Причина различия заключается в особенностях энергетического состояния внешних электронов в атомах этих веществ.

#### 3.1. Зонная модель

При объединении атомов в твёрдое тело — кристалл — внешние (валентные) электроны теряют связь со «своими» атомами и становятся принадлежностью *всего* кристалла. Каждый уровень энергии электрона

одиночного атома в кристалле расщепляется в *группу* близких уровней в кристалле, «сливающихся» в непрерывную *зону*. Число доступных состояний электрона при образовании зоны остаётся неизменным — оно равно числу мест на соответствующем атомном уровне, умноженному на число атомов в кристалле, и определяет максимальное число электронов, которое может «разместиться» в зоне в силу принципа *запрета Паули*. В промежутках между зонами допустимых состояний электрона нет — эти области называют *запрещёнными зонами*.

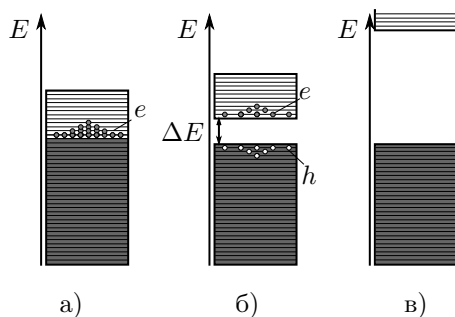


Рис. 3.3. Структура состояний а) металла, б) полупроводника, в) диэлектрика

Если одна из зон полностью заполнена электронами, а следующая — пуста, то под действием слабого внешнего электрического поля электроны не могут изменить своё состояние, а значит, и не могут прийти в упорядоченное движение. Тогда вещество является *диэлектриком*. Верхняя из заполненных зон называется *валентной зоной*.

Положение меняется, если в кристалле имеется зона, *частично* заполненная электронами. В этом случае внешнее электрическое поле может изменить распределение электронов по уровням энергии и вызвать их упорядоченное движение. Частично заполненная зона называется *зоной проводимости*. Такая зона имеется у всех твёрдых проводников электрического тока, в том числе у металлов.

Если ширина запрещённой зоны  $\Delta E$  не слишком велика по сравнению с тепловой энергией ( $\Delta E \lesssim k_B T$ ), тепловое движение перебрасывает часть электронов из валентной зоны в свободную зону проводимости над ней. При этом в зоне проводимости появляются электроны, а в валентной зоне — вакантные места — *дырки*. Как электроны в зоне проводимости, так и дырки в валентной зоне участвуют в переносе заряда. Такие вещества называются *полупроводниками*. Проводимость полупроводников экспоненциально растёт с повышением температуры, поскольку вероятность для электрона преодолеть запрещённую зону определяется распределением Больцмана  $\propto e^{-\Delta E/k_B T}$ . Обычно к полупроводникам относят материалы с шириной запрещённой зоны  $\Delta E \lesssim 2$  эВ.

Таким образом, электроны в твёрдом теле можно приближённо разделить на три почти несмешивающиеся подсистемы: 1) электроны в заполненных валентных зонах, не участвующие в переносе заряда; 2) электроны в зоне проводимости, которые могут свободно перемещаться по твёрдому телу; 3) электроны в верхней части валентной зоны, где есть небольшое количество вакантных мест. Последние можно наглядно представить как «электронную жидкость», в которой имеется небольшое количество «пузырьков» (дырок). Под действием внешних сил пузырёк ведёт себя как частица, которой можно приписать отрицательную массу (отрицательная масса как «недостача» положительной). Традиционно всё же массу дырки  $m_h$  принимают положительной,  $m_h > 0$ , но приписывают ей заряд, противоположный заряду электрона:  $q_h = +e$ . Если дырка и электрон проводимости окажутся в одной точке пространства, они могут нейтрализовать друг друга — **рекомбинировать**. Процессу рекомбинации соответствует переход *одного* электрона из зоны проводимости в валентную зону.

Большинство чистых металлов обладает **электронным** типом проводимости. Это означает, что электроны, частично заполняющие зону проводимости, являются единственными носителями электрического тока. Однако в ряде металлов (цинк, кадмий, бериллий и некоторые сплавы) зонная структура такова, что в зоне проводимости слишком мало вакантных мест, поэтому в них основными носителями электрического тока являются дырки (**дырочный** тип проводимости).

Для чистых полупроводников характерно одновременное наличие двух типов носителей. В легированных полупроводниках (содержащих примеси) может доминировать один из типов носителей — «электроны» (полупроводники *n*-типа) или «дырки» (полупроводники *p*-типа).

### 3.2. Закон Ома

При наложении внешнего электрического поля  $\mathbf{E}$  носители заряда начинают двигаться ускоренно. Однако после некоторого «свободного пробега» происходит взаимодействие с решёткой, частица теряет приобретённый импульс, и процесс ускорения начинается заново. В результате баланса ускоряющей силы и трения о решётку частица приобретает некоторую среднюю установившуюся скорость дрейфа  $\mathbf{u}_{\text{др}}$ , пропорциональную приложенному полю:

$$\mathbf{u}_{\text{др}} = \mu \mathbf{E}. \quad (3.15)$$

Коэффициент  $\mu \left[ \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}} \right]$  называется **подвижностью носителя тока**. Знак  $\mu$  определяется знаком заряда (подвижность электронов отрицательна, дырок — положительна).

**Замечание.** В общем случае подвижностью частицы, как правило, называют коэффициент  $b$  пропорциональности между установившейся скоростью частицы и приложенной к ней силой, то есть  $b = \mu/q$ .

Усреднённое взаимодействие носителя заряда с кристаллической решёткой можно моделировать действующей на него постоянной силой трения, пропорциональной средней скорости  $\mathbf{u}$  его движения:

$$\mathbf{F}_{\text{тр}} = -\frac{q\mathbf{u}}{\mu}. \quad (3.16)$$

При концентрации носителей  $n$  плотность тока равна

$$\mathbf{j} = qn\mathbf{u} = qn\mu\mathbf{E}.$$

Коэффициент пропорциональности между  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  называют удельной электропроводностью (или просто проводимостью) среды. Соответствующую связь

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} \quad (3.17)$$

называют законом Ома в дифференциальной форме. Видно, что проводимость связана с подвижностью как

$$\sigma = qn\mu. \quad (3.18)$$

В простейшей модели электрической проводимости движение носителей между столкновениями считается свободным, а при столкновении они теряют весь набранный импульс (модель Друде–Лоренца). Пусть частота столкновений носителя тока с решёткой равна  $\nu$ . Тогда средняя сила трения есть  $F_{\text{тр}} = m\nu\cdot\nu$ , откуда подвижность  $\mu = q/m\nu$  и соответственно проводимость

$$\sigma = \frac{q^2 n}{m\nu}. \quad (3.19)$$

Если имеется несколько типов носителей заряда, например электроны и дырки в полупроводнике, проводимость равна сумме вкладов от каждого из них, поскольку полный ток есть сумма токов всех носителей:

$$\sigma = e(n_e|\mu_e| + n_h\mu_h), \quad (3.20)$$

где соответственно  $n_e$  и  $n_h$  — концентрации электронов и дырок, а  $\mu_e$  и  $\mu_h$  — их подвижности.

#### 4. Эффект Холла и магнетосопротивление

Во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}$  на заряды действует сила Лоренца:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B}. \quad (3.21)$$

Эта сила вызывает движение носителей, направление которого в общем случае не совпадает с  $\mathbf{E}$ . Действительно, траектории частиц будут либо искривляться, либо, если геометрия проводника этого не позволяет, возникнет дополнительное электрическое поле, компенсирующее магнитную составляющую силы Лоренца. Возникновение поперечного тока электрического поля в образце, помещённом во внешнее магнитное поле, называют **эффектом Холла**.

##### 4.1. Тензор проводимости в магнитном поле

Связь между электрическим полем  $\mathbf{E}$  и плотностью тока  $\mathbf{j}$  в условиях эффекта Холла уже не может быть описана скалярным коэффициентом проводимости  $\sigma$ . Тем не менее закон Ома можно по-прежнему записать в форме

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{E}, \quad (3.22)$$

если под  $\hat{\sigma}$  понимать **тензор проводимости**. В заданном базисе он представляется матрицей  $3 \times 3$ :

$$\mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{E} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \mathbf{E}. \quad (3.23)$$

или

$$j_i = \sum_k \sigma_{ik} E_k, \quad \text{где } i, k = \{x, y, z\}.$$

Тензорная связь между полем и током имеет место в общем случае, когда проводящая среда не является *изотропной*. В условиях эффекта Холла тензор проводимости становится *недиагональным*.

Пусть система содержит носители только *одного типа* (например, электроны, как в большинстве металлов). Рассмотрим сначала простейший случай плоской геометрии: пусть ток течёт вдоль оси  $x$ , а магнитное поле направлено вдоль оси  $z$  (см. рис. 3.4). Магнитное поле действует на движущиеся заряды с силой  $F_y = -qu_x B_z$  по оси  $y$ . Ток сможет течь строго вдоль оси  $x$ , если заряды в среде перераспределятся таким образом, чтобы полностью скомпенсировать магнитную силу, создав в направлении  $y$  электрическое поле

$$E_y = u_x B_z = \frac{j_x}{nq} B_z,$$

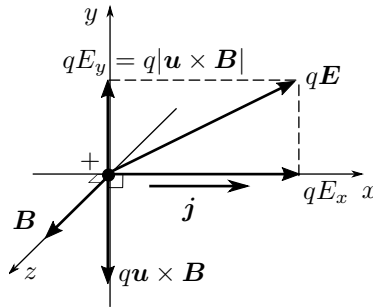


Рис. 3.4. Силы, действующие на положительный носитель заряда в проводящей среде при наличии магнитного поля

называемое **холловским** (здесь  $n$  — концентрация носителей). По оси  $x$  носители будут двигаться так, как если бы магнитного поля не было:  $j_x = \sigma_0 E_x$  ( $j_y = j_z = 0$ ), где  $\sigma_0 = qn\mu$  — удельная проводимость среды в отсутствие  $\mathbf{B}$ .

Выразим общую связь между  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{j}$  для случая носителей одного типа. Магнитное поле по-прежнему направим вдоль оси  $z$ , а о направлении  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{j}$  никаких предположений делать не будем. При движении носителей с постоянной средней скоростью сила Лоренца (3.21) будет уравновешена трением со стороны среды (3.16):

$$q(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \frac{q\mathbf{u}}{\mu} = 0.$$

С учётом введённых выше обозначений этот баланс сил можно переписать как

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{j}}{\sigma_0} - \frac{1}{nq} \mathbf{j} \times \mathbf{B}. \quad (3.24)$$

Полученное соотношение можно назвать *обобщённым законом Ома* при наличии внешнего магнитного поля. Второе слагаемое в правой части (3.24) как раз отвечает эффекту Холла — возникновению поперечного направления тока электрического поля.

Записывая равенство (3.24) по компонентам

$$E_x = \frac{j_x}{\sigma_0} - \frac{j_y B}{nq}, \quad E_y = \frac{j_y}{\sigma_0} + \frac{j_x B}{nq}, \quad E_z = \frac{j_z}{\sigma_0},$$

получим, вводя **тензор удельного сопротивления**  $\hat{\rho}$  (обратный к тензору проводимости):

$$\mathbf{E} = \hat{\rho} \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 1 & -\mu B & 0 \\ \mu B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\mathbf{j}}{\sigma_0}. \quad (3.25)$$



Обращением матрицы в (3.25) получим тензор проводимости в условиях эффекта Холла:

$$\hat{\sigma} = \hat{\rho}^{-1} = \frac{\sigma_0}{1 + (\mu B)^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu B & 0 \\ -\mu B & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Безразмерному параметру  $\mu B$  в формулах (3.25) и (3.26) можно приписать простой физический смысл — это отношение эффективной длины пробега частиц  $l = \mu t u / q$  к ларморовскому радиусу кривизны их траектории  $r_B = t u / q B$ . Эту величину иногда называют **параметром замагниченности**.

**Замечание.** Приведённый вывод описывает классическую модель движения носителей в среде. При низких температурах в сильных полях ( $T \lesssim 1$  К,  $B \gtrsim 1$  Тл) явление приобретает существенно квантовый характер (*квантовый эффект Холла*).

#### 4.2. Измерение проводимости в магнитном поле

Для исследования зависимости проводимости среды от магнитного поля используют две основные и принципиально различные по геометрии схемы: мостик Холла и диск Корбино (рис. 3.5). Рассмотрим их подробнее.

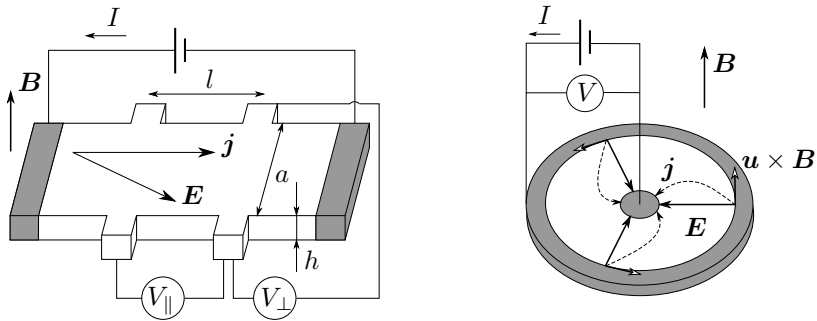


Рис. 3.5. Две схемы для исследования влияния магнитного поля на проводящие свойства: мостик Холла (слева) и диск Корбино (справа)

**Мостик Холла.** В данной схеме (см. рис. 3.5, слева) ток вынуждают течь по оси  $x$  вдоль плоской пластинки (ширина пластинки  $a$ , толщина  $h$ , длина  $l$ ). Сила Лоренца, действующая со стороны перпендикулярного пластинке магнитного поля, «прибавляет» носители заряда к краям образца, что создаёт холловское электрическое поле, компенсирующее эту силу. Поперечное напряжение между краями пластинки (*холловское*

напряжение) равно  $U_{\perp} = E_y a$ , где, согласно уравнению (3.25):

$$E_y = \rho_{yx} \cdot j_x = \frac{j_x B}{nq}.$$

Плотность тока, текущего через образец, равна  $j_x = I/ah$ , где  $I$  — полный ток,  $ah$  — поперечное сечение. Таким образом, для холловского напряжения имеем

$$U_{\perp} = \frac{B}{nqh} \cdot I = R_H \cdot \frac{B}{h} \cdot I, \quad (3.27)$$

где константу

$$R_H = \frac{1}{nq} \quad (3.28)$$

называют **постоянной Холла**. Знак постоянной Холла определяется знаком заряда носителей.

Продольная напряжённость электрического поля равна

$$E_x = \rho_{xx} \cdot j_x = j_x / \sigma_0,$$

и падение напряжения  $U_{\parallel} = E_x l$  вдоль пластинки определяется омическим сопротивлением образца  $R_0 = l/(\sigma_0 ah)$ :

$$U_{\parallel} = IR_0. \quad (3.29)$$

Интересно отметить, что несмотря на то, что тензор проводимости (3.26) явно зависит от  $B$ , продольное сопротивление образца в данной геометрии от магнитного поля *не зависит*.

**Диск Корбино.** В схеме Корбино (см. рис. 3.5, справа) электрическое поле направлено по радиусу системы. В перпендикулярном диску магнитном поле ток вынужден протекать под углом к электрическому полю, то есть линии тока представляют собой *спирали*. Дополнительное (холловское) электрическое поле при этом не возникает.

Ввиду симметрии системы вклад в полный ток даёт только *радиальная* компонента плотности тока  $j_r = \sigma_r E_r$ . Полный ток равен  $I = j_r \cdot 2\pi r h$ , где  $r$  — радиус диска,  $h$  — его толщина. Если в системе присутствует один тип носителей, то проводимость в радиальном направлении  $\sigma_r$  соответствует компоненте  $\sigma_{xx}$  тензора (3.26):

$$\sigma_r = \frac{\sigma_0}{1 + (\mu B)^2}, \quad (3.30)$$

где  $\mu$  — подвижность носителей.

Напряжение между центром и краем диска равно

$$U = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{1}{\sigma_r} \int_{r_1}^{r_2} \frac{I}{2\pi r h} dr = \frac{\sigma_r}{\sigma_0} R_0 I,$$

где  $R_0 = \frac{1}{\sigma_0 2\pi r h} \ln \frac{r_2}{r_1}$  — сопротивление диска в отсутствие магнитного поля. Поэтому закон Ома в схеме Корбино можно записать как

$$U = IR_0 (1 + (\mu B)^2). \quad (3.31)$$

Таким образом, в данной схеме появляется зависимость сопротивления образца от магнитного поля. Причина — в геометрии системы: магнитное поле искривляет линии тока, делая их длиннее. Такой эффект называют **геометрическим магнетосопротивлением**.

**Замечание.** Отметим одну экспериментальную особенность обсуждаемых систем. Измерения в мостике Холла представляют собой *четырёх-контактные* измерения, то есть два контакта используются для задания тока через образец, а два других служат для измерения падения напряжения. Вольтметр обладает большим сопротивлением (ток через него практически не течёт), поэтому измеряемое падение напряжения не зависит от свойств контактов, а определяется только свойствами материала.

Измерения же на диске Корбино проводятся по *двухконтактной* схеме, при этом сопротивление образца суммируется с сопротивлениями контактов. Поэтому исключительно важно иметь низкоомные контакты к образцу, сопротивлением которых можно пренебречь. Для наблюдения магнетосопротивления выбирают систему с большой подвижностью носителей (как правило, это полупроводник с низкой эффективной массой электронов, например, InSb).

#### 4.3. Магнетосопротивление

**Магнетосопротивлением** называют зависимость сопротивления образца от величины приложенного магнитного поля.

На примере мостика Холла мы видим, что для *изотропных* веществ с *одним* типом носителя эффект магнетосопротивления как таковой *отсутствует*. Зависимость  $R(B)$  может проявляться только в силу геометрических эффектов, как в примере с диском Корбино.

Однако в общем случае магнетосопротивление материалов может быть отлично от нуля и в схеме Холла. Это имеет место, если *диагональные* компоненты тензора сопротивления  $\hat{\rho}$  зависят от магнитного поля. Это может быть следствием следующих причин:

1. Система является *анизотропной* и в отсутствие магнитного поля, то есть в разных направлениях  $(x, y, z)$  токопроводящие свойства различны.
2. Система является *многокомпонентной*. Например, в полупроводниках часто одновременно существуют электроны и дырки, концентрации  $(n_e$  и  $n_h)$  и подвижности  $(\mu_e$  и  $\mu_h)$  которых в общем случае различаются.

3. Существуют *квантовые эффекты* в проводимости, которые приводят к тому, что *подвижность* зависит от магнитного поля. Например, увеличение намагниченности ферромагнетика при возрастании магнитного поля сопровождается уменьшением числа доменов; стенки доменов рассеивают движущиеся заряды, поэтому с ростом намагниченности подвижность носителей возрастает.

**Пример 1.** Рассмотрим простейший пример многокомпонентной системы, в которой возникает эффект магнетосопротивления. Выкладки даже в двух компонентной системе резко усложняются, поэтому мы приведём лишь схему вывода.

Пусть в среде имеется два типа носителей — электроны и дырки. Система уравнений, которым подчиняются носители, по-прежнему описывает баланс сил Лоренца и трения (см. (3.24)) для каждого компонента в отдельности:

$$\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}_e}{\mu_e} = 0, \quad \mathbf{E} + \mathbf{u}_h \times \mathbf{B} - \frac{\mathbf{u}_h}{\mu_h} = 0. \quad (3.32)$$

Повторяя вывод (3.26) для каждого сорта носителей отдельно, можно получить связь между напряжённостью поля и плотностями токов этих носителей:

$$\mathbf{j}_e = -en_e \mathbf{u}_e = \hat{\sigma}_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{j}_h = en_h \mathbf{u}_h = \hat{\sigma}_h \mathbf{E}. \quad (3.33)$$

Тензоры проводимости будут определяться выражением (3.26) с индексами, соответствующими типу носителя. Полная плотность тока

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_h = \hat{\sigma}_e \mathbf{E} + \hat{\sigma}_h \mathbf{E},$$

поэтому тензор проводимости среды

$$\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_e + \hat{\sigma}_h.$$

Обращая  $\hat{\sigma}$ , можно получить тензор удельного сопротивления:  $\hat{\rho} = (\hat{\rho}_e^{-1} + \hat{\rho}_h^{-1})^{-1}$ .

Для справки приведём ответы. В опыте с мостиком Холла продольная компонента электрического поля равна

$$E_{\parallel} = \frac{B^2(\mu_h^2 \sigma_e + \mu_e^2 \sigma_h) + \sigma_e + \sigma_h}{B^2(\mu_h \sigma_e + \mu_e \sigma_h)^2 + (\sigma_e + \sigma_h)^2} j. \quad (3.34)$$

Видно, что удельное сопротивление в этом случае сложным образом зависит от  $B$ , то есть имеет место эффект *магнетосопротивления*. Однако в слабых полях ( $\mu_{e,h} B \ll 1$ ) эффект довольно мал: поправка квадратична по  $\mu B$ . При  $B = 0$  имеем просто:  $E_{\parallel} = j/(\sigma_e + \sigma_h)$ .

Поперечная компонента (*холловское поле*) также имеет сложную зависимость от  $B$ . Приведём ответ для константы Холла в пределе малой замагниченности ( $\mu_{e,h} B \ll 1$ ):

$$R_H = \frac{\mu_h^2 n_h - \mu_e^2 n_e}{e(\mu_h n_h - \mu_e n_e)^2}. \quad (3.35)$$

## Литература

1. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — Гл. 2., Гл. 7.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 86, 95, 98, 100.
3. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2007. — §§ 8.1–8.3.

### Работа 3.3.1

## Измерение удельного заряда электрона методами магнитной фокусировки и магнетрона

**Цель работы:** определение отношения заряда электрона к его массе методом магнитной фокусировки и методом магнетрона.

**В работе используются:** А) электронно-лучевая трубка (с блоком питания), соленоид, регулируемый источник постоянного тока, вольтметр, магнитометр (миллитесламетр или милливеберметр); Б) электронная лампа с цилиндрическим анодом, регулируемый источник постоянного тока, соленоид, вольтметр, два амперметра.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с теоретическим введением к разделу (п. 1).

### А. Метод магнитной фокусировки

В постоянном однородном магнитном поле траектории заряженных частиц представляют собой спирали, радиус которых определяется формулой (3.4). За время  $T_B = \frac{2\pi r_B}{v_\perp}$ , которое можно назвать **циклотронным периодом**, заряд сместится вдоль магнитного поля на расстояние  $L$  (шаг спирали):

$$L = v_\parallel T_B = \frac{2\pi v \cos \alpha}{\frac{e}{m} B}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — угол между вектором скорости  $\mathbf{v}$  и направлением поля  $\mathbf{B}$ . Если углы малы,  $\alpha \ll 1$ , то  $\cos \alpha \approx 1$  и

$$L \approx \frac{2\pi v}{\frac{e}{m} B}. \quad (2)$$

Таким образом, при малых углах расстояние  $L$  не зависит от  $\alpha$ , так что все электроны, вышедшие из одной точки, после одного оборота вновь соберутся в одной точке — *сфокусируются*. Как следует из (2), индукция поля  $B$ , при которой точка фокусировки отстоит от точки вылета на расстоянии  $L$ , определяется величиной  $e/m$  — **удельным зарядом частицы**.

### Экспериментальная установка

Основной частью установки является электронный осциллограф, трубка которого вынута и установлена в длинном соленоиде, создающем магнитное поле, направленное вдоль оси трубки. Вылетая с катода, электроны имеют, вообще говоря, разные начальные скорости, соответствующие тепловой энергии  $\sim 0,1$  эВ. Затем эмитированные катодом электроны ускоряются большой анодной разностью потенциалов  $U_A \sim 1$  кВ и

пропускаются через две диафрагмы, благодаря чему получается пучок частиц с малой расходимостью ( $\Delta\alpha \ll 1$ ) и малым разбросом продольных скоростей около значения

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2eU_A}{m}},$$

следующего из закона сохранения энергии.

В магнитном поле соленоида коллимированные электроны будут двигаться по спиральям практически с одним и тем же шагом  $L$  (см. формулу (1)) и, следовательно, будут встречаться вновь, пересекая ось пучка на расстояниях  $nL$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . В этих точках сечение пучка будет наименьшим, и при изменении магнитного поля изображение пучка на экране будет периодически стягиваться в ярко светящуюся точку. Таким образом, удельный заряд может быть получен из соотношения

$$\frac{e}{m} = \frac{8\pi^2 U}{L^2} \cdot \frac{n^2}{B_{\Phi}^2(n)}. \quad (3)$$

Эта формула и лежит в основе экспериментального измерения удельного заряда электрона *методом магнитной фокусировки*.

Анодное напряжение, определяющее продольную скорость электронов, измеряется вольтметром. Магнитное поле в соленоиде создаётся постоянным током (рис. 1), величина которого задаётся источником питания постоянного тока и измеряется амперметром А источника. Ключ К служит для изменения направления поля в соленоиде.

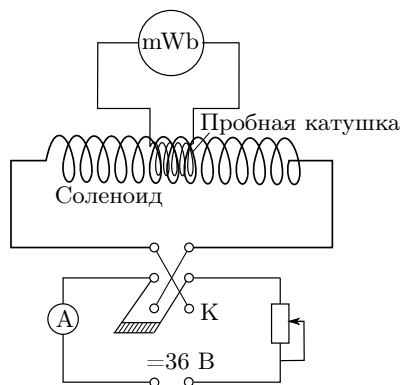


Рис. 1. Схема измерений по методу магнитной фокусировки

Величина магнитного поля определяется с помощью магнитометра, датчик которого расположен внутри соленоида. В качестве магнитометра может использоваться *милливеберметр (флюксметр)*. Датчиком

милливеберметра является измерительная катушка, намотанная на один каркас с соленоидом. Таким образом измеряется изменение магнитного потока, пронизывающего измерительную катушку. Описание милливеберметра и правила работы с ним приведены на с. 192. Альтернативно индукция поля может измеряться *миллитесламетром* (*датчиком Холла*).

На точность результатов может влиять внешнее магнитное поле, особенно продольное. Оно не вызывает размытия фокуса, но изменяет величину фокусирующего поля. Присутствие внешнего магнитного поля проще всего обнаружить с помощью переполусовки соленоида: при изменении направления поля показания милливеберметра будут отличаться, но их полусумма не зависит от наличия постоянного продольного поля.

Измерение магнитного поля производится в предварительных опытах: при отключенном ключе К устанавливается связь между силой тока, протекающего через соленоид, и индукцией магнитного поля в соленоиде. По измеренным значениям строится *калибровочный график  $B(I)$* , который используется при обработке результатов основных измерений для определения индукции магнитного поля по известному току.

## ЗАДАНИЕ

Измерьте значения магнитных полей, при которых происходит фокусировка электронного пучка. По результатам измерений рассчитайте удельный заряд электрона  $e/m$ .

1. Ознакомьтесь с назначением ручек источника питания и с устройством используемого в работе магнитометра.
2. Проведите измерение калибровочной кривой  $B(I)$  — зависимости магнитного поля в соленоиде от тока в его обмотке. В случае использования установки с милливеберметром поле  $B$  вычисляется через поток  $\Phi = BSN$ , пронизывающий пробную катушку (значение параметра  $SN$  катушки указано на установке).

Проведите измерения во всём доступном диапазоне изменения тока при двух направлениях тока через обмотку.

3. При минимальном или нулевом токе через соленоид включите осциллограф и подайте напряжение с внешнего генератора на вертикальный вход усилителя. На экране появится светящаяся линия.
4. Постепенно увеличивая ток через соленоид, найдите значение тока  $I_\Phi$ , при котором линия в первый раз стягивается в точку (сила тока  $I_\Phi$  зависит от ускоряющего напряжения  $U_A$ , которое в свою очередь пропорционально яркости луча, поэтому *не следует менять настройку яркости до конца измерений*).

Продолжая увеличивать ток, получите зависимость  $I_{\Phi}(n)$  от порядкового номера фокуса  $n$ .

5. Повторите измерения  $I_{\Phi}(n)$  для обратного направления магнитного поля в соленоиде.
6. Запишите значение ускоряющего напряжения  $U_A$ , длину трубки  $L$  и характеристики приборов.
7. Установите регуляторы источника питания на минимум и выключите его. Выключите осциллограф.

### Обработка результатов

8. Постройте калибровочный график  $B(I)$ .
9. Пользуясь графиком  $B(I)$ , определите усреднённые значения  $B_{\Phi}$  для каждого фокуса и постройте график зависимости  $B_{\Phi}(n)$  фокусирующего поля от номера  $n$ . Используйте наклон графика для расчёта  $e/m$  с помощью формулы (3).
10. Оцените погрешности и сравните результат с табличным.

### Б. Измерение $e/m$ методом магнетрона

В так называемом *методе магнетрона* отношение  $e/m$  измеряется на основе исследования движения электрона в скрещенных (перпендикулярных друг другу) электрическом и магнитном полях. Название метода связано с тем, что такая конфигурация полей реализуется в *магнетронах* — генераторах электромагнитных колебаний сверхвысоких частот.

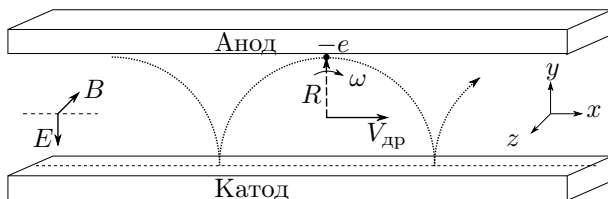


Рис. 2. Движение заряда в скрещенных полях (без начальной скорости)

Для уяснения идеи метода магнетрона рассмотрим вначале упрощённую задачу о движении заряда в «плоском магнетроне». Пусть имеется плоский конденсатор, в пространстве между пластинами которого создан высокий вакуум (вакуумный диод). Поместим его в однородное магнитное поле (например, внутрь соленоида) так, что  $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$  (рис. 2). При этом отрицательная пластина конденсатора играет роль катода, положительная — анода. Если бы магнитного поля не было, то все электроны, вылетевшие без начальной скорости из катода, попадали бы на



анод. При наличии же магнитного поля траектории электронов искривляются, вследствие чего при достаточно большом  $B$  ни один электрон не достигнет анода. Таким образом, при заданном напряжении  $V$  между пластинами существует некоторое критическое значение магнитной индукции  $B_{\text{кр}}(V)$ , при котором траектории касаются поверхности анода. Если  $B < B_{\text{кр}}$ , то все электроны достигают анода, и ток через магнетрон имеет то же значение, что и без магнитного поля. Если же  $B > B_{\text{кр}}$ , то электроны не достигают анода, и ток через вакуумный диод равен нулю.

Рассчитаем критическое магнитное поле для плоского конденсатора. Движение электрона будет иметь характер электрического дрейфа. Если начальная скорость равна нулю (начальные условия  $x(0) = y(0) = 0$ ,  $v_x(0) = v_y(0) = 0$ ), то, как следует из уравнений (3.5), траектория частицы будет *циклоидой*:

$$x = Vt - R \sin \omega_B t, \quad y = R(1 - \cos \omega_B t), \quad (4)$$

где  $V = E/B$  — дрейфовая скорость,  $R = V/\omega_B = Em/(eB^2)$ . Касание анода происходит при  $2R = h$  ( $h$  — расстояние между анодом и катодом). Этому значению соответствует критическое поле

$$B_{\text{кр}} = \frac{\sqrt{2U}}{h\sqrt{e/m}}, \quad (5)$$

где  $U = Eh$  — напряжение между пластинами. Отсюда находим удельный заряд:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{B_{\text{кр}}^2 h^2}. \quad (6)$$

Формула (6) позволяет вычислить  $e/m$ , если при заданном значении напряжения на диоде  $U$  найти такое значение магнитного поля, при превышении которого ток в магнетроне отсутствует.

### Экспериментальная установка

В данной работе движение электронов происходит в кольцевом пространстве, ограниченном катодом и анодом двухэлектродной электронной вакуумной лампы (рис. 3). Нить накала лампы (катод) располагается вдоль оси цилиндрического анода, так что электрическое поле между катодом и анодом имеет *радиальное* направление. Лампа помещается внутри соленоида, создающего магнитное поле, *параллельное оси* лампы.

Таким образом, реализуется геометрия скрещенных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ . Поскольку поле  $\mathbf{E}$  в данном случае не является однородным (оно зависит от расстояния до оси), траектории частиц будут несколько отличаться от рассмотренного выше плоского случая. Тем не менее все качественные

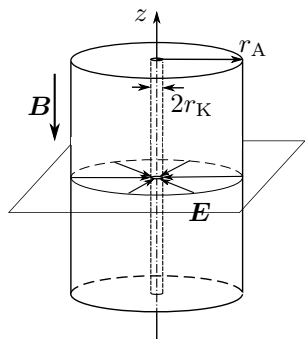


Рис. 3. Схема устройства двух-электродной лампы

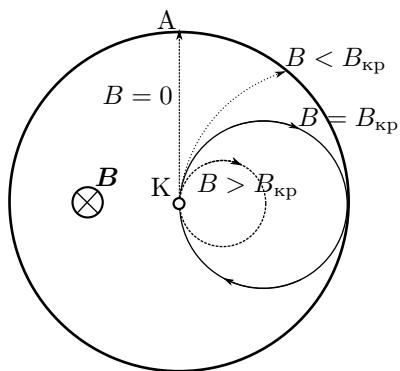


Рис. 4. Траектории электронов, вылетающих из катода, при разных значениях индукции магнитного поля

особенности траектории сохраняются, а выражение для критического поля будет отличаться от (6) только численным коэффициентом порядка единицы. Подробно задача о движении электронов в такой лампе рассмотрена в Приложении к работе, где получено следующее выражение для удельного заряда:

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_A}{B_{кр}^2 r_A^2}, \quad (7)$$

где  $r_A$  — радиус анода.

До сих пор мы рассматривали идеальный случай: при  $B < B_{кр}$  все электроны без исключения попадают на анод, а при  $B > B_{кр}$  все они возвращаются на катод, не достигнув анода. Анодный ток  $I_A$  с увеличением магнитного поля изменялся бы при этом так, как это изображено штриховой линией на рис. 5. В реальных условиях невозможно обеспечить полную коаксиальность анода и катода, вектор индукции магнитного поля всегда несколько наклонён по отношению к катоду, магнитное поле не вполне однородно и т. д. Всё это приводит к сглаживанию кривой  $I_A(B)$  (сплошная линия на рис. 5). Однако в хорошо собранной установке перелом функции  $I_A(B)$  остаётся достаточно резким и может быть использован для измерения  $e/m$ .

Схема установки изображена на рис. 6. Анод лампы состоит из трёх немагнитных металлических цилиндров одинакового диаметра. Два крайних цилиндра электрически изолированы от среднего небольшими зазорами и используются для устранения краевых эффектов на торцах среднего цилиндра, ток с которого используется при измерениях. В качестве катода используется тонкая (диаметр  $2r_K = 50$  мкм) натянутая вольфрамовая проволока, расположенная по оси всех трёх ци-

линдров анодной системы. Катод разогревается проходящим через него переменным током (*лампа прямого накала*), создаваемым стабилизированным источником питания. На анод лампы подаётся постоянное напряжение от регулируемого источника, измеряемое вольтметром  $V_A$ . Ток  $I_A$  через среднюю секцию анода измеряется с помощью миллиамперметра.

Лампа закреплена в соленоиде. Ток  $I_C$ , проходящий через соленоид, подаётся от независимого источника и измеряется амперметром. Индукция магнитного поля в соленоиде рассчитывается по току, протекающему через обмотку соленоида. Коэффициент пропорциональности между ними указан на установке.

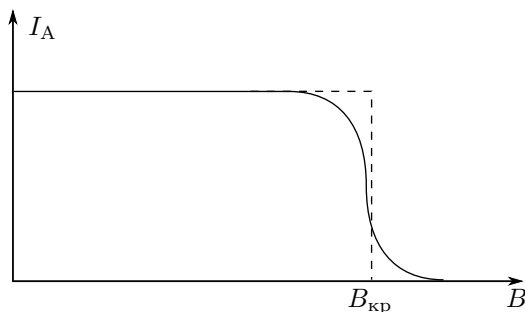


Рис. 5. Зависимость анодного тока от индукции магнитного поля в соленоиде

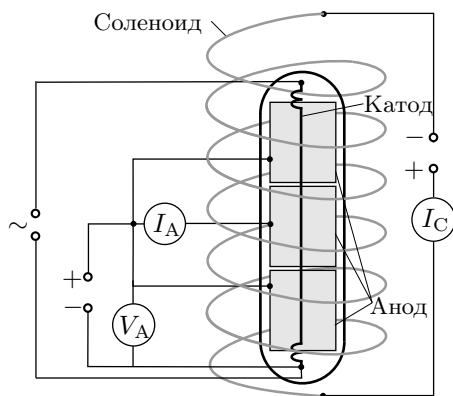


Рис. 6. Схема измерительной установки

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость анодного тока от магнитного поля в соленоиде при различных напряжениях на аноде лампы. По результатам измерений рассчитать удельный заряд электрона.

1. Установите минимальный потенциал  $U_A$  на аноде лампы, рекомендуемый в описании установки. Измерьте зависимость анодного тока  $I_A$  от тока через соленоид  $I_C$ . В области резкого изменения тока экспериментальные точки должны располагаться чаще (см. рис. 5).
2. Измерьте аналогичные зависимости  $I_A(I_C)$  для 6–8 значений анодного напряжения  $U_A$  в диапазоне, указанном в описании установки.
3. Запишите параметры установки и характеристики приборов.
4. Установите регуляторы источников питания на минимум и отключите источники от сети.

### Обработка результатов

5. Постройте семейство зависимостей анодного тока от магнитного поля  $I_A(B)$  для всех значений  $U_A$ .
6. По участкам графика с максимальным наклоном для каждого значения  $U_A$  определите критическое значение индукции магнитного поля  $B_{кр}$ .
7. Постройте график зависимости  $B_{кр}^2$  от  $U_A$ . Убедитесь, что зависимость является линейной. Используя формулу (6), по угловому коэффициенту полученной прямой определите удельный заряд электрона  $e/m$ .
8. Оцените погрешности. Сравните результат с табличным.

### Контрольные вопросы

1. Что такое циклотронная частота и ларморовский радиус?
2. Что такое дрейф в скрещенных полях? Чем определяется и куда направлена дрейфовая скорость?
3. Что представляет собой траектория движения частицы без начальной скорости в однородных скрещенных электрическом и магнитном полях?
4. При каких условиях возможна фокусировка пучка электронов внешним магнитным полем?
5. Получите выражение для критического магнитного поля  $B_{кр}$  в методе магнетрона с плоскими электродами.
6. Объясните принцип работы электронно-лучевой трубки осциллографа.

7. Объясните принцип работы милливееберметра.
8. Для чего в методе магнетрона используется анод из трёх разделённых цилиндров?
9. Найдите распределение электрического поля  $E(r)$  и потенциала  $\varphi(r)$  в зависимости от расстояния  $r$  до оси в лампе, используемой в методе магнетрона.

### Литература

1. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — §§7.1, 7.2.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 86, 89.
3. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003, §§ 181–184.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Движение электрона в цилиндрическом магнетроне

Рассмотрим траекторию электронов, движущихся в магнетроне. Воспользуемся цилиндрической системой координат: будем характеризовать положение точки расстоянием от оси цилиндра  $r$ , полярным углом  $\theta$  и смещением вдоль оси системы  $z$ .

Электрическое поле в цилиндрическом конденсаторе магнетрона имеет только радиальную компоненту. Магнитное поле  $B$ , созданное внешним соленоидом, однородно и направлено по оси  $z$ .

В такой геометрии все силы, действующие на заряды, лежат в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ . Поэтому движение вдоль  $z$  является равномерным: ( $v_z = \text{const}$ ).

Рассмотрим движение в плоскости, перпендикулярной оси  $z$ . Представим скорость частицы как сумму радиальной и угловой компонент:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}.$$

Применим к движению электрона уравнение моментов в проекции на  $z$ :  $dL_z/dt = M_z$ . Здесь  $L_z = mr^2\dot{\theta}$  — момент импульса электрона. Момент сил создаётся только магнитной составляющей силы Лоренца и равен  $M_z = ev_r Br = eBr\dot{r}$ . Таким образом, имеем

$$\frac{d}{dt} (r^2\dot{\theta}) = eBr \frac{dr}{dt}. \quad (1)$$

Интегрируя (1), найдём

$$r^2\dot{\theta} + C = \frac{eBr^2}{2m}. \quad (2)$$

Здесь  $C$  — постоянная интегрирования, которую следует определить из начальных условий. В начале движения радиус  $r$  совпадает с радиусом катода, поэтому мала правая часть (2). Электроны вылетают из катода с небольшой скоростью, так что  $r^2\dot{\theta}$  в начальный момент также мало. Видно, что в этих приближениях можно положить  $C = 0$ . Тогда уравнение (2) приобретает простой вид:

$$\dot{\theta} = \frac{eB}{2m} = \frac{1}{2}\omega_B. \quad (3)$$

Радиальное движение электрона можно описать, используя закон сохранения энергии. Поскольку магнитное поле работы не совершает, имеем

$$eU(r) = m \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} = \frac{m}{2} \left[ \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \left( r \frac{eB}{2m} \right)^2 \right], \quad (4)$$

где  $U(r)$  — распределение потенциала в цилиндрическом конденсаторе (см. контрольный вопрос 9 выше). Уравнение (4) полностью определяет радиальное движение электрона. В общем случае его решение может быть найдено численно.

Для определения максимального радиуса траектории достаточно положить  $dr/dt = 0$ . Тогда из (4) находим связь удельного заряда и критического магнитного поля, при котором радиус траектории равен радиусу анода  $r_{\max} = r_A$ :

$$\frac{e}{m} = \frac{8U_A}{r_A^2 B_{\text{кр}}^2}. \quad (5)$$

Полученная формула отличается от плоского случая (6) множителем 4.

### Работа 3.3.2

## Исследование вольт-амперной характеристики вакуумного диода

**Цель работы:** определение удельного заряда электрона на основе закона «трёх вторых» для вакуумного диода.

**В работе используются:** вакуумная лампа с цилиндрическим анодом; амперметр; многопредельные микроамперметр и вольтметр постоянного тока; стабилизированные источники постоянного тока и постоянного напряжения.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с теоретическим введением к разделу (п. 2).

В работе исследуется зависимость величины тока, проходящего через вакуумный диод, от напряжения на нём (положительная ветвь вольт-амперной характеристики). Наибольший интерес представляет та область значений положительного напряжения на диоде, для которой пространственный заряд (электронное облако) в лампе существенно влияет

на распределение электрического поля между катодом и анодом (*режим пространственного заряда*). Электрическое поле этого заряда «экранирует» поле вблизи катода, из-за чего лишь незначительная часть электронов, способных преодолеть энергетический барьер («работу выхода») и высвобождаемых из катода, создаёт ток через диод.

Как показано во введении к разделу, величина тока в этом режиме пропорциональна напряжению на диоде в степени  $3/2$ :

$$I \propto U^{3/2} \quad (1)$$

(«закон трёх вторых» Чайлда–Ленгмюра). Коэффициент пропорциональности в этой формуле зависит от удельного заряда электрона  $e/m$ , что позволяет измерить его величину по вольт-амперной характеристике диода.

В отличие от задачи о плоском диоде, рассмотренной в п. 2, в данной работе используется диод цилиндрической формы. Вывод соотношений и основные результаты п. 2 при этом сохраняются, однако в коэффициенте пропорциональности закона  $3/2$  появляется дополнительный множитель, зависящий от размера электродов.

**Обобщение на случай цилиндрической геометрии.** Рассмотрим подробнее задачу о цилиндрическом вакуумном диоде. Пусть катод имеет форму нити радиусом  $r_K$ , а анод — форму полого цилиндра радиусом  $r_A$  (рис. 1). Между катодом и анодом имеется разность потенциалов  $U$ . Будем считать, что длина диода  $l$  намного превосходит его радиальные размеры ( $l \gg r_A$ ), так что электрическое поле можно считать строго радиальным.

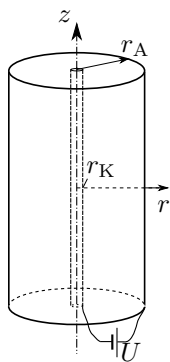


Рис. 1. Расположение электродов в диоде

В этом случае вместо уравнения (3.7) для электрического потенциала  $\varphi(r)$  необходимо записать уравнение Пуассона в цилиндрических координатах:

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) = -\frac{r\rho}{\varepsilon_0}, \quad (2)$$

где  $\rho(r)$  — объёмная плотность заряда, зависящая от расстояния до оси. Граничные условия возьмём в виде

$$\varphi(r_K) = 0, \quad \varphi(r_A) = U. \quad (3)$$

В стационарном случае полный ток, пересекающий цилиндрическую поверхность радиуса  $r_K \leq r \leq r_A$ , постоянен:

$$I = -2\pi r \rho v l = \text{const}. \quad (4)$$

Здесь  $v$  — скорость электронов, набираемая на пройденной ими разности потенциалов:

$$\frac{mv^2}{2} = e(\varphi(r) - \varphi(r_K)). \quad (5)$$

(Напомним, что начальной скоростью вылета электронов из катода мы пренебрегаем,  $mv_0^2/2 \ll eU$ . Однако при малых напряжениях  $U$  вклад начальной скорости может оказаться существенным, и «закон 3/2» не будет выполняться.)

Исключая с помощью (4) и (5) скорость  $v$  и плотность  $\rho$  из уравнения (2), находим (ср. с (3.9)):

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 l} \sqrt{\frac{m}{2e\varphi}}. \quad (6)$$

Таким образом, функция  $\varphi(r)$  может быть получена как решение дифференциального уравнения второго порядка. Дополнительным граничным условием для него является равенство нулю электрического поля на катоде, следующее из *неограниченности эмиссионной способности* катода (см. обсуждение в п. 2.1 введения к разделу):

$$E(r_K) = \left. \frac{d\varphi}{dr} \right|_{r=r_K} = 0. \quad (7)$$

Отметим, что значение тока  $I$  в правой части уравнения (6) не является независимой величиной и определяется из заданных граничных условий на  $\varphi(r)$ .

Уравнение (6) является нелинейным дифференциальным уравнением, общее решение которого не выражается в квадратурах. Однако даже не выписывая решения (6), можно показать, что «закон 3/2» для цилиндрического диода выполняется. Воспользуемся для этого соображениями *физического подобия*. Пусть нам известно решение  $\varphi_0(r)$  при некотором анодном напряжении  $U_0$ , для которого ток оказался равным  $I_0$ . Сделаем в уравнении (6) замену

$$\varphi(r) = k\varphi_0(r), \quad I = k^{3/2}I_0,$$

где  $k$  — произвольная положительная константа. Получим

$$k \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_0}{dr} \right) = \frac{k^{3/2}I_0}{2\pi\epsilon_0 l} \sqrt{\frac{m}{2ek\varphi_0}}.$$

Видно, что коэффициент  $k$  в левой и правой частях сокращается, так что вид уравнения остаётся неизменным. Граничное условие (7) при такой замене останется прежним, а вместо (3) получим  $\varphi(r_A) = kU_0$ . Следовательно, функция  $\varphi(r) = k\varphi_0(r)$  является решением задачи для тока  $I = kI_0$ . Поскольку  $\varphi(r_A) = U$ , исключая множитель  $k$ , приходим к соотношению

$$I = I_0 \left( \frac{U}{U_0} \right)^{3/2}, \quad (8)$$



что и представляет собой содержание «закона  $3/2$ ». Его применимость не зависит от формы или размера электродов и ограничивается только сделанными предположениями: 1) малость начальных скоростей электронов и 2) равенство нулю электрического поля на поверхности катода.

В пределе  $r_A/r_K \rightarrow \infty$  ( $r_K \rightarrow 0$ ) уравнение (6) имеет аналитическое решение. Подставив в него функцию вида  $\varphi = U \cdot (r/r_A)^\beta$ , найдём, что решение существует при  $\beta = 2/3$  и

$$I = A_0 U^{2/3}, \quad A_0 = \frac{4}{9} \varepsilon_0 \frac{2\pi l}{r_A} \sqrt{\frac{2e}{m}} \quad (9)$$

(ср. с формулой для плоского диода (3.14)). В общем случае исследуемый закон может быть представлен следующим образом:

$$I = \alpha A_0 U^{3/2}, \quad (10)$$

где  $\alpha$  — функция отношения  $r_A/r_K$  ( $\alpha \rightarrow 1$  при  $r_A/r_K \rightarrow \infty$ ), которая может быть найдена численным интегрированием уравнения (6). Результат вычислений представлен на рис. 2.

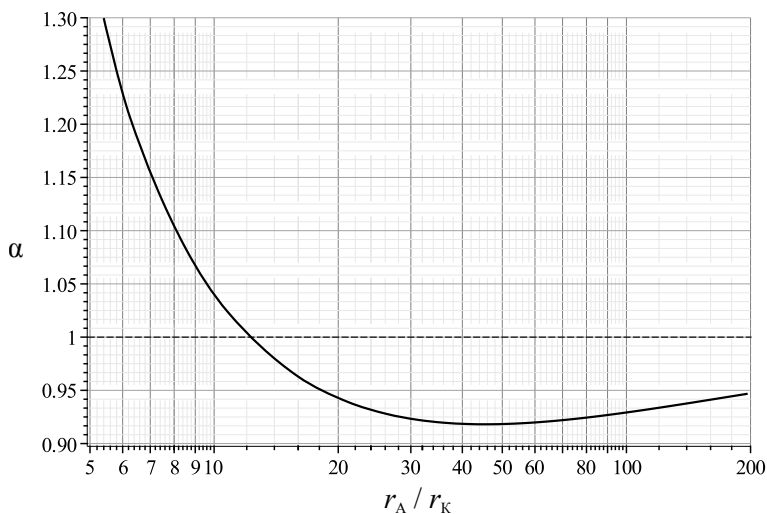


Рис. 2. Зависимость коэффициента  $\alpha$  от отношения радиусов электродов  $r_A/r_K$

### Экспериментальная установка

Исследования проводятся на диоде с косвенным накалом (ток пропускается через расположенную вблизи катода *нить накала*). Радиусы катода  $r_K$ , анода  $r_A$ , а также длина активной области диода  $l$  (участка катода, покрытого оксидным слоем, обеспечивающим термоэмиссию

электронов) указаны на установке. Отметим, что длина  $l$  меньше полной длины анода примерно в два раза. Благодаря этому рабочая часть катода достаточно удалена от его торцов, и следовательно, электрическое поле в активной части диода с хорошей точностью можно считать радиальным.

Схема экспериментальной установки изображена на рис. 3. Для питания цепи накала и анода используются два регулируемых источника напряжения. Ток накала  $I_n$  измеряется амперметром, включённым последовательно с балластным сопротивлением  $R$ . Анодное напряжение  $U$  измеряется вольтметром, анодный ток  $I$  — миллиамперметром. В работе предлагается измерять анодные токи и напряжения в широком диапазоне значений, перекрывающем примерно три порядка величины, поэтому вольтметр и миллиамперметр должны быть оснащены устройствами ручного или автоматического переключения диапазонов измерения.

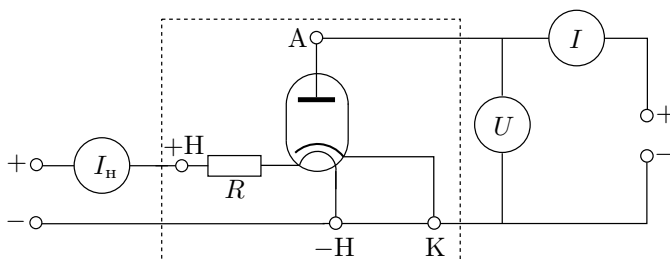


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать вольт-амперные характеристики диода при различных токах накала и по результатам измерений определить удельный заряд электрона.

1. Настройте измерительные приборы согласно прилагаемой к установке инструкции.
2. Перед включением питания установите ручки регулировки источников в минимальное положение.
3. Установите минимальный ток накала диода  $I_n$  и минимальное значение анодного напряжения  $V_A$ , указанные в инструкции. Дайте лампе прогреться в течение 5–10 минут.
4. Проведите подробные измерения вольт-амперных характеристик диода  $I(U)$  во всём допустимом диапазоне изменения напряжений (см. инструкцию к установке).

Всего должно быть измерено не менее 25–30 точек, не менее чем по 8–10 на каждый диапазон изменения напряжений. Как правило, рекомендуется провести и измерения в диапазоне от 0,5 до 50 В, при этом для малых напряжений (до 5 В) измерения рекомендуется проводить с шагом 0,5 В, для средних (до 15 В) — с шагом 1 В, и для более высоких — с шагом 5 В.

- Повторите измерения вольт-амперных характеристик согласно п. 4 при других величинах тока накала (2–3 значений  $I_H$ ).

### Обработка результатов

- По результатам проведенных измерений постройте вольт-амперные характеристики диода в двойном логарифмическом масштабе  $\log I(\log U)$  для каждого тока накала. По графикам определите участки, на которых выполняется «закон  $3/2$ ».
- Используя данные, соответствующие участкам применимости «закона  $3/2$ », постройте для каждого тока накала вольт-амперные характеристики в координатах  $I(U^{3/2})$ . Убедитесь в том, что зависимость является линейной.
- Найдите наклоны прямолинейных участков зависимости  $I(U^{3/2})$ . Используя формулы (9), (10), определите удельный заряд электрона  $e/m$ .
- Оцените погрешность измерений и сравните результат измерений с табличным значением.

### Контрольные вопросы

- Каковы условия применимости «закона  $3/2$ » для вакуумного диода? Почему закон неприменим при малых и больших напряжениях?
- Изобразите качественно зависимость тока диода от напряжения во всем диапазоне положительных напряжений  $U_A > 0$  на аноде.
- Нарисуйте качественные графики распределения потенциала  $\varphi(r)$  между катодом и анодом: а) в режиме объемного заряда; б) в режиме насыщения тока диода. Объясните эти зависимости.
- Как выглядит вольт-амперная характеристика диода при отрицательных напряжениях на аноде,  $U_A < 0$ ?
- Как влияет ток накала катода на ток диода при неизменном напряжении на аноде? Приводит ли это к погрешности измерения  $e/m$ ?
- Получите уравнение (2) из интегральной формы теоремы Гаусса для электрического поля.
- Оцените, при каком токе через диод нельзя пренебрегать действием магнитного поля этого тока на движение электронов.

### Литература

1. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — § 2.4.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 100–102.
3. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003. — § 157.

### Работа 3.3.3

#### Опыт Милликена

**Цель работы:** измерение элементарного заряда методом масляных капель.

**В работе используются:** плоский конденсатор в защитном кожухе, осветитель, измерительный микроскоп, электростатический вольтметр, секундомер, переключатель напряжения, пульверизатор с маслом.

Если элементарный заряд действительно существует, то заряд  $q$  любого тела может принимать только дискретную последовательность значений:

$$q = 0, \pm e, \pm 2e, \pm 3e, \dots \pm ne, \dots, \quad (1)$$

где  $e$  — элементарный заряд. В предлагаемом опыте измеряется заряд небольших капелек масла, несущих всего несколько элементарных зарядов. Сравнивая между собой заряды капель, можно убедиться, что все они по модулю кратны одной и той же величине  $e$ .

Измерение заряда капель осуществляется по их движению в воздухе под действием силы тяжести и вертикального электрического поля. В плоский конденсатор с горизонтальными пластинами через отверстие в верхней пластине впрыскиваются мелкие капельки масла, получаемые с помощью специального распылителя. На пластины конденсатора подаётся постоянное напряжение (порядка нескольких киловольт), которое можно изменять в ходе опыта.

При распылении капельки масла вследствие трения о воздух приобретают случайный по величине и знаку электрический заряд. Попадая в конденсатор, капельки масла движутся в воздухе, опускаясь под действием силы тяжести или поднимаясь под действием электрического поля. Наблюдая капли с помощью микроскопа, можно измерить времена опускания и подъёма капли на фиксированное расстояние, что позволяет определить заряд капли.

**Уравнение движения капли.** Рассмотрим свободное падение капли в воздухе. Второй закон Ньютона для неё имеет вид

$$m \frac{dv}{dt} = mg - F_{\text{тр}}, \quad (2)$$

где  $m$  — масса капли,  $v$  — её скорость,  $g$  — ускорение свободного падения, а  $F_{\text{тр}}$  — сила вязкого трения капли в воздухе. При малых скоростях сила вязкого трения для сферической капли определяется формулой Стокса:

$$F_{\text{тр}} = 6\pi\eta r v = kv, \quad (3)$$

где  $r$  — радиус капли,  $\eta$  — коэффициент вязкости воздуха,  $k = 6\pi\eta r$ .

Подставляя (3) в (2) и интегрируя уравнение при нулевой начальной скорости, найдём зависимость скорости падения от времени:

$$v = v_{\infty} \left(1 - e^{-kt/m}\right). \quad (4)$$

Здесь  $v_{\infty}$  — установившаяся скорость падения, равная

$$v_{\infty} = \frac{mg}{k} = \frac{\frac{4}{3}\pi\rho r^3 g}{6\pi\eta r} = \frac{2}{9} \frac{\rho}{\eta} g r^2. \quad (5)$$

где  $\rho$  — плотность масла.

Как следует из (4), установление скорости происходит за характерное время

$$\tau = \frac{m}{k} = \frac{v_{\infty}}{g} = \frac{2}{9} \frac{\rho}{\eta} r^2. \quad (6)$$

Время установления скорости, таким образом, быстро падает с уменьшением радиуса капли  $r$ . Для мелких капель оно столь малó, что движение капли всегда можно считать равномерным со скоростью  $v_{\infty}$ .

Выражение (5) в этом случае позволяет определить радиус капли, зная время её падения. Обозначая через  $h \approx v_{\infty} t$  путь, пройденный каплей за время  $t$ , найдём

$$r = \sqrt{\frac{9\eta h}{2\rho g t}}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь движение капли при наличии электрического поля плоского конденсатора. Напряжённость поля в конденсаторе равна  $E = U/l$ , где  $l$  — расстояние между пластинами,  $U$  — разность потенциалов между ними. Если капля под действием электрического поля поднимается, то уравнение движения имеет вид:

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{qU}{l} - mg - kv, \quad (8)$$

где  $q$  — заряд капли. Дополнительная константа в правой части не изменяет постоянной времени  $\tau = k/m$ . Новую установившуюся скорость можно найти, положив левую часть (8) равной нулю:

$$v'_\infty = \frac{qU}{kl} - v_\infty. \quad (9)$$

Пусть  $t' = h/v'_\infty$  — время подъёма капли на начальную высоту. Используя равенства (3), (7) и (9), получим окончательную расчётную формулу для заряда капли:

$$q = 9\pi \sqrt{\frac{2\eta^3 h^3}{g\rho}} \cdot \frac{l(t + t')}{Ut^{3/2}t'}. \quad (10)$$

Вывод формулы (10) рекомендуем читателю провести самостоятельно.

### Экспериментальная установка

Схема установки представлена на рис. 1. Масло разбрызгивается пульверизатором. Капли масла попадают в конденсатор  $C$  через небольшое отверстие в верхней пластине. При этом часть из них вследствие трения о воздух приобретает случайный по абсолютной величине и знаку электрический заряд.

Напряжение на пластины подаётся от регулируемого выпрямителя и измеряется вольтметром  $V$ . Ключ  $K$  позволяет менять направление поля в конденсаторе, чтобы можно было работать как с отрицательно, так и с положительно заряженными каплями. При размыкании ключа  $K$  конденсатор разряжается через дополнительное сопротивление  $R \approx 10$  МОм.

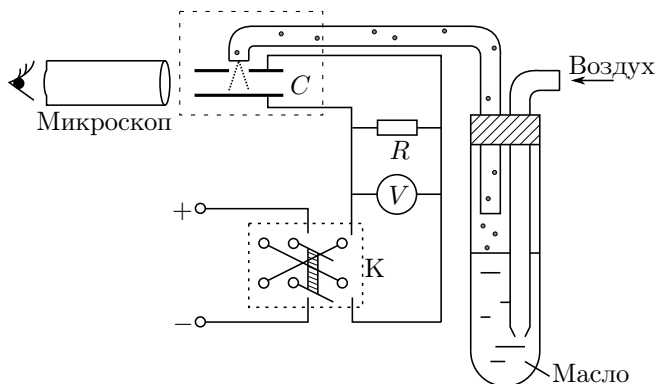


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

Естественно, что слабые электрические силы, действующие на каплю, несущую всего один или несколько электронных зарядов, способны существенно изменить её движение только в том случае, если сама она очень мала. Поэтому опыт производится с мелкими каплями, наблюдения за которыми возможно только с помощью микроскопа.

В фокальной плоскости окуляра измерительного микроскопа виден ряд горизонтальных линий, расстояние между которыми было предварительно определено с помощью объектного микрометра. Для облегчения процесса измерений микроскоп может снабжаться камерой с выводом изображения на монитор ПК. Наблюдая за перемещением капли между линиями, можно определить пройденный каплей путь. Время  $t$  свободного падения капли от одной выбранной линии до другой и время  $t'$  её обратного подъёма, происходящего под действием сил электрического поля, измеряется секундомером.

Легко понять, что дискретность заряда может быть обнаружена лишь в том случае, если погрешность  $\delta q$  в измерении заряда капли существенно меньше абсолютной величины заряда электрона  $e$ . Допустимая относительная погрешность опыта  $\delta q/q$  должна быть поэтому много меньше, чем  $e/q = 1/n$ , где  $n$  — кратность заряда капли элементарному заряду. Этому условию тем легче удовлетворить, чем меньше число  $n$ . В условиях нашего опыта трудно определить  $q$  с точностью лучше 5%. Поэтому необходимо, чтобы заряд капли был меньше  $20e$  (оптимально —  $5e$ ).

Проанализируем погрешность формулы (10). Из всех величин, входящих в формулу (10), на опыте измеряются только  $t$ ,  $t'$  и  $U$ . Напряжение на пластинах может быть измерено достаточно точно, поэтому погрешность измерения  $q$  определяется в основном погрешностью времени  $\delta t$ . При визуальных наблюдениях фактором, определяющим величину погрешности  $\delta t$ , выступает время реакции человека, которое практически не бывает меньше  $\delta t \approx 0,2$  с.

Рассмотрим погрешность функции  $f = \frac{t+t'}{t^{3/2}t'} = \frac{1}{t'\sqrt{t}} + \frac{1}{t^{3/2}}$ , входящей в соотношение (10). Будем считать, что времена  $t$  и  $t'$  измерены независимо и с одинаковой погрешностью  $\delta t' \approx \delta t$ . Пользуясь общей формулой для оценки погрешности косвенных измерений, после преобразований получим

$$\frac{\delta f}{f} \approx \frac{\delta t}{t+t'} \sqrt{\left(\frac{t}{t'}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{t'}{t}\right)^2}. \quad (11)$$

Из соотношения (11) следует, что погрешность будет минимальна, если времена  $t$  и  $t'$  — величины одного порядка:  $t' \sim t$ . В этом случае для погрешности определения заряда имеем

$$\frac{\delta q}{q} \sim \sqrt{\left(\frac{\delta U}{U}\right)^2 + 5 \left(\frac{\delta t}{t+t'}\right)^2}. \quad (12)$$

Абсолютная погрешность в измерении  $q$  будет тем меньше, чем больше суммарное время измерения  $t + t'$  (при условии, что  $t \sim t'$ ). Для увеличения  $t$  и  $t'$  можно было бы увеличить расстояние, проходимое каплями, однако оно ограничено размерами установки. Поэтому необходимо наблюдать *медленно движущиеся капли*, т.е. капли *малого веса*. Время падения  $t$  лёгких капель относительно велико. Чтобы сделать время подъёма  $t'$  также достаточно большим, необходимо использовать относительно небольшие разности потенциалов  $U$ .

