About two geometry problems in IMO year 2015

Tran Quang Hung

Abstract

The article resolve and gives the ideas for expanding and applications of the geometry problems in IMO year 2015.

Contents

1 Geometry problem on the first day

1.1 Introduction

The IMO exam on first day in the year 2015 [1] has interesting geometric problem as following

Problem 1.1. Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O) with the orthocenter H, the altitude AF and M is the midpoint of BC. The circle with the diameter HA cuts (O) at Q differently from A. The circle with the diameter HQ cuts (O) at K differently from Q. Prove that the circumcircles of the triangles KHQ and KFM touch each other.

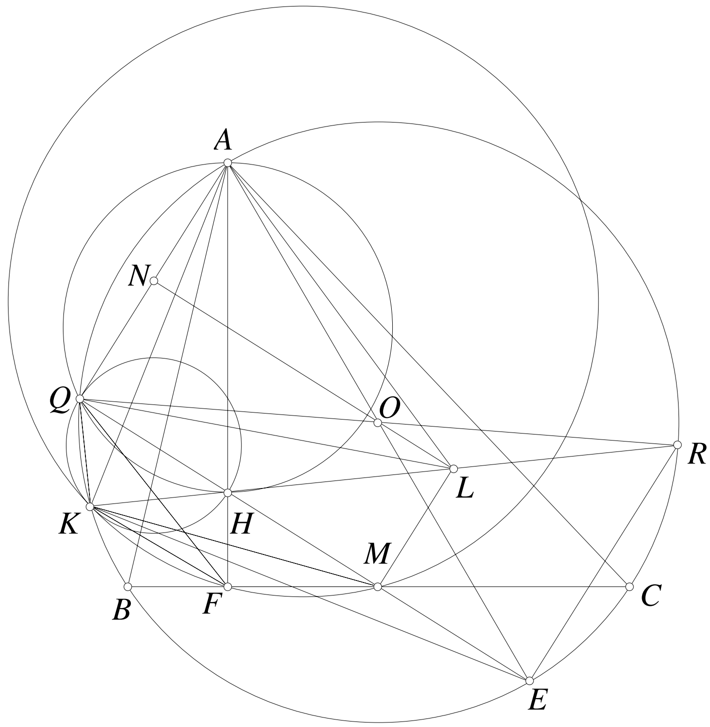


Figure 1.

First proof. Draw the diameters AE and QR of (O). L, N are the midpoints of HR, QA respectively. We have the familiar result Q, H, M, E collinear. Then deduce $ML \parallel ER \parallel QA$ v $ML = \frac{1}{2}ER = \frac{1}{2}QA = NQ$ so $NQML$ is retangular. Thence, $LN \perp QA$. Then we have $LA = LQ$. On the other hand, $ML \parallel QA$ so ML touches the circumcircles $\triangle LAQ$ at L (1). Easily seen $HA.HF = HK.HL = HQ.HM$ so the inverse with center H pow of point $\overline{HA}.\overline{HF}$ change $M \to Q, L \mapsto K, A \mapsto F, Q \mapsto M$. From (1) combine the inversation with center H deduce the circumcircles $\triangle KHQ, \triangle KFM$ touch each other. $\square$

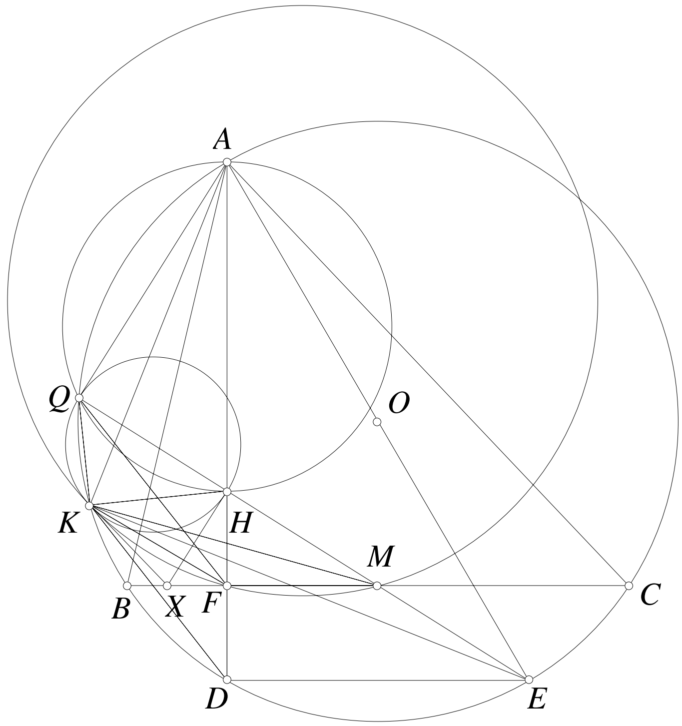


Figure 2.

Second proof. Call by AE the diameter of (O) and D is reflection of H through BC then D is on (O). Easily seen Q, H, M, E collinear. The tangents at K, H that the circumcircles of the triangles KHQ cut each other at X. We have $\angle KXH = 180° - 2\angle KHX = 180° - 2\angle KQH = 2(90° - \angle KQH) = 2(90° - \angle KAE) = 2\angle AEK = 2\angle KDH$. And have $XK = XH$, then X is the center of the circumcircles of the triangles KDH. As BC is perpendicular bisector of HD so X is on BC. Then according to trigonometry we have $XK^2 = XH^2 = XF.XM$ or XK is the common tangent of the circumcircles of the triangles KQH and KFM or two circles touch each other at K. $\square$

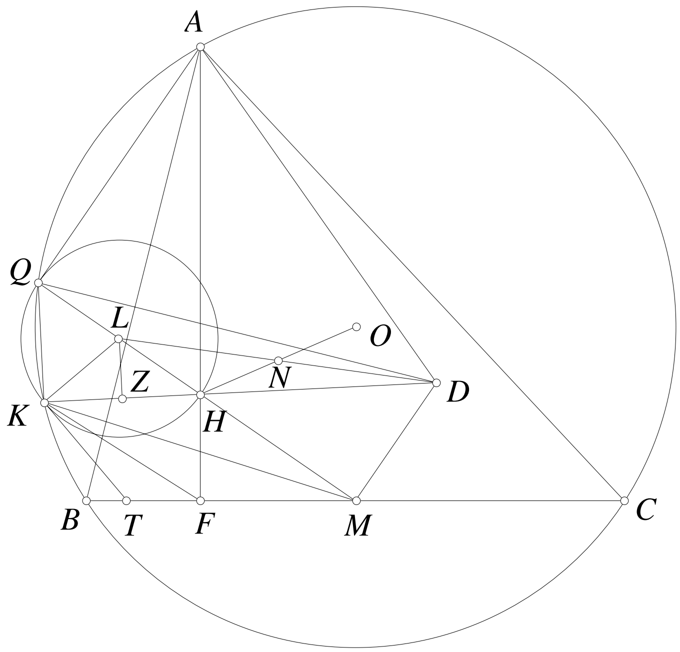


Figure 3.

Third proof. The straight line passing through M is perpendicular to QM and cuts KH at D. Call by L, Z the midpoints of HQ, HK then L, Z are on the Euler circle (N) but M is also on (N) then N is the midpoints of LD. N is also the midpoints of OH then $OD \parallel LH \perp QA$. Thence $DQ = DA$ and $HA.HF = HQ.HM = HK.HD$. Draw the tangent KT of the circumcircles of the triangles KQH we have $\angle TKF = \angle TKH - \angle HKF = \angle KQH - \angle HAD = \angle HDM - (\angle QAD - \angle QAH) = \angle HDM - \angle QDM + \angle HMF = \angle HMF - \angle QDH = \angle HMF - \angle HMK = \angle KMF$. Thence KT is also the common tangent of the circumcircles of the triangles KFM. $\square$

Remark. This problem is third problem on first day, is supposed difficult problem. However the proof of problem with two circles touche at the available tangent point then degree of difficulty is not high so it is reasonable the third problem. The first proof is rather nature idea, because when two circles touch each other we think about inversation for proving the straight line touches the circle for reduce the quantity of the circles. This proof was suggested by **Telv Cohl** and **Trinh Huy Vu** 12A1 math special school of Natural science, **Vu** helps me represent the proof as above. There are many different proofs suggested in [1]. The second proof have clever and pure geometric idea was suggested by **Jeck Lim**, nick name **oneplusone** in [1], I edit a little in building the point X and transform the angle shortly. The third proof, in fact, start at an idea of inversation by **Ho Quoc Dang Hung** and I also edit more shortly, remove the present of an inversation and make its more pure geometry. In this proof, the point T is not necessary but we still build it for nice proof. The problem has many applications and expanding. In the following we would like to present some application and expanding.

1.2 Extensions of IMO problem

The problem IMO has nice configuration, in which we can see many other interesting problems. The first problem was found out by chance when try to resolve the IMO problem by using similarly with median method.

Problem 1.2. Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O) with the orthocenter H, the altitude AF and M is the midpoint of BC. The circle with the diameter HA cuts (O) at Q differently from A. The circle with the diameter HQ cuts (O) at K differently Q. KQ cuts the circumcircle of the triangle KFM at N differently from K. Prove that MN bisects AQ.

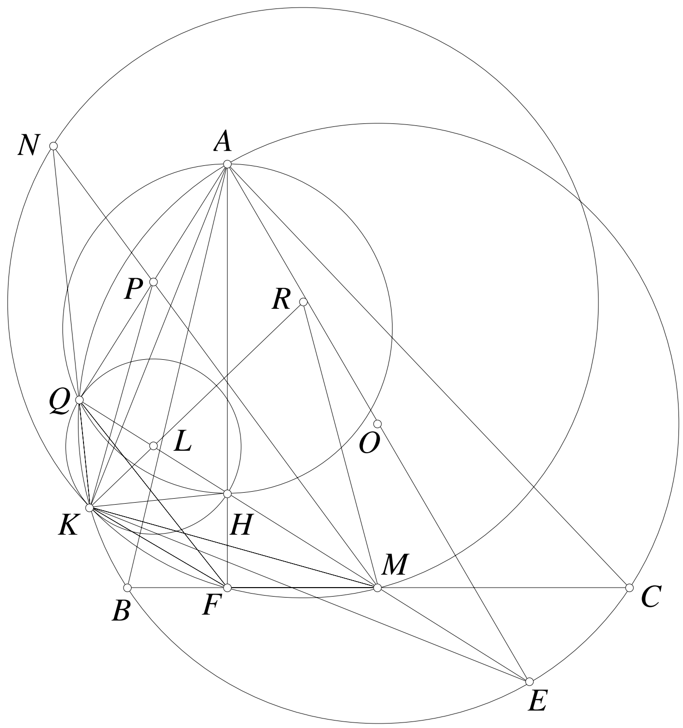


Figure 4.

Solution. Call by L, R the centers of the circumcircle of the triangles KQH and KFM then L is the midpoint of QH and according to the first problem then K, L, R are collinear. Call by P the midpoint of QA, we will prove M, N, P collinear. Indeed, call by AE the diameter of (O) then Q, H, M, E are collinear. Thence $\angle KQH = \angle KAE$ so two right triangles KQH and KAE are similar, deduce two triangles KQA and KHE are similar, their medians are KP, KM so $\angle QPK = \angle QMK$ and $\angle QKP = \angle HKM$. Then the quadrilateral $QPMK$ is cyclic. We have $\angle CMN = \angle QKF = \angle QKL + \angle LKM + \angle MKF = \angle KPM + \angle RMK + 90^\circ - \angle RMF = 90^\circ - \angle PMK + \angle RMK = 90^\circ - \angle PMK + \angle RMK + 90^circ - \angle RMF = 180^\circ - \angle BMP = \angle CMP$. Then M, N, P are collinear. We are done. □

Thanks for the idea of this problem we can see the interesting when the tangent point was hidden in the origin problem

Problem 1.3. Let the acute triangle ABC with the orthocenter H, the altitude AF and M is the midpoint of BC. The circle with the diameter HA cuts HM at Q differently from A. X is on BC such that $XH \perp QM$. L, P are the midpoints of QH, QA. The straight line through Q and parallel to LX cuts MP at N. Prove that the circumcircle of the triangle NFM touches the circle with the diameter QH.

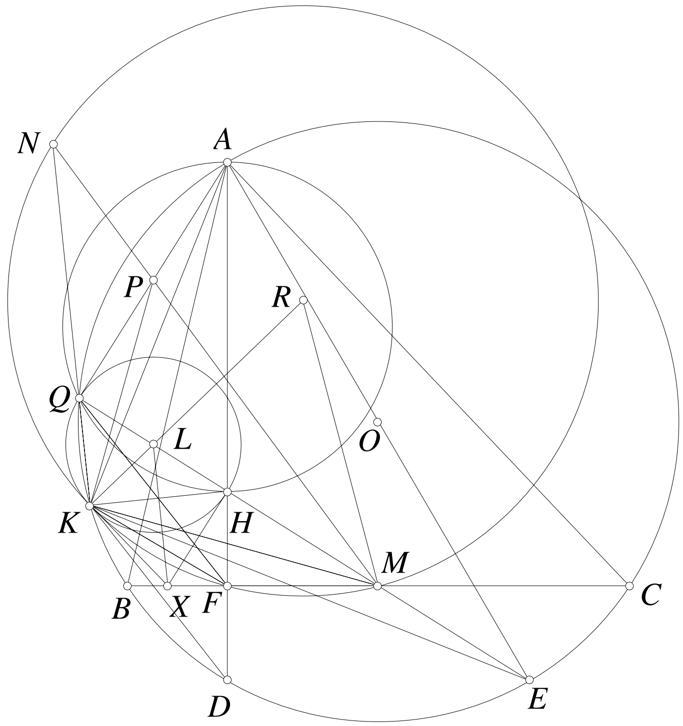


Figure 5.

The first proof. Call by (O) the circumcircle of the triangle ABC. Call by AE the diameter of (O) then Q, H, M, E are collinear. Call by D the reflection of H through BC. The circle (X, XH) touches the circle (O) at K differently D. We have $\angle XKH = \angle XHK = 90° - \angle KDH = 90° - \angle KEA = \angle KAE = \angle KQE$, then KH, KX touches the circumcircle of the triangle QKH. Moreover, we have $\angle KQH = \angle KHX = 90° - \angle KHQ$ so $\angle QKH = 90°$. K is on the circle with the diameter QH so $LX \perp KH \perp QK$ deduce $QK \parallel LX \parallel QN$ so K, Q, N are collinear. From the similar triangle KQH and the triangle KAE deduce KQA and KHE are similar, else KP, KM are their medians respectively so the triangles KQP and KHM are similar or KQH and KPM are similar. Else have $XK^2 = XH^2 = XM.XF$ deduce XK touches the circumcircle (R) of the triangle KFM. Thence K, L, R are collinear. So $\angle LKQ = \angle LQK = \angle KPM = 90° - \angle KHQ = 90° - \angle PMK$ from this easily deduce $\angle KRM = 2\angle N$. Thence N is on (R) or (R) is the circumcircle of the triangle NFM. Eevidently (R) touches the circle with the diameter QH. We are done. □

The second proof . The circle with the diameter QH cuts (O) at K differently from A and D is the reflection of H through BC. Prove analogously the origin problem then QE touches the circumcircle of the triangle KHD but $HX \perp QE$ so the center of the circumcircle of the triangle KHD is laying on HX, else have X is on the perpendicular bisector HD so the center of the circumcircle of the triangle KHD is just X so $XH = XK$. Easily seen XH touches the circumcircle of the triangle QHK so XK is the same. Then $KH \perp LX \perp QK$ so $QK \parallel LX \parallel QN$. Thence Q, K, N are collinear. We have $\angle QKF + \angle FMN = \angle QKL + \angle RKM + \angle MKF + \angle FMP = 90° - \angle KHQ + \angle RMK + 90° - \angle RMF + \angle FMP = 180°$ or the quadrilateral $NKFM$ is cyclic. Thence the circumcircle of the triangle NFM touches the circle with the diameter QH. □

We have another idea for expanding IMO problem as following

Problem 1.4. Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O) with the orthocenter H and the altitude AD. The circle with the diameter HA cuts (O) at G differently from A. The circle with the diameter HG cuts (O) at K differently from G. S is the reflection of D through HK. Prove that the straight line S is perpendicular to SK bisects BC.

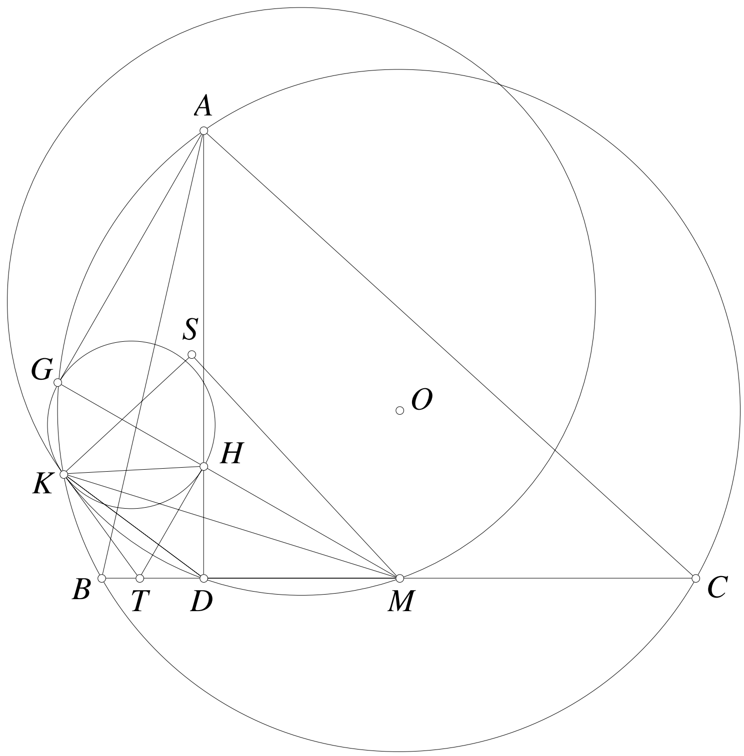


Figure 6.

Solution. Call by M the midpoint of BC, we prove that the triangle KSM is right at S. Indeed in the problem IMO, the circumcircles of the triangles KGH and KDM touch each other at K. We get T on BC such that KT is common tangent of two that circles. We have $\angle SKM = \angle SKH + \angle HKM = \angle HKD + \angle GHK - \angle GMK = \angle HKT - \angle DKT + \angle GHK - \angle GMK = \angle HGK + \angle GHK - \angle KMD - \angle GMK = 90^\circ - \angle HMD = \angle DHM$. Also according to the origin problem we also have TK and TH are the tangents of the circumcircles of the triangle KGH and two triangles TKD and TMK are similar. Then $\dfrac{KS}{KM} = \dfrac{KD}{KM} = \dfrac{TK}{TM} = \dfrac{TH}{TM} = \dfrac{HD}{HM}$. From that easily seen two triangles KSM and HDM are similar, so $\angle KSM = 90^\circ$. □

From two above problems, go to the following expanding

Problem 1.5. Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O) with the orthocenter H and the altitude AD, the median AM. The circle with the diameter HA cuts (O) at G differently from A. The circle with the diameter HG cuts BC at K differently from G. KG cuts the circumcircle of the triangle KDM at N differently from K. KH cuts MN at Q. Prove that $QD = QM$.

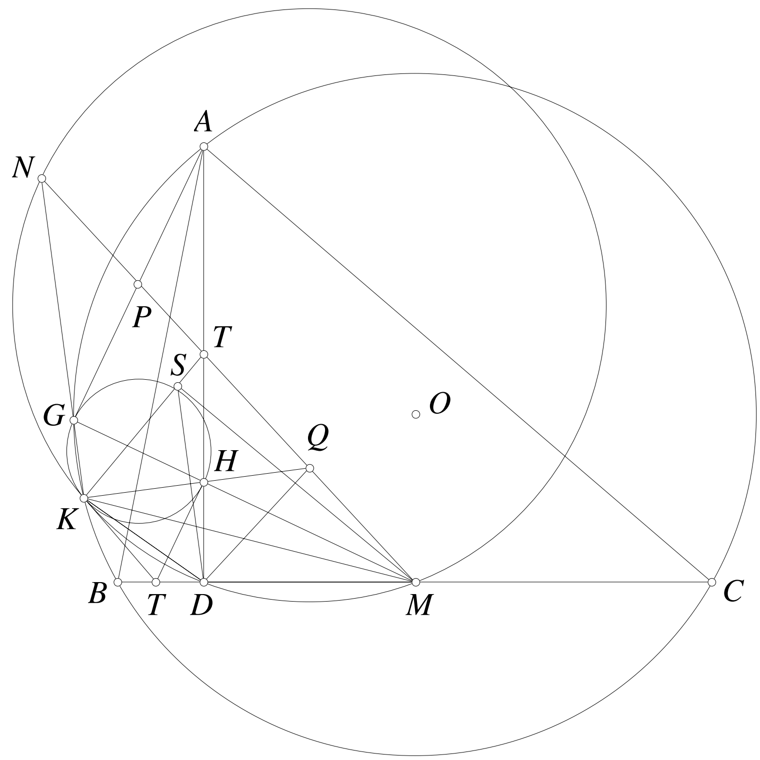


Figure 7.

The first proof based on the previous result

The first proof. Call by S the reflection of D through KH and KS cuts MM at T. According to the previous problem, MN goes through the midpoint P of GA so $\angle QHM = \angle GHK = \angle KMQ$. From this $\angle QMH = \angle QKM$. Then $\angle HKD = 90^\circ - \angle HMD - \angle HKM = 90^\circ - \angle QMD$. Thence $\angle KSD = 90^\circ - \angle SKH = 90^\circ - \angle HKD = \angle QMD$ deduce the quadrilateral $STMD$ is cyclic. Also according to the previous problem $\angle TSK = 90^\circ$. From this deduce $\angle TDM = 90^\circ$ or T belong to AH. And from $\angle HKD = 90^\circ - \angle QMD = \angle MTD$ so the quadrilateral $KTQD$ is cyclic, we receive $\angle DQM = \angle TKD$ or two triangles QDM and KDS are similarly or $QD = QM$. □

The second proof was proved by **Trinh Huy Vu** the pupil from 12A1 Math, Special school of natural science.

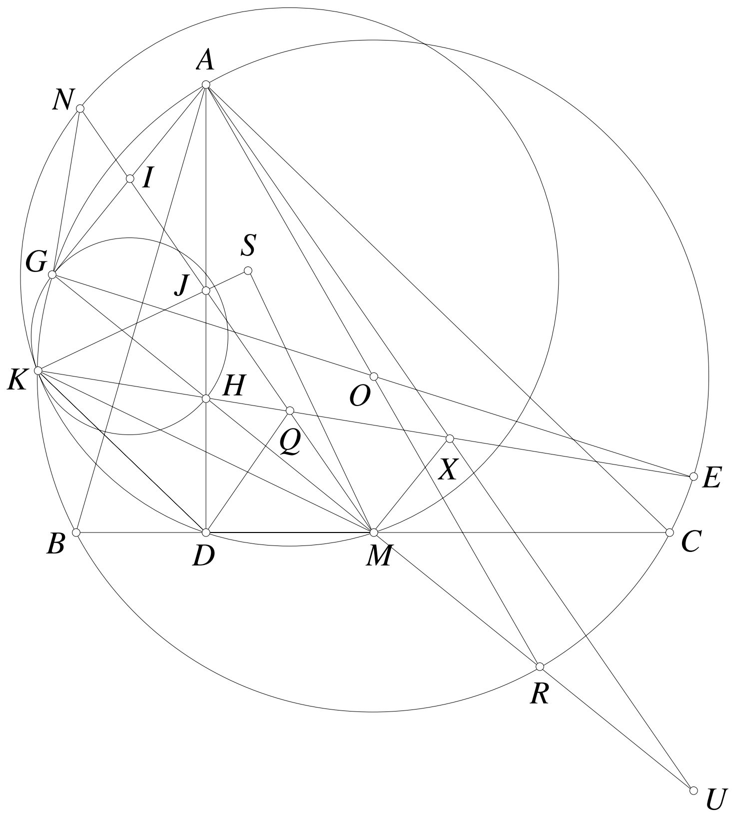


Figure 8.

proof. Draw the diameters AR, GE of (O).Call by I the midpoint of GA. From the previous problem we had I laying on MN. Call by X the midpoint of HE. We have familiar result G, H, M, R are collinear. From this deduce $MX \parallel GA$ v $MX = \frac{1}{2}RE = \frac{1}{2}.GA = IA = IG$ so $AIMX, IGMX$ is parallelogram. Thence $AX \parallel MI$ and $XI \perp GA$. From that, we receive $XA = XG$. Call by J the intersection of MI and AD. Get U symmetry of A through X. From $XA = XG$ deduce $\angle AGU = 90°$. Then U is lying on the straight line HM. So KH bisects MJ but $MJ \parallel AU$ and KH bisects AU at X. Deduce Q the midpoint of MJ, combine with $\angle JDM = 90°$, we receive $QD = QM$. □

From the result of this problem **Vu** gives the other proof for previous problem as following

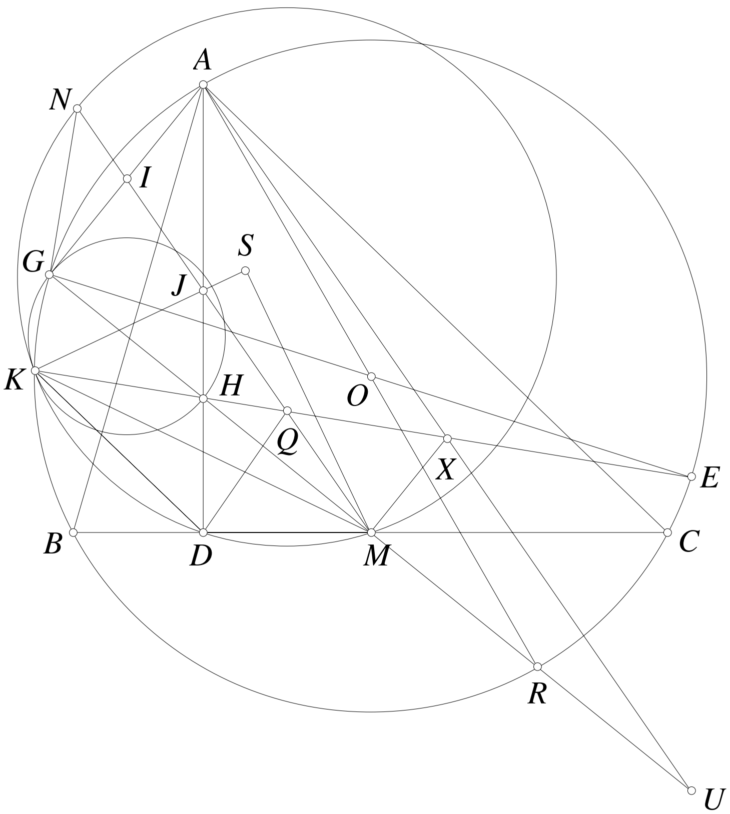


Figure 9.

Solution of the previous problem. We still use a symbol as in the second proof above. From this problem deduce Q is center of the circumcircles of the triangle DMS. Deduce $\angle DSM = \frac{1}{2}\angle DQM$. We have $HK.HX = HK.\frac{1}{2}HE = HG.\frac{1}{2}HR = HG.HM = HA.HD$. Deduce the quadrilateral $AXDK$ cyclic. So we have $\angle KSD = \angle KDS = 90^\circ - \angle DKH = 90^\circ - \angle DAX = 90^\circ - \angle DJM = 90^\circ - \frac{1}{2}.\angle DQM = 90^\circ - \angle DSM$. So $\angle KSM = \angle KSD + \angle DSM = 90^\circ$. □

If use the butter fly theorem we have two applications as following

Problem 1.6. Let the acute triangle ABC with the center of the circumcircles O with the orthorcenter H, the altitude AD and the median AM. G is the projector of A on HM. L is the midpoint of HG. K is reflection of G through OL. KL cuts perpendicular bisector DM at S. KG cuts BC at T. Get X belong to MK such that $TX \perp ST$. Y is symmetric of X through T. P is the midpoint of AG. Prove that KG, YD, MP concurrent.

We can present the above problem in other way, this problem also has a lot of meaning

Problem 1.7. Let the acute triangle ABC with the center of the circumcircles O with the orthocenter H, the altitude AD and the median AM. G is projector of A on HM. L is the midpoint of HG. K is the reflection of H through OL. KL cuts the perpendicular bisector DM at S. P is the midpoint of GA. N is symmetry of M through the projector of S on MP. NG cuts BC at T. Get X belong to ND such that $XT \perp ST$. Y is symmetry of X through T. Prove that MY, NG, KL concurrent.

So from the origin problem we receive some other problems, they have nice result and meaning .

1.3 Some applications

This IMO problem is nice in sense having a lot of expanding development. In [1] was given many expanding, in this article I would like to present my expanding, let go to the first expanding as following

Problem 1.8. Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O). P is one point in the triangle such that $\angle BPC = 180^\circ - \angle A$. PB, PC cut CA, AB at E, F. The circumcircles of the triangle AEF cuts (O) at G differently from A. The circle with the diameter PG cuts (O) at K differently from G. D is the projector of P on BC and M is the midpoint of BC. Prove that The circumcircles of the triangles KGP and KDM touche each other.

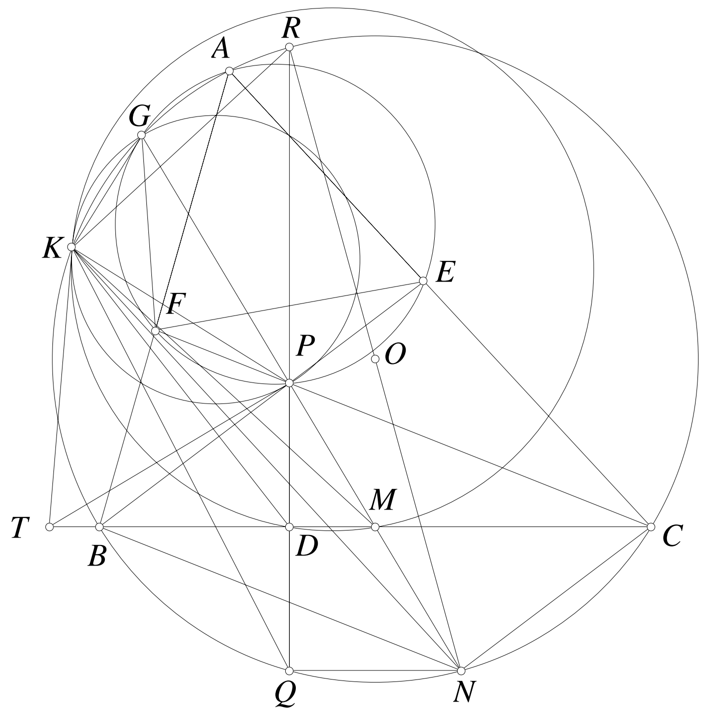


Figure 10.

Solution. Call by Q the symmetry of P through D, then Q is laying on (O). GP cuts (O) at N differently from G. We see $\angle NPC = \angle FPG = \angle FAG = \angle BNP$ deduce $BN \parallel PC$. Similarly, $CN \parallel BP$. From this M is the midpoint of PN. Call by AS, NR the diameter of (O). We easily see $\angle PQN = 90^\circ$ so P, Q, R are collinear. Thence, GN is the tangent of the circumcircle of the triangle KPQ. Call the tangent at K, P of the circumcircle of the triangle KPG cut each other at T. We have $\angle KTP = 180^\circ - 2\angle KGP = 2(90^\circ - \angle KRN) = 2\angle RNK = 2\angle KQP$ v $TK = TP$. From this T is the center of the circumcircle of the triangle KPQ but, as BC is the perpendicular bisector of PQ so T is on BC. From this, we have $TK^2 = TP^2 = TD.TM$ deduce TK is common tangent of the circumcircles of the triangles KDM and KHM or two circles touch each other at K. $\square$

Remark. Above expand was published first time in [1] and after that it was revised shortly. When given P the orthocenter or given the angle A specially, we will receive many separate case with meaning. In other point of view, it is easier when P is the orthocenter of the triangle RBC so, we apply directly the origin problem on the triangle RBC then receive the above problem. The other expand for this problem as following

Problem 1.9. Let the triangle ABC inscribed on the circle (O). P is one point on the chord $\overset{\frown}{BC}$ not contain A. AP cuts BC at D. Q is symmetry of P through D. The circle with the diameter AQ cuts (O) at G differently from A. The circle with the diameter GQ cuts (O) at K differently from G. GQ cuts the straight line through O and parallel to AP at M. Prove that the circumcircles of the triangles KGQ and KDM touch each other.

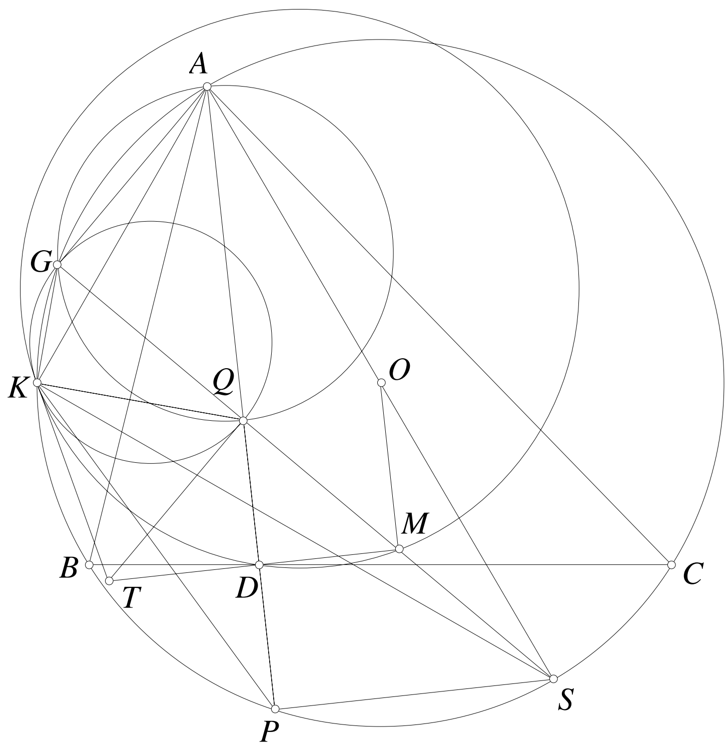


Figure 11.

Solution. Call by S the intersection again of GQ cut (O), as $\angle AGQ = 90^\circ$ so AS is the diameter of (O). As $OM \parallel AP$ and O is the midpoint of AS so M is the midpoint of QS. Thence $DM \parallel PS \perp PA$ so DM is the perpendicular bisector of PA. Else have $\angle KQG = 90^\circ - \angle KGQ = 90^\circ - \angle KAS = \angle ASK = \angle QPK$. Thence GS touches the circumcircle of the triangle KQP. Call the tangent at K, Q of the circumcircle of the triangle GKQ cut each other at T. We have $\angle KTQ = 180^\circ - 2\angle KGQ = 2\angle KQG = 2\angle KPQ$. Then T is the center of the circumcircle of the triangle KPQ. We prove that DM is the perpendicular bisector of PQ so T belongs to DM. From this, we have $TK^2 = TP^2 = TD.TM$ deduce TK is the common tangent of the circumcircles of the triangles KGQ and KDM or two that circles touch each other at K. We are done. $\square$

Remark. This expanding is rather important because it bases on the same models as the origin problem. So the applications of the origin problem could developed on this model. However, we can see it more simple when we prolong the perpendicular bisector PQ cuts (O) at two points Y, Z then Q is the orthocenter of the triangle AYZ so apply the origin problem IMO into the triangle AYZ. We receive this problem. By the same way, you can do the following expanding problem

Problem 1.10. Let the triangle ABC and P is the point in the triangle. X, Y, Z are the reflections of P through BC, CA, AB. PX cuts the circumcircle (Q) of the triangle XYZ at T differently from X. The circle with the diameter PT cuts (Q) at G differently from T. The circle with the diameter PG cuts (Q) at K differently from G. D, M are the projectors of P, Q on BC. Prove that the circumcircles of the triangles KDM and KPG touch each other.

So, through two above problems we can see the IMO origin problem plays an important role , when apply that problem into different models then give many very interesting expanding problems .

We continue some aspect of general problem as expanding of IMO problems

Problem 1.11. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O). P is one point on the chord $\overset{\frown}{BC}$ not contain A. AP cuts BC at D. Q is symmetry of P through D. The circle with the diameter AQ cuts (O) at G differently from A. The circle with the diameter GQ cuts (O) at K differently from G. GQ cuts the straight line through O and parallel to AP at M. KG cuts the circumcircle of the triangle KDM at N differently from K. Prove that MN bisects GA.

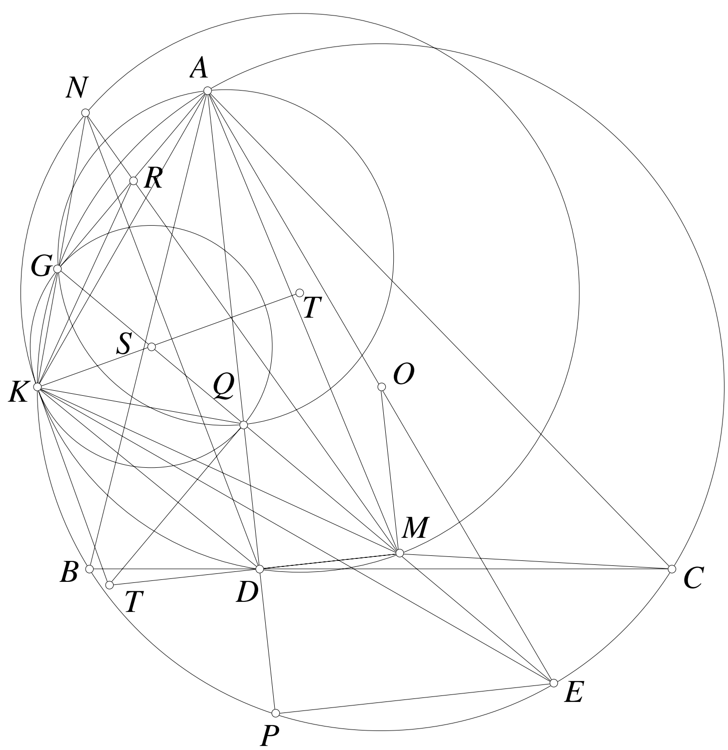


Figure 12.

Solution. Call by AE the diameter of (O). Similar proof of the problem 1.9 we have G, Q, M, E are collinear and M is the midpoint of QE. So, easily seen the right triangles KGQ and KAE are similar, deduce the triangles KGQ and KQE are similar. Call by R the midpoint of GA, so two triangles KGR and KQM are similar. So easily seen the quadrilateral $KGRM$ is cyclic. We have $\angle DMN = 180^\circ - \angle DKN = 180^\circ - (\angle GKS + \angle TKM + \angle MKD) = 180^\circ - (90^\circ - \angle KMR + \angle TMK + 90^\circ - \angle TMD) = \angle DMR$. Thence, we have M, N, R collinear. □

Problem 1.12. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O). P is the point on the chord $\overset{\frown}{BC}$ not contain A. AP cuts BC at D. Q is the symmetry of P through D. The circle with the diameter AQ cuts (O) at G differently from A. GQ cuts the straight line through O and parallel to AP at M. The straight line through Q and perpendicular to GM cuts DM at T. S, R are the midpoints of GQ, GA. The straight line through G and parallel to ST cuts MR at N. Prove that the circumcircle of the triangle MND touches the circle with the diameter GQ.

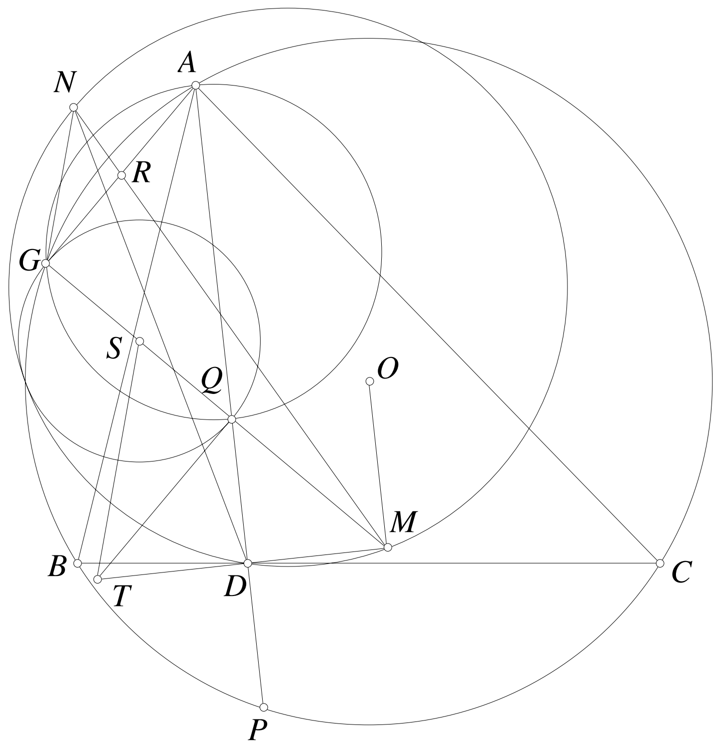


Figure 13.

We create more some other models for IMO problems as following

Problem 1.13. Let the triangle ABC right at A. P is one point on BC. The circle with the diameter BP cuts the circumcircle (K) of the triangle APC at Q differently from P. Call by M, N are the midpoints of BC, AB.

a) Prove that the circumcircle of the triangles QMN and QPB touch each other.

b) PQ cuts the circumcircle of the triangle QMN at R differently from Q. MR cuts the straight line through P and perpendicular to BC at S. Prove that $KS \parallel BC$.

c) T is the reflection of N through BQ. Prove that $\angle QTM = 90°$.

d) BQ cuts ST at L. Prove that the triangle LMN is isosceles.

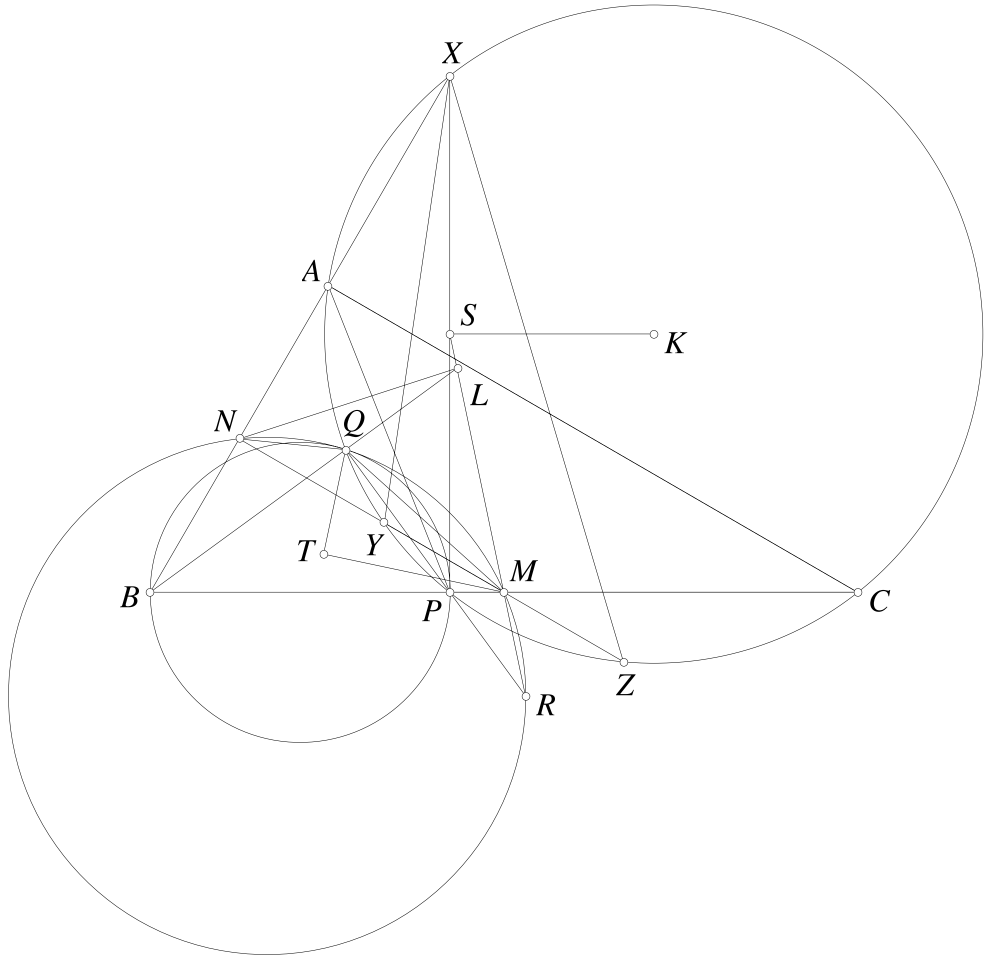


Figure 14.

Solution. Call by X the intersection again of AB cut (K) differently from A and MN cuts (K) at Y, Z. Easily seen B the orthocenter of the triangle XYZ. Apply the problems for the triangle XYZ the orthocenter B we have the thing done. □

We use once more to hide the tangent point and receive interesting problem as following

Problem 1.14. Let the triangle ABC right at A. M, N are the midpoints of BC, AB. The straight line perpendicular to BC at P cuts AB at X. S, T are the midpoints of PB, PX. Get the point L on MN such that $BL \perp BC$. Get the point R on MT such that $PR \parallel LS$. Prove that the circumcircle of the triangle RMN touch the circle with the diameter PB.

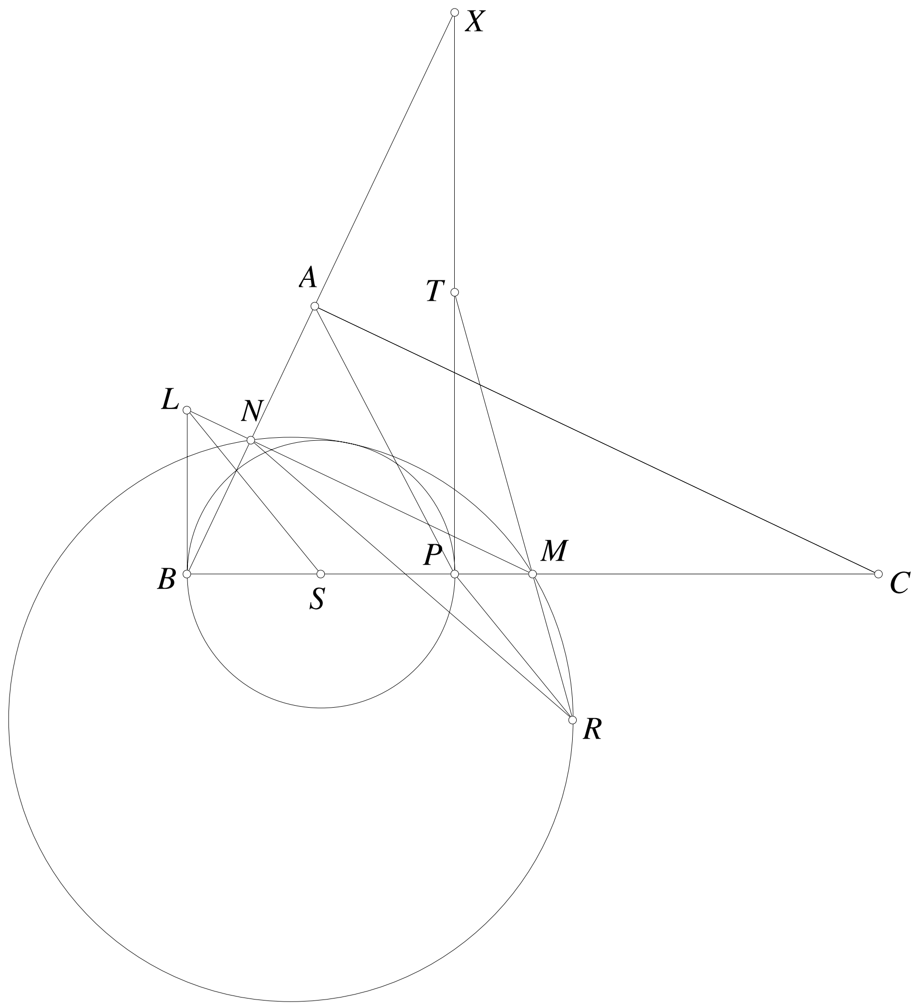


Figure 15.

In other hand, the origin problem still has many developments and expanding, do the following exercises

Problem 1.15. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O) with the diameter AD. M is one point on BC. MD cuts (O) at G differently from D. Q is symmetry of D through M. The circle with the diameter QG cuts (O) at K differently from G. N is the projector of M on AQ.

a) Prove that the circumcircles of the triangles KMN and KQG touch each other.

b) KG cuts the circumcircle of the triangle KMN at P differently from K. Prove that MP bisects AG.

c) R is the reflection of N through QK. Prove that $\angle KRM = 90°$.

Problem 1.16. Let the triangle ABC has $\angle A = 60°$ inscribed in the circle (O). The altitudes BE, CF cut each other at H. M is the midpoint of the chord $\overset{\frown}{BC}$ contain A. MH cuts (O) at N differently from M. The circle with the diameter HN cuts (O) at K differently from N. P is the reflection of H through EF and Q is the midpoint of HM.

a) Prove that the circumcircles of the triangles KPQ and KHN touch each other.

b) KN cuts the circumcircle of the triangle KPQ at L differently from K and R is the midpoint of of the chord $\overset{\frown}{BC}$ not contain A. Prove that QL bisects KR.

c) Z is the reflection of P through KH. Prove that $\angle KZQ = 90°$.

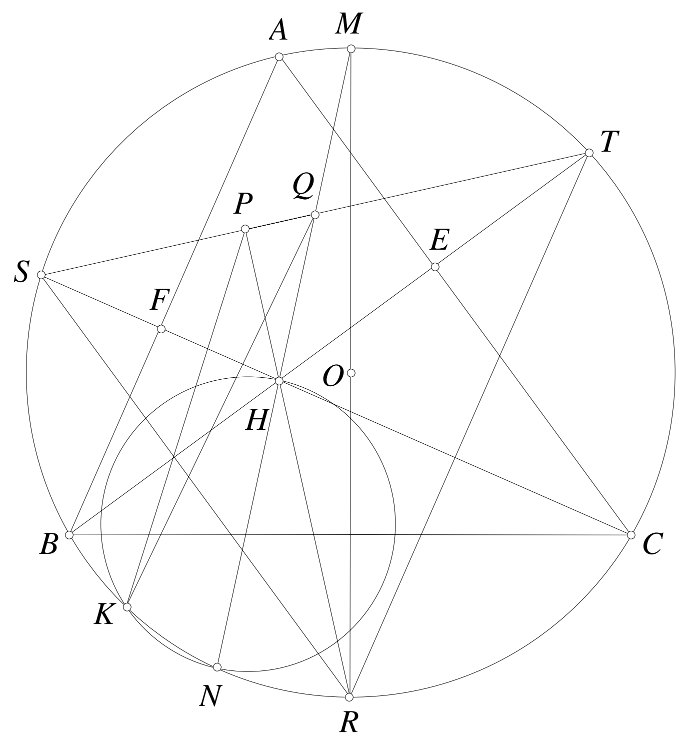


Figure 16.

