Mở rộng bài hình học trong IMO shortlist 2011

Trần Quang Hùng

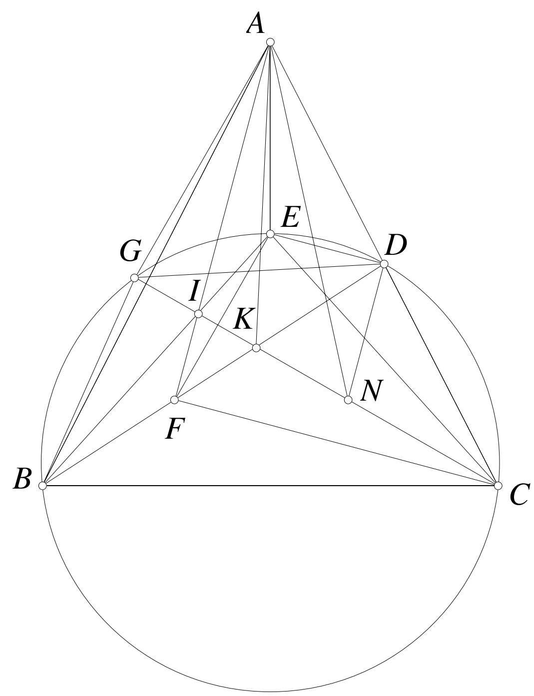
Tóm tắt nội dung

Bài viết mở rộng và chứng minh bài hình học G6 trong IMO shortlist 2001

Trong IMO shortlist 2001 có bài hình học G6 rất hay như sau [1]

Bài toán 1. Cho tam giác ABC cân tại A với D là trung điểm AC. Phân giác góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại E nằm trong tam giác ABC. BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB tại F khác B. AF cắt BE tại I. CI cắt BD tại K. Chứng minh rằng I là tâm nội tiếp tam giác KAB.

Lời giải sau tác giả kết hợp ý tưởng của junioragd và JuanOrtiz trong [1]

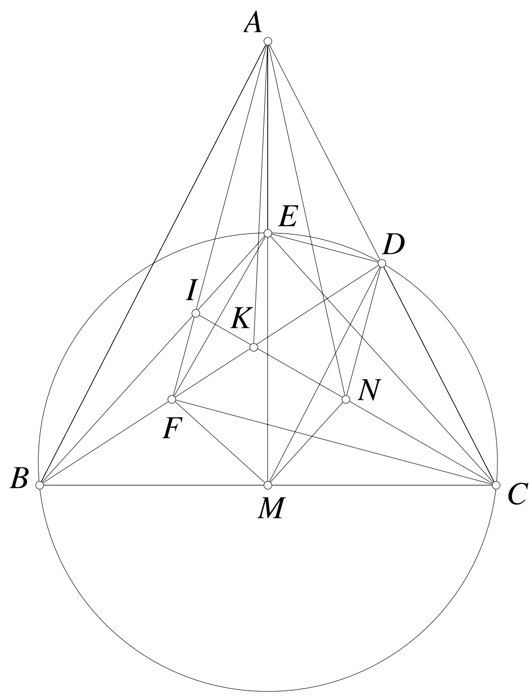


Hình 1.

Lời giải 1. Dễ thấy BE là phân giác $\angle ABD$ nên E là trung điểm $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF. Từ đó tam giác AEF cân lại dễ thấy DE là phân giác $\angle ADF$. Từ đó theo một tính chất quen thuộc của tam giác cân thì tam giác DAF cân. Vậy $DA = DC = DF$ nên tam giác AFC vuông tại F. Gọi CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD tại G khác C. Ta có $IG.IC = IA.IB = IF.IA$ nên tứ giác $AGFC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC. Từ đó $KB.KD = KG.KC = DA^2 - DK^2$ suy ra $DA^2 = KB.KD + KD^2 = DK.DB$. Từ đó $\angle DAK = \angle DAB$. Lại có $\angle GKA = \angle KGD + \angle KDG = \angle DCG + \angle GCB = \angle ACB$. Vậy $\angle GKA = 180^\circ - \angle DKA - \angle GKB = 180^\circ - \angle BAC - \angle ABC = \angle ACB = \angle ABC = \angle GKA$. Từ đó I là tâm nội tiếp tam giác ABK. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Lời giải trên chứng minh tâm nội tiếp bằng cách chỉ ra điểm đó là giao hai phân giác. Việc chứng minh góc bằng nhau được xử lý qua các hệ thức lượng mang lại rất nhiều ý nghĩa.