С другой стороны, выбор слишком маленьких капель приводит к снижению точности измерений. *Броуновское движение* малых капель существенно влияет на их движение и способно заметно исказить картину их падения и подъёма. Кроме того, размер маленьких капель может существенно меняться в ходе опыта из-за их *испарения*. Также при малых скоростях становятся особенно опасными *конвекционные потоки* воздуха, возникающие при неоднородном нагреве установки (например, от осветителя камеры).

И, наконец, если размер капли приближается к длине свободного пробега молекул воздуха ( $\lambda \sim 10^{-5}$  см), *формула Стокса* (3) для них становится неприменимой. Милликен в своих опытах использовал уточнённый вариант формулы Стокса для капель малого радиуса. Однако в наших условиях эти поправки приводят к искажению значений  $q$  не более чем на 10% и практически не мешают обнаружению дискретности электрического заряда. Поэтому мы рекомендуем использовать формулу Стокса без поправок.

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается определить величину элементарного заряда по измерениям времени свободного падения заряженных капель и времени их подъёма в электрическом поле.

1. Перед началом работы оцените с помощью формулы (10) минимальное напряжение  $U_{\min}$ , которое нужно для подъёма капель, несущих 5 зарядов электрона на высоту  $h = 1$  мм, задав  $t \approx t' \approx 20$  с. Если в дальнейшем для подъёма капель потребуются меньшие напряжения, то соответствующие капли слишком сильно заряжены и для эксперимента непригодны.

Расстояние между пластинами  $\ell$  и плотность масла  $\rho$  указаны на установке. Коэффициент вязкости воздуха  $\eta = 1,85 \cdot 10^{-5}$  Па  $\cdot$  с (при температуре 300 К).

2. Включите осветитель. При этом падающий в камеру свет направлен под углом к оси микроскопа и в объектив не попадает. Поле зрения микроскопа поэтому остаётся тёмным. Капли масла рассеивают свет и выглядят светящимися точками на темном фоне.



Не включая электрическое поле, *слегка* надавите на грушу пульверизатора и наблюдайте за движением облачка масляных капель в поле зрения микроскопа (изображение перевёрнуто).

3. Настройте окуляр микроскопа на резкое изображение делений окулярной шкалы. Затем сфокусируйте объектив на появившиеся в рабочем пространстве капли.
4. Наблюдая за движением капель, следует выбирать капли, время падения которых на  $h = 1$  мм лежит в пределах 10–30 с, и научиться отличать их от более крупных, непригодных для работы. Цена деления окулярной шкалы указана на установке.

В случае отсутствия в составе установки ПК с камерой регулировкой и коммутацией напряжения занята одна рука наблюдателя. Вторая рука управляет секундомером. Запись результатов измерений ( $t$ ,  $t'$  и  $U$ ) ведёт второй экспериментатор. Наблюдатель быстро устаёт, поэтому рекомендуется периодически меняться местами. При наличии ПК работа может быть выполнена одним экспериментатором.

С целью уменьшения ошибок в определении  $t$  и  $t'$  нужно для пуска и остановки секундомера использовать один и тот же признак — всегда нажимать кнопку секундомера либо в тот момент, когда капля скрывается за линией шкалы, либо, наоборот, когда она появляется из-за линии. Рекомендуется следить за каплей, не отрываясь от окуляра микроскопа, так как в противном случае её легко потерять из поля зрения и весь эксперимент придётся повторить.

5. В начале опыта следует позволить капелькам свободно падать 5–10 с при выключенном электрическом поле для того, чтобы наиболее крупные капли успели упасть на нижнюю пластину.

Из оставшихся в поле зрения капель выберите одну и произведите с ней серию измерений, наблюдая её падение под действием силы тяжести и подъём под действием электрического поля. Серия должна состоять из 5–10 измерений  $t$  и такого же числа измерений  $t'$  для одной капли.

6. Необходимо проделать не менее 20 таких серий измерений (для 20 различных капель), каждый раз регистрируя величину  $U$ .

При этом нужно иметь в виду, что заряд капли может измениться во время наблюдений. Если перезарядка произошла при падении вниз, тогда для одной капли получится несколько значений  $q$ .

Если же перезарядка произойдет во время подъёма в электрическом поле, то такой результат необходимо отбросить как непригодный для обработки. Это можно сделать, внимательно наблюдая за движени-

ем капли и отбрасывая опыты, в которых капля изменила скорость подъёма во время измерения.

7. Для оценки погрешности измерений «подвесьте» одну из капель в электрическом поле. Определите соответствующее напряжение, отключите его и измерьте время падения капли на расстояние 2–3 делений шкалы. Поменяв полярность напряжения, верните каплю на прежнее место и снова подвесьте её. Снова запишите напряжение. Повторите процедуру для одной капли несколько раз и оцените из этого опыта заряд капли по формуле (10), полагая время подъёма  $t' = \infty$ . По разбросу результатов ( $\delta U$  и  $\delta t$ ) оцените погрешность измерения заряда этой капли.

### Обработка результатов

8. Для всех результатов измерений рассчитайте значения заряда капли  $q$  (учтите, что в серии измерений с одной каплей её заряд может меняться).
9. Отложите результаты на горизонтальной числовой оси. Убедитесь, что результаты могут быть разбиты на группы, средние значения заряда в которых кратны некоторому наибольшему общему делителю (следует учитывать, что при недостаточном числе измерений наименьший общий делитель может отличаться от  $e$  и быть равным  $2e$ ,  $3e$  и т. д.).
10. Найдите значение элементарного заряда  $e$ . Ответ приведите в системе единиц СИ и в системе СГС.
11. Оцените характерное время релаксации  $\tau$  и расстояние  $s(\tau)$ , на которое смещается капля за это время. Убедитесь в том, что эти величины малы в условиях опыта.
12. Оцените погрешности результатов. Сравните значение элементарного заряда с табличным.

### Контрольные вопросы

1. Почему не следует выбирать капли слишком большого и слишком малого размера?
2. Рассчитайте значение напряжения, соответствующего оптимальным условиям опыта.
3. Нарисуйте график  $v(t)$  зависимости скорости капли в поле силы тяжести от времени и укажите на нём время и путь релаксации.
4. Зная параметры установки, оцените ёмкость конденсатора  $C$  и время его разрядки через сопротивление  $R$  (площадь пластин  $\approx 20 \text{ см}^2$ ).

5. Оцените среднеквадратичную флуктуацию скорости капли.
6. Оцените величину смещения капли из-за броуновского движения за время опыта.
7. Проверьте применимость формулы Стокса, оценив число Рейнольдса для капли. Критическое число Рейнольдса при обтекании сферы  $Re_{кр} \approx 25$ .
8. \*Какие ещё способы измерения заряда электрона вам известны?

### Литература

1. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — § 7.3.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — Гл. V, § 90.
3. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003. — § 178.

### Работа 3.3.4

## Эффект Холла в полупроводниках

**Цель работы:** измерение подвижности и концентрации носителей заряда в полупроводниках.

**В работе используются:** электромагнит с регулируемым источником питания; вольтметр; амперметр; миллиамперметр; милливольтметр или миллитесламетр; источник питания (1,5 В), образцы легированного германия.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с основами элементарной теории движения носителей заряда в металлах и полупроводниках (п. 4 введения к разделу).

В работе изучаются особенности проводимости полупроводников в геометрии *мостика Холла*. Ток пропускается по плоской полупроводниковой пластинке, помещённой в перпендикулярное пластинке магнитное поле. Измеряется разность потенциалов между краями пластинки в поперечном к току направлении. По измерениям определяется *константа Холла*, тип проводимости (*электронный* или *дырочный*) и на основе соотношения (3.28) вычисляется концентрация основных носителей заряда.

### Экспериментальная установка

Электрическая схема установки для измерения ЭДС Холла представлена на рис. 1. В зазоре электромагнита (рис. 1а) создаётся постоянное магнитное поле, величину которого можно менять с помощью регулятора источника питания электромагнита. Ток питания электромагнита измеряется амперметром  $A_1$  (внешним или встроенным в источник).

Направление тока в обмотках электромагнита меняется переключением разъёма  $K_1$ .

Градуировка электромагнита (связь тока с индукцией поля) проводится при помощи милливеберметра (его описание и правила работы с ним приведены на с. 192) или миллитесламетра на основе датчика Холла.

Прямоугольный образец из легированного германия, смонтированный в специальном держателе (рис. 1б), подключается к источнику питания ( $\approx 1,5$  В). При замыкании ключа  $K_2$  вдоль длинной стороны образца течёт ток, величина которого регулируется реостатом  $R_2$  и измеряется миллиамперметром  $A_2$ .

В образце, помещённом в зазор электромагнита, между контактами 3 и 4 возникает разность потенциалов  $U_{34}$ , которая измеряется с помощью вольтметра  $V$ .

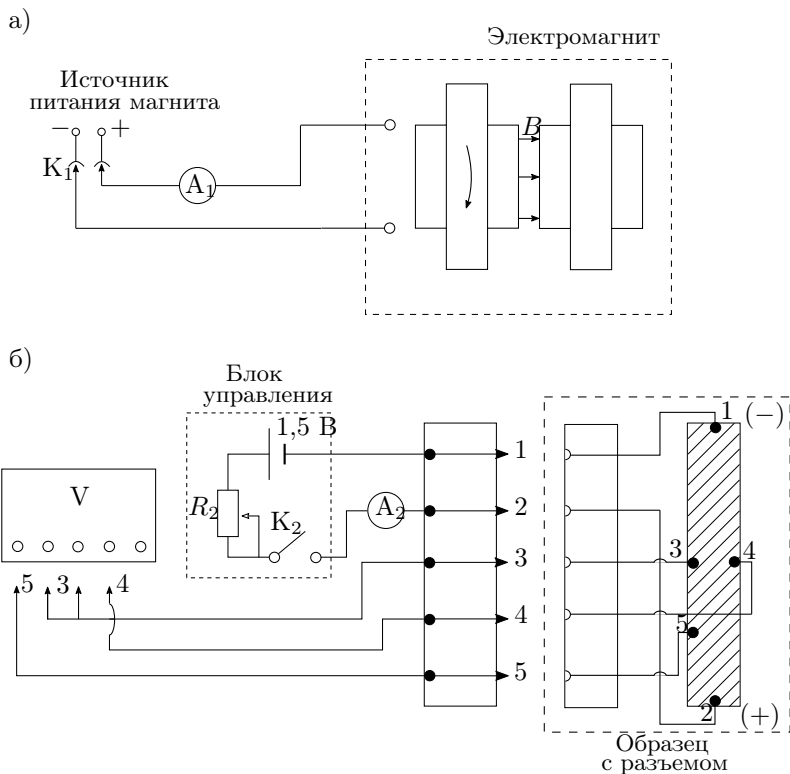


Рис. 1. Схема установки для исследования эффекта Холла в полупроводниках

Контакты 3 и 4 вследствие неточности подпайки могут лежать не на одной эквипотенциали. Тогда напряжение между ними связано не только с эффектом Холла, но и с омическим падением напряжения вдоль пластинки. Исключить этот эффект можно, изменяя направление магнитного поля, пронизывающего образец. При обращении поля ЭДС Холла меняет знак, а омическое падение напряжения остаётся неизменным. Поэтому ЭДС Холла  $U_{\perp}$  может быть определена как половина алгебраической разности показаний вольтметра, полученных для двух противоположных направлений магнитного поля в зазоре:  $U_{\perp} = \frac{1}{2}(U_{34}^{(+)} - U_{34}^{(-)})$ .

Альтернативно можно исключить влияние омического падения напряжения, если при каждом значении тока через образец измерять напряжение между точками 3 и 4 в отсутствие магнитного поля. При фиксированном токе через образец это дополнительное к ЭДС Холла напряжение  $U_0$  остаётся неизменным. От него следует (с учётом знака) отсчитывать величину ЭДС Холла:

$$U_{\perp} = U_{34} - U_0. \quad (1)$$

При таком способе измерения нет необходимости проводить повторные измерения с противоположным направлением магнитного поля.

По знаку  $U_{\perp}$  можно определить характер проводимости — электронный или дырочный. Для этого необходимо знать направление тока в образце и направление магнитного поля.

Измерив ток  $I$  в образце и напряжение  $U_{35}$  между контактами 3 и 5 в отсутствие магнитного поля, можно, зная параметры образца, рассчитать проводимость материала образца по формуле

$$\rho_0 = \frac{U_{35}ah}{Il}, \quad (2)$$

где  $l$  — расстояние между контактами 3 и 5,  $a$  — ширина образца,  $h$  — его толщина.

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость ЭДС Холла от величины магнитного поля при различных значениях тока через образец для определения константы Холла; определить знак носителей заряда и проводимость материала образца.

1. Подготовьте приборы к работе согласно описанию на установке.
2. Проверьте работу цепи питания образца. Ток через образец не должен превышать 1 мА.
3. Установите ручки регулировки источника питания электромагнита в минимальное положение и включите источник. Плавно изменяя ток магнита, определите диапазон его изменения.

4. Измерьте калибровочную кривую электромагнита — зависимость между индукцией  $B$  магнитного поля в его зазоре и током  $I_M$  через обмотки магнита. Магнитное поле измеряется милливеберметром или миллитесламетром (датчиком Холла). Калибровочная кривая должна содержать не менее 15 точек во всём диапазоне изменения токов.

В случае использования милливеберметра измерьте зависимость магнитного потока  $\Phi$ , пронизывающего пробную катушку, находящуюся в зазоре, от тока  $I_M$  ( $\Phi = BSN$ ). Значение  $SN$  (произведение площади сечения контура катушки на число витков в ней) указано на держателе катушки.

5. Вставьте образец в зазор *выключенного* электромагнита и определите напряжение  $U_0$  между холловскими контактами 3 и 4 при минимальном токе через образец ( $I \simeq 0,2$  мА). Это напряжение  $U_0$  вызвано несовершенством контактов 3, 4 и при фиксированном токе через образец остаётся неизменным. Значение  $U_0$  с учётом знака следует принять за начало отсчёта напряжения.
6. Проведите измерение ЭДС Холла: снимите зависимость напряжения  $U_{34}$  от тока электромагнита  $I_M$  (6–8 точек) при фиксированном токе  $I$  через образец.
7. Повторите измерения п. 5 и 6 при 6–8 токах  $I$  через образец (рекомендованные токи указаны в описании установки). Учтите, что при каждом новом токе  $I$  величина  $U_0$  будет иметь своё значение.
8. При максимальном токе через образец проведите измерения  $U_{34}(I_M)$  при обратном направлении магнитного поля.
9. Определите знак носителей заряда в образце. Для этого необходимо знать направление тока через образец, направление магнитного поля и знак ЭДС Холла.

Направление тока в образце показано знаками «+» и «-» на рис. 1. Направление тока в обмотках электромагнита при установке разъёма  $K_1$  в положение 1 показано стрелкой на торце магнита. Знак напряжения  $U_{34}$  показан на дисплее цифрового вольтметра.

Зарисуйте в тетради образец. Укажите на рисунке направления тока, магнитного поля и отклонение носителей. Определите характер проводимости образца (дырочный или электронный).

10. Измерьте удельную проводимость образца. Для этого: удалите держатель с образцом из зазора электромагнита; установите максимальный ток через образец, используемый в предыдущих измерениях; и с помощью вольтметра измерьте падение напряжения между проводниками, подключёнными к точкам 3 и 5 образца.

11. Запишите характеристики приборов и параметры образца, указанные на держателе: длину  $l$  (расстояние между точками 3 и 5), ширину  $a$ , толщину  $h$ .

### Обработка результатов

12. Постройте калибровочный график зависимости  $B(I_M)$ . Используйте эту зависимость для дальнейшего пересчёта (интерполяции) значений поля по измеренным токам  $I_M$ .
13. Рассчитайте ЭДС Холла по формуле (1) и постройте на одном листе семейство характеристик  $U_{\perp}(B)$  при разных значениях тока  $I$  через образец. Убедитесь в линейности зависимостей и определите угловые коэффициенты  $k = dU_{\perp}/dB$  полученных прямых.
14. Постройте график  $k(I)$ . Рассчитайте угловой коэффициент прямой и по формуле (3.27) определите величину постоянной Холла  $R_H$ .
15. Рассчитайте концентрацию  $n$  носителей тока в образце, удельное сопротивление  $\rho_0$  и удельную проводимость  $\sigma_0$  материала.
16. Используя найденные значения концентрации  $n$  и удельной проводимости  $\sigma_0 = 1/\rho_0$ , вычислите подвижность  $\mu$  носителей тока. Ответ представьте в общепринятых для этой величины внесистемных единицах  $[\mu] = \text{см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$  (размерность напряжённости  $[E] = \text{В}/\text{см}$ , скорости  $[v] = \text{см}/\text{с}$ , поэтому  $[\mu] = [v/E] = \text{см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ ).
17. Оцените погрешности и сравните результаты с табличными.

### Контрольные вопросы

1. Какие вещества называют диэлектриками, проводниками, полупроводниками? Чем объясняется различие их электрических свойств? Как зависит от температуры проводимость металлов и полупроводников?
2. Дайте определение константы Холла. Как зависит константа Холла от температуры у металлов и полупроводников?
3. Зависит ли результат измерения константы Холла от геометрии образца?
4. Зависит ли сопротивление образца от магнитного поля в условиях опыта?
5. Как устроен милливеберметр? Зависят ли его показания от сопротивления измерительной катушки? Каким должно быть это сопротивление по сравнению с сопротивлением катушки прибора?
6. По результатам измерений оцените частоту столкновений, длину пробега и коэффициент диффузии носителей тока в образце.
7. Получите выражение константы Холла для материалов с двумя типами носителей. *Указание:* воспользуйтесь условием равенства нулю поперечного тока.

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 98, 100.
2. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1983. Гл. 4, §§ 4–6; Гл. 6, § 9

### Работа 3.3.5

## Эффект Холла в металлах

**Цель работы:** измерение подвижности и концентрации носителей заряда в металлах.

**В работе используются:** электромагнит с источником питания, источник постоянного тока, микровольтметр, амперметры, милливеберметр или цифровой магнитометр, образцы из меди, серебра и цинка.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с основами элементарной теории движения носителей заряда в металлах и полупроводниках (п. 4 введения к разделу).

В работе изучаются особенности проводимости металлов в геометрии *мостика Холла*. Ток пропускается по плоской прямоугольной металлической пластинке, помещённой в перпендикулярное пластинке магнитное поле. Измеряется разность потенциалов между краями пластинки в поперечном к току направлении. По измерениям определяется *константа Холла*, тип проводимости (*электронный* или *дырочный*) и на основе соотношения (3.28) вычисляется концентрация основных носителей заряда.

### Экспериментальная установка

Электрическая схема установки для измерения ЭДС Холла представлена на рис. 1. В зазоре электромагнита (рис. 1а) создаётся постоянное магнитное поле, величину которого можно менять с помощью источника питания электромагнита. Разъём  $K_1$  позволяет менять направление тока в обмотках электромагнита. Ток питания электромагнита измеряется амперметром  $A_1$ .

Градуировка электромагнита (связь тока с индукцией поля) проводится при помощи милливеберметра (его описание и правила работы с ним приведены на с. 192) или миллитесламетра на основе датчика Холла.

Металлические образцы в форме тонких пластинок, смонтированные в специальных держателях, подключаются к блоку питания через разъём (рис. 1б). Ток через образец регулируется реостатом  $R_2$  и измеряется амперметром  $A_2$ .



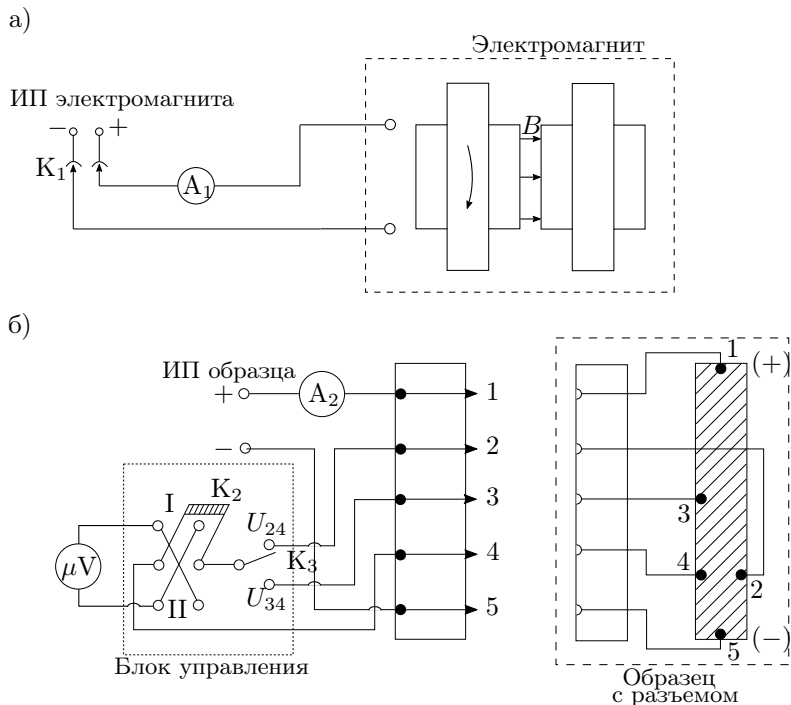


Рис. 1. Схема установки для исследования эффекта Холла в металлах

Для измерений ЭДС Холла используется микровольтметр, в котором высокая чувствительность по напряжению сочетается с малой величиной тока, потребляемого измерительной схемой (например, для микровольтметра Ф116/1 минимальный предел измерения напряжения составляет 1 мкВ, а потребляемый ток — всего  $10^{-8}$  А).

В образце с током, помещённом в зазор электромагнита, между контактами 2 и 4 возникает холловская разность потенциалов  $U_{\perp}$ , которая измеряется с помощью микровольтметра, если переключатель  $K_3$  подключён к точке 2 образца. При подключении  $K_3$  к точке 3 микровольтметр измеряет омическое падение напряжения  $U_{34}$ , вызванное током через образец. При нейтральном положении ключа входная цепь микровольтметра разомкнута.

Ключ  $K_2$  позволяет менять полярность напряжения, поступающего на вход микровольтметра.

Контакты 2 и 4 вследствие неточности подпайки могут лежать не на одной эквипотенциали. Тогда напряжение между ними связано не только с эффектом Холла, но и с омическим падением напряжения вдоль

пластинки. Исключить этот эффект можно, изменяя направление магнитного поля, пронизывающего образец. При обращении поля ЭДС Холла меняет знак, а омическое падение напряжения остаётся неизменным. Поэтому ЭДС Холла  $U_{\perp}$  может быть определена как половина алгебраической разности показаний вольтметра, полученных для двух противоположных направлений магнитного поля в зазоре:  $U_{\perp} = \frac{1}{2}(U_{34}^{(+)} - U_{34}^{(-)})$ .

Альтернативно можно исключить влияние омического падения напряжения, если при каждом значении тока через образец измерять напряжение между точками 3 и 4 в отсутствие магнитного поля. При фиксированном токе через образец это дополнительное к ЭДС Холла напряжение  $U_0$  остаётся неизменным. От него следует (с учётом знака) отсчитывать величину ЭДС Холла:

$$U_{\perp} = U_{24} - U_0. \quad (1)$$

При таком способе измерения нет необходимости проводить повторные измерения с противоположным направлением магнитного поля.

По знаку  $U_{\perp}$  можно определить характер проводимости — электронный или дырочный. Для этого необходимо знать направление тока в образце и направление магнитного поля.

Измерив ток  $I$  в образце и напряжение  $U_{34}$  между контактами 3 и 4 в отсутствие магнитного поля, можно, зная параметры образца, рассчитать удельное сопротивление  $\rho_0$  и проводимость  $\sigma_0$  материала образца по формуле

$$\rho_0 = \frac{U_{34} a h}{I l}, \quad (2)$$

где  $l$  — расстояние между контактами 3 и 4,  $a$  — ширина образца,  $h$  — его толщина.

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость ЭДС Холла от величины магнитного поля при различных значениях тока через образец для определения константы Холла; определить знак носителей заряда и проводимость различных металлических образцов.

1. Подготовьте приборы к работе согласно описанию на установке.
2. Проверьте работу цепи питания образца. Для этого подключите к разъёму блока управления один из образцов — медный или серебряный. Убедитесь, что ток через образец можно изменять в указанных в описании пределах.
3. Проверьте работу цепи магнита. Установите разъём  $K_1$  в положение I и, плавно изменяя ток от минимального до максимального значения, определите диапазон изменения тока через электромагнит.

4. Измерьте калибровочную кривую электромагнита — зависимость между индукцией  $B$  магнитного поля в его зазоре и током  $I_M$  через обмотки магнита. Магнитное поле измеряется милливеберметром или миллитесламетром (датчиком Холла). Калибровочная кривая должна содержать не менее 15 точек во всём диапазоне изменения токов.

В случае использования милливеберметра измерьте зависимость магнитного потока  $\Phi$ , пронизывающего пробную катушку, находящуюся в зазоре, от тока  $I_M$  ( $\Phi = BS_N$ ). Значение  $S_N$  (произведение площади сечения контура катушки на число витков в ней) указано на держателе катушки.

5. Вставьте образец в зазор *выключенного* электромагнита и определите напряжение  $U_0$  между холловскими контактами 2 и 4 при минимальном токе через образец. Это напряжение  $U_0$  вызвано несовершенством контактов 3, 4 и при фиксированном токе через образец остаётся неизменным. Значение  $U_0$  с учётом знака следует принять за начало отсчёта напряжения.
6. Проведите измерение ЭДС Холла: получите зависимость напряжения  $U_{24}$  от тока электромагнита  $I_M$  (5–7 точек) при фиксированном токе  $I$  через образец.  
Измерения следует проводить при *медленном* увеличении магнитного поля. Резкие изменения магнитного поля наводят ЭДС индукции в подводящих проводах и вызывают большие отклонения стрелки микровольтметра.
7. Повторите измерения п. 5 и 6 при 5–7 значениях тока  $I$  через образец (рекомендованные токи указаны в описании установки). Учтите, что при каждом новом токе  $I$  величина  $U_0$  будет иметь своё значение.
8. При максимальном токе через образец проведите измерения  $U_{24}(I_M)$  при обратном направлении магнитного поля.
9. Для образца из цинка получите зависимость  $U_{24}(I_M)$  при одном (максимальном) значении тока через образец.
10. Определите знак носителей заряда в образце. Для этого необходимо знать направление тока через образец, направление магнитного поля и знак ЭДС Холла.

Направление тока в образце показано знаками «+» и «–» на рис. 1. Направление тока в обмотках электромагнита при установке разъёма  $K_1$  в положение 1 показано стрелкой на торце магнита.

Зарисуйте в тетради образец. Укажите на рисунке направления тока, магнитного поля и отклонение носителей. Определите характер проводимости образцов (дырочный или электронный).

11. Определите удельное сопротивление образцов. Для этого удалите держатель с образцом из зазора. При необходимости переключите микровольтметр в режим измерения милливольтовых напряжений. Ключ  $K_3$  поставьте в положение  $U_{34}$ . При токе через образец порядка максимального значения в предыдущих измерениях измерьте падение напряжения между контактами 3 и 4 для каждого из двух образцов.
12. Запишите характеристики приборов и параметры образца, указанные на держателе: длину  $l$  (расстояние между точками 3 и 4), ширину  $a$ , толщину  $h$ .

### Обработка результатов

13. Постройте калибровочный график зависимости  $B(I_M)$ . Используйте эту зависимость для дальнейшего пересчёта (интерполяции) значений поля по измеренным токам  $I_M$ .
14. Рассчитайте ЭДС Холла по формуле (1) и постройте на одном листе семейство характеристик  $U_{\perp}(B)$  при разных значениях тока  $I$  через образец (для меди или серебра). Убедитесь в линейности зависимостей и определите угловые коэффициенты  $k = dU_{\perp}/dB$  полученных прямых.
15. Постройте график  $k(I)$ . Рассчитайте угловой коэффициент прямой и по формуле (3.27) определите величину постоянной Холла  $R_H$ .
16. Для цинка изобразите на графике зависимость  $U_{\perp}(B)$  и по наклону прямой рассчитайте постоянную Холла.
17. Для обоих образцов рассчитайте концентрацию  $n$  носителей тока, удельное сопротивление  $\rho_0$  и удельную проводимость  $\sigma_0$  материалов.
18. Используя найденные значения концентрации  $n$  и удельной проводимости  $\sigma_0 = 1/\rho_0$ , с помощью формулы (3.18) вычислите подвижность  $\mu$  носителей тока. Ответ представьте в общепринятых для этой величины внесистемных единицах  $[\mu] = \text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$  (размерность напряжённости  $[E] = \text{В}/\text{см}$ , скорости  $[v] = \text{см}/\text{с}$ , поэтому  $[\mu] = [v/E] = \text{см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$ ).
19. Дайте качественное объяснение тому, что константа Холла для цинка отрицательна.
20. Оцените погрешности и сравните результаты с табличными.

### Контрольные вопросы

1. Какие вещества называют диэлектриками, проводниками, полупроводниками? Чем объясняется различие их электрических свойств? Как зависит от температуры проводимость металлов и полупроводников?

2. Дайте определение константы Холла. Как зависит константа Холла от температуры у металлов и полупроводников?
3. Зависит ли результат измерения константы Холла от геометрии образца?
4. Зависит ли сопротивление образца от магнитного поля в условиях опыта?
5. Как устроен милливеберметр? Зависят ли его показания от сопротивления измерительной катушки? Каким должно быть это сопротивление по сравнению с сопротивлением рамки прибора: большим или маленьким?
6. По результатам измерений оцените частоту столкновений, длину пробега и коэффициент диффузии носителей тока в исследуемом металле.
7. Получите выражение константы Холла для материалов с двумя типами носителей. *Указание:* воспользуйтесь условием равенства нулю поперечного тока.

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 98, 100.
2. *Парселл Э.* Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1983. Гл. 4, §§ 4–6; Гл. 6, § 9.

### Работа 3.3.6

## Влияние магнитного поля на проводимость полупроводников

**Цель работы:** измерение зависимости сопротивления полупроводниковых образцов различной формы от индукции магнитного поля.

**В работе используются:** электромагнит, милливеберметр или миллитесламетр (на основе датчика Холла), вольтметр, амперметр, миллиамперметр, реостат, образцы монокристаллического антимонида индия (InSb) *n*-типа.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с основами элементарной теории движения носителей заряда в металлах и полупроводниках (п. 4 введения к разделу).

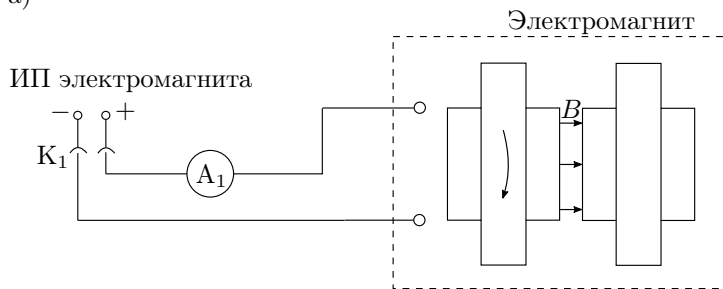
В работе изучается зависимость проводимости полупроводников от величины магнитного поля  $B$  в геометрии *диска Корбино*. По диску, помещенному в перпендикулярное ему магнитное поле, пропускается ток в

радиальном направлении. Магнитное поле искривляет линии тока, благодаря чему эффективное сопротивление  $R$  образца возрастает (эффект *геометрического магнетосопротивления*). По результатам измерений зависимости  $R(B)$  могут быть вычислены подвижность и концентрация носителей тока в образце.

### Экспериментальная установка

Схема установки для исследования магнетосопротивления полупроводников и геометрического резистивного эффекта представлена на рис. 1.

а)



б)

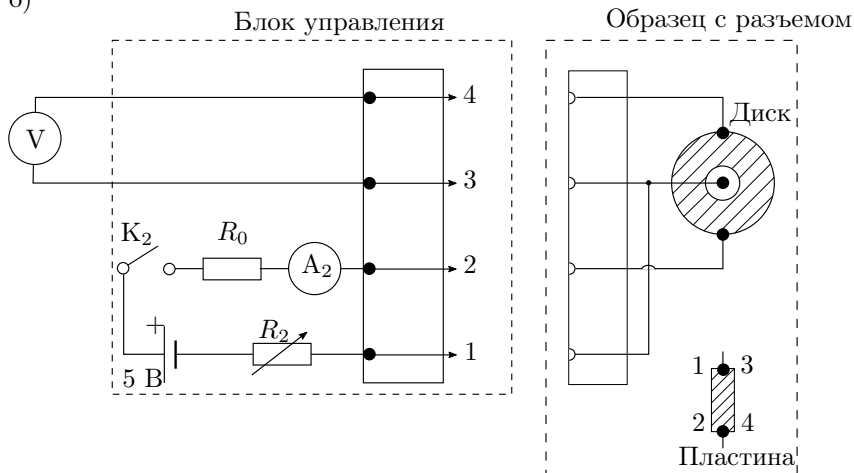


Рис. 1. Схема установки для исследования влияния магнитного поля на проводимость полупроводников

В зазоре электромагнита (рис. 1а) создаётся постоянное магнитное поле, величину которого можно менять с помощью источника питания электромагнита. Ток электромагнита измеряется амперметром  $A_1$  (от-

дельным или встроенным в источник). Магнитная индукция в зазоре измеряется при помощи милливеберметра (его описание и правила работы с ним приведены на с. 192) или миллитесламетра на основе датчика Холла.

Образец в форме кольца (диск Корбино) или пластинки, смонтированный в специальном держателе, подключается к источнику постоянного напряжения 5 В. При замыкании ключа  $K_2$  сквозь образец течёт ток, величина которого измеряется миллиамперметром  $A_2$  и регулируется реостатом  $R_2$ . Балластное сопротивление  $R_0$  ограничивает ток через образец. Измеряемое напряжение подаётся на вход вольтметра  $V$ .

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается при постоянном токе через образец исследовать зависимость напряжения на образце от величины магнитного поля и от ориентации образца в магнитном поле; по результатам измерений рассчитать подвижность электронов, удельное сопротивление материала образца и концентрацию электронов.

1. Подготовьте приборы к работе согласно описанию на установке.
2. Концы от точек 3 и 4 разъёма подсоедините к клеммам вольтметра. Присоедините диск Корбино через разъём к цепи питания. Определите диапазон изменения силы тока через образец.
3. Установите ручки регулировки источника питания электромагнита в минимальное положение и включите источник. Плавно меняя ток магнита  $I_M$ , определите диапазон его изменения.
4. Измерьте калибровочную кривую электромагнита — зависимость между индукцией  $B$  магнитного поля в его зазоре и током  $I_M$  через обмотки магнита. Магнитное поле измеряется милливеберметром или миллитесламетром (датчиком Холла). Калибровочная кривая должна содержать не менее 15 точек во всём диапазоне изменения токов.

В случае использования милливеберметра измерьте зависимость магнитного потока  $\Phi$ , пронизывающего пробную катушку, находящуюся в зазоре, от тока  $I_M$  ( $\Phi = BSN$ ). Значение  $SN$  (произведение площади сечения контура катушки на число витков в ней) указано на держателе катушки.

5. Вставьте образец в зазор *выключенного* электромагнита и измерьте падение напряжения  $U_0$  в образце при некотором токе  $I_0$  через образец ( $I_0 \sim 25$  мА, см. рекомендации в описании).
6. Включите электромагнит и измерьте зависимость напряжения  $U$  на образце от тока через обмотки магнита  $I_M$  при фиксированном токе через образец  $I_0$ .

7. Проверьте, что результат измерения не зависит от направления магнитного поля.
8. Вместо диска Корбино подключите к измерительной цепи образец, имеющий форму прямоугольной пластинки. Поместите образец в зазор выключенного электромагнита и измерьте падение напряжения  $U_0$  на образце при токе через образец  $I \sim 10$  мА (см. рекомендации в описании).
9. Включите электромагнит и получите зависимость напряжения  $U$  на образце от тока через магнит  $I_M$  при постоянном токе через образец  $I = 10$  мА. При измерениях длинная сторона образца должна быть направлена поперёк поля, а средняя (ширина) в одной серии опытов располагается вдоль, а в другой — поперёк поля.
10. Запишите геометрические размеры образцов и характеристики приборов.

### Обработка результатов

11. Постройте калибровочный график зависимости  $B(I_M)$ . Используйте эту зависимость для дальнейшего пересчёта (интерполяции) значений поля по измеренным токам  $I_M$ .
12. Для всех серий измерений постройте графики, отложив по оси абсцисс величину  $B^2$ , а по оси ординат — величину  $(U - U_0)/U_0$ . Какие выводы можно сделать на основании построенных зависимостей?
13. По наклону прямолинейного участка графика для диска Корбино рассчитайте с помощью формулы (3.31) подвижность носителей.
14. Определите сопротивление диска  $R_0$  в отсутствие магнитного поля. Рассчитайте концентрацию носителей тока  $n$ , удельное сопротивление  $\rho_0$  и удельную проводимость  $\sigma_0 = 1/\rho_0$  материала образца.
15. Оцените погрешности и сравните результаты с табличными.

### Контрольные вопросы

1. Какие вещества называют диэлектриками, проводниками, полупроводниками? Чем объясняется различие их электрических свойств? Как зависит от температуры проводимость металлов и полупроводников?
2. В чем причина зависимости сопротивления образца от магнитного поля в геометрии диска Корбино?
3. Зависит ли эффект магнетосопротивления от геометрии образца? В каких случаях эффект магнетосопротивления может проявиться при протекании тока по плоской пластинке?



4. Как устроен милливеберметр? Зависят ли его показания от сопротивления измерительной катушки? Каким должно быть это сопротивление по сравнению с сопротивлением рамки прибора: большим или маленьким?
5. По результатам измерений оцените частоту столкновений, длину пробега и коэффициент диффузии носителей тока в исследуемом материале.
6. Получите выражение для сопротивления пластинки, изготовленной из материала с двумя типами носителей. Для простоты можно ограничиться случаем  $\mu_e \gg \mu_h$ .

### Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 98, 100.
2. Парселл Э. Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1983. Гл. 4, §§ 4–6; Гл. 6, § 9.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Принцип действия милливеберметра

Милливеберметр (флюксметр) служит для измерения постоянного во времени магнитного потока. Это прибор магнитоэлектрической системы, работающий в баллистическом режиме: рамка с током вращается в поле постоянного магнита; отклонение рамки пропорционально заряду, если через неё пропускается короткий импульс тока. От обычных гальванометров постоянного тока милливеберметр отличается тем, что на его рамку не действуют никакие упругие силы, поэтому его подвижная часть находится в безразличном равновесии.

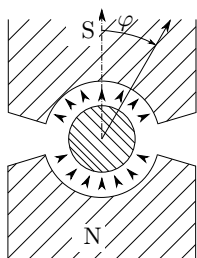


Рис. 1. Рамка в магнитном поле

В цепь рамки прибора включается наружная измерительная (пробная) катушка. При изменении магнитного потока, пронизывающего эту катушку, в ней возникает ЭДС индукции, и по цепи рамки течёт индукционный ток. При этом отклонение рамки, независимо от её начального положения, пропорционально изменению магнитного потока  $\Delta\Phi$  и может служить для его измерения.

Рассмотрим детально работу милливеберметра. Уравнение моментов для рамки имеет вид

$$J\ddot{\varphi} = M, \quad (1)$$

где  $J$  — момент инерции рамки,  $\varphi$  — угол её поворота (рис. 1),  $M$  — момент сил Ампера, действующих на рамку. Последний вычисляется как произведение силы Ампера  $F = IlNB_0$ , действующей на каждую из продольных сторон, на удвоенное плечо, т.е. на поперечный размер рамки  $a$ . Здесь  $I$  — сила тока в рамке,  $l$  — длина продольной стороны,

$N$  — число витков намотанного на рамку провода,  $B_0$  — индукция поля постоянного магнита милливеберметра. Поле магнита практически радиально, и его величина не зависит от угла поворота рамки, что обеспечивает равномерность шкалы прибора.

Таким образом, вводя обозначение  $K = alNB_0$ , из (1) получим

$$J\ddot{\varphi} = KI. \quad (2)$$

Рассмотрим теперь уравнение цепи, в которую включена рамка. Ток  $I$  в рамке генерируется под действием как внешней ЭДС индукции  $\mathcal{E}_K$ , возникающей в измерительной катушке, так и внутренней  $\mathcal{E}_P$ , возникающей в рамке при её вращении в магнитном поле:

$$RI = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P, \quad (3)$$

где  $R$  — полное сопротивление цепи рамки.

Внешняя ЭДС  $\mathcal{E}_K$  наводится в измерительной катушке при изменении проходящего сквозь неё магнитного потока  $\Phi$ :

$$\mathcal{E}_K = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (4)$$

ЭДС в рамке  $\mathcal{E}_P$  возникает в её продольных сторонах при их движении в поле  $B_0$  со скоростью  $v = \dot{\varphi}a/2$ :

$$\mathcal{E}_P = -2lNB_0\frac{a}{2}\dot{\varphi} = -K\dot{\varphi}. \quad (5)$$

Подставим (3)–(5) в (2) и получим уравнение движения рамки:

$$\frac{JR}{K^2}\ddot{\varphi} + \dot{\varphi} = -\frac{1}{K}\dot{\Phi}. \quad (6)$$

Проинтегрируем полученное уравнение по времени. Получим

$$\frac{JR}{K^2}\Delta\dot{\varphi} + \Delta\varphi = -\frac{\Delta\Phi}{K}, \quad (7)$$

где  $\Delta$  обозначает разность между конечным и начальным состояниями.

Покажем, что первое слагаемое (7) мало и им можно пренебречь. В начальный момент рамка неподвижна ( $\dot{\varphi}_1 = 0$ ). Пусть в конце измерения поток через измерительную катушку постоянен,  $\dot{\Phi} = 0$ . Тогда в уравнении (6) правая часть равна нулю, и его решение есть экспоненциально затухающая функция:

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 \exp\left(-\frac{K^2}{JR}t\right).$$

Следовательно, по прошествии времени  $\tau = JR/K^2$  рамка практически остановится:  $\dot{\varphi}(t) \rightarrow 0$  при  $t \gg \tau$ . Подбирая достаточно малое сопротивление цепи  $R$ , можно добиться того, чтобы время торможения рамки  $\tau$  было достаточно малым в условиях опыта.

Таким образом, угол поворота рамки милливексметрa оказывается прямо пропорционален изменению магнитного потока через измерительную катушку:

$$\Delta\varphi = -\frac{\Delta\Phi}{K}. \quad (8)$$

Для измерения магнитного потока с помощью милливексметрa можно:

- а) вынести измерительную катушку из области измеряемого в область нулевого поля;
- б) оставив катушку в поле неподвижной, отключить измеряемое поле.

Разделив поток  $\Delta\Phi$  на площадь и число витков измерительной катушки, можно определить изменение индукции  $\Delta B$  внешнего магнитного поля, пронизывающего катушку. Отметим, что в обоих вариантах поток в конце опыта постоянен, как того требует сделанное выше предположение.

## Раздел IV

# МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА

### 1. Магнитное поле в веществе

Известно, что вещество может обладать как собственной намагниченностью, так и изменять свою намагниченность при помещении во внешнее магнитное поле. Микроскопическими источниками магнитного поля в среде являются орбитальное движение электронов в молекулах и атомах, а также собственное вращение (спин) электронов и ядер. При *макроскопическом* описании свойств среды можно считать, что каждый элемент объёма среды может являться элементарным источником магнитного поля — *магнитным диполем*. Для описания усреднённых свойств среды используют **вектор намагниченности  $\mathbf{M}$** , равный *магнитному моменту единичного объёма вещества* (объёмная плотность магнитного момента, размерность в системе СИ  $[M] = \frac{\text{А} \cdot \text{м}^2}{\text{м}^3} = \frac{\text{А}}{\text{м}}$ ).

Магнитное поле на микроскопическом уровне (на масштабах атомов)  $\mathbf{B}_{\text{микро}}$  испытывает резкие изменения в пространстве. Величина магнитного поля  $\mathbf{B}$  в данной точке среды определяется как значение микрополя, усреднённое по малому (элементарному) объёму, содержащему при этом большое количество частиц:  $\mathbf{B} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \mathbf{B}_{\text{микро}} dV$ . По историческим причинам вектор  $\mathbf{B}$  называют **индукцией поля** (размерность  $[B] = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} \equiv \text{Тл}$ ).

Помимо этого, принято вводить вспомогательный вектор  $\mathbf{H}$  (**напряжённость поля**,  $[H] = \frac{\text{А}}{\text{м}}$ ), определяемый из соотношения

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (4.1)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Н}}{\text{А}^2}$  — магнитная постоянная.

В простейшем практически важном случае намагниченность  $\mathbf{M}$  в каждой точке среды прямо пропорциональна вектору напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$  в этой же точке

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}. \quad (4.2)$$

Коэффициент  $\chi$  называют **магнитной восприимчивостью** среды. Вещества, для которых закон (4.2) выполняется с хорошей точностью, называют **парамагнетиками** ( $\chi > 0$ ) и **диамагнетиками** ( $\chi < 0$ ). В парамагнетиках элементарные диполи ориентированы в основном по приложенному полю, а в диамагнетиках — против него.

Если закон (4.2) применим, то можно записать

$$\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}, \quad (4.3)$$

где  $\mu = 1 + \chi$  — магнитная проницаемость вещества.

**Замечание.** В системе СГС имеют место соотношения (обратите внимание на коэффициент  $4\pi$ )

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = \mu\mathbf{H}, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi.$$

Отметим, что соотношение (4.2) отнюдь не универсально. В общем случае зависимость  $\mathbf{M}(\mathbf{H})$  может быть *нелинейной*, а также зависеть от «предыстории» образца, то есть значений полей в предыдущие моменты времени — явление **гистерезиса** в ферромагнетиках.

## 2. Свойства магнитных сред

Полноценное рассмотрение магнитных свойств электронов и ядер возможно только с использованием квантовой механики. В этом разделе мы ограничимся рассмотрением упрощённых полуклассических моделей — они наглядны и дают правильные по порядку величины результаты.

### 2.1. Диамагнетизм

Диамагнетизм ( $\chi < 0$ ) возникает из-за электромагнитной индукции молекулярных токов в электронных оболочках атомов и присущ в той или иной степени всем веществам без исключения. В зависимости от того, обладает ли электрон в атоме начальным моментом импульса  $L$ , механизмы возникновения диамагнетизма несколько отличаются.

**Случай  $L = 0$ .** Рассмотрим электрон в состоянии с нулевым орбитальным моментом импульса  $L = 0$  ( $s$ -состояние). Соответствующий *магнитный момент* также равен нулю:  $\mathbf{m}_L = 0$  (собственный, т. е. спин-овый, момент электрона рассматривать не будем). С классической точки зрения такое состояние можно представить как симметрично «размазанное» облако заряда вокруг ядра.

Плавно (квазистатически) включим внешнее однородное магнитное поле  $\mathbf{B}$ . Под действием вихревого электрического поля  $\mathbf{E}$ , возникающего из-за наличия переменного магнитного поля, электронное облако придёт во вращение. Согласно закону электромагнитной индукции, величина этого поля на расстоянии  $r$  от оси системы определяется соотношением

$$2\pi r E = -\pi r^2 \frac{dB}{dt},$$

так что

$$E = -\frac{1}{2}r \frac{dB}{dt}.$$

Запишем уравнение моментов для точечного электрона, находящегося на «орбите» радиуса  $r$ :

$$m_e r^2 \frac{d\omega}{dt} = -erE = \frac{1}{2} er^2 \frac{dB}{dt}. \quad (4.4)$$

Интегрируя по времени (4.4), найдём, что независимо от расстояния  $r$  электрон при включении поля  $\mathbf{B}$  приобретает угловую скорость вращения

$$\omega_L = \frac{e}{2m_e} \mathbf{B}. \quad (4.5)$$

Величину  $\omega_L$  называют **ларморовской** частотой (заметим, что она вдвое меньше циклотронной  $\omega_B = eB/m$ , см. Раздел III).

При вращении с ларморовской частотой электрон создаёт магнитное поле, равное полю витка с током  $I_L = e \frac{\omega_L}{2\pi}$ . Этот ток в свою очередь создаёт магнитный момент, по модулю равный

$$\mathbf{m}_L = I_L \cdot S = -\frac{e^2 S}{4\pi m_e} \mathbf{B},$$

где  $S$  — площадь эквивалентного витка. Примем для оценки  $S \sim \pi a^2$ , где  $a$  — среднее расстояние электронов до ядра. Тогда для атома, содержащего  $Z$  электронов, имеем намагниченность среды  $\mathbf{M} = Zn \cdot \Delta \mathbf{m}_L$ , где  $n$  — число атомов в единице объема. Отсюда находим оценку для магнитной восприимчивости диамагнетиков:

$$\chi_{\text{диа}} \sim -\mu_0 \frac{e^2 a^2}{4m_e} Zn. \quad (4.6)$$

**Пример 1.** Взяв характерные для твердых тел значения  $a \sim 2 \cdot 10^{-10}$  м,  $n \sim a^{-3} \sim 10^{29}$  м $^{-3}$ , получим, что  $\chi_{\text{диа}} \sim -10^{-6}$  Z. Эта оценка довольно груба, но даёт правильные по порядку величины результаты (например, для  $^{30}\text{Zn}$   $\chi \approx -1,25 \cdot 10^{-5}$ ).

**Случай  $L \neq 0$ .** Рассмотрим теперь случай, когда электрон изначально обладает некоторым орбитальным моментом импульса  $\mathbf{L} = mvr$ . Пусть вектор момента импульса  $\mathbf{L}$  лежит в плоскости рис. 4.1 и направлен под углом  $\theta$  к некоторой оси  $z$ . Орбитальное движение электрона эквивалентно витку с током, магнитный момент которого  $\mathbf{m}_L$  пропорционален  $\mathbf{L}$  и направлен против него (т. к.  $e < 0$ ). Его величину можно найти как произведение тока  $e \cdot \frac{v}{2\pi r}$  на площадь «витка»  $\pi r^2$ :  $\mathbf{m}_L = \frac{1}{2} e v r$ . При включении внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}$ , направленного вдоль  $z$ , на электрон начинает действовать момент силы  $\mathbf{m}_L \times \mathbf{B}$ , и уравнение движения электрона (уравнение моментов) будет иметь вид

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{m}_L \times \mathbf{B}. \quad (4.7)$$

Как известно из механики, уравнение (4.7) описывает движение симметричного волчка (гироскопа). Его решением является *прецессия* электронной орбиты с *ларморовской* угловой частотой:  $\omega_L = \frac{m_L}{L} B = \frac{e}{2m_e} B$ . При этом вектор  $\mathbf{m}_L$  описывает конус вокруг вектора  $\mathbf{B}$ . Эта прецессия не зависит от угла  $\theta$  и приводит к дополнительному вращению электрона вокруг поля  $\mathbf{B}$ , налагающемуся на его орбитальное движение. Нетрудно убедиться, что она даёт полностью аналогичный (4.6) вклад в диамагнитную восприимчивость.

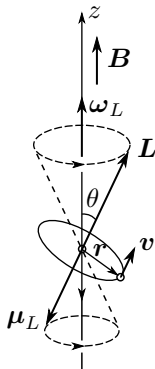


Рис. 4.1. Прецессия электронной орбиты в магнитном поле

Из выражения (4.6) следует, что диамагнитная восприимчивость не зависит от температуры или величины поля и возрастает пропорционально порядковому номеру элемента. Видно, что диамагнитный эффект присущ всем веществам независимо от того, имеется у атомов собственный магнитный момент или нет. Однако у некоторых веществ он перекрывается более сильным *парамагнитным* эффектом.

## 2.2. Парамагнетизм

Парамагнетизм ( $\chi > 0$ ) характерен для веществ, микроскопические частицы которых (атомы, ионы, молекулы) обладают *собственным* магнитным моментом в отсутствие внешнего магнитного поля.

В парамагнетиках энергия взаимодействия между соседними магнитными моментами атомов мала по сравнению с тепловой энергией, поэтому в отсутствие внешнего магнитного поля микроскопические магнитные моменты полностью разупорядочены, и намагниченность среды равна нулю. При помещении во внешнее поле магнитным моментам энергетически выгодно ориентироваться преимущественно по полю, что и приводит к парамагнитному эффекту.

Оценим температурную зависимость магнитной восприимчивости парамагнетика в классической модели. Пусть среднее число атомов в еди-

нице объёма равно  $n$ , а абсолютная величина магнитного момента атома  $\mathbf{m}_a$ . В магнитном поле с индукцией  $B$  энергия магнитного диполя, составляющего с направлением поля угол  $\alpha$ , равна

$$U = -\mathbf{m}_a B \cos \alpha$$

и может меняться в диапазоне от  $-\mathbf{m}_a B$  до  $+\mathbf{m}_a B$ .

Из термодинамики известно, что доля атомов  $dn$ , обладающих в условиях равновесия энергией  $U(\alpha)$ , определяется распределением Больцмана:

$$dn \propto e^{-\frac{U(\alpha)}{k_B T}} d\alpha.$$

Пусть внешнее магнитное поле достаточно мало, так что энергия магнитных моментов атомов в нём много меньше тепловой:  $\mathbf{m}_a B \ll k_B T$ . Число атомов, имеющих положительную ( $\alpha > 0$ ) проекцию на направление  $B$ , может быть записано как

$$n_+ = n_0 e^{\mathbf{m}_a B / k_B T} \approx n_0 \left( 1 + \frac{\mathbf{m}_a B}{k_B T} \right),$$

где мы воспользовались разложением экспоненты от малого параметра, а  $n_0$  — некоторая нормировочная константа. Для атомов с отрицательной проекцией момента ( $\alpha < 0$ )

$$n_- = n_0 e^{-\mathbf{m}_a B / k_B T} \approx n_0 \left( 1 - \frac{\mathbf{m}_a B}{k_B T} \right)$$

Учитывая условие нормировки  $n_+ + n_- = n$ , найдём:  $n_0 \approx n/2$ .

Величину суммарного магнитного момента единицы объёма можно оценить как

$$M \sim n_+ \mathbf{m}_a + n_- \cdot (-\mathbf{m}_a) \approx \frac{\mathbf{m}_a^2 n}{k_B T} B.$$

Более аккуратное усреднение по углам даст поправочный множитель порядка единицы (в классической модели получается коэффициент  $1/3$ ).

Таким образом, парамагнитная восприимчивость равна

$$\chi_{\text{пар}} \sim \mu_0 \frac{\mathbf{m}_a^2 n}{3k_B T} \propto \frac{1}{T}. \quad (4.8)$$

Температурная зависимость восприимчивости парамагнетиков вида (4.8) называется **законом Кюри**.

**Замечание.** Проведём расчёты для характерных величин. В качестве  $\mathbf{m}_a$  возьмём для оценки собственный магнитный момент электрона  $\mathbf{m}_e = e\hbar/2m_e = 9,3 \cdot 10^{-24}$  Дж/Тл (магнетон Бора).

В лабораторных условиях трудно создать стационарные поля более  $B \sim 5$  Тл. Выразим долю частиц  $\Delta n = (n_+ - n_-)/n$ , ориентированных по



такому полю при комнатной температуре:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{m_a B}{k_B T} \sim 10^{-2}.$$

Лишь при низких температурах ( $T \sim 1$  К) и в сверхсильных полях ( $B \sim 10^3$  Тл) магнитная энергия внутриатомного диполя может оказаться сравнима с тепловой. В таком случае наступит **магнитное насыщение**, когда почти все магнитные моменты в парамагнетике ориентируются по полю.

В металлах закон Кюри может нарушаться. Дело в том, что в случае парамагнетизма свободных электронов, образующих «электронный газ» в металлах, из-за квантовых эффектов лишь небольшая часть электронов (пропорциональная тепловой энергии  $k_B T$ ) может участвовать в переориентировке своих магнитных моментов. Поэтому у некоторых металлов  $\chi$  не зависит от температуры.

### 2.3. Ферромагнетизм

Помимо диа- и парамагнетиков, которые слабо реагируют на внешнее магнитное поле, в природе существуют вещества, способные сильно намагничиваться даже в небольших полях. Такие вещества относят к классу **ферромагнетиков**. Это — железо, никель, кобальт, гадолиний и их многочисленные сплавы. Ферромагнитными свойствами обладают некоторые сплавы элементов, которые порознь не являются ферромагнитными (например, сплавы меди и марганца), и ряд неметаллических веществ (*ферриты*). Ферромагнитные явления сложны и многообразны, и мы ограничимся изложением лишь некоторых основных фактов.

Зависимость намагниченности  $M$  от напряжённости магнитного поля  $H$  у всех ферромагнетиков оказывается *нелинейной*: магнитная восприимчивость  $\chi$  не является константой и зависит от  $H$ . По абсолютной величине восприимчивость достигает значений  $10^3 \div 10^4$  (ср. с диа- и парамагнетиками, для которых  $\chi \sim 10^{-7} \div 10^{-5}$ ). Кроме того, анизотропия кристаллической решётки приводит к тому, что  $\chi$  может иметь *тензорный* характер (векторы  $M$  и  $H$  не сонаправлены).

Как и в случае парамагнетиков, атомы ферромагнетика обладают собственным магнитным моментом. Однако даже в отсутствие внешнего магнитного поля атомы ферромагнетика способны образовывать упорядоченные структуры (**домены**), в которых все магнитные моменты ориентированы практически в одном направлении. Таким образом, каждый отдельный атом испытывает влияние не только внешнего поля, но и поля, созданного коллективом его соседей.

**Модель среднего поля.** В качестве простейшей эмпирической модели, описывающей такую ситуацию, можно рассмотреть следующую

модель: предположим, что намагниченность элемента среды пропорциональна некоторому эффективному полю  $\mathbf{H}_{\text{эфф}}$ , складывающемуся из поля  $\mathbf{H}$  в данной точке, созданного сторонними токами, и среднего «коллективного» поля, пропорционального величине намагниченности  $\mathbf{M}$ :

$$\mathbf{M} = \chi_{\text{пар}} \mathbf{H}_{\text{эфф}}, \quad \mathbf{H}_{\text{эфф}} = \mathbf{H} + \beta \mathbf{M}, \quad (4.9)$$

где  $\chi_{\text{пар}}$  — парамагнитная восприимчивость отдельного атома (4.8),  $\beta$  — некоторая безразмерная константа, определяемая из опыта.

Модель среднего поля позволяет уточнить закон Кюри. Определяя магнитную восприимчивость по-прежнему как  $\chi = M/H$ , найдём из (4.9):

$$\chi = \frac{1}{\chi_{\text{пар}}^{-1} - \beta} \propto \frac{1}{T - \Theta}, \quad (4.10)$$

где параметр  $\Theta = \beta \frac{m_a^2 \mu_0 n}{3k_B}$  имеет размерность температуры.

Соотношение (4.10) называют **законом Кюри–Вейсса**. В частности, этот закон предсказывает существование особой точки, в которой  $\chi$  обращается в бесконечность. Действительно, существует температура  $\Theta_K$ , называемая **точкой Кюри**, в которой имеет место фазовый переход (2-го рода) между парамагнитным (при  $T > \Theta_K$ ) и ферромагнитным (при  $T < \Theta_K$ ) состояниями среды. Закон Кюри–Вейсса удовлетворительно выполняется вдали от  $\Theta_K$ , однако нарушается при приближении к точке перехода  $T \rightarrow \Theta_K$ , где модель среднего поля становится слишком груба. Поэтому параметр  $\Theta$  в (4.10) несколько отличается от температуры Кюри: как правило,  $\Theta_K < \Theta$ .

**Образование доменов.** Остановимся кратко на причине, по которой соседним магнитным моментам выгодно объединяться в домены. В первую очередь подчеркнём, что магнитное (диполь-дипольное) взаимодействие между атомами не может привести к упорядочению системы. Чтобы в этом убедиться, достаточно оценить энергию такого взаимодействия: из квантовой механики известно, что магнитный момент атома по порядку величины равен  $m_B = 9,3 \cdot 10^{-24}$  Дж/Тл (*магнетон Бора*), характерное расстояние между атомами  $a \sim 2 \cdot 10^{-10}$  м, тогда характерное межатомное магнитное поле  $B \sim \mu_0 \frac{m_B}{a^3} \sim 1$  Тл, и характерная энергия диполь-дипольного взаимодействия  $U_{\text{дип.}} \sim m_B B \sim 10^{-4}$  эВ. При такой энергии связи тепловое движение обеспечит полное разупорядочение уже при  $T \sim 1$  К.

Единственное взаимодействие, которое способно выстроить в ряд магнитные моменты электронов в атомах при температурах порядка комнатной, — это *электростатическое* взаимодействие (его энергия на несколько порядков больше магнитной:  $e^2/(4\pi\epsilon_0 a) \sim 1$  эВ). Как следует из квантовой механики, если магнитные моменты (или спины) электронов соседних атомов сонаправлены, их электростатическое отталкивание

становится *меньше*. Таким образом, магнитным моментам атомов энергетически выгодно ориентироваться в одном направлении. Такое явление получило название **обменного взаимодействия**.

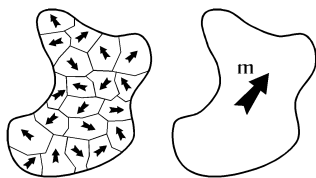


Рис. 4.2. Доменная структура ферромагнетика при слабом (слева) и сильном (справа) внешнем поле

С другой стороны, магнитное диполь-дипольное взаимодействие между доменами препятствует выстраиванию всех магнитных моментов среды в одном направлении. Действительно, энергия такого взаимодействия будет минимальной при *антипараллельном* расположении магнитных моментов соседних элементов среды. Поэтому при определённом поперечном размере домена оказывается энергетически выгодно иметь соседний домен с противоположно ориентированным моментом (см. рис. 4.2, слева).

Наложение внешнего поля заставляет домены ориентироваться по нему, что приводит к резкому увеличению намагничённости образца, а при достаточно большом поле достигается состояние **насыщения**, когда все домены ориентируются по полю (см. рис. 4.2, справа).

### 3. Ферромагнитный гистерезис

Если состояние некоторой системы зависит не только от мгновенных значений внешних параметров, но от истории их изменений, говорят, что в системе имеет место **гистерезис**.

Именно такими свойствами обладает магнитный момент ферромагнитного образца как функция напряжённости поля  $M(H)$ . В частности, система может оказаться намагничённой, даже когда внешнее поле выключено — этим объясняется существование постоянных магнитов. Рассмотрим данное явление подробнее.

**Кривая намагничивания.** Пусть ферромагнетик находится исходно в ненамагничённом состоянии ( $M = 0$ ). Медленно увеличивая поле  $H$  в образце, получим зависимость  $M(H)$ , которую называют *начальной кривой намагничивания*. Эту кривую обычно разделяют на пять условных участков (рис. 4.3).

Участок 1 — область *обратимого* намагничивания, где  $M = \chi H$ . В этой области происходят процессы упругого смещения границ доменов: увеличивается размер тех доменов, магнитный момент которых близок к направлению магнитного поля, и уменьшаются размеры доменов с противоположным направлением магнитного момента.

Участок 2 характеризуется квадратичной зависимостью  $M$  от  $H$ . В этой области также идёт процесс обратимого смещения границ, но проявляется нелинейный характер зависимости намагниченности от поля.

Область максимальной скорости роста намагниченности 3 соответствует *необратимым* смещениям стенок между доменами («стенки Блоха»): им приходится преодолевать «препятствия» в виде примесей, дислокаций и дефектов кристаллической решётки. Когда стенка наталкивается на такое препятствие, она останавливается и держится, пока поле не достигнет порогового значения, при котором она внезапно срывается. Таким образом, движение доменной стенки приобретает скачкообразный характер («скачки Баркгаузена»).

