Capítulo 2

Miqueias

Capítulo 2

Seção 2.3

Exercício 1

Verifique que a atribuição de probabilidade nos modelos Binomial, Geométrico, Hipergeométrico e Poisson satisfazem às propriedades de função de probabilidade.

Resolução

Para que uma função seja considerada uma função de probabilidade, ela deve satisfazer duas condições essenciais: 1. **Não-negatividade:** $P(X = k) \geq 0$ para todos os valores de k. 2. **Soma Total:** A soma de todas as probabilidades deve ser igual a 1.

A seguir, verificamos essas propriedades para cada modelo.

Modelo Binomial

A função de probabilidade é:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n$$

- **1. Não-negatividade:** Todos os termos da fórmula (coeficiente binomial, potências de p e $1 - p$) são não-negativos. Portanto, o resultado $P(X = k)$ **é sempre maior ou igual a zero**.
- **2. Soma Total:** Utilizando o Teorema Binomial, onde $(a + b)^n = \sum \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$:

  $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

  A soma das probabilidades **é igual a 1**.

Modelo Geométrico

A função de probabilidade é:

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad \text{para } k = 1, 2, ...$$

- **1. Não-negatividade:** Como $0 < p \leq 1$, tanto p quanto $(1 - p)$ são não-negativos. Portanto, $P(X = k)$ **é sempre maior ou igual a zero**.
- **2. Soma Total:** A soma corresponde a uma série geométrica infinita com primeiro termo $a = p$ e razão $r = (1 - p)$. A soma é $\frac{a}{1-r}$:

  $$\sum_{k=1}^{\infty} p(1 - p)^{k-1} = \frac{p}{1 - (1 - p)} = \frac{p}{p} = 1$$

  A soma das probabilidades **é igual a 1**.

Modelo Hipergeométrico

A função de probabilidade é:

$$P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

- **1. Não-negatividade:** Os coeficientes binomiais representam contagens de combinações e são sempre não-negativos. Portanto, $P(X = k)$ **é sempre maior ou igual a zero**.
- **2. Soma Total:** Utilizando a Identidade de Vandermonde, $\sum_k \binom{r}{k}\binom{m}{n-k} = \binom{r+m}{n}$:

  $$\sum_k \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_k \binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} = \frac{1}{\binom{N}{n}}\binom{N}{n} = 1$$

  A soma das probabilidades **é igual a 1**.

Modelo de Poisson

A função de probabilidade é:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, ...$$

- **1. Não-negatividade:** Para $\lambda > 0$, os termos $e^{-\lambda}$, λ^k e $k!$ são todos positivos. Portanto, $P(X = k)$ **é sempre maior que zero**.

- **2. Soma Total:** Utilizando a expansão da série de Taylor para $e^{\lambda} = \sum \frac{\lambda^k}{k!}$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = e^0 = 1$$

  A soma das probabilidades **é igual a 1**.

Exercício 2

Considere um dado equilibrado. Para cada uma das situações abaixo, obtenha a função de probabilidade da variável de interesse e identifique o modelo, se possível.

a. O dado é lançado 3 vezes, de forma independente. Estamos interessados no número de vezes em que ocorreu face 1.
b. O dado é lançado 3 vezes, de forma independente. Estamos interessados no número de repetições de faces sorteadas.
c. O dado é lançado sucessivamente, de forma independente, até ocorrer a face 6. Estamos interessados em quantos lançamentos foram necessários.
d. O dado é lançado 3 vezes, mas a face ocorrida num lançamento é "retirada" para o próximo sorteio. Estamos interessados no número de faces ímpares obtidas.

Resolução

a. Número de vezes que ocorreu face 1

- **Identificação:** Este é um experimento com um número fixo de tentativas independentes ($n = 3$), onde cada tentativa tem dois resultados (sucesso = "face 1", fracasso = "outra face") e a probabilidade de sucesso ($p = 1/6$) é constante. Este é um **Modelo Binomial**.

