

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O và tâm đường tròn Euler là N . D, E, F là hình chiếu của N lên BC, CA, AB . M là trung điểm ON . MD, ME, MF cắt EF, FD, DE lần lượt tại X, Y, Z . Gọi P, Q, R là trung điểm BC, CA, AB . U, V, W là trung điểm AP, BQ, CR . Chứng minh rằng XU, YV, ZW đồng quy.

Lời giải

Dựa theo ý tưởng của các bạn **Nguyễn Đình Hoàng** và **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An.

Gọi G là trọng tâm tam giác. Sử dụng định lý **Boutte**, phép vị tự tâm G tỷ số 4 biến tam giác pedal của tâm Euler thành tam giác đối xứng. Ta thu được bài toán sau

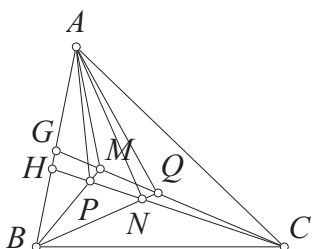
Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O . X, Y, Z lần lượt đối xứng A, B, C qua BC, CA, AB . OX, OY, OZ lần lượt cắt YZ, ZX, XY tại U, V, W . Chứng minh rằng AU, BV, CW đồng quy.

Bài toán được tác giả tổng quát hơn như sau

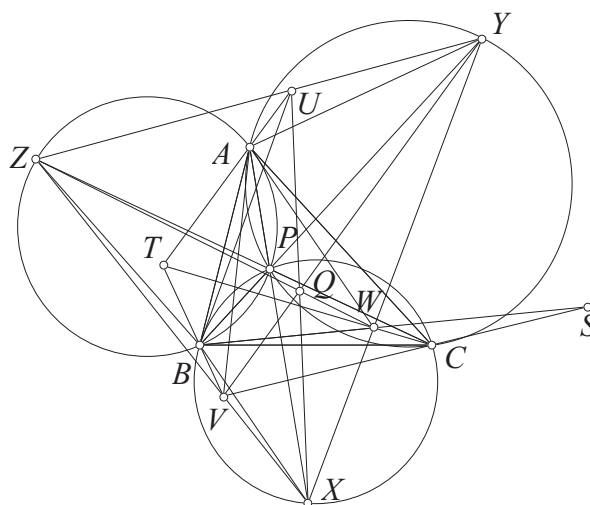
Bài toán tổng quát. Cho tam giác ABC có P, Q là hai điểm đẳng giác. PA, PB, PC cắt các đường tròn $(PBC), (PCA), (PAB)$ tại X, Y, Z khác P . XQ, YQ, ZQ cắt YZ, ZX, XY tại U, V, W . Chứng minh rằng AU, BV, CW đồng quy tại T .

Để giải bài toán này trước hết ta cần bổ đề sau

Bổ đề. Cho tam giác ABC với P, Q nằm trong tam giác sao cho $\angle PAB = \angle QAC$. Gọi PB, QB theo thứ tự cắt QC, QB tại M, N . Chứng minh rằng $\angle MAB = \angle NAC$.



Chứng minh. Gọi CQ, CP cắt AB tại G, H thì $A(CM, QG) = (CM, QG) = B(CM, QG) = (CP, NH) = A(CP, NH) = A(HN, PC)$ dễ thấy AC, AQ, AG theo thứ tự là đối xứng của AH, AP, AC qua phân giác $\angle BAC$ nên khi hai chùm bằng nhau thì AM và AN phải đối xứng qua phân giác $\angle BAC$.



Giải bài toán. Ta có $\angle BAZ = \angle BPZ = \angle CPY = \angle CAY$ nên AB, AC là hai tia đẳng giác trong $\angle YAZ$ nên AX và AQ cũng đẳng giác trong $\angle YAZ$. Áp dụng bổ đề vào tam giác YAZ thì ZQ cắt YX tại W và YQ cắt ZX tại V thì AV, AW đẳng giác trong $\angle YAZ$ hay cũng đẳng giác trong $\angle BAC$. Tương tự BW, BU đẳng giác trong $\angle CBA$ và CU, CV đẳng giác trong $\angle ACB$. Từ đó gọi BW cắt CV tại S thì S, U là hai điểm đẳng giác trong tam giác ABC . Mặc khác cũng theo bổ đề nếu BV cắt CW tại T thì $\angle BAS = \angle CAT$. Từ đó A, U, T thẳng hàng.

Nhật xét

Kết quả nghịch đảo của bài toán đã được phát hiện trước đó trong bài viết của bạn **Ngô Quang Dương** lớp 12 Toán, trường THPT chuyên KHTN. Bài báo của **Dương** và các phát triển của bài toán này có thể tìm thấy ở [đây](#). Tác giả cũng nhận được lời giải đúng qua email từ bạn **Lê Phước Tùng** lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC và tam giác DEF cố định có cạnh tương ứng song song. Giả sử có hai điểm P, Q thay đổi sao cho $PA = QD, PB = QE, PC = QF$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P, Q thay đổi.

Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.