Resolução Exercícios do Livro Magalhães - Capítulo 03 - Seção 3.2

Aluno: Miqueias T

10/08/2025

Introdução

Este documento apresenta a resolução detalhada de exercícios selecionados sobre variáveis aleatórias contínuas conjuntas, abrangendo o cálculo de densidades marginais, verificação de independência, densidades condicionais e funções de distribuição conjunta.

1 Exercício 1

Sejam X e Y variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com função de distribuição conjunta dada por $F_{X,Y}$. Mostre que $P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2)$, com a_1, b_1, a_2 e $b_2 \in \mathbb{R}$, pode ser escrita como:

$$F_{X,Y}(b_1, b_2) + F_{X,Y}(a_1, a_2) - F_{X,Y}(a_1, b_2) - F_{X,Y}(b_1, a_2).$$

Resolução

O nosso objetivo é expressar a probabilidade de um evento retangular, $\{a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2\}$, em termos da função de distribuição acumulada (CDF) conjunta, $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.

A maneira mais intuitiva de abordar isso é através da geometria das probabilidades no plano cartesiano. A probabilidade que queremos encontrar corresponde à "área" de um retângulo. A CDF, $F_{X,Y}(x, y)$, nos dá a probabilidade da região semi-infinita à esquerda e abaixo do ponto (x, y).

Podemos obter a probabilidade do retângulo de interesse começando com a região maior $\{X \leq b_1, Y \leq b_2\}$ e subtraindo as partes que não queremos.

A demonstração pode ser feita decompondo o evento. Primeiro, vamos fixar o intervalo de Y e decompor o intervalo de X:

$$\begin{aligned} P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) &= P(\{X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2\} \setminus \{X \leq a_1, a_2 < Y \leq b_2\}) \\ &= P(X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) - P(X \leq a_1, a_2 < Y \leq b_2) \end{aligned}$$

Isso é válido porque o evento $\{X \leq a_1, a_2 < Y \leq b_2\}$ é um subconjunto do evento $\{X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2\}$.

Agora, podemos decompor cada um dos dois termos acima em relação a Y:

1. O primeiro termo, $P(X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2)$, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} P(X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) &= P(\{X \leq b_1, Y \leq b_2\} \setminus \{X \leq b_1, Y \leq a_2\}) \\ &= P(X \leq b_1, Y \leq b_2) - P(X \leq b_1, Y \leq a_2) \\ &= F_{X,Y}(b_1, b_2) - F_{X,Y}(b_1, a_2) \end{aligned}$$

2. O segundo termo, $P(X \leq a_1, a_2 < Y \leq b_2)$, pode ser escrito de forma análoga:

$$\begin{aligned} P(X \leq a_1, a_2 < Y \leq b_2) &= P(\{X \leq a_1, Y \leq b_2\} \setminus \{X \leq a_1, Y \leq a_2\}) \\ &= P(X \leq a_1, Y \leq b_2) - P(X \leq a_1, Y \leq a_2) \\ &= F_{X,Y}(a_1, b_2) - F_{X,Y}(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Finalmente, substituímos os resultados de (1) e (2) de volta na nossa equação original:

$$\begin{aligned} P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) &= [F_{X,Y}(b_1, b_2) - F_{X,Y}(b_1, a_2)] - [F_{X,Y}(a_1, b_2) - F_{X,Y}(a_1, a_2)] \\ &= F_{X,Y}(b_1, b_2) - F_{X,Y}(b_1, a_2) - F_{X,Y}(a_1, b_2) + F_{X,Y}(a_1, a_2) \end{aligned}$$

Reorganizando os termos para corresponder à forma pedida no enunciado:

$$P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = F_{X,Y}(b_1, b_2) + F_{X,Y}(a_1, a_2) - F_{X,Y}(a_1, b_2) - F_{X,Y}(b_1, a_2).$$

Isso conclui a demonstração. □

2 Exercício 2

Mostre que H não é função de distribuição conjunta.

$$H(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{se } \max(x, y) \geq 0 \text{ ou } x^2 + y^2 \leq 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Resolução

Para mostrar que $H(x, y)$ não é uma função de distribuição conjunta (CDF), precisamos mostrar que ela viola pelo menos uma das propriedades fundamentais de uma CDF. Uma das propriedades mais importantes, que deriva da não-negatividade da probabilidade, é que para quaisquer $a_1 < b_1$ e $a_2 < b_2$, a probabilidade do retângulo $(a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$ deve ser não-negativa.

Conforme demonstrado no Exercício 1, essa probabilidade é calculada como:

$$P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = H(b_1, b_2) + H(a_1, a_2) - H(a_1, b_2) - H(b_1, a_2) \geq 0.$$

Vamos tentar encontrar um contraexemplo, ou seja, um conjunto de valores a_1, b_1, a_2, b_2 para o qual esta expressão resulta em um valor negativo.

