Probabilidad y Estadística (m) / Probabilidad (d)

Marina Valdora

Departamento de Matemática / Instituto de Cálculo

22 de marzo de 2024

Introducción

- La probabilidad es una rama de la matemática motivada por el estudio del azar y la incertidumbre
- Como en otras ramas de la matemática, distinguimos tres aspectos:
  - sitema axiomático
  - intuición
  - aplicaciones

Experimentos aleatorios

Un experimento aleatorio es una acción que genera un resultado, pero no podemos preveer de antemano cuál será ese resultado.

Ejemplos

- Tirar un dado
- Tirar dos dados: uno rojo y uno negro
- Tirar un dado hasta que salga un seis
- Observar el tiempo de duración de una lamparita
- Contar la cantidad de llamadas que llegan a un call center en una hora

Idea intuitiva de la probabilidad

- **Idea intuitiva:** La probabilidad de que ocurra cierto resultado es p si, al repetir el experimento una gran cantidad de veces la proporción de veces que ocurre ese resultado es p.

Otro ejemplo de experimento aleatorio: Paseo al azar en $\mathbb{Z}$

Consideremos el experimento de observar una particula moviéndose al azar en el conjunto $\mathbb{Z}$ de la siguiente manera

- Comenzando en el origen, se lanza una moneda, si sale cara se mueve un lugar hacia la derecha, si sale ceca se mueve un lugar hacia la izquierda. Se repite n veces.

No podemos saber dónde estará la partícula a tiempo n, pero podemos anotar el espacio de posibles resultados del experimento: $\{-1, 1\}^n$.

Definición 1

Dado un experimento, llamamos *espacio muestral* al conjunto Ω formado por todos los posibles resultados del experimento.

Ejemplos de espacios muestrales

1. Si el experimento consiste en lanzar un dado, tenemos
$$\Omega_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \ .$$

2. Si lanzamos un dado rojo y otro negro,
$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2) : x_i \in \mathbb{N} \ , 1 \leq x_1, x_2 \leq 6\}$$
donde la primer componente indica el resultado del dado rojo y la segunda componente indica el resultado del dado negro.
3. Si contamos el número de lanzamientos hasta la primera vez que observamos un seis,
$$\Omega_3 = \{1, 2, 3, \cdots\} \ .$$

4. Observamos el tiempo de duración de una lamparilla.

$$\Omega_5 = [0, +\infty) \ .$$

5. Considere el número de llamadas telefónicas diarias por un call center en un dia.

$$\Omega_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\} \ .$$

Definición de evento

Definición 2

Un evento (o suceso) es un conjunto formado por algunos de los resultados posibles del experimento. En otras palabras, un evento es un subconjunto A incluido en el espacio muestral Ω.

Ejemplos de eventos

1. Exp: lanzar un dado.
   A : el resultado del lanzamiento es par
   $$A = \{2, 4, 6\}\ .$$
2. Exp: lanzar dos dados: uno rojo y uno verde.
   A : la suma de los resultados es 5
   $$A = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$$
3. Exp: contar la cantidad de lanzamientos de un dado hasta que sale 6
   A : el primer 6 sale antes de a 5ta tirada
   $$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

Ejemplos de eventos

4. Exp: Observar el tiempo de duración de una lamparita.
   A : la lamparita dura entre 8 y 10 horas
   $$A = [8, 10]$$
5. Exp: Contar el número de llamadas recibidas por un call center en un dia.
   A : se recibieron mas de 10 llamadas
   $$A = \{x \in \mathbb{Z} / x > 10\}$$

Definición de eventos elementales

Definición 3

Llamamos eventos elementales a aquellos constituídos por un único elemento. Es decir, A se dice elemental si

$$A = \{a\}\ , \text{para algún } a \in \Omega\ .$$

Sean A y B dos eventos de Ω definimos la unión como

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

Ejemplo: Consideremos el siguiente juego de azar. Se tiran dos dados, uno rojo y uno negro. Si en el rojo sale un número mayor a tres se ganan 2 pesos, si en el negro sale par se gana 1 peso. Si ocurren ambas cosas se ganan 3 pesos, si no ocurre ninguna se pierden 2 pesos. Consideremos el evento $E =$ se gana al menos un peso.

