Criterios de comparación para el estudio de la convergencia de integrales impropias.

Teorema 1.
Dadas $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a,+\infty)$ tales que $0 \leq f(x) \leq g(x)$ en algún intervalo $[c,+\infty)$ con $c \geq a$.
Entonces si la integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ es convergente entonces la integral $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ también lo es.

Teorema 2.
Dadas $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas en $[a,+\infty)$ con $f(x) \geq 0$ y $g(x) > 0$ en algún intervalo $[c,+\infty)$ con $c \geq a$.
Sea $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \rho$

a) En el caso que $0 < \rho < +\infty$ entonces:

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ es convergente si y sólo si } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ es convergente}$$

b) En el caso que $\rho = 0$ entonces:

$$\text{Si } \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ es convergente entonces } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ es convergente}$$

c) En el caso que $\rho = +\infty$ entonces:

$$\text{Si } \int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ es divergente entonces } \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ es divergente}$$

Observación 3.
Ambos criterios pueden plantearse en forma análoga para integrales de la forma $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$.

Teorema 4.
Dadas $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas y no negativas en $[a,b)$ tales que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b)$.
Entonces si la integral $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ es convergente entonces la integral $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ también lo es.

Teorema 5.
Dadas $f(x)$ y $g(x)$ funciones continuas y no negativas en $[a,b)$ con $g(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b)$.
Sea $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \rho$

a) En el caso que $0 < \rho < +\infty$ entonces:

$$\int_a^{b} g(x)\,dx \text{ es convergente si y sólo si } \int_a^{b} f(x)\,dx \text{ es convergente}$$

b) En el caso que $\rho = 0$ entonces:

$$\text{Si } \int_a^{b} g(x)\,dx \text{ es convergente entonces } \int_a^{b} f(x)\,dx \text{ es convergente}$$

c) En el caso que $\rho = +\infty$ entonces:

$$\text{Si } \int_a^{b} g(x)\,dx \text{ es divergente entonces } \int_a^{b} f(x)\,dx \text{ es divergente}$$

Observación 6.
Ambos criterios pueden plantearse en forma análoga para integrales de la forma $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ donde $f(x)$ es continua en $(a,b]$.