- **Variável:** Seja X o número de vezes que a face 1 ocorre. X pode assumir os valores $\{0, 1, 2, 3\}$.
- **Função de Probabilidade:** Com $n = 3$ e $p = 1/6$:

$$P(X = k) = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{3-k}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3$$

b. Número de repetições de faces sorteadas

- **Identificação:** Este cenário **não corresponde a um modelo de probabilidade padrão** (como Binomial ou Geométrico). Precisamos construir a função de probabilidade calculando os casos possíveis.
- **Variável:** Seja Y o número de faces iguais em 3 lançamentos. Y pode ser:
  - $Y = 0$: Se todas as 3 faces forem diferentes (ex: 1-2-3).
  - $Y = 2$: Se exatamente 2 faces forem iguais (ex: 1-1-2).
  - $Y = 3$: Se todas as 3 faces forem iguais (ex: 1-1-1).
- **Função de Probabilidade:** O espaço amostral total é $6 \times 6 \times 6 = 216$.
  - $P(Y = 0) = P(3 \text{ faces diferentes}) = \frac{6\times5\times4}{216} = \frac{120}{216}$
  - $P(Y = 3) = P(3 \text{ faces iguais}) = \frac{6}{216}$ (casos 111, 222, ..., 666)
  - $P(Y = 2) = P(2 \text{ faces iguais}) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 3) = 1 - \frac{120}{216} - \frac{6}{216} = \frac{90}{216}$

  Resumindo a função:

$$P(Y = k) = \begin{cases} 120/216, & \text{se } k = 0 \\ 90/216, & \text{se } k = 2 \\ 6/216, & \text{se } k = 3 \end{cases}$$

c. Número de lançamentos até ocorrer a face 6

- **Identificação:** Estamos repetindo um experimento independente até a ocorrência do primeiro sucesso (“face 6”). A variável de interesse é o número de tentativas necessárias. Este é um **Modelo Geométrico**.
- **Variável:** Seja W o número de lançamentos até ocorrer a face 6. W pode assumir os valores $\{1, 2, 3, \dots\}$.
- **Função de Probabilidade:** A probabilidade de sucesso é $p = 1/6$.

$$P(W = k) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{6}\right), \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \dots$$

d. Número de faces ímpares (sem reposição)

- **Identificação:** Temos uma população finita ($N = 6$ faces) da qual extraímos uma amostra ($n = 3$) **sem reposição**. Estamos contando o número de sucessos (faces ímpares) na amostra. Este é um **Modelo Hipergeométrico**. hypergeometric distribution

- **Variável:** Seja Z o número de faces ímpares obtidas. A população tem $K = 3$ faces ímpares ($\{1, 3, 5\}$) e $N - K = 3$ faces pares ($\{2, 4, 6\}$). Z pode assumir os valores $\{0, 1, 2, 3\}$.
- **Função de Probabilidade:** Com $N = 6$, $K = 3$, e $n = 3$:

$$P(Z = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{3}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{6}{3}}, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, 3$$

Exercício 3

Se X ~ B(n,p), qual é o modelo de Y = n - X? Interprete.

Resolução

O modelo de **Y = n - X** também é uma **distribuição Binomial**.

Se a variável **X** conta o número de **sucessos** em n tentativas, com probabilidade de sucesso p, então a variável **Y** simplesmente conta o número de **falhas**. A probabilidade de uma falha em qualquer tentativa é **(1-p)**.

Portanto, o modelo para Y é:

$$Y \sim B(n, 1 - p)$$

Interpretação

Em um experimento Binomial, `Y = n - X` representa o **número total de falhas**. Enquanto `X` foca nos sucessos, `Y` foca no resultado complementar.

Exemplo prático: Um jogador de basquete arremessa 20 lances livres (`n=20`). A probabilidade de ele acertar (sucesso) é `p=0.8`.

- **X** = número de cestas que ele **acerta**.
  - `X ~ B(20, 0.8)`
- **Y = 20 - X** = número de cestas que ele **erra**.
  - A probabilidade de errar é `1 - p = 0.2`.
  - `Y ~ B(20, 0.2)`

Ambas as variáveis descrevem resultados do mesmo experimento, apenas contando eventos opostos.

Exercício 4

Se X ~ Geo(p), qual é o modelo de Y = X + 1? Interprete.

Resolução

Para responder a esta pergunta, primeiro precisamos esclarecer qual das duas definições comuns da distribuição Geométrica está sendo usada para X.

- **Definição 1 (Contagem de Falhas):** X é o número de **falhas** que ocorrem *antes* do primeiro sucesso. Os valores possíveis para X são {0, 1, 2, ...}.
- **Definição 2 (Contagem de Tentativas):** X é o número da **tentativa** na qual o primeiro sucesso ocorre. Os valores possíveis para X são {1, 2, 3, ...}.