Solution. Call by S, T the reflection of H through F, E and MR is the diameter of (O). From $\angle BAC = 60°$ we see H the orthocenter of the triangle RST. From that, apply the problem above for the triangle RST. We receive the thing done. □

Problem 1.17. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O) the incenter is I. The circle A-mixtilinear touches (O) at P. The circle with the diameter PI cuts (O) at K differently from P. N is the midpoint of AI and the perpendicular bisector AI cuts PI at M.

a) Prove that the circumcircles of the triangles KMN and KPI touch each other.

b) KP cuts the circumcircle of the triangle KMN at L differently from K. AI cuts (O) at D differently from A. Prove that ML bisects PD.

c) Q is the reflection of N through KI. Prove that $\angle KQM = 90°$.

Problem 1.18. Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O) has the altitudes BE, CF. K, L are the reflection of O through CA, AB. KE cuts LF at H. T belongs to the perpendicular bisector BC such that $HT \parallel OA$. M is the midpoint of AT. MO cuts the tangent through A of (O) at N. The straight line N parallel to OA cuts Euler line of the triangle ABC at P. G is the projector of T on NH. Q is the midpoint of HG. S is the reflection of G through PQ. TH cuts AN at D.

a) Prove that the circumcircles of the triangles SDN and SGH touch each other.

b) GS cuts the circumcircle of the triangle SDN at R differently from S. Prove that NR bisects TG.

c) W is the reflection of D through SH. Prove that $\angle SWN = 90°$.

In the end, one expand model in [1] was found by **Trinh Huy Vu**.

Problem 1.19. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O). One any circle (D) passing through B, C cuts CA, AB at E, F. Draw the diameter AP of the circumcircle of the triangle AEF. K is the projector of D on AP. The circumcircle of the triangle AEF cuts (O) again at G. The circle with the diameter GP cuts (O) again at J.

a) Prove that the circumcircles of the triangles JGP and JKD touch each other.

b) JG cuts the circumcircle of the triangle JKD again at M. Prove that DM bisects GA.

c) L is the reflection of K through JP. Prove that $\angle JLD = 90°$.

2 Geometry problem on the second day

2.1 Introduction

Exam IMO second day, 2015 [2] has geometric problem interesting as following

Problem 2.1. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O). The circle (A) with the center A cuts BC at D, E and cuts (O) at G, H such that D is between B, E and the ray AB is laying between AC, AG. The circumcircle of the triangle BDG and CEH cuts AB, AC respectively at K, L differently from B, C. Prove that GK and HL cut each other on AO.

I would like to present my proof for this problem

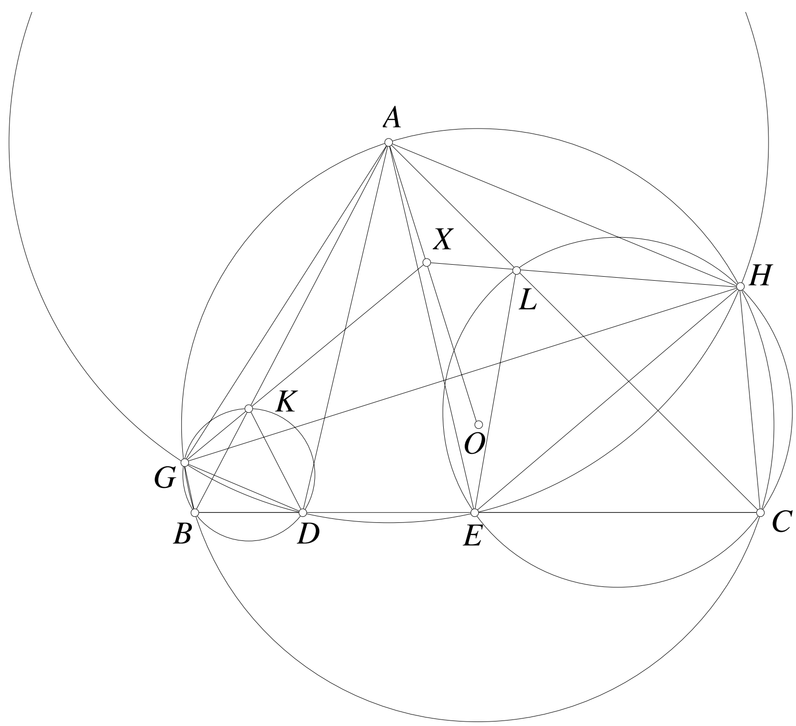


Figure 17.

Solution. Call by X the intersection of GK cuts LH we easily seen AO is the perpendicular bisector of GH. We need prove only X belong the perpendicular bisector of GH thence we are done. Indeed, we see $\angle EHC = \angle GHC - \angle GHE = 180^\circ - \angle GBD - \angle GDB = \angle BGD$. Thence $\angle XGH = \angle XGD - \angle HGD = \angle KBD - \angle HEC = 180^\circ - (\angle GBA + \angle BGD + \angle BDG) - \angle HEC = 180^\circ - (\angle HCA + \angle EHC + \angle EHG) - \angle HEC = \angle ACB - \angle GHE = \angle XHE - \angle GHE = \angle XHG$. From that, the triangle XGH is isosceles, we are done. □

Remark. This problem is the forth in second day, it is supposed easily. Its proof used the way of angle added. It is nice problem, simple configuration, and has meaning for exam and development of thinking. This problem has some expanding and application, we recognize it in the next part.

2.2 Extensions and applications

At first, we can change the circle with the center A by the other with any center on the straight line AO and its proof is just the same. We see another expanding with more meaning

Problem 2.2. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O), the altitude AD. (A) is the circle with any center A. Call by E, F two points on (A) such that E, F are the reflections through AD and the ray AE is between AB, AF. The circle (A) cuts (O) at G, H such that the ray AB is laying between two rays AG, AC. CE, BF cut the circle (A) at P, Q respectively, differently from E, F. The circumcircles of the triangles BPG and CQH cut BA, CA at K, L respectively, differently from B, C. Prove that GK and HL cut each other on AO.

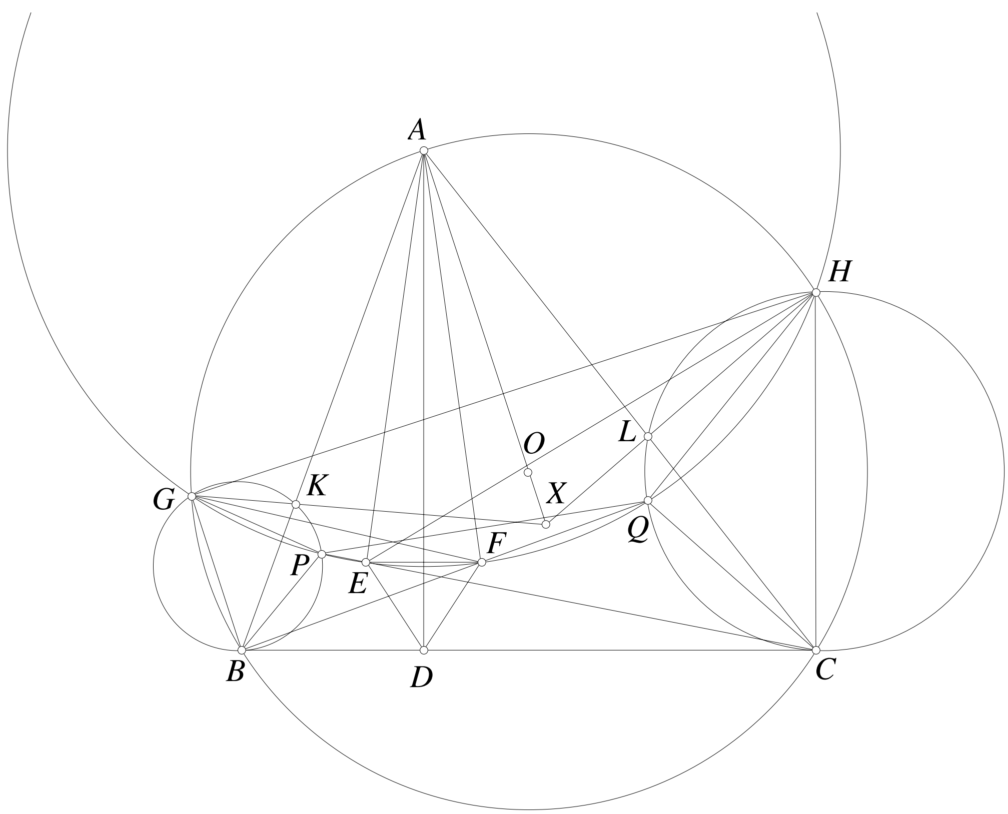


Figure 18.

Solution. At first, we have $EF \parallel BC$ so $\angle QPE = \angle EFB = \angle FBC$. Thence, the quadrilateral $PQCB$ is cyclic. Else have $\angle EHC = 180^\circ - \angle GBC - \angle GHE = 180^\circ - \angle GBP - \angle PBC - \angle GFE = \angle BGP + \angle GPB - (180^\circ - \angle BPC - \angle PCB) + 180^\circ - \angle GPE = \angle BGP + \angle FEC = \angle BGP + \angle PGF = \angle BGF$.

Thence $\angle HGX = \angle HGP - \angle PGK = \angle HEC - \angle PBK = \angle HEC - (\angle GBF - \angle GBA - \angle PBF)(1)$.

Similarly, $\angle GHX = \angle GFB - (\angle HCE - \angle HCA - \angle QCE) \quad (2)$.

Easily have $\angle GBA = \angle HCA, \angle PBF = \angle QCE$ v $\angle BGF = \angle CHE$ so $\angle GBF + \angle GFB = \angle HEC + \angle EHC$ or $\angle HEC - \angle GBF = \angle GFB - \angle EHC \quad (3)$.

From (1),(2),(3) easily deduce $\angle HGX = \angle GHX$. We are done. □

Remark. The general problem is still right when we change the circle (A) by any circle with the center belong OA and the proof with the change similar angle. To pay attention carefully in this proof as the same with the proof of the origin problem, so the change of the angle for showing $\angle EHC = \angle FGB$ that is important step.

We can see, in nature G, H are lying on (O) that is not so important, we go to the more general problem as following

Problem 2.3. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O), the altitude AD. (A) is any circle with the center A. Call by E, F two points on (A) such that E, F are the reflection through AD and the ray AE is laying between two rays AB, AF. On the circle (A) get two points G, H such that $GH \perp OA$ in the same time, the ray AB is laying between two rays AG, AC. Call by P, Q the intersection again of CE, BF the circle (A) respectively, differently from E, F. The circumcircles of the triangles BPG and CQH cut BA, CA at K, L respectively, differently from B, C. Prove that GK and HL cut each other on AO.

On the other hand, we can see that, in the above problem we can change the circle (A) by any circle with the center belong OA. Thence, we think that, we can change the straight line OA by the perpendicular bisector of the chord of (O), we have the following problem

Problem 2.4. Let the quadrilateral $XYBC$ cyclic in the circle (O). (A) is any circle with the center A belong to the perpendicular bisector XY. D is the projector of A on BC. Call by E, F two points on (A) such that E, F are the reflection through AD and the ray AE is laying between two rays AB, AF. On the circle (A) get two points G, H such that $GH \perp OA$ in the same time, the ray AB is laying between two rays AG, AC. Call by P, Q the intersection again of CE, BF cut the circle (A) at P, Q respectively, differently from E, F. The circumcircles of the triangles BPG and CQH cut BY, CX at K, L respectively, differently from B, C. Prove that GK and HL cut each other on AO.

Hence we can exploit the problem by many ways, we present some exploiting based on the model of the problem as following

Problem 2.5. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O). The circle (A) with the center A cuts BC at E, F and cut (O) at G, H such that E is laying between B, E and the ray AB is laying between two rays AC, AG. GH cuts the circumcircles of the triangles BEG and CFH at M, N respectively, differently from G, H. Call by P, Q the intersection of GE, HF cut BM, CN. Call by S, T the intersection of ME, GB cut NF, HC respectively. Prove that ST bisects PQ.

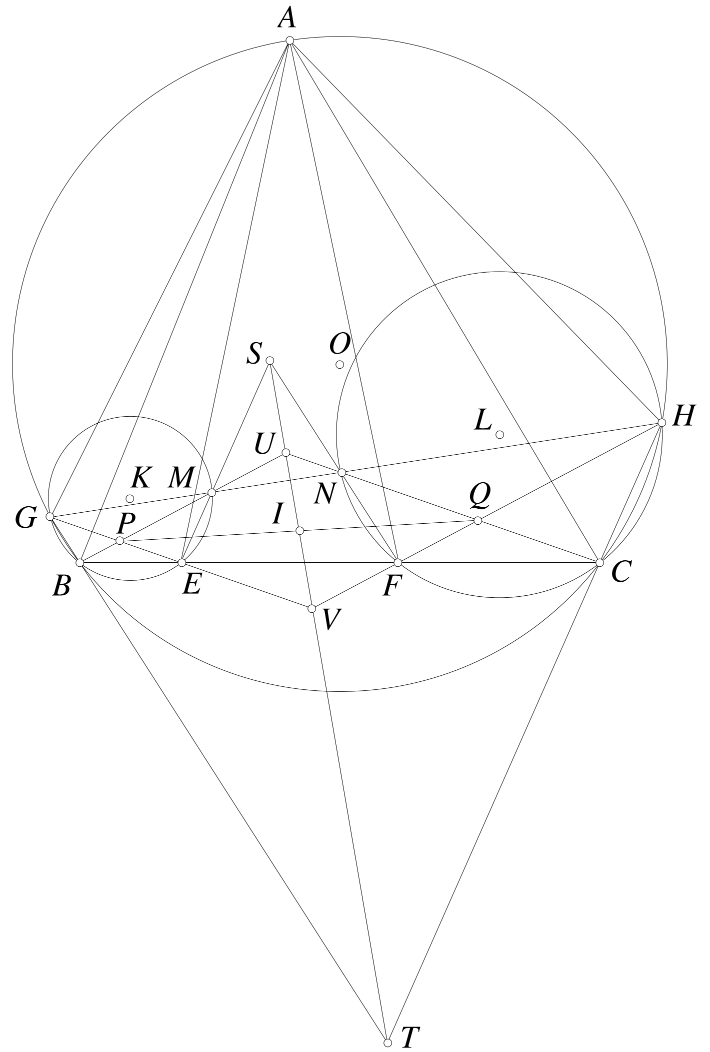


Figure 19.

Solution. According to the proof of the origin problem to show that $\angle BGE = \angle CHF$. Thence have $\angle FNH = \angle FNC + \angle CFH = \angle FHC + \angle CFH = \angle EGB + \angle EGM = \angle BGM = \angle MEF$. Then the quadrilateral $MNFE$ is cyclic. Easily have $\angle HNC = \angle HFC = \angle EGH = \angle MBE$ deduce the quadrilateral $BMNC$ is cyclic. Call by $(K), (L)$ the circumcircles of the triangles BEG and CFH then from the quadrilateral $EMNF$ and $BGHC$ cyclic, deduce ST is radical axis of (K) and (L). We easily have $\angle GEB = \angle GMB = \angle NCB$ so $GE \parallel NC$, similarly $HF \parallel MB$. Call by U, V the intersection of BM, GE cut CN, HF then $PUQV$ is the parallelogram, so UV bisects PQ. From the quadrilaterals $BMNC$ and $GEFH$ cyclic, deduce U, V also belongs to the radical axis of $(K), (L)$ is just ST. So ST bisects PQ. We are done. $\square$

By the same way, we receive the problem about the bisection of the segment on the interesting model of general problem

Problem 2.6. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O), the altitude AD. (A) is any circle with the center A. Call by E, F two points on (A) such that E, F are the reflection through AD and the ray AE is laying between AB, AF. The circle (A) cuts (O) at G, H such that the ray AB

is laying between two rays AG, AC. CE, BF cut the circle (A) at P, Q respectively, differently from E, F. GH cuts the circumcircles of the triangles BPG and CQH at M, N respectively. MP, GB cut NQ, HC respectively at S, T. To get the points U, V on the straight lines MB, NC such that $UG \parallel NC$ and $VH \parallel MB$. Prove that ST bisects UV.

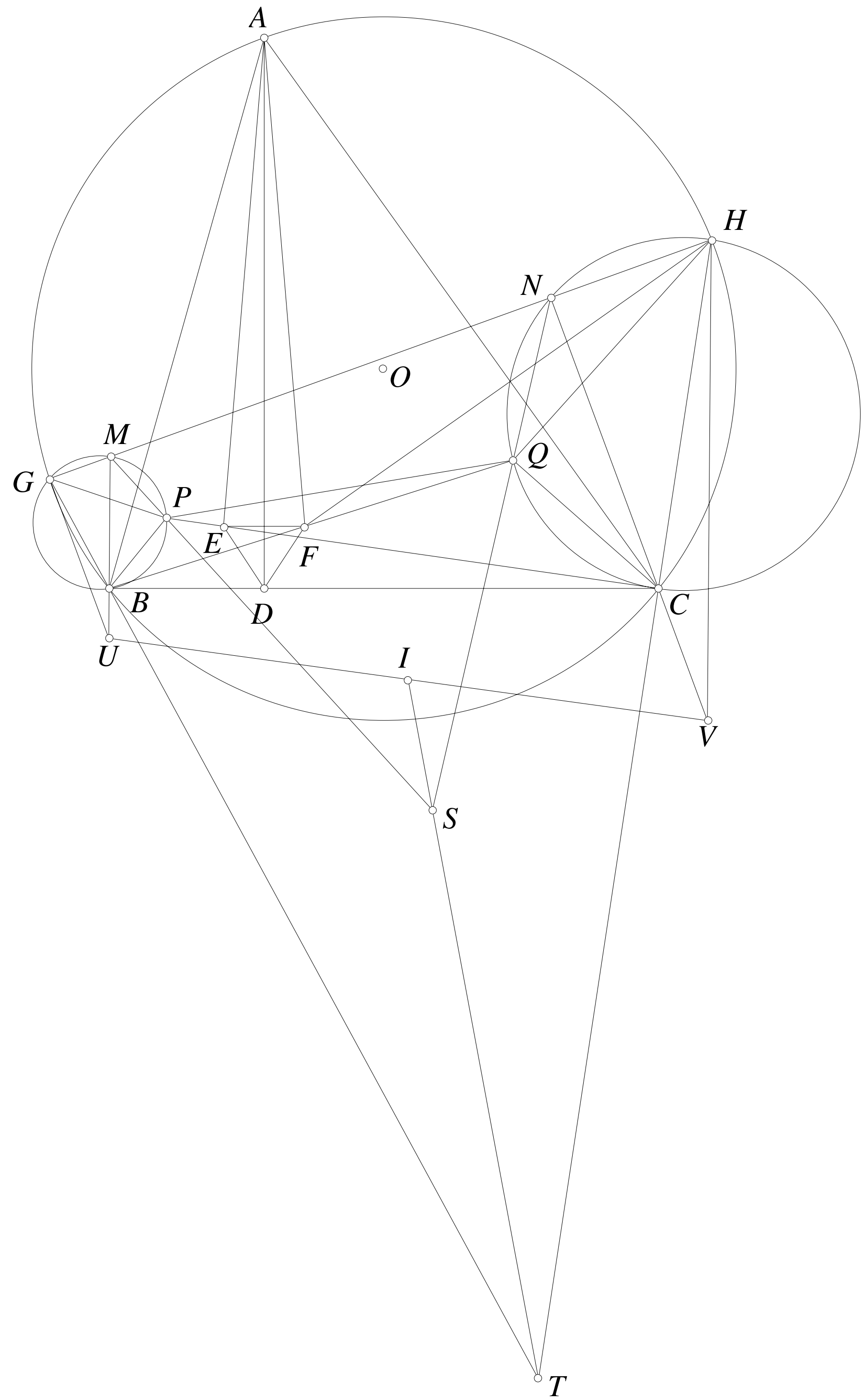


Figure 20.

If you know use the inversion you could to do the problem for exercise

Problem 2.7. Let the triangle ABC inscribed in the circle (O). The circle (A) with the center A cuts BC at E, F and cuts (O) at G, H such that E is laying between B, F and the ray AB is laying between two rays AC, AG. The circle through H, C and touches HA cuts CA at Q differently from C. The circle through G, B and touches GA cuts AB at P differently from B. The circumcircles of the triangles GPE and HQF cut AB, AC at M, N differently from P, Q. Prove that the diameter the circumcircles of the triangles AGM and AHN equally.

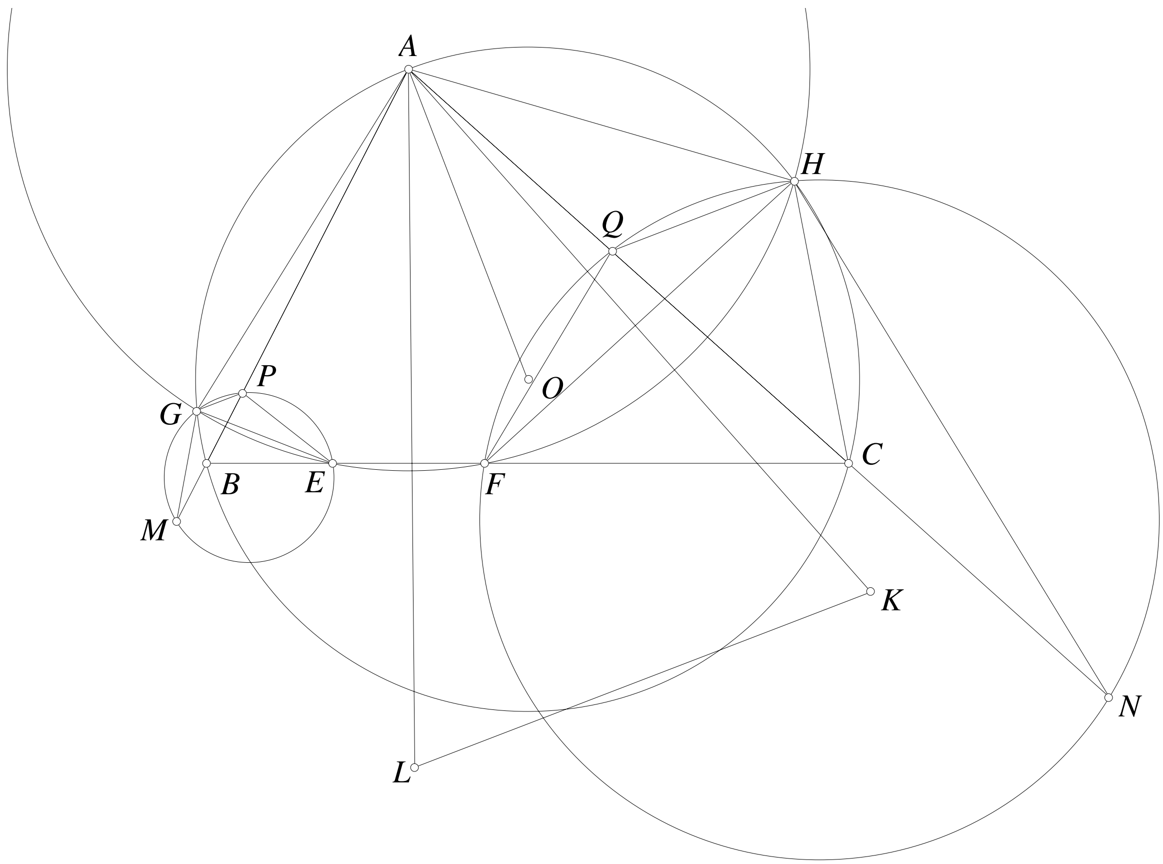


Figure 21.

3 Conclusion

The IMO exam in this year still have two geometric problem in the third and forth positions. They are interesting and have high meaning. Beside given different expanding, this article also written so nice about the problem with the bisection of the segment. And from the problem with the bisection of the segment in the first day, we receive one interesting presentation about two touching circles and thence we have the presentation of the second general problem, it gives more attraction for the problem of IMO exam. The problem with the bisection of the segment in the second day is no less interesting in comparison with the first day. That is the application of the radical axis and the parallelogram. Two geometric problem in the IMO exam this year are nice and have high suggestive and development, it is worthy to IMO exam.

In the end, I would like to thank to **Trinh Huy Vu** the pupil of 12A1 Math in my School, he is my pupil and has some contributions for this article and help me to edit it.

References

[1] Topic Problem3
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1112748_problem3

[2] Topic Problem 4
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1113163_problem_4

Tran Quang Hung - High School for Gifted Student - Hanoi national university
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Mỗi tuần một bài toán

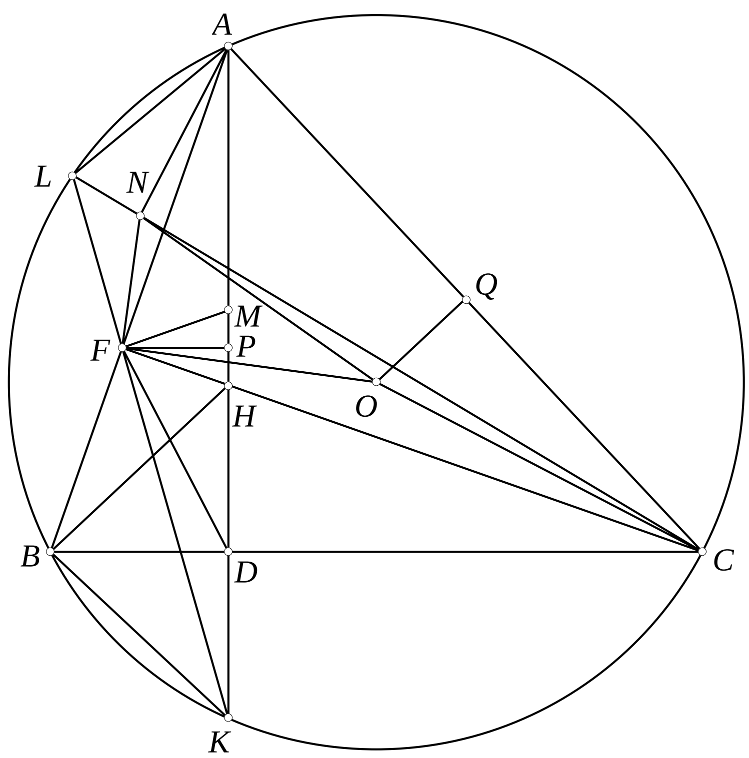
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với các đường cao AD, CF. Gọi AD cắt (O) tại K khác D. Gọi KF cắt (O) tại L khác K. Đường thẳng qua A vuông góc OC cắt CL tại N. Chứng minh rằng FN vuông góc với FO.

Lời giải

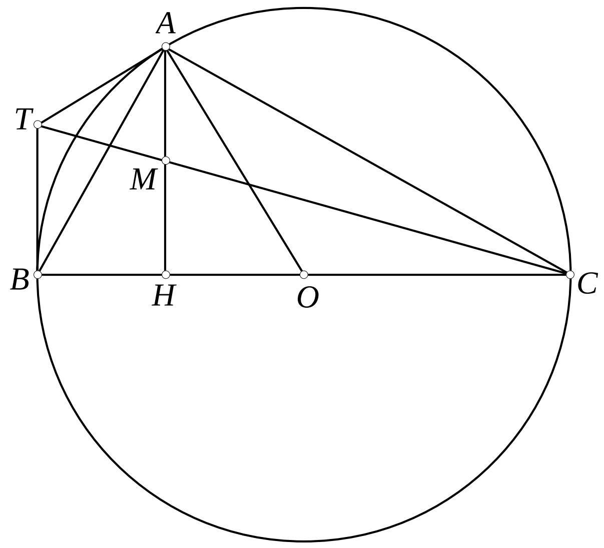


Ta sẽ chứng minh $\triangle FNA \sim \triangle FOC$ để suy ra $\triangle FNO \sim \triangle FAC$ thì $\angle NFO = 90°$, thật vậy. Dễ chứng minh $\angle NAC = \angle ABC = \angle ALC$. Từ đó dễ thấy $\angle NAF = \angle NAC - \angle BAC = \angle ABC - \angle BAC = \angle FCO$. Gọi AD cắt CF tại H và P là hình chiếu của F lên AD, M đối xứng H qua P. Dễ có $\angle FMH = \angle FHM = \angle ABC = \angle NAC$ và $\angle FKM = \angle ACN$ do đó $\triangle KFM \sim \triangle CNA$. Ta cũng có tam giác $\triangle FAL \sim \triangle FKB$ và $\triangle FDP \sim \triangle ACF$. Từ đó ta có biến đổi tỷ số $\frac{NA}{FA} = \frac{NA}{LA}\cdot\frac{LA}{FA} = \frac{NC}{AC}\cdot\frac{KB}{FK} = \frac{HB}{AC}\cdot\frac{NC}{FK} = \frac{2OQ}{AC}\cdot\frac{AC}{MK} = \frac{2OQ}{2DP} = \frac{OQ}{OC}\cdot\frac{OC}{CF}\cdot\frac{CF}{DP} = \frac{BF}{BC}\cdot\frac{OC}{CF}\cdot\frac{AC}{FD} = \frac{OC}{CF}$. Từ đó suy ra $\triangle FNA \sim \triangle FOC$ theo suy luận phần trên có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Tác giả thu được bài toán này từ việc tổng quát bài toán sau đây

Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AH. Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng CT chia đôi AH.



Đây là một bài toán khá kinh điển xuất hiện nhiều trong các tài liệu, bài toán này minh họa rất tốt cho những tính chất đầu tiên đơn giản nhất khi bắt đầu học về tiếp tuyến của đường tròn. Nhưng cũng khá khó để nhận ra rằng vì sao bài toán ban đầu là tổng quát của bài toán này. Trong bài toán ban đầu, ta hãy vẽ thêm đường cao BE của tam giác ABC. Từ đó theo một kết quả đã biết thì CL chia đôi EF. Nhờ kết quả này khi tam giác ABC vuông tại B ta mới thu được bài toán quen thuộc nêu trên.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC với tâm ngoại tiếp O và P, Q là hai điểm đẳng giác nằm trong tam giác. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của P, Q lên BC. Gọi K là trung điểm P, Q. E, F là hình chiếu của K lên CA, AB. G, H đối xứng A qua E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GNM và HMN lần lượt cắt CA, AB tại S, T khác G, H. Chứng minh rằng OK vuông góc với ST.

Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

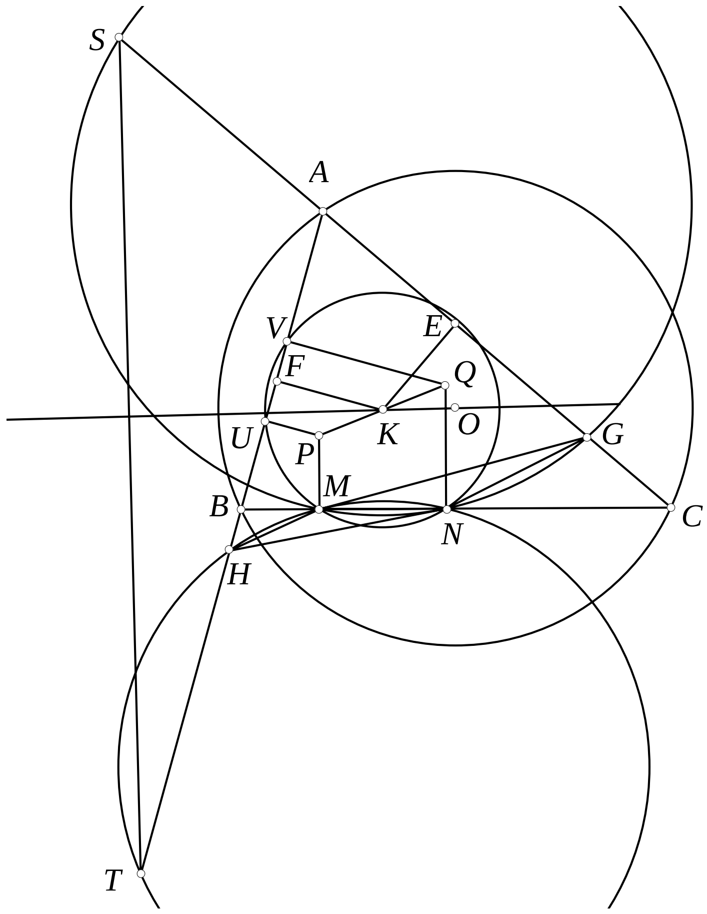
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC với tâm ngoại tiếp O và P,Q là hai điểm đẳng giác nằm trong tam giác. Gọi M,N lần lượt là hình chiếu của P,Q lên BC. Gọi K là trung điểm P,Q. E,F là hình chiếu của K lên CA,AB. G,H đối xứng A qua E,F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GNM và HMN lần lượt cắt CA,AB tại S,T khác G,H. Chứng minh rằng OK vuông góc với ST.

Lời giải



Gọi U,V là hình chiếu của P,Q lên CA. Ta có $BU.BV = BM.BN = BT.BH$ từ đó có $\frac{BU}{BT} = \frac{BH}{BV}$ hay $(UT,B) = (HV,B)$ hay $(BT,U) = (BV,H)$. Tương tự ta cũng có $\frac{BV}{BT} = \frac{BH}{BU}$ suy ra $(VT,B) = (HU,B)$ hay $(BT,V) = (BU,H)$. Từ đó $(BT,UV) = \frac{(BT,U)}{(BT,V)} = \frac{(BV,H)}{(BU,H)} = (UV,H) = \frac{HU}{HV} = \frac{VA}{UA} = (VU,A)$ hay $(TB,VU) = (VU,A)$. Từ đó theo hệ thức Maclaurin mở rộng suy ra $TV.TU = TB.TA$ chú ý A,G,H thuộc đường tròn (K). Từ đó T thuộc trục đẳng phương của (O) và (K). Tương tự với S suy ra ST là trục đẳng phương của (O) và (K) vậy $ST \perp OK$.

Nhật xét

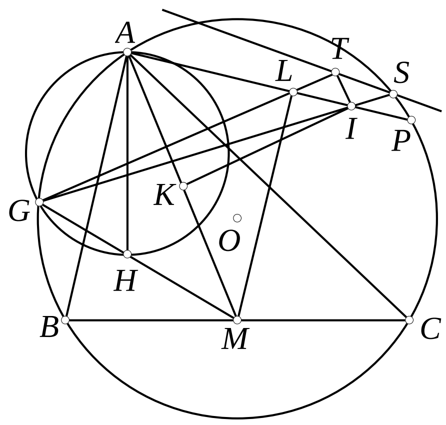
Tác giả thu được bài toán này từ việc tổng quát bài toán thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ năm 2015, bài toán đó như sau

Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I và tâm ngoại tiếp O sao cho $AC > BC > AB$ và đường tròn nội tiếp tiếp xúc BC,CA,AB tại D,E,F. Gọi đối xứng của A qua F,E là F_1,E_1. Đường tròn tiếp xúc BC tại D và đi qua F_1 cắt AB tại điểm thứ hai F_2. Đường tròn tiếp xúc BC tại D và đi qua E_1 cắt AC tại điểm thứ hai E_2. Trung điểm các đoạn OE,IF lần lượt là P,Q. Chứng minh rằng $AB + AC = 2BC$ khi và chỉ khi $PQ \perp E_2F_2$.

Trong bài toán ban đầu khi cho hai điểm đẳng giác P,Q trùng nhau kết hợp một số biến đổi nhỏ ta sẽ thu được bài toán trên.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H, trung tuyến AM. K là trung điểm AM. P là một điểm di chuyển trên (O). L là hình chiếu của M lên AP. I là trung điểm PL. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại G khác A. GI cắt (O) tại S khác G. T là điểm thuộc GL sao cho IT vuông góc KI. Chứng minh rằng ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

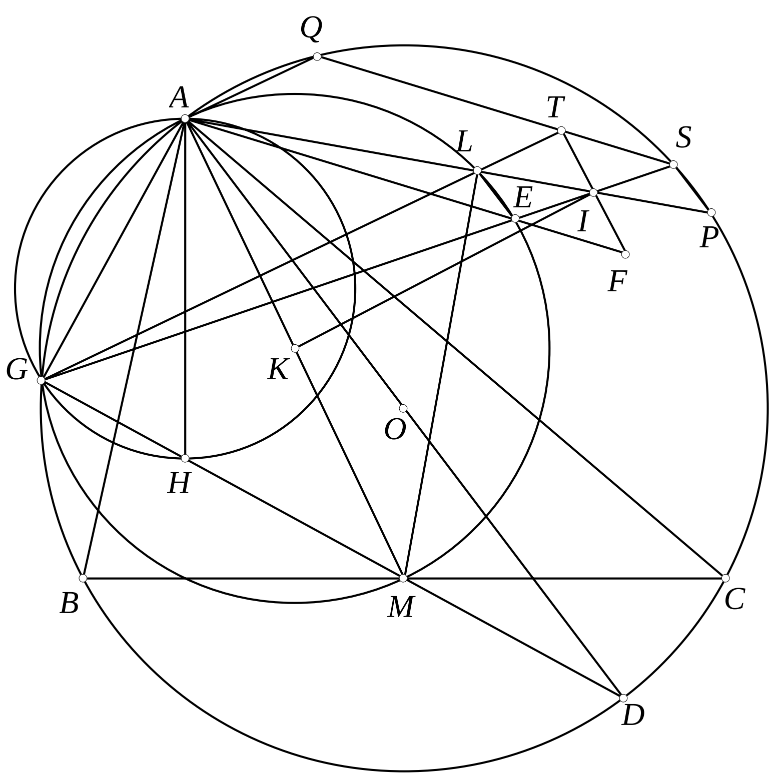
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H, trung tuyến AM. K là trung điểm AM. P là một điểm di chuyển trên O. L là hình chiếu của M lên AP. I là trung điểm PL. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại G khác A. GI cắt (O) tại S khác G. T là điểm thuộc GL sao cho IT vuông góc KI. Chứng minh rằng ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Lời giải



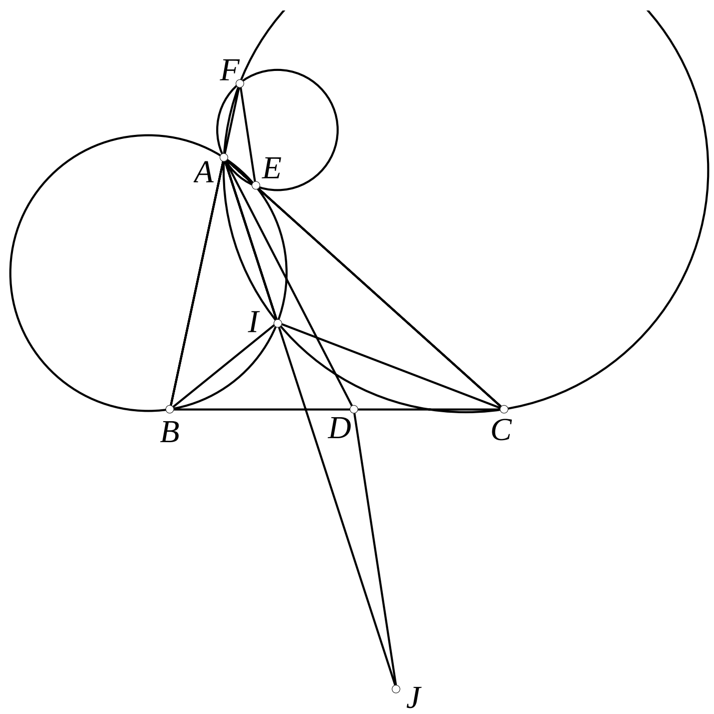
Gọi AD là đường kính của (O) dễ thấy G, H, M, D thẳng hàng do đó G, L đều thuộc đường tròn (K) đường kính AM. Gọi GI cắt (K) tại E khác G. AE cắt TI tại F. Ta dễ thấy $\angle ELP = \angle AGE = \angle APS$ do đó $PS \parallel LE$ nên I là trung điểm ES. Áp dụng bài toán con bướm cho tứ giác $ALEG$ nội tiếp (K) có $TF \perp KI$ nên I là trung điểm TF. Từ đó dễ thấy $ST \parallel EF$. Gọi ST cắt (O) tại Q khác S. Ta thấy $\angle AQF = 180° - \angle AQS = \angle AGS$. Từ đó dễ thấy AQ tiếp xúc (K) nên Q cố định. Vậy ST đi qua Q cố định. Ta có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Bài toán này được tác giả dùng trong đề kiểm tra đội tuyển IMO của Việt Nam năm 2015. Cấu hình đầu tiên khá đơn giản có thể thấy ngay trong bài toán này là sự thẳng hàng của G, H, M, D. Đây là một trong những bổ đề rất quan trọng cần được nhận ra ngay khi gặp cấu hình như vậy. Bài toán này cũng là một trong những ứng dụng rất đẹp và thú vị của bài toán con bướm. Việc ứng dụng bài toán con bướm vào những mô hình khác nhau thường đem lại những yếu tố hay và bất ngờ trong lời giải, đồng thời cũng tạo nên những tình huống thú vị cho bài toán. Như trong bài toán này, việc đoán nhận điểm cố định Q là một việc không đơn giản.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I, tâm bàng tiếp ứng với đỉnh A là J. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB, AIC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt BC tại D. Chứng minh rằng $DA = DJ$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

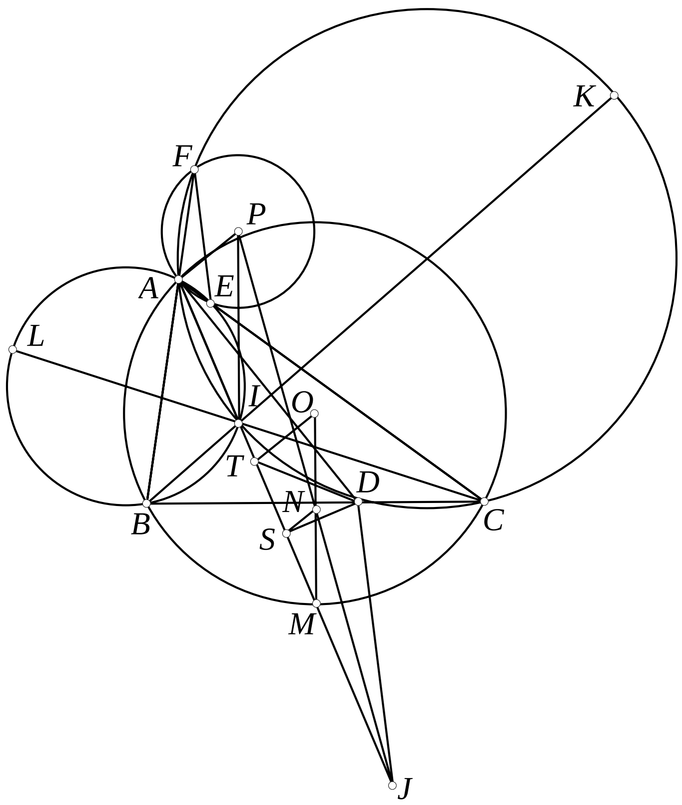
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I, tâm bàng tiếp ứng với đỉnh A là J. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB, AIC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt BC tại D. Chứng minh rằng $DA = DJ$.

Lời giải



Gọi K, L là tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B, C của tam giác ABC. Ta dễ thấy rằng K là giao của IB và đường tròn ngoại tiếp tam giác IAC và L là giao của IC và đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB. Gọi P là tâm ngoại tiếp tam giác AEF, ta có

$PB^2 - PC^2 = \mathscr{P}_{B/(P)} - \mathscr{P}_{C/(P)} = \overline{BA}.\overline{BF} - \overline{CA}.\overline{CE} = \overline{BI}.\overline{BK} - \overline{CI}.\overline{CL} = \overline{BI}(\overline{BI} + \overline{IK}) - \overline{CI}(\overline{CI} + \overline{IL}) = BI^2 - CI^2 + \overline{BI}.\overline{IK} - \overline{CI}.\overline{IL} = IB^2 - IC^2$. Đẳng thức cuối do tứ giác $BCKL$ nội tiếp. Từ đó $IP \perp BC$. Gọi AI cắt (O) tại M khác A suy ra $OM \perp BC \perp IP$ vậy $OM \parallel IP$ mà M là trung điểm IJ suy ra OM đi qua trung điểm N của PJ.

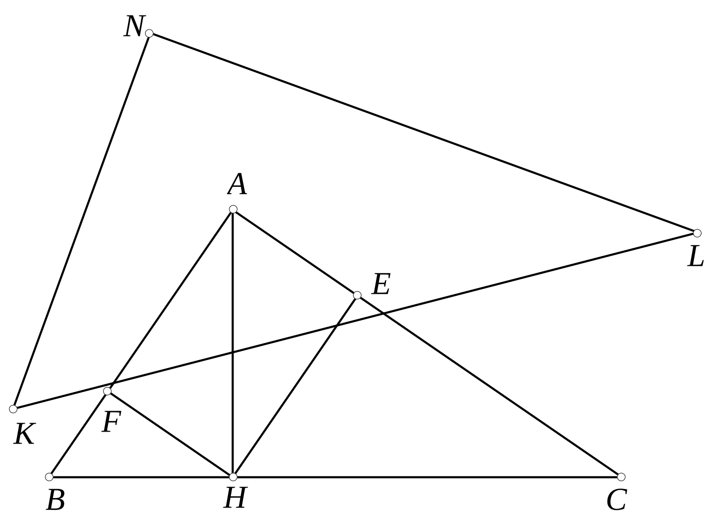
Gọi S là trung điểm AJ và T là đối xứng của M qua S, dễ thấy $TA = MJ = MB$. Ta có $AD \perp AP \parallel SN \parallel OT$ từ đó $OT \perp AD$. Lại chú ý $OM \perp BD$ suy ra $TD^2 - TA^2 = OD^2 - OA^2 = OD^2 - OB^2 = MD^2 - MB^2 = MD^2 - TA^2$ suy ra $TD = MD$ suy ra SD là trung trực MT cũng là trung trực của AJ vậy $DA = DJ$. Ta có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Đây là một bài toán hay đặc trưng cho rất nhiều tính chất của tâm ngoại tiếp và tâm bàng tiếp. Việc dựng thêm ra hai tâm bàng tiếp còn lại cũng là một cách dựng hình rất đặc trưng, khá kinh điển cho dạng bài tập loại này. Ý tưởng ban đầu của tác giả khi tạo ra bài toán này là dùng phép nghịch đảo. Tuy nhiên trong quá trình tập huấn các đội tuyển thì tác giả thu được lời giải thuần túy hình học như trên. Bài toán cũng được quan tâm và đưa ra lời giải khác rất thú vị bởi bạn **Phạm Quang Toàn** từ http://diendantoanhoc.net. Các bạn có thể xem lời giải của bạn **Toàn** ở đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. E, F lần lượt là hình chiếu của H lên CA, AB. Gọi K, L, N lần lượt là tâm bàng tiếp đỉnh H của các tam giác HBF, HCE, HEF. Chứng minh rằng A là tâm nội tiếp tam giác KLN.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

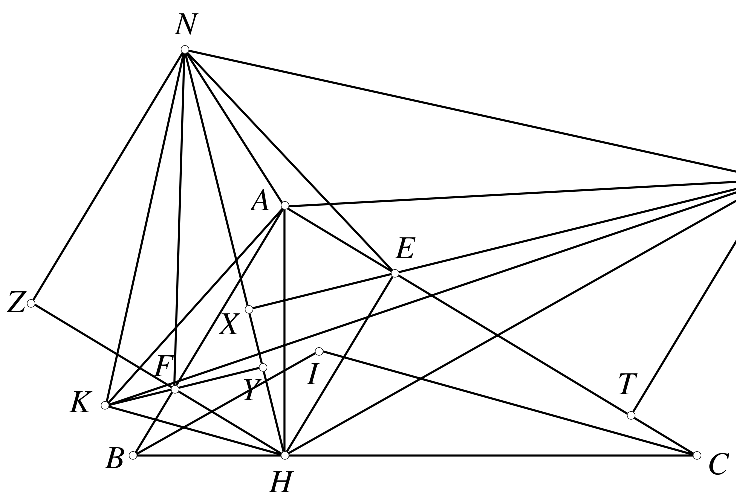
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. E, F lần lượt là hình chiếu của H lên CA, AB. Gọi K, L, N lần lượt là tâm bàng tiếp đỉnh H của các tam giác HBF, HCE, HEF. Chứng minh rằng A là tâm nội tiếp tam giác KLN.

Lời giải



Gọi LE, KF cắt HN tại X, Y. Gọi Z, T là hình chiếu của N lên FH và của L lên CE. Chú ý các tam giác vuông cân ta có $\frac{FY}{FY+NY} = \frac{YH}{YH+NY} = \frac{YH}{HN} = \frac{HF}{2HZ} = \frac{HF}{HE+HF+EF} = \frac{AB}{AB+AC+BC}$ (1).

Lại có $\frac{XH}{XH+LX} = \frac{XE}{2XE+LE} = \frac{HE}{2HE+ET} = \frac{HE}{2HE+(CE+CH-HE)} = \frac{AB}{AB+AC+BC}$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $\frac{YF}{YN} = \frac{XH}{XL}$. Tương tự $\frac{XE}{XN} = \frac{YH}{YK}$. Nhân các tỷ số bằng nhau chú ý $YF = YH, XE = XH$ dễ suy ra $\frac{1}{YN.XN} = \frac{1}{XL.YK}$. Từ đó suy ra các tam giác vuông YNK và XLN đồng dạng suy ra $\angle KNL = 90^\circ$.

Ta thấy $\frac{NK}{NL} = \frac{KY}{XN} = \frac{YH}{XE} = \frac{HF}{HE} = \frac{AB}{AC}$. Từ đó tam giác NKL và ABC đồng dạng.

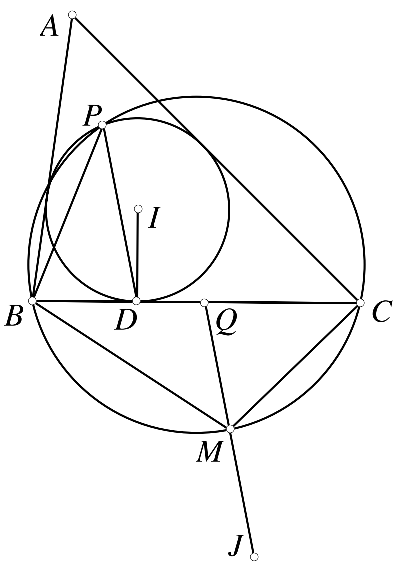
Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Ta cũng thấy các tam giác HFK và LEH đồng dạng do đó $AE.AF = HE.HF = FK.EL$ mà $\angle AEL = \angle KFA = 135^\circ$. Từ đó tam giác AEL và KAF đồng dạng. Vậy $\frac{AK}{AL} = \frac{KF}{AE} = \frac{KF}{FH} = \frac{IB}{IC}$. Ta chú ý đẳng thức cuối có do tam giác FKH và IBC đồng dạng. Mặt khác ta cũng có $\angle KAL = 90^\circ + \angle KAF + \angle LAE = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ = \angle BIC$. Từ đó tam giác AKL và IBC đồng dạng. Suy ra A là tâm nội tiếp tam giác NKL.

