Práctica 2: Probabilidad condicional - Independencia

"The theory of probabilities is at bottom nothing but common sense reduced to calculus; it enables us to appreciate with exactness that which accurate minds feel with a sort of instinct for which ofttimes they are unable to account."
Pierre-Simon Laplace

Ejercicio 1. Se dispone de dos urnas cuyo contenido es el siguiente:

Urna A: 5 bolillas rojas y 3 blancas
Urna B: 1 bolilla roja y 2 blancas

Se arroja un dado y, si el resultado es 3 ó 6, se extrae una bolilla de la urna A y se coloca en la urna B para luego extraer una bolilla de esta última. En caso contrario, el procedimiento se realiza a la inversa.

a) Calcular la probabilidad de que ambas bolillas extraídas sean rojas.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolillas sean blancas si ambas bolillas son del mismo color? Si ambas bolillas son del mismo color, ¿es más probable que sean rojas?

Ejercicio 2. Se tienen tres urnas numeradas con veinte bolillas de color en cada una. La primer urna contiene veinte bolillas blancas, la segunda quince y la última diez, siendo todas las bolillas restantes negras. Se elige una de las urnas al azar y se extraen de ella con reposición dos bolillas. La probabilidad de elegir la primer urna es la misma que la de elegir la segunda, mientras que la de elegir la última es igual a su suma. Calcular la probabilidad de haber seleccionado la primer urna sabiendo que las dos bolillas extraídas son blancas.

Ejercicio 3. Cuando se realiza un análisis de laboratorio para diagnosticar una cierta enfermedad en un paciente se pueden cometer dos tipos de errores de diagnóstico: si el análisis da positivo (es decir, éste dice que el paciente está enfermo) pero el paciente está sano se dice que tenemos un falso positivo, mientras que si el análisis da negativo pero el paciente está enfermo se dice que tenemos un falso negativo. Consideremos los eventos $E = \{\text{La persona examinada está enferma}\}$ y $A = \{\text{El resultado del análisis es positivo}\}$. La cantidad $P(A|E)$ se conoce como sensibilidad del test mientras que $P(A^c|E^c)$ se denomina la especificidad del test.

a) Supongamos que una cierta prueba de laboratorio es tal que $P(A|E) = P(A^c|E^c) = 0.95$ y además que la probabilidad de que un paciente que se examina padezca la enfermedad es 0.005. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona cuyo análisis diagnóstico es positivo esté realmente enferma?

b) Supongamos que $P(A|E) = P(A^c|E^c) = p$ y $P(E) = 0.005$. ¿Para qué valor de p es $P(E|A) = 0.95$?

Ejercicio 4. El color de ojos de una persona está determinado por un sólo par de genes. Si ambos son genes que codifican ojos azules, entonces la persona tendrá ojos azules; si ambos son genes que codifican ojos marrones, la persona tendrá ojos marrones; y si uno de ellos es un gen que codifica ojos azules y el otro codifica ojos marrones, entonces la persona tendrá ojos marrones (es por esto último que se dice que el gen de ojos marrones es *dominante* por sobre el de ojos azules). A los fines de este ejercicio supondremos que los ojos de una persona sólo pueden ser azules o marrones. Un bebé recién nacido recibe exactamente un gen que codifica el color de sus ojos de cada uno de sus padres mientras que los dos genes de cada padre tienen igual probabilidad de ser transmitidos a su bebé. Supongamos que Beto y sus dos padres tienen ojos marrones, pero que la hermana de Beto tiene ojos azules.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Beto posea un gen que codifica ojos azules?

b) Beto se casó con Ana, una mujer de ojos azules. Juntos tuvieron dos hijos, Juan y Pedro. Mostrar que tanto Juan como Pedro tienen la misma probabilidad de tener ojos azules y dar el valor de dicha probabilidad.

c) Si Juan tiene ojos marrones, calcular la probabilidad de que Pedro tenga ojos marrones también.

d) ¿Son independientes los eventos {Juan tiene ojos marrones} y {Pedro tiene ojos marrones}?

Ejercicio 5. Esquema de Polya. De un bolillero que contiene B bolillas blancas y R rojas se extraen sucesivamente y al azar n bolillas, devolviendo en cada instancia la bolilla extraída al bolillero junto con otras c bolillas del mismo color. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos los eventos

$$R_n = \{\text{La } n\text{-ésima bolilla extraída es roja}\} \qquad \text{y} \qquad B_n = \{\text{La } n\text{-ésima bolilla extraída es blanca}\}.$$

a) Probar que $P(R_n) = \frac{R}{R+B}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Sugerencia: Condicionar respecto de un evento adecuado que permita hacer inducción en n.

b) Probar que para todo $m < n$ se tiene

$$P(R_m \cap R_n) = \frac{R\,(R+c)}{(R+B)\,(R+B+c)} \qquad \text{y} \qquad P(R_m \cap B_n) = \frac{RB}{(R+B)\,(R+B+c)}.$$

   Generalizar a más de dos extracciones.

