Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

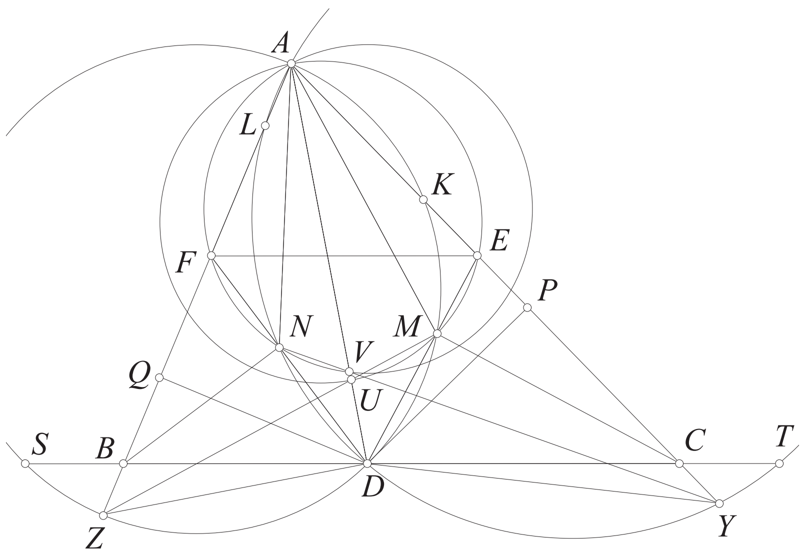
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có phân giác AD. E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của C, B lên DE, DF. AD cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và AFN tại lần lượt tại U, V khác A. Gọi NV, MU lần lượt cắt CA, AB tại Y, Z. Chứng minh rằng $YC = ZB$.

Lời giải

Dựa theo lời giải của bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 12 Toán THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình ở đây.



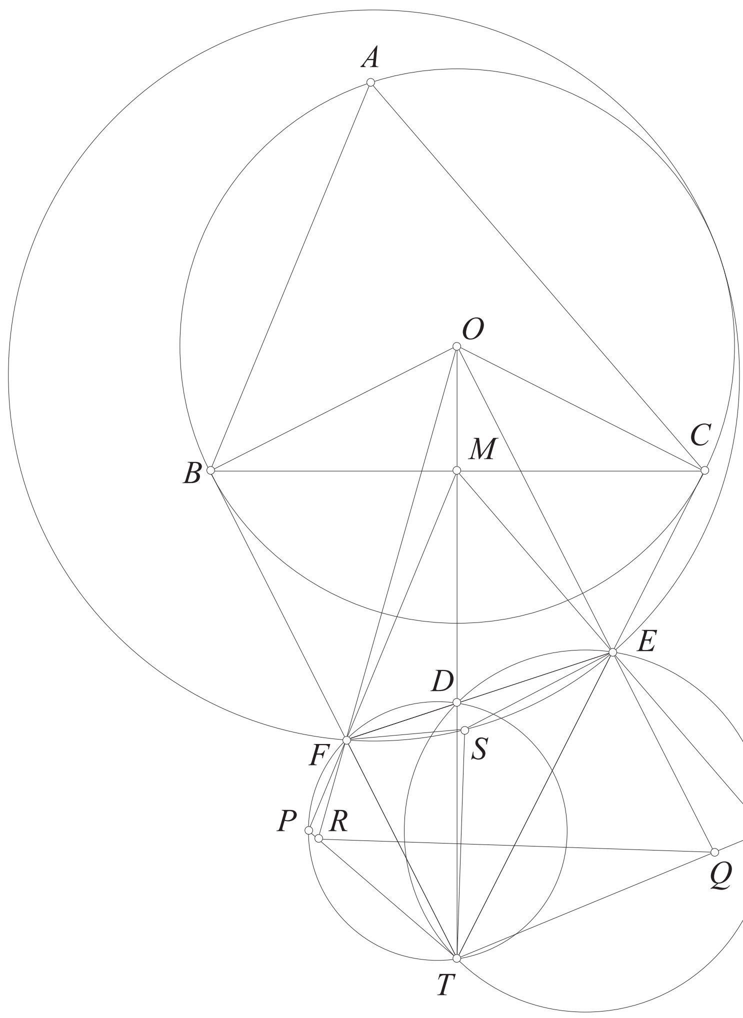
Ta có $\angle DNY = \angle FAV = \angle VAY$ nên tứ giác $ANDY$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $AMDZ$ cũng nội tiếp. Gọi giao điểm thứ hai của BC với các đường tròn $(ANDY)$ và $(AMDZ)$ lần lượt là S, T. P, Q lần lượt là hình chiếu của D lên CA, AB. Gọi giao điểm thứ hai của AB, CA với các đường tròn $(ANDY)$ và $(AMDZ)$ lần lượt là L, K. Ta có $EK \cdot EA = EM \cdot ED = EP \cdot EC$. Suy ra $\frac{EA}{EC} = \frac{EP}{EK} = \frac{EA+EP}{EC+EK} = \frac{AP}{KC}$. Tương tự $\frac{AQ}{LB} = \frac{FA}{FB}$. Do đó $\frac{AP}{KC} = \frac{EA}{EC} = \frac{FA}{FB} = \frac{AQ}{LB}$ do $AP = AQ$ nên $KC = LB$. Từ đó $\frac{CS}{CK} = \frac{CD}{CA} = \frac{BD}{BA} = \frac{BT}{BL}$ suy ra $CS = BT$. Từ đó $\frac{BS}{BZ} = \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CD} = \frac{CT}{CY}$ suy ra $ZB = YC$. Ta hoàn thành chứng minh.

