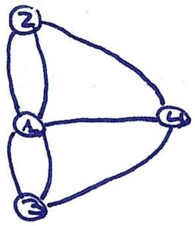
GRAFS

Vèrtexs V
Arestes E
G (V, E)

$e_1 = (v_1, v_2)$

El grau d'un vèrtex es determina a partir del nombre d'arestes d'aquest.

Exemple de recórrer ponts de Prússia sense repetir-ne:

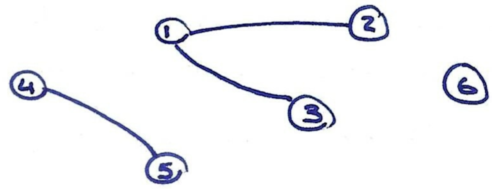


Com que hi ha vèrtexs de grau imparell, com el vèrtex 4 que és grau 3 ~~4~~, el vèrtex 2 i 3 que també són grau 3 i el vèrtex 1 que és grau 5, es pot dir que és impossible creuar tots els ponts i acabar a la mateixa zona sense repetir pont.

Poden haver arestes paral·leles, com les que van de 1 a 2 i de 2 a 1: (1,2), (2,1) i poden haver Loops si una aresta surt d'un vèrtex i acaba al mateix.

Si un graf té vèrtexs, però no té cap aresta, es tracta d'un graf buit.

Si dos vèrtexs estan connectats, s'anomenen adjacents.

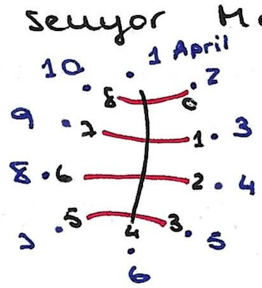


Si un vèrtex no té connexions, es diu que és un vèrtex aïllat.

El graf anterior té 3 components, els components són grups de vèrtexs interconnectats amb arestes.

Joc exemple

Una parella (McBrain i April) fan una festa on conviden a 4 parelles. April pregunta a quantes persones han donat la mà a l'hora de saludar-se i despedir-se. Obté 9 respostes diferents. A quantes persones ha donat la mà el senyor McBrain?



Una persona ni es saluda a si mateixa ni saluda a la seva propia parella.
Si la que ha donat la mà ~~amb la que~~ ~~o~~ tothom esta amb la que no ha donat la mà a ningú i viceversa, ens dóna que la April és parella amb la persona que ha donat la mà 4 cops, el McBrain ha donat la mà 4 cops.

Teorema de les mans encaixades

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E| = \sum d(v_p) + \sum d(v_i)$$

Corol·lari: El nombre de vèrtexs amb grau imparell és parell.

$P \quad 2n \qquad i \quad 2n+1$

$$2n_0 + 2n_1 + 2n_2 + \ldots + 2n_k = 2\underbrace{(n_1 + \ldots + n_k)}_{P} + \underbrace{(2k+1)}_{i} \cdot 1$$

$P + i = i$

$2n + 2k + 1 = 2(n+k) + 1$

$K_1 \qquad K_2 \qquad K_3 \qquad K_4$

$\dfrac{n(n-1)}{2}$ Subgraf $G_1(V_1, E_1) \subseteq G_2(V_2, E_2)$

$V_1 \subseteq V_2$

$E_1 \subseteq E_2$

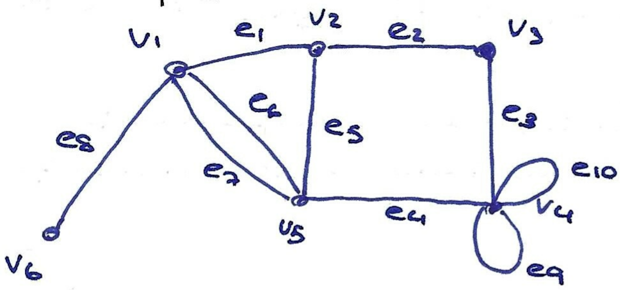
$G(V, E) \qquad E_1 \subseteq E$

$G_1(V_1, E_1)$ és un subgraf de G induït per E_1

V_1 són els vèrtexs incidents a E_1

$G(V, E) \qquad V_1 \subseteq V, \; G_1(V_1, E_1)$

Exemple



Recorregut → Camí sense arestes repetides.

→ $v_1 v_2 v_3 v_4 v_4 v_3$ = Camí

→ $v_1 v_2 v_3 v_4 v_4 v_5$

Camí simple → camí sense vèrtexs repetits

Camí simple tancat → Camí simple però es comença i acaba al mateix vèrtex.

Diàmetre → Excentricitat d'un vèrtex: màxima de les distàncies.

