数值线代の题库一

by 23 大数据 miracle

1. 写出改进平方根法的算法, 并分析其复杂度.

Solution: 改进平方根法: 对对称正定阵进行改进平方根分解 $A = LDL^{\mathrm{T}}$, 其中 L 是对角线上都为 1 的下三角矩阵, D 是对角矩阵.

Algorithm 1: 用改进平方根法求 L 和 D, 使得 $A = LDL^{\mathrm{T}}$. 修改后的 A 对角线上元素构成 D, A 左下角非对角线元素是 L 左下角非对角线元素.

function: `[L,D]=ldltSolve(`A`)`
  for $j = 1 : n$ **do**
    for $i = 1 : j-1$ **do**
      $v(i) = A(j,i)A(i,i)$
    end
    $A(j,j) = A(j,j) - A(j, 1:j-1)v(1:j-1)$
    $A(j+1:n, j) = \left(A(j+1:n,j) - A(j+1:n, 1:j-1)v(1:j-1)\right)/A(j,j)$
  end
end

复杂度分析:

1. 对于每个固定的 j $(1 \le j \le n)$:
   - 计算 $v(i)$: 需要 $j-1$ 次乘法运算
   - 计算 $D(j,j)$: 需要 $2(j-1)$ 次运算
   - 计算 $L(i,j)$: 需要 $(n-j)[2(j-1)+1] = (n-j)(2j-1)$ 次运算
2. 因此对于每个 j, 运算次数为: $3(j-1) + (n-j)(2j-1)$
3. 对 j 从 1 到 n 求和, 总运算次数为:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} [3(j-1) + (n-j)(2j-1)] \\
&= -2\sum_{j=1}^{n} \left[j^2 + (4+2n)j - (n+3)\right] \\
&= -2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (4+2n)\cdot\frac{n(n+1)}{2} - n(n+3) \\
&= \frac{1}{3}n^3 + n^2 - \frac{4}{3}n
\end{aligned}$$

所以总运算次数为 $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$, 当 n 很大时, 时间复杂度为 $O(n^3)$.

2. 写出计算列主元的三角分解的算法, 并分析其复杂度.

Solution: 列主元的三角分解: 分解 $PA = LU$, 其中 P 是置换矩阵, L 是单位下三角矩阵, U 是上三角矩阵.

Algorithm 2: 用列主元三角分解求 L 和 U 以及 P, 使得 $PA = LU$. 修改后的 U 上三角部分（含对角线）储存 U, L 下三角部分（不含对角线）储存 L.

function: `[L,U,P]=lup(`A`)`
  $P = I_n$
  for $k = 1 : n-1$ **do**
    确定 $p \in \{k, k+1, \dots, n\}$, 使得
      $|A(p,k)| = \max\{|A(i,k)| : i = k, k+1, \dots, n\}$
    $A(k, 1:n) \leftrightarrow A(p, 1:n)$ （交换第 k 行和第 p 行）
    $P(k, 1:n) \leftrightarrow P(p, 1:n)$ （记录置换矩阵 P）
    if $A(k,k) \neq 0$ **then**
      $A(k+1:n, k) = A(k+1:n, k)/A(k,k)$
      $A(k+1:n, k+1:n) = A(k+1:n, k+1:n) - A(k+1:n, k)A(k, k+1:n)$
    else
      stop (矩阵奇异)
    end
  end
end

复杂度分析:

1. 对于每个固定的 k $(1 \leq k \leq n-1)$:
   - 计算乘数: 需要 $n-k$ 次运算
   - 更新矩阵: 需要 $2(n-k)^2$ 次运算
2. 因此对于每个 k, 运算次数为: $(n-k) + 2(n-k)^2$
3. 对 k 从 1 到 $n-1$ 求和, 总运算次数为:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1}[(n-k) + 2(n-k)^2] \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} m + 2\sum_{m=1}^{n-1} m^2 \quad (\text{令} m = n-k) \\
&= \frac{(n-1)n}{2} + 2 \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\
&= \frac{2}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{6}n
\end{aligned}$$

所以总运算次数为 $\frac{2}{3}n^3+O(n^2)$, 当 n 很大时, 时间复杂度为 $O(n^3)$.

3. 求 Gauss 变换 $L_{19}=I-l_1e_1^{\mathrm{T}}+l_9e_9^{\mathrm{T}}$ 的逆.

Solution: 注意到有分解

$$L_{19}=(I-l_1e_1^{\mathrm{T}})(I+l_9e_9^{\mathrm{T}})$$

又

$$\begin{aligned}(I-l_1e_1^{\mathrm{T}})^{-1}&=I+l_1e_1^{\mathrm{T}}\\(I+l_9e_9^{\mathrm{T}})^{-1}&=I-l_9e_9^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}L_{19}^{-1}&=\left((I-l_1e_1^{\mathrm{T}})(I+l_9e_9^{\mathrm{T}})\right)^{-1}\\&=(I+l_9e_9^{\mathrm{T}})^{-1}(I-l_1e_1^{\mathrm{T}})^{-1}\\&=(I-l_9e_9^{\mathrm{T}})(I+l_1e_1^{\mathrm{T}})\\&=I+l_1e_1^{\mathrm{T}}-l_9e_9^{\mathrm{T}}-l_{9,1}(l_9e_1^{\mathrm{T}})\end{aligned}$$

（$l_{9,1}$ 表示 l_1 的第 9 个元素）.

另解: 设 $L_{19}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 于是有

$$L_{19}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\-l_{2,1}&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-l_{9,1}&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\-l_{10,1}&0&\cdots&l_{10,9}&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-l_{n,1}&0&\cdots&l_{n,9}&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

做初等行变换, 即从

$$[L_{19}\mid I]=\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc}1&0&\cdots&0&0&\cdots&0&1&0&\cdots&0&0&\cdots&0\\-l_{2,1}&1&\cdots&0&0&\cdots&0&0&1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-l_{9,1}&0&\cdots&1&0&\cdots&0&0&0&\cdots&1&0&\cdots&0\\-l_{10,1}&0&\cdots&l_{10,9}&1&\cdots&0&0&0&\cdots&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-l_{n,1}&0&\cdots&l_{n,9}&0&\cdots&1&0&0&\cdots&0&0&\cdots&1\end{array}\right]$$

有

$$\left[\begin{array}{ccccccc|ccccccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & l_{9,1} & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & l_{10,9} & 1 & \cdots & 0 & l_{10,1} & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & l_{n,9} & 0 & \cdots & 1 & l_{n,1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]$$

即

$$L_{19}^{-1} = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l_{9,1} & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
l_{10,1} - l_{9,1}l_{10,9} & 0 & \cdots & -l_{10,9} & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
l_{n,1} - l_{9,1}l_{n,9} & 0 & \cdots & -l_{n,9} & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}$$

故 $L_{19}^{-1} = I + l_1 e_1^{\mathrm{T}} - l_9 e_9^{\mathrm{T}} - l_{9,1}(l_9 e_1^{\mathrm{T}})$.