$$E = A \cup C$$

$A =$
$B =$

Sean A y B dos eventos de Ω definimos la intersección como

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\} \ .$$

Ejemplo: Se tiran dos dados, uno rojo y uno negro. Si en el rojo sale un número mayor a tres se ganan 2 pesos, si en el negro sale par se gana 1 peso. Si ocurren ambas cosas se ganan 3 pesos, si no ocurre ninguna se pierden 2 pesos. Consideremos el evento $E =$ se ganan 3 pesos.

$$E = A \cap C$$

$A =$
$B =$

Sean A un evento de Ω definimos su complemento como

$$A^c = \{x : x \notin A\} \ .$$

Ejemplo: Se tiran dos dados, uno rojo y uno negro. Si en el rojo sale un número mayor a tres se ganan 2 pesos, si en el negro sale par se gana 1 peso. Si ocurren ambas cosas se ganan 3 pesos, si no ocurre ninguna se pierden 2 pesos. Consideremos el evento $E =$ se pierden 2 pesos

Propiedades de la unión e intersección

Lema 4

1- Asosociatividad:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)\,, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)\,.$$

2- Distributividad:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,, \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)\,.$$

3- Leyes de De Morgan:

$$\left(\bigcup_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha} A_\alpha^c\,, \quad \left(\bigcap_{\alpha} A_\alpha\right)^c = \bigcup A_\alpha^c\,.$$

4- $(A^c)^c = A\,, \quad A \cup \emptyset = A\,, \quad A \cap \emptyset = \emptyset\,, A \cap \Omega = A\,.$

Definición de ventos excluyentes

Definición 5

Dos eventos A y B se dicen disjuntos o excluyentes si

$$A \cap B = \emptyset \ .$$

Ejemplo: En el experimento de tirar un dado, si $A =$ sale par y $B =$ sale 5 son excluyentes

- R es un lenguaje y entorno muy utilizado en estadística.
- El sitio web de R es: www.r-project.org
- R studio es un entorno amigable para usar R.
- R y Rstudio se pueden descargar del siguiente link: https://posit.co/download/rstudio-desktop/
- Acá pueden ver un video introductorio a R y Rstudio: https://www.youtube.com/watch?v=5UDTAnBhF9E

Experimentos en R

```
> # 1. tirar un dado
> sample(1:6,1)
[1] 2
> # 2. tirar dos dados
> sample(1:6,2,replace=T)
[1] 5 2
> # 3. tirar un dado hasta obtener el primer seis
> a<-0
> tiros<-sample(1:6,1)
> while (a<6){
+   a<-sample(1:6,1)
+   tiros<-c(tiros,a)}
> numtiros<-length(tiros)
> tiros
[1] 4 4 5 6
> numtiros
[1] 4
```

Teoría axiomática de las probabilidades. Ingredientes

La teoría de probabilidades brinda el marco teórico que permite formalizar la noción intuitiva de probabilidad.

Por razones técnicas, no siempre se puede asignarle probabilidad a todos los eventos asociados al experimento.

Vamos entonces a trabajar con los siguientes ingredientes:

1. Ω espacio muestral: conjunto con todos los posibles resultados del experimento.
2. Clase de conjuntos sobre los cuales definir una función de probabilidad.
3. Función de probabilidad.

Álgebra de conjuntos. Definición

Dado Ω, recordemos que

$$\mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subseteq \Omega\}$$

la familia de partes de Ω.

Notemos que si Ω es finito y consta de N elementos, entonces $\mathcal{P}(\Omega)$ también es finito y tiene 2^N elementos .

Definición 6

Dado una espacio muestral Ω, un álgebra $\mathcal{A}$ en Ω es una familia formada por eventos de Ω ($\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$), verificando las siguientes propiedades:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$.
2) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces, $A^c \in \mathcal{A}$.
3) Si $A, B \in \mathcal{A}$, entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Álgebra de conjuntos. Propiedades

Propiedades.