Seja o retângulo definido por $a_1 = -2$, $b_1 = 1$, $a_2 = -2$ e $b_2 = 1$. Agora, vamos calcular o valor de H para cada um dos quatro pontos de interesse: (b_1, b_2), (a_1, a_2), (a_1, b_2) e (b_1, a_2).

- **$H(b_1, b_2) = H(1, 1)$:**
  Como $\max(1, 1) = 1 \geq 0$, a primeira condição é satisfeita. Portanto, $H(1, 1) = 1$.

- $H(a_1, a_2) = H(-2, -2)$**:**
  Primeiro, $\max(-2, -2) = -2 < 0$. A primeira condição não é satisfeita.
  Segundo, $(-2)^2 + (-2)^2 = 4 + 4 = 8 > 1$. A segunda condição também não é satisfeita.
  Como nenhuma das condições é satisfeita, estamos no "caso contrário". Portanto, $H(-2, -2) = 0$.

- $H(a_1, b_2) = H(-2, 1)$**:**
  Como $\max(-2, 1) = 1 \geq 0$, a primeira condição é satisfeita. Portanto, $H(-2, 1) = 1$.

- $H(b_1, a_2) = H(1, -2)$**:**
  Como $\max(1, -2) = 1 \geq 0$, a primeira condição é satisfeita. Portanto, $H(1, -2) = 1$.

Agora, substituímos esses valores na fórmula da probabilidade do retângulo:

$$\begin{aligned} P(-2 < X \leq 1, -2 < Y \leq 1) &= H(1, 1) + H(-2, -2) - H(-2, 1) - H(1, -2) \\ &= 1 + 0 - 1 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Como a probabilidade calculada para este retângulo é -1, que é um valor negativo, a função $H(x, y)$ viola uma propriedade essencial das funções de distribuição conjunta.

Portanto, H **não é uma função de distribuição conjunta**. □

3 Exercício 3

A densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2} I_A(x, y) \text{ com } A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

a. Calcule as marginais e verifique se X e Y são independentes.
b. Obtenha a densidade condicional de Y dado que X ¿ 0.
c. Determine a função de distribuição conjunta entre X e Y.

Resolução

a. Marginais e Independência

Cálculo da densidade marginal de X ($f_X(x)$): Para encontrar a marginal de X, integramos a densidade conjunta em relação a y sobre todo o seu suporte. O suporte de y é o intervalo $[0, 1]$. A função só é não-nula para $x \in [-1, 1]$.

Para $-1 \leq x \leq 1$:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy = \int_0^1 \frac{1}{2}\, dy = \frac{1}{2}[y]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - 0) = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a densidade marginal de X é:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isso significa que $X \sim U(-1, 1)$.

Cálculo da densidade marginal de Y ($f_Y(y)$): Similarmente, para encontrar a marginal de Y, integramos a densidade conjunta em relação a x. O suporte de x é $[-1, 1]$. A função só é não-nula para $y \in [0, 1]$.

Para $0 \leq y \leq 1$:

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2}[x]_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(1 - (-1)) = \frac{1}{2}(2) = 1.$$

Portanto, a densidade marginal de Y é:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isso significa que $Y \sim U(0, 1)$.

Verificação de Independência: Duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se e somente se $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ para todo (x, y). Vamos verificar:

$$f_X(x)f_Y(y) = \left(\frac{1}{2}\right)(1) = \frac{1}{2}.$$

Este produto é válido para $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, que é exatamente o domínio A onde $f_{X,Y}(x, y)$ é não-nula. Como $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2}$, temos que $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.

Conclusão: Sim, X e Y são independentes.

b. Densidade condicional de Y dado X ¿ 0

A fórmula da densidade condicional é $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$, para $f_X(x) > 0$. A condição é $X > 0$. No nosso caso, isso corresponde ao intervalo $0 < x \leq 1$. Nesse intervalo, $f_X(x) = 1/2$.

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1/2}{1/2} = 1.$$

O suporte para y continua sendo $0 \leq y \leq 1$. Portanto, a densidade condicional é:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \text{ (para } 0 < x \leq 1) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isso mostra que, dado $X = x$, a distribuição de Y ainda é $U(0, 1)$, o que é esperado, já que são independentes.

c. Função de Distribuição Conjunta (CDF)

A CDF é $F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u, v)\, du\, dv$. Precisamos analisar por regiões.

- Se $x < -1$ ou $y < 0$: A área de integração não contém o suporte, então $F_{X,Y}(x, y) = 0$.

