Từ một bài toán quen thuộc tới các bài toán thi Olympiad

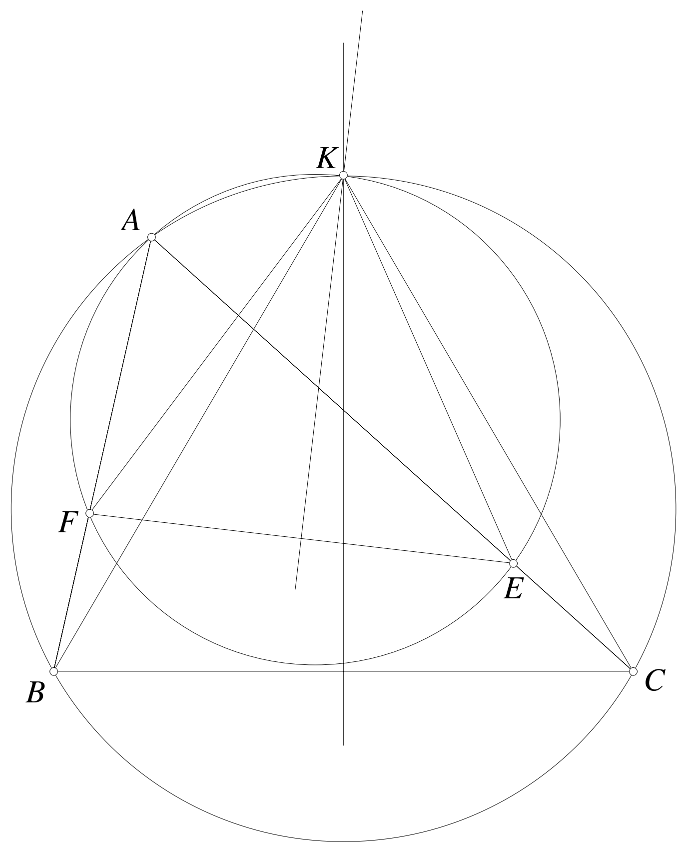
Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài biết này chủ yếu xoay quanh ứng dụng của một bài toán quen thuộc mà các em học sinh có lẽ đã được làm quen từ lớp 7 dưới một số cách phát biểu khác nhau.

Chúng ta hầu như đều biết bài toán quen thuộc sau đây.

Bài 1. *Cho tam giác ABC trên cạnh CA, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $CE = BF$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau trên trung trực của BC và trung trực của EF.*



Hình 1.

Lời giải. Gọi trung trực BC và EF cắt nhau tại K. Dễ chứng minh các tam giác bằng nhau $\triangle KEC = \triangle KFB$ (*c.c.c*). Từ đây suy ra $\angle KCE = \angle KBF$ vậy tứ giác $AKCB$ nội tiếp. Cũng từ hai tam giác bằng nhau suy ra $\angle KEC = \angle KFB$ suy ra $\angle KEA = \angle KFA$ vậy tứ giác $AKEF$ cùng nội tiếp. Vậy K cũng là giao cùa đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và ABC. Ta hoàn tất chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán mà các bạn lớp 7 quen thuộc chính là chứng minh trung trực EF luôn đi qua điểm cố định. Khi đó trong bài toán và lời giải không cần đến các yếu tố đường tròn. Bạn nào đã quen thuộc phép biến hình thì có thể thấy K chính là tâm quay biến CE thành BF và nội dung của bài toán cũng chính là cách dựng K, ta lấy giao điểm khác A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và ABC. Bài toán này mang đậm chất biến hình xong lời giải của bài toán cũng như trong toàn bộ bài viết này được trình bày một cách đơn giản nhất chỉ mang nội dung kiến thức của cấp THCS chứ không thông qua các phép biến hình.

