MỘT HỆ QUẢ CỦA ĐỊNH LÝ BROCARD VÀ ỨNG DỤNG

Trần Minh Ngọc

Sinh viên K38, Khoa Toán-Tin ĐHSP-TPHCM

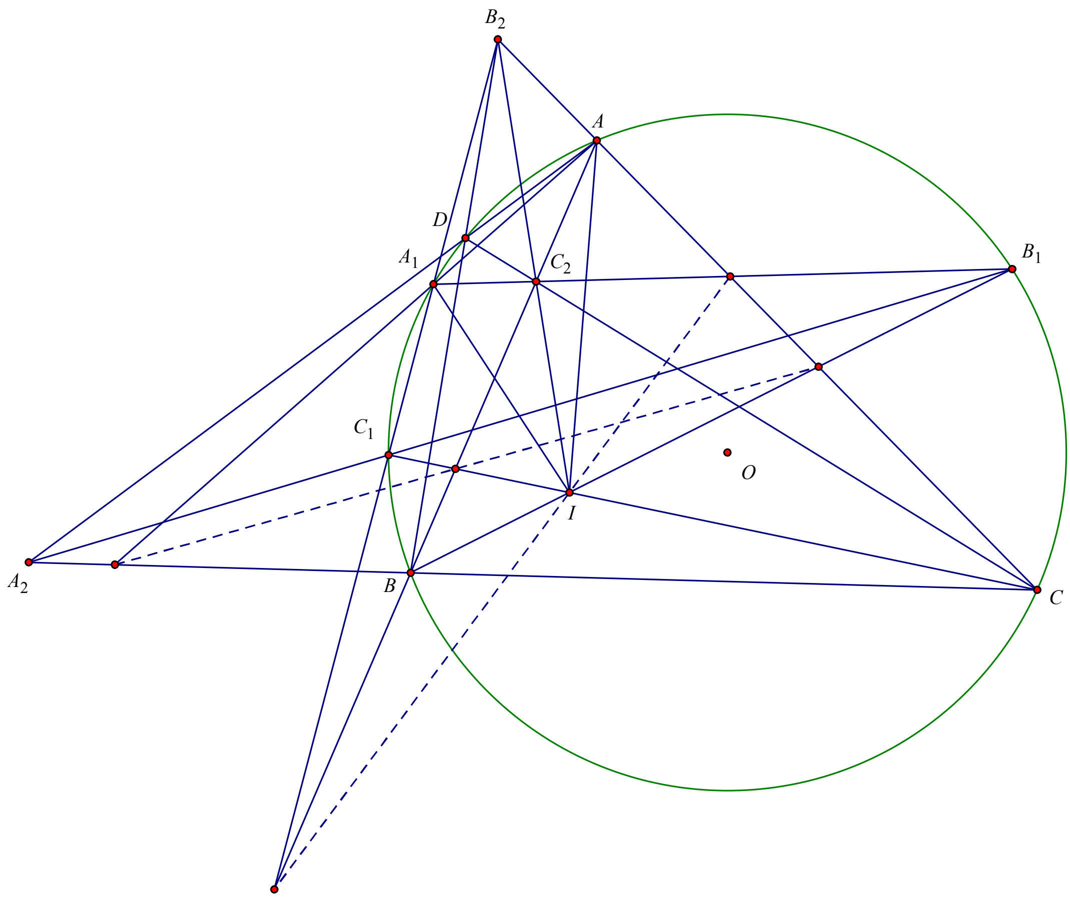
Tóm tắt

Trong bài viết này, tôi sẽ giới thiệu một hệ quả của định lý Brocard và ứng dụng của nó trong giải toán

1. Phát biểu và chứng minh

Định lý 1: Cho tam giác $ABC, A_1B_1C_1$ cùng nội tiếp đường tròn (O). Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm các cặp đường thẳng $(BC, B_1C_1), (CA, C_1A_1), (AB, A_1B_1)$. Khi đó, nếu $AA_1 \cap BC, BB_1 \cap CA, CC_1 \cap AB$ thẳng hàng thì O là trực tâm của tam giác $A_2B_2C_2$.

