数值线代の题库一

by 23 大数据 miracle

1. 写出改进平方根法的算法, 并分析其复杂度.

2. 写出计算列主元的三角分解的算法, 并分析其复杂度.

3. 求 Gauss 变换 $L_{19} = I - l_1 e_1^{\mathrm{T}} + l_9 e_9^{\mathrm{T}}$ 的逆.

4. 设 $S, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为两个上三角阵, 且线性方程组 $(ST - \lambda I)x = b$ 是非奇异的. 给出一种算法（要求运算量为 $O(n^2)$）来求解此方程组.

5. 证明: 若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 有三角分解且非奇异, 则 L 和 U 是唯一的.

6. 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的定义如下:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} i = j \text{ 或} j = n \\ -1, & \text{如果} i > j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

   证明: A 有满足 $|l_{ij}| \le 1$ 和 $u_{nn} = 2^{n-1}$ 的三角分解.

7. 设 A 对称且 $a_{11} \neq 0$, 并假定经过一步 Gauss 消去后, A 具有如下形状:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

   证明: A_2 仍是对称阵.

8. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是严格对角占优, 即 A 满足

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|, \quad k = 1, \ldots, n$$

   又设经过一次 Gauss 消去后, A 具有如下形状:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

   证明: 矩阵 A_2 仍是严格对角占优阵.

9. 设 A 为正定阵. 若对 A 执行 Gauss 消去法一步后产生一个形为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

的矩阵. 证明: A_2 仍是正定阵.

10. 证明: 如果 $A^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为严格对角占优阵. 那么 A 有三角分解 $A = LU$ 且 $|l_{ij}| < 1$.

11. 形如 $N(y,k) = I - ye_k^{\mathrm{T}}$ 的矩阵称为 Gauss-Jordan 变换, 其中 $y \in \mathbb{R}^n$.

    (1) 假定 $N(y,k)$ 非奇异, 求其逆.

    (2) 向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足何种条件才能保证存在 $y \in \mathbb{R}^n$, 使得 $N(y,k)x = e_k$?

    (3) 给出一种利用 Gauss-Jordan 变换求 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的算法, 并说明 A 满足何种条件才能保证算法进行到底.

12. 证明: 如果 A 是一个带宽为 $2m+1$ 的对称正定带状矩阵. 则其 Cholesky 因子 L 也是带状矩阵. L 的带宽是多少?

13. 若 $A = LL^{\mathrm{T}}$ 是 A 的 Cholesky 分解. 证明: L 的 i 阶顺序主子阵 L_i 正好是 A 的 i 阶顺序主子阵 A_i 的 Cholesky 因子.

14. 证明: 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称的, 且其前 $n-1$ 个顺序主子阵均非奇异. 则 A 有唯一的分解式 $A = LDL^{\mathrm{T}}$. 其中 L 是单位下三角阵, D 是对角阵.

15. 设 $H = A + iB$ 是一个正定 Hermite 矩阵. 其中 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

    (1) 证明: 矩阵

    $$C = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

    是正定对称的.

    (2) 给出一种仅用实数运算的算法来求解线性方程组

    $$(A+iB)(x+iy) = (b+ic), \quad x, y, b, c \in \mathbb{R}^n$$

16. 证明: 有限维空间的任意范数都等价.

17. 证明: 在 $\mathbb{R}^n$ 上, 当且仅当 A 是正定阵时函数 $f(x) = (x^{\mathrm{T}}Ax)^{\frac{1}{2}}$ 是一个向量范数.

18. 若 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的一个向量范数. 证明: 若对于 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(A) = n$, 则 $\|x\|_A \triangleq \|Ax\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个向量范数.

19. 设 $\|\cdot\|$ 是由向量范数 $\|\cdot\|$ 诱导出的矩阵范数. 证明: 若 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 非奇异, 则

$$\|A^{-1}\|^{-1} = \min_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

20. 设 $A = LU$ 是 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的 LU 分解. 其中 $|l_{ij}| \le 1$. 又 a_i^{T} 和 u_i^{T} 分别表示 A 和 U 的第 i 行. 证明

$$u_i^{\mathrm{T}} = a_i^{\mathrm{T}} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^{\mathrm{T}}$$

且 $\|U\|_\infty \le 2^{n-1}\|A\|_\infty$.

21. A 和 $A+E$ 都非奇异. 证明:

$$\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\| \le \|E\|\|A^{-1}\|\|(A+E)^{-1}\|$$

22. $\mathfrak{F} = \mathcal{F}(\beta, t, L, U)$ 为一个浮点数集合. $m = \beta^{L-1}, M = \beta^U(1-\beta^{-t})$. 设 $m \le |x| \le M$. 证明:

$$\mathrm{fl}(x) = \frac{x}{1+\delta}, \quad |\delta| \le u$$

其中

$$u = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\beta^{1-t}, & \text{用舍入法} \\ \beta^{1-t}, & \text{用截断法} \end{cases}$$

为机器精度.

23. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 存在 Jordan 分解

$$X^{-1}AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \delta_1 & & & \\ & \lambda_2 & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & \delta_{n-1} \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 非奇异, $\delta_i = 1$ 或 0. $\forall \varepsilon > 0$, 令

$$D_\varepsilon = \mathrm{diag}(1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{n-1})$$

证明: (1) $\|x\|_{XD_\varepsilon} \triangleq \|(XD_\varepsilon)^{-1}x\|_\infty$, $x \in \mathbb{C}^n$ 为一个向量范数.

(2) $\forall G \in \mathbb{C}^{n\times n}, \|G\|_\varepsilon \triangleq \|D_\varepsilon^{-1}X^{-1}GXD_\varepsilon\|_\infty$ 为 $\|\cdot\|_{XD_\varepsilon}$ 诱导出的算子范数.

24. 若 $\|A\| < 1$, 且 $\|I\| = 1$. 证明:

$$\|(I-A)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|A\|}$$

25. 证明: 对任意的矩阵范数都有 $\kappa(A) \ge 1$.

26. 设 A 为带状矩阵, 带宽为 $2m+1$, 其中 $m = 3$. 若用列主元 Gauss 消去法计算得到的 $\widetilde{L}$ 和 $\widetilde{U}$ 满足

$$\widetilde{L}\widetilde{U} = P(A+E)$$

其中 P 是排列方阵. 试估计 $\|E\|_\infty$ 的大小.