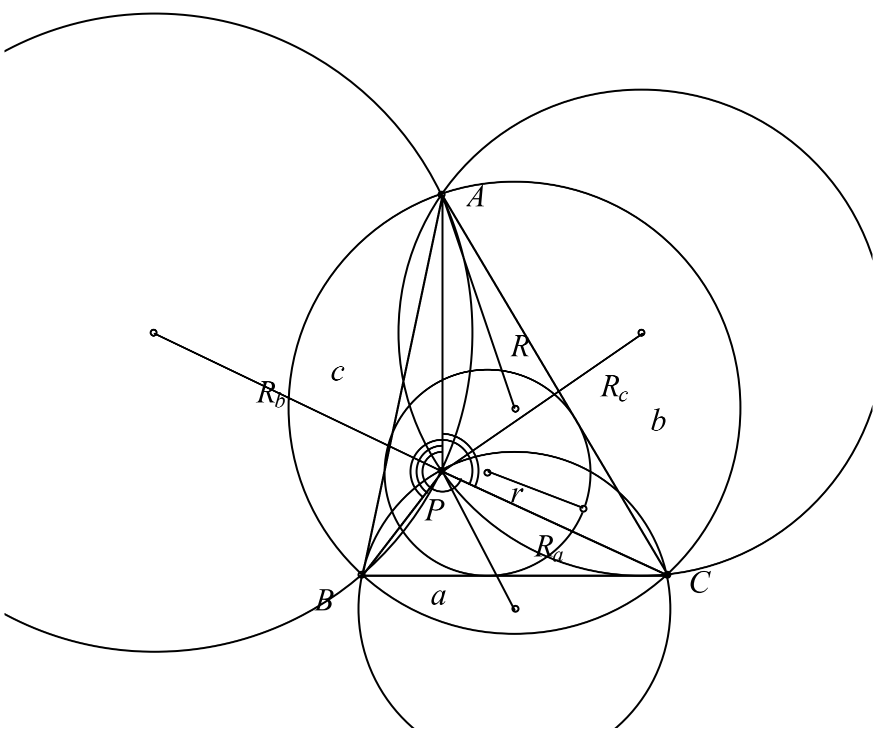
Các bất đẳng thức liên quan đến điểm nằm trong tam giác

Nhóm làm việc: Nguyễn Lê Quân, Đỗ Ngọc Phúc, Nguyễn Đình Đức, Phạm Đức Trung, Lê Đình Thành lớp 10A2 Tin.

Giáo viên hướng dẫn: Trần Quang Hùng.

I. Mở đầu

Trong tam giác *ABC* chúng ta kí hiệu độ dài ba cạnh là *a,b,c*; bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là *R*, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là r ,l_a,l_b,l_c là độ dài của đường phân giác trong của ba góc $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Lấy *P* là điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Kí hiệu R_a, R_b, R_c lần lượt là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác *PBA, PCA, PAB* và giá trị các góc $\angle BPC = \alpha$, $\angle CPA=\beta$,$\angle APB=\gamma$.



Trong [1] có xuất hiện bài toán sau dưới dạng một định lý

Đinh lý 1. *Với x, y, z là số thực dương tùy ý, chúng ta có*

$$\frac{xl_a}{\sqrt{R_bR_c}}+\frac{yl_b}{\sqrt{R_aR_c}}+\frac{zl_c}{\sqrt{R_bR_a}}\le\sqrt{\frac{r}{2R}+2.\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{yx}{z}\right)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, P là trọng tâm và x=y=z.

Tác giả của [1] đưa ra định lý trên để chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{l_a}{R_b+R_c}+\frac{l_b}{R_a+R_c}+\frac{l_c}{R_b+R_a}\le\frac{9}{4}$$

Thực chất bất đẳng thức trên là một giả thuyết đã tồn tại khá lâu trong [2] và nó sẽ được chứng minh nhờ định lý 1 như chúng ta thấydưới đây.

Trong quá trình chứng minh định lý 1 và nghiên cứu các tài liệu [1,2,3,4], chúng tôi đã mạnh dạn đề xuất bài toán sau, bài toán cũng được phát biểu dưới dạng một định lý

Đinh lý 2. *Với x, y, z là số thực dương tùy ý, chúng ta có*

$$\frac{x}{\sqrt{R_bR_c}}+\frac{y}{\sqrt{R_aR_c}}+\frac{z}{\sqrt{R_bR_a}}\le\sqrt{\frac{1}{2Rr}\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{yx}{z}\right)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, P là trọng tâm và x=y=z.

