Một số bài toán về cực trực giao

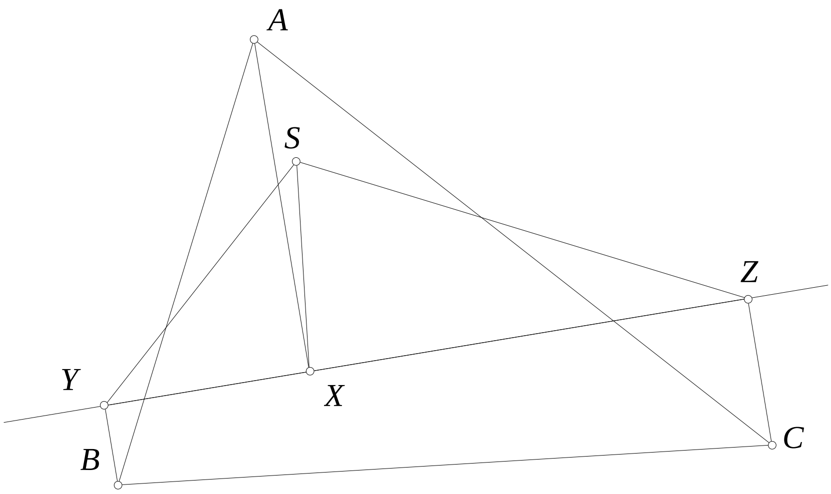
Đỗ Xuân Long, Dương Ánh Ngọc

Tóm tắt nội dung

Cực trực giao là một khái niệm không mới song đôi khi nó vẫn còn khá xa lạ đối với nhiều bạn học sinh, ngay cả với các bạn học sinh chuyên Toán. Trong bài viết này, chúng tôi muốn giới thiệu đến bạn đọc khái niêm cực trực giao cùng một số định lí nổi tiếng, ứng dụng chúng để giải các bài toán hình học sơ cấp và các kết quả đã trở thành kinh điển trong chủ đề này.

1 Khái niệm cơ bản

Cho tam giác ABC và đường thẳng ℓ. Gọi X, Y, Z là hình chiếu của A, B, C lên ℓ. Khi đó các đường thẳng qua X, Y, Z lần lượt vuông góc BC, CA, AB đồng quy tại một điểm, điểm đó được gọi là **cực trực giao** của đường thẳng ℓ ứng với tam giác ABC.



Hình 1.

Lời giải. Gọi S là giao điểm của đường thẳng qua Y, Z và vuông góc với CA, AB. Ta sẽ chứng minh $SX \perp BC$.
Áp dụng **định lí bốn điểm** và **định lí Pythagorean** ta có
$SB^2 - SC^2 = (SB^2 - SA^2) - (SC^2 - SA^2) = (ZB^2 - ZA^2) - (YC^2 - YA^2)$
$= ((BY^2 + YZ^2) - (ZX^2 + XA^2)) - ((YZ^2 + ZC^2) - (YX^2 + XA^2))$
$= (BY^2 + XY^2) - (ZC^2 + ZX^2) = XB^2 - XC^2.$
Từ đó theo **định lí bốn điểm** ta chứng minh được $SX \perp BC$. □

2 Một số định lí liên quan

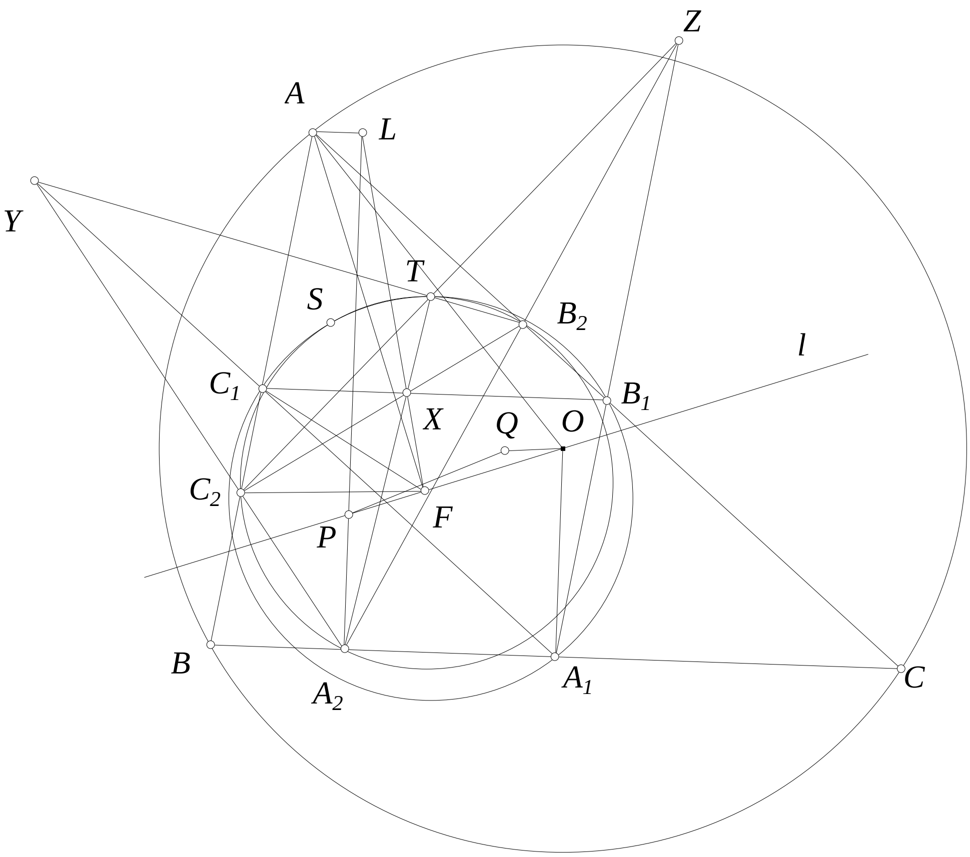
Sau đây là một số định lí quan trọng liên quan đến khái niệm cực trực giao đã nêu ở phần 1.

Định lý 1 (**Định lí Fontené thứ nhất**)**.** Cho tam giác ABC với P là một điểm bất kì trên mặt phẳng. Gọi A_1, B_1, C_1 là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi $\triangle A_2B_2C_2$ là tam giác pedal của điểm P đối với tam giác ABC. Gọi X, Y, Z lần lượt là giao điểm của B_1C_1 với B_2C_2, A_1C_1 với A_2C_2, A_1B_1 với A_2B_2. Khi đó A_2X, B_2Y, C_2Z đồng quy tại một giao điểm của $(A_1B_1C_1)$ và $(A_2B_2C_2)$.

Định lý 2 (**Định lí Fontené thứ hai**)**.** Nếu một điểm P bất kì thay đổi trên đường thẳng d cố định đi qua tâm O của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì đường tròn pedal của P đối với tam giác ABC cắt đường tròn Euler của tam giác này tại một điểm cố định.

Định lý 3 (**Định lí Fontené thứ ba**)**.** Gọi P và Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Khi đó đường tròn pedal của P đối với tam giác ABC tiếp xúc đường tròn Euler của tam giác này khi và chỉ khi PQ đi qua O.

Chúng ta sẽ chứng minh đồng thời cả ba định lí trên, dựa trên ý tưởng trong [1]



Hình 2.

Lời giải. Gọi F, L lần lượt là hình chiếu của A lên l, PA_2. Khi đó A, C_1, B_1, F, O đồng viên trên đường tròn đường kính AO, và A, L, C_2, B_2, P, F cùng thuộc đường tròn đường kính AP. Vì vậy F là **điểm Miquel** của tứ giác toàn phần tạo bởi (AB, AC, C_1B_1, C_2B_2), từ đó tứ giác XC_1C_2F nội tiếp. Ta có $\angle XFC_2 = \angle AC_1X = \angle ALX = \angle LXC_1$ suy ra L, X, F thẳng hàng. Chú ý rằng đường tròn đường kính AO đối xứng với **đường tròn Euler** $(A_1B_1C_1)$ của tam giác ABC qua B_1C_1, mà L và A_2 đối xứng nhau qua B_1C_1, nên nếu gọi T là điểm đối xứng F qua B_1C_1 thì T là giao điểm thứ hai của A_2X và $(A_1B_1C_1)$. Vì l là đường thẳng đi qua trực tâm O của tam giác $A_1B_1C_1$ nên theo định lí Steiner đảo ta có T là **điểm anti - Steiner** của P đối với tam giác $A_1B_1C_1$. Do đó bằng lập luận tương tự ta có B_2Y, C_2Z cũng đi qua T.
Ta chứng minh được **Định lí Fontené thứ nhất**.

Để ý rằng vị trí điểm T trên đường tròn $(A_1B_1C_1)$ không phụ thuộc vào vị trí điểm P trên l mà chỉ phụ thuộc vào vị trí điểm l đi qua O.
Do đó, ta chứng minh được **Định lí Fontené thứ hai**.
Theo một tính chất quen thuộc của đường tròn pedal thì tâm đường tròn $(A_2B_2C_2)$ là trung điểm đoạn PQ. Vì vậy nếu gọi S là giao điểm thứ hai khác T của $(A_1B_1C_1)$ với $(A_2B_2C_2)$ thì S chính là **điểm anti - Steiner** của Q đối với tam giác $A_1B_1C_1$. Từ đó T trùng S khi và chỉ khi OP trùng OQ.
Ta chứng minh được **Định lí Fontené thứ ba**. □

Nhận xét 1. **Định lí Fontené** là một tính chất quan trọng liên quan trực tiếp đến khái niệm cực trực giao đã nêu ở trên, bởi vì điểm T chính là cực trực giao của l đối với tam giác ABC. Theo một tính chất quen thuộc thì điểm Poncelet của tứ giác A, B, C, P nằm trên đường tròn pedal của P ứng với tam giác ABC (tham khảo [2]). Như vậy, **đường tròn pedal** của điểm P ứng với tam giác ABC giao **đường tròn Euler** của tam giác này tại hai điểm, một điểm là **điểm Poncelet** của tứ giác (A, B, C, P), điểm còn lại là cực trực giao ứng với tam giác ABC của đường thẳng đi qua P và tâm ngoại tiếp của tam giác này. □

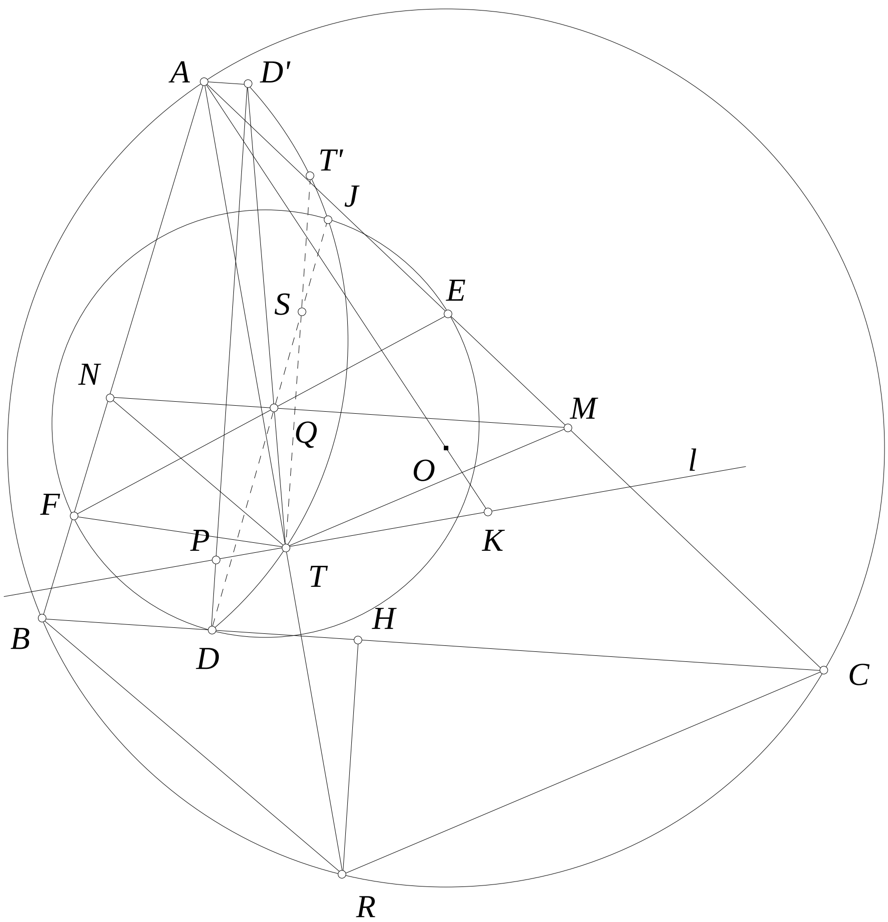
Ở phần trên, chúng ta đã chứng minh được **định lí Fontené** đúng với đường thẳng l đi qua tâm ngoại tiếp của tam giác. Vậy đối với đường thẳng l bất kì thì tính chất trên sẽ được tổng quát như thế nào?
Bài toán sau được mở rộng bởi tác giả **Trần Quang Hùng** trong [3].

Bài toán 1. Cho tam giác ABC với tâm ngoại tiếp O. l là một đường thẳng bất kì. Gọi K là giao điểm của l với AO. M, N lần lượt là hình chiếu của K trên CA, AB. P là một điểm bất kì trên l. Gọi $\triangle DEF$ là tam giác pedal của P đối với tam giác ABC. EF cắt MN tại Q. Chứng minh rằng DQ đi qua cực trực giao của l đối với tam giác ABC.

Một điều thú vị là có một cách giải bài toán trên cũng chứng minh được một định lí khác, tổng quát hơn **Định lí Fontené**.

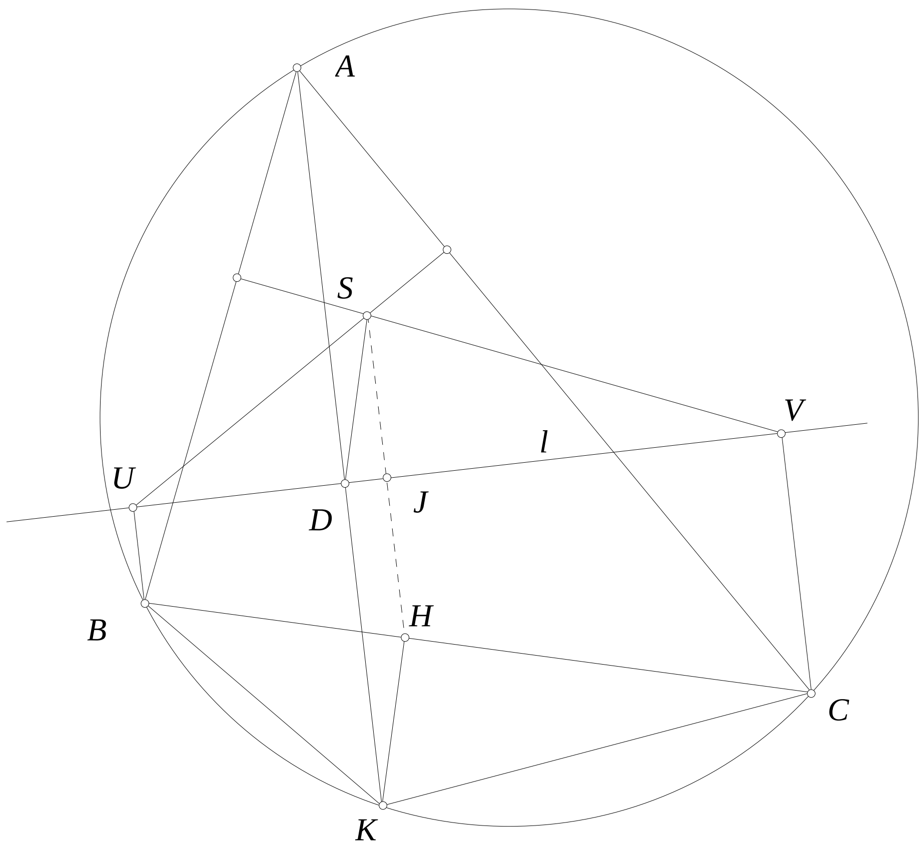
Định lý 4 (Định lí Lemoine). Cho tam giác ABC và đường thẳng l bất kì cố định, P thay đổi trên l. Gọi S là cực trực giao của l đối với tam giác ABC. Khi đó phương tích của S đến đường tròn pedal của P ứng với tam giác ABC là không đổi khi P di chuyển trên l.

Chứng minh sau dựa trên ý tưởng của TelvCohl trong [4].



Hình 3.

Bổ đề 1.1. Cho tam giác ABC và đường thẳng l, S là cực trực giao của l đối với tam giác ABC. Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên l. AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K. H là hình chiếu của K lên BC. Chứng minh rằng $SD = KH$.



Hình 4.

Lời giải. Gọi U, V, J lần lượt là hình chiếu của B, C, S lên l. Dễ thấy $\triangle SUV \cup J \sim \triangle KBC \cup H$ nên $\frac{JU}{JV} = \frac{HB}{HC}$, suy ra $JH \parallel UB \perp l$ hay S, J, H thẳng hàng. Vậy $SDKH$ là hình bình hành, từ đó ta có $SD = KH$. □

Lời giải bài toán. Kí hiệu $d(W, d)$ là khoảng cách từ điểm W đến đường thẳng d.
Gọi T là hình chiếu của A lên l. AT cắt (O) tại điểm thứ hai R. H, D' lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ R, A xuống BC, PD. Khi đó 6 điểm A, F, E, P, D', T đồng viên trên đường tròn đường kính AP, 5 điểm A, M, N, K, T cùng thuộc đường tròn đường kính AK. Dễ thấy T chính là **điểm Miquel** của tứ giác toàn phần tạo bởi (AB, AC, MN, EF). Từ đó, biến đổi góc ta thu được D', Q, T thẳng hàng và $TN \parallel RB, TM \parallel RC$, suy ra $\triangle TMN \sim \triangle RBC$. Gọi S là giao điểm của DQ với đường thẳng qua T vuông góc với BC thì $\frac{ST}{DD'} = \frac{QT}{QD'} = \frac{d(T,MN)}{d(D',MN)} = \frac{AN}{AB} \cdot \frac{RH}{d(D',MN)} = \frac{d(D',MN)}{D',BC} \cdot \frac{RH}{d(D',MN)} = \frac{RH}{DD'}$ suy ra $ST = RH$. Từ đó áp dụng kết quả **Bài toán 1** ta có S là cực trực giao của l đối với tam giác ABC. □

Nhận xét 2. Gọi T' là điểm sao cho $D'DTT'$ là hình thang cân ($DD \parallel TT'$). Chú ý rằng điểm Q là **tâm đẳng phương** của (DEF), đường tròn đường kính AK và đường tròn $(D'T'TD)$. Vì vậy SD đi qua giao điểm thứ hai J của $(D'DTT')$ với (DEF). Từ đó $\mathcal{P}_{S/(DEF)} = \overline{ST'}.\overline{ST}$ không đổi khi P thay đổi trên l.
Ta thu được chứng minh của **Định lí Lemoine**. □

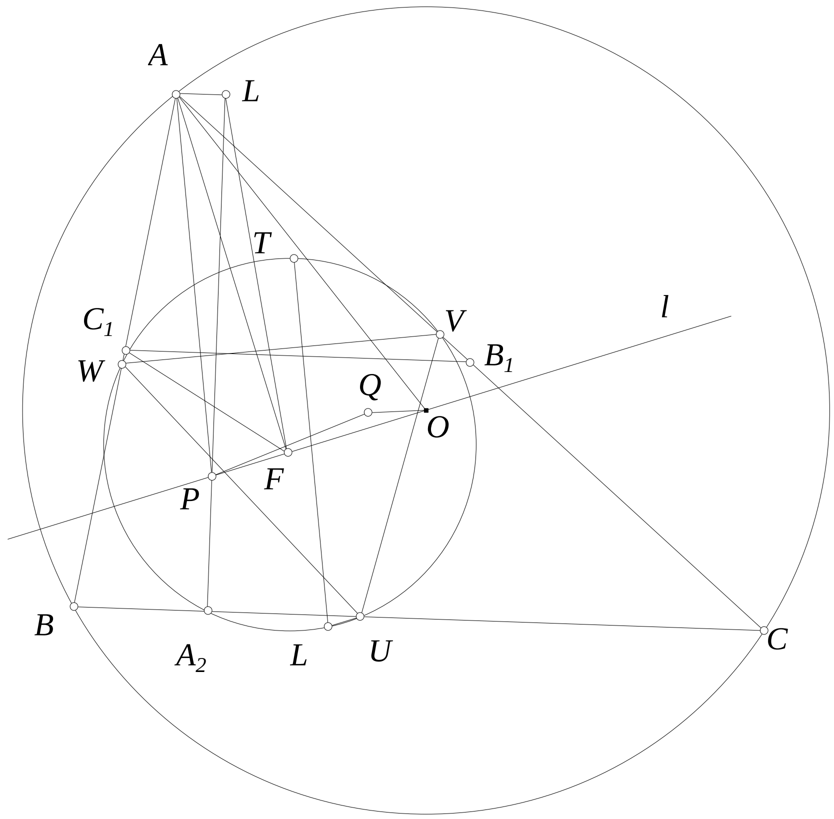
3 Các bài toán ứng dụng

Định lí Fontené và **định lí Lemoine** là hai định lí có tính tổng quát và tầm ứng dụng lớn trong việc giải các bài toán liên quan đến cực trực giao. Với ý tưởng tương tự cách chứng minh **định lí Fontené** đã nêu ở trên, ta có thể thu được một kết quả khá quan trọng sau.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O và hai điểm đẳng giác P, Q. T là cực trực giao của OP đối với tam giác ABC. Khi đó OP song song với đường thẳng Simson của điểm T đối với tam giác pedal của Q ứng với tam giác ABC.

