Lời mở đầu

Trong bất đẳng thức cổ điển thì bất đẳng thức xoay vòng là một nội dung hay và khó. Có những bất đẳng thức có dạng khá đơn giản nhưng phải mất hàng chục năm, nhiều nhà toán học mới giải quyết được. Ví dụ như bất đẳng thức Shapiro được đặt ra vào năm 1903 bởi Neishbitt.

Với 3 số không âm a, b, c chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \quad \text{(đơn giản)}$$

và dạng tổng quát:

Mở rộng với n số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ thì:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \cdots + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{n}{2}$$

Khì nào đúng, khi nào sai.

Đến năm 1954 tức là sau 52 năm, Shapiro mới tổng kết lại giả thuyết này như sau:

1) Bất đằng thức đúng với n lẻ ≤ 23

2) Bất đằng thức đúng với n chẵn ≤ 12

Còn lại sai.

Hoàn toàn tự nhiên ta thấy còn rất nhiều dạng bất đẳng thức xoay vòng khác thì bất đẳng thức là gì, khi nào đúng, khi nào sai hoặc luôn luôn đúng. Trong bài luận văn này chúng tôi xây dựng được một dạng bất đẳng thức xoay vòng tổng quát mà các trường hợp riêng là những bài toán khó và rất khó có thể sử dụng trong những đề thi học sinh giỏi.

Luận văn này gồm có 2 chương:

Chương 1: Bất đẳng thức xoay vòng (Trình bày những kết quả đã có về các bài bất đẳng thức phân thức.)

Chương 2: Một dạng bất đẳng thức xoay vòng (Xây dựng bất đẳng thức với các trường hợp đơn giản, tổng quát bài toán)

Em xin chân thành cảm ơn các các thầy cô khoa Toán-Cơ-Tin học trong thời gian học tập ở trường Khoa Học Tự Nhiên, các thầy cô Khoa Sư Phạm ĐH Quốc Gia Hà Nội, các bạn trong lớp Sư phạm Toán 48. Đặc biệt là sự hướng dẫn, giúp đỡ tận tình của thầy TS Nguyễn Vũ Lương đã giúp đỡ em hoàn thành khóa luận này.

Mục lục

Chương 1

Bất đẳng thức xoay vòng

1.1 Bất đẳng thức Schurs

1.1.1 Bất đẳng thức Schurs và hệ quả

Bài 1 (Bất đẳng thức Schurs)

Với x, y, z là các số thực dương, λ là một số thực bất kì, chứng minh rằng:

$$x^\lambda(x-y)(x-z)+y^\lambda(y-z)(y-x)+z^\lambda(z-x)(z-y)\geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi vào chỉ khi $x=y=z$

Chứng minh

Chú ý rằng khi có hai biến số bằng nhau thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Chẳng hạn khi $y=z$ ta có: $x^\lambda(x-z)^2\geq 0$. Dấu "$=$" xảy ra khi $x=y=z$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết rằng: $x>y>z$

+ *Xét trường hợp* $\lambda\geq 0$

Bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng:

$$(x-y)[x^\lambda(x-z)+y^\lambda(y-z)]+z^\lambda(z-x)(z-y)\geq 0$$

Sử dụng điều kiện $x>y$ ta thu được

$$M>(x-y)(y-z)(x^\lambda-y^\lambda)+z^\lambda(x-z)(y-z)>0,\ (\forall\lambda>0)$$

do đó bất đẳng thức đúng.

+ *Xét trường hợp* $\lambda < 0$

Ta có

$$M = x^{\lambda}(x-y)(x-z) + (y-z)[z^{\lambda}(x-z) - y^{\lambda}(x-y)]$$

Sử dụng điều kiện $y > z$ (hay $x - z > y - z$) ta có:

$$M > x^{\lambda}(x-y)(x-z) + (y-z)(x-y)(z^{\lambda} - y^{\lambda}) > 0,\ (\forall \lambda < 0)$$

Vậy bất đẳng thức cần được chứng minh.

Bài 2 (Bất đẳng thức Schurs mởi rộng)

Giả sử $\mathbb{I}$ là một khoảng thuộc $\mathbb{R}$ và $f : \mathbb{I} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ là một hàm đơn điệu hay $f"(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{I}$. Với $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{I}$, chứng minh rằng:

$$f(x_1)(x_1-x_2)(x_1-x_3) + f(x_2)(x_2-x_3)(x_2-x_1) + f(x_3)(x_3-x_1)(x_3-x_2) \geq 0 \quad (1)$$

Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = x_3$.

Chứng minh

Vì f là hàm đơn điệu hay $f"(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{I}$ nên ta có bất đẳng thức:

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] < \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda} \qquad (2)$$

$\forall x, y \in \mathbb{I}$ và $\lambda \in (0,1)$

Không mất tính tổng quát ta giả sử $x_1 < x_2 < x_3$ (vì nếu 2 trong 3 biến bằng nhau thì bất đẳng thức luôn đúng, dấu bất đẳng thức xảy ra khi $x_1 = x_2 = x_3$).

Chia hai vế của (1) cho $(x_2 - x_3)(x_2 - x_1) < 0$ ta thu được:

$$-\left(\frac{x_1 - x_3}{x_2 - x_3}\right) f(x_1) + f(x_2) - \left(\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}\right) f(x_3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_2) \leq \left(\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2}\right) f(x_1) + \left(\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}\right) f(x_3)$$

Đặt: $\lambda = \dfrac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \Rightarrow \begin{cases} 1 - \lambda = & \dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \\ x_2 = & \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3 \end{cases}$

ta thu được bất đẳng thức (2) đúng hay (1) đúng.

Bài 3 (Một dạng mở rộng của bất đẳng thức Schurs)

Xét a, b, c, u, c, w là các số thực dương chứng minh rằng:

a) Nếu $p > 0$ và

$$a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}} \leq b^{\frac{1}{p}};\ u^{\frac{1}{1+p}} + w^{\frac{1}{1+p}} \geq v^{\frac{1}{1+p}}$$

Ta có: $ubc - vca + wab \geq 0$

b) Nếu $-1 < p < 0$ và

$$a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}} \leq b^{\frac{1}{p}};\ u^{\frac{1}{1+p}} + w^{\frac{1}{1+p}} \leq v^{\frac{1}{1+p}}$$

Ta có: $ubc - vca + wab \leq 0$

c) Nếu $p < -1$

$$a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}} \geq b^{\frac{1}{p}};\ u^{\frac{1}{1+p}} + w^{\frac{1}{1+p}} \leq v^{\frac{1}{1+p}}$$

Ta có: $ubc - vca + wab \geq 0$

Dấu bằng của bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}} = b^{\frac{1}{p}};\ u^{\frac{1}{1+p}} + w^{\frac{1}{1+p}} = v^{\frac{1}{1+p}}$$

Chứng minh

a) Nếu $p > 0$ ta có: $\dfrac{1}{1+p} + \dfrac{1}{\frac{p+1}{p}} = 1$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$a^{\frac{1}{1+p}}(uc)^{\frac{1}{1+p}} + c^{\frac{1}{1+p}}(wa)^{\frac{1}{1+p}} \leq \left(a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} (uc + wa)^{\frac{1}{p+1}}$$

Lũy thừa $p+1$ hai vế ta có:

$$\left[a^{\frac{1}{1+p}}(uc)^{\frac{1}{p+1}} + c^{\frac{1}{1+p}}(wa)^{\frac{1}{p+1}}\right]^{p+1} \leq \left(a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}}\right)^{p}(uc + wa)$$

$$\Leftrightarrow ac\left(u^{\frac{1}{1+p}} + w^{\frac{1}{1+p}}\right)^{p+1} \leq \left(a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}}\right)^{p+1}(uc + wa)$$

Áp dụng giả thiết bài toán ta có:

$$acv \leq ac\left(u^{\frac{1}{1+p}} + w^{\frac{1}{1+p}}\right)^{p+1} \leq b(uc + wa)$$

suy ra $ubc - acv + wab \geq 0$

b) Với $-1 < p < 0$ ta cũng có:

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{\frac{p+1}{p}} = 1 \text{ với } \frac{p+1}{p} < 0$$

Khi đó bất đẳng thức Holder có chiều ngược lại:

$$a^{\frac{1}{1+p}}(uc)^{\frac{1}{1+p}} + c^{\frac{1}{1+p}}(wa)^{\frac{1}{1+p}} \geq \left(a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}}(uc + wa)^{\frac{1}{p+1}}$$

Lũy thừa $p + 1$ hai vế ta được

$$\Leftrightarrow ac\left(u^{\frac{1}{1+p}} + w^{\frac{1}{1+p}}\right)^{p+1} \geq \left(a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}}\right)^{p+1}(uc + wa)$$

Áp dụng giả thiết phần b) (chú ý $p + 1 > 0$, $p < 0$) ta có:

$$acv \geq ac\left(u^{\frac{1}{1+p}} + w^{\frac{1}{1+p}}\right)^{p+1} \geq (uc + wa)\left(a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}}\right)^{p} \geq (uc + wa)b$$

suy ra: $abw - auv + ubc \leq 0$

c) Với $p < -1$ ta cũng có:

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{\frac{p+1}{p}} = 1 \text{ với } p + 1 < 0$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder:

$$a^{\frac{1}{1+p}}(uc)^{\frac{1}{1+p}} + c^{\frac{1}{1+p}}(wa)^{\frac{1}{1+p}} \leq \left(a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}}(uc + wa)^{\frac{1}{p+1}}$$

Lũy thừa $p + 1$ hai vế (chú ý $p + 1 > 0$) ta được:

$$ac\left(u^{\frac{1}{1+p}} + w^{\frac{1}{1+p}}\right)^{p+1} \leq \left(a^{\frac{1}{p}} + c^{\frac{1}{p}}\right)^{p}(uc + wa)$$

Áp dụng giả thiết phần c) (chú ý $p+1<0$) ta có:

$$acv \le ac\left(u^{\frac{1}{1+p}}+w^{\frac{1}{1+p}}\right)^{p+1} \le (uc+wa)\left(a^{\frac{1}{p}}+c^{\frac{1}{p}}\right)^{p} \le (uc+wa)b$$

suy ra: $ucb - acv + wab \ge 0$

Bài 4 (Bài toán hệ quả 1)

Với $x>y>z>0$. f là hàm đơn điệu hay $f"(x)=0\,\forall x>0$ và f nhận giá trị trên $\mathbb{R}^{+}$, chứng minh rằng:

$$\frac{f(x)}{y-z}+\frac{f(y)}{z-x}+\frac{f(z)}{x-y} \ge 0$$

Chứng minh

Áp dụng bài toán 2 ta có:

$$f(x)(x-y)(x-z)+f(y)(y-z)(y-x)+f(z)(z-x)(z-y) \ge 0$$

Chia 2 vế cho $(y-z)(z-x)(x-y)<0$ ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 5 (Bài toán hệ quả 2)

Với $x,y,z,a,b,c>0$ thỏa mãn điều kiện:

$$a^2+b^2 \le c^2$$

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} \ge z^{\frac{2}{3}}$$

chứng minh rằng $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b} \ge \dfrac{z}{c}$

Chứng minh

Áp dụng bài toán 3 với $p=\dfrac{1}{2}$ ta có:

$$xbc - zab + yac \ge 0$$

Chia 2 vế cho a,b,c ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

1.1.2 Một số bài toán minh họa

Bài 6

Giả sử ΔABC không nhọn, chứng minh rằng:

$$\frac{27}{\sin A}+\frac{64}{\sin B}\geq\frac{125}{\sin C}$$

Chứng minh

Áp dụng bài toán 5 với điều kiện

$$\begin{cases}\sin^2 A+\sin^B\leq\sin^2 C \quad \text{Tam giác không nhọn}\\ 27^{\frac{2}{3}}+64^{\frac{2}{3}}=125^{\frac{2}{3}}\end{cases}$$

Ta thu được điều phải chứng minh.

Bài 7

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3},\ x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\leq z^{\frac{3}{2}}$$

Chứng minh rằng: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\leq\dfrac{z}{c}$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{1}{\frac{1-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}}}=1$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder ta có:

$$a^{\frac{3}{2}}(xb)^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}(ya)^{\frac{3}{2}}\geq(xb+ya)^{\frac{3}{2}}(a^{-3}+b^{-3})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow(ab)^{\frac{3}{2}}\left(x^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}\right)\geq(xb+ya)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Từ giả thiết suy ra:

$$\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right)^{-\frac{1}{2}}\geq\left(\frac{1}{c^3}\right)^{-\frac{1}{2}}=c^{\frac{3}{2}}$$

Do đó ta có bất đẳng thức

$(abz)^{\frac{3}{2}} \geq (ab)^{\frac{3}{2}} \left(x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}\right) \geq (xb + ya)^{\frac{3}{2}} c^{\frac{3}{2}}$

$\Leftrightarrow abz \geq (xb + ya)c$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \leq \dfrac{z}{c}$

Bài 8

Với a, b, c là ba cạnh của một tam giác bất kì $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, chứng minh rằng

$$(p-a)^4 + (p-b)^4 + (p-c)^4 + S^2 \geq a\,(p-a)^3 + b\,(p-c)^3 + c\,(p-a)^3$$

(Với S là diện tích tam giác ABC)

Chứng minh

Chứng minh bất đẳng thức Schurs với $\lambda = 2$ ta có:

$$x^2(x-y)(x-z) + y^2(y-z)(y-x) + z^2(z-x)(z-y) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x+y+z) \geq x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y) \qquad (1)$$

Đặt:

$$\begin{cases} x = p - a \\ y = p - b \\ z = p - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = p - a + p - b + p - c = p \\ xyz = (p-a)(p-b)(p-c) = \dfrac{S}{p} \\ y + z = (p-b) + (p-c) = a \\ x + z = b,\ x + y = c \end{cases}$$

Thay vào (1) ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 9

Với x, y, z dương thỏa mãn:

$$\frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = 3$$

hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$M = \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z}$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Schurs với $\lambda = -2$ ta có:

$$\frac{1}{x^2}(x-y)(x-z) + \frac{1}{y^2}(y-z)(y-x) + \frac{1}{z^2}(z-x)(z-y) \geq 0$$

$\Leftrightarrow 3-\left(\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}+\dfrac{xy}{z}\right)\geq 0$

$\Leftrightarrow M=\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}\leq 6$

Đẳng thức xảy ra khi $\Leftrightarrow x=y=z=1$

Vậy $M_{max}=6$

Bài 10

Với h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao của một tam giác ABC bất kì, chứng minh rằng:

$$2\left(\frac{1}{h_a^3}+\frac{1}{h_b^3}+\frac{1}{h_c^3}\right)+\frac{3}{h_ah_bh_c}\geq\frac{1}{r}\left(\frac{1}{h_a^2}+\frac{1}{h_b^2}+\frac{1}{h_c^2}\right)$$

Trong đó r là bán kính vòng tròn nội tiếp ΔABC

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Schurs với $\lambda=1$ ta có:

$x(x-y)(x-z)+y(y-x)(y-z)+z(z-x)(z-y)\geq 0$

$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3-x^2(z+y)-y^2(z+x)-z^2(x+y)+3xyz$

$\Leftrightarrow 2(x^3+y^3+z^3)-(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+3xyz\geq 0$

Đặt $x=\dfrac{1}{h_a}$, $y=\dfrac{1}{h_b}$, $z=\dfrac{1}{h_c}$ (vì $\dfrac{1}{h_a}+\dfrac{1}{h_b}+\dfrac{1}{h_c}=\dfrac{1}{r}$)

Bài 11

Với a, b, c là ba số thực lớn hơn 1, chứng minh rằng:

$$a\log_2\frac{a}{b}\log_2\frac{a}{c}+b\log_2\frac{b}{c}\log_2\frac{b}{a}+c\log_2\frac{c}{a}\log_2\frac{c}{b}\geq 0$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Schurs mở rộng với $f(x)=2^x$ ta có:

$$2^{x_1}(x_1-x_2)(x_1-x_3)+2^{x_2}(x_2-x_1)(x_2-x_3)+2^{x_3}(x_3-x_1)(x_3-x_2)\geq 0$$

Đặt $x_1=\log_2 a$, $x_2=\log_2 b$, $x_3=\log_2 c$ ta có bất đẳng thức phải chứng minh.

