一次不定方程式

小桜 未来

2021 年 12 月 17 日

1　二変数一次不定方程式の解き方

1.1　解法. $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, ax + by = c$

1. ユークリッドの互除法を用いて $ax + by = 1$ の特殊解を求める。
2. 特殊解を一般解に書き換える。
3. $a(cx) + b(cy) = c$ と変形して (cx, cy) を求める。
4. $ax + by = c$ の一般解を求める。

1.2　例題. $\exists x \in \mathbb{Z}, \exists y \in \mathbb{Z}, 7x + 17y = 3$ の標準的な解法

1.2.1　ユークリッドの互除法を用いて $7x + 17y = 1$ の特殊解を求める。

17 を 7 で割った余りと、7 を (17 を 7 で割った余り) で割った余りより、

$$\begin{aligned} 17 &= 2 \times 7 + 3 \\ 7 &= 2 \times 3 + 1 \end{aligned}$$

つまり、

$$\begin{aligned} 3 &= 17 - 2 \times 7 \\ 1 &= 7 - 2 \times 3 \end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 2 \times 3 \\ &= 7 - 2 \times (17 - 2 \times 7) \\ &= 7 - 2 \times 17 + 4 \times 7 \\ &= 5 \times 7 - 2 \times 17 \end{aligned}$$

よって、$7x + 17y = 1$ の特殊解は $(x, y) = (5, -2)$

1.2.2　特殊解を一般解に書き換える。

$7x + 17y = 1$ の解には $7 \times 17 - 17 \times 7 = 0$ より $(x + 17k, y - 7k), k \in \mathbb{Z}$ という自由度が存在する。
よって、$(x, y) = (17k + 5, -7k - 2)$

1.2.3 $7(3x)+17(3y)=3$ と変形して $(3x,3y)$ を求める。

$$7x+17y=1 \Leftrightarrow 7(3x)+17(3y)=3$$

より、$7(3x)+17(3y)=3$ の解は

$$\begin{aligned}&(x,y)=(17k+5,-7k-2)\\ \Rightarrow&(3x,3y)=(17\times 3k+15,-7\times 3k-6)\end{aligned}$$

ここで右辺に自由度である $(17,-7)$ を足し引きして

$$(3x,3y)=(17k+15,-7k-6)$$

1.2.4 $7x+17y=3$ の一般解を求める。

$$\begin{aligned}&7(3x)+17(3y)=3\\ \Rightarrow&(3x,3y)=(17k+15,-7k-6)\end{aligned}$$

の $(3x,3y)$ を (x,y) と置き換えると、

$$\begin{aligned}&7x+17y=3\\ \Rightarrow&(x,y)=(17k+15,-7k-6)\end{aligned}$$

1.3 例題. $\exists x\in\mathbb{Z},\exists y\in\mathbb{Z},7x+17y=3$ の剰余を用いた解法

1.3.1 ユークリッドの互除法を用いて $7x+17y=1$ の特殊解を求める。

同上、$7x+17y=1$ の特殊解は $(x,y)=(5,-2)$

1.3.2 特殊解を一般解に書き換える。

$7x+17y=1$ の解には $(x,y) \mod (17,-7)$ という自由度が存在する。
よって、$(x,y)\equiv(5,-2) \mod (17,-7)$

1.3.3 $7(3x)+17(3y)=3$ と変形して $(3x,3y)$ を求める。

$$7x+17y=1 \Leftrightarrow 7(3x)+17(3y)=3$$

より、$7(3x)+17(3y)=3$ の解は

$$\begin{aligned}&(x,y)\equiv(5,-2) \mod (17,-7)\\ \Rightarrow&(3x,3y)\equiv(15,-6) \mod (17,-7)\end{aligned}$$

1.3.4　$7x+17y=3$ の一般解を求める。

$$\begin{aligned} &7(3x)+17(3y)=3 \\ \Rightarrow &(3x,3y)\equiv(15,-6) \mod (17,-7) \end{aligned}$$

の $(3x,3y)$ を (x,y) と置き換えると、

$$\begin{aligned} &7x+17y=3 \\ \Rightarrow &(x,y)\equiv(15,-6) \mod (17,-7) \end{aligned}$$

2　練習問題

2.1　PROBLEM 1

二変数一次不定方程式 $2021x+2005y=17$ を解け。

2.2　PROBLEM 2

3 で割ると 2 余り、5 で割ると 3 余る最小の自然数を求めよ。

2.3　PROBLEM 3

3 で割ると 2 余り、5 で割ると 3 余り、7 で割ると 2 余る最小の自然数を求めよ。