Một số tính chất của tam giác đều

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

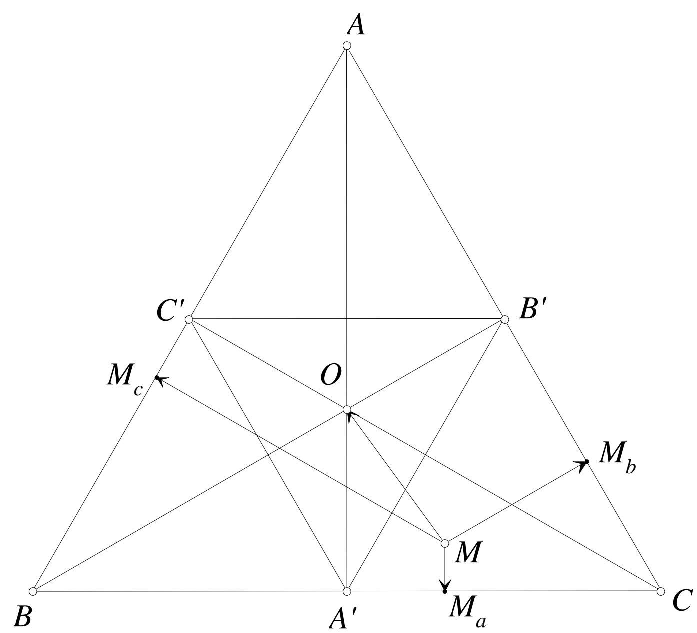
Chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh một số tính chất đẹp của tam giác đều dựa trên một đẳng thức vector và sau đó sẽ mở rộng tương tự cho đa giác.

1 Hai bài toán cơ bản

Trong [1] chúng ta gặp bài toán sau phát biểu với điểm M nằm trong tam giác ABC. Trong bài viết này chúng ta sẽ xét bài toán đó nhưng với mọi M trên mặt phẳng, hơn nữa với cách chứng minh thứ hai được trình bày ở đây, ta có thể mở rộng bài toán cho đa giác đều bất kỳ

Bài toán 1 (Bài toán cơ bản)**.** *Cho tam giác đều ABC và M là điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_a, M_b, M_c là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng, chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$



Lời giải thứ nhất. Chúng ta sẽ dùng các khái niệm diện tích đại số và độ dài đại số, ta ký hiệu diện tích đại số các tam giác MBC, MCA, MAB, ABC tương ứng là $[S_a], [S_b], [S_c], [S]$ và AA', BB', CC' là các đường cao của ABC ta có $\dfrac{[S_a]}{[S]} = \dfrac{\overline{M'M_a}}{\overline{AA'}}$ vì vậy

$$\overrightarrow{MM_a} = \frac{\overline{MM_a}}{\overline{AA'}}\overrightarrow{AA'} = \frac{3[S_a]}{2[S]} \cdot \overrightarrow{AO}$$

Tương tự ta có

$$\overrightarrow{MM_b} = \frac{3[S_b]}{2[S]} \cdot \overrightarrow{BO}, \qquad \overrightarrow{MM_c} = \frac{3[S_c]}{2[S]} \cdot \overrightarrow{CO}$$

như vậy

$$\sum \overrightarrow{MM_a} = \sum \frac{3[S_a]}{2[S]} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{3}{2[S]}(\sum [S_a](\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO})) =$$

$$= \frac{3}{2[S]}(\sum [S_a](\overrightarrow{AM}) + \frac{3}{2[S]}(\sum [S_a])(\overrightarrow{MO}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

Đến đây ta đã dùng các hệ thức cở bản của diện tích đại số

$$[S_a]\overrightarrow{MA} + [S_b]\overrightarrow{MB} + [S_c]\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}, [S_a] + [S_b] + [S_c] = [S].$$

