Probabilidad y Estadística (m) / Probabilidad (d)

Variables Aleatorias Continuas

Departamento de Matemática / Instituto de Cálculo

11 de abril de 2024

Outline

1 Variables aleatorias continuas

Definición

Definición 1

La variable aleatoria X se dice *continua* si su función de distribución acumulada $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ es continua. En otras palabras, X se dice continua si $P(X = t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Recordar que

- $F_X(t) = P(X \leq t)$
- $P(X < t) = F_X(t^-)$
- $F_X(t) = F_X(t^-) + P(X = t)$
- F_X es continua a derecha

Por lo tanto, F_X es continua si y sólo si $P(X = t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición

Definición 1

La variable aleatoria X se dice *continua* si su función de distribución acumulada $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es continua. En otras palabras, X se dice continua si $P(X = t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Recordar que

- $F_X(t) = P(X \leq t)$
- $P(X < t) = F_X(t^-)$
- $F_X(t) = F_X(t^-) + P(X = t)$
- F_X es continua a derecha

Por lo tanto, F_X es continua si y sólo si $P(X = t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición

Definición 1

La variable aleatoria X se dice *continua* si su función de distribución acumulada $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es continua. En otras palabras, X se dice continua si $P(X = t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Recordar que

- $F_X(t) = P(X \leq t)$
- $P(X < t) = F_X(t^-)$
- $F_X(t) = F_X(t^-) + P(X = t)$
- F_X es continua a derecha

Por lo tanto, F_X es continua si y sólo si $P(X = t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición

Definición 1

La variable aleatoria X se dice *continua* si su función de distribución acumulada $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ es continua. En otras palabras, X se dice continua si $P(X = t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Recordar que

- $F_X(t) = P(X \leq t)$
- $P(X < t) = F_X(t^-)$
- $F_X(t) = F_X(t^-) + P(X = t)$
- F_X es continua a derecha

Por lo tanto, F_X es continua si y sólo si $P(X = t) = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Ejemplo

Antes de definir variables absolutamente continuas, consideremos el siguiente ejemplo motivador. Estamos interesados en elegir al azar un punto en el intervalo $(0, 2]$. A diferencia de los ejemplos considerados hasta ahora, el conjunto de posibles valores del experimento es no numerable.

Si denotamos por X la variable aleatoria que indica el punto elegido, es razonable asumir que la probabilidad de que $X \in (a, b]$ debería ser proporcional a la longitud del intervalo, para todo $[a, b) \subset (0, 2]$. Es decir:

$$P\left(X \in (a, b]\right) = C\ (b - a), \text{ para todo } 0 < a \leq b \leq 2.$$

¿Cuál es el valor de la constante C? Siendo que $P(X \in (0, 2]) = 1$, tenemos que

$$C(2 - 0) = 1, \text{ de donde deducimos que } C = 1/2.$$

Tenemos entonces que

$$P\left(X \in (a, b]\right) = 1/2(b - a), \text{ para todo } 0 < a \leq b \leq 2.$$

Ejemplo

Antes de definir variables absolutamente continuas, consideremos el siguiente ejemplo motivador. Estamos interesados en elegir al azar un punto en el intervalo $(0, 2]$. A diferencia de los ejemplos considerados hasta ahora, el conjunto de posibles valores del experimento es no numerable.

Si denotamos por X la variable aleatoria que indica el punto elegido, es razonable asumir que la probabilidad de que $X \in (a, b]$ debería ser proporcional a la longitud del intervalo, para todo $[a, b) \subset (0, 2]$. Es decir:

$$P\left(X \in (a, b]\right) = C\,(b - a), \text{ para todo } 0 < a \leq b \leq 2.$$

¿Cuál es el valor de la constante C? Siendo que $P(X \in (0, 2]) = 1$, tenemos que

$$C(2 - 0) = 1, \text{ de donde deducimos que } C = 1/2.$$

Tenemos entonces que

$$P\left(X \in (a, b]\right) = 1/2(b - a), \text{ para todo } 0 < a \leq b \leq 2.$$

Ejemplo

Antes de definir variables absolutamente continuas, consideremos el siguiente ejemplo motivador. Estamos interesados en elegir al azar un punto en el intervalo $(0, 2]$. A diferencia de los ejemplos considerados hasta ahora, el conjunto de posibles valores del experimento es no numerable.

