Sở giáo dục - đào tạo bắc giang

Tr- ờng thpt chuyên bắc giang

………………….o0o…………………..

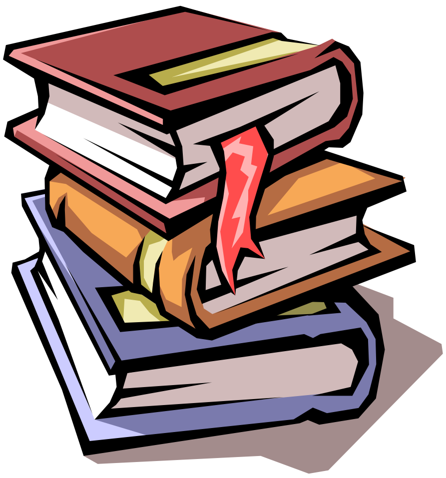
Chuyên đề :

Một số bài tập hình học phẳng cho học sinh giỏi

Của : Nguyễn Anh Tuấn

Đơn vị : Tổ Toán – tin

Tr- ờng thpt chuyên bắc giang



Năm học 2006 - 2007

Mục lục

Lời mở đầu

Toán học có một vẻ đẹp lôi cuốn và quyến rũ, ai đã đam mê thì mãi mãi đam mê… Trong vẻ đẹp đầy huyền bí đó thì Hình học phẳng có nét đẹp thật sự quyến rũ và kì bí.

Có lẽ vì lý do đó mà trong đề Toán của tất cả các kì thi Toán Quốc tế
IMO(International Mathematics Olimpiad)
hay các kì thi HSG Quốc gia (VMO), các kì thi tỉnh, thi cấp thành phố, thi… của chúng ta, bài toán hình học phẳng luôn hãnh diện có mặt để thách thức các nhà Toán học t- ơng lai với dung nhan muôn hình, muôn vẻ…
Thật là điều thú vị !

Chuyên đề : ‘’ Một số bài tập hình học phẳng cho học sinh giỏi ‘’
với mong muốn phần nào giúp các Thầy cô giáo dạy Toán, các em học sinh phổ thông trong các đội tuyển thi học sinh giỏi Toán có thể tìm thấy nhiều điều bổ ích và nhiều điều thú vị.

Chuyên đề gồm 6 phần, đ- ợc chia theo các chủ đề chính của Hình học phẳng. Các ví dụ và bài tập đều đòi hỏi sự thông minh và tính sáng tạo trong việc đi tìm lời giải. Các bài tập đều mới và mang tính cập nhật. Thông qua việc giải các bài tập trong Chuyên đề, một mặt học sinh rèn luyện đ- ợc những kĩ năng chính để giải toán Hình học phẳng, mặt khác đ- ợc th- ởng thức những vẻ đẹp của từng bài toán. Trong Chuyên đề này, tôi nhấn mạnh đến tính hình học của từng bài toán (244 bài). Để giải mỗi bài toán th- ờng các em phải kẻ thêm đ- ợc những đ- ờng phụ nhằm đ- a các đối t- ợng của bài toán có liên hệ với nhau. Tôi không đ- a vào Chuyên đề những bài toán có tính toán phức tạp.

Tôi viết Chuyên đề này với một tinh thần trách nhiệm cao. Tôi hi vọng rằng Chuyên đề sẽ để lại trong lòng Thầy cô và các em học sinh một ấn t- ợng tốt đẹp. Tuy nhiên Chuyên đề chắc chắn sẽ không tránh khỏi những điều không mong muốn. Tôi rất mong nhận đ- ợc sự động viên và những ý kiến đóng góp chân thành của Quý Thầy cô và các em học sinh.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Bắc Giang, ngày 14.3.2007

$1- Một số bài toán về đ- ờng thẳng và đ- ờng tròn đi qua điểm cố định, điểm nằm trên đ- ờng thẳng cố định và đ- ờng thẳng tiếp xúc với một đ- ờng tròn cố định.

Đối với bài toán chứng minh liên quan đến yếu tố cố định, một vấn đề rất quan trọng là dự đoán đ- ợc yếu tố cố định nói trên. Muốn dự đoán đ- ợc điểm cố định, đ- ờng thẳng cố định hay đ- ờng tròn cố định thoả mãn đầu bài ta th- ờng sử dụng các ph- ơng pháp sau:

1) Giải bài toán trong các tr- ờng hợp đặc biệt để thấy đ- ợc yếu tố cố định cần tìm. Từ đó suy ra tr- ờng hợp tổng quát.
2) Xét những đ- ờng thẳng đặc biệt của họ để suy ra yếu tố cố định cần tìm.
3) Dựa vào tính đối xứng, sự bình đẳng của các đối t- ợng (nếu có) để hạn chế đ- ợc phạm vi có thể có của yếu tố cố định.
4) Dùng phép suy diễn để khẳng định: Nếu họ các đ- ờng thẳng đi qua một điểm cố định hay tiếp xúc với một đ- ờng tròn cố định thì điểm cố định cần tìm hay đ- ờng tròn cố định cần tìm, cũng nh- với bài toán tìm đ- ờng thẳng cố định thì yếu tố cần tìm bắt buộc phải là một đối t- ợng cụ thể nào đó.

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đ- ờng tròn (O). Gọi M là điểm nào đó trên cạnh AC với M khác A và C. Đ- ờng thẳng BM cắt đ- ờng tròn lần nữa tại N. Đ- ờng thẳng qua A vuông góc với AB và đ- ờng thẳng qua N vuông góc với NC cắt nhau tại điểm Q.
Chứng minh rằng: Đ- ờng thẳng QM luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên cạnh AC.

Bài 2. Cho tứ giác lồi $ABCD$ và M là trung điểm P thuộc đoạn thẳng AC sao cho hai đ- ờng thẳng MP và BC cắt nhau, gọi giao điểm đó là T.
Gọi Q là điểm thuộc đoạn thẳng BD sao cho $\frac{BQ}{QD}=\frac{AP}{PC}$.
Chứng minh rằng: Đ- ờng thẳng TQ luôn đi qua một điểm cố định khi P chạy trên đoạn AC.

Bài 3. Cho hình bình hành $ABCD$.
Lấy điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh CD.
Gọi P là giao điểm của AN và DM.
Gọi Q là giao điểm của BN và CM.
Chứng minh rằng: PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M và N theo thứ tự di chuyển trên AB và CD.

Bài 4. Hai đ- ờng tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B.
Một điểm P thay đổi trên đ- ờng tròn (O), P khác A và B.
Các đ- ờng thẳng PA, PB lại cắt (O') theo thứ tự tại D và E.
Gọi M là trung điểm DE.
Chứng minh rằng: Đ- ờng thẳng PM đi qua một điểm cố định.

Bài 5. Cho tam giác ABC. Lấy điểm M nằm trong tam giác.
AM cắt BC tại điểm E, CM cắt AB tại điểm F.
Gọi N là điểm đối xứng của B qua trung điểm của EF.
Chứng minh rằng: Đ- ờng thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi M di động bên trong tam giác ABC.

Bài 6. Cho đ- ờng tròn (O) đ- ờng kính MN cố định và một điểm A nằm trong đoạn MN. Gọi (d) là tiếp tuyến của đ- ờng tròn với tiếp điểm N.
Đ- ờng tròn tâm T nào đó thuộc (d), đi qua A, cắt đ- ờng tròn (O) tại E và F, cắt (d) tại B và C.
Chứng minh rằng khi điểm T di chuyển trên (d) thì:
1) Đ- ờng thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.
2) Đ- ờng thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định, trong đó P, Q là các giao điểm của MB, MC với đ- ờng tròn (O).

Bài 7. Cho tam giác ABC có $AB = AC$.
Từ điểm M trên BC kẻ MP vuông góc với AB và MQ vuông góc với AC sao cho P, Q lần l- ợt nằm trên các đ- ờng thẳng AB, AC.
Chứng minh rằng: Đ- ờng trung trực của PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên cạnh BC.

Bài 8. Trong mặt phẳng cho hai đ- ờng thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm K và một điểm M nằm ngoài d_1, d_2. Một đ- ờng thẳng d đi qua M cắt d_1 và d_2 lần l- ợt tại A và B (khác K). Kẻ $AP \perp d_2$ tại P, kẻ $BQ \perp d_1$ tại Q.
Chứng minh rằng: Đ- ờng thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi đ- ờng thẳng d thay đổi nh- ng luôn đi qua M.

Bài 9. Giả sử M là một điểm nằm trong tam giác nhọn ABC thỏa mãn điều kiện $\angle MBA = \angle MCA$. Gọi K, L theo thứ tự là chân đ- ờng vuông góc hạ từ M tới AB, AC. Chứng minh rằng:
1) Hai điểm K, L cách đều trung điểm của cạnh BC.
2) Trung tuyến xuất phát từ M của tam giác MKL luôn đi qua một điểm cố định khi M thay đổi bên trong tam giác ABC.

Bài 10. Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy điểm D trên cạnh AB và điểm E trên cạnh AC sao cho $DE = BD + CE$. Tia phân giác của $\angle BDE$ cắt cạnh BC tại I.
1) Tính độ lớn của $\angle DIE$.
2) Chứng minh rằng: Đ- ờng thẳng DI luôn đi qua một điểm cố định khi D và E di động trên các cạnh AB và AC t- ơng ứng.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Lấy điểm D trên cạnh BC, D khác B, C.
Đ- ờng trung trực của DB, DC theo thứ tự cắt các đ- ờng thẳng AB, AC tại M, N.
Chứng minh rằng: Đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác AMN luôn đi qua một điểm cố định khác A khi điểm D di động trên đoạn BC.

Bài 12. Cho tam giác ABC. P là điểm nằm trên đ- ờng thẳng BC.
Trên tia đối của tia AP lấy điểm D sao cho $AD = \frac{BC}{2}$.
Gọi E và F theo thứ tự là trung điểm của DB và DC.
Chứng minh rằng: Đ- ờng tròn đ- ờng kính EF luôn đi qua một điểm cố định khi P di động trên đ- ờng thẳng BC.

Bài 13. Cho tam giác ABC ($AB = AC$).
Lấy điểm P nào đó trên đ- ờng thẳng BC (P khác B, C).
Gọi M, N lần l- ợt là điểm đối xứng của P qua AB, AC.
Dựng hình bình hành $MNPQ$.
Chứng minh rằng: Điểm Q luôn nằm trên một đ- ờng thẳng cố định khi P di chuyển trên đ- ờng thẳng BC.

Bài 14. Cho đ- ờng tròn tâm O và hai điểm A, B thuộc đ- ờng tròn này.
Một đ- ờng tròn thay đổi nh- ng luôn đi qua A và B có tâm là Q.
Gọi P là điểm đối xứng của Q qua đ- ờng thẳng AB.
Đ- ờng thẳng AP cắt đ- ờng tròn tâm O lần nữa tại E.
Đ- ờng thẳng BE (khi E khác B) cắt đ- ờng tròn tâm Q lần nữa tại F.
Chứng minh rằng: Điểm F luôn nằm trên một đ- ờng thẳng cố định khi đ- ờng tròn tâm Q thay đổi.

Bài 15. Cho tam giác ABC với các đ- ờng cao AM, BN và nội tiếp đ- ờng tròn (O).
Điểm D nằm trên đ- ờng tròn đó nh- ng khác A, B và DA không song song với BN.
Các đ- ờng thẳng DA và BN cắt nhau tại Q.
Các đ- ờng thẳng DB và AM cắt nhau tại P.
Chứng minh rằng: Khi D di động trên đ- ờng tròn (O) thì trung điểm của đoạn PQ luôn nằm trên một đ- ờng thẳng cố định.

Bài 16. Hai đ- ờng tròn tâm O bán kính R và tâm O' bán kính R' ($R > R'$) tiếp xúc với nhau tại điểm A.
Tia Ax của góc vuông xAy cắt đ- ờng tròn tâm O lần nữa tại B và tia Ay cắt đ- ờng tròn tâm O' lần nữa tại C.
Gọi H là hình chiếu của A trên BC.
Chứng minh rằng: Khi góc vuông xAy quay quanh điểm A thì điểm H chạy trên một đ- ờng tròn.

$ 2- một số bài toán Chứng minh ba điểm thẳng hàng và ba đ- ờng thẳng đồng quy.

Để giải bài toán chứng minh 3 điểm thẳng hàng và 3 đ- ờng thẳng đồng quy, ta th- ờng sử dụng một trong các ph- ơng pháp sau:

1) Sử dụng mối quan hệ về góc (hai góc bằng nhau, tổng hai góc bằng 180^0,…).

2) Sử dụng tính chất đồng quy của 3 đ- ờng cao, 3 đ- ờng trung tuyến, 3 đ- ờng trung trực và 3 đ- ờng phân giác.

3) Dùng ph- ơng pháp diện tích.

4) Chuyển bài toán chứng minh 3 đ- ờng thẳng đồng quy về việc chứng minh 3 điểm thẳng hàng và ng- ợc lại (Đồng quy là trá hình của thẳng hàng).

Bài 1. Cho tam giác ABC có $BC < AB$ với đ- ờng trung tuyến BD, đ- ờng phân giác BE. Đ- ờng thẳng qua C, vuông góc với BE ở F và cắt BD ở G. Gọi T là trung điểm của GE.
Chứng minh rằng: Ba điểm D, T, F thẳng hàng.