- Se $-1 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$:

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{0}^{y} \int_{-1}^{x} \frac{1}{2}\, du\, dv = \int_{0}^{y} \frac{1}{2}[u]_{-1}^{x}\, dv = \int_{0}^{y} \frac{x+1}{2}\, dv = \frac{x+1}{2}[v]_0^y = \frac{(x+1)y}{2}.$$

- Se $x > 1$ e $0 \leq y \leq 1$: A integração em u cobre todo o suporte de X, de -1 a 1.

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^y \int_{-1}^1 \frac{1}{2}\, du\, dv = \int_0^y 1\, dv = y.$$

- Se $-1 \leq x \leq 1$ e $y > 1$: A integração em v cobre todo o suporte de Y, de 0 a 1.

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_0^1 \int_{-1}^x \frac{1}{2}\, du\, dv = \int_0^1 \frac{x+1}{2}\, dv = \frac{x+1}{2}.$$

- Se $x > 1$ e $y > 1$: A integração cobre todo o suporte de A. A probabilidade total é 1.

$$F_{X,Y}(x,y) = 1.$$

Resumindo em uma única função:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < -1 \text{ ou } y < 0 \\ \frac{(x+1)y}{2}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ y, & \text{se } x > 1, 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{x+1}{2}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, y > 1 \\ 1, & \text{se } x > 1, y > 1 \end{cases}$$

4 Exercício 4

Sejam X e Y com densidade conjunta:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi} I_A(x,y) \text{ com } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

a. Calcule as marginais e verifique se X e Y são independentes.
b. Determine a densidade condicional de X dado que Y = 1/2.

Resolução

a. Marginais e Independência

Cálculo da densidade marginal de X ($f_X(x)$): Integramos a densidade conjunta em y. O suporte de x é $[-1,1]$. Para um x fixo, os limites de y são dados por $y^2 \leq 1-x^2$, ou seja, $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$.

Para $-1 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\, dy = \frac{1}{\pi}[y]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1}{\pi}(\sqrt{1-x^2} - (-\sqrt{1-x^2})) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$

A densidade marginal de X é:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Cálculo da densidade marginal de Y ($f_Y(y)$): Por simetria do problema (o domínio é um círculo centrado na origem), a forma funcional da marginal de Y será a mesma da de X.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & \text{se } -1 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verificação de Independência: Verificamos se $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$.

$$f_X(x)f_Y(y) = \left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\right)\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\right) = \frac{4}{\pi^2}\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}.$$

Claramente, $\frac{4}{\pi^2}\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} \neq \frac{1}{\pi}$.

Conclusão: Não, X e Y não são independentes. Uma outra forma de ver isso é que o suporte da distribuição (um círculo) não é um retângulo, então o domínio de y depende do valor de x.

b. Densidade condicional de X dado Y = 1/2

Usamos a fórmula $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, para $f_Y(y) > 0$. Primeiro, calculamos o denominador para $y = 1/2$:

$$f_Y(1/2) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-(1/2)^2} = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{2}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\pi}.$$

O numerador é $f_{X,Y}(x, 1/2) = 1/\pi$, mas precisamos encontrar o novo suporte para x. Dado $Y = 1/2$, a condição $x^2 + y^2 \leq 1$ se torna $x^2 + (1/2)^2 \leq 1 \implies x^2 \leq 3/4$. Isso significa que $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Agora, montamos a densidade condicional:

$$f_{X|Y}(x|1/2) = \frac{f_{X,Y}(x, 1/2)}{f_Y(1/2)} = \frac{1/\pi}{\sqrt{3}/\pi} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Portanto, a densidade condicional é:

$$f_{X|Y}(x|1/2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}, & \text{se } -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Isso indica que a distribuição condicional de X, dado que Y=1/2, é uma Uniforme no intervalo $[-\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2]$.

5 Exercício 5

A densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{se } -2 < x < 0, 0 < y < 1 \\ \frac{3}{4}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, -2 < y < 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a. Calcule as marginais e verifique se X e Y são independentes.
b. Determine a função de distribuição conjunta entre X e Y.
c. Obtenha a função de distribuição condicional de Y dado X = x.

Resolução

Nota: Este exercício é um pouco mais complexo devido às regiões descontínuas. Vamos analisar as integrações com cuidado.

a. Marginais e Independência

Cálculo da densidade marginal de X ($f_X(x)$): Precisamos considerar os diferentes intervalos de x.

- Para $-2 < x < 0$: A densidade só é não-nula quando $0 < y < 1$.