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$. Dem: $\emptyset = \Omega^c$.
2. $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A \cap B \in \mathcal{A}$. Dem: $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$.
3. $A, B \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; A - B \in \mathcal{A}$. Dem: $A - B = A \cap B^c$.
4. Para todo $n \geq 2$, vale que $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A} \;\Rightarrow\; \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$. Dem: inducción.

$\square$

Álgebra de conjuntos. ¿Qué pasa con la unión numerable?

Supongamos ahora que tenemos una cantidad numerable de conjuntos $(A_i)_{i\geq 1}$, cada uno de ellos en el álgebra $\mathcal{A}$. Podemos garantizar que la unión (numerable) de estos conjuntos también está en la clase $\mathcal{A}$? Es decir, podemos garantizar que

$$\bigcup_{i\geq 1} A_i \ \in \mathcal{A}?$$

La respuesta es NO. Ver contraejemplo en apunte de Sued o diapositivas de Szretter.

Unión numerable de Eventos. Ejemplo

¿Por qué querríamos incluir las uniones numerables entre los eventos a los que queremos poder asignarles probabilidades?

Ejemplo 1.1

Al contar el número de lanzamientos de un dado hasta obtener el primer seis, claramente debemos ser capaces de calcular las probabilidades de los eventos elementales $\{1\}, \{2\}, \ldots$. *También queremos ser capaces de calcular la probabilidad del evento*
C : *se tarda una cantidad impar de tiros hasta obtener el primer seis*

$$C = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{2i - 1\},$$

que es una unión numerable de eventos.

Definición de σ-álgebra

Definición 7

Dado una espacio muestral Ω, una σ-álgebra en Ω es una familia $\mathcal{F}$ formada por eventos de Ω, que verifica las siguientes propiedades:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$.
2) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces, $A^c \in \mathcal{F}$.
3) Si $A_i \in \mathcal{F}$ para $i \geq 1$, entonces $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Espacios de probabilidad. Definición

Definición 8

Llamamos espacio de probabilidad a una terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde Ω es un conjunto, $\mathcal{F}$ es una $\sigma-$ álgebra en Ω y P es una función de probabilidad, es decir una función

$$P\colon \mathcal{F} \to [0,1]$$

que verifca las siguientes propiedades:

1- $P(\Omega) = 1$.

2- σ-aditividad: Dada una sucesión de eventos $(A_i)_{i\geq 1}$, $A_i \in \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos, se tiene

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\ .$$

Propiedades de la probabilidad

Lema 9

$P(\emptyset) = 0.$

Demostración.

Como el $\emptyset$ es disjunto consigo mismo, $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, la sucesión $\emptyset, \emptyset, \emptyset, \ldots$ es disjunta. Luego

$$P(\emptyset) = P(\emptyset \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \cdots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\emptyset)$$

pero esta igualdad sólo puede ser válida si $P(\emptyset) = 0.$ $\square$

Propiedades de la probabilidad

Lema 10

Aditividad finita: Si $(A_i)_{1\leq n}$ *son eventos disjuntos dos a dos* ($A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$), *entonces*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\ .$$

Demostración.

Definimos $A_i = \emptyset\ \forall i > n$, entonces
$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(A_i\right)$. $\square$

Propiedades de la probabilidad

Lema 11

$P(A^c) = 1 - P(A)$.

Demostración.

Uso el Lema ??

$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) \Rightarrow P(A^c) = 1 - P(A)$

$\square$

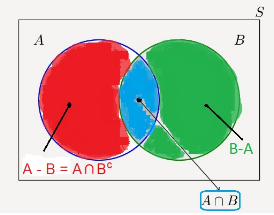
Lema 12

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Propiedades de la probabilidad

Demostración.

Observemos que valen las uniones disj



$$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$$
$$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$
$$A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$$

Por la aditividad finita de P, resulta

$$P(A) = P(A \cap B^c) + P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \cap B^c) + P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= P(A) + P(A^c \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

$\square$

Propiedades de la probabilidad: monotonía

Lema 13

Si $E \subset F$, entonces $P(F - E) = P(F) - P(E)$; en particular, tenemos que $P(E) \leq P(F)$.

Demostración.

