Celestial Mechanics: Final Recap

5 октября 2023 г.

Problem

Создать систему из 2 (или n) тел, смоделировать движение этих тел и действие их друг на друга при помощи закона всемирного тяготения.

Solution

Чтобы смоделировать движение тел, мы воспользовались формулой зависимости координаты тела от времени

$$\vec{x} = \vec{x_0} + \vec{v} \cdot t + \frac{\vec{a} \cdot t^2}{2}$$

Или же в нашем случае

$$d\vec{x} = \vec{v} \cdot dt + \frac{\vec{a} \cdot (dt)^2}{2}$$

Где ускорение вычисляется по формуле $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$

Solution

Чтобы смоделировать действие тел друг на друга, для каждой пары тел i, j мы применили силу гравитационного притяжения, полученную по формуле

$$\overrightarrow{F_{i,j}} = G \cdot \frac{m_i \cdot m_j}{\overrightarrow{r_{i,j}^2}}$$

Note: Чтобы получить правильное направление действия силы, можно доможнить ее на нормированный вектор направления: $-(\overrightarrow{x_i} - \overrightarrow{x_j})$

Problem

Описанная ранее модель имела существенный недостаток: центр масс системы тел не совпадал с началом нашей системы отсчета, в связи с чем вся система пропадала с экрана спустя какое-то время.

Solution

Решением проблемы стало, очевидно, перемещение начала системы отсчета в центр масс системы тел,
который вычисляется следующим образом:

$$\overrightarrow{x_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{x_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Note: Таким образом, координаты тела в новой системе отсчета получаются так: $x_{new} = x_{orig} - x_c$

Problem

При перемещении начала сисетмы отсчета в другое место, не сохраняются начальные (заданные пользователем) скорости тел, так как это тоже вектора и в новой системе отсчета они будут иметь другие значения.

Solution

Решение - так же, как и координаты тел, переместить их вектора скоростей с поправкой на мгновенный центр скоростей:

$$\overrightarrow{v_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{v_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Note: Таким образом, скорость тела в новой системе отсчета получаются так: $v_{new} = v_{orig} - v_c$

Problem

Как мы вообще узнаем, корректна ли наша модель?

Solution

Будем собирать метрики:

- Общую энергию системы (ведь мы знаем, что в изолированной системе работает ЗСЭ, поэтому малость или отсутствие колебаний подтверждали бы корректность)

Solution

Будем собирать метрики:

- Общую энергию системы (ведь мы знаем, что в изолированной системе работает ЗСЭ, поэтому малость или отсутствие колебаний подтверждали бы корректность)
- Сумму импульсов (все сказанное выше верно и для ЗСИ)

Solution

Будем собирать метрики:

- Общую энергию системы (ведь мы знаем, что в изолированной системе работает ЗСЭ, поэтому малость или отсутствие колебаний подтверждали бы корректность)
- Сумму импульсов (все сказанное выше верно и для ЗСИ)
- Сумму моментов импульсов (в отличие от суммы импульсов также дает информацию о том, сохранятся ли расстояния и траектории)

Results

Колебания:

- Увеличение на $\approx 0.4 \cdot 10^6$Дж в год

Results

Колебания:

- Увеличение на $\approx 0.4 \cdot 10^6$ Дж в год
- Суммы импульсов в $\pm 7 \cdot 10^6 \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{с}}$

Results

Колебания:

- Увеличение на $\approx 0.4 \cdot 10^6$ Дж в год
- Суммы импульсов в $\pm 7 \cdot 10^6 \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{с}}$
- Увеличение на $\approx 0.1 \cdot 10^{12} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}}$

Results

Колебания:

- Увеличение на $\approx 0.4 \cdot 10^6$Дж в год
- Суммы импульсов в $\pm 7 \cdot 10^6 \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{с}}$
- Увеличение на $\approx 0.1 \cdot 10^{12} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}}$

Дают понять, что модель почти наверное корректная :-)

Results

Колебания:

- Увеличение на $\approx 0.4 \cdot 10^6$Дж в год
- Суммы импульсов в $\pm 7 \cdot 10^6 \frac{\text{м} \cdot \text{кг}}{\text{с}}$
- Увеличение на $\approx 0.1 \cdot 10^{12} \frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}}$

Дают понять, что модель почти наверное корректная :-)

Note: Запомним эти результаты, мы к ним еще вернемся

Solution

Решение - так же, как и координаты тел, переместить их вектора скоростей с поправкой на мгновенный центр скоростей:

$$\overrightarrow{v_c} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \overrightarrow{v_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

Note: Таким образом, скорость тела в новой системе отсчета получаются так: $v_{new} = v_{orig} - v_c$

Problem

Мы выяснили, что модель $\pm$ корректна, но как мы узнаем устойчива ли она?

Solution

Раз в секунду (или другое время) к слкчайному телу в системе будем добавлять случанйные флуктуации (и назовем их метеоритами), посмотрим, разлетится ли система.
Спойлер: система не разлетелась, значит она вернее всего устойчива

Problem

Отлично! С корректной и устойчивой моделью очень удобно работать. За исключением маленького ньюанса: dt в нашей модели не может меняться динамический, подстраиваясь под систему и делая ее более правдоподобной.

Solution

Будем вычислять dt динамически, основываясь на следующем соотношении:

$$dt \sim \min_i \min_j \frac{\overrightarrow{r_{i,j}}}{\overrightarrow{v_{i,j}}}$$

Действительно, было бы удобно, если бы при увеличении скорости, dt бы уменьшался, ведь тогда мы будем делать более мелкие шаги, и ошибка будет накапливаться значительно медленнее.

Прямая пропорциональность расстоянию дает нам возможность аккуратнее все пересчитывать когда тела находятся близко друг к другу, что тоже может оказаться полезным.

Solution

Также дополнительно ограничим dt сверху и снизу, чтобы не было пролагиваний при отрисвоке из-за слишком долгих расчетов, и домножим на магическую константу, подобранную эмпирическим путем для более красивых и точных результатов :-)