

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

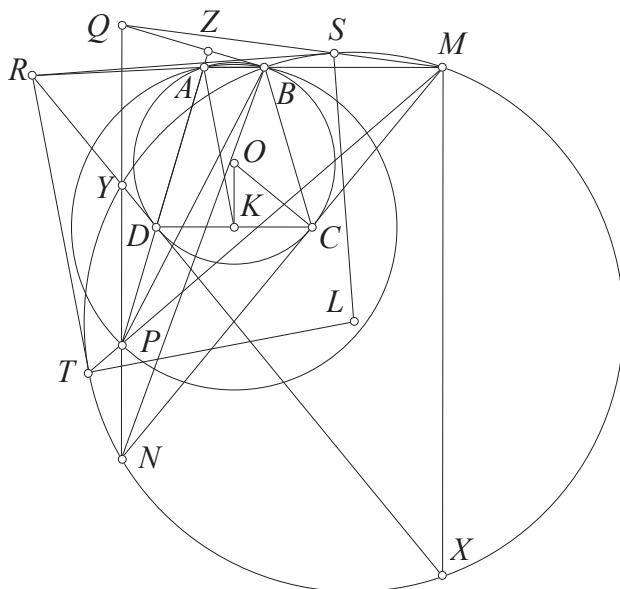
Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) . K là trung điểm CD . AD cắt đường tròn (K) đi qua A, B tại P khác A . Q là trực tâm tam giác PAB . Tiếp tuyến tại C của (O) cắt AB, PQ lần lượt tại M, N . MQ, MP lần lượt cắt đường tròn (L) ngoại tiếp tam giác BMN tại S, T khác M . Tiếp tuyến tại S, T của (L) cắt nhau tại R . Chứng minh rằng RD tiếp xúc (O) .

Lời giải

Lời giải sau là của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đưa ra tại [đây](#).



Gọi Y là trung điểm PQ . Ta có $\angle PQB = 180^\circ - \angle PAB = \angle BCD$, $\angle QBP = 90^\circ - \angle BPA = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \angle BKA = \angle BKC$. Do đó $\triangle QPB \sim \triangle CBK$ g.g, suy ra $\frac{KB}{BC} = \frac{QB}{BP}$ hay $\frac{DC}{BC} = \frac{QB}{QY}$. Từ đó $\triangle DBC \sim \triangle BYQ$ c.g.c, suy ra $\angle QYB = \angle DBC = \angle DCN = \angle BMC$. Do đó tứ giác $YBMN$ nội tiếp. Gọi Z là giao điểm của PA với BQ thì $\angle PZB = 90^\circ$. Do $\angle ZYB = \angle YZQ - \angle YBQ = \angle BCD - \angle BDC = \angle BDZ$ nên tứ giác $YZBD$ nội tiếp suy ra $\angle BYD = 90^\circ$. Mặt khác do $\angle YBD = \angle ZBD - \angle ZBY = 90^\circ - \angle BDA - \angle BDC = \angle ODB$ nên $OD \parallel BY$. Do đó YD là tiếp tuyến tại D của (O) . Gọi X là giao điểm của YD với đường

tròn (BMN) . Do tứ giác $YBMX$ nội tiếp nên $\angle BMX = 90^\circ$ suy ra $MX \perp CD$ hay $MX \parallel PQ$. Từ đó suy ra $M(XY, PQ) = -1$ hay tứ giác $SYTX$ điều hòa kéo theo XY đi qua R hay RD là tiếp tuyến với (O) .

Nhận xét

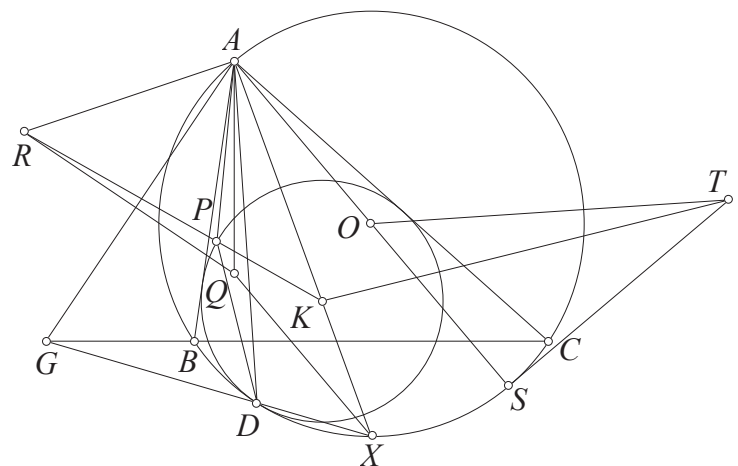
Bài toán là một cách viết khác của đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên KHTN năm 2016 và tác giả cũng nhận được lời giải duy nhất của bạn **Bảo**. Bài toán chọn đội tuyển THPT chuyên KHTN có nhiều biến thể và áp dụng khác. Sau đây là hai bài toán liên quan.

Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O . Đường thẳng qua O song song BC cắt CA, AB tại E, F . Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp các tam giác EBC, FBC cắt nhau tại K . Chứng minh rằng $AK \perp BC$.

Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O và trực tâm H . Đường thẳng qua O song song BC cắt CA, AB tại E, F . AH cắt (O) tại D khác A . Đường tròn ngoại tiếp tam giác DCF, DBE lần lượt cắt CA, AB tại M, N khác E, F . Chứng minh rằng MN chia đôi AH .

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AS . Đường tròn (K) tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc trong (O) tại D . Trung trực AD cắt tiếp tuyến tại Q của (O) tại T . P đối xứng với D qua TK . Trung trực AP cắt PK tại R . AK cắt (O) tại X khác A . DX cắt BC tại G . Lấy Q trên trung trực AX sao cho $AQ \perp BC$. Chứng minh rằng $QR \perp AG$.



Mọi trao đổi xin gửi về email anageomantica@gmail.com.