DEST

Inferência Estatística

Lista 3

Lista de Exercícios 3 - Resolução

Nome: Miqueias T.
Data: 23 de agosto de 2025

Questão 1

A demora D pode assumir valores no conjunto $\{1, 2, \ldots, 20\}$, com cada valor tendo a mesma probabilidade. Temos uma distribuição Uniforme Discreta, com $P(D = d) = 1/20$ para cada d no conjunto.

a) Demorar mais de 10 minutos: $P(D > 10) = P(D = 11) + \cdots + P(D = 20)$. São 10 resultados possíveis.

$$P(D > 10) = 10 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{2}$$

b) Pelo menos 5 mas não mais de 10 minutos: $P(5 \leq D \leq 10)$. Os valores são $\{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, totalizando 6 resultados.

$$P(5 \leq D \leq 10) = 6 \cdot \frac{1}{20} = \frac{3}{10}$$

c) Demora não chegar a 5 minutos: $P(D < 5)$. Os valores são $\{1, 2, 3, 4\}$, totalizando 4 resultados.

$$P(D < 5) = 4 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$$

d) Probabilidade condicional: Dado que o ônibus ainda não passou às 8:10 ($D > 10$), o novo espaço amostral é $\{11, 12, \ldots, 20\}$, com 10 resultados. A espera de até 3 minutos para o amigo significa que o ônibus deve chegar nos minutos 11, 12 ou 13.

$$P(\text{espera} \leq 3 \mid D > 10) = \frac{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos favoráveis}}{\text{n}^{\text{o}} \text{ de casos possíveis}} = \frac{3}{10}$$

Questão 2

Seja X o número de pacientes curados. Temos um experimento Binomial com $n = 15$ e $p = 0.80$. Assim, $X \sim B(15, 0.80)$.

a) Todos serem curados: $P(X = 15)$.

$$P(X = 15) = \binom{15}{15}(0.80)^{15}(0.20)^0 = (0.80)^{15} \approx 0.0352$$

b) Pelo menos dois não serem curados: Seja Y o número de pacientes **não** curados, $Y \sim B(15, 0.20)$. O evento é $P(Y \geq 2)$.

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1)]$$
$$P(Y = 0) = \binom{15}{0}(0.20)^0(0.80)^{15} \approx 0.0352$$
$$P(Y = 1) = \binom{15}{1}(0.20)^1(0.80)^{14} \approx 0.1319$$
$$P(Y \geq 2) = 1 - (0.0352 + 0.1319) = 1 - 0.1671 = 0.8329$$

c) Ao menos 10 ficarem livres: $P(X \geq 10)$.

$$P(X \geq 10) = \sum_{k=10}^{15} \binom{15}{k}(0.80)^k(0.20)^{15-k} \approx 0.9389$$

(Este valor é tipicamente calculado com software estatístico).

Questão 3

Seja N o número de pedidos por hora, $N \sim Poisson(\lambda = 5)$.

a) **Mais de 2 pedidos por hora:** $P(N > 2)$.

$$\begin{aligned} P(N > 2) &= 1 - P(N \leq 2) = 1 - [P(N=0) + P(N=1) + P(N=2)] \\ &= 1 - \left[\frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!} + \frac{e^{-5}5^2}{2!}\right] \\ &= 1 - e^{-5}(1 + 5 + 12.5) = 1 - 18.5 \cdot e^{-5} \approx 1 - 0.1246 = 0.8754 \end{aligned}$$

b) **50 pedidos em um dia (8 horas):** A taxa se ajusta para o período. $\lambda' = 5$ pedidos/hora$\times 8$ horas $= 40$. Seja Y o número de pedidos no dia, $Y \sim Poisson(40)$.

$$P(Y = 50) = \frac{e^{-40}40^{50}}{50!} \approx 0.0177$$

c) **Não haver nenhum pedido em um dia:** $P(Y = 0) = \frac{e^{-40}40^0}{0!} = e^{-40}$. Este é um número extremamente pequeno, muito próximo de zero. Sim, é um evento raríssimo.