Diàmetre d'un graf → Excentricitat màxima.

Excentricitat d'un vèrtex → Màxima de les distàncies.

Radi d'un graf → Excentricitat mínima.

$d(v, v) = 0 \qquad r(G) \leq D(G) \leq 2 \cdot r(G)$

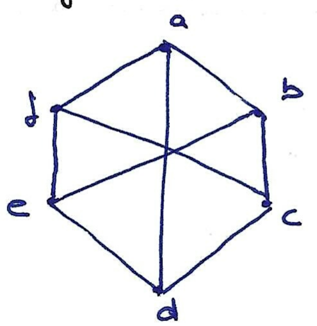
$d(u, v) \geq 0 \qquad D(G) \leq d(u, w) + d(w, v) \leq r(G) + r(G)$

$w \in$ centre (kernel)

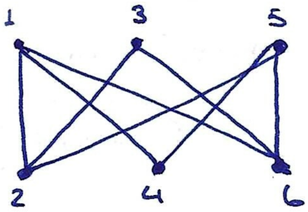
$d(u, v) = d(v, u)$

$d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$

Grafs equivalents



$\equiv$



Si relacionem 1f, 4a, 5b, 2e, 6c, 3d veurem que aquests dos grafs són equivalents.
També es pot dir isomorfs.

Equivalència $\Leftrightarrow$ Isomorfisme

Def.: Quan $\exists$ una bijecció entre els conjunts de vèrtexs que mantenen les adjacències.

$f(4) = a$ $\quad$ $f(3) = d$

$f(5) = b$ $\quad$ $f(2) = e$

$f(6) = c$ $\quad$ $f(1) = f$

Matriu de connexions

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ v_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

1 $\rightarrow$ Connexió $\quad$ 0 $\rightarrow$ No connexió

Si expressem les connexions entre vèrtexs ens quedarà una matriu simètrica.

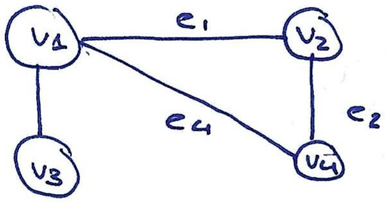
$$\underset{v_1}{0}\,1\,0\,\underset{v_4}{1} = \begin{matrix} 0 & v_1 \\ 1 & \\ 0 & \\ 1 & v_4 \end{matrix}$$

Aquesta taula de connexions també es pot representar amb una llista:

$v_1 : v_2, v_4$ $\quad$ $v_3 : v_2, v_4$

$v_2 : v_1, v_3$ $\quad$ $v_4 : v_1, v_3$

Exemple matriu d'adjacència



$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Propietat: Les matrius d'adjacència sempre tenen diagonal de 0s.

$G(V, E)$

$$A_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

$A^k_{ij} = \#$ camins de llargada k entre v_i i v_j

A^1_{ij} per definició

A^{k-1}_{ij} es suposa

$$A^k_{ij} = \sum_{s=1}^{N} A^{k-1}_{is} A_{sj}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriu incidència

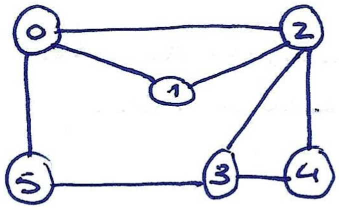
$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Propietats de la matriu d'inc.:

$B \cdot B^t = A \cdot D$

$B \cdot B^t[i,j] = \sum_{s=1}^{m} \underbrace{b_{is} b^t_{js}}_{e_s(v_i, v_j)}$

Pregunta Examen



Llista adjacència:

0: 2, 1, 5
1: 0, 2
2: 0, 1, 3, 4
3: 2, 4, 5
4: 2, 3
5: 0, 3

DFS(0) → cerca en profunditat
  DFS(2)
    Check(0)
    DFS(1)
      Check 0
      Check 2
    DFS(3)
      Check 2
      DFS(4)
        Check 2
        Check 3
      DFS(5)
        Check 0
        Check 3
      Check 4
    Check 1
    Check 5

cerca en amplada

BFS(0)

① q: 0, ~~2~~, 1, 5

w: 2

② q: 0, 2, 1, 5, 3

w: 2

③ q: $\underbrace{0}_{0}, \underbrace{2, 1, 5}_{1}, \underbrace{3, 4}_{2}$ → distància

w: 2 → 1

- -

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
d	d	h	a	a	a	b	c	b	b
e	g		b	d	d	i		g	g
f	i		e			j			
	j		f						

DFS(d)
  DFS(d)
    DFS(a)
    DFS(b)