ĐỊNH LÝ MANNHEIM VÀ ỨNG DỤNG

Trần Minh Ngọc
Sinh viên K38, khoa Toán-Tin, ĐHSP-TPHCM

Tóm tắt
Xung quanh điểm Miquel có rất nhiều tính chất đẹp. Định lý Mannheim là một trong số đó. Trong bài viết này, tôi sẽ giới thiệu về định lý Mannheim và ứng dụng của nó trong giải toán.

I. Phát biểu và chứng minh

Định lý Mannheim được đặt theo tên của nhà toán học người Pháp Amedee Mannheim (17/06/1831 - 11/12/1906) [1] có phát biểu như sau:

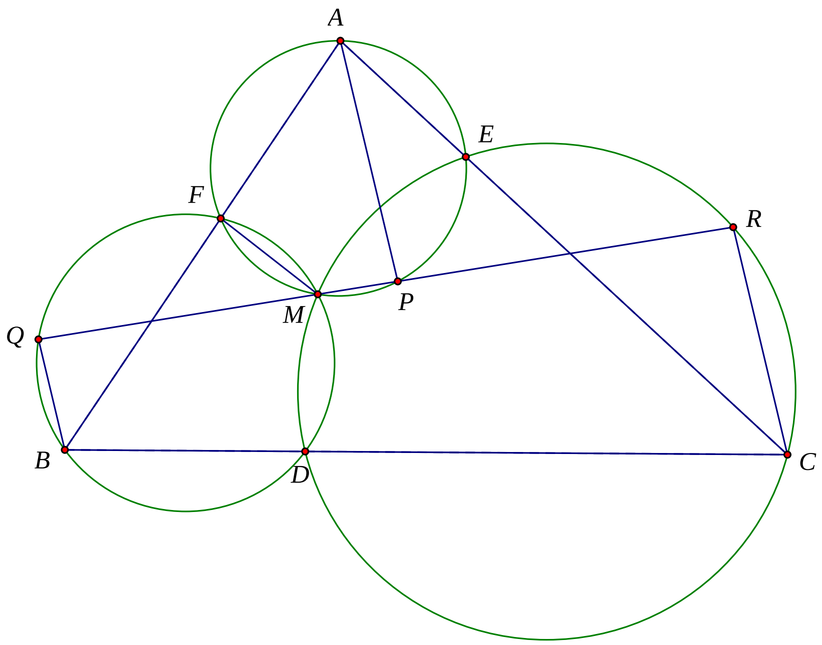
Cho tam giác ABC. Gọi D, E, F lần lượt là các điểm nằm trên BC, CA, AB không trùng với A, B, C; M là điểm Miquel của D, E, F ứng với tam giác ABC; P, Q, R lần lượt là các điểm nằm trên $(AEF), (BFD), (CDE)$ không trùng với M. Khi đó:

a. M, P, Q, R thẳng hàng $\Leftrightarrow AP, BQ, CR$ đôi một song song.

b. M, P, Q, R đồng viên $\Leftrightarrow AP, BQ, CR$ đồng quy.

Chứng minh

a.



$(\Rightarrow)$ Giả sử M, P, Q, R thẳng hàng.

Do tứ giác $AFMP, BMFQ$ nội tiếp nên $\angle FAP = \angle FMQ = \angle FBQ$. Suy ra $AP // BQ$. Chứng minh tương tự: $AP // CR$.

Do đó AP, BQ, CR đôi một song song .

$(\Leftarrow)$ Giả sử AP, BQ, CR đôi một song song.

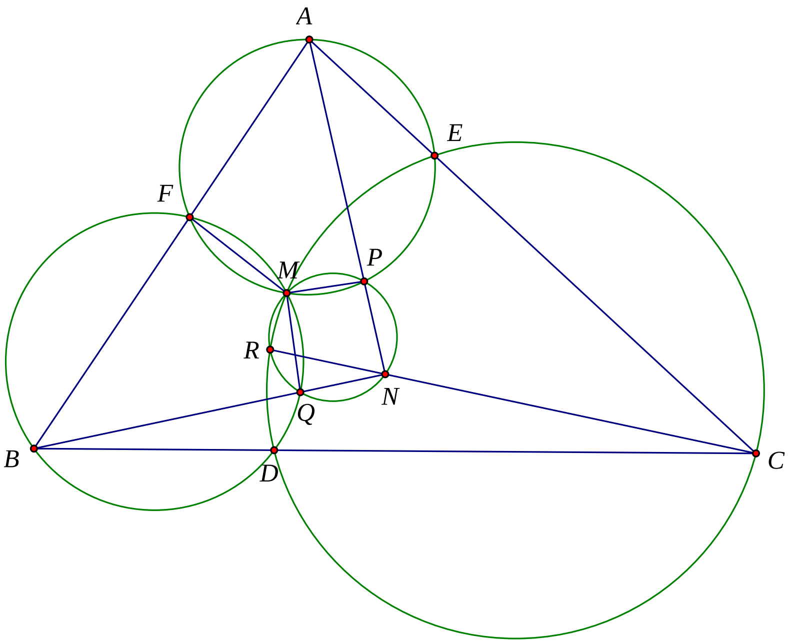
Khi đó: $\angle FAP = \angle FBQ$.

Do tứ giác $AFMP, BMFQ$ nội tiếp nên $\angle FMP + \angle FMQ = 180° - \angle FAP + \angle FBQ = 180°$.

Suy ra M, P, Q thẳng hàng . Chứng minh tương tự: M, P, R thẳng hàng.

Do đó M, P, Q, R thẳng hàng.

b.



($\Rightarrow$) Giả sử M, P, Q, R đồng viên .

Gọi N là giao điểm của AP, BQ.

Do tứ giác $AFMP, BMFQ$ nội tiếp nên $\angle APM = \angle BFM = \angle MQN$. Suy ra tứ giác $MPNQ$ nội tiếp.

Mà tứ giác $MPQR$ nội tiếp. Nên AP, BQ cắt nhau tại N nằm trên $(MPQR)$. Chứng minh tương tự: AP, CR cắt nhau tại một điểm nằm trên $(MPQR)$. Do đó AP, BQ, CR đồng quy tại một điểm nằm trên $(MPQR)$.

($\Leftarrow$) Giả sử AP, BQ, CR đồng quy tại N .

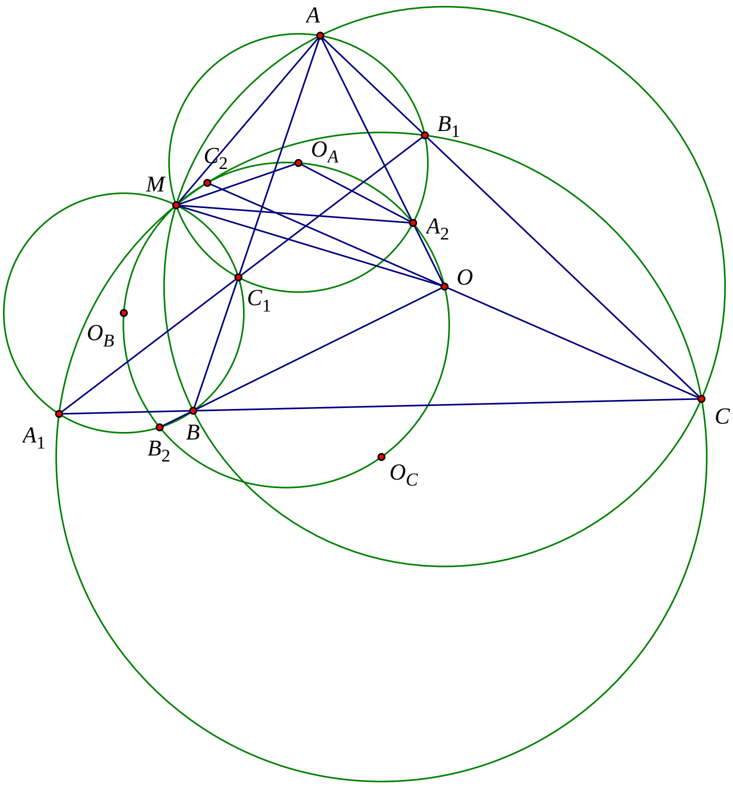
Chứng minh tương tự như trên ta được: tứ giác $MPNQ$, $MPNR$ nội tiếp. Do đó M, P, Q, R, N đồng viên.

Định lý Mannheim cho ta một cách chứng minh các điểm thẳng hàng và các điểm đồng viên. Để thấy rõ điều đó, ta đến với phần kế tiếp.

II. Ứng dụng

Bài toán 1 (Đường tròn Miquel [2]): Cho tam giác ABC và đường thẳng d không qua A, B, C . Giả sử d lần lượt cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 . Chứng minh rằng: tâm của $(ABC), (AB_1C_1,), (BC_1A_1), (CA_1B_1)$ đồng viên.

Giải



Gọi O, O_A, O_B, O_C lần lượt là tâm của $(ABC),(AB_1C_1,),(BC_1A_1),(CA_1B_1)$.

Theo định lý Miquel: $(ABC),(AB_1C_1,),(BC_1A_1),(CA_1B_1)$ đồng quy tại M.

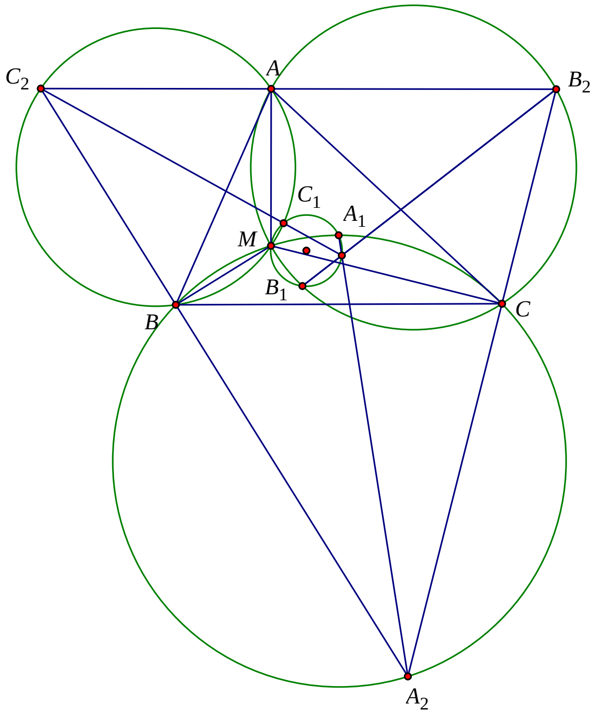
Gọi A_2 là giao điểm khác A của $OA, (AB_1C_1)$. Định nghĩa tương tự: B_2, C_2.