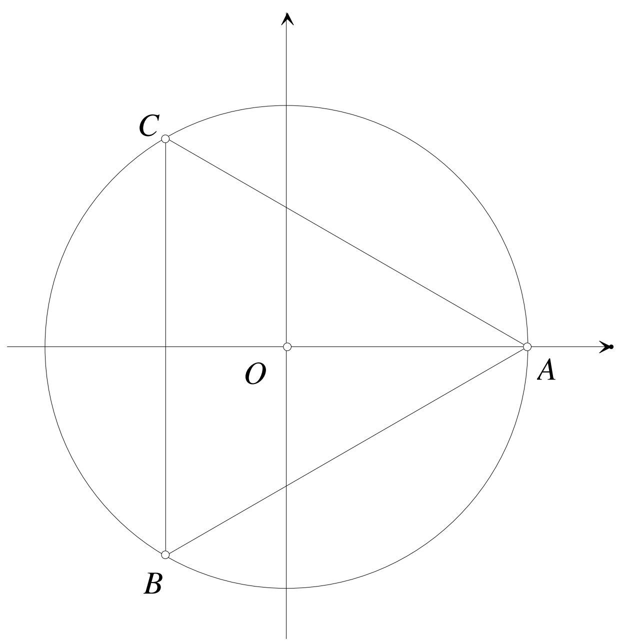
Ta suy ra diều phải chứng minh.

□

Để đi đến lời giải thứ 2, ta phát biểu một bổ đề quen thuộc sau

Bổ đề 1.1. *Hai tam giác ABC và XYZ cùng trọng tâm khi và chỉ khi* $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{0}$

Đây là bổ đề quen thuộc, xong ta chú ý rằng áp dụng bổ đề này cần linh hoạt, tức là ta không cần quan tâm đến thứ tự các đỉnh khi áp dụng



Lời giải thứ hai. Chúng ta sẽ sử dụng phép quay vector. Gọi A', B', C' lần lượt là đối xứng của điểm M qua các cạnh BC, CA, AB. Ta thấy rằng bài toán tương đương với việc ta phải chứng minh tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có cùng trọng tâm. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$ ta sẽ chứng minh $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0}$, thật vậy

Ta xét $R^{\frac{2\pi}{3}}$ là phép quay vector góc $\dfrac{2\pi}{3}$ khi đó

$$R^{\frac{2\pi}{3}}(3\overrightarrow{GG'}) = R^{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'})$$

$$= R^{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{AC'}) + R^{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{BA'}) + R^{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{CB'}) = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

Như vậy $\overrightarrow{GG'}$ không đổi qua phép quay vector $R^{\frac{2\pi}{3}}$ do đó $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0}$. Ta suy ra điều phải chứng minh. □

Với lời giải thứ hai ta dễ dàng mở rộng bài toán tương tự cho đa giác đều n cạnh như sau

Bài toán 2. *Cho O là tâm của đa giác đều $A_1A_2...A_n$ và M là điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi $M_1, M_2, ..., M_n$ là các hình chiếu của M tới các đường thẳng $A_iA_{i+1}, (i = \overline{1,n}, n+1 \equiv 1)$ tương ứng, chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + ... + \overrightarrow{MM_n} = \frac{n}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Ta cũng cần một bổ đề tương tự cho đa giác

Bổ đề 2.1. *Hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iA'_i} = \overrightarrow{0}$*

Ta cũng chú ý rằng bổ đề cần phải áp dụng linh hoạt

Chứng minh. Chúng ta sẽ sử dụng phép quay vector. Gọi A'_i, $(i = \overline{1,n})$ lần lượt là các điểm đối xứng của điểm M qua các cạnh $A_iA_{i+1}, (i = \overline{1,n}, n+1 \equiv 1)$. Ta thấy rằng bài toán tương đương với việc ta phải chứng minh đa giác $A_1A_2...A_n$ và tam giác $A'_1A'_2...A'_n$ có cùng trọng tâm. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ ta sẽ chứng minh $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0}$, thật vậy

Ta xét $R^{-\frac{2\pi}{n}}$ là phép quay vector góc $-\dfrac{2\pi}{n}$ khi đó

$$R^{\frac{2\pi}{n}}(n\overrightarrow{GG'}) = R^{\frac{2\pi}{n}}(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iA'_i}) = \sum_{i=1}^{n} R^{\frac{2\pi}{n}}(\overrightarrow{A_iA'_i}) = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iA_{i'-1}} = n\overrightarrow{GG'}$$

Như vậy $\overrightarrow{GG'}$ không đổi qua phép quay vector $R^{-\frac{2\pi}{n}}$ do đó $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0}$. Ta suy ra điều phải chứng minh.