4. 设 $S, T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为两个上三角阵, 且线性方程组 $(ST - \lambda I)x = b$ 是非奇异的. 给出一种算法（要求运算量为 $O(n^2)$）来求解此方程组.

Solution: 算法核心思路:

通过引入辅助向量 $y = Tx$, 将原方程 $(ST - \lambda I)x = b$ 转化为 $y = Tx$ 和 $Sy - \lambda x = b$ 两个方程. 利用 S 和 T 的上三角结构, 从最后一行开始向前求解.

对于每一行 i, 利用已经求解的 $x(j)$ 和 $y(j)$（$j > i$）计算当前行的 $x(i)$ 和 $y(i)$, 避免显式计算 ST, 从而将复杂度降低到 $O(n^2)$.

具体分析:

对于第 i 行（从 n 到 1）, 有

$$y_i = T_{ii}x_i + \sum_{j=i+1}^{n} T_{ij}x_j$$

以及

$$S_{ii}y_i + \sum_{j=i+1}^{n} S_{ij}y_j - \lambda x_i = b_i$$

将 y_i 的表达式代入第二个方程, 得到

$$S_{ii}\left(T_{ii}x_i + \sum_{j=i+1}^{n} T_{ij}x_j\right) + \sum_{j=i+1}^{n} S_{ij}y_j - \lambda x_i = b_i$$

整理后:

$$(S_{ii}T_{ii}-\lambda)x_i+S_{ii}\sum_{j=i+1}^{n}T_{ij}x_j+\sum_{j=i+1}^{n}S_{ij}y_j=b_i$$

因此, x_i 可表示为

$$x_i=\frac{b_i-S_{ii}\sum_{j=i+1}^{n}T_{ij}x_j-\sum_{j=i+1}^{n}S_{ij}y_j}{S_{ii}T_{ii}-\lambda}$$

其中 $S_{ii}T_{ii}-\lambda\neq 0$（方程组非奇异）. 而一旦求得 x_i, 即可继续计算 y_i. 写成算法如下:

Algorithm 3: 求解上三角矩阵方程组 $(ST-\lambda I)x=b$ 的 $O(n^2)$ 算法.

function: `[x]=solve(`S, T, λ, b`)`

- **for** $i=n:1$ **do**
  - $\mathrm{sum}_1=0$
  - **for** $j=i+1:n$ **do**
    - $\mathrm{sum}_1=\mathrm{sum}_1+T(i,j)x(j)$
  - **end**
  - $\mathrm{sum}_2=0$
  - **for** $j=i+1:n$ **do**
    - $\mathrm{sum}_2=\mathrm{sum}_2+S(i,j)y(j)$
  - **end**
  - $x(i)=(b(i)-S(i,i)\cdot\mathrm{sum}_1-\mathrm{sum}_2)/(S(i,i)T(i,i)-\lambda)$ （分母一定非 0）
  - $y(i)=T(i,i)x(i)+\mathrm{sum}_1$
- **end**

end

5. 证明: 若 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 有三角分解且非奇异, 则 L 和 U 是唯一的.

Solution: 假设非奇异矩阵 A 有两个不同的 LU 分解:

$$A=L_1U_1,\quad A=L_2U_2$$

其中 L_1,L_2 是单位下三角矩阵（一定非奇异）, U_1,U_2 是上三角矩阵.

因为 A 非奇异, 所以 U_1 和 U_2 也都是非奇异的. 于是由

$$L_1U_1=L_2U_2$$

得

$$L_2^{-1}L_1=U_2U_1^{-1}$$

注意到等式左侧一定是下三角矩阵, 等式右侧一定是上三角矩阵.

因此 $L_2^{-1}L_1=U_2U_1^{-1}$ 必须是对角阵. 又因为 $L_2^{-1}L_1$ 是单位下三角矩阵, 所以只能是单位矩阵, 即有

$$L_2^{-1}L_1=I\Rightarrow L_1=L_2$$

$$U_2 U_1^{-1} = I \Rightarrow U_1 = U_2$$

与假设矛盾, 故分解唯一.

6. 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 的定义如下:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{如果} i = j \text{ 或} j = n \\ -1, & \text{如果} i > j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

证明: A 有满足 $|l_{ij}| \leq 1$ 和 $u_{nn} = 2^{n-1}$ 的三角分解.

Solution: 由题意

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

则直接 LU 分解有 $A = LU$, 其中

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

直接验证满足题意, 证毕.

7. 设 A 对称且 $a_{11} \neq 0$, 并假定经过一步 Gauss 消去后, A 具有如下形状:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

证明: A_2 仍是对称阵.

Solution: 将对称矩阵 A 分块表示为:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1^{\mathrm{T}} \\ b_1 & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix}$$

其中 $b_1 = (a_{21}, \ldots, a_{n1})^{\mathrm{T}}$, 且 $A_{22}^{(0)}$ 是对称矩阵.

进行一步 Gauss 消去时对应的变换矩阵为:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b_1}{a_{11}} & I \end{pmatrix}$$

则

$$L_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{b_1}{a_{11}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & b_1^{\mathrm{T}} \\ b_1 & A_{22}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & A_{22}^{(0)} - \frac{b_1 b_1^{\mathrm{T}}}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

根据题意, 比较可得:

$$a_1 = b_1, \quad A_2 = A_{22}^{(0)} - \frac{b_1 b_1^{\mathrm{T}}}{a_{11}}$$

由于 $A_{22}^{(0)}$ 和 $b_1 b_1^{\mathrm{T}}$ 对称, 故 A_2 是对称矩阵.

8. 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是严格对角占优, 即 A 满足

$$|a_{kk}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|, \quad k = 1, \ldots, n$$

又设经过一次 Gauss 消去后, A 具有如下形状:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

证明: 矩阵 A_2 仍是严格对角占优阵.

Solution: 类似题 7 可知:

$$A_2 = A_{22}^{(0)} - \frac{\alpha_1 a_1^{\mathrm{T}}}{a_{11}}$$

其中 $\alpha_1 = (a_{21}, \ldots, a_{n1})^{\mathrm{T}}$, $a_1^{\mathrm{T}} = (a_{12}, \ldots, a_{1n})$, $A_{22}^{(0)}$ 是 A 的右下 $(n-1) \times (n-1)$ 阶子矩阵.

