Probabilidad y Estadística (m) / Probabilidad (d)

Marina Valdora

Departamento de Matemática / Instituto de Cálculo

24 de marzo de 2024

Outline

Outline

Definición de probabilidad condicional

Suponga que alguien nos informa que el resultado de nuestro experimento pertenece a cierto evento B, con $P(B) > 0$. Querríamos poder utilizar esta información y reasignar probabilidades a los eventos del espacio muestral.

Definición 1

Dado un evento B con $P(B) > 0$, definimos la *probabilidad del evento A dado que B ocurió* mediante la formula:

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

Lema 2

$P(\cdot|B)$ es una función de probabilidad en $(\Omega, \mathcal{F})$.

Ejemplo

Ejemplo 1.1

Se arroja un dado dos veces. Sabiendo que la suma de los puntos es par, calcular la probabilidad de que la suma de 6.

$$\Omega = \{(1,1),\ldots,(1,6),\ldots,(6,1),\ldots,(6,6)\}$$

$\#\Omega = 36$
$A =$ *la suma es 6*

$$A = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$

$B =$ *la suma es par;* $\#B = 18$

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{\#A/\#\Omega}{\#B/\#\Omega} = \frac{5/36}{0{,}5} \approx 0{,}278$$

Ejemplo 1.2

Considere una urna con ocho bolas rojas y tres bolas blancas. Se sacan dos bolas sin reposición. Calcule la probabilidad de que ambas sean blancas.
Para resolverlo, consideremos el espacio muestral

$$\Omega = \{(x, y), 1 \leq x, y \leq 11\}$$

donde pensamos que las bolas 1 a 8 son rojas y las bolas 9 a 11 son blancas.
Consideremos los eventos
$R1 =$ *la primera es roja;* $B1 =$ *la primera es blanca;*
$R2 =$ *la segunda es roja;* $B2 =$ *la segunda es blanca;*
$P(B1) = 3/11$
Para calcular $P(B1 \cap B2)$ *notamos que* $P(B1 \cap B2) = P(B2|B1)P(B1)$.
Para calcular $P(B2|B1)$ *pensamos en cómo queda la urna si ocurre B1.*

$$P(B2|B1) = \frac{2}{10} \Rightarrow P(B1 \cap B2) = \frac{2}{10}\frac{3}{11} \approx 0{,}545$$

Regla multiplicativa

Lema 3

Dados los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, *tales que* $P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, *vale que*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots$$

$$P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \, .$$

Demostración.

Inducción (ejercicio) $\square$

Otras aplicaciones interesantes de la probabilidad condicional pueden ser inspiradas a partir del siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3

Una compañía aseguradora divide a sus clientes en tres clases: alto riesgo, mediano riesgo, y bajo riesgo. Su cartera de clientes está compuesta por un 20 % de clientes de alto riesgo, 30 % de mediano riesgo y 50 % de bajo riesgo. La probabilidad de que un cliente dado tenga un accidente en el corriente año es 0.25 para los de alto riesgo, 0.16 para los de mediano riesgo, y 0.10 para los de bajo riesgo.

a) *Encuentre la probabilidad de que un cliente elegido al azar, tenga un accidente en el corriente año.*

b) *Halle la probabilidad de que un cliente sea de alto riesgo, dado que se sabe que ha tenido un accidente durante el año corriente.*

Demostración.

El espacio muestral $\Omega = \{$ clientes de la compañía $\}$. Se definen los eventos:
$A_1 = \{$el cliente es de alto riesgo$\}$, $A_2 = \{$el cliente es de mediano riesgo$\}$
$A_3 = \{$el cliente es de bajo riesgo$\}$, $E = \{$el cliente sufre un accidente$\}$
Los datos son

$$\begin{array}{ll} P(E \mid A_1) = 0,25; & P(A_1) = 0,2 \\ P(E \mid A_2) = 0,16; & P(A_2) = 0,3 \\ P(E \mid A_3) = 0,10; & P(A_3) = 0,5 \end{array}$$

a)
$P(E) = P(E \cap (A_1 \cup A_2 \cup A_3)) = P\left(\bigcup_{i=1}^{3}(E \cap A_i)\right) = \sum_{i=1}^{3} P(E \cap A_i)$
$= \sum_{i=1}^{3} P(A_i) P(E \mid A_i) = 0,20 \cdot 0,25 + 0,3 \cdot 0,16 + 0,5 \cdot 0,10 = 0,148$
b)

$$P(A_1 \mid E) = \frac{P(A_1 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(A_1) P(E \mid A_1)}{P(E)} = \frac{0,20 \cdot 0,25}{0,148} = 0,3378$$