Chứng minh:



Gọi I là giao điểm BB_1, CC_1

Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $B_1A_1C_1CAB$ nội tiếp (O), ta được: $B_1A_1 \cap CA, A_1C_1 \cap AB, I$ thẳng hàng. Suy ra $A(A_1IBC) = A_1(AIC_1B_1)$. Mà $A(A_1IBC) = -1$ (vì $AA_1 \cap BC, BB_1 \cap CA$, $CC_1 \cap AB$ thẳng hàng). Nên $A_1(AIC_1B_1) = -1$. Do đó $A(A_1IBC) = A_1(AIC_1B_1) = A_1(AIB_1C_1)$.

Điều này có nghĩa là $I = AI \cap A_1I, B_2 = AB \cap A_1B_1, C_2 = AC \cap A_1C_1$ thẳng hàng.

Gọi D là giao điểm BB_2, CC_2

Áp dụng định lý Pascal đảo cho lục giác $BDCC_1A_1B_1$ thỏa $B, C, A_1, B_1, C_1 \in (O)$ và $B_2 = BD \cap C_1A_1, C_2 = DC \cap A_1B_1, I = CC_1 \cap BB_1$ thẳng hàng, ta được : $D \in (O)$. Nói cách khác BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm nằm trên (O). Tương tự, CC_2, AA_2 đồng quy tại một điểm nằm trên (O). Do đó AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại $D \in (O)$.

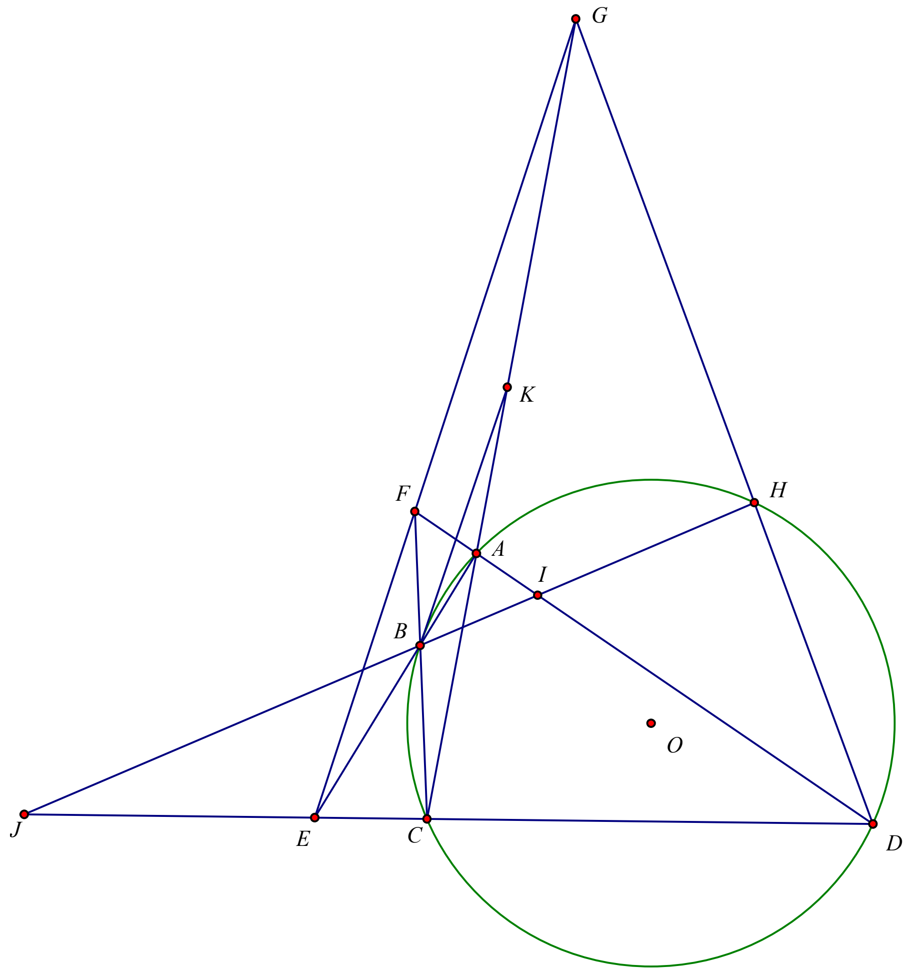
Áp dụng định lý Brocard cho tứ giác $ADBC$ nội tiếp (O) thỏa $A_2 = DA \cap BC, B_2 = DB \cap CA$, $C_2 = DC \cap AB$, ta được: O là trực tâm của tam giác $A_2B_2C_2$.