Bổ đề 2.1. Cho tam giác ABC và đường thẳng l vuông góc BC cắt (ABC) tại hai điểm X, Y. Khi đó đường thẳng Simson của X đối với tam giác ABC song song với AY.

Vì chứng minh khá đơn giản nên chúng tôi xin dành cho bạn đọc suy nghĩ.
Lời giải sau dựa trên ý tưởng của Telv Cohl trong [5]



Hình 5.

Lời giải. Gọi $\triangle UVW$ là **tam giác pedal** của Q ứng với tam giác ABC. B_1, C_1 lần lượt là trung điểm CA, AB, A_2, F, L theo thứ tự là hình chiếu của P, A, A lên BC, PO, PA_2. Điểm L thuộc (UVW) sao cho $TL \perp VW$, từ đó áp dụng **Bổ đề 2.1** ta có $\mathcal{S}^T_{UVW} \parallel UL$. Mà để ý rằng $AP \parallel TL \perp VW$, theo chứng minh **định lí Fontené** ta có LF đối xứng A_2T qua B_1C_1, từ đó $\angle(AP, PO) = \angle(AL, LF) = \angle(LF, BC) = \angle(TA_2, BC) = \angle(TL, LU)$, vậy $PO \parallel LU \parallel \mathcal{S}^T_{UVW}$. □

Ngoài ra, bằng cách di chuyển điểm P đến một số vị trí đặc biệt, ta có thể thấy rằng nhiều kết quả quen thuộc vốn được chứng minh khá phức tạp giờ chỉ là hệ quả trực tiếp của hai định lí trên.
Trong **Định lí Fontené thứ ba**, nếu cho P trùng Q thì P chính là tâm nội tiếp I của tam giác ABC, khi đó cực trực giao T của OI là **điểm Feuerbach** của tam giác ABC. Ta có hệ quả sau, tham khảo [3].

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O, tâm nội tiếp I. P là một điểm thuộc OI. Gọi $\triangle DEF$ là tam giác pedal của P đối với tam giác ABC. M, N là trung điểm của CA, AB. Gọi Q là giao điểm của MN và EF. Chứng minh rằng DQ đi qua điểm Feuerbach của tam giác ABC.

Hơn nữa, để ý rằng khi P nằm trên (ABC) thì **đường tròn pedal** của P ứng với tam giác ABC suy biến thành **đường thẳng Simson** của P đối với tam giác ABC. Ta thu được hệ quả quen thuộc sau của **định lí Lemoine**.

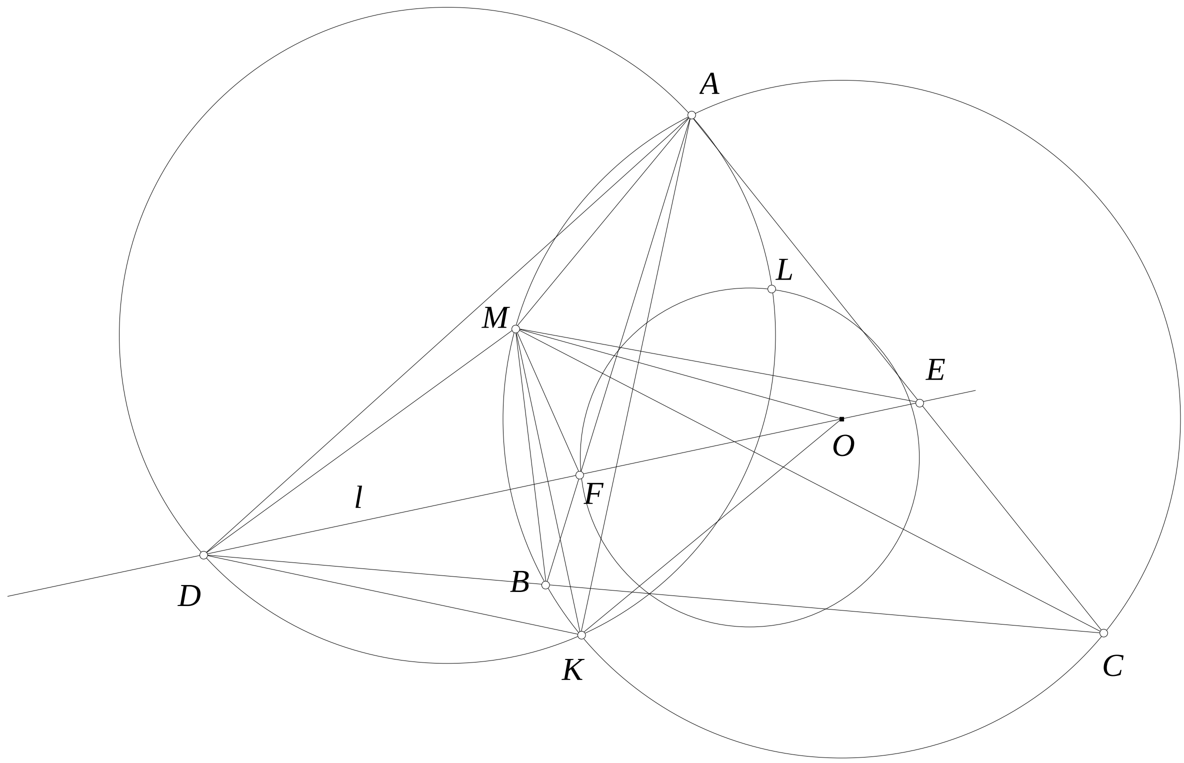
Bài toán 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường thẳng l bất kì cắt (O) tại hai điểm X, Y. Chứng minh rằng đường thẳng Simson của X, Y đối với tam giác ABC cắt nhau tại cực trực giao S của l đối với tam giác ABC.

Mặt khác, dễ thấy đường tròn đường kính AD chính là **đường tròn pedal** của điểm D đối với tam giác ABC, ta được một hệ quả trực tiếp của **định lí Fontené**, tham khảo [6]

Bài toán 5. Cho tam giác ABC với tâm ngoại tiếp O, đường thẳng l đi qua O cắt BC tại D. Q là cực trực giao của l đối với tam giác ABC. Chứng minh rằng $\angle DQA = 90°$.

Bài toán trên có thể được phát biểu một cách tổng quát hơn như sau:

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Một đường thẳng l đi qua O cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng 3 đường tròn đường kính AD, BE, CF giao nhau tại 2 điểm, một điểm nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC là cực trực giao của l đối với tam giác ABC, điểm còn lại nằm trên (O) là đối xứng qua l của điểm Miquel của tứ giác toàn phần (AB, AC, BC, l).



Hình 6.

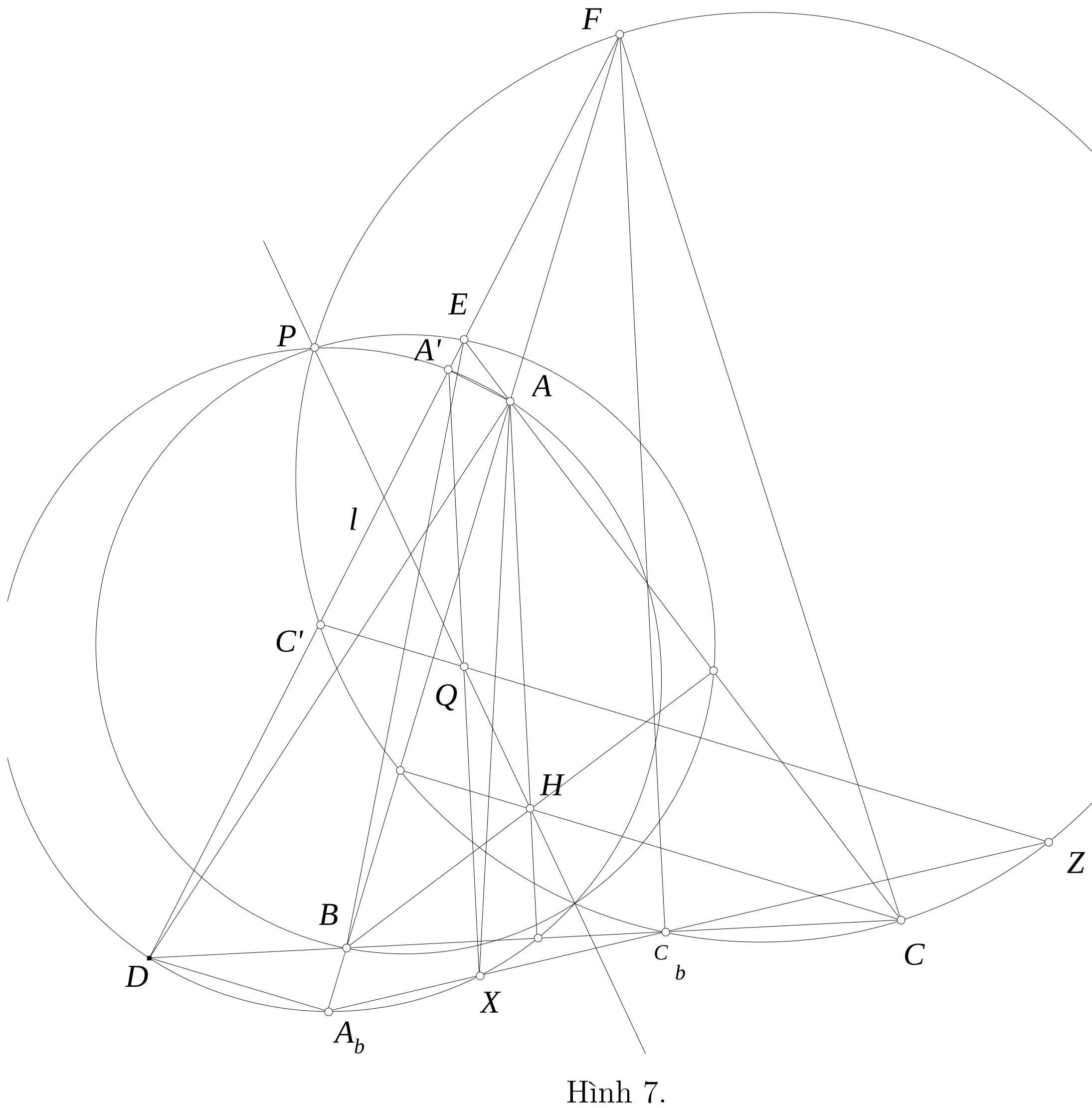
Lời giải. Gọi M là **điểm Miquel** của tứ giác toàn phần (AB, AC, BC, l) và K là điểm đối xứng M qua l. Ta có $\angle MKA = \angle MBF = \angle MDF = \angle KDF$ suy ra $\angle DKA = 90°$ hay K thuộc (AD). Chứng minh tương tự ta có các đường tròn đường kính BE, CF cũng đi qua K. Mặt khác, nếu gọi L là cực trực giao của l đối với tam giác ABC thì theo **định lí Fontené**, L là giao điểm của các đường tròn pedal $(AD), (BE), (CF)$ với đường tròn Euler của tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

Ta thu được một hệ quả của bài toán trên, tham khảo [7]

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và điểm P nằm trên đường tròn Euler của tam giác. Chứng minh rằng cực trực giao của cát tuyến trực giao của P ứng với tam giác ABC cũng chính là điểm P.

Từ **Bài toán 6**, nếu thay đường thẳng l đi qua O thành một đường thẳng bất kì, ta có thể thu được một kết quả tổng quát hơn nữa.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC và đường thẳng l bất kì cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng cực trực giao của l đối với tam giác ABC nằm trên đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần (AB, BC, CA, l).



Hình 7.

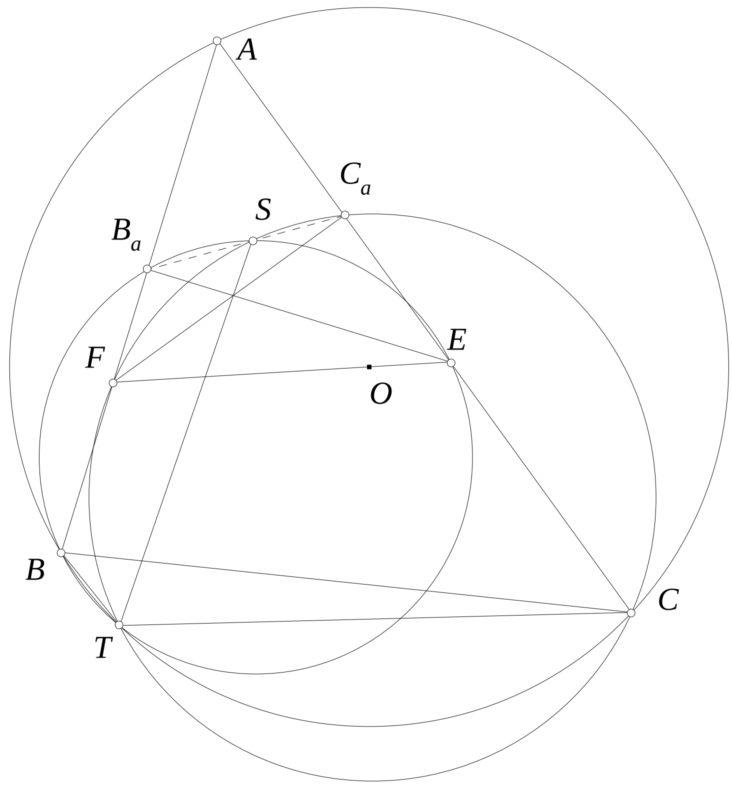
Lời giải. Gọi A', C' là chân đường vuông góc hạ từ A, C xuống l. Q là cực trực giao của l đối với tam giác ABC. X, Z lần lượt là giao điểm thứ hai của $A'Q$, $C'Q$ với đường tròn đường kính AD, CF. Hạ $DA_b \perp AB$ tại A_b, $FC_b \perp BC$ tại C_b thì tứ giác DA_bC_bF nội tiếp. Ta có $\angle AA_bX = \angle AA'X = \angle 90° - \angle DA'X = \angle FDB = \angle FA_bC_b$ suy ra A_b, X, C_b thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta có A_bC_b đi qua Z. Vì $\angle QC'A' = \angle ZC'F = \angle ZC_bF = \angle FDA_b = \angle A'XZ$ nên C', A', X, Z cùng thuộc một đường tròn. Từ đó suy ra Q nằm trên trục đẳng phương của (AD) và (CF). Chú ý rằng trực tâm các tam giác ABC, AEF, DBF, DEC cùng nằm trên trục đẳng phương d của $(AD), (BE), (CF)$, chứng minh tương tự ta có Q thuộc **đường thẳng Steiner** d của tứ giác toàn phần (AB, BC, CA, l). □

Nhận xét. Bài toán cũng có thể được giải bằng một cách khác như sau: chú ý rằng (AD), (BE), (CF) là **đường tròn pedal** của D, E, F ứng với tam giác ABC, từ đó áp dụng **định lí Lemoine** ta có Q thuộc trục đẳng phương của $(AD), (BE), (CF)$. □

Từ chứng minh của bài toán trên, chúng ta có một cách nhìn khác về **Bài toán 5**. Để ý rằng $\angle AQD = 90^\circ$ khi và chỉ khi $Q \equiv X \equiv Z$ tại một trong hai giao điểm của ba đường tròn $(AD), (BE), (CF)$. Như vậy nếu định nghĩa tương tự các điểm B_a, C_a, A_c, B_c thì $\angle AQD = 90^\circ$ khi và chỉ khi A_bC_b, B_aC_a, A_cB_c đồng quy. Vậy để giải **Bài toán 5** ta chỉ cần chứng minh kết quả sau, rất trùng hợp lại là một kết quả đã được đề nghị bởi Luis González trong [8].

Bài toán 9. Đường thẳng l bất kì đi qua tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC và cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Gọi B_a, C_a là chân đường vuông góc hạ từ E, F xuống CA, AB. Chứng minh rằng B_aC_a đi qua cực trực giao của l đối với tam giác ABC.

Lời giải sau của TelvCohl trong [8].



Hình 8.

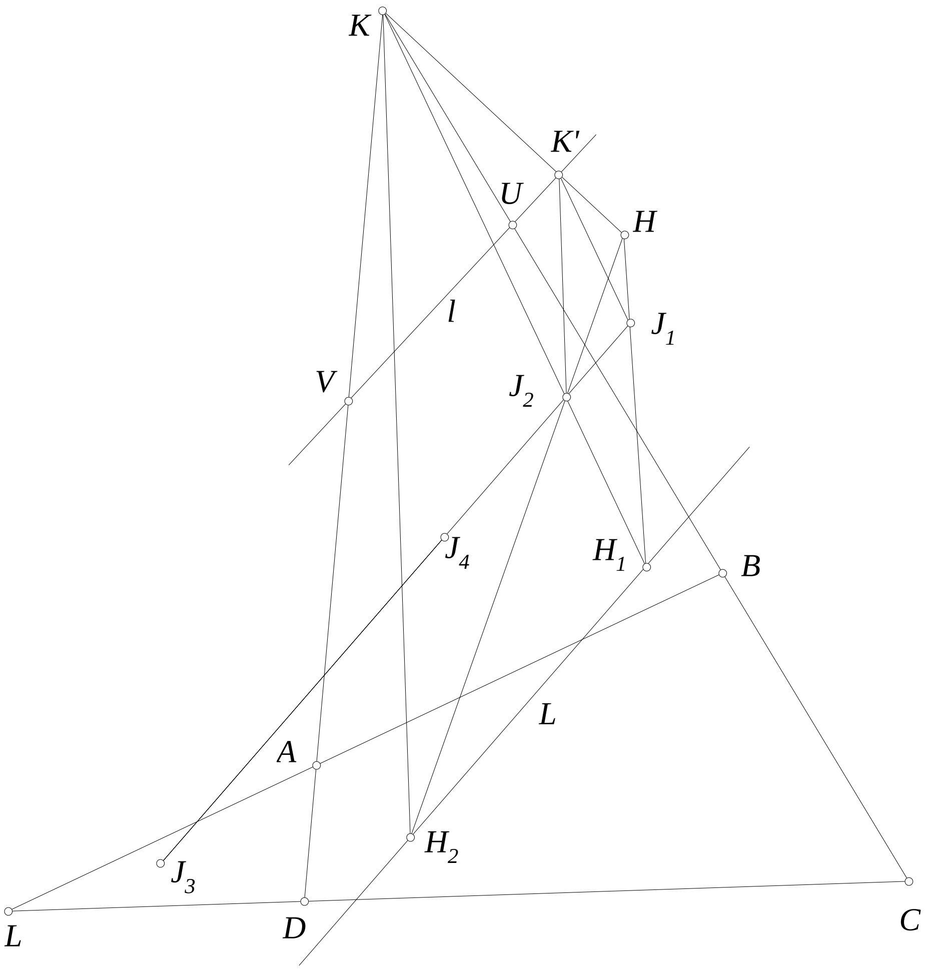
Lời giải. Theo kết quả **Bài toán 6** ta có $(BE), (CF)$ cắt nhau tại hai điểm, một điểm T thuộc (O), điểm còn lại là cực trực giao S của l đối với tam giác ABC. Từ đó $\angle B_aST + \angle C_aST = \angle ABT + \angle ACT = 180^\circ$ suy ra B_aC_a đi qua S. □

Ngoài ra, từ kết quả **Bài toán 8**, chú ý rằng nếu gọi P là một trong hai giao điểm của ba đường tròn đường kính AD, BE, CF thì l chính là cát tuyến trực giao của P đối với tam giác ABC. Ta có hệ quả sau, tham khảo [9].

Bài toán 10. Cho tam giác ABC và điểm P. l là cát tuyến trực giao của P đối với tam giác ABC. Chứng minh rằng cực trực giao của l đối với tam giác ABC nằm trên đường thẳng Euler của tam giác này khi và chỉ khi P thuộc đường thẳng Euler.

Vẫn từ kết quả **Bài toán 8**, ta có thể thu được một cách chứng minh ngắn gọn cho một tính chất đã được giới thiệu trong [10] với chứng minh bằng **định lí Pappus**. Ý tưởng lời giải của tác giả có phần giống với ý tưởng của bạn Ngô Quang Dương trong [11].

