数值线代の题库二

by 23 大数据 miracle

1. 证明:$x \in \mathcal{X}_{\mathrm{LS}}$ 当且仅当
$$A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$$

2. 证明 QR 分解定理, 即设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \geq n)$, 则 A 有 QR 分解:
$$A = Q\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$
其中 $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ 是正交矩阵, $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是具有非负对角元的上三角阵；而且当 $m = n$ 且 A 非奇异时, 上述分解是唯一的.

3. 假设 x 和 y 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个单位向量. 给出一种使用 Givens 变换的算法, 计算一个正交矩阵 Q, 使得 $Qx = y$.

4. 设 x 和 y 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个非零向量. 给出一种算法来确定一个 Householder 变换 H, 使得 $Hx = \alpha y$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, 且存在 $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ 使得对于每一个 $b \in \mathbb{R}^m$, $x = Xb$ 均极小化 $\|Ax - b\|_2$. 证明:$AXA = A$ 和 $(AX)^{\mathrm{T}} = AX$.

6. 利用等式
$$\|A(x + \alpha w) - b\|_2^2 = \|Ax - b\|_2^2 + 2\alpha w^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}(Ax - b) + \alpha^2\|Aw\|_2^2$$
证明: 如果 $x \in \mathcal{X}_{\mathrm{LS}}$, 那么 $A^{\mathrm{T}}Ax = A^{\mathrm{T}}b$.

7. 若迭代矩阵 M 的范数 $\|M\| = q < 1$, 则迭代法 $x_k = Mx_{k-1} + g$ 所产生的近似解 x_k 与准确解 x_* 的误差有如下估计式:
$$\|x_k - x_*\| \leq \frac{q^k}{1-q}\|x_1 - x_0\|, \quad \|x_k - x_*\| \leq \frac{q}{1-q}\|x_{k-1} - x_k\|$$

8. 若线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 对称, 而且其对角元 $a_{ii} > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$, 则 Jacobi 迭代法收敛的充分必要条件是 A 和 $2D - A$ 都正定.

9. 若矩阵 A 是严格对角占优的或不可约对角占优的, 则 A 非奇异且则 Jacobi 迭代法和 G-S 迭代法都收敛.

10. 设 $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足 $\rho(B) = 0$. 证明对于任意的 $g, x_0 \in \mathbb{R}^n$, 迭代格式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + g$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ 最多迭代 n 次就可以得到方程组 $x = Bx + g$ 的精确解.

11. 设 A 是具有正对角元素的非奇异对称矩阵. 证明: 若求解方程组 $Ax=b$ 的 G-S 迭代法对任意初始近似皆收敛, 则 A 必定是正定的.

12. 若存在对称正定矩阵 P, 使得

$$B = P - H^{\mathrm{T}}PH$$

为对称正定矩阵, 求证: 迭代法

$$x_{k+1} = Hx_k + b, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$

收敛.

13. 证明: 若系数矩阵 A 是严格对角占优的或不可约对角占优的, 且松驰因子 $\omega \in (0,1)$, 则 SOR 迭代法收敛.

14. 证明: 若 A 为具有正对角元的实对称矩阵, 则 JOR 方法收敛的充分必要条件是 A 与 $2\omega^{-1}D - A$ 均为正定对称矩阵. 其中, JOR 迭代为

$$x_{k+1} = x_k - \omega D^{-1}(Ax_k - b)$$

或者

$$x_{k+1} = (I - \omega D^{-1}A)x_k + \omega D^{-1}b$$

15. 设 x_k 由最速下降法产生, 证明:

$$\phi(x_k) \le \left[1 - \frac{1}{\kappa_2(A)}\right]\phi(x_{k-1})$$

其中 $\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$.

16. 证明: 当最速下降法在有限步求得极小值时, 最后一步迭代的下降方向必是 A 的一个特征向量.

17. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 对称正定, $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{R}^n$ 满足 $p_i^{\mathrm{T}}Ap_j = 0$, $i \ne j$. 证明 $p_1, \ldots, p_k$ 线性无关.

18. 设 A 是一个只有 k 个互不相同特征值的 $n \times n$ 实对称矩阵, r 是任一 n 维实向量. 证明: 子空间 $\mathrm{span}\{r, Ar, \ldots, A^{n-1}r\}$ 的维数至多是 k.

19. 证明: 如果系数矩阵 A 至多有 l 个互不相同的特征值, 则共轭梯度法至多 l 步就可得到方程组 $Ax=b$ 的精确解.

20. 证明: 用共轭梯度法求得的 x_k 有如下的误差估计:

$$\|x_k - x_*\|_2 \le 2\sqrt{\kappa_2}\left(\frac{\sqrt{\kappa_2}-1}{\sqrt{\kappa_2}+1}\right)^k \|x_0 - x_*\|_2$$

其中 $\kappa_2 = \kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$.

21. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是对称正定的, $\mathcal{X}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个 k 维子空间. 证明: $x_k \in \mathcal{X}$ 满足

$$\|x_k - A^{-1}b\|_A = \min_{x\in\mathcal{X}} \|x - A^{-1}b\|_A$$

的充分必要条件是

$$r_k = b - Ax_k$$

垂直于子空间 $\mathcal{X}$, 其中 $b \in \mathbb{R}^n$ 是任意给定的.