オイラー=ラグランジュ方程式の導出

小桜 未来

2022 年 12 月 8 日

概要

オイラー=ラグランジュ方程式の導出過程で q と $\dot{q}$ が独立なのか従属なのか、微分と変分は交換可能かなどという問題によって混乱を招いている人が一定数いる。この PDF ではできる限り記号を使い分け、厳密に記述することで混乱を取り除くことを目的としている。

1　記号

質点の運動を $x(t)$ と書くことにしよう。質点の運動は質点の位置と位置の時間微分によっても決定できる。よって、この位置と位置の時間微分をそれぞれ $(x(t), \frac{d}{dt}x(t))$ と書くことにしよう。この $(x(t), \frac{d}{dt}x(t))$ を平面上の点だと考えると $q-\dot{q}$ 平面を考えることができる。この $q-\dot{q}$ 平面上の質点の存在する点が $(x(t), \frac{d}{dt}x(t))$ である。この $\dot{q}$ には時間微分の意味はないことに注意しておこう。

2　オイラー=ラグランジュ方程式

作用 $S[x(t), t_1, t_2]$ はラグランジアン $L(q, \dot{q}, t)$ を用いて以下のように表される。

$$S[x(t), t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)|_{(q,\dot{q})=(x(t), \frac{d}{dt}x(t))} dt \tag{1}$$

ここで $f(x)|_{x=x_0}$ は関数 $f(x)$ に $x = x_0$ を代入したことを表すとする。ここで作用の変分を取ろう。

$$\begin{aligned}
\delta S[x(t), t_1, t_2] &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)|_{(q,\dot{q})=(x(t), \frac{d}{dt}x(t))} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q, \dot{q}, t)|_{(q,\dot{q})=(x(t)+\delta x(t), \frac{d}{dt}(x(t)+\delta x(t)))} - L(q, \dot{q}, t)|_{(q,\dot{q})=(x(t), \frac{d}{dt}x(t))} \right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(L(q, \dot{q}, t)|_{(q,\dot{q})=(x(t)+\delta x(t), \frac{d}{dt}x(t)+\frac{d}{dt}\delta x(t))} - L(q, \dot{q}, t)|_{(q,\dot{q})=(x(t), \frac{d}{dt}x(t))} \right) dt
\end{aligned}$$

これが本来変分の意味するものだ。つまり、汎関数 $F[x(t)]$ の $x(t)$ に対する変分 $\delta F[x(t)]$ とは運動 $x(t)$ を微小変化させたもの $x(t) + \delta x(t)$ による値 $F[x(t) + \delta x(t)]$ と元の運動 $x(t)$ による値 $F[x(t)]$ の差という意味である。$q - \dot{q}$ 平面上で q と $\dot{q}$ は独立であるのでこれは偏微分を用いて以下のように変形できる。

$$\delta S[x(t), t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} \left(\left.\frac{\partial L(q, \dot{q}, t))}{\partial q}\right|_{(q,\dot{q})=(x(t), \frac{d}{dt}x(t))} \delta x(t) + \left.\frac{\partial L(q, \dot{q}, t))}{\partial \dot{q}}\right|_{(q,\dot{q})=(x(t), \frac{d}{dt}x(t))} \frac{d}{dt}\delta x(t) \right) dt \tag{2}$$

ここで δq や $\delta \dot{q}$ などといった量はそもそも存在しないことに注意しよう。変分は質点の運動 $x(t)$ を変化させたものという意味なので、質点以外の座標 $(q, \dot{q})$ に変分という概念は存在しない。この変形は本質的に多変数関数における偏微分の定義

$$df(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} dx + \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} dy$$

と同じだ。これは時に以下のように略記される。

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} dy$$
$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$$

このような略記が誤解を生む原因となっていることに言及しておく。本題に戻る。(2) 式を部分積分しよう。

$$\left[\left.\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}\right|_{(q,\dot{q})=(x(t), \frac{d}{dt}x(t))} \delta x(t) \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left.\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q}\right|_{(q,\dot{q})=(x(t), \frac{d}{dt}x(t))} \delta x(t) - \frac{d}{dt} \left(\left.\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}}\right|_{(q,\dot{q})=(x(t), \frac{d}{dt}x(t))} \right) \delta x(t) \right\} dt$$

ここで変分原理の初期条件 $\delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0$ より、第一項は消える。

$$\int_{t_1}^{t_2} \left.\left\{ \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right\}\right|_{(q,\dot{q})=(x(t), \frac{d}{dt}x(t))} \delta x(t)\ dt$$

ここで $\delta x(t)$ は任意なので

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \left.\left\{ \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}} \right\}\right|_{(q,\dot{q})=(x(t), \frac{d}{dt}x(t))} = 0$$

が成り立つ。以上より、オイラーラグランジュ方程式が導かれる。