# Mỗi tuần một bài toán

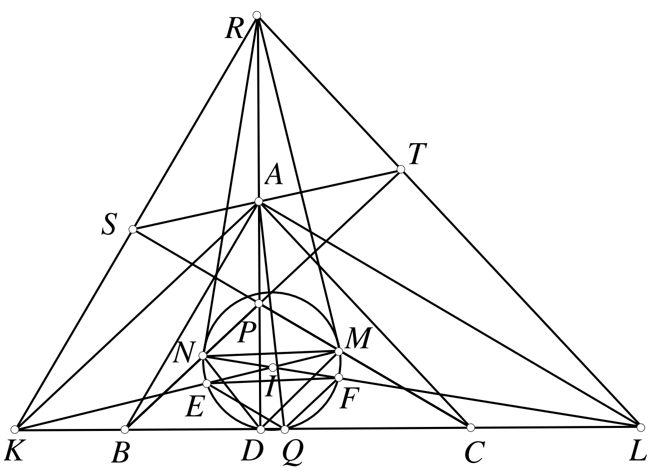
***Trần Quang Hùng,** Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

**Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.**

## Đề bài

Cho tam giác $ABC$ nhọn có đường cao $AD$. $P$ là một điểm bất kỳ di chuyển trên đoạn thẳng $AD$. Các điểm $K, L$ thuộc đường thẳng $BC$ sao cho $AK \perp AC, AL \perp AB$. Trên đoạn thẳng $PC, PB$ lần lượt lấy các điểm $M, N$ sao cho $KM = KA, LN = LA$. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác $DMN$ luôn thuộc một đường thẳng cố định khi $P$ di chuyển.

## Lời giải




Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác $DMN$ cắt $BC$ tại $Q$ khác $D$, ta sẽ chứng minh $Q$ cố định khi đó tâm ngoại tiếp tam giác $DMN$ thuộc trung trực của $DQ$ cố định, thật vậy. Lấy điểm $R$ trên tia đối tia $PD$ sao cho $DP.DR = DA^2 = DB.DL = DC.DK$. Từ đó ta dễ thấy $P$ là trực tâm của tam giác $RBL$ và $RCK$. Vậy $PC, PB$ lần lượt vuông góc với $RK, RL$ tại $S, T$. Ta chú ý tứ giác $RSDC$ nội tiếp đường tròn đường kính $RC$ nên $KM^2 = KA^2 = KD.KC = KS.KR$ suy ra $\angle KMR = 90°$. Tương tự $\angle LNR = 90°$. Vậy ta có $RM^2 = RS.RK = RP.RD = RT.RL = RN^2$. Từ đó nếu $KM$ cắt $LN$ tại $I$ thì hai tam giác vuông $RIM$ và $RIN$ bằng nhau suy ra $IM = IN$. Gọi $IM, IN$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác $DMN$ tại $E, F$ khác $M, N$ thì $EM = FN$. Ta chú ý $KM^2 = KA^2 = KD.KC$. Từ đó $\angle MCK = \angle KMD = \angle EQD$ suy ra $EQ \parallel PC$. Tương tự $FQ \parallel PB$. Ta lại có $\frac{QK}{QL} = \frac{QK}{QC} \cdot \frac{QC}{QB} \cdot \frac{QB}{QL} = \frac{KE}{EM} \cdot \frac{QC}{QB} \cdot \frac{FN}{FL} = \frac{EK}{FL} \cdot \frac{QC}{QB} = \frac{KE.KM}{KA} \cdot \frac{LA}{LF.LN} \cdot \frac{QC}{QB} = \frac{LA}{KA} \cdot \frac{KD.KQ}{LD.LQ} \cdot \frac{QC}{QB}$.

Từ đó $\frac{QB}{QC} = \frac{KD.LA}{KA.LD}$ hay $\frac{QB^2}{QC^2} = \frac{KD^2}{KA^2} \cdot \frac{LA^2}{LD^2} = \frac{KD}{KC} \cdot \frac{LB}{LD}$ (1)

Ta lại chú ý $AK, AL$ đẳng giác trong $\angle BAC$ nên $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{KB.LB}{KC.LC}$ (2)

Ta lại có $DB.DL = DP.DR = DC.DK$ hay $\frac{DK}{DL} = \frac{DB}{DC} = \frac{DK-DB}{DC-DL} = \frac{BK}{LC}$ (3).

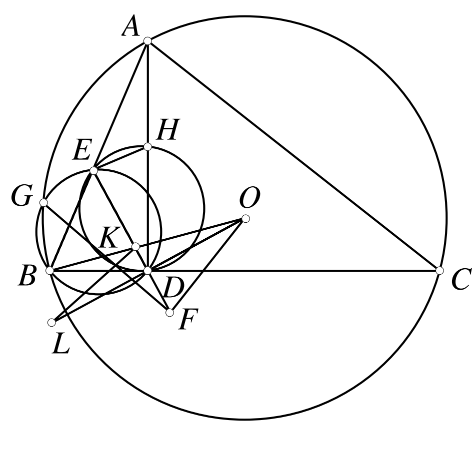
Từ (1),(2),(3) ta suy ra $\frac{QB^2}{QC^2} = \frac{AB^2}{AC^2}$ hay $\frac{QB}{QC} = \frac{AB}{AC}$. Vậy $AQ$ là phân giác $\angle BAC$ nên $Q$ cố định.

## Nhật xét

Bài toán là một phát triển từ mô hình bài toán IMO năm 2012. Nội dung chính là chúng ta phải chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác $DMN$ đi qua chân phân giác góc $A$, kết quả này đã bao hàm kết quả của mở rộng bài IMO 2012. Cách làm như trong đáp án chỉ sử dụng biến đổi tỷ số phù hợp với kiến thức THCS. Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương và bạn **Ngô Quang Dương** lớp 12A2 Toán THPT chuyên KHTN gửi lời giải tới tác giả sớm nhất. Bạn **Phạm Nguyễn Thiện Huy** lớp 12A2 trường chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng cho lời giải ở đây. Các bạn **Bùi Công Minh, Bùi Văn Bình** lớp 12 toán và các bạn **Lê Sỹ Quan, Lê Phước Tùng** lớp 11 toán, THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước đều cho lời giải đúng. Các lời giải trên đều có sử dụng kiến thức về hàng điểm điều hòa.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn $(O)$ với trực tâm $H$ và đường cao $AD$. Đường thẳng qua $D$ vuông góc với $OD$ cắt $AB$ tại $E$. Trung trực $AC$ cắt $DE$ tại $F$. Gọi $OB$ cắt $DE$ tại $K$. $L$ là đối xứng của $O$ qua $EF$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $BDE$ cắt $(O)$ tại $G$ khác $B$. Chứng minh rằng $GF$ và $KL$ cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $DEH$.




Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.