Descomponemos $F = E \cup (F - E)$ (unión disjunta) y usamos la aditividad finita:

$$P(F) = P(E) + P(F - E)$$

. $\square$

Propiedades de la probabilidad: Continuidad

Lema 14

Si tenemos eventos creciente $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \cdots$, *entonces*

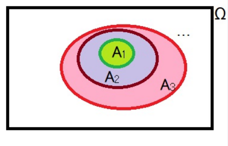
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)\,.$$

Si tenemos eventos decrecientes $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots$, *entonces*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(E_n)\,.$$

Propiedades de la probabilidad: Continuidad

Demostración.



$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i &= A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_2) \cup \cdots \\ &= A_1 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_{i+1} - A_i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) &= P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} P(A_{i+1} - A_i) \\ &= P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} [P(A_{i+1}) - P(A_i)] \,(\text{ por Lema } \mathbf{??}\ ) \\ &= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} [P(A_{i+1}) - P(A_i)] \ \ (\text{serie telescop}) \\ &= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} [P(A_n) - P(A_1)] = \lim_{n\to\infty} P(A_n)\end{aligned}$$

Para las familias decrecientes, tomar complementos y usar este resultado (ejercicio). □

Propiedades de la probabilidad: $\sigma-$ subaditividad

Lema 15

$$P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \;\leq\; \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)\;.$$

Demostración.

Cualquier union $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ puede escribirse como una unión de conjuntos disjuntos: eliminando de A_i la parte de A_i que ya está contenida en un A_j "anterior".

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(A_i - \bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)\right) \underbrace{=}_{\text{(disj)}} \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i - \bigcup_{j<i} A_j\right)$$

$$\underbrace{\leq}_{\text{(monot)}} \sum_{i\geq 1} P\left(A_i\right)$$

$\square$

Espacios muestrales finitos o numerables

- En estos espacios todo evento puede ser pensado como una unión finita o numerable de eventos elementales
- Por lo tanto, por aditividad o σ-aditividad, tenemos que la probabilidad de un evento es la suma de la probabilidad de cada uno de sus elementos

Para todo evento A se tiene

$$A = \bigcup_{a_i \in A} \{a_i\} \ ,$$

donde los conjuntos $\{a_i\}$ son disjuntos.
Como Ω es a lo sumo numerable, A también lo es, entonces

$$P(A) = \sum_{a_i \in A} P(\{a_i\}) \ .$$

Espacios equiprobables

- **Espacios equiprobables:** Son espacios muestrales en los que todos los eventos elementales tienen la misma probabilidad
- **Ejemplo**: Tirar un dado.
  - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Si el dado está equilibrado, $P(\{i\}) = c$ para $i = 1, \ldots, 6$.
  - ¿cuál debe ser el valor de la constante? Como la probabilidad total del espacio debe ser uno, cada uno de los valores debe tener probabilidad igual a $1/6$.

Probabilidad de eventos elementales en espacios equiprobables

En general, sea$\Omega = \{a_1, \cdots, a_N\}$ el espacio muestral. Si todos los resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir, tenemos que

$$P(\{a_i\}) = c, \quad \text{para } i = 1, \ldots, N\ .$$

Como la probabilidad total del espacio debe valer uno, tenemos que

$$1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{N} P(\{a_i\}) = N\, c\ , \tag{1}$$

de donde deducimos que $c = 1/N$. Tenemos entonces el siguiente resultado.

Lema 16

En un espacio equiprobable $\Omega = \{a_1, \cdots, a_N\}$, tenemos que

$$P(\{a_i\}) = \frac{1}{N} \text{ para todo } i = 1, \ldots, N\ .$$

Probabilidad en espacios equiprobables

Recordemos que si $A = \{a_{i_1}, \cdots, a_{i_m}\}$, entonces

$$P(A) = \sum_{j=1}^{m} P(a_{i_j}) \ .$$

En el caso equiprobables, tenemos que $P(a_i) = 1/N$ para todo i. Tenemos entonces que $P(A) = m/N$.

Lema 17

Para espacios equiprobables tenemos que la probabilidad de cada evento se calcula mediante la fórmula

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\textit{cantidad de casos favorables}}{\textit{total de casos}} \ ,$$

donde $\#A$ indica el cardinal de A, es decir, la cantidad de elementos de A.

