$U(1)$ ゲージ対称性からの Maxwell 方程式の導出

小桜 未来

2022 年 12 月 14 日

概要

$U(1)$ ゲージ対称性を用いて古典電磁気学の基礎方程式である Maxwell 方程式を導出する。本 pdf では特殊相対性理論と量子力学の基礎を既知とし、その知識を無断で使用する。

1　場の解析力学

1.1　場の作用積分

点の解析力学では以下のような作用積分が出てきた。

$$S[\boldsymbol{x}(t), t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} L(\boldsymbol{x}(t), \dot{\boldsymbol{x}}(t), t) dt$$

これは粒子の運動 $\boldsymbol{x}(t)$ に対応した作用積分だ。これを場の運動 $\phi(\boldsymbol{x}, t) \equiv \phi(x)$ に拡張したい。そのためには

$$L(x(t), \dot{x}(t), t) \to L(\phi(\boldsymbol{x}, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t), t) \equiv L(\phi(x), \dot{\phi}(x), t)$$

と変更し、ラグランジアンを

$$\begin{aligned} L(\phi(\boldsymbol{x}, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t), t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(\phi(\boldsymbol{x}, t), \dot{\phi}(\boldsymbol{x}, t), \nabla\phi(\boldsymbol{x}, t), \boldsymbol{x}, t) d^3\boldsymbol{x} \\ &\equiv \int \mathcal{L}(\phi(x), \dot{\phi}(x), \nabla\phi(x), x) d^3\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

のように各点各点に対して定義されるラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ を積分したものであるとすると、作用積分は

$$\begin{aligned} S[\phi(x), t_1, t_2] &= \int \mathcal{L}(\phi(x), \dot{\phi}(x), \nabla\phi(x), x) d^4x \\ &= \int \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x), x) d^4x \end{aligned}$$

となる。

1.2　場のオイラー=ラグランジュ方程式

点の解析力学同様に変分を取ると

$$
\begin{aligned}
\delta S[\phi(x), t_1, t_2] &= \delta \int \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x) d^4x \\
&= \int \delta \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x), x) d^4x \\
&= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \partial_\mu \phi \right) d^4x \\
&= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \delta \phi \right] + \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta \phi d^4x \\
& \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \delta \phi d^4x
\end{aligned}
$$

より、場のオイラー=ラグランジュ方程式は

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0
$$

となる。

2　ゲージ理論

2.1　大域的変換と局所的ゲージ変換

何らかの場 $\psi(x)$ があったとする。このとき、位置に依存しない演算子 Ω があれば、

$$
\psi(x) \to \psi'(x) = \Omega \psi(x)
$$

という変換が定義できる。このような位置に依存しない演算子による変換 Ω で座標系に影響を与えない変換 $x \to x' = x$ のことを大域的変換という。一方、位置に依存する演算子 $\Omega(x)$ があれば、

$$
\psi(x) \to \psi'(x) = \Omega(x) \psi(x)
$$

という変換が定義できる。このような位置に依存する演算子による変換 $\Omega(x)$ で座標系に影響を与えない変換 $x \to x' = x$ のことを局所的ゲージ変換という。

2.2　ゲージ場のゲージ変換

大域的変換の場合、変換は分配できる。*1つまり、

$$
\Omega(\partial_\mu \psi(x)) = \partial'_\mu (\Omega \psi(x)) = \partial_\mu (\Omega \psi(x))
$$

を満たす。ここで、プライム記号は変換を受けたことを表している。*2一方、局所的ゲージ変換の場合は変換は分配できない。つまり、

$$
\Omega(x)(\partial_\mu \psi(x)) \neq \partial'_\mu (\Omega(x) \psi(x)) = \partial_\mu (\Omega(x) \psi(x))
$$

---

*1 抽象的にゲージ変換を G と書くことにすると $G[\partial\psi] = G[\partial]G[\psi]$ ということである。

*2 しかし、大域的変換は座標系に影響を及ぼさないので $x'^\mu = x^\mu$ より $\partial'_\mu = \partial_\mu$ である。

である。[*3] ここで、ゲージ変換と微分が交換するという性質を復活させるために新たに共変微分 $\mathcal{D}_\mu$ を定義しよう。つまり、

$$\Omega(x)(\mathcal{D}_\mu\psi(x)) = \mathcal{D}'_\mu(\Omega(x)\psi(x)) \tag{1}$$