设 $A_2 = (b_{ij})_{i,j=2}^{n}$, 即有

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1} a_{1j}}{a_{11}}$$

考虑对角元有

$$|b_{kk}| = \left| a_{kk} - \frac{a_{k1} a_{1k}}{a_{11}} \right| \geq |a_{kk}| - \left| \frac{a_{k1}}{a_{11}} \right| |a_{1k}|$$

同行的非对角元和:

$$\sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^{n} |b_{kj}| = \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^{n} \left| a_{kj} - \frac{a_{k1} a_{1j}}{a_{11}} \right| \leq \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| + \left| \frac{a_{k1}}{a_{11}} \right| \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^{n} |a_{1j}|$$

由 A 严格对角占优有

$$|a_{11}| > \sum_{j=2}^{n} |a_{1j}| = |a_{1k}| + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^{n} |a_{1j}|$$

$$|a_{kk}| > |a_{k1}| + \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|, \quad \forall k \neq 1$$

代入前式得: $\forall k = 2, 3, \ldots, n$ 有

$$\begin{aligned} |b_{kk}| &\geq |a_{kk}| - \left|\frac{a_{k1}}{a_{11}}\right| |a_{1k}| \\ &> (|a_{k1}| + \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}|) + \left|\frac{a_{k1}}{a_{11}}\right| (\sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{n} |a_{1j}| - |a_{11}|) \\ &= \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{n} |a_{kj}| + \left|\frac{a_{k1}}{a_{11}}\right| \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{n} |a_{1j}| \\ &\geq \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{n} |b_{kj}| \end{aligned}$$

故 A_2 严格对角占优.

9. 设 A 为正定阵. 若对 A 执行 Gauss 消去法一步后产生一个形为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_1^{\mathrm{T}} \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

的矩阵. 证明: A_2 仍是正定阵.

Solution: 由题 7 可知:

$$A_2 = A_{22}^{(0)} - \frac{a_1 a_1^{\mathrm{T}}}{a_{11}}$$

其中 $a_1 = (a_{21}, \ldots, a_{n1})^{\mathrm{T}}$, $A_{22}^{(0)}$ 是 A 的右下 $(n-1) \times (n-1)$ 阶子矩阵.

同样设

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{a_1}{a_{11}} & I \end{pmatrix}$$

考虑合同变换后的矩阵

$$L_1 A L_1^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

同样正定.

对任意非零列向量 $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, 令 $y = L_1^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \neq 0$, 则:

$$y^{\mathrm{T}} A y = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} L_1 A L_1^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = x^{\mathrm{T}} A_2 x$$

由于 A 正定, 有 $y^{\mathrm{T}}Ay>0$, 故

$$x^{\mathrm{T}}A_2x>0\quad\forall x\neq 0$$

因此 A_2 正定.

10. 证明: 如果 $A^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 为严格对角占优阵. 那么 A 有三角分解 $A=LU$ 且 $|l_{ij}|<1$.

Solution: 用归纳假设. 当 $n=1$ 时, 显然符合题意. 假设对于矩阵阶数为 $(n-1)\times(n-1)$ 时结论皆成立, 下归纳证明矩阵阶数为 $n\times n$ 的情况:
由 A^{T} 严格对角占优可知: A 的对角元绝对值大于所在列其他元素绝对值之和, 即有

$$|a_{11}|>\sum_{i=2}^{n}|a_{i1}|$$

故一定有 $a_{11}\neq 0$, 则可以进行第一步 Gauss 运算, 设

$$l_{i1}=\frac{a_{i1}}{a_{11}}$$

则有

$$|l_{i1}|=\left|\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right|<1,\forall i=2,\dots,n$$

同时记 $a_1^{\mathrm{T}}=(a_{12},\dots,a_{1n})$ 以及 $l_1=(l_{21},\dots,l_{n1})^{\mathrm{T}}$, 则此时

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\l_1&I_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_1^{\mathrm{T}}\\0&A_2\end{pmatrix}$$

类似题 8 可知 A_2^{T} 严格对角占优. 于是根据归纳假设 A_2 有三角分解 $A_2=L_2U_2$.
记 $L_2=(l_{ij})_{i,j=2}^{n}$, 则 $|l_{ij}|<1,\forall j=2,\dots,n,\forall i=j+1,\dots,n$.
则

$$\begin{aligned}A&=\begin{pmatrix}1&0\\l_1&I_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_1^{\mathrm{T}}\\0&L_2U_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\l_1&I_{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&L_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_1^{\mathrm{T}}\\0&U_2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0\\l_1&L_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_1^{\mathrm{T}}\\0&U_2\end{pmatrix}\\&\triangleq LU\end{aligned}$$

此时 $L=(l_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 且 $|l_{ij}|<1,\forall i>j$. 证毕.

11. 形如 $N(y,k)=I-ye_k^{\mathrm{T}}$ 的矩阵称为 Gauss-Jordan 变换, 其中 $y\in\mathbb{R}^n$.

(1) 假定 $N(y,k)$ 非奇异, 求其逆.

(2) 向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足何种条件才能保证存在 $y \in \mathbb{R}^n$, 使得 $N(y,k)x = e_k$?

(3) 给出一种利用 Gauss-Jordan 变换求 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的算法, 并说明 A 满足何种条件才能保证算法进行到底.

Solution:

(1) 首先, 矩阵 $N(y,k)$ 具有如下结构:

$$N(y,k) = \begin{bmatrix} 1 & & & -y_1 & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & -y_{k-1} & & & \\ & & & 1-y_k & & & \\ & & & -y_{k+1} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & -y_n & & & 1 \end{bmatrix}$$

观察到由初等变换作用可化为只含原对角线元素的对角阵, 从而 $\det(N) = 1 - y_k$. 因为 $N(y,k)$ 非奇异, 故 $1 - y_k \neq 0$. 从而由初等变换法可得 $N(y,k)$ 的逆为:

$$N(y,k)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \frac{y_1}{1-y_k} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \frac{y_{k-1}}{1-y_k} & & & \\ & & & \frac{1}{1-y_k} & & & \\ & & & \frac{y_{k+1}}{1-y_k} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \frac{y_n}{1-y_k} & & & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 由 $N(y,k)x = (I - ye_k^{\mathrm{T}})x = e_k$ 可得

$$x - x_k y = e_k$$

从而

$$y = \frac{x - e_k}{x_k} = \left[\frac{x_1}{x_k}, \ldots, \frac{x_{k-1}}{x_k}, \frac{x_k - 1}{x_k}, \frac{x_{k+1}}{x_k}, \ldots, \frac{x_n}{x_k}\right]^{\mathrm{T}}$$

为保证 y 存在, 则需 $x_k \neq 0$ 即可.