Nhật xét

Bài toán này được tác giả phát hiện một cách tình cờ trong khi đang làm việc với hệ thức lượng trong tam giác vuông. Nếu thay thuật ngữ "tâm nội tiếp" thành thuật ngữ "giao của ba phân giác trong" thì có thể coi đây là một bài toán của chương trình tam giác đồng dạng. Bài toán này có nhiều phát triển thú vị khi ta thay thế tam giác vuông thành tam giác bất kỳ. Bài toán cũng được quan tâm và đưa ra lời giải khác rất thú vị bởi bạn **Phạm Quang Toàn** từ http://diendantoanhoc.net. Ngoài ra bạn **Toàn** còn đưa ra một số phát triển từ cấu hình của bài toán, các bạn có thể xem lời giải và trao đổi ở đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D. Tâm đường tròn bàng tiếp góc A là J. P là một điểm bất kỳ trên (I) không trùng D. Q thuộc BC sao cho $JQ \parallel PD$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC chia đôi QJ.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

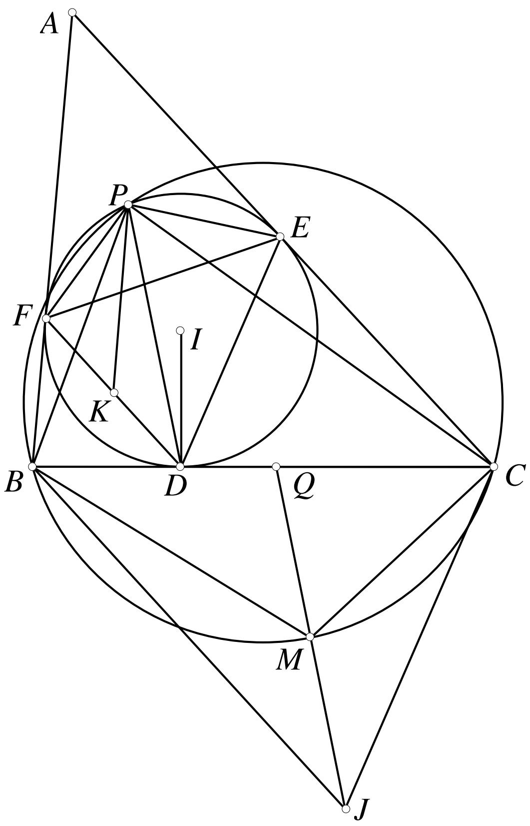
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D. Tâm đường tròn bàng tiếp góc A là J. P là một điểm bất kỳ trên (I) không trùng D. Q thuộc BC sao cho $JQ \parallel PD$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC chia đôi QJ.

Lời giải



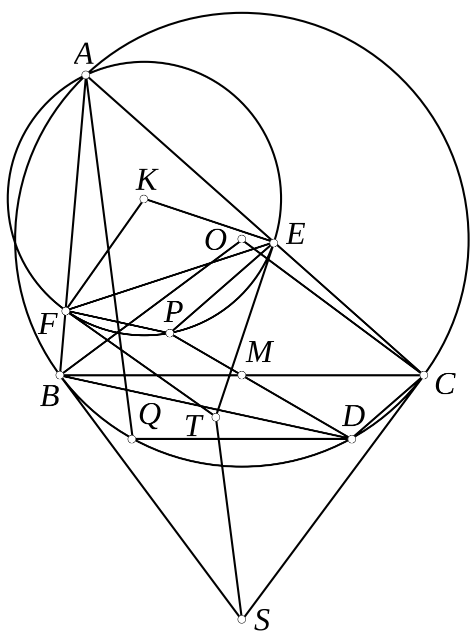
Gọi K, M lần lượt là trung điểm FD, QJ. Ta thấy $BJ \parallel FD$ và $PD \parallel QJ$ nên $\angle PDF = \angle BJQ$ và $\angle PFD = \angle PDC = \angle BQJ$. Từ đó hai tam giác PFD và BQJ đồng dạng mà K, M lần lượt là trung điểm DF, JQ nên hai tam giác FPK và QBM đồng dạng. Từ đó ta chú ý PB là đường đối trung của tam giác PFD nên $\angle BPD = \angle FPK = \angle QBM$. Tương tự $\angle CPD = \angle QCM$. Vậy $\angle BPC = \angle BPD + \angle CPD = \angle QBM + \angle QCM = 180^\circ - \angle BMC$, suy ra tứ giác $BPCM$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Nếu gọi R là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC và (I) ta cũng dễ chứng minh đường R, D, M thẳng hàng bằng cộng góc. Bài toán này là một trong những ứng dụng đẹp của bổ đề "đồng dạng trung tuyến" và tính chất đường đối trung. Khi bài toán được giải như trên trông có vẻ khá đơn giản nhưng thực tế nó là tổng quát của hai bài toán thú vị là các bài toán **Đài Loan TST 2015** và **IMO SL 2002, G7**. Bài toán cũng được quan tâm và đưa ra lời giải khác rất thú vị bằng hàng điểm điều hòa bởi bạn **Nguyễn Cảnh Hoàng** lớp 11A1 Toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An. Các bạn có thể xem lời giải đó và trao đổi ở đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và D là một điểm thuộc cung BC không chứa A. M là trung điểm BC. P là một điểm nằm trên đường thẳng DM. E, F thuộc CA, AB sao cho $PE \parallel DC$ và $PF \parallel DB$. Gọi tiếp tuyến tại E, F của đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Gọi tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại S. Q thuộc (O) sao cho $DQ \parallel BC$. Chứng minh rằng $AQ \parallel ST$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Bài hình học thi IMO năm 2014 ngày 2

Trần Quang Hùng

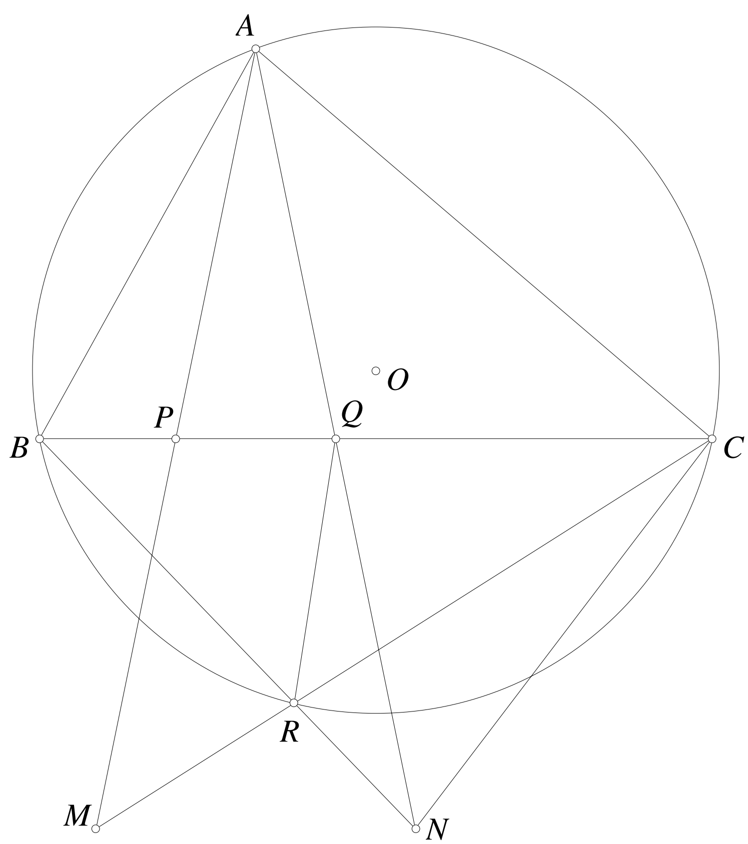
Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và mở rộng bài hình học thi IMO năm 2014 ngày 2 bằng các công cụ hình học thuần túy.

Năm 2014 kỳ thi IMO năm 2014 ngày thứ 2 [1] có bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có $\angle A$ là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $\angle QAB = \angle BCA$ và $\angle CAP = \angle ABC$. Gọi M, N là đối xứng của A qua P, Q. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải sau do tác giả tìm ra nhưng sau khi tham khảo [1] thì thấy ý tưởng đó trùng với ý tưởng trong lời giải của nick name nima1376 trong [1]. Tôi xin trình bày lại lời giải



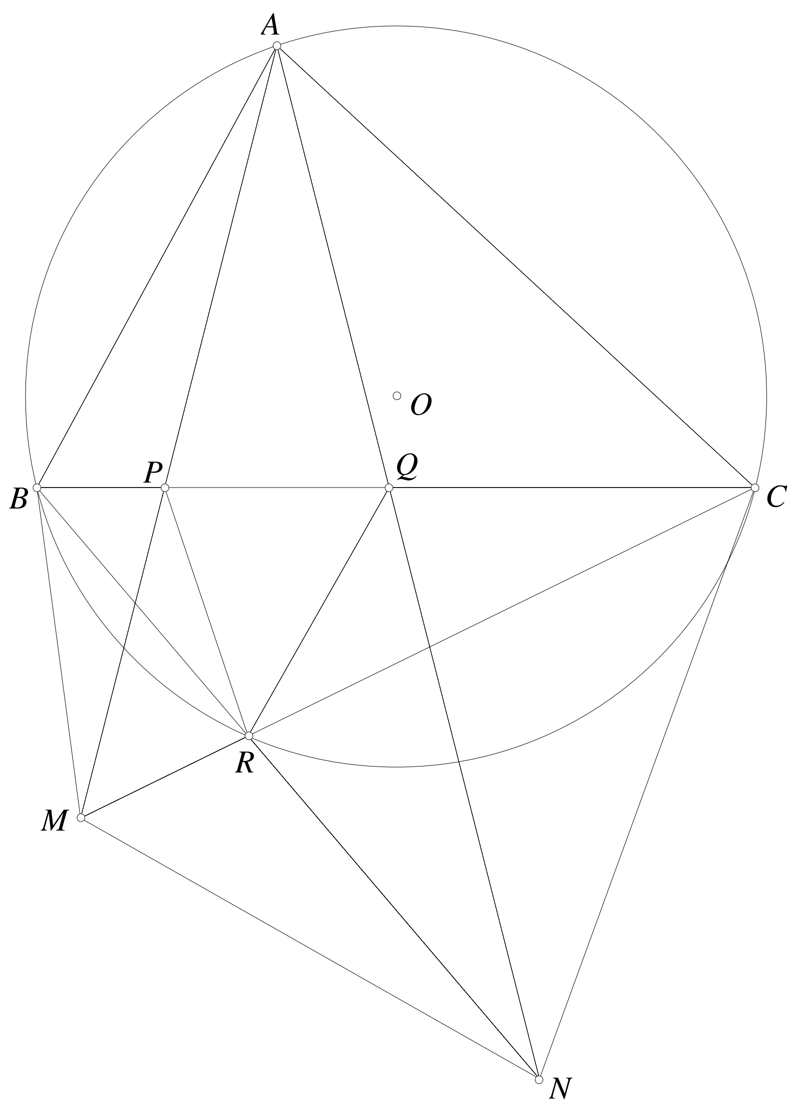
Hình 1.

Lời giải. Dễ thấy các tam giác đồng dạng $\triangle ABC \sim \triangle PAC \sim \triangle QBA$ do đó $\dfrac{BQ}{QA} = \dfrac{PA}{PC}$ hay $\dfrac{QB}{QN} = \dfrac{PC}{PC}$ dễ thấy $\angle MPC = \angle NQB$ nên $\triangle MPC \sim \triangle BQN$ suy ra $\angle BNQ = \angle PCM$. Vậy tứ giác $QCNR$ nội tiếp suy ra $\angle CRN = \angle CQN = \angle BAC$. Vậy tứ giác $ABRC$ nội tiếp. $\square$

Nhận xét. Đây là bài toán thứ 4 của ngày 2 là một bài toán dễ và có rất nhiều lời giải được đề xuất trong [1]. Cách giải trên có thể coi là cách ngắn gọn nhất tiếp cận bài toán này không những thế nó còn mở ra rất nhiều hướng tổng quát khác nhau. Trong bài viết này tôi xin giới thiệu một vài hướng tổng quát khác nhau cho bài toán ý nghĩa trên cùng lời giải.

Trong bài toán ta dễ thấy tam giác APQ cân. Việc lấy đối xứng A qua P, Q được M, N thực chất có thể hiểu $PM.QN = AP.AQ = AP^2 = AQ^2$. Đây là điểm mấu chốt của toàn bộ bài toán. Chúng ta tìm hiểu mở rộng đầu tiên như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có $\angle BAC$ là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $\angle QAB = \angle BCA$ và $\angle CAP = \angle ABC$. Gọi M, N là các điểm thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = AP.AQ$. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

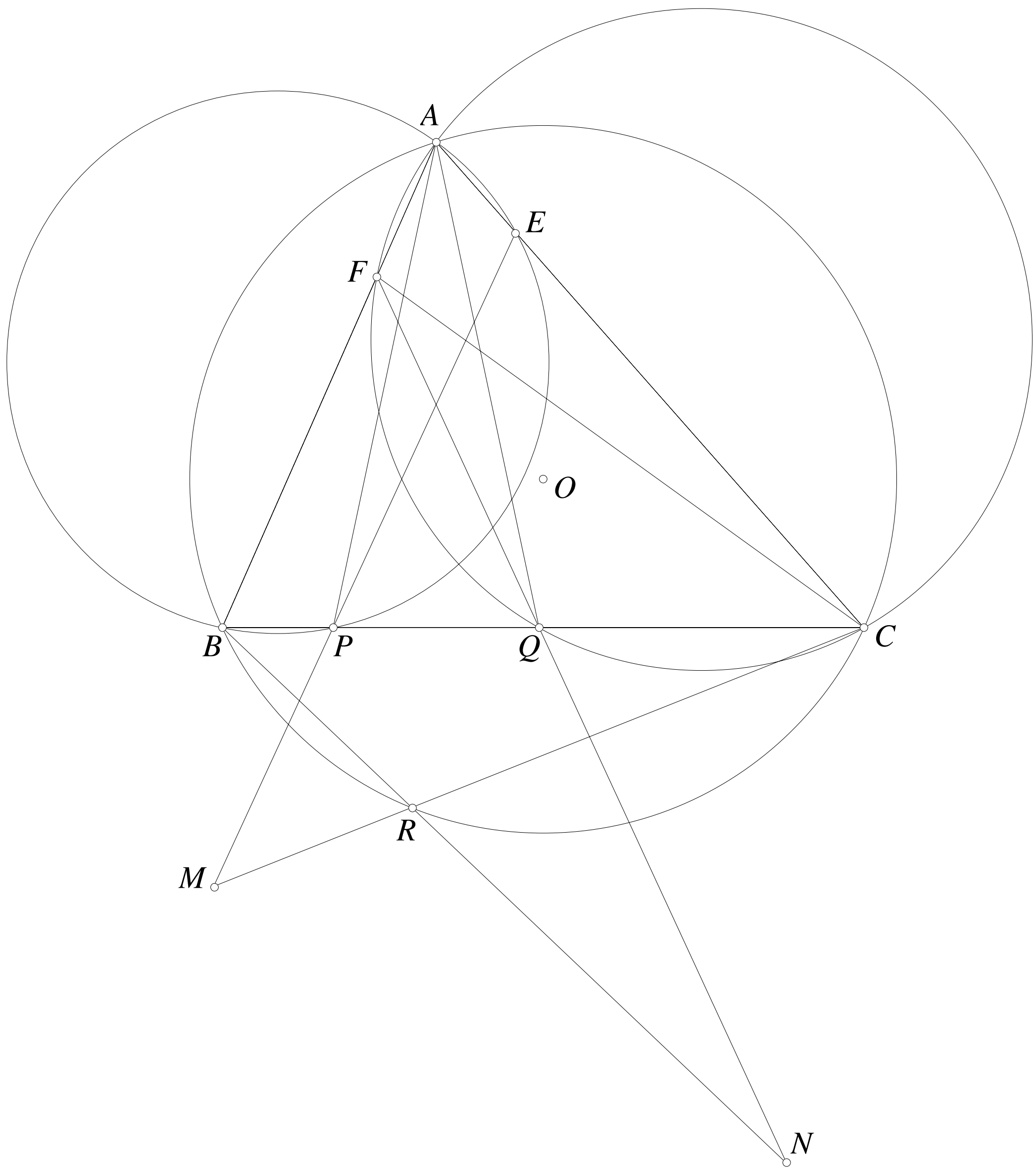


Hình 2.

Nhận xét. Bài toán này là một mở rộng đầu tiên đơn giản và có lời giải hoàn toàn tương tự. Để mở rộng tiếp ta để ý các giả thiết góc $\angle PAB = \angle BCA$ và $\angle CAQ = \angle ABC$. Thực chất các giả thiết này cho thấy là các đường tròn (APB) tiếp xúc AC và đường tròn (AQC) tiếp xúc AB. Tiếp điểm có thể thay thế bằng giao điểm. Sau đây là một khai thác cho ý tưởng này.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PE, QF sao cho $PM.QN = PE.QF$. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải có ý tưởng hoàn toàn tương tự

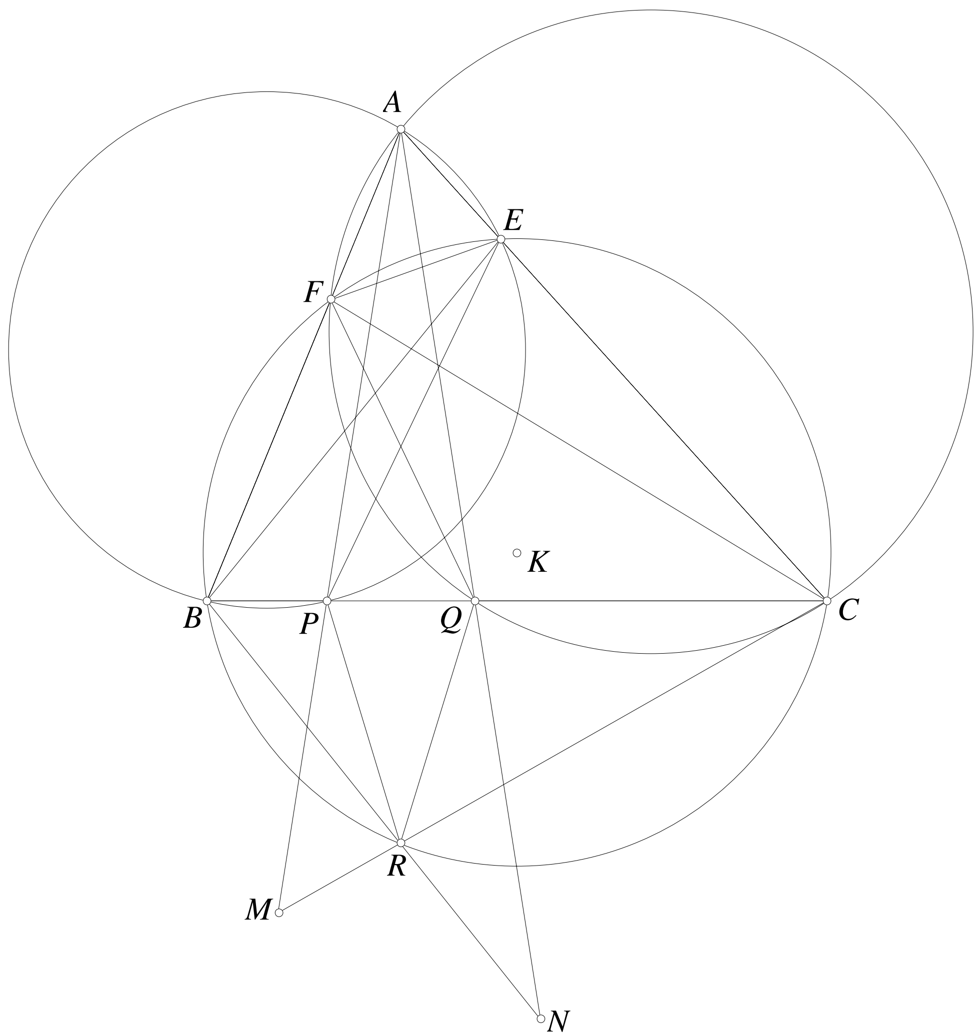


Hình 3.

Lời giải. Ta dễ thấy $\triangle ABC \sim \triangle PEC \sim \triangle QBF$ do đó kết hợp giả thiết $PM.QN = PE.QF = QB.PC$. Dễ thấy $\angle MPC = \angle NQB$. Nên $\triangle MPC \sim \triangle BQN$. Suy ra $\angle BNQ = \angle PCM$. Vậy tứ giác $QCNR$ nội tiếp suy ra $\angle CRN = \angle CQN = \angle BAC$. Vậy tứ giác $ABRC$ nội tiếp. $\square$

Nhận xét. Khi góc đáy tam giác APQ bằng $\angle BAC$ ta có bài toán số 2. Đoạn sau lời giải hoàn toàn tương tự. Ta sẽ có một mở rộng ý nghĩa hơn như sau.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = PE.QF$. Chứng minh rằng BN và CM luôn cắt nhau trên một đường tròn cố định khi M, N di chuyển.



Hình 4.

Lời giải. Ta dễ thấy $\angle AEB = \angle APB = \angle AQC = \angle AFC$ suy ra $\angle BEC = \angle BFC$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (K) cố định. Ta sẽ chứng minh BM và CN cắt nhau trên (K), thật vậy. Ta dễ thấy $\triangle ABC \sim \triangle PEC \sim \triangle QBF$ do đó kết hợp giả thiết $PM.QN = PE.QF = QB.PC$. Do tam giác APQ cân nên dễ suy ra $\angle MPC = \angle NQB$. Từ đó $\triangle MPC \sim \triangle BQN$. Suy ra $\angle BNQ = \angle PCM$. Vậy tứ giác $QCNR$ nội tiếp suy ra $\angle CRN = \angle CQN = 180° - \angle CQA = 180° - \angle CFA = \angle BFC$. Từ đó tứ giác $BFCR$ nội tiếp nên R thuộc (K). $\square$

Nhận xét. Khi góc đáy tam giác APQ bằng $\angle BAC$ ta cũng thu lại được bài toán số 2. Đoạn sau của lời giải có khác bài toán 3 một chút song ý nghĩa vẫn không đổi. Trên mô hình của bài toán gốc và các bài toán mở rộng còn có nhiều khai thác đáng chú ý, các bạn hãy làm như các bài luyện tập

Bài toán 5. Cho tam giác ABC có $\angle A$ là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $\angle QAB = \angle BCA$ và $\angle CAP = \angle ABC$. Gọi M, N là các điểm thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = AP.AQ$.

a) Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại điểm R trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN cắt (O) tại X khác R. Chứng minh RX luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RBP và RCQ cắt nhau tại Y khác R. Chứng minh rằng RY luôn đi qua một điểm cố định khi R di chuyển.

d) Gọi BM giao CN tại Z. Chứng minh rằng XZ luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PE, QF sao cho $PM.QN = PE.QF$.

a) Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại điểm R trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN. Chứng minh rằng AK vuông góc với BC.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PE, QF sao cho $PM.QN = PE.QF$.

a) Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại điểm R trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN cắt (O) tại X khác R. Chứng minh RX luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RBP và RCQ cắt nhau tại Y khác R. Chứng minh rằng RY luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = PE.QF$.

a) Chứng minh rằng BN và CM luôn cắt nhau tại một điểm R trên một đường tròn (K) cố định khi M, N di chuyển.

b) Gọi L là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN. Chứng minh rằng AL vuông góc với BC.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = PE.QF$.

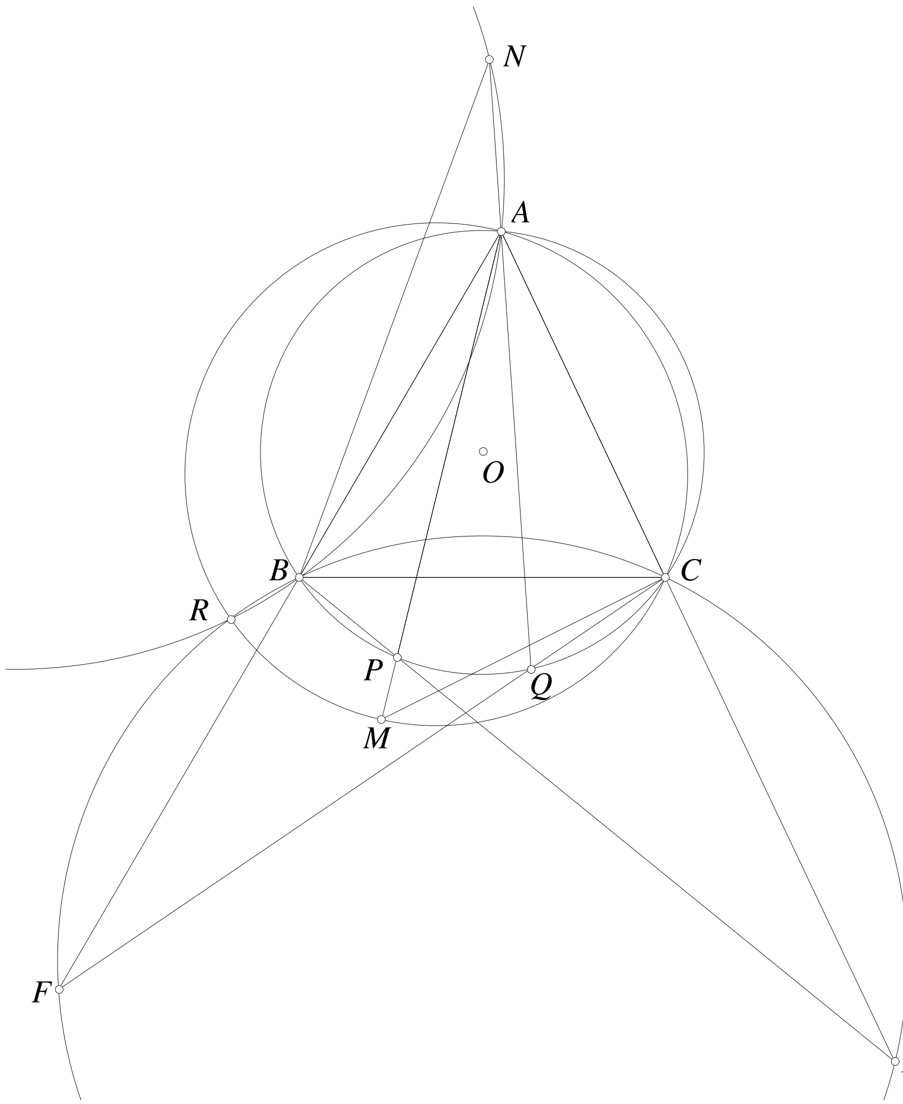
a) Chứng minh rằng BN và CM luôn cắt nhau trên một đường tròn (K) cố định khi M, N di chuyển.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN cắt (K) tại X khác R. Chứng minh RX luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RBP và RCQ cắt nhau tại Y khác R. Chứng minh rằng RY luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

Bạn nào quen với phép nghịch đảo có thể giải thêm bài toán sau

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm P, Q thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A sao cho $AP = AQ$. PB, QC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PA, AQ sao cho $\frac{PM}{PE}.\frac{QN}{QF} = \frac{AM}{AE}.\frac{AN}{AF}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM và ABN cắt nhau tại R khác A. Chứng minh rằng R luôn thuộc một đường tròn cố định khi M, N di chuyển.



Hình 5.

Lời kết. Bài toán IMO này tuy là một bài toán dễ xong vẻ đẹp và tính gợi mở của nó là không thể phủ nhận. Nó hoàn toàn xứng đáng là một bài thi IMO. Bên cạnh bài toán gốc bài toán mở rộng còn rất nhiều ý để khai thác mô hình và phát triển thêm mà trong một bài viết không thể liệt kê hết. Xin dành cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] Đề thi IMO ngày 2 tại

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=1098&t=597090

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về bài hình học thi HSG lớp 10 KHTN

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

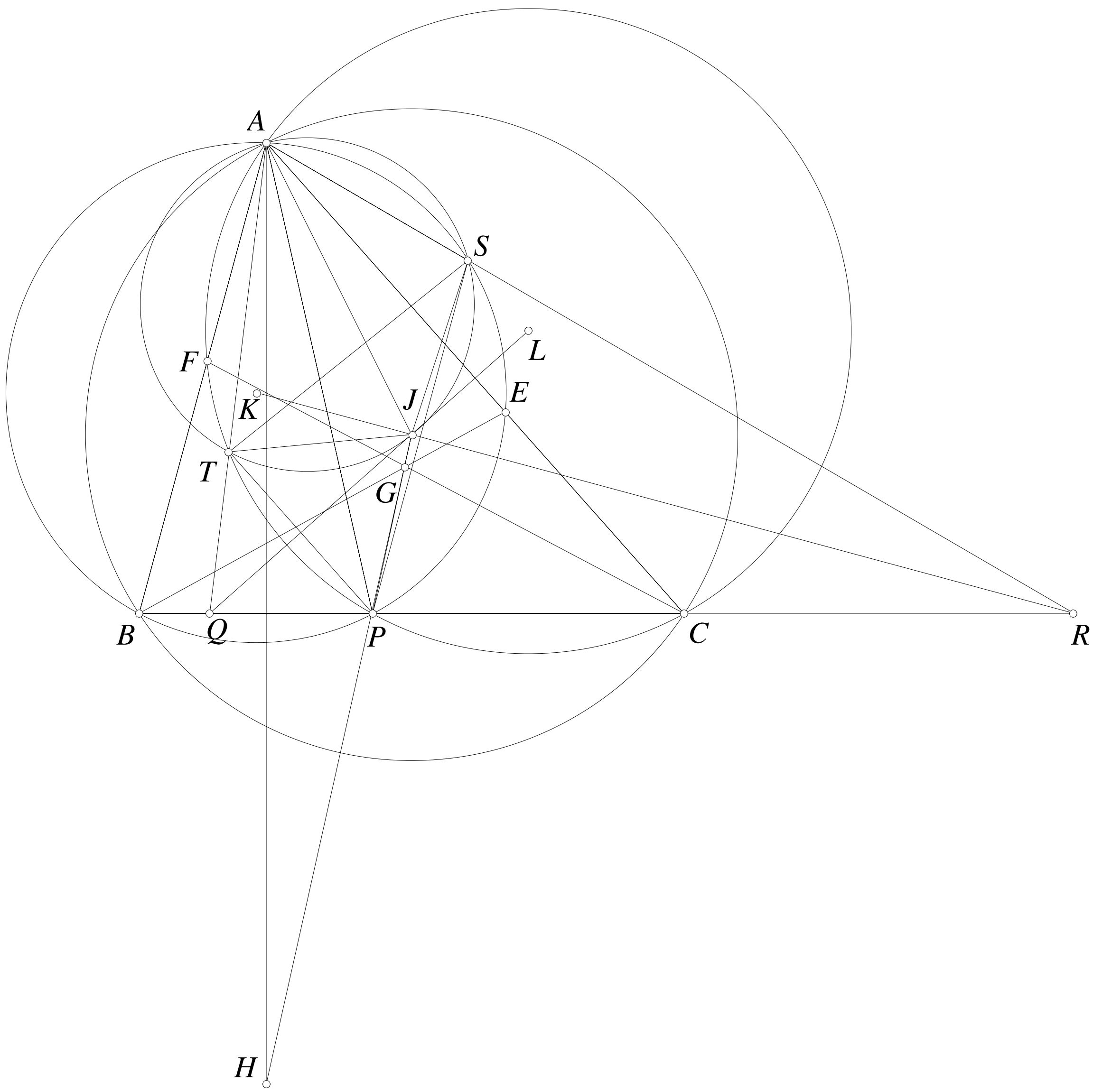
Bài viết xoay quanh bài hình học thi HSG lớp 10 KHTN năm 2014.

Đề thi chọn HSG lớp 10 chuyên KHTN năm 2014 có bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn, cố định. P là điểm di chuyển trên cạnh BC. $(K),(L)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC. Lấy S thuộc (K) sao cho $PS \parallel AB$, lấy T thuộc (L) sao cho $PT \parallel AC$.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AST luôn đi qua một điểm J cố định khác A.

b) Gọi (K) cắt CA tại E khác A. (L) cắt AB tại F khác A. BE cắt CF tại G. Chứng minh rằng đường thẳng PG đi qua J khi và chỉ khi AP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.



Lời giải. a) Gọi J là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Ta sẽ chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AST đi qua J cố định.

Thật vậy, gọi AT, AS giao BC tại Q, R. Ta dễ thấy các tứ giác $ABPS$ và $ACPT$ là các hình thang cân do đó tam giác ABR và ACQ cân tại R và Q. Dễ thấy JK, JL là trung trực của AB, AC do đó JK đi qua R và JL đi qua Q. Suy ra trong tam giác AQR thì J là tâm nội tiếp hay AJ là phân giác $\angle SAT \quad (1)$.

Ta lại có tứ giác $ACPT$ là hình thang cân nên JQ cũng là trung trực của PT do đó $JT = JP$. Tương tự $JS = JP$. Do đó $JT = JS \quad (2)$.

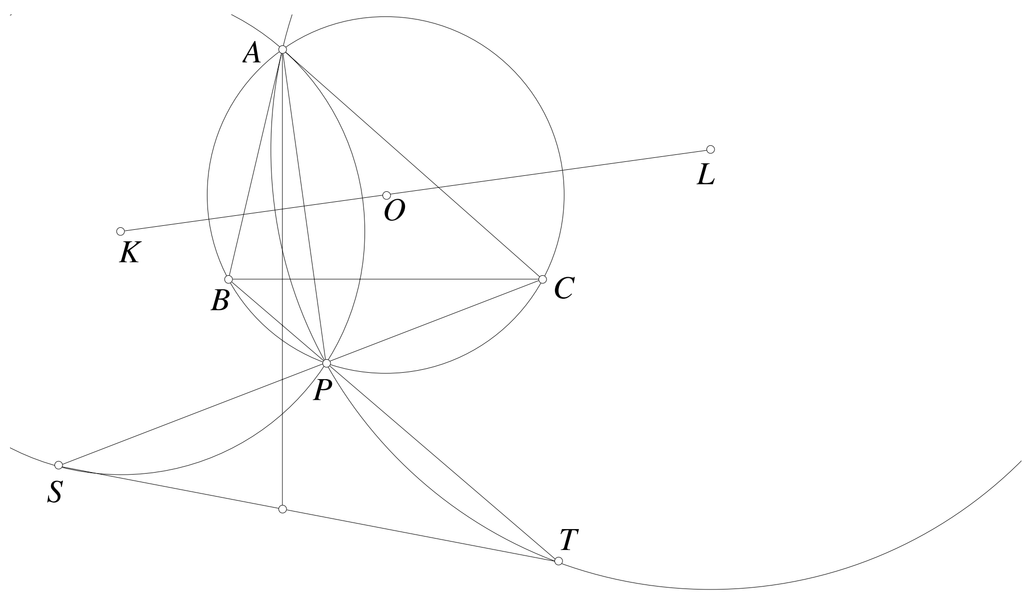
Từ (1),(2) suy ra J thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AST. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta dễ thấy tứ giác $AEGF$ nội tiếp. Từ đó $\angle EGC = \angle EAF = \angle EPG$ nên tứ giác $CEGP$ nội tiếp kéo theo tứ giác $BFGP$ cũng nội tiếp. Từ đó nếu gọi H đối xứng A qua BC thì $\angle BPH = \angle APB = \angle AEB = \angle GPC$ do đó PG đi qua H. Nên đường thẳng PG và AP đối xứng nhau qua BC. Từ đó PG đi qua tâm ngoại tiếp J của tam giác ABC khi và chỉ khi AP đi qua đối xứng của J qua BC khi và chỉ khi AP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.

□

Nhận xét. Đây là bài toán hay có tính chất phân loại, điểm cố định ở câu a) có thể dễ đoán nhận nhờ vào việc xét một số vị trí đặc biết của P. Câu b) đòi hỏi phải biết tính chất PG đi qua đối xứng của A qua BC, tuy nhiên đây là một tính chất khá quen thuộc với các bạn lớp 9. Từng ý của bài toán này có nhiều ý nghĩa ta sẽ phân tích riêng từng ý. Câu a) nếu bạn nào quen với phép nghịch đảo có thể thấy nó cũng chính là bài toán dưới đây

Bài toán 2. Cho tam giác ABC cố định nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O). Gọi (K) là đường tròn qua A, P đồng thời tiếp xúc AC. (K) cắt PC tại S khác P. Gọi (L) là đường tròn qua A, P đồng thời tiếp xúc AB. (L) cắt PB tại T khác P. Chứng minh rằng đường thẳng ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.



Hình 1.

Lời giải. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Ta sẽ chứng minh ST đi qua D cố định. Thật vậy, theo tính chất tiếp tuyến dễ thấy $BD^2 = BA^2 = BP.PT$ suy ra $\triangle BPD \sim \triangle BDT$ suy ra

$\angle BDT = \angle BPD$. Tương tự $\angle CDS = \angle CPD$. Từ đó ta có $\angle SDT = \angle BDT + \angle CDS - \angle BDC = \angle BPD + \angle CPD - \angle BAC = 360 - \angle BPC - \angle BAC = 180°$. Từ đó ta có ST đi qua D. Ta có điều phải chứng minh. □

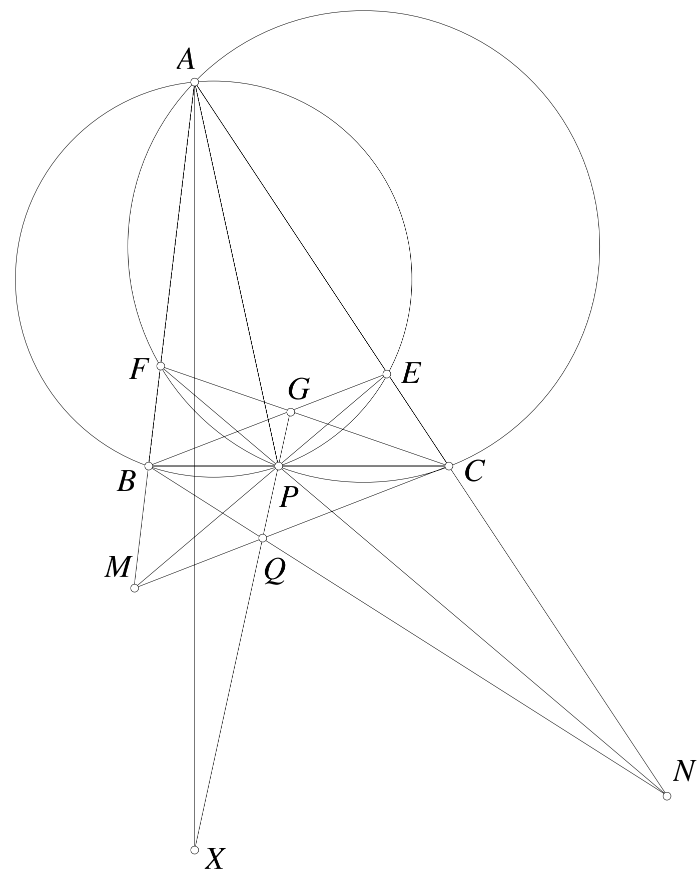
Nhận xét. Đây chính là đề toán dành cho THCS tác giả đề nghị cho cuộc thi 50 năm THTT. Bài toán có lời giải đơn giản dựa trên kiến thức THCS như trên không liên quan gì tới nghịch đảo. Cả hai bài toán có nhiều ứng dụng vào trong các bài toán khác nhau, chẳng hạn các bạn có thể xem bài toán sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC tâm nội tiếp I. P là một điểm trên BC. Gọi K, L là đối xứng của P qua trung trực IB, IC. Chứng minh rằng IA và trung trực BC cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IKL.

Ý b) của bài toán 1 cũng là một ứng dụng hay của bài toán gốc sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác C, B. BE cắt CF tại G. Chứng minh rằng PG luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Điểm cố định là đối xứng của A qua BC. Lời giải của nó đã nằm trong ý b) bài toán 1. Tuy vậy những phát triển xung quanh bài toán này rất nhiều. Nếu các bạn biết về định lý Pappus không khó để thấy bài toán sau là một hệ quả.



Hình 2.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác C, B. PE, PF lần lượt cắt AB, CA tại M, N. BN cắt CM tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

Nếu kết hợp bài toán này với bài toán 1 cho ta một bài toán khá thú vị như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nhọn, cố định. P là điểm di chuyển trên cạnh BC. $(K), (L)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác

PAB, PAC. Lấy S thuộc (K) sao cho $PS \parallel AB$, lấy T thuộc (L) sao cho $PT \parallel AC$. Gọi (K) cắt CA tại E khác A. (L) cắt AB tại F khác A. PE, PF lần lượt cắt AB, CA tại M, N. BN cắt CM tại Q. Chứng minh rằng PQ và trung trực EF cắt nhau tại một điểm trong tam giác ABC và trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AST khi và chỉ khi AP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.

Nếu kết hợp các bài toán trên với bài toán 2 cũng sẽ đưa lại nhiều vấn đề thú vị, ví dụ như bài toán sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại Q. Gọi PB, PC lần lượt cắt các đường tròn qua A, P tiếp xúc AC, AB tại S, T. Gọi K, L là đối xứng của Q qua trung trực CA, AB. Trung trực KL cắt phân giác $\angle KAL$ tại R. QR cắt ST tại H. Chứng minh rằng AH vuông góc BC khi và chỉ khi AP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.

Tài liệu

[1] Đề thi chọn dự tuyển HSG lớp 10 THPT chuyên KHTN

http://diendantoanhoc.net

[2] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Hai bài hình học thi chọn đội tuyển PTNK năm 2014

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và phát triển hai bài hình học thi chọn đội tuyển PTNK năm 2014 bằng các công cụ hình học thuần túy.

Kỳ thì chọn đội tuyển PTNK ngày thứ nhất có bài hình học như sau

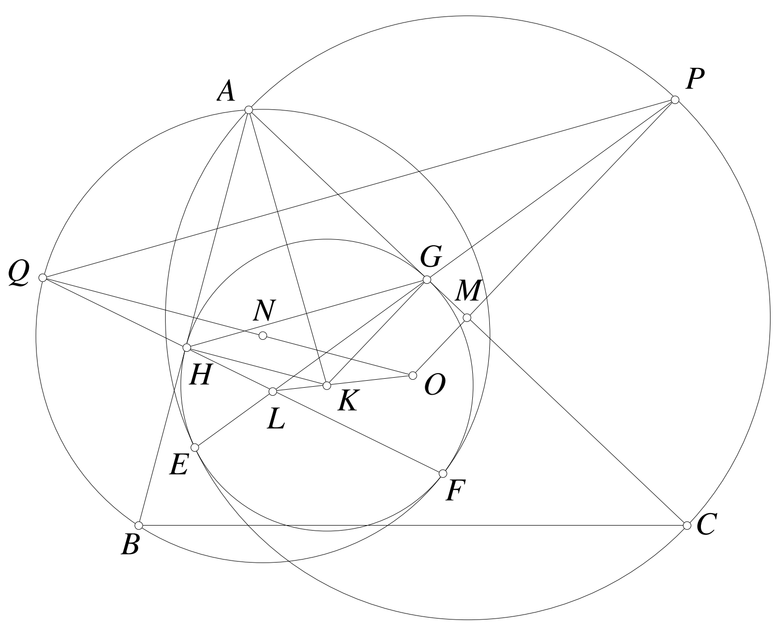
Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có tâm O, B, C cố định và A di chuyển trên (O). (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. (O_1) là đường tròn qua A, B tiếp xúc (I) tại E. (O_2) là đường tròn qua A, C tiếp xúc (I) tại F. Phân giác $\angle AEB$ cắt (O_1) tại M và phân giác $\angle AFC$ cắt (O_2) tại N.

a) Chứng minh rằng tứ giác $EFMN$ nội tiếp.

b) Gọi J là giao của EM và FN. Chứng minh rằng đường thẳng IJ luôn đi qua một điểm cố định.

Nhận xét. Sẽ thú vị nếu ta so sánh bài toán với bài thi chọn đội tuyển Romani năm 2006 [2]. Hai bài toán có chung một cấu hình và ý tưởng. Tuy nhiên cách tiếp cận bài thi chọn đội tuyển PTNK theo ý a) và b) như trên là một cách đi hay, bài toán thi như vậy trở nên có ý nghĩa. Tuy vậy việc cho xuất hiện điểm cố định O ngay trong đề bài làm cho bài toán trở nên dễ dàng hơn. Do đó tôi xin đề xuất một bài toán tổng quát hơn như sau

Bài 2. Cho tam giác ABC. Đường tròn (K) thay đổi tiếp xúc CA, AB. Đường tròn (M) qua A, C tiếp xúc trong (K) tại E. Đường tròn (N) qua A, B tiếp xúc trong (K) tại F. Phân giác các góc $\angle AEC$ và $\angle AFB$ cắt nhau tại L. Chứng minh rằng đường thẳng KL luôn đi qua một điểm cố định khi (K) di chuyển.



Hình 1.

Lời giải. Gọi (K) tiếp xúc CA, AB tại G, H. Theo một bổ đề quen thuộc thì EG là phân giác $\angle AEC$ do đó EG đi qua L và cắt (M) tại trung điểm P của cung $\overset{\frown}{AC}$ không chứa E. Tương tự FH đi qua L và cắt (N) tại trung điểm Q của cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa F. Dễ thấy PM, QN là trung trực của CA, AB nên PM, QN cắt nhau tại tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC. Ta sẽ chứng minh rằng EG, FH đồng quy với KO như vậy KL sẽ đi qua O cố định, thật vậy.

Trước hết ta có $AP^2 - AQ^2 = PG.PE - QH.QF = (KP^2 - KG^2) - (KQ^2 - KH^2) = KP^2 - KQ^2$. Từ đó $PQ \perp AK \perp HG$. Vậy $PQ \parallel HG$. Tam giác OPQ và KGH có các cạnh tương ứng song song nên từ đó OK, PG, QH đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

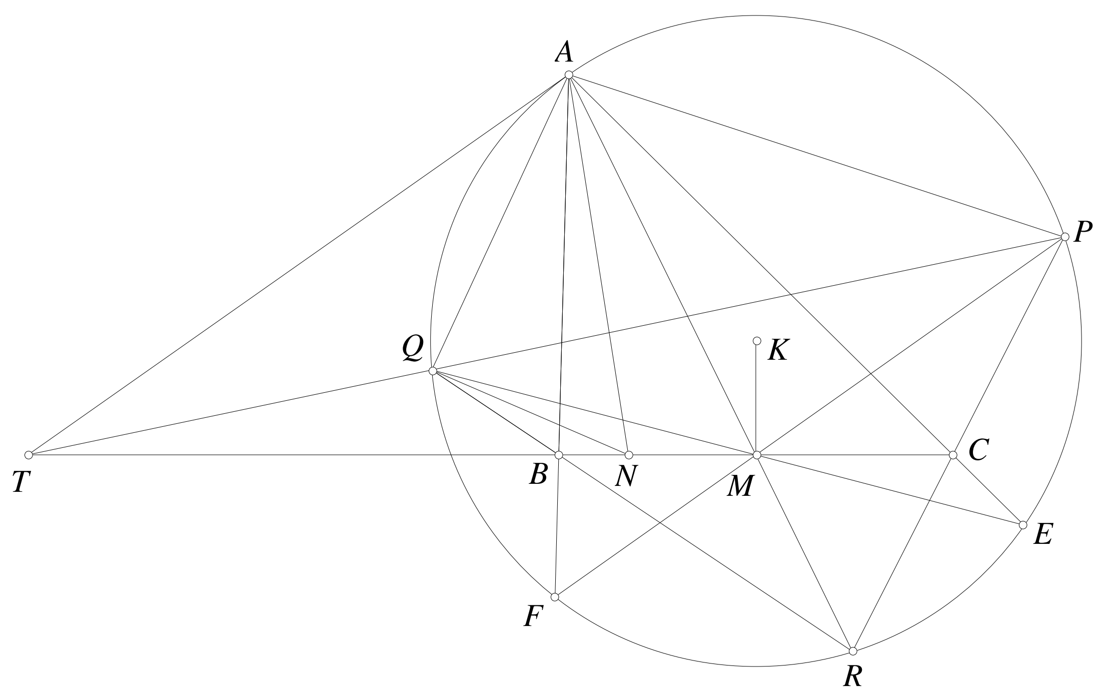
Nhận xét. Điều thú vị của bài toán trên là phải đoán nhận được điểm cố định O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đường tròn (K) là đường tròn nội tiếp ta nhận lại được bài toán thi.

Trong kỳ thi chọn đội tuyển PTNK ngày thứ hai có bài hình học như sau

Bài 3. Cho tam giác ABC không cân có I là trung điểm của BC. Đường tròn (I) có tâm I đi qua A cắt AB, AC lần lượt tại M, N. IM, IN cắt (I) tại P, Q. Gọi K là giao của PQ với tiếp tuyến của (I) tại A. Chứng minh rằng K thuộc BC.

Nhận xét. Đây thực chất là một bài chứng minh đồng quy và là một bài toán hay có ý nghĩa. Tuy vậy điều kiện trung điểm I của BC có thể thay thế được. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu và chứng minh một bài toán tổng quát hơn

Bài 4. Cho tam giác ABC với K là một điểm trên trung trực BC. Đường tròn (K) đi qua A cắt CA, AB tại E, F khác A. Gọi M là trung điểm BC. ME, MF cắt (K) tại Q, P khác E, F. Chứng minh rằng PQ, BC và tiếp tuyến tại A của (K) đồng quy.



Hình 2.

Lời giải. Gọi AM cắt (O) tại R khác A. Chú ý M là trung điểm BC và BC vuông góc với KM. Áp dụng bài toán con bướm cho tứ giác $AERQ$ suy ra RQ đi qua B. Tương tự RP đi qua C. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác AQB cắt BC tại N khác B. Gọi tiếp tuyến tại A của (K) cắt BC tại T. Ta dễ thấy $\angle ANB = 180° - \angle AQR = \angle APR = \angle TAR$ suy ra $\angle AMT = \angle TAN$ hay TA tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Ta lại có $\angle QNB = \angle QAB = \angle QPM$ suy ra tứ giác $PQNM$ nội tiếp. Từ đó ta có $TM.TN = TA^2$ nên T nằm trên trục đẳng phương của đường tròn (K) và đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PQNM$ hay T thuộc PQ. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Khi K trùng với M ta thu lại được bài toán ban đầu.

Các bạn hãy cùng luyện tập một số bài toán tương tự sau

Bài 5. Cho tam giác ABC với đường cao AD, BE, CF và đường tròn nội tiếp (I). Đường tròn qua B, C tiếp xúc (I) tại X. Tương tự có Y, Z. Gọi M, N, P là trung điểm AD, BE, CF. Chứng minh rằng XM, YN, ZP đồng quy.

Bài 6. Cho tam giác ABC có đường tròn bàng tiếp góc A, B, C là $(I_a), (I_b), (I_c)$. (I_a) tiếp xúc BC tại D. Đường tròn qua B, C tiếp xúc với (I_a) tại X. Tương tự có E, F, Y, Z. Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy.

Bài 7. Cho tam giác ABC trung tuyến AM. Đường tròn (M) qua A cắt CA, AB tại E, F khác A. EM, FM cắt (O) tại P, Q khác E, F. PQ cắt CA, AB tại K, L. FK, EL cắt (M) tại G, H khác E, F. GH cắt BC tại T. Chứng minh rằng TA tiếp xúc (M).

Bài 8. Cho tam giác ABC với K thuộc trung trực BC và M là trung điểm BC. Đường tròn (K) qua A cắt CA, AB tại E, F khác A. EM, FM cắt (O) tại P, Q khác E, F. PQ cắt CA, AB tại $K, L.FK, EL$ cắt (K) tại G, H khác E, F. GH cắt BC tại T. Chứng minh rằng TA tiếp xúc (K).

Tài liệu

[1] Đề thi chọn đội tuyển PTNK năm 2014
http://diendantoanhoc.net/forum

[2] Romanian IMO TST 2006, day 3, problem 3
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=87922

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Từ bài toán thi của Romani tới bài thi HSG lớp 10 THPT chuyên KHTN

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết mở rộng bài toán thi của Romani trong cuộc thi Grigore Moisil năm 2012.

Một cuộc thi toán của Romani năm 2012 mang tên nhà toán học Grigore Moisil [1] có bài toán hình học hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC với M là trung điểm của BC. Dựng các đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt nằm ở bên trái và bên phải điểm M, vuông góc BC và có khoảng cách tới M bằng nhau. Đường thẳng qua M vuông góc với AB, AC lần lượt cắt d_1, d_2 tại P, Q. Chứng minh rằng $AM \perp PQ$.