1.2 Bất đẳng thức xoay vòng khác trong tam giác

Trong mục này ta chỉ đề cập đến cách xây dựng bất đẳng thức xoay vòng trong ΔABC với 3 cặp biến quay vòng: A, B, C là 3 góc tam giác ABC và x, y, z (x, y, z là 3 số thực) bắt đầu từ biểu thức luôn đúng $\forall A.B, C, x, y, z$

Bài 1

Với mọi ΔABC, x, y, z là ba số thực dương tùy ý, chứng minh rằng:

$$yz\cos A + zx\cos B + xy\cos C \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Chứng minh

Ta có:

$$(x - y\cos C - z\cos B)^2 + (y\sin C - z\sin B)^2 \ge 0\ \forall x, y, z > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2(\cos^2 C + \sin^2 C) + z^2(\cos^2 B + \sin^2 B)$$

$$+ 2yz(\cos B\cos C - \sin B\sin C) - 2xy\cos C - 2xz\cos B \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2(yz\cos A + zx\cos B + xy\cos C) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow yz\cos A + zx\cos B + xy\cos C \le \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y\cos C + z\cos B = x \\ y\sin C - z\sin B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2\cos^2 C + 2yz\cos B\cos C + z^2\cos^2 B = x^2 \\ y^2\sin^2 C - 2yz\sin B\sin C + z^2\sin^2 B = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^2 - 2yz\cos(B + C) + z^2 = x^2$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}$$

Tương tự:

$$\cos B = \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx}$$

$$\cos C = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}$$

Mặt khác:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Vậy:

$$\begin{cases} x = ka \\ y = kb\ (k > 0) \Rightarrow x, y, z \text{ là 3 cạnh của một tam giác} \\ z = kc \text{ đồng dạng với} \Delta ABC \end{cases}$$

Từ bài toán 1 ta có thể xây dựng được các bất đẳng thức mới trong tam giác.

Bài 2

Với mọi tam giác ΔABC, a, b, c là 3 số thực dương, chứng minh rằng:

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C \leq \frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right)$$

Chứng minh

Áp dụng bài toán 1. Thay x, y, z lần lượt bởi $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ ta có:

$$\frac{1}{yz}\cos A + \frac{1}{zx}\cos B + \frac{1}{xy}\cos C \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \cos A + y \cos B + z \cos C \leq \frac{1}{2}\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right)$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ là độ dài 3 cạnh của tam giác đồng dạng với tam giác ABC. Cho x, y, z là các giá trị cụ thể ta thu được các bài toán tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất, các bất đẳng thức khó trong tam giác.

Bài 3

Tìm giá trị lớn nhất:

$$M = 2\cos A + 3\cos B + 4\cos C$$

Trong đó A, B, C là ba góc của một tam giác.

Chứng minh

Áp dụng bài toán 2 với:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$$

Ta có: $M \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4.3}{2} + \frac{2.4}{3} + \frac{2.3}{4}\right) = \frac{61}{12}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi ta chọn $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ với $\Delta A'B'C'$ có ba cạnh là $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$. Vậy $\max M = \frac{61}{12}$

Bài 4

Cho tam giác ΔABC, chứng minh rằng

$$2\sin\frac{A}{2} + 3\sin\frac{B}{2} + 4\sin\frac{C}{2} \leq \frac{61}{12} \qquad (1)$$

Chứng minh

Đặt:

$$\begin{cases} A = \pi - 2A' \\ B = \pi - 2B' \\ C = \pi - 2C' \end{cases} \Rightarrow A' + B' + C' = \pi \Rightarrow A', B', C' \text{ là 3 góc của } \Delta A'B'C'$$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow 2\cos A' + 3\cos B' + 4\cos C' \leq \frac{61}{12}$

Áp dụng bài toán 3 có bất đẳng thức đúng. Dấu đẳng thức xảy ra nếu

$$\Delta A'B'C' \sim \Delta(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})$$

Bài 5

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2\sin A} + \frac{1}{3\sin B} + \frac{1}{4\sin C} \geq \frac{108}{61}$$

(Trong đó A, B, C là ba góc của một tam giác nhọn)

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\left(\frac{1}{2\cos A} + \frac{1}{3\cos B} + \frac{1}{4\cos C}\right)(2\cos A + 3\cos B + 4\cos C) \geq 9 \ \forall \Delta ABC \text{ nhọn}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\cos A} + \frac{1}{3\cos B} + \frac{1}{4\cos C} \geq \frac{9}{2\cos A + 3\cos B + 4\cos C}$$

mà theo bài 3 ta có:

$$2\cos A + 3\cos B + 4\cos C \leq \frac{61}{12}$$

suy ra điều phải chứng minh

$$\frac{1}{2\cos A}+\frac{1}{3\cos B}+\frac{1}{4\cos C}\geq\frac{9.12}{61}=\frac{108}{61}$$

Bài 6

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ΔABC ta đều có:

$$\frac{1}{4}\tan^2\frac{A}{2}+\frac{1}{6}\tan^2\frac{B}{2}+\frac{1}{6}\tan^2\frac{C}{2}\geq\frac{395}{4056} \tag{1}$$

Chứng minh

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}-1\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}-1\right)+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}-1\right)\geq\frac{395}{4056}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{6\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{8\cos^2\frac{C}{2}}\geq\frac{108}{169}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2+2\cos A}+\frac{1}{3+3\cos B}+\frac{1}{4+4\cos C}\geq\frac{108}{169} \tag{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\left(\frac{1}{2+2\cos A}+\frac{1}{3+3\cos B}+\frac{1}{4+4\cos C}\right)[(2+2\cos A)+(3+3\cos B)+(4+4\cos C)]\geq 9$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2+2\cos A}+\frac{1}{3+3\cos B}+\frac{1}{4+4\cos C}\geq\frac{9}{2\cos A+3\cos B+4\cos C+9} \tag{3}$$

Áp dụng kết quả bài toán 3 ta có:

$$\frac{9}{2\cos A+3\cos B+4\cos C+9}\geq\frac{9}{\frac{61}{12}+9}=\frac{108}{169} \tag{4}$$

Từ (3) và (4) ta có bất đẳng thức (2) đúng suy ra (1) đúng.

Bài 7

Chứng minh rằng với tam giác ΔABC nhọn ta có:

a) $\sqrt[3]{2\cos A}+\sqrt[3]{3\cos B}+\sqrt[3]{4\cos C}\leq 3\sqrt[3]{\frac{61}{36}}$

b) $\left(1+\frac{1}{2\cos A}\right)\left(1+\frac{1}{3\cos B}\right)\left(1+\frac{1}{4\cos C}\right)\geq\left(\frac{97}{61}\right)^3$

Chứng minh

a) Ta có:

$$\frac{\sqrt[3]{2\cos A}+\sqrt[3]{3\cos B}+\sqrt[3]{4\cos C}}{3}\leq\sqrt[3]{\frac{2\cos A+3\cos B+4\cos C}{3}}$$

(Chứng minh nhờ bất đẳng thức Jensen xét hàm $f(t)=t^{\frac{1}{3}}$ trong $(0,+\infty)$)

Áp dụng bài toán 3 ta có:

$$\sqrt[3]{\frac{2\cos A+3\cos B+4\cos C}{3}}\leq\sqrt[3]{\frac{61}{36}}$$

$$\Leftrightarrow\sqrt[3]{2\cos A}+\sqrt[3]{3\cos B}+\sqrt[3]{4\cos C}\geq 3\sqrt[3]{\frac{61}{36}}$$

b) Ta có

$$M=\left(1+\frac{1}{2\cos A}\right)\left(1+\frac{1}{3\cos B}\right)\left(1+\frac{1}{4\cos C}\right)$$
$$=1+\left(\frac{1}{2\cos A}+\frac{1}{3\cos B}+\frac{1}{4\cos C}\right)+\left(\frac{1}{6\cos A\cos B}+\frac{1}{12\cos B\cos C}+\frac{1}{8\cos C\cos A}\right)$$
$$+\frac{1}{(2\cos A)(3\cos B)(4\cos C)}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có

$$M\geq 1+3\sqrt[3]{\frac{1}{(2\cos A)(3\cos B)(4\cos C)}}+3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{(2\cos A)(3\cos B)(4\cos C)}\right)^2}$$
$$+\left(\sqrt[3]{\frac{1}{(2\cos A)(3\cos B)(4\cos C)}}\right)^3$$
$$\Leftrightarrow M\geq\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{(2\cos A)(3B)(4\cos C)}}\right)^3$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$M\geq\left(1+\frac{3}{2\cos A+3\cos B+4\cos C}\right)^3\geq\left(1+\frac{3}{\frac{61}{12}}\right)^3=\left(1+\frac{36}{61}\right)^3=\left(\frac{97}{61}\right)^3$$

Bài 8

Chứng minh rằng với mọi tam giác ΔABC ta có:

a) $\sqrt{\frac{1}{16}\tan^4\frac{A}{2}+\frac{1}{36}\tan^4\frac{B}{2}}+\sqrt{\frac{1}{36}\tan^4\frac{B}{2}+\frac{1}{64}\tan^4\frac{C}{2}}$
$+\sqrt{\frac{1}{64}\tan^4\frac{C}{2}+\frac{1}{16}\tan^4\frac{A}{2}}\geq\sqrt{2}.\frac{395}{4056}$

b) $\frac{3\cos B}{4^2A}+\frac{4\cos C}{9\cos^2 B}+\frac{2\cos A}{16\cos^2 C}\geq\frac{108}{61}$.

Với ΔABC là tam giác nhọn.

Chứng minh

a) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta dễ dàng chứng minh được:

$$\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}\sqrt{2}(a+b+c)$$

Thay $a = \frac{1}{4}\tan^2\frac{A}{2}$, $b = \frac{1}{6}\tan^2\frac{B}{2}$, $c = \frac{1}{8}\tan^2\frac{C}{2}$

Khi đó ta có:

$$\sqrt{\frac{1}{16}\tan^4\frac{A}{2} + \frac{1}{36}\tan^4\frac{B}{2}} + \sqrt{\frac{1}{36}\tan^4\frac{B}{2} + \frac{1}{64}\tan^4\frac{C}{2}} + \sqrt{\frac{1}{64}\tan^4\frac{C}{2} + \frac{1}{36}\tan^4\frac{A}{2}}$$
$$\geq \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\tan^2\frac{A}{2} + \frac{1}{6}\tan^2\frac{B}{2} + \frac{1}{8}\tan^2\frac{C}{2}\right) \qquad (1)$$

Áp dụng bài toán 6 ta có:

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{4}\tan^2\frac{A}{2} + \frac{1}{6}\tan^2\frac{B}{2} + \frac{1}{8}\tan^2\frac{C}{2}\right) \geq \frac{395\sqrt{2}}{4056} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

b) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có bất đẳng thức sau:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c \ \forall a, b, c \text{ dương} \qquad (3)$$

(Vì $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} = \left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right)\frac{(a+b+c)}{a+b+c} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a + b + c$)

Áp dụng (3) với $a = \frac{1}{2\cos A}$, $b = \frac{1}{3\cos B}$, $c = \frac{1}{4\cos C}$. Ta có:

$$\frac{3\cos B}{4\cos^2 A} + \frac{4\cos C}{9\cos^2 B} + \frac{2\cos A}{16\cos^2 C} \geq \frac{1}{2A} + \frac{1}{3\cos B} + \frac{1}{4\cos C}$$

Áp dụng kết quả bài toán 5 ta có bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 9

Chứng minh rằng với mọi tam giác ΔABC ta có: a) $h_a\cos A + h_b\cos B + h_c\cos C \leq \frac{9}{4}R$

b) $(h_a\cos A + h_b\cos B + h_c\cos C)^3 \geq \frac{27}{8}h_a h_b h_c$

(Với a, b, c là các đường cao tương ứng với 3 cạnh a, b, c. Dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều).

Chứng minh

a) Áp dụng bài toán 2 ta có:

$$h_a\cos A + h_b\cos B + h_c\cos C \leq \frac{1}{2}\left(\frac{h_a h_b}{h_c} + \frac{h_b h_c}{h_a} + \frac{h_c h_a}{h_b}\right) \qquad (1)$$

mà $\frac{1}{2}\left(\frac{h_a h_b}{h_c}+\frac{h_b h_c}{h_a}+\frac{h_c h_a}{h_b}\right)=\frac{(a^2+b^2+c^2)S}{abc}=\frac{a^2+b^2+c^2}{4R}$

$$=R(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C)\leq\frac{9}{4}R$$

Đẳng thức xảy ra khi $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

b) Từ $S=ah_a=bh_b=ch_c \Leftrightarrow \frac{a}{\frac{1}{h_a}}=\frac{b}{\frac{1}{h_b}}=\frac{c}{\frac{1}{h_c}}$

$\Rightarrow \Delta(a,b,c)\sim\Delta\left(\frac{1}{h_a},\frac{1}{h_b},\frac{1}{h_c}\right)$

$\Rightarrow$ Dấu bằng trong bất đẳng thức (1) xảy ra $\forall\Delta ABC$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{h_a h_b}{h_c}+\frac{h_b h_c}{h_a}+\frac{h_c h_a}{h_b}\right)\geq\frac{1}{2}3\sqrt[3]{h_a h_b h_c}$$

Do đó kết hợp với (1) khi dấu đẳng thức xảy ra ta có:

$$h_a\cos A+h_b\cos B+h_c\cos C\geq\frac{3}{2}\sqrt[3]{h_a h_b h_c}$$

$$\Leftrightarrow (h_a\cos A+h_b\cos B+h_c\cos C)^3\geq\frac{27}{8}h_a h_b h_c$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow h_a=h_b=h_c\Leftrightarrow a=b=c\Leftrightarrow\Delta ABC$ đều

Bài 10

Chứng minh rằng với mọi tam giác ΔABC và $\Delta A_1B_1C_1$ ta có:

$$\frac{\cos A}{\sin A_1}+\frac{\cos B}{\cos B_1}+\frac{\cos C}{\cos C_1}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{\sin A_1}{\sin B_1\sin C_1}+\frac{\sin B_1}{\sin A_1\sin C_1}+\frac{\sin C_1}{\sin A_1\sin B_1}\right)$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$

Chứng minh

Áp dụng bài toán 2 với:

$$x=\frac{1}{\sin A_1},\ y=\frac{1}{\sin B_1},\ z=\frac{1}{\sin C_1}$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow\Delta ABC\sim\Delta(\sin A_1,\sin B_1,\sin C_1)$$

$$\Leftrightarrow \Delta ABC \sim A_1B_1C_1$$

Bài 11

Với hai tam giác ΔABC và tam giác $\Delta A_1B_1C_1$ bất kì, chứng minh rằng:

$$(b_1+c_1)\cos A + (c_1+a_1)\cos B + (a_1+b_1)\cos C \le$$
$$\le \frac{1}{2}\left[\frac{(b_1+c_1)(c_1+a_1)}{a_1+b_1} + \frac{(c_1+a_1)(a_1+b_1)}{b_1+c_1} + \frac{(b_1+c_1)(a_1+b_1)}{c_1+a_1}\right]$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

Chứng minh

Áp dụng bài toán 2 với:

$$\begin{cases} x = b_1 + c_1 \\ y = c_1 + a_1 \\ z = a_1 + b_1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{ Ta có bất đẳng thức cần chứng minh.}$$

Mặt khác với a_1, b_1, c_1 là 3 cạnh của $\Delta A_1B_1C_1$, giả sử $a_1 \ge b_1 \ge c_1 \Rightarrow \frac{1}{b_1+c_1}, \frac{1}{c_1+a_1}, \frac{1}{a_1+b_1}$ cũng là 3 cạnh của tam giác. Thật vậy ta có:

$$\frac{1}{b_1+c_1} \ge \frac{1}{c_1+a_1} \ge \frac{1}{a_1+b_1}(\text{ vì } a_1 \ge b_1 \ge c_1)$$

Xét $\frac{1}{a_1+b_1} \ge \frac{1}{b_1+(b_1+c_1)} \ge \frac{1}{2(b_1+c_1)}$

$$\frac{1}{a_1+c_1} \ge \frac{1}{c_1+(b_1+c_1)} \ge \frac{1}{2(b_1+c_1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_1+b_1} + \frac{1}{a_1+c_1} \ge \frac{1}{b_1+c_1} \Leftrightarrow \frac{1}{b_1+c_1}, \frac{1}{c_1+a_1}, \frac{1}{a_1+b_1}$$

là 3 cạnh của một tam giác. Vậy dấu bất đẳng thức xảy ra khi

$$\Delta ABC \sim \Delta\left(\frac{1}{b_1+c_1}, \frac{1}{c_1+a_1}, \frac{1}{a_1+b_1}\right)$$

Bài 12

Với A, B, C là ba góc của ΔABC bất kì, x, y, z là 3 số thực tùy ý, chứng minh rằng:

$$(-1)^n\left[yz\cos nA + xz\cos nB + xy\cos nC\right] \le \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2) \qquad (1)$$

Chứng minh

$$\left[x + (-1)^n(y\cos nC + z\cos nB)\right]^2 + (y\sin nC - z\sin nB)^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2\left(\cos^2 nC + \sin^2 nB\right) + z^2\left(\cos^2 nB + \sin^2 nB\right) + 2(-1)^n\left(xy\cos nC + xz\cos nB\right)$$

$+ 2yz\left(\cos nC \cos nB - \sin nC \sin nB\right) \geq 0$

mà $\cos nC \cos nB - \sin nC \sin nB = \cos n(B + C) = \cos(n\pi - nA) = (-1)^n \cos nA$

Vậy ta có bất đẳng thức:

$$x^2 + y^2 z^2 + 2(-1)^n \left[xy \cos nC + yz \cos nA + zx \cos nB\right] \geq 0$$

$$(-1)^n \left(yz \cos nA + zx \cos nBxy \cos nC\right) \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Ta xét riêng trường hợp x, y, z dương, dấu đẳng thức của (1) xảy ra nếu:

$\begin{cases} x = (-1)^{n+1}\left(y \cos nC + z \cos nB\right) \\ y \sin nC - z \sin nB = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 \cos^2 nC + z^2 \cos^2 nB + 2yz \cos nC \cos nB = x^2 \\ y^2 \cos nC + z^2 \sin^2 nB - 2yz \sin nC \sin nB = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow y^2 + z^2 + 2yz \cos n(B + C) = x^2$

$\Leftrightarrow y^2 + z^2 2yz(-1)^n \cos nA = x^2$

$\Leftrightarrow \cos nA = (-1)^{n+1}\left(\dfrac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}\right)$

Tương tự:

$$\cos nB = (-1)^{n+1}\left(\frac{x^2 + z^2 - y^2}{2xz}\right)$$

$$\cos nC = (-1)^{n+1}\left(\frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}\right)$$

Điều kiện cần tồn tại ΔABC là:

$$\begin{cases} |\dfrac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz}| \leq 1 \\ |\dfrac{x^2 + z^2 - y^2}{2xz}| \leq 1 \\ |\dfrac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy}| \leq 1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x, y, z$ thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

$$\begin{cases} x \geq y - z \\ y \geq z - x \\ z \geq x - y \end{cases}$$

Và ngược lại nếu chọn x, y, z thỏa mãn bất đẳng thức tam giác $(x, y, z > 0)$ thì ta luôn tìm được 3 góc A, B, C là 3 góc của tam giác để dấu dẳng thức xảy ra.

