# Mỗi tuần một bài toán

**Trần Quang Hùng,** *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

**Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.**

## Đề bài

Cho tam giác $ABC$ có điểm Lemoine là $L$. Lấy $D, E, F$ lần lượt thuộc các đoạn $LA, LB, LC$ sao cho $\angle FAC = \angle DCA$ và $\angle EAB = \angle DBA$. Chứng minh rằng $\angle FBC = \angle ECB$.

## Lời giải

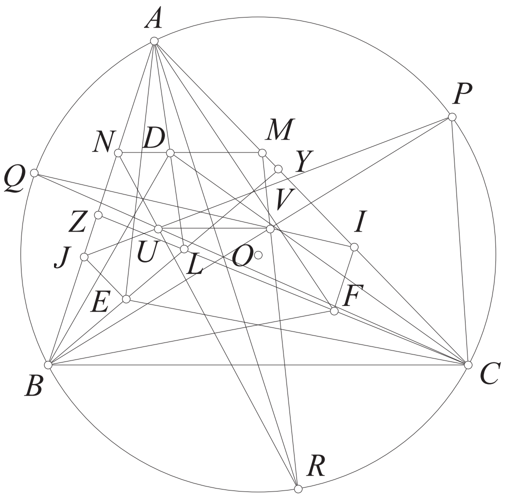
**Bổ đề 1.** Cho tam giác $ABC$ với $E, F$ thuộc $CA, AB$ sao cho $EF \parallel BC$. $P$ là điểm bất kỳ. $M, N$ thuộc $PC, PB$. Chứng minh rằng $MN \parallel BC$ khi và chỉ khi $FN, EM$ và $AP$ đồng quy.

**Chứng minh.** Gọi $FN$ cắt $AP$ tại $Q$. Theo định lý Menelaus thì $\frac{QP}{QA} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{NB}{BP} = 1$, lại có $EF \parallel BC$ nên $\frac{EA}{EC} = \frac{FA}{FB}$ nên $\frac{QP}{QA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{NB}{BP} = 1$. Từ đó theo Menelaus thì $E, M, Q$ thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{QP}{QA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{MC}{CP} = 1$ kết hợp đẳng thức trên thì $E, M, Q$ thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{NB}{BP} = \frac{MC}{CP}$ hay tương đương $MN \parallel BC$.

**Bổ đề 2.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ có đường đối trung là $BE, CF$. $M, N$ nằm trên $BE, CF$ sao cho $\angle MBC = \angle NCB$. Lấy $K, L$ thuộc $BC$ sao cho $MK \parallel AB$ và $NL \parallel AC$. Các trung tuyến ứng với $B, C$ của tam giác $ABC$ cắt $(O)$ tại $P, Q$ khác $B, C$. Chứng minh rằng $QK, LP$ và trung tuyến qua $A$ đồng quy.

**Chứng minh.** Gọi $KM, LN$ cắt $CA, AB$ tại $I, J$. Ta thấy $\frac{NB}{NE} = \frac{JB}{JA}$ mà hai tam giác $BAP$ và $BEC$ đồng dạng. Từ đó $\angle JPB = \angle NCB$. Tương tự $\angle IQC = \angle MBC$ mà $\angle MBC = \angle NCB$ nên $\angle JPB = \angle IQC$. Từ đó gọi $PJ$ cắt $CQ$ tại $U$ và $QI$ cắt $BP$ tại $V$ thì tứ giác $PQUV$ nội tiếp, dễ suy ra $UV \parallel BC$. Từ đó có điểm $W$ nằm trên trung tuyến ứng với $A$ sao cho $UW \parallel AC$ và $VW \parallel AB$. Theo bổ đề 1 dễ thấy $LP$ và $KQ$ đều đi qua $W$.

**Giải bài toán.** Gọi các đường trung tuyến ứng với $A, B, C$ của tam giác $ABC$ cắt $(O)$ tại $R, P, Q$. Đường thẳng qua $D$ song song $BC$ cắt $CA, AB$ tại $M, N$. Trên $CA, AB$ lấy $I, J$ sao cho $FI \parallel AB$ và $EJ \parallel AC$. Theo bổ đề 2 thì $PJ, RN$ và $CQ$ đồng quy tại $U$ và $QI, RM$ và $BP$ đồng quy tại $V$. Lại có $NU, MV$ đồng quy với trung tuyến ứng với $A$ tại $R$ nên theo bổ đề 1 thì $UV \parallel BC$, từ đó dễ suy ra tứ giác $PQUV$ nội tiếp. Gọi $BL, CL$ cắt $CA, AB$ tại $Y, Z$ thì hai tam giác $QAC$ và $BZC$ đồng dạng và $\frac{IA}{IC} = \frac{FZ}{FC}$ nên $\angle FBC = \angle CQI$. Tương tự $\angle ECB = \angle BPJ$. Lại từ tứ giác $PQUV$ nội tiếp nên $\angle CQI = \angle BPJ$ ta suy ra $\angle FBC = \angle ECB$.

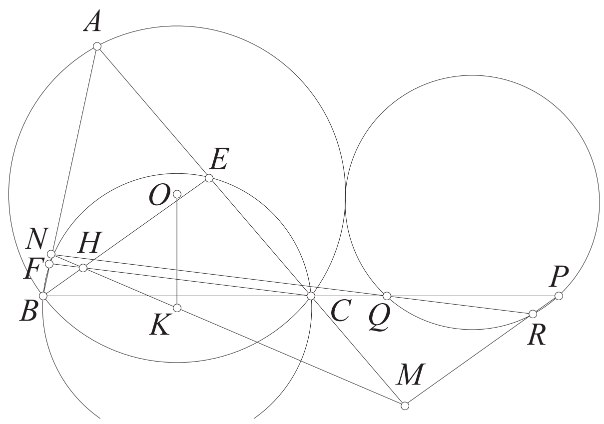



## Nhật xét

Bài toán là một cách mở rộng trực tiếp khác của bài toán G5 trong Shortlist 2000. Các bạn **Nguyễn Đức Bảo, Nguyễn Đình Hoàng** trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đưa ra các lời giải khác nhau cho bài toán ở đây, ngoài ra trong đó bạn **Bảo** cũng đề xuất tổng quát rất hay cho bài toán.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Một đường tròn $(K)$ đi qua $B, C$ cắt $CA, AB$ tại $E, F$ khác $C, B$. $BE$ cắt $CF$ tại $H$. $HK$ cắt $CA, AB$ lần lượt tại $M, N$. Trên $BC$ lấy $P, Q$ sao cho $MP \parallel BE$ và $NQ \parallel CF$. $MP$ cắt $NQ$ tại $R$. Chứng minh rằng đường tròn $(PQR)$ tiếp xúc $(O)$.




Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.