Bài toán trên có một mở rộng thú vị ở [2] như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với M, M' thuộc BC và đối xứng nhau qua trung điểm BC. Đường thẳng qua M vuông góc với AB, AC lần lượt cắt đường thẳng qua B, C vuông góc với BC tại P, Q. Chứng minh rằng $AM' \perp PQ$.

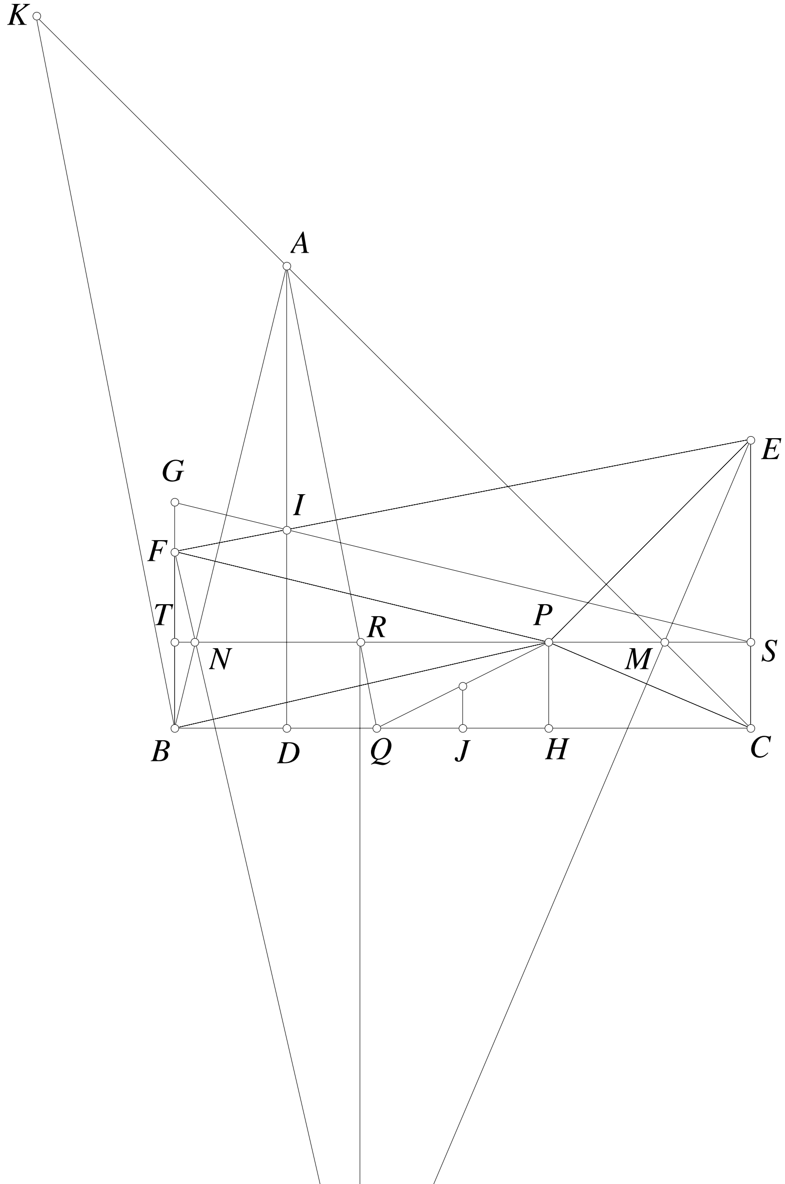
Bài toán gốc và bài toán mở rộng đều là bài toán hay và đặc sắc. Lời giải chi tiết có thể xem trong [1],[2] tôi không trình bày lại. Trong quá trình suy nghĩ tôi đã đề xuất một bài toán tổng quát hơn bài toán 2 cùng với các phát triển của nó trong đề thi HSG lớp 10 [3]. Điều thú vị là bài toán hoàn toàn dựa trên các biến đổi tỷ số độ dài đoạn thẳng và tam giác đồng dạng, là các kiến thức cơ bản của chương trình hình học lớp 8 ở Việt Nam

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt thuộc đoạn CA, AB sao cho $MN \parallel BC$. P là điểm di chuyển trên đoạn MN. Lấy các điểm E sao cho $EP \perp AC$ và $EC \perp BC$. Lấy điểm F sao cho $FP \perp AB$ và $FB \perp BC$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

b) Đường thẳng qua A vuông góc EF cắt BC tại Q. Chứng minh rằng trung trực BC chia đôi PQ.

c) Gọi EM cắt FN tại L. AQ cắt MN tại R. Chứng minh rằng $RL \perp BC$.



Hình 1.

Lời giải. a) Gọi AD là đường cao tam giác ABC. MN cắt CE, BF tại S, T. Đường thẳng qua S vuông góc AC cắt EF tại I. Dễ thấy $\triangle SPE \sim \triangle DAC$ và $\triangle TPF \sim \triangle DAB$. Từ đó $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{ES}{FG} = \dfrac{ES}{PS}.\dfrac{PS}{FG} = \dfrac{ES}{PS}.\dfrac{TP}{TF} = \dfrac{CD}{AD}.\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{DC}{DB}$. Vậy I thuộc AD suy ra I là giao của AD và SG cố định. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi H là hình chiếu của P lên BC. Ta sẽ chứng minh $QB = HC$ từ đó dễ suy ra trung trực BC chia đôi PQ, thật vậy. Cũng từ $\triangle SPE \sim \triangle DAC$ và $\triangle TPF \sim \triangle DAB$, ta có $\frac{PE}{PF} = \frac{PE}{PS}.\frac{PS}{PT}.\frac{PT}{PF} = \frac{AC}{AD}.\frac{HC}{HB}.\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AB}.\frac{HB}{HC}$.

Lấy K thuộc AC sao cho $BK \parallel AQ$. Ta dễ thấy $\triangle ABK \sim \triangle PFE$ suy ra $\frac{QB}{QC} = \frac{BQ}{AK}.\frac{AK}{AB}.\frac{AB}{QC} = \frac{QC}{AC}.\frac{PE}{PF}.\frac{AB}{QC} = \frac{AB}{AC}.\frac{AC}{AB}.\frac{HB}{HC} = \frac{HB}{HC}$.

Lại có H, Q đều nằm giữa BC nên dễ suy ra $QB = HC$. Ta có điều phải chứng minh.

c) Ta phải chứng minh EM, FN và đường thẳng qua R vuông góc MN đồng quy. Điều này tương đương với $\frac{ES}{FT} = \frac{MS}{MR}.\frac{NR}{NT}$. Ta dễ có $\triangle SME \sim \triangle SCP$ và $\triangle TNF \sim \triangle TBP$. Từ đó $\frac{ES}{FT} = \frac{ES}{MS}.\frac{MS}{NT}.\frac{NT}{FT} = \frac{MS}{NT}.\frac{PS}{SC}.\frac{BT}{PT} = \frac{MS}{NT}.\frac{PS}{PT} = \frac{MS}{MR}.\frac{HB}{HC} = \frac{MS}{MR}.\frac{RN}{RM}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bạn Trịnh Huy Vũ lớp 11 A1 Toán THPT chuyên KHTN đề xuất lời giải khác cho ý b) như sau. Gọi L là trung điểm PQ. Ta sẽ chứng minh $LB = LC$ thật vậy. Ta có $2(LB^2 - LC^2) = \frac{2(BQ^2 + BP^2) - PQ^2}{2} - \frac{2(CQ^2 + CP^2) - PQ^2}{2} = QB^2 - QC^2 + BP^2 - CP^2 = (BF^2 + FQ^2) - (CE^2 + EQ^2) + (BP^2 - PA^2) - (CP^2 - PA^2) = BF^2 - CE^2 + AF^2 - AE^2 + (FB^2 - FA^2) + (CE^2 - AE^2) = 0$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán hoàn toàn có thể tổng quát hơn nữa theo cách của bài toán 1 và cách chứng minh hoàn toàn tương tự. Các bạn hãy làm như một bài luyện tập

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt thuộc đoạn CA, AB sao cho $MN \parallel BC$. K, L thuộc đoạn BC sao cho $BK = CL$ và K nằm giữa B và L. P là điểm di chuyển trên đoạn MN. Lấy các điểm E sao cho $EP \perp AC$ và $EL \perp BC$. Lấy điểm F sao cho $FP \perp AB$ và $FK \perp BC$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

b) Đường thẳng qua A vuông góc EF cắt BC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

c) Gọi đường thẳng qua N vuông góc PK cắt đường thẳng qua M vuông góc PL cắt nhau tại L. AQ cắt MN tại R. Chứng minh rằng $RL \perp BC$.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=471881

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=471928

[3] Đề thi HSG lớp 10 lần 2 THPT chuyên KHTN

Về bài toán thi Olympic nữ sinh ở châu Âu

Tóm tắt nội dung

Bài viết mở rộng và phát triển bài toán hình học trong kỳ thi Olympic toán dành cho nữ sinh ở châu Âu năm 2014.

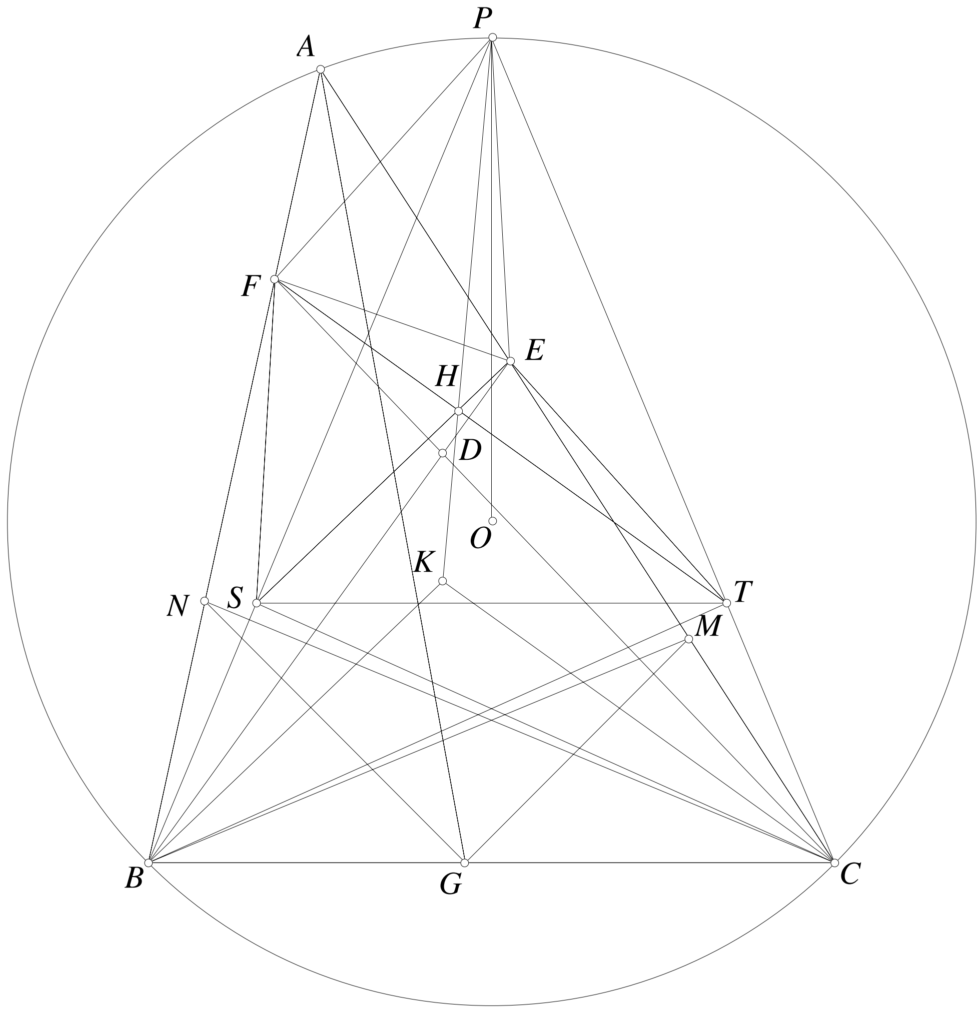
Trong kỳ thi Olympic toán dành cho nữ sinh ở châu Âu năm 2014 có bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho D, E là các điểm nằm trên đoạn AB, AC của tam giác ABC sao cho $DB = BC = CE$. Đường thẳng CD và BE cắt nhau tại F. Chứng minh rằng tâm nội tiếp tam giác ABC, trực tâm tam giác DEF và trung điểm M của cung $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thẳng hàng.

Nhận xét. Trong quá trình phân tích bài toán này tôi nhận thấy tâm nội tiếp I thực chất cũng là trực tâm tam giác DEF do có $DB = BC = CE$. Từ đó yếu tố tâm nội tiếp có thể thay thế được, tôi đề xuất bài toán như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC cố định. Các điểm E, F lần lượt di chuyển trên các đoạn CA, AB sao cho $BF = CE$. BE cắt CF tại D. Gọi H, K là trực tâm tam giác DEF, DBC. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định khi E, F di chuyển.

Lời giải đầu tiên chúng tôi đưa ra dựa trên một ý tưởng trong [1]. Với lời giải này các biến đổi chỉ cần kiến thức THCS.



Hình 1.

Lời giải 1. Gọi AG là phân giác $\angle BAC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AGB, AGC lần lượt cắt CA, AB tại M, N khác A. Ta dễ thấy $\dfrac{BN}{CM} = \dfrac{BN.BA}{CM.CA}.\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{BD.BC}{CD.CB}.\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{DB}{DC}.\dfrac{CA}{AB} = 1$. Từ đó $BN = CM$, theo giả thiết $CF = CE$ suy ra $NF = ME$. Từ đó $\dfrac{[CNF]}{[BME]} = \dfrac{[CNF]}{[ABC]}.\dfrac{[ABC]}{[BME]} = \dfrac{NF}{AB}.\dfrac{AC}{ME} = \dfrac{AC}{AB}$ (1).

Ta lại dễ thấy $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{BM}{AD}.\dfrac{AD}{CN} = \dfrac{BC}{AC}.\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB}{AC}$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $\dfrac{[CNF]}{[BME]} = \dfrac{CN}{BM}$ (3).

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và P là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của (O). Ta sẽ chứng minh rằng HK đi qua P, thật vậy. Gọi EH, FH lần lượt cắt PB, PC tại S, T. Do $SE \perp FC$ nên dùng tổng các góc trong tứ giác dễ thấy $\angle ESB = 360^\circ - \angle SBC - \angle FCB - 90^\circ = 270^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC) - \angle FCB = 180^\circ - (\angle FCB - \angle NCB) = 180^\circ - \angle NCF$. Tương tự $\angle FTC = 180^\circ - \angle MCE$.

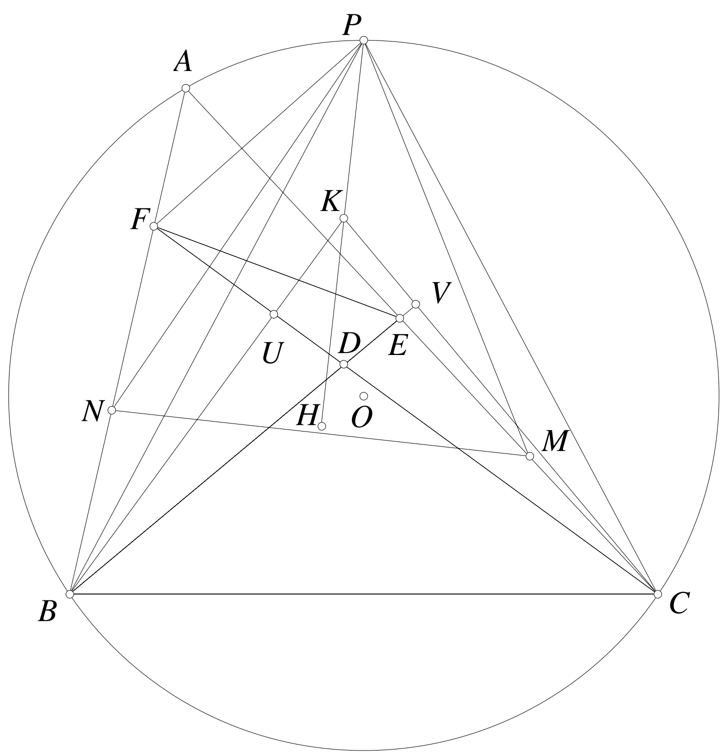
Từ đó ta dễ thấy $\dfrac{[SBE]}{[CNF]} = \dfrac{SB.SE}{CN.CF}$ và $\dfrac{[TCF]}{[BME]} = \dfrac{TC.TF}{BM.BE}$ (4).

Mặt khác ta lại chú ý rằng $\angle SEB = \angle TFC$. Từ đó ta có

$$\frac{ES.EB}{FT.FC} = \frac{[SBE]}{[TCF]} = \frac{[SBE]}{[CNF]}.\frac{[CNF]}{[BME]}.\frac{[BME]}{[TCF]} = \frac{SB.SE}{CN.CF}.\frac{CN}{BM}.\frac{BM.BE}{TC.TF} \text{ (Do (3) và (4))}$$
$$= \frac{SB}{TC}.\frac{ES.EB}{FT.FC}.$$

Từ đó dễ suy ra $SB = TC$ hay $ST \parallel BC$. Từ đó ta thấy các tam giác HST và KBC có các cạnh tương ứng song song nên HK, BS, CT đồng quy tại P hay HK đi qua P cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải thứ 2 chúng tôi đưa ra dựa trên ý tưởng sử dụng phương tích và trục đẳng phương.

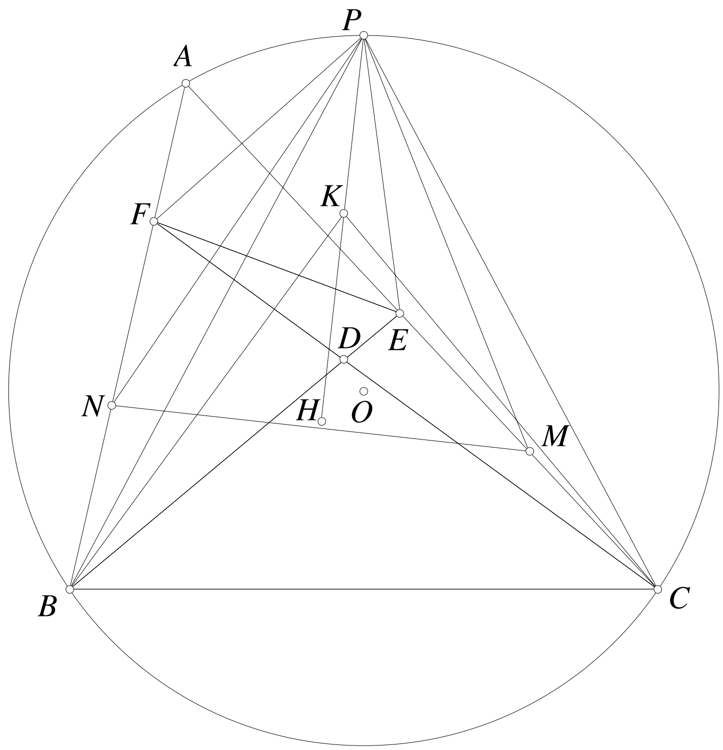


Hình 2.

Lời giải 2. Gọi BU, CV là đường cao của tam giác DBC. Tứ giác $BUVC$ nội tiếp ta suy ra $KU.KB = KV.KC$ từ đó phương tích của K đối với đường tròn đường kính BF và CE bằng nhau. Vậy K thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính BF và CE. Tương tự H cũng thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính BF và CE. Gọi P là trung điểm cung $\overset{\frown}{ABC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M, N là trung điểm CE, BF. Do $BF = CE$ nên ta dễ thấy hai tam giác PFB và PCE bằng nhau. Từ đó suy ra hai trung tuyến $PM = PN$. Từ đó $PM^2 - ME^2 = PN^2 - NF^2$. Từ đó ta cũng thấy phương tích của P đối với đường tròn đường kính BF và CE bằng nhau. Vậy H, K, P thẳng hàng trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BF và CE bằng nhau. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán được tổng quát và phát biểu lại dưới dạng là tìm yếu tố cố định có phần thú vị hơn. Rõ rằng ta phải đoán nhận điểm cố định vì đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC không xuất hiện trong đề bài. Lời giải thứ 2 xem ra ngắn gọn hơn lời giải 1 nhưng lời giải 1 sử dụng kiến thức sơ cấp hơn. Nhờ cách giải thứ 2 ta có thể giải bài toán đảo như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với E, F lần lượt thuộc đoạn CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và (O) cắt nhau tại P khác A. BE cắt CF tại D. Giả sử P và trực tâm các tam giác DEF, DBC thẳng hàng. Chứng minh rằng $CE = BF$.



Hình 3.

Lời giải. Gọi H, K là trực tâm tam giác DEF và tam giác DBC. Tương tự phần đầu lời giải 2 ta dễ thấy HK là trục đẳng phương của đường tròn đường kính CE và BF. Do đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và (O) cắt nhau tại P khác A. Ta dễ thấy tam giác PBF và tam giá PCE đồng dạng. Từ đó ta có $\dfrac{PF}{PB} = \dfrac{PE}{PC}$ (1).

Ta chú ý do P, H, K thẳng hàng nên P thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính CE và BF. Sử dụng công thức tính phương tích bằng tích vô hướng suy ra $\overrightarrow{PE}.\overrightarrow{PC} = \mathcal{P}_{P/(CE)} = \mathcal{P}_{P/(BF)} = \overrightarrow{PF}.\overrightarrow{PB}$. Từ đó chú ý rằng $\angle EPC = \angle FPB$ nên suy ra $PE.PC = PF.PB$ (2).

Từ $(1), (2)$ suy ra $PF = PE, PB = PC$ kết hợp $\angle EPC = \angle FPB$ suy ra hai tam giác PFB và PEC bằng nhau suy ra $CE = BF$. Ta có điều phải chứng minh. □

Ta có ngay một số bài toán hệ quả như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với E, F là các điểm di chuyển trên đoạn CA, AB sao cho $CE = BF$. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm CA, AB, AE, AF. Lấy điểm S, T sao cho SM và TQ vuông góc

BE còn SN và TP vuông góc với CF. Gọi O, K là tâm ngoại tiếp tam giác ABC và AEF. Chứng minh rằng giao điểm của ST và OK luôn thuộc một đường tròn cố định khi E, F di chuyển.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC với E, F là các điểm thuộc đoạn CA, AB. M, N, P, Q là trung điểm CA, AB, AE, AF. Lấy điểm S, T sao cho SM và TQ vuông góc BE còn SN và TP vuông góc với CF. Gọi O, K là tâm ngoại tiếp tam giác ABC và AEF. ST cắt OK tại R. Chứng minh rằng $AR \perp OK$ khi và chỉ khi $BE = CF$.

Nếu các bạn quen với phép nghịch đảo thì các bạn có thể làm một số bài toán sau để luyện tập

Bài toán 6. Cho tam giác ABC với phân giác AD. P là một điểm trên phân giác AD. PB, PC cắt CA, AB tại E, F. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác APB, APC cắt trung trực CA, AB tại M, N. AM, AN lần lượt cắt trung trực AF, AE tại S, T. Chứng minh rằng giao điểm của MN và ST luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ trong tam giác. PB, PC cắt CA, AB tại E, F. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác APB, APC cắt trung trực CA, AB tại M, N. AM, AN lần lượt cắt trung trực AF, AE tại S, T. Gọi MN cắt ST tại Q. EF cắt BC tại R. Chứng minh rằng AQ, BC và trung trực AR đồng quy khi và chỉ khi AP là phân giác $\angle BAC$.

Tài liệu

[1] European Girls' Mathematical Olympiad - Day 1 - P2
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=585058

[2] Trần Quang Hùng
Tuyển tập các bài hình học chọn đội tuyển KHTN.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về bài hình học chọn đội tuyển Việt Nam ngày 2 năm 2015

Tóm tắt nội dung

Bài viết muốn trình bày con đường đi tới bài hình học chọn đội tuyển Việt Nam năm 2015 ngày thứ 2 cùng với một số mở rộng và phát triển.

Đề chọn đội tuyển Việt Nam ngày 2 [1] có bài hình học như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn không cân và có điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC = \alpha > 180° - \angle BAC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt AC ở E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APC cắt AB ở F khác A. Gọi Q là điểm nằm trong tam giác AEF sao cho $\angle AQE = \angle AQF = \alpha$. Gọi D là điểm đối xứng với Q qua EF, phân giác góc $\angle EDF$ cắt AP tại T.

a) Chứng minh rằng $\angle DET = \angle ABC, \angle DFT = \angle ACB$.

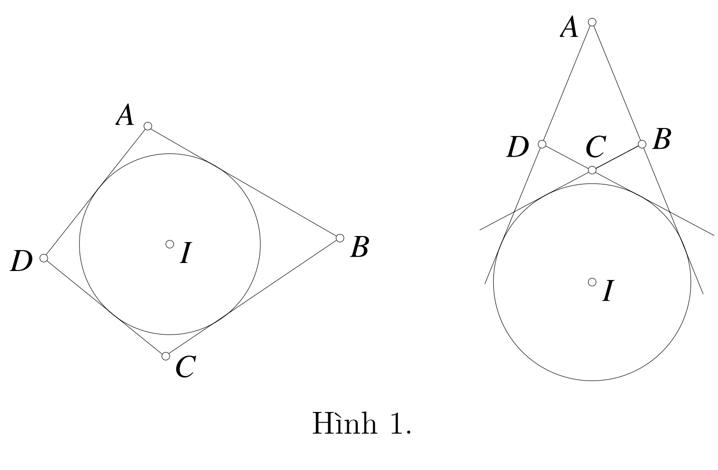
b) Đường thẳng PA cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại M, N. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PEM, PFN và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ. Đường thẳng DT cắt (K) tại H. Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DMN.

Nhận xét. Đây là bài toán hay. Câu a) dùng gợi ý hướng giải cho câu b). Nếu để ý kỹ thực chất bài toán này là sự ghép nối của hai bài toán khác. Sau đây tôi xin giới thiệu lại với các bạn cả hai bài toán đó cùng với nguồn gốc của nó. Trước hết ta nhắc lại hai bài toán quan trọng về tứ giác ngoại tiếp.

Bài toán 2. Cho tứ giác $ABCD$.

a) Nếu $AB + CD = AD + BC$ thì tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp. Tức là tồn tại đường tròn (I) tiếp xúc các cạnh AB, BC, CD, DA.

b) Nếu $AB + AD = CB + CD$ thì tứ giác $ABCD$ bàng tiếp góc A, C. Từ là tồn tại một đường tròn (I) chứa trong góc A hoặc C tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA kéo dài.

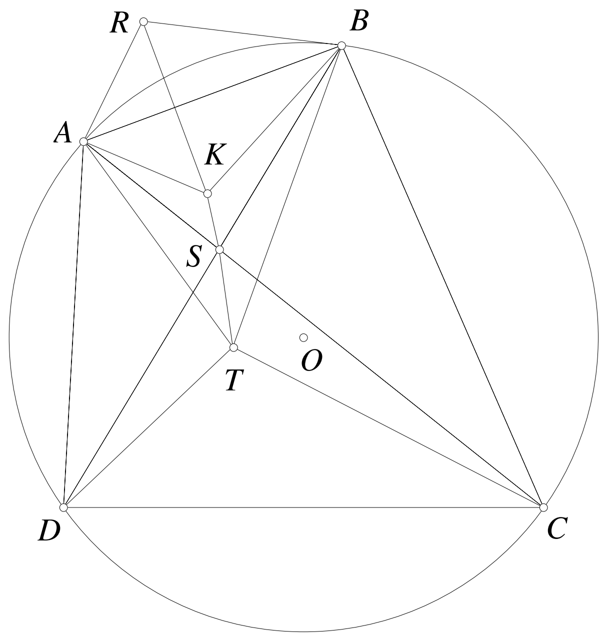


Hình 1.

Bổ đề là kết quả cơ bản có trong nhiều tại liệu. Chúng ta bắt đầu từ bài toán đầu tiên tham khảo [2] là đề chọn đội tuyển Indonesia

Bài toán 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD, SBC cắt tại tại T khác S. Dựng ra ngoài tứ giác tam giác ABR đồng dạng với DCT. Chứng minh rằng tứ giác $ATBR$ là tứ giác ngoại tiếp.

Đây là bài toán hay có rất nhiều cách tiếp cận khác nhau. Tuy vậy chúng tôi chọn lời giải sau gần như là ngắn gọn nhất và cũng chính là sử dụng hướng đi trong bài toán 1.



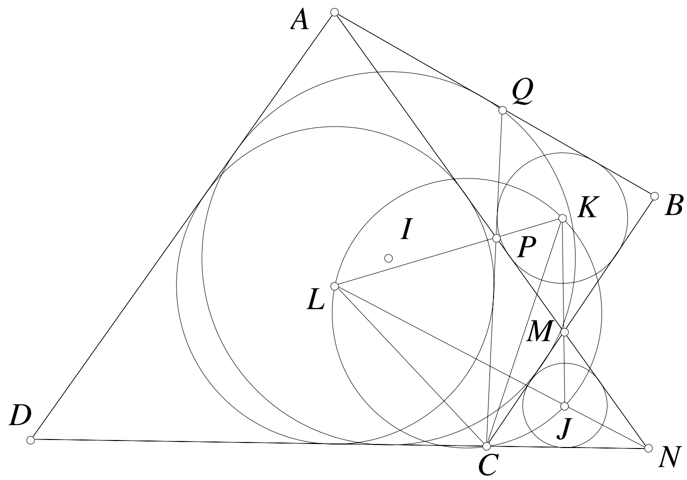
Hình 2.

Lời giải. Gọi K đối xứng R qua BC. Ta thấy $\angle KAS = \angle BAS - \angle BAK = \angle BDC - \angle RAB = \angle BDC - \angle TDC = \angle SDT = \angle SAT$. Từ đó AS là phân giác $\angle KAT$. Tương tự BS là phân giác $\angle KBT$. Dễ thấy TS là phân giác $\angle ATB$. Từ đó đường tròn (S) tiếp xúc với KA, KB, TA, TB suy ra $AK - AT = BK - BT$. Theo tính đối xứng suy ra $AR - AT = BR - BT$ hay $AR + BT = BR + AT$ suy ra tứ giác $ARBT$ ngoại tiếp. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Trong [2] cũng có một lời giải khác và ngoài ra bài toán cũng có thể giải bằng phép nghịch đảo hoặc tính chất phương tích. Ta dễ chứng minh được tâm nội tiếp tứ giác $ATBR$ là đẳng giác của K trong tam giác SAB đó chính là nội dung bài toán 1 phần a). Để tiếp tục chúng tôi xin nhắc lại và chứng minh bài toán trong IMO Shortlist 2009 trong [3] như sau

Bài toán 4. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Một đường thẳng đi qua A cắt đoạn thẳng BC và cắt tia đối tia CD tại N. Gọi J, K, L là tâm nội tiếp tam giác CNM, MAB và NAD. Chứng minh rằng trực tâm tam giác JKL nằm trên MN.

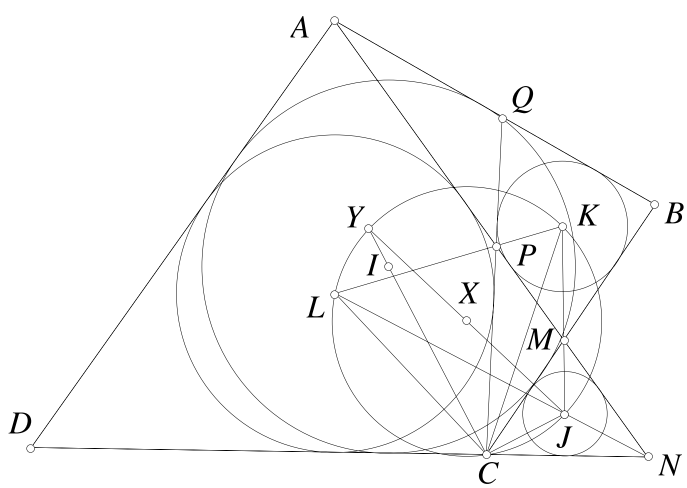
Đây là một kết quả đẹp, bao hàm nhiều ý tưởng. Chúng tôi xin giới thiệu lời giải sử dụng bài toán 2 như sau



Hình 3.

Lời giải. Gọi tiếp tuyến của đường tròn (L) nội tiếp tam giác NAD cắt AM, AB tại P, Q. Như vậy tứ giác $APCD$ nội tiếp. Kết hợp $ABCD$ nội tiếp suy ra $PA - PC = DA - DC = BA - BC$. Từ đó tứ giác $APCB$ bàng tiếp hay tứ giác $BQPM$ ngoại tiếp vậy CP tiếp xúc (K). Từ đó $2\angle LCK = \angle BCD = \angle CMN + \angle CNM = 2\angle JMN + 2\angle JNM = 2\angle MJL$. Từ đó tứ giác $CJKL$ nội tiếp. Từ đó theo định lý đường thẳng Steiner thì đường thẳng nối đối xứng của C qua JK, JL đi qua trực tâm tam giác JKL. Chú ý theo tính chất phân giác thì đường thẳng đó chính là MN. Vậy MN đi qua trực tâm tam giác JKL. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này có kết cấu chặt chẽ và ý tưởng hay. Chú ý điều kiện N thuộc tia đối tia CD cần thiết để bài toán đúng. Để ý rằng $CI \perp CJ$ nên nếu CI cắt đường tròn (X) ngoại tiếp tứ giác $CJKL$ tại Y thì JY là đường kính của (X). Phần nhận xét này chính là kết quả câu b) bài toán 1. Nếu để ý kỹ thi mô hình bài toán shortlist này cũng đã xuất hiện một lần trong đề thi VMO năm 2011 xem [4]



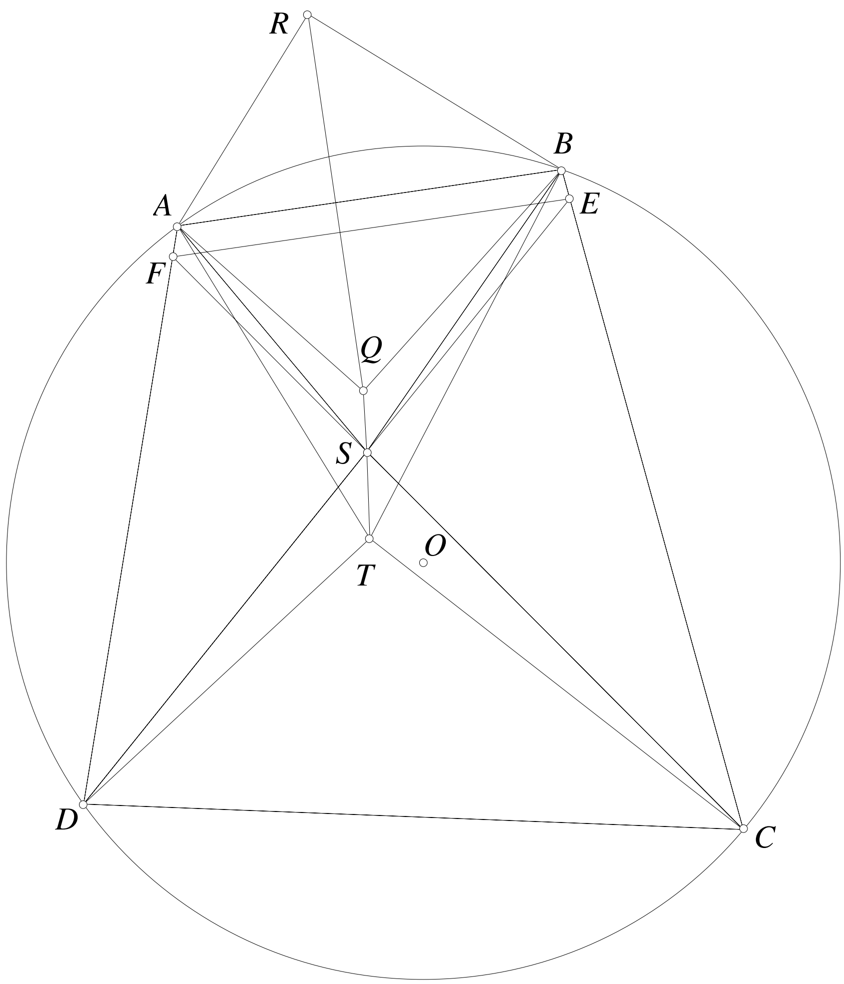
Hình 4.

Trở lại bài toán 1. Ta chú ý rằng do điều kiện chặt chẽ của bài toán Shortlist nên ta cần bổ sung thêm điều kiện cho bài toán 1 là M, N phải luôn cùng phía với P trên đường thẳng AP. Từ đó chú ý tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Bài toán chỉ là sự kết hợp một cách cơ học của bài toán 3 và bài toán 4. Chú ý rằng ta hoàn toàn có thể thay thế AP thành một đường thẳng bất kỳ đi qua P. Vậy ta có thể phát biểu lại bài toán này đẹp hơn như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và có điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC = \alpha$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC lần lượt cắt CA, AB tại E, E khác A. Điểm Q là điểm nằm trong tam giác AEF sao cho $\angle AQE = \angle AQF = \alpha$. Gọi D là điểm đối xứng với Q qua EF. Một đường thẳng đi qua P cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại M, N sao cho M, N cùng phía với P. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PEM, PFN và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ. Phân giác $\angle EDF$ cắt (K) tại H. Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DMN.

Nhận xét. Do bài toán chỉ là một cách kết hợp cơ học hai bài toán trên nên một khi giải và phân tích rõ hai bài toán trên thì bài toán kết hợp không còn mang nhiều ý nghĩa. Tuy vậy việc sử dụng cả hai bài toán lớn trong cùng một bài toán làm độ khó của bài toán thi tăng nhiều lần và chính vì vậy nó đánh giá cao và phân loại tốt được học sinh. Chúng ta tiếp tục với một mở rộng thú vị sau cho bài toán 3.

Bài toán 6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các điểm E, F thuộc cạnh CB, AD sao cho $EF \parallel AB$. DE cắt CF tại S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ASD và BSC cắt nhau tại T khác S. Dựng điểm R ở ngoài tứ giác $ABCD$ sao cho $\angle RAB = \angle ASF + \angle TDC$ và $\angle RBA = \angle BSE + \angle TCD$. Chứng minh rằng tứ giác $ATBR$ nội tiếp.



Hình 5.

Lời giải. Ta dễ thấy tứ giác $CDFE$ nội tiếp nên $\angle STA = \angle SDF = \angle SCE = \angle STB$. Từ đó TS là phân giác $\angle ATB$. Ta lại có $\angle QAS = \angle SAB - \angle QAB = \angle DAB - \angle DAS - \angle RAB = \angle DFE - (\angle DFS - \angle FSA) - (\angle ASF + \angle TDC) = \angle SFE - \angle TDC = \angle SDC - \angle TDC = \angle SDT = \angle SAT$. Vậy AS là phân giác $\angle QAT$. Tương tự BS là phân giác $\angle QBT$. Từ đó đường tròn (S) tiếp xúc với QA, QB, TA, TB suy ra $AQ - AT = BQ - BT$. Theo tính đối xứng suy ra $AR - AT = BR - BT$ hay $AR + BT = BR + AT$ suy ra tứ giác $ARBT$ ngoại tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Khi EF trùng AB ta thu được bài toán 3. Nếu việc kết hợp bài toán 3 và bài toán 4 cho ta bài toán TST thì việc kết hợp bài toán 6 và bài toán 4 sẽ cho ta một mở rộng cho bài TST nhưng rõ ràng việc kết hợp một cách cơ học như các bạn đã thấy nó cũng không còn mang nhiều ý nghĩa nữa.

Tuy vậy để thú vị hơn tôi xin đưa ra một ý tưởng như sau từ đề bài toán 1. Những điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle APB = \angle APC$ thì các điểm P đó có gì đặc biệt hay nói cách khác, quỹ tích P là gì. Bài toán sau sẽ giải đáp thắc mắc đó, chúng ta sẽ không cố gắng tìm quỹ tích P mà sẽ tìm quỹ tích điểm đẳng giác của P. Đó là một quỹ tích đẹp và chứng minh đơn giản, các bạn hãy làm như một bài luyện tập

Bài toán 7. Cho tam giác ABC có đường tròn Apollonius ứng với A là (K). P là một điểm thuộc (K). Q đẳng giác với P trong tam giác ABC. Chứng minh rằng $\angle AQB = \angle AQC$.

Tài liệu

[1] Đề thi chọn đôi tuyển Việt Nam thì IMO năm 2015

[2] Indonesia IMO 2007 TST, Stage 2, Test 5, Problem 1
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h312083

[3] IMO Shortlist 2009 - Problem G8
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h355795p1932940

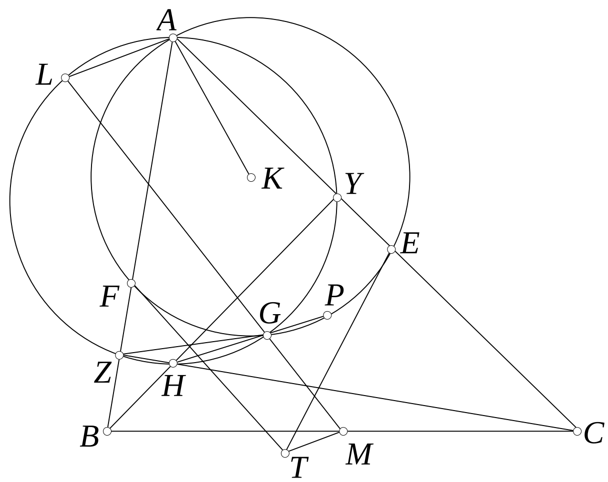
[4] A, M, N, P are concyclic iff d passes through I- [VMO 2011]
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h386167p2144390

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Proposed problems for TST

Tran Quang Hung

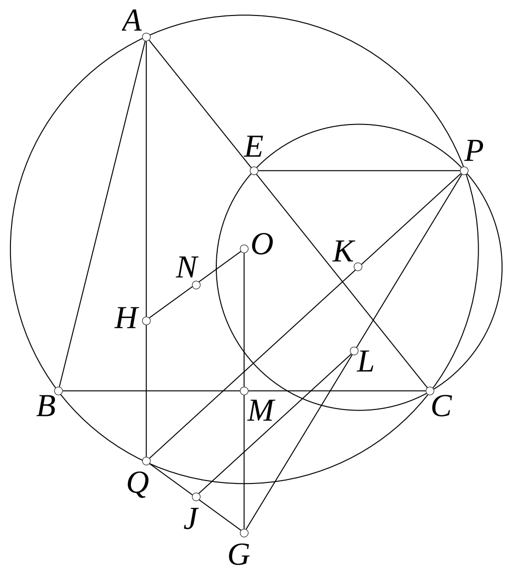
Problem 1 (Prepared)**.** Let ABC be a triangle with orthocenter H. P is a point. (K) is the circle with diameter AP. (K) cuts CA, AB again at E, F. PH cuts (K) again at G. Tangent line at E, F of (K) intersect at T. M is midpoint of BC. L is the point on MG such that $AL \parallel MT$. Prove that $LA \perp LH$.



Hnh 1.

Solution. Let BY, CZ be altitudes of ABC. HP cuts (K) again at G, thus $AG \perp PH$ so A, Z, H, G, Y lie on circle diameter AH. Easily seen MY, MZ are tangent to circle diameter AH. We have the tangent line at E, F of (K) intersect at T. From $\triangle GEF \sim \triangle GYZ$ we have $\triangle GZT \sim \triangle GMF$ deduce $\triangle GZF \sim \triangle GMT$ so $\angle GMT = \angle GZA$ but $\angle GMT = \angle GLA$ from $AL \parallel GT$, therefore $\angle GLA = \angle GZA$ so G, Z, L, A are cyclic. Thus, L lies on circle diameter AH, so $AL \perp AH$. $\square$

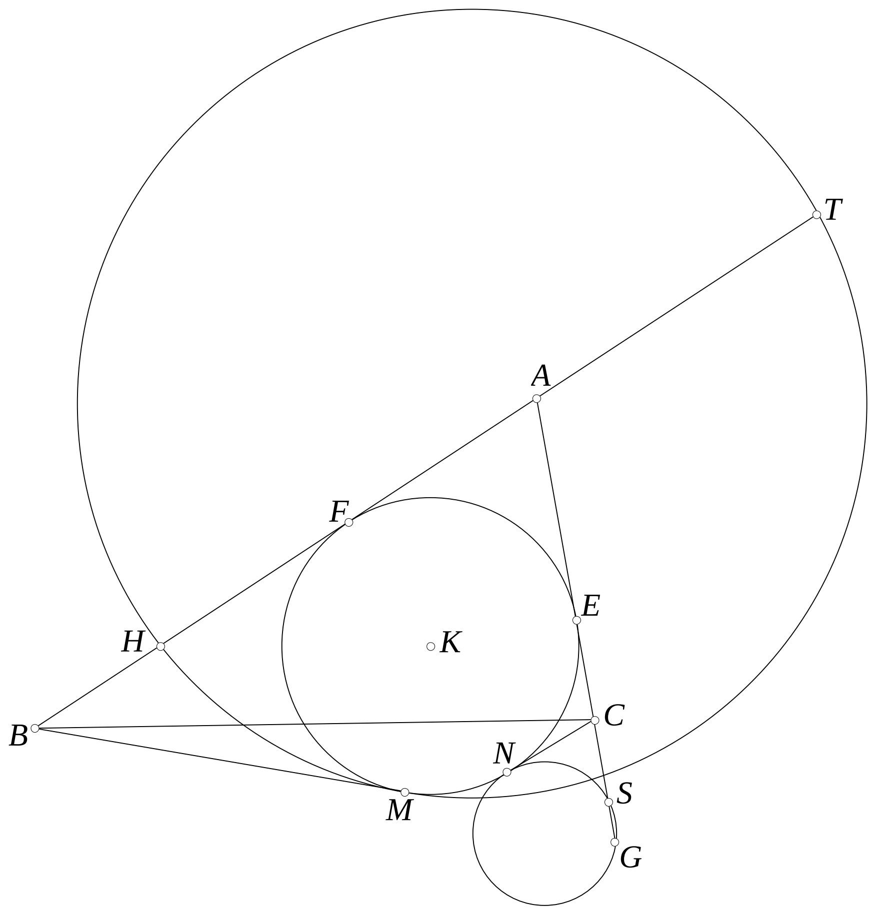
Problem 2 (Hard)**.** Let ABC be a triangle inscribed circle (O). P lies on (O). The line passes through P and parallel to BC cuts CA at E. K is circumcenter of triangle PCE and L is nine point center of triangle PBC. Prove that the line passes through L and parrallel to PK, always passes through a fixed point when P moves.



Hnh 2.

Solution. Let H, N be orthocenter and nine point center of triangle ABC. Let M be midpoint of BC, and G is symmetric of P through L. We are well known that G is reflection of O through BC. AH cuts (O) again at Q. Because of $PE \parallel BC$ we have $\angle CEP = \angle ACB$, so $\angle CPK = 90^\circ - \angle CEP = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAQ = \angle CPQ$ thus P, K, Q are collinear. The line passes through L parallel to PK cuts GQ at J. Thus, J is midpoint of LQ. Quadrilateral $OHQG$ is isoceles trapezoid and NJ is its median line. Therefore, J is relfeciton of N through BC. Therefore, the line passes through L and parrallel to PK, always passes through a fixed point, it is the reflection of N through BC. $\square$

Problem 3 (Medium)**.** Let ABC be a triangle and (K) is a circle that touches segments CA, AB at E, F, reps. M, N lie on (K) such that BM, CN are tangent to (K). G, H are symmetric of A through E, F. The circle passes through G and touches to (K) at N that cuts CA again at S. The circle passes through H and touches (K) at M that cuts AB again at T. Prove that the line passes through K and perpendicular to ST always passes through a fixed point when (K) changes.

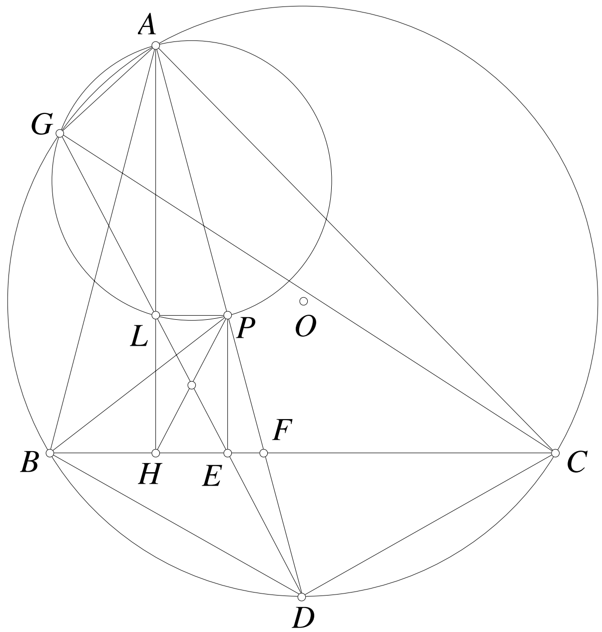


Hnh 3.

Solution. We have $CE^2 = CM^2 = CG.CS$ so $\dfrac{CE}{CS} = \dfrac{CG}{CE} = \dfrac{CE+CG}{CS+CE} = \dfrac{EG}{ES} = \dfrac{EA}{ES}$ deduce $\dfrac{EA}{CE} = \dfrac{ES}{CS} = \dfrac{EA+ES}{CE+CS} = \dfrac{AS}{ES}$ thus $SE^2 = SA.SC$. From this S lies on radical axis of (K) and circumcircle (O) of triangle ABC. Simiarly, with T. Thus ST is radical axis of (K) and (O). Therefore the line passes through K and perpendicular to ST always passes through fixed point O. We are done.

$\square$

Problem 4 (Easy)**.** Let ABC be acute triangle inscribed circle (O), altitude AH, H lies on BC. P is a point that lies on bisector $\angle BAC$ and P is inside triangle ABC. Circle diameter AP cuts (O) again at G. L is projection of P on AH. Assume that GL bisects HP. Prove that P is incenter of ABC.



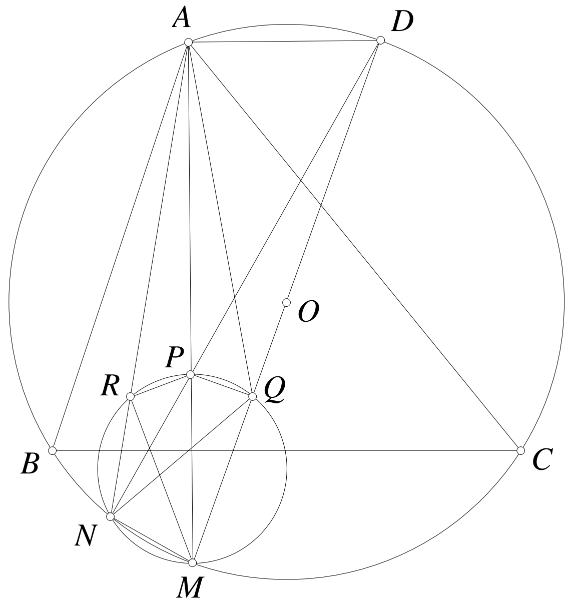
Hnh 4.