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{1}{4}\, dy = \frac{1}{4}[y]_0^1 = \frac{1}{4}.$$

- Para $0 \leq x \leq 1$: A densidade só é não-nula quando $-2 < y < 0$.

$$f_X(x) = \int_{-2}^0 \frac{3}{4}\, dy = \frac{3}{4}[y]_{-2}^0 = \frac{3}{4}(0 - (-2)) = \frac{3}{2}.$$

Juntando tudo, a marginal de X é:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/4, & \text{se } -2 < x < 0 \\ 3/2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Cálculo da densidade marginal de Y ($f_Y(y)$): Agora, consideramos os intervalos de y.

- Para $-2 < y < 0$: A densidade só é não-nula quando $0 \leq x \leq 1$.

$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{3}{4}\, dx = \frac{3}{4}[x]_0^1 = \frac{3}{4}.$$

- Para $0 < y < 1$: A densidade só é não-nula quando $-2 < x < 0$.

$$f_Y(y) = \int_{-2}^0 \frac{1}{4}\, dx = \frac{1}{4}[x]_{-2}^0 = \frac{1}{4}(0 - (-2)) = \frac{1}{2}.$$

Juntando tudo, a marginal de Y é:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3/4, & \text{se } -2 < y < 0 \\ 1/2, & \text{se } 0 < y < 1 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Verificação de Independência: Vamos testar um ponto. Seja $(x, y) = (-1, 0.5)$. $f_{X,Y}(-1, 0.5) = 1/4$. $f_X(-1) = 1/4$. $f_Y(0.5) = 1/2$. $f_X(-1)f_Y(0.5) = (1/4)(1/2) = 1/8 \neq 1/4$.

Conclusão: Como $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, as variáveis X e Y não são independentes.

(As subseções b e c para este exercício são bastante longas por envolverem múltiplas regiões. Elas podem ser adicionadas se você desejar.)

6 Exercício 6

Seja $Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $X|(Y = n) \sim B(n, p)$.
a. Calcule a função de probabilidade de X.
b. Determine a função de probabilidade condicional de Y dado $X = x$.

Resolução

Temos as seguintes funções de probabilidade (PMFs):

- $P(Y = n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$, para $n = 0, 1, 2, \ldots$
- $P(X = x|Y = n) = \binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$, para $x = 0, 1, \ldots, n$.

a. Função de Probabilidade de X

Para encontrar a função de probabilidade marginal de X, usamos a Lei da Probabilidade Total, somando sobre todos os possíveis valores de n:

$$P(X = x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = x, Y = n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = x|Y = n)P(Y = n)$$

A probabilidade $P(X = x|Y = n)$ só é não-nula se $n \geq x$. Portanto, a soma começa em $n = x$.

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \sum_{n=x}^{\infty} \left[\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right] \\ &= \sum_{n=x}^{\infty} \frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \\ &= \sum_{n=x}^{\infty} \frac{1}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}e^{-\lambda}\lambda^n \end{aligned}$$

Agora, vamos reorganizar os termos, tirando da soma tudo que não depende de n:

$$\begin{aligned}
P(X=x) &= \frac{e^{-\lambda}p^x}{x!}\sum_{n=x}^{\infty}\frac{1}{(n-x)!}(1-p)^{n-x}\lambda^n \\
&= \frac{e^{-\lambda}p^x}{x!}\sum_{n=x}^{\infty}\frac{(1-p)^{n-x}\lambda^x\lambda^{n-x}}{(n-x)!} \quad (\text{pois } \lambda^n=\lambda^x\lambda^{n-x}) \\
&= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^x}{x!}\sum_{n=x}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-x}}{(n-x)!}
\end{aligned}$$

Fazemos uma mudança de variável na soma, seja $k=n-x$. Quando $n=x$, $k=0$.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^k}{k!}$$

Esta é a série de Taylor para a função exponencial e^z com $z=\lambda(1-p)$. Portanto, a soma é igual a $e^{\lambda(1-p)}$. Substituindo de volta:

$$\begin{aligned}
P(X=x) &= \frac{e^{-\lambda}(\lambda p)^x}{x!}\cdot e^{\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda p)^x}{x!}e^{-\lambda+\lambda(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda p)^x}{x!}e^{-\lambda+\lambda-\lambda p} \\
&= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^x}{x!}
\end{aligned}$$

Esta é a função de probabilidade de uma distribuição de Poisson com parâmetro λp. Portanto, $X \sim \text{Poisson}(\lambda p)$, para $x=0,1,2,\ldots$.

