Записки по случайни процеси и Марковски вериги

Мирослав Стояновски

19 юни 2025 г.

1 Въведение

1.1 Марковски вериги - въведение

Колекция от случайни величини X = (Xn)n$\geq$ 0.

2 Дефиниции

2.1 Дефиниция за дискретна Марковска верига

1. P (X0 = i) = λ_i, i$\in$I
2. В сила е Марковското свойство за всяка траектория $\{i_0, ..., i_n\}$ с полож. вероятност
P(X$_{n+1}$ = j | X$_n$ = i; $\cdots$; X$_0$ = i$_0$) = P(X$_{n+1}$ = j | X$_n$ = i) =: p$_{i,j}$

2.2 Нехомогенна Марковска верига

Нехомог. МВ: Матрицата може да е различна за различно n.

3 Модел на Еренфест

3.1 Анализ на модела

Защо $f(n) = |E[X_n] - N/2|$ намалява с n в модела на Еренфест?
$E[X_{n+1}|X_n = M] = (M-1) \cdot \frac{M}{N} + (M+1) \cdot \frac{N-M}{N} = M\left(1 - \frac{2}{N}\right) + 1$ или $E[X_{n+1}|X_n] = X_n\left(1 - \frac{2}{N}\right) + 1$. Но $E[E[X_{n+1}|X_n]] = E[X_n]\left(1 - \frac{2}{N}\right) + 1$, от друга страна пък $E[E[X_{n+1}|X_n]] = E[X_{n+1}]$ или $E[X_{n+1}] = E[X_n]\left(1 - \frac{2}{N}\right) + 1$. После изразяваме $E[X_n]$ със $E[X_0]$ и сравняваме $f(n+1)$ и $f(n)$, откъдето виждаме, че $f(n+1) < f(n)$ за вс. n.

4 Предварителни свойства

4.1 Характеризация на Марковски вериги

X = $(X_n)_{n\geq 0}$ е МВ $\Leftrightarrow$ P(X_0=i_0,$\cdots$,X_n=i_n)=$\lambda_{i_0} \times p_{i_0 i_1} \times \cdots \times p_{i_{n-1} i_n}$ за всяка траектория

Бонус:

X = $(X_n)_{n\geq 0}$ е МВ $\Leftrightarrow$ P(X_{n+1}=i_{n+1},...,X_{n+m}=i_{n+m}|X_n=i_n)=$p_{i_n i_{n+1}}, ..., p_{i_{n+m-1} i_{n+m}}$ за всеки n,m, траект.

4.2 Доказателство за характеризация на МВ

$\Rightarrow$) индукция + усл. вероятност.
$\Leftarrow$) Взимаме произв. траектория с дължина k+1, разбиваме на усл. вер. за посл. състояние, съкращаваме траекторията до k от двете страни, и накрая поучаваме $p_{i_k i_{k+1}}$ - готови сме.

4.3 Следствие

За X = $(X_n)_{n\geq 0}$ е МВ, разпределението $(P(X_n = i))_{i \in I}$ се задава чрез λP^n.
Д-во: индукция - разделяме P(X_1=j) на сума от усл. вероятности(ф-ла за пълна вер.) спрямо X_0 и получаваме, че P(X_1=j) е j-тата колонка на λP.
Разделяме P(X_{n+1}=j) по същия начин спрямо X_n - j-та колонка на λP^n.

4.4 Чапман-Колмогоров

За всяка МВ $(p_{ij})^{(n+m)} = \sum_{k \in I} (p_{ik})^m (p_{kj})^n$

4.5 Диагонализация на матрици

Намираме собствени ст-ти чрез det(P-λE)=0. Намираме съотв. собств. в-ри чрез тези собств. ст-ти.: Px=λx. Ако собств. ст-ти са разл., то матрицата е диагонализируема. P=SDS^{-1}, където S е получена от собств. в-ри наредени по колонки, D е със собст. ст-ти по главния диаг. и другите нули. S^{-1} се намира като (S|E) се сведе до (E|S^{-1}) чрез елементарни матрични преобразования. Също така P^n=SD^{n}S^{-1}. За неразл., положително възвратни, апериодични МВ limP^n се схожда до матрица I$\times$I, където всеки ред е коорд. на стац. в-р. Скоростта на сходимост зависи от втората по големина собствена стойност - тя е по-малка от 1. Ако I е крайно, то 1 винаги е собств. ст-т.

5 Времена на достигане

5.1 Дефиниции и основни свойства

$H^A = \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}$

Лема:

$P_\lambda(H^A < \infty) = \sum_{j=0}^{\infty} P_\lambda(X_0 \notin A, X_1 \notin A, \ldots, X_{j-1} \notin A, X_j \in A)$

5.2 Пример с баскетболист

Търсим $P_0(H^{\{N\}} < \infty)$ за произв. N.
Взимаме $U_0 = 0$, $U_1 = \min\{n > U_0 : X_n = 0\}$, $\ldots$, $U_{k+1} = \min\{n > U_k : X_n = 0\}$. Тогава $\{H^{\{N\}} = \infty\} = \bigcap_{k=0}^{\infty}\{U_{k+1} - U_k \leq N\}$. Когато смятаме вероятността на това събитие, то се разбива на произв. на геометрични, защото $U_{k+1} - U_k$ са i.i.d. $\mathrm{Ge}(q)$ за всяко k, а $q = 1 - p$ е вероятността баскетболиста да не уцели.

5.3 Леми за времена на достигане

Лема 1:

Ако $i \notin A$, то за всяко $m \geq 1$ и $j \in I$:
$P_i(H^A = m, X_1 = j) = p_{ij} \cdot P_j(H^A = m - 1)$

Лема 2:

Ако $i \notin A$, то за всяко $j \in I$:
$P_i(H^A < \infty, X_1 = j) = p_{ij} \cdot P_j(H^A < \infty)$

Доказателство:

Тъй като $i \notin A$, преиндексираме и изкарваме $+1$ отпред. Разбиваме на условна вероятност и прилагаме просто Марковско свойство. За безкрайното, сумираме по m.

5.4 Означения и теореми

Означения:

$h_i^A = P_i(H^A < \infty) \in [0, 1], \quad k_i^A = E_i[H^A] \in [0, \infty]$

Теорема за h^A:

Нека $h^A = (h_i^A)_{i \in I}$. Тогава h^A е минималното решение на системата:

$$h_i^A = 1 \quad \text{за } i \in A,$$
$$h_i^A = \sum_{j \in I} p_{ij} h_j^A \quad \text{иначе}$$

Забележка:

$h^A = P^A h^A$, където в P^A редовете с индекс $i \in A$ са заменени с δ_i.

Доказателство:

$h_i^A = \sum_{j \in I} P_i(H^A < \infty, X_1 = j)$ и прилагаме горната лема - доказваме че е решение. За минималност, взимаме v - друго решение на системата. Развиваме v_i по втората релация и разбиваме на $X_1 \in A$ и $X_1 \notin A$. Повтаряме l пъти и махаме положителния остатък с неравенство: $v_i \geq \sum_{n=1}^{l} P_i(H^A = n)$. При $l \to \infty$ получаваме $v_i \geq h_i^A$.

5.5 Диференчни уравнения

$pf(i+1) - f(i) + qf(i-1) = 0$, $f(0) = 1$ - хомогенно диференчно уравнение.
Решаваме характеристичния полином $px^2 - x + q = 0$: $x_1 = 1$, $x_2 = q/p$.
Ако корените са различни: $f(i) = Ax_1^i + Bx_2^i$.
Ако корените са равни: $f(i) = Ax_1^i + Bix_1^i$.

