CURS ANIVELLAMENT GRAU INFORMÀTICA

1. NOMBRES

1.1. Els nombres naturals

Los **números naturales** son los que nos permiten contar objetos. La lista de los números naturales se inicia con el 1 y no tiene fin: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... Fijémonos en que esta lista no incluye el 0.

Orden de operaciones. A veces se nos presenta un grupo de operaciones con números naturales, que se denomina **expresión numérica**. Por ejemplo:

$$4 \cdot 5 - (5 \cdot 3 + 8 : 2)$$

Para encontrar el resultado de esta expresión, tiene que seguirse el orden de operaciones siguiente:

1) Operaciones que se encuentran en el interior de los paréntesis: del más externo al más interno.
2) Multiplicaciones y divisiones: las divisiones siempre antes que las multiplicaciones.
3) Sumas y restas: primero las restas y después las sumas.

Ejemplo. Orden de las operaciones.

Resolvamos el ejemplo propuesto

$4 \cdot 5 - (5 \cdot 3 + \boxed{8 : 2}) = 4 \cdot 5 - (\boxed{5 \cdot 3} + \boxed{4}) = 4 \cdot 5 - \boxed{(\boxed{15} + 4)} = \boxed{4 \cdot 5} - \boxed{19} = \boxed{20} - 19 = 1$

Observemos la importancia de los paréntesis con el mismo ejemplo sin paréntesis:

$$4 \cdot 5 - 5 \cdot 3 + \boxed{8 : 2} = \boxed{4 \cdot 5} - \boxed{5 \cdot 3} + \boxed{4} = \boxed{20} - \boxed{15} + 4 = 9$$

Criterios de divisibilidad. El concepto de divisibilidad nos permite establecer algunos criterios para detectar si un número es divisible por otro sin tener que calcular la división. Algunos de estos criterios son los siguientes:

Divisible por	Criterio de divisibilidad	Ejemplos
2	La última cifra es par.	548 es divisible por 2, puesto que 8 lo es.
3	La suma de sus cifras es divisible por 3.	18.231 es divisible por 3, puesto que $1+8+2+3+1=15$ lo es.
4	El número formado por las dos últimas cifras es divisible por 4.	828 es divisible por 4, puesto que, 28 lo es.
5	La última cifra es 0 o 5.	325 es divisible por 5, puesto que 5 lo es.
9	La suma de sus cifras es divisible por 9.	94.833 es divisible por 9, puesto que $9+4+8+3+3=27$ lo es.
10	La última cifra es 0.	100 es divisible por 10, puesto que acaba en 0.
11	La diferencia entre la suma de las cifras de las posiciones pares y la suma de las cifras de las posiciones impares es múltiplo de 11.	12.111 es divisible por 11, puesto que la diferencia entre $1+1+1=3$ y $2+1=3$ es 0.

Factorización. Factorizar un número es descomponerlo en factores primos. Esto significa expresarlo como producto de sus divisores primos, que podemos detectar con los criterios de divisibilidad.

Pasos para la factorización

1) Dividimos nuestro valor por el número primo más pequeño que sea divisor. Este será el número primo factor.
2) Hacemos la división y nos quedamos con el cociente. Repetimos el proceso esta vez con el cociente tantas veces como sean necesarias hasta obtener el 1 de cociente. Ya tenemos todos los factores primos.
3) Comprobamos que el número inicial es igual al producto de todos los números primos que hemos obtenido.

Ejemplo. Cálculo del máximo común divisor.

Calculamos el máximo común divisor de 36 y 30. Para hacerlo, podemos escribir una lista de todos los divisores de 36 y otra con los de 30:

divisores de 36:	1	2	3	4	6	9	12	18	36
divisores de 30:	1	2	3	5	6	10	15	30	

Podemos comprobar que de todos los divisores comunes (en lila) el mayor es el 6. Por lo tanto, $\mathrm{MCD}(30, 36) = 6$.

Otra manera de hacerlo es descomponer los dos números en factores primos: $36 = 1 \cdot 2^2 \cdot 3^2$, mientras que $30 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Los primos comunes son 1, 2 y 3 y su exponente tiene que ser 1, porque es el menor. Por tanto, $\mathrm{MCD}(36, 30) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Ejemplo: cálculo del mínimo común múltiplo.

Calculamos el mínimo común múltiplo de los números 4 y 10. Empezamos escribiendo la lista de múltiplos de estos dos números:

múltiplos de 4:	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
múltiplos de 10:	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Hemos destacado (en verde) los múltiplos comunes de ambos. Vemos que el menor de estos múltiplos comunes es el 20.

Otra manera de hacerlo es descomponer los números 4 y 10 en números primos: $4 = 1 \cdot 2^2$ i $10 = 1 \cdot 2 \cdot 5$. Vemos que los primeros comunes son el 1 y el 2, este último elevado al cuadrado porque es el de exponente mayor. En cuanto a los primeros no comunes, sólo hay el 5. Así, pues, $\mathrm{mcm}(4, 10) = 1 \cdot 2^2 \cdot 5 = 20$.

1.2. Els nombres enters

Los **números enteros** permiten contar, entre otras muchas cosas, tanto aquello que se tiene como aquello que se debe. Más genéricamente, los números enteros permiten representar las situaciones en las cuales los objetos contados se pueden dividir en dos grupos, uno de formato por los objetos que se cuentan a partir de un punto en adelante y el otro formato por los que se cuentan a partir de este mismo punto hacia atrás. Así, podemos clasificar los números enteros en tres grupos:

- **Enteros positivos.** Son los que permiten contar aquello que se tiene. Cuentan a partir de un punto en adelante. Se pueden asociar a los números naturales.

  De hecho, se pueden escribir tal como se escriben los números naturales o bien precedidos del signo +.

- **Enteros negativos.** Son los que permiten contar lo que se debe. Cuentan a partir de un punto atrás. Los enteros negativos se escriben utilizando un número natural precedido de un signo −. Así, un entero negativo podría ser −6, que se lee “menos 6”.

- El **cero**. Es un entero ni positivo ni negativo.

- Cualquier número positivo siempre es más grande que cualquier número negativo.

> +3€es más grande que -9€; es decir, se tiene más dinero con 3€ que debiendo 9€. Así, pues, $+3 > -9$ (o bien, $-9 < +3$).

- El 0 es más grande que cualquier número negativo y menor que cualquier número

> No tener ningún euro (0€) es tener más que deber treinta (-30€) pero es tener menos que cuatro euros (+4€). Así, pues, $-30 < 0 < 4$ (o bien, $4 > 0 > -30$).

- Entre dos enteros negativos, el más grande es aquel que, sin signo (el número sin signo lo denominamos **valor absoluto**), es el menor.

1.3. Els nombres racionals

Un **número fraccionario** (fracción o quebrado) se expresa en forma de cociente de números enteros con una barra entre ambos números, que puede ser horizontal o inclinada. Un ejemplo de fracción puede ser $\frac{12}{5}$ o también 12/5. En este caso, el 5 se llama **denominador** (indica cuántas partes se consideran) i el 12 **numerador** (marca en cuántas partes tenemos que partir la unidad). Tal como se puede observar, pues, los elementos de un número fraccionario se denominan de manera específica y diferenciada de la denominación de los elementos de una división entera.

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

son fracciones equivalentes, es decir, todas expresan el mismo valor.

Ejemplo. Comprobación de fracciones equivalentes.

$$\frac{4}{10} \times \frac{6}{15} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow 10 \cdot 6 = 60 \\ \longrightarrow 4 \cdot 15 = 60 \end{array}$$

Por tanto, $\frac{4}{10}$ y $\frac{6}{15}$ son fracciones equivalentes, y en cambio

$$\frac{2}{6} \times \frac{7}{11} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow 6 \cdot 7 = 42 \\ \longrightarrow 2 \cdot 11 = 22 \end{array}$$

no son fracciones equivalentes porque $42 \neq 22$ (el símbolo $\neq$ es el signo de desigualdad, y se sitúa entre dos expresiones con resultados diferentes.)

$\frac{8}{16}$ no es una fracción irreductible, ya que el $\text{MCD}(8,16) = 8$. En cambio, $\frac{4}{9}$ es una fracción irreducible porque el $\text{MCD}(4,9) = 1$.

Para convertir la fracción $\frac{18}{12}$ en una fracción irreducible, hay que dividir numerador y denominador entre el $\text{MCD}(18,12) = 6$. La fracción resultante es

$$\frac{18:6}{12:6} = \frac{3}{2}.$$

Un **número racional** es aquel que se puede expresar como una fracción, o como cualquier fracción de las equivalentes a esta. Un mismo número racional se puede expresar de diferentes maneras (fracciones).

1.4. Els nombres reals

Propiedades potencias y raíces. Para simplificar los cálculos con potencias y raíces (recordamos que una raíz se puede expresar en forma de potencia de exponente fraccionario), es útil usar estas propiedades:

- **Potencia de exponente 1.** El resultado de una potencia de exponente 1 es igual a la base $\boxed{a^1 = a}$

$5^1 = 5$ o bién $(-3)^1 = -3$

- **Producto de potencias de la misma base.** Para multiplicar potencias con la misma base, basta con sumar los exponentes dejando la base sin modificaciones $\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$

$3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$, ya que $3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6$.

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}+\frac{11}{3}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{21}{4}}$$

- **Cociente de potencias de la misma base.** Para dividir potencias con la misma base, basta con restar los exponentes dejando la base sin modificaciones. $\boxed{a^p : a^q = a^{p-q}}$

$7^6 : 7^4 = 7^2$, ya que $7^6 : 7^4 = (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) : (7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7) = 7 \cdot 7 = 7^2$

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} : \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{11}{4}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}-\frac{11}{3}} = \left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{-1}{4}}$$

Potencia de exponente 0. Cualquier potencia (con base diferente del 0) de exponent 0 resulta siempre igual a 1 $\boxed{a^0 = 1}$

$9^0 = 1$, ya que $9^{3-3} = 9^3 : 9^3 = 1$

Potencia de una potencia. El resultado de elevar una potencia cualquiera a otro exponente es igual a una potencia que tiene por base la base de la potencia, y el exponente de la cual es el producto de exponentes $\boxed{(a^p)^q = a^{p \cdot q}}$

$(5^4)^3 = 5^{4 \cdot 3} = 5^{12}$, ja que $(5^4)^3 = 5^4 \cdot 5^4 \cdot 5^4 = 5^{4+4+4} = 5^{12}$.

$$\left(\left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{7}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{7}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{21}{6}}.$$

Producto de potencias con el mismo exponente. El resultado de multiplicar varias potencias con el mismo exponente es igual a una potencia la base de la cual es el producto de bases y el exponente de la cual es el exponente común. $\boxed{a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p}$

$8^3 \cdot 5^3 = (8 \cdot 5)^3 = 40^3$, ja que $8^3 \cdot 5^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (8 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 5) \cdot (8 \cdot 5) = (8 \cdot 5)^3 = 40^3$

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} \cdot \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{8}{81} \cdot \frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{200}{324}\right)^{\frac{5}{2}}$$

- **Cociente de potencias con el mismo exponente.** El resultado de dividir dos potencias con el mismo exponente es igual a una potencia la base de la cual es el cociente de bases y el exponente de la cual es el exponente común. $\boxed{a^p : b^p = (a : b)^p}$

$12^5 : 3^5 = (12 : 3)^5 = 4^5$, ya que $12^5 : 3^5 = (12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12) : (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) ==$ $(4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3) : (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$

$$\left(\frac{8}{81}\right)^{\frac{5}{2}} : \left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{8}{81} : \frac{25}{4}\right)^{\frac{5}{2}} = \left(\frac{32}{2025}\right)^{\frac{5}{2}}$$

Racionalización. No es usual dejar una fracción con raíces en el denominador. Por eso, es habitual eliminarlas siempre que sea posible. Este proceso se denomina **racionalización** de la fracción. Para conseguirlo, es muy común multiplicar numerador y denominador por alguna expresión que permita eliminar las raíces del denominador.

Ejemplo. Racionalización.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

En muchos casos, también podemos encontrar una suma o resta de raíces en el denominador. En estos casos, se tiene que multiplicar el denominador y el numerador por la operación opuesta del denominador (*el conjugado del denominador*).