(3) 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

取

$$y_1 = \left[1 - \frac{1}{a_{11}}, \frac{a_{21}}{a_{11}}, \ldots, \frac{a_{n1}}{a_{11}}\right]^{\mathrm{T}}$$

构造 $N_1 = N(y_1, 1)$（要求 $a_{11} \neq 0$）. 左乘 N_1 得

$$A^{(1)} = N_1 A = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

一般地, 在第 k 步, 若 $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, 则取

$$y_k = \left[\frac{a_{1k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \ldots, \frac{a_{k-1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, 1 - \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}}, \frac{a_{k+1,k}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \ldots, \frac{a_{nk}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}} \right]^{\mathrm{T}}$$

构造 $N_k = N(y_k, k)$, 并计算 $A^{(k)} = N_k A^{(k-1)}$. 经过 n 步后, 有:

$$N_n N_{n-1} \cdots N_1 A = E \Rightarrow A^{-1} = N_n N_{n-1} \cdots N_1$$

要保证算法进行到底, 需每一步的 $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$, 由课本定理可知即 A 的所有顺序主子阵非奇异. 具体算法见下:

Algorithm 4: 用 Gauss-Jordan 变换求矩阵 A 的逆矩阵.

```
function: [B]=GaussJordanInversion(A)
    B = I_n
    for k = 1 : n do
        if A(k,k) = 0 then
            stop
        end
        // 构造变换向量 y_k
        for i = 1 : n do
            if i ≠ k then
                y(i) = A(i,k)/A(k,k) （计算非对角元分量）
            end
            else
                y(i) = 1 − 1/A(k,k) （计算对角元分量）
            end
        end
        // 同时对矩阵 A 和 B 左乘 N_k = N(y_k, k)
        for j = 1 : n do
            α = A(k,j); β = B(k,j)
            for i = 1 : n do
                A(i,j) = A(i,j) − y(i)·α （更新 A_{i,j}）
                B(i,j) = B(i,j) − y(i)·β （更新 B_{i,j}）
            end
        end
    end
end
```

另解: 只针对第 (1) 问: 由

$$(ye_k^{\mathrm{T}})^2 = (ye_k^{\mathrm{T}})(ye_k^{\mathrm{T}}) = y(e_k^{\mathrm{T}}y)e_k^{\mathrm{T}} = y_k(ye_k^{\mathrm{T}})$$

替换 $ye_k^{\mathrm{T}} = I - N$ 有

$$(I-N)^2 = y_k(I-N)$$

展开后合并同类项有

$$N^2 + (y_k - 2)N + (1-y_k)I = 0$$

又 N 非奇异, 于是

$$N + (y_k - 2)I + (1-y_k)N^{-1} = 0$$

若 $y_k = 1$, 则代入 $N = I - ye_k^{\mathrm{T}}$ 可知 N 奇异, 矛盾. 自然有 $y_k \neq 1$, 于是

$$N^{-1} = \frac{(2-y_k)I - N}{1-y_k} = \frac{(1-y_k)I + (I-N)}{1-y_k} = I + \frac{ye_k^{\mathrm{T}}}{1-y_k}$$

12. 证明: 如果 A 是一个带宽为 $2m+1$ 的对称正定带状矩阵. 则其 Cholesky 因子 L 也是带状矩阵. L 的带宽是多少?

Solution: 设 A 是一个 $n \times n$ 的对称正定带状矩阵, 带宽为 $2m+1$（即 $\forall |i-j| > m$ 时, $a_{ij} = 0$）. 考虑 Cholesky 分解 $A = LL^{\mathrm{T}}$. 以下证明下三角矩阵 L 是下带状的, 且带宽为 $m+1$（即当 $i - k > m$ 时, $l_{ik} = 0$）.

分析 m 有取值范围 $m = 0, 1, \ldots, n-1$, 其中当 $m = 0$ 时为对角矩阵, 当 $m = n-1$ 时为一般矩阵, 且小宽带的矩阵一定是更大宽带的.

于是采用归纳法, 当 $m = n-1$ 时结论成立, 下证明 $m \geq p$ 时成立（即当 $i - k > p$ 时, $l_{ik} = 0$）可以推出 $m = p-1$ 时结论成立（即当 $i - k > p-1$ 时, $l_{ik} = 0$）:

由 Cholesky 分解公式知 $\forall 1 \leq i, k \leq n$ 有

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}}\left(a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}l_{kj}\right)$$

考虑当 $i - k = p$ 时, 于是 $i - j > i - k = p$, 有 $l_{ij} = 0$, 又 $a_{ik} = 0$, 则求和项 $l_{ik} = 0$, 所需得证.

由归纳假设 $\forall m = 0, 1, \ldots, n-1$ 都有 L 的带宽为 $m+1$, 证毕.

13. 若 $A = LL^{\mathrm{T}}$ 是 A 的 Cholesky 分解. 证明: L 的 i 阶顺序主子阵 L_i 正好是 A 的 i 阶顺序主子阵 A_i 的 Cholesky 因子.

Solution: 对矩阵进行分块:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

其中 A_{11} 和 L_{11} 是 $i \times i$ 的矩阵（即 i 阶顺序主子阵）.

根据 $A = LL^{\mathrm{T}}$ 展开有

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{11}^{\mathrm{T}} & L_{21}^{\mathrm{T}} \\ 0 & L_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}L_{11}^{\mathrm{T}} & L_{11}L_{21}^{\mathrm{T}} \\ L_{21}L_{11}^{\mathrm{T}} & L_{21}L_{21}^{\mathrm{T}} + L_{22}L_{22}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

即有

$$A_{11} = L_{11}L_{11}^{\mathrm{T}}$$

故 L_{11} 是 A_{11} 的 Cholesky 因子.

14. 证明: 设 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是对称的, 且其前 $n-1$ 个顺序主子阵均非奇异. 则 A 有唯一的分解式 $A = LDL^{\mathrm{T}}$. 其中 L 是单位下三角阵, D 是对角阵.

Solution: 我们对矩阵的阶数 n 进行数学归纳法.

1. 当 $n = 1$ 时, 取 $L = [1]$, $D = [a_{11}]$, 则 $A = LDL^{\mathrm{T}}$ 成立, 且分解唯一.
   现假设对于所有 $k \times k$ 对称矩阵（$k \leq n-1$）, 若其前 $k-1$ 个顺序主子阵非奇异, 则存在唯一分解 $A = LDL^{\mathrm{T}}$.