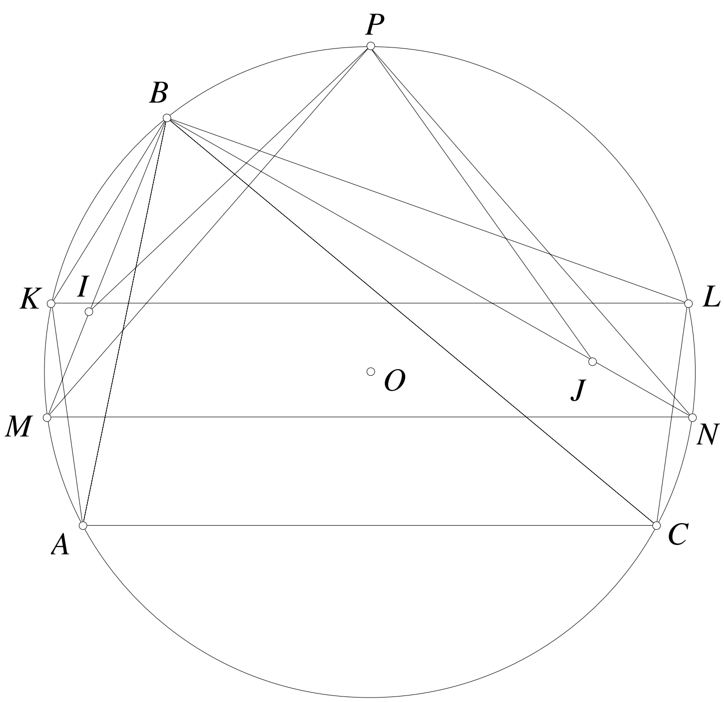
Bài toán có nhiều ứng dụng hay mà nhiều đề thi các nước thậm chí là bài hình học thi toán quốc tế năm 2013 cũng đã khai thác nó. Sau đây là một số ví dụ

Bài 2 (Olympic Toán toàn Nga 2006, lớp 10)**.** *Lấy K, L là hai điểm trên các cung $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho $KL \parallel AC$. Chứng minh rằng tâm nội tiếp các tam giác BAK và BCL cách đều trung điểm cung $\overset{\frown}{ABC}$ của tam giác ABC.*

Chúng ta có bổ đề sau

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm đường tròn nội tiếp I. Tia AI cắt đường tròn (O) tại D khác A thì D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.*

Bổ đề trên là một kết quả rất quen thuộc của tâm đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác. Xin không trình bày lại chứng minh ở đây.



Hình 2.

Giải bài toán. Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAK và BCL. Gọi BI, BJ cắt đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC tại M, N khác B, ta dễ thấy M, N là trung điểm các cung $\overset{\frown}{KA}$, $\overset{\frown}{LC}$. Do $KL \parallel AC$ nên $KA = LC$ và $MN \parallel AC$ do đó kết hợp bổ đề trên dễ chỉ ra $MI = MK = NL = NJ$.

Áp dụng bổ đề trên cho tam giác BMN nội tiếp (O) với $MI = NJ$ ta suy ra $PI = PJ$ với P là trung điểm $\overset{\frown}{MBN}$. Ta chú ý $MN \parallel AC$ nên P cũng là trung điểm $\overset{\frown}{MBN}$ vậy ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán có thể làm khó hơn bằng cách yêu cầu chứng minh rằng trung trực IJ luôn đi qua điểm cố định hoặc chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ luôn đi qua một điểm cố định khác A khi K, L di chuyển trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Bài toán này là bài toán đẹp có ý nghĩa. Ta có một ứng dụng của nó như sau

Bài 3. *Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với $AB \parallel CD$. P là một điểm trên (O). Gọi K, L, M, N là tâm nội tiếp các tam giác PAD, PBC, PAC, PBD. Chứng minh rằng các đường tròn PKL, PMN và (O) đồng trục.*

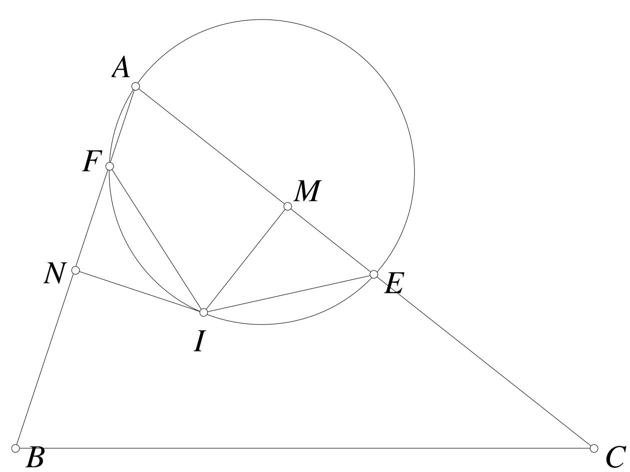
Bài tập này chỉ là ứng dựng đơn giản của bài thi vô địch Nga, các bạn hãy làm nó như một bài tự luyện. Cũng trong kỳ thi vô địch Nga có một bài toán khác thú vị như sau

Bài 4 (Olympic Toán toàn Nga 2011, lớp 11)**.** *Cho N là trung điểm cung $\overset{\frown}{ABC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. M là trung điểm BC. Gọi I_1, I_2 là tâm nội tiếp tam giác ABM, CBM. Chứng minh rằng I_1, I_2, B, N cùng thuộc một đường tròn.*

