

Celestial Mechanics: Final Recap

5 октября 2023 г.

Problem

Создать систему из 2 (или n) тел, смоделировать движение этих тел и действие их друг на друга при помощи закона всемирного тяготения.

Solution

Чтобы смоделировать движение тел, мы воспользовались формулой зависимости координаты тела от времени

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{v} \cdot t + \frac{\vec{a} \cdot t^2}{2}$$

Или же в нашем случае

$$d\vec{x} = \vec{v} \cdot dt + \frac{\vec{a} \cdot (dt)^2}{2}$$

Где ускорение вычисляется по формуле $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

Solution

Чтобы смоделировать действие тел друг на друга, для каждой пары тел i, j мы применили силу гравитационного притяжения, полученную по формуле

$$\vec{F}_{ij} = G \cdot \frac{m_i \cdot m_j}{\vec{r}_{ij}^2}$$

Note: Чтобы получить правильное направление действия силы, можно домножить ее на нормированный вектор направления: $-(\vec{x}_i - \vec{x}_j)$

Problem

Описанная ранее модель имела существенный недостаток: центр масс системы тел не совпадал с началом нашей системы отсчета, в связи с чем вся система пропадала с экрана спустя какое-то время.

Solution

Решением проблемы стало, очевидно, перемещение начала системы отсчета в центр масс системы тел, который вычисляется следующим образом:

$$\vec{x}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Note: Таким образом, координаты тела в новой системе отсчета получаются так: $x_{new} = x_{orig} - x_c$

Problem

При перемещении начала системы отсчета в другое место, не сохраняются начальные (заданные пользователем) скорости тел, так как это тоже вектора и в новой системе отсчета они будут иметь другие значения.

Solution

Решение - так же, как и координаты тел, переместить их вектора скоростей с поправкой на мгновенный центр скоростей:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Note: Таким образом, скорость тела в новой системе отсчета получаются так: $v_{new} = v_{orig} - v_c$

Problem

Как мы вообще узнаем, корректна ли наша модель?

Solution

Будем собирать метрики:

Solution

Будем собирать метрики:

- Общую энергию системы (ведь мы знаем, что в изолированной системе работает ЗСЭ, поэтому малость или отсутствие колебаний подтверждали бы корректность)

Solution

Будем собирать метрики:

- Общую энергию системы (ведь мы знаем, что в изолированной системе работает ЗСЭ, поэтому малость или отсутствие колебаний подтверждали бы корректность)
- Сумму импульсов (все сказанное выше верно и для ЗСИ)

Solution

Будем собирать метрики:

- Общую энергию системы (ведь мы знаем, что в изолированной системе работает ЗСЭ, поэтому малость или отсутствие колебаний подтверждали бы корректность)
- Сумму импульсов (все сказанное выше верно и для ЗСИ)
- Сумму моментов импульсов (в отличие от суммы импульсов также дает информацию о том, сохраняются ли расстояния и траектории)

Solution

Будем собирать метрики:

- Общую энергию системы (ведь мы знаем, что в изолированной системе работает ЗСЭ, поэтому малость или отсутствие колебаний подтверждали бы корректность)
- Сумму импульсов (все сказанное выше верно и для ЗСИ)
- Сумму моментов импульсов (в отличие от суммы импульсов также дает информацию о том, сохраняются ли расстояния и траектории)

Это, конечно, не достаточные условия корректности модели, но необходимые. Другими необходимыми условиями являются, например, съезжает ли со временем центр масс, или крутится ли орбита. Но эти условия можно проверить путем простого наблюдения за системой.

Results

Колебания:

- Энергии в $\approx 1,3\%$ каждые десять лет

Results

Колебания:

- Энергии в $\approx 1,3\%$ каждые десять лет
- Суммы импульсов в $\pm 7 \cdot 10^6 \frac{\text{М} \cdot \text{КГ}}{\text{с}}$

Results

Колебания:

- Энергии в $\approx 1,3\%$ каждые десять лет
- Суммы импульсов в $\pm 7 \cdot 10^6 \frac{\text{М} \cdot \text{КГ}}{\text{с}}$
- Суммы моментов импульсов в $\approx 1\%$ каждые десять лет

Results

Колебания:

- Энергии в $\approx 1,3\%$ каждые десять лет
- Суммы импульсов в $\pm 7 \cdot 10^6 \frac{\text{М} \cdot \text{КГ}}{\text{с}}$
- Суммы моментов импульсов в $\approx 1\%$ каждые десять лет

Дают понять, что модель почти наверное корректная :-)

Note: Запомним эти результаты, мы к ним еще вернемся

Problem

Мы выяснили, что модель \pm корректна, но было бы неплохо узнать, устойчива ли она и когда.

Solution

Время от времени к случайному телу в системе будем добавлять случайные флуктуации (и назовем их метеоритами), посмотрим, разлетится ли система.
Спойлер: системы (Земля, Солнце) и (Земля, Солнце, Луна), как и предполагалось, оказываются устойчивыми. Система из трех тел в общем случае, как и предполагалось, разлетается.

Problem

Отлично! С корректной и устойчивой моделью очень удобно работать. За исключением маленького нюанса: dt в нашей модели не может меняться динамический, подстраиваясь под систему.

Solution

Будем вычислять dt динамически, основываясь на следующем соотношении:

$$dt \sim \min_i \min_j \frac{\overrightarrow{r_{i,j}}}{\overrightarrow{v_{i,j}}}$$

Действительно, было бы удобно, если бы при увеличении скорости, dt бы уменьшался, ведь тогда мы будем делать более мелкие шаги, и ошибка будет накапливаться значительно медленнее, то есть модель будет более точной.

Прямая пропорциональность расстоянию дает нам возможность динамически "нормировать" dt для каждой системы, а не подбирать для каждой системы нормирующие коэффициенты эмпирически.

Solution

Также дополнительно ограничим dt сверху и снизу, чтобы не было пролагиваний при отрисовке из-за слишком долгих расчетов, и домножим на магическую константу, подобранную эмпирическим путем для более красивых и точных результатов :-)

Problem

Вспомним проблему отклонений суммы моментов импульсов и энергии системы. Как ее решить?

Solution

Решим проблему для системы из двух тел (Земля и Солнце)
(так система из n тел, где $n > 2$ в общем случае неустойчива)

Solution

Решим проблему для системы из двух тел (Земля и Солнце)
(так система из n тел, где $n > 2$ в общем случае неустойчива)

- Для ЗСИ просто добавим ровно столько скорости Земле, чтобы $E_{curr} = E_{prev}$

Solution

Решим проблему для системы из двух тел (Земля и Солнце)
(так система из n тел, где $n > 2$ в общем случае неустойчива)

- Для ЗСИ просто добавим ровно столько скорости Земле, чтобы $E_{curr} = E_{prev}$
- Для корректировки суммы моментов импульсов скорость мы поменять не можем, так как это изменит E . Значит, будем менять траекторию. Аналитически найти мы ее не можем, поэтому просто переберем все углы с шагом 6° , выбрав тот, который дает наименьшее изменение

Results

Новые результаты колебаний величин системы:

Results

Новые результаты колебаний величин системы:

- Энергия сохраняется

Results

Новые результаты колебаний величин системы:

- Энергия сохраняется
- Сумма моментов импульсов: 0,03% каждые десять лет