Từ bài toán thi của Romani tới bài thi HSG lớp 10 THPT chuyên KHTN

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết mở rộng bài toán thi của Romani trong cuộc thi Grigore Moisil năm 2012.

Một cuộc thi toán của Romani năm 2012 mang tên nhà toán học Grigore Moisil [1] có bài toán hình học hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC với M là trung điểm của BC. Dựng các đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt nằm ở bên trái và bên phải điểm M, vuông góc BC và có khoảng cách tới M bằng nhau. Đường thẳng qua M vuông góc với AB, AC lần lượt cắt d_1, d_2 tại P, Q. Chứng minh rằng $AM \perp PQ$.

Bài toán trên có một mở rộng thú vị ở [2] như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với M, M' thuộc BC và đối xứng nhau qua trung điểm BC. Đường thẳng qua M vuông góc với AB, AC lần lượt cắt đường thẳng qua B, C vuông góc với BC tại P, Q. Chứng minh rằng $AM' \perp PQ$.

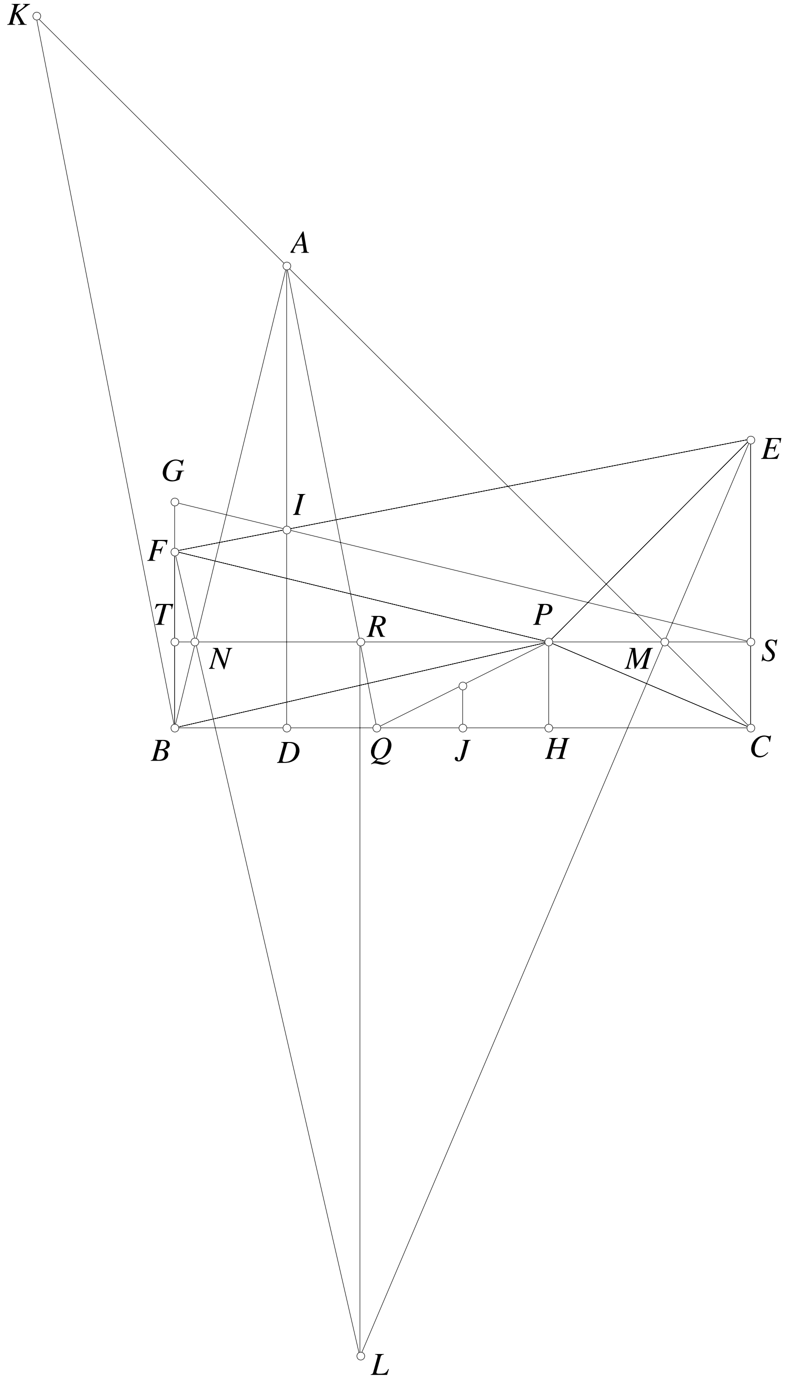
Bài toán gốc và bài toán mở rộng đều là bài toán hay và đặc sắc. Lời giải chi tiết có thể xem trong [1],[2] tôi không trình bày lại. Trong quá trình suy nghĩ tôi đã đề xuất một bài toán tổng quát hơn bài toán 2 cùng với các phát triển của nó trong đề thi HSG lớp 10 [3]. Điều thú vị là bài toán hoàn toàn dựa trên các biến đổi tỷ số độ dài đoạn thẳng và tam giác đồng dạng, là các kiến thức cơ bản của chương trình hình học lớp 8 ở Việt Nam

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt thuộc đoạn CA, AB sao cho $MN \parallel BC$. P là điểm di chuyển trên đoạn MN. Lấy các điểm E sao cho $EP \perp AC$ và $EC \perp BC$. Lấy điểm F sao cho $FP \perp AB$ và $FB \perp BC$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

b) Đường thẳng qua A vuông góc EF cắt BC tại Q. Chứng minh rằng trung trực BC chia đôi PQ.

c) Gọi EM cắt FN tại L. AQ cắt MN tại R. Chứng minh rằng $RL \perp BC$.