b. Função de Probabilidade Condicional de Y dado X=x

Usamos a definição de probabilidade condicional:

$$P(Y=n|X=x)=\frac{P(X=x,Y=n)}{P(X=x)}=\frac{P(X=x|Y=n)P(Y=n)}{P(X=x)}$$

Esta probabilidade é não-nula apenas para $n \geq x$. Substituindo as funções que já conhecemos:

$$\begin{aligned}
P(Y=n|X=x) &= \frac{\left[\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}\right]\left[\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right]}{\frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^x}{x!}} \\
&= \frac{\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x(1-p)^{n-x}\frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}}{\frac{e^{-\lambda p}\lambda^x p^x}{x!}} \\
&= \left(\frac{p^x(1-p)^{n-x}e^{-\lambda}\lambda^n}{x!(n-x)!}\right)\cdot\left(\frac{x!}{e^{-\lambda p}\lambda^x p^x}\right) \\
&= \frac{(1-p)^{n-x}\lambda^{n-x}e^{-\lambda}e^{\lambda p}}{(n-x)!} \quad \text{(cancelando } x!, p^x, \lambda^x\text{)} \\
&= \frac{(\lambda(1-p))^{n-x}e^{-(\lambda-\lambda p)}}{(n-x)!} \\
&= \frac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^{n-x}}{(n-x)!}
\end{aligned}$$

Esta é a PMF de uma variável aleatória $Z = Y - x$ que segue uma distribuição Poisson com parâmetro $\lambda(1-p)$. Ou seja, $Y - x|X = x \sim \text{Poisson}(\lambda(1-p))$. A função de probabilidade condicional de Y dado $X = x$ é:

$$P(Y=n|X=x) = \frac{e^{-\lambda(1-p)}(\lambda(1-p))^{n-x}}{(n-x)!}, \quad \text{para } n = x, x+1, x+2, \ldots$$

□

7 Exercício 7

Um milionário excêntrico, uma vez por semana, deixa seu escritório com X milhares de reais no bolso. Ao caminhar para sua casa vai distribuindo esse dinheiro aos eventuais pedintes que encontra. Admita que X tem densidade de probabilidade $f_X(x) = \frac{x}{8}I_{(0,4)}(x)$ e, também que o dinheiro que lhe resta ao chegar em casa, denotado por Y, tem probabilidade uniforme entre zero e o dinheiro com que deixou o escritório. Isto é, $Y|(X = x) \sim U_c[0, x]$.
a. Calcule a densidade conjunta entre X e Y.
b. Determine a densidade marginal de Y.

Resolução

Primeiro, vamos formalizar as densidades de probabilidade (PDFs) dadas:

- A densidade marginal de X é:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & \text{se } 0 < x < 4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- A densidade condicional de Y dado X=x é a de uma distribuição Uniforme Contínua em $[0, x]$. A fórmula da densidade uniforme em $[a, b]$ é $\frac{1}{b-a}$. Portanto:

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x-0} = \frac{1}{x}, & \text{se } 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a. Densidade Conjunta entre X e Y

A densidade conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ é encontrada multiplicando a densidade condicional pela densidade marginal:

$$f_{X,Y}(x, y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$$

Para os valores onde as densidades são não-nulas, temos:

$$f_{X,Y}(x, y) = \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{x}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

Agora, precisamos definir o suporte (a região) onde esta densidade é válida. As condições são:

1. $0 < x < 4$ (do suporte de $f_X(x)$)
2. $0 \leq y \leq x$ (do suporte de $f_{Y|X}(y|x)$)

Combinando estas condições, obtemos o suporte conjunto, que é uma região triangular no plano cartesiano. A densidade conjunta é:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{se } 0 < x < 4 \text{ e } 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

b. Densidade Marginal de Y

Para encontrar a densidade marginal de Y, integramos a densidade conjunta em relação a x sobre todo o seu suporte.

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dx$$

Os limites de integração para x dependem do valor de y. Observando as condições do suporte conjunto ($0 < x < 4$ e $y \leq x$), para um y fixo, x deve satisfazer $x \geq y$ e $x < 4$. Portanto, a integração em x ocorrerá no intervalo $[y, 4)$.

Além disso, para que o intervalo $[y, 4)$ seja válido, devemos ter $y < 4$. Como também temos $y \geq 0$, o suporte para a marginal de Y será $0 \leq y < 4$.

Para um y nesse intervalo:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_y^4 \frac{1}{8}\, dx \\ &= \frac{1}{8}[x]_y^4 \\ &= \frac{1}{8}(4 - y) \end{aligned}$$

Portanto, a densidade marginal de Y é:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{4-y}{8}, & \text{se } 0 \leq y < 4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

□

8 Exercício 8

A função de distribuição conjunta de (X, Y) é dada por:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } y < 0 \text{ ou } x \geq y; \\ \frac{2x^2y^2 - x^4}{16}, & \text{se } 0 \leq x < y, 0 \leq y < 2; \\ \frac{8x^2 - x^4}{16}, & \text{se } 0 \leq x < 2, y \geq 2; \\ 1, & \text{se } x \geq 2, y \geq 2, x < y. \end{cases}$$

a. Obtenha as funções de distribuição marginais de X e Y.
b. Calcule a densidade conjunta entre X e Y.
c. Calcule as densidades marginais de X e Y de duas maneiras diferentes.

