Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

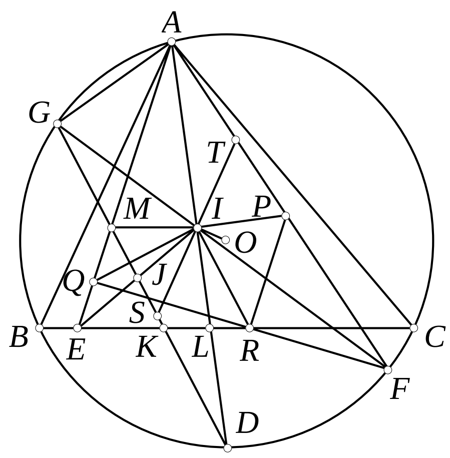
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với tâm nội tiếp I. P là điểm ở trong tam giác sao cho PI vuông góc với IA. Gọi Q đẳng giác P trong tam giác ABC. AQ cắt BC tại E. Gọi J là trung điểm IE. Đường thẳng qua I vuông góc OI cắt đường thẳng qua J vuông góc IQ tại S và cắt AP tại T. Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng ST.

Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q là hai điểm đẳng giác. AP cắt (O) tại M khác A. QM cắt BC tại E thì $PE \parallel AQ$.

Chứng minh của Phan Anh Quân. Gọi AQ cắt (O) tại N khác A và cắt BC tại H. Vì P, Q đẳng giác nên $\triangle CHN \sim \triangle ACM$ và $\triangle CPM \sim \triangle QCN$ (g.g). Ta suy ra $HN.AM = CM.CN = QN.PM$ vì thế nên $\frac{MP}{MA} = \frac{NH}{NQ} = \frac{ME}{MQ}$ hay $PE \parallel AQ$.

Quay lại bài toán. Gọi AI cắt (O) tại D khác A. Gọi IF cắt (O) tại G khác F, theo kết quả bài toán IMO 2010 quen thuộc thì GD chia đôi IE, ta sẽ chứng minh rằng $GD \perp IQ$, từ đó suy ra S thuộc GD, theo bài toán con bướm thì I là trung điểm ST, thật vậy. Gọi đường thẳng qua I song song GD cắt BC tại R. Gọi DG cắt BC, AE tại K, M. AD cắt BC tại L. Ta có $\angle IAE = \angle IAF = \angle IGD$. Từ đó tứ giác $AIMG$ nội tiếp, suy ra $IM \parallel BC$ nên tứ giác $IMKR$ là hình bình hành. Từ đó ta có $IR.DG = \frac{IR}{DM}.DM.DG = \frac{MK}{MD}.DI.DA = \frac{IL}{ID}.DI.DA = IL.AD = IA.ID$. Đẳng thức cuối có do $\frac{IL}{IA} = \frac{BC}{AB+AC} = \frac{DI}{DA}$. Từ đó $IR.DG = IA.ID = IG.IF$, lại có $\angle FIR = \angle IGD$ nên ta có $\triangle FIR \sim \triangle DGI \sim \triangle FAI$. Từ đó FI là phân giác $\angle AFR$ và $\angle PIR = \angle AIF + \angle FIR - 90° = \angle IRF + \angle FIR - 90° = 90° - \angle IFR = 90° - \frac{1}{2}\angle PFR$, suy ra I là tâm bàng tiếp góc F của tam giác PFR. Từ đó $\angle FPR = 180° - 2\angle API = 2(90° - \angle API) = 2\angle PAI = \angle PAE$ nên $PR \parallel AQ$. Vậy theo bổ đề thì QF đi qua R. Ta dễ thấy I là tâm nội tiếp tam giác AFQ. Từ đó $\angle RIQ = \angle QIF - \angle RIF = 90° + \frac{1}{2}\angle QAF - \angle IAF = 90°$. Suy ra $IQ \perp IR \parallel GD$ hay $IQ \perp GD$.

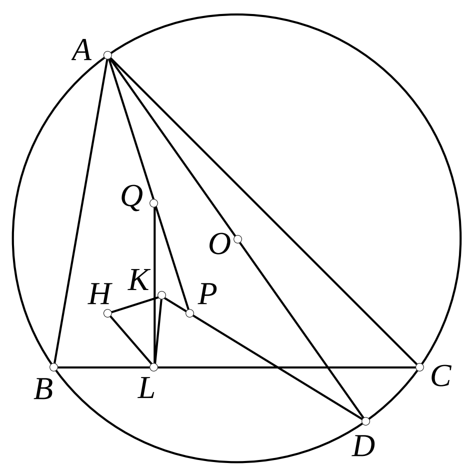


Nhật xét

Phần quan trọng nhất trong lời giải này là chỉ ra được I là tâm nội tiếp tam giác AQF. Bạn **Nguyễn Ngọc Chi Lan** lớp 12A1 Toán trường THPT chuyên KHTN cho một lời giải rất thú vị ở đây. Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương cũng gửi tới tác giả một lời giải hay dùng định lý Pascal. Bài toán này nằm trong một cấu hình rất thú vị của các đường tròn Thébault, xin giới thiệu với các bạn sau.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD, trực tâm H. P, Q là hai điểm đẳng giác nằm trên phân giác góc A và ở trong tam giác ABC. K thuộc PD sao cho $HK \perp AP$. Chứng minh rằng trung trực HK đi qua hình chiếu của Q trên BC.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