Bài toán 11. Cho bốn đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 và đường thẳng l bất kì. Chứng minh rằng cực trực giao của l đối với các tam giác tạo bởi ba trong bốn đường thẳng d_1, d_2, d_3, d_4 cùng nằm trên một đường thẳng d song song với đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần (d_1, d_2, d_3, d_4).



Hình 9.

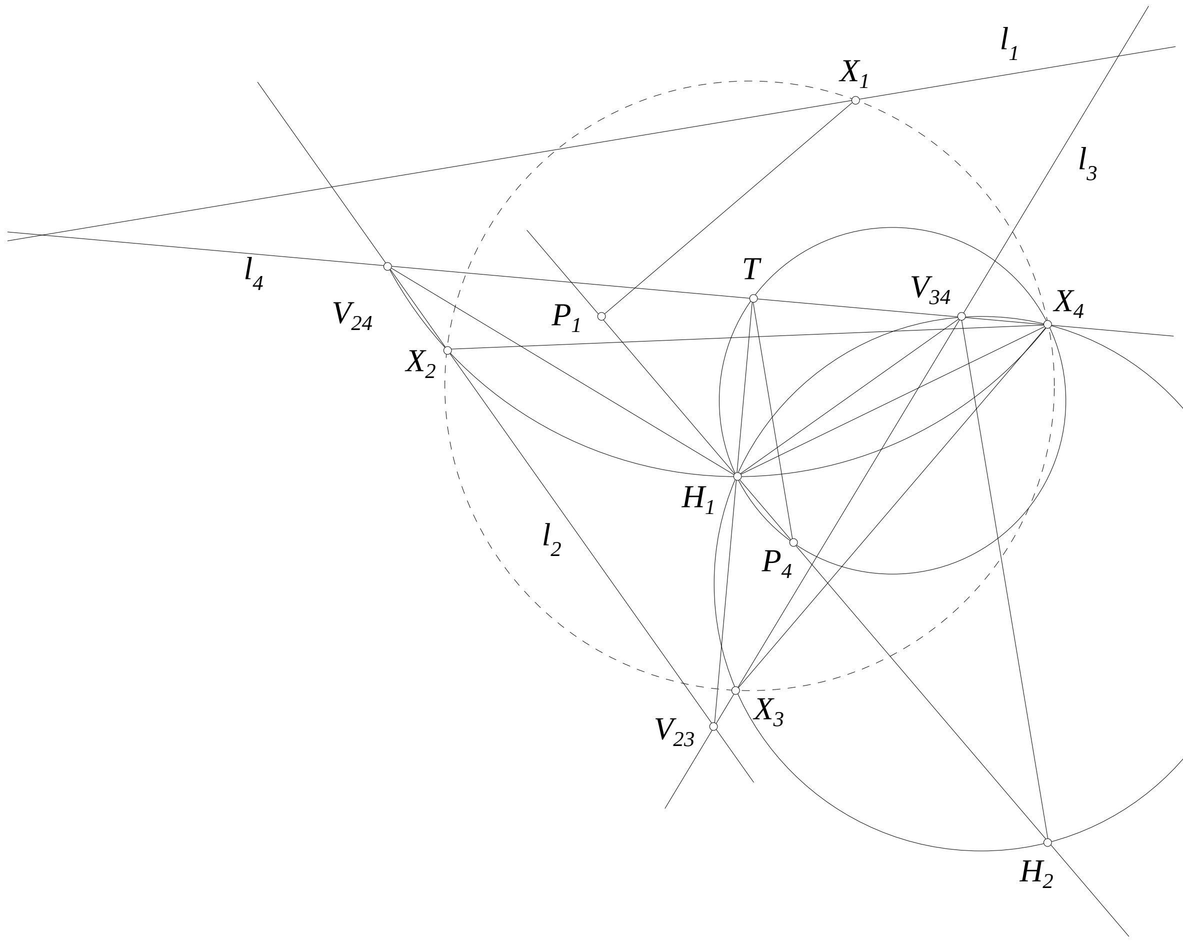
Lời giải. Gọi $ABCD$ là tứ giác lồi được tạo thành bởi d_1, d_2, d_3, d_4. K là giao điểm của AD và BC, L là giao điểm của AB và DC. Gọi J_1, J_2, J_3, J_4 theo thứ tự là cực trực giao của l đối với tam giác KAB, KDC, LAD, LBC. Xét tam giác KAB, l cắt KC, KD lần lượt tại U, V. Gọi H, H_1 lần lượt là trực tâm tam giác KUV, KAB thì theo **Bài toán 8** ta có cực trực giao J_1 của l đối với tam giác KAB nằm trên đường thẳng HH_1. Vì $K'J_1 \parallel KH_1 \perp AB$ nên $\frac{\overline{HJ_1}}{\overline{HH_1}} = \frac{\overline{HK'}}{\overline{HK}}$. Tương tự gọi H_2 là trực tâm tam giác KDC thì $\frac{\overline{HJ_2}}{\overline{HH_2}} = \frac{\overline{HK'}}{\overline{HK}} = \frac{\overline{HJ_1}}{\overline{HH_1}}$. Từ đó $J_1J_2 \parallel \mathcal{L}$ với $\mathcal{L}$ là **đường thẳng Steiner** của tứ giác toàn phần (AB, BC, CD, DA). Chứng minh tương tự ta cũng có $J_2J_4 \parallel \mathcal{L}$, $J_4J_3 \parallel \mathcal{L}$. Vậy J_1, J_2, J_3, J_4 thẳng hàng trên đường thẳng song song với $\mathcal{L}$. $\square$

Bài toán sau cũng là một ứng dụng thú vị của **Bài toán 8**, được đề nghị bởi tác giả **Trần Quang Hùng** trong [12].

Bài toán 12. Cho bốn đường thẳng l_1, l_2, l_3, l_4 trong mặt phẳng. Gọi H_1 là trực tâm của tam giác tạo bởi ba đường thẳng l_2, l_3, l_4. P_1 là cực trực giao của l_1 đối với tam giác tạo bởi l_2, l_3, l_4.

X_1 là điểm nằm trên l_1 sao cho $P_1X_1 \perp P_1H_1$. Định nghĩa tương tự cho các điểm X_2, X_3, X_4. Chứng minh rằng X_1, X_2, X_3, X_4 đồng viên.

Lời giải sau sử dụng ý tưởng của TelvCohl trong [12]

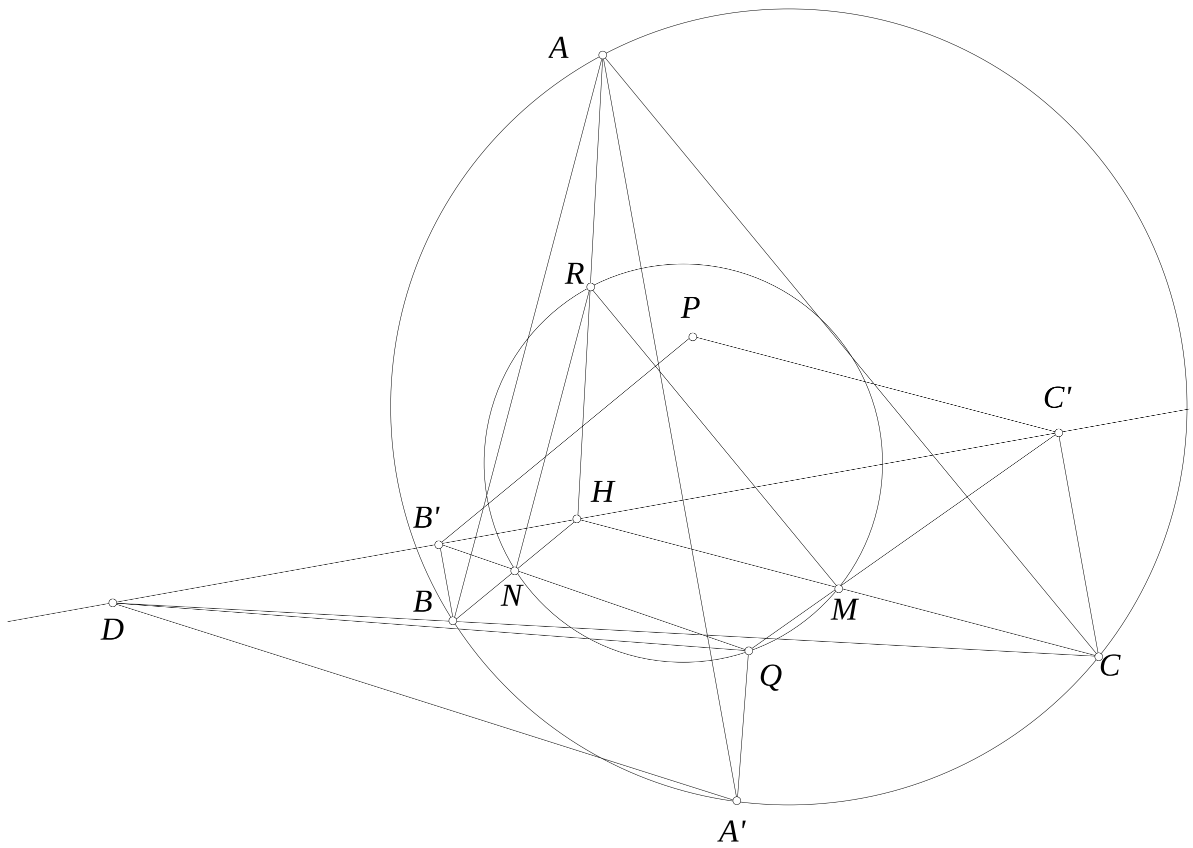


Hình 10.

Lời giải. Kí hiệu $\angle(a, b)$ là số đo góc nhỏ nhất trong bốn góc tạo bởi đường thẳng a và b, $\perp l$ là đường thẳng vuông góc với đường thẳng l.
Theo **Bài toán 8** thì $H_1, H_2, H_3, H_4, P_1, P_2, P_3, P_4$ thẳng hàng trên **đường thẳng Steiner** của tứ giác toàn phần (l_1, l_2, l_3, l_4). Gọi V_{ij} là giao điểm của l_i và l_j $(1 \leq i < j \leq 4)$. T là chân đường vuông góc hạ từ V_{23} xuống l_4 thì T, H_1, P_4, X_4 đồng viên và $P_4T \perp l_1 \perp H_2V_{34}$ hay $P_4T \parallel H_2V_{34}$. Do đó áp dụng **định lí Reim** cho hai đường tròn (H_1X_4T) và $(H_1X_4H_2)$ ta có 4 điểm H_1, V_{34}, X_4, H_2 đồng viên. Tương tự X_3 cũng thuộc $(H_1H_2X_4V_{34})$, và các điểm X_2, V_{24}, X_4, H_1 nằm trên một đường tròn. Từ đó $\angle X_2X_4X_3 = \angle X_2X_4H_1 + \angle H_1X_4X_3 = \angle X_2V_{24}H_1 + \angle H_1V_{34}X_3 = \angle(l_2, \perp l_3) + \angle(\perp l_2, l_3)$. Chứng minh tương tự ta cũng thu được $\angle X_2X_1X_3 = \angle(l_2, \perp l_3) + \angle(l_3, \perp l_2)$. Vậy X_1, X_2, X_3, X_4 cùng thuộc một đường tròn. □

Sau đây là một bài toán nhỏ về tính chất của cực trực giao khi đường thẳng l đi qua trực tâm của tam giác, bạn đọc tham khảo [13]

Bài toán 13. Cho tam giác ABC, trực tâm H, l là một đường thẳng đi qua H, P là cực trực giao của l đối với tam giác ABC. Chứng minh rằng đối xứng của P qua l nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC.

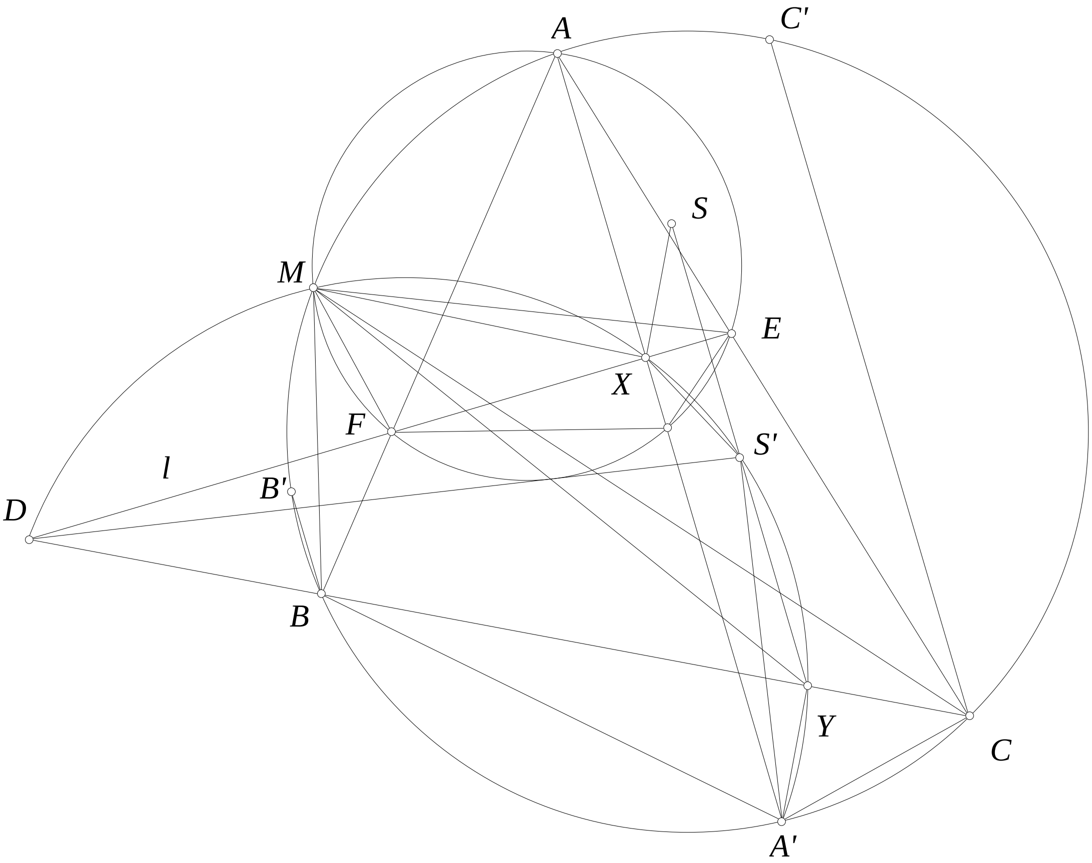


Hình 11.

Lời giải của Trương Mạnh Tuấn. Gọi B', C' là hình chiếu của B, C trên l. M, N, R lần lượt là trung điểm của HC, HB, HA. Q là điểm đối xứng P qua l. Ta có $\angle PC'H = \angle C'HC = \angle HC'Q$ suy ra $C'Q$ đi qua M. Tương tự $B'Q$ đi qua N. Từ đó $\angle NQM = 180^\circ - \angle QC'B' - \angle QB'C' = \angle BHC = 180 - \angle MRN$ hay Q nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC. □

Nhận xét. Tác giả còn thu được một kết quả sau: gọi đường thẳng qua A vuông góc l cắt (ABC) tại A' thì $\angle DQA' = 90^\circ$. Điều đáng chú ý là kết quả trên có nét tương đồng đến lạ kì với **Bài toán 5**. Sau khi tìm tòi, tác giả đã tìm ra bài toán tổng quát sau. □

Bài toán 14. Cho tam giác ABC, đường thẳng l bất kì cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F, S là cực trực giao của l đối với tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm của (O) với các đường thẳng qua A, B, C vuông góc với l. Chứng minh rằng 3 đường tròn đường kính $A'D, B'E, C'F$ đồng quy tại hai điểm, một điểm là đối xứng của S qua l, điểm còn lại là điểm Miquel M của tứ giác toàn phần (AB, BC, CA, l).

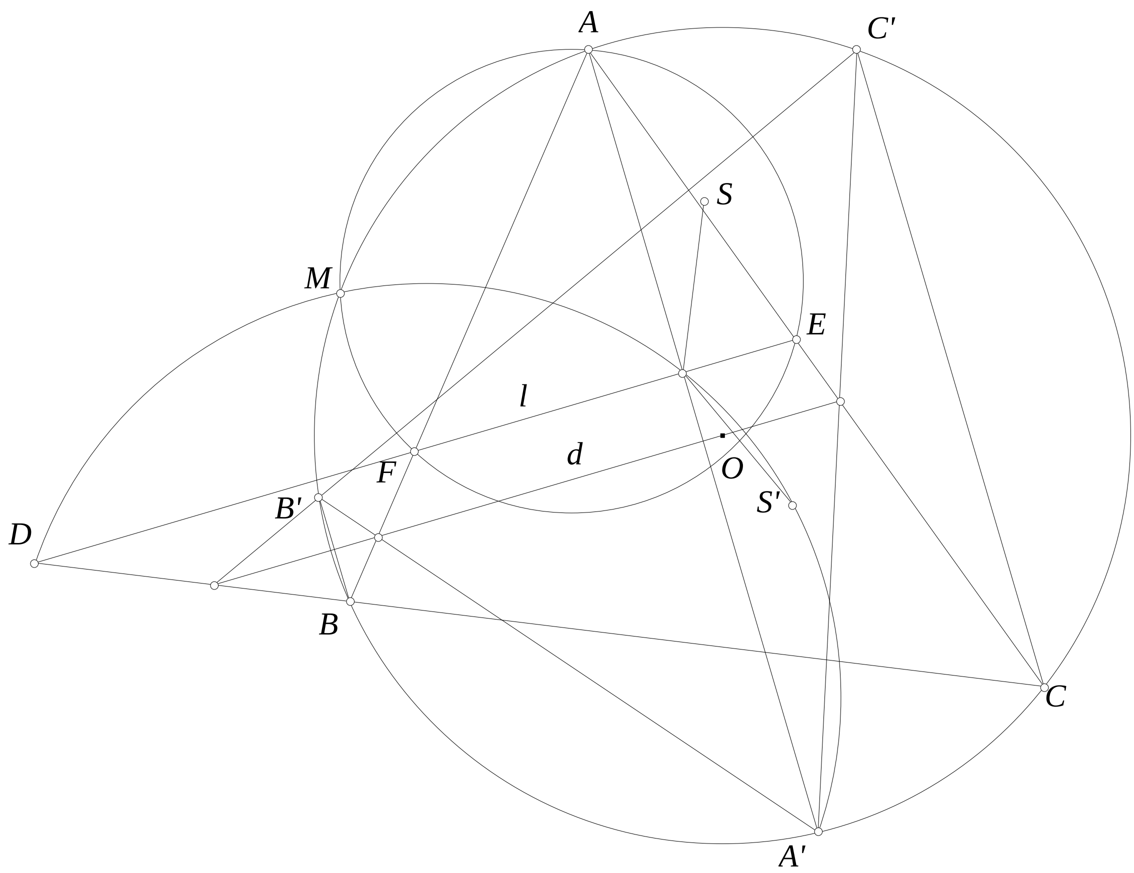


Hình 12.

