相対論の基礎

小桜 未来

2022 年 6 月 11 日

1　相対論的力学の基礎

1.1　ローレンツ変換の構成

真空中の光速度はどのような慣性系から見ても不変であることが実験的に分かっている。これを基礎原理として理論を構築しよう。まず原点から光が放射されるという状況を考える。このとき光速度を c とすると

$$ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

が成り立つ。両辺を二乗すれば

$$c^2t^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

となり、右辺に寄せれば

$$-c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0 \tag{1}$$

となる。これが座標変換に依らないということは、

$$-c^2t'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0$$

が成り立つということである。これを満たすような座標変換、いわゆるローレンツ変換はどのように書けるだろうか？簡単のため、ここでは $y' = y, z' = z$ と置こう。こうすることで

$$-c^2t'^2 + x'^2 + y^2 + z^2 = 0$$

となるので、(1) と比較して

$$-c^2t'^2 + x'^2 = -c^2t^2 + x^2 \tag{2}$$

が成り立つ。ここから具体的な形を求めていこう。ここで、次元を長さに合わせた (ct', x') と (ct, x) は線形変換で結ばれているはずである。なぜなら、逆変換を考えた時、同じ形をしていなくては相対性原理が成り立たないからである。すると、行列を用いて

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{3}$$

と書ける。行列部分がなぜこのような形で書いたのかについて説明しておこう。まず、$ct = x^0, x = x^1$ としてこの式を書き直すと

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0_{\ 0} & \Lambda^0_{\ 1} \\ \Lambda^1_{\ 0} & \Lambda^1_{\ 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

これを行列の積を展開した形で書くと

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_1 x^1 \\ \Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 \end{pmatrix}$$

となる。これは総和記号 Σ を用いて

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma_\nu \Lambda^0{}_\nu x^\nu \\ \Sigma_\nu \Lambda^1{}_\nu x^\nu \end{pmatrix}$$

と書け、さらに

$$x'^\mu = \Sigma_\nu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{4}$$

と書くことができる。このようにまとめて書くことができる点が先ほどの行列をあの形式で書いた意味だ。そしてこの記法にはもう一つ重要な意味がある。それはローレンツ変換を二度施すことでわかる。具体的には

$$x''^\mu = \Sigma_\nu \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu = \Sigma_\nu \Sigma_\lambda \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\lambda x^\lambda$$

となる。ここでわかることは、総和記号は必ず上下セットになった添字の組でのみ現れる。つまり、これは総和記号を外してしまってもなんら問題ないことを表している。実際に (4) で省略すると

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{5}$$

となる。実際にはこのように省略していい理由は別にある。これは変換性によるものだ。つまり、上付き添字の量と下付き添字の量ではローレンツ変換に対する変換則が逆になっている。その結果として、上付き添字と下付き添字で総和を取っていればその部分については行列の積と同じようにスカラーかのようにふるまう。これがこのような略記法を用いてよい理由だ。この略記法のことを Einstein の縮約記法を言う。上付き添字と下付き添字の変換則の違いは後で明確に明らかになる。ここでは一度これを認めて具体的なローレンツ変換の表式を求めることにしよう。元に戻って

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \tag{3}$$

の係数を求めたいのだった。このままでは求めたい値が 4 つなのに対し、方程式が (2) と (3) を合わせて 3 つしかない。これでは係数を決定するためには方程式が足りない。そこで (t', x') は原点から速度 v で運動する慣性系から見た座標系としよう。すると、$t' = t = 0$ のとき $x' = x$ とすれば $x' = 0$ は $x = vt$ と観測されるはずなので

$$\begin{aligned} x' &= \Lambda^1{}_0 ct + \Lambda^1{}_1 x \\ &= \left(-\Lambda^1{}_0 \frac{c}{v}\right)(-vt) + \Lambda^1{}_1 x \\ &= A(-vt + x) \end{aligned}$$

となるはずである。よって、

$$-\Lambda^1{}_0 \frac{c}{v} = \Lambda^1{}_1 \tag{6}$$

が成り立つ。これにより係数の自由度が一つ減り、実際に解くことができる。(3) を (2) に代入すると

$$-\left(\Lambda^0{}_0 ct + \Lambda^0{}_1 x\right)^2 + \left(\Lambda^1{}_0 ct + \Lambda^1{}_1 x\right)^2 = -c^2t^2 + x^2$$

