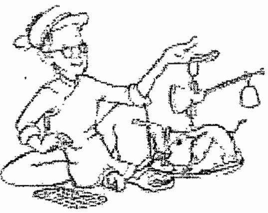
DIỄN ĐÀN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN



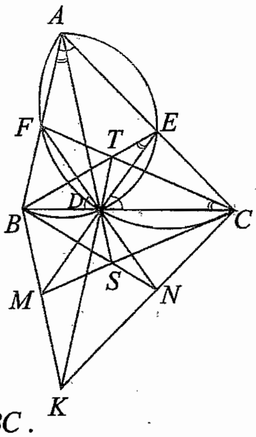
PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC TRONG THỰC HÀNH GIẢI TOÁN

(Tiếp theo kỳ trước)

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài toán sau xuất hiện trong kỳ thi Romani Master in Mathematic năm 2016

Bài 6. *Cho tam giác ABC và điểm D nằm trên cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB, DAC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A. Gọi K là điểm đối xứng với A qua BC. DE, DF lần lượt cắt KB, KC tại M, N. Chứng minh rằng BN, CM và AD đồng quy.*

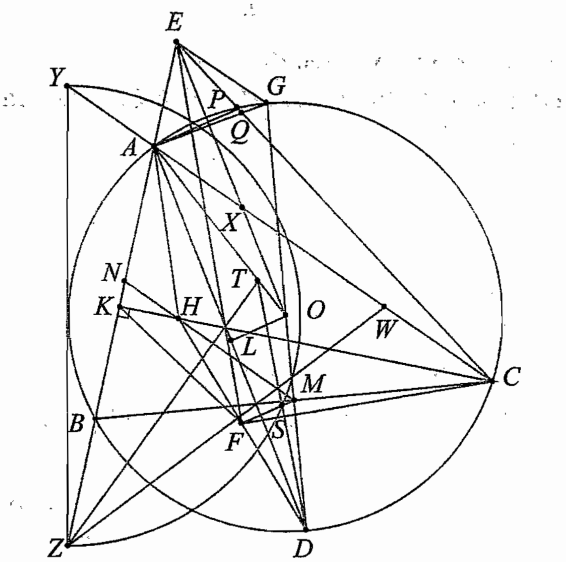


Lời giải. Giả sử BN cắt CM tại S. Ta thấy $\widehat{EDC} = \widehat{BAC} = \widehat{FDB}$ nên DE, DF đối xứng nhau qua BC. KB đối xứng với AB qua BC, do đó KB cắt DE tại M là điểm đối xứng qua BC của giao điểm DF và AB chính là F, vậy F, M đối xứng qua BC.

Tương tự E, N đối xứng qua BC. Vậy S là giao của BN và CM sẽ là điểm đối xứng qua BC của T là giao của BE, CF. Ta có $\widehat{DET} = \widehat{DAB} = \widehat{DCF}$ nên tứ giác $DTEC$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{TDC} = \widehat{TEA} = \widehat{BDA}$, suy ra DT và DA đối xứng qua BC, nên DT đi qua K hay D, K, T thẳng hàng. Suy ra ảnh đối xứng qua trục BC của D, K, T là D, A, S thẳng hàng.

Bài 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại D khác A. Lấy X thuộc AC sao cho $OX // AD$. Y là điểm đối xứng với X qua A. Lấy Z trên tia AB sao cho $AZ = AC$. Lấy T thuộc AO sao cho $ZT \perp AC$. Chứng minh rằng đường tròn đường kính YZ chia đôi đoạn DT.*

Lời giải. Giả sử OX cắt AB tại E. Dễ thấy ΔAXE cân tại A nên $AY = AX = AE$, suy ra Y và E đối xứng nhau qua AD.



