Xung quanh bài hình học số 4 trong kỳ thi IMO năm 2010

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

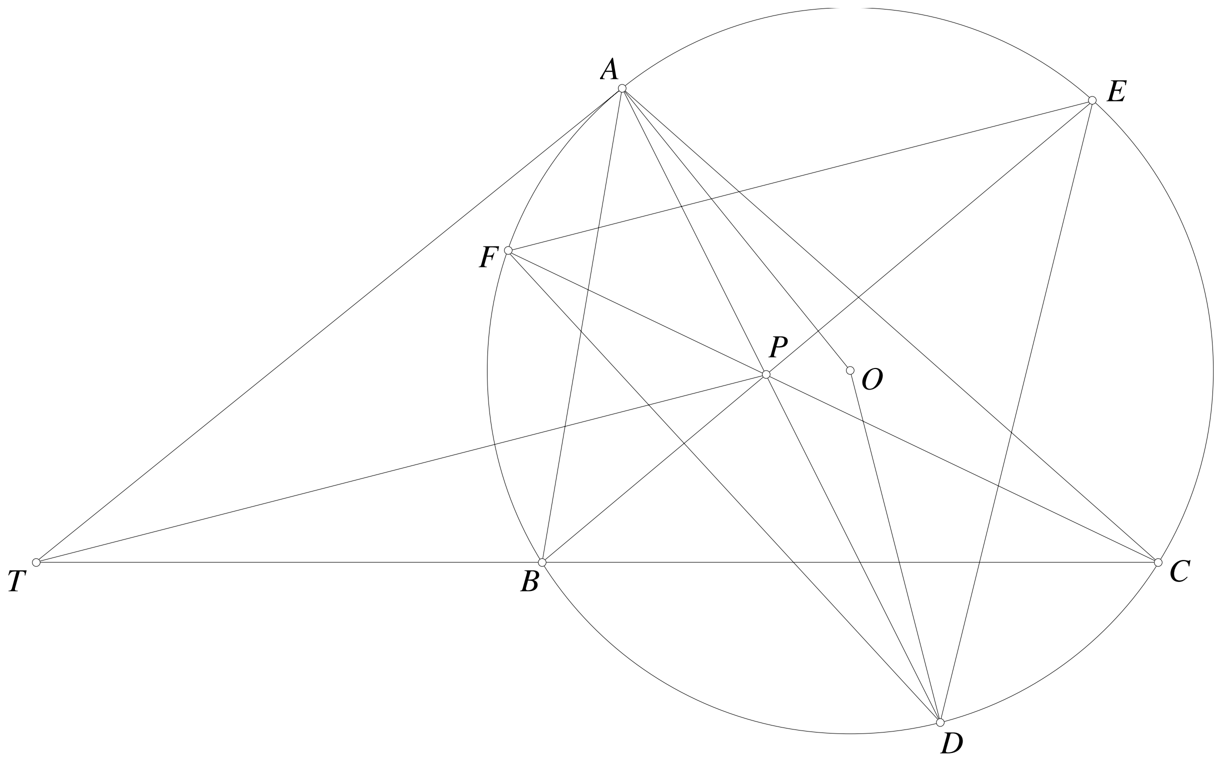
Bài viết xoay quanh bài toán số 4 thi IMO năm 2010 là một bài hình học hay nhiều ý nghĩa. Chúng tôi sẽ mở rộng và khai thác bài toán này với các lời giải thuần túy hình học. Cơ sở của bài viết này là [4].

1 Một số mở rộng

Trong kỳ thi IMO năm 2010 có bài toán số 4 là bài hình học như sau [1], ký hiệu được thay đổi đôi chút cho bài toán trở nên dễ hiểu

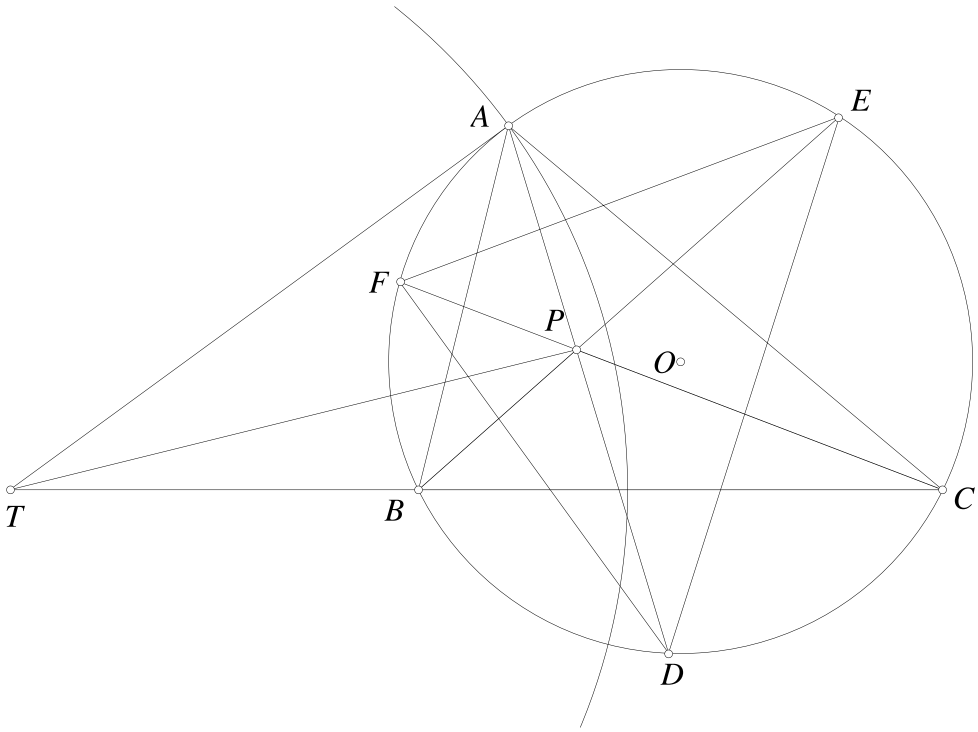
Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. Chứng minh rằng nếu $TA = TP$ thì $DE = DF$.

Bài toán trên theo sắp xếp trong đề thi là bài toán dễ nhất của ngày 2. Có rất nhiều lời giải được đề nghị trong [1] và cả trong shortlist. Sau đây tôi xin giới thiệu 2 lời giải. Một lời giải tôi cho là ngắn gọn nhất cho bài này có tham khảo trong [1] và một lời giải thứ 2 rất mới do tôi đề xuất. Và với lời giải thứ 2 ta hoàn toàn có thể nhìn bài toán dưới con mắt tổng quát.



Lời giải 1. Nếu $TA = TP$ thì do TA là tiếp tuyến của (O) nên $TP^2 = TA^2 = TB.TC$ do đó TP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC. Từ đó $\angle TPB = \angle PCB = \angle PEF$

suy ra $TP \parallel EF$. Mặt khác các tam giác TAP và OAD cân tại T và O có cạnh bên $TA \perp OA$ dễ suy ra cạnh bên còn lại vuông góc là $TP \perp OD$. Vậy từ đó $OD \perp EF$ với O là tâm ngoại tiếp tam giác DEF nên tam giác DEF cân tại D. Ta có điều phải chứng minh. □



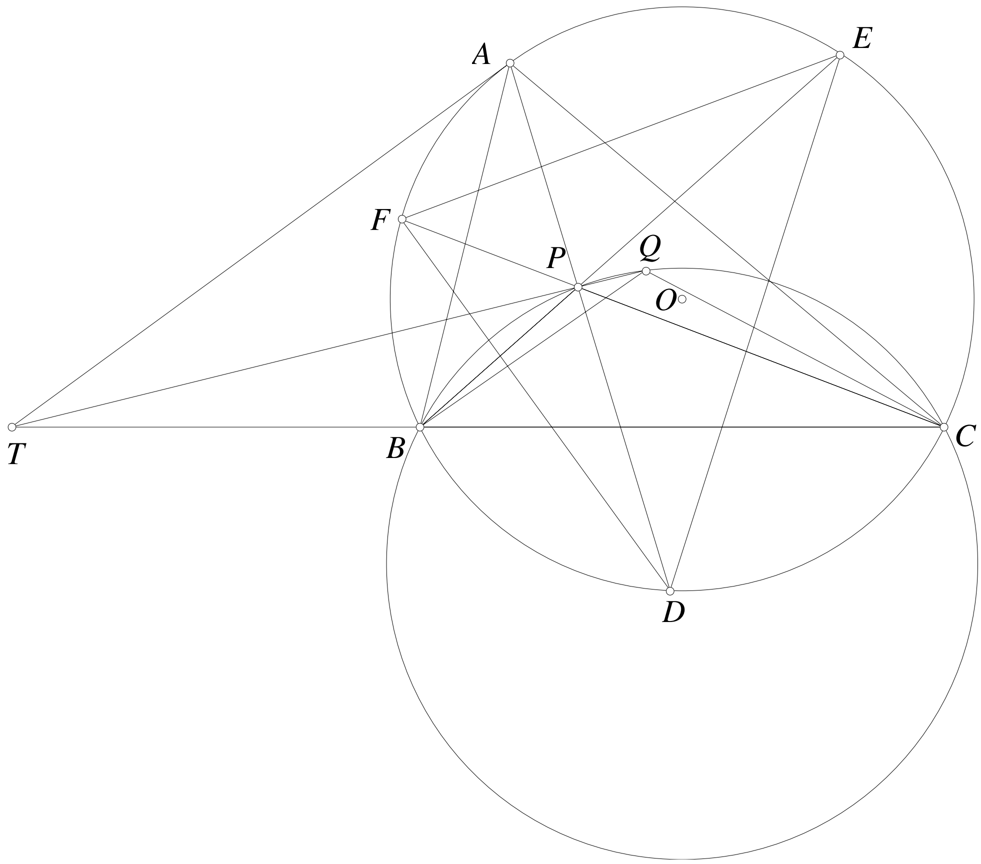
Lời giải 2. Ta có các tam giác đồng dạng PAB và PED nên $\frac{PB}{PD} = \frac{AB}{DE}$. Tương tự $\frac{PC}{PD} = \frac{AC}{DF}$. Từ hai tỷ số này suy ra $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} . \frac{DF}{DE}$ hay $\frac{DF}{DE} = \frac{PB}{AB} : \frac{PC}{AC}$.
Đến đây ta chú ý đường tròn (T, TA) chính là đường tròn Apollonius ứng với A của tam giác ABC nên $TA = TP$ khi và chỉ khi P thuộc (T, TA) khi và chỉ khi $\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$ khi và chỉ khi $DF = DE$. □