まとめると

$$\begin{cases} -(\Lambda^0{}_0)^2 + (\Lambda^1{}_0)^2 = -1 \\ -\Lambda^0{}_0\Lambda^0{}_1 + \Lambda^1{}_0\Lambda^1{}_1 = 0 \\ -(\Lambda^0{}_1)^2 + (\Lambda^1{}_1)^2 = 1 \end{cases} \tag{7}$$

(7) の第二式の第一項を右辺に移動して二乗すると

$$\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 \left(\Lambda^0{}_1\right)^2 = \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 \left(\Lambda^1{}_1\right)^2$$

(7) の第一式と第三式を用いて

$$\left(1 + (\Lambda^1{}_0)^2\right) \left(-1 + (\Lambda^1{}_1)^2\right) = \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 \left(\Lambda^1{}_1\right)^2$$

展開して整理すれば

$$-1 + \left(\Lambda^1{}_1\right)^2 - \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 = 0$$

(6) を代入して

$$-1 + \frac{c^2}{v^2} \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 - \left(\Lambda^1{}_0\right)^2 = 0$$

これを解けば

$$\Lambda^1{}_0 = \pm \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

これを (6) に代入して

$$\Lambda^1{}_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

(7) の第三式より

$$\Lambda^0{}_1 = \pm \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

(7) の第一式より

$$\Lambda^0{}_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

以上より

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & \pm \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \\ \pm \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \end{pmatrix}$$

この段階では符号が明らかでない。これは古典論との対応関係から符号を決定しよう。これを行列形式で書けば

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & \pm \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \\ \pm \frac{v}{c} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

係数 c を除去すると

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & \pm \frac{v}{c^2} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \\ \pm \frac{v}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & \pm \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

$v \ll c$ とすると $\frac{v}{c} \ll 1$ より

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 0 \\ \pm v & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

これは古典力学において

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

となることが分かっている。これと、他の符号の整合性を考えると

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & -\frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \\ -\frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \end{pmatrix}$$

となる。ここで

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

とすれば

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

となり、さらに

$$\beta = \frac{v}{c}$$

とすれば

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

と表せる。

1.2 時空回転変換

ローレンツ変換の表現行列

$$\Lambda^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & -\frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \\ -\frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \end{pmatrix}$$

は空間回転変換の表現行列

$$R^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

あるいは

$$R^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}} & \frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}} \\ -\frac{r\sin\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}} & \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta}} \end{pmatrix}$$

と書き直して得られる

$$R^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

さらには

$$R^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y}{x}^2}} & \frac{y}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y}{x}^2}} \\ -\frac{y}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{y}{x}^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y}{x}^2}} \end{pmatrix}$$

と極めて類似している。この類似性を見るには時間 [T] を $\bar{t} = -it$、速度 [L/T] を $\bar{v} = -\frac{v}{i} = iv$ という風に置き換えればよい。[*1] このような時間 $\bar{t}$ を虚時間という。ローレンツ変換の表式

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & -\frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \\ -\frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

で $t \to i\bar{t},\ v \to -i\bar{v}$ と置き換えると $\frac{1}{i} = -i$ より

$$\begin{pmatrix} ic\bar{t}' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\bar{v}}{c})^2}} & i\frac{\bar{v}}{c}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\bar{v}}{c})^2}} \\ i\frac{\bar{v}}{c}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\bar{v}}{c})^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\bar{v}}{c})^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ic\bar{t} \\ x \end{pmatrix}$$

係数 i を除去すると

$$\begin{pmatrix} c\bar{t}' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\bar{v}}{c})^2}} & \frac{\bar{v}}{c}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\bar{v}}{c})^2}} \\ -\frac{\bar{v}}{c}\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\bar{v}}{c})^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\bar{v}}{c})^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ x \end{pmatrix}$$

$\bar{\beta} = \frac{\bar{v}}{c}$ とすると

$$\begin{pmatrix} c\bar{t}' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\beta}^2}} & \frac{\bar{\beta}}{\sqrt{1+\bar{\beta}^2}} \\ -\frac{\bar{\beta}}{\sqrt{1+\bar{\beta}^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\bar{\beta}^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ x \end{pmatrix}$$

ここで $\arctan\bar{\beta} = \omega$ とすると $\bar{\beta} = \tan\omega$ より

$$\begin{pmatrix} c\bar{t}' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\omega}} & \frac{\tan\omega}{\sqrt{1+\tan^2\omega}} \\ -\frac{\tan\omega}{\sqrt{1+\tan^2\omega}} & \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\omega}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ x \end{pmatrix}$$