Assumindo a **Definição 1** para X (número de falhas), que é a mais comum em muitos contextos, o modelo de **Y = X + 1** também representa um **processo Geométrico**, mas sob a **Definição 2**.

Interpretação

Se **X** conta o número de **falhas** antes do primeiro sucesso, então **Y = X + 1** (falhas + 1 sucesso) representa o **número total de tentativas** necessárias para se obter o primeiro sucesso.

Em resumo, `X` e `Y` descrevem o mesmo evento (esperar pelo primeiro sucesso), mas contam aspectos diferentes: `X` conta os fracassos e `Y` conta o total de tentativas.

Exemplo prático: Você lança um dado repetidamente até obter a face "6" pela primeira vez. A probabilidade de sucesso em cada lançamento é `p = 1/6`.

- **X** = O número de lançamentos que **não** resultaram em "6" antes de você finalmente conseguir. Se você tira "6" na primeira tentativa, `X=0`. Se tira "2" e depois "6", `X=1`.
  - `X` segue o modelo Geométrico contando **falhas**.
- **Y = X + 1** = O **número do lançamento** em que o "6" apareceu. Se você tira "6" na primeira tentativa, `Y=1`. Se tira "2" e depois "6", `Y=2`.
  - `Y` segue o modelo Geométrico contando **tentativas**.

Exercício 5

Dentre os estudantes João, Pedro e Manoel, o professor escolhe ao acaso um deles para fazer uma pergunta. Se cinco perguntas forem feitas, qual a probabilidade de:

a. Manoel nunca ser escolhido?
b. Um (qualquer) dos estudantes não ser solicitado a responder sequer uma pergunta?

Resolução

Para cada pergunta, a probabilidade de um estudante específico ser escolhido é de **1/3**. A probabilidade de ele *não* ser escolhido é de **2/3**. As 5 perguntas são eventos independentes.

a. Manoel nunca ser escolhido?

Para que Manoel nunca seja escolhido, ele não pode ser escolhido em nenhuma das 5 perguntas. Como os eventos são independentes, multiplicamos as probabilidades.

- A probabilidade de Manoel não ser escolhido em **uma** pergunta é **2/3**.
- A probabilidade de isso acontecer **5 vezes seguidas** é:

$$P(\text{Manoel nunca ser escolhido}) = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

A probabilidade é de **32/243**.

b. Um (qualquer) dos estudantes não ser solicitado?

Este problema é mais complexo e a melhor abordagem é usar o **Princípio da Inclusão-Exclusão**. Sejam os eventos: * **J**: João nunca é escolhido. * **P**: Pedro nunca é escolhido. * **M**: Manoel nunca é escolhido.

Queremos calcular $P(J \cup P \cup M)$.

A fórmula é: $P(J \cup P \cup M) = [P(J) + P(P) + P(M)] - [P(J \cap P) + P(J \cap M) + P(P \cap M)] + P(J \cap P \cap M)$

1. **Probabilidades individuais:** A probabilidade de um estudante específico não ser escolhido é o que calculamos no item (a).

- $P(J) = P(P) = P(M) = (2/3)^5 = 32/243$

2. **Interseção de dois eventos:** $P(J \cap P)$ é a probabilidade de nem João nem Pedro serem escolhidos. Isso significa que **apenas Manoel** respondeu a todas as 5 perguntas.
   - A probabilidade de apenas Manoel ser escolhido em uma pergunta é **1/3**.
   - $P(J \cap P) = (1/3)^5 = 1/243$. O mesmo vale para as outras combinações: $P(J \cap M) = P(P \cap M) = 1/243$.
3. **Interseção de três eventos:** $P(J \cap P \cap M)$ é a probabilidade de nenhum dos três ser escolhido, o que é **impossível**.
   - $P(J \cap P \cap M) = 0$

Juntando tudo:

$$P(J \cup P \cup M) = \left[3 \times \frac{32}{243}\right] - \left[3 \times \frac{1}{243}\right] + 0$$
$$= \frac{96}{243} - \frac{3}{243} = \frac{93}{243}$$

Simplificando a fração (dividindo ambos por 3), obtemos:

$$\frac{31}{81}$$

A probabilidade é de **31/81**.