Solution. Let AP cuts BC at F and cuts (O) again at D. Note that $LP \parallel BC$ so we have $\angle AGL = \angle LPF = \angle BFD = \angle FCD + \angle FDC = \angle FBD + \angle AGC = \angle DGC + \angle AGC = \angle AGD$. From this G, L, D are collinear. GL cuts BC at E. Because GL bisects PH so $PLHE$ is rectangle. Follow Thales's theorem $\dfrac{DP}{DA} = \dfrac{PE}{AL} = \dfrac{LH}{AL} = \dfrac{PF}{AP}$ deduce $\dfrac{DA}{AP} = \dfrac{DP}{PF}$ or $\dfrac{DA}{DA - AP} = \dfrac{DP}{DP - PF}$ deduce $\dfrac{DA}{DP} = \dfrac{DP}{DF}$. Thus, $DP^2 = DF.DA$. We have $\angle DBF = \angle DAC = \angle DAB$ so triangles DBF and DAB are similar. Deduce $BD^2 = DF.DA = DP^2$. From this, $\angle PBC = \angle PBD - \angle CBD = \angle BPD - \angle CAD = \angle BPD - \angle DAB = \angle PBA$. Thus, P is incenter of triangle ABC. We are done. $\square$

Proposed problems for Junior Bankan

Tran Quang Hung

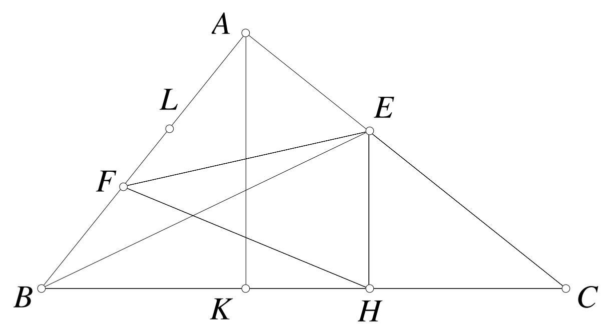
Problem 5. Let ABC be an acute triangle inscried circle (O). M lies on small arc $\overset{\frown}{BC}$. P lies on AM. Circle diameter MP cuts (O) again at N. MO cuts circle diameter MP again at Q. AN cuts circle diameter MP again at R. Prove that $\angle PRA = \angle PQA$.



Hnh 5.

Solution. Let MD be diameter of (O). We have $DN \perp MN \perp NP$. From this N, P, D are collinear. MD is diameter of (O) then $\angle PAD = 90°$. Q lies on circle diameter MP then $\angle PQD = 90°$. Thus $APQD$ is cyclic deduce $\angle NAP = \angle NDM = \angle PAQ$ and $\angle PQN = \angle PMN = \angle ADN = \angle AQP$. Therefore AP is bisector of $\angle NAQ$ and QP is bisector $\angle NQA$. And $\angle PMQ = \angle AMD = \angle AND = \angle RNP = \angle RMP$. From this $\triangle ARM = \triangle AQM(a.s.a)$. We deduce $\angle ARM = \angle AQM$ but $\angle PRM = \angle PQM = 90°$ deduce $\angle PRA = \angle PQA$. We are done. $\square$

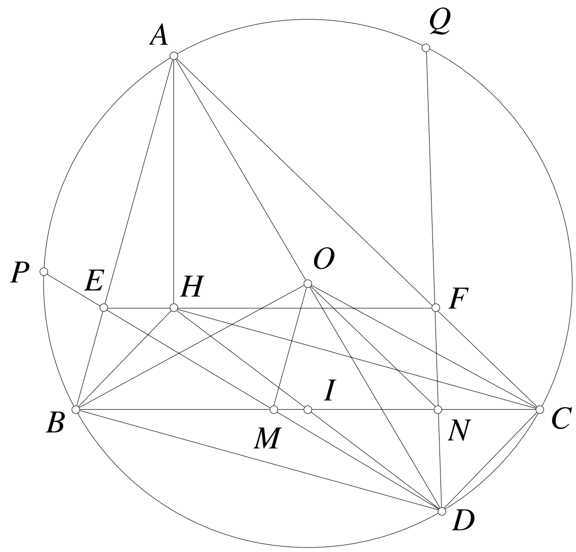
Problem 6. Let ABC be right triangle with hypotenus BC, bisector BE, E lies on CA. Assume that circumcircle of triangle BCE cuts segment AB again at F. K is projection of A on BC. L lies on segment AB such that $BL = BK$. Prove that $\dfrac{AL}{AF} = \sqrt{\dfrac{BK}{BC}}$.



Hnh 6.

Solution. Let H be projection of E on BC. We easily seen $EA = EH, BH = BA$ and $BCEF$ is cyclic so $\angle AFE = \angle ECH$ deduce AFE and HCE are congruent. From this, $BC = HB + HC = BA + AF$. We have $BA^2 = BK.BC = BK(BA + AF)$ deduce $BK.AF = BA(BA - BK) = BA(BA - BL) = BA.AL$. From this $\dfrac{AL}{AF} = \dfrac{BK}{BA} = \dfrac{BA}{BC}$ thus $\dfrac{AL}{AF} = \sqrt{\dfrac{BK}{BA}.\dfrac{BA}{BC}} = \sqrt{\dfrac{BK}{BC}}$. We are done. $\square$

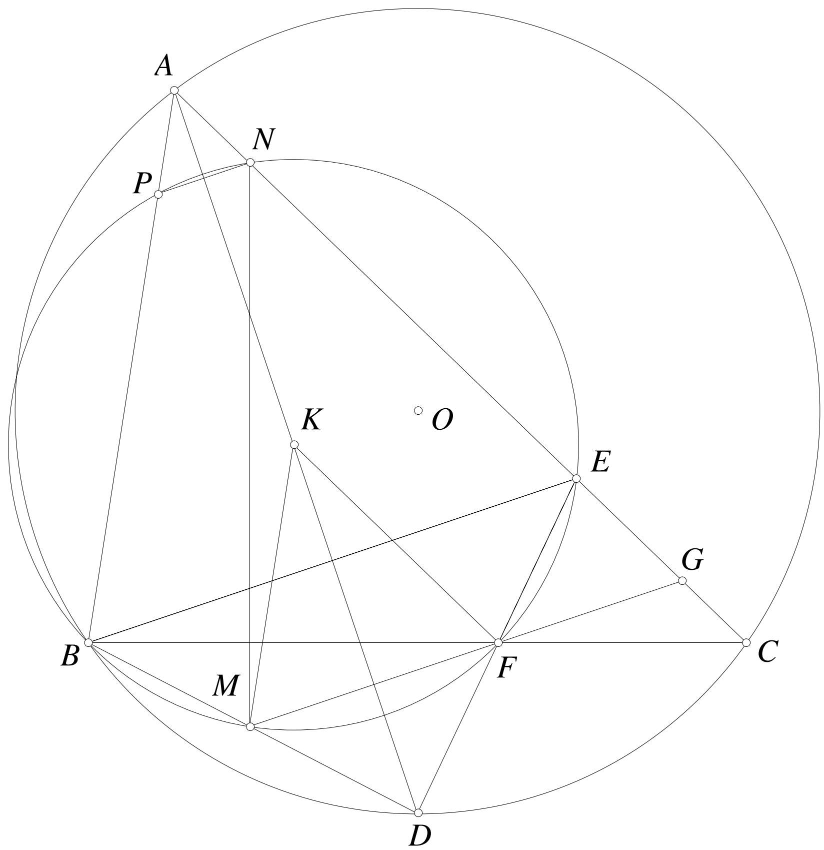
Problem 7. Let ABC be acute triangle inscribed circle (O). AD is diamater of (O). M, N lie on BC such that $OM \parallel AB, ON \parallel AC$. DM, DN cut (O) again at P, Q. Prove that $BC = DP = DQ$.



Hnh 7.

Solution. We easily seen $HCDB$ is parallelogram so H and D are symmetric through midpoint I of BC. Let DM, DN cut CA, AB at E, F, reps. Because O is midpoint of AD and $OM \parallel AE$ so M is midpoint of DE. Similarly N is midpoint of DF. Triangle FDB right at B and M is midpoint of FD so $MB = MD$. But $OB = OD$ thus OM is perpendicular bisector of BD therefore MO is bisector of $\angle FMN$. Similarly, NO is bisector of $\angle ENM$ deduce O is D-excenter of DMN. So O is equidistance to MN, DM and DN so $DP = DQ = BC$. We are done. $\square$

Problem 8. Let ABC be acute triangle with $AB < AC$ inscribed cirle (O). Bisector of $\angle BAC$ cuts (O) again at D. E is reflection of B through AD. DE cuts BC at F. Let (K) be circumcircle of triangle BEF. BD, EA cut (K) again at M, N, reps. Prove that $\angle BMN = \angle KFM$.



Hnh 8.

Solution. We easily seen E lies on AC. AD is perpedicular bisector of BE so K lies on AD or AD is reflection axis of (K). Hence if AB cuts (K) again at P then $AN = AP$. Thus $\angle BMN = \angle ANP = 90° - \angle NAD = 90° - \angle CBD$. We deduce $MN \perp BF$, therefore $\angle BMN = \angle KMF = \angle KFM$. $\square$

Hai bài hình học thi Olympic chuyên KHTN 2015

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết tập trung khai thác đề thi Olympic chuyên KHTN năm 2015.

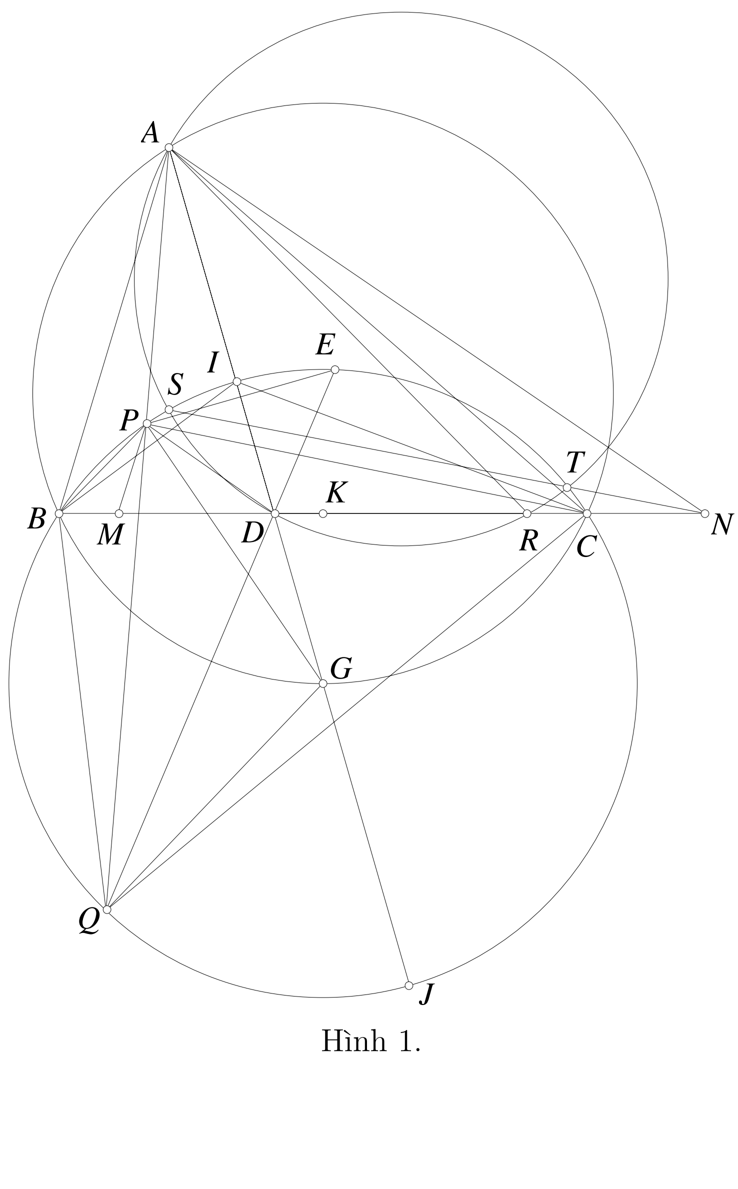
1 Bài hình học thi Olympic chuyên KHTN ngày thứ nhất

Kỳ thi Olympic chuyên KHTN ngày thứ nhất [1] có bài hình học như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I và AI cắt BC tại D. Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại P, Q sao cho P nằm giữa A, Q.

a) Chứng minh rằng tích $DP.DQ$ luôn không đổi khi P, Q thay đổi.

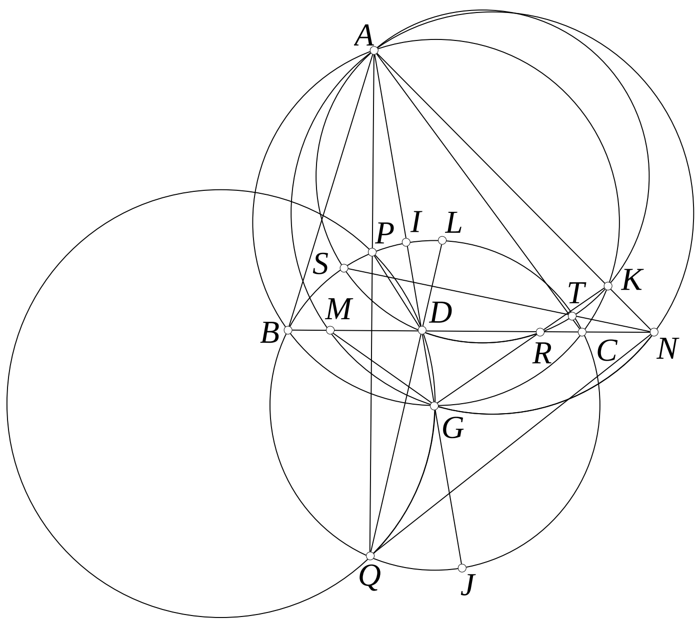
b) Giả sử đoạn thẳng PQ cắt đoạn thẳng BD. Trên đoạn DB lấy các điểm M sao cho $DM = DP$. Lấy R đối xứng M qua trung điểm BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADR cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại S, T. ST cắt BC tại N. Chứng minh rằng tam giác DNQ cân.



Hình 1.

Lời giải 1. a) Gọi DQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại E khác Q. AI cắt (O) ngoại tiếp tam giác ABC tại G khác A và J là tâm bàng tiếp góc A. Ta thấy $GP^2 = GB^2 = GD.GA$. Từ đó suy ra $\angle ADP = \angle GPQ = \angle GQP$ vậy tứ giác $PDGQ$ nội tiếp. Từ đó $\angle PDI = \angle PQG = \angle GPQ = \angle GDQ = \angle EDI$. Vậy P, E đối xứng nhau qua AI suy ra $DP.DQ = DE.DQ = DB.DC$ không đổi. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta dễ thấy $NB.NC = NS.ST = ND.NR$. Từ đó $\dfrac{NB}{ND} = \dfrac{NR}{NC}$ hay $(BD, N) = (RC, N)$ hay $(ND, B) = (NC, R)$. Tương tự $\dfrac{NC}{ND} = \dfrac{NR}{NB}$ suy ra $(CD, N) = (RB, N)$ hay $(ND, C) = (NB, R)$. Từ đó $(ND, BC) = \dfrac{(ND, B)}{(ND, C)} = \dfrac{(NC, R)}{(NB, R)} = (BC, R)$. Vậy ta có biến đổi $(DN, CB) = (ND, BC) = (BC, R) = (CB, M)$ vậy theo hệ thức Maclaurin mở rộng suy ra $DN.DM = DB.DC = DP.DQ = DM.DQ$. Từ đó $DN = DQ$ nên tam giác DQN cân tại D. □



Hình 2.

Lời giải 2. a) Gọi AD cắt (O) tại G khác A và J là tâm bàng tiếp góc A, QD cắt đường tròn ngoại tiếp IBC tại L khác Q. Ta có $(AD, IJ) = -1$ và G là trung điểm IJ. Theo hệ thức Maclaurin, ta có $AP.AQ = AJ.AI = AD.AG$. Suy ra P, Q, D, G cùng thuộc một đường tròn. Vậy $\angle PDI = \angle PQG = \angle GPQ = \angle GDQ = \angle ADL$ suy ra $DP = DL$. Suy ra $DP.DQ = DL.DQ = DB.DC$. Suy ra điều phải chứng minh.

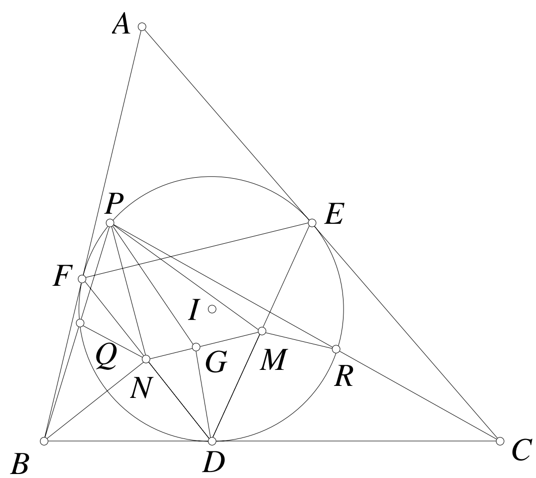
b) Gọi AN cắt ABC tại K khác A. Do $ND.NR = NS.NT = NB.NC = NA.NK$ nên tứ giác $AKRD$ nội tiếp, do đó $\angle AKR = \angle ADB = \angle ACG = \angle AKG$ suy ra K, R, G thẳng hàng. G thuộc trung trực BC suy ra G cũng thuộc trung trực MR. Do $\angle GMN = \angle GRM = \angle GAN$, suy ra A, M, G, N cùng thuộc một đường tròn. Suy ra $DN.DM = DA.DG = DB.DC = DP.DQ$ mà $DP = DM$ suy ra $DQ = DN$ suy ra tam giác DNQ cân tại D. □

Nhận xét. Ý a) lời giải thứ nhất chỉ dùng đến kiến thức THCS với lời giải thứ hai thì cần hàng điểm điều hòa, tuy vậy mỗi cách đều có một cái hay riêng. Nếu ý b) giải như lời giải thứ nhất thì chỉ cần đường tròn bất kỳ đi qua D, R là được nhưng vai trò của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADR thực sự cần thiết trong lời giải thứ 2. Bài toán này có nhiều ý nghĩa, sau đây là một số khai thác ứng dụng

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. M là trung điểm E, F. Một đường thẳng đi qua A cắt (I) tại P, Q. Chứng minh rằng tích $MP.MQ$ không đổi khi đường thẳng thay đổi.

Với bài toán trên là trường hợp đặc biệt của câu a) bài toán gốc, ta chú ý đường tròn nội tiếp (I) đi qua tâm nội tiếp tam giác AEF. Từ đó có điều phải chứng minh. Nếu áp dụng tiếp bài này ta thu được một bài toán thú vị sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. P là một điểm trên (I). PB, PC cắt (I) tại Q, R khác P. Gọi M, N là trung điểm DE, DF. DG là đường đối trung của tam giác AMN. Chứng minh rằng phân giác $\angle MPN$ đi qua G khi và chỉ khi $QN = MR$.



Hình 3.

Lời giải. Theo bài trước ta có $NP.NQ = ND^2$ và $MP.MR = MD^2$. Từ đó theo tính chất đường đối trung $\dfrac{NP.NQ}{MP.MR} = \dfrac{ND^2}{MD^2} = \dfrac{GN}{GM}$. Vậy $NQ = MR$ khi và chỉ khi $\dfrac{NP}{MP} = \dfrac{GN}{GM}$ khi và chỉ khi PG là phân giác của tam giác PMN. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Ý b) của bài toán 1 có thể viết lại độc lập hơn với ý a) như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I và AI cắt BC tại D. P là một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và nằm trong tam giác ABC. Giả sử AP cắt đoạn BD. Trên đoạn DB lấy điểm M sao cho $DM = DP$. Lấy R đối xứng M qua trung điểm BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADR cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại S, T. ST cắt BC tại N. Chứng minh rằng đường tròn (D, DN) và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau trên PD.

Lời giải hoàn toàn tương tự

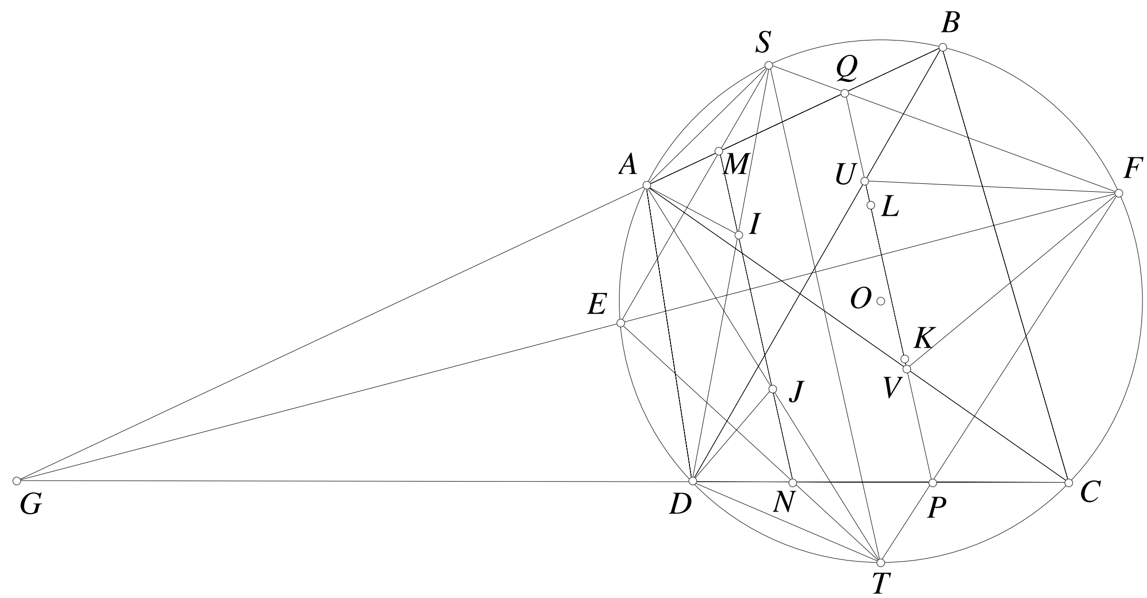
2 Bài hình học thi Olympic chuyên KHTN ngày thứ hai

Kỳ thi Olympic chuyên KHTN ngày thứ nhất [2] có bài hình học như sau

Bài toán 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAD, CAD. Gọi DI, AJ lần lượt cắt (O) tại S, T khác D, A. Đường thẳng IJ lần lượt cắt AB, CD tại M, N.

a) Chứng minh rằng SM và TN cắt nhau trên đường tròn (O).

b) Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q khác M. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC.



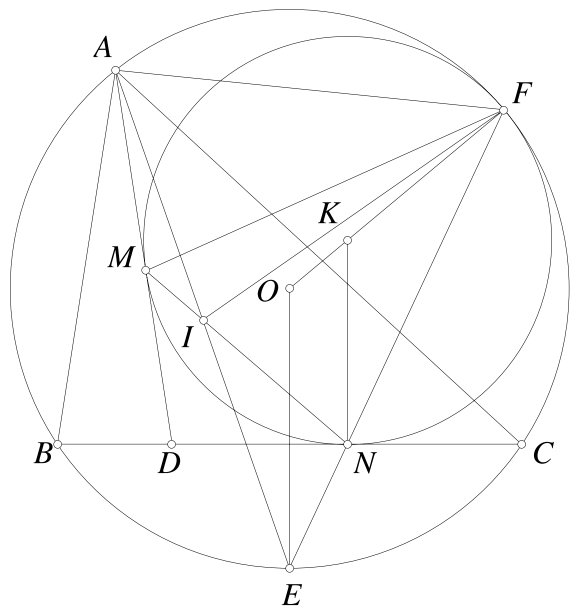
Hình 4.

Lời giải. a) Dễ thấy tam giác SAI và DTJ cân và có $\angle ASI = \angle DTJ$ nên hai tam giác đó đồng dạng. Lại dễ chứng minh tứ giác $AIJD$ nội tiếp nên $\angle MAI = \angle IAD = \angle DJN$ và $\angle NDJ = \angle JDA = \angle AIM$. Từ đó hai tam giác MAI và NJD đồng dạng. Từ đó suy ra SMA và TNJ đồng dạng. Vậy $\angle ASM = \angle NTJ$ do đó SM và TN cắt nhau tại E trên đường tròn (O).

b) Gọi AB cắt CD tại G. GE cắt (O) tại F khác E. Ta thấy $GC.GD = GE.GF = GM.GQ$. Từ đó tứ giác $MQFE$ nội tiếp nên $\angle QFE = \angle AME = \angle MAS + \angle MSA = \angle MBS + \angle AFE = \angle SFA + \angle ASE = \angle EFS$. Từ đó S, Q, F thẳng hàng. Tương tự T, P, F thẳng hàng. Từ chứng minh trên SMA và TNJ đồng dạng nên tam giác GMN cân suy ra $GM = GN$. Lại có $GM.GQ = GN.GP$ nên $GP = GQ$ suy ra $PQ \parallel MN \parallel ST$. Từ đó đường tròn nội tiếp tam giác FPQ tiếp xúc (O). Vậy theo định lý Poncelet nếu PQ cắt DB, AC tại U, V thì đường tròn ngoại tiếp tam giác FUV cũng tiếp xúc (O) và tiếp xúc DB, AC. Từ đó theo định lý Thebault thì PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC. □

Nhận xét. Đây là bài toán sử dụng hai bổ đề quan trọng là định lý Sawayama và Thebaut và định lý Poncelet. Chú ý rằng với định lý Sawayama và Thebaut thì hiểu một cách chặt chẽ phải phát biểu trên đường chéo của tứ giác nội tiếp, do đó việc sử dụng định lý Poncelet để đưa về đường tròn FUV tiếp xúc với CA, BD là cần thiết. Chúng tôi xin nhắc lại hai định lý này phần tiếp sau

Bài toán 6 (Định lý Sawayama và Thébault)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng MN đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.



Hình 5.

Chứng minh này tham khảo [4]

Lời giải. Gọi phân giác góc $\angle BAC$ cắt (O) tại E khác A. AE cắt MN tại I. (K) tiếp xúc (O) tại F. Dễ có E, N, F thẳng hàng và $EB^2 = EC^2 = EN.EF$.

Ta lại có $\angle FMN = \dfrac{1}{2}\angle FKN = \dfrac{1}{2}\angle FOE = \angle FAE$ suy ra tứ giác $AFIM$ nội tiếp. Suy ra $\angle IFN = \angle MFN - \angle MFI = \angle DMN - \angle MFI = \angle AFI - \angle MFI = \angle AFM = \angle AIM = \angle EIN$. Từ đó $\triangle EIN \sim \triangle EFI$ suy ra $EI^2 = EN.EF = EC^2 = EB^2$. Suy ra I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 7 (Định lý Poncelet)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) tiếp xúc AB, CD tại M, N. Đường tròn (L) tiếp xúc với AC, BD tại P, Q. Chứng minh rằng nếu M, N, P, Q thẳng hàng thì $(K), (L)$ và (O) đồng trục.

Chứng minh chi tiết và mở rộng định lý này xem trong [5]

Bài toán gốc có thể phát biểu gọn lại chỉ còn một ý như sau

Bài toán 8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAD, CAD. Đường thẳng IJ lần lượt cắt AB, CD tại M, N. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q khác M. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC.

Đây là một trong những khai thác thú vị của định lý Thebault. Khai thác này hoàn toàn có thể viết trên các đường chéo như sau

Bài toán 9. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAD, CAD. Đường thẳng IJ lần lượt cắt AC, BD tại M, N. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ACN cắt BD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM cắt AC tại Q khác M. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC.

Bài toán có một mở rộng khác đơn giản nhưng thú vị như sau

Bài toán 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi S, T là trung điểm các cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$. M, N lần lượt thuộc AB, CD. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q khác M. Chứng minh rằng SM và TN cắt nhau trên (O) khi và chỉ khi SQ và TP cắt nhau trên (O).

Tài liệu

[1] Đề hình học thi Olympic chuyên KHTN năm 2015 ngày thứ nhất
http://www.artofproblemsolving.com/community/
c6t48f6h1086852_constant_product_and_isocesles_triangles

[2] Đề hình học thi Olympic chuyên KHTN năm 2015 ngày thứ hai
http://www.artofproblemsolving.com/community/
c6t48f6h1087174_lines_intersect_on_circle_and_pass_through_incenters

[3] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài hình học chọn đội tuyển KHTN.

[4] Trần Quang Hùng, Xung quanh một bài toán hình học trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014
http://analgeomatica.blogspot.com/2014/03/xung-quanh-mot-bai-toan-hinh-hoc-trong.html

[5] Topic 3 circles with common tangency point
http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h474157p4809875

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Mở rộng bài hình học trong IMO shortlist 2011

Trần Quang Hùng

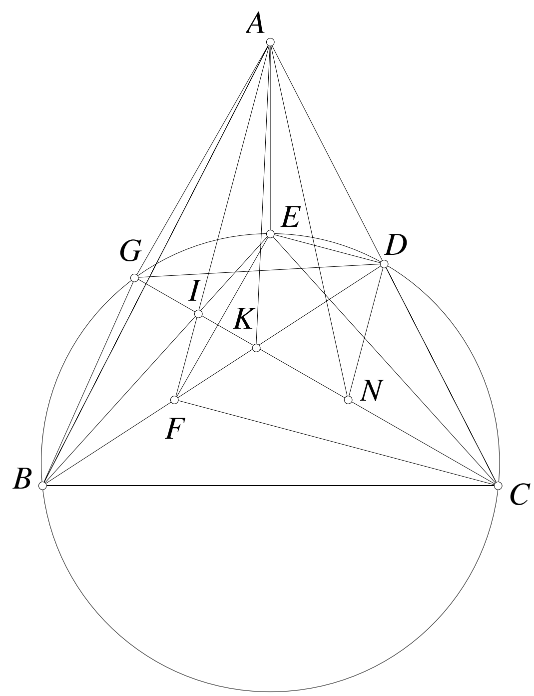
Tóm tắt nội dung

Bài viết mở rộng và chứng minh bài hình học G6 trong IMO shortlist 2001

Trong IMO shortlist 2001 có bài hình học G6 rất hay như sau [1]

Bài toán 1. Cho tam giác ABC cân tại A với D là trung điểm AC. Phân giác góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại E nằm trong tam giác ABC. BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB tại F khác B. AF cắt BE tại I. CI cắt BD tại K. Chứng minh rằng I là tâm nội tiếp tam giác KAB.

Lời giải sau tác giả kết hợp ý tưởng của junioragd và JuanOrtiz trong [1]

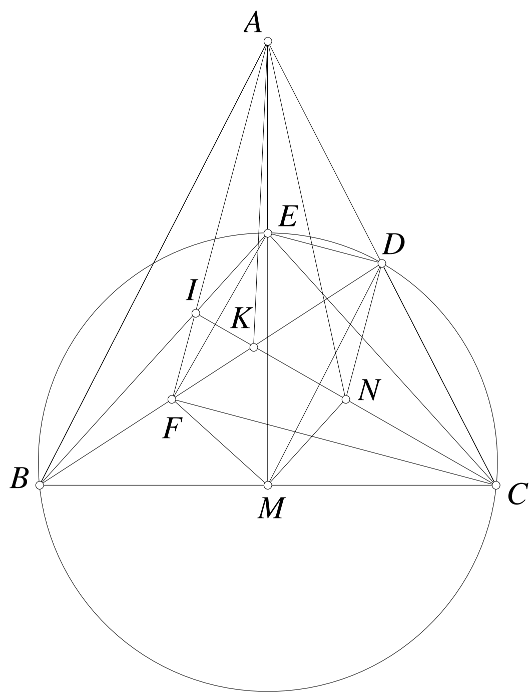


Hình 1.

Lời giải 1. Dễ thấy BE là phân giác $\angle ABD$ nên E là trung điểm $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF. Từ đó tam giác AEF cân lại dễ thấy DE là phân giác $\angle ADF$. Từ đó theo một tính chất quen thuộc của tam giác cân thì tam giác DAF cân. Vậy $DA = DC = DF$ nên tam giác AFC vuông tại F. Gọi CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại G khác C. Ta có $IG.IC = IA.IB = IF.IA$ nên tứ giác $AGFC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC. Từ đó $KB.KD = KG.KC = DA^2 - DK^2$ suy ra $DA^2 = KB.KD + KD^2 = DK.DB$. Từ đó $\angle DAK = \angle DAB$. Lại có $\angle GKA = \angle KGD + \angle KDG = \angle DCG + \angle GCB = \angle ACB$. Vậy $\angle GKA = 180° - \angle DKA - \angle GKB = 180° - \angle BAC - \angle ABC = \angle ACB = \angle ABC = \angle GKA$. Từ đó I là tâm nội tiếp tam giác ABK. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Lời giải trên chứng minh tâm nội tiếp bằng cách chỉ ra điểm đó là giao hai phân giác. Việc chứng minh góc bằng nhau được xử lý qua các hệ thức lượng mang lại rất nhiều ý nghĩa.

Lời giải sau xử dụng ý tưởng của XmL trong [1]



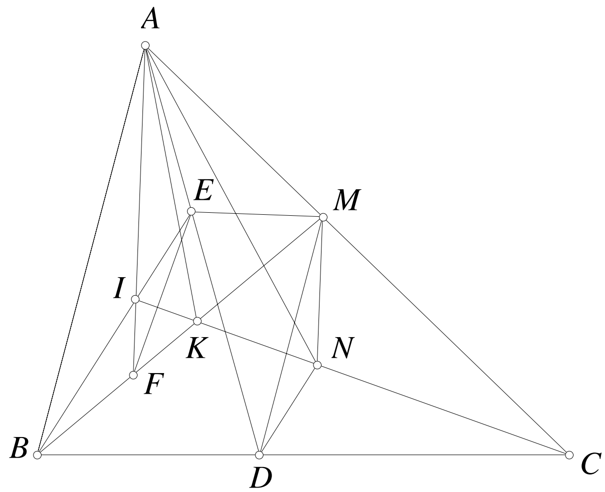
Hình 2.

Lời giải 2. Dễ thấy BE là phân giác $\angle ABD$ nên E là tâm nội tiếp tam giác ABD và cũng có E là trung điểm $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF nên hai tam giác EAI và EBA đồng dạng. Gọi N là trung điểm IC. Dễ thấy tam giác MND và BIA có cạnh tương ứng song song nên và chú ý hai tam giác EAI và EBA đồng dạng, ta có $\angle MND = \angle AIB = 180^\circ - \angle AIE = 180^\circ - \angle EAB = 180^\circ - \angle MAD$. Vậy tứ giác $ADNM$ nội tiếp. Vậy $\angle DAN = \angle DMN = \angle IBA = \angle IBF = \angle IAE$. Lại có $\angle DNA = \angle DMA = \angle BAE = \angle AIE$. Vậy hai tam giác ADN và AEI đồng dạng. Từ đó hai tam giác AIN và AED đồng dạng. Vậy $\angle AIN = \angle AED = 90^\circ + \dfrac{\angle ABD}{2}$ nên I là tâm nội tiếp tam giác ABK. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải xử dụng ý tưởng quan trọng để chứng minh tâm nội tiếp chính là nếu có điểm I nằm trên phân giác trong góc $\angle BAC$ và nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle BIC = 90^\circ + \dfrac{\angle A}{2}$ thì I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Một cách tự nhiên chúng ta thấy bài toán phát biểu trên tam giác cân vậy ta suy nghĩ xem liệu với tam giác bất kỳ thì sao. Tối đã tổng quát bài toán trên tam giác bất kỳ như sau xem [2]

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với phân giác AD. M thuộc CA sao cho $DM \parallel AB$. Phân giác $\angle ABM$ cắt AD tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt BM tại F khác B. AF cắt BE tại I. CI cắt BM tại K. Chứng minh rằng I là tâm nội tiếp tam giác KAB.

Ý tưởng chứng minh tương tự bài toán gốc, lời giải sau xử dụng ý tưởng của XmL trong [2]

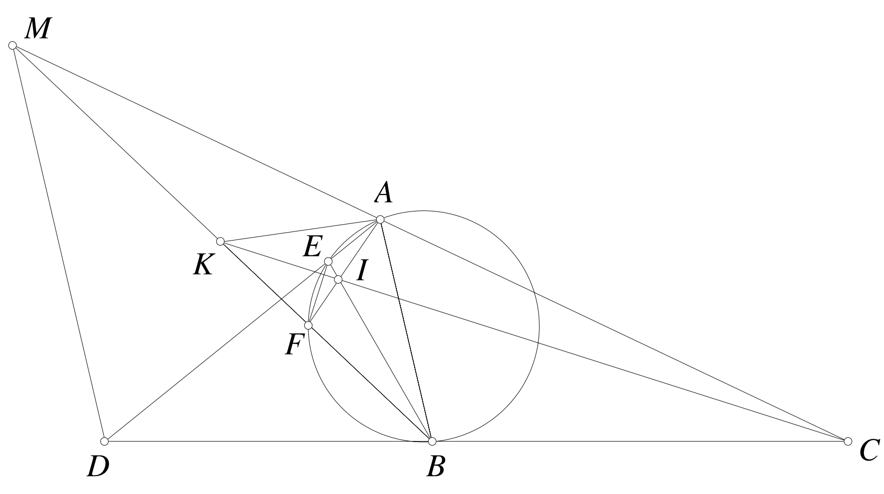


Hình 3.

Lời giải. Do BE là phân giác $\angle ABD$ nên E là tâm nội tiếp tam giác ABD và cũng có E là trung điểm $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF nên hai tam giác EAI và EBA đồng dạng. Gọi N là điểm thuộc IC sao cho $MN \parallel IA$ từ $DM \parallel AB$ suy ra $DN \parallel IB$. Từ đó $\angle MND = \angle AIB = 180^\circ - \angle EIA = 180^\circ - \angle EIA = 180^\circ - \angle EAB = 180^\circ - \angle EAC$ suy ra tứ giác $AMND$ nội tiếp. Từ đó $\angle MAN = \angle MDN = \angle ABI = \angle IBF = \angle IAE$. Lại có $\angle MNA = \angle MDA = \angle DAB = \angle EIA$. Vậy hai tam giác AEI và AMN đồng dạng. Suy ra hai tam giác AIN và AEM đồng dạng. Từ đó $\angle AIN = \angle AEM = 90^\circ + \dfrac{\angle ABM}{2}$ nên I là tâm nội tiếp tam giác ABK. Ta có điều phải chứng minh. □

Việc phát biểu bài toán trên phân giác trong sẽ gợi cho chúng ta một cách phát biểu trên phân giác ngoài như sau

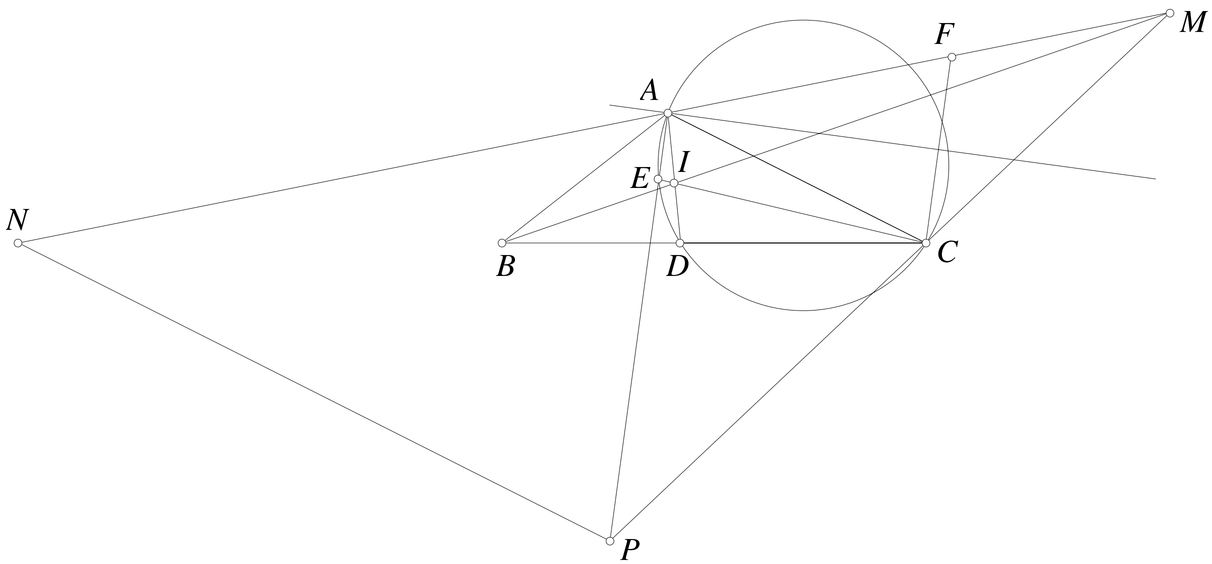
Bài toán 3. Cho tam giác ABC với phân giác ngoài AD. M thuộc đường thẳng CA sao cho $DM \parallel AB$. Phân giác $\angle ABM$ cắt AD tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt BM tại F khác B. AF cắt BE tại I. CI cắt BM tại K. Chứng minh rằng I là tâm nội tiếp tam giác KAB.



Hình 4.

Lời giải cho trường hợp phân giác ngoài hoàn toàn tương tự. Chúng ta đi tới một số ứng dụng sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với phân giác AD và tâm nội tiếp I. CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD tại E khác C. F là đối xứng của C qua đường thẳng qua A vuông góc AE. AF cắt BI, BC tại M, N. MC cắt AE tại P. Chứng minh rằng $NP \parallel AC$.



Hình 5.

Tài liệu

[1] IMO Shortlist 2011, G6
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h488831p2739334

[2] Prove that I is incenter
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h520297p2930447

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Hai bài hình học thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN 2015

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết sẽ giải và phân tích hai bài hình học thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN 2015.

Thông thường bài thi phần hình học hay là bài toán phân loại được học sinh và đề bài có ý nghĩa. Các câu trong đề liên quan chặt chẽ tới nhau, câu trước gợi ý cho câu sau và nếu chỉ dùng một câu cuối cùng thì bài toán trở thành đẹp có ý tưởng. Chúng ta hãy cùng đi sâu vào hai bài thi năm nay

1 Bài hình học ngày thứ nhất

Để thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN 2015 vòng 1 có bài hình học như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. AI cắt BC tại D. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của D qua IC, IB.

a) Chứng minh rằng EF song song với BC.

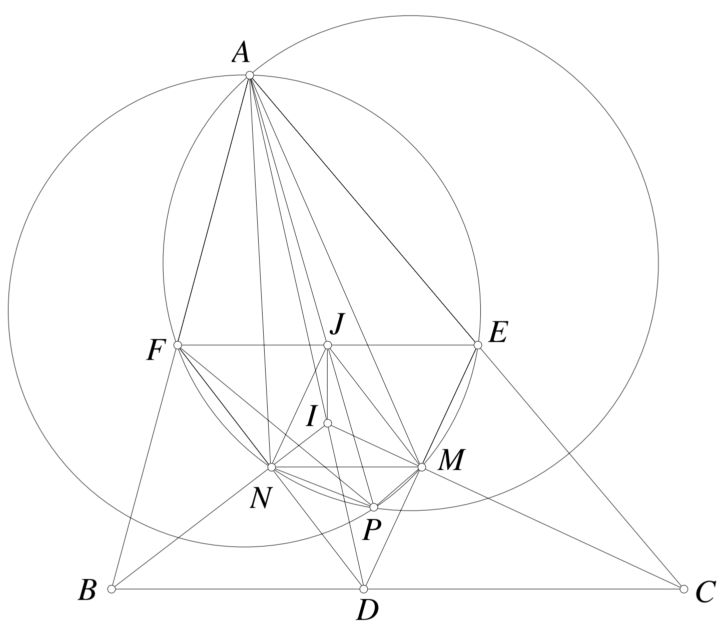
b) Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm của DE, DF, EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM và AFN cắt nhau tại P khác A. Chứng minh rằng bốn điểm P, M, J, N cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh rằng ba điểm A, J, P thẳng hàng.

Bài toán này là kết quả có ý nghĩa, nếu bỏ đi các phần gợi ý, bài toán có thể phát biểu như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. AI cắt BC tại D. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của D qua IC, IB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, DF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM và AFN cắt nhau tại P khác A. Chứng minh rằng AP chia đôi BC.

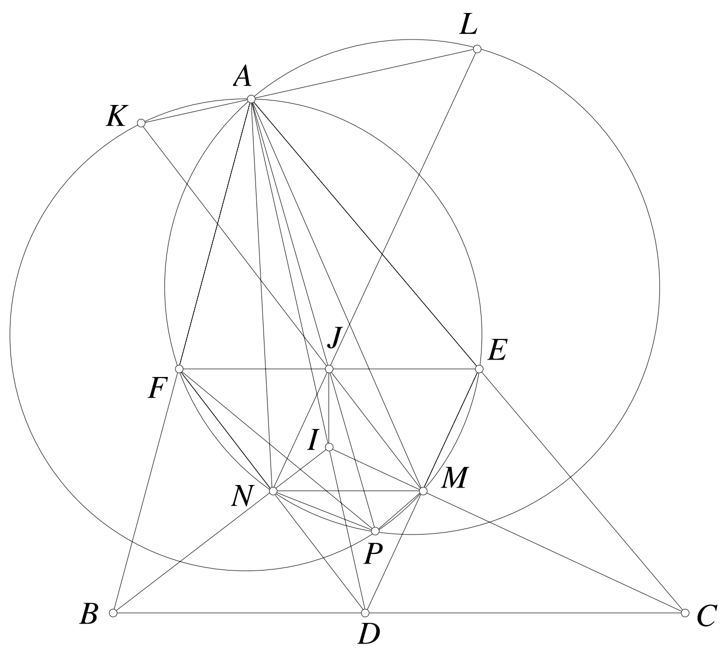
Lời giải đi theo hướng của bài toán hẳn nhiên là một lời giải thuần túy hình học chỉ dùng kiến thức lớp 9



Hình 1.

Lời giải 1. Theo tính chất đối xứng của phân giác dễ thấy E, F lần lượt thuộc CA, AB. Từ đó theo tính chất phân giác $\dfrac{BF}{BA} = \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{CE}{CA}$ vậy $EF \parallel BC$. Gọi J là trung điểm EF ta có $\angle MPN = \angle MPA + \angle NPA = \angle MEC + \angle NFB = \angle MDC + \angle NDB = 180° - \angle MDN = 180° - \angle MJN$, suy ra tứ giác $MJNP$ nội tiếp. Từ đó $\angle MPJ = \angle MNJ = \angle MEJ = \angle EDC = \angle DEC = \angle MPA$ suy ra AP chia đôi EF mà $EF \parallel BC$ nên AP chia đôi BC. □

Nhận xét. Đây có thể hiểu là một bài toán trục đẳng phương chia đôi đoạn thẳng. Tuy nhiên lời giải trên hoàn toàn không để cập tới khái niệm trục đẳng phương mà chỉ cần biến đổi góc. Nếu sử dụng ý tưởng về trục đẳng phương ta sẽ đề xuất lời giải thứ 2 như sau



Hình 2.

Lời giải 2. Gọi J là trung điểm EF. Gọi MJ, NJ cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và AFN tại K, L khác M, N. Ta thấy $\angle KAL = \angle NAL + \angle MAK - \angle BAC = 180° - \angle FNL + 180° - \angle EMK - \angle BAC = 360° - 2\angle EDF - \angle BAC = 360° - 2(180° - \angle BIC) - \angle BAC = 2(90° + \dfrac{\angle ABC}{2}) - \angle BAC = 180°$. Từ đó K, A, L thẳng hàng. Vậy $\angle KLN = \angle ALN = \angle BFD = \angle BDF = \angle EFD = \angle JMN$. Từ đó tứ giác $MNKL$ nội tiếp vậy J thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM và AFN hay AP đi qua J vậy AP chia đôi BC. □

Nhận xét. Bài toán này là một bài toán chia đôi đoạn thẳng thú vị. Nếu sử dụng biến hình vị tự các bạn có thể làm tiếp bài ứng dụng sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. IA cắt BC tại D. E, F là hình chiếu của D lên IC, IB. AE cắt phân giác ngoài ở đỉnh C tại M. AF cắt phân giác ngoài ở đỉnh B tại N. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM và ABN chia đôi BC.

2 Bài hình học ngày thứ hai

Để thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN 2015 vòng 2 có bài hình học như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ và M là trung điểm BC. H là hình chiếu của B lên AM. Trên tia đối tia AM lấy điểm N sao cho $AN = 2MH$.

a) Chứng minh rằng $BN = AC$.

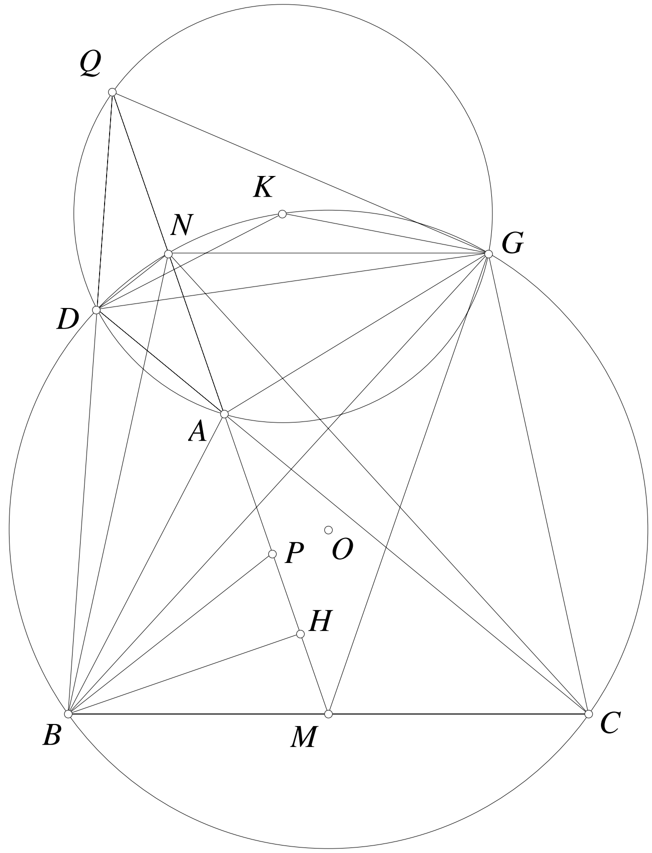
b) Gọi Q đối xứng với A qua N. Gọi AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng bốn điểm B, D, N, C cùng thuộc một đường tròn. Gọi đường tròn này là (O).

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQD cắt (O) tại G khác D. Chứng minh rằng NG song song với BC.

Bài toán là kết quả có ý nghĩa, nếu bỏ đi các phần gợi ý bài toán trở thành như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ và M là trung điểm BC. H là hình chiếu của B lên AM. Lấy điểm Q trên tia đối tia AM sao cho $AQ = 4MH$. AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Lời giải. Gọi N là trung điểm AQ. Gọi P đối xứng M qua H thì $BP = MB = MC$. Lại có $AN = 2MH = MP$ suy ra $NP = AM$. Lại có tam giác BPM cân tại B nên $\angle BPM = \angle BMP$ suy ra $\angle BPN = \angle AMC$. Từ đó suy ra hai tam giác BPN và CMA bằng nhau trường hợp c.g.c, từ đó $BN = AC$. Cũng từ hai tam giác BPN và CMA bằng nhau suy ra $\angle BNP = \angle MAC$ suy ra $\angle BNQ = \angle NAC$. Lại có $BN = AC$ và $QN = NA$. Từ đó hai tam giác NBQ và ACN bằng nhau c.g.c suy ra $\angle NBQ = \angle NCA$ suy ra tứ giác $BDNC$ nội tiếp đường tròn (O). Khi đó đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác ADQ cắt (O) tại G khác D. Ta có $\angle CAG = \angle BQG$ mà $\angle GBQ = \angle GCA$ suy ra $\triangle GBQ \sim \triangle GCA$, suy ra $\dfrac{GA}{AC} = \dfrac{GQ}{QB} =$ suy ra $\dfrac{GA}{NB} = \dfrac{GQ}{NC}$ mà $\angle BNC = \angle BDC = \angle AGQ$ suy ra $\triangle NBC \sim \triangle GAQ$ suy ra $\angle GQA = \angle NCB$ suy ra $\angle NCB = \angle GDC$ suy ra $GC = NB$ suy ra $NG \parallel BC$. Từ đó $\angle DKG = 2\angle DQG = 2\angle GAC = 2\angle GNM = \angle GNM + \angle BMN = \angle GNM + \angle BPM = \angle GNM + \angle DNM = \angle DNG$. Từ đó tứ giác $DNKG$ nội tiếp. $\square$



Hình 3.