Ejemplo

Ejemplo 18

Elegimos una permutación de los dígitos $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ al azar entre todas las disponibles. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezca el número "1984"(como el nombre de la novela de Orwell) escrito en forma consecutiva?

Definimos el siguiente espacio muestral
$\Omega = \{\text{permutaciones de } \{0, 1, 2, \ldots, 9\}\}$. El espacio es equiprobable.
$\#\Omega = 10!$

Definimos el evento

$$A_{1984} = \{\text{permutaciones de los 7 símbolos } \{0,\underline{1984},2,3,5,6,7\}\}.$$

Luego $\#A_{1984} = 7!$, y tenemos

$$P(A_{1984}) = \frac{\#\text{casos favorables}}{\#\text{casos posibles}} = \frac{7!}{10!} = \frac{1}{10 \cdot 9 \cdot 8} \approx 0{,}00139$$

Recordar que la probabilidad es el límite de las frecuencias relativas
Podemos aproximar la probabilidad de A calculando la frecuencia relativa de A en N repeticiones del experimento
Se tiran dos dados.
a) Calcular la probabilidad de que la suma sea par
b) Aproximar la probabilidad de que la suma de los resultados sea par, mediante la frecuencia relativa en N=10000 repeticiones del experimento.
a) Sabemos que

$$\Omega = \{(1,1),\ldots,(1,6),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}$$

$\#\Omega = 36$
$B =$ la suma es par; $\#B = 18$
Entonces
$P(B) = 0{,}5$

b)

```
> ans <- 0
> N <- 10000
> for(i in 1:N){
+   r1 <- sample(1:6,2,replace=T)
+   ans[i] <- sum(r1)/2 == round(sum(r1)/2 )
+ }
> mean(ans)
[1] 0.5046
```

a) con ayuda de R

```
> Omega <- expand.grid(1:6, 1:6)
> espar <- rowSums(Omega)/2 == round(rowSums(Omega)/2)
> mean(espar)
[1] 0.5
## podemos chequear
> cbind(Omega, rowSums(Omega), espar)
   Var1 Var2 rowSums(Omega) espar
1     1    1              2  TRUE
2     2    1              3 FALSE
3     3    1              4  TRUE
4     4    1              5 FALSE
5     5    1              6  TRUE
6     6    1              7 FALSE
7     1    2              3 FALSE
8     2    2              4  TRUE
9     3    2              5 FALSE
```

Definir una función que aproxime mediante una simulación la probabilidad de que la suma sea par si se tiran n dados

```
> probSumaPar <- function(n) {
+   ans <- 0
+   N <- 10000
+   for (i in 1:N) {
+     r1 <- sample(1:6, n, replace = T)
+     ans[i] <- sum(r1) / 2 == round(sum(r1) / 2)
+   }
+   mean(ans)
+ }
>
> probSumaPar(8)
[1] 0.5047
```

Funciones en R

Definir una función que aproxime mediante una simulación la probabilidad de que la suma sea multiplo de k si se tiran n dados

```
> probSumaMultk <- function(n, k) {
+   ans <- 0
+   N <- 10000
+   for (i in 1:N) {
+     r1 <- sample(1:6, n, replace = T)
+     ans[i] <- sum(r1) / k == round(sum(r1) / k)
+   }
+   mean(ans)
+ }
>
> probSumaMultk(5, 3)
[1] 0.3321
> probSumaMultk(5, 20)
[1] 0.0809
```

σ–álgebra generada

¿Cómo se puede construir una $\sigma-$álgebra? Una posibilidad es comenzar con una colección de conjuntos simples para los cuales sea fácil o natural calcular o determinar la probabilidad. Luego ampliamos esta familia de conjuntos lo suficiente como para obtener una $\sigma-$álgebra. Más precisamente, se puede utilizar el siguiente principio de construcción.

Lema 19

Si $\Omega \neq \emptyset$ y $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ es arbitraria, entonces existe una única menor σ–algebra $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$ en Ω tal que $\mathcal{F} \supset \mathcal{G}$.