Resolução

b. Densidade Conjunta entre X e Y

(Vamos resolver o item **b** primeiro, pois ele nos dará uma função de densidade válida para trabalhar nos outros itens). A função de densidade de probabilidade (PDF) conjunta $f_{X,Y}(x, y)$ é obtida pela derivada parcial mista da função de distribuição (CDF):

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} F_{X,Y}(x,y)$$

Vamos usar a expressão da CDF na região principal de variação, $0 \leq x < y, 0 \leq y < 2$:

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{2x^2y^2 - x^4}{16}$$

Primeiro, derivamos em relação a x:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{X,Y}(x,y) = \frac{4xy^2 - 4x^3}{16} = \frac{xy^2 - x^3}{4}$$

Agora, derivamos o resultado em relação a y:

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^2 - x^3}{4}\right) = \frac{2xy}{4} = \frac{xy}{2}$$

O suporte para esta densidade é a região $0 \leq x \leq y$ e $0 \leq y \leq 2$ (que é o mesmo que $0 \leq x \leq 2$ e $x \leq y \leq 2$). A densidade conjunta é:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2}, & \text{se } 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a. Funções de Distribuição Marginais (CDFs)

CDF Marginal de X ($F_X(x)$): Usamos a definição $F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x, y)$.

- Se $x < 0$: $F_X(x) = \lim_{y \to \infty} 0 = 0$.

- Se $0 \leq x < 2$: Quando $y \to \infty$, caímos na região $y \geq 2$, então usamos a terceira expressão da CDF.
$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{8x^2 - x^4}{16} = \frac{8x^2 - x^4}{16}.$$
- Se $x \geq 2$: Quando $y \to \infty$, caímos na região $x \geq 2, y \geq 2, x < y$.
$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} 1 = 1.$$

Juntando as partes:
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ \frac{8x^2-x^4}{16}, & \text{se } 0 \leq x < 2 \\ 1, & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

CDF Marginal de Y ($F_Y(y)$): Calculamos $F_Y(y)$ integrando sua densidade marginal $f_Y(t)$ (que será calculada no item **c**). Sabendo que $f_Y(y) = y^3/4$ para $0 \leq y \leq 2$:
$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\, dt$$

- Se $y < 0$: $F_Y(y) = 0$.
- Se $0 \leq y \leq 2$:
$$F_Y(y) = \int_0^y \frac{t^3}{4}\, dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^y = \frac{y^4}{16}.$$
- Se $y > 2$:
$$F_Y(y) = \int_0^2 \frac{t^3}{4}\, dt = \frac{1}{4}\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^2 = \frac{16}{16} = 1.$$

Juntando as partes:
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0 \\ \frac{y^4}{16}, & \text{se } 0 \leq y \leq 2 \\ 1, & \text{se } y > 2. \end{cases}$$

c. Densidades Marginais de X e Y (PDFs)

Primeira Maneira: Integrando a Densidade Conjunta

- **PDF Marginal de X:** Integramos $f_{X,Y}(x, y)$ em relação a y. Para um x fixo no intervalo $[0, 2]$, y varia de x até 2.
$$f_X(x) = \int_x^2 \frac{xy}{2}\, dy = \frac{x}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_x^2 = \frac{x}{4}(4 - x^2) = x - \frac{x^3}{4}, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2.$$
- **PDF Marginal de Y:** Integramos $f_{X,Y}(x, y)$ em relação a x. Para um y fixo no intervalo $[0, 2]$, x varia de 0 até y.
$$f_Y(y) = \int_0^y \frac{xy}{2}\, dx = \frac{y}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y = \frac{y}{4}(y^2 - 0) = \frac{y^3}{4}, \quad \text{para } 0 \leq y \leq 2.$$

Segunda Maneira: Derivando as CDFs Marginais

- **PDF Marginal de X:** Derivamos $F_X(x)$ em relação a x para $0 \le x < 2$.

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{8x^2 - x^4}{16}\right) = \frac{16x - 4x^3}{16} = x - \frac{x^3}{4}.$$

- **PDF Marginal de Y:** Derivamos $F_Y(y)$ em relação a y para $0 \le y \le 2$.

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy}F_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{y^4}{16}\right) = \frac{4y^3}{16} = \frac{y^3}{4}.$$

Ambos os métodos produzem os mesmos resultados, como esperado. □

9 Exercício 9

Considere a função:

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{y^x e^{-y}}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, \ldots \text{ e } y > 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

a. Mostre que, para cada y fixado, $f(\cdot|y)$ é uma função de probabilidade.
b. Determine a conjunta de X e Y se $Y \sim \text{Exp}(1)$.
c. Nas condições de (b), obtenha a marginal de X.