Theo định lý Mannheim: $M, \mathrm{O}, A_2, B_2, C_2$ đồng viên.

Do $\angle MO_AA_2 = 2\angle MAA_2 = 2\angle MAO = 180° - \angle MOA = 180° - \angle MOA_2$ nên M, O, A_2, O_A đồng viên. Chứng minh tương tự: $(M, \mathrm{O}, B_2, \mathrm{O}_B);(M, \mathrm{O}, C_2, O_C)$ là các bộ điểm đồng viên. Do đó $M, \mathrm{O}, A_2, B_2, C_2, O_A, O_B, O_C$ đồng viên.

Bài toán 2 (Đường tròn Dergiades [3]): Cho tam giác ABC và điểm M không nằm trên (ABC) và BC, CA, AB. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là điểm chính giữa cung BC, CA, AB chứa M của $(MBC),(MCA),(MAB)$. Chứng minh rằng: M, A_1, B_1, C_1 đồng viên.

Giải



Gọi d_A là đường thẳng qua A và vuông góc với MA, định nghĩa tương tự: d_B, d_C.

A_2 là giao điểm của d_B, d_C, định nghĩa tương tự: B_2, C_2.

Khi đó: A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên $(MBC),(MCA),(MAB)$.

Do A_1 là điểm chính giữa cung BC chứa M của (MBC) nên A_2A_1 là đường phân giác trong của tam giác $A_2B_2C_2$ .Chứng minh tương tự: B_2B_1, C_2C_1 là các đường phân giác trong của tam giác $A_2B_2C_2$.

Do đó A_2A_1, B_2B_1, C_2C_1 đồng quy . Theo định lý Mannheim: M, A_1, B_1, C_1 đồng viên.

Nhận xét:

1 Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là điểm chính giữa cung BC, CA, AB không chứa M của $(MBC),(MCA),(MAB)$. Ta cũng có: $(M, A_1, B_2, C_2),(M, A_2, B_1, C_2),(M, A_2, B_2, C_1)$ là các bộ điểm đồng viên.

2. Đây là mở rộng của đường tròn Fuhrmann [3],[4]. Thật vậy:

Gọi A_3 là điểm chính giữa cung BC không chứa A của (ABC), định nghĩa tương tự B_3, C_3.

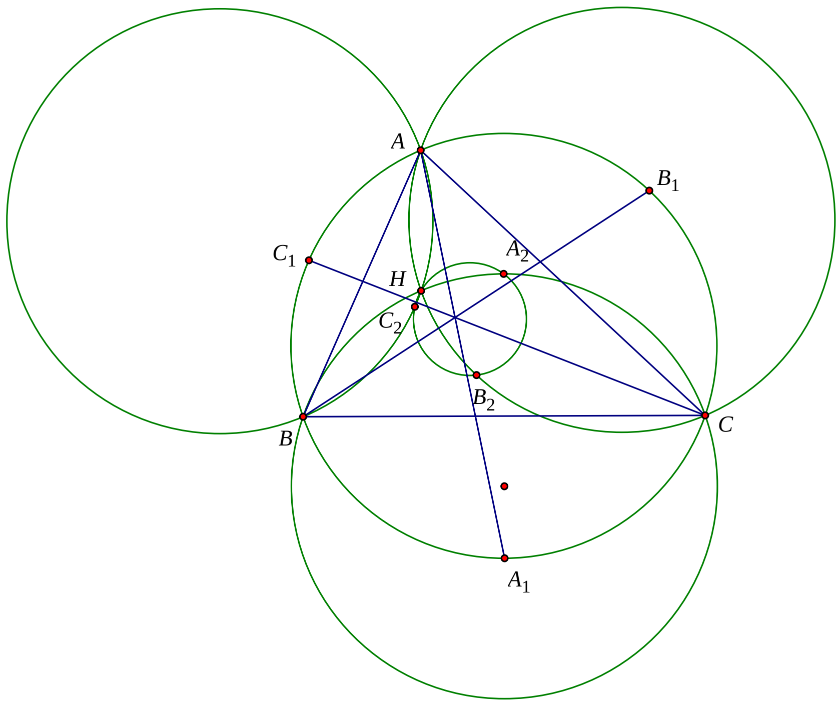
A_4 là điểm đối xứng của A_3 qua BC, định nghĩa tương tự: B_4, C_4.

H là trực tâm tam giác ABC.

Do (HBC) đối xứng với (ABC) qua BC nên A_4 là điểm chính giữa cung BC chứa H của (HBC).

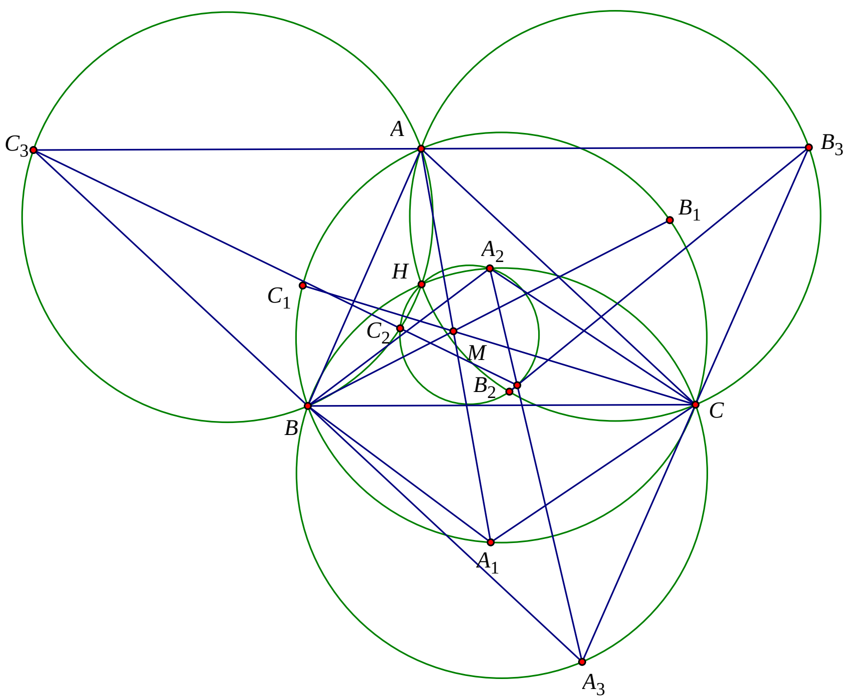
Chứng minh tương tự: B_4, C_4 là điểm chính giữa cung CA, AB chứa H của $(HCA),(HAB)$.

Theo bài toán 2: H, A_4, B_4, C_4 đồng viên.



Bài toán 3 (Đường tròn Hagge [4], [5], [6]): Cho tam giác ABC có trực tâm H và điểm M không nằm trên (ABC) và BC, CA, AB. Gọi A_1 là giao điểm khác A của $AM, (ABC)$; A_2 là điểm đối xứng của A_1 qua BC, định nghĩa tương tự: B_1, B_2, C_1, C_2. Chứng minh rằng: H, A_2, B_2, C_2 đồng viên.

Giải



Gọi d_A là đường thẳng qua A và vuông góc với HA, định nghĩa tương tự: d_B, d_C.

A_3 là giao điểm của d_B, d_C, định nghĩa tương tự: B_3, C_3.

Khi đó: A_3, B_3, C_3 lần lượt nằm trên $(HBC), (HCA), (HAB)$.

Do (HBC) đối xứng với (ABC) qua BC nên A_2 nằm trên (HBC).

Chứng minh tương tự: B_2, C_2 lần lượt nằm trên $(HCA),(HAB)$.

Ta có: $\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3C_3}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3B_3}\right)}=\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3B}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3C}\right)}=\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{CA_2},\overrightarrow{CB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BA_2},\overrightarrow{BC}\right)}=\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA_1}\right)}=\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}\right)}.$

Chứng minh tương tự: $\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{B_3B_2},\overrightarrow{B_3A_3}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{B_3B_2},\overrightarrow{B_3C_3}\right)}=\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BB_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BB_1}\right)};\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{C_3C_2},\overrightarrow{C_3B_3}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{C_3C_2},\overrightarrow{C_3B_3}\right)}=\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CC_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}\right)}.$

Do đó

$$\frac{\sin\left(\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3C_3}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3B_3}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{B_3B_2},\overrightarrow{B_3A_3}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{B_3B_2},\overrightarrow{B_3C_3}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{C_3C_2},\overrightarrow{C_3B_3}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{C_3C_2},\overrightarrow{C_3B_3}\right)}=\frac{\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CC_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}\right)}\cdot\frac{\sin\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BB_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BB_1}\right)}.$$

Mà theo định lý Ceva dạng lượng giác: $\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AA_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AA_1}\right)}\cdot\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CC_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}\right)}\cdot\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BB_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BB_1}\right)}=-1.$

Nên $\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3C_3}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{A_3A_2},\overrightarrow{A_3B_3}\right)}\cdot\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{B_3B_2},\overrightarrow{B_3A_3}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{B_3B_2},\overrightarrow{B_3C_3}\right)}\cdot\dfrac{\sin\left(\overrightarrow{C_3C_2},\overrightarrow{C_3B_3}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{C_3C_2},\overrightarrow{C_3B_3}\right)}=-1.$

Theo định lý Ceva dạng lượng giác: A_3A_2, B_3B_2, C_3C_2 đồng quy.