Bài 13

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ΔABC ta có

$$(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{x}\cos nA + \frac{1}{y}\cos nB + \frac{1}{z}\cos nC\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}\right)$$

$\forall x, y, z$ dương.

Chứng minh

Áp dụng kết quả bài toán 12 ta có:

$$(-1)^{n+1}(yz\cos nA + zx\cos nB + xy\cos nC) \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

Chia 2 vế cho $xyz > 0$ ta có:

$$(-1)^{n+1}\left(\frac{\cos nA}{x} + \frac{\cos nB}{y} + \frac{\cos nC}{z}\right) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{xyz}\right)$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x, y, z > 0$ thỏa mãn bất đẳng thức tam giác.

Bài 14

Cho $M = 6\cos 4A + 2\cos 4B + 3\cos 4C$ (với A, B, C là 3 góc của tam giác). Tìm giá trị bé nhất của M. *Chứng minh*

Áp dụng bài toán 13 với $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{3}$ (thỏa mãn bất đẳng thức tam giác). Ta có: $$(-1)^5(6\cos 4A + 2\cos 4B + 3\cos 4C) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{1}{36}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}}{\frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{3}}\right)$$

$\Leftrightarrow 6\cos 4A + 2\cos 4B + 3\cos 4C \geq 7$

Dấu đẳng thức xảy ra nếu:

$$\begin{cases} \cos 4A = -1 \\ \cos 4B = 1 \\ \cos 4C = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \dfrac{\pi}{4} \\ B = \dfrac{\pi}{2} \\ C = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Vậy $minM = -7$ khi ΔABC vuông cân đỉnh B.

Bài 15

Cho 2 tam giác bất kì ΔABC và $\Delta A'B'C'$, chứng minh rằng

$$M = \sin B' \sin C' \sin 5A + \sin C' \sin A' \cos 5B + \sin A' \sin B' \cos 5C \leq \frac{9}{8}$$

Chứng minh

Áp dụng bài toán 13 với $x = \sin A'$, $y = \sin B'$, $z = \sin C'$ ta có:

$$M \leq \frac{1}{2}(\sin^2 A' + \sin^2 B' + \sin^2 C')$$

Mặt khác trong mọi tam giác $\Delta A'B'C'$ ta dễ có

$$\sin^2 A' + \sin^2 B' + \sin^2 C' \leq \frac{9}{8}$$

Vậy $M \leq \frac{1}{2}.\frac{9}{4} = \frac{9}{8}$

Bài 16

Với tam giác ΔABC bất kì, chứng minh rằng:

$$4\cos 7A - 3\cos 7B + 5\cos 7C \geq -\frac{769}{120}$$

Chứng minh

Áp dụng bài toán 12 với $x = \frac{1}{4}$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{5}$ ta có:

$$(-1)^8\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{5}\cos 7A + \frac{1}{4}\frac{1}{5}\cos 7B - \frac{1}{4}\frac{1}{3}\cos 7C\right] \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}\right)$$

$$4\cos 7A - 3\cos 7B + 5\cos 7C \geq -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25}\right)3.4.5$$

$$4\cos 7A - 3\cos 7B + 5\cos 7C \geq -\frac{769}{120}$$

1.3 Sử dụng bất đẳng thức Cauchy chứng minh một số dạng bất đẳng thức xoay vòng

Bài 1

Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a(a^2+b^2-b^2)}{a^2+b^2}=a-b\frac{ab}{a^2+b^2}\geq a-b\frac{\frac{a^2+b^2}{2}}{a^2+b^2}=a-\frac{b}{2}$$

Tương tự

$$\frac{b^3}{b^2+c^2}\geq b-\frac{c}{2}$$

$$\frac{c^3}{c^2+a^2}\geq c-\frac{a}{2}$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 2

Với $a, b, c > 0$; $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$, chứng minh rằng

$$a\left[\frac{a^{2‘}(1-\alpha)b^2}{a^2+b^2}\right]+b\left[\frac{b^2+(1-\beta)c^2}{b^2+c^2}\right]+c\left[\frac{c^2+(1-\gamma)a^2}{c^2+a^2}\right]\geq$$

$$\geq(1-\frac{\gamma}{2})a+(1-\frac{\alpha}{2})b+(1-\frac{\beta}{2})c$$

Chứng minh

Ta có:

$$a\left[\frac{a^2+(1-\alpha)b^2}{a^2+b^2}\right]=a\left(1-\frac{\alpha b^2}{a^2+b^2}\right)=a-\alpha b\frac{ab}{a^2+b^2}\geq a-\frac{\alpha b}{2}\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}=a-\frac{\alpha b}{2}$$

Tương tự ta thu được:

$$b\left[\frac{b^2+(1-\beta)c^2}{b^2+c^2}\right]\geq b-\frac{\beta c}{2}$$

$$c\left[\frac{c^2+(1-\gamma)a^2}{c^2+a^2}\right]\geq c-\frac{\gamma a}{2}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Chọn $\alpha = \beta = \gamma = 4$ ta thu được

Bài 3

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$a\left(\frac{3b^2 - a^2}{b^2 + a^2}\right) + b\left(\frac{3a^2 - b^2}{c^2 + b^2}\right) + c\left(\frac{3a^2 - c^2}{a^2 + c^2}\right) \leq a + b + c$$

Chọn $\alpha = \beta = 1, \gamma = 2$, ta thu được.

Bài 4

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{b + c}{2} + \frac{ca^2}{c^2 + a^2}$$

Bài 5

Với $a, b, c > 0$; $\alpha \geq 0$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^3}{a^2 + b^2 + \alpha ab} + \frac{b^3}{b^2 + c^2 + \alpha bc} + \frac{c^3}{c^2 + a^2 + \alpha ca} \geq \frac{a + b + c}{\alpha + 2}$$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2 + \alpha ab} \geq \frac{a^3}{a^2 + b^2 + \frac{\alpha}{2}(a^2 + b^2)} = \frac{2}{\alpha + 2}\left(\frac{a^3}{a^2 + b^2}\right)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^3}{b^2 + c^2 + \alpha bc} \geq \frac{2}{\alpha + 2}\left(\frac{a^3}{a^2 + b^2}\right)$$

$$\frac{c^3}{c^2 + a^2 + \alpha ca} \geq \frac{2}{\alpha + 2}\left(\frac{c^3}{c^2 + a^2}\right)$$

Suy ra:

$$P \geq \frac{2}{\alpha + 2}\left[\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2}\right] \geq \frac{2}{\alpha + 2}\frac{a + b + c}{2}$$

Chọn $\alpha = 1$ ta được

Bài 6

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+b^2+ab} + \frac{b^3}{b^2+c^2+bc} + \frac{c^3}{c^2+a^2+ca} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Chọn $\alpha = \frac{1}{a}$ ta thu được

Bài 7

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2+b^2+b} + \frac{ab^3}{a(b^2+c^2)+bc} + \frac{c^3}{c^2+a^2+c} \geq \frac{(a+b+c)a}{1+2a}$$

Chọn $\alpha = \frac{1}{abc} > 0$ ta thu được

Bài 8

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{ca^3}{c(a^2+b^2)+1} + \frac{ab^3}{a(b^2+c^2)+1} + \frac{bc^3}{b(c^2+a^2)+1} \geq \left(\frac{a+b+c}{1+2abc}\right) abc$$

Từ kết quả bài toán 2, ta chọn $\alpha = 2(1-b)$, $\beta = 2(1-c)$, $\gamma = 2(1-a)$ ta được

Bài 9

Với $0 < a, b, c < 1$, chứng minh rằng

$$\frac{a(a^2+2b^3-b^2)}{a^2+b^2} + \frac{b(b^2+2c^3-c^2)}{b^2+c^2} + \frac{c(c^2+2a^3-a^2)}{c^2+a^2} \geq a^2+b^2+c^2$$

Bài 10

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3}\frac{1}{2}\left(\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{c\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{c}}\right) \geq a+b+c$$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} = \frac{a(a^3+b^3-b^3)}{a^3+b^3} = a - \frac{ab^3}{a^3+b^3} = a - \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\frac{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}}{a^3+b^3}$$

Suy ra

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} \geq a - \frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}\frac{a^3+b^3}{a^3+b^3} \Leftrightarrow \frac{a^4}{a^3b^3} + \frac{b\sqrt{b}}{2\sqrt{a}} \geq a$$

Tương tự

$$\frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c\sqrt{c}}{2\sqrt{b}} \geq b$$

$$\frac{c^4}{c^3+a^3} + \frac{a\sqrt{a}}{2\sqrt{c}} \geq c$$

Cộng các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 11

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{a^4+b^4} + \frac{b^5}{b^4+c^4} + \frac{c^5}{c^4+a^4} + \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c}\right) \geq a+b+c$$

Chứng minh

Ta có

$$\frac{a^5}{a^4+b^4} = \frac{a(a^4+b^4-b^4)}{a^4+b^4} = a - \frac{ab^4}{a^4+b^4} = a - \frac{b^2}{a}\frac{a^2b^2}{a^4+b^4}$$

Suy ra

$$\frac{a^5}{a^4+b^4} \geq a - \frac{b^2}{2a}$$

Tương tự

$$\frac{a^5}{b^4+c^4} \geq b - \frac{c^2}{2b}$$

$$\frac{c^5}{c^4+a^4} \geq c - \frac{a^2}{2c}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 12

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a(a^3+b^3)}{a^3+2b^3}+\frac{b(b^3+c^3)}{b^3+2c^3}+\frac{c(c^3+a^3)}{c^3+2a^3}\geq\frac{2}{3}(a+b+c)$$

Ta có

$$\frac{a(a^3+b^3)}{a^3+2b^3}=\frac{a(a^3+2b^3-b^3)}{a^3+2b^3}=a-\frac{ab^3}{a^3+2b^3}\geq a-b\frac{\frac{a^3+b^3+b^3}{3}}{a^3+2b^3}$$

Suy ra

$$\frac{a(a^3+b^3)}{a^3+2b^3}\geq a-\frac{b}{3}$$

$$\frac{b(b^3+c^3)}{b^3+2c^3}\geq b-\frac{c}{3}$$

$$\frac{c(c^3+a^3)}{c^3+2a^3}\geq c-\frac{a}{3}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 13

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{a^2+b^2}+\frac{b^5}{b^2+c^2}+\frac{c^5}{c^2+a^2}\geq\frac{a^3+b^3+c^3}{2}$$

Chứng minh

Ta có

$$\frac{a^5}{a^2+b^2}=\frac{a^3(a^2+b^2-b^2)}{a^2+b^2}=a^3-\frac{a^3b^2}{a^2+b^2}\geq a^3-a^2b\frac{a^2+b^2}{2(a^2+b^2)}$$

Suy ra

$$\frac{a^5}{a^2+b^2}\geq a^3-\frac{a^2b}{2}\geq a^3-\frac{a^3+a^3+b^3}{6}=\frac{2}{3}a^3-\frac{b^3}{6}$$

Tương tự

$$\frac{b^5}{b^2+c^2}\geq\frac{2}{3}b^3-\frac{c^3}{6}$$

$$\frac{c^5}{c^2+a^2} \geq \frac{2}{3}c^3 - \frac{a^3}{6}$$

Cộng vế với vế của các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 14

Với $a, b, c, \alpha > 0$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^5}{a^2+b^2+\alpha ab} + \frac{b^5}{b^2+c^2+\alpha bc} + \frac{c^5}{c^2+a^2+\alpha ca} \geq \frac{1}{2+\alpha}(a^3+b^3+c^3)$$

Chứng minh

Ta có

$$\frac{a^5}{a^2+b^2+\alpha ab} \geq \frac{a^5}{a^2+b^2+\frac{\alpha}{2}(a^2+b^2)} = \frac{2}{2+\alpha}\frac{a^5}{a^2+b^2}$$

Suy ra

$$P \geq \frac{2}{2+\alpha}\left(\frac{a^5}{a^2+b^2} + \frac{b^5}{b^2+c^2} + \frac{c^5}{c^2+a^2}\right) \geq \frac{2}{2+\alpha}\frac{a^3+b^3+c^3}{2}$$

Bài 15

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^7}{a^2+b^2} + \frac{b^7}{b^2+c^2} + \frac{c^7}{c^2+a^2} \geq \frac{a^5+b^5+c^5}{2}$$

Chứng minh

Ta có

$$\frac{a^7}{a^2+b^2} = \frac{a^5(a^2+b^2-b^2)}{a^2+b^2} = a^5 - \frac{ab}{a^2+b^2}a^4b$$

Suy ra

$$\frac{a^7}{a^2+b^2} \geq a^5 - \frac{1}{2}\frac{4a^5+b^5}{5} = \frac{3}{5}a^5 - \frac{1}{10}b^5$$

Tương tự

$$\frac{b^7}{b^2+c^2} \geq \frac{3}{5}b^5 - \frac{1}{10}c^5$$

$$\frac{c^7}{c^2+a^2} \geq \frac{3}{5}c^5 - \frac{1}{10}a^5$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 16

Với $a, b, c > 0$, $\alpha > 0$, chứng minh rằng

$$P = \frac{a^5}{a^2+b^2+\alpha ab} + \frac{b^5}{b^2+c^2\alpha bc} + \frac{c^5}{c^2+a^2+\alpha ca} \geq \frac{1}{2+\alpha}(a^3+b^3+c^3)$$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{a^5}{a^2+b^2+\alpha ab} \geq \frac{a^5}{a^2+b^2+\frac{\alpha}{2}(a^2+b^2)} = \frac{2}{1+\alpha}\frac{a^5}{a^2+b^2}$$

Suy ra

$$P \geq \frac{2}{1+\alpha}\left(\frac{a^5}{a^2+b^2} + \frac{b^5}{b^2+c^2} + \frac{c^5}{c^2+a^2}\right) \geq \frac{1}{\alpha+2}(a^3+b^3+c^3)$$

Bài 17

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{b^2}{a(a^2+b^2)} + \frac{c^2}{b(b^2+c^2)} + \frac{a^2}{c(c^2+a^2)} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Chứng minh

Ta có

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\frac{ab}{a^2+b^2} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{2b}$$

Suy ra

$$\frac{b^2}{a(a^2+b^2)} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{2b}$$

Tương tự

$$\frac{c^2}{b(b^2+c^2)} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{2c}$$

$$\frac{a^2}{c(c^2+a^2)} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{2a}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 18

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{b(b+2a)}{a(a+b)^2} + \frac{c(c+2b)}{b(b+c)^2} + \frac{a(a+2c)}{c(c+a)^2} \geq \frac{3}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\frac{ab}{(a+b)^2} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{b(b+2a)}{a(a+b)^2} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4b}$$

