

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

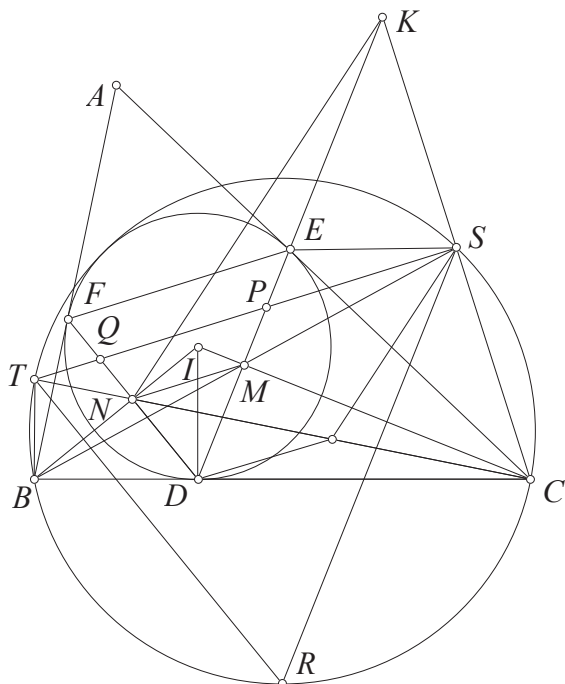
Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của DE, DF, EM, FN . BM, CN theo thứ tự cắt PQ tại S, T . Chứng minh rằng bốn điểm B, C, S, T cùng nằm trên một đường tròn tiếp xúc (I) .

Lời giải

Phần đầu của lời giải này dựa trên lời giải của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 Toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An tại [đây](#), còn phần sau là từ đáp án gốc của tác giả.



Ta thấy $IB \cdot IN = ID^2 = IC \cdot IM$ nên tứ giác $BCMN$ nội tiếp. Lại dễ thấy $PQ \parallel MN$ nên $\angle TSB = \angle NMB = \angle TCB$. Từ đó tứ giác $BCST$ nội tiếp. Ta thấy $\angle SMK = \angle BMD = \angle BMC - 90^\circ = \angle BNC - 90^\circ = \angle DNC = \angle DKC$ mặt khác do tam giác MSK vuông tại M nên MS đi qua trung điểm KC . Gọi DE cắt đường tròn (DNC) tại K khác D . Dễ thấy tam giác MNK và MPS cũng đồng dạng g.g. Từ đó $\frac{NK}{MS} = \frac{MN}{MP} = \frac{2MN}{MD}$. Ta cũng

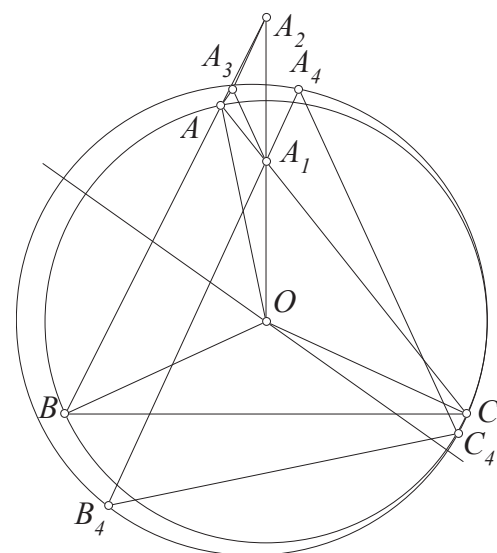
dễ thấy hai tam giác NMK và NDC đồng dạng g.g suy ra hai tam giác NMD và NCK đồng dạng c.g.c. Từ đó $\frac{MN}{MD} = \frac{KN}{KC}$. Vậy $\frac{NK}{MS} = \frac{2MN}{MD} = \frac{KN}{KC}$ nên $KC = 2MS$. Kết hợp với MS đi qua trung điểm KC nên S là trung điểm KC hay $SM = SC$. Chứng minh tương tự $TN = TB$. Mặt khác dễ thấy hai tam giác cân SMC và TNB đồng dạng g.g nên các đường cao kẻ từ S, T của hai tam giác này cắt nhau tại R trên đường tròn $BCST$. Chú ý rằng các đường cao này cũng là trung trực MC và NB do đó. Áp dụng bổ đề ở [Tuần 4 tháng 11 năm 2016](#) cho tam nội tiếp, ta thu được $(BCST)$ tiếp xúc (I) .

Nhận xét

Tác giả tạo ra bài toán này là dựa trên bổ đề ở bài toán Tuần 4 tháng 11 năm 2016 và sự kiện các tam giác SMC, TNB cân. Cách chứng minh hai tam giác cân của bạn **Bảo** có phần mới và sáng tạo. Ngoài ra cũng ở [đây](#) có các bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 toán THPT chuyên SP và **Nguyễn Hồng Sơn** lớp 10 toán THPT chuyên KHTN cho các lời giải khác. Tác giả cũng nhận được các lời giải khá thú vị khác từ các bạn **Đỗ Xuân Long**, **Trần Anh Tài** lớp 11 Toán, THPT chuyên KHTN.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Trung trực BC cắt CA, AB tại A_1, A_2 . Trên trung trực A_1A_2 lấy A_3 sao cho AA_3 vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC . Lấy A_4 đối xứng A_3 qua A_1A_2 . Dựng tương tự các điểm B_4, C_4 . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_4B_4C_4$ tiếp xúc (O) .



Mọi trao đổi xin gửi về email anageomantica@gmail.com.