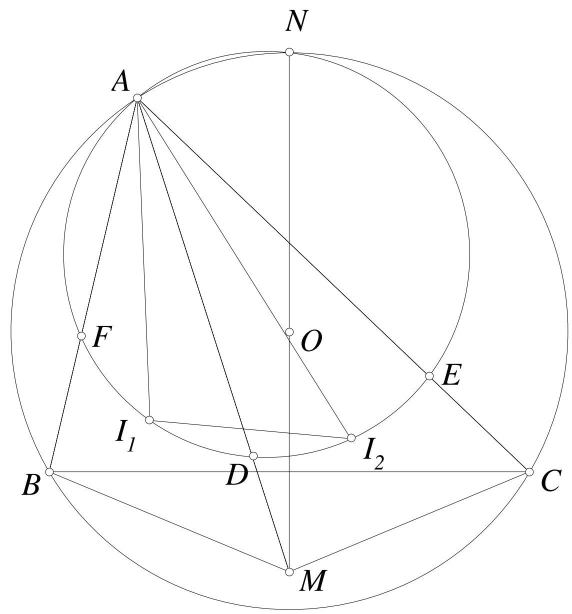
Bài tập trên là một bài toán có phát biểu rất đẹp và nhiều ý nghĩa. Trong quá trình tìm hiểu, tác giả bài viết đã tìm ra một tổng quát của nó và đã đề nghị bài tổng quát này trong cuộc thi Mathley. Bài toán như sau

Bài 5 (Mathley 9)**.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc trung trực BC. I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB, MAC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2 luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di chuyển.*

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn bất kỳ qua A, I cắt CA, AB tại E, F khác A thì $AE + AF = CA + AB - BC$.*



Chứng minh. Gọi M, N là hình chiếu của I lên CA, AB. Dễ thấy $\triangle INF = \triangle IME$ $(c.g.c)$ từ đó suy ra $AE = AF = AM + AN = CA + AB - BC$. $\square$

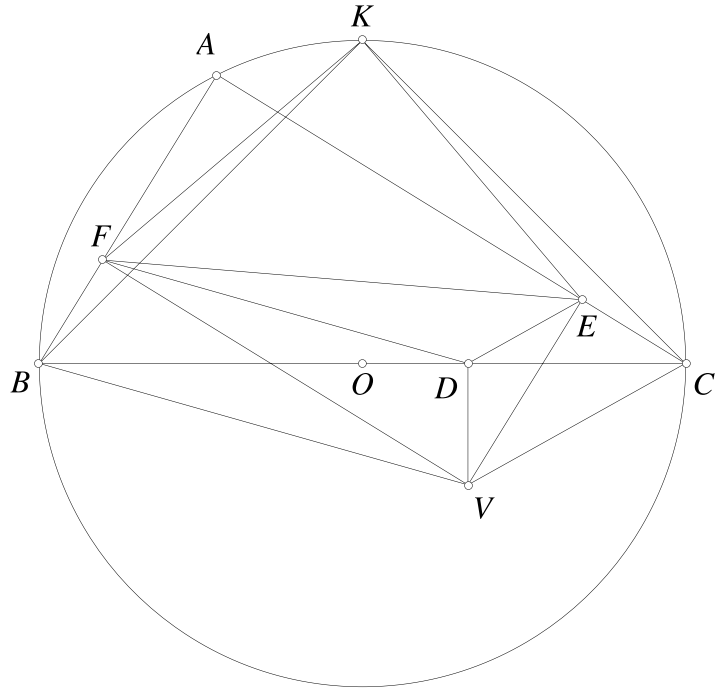


Giải bài toán. Gọi đường tròn ngoại tiếp (AI_1I_2) cắt AM, CA, AB lần lượt tại D, E, F khác A. Theo bổ đề trên dễ thấy $AD + AF = AB + AM - MB, AD + AE = AC + AM - MC$. Trừ hai đẳng thức chú ý $MB = MC$ ta được $AF - AE = AB - AC$ hay $AB - AF = AC - AE$. Do đó trong các trường hợp E, F cùng phía hoặc khác phía BC ta cũng đều có $BF = CE$. Vậy theo bài toán 1 gọi N là trung điểm cung BC chứa A thì $(AI_1I_2) \equiv (AEF)$ đi qua N. Vậy tâm ngoại tiếp AI_1I_2 thuộc trung trực AN cố định. Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Nếu gọi I_3, I_4 lần lượt là tâm bàng tiếp góc A của tam giác $\triangle MAB, \triangle MAC$ thì chứng minh tương tự đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_3I_4 cũng đi qua N. Hơn nữa nếu gọi I_5, I_6 lần lượt chia I_1I_3, I_2I_4 cùng tỷ số thì đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_5I_6 cũng đi qua N. Các nhận xét đó đều chứng minh tương tự bài toán trên dựa vào bài toán ban đầu của chúng ta. Ta bước đầu có sự cảm nhận thú vị về hai bài toán thi vô địch Nga.

