Mỗi tuần một bài toán

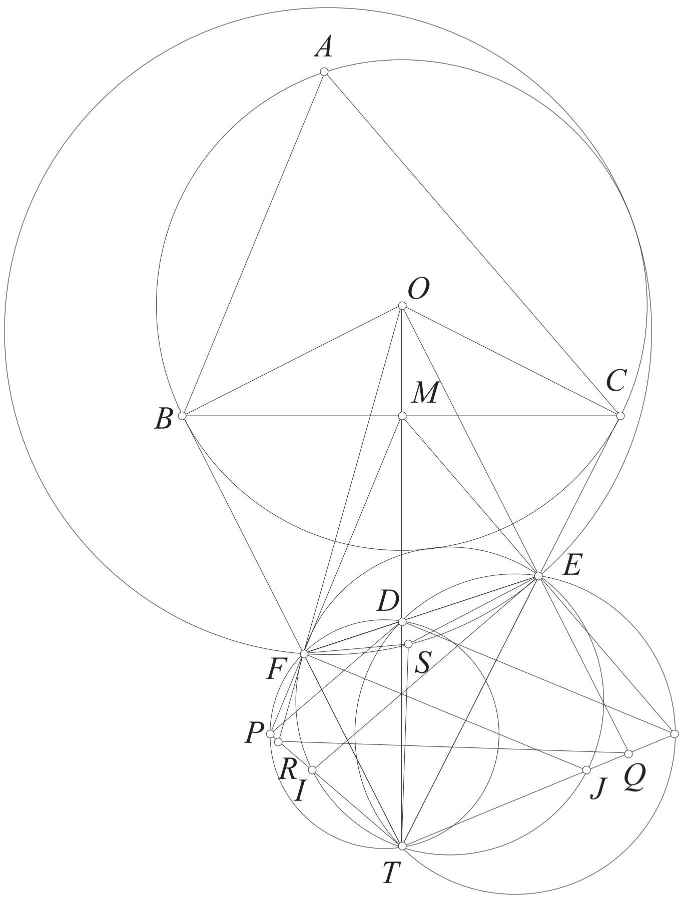
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). M là trung điểm BC. Tiếp tuyến qua B, C của (O) cắt nhau tại T. Trên TB, TC lấy các điểm F, E sao cho $MF \parallel AB$ và $ME \parallel AC$. TM cắt EF tại D. ME, MF lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác TED, TFD tại N, P khác E, F. OE, OF lần lượt cắt TN, TP tại Q, R. S đối xứng T qua QR. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác SEF tiếp xúc (O).

Lời giải



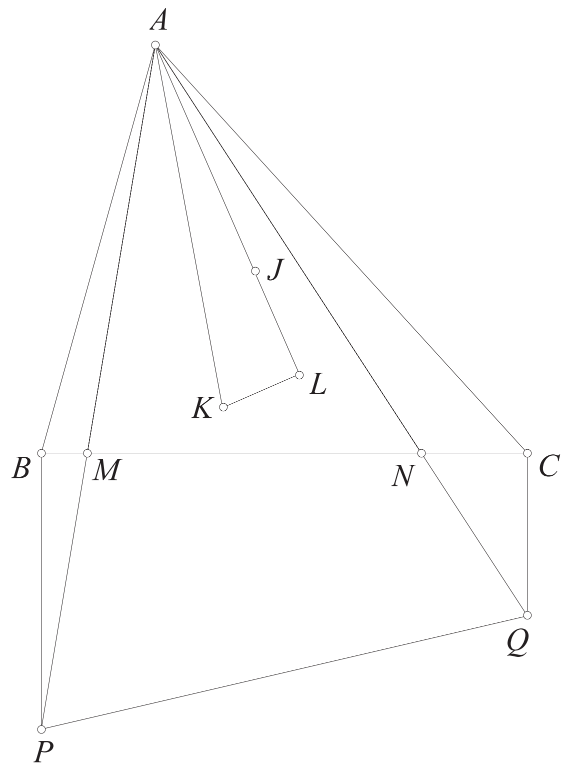
Ta dễ thấy M là tâm bàng tiếp góc T của tam giác TEF do đó (O) là đường tròn mixtilinear ngoại của tam giác TEF ứng với đỉnh T. Mặt khác TD là phân giác của tam giác TEF. Gọi TN cắt (TEF) tại J khác T thì $\angle ETN = \angle DTN - \angle DTE = \angle MEF - \angle DTE = 90° - \frac{1}{2}\angle FET - \frac{1}{2}\angle ETF = \frac{1}{2}\angle EFT$. Do đó J là điểm chính giữa cung TE của đường tròn (TEF). Tương tự Gọi TP cắt (TEF) tại I khác T thì I là điểm chính giữa cung TF của đường tròn (TEF). Đến đây áp dụng bài toán **Tuần 4 tháng 11 năm 2016** cho tam giác TEF ta thu được đường tròn (SEF) tiếp xúc (O). Đó là điều phải chứng minh.

