

Mỗi tuần một bài toán

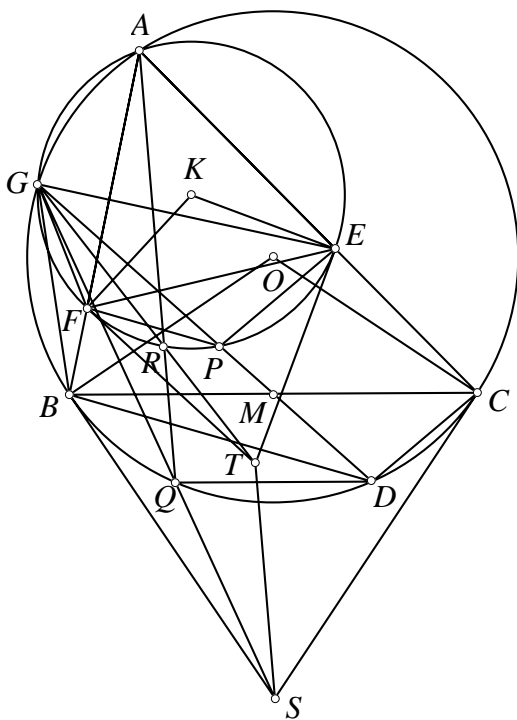
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và D là một điểm thuộc cung BC không chứa A . M là trung điểm BC . P là một điểm nằm trên đường thẳng DM . E, F thuộc CA, AB sao cho $PE \parallel DC$ và $PF \parallel DB$. Gọi tiếp tuyến tại E, F của đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T . Gọi tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại S . Q thuộc (O) sao cho $DQ \parallel BC$. Chứng minh rằng $AQ \parallel ST$.

Lời giải



Ta dễ thấy tứ giác $AEFF$ nội tiếp đường tròn (K) . Gọi DP cắt (O) tại G khác D . Do $PF \parallel DB$ nên $\angle FPG = \angle BDG = \angle BAG$ từ đó G thuộc (K) . Từ đó dễ có tam giác GFE và GBC đồng dạng. Chú ý chùm $D(BC, MQ) = -1$ nên hàng $(BC, GQ) = -1$. Gọi AQ cắt (K) tại R khác A thì theo tính đồng dạng $(EF, GR) = -1$ hay tứ giác $GERF$ điều hòa, suy ra GR đi qua T . Cũng từ tam giác GFE và GBC đồng dạng, lại có T là giao hai tiếp tuyến tại E, F của (K) và S là giao hai tiếp

tuyến tại B, C của (O) , nên hai tam giác GFT và GBS đồng dạng. Từ đây suy ra tam giác GFB và GTS đồng dạng. Từ đó $\angle GTS = \angle GFB = 180^\circ - \angle GFA = 180^\circ - \angle GRA = \angle GRQ$. Từ đó suy ra $AQ \parallel ST$. Ta có điều phải chứng minh.

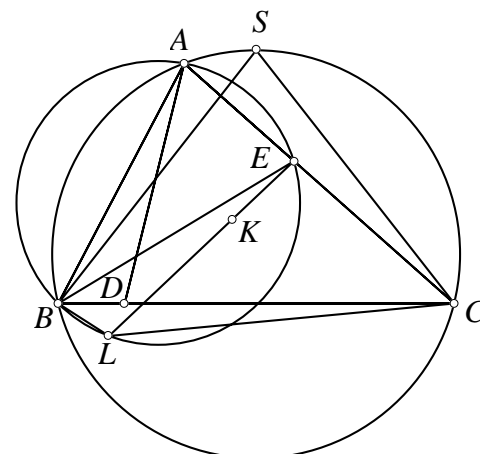
Nhật xét

Bài toán trên là một mở rộng cho bài toán của chính tác giả đề nghị trên báo TH&TT. Bài toán trên báo là trường hợp riêng khi AD là đường kính của (O) thì DM đi qua trực tâm H của tam giác hơn nữa $AQ \perp BC$, do đó tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF sẽ cắt nhau trên trung trực BC . Bài toán có giá trị ứng dụng lớn. Chẳng hạn khi cho D là trung điểm cung nhỏ BC thì P có thể coi là điểm bất kỳ trên trung trực BC . Với cách dựng tương tự thì ST sẽ song song với phân giác $\angle BAC$, từ đó ta có thể tạo ra được một bài toán đi qua điểm cố định thú vị.

Bài toán cũng được quan tâm và đưa ra lời giải khác ngay trên blog [hình học sơ cấp](#). Một lời giải khác rất đẹp và thuần túy hình học được đưa ra bởi bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên Khóa 50 Đại học Ngoại thương. Bạn **Nguyễn Cảnh Hoàng** lớp 11A1 Toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cũng cho lời giải khác dùng hàng điểm điều hòa ở [đây](#).

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có phân giác trong BE . D là điểm thuộc BC sao cho $\angle DAC = \angle B$. K là tâm nội tiếp tam giác ADC . EK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại L khác E . Chứng minh rằng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác LBC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .



Mọi trao đổi xin gửi về email anageomatica@gmail.com.