За нехомогенни уравнения:

1. Решаваме хомогенното
2. Търсим конкретен корен на нехомогенното (пробваме C, Ci, Ci^2, ...)
3. Намираме константата C
4. Общо решение: конкретно решение нехомогенно + общо решение хомогенно

Начални условия и граници определят константите $A, B, C, ...$ в зависимост от p, q.

Полезна формула:

За неотрицателни сл. вел., $E[X] = \sum_{m \geq 1} P(X \geq m)$

Теорема за k^A:

Нека $k^A = (k_i^A)_{i \in I}$. Тогава k^A е минималното решение на системата:

$$
\begin{aligned}
k_i^A &= 0 \quad \text{за } i \in A, \\
k_i^A &= 1 + \sum_{j \in I} p_{ij} k_j^A \quad \text{иначе}
\end{aligned}
$$

Забележки:

Сумата може да е по I или по A^c без значение тъй като $k_j^A = 0$ за елементи от A. Минималното решение може да е ∞.

Доказателство:

$k_i^A = E_i[H^A] = \sum_{m \geq 1} P_i(H^A \geq m)$
Разбиваме по X_1, прилагаме условна вероятност, преиндексираме, Марковско свойство. Отделяме $m = 1$ (дава 1), останалото става търсена сума. Доказателство за минималност е аналогично на това за h_i^A.

6 Комуникация и свързаност

6.1 Дефиниции

Дефиниция:

$i \to j$, ако $P_i(H^{\{j\}} < \infty) = P_i\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{X_n = j\}\right) > 0$

Теорема:

$i \to j \Leftrightarrow p_{ij}^{(n)} > 0$ за някое n. Също така $\leftrightarrow$ е релация на еквивалентност.
$\Rightarrow$) Допускане на противното.
$\Leftarrow$) От дефиниция на $i \to j$.
За релация на еквивалентност: рефлексивност и симетричност са тривиални. Транзитивност се доказва чрез Чапман-Колмогоров.

6.2 Класове на комуникация

Дефиниция:

$\leftrightarrow$ разделя I на класове на еквивалентност $C_i = \{j \in I : i \leftrightarrow j\}$ - класове на комуникация.
Класът C е **затворен** по дефиниция ако $i \in C$, $i \to j \Rightarrow j \in C$.

Дефиниция:

МВ е **неразложима** ако съществува само един (затворен) клас на комуникация.

7 Просто Марковско Свойство

7.1 Дефиниции

Условна независимост

Нека $P(C) > 0$. Казваме, че събитията A и B са условно независими при условие C, ако:

$$P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$$

Просто Марковско Свойство

Нека $X = (X_n)_{n\geq 0}$ е Марковска верига, $i \in I$, $P(X_m = i) > 0$. Тогава, при условие че $\{X_m = i\}$:

1. $Y = (Y_n)_{n\geq 0} := (X_{n+m})_{n\geq 0}$ е (δ_i, P) Марковска верига
2. Y е независима от $(X_0, \dots, X_m)$

7.2 Доказателство

Доказателство за 1.

Взимаме произволна траектория в бъдещето:

$$A = \{X_m = i, X_{m+1} = i_1, \dots, X_{m+N} = i_N\}$$

$P(A)$ представяме като сумираме по всички състояния преди m и заместваме от теоремата за характеризация:

$$P(A) = \sum_{j_0,\dots,j_{m-1}} P(X_0 = j_0, \dots, X_{m-1} = j_{m-1}, X_m = i, \dots, X_{m+N} = i_N)$$

Изкарваме нещата след m от сумата:

$$= p_{i,i_1} \cdots p_{i_{N-1},i_N} \sum_{j_0,\dots,j_{m-1}} P(X_0 = j_0, \dots, X_{m-1} = j_{m-1})$$

Сумата става $P(X_m = i)$ и делим двете страни на $P(X_m = i)$:

$$P(A|X_m = i) = p_{i,i_1} \cdots p_{i_{N-1},i_N}$$

Което показва, че Y има същото вероятностно разпределение като X, но започващо от δ_i.

Доказателство за 2.

Взимаме произволна траектория в миналото:

$$B = \{X_0 = j_0, X_1 = j_1, \dots, X_m = j_m\}$$

Търсим да докажем, че:

$$P(A \cap B | X_m = i) = P(A | X_m = i) P(B | X_m = i)$$

При $j_m \neq i$ е тривиално. Нека $j_m = i$. Първо забелязваме, че $B \cap \{X_m = i\} = B$. Тогава:

$$\begin{aligned} P(A \cap B | \{X_m = i\}) &= \frac{P(A \cap B \cap \{X_m = i\})}{P(X_m = i)} \\ &= \frac{P(A | B \cap \{X_m = i\}) P(B \cap \{X_m = i\})}{P(X_m = i)} \\ &= P(A | \{X_m = i\}) P(B | \{X_m = i\}) \end{aligned}$$

Което завършва доказателството.

8 Изчезване на разклоняващ се процес - бонус материал

8.1 Основни дефиниции и свойства

Означаваме с $h_\lambda = P_\lambda(H^{\{0\}} < \infty)$ - вероятността за изчезване на епидемията.
Нека $p_{1j} = P(\xi = j) =: q_j$ е вероятността един да зарази j.

8.2 Уравнение за вероятността на изчезване

Ако $X_0 = i$, може да допуснем, че имаме i на брой независими Марковски вериги с един начален болен. За изчезване на всички болни, трябва всички i вериги да достигнат 0, т.е. $h_i = h_1^i$.

Тогава от системата, h_1 удовлетворява:

$$h_1 = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1j} h_j = \sum_{j=0}^{\infty} p_{1j} h_1^j = \sum_{j=0}^{\infty} q_j h_1^j = \mathbb{E}[h_1^\xi] = f_\xi(h_1)$$

Което е пораждащата функция на ξ.

8.3 Метод за решаване

1. В примерна задача е дадено разпределението на ξ
2. Намираме f_ξ по дефиниция
3. Решаваме уравнението $h_1 = f_\xi(h_1)$
4. Намираме h_1, което е единственото минимално решение

8.4 Стохастично начало

За стохастично начало, например $X_0 \sim \lambda_p$ (вместо фиксирано i както досега), изчисляваме:

$$h_{\lambda_p} = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_0 = j) h_j$$

9 Силно Марковско Свойство

9.1 Дефиниции

Дефиниция за случайно време

Случайно време е случайна величина $T : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Дефиниция за Марковски момент

T е **Марковски момент**, ако $\{T = n\} \in \sigma(X_0, \dots, X_n)$ за всяко n

Дефиниция за консистентно събитие

$B \subseteq \Omega$ е **консистентно** спрямо Марковски момент T, ако
$B \cap \{T = n\} \in \sigma(X_0, X_1, \dots, X_n)$ за всяко n

9.2 Силно Марковско Свойство (СМС)

За всяка Марковска верига, за всеки Марковски момент T, всяко $i \in I$, всяко $\{T < \infty, X_T = i\}$ с $P > 0$ е изпълнено:

1. $(X_{n+T})_{n\geq 0}$ и $(X_0, \dots, X_T)$ са условно независими спрямо $\{T < \infty, X_T = i\}$
2. При условие $\{T < \infty, X_T = i\}$, $(X_{n+T})_{n\geq 0}$ е (δ_i, P) Марковска верига

Еквивалентна формулировка

Условия 1 и 2 са еквивалентни на: За всяко B консистентно спрямо T, $n \geq 1$ и траектория:

$P_\lambda(X_{T+1} = j_1, \dots, X_{T+n} = j_n, B | T < \infty, X_T = i) = P_i(X_1 = j_1, \dots, X_n = j_n) P_\lambda(B | T < \infty, X_T = i)$

9.3 Доказателство (бонус)

Идеята е да докажем горното равенство, от което следват условия 1 и 2.