Exercício 6

Uma vacina, com taxa de imunização de 80% segundo o fabricante, foi aplicada num conjunto de crianças de um certo bairro. As autoridades de saúde desejam se certificar se a taxa de imunização tem efetivamente o valor indicado. Para tal, 20 crianças foram sorteadas dentre as que receberam a vacina e foram submetidas a testes rigorosos para avaliar sua imunização.

a. Sendo a afirmação do fabricante verdadeira, qual seria a probabilidade de obter 3 crianças não imunizadas, no grupo das 20 crianças?
b. Se você fosse encarregado de decidir sobre a aceitação ou não da afirmação do fabricante, que critério você estabeleceria?

Resolução

Este problema pode ser modelado usando a **distribuição Binomial**, pois temos um número fixo de "tentativas" independentes (`n=20` crianças), e cada uma tem dois resultados possíveis: "imunizada" (sucesso) ou "não imunizada" (falha).

a. Probabilidade de 3 crianças não imunizadas

A questão foca no número de crianças **não imunizadas**. Portanto, vamos definir nossa variável e probabilidade de "sucesso" em termos de não imunização.

- **n = 20** (número total de crianças testadas)
- **p** = probabilidade de uma criança **não** estar imunizada = 100% - 80% = **20% ou 0.2**
- **k = 3** (número de crianças não imunizadas que queremos calcular a probabilidade)

Seja **Y** a variável aleatória que representa o número de crianças não imunizadas. Temos que **Y ~ B(20, 0.2)**.

Usamos a fórmula da probabilidade Binomial:

$$P(Y = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Substituindo os valores:

$$P(Y = 3) = \binom{20}{3} (0.2)^3 (1-0.2)^{20-3}$$

$$P(Y = 3) = \binom{20}{3} (0.2)^3 (0.8)^{17}$$

Calculando o coeficiente binomial:

$$\binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$$

Então, a probabilidade é:

$$P(Y = 3) = 1140 \times (0.008) \times (0.8)^{17} \approx 1140 \times 0.008 \times 0.0225 \approx 0.2054$$

A probabilidade de obter exatamente 3 crianças não imunizadas é de aproximadamente **20.54%**.

b. Critério para aceitação da afirmação

Esta é uma questão de **teste de hipótese**. Meu critério seria baseado em determinar se o resultado observado na amostra é "raro" ou "extremo" demais para ter acontecido caso a afirmação do fabricante (taxa de 80%) fosse verdadeira.

O critério seria o seguinte:

1. **Assumir a afirmação como verdadeira:** Parto do princípio de que a taxa de não imunização é de fato 20%. Com isso, o número esperado de crianças não imunizadas na amostra de 20 seria $E(Y) = n \times p = 20 \times 0.2 = 4$.
2. **Definir um nível de "raridade" (nível de significância):** Eu estabeleceria um limiar de probabilidade, geralmente 5% (ou $\alpha = 0.05$). Qualquer resultado cuja chance de ocorrer (assumindo a afirmação verdadeira) seja menor que 5% será considerado evidência forte contra a afirmação.
3. **Estabelecer o Ponto de Corte:** Eu calcularia o número `c` de crianças não imunizadas que serviria como ponto de corte. Se observarmos um número de falhas muito acima do esperado (4), devemos desconfiar. O critério seria: rejeitar a afirmação do fabricante se o número de crianças não imunizadas na amostra for `c` ou mais. O valor `c` é o menor número tal que a probabilidade de haver `c` ou mais falhas ($P(Y \geq c)$) seja menor que 5%.
   - Calculando para Y ~ B(20, 0.2):
     - $P(Y \geq 7) \approx 0.0867$ (8.7%, não raro o suficiente)
     - $P(Y \geq 8) \approx 0.0321$ (**3.2%**, raro o suficiente, pois é $< 5\%$)
4. **Decisão Final: O critério seria:** "Após testar as 20 crianças, se o número de crianças **não imunizadas** for **8 ou mais**, eu rejeitaria a afirmação do fabricante."

   Justificativa: Se a taxa de imunização fosse realmente de 80%, a chance de encontrar 8 ou mais crianças não imunizadas em um grupo de 20 seria de apenas 3.2%, um evento muito improvável que nos levaria a crer que a taxa de imunização real é, na verdade, inferior a 80%. Se o número for 7 ou menos, não teríamos evidência estatística suficiente para refutar a afirmação.