Ejemplo. Racionalización.

$$\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = -2\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right).$$

Esto es así porque $\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right) \cdot \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 3-5 = -2.$

1.5. Igualtats notables

- Productos de 2 expresiones:

  $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ el cuadrado de una suma

  $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$ la diferencia de cuadrados

  $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados

  $(a-b) \cdot (a^3 + a^2 \cdot b + a \cdot b^2 + b^3) = a^4 - b^4$

  $(a-b) \cdot (a^4 + a^3 \cdot b + a^2 \cdot b^2 + a \cdot b^3 + b^4) = a^5 - b^5$

  $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot b \cdot c$

- Producto de 3 expresiones:

  $(a+b) \cdot (a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 + b^3$ cubo de una suma

  $(a-b) \cdot (a-b) \cdot (a-b) = (a-b)^3 = a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$ cubo de una diferencia

1.6. Exercicis

1. **Simplifica la expresión siguiente:**

$$\frac{25 \cdot 8 \cdot 7^7 \cdot 5^4}{3^5 \cdot 25^2 \cdot (-5)^3 \cdot 49^3}$$

2. **Simplifica la expresión siguiente:**

$$\sqrt[\frac{3}{4}]{\sqrt[4]{\frac{8}{27}}}$$

3. **Racionaliza la expresión siguiente:**

$$\frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$$

4. **Racionaliza la expresión siguiente:**

$$\frac{5}{\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}}$$

2. EQUACIONS

2.1. Expressions algebraiques

Por **expresión algebraica** se entiende cualquier combinación de letras y números relacionados entre sí por signos de operaciones. Así, si bien una expresión numérica viene dada por números y signos de operación entre sí, una expresión algebraica también contiene letras, que operan entre sí o con otros números.

Ejemplo. Expresión algebraica.

$$a - 23 \cdot c + 5 \cdot d - 7 \cdot a \cdot y$$

2.2. Equacions

Una igualdad entre expresiones algebraicas también puede denominarse ecuación. En este caso, las letras se llaman **incógnitas**.

Ejemplo. Ecuaciones.

$$\begin{aligned} 4a - b + c &= 3a - 6b + 7 \\ 2x + 2y + 8 &= 2x + 7 \end{aligned}$$

En el primer caso, las incógnitas son a, b y c. En el segundo caso, son x e y.

Por **resolución de una ecuación** se entiende el proceso de encontrar las soluciones de una ecuación. Este proceso consiste en manipular la ecuación para conseguir las incógnitas y los valores numéricos por separado. De manera equivalente, puede hablarse del proceso de **aislar la incógnita de la ecuación**.

El proceso de aislamiento, base de la resolución de cualquier ecuación, consta de tres pasos principales: agrupar los términos numéricos, agrupar los términos del mismo grado y eliminar adecuadamente los coeficientes de las incógnitas. La manera de proceder en este último caso dependerá del grado de estos términos.

2.3. Equacions de primer grau

Se dice que una **ecuación es de primer grado, o lineal, con una incógnita** cuando se trata de una ecuación con una única incógnita que aparece una vez por elemento como máximo, es decir, siempre con exponente 1.

Ejemplo. Ecuación de primer grado con una incógnita.

$$3x - 2 = 5x + 6$$

Ejemplo. Resolver una ecuación de 1er grado con una incógnita.

$$2x + 2 = 8 + 5x$$

Trabajamos con ecuaciones,

$$\begin{aligned} 2x &= 6 + 5x \\ -3x &= 6 \end{aligned}$$

hasta tener la incógnita aislada que, en principio, es la solución:

$$x = -2$$

La comprobación **de la solución** (acción que se recomienda realizar siempre) es muy sencilla. Solo hay que sustituir la x de la ecuación inicial por el valor encontrado, que en principio es la solución.

En este caso, $x = -2$

$$4 \cdot (-2) + 3 - 2 \cdot (-2) - 1 = 10 + 6 \cdot (-2) - 2 - (-2)$$

2.4. Equacions de segon grau

Diremos que una **ecuación** es **de segundo grado con una incógnita** cuando tratamos una ecuación con una sola incógnita que contenga términos de segundo grado, es decir, cuando la incógnita esté elevada al cuadrado.

Ejemplo. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6x - 4 &= 2x + 5 \\ 2x^2 - 4x + 5 &= 3x^2 - 5x + 4 \end{aligned}$$

Ejemplo. Forma normal de una ecuación de segundo grado.

La forma normal de la ecuación

$$x^2 + 4x - 5 = 3x^2 - 6x + 7$$

viene dada por

$$x^2 + 4x - 5 - 3x^2 + 6x - 7 = 0$$

Al operar esta expresión, queda

$$-2x^2 + 10x - 12 = 0$$

Si se quiere con término de segundo grado positivo, se convierte en

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

y, simplificando al máximo, dividiendo por el $\mathrm{MCD}(2, -10, 12) = 2$ queda

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Ejemplo. Resoluciones fáciles de ecuaciones de segundo grado. Caso $c = 0$

$$3x^2 - x = 0$$

es una ecuación de segundo grado sin término independiente.

Para resolverla tan solo es necesario observar que puede extraerse una x de factor común:

$$3x^2 - x = x(3x - 1) = 0$$

Por lo tanto, la ecuación puede transformarse en

$$x(3x - 1) = 0$$

Se trata de un producto de dos números, x y $3x - 1$, que tiene que ser 0. Por lo tanto, alguno de estos números tiene que ser 0. Esto significa que $x = 0$ o $3x - 1 = 0$ (de donde resulta $x = \frac{1}{3}$).

Podemos concluir, pues, que la ecuación de segundo grado $3x^2 - x = 0$ tiene como soluciones el 0 y $\frac{1}{3}$.

Ejemplo. Resoluciones fáciles de ecuaciones de segundo grado. Caso $b = 0$

$$2x^2 - 18 = 0$$

es una ecuación de segundo grado sin término de grado 1.

En este caso, se tiene que aislar la x^2 como si se tratara de una ecuación de primer grado. Así, quedaría

$$x^2 = \frac{18}{2} = 9$$

A partir de aquí, observamos que las soluciones son aquellos números cuyo cuadrado es 9. Por lo tanto, las soluciones son 3 y -3, que puede escribirse $x = \pm 3$ utilizando el símbolo $\pm$.

Ejemplo. Solución general de una ecuación de segundo grado.

Sea la ecuación

$$2x^2 - 10x + 12 = 0$$

Por la fórmula de resolución general:

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm 2}{4}$$

Por lo tanto, las soluciones a la ecuación son

$$x_1 = \frac{10+2}{4} = \frac{12}{4} = 3 \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{10-2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

Ejemplo. Ecuaciones de tipo cuadrático.

Son ecuaciones de tipo cuadrático,

$$4x^8 + 5x^4 + 10 = 0$$
$$3x^{10} + x^5 - 15 = 0$$

porque tienen dos términos dependientes de una incógnita, de modo que un grado es el doble que el otro:

- En el primer ejemplo, el grado de $4x^8$ es el doble que el grado de $5x^4$
- En el segundo caso, el grado del término $3x^{10}$ es el doble del grado del término x^5

2.5. Inequacions

Una **inecuación** es una desigualdad entre expresiones algebraicas. Los signos utilizados para marcar estas desigualdades son $<$ (*menor que*), $>$ (*mayor que*), $\leq$ (*menor o igual que*) y $\geq$ (*mayor o igual que*).

Ejemplo. Inecuación.

Son ejemplos de inecuaciones,

$$\begin{aligned} 3x - a &< 2x - 1 \\ 2x + 4y - 5 &\geq 4x - 5y \end{aligned}$$

Ejemplo. Solución de una inecuación de primer grado.

La solución de la inecuación de primer grado

$$2x + 5 \geq 2 - x$$

es

$$[-1, +\infty).$$

Ejemplo. Solución inecuación de segundo grado.

La solución de la inecuación de segundo grado

$$2x^2 - 2x - 2 \leq x^2 - x + 4$$

es

$$(-\infty, 2) \cup (3, +\infty).$$

2.6. Exercicis

1. Determina para qué valores de t la ecuación $x^2 + tx + 16 = 0$...

(a) tiene dos soluciones reales.

(b) tiene una única solución real, doble.

(c) no tiene solución real.

2. La suma de dos números es 13 y su producto es 36. ¿Con qué ecuación de segundo grado pueden obtenerse estos dos números? ¿Qué números son?

3. Resuelve las ecuaciones irracionales siguientes:

(a) $\sqrt{x+3} + 2x = 30$

(b) $x + 3 + \sqrt{x+5} = 10$

4. Resuelve las ecuaciones siguientes:

(a) $\frac{x+5}{4} + \frac{3x-2}{3} - \frac{2x+5}{2} = 4 - \frac{5x-1}{6}$

(b) $x + 1 + \frac{x+2}{2} + \frac{x+3}{3} = -\frac{x+4}{4} + 5$

5. Resuelve las ecuaciones siguientes:

(a) $x^2 + x = 12$

(b) $-x^2 + 10x + 11 = 0$

(c) $(2+x)(5-x) = 9 + 3x$

(d) $3x^2 - 2(x-5)^2 = 22x - 26$

6. Resuelve las ecuaciones bicuadradas siguientes:

(a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

(b) $x^4 - 73x^2 + 576 = 0$

(c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

3. SISTEMES D´EQUACIONS

Un **sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas cada una como máximo, representadas con las mismas incógnitas.

Ejemplo. Sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$$

Ejemplo. Solución de un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 19 \\ x + 4y = 17 \end{cases}$$

tiene como solución $(x, y) = (5, 3)$, puesto que

$$\begin{cases} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 19 \\ 5 + 4 \cdot 3 = 17 \end{cases}$$

SUBSTITUCIÓ

Ejemplo. Para resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

por el método de sustitución, se tienen que seguir estos pasos:

1) *Se elige una de las ecuaciones.* Por ejemplo, $x + 4y = -2$. (Si hay una ecuación en que el coeficiente de la x o de la y es 1, elegimos esta ecuación para simplificar los cálculos.)

2) *Se aísla una de las incógnitas de esta ecuación.* Por ejemplo, se puede aislar la x de la manera siguiente:

$$x = -2 - 4y$$

3) *Se sustituye la incógnita anterior* (la x) *de la otra ecuación* $(2x - 3y = 7)$ *por el valor que hemos encontrado en aislarla* $(-2 - 4y)$. En el ejemplo,

$$2 \cdot (-2 - 4y) - 3y = 7$$

4) *Se resuelve esta ecuación de primer grado con una incógnita.* En el ejemplo, la solución es $y = -1$.

5) *Se sustituye este valor encontrado en una de las dos ecuaciones del sistema inicial. Obtendremos una ecuación de primer grado con una incógnita, que podemos resolver.* Por ejemplo, si se sustituye $y = -1$ en la ecuación $x + 4y = -2$, la ecuación resultante es $x + 4 \cdot (-1) = -2$, la solución de la cual es $x = 2$.

Por lo tanto, la solución del sistema es $(x, y) = (2, -1)$.
Es recomendable comprobar que estos valores resuelven realmente el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 7 \\ 2 + 4 \cdot (-1) = -2 \end{cases}$$

son igualdades ciertas. Así, pues, $(x, y) = (2, -1)$ es la solución del sistema.

IGUALACIÓ

Ejemplo. Si se quiere resolver el sistema anterior

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

por el método de igualación, tienen que seguirse estos pasos:

1) *Se aísla la misma incógnita en ambas ecuaciones.* Por ejemplo, la x:

$$x = \frac{7+3y}{2} \qquad x = -2 - 4y$$

2) *Se igualan las expresiones que resultan de aislar la incógnita:*

$$\frac{7+3y}{2} = -2 - 4y$$

3) *Se resuelve esta ecuación de primer grado con una incógnita.* En el ejemplo

$$7 + 3y = 2 \cdot (-2 - 4y)$$

$$7 + 3y = -4 - 8y$$

$$3y + 8y = -4 - 7$$

$$11y = -11$$

$$y = -1$$

4) *Se sustituye el valor de esta incógnita en cualquiera de las ecuaciones del sistema inicial, y se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita resultante.* En el ejemplo, sustituimos la y de la segunda ecuación por -1:

$$x + 4 \cdot (-1) = -2$$

La solución de esta ecuación es $x = 2$.

Igual que antes, comprobamos que los valores obtenidos resuelven el sistema de ecuaciones propuesto.

REDUCCIÓ

Ejemplo. Si queremos resolver el mismo sistema

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 4y = -2 \end{cases}$$

por el método de reducción, tienen que seguirse estos pasos:

1) *Se elige una de las incógnitas.* Por ejemplo, la x.

2) *Se multiplica cada ecuación por un número elegido convenientemente, de modo que las ecuaciones resultantes tengan el término idéntico con la incógnita elegida.* La manera más sencilla de hacerlo consiste en multiplicar los miembros de la primera ecuación por el coeficiente de la incógnita escogida en la segunda ecuación, y los miembros de la segunda ecuación por el coeficiente de la incógnita escogida en la primera ecuación.

   En el ejemplo, multiplicamos $2x - 3y = 7$ por 1 (coeficiente de la x en la ecuación $x + 4y = -2$) y multiplicamos $x + 4y = -2$ por 2 (coeficiente de la x en la ecuación $2x - 3y = 7$) y obtenemos así las ecuaciones con el mismo término en x.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ 2x + 8y = -4 \end{cases}$$

3) *Se restan ambas ecuaciones resultantes, miembro a miembro.* En el ejemplo:

$$\begin{array}{r} 2x \quad -3y \quad = 7 \\ \underline{-(2x \ +8y \quad = -4)} \\ -11y = 11 \end{array}$$

4) *Se resuelve la ecuación de primer grado resultante.* En el ejemplo, la solución de $-11y = 11$ es $y = -1$.

