Exercícios do Livro Magalhães - Capítulo 03

Seção 3.4

Aluno: Miqueias T

27 de Agosto de 2025

Introdução

Este documento apresenta a resolução de exercícios teóricos selecionados sobre a definição formal de variáveis aleatórias, independência de eventos e propriedades de funções de distribuição. Os problemas exploram conceitos fundamentais da teoria da medida e da probabilidade.

1 Exercício 1

> Sendo X e Y variáveis aleatórias em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, mostre que $\min(X, Y)$ e $\max(X, Y)$ também são variáveis aleatórias.

Resolução

Para mostrar que uma função $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória, precisamos provar que o conjunto $\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \leq z\}$ pertence à σ-álgebra $\mathcal{F}$ para todo $z \in \mathbb{R}$.

Prova para $Z = \max(X, Y)$: Vamos analisar o evento $\{Z \leq z\}$, ou seja, $\{\max(X, Y) \leq z\}$. O máximo de dois números é menor ou igual a z se, e somente se, ambos os números são menores ou iguais a z. Portanto, podemos reescrever o evento da seguinte forma:

$$\{\max(X, Y) \leq z\} = \{X \leq z \text{ e } Y \leq z\}$$

Este evento corresponde à interseção de dois outros eventos:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq z\} \cap \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq z\}$$

Por definição, como X e Y são variáveis aleatórias, os conjuntos $\{X \leq z\}$ e $\{Y \leq z\}$ pertencem a $\mathcal{F}$ para qualquer $z \in \mathbb{R}$. Uma das propriedades fundamentais de uma σ-álgebra é que ela é fechada sob interseções finitas. Como ambos os conjuntos estão em $\mathcal{F}$, a sua interseção também deve estar em $\mathcal{F}$. Logo, $\{\max(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{F}$ para todo $z \in \mathbb{R}$, o que prova que $\max(X, Y)$ é uma variável aleatória.

Prova para $W = \min(X, Y)$**:** Agora, vamos analisar o evento $\{W \leq z\}$, ou seja, $\{\min(X, Y) \leq z\}$. O mínimo de dois números é menor ou igual a z se, e somente se, pelo menos um dos números é menor ou igual a z. Assim, podemos reescrever o evento como uma união:

$$\{\min(X, Y) \leq z\} = \{X \leq z \text{ ou } Y \leq z\}$$

Este evento corresponde à união de dois outros eventos:

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq z\} \cup \{\omega \in \Omega : Y(\omega) \leq z\}$$

Novamente, como X e Y são variáveis aleatórias, os conjuntos $\{X \leq z\}$ e $\{Y \leq z\}$ pertencem a $\mathcal{F}$. Uma σ-álgebra também é fechada sob uniões finitas. Portanto, a união dos dois conjuntos também pertence a $\mathcal{F}$. Logo, $\{\min(X, Y) \leq z\} \in \mathcal{F}$ para todo $z \in \mathbb{R}$, o que prova que $\min(X, Y)$ é uma variável aleatória. $\square$

2 Exercício 3

Mostre que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são eventos independentes se e só se $I_{A_1}, I_{A_2}, \ldots, I_{A_n}$ forem variáveis aleatórias independentes.

Resolução

Seja I_{A_i} a variável aleatória indicadora do evento A_i, tal que $I_{A_i} = 1$ se A_i ocorre, e $I_{A_i} = 0$ caso contrário. Note que $P(I_{A_i} = 1) = P(A_i)$ e $P(I_{A_i} = 0) = 1 - P(A_i) = P(A_i^c)$.