Exercício 7

O número de chegadas a um posto de informações turísticas é modelado por Poisson com taxa de 2 pessoas por hora. Para uma hora qualquer, qual a probabilidade de ocorrer:

a. Pelo menos uma chegada?
b. Mais de duas chegadas, dado que chegaram menos de 5 pessoas?

Resolução

Este problema segue um **Modelo de Poisson** com uma taxa média ( ) de **= 2** chegadas por hora. A variável aleatória **X** representa o número de chegadas em uma hora.

A fórmula da probabilidade de Poisson é:

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-2}2^k}{k!}$$

a. Pelo menos uma chegada?

A probabilidade de "pelo menos uma chegada" ($P(X \geq 1)$) é o complemento da probabilidade de "nenhuma chegada" ($P(X = 0)$). Calcular o complemento é muito mais simples.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$$

Primeiro, calculamos $P(X = 0)$:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2}2^0}{0!} = \frac{e^{-2} \times 1}{1} = e^{-2}$$

Usando $e \approx 2.718$, temos $e^{-2} \approx 0.1353$.

Agora, calculamos o complemento:

$$P(X \geq 1) = 1 - e^{-2} \approx 1 - 0.1353 = 0.8647$$

A probabilidade de ocorrer pelo menos uma chegada é de aproximadamente **86.47%**.

b. Mais de duas chegadas, dado que chegaram menos de 5 pessoas?

Esta é uma questão de **probabilidade condicional**. Queremos calcular $P(X > 2 \mid X < 5)$.

A fórmula da probabilidade condicional é:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Neste caso: * Evento A: $X > 2$ (ou seja, 3, 4, 5, ...) * Evento B: $X < 5$ (ou seja, 0, 1, 2, 3, 4) * A interseção $A \cap B$ é $2 < X < 5$, que corresponde a X ser **3 ou 4**.

Então, a fórmula se torna:

$$P(X > 2 \mid X < 5) = \frac{P(X = 3) + P(X = 4)}{P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)}$$

Vamos calcular cada probabilidade (o termo e^{-2} será comum a todos): * $P(X=0) = e^{-2}\frac{2^0}{0!} = e^{-2} \times 1$ * $P(X=1) = e^{-2}\frac{2^1}{1!} = e^{-2} \times 2$ * $P(X=2) = e^{-2}\frac{2^2}{2!} = e^{-2} \times 2$ * $P(X=3) = e^{-2}\frac{2^3}{3!} = e^{-2} \times \frac{8}{6} \approx e^{-2} \times 1.3333$ * $P(X=4) = e^{-2}\frac{2^4}{4!} = e^{-2} \times \frac{16}{24} \approx e^{-2} \times 0.6667$

Agora, substituímos na fórmula (o termo e^{-2} pode ser cancelado do numerador e do denominador):

$$P(X > 2 \mid X < 5) = \frac{e^{-2}(1.3333 + 0.6667)}{e^{-2}(1 + 2 + 2 + 1.3333 + 0.6667)}$$
$$= \frac{2}{7} \approx 0.2857$$

A probabilidade de ocorrerem mais de duas chegadas, dado que chegaram menos de cinco, é de aproximadamente **28.57%**.

Exercício 8

A propriedade da falta de memória, na sua forma mais comum para distribuições discretas, é $P(X \geq m + n \mid X \geq m) = P(X \geq n)$ ou, de forma equivalente, para uma variável que conta falhas, $P(X = m + n \mid X \geq m) = P(X = n)$. A versão da pergunta ($P(X = m + n \mid X > m) = P(X = n)$) é ligeiramente diferente, mas o resultado é o mesmo. Verificaremos a propriedade.

Resolução

a. Poisson( ) O modelo de Poisson **não satisfaz** a propriedade da falta de memória. O número de eventos que já ocorreram em um intervalo influencia a probabilidade de se atingir um total maior. A taxa é constante, mas o número de eventos contados `X` depende da história.

b. B(n, p) O modelo Binomial **não satisfaz** a propriedade da falta de memória. O número de tentativas `n` é fixo, portanto, saber que já ocorreram mais de `m` sucessos altera drasticamente o espaço de resultados para as tentativas restantes.

c. Geo(p) O modelo Geométrico **é a única distribuição discreta que satisfaz a propriedade da falta de memória**. A interpretação é que, se estamos esperando um sucesso e ele ainda não ocorreu após `m` tentativas, a probabilidade de esperar mais `n` tentativas é a mesma como se estivéssemos começando do zero. Cada tentativa é independente e "não se lembra" das falhas anteriores.

