Práctica 3: Variables aleatorias discretas

"A mathematician is a person who can find analogies between theorems;
a better mathematician is one who can see analogies between proofs
and the best mathematician can notice analogies between theories."
Stefan Banach.

Ejercicio 1. Sea X una variable aleatoria. Calcular $P(X \in A)$, $P(X \in B)$, $P(X \in A \cap B)$ y $P(X \in B - A)$ en cada uno de los siguientes casos:

a) X tiene función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -3 \\ \frac{1}{4} & \text{si} \quad -3 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

y los eventos son $A = [-3, 1]$ y $B = (-2, 2)$.

b) X tiene función de distribución acumulada

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{6} & \text{si} \quad 2 < x < 4 \\ \frac{x}{8} + \frac{1}{4} & \text{si} \quad 4 \leq x \leq 6 \\ 1 & \text{si} \quad x > 6 \end{cases}$$

y los eventos son $A = [1, 5]$ y $B = (1/2, 3)$.

c) Decidir en cada caso si X es una variable aleatoria discreta.

Ejercicio 2. Se dispone de un tiro al blanco, cuyo blanco está compuesto por un círculo de radio 3. Podemos pensar al resultado del tiro como un experimento aleatorio, por simplicidad supondremos que el tiro siempre impactará en el círculo. Si ponemos el centro en el origen de $\mathbb{R}^2$, el espacio muestral del experimento es $\Omega = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 < 9\right\}$. Sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de los borelianos en $\mathbb{R}^2$. Asumamos que la probabilidad de que un dardo caiga en una cierta región A es proporcional a su área $|A|$. Es decir,

$$P(A) = \frac{|A \cap \Omega|}{9\pi}.$$

Luego disponemos de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

a) Se establece un sistema de puntajes para este juego del siguiente modo. El blanco se divide en tres círculos concéntricos C_1, C_2 y C_3 centrados en el origen y de radios 1, 2 y 3. Estos círculos dividen al blanco en tres anillos A_1, A_2 y A_3 donde

$$A_i = \left\{ (x, y) : i - 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < i \right\}.$$

Un jugador tira su dardo. Si el dardo cae en A_i entonces se lleva $4 - i$ puntos (cuánto más cerca del centro está el tiro, más puntaje se lleva). Hallar la función de distribución acumulada de la variable aleatoria $X =$ puntaje asignado a un tiro. ¿Es X una variable aleatoria discreta?

b) El modo de asignar los puntajes se cambia. Ahora el puntaje obtenido será tres menos la distancia entre el punto (x, y) donde el dardo impacta y el centro del blanco. Si llamamos Y a la variable aleatoria que da el puntaje nuevo, tenemos

$$Y = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Hallar la función de distribución acumulada de la variable aleatoria Y. ¿Es Y una variable aleatoria discreta? ¿Es Y una variable aleatoria continua?

c) Finalmente, se propone un tercer modo de asignar puntaje para el juego de los dardos, que denotaremos por la variable aleatoria Z, y que consiste en lo siguiente: si el dardo cae en A_1, entonces el jugador recibe 3 puntos, sino, el puntaje se define por $3-$ distancia entre el punto (x, y) donde el dardo impacta y el centro del blanco. O sea

$$Z = \begin{cases} 3 & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \\ \\ 3 - \sqrt{x^2 + y^2} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Hallar la función de distribución acumulada de la variable aleatoria Z. ¿Es Z una variable aleatoria discreta? ¿Es Z una variable aleatoria continua?

Ejercicio 3. La probabilidad de acertar al blanco en un juego es $\frac{1}{5}$. Se tiran 10 tiros de manera independiente.

a) Hallar la probabilidad de que se produzcan al menos dos aciertos.

b) Hallar la probabilidad condicional de que se produzcan al menos dos aciertos, asumiendo que se produjo al menos un acierto.

Ejercicio 4.

a) Sea $X \sim Bi\,(n, p)$ e $Y \sim \mathcal{G}\,(p)$. Demostrar que $P\,(X = 0) = P\,(Y > n)$.

b) Hallar el número de niños que debe tener un matrimonio para que la probabilidad de tener al menos un varón sea $\geq \dfrac{8}{9}$.

Ejercicio 5. En una corte judicial una mesa de 12 jurados debe decidir el destino de un acusado llevado a juicio en dicha corte. Éste será declarado culpable y condenado si al menos 8 de los 12 jurados lo votan culpable. Supongamos que el acusado tiene probabilidad α de haber cometido el delito del que se lo acusa y que cada jurado decide su voto de manera independiente, con probabilidad θ de tomar la decisión correcta. ¿Cuál es la probabilidad de que el acusado sea condenado?

Ejercicio 6. Sea X una variable aleatoria con distribución geométrica de parámetro p.

a) Calcular la función de distribución acumulada de X.

b) Hallar la probabilidad de que X sea impar. ¿Es mayor que la probabilidad de que X sea par?