2. 下讨论 $k = n$ 时: 将 A 分块为

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & b^{\mathrm{T}} \\ b & a_{nn} \end{bmatrix}$$

   其中 A_{n-1} 有唯一分解 $A_{n-1} = L_{n-1}D_{n-1}L_{n-1}^{\mathrm{T}}$. 又 A_{n-1} 非奇异, 则 L_{n-1} 和 D_{n-1} 非奇异. 设

$$L = \begin{bmatrix} L_{n-1} & 0 \\ l & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_{n-1} & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

   令

$$\begin{aligned} LDL^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} L_{n-1}D_{n-1}L_{n-1}^{\mathrm{T}} & L_{n-1}D_{n-1}l^{\mathrm{T}} \\ lD_{n-1}L_{n-1}^{\mathrm{T}} & lD_{n-1}l^{\mathrm{T}} + d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{n-1} & b^{\mathrm{T}} \\ b & a_{nn} \end{bmatrix} \\ &= A \end{aligned}$$

   于是解得 $l = (L_{n-1}^{\mathrm{T}})^{-1}D_{n-1}^{-1}$, $d = a_{nn} - lD_{n-1}l^{\mathrm{T}}$ 存在且唯一.

   因此 L 和 D 存在且唯一, 使得 $A = LDL^{\mathrm{T}}$, 命题得证.

另解: 先假设 A 可逆, 从存在性和唯一性两方面来证明:

1. **存在性**: 由题目条件可知, 存在单位下三角矩阵 $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 和上三角矩阵 $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 使得 $A = LU$, 且 U 的主对角线元素均不为 0. 令

$$D = \operatorname{diag}(u_{11}, \ldots, u_{nn}), \quad \widetilde{U} = D^{-1}U$$

则 $\widetilde{U}$ 是单位上三角阵. 同时有

$$A = LD\widetilde{U} = A^{\mathrm{T}} = \widetilde{U}^{\mathrm{T}}DL^{\mathrm{T}}$$

从而

$$D\widetilde{U}L^{-\mathrm{T}} = L^{-1}\widetilde{U}^{\mathrm{T}}D$$

注意到, 左端为上三角阵, 右端为下三角阵, 从而二者为对角阵. 又对角阵 D 的对角元均不为零, 则 $\widetilde{U}L^{-\mathrm{T}}$ 是对角阵. 又 $\widetilde{U}L^{-\mathrm{T}}$ 对角线上元素都是 1, 所以

$$\widetilde{U}L^{-\mathrm{T}} = I$$

故 $\widetilde{U} = L^{\mathrm{T}}$. 从而 A 有分解式 $A = LDL^{\mathrm{T}}$.

2. **唯一性**: 若 A 有分解式

$$A = LDL^{\mathrm{T}} \triangleq LU$$

则 U 是上三角矩阵. 由于 LU 分解的唯一性, 不难得出分解式 $A = LDL^{\mathrm{T}}$ 的唯一性.

当 A 不可逆时, 记

$$A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & b^{\mathrm{T}} \\ b & a_{nn} \end{bmatrix}$$

由条件 A_{n-1} 是非奇异的, 则存在唯一的分解 $A_{n-1} = L_{n-1}D_{n-1}L_{n-1}^{\mathrm{T}}$, 其中 L_{n-1} 是单位下三角矩阵, D_{n-1} 是对角矩阵.
此时类似于上一个方法通过分块矩阵运算可以证 A 仍然存在唯一的分解式 $A = LDL^{\mathrm{T}}$, 自然原命题得证.

15. 设 $H = A + iB$ 是一个正定 Hermite 矩阵. 其中 $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(1) 证明: 矩阵

$$C = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$

是正定对称的.

(2) 给出一种仅用实数运算的算法来求解线性方程组

$$(A + iB)(x + iy) = (b + ic), \quad x, y, b, c \in \mathbb{R}^n$$

Solution:

(1) 由于 H 是 Hermite 矩阵, 故 $H = H^{\mathrm{H}}$, 即

$$A + iB = A^{\mathrm{T}} - iB^{\mathrm{T}} \Rightarrow A = A^{\mathrm{T}} 且 B = -B^{\mathrm{T}}$$

从而

$$C = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{T}} & B^{\mathrm{T}} \\ -B^{\mathrm{T}} & A^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = C^{\mathrm{T}}$$

由于 H 正定, 对于任意非零实向量 $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$, 令 $z = u + iv$, 则

$$z^{\mathrm{H}} H z > 0.$$

计算可得（中间用到了 A 是对称矩阵以及 B 是反对称矩阵）

$$\begin{aligned} z^{\mathrm{H}} H z &= (u^{\mathrm{T}} - iv^{\mathrm{T}})(A + iB)(u + iv) \\ &= (u^{\mathrm{T}} A + v^{\mathrm{T}} B + iu^{\mathrm{T}} B - iv^{\mathrm{T}} A)(u + iv) \\ &= u^{\mathrm{T}} A u + v^{\mathrm{T}} B u - u^{\mathrm{T}} B v + v^{\mathrm{T}} A v + iu^{\mathrm{T}} B u - iv^{\mathrm{T}} A u + iu^{\mathrm{T}} A v + iv^{\mathrm{T}} B v \\ &= u^{\mathrm{T}} A u + v^{\mathrm{T}} A v - 2u^{\mathrm{T}} B v \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u^{\mathrm{T}} & v^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u^{\mathrm{T}} & v^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u^{\mathrm{T}} A + v^{\mathrm{T}} B & -u^{\mathrm{T}} B + v^{\mathrm{T}} A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ &= u^{\mathrm{T}} A u + v^{\mathrm{T}} B u - u^{\mathrm{T}} B v + v^{\mathrm{T}} A v \\ &= u^{\mathrm{T}} A u + v^{\mathrm{T}} A v - 2u^{\mathrm{T}} B v \end{aligned}$$

故

$$\begin{bmatrix} u^{\mathrm{T}} & v^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} C \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = z^{\mathrm{H}} H z > 0$$

综上, 所以 C 是对称正定阵.

(2) 由方程 $(A + iB)(x + iy) = b + ic$ 知有 $Ax - By = b 且 Ay + Bx = c$. 即

$$\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} \Longleftrightarrow C \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$$

该问题自然转化为求解由正定矩阵构成的线性方程组.