Tương tự

$$\frac{c(c+2b)}{b(b+c)^2} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{4c}$$

$$\frac{a(a+2c)}{c(c+a)^2} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{4a}$$

Cộng vế với vế của bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 19

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{a^2(a+2b)}{(a+b)^2} + \frac{b^2(b+2c)}{(b+c)^2} + \frac{c^2(c+2a)}{(c+a)^2} \geq \frac{3}{4}(a+b+c)$$

Chứng minh

$$a - b\frac{ab}{(a+b)^2} \geq a - \frac{b}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2(a+2b)}{(a+b)^2} \geq a - \frac{b}{4}$$

Tương tự

$$\frac{b^2(b+2c)}{(b+c)^2} \geq b - \frac{c}{4}$$

$$\frac{c^2(c+2a)}{(c+a)^2} \geq c - \frac{a}{4}$$

Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 20

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{b^2c}{a(ca^2cb^2+1)} + \frac{c^2a}{b(ab^2+ac^2+1)} + \frac{a^2b}{c(bc^2+ba^2+1)} \geq \frac{ab+bc+ca}{1+2abc}$$

Chứng minh

Ta có

$$\frac{b^2}{a(a^2+b^2+\alpha ab)} \geq \frac{b^2}{a(a^2+b^2+\frac{\alpha}{2}(a^2+b^2))} = \frac{2}{2+\alpha}\frac{b^2}{a(a^2+b^2)}$$

Thu được bất đẳng thức

$$\frac{b^2}{a(a^2+b^2+\alpha ab)} + \frac{c^2}{b(b^2+c^2+\alpha bc)} + \frac{a^2}{c(c^2+a^2\alpha ca)} \geq \frac{1}{2+\alpha}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Chọn $\alpha = \dfrac{1}{abc}$ ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

1.4 Bất đẳng thức xoay vòng phân thức

Bài 1

Với $a, b > 1$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương với:
$\dfrac{(a+b)+2}{1+(a+b)+ab} \geq \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$
$\Leftrightarrow (a+b)+2+(a+b)\sqrt{ab}+2\sqrt{ab} \geq 2+2(a+b)+2ab$
$\Leftrightarrow (a+b)(\sqrt{ab}-1)+2\sqrt{ab}(1-\sqrt{ab}) \geq 0$
$\Leftrightarrow (\sqrt{ab}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ (Hiển nhiên vì $\sqrt{ab} > 1$)

Bài 2

Với $0 < a, b < 1$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức tương đương với:
$\dfrac{(a+b)+2}{1+(a+b)+ab} \leq \dfrac{2}{1+\sqrt{ab}}$
$\Leftrightarrow (a+b)+2+(a+b)\sqrt{ab}+2\sqrt{ab} \leq 2+2(a+b)+2ab$
$\Leftrightarrow (\sqrt{ab}-1)(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$ (Hiển nhiên đúng vì $\sqrt{ab} < 1$)

Bài 3

Với $a, b > 1$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{(1+a)^n} + \frac{1}{(1+b)^n} \geq \frac{2}{(1+\sqrt{ab})^n}$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức:

$$\frac{a^n+b^n}{2} \geq (\frac{a+b}{2})^n$$

Ta thu được:

$$\frac{1}{(1+a)^n}+\frac{1}{(1+b)^n}\geq 2(\frac{\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}}{2})^n$$

Áp dụng kết quả bài 1 ta thu được.

$$\frac{1}{(1+a)^n}+\frac{1}{(1+b)^n}\geq 2(\frac{1}{1+\sqrt{ab}})^n=\frac{2}{(1+ab)^n}$$

Bài 4

Với $0<a,b<1$, chứng minh rằng:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+b}}\leq\frac{2}{\sqrt[n]{1+\sqrt{ab}}}$$

Chứng minh

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\leq\sqrt[n]{\frac{a+b}{2}}\text{ Với } a,b>0$$

Ta thu được

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+b}}\leq\sqrt[n]{\frac{\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}}{2}}$$

Áp dụng kết quả ở ví dụ 2 ta thu được

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+a}}+\frac{1}{\sqrt[n]{1+b}}\leq 2\sqrt[n]{\frac{1}{1+\sqrt{ab}}}=\frac{2}{\sqrt[n]{1+\sqrt{ab}}}$$

Bài 5

Với $a,b>1$. chứng minh rằng

$$\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+a}\geq\frac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{a}{1+b}+1+\frac{b}{1+a}+1\geq\frac{2\sqrt{ab}}{1+\sqrt{ab}}+2$$

$$\Leftrightarrow (a+b+1)(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+a}) \geq (1+2\sqrt{ab})\frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

Ta có

$$a+b+1 \geq 1+2\sqrt{ab}$$

$$\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+a} \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}$$

Nhân hai vế hai bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 6

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c} \geq \frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P = \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{4}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

Ta có

$$P \geq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}+\frac{2}{1+\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}} \geq \frac{4}{1+\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}} = \frac{4}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

Bài 7

Với $a, b, c > 1$, chứng minh rằng

$$\frac{2+b+c}{1+a}+\frac{2+c+a}{1+b}+\frac{1+a+b}{1+c} \geq 6$$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\frac{2+b+c}{1+a}+1+\frac{2+c+a}{1+b}+1+\frac{1+a+b}{1+c}+1 \geq 9$$

$$\Leftrightarrow (3+a+b+c)(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}) \geq 9$$

Ta có

$$3 + a + b + c \geq 3(1 + \sqrt[3]{abc})$$

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \geq \frac{3}{1+\sqrt[3]{abc}}$$

Nhân vế với vế của hai bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 8

Với $a, b, c > 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+a)^3} + \frac{1}{(1+b)^3} + \frac{1}{(1+c)^3} \geq \frac{3}{(1+\sqrt[3]{abc})^3}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P = \frac{1}{(1+a)^3} + \frac{1}{(1+b)^3} + \frac{1}{(1+c)^3} + \frac{1}{(1+\sqrt[3]{abc})^3} \geq \frac{4}{(1+\sqrt[3]{abc})^3}$$

Áp dụng kết quả bài 3 ta có

$$P \geq \frac{2}{(1+\sqrt{ab})^3} + \frac{2}{(1+\sqrt{c\sqrt[3]{abc}})^3} \geq \frac{4}{(1+\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}})^3} \geq \frac{4}{(1+\sqrt[3]{abc})^3}$$

Bài 9

Với $0 < a, b, c < 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} \leq \frac{3}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}}$$

Chứng minh

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$P = \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}} \leq \frac{4}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}}$$

Áp dụng kết quả bài 4 ta thu được

$$P \leq \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{ab}}} + \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{c\sqrt[3]{abc}}}} \leq \frac{4}{\sqrt{1+\sqrt[4]{abc\sqrt[3]{abc}}}} = \frac{4}{\sqrt{1+\sqrt[3]{abc}}}$$

Bài 10

Với $a, b, c > 1$, chứng minh rằng

$$P = (\frac{2+b+c}{1+a})^2 + (\frac{2+c+a}{1+b})^2 + (\frac{2+a+b}{1+c})^2 \geq 12$$

Ta có

$$P \geq (\frac{\frac{2+b+c}{1+a} + \frac{2+c+a}{1+b} + \frac{2+a+b}{1+c}}{3})^2 \geq 3(\frac{6}{3})^2 = 12$$

Áp dụng ví dụ 7

Bài 11

Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq a^3 + b^3 + c^3$$

Chứng minh

Ta có

$$\frac{a^5}{b^2} + ab^2 \geq 2a^3$$
$$\frac{b^5}{c^2} + bc^2 \geq 2b^3$$
$$\frac{c^5}{a^2} + ca^2 \geq 2c^3$$
$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$$

Cộng 4 bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 12

Với a, b, c là các số thực dương. chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{bc} + \frac{b^5}{ca} + \frac{c^5}{ab} \geq a^3 + b^3 + c^3$$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{a^5}{bc}+abc \geq 2a^3$$
$$\frac{b^5}{ca}+abc \geq 2b^3$$
$$\frac{c^5}{ab}+abc \geq 2c^3$$
$$a^3+b^3+c^3 \geq 3abc$$

Cộng 4 bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 13

Với a, b, c là các số thực dương. chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^3}+\frac{b^5}{c^3}+\frac{c^5}{a^3} \geq \frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}$$

Chứng minh

Ta có: $\frac{a^5}{b^3}+ab \geq 2\frac{a^3}{b}$

Suy ra: $\frac{a^5}{b^5}+2ab \geq \frac{a^3}{b}+\frac{a^3}{b}+ab \geq \frac{a^3}{b}+2a^2$

Tương tự:

$$\frac{b^5}{c^3}+2bc \geq \frac{b^3}{c}+2b^2$$
$$\frac{c^5}{a^3}+2ca \geq \frac{c^3}{a}+2c^2$$

mà $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca)$

Cộng 4 bất đẳng thức trên chúng ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 14

Với a, b, c là các số thực dương. chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a} \geq \frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{9a^3}{a+2b}+a(a+2b) \geq 6a^2$$
$$\frac{9b^3}{b+2c}+b(b+2c) \geq 6b^2$$
$$\frac{9c^3}{c+2a}+c(c+2a) \geq 6c^2$$

mà $2(a^2+b^2+c^2) \geq 2(ab+bc+ca)$

Cộng 4 bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 15

Với a, b, c là các số thực dương. chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(b+c)^2}+\frac{b^3}{(c+a)^2}+\frac{c^3}{(a+b)^2}\geq\frac{1}{4}(a+b+c)$$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{8a^3}{(b+c)^2}+(b+c)+(b+c)\geq 6a$$
$$\frac{8b^3}{(c+a)^2}+(c+a)+(c+a)\geq 6b$$
$$\frac{8c^3}{(a+b)^2}+(a+b)+(a+b)\geq 6c$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 16

Với a, b, c là các số thực dương. chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b(c+a)}+\frac{b^3}{c(a+b)}+\frac{c^3}{a(b+c)}\geq\frac{1}{2}(a+b+c)$$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{4a^3}{b(c+a)}+2b+(c+a)\geq 6a$$
$$\frac{4b^3}{c(a+b)}+2c+(a+b)\geq 6b$$
$$\frac{4c^3}{a(b+c)}+2a+(b+c)\geq 6c$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 17

Với a, b, c là các số thực dương. chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{bc^2}+\frac{b^4}{ca^2}+\frac{c^4}{ab^2}\geq a+b+c$$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{a^4}{bc^2}+b+c+c\geq 4a$$

$$\frac{b^4}{ca^2} + c + a + a \geq 4b$$
$$\frac{c^4}{ab^2} + a + b + b \geq 4c$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 18

Với a, b, c là các số thực dương. chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(a+b)(b+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(c+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(a+b)} \geq \frac{1}{4}(a+b+c)$$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{8a^3}{(a+b)(b+c)} + (a+b) + (b+c) \geq 6a$$
$$\frac{8b^3}{(b+c)(c+a)} + (b+c) + (c+a) \geq 6b$$
$$\frac{8c^3}{(c+a)(a+b)} + (c+a) + (a+b) \geq 6c$$

Cộng 3 bất đẳng thức trên ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 19

Với a, b, c là các số thực dương. chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Chứng minh

Ta có bất đẳng thức

$$\frac{b^3}{a^2} + \frac{c^3}{b^2} + \frac{a^3}{c^2} \geq a+b+c$$

Suy ra:

$$\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} = \frac{(\frac{1}{b})^3}{(\frac{1}{a})^2} + \frac{(\frac{1}{c})^3}{(\frac{1}{b})^2} + \frac{(\frac{1}{a})^3}{(\frac{1}{c})^2} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

Bài 20

Với a, b, c là các số thực dương. chứng minh rằng

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$$

Chứng minh

Ta có:

$$\frac{a^5}{b^2} + \frac{b^5}{c^2} + \frac{c^5}{a^2} \geq a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$$

Chương 2

Một dạng bất đẳng thức xoay vòng

Quy ước trong bài viết

Để thống nhất ký hiệu trong bài viết thì ta quy ước cách viết như sau:

$a_1, \cdots, a_n \Leftrightarrow a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n$; $i \in (\overline{1, n})$

$a_1a_2 + \cdots + a_1a_n \Leftrightarrow a_1a_2 + \cdots + a_1a_i + \cdots + a_1a_n$; $i \in (\overline{1, n})$

$a_1a_2 + \cdots + a_{n-1}a_n \Leftrightarrow a_1a_2 + \cdots + a_1a_n + \cdots + a_ia_{i+1} + \cdots + a_ia_n + \cdots + a_{n-1}a_n$

$a_1^2 + \cdots + a_n^2 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_i^2 \cdots + a_n^2$; $(i \in \overline{1, n})$

$(a_1^2 + a_2^2) + \cdots + (a_{n-1}^2 + a_n^2) \Leftrightarrow (a_1^2 + a_2^2) + \cdots + (a_1^2 + a_n^2) + \cdots + (a_i^2 + a_{i+1}) + \cdots + (a_i^2 + a_n^2) + \cdots + (a_{n-1} + a_n^2)$

$(a_1 + \cdots + a_n)^2 \Leftrightarrow (a_1 + a_2 + \cdots + a_i + \cdots + a_n)^2$; $(i \in \overline{1, n})$

2.1 Các trường hợp đơn giản

2.1.1 Trường hợp 3 số $n = 3$

Bài 1

Cho 3 số không âm a_1, a_2, a_3 và số thực $\alpha > 2$. Chứng minh rằng:

$$A = \frac{a_1}{a_1 + \alpha a_2} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha a_3} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha a_1} \geq \frac{3}{1 + \alpha}$$

Chứng minh.

Ta có: $A = \dfrac{a_1}{a_1 + \alpha a_2} + \dfrac{a_2}{a_2 + \alpha a_3} + \dfrac{a_3}{a_3 + \alpha a_1}$

$$\Leftrightarrow A = \frac{a_1^2}{a_1^2 + \alpha a_1 a_2} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + \alpha a_2 a_3} + \frac{a_3^2}{a_3^2 + \alpha a_1 a_3}$$
$$\Rightarrow I[(a_1^2 + \alpha a_1 a_2) + (a_2^2 + \alpha a_2 a_3) + (a_3^2 + \alpha a_1 a_3)] \geq (a_1 + a_2 + a_3)^2$$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki đối với 3 cặp số)

$$\Rightarrow A \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{a_1^2 + \alpha a_1 a_2 + a_2^2 + \alpha a_2 a_3 + a_3^2 + \alpha a_1 a_3}$$
$$\Leftrightarrow A \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (\alpha - 2)(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3)}$$
$$\Leftrightarrow A \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (\alpha - 2)\frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)^2}$$
$$\Leftrightarrow A \geq \frac{1}{1 + \frac{1}{3}(\alpha - 2)} = \frac{3}{3 + (\alpha - 2)} = \frac{3}{1 + \alpha}$$

Dấu " = " xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3$

2.1.2 Trường hợp 4 số $n = 4$

Bài 2

Cho 4 số không âm a_1, a_2, a_3, a_4 và số thực $\alpha > 2$. Chứng minh rằng:

$$B = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(2a_2 + a_3)} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha(2a_3 + a_4)} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha(2a_4 + a_1)} + \frac{a_4}{a_4 + \alpha(2a_1 + a_2)} \geq \frac{4}{1 + 3\alpha}$$

Chứng minh.