Тъй като B представлява миналото на веригата, равенството ни казва, че за всяка траектория в бъдещето $X_{T+1}, \dots, X_{T+n}$, тя е независима от миналото B. Тъй като B е произволно, то равенството е вярно и за $B = \Omega$, тоест не се интересуваме какво е миналото, включваме всички траектории до момента X_T. Идеята на това B е да работим само със консистентни множества, вместо да разписваме всички траектории до момента T по характеризацията. Те се включват в В, защото то е произволно. Това ще улесни доказателството.

Нека вземем произволен Марковски момент T, $i \in I$, $\{T < \infty, X_T = i\}$ с положителна вероятност, $n \geq 1$, B - консистентно спрямо T.

Нека $C = \{X_T = i, X_{T+1} = l_1, \dots, X_{T+n} = l_n\}$ е произволна траектория. Тогава $P_\lambda(B, T < \infty, C)$ представлява цялата траектория от началото до бъдещето, ще го сведем до горното равенство:

$$
\begin{aligned}
P_\lambda(B, T < \infty, C) &= \sum_{m=0}^{\infty} P_\lambda(B, T = m, X_m = i, X_{m+1} = l_1, \dots, X_{m+n} = l_n) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} P_\lambda(B, T = m, X_m = i) P_\lambda(X_{m+1} = l_1, \dots, X_{m+n} = l_n | B, T = m, X_m = i) \\
&= P_i(X_1 = l_1, \dots, X_n = l_n) P_\lambda(B, T < \infty, X_T = i)
\end{aligned}
$$

Разделяйки двете страни на $P_\lambda(T < \infty, X_T = i)$, получаваме търсеното равенство.

9.4 Приложения

Означения

$$
\begin{aligned}
T_1^i &:= \min\{n > H^i : X_n = i\}, \\
&\vdots \\
T_{k+1}^i &:= \min\{n > T_k^i : X_n = i\}, \\
U_1 &:= T_1^i - H^i, \\
&\vdots \\
U_{k+1} &:= T_{k+1}^i - T_k^i
\end{aligned}
$$

Ако $P_j(H^i < \infty) = 1$ за произволно j(вкл. и i), то от СМС:

- $P_i(U_1 < \infty) = 1$

- U_k са i.i.d.
- $P_j(T^i_{k+1} < \infty) = P_j\left(H^i + \sum_{l=1}^{k+1} U_l < \infty\right) = P_j(H^i < \infty) P_i(U_1 < \infty)^{k+1} = 1$

Брой завръщания като мярка за важност

Нека X е неразложима Марковска верига, $P(X_0 = j) = 1$, $P_j(H^i < \infty) = 1$.

Дефинираме мярка за важност:

$$v_i = \lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N} \in [0, 1]$$

където N_i е брой посещения на i до момента N.

Имаме:

$$T^i_{N_i} > N \geq T^i_{N_i - 1}$$
$$\lim_{N \to \infty} \frac{T^i_{N_i}}{N_i} = \lim_{N \to \infty} \frac{H^i + \sum_{m=1}^{N_i} U_m}{N_i} \overset{\text{п.с.}}{=} E_i[U_1]$$

От $N \to \infty \Rightarrow N_i \to \infty$ и теоремата за полицаите получаваме:

$$\frac{N}{N_i} \to E_i[U_1] \quad \Rightarrow \quad v_i = \frac{1}{E_i[U_1]}$$

Бонус:

За положително възвратни неразложими Марковски вериги:

- $\sum_{i \in I} v_i = 1$
- $v_i = \pi_i$ (стационарно разпределение)

10 Възвратност и преходност на МВ

10.1 Означения

- $\{A_n \text{ б.ч.}\} = \bigcap_{n>0} \bigcup_{k \geq n} A_k = \{\sum_{k=0}^{\infty} 1_{A_k} = \infty\}$
- $A_i := \{X_n = i \text{ б.ч.}\}$
- $V_i := \min\{m \geq 1 : T^i_m = \infty\} \in [1, \infty]$

10.2 Лема

За МВ е вярно че:

1. $P_i(T_m < \infty) = P_i(T_1 < \infty)^m \quad (1)$
2. $V_i \sim \text{Ge}(P_i(T_1 = \infty)) \quad (2)$
3. $P_i(V_i = \infty) \in \{0, 1\}$, като $P_i(V_i = \infty) = 0 \Leftrightarrow P_i(T_1 < \infty) < 1 \quad (3)$

Доказателство:

(1): $P_i(T_m < \infty) = P_i(T_{m-1} < \infty; \min\{n > T_{m-1} : X_n = i\} < \infty)$ - разбиваме на условна и прилагаме СМС.
Тогава се получава $P_i(T_m < \infty) = P_i(T_1 < \infty)P_i(T_{m-1} < \infty)$ и после рекурсивно.

(2): $P_i(V_i > m) = P_i(T_m < \infty) = P_i(T_1 < \infty)^m$ - това е дефиницията на $\text{Ge}(P_i(T_1 = \infty))$

(3): $P_i(V_i = \infty) = \lim_{m\to\infty} P_i(V_i > m) = \lim_{m\to\infty} P_i(T_1 < \infty)^m$.
От тази граница виждаме че за $m \to \infty$, ако $P_i(T_1 < \infty) = 1$, то $P_i(V_i = \infty) = 1$. Ако $P_i(T_1 < \infty) < 1$, то $P_i(V_i = \infty) = 0$.

10.3 Забележки

- $P_i(V_i = m) = P_i\left(\sum_{k=0}^{\infty} 1_{\{X_k = i\}} = m\right)$
- $P_i(V_i = \infty) = P_i(A_i)$
- Следователно $P_i(A_i) \in \{0, 1\}$

10.4 Дефиниции

- $i \in I$ е **възвратно** $\Leftrightarrow P_i(A_i) = 1 \Leftrightarrow P_i(T_1 < \infty) = 1$
- $i \in I$ е **преходно** $\Leftrightarrow P_i(A_i) = 0 \Leftrightarrow P_i(T_1 < \infty) < 1$

10.5 Теорема за критерии за възвратност

$i \in I$ е възвратно $\Leftrightarrow E_i[V_i] = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = i) = \infty$

Доказателство на първото $\Leftrightarrow$:

$\Rightarrow$) $i \in I$ е възвратно $\Rightarrow P_i(V_i = \infty) = 1 \Rightarrow E_i[V_i] = \infty$

$\Leftarrow$) Допускаме противното - i е преходно, т.е. $P_i(V_i = \infty) = 0$
Но $V_i \sim \text{Ge}(P_i(T_1 = \infty))$, тоест $E_i[V_i] = \frac{1}{p} = \frac{1}{P_i(T_1 = \infty)}$
Но $P_i(V_i = \infty) = 0$ и от лема (3) $P_i(T_1 < \infty) < 1$, т.е. $P_i(T_1 = \infty) > 0$.
Тогава $E_i[V_i] = \frac{1}{P_i(T_1 = \infty)} < \infty$. Противоречие.

