Дифференциальные уравнения, соответсвующие реальной физической системе, содержат как правило, один или несколько параметров. Если топологическая структура фазовых траекторий системы не изменяется при малых изменениях параметров, то такую систему называют *структурно устой* или «*грубой*». «Грубость» означает, что при малом изменении параметров система хоть и изменя*ется в деталях режим функционировани. вовсе не принципиально*

Мы будем рассматривать изменения качественной картины траекторий на пооскости. И считаем, что система зависит от одного параметра μ.

Под бифрукацией ($bifrucus$– раздвоение, разветвление чего- либо) понимают любое качественное изменение разбиения фазового пространства при изменении параметра μ. Это изменение происходит при некотором значении $\mu = mu_*$, которое называют бифрукационным. Для значений μ, близких к μ_*, картина разбиения фазового пространства отлична от той, которая была при $\mu = \mu_*$. Очевидно, что при $\mu = \mu_*$ система не является «грубой» (она структурно неустойчива при μ=μ_*).

(понятие «бифрукаций» введено Пуанкаре при изучении какой- то хуйни)

Далее полагается, что $\mu_* = 0$.
Мы рассмотрим наиболее часто встречающиеся типы бифрукаций:

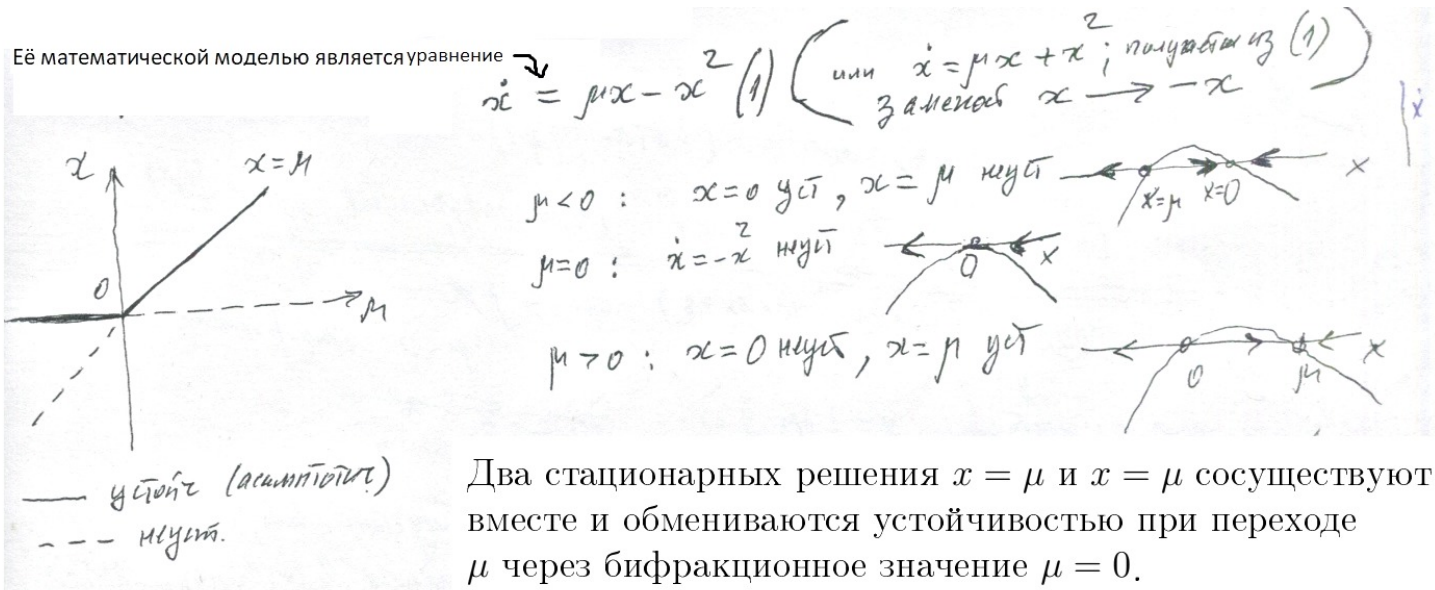
1. когда матрица линеаризованной системы в окрестнсти особой точки имеет одно нулевое собственное значение

2. когда у этой матрицы есть два чисто мнимыз корня.