В достаточно сильных полях движение стенок прекращается, и энергетически выгодным становится поворот магнитных моментов тех оставшихся доменов, у которых магнитный момент не совпадает с направлением поля (область 4).

И, наконец, при некотором значении поля (участок 5) все магнитные моменты выстраиваются по полю — намагниченность образца достигает *насыщения* ( $M = M_s$ ).

На практике магнитные свойства ферромагнетиков обычно изучают путём измерения зависимости индукции магнитного поля  $B$  от напряжённости магнитного поля  $H$  в веществе. Исследование образца обычно начинают с полностью размагниченного состояния ( $H = 0, B = 0$ ). Если монотонно увеличивать напряжённость  $H$ , то изменение  $B$  происходит по рассмотренной выше начальной кривой намагничивания с учётом соотношения (4.1):  $B(H) = \mu_0(H + M(H))$  (кривая ОА на рис. 4.4).

Наклон кривой намагничивания характеризуется **дифференциальной магнитной проницаемостью**

$$\mu_{\text{диф}} \equiv \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}. \quad (4.11)$$

С ростом  $H$  величина  $\mu_{\text{диф}}$  сначала растёт (этому соответствуют участки 1 и 2 на рис. 4.3), затем (с середины участка 3) начинает резко падать, приближаясь к единице при насыщении.

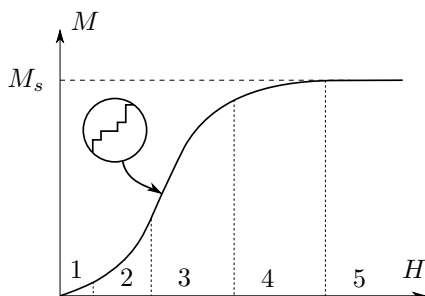


Рис. 4.3. Начальная кривая намагничивания ферромагнетика

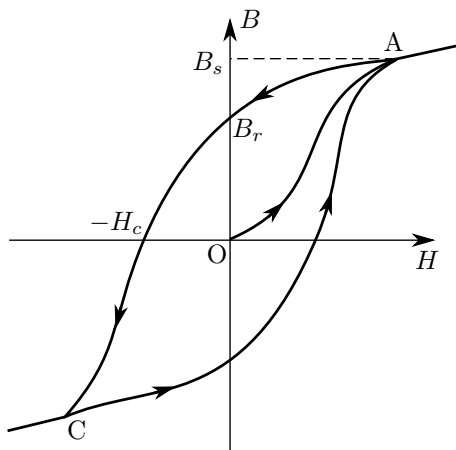


Рис. 4.4. Начальная кривая намагничивания (OA) и предельная петля гистерезиса

**Явление гистерезиса.** Доведём систему до некоторой точки  $A$ , лежащей в области насыщения (здесь  $B_s$  — индукция насыщения\*), и начнём уменьшать напряжённость  $H$ . Поскольку между доменами есть трение, обратный путь пойдёт не по начальной кривой, а *выше* неё.

При выключении внешних полей, то есть при достижении  $H = 0$ , в образце сохраняется некоторое собственное намагничивание. Соответствующее значение индукции  $B_r$  называют **остаточной индукцией**†.

Значение  $B = 0$  достигается лишь при некотором отрицательном значении  $H = -H_c$ . Величина  $H_c$  называется **коэрцитивным полем**‡. Среди ферромагнетиков принято различать *магнитомягкие* ( $H_c \lesssim 1$  кА/м) и *магнитожёсткие* ( $H_c > 10$  кА/м) материалы. В точке  $C$  наступает насыщение для намагничивания в противоположную сторону.

Если теперь попробовать вернуться в точку  $A$ , вновь наращивая поле, получим некоторый замкнутый цикл (предельную петлю гистерезиса). Если в точке  $A$  насыщение не достигается, то аналогичным образом получится цикл меньшей площади.

Отметим, что *площадь петли* гистерезиса ферромагнетика на плоскости  $H$ – $B$  есть энергия, *необратимо* выделяющаяся в виде тепла в еди-

\*s — saturated (англ.) — насыщенный

†r — remained (англ.) — оставшийся

‡c — coercive (англ.) — принудительный

нице объёма вещества за один цикл:

$$\Delta w = - \oint H dB \quad (4.12)$$

(см. далее вывод формулы (4.24)).

## 4. Измерение напряжённости и индукции магнитного поля

### 4.1. Размагничивающий фактор

Когда говорят о кривой намагничивания  $B(H)$ , речь идёт о *локальной* связи между индукцией и напряжённостью магнитного поля в каждой точке среды. При этом под  $\mathbf{H}$  имеется в виду не внешнее магнитное поле, а именно поле *внутри* данного материала. Поскольку непосредственному измерению легче всего поддаётся именно внешнее поле  $\mathbf{H}_0$ , создаваемое сторонними токами без образца, необходимо установить связь между  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{H}_0$  (заметим, что  $\mathbf{B}_0 \equiv \mathbf{H}_0$ ).

Из условия непрерывности касательной компоненты вектора  $\mathbf{H}$  следует, что  $\mathbf{H}$  совпадает с  $\mathbf{H}_0$  только если во всех точках образца  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{H}_0$ . Такое возможно, например, в пределе *бесконечно длинного соленоида* либо для *тонкого тора*. В общем случае  $\mathbf{H}_0 \neq \mathbf{H}$ .

Рассмотрим магнетик, помещённый в однородное внешнее поле  $\mathbf{H}_0$ . Разность между внешним полем и полем в образце принято называть **размагничивающим полем**:

$$\mathbf{H}_{\text{разм}} = \mathbf{H}_0 - \mathbf{H}. \quad (4.13)$$

Если форма образца такова, что его намагничённость можно считать практически постоянной  $\mathbf{M} \approx \text{const}$  (за исключением, возможно, незначительных “краевых эффектов”), можно ввести коэффициент  $N_{\text{разм}}$  пропорциональности между  $\mathbf{H}_{\text{разм}}$  и намагничённостью  $\mathbf{M}$ , называемый **размагничивающим фактором**:

$$\mathbf{H}_{\text{разм}} = N_{\text{разм}} \mathbf{M}. \quad (4.14)$$

Для однородного образца размагничивающий фактор зависит только от его формы и ориентации в поле. С учётом (4.1) нетрудно убедиться, что его величина может меняться в пределах  $0 \leq N_{\text{разм}} \leq 1$ .

Для образца с известным  $N_{\text{разм}}$ , изготовленного из материала с проницаемостью  $\chi$ , помещённого во внешнее поле  $\mathbf{H}_0$ , имеем  $\mathbf{H}_0 - \mathbf{H} = N\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ , откуда

$$\mathbf{M} = \frac{\chi \mathbf{H}_0}{1 + N_{\text{разм}} \chi}. \quad (4.15)$$

Аналитические выражения для  $N_{\text{разм}}$  могут быть получены только для тел простейшей формы. В частности,

- бесконечно длинный цилиндр в продольном поле —  $N_{\text{разм}} = 0$ , в поперечном поле —  $N_{\text{разм}} = 1/2$ ;
- шар  $N_{\text{разм}} = 1/3$ ;
- бесконечно тонкая пластинка в продольном поле —  $N_{\text{разм}} = 0$ , в поперечном поле —  $N_{\text{разм}} = 1$ .

Заметим, что для диа- и парамагнетиков  $|\chi| \ll 1$ , поэтому отличим  $\mathbf{H}$  от  $\mathbf{H}_0$  для них можно, как правило, пренебречь.

#### 4.2. Измерения в тороидальном образце

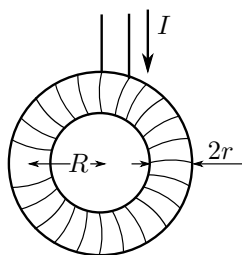


Рис. 4.5. Тороидальный образец с намагничивающей обмоткой

В лабораторных условиях для исследования зависимости  $B(H)$  ферромагнитных материалов обычно используют образцы тороидальной формы. Если на тор намотать равномерную намагничивающую обмотку (рис. 4.5), то поле  $H$  внутри тора на окружности радиуса  $R$  будет пропорционально току  $I$  в обмотке, а его величину можно рассчитать по теореме о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$ :

$$H = \frac{IN_0}{2\pi R}, \quad (4.16)$$

где  $N_0$  — число витков намагничивающей обмотки. Напряжённость магнитного поля в тороидальном образце зависит от  $R$ , поэтому намагниченность образца можно считать однородной при  $r \ll R$ , где  $r$  — радиус сечения тора.

#### 4.3. Поле в зазоре электромагнита

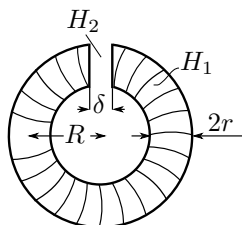


Рис. 4.6. Тороидальная катушка с разрезом

Рассмотрим теперь тороидальную катушку, в которой сделан узкий разрез толщиной  $\delta$  ( $\delta \ll r \ll R$ ) (рис. 4.6).

Пусть  $H_1$  — напряжённость магнитного поля в образце, а  $H_2$  — в зазоре. По теореме о циркуляции вектора  $\mathbf{H}$  имеем

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = H_1(2\pi R - \delta) + H_2\delta = N_0 I. \quad (4.17)$$

Воспользуемся непрерывностью нормальных составляющих вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$  на границах разреза. В образце имеем

$B_1 = \mu_0 \mu H_1$ , а в зазоре  $B_2 = \mu_0 H_2$ , поэтому, приравнявая  $B_1$  и  $B_2$ , найдём:

$$H_2 = \mu H_1.$$

Подставляя это в (4.17), получим

$$H_1 = \frac{N_0 I}{2\pi R + (\mu - 1)\delta}, \quad H_2 = \mu H_1. \quad (4.18)$$

Отметим, прежде всего, что напряжённости поля в образце и в зазоре (при  $\mu = \text{const}$ ) пропорциональны силе намагничивающего тока. После того, как установлена величина коэффициента пропорциональности, измерение напряжённости может быть заменено измерением тока.

При наличии даже небольшого зазора второе слагаемое в знаменателе (4.18) может существенно превосходить первое из-за большой величины  $\mu \gg 1$ . Тогда, полагая  $\mu \gg \frac{2\pi R}{\delta} \gg 1$ , из (4.17) найдём поле в зазоре:

$$H_2 \approx \frac{N_0 I}{\delta}. \quad (4.19)$$

Интересно, что из (4.19) следует, что поле в зазоре электромагнита практически не зависит ни от размеров и формы магнитного ярма (части магнитной цепи, заполненной веществом с большим  $\mu$ ), ни от его материала.

#### 4.4. Измерение индукции в образце

Один из простейших и в то же время надёжных методов измерения индукции  $B$  внутри некоторого образца основан на *законе электромагнитной индукции*. Электродвижущая сила, возникающая в контуре при изменении пронизывающего контур магнитного потока  $\Phi(B)$ , равна

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi(B)}{dt}, \quad (4.20)$$

Так как магнитный поток  $\Phi(B) = BS$  равен произведению индукции  $B$  на площадь образца  $S$ , формула (4.20) позволяет определить производную от индукции  $B$ . Чтобы измерить саму величину  $B = -\frac{1}{S} \int \mathcal{E} dt$ , необходимо иметь некоторое интегрирующее устройство. В качестве такового может быть применён милливеберметр (работа 3.4.1), баллистический гальванометр (работа 3.4.4), интегрирующая  $RC$ -цепочка (работа 3.4.5). В современной практике в основном применяется цифровое интегрирование.

**Замечание.** Следует обратить внимание, что при измерениях в переменном поле в образцах с большим  $\mu$  и высокой электропроводностью нельзя не учитывать конечную глубину проникновения поля в образец



из-за *скин-эффекта*:

$$\delta_{\text{скин}} \sim \sqrt{\frac{\rho}{\mu\mu_0 f}}$$

(см. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 3, § 144.). Здесь  $\rho$  — удельное сопротивление,  $f$  — частота колебаний поля. Например, при  $f = 50$  Гц для чистого железа ( $\rho \approx 10^{-7}$  Ом·м,  $\mu \approx 10^3$ ) имеем  $\delta \sim 1$  мм.

## 5. Энергия и силы в магнитном поле

### 5.1. Энергия поля

Рассмотрим соленоид длиной  $l$ , площадью  $S$  и числом витков  $N$ , заполненный магнетиком с известным законом зависимости индукции от напряжённости поля  $B(H)$  (или  $H(B)$ ). Подключим соленоид к источнику ЭДС  $\mathcal{E}$ . Пусть омическое сопротивление цепи равно  $R$ . Плавно (квазистатически) увеличим ток в цепи до некоторого значения  $I$ , так что напряжённость в соленоиде станет равна  $H = \frac{N}{l}I$ . Закон Ома в цепи соленоида имеет вид

$$\mathcal{E} - IR = \frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.21)$$

где правая часть отвечает ЭДС индукции,  $\Phi = NBS$  — магнитный поток в цепи.

Магнитная энергия  $W_M$ , запасённая в соленоиде, равна работе источника  $A_{\text{ист}} = \int \mathcal{E} I dt$  за вычетом тепловыделения  $Q = \int I^2 R dt$ . С учётом (4.21) получим

$$W_M = \int_0^t I(\mathcal{E} - IR)dt = \int_0^t I \frac{d\Phi}{dt} dt = \int I d\Phi. \quad (4.22)$$

В последнем равенстве мы перешли от интегрирования по времени к интегрированию по значениям  $\Phi$ . Если связь между потоком и током *линейна*:  $\Phi = LI$ , где  $L = \text{const}$  — индуктивность, то справедливы обычные формулы для магнитной энергии:

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi I}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}. \quad (4.23)$$

В случае произвольной геометрии магнетик можно разбить на элементарные ячейки и определить **объёмную плотность энергии** магнетика: разделив (4.22) на объём  $V = Sl$  и воспользовавшись соотношениями  $\Phi = NBS$  и  $I = lH/N$ , получим

$$w_M = \int H dB. \quad (4.24)$$

В частном случае простых диа- и парамагнетиков, для которых связь  $B = \mu\mu_0 H$  линейна, имеем упрощённую формулу

$$w_M = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2} = \frac{HB}{2} = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}. \quad (4.25)$$

Найдём изменение энергии (4.24) системы при переходе по некоторому замкнутому контуру на плоскости  $H$ – $B$ :

$$\Delta w_M = \oint H dB. \quad (4.26)$$

Если все процессы в магнетике обратимы, то функция  $H(B)$  будет определена однозначно, и энергия будет сохраняться:  $\Delta w_M = 0$ . В ферромагнетиках имеет место *гистерезис*, и функция  $B(H)$  однозначной не является. В таком случае в магнетике имеют место необратимые процессы, а величина  $\Delta w_M = \oint H dB < 0$  (площадь петли) будет равна потерям энергии на тепловыделение в образце за один период.

## 5.2. Силы в магнитном поле

Задача о силах, действующих на магнетики в магнитном поле, наиболее просто решается энергетическим методом *виртуальных перемещений*.

Рассмотрим некоторую систему, находящуюся в равновесии, для которой известна зависимость её магнитной энергии  $W_M(x)$  от некоторой (обобщённой) координаты  $x$ . Пусть под действием некоторой внешней силы  $F$  (положительное направление по оси  $x$ ) система сместилась от равновесия на малую величину  $\delta x$ . При этом сила совершила работу  $\delta A = F\delta x$ . Эта работа может пойти на приращение магнитной энергии  $\delta W_M$ , а также рассеяться в виде тепла  $\delta Q$ . Кроме того, дополнительную работу может совершить источник  $\delta A_{\text{ист}}$ . Таким образом, закон сохранения энергии имеет вид

$$F\delta x = \delta W_M - \delta A_{\text{ист}} + \delta Q.$$

Предположим сперва, что магнитный поток в цепи поддерживается постоянным ( $\Phi = \text{const}$ ). Тогда из закона Ома (4.21) в любой момент имеем  $\mathcal{E} = IR$ . Домножая на  $I$ , получим  $\mathcal{E}I = I^2 R$ , то есть работа источника  $\delta A_{\text{ист}} = \mathcal{E}I dt$  идёт целиком на тепловыделение  $\delta Q = I^2 R dt$ . Значит, вся работа внешней силы пойдёт на приращение магнитной энергии:  $F\delta x = \delta W_M$ . В таком случае внешняя сила равна производной энергии системы по координате при  $\Phi = \text{const}$  (или  $B = \text{const}$ ):

$$F_x^{(\text{внеш})} = \left( \frac{\partial W_M}{\partial x} \right)_{\Phi}. \quad (4.27)$$

Пусть теперь поддерживается постоянным ток в цепи ( $I = \text{const}$ ). Здесь ситуация оказывается несколько сложнее. Опять пользуясь законом Ома (4.21), запишем:

$$\delta A_{\text{ист}} - \delta Q = (\mathcal{E}I - I^2 R)dt = I\delta\Phi.$$

Видно, что вклад источника не учитывать нельзя (именно благодаря ему ток поддерживается постоянным). Вычисления существенно упрощаются, если мы имеем дело с материалами, для которых реализуется *линейная* связь между  $\Phi$  и  $I$  (и между  $H$  и  $B$ ). В таком случае из (4.23) имеем

$$\delta W_{\text{М}}|_{I=\text{const}} = \delta \left( \frac{\Phi I}{2} \right) = \frac{1}{2} I \delta\Phi.$$

Видно, что вклад работы источника по модулю вдвое превосходит изменение магнитной энергии и противоположен по знаку. Таким образом получаем  $F\delta x = \frac{1}{2} I \delta\Phi - I \delta\Phi = -\delta W_{\text{М}}$ , и внешняя сила равна производной энергии системы по координате при  $I = \text{const}$  (или  $H = \text{const}$ ), *взятой с обратным знаком*:

$$F_x^{(\text{внеш})} = - \left( \frac{\partial W_{\text{М}}}{\partial x} \right)_I. \quad (4.28)$$

Заметим, что полученная выше формула (4.27) более общая и справедлива в том числе для ферромагнетиков с нелинейным законом  $H(B)$ .

### Литература

1. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — Гл. 4, 8, 9.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — Гл. III.
3. *Кингсеп А.С., Локишин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2007. — Ч. II, Гл. 5, 7.

### Работа 3.4.1

#### Диа- и парамагнетики

**Цель работы:** измерение магнитной восприимчивости диа- и парамагнитного образцов.

**В работе используются:** электромагнит, аналитические весы, милливерметр, регулируемый источник постоянного тока, образцы.

Перед выполнением работы рекомендуется ознакомиться с теоретическим введением к разделу, пп. 2.1, 2.2 и 5.

Магнитная восприимчивость тел может быть определена по измерению сил, действующих на тела в магнитном поле. Существуют два классических метода таких измерений: *метод Фарадея* и *метод Гюи*. В методе Фарадея исследуемые образцы, имеющие форму маленьких шариков, помещаются в область сильно неоднородного магнитного поля и измеряется сила, действующая на образец. При этом для расчёта магнитной восприимчивости необходимо знать величину градиента магнитного поля в месте расположения образца. В методе Гюи используется тонкий и длинный стержень, один из концов которого помещают в зазор электромагнита (обычно в область однородного поля), а другой конец — вне зазора, где величиной магнитного поля можно пренебречь. Закон изменения поля — от максимального до нулевого — в этом случае несуществен. В данной работе предлагается использовать метод Гюи.

Найдём выражение для силы, действующей со стороны магнитного поля на цилиндрический стержень, помещённый в зазор электромагнита (рис. 1). Пусть площадь сечения образца равна  $S$ , его магнитная проницаемость —  $\mu$ , поле в зазоре равно  $B_0$  и образец помещён в зазор на глубину  $x$ .

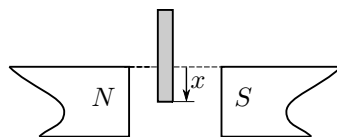


Рис. 1. Расположение образца в зазоре электромагнита

Ток в обмотке электромагнита  $I$  поддерживается постоянным, поэтому согласно (4.28) внешняя сила, необходимая для удержания образца в магнитном поле, равна производной магнитной энергии системы по координате. Нас интересует сила, действующая на образец *со стороны магнитного поля*, поэтому изменим знак (4.28) на противоположный:

$$F_M = \left( \frac{\partial W_M}{\partial x} \right)_I, \quad (1)$$

где  $W_M(x)$  — магнитная энергия системы при  $I = \text{const}$  (то есть при  $B_0 = \text{const}$ ) в зависимости от смещения образца  $x$ .

Магнитная энергия, с учётом выражения (4.25) для её объёмной плотности, может быть рассчитана по формуле:

$$W_M = \frac{1}{2\mu_0} \int \frac{B^2}{\mu} dV, \quad (2)$$

где интеграл распространён на всё пространство.

Найдём распределение магнитного поля в длинном цилиндре, частично помещённом в зазор электромагнита.

Сначала решим вспомогательную задачу: рассмотрим бесконечный стержень с проницаемостью  $\mu$ , помещённый в перпендикулярное ему однородное магнитное поле  $B_0 = \mu_0 H_0$ , и найдём поле  $B_{ст}$  в образце. Эта задача имеет точное решение (см. Приложение), однако, поскольку магнитная восприимчивость диа- и парамагнетиков мала  $|\chi| \ll 1$  ( $\mu \approx 1$ ), можно воспользоваться непрерывностью касательной компоненты  $H$  и считать, что в образце  $H_{ст} = H_0$  и, следовательно,  $B_{ст} = \mu B_0$ .

Вернёмся к задаче о цилиндре в электромагните. Систему можно условно разбить на 3 части (см. рис. 2). В области I вне электромагнита поле мало  $B_1 \approx 0$  и его вкладом в энергию можно пренебречь. В части стержня II, погружённой в электромагнит, поле приближенно равно  $B_2 \approx \mu B_0$ . В области III вдали от стержня поле мало отличается от  $B_3 = B_0$ . Наконец, в пограничных областях между I и II и между II и III (отмечены пунктиром) распределение поля простыми методами рассчитано быть не может.

При смещении стержня вглубь электромагнита на некоторое расстояние  $dx$  область II увеличивает-ся в объёме на  $dV_2 = S dx$ , а область III уменьшается на  $dV_3 = -S dx$ . При этом пограничный участок II–III смещается, но распределение поля в нём практически не меняется. Изменение области I можно не учитывать, так как там нет поля, а пограничный участок I–II остаётся практически неизменным. Пользуясь (2), найдём изменение магнитной энергии при заданном смещении:

$$dW_M(\Delta x) \approx \frac{B_2^2}{2\mu\mu_0} S dx - \frac{B_3^2}{2\mu_0} S dx = (\mu - 1) \frac{B_0^2}{2\mu_0} S dx.$$

Следовательно, искомая сила равна

$$F_M = \left( \frac{\partial W_M}{\partial x} \right)_{B_0} \approx \chi \frac{B_0^2}{2\mu_0} S. \quad (3)$$

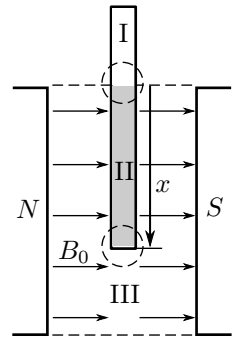


Рис. 2. К вычислению распределения поля в образце

Знак силы зависит от знака восприимчивости  $\chi = \mu - 1$ : парамагнетики ( $\chi > 0$ ) *втягиваются* в зазор электромагнита, а диамагнетики ( $\chi < 0$ ) *выталкиваются* из него (напомним, что положительным по  $x$  мы считаем направление вглубь зазора). Таким образом, измерив силу, действующую на образец в магнитном поле  $B_0$ , можно рассчитать магнитную восприимчивость образца.

### Экспериментальная установка

Схема установки изображена на рис. 3. Магнитное поле с максимальной индукцией  $\approx 1$  Тл создаётся в зазоре электромагнита, питаемого постоянным током. Диаметр полюсов существенно превосходит ширину зазора, поэтому поле в средней части зазора достаточно однородно. Величина тока, проходящего через обмотки электромагнита, задаётся регулируемым источником постоянного напряжения.

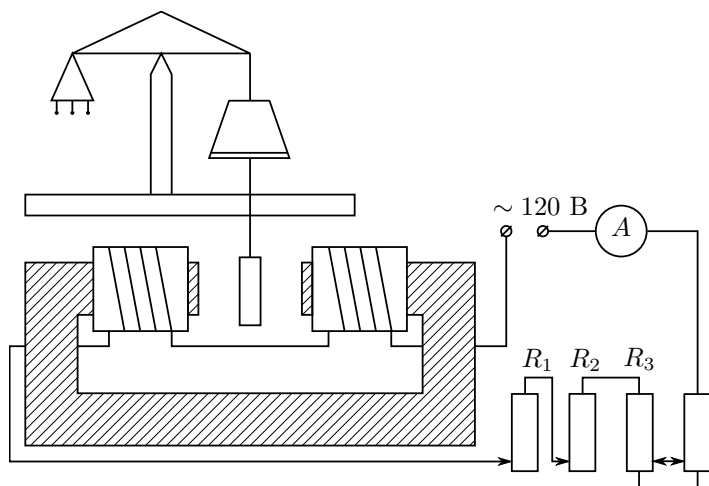


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

Градуировка электромагнита (связь между индукцией магнитного поля  $B$  в зазоре электромагнита и силой тока  $I$  в его обмотках) производится при помощи милливексметра (описание милливексметра и правила работы с ним приведены на с. 192). Альтернативно магнитное поле электромагнита можно измерить с помощью датчика Холла.

При измерениях образцы поочерёдно подвешиваются к аналитическим весам так, что один конец образца оказывается в зазоре электромагнита, а другой — вне зазора, где индукцией магнитного поля можно пренебречь. При помощи аналитических весов определяется перегрузка  $\Delta P = F$  — сила, действующая на образец со стороны магнитного поля.

Как уже отмечалось, силы, действующие на диа- и парамагнитные образцы, очень малы. Небольшие примеси ферромагнетиков (сотые доли процента железа или никеля) способны кардинально изменить результат опыта, поэтому образцы были специально отобраны.

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость силы, действующей на образец, размещённый в зазоре электромагнита, от величины поля в зазоре и по результатам измерений рассчитать магнитную восприимчивость меди и алюминия.

1. Проверьте работу цепи питания электромагнита. Оцените диапазон изменения тока  $I$  через обмотки.
2. Прокалибруйте электромагнит. Для этого с помощью милливексметра снимите зависимость магнитного потока  $\Phi$ , пронизывающего пробную катушку, находящуюся в зазоре, от тока  $I$  ( $\Phi = BSN$ ). Значение  $SN$  (произведение площади сечения пробной катушки на число витков в ней) указано на установке.

### Внимание!

Включать и отключать электромагнит следует только при минимальном токе.

3. При работе с механическими весами убедитесь, что весы арретированы\*.

### Внимание!

Механические весы следует арретировать перед каждым изменением тока.

4. Измерьте силы, действующие на образец в магнитном поле. Для этого, не включая электромагнит, подвесьте к весам один из образцов. Установите на весах примерное значение массы образца (масса, диаметр и максимальное значение перегрузки для каждого образца указаны на установке). Освободите весы и добейтесь точного равновесия весов.

Арретируйте весы. Установите минимальное значение тока и проведите измерение равновесного значения массы.

Повторите измерения  $\Delta P(I)$  для 6–8 других значений тока.

5. Повторите измерения п. 4 для другого образца.

---

\* Арретир (фр. *arreter* — фиксировать) — приспособление для закрепления чувствительного элемента измерительного прибора в нерабочем состоянии.

### Обработка результатов

6. Рассчитайте поле  $B$  и постройте градуировочную кривую для электромагнита:  $B(I)$ .
7. Постройте на одном листе графики  $|\Delta P| = f(B^2)$  для меди и алюминия.
8. По наклонам полученных прямых рассчитайте магнитную восприимчивость  $\chi$  с помощью формулы (3).
9. Оцените погрешности измерений. Сравните экспериментальные результаты с табличными значениями.

### Контрольные вопросы

1. Получите выражения для силы, действующей на цилиндрический образец, помещённый в зазор электромагнита.
2. Как меняется энергия магнитного поля при помещении в него пара/диамагнетика? Как объяснить направление действия магнитной силы на образец с точки зрения закона сохранения энергии?
3. Как можно убедиться в однородности или неоднородности магнитного поля в зазоре электромагнита?
4. Как проверить экспериментально, влияет ли намагниченность весов на результаты измерения магнитной восприимчивости?
5. Влияет ли размагничивающий фактор образца на результаты опыта?
6. Пусть в качестве образцов используется тонкая и длинная полоса. В первом случае плоскость образца перпендикулярна линиям магнитной индукции, во втором — параллельна. Будет ли действующая на образец сила отличаться в этих двух случаях?
7. Вычислите силу, действующую на маленький диа/парамагнитный шарик, помещённый в неоднородное магнитное поле.

### Литература

1. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — §§ 4.2, 8.3, 9.1, 9.2.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 61, 75–77.
3. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003. — Гл. XI, §§ 109, 117, 118.
4. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2007. — Ч. II, гл. 5, § 5.2.



## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Стержень в поперечном магнитном поле

Найдём распределение магнитного поля внутри бесконечно длинного стержня с сечением  $S = \pi R^2$ , помещённого в перпендикулярное ему однородное внешнее поле  $\mathbf{H}_0$ . Будем искать решение, предполагая, что намагниченность стержня будет постоянной (однородной) и сонаправленной ему,  $\mathbf{M} = \text{const}$ . Пусть  $\mathbf{M} = \chi' \mathbf{H}_0$ , где  $\chi' = \text{const}$  — некоторая безразмерная константа, имеющая смысл эффективной магнитной восприимчивости с учётом формы образца.

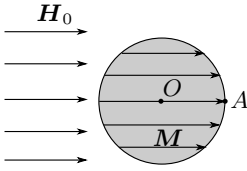


Рис. 1. Намагниченность цилиндра во внешнем поле

Поляризуясь в поперечном внешнем поле, цилиндрический стержень представляет собой *двумерный диполь*: его поле представимо как сумма полей двух соосных проводов, разведённых на некоторое малое расстояние. Можно получить (получите самостоятельно) следующую формулу для поля двумерного диполя:

$$\mathbf{H}_{\text{дип}} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{4(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^4} - \frac{2\mathbf{p}}{r^2} \right), \quad (1)$$

где  $\mathbf{p} = \mathbf{M}S$  — дипольный момент на единицу длины стержня.

Итак, вне стержня поле представляет собой сумму внешнего поля  $\mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}_0 = \text{const}$  и поля (1).

Воспользуемся граничными условиями для магнитного поля. В каждой точке на границе стержня должна быть непрерывна нормальная компонента поля  $B$  (а также тангенциальная для  $H$ ). Причём всюду внутри стержня  $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$  и, следовательно,

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \frac{\chi + 1}{\chi} \mu_0 \mathbf{M}.$$

Рассмотрим, например, точку А (см. рис. 1), для которой  $\mathbf{r}_A = \frac{R}{r} \mathbf{r}$ . Вклад в поле от намагниченности стержня в этой точке равен

$$\mathbf{B}_{\text{дип}} = \frac{2\mu_0 \mathbf{p}}{4\pi r^2} = \frac{1}{2} \mu_0 \mathbf{M} = \frac{1}{2} \chi' \mathbf{B}_0.$$

Снаружи стержня имеем  $B_n^{(\text{out})} = B_0 + B_{\text{дип}}(\mathbf{r}_A) = (1 + \frac{1}{2}\chi')B_0$ , внутри стержня  $B_n^{(\text{in})} = \frac{\mu\mu_0}{\mu - 1} M = \frac{\chi + 1}{\chi} \chi' B_0$ . Приравнявая, находим

$$\chi' = \frac{2\chi}{2 + \chi} = 2 \frac{\mu - 1}{\mu + 1}.$$

Предоставляем читателю возможность самостоятельно убедиться, что соответствующие граничные условия будут удовлетворены во всех точках на границе стержня. В силу теоремы единственности найденное распределение намагниченности и будет решением поставленной задачи.

Итак, во внешнем поле с напряжённостью  $\mathbf{H}_0$  длинный стержень, расположенный перпендикулярно полю, приобретает намагничённость

$$\mathbf{M} = \frac{\chi}{1 + \frac{1}{2}\chi} \mathbf{H}_0.$$

Таким образом, мы показали, что размагничивающий фактор в данной задаче равен  $N_{\text{разм}} = 1/2$ .

Если восприимчивость материала стержня мала,  $|\chi| \ll 1$ , то окончательно имеем

$$\mathbf{M} \approx \chi \mathbf{H}_0.$$

Иными словами, в данной ситуации можно пренебречь отличием напряжённости внешнего поля  $\mathbf{H}_0$  и поля в образце  $\mathbf{H}$ . Для стержня конечных размеров разность  $\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}$  может оказаться отличной от нуля ввиду краевых эффектов, которыми, однако, можно пренебречь, если длина стержня велика по сравнению с радиусом.

## Работа 3.4.2

### Закон Кюри–Вейсса

**Цель работы:** изучение температурной зависимости магнитной восприимчивости ферромагнетика выше точки Кюри.

**В работе используются:** катушка самоиндукции с образцом из гадолиния, термостат, частотомер, цифровой вольтметр, LC-автогенератор, термopара медь-константан.

Перед выполнением работы рекомендуется ознакомиться с пп. 2.2, 2.3 теоретического введения к разделу.

Вещества с отличными от нуля атомными магнитными моментами обладают парамагнитными свойствами. Внешнее магнитное поле ориентирует магнитные моменты, которые в отсутствие поля располагались в пространстве хаотичным образом. При повышении температуры  $T$  возрастает дезориентирующее действие теплового движения частиц, и магнитная восприимчивость парамагнетиков убывает по закону Кюри — обратно пропорционально температуре (см. вывод формулы (4.8) во введении к разделу):

$$\chi \propto \frac{1}{T}. \quad (1)$$

Некоторые парамагнетики при понижении температуры испытывают фазовый переход в ферромагнитное состояние. При малых температурах тепловое движение всё меньше препятствует магнитным моментам атомов ориентироваться в одном направлении при сколь угодно слабом внешнем поле. Благодаря обменному взаимодействию, имеющему электростатическую природу, в ферромагнетиках самопроизвольное упорядочение магнитных моментов возможно при довольно высоких температурах. Температуру фазового перехода парамагнетик–ферромагнетик называют **температурой Кюри**  $\Theta_K$ . Температурная зависимость магнитной восприимчивости у ферромагнетиков выше точки Кюри с удовлетворительной точностью описывается **законом Кюри–Вейсса** (см. также вывод (4.10)):

$$\chi \propto \frac{1}{T - \Theta_p}, \quad (2)$$

где  $\Theta_p$  — параметр с размерностью температуры, называемый иногда *парамагнитной точкой Кюри*. Величина  $\Theta_p$  близка к  $\Theta_K$ , но не совпадает с ней.

Непосредственно вблизи  $\Theta_K$  закон Кюри–Вейсса (2) нарушается. На практике наблюдается зависимость, изображенная на рис. 1.

### Экспериментальная установка

В работе изучается температурная зависимость  $\chi(T)$  гадолиния при температурах выше точки Кюри. Выбор материала определяется тем, что его точка Кюри лежит в диапазоне комнатных температур.

Схема установки для проверки закона Кюри–Вейсса показана на рис. 2. Исследуемый ферромагнитный образец (гадолиний) расположен внутри пустотелой катушки самоиндукции, которая служит индуктивностью колебательного контура, входящего в состав  $LC$ -автогенератора (генератора колебаний с самовозбуждением).

Гадолиний является хорошим проводником электрического тока, а рабочая частота генератора достаточно велика ( $\sim 50$  кГц), поэтому для уменьшения вихревых токов образец изготовлен из мелких кусочков размером около 0,5 мм. Катушка 1 с образцом помещена в стеклянный сосуд 2, залитый трансформаторным маслом. Масло предохраняет образец от окисления и способствует ухудшению электрического контакта меж-

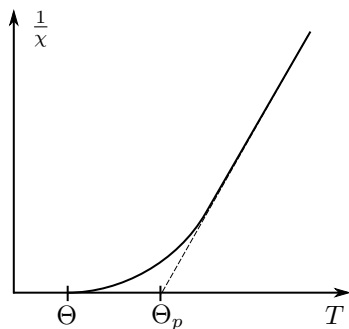


Рис. 1. Зависимость обратной величины магнитной восприимчивости от температуры

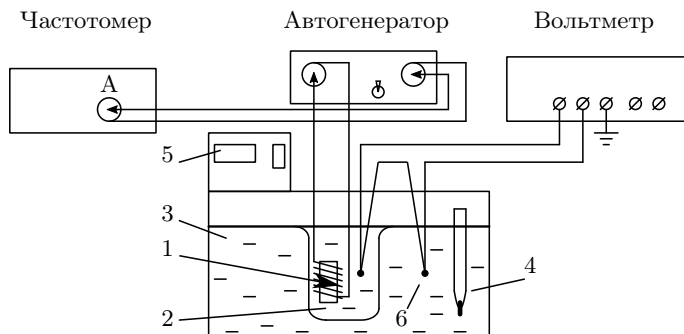


Рис. 2. Схема экспериментальной установки

ду отдельными частичками образца. Кроме того, оно улучшает тепловой контакт между образцом и термостатируемой (рабочей) жидкостью 3 в термостате. Ртутный термометр 4 используется для приближённой оценки температуры. Температура образца регулируется с помощью термостата 5.

Коэффициент самоиндукции катушки  $L$  пропорционален магнитной проницаемости  $\mu$  заполняющей его среды (почему?):  $L \propto \mu$ . Тогда разность самоиндукций катушки с образцом  $L$  и без него  $L_0$  будет пропорциональна восприимчивости образца  $\chi$ :

$$L - L_0 \propto \mu - 1 = \chi.$$

При изменении индуктивности образца меняется период колебаний автогенератора:

$$\tau = 2\pi\sqrt{LC},$$

где  $C$  — ёмкость контура автогенератора. Период колебаний в отсутствие образца определяется самоиндукцией пустой катушки:

$$\tau_0 = 2\pi\sqrt{L_0C}.$$

Отсюда находим

$$L - L_0 \propto \tau^2 - \tau_0^2$$

и, следовательно,

$$\chi \propto \tau^2 - \tau_0^2. \quad (3)$$

Из формул (2) и (3) следует, что закон Кюри–Вейсса справедлив, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{\tau^2 - \tau_0^2} \propto T - \Theta_p. \quad (4)$$

Измерения проводятся в интервале температур от  $14^{\circ}\text{C}$  до  $40^{\circ}\text{C}$ . С целью экономии времени следует начинать измерения с низких температур.

Температура исследуемого образца всегда несколько отличается от температуры воды в термостате. После того как вода достигла заданной температуры, идёт медленный процесс выравнивания температур образца и воды. Разность их температур контролируется с помощью медно-константановой термопары 6, один из спаев которой находится в тепловом контакте с образцом, а другой погружён в воду. Чувствительность термопары указана на установке. Рекомендуется измерять период колебаний автогенератора в тот момент, когда указанная разность температур становится меньше  $0,5^{\circ}\text{C}$  (более точному измерению температур мешают паразитные ЭДС, возникающие в цепи термопары).

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается исследовать зависимость периода колебаний автогенератора от температуры сердечника катушки и по результатам измерений определить парамагнитную точку Кюри гадолиния.

1. Подготовьте приборы к работе.
2. Зная температурный коэффициент термопары (указан на установке), оцените допустимую ЭДС термопары, если допустимая разность температур образца и рабочей жидкости  $\Delta T = 0,5^{\circ}\text{C}$ ;
3. Исследуйте зависимость периода колебаний  $LC$ -генератора от температуры образца, отмечая период колебаний  $\tau$  по частотомеру, а температуру  $T$  — по показаниям дисплея и цифровому вольтметру ( $\Delta U$  с учётом знака). Термопара подключена так, что при знаке «+» на табло вольтметра температура образца выше температуры рабочей жидкости.

Измерения проведите в диапазоне от  $14^{\circ}\text{C}$  до  $40^{\circ}\text{C}$ .

4. Запишите период колебаний  $\tau_0$  без образца, указанный на установке.
5. Закончив измерения, охладите термостат, руководствуясь техническим описанием.

### Обработка результатов

6. Рассчитайте температуру  $T$  образца с учётом показаний термопары. Постройте график зависимости  $1/(\tau^2 - \tau_0^2) = f(T)$ . Экстраполируя полученную прямую к оси абсцисс, определите парамагнитную точку Кюри  $\Theta_p$  для гадолиния.
7. По участку, отклоняющемуся от линейной зависимости, оцените положение ферромагнитной точки Кюри  $\Theta_K$ .

8. Оцените погрешности эксперимента и сравните результат с табличным.

### Контрольные вопросы

1. Почему приращение индуктивности  $L - L_0$  пропорционально магнитной восприимчивости образца  $\chi$ ?
2. Как объяснить явления пара- и диамагнетизма с молекулярной точки зрения?
3. Чем отличаются пара- и ферромагнетики в отсутствие магнитного поля?
4. Качественно изобразите на одном графике  $B(H)$  для пара-, диа- и ферромагнетика.
5. Какой вклад в измерение магнитной восприимчивости вносит проводимость гадолиния? Как связан этот вклад с размером крупинок, частотой и удельной проводимостью? Зависит ли этот вклад от температуры? Оцените этот вклад для крупинок размером 0,5 мм.
6. Оцените глубину проникновения магнитного поля около точки Кюри, считая магнитную проницаемость и проводимость ферромагнетика примерно такими же, как у железа.

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 74, 79.
2. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003. — §§ 110, 111, 119.
3. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — §§ 4.2, 9.3.

### Работа 3.4.3

## Точка Кюри

**Цель работы:** определение точки Кюри ферромагнетиков по температурным зависимостям магнитной проницаемости и сопротивления.

**В работе используются:** трансформатор, катушки, амперметры, вольтметры, реостаты, трубчатая печь, цифровой вольтметр, термопары, образцы.

В первой части работы исследуется изменение начальной магнитной проницаемости ферромагнетика вблизи точки Кюри  $\Theta_K$  (рис. 1), во второй — зависимость сопротивления образца от температуры (фазовый переход II-го рода — рис. 2).

Известно, что в ферромагнетике при определённой температуре, называемой **точкой Кюри**, исчезает спонтанная намагниченность материала. Это сопровождается изменением ряда физических свойств ферромагнетика: теплоёмкости, теплопроводности, электропроводности, магнитной восприимчивости и проницаемости; исчезает эффект магнитоstriction и анизотропия намагниченности. Поэтому, нагревая ферромагнитный образец и наблюдая за изменением его физических свойств, можно определить точку Кюри ферромагнетика.

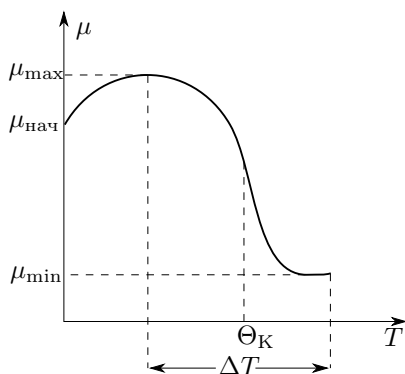


Рис. 1. Зависимость магнитной проницаемости от температуры образца

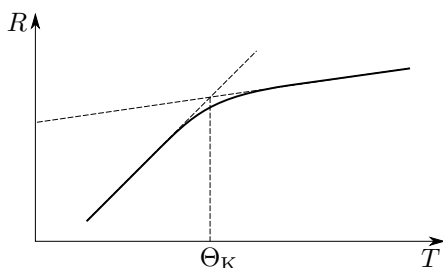


Рис. 2. Зависимость сопротивления от температуры образца

## А. Определение точки Кюри по изменению магнитной проницаемости

### Экспериментальная установка

Экспериментальная установка, представленная на рис. 3, состоит из намагничивающей катушки  $L_0$ , питаемой переменным током, и измерительной катушки  $L_1$ , замкнутой через диод  $D$  на микроамперметр  $A_1$ .

При прохождении переменного тока через  $L_0$  в катушке  $L_1$  возникает индукционный ток  $I_1$ . Величину тока можно регулировать реостатом  $R_1$ .

Внутри обеих катушек находится небольшая трубчатая печь  $\Pi$ , в которую помещается образец  $O$ . Печь нагревается бифилярной обмоткой (двухпроводная обмотка с нулевой полной индуктивностью), подключённой к источнику постоянного напряжения 36 В. Ток нагрева печи  $I_0$  можно регулировать реостатом и контролировать амперметром  $A_0$ .

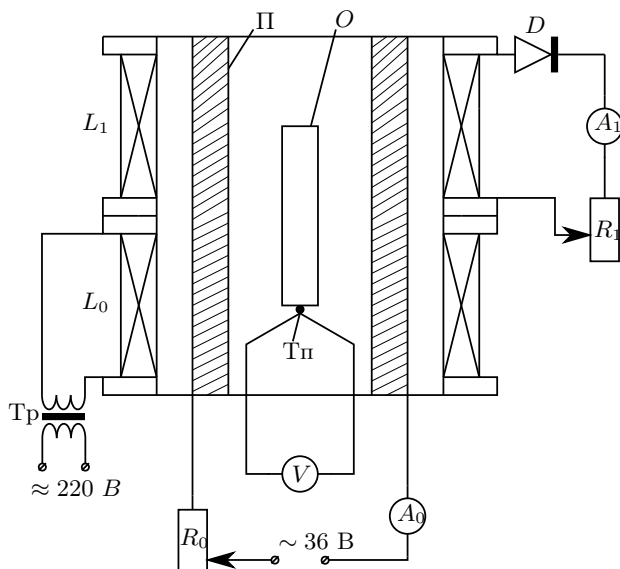


Рис. 3. Схема экспериментальной установки для исследования  $\mu(T)$

Нагрев катушек  $L_0$  и  $L_1$  может изменить их сопротивления и сказаться на показаниях микроамперметра. Для уменьшения вредного нагрева в зазор между печкой и катушками вдувается воздух с помощью вентилятора.

Температура внутри печи измеряется с помощью термопары  $T_{\Pi}$ , соединенной с милливольтметром  $V$ . По показаниям милливольтметра можно с помощью градуировочного графика термопары, приведённого на установке, определить разность между температурой спая и комнатной температурой.

При неизменных прочих условиях ток индукции  $I_1$  зависит только от магнитной проницаемости образца, помещённого в печь, т. е.  $I_1 = f(\mu)$ . Это утверждение легко проверить, сняв зависимость тока  $I_1$  от температуры печи, когда в ней нет образца, и с ферромагнитным образцом. В первом случае ток практически не зависит от температуры печи, а во втором — изменение тока будет значительным вблизи точки Кюри (рис. 1). При температуре выше точки Кюри показания микроамперметра будут такими же, как и в отсутствие образца.

Точка Кюри соответствует середине участка с максимальным наклоном касательной к кривой; рабочий диапазон  $\Delta T$  должен быть несколько шире.



## ЗАДАНИЕ

В данном упражнении предлагается измерить зависимость тока индукции от температуры и рассчитать точку Кюри. В работе исследуются стержни из ферромагнитных материалов (никель и пермендюр) и феррита.

1. Перед началом работы с помощью градуировочного графика термопары рассчитайте предельно допустимую разность потенциалов, если известно, что температура образца не должна превышать  $400^\circ\text{C}$ .
2. Поместив ферромагнитный стержень в катушку, включите трансформатор Тр в сеть на 220 В. Образец следует опустить до упора, под которым расположена термопара.
3. Установите реостат  $R_0$  в среднее положение и подключите печь к источнику 36 В. Тумблером, расположенным под катушками, включите вентилятор.
4. Подберите режим, удобный для определения точки Кюри: чтобы быстрее дойти от комнатной температуры до начала рабочего участка  $\Delta T$  (рис. 1), установите максимальный ток нагрева печи ( $I_0 \sim 5\text{ А}$ ) с помощью реостата  $R_0$ . Заметив начало спада тока индукции, уменьшите ток нагрева вдвое. Оцените границы рабочего диапазона термопары  $\Delta U(\sim \Delta T)$  и интервал резкого изменения тока.

### Внимание!

Не перегревайте катушку! (см. п. 1).

5. Подберите ток нагрева  $I_0$  так, чтобы время одной серии (нагрев или охлаждение внутри рабочего диапазона  $\Delta U$ ) составляло 2–3 мин. В течение одной серии не следует менять чувствительность микроамперметра ( $I_1$ ) и ток нагрева печи ( $I_0$ ), так как это влияет на величину тока индукции  $I_1$ .
6. Проведите предварительные измерения: при фиксированном токе нагрева  $I_0$  регистрируйте  $I_1$  и  $U$ . Полезно отметить время начала и окончания записи, чтобы оценить продолжительность одной серии.
7. Выбрав режим работы, снимите зависимость тока индукции  $I_1$  от термо-ЭДС  $U$  при постоянном токе  $I_0$ ; в области резкого изменения тока  $I_1$  точки должны лежать чаще. Проведите измерения при нагревании и охлаждении образца.
8. Повторите п. 2–7 для второго образца.
9. Охладив катушку, отключите печь и ток намагничивания.

## Обработка результатов

10. Постройте графики зависимости тока индукции от температуры  $I_1(T)$ . Определите точку Кюри  $\Theta_K$  как температуру средней точки участка кривой с максимальным наклоном касательной.
11. Оцените погрешность результата эксперимента и сравните его с табличным.

**Б. Определение точки Кюри по изменению сопротивления****Экспериментальная установка**

Схема экспериментальной установки для исследования зависимости омического сопротивления ферромагнетика от температуры представлена на рис. 4. Никелевая спираль  $C$ , намотанная на фарфоровую трубку, заключена в керамическую трубку и помещена в трубчатую печь  $\Pi$ . Нагрев печи регулируется переключателем  $K$ . Температура фарфоровой трубки (спирали) контролируется термопарой  $T_{\Pi}$ , подключённой к милливольтметру  $V$ , прокалиброванному в градусах. Сопротивление спирали измеряется мультиметром  $\Omega$ .

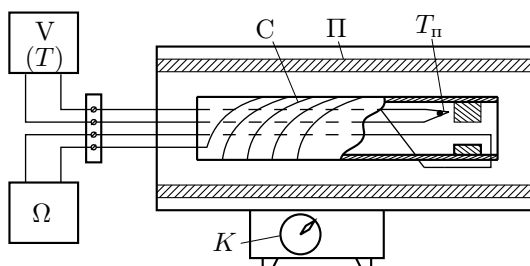


Рис. 4. Схема экспериментальной установки для исследования зависимости сопротивления от температуры

**ЗАДАНИЕ**

В этом упражнении предлагается получить зависимость сопротивления никелевой спирали от температуры и определить точку Кюри.

1. Включите в сеть цифровой вольтметр. Измерьте сопротивление никелевой спирали при комнатной температуре ( $R \sim 10 \text{ Ом}$ ).
2. Включите печь в сеть на 220 В и поставьте переключатель  $K$  в среднее положение.
3. Измеряйте сопротивление  $R$  и температуру спирали  $T$  через каждые  $20^\circ\text{C}$ , не останавливая нагрева. При температуре образца  $> 200^\circ\text{C}$  мощность нагрева следует увеличить.

Дойдя до предельной температуры ( $T_{\max} = 450^\circ\text{C}$ ), отключите нагрев и проведите измерения при охлаждении образца до  $100^\circ\text{C}$ .

### Обработка результатов

4. Постройте график зависимости сопротивления образца от температуры  $R(T)$ . По изменению температурного коэффициента сопротивления (пересечению касательных к прямолинейным участкам графика  $R(T)$ ) найдите точку Кюри (рис. 2).
5. Градуировка милливольтметра соответствует термопаре железо-константан. Если в установке используется медь-константан, сделайте пересчет точки Кюри  $\Theta_K$ , используя градуировочные графики чувствительности обеих термопар (не забудьте учесть комнатную температуру!).
6. Оцените погрешности результата эксперимента и сравните его с табличным значением.

### Контрольные вопросы

1. Чем отличаются свойства атомов пара- и диамагнетиков в отсутствие магнитного поля?
2. Как изменяются характеристики вещества при фазовых переходах первого и второго рода?
3. Какие два конкурирующих взаимодействия между атомами характерны для ферромагнитного вещества?
4. На одном графике качественно изобразите начальные кривые намагничивания  $B(H)$  для ферромагнетика при трёх температурах: комнатной, более высокой и температуре выше точки Кюри. Укажите на оси  $H$ , где лежит область, соответствующая условиям настоящей работы.

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 74, 79.
2. *Калашиников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003. — Гл. XI, §§ 110, 111, 119.
3. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — § 9.3.

## Работа 3.4.4

## Петля гистерезиса (статический метод)

**Цель работы:** наблюдение начальной кривой намагничивания ферромагнетиков и предельной петли гистерезиса.

**В работе используются:** источник питания, тороид, соленоид, баллистический гальванометр с осветителем и шкалой, амперметр, магазин сопротивлений, лабораторный автотрансформатор (ЛАТР), разделительный трансформатор.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с пп. 2.3, 3 и 4 теоретического введения к разделу.

Магнитная индукция  $B$  и напряжённость поля  $H$  в ферромагнитном материале неоднозначно связаны между собой: индукция зависит не только от напряжённости, но и от предыстории образца. Связь между  $B$  и  $H$  типичного ферромагнетика иллюстрирует рис. 1.

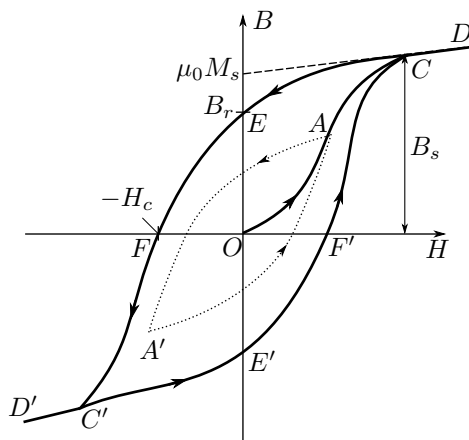


Рис. 1. Петля гистерезиса ферромагнетика

Если к размагниченному образцу начинают прикладывать магнитное поле, то его намагничивание следует кривой OACD (начальная кривая намагничивания). Кривая OAC практически совпадает с соответствующей зависимостью  $M(H)$ , поскольку для неё второе слагаемое в выражении (4.1) существенно превосходит первое ( $\chi \gg 1$ ). В точке C намагниченность достигает насыщения ( $M \rightarrow \max$ ), соответствующее значение индукции (индукцию насыщения) обозначим  $B_s$ . Дальнейшее увеличение индукции происходит только вследствие роста  $H$  (линия CD

— прямая). Нетрудно видеть, что экстраполяция прямой  $CD$  до пересечения с осью ординат  $H = 0$  позволяет определить намагниченность в насыщении  $M_s$ .

При уменьшении  $H$  до нуля зависимость  $B(H)$  имеет вид кривой DCE, в точке E ( $H = 0$ ) имеет место некоторая остаточная индукция  $B_r$ . Чтобы размагнитить образец, то есть перевести его в состояние  $B = 0$  (точка F), необходимо приложить «обратное» магнитное поле  $-H_c$  (коэрцитивным поле или коэрцитивная сила). Замкнутая кривая CEF C'E'F'C, возникающая при циклическом перемагничивании образца с достижением насыщения, называется *предельной* петлёй гистерезиса. Если начать уменьшать поле в некоторой промежуточной точке A основной кривой, траектория системы будет также представлять собой некоторую гистерезисную петлю AA' меньшей площади (обозначена пунктиром).

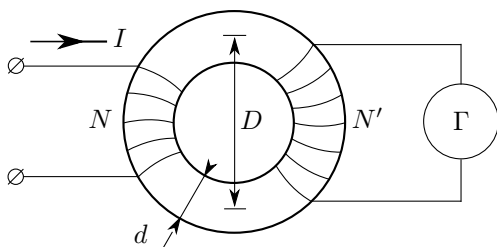


Рис. 2. Схема для измерения индукционного тока (или заряда)

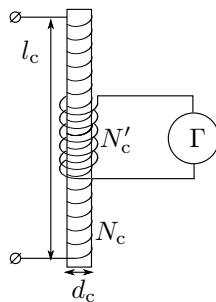


Рис. 3. Схема для калибровки гальванометра

В настоящей работе предлагается измерить начальную кривую намагничивания и предельную петлю гистерезиса следующим методом. На тороидальный сердечник (рис. 2), изготовленный из исследуемого образца, равномерно намотана *намагничивающая* обмотка с числом витков  $N$ , а поверх неё — *измерительная* обмотка с числом витков  $N'$ . При скачкообразном изменении тока в намагничивающей обмотке в измерительной обмотке возникает ЭДС индукции. Ток, вызванный этой ЭДС, регистрируется гальванометром Г, работающим в баллистическом (импульсном) режиме: его отклонение пропорционально полному заряду  $\Delta q$ , протекшему через него (подробнее баллистический режим описан в работе 3.2.6).

Напряжённость поля  $H$  в сердечнике пропорциональна току  $I$  в первичной (намагничивающей) обмотке, а изменение магнитной индукции  $\Delta B$  — заряду  $\Delta q$ , протекшему через вторичную (измерительную) обмотку. Таким образом, измеряя токи  $I$  и суммируя отклонения  $\Delta q$  гальванометра Г, можно получить зависимость  $B(H)$  для материала сердечника.

**Измерение полей.** Рассмотрим подробнее, как выразить  $B$  и  $H$  через параметры, измеряемые в эксперименте. Напряжённость магнитного поля  $H$  в тороиде определяется током, текущим в намагничивающей обмотке (см. (4.16)):

$$H \approx \frac{N}{\pi D} I, \quad (1)$$

где  $D$  — средний диаметр тора.

Пусть в намагничивающей обмотке ток скачкообразно изменился на величину  $\Delta I$ . При этом пропорционально меняется поле  $H$  в тороиде:  $\Delta H \propto \Delta I$ . Изменение поля  $\Delta H$  приводит к изменению потока магнитной индукции  $\Phi$  в сердечнике, и в измерительной обмотке сечения  $S_t$  с числом витков  $N'$  возникает ЭДС индукции:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -SN' \frac{dB}{dt}.$$

Через гальванометр  $\Gamma$  протекает импульс тока; первый отброс «зайчика» гальванометра, работающего в баллистическом режиме, пропорционален величине прошедшего через гальванометр заряда  $\Delta q$ :

$$\Delta x = \frac{\Delta q}{b},$$

где  $b$  — константа, называемая *баллистической постоянной гальванометра*. Свяжем отклонение  $\Delta x$  с изменением магнитной индукции  $\Delta B$ :

$$|\Delta x| = \frac{1}{b} \int I dt = \frac{1}{bR} \int \mathcal{E} dt = \frac{S_t N'}{bR} |\Delta B|, \quad (2)$$

где  $R$  — полное сопротивление измерительной цепи тороида,  $S$  — площадь поперечного сечения сердечника:  $S = \pi d^2/4$ .

Баллистическую постоянную  $b$  можно определить, если провести аналогичные измерения, взяв вместо тороида с сердечником пустотелый соленоид с числом витков  $N_c$ , на который намотана короткая измерительная катушка с числом витков  $N'_c$  (рис. 3). В длинном пустом соленоиде имеем

$$B_c = \mu_0 H_c \approx \frac{N_c}{l_c} I,$$

где  $l_c$  — его длина. Показания гальванометра при изменении тока в соленоиде найдём по формуле, аналогичной (2):

$$|\varphi_c| = \frac{S_c N'_c}{bR_c} |\Delta B_c| = \frac{\mu_0 S_c N'_c N_c}{bR_c l_c} |\Delta I_c|. \quad (3)$$

Здесь  $R_c$  — полное сопротивление измерительной цепи соленоида,  $S_c$  — площадь поперечного сечения соленоида:  $S_c = \pi d_c^2/4$ .

Таким образом, выражения (2) и (3) позволяют, исключив баллистическую постоянную  $b$ , установить связь между отклонением «зайчика»  $\Delta x$  и изменением магнитной индукции  $\Delta B$  в сердечнике тороида:

$$\Delta B = \mu_0 N_c \frac{N'_c}{N'} \frac{R}{R_c} \frac{d_c^2}{d^2} \frac{\Delta I_c}{\Delta x_c} \frac{\Delta x}{\Delta x_c}. \quad (4)$$

### Экспериментальная установка

Детальная схема измерений петли гистерезиса представлена на рис. 4. К блоку питания (источнику постоянного напряжения) подключён специальный генератор, позволяющий скачками менять токи в намагничивающей обмотке.

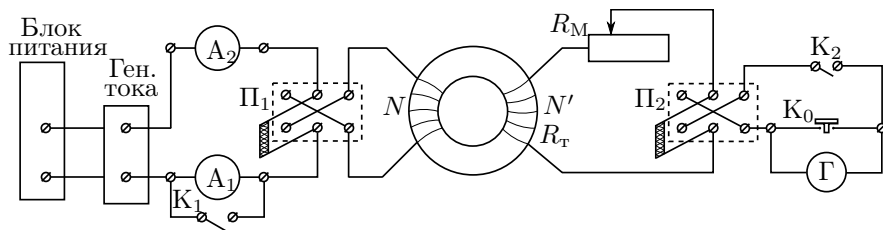


Рис. 4. Схема установки для исследования петли гистерезиса

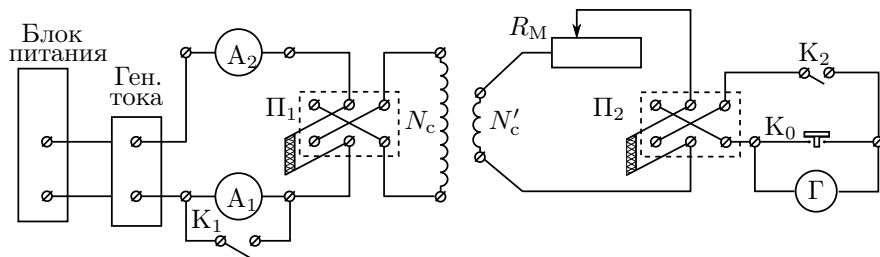


Рис. 5. Схема установки для калибровки гальванометра

Ток в намагничивающей обмотке измеряется амперметром. Переключатель  $\Pi_1$  позволяет менять направление тока в первичной обмотке. Чувствительность гальванометра  $\Gamma$  во вторичной цепи можно менять с помощью магазина сопротивлений  $R_M$ . Ключ  $K_2$  предохраняет гальванометр от перегрузок и замыкается *только на время измерения отклонений зайчика*. Ключ  $K_0$  служит для мгновенной остановки зайчика (короткое замыкание гальванометра). Переключатель  $\Pi_1$  позволяет менять направление тока в первичной обмотке. Переключателем  $\Pi_2$  можно

изменять направление тока через гальванометр. Ток в намагничивающей обмотке измеряется амперметрами  $A_1$  и  $A_2$  с разными пределами измерения.

Схема на рис. 5 отличается от схемы на рис. 4 только тем, что вместо тороида подключён калибровочный соленоид.

**Размагничивание образца.** Чтобы снять начальную кривую намагничивания, нужно предварительно размагнитить образец. Для этого тороид подключается к цепи переменного тока (рис. 6). При уменьшении амплитуды тока через намагничивающую обмотку от тока насыщения до нуля характеристики сердечника  $B$  и  $H$  «пробегают» за секунду 50 петель всё меньшей площади и в итоге приходят в нулевую точку.

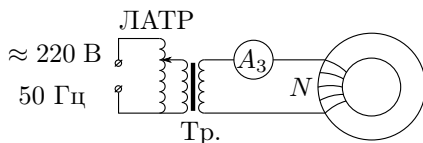


Рис. 6. Схема размагничивания

**Исследование петли.** Измерения начинаются с максимального тока (точка  $C$  на рис. 1). Переключая тумблер генератора, следует фиксировать ток, соответствующий каждому положению тумблера, и отклонение зайчика  $\Delta x$ , соответствующее каждому щелчку тумблера. Дойдя до нулевого тока (точка  $E$ ), следует при размыкании переключателя  $\Pi_1$  зафиксировать последнее отклонение гальванометра вблизи точки  $E$ . Следующее отклонение — при замыкании переключателя  $\Pi_1$ . Ток вблизи нуля меняется мало, но скачки  $\Delta x$  обычно заметны. Это соответствует вертикальным участкам петли.

