SID: 810100240

HW#7

سیمین اسکندر

$L = \{ w \# t \# w^R \mid w, t \in \{0,1\}^* \ \& \ |w| = |t| \}$ (a

Devil chose P

we chose $S \in L$, $S = w \# t \# w^R$ $\rightarrow$ $S = 0^P \# 1^P \# 0^P$

فرض: $w = 0^P$ & $t = 1^P$

$\rightarrow S = uvwxy \rightarrow$ $|vwx| \leq P$, $|vx| \geq 1$

★ ← کلا جا های نمی تواند یکی از بخش های اول "0^P"، وسط "1^P"، و یا آخر "0^P" باشد. پس با نزدیک کردن به P متوجه می شویم که در بخش اول یا آخر را زیاد کنیم تعداد 0 ها در بخش اول تغییر می کنه. پس اگر i (رقم فرض برابر تعداد) را 1 نباشه، s' مقداری نابرابر برای w و t تولید می کند و شرط $|w| = |t|$ نقض می شود. به طور مشابه برای بخش های دیگر نیز این اتفاق می افته.

پس: این زبان مستقل از متن نیست.

$L = \{ w \mid w \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}^*, \sum_{i=1}^{n} w[i] \text{ is a prime number} \}$ (b

Devil chose P

We say $S \in L$ & $S = 2^P \Rightarrow \sum w[i] = 2.P \rightarrow$ اگر P درست باشه و درست انتخاب شده عددی اول است

$\rightarrow |vwx| \leq P^*$, $|vx| \geq 1$ $\rightarrow S : uvwxy$ $\quad * \Rightarrow$ تنها شامل تعداد 2

پس s' شامل تعداد $2p+k$ برای تعدادی اعداد است وقتی که $K = 0$ نباشه $\Rightarrow$ مجموع جدید $2k+p$ ها ممکن است دیگر اعداد اول نباشه $\stackrel{*}{\Rightarrow} S' \Rightarrow \sum w[i] = 2p+k \Rightarrow$

$\Leftarrow L$ مستقل از متن نیست.

$L = \{w \mid w = \overset{a\star}{t_1} \# \overset{b}{t_2} \# \ldots \# \overset{a}{t_k}$ for $k \geq 0$, each $t_i \in \{a,b\}^*$ & $t_i = t_j$ somewhere $i \,!= j\}$ Devil picks P ①

② $\star \Rightarrow S \in L$ & $S = \underbrace{a^p}_{t_1} \# \underbrace{b^p}_{t_2} \# \underbrace{a^p}_{t_3} \Rightarrow t_1 = t_3$

③ $|vwx| \leq p^{\star\star}$ & $|vx| \geq 1$

$\star\star$ => کاملاً بین یکی از زیر مجموعه های a^p, b^p, a^p است.

=> اگر در اولین a^p باشد: $t_1 \neq t_3 \Leftarrow |t_1|$

=> اگر بین b^p باشد: اندازه‌ی t_2 تغییر می‌کند اما تأثیری روی $t_1 = t_3$ ندارد.

=> اگر بین آخرین a^p باشد: $t_1 \neq t_3 \Leftarrow |t_3|$

=> برای همه‌ی حالت‌ها داریم: $uv^iwx^iy \notin L$ for $i \neq 1$

=> این زبان مستقل از متن نیست.

$\Sigma = \{0,1\}$

?PDA : ✓ ← Context-free (2

?p lemma: X ←

a) زبانی که در یک سوم میانی آن حداقل دو عدد یک وجود داشته باشد.

0 | n | 2n | 3n

1/3

① ② ③

=> $|w| = n$ -> middle third[i : j]

=> $i = \frac{n}{3}$ & $j = \frac{2n}{3}$

Devil picks p → $s \in L$ & $s = uv^iwx^iy = 0^p 1 0^p 1 0^p$

اگر p را برای x و v زیاد کنیم :

① => اگر 0 ها زیاد شود ورودی تعداد 1 ها تاثیری ندارد پس کا احتمالا هیچ 1 در بخش وسط ندارد یا تعداد آن کمتر می شود. X

② => اگر vwx شامل یکی از 1 ها باشد، افزایش v و x ممکن است موجب افزایش 0 ها شود و احتمال بخش وسط شامل تعداد کمتر از 2 تا 1 نیز نتواند بشود که حداقل را رعایت کرده است ✓

① => L مستقل از متن نیست.

---

b) زبانی که در یک دوم آخر آن حداقل یک عدد 1 وجود داشته باشد.