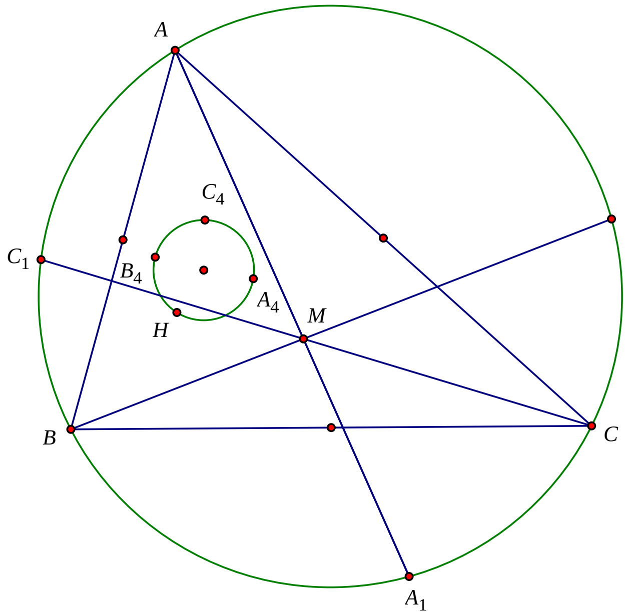
Theo định lý Mannheim: H, A_2, B_2, C_2 đồng viên.

Nhận xét:

1. Các bạn có thể tham khảo một cách chứng minh khác A_3A_2, B_3B_2, C_3C_2 đồng quy trong [4].

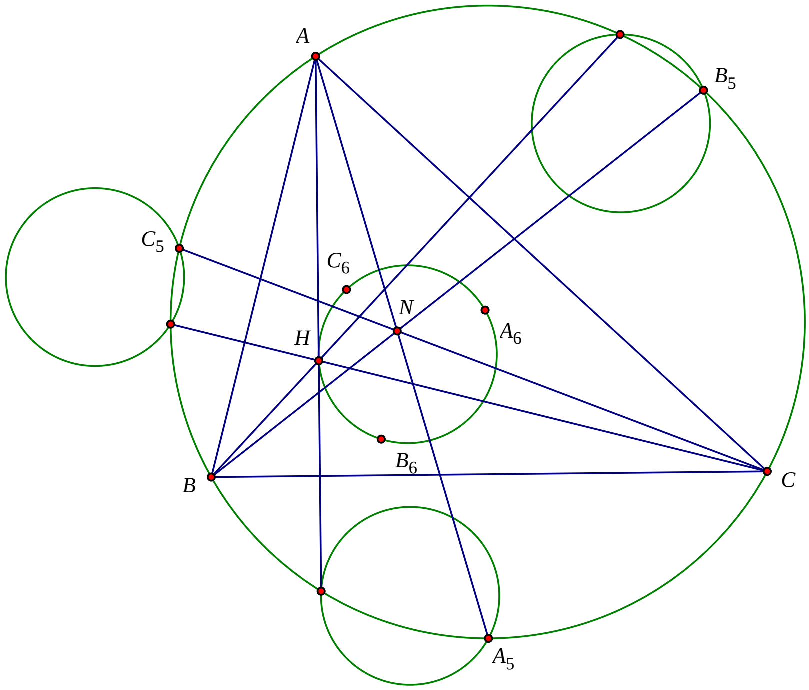
2. Khi M trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta được đường tròn Furhmann.

3. Gọi A_4 là điểm đối xứng của A_1 qua BC, định nghĩa tương tự: B_4, C_4. Ta cũng có: H, A_4, B_4, C_4 đồng viên. Xung quanh $(A_2B_2C_2),(A_4B_4C_4)$ có nhiều tính chất thú vị. Các bạn có thể tham khảo trong [4], [5], [6].



3. Bài toán đảo của bài toán 3 cũng đúng. Thật vậy xét đường tròn (Ω) đi qua H. Gọi $(\Omega_A),(\Omega_B),(\Omega_C)$ lần lượt là đường tròn đối xứng với (Ω) qua BC, CA, AB. Khi đó:

$(\Omega_A),(\Omega_B),(\Omega_C)$ lần lượt đi qua giao điểm khác A, B, C của AH, BH, CH với (ABC). Gọi A_5, B_5, C_5 lần lượt là giao điểm khác chúng của $(\Omega_A),(\Omega_B),(\Omega_C)$ với (ABC). Giả sử AA_5, BB_5 cắt nhau tại N ; C_5' là giao điểm khác C của $CN,(ABC)$; A_6, B_6, C_6, C_6' lần lượt là điểm đối xứng của A_5, B_5, C_5, C_5' qua BC, CA, AB. Khi đó: A_6, B_6, C_6 nằm trên (Ω). Theo bài toán 3: H, A_6, B_6, C_6' đồng viên, tức là C_6' nằm trên (Ω). Suy ra C_5' nằm trên (Ω_C). Do đó $C_5' \equiv C_5$. Suy ra AA_5, BB_5, CC_5 đồng quy tại N.



Điểm N được gọi là điểm Anti-Hagge của đường tròn (Ω).

Bài toán đảo của bài toán trong nhận xét 2 cũng đúng. Nó được phát biểu và chứng minh tương tự.

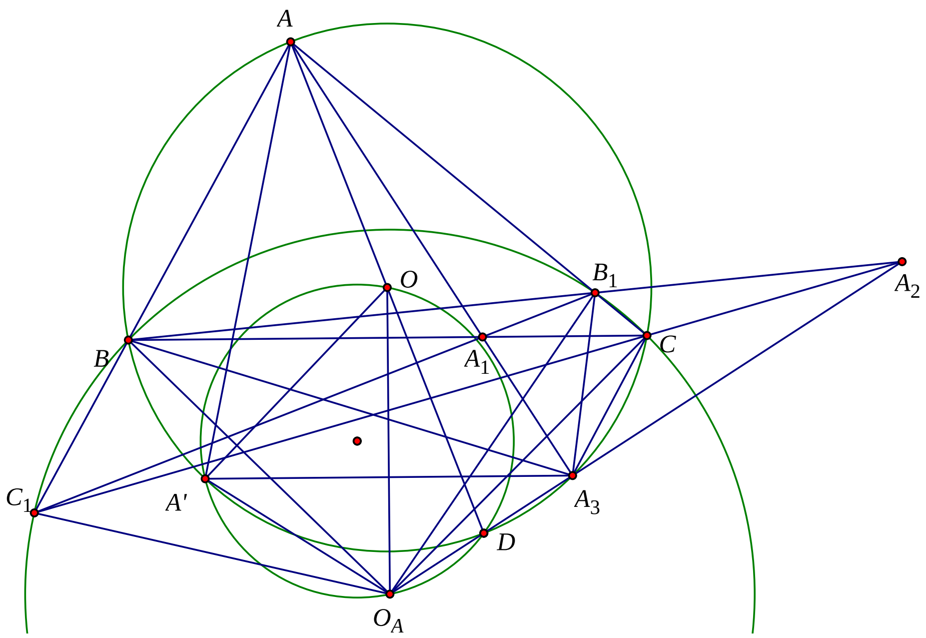
Bài toán 4 (Trần Minh Ngọc): Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và điểm M không nằm trên (O). Gọi O_A là tâm của (MBC), A_1 là giao điểm khác M của $(MO_AO),(MBC)$, định nghĩa tương tự: O_B, B_1, O_C, C_1. Chứng minh rằng: M, A_1, B_1, C_1 đồng viên.

Giải

Ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 1 : Trong mặt phẳng bổ sung các phần tử vô tận, cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi (O_A) là một đường tròn đi qua B, C ; B_1, C_1 lần lượt là giao điểm khác B, C của (O_A) với AC, AB; D là giao điểm khác A của $AO,(O)$; A' là giao điểm khác D của $(OO_AD),(O)$. Gọi A_1 là giao điểm của B_1C_1, BC. Khi đó: AA', AA_1 là hai đường đẳng giác của tam giác ABC.

Chứng minh



Gọi A_2 là giao điểm của BB_1, CC_1; A_3 là giao điểm của AA_1, OA_2.

Do AA_1 là đường đối cực của A_2 đối với (O_A) nên $AA_1 \perp O_AA_2$ tại A_3 và $\overline{A_2A_3}.\overline{A_2O} = \overline{A_2B}.\overline{A_2B_1} = \overline{A_2C}.\overline{A_2C_1}$. Suy ra $BO_AA_3B_1, CO_AA_3C_1$ nội tiếp. Do đó

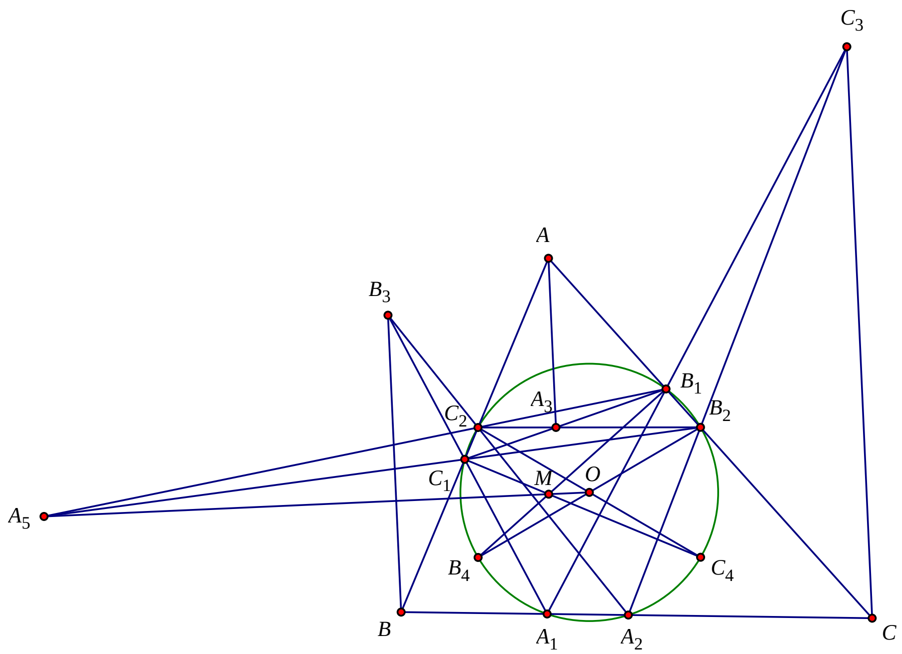
$$\angle BA_3C = 180° - \angle BA_3O_A - \angle CA_3A_2 = 180° - \angle BB_1O_A - \angle CC_1O_A = \frac{1}{2}(\angle BO_AB_1 + \angle CO_AC_1) = \angle BAC$$

Suy ra A_3 nằm trên (O). Điều này chứng tỏ rằng O, D, A_3 thẳng hàng. Suy ra

$\angle A'A_3O_A = \angle A'AO = \frac{1}{2}(180^0 - \angle AOA') = \frac{1}{2}(180^0 - \angle A_3OA')$. Từ đó tam giác A_3OA' cân tại O_A, tức là $O_AA_3 = O_AA'$. Mà $OA_3 = OA'$. Nên $OO_A \perp A_3A'$. Mặt khác $OO_A \perp BC$. Vì thế $A_3A' // BC$ hay $BA'A_3C$ là hình thang cân. Suy ra $A'B = A_3C$ hay $\angle BAA' = \angle CAA_3$. Do đó AA', AA_2 là hai đường đẳng giác của tam giác ABC.