Sau đây là một bài toán cũng rất nổi tiếng xuất hiện trong kì thi Olympic Toán quốc tế 2013 vừa qua.

Bài 6 (IMO 2013 bài 3)**.** *Cho tam giác giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi tâm ngoại tiếp tam giác DEF nằm trên (O).*



Lời giải. K là trung điểm cung $\overset{\frown}{BAC}$. Từ tính chất của các tiếp điểm bàng tiếp ta dễ chứng minh $BF = CE$ nên theo bài toán 1 trung trực EF đi qua K. Nếu tâm ngoại tiếp tam giác DEF thuộc (O) sẽ nằm ngoài tam giác DEF nên khi đó tam giác DEF tù. Không mất tổng quát giả sử $\angle EDF$ tù. Do tâm ngoại tiếp tam giác DEF cũng thuộc trung trực EF vậy tâm ngoại tiếp tam giác DEF phải là giao của trung trung trực EF và (O). Giao điểm này phải nằm trong góc $\angle EDF$ nên giao điểm này chính là K. Vậy K cũng là tâm ngoại tiếp tam giác DEF.

Dễ thấy các đường thẳng qua tâm bàng tiếp I_a, I_b, I_c lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại điểm V. Từ đó các tứ giác $DFBV, DECV$ nội tiếp. Chú ý K là tâm ngoại tiếp tam giác EDF nên ta suy ra $\angle BVC = \angle BVD + \angle CVD = \angle AFD + \angle AED = 360° - \angle BAC - \angle EDF = 360° - \angle EKF - \dfrac{360° - \angle EKF}{2} = \dfrac{360° - \angle EKF}{2}$.

Mặt khác $KB = KC$. Từ đó dễ suy ra K là tâm ngoại tiếp tam giác BVC hay $KB = KV = KC$. Vậy ta chú ý rằng tứ giác $DFBV$ nội tiếp và các cạnh FD, BV có chung đường trung trực, từ đó theo tính chất đối xứng dễ suy ra $VF = BD = AE$ và tương tự $VE = CD = AF$. Vậy tứ giác $AEVF$ là hình bình hành mà $\angle AEV = \angle AFV = 90°$ vậy đó là hình chữ nhật suy ra $\angle BAC = 90°$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán thi quốc tế là một bài toán đẹp và ý nghĩa. Một điều thú vị là bài toán này cũng là bài toán đề nghị từ nước Nga. Bài toán có nhiều phát triển và mở rộng, dưới đây xin giới thiệu một số phát triển và mở rộng này

Bài 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I, M là trung điểm của BC. N đối xứng I qua M. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Gọi X, Y, Z là hình chiếu của N lên BC, CH, HB. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác XYZ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.*

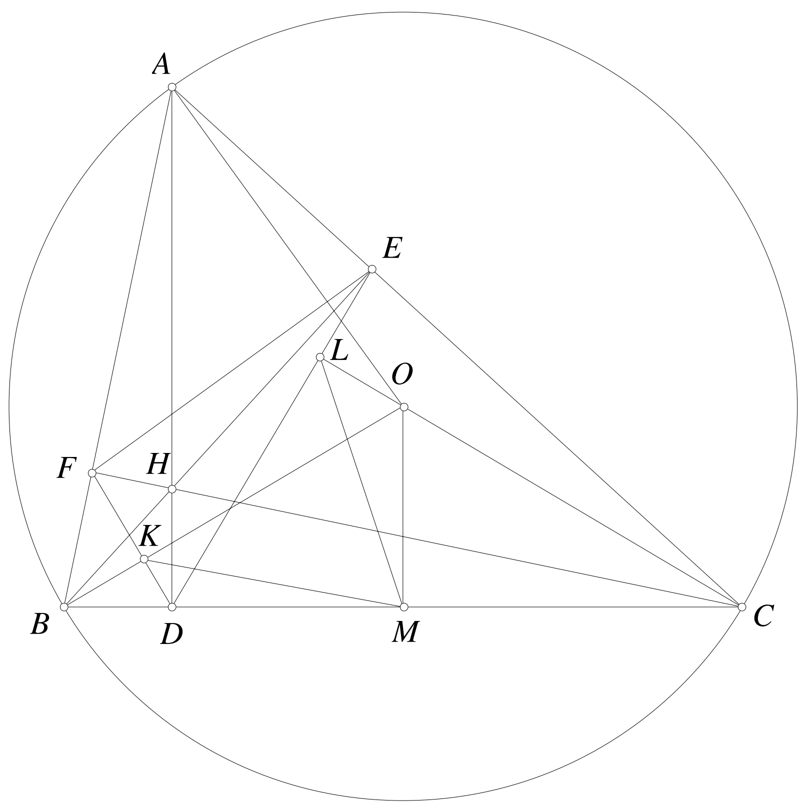
Bài 8. *Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm nội tiếp I, M là trung điểm của BC, N đối xứng I qua M. P là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Gọi X, Y, Z là hình chiếu* *của N lên BC, CP, PB. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Chứng minh rằng K luôn thuộc một đường tròn cố định khi P di chuyển.*