Dễ thấy Z và C đối xứng nhau qua AD, gọi W là điểm đối xứng với B qua AD thì tam giác ABC và AWZ đối xứng nhau qua trục AD. Do ZW và BC đối xứng qua phân giác $\widehat{BAC}$ nên $AO \perp ZW$, từ đó T là trực tâm ΔAZW, vậy T đối xứng với trực tâm H của ΔABC qua AD. Gọi S, F lần lượt là trung điểm của DT, DH thì S, F đối xứng nhau qua AD. Ta cần chứng minh $\widehat{YSZ} = 90^0$. Qua phép đối xứng trục AD cần chứng minh $\widehat{EFC} = 90^0$, thật vậy gọi DG là đường kính của (O). Dễ thấy $OE // AD \perp AG$ nên $EA = EG$. AG là phân giác $\widehat{EAC}$ nên $\widehat{EGA} = \widehat{EAG} = \widehat{GAC} \Rightarrow EG // AC$. Gọi CE cắt (O) tại P khác C và CE cắt AG tại Q. Ta thấy $\widehat{PGQ} = \widehat{PCA} = \widehat{PEG}$ suy ra

$$\Delta PGQ \backsim \Delta QEG \Rightarrow \frac{PG}{GE}=\frac{QG}{QE}=\frac{AG}{CE}.$$

Từ đó $\frac{PG}{AG}=\frac{GE}{CE}=\frac{EA}{CE}=\frac{AP}{BC} \Rightarrow \frac{PG}{PA}=\frac{AG}{BC}$ (1)

Gọi L, M lần lượt là trung điểm AD, BC dễ có OM và FL cùng song song và bằng $\frac{1}{2}AH$ nên $FMOL$ là hình bình hành. Suy ra

$$FM=OL=\frac{1}{2}AG.$$

Từ (1) có $\frac{PG}{GA}=\frac{AG}{BC}=\frac{2FM}{2MC}=\frac{FM}{MC}$ (2)

Dễ có $\widehat{APG}=180^0-\widehat{ADG}=\widehat{FMC}$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $\Delta PAG \backsim \Delta MCF$ suy ra $\widehat{PGA}=\widehat{MFC}$. Từ đó gọi CK là đường cao và N là trung điểm AB ta thấy tứ giác $KNMF$ nội tiếp đường tròn Euler của ΔABC, suy ra

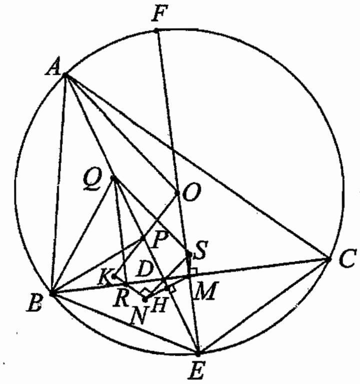
$$\widehat{ECF}=\widehat{ECA}+\widehat{ACB}+\widehat{BCF}$$
$$=\widehat{PGA}+\widehat{NMB}+\widehat{BCF}=\widehat{NMB}+\widehat{MFC}+\widehat{BCF}$$
$$=\widehat{NMA}+\widehat{BMF}=\widehat{NMF}=180^0-\widehat{NKF}.$$

Từ đó tứ giác $EKFC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{EFC}=90^0$.

Nhận xét. *Việc dùng đối xứng trục AD để chuyển mô hình bài toán qua việc chứng minh $\widehat{EFC}=90^0$ là một việc làm quan trọng và vai trò của việc sử dụng phép đối xứng trục ở đây là khá nổi bật. Ta dùng đối xứng trục chuyển toàn bộ mô hình bài toán này thành một bài toán khác là một cách giải đặc trưng cho việc sử dụng phép biến hình trong giải toán.*

Bài 8. *Cho tam giác ABC cố định với tâm đường tròn ngoại tiếp O và phân giác trong AD. P, Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác ABC và nằm trên AD. Lấy điểm S sao cho QS//AO và $DS \perp AO$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng đường thẳng qua P vuông góc với SM luôn đi qua một điểm cố định khi P, Q thay đổi.*

Lời giải. Gọi R là hình chiếu của Q trên BC. Do $DS \perp AO$ nên DS và BC đối xứng nhau qua AD, từ đó dễ thấy R và S đối xứng nhau qua AD. Gọi N, T là các điểm đối xứng với M, O qua AD tương ứng. Ta sẽ chứng minh $PT \perp MS$, hay đường thẳng qua P vuông góc với SM đi qua T cố định. Xét qua phép đối xứng trục AD thì cần chứng minh $RN \perp OP$.