Ta có:

$$B = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(2a_2 + a_3)} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha(2a_3 + a_4)} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha(2a_4 + a_1)} + \frac{a_4}{a_4 + \alpha(2a_1 + a_2)}$$
$$\Leftrightarrow B = \frac{a_1^2}{a_1^2 + \alpha(2a_1 a_2 + a_1 a_3)} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + \alpha(2a_2 a_3 + a_2 a_4)} + \frac{a_3^2}{a_3^2 + \alpha(2a_3 a_4 + a_3 a_1)} + \frac{a_4^2}{a_4^2 + \alpha(2a_4 a_1 + a_4 a_2)}$$
$$\Rightarrow B\{[a_1^2 + \alpha(2a_1 a_2 + a_1 a_3)] + [a_2^2 + \alpha(2a_2 a_3 + a_2 a_4)]$$
$$+[a_3^2 + \alpha(2a_3 a_4 + a_3 a_1)] + [a_4^2 + \alpha(2a_4 a_1 + a_4 a_2)]\} \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2$$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki đối với 4 cặp số)

$$\Rightarrow B \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2}{[a_1^2 + \alpha(2a_1 a_2 + a_1 a_3)] + \cdots + [a_4^2 + \alpha(2a_4 a_1 + a_4 a_2)]}$$
$$\Leftrightarrow B \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 + (2\alpha - 2)(a_1 a_2 + \cdots + a_3 a_4)}$$
$$\Leftrightarrow B \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 + (2\alpha - 2)\frac{3}{8}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2}$$
$$\Leftrightarrow B \geq \frac{1}{1 + \frac{3}{8}(2\alpha - 2)} = \frac{8}{8 + 3(2\alpha - 2)} = \frac{8}{2 + 6\alpha} = \frac{4}{1 + 3\alpha}$$

Dấu " = " xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$

Bài 2.1 Cho $a_4 = 0$ ta được:

$$B_1 = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(2a_2 + a_3)} + \frac{a_2}{a_2 + 2\alpha a_3} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha a_1} \geq \frac{4}{1 + 3\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3$

2.1.3 Trường hợp 5 số $n = 5$

Bài toán tổng quát 5 số

Cho 5 số không âm a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 và số thực $\alpha > 2,$. Chứng minh rằng:

Bài 3

Cho 5 số không âm a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 và số thực $\alpha > 2$. Chứng minh rằng:

$$C = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(2a_2 + a_3 + a_4)} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha(2a_3 + a_4 + a_5)} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha(2a_4 + +a_5 + a_1)}$$
$$+ \frac{a_4}{a_4 + \alpha(2a_5 + a_1 + a_2)} + \frac{a_5}{a_5 + \alpha(2a_1 + a_2 + a_3)} \geq \frac{5}{1 + 4\alpha}$$

Chứng minh.

Ta có:

$$C = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(2a_2 + a_3 + a_4)} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha(2a_3 + a_4 + a_5)} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha(2a_4 + a_5 + a_1)}$$
$$+ \frac{a_4}{a_4 + \alpha(2a_5 + a_1 + a_2)} + \frac{a_5}{a_5 + \alpha(2a_1 + a_2 + a_3)}$$
$$\Leftrightarrow C = \frac{a_1^2}{a_1^2 + \alpha(2a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4)} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + \alpha(2a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5)}$$
$$+ \frac{a_3^2}{a_3^2 + \alpha(2a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_1)} + \frac{a_4^2}{a_4^2 + \alpha(2a_4a_5 + a_4a_1 + a_4a_2)}$$
$$+ \frac{a_5^2}{a_5^2 + \alpha(2a_5a_1 + a_5a_2 + a_5a_3)}$$
$$\Rightarrow C\{[a_1^2 + \alpha(2a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4)] + [a_2^2 + (2a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5)] + [a_3^2 + \alpha(2a_3a_4 + a_3a_5 +$$
$$a_3a_1)] + [a_4^2 + (2a_4a_5 + a_4a_1 + a_4a_2)] + [a_5^2 + \alpha(2a_5a_1 + a_5a_2 + a_5a_3)]\} \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2$$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki với 5 cặp số)

$$\Rightarrow C \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{[a_1^2 + \alpha(2a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4)] + \cdots + [a_5^2 + \alpha(2a_5a_1 + a_5a_2 + a_5a_3)]}$$
$$\Leftrightarrow C \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 + (2\alpha - 2)(a_1a_2 + \cdots + a_4a_5)}$$
$$\Leftrightarrow C \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 + (2\alpha - 2)\frac{2}{5}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}$$
$$\Leftrightarrow C \geq \frac{1}{1 + \frac{2}{5}(2\alpha - 2)} = \frac{5}{5 + 2(2\alpha - 2)} = \frac{5}{1 + 4\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$

Bài 3.1

Cho $a_5 = 0$ ta được:

$$C_1 = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(2a_2 + a_3 + a_4)} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha(2a_3 + a_4)} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha(2a_4 + a_1)} + \frac{a_4}{a_4 + \alpha(a_1 + a_2)} \geq \frac{5}{1 + 4\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$

Bài 3.2

Cho $a_5 = a_4 = 0$ ta được:

$$C_2 = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(2a_2 + a_3)} + \frac{a - 2}{a_2 + 2\alpha a_3} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha a_1} \geq \frac{5}{1 + 4\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3$

Bài 4

Cho 5 số không âm a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 và số thực $\alpha > 2$. Chứng minh rằng:

$$D = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(a_2 + a_3)} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha(a_3 + a_4)} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha(a_4 + a_5)} + \frac{a_4}{a_4 + \alpha(a_5 + a_1)} + \frac{a_5}{a_5 + \alpha(a_1 + a_2)} \geq \frac{5}{1 + 2\alpha}$$

Chứng minh.

Ta có:

$$C = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(a_2 + a_3)} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha(a_3 + a_4)} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha(a_4 + a_1)} + \frac{a_4}{a_4 + \alpha(a_5 + a_1)} + \frac{a_5}{a_5 + \alpha(a_1 + a_2)}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{a_1^2}{a_1^2 + \alpha(a_1a_2 + a_1a_3)} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + \alpha(a_2a_3 + a_2a_4)} + \frac{a_3^2}{a_3^2 + \alpha(a_3a_4 + a_3a_5)} + \frac{a_4^2}{a_4^2 + \alpha(a_4a_5 + a_4a_1)} + \frac{a_5^2}{a_5^2 + \alpha(a_5a_1 + a_5a_2)}$$

$$\Rightarrow C\{[a_1^2 + \alpha(a_1a_2 + a_1a_3)] + [a_2^2 + (a_2a_3 + a_2a_4)] + [a_3^2 + \alpha(a_3a_4 + a_3a_5)] + [a_4^2 + (a_4a_5 + a_4a_1)] + [a_5^2 + \alpha(a_5a_1 + a_5a_2)]\} \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2$$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki với 5 cặp số)

$$\Rightarrow C \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{[a_1^2 + \alpha(a_1a_2 + a_1a_3)] + \cdots + [a_5^2 + \alpha(a_5a_1 + a_5a_2)]}$$

$$\Leftrightarrow C \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 + (\alpha - 2)(a_1a_2 + \cdots + a_4a_5)}$$

$$\Leftrightarrow C \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2 + (\alpha - 2)\frac{2}{5}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5)^2}$$

$$\Leftrightarrow C \geq \frac{1}{1 + \frac{2}{5}(\alpha - 2)} = \frac{5}{5 + 2(\alpha - 2)} = \frac{5}{1 + 2\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$

Bài 4.1

Cho $a_5 = 0$ ta được:

$$D_1 = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(a_2 + a_3)} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha(a_3 + a_4)} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha a_4} + \frac{a_4}{a_4 + \alpha a_1} \geq \frac{5}{1 + 2\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$

Bài 4.2

Cho $a_5 = a_4 = 0$ ta được:

$$D_2 = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(a_2 + a_3)} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha a_3} + 1 \geq \frac{5}{1 + 2\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3$

2.1.4 Trường hợp 6 số $n = 6$

Bài 5

Cho 6 số không âm $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ và số thực $\alpha > 2$. Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} E = &\frac{a_1}{a_1 + \alpha(2a_2 + a_3 + a_4 + a_5)} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha(2a_3 + a_4 + a_5 + a_6)} \\ &+ \frac{a_3}{a_3 + \alpha(2a_4 + a_5 + a_6 + a_1)} + \frac{a_4}{a_4 + \alpha(2a_5 + a_6 + a_1 + a_2)} \\ &+ \frac{a_5}{a_5 + \alpha(2a_6 + a_1 + a_2 + a_3)} + \frac{a_6}{a_6 + \alpha(2a_1 + a_2 + a_3 + a_4)} \geq \frac{6}{1 + 5\alpha} \end{aligned}$$

Chứng minh.

Ta có:

$$\begin{aligned} E = &\frac{a_1}{a_1 + \alpha(2a_2 + a_3 + a_4 + a_5)} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha(2a_3 + a_4 + a_5 + a_6)} \\ &+ \frac{a_3}{a_3 + \alpha(2a_4 + a_5 + a_6 + a_1)} + \frac{a_4}{a_4 + \alpha(2a_5 + a_6 + a_1 + a_2)} \\ &+ \frac{a_5}{a_5 + \alpha(2a_6 + +a_1 + a_2 + a_3)} + \frac{a_6}{a_6 + \alpha(2a_1 + a_2 + a_3 + a_4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow E = &\frac{a_1^2}{a_1^2 + \alpha(2a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5)} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + \alpha(2a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + a_2a_6)} \\ &+ \frac{a_3^2}{a_3^2 + \alpha(2a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + a_3a_1)} + \frac{a_4^2}{a_4^2 + \alpha(2a_4a_5 + a_4a_6 + a_4a_1 + a_4a_2)} \\ &+ \frac{a_5^2}{a_5^2 + \alpha(2a_5a_6 + a_5a_1 + a_5a_2 + a_5a_3)} + \frac{a_6^2}{a_6^2 + \alpha(2a_6a_1 + a_6a_2 + a_6a_3 + a_6a_4)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow E\{[a_1^2 + \alpha(2a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_1a_5)] + [a_2^2 + (2a_2a_3 + a_2a_4 + a_2a_5 + a_2a_6)] + [a_3^2 + \alpha(2a_3a_4 + a_3a_5 + a_3a_6 + a_3a_1)] + [a_4^2 + (2a_4a_5 + a_4a_6 + a_4a_1 + a_4a_2)] + [a_5^2 + \alpha(2a_5a_6 + a_5a_1 + a_5a_2 + a_5a_3)] + [a_6^2 + \alpha(2a_6a_1 + a_6a_2 + a_6a_3 + a_6a_4)]\} \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki với 6 cặp số)

$$\Rightarrow E \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2) + 2\alpha(a_1a_2 + \cdots + a_5a_6)]}$$

$$\Leftrightarrow E \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2}{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2 + (2\alpha - 2)(a_1a_2 + \cdots + a_5a_6)}$$

$$\Leftrightarrow E \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2}{(a_1+\cdots+a_6)^2+(2\alpha-2)\frac{5}{12}(a_1+\cdots+a_6)^2}$$
$$\Leftrightarrow E \geq \frac{1}{1+\frac{5}{12}(2\alpha-2)} = \frac{12}{12+5(2\alpha-2)} = \frac{12}{2+10\alpha} = \frac{6}{1+5\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6$

Bài 5.1

Cho $a_6=0$ ta được:

$$E_1 = \frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+a_3+a_4+a_5)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+a_4+a_5)} + \frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+a_5)} + \frac{a_4}{a_4+\alpha(2a_5+a_1)} + \frac{a_5}{a_5+\alpha(a_1+a_2)} \geq \frac{6}{1+5\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$

Bài 5.2

Cho $a_6=a_5=0$ ta được:

$$E_2 = \frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+a_3+a_4)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+a_4)} + \frac{a_3}{a_3+2\alpha a_4} + \frac{a_4}{a_4+\alpha a_1} \geq \frac{6}{1+5\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=a_3=a_4$

Bài 5.3

Cho $a_6=a_5=a_4=0$ ta được:

$$E_3 = \frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+a_3)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+a_4)} + 1 \geq \frac{6}{1+5\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=a_3$

Bài 6

Cho 5 số không âm $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ và số thực $\alpha > 2$. Chứng minh rằng:

$$F = \frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+2a_3+a_4)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+2a_4+a_5)} + \frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+2a_5+a_6)} + \frac{a_4}{a_4+\alpha(2a_5+2a_6+a_1)} + \frac{a_5}{a_5+\alpha(2a_6+2a_1+a_2)} + \frac{a_6}{a_6+\alpha(2a_1+2a_2+a_3)} \geq \frac{6}{1+5\alpha}$$

Chứng minh.

Ta có:

$$F = \frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+2a_3+a_4)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+2a_4+a_5)} + \frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+2a_5+a_6)} + \frac{a_4}{a_4+\alpha(2a_5+2a_6+a_1)} + \frac{a_5}{a_5+\alpha(2a_6++2a_1+a_2)} + \frac{a_6}{a_6+\alpha(2a_1+2a_2+a_3)}$$
$$\Leftrightarrow F = \frac{a_1^2}{a_1^2+\alpha(2a_1a_2+2a_1a_3+a_1a_4)} + \frac{a_2^2}{a_2^2+\alpha(2a_2a_3+2a_2a_4+a_2a_5)} + \frac{a_3^2}{a_3^2+\alpha(2a_3a_4+2a_3a_5+a_3a_6)} + \frac{a_4^2}{a_4^2+\alpha(2a_4a_5+2a_4a_6+a_4a_1)}$$

$$+\frac{a_5^2}{a_5^2+\alpha(2a_5a_6+2a_5a_1+a_5a_2)}+\frac{a_6^2}{a_6^2+\alpha(2a_6a_1+2a_6a_2+a_6a_3)}$$

$\Rightarrow F\{[a_1^2+\alpha(2a_1a_2+2a_1a_3+a_1a_4)]+[a_2^2+(2a_2a_3+2a_2a_4+a_2a_5)]+[a_3^2+\alpha(2a_3a_4+2a_3a_5+a_3a_6)]+[a_4^2+(2a_4a_5+2a_4a_6+a_4a_1)]+[a_5^2+\alpha(2a_5a_6+2a_5a_1+a_5a_2)]+[a_6^2+\alpha(2a_6a_1+2a_6a_2+a_6a_3)]\}\geq(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki với 6 cặp số)

$$\Rightarrow F\geq\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2)+2\alpha(a_1a_2+\cdots+a_5a_6)]}$$

$$\Leftrightarrow F\geq\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2+(2\alpha-2)(a_1a_2+\cdots+a_5a_6)}$$

$$\Leftrightarrow F\geq\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2}{(a_1+\cdots+a_6)^2+(2\alpha-2)\frac{5}{12}(a_1+\cdots+a_6)^2}$$

$$\Leftrightarrow F\geq\frac{1}{1+\frac{5}{12}(2\alpha-2)}=\frac{12}{12+5(2\alpha-2)}=\frac{12}{2+10\alpha}=\frac{6}{1+5\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6$

Bài 6.1

Cho $a_6=0$ ta được:

$$F_1=\frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+2a_3+a_4)}+\frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+2a_4+a_5)}+\frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+2a_5)}$$
$$+\frac{a_4}{a_4+\alpha(2a_5+a_1)}+\frac{a_5}{a_5+\alpha(2a_1+a_2)}\geq\frac{6}{1+5\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$

Bài 6.2

Cho $a_6=a_5=0$ ta được:

$$F_1=\frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+2a_3+a_4)}+\frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+2a_4)}+\frac{a_3}{a_3+2\alpha a_4}$$
$$+\frac{a_4}{a_4+\alpha a_1}\geq\frac{6}{1+5\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=a_3=a_4$

2.1.5 Trường hợp 7 số $n=7$

Bài 7

Cho 7 số không âm $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ và số thực $\alpha>2$. Chứng minh rằng:

$$M=\frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)}+\frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)}$$
$$+\frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+a_5+a_6+a_7+a_1)}+\frac{a_4}{a_4+\alpha(2a_5+a_6+a_7+a_1+a_2)}$$
$$+\frac{a_5}{a_5+\alpha(2a_6+a_7+a_1+a_2+a_3)}+\frac{a_6}{a_6+\alpha(2a_7+a_1+a_2+a_3+a_4)}$$
$$+\frac{a_7}{a_7+\alpha(2a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)}\geq\frac{7}{1+6\alpha}$$

Chứng minh.