Lời giải sau sử dụng ý tưởng của TelvCohl trong [13]

Lời giải. Gọi X, Y lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ A, A' xuống FE, BC. Khi đó dễ thấy $\triangle MFE \cup X \sim \triangle MBC \cup Y$ nên $\angle MXF = \angle MYB$ suy ra M thuộc đường tròn đường kính $A'D$. Mặt khác gọi S' là giao điểm thứ hai của SY với (DA') thì theo kết quả **Bổ đề 1.1**, ta có $SXA'Y$ là hình bình hành. Từ đó suy ra $XS'YA'$ là hình thang cân, hay S' là điểm đối xứng với S qua l. □

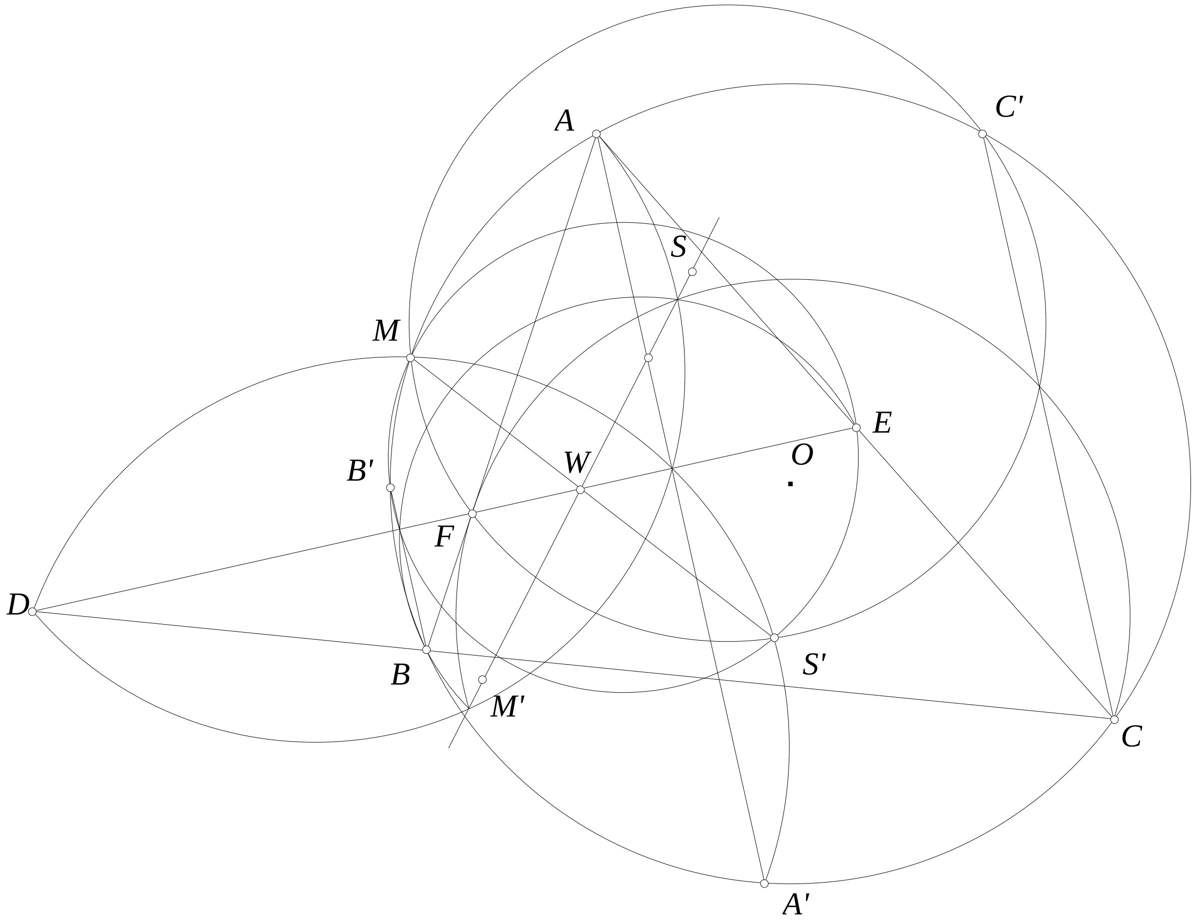
Nhận xét. Chú ý rằng A', B', C' là điểm đối xứng A, B, C qua đường thẳng d đi qua O và song song l. Bằng những biến đổi góc đơn giản ta dễ dàng chứng minh được S' chính là cực trực giao của l đối với tam giác $A'B'C'$. Khi l đi qua O thì l là trục của phép đối xứng biến (AD) thành $(A'D)$, do đó (AD) đi qua S và điểm M' thuộc (O) đối xứng M qua l.
Như vậy, **Bài toán 5** và thậm chí **Bài toán 6** thực chất chỉ là một trường hợp đặc biệt của kết quả trên. □



Hình 13.

Sau đây là một bài toán áp dụng.

Bài toán 15. Cho tam giác ABC và đường thẳng l cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. A', B', C' là giao điểm thứ hai của (O) với các đường thẳng qua A, B, C vuông góc với l. Chứng minh rằng trục đẳng phương của $(A'D), (B'E), (C'F)$ cắt l tại một điểm nằm trên đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần (AB, BC, CA, l).



Hình 14.

Lời giải. Gọi M là **điểm Miquel** của tứ giác toàn phần (AB, BC, CA, l), S là cực trực giao của l đối với tam giác ABC, M' đối xứng M qua l. Áp dụng kết quả **Bài toán 8** ta có SM' là đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần (AB, BC, CA, l). Mặt khác theo **Bài toán 14** thì MS' là trục đẳng phương của ba đường tròn đường kính $A'D, B'E, C'F$. Từ đó, do tính chất đối xứng nên MS', SM' và l đồng quy. □

Bài toán sau được đề nghị bởi tác giả **Trần Quang Hùng** trong [14].

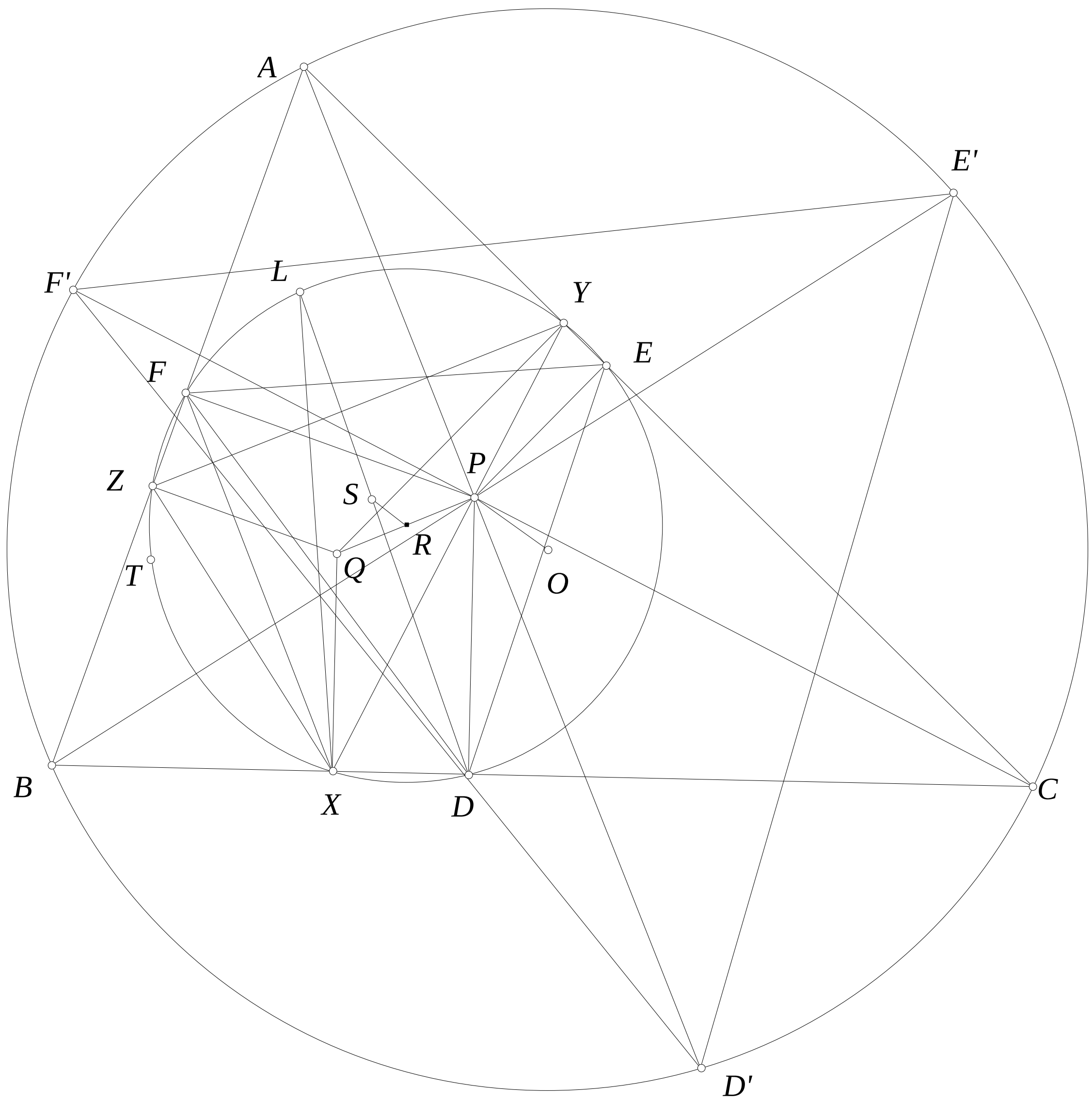
Bài toán 16. Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF. P là một điểm bất kì trong mặt phẳng. Gọi X, Y, Z là các điểm sao cho $\triangle ABC \cup P \sim \triangle AEF \cup X \sim \triangle DBF \cup Y \sim \triangle DEC \cup Z$. Chứng minh rằng các đường tròn $(DYZ), (EZX), (FXY)$ đi qua cực trực giao của OP đối với tam giác ABC.

Chúng tôi xin trình bày hai lời giải với hai hướng tiếp cận khác nhau, song đều cho thấy sự liên quan mật thiết của những kết quả về cực trực giao đến những tính chất sâu sắc khác.
Lời giải thứ nhất của TelvCohl trong [14].

Bổ đề 16.1. Góc giữa hai đường thẳng Simson của cùng một điểm đối với hai tam giác khác nhau cùng nội tiếp một đường tròn là không đổi khi điểm đó di chuyển trên đường tròn.

Vì chứng minh khá đơn giản nên chúng tôi xin dành cho bạn đọc.

Bổ đề 16.2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), P là điểm bất kì, T là cực trực giao của OP đối với tam giác ABC. Gọi $\triangle DEF$ là tam giác pedal của P ứng với tam giác ABC, S là điểm đẳng giác với P trong tam giác DEF. R là tâm ngoại tiếp đường tròn (DEF). Khi đó đường thẳng Simson của điểm T đối với tam giác DEF song song với RS.



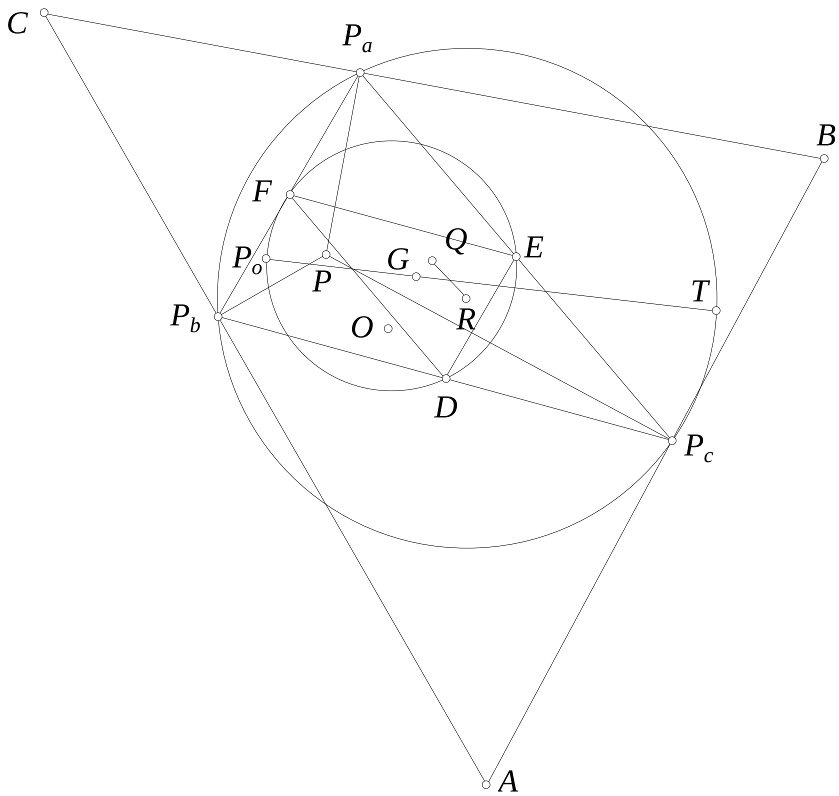
Hình 15.

Chứng minh của TelvCohl trong [15]

Lời giải. Kí hiệu $\mathcal{S}_{\triangle}^{U}$ là **đường thẳng Simson** của điểm U ứng với tam giác $\triangle$.
Gọi Q là điểm đẳng giác với P trong tam giác ABC, $\triangle XYZ$ là **tam giác pedal** của Q. DS cắt (R) tại điểm thứ hai L thì $\angle LEF + \angle ELX = \angle PDE + \angle EDC = 90^\circ$ nên $XL \perp EF$. Từ đó áp dụng **Bổ đề 2.1** ta có $\mathcal{S}_{DEF}^{X} \parallel DS$. Mặt khác gọi PA, PB, PC cắt (O) tại các điểm thứ hai D', E', F', dễ thấy $\triangle DEF \cup R \cup S \sim \triangle D'E'F' \cup O \cup P$ nên áp dụng **Bổ đề 16.1** ta có $\angle(\mathcal{S}_{DEF}^{T}, \mathcal{S}_{XYZ}^{T}) = \angle(\mathcal{S}_{DEF}^{X}, \mathcal{S}_{XYZ}^{X}) = \angle(DS, \perp YZ) = \angle(DS, D'P) = \angle(RS, OP)$. Mà theo kết quả **Bài toán 2** ta có $\mathcal{S}_{XYZ}^{T} \parallel OP$, vậy $\mathcal{S}_{DEF}^{T} \parallel RS$. □

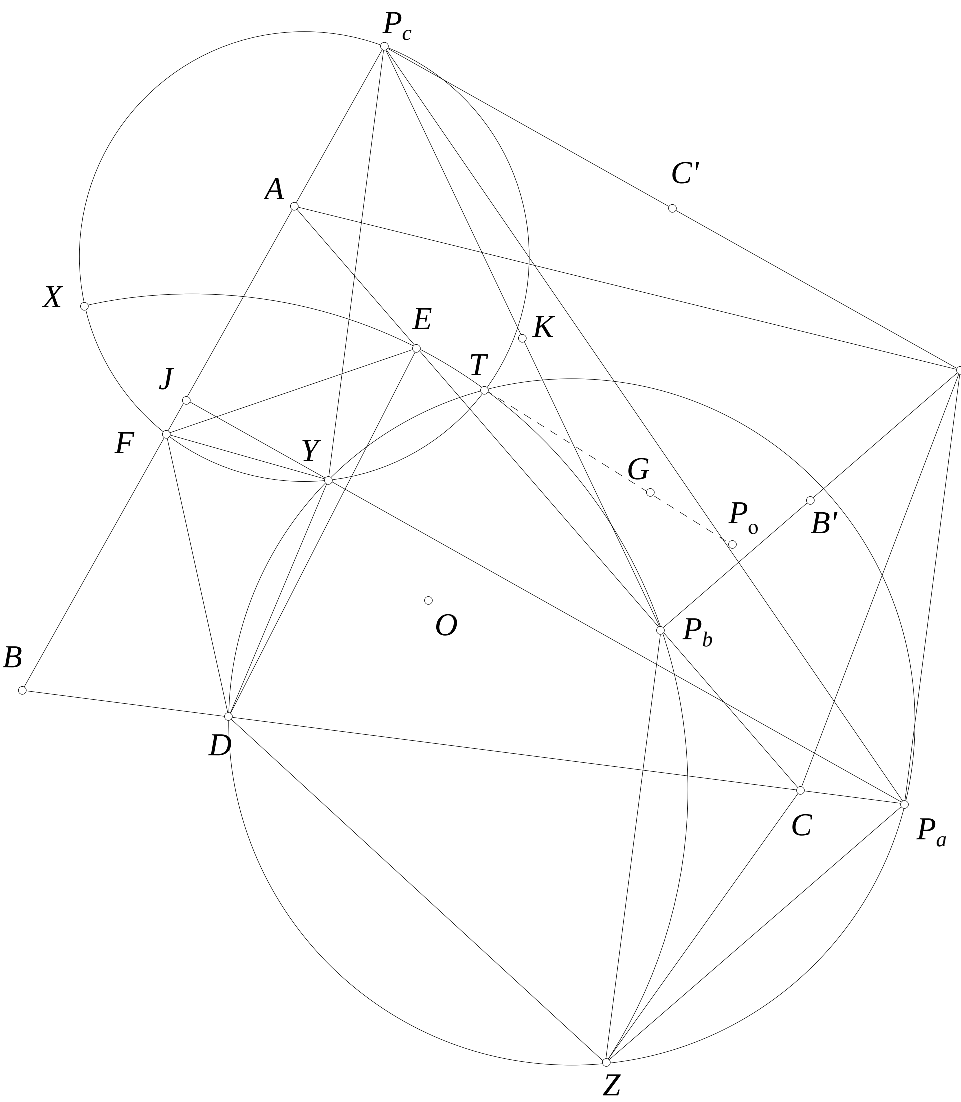
Bổ đề 16.3. Cho tam giác ABC với tâm ngoại tiếp O và điểm P bất kì. Gọi $\triangle P_aP_bP_c$ là tam giác pedal của P đối với tam giác ABC. P_o là điểm Poncelet của tứ giác (P, P_a, P_b, P_c), G là trọng tâm tam giác $P_aP_bP_c$, T là ảnh của P_o qua phép vị tự tâm G tỉ số -2. Khi đó T là cực trực giao của OP ứng với tam giác ABC.

Chứng minh sau dựa trên ý tưởng của TelvCohl trong [15]



Hình 16.

Lời giải. Gọi R là tâm $(P_aP_bP_c)$, D, E, F lần lượt là trung điểm P_cP_b, P_cP_a, P_aP_b, Q là điểm đẳng giác với P trong tam giác $P_aP_bP_c$. Theo **Nhận xét 1** ở **Phần 2** thì P_o là cực trực giao của OQ ứng với tam giác $P_aP_bP_c$ và $\mathcal{S}_{DEF}^{P_o} \parallel RQ$. Chú ý rằng $\triangle P_aP_bP_c \cup T$ là ảnh của $\triangle DEF \cup P_o$ qua phép vị tự tâm G, nên T thuộc (R) và $\mathcal{S}_{P_aP_bP_c}^{T} \parallel \mathcal{S}_{DEF}^{P_o} \parallel RQ$. Từ đó áp dụng kết quả **Bổ đề 16.2** ta có T là cực trực giao của OP ứng với tam giác ABC. $\square$



Hình 17.

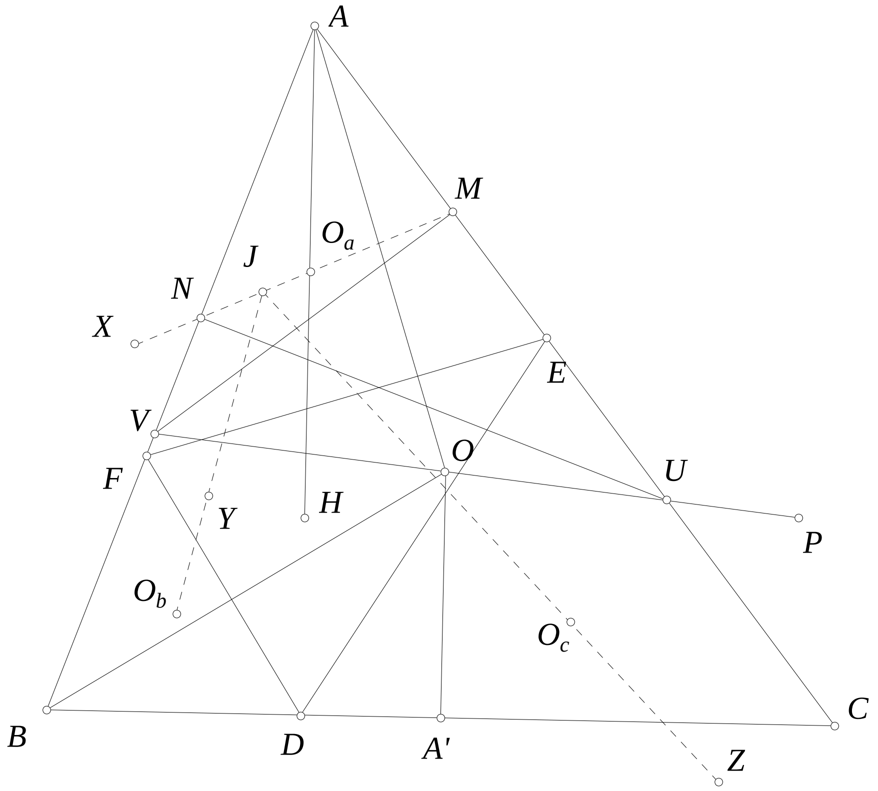
Lời giải thứ nhất. Gọi $\triangle P_aP_bP_c$ là **tam giác pedal** của điểm P đối với tam giác ABC. Gọi J là chân đường vuông góc hạ từ Y xuống AB thì $\triangle BFD \cup J \sim \triangle BCA \cup P_a$ nên $\frac{BF}{BJ} = \frac{BC}{BP_a}$, từ đó Y, J, P_a thẳng hàng hay $P_aY \perp BP_c$, tương tự $P_cY \perp BP_a$, suy ra Y là trực tâm tam giác BP_aP_c. Lại lập luận như trên ta có X là trực tâm tam giác AP_cP_b, Z là trực tâm tam giác CP_bP_a. Từ đó $\angle YP_aZ = \angle BAC = \angle BAP - \angle PAC = \angle YDB - \angle CDZ = 180^\circ - \angle YDZ$, hay P_a thuộc đường tròn (DYZ). Để ý rằng nếu gọi G là trọng tâm tam giác $P_aP_bP_c$, B', C', K lần lượt là trung điểm PP_b, PP_c, P_bP_c thì các đoạn $B'K, C'K$ theo thứ tự song song và bằng nửa đoạn P_aY, P_aZ, do đó đường tròn (P_aYZ) là ảnh của đường tròn Euler của tam giác PP_bP_c qua phép vị tự tâm G tỉ số -2. Chú ý rằng các **đường tròn Euler** của tam giác $PP_bP_c, PP_cP_a, PP_aP_b$ đồng quy tại **điểm Poncelet** của tứ giác (P, P_a, P_b, P_c), chứng minh tương tự ta có $(DYZ), (EXZ), (FXY)$ đồng quy tại điểm T là ảnh của P_o qua phép vị tự tâm G tỉ số -2. Từ đó áp dụng **Bổ đề 16.3** ta có T chính là cực trực giao của PO đối với tam giác ABC. $\square$

