# Exercícios do Livro Magalhães - Capítulo 03

Seção 3.3 e Outros

Aluno: Miqueias T

27 de Agosto de 2025

## Introdução

Este documento apresenta a resolução de exercícios selecionados sobre transformações de variáveis aleatórias. Os problemas abordam a determinação de funções de distribuição e densidade para novas variáveis que são funções de outras, bem como a derivação de distribuições resultantes de somas e diferenças de variáveis aleatórias independentes.

## 1 Exercício 1 (Seção 3.3)

Seja X uma variável aleatória com função de distribuição F e sejam a e b constantes reais. Determine a função de distribuição das seguintes variáveis aleatórias:
a. $-X$.
b. $aX + b$, com $a \neq 0$.
d. Comente as diferenças nas soluções se X é discreta ou contínua.

### Resolução

Seja $F_X(x) = P(X \leq x)$ a função de distribuição acumulada (FDA) de X.

#### a. FDA de Y = -X

A função de distribuição de Y, $F_Y(y)$, é dada por:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(-X \leq y) \\ &= P(X \geq -y) \\ &= 1 - P(X < -y) \end{aligned}$$

Aqui, precisamos considerar se X é contínua ou discreta.

- Se X é **contínua**, $P(X = k) = 0$ para todo $k$. Portanto, $P(X < -y) = P(X \leq -y) = F_X(-y)$.
$$F_Y(y) = 1 - F_X(-y).$$
- Se X é **discreta**, $P(X < -y)$ pode não ser igual a $F_X(-y)$. A relação correta é $P(X < -y) = P(X \leq -y) - P(X = -y) = F_X(-y) - P(X = -y)$.
$$F_Y(y) = 1 - F_X(-y) + P(X = -y).$$

### b. FDA de Z = aX + b

Vamos analisar os casos para o sinal de $a$.

**Caso 1:** $a > 0$

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(aX + b \leq z) \\ &= P(aX \leq z - b) \\ &= P\left(X \leq \frac{z-b}{a}\right) \\ &= F_X\left(\frac{z-b}{a}\right) \end{aligned}$$

Neste caso, a solução é a mesma para X contínua ou discreta.

**Caso 2:** $a < 0$ A desigualdade inverte ao dividir por $a$:

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Z \leq z) = P(aX + b \leq z) \\ &= P\left(X \geq \frac{z-b}{a}\right) \\ &= 1 - P\left(X < \frac{z-b}{a}\right) \end{aligned}$$

Similar ao item (a), a solução depende da natureza de X.

- Se X é **contínua**:
$$F_Z(z) = 1 - F_X\left(\frac{z-b}{a}\right).$$
- Se X é **discreta**:
$$F_Z(z) = 1 - F_X\left(\frac{z-b}{a}\right) + P\left(X = \frac{z-b}{a}\right).$$

### d. Diferenças entre caso discreto e contínuo

A principal diferença reside no tratamento de desigualdades estritas ($<$) e não estritas ($\leq$). Para uma variável aleatória contínua, a probabilidade de ela assumir um valor pontual específico é zero, ou seja, $P(X = k) = 0$. Isso simplifica as manipulações, pois $P(X < k) = P(X \leq k)$. Para uma variável aleatória discreta, a probabilidade em um ponto, $P(X = k)$, pode ser positiva. Portanto, é crucial distinguir entre $P(X < k)$ e $P(X \leq k)$, pois $P(X \leq k) = P(X < k) + P(X = k)$. Essa distinção afeta os cálculos da FDA quando uma transformação inverte a ordem da desigualdade, como vimos nos casos de $Y = -X$ e $Z = aX + b$ com $a < 0$. □

## 2 Exercício 4 (Seção 3.3)

Sejam X e Y $\sim N(0,1)$, independentes. Obtenha a densidade de $2X + Y$.

### Resolução

Seja $Z = 2X + Y$. Como X e Y são variáveis aleatórias normais e independentes, qualquer combinação linear delas também resultará em uma variável aleatória normal. Para caracterizar a distribuição de Z, precisamos apenas de sua média e variância.

**Cálculo da Média de Z:** A esperança de Z é:

$$\begin{aligned} E[Z] &= E[2X + Y] \\ &= E[2X] + E[Y] \quad \text{(pela linearidade da esperança)} \\ &= 2E[X] + E[Y] \end{aligned}$$

Como $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(0,1)$, temos que $E[X] = 0$ e $E[Y] = 0$.

$$E[Z] = 2(0) + 0 = 0.$$

**Cálculo da Variância de Z:** A variância de Z é:

$$Var(Z) = Var(2X + Y)$$

Como X e Y são independentes, a variância da soma é a soma das variâncias:

$$\begin{aligned} Var(Z) &= Var(2X) + Var(Y) \\ &= 2^2 Var(X) + Var(Y) \quad \text{(usando a propriedade } Var(aX) = a^2 Var(X)\text{)} \end{aligned}$$

Como $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(0,1)$, temos que $Var(X) = 1$ e $Var(Y) = 1$.

$$Var(Z) = 4(1) + 1 = 5.$$

**Conclusão:** A variável aleatória Z segue uma distribuição Normal com média 0 e variância 5. Escrevemos isso como $Z \sim N(0,5)$. A função de densidade de probabilidade (PDF) de Z é dada pela fórmula da distribuição Normal $N(\mu, \sigma^2)$, onde $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 5$:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{10\pi}} e^{-\frac{z^2}{10}}, \quad \text{para } z \in \mathbb{R}.$$

□

## 3 Exercício 6 (Seção 3.3)

Sejam X e Y $\sim Exp(1)$, independentes. Obtenha a densidade de $X - Y$.