Bài 2. Cho tam giác ABC với các đ- ờng cao AD, BE, CF.
Gọi C_1 và B_1, A_2 và C_2, A_3 và B_3 theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của D lên AB và AC, của E lên BC và BA, của F lên CA và CB.
Gọi giao điểm của BC và B_1C_1, AC và A_2C_2, AB và A_3B_3 là M, N, P theo thứ tự .
Chứng minh rằng: Ba điểm M, N, P thẳng hàng.

Bài 3. Cho tứ giác lồi $AA'C'C$ có hai đ- ờng thẳng AC và $A'C'$ cắt nhau tại I.
Lấy điểm B trên cạnh AC và điểm B' trên cạnh $A'C'$. Gọi O là giao điểm của AC' và $A'C$; P là giao điểm của AB' và $A'B$; Q là giao điểm của BC' và $B'C$.
Chứng minh rằng: Ba điểm P, O, Q thẳng hàng.

Bài 4. Hai đ- ờng tròn tâm O bán kính R và tâm O' bán kính R' cắt nhau tại A và B.
Từ điểm C trên tia đối của tia AB kẻ các tiếp tuyến CD và CE với đ- ờng tròn tâm O (D, E là các tiếp điểm và điểm E nằm trong đ- ờng tròn tâm O'). AD và AE cắt đ- ờng tròn tâm O' lần nữa tại M và N t- ơng ứng . Gọi T là trung điểm MN.
Chứng minh rằng: Ba điểm D, E, T thẳng hàng.

Bài 5. Cho đ- ờng tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC với đ- ờng kính AD.
Gọi I là tâm đ- ờng tròn nội tiếp tam giác ABC. Các đ- ờng thẳng AI và DI cắt đ- ờng tròn tâm O lần nữa tại H và T theo thứ tự. Kẻ IJ vuông góc với BC tại J.
Chứng minh rằng: Ba điểm H, T, J thẳng hàng.

Bài 6. Cho đ- ờng tròn *(O)*, hai dây cung CA, CB không đi qua tâm O và $BA \neq BC$.
Đ- ờng thẳng qua điểm A vuông góc với đ- ờng thẳng OB cắt đ- ờng thẳng CB tại điểm N. Gọi M là trung điểm của AN. Đ- ờng thẳng BM cắt đ- ờng tròn *(O)* lần nữa tại D. Gọi OE là đ- ờng kính của đ- ờng tròn đi qua các điểm B, D, O.
Chứng minh rằng: Ba điểm A, C, E thẳng hàng.

Bài 7. Cho năm điểm A, B, C, D và E cùng nằm trên một đ- ờng tròn.
Gọi M, N, P và Q lần l- ợt là hình chiếu vuông góc của E xuống các đ- ờng thẳng AB, BC, CD và DA.
Chứng minh rằng: Hình chiếu vuông góc của E xuống các đ- ờng thẳng MN, NP, PQ và QM là bốn điểm thẳng hàng.

Bài 8. Trong mặt phẳng cho đ- ờng thẳng xy và đoạn thẳng AB vuông góc với xy tại điểm A.
Trên tia Ax lấy điểm C, trên tia Ay lấy điểm D (C, D khác A).
Kẻ $AE \perp BC$ (E thuộc BC) và $AF \perp BD$ (F thuộc BD). Một đ- ờng thẳng đi qua trung điểm Q của AB lần l- ợt cắt các đ- ờng thẳng xy, BC, BD ở P, M, N.
Chứng minh rằng: Các điểm P, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi Q là trung điểm của MN.

Bài 9. Cho tam giác ABC với điểm M nằm trong tam giác.
Các tia AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB t- ơng ứng tại D, E, F.
Gọi K là giao điểm của DE và CM, gọi H là giao điểm của DF và BM.
Chứng minh rằng: Các đ- ờng thẳng AD, BK, CH đồng quy.

Bài 10. Cho tam giác ABC với đ- ờng cao AH (H khác B, C).
Kẻ $HE // AC$ và $HM \perp AB$ sao cho E, M nằm trên đ- ờng thẳng AB.
Kẻ $HF // AB$ và $HN \perp AC$ sao cho F, N nằm trên đ- ờng thẳng AC.
Chứng minh rằng: Các đ- ờng thẳng EF, MN, BC đồng quy.

Bài 11. Trên mặt phẳng cho tam giác ABC và một đ- ờng thẳng d.
Gọi A_1, B_1, C_1 lần l- ợt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên đ- ờng thẳng d.
Gọi A_2, B_2, C_2 lần l- ợt là hình chiếu của A_1, B_1, C_1 trên các đ- ờng thẳng BC, CA, AB t- ơng ứng.
Chứng minh rằng: Các đ- ờng thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

Bài 12. Cho lục giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ có các cạnh đối diện song song với nhau.
Gọi B_1, B_2, B_3 lần l- ợt là giao điểm của từng cặp đ- ờng chéo A_1A_4 và A_2A_5, A_2A_5 và A_3A_6, A_3A_6 và A_1A_4.
Gọi C_1, C_2, C_3 lần l- ợt là trung điểm của các đoạn thẳng A_3A_6, A_1A_4, A_2A_5.
Chứng minh rằng: Các đ- ờng thẳng B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 đồng quy.

Bài 13. Cho đ- ờng tròn tâm O đ- ờng kính EF.
Lấy hai điểm N, P trên đ- ờng thẳng EF sao cho $ON = OP$.
Từ điểm M nào đó nằm bên trong đ- ờng tròn mà không thuộc EF, kẻ đ- ờng thẳng MN cắt đ- ờng tròn tại A và C, đ- ờng thẳng MP cắt đ- ờng tròn tại B và D sao cho B và O nằm khác phía đối với AC.
Gọi K là giao điểm của OB và AC, Q là giao điểm của EF và CD.
Chứng minh rằng: Các đ- ờng thẳng KQ, BD, AO đồng quy.

<u>Bài 14</u>. Giả sử các đ- ờng tròn $(O_1),(O_2),(O_3)$ cùng tiếp xúc trong với đ- ờng tròn (O) lần l- ợt tại A_1, A_2, A_3 và đôi một tiếp xúc ngoài với nhau.
Gọi B_1, B_2, B_3 là tiếp điểm của (O_2) và (O_3), của (O_3) và (O_1), của (O_1) và (O_2) theo thứ tự.
Chứng minh rằng: Các đ- ờng thẳng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.

<u>Bài 15</u>. Cho tam giác cân *ABC* với góc $\angle ABC = 120^0$.
Gọi *D* là giao điểm của đ- ờng thẳng *BC* với tiếp tuyến tại *A* của đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.
Đ- ờng thẳng qua *D* và qua tâm *O* của đ- ờng tròn lần l- ợt cắt *AB* và *AC* tại *E* và *F*.
Gọi *M*, *N* theo thứ tự là trung điểm của *AB* và *AC*.
Chứng minh rằng: Các đ- ờng thẳng *AO*, *MF*, *NE* đồng quy.

<u>Bài 16</u>. Cho hai đ- ờng tròn $(O_1),(O_2)$ không bằng nhau và tiếp xúc ngoài với nhau tại *T*.
Kẻ O_1A tiếp xúc với (O_2) tại *A*; O_2B tiếp xúc với (O_1) tại *B* sao cho các điểm *A*, *B* cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ O_1O_2.
Lấy điểm *H* thuộc O_1A và điểm *K* thuộc O_2B sao cho *BH*, *AK* cùng vuông góc với O_1O_2.
TH cắt (O_1) lần nữa tại *E*, *TK* cắt (O_2) lần nữa tại *F*. *EF* cắt *AB* tại *S*.
Chứng minh rằng: Các đ- ờng thẳng O_1A, O_2B, *TS* đồng quy.

$ 3- Một số bài toán cực trị.

Sử dụng những bất đẳng thức quen thuộc và không quen thuộc trong tam giác đồng thời vận dụng thành thạo những bất đẳng thức cổ điển nh- BĐT Cô-si, BĐT Bunhiacopxki v.v…để gắn vào một bài toán cụ thể.

Bài 1. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 1.
Gọi R và r t- ơng ứng là bán kính đ- ờng tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.
Chứng minh rằng: $\frac{2}{R}+\frac{3}{r}\geq 4\sqrt[4]{27}$.
Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 2. Cho tam giác ABC.
Gọi MN, PR, QS là hình chiếu vuông góc của AB, BC, CA
lên các đ- ờng phân giác ngoài của các góc C, A, B t- ơng ứng.
Gọi S, r lần l- ợt là diện tích và bán kính đ- ờng tròn nội tiếp tam giác ABC.
Chứng minh rằng: $MN+PR+QS\geq 6\sqrt[3]{Sr}$.
Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 3. Cho tam giác ABC.
Gọi O và I lần l- ợt là tâm đ- ờng tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác đó.
Các tia AI, BI, CI cắt đ- ờng tròn tâm O t- ơng ứng tại A', B', C'.
Gọi R_a, R_b, R_c là bán kính các đ- ờng tròn bàng tiếp của tam giác ABC
ứng với các góc A, B, C.
Gọi R'_a, R'_b, R'_c là bán kính các đ- ờng tròn bàng tiếp của tam giác $A'B'C'$
ứng với các góc A', B', C'.
Chứng minh rằng : $R'_a+R'_b+R'_c\geq R_a+R_b+R_c$.

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp một đ- ờng tròn.
Đ- ờng phân giác trong AD và trung tuyến AM theo thứ tự ấy
cắt đ- ờng tròn lần nữa tại P và Q.
Hãy so sánh DP và MQ.

Bài 5. Gọi I và r là tâm và bán kính đ- ờng tròn nội tiếp tam giác ABC.
Gọi R là bán kính đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Chứng minh rằng : $\frac{1}{IA}+\frac{1}{IB}+\frac{1}{IC}\geq \frac{1}{3R}+\frac{4}{3r}$.

Bài 6. Cho tam giác ABC với $AB \leq AC$ và AD là đ- ờng phân giác trong.
Lấy điểm M trên cạnh AB và điểm N trên cạnh AC
sao cho $BM.CN = k$ không đổi ($k < AB^2$).
Xác định vị trí của M, N sao cho diện tích của tứ giác $AMDN$ là lớn nhất.

Bài 7. Cho tam giác ABC với $AB < AC$.
Gọi AD và AM lần l- ợt là phân giác và đ- ờng trung tuyến của tam giác.
Đ- ờng thẳng qua D và vuông góc với AD cắt cạnh AC ở điểm E.
So sánh diện tích hai tam giác ADM và CEM.

Bài 8. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác.
Đ- ờng thẳng qua M cắt các cạnh AB, AC lần l- ợt tại D, E.
Chứng minh rằng: $S_{MBD}.S_{MCE} \le \frac{1}{64}S^2_{ABC}$.
Xác định vị trí của M để đẳng thức xảy ra.

Bài 9. Cho tam giác ABC với I là tâm đ- ờng tròn nội tiếp và G là trọng tâm.
Biết rằng $AI \perp IG$.
Chứng minh rằng: $AB + AC > 2BC$.

Bài 10. Cho tam giác ABC với I là tâm đ- ờng tròn nội tiếp và G là trọng tâm.
Gọi R_1, R_2, R_3 theo thứ tự là bán kính đ- ờng tròn
ngoại tiếp các tam giác IBC, ICA, IAB.
Gọi R_1', R_2', R_3' theo thứ tự là bán kính đ- ờng tròn
ngoại tiếp các tam giác GBC, GCA, GAB.
Chứng minh rằng: $R_1' + R_2' + R_3' \ge R_1 + R_2 + R_3$.

Bài 11. Cho tam giác ABC, trung tuyến AD và BE cắt nhau ở G và $\angle AMB \le 90^0$.
Chứng minh rằng: $AC + BC > 3AB$.

Bài 12. Gọi AD, BE, CF là các đ- ờng phân giác trong của tam giác ABC vuông ở A.
Đoạn thẳng AD cắt EF tại K.
Đ- ờng thẳng qua K song song với BC cắt AB và AC lần l- ợt tại M và N.
Chứng minh rằng: $MN \ge \frac{2-\sqrt{2}}{2}(AB + AC)$.

Bài 13. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 là các đ- ờng phân giác trong của tam giác ABC
và A_1, B_2, C_2 theo thứ tự là các tiếp điểm của đ- ờng tròn
nội tiếp tam giác ABC với các cạnh BC, CA và AB.
Kí hiệu S, S_1, S_2 theo thứ tự là diện tích của các tam giác $ABC, A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$.
Chứng minh rằng: $\frac{3}{S_1} - \frac{2}{S_2} \le \frac{4}{S}$.

Bài 14. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác.
Các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB
và thoả mãn điều kiện $A_1B_1 // AM, B_1C_1 // BM, C_1A_1 // CM$.
Chứng minh rằng: $S(A_1B_1C_1) \le \frac{1}{3}S(ABC)$ trong đó S là diện tích tam giác.

Bài 15. Gọi S, R, r lần l- ợt là diện tích, bán kính đ- ờng tròn ngoại tiếp
và nội tiếp của tam giác ABC.
Đặt $a = BC$, $b = CA$, $c = ABC$.
Chứng minh rằng: $\frac{2R}{S} \le (a+b+c)\sin\frac{A}{2} + (a-b+c)\sin\frac{B}{2} + (a+b-c)\sin\frac{C}{2} \le \frac{S}{r}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 16. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn.
Các đ- ờng cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác lần nữa tại A_2, B_2, C_2 t- ơng ứng.

