Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

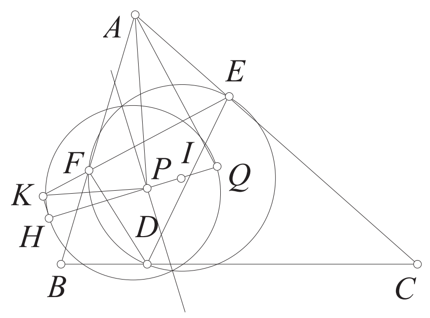
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) với trực tâm H và trung tuyến AM. Dựng L sao cho A là trọng tâm tam giác LBC. Trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính LH và (O) lấy P sao cho $HP \parallel BC$. K là hình chiếu của P trên OH. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn đường kính OK và đường tròn Euler của tam giác ABC đi qua H.

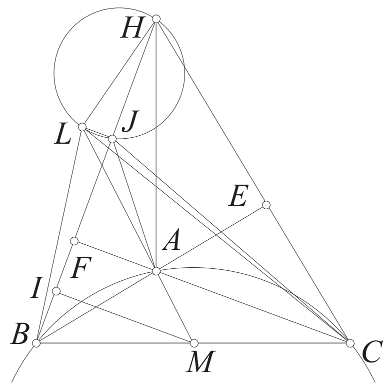
Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC với P, Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Lấy K thuộc EF sao cho $PK \perp PA$. H là hình chiếu của K trên PQ. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn đường kính QH và (DEF) đi qua P.



Chứng minh. Ta đã biết tâm I ngoại tiếp tam giác DEF là trung điểm của PQ. Ta có biến đổi tích đoạn thẳng, chú ý KP tiếp xúc đường tròn $(AEPF)$ nên $KP^2 = \overline{KE}.\overline{KF} = \mathcal{P}_{K/(DEF)} = KI^2 - IE^2$ do đó $\mathcal{P}_{P/(QH)} = \overline{PH}.\overline{PQ} = 2\overline{PH}.\overline{PI} = 2(\overline{PI} + \overline{IH}).\overline{PI} = PI^2 + 2\overline{PI}.\overline{IH} + IH^2 + PI^2 - IH^2 = PH^2 - IH^2 + PI^2 = KP^2 - KI^2 + PI^2 = PI^2 - IE^2 = \mathcal{P}_{P/(DEF)}$.

Giải bài toán. Gọi M là trung điểm BC. BH cắt đường tròn đường kính LH tại J khác H. BE, CF là đường cao của tam giác ABC. I là hình chiếu của M lên BF dễ thấy I là trung điểm BF. Vậy I, F, J là hình chiếu của M, A, L lên BH mà $LA = 2LM$ nên $JF = 2FI = FB$. Từ đó tam giác BJC cân. Ta có $(JH, JC) = (JB, JC) = (BC, BJ) = (AH, AC) \pmod{\pi}$, vậy bốn điểm H, J, A, C thuộc một đường tròn nên $\overline{FH}.\overline{FJ} = \overline{FA}.\overline{FC}$ nên F thuộc trục đẳng phương của (LH) và (ABC). Tương tự, ta thu được EF là trục đẳng phương của (LH) và (ABC). Áp dụng bổ đề cho cặp đẳng giác H, O trong tam giác ABC. Ta thu được điều phải chứng minh.

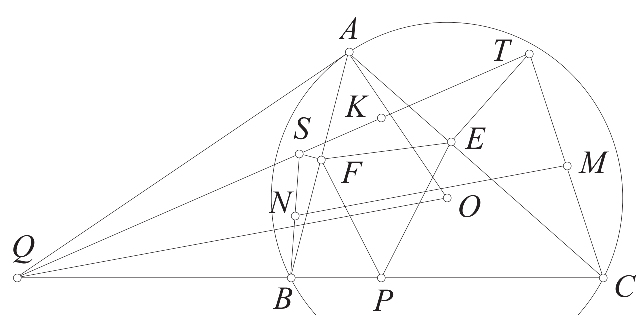


Nhận xét

Bổ đề là mở rộng trực tiếp cho phần sau của bài toán. Ta thấy rằng thực chất yếu tố đẳng giác không quan trọng bằng yếu tố I là trung điểm PQ nên có một cách mở rộng tiếp bổ đề này cho Q bất kỳ sao cho hai tia AP, AQ đẳng giác trong góc A. Khi đó đường tròn (DEF) sẽ được thay thế bằng đường tròn đi qua chân các hình chiếu của P, Q lên hai cạnh bên, các yếu tố B, C cũng không cần thiết. Bài toán được giải ở đây bởi các bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 toán, THPT chuyên SP và **Vương Đình Ân**, lớp 11 toán, trường THPT chuyên Bắc Giang. Tác giả cũng nhận được lời giải qua email từ bạn **Trần Hoàng Việt** lớp 10 toán, THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P nằm trên cạnh BC. Các đường tròn $(PAB), (PCA)$ lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A. K là tâm ngoại tiếp tam giác AEF. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại Q. Trên QK lấy S, T sao cho $ET \perp AC, FS \perp AB$. M, N là trung điểm của CT, BS. Chứng minh rằng $MN \parallel OQ$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.