Si denotamos por X la variable aleatoria que indica el punto elegido, es razonable asumir que la probabilidad de que $X \in (a, b]$ debería ser proporcional a la longitud del intervalo, para todo $[a, b) \subset (0, 2]$. Es decir:

$$P(X \in (a, b]) = C\,(b - a), \text{ para todo } 0 < a \leq b \leq 2.$$

¿Cuál es el valor de la constante C? Siendo que $P(X \in (0, 2]) = 1$, tenemos que

$$C(2 - 0) = 1, \text{ de donde deducimos que } C = 1/2.$$

Tenemos entonces que

$$P(X \in (a, b]) = 1/2(b - a), \text{ para todo } 0 < a \leq b \leq 2.$$

Ejemplo (continuación)

¿Cómo calcular la función de distribución asociada a la variable aleatoria X? Recordemos que

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Así, tenemos que si $x \leq 0$, $F_X(x) = 0$. Si $x \in [0, 2)$, $F_X(x) = 1/2x$ y finalmente, la función de distribución vale 1 a partir de $x = 2$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 < x \leq 2, \\ 1 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Obsérvese que si definimos la función $f_X(x)$ mediante la formula

$$f_X(x) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \;\;, \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 < x \leq 2 \;\;, \\ 0 & \text{si } x > 2 \;\;, \end{cases}$$

tenemos que

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du \;.$$

En tal caso, diremos que f_X es la función de densidad de la variable aleatoria X.

Propiedades de las Funciones de Densidad

Observación 1.1

Si X tiene función de densidad f_X, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du = 1$.

Esto vale pues

$$1 = \lim_{b\to\infty} F_X(b) = \lim_{b\to\infty} \int_{-\infty}^{b} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du$$

Definición 2

Toda función $f \geq 0$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 1$ se dice *función de densidad*.

Propiedades de las Funciones de Densidad

Observación 1.1

Si X tiene función de densidad f_X, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du = 1$.

Esto vale pues

$$1 = \lim_{b \to \infty} F_X(b) = \lim_{b \to \infty} \int_{-\infty}^{b} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du$$

Definición 2

Toda función $f \geq 0$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 1$ se dice *función de densidad*.

Propiedades de las Funciones de Densidad

Observación 1.1

Si X tiene función de densidad f_X, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du = 1$.

Esto vale pues

$$1 = \lim_{b \to \infty} F_X(b) = \lim_{b \to \infty} \int_{-\infty}^{b} f_X(u)\,du = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u)\,du$$

Definición 2

Toda función $f \geq 0$ tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,du = 1$ se dice *función de densidad*.

Definición de Variables Absolutamente Continuas

Definición 3

Una variable aleatoria X se dice *absolutamente continua* si existe una función $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du$.

Recordemos que, conociendo la función de distribución de una variable aleatoria, podíamos calcular varias probabilidades. Por ejemplo, teníamos que

$$P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

Como la distribución se obtiene de integrar la densidad, tenemos que

$$P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) =$$
$$\int_{-\infty}^{b} f_X(u)du - \int_{-\infty}^{a} f_X(u)du = \int_{a}^{b} f_X(u)du.$$

Como las probabilidades puntuales valen cero, la fórmula precedente vale para todo tipo de intervalo con extremos en a y $b : [a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$.

Propiedades de Variables Absolutamente Continuas

Lema 4

Si X es absolutamente continua, entonces X es continua.

Demostración.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ qvq F_X es continua en x_0.
- Si f_X es acotada en un entorno de $x_0, |f_X(u)| \leq c$ entonces $|F_X(x_0) - F_X(x)| \leq c\,|x_0 - x| \to 0$ cuando $x \to x_0$.
- Si f_X no es acotada en un entorno de x_0, entonces $F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(u)du$ se define como integral impropia,

$$F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(u)du = \lim_{x \to x_0} \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \lim_{x \to x_0} F_X(x).$$

Luego, F_X es continua en x_0. □

Propiedades de Variables Absolutamente Continuas

Lema 4

Si X es absolutamente continua, entonces X es continua.

Demostración.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ qvq F_X es continua en x_0.

- Si f_X es acotada en un entorno de $x_0, |f_X(u)| \leq c$ entonces $|F_X(x_0) - F_X(x)| \leq c\,|x_0 - x| \to 0$ cuando $x \to x_0$.

- Si f_X no es acotada en un entorno de x_0, entonces $F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(u)du$ se define como integral impropia,

$$F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(u)du = \lim_{x \to x_0} \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \lim_{x \to x_0} F_X(x).$$

Luego, F_X es continua en x_0. $\square$

Propiedades de Variables Absolutamente Continuas

Lema 4

Si X es absolutamente continua, entonces X es continua.