Algorithm 5: 用 Cholesky 分解求解复线性方程组 $(A+iB)(x+iy)=(b+ic)$.

function: `[x,y]=Cholesky_Solve`$(A,\ B,\ b,\ c)$

$C=\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix};\ d=\begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}$

$(L,D)=\texttt{ldltSolve}(C)$ （见题 1）

for $i=1:2n$ **do**

  for $j=1:i-1$ **do**

    $d(i)=d(i)-L(i,j)d(j)$ （解方程组 $Ld_1=d$, 用 d 储存新的 d_1）

  end

end

for $i=1:2n$ **do**

  $d(i)=d(i)/D(i,i)$（解方程组 $Dd_2=d_1$, 用 d 储存新的 d_2; 分母一定不为 0）

end

for $i=2n:1$ **do**

  for $j=i+1:2n$ **do**

    $d(i)=d(i)-L(j,i)d(j)$ （解方程组 $L^{\mathrm{T}}d_3=d_2$, 用 d 储存最后的 d_3）

  end

end

$x=d(1:n);\ y=d(n+1:2n)$

end

16. 证明: 有限维空间的任意范数都等价.

Solution: 不妨设该有限维空间为 $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的任意两个范数.
考虑赋范向量空间 $X=(\mathbb{R}^n,\ \|\cdot\|_\alpha)$, 定义函数

$$f:X\to\mathbb{R},\quad f(x)=\|x\|_\beta$$

首先证明 f 连续: 由三角不等式, 对任意 $x,y\in X$, 有

$$\|x\|_\beta-\|y\|_\beta=\|x-y+y\|_\beta-\|y\|_\beta\le\|x-y\|_\beta$$
$$\|y\|_\beta-\|x\|_\beta=\|-y\|_\beta-\|-x\|_\beta\le\|x-y\|_\beta$$

于是

$$|\|x\|_\beta-\|y\|_\beta|\le\|x-y\|_\beta$$

则对任意 $\varepsilon>0$, 取 $\delta=\varepsilon$, 则当 $\|x-y\|<\delta$ 时,

$$|\|x\|_\beta-\|y\|_\beta|\le\|x-y\|_\beta<\varepsilon$$

故 f 是一致连续的, 自然连续.

由于 X 中的单位球面 $S=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_\alpha=1\}$ 紧, 且 f 在 S 上连续, 故存在最小值 C_1 和最大值 C_2 且 $0\le C_1\le C_2$, 使得

$$C_1\le f(x)\le C_2,\quad \forall x\in S$$

假设 $C_1=0$, 即存在 $x_0\in S$, 使得 $\|x_0\|_\beta=0\Leftrightarrow x_0=0$. 然而此时就有 $\|x_0\|_\alpha=0\Rightarrow x_0\notin S$, 矛盾, 故

$$0<C_1\le f(x)\le C_2,\quad \forall x\in S$$

然后, 对任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 且 $x\neq 0$, 令

$$u=\frac{x}{\|x\|_\alpha}\in S$$

则

$$0<C_1\le f(u)=\left\|\frac{x}{\|x\|_\alpha}\right\|_\beta=\frac{\|x\|_\beta}{\|x\|_\alpha}\le C_2<\infty$$

于是 $\|\cdot\|_\alpha$ 与 $\|\cdot\|_\beta$ 等价.

又由于范数是任意的, 故有限维空间上任意两范数都等价, 命题得证.

17. 证明: 在 $\mathbb{R}^n$ 上, 当且仅当 A 是正定阵时函数 $f(x)=(x^{\mathrm{T}}Ax)^{\frac{1}{2}}$ 是一个向量范数.

Solution: 从充分性和必要性两方面来证明.

1. **必要性**: 若 $f(x)$ 是向量范数, 则 A 正定.
   由向量范数的正定性知有 $x^{\mathrm{T}}Ax\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}^n$ 且 $x^{\mathrm{T}}Ax=0\Leftrightarrow x=0$, 这就是 A 正定.

2. **充分性**: 若 A 正定, 则 $f(x)$ 是向量范数.

   (a) **正定性**: 由 A 正定, $x^{\mathrm{T}}Ax>0$ 对所有 $x\neq 0$ 成立, 且 $x^{\mathrm{T}}Ax=0$ 当且仅当 $x=0$. 故

   $$f(x)=(x^{\mathrm{T}}Ax)^{\frac{1}{2}}\ge 0\quad \text{且}\quad f(x)=0\Leftrightarrow x=0$$

   (b) **齐次性**: $\forall\alpha\in\mathbb{R}$,

   $$f(\alpha x)=((\alpha x)^{\mathrm{T}}A(\alpha x))^{\frac{1}{2}}=(|\alpha|^2x^{\mathrm{T}}Ax)^{\frac{1}{2}}=|\alpha|(x^{\mathrm{T}}Ax)^{\frac{1}{2}}=|\alpha|f(x)$$

   (c) **三角不等式**: 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 结合 A 的对称正定性知

   $$\left(x^{\mathrm{T}}Ay\right)^2=\langle A^{\frac{1}{2}}x,A^{\frac{1}{2}}y\rangle^2\le\|A^{\frac{1}{2}}x\|_2^2\|A^{\frac{1}{2}}y\|_2^2=\left(x^{\mathrm{T}}Ax\right)\left(y^{\mathrm{T}}Ay\right)$$

   同时有

   $$\begin{aligned}&[f(x)+f(y)]^2-[f(x+y)]^2\\=&\left[\left(x^{\mathrm{T}}Ax\right)^{\frac{1}{2}}+\left(y^{\mathrm{T}}Ay\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2-\left[\left((x+y)^{\mathrm{T}}A(x+y)\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\\=&2\sqrt{\left(x^{\mathrm{T}}Ax\right)\left(y^{\mathrm{T}}Ay\right)}-2\left(x^{\mathrm{T}}Ay\right)\end{aligned}$$

又 f 非负且 A 正定, 则结合上述二式可知:

$$f(x) + f(y) \geq f(x + y)$$

综上, $f(x)$ 确是向量范数.

证毕.

另解: 仅讨论充分性: 可以从对称性、双线性性、正定性三个方面证明 $\phi(x, y) \triangleq x^{\mathrm{T}} A y$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个内积, 则 $f(x) = \sqrt{\phi(x, x)}$ 自然就是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个向量范数.

18. 若 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^m$ 上的一个向量范数. 证明: 若对于 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\operatorname{rank}(A) = n$, 则 $\|x\|_A \triangleq \|Ax\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个向量范数.

Solution: 证明如下:

1. **正定性**: 因为 $\|\cdot\|$ 有正定性, 所以 $\|Ax\| \geq 0$ 且 $\|Ax\| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$.