Bài 9. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Tâm bàng tiếp góc A là I_a. V đối xứng với I_a qua trung điểm BC. Gọi D, E, F là hình chiếu của V lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giac DEF nằm trên (O).*

Bài 10. *Cho tam giác ABC vuông tại A, tâm nội tiếp I. P là một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Gọi D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P di chuyển.*

Các bài toán mở rộng trên đều được phát triển từ bài thi IMO và lời giải cũng tương tự lời giải bài IMO, các bạn hãy làm như các bài tự luyện. Sau đây là một bài toán ứng dụng của bài toán 1

Bài 11. *Cho tam giác ABC nhọn có, trực tâm H, tâm ngoại tiếp O, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Trên các tia BO, CO lấy các điểm K, L sao cho $\dfrac{BA.BH}{BK} = \dfrac{CA.CH}{CL} = \dfrac{4R^2}{BC}$. Chứng minh rằng trung trực KL đi qua trung điểm BC.*



Hình 3.

Lời giải. Gọi AD, BE, CF là đường cao của tam giác ABC. Gọi OB giao FD tại K'. Dễ thấy BK' là đường cao của tam giác BFD. Ta lại có tam giác BFD và tam giác BCA đồng dạng nên $\dfrac{BK'}{BE} = \dfrac{FD}{AC} = \dfrac{HB.\sin B}{AC} = \dfrac{HB}{2R}$. Suy ra $BK' = \dfrac{BE.BH}{2R} = \dfrac{BE.\frac{4R^2.BK}{BA.BC}}{2R} = BK\dfrac{BE.2R}{BA.BC} = BK$. Do đó $K' \equiv K$. Tương tự L là hình chiếu của C lên DE. Vậy ta chú ý rằng B, C là tâm bàng tiếp của tam giác DEF do đó K, L là các tiếp điểm bàng tiếp với các cạnh DF, DE nên ta dễ chứng minh $FK = EL$. Ta chú ý nếu M là trung điểm BC thì M, D, E, F cùng thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC hơn nữa dễ có $ME = MF$ nên M chính là trung điểm $\overset{\frown}{EDF}$ của đường tròn Euler. Áp dụng bài tập 1 dễ chỉ ra trung trực KL đi qua M. Ta có điều phải chứng minh. □

Một kết quả đẹp khác từ bài toán 1 như sau

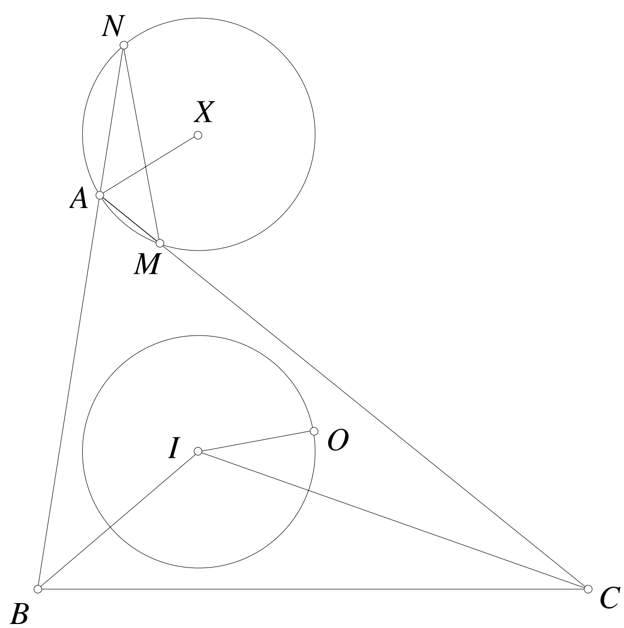
Bài 12. *Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là đối xứng của B, C, C, A, A, B qua IC, IB, IA, IC, IB, IA. Gọi X, Y, Z là tâm ngoại tiếp các tam giác AMN, BPQ, CRS.*

a) Chứng minh rằng I là tâm ngoại tiếp tam giác XYZ.

b) Chứng minh rằng trực tâm tam giác XYZ là tâm ngoại tiếp của tam giác ABC.