$\mathcal{D}_\mu$ と ∂_μ の差は何らかのベクトルになるので、

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - igA_\mu(x) \tag{2}$$

と定義する。ここで、A_μ はゲージ場と呼ばれる場で、g は結合定数と呼ばれる定数である。[*4] この表式を元に、ゲージ場 A_μ のゲージ変換に対する変換規則を求めよう。式 2 に式 1 を代入すると[*5]

$$\begin{aligned}
&\Omega((\partial_\mu - igA_\mu)\psi) = (\partial_\mu - igA'_\mu)(\Omega\psi) \\
\Leftrightarrow &\Omega\partial_\mu\psi - ig\Omega A_\mu\psi = \partial_\mu\Omega\psi + \Omega\partial_\mu\psi - igA'_\mu\Omega\psi \\
\Leftrightarrow &- ig\Omega A_\mu\psi = \partial_\mu\Omega\psi - igA'_\mu\Omega\psi \\
\Leftrightarrow &- igA_\mu\psi = \Omega^{-1}\partial_\mu\Omega\psi - ig\Omega^{-1}A'_\mu\Omega\psi
\end{aligned}$$

ここでゲージ変換とその逆変換を入れ替えると $\Omega \leftrightarrow \Omega^{-1}, A_\mu \leftrightarrow A'_\mu$ となるので

$$\begin{aligned}
&- igA'_\mu\psi = \Omega\partial_\mu\Omega^{-1}\psi - ig\Omega A_\mu\Omega^{-1}\psi \\
\Leftrightarrow &A'_\mu\psi = \frac{i}{g}\Omega\partial_\mu\Omega^{-1}\psi + \Omega A_\mu\Omega^{-1}\psi \\
\Leftrightarrow &A'_\mu = \frac{i}{g}\Omega\partial_\mu\Omega^{-1} + \Omega A_\mu\Omega^{-1}
\end{aligned}$$

となる。よって、ゲージ変換に対するゲージ場の変換は

$$A'_\mu = \frac{i}{g}\Omega\partial_\mu\Omega^{-1} + \Omega A_\mu\Omega^{-1} \tag{3}$$

と書ける。あるいは

$$A'_\mu = \Omega\left(\frac{i}{g}\partial_\mu + A_\mu\right)\Omega^{-1}$$

とも書ける。

2.3 場の強さ

偏微分の場合、微分同士は交換する。[*6] つまり、

$$\partial_\mu\partial_\nu\psi(x) = \partial_\nu\partial_\mu\psi(x)$$

あるいは $[A, B] = AB - BA$ とすると

$$[\partial_\mu, \partial_\nu]\psi(x) = 0$$

---

*3 積の微分公式を用いれば確認できる。

*4 ここで虚数単位 i が付いているのは今後の話を簡単にするためである。これが気に入らない読者は i を外して計算するとよい。最終的に i 倍だけ異なった計算が得られるはずだ。

*5 式の長さを短くするため引数 x を省略する

*6 シュワルツの定理

が成り立つ。しかし、共変微分の場合、これは一般に成り立たず、

$$\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu \psi(x) \neq \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu \psi(x)$$

あるいは

$$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\psi(x) \neq 0$$

となる。$[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\psi(x)$ はゲージ場の強さに依存して大きくなる。ここで場の強さ $F_{\mu\nu}$ を定義しよう。

$$F_{\mu\nu}\psi(x) \equiv i[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\psi(x)$$

実際に計算すると[*7]