Ejercicio 7. Se dice que una variable aleatoria X a valores en $\mathbb{N}_0$ tiene la *propiedad de falta de memoria discreta* si para todo par de números de naturales $s, t \in \mathbb{N}$ se verifica

$$P(X \geq s + t \mid X > t) = P(X \geq s).$$

Probar que una variable aleatoria X a valores en $\mathbb{N}_0$ posee la propiedad de falta de memoria discreta si y sólo si tiene distribución geométrica de parámetro $p = P(X = 1)$.
Sugerencia: Una posibilidad es probar primero por inducción que $P(X > n) = (P(X > 1))^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 8. El problema de los puntos.[1] Calcular la probabilidad de obtener k éxitos antes de r fracasos en una sucesión de ensayos Bernoulli independientes con probabilidad de éxito p.

Ejercicio 9. Un comprador de componentes eléctricas los adquiere en lotes de tamaño 10. Antes de comprar inspecciona 3 componentes elegidas al azar del lote, y lo aceptará si ninguna de las componentes revisadas está fallada. Encontrar la proporción de lotes que rechazará el comprador si el 30% de los lotes tiene 4 componentes defectuosas y el 70% sólo una.

Ejercicio 10. Un fabricante ofrece relojes en lotes de 50, en el cual hay buenos, recuperables y desechables. Para ver si adquiere el lote, un comprador toma una muestra de 8 y los revisa. En realidad hay 20 buenos, 25 recuperables y 5 desechables en el lote elegido.

a) Hallar la probabilidad de que compre el lote, si el criterio para decidir es que entre los revisados no haya ninguno desechable.

b) Hallar la probabilidad de que compre el lote, si el criterio para decidir es que entre los revisados al menos 5 deben ser buenos y ninguno desechable.

[1]El problema de los puntos ocupa un destacado lugar dentro de la teoría de probabilidades. En términos generales, el problema es el siguiente: dos jugadores a y b realizan una apuesta y llevan a cabo un cierto juego de azar en donde el ganador se lleva todo el dinero de la apuesta. Un inconveniente los obliga a interrumpir el juego antes de que éste haya terminado, cuando ambos llevan un cierto "resultado parcial". ¿Cómo debería dividirse el premio entre ambos jugadores?
En relación a nuestro problema en cuestión, observemos que si pensamos que el juego entre a y b es tal que a gana un punto cada vez que haya un éxito y b gana un punto cada vez que haya un fracaso, entonces la probabilidad buscada no es más que la probabilidad de que a gane el juego si éste se continuara desde una posición en la cual a necesitara k puntos para ganar y b necesitara r puntos. Dicha probabilidad da la manera justa de repartir el premio entre ambos jugadores.

Ejercicio 11. Un minorista ha verificado que la demanda de cajones es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda = 2$ cajones por semana. El minorista completa su stock los lunes por la mañana a fin de tener 4 cajones al principio de la semana, y no vuelve a completar su stock sino hasta la semana siguiente. Al efectuar un análisis de la actividad de su negocio, se le plantean las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la probabilidad de vender todo su stock durante una semana?

b) ¿Cuál es la probabilidad de vender todo su stock semanal en al menos dos de las semanas del mes?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que en una semana sea incapaz de cumplir por lo menos con un pedido?

d) ¿Cuál es el mínimo número de cajones con los que deberá iniciar cada semana para que la probabilidad de cumplir con todos los pedidos sea mayor o igual a 0.99?

e) ¿Cuál es la distribución del número de cajones vendidos por semana?

Ejercicio 12. Se tienen 3 fuentes radiactivas F_1, F_2 y F_3. El número de partículas que emite cada fuente por hora es una variable con distribución $\mathcal{P}(\lambda_i)$, siendo $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 4$. Un investigador elige una fuente al azar y observa que ésta emite 4 partículas en una hora. Encontrar la probabilidad de que haya elegido la fuente F_2.

Ejercicio 13. Dada X una variable aleatoria discreta y $x_0 \in R_X$ decimos que x_0 es un *valor más probable para X* si

$$p_X(x_0) = \sup_{x \in R_X} p_X(x).$$

a) Probar que toda variable aleatoria discreta admite al menos un valor más probable.

b) Verificar que $[(n+1)p]$ es un valor más probable para la distribución binomial de parámetros n y p.

c) Verificar que $[\lambda]$ es un valor más probable para la distribución de Poisson de parámetro λ.

d) Verificar que $[\frac{(m+1)(n+1)}{N+2}]$ es un valor más probable para la distribución hipergeométrica $\mathcal{H}(N, m, n)$.

Sugerencia: Para resolver los últimos tres items puede serle útil estudiar los cocientes $\frac{p_X(k)}{p_X(k-1)}$ con $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 14. $(*)$[2] Dada $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una variable aleatoria no negativa, probar que existe una sucesión $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aleatorias con imagen de cardinal finito definidas sobre el mismo Ω tal que para cada $\omega \in \Omega$ se verifica $0 \leq X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to+\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$.

[2] Los ejercicios marcados con $(*)$ son optativos.