Nhận xét. Lời giải 1 dựa vào tính chất tiếp tuyến và cộng góc ngắn gọn. Lời giải 2 thực chất dài hơn vì cần đến hiểu biết về đường tròn Apollonius cùng với một số tính chất của đường tròn này. Tuy nhiên qua lời giải 2 ta thấy ngay được bản chất vấn đề là từ đường tròn Apollonius. Nhờ lời giải trên ta dễ dàng đưa ra bài toán đảo như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. Chứng minh rằng nếu $DE = DF$ thì $TA = TP$.

Từ đó ta có thể đề xuất bài toán như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. TP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tại Q khác P. Chứng minh rằng $\frac{DF^2}{DE^2} = \frac{PB}{PC} : \frac{QB}{QC}$.



Lời giải. Tương tự như lời giải 2 ta đã có $\frac{DF}{DE} = \frac{PB}{AB} : \frac{PC}{AC}$ (1).
Từ các tam giác đồng dạng có bản ta có $\frac{PB}{QC} = \frac{TB}{TQ}, \frac{QB}{PC} = \frac{TQ}{TC}$. Từ đó $\frac{TB}{TC} = \frac{PB}{PC} . \frac{QB}{QC}$. Mặt khác theo tính chất tiếp tuyến thì $\frac{TB}{TC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Vậy $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{PB}{PC} . \frac{QB}{QC}$ (2).
Từ (1),(2) suy ra $\frac{DF^2}{DE^2} = \frac{AC^2}{AB^2} . \frac{PB^2}{PC^2} = \frac{QC}{QB} : \frac{PB}{PC} . \frac{PB^2}{PC^2} = \frac{PB}{PC} : \frac{QB}{QC}$. Ta có điều phải chứng minh. □

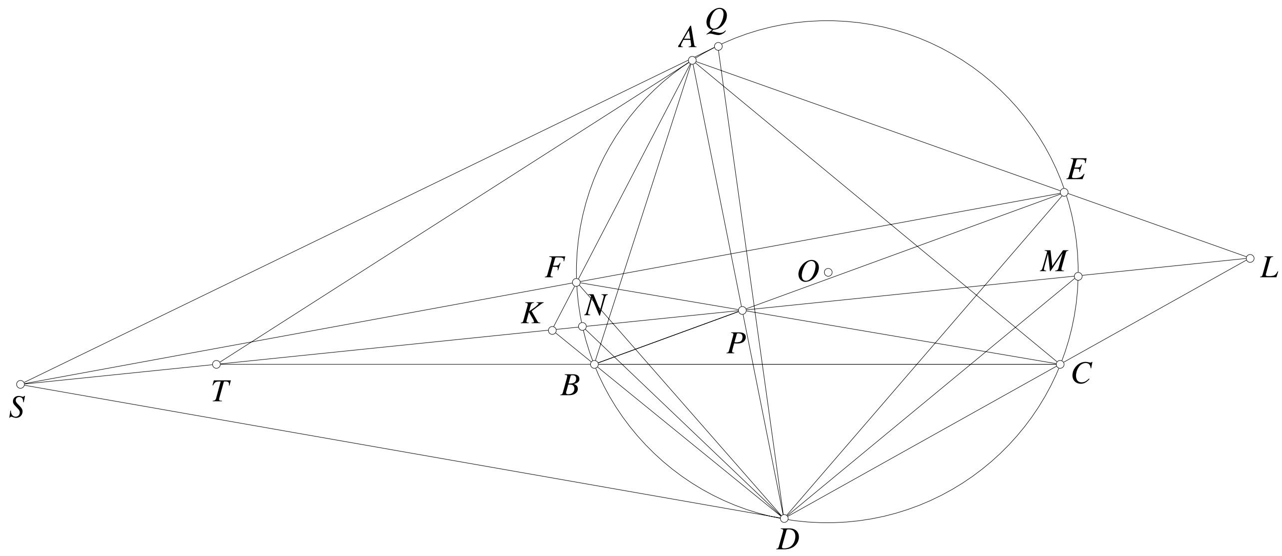
Nhận xét. Bài toán trên là một mở rộng của bài IMO khi mà $TA = TP$ thì $P \equiv Q$ ta thu được kết quả bài IMO. Như vậy lời giải 2 làm ta tổng quát được vấn đề. Để ý kỹ với cách làm hoàn toàn tương tự ta có thể tổng quát hơn nữa như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. T là một điểm bất kỳ trên đường thẳng BC. TA, TP lần lượt cắt (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tại G, Q khác A, P. Chứng minh rằng

$$\frac{DF^2}{DE^2} = \left(\frac{GB}{GC} : \frac{AB}{AC}\right) . \left(\frac{PB}{PC} : \frac{QB}{QC}\right).$$

Ta thấy nếu TA tiếp xúc (O) thì $A \equiv G$ ta thu được bài toán 2. Chúng ta tiếp tục tìm cách mở rộng bài toán 1. Trong [2] tác giả có đề xuất một bài toán mở rộng khác như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. TP cắt (O) tại M, N. Chứng minh rằng tam giác DEF và tam giác DMN có chung đường đối trung.



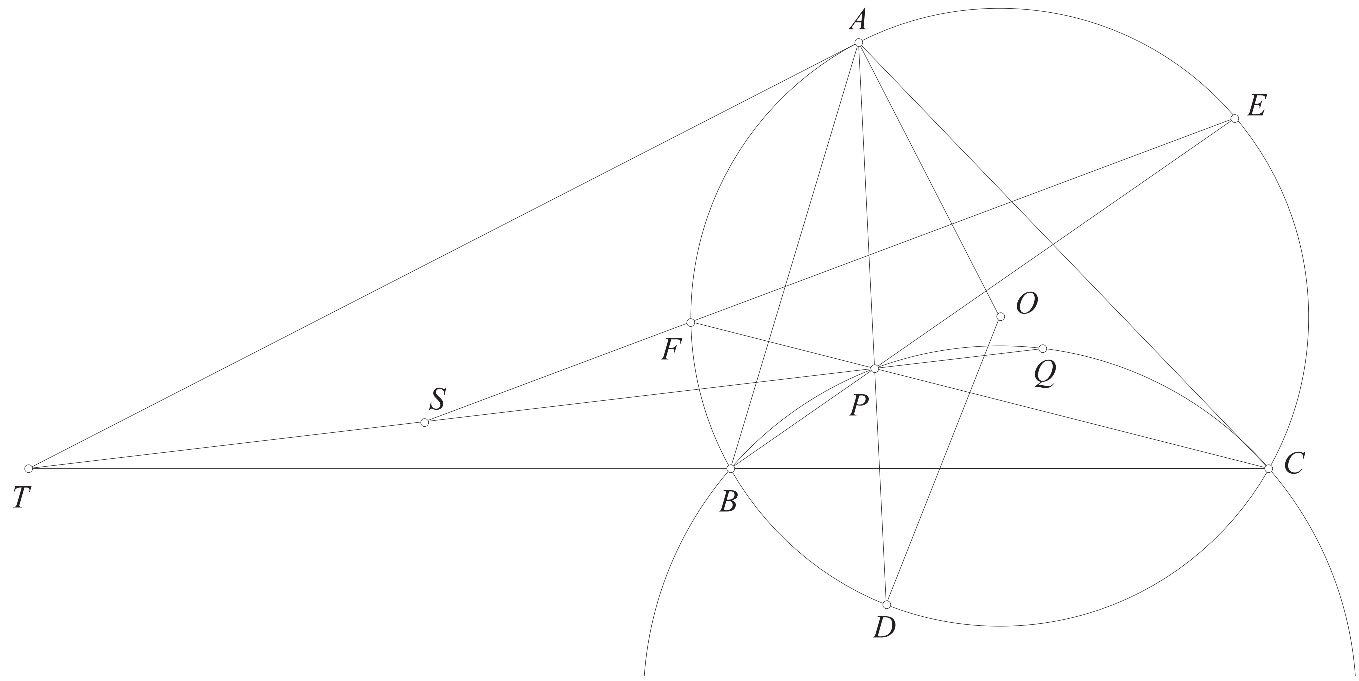
Lời giải sau sử dụng ý tưởng trong [2] được tác giả làm gọn hơn