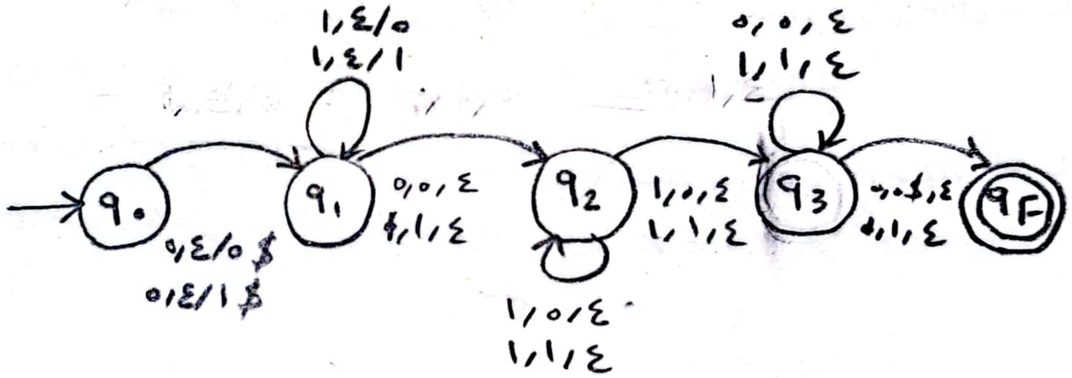
11

$\frac{|w|}{2}$

=> ex) w = 00|11   ex) w = 000|011

0
00
001
0011

=>



0
00
000
0001
00011

S → 0S0/0S1/1P0/1P1

P → 0P0/0P1/1P0/1P1/ε

3) a) $L = \{a^m b^n c^k \mid m,n,k \geq 0 ; m \,!= n \;\; or \;\; n \,!= k\}$

← اگر $m=n$ باشد PDA می‌تواند با push کردن aها در استک و pop کردن bها $m \neq n \Rightarrow$ ✗ $m=n=k$ ✗ نمی‌تواند هر سه را بررسی کند و به طور مشابه PDA فقط می‌تواند با push کردن bها و pop کردن cها $n=k$ را بررسی کند. $n \neq k$

← PDA نمی‌تواند به طور همزمان $n = k$ را مورد بررسی قرار دهد. پس از توانایی‌ها و قابلیت‌های استک بررسی هر سه متغیر خارج است ⟸ L مستقل از متن نمی‌باشد.

---

b) برای بررسی این زبان احتیاج به بررسی تعداد aها و bها داریم تا بدانیم $m \neq n$ است، پس با استفاده از DPDA می‌توانیم مستقل از متن بودن این زبان را نشان دهیم ⟸ برای هر a که خوانده می‌شد یک واحد به استک Push می‌شد و به ازای هر b یک واحد از استک pop می‌شد، بعد از بررسی تمامی aها و bها $L = \{a^n b^m \mid m \,!= n\}$

← اگر بعد از بررسی تمامی bها خالی نبود ⟸ $m<n$ ✓ accept

← اگر استک خالی بود، همچنان چندین b شمرده نشده بود ⟸ $m>n$ ✓ accept

← اگر استک خالی بود و هیچ b باقی نمانده بود ⟸ $m=n$ ✗ reject

$$\left.\begin{array}{l}(a_1 a_2 \dots a_k) \in A \\ (b_1, b_2, \dots b_k) \in B\end{array}\right\} \quad (a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k) \in O,$$

$$\Sigma^* = \{a_i, b_i\}$$

$$\Rightarrow O(A,B) = \{a_1 b_1 a_2 b_2 \dots a_k b_k \mid a_1 a_2 \dots a_k \in A,\ b_1 b_2 \dots b_k \in B\}$$

CFLs { Union, Concat., Kleen star, Subsit., Homomo. } ↓ بسته نیست!

$$s = a^p c^p b^p d^p$$

$$\text{if} \begin{cases} A = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \\ B = \{c^n d^m \mid n \geq 0\} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L_1 = \{a^n c^n b^n d^n \mid n \geq 0\}$$ → ساختار aها و cها مورد بررسی است

$$L_2 = \{a^n b^n c^n d^n \mid n \geq 0\}$$ → ساختار bها و dها مورد بررسی است.

→ هیچ کدام قابل اجرا در PDA نیستند

pumping lemma $\Leftarrow s = a^p c^p b^p d^p$

$|vx| \geq 1$ & $|vwx| \leq p \leftarrow s = u v^i w x^i y$

⇐ برای $i \geq 0$ اگر $i = 2$ باشد ساختار، aها و cها هم شکسته می شود یا برای bها و dها این اتفاق می افتد ⇐ نتیجه غیر قابل قبول می شود

سؤال 5)

$L = \{a^{n} b^{2n} c^{n} \mid n > 0\}$

$L_1 = \{a^n b^n \mid n > 0\}$

$L_2 = \{b^n c^n \mid n > 0\}$

$\longrightarrow L_1 \cdot L_2 = \{a^n b^n b^n c^n \mid n > 0\}^{*} = \{a^n b^{2n} c^n \mid n > 0\}^{**}$

می‌دانیم زبان‌های مستقل از متن، and شان نیز مستقل از متن است.

← اما چرا شایان اشتباه کرده؟ در * b^n کامل مستقل است پس نمی‌تواند b^{2n} درست باشد، اثبات:

$S \in L \quad s = a^p b^{2p} c^p$

$\rightarrow |vwx| \leq p$

$|vx| \geq 1$

$\Rightarrow u v^i w x^i y \in L \quad i \geq 0$

⇐ اگر a^p تغییر کند بدون تاثیرگذاری در مقدار bها یا cها تغییر می‌کند ⇐ $|a| \neq |c|$ reject

⇐ اگر b تغییر کند $|b| = 2|a|$ دیگر برقرار نیست.

⇐ اگر c تغییر کند دوباره $|a| \neq |c|$ می‌شود.

← این سه مستقل از متن نیست!

سؤال 6)

$A \cup B = \{w \mid w = u_1 v_1 u_2 v_2 \dots u_k v_k,\ u_1 u_2 \dots u_k \in A,\ v_1 v_2 \dots v_k \in B\}$

if $A = \{ab\}$, $B = \{cd\}$ $\Rightarrow A \cup B = \{abcd, acbd, acdb, cabd, cadb, cdab\}$

⇐ مشابه راه حل سؤال 5 اثبات می‌شود که DFCL نیست.