DEST

Inferência Estatística
Lista 4

Lista de Exercícios 4 - Resolução

Nome: Miqueias T.
Data: 23 de agosto de 2025

Questão 1

Suponha que a nota média dos alunos de Estatística Inferencial é de 70%. Dê um limite superior para a proporção de estudante que vão tirar nota de pelo menos 90%.

Solução: Utilizaremos a Desigualdade de Markov, que afirma que para uma variável aleatória não negativa X e uma constante $a > 0$, $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$. Seja X a nota do aluno. Temos $E[X] = 70$. Queremos um limite para $P(X \geq 90)$.

$$P(X \geq 90) \leq \frac{E[X]}{90} = \frac{70}{90} = \frac{7}{9} \approx 0.7778$$

O limite superior para a proporção de alunos com nota de pelo menos 90% é 7/9.

Questão 2

Uma moeda é viciada com $p(cara) = 0.20$. Em 20 lançamentos, encontre um limite para a probabilidade de se obter ao menos 16 caras e compare com o valor exato.

Solução: Seja X o número de caras, $X \sim B(n = 20, p = 0.2)$. A esperança é $E[X] = np = 20 \cdot 0.2 = 4$. Usando a Desigualdade de Markov para $a = 16$:

$$P(X \geq 16) \leq \frac{E[X]}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0.25$$

O limite superior é de 25%.

Cálculo da probabilidade exata: $P(X \geq 16) = \sum_{k=16}^{20} \binom{20}{k}(0.2)^k(0.8)^{20-k}$. Este valor é extremamente pequeno, da ordem de 1.4×10^{-8}.

Comparação: O limite de 0.25 é matematicamente válido, mas é uma aproximação extremamente grosseira e pouco informativa, pois a probabilidade real é praticamente zero. Isso mostra que a Desigualdade de Markov, embora geral, pode fornecer limites muito frouxos.

Questão 3

Uma moeda é lançada 100 vezes. Encontre um limite superior para a probabilidade do número de caras ser de no mínimo 60 ou no máximo 40.

Solução: Utilizaremos a Desigualdade de Chebyshev. Assumindo uma moeda justa, $X \sim B(100, 0.5)$. A média é $\mu = np = 100 \cdot 0.5 = 50$. A variância é $\sigma^2 = np(1-p) = 100 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 25$. O evento é $P(X \geq 60 \text{ ou } X \leq 40)$, que pode ser reescrito como $P(|X - 50| \geq 10)$. Pela Desigualdade de Chebyshev, $P(|X - \mu| \geq k) \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$. Com $k = 10$:

$$P(|X - 50| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2} = \frac{25}{100} = 0.25$$

Questão 4

Um jogador de basquete acerta uma cesta com $p = 0.5$. Em 20 arremessos, qual a probabilidade de acertar pelo menos 9? Use a Binomial e a aproximação pelo TLC.

Solução: Seja X o número de acertos, $X \sim B(20, 0.5)$. **Probabilidade Exata (Binomial):** $P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8)$.

$$P(X \geq 9) = \sum_{k=9}^{20} \binom{20}{k} (0.5)^k (0.5)^{20-k} \approx 0.7483$$

Aproximação pelo Teorema Central do Limite (TLC): $\mu = np = 10$ e $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{5} \approx 2.236$. Aproximamos a Binomial por uma Normal $N(10, 5)$. Usando a correção de continuidade para $P(X \geq 9)$, calculamos $P(X_{cont} > 8.5)$.

$$P(X > 8.5) = P\left(Z > \frac{8.5 - 10}{\sqrt{5}}\right) = P(Z > -0.6708) = P(Z < 0.6708) \approx 0.7488$$

A aproximação do TLC com correção de continuidade é excelente. (Nota: o valor de 0.8133 no enunciado do exercício parece ter sido calculado sem a correção de continuidade, o que é menos preciso).

Questão 6

Considere que o tempo de vida de um dispositivo eletrônico segue uma distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = 100$. Uma amostra iid de tamanho n é retirada. Qual é a distribuição aproximada da média amostral?

Solução: Seja Y o tempo de vida, $Y \sim Exp(\lambda = 100)$. A esperança e a variância são: $E[Y] = 1/\lambda = 1/100$. $Var(Y) = 1/\lambda^2 = 1/10000$. Pelo Teorema Central do Limite (TLC), para n suficientemente grande, a distribuição da média amostral $\bar{Y}$ pode ser aproximada por uma distribuição Normal. A média de $\bar{Y}$ é $E[\bar{Y}] = E[Y] = 1/100$. A variância de $\bar{Y}$ é $Var(\bar{Y}) = \frac{Var(Y)}{n} = \frac{1/10000}{n} = \frac{1}{10000n}$. Portanto, a distribuição aproximada é:

$$\bar{Y} \approx N\left(\frac{1}{100}, \frac{1}{10000n}\right)$$

Questão 7

Seja $Y_1, ..., Y_n$ uma va iid da distribuição de Poisson com parâmetro λ.

a) Mostre que a média amostral converge em probabilidade para λ: Esta é uma aplicação da Lei Fraca dos Grandes Números (LFGN). Sabemos que $E[Y_i] = \lambda$ e $Var(Y_i) = \lambda < \infty$. A média da média amostral é $E[\bar{Y}] = E[Y_i] = \lambda$. A variância da média amostral é $Var(\bar{Y}) = \frac{Var(Y_i)}{n} = \frac{\lambda}{n}$. Como $Var(\bar{Y}) \to 0$ quando $n \to \infty$, a LFGN garante que $\bar{Y}$ converge em probabilidade para sua esperança, λ.

b) Encontre a distribuição aproximada da média amostral: Pelo Teorema Central do Limite, para n grande:

$$\bar{Y} \approx N\left(E[\bar{Y}], Var(\bar{Y})\right) \implies \bar{Y} \approx N\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right)$$

c) Ilustração computacional: O código Python abaixo simula o processo.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import norm

# Parâmetros
lamb = 5  # lambda da Poisson
n = 100   # tamanho da amostra
num_simulations = 10000 # número de médias amostrais a gerar

# Gerar 10000 médias amostrais de tamanho 100
sample_means = [np.mean(np.random.poisson(lamb, n)) for _ in range(num_simulations)]

# Plotar o histograma das médias
plt.hist(sample_means, bins=30, density=True, alpha=0.6, label='Distribuição Empírica

# Plotar a densidade da Normal teórica (TLC)
mu_normal = lamb
sigma_normal = np.sqrt(lamb / n)
x = np.linspace(mu_normal - 4*sigma_normal, mu_normal + 4*sigma_normal, 100)
plt.plot(x, norm.pdf(x, mu_normal, sigma_normal), 'r-', lw=2, label='Aproximação Norma

plt.title(f'Distribuição de Médias Amostrais (n={n}) vs. TLC')
plt.xlabel('Média Amostral')
plt.ylabel('Densidade')
plt.legend()
plt.grid(True)
plt.show()
```