Chứng minh rằng: $\frac{4\sqrt{3}}{3}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) \leq AA_2 + BB_2 + CC_2 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}(AB + BC + CA)$.

Bài 17. Chứng minh rằng : $\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2p}$, trong đó p, R, r lần l- ợt là nửa chu vi, bán kính đ- ờng tròn ngoại tiếp và nội tiếp của một tam giác.
Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 18. Cho tam giác ABC gọi m_a, m_b, m_c theo thứ tự là độ dài trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C và r_a, r_b, r_c theo thứ tự là bán kính đ- ờng tròn bàng tiếp ứng với các góc có đỉnh A, B, C.
Chứng minh rằng: $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$.
Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 19. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.
Gọi O và R lần l- ợt là tâm và bán kính đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
Gọi I_a, I_b, I_c lần l- ợt là tâm đ- ờng tròn bàng tiếp ứng với các góc đỉnh A, B, C.
Gọi r là bán kính đ- ờng tròn nội tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng: $$\frac{1}{2R} \leq \frac{OI_a}{(a+b)(a+c)} + \frac{OI_b}{(b+c)(b+a)} + \frac{OI_c}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{1}{4r}.$$

Bài 20. Cho tam giác ABC.
Gọi r_a, r_b, r_c theo thứ tự là bán kính đ- ờng tròn bàng tiếp ứng với các góc có đỉnh A, B, C.
Chứng minh rằng: $r_a \sin\frac{A}{2} + r_b \sin\frac{B}{2} + r_c \sin\frac{C}{2} \leq \frac{r_a^3 + r_b^3 + r_c^3}{6}\left(\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2}\right)$.

Bài 21. Cho tam giác ABC có góc không nhọn với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$.

Bài 22. Cho tam giác ABC.
Trên các tia đối của tia BA, CA lấy các điểm E, F (khác B, C) theo thứ tự.
Đ- ờng thẳng BF cắt CE tại điểm M.

Chứng minh rằng: $\frac{MB}{MF}+\frac{MC}{ME}\geq 2\sqrt{\frac{AB.AC}{AF.AE}}$.
Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 23. Giả sử điểm *M* nằm trong tam giác nhọn *ABC*
có độ dài các cạnh là $BC = a$, $CA = b$ và $AB = c$.
Gọi *D*, *E*, *F* lần l- ợt là hình chiếu của *M* trên các cạnh *BC*, *CA*, *AB*.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a.ME.MF + b.MF.MD + c.MD.ME$
và xác định vị trí điểm *M* khi đó.

Bài 24. Trên đ- ờng tròn tâm *I* nội tiếp tam giác *ABC* lấy điểm *M*.
Gọi *K*, *H*, *J* lần l- ợt là hình chiếu của điểm *M* trên các đ- ờng thẳng *AB*, *BC*, *CA*.
Hãy xác định vị trí của điểm *M* để tổng $MK + MH + MJ$ đạt:
1) Giá trị lớn nhất.
2) Giá trị nhỏ nhất.

Bài 25. Cho tam giác *ABC* vuông tại *A*. Dựng hình chữ nhật *EFGD* sao cho *E*, *F* là các điểm trên cạnh *BC*, còn *G*, *D* lần l- ợt là các điểm trên cạnh *AC*, *AB*.
Gọi R_1, R_2 và R_3 là bán kính đ- ờng tròn nội tiếp các tam giác *BDE*, *CGF* và *ADG* theo thứ tự.
Chứng minh rằng: Diện tích *EFGD* lớn nhất khi và chỉ khi $R_1^2 + R_2^2 = R_3^2$.

Bài 26. Tam giác *ABC* có $\frac{1}{4}AC < AB < 4AC$. Một đ- ờng thẳng đi qua trọng tâm *G* của tam giác *ABC*, cắt các cạnh *AB*, *AC* lần l- ợt tại *E*, *F*.
Hãy xác định vị trí điểm *E* sao cho $AE + AF$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 27. Giả sử điểm *M* nằm trong tam giác *ABC*.
Gọi d_1, d_2, d_3 lần l- ợt là khoảng cách từ *M* tới các đ- ờng thẳng *BC*, *CA*, *AB*.
Gọi *R* và r t- ơng ứng là bán kính đ- ờng tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác *ABC*.
Chứng minh rằng: $\frac{MA.MB.MC}{d_1.d_2.d_3}\geq\frac{4R}{r}$.

Bài 28. Dây cung *DE* của đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*
cắt đ- ờng tròn nội tiếp tam giác này tại các điểm *M* và *N*.
Chứng minh rằng: $DE \geq 2MN$

Bài 29. Đ- ờng tròn tâm *I* bán kính *r* nội tiếp tam giác *ABC*.
Một tiếp tuyến của đ- ờng tròn tâm *I*
cắt đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* tại *M* và *N*.
Chứng minh rằng: $MN > 2r$.

Bài 30. Cho tam giác nhọn *ABC*, nội tiếp trong đ- ờng tròn tâm *O* bán kính *R*.
Gọi *D*, *E*, *F* lần l- ợt là giao điểm của các đ- ờng thẳng *AO* với *BC*, *BO* với *CA* và *CO* với *AB*.

Chứng minh rằng: $AD + BE + CF \geq \dfrac{9R}{2}$.

<u>Bài 31</u>. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi AD, BE, CF là các đ- ờng cao của tam giác đó. Các cặp đoạn thẳng AD và EF, BE và FD, CF và DE cắt nhau tại M, N, P theo thứ tự. Kí hiệu S là diện tích tam giác.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{S_{ABC}} \leq \dfrac{S_{MNP}}{S^2{}_{DEF}} \leq \dfrac{1}{8\cos A.\cos B.\cos C.S_{ABC}}$.

<u>Bài 32</u>. Cho tam giác ABC có $AB > AC$, chân đ- ờng cao AH nằm trong cạnh BC. Đ- ờng phân giác của góc $\angle ABC$ và góc $\angle ACB$ cắt AH theo thứ tự tại E và F. Chứng minh rằng: $BE > EF + FC$.

<u>Bài 33</u>. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đ- ờng tròn tâm I.
Gọi R và r lần l- ợt là bán kính đ- ờng tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác đó.

Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{IA.IB} + \dfrac{1}{IB.IC} + \dfrac{1}{IC.IA} \leq \dfrac{5R+2r}{8Rr^2}$.

<u>Bài 34</u>. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ nội tiếp đ- ờng tròn bán kính R. Gọi l_a, l_b, l_c là độ dài ba đ- ờng phân giác và r_a, r_b, r_c là bán kính các đ- ờng tròn bàng tiếp t- ơng ứng với các góc A, B, C.

Chứng minh rằng: $\dfrac{l_a^2 l_b^2 l_c^2}{a^2b^2c^2} \leq \left(\dfrac{r_a + r_b + r_c}{6R}\right)^3$.

<u>Bài 35</u>. Xét các tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$
có chu vi $a + b + c = 2p$ (không đổi).

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T = \dfrac{ab}{a+b+2c} + \dfrac{bc}{2a+b+c} + \dfrac{ca}{a+2b+c}$.

<u>Bài 36</u>. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$
sao cho thỏa mãn hệ thức $1964ab + 15bc + 10ca = 2006abc$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = \dfrac{1974}{p-a} + \dfrac{1979}{p-b} + \dfrac{25}{p-c}$,
trong đó p là nửa chu vi của tam giác ABC.

<u>Bài 37</u>. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ có diện tích S.
Gọi m_a, m_b, m_c lần l- ợt là độ dài các đ- ờng trung tuyến xuất phát từ A, B, C.

Chứng minh rằng: $S \leq \dfrac{a^2m_a^2 + b^2m_b^2 + c^2m_c^2}{\sqrt{3}\ \ a^2 + b^2 + c^2}$.

<u>Bài 38</u>. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ có diện tích S.

Chứng minh rằng: $S \leq \dfrac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 39. Cho tam giác *ABC* ngoại tiếp đ- ờng tròn tâm *I*.
Gọi m_a, m_b, m_c lần l- ợt là độ dài các đ- ờng trung tuyến xuất phát từ *A*, *B*, *C*.
Chứng minh rằng: $\frac{IA^2}{m_a^2}+\frac{IB^2}{m_b^2}+\frac{IC^2}{m_c^2}\le\frac{4}{3}$.

Bài 40. Cho tam giác *ABC* với *BC* = *a*, *CA* = *b*, *AB* = *c* ngoại tiếp đ- ờng tròn tâm *I*.
Đặt $IA = d_a, IB = d_b, IC = d_c$.
Chứng minh rằng: $\sqrt{a(bc-d_a^2)}+\sqrt{b(ca-d_b^2)}+\sqrt{c(ab-d_c^2)}\le\sqrt{6abc}$.

Bài 41. Cho tam giác *ABC* với *BC* = *a*, *CA* = *b*, *AB* = *c*
ngoại tiếp đ- ờng tròn tâm *I* bán kính *r*.
Gọi A_1, B_1, C_1 lần l- ợt là tiếp điểm của đ- ờng tròn *(I)* với các cạnh *BC*, *CA*, *AB*.
Các tia *IA*, *IB*, *IC* cắt đ- ờng tròn *(I)* tại A_2, B_2, C_2 theo thứ tự.
Đặt $B_iC_i = a_i, C_iA_i = b_i, A_iB_i = c_i$ (*i* = 1, 2).
Chứng minh rằng: $\frac{a_2^3b_2^3c_2^3}{a_1^2b_1^2c_1^2}\ge\frac{216r^6}{abc}$.
Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 42. Cho tam giác nhọn *ABC* có ba đ- ờng cao *AD*, *BE*, *CF* cắt nhau tại *H*
sao cho *AH* > *HD*, *BH* > *HE*, *CH* > *HF*.
Chứng minh rằng: $tg^2A+tg^2B+tg^2C>6$.

Bài 43. Cho tam giác *ABC*.
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $T=\sin A.\sin^2 B.\sin^3 C$.

Bài 44. Cho tam giác *ABC* có $\angle A\ge\angle B\ge\angle C$.
Gọi h_a, h_b, h_c lần l- ợt là chiều cao xuất phát từ đỉnh *A*, *B*, *C* của tam giác *ABC*.
Chứng minh rằng: $\frac{h_a^2}{h_b^2}+\frac{h_b^2}{h_c^2}+\frac{h_c^2}{h_a^2}\ge\frac{h_a}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}+\frac{h_c}{h_a}$.

Bài 45. Cho tam giác *ABC* với *BC* = *a*, *CA* = *b*, *AB* = *c*.
Gọi h_a, h_b, h_c lần l- ợt là chiều cao xuất phát từ đỉnh *A*, *B*, *C* và *p* là nửa chu vi
của tam giác *ABC*. Lấy điểm A_1 trên cạnh *BC* sao cho đ- ờng tròn
nội tiếp tam giác ABA_1, ACA_1 bằng nhau và gọi bán kính các đ- ờng tròn đó là r_A.
Ta cũng định nghĩa t- ơng tự cho r_B, r_C.
Chứng minh rằng: $2(r_A+r_B+r_C)+p\le h_a+h_b+h_c$.

Bài 46. Cho tam giác *ABC* không tù có các đ- ờng cao AA_1, BB_1, CC_1 và trực tâm *H*.
Chứng minh rằng: $HA^2+HA_1^2+HB^2+HB_1^2+HC^2+HC_1^2\ge\frac{5}{2}(HA.HA_1+HB.HB_1+HC.HC_1)$.

<u>Bài 47</u>. Cho tam giác nhọn ABC với trực tâm là H.

Chứng minh rằng: $\dfrac{HA}{BC}+\dfrac{HB}{CA}+\dfrac{HC}{AB}\geq\sqrt{3}$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

<u>Bài 48</u>. Cho BC là dây cung cố định (không là đ- ờng kính) của đ- ờng tròn.
Trên cung lớn BC lấy một điểm A bất kì không trùng với B và C.
Gọi H là trực tâm tam giác ABC.
Giao điểm thứ hai của đ- ờng thẳng BC với các đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác ABH và ACH lần l- ợt là E và F.
Đoạn thẳng EH cắt cạnh AC tại M, FH cắt cạnh AB tại N.
Hãy xác định vị trí điểm A sao cho độ dài đoạn MN là ngắn nhất.

<u>Bài 49</u>. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.
Lấy điểm M bất kì, gọi h_a, h_b, h_c lần l- ợt là các khoảng cách từ M đến các đ- ờng thẳng BC, CA, AB.
Tìm vị trí của điểm M để tích $h_a.h_b.h_c$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị lớn nhất đó theo a, b, c.

<u>Bài 50</u>. Gọi d_a, d_b, d_c lần l- ợt là độ dài các đ- ờng phân giác trong xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC và p là nửa chu vi tam giác đó.
Chứng minh rằng:

$$d_a.cos\frac{A}{2}+d_b.cos\frac{B}{2}+d_c.cos\frac{C}{2}\geq p(\cos A+cosB+cosC).$$

<u>Bài 51</u>. Cho tam giác ABC bất kì.
Chứng minh rằng:

1) $cosA+cosB+cosC+\cot gA+\cot gB+\cot gC\geq\dfrac{3}{2}+\sqrt{3}$.