   又 $\operatorname{rank}(A) = n$且$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 所以 A 列满秩, 即列向量间线性无关, 故 $Ax = 0 \Longleftrightarrow x = 0$, 因此 $\|x\|_A = \|Ax\| \geq 0$ 且 $\|x\|_A = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

2. **齐次性**: $\|\cdot\|$ 满足齐次性, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 有

$$\|\alpha x\|_A = \|A(\alpha x)\| = \|\alpha A x\| = |\alpha| \|Ax\| = |\alpha| \|x\|_A$$

3. **三角不等式**: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\|x + y\|_A = \|A(x + y)\| = \|Ax + Ay\| \leq \|Ax\| + \|Ay\| = \|x\|_A + \|y\|_A$$

综上, $\|x\|_A$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一个向量范数.

19. 设 $\|\cdot\|$ 是由向量范数 $\|\cdot\|$ 诱导出的矩阵范数. 证明: 若 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 非奇异, 则

$$\|A^{-1}\|^{-1} = \min_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

Solution: 证明如下:

1. **是下界**: 首先, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ 且 $\|x\| = 1$ 有

$$1 = \|x\| = \|A^{-1} A x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| \Rightarrow \|A^{-1}\|^{-1} \leq \|Ax\|$$

2. **可以取到**: 然后, 由

$$\|A^{-1}\| = \max_{\|x\|=1} \|A^{-1}x\|$$

可知存在 $x_1 \in \mathbb{R}^n$ 且$\|x_1\| = 1$ 使得

$$\|A^{-1}\| = \|A^{-1}x_1\|$$

则现在只需要找出一个 $x_2 \in \mathbb{R}^n$ 且$\|x_2\| = 1$ 使得

$$\|Ax_2\| = \|A^{-1}\|^{-1} = \frac{1}{\|A^{-1}x_1\|}$$

即可. 而

$$x_2 = \frac{A^{-1}x_1}{\|A^{-1}x_1\|}$$

符合题意, 故原命题得证.

另解: 由诱导矩阵范数的定义, 有

$$\|A^{-1}\| = \max_{\|y\|=1} \|A^{-1}y\|$$

由于 A 非奇异, 映射 $x \mapsto \frac{Ax}{\|Ax\|}$ 是从 $\{x : \|x\| = 1\}$ 到 $\{y : \|y\| = 1\}$ 的满射（显然此过程中有 $x \neq 0, y \neq 0$）. 因此

$$\|A^{-1}\| = \max_{\|x\|=1} \left\| A^{-1} \left(\frac{Ax}{\|Ax\|} \right) \right\| = \max_{\|x\|=1} \frac{\|x\|}{\|Ax\|} = \max_{\|x\|=1} \frac{1}{\|Ax\|}$$

于是

$$\|A^{-1}\| = \frac{1}{\min_{\|x\|=1} \|Ax\|} \quad \Rightarrow \quad \|A^{-1}\|^{-1} = \min_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

证毕.

20. 设 $A = LU$ 是 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的 LU 分解. 其中 $|l_{ij}| \leq 1$. 又 a_i^{T} 和 u_i^{T} 分别表示 A 和 U 的第 i 行. 证明

$$u_i^{\mathrm{T}} = a_i^{\mathrm{T}} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} u_j^{\mathrm{T}}$$

且 $\|U\|_\infty \leq 2^{n-1}\|A\|_\infty$.

Solution: 因为

$$A = \begin{pmatrix} a_1^{\mathrm{T}} \\ a_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ a_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_1^{\mathrm{T}} \\ u_2^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ u_n^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

结合 $A=LU$ 于是有 $a_i^{\mathrm{T}}=u_i^{\mathrm{T}}+\sum_{j=1}^{i-1}l_{ij}u_j^{\mathrm{T}}$，即

$$u_i^{\mathrm{T}}=a_i^{\mathrm{T}}-\sum_{j=1}^{i-1}l_{ij}u_j^{\mathrm{T}}$$

下证明不等式部分（矩阵的无穷范数是其所有行向量的 1-范数中最大者）：

$$i=1,\|u_1^{\mathrm{T}}\|_1=\|a_1^{\mathrm{T}}\|_1\leq\|A\|_\infty$$

$$i=2,\|u_2^{\mathrm{T}}\|_1=\|a_2^{\mathrm{T}}-l_{21}u_1^{\mathrm{T}}\|_1\leq(1+1)\|A\|_\infty=2\|A\|_\infty$$

$$i=3,\|u_3^{\mathrm{T}}\|_1=\|a_3^{\mathrm{T}}-l_{31}u_1^{\mathrm{T}}-l_{32}u_2^{\mathrm{T}}\|_1\leq(1+1+2)\|A\|_\infty=4\|A\|_\infty$$

$$\vdots$$

$$i=n,\|u_n^{\mathrm{T}}\|_1\leq(1+1+2+4+\cdots+2^{n-2})\|A\|_\infty=2^{n-1}\|A\|_\infty$$

又

$$\|U\|_\infty=\max_{1\leq i\leq n}\|u_i^{\mathrm{T}}\|_1$$

因此

$$\|U\|_\infty\leq 2^{n-1}\|A\|_\infty$$

证毕.

21. A 和 $A+E$ 都非奇异. 证明:

$$\|(A+E)^{-1}-A^{-1}\|\leq\|E\|\|A^{-1}\|\|(A+E)^{-1}\|$$

Solution: 注意到

$$(A+E)^{-1}-A^{-1}=(A+E)^{-1}(E-(A+E)A^{-1})=-(A+E)^{-1}EA^{-1}$$

直接取范数并由相容性即得

$$\|(A+E)^{-1}-A^{-1}\|=\|(A+E)^{-1}EA^{-1}\|\leq\|E\|\|A^{-1}\|\|(A+E)^{-1}\|$$

22. $\mathfrak{F}=\mathcal{F}(\beta,t,L,U)$ 为一个浮点数集合. $m=\beta^{L-1},M=\beta^U(1-\beta^{-t})$. 设 $m\leq|x|\leq M$. 证明:

$$\mathrm{fl}(x)=\frac{x}{1+\delta},\quad|\delta|\leq u$$

其中

$$u=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\beta^{1-t}, & \text{用舍入法}\\ \beta^{1-t}, & \text{用截断法}\end{cases}$$

为机器精度.

