Tham dự mục đề ra kỳ này THTT

Trần Quang Hùng-Võ Quốc Bá Cẩn

Bài 1. *Cho tam giác nhọn ABC trực tâm H. Gọi R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\max\{\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB},\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC},\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA}\}\geq\frac{2R}{r}-2$$

Ta cần bổ đề và các công thức quen thuộc sau

Bổ đề 1. *Với mọi $x, y, z \geq 0$ thì*

$$x\cos A+y\cos B+z\cos C\leq\frac{1}{2}(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z})$$

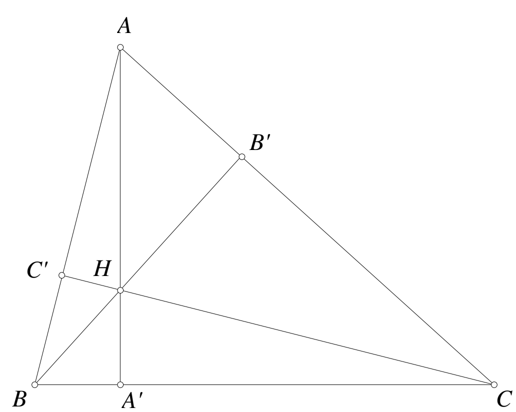
Bổ đề 2. *Cho tam giác nhọn ABC trực tâm H. Gọi R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Ta có một số công thức lượng sau*

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{R+r}{R}$$

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{2S}{R}$$

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{HA}=\frac{A'B+A'C}{HA}=\frac{HB\sin C+HC\sin B}{HA}$$



Trở lại bài toán

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau

$$\frac{a}{2}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})+\frac{b}{2}(\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC})+\frac{c}{2}(\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA})\geq p(\frac{2R}{r}-2)$$

Vì ta dễ thấy

$$p\max\{\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB},\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC},\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA}\}\geq\frac{a}{2}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})+\frac{b}{2}(\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC})+\frac{c}{2}(\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA})$$

Sử dụng các đồng nhất thức ở bổ đề 2 ta có

$$\cot\frac{A}{2}\cos A+\cot\frac{B}{2}\cos B+\cot\frac{C}{2}\cos C\leq\frac{1}{2}(\tan A+\tan B+\tan C)$$

$$\Leftrightarrow\sum\frac{p-a}{r}\cos A\leq\frac{1}{2}\sum\frac{HB\sin C+HC\sin B}{HA}$$

$$\Leftrightarrow p(\sum\cos A)-\sum a\cos A\leq r\sum\frac{a}{4R}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})$$

$$\Leftrightarrow p\frac{R+r}{R}-\frac{2S}{R}\leq r\sum\frac{a}{4R}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})$$

$$\Leftrightarrow\frac{pR+S-2S}{R}\leq r\sum\frac{a}{4R}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{pR-pr}{r}\leq\sum\frac{a}{2}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{2}(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB})+\frac{b}{2}(\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC})+\frac{c}{2}(\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA})\geq p(\frac{2R}{r}-2)$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\cot\frac{A}{2}\cos A+\cot\frac{B}{2}\cos B+\cot\frac{C}{2}\cos C\leq\frac{1}{2}(\tan A+\tan B+\tan C)$$

Áp dụng bổ đề 1 ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau

$$\sum\cot\frac{A}{2}\cos A\leq\frac{1}{2}\sum\frac{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}\leq\frac{1}{2}\prod\tan A$$

Sử dụng công thức tan góc chia đôi $\tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$, bất đẳng thức trên sẽ tương đương với

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}\leq\frac{8\prod\tan^2\frac{A}{2}}{\prod(1-\tan^2\frac{A}{2})}$$

Đặt $\tan\frac{A}{2} = a, \tan\frac{B}{2} = b, \tan\frac{C}{2} = c$ ta sẽ có $ab + bc + ca = 1$ và vì tam giác nhọn nên $0 < a, b, c < 1$. Ta phải chứng minh

$$\frac{8a^2b^2c^2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Trước hết ta sẽ chứng minh hằng đẳng thức sau

$$4a^2bc = (1-b^2)(1-c^2) + (1-a^2)(b-c)^2.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}(1-b^2)(1-c^2) + (1-a^2)(b-c)^2 &= 1 - 2bc + b^2c^2 - a^2(b-c)^2 \\ &= (1-bc)^2 - a^2(b-c)^2 \\ &= (1-bc-ab+ac)(1-bc-ac+ab) \\ &= 4a^2bc.\end{aligned}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đã cho. Không mất tính tổng quát giả sử $a = \min\{a,\ b,\ c\}$. Sử dụng hằng đẳng thức trên ta được

$$8a^2b^2c^2 = 2bc[(1-b^2)(1-c^2) + (1-a^2)(b-c)^2].$$

Do vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2bc}{1-a^2} + \frac{2bc(b-c)^2}{(1-b^2)(1-c^2)} \geq a^2 + b^2 + c^2,$$

hay

$$\frac{2bc}{1-a^2} - 1 + \frac{2bc(b-c)^2}{(1-b^2)(1-c^2)} \geq a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca.$$

Ta có $2bc - (1-a^2) = 2bc + a^2 - (ab + bc + ca) = (a-b)(a-c)$ và

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = (a-b)(a-c) + (b-c)^2.$$

Do đó bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$\frac{(a-b)(a-c)}{1-a^2} + \frac{2bc(b-c)^2}{(1-b^2)(1-c^2)} \geq (a-b)(a-c) + (b-c)^2,$$

tương đương

$$\frac{a^2(a-b)(a-c)}{1-a^2} + \frac{(b-c)^2[2bc - (1-b^2)(1-c^2)]}{(1-b^2)(1-c^2)} \geq 0.$$

Để ý rằng $a^2(a-b)(a-c) \geq 0$ và

$$\begin{aligned}2bc - (1-b^2)(1-c^2) &= bc(1-bc) + b^2 + c^2 + bc - 1 \\ &= bc(1-bc) + b^2 + c^2 - ab - ac \geq 0,\end{aligned}$$

suy ra bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Phép chứng minh của ta được hoàn tất tại đây. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Hay ABC là tam giác đều. Ta có điều phải chứng minh.

$\square$