Lời giải thứ hai của Luis González trong [14]

Bổ đề sau được mở rộng bởi TelvCohl trong [16]

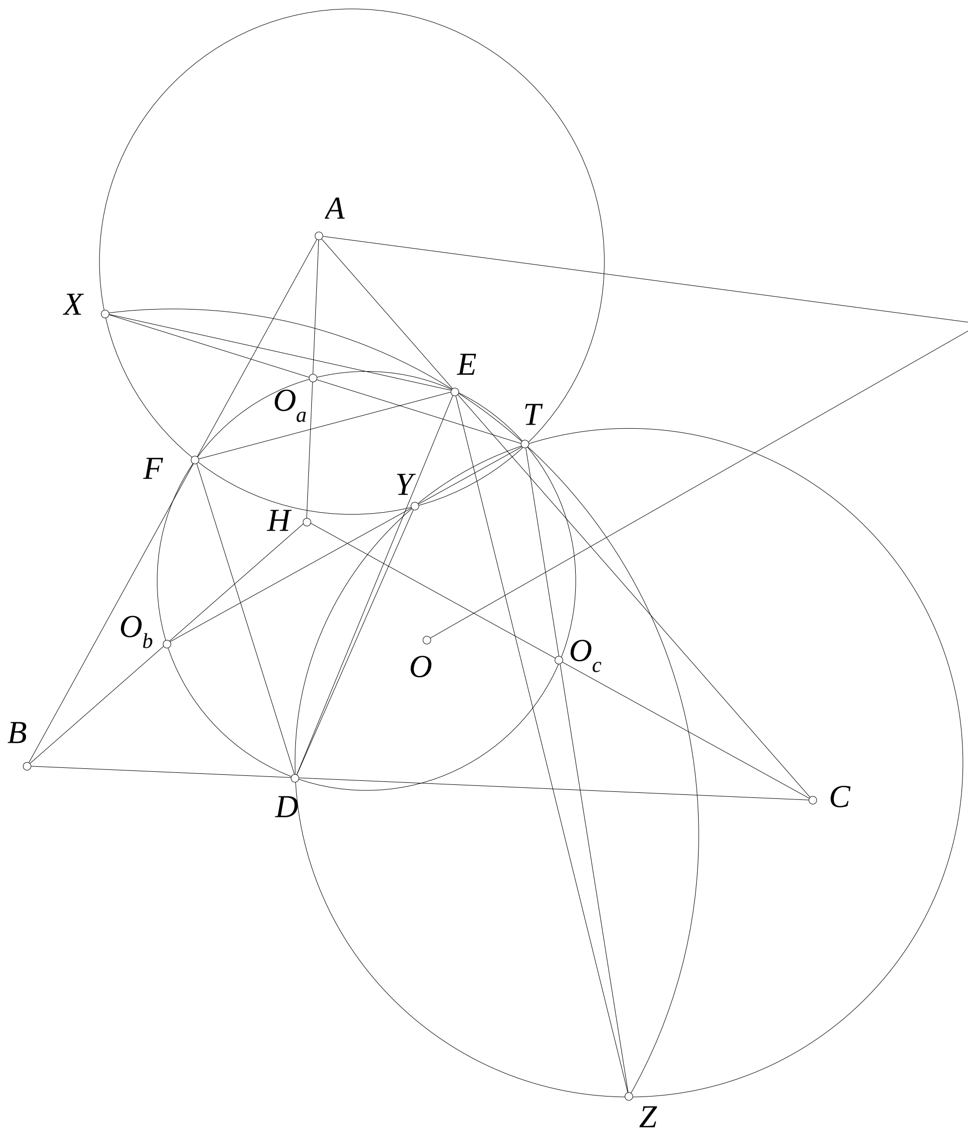
Bổ đề 16.4. Cho tam giác ABC trực tâm H, đường cao AD, BE, CF. Gọi O_a, O_b, O_c là tâm ngoại tiếp tam giác AEF, BDF, CDE. P là điểm bất kì, X, Y, Z là các điểm sao cho

$\triangle ABC \cup P \sim \triangle AEF \cup X \sim \triangle DBF \cup Y \sim \triangle DEC \cup Z$. Khi đó O_aX, O_bY, O_cZ đồng quy tại cực trực giao J của OP đối với tam giác ABC.



Hình 18.

Lời giải. Gọi U, V lần lượt là giao điểm của OP với AC, AB. Kẻ đường cao UN, VM của tam giác AUV. Gọi A' là trung điểm BC thì theo kết quả quen thuộc $AO_a = OA'$ ta có $\frac{AO_a}{AO} = \frac{OA'}{OB} = \frac{AM}{AV} = \frac{AN}{AU}$, từ đó, vì AO_a và AO đẳng giác trong góc A nên $\triangle AMN \cup O_a \cup \sim \triangle AVU \cup O$, suy ra M, N, O_a thẳng hàng trên đường đối song của OP trong góc A. Mà $\triangle AEF \cup O_a \cup X \sim \triangle ABC \cup O \cup P$ nên O_aX và OP là hai đường đối song trong góc A, từ đó M, N, O_a, X thẳng hàng. Mặt khác theo kết quả **Bài toán 9** ta có MN đi qua J, vậy J thuộc XO_a. Chứng minh tương tự ta được XO_a, YO_b, ZO_c đồng quy tại điểm J. $\square$



Hình 19.

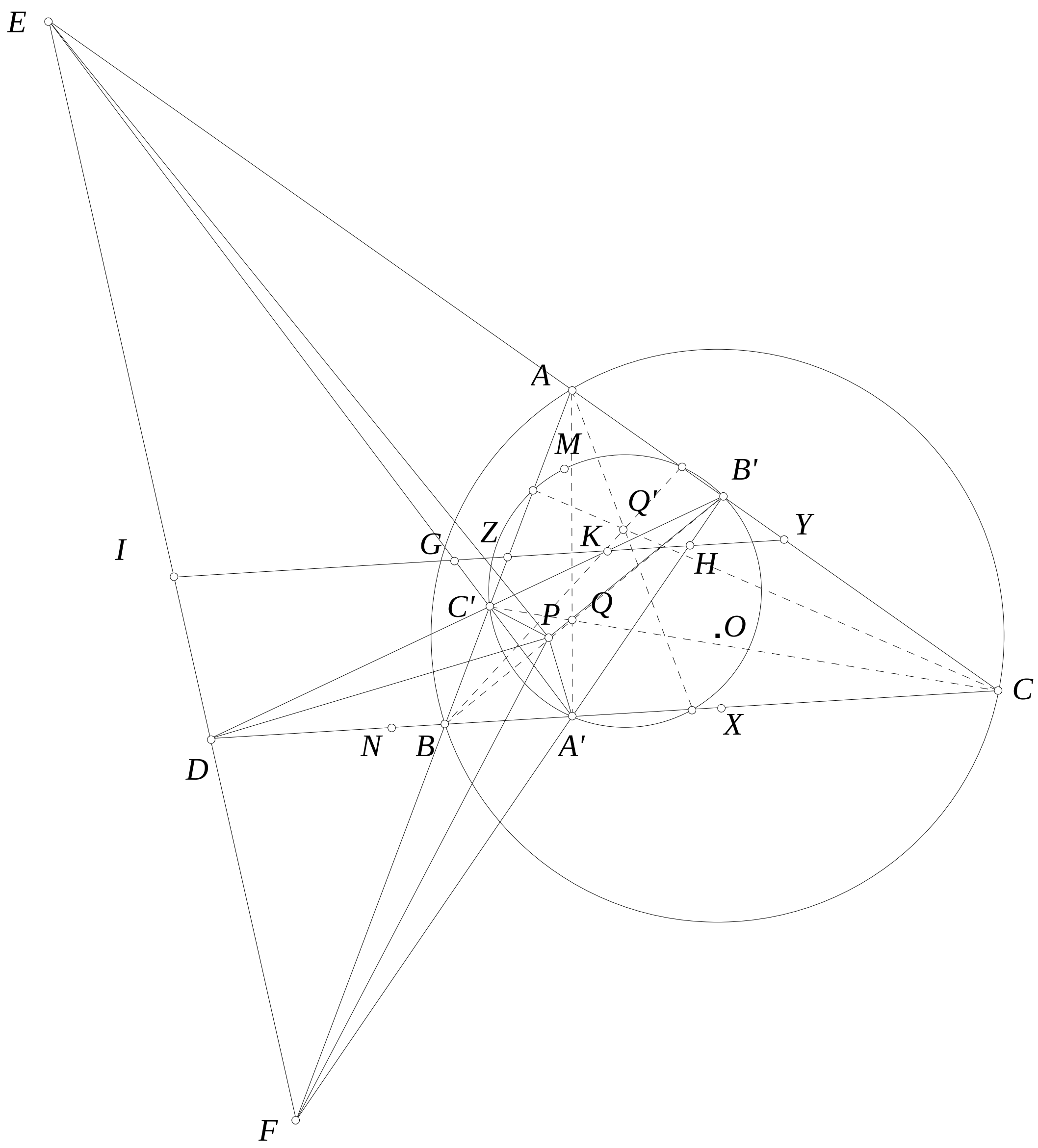
Lời giải thứ hai. Gọi H là trực tâm tam giác ABC, O_a, O_b, O_c lần lượt là trung điểm HA, HB, HC. Theo **Bổ đề 16.4** ta có XO_a, YO_b, ZO_c đồng quy tại cực trực giao T của OP đối với tam giác ABC. Chú rằng T thuộc $(O_aO_bO_c)$ (**Định lí Fontené**), ta có $\angle XEZ = 180^\circ - \angle AEX - \angle CEZ = 180^\circ - \angle ABP - \angle CBP = 180^\circ - \angle ABC = \angle O_aTO_c = \angle XTZ$, từ đó T thuộc (EXZ). Chứng minh tương tự ta có T thuộc $(DYZ), (FXY)$. □

Bài toán sau được đề nghị bởi tác giả **Trần Quang Hùng** trong [17]

Bài toán 17. Cho tam giác ABC và điểm P bất kì. PA', PB', PC' là đường phân giác của tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng đường tròn $(A'B'C')$ đi qua cực trực giao của OP với tam giác ABC.

Bổ đề 17.1. Ba đường tròn đồng trục khi và chỉ khi tỉ số phương tích của một điểm bất kì thuộc một đường tròn đến hai đường tròn còn lại là không đổi.

Vì bổ đề chứng minh khá đơn giản nên chúng tôi xin dành cho bạn đọc suy nghĩ.
Sau đây là lời giải bài toán dựa trên ý tưởng của bạn Ngô Quang Dương trong [17]



Hình 20.

Lời giải. Gọi PD, PE, PF theo thứ tự là đường phân giác ngoài của tam giác PBC, PCA, PAB. Áp dụng **định lí Menelaus** cho tam giác ABC ta có D, E, F lần lượt thuộc $B'C', C'A', A'B'$ và D, E, F thẳng hàng. Gọi X, Y, Z là trung điểm BC, CA, AB. I, G, K, H lần lượt là giao điểm của YZ với $DEF, A'C', B'C', B'A'$. Vì $(CA, B'E) = -1$ nên theo **hệ thức Newton** ta có $YC^2 = \overline{YB'}.\overline{YE}$. Từ đó $\frac{\overline{HB'}}{\overline{HA'}} = \frac{\overline{YB'}}{\overline{YC}} = \frac{\overline{YC}}{\overline{YE}} = \frac{\overline{ID}}{\overline{IE}} \leftrightarrow \frac{\overline{HB'}.\overline{HF}}{\overline{HD}.\overline{HF}} = \frac{\overline{ID}.\overline{IF}}{\overline{IE}.\overline{IF}}$ hay $\frac{\mathcal{P}_{H/(B'DF)}}{\mathcal{P}_{H/(A'EF)}} = \frac{\mathcal{P}_{I/(B'DF)}}{\mathcal{P}_{I/(A'EF)}}$.

Áp dụng **Bổ đề 17.1** ta có $(A'EF), (B'DF), (IHF)$ đồng trục, suy ra (IHF) đi qua **điểm Miquel** M của tứ giác toàn phần $(DC'B', EC'A', FA'B', DEF)$. Từ đó theo **định lí Miquel** ta dễ dàng suy ra $(EIG), (DIK), (A'GH), (B'KH), (C'GK)$ cũng đi qua M. Chứng minh tương tự ta được M là **điểm Miquel** của tứ giác toàn phần tạo bởi bốn đường bất kì trong các đường thẳng $(B'C', C'A', A'B', DEF, XY, YZ, YZ)$.

Mặt khác, vì $(DA', BC) = -1$ nên nếu gọi N là trung điểm DA' thì theo **hệ thức Newton** ta có $NP^2 = ND^2 = NA^2 = \overline{NB}.\overline{NC}$ do đó (O) và (PDA') trực giao. Chứng minh tương tự ta có $(PDA'), (PEB'), (PFC')$ cùng trực giao với (O), nên OP là trục đẳng phương của $(DA'), (EB'), (FC')$. Theo kết quả **Bài toán 8** thì PO chính là **đường thẳng Steiner** của tứ giác toàn phần $(DC'B', EC'A', FA'B', DEF)$, hay rộng hơn PO là **đường thẳng Steiner** của tứ giác toàn phần tạo bởi bốn đường bất kì trong các đường thẳng $(B'C', C'A', A'B',$

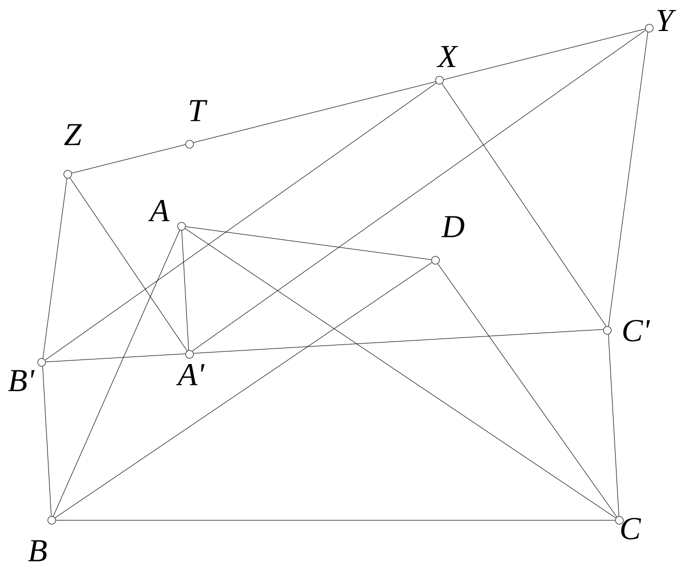
DEF, XY, YZ, ZX). Từ đó đối xứng của M qua XY, YZ, ZX nằm trên PO, hay M là **điểm anti - Steiner** của tam giác XYZ. Theo chứng minh **định lí Fontené** ta có M chính là cực trực giao của PO đối với tam giác ABC. □

Nhận xét. Áp dụng **định lí Céva** cho tam giác ABC ta có AA', BB', CC' đồng quy tại điểm Q. Có một tính chất của **điểm Poncelet** như sau, tham khảo [18] : điểm Poncelet của tứ giác (Q, A, B, C) nằm trên **đường tròn cevian** của điểm Q đối với tam giác ABC. Từ đó vì điểm M không phải **điểm Poncelet** của tứ giác (A, B, C, Q) nên nếu gọi Q' là điểm đồng quy của các đường thẳng nối các đỉnh A, B, C lần lượt với giao điểm thứ hai của BC, CA, AB với $(A'B'C')$ thì ta có M chính là **điểm Poncelet** của tứ giác (A, B, C, Q'). Kết quả này được đề nghị bởi **TelvCohl** trong [19]. □

Sau đây ta đến với một kết quả khá phổ biến khác về các cực trực giao thẳng hàng, phát biểu và chứng minh được trình bày trong [10]

Bài toán 18. Cho tứ giác $ABCD$ và đường thẳng l bất kì. Chứng minh rằng cực trực giao của l đối với tam giác BCD, ACD, ABD, ABC thẳng hàng.

Lời giải sau tham khảo ý tưởng trong [10]



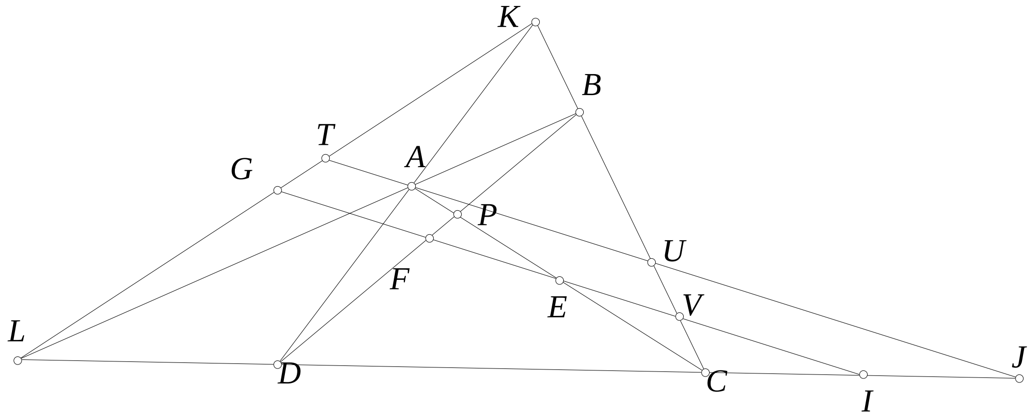
Hình 21.

Lời giải. Kí hiệu $W_\infty, U_\infty, V_\infty$ lần lượt là các điểm ở vô cực có hướng vuông góc với đường thẳng CD, BD, AD. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là cực trực giao của l đối với tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Các điểm A', B', C' theo thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ A, B, C xuống l. Ta có $X \equiv B'W_\infty \cap C'U_\infty$, $Y \equiv C'V_\infty \cap A'W_\infty$, $Z \equiv A'U_\infty \cap B'V_\infty$. Áp dụng **định lí Pappus** cho hai đường thẳng $\overline{B', C', A'}$ và $\overline{U_\infty, W_\infty, V_\infty}$ ta có X, Y, Z thẳng hàng. Tương tự ta chứng minh được X, Y, Z, T cùng nằm trên một đường thẳng. □

Bài toán sau tham khảo [20]

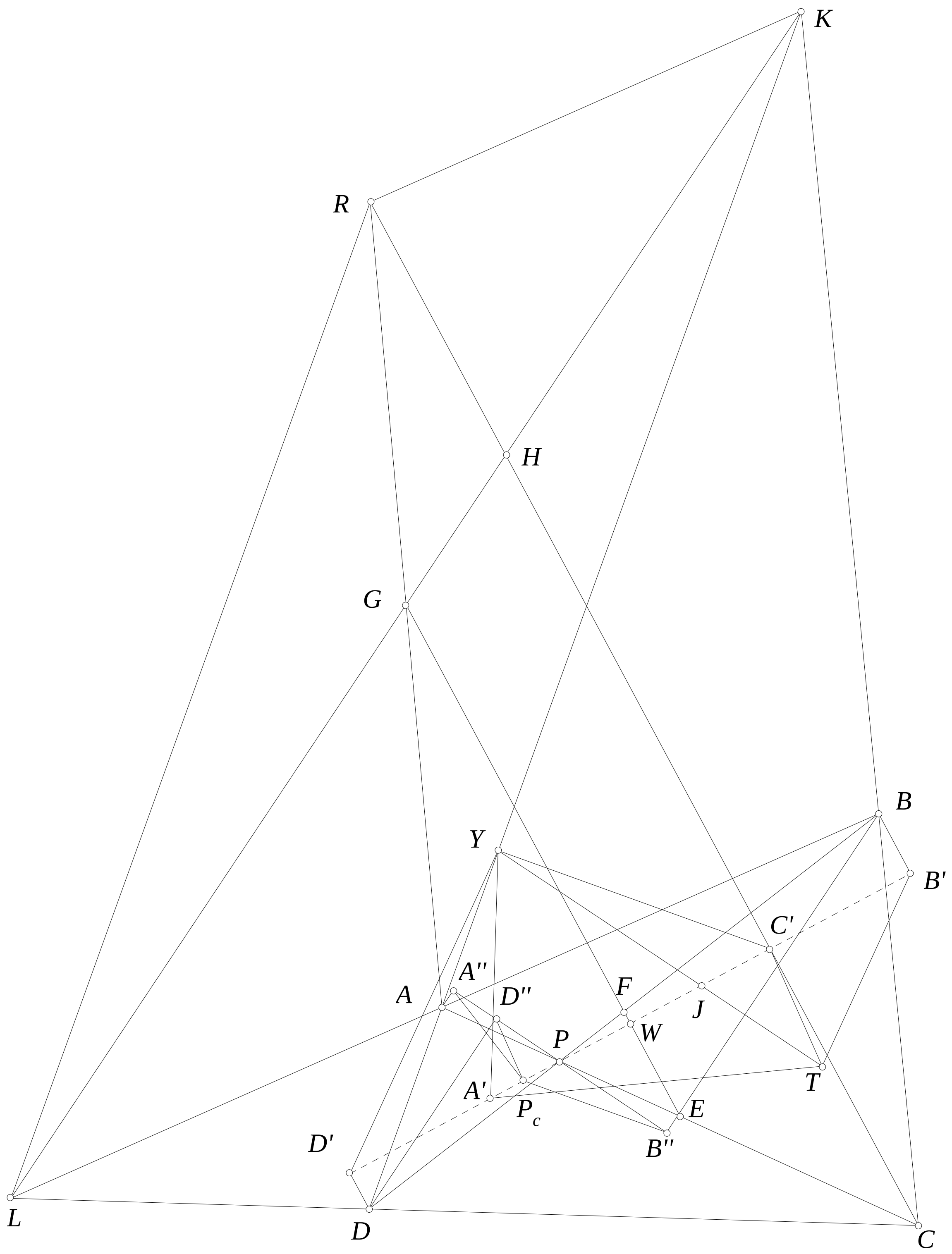
Bài toán 19. Gọi l là đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần (AB, BC, CD, DA), P là giao điểm của AC và BD. d là đường thẳng qua P và song song l. Khi đó cực trực giao của d đối với các tam giác ABC, ABD, ACD, BCD thẳng hàng trên đường thẳng $\mathcal{T}$. Gọi δ là đường thẳng qua P và song song $\mathcal{T}$. Chứng minh rằng cực trực giao của δ đối với tam giác ABC, ABD, ACD, BCD thẳng hàng trên đường thẳng d.