2) $\sqrt{3}(cosA+cosB+cosC)+\cot g\dfrac{A}{2}+\cot g\dfrac{B}{2}+\cot g\dfrac{C}{2}\geq\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

<u>Bài 52</u>. Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp một đ- ờng tròn.
Điểm P chạy trên cung BC không chứa A.
Gọi M và N lần l- ợt là giao điểm của BC với PA và PD.
Tính độ dài lớn nhất của MN.

<u>Bài 53</u>. Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đ- ờng tròn bán kính R và ngoại tiếp đ- ờng tròn bán kính r.
Chứng minh rằng: $R\geq\sqrt{2}r$.

<u>Bài 54</u>. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M và N lần l- ợt là trung điểm của AD và BC, P là giao điểm của AN và BM, Q là giao điểm của DN và CM.

Chứng minh rằng: $\dfrac{PA}{PN}+\dfrac{PB}{PM}+\dfrac{QC}{QM}+\dfrac{QD}{QN}>4$.
Đẳng thức xảy ra khi nào?

<u>Bài 55</u>. Cho tứ giác lồi $ABCD$.
Gọi E và F lần l- ợt là trung điểm AD và BC. AF cắt BE tại M, CE cắt DF tại N.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\dfrac{MA}{MF}+\dfrac{MB}{ME}+\dfrac{NC}{NE}+\dfrac{ND}{NF}$.

<u>Bài 56</u>. Cho tứ giác lồi $ABCD$.

Chứng minh rằng: $\min\ AB,BC,CD,DA \le \dfrac{\sqrt{AC^2+BD^2}}{2} \le max\ AB,BC,CD,DA$.

<u>Bài 57</u>. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có đ- ờng tròn nội tiếp.
Gọi M, N, P, Q theo thứ tự là điểm tiếp xúc của đ- ờng tròn nội tiếp
với các cạnh AB, BC, CD, DA.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T=\dfrac{AM^2}{x_1x_2}+\dfrac{BN^2}{x_2x_3}+\dfrac{CP^2}{x_3x_4}+\dfrac{DQ^2}{x_4x_1}$, trong
đó x_1,x_2,x_3,x_4 là một hoán vị của độ dài các cạnh $a=AB, b=BC, c=CD, d=DA$.

<u>Bài 58</u>. Cho hình bình hành $ABCD$ và điểm T nằm trên cạnh AB.
Đ- ờng thẳng qua T song song với AD, cắt AC tại M và cắt BD tại N.
Đoạn thẳng TD cắt AC tại P và TC cắt BD tại Q.
Chứng minh rằng: $\dfrac{MP}{AC}+\dfrac{NQ}{BD}\ge\dfrac{1}{3}$.
Đẳng thức xảy ra khi nào?

<u>Bài 59</u>. Cho đa giác đều n cạnh $A_1A_2...A_n$ nội tiếp đ- ờng tròn có bán kính bằng 1.
Lấy điểm M trên cung nhỏ A_1A_n.
Chứng minh rằng:

1) $MA_1+MA_3+...+MA_{n-2}+MA_n<\dfrac{n}{\sqrt{2}}$, nếu n lẻ.

2) $MA_1+MA_3+...+MA_{n-3}+MA_{n-1}\le\dfrac{n}{\sqrt{2}}$, nếu n chẵn.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

<u>Bài 60</u>. Cho đ- ờng tròn (O) bán kính R và dây cung $BC<2R$.
Điểm A chuyển động trên cung lớn BC, điểm D chuyển động trên cung nhỏ BC.
Hãy xác định vị trí của điểm A và D để tổng $\dfrac{1}{DA}+\dfrac{1}{DB}+\dfrac{1}{DC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

<u>Bài 61</u>. Đ- ờng tròn tâm O bán kính R
và đ- ờng tròn tâm O' bán kính R' ($R>R'$) tiếp xúc ngoài tại điểm A.

Góc vuông xAy cắt hai đ- ờng tròn ở các điểm B và C (khác A).
Gọi H là hình chiếu của A trên đ- ờng thẳng BC.
Hãy xác định vị trí các điểm B, C để độ dài AH lớn nhất và tính giá trị đó theo R, R'.

<u>Bài 62</u>. Cho hai đ- ờng tròn đồng tâm (O,r) và (O,R) với $r < R$.
Tam giác ABC nội tiếp đ- ờng tròn (O,r) và tam giác $A_1B_1C_1$ nội tiếp đ- ờng tròn (O,R) sao cho các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các tia BC, CA, AB.

Chứng minh rằng: $\dfrac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} \geq \left(\dfrac{R}{r}\right)^2$, trong đó $S(XYZ)$ là diện tích của tam giác XYZ.

<u>Bài 63</u>. Gọi R và r lần l- ợt là bán kính của đ- ờng tròn
ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC.
Gọi h_a, h_b, h_c theo thứ tự là độ dài các đ- ờng cao hạ từ các đỉnh A, B, C.
Gọi l_a, l_b, l_c theo thứ tự là độ dài các đ- ờng phân giác hạ từ các đỉnh A, B, C.
Chứng minh rằng: $\dfrac{h_a}{l_a} + \dfrac{h_b}{l_b} + \dfrac{h_c}{l_c} \geq 1 + \dfrac{4r}{R}$.

<u>Bài 64</u>. Gọi R và r lần l- ợt là bán kính của đ- ờng tròn
ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC.
Gọi p và p' lần l- ợt là nửa chu vi của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ t- ơng ứng, trong đó A', B', C' là các tiếp điểm của đ- ờng tròn nội tiếp
với các cạnh của tam giác ABC.
Chứng minh rằng: $\dfrac{r}{R} \leq \dfrac{p'}{p} \leq \dfrac{1}{2}$.

<u>Bài 65</u>. Gọi R và r lần l- ợt là bán kính của đ- ờng tròn
ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC.
Chứng minh rằng: $\cos A.\cos B.cosC \leq \dfrac{r^2}{2R^2}$.
Đẳng thức xảy ra khi nào?

<u>Bài 66</u>. Đ- ờng tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc
với các cạnh BC, CA, AB t- ơng ứng tại D, E, F.
Chứng minh rằng: $\dfrac{DE}{\sqrt{BC.CA}} + \dfrac{EF}{\sqrt{CA.AB}} + \dfrac{FD}{\sqrt{AB.BC}} \leq \dfrac{3}{2}$.

<u>Bài 67</u>. Một đ- ờng thẳng đi qua tâm đ- ờng tròn nội tiếp tam giác ABC,
cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại M, N.
Chứng minh rằng: $\dfrac{BM.CN}{AM.AN} \leq \dfrac{BC^2}{4.AB.AC}$.

<u>Bài 68</u>. Đ- ờng tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC,
tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB t- ơng ứng tại D, E, F.

Đ- ờng thẳng qua A vuông góc với IA
cắt các đ- ờng thẳng DE, DF t- ơng ứng tại M, N.
Đ- ờng thẳng qua B vuông góc với IB cắt các đ- ờng thẳng EF, ED t- ơng ứng tại P, Q.
Đ- ờng thẳng qua C vuông góc với IC cắt các đ- ờng thẳng FD, FE t- ơng ứng tại S, T.
Chứng minh rằng: $MN + PQ + ST \geq AB + BC + CA$.

<u>Bài 69</u>. Đ- ờng tròn (I) bán kính r nội tiếp tam giác $A_1A_2A_3$ tiếp xúc
với các cạnh A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 tại M_1, M_2, M_3 theo thứ tự.
Vẽ các đ- ờng tròn (I_i) tiếp xúc với các cạnh A_iA_j, A_iA_k và tiếp xúc ngoài
với đ- ờng tròn (I) (với i, j, k đôi một khác nhau nhận giá trị 1, 2, 3).
Gọi $K_1K_2K_3$ theo thứ tự là tiếp điểm của đ- ờng tròn (I_1) với A_1A_2,
của đ- ờng tròn (I_2) với A_2A_3, của đ- ờng tròn (I_3) với A_3A_1.
Đặt $A_iI_i = a_i, A_iK_i = b_i$ (i = 1, 2, 3).
Chứng minh rằng: $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3}(a_i + b_i) \geq 2 + \sqrt{3}$.
Đẳng thức xảy ra khi nào?

<u>Bài 70</u>. Cho nửa đ- ờng tròn đ- ờng kính AB và một điểm C cố định
thuộc đoạn AB (C khác A, B). Lấy điểm M trên nửa đ- ờng tròn.
Đ- ờng thẳng qua M, vuông góc với MC, lần l- ợt cắt các tiếp tuyến qua A và B
của nửa đ- ờng tròn tại E và F.
Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác CEF
khi M di chuyển trên nửa đ- ờng tròn.

<u>Bài 71</u>. Cho tam giác ABC và hai điểm E, D lần l- ợt trên hai cạnh AB, AC
sao cho $\frac{AE}{BE} = \frac{CD}{AD}$. Gọi giao điểm của BD và CE là M.
Xác định vị trí của E, D sao cho diện tích của tam giác BMC đạt giá trị lớn nhất
và tính giá trị lớn nhất đó theo diện tích của tam giác ABC.

<u>Bài 72</u>. Cho $\angle xPy = 30^0$.
Trên tia Px lấy điểm A và trên tia Py lấy điểm B sao cho $AB = d$ không đổi.
Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tam giác PAB, của diện tích tam giác PAB
khi A, B di động trên các cạnh của $\angle xPy$.

<u>Bài 73</u>. Trong mặt phẳng cho đ- ờng tròn tâm O bán kính r.
Lấy điểm P cố định nằm bên trong đ- ờng tròn với $OP = d > 0$.
Hai dây cung AB và CD đi qua điểm P tạo thành một góc α không đổi ($0^0 < \alpha \leq 90^0$).
Tính giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của tổng $AB + CD$
khi hai dây AB, CD thay đổi và xác định vị trí của các dây AB, CD đó.

$ 4- Một số bài toán chứng minh.

Bài 1. Tam giác ABC có các đ- ờng phân giác trong AD, BE, CF cắt nhau tại điểm Q.
Chứng minh rằng: Nếu bán kính các đ- ờng tròn nội tiếp
các tam giác AQF, BQD, CQE bằng nhau thì tam giác ABC đều.

Bài 2. Tam giác ABC có các đ- ờng trung tuyến AD, BE, CF.
Chứng minh rằng: Nếu bán kính các đ- ờng tròn nội tiếp
các tam giác BCE, CAF, ABD bằng nhau thì tam giác ABC đều.

Bài 3. Tam giác ABC không vuông có các đ- ờng cao AD, BE, CF.
Gọi I, J, K lần l- ợt là tâm đ- ờng tròn bàng tiếp trong các góc $\angle EAF, \angle FDB, \angle EDC$
của các tam giác AEF, BFD, CDE t- ơng ứng. Đ- ờng tròn bàng tiếp trong góc $\angle BAC$
của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần l- ợt tại M, N, P.
Chứng minh rằng: Tâm đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác IJK
là trực tâm của tam giác MNP.

Bài 4. Tam giác ABC nhọn có các đ- ờng cao AD, BE, CF và trực tâm H.
Gọi M, N lần l- ợt là giao điểm của các cặp đ- ờng thẳng (DE, CF) và (DF, BE).
Chứng minh rằng: Đ- ờng thẳng qua A, vuông góc với đ- ờng thẳng MN
đi qua tâm đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác BHC.

Bài 5. Cho tam giác ABC không đều.
Trên các cạnh BC, CA, AB lần l- ợt lấy các điểm A', B', C' sao cho $\frac{BA'}{BC} = \frac{CB'}{CA} = \frac{AC'}{AB}$.
Chứng minh rằng:
Nếu bán kính các đ- ờng tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$
bằng nhau thì các điểm A', B', C' theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB.

Bài 6. Tam giác ABC có các đ- ờng phân giác trong BM và CN
(M thuộc AC, N thuộc AB) cắt nhau tại D.
Chứng minh rằng: Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $2BD.CD = BM.CN$.

Bài 7. Cho tam giác vuông cân ABC với $\angle ABC = 90^0$. Gọi I là tâm đ- ờng tròn
nội tiếp tam giác, M là trung điểm của AC. Đ- ờng thẳng MI cắt AB tại N.
Gọi E là trung điểm của IN, F là điểm trên cạnh BC sao cho $FC = 3FB$.
Đ- ờng thẳng EF cắt AB tại D, cắt đ- ờng thẳng AC tại K.
Hãy chứng minh tam giác ADK cân.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại C với đ- ờng cao CD và có diện tích S.
Vẽ đ- ờng tròn tâm O đ- ờng kính AB. Hai đ- ờng tròn tâm O_1 và O_2 tiếp xúc với
đoạn AB lần l- ợt tại E và F, tiếp xúc với đoạn CD và tiếp xúc với đ- ờng tròn tâm O.
Chứng minh rằng: $S = \frac{AD.BD.AE.BF}{2ED.FD}$

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông cân tại A.
Gọi M là trung điểm của BC, G là điểm trên cạnh AB sao cho $GB = 2GA$.

Các đ- ờng thẳng GM và CA cắt nhau tại D.
Đ- ờng thẳng qua M vuông góc với CG tại E và cắt AC tại K.
Gọi P là giao điểm của DE và GK.
Chứng minh rằng:

1) $DE = BC$.
2) $PG = PE$.