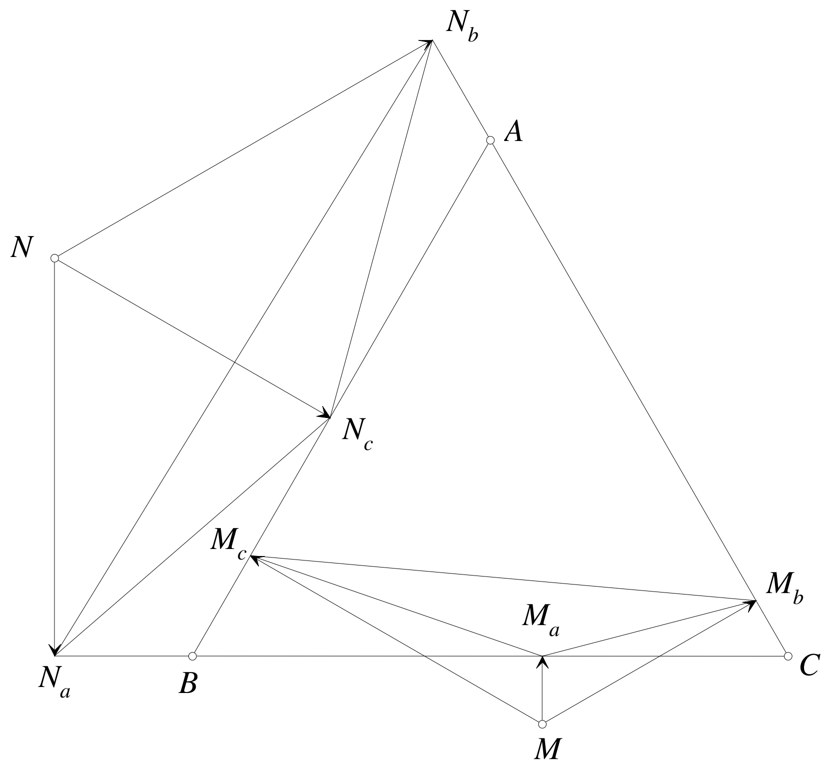
□

2 Một số ứng dụng

Bây giờ ta sẽ chỉ ra một vài ứng dụng đẹp từ các hệ thức trên

Bài toán 3. *Cho tam giác đều ABC và M, N là hai điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_a, N_a là hình chiếu của M, N trên đường thẳng BC, tương tự ta có M_b, N_b, M_c, N_c chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{M_aN_a} + \overrightarrow{M_bN_b} + \overrightarrow{M_cN_c} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}.$$



Hình 1.

Chứng minh. Từ hệ thức ban đầu ta có

$$\overrightarrow{MM_a}+\overrightarrow{MM_b}+\overrightarrow{MM_c}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{NN_a}+\overrightarrow{NN_b}+\overrightarrow{NN_c}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NO}$$

và

$$\sum\overrightarrow{M_aN_a}=\sum(\overrightarrow{M_aM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NN_a})=\sum\overrightarrow{M_aM}+3\overrightarrow{MN}+\sum\overrightarrow{NN_a}=$$
$$=-\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}+3\overrightarrow{MN}+\frac{3}{2}\overrightarrow{NO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$$

như vậy ta đã chứng minh xong. □

Hoàn toàn tương tự ta sẽ có mở rộng trên đa giác đều

Bài toán 4. *Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ và M, N là hai điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_i, N_i là hình chiếu của M, N trên đường thẳng $A_iA_{i+1}, (i=\overline{1,n}, n+1\equiv 1)$ chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{M_1N_1}+\overrightarrow{M_2N_2}+...+\overrightarrow{M_nN_n}=\frac{n}{2}\overrightarrow{MN}.$$