Bổ đề 19.1. Cho tứ giác toàn phần AB, BC, CD, DA có E, F lần lượt là trung điểm AC, BD, K là giao của AD và BC, L là giao của AB và CD. Khi đó $(AB, AD, AC, DB) = (AB, AD, KL, EF)$



Hình 22.

Lời giải. Kẻ đường thẳng qua A song song EF cắt BC, LK lần lượt tại U, T. AU cắt DC tại J. V là trung điểm CU, EFV cắt DC tại I. Vì trung điểm của JC, DB, LK thẳng hàng trên **đường thẳng Gauss** của tứ giác toàn phần (AB, BC, CD, DA) nên theo **Bổ đề E.R.I.Q** đảo ta có $\frac{\overline{JD}}{\overline{JL}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CK}}$. Mà theo **định lí Menelaus** ta có $\frac{\overline{AK}}{\overline{AD}}.\frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}.\frac{\overline{CB}}{\overline{CK}} = 1$ và $\frac{\overline{JC}}{\overline{JD}}.\frac{\overline{AD}}{\overline{AK}}.\frac{\overline{UK}}{\overline{UC}} = 1$ từ đó nhân 2 vế của 3 đẳng thức trên ta có $\frac{\overline{JC}}{\overline{JL}}.\frac{\overline{UK}}{\overline{UC}}.\frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} = 1$, hay $\frac{\overline{JI}}{\overline{JL}}.\frac{\overline{UK}}{\overline{UV}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}$. Gọi G là trung điểm KL thì $\frac{\overline{JI}}{\overline{JL}}.\frac{\overline{UK}}{\overline{UV}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} \leftrightarrow \frac{\overline{TG}}{\overline{TL}}.\frac{\overline{TK}}{\overline{TG}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}}$ hay $(AD, AB, EF, KL) = (AB, AD, AC, DB) = (AB, AD, KL, EF)$. □



Hình 23.

Lời giải. Gọi K là giao điểm của AD và BC, L là giao điểm của AB và CD. E, F, G lần lượt là trung điểm AC, BD, KL thì E, F, G thẳng hàng trên đường thẳng vuông góc với trục đẳng phương của (AC) và (BD), hay $EF \perp l \parallel d$. Gọi R là đối xứng của A qua G thì $CR \parallel EG$. A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D lên d. Y, T theo thứ tự là cực trực giao của d đối với tam giác ACD, ABC. EF vuông góc với d tại W thì W là trung điểm $B'D', A'C'$. Xét hai tứ giác $C'YA'T$ và $RLCK$ có $C'Y \perp RL, YA' \perp LC, A'T \perp CK, TC' \perp KR, C'A' \perp RC$ nên hai tứ giác đồng dạng. Do đó nếu gọi H là giao điểm của KL và CR, theo **Bổ đề 19.1**

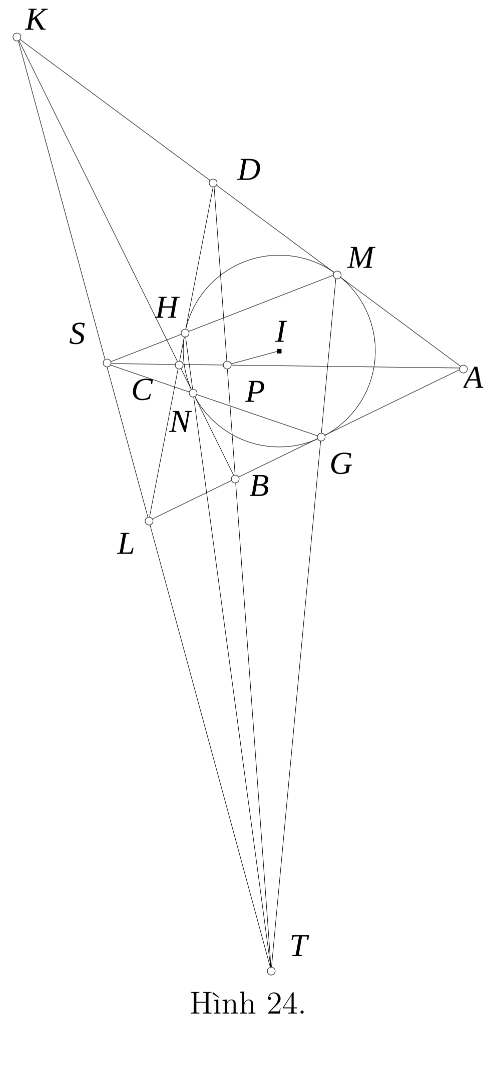
ta có $(AB, AD, AC, DB) = (AB, AD, KL, EF) = (RK, RL, KL, RC) = (RL, RK, RC, KL)$ hay $\frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{HL}}{\overline{HK}}$. Từ đó gọi J là giao điểm của $\mathcal{T}$ với d, chú ý rằng $YD' \parallel TB' \perp AC$, ta có $\frac{\overline{PB'}}{\overline{PD'}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{HL}}{\overline{HK}} = \frac{\overline{JY}}{\overline{JT}} = \frac{\overline{JD'}}{\overline{JB'}}$ suy ra P và J đối xứng nhau qua W. Mặt khác, gọi B'', D'', A'' lần lượt là hình chiếu của B, D, A lên δ, P_c là cực trực giao của δ đối với tam giác ABD thì hai tam giác $P_cD''B''$ và $C'TY$ có các cạnh tương ứng song song. Mà $\frac{\overline{JY}}{\overline{JT}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PB''}}{\overline{PD''}}$ suy ra $\triangle P_cD''B'' \cup P \sim \triangle C'TY \cup J$. Từ đó suy ra P_cP trùng $C'J$, hay P_c nằm trên δ. Tương tự ta có các cực trực giao của δ đối với tam giác ABC, ACD, BCD cũng nằm trên δ. □

Nhận xét. Chú ý rằng từ lời giải bài toán trên ta có hai tứ giác $C'YA'T$ và $RLCK$ có các cạnh tương ứng vuông góc, từ đó $YT \perp KL$ hay $\delta \parallel \mathcal{T} \perp KL$. Bài toán trên có thể được viết gọn lại thành bài toán tổng quát sau: □

Bài toán 20. Cho tứ giác $ABCD$ với AC giao BD tại P, AD giao BC tại K, AB giao CD tại L. Đường thẳng δ đi qua P và vuông góc KL. Chứng minh rằng cực trực giao của δ đối với tam giác BCD, ACD, ABD, ABC thẳng hàng trên đường thẳng qua P và vuông góc với đường thẳng Gauss của tứ giác toàn phần (AB, BC, CD, DA).

Bài tổng quát trên được tác giả vô tình tìm ra trong lúc đang nghiên cứu bài toán sau.

Bài toán 21. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I), P là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng cực trực giao của PI đối với tam giác ABC, ACD, ADB, CDB đối với PI nằm trên đường thẳng d qua P và vuông góc với đường thẳng Newton của tứ giác $ABCD$.

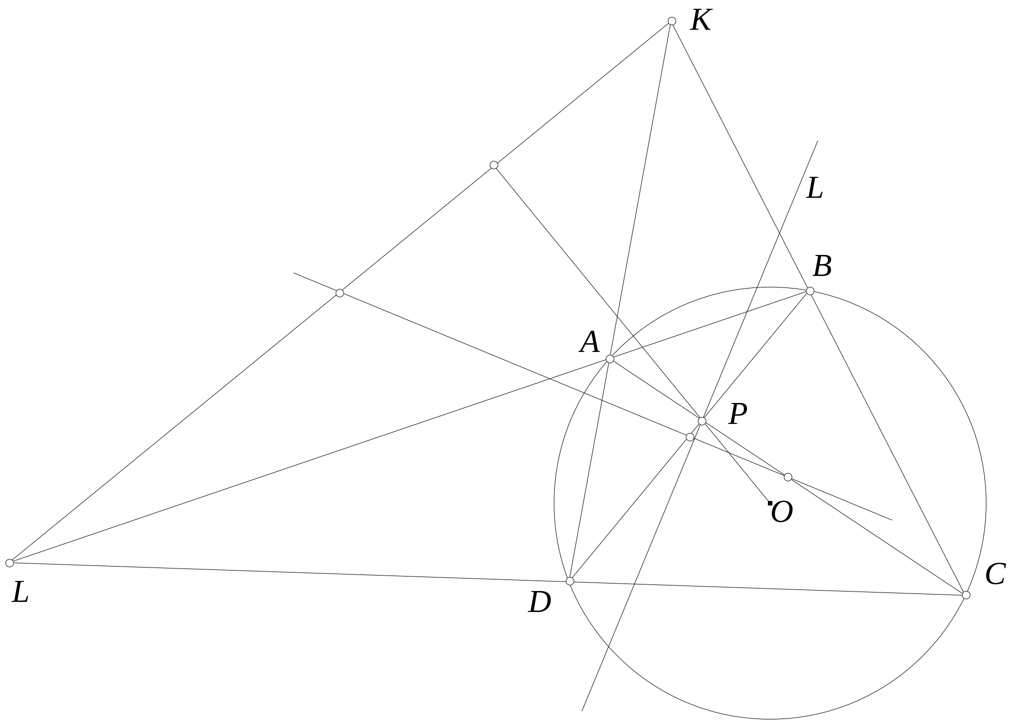


Hình 24.

Lời giải. Gọi M, N, G, H lần lượt là tiếp điểm của AD, BC, DC, AB với (I), K là giao điểm của AD và BC, L là giao điểm của AB và DC, MH giao GN tại S, MG giao NH tại T. Áp dụng **định lí Pascal** cho các điểm $\begin{pmatrix} M & G & N \\ N & H & M \end{pmatrix}$ ta có S, T, K thẳng hàng. Tương tự S, T, L thẳng hàng. Áp dụng **định lí Brocard** cho tứ giác nội tiếp $MHNG$ ta có $IP \perp ST$ hay $PI \perp KL$. Theo kết quả **Bài toán 20**, ta có cực trực giao của PI đối với tam giác DBC, ACD, ABD, ABC thẳng hàng trên đường thẳng qua P vuông góc với **đường thẳng Gauss** của tứ giác toàn phần (AB, BC, CD, DA), hay chính là **đường thẳng Newton** của tứ giác ngoại tiếp $ABCD$. □

Bằng cách thay tứ giác $ABCD$ bất kì thành tứ giác nội tiếp, ta thu được một hệ quả nữa của **Bài toán 20**.

Bài toán 22. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại P. Chứng minh rằng cực trực giao của PO đối với các tam giác ABD, ABC, DAC, DBC thẳng hàng trên đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần (AB, BC, CD, DA).



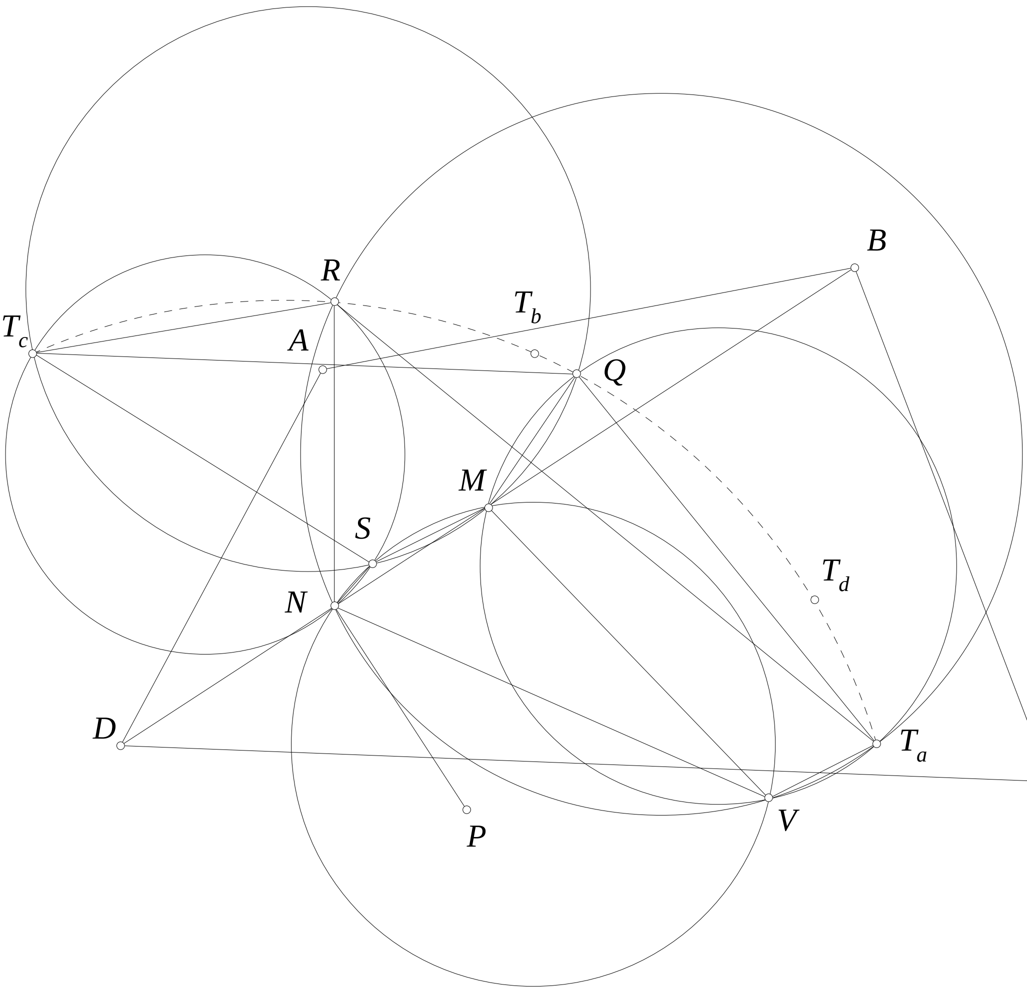
Hình 25.

Lời giải. Gọi K là giao điểm của AD và BC, L là giao điểm của AB và CD. Khi đó theo **định lí Brocard** ta có $OP \perp KL$, vậy áp dụng kết quả **Bài toán 20** ta có cực trực giao của PO đối với tam giác BCD, ACD, ABD, BCD thẳng hàng trên đường thẳng qua P và vuông góc với **đường thẳng Gauss** của tứ giác toàn phần (AB, BC, CD, DA). Mà **đường thẳng Gauss** lại là đường nối tâm vuông góc với trục đẳng phương $\mathcal{L}$ của ba đường tròn đường kính BD, AC, KL. Chú ý rằng $\mathcal{L}$ đi qua P, và theo kết quả đã biết thì $\mathcal{L}$ là **đường thẳng Steiner** của tứ giác toàn phần (AB, BC, CD, DA). Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Tác giả còn thu được một kết quả sau: **điểm Poncelet** của tứ giác (A, B, C, D) nằm trên $\mathcal{L}$. Kết quả trên thực chất chỉ là một hệ quả của mở rộng sau, được đề nghị bởi rodinos trong [21]. Một cách chứng minh khác cho kết quả này cũng có thể được tìm thấy trong [22]. □

Bài toán 23. (rodinos) Cho tứ giác $ABCD$ và điểm P bất kì. Gọi O_a là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, T_a là cực trực giao của PO_a ứng với tam giác BCD. Định nghĩa tương tự cho các điểm T_b, T_c, T_d. Gọi Q là điểm Poncelet của tứ giác $ABCD$, R là giao điểm của các đường tròn pedal của P ứng với tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng T_a, T_b, T_c, T_d, Q, R đồng viên.

Lời giải sau tham khảo ý tưởng của TelvCohl trong [21]



Hình 26.

