

数值线代の题库三

by 23 大数据 miracle

1. 证明 Gershgorin 圆盘定理: 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A = (a_{ij})$, 令

$$G_i(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|\}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, n$, 则有

$$\lambda(A) \subset G_1(A) \cup G_2(A) \cup \dots \cup G_n(A)$$

2. 设 A 是 $n \times m$ 矩阵, B 是 $m \times n$ 矩阵, 且 $m \geq n$. 证明:

$$\lambda(BA) = \lambda(AB) \cup \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{m-n \text{ 个}}$$

3. 设 $A = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha \neq \beta$, 求 A 的特征值 α 和 β 的条件数.

4. 证明特征值和特征向量的条件数在酉相似条件下保持不变.

5. 在幂法中, 取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $u_0 = (0, 0, 1)^T$. 得到一个精确到 5 位有效数字的特征向量需要多少次迭代?

6. 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 有实特征值并满足 $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{n-1} > \lambda_n$. 现应用幂法于矩阵 $A - \mu I$. 试证: 选择 $\mu = \frac{1}{2}(\lambda_2 + \lambda_n)$ 时, 所产生的向量序列收敛到属于 λ_1 的特征向量的速度最快.

7. 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$, $X = [x, Ax, \dots, A^{n-1}x]$. 证明: 如果 X 是非奇异的, 则 $X^{-1}AX$ 是上 Hessenberg 矩阵.

8. 设 H 是一个不可约的上 Hessenberg 矩阵. 证明: 存在一个对角阵 D , 使得 $D^{-1}HD$ 的次对角元均为 1, 此时 $\kappa_2(D) = \|D\|_2 \|D^{-1}\|_2$ 是多少?

9. 设 H 是一个奇异不可约上 Hessenberg 矩阵. 证明: 进行一次基本的 QR 迭代后, H 的零特征值将出现.