Bổ đề 2: Trong mặt phẳng bổ sung các phần tử vô tận, cho tam giác ABC và điểm M không nằm trên (ABC). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB; A_2, B_2, C_2 lần lượt là giao điểm khác A_1, B_1, C_1 của $(A_1B_1C_1)$ với BC, CA, AB; A_3 là giao điểm của B_1C_1, B_2C_2, định nghĩa tượng tự B_3, C_3. Chứng minh rằng: AA_3, BB_3, CC_3 đôi một song song (đồng quy tại điểm vô tận).

Chứng minh



Gọi O là tâm của $(A_1B_1C_1)$.

A_4 là giao điểm khác A_1 của $MA_1, (O)$, định nghĩa tương tự B_4, C_4. Khi đó:

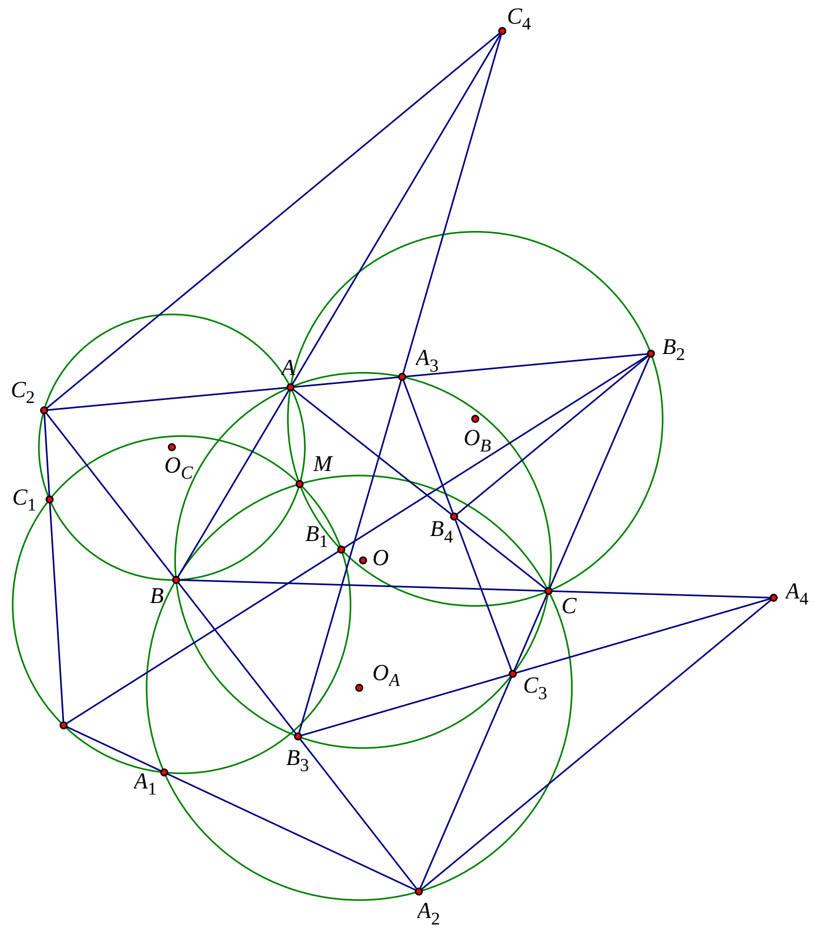
$(A_2, A_4, O), (B_2, B_4, O), (C_2, C_4, O)$ là các bộ điểm thẳng hàng.

A_5 là giao điểm của B_1C_2, C_1B_2.

Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $B_1C_2C_4C_1B_2B_4$, ta được: A_5, O, M thẳng hàng. Mà $AA_3 \perp OA_6$ do A_5 là cực của AA_3 đối với (O). Nên $AA_3 \perp OM$. Chứng minh tương tự: $BB_3 \perp OM, CC_3 \perp OM$.

Do đó: AA_3, BB_3, CC_3 đôi một song song.

Trở lại bài toán:



Ta bổ sung vào mặt phẳng các phần tử vô tận

Gọi d_A là đường thẳng qua A và vuông góc với MA, định nghĩa tương tự: d_B, d_C

A_2 là giao điểm của d_B, d_C, định nghĩa tương tự: B_2, C_2

Khi đó: A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên $(MBC), (MCA), (MAB)$

A_3, B_3, C_3 lần lượt là giao điểm khác A, B, C của (O) với B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2

A_4 là giao điểm của BC, B_3C_3, định nghĩa tương tự B_4, C_4

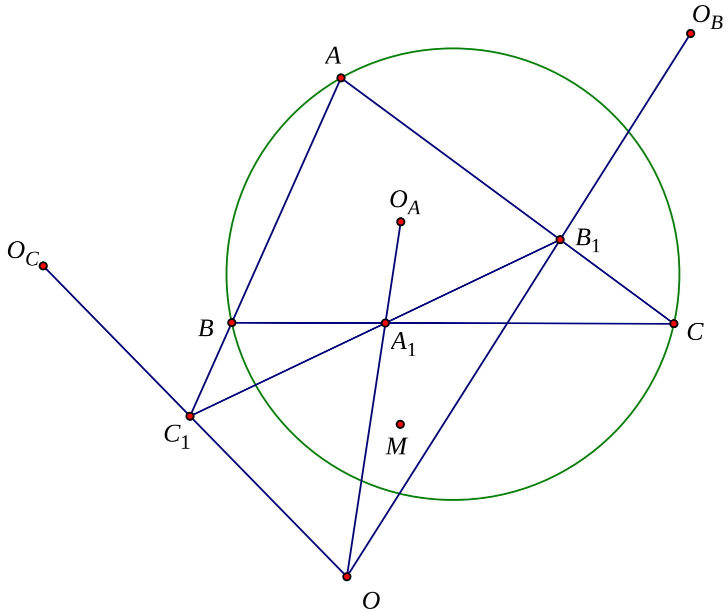
Theo bổ đề 1: $(A_2A_1, A_2A_4), (B_2B_1, B_2B_4), (C_2C_1, C_2C_4)$ là các cặp đường đẳng giác của tam giác ABC. Theo bổ đề 2: A_2A_4, B_2B_4, C_2C_4 đôi một song song . Suy ra A_2A_1, B_2B_1, C_2C_1 đồng quy. Theo định lý Mannheim: M, A_1, B_1, C_1 đồng viên

Nhận xét: Bài toán 4 là bài toán nghịch đảo của đường thẳng Turner [7]. Thật vậy:

Xét phép nghịch đảo f cực M phương tích bất kì, với quy ước điểm $f(T)$ cũng được kí hiệu là T, ta được:

O là điểm nghịch đảo của M đối với (ABC).

O_A là điểm đối xứng với M qua BC, A_1 là giao điểm của O_AO, BC, định nghĩa tương tự: $O_B, B_1, O_C, \mathrm{C}_1$. Khi đó: A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.



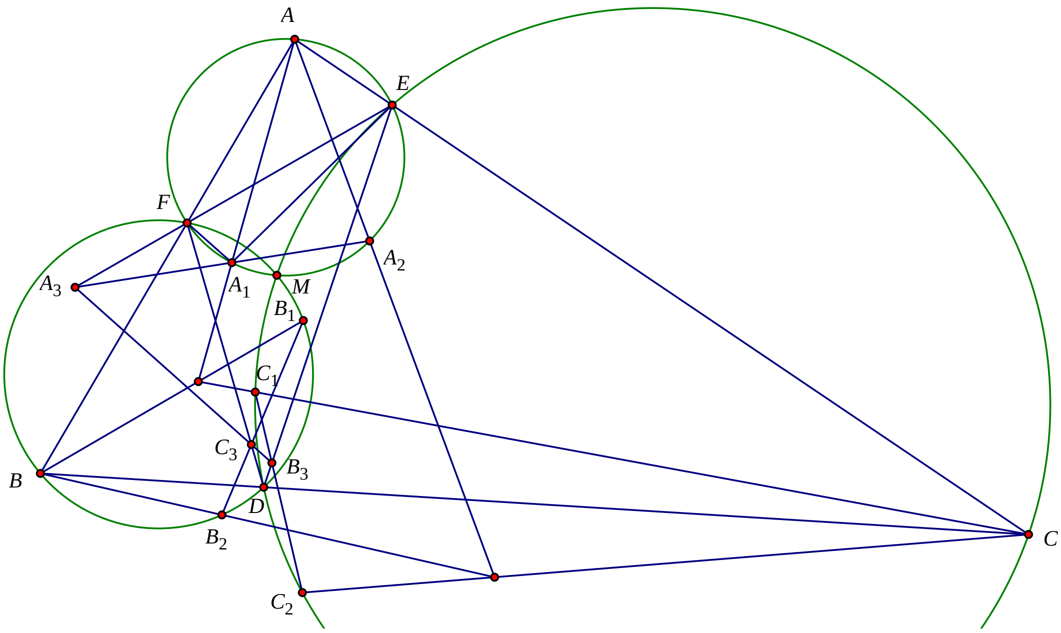
Bài toán 5 (Trần Minh Ngọc): Trong mặt phẳng bổ sung phần tử vô tận, cho tam giác ABC và điểm M không nằm trên (ABC). Gọi $(A_1, A_2),(B_1, B_2),(C_1, C_2)$ lần lượt là cặp điểm nằm trên $(MBC),(MCA),(MAB)$ sao cho M, A_1, B_1, C_1 đồng viên hoặc thẳng hàng. Chứng minh rằng: M, A_2, B_2, C_2 đồng viên hoặc thẳng hàng $\Leftrightarrow A_1A_2 \cap BC, B_1B_2 \cap CA, C_1C_2 \cap AB$ thẳng hàng.