В обоих случаях порядок системы уравнений может быть больше 1 или больше 2. Но тогда все остальные собственные значения считаем лежащими слева от мнимой оси. Это позволит в обоих случаях рассматривать системы 1го и 2го порядков соответственно. На основании теории(теорема о центральном многообразии((что- то с диффурами))) этого достаточно для изучения бифрукационной картины всей многомерной системы.

Бифрукации ещё подразделяют на мягкие и жёсткие(катастрофы). Многие приволят к топологическим изменения окрестности особых точек, но не приводят к их исчезновению. При жёстких бифрукациях особые точки исчезают(система идёт «в разнос», например; т.к. особые точки- аттракторы исчезли) Мы рассмотрим четыре типа бифрукаций////

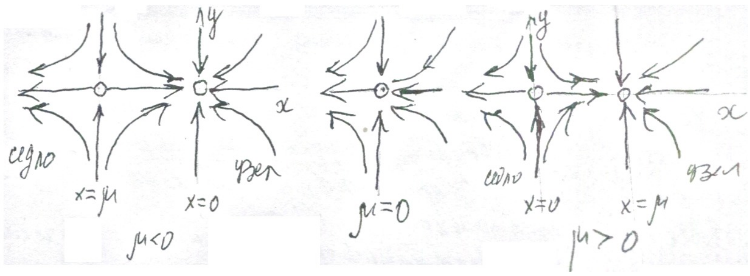
1 Бифрукаия «смена устойчивости» (обмена устойчивостью)



Два стационарных решения $x = \mu$ и $x = \mu$ сосуществуют вместе и обмениваются устойчивостью при переходе μ через бифракционное значение $\mu = 0$.

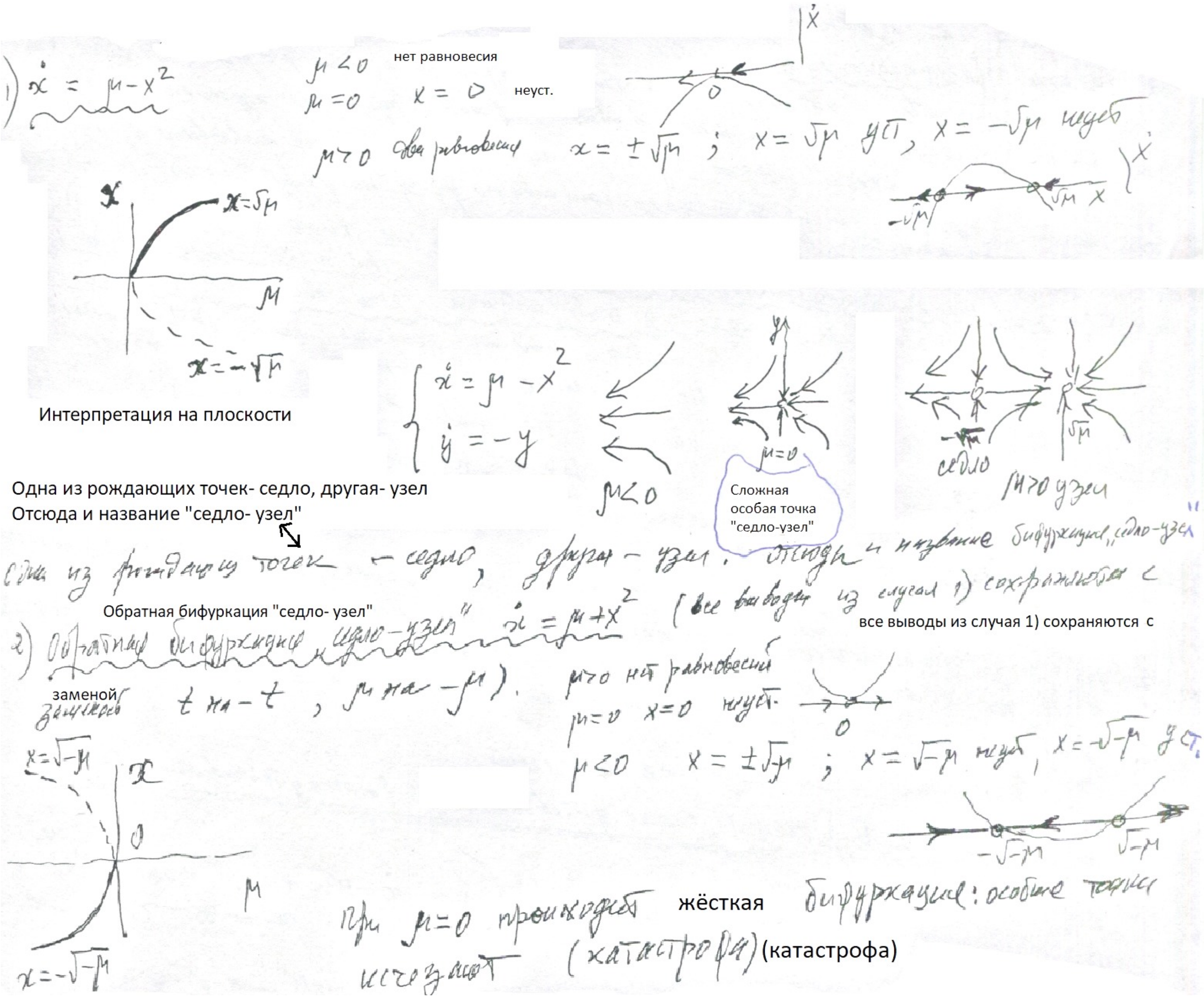
Чтобы получить системы с большей размерностью, надо добавить ещё уравнения, которым отвечает матрица, собственные значения которой отрицательны.