$\square$

Vamos ahora a formalizar el procedimiento realizado para resolver el problema de la compañía aseguradora:

Definición 4

Diremos que los eventos $(A_i)_{i\geq 1}$ forman una *partición del espacio muestral* Ω si

i. Los eventos son disjuntos dos a dos: $A_i \cap A_j = \emptyset$, para $i \neq j$.

ii. Los eventos cubren el espacio muestral: $\bigcup_{i\geq 1} A_i = \Omega$.

Teorema 5

(Probabilidad Total) *Dada una partición* $(A_i)_{i\geq 1}$ *con* $A_i \in \mathcal{F}$ *del espacio muestral* Ω *con* $P(A_i) > 0$ *para todo* i*, tenemos que*

$$P(C) = \sum_{i=1}^{\infty} P(C|A_i)P(A_i)\ .$$

En realidad, basta con que los eventos A_i *sean disjuntos y* $\sum_i P(A_i) = 1$.

Teorema 6

(Regla de Bayes) *Dada una partición* $(A_i)_{i\geq 1}$ *del espacio muestral* Ω*, tenemos que*

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(B|A_i)P(A_i)}\text{, para } k \geq 1.$$

Ejemplo 1.4

Cuando se realiza un análisis de laboratorio para diagnosticar una cierta enfermedad en un paciente se está frente a la posibilidad de cometer dos tipos de errores en el diagnóstico. Sean E *el evento "la persona examinada está enferma" y* A *el evento "el resultado del análisis es positivo", es decir que el análisis concluye que la persona examinada contrajo la enfermedad. Por supuesto, ambos eventos no tienen por qué coincidir (aunque eso sería lo deseable). Cuando no lo hacen, hay un error de diagnóstico: si el análisis da positivo pero el paciente está sano se dice que tenemos un falso positivo, si en cambio el análisis da negativo pero el paciente está enfermo se dice que tenemos un falso negativo. Para cada análisis se conocen la sensibilidad del test, es decir, la* $P(A|E)$ *y la especificidad del test, es decir,* $P(A^c|E^c)$.

Ejemplo (Continuación).

Supongamos que una prueba de laboratorio en particular es tal que

$$P(A|E) = 0{,}95 \quad P(A^c|E^c) = 0{,}80$$

y que la probabilidad de que una persona padezca la enfermedad en esta población es 0,001 (prevalencia de la enfermedad). ¿Cuál es la probabilidad de que una persona cuyo análisis diagnóstico es positivo en realidad esté enferma? □

Ejemplo (Continuación).

Observar que $\{E, E^c\}$ es una partición de Ω

$$P(E \mid A) = \frac{P(A \mid E)P(E)}{P(A \mid E)P(E) + P(A \mid E^c) P(E^c)}$$
$$= \frac{(0,95)(0,001)}{(0,95)(0,001) + (0,2)(0,999)} = 4,7 \times 10^{-3}$$

Esto es porque la mayor parte de la población está sana. De hecho, tener un test positivo multiplica casi por 5 la probabilidad de estar enfermo

En realidad los médicos le hacen el análisis solo a las personas que tienen síntomas. Supongamos que podemos asumir que $P(E) = 0,5$, entonces

$$P(E \mid A) = \frac{(0,95)(0,5)}{(0,95)(0,5) + (0,2)(0,5)} = 0,83$$

$\square$

Outline

Dos eventos son independientes si conocer la ocurrencia de unos de ellos nada nos dice sobre la ocurrencia del otro. En otras palabras, podemos decir que dos eventos A y B son independientes cuando $P(A|B) = P(A)$. Es decir cuando