Thật vậy gọi AD cắt (O) tại E khác A. EF là đường kính của (O). M là trung điểm của BC. H là trung điểm của MN thì H thuộc AD. Ta có $\widehat{RMN}=\widehat{OEP}$ (1). Theo định lý Thales và chú ý $\Delta HDM \backsim \Delta MDE$ ta có

$$\frac{QE}{RM}=\frac{DE}{DM}=\frac{ME}{HM}=\frac{2ME}{MN} \Rightarrow \frac{MN}{MR}=\frac{2ME}{QE} \quad (2)$$

Lại có $\widehat{PBE}=\widehat{PBC}+\widehat{CBE}=\widehat{QBA}+\widehat{QAB}=\widehat{BQE}$.

Từ đó có $\Delta EBP \backsim \Delta EQB \Rightarrow EP.EQ=EB^2=$

$$=EM.EF=2EM.EO \Rightarrow \frac{2ME}{QE}=\frac{EP}{EO} \quad (3)$$

Từ (2), (3) $\Rightarrow \frac{MN}{MR}=\frac{EP}{EO}$ (4)

Từ (1), (4) $\Rightarrow \Delta EPO \backsim \Delta MNR \Rightarrow \widehat{MNR}=\widehat{EPO}$.

Giả sử RN cắt OP tại K thì tứ giác $PHNK$ nội tiếp, suy ra $\widehat{NKP}=\widehat{PHN}=90^0$. Vậy $RN \perp OP$.

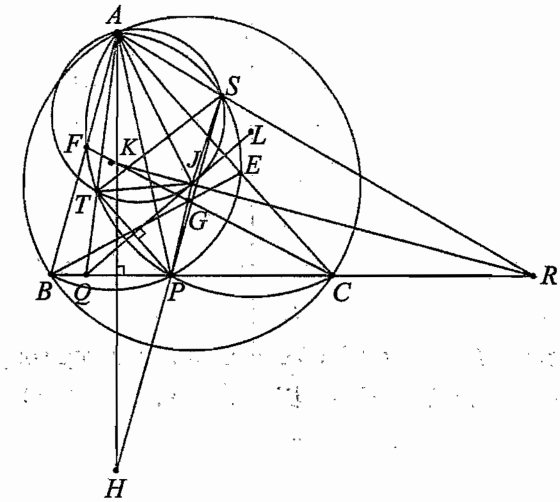
Nhận xét. *Việc sử dụng phép đối xứng trục AD chuyển bài toán về chứng minh $RN \perp OP$ là một việc làm quan trọng trong bài toán này.*

Ta tiếp tục với bài thi HSG lớp 10 ở Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội năm 2015

Bài 9. *Cho ΔABC nhọn, cố định. P là điểm di chuyển trên cạnh BC. (K), (L) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAB, PAC. Lấy S thuộc (K) sao cho PS//AB, lấy T thuộc (L) sao cho PT//AC.*

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAST luôn đi qua một điểm J cố định khác A.

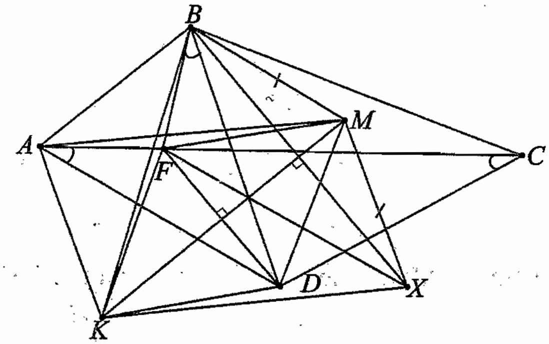
b) Giả sử (K) cắt CA tại E khác A. (L) cắt AB tại F khác A. BE cắt CF tại G. Chứng minh rằng đường thẳng PG đi qua $J \Leftrightarrow AP$ đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ΔABC.



Lời giải. a) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta sẽ chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔAST đi qua J cố định. Thật vậy, gọi AT, AS giao BC tại Q, R tương ứng. Các tứ giác $ABPS$ và $ACPT$ là hình thang cân, do đó tam giác ABR và ACQ cân tại R và Q. Dễ thấy JK, JL lần lượt là trung trực của AB, AC, do đó JK đi qua R và JL đi qua Q. Suy ra trong ΔAQR thì J là tâm đường tròn nội tiếp hay AJ là phân giác $\widehat{SAT}$ (1). Tứ giác $ACPT$ là hình thang cân nên JQ cũng là trung trực của PT, do đó $JT = JP$. Tương tự $JS = JP$. Do đó $JT = JS$ (2). Từ (1), (2) suy ra J thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔAST.