5) *Se sustituye el valor de esta incógnita en cualquiera de las ecuaciones del sistema y se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita resultante.* En el ejemplo, sustituimos la y de la segunda ecuación por -1:

$$x + 4 \cdot (-1) = -2$$

   La solución de esta ecuación es $x = 2$. Y, por lo tanto, la solución del sistema es $(x, y) = (2, -1)$.

4. POLINOMIS

4.1. Definició

Ejemplo. Características de un polinomio.
Sea el polinomio $p(x) = 9x^6 - 3x^4 + x - 6$.

- El término de grado 6 es $9x^6$, el término de grado 4 es $-3x^4$, el término de grado 1 es x, y el término independiente es -6. Los términos correspondientes a los grados que no aparecen son iguales a 0.
- El grado del polinomio es, por lo tanto, 6.
- El coeficiente del término de grado 6 es 9, y su parte literal es x^6.
- El coeficiente del término de grado 4 (o, para abreviar, coeficiente de grado 4) es -3, y su parte literal es x^4.
- El coeficiente de grado 1 es 1, y su parte literal es x.
- Los coeficientes de los otros términos son 0.

4.2. Valor numèric d´un polinomi

Ejemplo. Valores numéricos de un polinomio.
Sea $p(x) = 5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$:

- $p(0) = 5 \cdot 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 1 = -1$. Por lo tanto, -1 es el valor numérico de $p(x)$ cuando x es 0.
- $p(-1) = 5 \cdot (-1)^3 - 4 \cdot (-1)^2 + 5 \cdot (-1) - 1 = -15$. Por lo tanto, -15 es el valor numérico de $p(x)$ cuando x es -1.

4.3. Operacions amb polinomis

- Suma

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\
+ & 5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16 \\
\hline
 & 5x^4 & & -8x^2 & +x & +10
\end{array}$$

- Resta

$$\begin{array}{cccccc}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & -6 \\
- & (5x^4 & -2x^3 & -5x^2 & -3x & +16) \\
\hline
 & -5x^4 & +4x^3 & +2x^2 & +7x & -22
\end{array}$$

- Producto

		$2x^4$	$-7x^3$		$+5x$	-8
	$\cdot$			x^2	$-7x$	$+2$
	$4x^4$	$-14x^3$		$+10x$	-16	
$-14x^5$	$+49x^4$		$+35x^2$	$+56x$	-16	
$2x^6$	$-7x^5$		$+5x^3$	$-8x^2$		
$2x^6$	$-21x^5$	$+53x^4$	$-9x^3$	$-43x^2$	$+66x$	-16

- Cociente

$6x^4$	$-27x^3$	$+15x^2$		-48	$2x^2-3x+4$
$-6x^4$	$+9x^3$	$-12x^2$			$3x^2-9x-12$
0	$-18x^3$	$+3x^2$			
	$+18x^3$	$-27x^2$	$+36x$		
	0	$-24x^2$	$+36x$	-48	
		$+24x^2$	$-36x$	$+48$	
		0	0	0	

4.4. Fraccions algebraiques

Ejemplo. Fracciones algebraicas equivalentes.

$$\frac{2x^3-4x^2-2x+4}{x^4+x^3-5x^2+x-6}=\frac{2x^2-2}{x^3+3x^2+x+3}$$

porque

$$\left(2x^3-4x^2-2x+4\right)\cdot\left(x^3+3x^2+x+3\right)=\left(x^4+x^3-5x^2+x-6\right)\cdot\left(2x^2-2\right)$$
$$=2x^6+2x^5-12x^4-2x^2-2x+12$$

Ejemplo. Simplificar fracciones algebraicas.
Dada la fracción algebraica

$$\frac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2+x-6}$$

notamos que numerador y denominador se pueden descomponer como producto de otros polinomios de menor grado.

$$x^3-2x^2+4x-8=(x-2)\cdot\left(x^2+4\right)$$
$$x^2+x-6=(x-2)\cdot(x+3)$$

Como que numerador y denominador tienen factores comunes, $(x-2)$, resulta

$$\frac{x^3-2x^2+4x-8}{x^2+x-6}=\frac{(x-2)\cdot\left(x^2+4\right)}{(x-2)\cdot(x+3)}=\frac{x^2+4}{x+3}$$

4.5. Regla de Ruffini

La regla **de Ruffini** es un procedimiento que permite hacer de manera sencilla la división entre dos polinomios cuando el divisor es un polinomio de grado 1 tal que su coeficiente de grado 1 es también 1 y el término independiente es un número entero. Esta regla utiliza solamente los coeficientes de los polinomios implicados.

Ejemplo, dividir $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ *entre* $x - 2$*:*

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 5 & -4 & 5 & -1 \\
+2 & & 10 & 12 & 34 \\
\hline
 & 5 & 6 & 17 & \multicolumn{1}{|r|}{33} \\
\cline{5-5}
\end{array}$$

Resultado: $5x^3 - 4x^2 + 5x - 1 = \left(5x^2 + 6x + 17\right)(x - 2) + 33.$

4.6. Exercicis

1. **¿Qué valor numérico toma el polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 24$ cuando $x = -2$? ¿Y qué valor numérico toma cuando $x = 3$? ¿Este polinomio es divisible por $x + 2$? ¿Y por $x - 3$? Razona la respuesta.**

2. **Calcula el valor de m para que los cocientes tengan residuo 0:**
   (a) $(x^3 - 4x^2 - 19x + m) \div (x - 7)$
   (b) $(mx^4 - 6x^3 - 5x^2 + 19x - 12) \div (x - 3)$

3. **Encuentra el MCM y el MCD de los polinomios $p(x) = x^4 + 5x^3 - 3x^2 - 13x + 10$ y $q(x) = x^2 + 6x + 5$.**

4. **Determina para qué valor o valores de m puede simplificarse la siguiente fracción algebraica:**

$$\frac{x^3 - 5x^2 + mx - 3}{x^2 - 2x - 3}$$

5. **Encuentra el cociente y el residuo de las siguientes divisiones siguientes:**
   (a) $(x^3 + 5x^2 - 8) \div (x^2 + 4)$
   (b) $(x^5 - x^3 - x) \div (x^3 + 2x)$
   (c) $(x^7 + 5x^6 - 3x^4 + 15x^3 + 7x^2 - 10x) \div (x^4 + 3x)$
   (d) $(2x^5 - 12x^4 - 3x^3 + 34x^2 - 19) \div (2x^2 - 3)$

6. **Utiliza la regla de Ruffini para encontrar el cociente y el residuo de las siguientes divisiones:**
   (a) $(x^5 + 3x - 4) \div (x + 2)$
   (b) $(x^4 - 6x) \div (x - 3)$
   (c) $(x^7 - 2x^5 + x^3) \div (x - 2)$
   (d) $(x^4 + 6x^3 - 2x - 5) \div (x - 1)$

7. **Deduce (sin hacerlas y sin aplicar la regla de Ruffini) el residuo de las siguientes divisiones:**
   (a) $(x^4 - x^3 - x^2 + 3) \div (x - 2)$
   (b) $(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1) \div (x - 1)$
   (c) $(x^3 - 6x^2 + 3x + 2) \div (x - 5)$
   (d) $(x^3 - 2x + 4) \div (x + 3)$
   (e) ¿Qué has usado para encontrar estos residuos?

5. MATRIUS

5.1. Tipus i elements

Una matriz es un conjunto de números organizados en m filas y n columnas (m y n números naturales), y cerrados entre dos paréntesis.

Ejemplo. Algunas matrices.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 23 \\ 6 & 11 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Si una matriz tiene m filas y n columnas se dice que tiene dimensión $m \times n$ o bien que es de orden (m, n).

Ejemplo. Dimensión de una matriz.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 & 23 \\ 6 & 11 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

Podemos decir que A es una matriz de orden $(2, 4)$ o bien que tiene dimensión 2×4.

Ejemplo. Identifcamos elementos de la matriz.

En la matriz siguiente B, se pueden identificar algunos de los elementos:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{columna 1} & \text{columna 2} & \text{columna 3} \end{array} \\ B = & \left(\begin{array}{ccc} \boxed{3} & 1 & 2 \\ 1 & 0 & \boxed{-1} \\ 2 & \boxed{-3} & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \text{fila 1} \\ \text{fila 2} \\ \text{fila 3} \end{array} \end{array}$$

Vemos que los elementos marcados en verde son: $b_{\underset{\text{fila}}{1}\,\underset{\text{columna}}{1}} = 3$, $b_{\underset{\text{fila}}{2}\,\underset{\text{columna}}{3}} = -1$ y $b_{\underset{\text{fila}}{3}\,\underset{\text{columna}}{2}} = -3$

5.2. Operacions amb matrius

La suma es $A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

La resta es $A - B = (a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$

Ejemplo. Producto por un escalar.

Si seguimos con la misma matriz A de los ejemplos anteriores y la multiplicamos por la escalar 3,

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 3 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 6 & 3 & -6 \\ -3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Producto de matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En primer lugar, observamos que $A \cdot B$ puede calcularse porque A tiene 3 columnas y B tiene 3 filas. La matriz resultante tendrá 4 filas (igual que A) y 2 columnas (igual que B). En cambio, $B \cdot A$ no puede calcularse, porque B tiene 2 columnas, mientras que A tiene 4 filas.

En general, el **producto de matrices NO es conmutativo**. Es decir, si A y B son dos matrices, cuando se pueden hacerse los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$, generalmente:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

aunque algunas veces (muy pocas) podría ser igual.

5.3. Determinant d´una matriu

Para cada **matriz cuadrada** puede definirse un número que es de gran ayuda, entre otras cosas, para determinar si esta matriz es invertible, y, en caso afirmativo, también es imprescindible para calcular la inversa de esta matriz. Este número se denomina **determinante de la matriz**. Se escribe $det(A)$ o $|A|$, donde A es el nombre de la matriz.

Para indicar el determinante de una matriz, sus elementos tienen que ponerse entre dos segmentos verticales y no entre paréntesis.

Ejemplo. Notación para el determinante de una matriz.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Su determinante se indica}} det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

5.4. Exercicis

Dadas las matrices siguientes

$$A=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}4 & 7\\-2 & 1\\0 & 3\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-3\\0\\0\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}-2 & 2 & -1\\3 & -3 & 3\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1 & 7 & -2\\-2 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

(a) Indica cuántas filas y columnas tienen y decide qué parejas pueden sumarse entre sí y cuáles pueden multiplicarse. En el segundo caso indica el orden en el que pueden multiplicarse. Efectúa todas las sumas posibles y solo los productos posibles en los que aparezca la matriz E.

(b) Decide si las operaciones siguientes son posibles, y en caso afirmativo efectúa las operaciones:

$$A\cdot D^t+E+F\cdot C,\qquad (A+D)\cdot E,\qquad B\cdot E\cdot C\cdot F,\qquad (B+E)\cdot C.$$

6. FUNCIONS

6.1. Concepte de funció

Una **correspondencia entre dos conjuntos**, A y B, es una relación entre ambos conjuntos que hace corresponder elementos del conjunto A con elementos del conjunto B. Gráficamente, este hecho puede representarse mediante flechas que tienen el origen en algún elemento del conjunto A y el final en algún elemento del conjunto B. Una flecha entre un elemento del conjunto A y un elemento del conjunto B indica que el elemento de A está relacionado con el elemento de B.

Ejemplo. Elementos de una correspondencia entre dos conjuntos.
Consideramos el ejemplo de la correspondencia anterior, R que relaciona los conjuntos A= $\{2,4,6,8,41\}$ y B= $\{1,3,5,6\}$. Entonces:

- El dominio de la correspondencia es el conjunto Dom$R$ = $\{2,6,4,8\}$ y la imagen de la correspondencia es ImR = $\{1,5,6\}$.
- La imagen del 2 es el conjunto $\{1\}$, la imagen del 8 es el conjunto $\{5\}$, la imagen del 4 es el conjunto $\{5,6\}$ y la imagen del 6 es el conjunto $\{1\}$.
- La antiimagen del 1 es el conjunto $\{2,6\}$, la del 5 es $\{4,8\}$ y la del 6 es $\{4\}$.

Una **aplicación** es una correspondencia que cumple la siguiente condición:

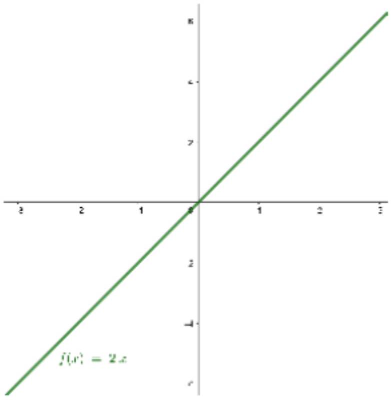
Todos los elementos de su dominio tienen un único elemento en su imagen.

Cuando una aplicación se define entre conjuntos numéricos, se denomina función.