Bài 10. Cho tam giác ABC với $\angle BAC$ không vuông và $\angle ABC$ khác 135^0.
Gọi M là trung điểm của BC. Về phía ngoài tam giác ABC vẽ tam giác ABD vuông cân đáy AB. Đ- ờng thẳng qua A vuông góc với AB và đ- ờng thẳng qua C, song song với MD cắt nhau tại E. Đ- ờng thẳng AB cắt CE tại P và cắt DM tại Q.
Chứng minh rằng: Q là trung điểm của BP.

Bài 11. Gọi M là điểm nằm trên phân giác trong AD của tam giác ABC (M khác A, D). Tia BM cắt cạnh AC tại E, tia CM cắt cạnh AB tại F và biết rằng : $\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AF^2}$.
Hãy chứng minh tam giác ABC cân.

Bài 12. Cho tam giác ABC với M là trung điểm của BC. Đ- ờng phân giác ngoài của góc A cắt đ- ờng thẳng BC tại điểm D. Đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt các đ- ờng thẳng AB và AC lần l- ợt ở E và F. Gọi N là trung điểm của EF.
Chứng minh rằng: $MN \parallel AD$.

Bài 13. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đ- ờng tròn tâm O. Một đ- ờng thẳng d đi qua điểm O lần l- ợt tạo với các đ- ờng thẳng OA, OB, OC các góc nhọn α, β, γ.
Chứng minh rằng: Giá trị của biểu thức $T = \sin 4A.\sin^2\alpha + \sin 4B.\sin^2\beta + \sin 4C.\sin^2\gamma$ là không đổi khi đ- ờng thẳng d quay quanh điểm O.

Bài 14. Cho tam giác ABC nhọn có các đ- ờng cao AD, BE, CF và O là tâm đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB.
Gọi điểm đối xứng của D qua M là D', của E qua N là E', của F qua P là F'.
Chứng minh rằng: Điểm O nằm trong tam giác $D'E'F'$.

Bài 15. Đ- ờng tròn tâm I bán kính r tiếp xúc với ba cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ của tam giác ABC lần l- ợt ở các điểm M, N, P.
Gọi S là diện tích tam giác ABC và h_a, h_b, h_c là độ dài đ- ờng cao của tam giác ABC t- ơng ứng với các đỉnh A, B, C.
Chứng minh rằng:

1) $4S^2 = ab.MN^2 + bc.NP^2 + ca.PM^2$.
2) $\frac{MN^2}{h_a h_b}+\frac{NP^2}{h_b h_c}+\frac{PM^2}{h_c h_a}=1.$

Bài 16. Gọi P là trung điểm cạnh BC của tam giác ABC và BE, CF là hai đ- ờng cao.
Đ- ờng thẳng qua A, vuông góc với PF, cắt đ- ờng thẳng CF tại M.

Đ- ờng thẳng qua A, vuông góc với PE, cắt đ- ờng thẳng BE tại N.
Gọi K và G lần l- ợt là trung điểm của BM và CN.
Gọi H là giao điểm của đ- ờng thẳng KF và GE.
Chứng minh rằng: $AH \perp EF$.

<u>Bài 17</u>. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đ- ờng tròn *(O)*.
Tia phân giác của góc $\angle BAC$ cắt đ- ờng tròn *(O)* tại A và D.
Đ- ờng tròn tâm D bán kính DB cắt đ- ờng thẳng AB tại B và Q,
cắt đ- ờng thẳng AC tại C và P.
Chứng minh rằng: $OA \perp PQ$.

<u>Bài 18</u>. Cho tam giác ABC vuông ở A và đ- ờng cao AH. Một đ- ờng tròn
đi qua B và C cắt AB và AC lần l- ợt tại M và N. Vẽ hình chữ nhật $AMDC$.
Chứng minh rằng: $HN \perp HD$.

<u>Bài 19</u>. Gọi AH và r lần l- ợt là đ- ờng cao và bán kính đ- ờng tròn
nội tiếp tam giác ABC.
Gọi p_1 là nửa chu vi tam giác ABH và r_1 là bán kính đ- ờng tròn nội tiếp của nó.
Gọi p_2 là nửa chu vi tam giác ACH và r_2 là bán kính đ- ờng tròn nội tiếp của nó.
Chứng minh rằng: Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $r = \dfrac{p_1r_1 + p_2r_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$.

<u>Bài 20</u>. Cho tam giác đều ABC có cạnh $AB = a$. Một đ- ờng thẳng đi qua trọng tâm G
của tam giác, cắt các đ- ờng thẳng BC, CA, AB lần l- ợt tại M, N, P.
Chứng minh rằng: $\dfrac{1}{GM^4} + \dfrac{1}{GN^4} + \dfrac{1}{GP^4}$ là không đổi.

<u>Bài 21</u>. Từ điểm G nằm trong tam giác ABC lần l- ợt kẻ các đ- ờng thẳng vuông góc
với BC, CA, AB tại D, E, F.
Trên các tia GD, GE, GF lấy các điểm A_1, B_1, C_1 t- ơng ứng sao cho $\dfrac{GA_1}{BC} = \dfrac{GB_1}{CA} = \dfrac{GC_1}{AB}$.
Chứng minh rằng: G là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$.

<u>Bài 22</u>. Cho tam giác ABC với góc A tù.
Gọi D và E là chân đ- ờng vuông góc hạ từ C tới AB và từ B tới AC theo thứ tự.
Gọi M và N lần l- ợt là chân đ- ờng vuông góc hạ từ B và C tới DE.
Chứng minh rằng: $S_{ABC} = S_{ADE} + S_{BEM} + S_{CDN}$.

<u>Bài 23</u>. Cho tam giác ABC với góc A vuông và đ- ờng cao AH.
Đ- ờng phân giác của góc $\angle BAH$ cắt BH tại E.
Từ trung điểm M của AB kẻ ME cắt đ- ờng thẳng AH tại F.
Chứng minh rằng: CF // AE.

<u>Bài 24</u>. Cho tam giác ABC với góc C tù và $\angle BAC = 2\angle ABC$.
Đ- ờng thẳng qua B vuông góc với BC cắt đ- ờng thẳng AC tại D.

Gọi M là trung điểm của AB.
Chứng minh rằng: $\angle AMC = \angle BMD$.

Bài 25. Tam giác ABC có $\angle ABC = 30^0, \angle ACB = 20^0$.
Đ- ờng trung trực của AC cắt BC ở E và cắt tia BA ở F.
Chứng minh rằng: $AF = EF$ và $AC = BE$.

Bài 26. Tam giác ABC có $\angle ABC = 70^0, \angle ACB = 50^0$.
Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $\angle ABM = 20^0$.
Trên cạnh AB lấy điểm N sao cho $\angle ACN = 10^0$.
Gọi P là giao điểm của BM và CN.
Chứng minh rằng: $MN = 2PM$.

Bài 27. Cho tam giác ABC.
Các điểm E, F theo thứ tự nằm trên các cạnh AC, AB
sao cho $\angle ABE = \frac{1}{3}\angle ABC, \angle ACF = \frac{1}{3}\angle ACB$.
Gọi O là giao điểm của BE và CF sao cho $OE = OF$.
Chứng minh rằng: $AB = AC$ hoặc $\angle BAC = 90^0$.

Bài 28. Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 135^0$ và AM, BN là các đ- ờng cao.
Đ- ờng thẳng MN cắt đ- ờng trung trực của AC tại P.
Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của NP và BC.
Chứng minh rằng: Tam giác ADE vuông cân.

Bài 29. Tam giác ABC có độ dài các cạnh là $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.
Gọi h_a, h_b, h_c lần l- ợt là độ dài các đ- ờng cao AA', BB', CC'.
Chứng minh rằng: Tam giác ABC đều khi và chỉ khi
$$\sqrt{a+h_a} + \sqrt{b+h_b} + \sqrt{c+h_c} = \sqrt{a+h_b} + \sqrt{b+h_c} + \sqrt{c+h_a}.$$

Bài 30. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và $\angle B > \angle C$.
Chứng minh rằng: Điều kiện cần và đủ để $\angle A = 2(\angle B - \angle C)$ là $(b-c)(b+c)^2 = a^2 b$.

Bài 31. Tam giác ABC với $BC = a$, $AB = CA = b$ có đ- ờng phân giác góc $\angle ACB$ cắt cạnh AB tại D sao cho $CD + DA = a$.
Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Bài 32. Tam giác ABC với $BC = a$, $AB = CA = b$ ($a > b$).
Đ- ờng phân giác BD có độ dài bằng cạnh bên.
Chứng minh rằng: $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) = 1$.

Bài 33. Tam giác ABC có $AB = AC$, $\angle BAC = 90^0$ và M là trung điểm của BC.
Trên tia BC lấy điểm D (D khác B, M). Kẻ BK vuông góc với AD tại K.

Chứng minh rằng: KM là phân giác trong hoặc phân giác ngoài của tam giác BKD tại đỉnh K.

<u>Bài 34</u>. Tam giác ABC vuông tại B với $AB = 2BC$.
Lấy điểm D thuộc cạnh AC sao cho $BC = CD$, điểm E thuộc cạnh AB sao cho $AD = AE$.
Chứng minh rằng: $AD^2 = AB.BE$.

<u>Bài 35</u>. Tam giác ABC có $BC = 2AB$.
Gọi M là trung điểm của BC và D là trung điểm của BM.
Chứng minh rằng: $AC = 2AD$.

<u>Bài 36</u>. Cho tam giác ABC với đ- ờng trung tuyến AM.
Gọi I và J theo thứ tự là giao điểm của các đ- ờng phân giác trong của các tam giác ABM và ACM.
Chứng minh rằng: $MI = MJ$ khi và chỉ khi $AB = AC$.

<u>Bài 37</u>. Cho tam giác ABC với đ- ờng phân giác AM (điểm M thuộc BC).
Đ- ờng thẳng qua M vuông góc với BC cắt đ- ờng thẳng AB tại N.
Chứng minh rằng: $\angle BAC$ vuông khi và chỉ khi $MN = MC$.

<u>Bài 38</u>. Cho tam giác ABC có hai đ- ờng cao BE và CF.
Chứng minh rằng: Tam giác ABC cân tại A khi và chỉ khi $AB + BE = AC + CF$.

<u>Bài 39</u>. Cho tam giác ABC có góc A nhọn và $AC = 2AB$.
Đ- ờng phân giác AD cắt đ- ờng cao BH tại K (D thuộc BC, H thuộc AC).
Đ- ờng thẳng CK cắt AB tại E.
Chứng minh rằng: Tam giác ABC vuông tại B khi và chỉ khi diện tích hai tam giác BDE và HDE bằng nhau.

<u>Bài 40</u>. Cho tam giác ABC có góc B nhọn.
Cho K là một điểm thuộc cạnh AB và H là hình chiếu vuông góc của nó trên BC.
Một tia Bx cắt đoạn KH tại E, cắt đ- ờng thẳng đi qua K và song song với BC tại F.
Chứng minh rằng: $\angle ABC = 3\angle CBF$ khi và chỉ khi $EF = 2BK$.

<u>Bài 41</u>. Cho tam giác ABC đều có điểm N trên cạnh AB, điểm M trên cạnh AC sao cho $AN > BN$ và $AM > CM$. Đ- ờng thẳng BM cắt CN tại H.
Gọi P và Q lần l- ợt là trực tâm của tam giác ABM và tam giác ACN.
Chứng minh rằng: $BN = CM$ khi và chỉ khi $HP = HQ$.

<u>Bài 42</u>. Cho tam giác đều ABC. Gọi D là điểm đối xứng của B qua đ- ờng thẳng AC.
Đ- ờng thẳng qua B cắt các đ- ờng thẳng AD, CD lần l- ợt tại M, N.
Các đ- ờng thẳng AN và CM cắt nhau tại điểm E.
Chứng minh rằng: Bốn điểm A, C, D, E cùng nằm trên một đ- ờng tròn.

<u>Bài 43</u>. Cho tam giác ABC với đ- ờng cao AH.
Gọi M và N lần l- ợt là chân đ- ờng vuông góc hạ từ H đến AB và AC

thỏa mãn $BM = CN$.
Chứng minh rằng: Tam giác ABC cân đỉnh A.

Bài 44. Cho tam giác ABC với trực tâm H (H khác A, B, C)
và M là trung điểm của BC.
Đ- ờng thẳng đi qua H vuông góc với HM cắt đ- ờng thẳng AB ở E
và cắt đ- ờng thẳng AC ở F.
Chứng minh rằng: Tam giác MEF cân đỉnh M.

Bài 45. Cho tam giác ABC vuông cân đỉnh A.
Gọi M và N lần l- ợt là trung điểm của AB và AC.
Kẻ NH vuông góc với CM tại H.
Kẻ HE vuông góc với AB tại E.
Chứng minh rằng: Tam giác ABH cân và HM là phân giác của góc BHE.

Bài 46. Cho tứ giác lồi $ABCD$ với E là giao điểm của hai đ- ờng thẳng AB, CD và F
là giao điểm của hai đ- ờng thẳng AD, BC.
Hai đ- ờng chéo AC, BD cắt nhau tại điểm O.
Gọi M, N, P, Q lần l- ợt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.
Gọi H, K là giao điểm các đ- ờng thẳng OF và MP, OE và NQ theo thứ tự.
Chứng minh rằng: $HK \parallel EF$.

Bài 47. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có hai đ- ờng chéo CA và DB cắt nhau tại O.
Hai điểm G_1, G_2 t- ơng ứng là trọng tâm các tam giác OAB, OCD; H_1, H_2 t- ơng ứng
là trực tâm các tam giác OBC, ODA.
Chứng minh rằng: $G_1G_2 \perp H_1H_2$.