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

Definición 7

Dos eventos A y $B \in \mathcal{F}$ se dicen *independientes* si

$$P(A \cap B) \; = \; P(A)P(B) \; .$$

Ejemplo 8

Elegimos una carta al azar de un mazo de 48 cartas españolas. Sean

$$A = \{\text{la carta es de espada}\}$$
$$B = \{\text{la carta es un as}\}$$

Entonces $P(A) = \frac{12}{48} = \frac{1}{4} \quad P(B) = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$.
El evento

$$A \cap B = \{\text{la carta es el as de espada}\}$$

satisface

$$P(A \cap B) = \frac{1}{48} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} = P(A) \cdot P(B)$$

Como $P(A \cap B)$ resulta ser igual a $P(A) \cdot P(B)$, afirmamos que los eventos A y B son independientes.
En otras palabras, si sabemos que salió un as, no sabemos nada sobre si se trata del as de espadas o no.

Lema 9

Sean A y $B \in \mathcal{F}$ son independientes

a) *A y B^c también son independientes*

b) *A es independiente de sí mismo si y solo si $P(A) = 0$ ó $P(A) = 1$.*

Demostración.

a)

$$P\left(A \cap B^c\right) = P(A - A \cap B) \underbrace{=}_{(A\cap B\subset A)} P(A) - P(A \cap B)$$

$$\underbrace{=}_{(\text{A y B indep})} P(A) - P(A)P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A)P\left(B^c\right).$$

b) Es un ejercicio de la práctica.

$\square$

Observación 1.1

Si aplicamos el Lema anterior una vez más, obtenemos que A^c *y* B^c *son independientes y lo mismo vale para* A^c *y* B*.*

Vamos ahora a generalizar el concepto de independencia para cuando tenemos más de dos eventos.

Como en el caso de dos eventos, la idea es que al condicionar, obtengamos las mismas probabilidades. Comenzamos pidiendo que $P(A_i|A_j) = P(A_i)$, de donde obtenemos que $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$.

Luego pedimos que $P(A_i|A_j \cap A_k) = P(A_i)$, de donde deducimos que $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_k \cap A_j)$. Pero como ya sabemos que para intersecciones de a dos la probabilidad se factoriza, obtenemos que $P(A_i \cap A_j \cap A_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)$.

Continuando con este argumento, resulta natural que la definición de eventos independientes pida que la probabilidad de cualquier intersección de algunos de tales eventos, coincida con el producto de las probabilidades de los eventos intersecados.

Definición 10

Una colección de eventos $A_1, \ldots, A_n$ son independientes si para **cualquier** subcolección de conjuntos se verifica

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_m}) \ ,$$

con $1 \leq i_1, \cdots, i_m \leq n$ y para todo $2 \leq m \leq n$.

Observe que independencia dos a dos de los eventos no garantiza independencia general, tal como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.5

Tire dos veces una moneda y considere los siguientes eventos:

a) *A: sale cara la primera vez, entonces* $P(A) = 1/2$.

b) *B: sale cara la segunda vez, entonces* $P(B) = 1/2$.

c) C : *sale cara exactamente una vez, entonces* $P(C) = 1/2$.

Calcule las siguientes probabilidades para verificar que los eventos son independientes dos a dos.

$P(A \cap B) =$ ....

$P(A \cap C) =$ ....

$P(B \cap C) =$ ....

¿Cuánto vale $P(A \cap B \cap C) =$ ....*? Puede decir que los tres eventos sean independientes?*

Muchos experimentos, constan de varios subexperimentos repetidos en idénticas condiciones. Por ejemplo, podemos lanzar 15 veces un dado y contar cuantos ases obtuvimos. También podemos lanzar el dado hasta que aparezca el primer cinco. Cada uno de los lanzamientos se llama intento o repetición y son independientes, pudiendo así calcular la probabilidad asociada al experimento total.

Definición 11

Una familia de eventos $(A_t)_{t\in T}$, $A_t \in \mathcal{F}$ se dice independiente si para todo $F \subset T$ finito, vale que

$$P\left(\bigcap_{t\in F} A_t\right) = \prod_{t\in F} P(A_t)\,.$$