6.2. Representació gràfica de funcions

Gráfica de una función. Es el conjunto de todos los puntos (x, y) del plan cartesiano en el que sus coordenadas coinciden con los valores del dominio y las imágenes correspondientes de esta función. En este caso, la primera coordenada, x, corresponde a un valor del dominio, y la segunda coordenada, $y = f(x)$, denota el valor correspondiente de la imagen. Para dibujar la gráfica de una función, tienen que dibujarse todos los puntos contenidos en la tabla de la función.

Ejemplo: la gráfica de la función $f(x) = 2x$ cuando el dominio es el intervalo $[-3, 3]$:



6.3. Operacions entre funcions

Si f y g son dos funciones, pueden definirse las siguientes operaciones:

- **Suma (o resta)** de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Se designa por $f \pm g$ y se calcula $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$. Esta suma puede calcularse siempre que x esté en el dominio de ambas funciones, f y g.

- **Producto** de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Se designa por $f \cdot g$ y se calcula $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Este producto puede calcularse siempre que x esté en el dominio de ambas funciones, f y g.

- **Cociente** de las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Se designa por $\frac{f}{g}$ y se calcula $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Este cociente puede calcularse siempre que x se encuentre en el dominio de ambas funciones, f y g, y además, $g(x)$ no sea 0.

- **Potencia** de las funciones $f(x)$ y $g(x)$: se designa por f^g y se calcula como $(f^g)(x) = f(x)^{g(x)}$. Esta potencia puede calcularse siempre que x esté en el dominio de ambas funciones, $f(x)$ y $g(x)$ no sean 0.

- **Composición** de la función f con la función g. Es otra función, que se designa por $g \circ f$, que cumple $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Esta nueva función puede calcularse siempre que $f(x)$ esté en el dominio de la función que se aplica en segundo lugar, g.

- **Inversa** de una función. Las funciones f y g son inversas una de la otra si $(g \circ f)(x) = x$ y $(f \circ g)(x) = x$ a la vez. Si hay inversa, ambas funciones son biyectivas. La función inversa de f se denota por f^{-1}.

6.4. Característiques d´una funció

Ejemplo. Tipos de funciones.

$f(x) = 5x^2 - x - 2$ es una función polinómica.

$g(x) = \sin(x)$ es una función trigonométrica.

$h(x) = 3^x$es una función exponencial.

6.5. Funcions definides a trossos

Ejemplo. Expresión de una función definida a trozos

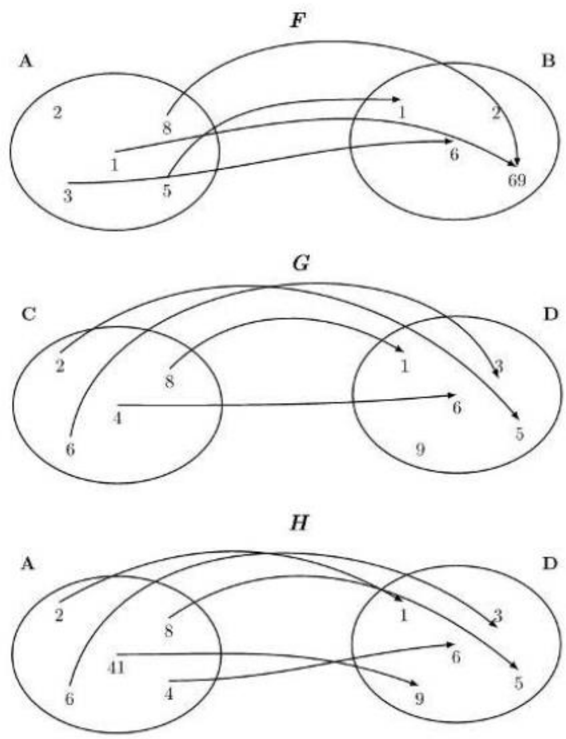
$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{si } x \le -\pi \\ \sin(x), & \text{si } -\pi < x \le \pi \\ 1, & \text{si } \pi < x \le 2\pi \end{cases}$$

En particular tenemos:

$$f(-2\pi) = -2\pi + \pi = -\pi$$
$$f(-\pi) = -\pi + \pi = 0$$
$$f(0) = \sin(0) = 1$$
$$f(\pi) = \sin(\pi) = 0$$
$$f(5) = 1$$

6.6. Exercicis

1. **Indicad si estas correspondencias son funciones. En caso afirmativo, realizad la tabla de valores de cada una e indicad si son biyectivas, exhaustivas o inyectivas.**



2. **Determina el dominio y, si hay, los puntos de corte con los ejes de estas funciones:**

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$

(b) $g(x) = \dfrac{1}{x}$

(c) $h(x) = 3$

(d) $a(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

(e) $b(x) = \sqrt{x + 1}$

(f) $c(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

(g) $d(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 5}$

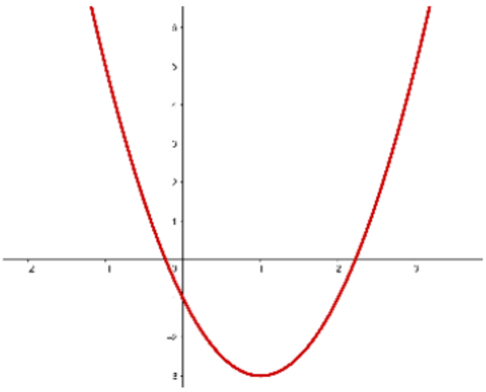
3. **Indicad la expresión de una función que tenga esta tabla:**

x	$f(x)$
-2	5
0	1
2	5
4	17
5	26
6	37

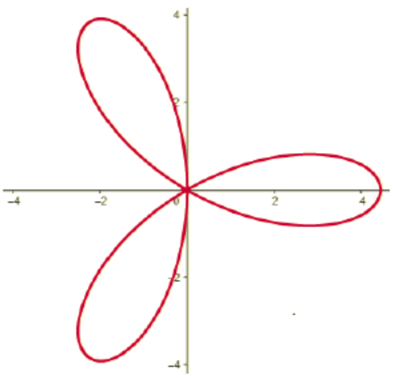
4. **Encontrad las imágenes de la función $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$ para los valores 0, 1 y -3.**

5. **Indicad si estas gráficas corresponden a una función:**

Gráfica 1:



Gráfica 2:



6. **Dadas las funciones: $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $g(x) = 3x + 1$ y $h(x) = e^x$. Determinad las composiciones de las funciones siguientes:**

(a) $(f \circ g)(x)$

(b) $(g \circ f)(x)$

(c) $(f \circ h)(x)$

(d) $(h \circ g \circ f)(x)$

7. FUNCIONS POLINÒMIQUES

Una función polinómica es la que tiene por expresión un polinomio. En general, se suelen estudiar según el grado del polinomio. Se distinguen:

7.1. Funció afí. Recta

Definición. Una **función afín** es una función polinómica cuya expresión es un polinomio de grado 1 y, por lo tanto, del tipo $f(x) = ax + b$, on a se denomina **pendiente de la recta** y b **término independiente**.

Representación gráfica. La gráfica de una función lineal es una recta.

Elementos. Dada la expresión general de cualquier función afín, $f(x) = ax + b$, se definen:

- La *pendiente de la recta*: a, informa de su inclinación.
- Los *puntos de corte con los ejes*:
  - Corte con el eje Y: $(0, b)$.
  - Corte con el eje X: $\left(-\frac{b}{a}, 0\right)$.
- La *monotonía* (crecimiento y decrecimiento):
  - La función es creciente si $a > 0$.
  - La función es constante si $a = 0$.
  - La función es decreciente si $a < 0$.

7.2. Funció quadràtica. Paràbola

Definición. Una función cuadrática es una función cuya expresión es un polinomio de grado 2. Es decir, es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

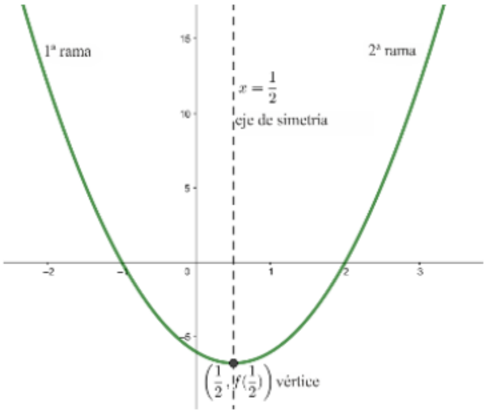
Representación gráfica. Su representación es una curva que recibe el nombre de *parábola*.

Elementos. Dada la expresión general de cualquier función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, se definen:

- El *eje de simetría* de la parábola: recta $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- El *vértice* de la parábola: punto $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{b^2}{4a} - \dfrac{b^2}{2a} + c\right)$.
- Las *ramas* de la parábola: se dirigen hacia arriba si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$.
- Los *puntos de corte* de la función con los ejes:
  - Corte con el eje Y: el punto $(0, f(0))$.
  - Corte con el eje X: los puntos $(\overline{x}, 0)$, donde $\overline{x}$ es solución de la ecuación de segundo grado asociada $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$. Puede haber:
    - Dos: si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.
    - Uno: si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$.
    - Ninguno: si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

- La *monotonía* (crecimiento y decrecimiento):
  - Si $a > 0$: es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ y creciente en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.
  - Si $a < 0$: es creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(-\frac{b}{2a}, +\infty\right)$.

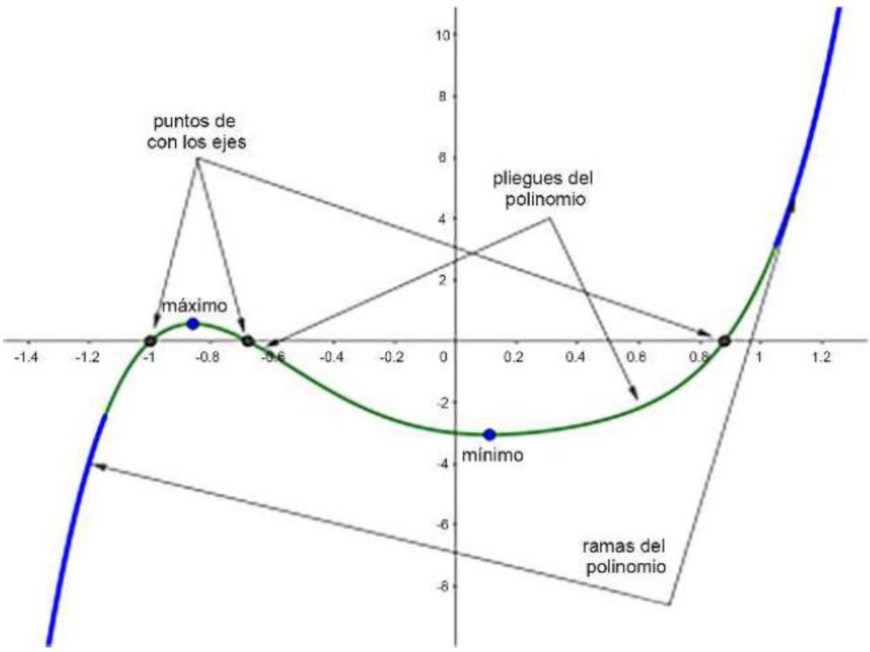
Ejemplo



7.3. Funcions polinòmiques

Definición. Una función polinómica es una función cuya expresión es un polinomio. A menudo, se denomina simplemente polinomio.

Ejemplo



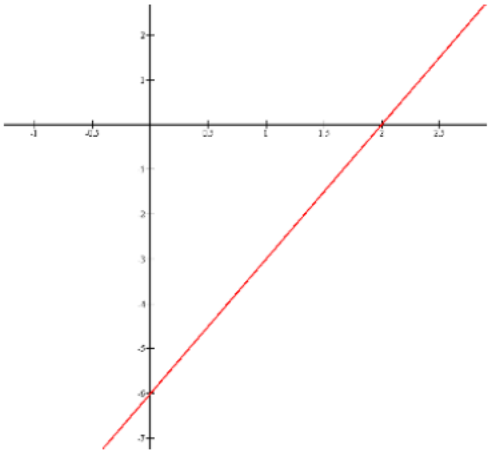
7.4. Exercicis

1. **Una función lineal cumple que $f(4) = 12$. ¿Cuál es la expresión algebraica de esta función? Represéntala gráficamente.**

2. **Una función afín cumple $f(2) = 5$ y $f(0) = 1$. ¿Cuál es la expresión algebraica de esta función? Represéntala gráficamente.**

3. **¿Hay alguna función afín que cumpla a la vez que $f(2) = -4$ y $f(-5) = -10$?**

4. **Determina la expresión de la función afín que describe esta gráfica:**

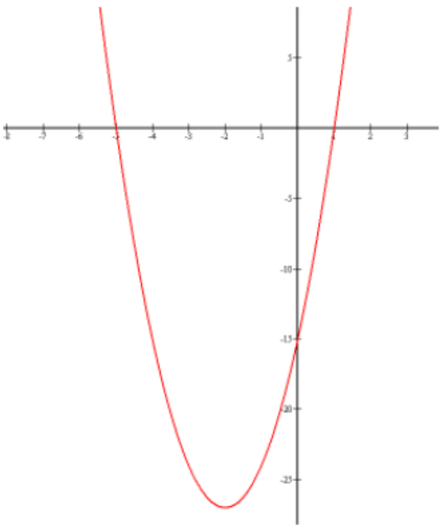


5. **Encuentra el vértice de la parábola** $f(x) = 3x^2 - x + 1$.