   Sugerencia: En a) se prueba el caso $m = 1$ y n arbitrario. Hacer inducción en m.

c) ¿Son los eventos R_m y R_n independientes para $n \neq m$?

d) Calcular $P(R_3|R_2)$ y $P(R_1|R_n)$ para $n \geq 2$.

Ejercicio 6. Se tienen $n+1$ urnas numeradas desde la 0 hasta la n. La urna i contiene i bolillas blancas y $n-i$ negras.

a) Se elige al azar una urna y se extrae de ella una bolilla al azar. Luego se la devuelve a la urna correspondiente. Se repite este procedimiento k veces.

   i) Hallar la probabilidad de que la primera bolilla extraída sea blanca.
   ii) ¿Cuál es la probabilidad de que la primera bolilla extraída provenga de la urna i si ésta es blanca?
   iii) ¿Cuál es la probabilidad de que las k bolillas extraídas sean blancas?
   iv) ¿Son los eventos B_m y B_n independientes para $m \neq n$?

b) Se elige al azar una urna y luego se realizan k extracciones con reposición de la **urna elegida.**

   i) Hallar la probabilidad de que las k bolillas extraídas sean blancas.
   ii) Si las k bolillas extraídas son blancas, ¿cuál es la probabilidad de que al realizar una nueva extracción de la misma urna esta última bolilla sea blanca?
   iii) ¿Son los eventos B_1 y B_2 independientes?

Nota: En ambos items denotamos por B_n al evento de obtener una bolilla blanca en la n-ésima extracción.

Ejercicio 7. Se extrae al azar una bolilla de una urna que contiene 9 bolillas, de las cuales 3 son blancas, 3 son negras y 3 son rojas. Además, las bolillas de cada color tienen la numeración $1, 2$, y 3. Por último, la primer bolilla blanca, la segunda negra y la tercera roja son rayadas. Consideremos los eventos

$$A = \{\text{La bolilla es número 1}\} \qquad B = \{\text{La bolilla es blanca}\} \qquad C = \{\text{La bolilla es rayada}\}.$$

¿Son independientes los eventos A, B, y C? ¿Y de a pares?

Ejercicio 8. Tres jugadores a, b y c se disponen a jugar un torneo de metegol bajo las siguientes reglas: la modalidad de juego es por turnos bajo la consigna de que el ganador de un partido jugará el siguiente con el jugador que se encontraba afuera y aquel que logre dos victorias consecutivas será el ganador del torneo. En cada partido ambos jugadores involucrados tienen la misma probabilidad de ganar. Comienzan jugando a y b.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el torneo continue indefinidamente? Es decir, hallar la probabilidad de que no haya dos victorias consecutivas de un mismo jugador.

b) Calcular la probabilidad de ganar el campeonato para cada uno de los tres jugadores a, b y c. ¿Conviene jugar el primer partido?

Ejercicio 9.

a) Probar que el evento A es independiente de cualquier evento B si y sólo si $P(A) = 1$ ó 0.

b) Mostrar que si A y B son eventos independientes y $A \subset B$ entonces $P(A) = 0$ ó $P(B) = 1$.

c) Probar que si $A_1, \dots, A_n$ son eventos independientes y $B_1, \dots, B_n$ son tales que para cada $i = 1, \dots, n$ se tiene $B_i = A_i$ o $B_i = A_i^c$ entonces los eventos $B_1, \dots, B_n$ también resultan independientes.

   Sugerencia: Hacer inducción en la cantidad de complementos involucrados.

d) Deducir del ítem anterior que si $A_1, \dots, A_n$ son eventos independientes entonces se tiene la fórmula

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \left(1 - P(A_k)\right).$$

Ejercicio 10. De un bolillero que contiene n bolillas numeradas de la 1 hasta la n se extrae una al azar. Para cada $1 \leq k \leq n$ definimos el evento $A_k = \{\text{El número de la bolilla elegida es divisible por } k\}$.

a) Calcular la probabilidad del evento A_k para todo número natural k divisor de n.

b) Probar que los eventos $A_{k_1}, \dots, A_{k_m}$ son independientes si $k_1, \dots, k_m$ son divisores coprimos de n.

c) Sea φ la función de Euler de la teoría de números definida para cada número natural según la fórmula

$$\varphi(n) = \#\left\{m \in \{1, \dots, n\} : m \text{ es coprimo con } n\right\}.$$

   Probar la identidad

$$\varphi(n) = n \prod_{p \text{ primo: } p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$