Доказателство на второто $\Leftrightarrow$:

$E_i[V_i] = E_i\left[\sum_{k=0}^{\infty} 1_{\{X_k=i\}}\right] = \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)}$

10.6 Теорема за класове на комуникация

В един клас на комуникация C всички състояния са или възвратни, или преходни. (не е нужно МВ да е крайна)

Доказателво:

Нека $i \in C$ е преходно. Нека $j \in C$ е друго състояние (ако в класа има само i, то тв. е тривиално). Тогава $i \leftrightarrow j$, или $p_{ij}^{(l_1)} p_{ji}^{(l_2)} > 0$. i е преходно, т.е. $\sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)}$ е крайна. Чрез преиндексиране и използване на теоремата на Чапман-Колмогоров показваме че
$\sum_{k=0}^{\infty} p_{jj}^{(k)} \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_{ii}^{(k)} < \infty$.
Това от горната теорема значи че j е преходно. Но j беше произволно от C. Тоест всички състояния в C са преходни.
Доказахме че ако има 1 преходно, всички са преходни. Следователно за да съществува поне едно възвратно в C, ще трябва всички да са възвратни, иначе от току що доказаното ако има преходно, всички са преходни.

10.7 Забележка

Свойствата възвратност и преходност не зависят от началното състояние. Те са свойства само при започване от даденото състояние. Възможно е едно състояние i да е възвратно обаче никога да не бъде посетено от една траектория, например защото тази траектория ще си е почнала в някакъв затворен клас на комуникация, а пък i да не принадлежи в този клас.

Домашна работа

Да се докаже че модела на Еренфест е възвратна МВ чрез $\sum_{k=0}^{\infty} p_{00}^{(k)}$

10.8 Теорема за връзка между възвратност и затвореност

1. Възвратен КК $\Rightarrow$ Затворен КК (1)
2. Краен и затворен КК $\Rightarrow$ Възвратен КК (2)

Доказателство (1):

Допускаме противното, т.е. имаме следното инфо:
$P_i\left(\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=i\}}\right) = \infty\right) = 1$, $P_i(H^j < \infty) > 0$, $P_j(H^i < \infty) = 0$
Тогава $0 < P_i(H^j < \infty) = P_i\left(H^j < \infty; \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=i\}}\right) = \infty\right)$. Второто може

да го добавим, защото има вероятност 1. Тогава преиндексираме сумата да започва от $n = H^j$ нататък. Това може да го направим, защото във горната вероятност имаме $H^j < \infty$. Тъй като H^j е крайно, то сумирането, започващо от H^j нататък вместо от 0 също е безкрайно и вероятността не се променя. Тогава от СМС, това е нова верига, започваща от j и независима от $X_0, ..., X_{H^j}$. Тоест, може да разбием сумата така:
$P_i\left(H^j < \infty; \left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=i\}}\right) = \infty\right) = P_i(H^j < \infty)P_j\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{Y_n=i\}}\right) = \infty) \leq$
$P_i(H^j < \infty)P_j(H^i < \infty) = 0$. Противоречие.

Доказателство (2):

Идеята е да вземем някое $i \in C$ от което да започва веригата и да докажем че произв. $j \in C$ е възвратно.
Ясно е, че $\infty = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n \in C\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j \in C} 1_{\{X_n=j\}}$. Тъй като C е крайно множество, то може да разменим сумите и получаваме, че
$P_i\left(\sum_{j \in C} \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}} = \infty\right) = 1.$
$|C| < \infty$ и следователно има такова j, което прави сумата безкрайна, или
$P_i\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}} = \infty\right) = 1$. Вижда се, че
$P_i\left(H^j < \infty \mid \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}} = \infty\right) = 1$, тоест
$P_i\left(H^j < \infty \cap \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}} = \infty\right) = 1.$
Чрез подобно преиндексиране и СМС като отгоре, получаваме
$P_i(H^j < \infty)P_j\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}} = \infty\right) = 1.$
Тъй като и двата члена са в интервала $[0; 1]$, то щом произведението им е 1, то и поотделно са $= 1$.
Тоест $P_j\left(\sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{X_n=j\}} = \infty\right) = 1$, или $P_j(X_n = j \text{ б.ч.}) = 1$, което по дефиниция значи, че j възвратно.

10.9 Теорема за неразложима и възвратна МВ

Неразложима и възвратна МВ $\Rightarrow P_\lambda(T_1^j < \infty) = 1$

Доказателство:

$P_\lambda(T_1^j < \infty) = \sum_{i \in I} \lambda_i P_i(T_1^j < \infty)$. Идеята е да докажем, че $P_i(T_1^j < \infty) = 1$, откъдето сумираме само по λ_i, което е 1.
$P_i(T_1^j < \infty) = P_i(H^j < \infty)P_j(T_1^j < \infty)$ от СМС. Но МВ е възвратна, тоест $P_j(T_1^j < \infty) = 1$. Трябва да докажем $P_i(H^j < \infty) = 1$. Първо трябва да докажем, че $P_i(H^j < T_1^i) > 0$, защото иначе няма да можем да представим H^j като момент между T_{m-1}^i и T_m^i за някое m, което ще ни потрябва след малко в доказателството. Нека засега допуснем, че сме доказали $P_i(H^j < T_1^i) > 0$.
Нека $U = \min\{m \geq 1 : H^j \in (T_{m-1}^i, T_m^i)\}$. Чрез усл. вероятност, СМС и рекурсия виждаме, че $P_i(U > k) = (1 - P_i(H^j < T_1^i))^k$. Това в скобите е < 1 и за голямо k, вероятността клони към 0, тоест $P_i(U < \infty) = 1$. Това ще каже че винаги има такова m, такова че $H^j < T_m^i$, започвайки от i. Също така, i е възвратно и има безкрайно много завръщания. От тези двете неща,

виждаме че $P_i(H^j < \infty) = 1$. Това търсихме да докажем. Но защо $P_i(H^j < T_1^i) > 0$? От възвратност на i и от неразложимост ($P_i(H^j < \infty) > 0$), следва че вероятността H^j да е между T_{m-1}^i и T_m^i за някое m е ненулева, тъй като има безкрайно много такива моменти T_m^i. Взимаме най-малкото такова m. Но ако разгледаме МВ, започваща от момента T_{m-1}^i, то от СМС следва, че вероятността H^j да е преди T_1^i е ненулева, тоест $P_i(H^j < T_1^i) > 0$, което е търсеното.

11 Възвратност или преходност на случайно блуждаене - бонус материал

11.1 1D случайно блуждаене

Искаме да проверим дали $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \infty$. Може и $p_{00}^{(2n)}$, защото сме в 0 само за четен бр. стъпки. $p_{00}^{(2n)} = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

Приближението на Стирлинг казва че $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ при $n \to \infty$.

След заместване горе и съкратяване получаваме че $p_{00}^{(2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$.

Сумата не схожда, защото порядъка е $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Следователно 0 е възвратно.

11.2 2D случайно блуждаене

Искаме да проверим дали:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{(0,0)}(S_n = (0,0)) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{(0,0)}(S_{2n} = (0,0)) = \infty$$

Може със Стирлинг и комбинаторика, подобно на това горе. Може и с ротации, както ще обясним сега.

Ако $X_j = (V_j, W_j)$, то $S_n = \left(\sum_{j=1}^{n} V_j, \sum_{j=1}^{n} W_j\right) = (S_n^{(1)}, S_n^{(2)})$.

Търсим дали $\sum_{n=0}^{\infty} P_{(0,0)}(S_{2n}^{(1)} = 0, S_{2n}^{(2)} = 0) = \infty$. Не може да разбием сумата,
тъй като $S_{2n}^{(1)}$ и $S_{2n}^{(2)}$ не са независими.