($\Rightarrow$) Se os eventos são independentes, as v.a. indicadoras são independentes. Assumimos que $A_1, \ldots, A_n$ são eventos independentes. Para mostrar que as variáveis aleatórias $I_{A_1}, \ldots, I_{A_n}$ são independentes, devemos mostrar que para qualquer escolha de $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$:

$$P(I_{A_1} = x_1, \ldots, I_{A_n} = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(I_{A_i} = x_i)$$

O evento $\{I_{A_1} = x_1, \ldots, I_{A_n} = x_n\}$ corresponde à interseção de n eventos, onde o i-ésimo evento é A_i se $x_i = 1$, ou A_i^c se $x_i = 0$. Vamos chamar esses eventos de B_i.

$$\{I_{A_1} = x_1, \ldots, I_{A_n} = x_n\} = \bigcap_{i=1}^{n} B_i, \quad \text{onde } B_i = \begin{cases} A_i & \text{se } x_i = 1 \\ A_i^c & \text{se } x_i = 0 \end{cases}$$

Como os eventos $A_1, \ldots, A_n$ são independentes, qualquer coleção formada por A_i ou seus complementos A_i^c também será de eventos independentes. Portanto, os eventos $B_1, \ldots, B_n$ são independentes. Assim,

$$\begin{aligned} P(I_{A_1} = x_1, \ldots, I_{A_n} = x_n) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(B_i) \quad \text{(pela independência dos } B_i\text{)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(I_{A_i} = x_i) \end{aligned}$$

Isso prova que as variáveis aleatórias indicadoras são independentes.

($\Leftarrow$) Se as v.a. indicadoras são independentes, os eventos são independentes. Assumimos que $I_{A_1}, \ldots, I_{A_n}$ são variáveis aleatórias independentes. Para mostrar que os eventos $A_1, \ldots, A_n$ são independentes, devemos mostrar que para qualquer subconjunto de índices $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$:

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

O evento $\bigcap_{j \in J} A_j$ é precisamente o evento em que $I_{A_j} = 1$ para todo $j \in J$.

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = P(I_{A_j} = 1 \text{ para todo } j \in J)$$

Como as variáveis indicadoras são independentes, a probabilidade da ocorrência conjunta é o produto das probabilidades marginais:

$$\begin{aligned} P(I_{A_j} = 1 \text{ para todo } j \in J) &= \prod_{j \in J} P(I_{A_j} = 1) \\ &= \prod_{j \in J} P(A_j) \end{aligned}$$

Isso prova que os eventos são independentes. $\square$

3 Exercício 5

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F_X. Seja $Y = h(X)$ com função de distribuição F_Y. Mostre que:

a. $F_{X,Y}(x, y) = \min\{F_X(x), F_Y(y)\}$, se h é monótona crescente.
b. $F_{X,Y}(x, y) = \max\{F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0\}$, se h é monótona decrescente.

Resolução

A função de distribuição conjunta é $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. Substituindo $Y = h(X)$, temos $F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, h(X) \leq y)$.

a. h é monótona crescente

Se h é monótona crescente, ela possui uma inversa h^{-1} que também é monótona crescente. A desigualdade $h(X) \leq y$ é equivalente a $X \leq h^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= P(X \leq x \text{ e } X \leq h^{-1}(y)) \\ &= P(X \leq \min\{x, h^{-1}(y)\}) \\ &= F_X(\min\{x, h^{-1}(y)\}) \end{aligned}$$

Como a função F_X é não-decrescente, $F_X(\min\{a, b\}) = \min\{F_X(a), F_X(b)\}$. Assim:

$$F_{X,Y}(x, y) = \min\{F_X(x), F_X(h^{-1}(y))\}$$

Agora, vamos analisar o termo $F_Y(y)$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = P(X \leq h^{-1}(y)) = F_X(h^{-1}(y))$$

Substituindo isso na expressão anterior, obtemos o resultado desejado:

$$F_{X,Y}(x, y) = \min\{F_X(x), F_Y(y)\}.$$

b. h é monótona decrescente

Se h é monótona decrescente, sua inversa h^{-1} também é. A desigualdade $h(X) \leq y$ é equivalente a $X \geq h^{-1}(y)$ (a ordem da desigualdade inverte).