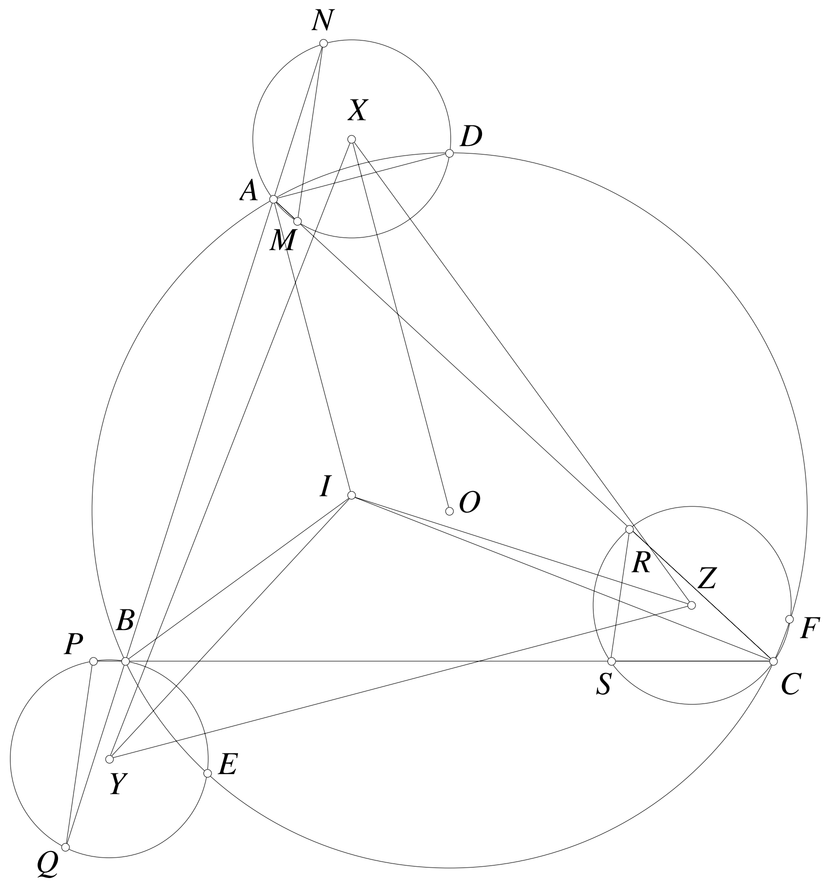
Ta có bổ đề sau

Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I, tâm ngoại tiếp O. Gọi M, N là đối xứng của B, C lần lượt qua IC, IB thì MN vuông góc OI và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng OI.*



Hình 4.

Đây là một bổ đề rất quen thuộc và xuất hiện nhiều trong các tài liệu khác nhau, các bạn có thể tham khảo nhiều lời giải trong [1,2,3] xin không trình bày lại chứng minh. Quay lại bài toán



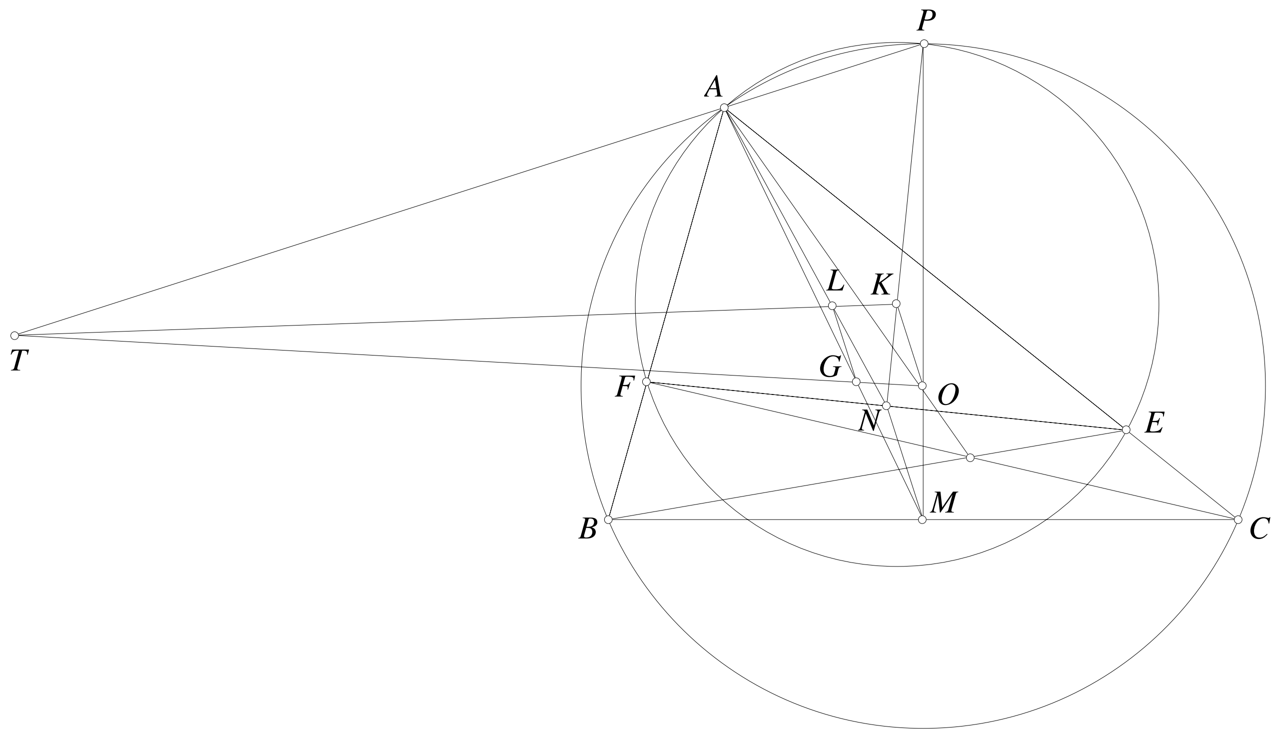
Hình 5.

