Probabilidad y Estadística (m) / Probabilidad (d)

Marina Valdora

Departamento de Matemática / Instituto de Cálculo

26 de marzo de 2024

Outline

Outline

1. Variables aleatorias
   - Definición y ejemplos de variable aleatoria
   - Función de distribución

Variables aleatorias. Motivación

Muchas veces no estamos interesados en un experimento aleatorio por sí mismo, ni queremos modelar todos los aspectos posibles involucrados en su realización, sino que queremos concentrar nuestra atención en alguna consecuencia numérica del mismo.

Por ejemplo, para un apostador puede resultar más interesante la ganancia o pérdida obtenida, más que registrar el resultado del juego realizado.

O en una encuesta de opinión es más relevante saber la proporción de opiniones favorables a cierta postura más que preocuparnos por el orden en que dichas opiniones fueron emitidas a lo largo del proceso de relevamiento.

Estas consecuencias numéricas pueden ser vistas como funciones, y dan lugar al concepto fundamental de *variable aleatoria*.

Variables aleatorias. Definición

Definición 1

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad. Una *variable aleatoria* es una función

$$X : \Omega \to \mathbb{R},$$

que satisface

$$X^{-1}\left((-\infty, a]\right) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}\ , \forall a \in \mathbb{R}\ . \qquad (1)$$

Notación:

$$\{X \leq a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\}$$

Variable aleatoria se resume con las siglas v.a.

Variables aleatorias. Ejemplos

1. Se lanza un dado dos veces.

$$\Omega = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq 6\}$$

   A cada posible lanzamiento le asignamos la suma de los valores obtenidos.

$$X(i,j) = i + j \ .$$

2. En un grupo de cinco estudiantes, tres estudiaron y dos no. Se seleccionan dos estudiantes al azar para ser evaluados.
   Sea Ω el conjunto de todas las posibles formas de seleccionar dos estudiantes entre los cinco.
   Consideremos la variable aleatoria X que indica cuántos de los estudiantes seleccionados estudiaron.
   X es una función definida en Ω que puede valer $0, 1, 2$.

Variables aleatorias. Ejemplos

3. Se elige un punto al azar sobre un tablero circular de radio siete :

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^2 : \ \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq 49\}.$$

   La elección se hace al azar, de modo que $P(A) = \mathit{area}(A)/\pi 49$. Considere la variable aleatoria X que a cada punto (ω_1, ω_2) le asigna su distancia al centro del tablero

$$X(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}.$$

   X toma todos los valores comprendidos en el intervalo $[0, 7]$.

4. En el ejemplo anterior, suponga que consideramos la variable aleatoria

$$Y = \begin{cases} X & \text{si } X \leq 1 \\ [X] & \text{si no} \end{cases}$$

   ¿Cuáles son los posibles valores que toma la variable aleatoria Y?

Dicho de otra manera, una variable aleatoria es un valor numérico asociado al resultado de un experimento.
Recordemos la notación

$$X^{-1}\left((-\infty, a]\right) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} = \{X \leq a\}$$

También, para simplificar la notación, omitiremos las llaves en la expresión $P(\{X \leq a\})$, de modo que directamente escribiremos $P(X \leq a)$.

Notación

¡Atención! La variable aleatoria se la denota con X mientras que x representa los valores que la variable puede tomar. En general, las variables aleatorias se denotan en mayúscula, preferentemente utilizando las últimas letras del alfabeto (X, Y, Z), mientras que los posibles valores que éstas toman se denotan con minúsculas: x, y, z, son números en $\mathbb{R}$.

Outline

Función de distribución

Definición 2

Considere un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dada una variable aleatoria $X : \Omega \to \mathbb{R}$, definimos la *función de distribución (acumulada) asociada a* X, $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ mediante la fórmula

$$F_X(t) := P(X \leq t)\,, \text{para } t \in \mathbb{R}\,. \tag{2}$$

Ejemplo 1.1

Tiramos una moneda dos veces consecutivas
$\Omega = \{(S,S),(C,S),(S,C),(C,C)\}$
Sea $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$X(\omega) = \#\ \textit{caras obtenidas}$$
$$X(S,S) = 0, \quad X(C,S) = X(S,C) = 1, \quad X(C,C) = 2$$

Si un apostador gana \$1 por cada cara, la variable X *representa la ganancia obtenida en el juego.*
$X^{-1}(\{0\}) = \{X = 0\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\} = \{(S,S)\}$
$P(\{X = 0\}) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}) = 1/4$
De manera similar calculamos
$P(\{X = 1\}) = P(\{(C,S),(S,C)\}) = 2/4$
$P(\{X = 2\}) = P(\{(C,C)\}) = 1/4$

Ejemplo 1.1 (Continuación).