Nhận xét

Bài toán này thực chất là một bổ đề dẫn tới bài toán chọn đội tuyển KHTN năm 2015, tuy nhiên nếu tách riêng nó thì đó vẫn là một bài toán có ý nghĩa. Bạn **Nguyễn Hoàng Huy** lớp 12 Toán THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định cho lời giải khá thú vị bằng phép biến hình tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). M là trung điểm BC. Tiếp tuyến qua B, C của (O) cắt nhau tại T. Trên TB, TC lấy các điểm F, E sao cho $MF \parallel AB$, $ME \parallel AC$. TM cắt EF tại D. ME, MF lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác TED, TFD tại N, P khác E, F. OE, OF lần lượt cắt TN, TP tại Q, R. S đối xứng T qua QR. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác SEF tiếp xúc (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

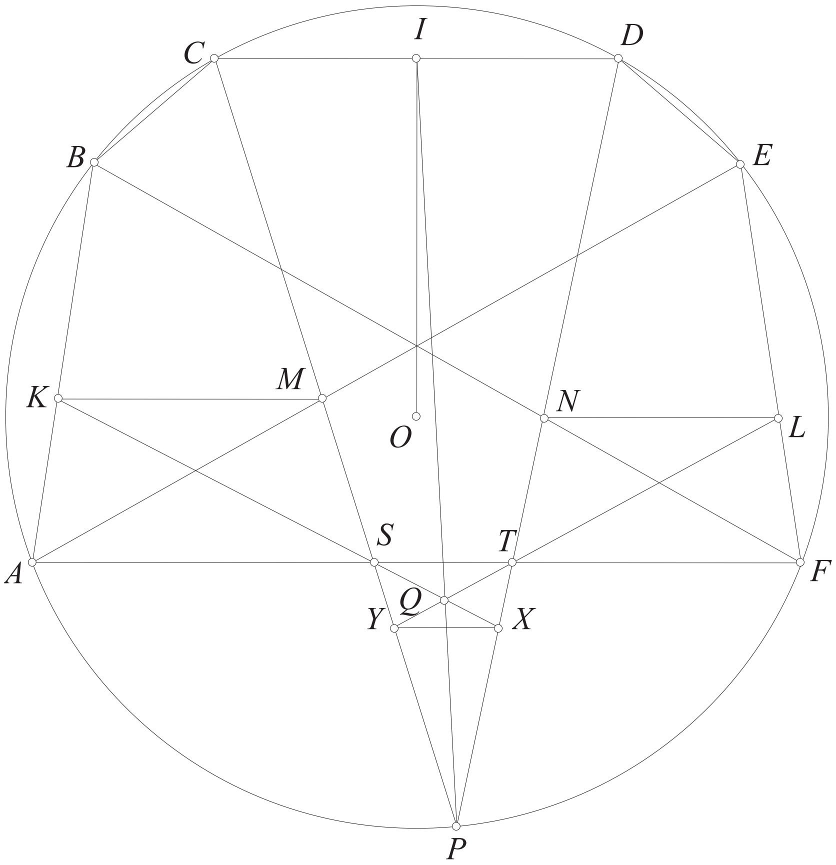
Bài toán từ bạn đọc

Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp có $AB = CD = EF$ và $BC = DE$. P là một điểm di chuyển trên cung nhỏ AF của đường tròn ngoại tiếp lục giác. PC, PD lần lượt cắt AE, FB tại M, N. K, L theo thứ tự thuộc các cạnh AB, EF sao cho $MK \parallel NL \parallel AF$. PC, PD lần lượt cắt AF tại S, T. KS cắt LT tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ chia đôi đoạn CD.