### Resolução

Seja $Z = X - Y$. As densidades de X e Y são $f_X(x) = e^{-x}$ para $x > 0$ e $f_Y(y) = e^{-y}$ para $y > 0$. Para encontrar a densidade de $Z$, usamos a fórmula da convolução para a diferença de duas variáveis aleatórias independentes:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(v) f_Y(v - z)\, dv$$

O integrando $f_X(v)f_Y(v - z) = e^{-v}e^{-(v-z)}$ é não-nulo apenas quando as condições dos suportes de X e Y são atendidas, ou seja, $v > 0$ e $v - z > 0 \implies v > z$.

Vamos analisar a integral para dois casos de $z$.

**Caso 1:** $z \geq 0$ Neste caso, a condição $v > z$ já implica $v > 0$. Portanto, o intervalo de integração é de $z$ a $\infty$.

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_z^{\infty} e^{-v}e^{-(v-z)}\, dv \\
&= \int_z^{\infty} e^{-2v+z}\, dv \\
&= e^z \int_z^{\infty} e^{-2v}\, dv \\
&= e^z \left[-\frac{1}{2}e^{-2v}\right]_{v=z}^{\infty} \\
&= e^z \left(0 - \left(-\frac{1}{2}e^{-2z}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}e^z e^{-2z} = \frac{1}{2}e^{-z}
\end{aligned}$$

**Caso 2:** $z < 0$ Neste caso, as duas condições $v > 0$ e $v > z$ devem ser satisfeitas. Como $z$ é negativo, a condição mais restritiva é $v > 0$. O intervalo de integração é de 0 a $\infty$.

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^{\infty} e^{-v}e^{-(v-z)}\, dv \\
&= \int_0^{\infty} e^{-2v+z}\, dv \\
&= e^z \int_0^{\infty} e^{-2v}\, dv \\
&= e^z \left[-\frac{1}{2}e^{-2v}\right]_{v=0}^{\infty} \\
&= e^z \left(0 - \left(-\frac{1}{2}e^{0}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}e^z
\end{aligned}$$

**Conclusão:** Podemos combinar os dois resultados usando o valor absoluto. Para $z \geq 0$, temos $e^{-z} = e^{-|z|}$. Para $z < 0$, temos $e^{z} = e^{-(-z)} = e^{-|z|}$. Portanto, a densidade de $Z = X - Y$ é:

$$f_Z(z) = \frac{1}{2}e^{-|z|}, \quad \text{para } z \in \mathbb{R}.$$

Esta é a função de densidade da distribuição de Laplace com parâmetros $\mu = 0$ e $b = 1$. $\square$

# 4 Exercício 10 (Outra Seção)

Sendo $X \sim N(0,1)$, verifique que $X^2$ tem distribuição Qui-quadrado com 1 grau de liberdade usando:
a. O método direto.
b. O método do Jacobiano.

## Resolução

Seja $Y = X^2$. A distribuição Qui-quadrado com 1 grau de liberdade ($\chi_1^2$) é um caso especial da distribuição Gama, com parâmetros $\alpha = 1/2$ e $\beta = 1/2$. Sua PDF é $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}$ para $y > 0$. Nosso objetivo é mostrar que a PDF de Y é essa.

### a. O método direto (via Função de Distribuição)

Primeiro, encontramos a FDA de Y, $F_Y(y) = P(Y \leq y)$.

- Se $y < 0$, é impossível que $X^2 \leq y$, então $F_Y(y) = 0$.
- Se $y \geq 0$:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(X^2 \leq y) \\ &= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \leq -\sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

A PDF de Y é a derivada da sua FDA: $f_Y(y) = F'_Y(y)$. Usando a regra da cadeia e sabendo que $F'_X(x) = f_X(x)$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{d}{dy}[F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})] \\ &= f_X(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} - f_X(-\sqrt{y}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{y}}[f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})] \end{aligned}$$

A PDF de $X \sim N(0,1)$ é $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Note que ela é uma função par, ou seja, $f_X(x) = f_X(-x)$. Portanto, $f_X(\sqrt{y}) = f_X(-\sqrt{y})$.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{2\sqrt{y}}[2 \cdot f_X(\sqrt{y})] = \frac{f_X(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{y}} \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(\sqrt{y})^2/2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}, \quad \text{para } y > 0. \end{aligned}$$

Esta é exatamente a PDF de uma distribuição $\chi_1^2$.

**b. O método do Jacobiano (Transformação de Variáveis)**

A transformação é $y = g(x) = x^2$. Esta função não é injetora para $x \in \mathbb{R}$. Podemos dividir o domínio de X em duas partes: $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. As funções inversas são $x_1 = -\sqrt{y}$ e $x_2 = \sqrt{y}$. A fórmula de transformação de densidade é $f_Y(y) = \sum_{i=1}^{2} f_X(x_i) \left|\frac{dx_i}{dy}\right|$. Calculamos os Jacobianos (derivadas, no caso univariado):

$$\frac{dx_1}{dy} = -\frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{e} \quad \frac{dx_2}{dy} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Agora aplicamos a fórmula para $y > 0$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(-\sqrt{y}) \left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| + f_X(\sqrt{y}) \left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right| \\ &= f_X(-\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(\sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \end{aligned}$$

Como $f_X(x)$ é simétrica em torno de zero, $f_X(-\sqrt{y}) = f_X(\sqrt{y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}$.

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2}\right) \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y/2} \frac{1}{2\sqrt{y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2}, \quad \text{para } y > 0. \end{aligned}$$

Ambos os métodos levam à mesma conclusão: $X^2 \sim \chi^2_1$. $\square$