Nhận xét. Kết quả đạt được trong bài toán đòi hỏi phải dựng được điểm N. Tuy nhiên ta cũng có thể chứng minh trực tiếp mà không cần dựng điểm G bằng cách biến đổi góc như sau

Ta có $\angle NKD = \angle NKA - \angle DKA = \dfrac{1}{2}\angle QKA - 2\angle DQA = \dfrac{1}{2}(360^\circ - 2\angle QDA) - 2\angle DQA = 180^\circ - \angle QDA - 2\angle DQA = \angle BDC - 2\angle ANC = \angle BNA - \angle ANC = \angle MAC - \angle ANC = \angle ACN$. Từ đó tứ giác $DNKC$ nội tiếp. Tuy vậy việc chỉ ra $NG \parallel BC$ sẽ dẫn tới nhiều hệ quả thú vị.

Ta lại để ý rằng, khác với nhiều bài toán khác trong bài toán này điều kiện $AB < AC$ là cần thiết để bài toán đúng. Điều kiện $AB < AC$ có thể diễn giải là tương đương với $\angle AMB < 90^\circ$ hay để cho H luôn nằm trên đoạn AM. Khi đó ta dễ dàng tính được đoạn $MH = \dfrac{AC^2 - AB^2}{2AM}$. Do đó ta đề xuất bài toán như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ và M là trung điểm BC. Lấy điểm Q trên tia đối tia AM sao cho $2AQ.AM = AC^2 - AB^2$. Gọi AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Ta thử ứng dụng bài toán trên vào một vấn đề khác như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC với $AB < AC$, tâm nội tiếp I, tâm ngoại tiếp O, trung tuyến AM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC cắt CA tại N khác C. Lấy điểm Q trên đia đối tia AM sao cho $AQ.AM = CB.CN$. Gọi AC cắt BQ tại D. Giả sử I nằm trên đường tròn đường kính OA. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Tài liệu

[1] Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN năm 2015-2016

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về một bài toán hình học trong đề thi Olympic Sharygin 2014 vòng cuối

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết tìm hiểu phân tích, tổng quát và ứng dụng một bài toán hình học đẹp trong đề thi Olympic Sharygin 2014 vòng cuối.

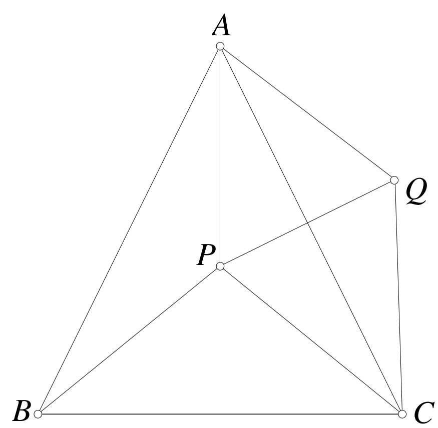
1 Bài toán và lời giải

Trong đề thi Olympic hình học Sharygin vòng cuối của Nga [1]. D.Shvetsov đề nghị bài toán hình học rất thú vị như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với góc $\angle A = 60^\circ$ và phân giác AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OAD cắt (O) tại E khác A. Chứng minh rằng $AE \perp BC$.

Sau đây tôi xin đưa ra lời giải của mình cho bài toán này. Trước hết ta chứng minh một nhận xét rất quan trọng của tam giác cân trong chương trình hình lớp 7 như sau

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC cân tại A và điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC$. Thì $PB = PC$.

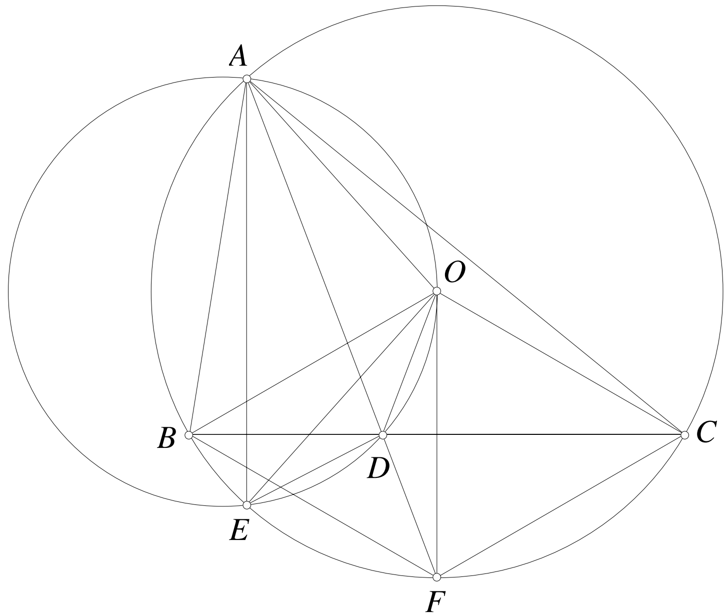


Hình 1.

Chứng minh. Dựng tam giác APQ cân tại A sao cho Q và P khác phía với AC và $\angle PAQ = \angle BAC$. Từ đó dễ chứng minh $\triangle APB = \triangle AQC$ $(c.g.c)$ suy ra $PB = QC$ và $\angle AQC = \angle APB = \angle APC$. Lại có tam giác APQ cân nên suy ra $\angle APQ = \angle AQP$. Từ đó $\angle CPQ = \angle CQP$. Vậy tam giác CPQ cân tại C nên $PC = CQ = PB$. □

Nhận xét. Bài toán sẽ đúng với P nằm ngoài tam giác nhưng ở miền trong góc $\angle BAC$ hoặc miền góc đối đỉnh của $\angle BAC$. Bổ đề này dùng kiến thức đơn giản nhưng nhiều ứng dụng trong nhiều bài toán khác nhau.

Trở lại bài toán 1.

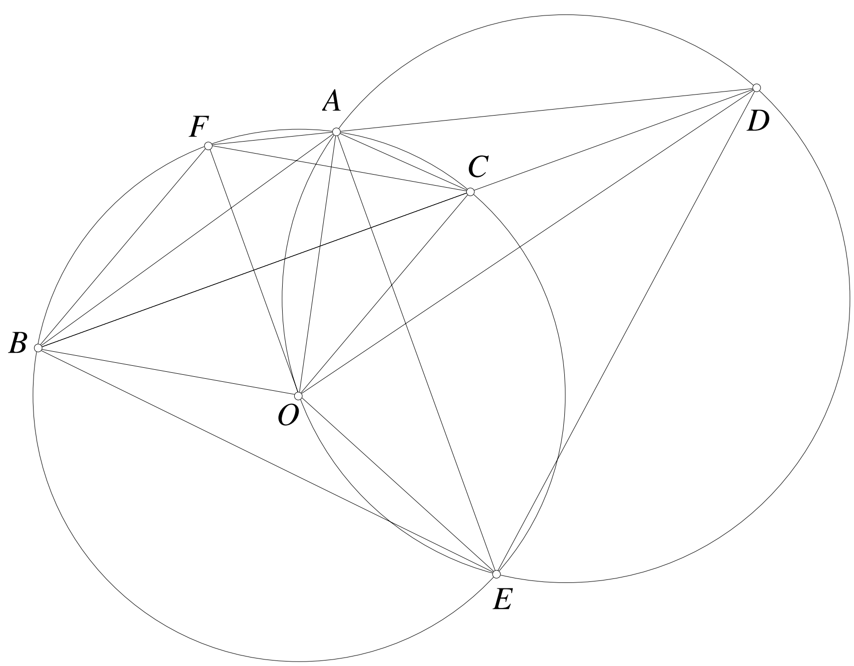


Hình 2.

Lời giải. Gọi AD cắt (O) tại F khác A. Ta có $\angle ODF = 180^\circ - \angle ODA = 180^\circ - \angle OEA = 180^\circ - \angle OAE = \angle ODE$. Lại có tam giác OEF cân tại O nên theo bổ đề $DE = DF$ suy ra $\angle EOD = \angle FOD$. Ta dễ thấy hai tam giác OBF và OCF đều từ đó $FO^2 = FC^2 = FD.FA$ vậy $\angle EAD = \angle EOD = \angle FOD = \angle OAF$. Vậy AO, AE đẳng giác nên $AE \perp BC$ □

Ta có ngay một mở rộng đơn giản sau khi thay bằng phân giác ngoài

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với góc $\angle A = 120^\circ$ và phân giác ngoài AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OAD cắt (O) tại E khác A. Chứng minh rằng $AE \perp BC$.



Hình 3.

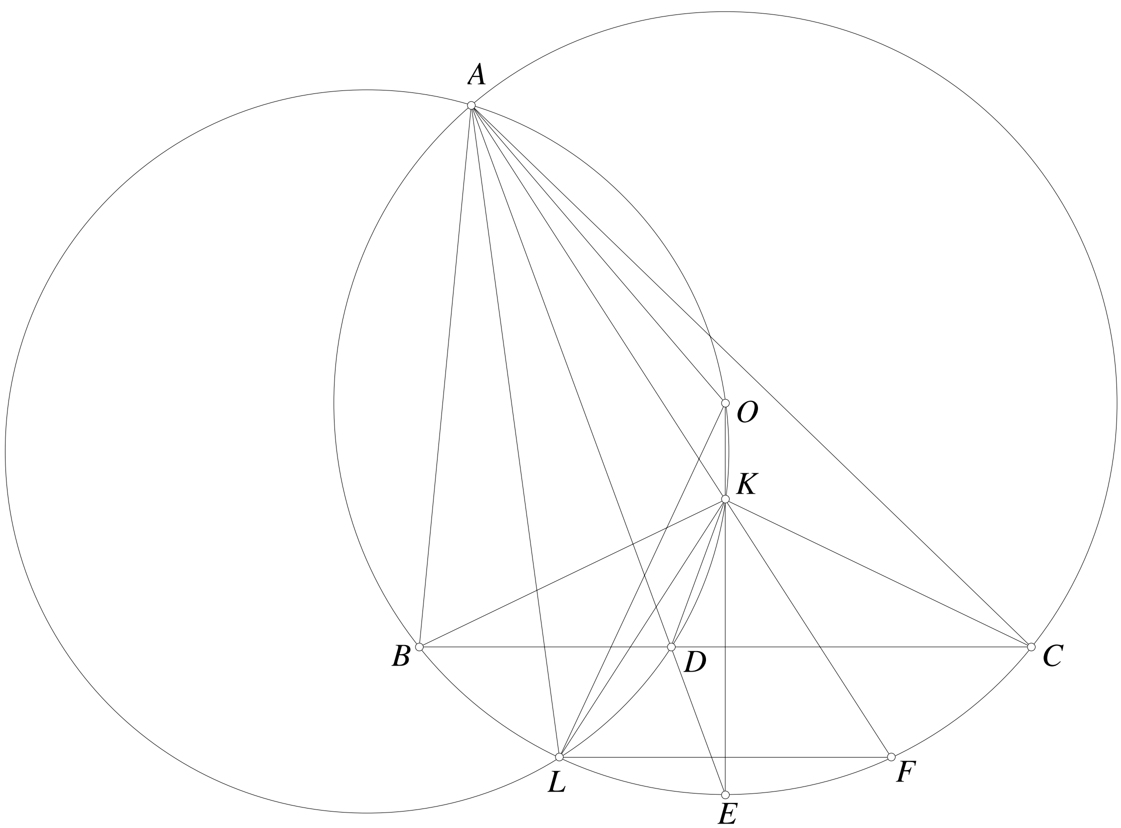
Lời giải. Gọi AD cắt (O) tại F khác A. Ta có $\angle ODF = \angle OEA = \angle OAE = \angle ODE$. Lại có tam giác OEF cân tại O nên theo bổ đề $DE = DF$ suy ra $\angle EOD = \angle FOD$. Ta dễ thấy hai tam giác OBF và OCF đều từ đó $FO^2 = FC^2 = FD.FA$ vậy $\angle FAO = \angle FOD = \angle EOD = \angle EAD$ do AD là phân giác ngoài nên $\angle BAO = \angle CAE$. Vậy AO, AE đẳng giác nên $AE \perp BC$ □

Nhận xét. Cách chứng minh bài toán mở rộng với phân giác ngoài là hoàn toàn tương tự.

2 Mở rộng

Ta có nhận xét là điều kiện bài toán góc $\angle BAC = 60°$ có thể thay thế được. Chúng ta đề xuất bài toán như sau mở rộng bài toán 1

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Điểm K nằm trong tam giác sao cho $KB = KC$ và $\angle BKC + \angle BAC = 180°$. AD là phân giác của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK cắt (O) tại L khác A. Chứng minh rằng $\angle LAB = \angle KAC$.



Hình 4.

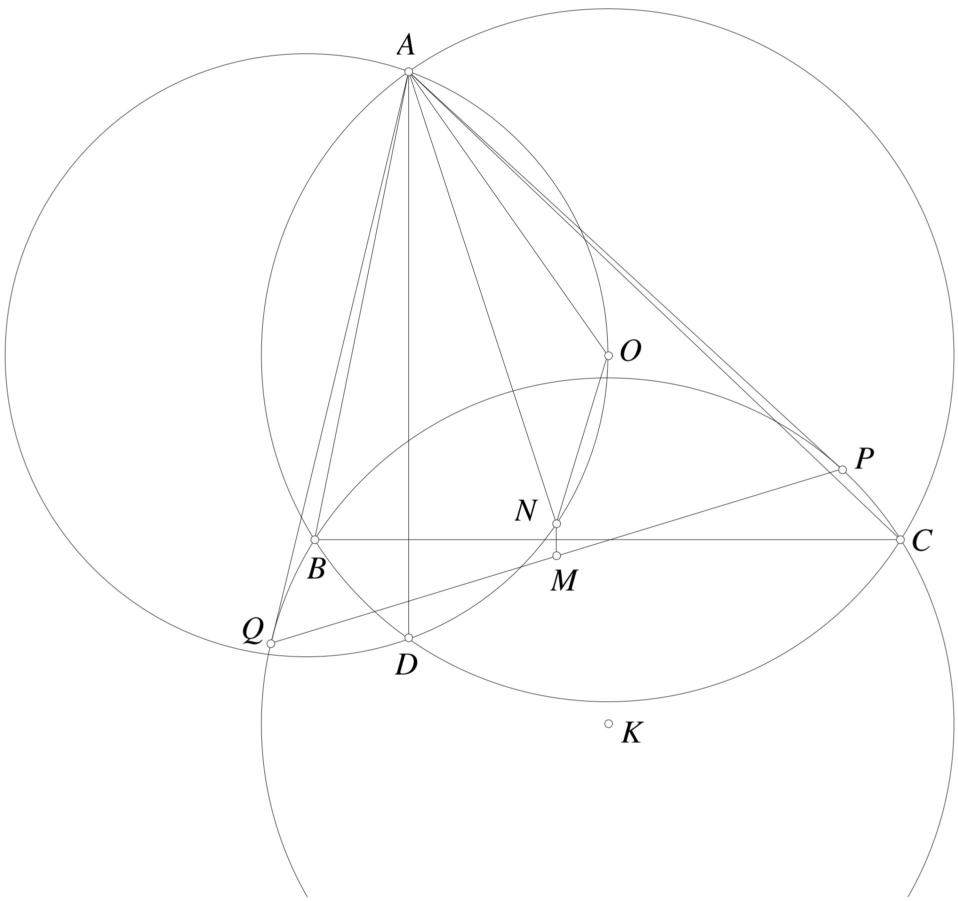
Lời giải. Gọi AD cắt (O) tại E khác A và AK cắt (O) tại F khác A. Ta dễ thấy K và D đối xứng nhau qua BC nên $\angle DKE = \angle DEK = \angle OAD$ do đó tứ giác $AOKD$ nội tiếp. Từ đó ta có biến đổi góc $\angle EKF = \angle OKA = \angle OLA = \angle OAL = \angle LKE$. Từ đó theo tính chất đối xứng dễ suy ra $LF \parallel BC$, vậy $\angle LAB = \angle KAC$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta thấy rằng tuy mở rộng như bài toán mở rộng còn đơn giản hơn bài toán gốc. Chúng ta hoàn toàn có thể áp dụng cách giải bài toán mở rộng này cho bài toán ban đầu bằng cách vẽ thêm đường kính của đường tròn (O) mà không cần dùng bổ đề. Tuy vậy nếu càng hạn chế được vẽ thêm hình mà vẫn có lời giải đẹp được thì càng tốt. Lời giải như ta thấy ở bài toán 1 cũng là một hướng đi đẹp. Chúng ta hoàn toàn có thể phát biểu bài toán tương tự cho phân giác ngoài. Các bạn hãy làm như một bài tập

Bài toán 4. Cho tam giác ABC tù nội tiếp đường tròn (O). Điểm K nằm ngoài tam giác và trong $\angle BAC$ sao cho $KB = KC$ và $\angle BKC = \angle BAC$. AD là phân giác ngoài của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK cắt (O) tại L khác A. Chứng minh rằng $\angle LAB = \angle KAC$.

Ta đi đến một mở rộng khác thú vị như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) đối xứng với (O) qua BC. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ tới (K) với P, Q thuộc (K). M là trung điểm PQ và N đối xứng với M qua BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AON cắt (O) tại D khác A. Chứng minh rằng $AD \perp BC$.



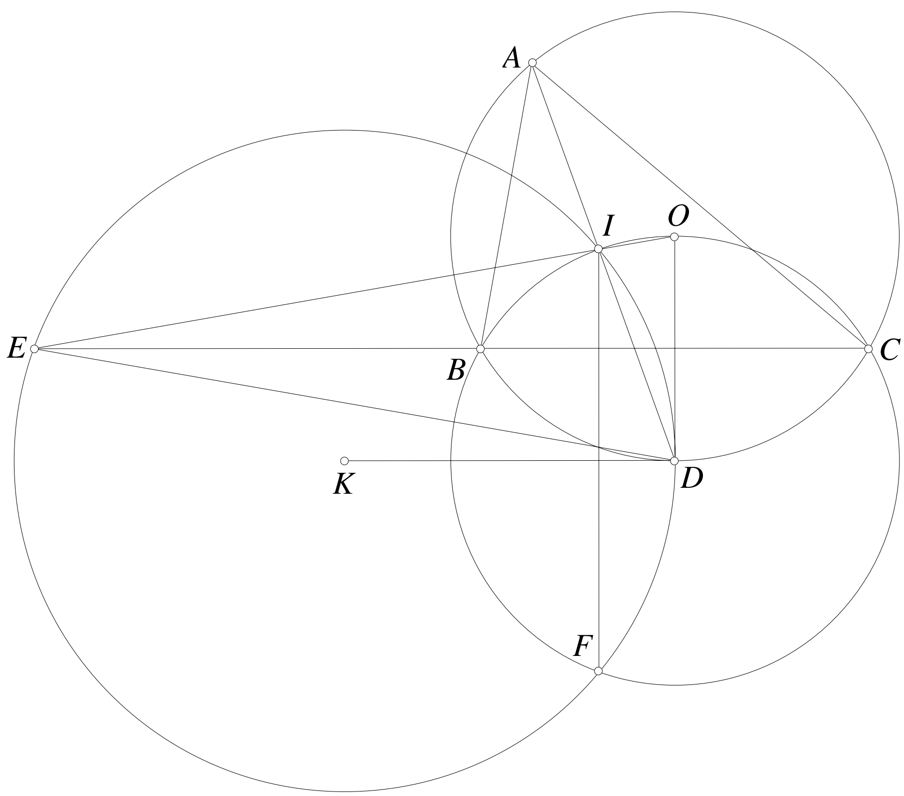
Hình 5.

Nhận xét. Khi $\angle BAC = 60^\circ$ dễ thấy M và N trùng nhau và trùng chân đường phân giác góc $\angle BAC$ trên BC ta thu được bài toán 1. Đây là bài toán thú vị, các bạn hãy thử sức nó như một bài tập.

3 Một số ứng dụng

Cả bài toán gốc và bài toán mở rộng đều có nhiều ứng dụng thú vị, các bạn hãy cùng đến với các bài tập sau

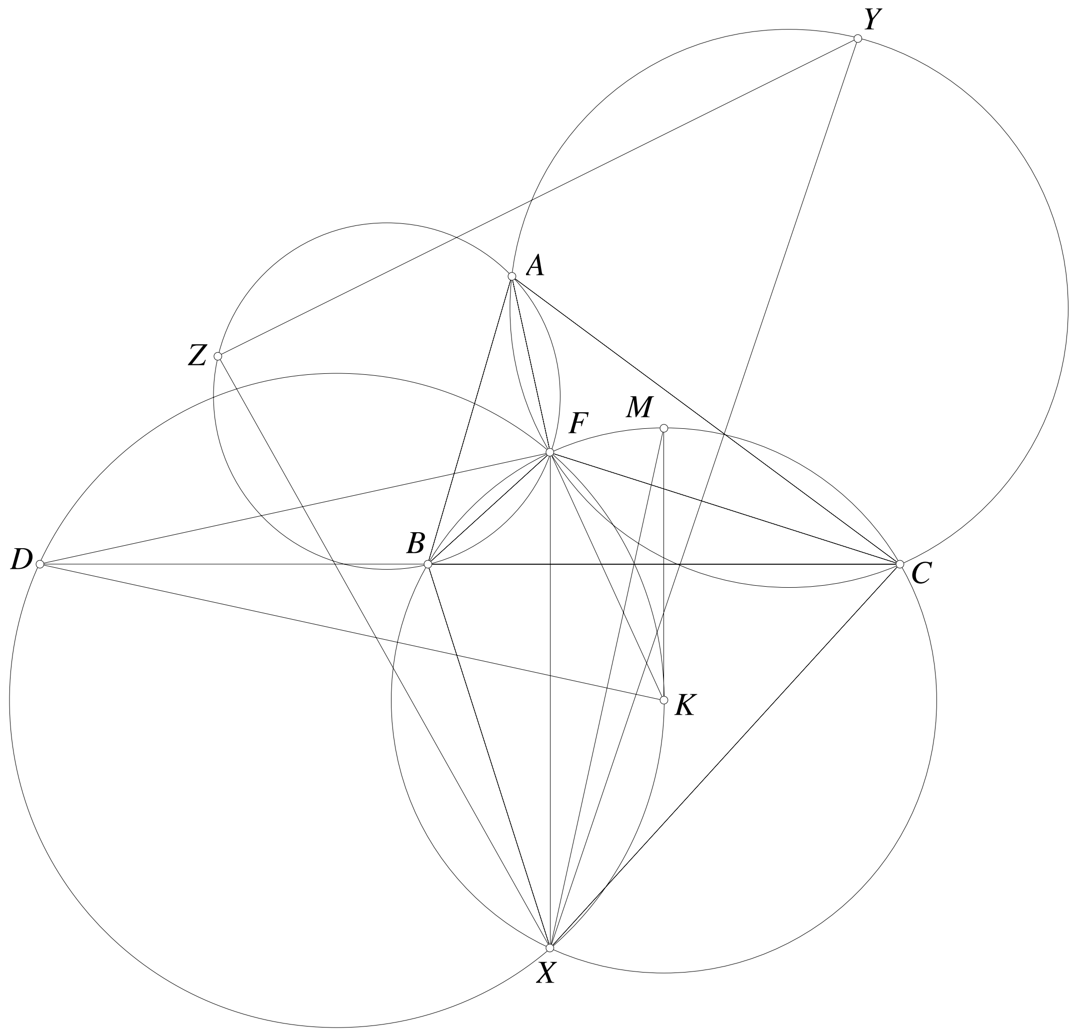
Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\angle BAC = 60°$ với tâm nội tiếp I. Đường thẳng OI cắt BC tại E. AI cắt (O) tại D khác A. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác IDE. Chứng minh rằng KD tiếp xúc (O).



Hình 6.

Lời giải. Dễ thấy D là tâm ngoại tiếp tam giác IBC và E, O đối xứng nhau qua BC nên O là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa I của đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC nên OI là phân giác ngoài $\angle BIC = 120°$. Từ đó đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác IDE cắt (D) ngoại tiếp tam giác IBC tại F thì $IF \perp BC$. Lại có $DK \perp IF \parallel OD$ nên $DK \perp OD$ vậy DK tiếp xúc (O). □

Bài toán 7. Cho tam giác ABC có điểm Fermat là F. Gọi $(K), (L), (N)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác FBC, FCA, FAB. Lấy D thuộc BC sao cho $FD \perp FA$. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác FKD cắt (K) tại X khác F. Tương tự có Y, Z. Chứng minh rằng đối xứng của phân giác các góc $\angle BXC, \angle CYA, \angle AZB$ lần lượt qua BC, CA, AB đồng quy.



Hình 7.

Lời giải. Ta dễ thấy FD là phân giác ngoài tam giác FBC có góc $\angle BFC = 120°$ nên $FX \perp BC$ do đó đối xứng của X qua BC là trực tâm tam giác ABC. Phân giác $\angle BXC$ đi qua trung điểm M cung BC của (K) nhưng do $\angle BKC = 120°$ nên đối xứng của K qua BC là K tâm ngoại tiếp tam giác FBC. Từ đó đỗi xứng của phân giác XM qua BC chính là đường thẳng Euler của tam giác FBC. Chúng ta đã biết kết quả quen thuộc đường thẳng Euler của tam giác FBC, FCA, FAB đồng quy tại trọng tâm tam giác ABC, đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta cũng có thể dễ chứng minh được XM và BC cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác FXK hơn nữa KD chính là đường thẳng Euler của tam giác XBC. Các bài toán mở rộng trên còn nhiều ứng dụng khác nữa, các bạn hãy làm thử các bài tập sau

Bài toán 8. Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn (O). K là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $KB = KC$ và $\widehat{BKC} + \widehat{BAC} = 180°$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOK cắt (O) tại L khác A. Gọi AL cắt BC tại G. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. M là trung điểm của đoạn thẳng GI. EM cắt (O) tại N khác E. Chứng minh rằng NI và AK cắt nhau trên (O).

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) đối xứng với (O) qua BC. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ tới (K) với P, Q thuộc (K). PQ cắt BC tại D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOD cắt (O) tại E khác A. Giả sử $AE \perp BC$. Chứng minh rằng $AB = AC$ hoặc $\angle BAC = 60°$.

Bài toán 10. Cho tam giác ABC có điểm Kosnita là K. Giả sử AK là phân giác $\angle BAC$. Chứng minh rằng $AB = AC$ hoặc $\angle BAC = 60°$.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O, tâm nội tiếp I và có $\angle BAC = 60°$. D đối xứng I qua BC. Đường thẳng OI cắt BC tại E. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác ODE. Chứng minh rằng $OK \parallel BC$.

Bài toán 12. Cho tam giác ABC có điểm Fermat là F. Gọi $(K), (L), (N)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác FBC, FCA, FAB. Lấy D thuộc BC sao cho $FD \perp FA$. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác FKD cắt (K) tại X khác F. Tương tự có Y, Z. Đường thẳng đối xứng với đường thẳng Euler của tam giác ABC qua ba cạnh BC, CA, AB lần lượt cắt phân giác các góc $\angle BXC, \angle CYA, \angle AZB$ tại U, V, W. Chứng minh rằng $AU \perp VW$ khi và chỉ khi $2BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Bài toán 13. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. HA, HB, HC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Từ A kẻ các tiếp tuyến AA_1, AA_2 tới đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOD cắt đường thẳng đối xứng của A_1A_2 qua BC tại X nằm trong góc $\angle BAC$. Tương tự có điểm Y, Z. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Tài liệu

[1] Đề thi Olympic Sharygin 2014 vòng cuối
http://jcgeometry.org/Articles/Volume3/JCG2014V3pp60-62.pdf

High school for gifted student - HSGS

First year project

Some geometrical problems proposed for IMO team

Author:
Tran Quang Hung

Team:
Saudi Arabia

July 23, 2015

Contents

Preface

During the time of training for Saudi Arabia Mathematics Olympiad Team in 2015, I accumulated a number of interesting geometric problem for the pupils in training for IMO exam. These problems are published in IMO Shortlist, or some of which were suggested myself (not written reference or written expanding). These problems were classified according to three degrees in a IMO exam: easy, medium and difficult with star signed. Most of these problems based on the very basic knowledge of the plane geometry. These are the congruent triangles, the similar triangles and cyclic quadrileteral. And in the same time, we apply the knowledge about the power of point with respect to the circle, radical axis and harmonic range. You all (from beginners or who are proficiently with Olympic exam) could find very useful things in these problems. Good luck and successful to my dear students.

Jeddah, summer 2015

Tran Quang Hung.

Chapter 1

Some fundamental concepts

1.1 Cyclic quadrilateral

Cyclic quadrilateral is simple configuration of geometry. When we have four points lie on circle (concyclic points) and they creat a convex quarilateral then we have a cyclic quadrilateral. Almost the geometric problems in olympiad using cyclic quadrilateral. So we will give overview about cyclic quadrilateral

1.2 Necessary and sufficient conditions of a cyclic quadrilateral

Let $ABCD$ be a convex quadrilateral with AB intersects CD at E. AD intersects BC at F. AC intersects BD at G. We have the following conditions are equivalent

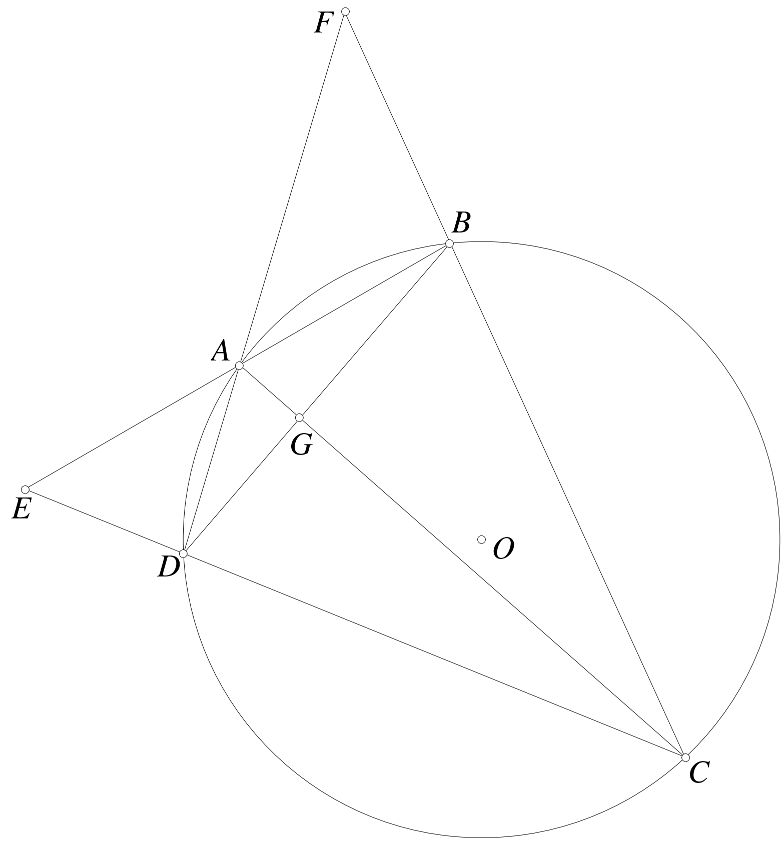


Figure 1.

1) Quadrilateral $ABCD$ is cyclic.
2) $\angle ABC = \angle ADC$ (Property of adjacent angle)
3) $\angle ABC + \angle ADC = 180°$ (Property opposite angle)
4) $\angle FBA = \angle ADC$ (Property exterior angle)
5) $EA.EB = ED.EC$ (Metric relation)
6) $FB.FC = FA.FD$ (Metric relation)
7) $GA.GC = GB.GD$ (Metric relation)

1.3 The extension of metric relation, power of the point with respect to a circle

Let $ABCD$ be cyclic quadrilateral inscribed in circle (O, R). AB intersects CD at E. AD intersects BC at F. AC intersects BD at G. We have the following equality

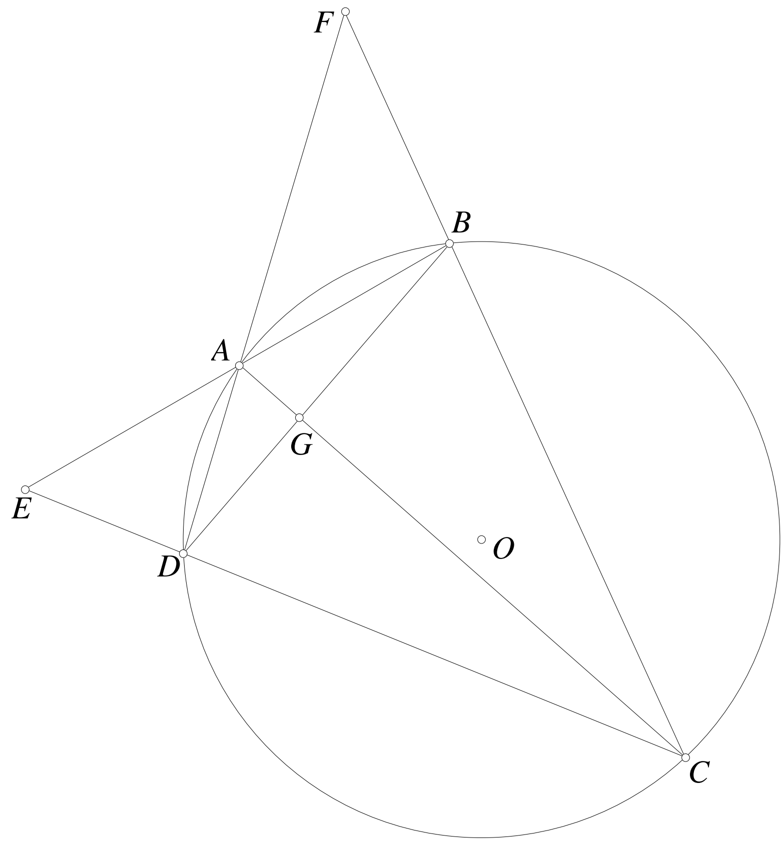


Figure 2.

1) $EA.EB = ED.EC = OE^2 - R^2$
2) $FB.FC = FA.FD = OF^2 - R^2$
3) $GA.GC = GB.GD = R^2 - OG^2$

1.4 Degenerate to the tangents

Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). T is a point lie on line BC externally the segment BC. We have the following conditions are equivalent

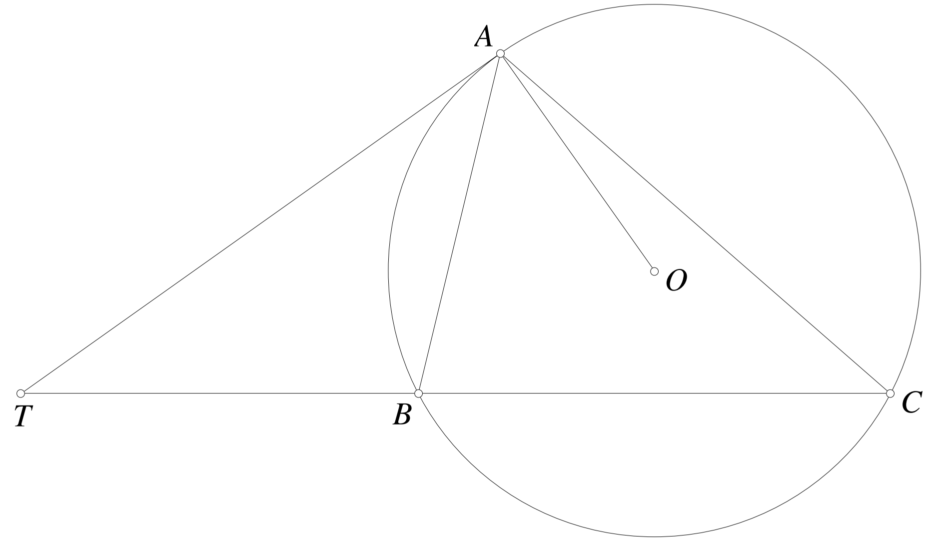


Figure 3.

1) TA is tangent of (O)
2) $\angle TAB = \angle ACB$ (Property angle of tangents)
3) $TA^2 = TB.TC$ (Metric relation of tangents)
4) $\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ (Metric relation of tangents)

Remark. Three sections give us the overview about necessary and sufficient conditions of a cyclic quadrialteral, the metric relation in cyclic quadrialteral (power of the points) and properties of tangents. We usually called the properties about angles by the terminology "angle chasing". Angle chasing is really the most important properties of cyclic quadrilateral. But according to our, the problems of cyclic quadrilateral is subjective if they have the both properties and metric relation in them. Now we give some propblems

Chapter 2

Problems training

2.1 First day

Problem 1 (Own)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Its incircle (I) touches BC at
★ D. AI cuts (O) again at E. ED cuts (O) again at G. Prove that $\angle AGI = 90°$.

Problem 2 (Own)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Its incircle (I) touches BC at D. AI cuts (O) again at E. The line passes through I which is perpendicular to OI, intersect ED, AO
★★ at M, N, reps. Prove that I is midpoint of MN.

Problem 3 (Own)**.** Let ABC be an acute triangle, its altitudes are concurrent at orthocenter H. The line passes through H which is perpendicular to Euler line of ABC, intersec AB, AC, DE, DF
★★ at M, N, P, Q, resp. Prove that $MN = 2PQ$.

Problem 4 (Own)**.** Let ABC be an acute triangle with altitude AD, orthocenter H and circumcenter
★ O. F lies on AB such that DF is perpendicular to OD. Prove that $\angle FHD = \angle B$.

2.2 Second day

Problem 5 (David Monk). Let ABC be a triangle right at A. M is midpoint of BC. Points E, F lie on line CA, AB such that E, M, F are collinear. Point P lies on segment EF such that two segment MP and EF have the same midpoint N. T is projection of P on BC. Prove that AN is bisector of
$\star$ $\angle MAT$.

Problem 6 (David Monk). Let ABC be a triangle and its incircle touches BC, CA, AB at D, E, F,
$\star\star$ reps. AD cuts (I) again at G. H lies on line EF such that $GH \perp AD$. Prove that $AH \parallel BC$.

Problem 7 (David Monk). Let ABC be a triangle and its incircle touches BC, CA, AB at D, E, F,
$\star$ reps. Let point H lie on line DE such that $AH \parallel EF$. Prove that BH bisects segment EF.

Problem 8 (David Monk). Let $ABCD$ be cyclic quadrilateral. AD cuts BC at E. d is the line passing through E and that is parallel to CD. Let p, q be distance from A, B to d and r be distance
$\star$ from E to AB. Prove that $p.q = r^2$.

Problem 9 (David Monk). Let $ABCD$ be cyclic quadrilateral. AC cuts BD at E. M, N are
$\star\star$ midpoints of CD, AB such that $\angle AMD = \angle CNB$. Prove that $\angle EMC = \angle ABC$.

Problem 10 (Russia 2015). Let ABC be acute triangle with altitude AH. M is midpoint of BC. Points E, F lie on CA, AB such that ME, MF are perpendicular to AB, AC, resp. BC cuts
$\star\star$ circumcircle of triangle MEF again at N. Prove that $BH = NC$.

Problem 11 (Russia 2015). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Tangent of (O) at A intersects BC at D. I is incenter of ABC. Bisector of $\angle D$ cuts IB, IC at P, Q, resp. M is midpoint
$\star\star$ of arc BC that contain A of circle (O). Prove that line IM bisects segment PQ.

Problem 12 (Russia 2015). Let ABC be a triangle inscribed circle (O) with altitude AH, centroid
$\star$ G. Ray GH intersects (O) at D. Prove that AB is tangent to circumcircle of triangle BDH.

Problem 13 (Balkan shortlist 2009). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) with orthocenter H. K is projection of H on tangent at A of (O). L is projection of H on symmedian from A. Prove
$\star\star\star$ that KL bisects segment BC.

Problem 14 (Own). Let ABC be acute triangle with orthocenter H and M is midpoint of BC. P is a point on HM. E, F are projection of P on side CA, AB. Prove that the tangents at E, F of
$\star\star\star$ circle diameter AP intersect on perpendicular bisector of BC.

Problem 15 (Own, extension of IMO 2010 P2). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) with incenter I. AI cuts (O) again at D. E is a point on segment BC. M is midpoint of IE. P lies on line DM such that PI is perpendicular to OI. Q is symmetric of P through I. Assume that Q is
$\star\star\star$ inside triangle ABC. Prove that AI is bisector of $\angle QAE$.

Problem 16 (AoPS). Let ABC be a triangle and two point P, Q such that $\dfrac{AP}{AQ} = \dfrac{BP}{BQ} = \dfrac{CP}{CQ}$.
$\star\star$ Prove that PQ passes through circumcenter of triangle ABC.

2.3 Third day

Problem 17 (IMO Shortlist 2014 G3)**.** Let ABC be a triangle inscribed circle (O). M is midpoint of arc BC which does not contain A. Perpendicular bisector of AB, AC cut circle dimaeter AM at P, Q, reps outside $\angle BAC$. PQ cuts perpendicular bisector of AM at R. Prove that $AR \parallel BC$.

⋆⋆⋆

Problem 18 (Own, extension of Iran 2012)**.** Let the triangle ABC ($AB < AC$) inscribed in the circle (O). The bisector of the angle $\angle BAC$ cuts (O) again at D. E is symmetry of D through O. F is the point on the chord BD not contain A, C of (O). FE cuts BC at G. H belongs to AF such that $GH \parallel AD$. Prove that HG is the bisector of the angle $\angle BHC$.

⋆⋆⋆

Problem 19 (Own, extesnion of IMO 2014 P4)**.** Let the triangle ABC and the points P, Q are lying on BC such that $AP = AQ$. The circumcircle of the triangle APB cuts CA again at E. The circumcircle of the triangle AQC cuts AB again at F. Get the points M, N are lying on opposite rays of PE, QF such that $PM.QN = PE.QF$.

a) Prove that BN and CM are intersected at R on the circle (O) circumcircle of the triangle ABC.

b) Call by K the circumcircle center of the triangle RMN. Prove that AK perpendicular with BC.

⋆⋆⋆

Problem 20 (AoPS)**.** Given an acute triangle ABC inscribed in the circle (O). The altitudes BE, CF of triangle ABC intersects each other at H. The line AH meets the circle (O) at D which differs from A. The line DE meets (O) at G which differs from D. Show that BG bisects the segment EF.

⋆⋆

Problem 21 (Extension of IMO Shortlist 2014 G3)**.** Let ABC be a triangle inscribed circle (O). D is midpoint of arc BC which does not contain A. P is a point on perpendicular bisector of AD. M, N lies on circle diameter AD and outside triangle such that $PM \perp AC, PN \perp AB$. MN intersects perpendicular bisector of AD at R. Prove that $AR \perp PD$.

⋆⋆

Problem 22 (AoPS)**.** Let the acute triangle ABC inscribed in the circle (O). AD, BE, CF are the altitudes of the triangle ABC and converge at H. D, E, F are on BC, CA, AB respectively. Call by AG the diameter of the circle (O). AG intersect EF, BC at X, Y respectively. The intersection of AD and the tangent of the circle (O) at G is Z. Prove that $HX \parallel YZ$.

⋆

Problem 23 (Own, extension of problem 20)**.** Given an acute triangle ABC inscribed in the circle (O). Point P belongs to the minor arc $\overset{\frown}{BC}$ so that if Q is symmetric to P with respect to BC then Q will be inside the triangle ABC. The lines QB, QC intersect the lines CA, AB at E, F respectively. The line PE meets the circle (O) at R which differs from P. Demonstrate that BR bisects segment EF.

⋆⋆⋆

2.4 Fourth day

Problem 24 (IMO Shortlist 2006 G4). Let ABC be a triangle with symmedian BE, CF. Let M, N be midpoints of BE, CF. Prove that BN, CM and perpendicular bisector of BC are concurrent. ★★

Problem 25 (Inspire from Serbia 2013 and Iran 2015). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). X is a point on minor arc BC such that it E, F are projection of X on IB, IC then midpoint of EF lies on perpendicular bisector of BC. Let J be $A-$ excenter of triangle ABC. Prove that XJ passes through midpoint of major arc BC. ★★★

Problem 26 (AoPS). Let ABC be a triangle with incircle (I) touches BC, CA, AB at D, E, F. H is orthocenter of triangle ABC and K is projection of D on EF. Prove that $\angle IKD = \angle DKH$. ★★★

Problem 27 (Own). Let ABC be a triangle its incenter is I. E, F are reflection of I through CA, AB. EF intersets IB, IC at P, Q. Perpendicular bisector of PQ cuts BC at R. Prove that $CR.CA = BR.BA$. ★★

2.5 Fifth day

2.5.1 IMO+

Problem 28 (IMO Shortlist 2014 G4). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). P is a point on arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A. M is a point divide segment AP in a constant ratio. Circumcircle of triangle MPB and MAC intersect again at point Q. Prove that Q always lies on a fixed circle when P moves. ⋆⋆

Problem 29 (AopS). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Its incircle (I) touches BC, CA, AB at D, E, F, reps. K is projection of D on EF. AK cuts (O) again at G. Prove that GD is bisector of $\angle BGC$. ⋆⋆

Problem 30 (Ta Hong Son). Let M, N be two points interior to the circle (O) such that O is the midpoint of MN. Let S be an arbitrary point lies on (O), and E, F the second intersections of the lines SM, SN with (O), respectively. The tangents at E, F with respect to the circle (O) intersect each other at I. Prove that the perpendicular bisector of the segment MN passes through the midpoint of SI. ⋆⋆

Problem 31 (Own, extension of problem 30). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) and M is midpoint of BC. P, Q lie on BC and P, Q are symmetric through M. AP, AQ cut (O) again at E, F. Tangents at E, F of (O) intersect at I. K is projection of A on OM and L is projection of O on AM. Prove that KL bisects AI. ⋆⋆

Problem 32 (Own, extension of problem 29). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Let P, Q be two isogonal conjugate points on bisector of $\angle BAC$. E, F are projection of P on CA, AB. D is projection of Q on BC. K is projection of D on EF. EF cuts BC at G. AK cuts (O) again at L. Prove that line GL always passes through fixed point when P, Q move. ⋆⋆⋆

2.5.2 IMO

Problem 33 (IMO 2009 P2). Let ABC be a triangle with points E, F lie on CA, AB, resp. O is circumcenter of triangle ABC. Let M, N, P be the midpoints of segments BE, CF, EF, resp. Prove that circumcircle of triangle MPN is tangent to EF iff $OE = OF$. ⋆⋆

Problem 34 (IMO 2010 P4). Let ABC be a triangle inscriebd in circle (O). Tangent at A of (O) cuts BC at T. P is a point inside (O). PA, PB, PC cut (O) again at D, E, F, resp. Prove that $DE = DF$ iff $TA = TP$. ⋆

Problem 35 (VMO 2013). Let ABC be a triangle with incircle (I) touches BC, CA, AB at D, E, F, reps. Let G, H be symmetric point of E, F through I. Line GH cuts IB, IC at P, Q. Assume that B, C are fixed point and A changes such that ratio $\dfrac{AB}{AC}$ is constant. Prove that perpendicular bisector of PQ always passes through a fixed point. ⋆⋆

2.6 Sixth day

2.6.1 IMO+

Problem 36 (IMO Shortlist 2009 G7)**.** Let $ABCD$ be quadrilateral with AB cuts CD at S. Let H, K be orthocenters of triangles SAD, SBC and M, N are ninepoint center of triangles SAD, SBC. Prove that the line passes throug M are perpendicular to BC and the line passes through N are perpendicular to AD intersect on HK.

$\star\star\star$

Problem 37 (Own, extension of problem 26)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Let P, Q be two isogonal conjugate points on bisector of $\angle BAC$. E, F are projection of P on CA, AB. D is projection of Q on BC. K is projection of D on EF. J is reflection of P through DK. Prove that line JK always passes through fixed point when P, Q move.

$\star\star\star$

Problem 38 (Kostas Vittas)**.** Let ABC be isocesles triangle with $AB = AC$. (K) is the circle passing through A, B. (L) is the circles passing through A, C. The line passes through A is parallel to BC, that intersect $(K), (L)$ again at M, N, reps. Prove that the line passes throug K are perpendicular to BN and the line passes through L are perpendicular to CM intersect on perpendicular bisector of BC.

$\star\star$

Problem 39 (Kostas Vittas)**.** Let AD be altitude of triangle ABC. Circle (K) diameter AD cut CA, AB again at E, F. Tangents from E, F of (K) cut BC at M, N. Let EB, EN cut FC, FM at P, Q, reps. Prove that line PQ bisects segment BC.

$\star\star$

Problem 40 (Own, extension of Kostas Vittas's problem)**.** Let D be a point on altitude of triangle ABC. Circle (K) diameter AD cut CA, AB again at E, F. Tangents from E, F of (K) cut BC at M, N. Let EB, EN cut FC, FM at P, Q, reps. Prove that PQ always passes through a fixed point when D moves.

$\star\star\star$

2.6.2 IMO

Problem 41 (David Monk)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O), orthocenter H. Tangent at A of (O) intersect BC at T. D is symmetric of O through A. E is midpoint of AH. Prove that four points A, D, T, E are concylic.

$\star$

Problem 42 (IMO 2012 P1)**.** Given triangle ABC the point J is the centre of the excircle opposite the vertex A. This excircle is tangent to the side BC at M, and to the lines AB and AC at K and L, respectively. The lines LM and BJ meet at F, and the lines KM and CJ meet at G. Let S be the point of intersection of the lines AF and BC, and let T be the point of intersection of the lines AG and BC. Prove that M is the midpoint of ST.

$\star$

Problem 43 (IMO 2012 P5)**.** Let ABC be a triangle with $\angle BCA = 90°$, and let D be the foot of the altitude from C. Let X be a point in the interior of the segment CD. Let K be the point on the segment AX such that $BK = BC$. Similarly, let L be the point on the segment BX such that $AL = AC$. Let M be the point of intersection of AL and BK.Show that $MK = ML$.

$\star\star$

Problem 44 (IMO Shortlist 2012 G2). Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral whose diagonals AC and BD meet at E. The extensions of the sides AD and BC beyond A and B meet at F. Let G be the point such that $ECGD$ is a parallelogram, and let H be the image of E under reflection in AD. ⋆ Prove that D, H, F, G are concyclic.