Поменяв направление тока в намагничивающей обмотке переключателем  $\Pi_1$ , следует, увеличивая ток, пройти участок  $EC'$  до насыщения другого знака. В точке  $C'$  переключателем  $\Pi_2$  следует поменять направление тока в измерительной обмотке, чтобы при движении по правой ветви петли зайчик отклонялся в ту же сторону. В точке  $E'$  при нулевом токе ещё раз ключом  $\Pi_1$  изменяется направление тока в первичной обмотке, чтобы пройти участок  $E'/F'C$ . Таким образом, измеряя шаг за шагом отклонения зайчика при изменениях тока, нужно пройти всю петлю гистерезиса.

Нельзя при замкнутом ключе  $K_2$  менять ток сразу на несколько щелчков тумблера или отключать ключ  $\Pi_1$  при больших токах, так как при резком изменении тока можно повредить гальванометр.

При движении по петле ток должен меняться *строго монотонно*. Если случайно пропущен один отброс зайчика, *нельзя вернуться* назад на один шаг — это приведёт к искажению петли. Следует при разомкнутом ключе  $K_2$  вернуться к насыщению и начать обход петли сначала. При нарушении монотонности в измерении начальной кривой намагничива-



ния образец снова надо размагничивать, а для предельной петли достаточно вернуться к насыщению (именно поэтому измерения начинают с предельной петли).

## ЗАДАНИЕ

В работе исследуются начальная (основная) кривая намагничивания и предельная петля гистерезиса для образцов тороидальной формы, изготовленных из чистого железа или стали.

### Подготовка к работе

1. Соберите схему согласно рис. 4.
2. Не подключая гальванометра, проверьте работу цепи первичной обмотки. Определите диапазон изменения тока.
3. Включите осветитель гальванометра. Шкалу можно установить так, чтобы нулевое положение зайчика было недалеко от края шкалы.

Чувствительность гальванометра, при которой зайчик не зашкаливает, можно подобрать, меняя сопротивление магазина  $R_M$ . Установите начальное значение  $R_M > R_c$  — сопротивления соленоида. Значения  $R_M$  и  $R_c$  указаны на установке.

### Внимание!

Внимательно изучите рекомендации в разделе «Исследование петли».

4. Замкните ключ  $K_2$ . Сначала, не проводя записей, наблюдайте за отклонениями зайчика при каждом щелчке тумблера. Изменять ток следует только после того, как зайчик вернется к начальному положению.

Аккуратно обойдите всю петлю, чтобы убедиться, что зайчик нигде не выходит за пределы шкалы. Как правило, самые большие скачки  $\Delta x$  происходят на участках EF и E'F'.

Если зайчик вышел за пределы шкалы — разомкните ключ  $K_2$  и, увеличив сопротивление  $R_M$ , начните обход петли сначала.

Если зашкаливания не произошло и максимальное отклонение зайчика близко к концу шкалы — приступайте к измерениям.

### Предельная петля гистерезиса

5. Измерение предельной петли начните с максимального тока намагничивания. Отмечайте величину тока  $I$ , соответствующую каждой позиции тумблера генератора, и отклонение зайчика, соответствующие каждому щелчку.

Не забудьте, что при изменении полярности тока вблизи точки Е следует фиксировать отклонения зайчика как при размыкании, так и при замыкании ключа  $\Pi_1$ .

Завершив полный замкнутый цикл, разомкните ключ  $K_2$ . Уменьшив ток до нуля, разомкните ключ  $\Pi_1$ . Проверьте, что суммы всех отклонений по верхней и нижней частям петли одинаковы. Если расхождение превышает 10%, пройдите цикл снова.

### Калибровка гальванометра

6. Для калибровки гальванометра соберите схему согласно рис. 5.
7. Уменьшите на магазине сопротивлений значение  $R_c$  на величину  $R_c$ :  $R'_M = R_M - R_c$  — в таком случае сопротивления измерительных цепей в схемах рис. 4 и рис. 5 окажутся одинаковы (в формуле (4) можно положить  $R = R_c$ ).
8. Установите тумблер генератора тока на максимум и, замкнув ключ  $\Pi_1$ , запишите значение тока  $I_{\max}$ . Подключите гальванометр (ключ  $K_2$ ). Размыкая переключатель  $\Pi_1$ , измерьте отклонение гальванометра  $\Delta x_c$ , возникшее при изменении тока  $\Delta I_c = I_{\max}$ .

По измеренному отношению  $\Delta I_c / \Delta x_c$  формула (4) позволяет вычислять изменение магнитной индукции при произвольном отклонении гальванометра  $\Delta x$ .

### Начальная кривая намагничивания

9. Начальную кривую намагничивания (участок ОАС на рис. 1) можно снять по той же схеме (рис. 4), если предварительно размагнитить тороид в цепи переменного тока. Для этого соберите схему, изображённую на рис. 6. Включите ЛАТР в сеть и установите ток, соответствующий насыщению (участок CD на рис. 1). Ручкой ЛАТРа медленно (за 5–10 с) уменьшайте ток до нуля. Образец размагничен.
10. Вновь подсоедините тороид к цепи, изображённой на рис. 4. Установите тумблер генератора на минимальный ток и снимите начальную кривую намагничивания, скачками увеличивая ток от нуля до  $I_{\max}$ . Напомним, что первый отброс даёт замыкание переключателя  $\Pi_1$ . В случае сбоя в измерениях образец надо снова размагнитить. Дойдя до максимального тока, разомкните ключ  $K_2$ .
11. Запишите параметры установки:  $R_M$  и  $R'_M$ ; сопротивление гальванометра  $R_0$ ; размеры тороида:  $d_T$  и  $D$ . Количество витков тороида и параметры соленоида указаны на установке.

### Обработка результатов

12. Используя формулы (1) и (4), получите зависимости  $H(I)$  и  $\Delta B(\Delta x)$ .

13. Постройте петлю гистерезиса  $B(H)$ . Для выбора масштаба просуммируйте все скачки  $\Delta B$  (или  $\Delta x$ ) по левой части петли и все скачки по правой части. Убедитесь, что суммы совпадают.

Построение удобно начать с максимального значения  $H$  (точка  $C$  или  $C'$  на рис. 1). Переход к следующему значению  $H$  соответствует первому скачку  $\Delta B$  и т. д. Отложив все  $\Delta B$  по одной стороне петли и дойдя до насыщения, постройте вторую сторону таким же образом.

Найдите середину петли и проведите ось  $H(I)$ .

14. Постройте начальную кривую намагничивания на том же графике.
15. Определите по графику коэрцитивное поле  $H_c$ , остаточную индукцию  $B_r$ , индукцию насыщения  $B_s$  и максимальную намагниченность  $M_s$ .
16. Проведя касательную к графику в области с наибольшим наклоном начальной кривой намагниченности, определите максимальное значение дифференциальной магнитной проницаемости  $\mu_{\text{диф}}$ .
17. Оцените погрешности результатов эксперимента и сравните их с табличными значениями.

### Контрольные вопросы

1. Получите выражение, связывающее заряд  $\Delta q$ , прошедший через измерительную катушку гальванометра, и изменение  $\Delta B$  в образце. При каких условиях справедливо это соотношение?
2. Пользуясь теоремой о циркуляции, получите формулу для напряжённости магнитного поля в длинном соленоиде и в торе.
3. В каких случаях поле  $H$  в образце можно считать совпадающим с полем  $H_0$ , создаваемым токами в обмотке?
4. Почему рекомендуется начинать обход петли с насыщения образца?
5. Как изменится индукция в сердечнике, если в состоянии насыщения резко выключить внешнее поле (разорвать цепь)?
6. Каков наклон участков  $CD$  и  $C'D'$  на рис. 1?

### Литература

1. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — § 4.1, 4.2, 9.3.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 74, 79.
3. *Калашников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003. — §§ 110, 111, 118, 119.

4. Кингсен А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А. Основы физики. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2007. — Ч. II, гл. 5, § 5.3.

### Работа 3.4.5

## Петля гистерезиса (динамический метод)

**Цель работы:** изучение петель гистерезиса различных ферромагнитных материалов в переменных полях.

**В работе используются:** автотрансформатор, понижающий трансформатор, интегрирующая цепочка, амперметр, вольтметр, электронный осциллограф, делитель напряжения, тороидальные образцы с двумя обмотками.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с пп. 2.3, 3 и 4 теоретического введения к разделу.

Ферромагнитные материалы часто применяются в трансформаторах, дросселях, машинах переменного тока, то есть в устройствах, где они подвергаются периодическому перемагничиванию, — поэтому изучение магнитных характеристик ферромагнетиков в переменных полях представляет большой практический интерес. Основные характеристики ферромагнетиков — их коэрцитивное поле  $H_c$ , магнитная проницаемость  $\mu$ , рассеиваемая в виде тепла при перемагничивании мощность — зависят от частоты перемагничивающего поля. В данной работе кривые гистерезиса ферромагнитных материалов изучаются в поле частоты  $\nu_0 = 50$  Гц с помощью электронного осциллографа.

Магнитная индукция  $B$  и напряжённость поля  $H$  в ферромагнитном материале неоднозначно связаны между собой: индукция зависит не только от напряжённости, но и от предыстории образца. Связь между  $B$  и  $H$  типичного ферромагнетика иллюстрирует рис. 1.

Если к ферромагнитному образцу прикладывать переменное внешнее магнитное поле, то его состояние на плоскости  $H$ – $B$  будет изменяться по замкнутой кривой — *петле гистерезиса*. Размер петли определяется максимальным значением напряжённости  $H$  в цикле (напр., петля  $AA'$ , обозначенная пунктиром на рис. 1). Если амплитуда напряжённости достаточно велика, то образец будет периодически достигать *насыщения*, что на рисунке соответствует кривой  $CEFC'E'F'C$  (*предельная петля гистерезиса*). Пересечение предельной петли с вертикальной осью соответствует остаточной индукции  $B_r$ , пересечение с горизонтальной осью — коэрцитивному полю  $H_c$ . Крайние точки петель, соответствующие амплитудным значениям  $H$  (например, точка  $A$  на рис. 1), лежат на *начальной кривой намагничивания* (ОАС).

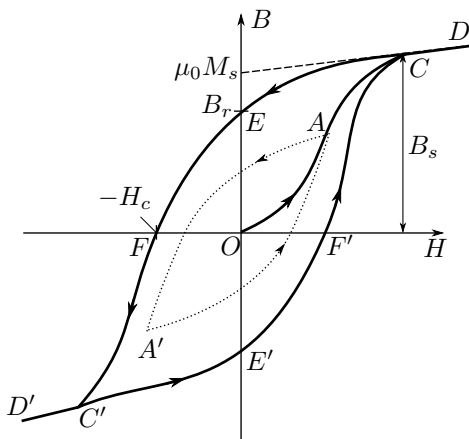


Рис. 1. Петля гистерезиса ферромагнетика

**Измерение магнитной индукции.** Магнитную индукцию  $B$  удобно определять с помощью ЭДС, возникающей при изменении магнитного потока  $\Phi$  в катушке, намотанной на образец. Пусть катушка с  $N$  витками плотно охватывает образец сечением  $S$ , и индукция  $B$  в образце однородна. Из формулы (4.20) имеем

$$|B| = \frac{1}{SN} \int \mathcal{E} dt. \quad (1)$$

Таким образом, для определения  $B$  нужно проинтегрировать сигнал, наведённый меняющимся магнитным полем в измерительной катушке, намотанной на образец.

Для интегрирования в работе используется *интегрирующая RC-цепочка* (рис. 2). «Входное» напряжение от источника  $U_{\text{вх}}(t)$  подаётся на последовательно соединённые резистор  $R_{\text{и}}$  и конденсатор  $C_{\text{и}}$ . «Выходное» напряжение  $U_{\text{вых}}(t)$  снимается с конденсатора. Предположим, что 1) сопротивление источника мало по сравнению с  $R_{\text{и}}$ , 2) выходное сопротивление (сопротивление на входе осциллографа), напротив, велико:  $R_{\text{вых}} \gg R_{\text{и}}$  и, наконец, 3) сопротивление  $R_{\text{и}}$  достаточно велико, так что почти всё падение напряжения приходится на него, а  $U_{\text{вых}} \ll U_{\text{вх}}$ . В таком случае ток цепи равен  $I = (U_{\text{вх}} - U_{\text{вых}})/R_{\text{и}} \approx U_{\text{вх}}/R_{\text{и}}$ , и входное и выходное сопротивления

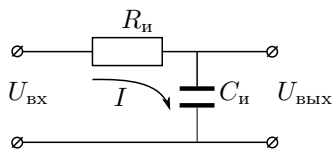


Рис. 2. Интегрирующая ячейка

связаны соотношением

$$U_{\text{вых}} = \frac{q}{C_{\text{н}}} = \frac{1}{C_{\text{н}}} \int_0^t I dt \approx \frac{1}{\tau_{\text{н}}} \int_0^t U_{\text{вх}} dt. \quad (2)$$

где  $\tau_{\text{н}} = R_{\text{н}} C_{\text{н}}$  — постоянная времени  $RC$ -цепочки. Для индукции поля из (1) получаем

$$|B| = \frac{1}{SN} \int U_{\text{вх}} dt = \frac{\tau_{\text{н}}}{SN} U_{\text{вых}}, \quad (3)$$

**Замечание.** Уточним критерий применимости соотношения (2). Пусть на вход интегрирующей ячейки подан синусоидальный сигнал с частотой  $\omega_0$ . Тогда, пользуясь методом комплексных амплитуд, нетрудно найти отношение амплитуд входного и выходного напряжений:

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{1/(\omega_0 C)}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega_0 C)^2}}}.$$

Видно, что неравенство  $U_{\text{вых}} \ll U_{\text{вх}}$  реализуется, если

$$\tau \equiv RC \gg \frac{1}{\omega_0} \quad (4)$$

(импеданс конденсатора мал по сравнению сопротивлением резистора). В таком случае для синусоидального сигнала имеем

$$\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} \approx \frac{1}{\omega_0 \tau}. \quad (5)$$

В общем случае, если  $\omega_0$  — частота самой низкой гармоники в спектре произвольного входного сигнала, то при  $\omega_0 \tau \gg 1$  неравенство  $U_{\text{вых}} \ll U_{\text{вх}}$  выполняется на любой частоте  $\omega > \omega_0$ .

### Экспериментальная установка

Схема установки изображена на рис. 3. Напряжение сети (220 В, 50 Гц) с помощью трансформаторного блока Т, состоящего из регулировочного автотрансформатора и разделительного понижающего трансформатора, подаётся на намагничивающую обмотку  $N_0$  исследуемого образца.

В цепь намагничивающей катушки, на которую подаётся некоторое напряжение  $U_0$ , последовательно включено сопротивление  $R_0$ . Напряжение на  $R_0$ , равное  $U_R = R_0 I_0$ , где  $I_0$  — ток в намагничивающей обмотке  $N_0$ , подаётся на канал Х осциллографа. Связь напряжённости  $H$  в образце и тока  $I_0$  рассчитывается по теореме о циркуляции (см. (4.16)). Действующее значение переменного тока в обмотке  $N_0$  измеряется амперметром А.

Для измерения магнитной индукции  $B$  с измерительной обмотки  $N_{\text{и}}$  на вход  $RC$ -цепочки подаётся напряжение  $U_{\text{и}}$  ( $U_{\text{вх}}$ ), пропорциональное производной  $dB/dt$ . С интегрирующей ёмкости  $C_{\text{и}}$  снимается напряжение  $U_C$  ( $U_{\text{вых}}$ ), пропорциональное величине  $B$ , и подаётся на вход  $Y$  осциллографа. Значение индукции поля  $B$  рассчитывается по формуле (3).

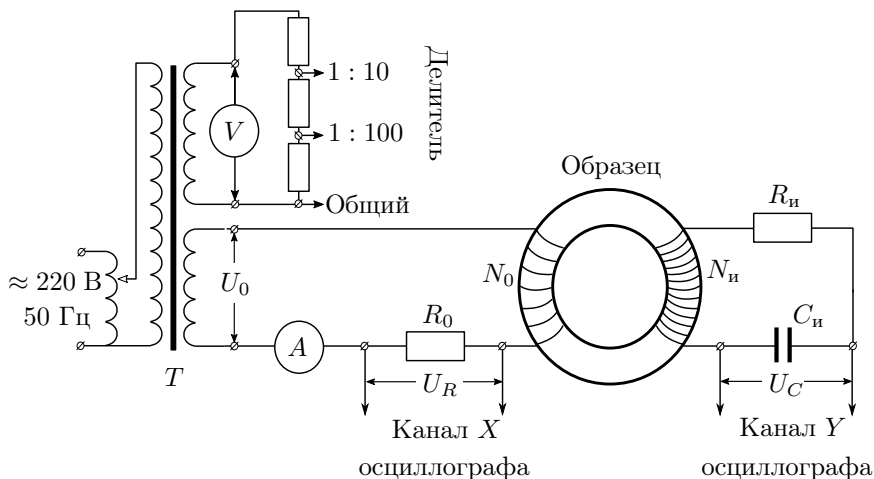


Рис. 3. Схема установки для исследования намагничивания образцов

Замкнутая кривая, возникающая на экране, воспроизводит в некотором масштабе (различном для осей  $X$  и  $Y$ ) петлю гистерезиса. Чтобы придать этой кривой количественный смысл, необходимо установить масштабы изображения, т. е. провести калибровку каналов  $X$  и  $Y$  осциллографа.

**Калибровка осциллографа.** Калибровка канала  $X$  осциллографа производится с помощью амперметра  $A$ . Предварительно необходимо замкнуть обмотку  $N_0$  (так как катушка с ферромагнитным образцом является нелинейным элементом, ток в ней не имеет синусоидальной формы, поэтому связать амплитуду тока с показаниями амперметра можно лишь с довольно большой погрешностью). При замкнутой обмотке  $N_0$  показания эффективного тока, умноженные на  $2\sqrt{2}$ , дадут значение удвоенной амплитуды тока, подаваемого на ось  $X$ , соответствующего ширине горизонтальной развёртки на экране (осциллограф должен работать в режиме  $X-Y$ ).

Калибровка вертикальной оси  $Y$ , как правило, не нужна (переключатель масштабов осциллографа откалиброван при изготовлении — при условии, что ручка плавной регулировки находится в положении калиб-

ровки). Тем не менее, она может проводиться с помощью сигнала, снимаемого через делитель напряжения со второй катушки понижающего трансформатора (рис. 3). Вольтметр  $V$  может достаточно точно измерить эффективное напряжение, подаваемое на вход осциллографа. После этого можно сравнить показания осциллографа и вольтметра.

**Измерение параметров интегрирующей ячейки.** Постоянную времени  $RC$ -цепочки можно определить экспериментально. С обмотки  $U_0$  на вход интегрирующей цепочки подаётся синусоидальное напряжение с частотой цепи  $\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 50$  Гц. На вход  $Y$  осциллографа или цифрового вольтметра поочерёдно подаются сигналы со входа ( $U_{\text{вх}} = U_0$ ) и выхода ( $U_{\text{вых}} = U_C$ )  $RC$ -цепочки. Измерив амплитуды этих сигналов, можно рассчитать постоянную времени  $\tau_{\text{и}} = R_{\text{и}}C_{\text{и}}$  по формуле (5). Кроме того, сопротивление и ёмкость можно независимым образом измерить цифровым мультиметром.

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается при помощи электронного осциллографа исследовать предельные петли гистерезиса и начальные кривые намагничивания для нескольких ферромагнитных образцов; определить магнитные характеристики материалов, чувствительность каналов  $X$  и  $Y$  осциллографа и постоянную времени  $\tau$  интегрирующей цепочки.

### Измерение петли гистерезиса

1. Для наблюдения петли гистерезиса на экране электронного осциллографа (ЭО) соберите схему рис. 3. Подготовьте приборы к работе согласно техническому описанию в лаборатории.
2. Подберите ток питания в намагничивающей обмотке, так чтобы на экране ЭО наблюдалась *предельная* петля гистерезиса. При этом при изменении тока в намагничивающей катушке у петли меняется длина «усов»  $CD$  и  $C'D'$  (см. рис. 1), а её площадь остаётся практически неизменной.
3. Подберите коэффициенты усиления каналов осциллографа так, чтобы предельная петля занимала большую часть экрана. Зафиксируйте (сфотографируйте или зарисуйте на кальку) наблюдаемую картину. Запишите значения коэффициентов усиления  $K_x$  и  $K_y$  осциллографа (убедитесь, что ручки плавной регулировки масштабов находятся в калиброванном положении!) и действующее значение тока  $I$  в намагничивающей обмотке (по амперметру  $A$ ).
4. По экрану ЭО измерьте полную ширину и высоту предельной петли ( $[2X_s]$  и  $[2Y_s]$ ), соответствующие удвоенной амплитуде колебания



напряжённости  $H_s$  и индукции  $B_s$  поля в образце в состоянии насыщения.

5. По экрану ЭО измерьте двойные амплитуды для коэрцитивного поля  $[2X_c]$  (ширина петли на пересечении с осью абсцисс) и остаточной индукции  $[2Y_r]$  (высота петли на пересечении с осью ординат).

При необходимости изменяйте коэффициенты усиления  $K_x$  и  $K_y$ , записывая их значения.

6. Проведите измерение начальной кривой намагничивания. Для этого плавно уменьшая амплитуду тока намагничивания до нуля (8–10 точек), фиксируйте по экрану осциллографа положения крайних точек наблюдаемых частных петель (т. А и А' на рис. 1). Эти вершины лежат на начальной кривой намагничивания. При необходимости фиксируйте (фотографируйте/отмечайте на кальке) вид получаемых частных петель.
7. Запишите материал образца и параметры тороида.
8. Повторите измерения пп. 2–7 для остальных катушек.

#### Калибровка осциллографа

9. Проведите калибровку горизонтальной оси осциллографа. Для этого не разбирая схемы рис. 3 «закоротите» намагничивающую обмотку  $N_0$  (подключите соединительные провода к одной клемме).

Измерьте длину наблюдаемой развертки по оси  $X$  при некотором фиксированном токе  $I$ , близком к току насыщения петли гистерезиса (осциллограф в режиме  $X-Y$ ). Проведите измерения для всех значений коэффициента усиления  $K_x$ , использовавшихся в работе. Учтите, что амперметр измеряет действующее значение тока, меньшее амплитудного в  $\sqrt{2}$  раз.

10. Для проверки калибровки вертикальной оси ЭО подключите вольтметр и осциллограф к делителю 1:100 (рис. 3) и сравните показания вольтметра и осциллографа. Оцените погрешность измерений амплитуды с помощью осциллографа.

#### Определение параметров $RC$ -ячейки

11. Измерьте постоянную времени  $RC$ -ячейки  $\tau_n$  (см. (5)). Для этого разберите цепь тороида и подайте на вход ячейки (см. рис. 2) синусоидальное напряжение с обмотки  $U_0$  понижающего трансформатора.
12. Измерьте отношение входного и выходного напряжений  $U_{вх}/U_{вых}$  ячейки с помощью осциллографа и/или вольтметра. Рассчитайте постоянную времени по формуле (5). Частоту сигнала в цепи  $\omega_0 = 2\pi\nu_0$  можно также измерить с помощью осциллографа.

- Сравните результат с расчётом непосредственно через  $R_{и}$  и  $C_{и}$ , указанные на установке (или измеренные с помощью мультиметра).

### Обработка результатов

- Рассчитайте коэффициенты преобразования отклонений по осям  $X$ – $Y$  осциллографа в напряжённость  $H$  и индукцию  $B$  магнитного поля в образце.

При расчётах используйте связь напряжённости и тока в тороидальном образце (см. п. 4.2 Введения), результаты п. 9 калибровки канала  $X$ , а также формулу (3).

- По результатам п. 4 для каждого образца рассчитайте амплитуду  $H_{\max}$  колебаний напряжённости поля в тороиде, соответствующую состоянию насыщения (предельная петля). Вычислите индукцию насыщения образца  $B_s$ .
- По результатам п. 5 для каждого образца рассчитайте коэрцитивное поле  $H_c$  и остаточную индукцию  $B_r$ .
- Постройте начальные кривые намагничивания в координатах  $B(H)$ . По графикам оцените начальное и максимальное значения дифференциальной магнитной проницаемости  $\mu_{\text{диф}} = dB/dH$ .
- Оцените погрешности результатов эксперимента и сравните их с табличными.

### Контрольные вопросы

- Как в работе измеряются напряжённость  $H$  и индукция магнитного поля  $B$ ?
- При какой форме образцов, помещённых в однородное магнитное поле, их намагниченность постоянна по всему объёму?
- Почему для наблюдения петли гистерезиса используются образцы в форме тора, а не стержня?
- Почему при калибровке горизонтальной оси осциллографа необходимо включать намагничивающую обмотку?
- Оцените погрешность, которая возникает при измерении индукции  $B$ , если измерительная катушка неплотно надета на образец; например, если образец занимает всего половину охватываемой ею площади.
- Оцените погрешность, которая возникает из-за конечной глубины проникновения переменного магнитного поля в образец.
- Предложите альтернативные способы интегрирования сигнала в цепи.

### Литература

1. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — § 4.1, 4.2, 9.3.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 74, 79.
3. *Калашиников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003. — §§ 110, 111, 119.
4. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2007. — Ч. II, гл. 5, § 5.3.

### Работа 3.4.6

## Параметрический резонанс в контуре с нелинейной индуктивностью

**Цель работы:** изучение параметрических колебаний в электрической цепи.

**В работе используются:** параметрон (две тороидальных катушки, резисторы, интегрирующая цепочка, конденсаторы), генератор звуковых частот, реостат, сглаживающий дроссель, магазин ёмкостей, магазин сопротивлений, вольтметр, миллиамперметр, осциллограф.

Перед выполнением работы рекомендуется ознакомиться с пп. 2.3–5 теоретического введения к разделу.

Если периодически изменять ёмкость конденсатора или самоиндукцию катушки, входящих в состав колебательного контура, то при определённых условиях в контуре возбуждаются незатухающие электрические колебания. Такой способ возбуждения называется **параметрическим**, поскольку колебания возникают не под действием внешней ЭДС, а вследствие изменения параметров контура.

Рассмотрим колебательный контур, состоящий из последовательно соединённых ёмкости  $C$ , индуктивности  $L$  и сопротивления  $R$ . В силу неизбежных внешних влияний и тепловых флуктуаций в контуре всегда имеют место небольшие колебания с циклической частотой  $\omega_0$ , которая при малых потерях зависит только от реактивных параметров  $L$  и  $C$ :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (1)$$

При этом средняя полная энергия  $W$ , запасённая в контуре, остаётся постоянной; происходит лишь её периодическая перекачка с частотой

$2\omega_0$  из электрической  $W_{\text{Э}} = q^2/(2C)$  в магнитную  $W_M = LI^2/2$  и обратно. Здесь  $q$  — заряд на обкладках конденсатора,  $I$  — ток в катушке индуктивности. Полную энергию системы можно изменить, если скачком поменять величину  $L$  (или  $C$ ).

Рассмотрим, как изменяется энергия контура при быстром уменьшении  $L$  (например, растяжении катушки) в тот момент, когда ток в катушке максимален. Сумма падений напряжения на элементах контура равна ЭДС самоиндукции:

$$RI + \frac{q}{C} = -\frac{d(LI)}{dt}.$$

Проинтегрируем это уравнение по времени за очень короткий промежуток  $\Delta t$  ( $\Delta t \ll 2\pi/\omega_0$ ) в течение которого изменяется индуктивность. Два первых интеграла при этом будут близки к нулю, поэтому можно считать, что магнитный поток  $\Phi$  в катушке в течение этого времени не изменяется:  $\Delta\Phi = \Delta(LI) = 0$  или

$$\Phi = LI = \text{const.} \quad (2)$$

Уменьшение индуктивности в тот момент, когда ток в контуре максимален, ведёт к увеличению тока и магнитной энергии в катушке:

$$\Delta W_M = \Delta \left( \frac{\Phi^2}{2L} \right) = -(LI)^2 \frac{\Delta L}{2L^2} = -\frac{I^2}{2} \Delta L.$$

Если теперь через четверть периода вернуть индуктивность к прежнему значению — энергия системы не изменится, так как ток в этот момент равен нулю. Ещё через четверть периода опять уменьшим  $L$  — снова возрастёт энергия. Процесс увеличения энергии системы за счёт работы внешних сил называют **накачкой**. Заметим, что индуктивность при этом меняется с частотой, вдвое превосходящей собственную частоту контура.

Запишем условие раскачки колебаний. Энергия, которую получает контур за период  $T$ , равна  $2W_M = I_{\text{max}}^2 \Delta L$ . Она должна превышать потери на активном сопротивлении, составляющие  $W_R = RI_{\text{эфф}}^2 T$ . Видно, что это выполняется при

$$\Delta L > \frac{RT}{2}. \quad (3)$$

При выполнении условия (3) амплитуда колебаний в контуре возрастает с каждым периодом. С увеличением амплитуды всё более возрастает роль нелинейной зависимости  $B(H)$ , что ограничивает возрастание амплитуды. Поэтому со временем в контуре устанавливаются колебания максимально возможной постоянной амплитуды. Это явление называют

параметрическим резонансом. То, что амплитуда установившихся колебаний ограничивается именно *нелинейностью*, а не потерями, является принципиальной особенностью параметрического резонанса.

Раскачка колебаний возможна при изменении  $C$  или  $L$  по любому периодическому закону с частотами  $\Omega_H$ , для которых справедливо соотношение

$$\frac{\omega_0}{\Omega_H} = \frac{n}{2},$$

где  $n$  — целое число (1, 2, ...). Наиболее эффективная раскачка имеет место при  $n = 1$ , когда частота накачки ( $\Omega_H$ ) равна частоте колебаний энергии  $W_\Sigma$  и  $W_M$  ( $2\omega_0$ ).

В том случае, когда индуктивность изменяется по синусоидальному закону, условие возбуждения колебаний имеет вид

$$\Delta L > \frac{2RT}{\pi}. \quad (4)$$

Величиной индуктивности можно управлять током подмагничивания.

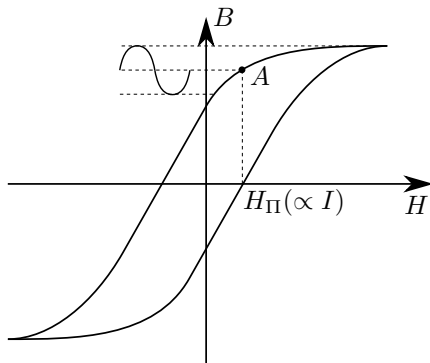


Рис. 1. Полная и частная петли гистерезиса

На рис. 1 показана зависимость  $B(H)$  в ферромагнитном сердечнике — петля гистерезиса. Меняя поле  $H$ , можно выбрать такую рабочую точку на петле, вблизи которой зависимость  $B(H)$  обладает наиболее ярко выраженной нелинейностью. На рис. 1 это точка  $A$ : вблизи неё особенно резко изменяется дифференциальная магнитная проницаемость  $\mu_{\text{диф}}$  (производная  $d\mu_{\text{диф}}/dH$  максимальна).

Соответствующее подмагничивающее поле  $H_\Pi$  задаётся постоянным током, проходящим через дополнительную (подмагничивающую) обмотку.

Небольшие колебания величины  $B$  вокруг рабочей точки можно создать, подав на вторую подмагничивающую обмотку переменный ток

подмагничивания. Магнитная проницаемость  $\mu_{\text{диф}}$ , а с ней индуктивность  $L$ , будут меняться с той же частотой, что и переменная составляющая подмагничивающего тока (из-за нелинейности  $B(H)$  в кривой  $\mu(t)$  присутствуют также колебания с кратными частотами, не представляющие для нас интереса). Если изменения индуктивности достаточно велики, то в контуре возбуждаются незатухающие колебания, частота которых вдвое меньше частоты изменения параметров контура (в нашем случае — частоты изменения индуктивности, то есть частоты подмагничивания). Такое соотношение частот служит отличительным признаком параметрических колебаний.

### Экспериментальная установка

Для изучения параметрических колебаний используется «параметрон» — установка с нелинейной индуктивностью, схема которой представлена на рис. 2. «Параметрон» включает в себя две тороидальных катушки, интегрирующую ячейку  $r_0 C_0$  (см. описание принципа работы интегрирующей ячейки в работе 3.4.5), резисторы  $r_1$  и  $r_2$ , ключи  $K_1$  и  $K_2$  и колебательный контур. Колебательный контур состоит из двух последовательно соединённых индуктивностей  $L_1$  и  $L_2$ , ёмкости  $C$  и сопротивлений  $R_M$  и  $r_2$ . На рисунке контур заключён в пунктирную рамку.

Обе катушки  $L_1$  и  $L_2$  с одинаковым числом витков  $n_1$  намотаны на одинаковые тороидальные ферромагнитные сердечники. Длина каждого сердечника —  $l$ , сечение —  $S$ , магнитная проницаемость —  $\mu$ . С помощью теоремы о циркуляции можно показать, что общая индуктивность катушек

$$L = 2\mu_0\mu \frac{n_1^2 S}{l}. \quad (5)$$

Постоянный ток подмагничивания от источника постоянного напряжения 36 В проходит через две последовательно соединённые обмотки с числом витков  $n_2$ . Ток регулируется потенциометром П. Для того чтобы увеличить сопротивление цепи переменному току, поставлена индуктивность  $L_0 = 3$  Гн. Переменный ток в этой цепи практически отсутствует, постоянный измеряется амперметром А.

Переменный ток подмагничивания, создаваемый генератором звуковых частот, проходит через последовательно соединённые обмотки  $n_3$ . Обмотка  $n_4$  имеется всего на одном из сердечников. Она служит для измерения полного магнитного потока, проходящего через сердечник. Обмотки  $n_1$  соединены так, что возникающие в них ЭДС имеют противоположные знаки, поэтому в колебательном контуре не возникают токи, имеющие частоту звукового генератора.

Для измерения напряжений в схему включён вольтметр переменного тока. При переключении ключа  $K_2$  в верхнее положение вольтметр

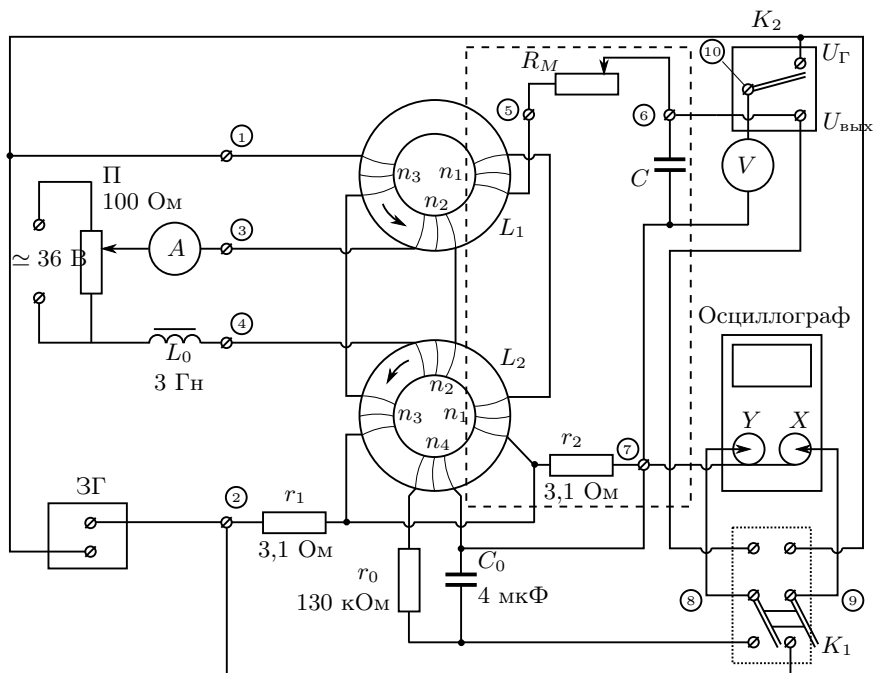


Рис. 2. Схема установки

измеряет напряжение  $U_{3Г}$  на выходе генератора, при переключении в нижнее — выходное напряжение на ёмкости  $C$ . Осциллограф позволяет наблюдать петлю гистерезиса, фиксировать момент возникновения и срыва параметрических колебаний и определять их частоту с помощью фигур Лиссажу.

При верхнем положении ключа  $K_1$  на вход  $X$  осциллографа подаётся падение напряжения между точками 1 и 7, практически равное напряжению  $U_{3Г}$  на генераторе (падением напряжения на резисторах  $r_1$ ,  $r_2$  можно пренебречь, поскольку оно мало по сравнению с  $U_{3Г}$ ). На вход  $Y$  подаётся напряжение с ёмкости  $C$  колебательного контура. По фигурам Лиссажу, возникающим на экране, можно сравнить частоту накачки (частоту генератора) с частотой колебаний контура.

При нижнем положении ключа  $K_1$  на вход  $Y$  подаётся напряжение  $U_Y$  с ёмкости  $C_0$ . Эта ёмкость входит в состав интегрирующей цепочки  $r_0 C_0$ , подключённой к обмотке  $n_4$ . ЭДС индукции, возникающая в обмотке  $n_4$ , пропорциональна  $dB/dt$ :

$$U_4 = n_4 S \frac{dB}{dt}.$$

Параметры интегрирующей цепочки подобраны так, что сопротивление  $r_0$  заметно превышает сопротивление обмотки  $n_4$  и сопротивление ёмкости:

$$r_0 \gg \frac{1}{\omega_0 C_0}.$$

При этом условии ток в цепочке пропорционален  $dB/dt$ :

$$I_0 = \frac{U_4}{r_0} = \frac{n_4 S}{r_0} \frac{dB}{dt},$$

а напряжение  $U_Y$  на конденсаторе  $C_0$  пропорционально  $B$ :

$$U_Y = \frac{1}{C_0} \int I_0 dt = \frac{1}{r_0 C_0} \int U_4 dt = \frac{n_4 S}{r_0 C_0} B. \quad (6)$$

На вход  $X$  осциллографа подаётся сумма падений напряжения на резисторах  $r_1$  и  $r_2$ . Напряжение, возникающее на  $r_1$ , пропорционально току, протекающему через обмотки  $n_3$  от генератора. В отсутствие параметрических колебаний через  $r_2$  ток не течёт, и на вход  $X$  подаётся напряжение  $U_X$ , пропорциональное переменному току подмагничивания  $I$ , которым определяется поле  $H$  в сердечнике:

$$H = \frac{n_3 I}{l}.$$

Следовательно,

$$U_X = I r_1 = \frac{l r_1}{n_3} H. \quad (7)$$

Таким образом, в отсутствие параметрических колебаний на экране появляется кривая гистерезиса ферромагнитного сердечника. При возникновении колебаний в контуре через  $r_2$  начинает проходить ток, кривая резко искажается и для измерений непригодна. Но искажение петли позволяет отметить момент возникновения параметрических колебаний и даёт возможность измерить параметры петли при подходе к моменту самовозбуждения. Сфотографировав или зарисовав с экрана на кальку петлю гистерезиса, соответствующую границе возбуждения параметрических колебаний, можно экспериментально проверить справедливость формулы (4) — условия самовозбуждения. Из (5) следует

$$\Delta L = L_{\max} - L_{\min} = \frac{2\mu_0 n_1^2 S}{l} (\mu_{\max} - \mu_{\min}) = \frac{2n_1^2 S}{l} \frac{dB}{dH} \Big|_{\min}^{\max}. \quad (8)$$

Производные  $dB/dH$  следует взять из чертежа, проведя касательные к кривой  $B(H)$  слева и справа от излома петли. Для расчёта масштабов



выразим  $B$  и  $H$  через напряжения  $U_Y$  и  $U_X$ . Подставляя (6) и (7) в (8), получим

$$\Delta L = 2r_0 C_0 r_1 \frac{n_1^2}{n_3 n_4} \left[ \left( \frac{\Delta U_Y}{\Delta U_X} \right)_{\max} - \left( \frac{\Delta U_Y}{\Delta U_X} \right)_{\min} \right]. \quad (9)$$

В нашей установке  $n_3 = n_4$ , так что  $n_1^2/(n_3 n_4) = 1$ . Параметры  $r_0$ ,  $C_0$  приведены на установке.

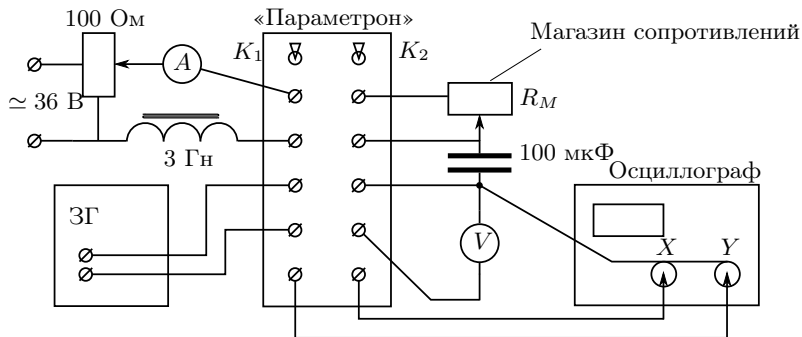


Рис. 3. Блок-схема установки

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается с помощью фигур Лиссажу найти критическое сопротивление и определить частоту параметрических колебаний контура; с помощью кривых гистерезиса определить критическое сопротивление и проверить условие самовозбуждения; по кривой зависимости напряжения на конденсаторе от частоты определить резонансную частоту и индуктивность колебательного контура.

1. Соберите схему согласно рис. 3. Сравните схему, изображённую на рис. 3, со схемой на рис. 2. Подготовьте приборы к работе.
2. Установите ёмкость  $C = 100$  мкФ, сопротивление магазина  $R_M = 0$ . Поставьте на минимум выходного напряжения движок потенциометра, регулирующего постоянный ток подмагничивания. Включите питание  $= 36$  В и установите постоянный ток  $I = 80$  мА. Переменный ток подмагничивания установите с помощью генератора: частота  $\nu = 150$  Гц; выходное напряжение на вольтметре генератора  $U_{3Г} = 15$  В.
3. Для наблюдения параметрических колебаний поставьте ключ  $K_1$  в положение «Фигура Лиссажу». Увеличивая постоянный ток подмагничивания, определите момент возникновения параметрических ко-

лебаний (при  $U_{3Г} = 15$  В) по появлению на экране ЭО фигуры Лиссажу, имеющей одно самопересечение (рис. 4а). Оцените интервал  $\Delta I$ , внутри которого эти колебания существуют. Используя показания генератора, определите по виду фигуры Лиссажу частоту параметрических колебаний.

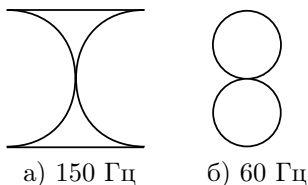


Рис. 4. Фигуры Лиссажу при отношении частот 1:2 (масштабы разные)

4. Убедитесь в том, что Вы наблюдаете именно параметрические колебания, внося в контур дополнительное затухание — увеличивая сопротивление магазина  $R_M$ . Колебания, возбуждаемые внешним источником, при увеличении затухания постепенно уменьшаются по амплитуде, в то время как параметрические колебания при критическом сопротивлении  $R_{кр}$  срываются.
5. Определите  $R_{кр}$  для токов:  $I = 100$  мА и  $I = 160$  мА. Увеличивая сопротивление магазина, следите за постоянством напряжения на генераторе ( $U_{3Г} = 15$  В).
6. При фиксированных значениях:  $I = 160$  мА,  $U_{3Г} = 15$  В,  $R_M = 0$  — проследите, как изменяется фигура Лиссажу при уменьшении частоты от 150 до 50 Гц. Определите резонансную частоту и частоту срыва колебаний.
7. Для наблюдения петли гистерезиса переключите ключ  $K_1$  в положение «Петля». Снова задайте параметры:  $I = 160$  мА,  $R_M = 0$ ,  $\nu = 150$  Гц,  $U_{3Г} = 15$  В. Подберите чувствительность осциллографа так, чтобы на экране была видна петля гистерезиса в удобном масштабе.

При наличии параметрических колебаний петля гистерезиса имеет сложную форму. Увеличьте сопротивление  $R_M$  до критического. В этом случае параметрические колебания срываются и на экране видна частная петля (на рис. 1 она выделена пунктиром).

Чтобы увидеть форму полной петли, уменьшите сопротивление  $R_M$  и ток  $I$  до нуля. При увеличении напряжения  $U_{3Г}$  до 20–25 В полная петля становится предельной.

8. Увеличивая постоянный ток, проследите, как меняется форма петли в момент возникновения и срыва параметрических колебаний, как перемещается частная петля.

9. Для тока  $I = 160$  мА,  $U_{3Г} = 15$  В определите  $R_{кр}$ , выводя параметры на самую границу колебаний.
10. При сопротивлении чуть больше критического сфотографируйте или зарисуйте петлю. Для этого установите ручки плавной регулировки усиления по каналам  $X$  и  $Y$  в крайнее правое положение (до щелчка), тогда цифры возле дискретных переключателей усиления задают масштабы изображения  $K_X$  и  $K_Y$  в мВ/дел.  
Подберите коэффициенты усиления так, чтобы петля занимала практически весь экран. Зарисуйте на кальку петлю, оси координат, деления шкалы и запишите на ней рабочие параметры схемы и коэффициенты  $K_X$  и  $K_Y$ .
11. Исследуйте зависимость выходного напряжения параметрона от частоты. Для этого уменьшите сопротивление магазина до нуля и поставьте ключ  $K_2$  в положение « $U_{вых}$ ». Снимите зависимость напряжения на ёмкости  $C$  колебательного контура  $U_{вых} = f(\nu)$ , уменьшая частоту от 150 Гц до срыва колебаний. Напряжение  $U_{3Г} = 15$  В и ток  $I = 160$  мА следует поддерживать постоянными.

### Обработка результатов

12. Определите по рисунку петли максимальный и минимальный наклоны касательных ( $\Delta U_Y / \Delta U_X$ ) и рассчитайте величину  $\Delta L$  по формуле (9).  
Проверьте справедливость условия (4). Полное сопротивление контура включает в себя сопротивление магазина и сопротивление параметрона между точками 5 и 7, указанное на установке.
13. Постройте график  $U_{вых} = f(\nu)$  и определите по нему резонансную частоту контура  $\nu_0$ . Рассчитайте индуктивность контура и проверьте справедливость условия (4) на этой частоте, полагая  $\Delta L \sim L$ .

### Контрольные вопросы

1. Получите условие возбуждения колебаний (4), когда индуктивность меняется по гармоническому закону:  $L = L_0(1 - m \sin(2\omega_0 t))$ . Напишите закон изменения тока, возбуждаемого в контуре.
2. Чем ограничивается рост амплитуды колебаний системы при параметрическом резонансе?
3. Почему в нашем случае индуктивность пропорциональна дифференциальной магнитной проницаемости?
4. Нарисуйте качественный график зависимости  $\mu_{диф}$  от величины подмагничивающего тока для петли гистерезиса, которая изображена на рис. 1.

5. На каких ещё частотах (в принципе) могут возбуждаться колебания в контуре параметрона при больших изменениях индуктивности?

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — Гл. III, §74; Гл. X, §§ 122, 123, 127, 135.
2. *Калашиников С.Г.* Электричество. — М.: Физматлит, 2003. — § 226.
3. *Кингсеп А.С., Локишин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2007. — Ч. III, Гл. 3, 3.1.
4. *Горелик Г.С.* Колебания и волны. — М.: Физматгиз, 1959. Гл. III, § 9.



# ПЛАЗМА. ГАЗОВЫЙ РАЗРЯД

## 1. Введение

Как известно, вещество может находиться в трёх агрегатных состояниях — твёрдом, жидком и газообразном, причём эти состояния последовательно сменяются по мере возрастания температуры. Если и дальше нагревать газ, то сначала молекулы диссоциируют на атомы, а затем и атомы распадаются на электроны и ионы, так что газ становится *ионизованным*, представляя собой смесь из свободных электронов и ионов, а также нейтральных частиц. Если *степень ионизации* газа (отношение числа ионизованных атомов к их полному числу) оказывается достаточно велика, то такой газ может обладать качественно новыми свойствами. Поведение заряженных частиц приобретает *коллективный* характер, так что описание свойств среды не может быть сведено к описанию обычного газа, содержащего некоторое количество отдельных заряженных частиц. Такое состояние ионизованного газа называется *плазмой*. Плазму называют также четвёртым состоянием вещества. Более точное количественное определение этого понятия будет дано ниже.

Из характерных свойств плазмы можно выделить высокую электропроводность и *квазинейтральность*. Ввиду наличия большого числа подвижных заряженных частиц плазма, в противоположность нейтральному газу, сильно взаимодействует с электрическим и магнитным полями. При этом частицы в плазме стремятся распределиться в пространстве таким образом, чтобы средняя плотность заряда была равна нулю. Равенство концентраций положительных и отрицательных частиц — квазинейтральность — нарушается, как правило, лишь в микроскопических масштабах из-за тепловых флуктуаций.

Первое описание газовой плазмы дал И. Ленгмюр (1923 г.), исследуя электрический разряд в газе низкого давления (*телюющий разряд*). Он назвал плазмой «ярко светящийся газ, состоящий из электронов, ионов разных сортов и нейтральных атомов и молекул». Он же ввёл сам термин — плазма (от греческого глагола, обозначающего «разрыхляться», «расползаться»). Свечение плазмы, являющееся при относительно невысоких температурах следствием непрерывно идущей рекомбинации электронов и ионов в нейтральные атомы, сопровождается выделением энергии и уменьшением концентрации электронов и ионов.

Стационарное состояние плазмы может существовать лишь при на-

личии непрерывно действующего источника энергии. Им может быть электрический разряд в газе (газоразрядная плазма), происходящий в постоянном электрическом поле (обычный газовый разряд, дуга и т. д.) или в высокочастотном поле (индукционные катушки, запитанные током высокой частоты электроды и т. д.). Плазма может образовываться и при *термической* ионизации газа, если газовая среда поддерживается при достаточно высокой температуре (пламя газовой горелки). Плазма образуется в фокальной области мощных лазерных установок и при многих других условиях. Звёздная плазма существует за счёт выделения энергии в реакциях *ядерного синтеза*.

Практическое применение плазмы чрезвычайно многообразно. Например, низкотемпературная плазма применяется для проведения химических реакций, которые в горячей сильно ионизованной газовой среде происходят очень быстро и эффективно. Методы плазменного травления применяются при создании интегральных микросхем. Плазма используется также в магнитогидродинамических генераторах — преобразователей механической энергии движущегося в магнитном поле проводящего газа в электрическую энергию. Большой интерес представляет плазма, существующая в атмосфере Земли и планет, а также в космосе. Атмосферная плазма создаётся ультрафиолетовым излучением Солнца. Электроны плазмы захватываются магнитным полем Земли (движутся вокруг и вдоль силовых линий магнитного поля) и образуют радиационные пояса на расстояниях тысяч километров от поверхности Земли. Широко известны также плазменные проводящие слои Хевисайда, обеспечивающие дальнюю радиосвязь на коротких волнах. Наконец, физика плазмы является неотъемлемой частью проблемы создания *управляемого термоядерного синтеза* (УТС).

В *низкотемпературной* плазме ( $T \lesssim 10^4$  К) степень ионизации атомов обычно невелика. Например, в тлеющем газовом разряде люминесцентной лампы концентрация электронов составляет  $n_e \sim 10^9$  см<sup>-3</sup>, а концентрация нейтральных молекул  $n_0 \sim 10^{14}$  см<sup>-3</sup>. Лишь внутри звёзд и в установках, используемых для исследования проблем УТС, где температуры достигают значений  $T \sim 10^6$  К и более (*высокотемпературная* плазма), доля ионизованных атомов приближается к единице.

Стационарное состояние плазмы зачастую является *неравновесным*. При этом компоненты плазмы (электроны и ионы), как правило, имеют разную температуру:  $T_e \neq T_i$ . Такое оказывается возможным, поскольку электроны и ионы имеют существенно разные массы ( $m_e \ll m_i$ ). Поэтому при электрон-ионных столкновениях обмен энергией идёт гораздо медленнее, чем при столкновениях частиц одного сорта (электрон-электронных и ион-ионных). Например, в тлеющем газовом разряде обычно имеются «горячие» электроны и «холодные» ионы:



Рис. 5.1. Различные типы плазмы в лаборатории и природе. Температура указана в энергетических единицах ( $1 \text{ эВ} \approx 11\,600 \text{ К}$ )

$T_e \gg T_i$ . Это связано с тем, что в сильно разреженном газе электроны ускоряются внешним электрическим полем, почти не теряя энергии при соударениях с ионами и атомами газа или стенками сосуда, — в результате электроны нагреваются до высоких температур  $T_e \sim 10^4 \text{ К}$ . Ионы же, напротив, быстро отдают полученную от поля и от электронов энергию нейтральным атомам газа и атомам стенок, поскольку массы их близки, — поэтому их температура оказывается порядка комнатной:  $T_i \sim 300 \text{ К}$ .

Свойствами, характерными для газовой плазмы, обладают и некоторые другие среды, называемые по этой причине *плазмоподобными* средами, или просто «плазмами». В качестве примеров можно назвать плазму металлов, плазму электролитов, электронно-дырочную плазму полупроводников, нуклонную плазму атомного ядра и др. На рис. 5.1 на плоскости параметров  $T$ – $n$  (температура плазмы — плотность числа частиц) представлены различные типы плазм, встречающихся как в лабораторных условиях, так и в природе.

Основные свойства газовых разрядов подробно рассмотрены в Приложении к разделу (см. стр. 281).

## 2. Основные характеристики плазмы

Определяющими свойствами плазмы являются *коллективный* характер её движения и *квазинейтральность* (равенство нулю средней плотности заряда). Рассмотрим простейший вид коллективных плазменных колебаний.



Здесь и далее в этом разделе будем использовать систему СГС, как это принято в физике плазмы.

### 2.1. Плазменная частота

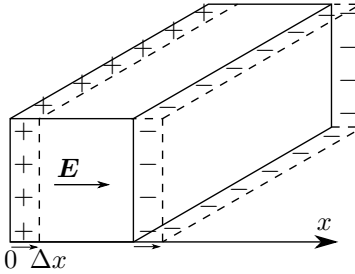


Рис. 5.2. Плазменные колебания

Выделим в нейтральной плазме некоторый объём в виде параллелепипеда (см. рис. 5.2). Обозначим концентрацию электронов как  $n_e$ ; ионы для простоты будем считать однозарядными ( $Z = 1$ ), тогда их концентрация такая же, как у электронов:  $n_i = n_e$ . Предположим, что все электроны сместились на расстояние  $x$  относительно ионов. Ионы как существенно более тяжёлые частицы можно считать неподвижными. В результате на боковых гранях параллелепипеда возникнут нескомпенсированные поверхностные заряды с плотностью

$$\sigma = \pm n_e e \Delta x.$$

Эти заряды — как две пластины конденсатора — создадут электрическое поле

$$E = 4\pi n_e e \Delta x.$$

В свою очередь это поле будет действовать на электроны, придавая им ускорение, равное

$$\frac{d^2 \Delta x}{dt^2} = -\frac{eE}{m} = -\frac{4\pi n_e e^2}{m} \Delta x.$$

Видно, что полученное уравнение описывает гармонические колебания с частотой

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi n_e e^2}{m_e}}. \quad (5.1)$$

Таким образом, мы получили частоту коллективных колебаний электронов относительно квазинейтрального состояния. Такие колебания называют *ленгмюровскими*, а частоту  $\omega_p$  — *плазменной* или *ленгмюровской*. Эта частота — один из важнейших параметров плазмы. Она определяет характерный *временной* масштаб для плазмы — время отклика на флуктуацию плотности заряда в ней. Частота  $\omega_p$  определяет многие физические процессы, включая распространение электромагнитных волн в плазме.

## 2.2. Дебаевский радиус

Плазменные колебания могут быть возбуждены как за счёт внешнего воздействия (например, при прохождении электромагнитной волны), так и за счёт тепловой энергии, содержащейся непосредственно в плазме. Оценим амплитуду колебаний в последнем случае.

Средняя скорость теплового движения электронов по порядку величины равна  $\bar{v}_e \sim \sqrt{k_B T_e / m_e}$ , где  $T_e$  — температура электронов. Амплитуду  $r$  колебаний электронов относительно ионов оценим как смещение с тепловой скоростью  $\bar{v}_e$  за характерное время плазменных колебаний  $1/\omega_p$ :  $r = \bar{v}_e / \omega_p$ . Полученную величину обозначают как

$$r_D = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi n_e e^2}} \sim \frac{\bar{v}_e}{\omega_p} \quad (5.2)$$

и называют **дебаевским радиусом** (или **дебаевской длиной**). Это — ещё один важный плазменный параметр, задающий характерный *пространственный* масштаб многих плазменных явлений.

Из рассмотренного примера видно, что дебаевская длина есть амплитуда ленгмюровских колебаний, возбуждаемых тепловыми флуктуациями. Она задаёт масштаб, на котором возможно спонтанное нарушение квазинейтральности плазмы.

Таким образом, плазменная частота  $\omega_p$  и дебаевская длина  $r_D$  представляют две важнейшие характеристики плазмы, определяющие временной и пространственный масштабы коллективного движения электронов относительно ионов.

## 2.3. Плазменное экранирование

Рассмотрим ещё одну задачу, в которой дебаевская длина играет роль ключевого параметра.

Поместим в равновесную плазму с температурой  $T = T_e = T_i$  некоторую пробную частицу, имеющую фиксированный положительный заряд  $+q$  и найдём, как распределятся заряженные плазменные частицы вокруг неё. Будем считать, что частица достаточно массивна, так что её можно считать неподвижной (в качестве такого пробного заряда можно рассмотреть один из ионов плазмы, поскольку  $m_i \gg m_e$ ).

Заряд будет притягивать к себе плазменные электроны, в результате чего вокруг него образуется отрицательно заряженное «облако», *экранирующее* поле заряда на большом расстоянии от него — электрическое поле вокруг  $q$  будет убывать с расстоянием  $r$  не по закону  $q/r^2$ , а существенно быстрее. Если бы

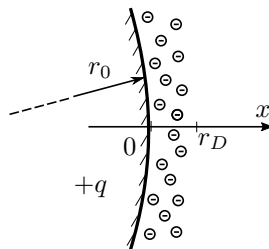


Рис. 5.3. Упрощенная геометрия задачи об экранировании заряда

электроны не имели кинетической энергии, то они так «облепили» бы пробный заряд, что его собственное поле было бы полностью скомпенсировано. Тепловое движение мешает такой компенсации.

Чтобы наглядно выявить характерные особенности решения данной задачи, предположим, что радиус  $r_0$  пробной частицы велик (по сравнению с  $r_D$ ) и будем рассматривать распределение поля вблизи её поверхности — так мы сведём задачу к одномерной, сильно упростив выкладки, но не потеряв качественные особенности решения.

Пространственное распределение электронов в равновесии подчиняется *закону Больцмана*:

$$n_e = n_{e0} \cdot \exp\left(\frac{e\varphi}{k_B T}\right). \quad (5.3)$$

Здесь  $\varphi$  — потенциал электростатического поля,  $n_{e0}$  — концентрация электронов вдали от заряда, где  $\varphi \rightarrow 0$ . Аналогичное соотношение можно записать и для ионов с заменой  $-e \rightarrow e$  (по-прежнему считаем, ионы однозарядными,  $Z = 1$ ). Будем считать, что температура электронов в плазме достаточно велика, так что можно положить

$$\frac{e\varphi}{k_B T} \ll 1.$$

Раскладывая больцмановскую экспоненту в ряд по этому малому параметру:  $e^{\pm e\varphi/k_B T} \approx 1 \pm e\varphi/k_B T$ , найдём объёмную плотность заряда

$$\rho = -en_e + en_i \approx -en \cdot \frac{e\varphi}{k_B T}, \quad (5.4)$$

где  $n = n_{e0} + n_{i0} = 2n_{e0}$  — полная концентрация заряженных частиц в плазме вдали от  $q$ .

С другой стороны, распределение потенциала  $\varphi(x)$  в области  $x > 0$  однозначно связано с распределением плотности электрического заряда  $\rho(x)$ . Запишем *уравнение Пуассона* для одномерного случая:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho. \quad (5.5)$$

Объединяя (5.5) и (5.4), получим дифференциальное уравнение для потенциала поля  $\varphi(x)$  вблизи пробной частицы:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\varphi}{r_D^2}, \quad (5.6)$$

где  $r_D$  определяется соотношением, аналогичным (5.2):

$$r_D = \sqrt{\frac{k_B T}{4\pi n e^2}}. \quad (5.7)$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям  $\varphi(\infty) = 0$  и  $\varphi(0) = \frac{q}{r_0}$ , имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{q}{r_0} e^{-\frac{x}{r_D}}. \quad (5.8)$$

**Замечание.** Решая уравнения Пуассона в сферических координатах, можно найти распределение потенциала вокруг неподвижного пробного точечного заряда (что применимо также к отдельному иону):

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} e^{-\frac{r}{r_D}}.$$

Таким образом, потенциал поля и его напряжённость, а также концентрация плазменных частиц изменяются при удалении от пробного заряда по экспоненциальному закону с характерной длиной порядка дебаевского радиуса  $r_D$ . На расстояниях, превышающих  $r_D$  в несколько раз, плазму можно считать квазинейтральной, а поле заряда  $q$  практически полностью экранированным. В связи с этим дебаевскую длину (5.7) также называют **радиусом экранирования**.

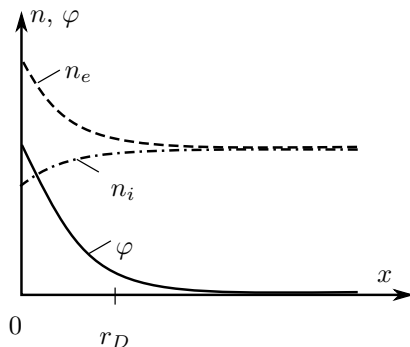


Рис. 5.4. Схематичное распределение потенциала (сплошная) и плазменных зарядов (пунктиры) и вблизи стороннего положительного заряда

**Экранирование в неравновесной плазме.** В заключение отметим одно обстоятельство, касающееся экранирования зарядов в неравновесной плазме. Когда температуры электронов  $T_e$  и ионов  $T_i$  различны, можно определить две характерные длины — *электронную* и *ионную*:

$$r_{De} = \sqrt{\frac{k_B T_e}{4\pi n_e e^2}}, \quad r_{Di} = \sqrt{\frac{k_B T_i}{4\pi n_i e^2}}. \quad (5.9)$$

Повторив изложенный выше вывод с учётом различия температур компонентов, нетрудно получить *радиус экранирования поля стороннего за-*

$r_D$  в общем случае:

$$r_D = (r_{De}^{-2} + r_{Di}^{-2})^{-1/2} = \sqrt{\frac{k_B}{4\pi n_e e^2} \frac{T_e T_i}{T_e + T_i}}. \quad (5.10)$$

Например, в плазме тлеющего газового разряда  $T_e \gg T_i$ . Тогда  $r_{De} \gg r_{Di}$  и  $r_D \approx r_{Di}$ , то есть радиус экранирования потенциала электрода, помещённого в плазму, определяется температурой холодных ионов  $T_i$ . При этом стоит подчеркнуть, что рассуждения п. 2.2, остаются в силе: масштаб, на котором *нарушается квазинейтральность* плазмы из-за тепловых флуктуаций электронов относительно ионов, определяется именно *электронной* дебаевской длиной  $r_{De}$ , то есть зависит от температуры горячих электронов  $T_e$ . Чтобы разделить эти два не всегда совпадающие понятия, электронный дебаевский радиус (левая формула (5.9)) иногда называют *электронной поляризационной длиной*.

