

# Celestial Mechanics: Final Recap

5 октября 2023 г.

# Problem

Создать систему из 2 (или  $n$ ) тел, смоделировать движение этих тел и действие их друг на друга при помощи закона всемирного тяготения.

# Solution

Чтобы смоделировать движение тел, мы воспользовались формулой зависимости координаты тела от времени

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v} \cdot t + \frac{\vec{a} \cdot t^2}{2}$$

Или же в нашем случае

$$d\vec{x} = \vec{v} \cdot dt + \frac{\vec{a} \cdot (dt)^2}{2}$$

Где ускорение вычисляется по формуле  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

# Solution

Чтобы смоделировать действие тел друг на друга, для каждой пары тел  $i, j$  мы применили силу гравитационного притяжения, полученную по формуле

$$\vec{F}_{ij} = G \cdot \frac{m_i \cdot m_j}{\vec{r}_{ij}^2}$$

Note: Чтобы получить правильное направление действия силы, можно домножить ее на нормированный вектор направления:  $-(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$

# Problem

Описанная ранее модель имела существенный недостаток: центр масс системы тел не совпадал с началом нашей системы отсчета, в связи с чем вся система пропадала с экрана спустя какое-то время.

# Solution

Решением проблемы стало, очевидно, перемещение начала системы отсчета в центр масс системы тел, который вычисляется следующим образом:

$$\vec{x}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Note: Таким образом, координаты тела в новой системе отсчета получаются так:  $x_{new} = x_{orig} - x_c$

# Problem

При перемещении начала системы отсчета в другое место, не сохраняются начальные (заданные пользователем) скорости тел, так как это тоже вектора и в новой системе отсчета они будут иметь другие значения.

# Solution

Решение - так же, как и координаты тел, переместить их вектора скоростей с поправкой на мгновенный центр скоростей:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Note: Таким образом, скорость тела в новой системе отсчета получаются так:  $v_{new} = v_{orig} - v_c$



# Problem

Как мы вообще узнаем, корректна ли наша модель?

# Solution

Будем собирать метрики:

- Общую энергию системы (ведь мы знаем, что в изолированной системе работает ЗСЭ, поэтому малость или отсутствие колебаний подтверждали бы корректность)

# Solution

Будем собирать метрики:

- Общую энергию системы (ведь мы знаем, что в изолированной системе работает ЗСЭ, поэтому малость или отсутствие колебаний подтверждали бы корректность)
- Сумму импульсов (все сказанное выше верно и для ЗСИ)

# Solution

Будем собирать метрики:

- Общую энергию системы (ведь мы знаем, что в изолированной системе работает ЗСЭ, поэтому малость или отсутствие колебаний подтверждали бы корректность)
- Сумму импульсов (все сказанное выше верно и для ЗСИ)
- Сумму моментов импульсов (в отличие от суммы импульсов также дает информацию о том, сохраняются ли расстояния и траектории)

# Results

Колебания:

- Увеличение на  $\approx 0.4 \cdot 10^6$  Дж в год

# Results

Колебания:

- Увеличение на  $\approx 0.4 \cdot 10^6$  Дж в год
- Суммы импульсов в  $\pm 7 \cdot 10^6 \frac{\text{М} \cdot \text{КГ}}{\text{с}}$

# Results

Колебания:

- Увеличение на  $\approx 0.4 \cdot 10^6$  Дж в год
- Суммы импульсов в  $\pm 7 \cdot 10^6 \frac{\text{М} \cdot \text{КГ}}{\text{с}}$
- Увеличение на  $\approx 0.1 \cdot 10^{12} \frac{\text{М}^2 \cdot \text{КГ}}{\text{с}}$

# Results

Колебания:

- Увеличение на  $\approx 0.4 \cdot 10^6$  Дж в год
- Суммы импульсов в  $\pm 7 \cdot 10^6 \frac{\text{М} \cdot \text{КГ}}{\text{с}}$
- Увеличение на  $\approx 0.1 \cdot 10^{12} \frac{\text{М}^2 \cdot \text{КГ}}{\text{с}}$

Дают понять, что модель почти наверное корректная :-)



# Results

Колебания:

- Увеличение на  $\approx 0.4 \cdot 10^6$  Дж в год
- Суммы импульсов в  $\pm 7 \cdot 10^6 \frac{\text{М} \cdot \text{КГ}}{\text{с}}$
- Увеличение на  $\approx 0.1 \cdot 10^{12} \frac{\text{М}^2 \cdot \text{КГ}}{\text{с}}$

Дают понять, что модель почти наверное корректная :-)

Note: Запомним эти результаты, мы к ним еще вернемся

# Solution

Решение - так же, как и координаты тел, переместить их вектора скоростей с поправкой на мгновенный центр скоростей:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Note: Таким образом, скорость тела в новой системе отсчета получаются так:  $v_{new} = v_{orig} - v_c$

# Problem

Мы выяснили, что модель  $\pm$  корректна, но как мы узнаем устойчива ли она?

# Solution

Раз в секунду (или другое время) к случайному телу в системе будем добавлять случайные флуктуации (и назовем их метеоритами), посмотрим, разлетится ли система.

Спойлер: система не разлетелась, значит она вернее всего устойчива

# Problem

Отлично! С корректной и устойчивой моделью очень удобно работать. За исключением маленького нюанса:  $dt$  в нашей модели не может меняться динамический, подстраиваясь под систему и делая ее более правдоподобной.

# Solution

Будем вычислять  $dt$  динамически, основываясь на следующем соотношении:

$$dt \sim \min_i \min_j \frac{\vec{r}_{i,j}}{\vec{v}_{i,j}}$$

Действительно, было бы удобно, если бы при увеличении скорости,  $dt$  бы уменьшался, ведь тогда мы будем делать более мелкие шаги, и ошибка будет накапливаться значительно медленнее.

Прямая пропорциональность расстоянию дает нам возможность аккуратнее все пересчитывать когда тела находятся близко друг к другу, что тоже может оказаться полезным.

# Solution

Также дополнительно ограничим  $dt$  сверху и снизу, чтобы не было пролагиваний при отрисовке из-за слишком долгих расчетов, и домножим на магическую константу, подобранную эмпирическим путем для более красивых и точных результатов :-)

# Problem

Вспомним проблему отклонений суммы моментов импульсов и энергии системы. Как ее решить?



# Solution

Решим проблему для системы из двух тел (Земля и Солнце)  
(так система из  $n$  тел, где  $n > 2$  в общем случае неустойчива)

# Solution

Решим проблему для системы из двух тел (Земля и Солнце)  
(так система из  $n$  тел, где  $n > 2$  в общем случае неустойчива)

- Для ЗСИ просто добавим ровно столько скорости Земле, чтобы  $E_{curr} = E_{prev}$

# Solution

Решим проблему для системы из двух тел (Земля и Солнце)  
(так система из  $n$  тел, где  $n > 2$  в общем случае неустойчива)

- Для ЗСИ просто добавим ровно столько скорости Земле, чтобы  $E_{curr} = E_{prev}$
- Для корректировки суммы моментов импульсов скорость мы поменять не можем, так как это изменит  $E$ . Значит, будем менять траекторию. Аналитически найти мы ее не можем, поэтому просто переберем все углы с шагом  $6^\circ$ , выбрав тот, который дает наименьшее изменение