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}\psi &= i[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]\psi \\
&= i(\mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu)\psi \\
&= i(\partial_\mu - igA_\mu)(\partial_\nu - igA_\nu)\psi - i(\partial_\nu - igA_\nu)(\partial_\mu - igA_\mu)\psi \\
&= (i\partial_\mu + gA_\mu)(\partial_\nu\psi - igA_\nu\psi) - (i\partial_\nu + gA_\nu)(\partial_\mu\psi - igA_\mu\psi) \\
&= i\partial_\mu(\partial_\nu\psi - igA_\nu\psi) + gA_\mu(\partial_\nu\psi - igA_\nu\psi) - i\partial_\nu(\partial_\mu\psi - igA_\mu\psi) - gA_\nu(\partial_\mu\psi - igA_\mu\psi) \\
&= i\partial_\mu\partial_\nu\psi + g\partial_\mu(A_\nu\psi) + gA_\mu\partial_\nu\psi - ig^2A_\mu A_\nu\psi - i\partial_\nu\partial_\mu\psi - g\partial_\nu(A_\mu\psi) - gA_\nu\partial_\mu\psi + ig^2A_\nu A_\mu\psi \\
&= i[\partial_\mu, \partial_\nu]\psi + g\partial_\mu(A_\nu\psi) - g\partial_\nu(A_\mu\psi) + gA_\mu\partial_\nu\psi - gA_\nu\partial_\mu\psi - ig^2[A_\mu, A_\nu]\psi \\
&= g(\partial_\mu A_\nu)\psi + gA_\nu\partial_\mu\psi - g(\partial_\nu A_\mu)\psi - gA_\mu\partial_\nu\psi + gA_\mu\partial_\nu\psi - gA_\nu\partial_\mu\psi - ig^2[A_\mu, A_\nu]\psi \\
&= g(\partial_\mu A_\nu)\psi - g(\partial_\nu A_\mu)\psi - ig^2[A_\mu, A_\nu]\psi \\
&= g(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\psi - ig^2[A_\mu, A_\nu]\psi
\end{aligned}$$

よって、ゲージ場の場の強さは

$$F_{\mu\nu} = g(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - ig^2[A_\mu, A_\nu] \tag{4}$$

となる。

2.4 ヤコビ恒等式

代数学においてヤコビ恒等式

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

と呼ばれる恒等式が存在する。これは展開すれば確かめられる。ここの A, B, C に $\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu, \mathcal{D}_\lambda$ を代入し、ψ を付けると

$$[[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu], \mathcal{D}_\lambda]\psi + [[\mathcal{D}_\nu, \mathcal{D}_\lambda], \mathcal{D}_\mu]\psi + [[\mathcal{D}_\lambda, \mathcal{D}_\mu], \mathcal{D}_\nu]\psi = 0$$

場の強さの定義より $[\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] = -iF_{\mu\nu}$ なので

$$[F_{\mu\nu}, \mathcal{D}_\lambda]\psi + [F_{\nu\lambda}, \mathcal{D}_\mu]\psi + [F_{\lambda\mu}, \mathcal{D}_\nu]\psi = 0$$

[*7] 式の長さを短くするため引数 x を省略する

最初の項のみを計算すると

$$\begin{aligned}
[F_{\mu\nu}, \mathcal{D}_\lambda]\psi &= F_{\mu\nu}\mathcal{D}_\lambda\psi - \mathcal{D}_\lambda(F_{\mu\nu}\psi) \\
&= F_{\mu\nu}(\partial_\lambda - igA_\lambda)\psi - (\partial_\lambda - igA_\lambda)(F_{\mu\nu}\psi) \\
&= F_{\mu\nu}\partial_\lambda\psi - \partial_\lambda(F_{\mu\nu}\psi) - igF_{\mu\nu}A_\lambda\psi + igA_\lambda F_{\mu\nu}\psi \\
&= -\partial_\lambda F_{\mu\nu}\psi - ig[F_{\mu\nu}, A_\lambda]\psi
\end{aligned}$$

よって

$$-[F_{\mu\nu}, \mathcal{D}_\lambda] = \partial_\lambda F_{\mu\nu} + ig[F_{\mu\nu}, A_\lambda]$$

元の式に戻すと

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + ig[F_{\mu\nu}, A_\lambda] + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + ig[F_{\nu\lambda}, A_\mu] + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + ig[F_{\lambda\mu}, A_\nu] = 0$$

順序を入れ替えると

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + ig([F_{\mu\nu}, A_\lambda] + [F_{\nu\lambda}, A_\mu] + [F_{\lambda\mu}, A_\nu]) = 0$$

となる。実部と虚部を分けると

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{5}$$

$$[F_{\mu\nu}, A_\lambda] + [F_{\nu\lambda}, A_\mu] + [F_{\lambda\mu}, A_\nu] = 0 \tag{6}$$

となる。

3 $U(1)$ ゲージ理論

3.1 位相変換

局所的 $U(1)$ ゲージ変換に入る前に対応する大域的変換である位相変換を挙げておこう。$U(1)$ 群というのは 1 次元の数*8を変換するユニタリーな数を元とした群である。1 次元の数を変換するユニタリーな数とは絶対値が 1 の複素数、つまり $e^{i\theta}$ である。よって、位相変換は

$$\Omega = e^{i\theta}$$

と書ける。これは、何らかの場 $\psi(x)$ があったときに

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \Omega\psi(x) = e^{i\theta}\psi(x)$$