Bài toán 5. *Gọi O là tâm tam giác đều ABC với bán kính đườn tròn ngoại tiếp R và M là điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_a, M_b, M_c là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng, chứng minh rằng*

$$MM_a^2+MM_b^2+MM_c^2=\frac{3}{2}MO^2+\frac{3}{4}R^2.$$

Chứng minh. Gọi A', B', C' là trung điểm của BC, CA, AB ta có

$MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2$
$= \sum(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M_a})^2$
$= \sum(MO^2 + OA'^2 + A'M_a^2 + 2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{OA'} + 2\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{A'M_a} + 2\overrightarrow{A'M_a}\cdot\overrightarrow{MO})$
$= 3MO^2 + \frac{3}{4}R^2 + \sum A'M_a^2 + 2\overrightarrow{MO}\cdot(\sum\overrightarrow{OA'}) + 2\sum\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{A'M_a} + 2\sum\overrightarrow{A'M_a}\cdot\overrightarrow{MO}$ $(*)$

Ở đây $\sum\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{0}$ và A', M_a là các hình chiếu O, M trên BC, tương ứng, vì vậy $\overrightarrow{A'M_a}\cdot\overrightarrow{MO} = -A'M_a^2$ và $\overrightarrow{OA'} \perp \overrightarrow{A'M_a} \Rightarrow \overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{A'M_a} = 0$ và hoàn toàn tương tự với các đỉnh B, C. Từ đó chúng ta sẽ nhận được từ $(*)$ đẳng thức sau

$MM_a^2+MM_b^2+MM_c^2 = 3MO^2+\frac{3}{4}R^2+(\sum\overrightarrow{A'M_a})\cdot\overrightarrow{MO} = 3MO^2+\frac{3}{4}R^2-\frac{3}{2}MO^2 = \frac{3}{2}MO^2+\frac{3}{4}R^2.$

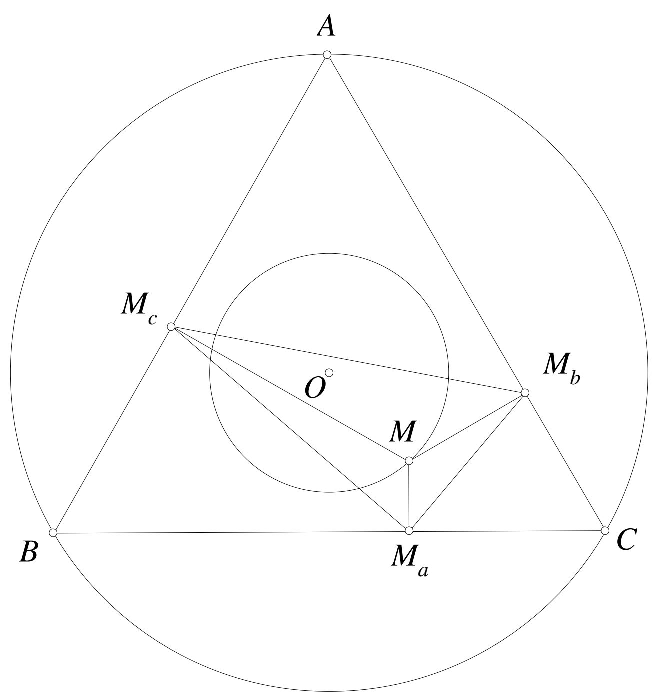
Ở đây chú ý rằng A', B', C' là các hình chiếu của O tới các đường thẳng tương ứng BC, CA, AB, vì vậy từ bài toán 2 ta có $\sum\overrightarrow{A'M_a} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$. □

Chúng ta có ba hệ quả đẹp từ bài toán này

Hệ quả 5.1. *Khi M thuộc đường tròn tâm O bán kính r thì*

$$MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 = \frac{3}{2}r^2 + \frac{3}{4}R^2.$$

Hệ quả 5.2. *Quĩ tích các điểm M sao cho $MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 = k \geq \frac{3}{4}R^2$ là một đường tròn tâm O bán kính $\frac{2}{3}\sqrt{k - \frac{3}{4}R^2}$.*



Hình 2.