II. Chứng minh định lý và các hệ quả

Trong mục này chúng tôi sẽ đưa ra các chứng minh cho định lý 1 và định lý 2. Trong các chứng minh này, chúng tôi đã sử dụng một số kết quả quen thuộc mà chúng tôi phát biểu chúng dưới dạng các bổ đề dưới đây. Để phát cho phát biểu được ngắn gọn, chúng tôi không viết lại các ký hiệu thộng dụng đã được đề cập trong phần đầu bài viết này.

Bổ đề 1. *Với x, y, z là các số thực tùy ý, chúng ta có*

$$yz\sin^2 A+zx\sin^2 B+xy\sin^2 C\le\frac{(x+y+z)^2}{4}$$

Lời giải. Với mọi số thực x,y,z và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có

$$\left(x.\overrightarrow{OA}+y.\overrightarrow{OB}+z.\overrightarrow{OC}\right)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)R^2+2\left[xy.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+zy.\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}+xz.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)R^2+2\left[xy\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2}+yz\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2}+xz\frac{OA^2+OC^2-AC^2}{2}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow R^2\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\right)\ge xyc^2+yza^2+xzb^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)^2R^2\ge xyc^2+yza^2+xzb^2$$

Dùng định lý hám số sine , bất đẳng thức tương đương

$$\Leftrightarrow R^2(x+y+z)^2\ge 4R^2\left[\sin^2 A.yz+\sin^2 B.xz+\sin^2 C.xy\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[yz\sin^2 A+xz\sin^2 B+xy\sin^2 C\right]\le \frac{(x+y+z)^2}{4}$$

Đó là điều phải chứng minh .

Bổ đề 2. *Với x, y, z là các số thực dương tùy ý thì ta có bất đẳng thức*

$$x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+y^2\sin^2\frac{\beta}{2}+z^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)^2$$

Lời giải. Từ bổ đề 1, với x,y,z > 0 ta thế biến $yz\mapsto x^2, zx\mapsto y^2, xy\mapsto z^2$ hay $x\mapsto\frac{yz}{x}, y\mapsto\frac{zx}{y}, z\mapsto\frac{xy}{z}$ ta thu được bổ đề 2.

Bổ đề 3. *Trong tam giác ABC ta có bất đẳng thức*

$$l_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\le\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}, l_b=\frac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c+a}\le\sqrt{ca}\cos\frac{B}{2}, l_c=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}\le\sqrt{ab}\cos\frac{C}{2}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức là công thức cơ bản của đường phân giác kết hợp bất đẳng thức AM-GM.

Bổ đề 4. Trong tam giác ABC ta có

$$\frac{bc}{4R_bR_c}\le\sin^2\frac{\alpha}{2}, \frac{ca}{4R_cR_a}\le\sin^2\frac{\beta}{2}, \frac{ab}{4R_aR_b}\le\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Lời giải. Theo định lý hàm số sin cho các tam giác PBC, PCA, PAB ta có $a=2R_a\sin\alpha, b=2R_b\sin\beta, c=2R_c\sin\gamma$. Do đó

$$\frac{bc}{4R_bR_c}=\sin\beta\sin\gamma=\frac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)]\le\frac{1}{2}[1-\cos(360^\circ-\alpha)]=\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Tương tự ta có điều phải chứng minh.

Dựa và ba bổ đề trên ta đưa ra các lời giải cho các định lý 1 và định lý 2 như sau

Lời giải định lý 1. Áp dụng các bổ đề 3 và bổ đề 4 ta thu được ngay các bất đẳng thức sau với các số thực dương x, y, z tùy ý

$$\frac{l_a}{\sqrt{R_b.R_c}} \le \sqrt{\frac{bc}{R_b.R_c}}.\cos\frac{A}{2} \le 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{xl_a}{\sqrt{R_b.R_c}} \le x\sqrt{\frac{bc}{R_b.R_c}}.\cos\frac{A}{2} \le 2\cos\frac{A}{2}x\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{l_b}{\sqrt{R_c.R_a}} \le \sqrt{\frac{ca}{R_c.R_a}}.\cos\frac{B}{2} \le 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{B}{2} \Rightarrow \frac{yl_b}{\sqrt{R_c.R_a}} \le y\sqrt{\frac{ca}{R_c.R_a}}.\cos\frac{B}{2} \le 2\cos\frac{B}{2}y\sin\frac{\beta}{2}$$

$$\frac{l_c}{\sqrt{R_a.R_b}} \le \sqrt{\frac{ab}{R_a.R_b}}.\cos\frac{C}{2} \le 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{C}{2} \Rightarrow \frac{zl_c}{\sqrt{R_a.R_b}} \le z\sqrt{\frac{ab}{R_a.R_b}}.\cos\frac{C}{2} \le 2\cos\frac{C}{2}z\sin\frac{\gamma}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Swartz kết hợp bổ đề 2 ta thu được