と変換されるということである。実際、量子力学において波動関数*9に対して位相変換を施しても、確率振幅は不変である。

*8 1 次元の数は単に数だ。2 次元の数は 1×2 の行列だ。

*9 波動関数は場ではないが、波動関数が満たすシュレーディンガー方程式はシュレーディンガー場という場が満たす方程式と同じ形をしている。そして、シュレーディンガー場は位相変換を施しても確率振幅は不変である。

3.2　$U(1)$ ゲージ変換

次に、先ほどの位相変換を局所的ゲージ変換に拡張する。つまり、$U(1)$ ゲージ変換を

$$\Omega = e^{i\theta(x)} \tag{7}$$

とする。式 3 にこれを代入すると

$$\begin{aligned} A'_\mu &= \Omega A_\mu \Omega^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu \Omega)\Omega^{-1} \\ &= e^{i\theta(x)} A_\mu e^{-i\theta(x)} - \frac{i}{g}\left(\partial_\mu e^{i\theta(x)}\right) e^{-i\theta(x)} \\ &= A_\mu - \frac{i}{g}\left(i\partial_\mu \theta(x) e^{i\theta(x)}\right) e^{-i\theta(x)} \\ &= A_\mu + \frac{1}{g}\partial_\mu \theta(x) \end{aligned}$$

となる。これが $U(1)$ ゲージ場の $U(1)$ ゲージ変換に対する変換

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu \theta(x) \tag{8}$$

である。

3.3　場の強さ

式 4 において $U(1)$ ゲージ理論の場合は A_μ と A_ν は可換なので

$$F_{\mu\nu}(x) = g(\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)) \tag{9}$$

となる。

3.4　結合定数の再定義

$U(1)$ ゲージ理論ではゲージ変換は $U(1)$ ゲージ変換しかないので結合定数 g を再定義し消すことができる。つまり、結合定数を再定義した場 $\tilde{A}_\mu$ を

$$\tilde{A}_\mu(x) = \frac{1}{g}A_\mu(x)$$

と再定義すると、ゲージ変換は

$$\tilde{A}_\mu(x) \to \tilde{A}'_\mu(x) = \tilde{A}_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

となり、場の強さは

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu \tilde{A}_\nu(x) - \partial_\nu \tilde{A}_\mu(x)$$

となる。これらは結合定数を $g = 1$ とした式と同じだ。[*10]今後は議論を簡単にするために、再定義した場を A_μ と書くことにする。つまり、ゲージ場のゲージ変換は

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x) \tag{10}$$

[*10] この結合定数の再定義は $g = 1$ となるように場を再定義したにすぎない。

となり、ゲージ場の強さは

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) \tag{11}$$

となる。

3.5 ヤコビの恒等式

式 5 は $U(1)$ ゲージ理論でも成り立つ。また、式 6 は $U(1)$ ゲージ理論において A_μ は可換なので自明である。よって

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \tag{12}$$

4 電荷電流のない Maxwell 方程式の導出

4.1 ラグランジアン密度の決定

電磁場のラグランジアン密度 $\mathcal{L}$ はローレンツ変換、時空並進変換、$U(1)$ ゲージ変換の全てに対して不変でなければならない。ローレンツ変換に対する不変性はローレンツスカラーになっているかどうかで容易に確認できる。[*11]時空並進変換に対する不変性は x^μ のような項がなければよい。問題となるのはゲージ変換[*12]に対する不変性だが、先に定義した場の強さのゲージ変換性を確認してみる。式の長さを短くするため引数 x を省略すると

$$\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} &= \partial'_\mu A'_\nu - \partial'_\nu A'_\mu \\
&= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu \\
&= \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \theta) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \theta) \\
&= \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \theta - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \theta \\
&= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\
&= F_{\mu\nu}
\end{aligned}$$

より、場の強さはゲージ変換に対して不変である。よってラグランジアン密度は[*13]

$$\mathcal{L}(A, \partial A) = a F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