Lời giải. Gọi AF giao BD tại K áp dụng định lý Pascal cho $\begin{pmatrix} A & B & F \\ C & A & D \end{pmatrix}$ suy ra K, P, T thẳng hàng. Tương tự L, P, T thẳng hàng, vậy K, L thuộc TP (1).
Gọi tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại S. Áp dụng định lý Pascal cho $\begin{pmatrix} D & F & B \\ E & D & A \end{pmatrix}$ suy ra S, K, P thẳng hàng. Tương tự S, L, P thẳng hàng, vậy K, L thuộc SP (2).
Từ (1),(2) suy ra S thuộc MN. Từ đây nếu gọi SQ là tiếp tuyến của (O) khác SD thì các tứ giác $DMQN$ và $DEQF$ điều hòa hay các tam giác DMN và DEF có cùng đường đối trung DQ. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Nếu $TA = TP$ thì dễ có $TP \perp OD$ nên tam giác DMN cân và có OD là đường đối trung nên DEF cũng có OD là đường đối trung nên DEF cân. Bài toán trên là một mở rộng đẹp của bài toán 1 theo kiểu tìm bất biến.

2 Một số ứng dụng vào các bài toán khác nhau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. TP cắt EF tại S. Giả sử $\frac{SE}{SF}$ không đổi. Chứng minh rằng P luôn nằm trên một đường tròn cố định.



Lời giải. Gọi PT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tại Q khác P. Xét phép nghịch đảo tâm P với phương tích $k = \overline{PA}.\overline{PD} = \overline{PB}.\overline{PE} = \overline{PC}.\overline{PF}$. Khi đó đường tròn (PBC) sẽ biến thành đường thẳng EF. Vì đường thẳng PT là không đổi qua nghịch đảo cực P nên giao điểm Q của PT và (PBC) sẽ biến thành giao điểm S của PT và EF. Theo bài toán 3 thì $\frac{DF^2}{DE^2} = \frac{PB}{PC} : \frac{QB}{QC}$, qua nghịch đảo ta thu được

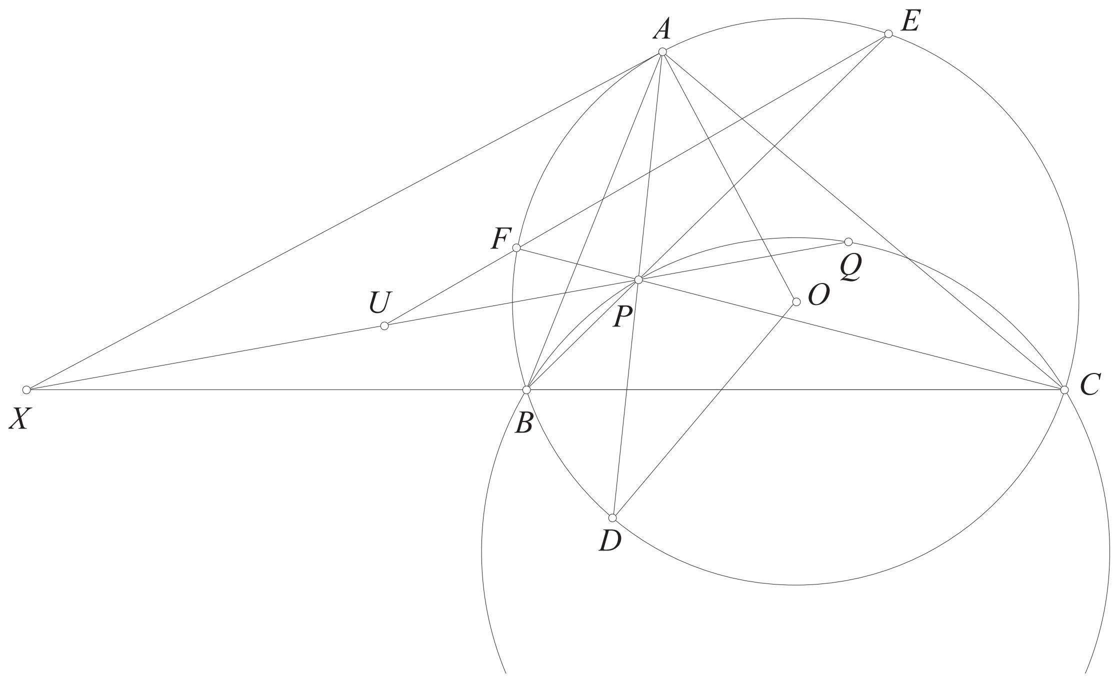
$$\left(\frac{\frac{|k|AC}{PA.PC}}{\frac{|k|AB}{PA.PB}}\right)^2 = \frac{|k|/PE}{|k|/PF} : \left(\frac{\frac{|k|SE}{PQ.PF}}{\frac{|k|SF}{PQ.PE}}\right).$$

Ta thu được

$$\frac{AC^2}{AB^2} : \frac{PC^2}{PB^2} = \frac{SF}{SE}.$$

Từ đó nếu P thay đổi mà $\frac{SE}{SF}$ không đổi thì $\frac{PB}{PC}$ không đổi nên P thuộc đường tròn Apollonius dựng trên đoạn BC ứng với tỷ số $\frac{PB}{PC} = \frac{SF}{SE}.\frac{AB^2}{AC^2}$. □

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A, B, C của (O) cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z. Chứng minh rằng PX, PY, PZ lần lượt cắt EF, FD, DE theo ba điểm thẳng hàng.



Lời giải thứ nhất. Gọi PX, PY, PZ lần lượt cắt EF, FD, DE tại U, V, W. Theo kết quả chứng minh bài toán 6 thì $\frac{UE}{UF} = \frac{AB^2}{AC^2} : \frac{PB^2}{PC^2}$, tương tự với V, W. Nhân các tỷ số tương ứng và chú ý U, V, W luôn nằm ngoài các đoạn EF, FD, DE nên U, V, W thẳng hàng. □

Lời giải sau được đề nghị bởi bạn **Đỗ Xuân Long** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN

Lời giải thứ hai. Ta biến đổi tỷ số
$\frac{UE}{UF} = \frac{[PUE]}{[PUF]} = \frac{[PUE]}{[PXB]} \cdot \frac{[PXB]}{[PXC]} \cdot \frac{[PXC]}{[PUF]} = \frac{PU.PE}{PX.PB} \cdot \frac{XB}{XC} \cdot \frac{PX.PC}{PU.PF} = \frac{XB}{XC} \cdot \frac{PE}{PF} : \frac{PB}{PC} = \frac{XB}{XC} : \frac{PB^2}{PC^2}$.
Từ đó tương tự với V, W và các tỷ số tương ứng và chú ý U, V, W luôn nằm ngoài các đoạn EF, FD, DE nên U, V, W thẳng hàng. □

Chú ý. Từ cách làm thứ hai ta có thể thay X, Y, Z bởi ba điểm thẳng hàng bất kỳ lần lượt trên BC, CA, AB bài toán vẫn đúng. Một hệ quả thú vị khi quay trở lại mô hình ban đầu cũng bằng phép nghịch đảo ta có bài toán sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A, B, C của (O) cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z. PX, PY, PZ lần lượt cắt đường tròn $(PBC), (PCA), (PAB)$ lần lượt tại U, V, W. Chứng minh rằng bốn điểm P, U, V, W cùng thuộc một đường tròn.