Hệ quả 5.3. $MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 \geq \frac{3}{4}R^2$ *với mọi* M *trên mặt phẳng đẳng thức có khi* $M \equiv O$.

Bằng cách chứng minh tương tự ta sẽ có vấn đề tổng quát trên đa giác

Bài toán 6. *Gọi* O *là tâm đa giác đều* $A_1A_2...A_n$ *với bán kính đường tròn ngoại tiếp* R *và* M *là điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi* M_i *là hình chiếu của* M *trên các đường thẳng* $A_iA_{i+1}(i = \overline{1,n}, n+1 \equiv 1)$, *chứng minh rằng:*

$$MM_1^2 + MM_2^2 + ... + MM_n^2 = \frac{n}{2}MO^2 + n\cos^2\frac{\pi}{n}R^2.$$

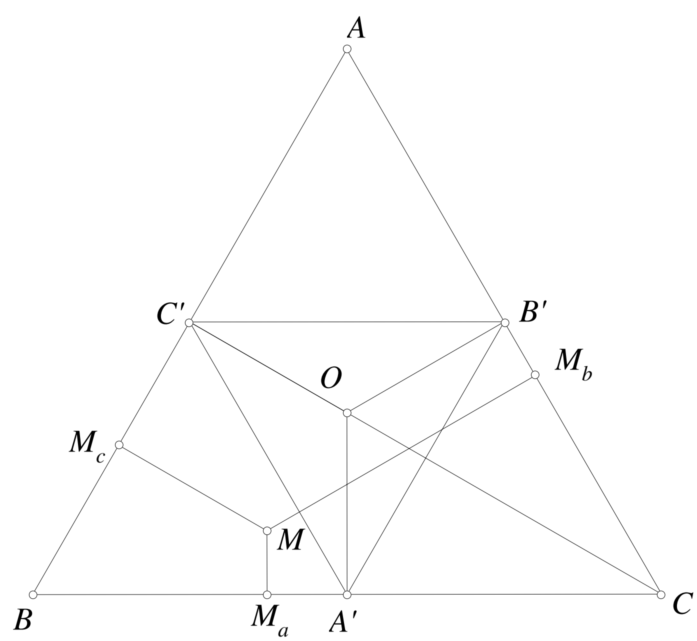
Hệ quả 6.1. *Khi* M *thuộc đương tròn tâm* O *bán kính* r *thì* $MM_1^2 + MM_2^2 + ... + MM_n^2 = \frac{n}{2}r^2 + n\cos^2\frac{\pi}{n}R^2$

Hệ quả 6.2. *Quỹ tích các điểm* M *sao cho* $MM_1^2 + MM_2^2 + ... + MM_n^2 = k \geq n\cos^2\frac{\pi}{n}R^2$ *là một đường tròn tâm* O *bán kính* $\frac{2}{n}\sqrt{k - n\cos^2\frac{\pi}{n}R^2}$.

Hệ quả 6.3. $MM_1^2 + MM_2^2 + ... + MM_n^2 \geq n\cos^2\frac{\pi}{n}R^2$ *với mọi* M *trên mặt phẳng, dấu bằng khi* $M \equiv O$.

Bài toán 7. *Cho tam giác đều* ABC *với* M, N *là hai điểm bất kỳ trên mặt phẳng.Gọi* M_a, N_a *là hình chiếu của* M, N *trên đường thẳng* BC, *tương tự ta có* M_b, N_b, M_c, N_c *chứng minh rằng*

$$M_aN_a^2 + M_bN_b^2 + M_cN_c^2 = \frac{3}{2}MN^2.$$



Hình 3.