ここで a は任意の実定数である。多くの場合、$a = -\frac{1}{4}$ が取られることが多いので、ここでも $a = -\frac{1}{4}$ とする。

$$\mathcal{L}(A, \partial A) = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \tag{13}$$

4.2 相対論的 Maxwell 方程式の導出

先ほど得たラグランジアン密度

$$\mathcal{L}(A, \partial A) = -\frac{1}{4} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{4} (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho)(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \tag{14}$$

[*11] 添字が上付き下付きで総和を取って打ち消しあっていればよい。

[*12] 今後、$U(1)$ ゲージ変換をゲージ変換と略して呼ぶ。

[*13] 場の二階微分以上は存在しないと場の解析力学の段階で仮定している。また、$(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})^2$ のような項はあってもいいが、これは十分小さい係数が付くことが分かっているのでここでは考えない。詳しくはオイラー=ハイゼンベルク理論で調べてほしい。

と先に導出した場 ϕ のオイラー=ラグランジュ方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = 0$$

を場 A_μ について書きなおした

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\nu} = 0 \tag{15}$$

を用いて相対論的な Maxwell 方程式を導出する。式 15 に式 14 を代入すると第一項は消えるので

$$\frac{1}{4}\partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu A_\nu}((\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho)(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho)) = 0$$

を計算すればよい。展開すると

$$\frac{1}{4}\partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu A_\nu}(\partial^\rho A^\sigma \partial_\rho A_\sigma - \partial^\sigma A^\rho \partial_\rho A_\sigma - \partial^\rho A^\sigma \partial_\sigma A_\rho + \partial^\sigma A^\rho \partial_\sigma A_\rho) = 0$$

添字を付け替えると

$$\frac{1}{2}\partial_\mu \frac{\partial}{\partial \partial_\mu A_\nu}(\partial^\rho A^\sigma \partial_\rho A_\sigma - \partial^\sigma A^\rho \partial_\rho A_\sigma) = 0$$

積の微分公式を用いて展開すると

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\partial_\mu \left(\frac{\partial \partial^\rho A^\sigma}{\partial \partial_\mu A_\nu}\partial_\rho A_\sigma + \partial^\rho A^\sigma \frac{\partial \partial_\rho A_\sigma}{\partial \partial_\mu A_\nu} - \frac{\partial \partial^\sigma A^\rho}{\partial \partial_\mu A_\nu}\partial_\rho A_\sigma - \partial^\sigma A^\rho \frac{\partial \partial_\rho A_\sigma}{\partial \partial_\mu A_\nu} \right) = 0 \\
\Leftrightarrow &\frac{1}{2}\partial_\mu \left(\frac{\partial \partial_\rho A_\sigma}{\partial \partial_\mu A_\nu}\partial^\rho A^\sigma + \partial^\rho A^\sigma \frac{\partial \partial_\rho A_\sigma}{\partial \partial_\mu A_\nu} - \frac{\partial \partial_\sigma A_\rho}{\partial \partial_\mu A_\nu}\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho \frac{\partial \partial_\rho A_\sigma}{\partial \partial_\mu A_\nu} \right) = 0 \\
\Leftrightarrow &\partial_\mu \left(\frac{\partial \partial_\rho A_\sigma}{\partial \partial_\mu A_\nu}\partial^\rho A^\sigma - \frac{\partial \partial_\sigma A_\rho}{\partial \partial_\mu A_\nu}\partial^\rho A^\sigma \right) = 0 \\
\Leftrightarrow &\partial_\mu \left(\delta^\mu_\rho \delta^\nu_\sigma \partial^\rho A^\sigma - \delta^\mu_\sigma \delta^\nu_\rho \partial^\rho A^\sigma \right) = 0 \\
\Leftrightarrow &\partial_\mu \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \right) = 0 \\
\Leftrightarrow &\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0
\end{aligned}$$

これが電荷電流のない相対論的 Maxwell 方程式の第 2 式だ。第 1 式はヤコビの恒等式

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0$$

だ。合わせて書くと

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} &= 0 \\
\partial_\mu F^{\mu\nu} &= 0
\end{aligned}$$

となる。

4.3 3 次元表示の Maxwell 方程式の導出

先に導出した相対論的 Maxwell 方程式を 3 次元で表示してみよう。まずはじめに場の強さテンソルを以下のように時間成分と空間成分に分けることにする。

$$\begin{aligned}
F_{j0} &= E_j \\
F_{jk} &= \varepsilon_{ijk} B_i
\end{aligned}$$

