# DEST

## Inferência Estatística
Lista 2

## Lista de Exercícios 2 - Resolução

**Nome:** Miqueias T.
**Data:** 23 de agosto de 2025

# Questão 1

*Num certo bairro da cidade de São Paulo, as companhias de seguro estabeleceram o seguinte modelo para número de veículos furtados por semana: Encontre a esperança e variância desta variável aleatória.*

**Solução:** A esperança $E[F]$ e a variância $Var(F)$ são calculadas da seguinte forma para uma variável aleatória discreta:

- $E[F] = \sum_i f_i \cdot p_i$
- $Var(F) = E[F^2] - (E[F])^2$, onde $E[F^2] = \sum_i f_i^2 \cdot p_i$

Calculando $E[F]$:

$$E[F] = (0 \cdot \frac{1}{4}) + (1 \cdot \frac{1}{2}) + (2 \cdot \frac{1}{8}) + (3 \cdot \frac{1}{16}) + (4 \cdot \frac{1}{16})$$

$$E[F] = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{8}{16} + \frac{4}{16} + \frac{3}{16} + \frac{4}{16} = \frac{19}{16} = 1.1875$$

Calculando $E[F^2]$:

$$E[F^2] = (0^2 \cdot \frac{1}{4}) + (1^2 \cdot \frac{1}{2}) + (2^2 \cdot \frac{1}{8}) + (3^2 \cdot \frac{1}{16}) + (4^2 \cdot \frac{1}{16})$$

$$E[F^2] = 0 + \frac{1}{2} + \frac{4}{8} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16} = \frac{8}{16} + \frac{8}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16} = \frac{41}{16} = 2.5625$$

Calculando $Var(F)$:

$$Var(F) = \frac{41}{16} - \left(\frac{19}{16}\right)^2 = \frac{41}{16} - \frac{361}{256} = \frac{41 \cdot 16 - 361}{256} = \frac{656 - 361}{256} = \frac{295}{256} \approx 1.1523$$

# Questão 2

*Verifique se as expressões a seguir são funções densidade de probabilidade (f.d.p.).*

**Solução:** Para ser uma f.d.p., uma função $f(y)$ deve satisfazer duas condições: 1. $f(y) \geq 0$ para todo $y$ no suporte. 2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy = 1$.

**a)** $f(y) = 3y$, se $0 \leq y \leq 1$. A condição 1 é satisfeita. Para a condição 2:

$$\int_0^1 3y\, dy = \left[\frac{3y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2} \neq 1$$

**Não é uma f.d.p.**

**b)** $f(y) = y^2/2$ se $y \geq 0$. A condição 1 é satisfeita. Para a condição 2:

$$\int_0^\infty \frac{y^2}{2}\, dy = \left[\frac{y^3}{6}\right]_0^\infty = \infty$$

A integral diverge. **Não é uma f.d.p.**

**c)** $f(y) = (y-3)/2$ se $3 \leq y \leq 5$. A condição 1 ($f(y) \geq 0$) é satisfeita no intervalo. Para a condição 2:

$$\int_3^5 \frac{y-3}{2}\, dy = \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{2} - 3y\right]_3^5 = \frac{1}{2}\left[(\frac{25}{2} - 15) - (\frac{9}{2} - 9)\right] = \frac{1}{2}[-\frac{5}{2} - (-\frac{9}{2})] = \frac{1}{2}[\frac{4}{2}] = 1$$

**É uma f.d.p.**

**e)** $f(y)$ definida em partes. Assumindo que a segunda parte seja $f(y) = (2-y)/4$ (uma correção comum para este tipo de problema, pois $2y/4$ não integraria 1):

$$f(y) = \begin{cases} (2+y)/4 & \text{se } -2 \leq y \leq 0 \\ (2-y)/4 & \text{se } 0 < y < 2 \end{cases}$$

A condição 1 é satisfeita. Para a condição 2:

$$\int_{-2}^0 \frac{2+y}{4}\, dy + \int_0^2 \frac{2-y}{4}\, dy = \frac{1}{4}\left[2y + \frac{y^2}{2}\right]_{-2}^0 + \frac{1}{4}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{4}[0 - (-4+2)] + \frac{1}{4}[(4-2) - 0] = \frac{1}{4}[2] + \frac{1}{4}[2] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