Definición 20

$\mathcal{F}$ se denomina la *σ–álgebra generada por* $\mathcal{G}$, y a $\mathcal{G}$ lo llamamos *un generador de* $\mathcal{F}$.

Existencia de la σ–álgebra generada. Demostración

Demostración.

Sea $\Sigma = \{\mathcal{F} : \mathcal{F}$ es σ-álgebra y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}\}$.
Σ es no vacía, pues $\mathcal{P}(\Omega) \in \Sigma$. Entonces $\sigma(\mathcal{G}) := \bigcap_{\mathcal{F}\in\Sigma} \mathcal{F}$ está bien definida y $\mathcal{G} \subset \sigma(\mathcal{G})$.
Veamos que es una σ-álgebra :

- $\emptyset \in \sigma(\mathcal{G})$: pues $\emptyset \in \mathcal{F}, \quad \forall \mathcal{F} \in \Sigma$
- Si $E \in \sigma(\mathcal{G})$ entonces $E^c \in \sigma(\mathcal{G})$: pues $E \in \mathcal{F},\ \forall \mathcal{F} \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \mathcal{F},\ \forall \mathcal{F} \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \sigma(\mathcal{G})$.
- Si $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ con $E_i \in \sigma(\mathcal{G})$ para $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \sigma(\mathcal{G})$: pues $E_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{N}, \forall \mathcal{F} \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}\ \forall \mathcal{F} \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \sigma(\mathcal{G})$.

Entonces $\sigma(\mathcal{G})$ pertenece a Σ.
Es su único menor elemento pues si $\mathcal{F}_0$ es otra $\sigma-$álgebra que contiene a $\mathcal{G}$ $\Rightarrow \mathcal{F}_0 \in \Sigma \Rightarrow \sigma(\mathcal{G}) \subset \mathcal{F}_0$. $\square$

Ejemplo

Ejemplo 21

Sea Ω numerable y sea $\mathcal{G} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$ la colección formada por los eventos elementales de Ω. Entonces, $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{P}(\Omega)$. Esto se debe a que cada $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ es numerable, entonces, a partir de la propiedad (3) de las $\sigma-$álgebras, se deduce que $A = \bigcup_{\omega \in A}\{\omega\} \in \sigma(\mathcal{G})$.

La σ–álgebra de Borel

Ejemplo 22

Sea $\Omega = \mathbb{R}^n$ y

$$\mathcal{G} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] : a_i < b_i, a_i, b_i \in \mathbb{Q} \right\}$$

la colección que contiene todas las cajas rectangulares en $\mathbb{R}^n$ con vértices racionales y caras paralelas a los ejes.
La σ–álgebra $\mathcal{B}^n := \sigma(\mathcal{G})$ se denomina la σ–álgebra de Borel en $\mathbb{R}^n$, y se la nota también $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
A los conjuntos $A \in \mathcal{B}^n$ se los llama conjuntos de Borel o borelianos.

Propiedades de la σ–álgebra de Borel

a) Todo subconjunto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ es boreliano.
Dem: basta observar que todo $\omega \in A$ tiene una vecindad $Q \in \mathcal{G}$ con $Q \subset A$, de modo que $A = \bigcup_{Q \in \mathcal{G}, Q \subset A} Q$ es una unión numerable de conjuntos. Luego, la afirmación se deduce de la propiedad de que las σ–álgebras son cerradas bajo uniones numberables.

b) Todo subconjunto cerrado $A \subset \mathbb{R}^n$ es boreliano
Dem: A^c es abierto y entonces, por (a) es boreliano.

d) La σ–álgebra $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}$ también admite a la colección de semi rectas a izquierda cerradas, como generador $\mathcal{G}' = \{(-\infty, c] : c \in \mathbb{R}\}$
Dem: Esto es consecuencia de que por (b) sabemos que $\mathcal{G}' \subset \mathcal{B}$ y por lo tanto, por la minimalidad de $\sigma(\mathcal{G}'), \sigma(\mathcal{G}') \subset \mathcal{B}$. Recíprocamente, $\sigma(\mathcal{G}')$ contiene todos los intervalos acotados abiertos a la izquierda y cerrados a la derecha $(a, b] = (-\infty, b] - (-\infty, a]$, y por lo tanto también a los intervalos compactos $[a, b] = \bigcap_{n \geq 1} \left(a - \frac{1}{n}, b\right]$, y por lo tanto también a la σ–álgebra $\mathcal{B}$ generada por ellos.