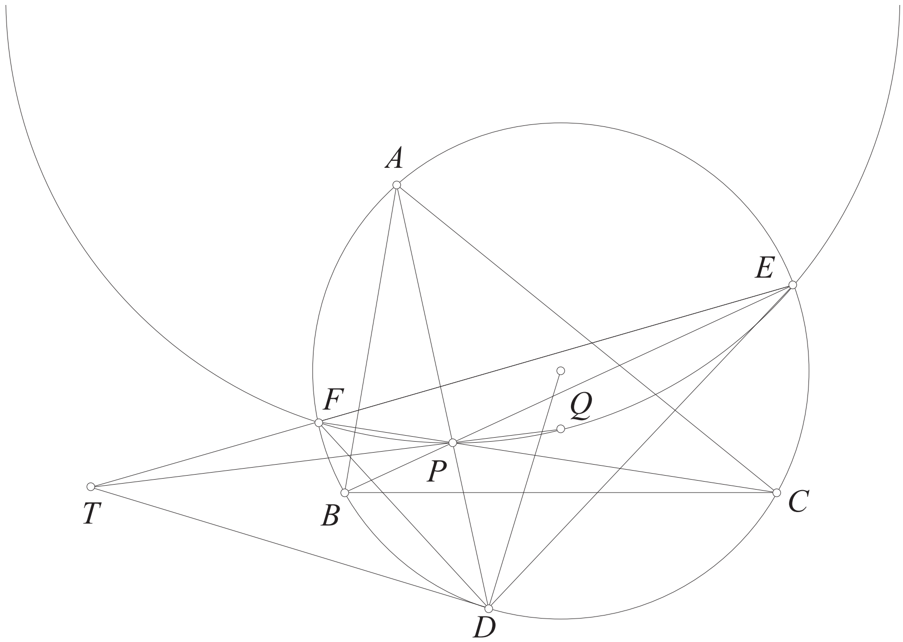
Lời giải. Theo cách chứng minh bài toán 6 thì qua nghịch đảo cực P phương tích $k = \overline{PA}.\overline{PD} = \overline{PB}.\overline{PE} = \overline{PC}.\overline{PF}$. thì U, V, W lần lượt biến thành giao điểm của PX, PY, PZ với EF, FD, DE. Theo bài toán 7 thì các giao điểm đó thẳng hàng nên bốn điểm P, U, V, W đồng viên. □

Ta hoàn toàn có thể mở rộng hơn như sau

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. X, Y, Z thẳng hàng và lần lượt thuộc BC, CA, AB. PX, PY, PZ lần lượt cắt đường tròn $(PBC), (PCA), (PAB)$ lần lượt tại U, V, W. Chứng minh rằng bốn điểm P, U, V, W cùng thuộc một đường tròn.

Chú ý rằng sử dụng bài toán 4 ta dễ dàng mở rộng các bài toán mới xây dựng trên cho các cát tuyến thay vì tiếp tuyến. Tiếp tục sử dụng bài toán 3, ta thu được bài toán sau

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. TP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P. Chứng minh rằng tỷ số $\frac{PE}{PF} : \frac{QE}{QF}$ luôn không đổi với mọi P.

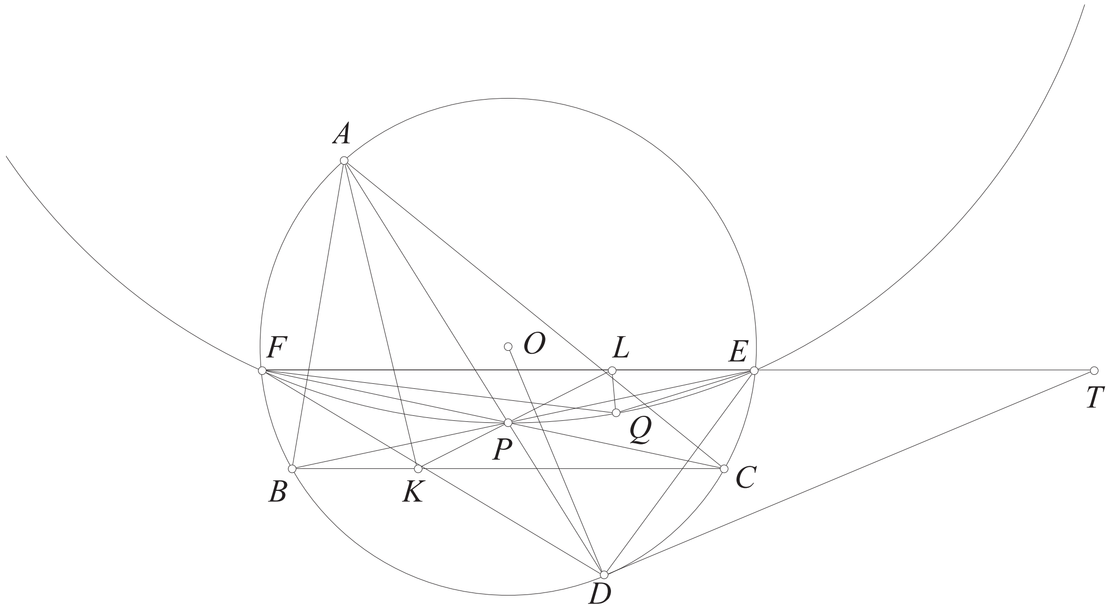


Lời giải. Áp dụng bài toán 3 vào tam giác DEF, ta thu được $\frac{PE}{PF} : \frac{QE}{QF} = \frac{AC^2}{AB^2}$ không đổi. $\square$

Ta có hệ quả đơn giản là hai bài toán sau

Bài toán 11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ di chuyển trên trung trực BC. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. TP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P. Chứng minh rằng tỷ số $\frac{QE}{QF}$ luôn không đổi khi P thay đổi.

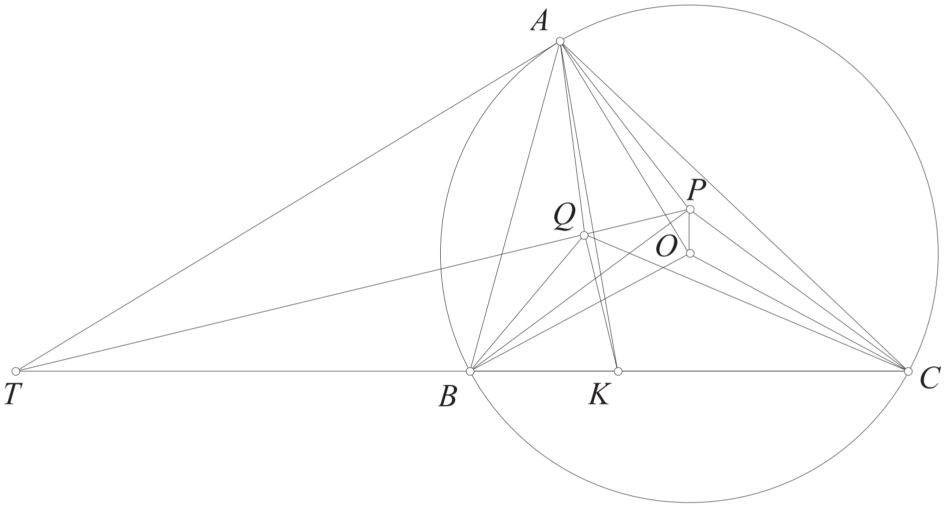
Bài toán 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ di chuyển trên trung trực BC. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. TP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P. AK là đường đối trung của tam giác ABC. KP cắt EF tại L. Chứng minh rằng $QL \perp QP$.



Lời giải. Theo bài toán 9 $\frac{PE}{PF} : \frac{QE}{QF} = \frac{AC^2}{AB^2}$, ta lại dễ thấy $PE = PF$ và $EF \parallel BC$ nên ta thu được $\frac{QF}{QE} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{KB}{KC} = \frac{LF}{LE}$. Từ đó QL là phân giác $\angle EQF$, mặt khác QP là phân giác ngoài tam giác EQF nên $QL \perp QP$. □

Bài toán sau có tính chất tương tự

Bài toán 13. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm nằm trong tam giác nằm trên trung trực BC. Lấy điểm Q trên đường tròn (PBC) và nằm trong tam giác sao cho $\angle PQA + \angle OAP = 90°$. Gọi AK là đường đối trung của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\angle AQK + \angle OAP = 180°$.



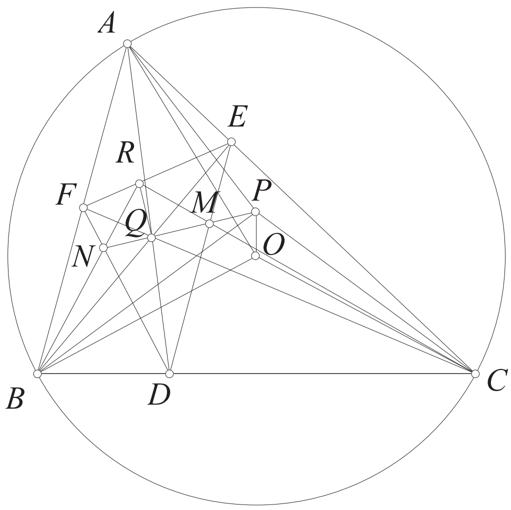
Lời giải. Gọi tiếp tuyến tại A của (O) cắt PQ tại T. Ta có $\angle TQA = 180° - \angle AQP = 180° - (90° - \angle PAO) = 90° + \angle PAO = OAT + \angle PAO = \angle PAT$. Từ đó AT cũng là tiếp tuyến của đường tròn (APQ) nên là trục đẳng phương của (O) và (APQ). PQ là trục đẳng phương của (APQ) và (PBC) còn BC là trục đẳng phương của (PBC) và (O). Từ đó AT, PQ, BC đồng quy hay T thuộc BC. Từ đó $\frac{KB}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{TB}{TC} = \frac{QB}{QC} \cdot \frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC}$. Vậy QK là phân giác

$\angle BQC$ hay $\angle PQK = 90°$. Vậy $\angle AQK + \angle OAP = 90° + \angle PQA + \angle OAP = 90° + 90° = 180°$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này là mở rộng trực tiếp một bài toán quen thuộc về đường đối trung trong đó có sử dụng kỹ thuật tương tự trong cách chứng minh bài toán 3.