#### 2.4. Идеальная и неидеальная плазма

Теперь можно дать *количественное* определение понятию плазма.

**Плазмой** называется ионизованный газ, дебаевский радиус которого  $r_D$  существенно меньше характерного размера области  $a$ , занимаемой этим газом:

$$\sqrt{\frac{k_B T}{4\pi n e^2}} \ll a.$$

Именно при  $r_D \ll a$  поведение среды носит существенно *коллективный* характер. В противном случае среда может рассматриваться просто как газ с примесью индивидуальных заряженных частиц.

Оценим *энергию кулоновского взаимодействия* частиц в плазме. Распределение потенциала вокруг иона с зарядом  $q$  определяется законом экранирования:

$$\varphi = \frac{q}{r} e^{-r/r_D}.$$

Вычитая потенциал самого иона  $\varphi_0 = \frac{q}{r}$  (для простоты считаем ионы однопозитивными), найдём потенциал «экранирующего облака». При  $r \lesssim r_D$  имеем

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{q}{r} (e^{-r/r_D} - 1) \approx -\frac{q}{r_D}.$$

Воспользуемся известной формулой для электростатической энергии системы зарядов  $\varepsilon = \frac{1}{2} \sum_i \varphi_i q_i$ , где  $\varphi_i$  — потенциал в точке нахождения заряда  $q_i$ . Суммируя по всем ионам, запишем плотность энергии кулоновского взаимодействия зарядов в плазме:

$$w_{\text{кул}} \approx -\frac{1}{2} n_i \frac{q^2}{r_D}. \quad (5.11)$$

Сравним полученную энергию с тепловой  $w_{\text{тепл}} \sim n_i k_B T$ :

$$\frac{w_{\text{тепл}}}{w_{\text{кул}}} \sim \frac{k_B T r_D}{q^2} = 4\pi n_i r_D^3. \quad (5.12)$$

Видно, что отношение тепловой и кулоновской энергий в плазме по порядку величины есть число заряженных частиц в сфере радиуса  $r_D$ :

$$N_D = \frac{4}{3}\pi n_i r_D^3. \quad (5.13)$$

Плазму называют *идеальной*, если энергия кулоновского взаимодействия мала по сравнению с тепловой. Видно, что это выполняется, если число частиц в «дебаевской сфере» велико,  $N_D \gg 1$ . Идеальная плазма во многом подобна по своим свойствам идеальному газу. В неидеальной плазме ( $N_D \lesssim 1$ ) взаимодействие между частицами велико, так что она становится в некотором смысле подобна жидкости, а её описание значительно усложняется.

**Пример 1.** Характерные параметры тлеющего разряда:  $T_i = 300$  К,  $T_e \sim 10^4$  К ( $\approx 1$  эВ),  $n_i = n_e \sim 10^{10}$  см $^{-3}$  (давление  $10^{-2}$  торр, степень ионизации  $10^{-4}$ ). Для такой плазмы имеем электронную дебаевскую (поляризационную) длину  $r_{De} \approx 7 \cdot 10^{-3}$  см, и радиус экранирования  $r_D \approx 10^{-3}$  см. Число частиц в дебаевской сфере  $N_D = \frac{4}{3}\pi n r_D^3 \sim 40$ , то есть плазму с удовлетворительной точностью можно считать идеальной.

## 2.5. Диэлектрическая проницаемость плазмы

Рассмотрим плазму, помещённую в переменное электрическое поле, меняющееся по гармоническому закону:  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t)$ . Это поле вызывает разделение зарядов в плазме и соответственно её *поляризацию*. Поскольку ионы значительно тяжелее электронов, можно считать, что под действием поля смещаются только электроны. Электропроводность плазмы, как правило, очень велика, поэтому столкновениями электронов с ионами можно пренебречь. Тогда уравнение движения электронов можно записать как

$$m_e \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e \mathbf{E}_0 \cos(\omega t). \quad (5.14)$$

Интегрируя это уравнение, находим, что электроны будут колебаться по гармоническому закону  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \cos(\omega t)$ , где амплитуда колебаний равна

$$\mathbf{r}_0 = \frac{e}{m_e \omega^2} \mathbf{E}_0.$$

Смещение электронов вызывает поляризацию среды. Амплитуда колебаний вектора поляризации  $\mathbf{P}$  (объёмной плотности дипольного момента среды) будет равна  $\mathbf{P}_0 = -n_e e \mathbf{r}_0$ , что с учётом выражения для

плазменной частоты (5.1), можно записать как

$$\mathbf{P}_0 = -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{\mathbf{E}_0}{4\pi}.$$

Диэлектрическая проницаемость есть коэффициент пропорциональности между векторами напряжённости  $\mathbf{E}$  и индукции  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ . Таким образом, для плазмы она равна

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \quad (5.15)$$

**Пример 2.** Как известно из оптики, диэлектрическая проницаемость есть квадрат показателя преломления электромагнитной волны:  $\varepsilon = n^2$ . Из (5.15) видно, что при  $\omega < \omega_p$  проницаемость ставится отрицательной, а значит показатель преломления будет формально мнимым. На деле это означает, что электромагнитные волны с частотами, меньше плазменной, не могут распространяться в плазме. Этим объясняется, в частности, отражение волн с частотой  $\lesssim 10$  МГц от ионосферы Земли, что используется при осуществлении дальней радиосвязи.

### 3. Исследование плазмы с помощью зондов

#### 3.1. Плавающий потенциал

Одним из самых простых методов исследования свойств плазмы является измерение электрических потенциалов с помощью «зондов» — небольших проводников, вводимых в плазму.

При внесении проводника в плазму, он подвергается «бомбарировке» со стороны её заряженных частиц. Как известно из молекулярной физики, число частиц, ударяющихся в идеальном газе в секунду о единичную поверхность, равно

$$j = \frac{1}{4}n\bar{v}, \quad (5.16)$$

где  $n$  — концентрация частиц,  $\bar{v} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}}$  — их средняя тепловая скорость. Поскольку  $m_e \ll m_i$ , тепловые скорости электронов обычно существенно превосходят скорости ионов  $\bar{v}_e \gg \bar{v}_i$ . Поэтому проводник, внесенный в плазму, в равновесии *зарядится отрицательно*. Отрицательный потенциал  $-U_f$  (относительно плазмы), до которого заряжается помещённый в неё зонд, называют **плавающим потенциалом**. При этом вокруг отрицательно заряженного зонда образуется область положительного пространственного заряда, экранирующего плазму от зонда (рис. 5.5). Протяженность этой области — порядка дебаевского радиуса экранирования.

Найдём связь  $U_f$  с параметрами плазмы. Если бы потенциал зонда был равен потенциалу плазмы ( $U_f = 0$ ), то согласно (5.16) электронный

и ионный токи были бы равны соответственно

$$I_{e0} = \frac{n\bar{v}_e}{4}eS, \quad I_{i0} = \frac{n\bar{v}_i}{4}eS, \quad (5.17)$$

где  $S$  — площадь зонда,  $n = n_e = n_i$ . Эти токи также можно назвать *тепловыми*. Далее учтём наличие разности потенциалов  $-U_f$  между плазмой и электродом. На ионный ток она практически не влияет:  $I_i \approx I_{i0}$ . Электронный же ток уменьшится, поскольку лишь часть электронов, летящих к зонду, способна преодолеть потенциальный барьер. Согласно распределению Больцмана

$$I_e = I_{e0} \exp\left(\frac{eU_f}{k_B T_e}\right), \quad (5.18)$$

где  $U_f < 0$ , поэтому  $I_e < I_{e0}$ .

В равновесии суммарный ток в цепи равен нулю, и количество попадающих на зонд ионов и электронов уравнивается:  $I_e = I_i = I_{i0}$ . Тогда из (5.17) и (5.18) находим

$$U_f = \frac{k_B T_e}{e} \ln \frac{\bar{v}_i}{\bar{v}_e} = -\frac{1}{2} \frac{k_B T_e}{e} \ln \frac{T_e m_i}{T_i m_e}. \quad (5.19)$$

**Пример 3.** В тлеющем газовом разряде  $k_B T_e \sim 1$  эВ,  $T_e/T_i \sim 40$ ,  $m_i/m_e \sim 4 \cdot 10^4$ , откуда  $U_f \approx -7$  В.

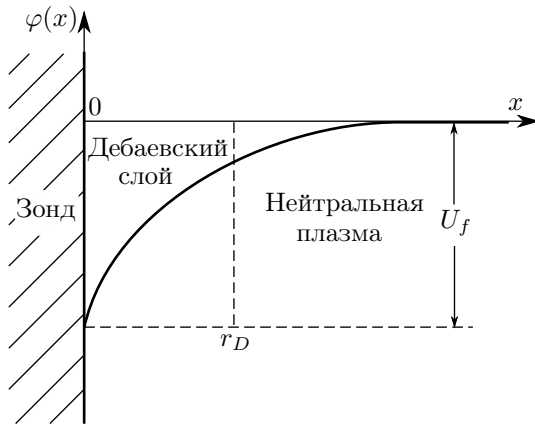


Рис. 5.5. Распределение потенциала в окрестности зонда



**Замечание.** Формула (5.19) даёт правильную оценку по порядку величины, но с количественной точки зрения её нельзя считать надёжной. Во-первых, существование «дебаевского слоя» вокруг зонда вносит некоторую неопределённость в величину  $S$ . Если размер зонда значительно превышает дебаевский радиус, это обстоятельство несущественно; однако если дебаевский радиус велик, поправка может быть значимой. Во-вторых, при выводе предполагалось, что движение ионов у зонда близко к тепловому. Это справедливо *вдали* от дебаевского слоя зонда, но не вблизи него (и тем более в нём), где ионы подвергаются ускоряющему действию довольно сильного электрического поля.

Уточним выражение для ионного тока в состоянии равновесия. Будем считать, что скорости ионов вблизи зонда определяются не столько температурой плазмы, сколько разностью потенциалов между плазмой и зондом:

$$v_i \approx \sqrt{\frac{2e|U_f|}{m_i}}.$$

При проведении оценки по порядку величины воспользуемся формулой (5.19), в которой отбросим численные коэффициенты и несущественный логарифмический множитель. Тогда получим

$$I_{i0} = n_i e S v_i \sim n_i e S \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}}. \quad (5.20)$$

Видно, что поправка будет существенна, если плазма неравновесна и  $T_e \gg T_i$ .

### 3.2. Измерения методом одиночного зонда

Рассмотрим схему исследования параметров плазмы с помощью метода **одиночного зонда**. Схема измерений изображена на рис. 5.6. Два электрода погружены в плазму. Один из них имеет существенно большую площадь поверхности, контактирующую с плазмой, — он выполняет роль *опорного электрода*. Второй электрод с малой поверхностью и есть наш «зонд». Расстояние между электродами значительно превышает радиус экранирования, поэтому можно пренебречь их взаимным влиянием.

С помощью источника ЭДС  $\mathcal{E}$  на электродах можно создавать регулируемую разность потенциалов  $U$  (регулировка осуществляется потенциометром  $R$ ). Измеряя ток  $I$  через электроды, можно получить вольт-амперную характеристику (ВАХ) зонда  $U(I)$ , вид которой зависит от характеристик исследуемой плазмы — температуры и концентрации частиц.

Пусть положение потенциометра  $R$  подобрано так, что ток в цепи и в плазме отсутствует:  $I = 0$ . Тогда потенциал каждого электрода будет равен потенциалу плазмы в точке его размещения за вычетом соот-

ветствующего плавающего потенциала  $U_f$ . Причём, если температура в плазме постоянна, то, как видно из (5.19), постоянен будет и плавающий потенциал. В таком случае потенциал зонда  $U$  (относительно опорного электрода) будет равен просто разности потенциалов между соответствующими точками плазмы. Перемещая зонд и поддерживая нулевой ток в цепи, можно измерить пространственное распределение электрического поля в плазме.

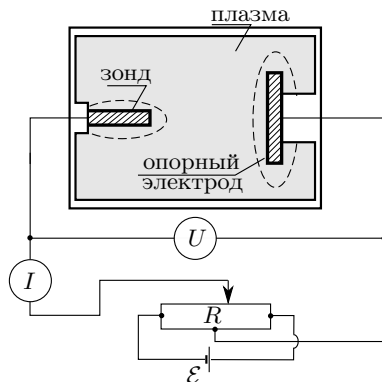


Рис. 5.6. Исследование плазмы методом одиночного зонда. Пунктиром отмечен дебаевский слой вблизи электродов

При изменении потенциала зонда  $U$  по измерительной цепи и через плазму начнёт протекать ток, так как баланс между электронным и ионным потоками на зонд нарушится. При этом плотность тока через опорный электрод будет мала, поскольку его площадь велика, — поэтому его потенциал относительно плазмы останется практически всегда равным  $U_f$ . При небольшом размере зонда наибольшая плотность тока возникает около него, так что практически всё падение напряжения  $U$  будет приходиться на дебаевский слой, окружающий зонд.

Зависимость тока через зонд  $I$  от потенциала зонда  $U$  (для эквипотенциальной плазмы) имеет вид, показанный на рис. 5.7. Эту кривую называют **зондовой характеристикой**.

Ток зонда равен сумме ионной и электронной составляющих:  $I = I_e + I_i$ . На *левой ветви* характеристики ( $U < 0$ ) весь ионный ток, приходящий на границу дебаевского слоя, достигает зонда. Ионный ток  $I_i$  равен, следовательно, своему максимальному значению — *ионному току насыщения*  $I_{ин}$ . Электронный ток резко убывает при смещении потенциала в сторону отрицательных значений и в пределе  $U \rightarrow -\infty$  прекращается:  $I_e \rightarrow 0$ .

На *правой ветви* характеристики ( $U > 0$ ) потенциал зонда превы-

шает потенциал опорного электрода, но вначале (вплоть до точки  $A$ ) остаётся ниже потенциала плазмы ( $U < |U_f|$ ). При этом ионный ток на зонд практически не меняется ( $I_i \approx I_{iн}$ ), а электронный ток возрастает. В точке  $A$  — при  $U = |U_f|$  — слой пространственного заряда (дебаевский слой) исчезает, и оба тока — электронный и ионный — подходят к зонду беспрепятственно. При этом электронный ток существенно превосходит ионный, поскольку плотности электронов и ионов близки друг к другу, а тепловые скорости существенно различаются ( $n_i = n_e$ ,  $\bar{v}_e \gg \bar{v}_i$ ).

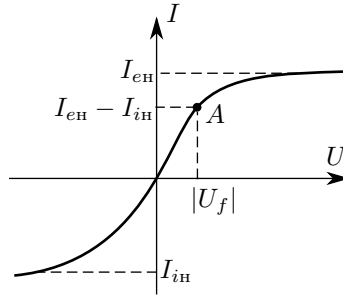


Рис. 5.7. Вольт-амперная характеристика одиночного зонда

Участок зондовой характеристики, расположенный слева от точки  $A$ , носит название **ионной** ветви (ионный ток достигает насыщения), а участок справа от точки  $A$  называется **электронной** ветвью (электронный ток достигает насыщения).

Электронный ток насыщения можно оценить по формуле (5.17):

$$I_{eн} \approx I_{e0} \approx \frac{1}{4} n_e S \sqrt{\frac{8k_B T_e}{\pi m_e}}. \quad (5.21)$$

Однако для ионного тока аналогичная оценка может оказаться слишком груба, поскольку скорости ионов вблизи зонда определяются не столько температурой плазмы, сколько разностью потенциалов между плазмой и зондом. Правильнее было бы воспользоваться уточнённой оценкой (5.20). Для количественных расчётов можно использовать полуэмпирическую формулу, предложенную Д. Бомом:

$$I_{iн} \approx 0,4 n_i e S \sqrt{\frac{2k_B T_e}{m_i}}. \quad (5.22)$$

Кроме того, эффект ускорения частиц под действием разности потенциалов между плазмой и зондом приводит к тому, что при  $|U| \gg |U_f|$  ток насыщения не является постоянным и медленно возрастает при  $U \rightarrow \pm\infty$ .

**Замечание.** Вид выражения (5.22), в которое входят температура электронов и масса ионов, характерен для многих явлений в плазме. Внешние поля вызывают быстрое перемещение электронов и существенно более медленное движение ионов. Однако разделение электронов и ионов невозможно, так как оно нарушило бы квазинейтральность плазмы. Поэтому движение плазмы как целого определяется массой ионов. В то же время перемещение электронов существенно зависит как от приложенных полей, так и от электронной температуры. Процессы, которые определяются параметрами, одни из которых характерны для электронов (здесь  $T_e$ ), а другие — для ионов (в рассматриваемой формуле —  $m_i$ ), называются **амбиполярными**.

### 3.3. Измерения с помощью двойного зонда

**Двойным зондом** называется система, состоящая из двух одинаковых зондов, расположенных на небольшом расстоянии друг от друга. Между зондами создаётся разность потенциалов  $U$ , которая по величине много меньше плавающего потенциала  $|U| \ll |U_f|$ . При этом оба зонда имеют относительно плазмы близкий к плавающему отрицательный потенциал, т. е. находятся на *ионной* ветви вольт-амперной характеристики (см. выше).

При отсутствии разности потенциалов ток между зондами равен нулю. Рассчитаем величину тока, проходящего через двойной зонд вблизи точки  $I = 0$ . При небольших разностях потенциалов ионные токи на оба зонда равны ионному току насыщения и компенсируют друг друга. Величина результирующего тока целиком связана с различием в электронных токах. Пусть потенциал на первом зонде равен

$$U_1 = U_f + \Delta U_1,$$

а на втором

$$U_2 = U_f + \Delta U_2.$$

Предполагается, что  $\Delta U_1, \Delta U_2 \ll U_f$ . Напряжение  $U$  между зондами равно

$$U = U_2 - U_1 = \Delta U_2 - \Delta U_1.$$

Найдём ток, приходящий на первый электрод (см. также (5.18)):

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{\text{ин}} - I_{e0} \exp\left(\frac{eU_1}{k_B T_e}\right) = \\ &= I_{\text{ин}} - \left[ I_{e0} \exp\left(\frac{eU_f}{k_B T_e}\right) \right] \exp\left(\frac{e\Delta U_1}{k_B T_e}\right). \end{aligned}$$

Заметим, что при  $\Delta U_1 = 0$  (при  $U_1 = U_f$ ) электронный и ионный ток компенсируют друг друга. Это означает, что заключённый в квадратные

скобки множитель равен  $I_{\text{ин}}$ . Имеем поэтому

$$I_1 = I_{\text{ин}} \left[ 1 - \exp \left( \frac{e \Delta U_1}{k_B T_e} \right) \right]. \quad (5.23)$$

Аналогично для второго электрода

$$I_2 = I_{\text{ин}} \left[ 1 - \exp \left( \frac{e \Delta U_2}{k_B T_e} \right) \right]. \quad (5.24)$$

Заметим, что зонды 1 и 2 соединены *последовательно* — через плазму — поэтому  $I_1 = -I_2 = I$ . Выразим  $\Delta U_1$  и  $\Delta U_2$  из (5.23) и (5.24):

$$\Delta U_1 = \frac{k_B T_e}{e} \ln \left( 1 - \frac{I}{I_{\text{ин}}} \right),$$

$$\Delta U_2 = \frac{k_B T_e}{e} \ln \left( 1 + \frac{I}{I_{\text{ин}}} \right).$$

Наконец, вычитая второе равенство из первого, найдём

$$U = \Delta U_1 - \Delta U_2 = \frac{k_B T_e}{e} \ln \frac{I_{\text{ин}} - I}{I_{\text{ин}} + I},$$

и, разрешая это равенство относительно  $I$ , получим

$$I = I_{\text{ин}} \operatorname{th} \frac{eU}{2k_B T_e}. \quad (5.25)$$

Эту формулу можно использовать для определения температуры электронов по форме вольт-амперной характеристики двойного зонда.

Наблюдаемая на опыте зависимость тока от напряжения изображена на рис. 5.8. Заметим, что эта кривая отличается от (5.25) существованием наклона у асимптот в области больших  $|U|$ , что связано с ускорением частиц плазмы приложенным полем, которое не учтено при выводе (5.25) (см. также замечание в конце п. 3.1).

Графики типа рис. 5.8 проще всего обрабатывать следующим образом. Сначала находится ток насыщения  $I_{\text{ин}}$  из пересечения асимптот с осью  $U = 0$ . Затем находится наклон графика в начале координат, из которого можно определить температуру электронов  $T_e$ . Дифференцируя (5.25) по  $U$  в точке  $U = 0$  и принимая во внимание, что при малых аргументах  $\operatorname{th} x \approx x$ , найдём

$$k_B T_e = \frac{1}{2} \frac{e I_{\text{ин}}}{\left. \frac{dI}{dU} \right|_{U=0}}, \quad (5.26)$$

где  $\left. \frac{dI}{dU} \right|_{U=0}$  — наклон характеристики зонда вблизи начала координат. По известным  $T_e$  и  $I_{\text{ин}}$  можно из формулы (5.22) найти концентрацию заряженных частиц  $n_i = n_e$ .

Таким образом, двойные зонды удобно применять для измерения электронной температуры и концентрации частиц в плазме.

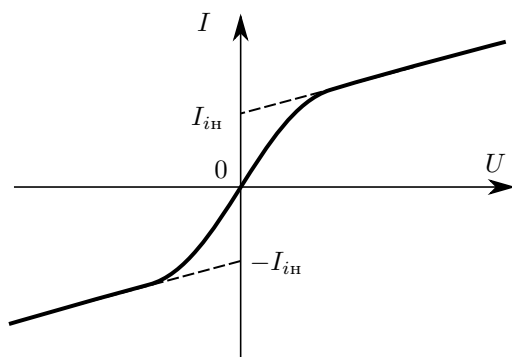


Рис. 5.8. Вольт-амперная характеристика двойного зонда

### Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — Гл. IX.
2. Кириченко Н.А. Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — Гл. 16.
3. Арцимович Л.А., Сагдеев Р.З. Физика плазмы для физиков. — М.: Атомиздат, 1979.
4. Чен Ф. Введение в физику плазмы. — М.: Мир, 1987.

### Работа 3.5.1

## Изучение плазмы газового разряда в неоне

**Цель работы:** изучение вольт-амперной характеристики тлеющего разряда; изучение свойств плазмы методом зондовых характеристик.

**В работе используются:** стеклянная газоразрядная трубка, наполненная неонem; высоковольтный источник питания; источник питания постоянного тока; делитель напряжения; потенциометр; амперметры; вольтметры; переключатели.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с теоретическим введением к разделу. Подробное описание свойств тлеющего разряда можно найти в Приложении к разделу (см. стр. 281).

Схема установки для исследования плазмы газового разряда в неоне представлена на рис. 1. Стеклянная газоразрядная трубка имеет холодный (не нагреваемый) полый катод, три анода и *геттерный узел* — стеклянный баллон, на внутреннюю поверхность которого напылена газопоглощающая плёнка (*геттер*). Трубка наполнена изотопом неона  $^{22}\text{Ne}$  при давлении 2 мм рт. ст. Катод и один из анодов (I или II) с помощью переключателя  $\Pi_1$  подключаются через балластный резистор  $R_6$  ( $\sim 500$  кОм) к регулируемому высоковольтному источнику питания (ВИП) с выходным напряжением до нескольких киловольт.

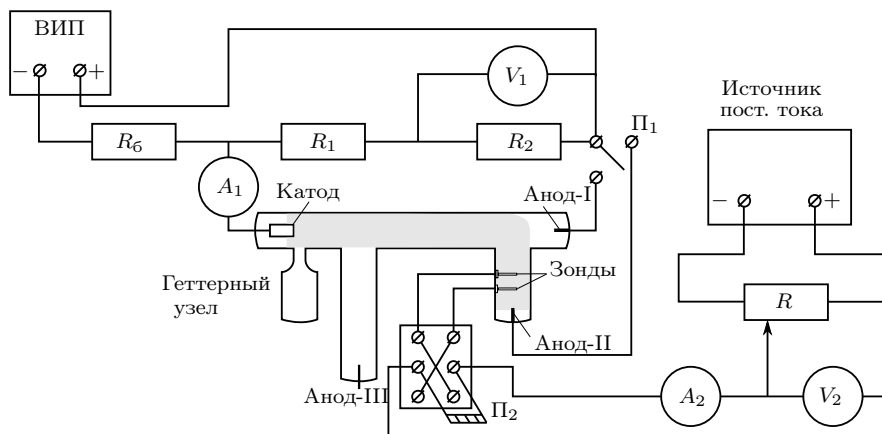


Рис. 1. Схема установки для исследования газового разряда

При подключении к ВИП анода-I между ним и катодом возникает газовый разряд. Ток разряда измеряется миллиамперметром  $A_1$ , а падение напряжения на разрядной трубке — вольтметром  $V_1$ , подключённым

к трубке через высокоомный (несколько десятков МОм) делитель напряжения с коэффициентом  $(R_1 + R_2)/R_2$ .

При подключении к ВИП анода-II разряд возникает в пространстве между катодом и анодом-II, где находится двойной зонд, используемый для диагностики плазмы положительного столба. Зонды изготовлены из молибденовой проволоки диаметром  $d$  и имеют длину  $l$ . Они подключены к источнику питания через потенциометр  $R$ . Переключатель  $\Pi_2$  позволяет изменять полярность напряжения на зондах. Величина напряжения на зондах изменяется с помощью дискретного переключателя «V» выходного напряжения источника питания и потенциометра  $R$ , а измеряется вольтметром  $V_2$ . Для измерения зондового тока используется микроамперметр  $A_2$ . Анод-III в нашей работе не используется.

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается измерить вольт-амперную характеристику тлеющего разряда и зондовые характеристики при разных токах разряда. По результатам измерений рассчитать концентрацию и температуру электронов в плазме, степень ионизации, плазменную частоту и дебаевский радиус экранирования.

### Вольт-амперная характеристика разряда

1. Установите переключатель  $\Pi_1$  в положение «Анод-I» и подготовьте приборы к работе согласно техническому описанию установки. Плавно увеличивая выходное напряжение ВИП, определите напряжение зажигания разряда  $U_{\text{зж}}$  (показания вольтметра  $V_1$  непосредственно *перед* зажиганием).
2. С помощью вольтметра  $V_1$  и амперметра  $A_1$  измерьте вольт-амперную характеристику разряда  $I_p(U_p)$ . Следите, чтобы ток разряда  $I_p$  изменялся в диапазоне, указанном в техническом описании работы (при больших токах может сгореть сопротивление).

Измерения проведите как при нарастании, так и при убывании тока. Обратите внимание, что при уменьшении  $U_p$  разряд гаснет при напряжениях, *меньших* напряжения зажигания  $U_{\text{зж}}$ .

### Зондовые характеристики

3. Уменьшите напряжение ВИП до нуля, переведите переключатель  $\Pi_1$  в положение «Анод-II» и подготовьте приборы  $\Pi_2$ ,  $V_2$  и  $A_2$  к работе согласно техническому описанию.
4. Плавно увеличивайте напряжение ВИП до возникновения разряда. Установите максимальное значение разрядного тока  $I_p$  согласно техническому описанию ( $\sim 5$  мА). Подготовьте к работе источник пита-



ния. После этого при помощи потенциометра  $R$  установите на зонде максимальное напряжение  $U_3^{\max}$ , указанное в техническом описании ( $\sim 25$  В).

5. Измерьте вольт-амперную характеристику двойного зонда  $I_3(U_3)$  (в диапазоне от  $-U_3^{\max}$  до  $U_3^{\max}$ ) при фиксированном токе разряда  $I_p$  (согласно техническому описанию работы). Вблизи  $U_3 \approx 0$  точки должны лежать чаще.

В процессе измерений необходимо следить за тем, чтобы ток разряда  $I_p$  не изменялся. При нулевом токе через зонд  $I_3 = 0$  необходимо переключить полярность подключения зонда (переключатель  $\Pi_2$ ).

При измерениях рекомендуется одновременно строить приближенный график  $I(U)$  в тетради. Убедитесь, что можно провести асимптоты к участкам кривой при больших напряжениях. Если точек мало, необходимо провести дополнительные измерения.

6. Получите зондовые характеристики еще при 3–4 значениях тока разряда  $I_p$  (согласно техническому описанию).
7. Переведите ручки регулировки источников питания в минимальное положение и отключите их. Запишите параметры установки.

#### Обработка результатов

8. Постройте вольт-амперную характеристику разряда в координатах  $I_p(U_p)$ . По наклону кривой определите максимальное дифференциальное сопротивление разряда  $R_{\text{диф}} = \frac{dU}{dI}$ . Сравните график с рис. 6 Приложения к разделу. Какому участку ВАХ газового разряда соответствует полученный в работе график?
9. Отцентрируйте зондовые характеристики  $I(U)$  и постройте их семейство на одном графике.
10. По каждой зондовой характеристике определите: а) ионный ток насыщения  $I_{iH}$  по пересечению асимптот к графику, проведенных при  $U_3 \rightarrow \pm U_3^{\max}$ , с осью ординат (см. рис. 5.8); б) наклон характеристики  $dI/dU|_{U=0}$  в начале координат.
11. По результатам предыдущего пункта рассчитайте: а) температуру электронов  $T_e$ , ответ выразите в энергетических единицах (в электрон-вольтах); б) концентрацию электронов и ионов в плазме. Ионы считайте однозарядными ( $Z = 1$ ). Площадь поверхности зонда (в пренебрежении дебаевским слоем):  $S \approx \pi dl$ , где  $d$  — диаметр,  $l$  — длина зонда (указаны на установке).
12. Рассчитайте плазменную частоту колебаний электронов  $\omega_p$ , электронную поляризационную длину  $r_{De}$  и дебаевский радиус экранирова-

ния  $r_D$  (с учётом того, что температура ионов мала по сравнению с электронной:  $T_i \ll T_e$ ). Можно ли считать плазму квазинейтральной?

13. Оцените среднее число ионов в дебаевской сфере  $N_D$ . Является ли плазма разряда идеальной?
14. Оцените степень ионизации плазмы (долю ионизованных атомов  $\alpha$ ), если давление в трубке  $P \sim 2$  торр.
15. Постройте графики зависимостей электронной температуры и концентрации электронов от тока разряда  $T_e(I_p)$ ,  $n_e(I_p)$ . Проанализируйте и попытайтесь объяснить полученные зависимости.
16. Оцените погрешности эксперимента.

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятия *плазма*. Назовите различные виды плазм в лаборатории, технике и природе.
2. Что такое дебаевская длина экранирования? Выведите формулу для дебаевской длины в одномерном случае для равновесной плазмы.
3. Что такое плазменная частота? Выведите формулу для плазменной частоты. Какие процессы в плазме характеризуются плазменной частотой?
4. Что такое равновесная и неравновесная плазма? Является ли исследуемая в работе плазма равновесной?
5. Чем определяется потенциал зонда, погружённого в плазму? Чем определяется зондовый ток насыщения для одиночного зонда? Для двойного зонда?
6. Опишите качественно основной механизм зажигания тлеющего разряда.

### Работа 3.5.2

## Изучение плазмы индукционного газового разряда

**Цель работы:** изучение свойств плазмы высокочастотного газового разряда в воздухе методом зондовых характеристик.

**В работе используются:** газоразрядная трубка с высокочастотным генератором; источник постоянного тока; генератор звуковой частоты; электронный осциллограф; форвакуумный насос; вакуумметр; натекатель; вакуумный кран; делитель; повторители-фазовращатели.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с теоретическим введением к разделу.

Ионизацию в плазме можно получить с помощью высокочастотных электромагнитных переменных полей. Существуют различные способы введения ВЧ-поля в разрядный объём. Один из них основан на использовании электромагнитной индукции: через катушку-соленоид, в которую вставлена диэлектрическая (например, стеклянная) газоразрядная камера, пропускается ток высокой частоты. Внутри катушки индуцируется вихревое электрическое поле. Силовые линии этого поля, а вместе с ними и линии разрядного тока, представляют собой окружности. Такой разряд называется *кольцевым*, *индукционным* или разрядом *H*-типа, что указывает на определяющую роль магнитного поля. Именно такой способ возбуждения газового разряда используется в нашей установке.

Другой способ возбуждения заключается в том, что на два электрода, пространство между которыми заполнено разреженным газом, подаётся высокочастотное переменное напряжение. Такие разряды называются *ёмкостными* или разрядами *E*-типа.

Высокочастотные разряды широко используются в технике. Индукционные разряды применяются в безэлектродных генераторах плотной низкотемпературной плазмы (в плазмотронах), используемых, например, для плазмохимического производства чистых веществ. Разряды ёмкостного типа применяются в мощных газоразрядных лазерах.

**Механизм возникновения пробоя.** В высокочастотных разрядах — как *H*- так и *E*-типа — электроны ускоряются под действием высокочастотного переменного электрического поля.

Предположим, что давление газа мало, так что столкновения электронов с молекулами газа происходят редко. Ограничимся рассмотрением случая однородного поля, меняющегося по гармоническому закону:  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos \omega t$ , где  $\mathbf{E}_0 = \text{const}$  — амплитуда электрического поля. Эта задача была рассмотрена также в п. 2.5 (см. формулу (5.14)). Направив ось  $x$  вдоль  $\mathbf{E}_0$ , получим

$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -eE_0 \cos \omega t.$$

Интегрируя это уравнение, найдём скорость электрона:

$$v(t) = v_0 + \frac{eE_0}{\omega m_e} \sin \omega t,$$

где  $v_0$  — начальная скорость.

Видно, что скорость электрона периодически меняется, но в среднем энергия электрона остаётся *неизменной*. Так обстоит дело, пока газ достаточно разрежен. С увеличением давления соударения электронов с молекулами газа происходят всё чаще. Однако если амплитуда напря-

жённости поля невелика, легкие электроны не смогут ионизировать молекулы и будут соударяться с ними упруго, передавая им при этом лишь малую долю своей энергии (поскольку масса электрона много меньше массы молекулы).

Чтобы понять, как возникает зажигание разряда (пробой), рассмотрим подробнее, что происходит при упругом соударении электрона с молекулами газа. Хотя энергия электрона при ударе об ион почти не меняется, направление его скорости претерпевает существенные изменения. Если частота поля достаточно велика, новое направление скорости электрона может совпасть с изменившимся за время соударения направлением электрического поля — в таком случае электрон при дальнейшем движении не возвращает полю энергию, а вновь её получает! Часть электронов может поэтому ускоряться высокочастотным полем вплоть до энергии ионизации, даже если амплитуда поля невелика. После ионизации процесс повторяется: при упругих столкновениях с молекулами газа часть электронов в электрическом поле ускоряется, вследствие чего происходят новые акты ионизации.

Таким образом в газе накапливаются заряженные частицы — электроны и ионы. По мере увеличения их концентрации возрастает роль процессов *рекомбинации* (то есть объединения электрона и иона обратно в нейтральный атом). Отметим, что наблюдаемое свечение разряда есть в основном следствие именно рекомбинации электронов и ионов. В результате действия двух факторов — ионизации и рекомбинации — устанавливается стационарное состояние плазмы. Её концентрация и температура зависят от сорта газа, его давления, а также от частоты и амплитуды высокочастотного поля.

### Экспериментальная установка

Схема установки представлена на рис. 1. Заполненная газом диэлектрическая камера представляет собой цилиндрическую стеклянную трубку (ее диаметр и длина указаны в описании), на одном из торцов которой впаяны две молибденовые проволоочки (зонды) диаметром  $d$  и длиной  $l$ , расположенные на некотором расстоянии друг от друга. Трубка вставлена в катушку индуктивности колебательного контура высокочастотного (ВЧ) генератора, работающего на частоте  $\sim 10$  МГц. Камера закрыта экраном (металлической сеткой), защищающим измерительную цепь зондов от высокочастотного поля.

Другой конец трубки не запаян и служит для откачки и для заполнения камеры газом. Камера откачивается форвакуумным насосом (ФН), а давление в ней может регулироваться с помощью натекателя, соединенного с атмосферой. Значение давления контролируется термопарным вакуумметром.

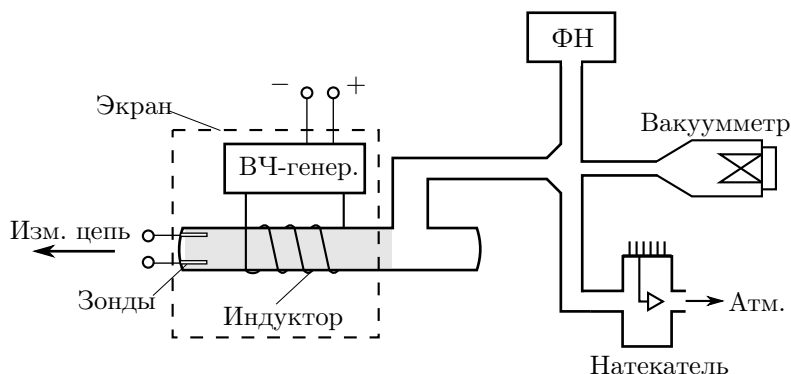


Рис. 1. Схема установки для исследования газового разряда

**Регулировка давления в системе.** Отметим важную особенность процедуры установки рабочего давления в разрядной камере. Она осуществляется путем изменения проходного сечения натекающего с атмосферой, при *непрерывной* работе откачивающего насоса. При этом скорость откачки сохраняется постоянной, а приток воздуха в разрядную камеру определяется изменением аэродинамического сопротивления натекающего. Таким образом, устанавливается новое значение давления, при котором скорость откачки насоса уравнивается расходом воздуха через натекающий. Изменение сечения натекающего выполняется микрометрическим винтом, который сжимает расположенную под ним пружину и изменяет ее давление на подвижную мембрану клапана. Такая система обладает очень большой *инерционностью* и реагирует на вращение винта со значительным запозданием.

**Измерение зондовой характеристики.** Измерительная цепь зондов изображена на рис. 2. Две катушки  $L_1$  и  $L_2$ , подключённые последовательно с зондами, не пропускают на осциллограф высокочастотный сигнал. На зонды подаётся синусоидальное напряжение небольшой частоты ( $\sim 50$  Гц) от звукового генератора ЗГ. Это же напряжение через делитель Д и регулируемый повторитель-фазовращатель ПФ2 подаётся на вход  $X$  электронного осциллографа (ЭО). Последовательно с зондом подключён резистор  $R$  ( $R \sim 100$  КОм, конкретное значение указано на установке), напряжение на котором пропорционально току через зонды (т. е. через плазму). Это напряжение подаётся на вход  $Y$  осциллографа через нерегулируемый повторитель-фазовращатель ПФ1.

На экране осциллографа наблюдается кривая, представляющая собой вольт-амперную характеристику (ВАХ) двойного зонда (см. рис. 5.8). Регулируя амплитуду на звуковом генераторе, можно изменять диапазон значений напряжения на ВАХ. Из-за фазовых сдвигов, возник-

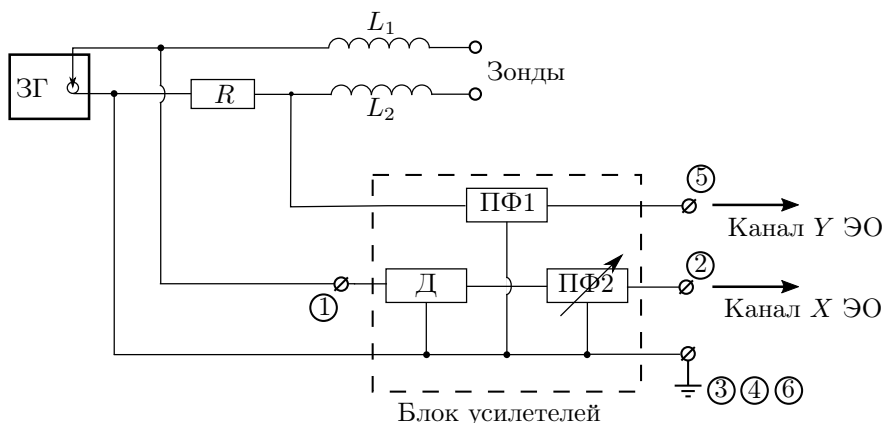


Рис. 2. Схема измерения зондовых характеристик в разряде

кающих в измерительной цепи, картина на экране ЭО в общем случае имеет вид петли. Для компенсации разности фаз и устранения этого эффекта используется регулятор фазовращателя ПФ2. Если регулировка ПФ2 не помогает, следует изменить частоту ЗГ.

По пересечению асимптот зондовой характеристики с осью ординат можно определить ионный ток насыщения зондов  $I_{in}$ , а по наклону характеристики вблизи начала координат — электронную температуру  $T_e$  (см. п. 3.3 Введения к разделу).

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается при различных давлениях газа в трубке получить зондовые вольт-амперные характеристики на экране осциллографа и рассчитать с их помощью температуру и концентрацию электронов в плазме, степень ионизации, плазменную частоту и дебаевский радиус экранирования.

### Подготовка к работе

1. До включения приборов ознакомьтесь с установкой по техническому описанию в лаборатории.
2. Подготовьте к работе термопарный вакуумметр (см. техническое описание). Включите форвакуумный насос и вакуумметр. Откачайте трубку до давления  $P \sim 10^{-1} \div 10^{-2}$  торр (рекомендованные значения см. в техническом описании). Давление регулируется с помощью натекателя (микровентили) при непрерывной работе насоса.

**Внимание!**

Не выключайте насос до конца работы!

3. Включите источник питания ВЧ-генератора. Убедитесь, что в трубке возник разряд: после зажигания он должен устойчиво гореть по всей трубке, включая область расположения зондов.
4. Включите осциллограф и звуковой генератор. Подберите напряжение на генераторе, при котором на экране осциллографа появится кривая, похожая на теоретическую зависимость, изображённую на рис. 5.8. Выходное напряжение генератора должно быть таким, чтобы на кривой наблюдались начальные участки области насыщения (асимптоты ВАХ).

Если вместо кривой на экране возникает петля, воспользуйтесь ручкой регулировки фазовращателя ПФ2. Если регулировка не помогает, следует изменить частоту генератора.

При чрезмерно большом напряжении генератора возникает искажение зондовой характеристики, в ее оконечных областях появляются изломы и «выпучины». Это происходит вследствие влияния электрического поля зондов на характер плазменного разряда. Такого допускать не следует, уменьшая при необходимости напряжение питания зондов до исчезновения искажений.

5. Посмотрите, как ведёт себя разряд, насколько он устойчив при изменении давления в рабочем диапазоне. Проверьте, что наблюдаемая на экране кривая в целом соответствует теоретической.

**Измерения**

6. Получите на экране осциллографа вольт-амперную характеристику зондов (см. рис. 5.8) для максимального давления из выбранного диапазона.
7. Регулируя напряжение звукового генератора и коэффициент усиления осциллографа по осям  $X$  и  $Y$  (вольт/деление), добейтесь того, чтобы кривая занимала большую часть экрана.

Если у осциллографа есть ручка плавной регулировки масштаба (например, осциллограф GOS-620), убедитесь, что она находится в «калиброванном» положении, при котором чувствительность каналов соответствует положению дискретного переключателя усиления.

8. Зафиксируйте изображение кривой с экрана осциллографа (сфотографируйте или зарисуйте с экрана на кальку). Запишите давление в системе  $P$  и чувствительность осциллографа по осям  $X$  и  $Y$ .

9. Повторите измерения для 5–6 значений давления внутри диапазона, в котором зондовая характеристика соответствует теоретической (см. п. 5).
10. Закончив работу, выключите сначала насос и **сразу же откройте натекаТЕЛЬ** (для предотвращения выдавливания масла из насоса). Затем отключите вакуумметр и остальные приборы.
11. Перепишите параметры установки: сопротивление датчика тока  $R$ , коэффициент делителя  $D$ , геометрические характеристики зондов и разрядной трубки.

### Обработка результатов

12. По значению сопротивления  $R$ , с которого подавался сигнал на канал  $Y$  осциллографа (см. рис. 2), для каждой кривой пересчитайте масштабы по оси  $Y$  из единиц напряжения в единицы тока.  
Рассчитайте масштаб по оси  $X$  с учётом наличия делителя  $D$  в канале зондового напряжения.
13. По зондовым характеристикам определите температуру  $T_e$  электронов (см. п. 3.3 Введения). Ответ выразите в энергетических единицах (электрон-вольтах).
14. По зондовым характеристикам определите значения ионных токов насыщения зондов  $I_{ин}$ . Определите концентрацию  $n$  электронов и ионов в плазме, считая ионы однозарядными ( $Z = 1$ ). Площадь поверхности зонда (в пренебрежении дебаевским слоем):  $S \approx \pi dl$ , где  $d$  — диаметр,  $l$  — длина зонда.
15. Рассчитайте плазменную частоту колебаний электронов  $\omega_p$ , электронную поляризационную длину  $r_{De}$  и дебаевский радиус экранирования  $r_D$  (с учётом того, что температура ионов мала по сравнению с электронной:  $T_i \ll T_e$ ). Можно ли считать плазму квазинейтральной?
16. Оцените среднее число ионов в дебаевской сфере  $N_D$ . Является ли плазма разряда идеальной?
17. Оцените степень ионизации плазмы (долю ионизованных атомов  $\alpha$ ) для каждого давления  $P$  в трубке.
18. Оцените погрешности эксперимента.

### Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятия «плазма». Назовите различные виды плазм в лаборатории, технике и природе.
2. Что такое дебаевская длина экранирования? Выведите формулу для дебаевской длины в одномерном случае для равновесной плазмы.



3. Что такое плазменная частота? Выведите формулу для плазменной частоты. Какие процессы в плазме характеризуются плазменной частотой?
4. Что такое равновесная и неравновесная плазма? Является ли исследуемая в работе плазма равновесной?
5. Чем определяется потенциал зонда, погружённого в плазму? Чем определяется зондовый ток насыщения для одиночного зонда? Для двойного зонда?
6. Каков механизм зажигания разряда в высокочастотном поле?
7. Для чего нужны защитный экран вокруг разрядной трубки и катушки  $L_1$ ,  $L_2$  в измерительной цепи зонда?

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Газовый разряд

Под термином «газовый разряд» обычно понимают все явления и процессы, связанные с протеканием электрического тока через газ.

Само название «разряд» произошло от названия медленно протекающего процесса потери заряда заряженными металлическими телами, расположенными на подставке из изолятора, что наблюдалось ещё в XVI веке. Позднее Кулон экспериментально доказал, что заряд стекает с проводника через воздух, а не через подставку из изолятора. Разряд при низких давлениях воздуха (порядка 1 мбар) открыл и исследовал Фарадей — этот разряд стал известен как *тлеющий*. В конце XIX века исследование проводимости разреженных газов привело Дж. Томсона к открытию первой элементарной частицы — электрона, а дальнейшие исследования физики газового разряда во многом послужили экспериментальной основой атомной и квантовой физики.

Современная физика термин **газовый разряд** трактует в более широком смысле. Это — не только процесс протекания тока через газ, но и любой процесс возникновения ионизации газа под действием приложенного электрического поля. При этом поле может быть не только постоянным во времени, но и переменным — высокочастотным (ВЧ-разряд, мегагерцы), сверхвысокочастотным (СВЧ-разряд, гигагерцы) и даже оптического диапазона (оптический разряд). Отдельно можно отметить пучково-плазменный разряд (ППР), загорающийся при прохождении электронного пучка через газ малой плотности вследствие возникновения в такой системе плазменных колебаний СВЧ-диапазона.

Разряды в постоянном поле разделяют на **несамостоятельные** и **самостоятельные**. Дело в том, что при нормальных условиях газы состоят в основном из электрически нейтральных атомов и молекул и практически не проводят ток. Проводниками могут быть только хоть в какой-то мере ионизованные газы. Носителями тока в газах могут быть положительные и отрицательные ионы и электроны. Ионы могут возникать в результате действия различных источников энергии, например: ультрафиолетового или рентгеновского излучения, космических лучей, столкновений атомов газа с электронами и другими частицами, энергия которых превышает потенциал ионизации атомов газа.

### Несамостоятельный разряд и электронные лавины

Предположим, что ионы в газовом проводнике создаются исключительно внешним источником. Тогда при прекращении действия этого «ионизатора» ток и, следовательно, разряд прекращаются.

Типичная кривая, отображающая связь между током через газовый промежуток и напряжением на нём для *несамостоятельного* разряда, показана на рис. 1. С повышением напряжения на газовом промежутке ток сначала возрастает (кривая ОА), а потом достигает насыщения и остаётся практически постоянным (участок АВ), что соответствует полному вытягиванию на электроды зарядов, создаваемых внешним ионизатором.

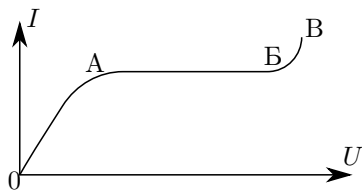


Рис. 1. Вольт-амперная характеристика несамостоятельного газового разряда

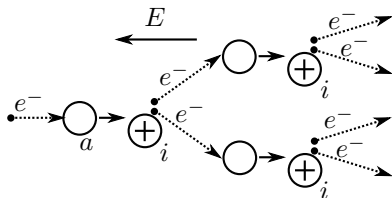


Рис. 2. Схема образования электронной лавины

При дальнейшем повышении напряжения ток снова начинает возрастать (участок ВВ). Это значит, что имеющиеся ионы, и прежде всего электроны, за период между двумя последовательными столкновениями набирают такую энергию, что возникнет *столкновительная ионизация*, то есть рождение новых (*вторичных*) ионов:  $e^- + a \rightarrow a^+ + 2e^-$ . При этом, если количество выбитых при столкновениях электронов достаточно велико, возникают и развиваются **электронные лавины**, то есть происходит «размножение» носителей и усиление тока, часто называемое **газовым усилением** (см. рис. 2). При этом разряд остаётся несамостоятельным — если убрать первичный источник ионизации, пропадут и лавины.

В достаточно сильном электрическом поле проводимость газа может возрасти скачком — возникает **пробой**. Если после возникновения пробоя убрать внешний ионизатор, то разряд не прекращается. Разряд переходит в режим **самостоятельного разряда**: ионизация поддерживается процессами в самом разряде.

### Критерий Таунсенда зажигания разряда

Рассмотрим модель перехода несамостоятельного разряда в самостоятельный, предложенную Таунсендом. Определим **коэффициент объёмной ионизации**  $\alpha$  как количество вторичных электронно-ионных пар, образуемых одним электроном на единице длины пути. Этот коэффициент зависит от плотности газа (плотность определяет число соударений) и растёт с увеличением напряжённости электрического поля  $E$  (так как при этом увеличивается энергия электронов).

Рассмотрим, как происходит ионизация в газовом промежутке между плоскими электродами — катодом и анодом (рис. 3). На расстоянии  $x$  от катода в слое толщины  $dx$  один электрон создаёт  $\alpha dx$  пар ионов. Если со стороны

катода в этот слой втекает электронный ток  $I_e$ , то в слое он возрастёт на величину

$$dI_e = I_e \alpha dx. \quad (1)$$

Предположим, что токи в системе достаточно малы, так что в газовом промежутке не накапливаются существенные объёмные заряды — тогда электрическое поле  $E$ , а следовательно и коэффициент  $\alpha$ , не зависят от  $x$  (это справедливо при малых токах, когда в газе нет объёмных зарядов). Тогда интегрируя (1) при  $\alpha = \text{const}$ , находим

$$I_e(x) = I_e(0)e^{\alpha x},$$

где  $I_e(0)$  — электронный ток, втекающий в систему с катода.

Видно, что на аноде ( $x = d$ ) ток возрастает в  $e^{\alpha d}$  раз. Это и есть режим *газового усиления*, то есть размножения электронно-ионных пар вследствие развития электронных лавин. Однако при этом разряд ещё не обязательно переходит в режим самостоятельного. Чтобы разряд не прекращался, нужно, чтобы ток с катода  $I_e(0)$  поддерживался *самим разрядом*, то есть чтобы образовалась *положительная обратная связь*. Такая связь может установиться только благодаря потоку частиц,двигающихся из разряда в обратном направлении — к катоду. Это могут быть положительные ионы и излучение.

Далее для простоты будем учитывать только положительные ионы.

Полный ток через любое поперечное сечение разряда одинаков. Он складывается из электронной и ионной составляющих. Полный ток на аноде равен чисто электронному току  $I_e(d)$ , а ионный ток на катоде  $I_i(0)$  равен

$$I_i(0) = I_e(d) - I_e(0) = I_e(0)(e^{\alpha d} - 1).$$

Пусть теперь каждый попавший на катод ион выбивает из него в среднем  $\gamma$  вторичных электронов ( $\gamma$  — коэффициент вторичной ионно-электронной эмиссии). Тогда из катода пойдёт ток этих вторичных электронов  $I_2$ :

$$I_2 = \gamma I_i(0) = \gamma I_e(0)(e^{\alpha d} - 1).$$

Полный электронный ток из катода складывается из тока  $I_1$ , образуемого внешним ионизатором, и тока вторичных электронов  $I_2$ :

$$I_e(0) = I_1 + I_2 = I_1 + \gamma I_e(0)(e^{\alpha d} - 1),$$

так что

$$I_e(0) = \frac{I_1}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}.$$

Таким образом, полный ток через газовый промежуток  $I$  будет равен

$$I = I_e(d) = I_e(0)e^{\alpha d} = \frac{I_1 e^{\alpha d}}{1 - \gamma(e^{\alpha d} - 1)}. \quad (2)$$

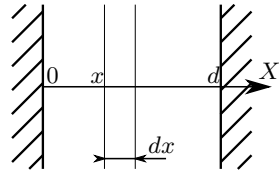


Рис. 3. К выводу критерия Таунсенда зажигания разряда

С повышением напряжения на газовом промежутке, то есть с ростом электрического поля  $E$ , растут коэффициенты  $\alpha$  и  $\gamma$ , и ток возрастает. Разряд тем не менее остаётся несамостоятельным: при  $I_1 = 0$  ток разряда обращается в нуль. Однако при достижении некоторого значения поля знаменатель (2) обратится в нуль, а ток — в бесконечность при любом сколь угодно малом значении  $I_1$ . Это и есть *переход от несамостоятельного разряда к самостоятельному*, или *наступление пробоя*, а его условие — критерий Таунсенда — имеет вид

$$\gamma(e^{\alpha d} - 1) \geq 1. \quad (3)$$

Если известны зависимости  $\gamma(E)$  и  $\alpha(E)$ , из условия (3) можно определить потенциал зажигания разряда  $U_z$  (напряжение пробоя).

Формула (3) имеет наглядную интерпретацию. Коэффициент  $\gamma(e^{\alpha d} - 1)$  можно назвать «коэффициентом воспроизводства электронов» — от одного электрона, вылетевшего с катода, рождается  $e^{\alpha d} - 1$  ионов, каждый из которых впоследствии выбивает с катода ещё  $\gamma$  электронов. Если электронов рождается больше, чем погибает (коэффициент воспроизводства больше единицы), разряд может стать самостоятельным. Описанный механизм пробоя называют **таунсендовским**.

На практике потенциал зажигания определяют из экспериментально измеренных **кривых Пашена**: зависимости  $U_z$  от произведения давления  $P$  на длину разрядного промежутка  $d$ :  $U_z(Pd)$ . Типичная кривая Пашена приведена на рис. 4. Она имеет минимум, поэтому для заданного  $P$  имеется такая длина  $d_{\min}$  разрядного промежутка, при которой потенциал зажигания и соответствующее ему поле минимальны (это важно для структуры тлеющего разряда, см. ниже).

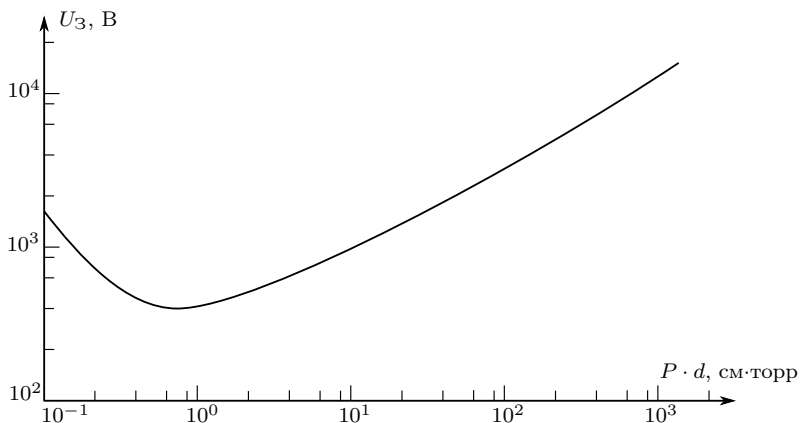


Рис. 4. Зависимость потенциала зажигания  $U_z$  от произведения давления  $P$  на длину  $d$  разрядного промежутка (кривая Пашена) для воздуха

## Типы самостоятельных разрядов

Физика самостоятельных разрядов чрезвычайно разнообразна. Среди всего множества типов разрядов выделим лишь несколько наиболее часто встречающихся.

**Тлеющий разряд** возникает в результате электрического пробоя в постоянном поле в откачанной до низкого вакуума трубке. Его свойства подробно разобраны в следующих разделах.

При достаточно больших токах в тлеющем разряде катод может раскалиться настолько, что станет основным поставщиком электронов в разряд (благодаря *термоэлектронной эмиссии*). Тогда разряд переходит в *дуговой*. Он характеризуется большими токами ( $10 \div 10^3$  А) и при сравнительно небольших падениях напряжения. Параметры дугового разряда во многом определяются материалом электродов.

**Искровой разряд** возникает в сильных электрических полях и характеризуется короткими временами. Механизм возникновения искры отличен от таунсендовского (см. выше). Разряд происходит по треку предварительно образовавшегося канала — **стримера**. За его образование отвечают множественные электронные лавины, однако в отличие от таунсендовского механизма, начало лавине даёт ионизация *фотонами*, испущенным предыдущей лавиной. Поскольку фотоны, в отличие от электронов, распространяются со скоростью света, развитие стримера идёт намного быстрее, чем единичной электронной лавины. Примером такого разряда является молния (но в отличие от обычной искры, молния провоцируется *флуктуациями* электрического поля).

**Коронный разряд** («огни святого Эльма») образуется обычно на тонких остриях, где велика пространственная неоднородность электрического поля. Здесь самостоятельный разряд существует лишь в небольшой области вблизи острия, а в остальном пространстве ток через газ оказывается «навязан» областью пробоя.

## Вольт-амперная характеристика газового разряда

Рассмотрим электрические свойства газового промежутка, заключённого между двумя электродами. Построим связь между током через газ и напряжением  $I(U)$  — вольт-амперную характеристику (ВАХ) разряда. Она может быть качественно различной в зависимости от состояния газа в разрядном промежутке.

Введём понятие **дифференциального сопротивления** как производную от напряжения по току:

$$R_{\text{диф}} = \frac{dU}{dI} \quad (4)$$

(для проводников, подчиняющихся закону Ома,  $R_{\text{диф}}$  совпадает с обычным сопротивлением и всегда положительно). Характерной особенностью вольт-амперной характеристики газового разряда, не свойственной обычным проводникам, являются участки с *отрицательным дифференциальным сопротивлением*,  $R_{\text{диф}} < 0$ .

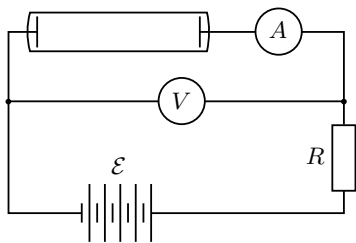


Рис. 5. Схема для регистрации ВАХ газового промежутка

схему на рис. 5). Меняя ЭДС источника  $\mathcal{E}$  и балластное сопротивление  $R$ , можно получить любой режим протекания тока через исследуемый газовый проводник. На плоскости  $U-I$  такой режим определяется точкой пересечения графика  $I(U)$  с *нагрузочной* прямой  $I = (\mathcal{E} - U)/R$ . Для устойчивости необходимо, чтобы суммарное дифференциальное сопротивление цепи было положительно  $\frac{dU}{dI} + R > 0$ , что всегда можно обеспечить выбором достаточно большого  $R$ .

Вид ВАХ для конкретного газового проводника зависит от ряда условий, прежде всего от давления газа. На рис. 6 представлен пример полученной экспериментально ВАХ разряда в неоне (при давлении  $P \sim 1$  торр между плоскими медными электродами площади  $10 \text{ см}^2$ , расположенными на расстоянии  $50 \text{ см}$ ).

В отсутствие внешнего ионизатора начальный участок характеристики несамостоятельного разряда (участок ОА) соответствует столь малым токам, что на графике его не удаётся изобразить. Участок АВ соответствует току насыщения и режиму *газового усиления*. В точке В происходит пробой и начинается самостоятельный разряд. На участке ВГ уже выполнен критерий Таунсенда, но токи и степень ионизации еще слишком малы, чтобы вызвать свечение и такой разряд называют *тёмным таунсендовским*.

*Тлеющему* разряду соответствует участок ГДЕЖ. Участок ГД называется *поднормальным* тлеющим разрядом, почти вертикальная часть ДЕ — *нормальным* тлеющим разрядом и остальная часть ЕЖ — *аномальным* тлеющим разрядом.

Нормальный тлеющий разряд обладает примечательным свойством самоорганизации: при увеличении полного тока в разряде, его плотность остаётся практически неизменной, меняется лишь площадь «катодного пятна», из которого вытекает ток. Меняя  $\mathcal{E}$  или  $R$ , можно видеть, как светящееся пятно на поверхности катода расширяется или сокращается. При этом напряжение в разряде практически не меняется (вертикальный участок ДЕ на рис. 6). При полном заполнении катода дальнейшее увеличение тока будет возможно только за счёт повышения интенсивности ионизации газа, что возможно только при повышении напряжения. Разряд при этом переходит в режим аномально-го тлеющего разряда (участок ЕЖ).

Участки с  $R_{\text{диф}} < 0$  являются *неустойчивыми*: незначительное уменьшение (флуктуация) подаваемого на элемент напряжения приводит к росту тока — и поскольку для поддержания возросшего тока требуется еще меньшее напряжение, это провоцирует неограниченный рост тока. Эта особенность, в частности, позволяет использовать вакуумные лампы в качестве генераторов.

Чтобы система была устойчивой, для экспериментального исследования ВАХ разряда используют включенное последовательно разряду балластное сопротивление  $R$  (см.

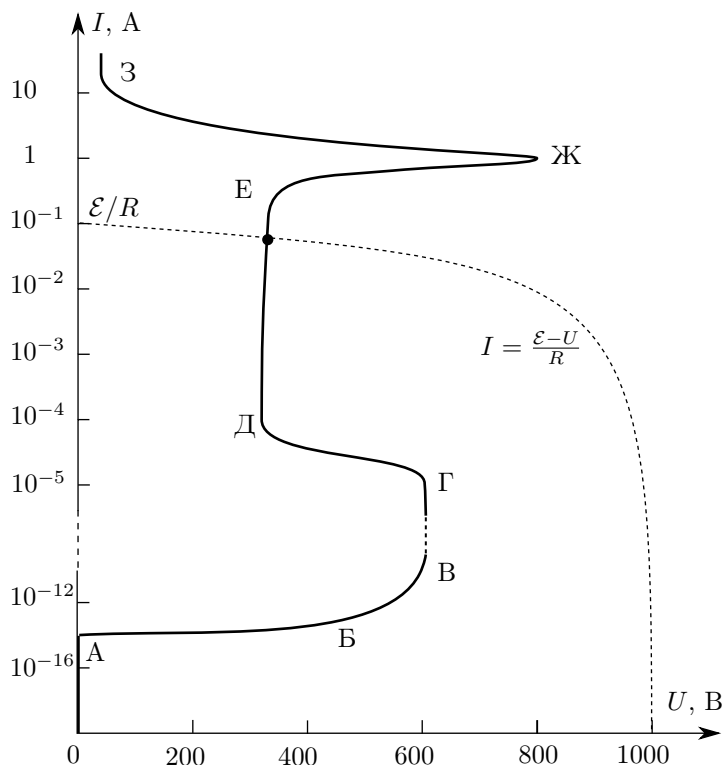


Рис. 6. Вольт-амперная характеристика разряда в неоне при давлении 1 тор. Шкала по оси ординат — логарифмическая. Пунктиром изображен пример нагрузочной прямой, соответствующей режиму нормального тлеющего разряда ( $R = 10$  кОм,  $\mathcal{E} = 1$  кВ)

Далее идёт спадающий участок ЖЗ, соответствующий разогреву катода и переходу к **дуговому разряду**. Заметим, что при больших давлениях газа (атмосферном и больше) после пробоя сразу устанавливается дуговой разряд. Это явление может быть опасно при резком разрыве электроцепей (например, с помощью обычного рубильника) с достаточно большими токами (от 10 А и более): пробой возникает из-за явления электромагнитной индукции, а большие токи переводят разряд в режим дугового.