Lời giải sau xử dụng ý tưởng của XmL trong [1]



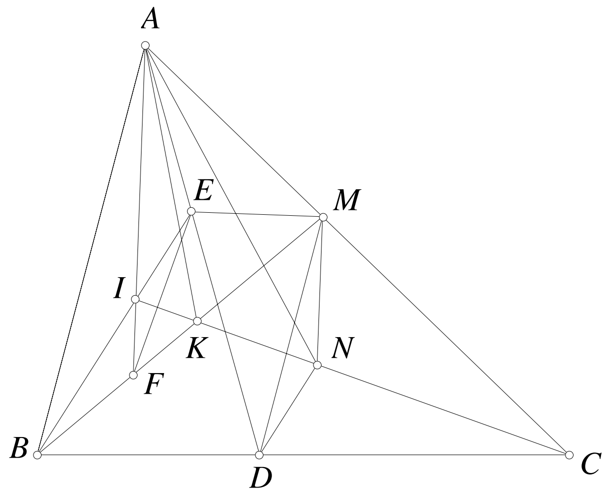
Hình 2.

Lời giải 2. Dễ thấy BE là phân giác $\angle ABD$ nên E là tâm nội tiếp tam giác ABD và cũng có E là trung điểm $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF nên hai tam giác EAI và EBA đồng dạng. Gọi N là trung điểm IC. Dễ thấy tam giác MND và BIA có cạnh tương ứng song song nên và chú ý hai tam giác EAI và EBA đồng dạng, ta có $\angle MND = \angle AIB = 180^\circ - \angle AIE = 180^\circ - \angle EAB = 180^\circ - \angle MAD$. Vậy tứ giác $ADNM$ nội tiếp. Vậy $\angle DAN = \angle DMN = \angle IBA = \angle IBF = \angle IAE$. Lại có $\angle DNA = \angle DMA = \angle BAE = \angle AIE$. Vậy hai tam giác ADN và AEI đồng dạng. Từ đó hai tam giác AIN và AED đồng dạng. Vậy $\angle AIN = \angle AED = 90^\circ + \dfrac{\angle ABD}{2}$ nên I là tâm nội tiếp tam giác ABK. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải xử dụng ý tưởng quan trọng để chứng minh tâm nội tiếp chính là nếu có điểm I nằm trên phân giác trong góc $\angle BAC$ và nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle BIC = 90^\circ + \dfrac{\angle A}{2}$ thì I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Một cách tự nhiên chúng ta thấy bài toán phát biểu trên tam giác cân vậy ta suy nghĩ xem liệu với tam giác bất kỳ thì sao. Tối đã tổng quát bài toán trên tam giác bất kỳ như sau xem [2]

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với phân giác AD. M thuộc CA sao cho $DM \parallel AB$. Phân giác $\angle ABM$ cắt AD tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt BM tại F khác B. AF cắt BE tại I. CI cắt BM tại K. Chứng minh rằng I là tâm nội tiếp tam giác KAB.

Ý tưởng chứng minh tương tự bài toán gốc, lời giải sau xử dụng ý tưởng của XmL trong [2]

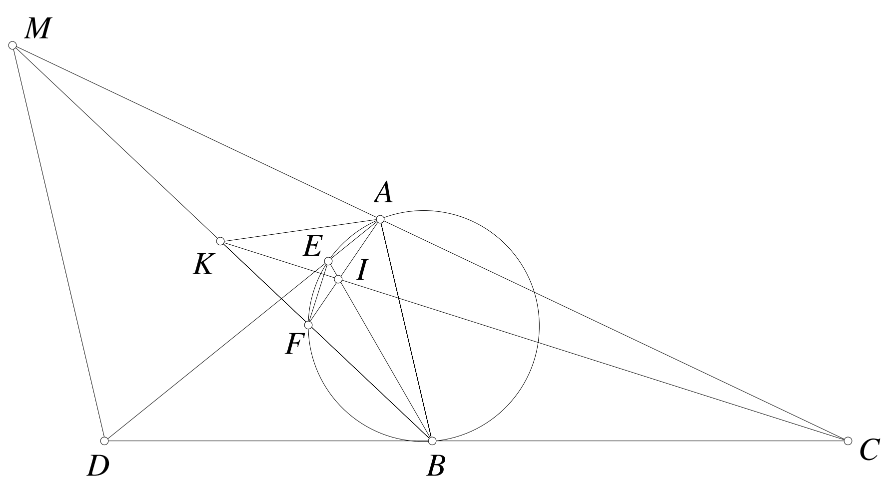


Hình 3.