Calculemos la f.d.a $F_x(t) = P(x \leqslant t)$.

- Si $t < 0$, entonces $F_X(t) = P\left(X \leqslant t\right) = P(\emptyset) = 0$.
- Si $t = 0$, $F_X(t) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$. Observemos que $F_X(t) = \frac{1}{4} \quad \forall t \in [0, 1)$.
- Si $t = 1$, $F_X(1) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$. Observemos que si $1 \leq t < 2 \quad \Rightarrow F_X(t) = \frac{3}{4}$.
- Si $t = 2 \quad F_x(2) = P(x \leq 2) = P(\Omega) = 1$. Observemos que $F_x(t) = 1 \quad \forall t \geq 2$.

$\square$

Función de distribución

Ejemplo 1.1 (Continuación).

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 3/4 & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 1 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

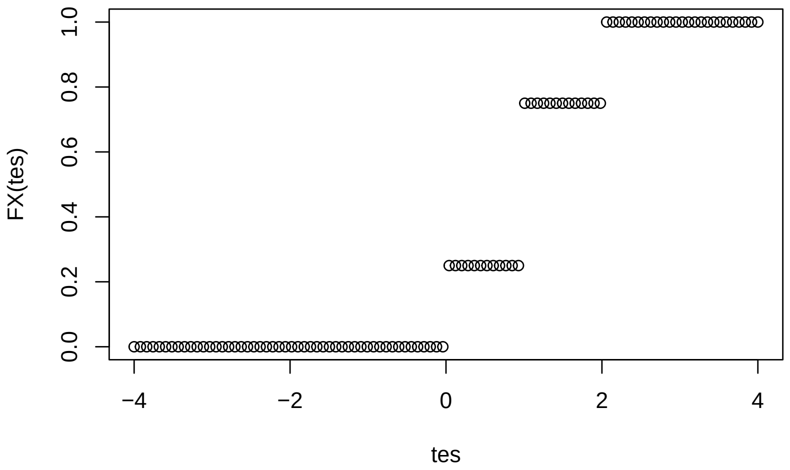
$\square$

Ejemplo 1.1 (Continuación).

```
FX <- function(t){
  if(t<0) ans<-0
  if(t>=0&t<1) ans<-1/4
  if(t>=1&t<2) ans<-3/4
  if(t>=2) ans<-1
  ans
}
FX <- Vectorize(FX)
tes <- seq(-4,4, length=100)
plot(tes, FX(tes))
```

□

Función de distribución. Gráfico en R



Ejemplo 1.1 (Continuación)

Función de distribución. Gráfico en R

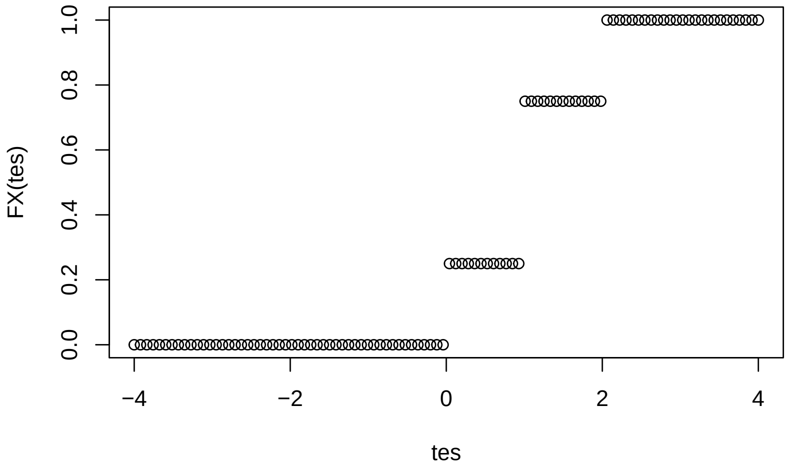
Ejemplo 1.1 (Continuación).