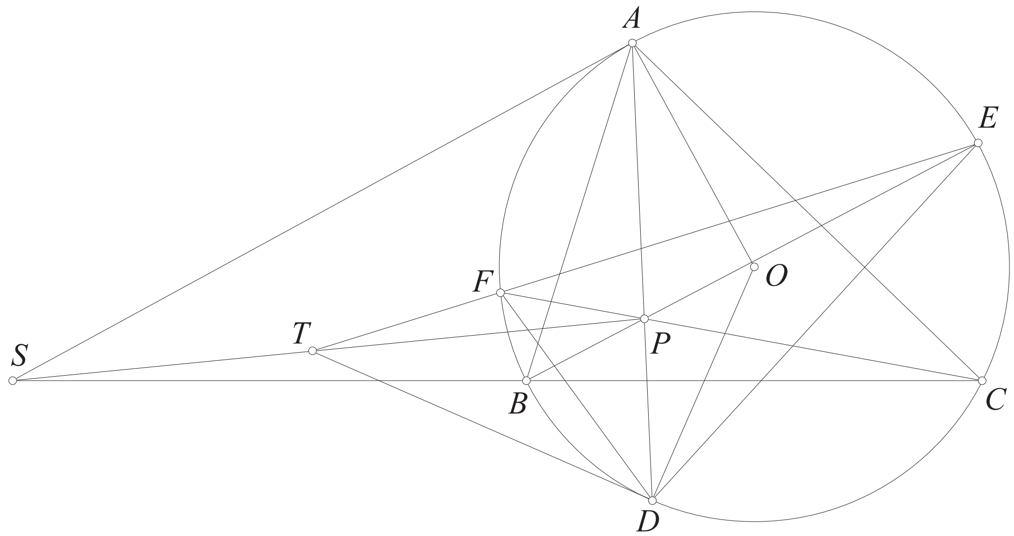
Bài toán 14. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm nằm trong tam giác nằm trên trung trực BC. Lấy điểm Q trên đường tròn (PBC) và nằm trong tam giác sao cho $\angle PQA + \angle OAP = 90°$. QA, QB, QC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. DE, DF lần lượt cắt PQ tại M, N. Chứng minh rằng BN, CM, EF đồng quy tại R và $\angle RQA = \angle PAO$.

Lời giải sau được đề nghị bởi bạn **Huỳnh Bách Khoa** lớp 10 toán, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận.



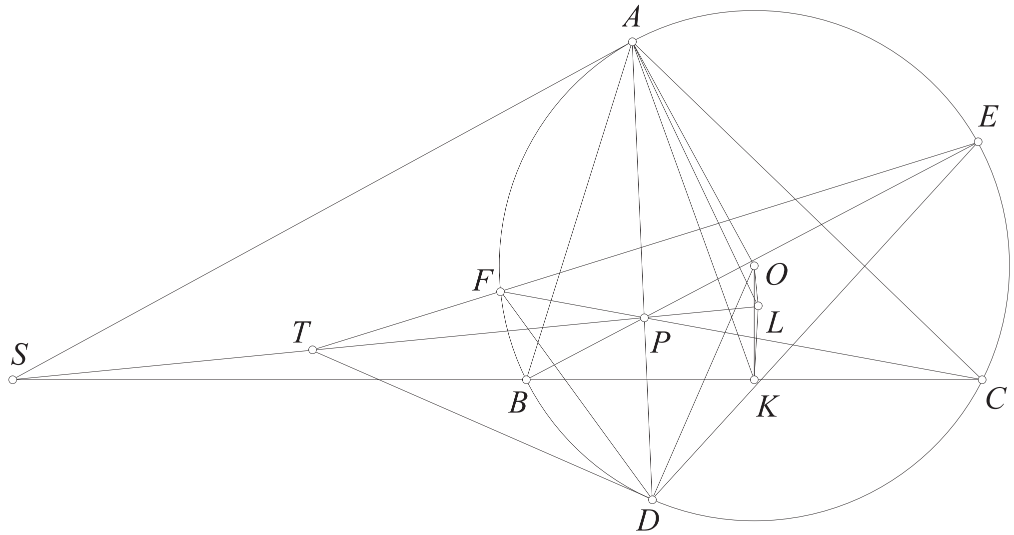
Lời giải. Dễ thấy BN, CM, EF đồng quy tại R theo định lý Pappus đảo. Ngoài ra ta có biến đổi tỷ số kép $Q(RP, BC) = N(RQ, EF) = N(BQ, EF) = -1$, mà QP là phân giác ngoài góc BQC nên $QR \perp PQ$. Do đó $\angle RQA = 90° - \angle AQP = \angle PAO$ □

Bài toán 15. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm bất kỳ và PA, PB, PC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. Chứng minh rằng đường thẳng PT luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.



Lời giải. Áp dụng cách chứng minh bài toán 5 vào tam giác DEF thì PT luôn đi qua giao điểm S của tiếp tuyến qua A của (O) với BC, điểm đó hiển nhiên cố định. □

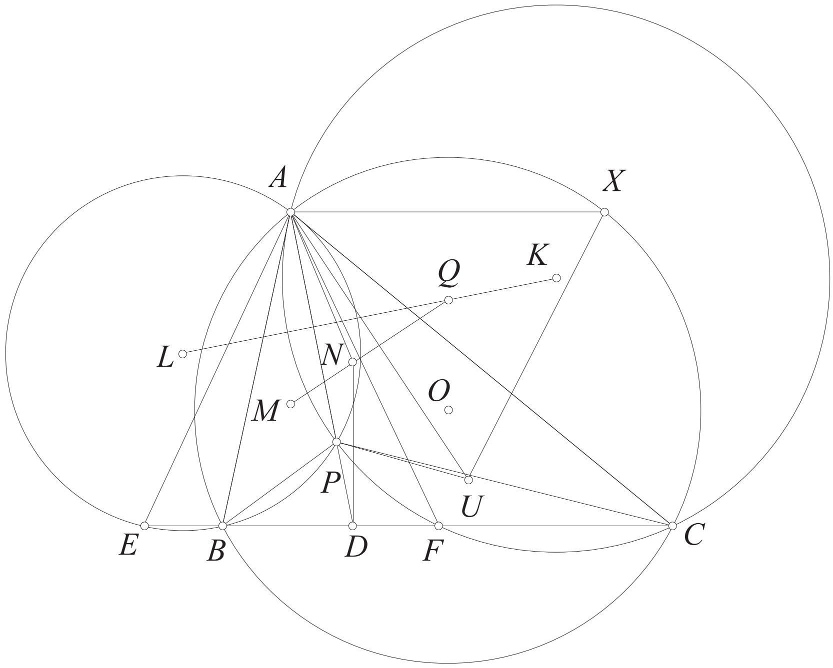
Bài toán 16. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm bất kỳ và PA, PB, PC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. K, L là hình chiếu của O lên BC, PT. Chứng minh rằng bốn điểm A, O, K, L cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải. Áp dụng cách chứng minh bài toán 5 vào tam giác DEF thì PT luôn đi qua giao điểm S của tiếp tuyến qua A của (O) với BC. Dễ thấy các điểm A, O, L đều nhìn OS dưới góc vuông nên A, O, K, L cùng thuộc một đường tròn. □

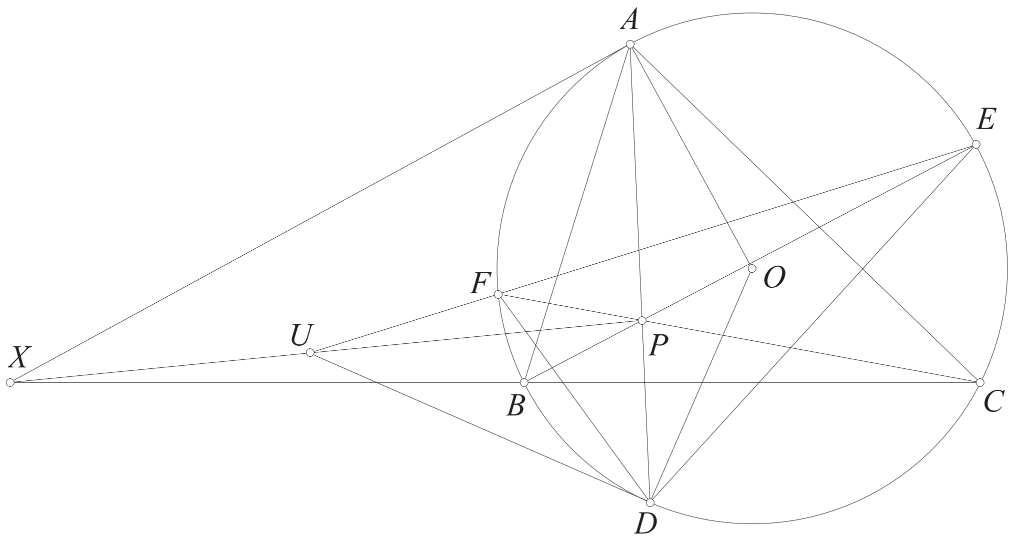
Nhận xét. Mặc dù hai bài toán trên khi để cạnh nhau làm ta thấy hiển hiên nhưng khi tách rời mỗi bài lại có một giá trị và ý nghĩa riêng.