Propiedades de la σ–álgebra de Borel

e) Para $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$, la colección $\mathcal{B}^n_\Omega = \{A \cap \Omega : A \in \mathcal{B}^n\}$ es una σ–álgebra en Ω; se denomina la σ–álgebra de Borel en Ω.

f) $\mathcal{B}$ también puede ser generado por las semi rectas a izquierda abiertas. Y también por las semi rectas a derecha abiertas o cerradas.

$\mathcal{P}(\Omega)$ y la σ–álgebra de Borel

En la mayoría de los casos, en lo que concierne a esta materia, la elección de $\mathcal{F}$ es canónica.

- caso discreto: si Ω es a lo sumo numerable, podemos tomar $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.
- caso real: si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, la elección natural es $\mathcal{F} = \mathcal{B}^n_\Omega = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo 1.2

Consideremos el experimento aleatorio en el que le pedimos a un jugador que tire 4 veces a un aro de básquet. En una ciudad, se les pide a todos los jugadores federados de 16 años que realicen el experimento. No tenemos acceso a la base de datos obtenida, pero en el informe publicado figura la siguiente tabla de resultados.

Cantidad de tiros embocados	0	1	2	3	4
Proporción de jugadores	0.25	0.26	0.15	0.18	0.16

¿Qué espacios de probabilidad podemos asociar al experimento?

Ejemplo 2.1 (Continuación).

Una posibilidad es tomar $\Omega_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Llamemos

$$p_0 = 0{,}25 \quad p_1 = 0{,}26 \quad p_2 = 0{,}15 \quad p_3 = 0{,}18 \quad p_4 = 0{,}16$$

Como Ω_1 es finito y las probabilidades de los eventos elementales están dadas, podemos definir a

$$P_1 : \mathcal{P}\left(\Omega_1\right) \to [0, 1]$$

Y se tiene

$$P_1(A) = \sum_{i \in A} p_i$$

Esto nos daría un espacio $\left(\Omega_1, \mathcal{P}\left(\Omega_1\right), P_1\right)$. $\square$

Ejemplo 2.1 (Continuación).

Otra posibilidad sería pensar en el espacio

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \in \{0, 1\}\}$$

donde

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el jugador acertó el tiro i-ésimo} \\ 0 & \text{si no lo hizo} \end{cases}$$

Ω_2 es finito, tiene $2^4 = 16$ elementos. Observemos que si quisiéramos definir a

$$P_2 : \mathcal{P}(\Omega_2) \to [0, 1]$$

no tenemos información suficiente para asignarle probabilidad a algunos subconjuntos, por ejemplo a $\{(0, 0, 1, 0)\}$ aunque sí la tenemos para asignársela al subconjunto $\{(0, 0, 0, 0)\}$, que es p_0. $\square$

Ejemplo 2.1 (Continuación).

Sin embargo, podemos trabajar con otra sigma álgebra, la generada por los eventos:

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \{(0,0,0,0)\}\\
A_1 &= \{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}\\
A_2 &= \{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}\\
A_3 &= \{(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}\\
A_4 &= \{(1,1,1,1)\}
\end{aligned}
$$

$\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$, con $\mathcal{G} = \{A_1, A_1, A_2, A_3, A_4\}$
Sabemos cómo definir la probabilidad en cada uno de los elementos de $\mathcal{F}$:
$P_2 : \mathcal{F} \to [0,1]$
$P_2(A_0) = 0{,}25$, $P_2(A_1) = 0{,}26$, $P_2(A_2) = 0{,}15$, $P_2(A_3) = 0{,}18$, $P_2(A_4) = 0{,}16$,
$P_2(A_1^c) = 0{,}75$, $P_2(A_0 \cup A_1) = 0{,}51$, etc
Esto nos da otro espacio de probabilidad para este experimento:
$(\Omega_2, \mathcal{F}, P_2)$. $\square$