6. **Encuentra la expresión de una parábola que cumpla a la vez estas condiciones:** $f(1) = 2$, $f(-2) = 11$ **y** $f(0) = 1$.

7. **Encuentra la expresión de una parábola,** $f(x)$, **que tenga una raíz en** $x = 2$, **su vértice esté en** $x = -1$ **y su imagen valga** -27.

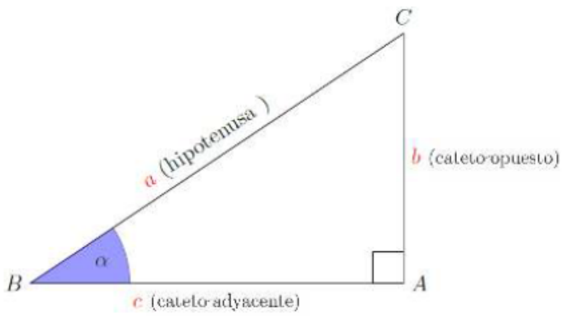
8. **Encuentra la expresión de esta parábola.**



8. FUNCIONS TRIGONOMÈTRIQUES

8.1. Raons trigonomètriques

En un triángulo rectángulo ABC como el siguiente,



podemos definir las razones trigonométricas del ángulo agudo α de la manera siguiente:

seno del ángulo α

$$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}}$$

coseno del ángulo α

$$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}}$$

tangente del ángulo α

$$\boxed{\text{tg}(\alpha) = \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{b}{c} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}}$$

Los ángulos se pueden medir en grados (°) o bien en radianes (rad).

Radián Si en un circunferencia cogemos un arco de longitud igual a la del radio, el ángulo correspondiente tiene una medida que denominamos **radián (rad)**.

Su amplitud no depende del radio y, de hecho, como que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ y el Ã¡ngulo de una vuelta entera es $360°$, tenemos

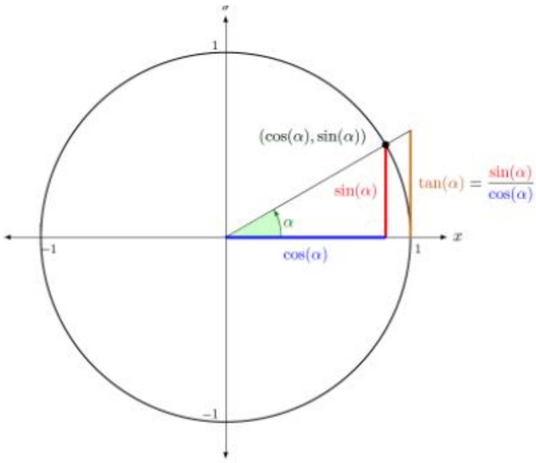
$$360° = 2\pi\,\text{rad}$$

Veamos una tabla con las razones trigonométricas de los ángulos más utilizados.

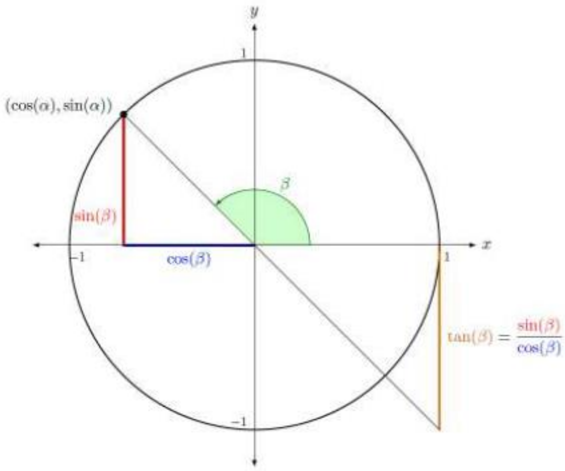
α(en rad)	α(en graus)	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	$90°$	1	0	∞

Teorema fundamental de la trigonometría

$$\boxed{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1}$$

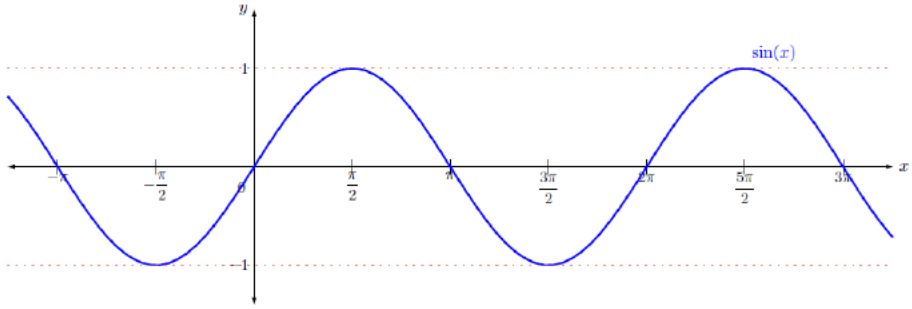


En el caso de un ángulo obtuso β, quedaría así:



8.2. Funcions sinus i cosinus

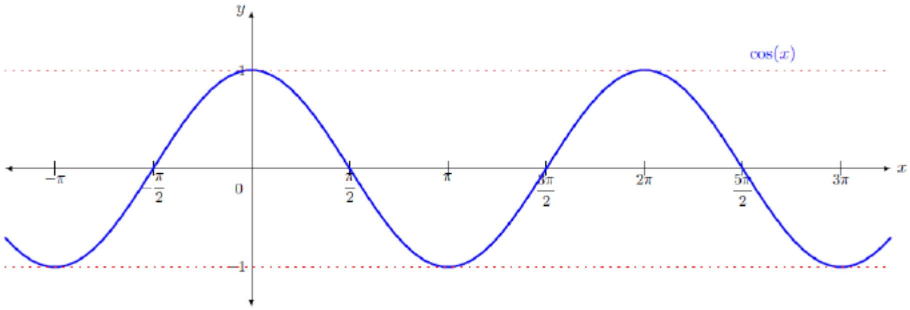
Función seno



Algunas de las características fundamentales de la función seno son:

- Imagen: $[-1, 1]$.
- Período: 2π.
- Puntos de corte con el eje X: $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Creciente en los intervalos: $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, \frac{5\pi}{2} + 2\pi k\right)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Decreciente en los intervalos: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Máximos en $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, 1\right)$ y mínimos en $\left(\frac{3\pi}{2} + 2\pi k, -1\right)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Función impar o simétrica respecto al origen. Cumple $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Función coseno

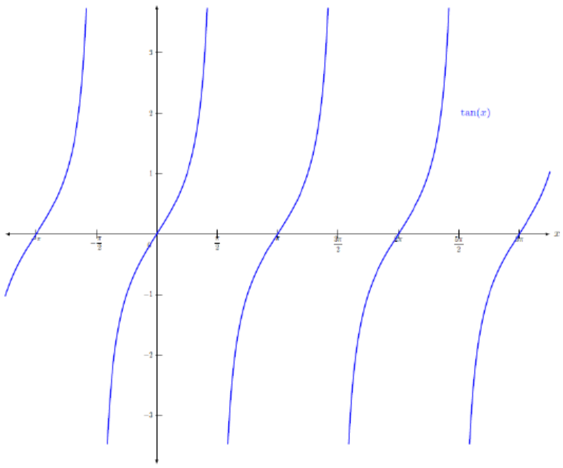


Algunas de las características de la función coseno son:

- Imagen: $[-1, 1]$.
- Período: 2π.
- Puntos de corte con el eje X: $\left((2k+1)\frac{\pi}{2}, 0\right)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Creciente en los intervalos $(\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Decreciente en los intervalos: $(2\pi k, \pi + 2\pi k)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Máximos en $(2\pi k, 1)$ y mínimos en $(\pi + 2\pi k, -1)$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}$.
- Función par o simétrica respecto al eje X. Cumple $\cos(x) = \cos(-x)$.

8.3. Funció tangent

Función tangente



Algunas de las características fundamentales de la función tangente son:

- Dominio: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, donde k es un número entero cualquiera.
- Imagen: todos los números reales.
- Período: π.
- Puntos de corte con el eje X: $(k\pi, 0)$ $k \in \mathbb{Z}$.
- Función creciente en todo el dominio.
- No tiene máximos ni mínimos.

9. FUNCIÓ EXPONENCIAL i LOGARÍTMICA

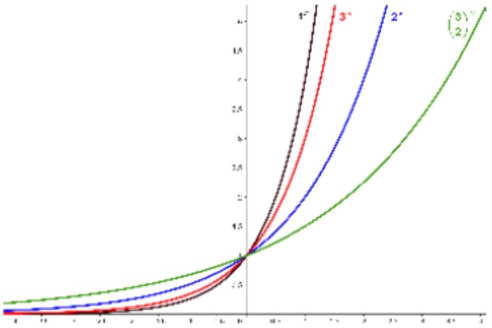
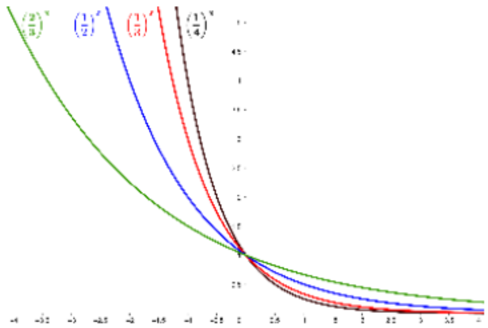
9.1. Funció exponencial

La **función exponencial** de base a se define a partir de las potencias de números. En general, si a es un número positivo, la función exponencial de base a se define como a^x.

> **Ejemplo.** Función exponencial de base 3.
> $$g(x) = 3^x$$
> Entonces,
> $g(0) = 3^0 = 1$, $g(1) = 3^1 = 3$, $g(2) = 3^2 = 9$, $g(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\ldots$

Una de las funciones exponenciales esenciales es la que tiene como base el número irracional e, cuyos primeros decimales son $2.71828182845904523\ldots$ En este caso, la función se denomina simplemente exponencial, sin especificar la base, y se escribe $\exp(x)$ o simplemente e^x.

Gráficas.

$a > 1$	$a < 1$
Función creciente Cuando x tiende a $-\infty$, la función tiende a 0. Cuando x tiende a $+\infty$, la función tiende a $+\infty$. 	Función decreciente Cuando x tiende a $-\infty$, la función tiende a $+\infty$. Cuando x tiende a $+\infty$, la función tiende a 0. 
Las gráaficas de a^x y $\left(\frac{1}{a}\right)^x$, para $a > 0$ cualquiera, son simétricas respecto al eje Y.	

9.2. El logaritme

El **logaritmo de base** a, con $a > 0$, de un número real positivo x, se calcula de la siguiente manera:

$$\log_a x = \log_a(x) = y \ \text{ si } \ x = a^y$$

Por ejemplo, el logaritmo de base 2 de 8 es igual a 3 porque $2^3 = 8$. Entonces, podemos escribir

$$\log_2 8 = \log_2(8) = 3, \ \text{porque } 2^3 = 8$$

En general, pues, se escribe $\log_a$ para indicar precisamente esta operación: el logaritmo de base a.

Ejemplo. Logaritmos de bases

- Logaritmo de base 3 de 81: $\log_3(81) = 4$ porque $3^4 = 81$.
- Logaritmo de base 5 de 25: $\log_5(25) = 2$ porque $5^2 = 25$.
- Logaritmo de base 7 de 49: $\log_7(49) = 2$ porque $7^2 = 49$.

Propiedades.

1) $\log_a(a) = 1$ y $\log_a(1) = 0$.

2) El logaritmo del producto es igual a la suma de logaritmos:
$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

3) El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:
$$\log_a\left(x^y\right) = y \cdot \log_a(x)$$

4) El logaritmo de un cociente es el logaritmo del numerador mmenos el logaritmo del denominador:
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

5) Es posible relacionar dos logaritmos de diferentes bases, a y b, con esta fórmula:
$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

9.3. Funció logarítmica

La **función logarítmica de base** a, con $a > 0$ y $a \neq 1$, es la función inversa de la función exponencial de base a. Es decir,

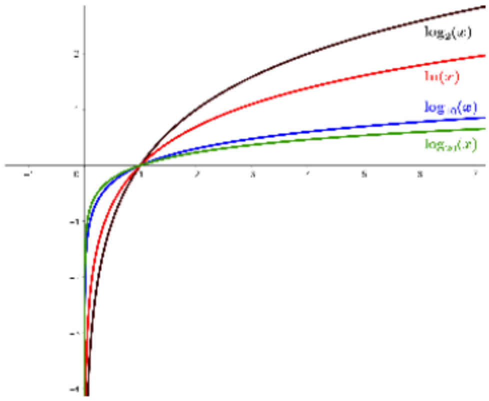
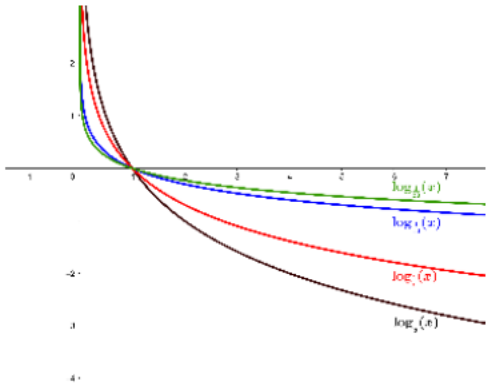
$$y = \log_a(x) \ \text{ si } \ x = a^y$$

Dado que la función se define a partir de las propiedades del logaritmo, también se denomina directamente **función logaritmo**.