Demostración.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ qvq F_X es continua en x_0.
- Si f_X es acotada en un entorno de $x_0, |f_X(u)| \leq c$ entonces $|F_X(x_0) - F_X(x)| \leq c\,|x_0 - x| \to 0$ cuando $x \to x_0$.
- Si f_X no es acotada en un entorno de x_0, entonces $F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(u)du$ se define como integral impropia,

$$F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(u)du = \lim_{x \to x_0} \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \lim_{x \to x_0} F_X(x).$$

Luego, F_X es continua en x_0. □

Propiedades de Variables Absolutamente Continuas

Lema 4

Si X es absolutamente continua, entonces X es continua.

Demostración.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ qvq F_X es continua en x_0.
- Si f_X es acotada en un entorno de $x_0, |f_X(u)| \leq c$ entonces $|F_X(x_0) - F_X(x)| \leq c\,|x_0 - x| \to 0$ cuando $x \to x_0$.
- Si f_X no es acotada en un entorno de x_0, entonces $F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(u)du$ se define como integral impropia,

$$F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(u)du = \lim_{x \to x_0} \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \lim_{x \to x_0} F_X(x).$$

Luego, F_X es continua en x_0. $\square$

Propiedades de Variables Absolutamente Continuas

Lema 4

Si X es absolutamente continua, entonces X es continua.

Demostración.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ qvq F_X es continua en x_0.
- Si f_X es acotada en un entorno de x_0, $|f_X(u)| \leq c$ entonces $|F_X(x_0) - F_X(x)| \leq c\,|x_0 - x| \to 0$ cuando $x \to x_0$.
- Si f_X no es acotada en un entorno de x_0, entonces $F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(u)du$ se define como integral impropia,

$$F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(u)du = \lim_{x \to x_0} \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \lim_{x \to x_0} F_X(x).$$

Luego, F_X es continua en x_0. □

Propiedades de Variables Absolutamente Continuas

Lema 4

Si X es absolutamente continua, entonces X es continua.

Demostración.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ qvq F_X es continua en x_0.
- Si f_X es acotada en un entorno de $x_0, |f_X(u)| \leq c$ entonces $|F_X(x_0) - F_X(x)| \leq c\,|x_0 - x| \to 0$ cuando $x \to x_0$.
- Si f_X no es acotada en un entorno de x_0, entonces $F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(u)du$ se define como integral impropia,

$$F_X(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} f_X(u)du = \lim_{x \to x_0} \int_{-\infty}^{x} f_X(u)du = \lim_{x \to x_0} F_X(x).$$

Luego, F_X es continua en x_0. $\square$

Lema 5

Si f_X es una función de densidad continua en x_0, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{P\Big(X \in [x_0 - h, x_0 + h]\Big)}{2h} = f_X(x_0).$$

Demostración.

Sea $m_h = \min\{f_X(u) : u \in [x_0 - h, x_0 + h]\}$,
$M_h = \max\{f_X(u) : u \in [x_0 - h, x_0 + h]\}$.
Por continuidad $\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f_X(x_0)$.

$$2hm_h \leq \int_{x_0-h}^{x_0+h} f_X(u)du \leq 2hM_h \text{ es decir, } m_h \leqslant \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f_X(u)du \leqslant M_h$$

Pasando al límite $h \to 0$,

$$f_X(x_0) \leq \lim_{h\to 0} \frac{P_X([x_0 - h; x_0 + h])}{2h} \leq f_X(x_0),$$

de donde se deduce el teorema. $\square$

Lema 5

Si f_X es una función de densidad continua en x_0, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{P\Big(X \in [x_0 - h, x_0 + h]\Big)}{2h} = f_X(x_0).$$

Demostración.

Sea $m_h = \min\left\{f_X(u) : u \in [x_0 - h, x_0 + h]\right\}$,
$M_h = \max\left\{f_X(u) : u \in [x_0 - h, x_0 + h]\right\}$.
Por continuidad $\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f_X(x_0)$.

$$2hm_h \le \int_{x_0-h}^{x_0+h} f_X(u)du \le 2hM_h \text{ es decir, } m_h \leqslant \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f_X(u)du \leqslant M_h$$

Pasando al límite $h \to 0$,

$$f_X(x_0) \le \lim_{h\to 0} \frac{P_X([x_0 - h; x_0 + h])}{2h} \le f_X(x_0),$$

de donde se deduce el teorema. □

Lema 5

Si f_X es una función de densidad continua en x_0, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{P\Big(X \in [x_0 - h, x_0 + h]\Big)}{2h} = f_X(x_0).$$

Demostración.

