物理学のための数学講座 第一回 集合論と数理論理学

小桜 未来

2022 年 12 月 3 日

1　集合

$\varnothing$: 空集合
$\mathbb{P}$: 素数
$\mathbb{N}$: 自然数
$\mathbb{Q}$: 有理数
$\mathbb{R}$: 実数
$\mathbb{C}$: 複素数
$\{x|P\}$: P が成り立つような x の集合

2　集合関係

$\in$: 要素である。

Ex. $x \in \mathbb{R}$

Tr. x は集合 $\mathbb{R}$ の要素である。
$\notin$: 要素でない。

Ex. $\forall x \in \mathbb{R}, x \notin \varnothing$

Tr. 任意の実数 x は空集合の要素でない。
$\subset$: 部分集合である。

Ex. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

Tr. 整数は実数の部分集合である。
$\not\subset$: 部分集合でない。

Ex. $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{N}$

Tr. 有理数は自然数の部分集合でない。

3　論理記号

$\exists$：存在。「ある〜が、」「〜が存在する。」という意味。

Ex. $\exists x \in \mathbb{R}$

Tr. 実数 x が存在する。

Ex. $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ x+y=1$

Tr. ある実数 x, y に対して $x+y=1$ が成り立つ。
$\exists !$：一意的に存在。「ただ一つ存在する。」という意味。

Ex. $\exists ! x \in \mathbb{R}, x^2=0$

Tr. $x^2=0$ となるような実数 x がただ一つ存在する。
$\forall$：全称。「任意の〜」、「全ての〜」という意味。

Ex. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$

Tr. 任意の実数 x に対して $x^2 \geq 0$ である。
$\wedge$：論理積。「かつ」という意味。
$\vee$：論理和。「または」という意味。
$\neg$：否定。「〜ではない。」という意味。
$\Rightarrow$：含意。「〜ならば、〜」という意味。

Ex. $(\forall x \in \mathbb{R}, 1 < x) \Rightarrow 1 < x^2$

Tr. 任意の実数 x に対して、$1 < x$ ならば $1 < x^2$。
$\Leftrightarrow$：同値。

Ex. $(\forall x \in \mathbb{R}, 1 < x^2) \Leftrightarrow ((x < -1) \vee (1 < x))$

Tr. 任意の実数 x に対して、$1 < x^2$ は $x < -1$ または $1 < x$ と同値である。
$\top$：真。

Ex. $((\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (x^2 \in \mathbb{R})) = \top$

Tr. 任意の実数 x に対して x^2 も実数であるという命題は真である。
$\bot$：偽。
$\therefore$：結論。
$\because$：根拠。
$\vdash$：論理的帰結。

4　集合の演算

$\cup$：和集合。$\mathbb{A} \cup \mathbb{B} = \{x | (x \in \mathbb{A}) \vee (x \in \mathbb{B})\}$
$\cap$：共通集合。$\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \{x | (x \in \mathbb{A}) \wedge (x \in \mathbb{B})\}$
$\times$：直積集合。$\mathbb{A} \times \mathbb{B} = \{(a,b) | a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{B}\}$

5　順序構造

$a < b$：a と b の間に何らかの順序関係があるとき、a が先であることを表す。一般的には大小関係で a が b より小さいことを表す。
$a \le b$：$(a < b) \vee (a = b)$
(a,b)：開区間。$\{x | a < x < b\}$
$[a,b]$：閉区間。$\{x | a \le x \le b\}$
$(a,b]$：半開区間。$\{x | a < x \le b\}$
$[a,b)$：半開区間。$\{x | a \le x < b\}$

6　真理値表

表 1　真理値表

P	Q	$\top$	$\bot$	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \vdash Q$
1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1

7　数理論理と推論規則

否定の導入：$\{(P \vdash Q), (P \vdash \neg Q)\} \vdash \neg P$、背理法
否定の除去：$(\neg P) \vdash (P \to R)$
二重否定：$\neg\neg P \vdash P$
論理積の導入：$\{P, Q\} \vdash (P \wedge Q)$
論理積の除去：$(P \wedge Q) \vdash P$、$(P \wedge Q) \vdash Q$
論理和の導入：$P \vdash (P \vee Q)$、$Q \vdash (P \vee Q)$
論理和の除去：$\{(P \vee Q), (P \to R), (Q \to R)\} \vdash R$
モーダスポネンス：$\{P, (P \to Q)\} \vdash Q$
モーダストレンス：$((P \to Q) \wedge \neg Q) \vdash \neg P$
条件付き証明：$(P \vdash Q) \vdash (P \to Q)$

量化記号の公理 1：$\forall x(P \to Q) \vdash (\forall x, P \to \forall x, Q)$
量化記号の公理 2：$\forall x(\neg P) \leftrightarrow \neg(\exists x, P)$
全称化：$P \vdash (\forall x, P)$

8 論理の証明

8.1 トートロジー

表 2 $A \to A$ の証明

1	A	前提	
2	$A \vee A$	1 と 1 で論理和の導入	$A \vdash (A \vee A)$
3	$(A \vee A) \wedge A$	1 と 2 で論理積の導入	$(A \vee A) \vdash (A \vee A) \wedge A$
4	A	3 で論理積の除去	$(A \vee A) \wedge A \vdash A$
5	$A \to A$	1 と 4 で条件付き証明	$(A \vdash A) \vdash (A \to A)$

8.2 三段論法

表 3 $((A \to B) \wedge (B \to C)) \vdash (A \to C)$ の証明

1	$A \to B$		
2	$B \to C$		
3	A	前提	
4	B	1 と 3 でモーダスポネンス	$\{(A \to B), A\} \vdash B$
5	C	2 と 4 モーダスポネンス	$\{(B \to C), B\} \vdash C$
6	$A \to C$	3 と 5 で条件付き証明	$((A \vdash C) \vdash (A \to C))$

9 演算規則

結合則：$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
交換則：$A \cdot B = B \cdot A$
分配則：$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

10 写像

f：写像。$f : X \to Y$、$X \xrightarrow{f} Y$
$g \circ f$：合成写像。$f : X \to Y$ かつ $g : Y \to Z$ のとき $g \circ f : X \to Z$、$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ のとき $X \xrightarrow{g \circ f} Z$
f^{-1}：逆写像。$f : X \to Y$ のとき $f^{-1} : Y \to X$、$X \xrightarrow{f} Y$ のとき $Y \xrightarrow{f^{-1}} X$
全射
単射