Giải

Ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 3: Trong mặt phẳng bổ sung phần tử vô tận, cho tam giác ABC và điểm M không nằm trên (ABC). Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB; $(A_1, A_2),(B_1, B_2),(C_1, C_2)$ lần lượt là cặp điểm nằm trên $(AEF),(BFD),(CDE)$ sao cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. Khi đó: AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy $\Leftrightarrow A_1A_2 \cap EF, B_1B_2 \cap FD, C_1C_2 \cap DE$ thẳng hàng.

Chứng minh



Gọi A_3 là giao điểm A_1A_2, EF, định nghĩa tương tự B_3, C_3.

Khi đó:

$$\frac{\overline{A_3E}}{\overline{A_3F}}=\frac{A_1E}{A_1F}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1E})}{\sin(\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1F})}=-\frac{\sin(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AE})}{\sin(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AF})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1E})}{\sin(\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1F})}=\frac{\sin(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AC})}{\sin(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AB})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{AA_2},\overrightarrow{AC})}{\sin(\overrightarrow{AA_2},\overrightarrow{AB})}.$$

Chứng minh tương tự: $\frac{\overline{B_3F}}{\overline{B_3D}}=\frac{\sin(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BA})}{\sin(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{BA})}{\sin(\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{BC})};\frac{\overline{C_3D}}{\overline{C_3E}}=\frac{\sin(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CB})}{\sin(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CA})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{CC_2},\overrightarrow{CB})}{\sin(\overrightarrow{CC_2},\overrightarrow{CA})}.$

Do đó

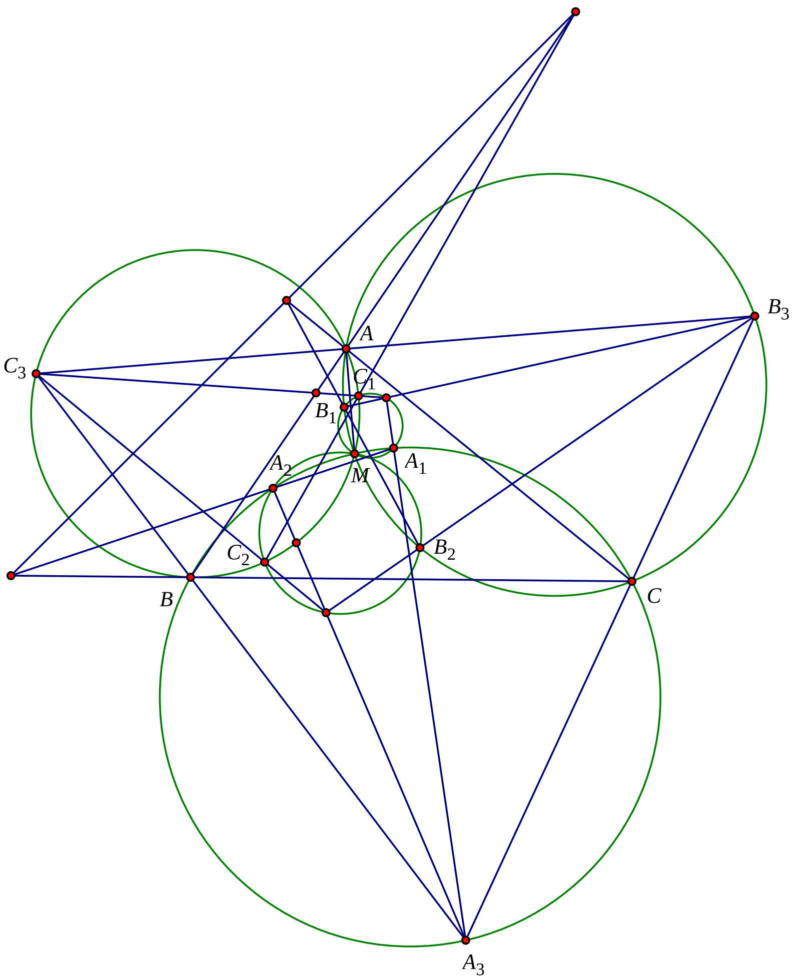
$$\frac{\overline{A_3E}}{\overline{A_3F}}\cdot\frac{\overline{C_3F}}{\overline{C_3D}}\cdot\frac{\overline{B_3D}}{\overline{B_3E}}=\frac{\sin(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AC})}{\sin(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AB})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BA})}{\sin(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CB})}{\sin(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CA})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{AA_2},\overrightarrow{AC})}{\sin(\overrightarrow{AA_2},\overrightarrow{AB})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{BA})}{\sin(\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{BC})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{CC_2},\overrightarrow{CB})}{\sin(\overrightarrow{CC_2},\overrightarrow{CA})}.$$

Mà theo định lý Ceva dạng lượng giác: $\frac{\sin(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AC})}{\sin(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AB})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BA})}{\sin(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CB})}{\sin(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CA})}=-1.$

Nên $\frac{\overline{A_3E}}{\overline{A_3F}}\cdot\frac{\overline{C_3F}}{\overline{C_3D}}\cdot\frac{\overline{B_3D}}{\overline{B_3E}}=-\frac{\sin(\overrightarrow{AA_2},\overrightarrow{AC})}{\sin(\overrightarrow{AA_2},\overrightarrow{AB})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{BA})}{\sin(\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{BC})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{CC_2},\overrightarrow{CB})}{\sin(\overrightarrow{CC_2},\overrightarrow{CA})}.$

Theo định lý Ceva dạng lượng giác và định lý Menelaus, đẳng thức này chứng tỏ:
AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy hoặc song song $\Leftrightarrow A_3, B_3, C_3$ thẳng hàng.

Trở lại bài toán:



Gọi d_A là đường thẳng qua A và vuông góc với HA, định nghĩa tương tự: d_B, d_C.
A_3 là giao điểm của d_B, d_C, định nghĩa tương tự: B_3, C_3. Khi đó: A_3, B_3, C_3 lần lượt nằm trên $(MBC), (MCA), (MAB)$.

Theo định lý Mannheim: A_3A_1, B_3B_1, C_3C_1 đồng quy.

Theo định lý Mannheim và bổ đề 3:
M, A_2, B_2, C_2 đồng viên hoặc thẳng hàng $\Leftrightarrow A_3A_2, B_3B_2, C_3C_2$ đồng quy hoặc đôi một song
$\Leftrightarrow A_1A_2 \cap BC, B_1B_2 \cap CA, C_1C_2 \cap AB$ thẳng hàng.

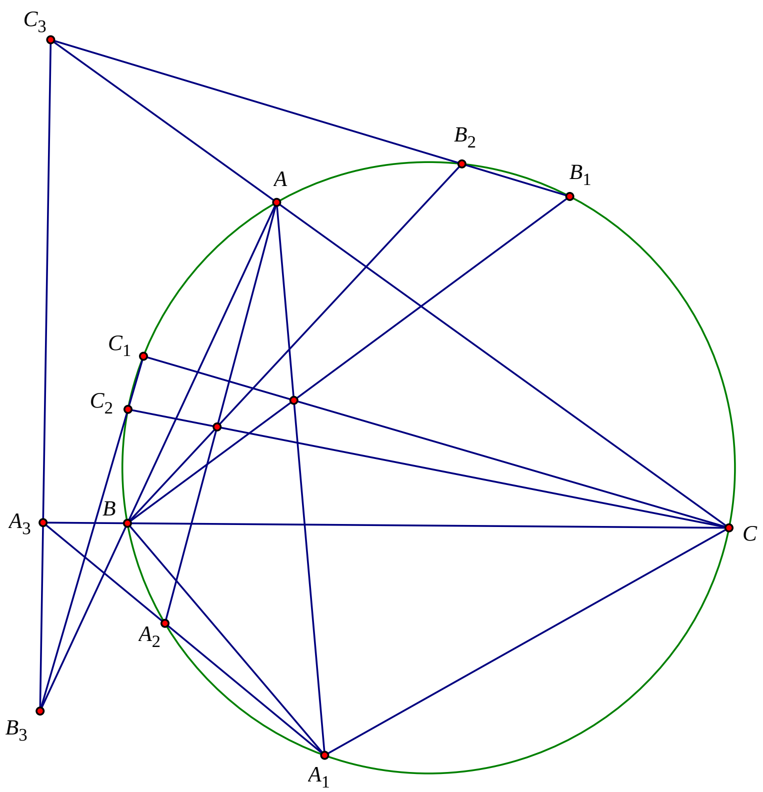
Nhận xét: Khi A_1, B_1, C_1 trùng M thì bài toán được phát biểu lại:
Trong mặt phẳng bổ sung phần tử vô tận, cho tam giác ABC và điểm M không nằm trên (ABC). Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm nằm trên $(MBC), (MCA), (MAB)$. Khi đó: M, A_1, B_1, C_1 đồng viên hoặc thẳng hàng $\Leftrightarrow MA_1 \cap BC, MB_1 \cap CA, MC_1 \cap AB$ thẳng hàng.

Bài toán 6 (Trần Minh Ngọc): Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và điểm M không nằm trên (O). Gọi A_1 là giao điểm khác A của $AM, (O)$, A_2 là giao điểm khác M của $(MOA_1), (MBC)$. Định nghĩa tương tự B_1, B_2, C_1, C_2. Chứng minh rằng: M, A_2, B_2, C_2 đồng viên.

Giải

Ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:
Bổ đề 4: Trong mặt phẳng bổ sung các phần tử vô tận, cho tam giác ABC. Gọi $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ là các điểm nằm trên (ABC) sao cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy. Khi đó: AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy $\Leftrightarrow A_1A_2 \cap BC, B_1B_2 \cap CA, C_1C_2 \cap AB$ thẳng hàng.

Chứng minh



Gọi A_3 là giao điểm A_1A_2, BC, định nghĩa tương tự: B_3, C_3.

Khi đó: $\dfrac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}} = \dfrac{A_1B}{A_1C} \cdot \dfrac{\sin(\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1B})}{\sin(\overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1C})} = \dfrac{\sin(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AB})}{\sin(\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC})} \cdot \dfrac{\sin(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1B})}{\sin(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1B})}$.