Bài toán 17. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trong tam giác. Đường tròn $(K), (L)$ lần lượt ngoại tiếp các tam giác PAC, PAB lần lượt cắt BC tại F, E khác C, B. M là tâm ngoại tiếp tam giác AEF. PA cắt BC tại D. Trung trực AD cắt đường thẳng qua D vuông góc BC tại N. MN cắt KL tại Q. Chứng minh rằng Q nằm trên trung trực BC.



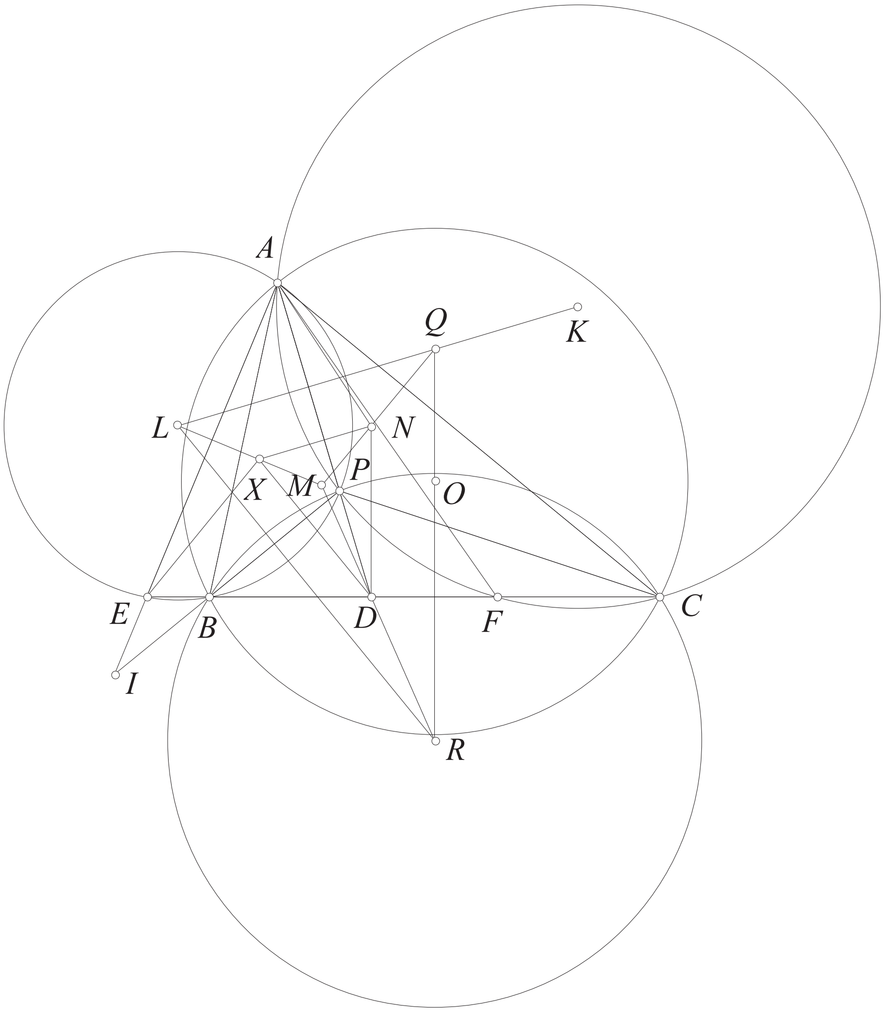
Lời giải. Gọi U đối xứng với A qua MN dễ thấy Q là tâm ngoại tiếp tam giác APU. Gọi X đối xứng A qua trung trực BC. Ta sẽ chứng minh bốn điểm A, P, U, X đồng viên khi đó hiển nhiên Q là tâm của đường tròn đi qua A, P, U, X nên Q nằm trên trung trực AX hay cũng là trung trực BC, thật vậy. Ta chú ý rằng U là giao điểm của đường tròn (M) ngoại tiếp tam giác AEF và đường tròn (N) qua A, D tiếp xúc với BC tại D. Từ đó sử dụng phép nghịch đảo cực A phương tích bất kỳ ta chuyển về bài toán sau

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm bất kỳ và PA, PB, PC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại X. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại U. Chứng minh rằng P, U, X thẳng hàng.



Đây chính là nội dung bài toán 14. □

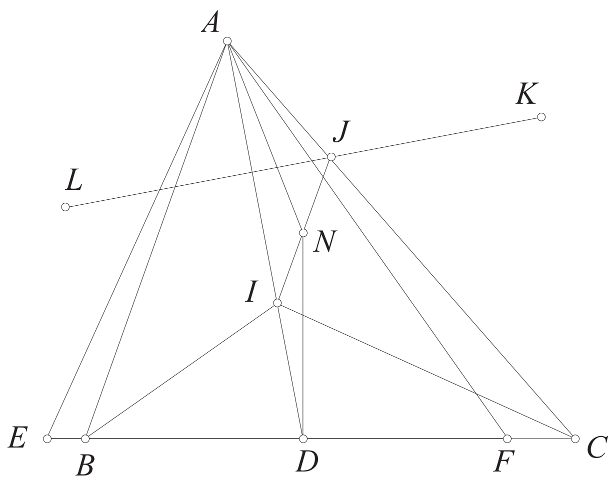
Lời giải sau không sử dụng nghịch đảo được đề nghị bởi **Huỳnh Bách Khoa** lớp 10 toán THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận [5].



Lời giải. Ta có $DE.DB = DF.DC = DA.DP$ nên D là tâm vị tự trong của (AEF) và (PBC). Gọi R là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC thì M, D, R thẳng hàng. Gọi X là tâm của (AED) thì ta có $\angle MXD = 180° - \angle EXD - \angle LXE = \angle AED - \angle EAD = \angle AED - \angle PBD = \angle AIP = \angle MLR$ với I là giao điểm của AE và PB. Do đó $DX \parallel LR$, mà $XN \parallel LK$ nên $\frac{MN}{MQ} = \frac{MX}{ML} = \frac{MD}{MR}$, do đó $RQ \parallel ND \perp BC$ mà R thuộc trung trực BC nên Q thuộc trung trực BC. □

Nhận xét. Bài toán trên sẽ rất thú vị nếu xem nó như một bài toán tổng quát của những trường hợp P đặc biệt. Vậy ta xét bài toán sau

Bài toán 18. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. E, F lần lượt là đối xứng của A qua IC, IB. AI cắt BC tại D. Trung trực AD cắt đường thẳng qua D vuông góc BC tại N. Chứng minh rằng IN, trung trực AI và trung trực BC đồng quy.



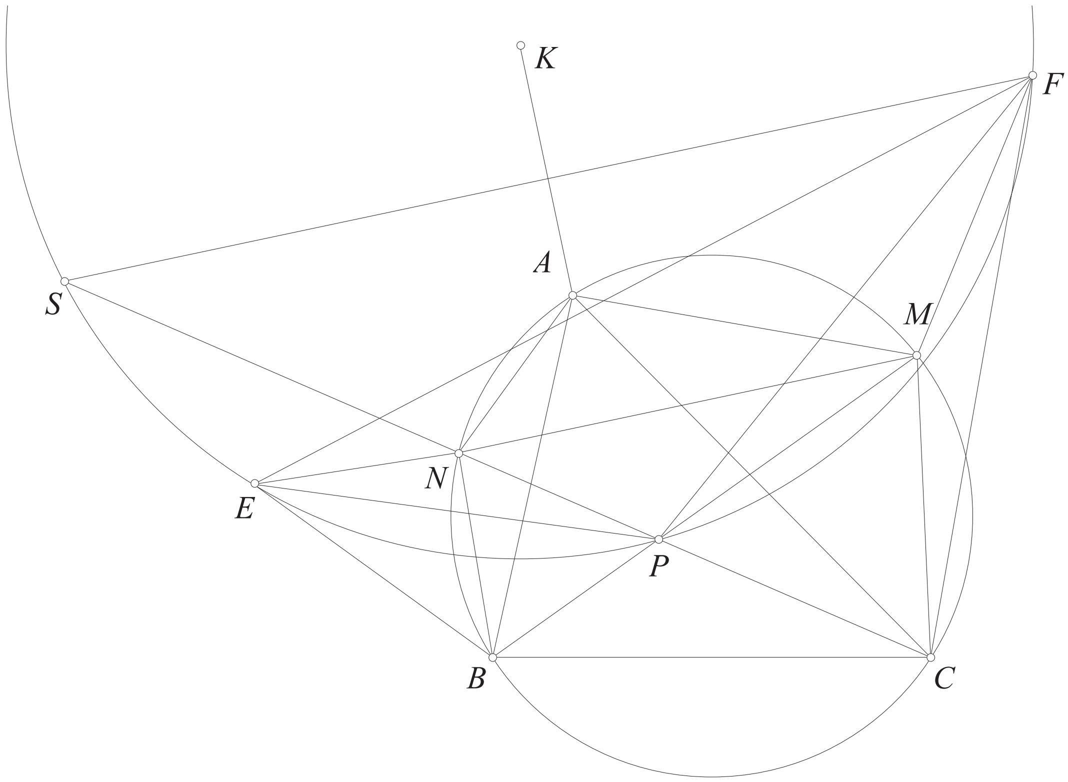
Lời giải. Ta dễ thấy I là tâm ngoại tiếp tam giác AEF. Mặt khác ta biết một kết quả quen thuộc là các điểm A, I, C, F cùng thuộc một đường tròn (K) và các điểm A, I, B, E cũng thuộc một đường tròn (L) và hiển nhiên KL là trung trực AI. Từ đó nếu IN cắt KL tại J theo bài trước thì J nằm trên trung trực BC ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Trong riêng trường hợp với tâm nội tiếp trên bài toán cũng có rất nhiều phát triển khác nữa. Ta tiếp tục với một số ứng dụng tiếp theo