Questão 5

Seja T a temperatura, $T \sim N(\mu = 74.2, \sigma^2 = 2.2^2)$. Usamos a padronização $Z = (T - \mu)/\sigma$.

a) Temperatura inferior a $70°C$:

$$P(T < 70) = P\left(Z < \frac{70 - 74.2}{2.2}\right) = P(Z < -1.91) \approx 0.0281$$

b) Temperatura ultrapassar $75°C$:

$$P(T > 75) = P\left(Z > \frac{75 - 74.2}{2.2}\right) = P(Z > 0.36) = 1 - P(Z \leq 0.36) \approx 1 - 0.6406 = 0.3594$$

c) Pelo menos uma não atingir $70°C$ em 20 pasteurizações: Seja $p = P(T < 70) \approx 0.0281$. Seja Y o número de vezes que a temperatura ficou abaixo de $70°C$, $Y \sim B(20, 0.0281)$.

$$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0) = 1 - \binom{20}{0}(0.0281)^0(1 - 0.0281)^{20} = 1 - (0.9719)^{20} \approx 1 - 0.564 = 0.436$$

d) Ajustar a média μ': Queremos $P(T < 70) \leq 0.0005$. Da tabela Z, a área 0.0005 corresponde a $z \approx -3.3$.

$$\frac{70 - \mu'}{2.2} \leq -3.3 \implies 70 - \mu' \leq -7.26 \implies \mu' \geq 77.26°C$$

A nova média deveria ser de no mínimo $77.26°C$.

e) Ajustar o desvio padrão σ': Com $\mu = 74.5°C$, queremos $P(T < 70) \leq 0.0005$.

$$\frac{70 - 74.5}{\sigma'} \leq -3.3 \implies \frac{-4.5}{\sigma'} \leq -3.3 \implies 4.5 \geq 3.3\sigma' \implies \sigma' \leq \frac{4.5}{3.3} \approx 1.36°C$$

O novo desvio padrão deve ser de no máximo $1.36°C$.

Questão 6

Se $X \sim B(n, p)$, sabemos que $E[X] = np$ e $Var(X) = np(1 - p)$. O estimador da proporção é $\hat{p} = X/n$.

- **Esperança de $\hat{p}$:**

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n}E[X] = \frac{1}{n}(np) = p$$

- **Variância de $\hat{p}$:** A expressão $E((X/n - p)^2)$ é a definição da variância do estimador $\hat{p}$.

$$Var(\hat{p}) = Var\left(\frac{X}{n}\right) = \frac{1}{n^2}Var(X) = \frac{1}{n^2}(np(1 - p)) = \frac{p(1 - p)}{n}$$

Questão 7

Se $X \sim Poisson(\lambda)$ e $P(X = 1) = P(X = 2)$:

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} \implies \lambda = \frac{\lambda^2}{2}$$

Como $\lambda > 0$, podemos dividir por λ, obtendo $1 = \lambda/2$, o que implica $\lambda = 2$. Agora, calculamos $P(X = 4)$ para $\lambda = 2$:

$$P(X = 4) = \frac{e^{-2}2^4}{4!} = \frac{16 \cdot e^{-2}}{24} = \frac{2}{3}e^{-2} \approx 0.09$$

Questão 8

A implementação computacional e o gráfico são tipicamente feitos em Python com as bibliotecas ‘numpy‘, ‘scipy‘ e ‘matplotlib‘.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import multivariate_normal

# Parâmetros
mu = np.array([0, 4])
cov_matrix = np.array([[1, 2], [2, 9]])

# b) Implementação da densidade
bivariate_norm = multivariate_normal(mean=mu, cov=cov_matrix)

# c) Desenho do gráfico
x = np.linspace(-5, 5, 500)
y = np.linspace(-5, 15, 500)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
pos = np.dstack((X, Y))

# A densidade (PDF) em cada ponto da grade
Z = bivariate_norm.pdf(pos)

fig = plt.figure(figsize=(10, 7))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap='viridis')
ax.set_xlabel('Y1')
ax.set_ylabel('Y2')
ax.set_zlabel('Densidade')
ax.set_title('Densidade da Normal Bivariada')
plt.show()
```