このように定義することで行列表示したときに

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

のように簡潔に表現できる。添字を上げることで

$$\begin{aligned} F^{j0} &= -E_j \\ F^{jk} &= \varepsilon_{ijk} B_i \end{aligned}$$

であり、

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & B_3 & -B_2 \\ -E_2 & -B_3 & 0 & B_1 \\ -E_3 & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

であることがわかる。

4.3.1　第 1 式の 3 次元表示

第 1 式に関して (μ, ν, λ) に入る組み合わせのうち、自明でないものは (i, j, k) と $(0, j, k)$ の 2 通りである。(i, j, k) のとき

$$\begin{aligned} &\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij} = 0 \\ \Leftrightarrow &\varepsilon_{ijk}(\partial_i F_{jk} + \partial_j F_{ki} + \partial_k F_{ij}) = 0 \\ \Leftrightarrow &3\partial_i \varepsilon_{ijk} F_{jk} = 0 \\ \Leftrightarrow &\partial_i \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mjk} B_m = 0 \\ \Leftrightarrow &\partial_i 2\delta_{im} B_m = 0 \\ \Leftrightarrow &\partial_i B_i = 0 \\ \Leftrightarrow &\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{aligned}$$

$(0, j, k)$ のとき

$$\begin{aligned} &\partial_0 F_{jk} + \partial_j F_{k0} + \partial_k F_{0j} = 0 \\ \Leftrightarrow &\boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk}(\partial_0 F_{jk} + \partial_j F_{k0} + \partial_k F_{0j}) = 0 \\ \Leftrightarrow &\boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk}(\partial_0 F_{jk} + \partial_j F_{k0} - \partial_k F_{j0}) = 0 \\ \Leftrightarrow &\boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk}(\partial_0 F_{jk} + \partial_j F_{k0} + \partial_j F_{k0}) = 0 \\ \Leftrightarrow &\boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk}(\partial_0 F_{jk} + 2\partial_j F_{k0}) = 0 \\ \Leftrightarrow &\boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk}(\partial_0 \varepsilon_{mjk} B_m + 2\partial_j E_k) = 0 \\ \Leftrightarrow &\boldsymbol{e}_i \partial_0 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{mjk} B_m + 2\boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k = 0 \\ \Leftrightarrow &\boldsymbol{e}_i \partial_0 2\delta_{im} B_m + 2\boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k = 0 \\ \Leftrightarrow &\partial_0 \boldsymbol{e}_i B_i + \boldsymbol{e}_i \varepsilon_{ijk} \partial_j E_k = 0 \\ \Leftrightarrow &\partial_0 \boldsymbol{e}_i B_i + \boldsymbol{e}_i (\nabla \times \boldsymbol{E})_i = 0 \\ \Leftrightarrow &\partial_0 \boldsymbol{B} + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \\ \Leftrightarrow &\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \end{aligned}$$

4.3.2 第 2 式の 3 次元表示

第 2 式に関して考えるべきなのは $\nu=0$ と $\nu=i$ の 2 通りである。

$\nu=0$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\partial_j F^{j0}=0\\
\Leftrightarrow&\partial_j E_j=0\\
\Leftrightarrow&\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0
\end{aligned}
$$

$\nu=j$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\partial_0 F^{0j}+\partial_i F^{ij}=0\\
\Leftrightarrow&\boldsymbol{e}_j(\partial_0 F^{0j}+\partial_i F^{ij})=0\\
\Leftrightarrow&\boldsymbol{e}_j(-\partial_0 F^{j0}+\partial_i F^{ij})=0\\
\Leftrightarrow&\boldsymbol{e}_j(-\partial_0 E_j+\partial_i\varepsilon_{kij}B_k)=0\\
\Leftrightarrow&-\partial_0\boldsymbol{e}_jE_j+\boldsymbol{e}_j\varepsilon_{kij}\partial_iB_k=0\\
\Leftrightarrow&\partial_0\boldsymbol{e}_jE_j+\boldsymbol{e}_j\varepsilon_{jik}\partial_iB_k=0\\
\Leftrightarrow&\partial_0\boldsymbol{e}_jE_j+\boldsymbol{e}_j(\nabla\times\boldsymbol{B})_j=0\\
\Leftrightarrow&\partial_0\boldsymbol{E}+\nabla\times\boldsymbol{B}=0\\
\Leftrightarrow&\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{B}=0
\end{aligned}
$$