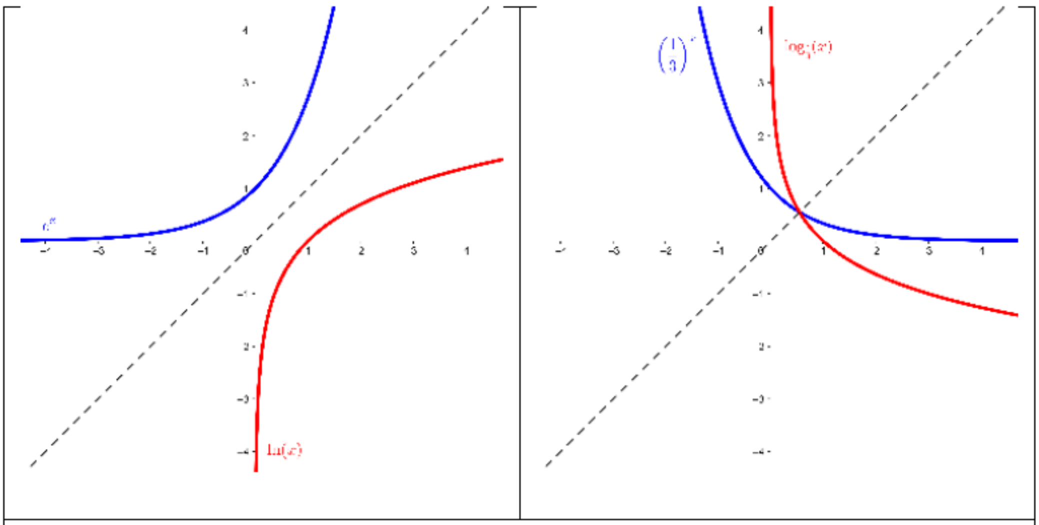
Hay dos casos particulares en la notación de esta función:

- Cuando la base es el número irracional e, se habla de logaritmo *neperiano* y se escribe ln. Es decir, se entiende $\ln = \log_e$.
- Cuando la base es el número 10, se habla simplemente de logaritmo, sin especificar la base, y se suele escribir simplemente log. Es decir, se entiende $\log = \log_{10}$.

Gráficas

$a > 1$	$a < 1$
Función creciente	Función decreciente
Cuando x tiende a 0, la función tiende a $-\infty$.	Cuando x tiende a 0, la función tiende a $+\infty$.
Cuando x tiende a $+\infty$, la función tiende a $+\infty$.	Cuando x tiende a $+\infty$, la función tiende a $-\infty$.
	
Las gráficas de $\log_a$ y $\log_{\frac{1}{a}}$, para $a > 0$ cualquiera, son simétricas respecto al eje X.	

Gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas



Las gráficas de las funciones exponenciales y logarítmicas de la misma base son simétricas respecte de la recta $y = x$.

9.4. Equacions exponencials i logarítmica

Ecuación exponencial. Es una ecuación con funciones exponenciales.

Resolver este tipo de ecuaciones no es fácil en general, y no hay ninguna fórmula de resolución general. Lo que conviene en estos casos es agrupar al máximo y convenientemente las potencias que así lo permitan para intentar sustituir la ecuación exponencial por una ecuación lineal o cuadrática. Por eso es fundamental identificar y aplicar las propiedades de las potencias. A continuación hay algunos ejemplos de esto.

Un primer ejemplo de ecuación exponencial de resolución sencilla debido a la igualdad entre las bases podría ser este:

Ejemplo. Resolución de ecuación exponencial (1).

$$2^{x+1} = 2^2$$

Dado que las bases son iguales, los exponentes tienen que ser iguales:

$$x + 1 = 2 \Rightarrow x = 2 - 1 = 1$$

Efectivamente, $2^{1+1} = 2^2$.

Ejemplo. Resolución de ecuación exponencial (2).

$$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$$

Se tiene que intentar sacar 7^x como factor común aplicando las propiedades de las potencias:

$$7^x \cdot (1 + 7 + 7^2) = 2793$$

Operemamos los elementos entre paréntesis:

$$7^x \cdot 57 = 2793$$

de donde resulta

$$7^x = \frac{2793}{57} = 49 = 7^2$$

y, por lo tanto,

$$x = 2$$

Ejemplo de ecuación	*Ejemplo de sistema*
$7^x + 7^{x+1} + 7^{x+2} = 2793$ $7^x + 7 \cdot 7^x + 7^2 \cdot 7^x = 2793$ $7^x \cdot (1 + 7 + 7^2) = 2793$ $7^x \cdot 57 = 2793$ $7^x = \frac{2793}{57} = 49$ $7^x = 7^2$ de donde resulta $x = 2$ que también verifica la ecuación original.	$\begin{cases} 5^x = 5^y \cdot 625 \\ 2^x \cdot 2^y = 256 \end{cases}$ $5^x = 5^y \cdot 625 \Rightarrow 5^x = 5^y \cdot 5^4 \Rightarrow 5^{x-y} = 5^4$ $2^x \cdot 2^y = 256 \Rightarrow 2^x \cdot 2^y = 2^8 \Rightarrow 2^{x+y} = 2^8$ por lo tanto, se trata de resolver $\begin{cases} x - y = 4 \\ x + y = 8 \end{cases}$ de donde resultan $x = 6$ y $y = 2$ que también verifican el sistema original.

Ecuación logarítmica. Es una ecuación donde aparecen funciones logarítmicas. Resolver este tipo de ecuaciones no es fácil en general, y no hay ninguna fórmula general de resolución. Lo que conviene en estos casos es agrupar al máximo y convenientemente los logaritmos que lo permitan para intentar sustituir la ecuación logarítmica por una ecuación lineal o cuadrática. Para ello, es fundamental identificar y aplicar las propiedades de los logaritmos. Veámoslo con la resolución de algunos ejemplos.

Un ejemplo para resolver podría ser la siguiente ecuación:

Ejemplo. Resolución de ecuación logarítmica.

$$2\log(x) - \log(x-16) = 2$$

Reescribimos el término de la izquierda, ya que $2\log(x) = \log\left(x^2\right)$:

$$\log\left(x^2\right) - \log(x-16) = 2$$

Aplicamos la propiedad del logaritmo del cociente, $\log\left(x^2\right) - \log(x-16) = \log\left(\frac{x^2}{x-16}\right)$:

$$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = 2$$

Reescribimos el término de la derecha, ya que $2 = \log(100)$:

$$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = \log(100)$$

de donde resulta

$$\frac{x^2}{x-16} = 100$$

Ordenamos los términos:

$$x^2 - 100x + 1600 = 0$$

y se trata de resolver una ecuación de segundo grado.

Aplicamos la fórmula de resolución para las ecuaciones de segundo grado y obtenemos

$$x = 20 \text{ y } x = 80$$

Para acabar, comprobamos si estas también verifican la ecuación logarítmica inicial. En este caso, al sustituir los valores en la ecuación original, comprobamos que ambas son solución.

Ejemplo de ecuación	*Ejemplo de sistema*
$2\log(x) - \log(x-16) = 2$ $\log\left(x^2\right) - \log(x-16) = 2$ $\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = \log(100)$ $\frac{x^2}{x-16} = 100$ $x^2 - 100x + 1600 = 0$ de donde resultan $x = 20$ y $x = 80$ que también verifican el sistema original.	$\begin{cases} x + y = 65 \\ \log(x) + \log(y) = 3 \end{cases}$ $\log(x) + \log(y) = 3 \Rightarrow \log(x \cdot y) = 3 = \log(1000)$ por lo tanto, se trata de resolver $\begin{cases} x + y = 65 \\ x \cdot y = 1000 \end{cases}$ de donde resultan $x = 40$ y $y = 25$ o bien $x = 25$ y $y = 40$ que también verifican el sistema original.

9.5. Exercicis

1. **Encontrad una función exponencial del tipo $f(x) = a^x$ que cumpla $f(6) = 64$.**

2. **Determinad cuál de estas funciones son crecientes y cuáles decrecientes, y ordenadlas de mayor crecimiento a mayor decrecimiento. Justificad la respuesta.**

$$f(x) = 11^x, g(x) = 13^x, h(x) = 0.1^x, t(x) = 0.3^x$$

3. **Calculad estos logaritmos sin usar la calculadora:**

   (a) $\log_2(32)$

   (b) $\log_9(81)$

   (c) $\log_5\left(5^3\right)$

   (d) $\log_3\left(\sqrt{243}\right)$

4. **Encontrad una función logarítmica del tipo $f(x) = \log_a(x)$ $\log_a(x)$ que cumpla $f(125) = 3$.**

5. **Determinad cuál de estas funciones son crecientes y cuáles decrecientes, y ordenadlas de mayor crecimiento a mayor decrecimiento. Justificad la respuesta.**

$$f(x) = \log_3(x), g(x) = \log_{0.2}(x), h(x) = \log_{13}(x), t(x) = \log_{0.1}(x)$$

6. **Encontrad el valor de x que cumpla estas igualdades:**

(a) $\log_4(x) = 4$

(b) $\log_x(27) = x$

(c) $\log_{\frac{1}{2}}(4) = x$

(d) $\log_3\left(\sqrt{x}\right) = \frac{3}{2}$

7. **Resolved estas ecuaciones:**

- $3^{2x} - 5 \cdot 3^x = 36$
- $2\log(10x) - \log(12 - 4x) = 2$

8. **Resolved estas ecuaciones:**

- $\ln(x) + \ln(x - 1) = 0$
- $\log(x) - \log\left(x^2\right) = \log(7)$

10. CONTINUÏTAT DE FUNCIONS

10.1. Límits

El límite funcional es un concepto relacionado con la tendencia de los valores de una función a medida que varían los valores de la variable y tienden a un valor determinado. El límite de una función en un valor determinado de es x igual a un número al que tiende la función cuando la variable tiende a este valor, aproximándose cada vez más al número objetivo pero no llegando nunca a tomar este valor.

El **límite de una función** en un valor x es igual a un número al que tiende la función cuando la variable tiende a este valor (sin llegar nunca a serlo). Si el límite de una función $f(x)$ en un valor a es igual a b se escribe de este modo:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

También se dice que "*la función $f(x)$ tiene límite b cuando la x tiende a a*". Por ejemplo, si $f(x)$ es una función que cumple que, cuando la x tiende a 3, la función tiende a 1, se escribirá así:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 1$$

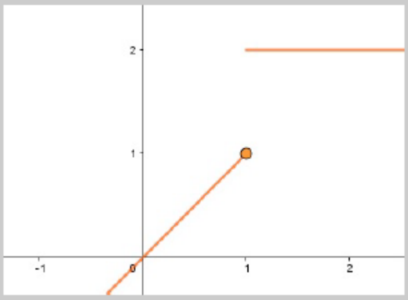
Con la notación anterior, puede entenderse que $x \to 3$ es una forma de representar la frase "*x tiende a 3*", que significa que el número x se aproxima infinitamente a 3 pero sin llegar nunca a tomar este valor.

Así, pues, el límite de una función en un valor a da una idea de la tendencia de la función cuando el valor de la x tiende a este valor. Para estudiar el límite de una función en un valor, se puede crear una tabla con diferentes valores de la función cuyo componente x tiende al valor a (pero nunca es a).

Ejemplo. Límites laterales.

Consideramos la función definida a trozos

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$



Observamos que el límite por la izquierda en 1 da

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1,$$

mientras que el límite por la derecha vale

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2.$$

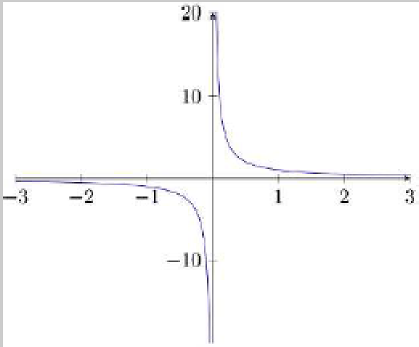
Como los dos límites no coinciden, podemos afirmar que el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to 1$ no existe, a pesar de que la función en este punto es definida y toma valor $f(1) = 1$.

En cambio, si calculamos los límites laterales cuando $x \to 1.5$, podemos ver que los dos existen y valen 2, por lo tanto $\lim_{x \to 1.5} f(x) = 2$ y coincide con el valor $f(1.5)$.