2.7 Seventh day

2.7.1 IMO+

2.7.2 IMO

2.8 Eighth day

2.8.1 IMO+

Problem 45 (ELMO 2015, Problem 3 (Shortlist G3)). Let ω be a circle and C a point outside it; distinct points A and B are selected on ω so that CA and CB are tangent to ω. Let X be the reflection of A across the point B, and denote by γ the circumcircle of triangle BXC. Suppose γ and ω meet at $D \neq B$ and line CD intersects ω at $E \neq D$. Prove that line EX is tangent to the circle γ. ⋆⋆

Problem 46 (Own, extension of IMO Shortlist 2007 G7). Let ABC be acute triangle inscribed in circle (O) with incenter I, altitude AD and circumradius R. Point K lies on line AD such that $AK = 2R$, and D separates A and K. Let M be projection of B on IK. AD cuts (O) again at N. Assume that $IK \parallel AB$. Prove that $MN \parallel ID$. ⋆⋆⋆

Problem 47 (Own, extension of IMO Shortlist 2006 G1). Given are a triangle ABC. The incircle of triangle ABC has center I and touches the sides BC and CA at the points D and E, respectively. Let K and L be the reflections of the points D and E with respect to I. Prove that the points A, B, K, L lie on one circle iff $CA + CB = 3AB$ or $CA = CB$. ⋆⋆⋆

Problem 48 (Own, inspire from IMO Shortlist 2005 G7). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) and incenter I. Circle excircle (L) of vertex C touches AB at M. MI cuts BC at N. P is projeciton of C on JB. Prove that AI and PN intersect on (O). ⋆⋆⋆

2.8.2 IMO

Problem 49 (IMO Shortlist 2010 G1). Let ABC be an acute triangle with D, E, F the feet of the altitudes lying on BC, CA, AB respectively. One of the intersection points of the line EF and the circumcircle is P. The lines BP and DF meet at point Q. Prove that $AP = AQ$. ⋆

Problem 50 (IMO 2005 P2). Six points are chosen on the sides of an equilateral triangle ABC: A_1, A_2 on BC, B_1, B_2 on CA and C_1, C_2 on AB, such that they are the vertices of a convex hexagon $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ with equal side lengths. Prove that the lines A_1B_2, B_1C_2 and C_1A_2 are concurrent. ⋆

Problem 51 (IMO 2007 P1). In triangle ABC the bisector of angle BCA intersects the circumcircle again at R, the perpendicular bisector of BC at P, and the perpendicular bisector of AC at Q. The midpoint of BC is K and the midpoint of AC is L. Prove that the triangles RPK and RQL have the same area. ⋆

Problem 52 (IMO Shortlist 2008 G1). Let H be the orthocenter of an acute-angled triangle ABC. The circle Γ_A centered at the midpoint of BC and passing through H intersects the sideline BC at points A_1 and A_2. Similarly, define the points B_1, B_2, C_1 and C_2.Prove that the six points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 and C_2 are concyclic. ⋆

2.9 Ninth day

2.9.1 IMO+

Problem 53 (IMO Shortlist 2006 G2). Let $ABCD$ be a trapezoid with parallel sides $AB > CD$. Points K and L lie on the line segments AB and CD, respectively, so that $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{DL}{LC}$. Suppose that there are points P and Q on the line segment KL satisfying $\angle APB = \angle BCD$ and $\angle CQD = \angle ABC$.
★★ Prove that the points P, Q, B and C are concyclic.

Problem 54 (IMO Shortlist 2006 G3). Consider a convex pentagon $ABCDE$ such that $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ and $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$. Let P be the point of intersection of the lines
★★ BD and CE. Prove that the line AP passes through the midpoint of the side CD.

Problem 55 (IMO Shortlist 2006 G7). Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) with incenter I. BI, IC cut (O) again at E, F. M, N are midpoints of CA, AB. Let ℓ be the common tangents of
★★★ circle diameter ME, NF such that M, N and I lie on opposite side of ℓ. Prove that $\ell \parallel BC$.

Problem 56 (China TST 2015 day 1 P1). The circle Γ through A of triangle ABC meets sides AB, AC at E,F respectively, and circumcircle of ABC at P. Prove that reflection of P across EF
★★ is on BC if and only if Γ passes through O the circumcentre of ABC.

Problem 57 (Centro American Math Olympiad 2015 P3). Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral with $AB < CD$, and let P be the point of intersection of the lines AD and BC.The circumcircle of the triangle PCD intersects the line AB at the points Q and R. Let S and T be the points where the tangents from P to the circumcircle of $ABCD$ touch that circle. Prove that $QRST$ is a cyclic
★ quadrilateral.

Problem 58 (Own, extension of JBMO 2015 P3). Let ABC be a triangle with median AM. P is a point on BC. Let E, F be the points such that $CE \perp BC, PE \perp AC$ and $BF \perp BC, PF \perp AB$. Let Q be symmetric of P through M. AQ cuts EF at D.

a) Prove that $\angle BDC = \angle EQF$.

★★★ b) Prove that D always lies on a fixed circle when P moves.

Problem 59 (Own, inspire from ELMO 2015 Problem 3). Let (O) be a circle and C a point outside it; distinct points A and B are selected on (O) so that CA and CB are tangent to (O). The line passes through C that intersects (O) at M, N. Denote by (K) the circumcircle of triangle CAN.
★★★ AB cuts (K) again at P. PM cuts (K) and (O) again at Q, R, reps. Prove that RA bisects BQ.

Problem 60 (Russia 2014). Given a triangle ABC with $AB > BC$, let Ω be the circumcircle. Let M, N lie on the sides AB, BC respectively, such that $AM = CN$. Let K be the intersection of MN and AC. Let P be the incentre of the triangle AMK and Q be the K-excentre of the triangle CNK.
★★ If R is midpoint of the arc ABC of Ω then prove that $RP = RQ$.

Problem 61 (Russia 2013). Squares $CAKL$ and $CBMN$ are constructed on the sides of acute-angled triangle ABC, outside of the triangle. Line CN intersects line segment AK at X, while line CL intersects line segment BM at Y. Point P, lying inside triangle ABC, is an intersection of the circumcircles of triangles KXN and LYM. Point S is the midpoint of AB. Prove that angle
★★ $\angle ACS = \angle BCP$.

★★ **Problem 62** (IMO Shortlist 2013 G2)**.** Let ω be the circumcircle of a triangle ABC. Denote by M and N the midpoints of the sides AB and AC, respectively, and denote by T the midpoint of the arc BC of ω not containing A. The circumcircles of the triangles AMT and ANT intersect the perpendicular bisectors of AC and AB at points X and Y, respectively; assume that X and Y lie inside the triangle ABC. The lines MN and XY intersect at K. Prove that $KA = KT$.

★★ **Problem 63** (AoPS)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). Tangents at B, C of (O) intersect at T. Bisector BE, CF intersect at I. Prove that IT bisects segment EF.

2.9.2 IMO

★ **Problem 64** (IMO 2013 P4)**.** Let ABC be an acute triangle with orthocenter H, and let W be a point on the side BC, lying strictly between B and C. The points M and N are the feet of the altitudes from B and C, respectively. Denote by ω_1 is the circumcircle of BWN, and let X be the point on ω_1 such that WX is a diameter of ω_1. Analogoously, denote by ω_2 the circumcircle of triangle CWM, and let Y be the point such that WY is a diameter of ω_2. Prove that X, Y and H are collinear.

★ **Problem 65** (IMO Shortlist 2004 G1)**.** Let ABC be an acute-angled triangle with $AB \neq AC$. The circle with diameter BC intersects the sides AB and AC at M and N respectively. Denote by O the midpoint of the side BC. The bisectors of the angles $\angle BAC$ and $\angle MON$ intersect at R. Prove that the circumcircles of the triangles BMR and CNR have a common point lying on the side BC.

★ **Problem 66** (IMO Shortlist 2003 G1)**.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral. Let P, Q, R be the feet of the perpendiculars from D to the lines BC, CA, AB, respectively. Show that $PQ = QR$ if and only if the bisectors of $\angle ABC$ and $\angle ADC$ are concurrent with AC.

★ **Problem 67** (IMO Shortlist 2001 G1)**.** Let A_1 be the center of the square inscribed in acute triangle ABC with two vertices of the square on side BC. Thus one of the two remaining vertices of the square is on side AB and the other is on AC. Points B_1, C_1 are defined in a similar way for inscribed squares with two vertices on sides AC and AB, respectively. Prove that lines AA_1, BB_1, CC_1 are concurrent.

★★ **Problem 68** (Russia 2014)**.** Let M be the midpoint of the side AC of $\triangle ABC$. Let $P \in AM$ and $Q \in CM$ be such that $PQ = \frac{AC}{2}$. Let (ABQ) intersect with BC at $X \neq B$ and (BCP) intersect with BA at $Y \neq B$. Prove that the quadrilateral $BXMY$ is cyclic.

2.10 Tenth day

2.10.1 IMO+

Problem 69 (IMO Shortlist 2013 G4)**.** Let ABC be a triangle with $\angle B > \angle C$. Let P and Q be two different points on line AC such that $\angle PBA = \angle QBA = \angle ACB$ and A is located between P and C. Suppose that there exists an interior point D of segment BQ for which $PD = PB$. Let the ray AD intersect the circle ABC at $R \neq A$. Prove that $QB = QR$.

$\star\star$

Problem 70 (Extension of IMO Shortlist 2013 G4)**.** Let ABC be a triangle bisector AD. (K) is the circle passing through A, D and is tangent to AB. E is reflection of A through CK. DE cuts AC at F. Prove that $BA = BF$.

$\star\star$

Problem 71 (Own, inspire from problem in AoPS)**.** Let ABC be a triangle bisector AD. (K) is the circle passing through A, B and is tangent to AD. M is midpoint of AD. MB cuts (K) again at N. Prove that $NA \perp NC$.

$\star\star$

Problem 72 (Own, extension IMO 2014 P4)**.** Let ABC be a triangle and the points P, Q are lying on BC such that $AP = AQ$. The circumcircle of the triangle APB cuts CA again at E. The circumcircle of the triangle AQC cuts AB again at F. Get the points M, N on the opposite ray of PA, QA such that $PM.QN = PE.QF$. Prove that BN and CM are always intersected each other on a fixed circle when M, N are moving.

Problem 73 (Own, extension IMO 2014 P4)**.** Let ABC be a triangle and the points P, Q lying on the edge BC such that $AP = AQ$. The circumcircle of the triangle APB cut CA again at E. The circumcircle center of the triangle AQC cut AB again at F. Get the points M, N are lying on opposite ray of PA, QA such that $PM.QN = PE.QF$.

a) Prove that BN and CM are always intersected at R on the circle (K) fixed when M, N is moving.

b) Call by L the circumcircle center of the triangle RMN. Prove that AL perpendicular with BC.

$\star\star\star$

Problem 74 (Own, extension of IMO Shortlist 2012 G4)**.** Let ABC be a triangle with circumcenter O and bisector AD. Let E lie on OA such that $DE \perp BC$. AD cuts circumcircle of triangle BEC such that F is outside triangle ABC. Assume that B, C are fixed and A change such that ratio $\dfrac{AB}{AC}$ is constant. Prove that F always lies on a fixed line when A moves.

$\star\star\star$

Problem 75 (Own, extension of IMO 1998 P1)**.** Let (I) be the incircle of triangle ABC. Let K, L and M be the points of tangency of the incircle of ABC with AB, BC and CA, respectively. The lines MK and ML intersect the line passing through B and is parallel to KL at the points Q and R, resp. Circle diameter QR cut (I) at S, T. Prove that ST bisects the segment KL.

$\star\star\star$

2.10.2 IMO

Problem 76 (IMO 2014 P4). Let P and Q be on segment BC of an acute triangle ABC such that $\angle PAB = \angle BCA$ and $\angle CAQ = \angle ABC$. Let M and N be the points on AP and AQ, respectively, such that P is the midpoint of AM and Q is the midpoint of AN. Prove that the intersection of
⋆ BM and CN is on the circumference of triangle ABC.

Problem 77 (IMO 2012 P1). Given triangle ABC the point J is the centre of the excircle opposite the vertex A. This excircle is tangent to the side BC at M, and to the lines AB and AC at K and L, respectively. The lines LM and BJ meet at F, and the lines KM and CJ meet at G. Let S be the point of intersection of the lines AF and BC, and let T be the point of intersection of the lines
⋆ AG and BC. Prove that M is the midpoint of ST.

Problem 78 (IMO 2010 P2). Given a triangle ABC, with I as its incenter and Γ as its circumcircle, AI intersects Γ again at D. Let E be a point on the arc BDC, and F a point on the segment BC, such that $\angle BAF = \angle CAE < \frac{1}{2}\angle BAC$. If G is the midpoint of IF, prove that the meeting point of
⋆⋆ the lines EI and DG lies on Γ.

Problem 79 (Russia 2012). The inscribed circle ω of the non-isosceles acute-angled triangle ABC touches the side BC at the point D. Suppose that I and O are the centres of inscribed circle and circumcircle of triangle ABC respectively. The circumcircle of triangle ADI intersects AO at the
⋆ points A and E. Prove that AE is equal to the radius r of ω.

Problem 80 (Russia 2012). Consider the parallelogram $ABCD$ with obtuse angle A. Let H be the feet of perpendicular from A to the side BC. The median from C in triangle ABC meets the
⋆⋆ circumcircle of triangle ABC at the point K. Prove that points K, H, C, D lie on the same circle.

2.11 Eleventh day

2.11.1 IMO+

Problem 81 (Own Oman). Let ABC be isocesles triangle with $AB = AC$. P is a point inside triangle such that $\angle PBC = \angle PCA$. H is projection of P on BC and AP cuts circumcricle of triangle PBC again at Q. Prove that QH always passes through a fixed point when P moves.

★★

Problem 82 (Russia 2012). The point E is the midpoint of the segment connecting the orthocentre of the scalene triangle ABC and the point A. The incircle of triangle ABC incircle is tangent to AB and AC at points C' and B' respectively. Prove that point F, the point symmetric to point E with respect to line $B'C'$, lies on the line that passes through both the circumcentre and the incentre of triangle ABC.

★★★

Problem 83 (Russia 2011). Let ABC be a triangle with $AB < AC$. Let q be quarter perimeter of triangle ABC. X, Y are the points on ray AB, AC such that $AX = AY = q$. Assume that segments XY and BC intersect at M. Prove that perimeter of triangle ABM is equal to q

★★★

Problem 84 (Own, extension of IMO shortlist 2012 G6). Let ABC be a triangle. The point D, E, F lies on side BC, CA, AB of triangle ABC such that $BF + CE + BC = CD + AF + CA = AE + BD + AB$. Circumcircle of triangle AEF, BFD, CED have a common point P. Prove that P always lies on a fixed circle when D, E, F moves.

★★★

Problem 85 (Own, extension of IMO shortlist 2012 G6). Let ABC be a triangle. The point D, E, F lies on side BC, CA, AB of triangle ABC such that $BF + CE + BC = CD + AF + CA = AE + BD + AB$. Circumcircle of triangle AEF, BFD, CED have a common point P. Prove that P always lies on a fixed circle when D, E, F moves.

★★★

Problem 86 (Own, xtension of IMO shortlist 1997 P18). Let ABC be an acute triangle and E, F lie on side CA, AB such that $BCEF$ is cyclic quadrilateral. BE cuts CF at H. AH cuts BC at D. The line passes through D and is parallel to EF which intersects CA, AB at M, N, resp. EF cuts BC at G. Prove that circumcircle of triangle GMN always passes throgh a fixed point when E, F move.

★★

Problem 87 (Inspire from IMO shortlist 2014 G6). Let ABC be a triangle. E, F lie on side CA, AB. Perpendicular bisector of EF cuts BC at D and M is midpoint of E, F. Perpendicular bisector of DM cuts CA, AB at P, Q. Prove that four points A, P, D, Q are concyclic iff BE, CF intersect on circumcircle of triangle AEF.

★★★

2.11.2 IMO

Problem 88 (IMO 1998 P1)**.** A convex quadrilateral $ABCD$ has perpendicular diagonals. The perpendicular bisectors of the sides AB and CD meet at a unique point P inside $ABCD$. Prove that the quadrilateral $ABCD$ is cyclic if and only if triangles ABP and CDP have equal areas. ⋆

Problem 89 (IMO 2000 P1)**.** Two circles G_1 and G_2 intersect at two points M and N. Let AB be the line tangent to these circles at A and B, respectively, so that M lies closer to AB than N. Let CD be the line parallel to AB and passing through the point M, with C on G_1 and D on G_2. Lines AC and BD meet at E; lines AN and CD meet at P; lines BN and CD meet at Q. Show that $EP = EQ$. ⋆

Problem 90 (IMO 1995 P1)**.** Let A, B, C, D be four distinct points on a line, in that order. The circles with diameters AC and BD intersect at X and Y. The line XY meets BC at Z. Let P be a point on the line XY other than Z. The line CP intersects the circle with diameter AC at C and M, and the line BP intersects the circle with diameter BD at B and N. Prove that the lines AM, DN, XY are concurrent. ⋆

Problem 91 (IMO 1996 P2)**.** Let P be a point inside a triangle ABC such that

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Let D, E be the incenters of triangles APB, APC, respectively. Show that the lines AP, BD, CE meet at a point. ⋆⋆

Problem 92 (IMO 1994 P2)**.** Let ABC be an isosceles triangle with $AB = AC$. M is the midpoint of BC and O is the point on the line AM such that OB is perpendicular to AB. Q is an arbitrary point on BC different from B and C. E lies on the line AB and F lies on the line AC such that E, Q, F are distinct and collinear. Prove that OQ is perpendicular to EF if and only if $QE = QF$. ⋆

Problem 93 (IMO 1987 P2)**.** In an acute-angled triangle ABC the interior bisector of angle A meets BC at L and meets the circumcircle of ABC again at N. From L perpendiculars are drawn to AB and AC, with feet K and M respectively. Prove that the quadrilateral $AKNM$ and the triangle ABC have equal areas. ⋆

Problem 94 (IMO 1985 P1)**.** A circle has center on the side AB of the cyclic quadrilateral $ABCD$. The other three sides are tangent to the circle. Prove that $AD + BC = AB$. ⋆

Problem 95 (IMO 1985 P5)**.** A circle with center O passes through the vertices A and C of the triangle ABC and intersects the segments AB and BC again at distinct points K and N respectively. Let M be the point of intersection of the circumcircles of triangles ABC and KBN (apart from B). Prove that $\angle OMB = 90^\circ$. ⋆⋆

2.12 Twelfth day

2.12.1 IMO+

Problem 96 (Own, extension IMO 1996 P2)**.** Let P be a point inside a triangle ABC such that

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC = \angle BPC - \angle BAC.$$

Let D, E, F be the incenters of triangles BPC, CPA, APB, respectively. Show that the lines AD, BE, CF are concurent.

⋆⋆⋆

Problem 97 (Onw, extension of IMO 2009 P2)**.** Let ABC be a triangle with circumcircle O. E, F lie on side CA, AB. M, N, P are midpoint of BE, CF, EF. Let Q be projection of O on EF.

a) Prove that four points M, N, P, Q are concyclic.

b) Prove that reflection of Q through MN lies on ninepoint circle of triangle ABC.

⋆⋆⋆

Problem 98 (AoPS)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). P is a point on bisector of $\angle BAC$. PB, PC cut CA, AB at E, F and cut (O) again at M, N. NE cuts MF at Q. Prove that PQ bisects BC.

⋆⋆⋆

Problem 99 (Own, inspire from IMO shortlist 2011 G5)**.** Let ABC be a triangle inscribed in circle (O). I is its incenter. IB, IC cut (O) again at E, F. EF cuts CA, AB at M, N. P is a point such that $PM \parallel IC, PN \parallel IB$. Assume that (O) and B, C are fixed and A moves. Prove that PI always passes through a fixed point.

⋆⋆⋆

Problem 100 (AoPS)**.** Let ABC be a triangle E, F are midpoint of CA, AB. P is an any point. PE, PF cut BC at M, N, resp. NE cuts MF at Q. Let R is the point such that $RB \parallel PE$ and $RQ \parallel PF$. Prove that PQ bisects segment AR.

⋆

Problem 101 (AoPS)**.** Let CD be a median of triangle ABC. Perpendicular bisectors of AC and BC intersect CD at A_c, B_c. AA_c and BB_c intersect at Z. X and Y are defnied similarly. Let O be the circumcentre of triangle ABC. Prove X, Y, Z, O are concyclic.

⋆⋆⋆

Problem 102 (Russia 2009)**.** Let be given a triangle ABC and its internal angle bisector BD ($D \in AC$). The line BD intersects the circumcircle Ω of triangle ABC at B and E. Circle ω with diameter DE cuts Ω again at F. Prove that BF is the symmedian line of triangle ABC.

⋆⋆

2.12.2 IMO

Problem 103 (Russia 2013)**.** Acute-angled triangle ABC is inscribed into circle Ω. Lines tangent to Ω at B and C intersect at P. Points D and E are on AB and AC such that PD and PE are perpendicular to AB and AC respectively. Prove that the orthocentre of triangle ADE is the ⋆ midpoint of BC.

Problem 104 (Russia 2011)**.** Given is an acute angled triangle ABC. A circle going through B and the triangle's circumcenter, O, intersects BC and BA at points P and Q respectively. Prove that ⋆ the intersection of the heights of the triangle POQ lies on line AC.

Problem 105 (Russia 2011)**.** Given is an acute triangle ABC. Its heights BB_1 and CC_1 are extended past points B_1 and C_1. On these extensions, points P and Q are chosen, such that angle PAQ is ⋆ right. Let AF be a height of triangle APQ. Prove that angle BFC is a right angle.

Problem 106 (Russia 2011)**.** On side BC of parallelogram $ABCD$ (A is acute) lies point T so that triangle ATD is an acute triangle. Let O_1, O_2, and O_3 be the circumcenters of triangles ABT, DAT, ⋆ and CDT respectively. Prove that the orthocenter of triangle $O_1O_2O_3$ lies on line AD.

Problem 107 (Russia 2010)**.** Let O be the circumcentre of the acute non-isosceles triangle ABC. Let P and Q be points on the altitude AD such that OP and OQ are perpendicular to AB and AC respectively. Let M be the midpoint of BC and S be the circumcentre of triangle OPQ. Prove that ⋆⋆ $\angle BAS = \angle CAM$.

Problem 108 (Russia 2010)**.** Into triangle ABC gives point K lies on bisector of $\angle BAC$. Line CK intersect circumcircle ω of triangle ABC at $M \neq C$. Circle Ω passes through A, touch CM at K ⋆ and intersect segment AB at $P \neq A$ and ω at $Q \neq A$. Prove, that P, Q, M lies at one line.

Problem 109 (Russia 2008)**.** In a scalene triangle ABC the altitudes AA_1 and CC_1 intersect at H, O is the circumcenter, and B_0 the midpoint of side AC. The line BO intersects side AC at P, ⋆ while the lines BH and A_1C_1 meet at Q. Prove that the lines HB_0 and PQ are parallel.

2.13 Thirteenth day

Problem 110 (Own, extension of IMO shortlist 2009 G4)**.** Let ABC be a triangle. (K) is the circle passing through B, C. (K) cuts CA, AB again at E, F. BE cuts CF at H. M, N, P are midpoints of AH, BE, EF. AN cuts CF at Q. R is symmetric of F through Q. Prove that the line connecting midpoint of MQ and PR always passes through a fixed point when (K) moves. ⋆⋆⋆

Problem 111 (Onw, extension of IMO shortlist 2012 G2)**.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral inscribed in circle (O) and whose diagonals AC and BD meet at E. The extensions of the sides AD and BC beyond A and B meet at F. Let G, L be the point such that $ECGD, EBLA$ is a parallelogram, and let H, K be the images of E, B under reflection in AD, AC, resp. DG cuts (O) again at N. CK cuts AN at P. DH cuts BN at Q. Prove that PQ and GL intersect on circumcircle of triangle DGH. ⋆⋆⋆

Problem 112 (Own, extension of IMO shortlist 2012 G2)**.** Let $ABCD$ be a cyclic quadrilateral whose diagonals AC and BD meet at E. The extensions of the sides AD and BC beyond A and B meet at F. Let G be the point such that $ECGD$ is a parallelogram, and let H be the image of E under reflection in AD. Prove that D, H, F, G are concyclic and Simson line of H with respect to triangle FGD are perpendicular to BC. ⋆⋆⋆

Problem 113 (Own, extension of IMO shortlist 2007 G3)**.** Let $ABCD$ be trapezoid with $AB \parallel CD$. Assume that there are the points E, F on side CD, CB such that $\angle DEF = \angle AEB$. AC cuts BD at G. Prove that GE is tangent to circumcirle of triangle CEF. ⋆⋆⋆

Problem 114 (Own, inspire from IMO shortlist 2011 G3)**.** Let ABC be a triangle and P is a point inside it. Let Perpendicular bisector of PC, PB cut CA, AB at M, N. Q is relfection of P through MN. Prove that radical axis of two pedal circles of points P, Q bisects segment PQ. ⋆⋆⋆

Bibliography

[1] Elementary geometry blog http://analgeomatica.blogspot.com/

[2] IMO problems and shortlist http://www.imo-official.org/problems.aspx

[3] Contests collections http://www.artofproblemsolving.com/community/c13_contests

[4] Geometry box http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6_geometry

[5] New problems in Euclidean Geometry, David Monk, United Kingdoms, 2009

Về hai bài hình học trong kỳ thi IMO năm 2015

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

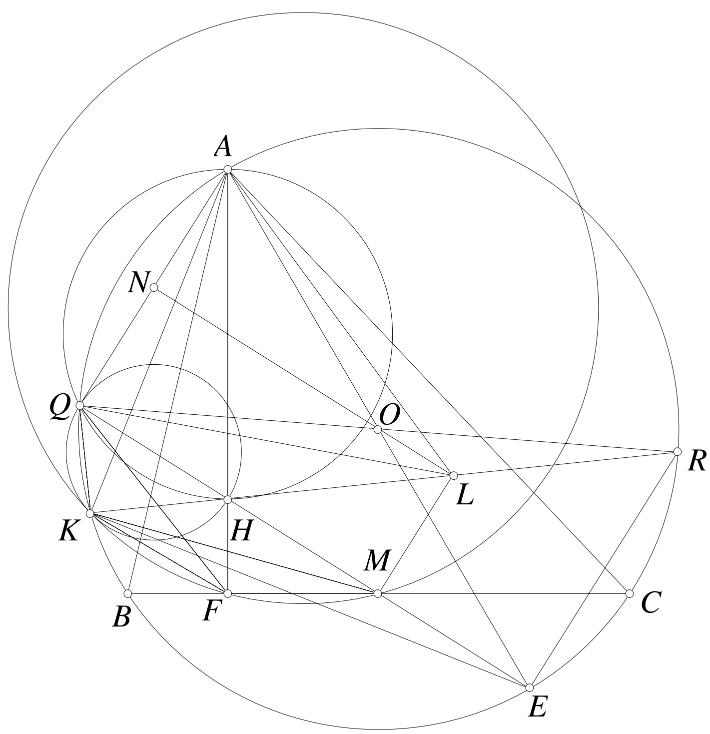
Bài báo giải quyết và đưa ra các ý tưởng mở rộng cùng nhiều ứng dụng cho các đề hình học thi IMO năm 2015.

1 Bài hình ngày thứ nhất

1.1 Mở đầu

Đề thi IMO ngày thứ 1 năm 2015 [1] có bài hình học rất thú vị như sau

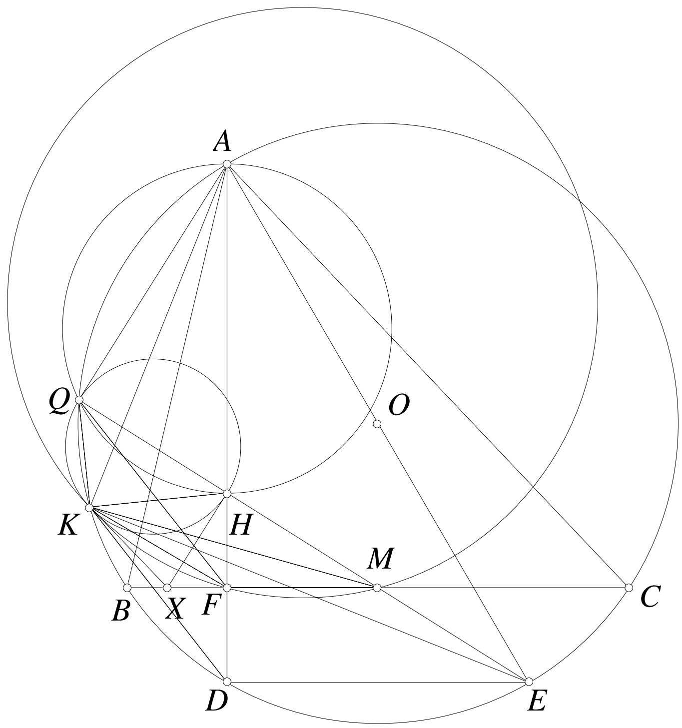
Bài toán 1.1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại Q khác A. Đường tròn đường kính HQ cắt (O) tại K khác Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KHQ và KFM tiếp xúc nhau.



Hình 1.

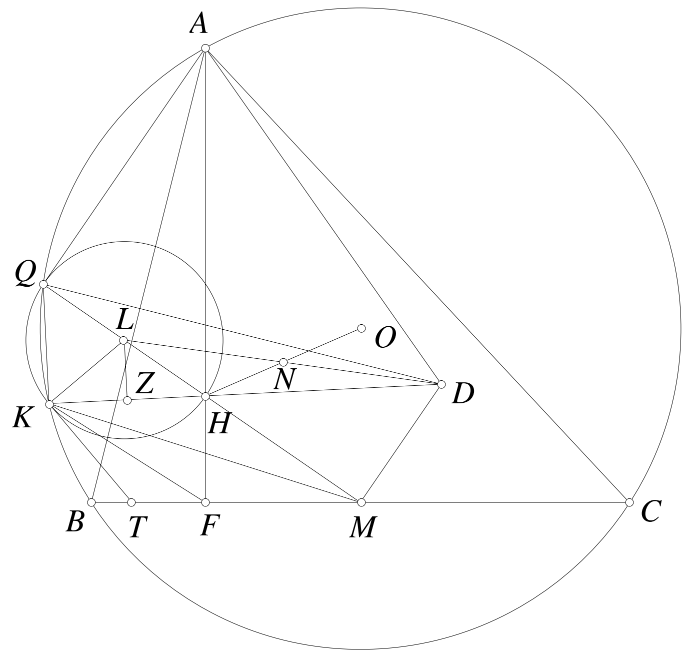
Lời giải thứ nhất. Vẽ đường kính AE và QR của (O). L, N lần lượt là trung điểm HR, QA. Ta có kết quả quen thuộc Q, H, M, E thẳng hàng. Từ đó suy ra $ML \parallel ER \parallel QA$ và $ML = \frac{1}{2}ER = \frac{1}{2}QA = NQ$ nên $NQML$ là hình bình hành. Do đó, $LN \perp QA$. Từ đó ta được $LA = LQ$. Mặt khác, $ML \parallel QA$ nên ML tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp $\triangle LAQ$ tại L (1). Mà dễ thấy $HA.HF = HK.HL = HQ.HM$

nên phép nghịch đảo tâm H phương tích $\overline{HA}.\overline{HF}$ biến $M \to Q, L \mapsto K, A \mapsto F, Q \mapsto M$. Do đó từ (1) kết hợp với phép nghịch đảo tâm H suy ra đường tròn ngoại tiếp $\triangle KHQ, \triangle KFM$ tiếp xúc nhau. $\square$



Hình 2.

Lời giải thứ hai. Gọi AE là đường kính của (O) và D đối xứng H qua BC thì D nằm trên (O). Dễ thấy Q, H, M, E thẳng hàng. Gọi tiếp tuyến tại K, H của đường tròn ngoại tiếp tam giác KHQ cắt nhau tại X. Ta có $\angle KXH = 180^\circ - 2\angle KHX = 180^\circ - 2\angle KQH = 2(90^\circ - \angle KQH) = 2(90^\circ - \angle KAE) = 2\angle AEK = 2\angle KDH$. Lại có $XK = XH$, từ đó X là tâm ngoại tiếp tam giác KDH. Do BC là trung trực HD nên X nằm trên BC. Từ đó theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $XK^2 = XH^2 = XF.XM$ hay XK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp tam giác KQH và KFM hay hai đường tròn này tiếp xúc nhau tại K. $\square$



Hình 3.

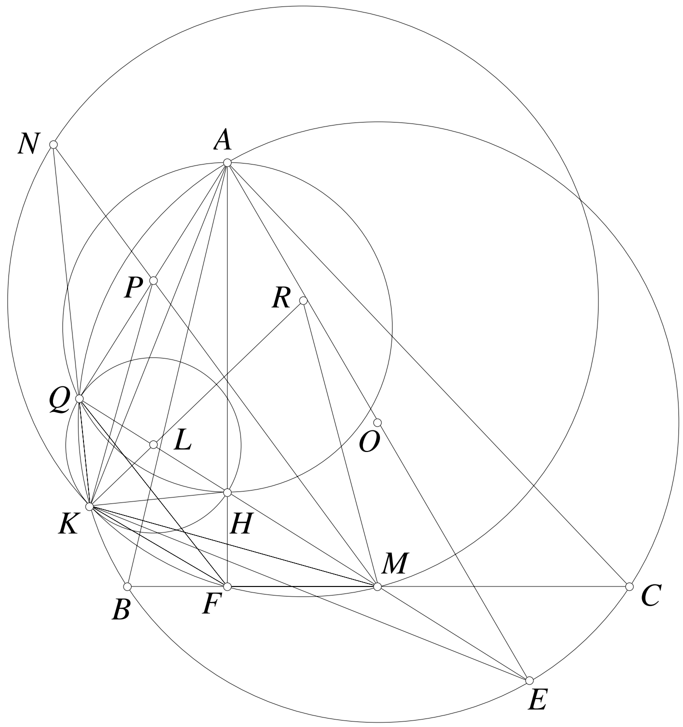
Lời giải thứ ba. Gọi đường thẳng qua M vuông góc với QM cắt KH tại D. Gọi L, Z là trung điểm của HQ, HK thì L, Z nằm trên đường tròn Euler (N) mà M cũng thuộc (N) nên N là trung điểm LD. N cũng là trung điểm OH nên $OD \parallel LH \perp QA$. Từ đó có $DQ = DA$ và $HA.HF = HQ.HM = HK.HD$. Kẻ tiếp tuyến KT của đường tròn ngoại tiếp tam giác KQH ta có $\angle TKF = \angle TKH - \angle HKF = \angle KQH - \angle HAD = \angle HDM - (\angle QAD - \angle QAH) = \angle HDM - \angle QDM + \angle HMF = \angle HMF - \angle QDH = \angle HMF - \angle HMK = \angle KMF$. Từ đó KT cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KFM. $\square$

Nhận xét. Bài toán này là bài toán thứ 3 của ngày thứ nhất, được đánh giá là một bài khó. Tuy vậy một bài toán chứng minh hai đường tròn tiếp xúc mà đã có sẵn tiếp điểm thì mức độ khó chưa cao vì vậy xếp là bài số 3 là hợp lý. Lời giải thứ nhất là một ý tưởng khá tự nhiên khi có hai đường tròn tiếp xúc ta nghĩ tới việc nghịch đảo đề đi chứng minh đường thẳng tiếp xúc đường tròn để giảm số lượng đường tròn đi. Lời giải này cùng được đễ xuất bởi **Telv Cohl** và **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp 12A1 Toán THPT chuyên KHTN, bạn **Vũ** đã giúp tác giả trình bày lại lời giải của mình như trên. Cũng có rất nhiều lời giải khác nhau đã được đề xuất trong [1]. Lời giải thứ hai trên có ý tưởng thuần túy hình học rất thông minh là của **Jeck Lim**, nick name **oneplusone** trong [1], tác giả đã chỉnh sửa một chút cách dựng điểm X và biến đổi góc gọn hơn. Lời giải thứ ba thực chất cũng xuất phát từ ý tưởng nghịch đảo trong khi tác giả trao đổi của **Hồ Quốc Đăng Hưng** và đã được tác giả chỉnh sửa lại gọn hơn, bỏ đi cách trình bày nghịch đảo và làm lại thuần túy hình học. Trong lời giải này thì điểm T không cần thiết nhưng ta dựng như vậy cho đẹp. Bài toán có nhiều ứng dụng và mở rộng, phần sau chúng tôi xin giới thiệu một số ứng dụng và mở rộng.

1.2 Khai thác bài toán IMO

Bài toán IMO là một cấu hình đẹp, trong cấu hình đó ta sẽ còn thấy rất nhiều bài toán thú vị khác. Bài toán đầu tiên này được tác giả tìm ra một cách tình cơ khi đang cố giải bài toán IMO sử dụng phương pháp đồng dạng trung tuyến

Bài toán 1.2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại Q khác A. Đường tròn đường kính HQ cắt (O) tại K khác Q. KQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KFM tại N khác K. Chứng minh rằng MN chia đôi AQ.

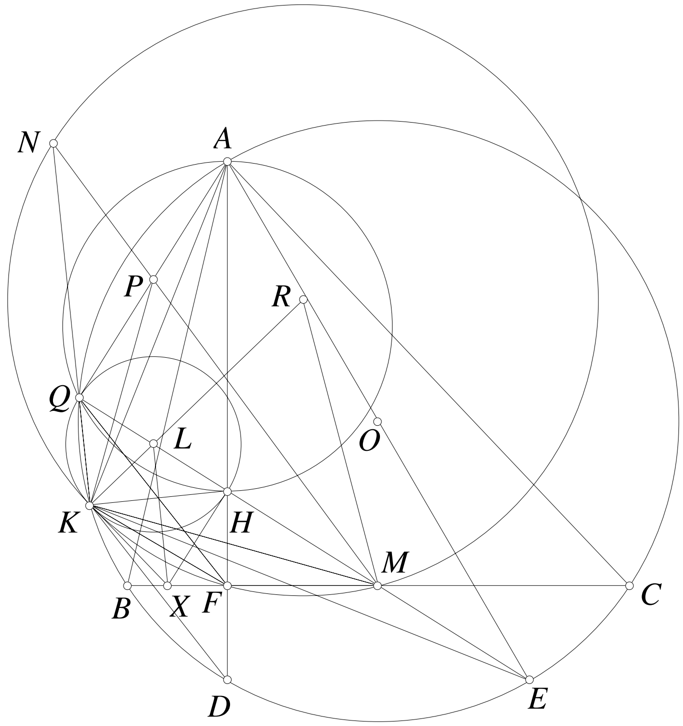


Hình 4.

Lời giải. Gọi L, R là tâm ngoại tiếp tam giác KQH và KFM thì L là trung điểm QH và theo bài toán 1 thì K, L, R thẳng hàng. Gọi P là trung điểm QA, ta sẽ chứng minh M, N, P thẳng hàng, thật vậy. Gọi AE là đường kính của (O) thì Q, H, M, E thẳng hàng. Từ đó $\angle KQH = \angle KAE$ nên hai tam giác vuông KQH và KAE đồng dạng suy ra hai tam giác KQA và KHE đồng dạng, chúng có trung tuyến là KP, KM nên $\angle QPK = \angle QMK$ và $\angle QKP = \angle HKM$. Cũng từ đó tứ giác $QPMK$ nội tiếp. Ta có $\angle CMN = \angle QKF = \angle QKL + \angle LKM + \angle MKF = \angle KPM + \angle RMK + 90^\circ - \angle RMF = 90^\circ - \angle PMK + \angle RMK = 90^\circ - \angle PMK + \angle RMK + 90^circ - \angle RMF = 180^\circ - \angle BMP = \angle CMP$. Từ đó M, N, P thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Chính nhờ ý tưởng của bài toán này cho ta một cách nhìn rất thú vị khi giấu đi tiếp điểm ở bài toán gốc như sau

Bài toán 1.3. Cho tam giác ABC nhọn với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt HM tại Q khác A. X thuộc BC sao cho $XH \perp QM$. L, P là trung điểm QH, QA. Đường thẳng qua Q song song LX cắt MP tại N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác NFM tiếp xúc đường tròn đường kính QH.



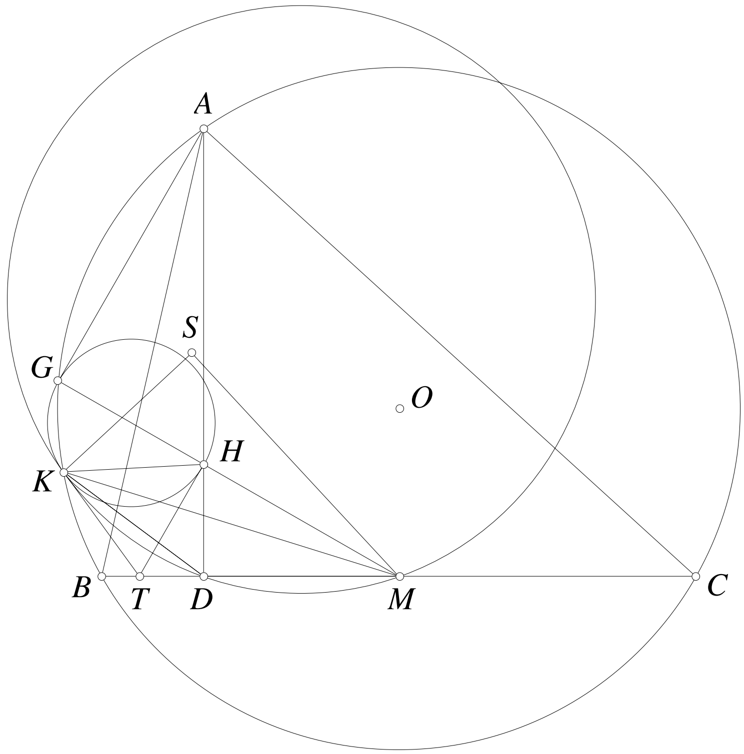
Hình 5.

Lời giải thứ nhất. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi AE là đường kính của (O) thì Q, H, M, E thẳng hàng. Gọi D đối xứng H qua BC. Đường tròn (X, XH) cắt đường tròn (O) tại K khác D. Ta có $\angle XKH = \angle XHK = 90^\circ - \angle KDH = 90^\circ - \angle KEA = \angle KAE = \angle KQE$, từ đó KH, KX tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác QKH. Lại có $\angle KQH = \angle KHX = 90^\circ - \angle KHQ$ nên $\angle QKH = 90^\circ$. K thuộc đường tròn đường kính QH nên $LX \perp KH \perp QK$ suy ra $QK \parallel LX \parallel QN$ nên K, Q, N thẳng hàng. Từ tam giác KQH và tam giác KAE đồng dạng suy ra KQA và KHE đồng dạng, lại có trung tuyến tương ứng là KP, KM nên tam giác KQP và KHM đồng dạng hay KQH và KPM đồng dạng. Lại có $XK^2 = XH^2 = XM.XF$ suy ra XK tiếp xúc đường tròn (R) ngoại tiếp tam giác KFM. Từ đó K, L, R thẳng hàng. Vậy $\angle LKQ = \angle LQK = \angle KPM = 90^\circ - \angle KHQ = 90^\circ - \angle PMK$ từ đây dễ suy ra $\angle KRM = 2\angle N$. Từ đó N thuộc (R) hay (R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác NFM. Hiển nhiên (R) tiếp xúc đường tròn đường kính QH. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải thứ hai. Gọi đường tròn đường kính QH cắt (O) tại K khác A và D đối xứng H qua BC. Chứng minh tương tự bài toán gốc thì QE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác KHD mà $HX \perp QE$ nên tâm ngoại tiếp tam giác KHD nằm trên HX, lại có X thuộc trung trực HD nên tâm ngoại tiếp tam giác KHD chính là X vậy $XH = XK$. Mà dễ thấy XH tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác QHK nên XK cũng vậy. Từ đó $KH \perp LX \perp QK$ nên $QK \parallel LX \parallel QN$. Từ đó Q, K, N thẳng hàng. Ta có $\angle QKF + \angle FMN = \angle QKL + \angle RKM + \angle MKF + \angle FMP = 90^\circ - \angle KHQ + \angle RMK + 90^\circ - \angle RMF + \angle FMP = 180^\circ$ hay tứ giác $NKFM$ nội tiếp. Từ đó đường tròn ngoại tiếp tam giác NFM tiếp xúc đường tròn đường kính QH. □

Ta lại có một ý tưởng khác phát triển bài toán IMO như sau

Bài toán 1.4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính HG cắt (O) tại K khác G. S đối xứng với D qua HK. Chứng minh rằng đường thẳng qua S vuông góc SK chia đôi BC.

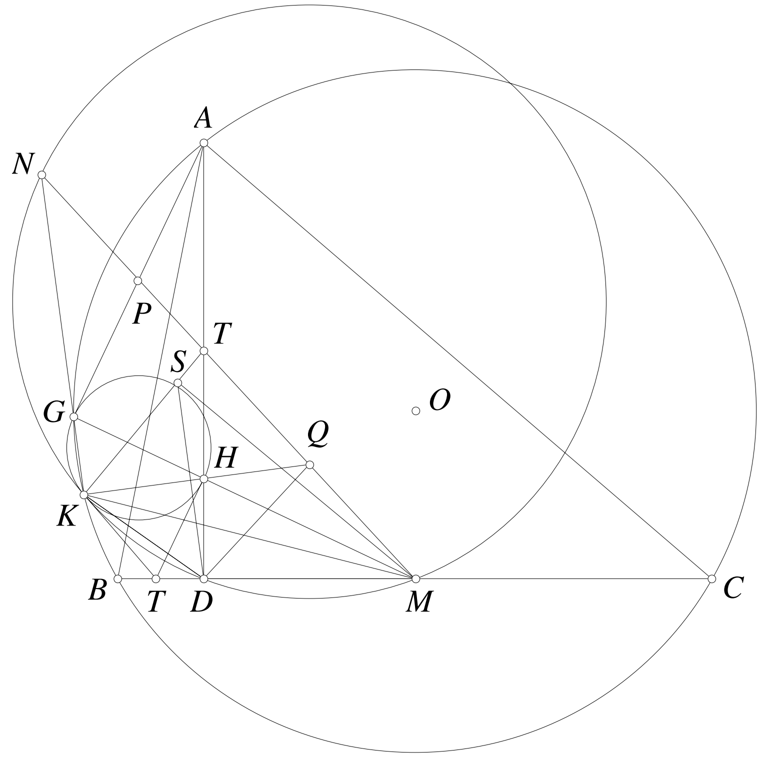


Hình 6.

Lời giải. Gọi M là trung điểm BC, ta sẽ chứng minh rằng tam giác KSM vuông tại S. Thật vậy. Theo bài toán IMO đường tròn ngoại tiếp tam giác KGH và KDM tiếp xúc nhau tại K. Gọi T thuộc BC sao cho KT là tiếp tuyến cung của hai đường tròn đó. Ta có $\angle SKM = \angle SKH + \angle HKM = \angle HKD + \angle GHK - \angle GMK = \angle HKT - \angle DKT + \angle GHK - \angle GMK = \angle HGK + \angle GHK - \angle KMD - \angle GMK = 90^\circ - \angle HMD = \angle DHM$. Cũng theo chứng minh bài toán gốc ta lại có TK và TH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KGH và hai tam giác TKD và TMK đồng dạng. Từ đó $\dfrac{KS}{KM} = \dfrac{KD}{KM} = \dfrac{TK}{TM} = \dfrac{TH}{TM} = \dfrac{HD}{HM}$. Từ đó dễ thấy hai tam giác KSM và HDM đồng dạng nên $\angle KSM = 90^\circ$. □

Từ hai bài toán trên ta đi đến phát triển sau

Bài toán 1.5. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD, trung tuyến AM. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính HG cắt BC tại K khác G. KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tại N khác K. KH cắt MN tại Q. Chứng minh rằng $QD = QM$.

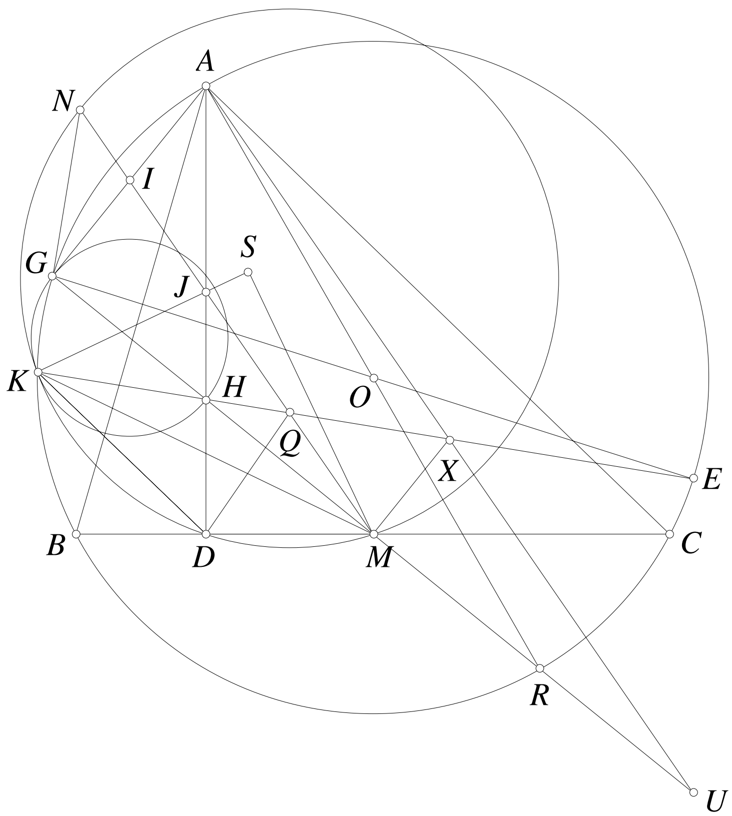


Hình 7.

Lời giải thứ nhất được tác giả đưa ra dựa trên kết quả bài trước

Lời giải thứ nhất. Gọi S đối xứng D qua KH và KS cắt MM tại T. Theo chứng minh bài trước thì MN đi qua trung điểm P của GA nên $\angle QHM = \angle GHK = \angle KMQ$. Từ đó $\angle QMH = \angle QKM$. Vậy $\angle HKD = 90° - \angle HMD - \angle HKM = 90° - \angle QMD$. Từ đó $\angle KSD = 90° - \angle SKH = 90° - \angle HKD = \angle QMD$ suy ra tứ giác $STMD$ nội tiếp. Cũng theo bài trước thì $\angle TSK = 90°$. Từ đây suy ra $\angle TDM = 90°$ hay T thuộc AH. Cũng từ $\angle HKD = 90° - \angle QMD = \angle MTD$ nên tứ giác $KTQD$ nội tiếp, ta thu được $\angle DQM = \angle TKD$ hay hai tam giác QDM và KDS đồng dạng hay $QD = QM$. $\square$

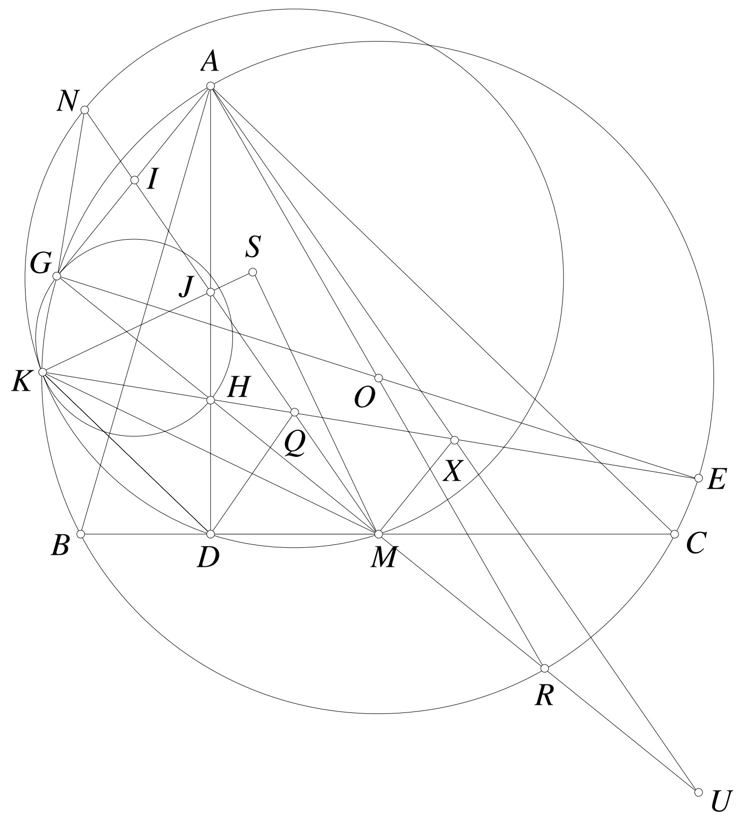
Lời giải thứ hai là chứng minh trực tiếp của bạn **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp 12A1 Toán THPT chuyên KHTN.