Sea $m_h = \min\{f_X(u) : u \in [x_0 - h, x_0 + h]\}$,
$M_h = \max\{f_X(u) : u \in [x_0 - h, x_0 + h]\}$.
Por continuidad $\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f_X(x_0)$.

$$2hm_h \leq \int_{x_0-h}^{x_0+h} f_X(u)du \leq 2hM_h \text{ es decir, } m_h \leqslant \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f_X(u)du \leqslant M_h$$

Pasando al límite $h \to 0$,

$$f_X(x_0) \leq \lim_{h\to 0} \frac{P_X([x_0 - h; x_0 + h])}{2h} \leq f_X(x_0),$$

de donde se deduce el teorema. □

Lema 5

Si f_X es una función de densidad continua en x_0, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{P\Big(X \in [x_0 - h, x_0 + h]\Big)}{2h} = f_X(x_0).$$

Demostración.

Sea $m_h = \min \{f_X(u) : u \in [x_0 - h, x_0 + h]\}$,
$M_h = \max \{f_X(u) : u \in [x_0 - h, x_0 + h]\}$.
Por continuidad $\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f_X(x_0)$.

$$2hm_h \leq \int_{x_0-h}^{x_0+h} f_X(u)du \leq 2hM_h \text{ es decir, } m_h \leqslant \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f_X(u)du \leqslant M_h$$

Pasando al límite $h \to 0$,

$$f_X(x_0) \leq \lim_{h\to 0} \frac{P_X([x_0 - h; x_0 + h])}{2h} \leq f_X(x_0),$$

de donde se deduce el teorema. $\square$

Lema 5

Si f_X es una función de densidad continua en x_0, entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{P\Big(X \in [x_0 - h, x_0 + h]\Big)}{2h} = f_X(x_0).$$

Demostración.

Sea $m_h = \min\{f_X(u) : u \in [x_0 - h, x_0 + h]\}$,
$M_h = \max\{f_X(u) : u \in [x_0 - h, x_0 + h]\}$.
Por continuidad $\lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} M_h = f_X(x_0)$.

$$2hm_h \le \int_{x_0-h}^{x_0+h} f_X(u)du \le 2hM_h \text{ es decir, } m_h \leqslant \frac{1}{2h}\int_{x_0-h}^{x_0+h} f_X(u)du \leqslant M_h$$

Pasando al límite $h \to 0$,

$$f_X(x_0) \le \lim_{h\to 0} \frac{P_X([x_0 - h; x_0 + h])}{2h} \le f_X(x_0),$$

de donde se deduce el teorema. □

Propiedades de Variables Absolutamente Continuas (cont.)

Teorema 6

Si f_X es continua en x_0, entonces F_X es derivable en x_0 y además $F'_X(x_0) = f_X(x_0)$.

Demostración.

Vale por el Teorema Fundamental de Cálculo. □

Propiedades de Variables Absolutamente Continuas (cont.)

Teorema 6

Si f_X es continua en x_0, entonces F_X es derivable en x_0 y además $F'_X(x_0) = f_X(x_0)$.

Demostración.

Vale por el Teorema Fundamental de Cálculo. $\square$

Relación entre densidad y distribución. Resumen

Recordemos que, conociendo la función de distribución de una variable aleatoria, podíamos calcular varias probabilidades. Por ejemplo,

$$P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \ .$$

Como la distribución se obtiene de integrar la densidad, tenemos que

$$P(X \in (a, b]) = \int_{-\infty}^{b} f_X(u)\, du - \int_{-\infty}^{a} f_X(u)\, du = \int_{a}^{b} f_X(u) du \ .$$

Como las probabilidades puntuales valen cero, la fórmula precedente vale para todo tipo de intervalo con extremos en a y b: $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$.

