

Mỗi tuần một bài toán

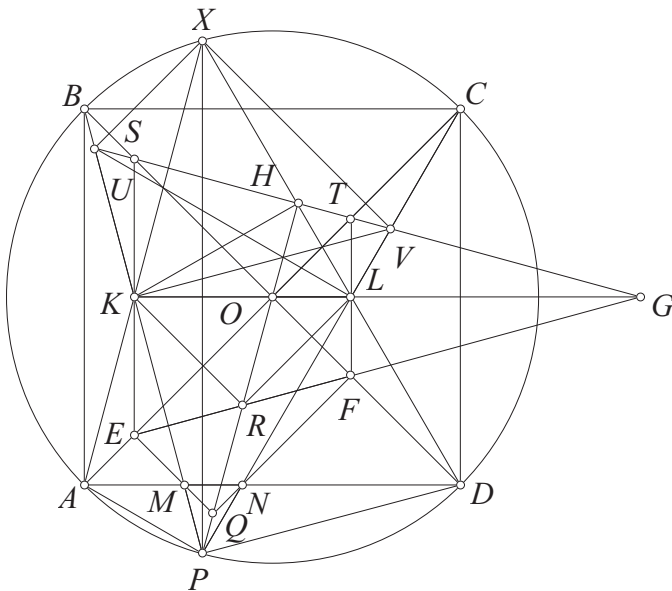
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) . P là một điểm thuộc cung nhỏ AD của (O) . PB, PC lần lượt cắt đoạn AD tại M, N . Trung trực của AM, DN lần lượt cắt BD, AC tại S, T . ST cắt PC, PB lần lượt tại U, V . Chứng minh rằng đường tròn đường kính UV tiếp xúc (O) .

Lời giải



Gọi trung trực AM cắt PB, AC tại K, E . Trung trực DN cắt PC, BD tại L, F . Do tam giác NCD vuông nên L là trung điểm CN , ta suy ra $LO \parallel AD$. Tương tự $KO \parallel AD$ nên K, O, L thẳng hàng. Dễ thấy tam giác AEM vuông cân nên $EM \perp AC$ nên $EM \parallel DB$. Tương tự $FN \parallel AC$. Chú ý $MN \parallel BC$ nên $\frac{PM}{PB} = \frac{PN}{PC}$. Vậy ta lấy điểm Q thuộc PO sao cho $\frac{PQ}{PO} = \frac{PM}{PB} = \frac{PN}{PC}$. Từ đó ta thấy $QM \parallel BD \parallel EM$ nên E, M, Q thẳng hàng. Chứng minh tương tự F, N, Q thẳng hàng. Từ đó dễ thấy $OEQF$ là hình chữ nhật nên PO đi qua trung điểm R của EF . Dễ thấy S, E đối xứng nhau qua K . T, F đối xứng nhau qua L . Vậy ST, KL, EF đồng quy tại G . Ta thấy R cũng là trung điểm OQ . Nên trong $BOQM$ có KR là đường trung bình, ta suy ra $KR \parallel QM$. Tương tự $LR \parallel QN$. Ta cũng có $MN \parallel KL$. Mặt khác dễ thấy tam

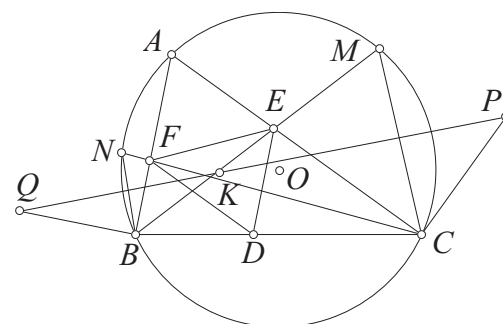
giá QMN vuông cân nên tam giác RKL vuông cân. Từ đó $\angle RLG = 135^\circ$. Mặt khác dễ có $RO = RF$ và $LO = LF$ nên RL là phân giác của $\angle ORF$. Từ đó gọi PO cắt ST tại H thì L là tâm nội tiếp tam giác RHG và $\angle RLG = 135^\circ$. Từ đó $\angle RHG = 2\angle RLG - 180^\circ = 90^\circ$. Nên $PO \perp ST$ tại H suy ra tứ giác $SHOK$ nội tiếp. Từ đó $\angle SHK = \angle SOK = 45^\circ = \angle KPL$ nên tứ giác $KHVP$ nội tiếp, ta suy ra $\angle PKV = \angle PHV = 90^\circ$. Tương tự $\angle PLU = 90^\circ$ nên K, L nằm trên đường tròn đường kính UV . Gọi X đối xứng P qua KL thì X thuộc (O) nên từ đó $\angle KXL = 45^\circ = \angle KSO = \angle KHP = \angle KVP$ nên X nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KLV cũng là đường tròn đường kính UV . Dễ thấy do $KL \parallel AD$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác XKL hay chính là đường tròn đường kính UV tiếp xúc (O) .

Nhật xét

Bài toán là kết quả tổng hợp của bài toán thi vòng 2 vào lớp 10 chuyên toán THPT chuyên KHTN 2016. Các bạn **Nguyễn Đình Hoàng**, **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và **Nguyễn Tiến Long** lớp 10 toán THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ đã tham gia giải tại **đây**. Trong topic đó bạn **Nguyễn Đức Bảo**, **Nguyễn Quang Dương** đã đưa ra nhiều mở rộng hay và bài toán cũng được mở rộng sang hình chữ nhật. Bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 11 toán THPT chuyên SP đã giải bài mở rộng. Tác giả còn nhận được lời giải qua email bởi bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 10 toán THPT chuyên KHTN.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . D, E, F lần lượt thuộc đoạn BC, CA, AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C . Trên trung trực CM, BN lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $CP \perp CA, BQ \perp BA$. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm ngoại tiếp tam giác DEF .



Mọi trao đổi xin gửi về email anageomantica@gmail.com.