

Mỗi tuần một bài toán

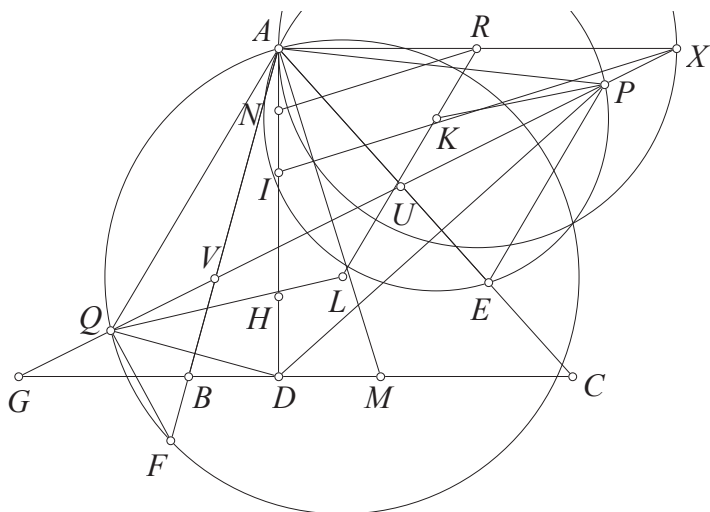
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD , trực tâm H . P, Q đối xứng D qua CA, AB . Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, CA tại F, E . K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác APE, AQF . KL cắt đường thẳng qua A song song BC tại R . Gọi M là trung điểm BC . Lấy N thuộc AH sao cho $RN \perp AM$. Chứng minh rằng $AH = 4AN$.

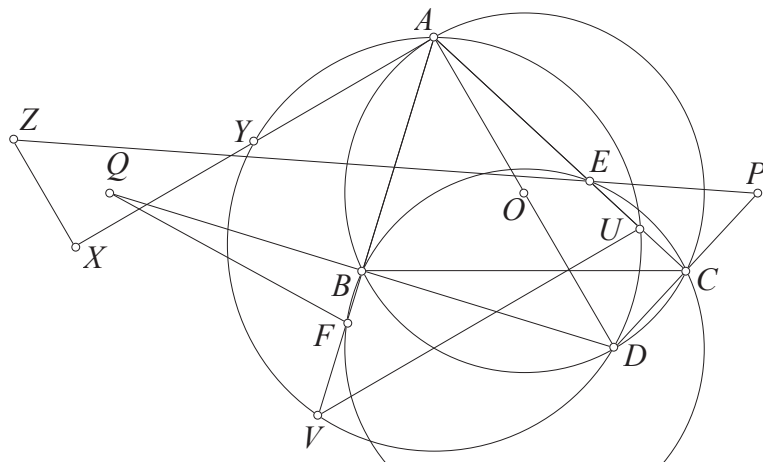
Lời giải



Gọi BU, CV là đường cao của tam giác ABC để thấy PQ đi qua U, V . Gọi UV cắt BC tại G . Ta thấy $\angle G(HA, VD) = -1$ nên nếu GV cắt đường thẳng qua A song song GD tại X thì GH đi qua điểm đối xứng của A qua X . Mặt khác theo định lý Brocard thì $GH \perp AM$ do đó nếu I là trung điểm AH thì $IX \parallel GH \perp AM$. Từ đó ta chỉ cần chứng minh R là trung điểm AX thì hiển nhiên $AN = \frac{1}{2}AI = \frac{1}{4}AH$. Để thấy điều này tương đương với việc phải chứng minh đường tròn đường kính AX và các đường tròn $(K), (L)$ ngoại tiếp các tam giác APE, AQF đồng trục. Sử dụng nghịch đảo tâm A phương tích bất kỳ ta chuyển về bài toán sau. Chú ý để tiện theo dõi và cho dễ hiểu hơn chúng tôi giữ nguyên ký hiệu các nhãn điểm trong bài toán gốc và bài toán sau khi nghịch đảo

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với đường kính AD . P, Q đối xứng D qua CA, AB . Trung trực CA, AB lần lượt cắt

AB, AC tại V, U . Đường tròn đối xứng đường tròn ABC qua BC lần lượt cắt CA, AB tại E, F . Đường tròn (AUV) cắt tiếp tuyến qua A của (O) tại Y . X đối xứng A qua Y . Chứng minh rằng đường thẳng PE, QF và đường thẳng qua X vuông góc với AX đồng quy.



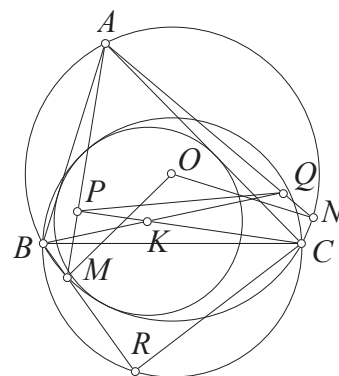
Sử dụng phép vị tự tâm A tỷ số 2 để thấy đây chính là bài toán **Tuần 2 tháng 6 năm 2016**. Đến đây ta kết thúc chứng minh

Nhận xét

Có duy nhất bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cho lời giải khác nghịch đảo tại [đây](#).

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Đường tròn (K) tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc trong (O) . Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cung CA, AB chứa B, C của (O) . AM, AN lần lượt cắt KC, KB tại P, Q . R đối xứng A qua PQ . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác RBC tiếp xúc (K) .



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.