Нека дефинираме ротация:

$$\begin{aligned}
X_j = (1,0) &\Leftrightarrow Y_j = (1,1) \\
X_j = (0,1) &\Leftrightarrow Y_j = (-1,1) \\
X_j = (-1,0) &\Leftrightarrow Y_j = (-1,-1) \\
X_j = (0,-1) &\Leftrightarrow Y_j = (1,-1)
\end{aligned}$$

Нека $Y_j = (U_j, H_j)$. Проверяваме, че U_j и H_j са независими по дефиниция на независимост.

Ако $S_{2n} = (0,0)$, то:

$$\sum_{j=1}^{2n} V_j = 0 \ \wedge \ \sum_{j=1}^{2n} W_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{2n} U_j = 0 \ \wedge \ \sum_{j=1}^{2n} H_j = 0$$

Тоест търсената сума се свежда от суми на V и W до суми на U и H. Тъй като U и H са независими, то
вероятността на сумите по U и H се разбива на произведение на вероятности:

$$P\left(\sum_{j=1}^{2n} U_j = 0, \sum_{j=1}^{2n} H_j = 0\right) = P\left(\sum_{j=1}^{2n} U_j = 0\right) \cdot P\left(\sum_{j=1}^{2n} H_j = 0\right)$$

Всяка от тези двете е все едно отделна независима случайна разходка в 1D. От 1D случая, знаем че
порядъка на 1D случая е $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Тук се умножават и порядъка е $\frac{1}{n}$, което отново не схожда.

Следователно и в 2D случая 0 е възвратно.

12 Стационарно разпределение и стационарна мярка

12.1 Дефиниции

Стационарно разпределение/мярка

λ е стационарно разпределение (мярка), ако $\lambda = \lambda P$. Стационарното разпределение обикновено се означава с π.

12.2 Теореми

Теорема за инвариантност

Ако λ е стационарен вектор, то $P_\lambda(X_n = i) = \lambda_i$, $\forall i \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Доказателство:

Знаем, че $(P_\lambda(X_n = i))_{i \in I} = \lambda P^n$. Но λ е стационарен вектор и $\lambda P^n = \lambda$. Тогава $(P_\lambda(X_n = i))_{i \in I} = \lambda$.

Теорема за гранично поведение

1. Нека имаме МВ с $|I| < \infty$ и вземем някое $i \in I$. Ако $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \to \pi_j$ за всяко $j \in I$, то π е стационарен вектор.

2. Нека имаме МВ с $|I| = \infty$ и вземем някое $i \in I$. Ако $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \to \pi_j$ за всяко $j \in I$ и π се сумира до 1, то π е стационарен вектор.

Наблюдение:

С времето няма значение от кое състояние сме започнали, границата клони към π_j, което не зависи от i.

Доказателво (1):

Имаме $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k\in I} p_{ik}^{(n-1)} p_{kj}$ от уравнението на Чапман-Колмогоров. Взимаме границата от двете страни.
Границата може да влезе в сумата, защото сумата е крайна. Накрая получаваме $\pi_j = \sum_{k\in I} \pi_k p_{kj}$. Това от дясно
е j-тата колонка на πP, тоест $\pi = \pi P$ и π е стационарен вектор.

12.3 Означения и теореми за γ_i^k

Означения:

$\gamma_i^k := E_k \left[\sum_{n=0}^{T_1^k - 1} 1_{\{X_n = i\}}\right]$, $\gamma^k := (\gamma_i^k)_{i\in I}$

Наблюдения:

- При $i \neq k$ може сумата да се преиндексира от $n = 1$ до T_1^k
- Ако k е възвратно (или $T_1^k < \infty$), то може и при $i = k$
- Полезен формат: $\gamma_i^k = \sum_{n=1}^{\infty} P_k(X_n = i; n \leq T_1^k)$
- $\sum_{i\in I} \gamma_i^k = E_k[T_1^k] =: m_k$ - по дефиниция на γ_i^k и разменяне на суми

12.4 Основна теорема

За X - възвратна и неразложима МВ имаме:

1. $\gamma_k^k = 1$
2. $\gamma^k = \gamma^k P$ - стационарна мярка
3. $\gamma_i^k > 0$ и $\gamma_i^k < \infty$ за всяко $i \in I$
4. Ако λ е стационарна мярка и $\lambda_k = 1$, то $\lambda = \gamma^k$

4.1 Ако МВ е само неразложима, то ако λ е стационарна мярка и $\lambda_k = 1$, то $\lambda \geq \gamma^k$ и може γ^k да не е стационарна мярка

Доказателство:

(1) Очевидно

(2) γ_i^k го написваме като сума от $n = 1$ до ∞ от $P_k(X_n = i; n \leq T_1^k)$. Разбиваме го по всички X_{n-1},
взимаме условна вероятност, прилагаме СМС, пренареждаме сума и получаваме $\gamma_i^k = \sum_{j \in I} p_{ji} \gamma_j^k$. Готово.

(3)
- За $\gamma_i^k > 0$: От неразложимост $p_{ki}^{(l_1)} > 0$ за някое l_1. От $\gamma^k = \gamma^k P^{l_1}$ имаме
$\gamma_i^k = \sum_j p_{ji}^{(l_1)} \gamma_j^k \geq p_{ki}^{(l_1)} \gamma_k^k = p_{ki}^{(l_1)} > 0$
- За $\gamma_i^k < \infty$: От неразложимост $p_{ik}^{(l_2)} > 0$ за някое l_2. От $\gamma^k = \gamma^k P^{l_2}$ и $\gamma_k^k = 1$ имаме
$1 = \gamma_k^k = \sum_j p_{jk}^{(l_2)} \gamma_j^k \geq p_{ik}^{(l_2)} \gamma_i^k$. Делим двете страни на $p_{ik}^{(l_2)}$ и получаваме $\gamma_i^k \leq 1/p_{ik}^{(l_2)} < \infty$

(4.1) Нека МВ е само неразложима. Нека λ е стационарна мярка и $\lambda_k = 1$. Тогава $1 = \lambda_k \geq \gamma_k^k = 1$. Нека $i \neq k$.
Тогава $\lambda_i = \sum_{j \in I} \lambda_j p_{ji} = \lambda_k p_{ki} + \sum_{j \neq k} \lambda_j p_{ji} = P_k(X_1 = i, T_1^k \geq 1) + \sum_{j \neq k} \lambda_j p_{ji}$
От сумата по подобен начин вадим $P_k(X_2 = i; T_1^k \geq 2)$ и продължаваме рекурсивно. Ако продължим m пъти и изрежем остатъчната сума получаваме неравенството $\lambda_i \geq P_k(X_1 = i; T_1^k \geq 1) + P_k(X_2 = i; T_1^k \geq 2) + \cdots + P_k(X_m = i; T_1^k \geq m)$. Но m е произволно, тоест
можем да пуснем границата и накрая получаваме $\lambda_i \geq P_k(X_1 = i; T_1^k \geq 1) + P_k(X_2 = i; T_1^k \geq 2) + \cdots = \gamma_i^k$. Готово.

(4) Нека МВ е възвратна и неразложима. Тогава γ^k е стационарна мярка. Нека λ е друга такава с $\lambda_k = 1$. Ще видим че $\lambda = \gamma^k$.
Разглеждаме $\mu = \lambda - \gamma^k \geq 0$. μ е стационарна мярка, защото $\mu = \lambda - \gamma^k = \lambda P - \gamma^k P = (\lambda - \gamma^k) P = \mu P$. Допускаме, че съществува $i \in I : \mu_i > 0$.
Знаем че $\mu_k = 0$, защото $\lambda_k = \gamma_k^k = 1$. От неразложимост съществува $l : p_{ik}^{(l)} > 0$. $0 = \mu_k = \sum_{j \in I} \mu_j p_{jk}^{(l)} \geq \mu_i p_{ik}^{(l)} > 0$. Противоречие.
Това значи, че $\lambda = \gamma^k$.