Hình 1.

Lời giải. a) Gọi AD là đường cao tam giác ABC. MN cắt CE, BF tại S, T. Đường thẳng qua S vuông góc AC cắt EF tại I. Dễ thấy $\triangle SPE \sim \triangle DAC$ và $\triangle TPF \sim \triangle DAB$. Từ đó $\dfrac{IE}{IF} = \dfrac{ES}{FG} = \dfrac{ES}{PS}.\dfrac{PS}{FG} = \dfrac{ES}{PS}.\dfrac{TP}{TF} = \dfrac{CD}{AD}.\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{DC}{DB}$. Vậy I thuộc AD suy ra I là giao của AD và SG cố định. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi H là hình chiếu của P lên BC. Ta sẽ chứng minh $QB = HC$ từ đó dễ suy ra trung trực BC chia đôi PQ, thật vậy. Cũng từ $\triangle SPE \sim \triangle DAC$ và $\triangle TPF \sim \triangle DAB$, ta có $\frac{PE}{PF} = \frac{PE}{PS}.\frac{PS}{PT}.\frac{PT}{PF} = \frac{AC}{AD}.\frac{HC}{HB}.\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AB}.\frac{HB}{HC}$.

Lấy K thuộc AC sao cho $BK \parallel AQ$. Ta dễ thấy $\triangle ABK \sim \triangle PFE$ suy ra $\frac{QB}{QC} = \frac{BQ}{AK}.\frac{AK}{AB}.\frac{AB}{QC} = \frac{QC}{AC}.\frac{PE}{PF}.\frac{AB}{QC} = \frac{AB}{AC}.\frac{AC}{AB}.\frac{HB}{HC} = \frac{HB}{HC}$.

Lại có H, Q đều nằm giữa BC nên dễ suy ra $QB = HC$. Ta có điều phải chứng minh.

c) Ta phải chứng minh EM, FN và đường thẳng qua R vuông góc MN đồng quy. Điều này tương đương với $\frac{ES}{FT} = \frac{MS}{MR}.\frac{NR}{NT}$. Ta dễ có $\triangle SME \sim \triangle SCP$ và $\triangle TNF \sim \triangle TBP$. Từ đó $\frac{ES}{FT} = \frac{ES}{MS}.\frac{MS}{NT}.\frac{NT}{FT} = \frac{MS}{NT}.\frac{PS}{SC}.\frac{BT}{PT} = \frac{MS}{NT}.\frac{PS}{PT} = \frac{MS}{MR}.\frac{HB}{HC} = \frac{MS}{MR}.\frac{RN}{RM}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bạn Trịnh Huy Vũ lớp 11 A1 Toán THPT chuyên KHTN đề xuất lời giải khác cho ý b) như sau. Gọi L là trung điểm PQ. Ta sẽ chứng minh $LB = LC$ thật vậy. Ta có $2(LB^2 - LC^2) = \frac{2(BQ^2 + BP^2) - PQ^2}{2} - \frac{2(CQ^2 + CP^2) - PQ^2}{2} = QB^2 - QC^2 + BP^2 - CP^2 = (BF^2 + FQ^2) - (CE^2 + EQ^2) + (BP^2 - PA^2) - (CP^2 - PA^2) = BF^2 - CE^2 + AF^2 - AE^2 + (FB^2 - FA^2) + (CE^2 - AE^2) = 0$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán hoàn toàn có thể tổng quát hơn nữa theo cách của bài toán 1 và cách chứng minh hoàn toàn tương tự. Các bạn hãy làm như một bài luyện tập

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có M, N lần lượt thuộc đoạn CA, AB sao cho $MN \parallel BC$. K, L thuộc đoạn BC sao cho $BK = CL$ và K nằm giữa B và L. P là điểm di chuyển trên đoạn MN. Lấy các điểm E sao cho $EP \perp AC$ và $EL \perp BC$. Lấy điểm F sao cho $FP \perp AB$ và $FK \perp BC$.

a) Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

b) Đường thẳng qua A vuông góc EF cắt BC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

c) Gọi đường thẳng qua N vuông góc PK cắt đường thẳng qua M vuông góc PL cắt nhau tại L. AQ cắt MN tại R. Chứng minh rằng $RL \perp BC$.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=471881

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=471928

[3] Đề thi HSG lớp 10 lần 2 THPT chuyên KHTN