Lời giải. a) Theo bổ đề trên bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ và CRS bằng nhau mà C, Q và B, R đối xứng nhau qua IA, từ đó dễ thấy hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ và CRS đối xứng nhau qua IA. Nên Y và Z là hai tâm tương ứng đối xứng nhau qua IA vậy $IY = IZ$. Tương tự suy ra I là tâm ngoại tiếp tam giác XYZ. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta chú ý rằng do tính đối xứng nên $MN = CM$ cùng bằng BC do đó theo bài toán 1 thì đường tròn (X) ngoại tiếp tam giác AMN đi qua D là trung điểm $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó dễ suy ra OX vuông góc AD. Ta chú ý AD chính là phân giác ngoài tại A của tam giác ABC nên AD vuông góc AI do đó ta dễ suy ra $OX \parallel AI$. Theo chứng minh trên YZ đối xứng nhau qua AI nên YZ vuông góc AI do đó YZ vuông góc OX. Tương tự dễ chỉ ra O là trực tâm tam giác XYZ. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán là kết quả đẹp có ý nghĩa. Nó xuất phát từ một kết quả nghiên cứu trong [5], thông qua bài toán 1 nó được chứng minh đơn giản hơn như trên. Bài toán này có có một hệ quả đẹp là đường thẳng Euler của tam giác XYZ cũng là đường thẳng OI của tam giác ABC. Ngoài ra ta còn chú ý rằng từ chứng minh phần b) dễ suy ra $IX = OA$ do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ và ABC có bán kính bằng nhau. Ta lại tiếp tục một bài toán khác liên quan tới bài toán 1

Bài 13. *Cho tam giác ABC. E, F di chuyển trên cạnh CA, AB sao cho $CE = BF$. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định khi E, F di chuyển.*

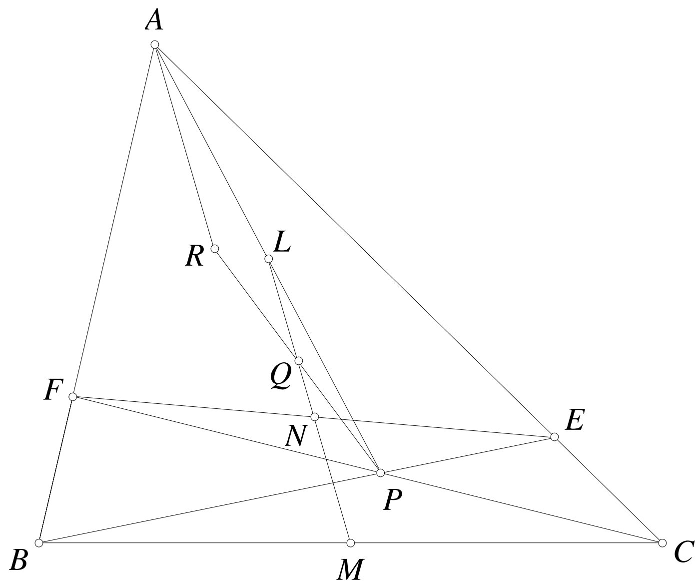


Hình 6.

