Mỗi tuần một bài toán

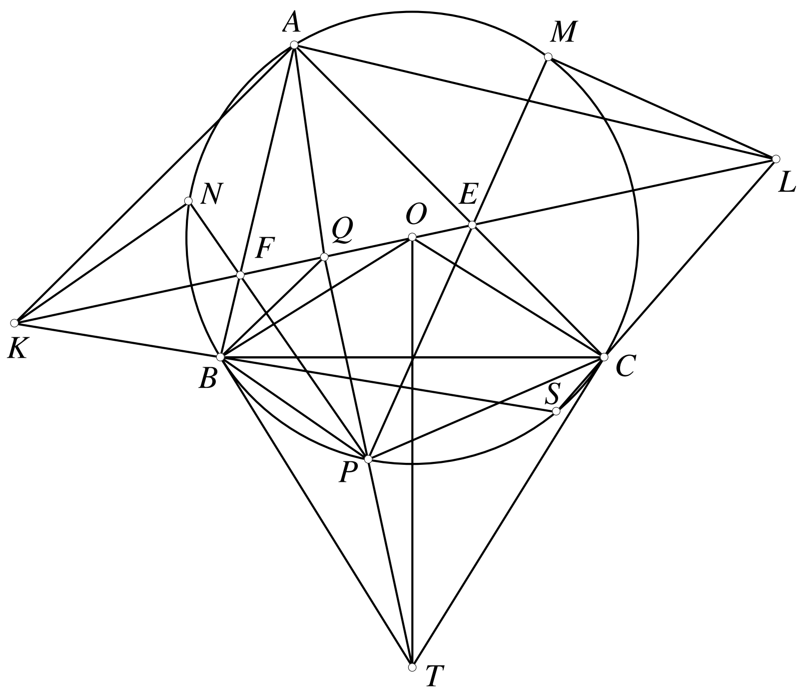
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và P là một điểm nằm trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. Đường thẳng qua O vuông góc PT cắt CA, AB tại E, F. PE, PF lần lượt cắt (O) tại M, N khác P. Lấy các điểm K, L sao cho $KA \perp AC, KN \perp NP, LA \perp AB, LM \perp MP$. Chứng minh rằng KB và LC cắt nhau trên (O).

Lời giải



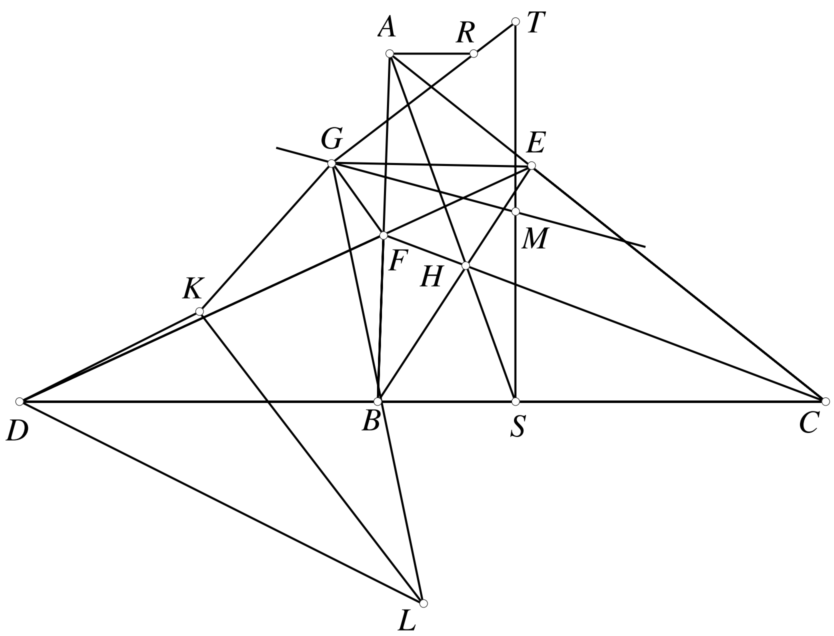
Gọi Q là hình chiếu của P trên EF. Ta thấy $\angle BQF = 90^\circ - \angle BQT = 90^\circ - \angle BCT = 90^\circ - \angle BAC = \angle KAB$. Từ đó AK và FQ cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác QAB. Lại có $\angle FQP = 90^\circ = \angle KNP$ nên NK và QF cũng cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác QNF. Mặt khác $FA.FB = FN.FP$ nên QF là trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp các tam giác QNP và QAB. Từ các nhận xét trên dễ suy ra đường tròn ngoại tiếp các tam giác QNP và QAB cắt nhau tại K khác Q. Tương tự đường tròn ngoại tiếp các tam giác QMP và QAC cũng cắt nhau tại L khác Q. Vậy gọi BK cắt CL tại S thì $\angle ABS + \angle ACS = 180^\circ - \angle ABK + 180^\circ - \angle ACL = 180^\circ - \angle AQK + 180^\circ - \angle AQL = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$ nên S nằm trên (O).

Nhật xét

Bài toán này là một ứng dụng hay của một tính chất về phương tích, tính chất đó dựa trên một nhật xét rất đơn giản là nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp và AC giao BD tại E và P là một điểm bất kỳ thì PE là trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAC và PBD. Việc trình bày lời giải như trên là để tránh việc dựng thêm nhiều hình và các điểm trùng nhau. Có bạn **Phạm Nguyễn Thiện Huy** lớp 12A2 trường chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng cho lời giải khác bằng định lý Pascal và bạn **Trần Nhân Trung** lớp 11A2 trường chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng làm giống ý tưởng đáp án. Các lời giải đó đều có ở đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC với E, F là hai điểm lần lượt nằm trên cạnh CA, AB sao cho $AE = AF$. EF cắt BC tại D. K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác DBF, DCE. G là đối xứng của D qua KL. R nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF sao cho $AR \parallel BC$. Gọi BE cắt CF tại H. AH cắt BC tại S. Lấy T thuộc GR sao cho $ST \perp BC$. M là trung điểm ST. Chứng minh rằng GM luôn đi qua một điểm cố định khi E, F thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.