Ejemplo. Límites laterales divergentes.
Consideramos ahora la función $f(x) = \frac{1}{x}$ y estudiamos sus límites laterales cuando $x \to 0$.

Para calcular el límite lateral por la derecha, tenemos que considerar valores positivos de x que aproximen a 0:

$$\begin{array}{rcl} 1 & \longrightarrow & f(1) = 1 \\ 0.1 & \longrightarrow & f(0.1) = 10 \\ 0.01 & \longrightarrow & f(0.01) = 100 \\ 0.001 & \longrightarrow & f(0.001) = 1000 \\ 0.0001 & \longrightarrow & f(0.0001) = 10000 \end{array}$$



Es fácil darse cuenta que, cuanto más nos aproximamos al valor 0 por la derecha, más grande es el valor que toma la función, pero esta no se aproxima a ningún número en concreto, sino que crece infinitamente. Por este motivo, diremos que el límite lateral a 0 por la derecha **diverge**:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

De manera similar, se puede comprobar como el límite lateral a 0 por la izquierda también diverge:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Solo con uno de estos dos hechos ya podemos afirmar que el límite de la función en 0 no existe. Además, al contrario que en el ejemplo anterior, la función no existe en este punto.

Ejemplo. Cálculo del límite en el infinito de un polinomio.

Calcular el límite de un polinomio en el infinito es una tarea senzilla si analizamos cada uno de los monomios que lo forman por separado.

A medida que x toma valores mayores, el término que crece a más velocidad será siempre aquel que tiene el exponente más grande, y por lo tanto el límite del polinomio cuando $x \to +\infty$ será ∞ con el mismo signo que el coeficiente del monomio de grado superior al polinomio (**término dominante**).

Por ejemplo, $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^2 - x - 7 = +\infty$, mientras que $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^5 + 2x^2 + 7 = -\infty$, ya que los términos de grado inferior crecen hacia ∞ a velocidad más lenta que el término dominante, y por lo tanto, cuando x es bastante grande, restarlos no hace variar prácticamente el valor del polinomio.

Por otro lado, el cálculo del límite de un polinomio cuando $x \to -\infty$ será ∞, pero para saber el signo correspondiente tenemos que separar dos casos:

- Si el grado del término dominante es **par**, el signo será el mismo que en el del coeficiente del del monomio de mayor grado.
- Si el grado del término dominante es **impar**, el signo será opuesto al del coeficiente del monomio de mayor grado, ya que estaremos evaluando números negativos y por lo tanto el signo tendrá que cambiar.

Con los ejemplos anteriores, $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2 - x - 7 = -\infty$, y $\lim\limits_{x\to-\infty} -x^5 + 2x^2 + 7 = +\infty$.

Ejemplo. Cálculo de límites de tipo $k \cdot \infty = \infty, k \neq 0$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2+1) \cdot \left(4 - \frac{1}{x}\right) = [+\infty \cdot 4] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 5x \cdot \left(4 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x}\right) = [-\infty \cdot 4] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+} (-3x^2+1) \cdot \frac{1}{x^3} = [-3 \cdot (+\infty)] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x^5} \cdot \left(-3 - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x}\right) = [-\infty \cdot (-3)] = +\infty$

Indeterminacions

Ejemplo. Indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$.

Para la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ el límite en 2 es una indeterminación, ya que en la fracción

$$\frac{\lim\limits_{x\to2} x^2 - 4}{\lim\limits_{x\to2} x - 2}$$

los límites del numerador y el denominador valen 0.

Las raíces del numerador son $x = \pm2$, mientras que el numerador solo se anula en $x = 2$. Por lo tanto, la raíz $x = 2$ es una raíz común a los dos polinomios, y

$$\lim_{x\to2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to2} \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = \lim_{x\to2} \frac{x+2}{1} = 4.$$

Ejemplo. Indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{2x^2+7x-5}.$$

Si intentamos calcular directamente el límite, obtenemos una indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Observamos como tanto el numerador como el denominador tienen grado 2, de manera que tendremos que dividir los dos polinomios por x^2:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{2x^2+7x-5} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2-2}{x^2}}{\frac{2x^2+7x-5}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{3-\frac{2}{x^2}}{2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x\to+\infty} 3-\frac{2}{x^2}}{\lim_{x\to+\infty} 2+\frac{7}{x}-\frac{5}{x^2}} \\
&= \frac{3-0}{2-0} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Y esto no es más que la fracción entre los coeficientes de los términos dominantes de los dos polinomios.

10.2. Continuïtat

Definición función continua. Se dice que una función $f(x)$ es **continua en un punto** x_0 si la función se puede evaluar en este punto y su valor coincide con el límite de la función cuando x tiende a x_0, es decir,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Se dice que una función es **continua** cuando es continua en todos los puntos de su dominio.

Ejemplo. Consideramos el ejemplo que ya hemos estudiado previamente,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

y estudiemos la continuidad en $x = 1$.

En este caso, como hemos visto, los límites laterales de la función no coinciden, y por lo tanto el límite de la función en $x = 1$ no existe. Como que no existe, no puede ser igual al valor de la función en el punto $f(1) = 1$, y la función es discontinua en este punto.

Se dice que una función es **continua** cuando lo es en todos los puntos de su dominio.

Tipos de discontinuidades

Discontinuidad evitable Este tipo de discontinuidad se da cuando la función no está definida en el punto x_0, pero los límites laterales sí que existen y coinciden. Es decir,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x), \text{ però } \nexists f(x0).}$$

Discontinuidad de salto Es el caso cuando los dos límites laterales de la función existen pero no toman el mismo valor, independientemente de si la función está definida en aquel punto o no. Es decir,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)}$$

Discontinuidad asintótica Esta discontinuidad es una versión extrema del caso anterior, en que al menos uno de los dos límites laterales diverge. Esto es,

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty.}$$

Asíntotas

Asíntotas verticales Se dan en un punto k del eje X cuando al menos uno de los límites laterales en este punto tiende a $\pm\infty$, es decir, cuando en la función tiene una discontinuidad asintótica en k. En este caso, la recta de ecuación $\boxed{x = k}$ es la asíntota vertical.

Asíntotas horizontales Se dan cuando existe el límite en alguno de los infinitos. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$, la recta de ecuación $\boxed{y = k}$ es la asíntota horizontal (ídem con el límite con $-\infty$). Una función puede tener hasta dos asíntotas horizontales si los dos límites a $\pm\infty$ existen y toman valores diferentes.

Asíntotas oblicuas Si, y solo si, se cumple

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\pm\infty} f(x) &= \infty \\
\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} &= a \\
\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax] &= b
\end{aligned}$$

donde a, b son números reales y $y = ax + b$ es la ecuación de la asíntota.

10.3. Exercicis

1. **Calculad los siguientes límites, si existen, paso a paso:**

(a) $\lim_{x\to 3} x^3 - 2x^2 + 1$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^3 - 4x}{3x - 5}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + x} - (x+1)\right]$

(d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 - x^2 + 1}{2x^3 + x^2 - 9}$

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{-19}{(x-2)^3}$

(f) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2}$

(g) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

(h) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$

(i) $\lim_{x\to 1} \left(\dfrac{x^2 + x + 1}{2x + 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

(j) $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2 - 3x + 1}{x - 3} - x\right)$

2. **Indicad los puntos en los que estas funciones no son continuas y el tipo de discontinuidad que presentan. Razonad la respuesta.**

(a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \textbf{si } x \neq 0 \\ 1 & \textbf{si } x = 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$

3. **Considerad la función**

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{8x^3 + 3x}$$

¿Qué valor hay que asignar a $f(0)$ para que la función f sea continua en $x = 0$? Explicadlo.

4. **Calculad el dominio como unión de intervalos de continuidad, estudiad el comportamiento de la función en los extremos del dominio (asíntotas) y los tipos de discontinuidades que presentan las siguientes funciones:**

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x^2 - x - 6}$

(b) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^3 + x^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{x}{e^{1/x} + 1}$

(d) $f(x) = \dfrac{6 + e^{1/x}}{2 + e^{1/x}}$

5. **Estudiad el dominio y la continuidad de la función**

$$f(x) = \frac{x^3 - ax^2}{x^2 - 9}$$

en función del parámetro a, un número real positivo.

11. DERIVABILITAT

11.1. Derivada d´una funció en un punt

Definición. La derivada de una función f en un punto x_0 se indica por $f'(x_0)$ y se define por este límite:

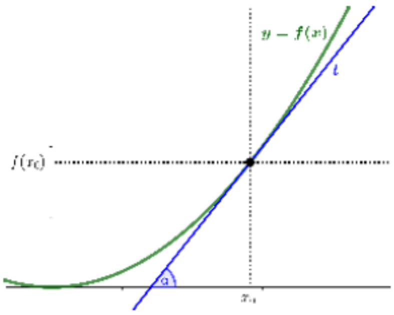
$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}}$$

Si este límite no existe, se dice que la función $f(x)$ no es derivable en x_0.

Interpretación. La derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 de su dominio coincide con la pendiente de la recta tangente de la función en este punto. Es decir,

$$f'(x_0) = \tan(\alpha)$$

donde α es el ángulo que hay entre el eje X y la recta tangente a la función en el punto x_0.



11.2. Derivada d´una funció

Definición. La derivada de una función f es aquella función que asocia a cada punto x del dominio la derivada de esta función. La función derivada se designa por $f'(x)$.

Tabla de derivadas. Las principales derivadas de funciones son:

Tabla de derivadas		
$f(x)$	$f'(x)$	**Ejemplos**
$k,\ k \in \mathbb{Z}$	0	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$a \cdot x,\ a \in \mathbb{R}$	a	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $g(x) = -4x \Rightarrow g'(x) = -4$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z}$	$n \cdot x^{n-1}$	$f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1 + \tan^2(x)$	
$a^x,\ a \in \mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln(a)$	$f(x) = 3^x \Rightarrow f'(x) = 3^x \cdot \ln(3)$ $g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a(e)$	$f(x) = \log_3(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}\log_3(e)$ $g(x) = \ln(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{x}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	

Reglas de cálculo

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones, la derivada de la suma (o resta) de las dos funciones es

$$\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}$$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones, la derivada del producto de las dos funciones es

$$\boxed{(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}$$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones, la derivada del cociente de las dos funciones es

$$\boxed{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}}$$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones, la derivada de la composición de las dos funciones es

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

- Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones, para derivar la potencia de f elevada a g, $h(x) = f(x)^{g(x)}$ hay que extraer en primer lugar el ln de esta función:

$$\ln(h(x)) = \ln\left(f(x)^{g(x)}\right) = g(x) \cdot \ln(f(x))$$

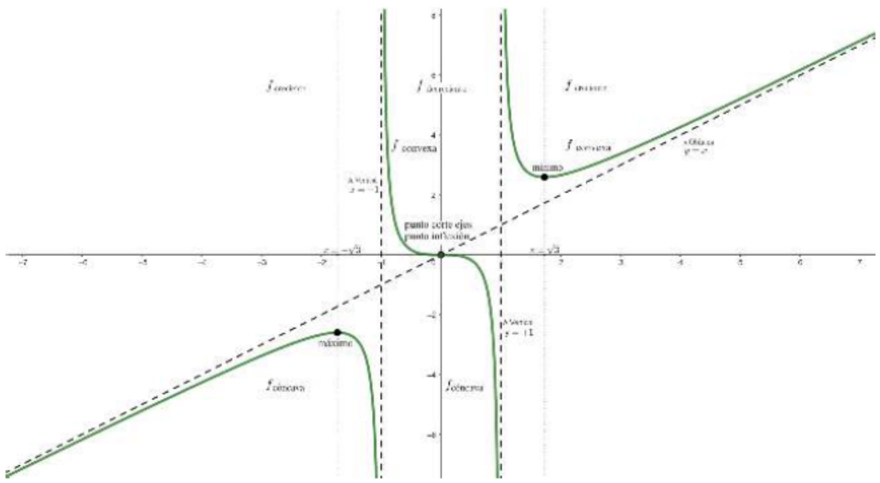
  Después se deriva esta segunda función aplicando la regla de la cadena:

$$\boxed{h'(x) = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{g(x) f'(x)}{f(x)}\right)}$$

11.3. Representació gràfica de funcions

Descripción de los elementos para representar gráficamente una función $f(x)$.	**Ejemplo.** Representar gráficamente $$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$
Dominio	
Puntos del eje X donde $f(x)$ está definida.	Dom $f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
Puntos de corte con los ejes	
Puntos del tipo $(0, f(0))$ y $(x, 0)$.	Un único punto de corte, el $(0,0)$
Simetría	
Una función f es par o simétrica respect del eje Y cuando $f(-x) = f(x)$. Una función f es simétrica respecto del origen cuando $f(-x) = -f(x)$.	Es simétrica respecto del origen: $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = -\frac{x^3}{x^2-1} = -f(x)$
Intervalos de crecimiento y decrecimiento	
Signo de la derivada de la función: • $f(x)$ es creciente en $f'(x) > 0$. • $f(x)$ es decreciente en $f'(x) < 0$.	Es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$ y decreciente en $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$
Extremos: máximos y mínimos	
Cuando se anula la derivada de la función, • x_0 máximo de f si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$. • x_0 mínimo de f si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$.	$(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = \left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ es máximo. $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = \left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ es mínimo.
Puntos de inflexión	
Cuando se anula la segunda derivada de la función, x_0 punto de inflexión en $f''(x_0) = 0$ y f'' cambia de signo en un entorno de x_0.	$(0, f(0)) = (0, 0)$ es un punto de inflexión

Intervalos de concavidad y convexidad	
Signo de la segunda derivada de la función: • $f(x)$ convexa si $f''(x) > 0$ • $f(x)$ cóncava si $f''(x) < 0$	Es cóncava en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$. Es convexa en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$.
Comportamiento asintótico	
Estudio de la existencia de asíntotas verticales, horizontales u oblicuas de la función.	$x = -1$ y $x = 1$ son asíntotas verticales y $y = x$ es una asíntota oblicua
Gráfica	



11.4. Exercicis

Dada la función a trozos siguiente,

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2 & \textbf{si } x < -1 \\ 1 & \textbf{si } -1 \le x \le 1 \\ \dfrac{3}{4-x} & \textbf{si } x > 1 \end{cases}$$

estudia su derivabilidad y escribe la expresión de la función derivada $f'(x)$.