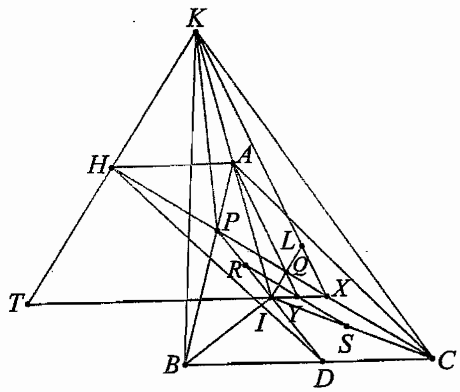
b) Ta thấy tứ giác $AEGF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EGC} = \widehat{EAF} = \widehat{EPG}$ nên tứ giác $CEGP$ nội tiếp kéo theo tứ giác $BFGP$ cũng nội tiếp. Gọi H là điểm đối xứng với A qua BC thì $\widehat{BPH} = \widehat{APB} = \widehat{AEB} = \widehat{GPC}$, do đó PG đi qua H. Do đó PG và AP đối xứng nhau qua BC. Từ đó PG đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp J của ΔABC $\Leftrightarrow AP$ đi qua điểm đối xứng của J qua $BC \Leftrightarrow AP$ đi qua tâm đường tròn Euler của ΔABC.

Bài 10. (Mở rộng bài toán 1 thi IMO 2016). *Cho ΔABC có $\widehat{ABC}$ tù và tâm đường tròn ngoại tiếp là D. Đường trung trực của AB cắt AC tại F. K, M lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADF, BFC. Dựng hình bình hành $AMXN$. Chứng minh rằng KM, FX, BD đồng quy.*



Lời giải. Do $DA = DB$ và $FA = FB$ nên A, B đối xứng nhau qua FD. Từ đó $\widehat{FBD} = \widehat{FAD} = \widehat{DCF}$ nên tứ giác $FBCD$ nội tiếp đường tròn (M). Hai đường tròn $(BFDC)$ và (AFD) có $\Delta AFD = \Delta BFD$ (c.g.c) nên bán kính của chúng bằng nhau. Từ đó $MFKD$ là hình thoi, suy ra K, M đối xứng nhau qua FD. Vậy $ABMK$ là hình thang cân, mà $AMXK$ là hình bình hành nên dễ suy ra B, X đối xứng nhau qua KM. Từ $MFKD$ là hình thoi suy ra F, D đối xứng nhau qua KM, do đó FX, KM, DB đồng quy.

Bài 11. *Cho ΔABC với tâm đường tròn nội tiếp I. P thuộc cạnh AB sao cho $IP \perp IB$. R, S lần lượt là trung điểm IP, IC. Q là hình chiếu của I trên PC. Chứng minh rằng AQ chia đôi đoạn RS.*



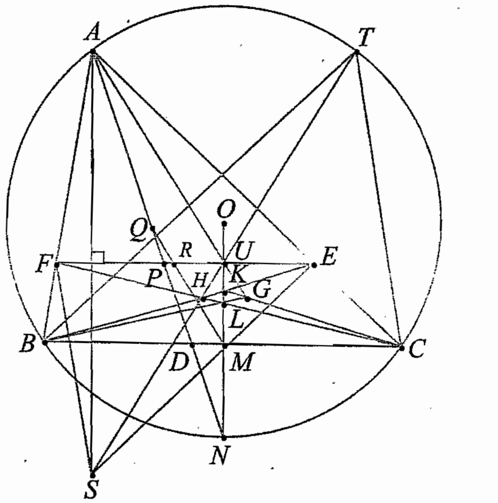
Lời giải. Gọi K,L lần lượt là các điểm đối xứng với I qua A,Q. Ta sẽ chứng minh KL chia đôi PC. Thật vậy.