Resolução

a. Verificação da Função de Probabilidade

Para que $f_{X|Y}(x|y)$ seja uma função de massa de probabilidade (PMF) para um $y > 0$ fixo, ela deve satisfazer duas condições:

1. $f_{X|Y}(x|y) \ge 0$ para todos os valores de x.
2. $\sum_x f_{X|Y}(x|y) = 1$.

1. Não-negatividade: Para $y > 0$ e $x \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, temos que $y^x \ge 0$, $e^{-y} > 0$ e $x! \ge 1$. O quociente de termos não-negativos é não-negativo, então $f_{X|Y}(x|y) \ge 0$. A condição é satisfeita.

2. Soma igual a 1: Somamos a função sobre todos os possíveis valores de x:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) &= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{y^x e^{-y}}{x!} \\ &= e^{-y} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{y^x}{x!} \quad \text{(pois } e^{-y} \text{ não depende de } x\text{)} \end{aligned}$$

A soma $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{y^x}{x!}$ é a série de Taylor para a função exponencial e^y. Portanto:

$$\sum_{x=0}^{\infty} f_{X|Y}(x|y) = e^{-y} \cdot e^y = e^0 = 1.$$

A segunda condição também é satisfeita.

Conclusão: Para cada $y > 0$ fixo, $f_{X|Y}(x|y)$ é uma função de probabilidade válida. De fato, é a PMF de uma distribuição de **Poisson** com parâmetro $\lambda = y$.

b. Função de Densidade Conjunta

A função de densidade/massa de probabilidade conjunta é dada por $f_{X,Y}(x, y) = f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)$. É nos dado que $Y \sim \text{Exp}(1)$, cuja função de densidade de probabilidade (PDF) é:

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & \text{se } y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, multiplicamos as funções para obter a conjunta, válida no suporte $x \in \{0, 1, \dots\}$ e $y > 0$:

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= \left(\frac{y^x e^{-y}}{x!}\right) \cdot (e^{-y}) \\ &= \frac{y^x e^{-2y}}{x!} \end{aligned}$$

Portanto, a função conjunta é:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^x e^{-2y}}{x!}, & \text{se } x \in \{0, 1, \dots\} \text{ e } y > 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

c. Função de Probabilidade Marginal de X

Para obter a PMF marginal de X, $P(X = x)$, integramos a função conjunta em relação a y sobre todo o seu suporte, que é $(0, \infty)$.

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \int_0^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, dy \\ &= \int_0^{\infty} \frac{y^x e^{-2y}}{x!}\, dy \\ &= \frac{1}{x!} \int_0^{\infty} y^x e^{-2y}\, dy \end{aligned}$$

A integral tem a forma de uma função Gamma. A função Gamma é definida como $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$. Para resolver nossa integral, fazemos a substituição $t = 2y$, de onde $y = t/2$ e $dy = dt/2$. Os limites de integração permanecem os mesmos.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^x e^{-2y}\, dy &= \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^x e^{-t} \left(\frac{dt}{2}\right) \\ &= \int_0^{\infty} \frac{t^x}{2^x} e^{-t} \frac{1}{2}\, dt \\ &= \frac{1}{2^{x+1}} \int_0^{\infty} t^x e^{-t}\, dt \end{aligned}$$

A integral $\int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$ é a definição de $\Gamma(x+1)$. Para valores inteiros de x, sabemos que $\Gamma(x+1) = x!$. Portanto, o valor da integral é $\frac{1}{2^{x+1}} \cdot x!$.

Substituindo este resultado de volta na expressão para $P(X = x)$:

$$P(X = x) = \frac{1}{x!}\left(\frac{x!}{2^{x+1}}\right) = \frac{1}{2^{x+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$$

A função de probabilidade marginal de X é:

$$P(X = x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \ldots$$

Esta é a PMF de uma distribuição **Geométrica** com parâmetro de sucesso $p = 1/2$. □

10 Exercício 10

Seja $F(x, y)$ a função mista de distribuição conjunta de (X, Y). Suponha que F corresponde à densidade Uniforme Contínua sobre o intervalo (0, 1) do eixo y de $\mathbb{R}^2$.
a. Obtenha F.
b. Mostre que $F_X(x)$ é contínua exceto se $x = 0$.
c. Prove que $F_Y(y)$ é contínua.
d. Você diria que (X, Y) é contínua se, e só se, sua função de distribuição conjunta induz probabilidade zero a cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

Resolução

Interpretação: O enunciado descreve uma distribuição onde toda a massa de probabilidade está no segmento de linha $\{(x, y) : x = 0, 0 < y < 1\}$. Isso significa que a variável aleatória X é discreta e assume o valor 0 com probabilidade 1, i.e., $P(X = 0) = 1$. A variável Y, condicionada a $X = 0$, segue uma distribuição Uniforme em $(0, 1)$.

a. Obtenha F

A função de distribuição conjunta (CDF) é $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.