Chứng minh tương tự: $\dfrac{\overline{B_3C}}{\overline{B_3A}} = \dfrac{\sin(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BA})}{\sin(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC})}\cdot\dfrac{\sin(\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{BA})}{\sin(\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{BC})};\dfrac{\overline{C_3A}}{\overline{C_3B}} = \dfrac{\sin(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CB})}{\sin(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CA})}\cdot\dfrac{\sin(\overrightarrow{CC_2},\overrightarrow{CB})}{\sin(\overrightarrow{CC_2},\overrightarrow{CA})}.$

Do đó

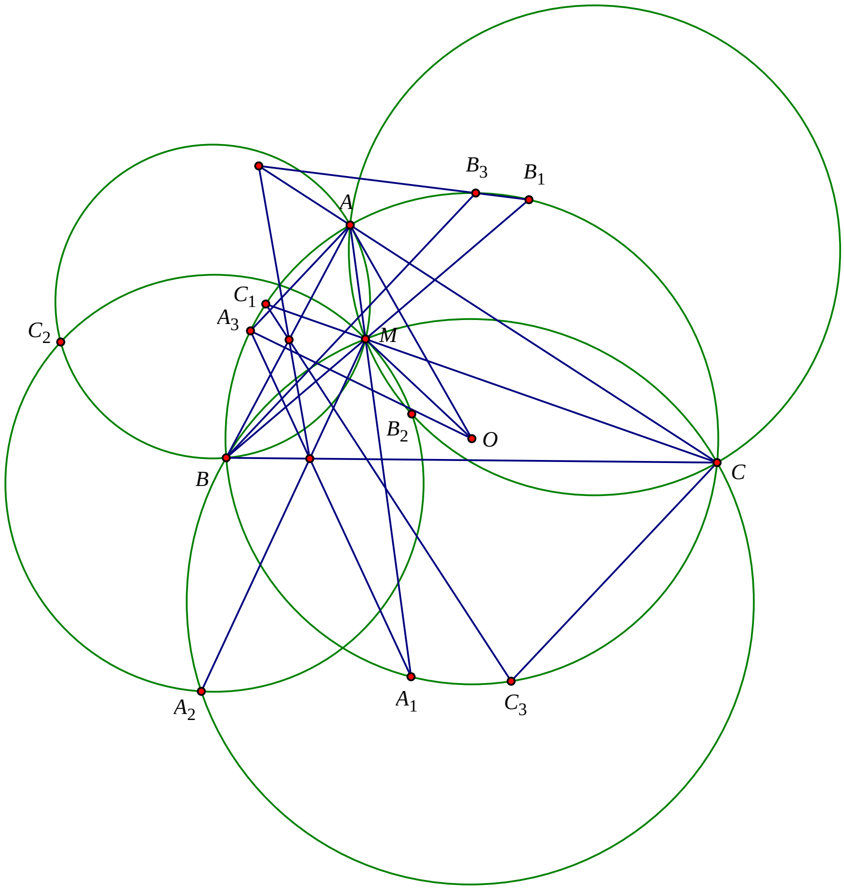
$$\frac{\overline{A_3E}}{\overline{A_3F}}\cdot\frac{\overline{C_3F}}{\overline{C_3D}}\cdot\frac{\overline{B_3D}}{\overline{B_3E}} = \frac{\sin(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AC})}{\sin(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AB})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BA})}{\sin(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CB})}{\sin(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CA})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{AA_2},\overrightarrow{AC})}{\sin(\overrightarrow{AA_2},\overrightarrow{AB})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{BA})}{\sin(\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{BC})}\cdot\frac{\sin(\overrightarrow{CC_2},\overrightarrow{CB})}{\sin(\overrightarrow{CC_2},\overrightarrow{CA})}.$$

Mà theo định lý Ceva dạng lượng giác: $\dfrac{\sin(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AC})}{\sin(\overrightarrow{AA_1},\overrightarrow{AB})}\cdot\dfrac{\sin(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BA})}{\sin(\overrightarrow{BB_1},\overrightarrow{BC})}\cdot\dfrac{\sin(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CB})}{\sin(\overrightarrow{CC_1},\overrightarrow{CA})} = -1.$

Nên $\dfrac{\overline{A_3E}}{\overline{A_3F}}\cdot\dfrac{\overline{C_3F}}{\overline{C_3D}}\cdot\dfrac{\overline{B_3D}}{\overline{B_3E}} = -\dfrac{\sin(\overrightarrow{AA_2},\overrightarrow{AC})}{\sin(\overrightarrow{AA_2},\overrightarrow{AB})}\cdot\dfrac{\sin(\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{BA})}{\sin(\overrightarrow{BB_2},\overrightarrow{BC})}\cdot\dfrac{\sin(\overrightarrow{CC_2},\overrightarrow{CB})}{\sin(\overrightarrow{CC_2},\overrightarrow{CA})}.$

Theo định lý Ceva dạng lượng giác và định lý Menelaus, đẳng thức này chứng tỏ: AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy $\Leftrightarrow A_3, B_3, C_3$ thẳng hàng.

Trở lại bài toán:



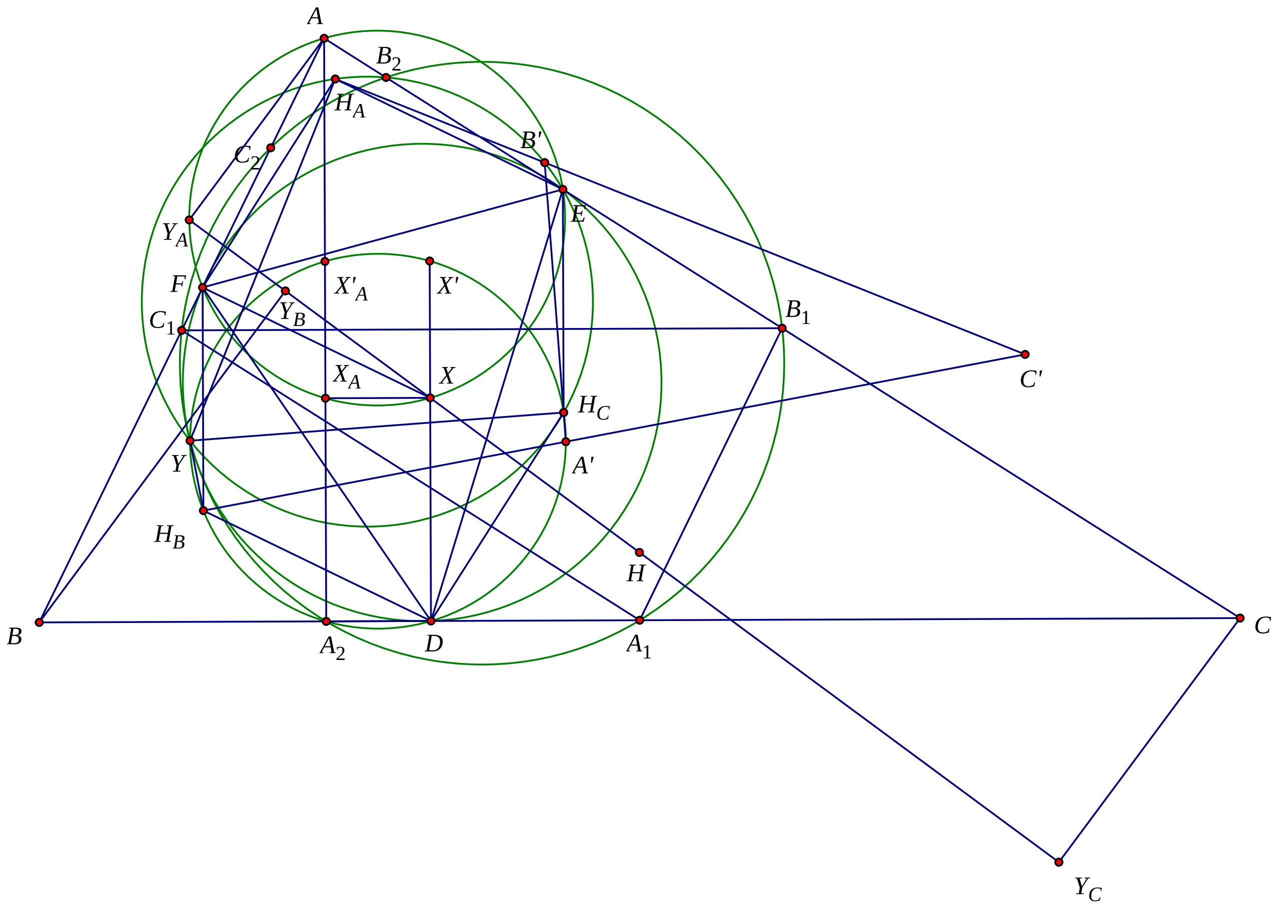
Gọi A_3 là giao điểm khác A_1 của $(MOA_1),(O)$; định nghĩa tương tự: B_3, C_3.

Do $\angle MOA_3 = \angle AA_1A_3 = \dfrac{1}{2}\angle AOA_3$ nên OM là đường phân giác trong của tam giác AOA_3. Mà tam giác AOA_3 cân tại O. Nên OM là đường cao của tam giác AOA_3. Do đó $OM \perp AA_3$. Chứng minh tương tự: $OM \perp BB_3, OM \perp CC_3$. Từ đó: AA_3, BB_3, CC_3 đôi một song song. Theo bổ đề 4: $A_1A_3 \cap BC, B_1B_3 \cap CA, C_1C_3 \cap AB$ thẳng hàng. Mặt khác A_1A_3, MA_2, BC đồng quy do A_1A_3, MA_2, BC lần lượt là dây chung $\left[(MOA_1),(O)\right],\left[(MOA_1),(MBC)\right],\left[(MBC),(O)\right]$; chứng minh tương tự: $(B_1B_3, MB_2, CA),(C_1C_3, MC_2, AB)$ là các bộ đường thẳng đồng quy. Nên

$MA_2 \cap BC, MB_2 \cap BC, MC_2 \cap CA$ thẳng hàng. Theo nhận xét của bài toán 5: M, A_2, B_2, C_2 đồng viên.