Lời giải. Do BE là phân giác $\angle ABD$ nên E là tâm nội tiếp tam giác ABD và cũng có E là trung điểm $\overset{\frown}{AF}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABF nên hai tam giác EAI và EBA đồng dạng. Gọi N là điểm thuộc IC sao cho $MN \parallel IA$ từ $DM \parallel AB$ suy ra $DN \parallel IB$. Từ đó $\angle MND = \angle AIB = 180^\circ - \angle EIA = 180^\circ - \angle EIA = 180^\circ - \angle EAB = 180^\circ - \angle EAC$ suy ra tứ giác $AMND$ nội tiếp. Từ đó $\angle MAN = \angle MDN = \angle ABI = \angle IBF = \angle IAE$. Lại có $\angle MNA = \angle MDA = \angle DAB = \angle EIA$. Vậy hai tam giác AEI và AMN đồng dạng. Suy ra hai tam giác AIN và AEM đồng dạng. Từ đó $\angle AIN = \angle AEM = 90^\circ + \dfrac{\angle ABM}{2}$ nên I là tâm nội tiếp tam giác ABK. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Việc phát biểu bài toán trên phân giác trong sẽ gợi cho chúng ta một cách phát biểu trên phân giác ngoài như sau

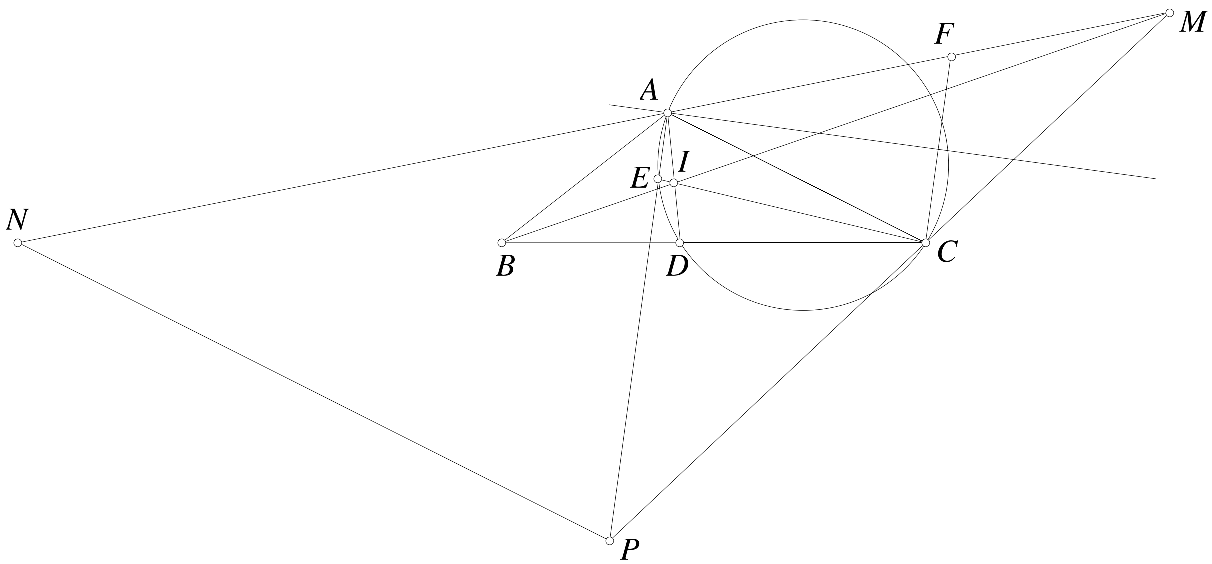
Bài toán 3. Cho tam giác ABC với phân giác ngoài AD. M thuộc đường thẳng CA sao cho $DM \parallel AB$. Phân giác $\angle ABM$ cắt AD tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt BM tại F khác B. AF cắt BE tại I. CI cắt BM tại K. Chứng minh rằng I là tâm nội tiếp tam giác KAB.



Hình 4.

Lời giải cho trường hợp phân giác ngoài hoàn toàn tương tự. Chúng ta đi tới một số ứng dụng sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với phân giác AD và tâm nội tiếp I. CI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD tại E khác C. F là đối xứng của C qua đường thẳng qua A vuông góc AE. AF cắt BI, BC tại M, N. MC cắt AE tại P. Chứng minh rằng $NP \parallel AC$.



Hình 5.

Tài liệu

[1] IMO Shortlist 2011, G6

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h488831p2739334

[2] Prove that I is incenter

http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h520297p2930447

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com