Otra posibilidad

```
FX <- function(t){
  1/4 * (t>=0&t<1) + 3/4 * (t>=1&t<2) + 1 * (t>=2)
}
FX <- Vectorize(FX)
tes <- seq(-4,4, length=100)
plot(tes, FX(tes))
```

□

Función de distribución. Gráfico en R



Ejemplo 1.1 (Continuación)

Función de distribución. Propiedades

Lema 3

Toda función de distribución acumulada verifica las siguientes propiedades:

1. $0 \leq F_X(t) \leq 1$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.
2. F_X *es una función creciente: si* $s < t$, *entonces* $F_X(s) \leq F_X(t)$.
3. *Como* F_X *es una función monótona y acotada, para todo* $a \in \mathbb{R}$ *existe el límite a izquierda que notaremos*

$$F_X(a^-) := \lim_{t \to a^-} F_X(t) = \lim_{t \nearrow a} F_X(t)$$

y el límite a derecha,

$$F_X(a^+) := \lim_{t \to a^+} F_X(t) = \lim_{t \searrow a} F_X(t).$$

Más aún, $F_X(a^+) = F_X(a)$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$, *es decir,* F_X *es continua a derecha.*

4. $\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ *y* $\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

Función de distribución. Propiedades

Demostración.

1. Vale por ser una probabilidad.
2. Si $s < t$ entonces

$$(-\infty, s] \subset (-\infty, t], \ \text{ y por eso, } \ \{X \leq s\} \subset \{X \leq t\}$$

y por lo tanto

$$F_X(s) = P(X \leq s) \leq P(X \leq t) = F_X(t), \ \text{ (por monotonía)}$$

$\square$

Función de distribución. Propiedades

Demostración (Continuación).

3. La existencia de los límites laterales es consecuencia de la monotonía. Además
$$F_X(a^-) \leq F_X(a) \leq F_X(a^+)$$
Queremos ver que $\lim_{t \searrow a} F_X(t) = F_X(a)$.
Sea t_n una sucesión arbitraria tal que $t_n \searrow a$, basta ver que vale $lim_{n \to +\infty} F_X(t_n) = F_X(a)$.
Pero, $F_X(t_n) = P(X \leq t_n)$ es una sucesión decreciente de conjuntos, y
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X \leq t_n\} = \{X \leq a\}.$$
Luego, por continuidad de la probabilidad, tenemos
$$lim_{n \to \infty} P\left(X \leq t_n\right) = P(X \leq a) = F_X(a).$$

□

Función de distribución. Propiedades

Demostración (Continuación).

4. Por ser F_X monótona y acotada, sabemos que ambos límites existen y que coinciden con los límites por sucesiones. Veamos que $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$.
   La sucesión de eventos $\{X \leq n\}$ es creciente y su unión es Ω, es decir, $\{X \leq n\} \nearrow \Omega$.
   Luego, por la continuidad de la probabilidad tenemos

$$lim_{t\to+\infty} F_X(t) = lim_{n\to+\infty} P(X \leq n) = P(\Omega) = 1.$$

   El otro límite es análogo, tomando la sucesión $\{X \leq -n\} \searrow \emptyset$.

□

Función de distribución. Propiedades

En realidad, estas cuatro propiedades caracterizan a la función de distribución de una variable aleatoria, en el siguiente sentido

Lema 4

Si $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ y satisface las propiedades 2), 3) y 4) del Lema 3 entonces existe una variable aleatoria X definida en un espacio de probabildad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que $F_X = F$.

Veremos la demostración más adelante. De hecho, construiremos la variable aleatoria X y el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Cálculo de probabilidades a partir de la función de distribución

Observemos que conociendo la distribución acumulada de la variable aleatoria X, podemos calcular muchas probabilidades que la involucren:

1. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
2. Sea $F_X(b^-) = \lim_{t \to b^-} F_X(t)$ entonces $F_X(b^-) = P(X < b)$

   Dem: Sabemos que el límite que define a $F_X(b^-)$ existe, sea $t_n = b - \frac{1}{n}$, luego, como $\{X \leq t_n\} \nearrow \{X < b\}$, por la continuidad de la probabilidad tenemos

   $$F_X(b^-) = \lim_{t \to b^-} F_X(t) = \lim_{n \to \infty} F_X(t_n) = \lim_{n \to \infty} P\left(X \leq t_n\right) = P(X < b)$$

3. $P(X > a) = 1 - F_X(a)$.
4. $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$.
   Tenemos entonces que si la función F_X es continua en el punto a $(F_X(a) = F_X(a^-))$, la probabilidad de que X tome el valor a es cero.

Función de distribución. Propiedad

Lema 5

Toda función de distribución tiene a lo sumo una cantidad numerable de discontinuidades.