$$\frac{xl_a}{\sqrt{R_b.R_c}} + \frac{yl_b}{\sqrt{R_c.R_a}} + \frac{zl_c}{\sqrt{R_a.R_b}}$$

$$\le 2\cos\frac{A}{2}x\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{B}{2}y\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{C}{2}z\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\le 2\sqrt{\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right)\left(x^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + y^2\sin^2\frac{\beta}{2} + z^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$= 2\sqrt{\left(2 + \frac{r}{2R}\right)\left(x^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + y^2\sin^2\frac{\beta}{2} + z^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\le \sqrt{\left(2 + \frac{r}{2R}\right)\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right)}$$

Ta chú ý kết quả quen thuộc $cos^2\frac{A}{2} + cos^2\frac{B}{2} + cos^2\frac{C}{2} = \frac{4R + r}{2R}$

Đó chính là kết quả định lý 1.

Bằng một ý tưởng tương tự, ta chứng minh định lý 2 như sau

Lời giải định lý 2. Theo bổ đề 4 với các số thực dương x,y,z tùy ý ta có các bất đẳng thức sau

$$\frac{bc}{4R_bR_c} \le \sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow x\sqrt{\frac{1}{R_bR_c}} \le 2\sqrt{\frac{1}{bc}}x\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{bc}{4R_cR_a} \le \sin^2\frac{\beta}{2} \Rightarrow y\sqrt{\frac{1}{R_cR_a}} \le 2\sqrt{\frac{1}{ca}}y\sin\frac{\beta}{2}$$

$$\frac{ab}{4R_aR_b} \le \sin^2\frac{\gamma}{2} \Rightarrow z\sqrt{\frac{1}{R_aR_b}} \le 2\sqrt{\frac{1}{ab}}z\sin\frac{\gamma}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Swartz kết hợp bổ đề 2 ta có

$$x\sqrt{\frac{1}{R_bR_c}}+y\sqrt{\frac{1}{R_cR_a}}+z\sqrt{\frac{1}{R_aR_b}}$$
$$\le 2\left(\sqrt{\frac{1}{bc}}x\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{1}{ca}}y\sin\frac{\beta}{2}+\sqrt{\frac{1}{ab}}z\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$\le 2\sqrt{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\left(x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+y^2\sin^2\frac{\beta}{2}+z^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}$$
$$=2\sqrt{\frac{1}{2Rr}\left(x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+y^2\sin^2\frac{\beta}{2}+z^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}$$
$$\le 2\sqrt{\frac{1}{2Rr}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)}$$

Đó chính là kết quả định lý 2.

Hai kết quả định lý này sẽ cho chúng ta nhiều hệ quả hay, từ các hệ quả này chúng ta lại ứng dụng để tìm ra nhiều bất đẳng thức thú vị khác trong tam giác.

Hệ quả 1. *Cho x, y, z là các số thực dương, ta có*

a) $\frac{2xl_a}{R_b+R_c}+\frac{2yl_b}{R_c+R_a}+\frac{2zl_c}{R_a+R_b}\le\frac{xl_a}{\sqrt{R_b.R_c}}+\frac{yl_b}{\sqrt{R_a.R_c}}+\frac{zl_c}{\sqrt{R_b.R_c}}\le\frac{3}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{yx}{z}\right)$

b) $x^2R_a+y^2R_b+z^2R_c\ge\sqrt{\frac{2R}{4R+r}}(yzl_a+zxl_b+xyl_c)\ge\frac{2}{3}(yzl_a+zxl_b+xyl_c)$

Lời giải. a) Ta thấy các bất đẳng thức khá hiển nhiên nhờ các bất đẳng thức cơ bản AM-GM và bất đẳng thức Euler $R\ge 2r$.

b) Ta chú ý phép thế biến $x\mapsto yz\sqrt{R_bR_c}, y\mapsto zx\sqrt{R_cR_a}, z\mapsto xy\sqrt{R_aR_b}$ từ bất đẳng thức câu a) ta đi đến điều phải chứng minh.