Tác giả: **Đỗ Xuân Long.**

Lời giải

Dựa theo lời giải của bạn **Nguyễn Tiến Dũng** ở đây.



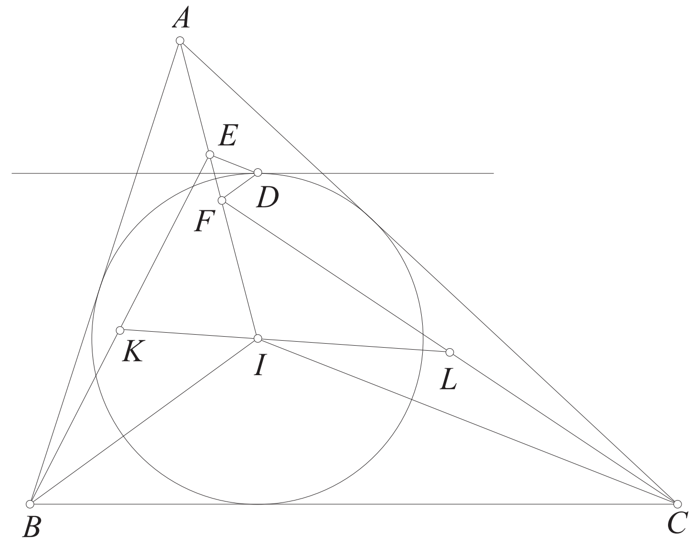
Gọi KS, LT lần lượt cắt PD, PC tại X, Y. Dễ thấy $\frac{XP}{XT} = \frac{[KSP]}{[KST]} = \frac{[KSP]}{[KSM]} \cdot \frac{[KSM]}{[KSP]} = \frac{SP}{SM} \cdot \frac{KM}{ST}$. Tương tự $\frac{YP}{YS} = \frac{TP}{TN} \cdot \frac{LN}{TS}$. Chú ý rằng hai tam giác $\triangle AMK \sim \triangle FNL$ và các tứ giác $AMTP$ và $FNSP$ nội tiếp, ta thu được $\frac{XP}{XT} : \frac{YP}{YS} = \frac{SP \cdot TN}{TP \cdot SM} \cdot \frac{MK}{NL} = \frac{ST}{TS} \cdot \frac{NF}{MA} \cdot \frac{MA}{NF} = 1$. Do đó $\frac{XP}{XT} = \frac{YP}{YS}$ nên $XY \parallel ST$ ta suy ra PQ chia đôi ST hay PQ chia đôi CD.

Nhận xét

Bài toán này được tác giả phát triển từ cấu hình về hình vuông và hình thang cân có ba cạnh bằng nhau.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). Tiếp tuyến của (I) song song với BC tiếp xúc (I) tại D. Lấy các điểm E, F trên IA sao cho $DE \parallel IC$ và $DF \parallel IB$. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm các đoạn thẳng BE, CF đi qua I.



Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng**, Hà Nội.