

Mỗi tuần một bài toán

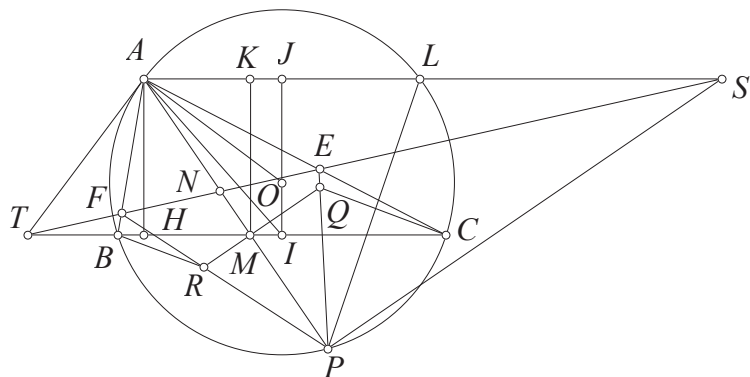
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có đường cao AH , I là trung điểm của BC . P là điểm thuộc cung BC không chứa A . AP cắt BC tại M . Lấy điểm N nằm trên AM sao cho $2\frac{NM}{NA} = \frac{MH}{IH}$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T . TN lần lượt cắt CA, AB tại E, F . Đường thẳng qua M vuông góc với AP cắt PE, PF lần lượt tại Q, R . Chứng minh rằng $CQ \parallel BR$.

Lời giải



Đường thẳng qua P vuông góc AP cắt đường thẳng qua A song song BC tại S . AS cắt (O) tại L khác A . Gọi J là trung điểm AL và K là hình chiếu của M trên AL . Ta dễ thấy $\angle ALP = \angle TAM$, $\angle LAT = \angle AMT$. Từ đó hai tam giác ALP và MAT đồng dạng và chú ý tứ giác $MKSP$ nội tiếp, ta thu được $TM.AL = AM.AP = AK.AS$. Suy ra $\frac{TM}{AS} = \frac{AK}{AL} = \frac{HM}{2HI} = \frac{NM}{NA}$, vậy theo định lý Thales đảo thì T, N, S thẳng hàng. Từ đó theo liên hệ giữa tỷ số đơn và tỷ số kép ta có $(BC, M) = A(BC, MS) = (FE, NS) = P(FE, NS) = (RQ, M)$. Từ đây dễ suy ra $\frac{MB}{MC} = \frac{MR}{MQ}$ nên $CQ \parallel BR$.

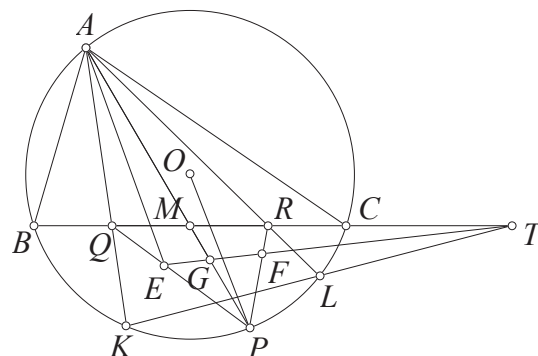
Nhật xét

Bài toán là mở rộng của bài toán hay được tác giả trao đổi với bạn **Nguyễn Lê Phước**. Bài toán được giải duy nhất bởi bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An tại đây. Trong lời giải của bạn **Bảo** có một chi tiết thú vị giúp chúng ta có thể phát biểu lại bài toán đẹp hơn như sau

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có đường cao AH và trọng tâm G . N là một điểm thuộc GH . AN cắt (O) tại P khác A và cắt BC tại M . Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T . TN lần lượt cắt CA, AB tại E, F . Đường thẳng qua M vuông góc với AP cắt PE, PF lần lượt tại Q, R . Chứng minh rằng $CQ \parallel BR$.

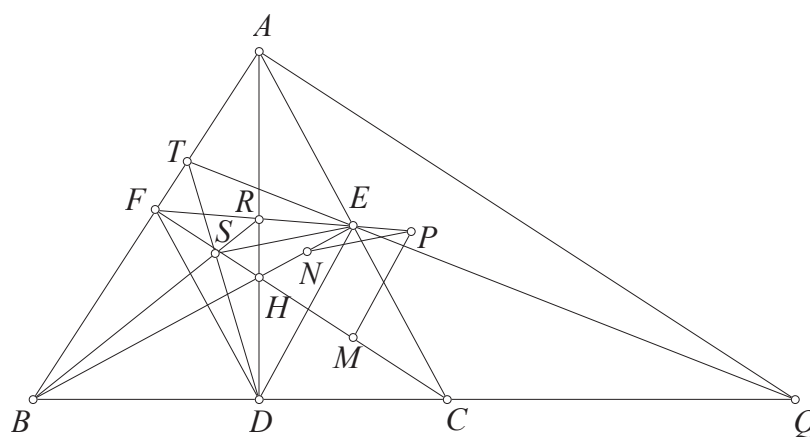
Ngoài ra bài toán khi N trùng với trọng tâm có thể được mở rộng như sau

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) với trung tuyến AM cắt (O) tại P khác A . Các điểm Q, R thuộc BC và đối xứng nhau qua trung điểm BC . AQ, AR cắt (O) tại K, L khác A . KL cắt BC tại T . G là trọng tâm tam giác PQR . TG cắt PQ, PR tại E, F . Chứng minh rằng AM là phân giác $\angle EAF$.



Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD, BE, CF . M, N là trung điểm của HC, HE . Trên EF lấy P sao cho $MP \parallel DE$. Q thuộc BC sao cho $AQ \perp AB$. AD cắt EF tại R . Trên BR lấy S sao cho $ES \parallel NP$. Chứng minh rằng QE, AB, SD đồng quy.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.