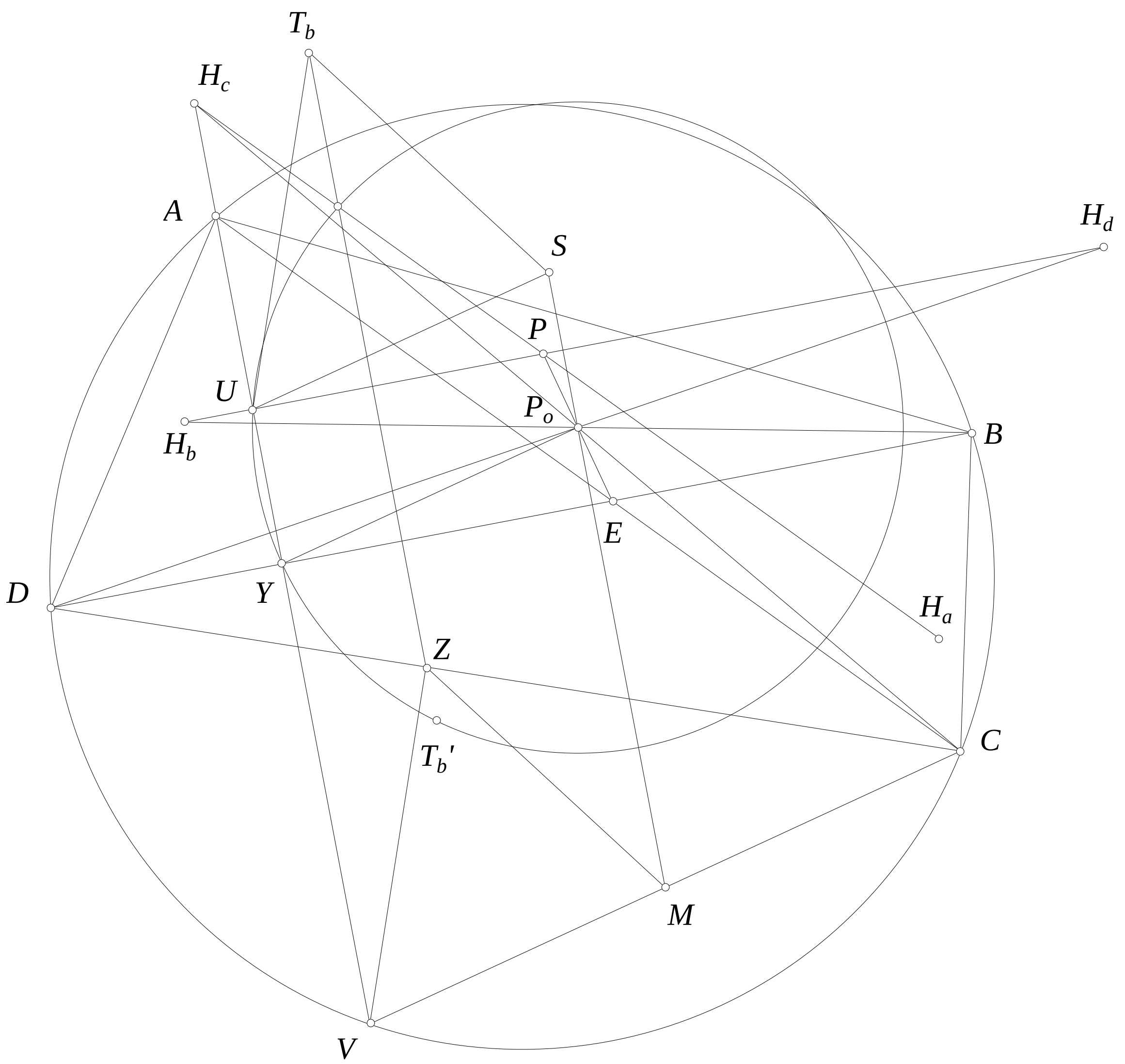
Lời giải. Gọi M là trung điểm BD và N là hình chiếu của P lên BD. S, V lần lượt là các điểm Poncelet của tứ giác (P, A, B, D) và (P, C, B, D) thì S, V, M, N cùng nằm trên **đường tròn Euler** của tam giác PBD và S thuộc đường tròn pedal của P ứng với tam giác ABD, V thuộc đường tròn pedal của P ứng với tam giác CBD. Ta có $\angle RT_cQ - \angle RT_aQ = (\angle RT_cS - \angle QT_cS) - (\angle QT_aV - \angle RT_aV) = (\angle RNS + \angle QMS) + (\angle QMV - \angle RNV) - 180^\circ = \angle SNV + 180^\circ - \angle SMV = 0^\circ$, từ đó suy ra Q, R, T_a, T_c đồng viên trên đường tròn ω. Chứng minh tương tự ta cũng có T_b, T_d thuộc ω. □

Nhận xét. Khi $ABCD$ là tứ giác nội tiếp, ta có các đường thẳng PO_a, PO_b, PO_c, PO_d trùng nhau và đường tròn chứa các điểm Q, R, T_a, T_b, T_c, T_d suy biến thành đường thẳng $\mathcal{L}$. Ta thu được kết quả phụ của **Bài toán 22** và cả kết quả của bài toán Taiwan TST vòng 2, tham khảo [23]. □

Có thể thấy rằng **Bài toán 23** là một kết quả đẹp và tổng quát, nó cho thấy mối liên quan chặt chẽ giữa tính chất của cực trực giao nằm trên đường tròn Euler với điểm Poncelet là giao của các đường tròn Euler. Song, tính chất chỉ đúng với các cực trực giao của đường thẳng đi qua tâm ngoại tiếp tam giác. Từ **Bài toán 13**, có lẽ bạn đọc cũng nhận thấy sự tương đồng đến kì lạ giữa tính chất cực trực giao của đường thẳng đi qua tâm ngoại tiếp tam giác với đường thẳng đi qua trực tâm tam giác ấy. Với ý tưởng tương tự, bằng cách thay các tâm ngoại tiếp thành trực tâm, tác giả đã tìm ra kết quả sau.

Bài toán 24. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$, P_o là điểm Poncelet, E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD, điểm P đối xứng E qua P_o. Gọi H_a, H_b, H_c, H_d lần lượt là trực tâm tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. T'_a, T'_b, T'_c, T'_d theo thứ tự là điểm đối xứng qua PH_a, PH_b, PH_c, PH_d của cực trực giao của PH_a, PH_b, PH_c, PH_d đối với tam giác BCD, ACD, ABD, ABC. Chứng minh rằng T'_a, T'_b, T'_c, T'_d cùng nằm trên đường tròn tâm P_o.

Bài toán có hai hướng giải chính, một hướng giải đậm về tính chất của điểm Poncelet, hướng giải còn lại ứng dụng nhiều tính chất của cực trực giao. Vì bài viết chỉ giới hạn trong khuôn khổ ứng dụng các định lí về cực trực giao nên chúng tôi chỉ trình bày cách giải thứ hai. Cách giải thứ nhất bạn đọc có thể tham khảo [13].
Tham khảo thêm về tính chất điểm Poncelet tại [24].



Hình 27.

Lời giải sau của TelvCohl trong [13]

Lời giải. Theo một tính chất quen thuộc của **Poncelet** thì P_o là trung điểm của AH_a, BH_b, CH_c, DH_d, từ đó suy ra P nằm trên H_bH_d và H_aH_c. Gọi U, Y, V lần lượt là giao điểm của H_bH_d, BD và $(ABCD)$ với đường thẳng qua A vuông góc BD. Gọi S là điểm đối xứng với P_o qua H_bH_d, ta dễ thấy P_oS song song và bằng YU. Mà theo tính chất quen thuộc của trực tâm tam giác ta có Y là trung điểm H_cV, từ đó nếu gọi M là trung điểm CV thì P_oYVM là hình bình hành và M, P_o, S thẳng hàng. Mặt khác, gọi Z là hình chiếu của V lên CD, áp dụng **Bổ đề 1.1** ta có T_bUVZ là hình bình hành, từ đó $\triangle T_bSU = \triangle ZMV$ suy ra $P_oT'_b = ST_b = MZ = \frac{1}{2}.CV = R.\sin(AD, \perp BD) = r$ với R là độ dài bán kính của $(ABCD)$. Chứng minh tương tự ta có T'_a, T'_c, T'_d cũng thuộc $(P_o; r)$. □

Bài toán sau được đề nghị bởi tác giả **Trần Quang Hùng** trong [25]

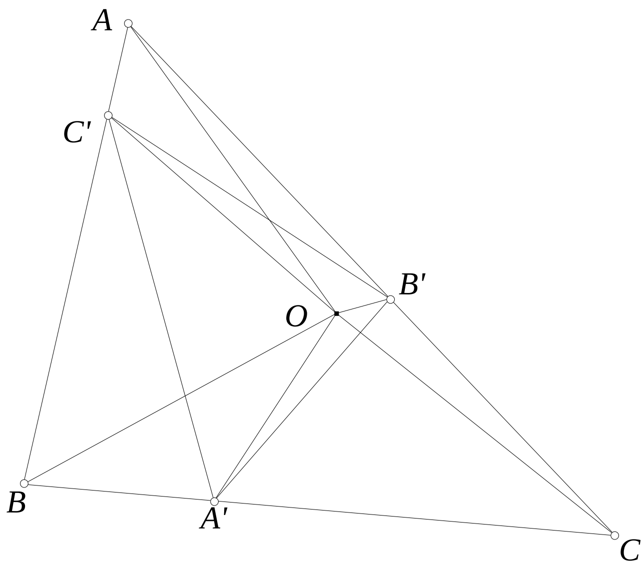
Bài toán 25. Cho đường tròn (O) và các điểm A, B, C, A', B', C' nằm trên đường tròn. Chứng minh rằng cực trực giao của $B'C', C'A', A'B'$ đối với tam giác ABC và cực trực giao của BC, CA, AB đối với tam giác $A'B'C'$ cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải sau tham khảo ý tưởng của Luis González trong [25]

Bổ đề 25.1. Góc giữa hai đường thẳng Simson của hai điểm đối với một tam giác bằng nửa số đo cung chắn đoạn thẳng nối hai điểm đó.

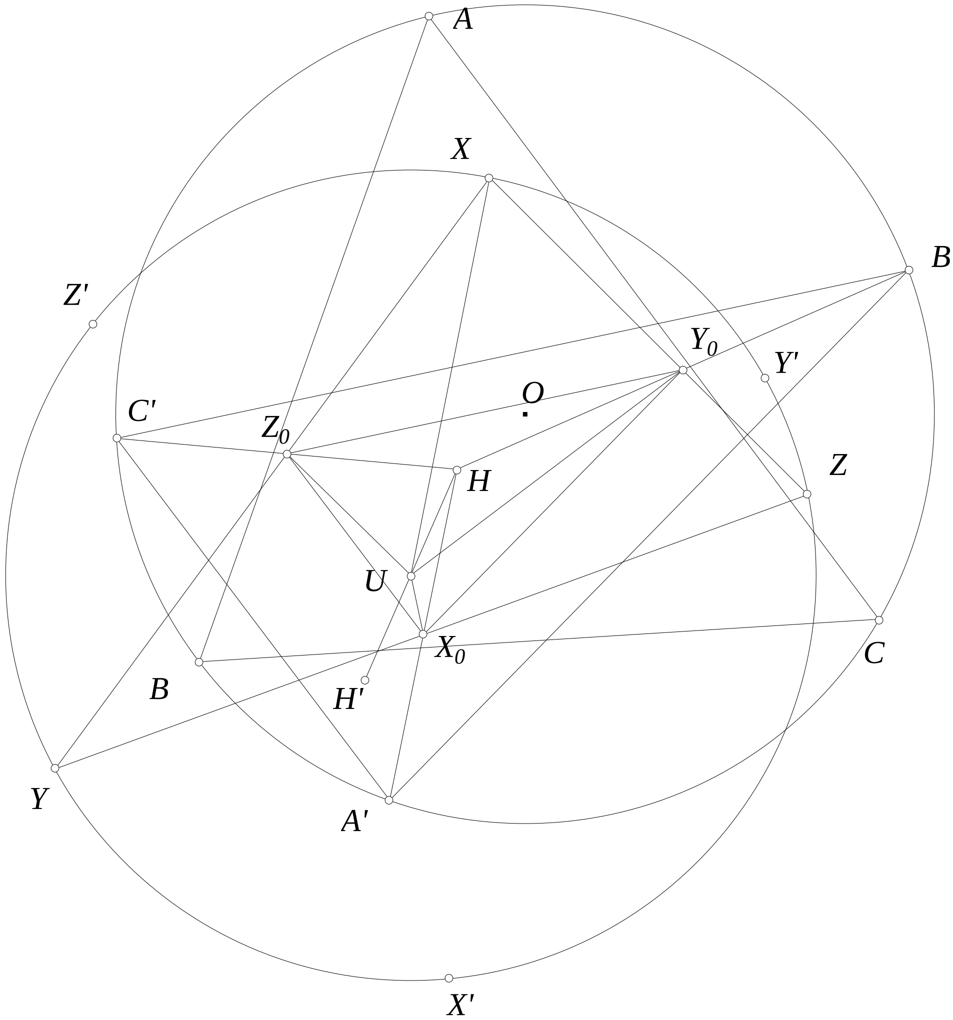
Vì bổ đề chứng minh đơn giản nên chúng tôi xin dành cho bạn đọc.
Kết quả sau được đề nghị bởi Peine trong [26].

Bổ đề 25.2. Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' nằm trên BC, CA, AB sao cho $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$. Khi đó tâm ngoại tiếp của tam giác ABC chính là trực tâm của tam giác $A'B'C'$.



Hình 28.

Lời giải. Gọi O là **điểm Miquel** của $\triangle A'B'C'$ đối với tam giác ABC. Khi đó $\angle C'A'B' = \angle CAB = 180° - \angle C'OB'$, tương tự $\angle C'OA' = 180° - \angle C'B'A'$, suy ra O là trực tâm tam giác $A'B'C'$. Mà $\angle OCB' = \angle OA'B' = \angle OC'B' = \angle OAB'$ suy ra O thuộc trung trực AC, chứng minh tương tự ta có O thuộc trung trực AB, BC. Vậy O là tâm ngoại tiếp của tam giác ABC. □

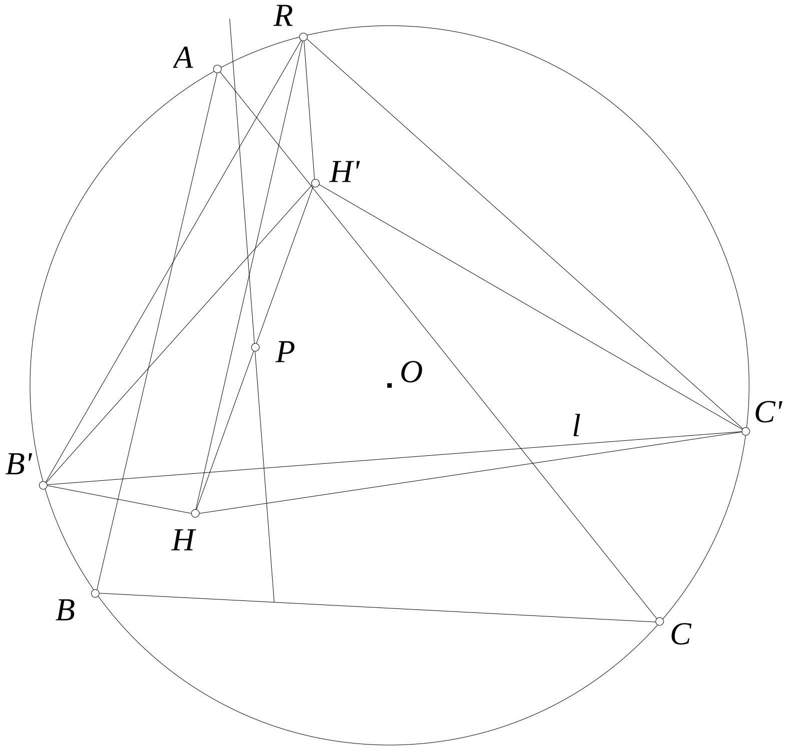


Hình 29.

Lời giải. Gọi X, Y, Z lần lượt là cực trực giao của $B'C', C'A', A'B'$ đối với tam giác ABC. Theo **Bài toán 4** thì **đường thẳng Simson** của A' đối với tam giác ABC đi qua Y và Z, tương tự ta có XY, XZ lần lượt là đường thẳng Simson của C', B' đối với tam giác ABC. Do đó gọi H, H' là trực tâm tam giác $ABC, A'B'C'$ thì YZ, ZX, XY lần lượt đi qua trung điểm X_0, Y_0, Z_0 của HA', HB', HC'. Áp dụng **Bổ đề 25.1** ta có $\triangle XYZ \sim \triangle A'B'C'$. Gọi U là trung điểm HH' thì U là trực tâm tam giác $X_0Y_0Z_0$, mà $\triangle X_0Y_0Z_0 \sim \triangle XYZ$ nên theo **Bổ đề 25.2** ta có U là tâm ngoại tiếp của tam giác XYZ. Chứng minh tương tự ta có U là tâm ngoại tiếp tam giác $X'Y'Z'$, với X', Y', Z' theo thứ tự là cực trực giao của BC, CA, AB đối với tam giác $A'B'C'$. Mặt khác vì $\angle X_0Z_0Y_0 = \angle X_0ZY_0$ nên hai đường tròn (ZX_0Y_0) và $(Z_0X_0Y_0)$ có bán kính bằng nhau và bằng $\frac{R}{2}$. Mà $\angle(XY, A'B') = \angle(AB, A'B') - \angle(AB, XY) = \angle(AB, A'B') - 90^\circ + \frac{\angle C'OC}{2} = \lambda$, chứng minh tương tự ta cũng có $\angle(X'Y', AB) = \lambda$. Từ đó ta có $UX = R.\sin UZ_0X = R.\cos\lambda$, tương tự $UX' = R.\cos\lambda$, vậy X, Y, Z, X', Y', Z' cùng nằm trên một đường tròn tâm U. □

Ứng dụng bài toán trên, ta thu được một cách giải khác của một kết quả rất đẹp được đề nghị bởi TelvCohl trong [27].

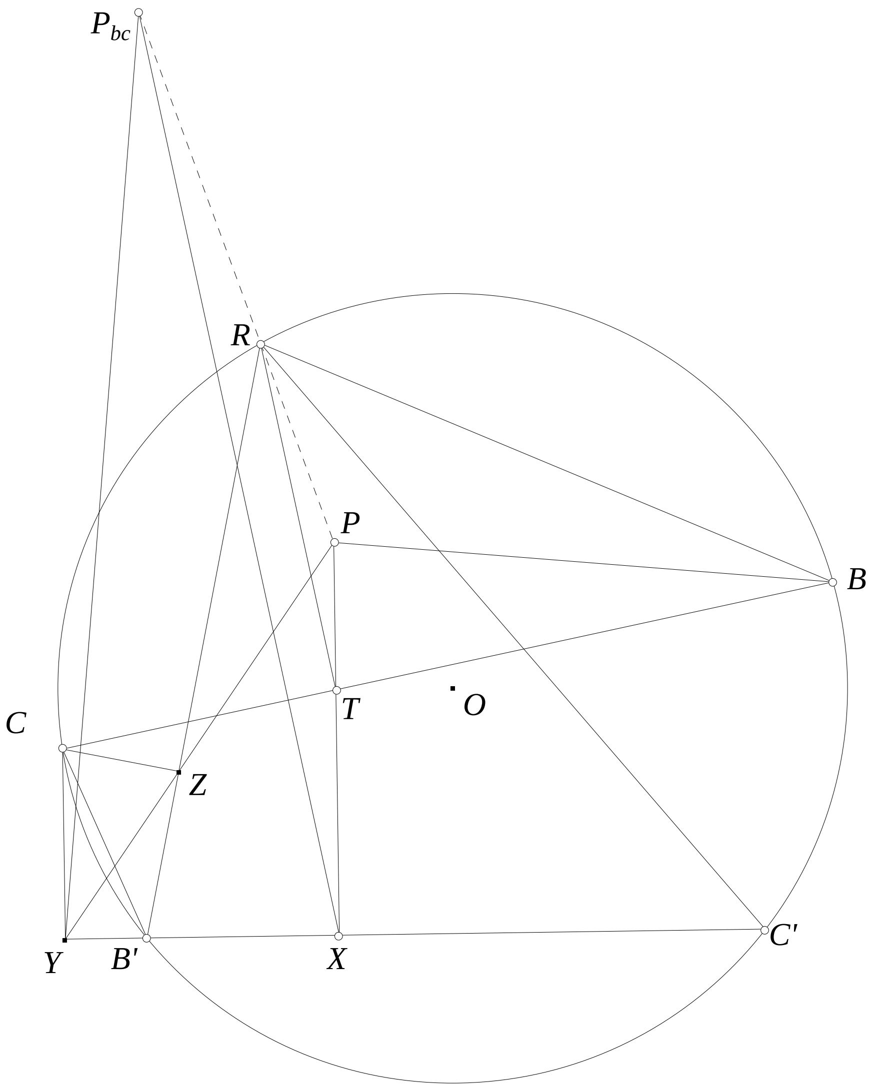
Bài toán 26. (TelvCohl) Gọi P là cực trực giao của đường thẳng l ứng với tam giác ABC. R là điểm nằm trên (ABC) sao cho đường thẳng Simson kẻ từ R ứng với tam giác ABC vuông góc với l. Chứng minh rằng cực trực giao của l ứng với các tam giác ABC, PBC, PCA, PAB thẳng hàng trên đường thẳng PR.



Hình 30.

Lời giải. Gọi l cắt (ABC) tại hai điểm B', C' và H, H' lần lượt là trực tâm tam giác $ABC, RB'C'$. Theo kết quả **Bài toán 25**, nếu gọi U là trung điểm HH' thì cực trực giao M, N, P của $B'C', C'R, RB'$ ứng với tam giác ABC và cực trực giao P', M', N' của BC, CA, AB ứng với tam giác $RB'C'$ cùng nằm trên đường tròn tâm U và bán kính $UP = R.\cos(MN, B'C')$. Từ **Bài toán 4**, vì MN là **đường thẳng Simson** của R ứng với tam giác ABC nên $MN \perp B'C'$, do đó bán kính đường tròn (U) bằng 0 hay $M \equiv N \equiv P \equiv P' \equiv N' \equiv M' \equiv U$. Vậy bài toán có thể quy về kết quả tổng quát sau: □

Bổ đề 26.1. Cho tam giác $RB'C'$ nội tiếp đường tròn (O), B, C là hai điểm bất kì nằm trên (O), P là cực trực giao của BC ứng với tam giác $RB'C'$, P_{bc} là cực trực giao của $B'C'$ ứng với tam giác $RB'C'$. Khi đó P_{bc}, P, R thẳng hàng.



Hình 31.

Lời giải. Theo **Bài toán 4** ta có **đường thẳng Simson** của C ứng với tam giác $RB'C'$ đi qua P. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là hình chiếu của P, C, C, R lên $B'C', B'C', RB', BC$. Vì $\triangle PXY \sim \triangle BTR$ và $\triangle P_{bc}XY \sim \triangle BTP$ ta có $PX.TR = XY.BT = TP.P_{bc}X$. Từ đó $\frac{PX}{PT} = \frac{P_{bc}X}{TR}$ vậy P_{bc}, R, P thẳng hàng. □

Nhận xét. Từ bài toán trên, nếu cho l đi qua O và cắt (O) tại B', C' thì R trùng H', do đó P là trung điểm của RH. Kết hợp với **Bài toán 6** ta thu được chứng minh của kết quả khá phổ biến sau. □

Bài toán 27. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), H là trực tâm tam giác. l là một đường thẳng bất kì đi qua O. Gọi R là điểm thuộc (O) sao cho đường thẳng Steiner kẻ từ R ứng với tam giác ABC vuông góc với l. Chứng minh rằng R nằm trên đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần (AB, BC, CA, l).