### Пространственная структура тлеющего разряда

*Самостоятельный разряд с холодным катодом*, испускающим электроны в результате вторичной электронной эмиссии (ударов ионов о катод), называ-  
ют **тлеющим**. Тлеющий разряд имеет существенно неоднородную простран-  
ственную структуру. Рассмотрим кратко некоторые её особенности.

На рис. 7 представлена качественная картина тлеющего разряда в длинной



стеклянной трубке, а также приведены зависимости основных величин, характеризующих разряд, от продольной координаты: потенциал  $\varphi$ , электронный  $j_e$  и ионный  $j_i$  токи, плотность объёмного заряда  $\rho$  и интенсивность свечения  $L$ .

Непосредственно вблизи катода имеется область, называемая **катодным слоем**. В нем сосредоточен положительный объёмный заряд, накопленный за счёт ионного тока к катоду (электронный ток у катода мал по сравнению с ионным). Почти вся разность потенциалов, приложенная к разряду, сосредоточена именно в катодном слое. Напряжение на этом участке называют **катодным падением напряжения**  $U_k$  ( $U_k \approx U$ ). При этом толщина катодного слоя  $d_k$  соответствует минимуму на кривой Пашена (рис. 4), где  $U_k$  есть напряжение зажигания на длине  $d_k$ . Тем самым реализуются условия для самоподдержания разряда (критерий Таунсенда) при гораздо меньших напряжениях, чем в случае распределения поля на всю длину газового промежутка.

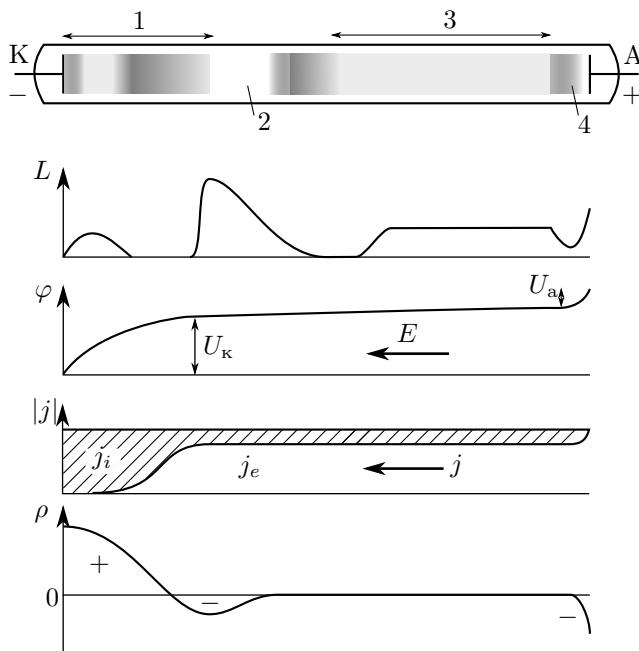


Рис. 7. Структура тлеющего разряда и распределение по длине основных характеризующих его величин. 1 — катодный слой, 2 — отрицательное свечение, 3 — положительный столб, 4 — анодный слой

Далее следуют ряд чередующихся светлых и тёмных поперечных полос. В тёмных областях электроны имеют недостаточную энергию для возбуждения атомов. Там, где ускоренные электрическим полем электроны набирают достаточную энергию, возникает участок свечения. Характерная ширина этих полос определяется длиной свободного пробега электронов. Наиболее яркой,

как правило, бывает область, называемая **отрицательным свечением**. Для воздуха она имеет голубоватый цвет, за что разряд и получил своё название — *тлеющий*.

Постепенно электроны набирают энергию, достаточную для ионизации и происходит размножение электронов и ионов. Начиная с некоторого участка, устанавливается квазинейтральное и практически однородное по своим характеристикам состояние — **положительный столб**.

У анода ионов нет, электроны образуют отрицательный объёмный заряд — **анодный слой**. Здесь создаётся небольшое **анодное падение потенциала**, в котором электроны набирают энергию и вызывают **анодное свечение**.

Остановимся кратко на описании свойств положительного столба. Этот участок газового разряда представляет собой пример *низкотемпературной слабоионизированной неравновесной плазмы*. Электрическое поле в нём однородно по длине, как это имеет место в обычном омическом проводнике. Под действием этого поля ток переносится в основном электронами. Состояние плазмы в положительном столбе практически не зависит от процессов в приэлектродных областях, и определяется только процессами внутри него. Потери носителей тока (электронов) из-за диффузии к стенкам трубки и рекомбинации компенсируются ионизацией. При этом необходимо электрическое поле  $E$ , способное обеспечивать разгон электронов до соответствующей энергии. Характерная энергия ионизации составляет несколько эВ, поэтому температура электронов здесь достигает значений  $T_e \sim 10^4 \div 10^5$  К и существенно превосходит газовую температуру разряда  $T$  (в газоразрядной трубке  $T$  будет практически совпадать с температурой стенок). Столкновения горячих электронов с нейтральными атомами вызывают их возбуждение, благодаря чему столб может испускать свечение.

### Контрольные вопросы

1. Перечислите виды газового разряда.
2. Опишите основной механизм зажигания тлеющего разряда.
3. Каковы основные особенности вольт-амперной характеристики газового разряда?
4. Приведите основные параметры нормального тлеющего разряда. Находится ли плазма в тлеющем разряде в состоянии термодинамического равновесия?

### Литература

1. Райзер Ю.П. Физика газового разряда. — Долгопрудный: Издательский Дом Интеллект, 2009.
2. Князев Б.А. Низкотемпературная плазма и газовый разряд: учебное пособие / Новосибирский государственный университет. — Новосибирск, 2003.



## СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

## 1. Линейные фильтры. Частотная характеристика

Задача описания поведения некоторой системы во времени зачастую сводится к выяснению связи между «сигналом», подаваемым на «вход» системы (обозначим его как  $f(t)$ ), и её реакцией на «выходе» ( $g(t)$ ):

$$f(t) \rightarrow \boxed{?} \rightarrow g(t).$$

В этой главе мы рассмотрим **спектральный** метод решения данной задачи применительно к **линейным** системам.

Прежде чем излагать теорию в общем виде, рассмотрим конкретный пример: колебательный  $RLC$ -контур (рис. 6.1). Пусть на вход подано некоторое напряжение  $f(t)$ , а в качестве выходного измеряется напряжение на конденсаторе:  $g(t) = U_C$ . Получим связь между  $g(t)$  и  $f(t)$  в общем виде.

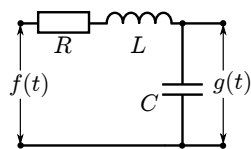


Рис. 6.1. Входной и выходной сигналы в  $RLC$ -контуре

Допустим, что  $f(t)$  — гармоническая функция некоторой частоты  $\omega$ . В комплексном представлении  $f(t) = f_0 e^{i\omega t}$ , где  $f_0$  — комплексная амплитуда ( $f_0 = a e^{i\varphi}$ , где  $a$  — амплитуда,  $\varphi$  — фаза). Тогда, как известно (см. раздел II), функция  $g(t)$  также будет гармонической с той же частотой  $\omega$ , но изменённой амплитудой и фазой:  $g(t) = g_0 e^{i\omega t}$ , где комплексную амплитуду  $g_0$  можно найти методом комплексных амплитуд для цепи рис. 6.1 (см. пример 1 ниже). В общем виде ответ можно записать как

$$g_0 = \lambda(\omega) \cdot f_0,$$

где  $\lambda(\omega)$  — зависящая от частоты комплекснозначная функция, называемая **частотной характеристикой** (или **функцией отклика**) системы. Она полностью определяет отклик системы на гармоническое воздействие — её модуль  $|\lambda|$  есть изменение амплитуды, а её аргумент  $\arg \lambda$  — приращение фазы сигнала.

Далее, если  $f(t)$  может быть представлена в виде суммы гармонических функций с разными частотами:

$$f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.1)$$

то ввиду *линейности* уравнений, которым подчиняется колебательный контур, отклик системы можно найти как сумму откликов на каждое из слагаемых (6.1):

$$g(t) = \sum_n \lambda(\omega_n) c_n e^{i\omega_n t}. \quad (6.2)$$

**Замечание.** Напомним, что *линейными* называют системы, для которых справедлив *принцип суперпозиции*: если  $g_1$  — отклик системы на воздействие  $f_1$ , а  $g_2$  — на воздействие  $f_2$ , то откликом на линейную комбинацию воздействий  $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  будет функция  $g = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ .

К таким, несомненно, относится колебательный контур, подчиняющийся обыкновенному линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами.

Можно сказать, что колебательный контур некоторым образом преобразует гармонические компоненты, содержащиеся во входном сигнале. В частности, в зависимости от модуля функции отклика  $|\lambda(\omega)|$  он может подавлять одни частоты и усиливать другие. Говорят, что он выполняет роль **частотного фильтра**.

Наконец, если произвольную функцию  $f(t)$  удастся представить в виде некоторой суммы ряда (конечного или бесконечного) гармонических слагаемых (6.1), то при известной частотной характеристике  $\lambda(\omega)$  задача о связи воздействия и отклика системы будет решена. Такое разложение называют **спектральным**. Рассмотрению вопроса о возможности провести такое разложение посвящён п. 2.

### 1.1. Линейные стационарные фильтры

Проведённые рассуждения можно обобщить на все *линейные стационарные фильтры*, т. е. системы, подчиняющиеся линейным законам, параметры которых не зависят явно от времени.

Изобразим произвольный линейный фильтр с помощью блок-схемы:

$$f(t) \rightarrow \boxed{\hat{\Lambda}} \rightarrow g(t),$$

где  $f(t)$  — внешнее воздействие («входной сигнал», например, внешняя ЭДС, действующая на колебательный контур),  $g(t)$  — выходной сигнал (отклик фильтра, например, напряжение на конденсаторе контура). Эту связь можно также обозначить как

$$g = \hat{\Lambda}[f],$$

где  $\hat{\Lambda}$  — некоторое линейное преобразование («оператор»), преобразующее входной сигнал  $f(t)$  в выходной сигнал  $g(t)$ .

Из свойства линейности следует простое правило для нахождения отклика фильтра на *произвольное* внешнее воздействие  $f(t)$ . Необходимо

представить это воздействие в виде суперпозиции некоторых «элементарных» слагаемых  $f(t) = \sum c_n f_n$ , а затем найти отклик на каждое слагаемое  $g_n = c_n \cdot \hat{\Lambda}[f_n]$ . Окончательный результат получается суммированием по всем слагаемым:  $g(t) = \sum c_n \hat{\Lambda}[f_n]$ . В этом состоит суть **спектрального метода** решения задачи нахождения отклика линейной системы на внешнее воздействие.

Выбор элементарных слагаемых — **базиса** — неоднозначен. Естественно попытаться разложить внешнее воздействие на такие слагаемые, отклик на которые находится наиболее простым образом. Такими слагаемыми являются так называемые **собственные функции фильтра**, т. е. функции  $\psi_n(t)$ , удовлетворяющие равенству

$$\hat{\Lambda}[\psi_n] = \lambda_n \psi_n. \quad (6.3)$$

Это равенство означает, что если внешнее воздействие описывается собственной функцией, то отклик описывается той же функцией с некоторым множителем  $\lambda_n$ , называемый **собственным значением**.

Для *линейных стационарных* фильтров, которые подчиняются линейным дифференциальным уравнениям (например, для колебательного контура), такими собственными функциями являются гармонические колебания  $e^{i\omega t}$ :

$$\hat{\Lambda}[e^{i\omega t}] = \lambda(\omega) e^{i\omega t},$$

где  $\lambda(\omega)$  — комплексная функция частоты, которая, напомним, называется **частотной характеристикой** фильтра. Действительно, для операции дифференцирования  $n$ -го порядка справедливо

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^n e^{i\omega t} = (i\omega)^n e^{i\omega t}.$$

Поэтому частотная характеристика  $\lambda(\omega)$  дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами будет в общем случае некоторой *рациональной функцией* от  $i\omega$ .

**Пример 1.** Найдём частотную характеристику  $RLC$ -контура (рис. 6.1).

Подключим контур к источнику, ЭДС которого меняется гармонически с единичной амплитудой:  $f_0(t) = e^{i\omega t}$ . Закон Кирхгофа для контура:

$$L\ddot{q} + \dot{q}R + \frac{q}{C} = e^{i\omega t}. \quad (6.4)$$

Для выходного сигнала  $g(t) = \frac{q}{C}$  получаем уравнение

$$\ddot{g} + 2\gamma\dot{g} + \Omega^2 g = \Omega^2 e^{i\omega t},$$

где  $\gamma = R/2L$  — коэффициент затухания,  $\Omega = 1/\sqrt{LC}$  — частота свободных колебаний. Ищем решение в виде

$$g(t) = \lambda(\omega) e^{i\omega t}.$$

Подставляя в (6.4), имеем

$$(-\omega^2 + 2i\omega\gamma + \Omega^2)\lambda e^{i\omega t} = \Omega^2 e^{i\omega t}.$$

Окончательно находим

$$\begin{aligned} \lambda(\omega) &= \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2 + i2\gamma\omega}, \\ |\lambda(\omega)| &= \frac{\Omega^2}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \Omega^2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

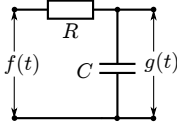


Рис. 6.2. Интегрирующая  $RC$ -цепочка

**Пример 2.** Найдём частотную характеристику  $RC$ -цепочки (рис. 6.2).

Повторяя рассуждения из примера 1 при  $L = 0$ , получим

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau_C},$$

где  $\tau_C = RC$  — постоянная времени  $RC$ -цепочки.

При  $\omega \gg 1/\tau_C$  имеем  $\lambda \approx \frac{1}{i\omega\tau_C} \rightarrow 0$ , то есть  $RC$ -цепочка подавляет все компоненты сигнала с достаточно высокой частотой, а низкочастотные компоненты пропускает без искажения ( $\lambda \rightarrow 1$  при  $\omega \ll 1/\tau_C$ ). Такие устройства называют

*фильтрами низких частот* (англ. low-pass filter).

В высокочастотном пределе результат действия цепочки можно выразить в явном виде. При  $\omega\tau_C \gg 1$  напряжение на конденсаторе  $q/C$  мало по сравнению с напряжением  $\dot{q}R$  на резисторе, поэтому

$$\dot{q}R \approx f(t) \quad \rightarrow \quad g(t) = \frac{q}{C} = \frac{1}{\tau_C} \int_0^t f(t') dt'.$$

Таким образом, подавление высокочастотных гармоник сводится к интегрированию входного сигнала (подумайте, почему вклад быстропеременных осцилляций в интеграл по достаточно большому интервалу оказывается мал).

**Упражнение 1.** Найдите частотную характеристику  $RL$ -цепочки, получающейся, если в схеме на рис. 6.2 заменить конденсатор  $C$  на катушку с индуктивностью  $L$ . Убедитесь, что при этом получится *фильтр высоких частот*.

## 2. Спектральное разложение

При изучении линейных систем возникает необходимость представления произвольного сигнала  $f(t)$  в виде суммы гармонических функций:

$$f(t) = \sum_n c_n e^{i\omega_n t}. \quad (6.6)$$

Представление (6.6) называется разложением сигнала  $f(t)$  в ряд Фурье, а отдельные слагаемые ряда (составляющие гармонические колебания)  $c_n e^{i\omega_n t}$  называют **гармониками**. Совокупность коэффициентов  $\{c_n\}$  называется **спектром** функции  $f(t)$ . Коэффициент  $c_n$  представим в виде  $c_n = a_n e^{i\varphi_n}$ , где модуль  $a_n = |c_n|$  определяет *амплитуду* гармоники частоты  $\omega_n$ , а аргумент  $\varphi_n = \arg c_n$  — *начальную фазу*.

В курсах математического анализа доказывается, что разложение (6.6) может быть осуществлено практически для любой функции  $f(t)$  (ограничения на вид функции можно считать физически несущественными), причем *единственным* образом. То есть существует единственный набор необходимых частот  $\omega_n$  и единственный набор отвечающих этим частотам амплитуд  $a_n$  и фаз  $\varphi_n$ , обеспечивающих представление функции  $f(t)$  в виде суперпозиции гармонических функций.

**Замечание.** Отметим важное свойство гармонических функций. Колебание  $e^{i\omega_0 t}$  частоты  $\omega_0$  не может быть представлено суперпозицией гармонических колебаний  $\sum c_n e^{i\omega_n t}$  других частот  $\omega_n \neq \omega_0$ , какие бы коэффициенты  $c_n$ , т. е. амплитуды и фазы слагаемых гармоник, мы ни подбирали. В математике это свойство называют **ортогональностью**: функция  $e^{i\omega_0 t}$  не имеет «проекций» на любую другую функцию  $e^{i\omega_n t}$  при  $\omega_0 \neq \omega_n$  (подобно тому, как параллельный оси  $z$  вектор невозможно представить в виде суммы векторов, параллельных осям  $x$  и  $y$ ).

**Действительные и комплексные представления спектров.** Для *действительных* функций  $f(t)$ , которые, как правило, и представляют интерес, наряду с разложением (6.6) часто используется разложение в ряд Фурье вида\*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n), \quad (6.7)$$

где  $a_n, \varphi_n$  — действительные константы. Найдём связь между коэффициентами разложений (6.6) и (6.7). Пользуясь формулой Эйлера

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}, \quad (6.8)$$

представим каждое слагаемое (6.7) в виде

$$a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = \frac{a_n}{2} e^{i\varphi_n} e^{i\omega_n t} + \frac{a_n}{2} e^{-i\varphi_n} e^{-i\omega_n t},$$

откуда ясно, что разложения (6.6) и (6.7) будут тождественны, если суммирование в (6.6) проводить как по положительным частотам  $\omega_n$  (имеющим понятный физический смысл), так и по отрицательным (формально введённым) частотам  $\omega_{-n} = -\omega_n$ , причём соответствующие коэффициенты имеют вид

$$c_n = \frac{1}{2} a_n e^{i\varphi_n}, \quad c_{-n} = \frac{1}{2} a_n e^{-i\varphi_n} \quad (6.9)$$

---

\*Также можно использовать эквивалентное разложение

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t),$$

где  $a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ ,  $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{B_n}{A_n}$ .



(коэффициенты  $c_{-n}$  соответствуют отрицательным частотам  $-\omega_n$ ), т. е. каждому слагаемому  $a_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$  ряда (6.6) соответствуют два слагаемых  $c_n e^{i\omega_n t}$  и  $c_{-n} e^{-i\omega_n t}$  ряда (6.7).

Видно, что при разложении *действительных* функций  $f(t)$  в ряд Фурье коэффициенты разложения  $c_{-n}$  на отрицательных частотах связаны с коэффициентами  $c_n$  простым соотношением

$$c_{-n} = c_n^*,$$

где звёздочка обозначает *комплексное сопряжение*. Таким образом, гармоники с отрицательными частотами не несут какой-либо дополнительной информации о действительном сигнале  $f(t)$ .

Изобразим спектр функции  $f(t)$  в виде графика  $|c_n| = F(\omega_n)$ , представляющего собой набор вертикальных отрезков на каждой частоте  $\omega_n$ , длина которых равна модулю коэффициента спектрального разложения  $|c_n|$ . Отдельно следует указать также начальные фазы  $\varphi_n$  спектральных компонент.

Пример разложения в ряд косинусов (6.7) представлен на графике рис. 6.3 (справа): здесь нет отрицательных частот, а длины отрезков на положительных частотах в соответствии с (6.9) удваиваются. При этом постоянные составляющие (на частоте  $\omega = 0$ ) в разложениях (6.6) и (6.7) одинаковы:  $a_0 = |c_0|$ .

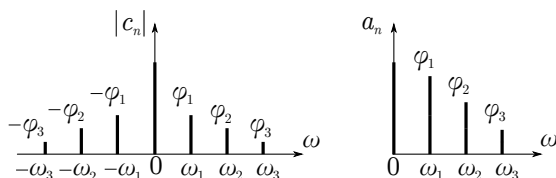


Рис. 6.3. Спектр в комплексном (слева) и действительном (справа) представлениях

## 2.1. Спектр периодического процесса

Получим коэффициенты разложения в ряд Фурье для периодического колебательного процесса общего вида  $f(t) = f(t + T)$ , где  $T$  — период процесса. Покажем, что в этом случае функция  $f(t)$  может быть представлена бесконечной суммой гармонических колебаний с кратными частотами  $\omega_n = n\omega_0$ , где  $\omega_0 = 2\pi/T$ ,  $n$  — целое число:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}. \quad (6.10)$$

Нетрудно видеть, что все слагаемые в (6.10) — периодические функции с периодом, кратным  $T$ , и они полностью исчерпывают набор гармонических функций, удовлетворяющих условию  $f(t) = f(t+T)$ . Таким образом, периодическая функция имеет **дискретный спектр с кратными частотами**.

Спектр — то есть набор коэффициентов  $\{c_n\}$  — можно найти следующим образом: домножим обе части равенства (6.10) на  $e^{-im\omega_0 t}$  и проинтегрируем по времени  $t$  за период (например, от 0 до  $T$ ). Получим

$$\int_0^T f(t) e^{-im\omega_0 t} dt = \sum_n c_n \int_0^T e^{i(n-m)\omega_0 t} dt.$$

Вычислим интеграл в правой части:

$$\int_0^T e^{i(n-m)\omega_0 t} dt = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ T & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Таким образом, находим

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt. \quad (6.11)$$

Это и есть искомое правило нахождения коэффициентов разложения периодической функции в гармонический ряд Фурье. Заметим, что математически процедура вычисления коэффициентов  $c_n$  вполне аналогична нахождению проекций вектора  $f(t)$  на элементы базиса линейного пространства  $e^{i\omega_n t}$ .

**Пример 3.** Найдём спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов длительности  $\tau$  с периодом следования импульсов  $T > \tau$  (рис. 6.4, начало отсчёта выбрано так, что  $f(t)$  — чётная функция).

Используя (6.11) на интервале интегрирования  $-T/2 \leq t \leq T/2$ , с учётом того, что функция  $f(t)$  отлична от нуля и равна единице лишь в области  $|t| < \tau/2$ , находим

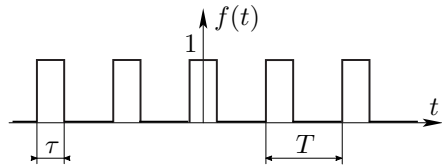


Рис. 6.4. Периодическая последовательность импульсов

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-in\omega_0 t} dt = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin(n\omega_0 \tau/2)}{n\omega_0 \tau/2} = \frac{\sin(\pi n \tau/T)}{\pi n}. \quad (6.12)$$

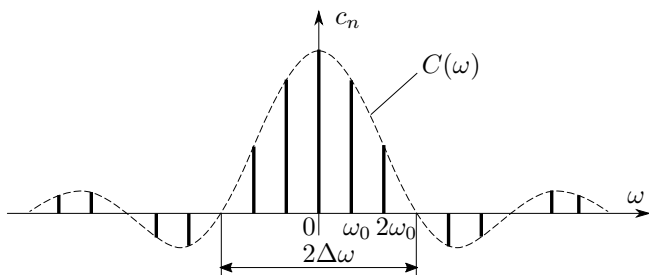


Рис. 6.5. Спектр периодической последовательности импульсов (рисунок приведён для случая  $\tau = \frac{1}{3}T$ )

Спектр  $\{c_n\}$  показан на рис. 6.5. Пунктирной кривой изображена огибающая функция

$$C(\omega) = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\sin \omega \tau / 2}{\omega \tau / 2}.$$

При  $\omega = n\omega_0$  эта функция принимает значение  $C(n\omega_0) = c_n$ . Полуширина  $\Delta\omega$  главного максимума этой функции определяется условием  $\sin \omega \tau / 2 = 0$ :

$$\Delta\omega \cdot \frac{\tau}{2} = \pi \quad \text{или} \quad \Delta\omega \cdot \tau = 2\pi.$$

Как видно из рисунка, спектральные гармоники, имеющие заметную амплитуду, сосредоточены в интервале частот  $|\omega| \lesssim \Delta\omega = 2\pi/\tau$ .

## 2.2. Спектр непериодического процесса

Рассмотрим задачу разложения в спектр произвольного непериодического сигнала  $f(t)$ .

Ответ можно получить, воспользовавшись результатом (6.11) для разложения периодической функции и устремляя период к бесконечности  $T \rightarrow \infty$ .

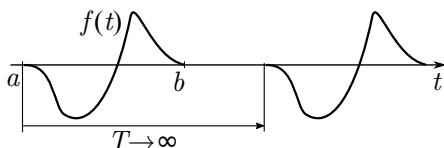


Рис. 6.6. Непериодический процесс как предел периодического

Пусть функция  $f(t)$  отлична от нуля на некотором конечном интервале  $t \in [a, b]$ , а вне его обращается в ноль. Рассмотрим периодическую функцию с достаточно большим периодом повторения  $T > b - a$ , составленную из «кусков» функции  $f(t)$ . Посмотрим, что происходит со спектральным

разложением такой функции по мере увеличения  $T$ .

Видно, что частоты  $\omega = n \frac{2\pi}{T}$  гармоник, по которым идёт разложение, будут в пределе  $T \rightarrow \infty$  располагаться всё плотнее друг к другу. Интервал между соседними частотами равен  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Таким образом, имеем  $\Delta\omega \rightarrow 0$ , и, следовательно, спектр должен стать непрерывным.

Тогда спектральное разложение превратится из суммы в интеграл:

$$f(t) = \frac{1}{\Delta\omega} \sum c_n e^{i\omega_n t} \Delta\omega \rightarrow \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} d\omega,$$

Обозначая  $F(\omega) = c_n T$ , запишем искомое разложение как

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (6.13)$$

где  $F(\omega)$  найдём из (6.11):

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (6.14)$$

Множитель  $F(\omega) = a(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$  показывает, с каким «весом» (т.е. с какой амплитудой  $a(\omega)$  и с какой начальной фазой  $\varphi(\omega)$ ) необходимо складывать гармонические колебания разных частот, чтобы при суммировании (интегрировании) образовать заданный сигнал  $f(t)$ . Функция  $F(\omega)$  называется **спектром** или **преобразованием Фурье** сигнала  $f(t)$ . Видно, что в общем случае для представления непериодического сигнала необходим непрерывный набор (*континуум*) гармоник.

Соотношение (6.14) также называют **прямым преобразованием Фурье**, а формулу (6.13) — **обратным преобразованием Фурье**. Связь между функцией и её спектром символически можно записать как

$$F(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[f(t)], \quad f(t) = \hat{\mathcal{F}}^{-1}[F(\omega)],$$

где  $\hat{\mathcal{F}}$  и  $\hat{\mathcal{F}}^{-1}$  — условное обозначение для прямого и обратного преобразований Фурье (заметим, что эти преобразования *линейны*).

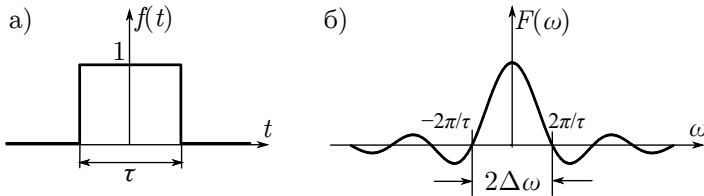


Рис. 6.7. Одиночный прямоугольный импульс (а) и его спектр (б)

**Пример 4.** Найдём спектр прямоугольного импульса длительности  $\tau$  единичной

амплитуды (рис. 6.7а). Используя (6.14), получаем

$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{-i\omega} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-i\omega t} d(-i\omega t) = \tau \frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}. \quad (6.15)$$

Функция  $F(\omega)$  показана на рис. 6.7б.

Полезно сравнить спектр отдельного импульса со спектром периодической последовательности одинаковых импульсов (рис. 6.5). Вместо *дискретного* спектра  $\{c_n\}$  мы получили *непрерывный* спектр  $F(\omega)$ , причём спектр импульса  $F(\omega)$  (с множителем  $1/T$ ) представляет собой огибающую «частотного» спектральных компонент  $c_n$  периодической последовательности импульсов.

Заметим также, что, как видно из графика, основной вклад дают гармоники, частоты которых заполняют интервал  $|\Delta\omega| < 2\pi/\tau$ . Это — полуширина главного максимума функции  $\frac{\sin \omega\tau/2}{\omega\tau/2}$ . Диапазон частот  $\Delta\omega$  можно назвать характерной *шириной спектра*  $F(\omega)$ .

### 2.3. Соотношение неопределённостей

При рассмотрении примеров 3 и 4 мы получили соотношение, связывающее между собой длительность  $\Delta t$  сигнала с шириной  $\Delta\omega$  его спектра:

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 2\pi. \quad (6.16)$$

Оказывается, это соотношение имеет весьма универсальный характер. Оно остаётся справедливым по порядку величины для произвольного сигнала  $f(t)$ . Чем больше длительность сигнала  $\Delta t$  (либо больше интервал времени, в течение которого происходит его заметное изменение), тем уже спектр сигнала  $\Delta\omega$ , и, наоборот, чем короче сигнал (или быстрее происходит изменение сигнала), тем шире его спектр, т. е. требуется более широкий интервал частот гармонических колебаний, образующих в сумме данный сигнал. В этом состоит смысл формулы (6.16), которая называется **соотношением неопределённостей**.

Как правило, если у сигнала есть какое-то характерное время  $\Delta t$ , в его спектре возникнет некоторый характерный масштаб частоты  $\Delta\omega \sim 2\pi/\Delta t$ . Например, рассмотрим ограниченную последовательность периодических импульсов с полной длительностью  $t_0$ , периодом  $T \ll t_0$  и длительностью каждого импульса  $\tau \ll T$ . Сигнал и его спектр представлены на рис. 6.8 (спектр может быть рассчитан из формулы (6.14) с использованием результатов разобранных выше примеров 1 и 3). На спектре видно три характерных масштаба частоты: масштаб  $\Delta\omega_\tau = 2\pi/\tau$  — это характерная ширина спектра, масштаб  $\Delta\omega_T = 2\pi/T$  — расстояние между соседними спектральными пиками, и наконец наименьший масштаб частоты, соответствующий наибольшему характерному времени  $t_0$ , определяет ширину каждого пика  $\Delta\omega_0 = 2\pi/t_0$ .

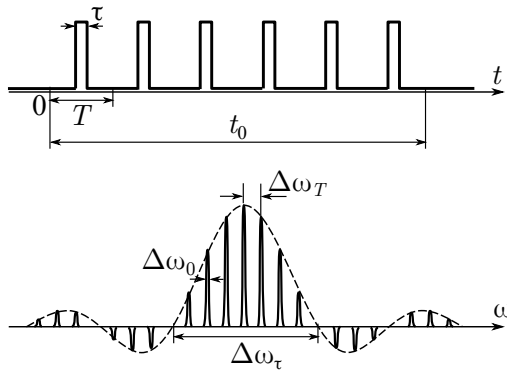


Рис. 6.8. Связь характерных масштабов спектра с характерными временами сигнала

#### 2.4. Спектральный метод в задаче линейной фильтрации

Сформулируем ещё раз алгоритм решения задачи линейной фильтрации спектральным методом (методом Фурье) с учётом полученных соотношений.

Для нахождения отклика линейной системы  $g(t)$  на воздействие  $f(t)$  нужно:

- 1) представить входной сигнал  $f(t)$  в виде ряда (6.6) или интеграла Фурье (6.13), где спектр  $\hat{\mathcal{F}}[f]$  (функция  $F(\omega)$  или набор  $\{c_n\}$ ) находится с помощью соотношений (6.11) или (6.14);
- 2) найти частотную характеристику фильтра  $\lambda(\omega)$ , т. е. функцию отклика фильтра на гармоническое внешнее воздействие единичной амплитуды:

$$e^{i\omega t} \rightarrow \boxed{\hat{\Lambda}} \rightarrow \lambda(\omega)e^{i\omega t};$$

- 3) просуммировать отклики на каждое гармоническое слагаемое входного сигнала, что даёт спектр выходного сигнала:

$$\sum c_n e^{i\omega_n t} \rightarrow \boxed{\hat{\Lambda}} \rightarrow \sum \lambda(\omega_n) c_n e^{i\omega_n t},$$

или

$$\int F(\omega) e^{i\omega t} \rightarrow \boxed{\hat{\Lambda}} \rightarrow \int \lambda(\omega) \cdot F(\omega) e^{i\omega t};$$

- 4) восстановить выходной сигнал  $g(t)$  по его спектру (обратное преобразование Фурье).

Всю схему можно записать кратко одной формулой:

$$g(t) = \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left[ \lambda(\omega) \cdot \hat{\mathcal{F}}[f(t)] \right]. \quad (6.17)$$

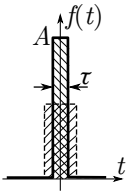


Рис. 6.9. Предельный переход к дельта-импульсу

**Пример 5.** Устремим длительность импульса из предыдущего примера к нулю  $\tau \rightarrow 0$ , при этом его амплитуду  $A$  будем наращивать так, чтобы площадь под его графиком оставалась постоянной (единичной):  $\int f(t) = A\tau = 1$ . Такой импульс в физике обозначают как  $\delta(t)$  и называют *дельта-импульсом* (или *дельта-функцией*).

Поскольку  $\sin x/x \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow 0$ , предельный переход (6.15) даёт простой результат:

$$F(\omega) \rightarrow A\tau = 1. \quad (6.18)$$

То есть спектр бесконечно узкого импульса единичной площади (дельта-функции) есть единичная константа. Заметим, что и здесь выполняется соотношение неопределённостей: бесконечно узкий импульс обладает бесконечно широким спектром.

Этот результат позволяет придать новый смысл частотной характеристике (функции отклика)  $\lambda(\omega)$  некоторого фильтра. Если спектр входного сигнала  $f(t)$  есть единичная константа, то, как следует из соотношения (6.17), откликом системы будет функция  $g(t)$ , спектр которой совпадает с  $\lambda(\omega)$ . Таким образом, *обратное преобразование Фурье от функции отклика системы есть её реакция на единичный дельта-импульс*.

## 2.5. Физический смысл спектрального разложения

Разложение функции  $f(t)$  в ряд или интеграл Фурье может показаться абстрактной математической операцией — некоторым трюком, не имеющим под собой физического содержания. Попробуем ответить на вопрос: можно ли *измерить* амплитуды спектральных компонент  $f(t)$ , тем самым придав им физический смысл?

Рассмотрим колебательный  $RLC$ -контур и подадим на его вход некоторый сигнал  $f(t)$ . Для простоты ограничимся периодической функцией. Пусть собственная частота контура равна  $\Omega$ , а добротность его достаточно велика:  $Q = \Omega/2\gamma \gg 1$  ( $\gamma$  — коэффициент затухания).

Пусть известно спектральное разложение  $f(t) = \sum c_n e^{i\omega_n t}$ . После «фильтрации» через контур на выходе получим сигнал со спектральными компонентами  $g(t) = \sum g_n e^{i\omega_n t}$ , где  $g_n = \lambda(\omega_n) c_n$  для каждого  $n$ ,  $\lambda(\omega)$  — частотная характеристика  $RLC$ -контура, найденная выше (см. пример 1). Нетрудно видеть, что такое преобразование резко (примерно в  $Q$  раз) усиливает частоты входного сигнала, близкие к  $\Omega$  (т. е. к *резонансу*), и ослабляет далёкие. В пределе идеального контура ( $Q \rightarrow \infty$ ), в спектре сигнала на выходе останется единственная собственная (резонансная) частота. Сигнал  $g(t)$  будет гармоническим колебанием с частотой  $\Omega$ :  $g(t) \propto c(\Omega) e^{i\Omega t}$ , причём его амплитуда будет пропорциональна амплитуде гармоники с этой частотой в разложении исходной функции  $f(t)$

(а если в этом разложении не было гармоники  $\omega_n = \Omega$ , результирующая амплитуда будет нулевой).

Мы видим, что высокодобротный колебательный контур выделяет из подаваемого на него сигнала те спектральные компоненты, частоты которых близки к его собственной  $\Omega$ . По амплитуде отклика можно измерить и амплитуду гармоники в исходном сигнале. Меняя собственную частоту контура  $\Omega$  (например, изменяя ёмкость конденсатора), можно просканировать весь диапазон частот, измерив таким образом амплитуды всех спектральных компонент  $c_n$  в разложении  $f(t) = \sum c_n e^{i\omega_n t}$ .

Итак, спектр сигнала может быть измерен непосредственно, и описанная схема измерения позволяет придать спектральному разложению наглядный физический смысл.

**Пример 6.** Пусть колебательный  $RLC$ -контур имеет собственную частоту  $\Omega$  и добротность  $Q \gg 1$ . Попытаемся раскачать колебания, подавая на «вход» контура (например, на конденсатор) периодическую последовательность коротких импульсов с периодом  $T$  и длительностью  $\tau$ . Можно ли раскачать колебания до сколь-нибудь значимых амплитуд, если частота повторения импульсов  $\omega_0 = 2\pi/T$  много меньше резонансной частоты контура  $\Omega$ :  $\omega_0 \ll \Omega$ ?

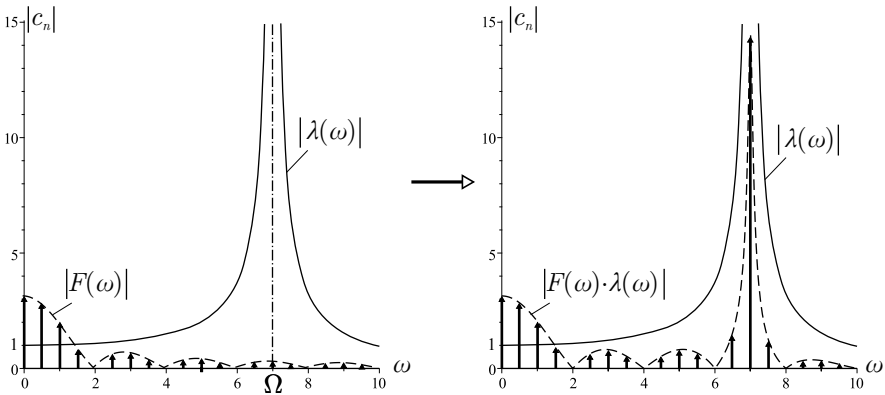


Рис. 6.10. Изменение спектра периодической последовательности импульсов (слева) в результате фильтрации колебательным контуром (справа) при резонансе с одной из высокочастотных гармоник. Расчёт проведён для  $Q = 50$ ,  $\omega_0 = \Omega/7$ ,  $\tau = T/4$

Для нахождения амплитуды результирующих колебаний нужно перемножить спектр периодической последовательности  $\{c_n\}$  (см. пример 3, (6.12)) и частотную характеристику колебательного контура  $\lambda(\omega)$  (см. пример 1, (6.5)). Возможный результат такого преобразования представлен на рис. 6.10. Видно, что благодаря существованию в спектре входного сигнала высокочастотных гармоник  $\omega_n = n\omega_0$ , при выполнении условия  $\Omega = n\omega_0$ , где  $n$  — целое, и при достаточно высокой добротности, такая раскачка колебаний возможна.

Из (6.12) видно, что амплитуды гармоник  $|c_n|$  убывают с ростом  $n$  как  $1/n$ . С другой стороны, из (6.5) можно получить, что в резонансе сигнал усиливается в  $Q$  раз. Таким образом, раскачать колебания в высокодобротном  $RLC$ -контуре можно с по-



мощью периодических импульсов, частота повторения  $\omega_0 = 2\pi/T$  которых может быть существенно меньше резонансной, вплоть до  $\omega_0 \sim \Omega/Q \ll \Omega$ .

**Упражнение 2.** Периодический прямоугольный сигнал подали на интегрирующую  $RC$ -цепочку (рис. 6.2). Как в результате изменится форма сигнала? Рассмотрите случаи а)  $RC \gg T$ , б)  $\tau \ll RC \ll T$  и в)  $RC \ll \tau$ .

### 3. Свойства преобразования Фурье\*

Рассмотрим некоторые свойства спектрального разложения (преобразования Фурье), которые могут быть полезны при расчёте спектров.

**Спектр огибающей гармонической функции.** Пусть  $F_0(\omega)$  — спектр некоторой функции  $f_0(t)$ . Найдём спектр  $F(\omega)$  функции

$$f(t) = f_0(t) \cos(\omega_0 t).$$

Здесь  $f_0(t)$  имеет смысл «огибающей», заполненной колебаниями с частотой  $\omega_0$  (см. рис. 6.11).

Используя формулу Эйлера (6.8), запишем

$$f(t) = \frac{1}{2}f_0(t)e^{i\omega_0 t} + \frac{1}{2}f_0(t)e^{-i\omega_0 t}.$$

Рис. 6.11. Огибающая гармонического сигнала

Пользуясь (6.14), найдём спектр функции  $f_0(t)e^{i\omega_0 t}$ :

$$\hat{\mathcal{F}}[f_0(t)e^{i\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t)e^{-i(\omega-\omega_0)t} dt = F_0(\omega - \omega_0), \quad (6.19)$$

т. е. при умножении на  $e^{i\omega_0 t}$  исходный спектр *сдвигается* по оси частот на величину  $\omega_0$  (рис. 6.12).

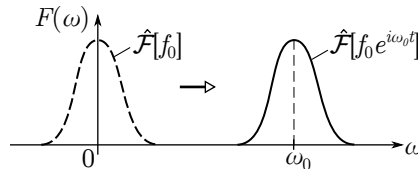


Рис. 6.12. Смещение спектра при домножении сигнала на  $e^{i\omega_0 t}$

Отсюда находим искомый спектр:

$$F(\omega) = \frac{1}{2}F_0(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F_0(\omega + \omega_0). \quad (6.20)$$

\*При первом чтении данный раздел можно пропустить.

Если частота  $\omega_0$  существенно превосходит характерную ширину  $\Delta\omega$  спектра огибающей,  $\omega_0 \gg \Delta\omega$ , то слагаемые (6.20) не накладываются друг на друга. Тогда искомый спектр  $F(\omega)$  получается из  $F_0(\omega)$  простым смещением по оси частот влево и вправо на «несущую» частоту  $\omega_0$  (с домножением на  $1/2$ , см. рис. 6.13).

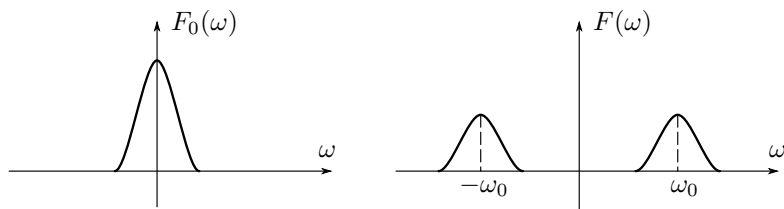


Рис. 6.13. Преобразование спектра при домножении на  $\cos \omega_0 t$

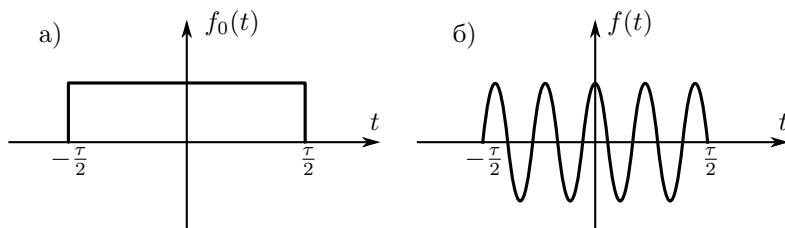


Рис. 6.14. Прямоугольный (а) и синусоидальный (б) импульсы

**Пример 7.** Найдём спектр обрывка синусоиды с частотой  $\omega_0$  длительностью  $\tau$  (такой сигнал называют *цугом*, от нем. *zug* — поезд, вереница). Сигнал может быть представлен как

$$f(t) = f_0(t) \cos(\omega_0 t),$$

где  $f_0(t)$  — единичный прямоугольный импульс длительностью  $\tau$  (см. рис. 6.14).

Пользуясь полученными ранее формулами для спектра прямоугольного импульса (6.15) и для смещения спектра (6.20), получим

$$F(\omega) = \frac{\tau}{2} \left[ \frac{\sin(\omega - \omega_0)\tau/2}{(\omega - \omega_0)\tau/2} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)\tau/2}{(\omega + \omega_0)\tau/2} \right].$$

Спектры  $F_0(\omega)$  и  $F(\omega)$  представлены на рис. 6.15.

**Упражнение 3.** Получите спектр периодической последовательности цугов (см. рис. 6.16). *Указание:* сравните спектры отдельного прямоугольного импульса и периодической последовательности импульсов.

**Упражнение 4.** Найдите спектр затухающих свободных колебаний

$$f(t) = e^{-\gamma t} \cos \omega_0 t \quad (\text{при } t \geq 0).$$

Сравните результат с частотной характеристикой колебательного контура (6.5).

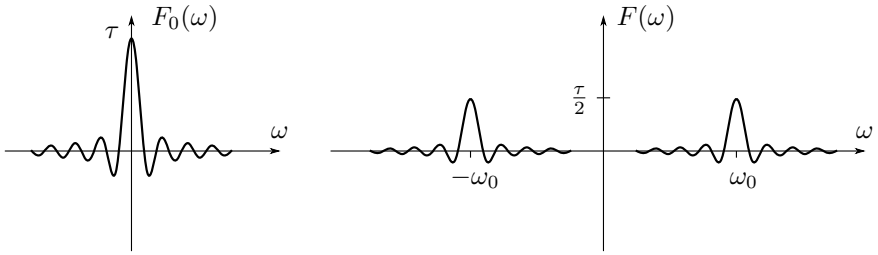


Рис. 6.15. Спектры а) прямоугольного импульса и б) синусоидального цуга

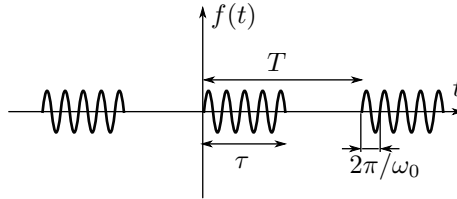


Рис. 6.16. Периодическая последовательность цугов

**Теорема смещения.** Найдём спектр  $F(\omega)$  сигнала, смещённого по времени:  $f(t) = f_0(t - \tau)$ , где  $f_0(t)$  — функция с известным спектром  $F_0(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[f_0]$ .

По определению имеем

$$F(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t - \tau) e^{-i\omega t} dt.$$

После замены переменных  $t' = t - \tau$  ( $dt = dt'$ ) получаем

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t') e^{-i\omega(t'+\tau)} dt'.$$

Множитель  $e^{-i\omega\tau}$  (не зависящий от переменной интегрирования  $t'$ ) выносится из-под знака интеграла:

$$F(\omega) = e^{-i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(t') e^{-i\omega t'} dt' = e^{-i\omega\tau} \cdot F_0(\omega), \quad (6.21)$$

или символически

$$\hat{\mathcal{F}}[f_0(t - \tau)] = e^{-i\omega\tau} \hat{\mathcal{F}}[f_0(t)],$$

т. е. смещение сигнала во времени на  $\tau$  (запаздывание) приводит к умножению его спектра на  $e^{-i\omega\tau}$  (**теорема смещения**).

Заметим, что поскольку  $|e^{-i\omega\tau}| = 1$ , смещение по времени не меняет амплитуд спектральных компонент, а лишь сдвигает их фазы (пропорционально частоте компоненты).

**Спектр произведения сигналов.** Пусть  $F(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[f(t)]$  — спектр функции  $f(t)$ , а  $G(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[g(t)]$  — спектр функции  $g(t)$ . Найдём спектр  $H(\omega) = \hat{\mathcal{F}}[fg]$  произведения  $h(t) = f(t) \cdot g(t)$ .

Воспользуемся разложением функции на гармоники в форме интеграла Фурье (6.13):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Согласно (6.14) искомый спектр равен

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' F(\omega')g(t)e^{-i(\omega-\omega')t}.$$

Меняя порядок интегрирования по  $dt$  и  $d\omega'$ , получим искомую связь:

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')G(\omega - \omega')d\omega'. \quad (6.22)$$

Интеграл в правой части называется **свёрткой** функций  $F(\omega)$  и  $G(\omega)$ . Таким образом, спектр произведения сигналов равен свёртке их спектров.

Свёртку функций часто обозначают как  $F * G$ . Тогда можно сокращённо записать:

$$\hat{\mathcal{F}}[f \cdot g] = \hat{\mathcal{F}}[f] * \hat{\mathcal{F}}[g].$$

Аналогичным образом нетрудно доказать «обратную» теорему: спектр свёртки  $f * g = \int f(\tau)g(t-\tau)d\tau$  равен произведению спектров  $f(t)$  и  $g(t)$ :

$$\hat{\mathcal{F}}[f * g] = \hat{\mathcal{F}}[f] \cdot \hat{\mathcal{F}}[g].$$

**Связь спектра с энергией. Теорема Парсеваля.** Если  $F(\omega)$  — спектр функции  $f(t)$ , для них справедливо следующее соотношение, называемое **равенством Парсеваля**:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (6.23)$$

или если функция  $f(t)$  периодическая со спектром  $\{c_n\}$ , то

$$\frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \sum_n |c_n|^2. \quad (6.24)$$

Поскольку квадрат сигнала  $|f(t)|^2$ , как правило, пропорционален его *мощности*, это соотношение имеет важное значение для физики. Оно показывает, что *полная энергия сигнала за период пропорциональна сумме интенсивностей* (т. е. квадратов модулей  $|c_n|^2$ ) *всех его спектральных компонент*.

Получим равенство (6.24) для случая дискретного спектра периодической функции. Домножим разложение (6.10) функции  $f(t)$  по гармоникам на комплексно-сопряжённое ему:

$$f(t)f^*(t) = \sum_n c_n e^{in\omega_0 t} \cdot \sum_k c_k^* e^{-ik\omega_0 t}.$$

В результате получится сумма, содержащая слагаемые вида  $c_n c_k^* e^{i(n-k)\omega_0 t}$  для всех возможных пар целых  $n$  и  $k$ . Интеграл по отрезку  $t \in [0, T]$  от функций  $e^{i(n-k)\omega_0 t}$  обращается в нуль, если  $n \neq k$ , и равен  $T$ , если  $n = k$ . С учётом того, что  $f(t)f^*(t) = |f(t)|^2$  и  $c_n c_n^* = |c_n|^2$ , получаем окончательно формулу (6.24).

## 4. Модуляция

### 4.1. Виды модуляции

Для передачи сигналов — музыки, речи, телевизионного изображения — необходимо нарушение синусоидальности. Отклонение от синусоидальности и выражает содержание передаваемой информации. Колебательный процесс, отличный от гармонического, назовём **модулированным колебанием**. Примеры таких процессов (их осциллограммы) приведены на рис. 6.17.

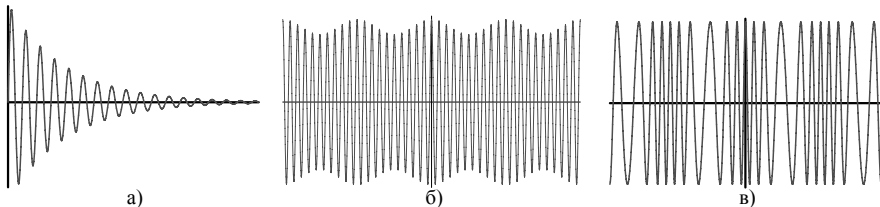


Рис. 6.17. Примеры модулированных колебаний: а, б) — по амплитуде, в) — по фазе (частоте)

Будем записывать модулированные колебания в виде

$$f(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (6.25)$$

В отличие от гармонического колебания, здесь  $a(t)$  и  $\varphi(t)$  — меняющиеся во времени величины. Форма записи (6.25) особенно целесообразна в том случае, когда  $a(t)$  и  $\varphi(t)$  — *медленно* меняющиеся функции времени, т. е. эти функции остаются практически неизменными —  $a(t) \approx a_0$  и  $\varphi(t) \approx \varphi_0$  — на интервалах времени  $\tau$ , существенно превышающих период гармонического (несущего) колебания частоты  $\omega_0$ :

$$\tau \gg \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (6.26)$$

Такое колебание называется **квазигармоническим**. В этом случае медленно меняющиеся величины  $a(t)$  и  $\varphi(t)$  принято называть *амплитудой* и *начальной фазой* модулированного колебания соответственно.

Итак, квазигармоническое колебание можно характеризовать двумя параметрами: периодом несущего колебания  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  и временем  $\tau \gg T_0$ , характеризующим быстроту изменения амплитуды  $a(t)$  и (или) начальной фазы  $\varphi(t)$ .

Для описания модулированных колебаний используется следующая терминология: говорят, что функция  $a(t)$  описывает закон амплитудной модуляции, а функция  $\varphi(t)$  — закон фазовой модуляции. Именно в этих функциях и может быть заложена передаваемая информация.

Если  $\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const}$ , то

$$f(t) = a(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (6.27)$$

где  $a(t) \geq 0$ . Такое колебание называют **модулированным по амплитуде**.

Если  $a(t) = a_0 = \text{const}$ , то

$$f(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t)). \quad (6.28)$$

Такое колебание называют **модулированным по фазе**.

**Замечание.** Иногда выделяют также **частотную модуляцию**:

$$f(t) = a_0 \cos \left( \int \omega(t) dt \right).$$

Заменой  $\omega(t) = \omega_0 + \frac{d\varphi}{dt}$  она сводится к фазовой.

Осциллограммы процессов на рис. 6.17а, б являются примерами амплитудно-модулированных колебаний, а на рис. 6.17в — примером колебания, модулированного по фазе.

#### 4.2. Спектры модулированных сигналов

**Амплитудная модуляция.** Рассмотрим простейшее амплитудно-модулированное колебание, в котором амплитуда модуляции является гармонической функцией:

$$f(t) = a(t) \cos \omega_0 t, \quad \text{где } a(t) = a_0(1 + m \cos \Omega t). \quad (6.29)$$

Константа  $0 < m \leq 1$  называется **глубиной модуляции**. Глубину модуляции можно выразить через максимальную  $a_{\max}$  и минимальную  $a_{\min}$  амплитуды сигнала:

$$m = \frac{a_{\max} - a_{\min}}{a_{\max} + a_{\min}}. \quad (6.30)$$

Раскрывая скобки в (6.29) и пользуясь формулой для произведения косинусов, можно получить

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = \\ &= a_0 \cos \omega_0 t + \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Итак, амплитудно-модулированное колебание с законом модуляции (6.29) представляется в виде суммы трёх гармонических колебаний (трёх гармоник):

$$f_0(t) = a_0 \cos \omega_0 t, \quad f_1(t) = \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t, \quad f_2(t) = \frac{ma_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t$$

с частотами соответственно  $\omega_0$ ,  $\omega_0 + \Omega$ ,  $\omega_0 - \Omega$  и амплитудами  $a_0$ ,  $ma_0/2$ ,  $ma_0/2$ . Колебание  $f_0(t)$  называется **несущим колебанием**, а  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  — **боковыми гармониками**. Условие квазигармоничности колебания  $f(t)$ :  $\Omega \ll \omega_0$ .

**Фазовая модуляция.** Рассмотрим теперь простейший пример фазовой модуляции:

$$f(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t)), \quad \text{где } \varphi(t) = m \cos \Omega t. \quad (6.32)$$

Константа  $m$  — **глубина модуляции фазы** — определяет диапазон изменения начальной фазы (от  $-m$  до  $+m$ ).

Раскрывая косинус суммы, запишем  $f(t)$  в виде

$$f(t) = a_0 (\cos \omega_0 t \cos \varphi(t) - \sin \omega_0 t \sin \varphi(t)).$$

В общем случае закон модуляции (6.32) приводит к довольно сложному спектру (с большим числом слагаемых гармонических колебаний).

Мы рассмотрим случай  $m \ll 1$  (малая глубина модуляции фазы), когда можно использовать приближённые выражения:  $\cos \varphi(t) \approx 1$  и  $\sin \varphi(t) \approx \varphi(t)$  (мы отбрасываем величины порядка  $m^2$  и выше). Тогда

$$f(t) = a_0 \cos \omega_0 t - a_0 m \sin \omega_0 t \cos \Omega t,$$

или (т. к.  $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ ):

$$f(t) = a_0 \cos \omega_0 t + \frac{ma_0}{2} \cos \left( (\omega_0 + \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{ma_0}{2} \cos \left( (\omega_0 - \Omega)t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (6.33)$$

Это и есть искомое представление колебания  $f(t)$  в виде суммы гармонических колебаний.

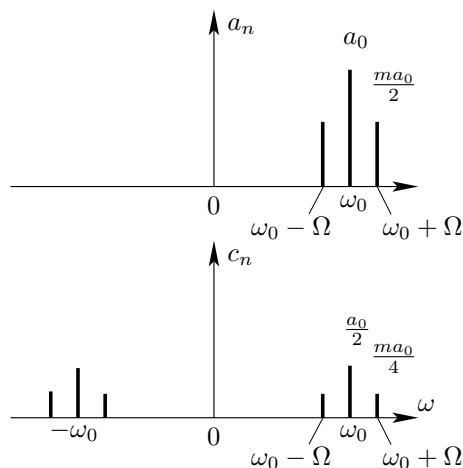


Рис. 6.18. Спектр колебаний, модулированных гармонически по фазе или амплитуде. Действительное (вверху) и комплексное (внизу) представления

Сравним формулы (6.31) и (6.33). Первая из них — разложение в спектр колебания, модулированного по амплитуде, вторая — колебания, модулированного по фазе. Эти колебания существенно различаются по форме (сравните осциллограммы на рис. 6.17б и 6.17в), однако их спектры весьма похожи (см. рис. 6.18). В обоих случаях в правой части три слагаемых, три гармонических колебания, имеющих одинаковые частоты ( $\omega_0$ ,  $\omega_0 \pm \Omega$ ) и амплитуды ( $a_0$  — несущие колебания,  $ma_0/2$  — боковые гармоники). Различие выглядит небольшим: боковые гармоники отличаются фазовым сдвигом  $\frac{\pi}{2}$ . Однако это различие приводит к кардинальному отличию в форме (в осциллограмме  $f(t)$ ) результирующего сигнала.



Приведённый пример показывает, что для восстановления сигнала  $f(t)$  по его спектру важно знать *не только амплитуды* спектральных компонент, *но и их фазы* (это важно, поскольку на практике фазы измерять сложнее, и информация о них часто бывает утеряна).

**Векторное представление модуляции.** Воспользуемся векторным представлением колебаний для описания модуляции. Напомним, что если функция меняется по закону  $A \cos(\omega t + \varphi)$ , то её можно представить как проекцию вектора длиной  $A$ , вращающегося на плоскости с угловой скоростью  $\omega$  ( $\varphi$  — начальный угол поворота вектора).

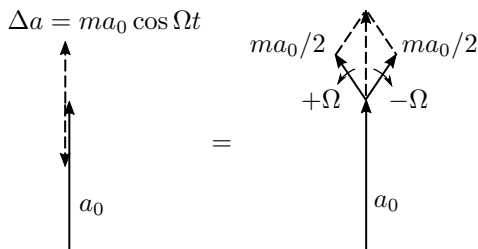


Рис. 6.19. Векторное представление амплитудной модуляции

Вектор, изображающий несущее колебание, имеет длину  $a_0$  и вращается с частотой  $\omega_0$ . Рассмотрим амплитудную модуляцию гармонической функцией (6.29). Модуляция представляет собой добавку, колеблющуюся вдоль вектора  $a_0$  с амплитудой  $ma_0$  и частотой  $\Omega$ . Эту добавку также можно представить как сумму двух векторов длиной  $ma_0/2$ , вращающихся относительно  $a_0$  в противоположные стороны — со скоростями  $+\Omega$  и  $-\Omega$ . При этом их начальные фазы совпадают с начальной фазой несущей (см. рис. 6.19).

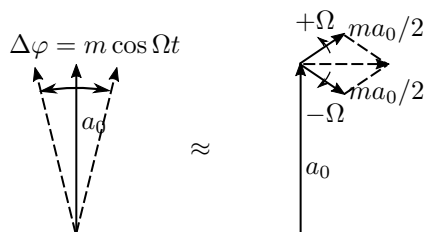


Рис. 6.20. Векторное представление фазовой модуляции

Чтобы имела место фазовая модуляция (6.32), вектор несущей  $a_0$  должен периодически поворачиваться относительно исходного положения на угол  $\Delta\varphi = m \cos \Omega t$ . Если амплитуда модуляции мала ( $m \ll 1$ ), то такой поворот можно представить как добавку в виде гармонически

колеблющегося вектора, перпендикулярного  $a_0$ . Или, аналогично проделанному выше, — как два вектора длиной  $ma_0/2$ , вращающиеся относительно  $a_0$  со скоростями  $\pm\Omega$ , при том что их начальная фаза отличается от несущей на  $\pi/2$  (см. рис. 6.20).

### 4.3. Детектирование модулированных сигналов\*

Процедуру, обратную модуляции, называют **детектированием**. При получении модулированного (по фазе или амплитуде) сигнала необходимо выделить из него информацию, содержащуюся в функциях  $a(t)$  или  $\varphi(t)$ , отбросив по возможности высокочастотное колебание на несущей частоте  $\omega_0$  (не несущее информации).

Весь спектр модулированного сигнала сосредоточен в узкой области вблизи большой несущей частоты  $\omega_0 \pm \Omega$ , где  $\Omega$  — характерная частота модуляции. Необходимо преобразовать сигнал так, чтобы полезная информация оказалась в области низких частот. Это можно сделать с использованием *нелинейных* элементов. Одним из простейших способов детектирования является использование элементов с квадратичным законом связи между входным и выходным сигналами:  $g(t) \propto f^2(t)$  (*квадратичное детектирование*). Другой способ — использование *выпрямляющих* преобразователей, например, полупроводниковых диодов.

Для того чтобы избавиться от «ненужных» (не содержащих полезную информацию) высокочастотных составляющих, можно применять обычные линейные фильтры (см., в частности, пример 2). Действие такого фильтра может быть сведено к усреднению во времени сигнала по интервалу  $\Delta t$ , который существенно превосходит период колебаний несущей, но значительно меньше периода колебаний «информативных» функций  $a(t)$  или  $\varphi(t)$ :

$$g(t) = \langle f^2(t) \rangle_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f^2(t') dt', \quad (6.34)$$

где

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \ll \Delta t \ll \frac{2\pi}{\Omega}. \quad (6.35)$$

Принцип квадратичного детектирования иллюстрирует рис. 6.21.

**Квадратичное детектирование амплитудно-модулированного сигнала.** Рассмотрим, как преобразование (6.34) действует на амплитудно-модулированный сигнал  $f(t) = a(t) \cos \omega_0 t$ . Имеем

$$g(t) = \langle f^2(t) \rangle_{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} a^2(t') \cos^2(\omega_0 t') dt'.$$

---

\*При первом чтении данный раздел можно пропустить.