Ta có:

$$M = \frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)}$$
$$+ \frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+a_5+a_6+a_7+a_1)} + \frac{a_4}{a_4+\alpha(2a_5+a_6+a_7+a_1+a_2)}$$
$$+ \frac{a_5}{a_5+\alpha(2a_6++a_7+a_1+a_2+a_3)} + \frac{a_6}{a_6+\alpha(2a_7+a_1+a_2+a_3+a_4)}$$
$$+ \frac{a_7}{a_7+\alpha(2a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)}$$
$$\Leftrightarrow M = \frac{a_1^2}{a_1^2+\alpha(2a_1a_2+a_1a_3\cdots+a_1a_6)} + \frac{a_2^2}{a_2^2+\alpha(2a_2a_3+a_2a_4\cdots+a_2a_7)}$$
$$+ \frac{a_3^2}{a_3^2+\alpha(2a_3a_4+a_3a_5+\cdots+a_3a_1)} + \frac{a_4^2}{a_4^2+\alpha(2a_4a_5+a_4a_6+\cdots+a_4a_2)}$$
$$+ \frac{a_5^2}{a_5^2+\alpha(2a_5a_6+a_5a_7+\cdots+a_5a_3)} + \frac{a_6^2}{a_6^2+\alpha(2a_6a_7+a_6a_1+\cdots+a_6a_4)}$$
$$\Rightarrow M\{[a_1^2+\alpha(2a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_1a_6)]+[a_2^2+(2a_2a_3+a_2a_4+\cdots+a_2a_7)]$$
$$+[a_3^2+\alpha(2a_3a_4+a_3a_5+\cdots+a_3a_1)]+[a_4^2+(2a_4a_5+a_4a_6+\cdots+a_4a_2)]$$
$$+[a_5^2+\alpha(2a_5a_6+a_5a_7+\cdots+a_5a_3)]+[a_6^2+\alpha(2a_6a_7+a_6a_1+\cdots+a_6a_4)]$$
$$+[a_7^2+\alpha(2a_7a_1+a_7a_2+\cdots+a_7a_4)\} \geq (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2$$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki với 7 cặp số)

$$\Rightarrow M \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2)+2\alpha(a_1a_2+\cdots+a_6a_7)]}$$
$$\Leftrightarrow M \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2+(2\alpha-2)(a_1a_2+\cdots+a_6a_7)}$$
$$\Leftrightarrow M \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2}{(a_1+\cdots+a_7)^2+(2\alpha-2)\frac{3}{7}(a_1+\cdots+a_7)^2}$$
$$\Leftrightarrow M \geq \frac{1}{1+\frac{3}{7}(2\alpha-2)} = \frac{7}{7+3(2\alpha-2)} = \frac{7}{1+6\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6=a_7$

Bài 7.1

Cho $a_7=0$ ta được:

$$M_1 = \frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+a_4+a_5+a_6)}$$
$$+\frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+a_5+a_6+a_1)} + \frac{a_4}{a_4+\alpha(2a_5+a_6+a_1+a_2)}$$
$$+\frac{a_5}{a_5+\alpha(2a_6+a_1+a_2+a_3)} + \frac{a_6}{a_6+\alpha(a_1+a_2+a_3+a_4)} \geq \frac{7}{1+6\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=a_6$

Bài 7.2

Cho $a_7=a_6=0$ ta được:

$$M_2 = \frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+a_3+a_4+a_5)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+a_4+a_5)} + \frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+a_5+a_1)}$$

$$+\frac{a_4}{a_4+\alpha(2a_5+a_1+a_2)}+\frac{a_5}{a_5+\alpha(a_1+a_2+a_3)}\geq\frac{7}{1+6\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$

Bài 7.3

Cho $a_7=a_6=a_5=0$ ta được:

$$M_3=\frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+a_3+a_4)}+\frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+a_4)}+\frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+a_1)}$$
$$+\frac{a_4}{a_4+\alpha(a_1+a_2)}\geq\frac{7}{1+6\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=a_3=a_4$

Bài 8

Cho 7 số không âm $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$ và số thực $\alpha>2$. Chứng minh rằng:

$$L=\frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+2a_3+a_4+a_5)}+\frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+2a_4+a_5+a_6)}$$
$$\frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+2a_5+a_6+a_7)}+\frac{a_4}{a_4+\alpha(2a_5+2a_6+a_7+a_1)}$$
$$\frac{a_5}{a_5+\alpha(2a_6+2a_7+a_1+a_2)}+\frac{a_6}{a^6+\alpha(2a_7+2a_1+a_2+a_3)}$$
$$+\frac{a_7}{a_7+\alpha(2a_1+2a_2+a_3+a_4)}\geq\frac{7}{1+6\alpha}$$

Chứng minh.

Ta có:

$$L=\frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+2a_3+a_4+a_5)}+\frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+2a_4+a_5+a_6)}$$
$$+\frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+2a_5+a_6+a_7)}+\frac{a_4}{a_4+\alpha(2a_5+2a_6+a_7+a_1)}$$
$$+\frac{a_5}{a_5+\alpha(2a_6++2a_7+a_1+a_2)}+\frac{a_6}{a_6+\alpha(2a_7+2a_1+a_2+a_3)}$$
$$+\frac{a_7}{a_7+\alpha(2a_1+2a_2+a_3+a_4)}$$
$$\Leftrightarrow L=\frac{a_1^2}{a_1^2+\alpha(2a_1a_2+2a_1a_3+a_1a_4)}+\frac{a_2^2}{a_2^2+\alpha(2a_2a_3+2a_2a_4+a_2a_5+a_2a_6)}$$
$$+\frac{a_3^2}{a_3^2+\alpha(2a_3a_4+2a_3a_5+a_3a_6+a_3a_7)}+\frac{a_4^2}{a_4^2+\alpha(2a_4a_5+2a_4a_6+a_4a_7+a_4a_1)}$$
$$+\frac{a_5^2}{a_5^2+\alpha(2a_5a_6+2a_5a_7+a_5a_1+a_5a_2)}+\frac{a_6^2}{a_6^2+\alpha(2a_6a_7+2a_6a_1+a_6a_2+a_6a_3)}$$
$$+\frac{a_7^2}{a_7^2+\alpha(2a_7a_1+2a_7a_2+a_7a_3+a_7a_4)}$$
$$\Rightarrow L\{[a_1^2+\alpha(2a_1a_2+2a_1a_3+a_1a_4+a_1a_5)]+[a_2^2+(2a_2a_3+2a_2a_4+a_2a_5+a_2a_6)]$$
$$+[a_3^2+\alpha(2a_3a_4+2a_3a_5+a_3a_6+a_3a_7)]+[a_4^2+(2a_4a_5+2a_4a_6+a_4a_7+a_4a_1)]$$
$$+[a_5^2+\alpha(2a_5a_6+2a_5a_7+a_5a_1+a_5a_2)]+[a_6^2+\alpha(2a_6a_7+2a_6a_1+a_6a_2+a_6a_3)]$$
$$+[a_7^2+\alpha(2a_7a_1+2a_7a_2+a_7a_3+a_7a_4)]\}\geq(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2$$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki với 7 cặp số)

$$\Rightarrow L \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2)+2\alpha(a_1a_2+\cdots+a_6a_7)]}$$
$$\Leftrightarrow L \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2+(2\alpha-2)(a_1a_2+\cdots+a_6a_7)}$$
$$\Leftrightarrow L \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2}{(a_1+\cdots+a_7)^2+(2\alpha-2)\frac{3}{7}(a_1+\cdots+a_7)^2}$$
$$\Leftrightarrow L \geq \frac{1}{1+\frac{3}{7}(2\alpha-2)} = \frac{7}{7+3(2\alpha-2)} = \frac{7}{1+6\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7$

Bài 8.1

Cho $a_7 = 0$ ta được:

$$L_1 = \frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+2a_3+a_4+a_5)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+2a_4+a_5+a_6)}$$
$$\frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+2a_5+a_6)} + \frac{a_4}{a_4+\alpha(2a_5+2a_6+a_1)}$$
$$\frac{a_5}{a_5+\alpha(2a_6+a_1+a_2)} + \frac{a_6}{2a_1+a_2+a_3} \geq \frac{7}{1+6\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6$

Bài 8.2

Cho $a_7 = a_6 = 0$ ta được:

$$L_2 = \frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+2a_3+a_4+a_5)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+2a_4+a_5)}$$
$$\frac{a_3}{a_3+\alpha(2a_4+2a_5)} + \frac{a_4}{a_4+\alpha(2a_5+a_1)} + \frac{a_5}{a_5+\alpha(a_1+a_2)} \geq \frac{7}{1+6\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$

Bài 8.3

Cho $a_7 = a_6 = a_5 = 0$ ta được:

$$L_3 = \frac{a_1}{a_1+\alpha(2a_2+2a_3+a_4)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(2a_3+2a_4)} + \frac{a_3}{a_3+2\alpha a_4}$$
$$+\frac{a_4}{a_4+\alpha a_1} \geq \frac{7}{1+6\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$

Bài 9

Cho 7 số không âm $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ và số thực $\alpha > 2$. Chứng minh rằng:

$$O = \frac{a_1}{a_1+\alpha(a_2+a_3+a_4)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(a_3+a_4+a_5)} + \frac{a_3}{a_3+\alpha(a_4+a_5+a_6)}$$
$$+ \frac{a_4}{a_4+\alpha(a_5+a_6+a_7)} + \frac{a_5}{a_5+\alpha(a_6+a_7+a_1)} + \frac{a_6}{a_6+\alpha(a_7+a_1+a_2)}$$
$$+ \frac{a_7}{a_7+\alpha(a_1+a_2+a_3)} \geq \frac{7}{1+3\alpha}$$

Chứng minh.

Ta có:

$$O = \frac{a_1}{a_1+\alpha(a_2+a_3+a_4)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(a_3+a_4+a_5)}$$
$$+ \frac{a_3}{a_3+\alpha(a_4+a_5+a_6)} + \frac{a_4}{a_4+\alpha(a_5+a_6+a_7)}$$
$$+ \frac{a_5}{a_5+\alpha(a_6++a_7+a_1)} + \frac{a_6}{a_6+\alpha(a_7+a_1+a_2)}$$
$$+ \frac{a_7}{a_7+\alpha(a_1+a_2+a_3)}$$
$$\Leftrightarrow O = \frac{a_1^2}{a_1^2+\alpha(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4)} + \frac{a_2^2}{a_2^2+\alpha(a_2a_3+a_2a_4+a_2a_5)}$$
$$+ \frac{a_3^2}{a_3^2+\alpha(a_3a_4+a_3a_5+a_3a_6)} + \frac{a_4^2}{a_4^2+\alpha(a_4a_5+a_4a_6+a_4a_7)}$$
$$+ \frac{a_5^2}{a_5^2+\alpha(a_5a_6+a_5a_7+a_5a_1)} + \frac{a_6^2}{a_6^2+\alpha(a_6a_7+a_6a_1+a_6a_2)}$$
$$+ \frac{a_7^2}{a_7^2+\alpha(a_7a_1+a_7a_2+a_7a_3)}$$
$$\Rightarrow O\{[a_1^2+\alpha(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4)] + [a_2^2+(a_2a_3+a_2a_4+a_2a_5)]$$
$$+ [a_3^2+\alpha(a_3a_4+a_3a_5+a_3a_6)] + [a_4^2+(a_4a_5+a_4a_6+a_4a_7)]$$
$$+ [a_5^2+\alpha(a_5a_6+a_5a_7+a_5a_1)] + [a_6^2+\alpha(a_6a_7+a_6a_1+a_6a_2)]$$
$$+ [a_7^2+\alpha(a_7a_1+a_7a_2+a_7a_3)]\} \ge (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2$$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki với 7 cặp số)

$$\Rightarrow O \ge \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2)+\alpha(a_1a_2+\cdots+a_6a_7)]}$$
$$\Leftrightarrow O \ge \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2+(\alpha-2)(a_1a_2+\cdots+a_6a_7)}$$
$$\Leftrightarrow O \ge \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2}{(a_1+\cdots+a_7)^2+(\alpha-2)\frac{3}{7}(a_1+\cdots+a_7)^2}$$
$$\Leftrightarrow O \ge \frac{1}{1+\frac{3}{7}(\alpha-2)} = \frac{7}{7+3(\alpha-2)} = \frac{7}{1+3\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7$

Bài 9.1

Cho $a_7 = 0$ ta được:

$$O_1 = \frac{a_1}{a_1+\alpha(a_2+a_3+a_4)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(a_3+a_4+a_5)} + \frac{a_3}{a_3+\alpha(a_4+a_5+a_6)}$$
$$+ \frac{a_4}{a_4+\alpha(a_5+a_6)} + \frac{a_5}{a_5+\alpha(a_6+a_1)} + \frac{a_6}{a_6+\alpha(a_1+a_2)} \ge \frac{7}{1+3\alpha}$$

Bài 9.2

Cho $a_7 = a_6 = 0$ ta được:

$$O_2 = \frac{a_1}{a_1+\alpha(a_2+a_3+a_4)} + \frac{a_2}{a_2+\alpha(a_3+a_4+a_5)} + \frac{a_3}{a_3+\alpha(a_4+a_5)}$$
$$+ \frac{a_4}{a_4+\alpha a_5} + \frac{a_5}{a_5+\alpha a_1} + \ge \frac{7}{1+3\alpha}$$

Bài 9.3

Cho $a_7 = a_6 = a_5 = 0$ ta được:

$$O_3 = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(a_2 + a_3 + a_4)} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha(a_3 + a_4)} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha a_4} + 1 \geq \frac{7}{1 + 3\alpha}$$

2.2 Trường hợp tổng quát

2.2.1 Một số kiến thức liên quan

Bất đẳng thức Cauchy đối với 2 số

Cho 2 số không âm a_1, a_2 ta luôn có $a_1a_2 \leq \dfrac{a_1^2 + a_2^2}{2}$

Dấu bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a_1 = a_2$

Bất đẳng thức Bunhiacopxki

Cho 2 dãy số không âm $a_1, a_2, \cdots, a_n$; $b_1, b_2, \cdots, b_n$ ta luôn có

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Dấu của bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$ (Nếu $\exists i$ sao cho $b_i = 0$ đó chỉ là một cách ký hiệu hình thức

Hằng đẳng thức bình phương

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2 + 2a_1a_2 + \cdots + 2a_{n-1}a_n$$

2.2.2 Nhận xét đặc biệt

Cho n số không âm $a_1, \cdots, a_n$ khi đó ta luôn có những đánh giá sau mà việc xây dựng bất đẳng thức dựa trên đánh giá này.

♣ **Với trường hợp** 3 **số** $n = 3$

Đặt $A = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3$ và $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$ ta có đánh giá so sánh sau:
$A \leq \dfrac{2}{2}(\dfrac{a_1^2 + a_2^2}{2} + \dfrac{a_1^2 + a_3^2}{2} + \dfrac{a_2^2 + a_3^2}{2})$

Nhận xét 1: Ta nhận thấy rằng trong A các số hạng a_1, a_2, a_3 đều có mặt 3 lần, số các phần tử của A là $3 = \dfrac{3.2}{2}$. Trong đánh giá A được giữ nguyên còn vế phải chia cặp ghép đôi tương ứng được chia cho 2 bằng sự xuất hiện của mỗi số a_1, a_2, a_3 trong A.

$\Rightarrow 3A \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2A$

$\Leftrightarrow 3A \leq (a_1 + a_2 + a_3)^2$

$\Leftrightarrow A \leq \dfrac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3)^2$

Dấu $" = "$ xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3$

♣ **Với trường hợp** 4 **số** $n = 4$

Đặt $B = a_1a_2 + \cdots + a_3a_4$ và $(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$ ta có đánh giá so sánh sau:
$B \leq \frac{3}{2}(\frac{a_1^2 + a_2^2}{3} + \cdots + \frac{a_3^2 + a_4^2}{3})$

Nhận xét 2: Ta nhận thấy rằng trong B các số hạng a_1, a_2, a_3, a_4 đều có mặt 4 lần , số phần tử của B là $6 = \frac{4.3}{2}$. Trong đánh giá B được giữ nguyên còn các phần tử về phải chia cặp ghép đôi tương ứng được chia cho 3 bằng sự xuất hiện của mỗi số hạng (a_1, a_2, a_3, a_4) trong B.

$\Rightarrow 8B \leq 3(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) + 6B$

$\Leftrightarrow 8B \leq 3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2$

$\Leftrightarrow B \leq \frac{3}{8}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2$

Dấu " = " xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$

♣ **Với trường hợp** 5 **số** $n = 5$

Đặt $C = a_1a_2 + \cdots + a_4a_5$ và $(a_1^2 + \cdots + a_5^2)$ Ta có đánh giá so sánh sau:
$C \leq \frac{4}{2}(\frac{a_1^2 + a_2^2}{4} + \cdots + \frac{a_4^2 + a_5^2}{4})$

Nhận xét 3: Ta nhận thấy rằng trong C các phần tử $a_1, \cdots, a_5$ đều có mặt 4 lần , số các phần tử của C là $10 = \frac{5.4}{2}$. Trong đánh giá thì C được giữ nguyên còn các phần tử về phải chia ghép đôi tương ứng được chia cho 4 bằng sự xuất hiện của các số hạng $(a_1, \cdots, a_5)$ trong C.

$\Rightarrow 5C \leq 2(a_1^2 + \cdots + a_5^2) + 4C$

$\Leftrightarrow 5C \leq 2(a_1 + \cdots + a_5)^2$

$\Leftrightarrow C \leq \frac{2}{5}(a_1 + \cdots + a_5)^2$

Dấu " = " xảy ra khi $a_1 = \cdots = a_5$

♣ **Với trường hợp** 6 **số** $n = 6$

Đặt $D = a_1a_2 + \cdots + a_5a_6$ và $(a_1^2 + \cdots + a_6^2)$ ta có đánh giá so sánh sau:
$C \leq \frac{5}{2}(\frac{a_1^2 + a_2^2}{5} + \cdots + \frac{a_5^2 + a_6^2}{5})$

Nhận xét 4: Ta nhận thấy rằng trong D các số hạng $a_1, \cdots, a_6$ đều có mặt 5 lần, số phần tử của D là $15 = \frac{6.5}{2}$. Trong đánh giá D được giữ nguyên còn các phần tử về phải chia cặp ghép đôi tương ứng được chia cho 5 bằng sự xuất hiện của các phần tử$(a_1, \cdots, a_6)$ trong D.