2. Ứng dụng

Đầu tiên, ta đến với trường hợp suy biến của định lý 1:

Ví dụ 1: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). Gọi E, F, G lần lượt là giao điểm các cặp đường thẳng $(AB, CD), (BC, AD), (EF, AC)$. CG cắt (O) tại điểm thứ hai là H. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của BH với DA, DC; K là giao điểm tiếp tuyến tại B của (O) với AC. Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác IJK

<u>Chứng minh:</u>

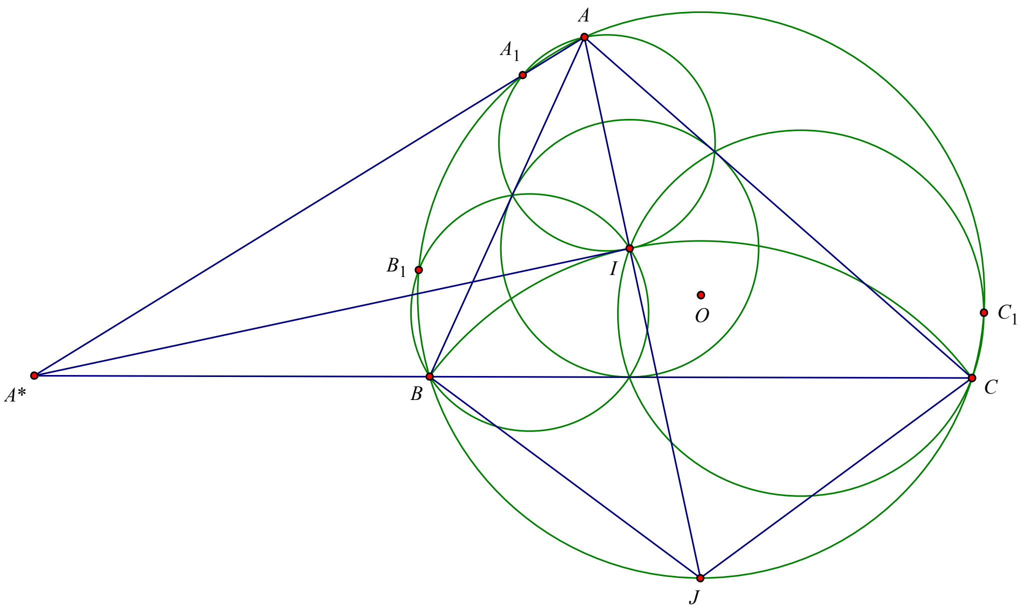


Áp dụng định lý 1 cho hai tam giác BBH, ACD nội tiếp (O) thỏa $E = BA \cap DC, F = BC \cap DA$, $G = HD \cap AC$ thẳng hàng và $I = BH \cap AD, J = BH \cap CD, K = BB \cap AC$, ta được: O là trực tâm của tam giác IJK. (Kí hiệu BB để chỉ tiếp tuyến tại B của (O))

Tiếp theo, ta đến với hai bài toán của tác giả. Một trong số đó đã từng được đề nghị làm đề thi Mathley.

Ví dụ 2 (Đề nghị Mathley): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), ngoại tiếp đường tròn (I). Đường tròn đường kính AI, BI, CI lần lượt cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm các cặp đường thẳng $(BC, B_1C_1), (CA, C_1A_1), (AB, A_1B_1)$. Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác $A_2B_2C_2$.

Chứng minh:



Kí hiệu (XY) là đường tròn đường kính XY

Gọi J là điểm chính giữa cung BC không chứa A

Ta có kết quả quen thuộc: $JB = JC = JI$. Suy ra J là tâm đường tròn (IBC). Do đó đường tròn (IBC) và (AI) tiếp xúc nhau

Gọi t là tiếp tuyến chung tại I của $(IBC), (AI)$

Do AA_1, t, BC lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn $[(AI),(ABC)];[(AH),(IBC)];[(IBC),(ABC)]$ nên chúng đồng quy hay $A^* = AA_1 \cap BC$ là tâm đẳng phương $(AH),(IBC),(ABC)$. Vì vậy A^*I là tiếp tuyến của (IBC). Điều đó dẫn đến $P_{A^*/I} = A^*I^2 = \overline{A^*B}.\overline{A^*C} = P_{A^*/(O)}$. Đẳng thức này chứng tỏ $AA_1 \cap BC$ nằm trên trục đẳng phương của $(O), I$.

