

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

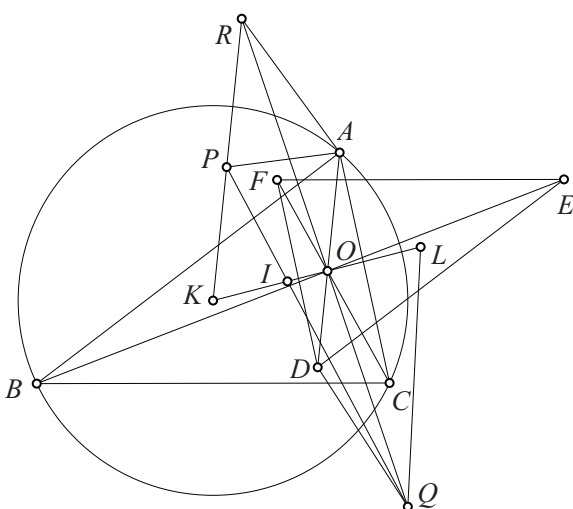
Cho tam giác ABC và tam giác DEF cố định có cạnh tương ứng song song. Giả sử có hai điểm P, Q thay đổi sao cho $PA = QD, PB = QE, PC = QF$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P, Q thay đổi.

Bài toán tổng quát hơn được đề xuất bởi bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 11 Toán, THPT chuyên ĐHS

Cho hai tam giác ABC, DEF không bằng nhau có các cạnh tương ứng song song. Các điểm P, Q thay đổi sao cho $\frac{PA}{QD} = \frac{PB}{QE} = \frac{PC}{QF} = \ell$ không đổi. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Nội dung của lời giải này đầu tiên có ở [đây](#) bởi bạn **Phạm Ngọc Khánh**, sau đó tác giả nhận được lời giải gọn hơn từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương. Tôi xin giới thiệu lời giải của bạn **Dũng**



Vì hai tam giác ABC, DEF không bằng nhau có các cạnh tương ứng song song nên tồn tại phép vị tự tâm O tỷ số k biến tam giác ABC thành tam giác DEF . Gọi K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác ABC, DEF và R là ảnh vị tự tỷ tâm O số $1/k$ của

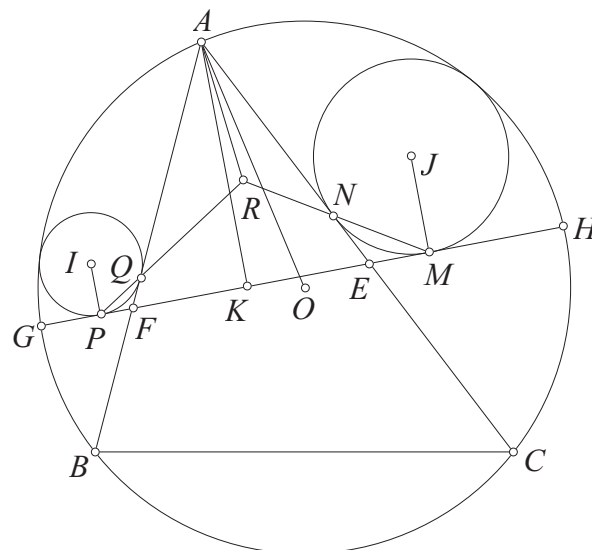
Q . Ta có $\frac{AP}{AR} = \frac{AP}{DQ} \cdot \frac{DQ}{AR} = k\ell$. Tương tự $\frac{BP}{AR} = \frac{BP}{ER} = \frac{CP}{CR} = k\ell$ nên A, B, C thuộc đường tròn Apollonius dựng trên đoạn PR ứng với tỷ số $k\ell$. Từ đó KA là tiếp tuyến của đường tròn (APR) . Gọi PQ cắt KL tại I . Ta có $\frac{IK}{IL} = \frac{KP}{LQ} = \frac{KP}{KR} \cdot \frac{KR}{LQ} = \left(\frac{AP}{AR}\right)^2 \cdot \frac{OK}{OL} = \frac{(k\ell)^2}{k} = k\ell^2$ không đổi nên I cố định. Vậy PQ luôn đi qua I cố định.

Nhật xét

Bài toán gốc được tác giả tổng quát từ đề thi chọn đội tuyển Iran năm 2011. Cùng với các lời giải của bạn **Khánh** và **Dũng** thì các đoạn thẳng bằng nhau được tổng quát thành các đoạn thẳng tỷ lệ. Bạn **Nguyễn Anh Quân**, lớp 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm Quảng Nam, đã đưa ra lời giải bằng phương pháp vector và tích vô hướng ở [đây](#). Cũng ở đó, tác giả đưa ra lời khác bằng vector và tích vô hướng. Ngoài ra bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 10 Toán THPT chuyên KHTN cũng gửi tới tác giả lời giải qua email.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . E, F là các điểm bất kỳ lần lượt nằm trên các đoạn thẳng CA, AB . Các tia EF, FE lần lượt cắt (O) tại các điểm G, H . Đường tròn (I) tiếp xúc với các đoạn thẳng FG, FA tại P, Q và tiếp xúc trong (O) . Đường tròn (J) tiếp xúc với các đoạn thẳng EH, EA tại M, N và tiếp xúc trong (O) . MN cắt PQ tại R . AK là đường cao của tam giác AEF . Chứng minh rằng AR là phân giác góc $\angle OAK$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.