**É uma f.d.p. (com a correção assumida).**

# Questão 3

*Uma v.a. tem f.d.p. $f(y;\theta) = 2y/\theta^2$, se $0 \leq y \leq \theta$. Calcule $E(Y)$ e $Var(Y)$. (Nota: O suporte no PDF foi assumido como $0 \leq y \leq \theta$ para consistência).*

**Solução:** Calculando $E[Y]$:

$$E[Y] = \int_0^\theta y \cdot f(y)\, dy = \int_0^\theta y \cdot \frac{2y}{\theta^2}\, dy = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta y^2\, dy = \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^\theta = \frac{2}{\theta^2}\frac{\theta^3}{3} = \frac{2\theta}{3}$$

Calculando $E[Y^2]$:

$$E[Y^2] = \int_0^\theta y^2 \cdot f(y)\,dy = \int_0^\theta y^2 \cdot \frac{2y}{\theta^2}\,dy = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta y^3\,dy = \frac{2}{\theta^2}\left[\frac{y^4}{4}\right]_0^\theta = \frac{2}{\theta^2}\frac{\theta^4}{4} = \frac{\theta^2}{2}$$

Calculando $Var(Y)$:

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{\theta^2}{2} - \left(\frac{2\theta}{3}\right)^2 = \frac{\theta^2}{2} - \frac{4\theta^2}{9} = \frac{9\theta^2 - 8\theta^2}{18} = \frac{\theta^2}{18}$$

## Questão 4

*Uma v.a. discreta tem f.p.* $p(y;\theta) = (1-\theta)\theta^{y-1}$*:* $y = 1, 2, \ldots$*. Calcule* $E(Y)$ *e* $E(Y(Y-1))$ *e então calcule* $Var(Y)$*.*

**Solução:** Esta é uma distribuição Geométrica com probabilidade de sucesso $p = 1-\theta$. Sabemos que para uma Geométrica, $E[Y] = 1/p$ e $Var(Y) = (1-p)/p^2$.

$$E[Y] = \frac{1}{1-\theta}$$

Para calcular $E[Y(Y-1)]$, usamos a série geométrica e suas derivadas. Seja $S = \sum_{y=1}^{\infty} \theta^y = \frac{\theta}{1-\theta}$. A primeira derivada em relação a $\theta$ nos dá $E[Y]$ (a menos de uma constante), e a segunda nos dá $E[Y(Y-1)]$.

$$\sum_{y=1}^{\infty} y(y-1)\theta^{y-2} = \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\sum_{y=0}^{\infty} \theta^y\right) = \frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{1-\theta}\right) = \frac{2}{(1-\theta)^3}$$

Multiplicando por $\theta^2(1-\theta)$:

$$E[Y(Y-1)] = \sum_{y=1}^{\infty} y(y-1)(1-\theta)\theta^{y-1} = \theta(1-\theta)\sum_{y=1}^{\infty} y(y-1)\theta^{y-2} = \theta(1-\theta)\frac{2}{(1-\theta)^3} = \frac{2\theta}{(1-\theta)^2}$$

Calculando $Var(Y)$:

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= E[Y^2] - (E[Y])^2 \\
&= (E[Y(Y-1)] + E[Y]) - (E[Y])^2 \\
&= \frac{2\theta^2}{(1-\theta)^2} + \frac{1}{1-\theta} - \left(\frac{1}{1-\theta}\right)^2 \\
&= \frac{2\theta^2 + (1-\theta) - 1}{(1-\theta)^2} = \frac{2\theta^2 - \theta}{1-\theta^2} \quad \textit{(Nota: Há um erro no cálculo. O correto é:)} \\
&= \frac{2\theta^2}{(1-\theta)^2} + \frac{1(1-\theta)}{(1-\theta)^2} - \frac{1}{(1-\theta)^2} = \frac{2\theta^2 + 1 - \theta - 1}{(1-\theta)^2} = \frac{2\theta^2 - \theta}{(1-\theta)^2} \quad \textit{(Ainda errado.)}
\end{aligned}$$

O cálculo correto é $E[Y(Y-1)] = \frac{2\theta}{(1-\theta)^2}$. Então:

$$Var(Y) = \frac{2\theta}{(1-\theta)^2} + \frac{1}{1-\theta} - \frac{1}{(1-\theta)^2} = \frac{2\theta + (1-\theta) - 1}{(1-\theta)^2} = \frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$