Hệ quả 2. *Cho x, y, z là các số thực dương, ta có*

a) $\frac{2x}{R_b+R_c}+\frac{2y}{R_c+R_a}+\frac{2z}{R_a+R_b}\le\frac{x}{\sqrt{R_bR_c}}+\frac{y}{\sqrt{R_aR_c}}+\frac{z}{\sqrt{R_bR_a}}\le\frac{1}{2r}\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{yx}{z}\right)$

b) $x^2R_a+y^2R_b+z^2R_c\ge\sqrt{2Rr}(yz+zx+xy)\ge 2r(yz+zx+xy)$

Lời giải. a) Ta thấy các bất đẳng thức khá hiển nhiên nhờ các bất đẳng thức cơ bản AM-GM và bất đẳng thức Euler nổi tiếng $R\ge 2r$.

b) Ta thế biến tương tự $x \mapsto yz\sqrt{R_bR_c}, y \mapsto zx\sqrt{R_cR_a}, z \mapsto xy\sqrt{R_aR_b}$ cho câu a) ta thu được điều phải chứng minh.

III. Các bài toán ứng dụng

Bài toán 1. Chứng minh rằng

$$\frac{l_a}{R_b+R_c}+\frac{l_b}{R_a+R_c}+\frac{l_c}{R_b+R_a}\le\frac{l_a}{\sqrt{R_b.R_c}}+\frac{l_b}{\sqrt{R_a.R_c}}+\frac{l_c}{\sqrt{R_b.R_c}}\le\frac{9}{4}$$

Lời giải. Áp dụng hệ quả 1a) khi x=y=z=1

Bài toán 2. Chứng minh rằng $R_a+R_b+R_c\ge\sqrt{\frac{2R}{4R+r}}(l_a+l_b+l_c)\ge\frac{2}{3}(l_a+l_b+l_c)$

Lời giải. Áp dụng hệ quả 1b) khi x=y=z=1

Chúng ta chú ý rằng bất đẳng thức trên xuất hiện trong [2] và lời giải rất cồng kềnh, nhưng như các bạn thấy, nếu áp dụng các hệ quả đã có của chúng ta thì lời giải không đến một dòng.

Bài toán 3. Chứng minh rằng $\frac{l_aR_a}{l_bl_c}+\frac{l_bR_b}{l_cl_a}+\frac{l_cR_c}{l_al_b}\ge\sqrt{\frac{2R}{4R+r}}\ge\frac{2}{3}$

Lời giải. Áp dụng hệ quả 1b) khi $x=l_a, y=l_b, z=l_c$ và rút gọn.

Bài toán 4. Chứng minh rằng

a) $\frac{R_a}{l_b^2}+\frac{R_b}{l_c^2}+\frac{R_c}{l_a^2}\ge\sqrt{\frac{2R}{4R+r}}\left(\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\right)\ge\frac{2}{3}\left(\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\right)$

b) $\frac{R_a}{l_c^2}+\frac{R_b}{l_a^2}+\frac{R_c}{l_b^2}\ge\sqrt{\frac{2R}{4R+r}}\left(\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\right)\ge\frac{2}{3}\left(\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\right)$

Lời giải. a) Áp dụng hệ quả 1b) khi $x=\frac{1}{l_b}, y=\frac{1}{l_c}, z=\frac{1}{l_a}$

b) Áp dụng hệ quả 1b) khi $x=\frac{1}{l_c}, y=\frac{1}{l_a}, z=\frac{1}{l_b}$

Như chúng ta đã thấy, việc áp dụng hệ quả 1 đã đưa đến rất nhiều bất đẳng thức thú vị, Rõ ràng là trong bốn bài toán nhỏ này chúng tôi chưa thể khai thác hết hệ quả 1. Vậy còn hệ quả 2 thì sao? Các bài tập sau các bạn hãy thử vận dụng các kết quả đã biết trên để tự làm chúng

Bài toán 5. Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{R_bR_c}}{R_b+R_c}+\frac{\sqrt{R_cR_a}}{R_c+R_a}+\frac{\sqrt{R_aR_b}}{R_a+R_b}\le\frac{1}{4r}(R_b+R_c+R_a)$

Bài toán 6. Chứng minh rằng $\frac{R_a}{R_b+R_c}+\frac{R_b}{R_c+R_a}+\frac{R_c}{R_a+R_b}\le\frac{1}{4r}\left(\frac{R_bR_c}{R_a}+\frac{R_cR_a}{R_b}+\frac{R_aR_b}{R_c}\right)$

Bài toán 7. Chứng minh rằng $\frac{R_bR_c}{R_a}+\frac{R_cR_a}{R_b}+\frac{R_aR_b}{R_c}\ge 3\sqrt{2Rr}$

Tài liệu tham khảo

[1] Wei-Dong Jiang*, An inequality involving the angle bisectors and an interior point of a triangle*, Forum Geometricorum, 8 (2008).

[2] J. Liu, *A hundred unsolved triangle inequality problems, in Geometric Inequalities in China,* Jiangsu Education Press, Nanjing, 1996.

[3] O. Bottema et al, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969.

[4] Dragoslav S. Mitrinovic, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Springer; 1 edition.