Bài toán 7 (Định lý Fontene thứ hai [8], [9]): Cho tam giác ABC và điểm X bất kì. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB và H là trực tâm tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng minh rằng: đường tròn Pedal của X (đường thẳng Simson của X trong trường hợp X nằm trên (ABC)) ứng với tam giác ABC đi qua điểm Anti-Steiner của HX ứng với tam giác $A_1B_1C_1$.

Giải



Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của X lên $BC, CA, AB.$

A_2, B_2, C_2 lần lượt là chân đường cao kẻ từ A, B, C của tam giác $ABC.$

H_A, H_B, H_C lần lượt là trực tâm của tam giác $AEF, BFD, CDE.$

X_A là hình chiếu của X lên AA_2. Khi đó: X, X_A, A, E, F đồng viên.

Do $DXFH_B$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{H_BF} = \overrightarrow{DX}$. Chứng minh tương tự: $\overrightarrow{H_CE} = \overrightarrow{DX}$. Mà $\overrightarrow{A_2X_A} = \overrightarrow{DX}$ do DXX_AA_2 là hình chữ nhật . Nên $\overrightarrow{H_BF} = \overrightarrow{H_CE} = \overrightarrow{A_2X_A} = \overrightarrow{DX}$. Mặt khác E, F, X_A, X đồng viên. Nên H_B, H_C, A_2, D đồng viên . Chứng minh tương tự: $(H_C, H_A, B_2, E), (H_A, H_B, C_2, F)$ đồng viên.

Bây giờ ta chứng minh $(DH_BH_C), (EH_CH_A), (FH_AH_B), (DEF), (A_2B_2C_2)$ đồng quy.

Gọi Y là giao điểm khác H_C của $(DH_BH_C), (EH_CH_A).$

Do H_A, H_B, H_C lần lượt đối xứng X qua trung điểm DE, EF, DE nên

$\angle H_AYH_B = \angle H_AYH_C + \angle H_BYH_C = 360° - \angle H_AEH_C - \angle H_BDH_C = 2(180° - \angle DEF - \angle EDF) = 2\angle EFD = \angle H_AFH_B$.

Suy ra (FH_AH_B) qua Y.

Gọi d_A là đường thẳng qua H_A và vuông góc với YH_A, định nghĩa tương tự: d_B, d_C.

A' là giao điểm của d_B, d_C, định nghĩa tương tự: B', C'.

Khi đó: A', B', C' lần lượt nằm trên $(YH_BH_C), (YH_CH_A), (YH_AH_B)$.

Do D là điểm chính giữa cung H_BH_C nên $A'D$ là đường phân giác trong của tam giác $A'B'C'$.

Chứng minh tương tự: $B'E, C'F$ là các đường phân giác trong của tam giác $A'B'C'$. Do đó $A'D, B'E, C'F$ đồng quy. Theo định lý Mannheim: (DEF) qua Y.

Do $(AX, AH_A), (BX, BH_B), (CX, CH_C)$ là các cặp đường đẳng giác của tam giác ABC nên AH_A, BH_B, CH_C đồng quy. Suy ra tam giác ABC thấu xạ với tam giác $H_AH_BH_C$. Theo định lý Desargues: $BC \cap H_BH_C, CA \cap H_CH_A, AB \cap H_AH_B$ thẳng hàng hay $DA_2 \cap H_BH_C, EB_2 \cap H_CH_A, FC_2 \cap H_AH_B$ thẳng hàng. Theo bài toán 5: $(A_2B_2C_2)$ qua Y.

Ta tiếp tục chứng minh Y là điểm Anti-Steiner của HX ứng với tam giác $A_1B_1C_1$.

Gọi Y_A, Y_B, Y_C lần lượt là điểm đối xứng của Y qua B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1.

Gọi X', X_A' lần lượt là giao điểm khác D, A_2 của DX, AA_2 với (DH_BH_C).

Do Y nằm trên $(A_2B_2C_2) \equiv (A_1B_1C_1)$ nên theo định lý về đường thẳng Steiner: Y_A, Y_B, Y_C, H thẳng hàng và Y_A, Y_B, Y_C lần lượt nằm trên $(AB_1C_1), (BC_1A_1), (CA_1B_1)$ đồng quy tại H. Theo định lý Mannheim: AY_A, BY_B, CY_C đôi một song song.

Do A đối xứng với A_2 qua B_1C_1 và $\overrightarrow{A_2X_A} = \overrightarrow{X_A'A}$ nên X_A' đối xứng với X_A qua B_1C_1. Suy ra X' đối xứng với X qua B_1C_1. Do đó (AEF) đối xứng với (DH_BH_C) qua B_1C_1. Suy ra Y_A nằm trên (AEF).

Chứng minh tương tự: Y_B, Y_C lần lượt nằm trên $(BFD), (CDE)$. Theo định lý Mannheim: Y_A, Y_B, Y_C, X thẳng hàng. Suy ra Y là điểm Anti-Steiner của HX đối với tam giác $A_1B_1C_1$.

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét:

1. Ta có thể chứng minh (DEF) qua Y đơn giản hơn bằng biến đổi góc. Tuy nhiên trong phần này, tác giả muốn làm nổi bật ứng dụng của định lý Mannheim.

2. H chính là tâm của (ABC). Vì vậy khi X di động trên đường thẳng cố định qua tâm đường tròn (ABC) thì đường tròn pedal của X đối với tam giác ABC luôn đi qua điểm cố định.

3. Định lý Fontené thứ hai là mở rộng của định lý Feuerbach. Các bạn có thể tham khảo cách giải thích trong [8],[9].

Bài toán 8: Cho tam giác ABC và điểm X không nằm trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng: đường tròn Pedal, đường tròn Cevian của X và đường tròn Euler ứng với tam giác ABC đồng quy.

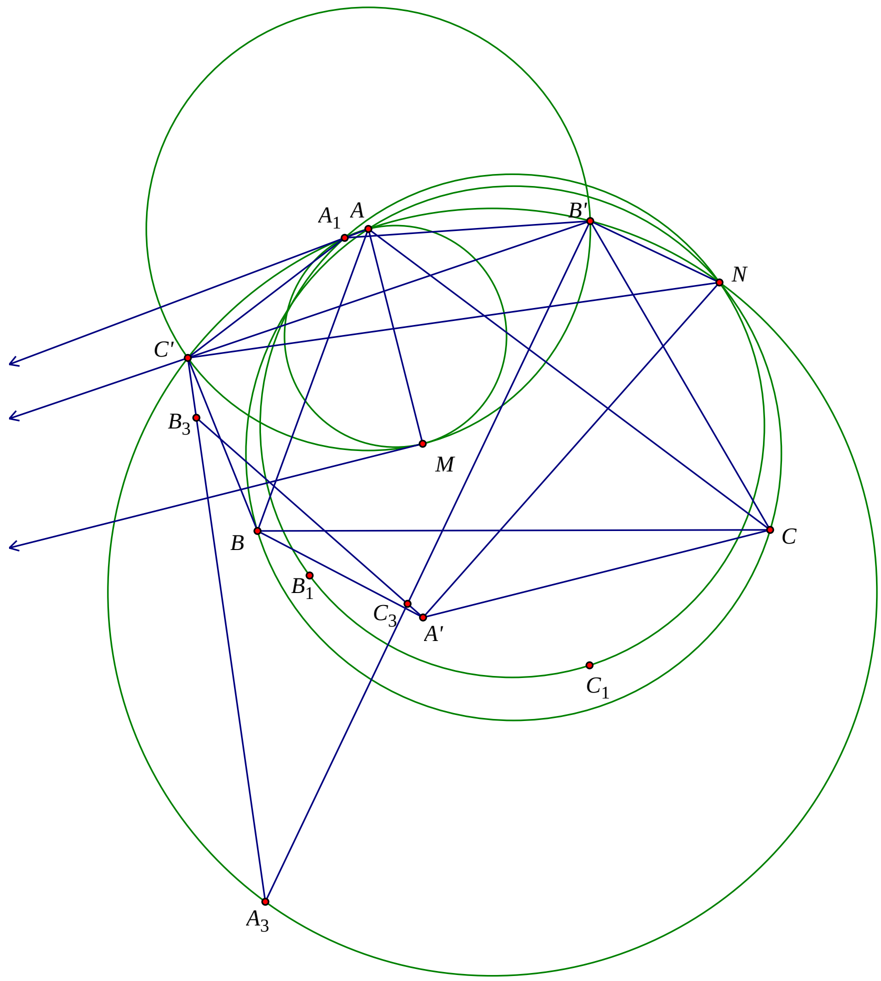
Giải

Ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 5 (Nguyễn Văn Linh, Mathley vòng 5-2012 [10]): Cho tam giác ABC và điểm M không nằm trên (ABC) và BC, CA, AB. Gọi A', B', C' lần lượt là điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB; A_1 là giao điểm khác A của $(AB'C'),(AM)$, A_2 là giao điểm khác M của $MA',(AM)$. định nghĩa tương tự: B_1,B_2,C_1,C_2. Khi đó: $(AB'C'),(BC'A'),(CA'B'),(ABC),(A_1B_1C_1),(A_2B_2C_2)$ đồng quy.

Chứng minh:

Trước hết ta chứng minh $(AB'C'),(BC'A'),(CA'B'),(ABC),(A_1B_1C_1)$ đồng quy.



Gọi N là giao điểm khác C' của $(AB'C'),(BC'A')$.

Do

$\angle A'NB' = \angle A'NC' + \angle C'NB' = 360° - (\angle A'BC' + \angle C'AB') = 360° - 2(\angle ABC + \angle BAC) = 2\angle ACB = \angle A'CB'$

nên N nằm trên $(A'B'C)$.

Gọi d_A là đường thẳng qua A' và vuông góc với NA', định nghĩa tương tự: d_A, d_C.

A_3 là giao điểm d_B, d_C, định nghĩa tương tự: B_3, C_3.

Do A là điểm chính giữa cung $B'C'$ của $(AB'C')$ nên A_3A là đường phân giác trong của tam giác $A_3B_3C_3$. Chứng minh tương tự: B_3B, C_3C là các đường phân giác trong của tam giác $A_3B_3C_3$. Do đó A_3A, B_3B, C_3C đồng quy .Theo định lý Mannheim: (ABC) qua N.