Mặt khác, **Bài toán 25** có điểm rất tương đồng với bài toán được đề nghị bởi LeVietAn trong [28].

Bài toán 28. (LeVietAn) Cho tam giác ABC, M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. X, Y, Z theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp góc M, N, P của tam giác MNP. Gọi A', B', C'

là cực trực giao của BC, CA, AB ứng với tam giác XYZ. X', Y', Z' là cực trực giao của YZ, ZX, XY ứng với tam giác ABC. Chứng minh rằng sáu điểm A', B', C', X', Y', Z' cùng nằm trên một đường tròn và $A'X', B'Y', C'Z'$ đồng quy.

Chứng minh bài toán trên tham khảo [28]
Sau đây là một kết quả thể hiện mối liên quan của cả hai bài toán trên. Bạn đọc hãy thử suy nghĩ hướng giải.

Bài toán 29. Cho tam giác ABC và $A'B'C'$ bất kì. Chứng minh rằng các cực trực giao của $B'C', C'A', A'B'$ đối với tam giác ABC và cực trực giao của BC, CA, AB đối với tam giác $A'B'C'$ cùng nằm trên một elip có trung điểm của hai tiêu điểm cũng chính là trung điểm của đoạn thẳng nối hai trực tâm của tam giác ABC và $A'B'C'$.

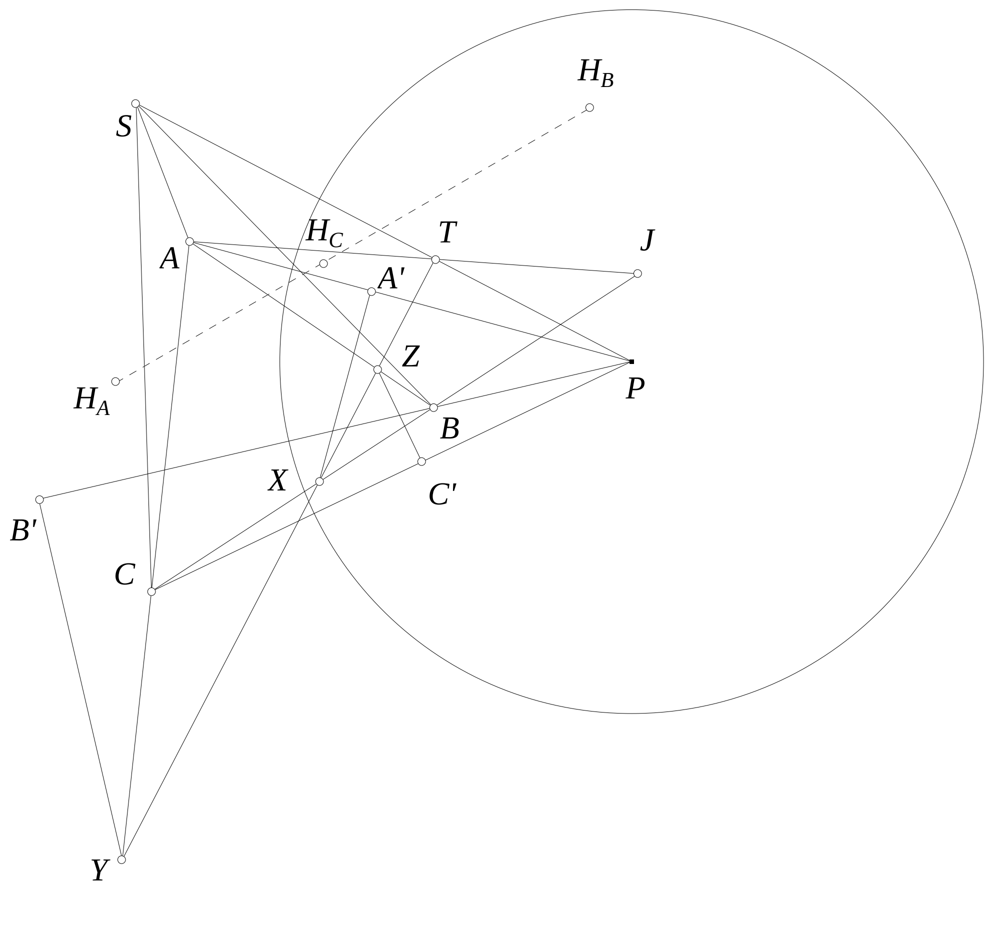
Bài toán sau được đề nghị bởi TelvCohl trong [29]

Bài toán 30. (Telv Cohl) Cho tam giác ABC và điểm P bất kì. Gọi Q là hình chiếu vuông góc của Q lên cát tuyến trực giao của P ứng với tam giác ABC. H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm tam giác APQ, BPQ, CPQ. Chứng minh rằng H_a, H_b, H_c thẳng hàng.

Lời giải bài toán trên tham khảo [29]
Bài toán được tác giả **Trần Quang Hùng** mở rộng hơn nữa trong [29].

Bài toán 31. Cho tam giác ABC và đường tròn (P) bất kì. Gọi D, E, F lần lượt là ảnh của A, B, C qua phép nghịch đảo qua đường tròn (P). Các đường thẳng đi qua A', B', C' lần lượt vuông góc với PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại X, Y, Z. Khi đó X, Y, Z thẳng hàng trên đường thẳng l. Gọi S là cực của l ứng với đường tròn (XYZ) , T là hình chiếu của S trên l. Chứng minh rằng trực tâm các tam giác AST, BST, CST thẳng hàng.

Lời giải sau của Luis González trong [29]



Hình 32.

Lời giải. Vì $A'X, B'Y, C'Z, l$ theo thứ tự là đối cực của A, B, C, S ứng với (P) nên A và X liên hợp, S và X liên hợp, suy ra AS là đối cực của X ứng với (P). Từ đó $PX \perp SA$, tương tự $PY \perp SB, PZ \perp SC$. Kí hiệu L_∞ là điểm ở vô cùng có hướng song song với đường thẳng $XYZT$. Gọi H_A, H_B, H_C lần lượt là trực tâm tam giác AST, BST, CST, J là giao điểm của AT với BC. Ta có $S(H_AH_B, H_CT) = T(AB, CL_\infty) = A(JB, CX) = (TZ, YX) = P(XY, ZT)$ $= S(AB, CL_\infty) = T(H_AH_B, H_CS)$. Từ đó suy ra H_A, H_B, H_C thẳng hàng. □

Sau đây là một số hệ quả.

Bài toán 32 (Hệ quả 1). Cho tam giác ABC và đường thẳng l đi qua tâm ngoại tiếp tam giác, P là cực trực giao của l. Gọi Q là chân đường vuông góc hạ từ P xuống cát tuyến trực giao của điểm P ứng với tam giác ABC thì trực tâm các tam giác APQ, BPQ, CPQ thẳng hàng.

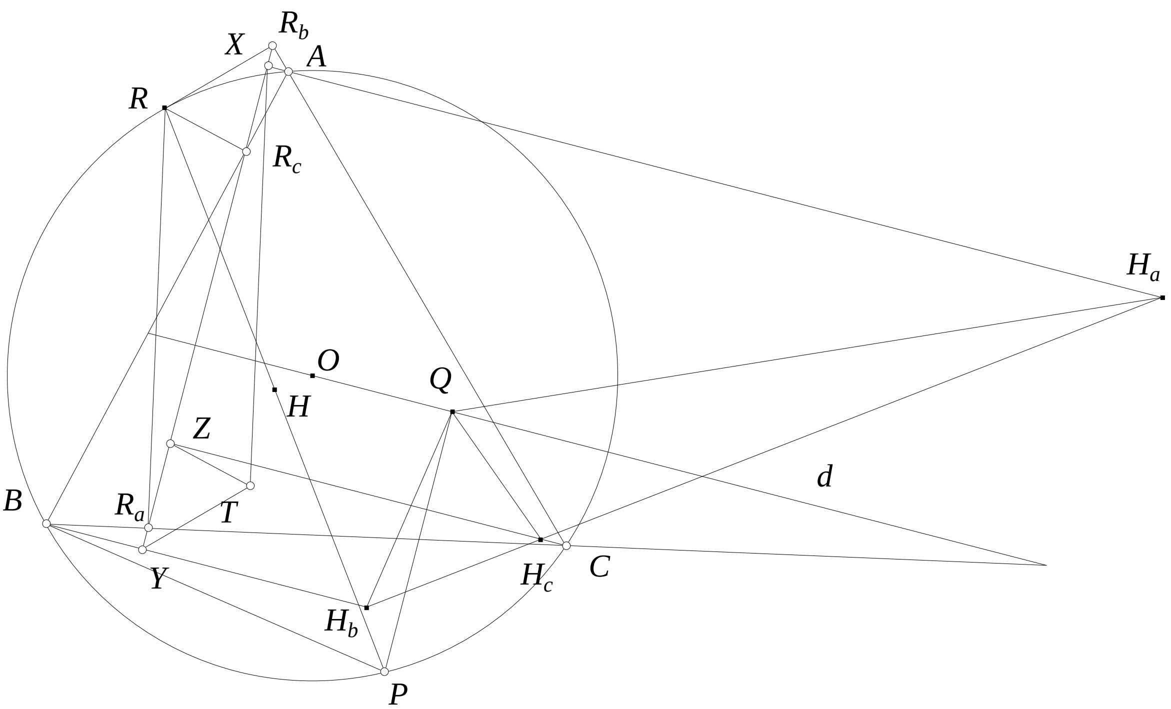
Dùng nghịch đảo với cực P, ta thu được một kết quả khá lạ.

Bài toán 33 (Hệ quả 2). Cho tam giác ABC và điểm P bất kì. D, E, F lần lượt là các điểm thuộc đường tròn $(PBC), (PCA), (PAB)$ sao cho $PD \perp PA, PE \perp PB, PF \perp PC$. Gọi PQ là đường kính đường tròn (DEF). PQ cắt trung trực PA, PB, PC lần lượt tại U, V, W. Chứng minh rằng UX, VY, WZ đồng quy.

Và một hệ quả nữa khá thú vị khi điểm P nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài toán 34 (Hệ quả 3). Cho tam giác ABC có trực tâm H và điểm P nằm trên đường tròn (ABC). Gọi Q là hình chiếu vuông góc của Q lên cát tuyến trực giao của P ứng với tam giác ABC. H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm tam giác APQ, BPQ, CPQ. Chứng minh rằng H_a, H_b, H_c thẳng hàng trên đường thẳng vuông góc với PH.

Lời giải sau dựa trên ý tưởng của TelvCohl trong [29]



Hình 33.

Lời giải. Theo kết quả **Bài toán 6** thì cát tuyến trực giao d của điểm P ứng với tam giác ABC đi qua tâm ngoại tiếp O. Gọi PH giao (O) tại R, **đường thẳng Simson** kẻ từ R ứng với tam giác ABC giao BC, CA, AB lần lượt tại R_a, R_b, R_c. Theo kết quả **Bài toán 27** ta có $R_aR_bR_c \perp d$. Từ đó gọi X, Y, Z theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C lên $R_aR_bR_c$ và T là cực trực giao của $R_aR_bR_c$ ứng với tam giác ABC thì $YH_b \parallel ZH_c \parallel XH_a \perp R_aR_bR_c$. Chú ý rằng $R \cup R_a \cup R_b \cup R_c \sim T \cup X \cup Y \cup Z$ nên ta có $\frac{H_aH_b}{H_aH_c} = \frac{XY}{XZ} = \frac{R_aR_b}{R_aR_c}$, hay $(QH_b, QH_c, QH_a, H_aH_bH_c) = (RR_b, RR_c, RR_a, R_aR_bR_c)$. Mặt khác, dễ thấy $\angle H_bQH_c = \angle BAC = \angle R_bRR_c$, tương tự $\angle H_cQH_a = \angle R_cRR_a, \angle H_aQH_b = \angle R_aRR_b$, do đó $Q \cup H_a \cup H_b \cup H_c \sim R \cup R_a \cup R_b \cup R_c$. Từ đó $\angle QH_bH_c = \angle RR_bR_c = \angle BAR = \angle BPH$, mà $QH_b \perp BP$, suy ra $H_aH_bH_c \perp PH$. □

4 Một số bài toán đề nghị

Các bạn hãy thử luyện tập bằng một số bài toán liên quan đến chủ đề cực trực giao.
Bài toán sau tham khảo [30]

Bài toán 35. Cho tam giác ABC, kẻ đường kính AD của đường tròn (ABC). Gọi l là đường thẳng bất kì đi qua D. Chứng minh rằng cực trực giao của l ứng với tam giác ABC nằm trên BC.

Bài toán sau tham khảo [31]

Bài toán 36. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi l là đường thẳng bất kì đi qua O và cắt AB, AC lần lượt tại Y, Z. S là giao điểm thứ hai của (AYZ) và (O). T là điểm đối xứng S qua l. AT cắt l tại X. Gọi L là hình chiếu của X trên BC. Chứng minh rằng TL đi qua một điểm cố định khi l thay đổi.

Bài toán sau tham khảo [32]

Bài toán 37. Cho tam giác ABC, trực tâm H. l là một đường thẳng bất kì đi qua H cắt CA, AB tại M, N. Đường tròn ω_1 qua H, M tiếp xúc HB cắt đường tròn ω_2 qua H, N tiếp xúc HC tại điểm thứ hai R. Chứng minh rằng RH đi qua cực trực giao của l ứng với tam giác ABC.

Bài toán 38. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), P thuộc (O), Q là cực trực giao của đường thẳng Simson ℓ kẻ từ P ứng với tam giác ABC. Chứng minh rằng ℓ chia đôi đoạn PQ.

Bài toán sau tham khảo [33]

Bài toán 39. Cho tam giác ABC, tâm ngoại tiếp O và $\angle ABC > 90°$. Đường thẳng l qua O cắt CA, AB lần lượt tại E, F sao cho $BE \perp CF$ tại D. Gọi S là cực trực giao của l ứng với tam giác ABC. Các đường thẳng qua D vuông góc với SB, SC cắt SC, SB lần lượt tại M, N. Dựng hình bình hành $DMKN$. Chứng minh rằng K, S, A thẳng hàng.

Bài toán sau tham khảo [23]

Bài toán 40. (2013 Taiwan TST Round 2) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi ℓ là một đường thẳng cố định đi qua O và điểm P thay đổi trên ℓ. Gọi Ω_1, Ω_2 theo thứ tự là đường tròn pedal của điểm P đối với tam giác ABC, DBC. Tìm quỹ tích giao điểm T của Ω_1 và Ω_2 (T khác hình chiếu của P lên BC).

Bài toán sau được đề nghị bởi bạn Ngô Quang Dương trong [34]

Bài toán 41. (Ngô Quang Dương) Cho tam giác ABC, đường thẳng d bất kì cắt BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần (BC, CA, AB, d), I là cực trực giao của d ứng với tam giác ABC. D, E, F theo thứ tự là chân đường vuông góc hạ từ A, B, C xuống d. Khi đó tiếp tuyến tại A, B, C của các đường tròn $(AB'C'), (BC'A'), (CA'B')$ đồng quy tại điểm N thuộc đường tròn (ABC). Chứng minh rằng:
$i)$ Các đường tròn $(IAD), (IBE), (ICF)$ cùng đi qua một điểm K nằm trên (ABC).
$ii)$ I, K, N thẳng hàng.
$iii)$ Tâm đường tròn (IMK) nằm trên d.

Bài toán sau được đề nghị bởi Lsway trong [35]

Bài toán 42. (Lsway) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). l là một đường thẳng bất kì đi qua O. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của l với CA, AB, D là giao điểm của BE và CF. Gọi X là cực trực giao của l ứng với tam giác ABC, Y là điểm đẳng giác với D trong tam giác XBC. Chứng minh rằng X là trung điểm AY.

Bài toán sau được đề nghị bởi bạn Ngô Quang Dương trong [36]

Bài toán 43. (Ngô Quang Dương) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), P là một điểm bất kì. Gọi A', D' theo thứ tự là cực trực giao của OP ứng với tam giác BCD, ABC. S là hình chiếu của P lên BC. Chứng minh rằng hai tam giác PAD và $SD'A'$ đồng dạng cùng hướng.

Bài toán sau được đề nghị bởi tác giả **Trần Quang Hùng** trong [37]

Bài toán 44. (Trần Quang Hùng) Cho tam giác ABC trực tâm H, tâm ngoại tiếp O và hai điểm Brocard Ω_1, Ω_2. Gọi P là cực trực giao của đường thẳng $\Omega_1\Omega_2$ ứng với tam giác ABC. Q, R lần lượt là trung điểm của $\Omega_1\Omega_2$ và OP. Chứng minh rằng $HP \parallel QR$.

Lời kết và cảm ơn

Cực trực giao là một chủ đề rộng lớn do đó một bài viết nhỏ không thể bao hàm hết được, song chúng tôi vẫn mong rằng những bài toán được trình bày ở trên phần nào mang lại cho bạn đọc một góc nhìn mới mẻ hơn về chủ đề còn khá xa lạ với nhiều người này.
Lời cuối cùng, chúng tôi muốn gửi lời cảm ơn chân thành và sâu sắc nhất tới thầy **Trần Quang Hùng** đã nhiệt tình hướng dẫn, giúp đỡ để một dự định được ấp ủ từ lâu giờ đã trở thành một bài viết hoàn chỉnh như thế này.

Tài liệu

[1] On Fontene's Theorems - Bocanu Marius
https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2015-02/article_1_bocanu.pdf

[2] Nine-point circle, pedal circle and cevian circle - Ngo Quang Duong
http://blogcuaquangduong.blogspot.com/2015/08/nine-point-circle-pedal-circle-cevian.html

[3] Line passes through Feuerbach point
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1120611p5152006

[4] Radical axis of pedal triangles
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1071511

[5] Simson line wrt pedal triangle
https://artofproblemsolving.com/community/c6h290991

[6] feuerbach point
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1434378p8123330

[7] Orthopole and orthotransversal
https://artofproblemsolving.com/community/c6h497230p2793037

[8] Small problem about orthopole
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1123307

[9] Orthopole of orthotranversal lies on Euler line
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1346677p7334107

[10] Orthopoles and the Pappus Theorem - Atul Dixit and Darij Grinberg
http://forumgeom.fau.edu/FG2004volume4/FG200406.pdf

[11] Orthopole, Collinearity, Parallel
https://artofproblemsolving.com/community/c6t90673f6h1128554

[12] Concyclic points
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1341458p7284966

[13] The reflection of orthopole lies on the NPC
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1449396p8352744

[14] Circles pass throough orthopole
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1301380p6934330

[15] Tangent circles
https://artofproblemsolving.com/community/c6h380541

[16] intersection of 3 Euler Line st is point on 9-Point Circle
https://artofproblemsolving.com/community/c6h550657

[17] Circumcircle passes through orthopole
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1297327p6892173

[18] The Miquel points, pseudocircumcenter, and Euler-Poncelet point of a complete quadrilateral
forumgeom.fau.edu/FG2014volume14/FG201413.pdf

[19] Poncelet point and Cyclocevian conjugate
https://artofproblemsolving.com/community/c6h612012p3639669.

[20] Four orthopoles are collinear
https://artofproblemsolving.com/community/u332429h1455073p8368922

[21] Euler-Poncelet points in cyclic quadrilateral
https://artofproblemsolving.com/community/c6h612457

[22] A generalization of the Simson line theorem
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1075523

[23] ntersection of Pedal circles
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1103807

[24] The Poncelet point and its applications - Ivan Zelich
https://www.academia.edu/6251353/Poncelet_point_and_its_applications_3_

[25] Six orthopoles lie on a circle
https://artofproblemsolving.com/community/c6h496827

[26] Own Problem (the first one)
https://artofproblemsolving.com/community/c6h355657

[27] Pole of Simson line lie on Orthopolar line
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1135553p8405826

[28] six orthoples are concyclic
https://artofproblemsolving.com/community/c6t90673f6h1141344

[29] Three collinear Orthocenters related to Orthotransversal
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1144762p5450029

[30] The orthopole of l WRT triangle ABC lies on BC
https://artofproblemsolving.com/community/c6t90673f6h1449399

[31] Line passing through O
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1452664p8341540

[32] The line pass through the orthopole.
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1458527

[33] K, S, A are collinear
https://artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1460128

[34] Beautiful properties of Orthopole
https://artofproblemsolving.com/community/c6t90673f6h1126525

[35] simple geometry practice
https://artofproblemsolving.com/community/c6t90673f6h1414520

[36] Similar triangles
https://artofproblemsolving.com/community/c6t90673f6h1125491

[37] Parallel lines from orthopole of Brocard line
https://artofproblemsolving.com/community/c6h1342891p7299890