Например, пусть $\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$



При переходе через $\mu = 0$ седло переходит в устойчивый узел, а устойчивый узел– в седло.

2 Бифуркация «седло- узел», или двукратное равновесие



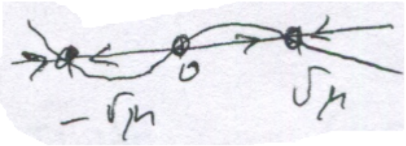
3 Бифуркация типа«Вилка» (или бифуркация «удвоения»)

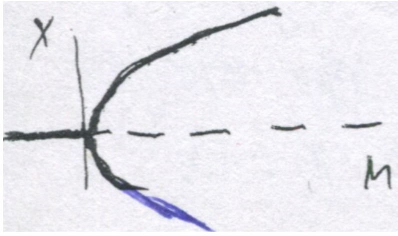
1) Прямая бифуркация (надкритическая) $\dot{x} = \mu x - x^3$

$\mu = 0$: $x = 0$, устойчивость

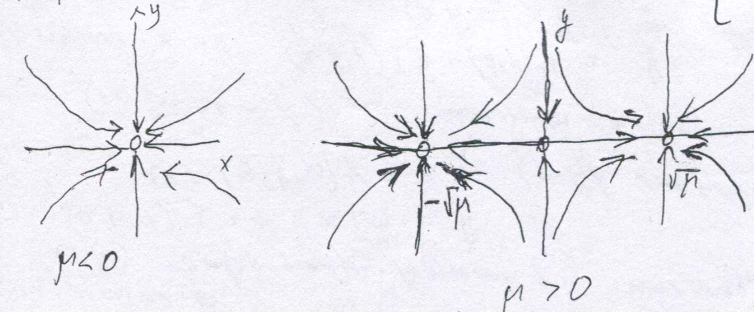
$\mu < 0$ – одно равновесие $x = 0$, уст.

$\mu > 0 \ : \quad x = 0$, неуст;

$x = \pm\sqrt{\mu}$ - уст. 