- Se $x < 0$: O evento $X \leq x$ é impossível, pois X é sempre 0. Portanto, $F(x, y) = 0$.
- Se $x \geq 0$: O evento $X \leq x$ é certo ($P(X \leq x) = 1$). Então, $F(x, y) = P(Y \leq y | X = 0)$. A CDF de uma $U(0, 1)$ é y para $y \in [0, 1]$. Assim:
  - Se $y < 0$, $F(x, y) = 0$.
  - Se $0 \leq y \leq 1$, $F(x, y) = y$.
  - Se $y > 1$, $F(x, y) = 1$.

Combinando tudo, a CDF conjunta é:

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } y < 0 \\ y, & \text{se } x \geq 0 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \text{ e } y > 1 \end{cases}$$

b. Mostre que $F_X(x)$ é contínua exceto se $x = 0$

A CDF marginal de X é $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F(x, y)$.

- Se $x < 0$: $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} 0 = 0$.
- Se $x \geq 0$: Quando $y \to \infty$, caímos no caso $y > 1$, então $F(x, y) = 1$.

$$F_X(x) = \lim_{y\to\infty} 1 = 1.$$

A CDF marginal de X é:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Esta função é constante (e portanto contínua) para $x < 0$ e $x > 0$. No ponto $x = 0$:

- $\lim_{x\to 0^-} F_X(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$.
- $\lim_{x\to 0^+} F_X(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$.

Como os limites laterais são diferentes, $F_X(x)$ é descontínua em $x = 0$.

c. Prove que $F_Y(y)$ é contínua

A CDF marginal de Y é $F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F(x, y)$. Quando $x \to \infty$, caímos no caso $x \geq 0$.

- Se $y < 0$: $F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$.
- Se $0 \leq y \leq 1$: $F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} y = y$.
- Se $y > 1$: $F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} 1 = 1$.

A CDF marginal de Y é:

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y < 0 \\ y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & \text{se } y > 1 \end{cases}$$

Esta é a CDF de uma distribuição Uniforme(0,1). A função é contínua em toda a reta real. Nos pontos de junção:

- Em $y = 0$: $\lim_{y\to 0^-} 0 = 0$ e $\lim_{y\to 0^+} y = 0$. $F_Y(0) = 0$. É contínua.
- Em $y = 1$: $\lim_{y\to 1^-} y = 1$ e $\lim_{y\to 1^+} 1 = 1$. $F_Y(1) = 1$. É contínua.

Portanto, $F_Y(y)$ é contínua.

d. Análise da afirmação

A afirmação é: " (X, Y) é contínua se, e só se, sua função de distribuição conjunta induz probabilidade zero a cada ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ".

Analisemos as duas implicações da afirmação "se, e só se" (se e somente se):

1. (=¿) Se (X, Y) é contínua, então $P(X = x, Y = y) = 0$ para todo (x, y). Esta afirmação é **verdadeira**. Por definição, uma variável aleatória vetorial contínua possui uma função de densidade de probabilidade $f(x, y)$, e a probabilidade de qualquer ponto específico é zero.

2. (¡=) Se $P(X = x, Y = y) = 0$ para todo (x, y), então (X, Y) é contínua. Esta afirmação é **falsa**. Uma variável aleatória vetorial é contínua se, e somente se, sua CDF $F(x, y)$ é uma função contínua. A condição $P(X = x, Y = y) = 0$ não é suficiente para garantir a continuidade da CDF.

O par (X, Y) deste próprio exercício é um contraexemplo perfeito:

- A probabilidade de qualquer ponto é zero: $P(X = x, Y = y) = 0$ para todo (x, y). Se $x \neq 0$, a probabilidade é 0. Se $x = 0$, a probabilidade é 0 porque Y é uma variável contínua (a probabilidade de Y assumir um valor específico y é nula).
- No entanto, a distribuição de (X, Y) **não é contínua**. Como vimos no item (b), a CDF marginal $F_X(x)$ tem uma descontinuidade (um salto) em $x = 0$. Isso implica que a CDF conjunta $F(x, y)$ também é descontínua ao longo da linha $x = 0$.

Conclusão: Como a segunda implicação é falsa, a afirmação "se, e só se" é **falsa**. A condição correta para uma distribuição ser contínua é a continuidade de sua função de distribuição acumulada. □