## Questão 5

*Encontre a média e a variância das seguintes distribuições.*

**a)** $P(Y = y) = \frac{3!}{y!(3-y)!}(1/2)^3$ , para $y = 0, 1, 2, 3$. Esta é uma distribuição Binomial com $n = 3$ e $p = 1/2$.

$$E[Y] = np = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$Var[Y] = np(1-p) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

**b)** $f(y) = 6y(1-y)$ se $0 < y < 1$. Esta é uma distribuição Beta com parâmetros $\alpha = 2$ e $\beta = 2$.

$$E[Y] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$

$$Var(Y) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} = \frac{2\cdot 2}{(4)^2\cdot 5} = \frac{4}{16\cdot 5} = \frac{1}{20}$$

**c)** $f(y) = 2/y^3$, se $1 < y < \infty$.

$$E[Y] = \int_1^\infty y\cdot\frac{2}{y^3}\,dy = \int_1^\infty \frac{2}{y^2}\,dy = \left[-\frac{2}{y}\right]_1^\infty = 0-(-2) = 2$$

$$E[Y^2] = \int_1^\infty y^2\cdot\frac{2}{y^3}\,dy = \int_1^\infty \frac{2}{y}\,dy = [2\ln(y)]_1^\infty = \infty$$

Como $E[Y^2]$ diverge, **a variância não existe**.

# Questão 8

*Calcule a correlação entre X e Y.*

**Solução:** A correlação é $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$. A partir da tabela, as distribuições marginais são $P(X = x) = 1/3$ para $x \in \{0, 1, 2\}$ e $P(Y = y) = 1/3$ para $y \in \{0, 1, 2\}$.

- $E[X] = 0(\frac{1}{3}) + 1(\frac{1}{3}) + 2(\frac{1}{3}) = 1$.
- $E[Y] = 0(\frac{1}{3}) + 1(\frac{1}{3}) + 2(\frac{1}{3}) = 1$.
- $E[X^2] = 0^2(\frac{1}{3}) + 1^2(\frac{1}{3}) + 2^2(\frac{1}{3}) = \frac{5}{3}$.
- $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}$.
- Por simetria, $Var(Y) = 2/3$.
- $E[XY] = \sum\sum xy \cdot p(x,y) = (0)(0)(\frac{1}{3}) + (1)(1)(\frac{1}{3}) + (2)(2)(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$.
- $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = \frac{5}{3} - (1)(1) = \frac{2}{3}$.

$$\rho(X,Y) = \frac{2/3}{\sqrt{2/3}\sqrt{2/3}} = \frac{2/3}{2/3} = 1$$

A correlação é 1, indicando uma relação linear positiva perfeita.

# Questão 10

*Mostre que as variáveis aleatórias $X_1$ e $X_2$ com f.d.p. conjunta $f(x_1, x_2) = 12x_1x_2(1-x_2)$ para $0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1$ são independentes.*

**Solução:** Para serem independentes, a f.d.p. conjunta deve ser igual ao produto das f.d.p. marginais, i.e., $f(x_1, x_2) = f(x_1)f(x_2)$.

Calculando a marginal de $X_1$:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \int_0^1 12x_1x_2(1-x_2)\,dx_2 \\ &= 12x_1 \int_0^1 (x_2 - x_2^2)\,dx_2 \\ &= 12x_1 \left[\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 12x_1 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 12x_1 \left(\frac{1}{6}\right) = 2x_1 \end{aligned}$$

para $0 < x_1 < 1$.

Calculando a marginal de $X_2$:

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \int_0^1 12x_1x_2(1-x_2)\,dx_1 \\ &= 12x_2(1-x_2) \int_0^1 x_1\,dx_1 \\ &= 12x_2(1-x_2) \left[\frac{x_1^2}{2}\right]_0^1 \\ &= 12x_2(1-x_2) \left(\frac{1}{2}\right) = 6x_2(1-x_2) \end{aligned}$$

para $0 < x_2 < 1$.

Verificando o produto das marginais:

$$f(x_1)f(x_2) = (2x_1) \cdot (6x_2(1 - x_2)) = 12x_1x_2(1 - x_2)$$

Como $f(x_1)f(x_2) = f(x_1, x_2)$, as variáveis aleatórias **são independentes**.