Nhận xét

Bài toán này thực chất là một cách viết khác của bài toán bài toán Tuần 4 tháng 11 năm 2016 và được tác giả dùng trong quá trình tập huấn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO năm 2017. Bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có các điểm M, N thuộc cạnh BC sao cho M nằm giữa N và B. Trên đường thẳng AM, AN lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho BP và CQ cùng vuông góc với BC. K, J lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác APQ và AMN. L là hình chiếu của K lên AO. Chứng minh rằng $\frac{AJ}{AL} = \frac{MN}{BC}$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

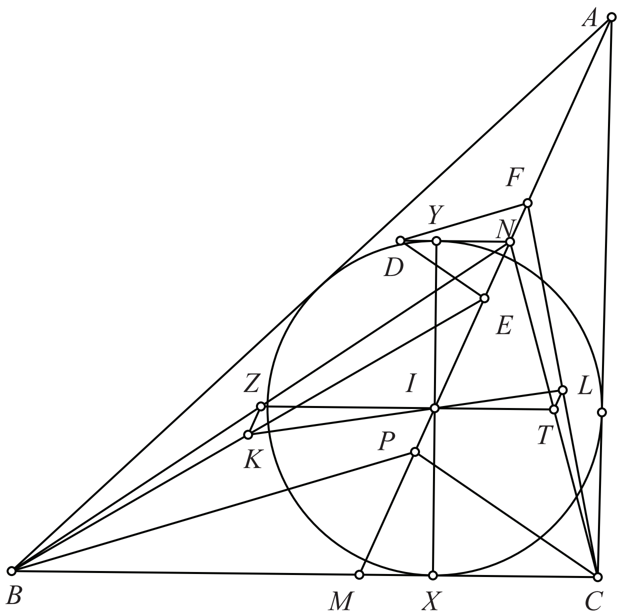
Bài toán từ bạn đọc

Tác giả bài toán đưa ra một bài toán tổng quát hơn bài toán tuần trước của chính mình như sau

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) và một điểm P nằm trên đường phân giác góc A. Gọi D là điểm bất kỳ trên tiếp tuyến song song với BC của (I). Lấy các điểm E, F trên AP sao cho $DE \parallel PC, DF \parallel PB$. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm các đoạn thẳng BE, CF đi qua I.

Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng.**

Lời giải



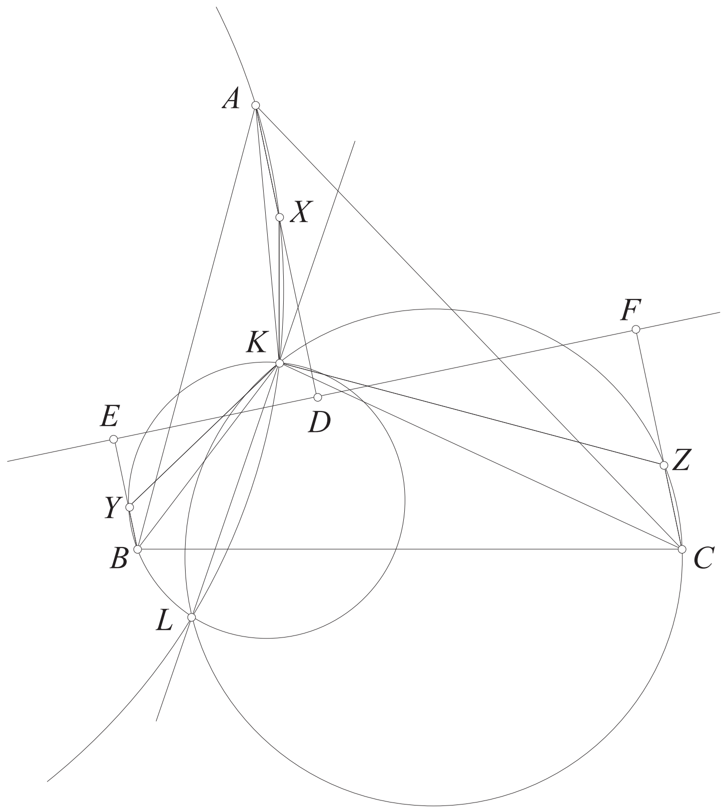
Gọi AP cắt BC và tiếp tuyến qua D song song với BC của (I) lần lượt tại M, N. Chú ý rằng $\triangle DNE \sim \triangle CMP(g.g), \triangle DNF \sim \triangle BMP(g.g)$, ta có $\frac{NE}{NF} = \frac{NE}{ND} \cdot \frac{ND}{NF} = \frac{MP}{MC} \cdot \frac{MB}{MP} = \frac{MB}{MC}$. Gọi X, Y lần lượt là tiếp điểm của (I) và BC, DN. Vì $\triangle IMX = \triangle INY\ (g.c.g)$ nên $IM = IM$. Gọi K, L, Z, T lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BE, CF, NB, NC. Ta thấy Z, I, T cùng thuộc đường trung bình của tam giác NBC. Vì $\frac{IK}{IL} = \frac{MB}{MC} = \frac{NE}{NF} = \frac{2ZK}{2TL} = \frac{ZK}{TL}$ nên $\triangle IKZ \sim \triangle ILT\ (c.g.c)$. Từ đó $\angle KIZ = \angle LIT$ nên KL đi qua I. Đó là điều phải chứng minh.

Nhận xét

Bài toán này là bài toán không quá khó nhưng thú vị vì có nhiều hướng phát triển hay. Các bạn **Nguyễn Hoàng Nam** lớp 12 Toán THPT chuyên Lê Hồng Phong TPHCM và **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC và đường thẳng ℓ bất kỳ. D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên ℓ. X, Y, Z chia AD, BE, CF theo cùng một tỉ số k. Các đường lần lượt thẳng qua X, Y, Z và vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại một điểm K. Chứng minh rằng các đường tròn (KAX), (KBY), (KCZ) đồng trục và trục đẳng phương của chúng luôn đi qua một điểm cố định khi tỷ số k thay đổi.



Tác giả: **Ngô Quang Dương** sinh viên khoa toán ĐHKHTN, ĐHQGHN.