Tenemos entonces que

si conocemos la distribución $F_X(x)$ obtenemos la densidad derivando:

$$f_X(x) = F_X'(x) \ .$$

y si conocemos la densidad $f_X(x)$, calculamos la distribución integrando:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du \ .$$

Relación entre densidad y distribución. Resumen

Recordemos que, conociendo la función de distribución de una variable aleatoria, podíamos calcular varias probabilidades. Por ejemplo,

$$P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a) \ .$$

Como la distribución se obtiene de integrar la densidad, tenemos que

$$P(X \in (a, b]) = \int_{-\infty}^{b} f_X(u) \ du - \int_{-\infty}^{a} f_X(u) \ du = \int_{a}^{b} f_X(u) du \ .$$

Como las probabilidades puntuales valen cero, la fórmula precedente vale para todo tipo de intervalo con extremos en a y b: $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$.
Tenemos entonces que
si conocemos la distribución $F_X(x)$ obtenemos la densidad derivando:

$$f_X(x) = F'_X(x) \ .$$

y si conocemos la densidad $f_X(x)$, calculamos la distribución integrando:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du \ .$$

Relación entre densidad y distribución. Resumen

Recordemos que, conociendo la función de distribución de una variable aleatoria, podíamos calcular varias probabilidades. Por ejemplo,

$$P(X \in (a, b]) = P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)\ .$$

Como la distribución se obtiene de integrar la densidad, tenemos que

$$P(X \in (a, b]) = \int_{-\infty}^{b} f_X(u)\ du - \int_{-\infty}^{a} f_X(u)\ du = \int_{a}^{b} f_X(u) du\ .$$

Como las probabilidades puntuales valen cero, la fórmula precedente vale para todo tipo de intervalo con extremos en a y b: $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$.
Tenemos entonces que
si conocemos la distribución $F_X(x)$ obtenemos la densidad derivando:

$$f_X(x) = F'_X(x)\ .$$

y si conocemos la densidad $f_X(x)$, calculamos la distribución integrando:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(u) du\ .$$

Definición de cuantil y percentil

Definición 7

Sea X una variable absolutamente continua con función de densidad f_X y función de distribución F_X estrictamente creciente en la región donde $\{0 < F_X < 1\}$. Sea $0 < \alpha < 1$. El $\alpha-$cuantil (ó cuantil α o $100 \cdot \alpha-$percentil) de la distribución de X es el valor x_α tal que $F_X(x_\alpha) = \alpha$, es decir, x_α tal que

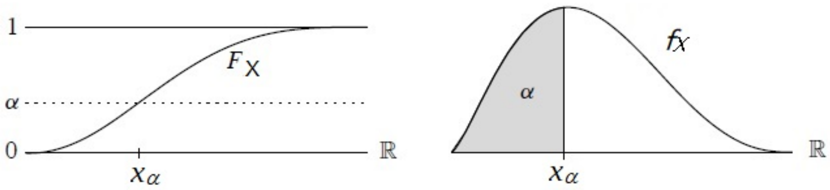
$$P(X \leq x_\alpha) = \int_{-\infty}^{x_\alpha} f_X(u)du = \alpha.$$

Como $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$, $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$ y F_X es continua, el $\alpha-$cuantil de X siempre existe. Como además pedimos que F_X sea estrictamente creciente, es único. Es decir,

$$x_\alpha = F_X^{-1}(\alpha).$$

Cuantiles

Figura: Cuantil α de una distribución: a la izquierda, graficado en la función de distribución, a la derecha graficado sobre la función de densidad.



Aclaración: En la literatura del área, a las variables aleatorias absolutamente continuas se las denomina, directamente, continuas. Esto, inicialmente, podría llevar a una confusión, pero para dejar las cosas claras, de acá en más, siempre que hablemos de variables aleatorias continuas nos estaremos refiriendo a variables aleatorias absolutamente continuas.

Ejemplo

Sea

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \alpha x^2 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

(1) Hallar α para que f sea una función de densidad. Hallar la función de distribución asociada a la densidad f.
(2) Hallar la probabilidad de que X sea menor a 0.5 .
(3) Hallar el cuantil 0.27 de la distribución.

Ejemplo

Consideremos el experimento: elegir al azar un punto en el intervalo $[a, b]$. Sea X el punto elegido

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrario} . \end{cases} \tag{1}$$

La función de distribución acumulada de X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b , \end{cases}$$

Ejemplo

Consideremos el experimento: elegir al azar un punto en el intervalo $[a, b]$.
Sea X el punto elegido

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrario} . \end{cases} \tag{1}$$

La función de distribución acumulada de X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b , \end{cases}$$

Ejemplo

Consideremos el experimento: elegir al azar un punto en el intervalo $[a, b]$. Sea X el punto elegido

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{caso contrario} . \end{cases} \tag{1}$$

La función de distribución acumulada de X es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x \leq b \\ 1 & x \geq b , \end{cases}$$