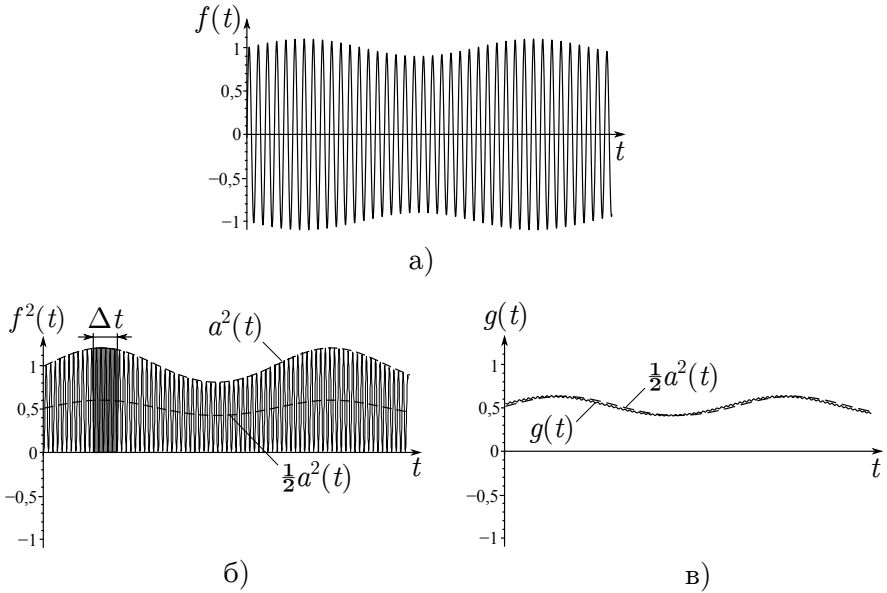


Рис. 6.21. Принцип детектирования модулированного сигнала: а) исходный сигнал  $f(t)$ , б) квадратичный сигнал  $f^2(t)$ , в) результат усреднения  $f^2(t)$  по интервалу  $\Delta t$

Ввиду соотношения (6.35) амплитуда  $a(t)$  практически не меняется на отрезке  $[t, t + \Delta t]$ , поэтому её можно вынести из-под знака интеграла:

$$g(t) = \frac{a^2(t)}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \cos^2(\omega_0 t') dt' \approx \frac{1}{2} a^2(t). \quad (6.36)$$

Последний переход справедлив, поскольку  $\Delta t \gg 2\pi/\omega_0$  и можно приближённо считать, что интегрирование ведётся по целому числу периодов. Таким образом, предложенный подход позволяет измерить *квадрат амплитуды модуляции*.

Если имеет место модуляция гармонической функцией (6.29) с малой глубиной модуляции  $m \ll 1$ , то

$$g(t) = \frac{1}{2} a_0^2 (1 + m \cos \Omega t)^2 \approx \frac{1}{2} a_0^2 (1 + 2m \cos \Omega t).$$

Видно, что после квадратичного детектирования остаётся гармонический сигнал  $ma_0^2 \cos \Omega t$  на частоте модуляции, существующий на фоне постоянного сигнала  $a_0^2/2$ .

### Квадратичное детектирование фазово-модулированного сигнала.

У сигнала, модулированного по фазе, амплитуда постоянна:  $a(t) = \text{const}$ . Можно ли в таком случае использовать квадратичное детектирование?

Как мы выяснили выше, спектры фазово- и амплитудно-модулированных сигналов отличаются лишь начальными фазами гармоник. Изменив с помощью линейного фильтра фазу несущего колебания (или боковых гармоник) на  $\frac{\pi}{2}$ , мы можем преобразовать колебание, модулированное по фазе, в амплитудно-модулированное колебание. Это известный в радиотехнике приём *с изменением фазы несущей*.

Ещё один метод — *приём без несущей*, при котором из спектра «убирается» (также линейным фильтром) несущее колебание  $a_0 \cos \omega_0 t$ . Предлагаем читателю самостоятельно проанализировать, что будет представлять собой результирующее колебание.

Аналогичные приёмы преобразования фазовой модуляции в амплитудную применяются в оптике при наблюдении прозрачных структур — методы «фазового контраста» и «тёмного поля».

## 5. Синтез сигналов

Возможность разложить произвольную функцию  $f(t)$  в ряд (или интеграл) Фурье единственным и однозначным способом подразумевает и возможность «собрать» сигнал любой формы, используя гармонические колебания с подобранными амплитудами и фазами, совершив таким образом *обратное* преобразование Фурье.

Спектр реального сигнала в общем случае содержит бесконечное количество гармоник, поэтому синтезировать исходный сигнал можно, как правило, лишь в некотором приближении. Степень совпадения будет определяться количеством синтезирующих гармоник (чем больше, тем лучше).

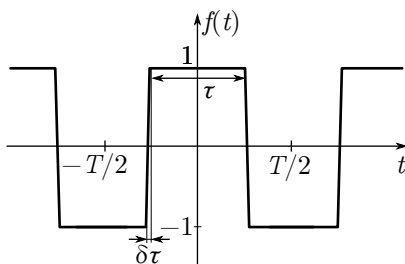


Рис. 6.22. Прямоугольный сигнал (меандр)

Рассмотрим в качестве примера прямоугольный сигнал, принимающий значения  $\pm 1$  со скважностью  $\tau/T = 1/2$  («меандр», рис. 6.22). Из

формулы (6.12) имеем спектр

$$c_n = \frac{\sin \pi n/2}{\pi n/2}.$$

Переходя к амплитудам и фазам согласно (6.9), найдём

$$a_{2k} = 0, \quad a_{2k-1} = \frac{4}{\pi(2k-1)}, \quad \varphi_{2k-1} = \pi(k-1), \quad k = 1, 2, \dots$$

( $c_0 = a_0 = 0$ ). Первые несколько слагаемых в спектральном разложении:

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \left[ \cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \frac{1}{7} \cos 7\omega_0 t + \dots \right].$$

На рис. 6.23 представлен результат аппроксимации рассматриваемой функции  $k$  первыми слагаемыми её ряда Фурье. Видно, что с увеличением числа слагаемых аппроксимация становится всё точнее.

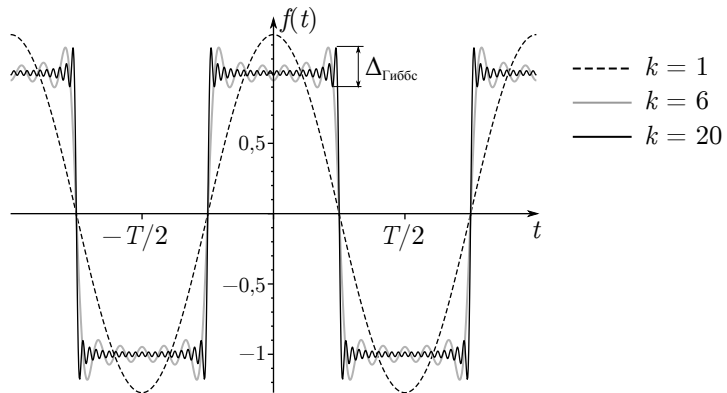


Рис. 6.23. Аппроксимация разрывной функции частичными суммами ряда Фурье ( $k$  — число ненулевых слагаемых)

При внимательном рассмотрении можно заметить интересную особенность: колебания частичной суммы ряда особенно сильны около точек разрыва функции  $f(t)$ . Причём амплитуда первого максимума этих колебаний (в непосредственной близости от разрыва) *не убывает* с ростом числа слагаемых (и составляет около 18% от величины скачка). Это явление получило название **явление Гиббса**. Математически оно является следствием *неравномерной* сходимости ряда Фурье разрывной функции. Если функция непрерывна и ограничена, то сходимость её

ряда Фурье будет равномерной (*признак Дирихле*) и подобных проблем не возникает\*.

С физической точки зрения по-настоящему *мгновенный* скачок функции невозможен — всегда есть какое-то конечное (пусть очень малое) время перехода  $\delta t$ . В таком случае явление Гиббса исчезнет, когда в частичную сумму ряда Фурье попадут слагаемые, с помощью которых можно «разрешить» столь малые масштабы по времени, то есть с частотами  $\omega$  порядка  $2\pi/\delta t$ .

### Контрольные вопросы

1. Как можно *измерить* коэффициенты ряда Фурье (спектр) некоторого сигнала  $f(t)$ ?
2. Изобразите схематично спектры  $F(\omega)$  следующих сигналов:
  - бесконечно длинной синусоиды;
  - синусоиды конечной длины;
  - периодической последовательности прямоугольных импульсов;
  - одного прямоугольного импульса;
  - периодической последовательности цугов;
  - одного цуга.
3. Как изменится спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов, если убрать каждый второй импульс?
4. Как изменится спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов, если уменьшить длительность каждого импульса в два раза?
5. Предложите электрическую схему высокочастотного и низкочастотного линейного фильтра.
6. Чем отличаются спектры амплитудно-модулированного и фазово-модулированного сигналов?
7. Что такое детектирование? Какие существуют методы детектирования амплитудно-модулированного и фазово-модулированного сигналов?
8. Чем определяется количество гармоник, необходимое для удовлетворительной аппроксимации функции рядом Фурье?

---

\*См., например, *Фиттенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т. III, Гл. 19, §4.

### Литература

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — § 128.
2. *Кингсеп А.С., Локишин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2007. — Гл I, §§ 1.5, 1.6.
3. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — §§ 17.4–17.7.
4. *Локишин Г.Р., Козел С.М.* Модулированные колебания. Спектральный анализ. Линейная фильтрация — М.: МФТИ, 2009.
5. *Булыгин В.С.* Явление Гиббса — М.: МФТИ, 2014.

### Работа 3.6.1

## Спектральный анализ электрических сигналов

**Цель работы:** изучить спектральный состав периодических электрических сигналов.

**В работе используются:** анализатор спектра (аналоговый или цифровой), генератор прямоугольных импульсов и сигналов специальной формы, осциллограф.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с теоретическим введением к разделу.

В работе изучается спектральный состав периодических электрических сигналов различной формы: последовательности прямоугольных импульсов, последовательности цугов и амплитудно-модулированных гармонических колебаний. Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью анализатора спектра и сравниваются с рассчитанными теоретически.

Периодическая функция может быть представлена в виде бесконечного ряда гармонических функций — ряда Фурье (см. п. 2.1 Введения):

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad \text{или} \quad f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

Здесь  $\omega_0 = 2\pi/T$ , где  $T$  — период функции  $f(t)$ . Коэффициенты  $\{c_n\}$  могут быть найдены по формуле (6.11):

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Наборы коэффициентов разложения в комплексной  $\{c_n\}$  и действительной  $\{a_n, \varphi_n\}$  формах связаны соотношением (6.9):

$$a_n = 2|c_n|, \quad \varphi_n = \arg c_n.$$

В качестве простейшего спектрального анализатора можно использовать высокочастотный колебательный контур с подстраиваемой ёмкостью или индуктивностью, рис. 1 (см. также п. 2.5 Введения). Такой контур усиливает те гармоники входного сигнала  $f(t)$ , частота которых близка к резонансной  $\nu_0 = 1/(2\pi\sqrt{LC})$  и практически не реагирует на частоты, далёкие от  $\nu_0$ .

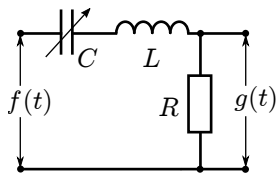


Рис. 1. Колебательный контур как узкополосный фильтр



С точки зрения преобразования гармоник колебательный контур является узкополосным **фильтром** с шириной полосы пропускания порядка  $\Delta\nu \sim \nu_0/Q$ , где  $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \gg 1$  — его добротность. Амплитуда колебаний в контуре пропорциональна амплитуде  $|c(\nu_0)|$  гармоники в фурье-спектре функции  $f(t)$ , частота которой совпадает с  $\nu_0$ . Таким образом, меняя резонансную частоту контура, можно «просканировать» весь спектр входного сигнала.

### Экспериментальная установка

У описанной выше схемы есть существенный недостаток: при изменении  $L$  или  $C$  меняется также и добротность, а значит, и ширина полосы пропускания. Кроме того, проще изготовить высокодобротный контур с фиксированными параметрами, нежели с настраиваемой частотой. В связи с этим, как правило, для фильтрации сигнала применяется другая схема.

Исследуемый сигнал  $f(t)$  и синусоидальный сигнал от вспомогательного генератора, называемого в таких системах **гетеродином**, подаются на вход **смесителя**. Смеситель — элемент, преобразующий колебания с частотами  $\nu_1$  и  $\nu_2$  в колебания на *комбинированных* частотах:  $\nu_1 + \nu_2$  и  $\nu_1 - \nu_2$ . «Разностный» сигнал смесителя поступает на фильтр — высокодобротный колебательный контур, настроенный на некоторую *фиксированную* резонансную частоту  $\nu_0$ . Таким образом, если  $f(t)$  содержит гармонику  $\nu = \nu_{\text{гет}} - \nu_0$  ( $\nu_{\text{гет}}$  — частота гетеродина), она будет усилена, а отклик будет пропорционален её амплитуде.

Отметим, что смешение частот исследуемого сигнала и частоты гетеродина лежит в основе большинства современных радиоприёмных устройств — *супергетеродинов*.

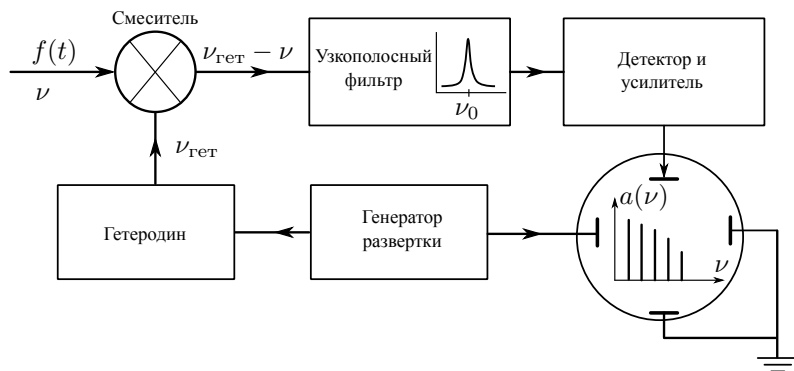


Рис. 2. Структурная схема анализатора спектра

В спектральном анализаторе частота гетеродина пропорциональна напряжению, подаваемому на развертку по оси  $X$  встроенного в анализатор осциллографа. Выходной сигнал подаётся на канал  $Y$ . На экране анализатора возникает, таким образом, график, изображающий зависимость амплитуды гармоник исходного сигнала от частоты, т.е. его спектр (заметим, что информация о фазах гармоник при этом теряется).

В последнее время повсеместное распространение получила цифровая обработка сигналов. Спектральный состав оцифрованного сигнала может быть найден численно. Существуют алгоритмы (быстрое преобразование Фурье, FFT), позволяющие проводить вычисления коэффициентов Фурье в реальном времени для сигналов относительно высокой частоты (до 200 МГц). Гетеродинные схемы по-прежнему применяются для анализа спектров сверхвысоких частот, приближающихся к тактовой частоте современных интегральных схем ( $\gtrsim 1$  ГГц).

## ЗАДАНИЕ

### А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

В этом упражнении исследуется зависимость ширины спектра  $\Delta\nu$  периодической последовательности прямоугольных импульсов от длительности отдельного импульса  $\tau$ .

1. Ознакомьтесь с устройством приборов (генератор прямоугольных импульсов, осциллограф, анализатор спектра) и подготовьте их к работе, следуя техническим описаниям, расположенным на установке.

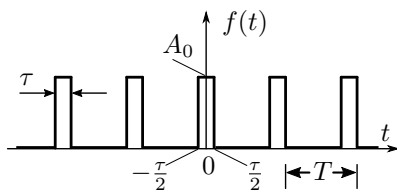


Рис. 3. Периодическая последовательность импульсов

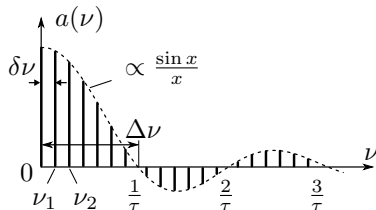


Рис. 4. Спектр последовательности импульсов (расчёт для  $\tau = T/7$ )

2. Подключите генератор прямоугольных импульсов через разветвитель к осциллографу и анализатору спектра.
3. На генераторе задайте частоту повторения импульсов  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц (период  $T = 1$  мс), длительность импульса  $\tau = 50$  мкс. Получите устойчивую картину сигнала на осциллографе.

4. Предварительно оцените характерную ширину спектра из соотношения неопределённостей  $\Delta\nu \sim 1/\tau$  (см. п. 2.3 Введения).
5. Получите спектр сигнала на анализаторе спектра. Предварительно подберите начало отсчёта и диапазон измерения по частоте, так чтобы на экране помещалась большая часть спектра.

В наблюдаемом спектре отсутствует информация об амплитуде нулевой гармоники, т.е. о величине постоянной составляющей; её местоположение (начало отсчёта шкалы частот) отмечено небольшим вертикальным выбросом.

6. Изменяя параметры сигнала ( $\nu_{\text{повт}}$ ,  $\tau$ ), наблюдайте, как изменяется его спектр. Опишите результаты. Сохраните или сфотографируйте несколько огибающих спектров с различными параметрами, например: а)  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц,  $\tau = 50$  мкс, б)  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц,  $\tau = 100$  мкс, в)  $\nu_{\text{повт}} = 2$  кГц,  $\tau = 50$  мкс при фиксированном масштабе частот (по оси  $X$ ) анализатора спектра [кГц/дел]. Параметры запишите в тетради, изображения спектров приложите к отчёту.
7. Проведите измерения зависимости ширины спектра от длительности импульса  $\Delta\nu(\tau)$  при изменении  $\tau$  от 25 до 200 мкс при  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц. Ширину определяйте по положению первой гармоники с нулевой амплитудой.
8. Постройте график зависимости ширины спектра от обратного времени импульса  $\Delta\nu(1/\tau)$  и по его наклону убедитесь в справедливости соотношения неопределённостей. Оцените погрешность опыта.
9. Для одного из сигналов, наблюдаемых в п. 6, рассчитайте теоретические значения амплитуд спектральных компонент по формуле (6.12). Сравните измеренные значения с теоретическими, изобразив их на одном графике.

#### Б. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

В этом упражнении исследуется зависимость расстояния между ближайшими спектральными компонентами от частоты повторения цугов.

10. По техническому описанию к работе соберите схему, используемую для генерации последовательности синусоидальных цугов.
11. Установите частоту несущей  $\nu_0 = 25$  кГц и получите на экране осциллографа устойчивую картину цугов.
12. Получите спектр сигнала. Наблюдайте, как изменяется вид спектра: а) при увеличении длительности импульса (например,  $\tau = 50, 100$  мкс для  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц); б) при изменении частоты несущей:  $\nu_0 = 25,$

10 или 40 кГц; в) при изменении частоты повторения  $\nu_{\text{повт}} = 1, 2$  кГц. Опишите результаты или зарисуйте качественную картину в тетради.

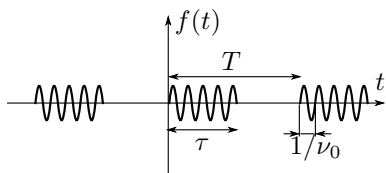


Рис. 5. Периодическая последовательность цугов

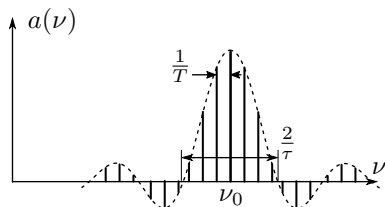


Рис. 6. Спектр последовательности цугов

13. При фиксированной длительности импульсов  $\tau = 50$  мкс исследуйте зависимость расстояния  $\delta\nu$  между соседними спектральными компонентами периода повторения импульсов  $T = 1/\nu_{\text{повт}}$  (в диапазоне частот 1–8 кГц).
14. Постройте график  $\delta\nu(1/T)$  и по его наклону убедитесь в справедливости соотношения неопределённости. Оцените погрешность данного опыта.

#### В. Исследование спектра гармонических сигналов, модулированных по амплитуде

В этом упражнении исследуется зависимость отношения амплитуд спектральных линий синусоидального сигнала, модулированного низкочастотными гармоническими колебаниями, от коэффициента модуляции, измеряемого с помощью осциллографа.

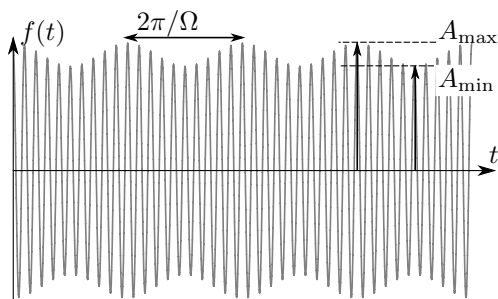


Рис. 7. Модулированный по амплитуде сигнал

15. Следуя техническому описанию на установке, соберите схему для генерации гармонических модулированных колебаний.

16. Установите частоту несущей  $\nu_0 = 25$  кГц, частоту модуляции  $\nu_{\text{мод}} = 1$  кГц и глубину модуляции  $m = 1$ . Получите на экране осциллографа устойчивую картину.
17. Получите спектр исследуемого сигнала. Измерьте положения центральной и боковой гармоник. Изменяя частоту модулирующего сигнала  $\nu_{\text{мод}}$  и частоту несущей  $\nu_0$ , наблюдайте, как изменяется положение спектральных линий. Опишите или зарисуйте результат в тетрадь.
18. Меняя глубину модуляции  $m$ , измеряйте отношение  $\frac{a_{\text{бок}}}{a_{\text{осн}}}$  амплитуд боковой и основной линий (см. рис. 6.18) спектра в зависимости от  $m$ ; для расчёта глубины модуляции  $m$  используйте формулу (6.30):

$$m = \frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}},$$

где максимальная  $A_{\text{max}}$  и минимальная  $A_{\text{min}}$  амплитуды сигнала измеряются с помощью осциллографа.

19. Постройте график отношения  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  в зависимости от  $m$ . Определите угол наклона графика и сравните с результатами п. 4.2. Оцените погрешность данного опыта.

### Работа 3.6.2

## Синтез гармонических сигналов

**Цель работы:** изучить возможности синтеза периодических электрических сигналов при ограниченном наборе спектральных компонент.

**В работе используются:** генератор гармонических сигналов, источник питания, осциллограф.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с теоретическим введением к разделу, в частности, с главой 5 «Синтез сигналов».

Периодическая функция может быть представлена в виде бесконечного ряда гармонических функций — ряда Фурье (см. п. 2.1 Введения)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t} \quad \text{или} \quad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

Здесь  $\omega_0 = 2\pi/T$ , где  $T$  — период функции  $f(t)$ . Коэффициенты  $\{c_n\}$  могут быть найдены по формуле (6.11):

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega_0 t} dt.$$

Наборы коэффициентов разложения в комплексной  $\{c_n\}$  и действительной  $\{a_n, \varphi_n\}$  формах связаны соотношениями (6.9):

$$a_n = 2|c_n|, \quad \varphi_n = \arg c_n.$$

Первые несколько слагаемых ряда Фурье (частичная сумма) можно использовать для приближённого восстановления исходного сигнала. В работе предлагается синтезировать периодические сигналы специальной формы с помощью нескольких генераторов гармонических сигналов. Рассмотрим конкретные примеры функций, которые будут предметом исследования в нашей работе.

### Периодическая последовательность прямоугольных импульсов.

Рассмотрим импульсы единичной амплитуды с частотой повторения  $\nu_0 = 1/T$  ( $T$  — период) и длительностью каждого импульса  $\tau$  (рис. 1).

Амплитуды гармоник с частотами  $\nu_n = n\nu_0$  для этой функции были найдены в разделе 2.1. Для действительного представления (ряд косинусов) из (6.12) имеем

$$a_n = \frac{2\tau}{T} \frac{|\sin \pi n \tau / T|}{\pi n \tau / T} \propto \frac{|\sin \xi|}{\xi}, \quad (1)$$

где  $\xi = \pi n \tau / T$ . Для нулевой, т.е. постоянной, составляющей имеем  $a_0 = \frac{\tau}{T}$ . При этом начальные фазы принимают значения

$$\varphi_n = \begin{cases} 0 & \text{при } \sin \frac{\pi n \tau}{T} \geq 0, \\ \pi & \text{при } \sin \frac{\pi n \tau}{T} < 0. \end{cases} \quad (2)$$

Соответствующий спектр представлен на рис. 2 («отрицательные» амплитуды на рисунке соответствуют гармоникам, фаза которых  $\varphi_n = \pi$ ).

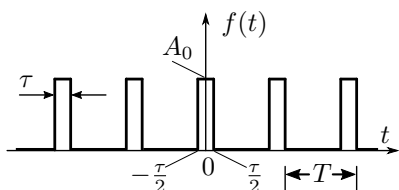


Рис. 1. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

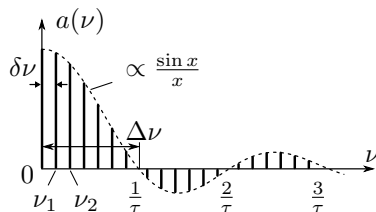


Рис. 2. Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов (при  $T/\tau = 7$ )

**Периодическая последовательность треугольных импульсов.** Рассмотрим последовательность треугольных импульсов (см. рис. 3). Непосредственно с помощью формулы (6.11) нетрудно получить выражения

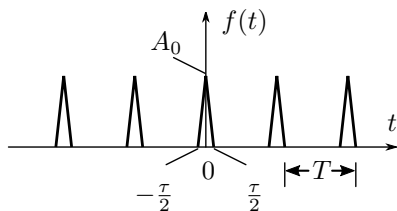


Рис. 3. Периодическая последовательность треугольных импульсов

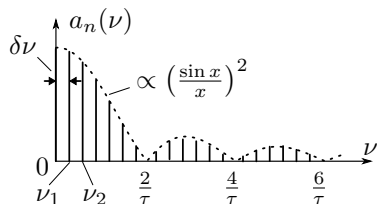


Рис. 4. Спектр последовательности треугольных импульсов (при  $T/\tau = 7/2$ )

для амплитуд спектральных компонент (вычисления проведите самостоятельно):

$$a_n = \frac{\tau \sin^2 \xi/2}{T (\xi/2)^2}, \quad (3)$$

где  $\xi = \pi n \tau / T$ . При этом все начальные фазы равны нулю  $\varphi_n = 0$ . Нулевая составляющая  $a_0 = \tau/2T$ . Спектр рассматриваемой функции представлен на рис. 4.

### Экспериментальная установка

Основным элементом экспериментальной установки является генератор гармонических сигналов, который генерирует одновременно основной сигнал на выбранной частоте  $\nu_0$  и пять гармоник  $\{2\nu_0, \dots, 6\nu_0\}$ , кратных основному сигналу. Генератор позволяет устанавливать амплитуды и фазовые сдвиги гармоник. Все 6 гармоник могут складываться при помощи электронного сумматора. Этот сигнал с выхода генератора подаётся на вход  $Y$  осциллографа, на экране которого можно наблюдать (в режиме непрерывной развёртки) периодическую последовательность синтезированных сигналов. Технические данные генератора и порядок работы с ним изложены в отдельном техническом описании, расположенном на установке.

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается подобрать амплитуды синусоидальных колебаний с кратными частотами, сумма которых даёт периодическую последовательность прямоугольных или треугольных импульсов.

### Синтез последовательности прямоугольных импульсов

1. Ознакомьтесь с техническим описанием генератора. Приведите приборы в рабочее состояние.
2. Предварительно рассчитайте относительные значения амплитуд первых шести гармоник в спектре периодической последовательности

прямоугольных импульсов с отношением  $T/\tau = 7$ : нулевая гармоника (постоянная составляющая) не используется; первая гармоника соответствует основному сигналу генератора; приняв амплитудное значение первой гармоники за единицу, относительные амплитудные значения ( $a_n/a_1$ ) остальных пяти гармоник рассчитайте по формуле (1). Амплитуда седьмой гармоники в наших условиях (при  $T/\tau = 7$ ) равна нулю. Значения синусов, необходимые для вычислений, приведены в таблице:

$n$	1	2	3	4	5	6
$\alpha_n$	$\pi/7$	$2\pi/7$	$3\pi/7$	$4\pi/7$	$5\pi/7$	$6\pi/7$
$\sin \alpha_n$	0,434	0,782	0,975	0,975	0,782	0,434
$a_n$						
$a_n/a_1$	1					

- Установите частоту первой гармоники — 10 кГц и откалибруйте (уравняйте) напряжения гармоник.
- С помощью осциллографа установите рассчитанные относительные амплитуды и фазы гармоник (2).
- Последовательно увеличивая число используемых гармоник, фиксируйте (фотографируйте/копируйте на кальку) сигнал на экране осциллографа. По результирующей осциллограмме, соответствующей сумме всех шести гармоник, определите отношение  $T/\tau$  и сравните его с теоретическим значением.
- Изучите влияние фазовых соотношений на восстановление сигнала по его спектру. Изменяя фазы гармоник, наблюдайте за искажением сигнала. Сделайте вывод по результатам наблюдений.
- Повторите опыт для прямоугольного сигнала с  $\tau = T/2$  (меандр).

#### Синтез последовательности треугольных импульсов

- Рассчитайте с помощью формулы (3) относительные амплитуды гармоник в спектре периодической последовательности треугольных импульсов с отношением  $T/\tau = 3,5$  (используйте таблицу из предыдущего упражнения).
- Установите необходимые относительные амплитуды гармоник и их фазы.
- Получите осциллограмму от всех шести гармоник и зафиксируйте её (сфотографируйте/скопируйте на кальку). Определите отношение  $T/\tau$  и сравните его с теоретическим.
- Повторите опыт для треугольных импульсов с  $\tau = T/2$ . В каком случае аппроксимация получилась лучше? Почему?





## Раздел VII

# ПЕРЕМЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

В этом разделе даётся максимально сжатое — справочное — изложение теории электромагнитного поля в веществе. Студентам, не знакомым с системой уравнений Максвелла, рекомендуем предварительно обратиться к учебной литературе, указанной в конце раздела.

### 1. Уравнения Максвелла в веществе

Начало классической электродинамики сплошных сред было положено открытием двух экспериментальных законов: в 1820 году Ампер установил закон взаимодействия электрических токов. Одной из формулировок этого закона является теорема о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля  $\mathbf{H}$ :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} d\mathbf{l} = I,$$

где  $I$  — полный ток через произвольный замкнутый контур  $\Gamma$ . В 1831 году Фарадей экспериментально открыл явление электромагнитной индукции. Математическая формулировка этого закона:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S},$$

где  $S$  — натянутая на замкнутый контур  $\Gamma$  ориентированная площадь. В середине XIX века Максвелл в цикле теоретических работ постулировал, что эти законы реализуются независимо от присутствия в пространстве проводящих пробных контуров, т. е. магнитное поле и вихревое электрическое поле являются объективной реальностью. Этот постулат лежит в основе теории электромагнитного поля, а вытекающие из него уравнения Максвелла — фундамент современной электродинамики сплошных сред. В системе единиц СИ эти уравнения имеют вид:

дифференциальная форма:

интегральная форма:

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV, \quad (7.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0, \quad (7.2)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \oint_\Gamma \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}, \quad (7.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad \oint_\Gamma \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} d\mathbf{S}. \quad (7.4)$$

Здесь  $\mathbf{D}$  — электрическая индукция,  $\mathbf{E}$  — напряжённость электрического поля,  $\mathbf{B}$  — магнитная индукция,  $\mathbf{H}$  — напряжённость магнитного поля,  $\rho$  — плотность свободных зарядов,  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока.

Система уравнений (7.1)–(7.4) является фундаментальной. Она справедлива для любой сплошной среды. Уравнение (7.1) — это одна из форм записи закона Кулона. Уравнение (7.2) утверждает факт отсутствия магнитных зарядов. Уравнение (7.3) — формулировка закона электромагнитной индукции Фарадея: изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле. Наконец, уравнение (7.4) показывает, что магнитное поле порождается не только движущимися зарядами (первый член в правой части уравнения), но и изменяющимся во времени электрическим полем. Слагаемое  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$  было введёно Максвеллом. По аналогии с плотностью тока  $\mathbf{j}$  его называют **плотностью тока смещения**.

**Замечание.** Наличие тока смещения в уравнениях является следствием закона сохранения заряда. Чтобы убедиться в этом, достаточно вычислить дивергенцию (7.4): левая часть (дивергенция ротора) обращается в нуль, а правая с учётом (7.1) даёт

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (7.5)$$

что представляет собой *уравнение непрерывности* для переноса электрического заряда.

Векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{j}$  и  $\mathbf{E}$  не являются независимыми и попарно связаны между собой. Эта связь определяется свойствами среды, в которой происходит электромагнитный процесс. Соответствующие уравнения связи называют **материальными**. В простейшем случае мате-

риальные уравнения являются линейными:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad (7.6)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}, \quad (7.7)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (7.8)$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  — электрическая и магнитная проницаемости среды,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные,  $\sigma$  — удельная проводимость среды.

**Замечание.** Уравнения (7.6)–(7.8) (в отличие от (7.1)–(7.4)) не являются фундаментальными: они применимы лишь для ограниченного класса однородных изотропных сред в слабых полях, когда отклик среды на внешнее воздействие является *линейным*.

Характерная для электродинамики величина

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

имеет размерность скорости и называется **электродинамической постоянной**, а численно она равна *скорости света в вакууме*  $c = 299\,792\,458$  м/с.

## 2. Электромагнитные волны

Одним из важнейших следствий теории Максвелла является возможность существования электромагнитных полей в виде волн, способных распространяться независимо от их источников (зарядов и токов). Положим в уравнениях (7.1)–(7.4)  $\rho \equiv 0$  и  $\mathbf{j} \equiv 0$ , и воспользуемся материальными уравнениями (7.6), (7.7). Последнее уравнение Максвелла (7.4) примет вид

$$\frac{1}{\mu \mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{B} = \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Продифференцируем обе его части по времени и подставим закон электромагнитной индукции (7.3):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Далее воспользуемся известной из векторного анализа формулой

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}, \quad (7.9)$$

где  $\nabla^2$  — *оператор Лапласа*, в декартовых координатах равный  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ . Учитывая, что в отсутствие зарядов  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ , получим окончательно

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (7.10)$$

где введена величина, имеющая размерность скорости,

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}. \quad (7.11)$$

Уравнение (7.10) называется *волновым*. Уравнению такого же вида подчиняются и остальные характеристики поля  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{H}$ . Оно описывает распространение электромагнитных волн в среде со скоростью  $v$ , определяемой (7.11). Факт распространения электромагнитных полей независимо от создавших их зарядов и токов был впервые экспериментально подтверждён Герцем в 1887 году.

### 2.1. Волны в безграничной среде

Простейшим частным решением волнового уравнения (7.10) в безграничном пространстве является **плоская волна**:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (7.12)$$

Эта волна распространяется вдоль **волнового вектора**  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ . Его модуль связан с длиной волны  $\lambda$  соотношением  $\lambda = 2\pi/k$ .

Заметим, что из условия  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  следует, что волна в *безграничном пространстве* должна быть *поперечной*:  $\mathbf{k} \perp \mathbf{E}_0$ .

Подставив (7.12) в (7.10) нетрудно получить условие, которому должны удовлетворять компоненты волнового вектора плоской волны:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{v^2}. \quad (7.13)$$

Условие (7.13) называют **дисперсионным соотношением** для плоских электромагнитных волн. Отсюда, в частности, следует, что  $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$  — фазовая скорость электромагнитной волны в свободном пространстве:

$$v_{\text{ф}} \equiv \frac{\omega}{k} = v.$$

Поскольку волновое уравнение (7.10) *линейно*, его общее решение в свободном пространстве является линейной комбинацией плоских волн (7.12), удовлетворяющих дисперсионному соотношению (7.13).

### 2.2. Распространение волн в волноводах

Рассмотрим волну, распространяющуюся в вакууме вдоль оси  $z$  по каналу прямоугольного сечения  $a \times b$  с идеально проводящими стенками (простейший **волновод**). Стенки задают граничные условия на поле волны: поскольку электрическое поле внутри идеального проводника отсутствует, на границе имеет место равенство нулю касательной составляющей электрического поля  $\mathbf{E}_\tau = 0$ .

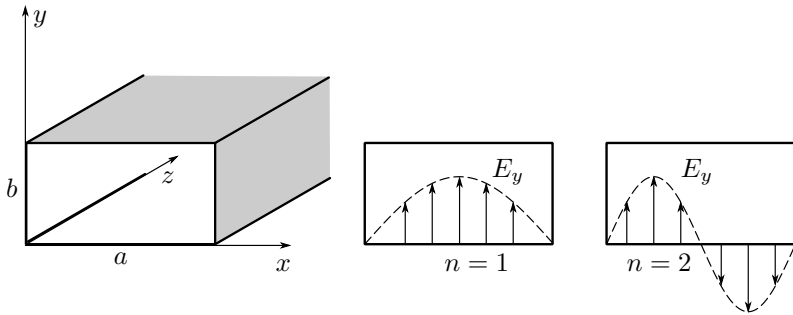


Рис. 7.1. Волновод прямоугольного сечения и примеры распределения электрического поля

Рассмотрим частный случай, когда вектор напряжённости направлен по оси  $y$ :  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{e}_y$ . Граничные условия на проводящих стенках:

$$E_y|_{x=0} = E_y|_{x=a} = 0. \quad (7.14)$$

По аналогии с колебаниями струны с закреплёнными концами, колебания поля вдоль оси  $x$  волновода можно искать в виде *стоячей волны* (напомним, что стоячую волну можно интерпретировать как сумму двух бегущих навстречу волн, отражённых от стенок). При этом вдоль оси  $z$ , где нет ограничений на границах, решение можно искать в виде бегущей волны, как для свободного пространства. Таким образом, одно из решений (7.10):

$$E_y = E_0 \sin(k_x x) \sin(\omega t - k_z z), \quad (7.15)$$

где в силу граничных условий (7.14)

$$k_x = \frac{\pi n}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

При этом компоненты  $k_x$  и  $k_z$  по-прежнему связаны дисперсионным соотношением (7.13):

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2},$$

или

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2}. \quad (7.16)$$

где  $k_0 = \omega/c$  — волновое число в пустом пространстве.

Для бегущих вдоль волновода волн  $k_z$  — действительная величина. Предельный случай  $k_z = 0$  соответствует  $k = k_x$ , что при условии  $n = 1$

даёт *критические* длину и циклическую частоту волны, распространяющейся в вакуумном волноводе:

$$\lambda_{\text{кр}} = 2a, \quad \omega_{\text{кр}} = \frac{\pi c}{a}. \quad (7.17)$$

Если  $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$  и, соответственно,  $\omega < \omega_{\text{кр}}$ , то электромагнитная волна не может распространяться вдоль волновода — при попадании в него она быстро (экспоненциально) затухает.

Вычислим фазовую скорость бегущей волны:

$$v_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k_z} = c \sqrt{\frac{k_x^2}{k_z^2} + 1} = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_{\text{кр}}^2/\omega^2}}. \quad (7.18)$$

Видно, что она всегда *больше* скорости света в вакууме  $c$ . Длина волны в волноводе

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}} \quad (7.19)$$

больше длины волны в вакууме  $\lambda_0$ . При приближении  $\lambda_0$  к критическому значению длина волны в волноводе обращается в бесконечность.

**Замечание.** Скорость передачи энергии или информации определяется *групповой скоростью*, которая всегда меньше  $c$ . Из теории дисперсии волн (см. [1, §14]) следует, что групповая скорость равна  $v_{\text{гр}} = d\omega/dk$ . В частности, для волновода

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk_z} = \frac{k_z c}{\sqrt{k_x^2 + k_z^2}} = \frac{c^2}{v_{\text{ф}}} < c.$$

В отличие от свободного пространства, электромагнитные волны в волноводе не являются полностью поперечными. Нетрудно проверить, что в рассмотренном нами случае отлична от нуля продольная составляющая магнитного поля  $H_z \neq 0$  — такую волну называют *магнитной* ( $H$ -волна). Возможна также ситуация, в которой отлична от нуля проекция  $E_z \neq 0$  (*электрическая*,  $E$ -волна). В общем случае  $H$ -волны поле  $\mathbf{E}$  имеет ненулевую проекцию также и на ось  $x$ , а для компоненты  $E_x$  также существует решение типа стоячей волны (7.15):

$$E_x = E_0 \sin(k_y y) \sin(\omega t - k_z z).$$

Магнитную волну, для которой  $k_x = \pi n/a$  и  $k_y = \pi m/b$ , принято обозначать как  $H_{nm}$  (и аналогично  $E_{nm}$  для  $E$ -волны). Различные режимы распространения волн по волноводу называют **модами** (*англ.* mode). Обычно для передачи энергии по прямоугольному волноводу используется рассмотренная выше мода  $H_{10}$ . При  $a > b$  критическая длина волны моды  $H_{10}$  — максимальная среди всех типов волн в прямоугольном

волноводе, и поэтому ее называют *основной*. Тем самым, для волновода заданного сечения существует диапазон частот, ограниченный снизу критической частотой волны  $H_{10}$  ( $\lambda_{\text{кр}} = 2a$ ). Следующая по возрастанию частоты — мода  $H_{01}$  с  $\lambda_{\text{кр}} = 2b$  или  $H_{20}$  с  $\lambda_{\text{кр}} = a$ , если  $a > 2b$ .

Хотя при частоте, меньшей критической  $\omega < \omega_{\text{кр}}$ , волна не распространяется, колебания поля всё же имеют место. Нетрудно проверить, что волновое уравнение (7.10) с граничными условиями (7.14) имеет экспоненциально затухающее по  $z$  решение:

$$E_y = E_0 \sin(\pi x/a) e^{-\alpha z} \sin(\omega t),$$

где пространственный коэффициент затухания равен (ср. с (7.16))

$$\alpha = ik_z = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_{\text{кр}}^2 - \omega^2}. \quad (7.20)$$

### 3. Квазистационарное приближение

Рассмотрим переменные электромагнитные поля в хорошо проводящих средах. Если характерная частота изменения поля достаточно мала, а проводимость среды  $\sigma$ , наоборот, велика, то можно пренебречь током смещения по сравнению с токами проводимости  $\mathbf{j}$ . Электрическое поле и ток в среде будем считать связанными законом Ома (7.8). Уравнение (7.4) без тока смещения представляет собой закон Ампера для постоянного поля. В дифференциальной форме:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E}. \quad (7.21)$$

Кроме того учтём, что переменное магнитное поле вызывает вихревое электрическое поле согласно закону электромагнитной индукции (7.3).

Пренебрежение током смещения в уравнениях поля формально соответствует пределу  $c \rightarrow \infty$  — бесконечной скорости распространения электромагнитных волн (вне проводника). Такое приближение принято называть **квазистационарным**.

**Замечание.** Уточним область применимости квазистационарного приближения. Во-первых, характерные размеры системы  $a$  должны быть малы по сравнению с расстоянием, на которое электромагнитная волна распространится за характерное время процесса  $T \sim 1/\nu$ . Во-вторых, плотность тока смещения  $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \sim \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}}{T}$  должна быть меньше плотности тока проводимости в среде  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ . Отсюда получаем два условия на частоту изменения поля:

$$\nu \ll \frac{c}{a}, \quad \nu \ll \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}.$$

Последнее условие для металлов обычно выполняется с большим запасом. Например, для медного проводника  $\sigma \sim 6 \cdot 10^7$  См/м, имеем  $\nu \ll 6 \cdot 10^{18}$  Гц.



Первое же ограничение является гораздо более сильным: например, при характерных размерах  $a \sim 1$  м необходимо  $\nu \ll 3 \cdot 10^8$  Гц.

Наконец, ещё одно существенное ограничение обусловлено применимостью закона Ома в виде  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ : частота колебаний поля должна быть много меньше частоты столкновений носителей тока с решёткой (подробнее см. Раздел III).

Выразим уравнения динамики электромагнитных полей в рассматриваемом приближении. Возьмём ротор обеих частей (7.21), считая проводимость  $\sigma$  постоянной, откуда с учётом соотношения (7.9) имеем

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\sigma \operatorname{rot} \mathbf{E}.$$

Используя уравнение электромагнитной индукции (7.3) с учётом материального уравнения (7.7), получим окончательно:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (7.22)$$

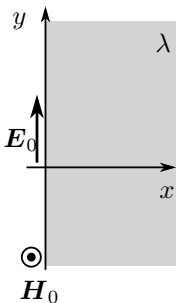
Точно такое же уравнение имеет место и для  $\mathbf{E}$ : возьмём ротор (7.22) и с учётом (7.21) получим

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (7.23)$$

В отличие от случая, рассмотренного в п. 2, полученные уравнения не являются волновыми. Математически они аналогичны *уравнению диффузии* (или *уравнению теплопроводности*). Роль «коэффициента диффузии поля» играет величина

$$D_{\text{э/м}} = \frac{1}{\sigma \mu \mu_0}. \quad (7.24)$$

### 3.1. Скин-эффект



Рассмотрим квазистационарное поле внутри проводящей среды в простейшем плоском случае. Пусть вектор  $\mathbf{E}$  направлен всюду вдоль оси  $y$  (рис. 1) и зависит только от координаты  $x$ , т.е.  $E_x = E_z \equiv 0$ ,  $E_y \equiv E_y(x, t)$ . Тогда уравнение (7.23) для электрического поля будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (7.25)$$

Пусть полупространство  $x > 0$  заполнено проводящей средой с проводимостью  $\sigma$ , а на границе  $x = 0$  задано

Рис. 7.2. Скин-эффект в плоской геометрии

электрическое поле, изменяющееся по гармоническому закону:  $E_y = E_0 e^{i\omega t}$ . Будем искать решение уравнения (7.25) также в виде гармонической функции:

$$E_y(x, t) = E(x) e^{i\omega t},$$

где  $E(x)$  — комплексная амплитуда колебаний поля, зависящая от координаты  $x$ . После подстановки в (7.25) получим уравнение на функцию  $E(x)$ :

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = i\omega\sigma\mu\mu_0 E. \quad (7.26)$$

Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений, решение (7.26) нужно искать в виде

$$E(x) = E_0 e^{\alpha x}, \quad (7.27)$$

где  $\alpha$  — комплексная константа. Подставляя (7.27) в (7.26), получим, что уравнение имеет нетривиальные решения такого вида при

$$\alpha^2 = i\omega\sigma\mu\mu_0. \quad (7.28)$$

Отсюда, поскольку  $\sqrt{i} = \pm e^{i\pi/4} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ ,

$$\alpha = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega\sigma\mu\mu_0}.$$

Для полубесконечной среды ( $z > 0$ ) физический смысл имеет только решение со знаком «—», соответствующее стремлению к нулю амплитуды поля при  $z \rightarrow \infty$ . Окончательное решение уравнения (7.25) для нашего случая:

$$E_y(x, t) = E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)}, \quad (7.29)$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\sigma\mu\mu_0}} = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}. \quad (7.30)$$

Из полученного решения (7.29) видно, что амплитуда переменного электрического поля с частотой  $\omega$  убывает вглубь проводника по экспоненциальному закону. Такой закон спадания характеризуется расстоянием  $\delta$ , на котором амплитуда поля уменьшается в  $e$  раз. Это расстояние называют **глубиной проникновения** поля или **скиновой длиной**. Как показывает (7.30), с ростом частоты  $\omega$  электрическое поле всё более «вытесняется» к поверхности проводника. Это явление называется **скин-эффектом** (от *англ.* skin — кожа).

Поскольку уравнение для магнитного поля (7.22) совершенно аналогично уравнению для напряжённости электрического поля (7.23), то очевидно, что  $H_z(x)$  убывает вглубь проводника точно по такому же закону, как и  $E_y(x)$ . Если поместить проводящий образец в переменное внешнее магнитное поле (например, металлический сердечник в катушку), оно будет проникать в проводник на глубину скин-слоя  $\delta$ , индуцируя в нём переменное электрическое поле, которое в свою очередь вызывает появление токов (токи Фуко). Возникновение токов Фуко сопровождается по закону Джоуля–Ленца диссипацией энергии поля с превращением её в тепло.

Обобщение на неплоский случай представляет собой существенно более сложную задачу, имеющую в общем случае лишь численное решение. Однако выражение для характерной глубины проникновения поля (7.30) остаётся верным по порядку величины для любой формы проводника.

### Литература

1. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — §§13, 15.
2. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2007. — Ч. II, Гл. 8–10; Ч. III, Гл. 6.

## Работа 3.7.1

## Скин-эффект в полном цилиндре

**Цель работы:** исследование проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр.

**В работе используются:** генератор звуковой частоты, соленоид, намотанный на полый цилиндрический каркас из диэлектрика, медный экран в виде трубки, измерительная катушка, амперметр, вольтметр, осциллограф.

В работе изучается скин-эффект в длинном тонкостенном медном цилиндре, помещённом внутрь соленоида.

Теоретически такая задача сложнее, чем рассмотренный в п. 3.1 скин-эффект в полубесконечном пространстве: здесь требуется совместное решение уравнений скин-эффекта (уравнения диффузии поля) (7.22), (7.23) в стенке цилиндра и квазистационарных уравнений поля в его полости.

Пусть цилиндр достаточно длинный, так что в нём можно пренебречь краевыми эффектами. В этом приближении магнитное поле  $\mathbf{H}$  всюду направлено по оси системы (ось  $z$ ), а вихревое электрическое поле  $\mathbf{E}$  будет всюду перпендикулярно радиусу, то есть линии поля образуют соосные окружности (рис. 1). Все величины будем считать колеблющимися по гармоническому закону с некоторой частотой  $\omega$ , задаваемой частотой колебания тока в соленоиде. Тогда для ненулевых компонент поля можно записать

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}, \quad E_\varphi = E(r)e^{i\omega t},$$

где  $H(r)$  и  $E(r)$  — комплексные амплитуды колебаний соответствующих полей, зависящие только от расстояния  $r$  до оси системы. Заметим, что на границе цилиндра должны быть непрерывны касательные к поверхности компоненты как  $\mathbf{E}$ , так и  $\mathbf{B}$ , поэтому функции  $E(r)$  и  $H(r)$  непрерывны во всей исследуемой области.

Пусть длинный полый цилиндр имеет радиус  $a$  и толщину стенки  $h \ll a$ . Последнее условие позволяет для описания поля внутри стенки ограничиться *одномерным* приближением. При этом для полного решения задачи необходимо вычислить и распределение поля *внутри* цилиндра.

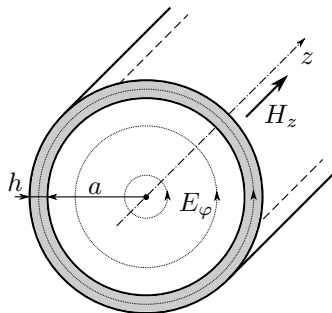


Рис. 1. Электрическое и магнитное в тонкостенном цилиндре

Поскольку внутри цилиндра ток отсутствует, магнитное поле там является однородным (аналогично полю внутри пустого соленоида):  $H_z(r, t) = H_1 e^{i\omega t}$ , где  $H_1 = \text{const}$  — амплитуда поля на внутренней поверхности цилиндра. Для нахождения вихревого электрического поля воспользуемся законом электромагнитной индукции (7.3) в интегральной форме:

$$E_\varphi \cdot 2\pi r = -\mu_0 \pi r^2 \cdot \frac{dH_z}{dt} \quad \rightarrow \quad E(r) = -\frac{1}{2} \mu_0 r \cdot i\omega H_1.$$

Отсюда получим связь амплитуд колебаний электрического и магнитного полей на внутренней ( $r = a$ ) границе цилиндра:

$$E_1 = -\frac{1}{2} i\omega a \mu_0 H_1. \quad (1)$$

Соотношение (1) используем далее как дополнительное граничное условие для задачи о распределении поля внутри стенки.

Поле внутри тонкой стенки цилиндра («экрана») описывается уравнением скин-эффекта (7.25) (уравнением диффузии поля) в плоской геометрии (рис. 2). Поместим начало отсчёта на внешнюю поверхность цилиндра и направим ось  $x$  к оси системы и аналогично (7.26) запишем дифференциальное уравнение для комплексной амплитуды магнитного поля:

$$\frac{d^2 H}{dx^2} = i\omega \sigma \mu_0 H \quad (2)$$

(для медного цилиндра можно положить  $\mu \approx 1$ ).

Граничные условия для (2) зададим в виде

$$H(0) = H_0, \quad H(h) = H_1. \quad (3)$$

Здесь  $H_0$  — амплитуда колебаний магнитного поля на внешней границе цилиндра. Её значение определяется только током в обмотке соленоида, и совпадает с полем внутри соленоида в отсутствие цилиндра. Величина  $H_1$  также поддаётся непосредственному измерению — это амплитуда колебаний однородного поля внутри цилиндра. Поля  $H_0$  и  $H_1$  не являются независимыми — они связаны через решение уравнений поля вне проводника, т. е. внутри «экрана». Эта связь выражена соотношением (1).

Решение (2) ищем в виде

$$H(x) = A e^{\alpha x} + B e^{-\alpha x}, \quad (4)$$

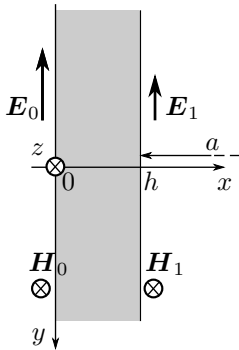


Рис. 2. Поле в стенке цилиндра

где  $A, B$  — определяемые из граничных условий константы,

$$\alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{1+i}{\delta} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{i\pi/4} \quad (5)$$

— один из корней уравнения (7.28),  $\delta$  — глубина скин-слоя (7.30). Заметим, что это решение немного отличается от (7.29): ранее мы использовали только один корень уравнения (7.28), однако здесь мы имеем дело уже не с полупространством, а с *конечной* областью в виде плоского слоя  $h$ , поэтому решение должно содержать оба корня.

Первое условие (3) даёт  $A + B = H_0$ , что позволяет исключить  $A$  из (4):

$$H(x) = H_0 e^{-\alpha x} + 2B \operatorname{sh} \alpha x.$$

Выразим электрическое поле из закона Ампера (7.21). В одномерном случае

$$E(x) = \frac{1}{\sigma} \frac{dH}{dx} = \frac{\alpha}{\sigma} (-H_0 e^{-\alpha x} + 2B \operatorname{ch} \alpha x).$$

Далее положим  $x = h$ , воспользуемся условием (1), и, исключив константу  $B$ , получим после преобразований связь между  $H_0$  и  $H_1$ :

$$H_1 = \frac{H_0}{\operatorname{ch} \alpha h + \frac{1}{2} \alpha a \operatorname{sh}(\alpha h)} \quad (6)$$

Рассмотрим предельные случаи (6).

1. При *малых частотах* толщина скин-слоя превосходит толщину цилиндра  $\delta \gg h$ . Тогда  $|\alpha h| \ll 1$ , поэтому  $\operatorname{ch} \alpha h \approx 1$ ,  $\operatorname{sh} \alpha h \approx \alpha h$  и

$$H_1 \approx \frac{H_0}{1 + i \frac{ah}{\delta^2}}. \quad (7)$$

Заметим, что величина  $ah/\delta^2$  в общем случае не мала, поскольку при  $h \ll a$  возможна ситуация  $h \ll \delta \ll a$ . Отношение модулей амплитуд здесь будет равно

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{ah}{\delta^2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}}. \quad (8)$$

При этом колебания  $H_1$  отстают по фазе от  $H_0$  на угол  $\psi$ , определяемый равенством  $\operatorname{tg} \psi = \frac{ah}{\delta^2}$ .

2. При *достаточно больших частотах* толщина скин-слоя станет меньше толщины стенки:  $\delta \ll h$ . Тогда  $|\alpha h| \gg 1$  и  $|\alpha a| \gg 1$ , а также  $\operatorname{sh}(\alpha h) \approx \operatorname{ch}(\alpha h) \approx \frac{1}{2} e^{\alpha h}$ . Выражение (6) с учётом (5) переходит в

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4}{\alpha a} e^{-\alpha h} = \frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{-\frac{h}{\delta}} e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta}\right)}. \quad (9)$$

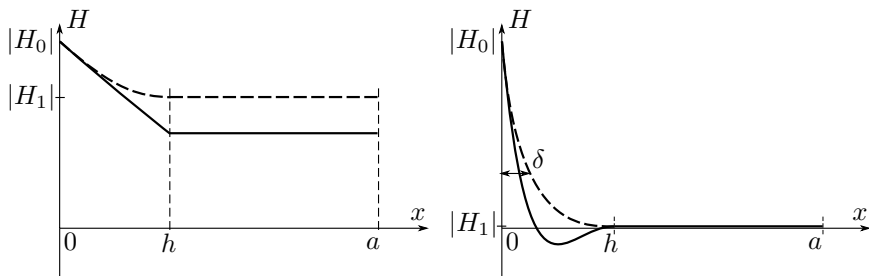


Рис. 3. Распределение амплитуды колебаний магнитного поля (пунктир) и его мгновенного значения при некотором  $t$  (сплошная) в зависимости от расстояния до внешней стенки цилиндра. Слева случай низких частот ( $\delta \gg h$ ), справа — скин-эффект при высоких частотах ( $\delta \ll h$ )

Как видно из формулы (9), в этом пределе поле внутри цилиндра по модулю в  $\frac{2\sqrt{2}\delta}{a}e^{-h/\delta}$  раз меньше, чем снаружи, и кроме того запаздывает по фазе на

$$\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}}. \quad (10)$$

На рис. 3 схематично изображено распределение магнитного поля от координаты в двух рассмотренных предельных случаях.

### Экспериментальная установка

Схема экспериментальной установки для исследования проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр изображена на рис. 3. Переменное магнитное поле создается с помощью соленоида, намотанного на полый цилиндрический каркас 1 из поливинилхлорида, который подключается к генератору звуковой частоты. Внутри соленоида расположен медный цилиндрический экран 2. Для измерения магнитного поля внутри экрана используется измерительная катушка 3. Необходимые параметры соленоида, экрана и измерительной катушки указаны на установке. Действующее значение переменного тока в цепи соленоида измеряется амперметром  $A$ , а действующее значение напряжения на измерительной катушке измеряет вольтметр  $V$ . Для измерения сдвига фаз между током в цепи соленоида и напряжением на измерительной катушке используется двухканальный осциллограф. На вход одного канала подается напряжение с резистора  $R$ , которое пропорционально току, а на вход второго канала — напряжение с измерительной катушки.

**Измерение отношения амплитуд магнитного поля внутри и вне экрана.** С помощью вольтметра  $V$  измеряется действующее значение ЭДС индукции, которая возникает в измерительной катушке, находящейся в переменном магнитном поле  $H_1e^{i\omega t}$ . ЭДС индукции в измери-

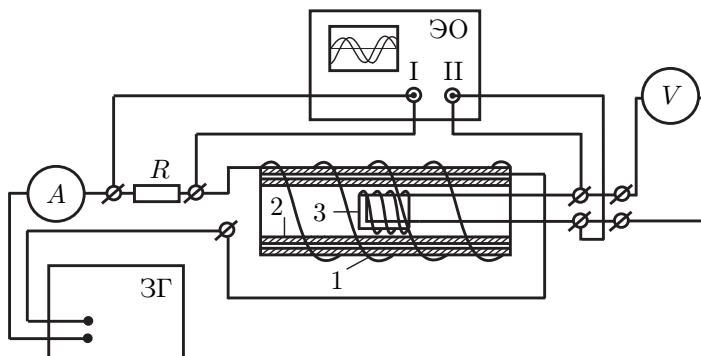


Рис. 4. Экспериментальная установка для изучения скин-эффекта

тельной катушке равна

$$\mathcal{E} = -SN \frac{dB_1(t)}{dt} = -i\omega\mu_0 SN H_1 e^{i\omega t},$$

где  $SN$  — произведение площади витка на число витков измерительной катушки. Показания вольтметра, измеряющего это напряжение:

$$V = \frac{SN\omega}{\sqrt{2}} \mu_0 |H_1|.$$

Видно, что модуль амплитуды магнитного поля внутри экрана  $|H_1|$  пропорционален  $V$  и обратно пропорционален частоте сигнала  $\nu = \omega/2\pi$ :

$$|H_1| \propto \frac{V}{\nu}.$$

При этом поле вне экрана  $|H_0|$  пропорционально току  $I$  в цепи соленоида, измеряемому амперметром  $A$ :

$$|H_0| \propto I.$$

Следовательно,

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \text{const} \cdot \frac{V}{\nu I}. \quad (11)$$

Таким образом, отношение амплитуд магнитных полей снаружи и вне экрана (коэффициент ослабления) может быть измерено по отношению  $V/\nu I$  при разных частотах. Неизвестная константа в соотношении (11) может быть определена по измерениям при малых частотах  $\nu \rightarrow 0$ , когда согласно (8)  $|H_1|/|H_0| \rightarrow 1$ .



**Определение проводимости материала экрана.** В установке в качестве экрана используется медная труба промышленного производства. Технология изготовления труб оказывает заметное влияние на электропроводимость. Из-за наличия примесей проводимость меди нашей трубы отличается от табличного значения (в меньшую сторону). Для определения  $\sigma$  нашего экрана предлагается использовать частотную зависимость (10) фазового сдвига между магнитными полями внутри и вне экрана при высоких частотах. Как видно из выражения (10), в области больших частот  $\omega \gg 1/(h^2\sigma\mu_0)$  зависимость  $\psi(\sqrt{\omega})$  аппроксимируется прямой проходящей через точку  $\psi(0) = \pi/4$ . По наклону этой прямой можно вычислить проводимость материала экрана.

Процедура измерения разности фаз с помощью осциллографа подробно описана в работе 3.2.1.

Заметим, что на схеме, изображённой на рис. 3, на входной канал II осциллографа подаётся сигнал с измерительной катушки, который пропорционален не полю внутри экрана, а его *производной* по времени, а это означает, что появляется дополнительный сдвиг по фазе на  $\pi/2$ . Поэтому измеренный по экрану осциллографа сдвиг по фазе между двумя синусоидами будет на  $\pi/2$  больше фазового сдвига между магнитными полями вне и внутри экрана.

## ЗАДАНИЕ

1. По известным параметрам установки, приняв проводимость меди для оценки равной  $\sigma \sim 5 \cdot 10^7$  См/м, рассчитайте частоту  $\nu_h$  [Гц], соответствующую равенству  $h = \delta$  толщины стенок экрана скин-длине.
2. В области низких частот — от  $\sim 0,01\nu_h$  до  $0,1\nu_h$  — получите зависимость отношения  $\xi = V/\nu I$  от частоты  $\nu$  (всего не менее 10 точек). Согласно (11) величина  $\xi$  прямо пропорциональна коэффициенту ослабления магнитного поля внутри экрана относительно поля снаружи:

$$\xi = \xi_0 |H_1|/|H_0|.$$

3. Исследуйте зависимость величины  $\xi$  и фазового сдвига  $\psi$  от частоты  $\nu$  при высоких частотах в диапазоне от  $0,2\nu_h$  до  $\sim 20\nu_h$  (всего не менее 20 точек).

### Обработка результатов

4. По результатам измерений п. 2 (в области низких частот) постройте график в координатах  $1/\xi^2 = f(\nu^2)$ . Убедитесь в том, что зависимость линейна.

Экстраполируя зависимость к точке  $\nu = 0$ , соответствующей  $|H_1|/|H_0| = 1$ , определите величину  $\xi_0$  — коэффициент пропорцио-

нальности между  $\xi = V/\nu I$  и коэффициентом ослабления магнитного поля  $|H_1|/|H_0|$ .

По угловому коэффициенту зависимости рассчитайте проводимость меди  $\sigma$ , используя (6).

