非相対論的電磁気学の変分問題

小桜 未来

2022 年 5 月 31 日

非相対論的電磁気学の作用積分は以下の形で表される。

$$S[\phi, \boldsymbol{A}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\frac{\varepsilon_0}{2} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E} - \frac{1}{2\mu_0} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{B} - \rho\phi + \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \right]$$

ここで電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

のように表される。作用の変分を取ると $\delta(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}) = 2(\boldsymbol{A} \cdot \delta\boldsymbol{A})$ に注意して

$$\delta S[\phi, \boldsymbol{A}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \delta\boldsymbol{E} - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \cdot \delta\boldsymbol{B} - \rho\delta\phi + \boldsymbol{j} \cdot \delta\boldsymbol{A} \right]$$

となる。電場と磁場の変分にそれぞれの表式を代入すると

$$\delta S[\phi, \boldsymbol{A}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \delta \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \right) - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \delta\boldsymbol{A}) - \rho\delta\phi + \boldsymbol{j} \cdot \delta\boldsymbol{A} \right]$$

第一項を展開して

$$\delta S[\phi, \boldsymbol{A}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[-\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \delta \left(\nabla\phi \right) - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \delta \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \delta\boldsymbol{A}) - \rho\delta\phi + \boldsymbol{j} \cdot \delta\boldsymbol{A} \right]$$

変分と微分を入れ替えると

$$\delta S[\phi, \boldsymbol{A}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[-\varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \nabla\delta\phi - \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \delta\boldsymbol{A}) - \rho\delta\phi + \boldsymbol{j} \cdot \delta\boldsymbol{A} \right]$$

ところで、ベクトル解析の公式より以下が成り立つ。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\boldsymbol{A}\phi) &= (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\phi + (\boldsymbol{A} \cdot \nabla\phi) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) &= \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

これらの両辺を時間と空間で積分すると

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x [\nabla \cdot (\boldsymbol{A}\phi)] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x (\nabla \cdot \boldsymbol{A})\phi + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x (\boldsymbol{A} \cdot \nabla\phi) \\ \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \right] &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{B} \right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left(\boldsymbol{A} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

左辺は全微分項になっているのでガウスの定理等を用いて

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\infty} d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{A}\phi) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\phi + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x (\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^3x [\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}]_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B}\right) + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left(\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)$$

これを変形すると

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x (\boldsymbol{A}\cdot\nabla\phi) = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\infty} d\boldsymbol{S}\cdot(\boldsymbol{A}\phi) - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\phi$$

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left(\boldsymbol{A}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3x [\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left(\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B}\right)$$

となって部分積分の表式が得られる。これを先ほどの式に適用して部分積分を行うと

$$\begin{aligned}\delta S[\phi,\boldsymbol{A}] = -\varepsilon_0 \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\infty} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{E}\delta\phi - \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{A}\right]_{t_1}^{t_2} \\ + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}\delta\phi + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\delta\boldsymbol{A}) - \rho\delta\phi + \boldsymbol{j}\cdot\delta\boldsymbol{A}\right]\end{aligned}$$

ここで、第一項は表面項となり 0 で、第二項は変分の初期条件より 0 となる。よって

$$\delta S[\phi,\boldsymbol{A}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}\delta\phi + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\delta\boldsymbol{A}) - \rho\delta\phi + \boldsymbol{j}\cdot\delta\boldsymbol{A}\right]$$

となる。変分をまとめると

$$\delta S[\phi,\boldsymbol{A}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[(\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E} - \rho)\delta\phi + \left(\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{j}\right)\cdot\delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\delta\boldsymbol{A})\right]$$

ここでベクトル解析の公式

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

より

$$\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

が成り立つので、第三項は

$$-\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\delta\boldsymbol{A}) = -\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\delta\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) - \frac{1}{\mu_0}\delta\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$$

となる。しかし、この式の右辺第一項は全微分項となっているので先ほどと同様ガウスの定理により表面項となって 0 になる。よって

$$\delta S[\phi,\boldsymbol{A}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[(\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E} - \rho)\delta\phi + \left(\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{j}\right)\cdot\delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{\mu_0}\delta\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})\right]$$

整理すると

$$\delta S[\phi,\boldsymbol{A}] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-\infty}^{\infty} d^3x \left[(\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E} - \rho)\delta\phi + \left(\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B} + \boldsymbol{j}\right)\cdot\delta\boldsymbol{A}\right]$$

以上と最小作用の原理 $\delta S = 0$ より

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} - \rho = 0$$
$$\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{j} = 0$$

通常の形に直せば

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$$
$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \boldsymbol{B} - \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{j}$$

となってマクスウェル方程式が得られる。