Solution: 事实上

$$\mathrm{fl}(x)=\frac{x}{1+\delta} \text{ 与 } \mathrm{fl}(x)=x(1+\delta)$$

表意相同. 现不妨假定 $x>0$（因若 $x<0$, 证明完全类似）. 设 α 是满足

$$\beta^{\alpha-1}\leq x<\beta^{\alpha}$$

的唯一整数. 在 $[\beta^{\alpha-1},\beta^{\alpha})$ 中浮点数的阶为 α, 所以在这个区间中所有 t 位的浮点数以间距 $\beta^{\alpha-t}$ 分布. 对于舍入法, 根据上式, 有

$$|\mathrm{fl}(x)-x|\leq\frac{1}{2}\beta^{\alpha-t}=\frac{1}{2}\beta^{\alpha-1}\beta^{1-t}\leq\frac{1}{2}x\beta^{1-t}$$

即

$$\frac{|\mathrm{fl}(x)-x|}{x}\leq\frac{1}{2}\beta^{1-t}$$

对于截断法, 有

$$|\mathrm{fl}(x)-x|\leq\beta^{\alpha-t}=\beta^{\alpha-1}\beta^{1-t}\leq x\beta^{1-t}$$

即

$$\frac{|\mathrm{fl}(x)-x|}{x}\leq\beta^{1-t}$$

23. $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 存在 Jordan 分解

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \delta_1 & & & \\ & \lambda_2 & \delta_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda_{n-1} & \delta_{n-1} \\ & & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 非奇异, $\delta_i=1$ 或 0. $\forall\varepsilon>0$, 令

$$D_\varepsilon=\mathrm{diag}(1,\varepsilon,\varepsilon^2,\cdots,\varepsilon^{n-1})$$

证明: (1) $\|x\|_{XD_\varepsilon}\triangleq\|(XD_\varepsilon)^{-1}x\|_\infty$, $x\in\mathbb{C}^n$ 为一个向量范数.

(2) $\forall G\in\mathbb{C}^{n\times n},\|G\|_\varepsilon\triangleq\|D_\varepsilon^{-1}X^{-1}GXD_\varepsilon\|_\infty$ 为 $\|\cdot\|_{XD_\varepsilon}$ 诱导出的算子范数.

Solution: (1) 记 $B=XD_\varepsilon$, 证明如下:

1. **正定性**: $\forall x\in\mathbb{C}^n$, 有

$$\|x\|_{XD_\varepsilon}=\|B^{-1}x\|_\infty\geq 0 \text{ 且 } \|x\|_{XD_\varepsilon}=0\Leftrightarrow B^{-1}x=0\Leftrightarrow x=0$$

2. **齐次性**: $\forall x\in\mathbb{C}^n,\forall\alpha\in\mathbb{C}$, 有

$$\|\alpha x\|_{XD_\varepsilon}=\|\alpha B^{-1}x\|_\infty=|\alpha|\|B^{-1}x\|_\infty=|\alpha|\|x\|_{XD_\varepsilon}$$

3. **三角不等式**: $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$, 有

$$\|x+y\|_{XD_\varepsilon} = \|B^{-1}x + B^{-1}y\|_\infty \leq \|B^{-1}x\|_\infty + \|B^{-1}y\|_\infty = \|x\|_{XD_\varepsilon} + \|y\|_{XD_\varepsilon}$$

则 $\|x\|_{XD_\varepsilon} \triangleq \|(XD_\varepsilon)^{-1}x\|_\infty$ 确为向量范数.

(2) 同样记 $B = XD_\varepsilon$, 证明原命题等价于证明

$$\|G\|_\varepsilon = \max_{\|x\|_{XD_\varepsilon}=1} \|Gx\|_{XD_\varepsilon}$$

即证

$$\|B^{-1}GB\|_\infty = \max_{\|B^{-1}x\|_\infty=1} \|B^{-1}Gx\|_\infty$$

再记 $B^{-1}GB = M \in \mathbb{C}^{n\times n},\ B^{-1}x = y \in \mathbb{C}^n$, 则原命题可化为

$$\|M\|_\infty = \max_{\|y\|_\infty=1} \|My\|_\infty$$

由于矩阵的 ∞ 范数本身就是由向量的 ∞ 范数如此诱导而来（同时结合 B^{-1} 是 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ 上的一个双射）, 此式成立, 证毕.

24. 若 $\|A\| < 1$, 且 $\|I\| = 1$. 证明:

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

Solution: 证明如下:

1. **先证 $I-A$ 可逆**: 假设 $I-A$ 是不可逆的, 则 $\exists x \in \mathbb{R}^n$ 且 $x \neq 0$, 使得

$$(I-A)x = 0 \Rightarrow x = Ax$$

即有

$$0 < \|x\| = \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|A\| \geq 1$$

矛盾, 则 $I-A$ 可逆.

2. **再证不等式**:

$$I = (I-A)(I-A)^{-1} = (I-A)^{-1} - A(I-A)^{-1}$$

两边取范数, 则

$$\|I\| = \|(I-A)^{-1} - A(I-A)^{-1}\|$$

由三角不等式和相容性有

$$1 \geq \|(I-A)^{-1}\| - \|A\| \cdot \|(I-A)^{-1}\| \overset{\|A\|<1}{\Longrightarrow} \|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

证毕.

另解: 仅证明 $I-A$ 可逆: 由 $\rho(A) \leq \|A\| < 1$ 知 1 不是 A 的特征值, 即 $I-A$ 可逆.

25. 证明: 对任意的矩阵范数都有 $\kappa(A) \geq 1$.

Solution: 因为

$$\|I\| = \|I \cdot I\| \leq \|I\| \cdot \|I\|$$

又

$$\|I\| > 0 \Rightarrow \|I\| \geq 1$$

所以

$$k(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\| \geq \|A^{-1}A\| = \|I\| \geq 1 \Rightarrow k(A) \geq 1$$

26. 设 A 为带状矩阵, 带宽为 $2m+1$, 其中 $m=3$. 若用列主元 Gauss 消去法计算得到的 $\widetilde{L}$ 和 $\widetilde{U}$ 满足

$$\widetilde{L}\widetilde{U} = P(A+E)$$

其中 P 是排列方阵. 试估计 $\|E\|_\infty$ 的大小.

Solution: 由课本中定理可知:

$$\|E\|_\infty \leq 4.09\|A\|_\infty n^3 \rho u$$

我们只需要估算增长因子 ρ 即可.

对于带宽为 $2m+1$ 的带状矩阵（其中 $m=3$）, 使用列主元 Gauss 消去法可知 ρ 满足:

$$\rho \leq 2^m = 2^3 = 8$$

这一估计是基于消去过程中元素值的增长规律: 每一步消去可能使元素值最多翻倍, 并且由于每行最多涉及 m 次消去操作, 因此 ρ 以 2^m 为上界.

代入估计式得

$$\|E\|_\infty \leq 4.09 \times 8\|A\|_\infty n^3 u = 32.72\|A\|_\infty n^3 u$$

因此, $\|E\|_\infty$ 的估计为 $O(\|A\|_\infty n^3 u)$.