5. Частотную зависимость фазового сдвига, измеренную в п. 3, изобразите на графике в координатах  $\psi(\sqrt{\nu})$  (не забудьте учесть дополнительный сдвиг фаз  $\pi/2!$ ). Через точку ( $\psi = \pi/4$ ,  $\nu = 0$ ) проведите прямую, которая будет касаться экспериментальной кривой при больших частотах. По наклону этой прямой вычислите значение проводимости  $\sigma$  материала экрана (см. (10)). Сравните с результатом предыдущего пункта и с табличным значением  $\sigma$  для меди.
6. Используя ранее вычисленные значения коэффициента  $\xi_0$ , рассчитайте экспериментальные значения коэффициентов ослабления поля  $|H_1|/|H_0|$  для всех измерений пп. 2 и 3. Пользуясь полученным в п. 5 коэффициентом проводимости  $\sigma$ , рассчитайте теоретическую зависимость по общей формуле (6) (учтите соотношения для гиперболических функций комплексного аргумента:

$$\operatorname{ch}(x + iy) = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y,$$

$$\operatorname{sh}(x + iy) = \operatorname{sh} x \cos y + i \operatorname{ch} x \sin y$$

Изобразите на графике теоретические и экспериментальные результаты для зависимости  $\frac{|H_1|}{|H_0|}$  от  $\nu$  в логарифмическом масштабе по оси абсцисс. Проанализируйте совпадение эксперимента и теории.

### Контрольные вопросы

1. Воспользовавшись экспериментальным (или табличным) значением проводимости меди, вычислите глубину проникновения поля  $\delta$  при 50 Гц и 50 кГц. Как изменится ответ для материалов с меньшей проводимостью?
2. Получите уравнение, описывающее динамику низкочастотного электромагнитного поля в проводящей среде.
3. Какого рода уравнениями описывается скин-эффект? Какие еще физические процессы подчиняются аналогичному уравнению?
4. Используя параметры установки, оцените диапазон частот, при которых использованная теория скин-эффекта применима.
5. Хорошо проводящий медный цилиндр радиусом  $r = 10$  см помещают в постоянное внешнее магнитное поле (параллельно силовым линиям). Оцените время, за которое магнитное поле полностью проникнет в образец.

6. Как наличие медной тонкостенной трубки внутри соленоида влияет на его коэффициент самоиндукции? Проанализируйте случаи малых и больших частот.
7. Рассчитайте мощность джоулевых потерь в медной трубке из-за токов Фуко. Рассмотрите случаи малых и больших частот.

### Литература

1. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М. : МФТИ, 2011. — Гл. 15.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М. : Физматлит, 2015. — § 144.
3. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. — Т. 1. — М. : Физматлит, 2007. — Ч. II, § 8.4.

### Работа 3.7.2

## Электромагнитные волны в волноводе

**Цель работы:** ознакомление с особенностями распространения электромагнитных волн в волноводе, аппаратурой и методами измерения основных характеристик протекающих при этом процессов.

**В работе используются:** генератор сигналов сверхвысокой частоты, измерительная линия, усилитель, заглушка, отрезок волновода с поглощающей нагрузкой, отрезки волноводов различных сечений, детекторная головка.

Передача энергии электромагнитных колебаний низкой частоты, например, 50 Гц, не представляет проблем и делается широко известным способом: по проводам. На более высоких частотах (до 300 МГц) эта задача решается с помощью двухпроводных линий и коаксиальных кабелей. На ещё более высоких частотах (до 300 ГГц) при колебаниях с длинами волн (в вакууме) от 1 м до 1 мм (этот диапазон называется *диапазоном сверхвысоких частот* или, сокращённо, СВЧ) передача энергии с помощью двухпроводной линии или коаксиальных кабелей становится малоэффективной из-за больших потерь: резко возрастает сопротивление проводов из-за *скин-эффекта* — вытеснения тока на поверхность, а в двухпроводной линии, кроме того, потери растут вследствие излучения энергии в окружающее пространство.

В СВЧ-диапазоне энергия передаётся с помощью металлических труб, называемых волноводами (в миллиметровом диапазоне длин волн волноводы могут быть сделаны и из диэлектрика). Электромагнитные

волны могут распространяться по металлическим трубам любого профиля, но из технологических соображений сечения волноводов делаются либо круглыми, либо прямоугольными.

Чтобы найти структуру электромагнитного поля в волноводе, нужно решить *волновое уравнение* с соответствующими граничными условиями. Простейший пример такого решения, относящийся к волноводу прямоугольного сечения с идеально проводящими стенками, рассмотрен во Введении к разделу.

Если в волноводе имеется препятствие или нерегулярность, распространяющаяся по оси  $z$  волна частично или полностью отражается от него. При сложении отражённой и падающей волн образуется *стоячая волна* с узлами и пучностями. Расстояние между узлами  $\Delta z_m$  (или между пучностями) соответствует, как известно, половине длины волны:

$$\Delta z_m = \frac{\pi}{k_z} = \frac{\lambda_B}{2}. \quad (1)$$

Измерив это расстояние, можно рассчитать фазовую скорость СВЧ-сигнала в волноводе (см. (7.18) и (7.19)).

Пусть отражённая волна имеет амплитуду  $rE_0$ , где  $E_0$  — амплитуда падающей волны,  $r$  — коэффициент отражения по амплитуде. Отражённая и падающая волны интерферируют и образуют в волноводе *стоячую волну* вдоль оси волновода  $z$ . Максимальное (в пучности) и минимальное (в узле) значения амплитуды поля равны соответственно

$$E_{\max} = E_0(1 + r), \quad E_{\min} = E_0(1 - r).$$

Отношение  $K = E_{\max}/E_{\min}$  называется **коэффициентом стоячей волны** (к.с.в.). Он связан с коэффициентом отражения от препятствия по амплитуде соотношением

$$r = \frac{E_{\max} - E_{\min}}{E_{\max} + E_{\min}} = \frac{K - 1}{K + 1}. \quad (2)$$

В случае полного отражения (металлическая заглушка)  $r = 1$  и  $K \rightarrow \infty$ . Если же на торце волновода вставлено вещество, полностью поглощающее СВЧ-излучение (*согласованная нагрузка*), то  $r = 0$  и  $K = 1$ .

### **А. Волны в волноводе при частоте выше критической**

Для определения коэффициента стоячей волны используют измерительную линию — отрезок волновода с продольной щелью длиной в несколько полуволн. В щели располагается зонд — металлический штырь (антенна), реагирующий на электрическое поле в волноводе. Напряжение высокой частоты, наводимое на зонд, детектируется, усиливается и подаётся на микровольтметр. Зонд может перемещаться вдоль

линии, что позволяет исследовать распределение электрического поля в волноводе.

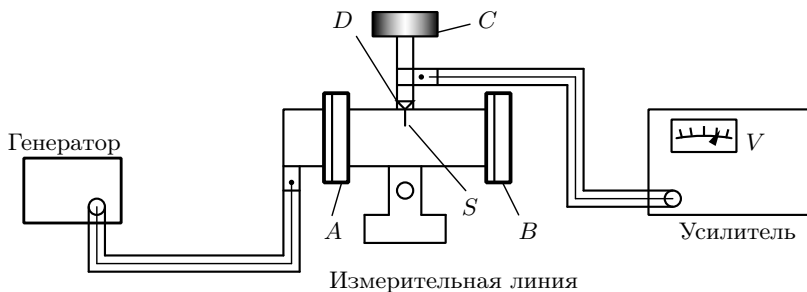


Рис. 1. Схема для исследования структуры волн СВЧ

Схема для исследования структуры волн в волноводе при частоте выше критической представлена на рис. 1. Модулированный сигнал от высокочастотного генератора (цуги с частотой повторения 1 кГц) поступает на вход *A* измерительной линии, вдоль которой перемещается зонд *S*. Высокочастотный сигнал с зонда поступает на кристаллический детектор *D*. С нагрузки детектора (с *RC*-цепочки) снимается огибающая высокочастотного сигнала и подаётся на усилитель низкой частоты. Величина сигнала регистрируется вольтметром *V* (встроен в усилитель). Для согласования зонда (как антенны) со входом усилителя предусмотрена специальная ручка регулировки измерительной линии *C*. Как правило, они согласованы, и в настройке нет необходимости.

Устройство детекторной головки (зонда), установленной на измерительной линии, таково, что отклик вольтметра *U* на величину напряжённости электрического поля *E* в волноводе является степенной функцией:

$$U \propto E^n,$$

где показатель степени *n* зависит от величины сигнала: при малых сигналах детектирование *квадратичное* ( $n = 2$ ), а при больших — *линейное* ( $n = 1$ ).

Меняя нагрузку на выходе измерительной линии (ручка *B* на рис. 1) и сравнивая максимальное и минимальное показания вольтметра, можно рассчитать коэффициент стоячей волны *K* и коэффициент отражения *r*.

## Б. Колебания поля в волноводе при частоте ниже критической

Для исследования затухания волн в волноводе при частоте ниже критической используются те же генератор, усилитель, измерительная линия и дополнительный набор волноводов с отдельной детекторной головкой *G* (рис. 2). Дополнительный набор начинается и заканчивается

волноводами переменного сечения I и II. Между ними можно разместить 1, 2 или 3 одинаковых отрезка с постоянным сечением. В такой системе волны с частотами меньше критической экспоненциально затухают.

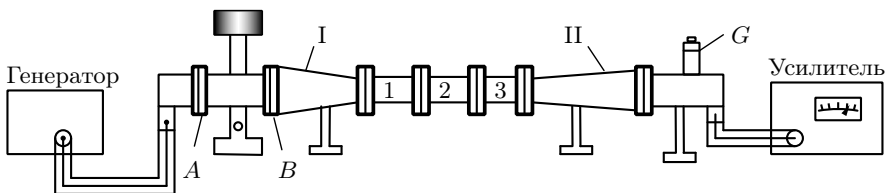


Рис. 2. Схема для исследования затухания

Амплитуда сигнала на выходе из волновода  $E$  убывает с пройденным расстоянием  $z$  как  $E = E_0 e^{-\alpha z}$ , где  $E_0$  — амплитуда входного сигнала. Для мощности (интенсивности), пропорциональной квадрату амплитуды, имеем  $W = W_0 e^{-2\alpha z}$  или  $W = W_0 10^{-\beta z}$ , где  $\alpha = \beta \frac{\ln 10}{2} \approx 1,15\beta$ . Ослабление интенсивности сигнала  $\gamma = \beta z$  принято измерять в *децибелах* (дБ):

$$\gamma [\text{дБ}] = 10 \lg \frac{W_0}{W},$$

то есть 10 дБ соответствует уменьшению интенсивности (мощности) в 10 раз. Величину  $\alpha z = \ln \frac{E_0}{E}$  также иногда измеряют в *неперах* (Нп): ослабление на 1 Нп соответствует уменьшению амплитуды в  $e$  раз. Нетрудно видеть, что  $1 \text{ Нп} = \frac{20}{\ln 10} \text{ дБ} \approx 8,69 \text{ дБ}$ .

Если при уменьшении количества вставок волновода поддерживать интенсивность выходного сигнала постоянной, то входной сигнал следует ослабить. Ослабление  $\beta z$  зависит от длины волновода  $z$  и измеряется по шкале генератора в децибелах. Таким образом в эксперименте определяется коэффициент  $\beta$ . Его можно сравнить с коэффициентом  $\alpha$ , рассчитанным теоретически. В закритическом волноводе при квадратичном детектировании интенсивность сигнала падает по закону  $U \propto E^2 \propto e^{-2\alpha z}$ , где  $\alpha$  — коэффициент затухания (7.20):

$$\alpha = \frac{1}{c} \sqrt{\omega_{\text{кр}}^2 - \omega^2} = \frac{\pi}{a} \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda_0} \right)^2}. \quad (3)$$

Здесь  $\lambda_0 = c/\nu_0$  — длина волны в свободном пространстве при рабочей частоте  $\nu_0$ , и  $\lambda_{\text{кр}} = 2a$  — критическая длина волны,  $a$  — размер широкой стенки волновода-вставки ( $\nu_0$  и  $a$  указаны в техническом описании установки).

## ЗАДАНИЕ

В работе предлагается при частоте выше критической исследовать стоячую волну в измерительной линии (рис. 1): измерив распределение сигнала вдоль волновода, рассчитать фазовую скорость; затем, меняя нагрузку на выходе волновода (заглушка, открытый конец или поглотитель), определить коэффициенты отражения волн  $r$ . При частоте ниже критической предлагается определить коэффициент затухания волны  $\beta$  в сборном волноводе (рис. 2) и сравнить с его теоретическим значением.

### А. Исследование структуры волн при частоте выше критической

1. Проведите подготовку приборов к работе по техническому описанию (ТО), лежащему на рабочем столе. Ознакомьтесь с расположением и назначением ручек регулировки приборов.

#### Внимание!

Мощность сигнала, создаваемого с генератора, невелика, поэтому излучение не представляет опасности для здоровья человека. Тем не менее, заглядывать в открытый волновод при включённом генераторе не рекомендуется!

### I. Определение длины волны СВЧ-сигнала в волноводе

2. Установите рабочую частоту  $\nu_0$  (см. техническое описание установки); перемещая зонд, настройтесь на пучность стоячей волны. Если при этом показания вольтметра превышают 1 мВ, следует с помощью аттенуатора ослабить сигнал, идущий от генератора (при напряжениях  $\geq 1$  мВ меняется характер детектирования).
3. Подберите чувствительность вольтметра так, чтобы в максимуме стрелка отклонялась почти на всю шкалу. Используя весь возможный диапазон перемещения зонда вдоль измерительной линии, измерьте зависимость показаний вольтметра  $U$  от положения зонда  $z$  (100 делений винта у выхода измерительной линии соответствуют 1 мм). Менять чувствительность вольтметра в течение этой серии нецелесообразно.
4. Постройте график  $U(z)$  и определите по нему длину волны  $\lambda_{\text{в}}$  в волноводе. Сравните результат с теоретическим расчётом. Рассчитайте фазовую скорость  $v_{\text{ф}}$  волн в волноводе.

### II. Определение коэффициентов отражения

5. Снимите металлическую заглушку с фланца измерительной линии. Перемещая зонд, измерьте максимальное ( $U_{\text{max}} < 1$  мВ) и минимальное напряжения в волне.

6. Наденьте на выходной фланец измерительной линии отрезок волновода с поглощающей нагрузкой и снова измерьте максимальное и минимальное напряжения.
7. Считая детектирование квадратичным, определите коэффициенты отражения  $r$  для открытого и закрытого волновода и для волновода с поглощающей нагрузкой. Объясните полученные результаты.

#### Б. Исследование затухания волн при частоте ниже критической

8. Соберите схему согласно рис. 2 и настройте её по техническому описанию (ТО).
9. Измерьте длину каждой волноводной секции.
10. Используя размер  $a$  широкой стенки волновода, указанный на установке, рассчитайте критическую частоту волновода  $\nu_{\text{кр}} = \omega_{\text{кр}}/2\pi$ . Убедитесь, что рабочая частота  $\nu_0$  меньше критической.

### III. Измерение коэффициента затухания

11. Настройте детекторную головку на максимальную чувствительность согласно ТО, расположенному на установке (в этом упражнении ограничение  $U < 1$  мВ необязательно). Установите минимальное затухание ( $\gamma = 20$  дБ) сигнала от генератора и подберите чувствительность вольтметра так, чтобы стрелка отклонялась почти на всю шкалу; зарегистрируйте величины  $U$  и  $\gamma$ .
12. Последовательно уменьшая число промежуточных секций от трёх до нуля, каждый раз подбирайте такое ослабление сигнала от генератора, при котором показания вольтметра усилителя остаются неизменными.
13. Постройте график в функции  $\gamma(z)$ , где  $z$  — полная длина подключенных волноводных секций. По наклону прямой рассчитайте коэффициент затухания  $\beta = \frac{\Delta\gamma}{\Delta z}$  в единицах [дБ/см] и сравните результат с теоретическим расчётом (3).

### Контрольные вопросы

1. Является ли электромагнитная волна в волноводе поперечной?
2. Какие компоненты электрического и магнитного полей отличны от нуля для основной моды  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе?
3. Найдите распределение магнитного поля внутри волновода для моды  $H_{10}$ .
4. Найдите минимальную частоту для  $E$ -волны в прямоугольном волноводе (волны с ненулевой продольной компонентой  $E_z \neq 0$ ).



5. Найдите критическую частоту и длину волны для моды  $H_{nm}$  в прямоугольном волноводе.
6. Используя выражения для групповой и фазовой скоростей  $v_{\text{гр}} = d\omega/dk_z$ ,  $v_{\text{ф}} = \omega/k_z$ , покажите, что в волноводе справедливо  $v_{\text{гр}}v_{\text{ф}} = c^2$ .
7. Как направлен вектор Пойнтинга в волноводе с идеально проводящими стенками?

### Литература

1. *Кириченко Н.А.* Электричество и магнетизм. — М.: МФТИ, 2011. — § 13.2.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. — Т. III. Электричество. — М.: Физматлит, 2015. — §§ 139, 140.
3. *Кингсеп А.С., Локшин Г.Р., Ольхов О.А.* Основы физики. — Т. 1. — М.: Физматлит, 2007. — Ч. III, § 6.7.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Обработка экспериментальных данных: сводка результатов

#### Основные понятия

Выборочное среднее:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

где  $\{x_i\}$  — результаты  $n$  однотипных измерений одной и той же величины.

Выборочная дисперсия:

$$s_n^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2,$$

$$s_n^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2.$$

Несмещенная оценка дисперсии:

$$s_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2.$$

Несмещенную оценку необходимо применять при малых  $n$  ( $n \lesssim 10$ ).

Погрешность среднего значения:

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}},$$

где  $n$  — число измерений,  $\sigma_x$  — оценка среднеквадратичного отклонения результатов отдельных измерений.

Сложение случайной и систематической погрешностей:

$$\sigma_{\text{полн}}^2 \leq \sqrt{\Delta_{\text{сист}}^2 + \sigma_{\text{случ}}^2},$$

где  $\sigma_{\text{сист}}$  — полученная из опыта оценка случайной (среднеквадратичной) погрешности,  $\Delta_{\text{сист}}$  — оценка максимальной величины систематической погрешности.

### Случайные распределения

**Нормальное распределение.** Величина, являющаяся результатом суммы большого числа *независимых* случайных слагаемых, имеющих конечные среднее и дисперсию, подчиняется *нормальному распределению (распределению Гаусса)*.

Плотность вероятности нормального распределения:

$$w_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right).$$

Параметры распределения:  $\bar{x}$  — среднее значение (*математическое ожидание*),  $\sigma^2$  — дисперсия.

Вероятность нормально распределённой величине попасть в интервал  $x \in (\bar{x} - \delta; \bar{x} + \delta)$ :

$$P(|x - \bar{x}| < \delta) = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \operatorname{erf}\left(\frac{\delta}{\sqrt{2}\sigma}\right),$$

где  $\operatorname{erf}(x)$  — *интеграл ошибок*:

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-x^2} dx.$$

Вероятности попасть в интервал  $x \in (\bar{x} - \delta; \bar{x} + \delta)$  представлены в табл. 1. Графики зависимостей нормального распределения и интеграла ошибок приведены на рис. ??.

$x - \bar{x}$	Вероятность
$\pm\sigma$	0,68
$\pm 2\sigma$	0,95
$\pm 3\sigma$	0,9973
$\pm 4\sigma$	$1 - 6,3 \cdot 10^{-5}$
$\pm 5\sigma$	$1 - 5,7 \cdot 10^{-7}$

**Распределение Пуассона.** Равномерные во времени дискретные *независимые* случайные события подчиняются *распределению Пуассона*:

$$w(n) = \frac{\nu^n}{n!} e^{-\nu}$$

— вероятность обнаружить  $n$  событий в течение некоторого фиксированного времени наблюдений. Здесь  $\nu$  — параметр распределения, имеющий смысл среднего числа событий:

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n w(n) = \nu.$$

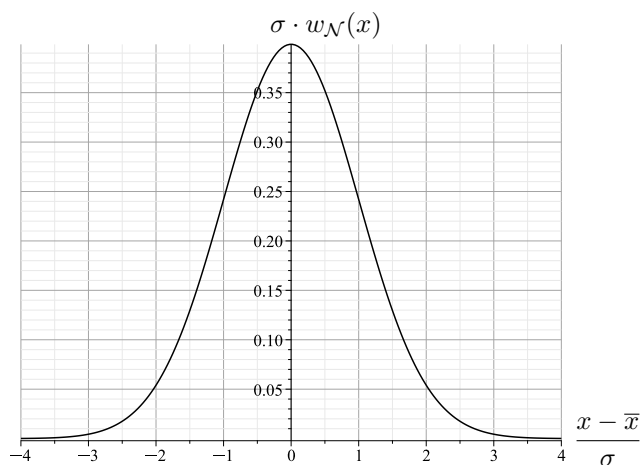


Рис. 1. Плотность нормального распределения

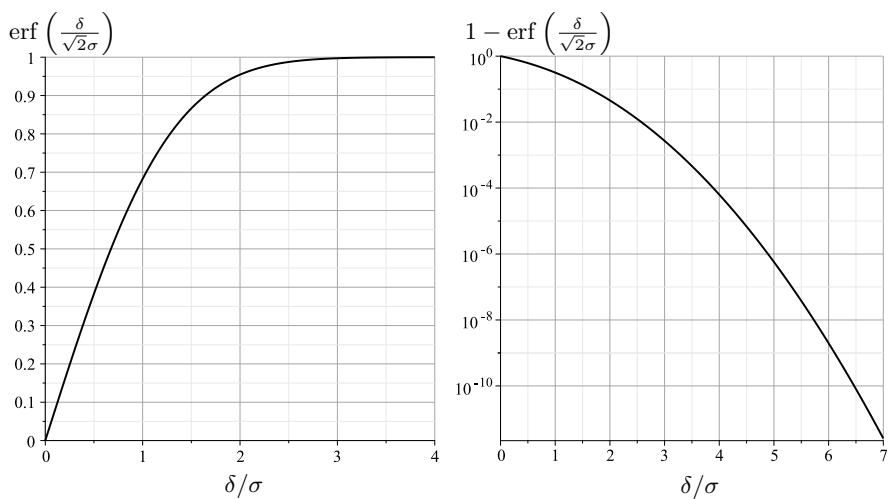


Рис. 2. Вероятность отклонения от среднего при нормальном распределении: слева вероятность попасть в интервал  $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ , справа — вероятность выйти за его пределы (в логарифмическом масштабе)

Дисперсия распределения Пуассона:

$$\sigma^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \bar{n})^2 w(n) = \bar{n}.$$

В пределе большого числа событий ( $\bar{n} \gg 1$ ) распределение Пуассона стремится к нормальному со средним  $\bar{n}$  и дисперсией  $\sigma^2 = \bar{n}$ .

### Вычисление косвенных погрешностей

Пусть величина  $u$  вычисляется косвенно по известной функции  $u = f(x, y, \dots)$ , где  $x, y, \dots$  — *независимые* случайные величины, полученные в результате прямых измерений.

Общая формула вычисления погрешности:

$$\sigma_u = \sqrt{(f'_x \sigma_x)^2 + (f'_y \sigma_y)^2 + \dots},$$

где  $f'_x \equiv \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $f'_y \equiv \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\dots$  — частные производные функции  $f$ , вычисленные в точке  $(x, y, \dots)$ , а  $\sigma_x, \sigma_y, \dots$  — среднеквадратичные погрешности измерений.

Формула применима для независимых измерений и при малых относительных отклонениях исследуемой величины ( $\sigma_u/u \ll 1$ ). Ниже приведены её частные случаи.

Погрешность суммы/разности:

$$u = x \pm y \quad \rightarrow \quad \sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Погрешность линейной комбинации:

$$u = \sum a_i x_i \quad \rightarrow \quad \sigma_u = \sqrt{\sum (a_i \sigma_{x_i})^2}.$$

Погрешность произведения:

$$u = xy \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma_u}{u} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Погрешность частного:

$$u = \frac{x}{y} \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma_u}{u} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Погрешность степенной функции:

$$u = x^\alpha y^\beta \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma_u}{u} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\beta \frac{\sigma_y}{y}\right)^2}.$$

Погрешность логарифма:

$$u = \ln x \quad \rightarrow \quad \sigma_u = \frac{\sigma_x}{x}$$

### Оценка параметров зависимостей

Пусть теоретическая модель предсказывает функциональную зависимость величин  $y$  и  $x$  вида

$$y = f(x; \theta),$$

где  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)$  — некоторый набор из  $p$  параметров модели. Задача об оценке параметров заключается в нахождении значений  $(\theta_1, \theta_2, \dots)$ , при которых данная теоретическая зависимость наилучшим образом «ложится» на имеющийся набор  $n$  экспериментальных точек  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1 \dots n$ , минимизируя некоторым образом набор отклонений от теории

$$\Delta y_i \equiv y_i - f(x_i; \theta) \rightarrow \min.$$

**Метод наименьших квадратов.** Метод наименьших квадратов (МНК) заключается в поиске набора параметров  $\theta$ , минимизирующего сумму квадратов отклонений по  $y$ :

$$S(\theta) = \sum_{i=1}^n \Delta y_i^2 \rightarrow \min.$$

Применение метода обосновано при условии, что

- измерения *независимы*,
- все погрешности в основном *случайны* и распределены *нормально*,
- погрешность по  $x$  мала:  $\frac{\sigma_x}{x} \ll \frac{\sigma_y}{y}$ ,
- все погрешности по  $y$  *одинаковы*:  $\sigma_{y_i} = \sigma_y = \text{const}$ .

Аппроксимация по МНК для линейной зависимости  $y = kx + b$ :

$$k = \frac{D_{xy}}{D_{xx}}, \quad b = \langle y \rangle - k \langle x \rangle, \quad (1)$$

где обозначено

$$D_{xy} = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle, \quad D_{xx} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2.$$

Погрешность аппроксимации  $y = kx + b$ :

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n-2} \left( \frac{D_{yy}}{D_{xx}} - k^2 \right)}, \quad \sigma_b = \sigma_k \sqrt{\langle x^2 \rangle}.$$

Аппроксимация по МНК для линейной зависимости  $y = kx$ :

$$k = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x^2 \rangle}.$$

Погрешность аппроксимации  $y = kx$ :

$$\sigma_k = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left( \frac{\langle y^2 \rangle}{\langle x^2 \rangle} - k^2 \right)}.$$

Аппроксимация *нелинейной* зависимости часто может быть произведена по формулам линейной аппроксимации с помощью замены переменных. Например,

$$y = kx^2 \quad \rightarrow \quad y = kz, \quad z = x^2.$$

В общем случае минимизация суммы  $S(\theta)$  может быть выполнена численными методами.

**Метод хи-квадрат.** Суммой *хи-квадрат* называют сумму квадратов отклонений  $\Delta y_i$  от некоторой теоретической зависимости  $y = f(x; \theta)$ , нормированных на соответствующие погрешности  $\sigma_{yi}$ :

$$\chi_n^2 \equiv \sum_{i=1}^n \left( \frac{\Delta y_i}{\sigma_{yi}} \right)^2. \quad (2)$$

Метод *минимума хи-квадрат* (*метод Пирсона*) заключается в поиске набора параметров  $\theta$ , минимизирующих сумму (2):

$$\chi^2(\theta) \rightarrow \min.$$

По сравнению с МНК данный метод позволяет учесть, что погрешности измерений различны:  $\sigma_{yi} \neq \text{const}$ . При этом величины по-прежнему должны быть *независимыми, нормально распределенными*, а погрешность по  $x$  мала.

Аппроксимация по хи-квадрат для линейной зависимости  $y = kx + b$ : формулы аналогичны (1):

$$k = \frac{\langle xy \rangle' - \langle x \rangle' \langle y \rangle'}{\langle x^2 \rangle' - \langle x \rangle'^2}, \quad b = \langle y \rangle' - k \langle x \rangle',$$

где под знаком  $\langle \dots \rangle'$  необходимо понимать *взвешенное среднее* с весами  $1/\sigma_{yi}^2$ :

$$\langle x \rangle' = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}, \quad w_i = \frac{1}{\sigma_{yi}^2}.$$

Аппроксимация произвольной зависимости проводится численно. Метод реализован во многих пакетах обработки данных.

Погрешность параметра аппроксимации  $\sigma_\theta$  может быть определена из того факта, что функция  $\chi^2(\theta)$  вблизи максимума имеет вид параболы:

$$\chi^2 \approx \frac{(\theta - \theta_0)^2}{\sigma_\theta^2} + \text{const},$$

где  $\theta_0$  — параметр, минимизирующий  $\chi^2$ . Таким образом, отклонение значения  $\chi^2$  на единицу соответствует вариации параметра  $\theta$  на величину его среднеквадратичной погрешности  $\sigma_\theta$ :

$$\chi^2(\theta_0 \pm \sigma_\theta) - \chi^2(\theta_0) = 1.$$

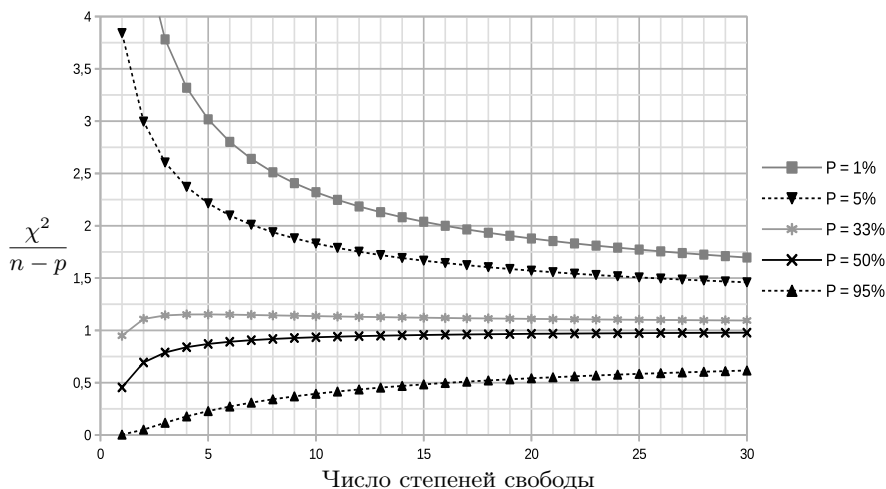


Рис. 3. Проверка качества аппроксимации с помощью метода хи-квадрат

**Проверка качества аппроксимации:** метод хи-квадрат позволяет проверить, насколько экспериментальные данные описываются моделью  $y = f(x; \theta)$ . При фиксированных параметрах  $\theta$  сумма хи-квадрат является случайной величиной с математическим ожиданием (см. [2, 3])

$$\overline{\chi_n^2} = n - p,$$

где  $p$  — число параметров модели ( $p = 2$  для  $y = kx + b$ ),  $n - p$  — число степеней свободы при решении задачи о максимизации  $\chi^2$ .

Существенное отклонение от единицы величины

$$\alpha = \frac{\chi^2}{n - p}$$

свидетельствует о плохом качестве аппроксимации или о неправильной оценке погрешностей. Большие значения ( $\alpha > 1,5 \div 2$ ) — признак либо *плохого совпадения теоретической модели и эксперимента*, либо *заниженной оценки погрешностей*. Малые значения ( $\alpha < 0,5$ ) свидетельствуют, как правило, о *завышенных* величинах погрешностей.

Если измеряемые величины распределены нормально, распределение суммы  $\chi^2$  называют *распределением хи-квадрат* с  $n - p$  степенями свободы. Соответствующая функция встроена во все основные статистические пакеты. На рис. ?? представлен график, по которому можно оценить качество аппроксимации. Например, если полученное на опыте значение  $\chi^2/(n - p)$  лежит выше уровня  $P = 5\%$  на графике, то лишь с вероятностью 5% отклонение от теории можно объяснить случайными факторами.



### Литература

1. *Попов П.В., Нозик А.А.* Обработка результатов учебного эксперимента. — М. : МФТИ, 2019.
2. *Худсон Д.* Статистика для физиков.
3. *Идье В., Драйард Д., Джеймс Ф., Рус М., Садуле Б.* Статистические методы в экспериментальной физике.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

### Основные сведения о комплексных числах

#### Различные представления комплексных чисел

*Алгебраическая форма* комплексного числа:

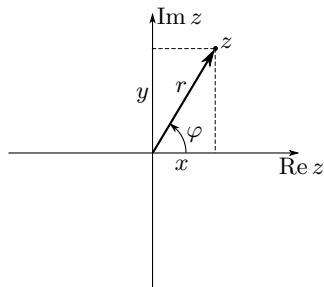
$$z = x + iy,$$

где  $x$  и  $y$  — действительные числа,  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица, то есть число, являющееся корнем уравнения  $i^2 = -1$ . Число  $x$  называется действительной частью комплексного числа  $z$ , число  $y$  — его мнимой частью. Используются обозначения:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Если  $\operatorname{Im} z = 0$ , то  $z = x$  — действительное число, если  $\operatorname{Re} z = 0$ , то  $z = iy$  — «чисто мнимое» число.

*Геометрически* комплексное число  $z = x + iy$  может быть изображено точкой на плоскости с декартовой системой координат с абсциссой  $x$  и ординатой  $y$  (комплексная плоскость). Действительные числа лежат на оси абсцисс (действительная ось), чисто мнимые — на оси ординат (мнимая ось). Так как каждая точка плоскости однозначно определяется радиусом-вектором этой точки, то каждому комплексному числу  $z$  соответствует *вектор*, лежащий в плоскости и идущий из полюса  $(0, 0)$  в точку  $(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$ .



*Тригонометрическая форма* комплексного числа определяется через *полярную систему координат* на комплексной плоскости:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

где  $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  — длина радиус-вектора, изображающего число  $z$  на комплексной плоскости, называется **модулем**. Угол  $\varphi$  (в радианах) — **аргумент** (или **фаза**) комплексного числа  $z$ , определяемый равенством

$$\varphi = \arg z + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где функция  $\arg z$  определена на промежутке  $(-\pi, \pi]$  и называется **главной ветвью** аргумента. При этом положительное направление отсчёта угла  $\varphi$  соответствует вращению *против часовой стрелки*, так что  $\operatorname{Re} z = r \cos \varphi$  и  $\operatorname{Im} z = r \sin \varphi$ .

*Показательная форма* комплексного числа основана на *формуле Эйлера*:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}.$$

Таким образом, комплексное число можно представить в виде

$$z = re^{i\varphi},$$

где, как и в тригонометрической форме,  $r$  — модуль,  $\varphi$  — аргумент («фаза») комплексного числа.

**Пример 1.** Число  $z = \sqrt{3} + i$  ( $\operatorname{Re} z = \sqrt{3}$ ,  $\operatorname{Im} z = 1$ ) может записано в виде:

$$\sqrt{3} + i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2e^{i\pi/6},$$

причём, если не ограничиваться главным значением, к аргументу  $\pi/6$  можно добавить  $2\pi k$ , где  $k$  — целое.

**Упражнение 1.** Убедитесь в справедливость соотношений:

$$e^{i\pi/2} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{3i\pi/2} = e^{-i\pi/2} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

### Операции с комплексными числами

Два комплексных числа считаются *равными*, если равны отдельно действительные и мнимые части:  $z_1 = z_2$  при  $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$  и  $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$ . Геометрически это соответствует равенству изображающих числа векторов. Операция сравнения для комплексных чисел не определена.

Основные арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление) над комплексными числами имеют те же свойства, что и соответствующие операции с вещественными числами. Вычисления производятся так же, как и над обыкновенными двучленами, но с учётом равенства  $(\pm i)^2 = -1$ . Сложение и вычитание производится по-компонентно:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

В геометрическом представлении операции суммы/разности комплексных чисел соответствуют сложению (вычитанию) представляющих их векторов.

Умножение в алгебраической форме:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Умножение некоторого числа  $z$  на действительное число изменяет модуль  $z$  (в геометрическом представлении — длину вектора), а умножение на чисто мнимое — изменяет аргумент  $z$  (в геометрическом представлении происходит поворот исходного вектора на аргумент множителя). В показательной форме:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Деление эквивалентно умножению на обратное: в показательной форме

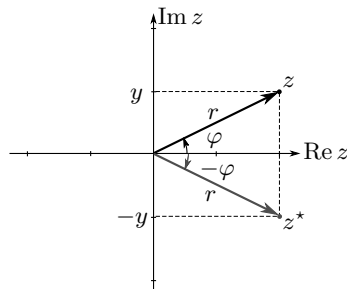
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}.$$

В алгебраической форме числитель и знаменатель дроби можно умножить на число, сопряжённое (см. ниже) знаменателю:

$$\frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Два комплексных числа  $z$  и  $z^*$  называются **сопряжёнными**, если  $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z^*$  и  $\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} z^*$ . В геометрическом представлении точки, изображающие сопряжённые числа, расположены симметрично относительно действительной оси. Модули сопряжённых чисел равны, аргументы отличаются знаком:

$$\begin{aligned} z &= x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = re^{i\varphi}, \\ z^* &= x - iy = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = re^{-i\varphi}. \end{aligned}$$



Мнимые и действительные части числа могут быть выражены с помощью операции сопряжения

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + z^*}{2} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - z^*}{2i}.$$

Произведение числа на его сопряжённое даёт квадрат модуля:

$$zz^* = |z|^2.$$

*Возведение в целую степень* осуществляется по *формуле Муавра*:

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (\forall n \in \mathbb{Z}).$$

Или в показательной форме:

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}.$$

**Упражнение 2.** Покажите, что  $|z^2| = |z|^2$ .

*Извлечение корня* (возведение в *дробную* степень) не является однозначной операцией. Поскольку аргумент любого комплексного числа определён с точностью до  $2\pi k$ , где  $k$  — целое, для корня  $n$ -ой степени можно записать

$$\sqrt[n]{z} = r^{1/n} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = r^{1/n} e^{i\varphi/n} e^{i2\pi k/n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь  $r^{1/n}$  — обычный (арифметический) корень степени  $n$  из модуля  $z$ . Таким образом, если  $n$  — целое, то для любого комплексного  $c$  существует  $n$  различных комплексных корней уравнения  $z^n = c$ .

В общем случае для комплексных чисел справедлива *основная теорема алгебры*: любой полином степени  $n \geq 1$  имеет  $n$  корней.

**Упражнение 3.** Покажите, что  $\sqrt{i} = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ .

**Упражнение 4.** Найдите  $\sqrt[3]{1}$ .

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## Таблицы физических величин

Таблица 1. Основные физические постоянные [1]

Величина	Обозн.	Значение (погрешность)
Скорость света в вакууме	$c$	299 792 458 м/с (точно)
Постоянная Планка	$h$	$6,626\,070\,040(81) \times 10^{-34} \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{эрг} \cdot \text{с}}$
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1,054\,571\,800(13) \times 10^{-34} \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{эрг} \cdot \text{с}}$
Постоянная Больцмана	$k_B$	$1,380\,648\,52(79) \times 10^{-23} \frac{\text{Дж/К}}{\text{эрг/К}}$
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,022\,140\,857(74) \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Гравитационная постоянная	$G$	$6,674\,08(31) \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \approx 12,566\,370 \dots \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8,854\,187 \dots \cdot 10^{-12} \frac{\text{Ф}}{\text{м}}$
Элементарный заряд	$e$	$1,602\,176\,6208(98) \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$ $4,803\,204\,6730(33) \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГС}$
Электрон-вольт	1 эВ	$1,602\,176\,6208(98) \times 10^{-19} \frac{\text{Дж}}{\text{эрг}}$
Атомная единица массы	1 а.е.м.	$1,660\,539\,040(20) \cdot 10^{-27} \text{ кг}$ $(= \frac{1}{N_A} \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}})$
Масса электрона	$m_e$	$0,910938356(11) \cdot 10^{-30} \text{ кг}$
	$m_e c^2$	$0,510\,998\,9461(31) \text{ МэВ}$
Масса протона	$m_p$	$1,672\,621\,637(83) \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
	$m_p c^2$	$938,272\,0813(58) \text{ МэВ}$
	$m_p/m_e$	$1836,152\,673\,89(17)$
Масса нейтрона	$m_n$	$1,674\,927\,471(21) \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
	$m_n c^2$	$939,565\,4133(58) \text{ МэВ}$
Магнетон Бора	$m_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$9,274\,009\,994(57) \cdot 10^{-24} \text{ Дж/Тл}$
Ядерный магнетон	$m_{\text{я}} = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$5,050\,783\,699(31) \cdot 10^{-27} \text{ Дж/Тл}$
Магнитный момент электрона	$m_e/m_B$	$1,001\,159\,652\,180\,91(26)$
Магнитный момент протона	$m_p/m_{\text{я}}$	$2,792\,847\,3508(85)$
Магнитный момент нейтрона	$m_n/m_{\text{я}}$	$-1,913\,042\,73(45)$
Постоянная тонкой структуры	$\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{\hbar c}$	$7,297\,352\,5664(17) \cdot 10^{-3}$
Постоянная Ридберга	$R_\infty$	$10\,973\,731,568\,508(65) \text{ м}^{-1}$
	$R_y = \hbar c R_\infty$	$13,605\,693\,009(84) \text{ эВ}$
Радиус первой орбиты атома водорода (радиус Бора)	$a_0 = \frac{\alpha}{4\pi R_\infty}$	$0,529\,177\,210\,67(12) \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Постоянная Стефана–Больцмана	$\sigma_{\text{СБ}}$	$5,670\,367(13) \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$

Таблица 2. Связь основных единиц измерения в системах СИ и СГС

Наименование	Обозн.	СИ	СГС <sup>1)</sup>
Длина	$l$	1 м ( <i>метр</i> )	$10^2$ см
Масса	$m$	1 кг ( <i>килограмм</i> )	$10^3$ г
Время	$t$	1 с ( <i>секунда</i> )	1 с
Сила	$F$	1 Н ( <i>ньютон</i> )	$10^5$ дин
Работа, энергия	$A, W$	1 Дж ( <i>джоуль</i> )	$10^7$ эрг
Мощность	$N$	1 Вт ( <i>ватт</i> )	$10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{с}}$
Давление	$P$	1 Па ( <i>паскаль</i> )	$10 \frac{\text{дин}}{\text{см}^2}$
Электрический заряд	$q$	1 Кл ( <i>кулон</i> )	$\frac{c}{10} \approx 3 \cdot 10^9$ Фр ( <i>франклин</i> ) <sup>2)</sup>
Сила тока	$I$	1 А ( <i>ампер</i> )	$\frac{c}{10} \approx 3 \cdot 10^9 \frac{\text{Фр}}{\text{с}}$ <sup>3)</sup>
Электрический потенциал	$\varphi$	1 В ( <i>вольт</i> )	$\frac{10^8}{c} \approx \frac{1}{300}$ ед. СГС <sup>3)</sup>
Напряжённость электр. поля	$E$	1 $\frac{\text{В}}{\text{м}}$	$\frac{10^6}{c} \approx 3,34 \cdot 10^{-5} \frac{\text{Фр}}{\text{см}^2}$
Поляризация	$P$	1 $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$	$\frac{c}{10} \approx 3 \cdot 10^9 \frac{\text{Фр}}{\text{см}^2}$
Электрическая индукция	$D$	1 $\frac{\text{Кл}}{\text{м}^2}$	$4\pi c \cdot 10^{-5} \approx 3,77 \cdot 10^6 \frac{\text{Фр}}{\text{см}^2}$
Электрическая ёмкость	$C$	1 Ф ( <i>фарад</i> )	$c^2 \cdot 10^{-9} \approx 9 \cdot 10^{11}$ см
Электрическое сопротивление	$R$	1 Ом ( <i>ом</i> )	$\frac{10^9}{c^2} \approx \frac{1}{9} \cdot 10^{-11} \frac{\text{с}}{\text{см}}$
Удельное сопротивление	$\rho$	1 Ом · м	$\frac{10^{11}}{c^2} \approx \frac{1}{9} \cdot 10^{-9}$ с
Электрическая проводимость	$\Lambda = \frac{1}{R}$	1 См ( <i>сименс</i> )	$\approx 9 \cdot 10^{11} \frac{\text{см}}{\text{с}}$
Удельная проводимость	$\lambda = \frac{1}{\rho}$	1 $\frac{\text{См}}{\text{м}}$	$\approx 9 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$
Магн. индукция	$B$	1 Тл ( <i>тесла</i> )	$10^4$ Гс ( <i>гаусс</i> )
Напряжённость магнитного поля	$H$	1 $\frac{\text{А}}{\text{м}}$	$4\pi \cdot 10^{-3}$ Э ( <i>эрстэд</i> )
Магн. поток	$\Phi$	1 Вб ( <i>вебер</i> )	$10^8$ Мкс ( <i>максвелл</i> )
Магнитный момент	$m$	1 А · м <sup>2</sup> = 1 $\frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$	$10^3 \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}$
Индуктивность	$L$	1 Гн ( <i>генри</i> )	$10^9$ см

<sup>1)</sup> Здесь  $c = 2,99792458 \cdot 10^{10}$  см/с — скорость света в ед. СГС<sup>2)</sup> Употребляется также название *статкулон* (статКл), либо «ед. СГС» заряда.<sup>3)</sup> Для единиц тока и напряжения возможно использование названий *статампер* (статА) и *статвольт* (статВ) соответственно, либо «ед. СГС» тока/напряжения.

Таблица 3. Основные формулы электродинамики в системах СИ и СГС

Наименование	СИ	СГС
Уравнения Максвелла в дифференциальной форме	$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$	$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho$ $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$
Уравнения Максвелла в интегральной форме	$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = \int_V \rho dV$ $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}$	$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = 4\pi \int_V \rho dV$ $\oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = 0$ $\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\mathbf{S}$ $\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\mathbf{S}$
Электрическая индукция	$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$	$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$
Напряжённость магнитного поля	$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$	$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}$
Материальные уравнения	$\mathbf{P} = \alpha \varepsilon_0 \mathbf{E}$ $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$ $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ $\mathbf{B} = \mu \mu_0 \mathbf{H}$ $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$	$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}$ $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$
Сила Лоренца	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$	$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$
Закон Кулона	$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^3} \mathbf{r}$	$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^3} \mathbf{r}$
Закон Био–Савара	$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$	$d\mathbf{H} = \frac{I}{c} \frac{d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}$
Закон Ампера	$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$	$d\mathbf{F} = \frac{I}{c} d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$
Плотность энергии э/м поля ( $\varepsilon = \text{const}$ , $\mu = \text{const}$ )	$w = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{2} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{2}$	$w = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}}{8\pi} + \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{H}}{\pi}$
Вектор Пойнтинга	$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$	$\mathbf{\Pi} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}$
Энергия магнитного поля тока	$W = \frac{LI^2}{2}$	$W = \frac{1}{c^2} \frac{LI^2}{2}$
Магнитный поток	$\Phi = LI$	$\Phi = \frac{1}{c} LI$
Индуктивность длинного соленоида	$L = \mu \mu_0 \frac{N^2 S}{l}$	$L = 4\pi \mu \frac{N^2 S}{l}$

Таблица 3. Основные формулы электродинамики в системах СИ и СГС (продолжение)

Наименование	СИ	СГС
Магнитный момент витка с током	$\mathbf{m} = IS$	$\mathbf{m} = \frac{1}{c}IS$
Поле точечного магнитного диполя	$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{3(\mathbf{m}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right)$	$\mathbf{B} = \frac{3(\mathbf{m}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3}$
Поле точечного электрического диполя	$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right)$	$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{p}\mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}$
Момент сил, действующий на виток с током	$\mathbf{M} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$	
Сила, действующая на магнитный диполь	$\mathbf{F} = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}$	
Магнитное поле прямого провода	$H = \frac{I}{2\pi r}$	$H = \frac{2I}{cr}$
Ёмкость плоского конденсатора	$C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon\epsilon_0 S}{d}$	$C = \frac{q}{U} = \frac{\epsilon S}{4\pi d}$
Энергия конденсатора	$W = \frac{CU^2}{2}$	



Таблица 4. Некоторые постоянные элементов при атмосферном давлении (101,325 кПа).  $\rho$  — плотность (при 20 °C);  $t_{\text{пл}}$  и  $t_{\text{кип}}$  — температуры плавления и кипения;  $\alpha = \frac{1}{l} \left( \frac{\partial l}{\partial T} \right)_P$  — температурный коэффициент линейного расширения (для изотропных элементов при 300 К) [2, 4]

Элемент	Сим-вол	Z	A, а.е.м. <sup>1)</sup>	$\rho, \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	$t_{\text{пл}}, ^\circ\text{C}$	$t_{\text{кип}}, ^\circ\text{C}$	$\alpha, 10^{-6} \text{ К}^{-1}$
Алюминий	Al	13	26,9815	2,6889	660,3	2519	23,3
Барий	Ba	56	137,33	3,59	727	1897	16,4
Бериллий	Be	4	9,0122	1,848	1283	2477	
Бром	Br	35	79,904	3,119	−7,2	58,8	
Ванадий	V	23	50,942	5,96	1910	3407	
Висмут	Bi	83	208,98	9,78	271,4	1564	
Вольфрам	W	74	183,84	19,35	3414	5555	4,6
Германий	Ge	32	72,64	5,32	938,3	2833	5,8
Железо	Fe	26	55,845	7,874	1538	2861	12,0
Золото	Au	79	196,967	19,32	1064,2	2856	14,0
Индий	In	49	114,818	7,31	156,01	2075	
Иридий	Ir	77	192,217	22,42	2443	4350	
Кадмий	Cd	48	112,411	8,65	321,07	767	
Калий	K	19	39,0983	0,862	63,5	759	79,6
Кальций	Ca	20	40,078	1,55	842	1484	22,4
Кобальт	Co	27	58,9332	8,90	1495	2927	12,2
Кремний (крист.)	Si	14	28,0855	2,33	1414	3265	2,54
Литий	Li	3	6,941	0,534	180,5	1342	47,1
Магний	Mg	12	24,305	1,738	650	1090	
Марганец	Mn	25	54,9381	7,21−7,44	1246	2061	
Медь	Cu	29	63,546	8,96	1084,6	2562	16,7
Молибден	Mo	42	95,94	10,22	2622	4639	5,27
Натрий	Na	11	22,9898	0,971	97,79	882,9	71,5
Неодим (гекс.)	Nd	60	144,24	7,01	1021	3074	7,0
Никель	Ni	28	58,6934	8,6−8,9	1455	2913	13,0
Олово (сер./бел.)	Sn	50	118,710	5,85/7,29	13,2/232	2602	
Платина	Pl	78	195,078	21,45	1768,2	3825	8,99
Родий	Rh	45	102,906	12,41	1963	3695	8,50
Ртуть (жидк.)	Hg	80	200,59	13,5461	−38,829	356,62	
Свинец	Pb	82	207,2	11,336	327,46	1749	28,5
Селен (крист.)	Se	34	78,96	4,46	220,5	685	
Серебро	Ag	47	107,868	10,50	961,78	2162	18,9
Сурьма	Sb	51	121,760	6,691	630,63	1587	
Титан	Ti	22	47,867	4,505	1668	3280	8,3
Углерод (графит)	C	6	12,0107	1,9−2,3	—	3825	
Хром	Cr	24	51,996	7,18−7,20	1907	2671	5,00
Цезий	Cs	55	132,906	1,873	28,5	671	97,0
Цинк	Zn	30	65,41	6,77	419,5	907	
Цирконий	Zr	40	91,224	6,45	1854	4409	

<sup>1)</sup> Стандартный атомный вес (по естественному изотопному составу)

Таблица 5. Удельное сопротивление  $\rho_0$  и температурный коэффициент сопротивления  $\alpha_0 = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dT}$  при 0 °С для чистых металлов<sup>1)</sup> и сплавов<sup>2)</sup> [2, 4]

Вещество	$\rho_0, 10^{-8} \text{ Ом} \cdot \text{м}$	$\alpha_0, 10^{-3} \text{ К}^{-1}$
Алюминий	2,417	4,60
Вольфрам	4,82	5,10
Железо	8,57	6,51
Золото	2,051	4,02
Константан (54% Cu, 45% Ni, 1% Mn)	50	−0,03
Латунь (62% Cu, 38% Zn)	7,1	1,7
Манганин (86% Cu, 12% Mn, 2% Ni)	43	0,02
Медь	1,543	4,33
Молибден	4,85	4,73
Неодим	71	2,00
Никель	6,16	6,92
Нихром (63% Ni, 20% Fe, 15% Cr, 2% Mn)	112	0,15
Олово	11,5	4,65
Платина	9,60	3,96
Ртуть	96,1	0,99
Свинец	19,2	4,28
Серебро	1,467	4,30
Хром	11,8	3,01
Цинк	5,46	4,17

<sup>1)</sup> Сопротивление реального образца определяется формулой  $\rho = \rho_{\text{ост}} + \rho_{\text{ид}}(T)$ , где  $\rho_{\text{ост}}$  — не зависящее от  $T$  остаточное сопротивление, определяемое чистой изготовлением образца (*правило Матиссена*).

<sup>2)</sup> Данные для сплавов даны при 20 °С.

Таблица 6. Электрические свойства металлов при 20 °С<sup>1)</sup> [2, 4]

Металл	Проводимость $\lambda, 10^7 \text{ См/м}$	Постоянная	Подвижность
		Холла $R_H, 10^{-10} \text{ м}^3/\text{Кл}$	носителей $\mu = \lambda R_H , \text{ см}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$
Алюминий	3,79	−0,34	13
Вольфрам	1,88	+1,1	21
Золото	4,51	−0,71	32
Медь	5,96	−0,55	33
Молибден	1,88	+1,26	24
Олово	0,80	−0,02	0,16
Платина	0,97	−0,23	2,2
Серебро	6,28	−0,9	57
Цинк	1,69	+0,55	9,3

<sup>1)</sup> Электропроводящие свойства реальных образцов металлов существенно зависят от их чистоты (наличия примесей и дефектов).

Таблица 7. Электрические свойства полупроводников (при 300 К) [2, 5]

Вещество	Сим- вол	Собств. про- водимость $\lambda_i, (\text{Ом}\cdot\text{см})^{-1}$	Диэлектр. проница- емость $\epsilon$ , отн. ед.	Подвижность носителей тока, $10^3 \text{ см}^2/(\text{В}\cdot\text{с})$	
				$\mu_e$	$\mu_h$
Алмаз	C	$< 10^{-13}$	5,7	2,0	2,1
Германий	Ge	$2,1 \cdot 10^{-2}$	16	3,8	1,8
Кремний	Si	$3,1 \cdot 10^{-6}$	11,8	1,5	0,50
Олово (серое, 0 °C)	$\alpha$ -Sn	$2,0 \cdot 10^3$	24	1,6	10
Антимонид индия	InSb	$2,2 \cdot 10^2$	17	77	0,85
Арсенид галлия	GaAs	$2,5 \cdot 10^{-9}$	12,7	9	0,4

Таблица 8. Работа выхода электронов с поверхности [4]

Элемент	$W$ , эВ		Элемент	$W$ , эВ		Элемент	$W$ , эВ
Алюминий	4,06 – 4,26*		Золото	5,31 – 5,47*		Платина	5,64
Барий	2,52		Литий	2,93		Ртуть	4,48
Вольфрам	4,55		Медь	4,53 – 5,10*		Серебро	4,52 – 4,74*
Германий	5,0		Никель	5,04 – 5,35*		Цезий	1,95
Железо*	4,67 – 4,81*		Олово	4,42		Цинк	3,63

\* Для монокристаллических образцов работа выхода зависит от ориентации грани.

Таблица 9. Точки Кюри некоторых веществ [4, 6]

Вещество	$\Theta$ , °C
Сегнетоэлектрики	
Титанат бария BaTiO <sub>3</sub>	100
Сегнетова соль	верхняя +22,5, нижняя –15
Ферромагнетики	
Железо Fe	770
Железо кремнистое (4% Si)	690
Кобальт Co	1115
Никель Ni	354
Пермаллой (22% Fe + 78% Ni)	378
Гадолиний Gd	20,2
Тербий Tb	–54
Ферриты	100–600

Таблица 10. ЭДС термопар при различных температурах [2]

$\Delta t$ , °C	ЭДС, мВ			
	Платина — плати- на + 10% родия	Хромель — алюмель	Железо — константан	Медь — константан
0	0,00	0,00	0,00	0,000
10	0,06	0,40	0,51	0,391
20	0,11	0,80	1,02	0,789
30	0,17	1,20	1,54	1,196
40	0,23	1,61	2,06	1,611
50	0,30	2,02	2,59	2,035
60	0,36	2,44	3,12	2,467
70	0,43	2,85	3,65	2,908
80	0,50	3,27	4,19	3,357
90	0,57	3,68	4,73	3,813
100	0,64	4,10	5,27	4,277
150	1,03	6,14	8,01	6,702
200	1,44	8,14	10,78	9,286
250	1,87	10,15	13,53	12,01
300	2,31	12,21	16,33	14,86
400	3,25	16,40	21,8	20,87
500	4,22	20,6	27,4	
600	5,23	24,9	33,1	
700	6,26	29,1	39,1	
800	7,34	33,3	45,5	
900	8,45	37,3	51,9	
1000	9,59	41,3	57,9	
1200	11,95	48,8	69,5	
1400	14,37			
1600	16,77			

Таблица 11. Удельное сопротивление, диэлектрическая проницаемость и напряженность пробоя диэлектриков (при 20 °С для низких частот) [2, 3]

Вещество	$\rho$ , Ом · м	$\epsilon$	$E_{пр}$ , кВ/мм
Твёрдые тела			
Бумага сухая	$10^{11}$ – $10^{12}$	2–2,5	
Гетинакс	$10^{10}$ – $10^{11}$	7–8	20–35
Каучук	$10^{16}$	2,4	
Парафин	$10^{15}$ – $10^{17}$	2,1	20–30
Плексиглас	$10^{10}$ – $10^{11}$	3,6	15–25
Полистирол	$10^{14}$ – $10^{15}$	2,5	20–25
Поливинилхлорид	$10^{14}$ – $10^{16}$	3–5	14–20
Полиэтилен	$10^{15}$	2,3	25–60
Стекло	$10^6$ – $10^{15}$	3,7–16	
Текстолит	$10^8$ – $10^9$	8	4,5–12
Титанат бария		2000	
Фарфор (электротехнический)	$10^{12}$ – $10^{13}$	6–7	20–28
Эбонит	$10^{12}$ – $10^{13}$	2,8–3,5	20–35
Янтарь	$10^{17}$	2,8	
Жидкости			
Ацетон	$10^7$	20,7	
Вода дистиллированная	$1$ – $4 \cdot 10^4$	78,3(25 °С)	
Масло вазелиновое	$10^{12}$ – $10^{13}$	3,9	20–22
Масло касторовое	$10^8$ – $10^{11}$	4,0–4,5	14–16
Масло конденсаторное	$10^{12}$ – $10^{13}$	2,2	20–25
Масло трансформаторное	$10^{11}$ – $10^{12}$	2,2	12–26
Спирт этиловый	$6 \cdot 10^6$	27	
Газы при $10^5$ Па <sup>1)</sup>			
Азот		1,00058	3,2
Аргон		1,000554	0,8
Воздух сухой		1,00058	3,2
Гелий		1,000072	0,6
Кислород		1,00055	2,9
Неон		1,000127	0,5
Углекислый газ		1,00096	2,9

<sup>1)</sup> Напряжённость пробоя для газов дана при длине промежутка  $d = 1$  см.

Таблица 12. Удельная магнитная восприимчивость  $\chi^{уд} = M/\rho H$  <sup>1)</sup> некоторых диа- и парамагнетиков при 20 °С [2, 4]

Вещество	$\chi^{уд}, 10^{-9} \text{ м}^3/\text{кг}$
Азот (г)	−0,427
Алюминий	+0,61
Алюминия оксид ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ )	−0,36
Антимонид индия ( $\text{InSb}$ )	−0,281
Висмут	−1,34
Вода (ж)	−0,7199
Вода (тв, 0 °С)	−0,7019
Водород (г)	−1,9867
Воздух (г)	+23,5
Гелий (г)	−0,47
Германий	−0,106
Железа оксид ( $\text{FeO}$ )	+100
Железо хлористое ( $\text{FeCl}_2$ )	+117
Железо хлорное ( $\text{FeCl}_3$ )	+83,5
Золото	−0,142
Калий	+0,532
Кальций	+1,1
Карбонат кальция ( $\text{CaCO}_3$ )	−0,382
Каменная соль ( $\text{NaCl}$ )	−0,518
Кислород (г)	+107,8
Кислород (ж, 90 К)	+240,6
Медь	−0,086
Платина	+0,97
Серебро	−0,181
Свинец	−0,111
Стекло	−1,0
Углекислый газ	−0,48
Эбонит	+0,60
Хром	+3,2
Цинк	−0,175

<sup>1)</sup> Здесь  $\rho$  — плотность вещества,  $M$  — магнитный момент единицы объёма,  $H$  — напряжённость магнитного поля.

Таблица 13. Свойства<sup>1)</sup> магнитомягких ферромагнитных материалов [2, 4, 6]

Материал	Состав	$\mu_{\text{нач}}$	$\mu_{\text{max}}$	$H_c$ , А/м	$B_s$ , Тл
Железо	99Fe	200	6000	70	2,16
— чистое	99,9Fe	$2,5 \cdot 10^4$	$3,5 \cdot 10^5$	0,8	2,16
— кремнистое	96Fe-4Si	500	$7 \cdot 10^3$	40	1,95
	97Fe-3Si	$9 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^4$	12	2,01
Сталь мягкая	0,1C-0,1Si-0,4Mn	800	1100	200	
Пермаллой 78	78Ni-22Fe	$4 \cdot 10^3$	$10^5$	4	1,05
Пермаллой 45	45Ni-55Fe	$1,2 \cdot 10^3$	$3,5 \cdot 10^3$	5,6	1,60
Пермендюр	50Co-50Fe	500	$6 \cdot 10^3$	160	2,46
Алфер	87Fe-13Al	700	$3,7 \cdot 10^3$	53	1,2
Альсифер	85Fe-10Si-5Al	$3,6 \cdot 10^5$	$1,2 \cdot 10^6$	1,6	0,89
Кобальт	99Co	70	250	800	1,79
Никель	99Ni	110	600	56	0,61
Феррит Ni-Zn		10–2000		16–1600	0,1–0,4
Феррит Mn-Zn		$500-2 \cdot 10^4$		4–100	0,3–0,4

Таблица 14. Свойства<sup>1)</sup> магнитожестких ферромагнитных материалов [2, 4, 6]

Материал	Состав	$H_c$ , $10^3$ А/м	$B_r$ , Тл
Сталь углеродистая	Fe-1Mn-0,9C	4,0	1,0
хромистая	Fe-3,5Cr-0,3Mn-0,9C	5,2	0,97
вольфрамовая	Fe-5W-0,3Mn-0,7C	5,5	1,03
кобальтовая	Fe-36Co-4Cr-5W-0,7C	19,1	0,95
Альнико-1	Fe-20Ni-12Al-5Co	35	0,72
Платина-кобальт	77Pt-23Co	207	0,45
Самарий-кобальт	SmCo <sub>5</sub>	696	1,0
Неодим-железо-бор	Nd <sub>2</sub> Fe <sub>14</sub> B	1120	1,22

<sup>1)</sup> Здесь  $\mu_{\text{нач}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH} \Big|_{H=0}$  — начальная магнитная проницаемость,  
 $\mu_{\text{max}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dH}$  — максимальная проницаемость,  $H_c$  — коэрцитивная сила,  
 $B_s$  — индукция насыщения,  $B_r$  — остаточная индукция.

## Литература

1. CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants, 2014.
2. Физические величины: Справочник. / под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. — М. : Энергоатомиздат, 1991.
3. Таблицы физических величин. Справочник. / под. ред. И.К. Кикоина. — М. : Атомиздат, 1976.
4. CRC Handbook of Chemistry and Physics / ed. by David R. Lide. — CRC Press, Boca Raton, FL, 2005.
5. O. Madelung Semiconductors: Data Handbook. — Springer-Verlag, Berlin, 2004.
6. P. Бозорт Ферромагнетизм. — М. : ИЛ, 1956.