Hình 8.

Lời giải. Vẽ đường kính AR, GE của (O).Gọi I là trung điểm GA. Từ kết quả bài trước ta đã có I nằm trên đường thẳng MN. Gọi X là trung điểm HE. Ta có kết quả quen thuộc G, H, M, R thẳng hàng. Từ đó suy ra $MX \parallel GA$ và $MX = \frac{1}{2}RE = \frac{1}{2}.GA = IA = IG$ vậy $AIMX, IGMX$ là các hình bình hành. Do đó $AX \parallel MI$ và $XI \perp GA$. Từ đó ta thu được $XA = XG$. Gọi MI cắt AD tại J. Lấy U đối xứng A qua X. Từ $XA = XG$ suy ra $\angle AGU = 90°$. Do đó U nằm trên đường thẳng HM. Vậy KH chia đôi MJ do $MJ \parallel AU$ và KH chia đôi AU tại X. Suy ra Q là trung điểm MJ, kết hợp $\angle JDM = 90°$, ta được $QD = QM$. □

Từ đó nếu ta sử dụng kết quả bài này thì bạn **Vũ** lại đưa ra một lời giải khác cho bài toán trước như sau



Hình 9.

Lời giải bài trước. Ta vẫn sử dụng các kí hiệu như lời giải thứ hai ở trên. Từ bài toán này ta suy ra Q là tâm ngoại tiếp tam giác DMS. Suy ra $\angle DSM = \dfrac{1}{2}\angle DQM$. Ta có $HK.HX = HK.\dfrac{1}{2}HE = HG.\dfrac{1}{2}HR = HG.HM = HA.HD$. Suy ra tứ giác $AXDK$ nội tiếp. Do đó ta có $\angle KSD = \angle KDS = 90^\circ - \angle DKH = 90^\circ - \angle DAX = 90^\circ - \angle DJM = 90^\circ - \dfrac{1}{2}.\angle DQM = 90^\circ - \angle DSM$. Vậy $\angle KSM = \angle KSD + \angle DSM = 90^\circ$. □

Nếu sử dụng thêm định lý con bướm ta có hai khai thác như sau

Bài toán 1.6. Cho tam giác ABC nhọn với tâm ngoại tiếp O với trực tâm H, đường cao AD và trung tuyến AM. G là hình chiếu của A lên HM. L là trung điểm HG. K đối xứng với G qua OL. KL cắt trung trực DM tại S. KG cắt BC tại T. Lấy X thuộc MK sao cho $TX \perp ST$. Y đối xứng X qua T. P là trung điểm AG. Chứng minh rằng KG, YD, MP đồng quy.

Ta cũng có thể phát biểu bài toán trên cách khác, bài toán này cũng có nhiều giá trị

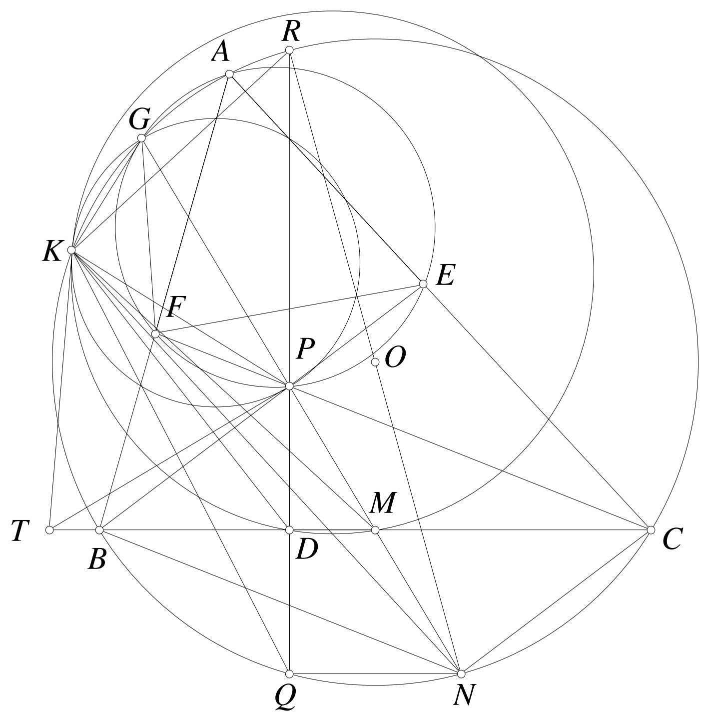
Bài toán 1.7. Cho tam giác ABC nhọn với tâm ngoại tiếp O với trực tâm H, đường cao AD và trung tuyến AM. G là hình chiếu của A lên HM. L là trung điểm HG. K đối xứng H qua OL. KL cắt trung trực DM tại S. P là trung điểm GA. N là đối xứng của M qua hình chiếu của S lên MP. NG cắt BC tại T. Lấy X thuộc ND sao cho $XT \perp ST$. Y đối xứng X qua T. Chứng minh rằng MY, NG, KL đồng quy.

Như vậy từ mô hình bài toán gốc ta đã thu được một số bài toán khác nhau đều là các kết quả đẹp và có giá trị.

1.3 Mở rộng bài toán IMO

Bài toán IMO này là một bài toán hay theo nghĩa có nhiều phát triển mở rộng. Trong [1] cũng đưa ra nhiều mở rộng nhưng trong bài viết này tôi chỉ viết về các mở rộng của mình, ta đi tới mở rộng đầu tiên như

Bài toán 1.8. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm trong tam giác sao cho $\angle BPC = 180^\circ - \angle A$. PB, PC cắt CA, AB tại E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính PG cắt (O) tại K khác G. D là hình chiếu của P lên BC và M là trung điểm BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGP và KDM tiếp xúc với nhau.



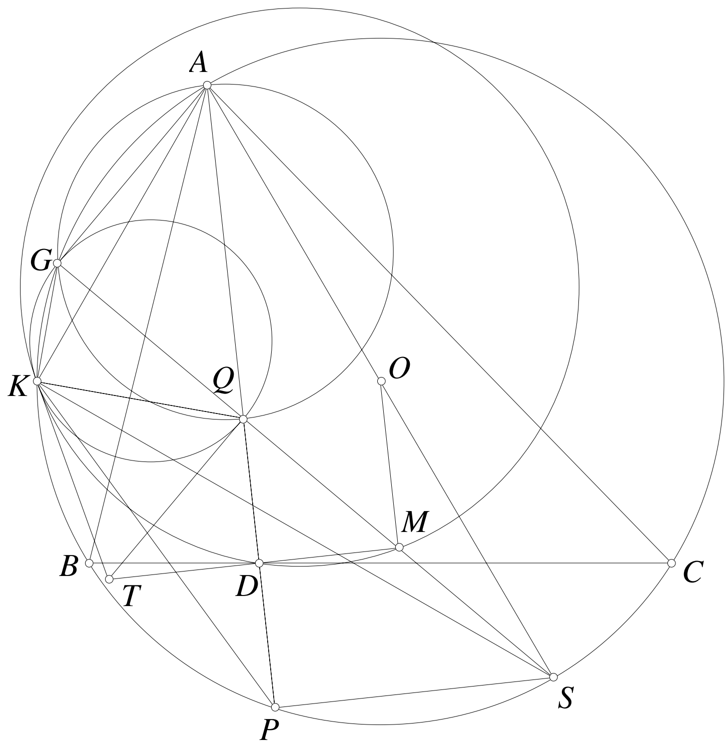
Hình 10.

Lời giải. Gọi Q là đối xứng của P qua D, thì Q nằm trên (O). Gọi GP cắt (O) tại N khác G. Ta thấy $\angle NPC = \angle FPG = \angle FAG = \angle BNP$ suy ra $BN \parallel PC$. Tương tự, $CN \parallel BP$. Từ đó M là trung điểm của PN. Gọi AS, NR là đường kính của (O). Ta dễ thấy $\angle PQN = 90^\circ$ vậy nên P, Q, R thẳng hàng. Từ đó, GN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ. Gọi tiếp tuyến tại K, P của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPG cắt nhau tại T. Ta có $\angle KTP = 180^\circ - 2\angle KGP = 2(90^\circ - \angle KRN) = 2\angle RNK = 2\angle KQP$ và $TK = TP$. Từ đó T là tâm ngoại tiếp tam giác KPQ nhưng vì BC là trung trực PQ nên T thuộc BC. Từ đây ta có $TK^2 = TP^2 = TD.TM$ suy ra TK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KDM và KHM hay hai đường tròn đó tiếp xúc nhau tại K. $\square$

Nhận xét. Mở rộng trên lần đầu được tác giải đăng trong [1] và sau đó tác giả cũng chỉnh sửa lại cho ngắn gọn hơn như trên. Khi cho P là trực tâm hoặc khi cho góc A đặc biệt ta sẽ thu được nhiều trường hợp riêng giá trị. Một cách nhìn khác dễ dàng hơn khi dễ thấy P là trực tâm tam giác RBC

nên ta áp dụng trực tiếp bài toán gốc trên tam giác RBC thì thu bài toán trên. Sau đây là một mở rộng khác của tôi cho bài toán này

Bài toán 1.9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại D. Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính GQ cắt (O) tại K khác G. GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGQ và KDM tiếp xúc nhau.



Hình 11.

Lời giải. Gọi GQ cắt (O) tại S khác G, do $\angle AGQ = 90^\circ$ nên AS là đường kính của (O). Do $OM \parallel AP$ và O là trung điểm AS nên M là trung điểm QS. Từ đó $DM \parallel PS \perp PA$ nên DM là trung trực PA. Lại có $\angle KQG = 90^\circ - \angle KGQ = 90^\circ - \angle KAS = \angle ASK = \angle QPK$. Từ đó GS tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác KQP. Gọi tiếp tuyến tại K, Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác GKQ cắt nhau tại T. Ta có $\angle KTQ = 180^\circ - 2\angle KGQ = 2\angle KQG = 2\angle KPQ$. Từ đó T là tâm ngoại tiếp tam giác KPQ. Ta đã chứng minh DM là trung trực PQ nên T thuộc DM. Từ đây ta có $TK^2 = TP^2 = TD.TM$ suy ra TK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGQ và KDM hay hai đường tròn đó tiếp xúc nhau tại K. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

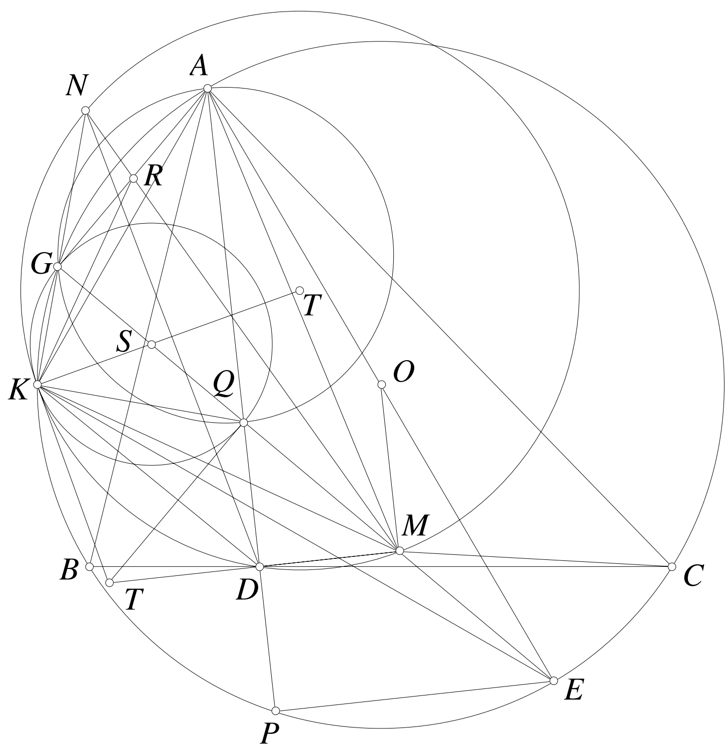
Nhận xét. Mở rộng này khá quan trọng vì nó dựa trên một mô hình rất giống bài toán gốc. Do đó những ứng dụng của bài toán gốc đều có thể phát triển trên mô hình này. Tuy nhiên ta cũng có thể có cái nhìn đơn giản hơn khi kéo dài trung trực PQ cắt (O) tại hai điểm Y, Z thì Q là trực tâm tam giác AYZ nên áp dụng bài toán gốc IMO vào tam giác AYZ. Ta thu được bài toán này. Một cách tương tự các bạn có thể làm với mở rộng sau

Bài toán 1.10. Cho tam giác ABC có P là hai điểm trong tam giác. X, Y, Z là đối xứng của P qua BC, CA, AB. PX cắt đường tròn (Q) ngoại tiếp tam giác XYZ tại T khác X. Đường tròn đường kính PT cắt (Q) tại G khác T. Đường tròn đường kính PG cắt (Q) tại K khác G. D, M là hình chiếu của P, Q lên BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM và KPG tiếp xúc nhau.

Như vậy qua hai bài toán trên có thể thấy bài toán IMO gốc vẫn đóng một vài trò rất quan trọng, khi áp dụng bài toán đó vào các mô hình khác nhau cho ta nhiều bài toán phát triển rất thú vị.

Ta tiếp tục đi tới một số khai thác của bài toán tổng quát giống như các khai thác của bài toán IMO

Bài toán 1.11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại D. Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính GQ cắt (O) tại K khác G. GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tại N khác K. Chứng minh rằng MN chia đôi GA.

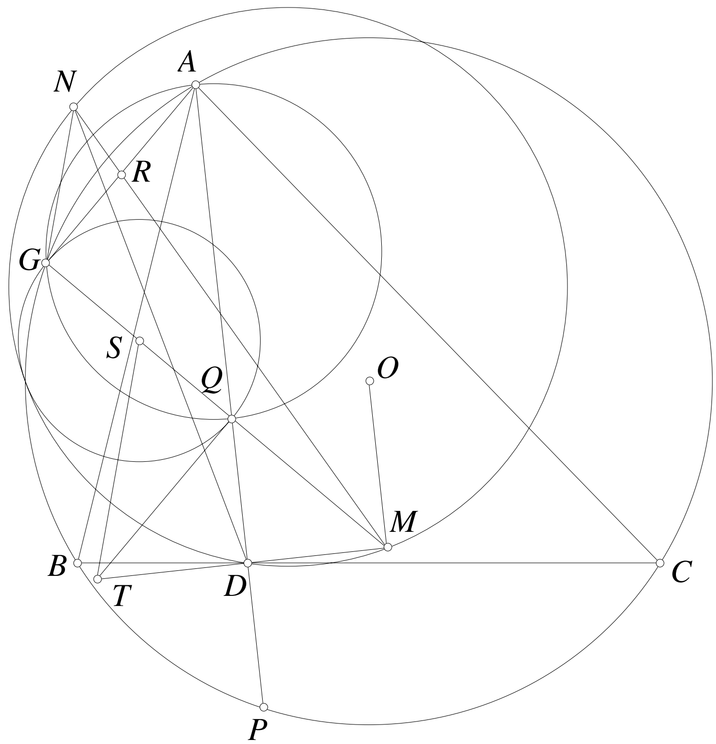


Hình 12.

Lời giải. Gọi AE là đường kính của (O). Chứng minh tương tự bài toán 1.9 ta có G, Q, M, E thẳng hàng và M là trung điểm QE. Từ đó dễ có các tam giác vuông KGQ và KAE đồng dạng, suy ta giác KGQ và KQE đồng dạng. Gọi R là trung điểm GA thì hai tam giác KGR và KQM đồng dạng. Từ đó dễ thấy tứ giác $KGRM$ nội tiếp. Ta có $\angle DMN = 180° - \angle DKN = 180° - (\angle GKS + \angle TKM + \angle MKD) = 180° - (90° - \angle KMR + \angle TMK + 90° - \angle TMD) = \angle DMR$. Từ đó ta có M, N, R thẳng hàng. □

Bài toán 1.12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại D. Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt (O) tại G khác A.

GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. Đường thẳng qua Q vuông góc GM cắt DM tại T. S, R là trung điểm GQ, GA. Đường thẳng qua G song song ST cắt MR tại N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MND tiếp xúc đường tròn đường kính GQ.



Hình 13.

Ta xây dựng thêm các mô hình khác nữa cho bài toán IMO như sau

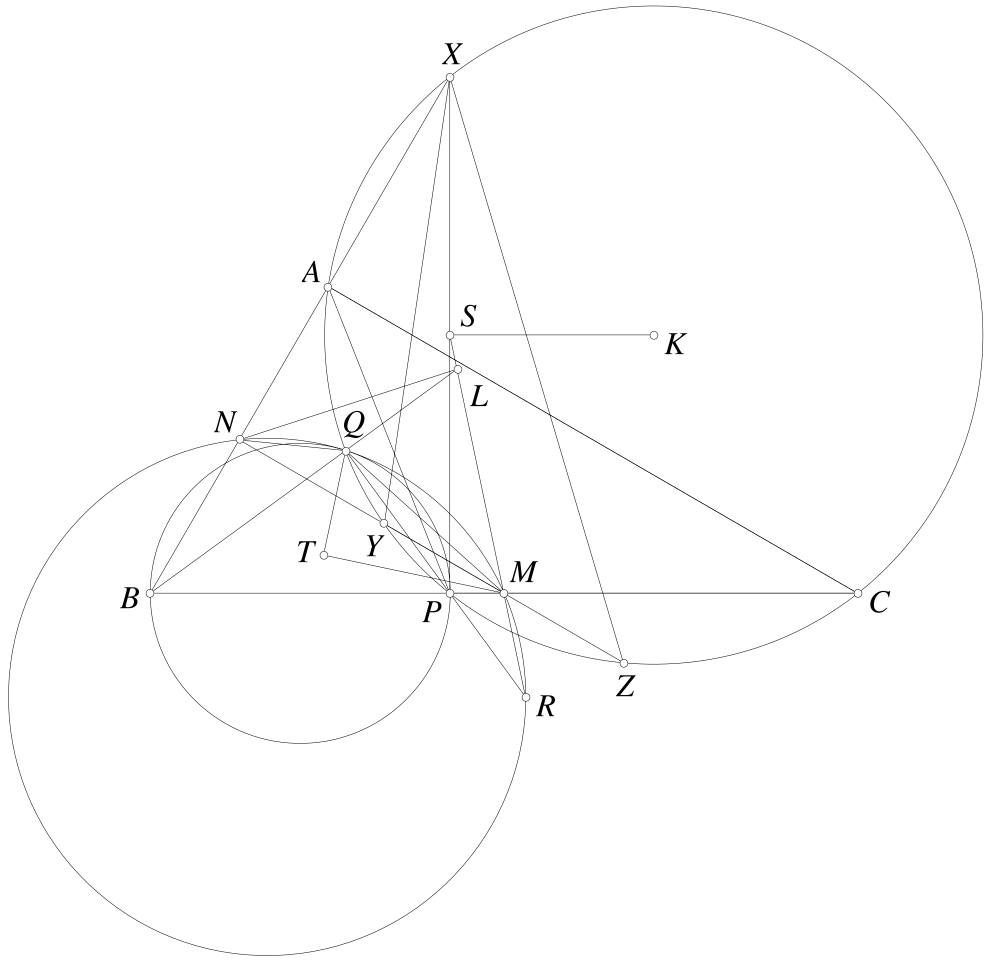
Bài toán 1.13. Cho tam giác ABC vuông tại A. P là một điểm trên BC. Đường tròn đường kính BP cắt đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác APC tại Q khác P. Gọi M, N là trung điểm của BC, AB.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN và QPB tiếp xúc nhau.

b) Gọi PQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN tại R khác Q. MR cắt đường thẳng qua P vuông góc BC tại S. Chứng minh rằng $KS \parallel BC$.

c) Gọi T đối xứng N qua BQ. Chứng minh rằng $\angle QTM = 90°$.

d) Gọi BQ cắt ST tại L. Chứng minh rằng tam giác LMN cân.

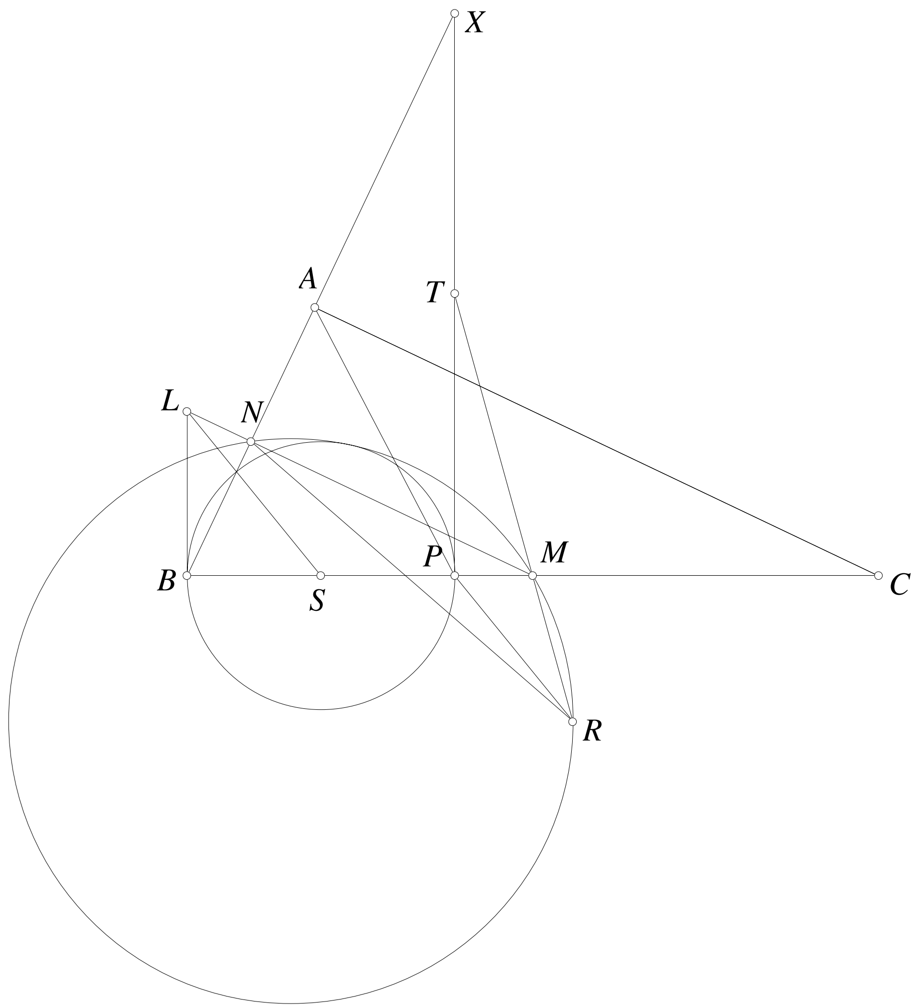


Hình 14.

Lời giải. Gọi AB cắt (K) tại X khác A và MN cắt (K) tại Y, Z. Dễ thấy B là trực tâm tam giác XYZ. Áp dụng các bài toán đã xây dựng cho tam giác XYZ trực tâm B ta thu được điều phải chứng minh. □

Ta lại sử dụng cách đã làm để giấu đi tiếp điểm ta thu được bài toán thú vị sau

Bài toán 1.14. Cho tam giác ABC vuông tại A. M, N là trung điểm BC, AB. Một đường thẳng vuông góc BC tại P cắt AB tại X. S, T là trung điểm PB, PX. Lấy điểm L thuộc MN sao cho $BL \perp BC$. Lấy R thuộc MT sao cho $PR \parallel LS$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN tiếp xúc đường tròn đường kính PB.



Hình 15.

Ngoài ta tôi còn thu được một bài toán tổng quát khá lạ rất thú vị như sau

Bài toán 1.15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F. BE cắt CF tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính HG cắt (O) tại L khác G. D là hình chiếu của K lên AH. GK cắt BC tại M. ML cắt KD tại N. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác LHG và LDN tiếp xúc nhau.

Mặt khác bài toán gốc vẫn còn nhiều phát triển và mở rộng khác các bạn hãy luyện tập các bài sau

Bài toán 1.16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường kính AD. M là một điểm trên BC. MD cắt (O) tại G khác D. Q là đối xứng của D qua M. Đường tròn đường kính QG cắt (O) tại K khác G. N là hình chiếu của M lên AQ.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN và KQG tiếp xúc nhau.

b) Gọi KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN tại P khác K. Chứng minh rằng MP chia đôi AG.

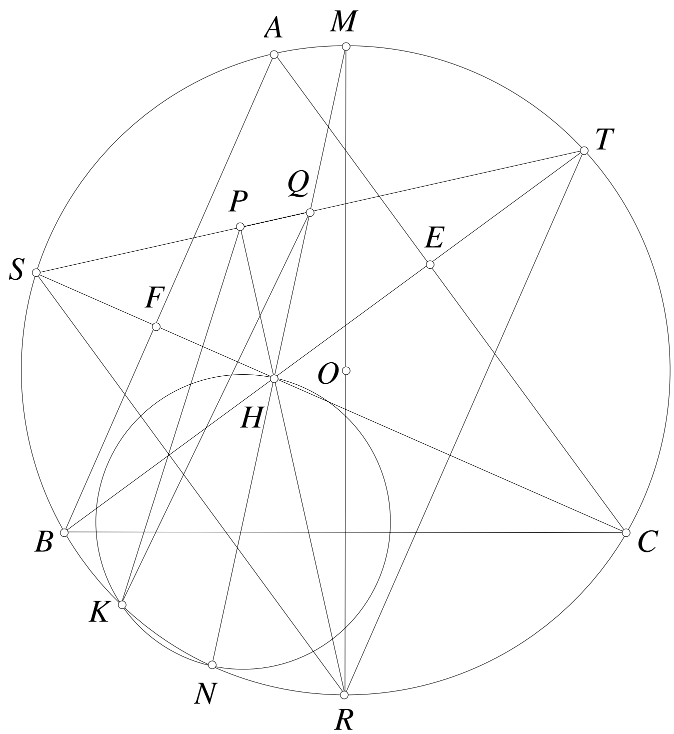
c) Gọi R đối xứng N qua QK. Chứng minh rằng $\angle KRM = 90°$.

Bài toán 1.17. Cho tam giác ABC có $\angle A = 60°$ nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. M là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. MH cắt (O) tại N khác M. Đường tròn đường kính HN cắt (O) tại K khác N. P là đối xứng của H qua EF và Q là trung điểm HM.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KPQ và KHN tiếp xúc nhau.

b) Gọi KN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ tại L khác K và R là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Chứng minh rằng QL chia đôi KR.

c) Gọi Z đối xứng P qua KH. Chứng minh rằng $\angle KZQ = 90°$.



Hình 16.

Lời giải. Gọi S, T đối xứng H qua F, E và MR là đường kính của (O). Từ $\angle BAC = 60°$ ta thấy H là trực tâm tam giác RST. Từ đó áp dụng các bài toán đã biết trên tam giác RST. Ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 1.18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) tâm nội tiếp I. Đường tròn A-mixtilinear tiếp xúc (O) tại P. Đường tròn đường kính PI cắt (O) tại K khác P. N là trung điểm AI và trung trực AI cắt PI tại M.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KMN và KPI tiếp xúc nhau.

b) Gọi KP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN tại L khác K. AI cắt (O) tại D khác A. Chứng minh rằng ML chia đôi PD.

c) Gọi Q đối xứng N qua KI. Chứng minh rằng $\angle KQM = 90°$.

Bài toán 1.19. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao BE, CF. K, L đối xứng O qua CA, AB. KE cắt LF tại H. T thuộc trung trực BC sao cho $HT \parallel OA$. M là trung điểm AT. MO cắt tiếp tuyến qua A của (O) tại N. Đường thẳng qua N song song OA cắt đường thẳng Euler của tam giác ABC tại P. G là hình chiếu của T lên NH. Q là trung điểm HG. S đối xứng G qua PQ. TH cắt AN tại D.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác SDN và SGH tiếp xúc nhau.

b) Gọi GS cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác SDN tại R khác S. Chứng minh rằng NR chia đôi TG.

c) Gọi W đối xứng với D qua SH. Chứng minh rằng $\angle SWN = 90°$.

Cuối cùng là một mô hình mở rộng đã có trong [1] được tìm ra bởi bạn **Trịnh Huy Vũ**.

Bài toán 1.20. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (D) bất kì đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F. Dựng đường kính AP của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. K là hình chiếu của D trên AP. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) lần thứ hai tại G. Đường tròn đường kính GP cắt (O) lần thứ hai tại J.

a) Chứng minh rằng đường tron ngoại tiếp tam giác JGP và JKD tiếp xúc nhau.

b) Đặt JG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác JKD lần thứ hai tại M. Chứng minh rằng DM chia đôi GA.

c) Gọi L đối xứng K qua JP. Chứng minh rằng $\angle JLD = 90°$.

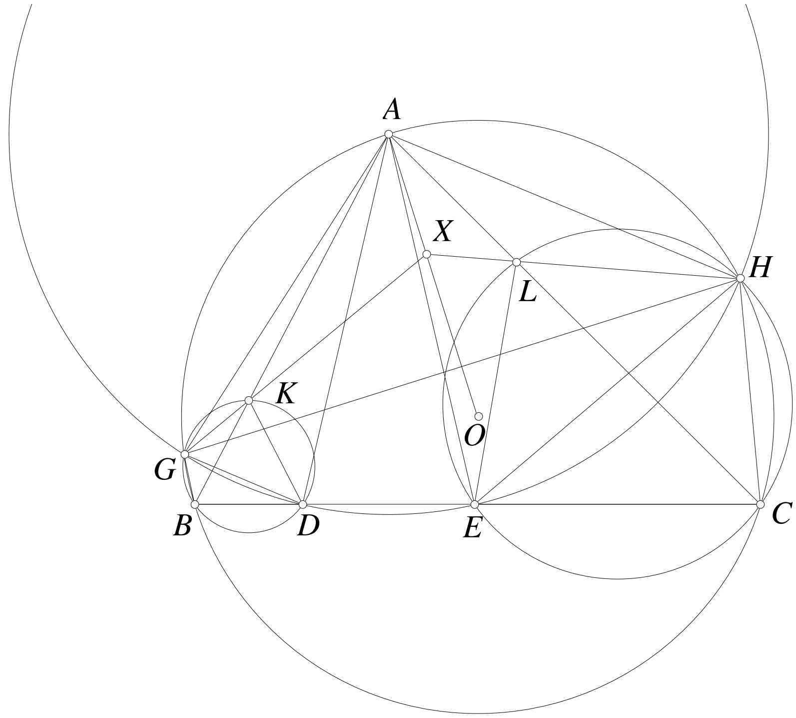
2 Bài hình ngày thứ 2

2.1 Mở đầu

Đề thi IMO ngày thứ 2 năm 2015 [2] có bài hình học rất thú vị như sau

Bài toán 2.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại D, E và cắt (O) tại G, H sao cho D nằm giữa B, E và tia AB nằm giữa tia AC, AG. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDG và CEH lần lượt cắt AB, AC tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.

Tôi xin trình bày lời giải của mình cho bài toán này



Hình 17.

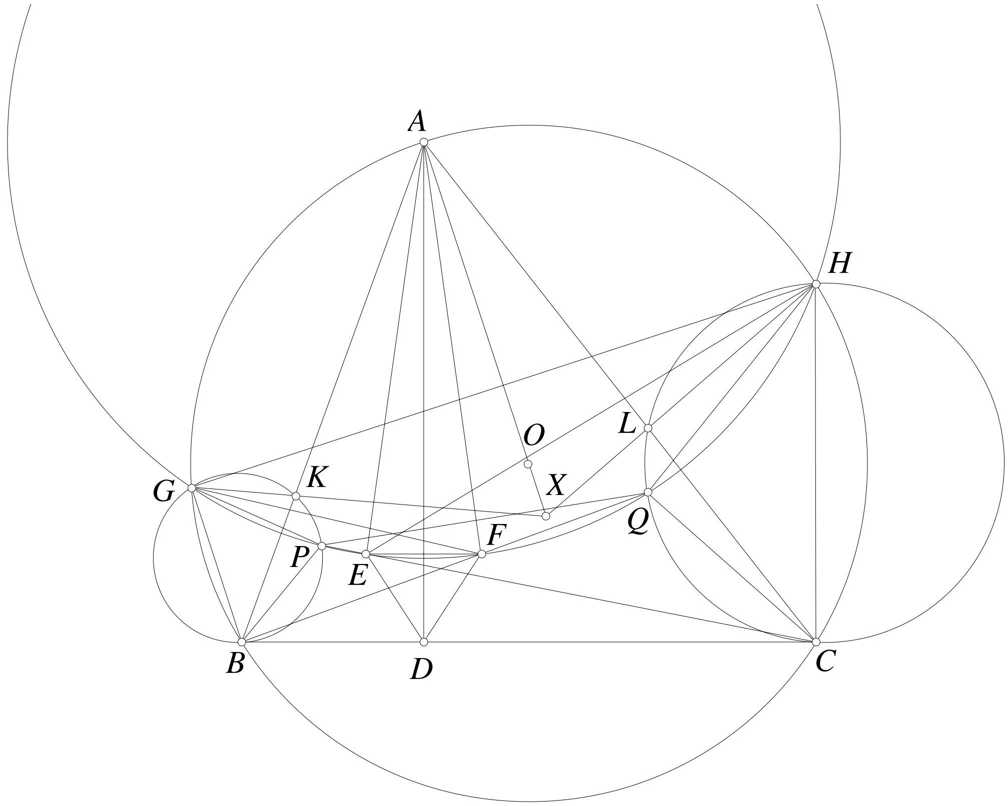
Lời giải. Gọi GK cắt LH tại X ta dễ thấy AO là trung trực GH. Ta chỉ cần chứng minh X thuộc trung trực GH là bài toán hoàn tất, thật vậy. Ta thấy $\angle EHC = \angle GHC - \angle GHE = 180° - \angle GBD - \angle GDB = \angle BGD$. Từ đó $\angle XGH = \angle XGD - \angle HGD = \angle KBD - \angle HEC = 180° - (\angle GBA + \angle BGD + \angle BDG) - \angle HEC = 180° - (\angle HCA + \angle EHC + \angle EHG) - \angle HEC = \angle ACB - \angle GHE = \angle XHE - \angle GHE = \angle XHG$. Từ đó tam giác XGH cân ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này là bài toán thứ 4 của ngày 2 được đánh giá là bài ở mức độ dễ. Lời giải dùng các kỹ thuật cộng góc rất cơ bản. Đây là bài toán đẹp, cấu hình không phức tạp mà đơn giản, có rất nhiều ý nghĩa trong kiểm tra đánh giá cũng như phát triển tư duy. Bài toán cũng có một số mở rộng và ứng dụng, chúng ta hãy theo dõi ở phần sau.

2.2 Mở rộng và khai thác

Đầu tiên ta thấy có thể thay thế đường tròn tâm A thành một đường tròn tâm bất kỳ trên đường thẳng AO bài toán có lời giải hoàn toàn tương tự. Chúng ta đi vào một mở rộng khác có ý nghĩa hơn

Bài toán 2.2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. (A) là đường tròn bất kỳ tâm A. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Đường tròn (A) cắt (O) tại G, H sao cho tia AB nằm giữa tia AG, AC. CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BA, CA tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.



Hình 18.

Lời giải. Trước hết ta có $EF \parallel BC$ nên $\angle QPE = \angle EFB = \angle FBC$. Từ đó tứ giác $PQCB$ nội tiếp. Lại có $\angle EHC = 180^\circ - \angle GBC - \angle GHE = 180^\circ - \angle GBP - \angle PBC - \angle GFE = \angle BGP + \angle GPB - (180^\circ - \angle BPC - \angle PCB) + 180^\circ - \angle GPE = \angle BGP + \angle FEC = \angle BGP + \angle PGF = \angle BGF$.

Từ đó $\angle HGX = \angle HGP - \angle PGK = \angle HEC - \angle PBK = \angle HEC - (\angle GBF - \angle GBA - \angle PBF)(1)$.

Tương tự $\angle GHX = \angle GFB - (\angle HCE - \angle HCA - \angle QCE) \quad (2)$.

Lại dễ có $\angle GBA = \angle HCA, \angle PBF = \angle QCE$ và $\angle BGF = \angle CHE$ nên $\angle GBF + \angle GFB = \angle HEC + \angle EHC$ hay $\angle HEC - \angle GBF = \angle GFB - \angle EHC \quad (3)$.

Từ (1),(2),(3) ta dễ suy ra $\angle HGX = \angle GHX$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán tổng quát vẫn đúng khi thay thế đường tròn (A) thành đường tròn bất kỳ tâm thuộc OA với cách giải biến đổi góc tương tự. Ta để ý kỹ là trong lời giải này cũng như lời giải bài toán gốc thì việc biến đổi góc để chỉ ra $\angle EHC = \angle FGB$ là một bước quan trọng.

Ta có thể thấy rằng thực chất việc G, H nằm trên (O) cũng không mấy quan trọng, ta đi tới bài toán tổng quát hơn như sau

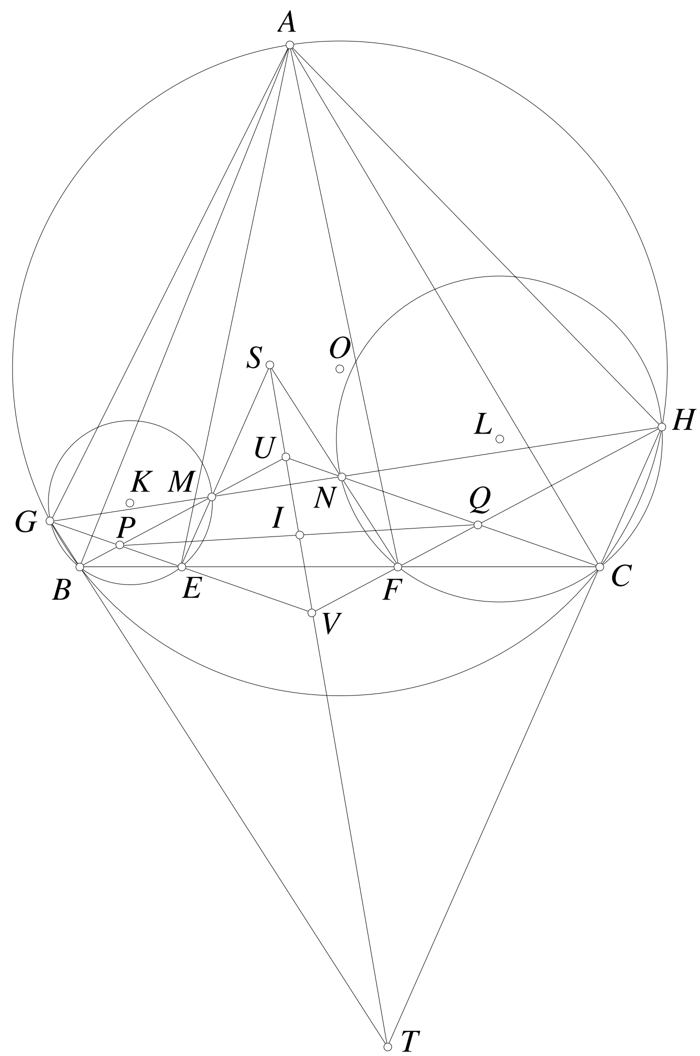
Bài toán 2.3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. (A) là đường tròn bất kỳ tâm A. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Trên đường tròn (A) lấy hai điểm G, H sao cho $GH \perp OA$ đồng thời tia AB nằm giữa tia AG, AC. Gọi CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BA, CA tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.

Mặt khác hơn nữa ta có thể thấy rằng trong bài toán trên ta có thể thay đường tròn (A) thành một đường tròn bất kỳ có tâm trên OA. Từ đó ta nghĩ rằng ta có thể thay đường thẳng OA thành trung trực của một dây cung của (O), ta lại có bài toán sau

Bài toán 2.4. Cho tứ giác $XYBC$ nội tiếp đường tròn (O). (A) là đường tròn bất kỳ tâm với tâm A thuộc trung trực XY. D là hình chiếu của A lên BC. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Trên đường tròn (A) lấy hai điểm G, H sao cho $GH \perp OA$ đồng thời tia AB nằm giữa tia AG, AC. Gọi CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BY, CX tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.

Nhờ đó ta có thể có nhiều cách khai thác bài toán, ssu đây chúng tôi trình bày một số khai thác trên mô hình bài toán này

Bài toán 2.5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại E, F và cắt (O) tại G, H sao cho E nằm giữa B, E và tia AB nằm giữa tia AC, AG. GH cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác BEG và CFH lần lượt M, N khác G, H. Gọi GE, HF lần lượt cắt BM, CN tại P, Q. Gọi ME, GB lần lượt cắt NF, HC tại S, T. Chứng minh rằng ST chia đôi PQ.



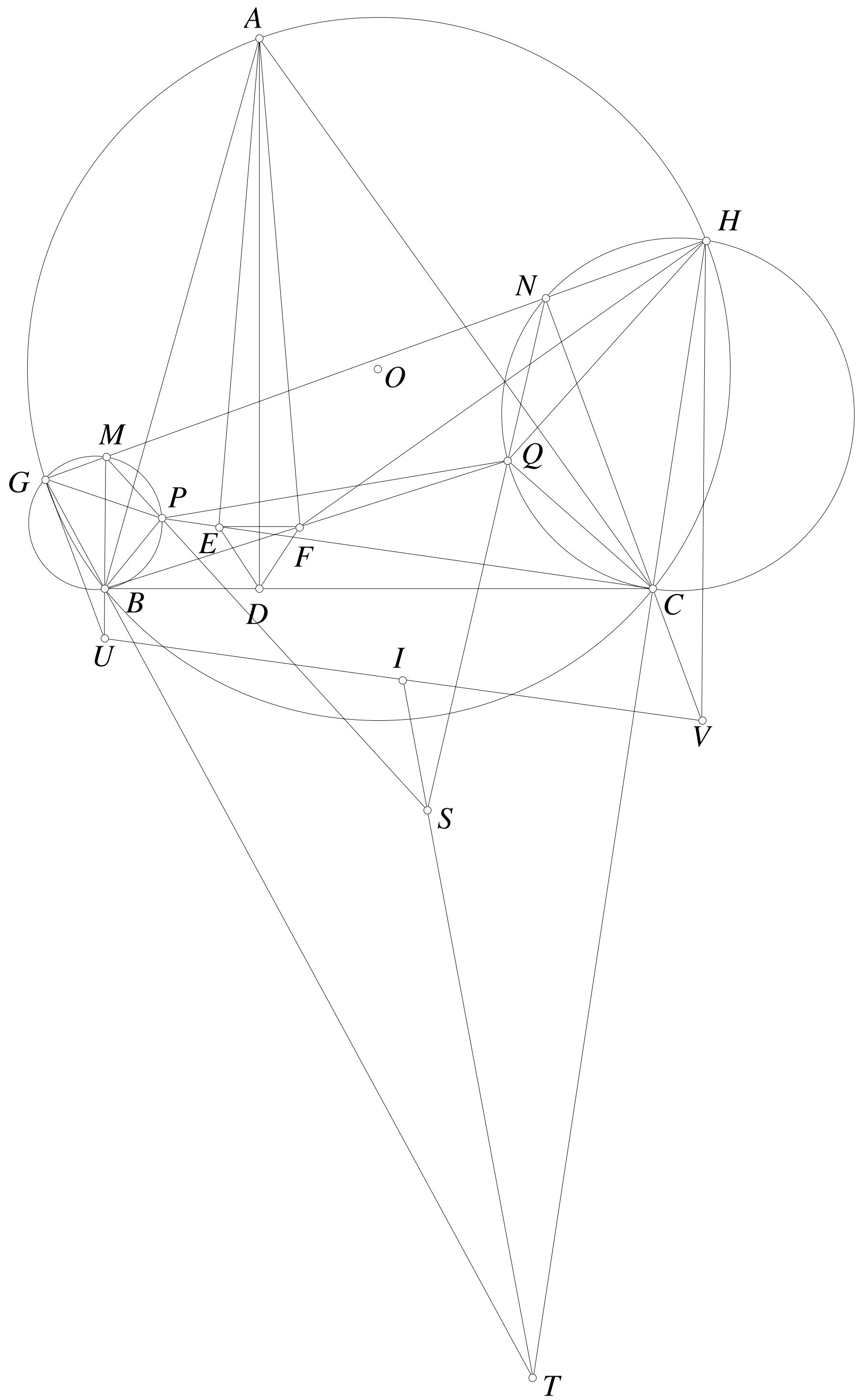
Hình 19.

Lời giải. Theo chứng minh bài toán gốc ta đã chỉ ra $\angle BGE = \angle CHF$. Từ đó có $\angle FNH = \angle FNC + \angle CFH = \angle FHC + \angle CFH = \angle EGB + \angle EGM = \angle BGM = \angle MEF$. Từ đó tứ giác

$MNFE$ nội tiếp. Lại dễ có $\angle HNC = \angle HFC = \angle EGH = \angle MBE$ suy ra tứ giác $BMNC$ nội tiếp. Gọi $(K),(L)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác BEG và CFH thì từ các tứ giác $EMNF$ va $BGHC$ nội tiếp ta suy ra ST là trục đẳng phương của (K) và (L). Ta lại có $\angle GEB = \angle GMB = \angle NCB$ nên $GE \parallel NC$, tương tự $HF \parallel MB$. Gọi BM, GE lần lượt cắt CN, HF tại U, V thì $PUQV$ là hình bình hành nên UV chia đôi PQ. Cũng từ các tứ giác $BMNC$ và $GEFH$ nội tiếp ta suy ra U, V cũng thuộc trục đẳng phương của $(K),(L)$ là ST. Vậy từ đó ST chia đôi PQ. Ta có điều phải chứng minh. □

Một cách hoàn toàn tương tự, ta thu được một bài toán chia đôi đoạn thẳng thú vị trên mô hình bài toán tổng quát

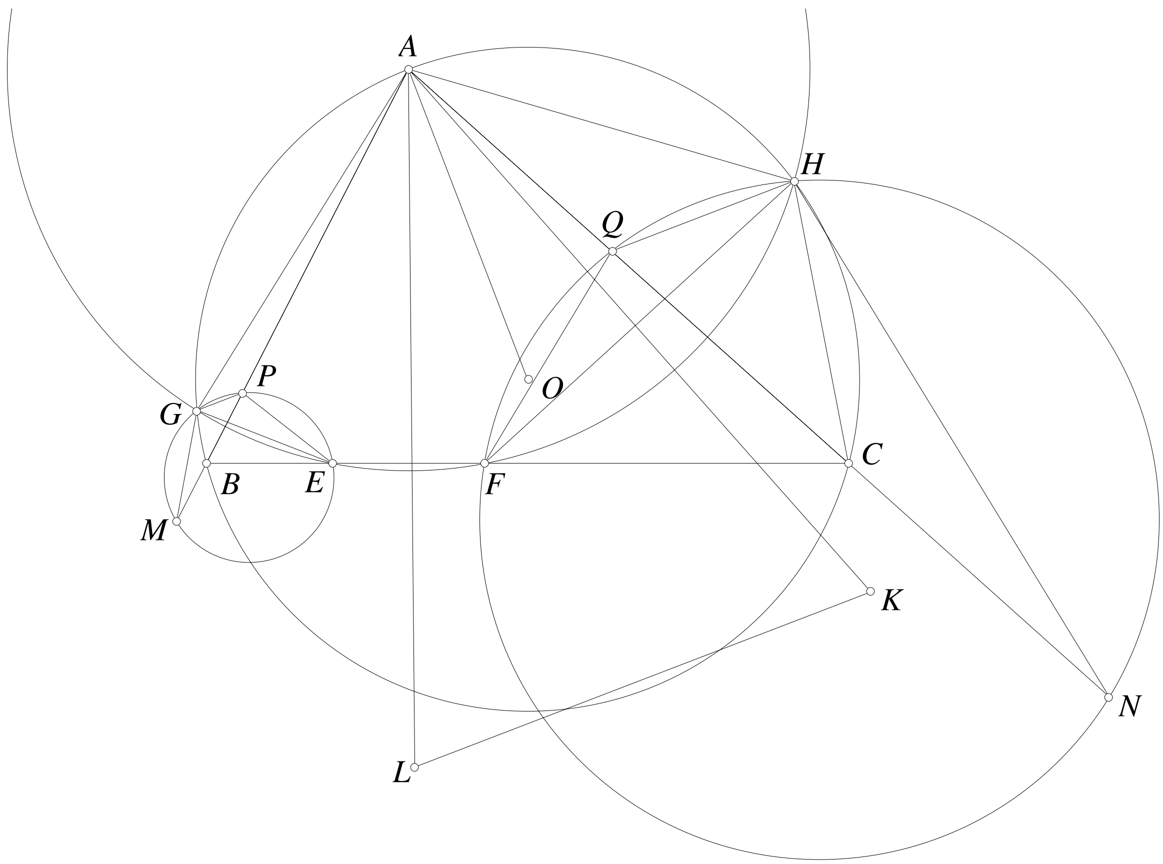
Bài toán 2.6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. (A) là đường tròn bất kỳ tâm A. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Đường tròn (A) cắt (O) tại G, H sao cho tia AB nằm giữa tia AG, AC. CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. GH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt tại M, N. MP, GB lần lượt cắt NQ, HC tại S, T. Lấy các điểm U, V trên đường thẳng MB, NC sao cho $UG \parallel NC$ and $VH \parallel MB$. Chứng minh rằng ST chia đôi UV.



Hình 20.

Nếu biết sử dụng phép nghịch đảo các bạn có thể làm thêm bài toán sau để luyện tập

Bài toán 2.7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại E, F và cắt (O) tại G, H sao cho E nằm giữa B, F và tia AB nằm giữa tia AC, AG. Đường tròn qua H, C tiếp xúc HA cắt CA tại Q khác C. Đường tròn qua G, B tiếp xúc GA cắt AB tại P khác B. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GPE và HQF cắt AB, AC tại M, N khác P, Q. Chứng minh rằng bán kính ngoại tiếp hai tam giác AGM và AHN bằng nhau.



Hình 21.

3 Kết luận

Kỳ thi IMO năm nay lại tiếp túc có 2 bài hình lần lượt ở vị trí số 3 và số 4. Hai bài toán hình học thi IMO năm nay đều là các bài toán hay có giá trị cao. Ngoài việc đưa ra những mở rộng khác nhau bài viết còn có ứng dụng các bài toán thi này vào những bài toán chia đôi đoạn thẳng đẹp mắt. Cũng từ bài toán chia đôi đoạn thẳng của ngày 1 ta thu được một cách phát biểu thú vị về hai đường tròn tiếp xúc nhau từ các cách phát biểu mới thu được lại có thể ứng dụng phát biểu cho bài toán tổng quát thứ hai, điều này làm tăng sự hấp dẫn cho bài toán thi. Bài toán chia đôi đoạn thẳng trong phát triển ngày thứ 2 cũng không kém phần thú vị, đó là sự kết hợp ứng dụng của trục đẳng phương và hình bình hành. Hai bài toán hình của kỳ thi năm nay đẹp và có tính gợi mở và phát triển cao, rất xứng đáng là đề bài thi IMO.

Cuối cùng tác giả muốn được nói lời cảm ơn tới bạn **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp 12A1 Toán THPT chuyên KHTN học trò của tác giả, người đã có nhiều đóng góp cho bài viết và giúp tác giả chỉnh sửa một số lỗi trong bài viết.

Tài liệu

[1] Topic Problem3
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1112748_problem3

[2] Topic Problem 4
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1113163_problem_4

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com