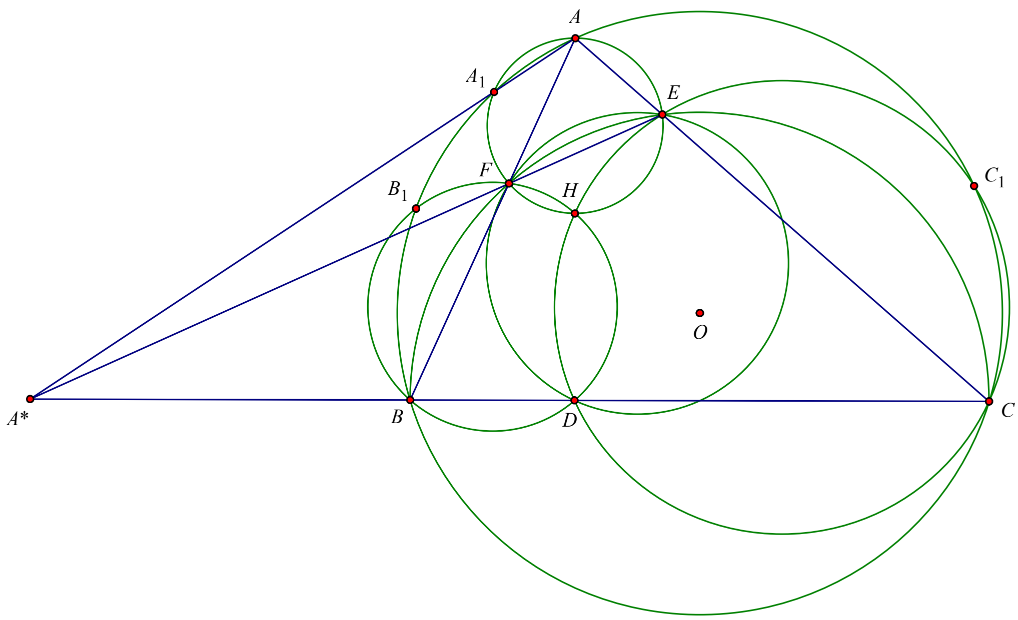
Chứng minh tương tự: $BB_1 \cap CA, CC_1 \cap AB$ nằm trên trục đẳng phương của $(O), I$.

Do đó $AA_1 \cap BC, BB_1 \cap CA, CC_1 \cap AB$ thẳng hàng.

Từ đây, áp dụng định lý 1 cho hai tam giác $ABC, A_1B_1C_1$ nội tiếp đường tròn (O) với A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm các cặp đường thẳng $(BC, B_1C_1), (CA, C_1A_1), (AB, A_1B_1)$, ta được: O là trực tâm của tam giác $A_2B_2C_2$.

Ví dụ 3: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H. Đường tròn đường kính AH, BH, CH lần lượt cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm các cặp đường thẳng $(BC, B_1C_1), (CA, C_1A_1), (AB, A_1B_1)$. Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác $A_2B_2C_2$.

Chứng minh:



Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên BC, CA, AB.

Vì tứ giác $BCFE$ nội tiếp đường tròn (BC) nên AA_1, EF, BC lần lượt là trục đẳng phương của các cặp đường tròn $[(AH),(ABC)];[(AH),(BC)];[(BC),(ABC)]$. Suy ra AA_1, EF, BC đồng quy hay $A^* = AA_1 \cap BC$ là tâm đẳng phương của $(AH),(BC),(ABC)$. Điều đó dẫn đến

$P_{A^*/(O)} = \overline{A^*B}.\overline{A^*C} = \overline{A^*E}.\overline{A^*F} = P_{A^*/(DEF)}$. Đẳng thức này chứng tỏ $AA_1 \cap BC$ nằm trên trục đẳng phương của $(O),(DEF)$.