書き換えれば

$$\begin{pmatrix} c\bar{t}' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\omega}{\sqrt{\sin^2\omega+\cos^2\omega}} & \frac{\sin\omega}{\cos\omega}\frac{\cos\omega}{\sqrt{\sin^2\omega+\cos^2\omega}} \\ -\frac{\sin\omega}{\cos\omega}\frac{\cos\omega}{\sqrt{\sin^2\omega+\cos^2\omega}} & \frac{\cos\omega}{\sqrt{\sin^2\omega+\cos^2\omega}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ x \end{pmatrix}$$

$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1$ より

$$\begin{pmatrix} c\bar{t}' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\bar{t} \\ x \end{pmatrix}$$

となって虚時間中のローレンツ変換

$$\bar{\Lambda}^{\mu}_{\ \nu} = \begin{pmatrix} \cos\omega & \sin\omega \\ -\sin\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$

は時空上の回転を表しているということが分かる。

[*1] ここで光速度 c は置き換えない。これは光速度を基準としているためだ

1.3　ベクトルの変換則

我々は元々

$$-c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$$

という数式が座標変換に対して不変であるという前提を元にローレンツ変換を導いた。ここで左辺を ds^2 と書くことにしよう。つまり

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

3 次元空間での回転の際不変だったものは二点間の距離、あるいはその二乗だ。つまり、これに対応するものが 4 次元時空上での ds^2 だ。これを線素と呼び $d\boldsymbol{s} \cdot d\boldsymbol{s}$ とも書く。この $d\boldsymbol{s}$ のことを線素ベクトルと言う。線素ベクトルもベクトルなので、$d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e}_\mu dx^\mu$ のように展開できるはずである。これを元に ds^2 を計算すると

$$ds^2 = d\boldsymbol{s} \cdot d\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{e}_\mu dx^\mu) \cdot (\boldsymbol{e}_\nu dx^\nu) = (\boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu) dx^\mu dx^\nu$$

ここで

$$g_{\mu\nu} = \boldsymbol{e}_\mu \cdot \boldsymbol{e}_\nu$$

と置くと

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

と書ける。この $g_{\mu\nu}$ のことを計量テンソルという。今の場合、計量テンソルは

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。このような計量テンソルを特に $\eta_{\mu\nu}$ と書く。
線素のローレンツ変換に対する不変性から上付き添字と下付き添字の変換の違いを確認しよう。現時点で上付き添字の変換則は分かっている。それは (5) より

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{5}$$

のように変換される。下付き添字に関する変換則は線素の不変性より導ける。つまり

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

これを座標変換すると $ds^2 = ds'^2$ より

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta'_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\rho dx^\sigma$$

添字を付け替えて

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta'_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu dx^\mu dx^\nu$$

比較すると

$$\eta_{\mu\nu} = \eta'_{\rho\sigma} \Lambda^\rho{}_\mu \Lambda^\sigma{}_\nu$$

であることが分かる。両辺に逆ローレンツ変換 $(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}$ と $(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\beta}$ を掛けると $\Lambda^{\mu}{}_{\lambda}(\Lambda^{-1})^{\lambda}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ より

$$\begin{aligned}
\eta_{\mu\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\beta} &= {\eta'}_{\rho\sigma}\Lambda^{\rho}{}_{\mu}\Lambda^{\sigma}{}_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\beta} \\
&= {\eta'}_{\rho\sigma}\delta^{\rho}{}_{\alpha}\delta^{\sigma}{}_{\beta} \\
&= {\eta'}_{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

計量テンソルの定義に戻れば

$$(\boldsymbol{e}_{\mu} \cdot \boldsymbol{e}_{\nu})(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\beta} = ({\boldsymbol{e}'}_{\alpha} \cdot {\boldsymbol{e}'}_{\beta})$$

となり

$$\boldsymbol{e}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{e}_{\nu}(\Lambda^{-1})^{\nu}{}_{\beta} = {\boldsymbol{e}'}_{\alpha} \cdot {\boldsymbol{e}'}_{\beta}$$

より

$${\boldsymbol{e}'}_{\alpha} = \boldsymbol{e}_{\mu}(\Lambda^{-1})^{\mu}{}_{\alpha}$$

であることが分かる。これが下付き添字の変換規則だ。これにより、上付き添字と下付き添字は異なる、逆の変換をするということが明らかになる。上付き成分のことを反変成分、下付き成分のことを共変成分といい、特にベクトルの場合は反変ベクトル、共変ベクトルという。