Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

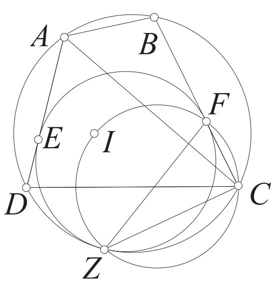
Đề bài

Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I. M,N là trung điểm CA,AB. BI,CI cắt trung trực IA tại P,Q. Đường thẳng qua I vuông góc IA lần lượt cắt CA,AB tại E,F. Lấy K,L lần lượt thuộc trung trực AE,AF sao cho $KQ\perp AQ$ và $LP\perp AP$. d là một đường thẳng thay đổi đi qua A. U,V là hình chiếu của K,L lên d. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn đường kính UV và (AMN) luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi đường thẳng d thay đổi.

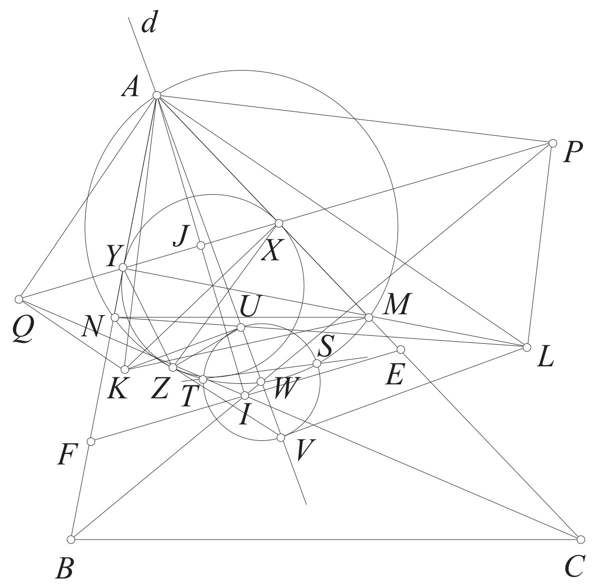
Lời giải

Chứng minh sau của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đưa ra ở đây. Bổ đề sau là hệ quả từ phép chứng minh định lý Thebault, chúng tôi không nêu lại chứng minh.

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn tiếp xúc với AD,BC tại E,F và tiếp xúc với (O) tại G. Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác GFC đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADC.



Giải bài toán. Gọi X,Y lần lượt là trung điểm AE,AF. Do K,L lần lượt thuộc trung trực AE,AF nên $KX\perp AC$,$LY\perp AB$. Từ đó các ngũ giác $AXUKQ$ và $AYVLP$ nội tiếp. Xét phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$ biến $E\mapsto X, F\mapsto Y, C\mapsto M, B\mapsto N$ nên X,Y lần là tiếp điểm của đường tròn Mixilinear của tam giác AMN với AM,AN. Gọi Z là tiếp điểm của đường tròn mixilinear ứng với đỉnh A của $\triangle AMN$ với đường tròn (AMN). J là trung điểm XY. Theo tính đối xứng $(QA,QX)=(QX,QI)=(QX,IA)+(IA,IC)=\frac{\pi}{2}+(IA,IC)=(BA,BI)=(NA,NJ)\equiv(ZA,ZX)$ $\pmod{\pi}$ nên tứ giác $AQZX$ nội tiếp.



Tương tự thì tứ giác $APZY$ nội tiếp. Vậy U,V theo thứ tự là giao điểm của d với (AXZ) và (AYZ). Gọi W là trung điểm UV thì $(XY,XZ)=(YN,YZ)=(VA,VZ)\pmod{\pi}$. Tương tự thì $(YX,YZ)=(UA,UZ)\pmod{\pi}$ nên $\triangle UZV\sim\triangle YZX$ suy ra $(WZ,WA)=(JZ,JX)=(MZ,MA)\pmod{\pi}$ suy ra W thuộc (AMN). Gọi S,T lần lượt là giao điểm của (UV) với (AMN). Do $WU=WS=WT$ nên U là tâm nội tiếp tam giác AST. Từ đó theo bổ đề trên ST tiếp xúc với đường tròn qua Z tiếp xúc với AM chính là đường tròn mixilinear tam giác AMN. Vậy trục ST luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Nhận xét

Bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 Toán THPT chuyên SP, bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình và bạn **Nguyễn Tiến Long** lớp 11 toán, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ đã cho lời giải tại đây. Bài toán là một kết quả cũ được viết lại bằng phép nghịch đảo, lời giải trên của bạn **Bảo** không dùng nghịch đảo có phần thú vị hơn.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). P di chuyển trên cung nhỏ BC. Dựng ra ngoài tam giác PBC các điểm E,F sao cho $\triangle PCE\sim\triangle AOB$ và $\triangle PBF\sim\triangle AOC$. Tiếp tuyến tại P của (O) cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác PCE,PBF tại M,N khác P. EM cắt FN tại Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi P thay đổi.
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