Chứng minh tương tự: $BB_1 \cap CA, CC_1 \cap AB$ nằm trên trục đẳng phương của $(O), I$.

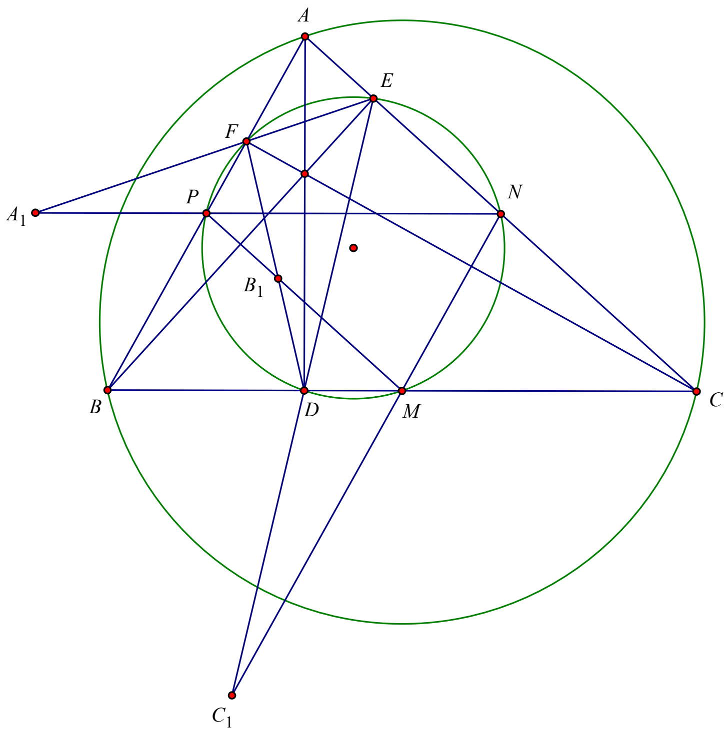
Do đó $AA_1 \cap BC, BB_1 \cap CA, CC_1 \cap AB$ thẳng hàng.

Từ đây, áp dụng định lý 1 cho hai tam giác $ABC, A_1B_1C_1$ nội tiếp đường tròn (O) với A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm các cặp đường thẳng $(BC, B_1C_1), (CA, C_1A_1), (AB, A_1B_1)$, ta được: O là trực tâm của tam giác $A_2B_2C_2$.

Cuối cùng, ta đến với một bài toán quen thuộc, nhưng với cách nhìn mới mẻ bằng định lý 1.1

Ví dụ 4: Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác ABC; M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. Các cặp đường thẳng $(EF, NP), (FD, PM), (DE, MN)$ lần lượt cắt nhau tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng: tâm đường tròn Euler của tam giác ABC là trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

Chứng minh:



Áp dụng định lý Desargues cho hai tam giác ABC, DEF thỏa AD, BE, CF đồng quy, ta được $BC \cap EF, CA \cap FD, AB \cap DE$ thẳng hàng. Hay $DM \cap EF, EN \cap FD, FP \cap DE$ thẳng hàng.
Từ đó, áp dụng định lý 1 cho hai tam giác DEF, MNP nội tiếp đường tròn Euler của tam giác ABC với A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm các cặp đường thẳng $(EF, NP), (FD, PM), (DE, MN)$, ta được: tâm đường tròn Euler của tam giác ABC là trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

Với cách nhìn mới mẻ này, ta có thể dễ dàng tổng quát ví dụ 4 như sau:
Tổng quát ví dụ 4: Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là nằm trên BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy; M, N, P lần lượt là giao điểm điểm thứ hai của (DEF) với BC, CA, AB. Các cặp đường thẳng $(EF, NP), (FD, PM), (DE, MN)$ lần lượt cắt nhau tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng: tâm đường tròn (DEF) là trực tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

3. Tài liệu tham khảo

[1] Ngô Quang Dương, Cevian triangles and Cyclocevian conjugate points, Quang Duong ' s Blog http://blogcuaquangduong.blogspot.com/2015/07/cevian-triangles-and-cyclocevian.html
[2] http://mathworld.wolfram.com/CyclocevianConjugate.html
[3] Các tài liệu khác về Cyclocevian Conjungate