Mỗi tuần một bài toán

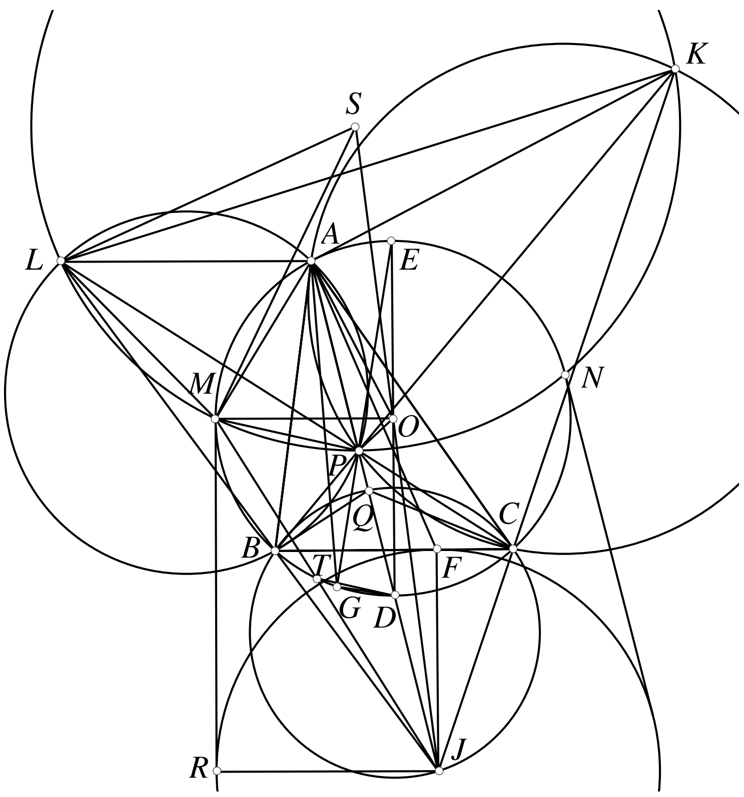
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có P, Q là hai điểm đẳng giác nằm trên phân giác góc $\angle BAC$. PB, PC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác PCA, PAB tại K, L khác P. QA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác QBC tại J khác Q. Đường tròn (J) tiếp xúc BC. Tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (J) tiếp xúc (O) tại M, N. Chứng minh rằng năm điểm P, K, L, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



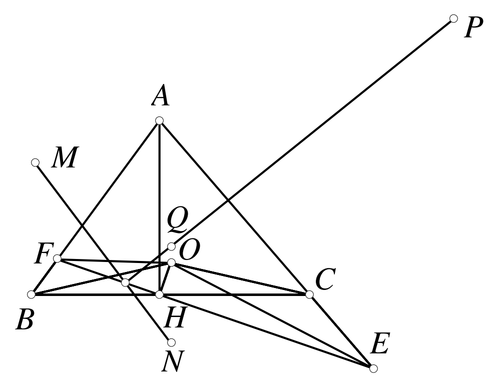
Ta có $\angle LBA + \angle JBC = \angle LPA + \angle JQC = \angle PAC + \angle PCA + \angle QAC + \angle QCA = \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ - \angle ABC$. Từ đó L, B, J thẳng hàng. Tương tự K, C, J thẳng hàng. Từ đó $JB.JL = JP.JA = JC.JK$. Vậy phép nghịch đảo cực J biến đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC thành đường tròn (S) ngoại tiếp tam giác PKL nói cách khác J là tâm vị tự ngoài của (O) và (S). Gọi JM cắt (O) tại T khác M và JA cắt (O) tại D khác A, ta sẽ chứng minh $\frac{JM}{JT} = \frac{JP}{JD}$ từ đó sử dụng phép vị tự ta suy ra M thuộc (S), tương tự N thuộc (S), thật vậy. Ta có $\angle ABP = \angle QBC = \angle QJC$ nên $\triangle APB \sim \triangle ACJ$. Lấy G thuộc (O) sao cho $\angle BAG = \angle CAF$ ta dễ thấy $\triangle ABG \sim \triangle AFC$. Từ đó $AG.AF = AB.AC = AP.AJ$ nên $\triangle AGP \sim \triangle AJF$ suy ra $\angle AGP = \angle AJF = \angle ADO$ do đó GP và DO cắt nhau tại E trên (O). Từ đó $\triangle EPD \sim \triangle APG \sim \triangle AFJ$, suy ra $PD.AJ = DE.FJ = 2R.R_J$. Gọi tiếp tuyến chung qua M tiếp xúc (J) tại R và bán kính của (O) và (J) lần lượt là R và R_J ta có $JM^2 = R_J^2 + RM^2 = R_J^2 + (OJ^2 - (R_J - R)^2) = OJ^2 - R^2 + 2R_J.R = JD.JA + JA.PD = JA.JP$ suy ra $\frac{JM}{JT} = \frac{JM^2}{JM.JT} = \frac{JA.JP}{JA.JD} = \frac{JP}{JD}$. Kết hợp các nhận xét ban đầu ta thu được điều phải chứng minh.

Nhật xét

Bài toán giải theo hướng này khá ngắn gọn khi ta lấy đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL làm trung gian và chỉ ra M, N lần lượt thuộc đường tròn này bằng phép vị tự, đó cũng là một cách hay gặp khi ta muốn chứng minh nhiều điểm thuộc một đường tròn. Tác giả nhận được lời giải từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương, **Bùi Công Minh, Bùi Văn Bình** lớp 12 toán THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước. Bạn **Nguyễn Minh Quang** lớp 11 toán, THPT Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình cho một lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AH và tâm ngoại tiếp O. Đường thẳng qua H vuông góc với OH lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Gọi M, N theo thứ tự là trực tâm các tam giác OFB và OHB và P, Q theo thứ tự là trực tâm các tam giác OEC, OHC. Chứng minh rằng MN, PQ, EF đồng quy.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.