Bài 48. Cho tứ giác lồi $ABCD$ sao cho hai đ- ờng chéo CA và DB
là các đ- ờng phân giác của các góc $\angle BCD$ và $\angle ADC$.
Gọi E là giao điểm của CA và DB.
Chứng minh rằng: $EC.ED = EA.EB + EA.ED + EB.EC$ khi và chỉ khi $\angle AED = 45^0$.

Bài 49. Cho tứ giác lồi $ABCD$ sao cho hai đ- ờng chéo CA và DB vuông góc với nhau.
Hai đ- ờng thẳng BC và AD cắt nhau tại I.
Hai đ- ờng thẳng AB và CD cắt nhau tại J.
Chứng minh rằng:
Tứ giác $BDIJ$ nội tiếp một đ- ờng tròn khi và chỉ khi $AB.CD = AD.BC$.

Bài 50. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AB > BC$ và ngoại tiếp đ- ờng tròn tâm O.
Gọi E, F là giao điểm của BD với đ- ờng tròn.
Đ- ờng thẳng qua O vuông góc với AC tại H.
Chứng minh rằng: $\angle BHE = \angle DHF$.

Bài 51. Cho tứ giác lồi *ABCD* nội tiếp trong một đ- ờng tròn sao cho đ- ờng tròn đ- ờng kính *CD* cắt các đoạn thẳng *AC*, *AD*, *BC*, *BD* lần l- ợt tại A_1, A_2, B_1, B_2 và đ- ờng tròn đ- ờng kính *AB* cắt các đoạn thẳng *CA*, *CB*, *DA*, *DB* lần l- ợt tại C_1, C_2, D_1, D_2.
Chứng minh rằng:
Tồn tại một đ- ờng tròn tiếp xúc với bốn đ- ờng thẳng sau: $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$.

Bài 52. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp trong đ- ờng tròn (*O*) có *AB* không song song với *CD* và hai đ- ờng chéo cắt nhau tại *I*.
Gọi *M* và *N* lần l- ợt là trung điểm của *BC* và *CD*.
Chứng minh rằng: Nếu $NI \perp AB$ thì $MI \perp AD$.

Bài 53. Cho tứ giác lồi *MNPQ* nội tiếp trong một đ- ờng tròn và *MP* cắt *NQ* tại *E*.
Lấy điểm *K* nằm trong đoạn *ME*. Tiếp tuyến tại *E* với đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác *NEK* cắt các đ- ờng thẳng *QM* và *QP* lần l- ợt tại *F* và *G*.
Chứng minh rằng: $\frac{EG}{EF} = \frac{KP}{KM}$.

Bài 54. Giả sử tứ giác *ABCD* nội tiếp đ- ờng tròn tâm *O* bán kính *R*.
Các đ- ờng thẳng *AB* và *CD* cắt nhau tại *P*, *AD* và *BC* cắt nhau tại *Q*.
Chứng minh rằng: $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} = R^2$.

Bài 55. Cho tứ giác *ABCD* nội tiếp đ- ờng tròn tâm *O* bán kính *R* và các tia đối của các tia *BA*, *DA*, *CB*, *CD* cùng tiếp xúc với một đ- ờng tròn tâm *I* bán kính *r*.
Đặt *d* = *OI*.
Chứng minh rằng: $\frac{1}{(d+R)^2} + \frac{1}{(d-R)^2} = \frac{1}{r^2}$.

Bài 56. Cho tứ giác lồi *ABCD*. Trên các đ- ờng thẳng *BC*, *AD* lấy các điểm *E*, *F* theo thứ tự sao cho *AE* // *CD*, *CF* // *AB*.
Chứng minh rằng:
Tứ giác *ABCD* ngoại tiếp một đ- ờng tròn khi và chỉ khi tứ giác *AECF* ngoại tiếp.

Bài 57. Cho tứ giác lồi *ABCD*.
Gọi *O* là trung điểm của cạnh *BC* và *E* là điểm đối xứng của *D* qua *O*.
Một điểm *M* di động trên cạnh *AD*, đ- ờng thẳng *EM* cắt *OA* tại *I*.
Từ *I* kẻ đ- ờng thẳng song song với *BC* cắt *AB* và *AC* lần l- ợt tại *K* và *H*.
Chứng minh rằng: Biểu thức $T = \frac{AB}{AK} + \frac{AC}{AH} - \frac{AD}{AM}$ có giá trị không đổi.

Bài 58. Cho hình thang *ABCD* với *AB* // *CD* và $AB \perp BD$.
Hai đ- ờng chéo *AC* và *BD* cắt nhau tại *G*. Trên đ- ờng thẳng *CE* vuông góc với *AC* lấy điểm *E* sao cho *CE* = *AG* và đoạn thẳng *GE* không cắt đ- ờng thẳng *CD*.
Trên tia *DC* lấy điểm *F* sao cho *DF* = *GB*.
Chứng minh rằng: $GF \perp EF$.

Bài 59. Cho hình bình hành $ABCD$ có $\angle BAD$ tù.
Trong miền $\angle BAD$, dựng tam giác ADE vuông cân đỉnh D,
tam giác ABF vuông cân đỉnh B.
Gọi M là trung điểm của EF.
Đoạn MB cắt CF tại K, đoạn MD cắt CE tại H.
Chứng minh rằng: $HK // BD$.

Bài 60. Cho hình chữ nhật $ABCD$.
Đ- ờng thẳng vuông góc với AC tại C cắt các đ- ờng thẳng AB, AD lần l- ợt tại E, F.
Chứng minh rằng: $BE.\sqrt{CF} + DF.\sqrt{CE} = AC.\sqrt{EF}$.

Bài 61. Cho hình vuông $ABCD$.
Trên các cạnh CB và CD lần l- ợt lấy các điểm E và F
sao cho $\frac{BE}{BC} = k$ và $\frac{DF}{DC} = \frac{1-k}{1+k}$ với $0 < k < 1$.
Đoạn thẳng BD cắt AE và AF tại H và G t- ơng ứng.
Đ- ờng vuông góc với EF kẻ từ A cắt BD tại P.
Chứng minh rằng: $\frac{PG}{PH} = \frac{DG}{BH}$.

Bài 62. Cho hình vuông $ABCD$.
Hai đ- ờng chéo cắt nhau tại E.
Một đ- ờng thẳng nào đó đi qua A,
cắt đ- ờng thẳng BC tại M và cắt đ- ờng thẳng CD tại N.
Gọi K là giao điểm của các đ- ờng thẳng EM và BN.
Chứng minh rằng: $CK \perp BN$.

Bài 63. Ta gọi đ- ờng chéo chính của một lục giác lồi là đoạn thẳng nối hai đỉnh và chia lục giác thành hai tứ giác.
Chứng minh rằng:
1) Với bất kì lục giác lồi có độ dài các cạnh đều bằng 1 thì tồn tại đ- ờng chéo chính có độ dài không lớn hơn 2.
2) Với bất kì lục giác lồi có độ dài các cạnh đều bằng 1 thì tồn tại đ- ờng chéo chính có độ dài lớn hơn $\sqrt{3}$.

Bài 64. Chứng minh rằng:
Trong một đa giác luôn tồn tại ít nhất hai cạnh có độ dài a, b thỏa mãn $a \le b \le 2a$.

Bài 65. Từ một điểm P nằm ngoài một đ- ờng tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến PA, PB.
Gọi M và N lần l- ợt là trung điểm của AP và OP.
Đ- ờng thẳng BM cắt đ- ờng tròn lần nữa tại K.
Chứng minh rằng: $KN \perp KA$.

Bài 66. Hai đ- ờng tròn tâm O và O' cắt nhau tại P và Q.
Tiếp tuyến chung của chúng gần P tiếp xúc với đ- ờng tròn (O) tại A
và với đ- ờng tròn (O') tại B.
Tiếp tuyến của (O) tại P cắt (O') tại C và tiếp tuyến của (O') tại P cắt (O) tại D.
Gọi M là điểm đối xứng của P qua điểm giữa của AB.
Đ- ờng thẳng AP cắt BC tại E và đ- ờng thẳng BP cắt AD tại F.
Chứng minh rằng: Lục giác $AMBEQF$ nội tiếp một đ- ờng tròn.

Bài 67. Hai đ- ờng tròn tâm O bán kính R và O' bán kính R'
cắt nhau tại hai điểm A, B.
Tiếp tuyến với đ- ờng tròn (O) tại A cắt đ- ờng tròn (O') tại C.
Tiếp tuyến với đ- ờng tròn (O') tại A cắt đ- ờng tròn (O) tại D.
Gọi M là giao điểm của hai đ- ờng thẳng AB và CD.
Gọi N là trung điểm của CD.
Chứng minh rằng: $\angle CAM = \angle DAN$ và $\dfrac{MC}{MD} = \dfrac{R'^2}{R^2}$.

Bài 68. Gọi p, R và r lần l- ợt là nửa chu vi, bán kính đ- ờng tròn
ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC .
Chứng minh rằng: Tam giác ABC đều khi và chỉ khi $p^2 = 6R^2 + 3r^2$.

Bài 69. Gọi p, R, r lần l- ợt là nửa chu vi, bán kính đ- ờng tròn
ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC.
Chứng minh rằng: Tam giác ABC đều khi và chỉ khi $108Rr = 7p^2 + 27r^2$.

Bài 70. Gọi A và B là các giao điểm của hai đ- ờng tròn
tâm O bán kính R và tâm O' bán kính R'.
Tiếp tuyến chung của hai đ- ờng tròn này tiếp xúc
với đ- ờng tròn tâm O và O' lần l- ợt tại T và T'.
Chứng minh rằng:
Điểm B là trọng tâm của tam giác ATT' khi và chỉ khi $OO' = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(R + R')$.

Bài 71. Trên một đ- ờng thẳng lấy ba điểm A, B, C theo thứ tự.
Từ điểm A kẻ các tiếp tuyến AD, AE
với đ- ờng tròn đ- ờng kính BC (D, E là các tiếp điểm).
Kẻ $DH \perp CE$ tại H. Gọi P là trung điểm của DH.
Đ- ờng thẳng CP cắt đ- ờng tròn lần nữa tại Q.
Chứng minh rằng: Đ- ờng tròn đi qua ba điểm A, D, Q tiếp xúc với đ- ờng thẳng AC.

Bài 72. Đ- ờng tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc
với các cạnh BC, CA, AB t- ơng ứng tại D, E, F.
Gọi H là hình chiếu của D trên EF.
Chứng minh rằng: $\angle BHD = \angle CHD$.

Bài 73. Gọi AD, BE, CF là ba đ- ờng cao của tam giác nhọn ABC.
Gọi R và r lần l- ợt là bán kính đ- ờng tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và DEF.
Chứng minh rằng: $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C = 2+\frac{r}{R}$.

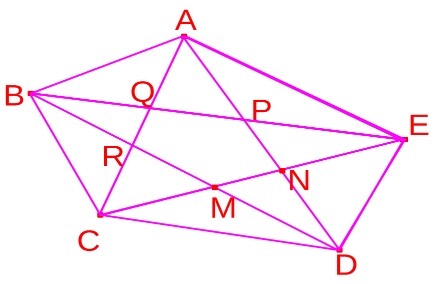
Bài 74. Giả sử D là một điểm trên cạnh BC (D khác B, C) của tam giác ABC.
Gọi E và F lần l- ợt là tâm đ- ờng tròn nội tiếp tam giác ABD và tam giác ACD.
Chứng minh rằng:
Nếu bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đ- ờng tròn thì: $\frac{AD+DB}{AD+DC} = \frac{AB}{AC}$.

$5- Một số bài toán tính toán và một số bài toán khác.

Bài 1. Gọi M là trung điểm cạnh BC của tam giác ABC.
Gọi E là chân đ- ờng vuông góc kẻ từ B tới AC
và F là chân đ- ờng vuông góc kẻ từ C tới AB.
Biết tam giác MEF là tam giác đều, I là tâm đ- ờng tròn nội tiếp tam giác ABC và K là giao điểm (khác A) của tia AI với đ- ờng tròn bán kính R ngoại tiếp tam giác ABC.

Tính tỉ số $\dfrac{IK}{R}$.

<u>Bài 2</u>. Cho tam giác ABC.
Dựng ra phía ngoài tam giác đó các hình bình hành $ABEF$ và $ACPQ$ sao cho $AF = AC$ và $AQ = AB$. Gọi D là giao điểm của BP và CE.
Các đ- ờng thẳng QD và FD cắt BC lần l- ợt tại M và N.
Tính tỉ số $\dfrac{MN}{BC}$.



<u>Bài 3</u>. Trong hình vẽ bên cho biết rằng:
$\angle BEC = 30^0, \angle ACD = 70^0, \angle CDE = 110^0$
và $\angle BAC = \angle CED = 50^0$.
Tính số đo góc $\angle ABE$.

<u>Bài 4</u>. Cho tam giác ABC
có $\angle BAC = 90^0, \angle ABC = 50^0$.
Dựng tam giác BCD
với $\angle BCD = \angle CBD = 30^0$
sao cho điểm D nằm ngoài tam giác ABC.
Hai đ- ờng thẳng AB và CD cắt nhau tại E.
Hai đ- ờng thẳng AC và BD cắt nhau tại F.
Tính các góc $\angle AEF$ và $\angle AFE$.