$\Rightarrow 2D \leq 5(a_1^2 + \cdots + a_6^2)$

$\Leftrightarrow 12D \leq 5(a_1^2 + \cdots + a_6^2) + 10D$

$\Leftrightarrow D \leq \dfrac{5}{12}(a_1 + \cdots + a_6)^2$

Dấu $" = "$ xảy ra khi $a_1 = \cdots = a_6$

♣ **Với trường hợp 7 số $n = 7$**

Đặt $E = a_1a_2 + \cdots + a_6a_7$ và $(a_1^2 + \cdots + a_7^2)$ ta có đánh giá so sánh sau:

$E \leq \dfrac{6}{2}(\dfrac{a_1^2 + a_2^2}{6} \cdots + \dfrac{a_6^2 + a_7^2}{6})$

Nhận xét 5: Ta nhận thấy rằng trong E các số hạng $a_1, \cdots, a_7$ đều có mặt 6 lần, số phần tử của E là $21 = \dfrac{7.6}{2}$. Trong đánh giá E được giữ nguyên còn vế phải các phần tử ghép đôi được chia cho 6 bằng sự xuất hiện của $(a_1, \cdots, a_7)$ trong E.

$\Rightarrow E \leq 3(a_1^2 + \cdots + a_7^2)$

$\Leftrightarrow 7E \leq 3(a_1^2 + \cdots + a_7^2) + 6E$

$\Leftrightarrow 7E \leq 3(a_1 + \cdots + a_7)^2$

$\Leftrightarrow E \leq \dfrac{3}{7}(a_1 + \cdots + a_7)^2$

Dấu $" = "$ xảy ra khi $a_1 = \cdots = a_7$

♣ **Với trường hợp n số hạng**

Đặt $F = a_1a_2 + \cdots + a_{n-1}a_n$ và $(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$ ta có đánh giá so sánh sau:

$F \leq \dfrac{n-1}{2}(\dfrac{a_1^2 + a_2^2}{n-1} \cdots + \dfrac{a_{n-1}^2 + a_n^2}{n-1})$

Nhận xét 6: Ta nhận thấy rằng trong F các số hạng $a_1, \cdots, a_n$ đều có mặt $n-1$ lần, số phần tử của F là $\dfrac{(n-1)n}{2} = C_n^2$. Trong đánh giá F được giữ nguyên còn vế phải các phần tử ghép đôi được chia cho $n-1$ bằng sự xuất hiện của $(a_1, \cdots, a_n)$ trong F.

$\Rightarrow F \leq \dfrac{n-1}{2}(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$

$\Leftrightarrow 2F \leq (n-1)(a_1^2 + \cdots + a_n^2)$

$\Leftrightarrow 2F + 2(n-1)F \leq (n-1)(a_1 + \cdots + a_n)^2$

$\Leftrightarrow F \leq \dfrac{n-1}{2n}(a_1 + \cdots + a_n)^2$

Dấu $" = "$ xảy ra khi $a_1 = \cdots = a_n$

2.2.3 Trường hợp tổng quát n số hạng

Ta phân tích là tại sao lại có thể xây dựng được bất đẳng thức phân thức như vậy. Ta sẽ đi xây dựng ma trận hệ số có n hàng và $n-2$ cột như sau :

♣ **Trường hợp n=3 số**

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 \\ a_2a_3 \\ a_3a_4 \end{pmatrix}$$

Các phần tử a_1a_2, a_1a_3, a_2a_3 chỉ xuất hiện trong 1 cột duy nhất của ma trận và chỉ có 1 lần.

Trong trường hợp này ta chỉ xây dựng được một dạng bất đẳng thức phân thức.

♣ **Trường hợp n= 4 số**

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_2a_3 & a_2a_4 \\ a_3a_4 & a_3a_1 \\ a_4a_1 & a_4a_2 \end{pmatrix}$$

Nhận thấy rằng các phần tử

Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1

Cột 2 thì các phần tử xuất hiện 2 lần trong chính cột 2

Dạng bài toán tổng quát 4 chữ số này là:

Cho 4 chữ số không âm a_1, a_2, a_3, a_4, số thực $\alpha > 2$ và các số thực $r_{13}, r_{24}, r_{31}, r_{42}$ thỏa mãn: $$\alpha = \begin{cases} r_{13} + r_{31} & \text{Tổng } a_1a_3 \\ r_{24} + r_{42} & \text{Tổng } a_2a_4 \end{cases}$$

thì

$$\frac{a_1}{a_1 + \alpha a_2 + r_{13}a_3} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha a_3 + r_{24}a_4} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha a_4 + r_{31}a_1} + \frac{a_4}{a_4 + \alpha a_1 + r_{42}a_2} \geq \frac{8}{2 + 3\alpha}$$

Chứng minh

Ta có:

$$B = \frac{a_1}{a_1 + \alpha a_2 + r_{13}a_3} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha a_3 + r_{24}a_4} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha a_4 + r_{31}a_1} + \frac{a_4}{a_4 + \alpha a_1 + r_{42}a_2}$$
$$\Leftrightarrow B = \frac{a_1^2}{a_1^2 + \alpha a_1a_2 + r_{13}a_1a_3} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + \alpha a_2a_3 + r_{24}a_2a_4}$$
$$+ \frac{a_3^2}{a_3^2 + \alpha a_3a_4 + r_{31}a_3a_1} + \frac{a_4^2}{a_4^2 + \alpha a_4a_1 + r_{42}a_4a_2}$$
$$\Rightarrow B[(a_1^2 + \alpha a_1a_2 + r_{13}a_1a_3) + (a_2^2 + \alpha a_2a_3 + r_{24}a_2a_4)$$

$+(a_3^2+\alpha a_3a_4+r_{31}a_3a_1)+(a_4^2+\alpha a_4a_1+r_{42}a_4a_2)]\geq(a_1+a_2+a_3+a_4)^2$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki đối với 4 cặp số)

$\Rightarrow B\geq\dfrac{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2}{(a_1^2+\alpha a_1a_2+a_1a_3)+\cdots+(a_4^2+\alpha a_4a_1+a_4a_2)}$

$\Leftrightarrow B\geq\dfrac{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2+(\alpha-2)(a_1a_2+\cdots+a_3a_4)}$

$\Leftrightarrow B\geq\dfrac{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2+(\alpha-2)\frac{3}{8}(a_1+a_2+a_3+a_4)^2}$

$\Leftrightarrow B\geq\dfrac{1}{1+\frac{3}{8}(2\alpha-2)}=\dfrac{8}{8+3(\alpha-2)}=\dfrac{8}{2+3\alpha}$

Dấu " = " xảy ra khi $a_1=a_2=a_3=a_4$

Trong bài toán tổng quát này ta chọn các điều kiện: $r_{13}=r_{24}=r_{31}=r_{42}=\alpha$ còn $\alpha=2\alpha$ ta được **Bài 2**

♣ **Trong trường hợp n=5 số**

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4\\ a_2a_3 & a_2a_4 & a_2a_5\\ a_3a_4 & a_3a_5 & a_3a_1\\ a_4a_5 & a_4a_1 & a_4a_2\\ a_5a_1 & a_5a_2 & a_5a_3 \end{pmatrix}$$

Nhận thấy rằng các phần tử:

Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 trong chính cột 1

Cột 2 thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột 2 và một lần trong cột 3 hay cột 2 và cột 3 là giống nhau.

Dạng bài toán tổng quát của trường hợp 5 số này là:

Cho 5 số không âm a_1,a_2,a_3,a_4,a_5, số thực $\alpha>2$ và các số thực $r_{13},r_{14},r_{24},r_{25},r_{35}$, $r_{31},r_{41},r_{42},r_{52},r_{53}$ thỏa mãn hệ thức:

$$\alpha=\begin{cases} r_{13}+r_{31}\ (\text{Tổng } a_1a_3)=r_{14}+r_{41}\ (\text{Tổng } a_1a_4)\\ r_{24}+r_{42}\ (\text{Tổng } a_2a_4)=r_{25}+r_{52}\ (\text{Tổng } a_2a_5)\\ r_{35}+r_{53}\ (\text{Tổng } a_3a_5)\end{cases}$$

thì

$$C=\frac{a_1}{a_1+\alpha a_2+r_{13}a_3+r_{14}a_4}+\frac{a_2}{a_2+\alpha a_3+r_{24}a_4+r_{25}a_5}+\frac{a_3}{a_3+\alpha a_4++r_{35}a_5+r_{31}a_1}$$
$$+\frac{a_4}{a_4+\alpha a_5+r_{41}a_1+r_{42}a_2}+\frac{a_5}{a_5+\alpha a_1+r_{52}a_2+r_{53}a_3}\geq\frac{5}{1+2\alpha}$$

Chứng minh.

Ta có:

$$C=\frac{a_1}{a_1+\alpha a_2+r_{13}a_3+r_{14}a_4)}+\frac{a_2}{a_2+\alpha a_3+r_{24}a_4+r_{25}a_5)}+\frac{a_3}{a_3+\alpha a_4+r_{35}a_5+r_{31}a_1}$$
$$+\frac{a_4}{a_4+\alpha a_5+r_{41}a_1+r_{42}a_2}+\frac{a_5}{a_5+\alpha a_1+r_{52}a_2+r_{53}a_3}$$
$$\Leftrightarrow C=\frac{a_1^2}{a_1^2+\alpha a_1a_2+r_{13}a_1a_3+r_{14}a_1a_4}+\frac{a_2^2}{a_2^2+\alpha a_2a_3+r_{24}a_2a_4+r_{25}a_2a_5}$$
$$+\frac{a_3^2}{a_3^2+\alpha a_3a_4+r_{35}a_3a_5+r_{31}a_3a_1}+\frac{a_4^2}{a_4^2+\alpha a_4a_5+r_{41}a_4a_1+r_{42}a_4a_2}$$
$$+\frac{a_5^2}{a_5^2+\alpha a_5a_1+r_{52}a_5a_2+r_{53}a_5a_3}$$

$\Rightarrow C[(a_1^2+\alpha a_1a_2+r_{13}a_1a_3+r_{14}a_1a_4)+(a_2^2+\alpha a_2a_3+r_{24}a_2a_4+r_{25}a_2a_5)+(a_3^2+\alpha a_3a_4+r_3r_{35}a_3a_5+r_{31}a_3a_1)+(a_4^2+\alpha a_4a_5+r_{41}a_4a_1+r_{42}a_4a_2)+(a_5^2+\alpha a_5a_1+r_{52}a_5a_2+r_{53}a_5a_3)]\geq(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki với 5 cặp số)

$$\Rightarrow C\geq\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2}{(a_1^2+\alpha a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4)+\cdots+(a_5^2+\alpha a_5a_1+r_5a_5a_2+s_5a_5a_3)}$$
$$\Leftrightarrow C\geq\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2+(\alpha-2)(a_1a_2+\cdots+a_4a_5)}$$
$$\Leftrightarrow C\geq\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2+(\alpha-2)\frac{2}{5}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2}$$
$$\Leftrightarrow C\geq\frac{1}{1+\frac{2}{5}(\alpha-2)}=\frac{5}{5+2(\alpha-2)}=\frac{5}{1+2\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1=a_2=a_3=a_4=a_5$

Trong bài toán này nếu ta chọn các điều kiện:

Nếu $r_{13}=r_{31}=r_{24}=r_{42}=r_{35}=r_{53}=r_{41}=r_{14}=\alpha$ còn $\alpha=2\alpha$ ta sẽ được **Bài 3**

Nếu $r_{13}=r_{24}=r_{35}=r_{41}=r_{52}=\alpha$; $r_{31}=r_{42}=r_{53}=r_{41}=r_{52}=0$ còn $\alpha=\alpha$ ta sẽ được **Bài 4**

♣ **Trường hợp n= 6 số**

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 & a_1a_5\\ a_2a_3 & a_2a_4 & a_2a_5 & a_2a_6\\ a_3a_4 & a_3a_5 & a_3a_6 & a_3a_1\\ a_4a_5 & a_4a_6 & a_4a_1 & a_4a_2\\ a_5a_6 & a_5a_1 & a_5a_2 & a_5a_3\\ a_6a_1 & a_6a_2 & a_6a_3 & a_6a_4 \end{pmatrix}$$

Nhận thấy rằng các phần tử:

Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1

Cột 2 thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong 2 và một lần trong 4 hay cột 2 và cột 4 là giống nhau.

Cột 3 thì mỗi phần tử xuất hiện 2 lần.

Trong trường hợp 6 số này ta xây dựng bài toán tổng quát là:

Cho 6 số không âm $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ số thực $\alpha > 2$ và các số thực $r_{13}, r_{14}, r_{15}, r_{24}, r_{25}, r_{26}, r_{35}, r_{36}, r_{31}, r_{46}, r_{41}, r_{42}, r_{51}, r_{52}, r_{53}, r_{62}, r_{63}, r_{64}$ thỏa mãn:

$$\alpha = \begin{cases} r_{13} + r_{31} \text{ (Tổng } a_1a_3) = r_{14} + r_{41} \text{ (Tổng } a_1a_4) = r_{51} + r_{15} \text{ (Tổng } a_1a_5) \\ r_{24} + r_{42} \text{ (Tổng } a_2a_4) = r_{62} + r_{26} \text{ (Tổng } a_2a_6) = r_{25} + r_{52} \text{ (Tổng } a_2a_5) \\ r_{35} + r_{53} \text{ (Tổng } a_3a_5) = r_{46} + r_{64} \text{ (Tổng } a_4a_6) = r_{36} + r_{63} \text{ (Tổng } a_3a_6) \end{cases}$$

thì:

$$E = \frac{a_1}{a_1 + \alpha a_2 + r_{13}a_3 + r_{14}a_4 + r_{15}a_5} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha a_3 + r_{24}a_4 + r_{25}a_5 + r_{26}a_6} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha a_4 + r_{35}a_5 + r_{36}a_6 + r_{31}a_1} + \frac{a_4}{a_4 + \alpha a_5 + r_{46}a_6 + r_{41}a_1 + r_{42}a_2} + \frac{a_5}{a_5 + \alpha a_6 + r_{51}a_1 + r_{52}a_2 + r_{53}a_3} + \frac{a_6}{a_6 + \alpha a_1 + r_{62}a_2 + r_{63}a_3 + r_{64}a_4} \geq \frac{12}{2 + 5\alpha}$$

Chứng minh.