12.5 Предположения и следствия

Предположение:

От тази теорема изглежда все едно веригата има доста стационарни мерки, но всъщност те са една и съща с точност до умножение по скалар - за различни k се умножава по конкретно число, което прави $\gamma_k^k = 1$.

Наблюдение:

Ако λ е стационарна мярка, то $c\lambda$ отново е стационарна мярка, защото $c\lambda = c(\lambda P) = (c\lambda)P$ - мярките винаги са безкрайно много.

Следствие:

- Всяка неразложима и възвратна МВ има стационарна мярка - именно γ^k
- Всяка неразложима и крайна МВ има стационарен вектор - γ^k/m_k тъй като m_k е крайна сума, т.е. е $< \infty$

Забележка:

Ако МВ има стационарна мярка γ^k и $m_k < \infty$, то тя има и стационарен вектор.

12.6 Дефиниции за възвратност

Дефиниция:

Възвратно състояние $k \in I$ се нарича:

- **положително възвратно**, ако $m_k < \infty$
- **нулево възвратно**, ако $m_k = \infty$

12.7 Теорема за положителна възвратност

Нека X е неразложима МВ. Тогава следните са еквивалентни:

1. всяко състояние е положително възвратно
2. поне едно състояние е положително възвратно
3. МВ има стационарен вектор

Забележка:

Ако X е неразложима положително възвратна МВ, то $(\pi_i)_{i \in I}$ се задават чрез $\pi_i = 1/m_i \in (0; \infty)$ и този стационарен вектор е единствен.

Доказателво:

- (1) $\Rightarrow$ (2) - тривиално
- (2) $\Rightarrow$ (3):
  Нека k е положително възвратно - $m_k < \infty$. Щом k е възвратно, то цялата МВ е възвратна. Тогава γ^k е стационарна мярка и $\pi = \gamma^k/m_k$ е стационарен вектор.

- (3) $\Rightarrow$ (1):
  Идеята е следната: Понеже π се сумира до едно, то има такова j, за което $\pi_j > 0$. От неразложимост и $\pi_j > 0$ намираме, че $\pi_i > 0\ \forall i \in I$.
  $\lambda = \pi/\pi_k$ е стационарна мярка с $\lambda_k = 1$. Но щом λ е стационарна мярка, то от горната теорема $\lambda \geq \gamma^k$. От това $\sum \lambda_j \geq \sum \gamma_j^k$.
  Но $\sum \lambda_j = \sum \pi_j/\pi_k = 1/\pi_k < \infty$, тоест $\sum \gamma_j^k = m_k < \infty$. Това ни казва че очакваното време за завръщане в k от k е крайно.
  Това значи че k реално е възвратно по дефиниция - винаги ще се върнем, очакването е крайно. Тоест k е възвратно. Но $m_k < \infty$.
  Тогава k е положително възвратно. Но ние избрахме k произволно, тоест всяко състояние е положително възвратно.

Забележка:

От тази теорема, щом МВ има стационарен вектор, то тя е положително възвратна. Но от предишната теорема става ясно че $\lambda = \gamma^k = \pi/\pi_k$. Тогава щом $\sum \lambda_i = \sum \pi_i/\pi_k = 1/\pi_k$, то $m_k = \sum \gamma_i^k = \sum \lambda_i = 1/\pi_k$ или $m_k = 1/\pi_k$. - Тоест за една неразложима и положително възвратна МВ имаме, че $m_k = 1/\pi_k$. - За една неразложима и положително възвратна МВ имаме, че $\gamma^k/m_k = \pi$, тоест $\gamma_i^k/m_k = \pi_i$ за всяко i, и като заменим $\pi_i = 1/m_i$, то излиза $\gamma_i^k = m_k/m_i$.

Забележка:

Тук се говори същото като мярката за важност, която я говорихме преди. Там $v_i = 1/E_i[U_1]$, което реално е същото като $\pi_i = 1/m_i$.

13 Сходимост към стационарност и апериодичност

13.1 Основна теорема за сходимост

Нека X е неразложима и стационарна (съществува стационарен вектор) МВ. Тогава $\forall i, j \in I$:

1. $P_j\left(\lim_{N\to\infty} \frac{V_i(N)}{N} = \pi_i\right) = 1$, където $V_i(N)$ е броя посещения на i до момента N.
2. $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} P_j(X_n = i) = \pi_i$ - разбирам го като средната вероятност да сме в i клони към π_i
3. Същото като (1) но стартирано от произволно λ вместо фиксирано j - Логично, тъй като с времето има все по-малко значение откъде почваме.

Доказателство:

(1) Разглеждали сме, че $v_i = \lim_{N\to\infty} \frac{\#\text{ посещения на } i \text{ до момента } N}{N} = \pi_i$. С други думи $P_i(v_i = \pi_i) = 1$.
Трябва да видим, че $P_j(v_i = \pi_i) = 1$. Щом съществува стационарен вектор, значи веригата е положително възвратна по теорема от миналата лекция.
Тогава $P_j(H^i < \infty) = 1$, и тогава:

$$
\begin{aligned}
P_j(v_i = \pi_i) &= P_j(v_i = \pi_i; H^i < \infty) \\
&= P_j\left(\lim_{N\to\infty} \frac{\#\text{ посещения на } i \text{ от момента } H^i \text{ до момента } N}{N} = \pi_i \mid H^i < \infty\right) \\
&= P_i\left(\lim_{N\to\infty} \frac{\#\text{ посещения на } i \text{ от момента } H^i \text{ до момента } N - H^i}{N} = \pi_i\right)
\end{aligned}
$$

което следва от СМС - взимаме Y_n която започва от X_{H^i}.
И после излиза от факта, че $P_i(v_i = \pi_i) = 1$, което го знаем.

(2) От (1) имаме че $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} 1_{\{X_n = i\}} = \pi_i$ независимо откъде тръгваме.
Тогава:

$$
\begin{aligned}
\pi_i = E_j[\pi_i] &= E_j\left[\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} 1_{\{X_n=i\}}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} E_j[1_{\{X_n=i\}}] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N} P_j(X_n = i)
\end{aligned}
$$

Очакването и границата може да се разменят само когато това в границата е ограничено отгоре от някоя константа.
От това твърдение става ясно, че π_i може да се намери като сходимост по Чезаро от $p_{ji}^{(n)}$.

(3) Няма да доказваме.

13.2 Следствие (ергодичност)

$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} f(X_k) = E_\pi[f(X_1)] = \sum_{i\in I} \pi_i f(i)$

За Бонус-Малус искаме дългосрочния среден коефициент да е 1. $E_\pi[f(X_1)]$ може да се сметне като число. Ние моделирайки коефициентите един вид избираме функцията f, и след като сме избрали трябва да проверим стойността на $E_\pi[f(X_1)]$, която от това следствие ни казва дългосрочния среден коефициент.

13.3 Размишления за сходимост

От доказателството на (2) от теоремата горе виждаме че чрез сходимост по Чезаро (сходимост по средно аритметично) може да намерим стационарен вектор. Обаче чрез нормалната сходимост това невинаги е възможно, защото границата може да не съществува. А нормалната сходимост е по-лесна за изчисление, например когато диагонализираме матрицата или когато умножаваме $P, P^2, P^4, P^8, ...$ това (май) е нормалната сходимост. Интересуваме се точно кога тази нормална сходимост може да бъде използвана за намиране на стационарен вектор.

