

物理学のための数学講座 第一回 集合論と数理論理学

小桜 未来

2022 年 12 月 2 日

1 集合

\emptyset : 空集合

\mathbb{P} : 素数

\mathbb{N} : 自然数

\mathbb{Q} : 有理数

\mathbb{R} : 実数

\mathbb{C} : 複素数

$\{x|P\}$: P が成り立つような x の集合

2 集合関係

\in : 要素である。

Ex. $x \in \mathbb{R}$

Tr. x は集合 \mathbb{R} の要素である。

\notin : 要素でない。

Ex. $\forall x \in \mathbb{R}, x \notin \emptyset$

Tr. 任意の実数 x は空集合の要素でない。

\subset : 部分集合である。

Ex. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

Tr. 整数は実数の部分集合である。

$\not\subset$: 部分集合でない。

Ex. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{N}$

Tr. 有理数は自然数の部分集合でない。

3 論理記号

\exists : 存在。「ある～が、」「～が存在する。」という意味。

Ex. $\exists x \in \mathbb{R}$

Tr. 実数 x が存在する。

Ex. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 1$

Tr. ある実数 x, y に対して $x + y = 1$ が成り立つ。

$\exists!$: 一意的に存在。「ただ一つ存在する。」という意味。

Ex. $\exists! x \in \mathbb{R}, x^2 = 0$

Tr. $x^2 = 0$ となるような実数 x がただ一つ存在する。

\forall : 全称。「任意の～」、「全ての～」という意味。

Ex. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

Tr. 任意の実数 x に対して $x^2 \geq 0$ である。

\wedge : 論理積。「かつ」という意味。

\vee : 論理和。「または」という意味。

\neg : 否定。「～ではない。」という意味。

\Rightarrow : 含意。「～ならば、～」という意味。

Ex. $\forall x \in \mathbb{R}, 1 < x \Rightarrow 1 < x^2$

Tr. 任意の実数 x に対して、 $1 < x$ ならば $1 < x^2$ 。

\Leftrightarrow : 同値。

Ex. $\forall x \in \mathbb{R}, 1 < x^2 \Leftrightarrow (x < -1 \vee 1 < x)$

Tr. 任意の実数 x に対して、 $1 < x^2$ は $1 < x$ または $x < -1$ と同値である。

\top : 真。

Ex. $(\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \in \mathbb{R}) = \top$

Tr. 任意の実数 x に対して x^2 も実数であるという命題は真である。

\perp : 偽。

\therefore : 結論。

\because : 根拠。

4 集合の演算

\cup : 和集合。 $\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{x | x \in \mathbb{A} \vee x \in \mathbb{B}\}$

\cap : 共通集合。 $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x | x \in \mathbb{A} \wedge x \in \mathbb{B}\}$

\times : 直積集合。 $\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(a, b) | a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}\}$

5 順序構造

$a < b$: a と b の間に何らかの順序関係があるとき、 a が先であることを表す。一般的には大小関係で a が b より小さいことを表す。

$a \leq b$: $a < b \vee a = b$

$(a, b),]a, b[$: 开区間。 $(a, b) = \{x | a < x < b\}$

$[a, b]$: 閉区間。 $[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$

$(a, b],]a, b]$: 半开区間。 $(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$

$[a, b), [a, b[$: 半开区間。 $[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$

6 演算規則

結合則 : $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

交換則 : $A \cdot B = B \cdot A$

分配則 : $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

7 写像

f : 写像。 $f : X \rightarrow Y$ 、 $X \xrightarrow{f} Y$

$g \circ f$: 合成写像。 $f : X \rightarrow Y$ かつ $g : Y \rightarrow Z$ のとき $g \circ f : X \rightarrow Z$ 、 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ のとき $X \xrightarrow{g \circ f} Z$

f^{-1} : 逆写像。 $f : X \rightarrow Y$ のとき $f^{-1} : Y \rightarrow X$ 、 $X \xrightarrow{f} Y$ のとき $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$

全射

単射