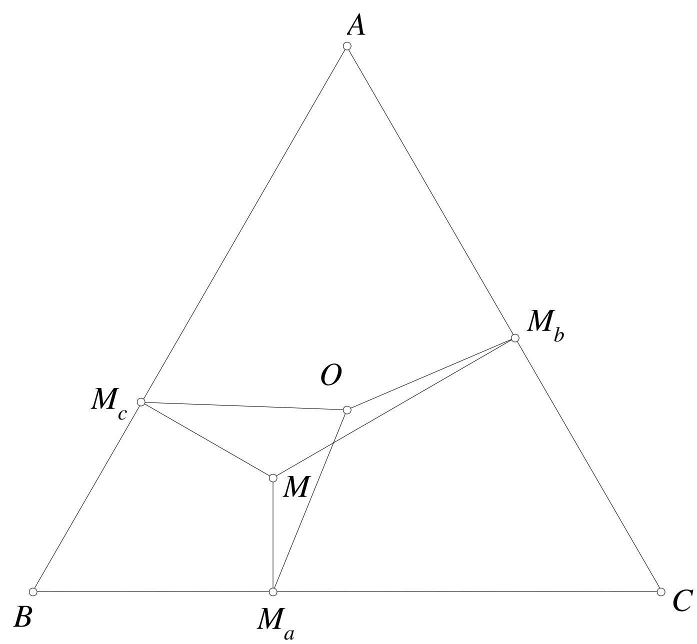
Chứng minh. Vì M_a, N_a là các hình chiếu của M, N trên đường thẳng BC vì vậy theo đính lý hình chiếu $\overrightarrow{M_aN_a} \cdot \overrightarrow{MN} = M_aN_a^2$ do đó

$$\sum M_aN_a^2 = \sum \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{M_aN_a} = \overrightarrow{MN}(\sum \overrightarrow{M_aN_a}) = MN \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}MN^2$$

Từ bài toán 2 ta có $\overrightarrow{M_aN_a} + \overrightarrow{M_bN_b} + \overrightarrow{M_cN_c} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$ □

Lời giải bài toán tuy đơn giản xong chúng ta có thể nhận được một kết quả đẹp từ bài toán đó khi ta cho $N \equiv O$ và đặt A', B', C' là hình chiếu của O tới BC, CA, AB (đây cũng là các chân đương cao của tam giác ABC), từ vấn đề trên ta có $\sum M_aA'^2 = \frac{3}{2}MO^2$ bởi đinh lý Pythagore ta có $M_aA'^2 = OM_a^2 - OA'^2$ và tương tự cho đỉnh B, C ta có

$$\sum(OM_a^2 - OA'^2) = \frac{3}{2}MO^2 \Leftrightarrow OM_a^2 + OM_b^2 + OM_c^2 = \frac{3}{2}MO^2 + 3(\frac{R}{2})^2 = \frac{3}{2}MO^2 + \frac{3}{4}R^2$$



Hình 4.

Bây giờ kết hợp với bài toán 4 ta có hệ quả sau

Hệ quả 7.1. $MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 = OM_a^2 + OM_b^2 + OM_c^2$

Ta lại nhận được một bài toán tương tự và hệ quả tương tự cho đa giác đều

Bài toán 8. *Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ và M, N là hai điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_i, N_i là hình chiếu của M, N trên đường thẳng $A_iA_{i+1}, (i = \overline{1,n}, n+1 \equiv 1)$ chứng minh rằng:*

$$M_1N_1^2 + M_2N_2^2 + ... + M_nN_n^2 = \frac{n}{2}MN^2.$$

Hệ quả 8.1. $MM_1^2 + MM_2^2 + ... + MM_n^2 = OM_1^2 + OM_2^2 + ... + OM_n^2$ *với O là tâm đa giác đều.*

Tài liệu

[1] Nguyễn Minh Hà (chủ biên) Nguyễn Xuân Bình, *Toán nâng cao hình học 10*, NXBGD năm 2000.

[2] Phan Huy Khải, Nguyễn Đạo Phương, *Các phương pháp giải toán sơ cấp - Hình học 10*, NXB Hà Nội 2000.

[3] L.I.Golovina, I.M.Yaglom, *Phép quy nạp trong hình học*, NXBGD 1997.