Exercício 9

Seja X uma variável aleatória com distribuição de Poisson( ).

Resolução

a. Se P(X = 1) = P(X = 2), qual o valor de P(X < 4)?

Primeiro, usamos a igualdade para encontrar o valor de .

$$P(X=1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} \quad \text{e} \quad P(X=2) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}$$

$$\lambda e^{-\lambda} = \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$$

Como   deve ser maior que 0, podemos simplificar a equação, resultando em:

$$1 = \frac{\lambda}{2} \implies \lambda = 2$$

Agora, calculamos $P(X < 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$ para =2.

$$P(X<4) = \frac{e^{-2}2^0}{0!} + \frac{e^{-2}2^1}{1!} + \frac{e^{-2}2^2}{2!} + \frac{e^{-2}2^3}{3!}$$

$$= e^{-2}\left(1+2+2+\frac{8}{6}\right) = e^{-2}\left(5+\frac{4}{3}\right) = e^{-2}\frac{19}{3} \approx 0.1353 \times 6.333 \approx 0.8571$$

O valor é aproximadamente **0.8571** ou **85.71%**.

b. Sendo P(X = 1) = 0,1 e P(X = 2) = 0,2, quanto vale P(X = 3)? As premissas desta questão são **inconsistentes** com um modelo de Poisson. Se usarmos a razão entre as probabilidades para encontrar :

$$\frac{P(X=2)}{P(X=1)} = \frac{0.2}{0.1} = 2$$

A fórmula teórica para essa razão é $\frac{\lambda}{k+1}$, que para k=1 é $\frac{\lambda}{2}$.

$$\frac{\lambda}{2} = 2 \implies \lambda = 4$$

No entanto, se =4, então $P(X = 1) = \frac{e^{-4}4^1}{1!} \approx 0.073$, o que contradiz a premissa de que $P(X = 1) = 0.1$. Portanto, **não existe uma distribuição de Poisson que satisfaça ambas as condições iniciais**.

Exercício 10

Os erros da impressora seguem um modelo de Poisson com **= 2** erros por página.

Resolução

a. Qual é a probabilidade de encontrar pelo menos 1 erro em uma página? Esta é a probabilidade complementar a encontrar 0 erros, $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

$$P(X = 0) = \frac{e^{-2}2^0}{0!} = e^{-2} \approx 0.1353$$

$$P(X \geq 1) = 1 - e^{-2} \approx 1 - 0.1353 = 0.8647$$

A probabilidade é de aproximadamente **86.47%**.

b. Se 5 páginas são sorteadas, qual é a probabilidade de pelo menos 1 página com pelo menos 1 erro? Este é um novo problema que pode ser modelado por uma **distribuição Binomial**. * **Tentativa:** Sortear uma página (`n=5`). * **Sucesso:** A página sorteada ter "pelo menos 1 erro". * **Probabilidade de sucesso (p):** Calculada no item (a), $p = 1 - e^{-2} \approx 0.8647$.

Seja Y o número de páginas com pelo menos um erro. Queremos $P(Y \geq 1) = 1 - P(Y = 0)$. $P(Y = 0)$ é a probabilidade de que **nenhuma** das 5 páginas tenha erros (ou seja, todas as 5 têm 0 erros). A probabilidade de uma página ter 0 erros é e^{-2}.

$$P(Y = 0) = (e^{-2})^5 = e^{-10} \approx 0.0000454$$

$$P(Y \geq 1) = 1 - e^{-10} \approx 1 - 0.0000454 = 0.9999546$$

A probabilidade é de aproximadamente **99.995%**.

c. Identifique o modelo da variável que conta o número de páginas com pelo menos um erro. Conforme explicado no item (b), a variável segue um **Modelo Binomial**. Se `Y` é o número de páginas com pelo menos um erro, então:

$$Y \sim B(n = 5, p = 1 - e^{-2})$$

Ou seja, uma Binomial com 5 tentativas e probabilidade de sucesso de aproximadamente 86.47%.