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(x, y) &= P(X \leq x \text{ e } X \geq h^{-1}(y)) \\ &= P(h^{-1}(y) \leq X \leq x) \end{aligned}$$

Se $x < h^{-1}(y)$, o intervalo é vazio e a probabilidade é 0. Caso contrário, para uma v.a. contínua, a probabilidade é $F_X(x) - F_X(h^{-1}(y))$. Vamos analisar a expressão dada: $\max\{F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0\}$. Primeiro, calculamos $F_Y(y)$:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = P(X \geq h^{-1}(y)) = 1 - P(X < h^{-1}(y))$$

Assumindo que X é contínua, $P(X < h^{-1}(y)) = F_X(h^{-1}(y))$. Portanto, $F_Y(y) = 1 - F_X(h^{-1}(y))$. Agora, substituímos na expressão:

$$\begin{aligned} F_X(x) + F_Y(y) - 1 &= F_X(x) + (1 - F_X(h^{-1}(y))) - 1 \\ &= F_X(x) - F_X(h^{-1}(y)) \end{aligned}$$

Isso corresponde a $P(h^{-1}(y) \leq X \leq x)$. O termo $\max\{\dots, 0\}$ garante que a probabilidade seja não-negativa, cobrindo o caso em que o intervalo é vazio. Portanto, a identidade está correta. $\square$

4 Exercício 7

Mostre que, para variáveis contínuas X e Y, temos

$$F_X(x) + F_Y(y) - 1 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq \sqrt{F_X(x)F_Y(y)}; \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Resolução

Vamos provar as duas desigualdades separadamente. Sejam os eventos $A = \{X \leq x\}$ e $B = \{Y \leq y\}$. Pelas definições das funções de distribuição, temos:

- $P(A) = F_X(x)$
- $P(B) = F_Y(y)$
- $P(A \cap B) = F_{X,Y}(x,y)$

Prova da Desigualdade à Esquerda: $F_X(x)+F_Y(y)-1 \leq F_{X,Y}(x,y)$ Esta desigualdade é uma consequência direta da fórmula de união de probabilidades (ou desigualdade de Bonferroni). A probabilidade da união de dois eventos é:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Sabemos que qualquer probabilidade deve ser menor ou igual a 1, então $P(A \cup B) \leq 1$.

$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$$

Reorganizando os termos para isolar $P(A \cap B)$:

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B)$$

Substituindo pelas funções de distribuição, obtemos a desigualdade desejada:

$$F_X(x) + F_Y(y) - 1 \leq F_{X,Y}(x,y).$$

Prova da Desigualdade à Direita: $F_{X,Y}(x,y) \leq \sqrt{F_X(x)F_Y(y)}$ Esta desigualdade pode ser provada usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz para variáveis aleatórias. Sejam I_A e I_B as variáveis aleatórias indicadoras dos eventos A e B. A desigualdade de Cauchy-Schwarz para esperanças afirma que $(E[UV])^2 \leq E[U^2]E[V^2]$. Aplicando para $U = I_A$ e $V = I_B$:

$$(E[I_A I_B])^2 \leq E[I_A^2]E[I_B^2]$$

Uma propriedade das variáveis indicadoras é que $I_A^2 = I_A$ (pois $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$). Da mesma forma, $I_B^2 = I_B$. Além disso, o produto $I_A I_B$ é a indicadora da interseção, $I_{A \cap B}$. A esperança de uma variável indicadora é a probabilidade do evento correspondente.

- $E[I_A I_B] = E[I_{A\cap B}] = P(A \cap B)$
- $E[I_A^2] = E[I_A] = P(A)$
- $E[I_B^2] = E[I_B] = P(B)$

Substituindo na desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$(P(A \cap B))^2 \leq P(A)P(B)$$

Tirando a raiz quadrada de ambos os lados (como probabilidades são não-negativas, a desigualdade se mantém):

$$P(A \cap B) \leq \sqrt{P(A)P(B)}$$

Substituindo de volta pelas funções de distribuição:

$$F_{X,Y}(x, y) \leq \sqrt{F_X(x)F_Y(y)}.$$

Isso completa a demonstração das duas desigualdades. $\square$