$\widehat{PIC}=\widehat{PIA}+\widehat{AIC}=\dfrac{\widehat{ACB}}{2}+90^\circ+\dfrac{\widehat{ABC}}{2}$

$=180^\circ-\dfrac{\widehat{BAC}}{2}=\widehat{PAK}$. Lại có $\dfrac{AP}{AK}=\dfrac{AP}{AI}=\dfrac{PI}{IC}$, đẳng thức cuối có do $\Delta API\backsim\Delta AIC$. Từ đó $\Delta APK\backsim\Delta IPC$. Lấy H trên PC sao cho $AH//BC$. Ta thấy $\dfrac{PB}{PK}=\dfrac{PB}{PA}.\dfrac{PA}{PK}=\dfrac{PC}{PH}.\dfrac{PI}{PC}=\dfrac{PI}{PH}$, mà $\widehat{KPB}=\widehat{DPH}$ nên $\Delta PIH\backsim\Delta PBK$ suy ra $\Delta PHK\backsim\Delta PIB$, nên $\widehat{KHP}=90^\circ$. Gọi T là điểm đối xứng với K qua H thì $IT//AH//BC//IX$ với X là trung điểm PC. Từ đó T,I,X thẳng hàng. Qua phép đối xứng trục CP thì K,L,X thẳng hàng.

Nhận xét. *Việc sử dụng đối xứng trục CP biến ba điểm T,I,X thành ba điểm K,L,X thẳng hàng đóng vai trò quan trọng trong cách tìm ra lời giải bài toán.*

Bài 12. *Cho ΔABC có P,Q là hai điểm đẳng giác trên đường phân giác trong AD góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng qua P song song với BC cắt CA,AB tại E,F tương ứng. BE,CF cắt trung trực của BC tại K,L tương ứng; BL cắt CK tại G; M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $QM//AG$.*



Lời giải. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. AP cắt BC tại D và cắt (O) tại N khác A. Dễ thấy hai tam giác NBP và NQB đồng dạng nên $NP.NQ=NB^2=ND.NA$. Giả sử EF cắt trung trực BC tại U thì $\dfrac{NM}{NU}=\dfrac{ND}{NP}=\dfrac{NQ}{NA}$ $\Rightarrow AU//QM$, ta chứng minh AU đi qua G. Thật vậy, gọi S,T là các điểm đối xứng của A lần lượt qua EF và trung trực BC thì U là trung điểm ST. Ta thấy $\widehat{EFS}=\widehat{EFA}=\widehat{ABC}=\widehat{TCB}$ từ đó $FS//TC$, tương tự $ES//TB$. Vì hai tam giác SEF và TBC có các cạnh tương ứng song song nên ST,CF và BE đồng quy tại H. Qua đối xứng trục là trung trực của BC chú ý BE,CF là đối xứng của CK,BL nên giao điểm G,H đối xứng qua trung trực BC. Chú ý A,U,G lần lượt là ảnh của T,U,H qua phép đối xứng qua trung trực BC, mà T,U,H thẳng hàng nên AU đi qua G.

Nhận xét. *Việc sử dụng đối xứng qua trung trực của BC có vai trò quyết định trong lời giải bài toán.*

Bài viết mới chỉ dừng lại ở việc nêu bật vai trò của phép đối xứng trục trong việc thực hành giải những bài toán khó khác nhau của chương trình hình học Olympic. Cũng giống như những phép biến hình khác thì phép đối xứng trục còn có những bài tập mang tính lý thuyết rất sâu sắc. Mặt khác những dạng toán có liên quan tới tích của phép đối xứng trục với các phép biến hình khác hoặc là việc vận dụng phép đối xứng trục trong các bài toán về tỷ số kép và hàng điều hòa chúng tôi cũng chưa thể nhắc tới do khuôn khổ bài báo có hạn. Tuy nhiên với việc sử dụng đối xứng trục như là một phần không thể thiếu của lời giải bài toán, thì trong các ví dụ trên chúng tôi cũng đã phần nào làm được nhiệm vụ này. Các ứng dụng của phép đối xứng trục trong cả lý thuyết và thực hành giải toán còn rất nhiều, xin hẹn gặp lại các bạn ở những chuyên đề kế tiếp.