Bài toán 19. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. P nằm trong tam giác sao cho $TP = TA$. PB, PC lần lượt cắt (O) tại E, F khác B, C. Dựng tam giác cân BAQ đồng dạng cùng hướng với FOD và tam giác cân CAR đồng dạng cùng hướng với EOD. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PQR nằm trên AO.

Trước hết ta chứng minh một bài toán khác như sau [5] là mở rộng của bài toán 2 trong cuộc thi ELMO 2016 [6]

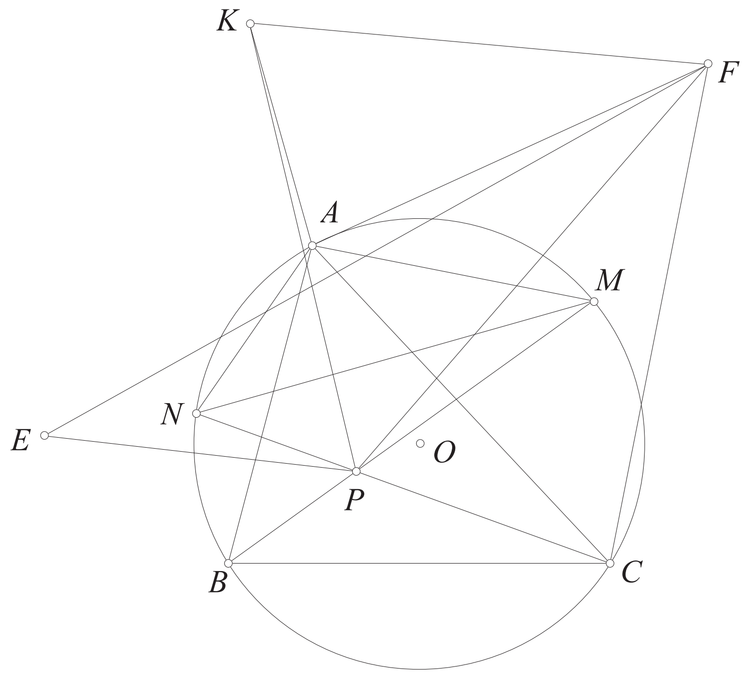
Bài toán 20. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là điểm bất kỳ trong tam giác. PB, PC lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. E, F lần lượt là đối xứng của B, C qua AN, AM. K là tâm ngoại tiếp tam giác PEF. Chứng minh rằng $AK \perp MN$.



Lời giải sau được đề nghị bởi **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An [5].

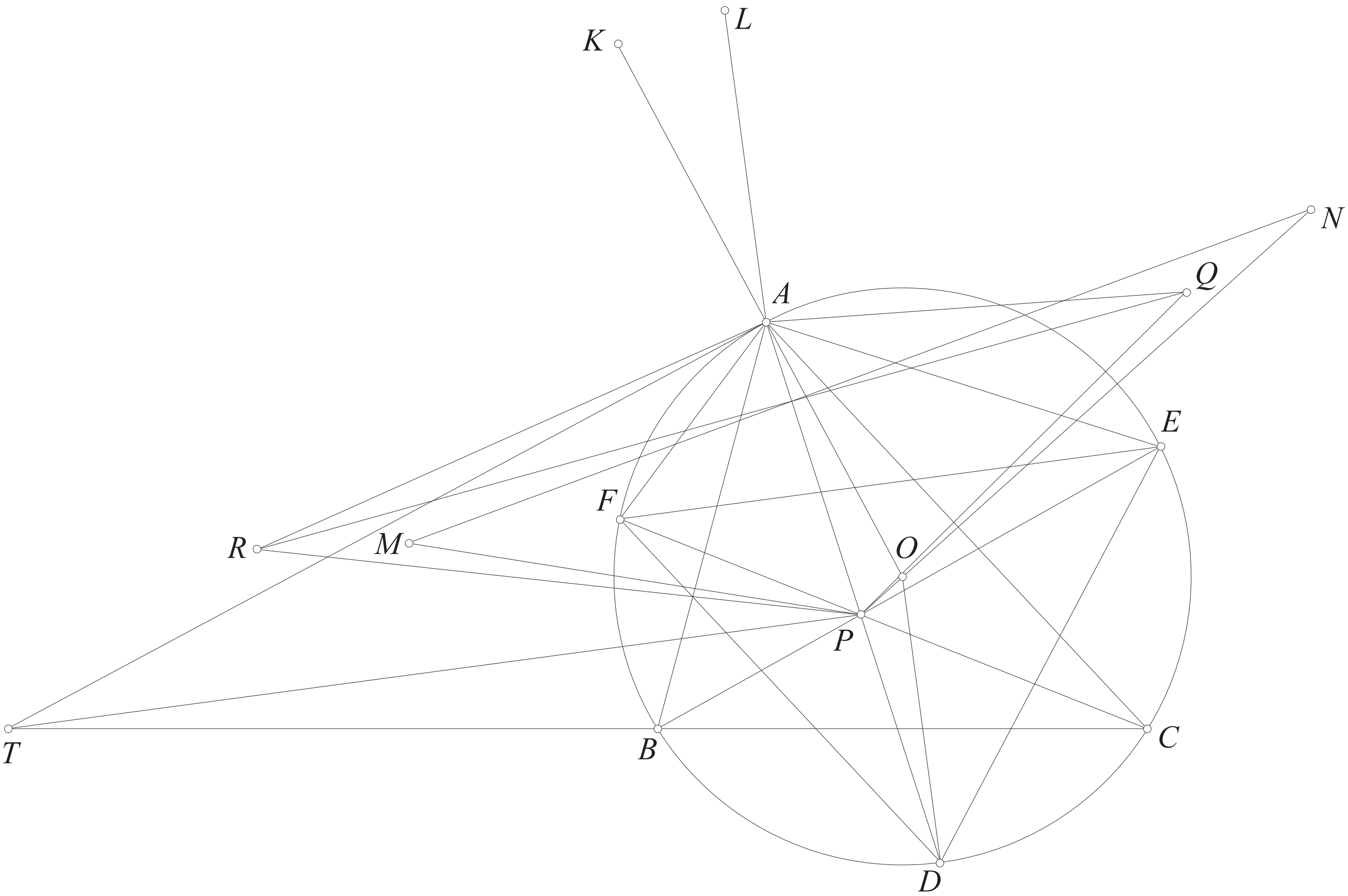
Lời giải. Chú ý rằng $\angle AMC = \angle AMF$ and $\angle ANE = \angle ANB$ nên $\angle PMF = \angle PMA + \angle AMF = \angle ACB + 180^\circ - \angle ABC$ và $\angle PNE = 360^\circ - \angle ANP - \angle ANP = 180^\circ + 180^\circ - \angle ABC - \angle ANB = 180^\circ - \angle ABC + \angle ACB$. Như vậy $\angle PMF = \angle PNE$. Ta lại có $\frac{NP}{NE} = \frac{NP}{NB} = \frac{MP}{MC} = \frac{MP}{MF}$, vì vậy hai tam giác PMF và PNE đồng dạng nên suy ra hai tam giác PMN và PFE đồng dạng. Gọi PN cắt (K) tại S khác P. Ta thấy $\angle PSF = \angle PEF = \angle PNM$, nên $FS \parallel MN$. Chú ý rằng $AC = AF$ và $\angle FAC = 2\angle MAC = 2\angle MNC = 2\angle FSC$. Từ đây A là tâm ngoại tiếp tam giác SFC. Dễ thấy $AK \perp SF \parallel MN$. □

Lời giải sau được đề nghị bởi **Nguyễn Nga Nhi** lớp 9 toán THPT chuyên Hà Nội Amsterdam [7].