以上より電荷電流のない Maxwell 方程式は

$$
\begin{cases}
\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\
\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{E}=0\\
\nabla\cdot\boldsymbol{E}=0\\
\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{B}=0
\end{cases}
$$

となる。

5 電荷電流のある Maxwell 方程式の導出

5.1 ラグランジアン密度の決定

電荷電流のある Maxwell 方程式の場合は電荷電流のない Maxwell 方程式に相互作用項を追加する必要がある。ラグランジアン密度の相互作用項も前述の通りローレンツ変換、時空並進変換、ゲージ変換の全てに対して不変でなければならない。相互作用項は A_μ の関数であり、ゲージ変換に対して不変であるために少なくとも 1 次でなければならない。このような場合、相互作用項は電荷電流を表すソース J^μ を用いて $A_\mu J^\mu$ と書ける。実際の電荷電流とソースを関連付けるため相互作用項を $-A_\mu J^\mu$ とする。よって全ラグランジアン密度は

$$
\mathcal{L}(A,\partial A,J)=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-A_\mu J^\mu \tag{16}
$$

となる。相互作用項をゲージ変換すると

$$
\begin{aligned}
A_\mu J^\mu \to & (A_\mu + \partial_\mu \theta) J^\mu \\
&= A_\mu J^\mu + (\partial_\mu \theta) J^\mu \\
&= A_\mu J^\mu + \partial_\mu (\theta J^\mu) - \theta (\partial_\mu J^\mu)
\end{aligned}
$$

ここで、第 2 項は全微分項なので作用積分に寄与しない。よって

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

が成り立てば相互作用項はゲージ変換に対して不変である。これがソースのゲージ変換に対する不変性からの要請だ。これを電荷保存則という。

5.2 相対論的 Maxwell 方程式の導出

相互作用項がある場合は 15 式の第 1 項が 0 にならず、

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -J^\nu$$

よって、相対論的 Maxwell 方程式の第 2 式は

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu$$

となる。第 1 式は電荷電流のない場合と同じヤコビの恒等式

$$\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} = 0$$

だ。合わせて書くと

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} + \partial_\lambda F_{\mu\nu} &= 0 \\
\partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu
\end{aligned}
$$

となる。

5.3 3 次元表示の Maxwell 方程式の導出

3 次元表示の際、ソース J^μ は $J^\mu = (\rho, \boldsymbol{j})$ と書かれる。第 1 式は電荷電流がない場合と同じである。第 2 式に関して考えるべきなのは $\nu = 0$ と $\nu = i$ の 2 通りである。
$\nu = 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
& \partial_j F^{j0} = J^0 \\
\Leftrightarrow & \partial_j E_j = \rho \\
\Leftrightarrow & \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho
\end{aligned}
$$

$\nu = j$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij} = J^j \\
\Leftrightarrow &\boldsymbol{e}_j(\partial_0 F^{0j} + \partial_i F^{ij}) = \boldsymbol{e}_j J^j \\
\Leftrightarrow &\boldsymbol{e}_j(-\partial_0 F^{j0} + \partial_i F^{ij}) = \boldsymbol{e}_j J^j \\
\Leftrightarrow &\boldsymbol{e}_j(-\partial_0 E_j + \partial_i \varepsilon_{kij} B_k) = \boldsymbol{j} \\
\Leftrightarrow &-\partial_0 \boldsymbol{e}_j E_j + \boldsymbol{e}_j \varepsilon_{kij} \partial_i B_k = \boldsymbol{j} \\
\Leftrightarrow &\partial_0 \boldsymbol{e}_j E_j + \boldsymbol{e}_j \varepsilon_{jik} \partial_i B_k = \boldsymbol{j} \\
\Leftrightarrow &\partial_0 \boldsymbol{e}_j E_j + \boldsymbol{e}_j (\nabla \times \boldsymbol{B})_j = \boldsymbol{j} \\
\Leftrightarrow &\partial_0 \boldsymbol{E} + \nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} \\
\Leftrightarrow &\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

以上より電荷電流のある Maxwell 方程式は

$$
\begin{cases}
\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{E} = 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho \\
\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}
\end{cases}
$$

となる。また電荷保存則は

$$
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0
$$

となる。