Lời giải. Gọi G, L lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và AEF. Gọi (O) và (K) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AEF. LK, GO là đường thẳng Euler của tam giác AEF và ABC. Gọi LK giao GO tại T ta sẽ chứng minh T cố định, thật vậy, theo bài toán 1 thì (O) và (K) cắt nhau tại P trên trung trực EF và BC. Gọi M, N là trung điểm BC, EF. Ta dễ thấy các tam giác cân PEF và PCB đồng dạng có tâm ngoại tiếp lần lượt là K và O, trung điểm đáy lần lượt là N, M. Do đó theo tính chất đồng dạng dễ chỉ ra $\dfrac{PK}{PN} = \dfrac{KO}{MN} = \dfrac{PO}{PM}$ là tỷ số cố định, mặt khác từ đây cũng suy ra $MN \parallel KO$. Ta lại chú ý $\dfrac{GL}{MN} = \dfrac{2}{3}$ và $GL \parallel MN$. Do đó $GL \parallel KO$ và $\dfrac{GL}{KO} = \dfrac{GL}{MN}.\dfrac{MN}{KO} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{PM}{PO}$ là tỷ số cố định. Từ đó ta có $\dfrac{TG}{TO} = \dfrac{GL}{KO}$ không đổi do đó T cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán lại cho ta một kết luận quan trọng là đường thẳng Euler của tam giác AEF đi qua điểm cố định nếu ứng dụng nó vào chuỗi các bài toán ta vừa xây dựng ở trên thì nó giúp ta tìm ra nhiều kết quả sâu sắc khác. Ngoài ra trong chứng minh trên ta có thể chỉ ra điểm cố định T nằm trên AP là phân giác ngoài góc A. Ta có một chú ý quan trọng nữa là trong chứng minh trên ta dễ chỉ ra MN song song OK và cùng vuông góc AP hay cùng song song phân giác góc A. Đây là một kết quả đã khá quen thuộc mà các bạn lớp 7,8 thường hay dùng các tính chất trung điểm và tam giác cân trong tứ giác $EFBC$ có hai cạnh bằng nhau để chứng minh. Kết quả này cũng cho ta một hệ quả đẹp sau

Bài 14. *Cho tam giác ABC. E, F nằm trên cạnh CA, AB sao cho $CE = BF$. BE giao CF tại P. Gọi M, N là trung điểm của BC, EF. Q là một điểm trên đường thẳng MN. Gọi R là đối xứng của P qua Q. Chứng minh rằng AR là phân giác của tam giác ABC.*



Hình 7.

Lời giải. Gọi L là trung điểm AP ta đã quen thuộc với kết quả của đường thẳng Gauss-Newton thì M, N, L thẳng hàng do đó theo tính chất đường trung bình thì AR song song $QR \equiv MN$. Theo nhận xét bài trên thì AR là phân giác tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

Để kết thúc bài viết các bạn hãy cùng làm các bài tập sau để thực hành sâu hơn về bài toán 1 cũng như các bài toán trong bài viết.

Bài 15. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF và tâm ngoại tiếp O. Gọi OA, OB, OC lần lượt cắt EF, FD, DE tại X, Y, Z Giả sử tâm ngoại tiếp tam giác XYZ nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC có một góc là $45°$.*

Bài 16. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Đường tròn qua D, H và trực giao với đường tròn (HBC) cắt (HBC) tại X khác H. Tương tự có Y, Z. Gọi (K) đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Đường thẳng qua H vuông góc với HK cắt (XYZ) tại M, N. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại M, N của (XYZ) cắt nhau trên (O) khi và chỉ khi tam giác ABC có một góc $45°$.*

Bài 17. *Cho tam giác giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Giả sử rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF đi qua tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với BC. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.*

Bài 18. *Cho tam giác ABC, trên tia đối tia BA, CA lấy các điểm M, N sao cho $BM = BN = BC$. Gọi I_a và O lần lượt là tâm bàng tiếp góc A và tâm ngoại tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng $MN \perp OI_a$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN là OI_a.*

Bài 19. *Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là đối xứng của E, F, F, D, D, E qua các đường thẳng AB, AC, BC, BA, CA, CB. Gọi X, Y, Z là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN, EPQ, FRS. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác XYZ và tam giác ABC trùng nhau.*

Bài 20. *Cho tam giác ABC. E, F di chuyển trên cạnh CA, AB sao cho $CE = BF$. Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler của tam giác AEF luôn thuộc một đường thẳng cố định khi E, F di chuyển.*

Tài liệu

[1] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, Toán nâng hình học 10, NXBGD 2000

[2] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10, NXBGD 2010

[3] Bosnia and Herzegovina TST 2012 Problem 5 on AoPS

[4] Russia All-Russian Olympiad on AoPS

[5] Quang Tuan Bui, Two triads of congruent circles from reflections, Forum Geometricorum, 8 (2008)