13.4 Дефиниции за апериодичност

Дефиниция 1:

Състояние $i \in I$ е **апериодично** ако за някое n_i, $p_{ii}^{(n)} > 0$ за всяко $n \geq n_i$.

Дефиниция 2 (еквивалентна):

Състояние $i \in I$ е **апериодично** ако НОД$\{n \geq 1 : p_{ii}^{(n)} > 0\} = 1$.

Следствие:

Ако $p_{ii} > 0$, то i е апериодично.

13.5 Теорема за апериодичност

Нека X е неразложима МВ и $i \in I$ е апериодично. Тогава за всеки две състояния от веригата и за достатъчно голямо n_0 е вярно че има път с точно n стъпки от едното до другото състояния за всяко $n \geq n_0$. Двете състояния може да съвпадат, което ги прави и апериодични. Но те са произволни, тоест всяко състояние е апериодично.

Доказателво:

От неразложимост има път $j_1 \to i$ и $i \to j_2$. Нека $p_{j_1 i}^{(l_1)} > 0$ и $p_{i j_2}^{(l_2)} > 0$. Също знаем, че i е апериодично, тоест има l_3, за което всяко $l > l_3$: $p_{ii}^{(l)} > 0$. Тогава е ясно че за всяко $l \geq l_1 + l_2 + l_3$ има път $j_1 \to j_2$ за l стъпки - за всяка нова стъпка правим допълнителен преход $i \to i$ в средата. Формално се прави с теоремата на Чапман-Колмогоров.

13.6 Теорема за сходимост при апериодичност

За X неразложима, апериодична и стационарна МВ е вярно че $\lim_{n\to\infty} P_\lambda(X_n = i) = \pi_i$.

Размишление:

Тоест горното размишление е вярно само за апериодични МВ. Само за апериодичните МВ можем да намерим стационарен вектор чрез нормална сходимост, за периодичните не е възможно с нормална сходимост, там вече можем да използваме сходимост по Чезаро.

Доказателство (идея):

Нека Y е същата като X, но започваща от π вместо λ. И двете X и Y са неразложими и стационарни МВ, тоест има момент T, в който $X_T = Y_T = b \in I$ и този момент е краен с вероятност 1. Тези факти трябва да се съобразят по-формално ама за това да се видят записките. Взимаме нова МВ Z, която я дефинираме като $Z_n = X_n$ за $n \leq T$ и $Z_n = Y_n$ за $n > T$. Първо, $Z_n = X_n$ по разпределение за всяко n по-малко от T по дефиниция. Тъй като Z е дефинирано като Y_n за n по-голямо от T, то трябва да докажем че $X_n = Y_n$ по разпределение за $n > T$. Не знам на лекции защо толкова много е писано, обаче на мен ми се струва очевидно по СМС - все пак в момента T, X и Y съвпадат, а след това имат еднакви матрици на прехода и следователно и вероятностите им са същите. Тоест $Z_n = Y_n = X_n$ по разпределение за $n \geq T$. Тоест $Z_n = X_n$ по разпределение за всяко n. За да видим, че X_n схожда към стационарния вектор, то гледаме грешката $|P_\lambda(X_n = i) - \pi_i|$. Ще видим че за големи n схожда към 0. $|P_\lambda(X_n = i) - \pi_i| = |P(Z_n = i) - P(Y_n = i)|$, тъй като $X_n = Z_n$ по разпределение, а Y е в стационарност още от началото. Разбиваме по случаи спрямо $n < T$ или $n \geq T$, джуркаме там нещо, и накрая излиза, че грешката $\leq 2P(T > n)$, което пък схожда до 0.

13.7 Следствие за крайни апериодични МВ

Нека X е апериодична, неразложима и крайна МВ. Тогава съществуват $N \geq 1$, $\epsilon > 0$, $q := 1 - \epsilon|I| \geq 0$ такива че:

$$\sum_{i \in I} |\pi_i - p_{ji}^{(n)}| \leq 2q^r, \quad \text{където } n = rN + l$$

В допълнение е вярно и за всяко индивидуално i, j вместо цялата сума.

Доказателво:

Дефинираме $N = \min\{n \geq N : p_{j_1 j_2}^{(n)} > 0 \ \forall j_1, j_2 \in I\}$. $N < \infty$, защото веригата е апериодична. Дефинираме $\epsilon = \min_{j_1, j_2 \in I} p_{j_1 j_2}^{(N)} > 0$. Всеки елемент на матрицата $P^N = Q$ може да се запише като $q_{ij} = \epsilon + \tilde{q}_{ij}$, $\tilde{q}_{ij} \geq 0$. Тогава за произволно i: $q := \sum_{j=1}^{k} \tilde{q}_{ij} < 1 = \sum_{j=1}^{k} q_{ij}$. Също така $q \geq 0$, защото $q_{ij} \geq \epsilon$ за всяко j. Тоест $0 \leq q < 1$.

Сега ще видим, че $||\mu Q - \nu Q|| \leq q||\mu - \nu||$ за всеки две разпределения μ и ν. $||\mu Q - \nu Q|| = \sum_{i=1}^{k} |(\mu Q)_i - (\nu Q)_i|$. Но $(\mu Q)_i = \sum_{j=1}^{k} \mu_j(\epsilon + \tilde{q}_{ij})$. $(\nu Q)_i$ - аналогично. Тогава заменяме тези представяния в $|(\mu Q)_i - (\nu Q)_i|$. Групираме нещата с ϵ заедно и нещата без ϵ заедно. Вкарваме модула в сумата чрез неравенството на триъгълника. Неравенството се запазва като махнем нещата с ϵ, тъй като те са в модул, тоест са положителни. Накрая получаваме $q||\mu - \nu||$, тоест $||\mu Q - \nu Q|| \leq q||\mu - \nu||$.

Сега това твърдение ще използваме за разпределенията π и δ_j - те съответстват на търсената в условието разлика.
Тогава за $n \geq N$:

$$\begin{aligned}||\pi P^n - \delta_j P^n|| &= ||\pi P^{kN+l} - \delta_j P^{kN+l}|| \\ &= ||\pi P^l Q^k - \delta_j P^l Q^k|| \\ &\leq q^k ||\pi P^l - \delta_j P^l|| \\ &\leq q^k(||\pi P^l|| + ||\delta_j P^l||) \\ &\leq q^k(1+1) = 2q^k\end{aligned}$$

$||\pi P^l|| = ||\delta_j P^l|| = 1$, защото всяко от тях си е просто едно разпределение (за $X_l = i$).

Доказахме, че $||\pi P^n - \delta_j P^n|| \leq 2q^k$. Но $||\pi P^n - \delta_j P^n||$ е точно $\sum_{i\in I} |\pi_i - p_{ji}^{(n)}|$ по дефиницията на мярката.

14 Обратимост на Марковски вериги

Интересуваме се кога за $X \sim Markov(\lambda, P)$ е вярно, че за всяко $M \geq 1$: $(X_{M-n})_{0\leq n\leq M} \sim Markov(\lambda, P)$.

14.1 Теорема за обратимост

Нека X е неразложима МВ със стационарен вектор π и матрица P. Ако $X_0 \sim \pi$, то $(X_{M-n})_{0\leq n\leq M}$ са първите M стъпки на неразложима МВ със стационарен вектор π и матрица $\hat{P}$, където $\hat{p}_{ij} = p_{ji}\frac{\pi_j}{\pi_i}$.