Ta có:

$$E = \frac{a_1}{a_1 + \alpha a_2 + r_{13}a_3 + r_{14}a_4 + r_{15}a_5} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha a_3 + r_{24}a_4 + r_{25}a_5 + r_{26}a_6} + \frac{a_3}{a_3 + \alpha a_4 + r_{35}a_5 + r_{36}a_6 + r_{31}a_1} + \frac{a_4}{a_4 + \alpha a_5 + r_{46}a_6 + r_{41}a_1 + r_{42}a_2} + \frac{a_5}{a_5 + \alpha a_6 + +r_{51}a_1 + r_{52}a_2 + r_{53}a_3} + \frac{a_6}{a_6 + \alpha a_1 + r_{62}a_2 + r_{63}a_3 + r_{64}a_4)}$$

$$\Leftrightarrow E = \frac{a_1^2}{a_1^2 + \alpha a_1a_2 + r_{13}a_1a_3 + r_{14}a_1a_4 + r_{15}a_1a_5} + \frac{a_2^2}{a_2^2 + \alpha a_2a_3 + r_{24}a_2a_4 + r_{25}a_2a_5 + r_{26}a_2a_6} + \frac{a_3^2}{a_3^2 + \alpha a_3a_4 + r_{35}a_3a_5 + r_{36}a_3a_6 + r_{31}a_3a_1} + \frac{a_4^2}{a_4^2 + \alpha a_4a_5 + r_{46}a_4a_6 + r_{41}a_4a_1 + r_{42}a_4a_2} + \frac{a_5^2}{a_5^2 + \alpha a_5a_6 + r_{51}a_5a_1 + r_{52}a_5a_2 + r_{53}a_5a_3} + \frac{a_6^2}{a_6^2 + \alpha a_6a_1 + r_{62}a_6a_2 + r_{63}a_6a_3 + r_{64}a_6a_4}$$

$\Rightarrow E[(a_1^2+\alpha a_1a_2+r_{13}a_1a_3+r_{14}a_1a_4+r_{15}a_1a_5)+(a_2^2+\alpha a_2a_3+r_{24}a_2a_4+r_{25}a_2a_5+r_{26}a_2a_6)+ (a_3^2+\alpha a_3a_4+r_{35}a_3a_5+r_{36}a_3a_6+r_{31}a_3a_1)+(a_4^2+\alpha a_4a_5+r_{46}a_4a_6+r_{41}a_4a_1+r_{42}a_4a_2)+ (a_5^2+\alpha r_{56}a_5a_6+r_{51}a_5a_1+r_{52}a_5a_2+r_{53}a_5a_3)+(a_6^2+\alpha a_6a_1+r_{62}a_6a_2+r_{63}a_6a_3+r_{64}a_6a_4)] \geq (a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2$

(Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki với 6 cặp số)

$$\Rightarrow E \geq \frac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2}{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2) + \alpha(a_1a_2 + \cdots + a_5a_6)]}$$

$$\Leftrightarrow E \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2+(\alpha-2)(a_1a_2+\cdots+a_5a_6)}$$
$$\Leftrightarrow E \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6)^2}{(a_1+\cdots+a_6)^2+(\alpha-2)\frac{5}{12}(a_1+\cdots+a_6)^2}$$
$$\Leftrightarrow E \geq \frac{1}{1+\frac{5}{12}(2\alpha-2)} = \frac{12}{12+5(\alpha-2)} = \frac{12}{2+5\alpha} = \frac{12}{2+5\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6$

Trong bài toán này nếu ta chọn các điều kiện:

Nếu $r_{13} = r_{14} = r_{15} = r_{24} = r_{25} = r_{26} = r_{35} = r_{36} = r_{31} = r_{46} = r_{41} = r_{41} = r_{51} = r_{52} = r_{53} = r_{62} = r_{63} = r_{64} = \alpha$ và $\alpha = 2\alpha$ thì ta có **Bài 5**

Nếu $r_{15} = r_{26} = r_{31} = r_{42} = r_{53} = r_{64} = 0$; $r_{14} = r_{25} = r_{36} = r_{41} = r_{52} = r_{63} = \alpha$ và $r_{13} = r_{24} = r_{35} = r_{46} = r_{51} = r_{62} = 2\alpha$ thì ta có **Bài 6**

♣ **Trường hợp n= 7 số**

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & a_1a_4 & a_1a_5 & a_1a_6 \\ a_2a_3 & a_2a_4 & a_2a_5 & a_2a_6 & a_2a_7 \\ a_3a_4 & a_3a_5 & a_3a_6 & a_3a_7 & a_3a_1 \\ a_4a_5 & a_4a_6 & a_4a_7 & a_4a_1 & a_4a_2 \\ a_5a_6 & a_5a_7 & a_5a_1 & a_5a_2 & a_5a_3 \\ a_6a_7 & a_6a_1 & a_6a_2 & a_6a_3 & a_6a_4 \\ a_7a_1 & a_7a_2 & a_7a_3 & a_7a_4 & a_7a_5 \end{pmatrix}$$

Nhận thấy rằng các phần tử:

Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1

Cột 2 thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột 2 và một lần trong cột 5 hay là cột 2 và cột 5 là giống nhau nhau.

Cột 3 thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong côt 3 và một lần trong cột 4 hay hai cột 3 và cột 4 là giống nhau.

Trong trường hợp này ta xây dựng bài toán tổng quát với 7 số như sau:

Cho 7 số không âm $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ số thực $\alpha > 2$ và số thực $r_{13}, r_{14}, r_{15}, r_{16}, r_{24}, r_{25}, r_{26}, r_{27}, r_{35}, r_{36}, r_{37}, r_{31}, r_{46}, r_{47}, r_{41}, r_{42}, r_{57}, r_{51}, r_{52}, r_{53}, r_{61}, r_{62}, t_{63}, r_{64}, r_{72}, r_{73}, r_{74}, r_{75}$ thỏa mãn:

$$\alpha = \begin{cases} r_{13}+r_{31}\ (\text{Tổng } a_1a_3) = r_{14}+r_{41}\ (\text{Tổng } a_1a_4) = r_{15}+r_{51}\ (\text{Tổng } a_1a_5) \\ r_{16}+r_{61}\ (\text{Tổng } a_1a_6) = r_{24}+r_{42}\ (\text{Tổng } a_2a_4) = r_{25}+r_{52}\ (\text{Tổng } a_2a_5) \\ r_{26}+r_{62}\ (\text{Tổng } a_2a_6) = r_{27}+r_{72}\ (\text{Tổng } a_2a_7) = r_{35}+r_{53}\ (\text{Tổng } a_3a_5) \\ r_{36}+r_{63}\ (\text{Tổng } a_3a_6) = r_{37}+r_{73}\ (\text{Tổng } a_3a_7) = r_{46}+r_{64}\ (\text{Tổng } a_4a_6) \\ r_{47}+r_{74}\ (\text{Tổng } a_4a_7) = r_{57}+r_{75}\ (\text{Tổng } a_5a_7) \end{cases}$$

thì

$$M = \frac{a_1}{a_1+\alpha a_2+r_{13}a_3+r_{14}a_4+r_{15}a_5+r_{16}a_6}+\frac{a_2}{a_2+\alpha a_3+r_{24}a_4+r_{25}a_5+r_{26}a_6+r_{27}a_7}$$
$$+\frac{a_3}{a_3+\alpha a_4+r_{35}a_5+r_{36}a_6+r_{37}a_7+r_{31}a_1}+\frac{a_4}{a_4+\alpha a_5+r_{46}a_6+r_{47}a_7+r_{41}a_1+r_{42}a_2}$$
$$+\frac{a_5}{a_5+\alpha a_6++r_{57}a_7+r_{51}a_1+r_{52}a_2+r_{53}a_3}+\frac{a_6}{a_6+\alpha a_7+r_{61}a_1+r_{62}a_2+r_{63}a_3+r_{64}a_4)}$$
$$+\frac{a_7}{a_7+\alpha a_1+r_{72}a_2+r_{73}a_3+r_{74}a_4+r_{75}a_5} \geq \frac{7}{1+6\alpha}$$

Chứng minh.

Ta có:

Tương tự cách chứng minh trên ta có:

$$M \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2+a_7^2)+\alpha(a_1a_2+\cdots+a_6a_7)]}$$
$$\Leftrightarrow M \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2}{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2+(\alpha-2)(a_1a_2+\cdots+a_6a_7)}$$
$$\Leftrightarrow M \geq \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)^2}{(a_1+\cdots+a_7)^2+(\alpha-2)\frac{3}{7}(a_1+\cdots+a_7)^2}$$
$$\Leftrightarrow M \geq \frac{1}{1+\frac{3}{7}(\alpha-2)} = \frac{7}{7+3(\alpha-2)} = \frac{7}{1+3\alpha}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = a_7$

Trong bài toán tổng quát với 7 số này ta chọn các điều kiện cụ thể:

Nếu lấy các $r_{ij} = \alpha$ và $\alpha = 2\alpha$ ta được **Bài 7**

Nếu lấy $r_{16} = r_{27} = r_{31} = r_{42} = r_{53} = r_{64} = r_{75} = 0$; $r_{13} = r_{24} = r_{35} = r_{46} = r_{57} = r_{61} = r_{72} = 2\alpha$ và còn lại $r_{ij} = \alpha$ thì ta được **Bài 8**

Nếu lấy $r_{15} = r_{26} = r_{37} = r_{41} = r_{52} = r_{63} = r_{74} = r_{16} = r_{27} = r_{31} = r_{42} = r_{53} = r_{64} = r_{75} = 0$ và còn lại $r_{ij} = \alpha$ thì ta được **Bài 9**

Trường hợp tổng quát

Ta xây dựng ma trận hệ số cỡ $n.(n-2)$

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{n-1} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_na_{n-2} \end{pmatrix}$$

Trong trương hợp này ta sẽ dựng được bài toán tổng quát sau đây:

Cho n số không âm a_i, $i=\overline{1,n}$ $(n \geq 3)$; số thực $\alpha > 2$ và r_{ij} $i,j=\overline{1,n}$ thỏa mãn $r_{ij}+r_{ji}=\alpha$ thì

$$P = \frac{a_1}{a_1+\alpha a_2+\sum\limits_{i=3}^{n-1} r_{1i}a_i} + \frac{a_2}{a_2+\alpha a_3+\sum\limits_{i=4}^{n} r_{2i}a_i} + \cdots + \frac{a_n}{a_n+\alpha a_1+\sum\limits_{i=2}^{n-2} r_n a_i} \geq \frac{2n}{2+(n-1)\alpha}$$

Chứng minh

Có thể viết lại biểu thức của P như sau:

$$P = \frac{a_1^2}{a_1^2+\alpha a_1a_2+\sum\limits_{i=3}^{n-1} r_{1i}a_1a_i} + \frac{a_2^2}{a_2^2+\alpha a_2a_3+\sum\limits_{i=4}^{n} r_{2i}a_2a_i} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n^2+\alpha a_na_1+\sum\limits_{i=2}^{n-2} r_{ni}a_2a_i}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki với n cặp số ta được:

$$P \geq \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{(a_1+\cdots+a_n)^2+(\alpha-2)(a_1a_2+\cdots+a_{n-1}a_n)^2}$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{(a_1+\cdots+a_n)^2+(\alpha-2)\frac{n-1}{2n}(a_1+\cdots+a_n)^2}$$

$$\Leftrightarrow P \geq \frac{1}{1+(\alpha-2)\frac{n-1}{2n}} = \frac{2n}{2+(n-1)\alpha}$$

Vậy bài toán tổng quát đã được chứng minh.

Ta chia n thành 2 trường hợp, ứng với n chẵn và lẻ.

Với trường hợp chẵn $n=2m$ thì ta có:

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & \cdots & a_1a_{2m-1} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m}a_1 & a_{2m}a_2 & \cdots & a_{2m}a_m & \cdots & a_{2m}a_{2m-2} \end{pmatrix}$$

Nhận thấy rằng các phần tử:

Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1

Cột 2 thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột 2 và một lần trong cột $2m-1$ hay là cột 2 và cột $2m-1$ là giống nhau.

$\cdots$

Cột i thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột i và một lần trong cột $2m-i$ hay là cột i và cột $2m-i$ là giống nhau.

$\cdots$

Duy nhất cột thứ m là các phần tử trong cột xuất hiện 2 lần trong chính cột m.

Việc xây dựng bất đẳng thức xoay vòng dựa trên cơ sở đánh giá sự có mặt đầy đủ của $a_1a_2, \cdots, a_{n-1}a_n$ khi cộng tổng mẫu của tất cả các phân thức bất đẳng thức sao cho chúng có cùng tỉ lệ.

Ta chỉ ra một trường hợp đặc biệt của bài toán tổng quát với $n = 2m$ bằng cách lấy $r_{ij} = 0$ nếu nó nằm bên phải cột thứ m trong ma trận; $r_{ij} = \dfrac{\alpha}{2}$ nếu nó nằm trên cột thứ m của ma trân và $r_{ij} = \alpha$ tại các vị trí còn lại bên trái cột thứ m

Cho $n = 2m$ số không âm $a_i,\ i = \overline{1,n},\ n \geq 3$ và $\alpha > 2$

$$P_1 = \frac{a_1}{a_1 + \alpha(a_2 + \cdots + a_m + \frac{1}{2}a_{m+1})} + \frac{a_2}{a_2 + \alpha(a_3 + \cdots + a_{m+1} + \frac{1}{2}a_{m+2})} + \cdots + \\ + \frac{a_n}{a_n + \alpha(a_1 + \cdots + a_{m-1} + \frac{1}{2}a_m)} \geq \frac{2n}{2 + (n-1)\alpha}$$

Với trường hợp lẻ $n = 2m+1$ thì ta có:

$$\begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_{m+1} & a_1a_{m+2} & \cdots & a_1a_{2m} \\ a_2a_3 & a_2a_4 & \cdots & a_2a_{m+1} & a_2a_{m+2} & \cdots & a_2a_{2m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2m+1}a_1 & a_{2m+1}a_2 & \cdots & a_{2m+1}a_{m+1} & a_{2m+1}a_{m+2} & \cdots & a_{2m+1}a_{2m-1} \end{pmatrix}$$

Nhận thấy rằng các phần tử:

Cột 1 xuất hiện duy nhất 1 lần trong chính cột 1

Cột 2 thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột 2 và một lần trong cột $2m-1$ hay là cột 2 và cột $2m-1$ là giống nhau.

$\cdots$

Cột i thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột i và một lần trong cột

$2m-i+1$ hay là cột i và cột $2m-i+1$ là giống nhau.

...

Cột m thì các phần tử xuất hiện 2 lần: một lần trong cột m và một lần trong cột $m+1$ hay là cột m và cột $m+1$ là giống nhau.

Băng phương pháp xây dựng trên ta chỉ ra một trường hợp đơn giản. Bằng cách chọn các $r_{ij}=0$ từ hàng thứ $m+1$ sang phải; còn lại $r_{ij}=\alpha$ thì

Cho $n=2m+1$ số không âm $a_i,\ i=\overline{1,n},\ n\geq 3$ và $\alpha>2$ thì:

$$P_2=\frac{a_1}{a_1+\alpha(a_2+\cdots+a_{m+1})}+\frac{a_2}{a_2+\alpha(a^3+\cdots+a_{m+2})}+\ +$$
$$+\frac{a_n}{a_n+\alpha(a_1+\cdots+a_m)}\geq\frac{2n}{2+(n-1)\alpha}$$

Tóm lại để xây dựng một bài toán cùng loại cần phải đánh giá sự có mặt đồng thời cùng tỉ lệ của các $a_1a_2,\cdots,a_{n-1}a_n$ dưới mẫu số của bất đẳng thức. Bằng phương pháp đánh giá này ta có thể xây dựng vô số các bài toán cùng loại, và xây dựng được nhiều dạng bất đẳng thức khác.

Kết luận

Tóm lại qua khóa luận này em đã xây dựng được một dạng bài toán bất đẳng thức xoay vòng, giải quyết trọn vẹn được bài toán tổng quát. Đặt cơ sở cho việc xây dựng các dạng bài toán loại này, cụ thể là:

1. Xây dựng dạng tổng quát của trường hợp bất đẳng thức xoay vòng ở các trường hợp đặc biệt với $n = 3, 4, 5, 6, 7$

\+ Từ bài toán tổng quát với trường hợp cụ thể này ta có thể tạo ra vô số các bài toán.

\+ Bằng phương pháp quy nạp xây dựng được dạng tổng quát với n số hạng.

2. Trong bài toán tổng quát em đã đưa ra được dạng tổng quát của bất đẳng thức xoay vòng. Xét bài toán tổng quát ở trường hợp đặc biệt:

+ n chẵn $n = 2m\,(m \in \mathbb{N})$

+ n lẻ $n = 2m + 1\,(m \in \mathbb{N})$

\- Cũng từ bài toán tổng quát với n số này ta có thể suy ra được dạng tổng quát của các bài toán ở trường hợp đặc biệt còn lại, là cơ sở để xây dựng vô số các bài toán cùng loại. Cơ sở để phân tích xây dựng nhiều bài toán khác.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Vũ Lương

   Xây dựng bất đẳng thức một biến nhờ bất đẳng thức giữa trung bình cộng và nhân và áp dụng. Hội nghị khoa học "Các chuyên đề chọn lọc trong hệ THPT chuyên." (Hà Nội 2005)

2. Nguyễn Vũ Lương, Phạm Văn Hùng, Nguyễn Ngọc Thắng

   Các bài giảng về bất đẳng thức Côsi. (2005)

3. Nguyễn Vũ Lương, Phạm Văn Hùng, Nguyễn Ngọc Thắng

   Hệ phương trình và phương trình chứa căn thức. (2005)

4. Nguyễn Vũ Lương, Phạm Văn Hùng, Nguyễn Ngọc Thắng

   Các bài giảng về phương trình lượng giác. (2005)

5. Nguyễn Văn Mậu

   Bất đẳng thức định lý và áp dụng (2006).

6. Phạm Văn Hùng

   Một cách chứng minh bất đẳng thức dạng phân thức. Hội nghị khoa học "Các chuyên đề chọn lọc trong hệ THPT chuyên." (Hà Nội 2005)

7. Andreescu. T. and. Feng. Z (2000)

   Mathermatical Olympiads: Problems and Solusions from Around the World, Mathermatical Association of Americal, Washington. DC.

8. J. Michael steele (2004)

   The Cauchy- Schwarz master class, Mathermatical association of the Americal, Cambridge University press.

9. D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaric and A. M. Fink

   Classical and New inequalities in Analysis. Kluwer acadmic publishers.

10. C. H. Hardy, J. E Littlewood, G. Polya (1952)

    Inequalities. Cambridge University press.