Устойчивые точка $x = 0$, становясь неустойчивой, пораждает две других устойчивых равновесия. Бифуркационная «вилка» здесь она мягкая интерпретация в плоскости x, y $\begin{cases} \dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ (2)



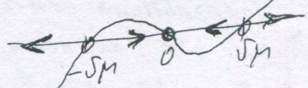
$\mu<0$ – один устойчивый узел

$\mu>0$ – два устойчивых узла и седло (поле бифуркации)

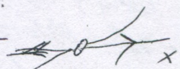
2) обратная бифуркация „вилки" (подкритическая) $\dot{x} = \mu x + x^3$

$\mu<0$: Три равновесия $x=0$, $x=\pm\sqrt{-\mu}$

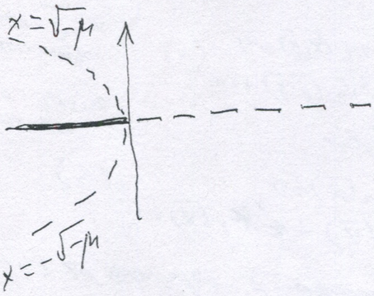
$x=0$ уст; $x=\pm\sqrt{-\mu}$ неуст.



$\mu=0$: одно равновесие $x=0$ неуст



$\mu>0$ одно равновесие $x=0$ неуст.



жёсткая бифуркация. При $\mu=0$ нулевое равновесие $x=0$ остаётся неустойчивым, а две других (неустойчивых при $\mu<0$) равновесия исчезают т.е. остаётся только одно равновесие, но и оно неустойчивое

IV Бифуркация Андронова–Хопфа (бифуркация рождения (исчезновения) цикла)

Два комплексно сопряжённых собственных значения: $\lambda_1 = \mu + i\omega$, $\lambda_2 = \mu - i\omega$

$\omega>0$, μ – малая по модулю величина. используя метод нормальных форм получим такую модель в введённых переменных y_1, y_2:

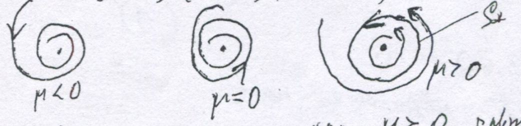
$$\dot{y}_1 = \mu y_1 - \omega y_2 + (l y_1 - \tau y_2)(y_1^2 + y_2^2) + O_4$$
$$\dot{y}_2 = \omega y_1 + \mu y_2 + (\tau y_1 + l y_2)(y_1^2 + y_2^2) + O_4$$

— члены не ниже 4ой степени относительно y_1, y_2

1) Если $l<0$, то для малых $\mu\le 0$ состояние равновесия $y_1=y_2=0$ асимптотически устойчиво и все траектории в некоторой окр-ти $(0,0)$ стремятся к началу координат. Когда $\mu>0$ равновесие $y_1=y_2=0$ становится неустойчивым и возникает устойчивый цикл с диаметром $\sim\sqrt{\mu}$ и все траектории стремятся к этому циклу (это мягкая бифуркация, мягкая потеря устойчивости)

Утверждение легко проверяется для упрощенной системы в полярных координатах $y_1=\rho\cos\theta$, $y_2=\rho\sin\theta$: (радиус цикла $\rho_* \simeq \sqrt{-\frac{\mu}{l}}$)

$$\dot{\rho} = \rho(\mu + l\rho^2) + O(\rho^{7/2}), \quad \dot{\theta} = \omega + \tau\rho^2 + O(\rho^{5/2})$$



Неочень сложно показать, что выводы будут верны и для полной системы.

2) Если $l>0$, то для малых $\mu\ge 0$ равновесие $y_1=y_2=0$ неустойчиво и все траектории покидают окрестность начала координат (жёсткая бифуркация, кризис). Когда $\mu<0$ точка $(0,0)$ становится устойчивой, что область притяжения ограничена неустойчивым циклом диаметра $\sim\sqrt{-\mu}$ эта область стягивается к точке $(0,0)$ при $\mu\to 0$.

$\rho_* \simeq \sqrt{-\frac{\mu}{l}}$