Calcula las derivadas de estas funciones:

(a) $f(x) = x \cdot \sin(x)$

(b) $g(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

(c) $h(x) = \sqrt{3x^2 + 2x + 1}$

(d) $r(x) = \dfrac{e^{2x+1}}{\ln(x)}$

(e) $b(x) = e^{3x^2 - x - 1}$

Encuentra las asíntotas de las funciones siguientes:

$$f(x) = x \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}$$

12. INTEGRACIÓ

12.1. Integració d´una funció

Dada una función $f(x)$ es posible encontrar su derivada $f'(x)$ usando la tabla de derivadas y las reglas pertinentes. Esta transformación sugiere una pregunta: dada una función $f(x)$, ¿es posible encontrar una función $F(x)$ cuya derivada sea la función inicial $f(x)$, es decir, $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$?

Tabla de integrales inmediatas		
$f(x)$	$\int f(x)dx$	**Exemples**
k constante	$k \cdot x + C$	$\int 3dx = 3x + C$
x^n si $n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + C$ $\int \sqrt{x}\, dx = \dfrac{2}{3}\left(\sqrt{x}\right)^3 + C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\| + C$	
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln(a)} + C$	$\int 3^x dx = \dfrac{3^x}{\ln(3)} + C$ $\int e^x dx = e^x + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$	
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$	
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	

Reglas de cálculo. El cálculo de la primitiva de una función cualquiera no es tan sencillo como el de la derivada, ya que las únicas reglas inmediatas que se pueden aplicar son:

- La integral de la suma (o resta) de funciones es igual a la suma (o resta) de las integrales de las funciones.

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx}$$

- La integral del producto de un número por una función es igual al producto del número por la integral de la función.

$$\boxed{\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx}$$

- Si $g(x) = \int f(x)dx$, entonces $g'(x) = f(x)$.
- La regla de la cadena $((f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g')$ nos permite escribir

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)dx = f(g(x)) + C}$$

A partir de la última regla podemos generalizar la tabla de integrales inmediatas anterior a las integrales, que se llaman a menudo **integrales casi inmediatas**.

Integrales casi inmediatas	
Integral	**Ejemplos**
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C$ si $n \neq 1$	$\int [\sin(x)]^4 \cdot \cos(x)dx = \frac{[\sin(x)]^5}{5} + C$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$	$\int \frac{2x-3}{x^2-3x+13}dx = \ln\lvert x^2-3x+12\rvert + C$
$\int e^{f(x)} \cdot f'(x)dx = e^{f(x)} + C$	$\int e^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = e^{4x^2+3x-2} + C$
$\int a^{f(x)} \cdot f'(x)dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln(a)} + C$	$\int 5^{4x^2+3x-2} \cdot (8x+3)dx = \frac{5^{4x^2+3x-2}}{\ln(5)} + C$
$\int f'(x) \cdot \sin(f(x))dx = -\cos(f(x)) + C$	$\int \cos(x)\sin(\sin(x))dx = -\cos(\sin(x)) + C$
$\int f'(x) \cdot \cos(f(x))dx = \sin(f(x)) + C$	$\int 6 \cdot \cos(6x-2)dx = \sin(6x-2) + C$
$\int \frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}dx = \arctan(f(x)) + C$	$\int \frac{\frac{1}{x}}{1+(\ln(x))^2}dx = \arctan(\ln(x)) + C$
$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-(f(x))^2}}dx = \arcsin(f(x)) + C$	$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x)^2}}dx = \arcsin(e^x) + C$

Ejemplo. Integración por cambio de variable (1).

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$$

En este caso, no sabemos calcular directamente esta integral, pero observamos que si tomamos $t = \sqrt{x-1}$ podemos aislar x de manera que obtenemos $x = 1+t^2$ y su derivada $dx = 2tdt$. Así, si aplicamos este cambio nos queda

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{t^2+1}{t} \cdot 2tdt = 2\int (t^2+1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+t\right)+C$$

Finalmente, deshacemos el cambio (sustituimos $t = \sqrt{x-1}$ en la solución) y tenemos

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = 2\left(\frac{2(\sqrt{x-1})^3}{3}+\sqrt{x-1}\right)+C$$

Ejemplo. Integración por cambio de variable (2).

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx$$

En este caso tomamos $t = \ln(x)$ y, por tanto, $dt = \frac{1}{x}dx$. Así pues, tenemos

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2}+C$$

Por lo tanto, deshaciendo el cambio,

$$\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{\ln^2(x)}{2}+C$$

Ejemplo. Integración por canvi de variable (3).

$$\int \sqrt{1-x^2}dx$$

Podemos hacer el cambio $x = \sin(t)$ y, porr tanto, $dx = cos(t)dt$. Así, pues,

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2(t)} = \cos(t)$$

Podemos calcular la integral planteada recordando que $\cos^2(t) = \dfrac{1+\cos(2t)}{2}$

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \cos(t)\cdot\cos(t)dt = \int \cos^2(t)dt = \int \frac{1+\cos(2t)}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int 1\,dt + \frac{1}{2}\int \cos(2t)dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{\sin(2t)}{2}+C$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{2\sin(t)\cdot\cos(t)}{4}+C$$

donde hemos utilizado $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$. Si deshacemos el cambio, como que $x = \sin(t)$, $t = \arcsin(x)$ y $\sqrt{1-x^2} = \cos(t)$. Si sustituimos en la expresión, tenemos

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\arcsin(x) + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$$

Ejemplo. Integración por partes (1).

$$\int xe^x dx$$

Elegimos $u = x$ y, por lo tanto, $du = 1 \cdot dx$ y $dv = e^x dx$ y, por lo tanto, $v = \int e^x dx = e^x$. Si ahora aplicamos la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int xe^x dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x dx$$

de manera que la nueva integral de la derecha ahora es inmediata y, por lo tanto, obtenemos

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

Ejemplo. Integración por partes (2).

$$\int \ln(x) dx$$

Elegimos $u = \ln(x)$ y, por lo tanto, $du = \frac{1}{x} \cdot dx$ y $dv = 1 \cdot dx$ y, por lo tanto, $v = \int 1 dx = x$. Si ahora aplicamos la fórmula de integración por partes, obtenemos

$$\int \ln(x) dx = x\ln(x) - \int \frac{1}{x} \cdot x dx = x\ln(x) - \int 1 dx$$

de manera que la nueva integral de la derecha ahora es inmediata y, por lo tanto, obtenemos

$$\int \ln(x) dx = x\ln(x) - x + C = x(\ln(x) - 1) + C.$$

Integral definida

La integral definida nace de la necesidad de calcular el área encerrada por una función y el eje X en un cierto intervalo. Esta área se puede aproximar sumando ciertos rectángulos cuya base sea constante y la altura el valor de la función en ciertos puntos elegidos convenientemente. El límite de este cálculo cuando la base de estos rectángulos tiende a 0 es igual a la integral definida de esta función en este intervalo, es decir, el área que buscamos.

El cálculo de la integral definida se facilita a partir de la **Regla de Barrow**:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es una primitiva cualquiera de $f(x)$,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo. Regla de Barrow.

Calculamos la integral

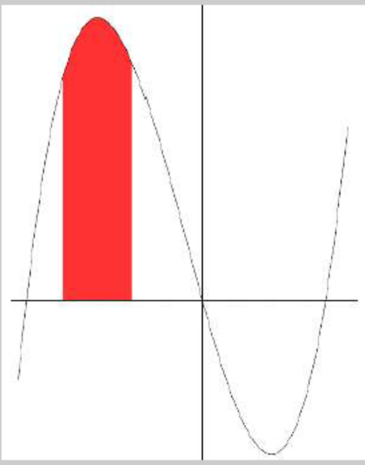
$$\int_1^3 (2x^2 + 3) dx$$

Para calcular esta integral, tenemos que buscar una primitiva (tomaremos $C = 0$) y evaluarla en los extremos:

$$\int_1^3 (2x^2 + 3) dx = \left. \frac{2}{3}x^3 + 3x \right]_1^3 = \left(\frac{2}{3}3^3 + 3 \cdot 3\right) - \left(\frac{2}{3}1^3 + 3 \cdot 1\right) = \frac{70}{3}$$

12.2. Aplicacions de la integració d´una funció

Ejemplo. Cálculo de área en $f(x) \geq 0$ a $[a, b]$.
Calculamos el área de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en el intervalo $[-4, -2]$

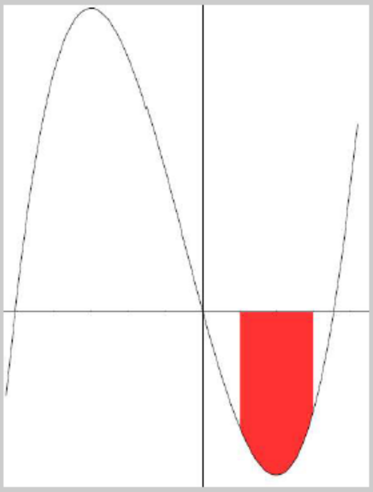


Como que vemos que la función es positiva en todo el intervalo $[-4, -2]$, el área que buscamos es

$$\int_{-4}^{-2} f(x)dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 36 \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg]_{-4}^{-2} = 152$$

Vemos, pues, que el área es 152u^2.

Ejemplo. Cálculo de área en $f(x) \leq 0$ a $[a, b]$.
Calculamos el área de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$ en el intervalo $[1, 3]$:

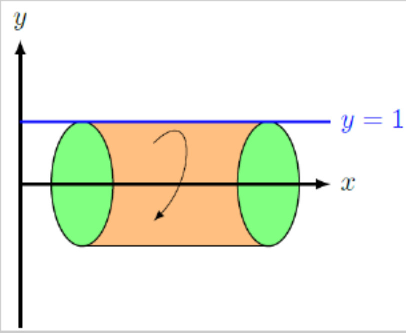


Como vemos que la función es negativa en todo el intervalo $[1, 3]$, el área que buscamos es

$$A = -\int_{1}^{3} f(x)dx = -\left[2 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 36 \cdot \frac{x^2}{2}\right]_1^3 = 78$$

Vemos, pues, que el área es 78u^2.

Ejemplo. Cálculo del volumen de un cuerpo de revolución.



En este caso la función $f(x)$ es sencilla, $f(x) = 1$. Si queremos calcular el volumen del cuerpo de revolución que genera (un cilindro) en el intervalo $[1,4]$, tenemos

$$V = \pi \int_1^4 [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^4 1^2 dx = \pi \cdot x]_1^4 = 3\pi.$$

Por lo tanto, el volumen del cilindro propuesto es $3\pi\,\mathrm{u}^3$.

12.3. Exercicis

1. **Calcular las integrales siguientes:**

(a) $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx$

(b) $\int \sin^3(x)\cos^2(x) dx$

(c) $\int x^2 e^{3x} dx$

2. **Calcular el área entre el eje X y la función $f(x) = -4x^5 + 3x^3 - 3x^2 + 4x + 3$ en el intervalo $[-1,1]$.**

Calcular las integrales siguientes:

(a) $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x - 4)\, dx$

(b) $\int x(x^2+1)^3\, dx$

(c) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$

(d) $\int \sqrt{2x-6}\, dx$

(e) $\int 3e^{-2x+1} dx$

(f) $\int \frac{\ln x}{x} dx$

(g) $\int \sin(x) \cdot \cos(x) dx$

Utilizar el método de integración por partes para calcular las integrales siguientes:

(a) $\int 2xe^{-x} dx$

(b) $\int (x+1)\cos(2x) dx$

(c) $\int x \ln x dx$

(d) $\int x^2 e^x dx$