<u>Bài 5</u>. Cho tam giác ABC. Dựng đoạn thẳng BD sao cho $\angle ABD = 60^0$, $BD = BA$ và tia BA nằm giữa hai tia BC, BD.
Dựng đoạn thẳng BE sao cho $\angle CBE = 60^0$, $BE = BC$ và tia BC nằm giữa hai tia BA, BE.
Gọi M là trung điểm của DE, P là giao điểm hai đ- ờng trung trực của các đoạn thẳng BA và BD.
Tính các góc của tam giác CMP.

<u>Bài 6</u>. Cho tam giác ABC.
Biết rằng $\dfrac{h_a}{m_b} + \dfrac{h_b}{m_a} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, trong đó m_a, m_b theo thứ tự là độ dài các đ- ờng trung tuyến và h_a, h_b theo thứ tự là độ dài các đ- ờng cao thuộc các đỉnh A, B của tam giác đó.
Tính các góc của tam giác ABC.

<u>Bài 7</u>. Lấy ba điểm A, B, C trên đ- ờng tròn tâm O bán kính R sao cho $CB - CA = R$ và $CA.CB = R^2$.
Tính số đo các góc của tam giác ABC.

<u>Bài 8</u>. Tam giác ABC có đ- ờng trung tuyến BM và đ- ờng phân giác CD cắt nhau tại K sao cho $KB = KC$.
Biết rằng $\angle BAC = 105^0$.
Tính các góc $\angle ABC$ và $\angle ACB$.

Bài 9. Cho hình bình hành $ABCD$ với $AB < BC$.
Phân giác góc $\angle BAD$ cắt BC tại điểm E.
Hai đ- ờng trung trực của BD và CE cắt nhau tại điểm O.
Đ- ờng thẳng qua C song song với BD cắt đ- ờng tròn tâm O bán kính OC tại F.
Tính góc $\angle AFC$.

Bài 10. Cho tam giác ABC có góc $\angle ACB = 45^0$ và góc $\angle BAC$ tù.
Kẻ tia BD cắt tia đối của tia CA ở D sao cho $\angle CBD = \angle ABC$.
Kẻ AH vuông góc với BD tại H.
Tính góc $\angle CHD$.

Bài 11. Cho tam giác ABC đều.
Gọi D là điểm đối xứng của B qua đ- ờng thẳng AC và O là trung điểm của AC.
Trên tia BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{4}{3}BC$.
Đ- ờng thẳng AM cắt CD tại N.
Trên các đoạn thẳng AB, AD lấy các điểm E, F theo thứ tự sao cho $CE // NF$.
Tính số đo góc $\angle EOF$.

Bài 12. Cho tam giác ABC cân tại A với $\angle BAC = 80^0$.
Lấy điểm M nằm trong tam giác sao cho $\angle MAC = 20^0$ và $\angle MCA = 30^0$.
Tính góc $\angle MBC$.

Bài 13. Cho tam giác ABC với $\angle BAC = 55^0, \angle ABC = 115^0$.
Trên tia phân giác của góc $\angle ACB$ lấy điểm M sao cho $\angle MAC = 25^0$.
Tính số đo góc $\angle BMC$.

Bài 14. Cho tam giác ABC với các đ- ờng phân giác trong AA_1, BB_1, CC_1.
Biết rằng $\angle A_1B_1C_1 = 90^0$.
Tính số đo góc $\angle ABC$.

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông tại A và $\angle ABC = 60^0$.
Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $AB + BM = AC + CM$.
Tính độ lớn của góc $\angle CAM$.

Bài 16. Cho tam giác ABC thỏa mãn $a^2 = 4S\cot gA$ trong đó $BC = a$
và S là diện tích tam giác ABC.
Gọi O và G theo thứ tự là tâm đ- ờng tròn ngoại tiếp và trọng tâm tam giác ABC.
Tính góc giữa hai đ- ờng thẳng AG và OG.

Bài 17. Cho tam giác ABC cân.
Trên cạnh đáy BC lấy điểm D sao cho $CD = 2BD$.

So sánh số đo hai góc $\angle BAD$ và $\frac{1}{2}\angle CAD$.

Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A.
Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho góc $\angle EBC = 2\angle ABE$.
Trên tia BE lấy điểm M sao cho $EM = BC$.
Hãy so sánh số đo các góc $\angle MBC$ và $\angle BMC$.

Bài 19. Cho hình thang $ABCD$ nội tiếp trong đ- ờng tròn bán kính $R = 3$cm
với $BC = 2$cm và $AD = 4$cm. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $MB = 3MA$.
Gọi N là trung điểm của cạnh CD. Đ- ờng thẳng MN cắt AC tại điểm P.
Tính diện tích tứ giác $APND$.

Bài 20. Cho tam giác ABC, lấy điểm D thuộc nửa mặt phẳng không chứa điểm C bờ AB sao cho DA vuông góc với AB và $AD = AB$. Lấy điểm E thuộc nửa mặt phẳng không chứa điểm B bờ AC sao cho EA vuông góc với AC và $AE = AC$.
So sánh diện tích tam giác ADE với diện tích tam giác ABC.

Bài 21. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a.
Trên cạnh AD lấy điểm M sao cho $AM = 3MD$.
Kẻ tia Bx cắt cạnh CD tại I sao cho $\angle ABM = \angle MBI$.
Kẻ tia phân giác BN $(N \in CD)$ của góc $\angle CBI$.
Tính diện tích của tam giác BMN.

Bài 22. Cho tam giác ABC có $\angle ABC = 30^0$ và $\angle BAC = 130^0$.
Gọi Ax là tia đối của tia AB.
Đ- ờng phân giác của $\angle ABC$ cắt đ- ờng phân giác của $\angle CAx$ tại D.
Đ- ờng thẳng BA cắt đ- ờng thẳng CD tại E.
Hãy so sánh các độ dài AC và CE.

Bài 23. Cho hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 2AD$, M là trung điểm của đoạn AB.
Trên cạnh AB lấy điểm H sao cho góc $\angle ADH = 15^0$.
Hai đ- ờng thẳng CH và DM cắt nhau tại K.
Hãy so sánh độ dài các đoạn thẳng DH và DK.

Bài 24. Cho tam giác ABC có góc $\angle ACB = 50^0$, $\angle BAC = 100^0$.
Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = AC$.
Hãy so sánh CM và AB.

Bài 25. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Trên đ- ờng thẳng vuông góc với AC tại C lấy điểm D sao cho hai điểm B, D nằm khác phía đối với đ- ờng thẳng AC.
Gọi K là giao điểm của đ- ờng thẳng qua B vuông góc với AB
và đ- ờng thẳng qua trung điểm M của CD, vuông góc với AD.
So sánh độ dài KB và KD.

Bài 26. Cho tam giác ABC có $AB > AC$.

Trên các cạnh AB và AC theo thứ tự lấy các điểm M và N sao cho $AM = AN$.
Gọi K là giao điểm của BN và CM.
So sánh độ dài KB và KC.

Bài 27. Cho tam giác ABC với $\angle ABC = \angle ACB = 36^0$.
Trên tia phân giác của góc $\angle ABC$ lấy điểm N sao cho $\angle BCN = 12^0$.
So sánh độ dài CN và CA.

Bài 28. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Gọi M là trung điểm BC, G là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AG = \frac{1}{3}AB$, E là chân đ- ờng vuông góc hạ từ M xuống CG.
Các đ- ờng thẳng MG và AC cắt nhau tại D.
So sánh độ dài của DE và BC.

Bài 29. Cho tam giác ABC cân tại A.
Lấy điểm O ở trong tam giác sao cho $\angle AOB < \angle AOC$.
So sánh độ dài của OB và OC.

Bài 30. Dựng tam giác ABC biết ba điểm P, Q, R , trong đó P là điểm đối xứng của A qua B, Q là điểm đối xứng của B qua C, R là điểm đối xứng của C qua A.

Bài 31. Cho tam giác ABC vuông tại A.
Với mỗi điểm K trên cạnh AC dựng đ- ờng tròn tâm K tiếp xúc với BC tại E.
Dựng BD tiếp xúc với đ- ờng tròn tâm K tại D (khác E).
Gọi M, N, P và Q lần l- ợt là trung điểm của AK, AD, BD và MP.
Gọi S là giao điểm của hai đ- ờng thẳng QN và BD.
Hỏi điểm S chạy trên đ- ờng nào khi K di động trên cạnh AC?

Bài 32. Cho hình thoi $ABCD$ có $\angle BAD = 60^0$.
Lấy điểm P trên đ- ờng thẳng AB (P khác A, B). Các đ- ờng thẳng CP và DA cắt nhau tại E. Các đ- ờng thẳng DP và BE cắt nhau tại M.
Tìm quỹ tích những điểm M khi P di chuyển trên đ- ờng thẳng AB.

Bài 33. Cho góc $\angle xAy = 90^0$ và một điểm M nào đó nằm bên trong góc $\angle xAy$.
Gọi H, T lần l- ợt là hình chiếu của M trên Ax , Ay.
Trên đ- ờng thẳng qua M vuông góc với HT lấy điểm P thoả mãn $PM = HT$.
Tìm quỹ tích điểm P khi M thay đổi bên trong góc $\angle xAy$.

Bài 34. Cho tứ giác $ABCD$ có AC cắt BD tại K
sao cho $KA = KD$ và $\angle AKD = 120^0$.
Từ điểm M trên cạnh BC kẻ $MN \,//\, AC$ và $MQ \,//\, BD$ (N thuộc AB và Q thuộc CD).
Tìm quỹ tích tâm đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác MNQ
khi điểm M di động trên cạnh BC.

Bài 35. Lấy điểm M nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ cho tr- ớc.

Kẻ CE vuông góc với BM tại E, kẻ DF vuông góc với AM tại F.
Gọi N là giao điểm của CE và DF.
Tìm quỹ tích trung điểm của MN
khi điểm M di chuyển bên trong hình chữ nhật $ABCD$.

Bài 36. Cho tam giác ABC vuông cân đáy BC.
Tìm quỹ tích những điểm M thỏa mãn điều kiện: $MB^2 - MC^2 = 2MA^2$.

Bài 37. Cho tứ giác $ABCD$.
Lấy các điểm M, P theo thứ tự trên các cạnh AB, AC sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{CP}{CD}$.
Tìm tập hợp trung điểm I của MP khi M, P di động trên AB, AC.

Bài 38. Cho tam giác ABC có $AB = AC = a$, đ- ờng cao AH.
Vẽ đ- ờng tròn tâm A, bán kính R với $R < a$.
Từ B, C lần l- ợt kẻ các tiếp tuyến BM, CN (M, N là các tiếp điểm)
với đ- ờng tròn trên sao cho chúng không đối xứng với nhau qua AH.
Gọi giao điểm của các đ- ờng thẳng BM và CN là I.
1) Tìm tập hợp các điểm I khi R thay đổi.
2) Chứng minh rằng: $IB.IC = \left|a^2 - d^2\right|$ với $AI = d$.

Bài 39. Trong mặt phẳng cho hai đ- ờng thẳng Δ_1, Δ_2 cắt nhau tại O.
Điểm M thay đổi, không thuộc Δ_1, Δ_2 sao cho $OM = R$ không đổi.
Hai điểm H, K theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M trên Δ_1, Δ_2.
Tìm tập hợp tâm đ- ờng tròn nội tiếp của tam giác MHK.

Bài 40. Tìm tất cả các số tự nhiên $n \geq 3$ sao cho trong mặt phẳng tọa độ
tồn tại đa giác đều mà n đỉnh của nó đều có tọa độ nguyên.

Bài 41. Nếu một tam giác vuông có số đo chiều dài các cạnh là các số nguyên
thì số đo diện tích tam giác đó có thể là số chính ph- ơng không?

Bài 42. Xét một tam giác có số đo độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp
lớn hơn 3 và số đo diện tích của tam giác cũng là số tự nhiên.
Chứng minh rằng: Tồn tại một đ- ờng cao của tam giác đã cho chia tam giác
thành hai tam giác nhỏ mà số đo độ dài các cạnh của cả hai tam giác nhỏ
cũng là số tự nhiên.

$6- Một số bài toán hình học phẳng thi HSG Quốc gia (VMO). Từ khi thành lập Tr- ờng THPT Chuyên Bắc Giang (Năm học 1991-1992)

Bài 1(Bảng A-1992). Cho hình chữ nhật H có góc giữa hai đ- ờng chéo

không lớn hơn 45^0.
Hình H quay quanh tâm của nó một góc x, với $0^0 \le x \le 360^0$,
để thành hình chữ nhật H_x.
Hãy xác định góc x để diện tích phần chung của H và H_x là nhỏ nhất.

Bài 2(Bảng A-1993). Trên mặt phẳng cho tứ giác lồi $ABCD$
với các cạnh đối không song song.
Tìm quỹ tích tâm của các hình bình hành $MNPQ$ mà các đỉnh M, N, P, Q theo thứ tự thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA nh- ng không trùng với đỉnh nào của tứ giác.

Bài 3(Bảng B-1993). Tính giá trị lớn nhất của diện tích các ngũ giác
phẳng lồi $ABCDE$ mà $AB + BC = a$, trong đó a d- ơng cho tr- ớc
và mỗi cạnh song song với một đ- ờng chéo.