Do đường tròn (AM) tiếp xúc trong với (A, AM) nên nếu gọi t_A là tiếp tuyến chung của chúng thì AA_1 là trục đẳng phương của $(AB'C'),(AM)$; t_A là trục đẳng phương của $(AM),(A, AM)$ và $B'C'$ là trục đẳng phương của $(A, AM),(AB'C')$. Suy ra $AA_1, t_A, B'C'$ đồng quy tại A^* và

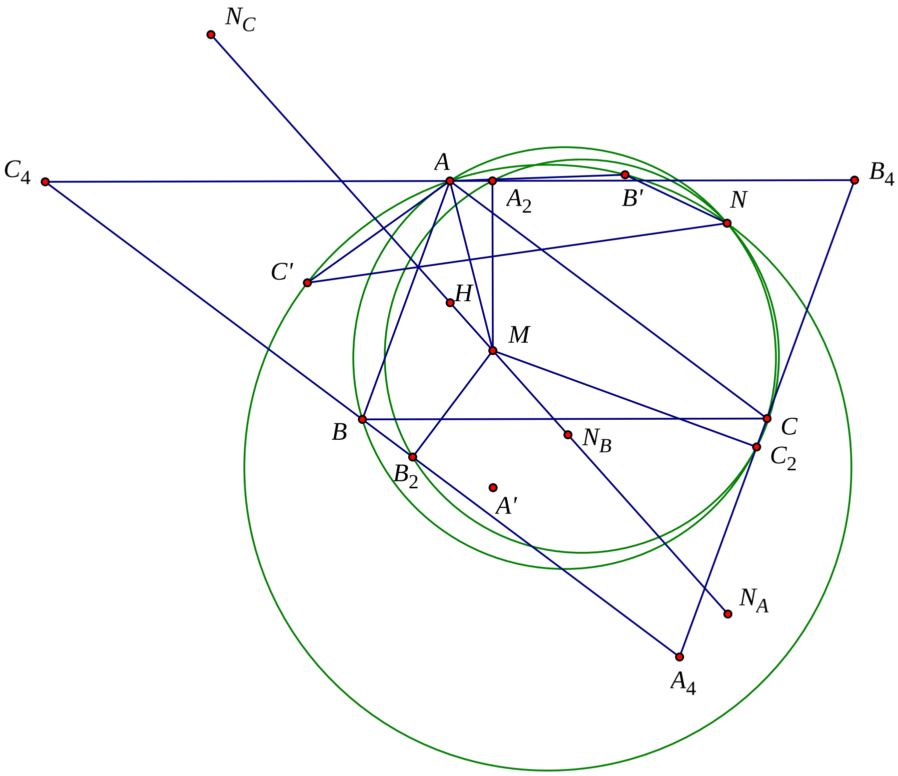
$\dfrac{\overline{A^*B'}}{\overline{A^*C'}} = \dfrac{MB^2}{MC^2}$. Chứng minh tương tự:

$BB_1, t_B, C'A'$ đồng quy tại B^* và $\dfrac{\overline{B^*C'}}{\overline{B^*A'}} = \dfrac{MC^2}{MA^2}$

$CC_1, t_C, A'B'$ đồng quy tại C^* và $\dfrac{\overline{C^*A'}}{\overline{C^*B'}} = \dfrac{MA^2}{MB^2}$

Do đó $\dfrac{\overline{A^*B'}}{\overline{A^*C'}} \dfrac{\overline{B^*C'}}{\overline{B^*A'}} \dfrac{\overline{C^*A'}}{\overline{C^*B'}} = 1$. Theo định lý Menelaus: A^*, B^*, C^* thẳng hàng. Theo bài toán 5: $(A_1B_1C_1)$ qua N.

Ta tiếp tục chứng minh $(A_2B_2C_2)$ qua N.



Gọi A_4 là giao điểm BB_2, CC_2, định nghĩa tương tự: B_4, C_4.

Khi đó: A, B, C lần lượt là trung điểm B_4C_4, C_4A_4, A_4B_4 và $(A_2B_2C_2)$ là đường tròn pedal của M ứng với tam giác $A_4B_4C_4$.

Gọi N_A là điểm đối xứng của N qua BC, định nghĩa tương tự: N_B, N_C.

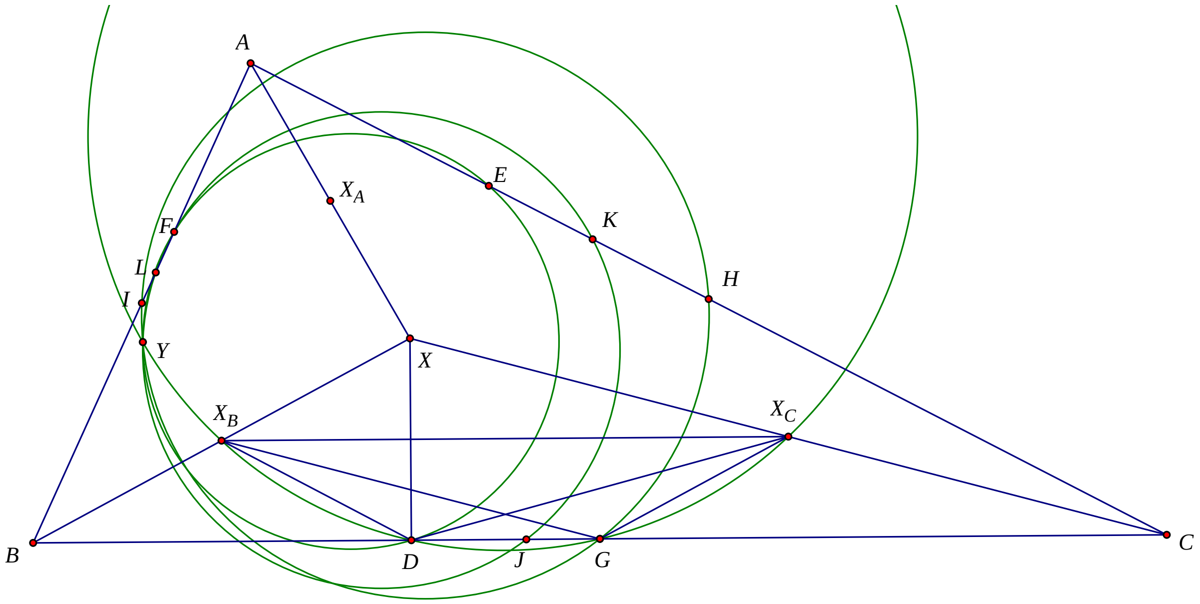
H là trực tâm tam giác ABC.

Theo định lý về đường thẳng Steiner: H, N_A, N_B, N_C thẳng hàng.

Do $\angle AMN_B + \angle AMN_C = \angle AB'N + \angle AC'N = 180^\circ$ nên M, N_B, N_C thẳng hàng, Chứng minh tương tự: M, N_C, N_A thẳng hàng. Do đó M, N_A, N_B, N_C thẳng hàng . Suy ra N là điểm Anti-Steiner của HM ứng với tam giác ABC .Theo định lý Fontene thứ hai: $(A_2B_2C_2)$ đi qua điểm N .

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán:



Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của X lên $BC, CA, AB.$
G, H, I lần lượt là trung điểm $BC, CA, AB.$
J, K, L lần lượt là giao điểm của $(AX, BC), (BX, CA), (CX, AB).$
X_A, X_B, X_C lần lượt là trung điểm $XA, XB, XC.$
Do các tam giác $X_B DX, X_C DX$ lần lượt cân tại X_B, X_C và $X_B XX_C G$ là hình bình hành
nên $\angle X_B DX_C = \angle X_B DX + \angle X_C DX = \angle X_B XD + \angle X_C XD = \angle X_B XX_C = \angle X_B GX_C$. Suy ra
X_B, X_C, D, G đồng viên. Chứng minh tương tự: $(X_C, X_A, E, H), (X_A, X_B, F, I)$ là những bộ điểm đồng viên.
Xét phép nghịch đảo f cực X , phương tích k bất kì, với quy ước điểm $f(T)$ cũng được kí hiệu là T , ta được:
X_A, X_B, X_C lần lượt là điểm đối xứng của X qua $EF, FD, DE.$
G, H, I lần lượt là giao điểm khác D, E, F của $[(DX_BX_C),(DX)],[(EX_CX_A),(EX)],[(FX_AX_B),(FX)].$
J, K, L lần lượt là giao điểm khác X của $(XX_A,(DX)),(XX_B,(EX)),(XX_C,(FX)).$
Theo bổ đề 5: $(DX_BX_C),(EX_CX_A),(FX_AX_B),(DEF),(GHI),(JKL)$ đồng quy
do đó $(DX_BX_C),(EX_CX_A),(FX_AX_B),(DEF),(GHI),(JKL)$ trong cấu hình cũ cũng đồng quy tại $Y.$

Tài liệu tham khảo

[1] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Mannheim.html

[2] Jean-Louis Ayme , Les cercles de Morley, Euler, Mannheim et Miquel
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/vol2.html

[3] Jean - Louis Ayme, Le P-Cercle de Fuhrmann - Une preuve purement synthétique
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/vol5.html

[4] Jean - Louis Ayme, Le P-Cercle de Hagge - Une preuve purement synthétique
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/vol3.html

[5] Nguyễn Văn Linh, Two similar geometry problems
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2010/04/04/two-similar-geometry-problems/

[6] Nguyễn Văn Linh, Hagge circles revisited
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2011/12/31/hagge-circles-revisited/

[7] Jean - Louis Ayme, La droite de Seimiya - Ayme - Turner - Une preuve purement synthétique
http://jl.ayme.pagesperso-orange.fr/Docs/La%20droite%20de%20Turner.pdf

[8] Nguyễn Văn Linh, Fontene theorems and some corollaries
https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2010/11/27/fontenes-theorem-and-some-corollaries/

[9] Darij Grinberg, Generalization of the Feuerbach point
http://web.mit.edu/~darij/www/geometry2.html

[10] Mathley All Problems and Solutions
http://www.hexagon.edu.vn/mathley/tong-tap-mathley-17.html

[11] Các tài liệu khác về đường tròn Miquel, Dergiades, Fuhrmann, Hagge; về đường thẳng Simson, Steiner, Turner; về điểm Miquel, Anti-Steiner; về định lý Fontené, Mannheim

[12] Artofproblemsolving Forum
http://www.artofproblemsolving.com/