Доказателство:

1. Проверяваме че $\hat{P}$ е матрица на прехода:

$$\sum_j \hat{p}_{ij} = \sum_j p_{ji}\frac{\pi_j}{\pi_i} = \frac{1}{\pi_i}\sum_j \pi_j p_{ji} = \frac{\pi_i}{\pi_i} = 1$$

2. Проверяваме вероятностите за траектория на $Y_n = X_{M-n}$:

$$\begin{aligned}P(Y_0 = i_0, \ldots, Y_M = i_M) &= P(X_M = i_0, \ldots, X_0 = i_M) \\ &= \pi_{i_M} p_{i_M i_{M-1}} \cdots p_{i_1 i_0} \\ &= \hat{p}_{i_{M-1} i_M} \pi_{i_{M-1}} p_{i_{M-1} i_{M-2}} \cdots p_{i_1 i_0} \\ &= \cdots = \pi_{i_0} \hat{p}_{i_{M-1} i_M} \cdots \hat{p}_{i_0 i_1}\end{aligned}$$

Тоест $Y \sim \text{Markov}(\hat{P}, \pi)$ по теоремата за характеризация.

3. Проверяваме стационарност на π за Y:
$$(\pi\hat{P})_i = \sum_j \pi_j \hat{p}_{ji} = \sum_j \pi_j p_{ij} \frac{\pi_i}{\pi_j} = \pi_i \sum_j p_{ij} = \pi_i$$

4. Проверяваме неразложимост на Y: С индукция по n доказваме $\hat{p}_{ji}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} \frac{\pi_i}{\pi_j}$. От неразложимост на X, $\exists n$ с $p_{ij}^{(n)} > 0$, следователно $\hat{p}_{ji}^{(n)} > 0$.

14.2 Дефиниция за обратимост

$X \sim \text{Markov}(\lambda, P)$ е **обратима** при започване от λ, ако:
$$\forall M \geq 1 \ \forall i_0, \dots, i_M \in I$$
$$P_\lambda(X_0 = i_0, \dots, X_M = i_M) = P_\lambda(X_M = i_0, \dots, X_0 = i_M)$$
или еквивалентно, $(X_{M-n})_{n \leq M}$ има същото разпределение като първите M стъпки на X.

14.3 Теорема (Условие на баланс)

Една неразложима $X \sim \text{Markov}(\lambda, P)$ е обратима $\Leftrightarrow \forall i, j \in I \ \lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}$ $\Rightarrow \lambda$ е стационарен вектор.

Забележки:

1. За обратими МВ $\hat{P} = P$ (следва от УБ и първата теорема)
2. УБ не означава $P = P^T$, но ако $P = P^T$ и π е равномерно, то веригата е обратима
3. Всяка обратима МВ има стационарен вектор

Доказателво:

$\Leftarrow$) За произволна траектория:
$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, \dots, X_M = i_M) &= \lambda_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{M-1} i_M} \\ &= p_{i_1 i_0} \lambda_{i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{M-1} i_M} \quad \text{(по УБ)} \\ &= \cdots = \lambda_{i_M} p_{i_M i_{M-1}} \cdots p_{i_1 i_0} \\ &= P(X_M = i_0, \dots, X_0 = i_M) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$) За $M = 1$:
$$P(X_0 = i, X_1 = j) = P(X_1 = i, X_0 = j) \Rightarrow \lambda_i p_{ij} = \lambda_j p_{ji}$$

Доказваме λ е стационарен:
$$(\lambda P)_i = \sum_j \lambda_j p_{ji} = \sum_j \lambda_i p_{ij} = \lambda_i \sum_j p_{ij} = \lambda_i$$

15 Бонус материал за бонус малус

15.1 Означения

$\langle x, y\rangle$ - скаларно произв.

15.2 Свойства

За всяка матрица е вярно, че $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^t y\rangle$. В частност, ако A е симетрична, тоест $A = A^t$, то $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$.

По-общо, не е нужно P да е симетрична, но поне трябва да е изпълнено условието за баланс за да е вярно, че $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$.

Горното твърдение важи и за претеглено скаларно произведение, тоест за всяко разпределение λ и за P удовлетворяващо условието на баланса, то имаме че $\langle Px, y\rangle_\lambda = \langle x, Py\rangle_\lambda$, където $\langle x, y\rangle_\lambda := \sum_i x_i y_i \lambda_i$. Доказва се по дефиниция на претеглено средно и условие на баланс.

15.3 Приложение за Марковски вериги

Нека $x := (f(1), \dots, f(N))$ е вектор, съпоставящ на всяко състояние число.

$Px = \left(\sum_{j=1}^N p_{ij} x_j\right)_i = \left(\sum p_{ij} f(j)\right)_i = \left(E_i[f(X_1)]\right)_i$.

Аналогично $P^n x = \left(E_i[f(X_n)]\right)_i$.

15.4 Спектрални свойства

Сега следват някакви неща от линейна алгебра, които не знам как се доказват:

За неразложима, обратима, апериодична МВ е вярно, че:

- $\mu_1 = 1$ е собствена стойност, която е най-голямата по модул (и единствена с кратност 1)
- Всички други собствени стойности са $|\mu_j| < 1$ за $j \geq 2$
- Матрицата P за такива вериги има ортонормиран базис $(v_i)_{1\leq i\leq N}$

Ортонормиран ще рече, че $\langle v_i, v_j\rangle_\lambda = \delta_{ij}$. Тъй като (v_i) е базис, то всеки вектор x може да се представи като $x = \sum_{j=1}^N c_j v_j$, където $c_j = \langle x, v_j\rangle_\lambda$. Не знам защо c_j е това.

15.5 Развитие на процеса

Това x го заместваме в $P^n x$ и се получава:

$$P^n x = \sum_{j=1}^N \langle x, v_j\rangle_\lambda P^n v_j$$

Обаче v_j е собствен вектор със собствена стойност μ_j, тоест $P^n v_j = \mu_j^n v_j$. От сумата изкраваме члена за $j = 1$, а другото остава. Този член е $\langle x, v_1 \rangle_\lambda v_1$.

Обаче v_1 е точно собственият вектор на $\mu_1 = 1$, тоест $Pv_1 = v_1$. Това е изпълнено при $v_1 = (1)_{1 \leq i \leq N}$, защото P е стохастична матрица.

С други думи:

$$\langle x, v_1 \rangle_\lambda v_1 = \langle x, (1) \rangle_\lambda (1)$$

Останалата част на сумата е $O(|\mu_2|^n)$, защото $|\mu_2| \geq |\mu_j|$ за $j \geq 2$.

Но $\langle x, (1) \rangle_\lambda (1) = E_\lambda[f(X_1)]$ чрез малко преработка. Но $P^n x = (E_i[f(X_n)])_i$ или $P^n x$ е вектор от средният бонус малус коефициент в година n спрямо началното състояние i.

15.6 Интерпретация за бонус малус

Би трябвало за големи n всички стойности в този вектор да клонят към 1 за да е честен бонус малус коефициента. Когато го заместим в равенството получаваме, че:

$$|E_i[f(X_n)] - E_\lambda[f(X_1)]| = O(|\mu_2|^n)$$

тоест веригата клони към стационарност експоненциално спрямо μ_2.

Когато веригата не е обратима (в случая на бонус малус), то равенството е:

$$|E_i[f(X_n)] - E_\lambda[f(X_1)]| = O(n^{k_2 - 1}|\mu_2|^n)$$

където k_2 е кратността на μ_2 като собствена стойност.

За бонус малус ще трябва да сметнем $E_\lambda[f(X_1)]$, както и k_2 и μ_2, с компютър. Искаме да намерим за колко години средният бонус малус се отклонява от 1 с някаква (фиксирана) грешка.