Bài 4(Bảng A-1994). Xét tam giác ABC.
Gọi A' là điểm đối xứng với A qua đ- ờng thẳng BC, B' là điểm đối xứng với B
qua đ- ờng thẳng CA, C' là điểm đối xứng với C qua đ- ờng thẳng AB.
Hãy tìm điều kiện cần và đủ về dạng của tam giác ABC để tam giác $A'B'C'$
là tam giác đều.

Bài 5(Bảng A-1995). Xét tam giác không đều ABC với các đ- ờng cao AD, BE, CF.
Lấy các điểm A', B', C' sao cho $\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{CF}$,
trong đó k là số thực khác không.
1) Với $k = \dfrac{2}{3}$ chứng minh rằng tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC
và hãy tính tỉ số đồng dạng theo các góc của tam giác ABC.
2) Tìm tất cả các giá trị $k \ne 0$ sao cho với mọi tam giác không đều ABC
ta luôn có tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC.

Bài 6(Bảng B-1995). Cho đ- ờng tròn tâm I bán kính $R > 0$
và một điểm A cố định trên đ- ờng tròn.
Xét các dây cung BC của đ- ờng tròn thỏa mãn điều kiện: $AB^2 + CA^2 - BC^2 = k$,
với k là số cho tr- ớc.
Tìm quỹ tích các trung điểm M của BC (biện luận hình dạng quỹ tích theo k và R).

Bài 7(Bảng A-1996). Xét các tam giác ABC có độ dài cạnh BC bằng 1
và số đo góc $\angle BAC$ bằng α cho tr- ớc $(\alpha > \dfrac{\pi}{3})$.
Hỏi tam giác nào có khoảng cách từ tâm đ- ờng tròn nội tiếp đến trọng tâm bé nhất?
Hãy tính khoảng cách bé nhất đó theo α.
Kí hiệu $f(\alpha)$ là khoảng cách bé nhất nói trên.

Hỏi khi α thay đổi trong khoảng $(\frac{\pi}{3};\pi)$ thì hàm số $f(\alpha)$ đạt giá trị lớn nhất tại giá trị nào của α ?

<u>Bài 8(Bảng A-1997)</u>. Trong mặt phẳng cho đ- ờng tròn tâm *O* bán kính *R* và một điểm *P* nằm trong đ- ờng tròn *(OP = d < R)*.
Trong các tứ giác lồi *ABCD* nội tiếp đ- ờng tròn nói trên sao cho các đ- ờng chéo *AC* và *BD* vuông góc với nhau tại *P*.
Hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất.
Tính các chu vi đó theo *R* và *d*.

<u>Bài 9(Bảng A-1999)</u>. Gọi A', B', C' lần l- ợt là trung điểm của các cung *BC*, *CA*, *AB* không chứa các điểm *A*, *B*, *C* của đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác *ABC*.
Các cạnh *BC*, *CA*, và *AB* cắt các cặp đoạn thẳng $C'A'$, $A'B'$; $A'B'$, $B'C'$ và $B'C'$, $C'A'$ lần l- ợt ở các cặp điểm *M*, *N*, *P*, *Q* và *R*, *S*.
Chứng minh rằng: *MN = PQ = RS* khi và chỉ khi tam giác *ABC* là tam giác đều.

<u>Bài 10(Bảng A-2000)</u>. Trên mặt phẳng cho tr- ớc hai đ- ờng tròn (O_1, r_1) và (O_2, r_2).
Trên đ- ờng tròn (O_1, r_1) lấy một điểm M_1 và trên đ- ờng tròn (O_2, r_2) lấy một điểm M_2 sao cho đ- ờng thẳng O_1M_1 cắt đ- ờng thẳng O_2M_2 tại một điểm *Q*.
Cho M_1 chuyển động trên đ- ờng tròn (O_1, r_1),
M_2 chuyển động trên đ- ờng tròn (O_2, r_2),
cùng theo chiều kim đồng hồ và với vận tốc góc nh- nhau.

1) Tìm quỹ tích trung điểm đoạn thẳng M_1M_2.
2) Chứng minh rằng: Đ- ờng tròn ngoại tiếp tam giác M_1QM_2 luôn đi qua một điểm cố định.

<u>Bài 11(Bảng A-2001)</u>. Trong mặt phẳng cho hai đ- ờng tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại hai điểm *A*, *B* và P_1P_2 là một tiếp tuyến chung của hai đ- ờng tròn đó $(P_1 \in (O_1), P_2 \in (O_2))$.
Gọi M_1 và M_2 t- ơng ứng là hình chiếu vuông góc của P_1 và P_2 trên đ- ờng thẳng O_1O_2.
Đ- ờng thẳng AM_1 cắt (O_1) tại điểm thứ hai N_1,
đ- ờng thẳng AM_2 cắt (O_2) tại điểm thứ hai N_2.
Hãy chứng minh ba điểm N_1, B, N_2 thẳng hàng.
((O) là kí hiệu đ- ờng tròn tâm *O*).

<u>Bài 12(Bảng A-2002)</u>. Trong mặt phẳng, cho tam giác *ABC* cân tại *A*.
Xét đ- ờng tròn (O) thay đổi đi qua *A*,
không tiếp xúc với các đ- ờng thẳng *AB*, *CA* và có tâm *O* nằm trên đ- ờng thẳng *BC*.
Gọi *M*, *N* t- ơng ứng là giao điểm thứ hai của đ- ờng tròn (O) với các đ- ờng thẳng *AB*, *CA*.
Hãy tìm quỹ tích trực tâm *H* của tam giác *AMN*.

Bài 13(Bảng B-2002). Trong mặt phẳng,
cho hai đ- ờng tròn cố định (O, R_1) và (O, R_2) có $R_1 > R_2$.
Một hình thang *ABCD (AB // CD)* thay đổi sao cho bốn đỉnh A, B, C, D
nằm trên đ- ờng tròn (O, R_1) và giao điểm của hai đ- ờng chéo AC, BD
nằm trên đ- ờng tròn (O, R_2).
Hãy tìm quỹ tích giao điểm P của hai đ- ờng thẳng AD và BC.

Bài 14(Bảng A-2003). Trong mặt phẳng, cho hai đ- ờng tròn cố định (O_1) và (O_2)
tiếp xúc với nhau tại điểm M, bán kính của đ- ờng tròn (O_2) lớn hơn bán kính
của đ- ờng tròn (O_1).
Xét điểm A nằm trên đ- ờng tròn (O_2) sao cho ba điểm O_1, O_2, A không thẳng hàng.
Từ A kẻ các tiếp tuyến AB và AC đến đ- ờng tròn (O_1) (B và C là các tiếp điểm).
Các đ- ờng thẳng MB và MC cắt lại đ- ờng tròn (O_2) t- ơng ứng tại E và F.
Gọi D là giao điểm của đ- ờng thẳng EF và tiếp tuyến tại A của đ- ờng tròn (O_2).
Chứng minh rằng:
Điểm D di động trên một đ- ờng thẳng cố định
khi A di động trên đ- ờng tròn (O_2) sao cho ba điểm O_1, O_2, A không thẳng hàng.
((O) là kí hiệu đ- ờng tròn tâm O).

Bài 15(Bảng B-2003). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đ- ờng tròn tâm O.
Trên đ- ờng thẳng AC lấy các điểm M, N sao cho $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC}$.
Gọi D là hình chiếu vuông góc của M trên đ- ờng thẳng BC, E là hình chiếu
vuông góc của N trên đ- ờng thẳng AB.
Chứng minh rằng:
1) Trực tâm H của tam giác ABC nằm trên đ- ờng tròn tâm O'
ngoại tiếp tam giác BED.
2) Trung điểm của đoạn thẳng AN đối xứng với B qua trung điểm
của đoạn thẳng OO'

Bài 16(Bảng A-2004). Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC.
Gọi D là giao điểm của cạnh AB và đ- ờng phân giác trong của góc $\angle ACB$.
Xét một đ- ờng tròn (O) đi qua hai điểm C, D
và không tiếp xúc với các đ- ờng thẳng BC, CA.
Đ- ờng tròn này cắt lại các đ- ờng thẳng BC và CA t- ơng ứng tại M và N.
1) Chứng minh rằng: Có một đ- ờng tròn (S) tiếp xúc với đ- ờng thẳng DM tại M

và tiếp xúc với đ- ờng thẳng DN tại N.

2) Đ- ờng tròn (S) cắt lại các đ- ờng thẳng BC và CA t- ơng ứng tại P và Q.

Chứng minh rằng:

Các đoạn thẳng MP và NQ có độ dài không đổi khi đ- ờng tròn (O) thay đổi.

((X) là kí hiệu đ- ờng tròn tâm X).

<u>Bài 17(Bảng B-2004)</u>. Trong mặt phẳng, cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đ- ờng tròn (O) và có trực tâm H. Trên cung BC không chứa điểm A của đ- ờng tròn (O), lấy một điểm P sao cho P không trùng với B và C.

Lấy điểm D sao cho $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{PC}$ và gọi K là trực tâm của tam giác ACD.

Gọi E và F t- ơng ứng là hình chiếu vuông góc của K trên các đ- ờng thẳng BC và AB.

Chứng minh rằng:

Đ- ờng thẳng EF đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK.

((O) là kí hiệu đ- ờng tròn tâm O).

<u>Bài 18(Bảng A-2005)</u>. Trong mặt phẳng, cho đ- ờng tròn (O) cố định, bán kính R.

Cho A và B là hai điểm cố định nằm trên đ- ờng tròn (O) sao cho ba điểm A, B, O không thẳng hàng.

Xét một điểm C nằm trên đ- ờng tròn (O), C không trùng với A và B.

Dựng đ- ờng tròn (O_1) đi qua A và tiếp xúc với đ- ờng thẳng BC tại C, dựng đ- ờng tròn (O_2) đi qua B và tiếp xúc với đ- ờng thẳng AC tại C.

Hai đ- ờng tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại điểm thứ hai D khác C.

Chứng minh rằng:

1) $CD \le R$.

2) Đ- ờng thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định khi điểm C di động trên đ- ờng tròn (O) sao cho C không trùng với A và B.

((O) là kí hiệu đ- ờng tròn tâm O).

<u>Bài 19(Bảng B-2005)</u>. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC ngoại tiếp đ- ờng tròn tâm I. Gọi M, N và P lần l- ợt là tâm của đ- ờng tròn bàng tiếp góc A, đ- ờng tròn bàng tiếp góc B và đ- ờng tròn bàng tiếp góc C của tam giác đó.

Gọi O_1, O_2 và O_3 t- ơng ứng là tâm của các đ- ờng tròn (INP), (IPM) và (IMN).

Chứng minh rằng:

1) Các đ- ờng tròn (INP), (IPM) và (IMN) có bán kính bằng nhau.

2) Các đ- ờng thẳng MO_1, NO_2 và PO_3 cắt nhau tại một điểm.

((XYZ) là kí hiệu đ- ờng tròn đi qua ba điểm X, Y, Z).

<u>Bài 20(Bảng A-2006)</u>. Cho tứ giác lồi $ABCD$.

Xét một điểm M di động trên đ- ờng thẳng AB sao cho M không trùng với A và B.

Gọi N là giao điểm thứ hai khác M của đ- ờng tròn (MAC) và đ- ờng tròn (MBD).

Chứng minh rằng:

1) Điểm N di động trên một đ- ờng tròn cố định.

2) Đ- ờng thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

((XYZ) là kí hiệu đ- ờng tròn đi qua ba điểm X, Y, Z).

Bài 21(Bảng B-2006). Cho hình thang cân $ABCD$ có CD là đáy lớn .
Xét một điểm M di động trên đ- ờng thẳng CD sao cho M không trùng với C và D.
Gọi N là giao điểm thứ hai khác M của đ- ờng tròn (BCM) và đ- ờng tròn (DAM).
Chứng minh rằng:

1) Điểm N di động trên một đ- ờng tròn cố định.
2) Đ- ờng thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

((XYZ) là kí hiệu đ- ờng tròn đi qua ba điểm X, Y, Z).

Bài 22(QG-2007). Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định và đỉnh A thay đổi.
Gọi H, G lần l- ợt là trực tâm và trọng tâm của tam giác ABC.
Tìm quỹ tích điểm A, biết rằng trung điểm K của HG thuộc đ- ờng thẳng BC.

Bài 23(QG-2007). Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn BC
và nội tiếp đ- ờng tròn (O) tâm O.
Gọi P là một điểm thay đổi trên đ- ờng thẳng BC và nằm ngoài đoạn BC
sao cho PA không là tiếp tuyến của đ- ờng tròn (O).
Đ- ờng tròn đ- ờng kính PD cắt (O) tại E $(E \neq D)$.
Gọi M là giao điểm của BC với DE, N là giao điểm khác A của PA với (O).
Chứng minh rằng: Đ- ờng thẳng MN đi qua một điểm cố định.

Tài liệu tham khảo

1) Tạp chí Toán học và tuổi trẻ.
2) Bất đẳng thức hình học-Tg TSKH.Vũ Đình Hòa.
3) Tuyển chọn một số bài toán hình học phẳng-Tg ThS Đỗ Thanh Sơn.
4) Các chuyên đề hình học bồi d- ỡng học sinh giỏi-Tg TS Trần Văn Tấn.
5) Các đề thi HSG Quốc gia(VMO) lớp 12.

Tác giả

Claudio Paul Caniggia
Nguyễn Anh Tuấn