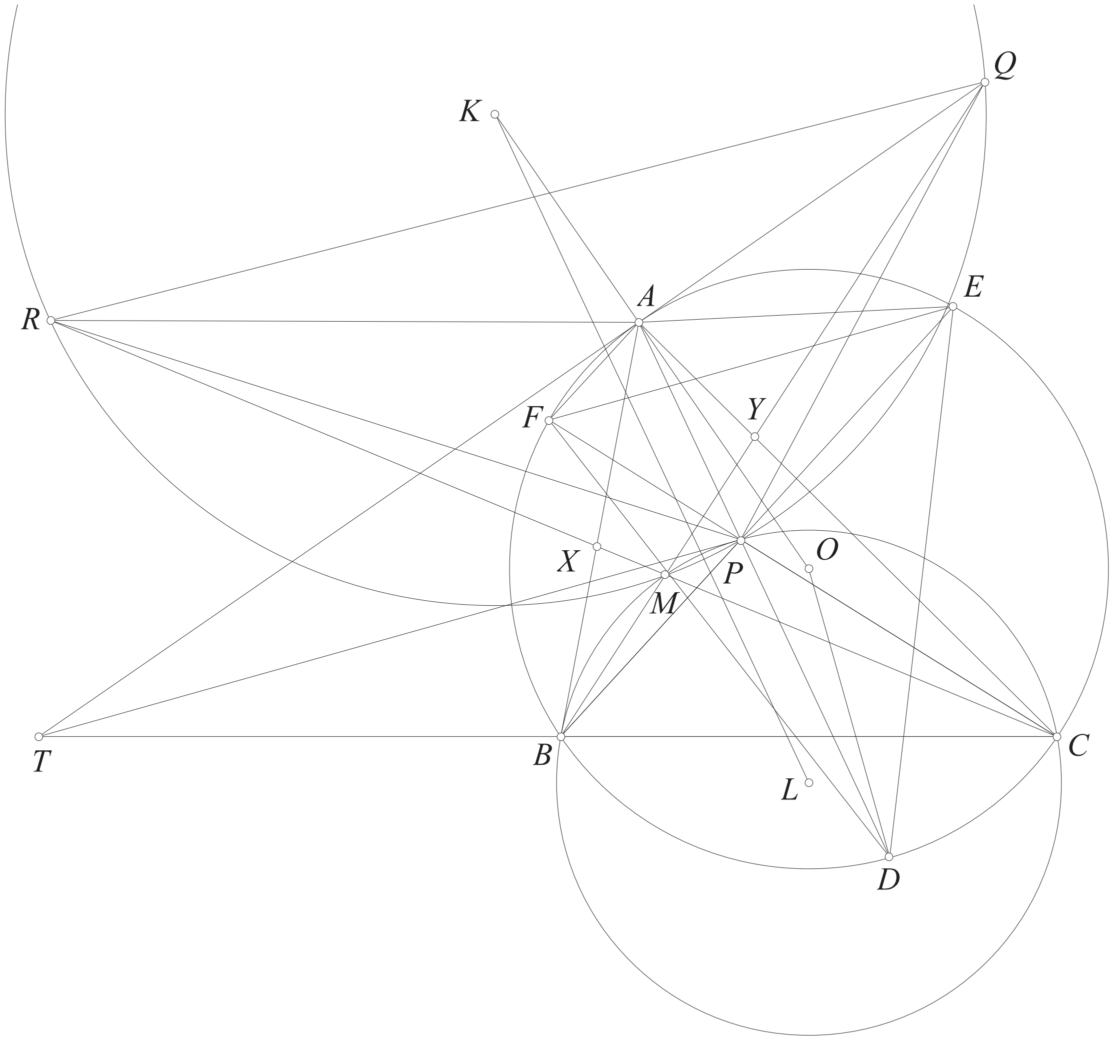
Lời giải. Chú ý rằng $\angle AMC = \angle AMF$ and $\angle ANE = \angle ANB$ nên $\angle PMF = \angle PMA + \angle AMF = \angle ACB + 180° - \angle ABC$ và $\angle PNE = 360° - \angle ANP - \angle ANP = 180° + 180° - \angle ABC - \angle ANB = 180° - \angle ABC + \angle ACB$. Như vậy $\angle PMF = \angle PNE$. Ta lại có $\frac{NP}{NE} = \frac{NP}{NB} = \frac{MP}{MC} = \frac{MP}{MF}$, vì vậy hai tam giác PMF và PNE đồng dạng nên suy ra hai tam giác PMN và PFE đồng dạng. Từ đó $\angle PKF = 2\angle PEF = 2\angle PNM = 2\angle CAM = \angle CAF$. Vậy hai tam giác cân FAC và FKP đồng dạng. Ta suy ra hai tam giác FKA và FPC đồng dạng. Vậy $\angle KAM = \angle KAF + \angle FAM = \angle PCF + \angle CAM = \angle PCA + 90° = \angle NMA + 90°$. Từ đó $AK \perp MN$. □

Trở lại bài toán 19.



Lời giải. Gọi M, N lần lượt đối xứng với B, C qua AF, AE. Chú ý rằng, tích hai phép đối xứng trục không song song là một phép quay, ta dễ thấy phép quay tâm A với góc quay $\angle FOD = 2\angle FAP$ biến B thành Q. Mặt khác đối xứng trục AF biến B thành M. Từ đó đối xứng trục AP biến M thành Q. Tương tự đối xứng trục AP biến N thành R. Từ đó qua đối xứng trục AP thì tâm K ngoại tiếp tam giác PQR biến thành tâm L ngoại tiếp tam giác PMN. Chú ý rằng theo bài toán trên và bài toán 1 thì $AL \perp EF \perp OD$. Từ đó $AL \parallel OD$. Kết hợp tính đối xứng thì $\angle KAP + \angle PAO = \angle LAP + \angle ODA = 180°$, suy ra K, A, O thẳng hàng. □

Lời giải sau được đề nghị bởi **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An [5].



Lời giải. Gọi BQ cắt CR tại M. Để ý $\triangle CAR \sim \triangle EOD$ và $\triangle BAQ \sim \triangle FOD$ dễ suy ra $\angle BMC = \angle BPC$ hay B, M, P, C đồng viên. Theo bài toán 1 thì $DE = DF$ từ đó $\triangle CAR \sim \triangle BAQ$. Để ý $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$ suy ra $\frac{PB}{BQ} = \frac{PC}{CR}$, từ đây $\triangle RPC \sim \triangle QPB$ nên R, Q, P, M đồng viên. Gọi AB, AC lần lượt cắt MC, MB tại X, Y. Để ý $\angle ACR = \angle ABQ$ nên B, X, Y, C đồng viên, ta suy ra $XY \perp AO$. Lại có $\angle ABM = \angle ACR = \angle ARC$ nên A, R, B, M đồng viên suy ra $XR.XM = XB.XA$ hay X thuộc trục đẳng phương của (O) và (PQR). Tương tự thì XY là trục đẳng phương của (O) và (PQR) vậy $XY \perp OK$ hay A, O, K thẳng hàng. □

3 Một số bài toán áp dụng

Phần này các bạn hãy làm một số bài toán sau để thực hành các bài toán có trong phần trước

Bài toán 21. Cho tam giác ABC với phân giác AD. Trung trực AD cắt BC tại T. P là một điểm nằm trong tam giác. G, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng $GE = GF$ khi và chỉ khi $TP = TD$.

Bài toán 22. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng có duy nhất hai vị trí của điểm P trong mặt phẳng sao cho tam giác Pedal của P ứng với tam giác ABC là tam giác đều.

Bài toán 23. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. TP cắt (O) tại M, N. Gọi R, Q là trung điểm của MN, BC. Chứng minh rằng $\angle RAQ = |\angle MAB - \angle NAC|$.

Bài toán 24 (IMO Shorlist 2013 G4)**.** Cho tam giác ABC với đường phân giác AD. (K) là đường tròn qua A, D và tiếp xúc với AB. E là điểm đối xứng của A qua CK. DE cắt AC tại F. Chứng minh rằng $BA = BF$.

Bài toán 25. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P bất kỳ nằm trong tam giác. PA, PB, PC lần lượt cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Dựng tam giác cân BAQ đồng dạng cùng hướng với FOD và tam giác cân CAR đồng dạng cùng hướng với EOD. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PQR nằm trên AO khi và chỉ khi $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$.

Bài toán 26. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P bất kỳ nằm trong tam giác. PB, PC lần lượt cắt (O) tại E, F khác B, C. M, N lần lượt là đối xứng của B, C qua AF, AE. K là tâm ngoại tiếp tam giác PMN. Gọi L đối xứng K qua trung trực AP. Chứng minh rằng $PL \parallel AO$ khi và chỉ khi $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$.

Lời cảm ơn

Tác giả xin được nói lời cảm ơn chân thành tới bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương và bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã giúp tác giả đọc cẩn thận bài viết này.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h356195

[2] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h460401

[3] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

[4] http://analgeomatica.blogspot.com/2014/02/xung-quanh-bai-hinh-hoc-thi-imo-nam-2010.html

[5] VMF's Marathon Hình học http://diendantoanhoc.net/

[6] ELMO 2016 P2 http://artofproblemsolving.com/community/q1h1262190

[7] Trần Quang Hùng, Bài giảng tập huấn đội tuyển Arab Saudi năm 2016.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com