Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

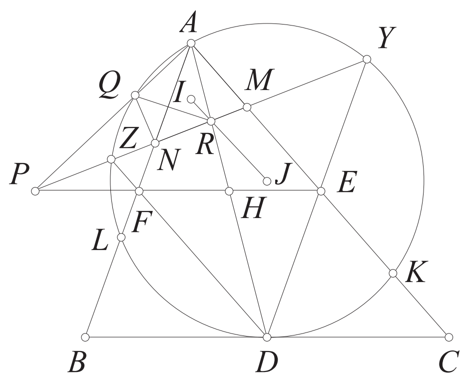
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Lấy điểm H sao cho $AH \perp BC$ và $HM \perp AM$. P đối xứng H qua M. K, L là hình chiếu của P lên CA, AB. Trên cạnh CA, AB lấy Q, R sao cho $AQ = 2KC$ và $AR = 2BL$. AM cắt QR tại N. Chứng minh rằng PN đi qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC.

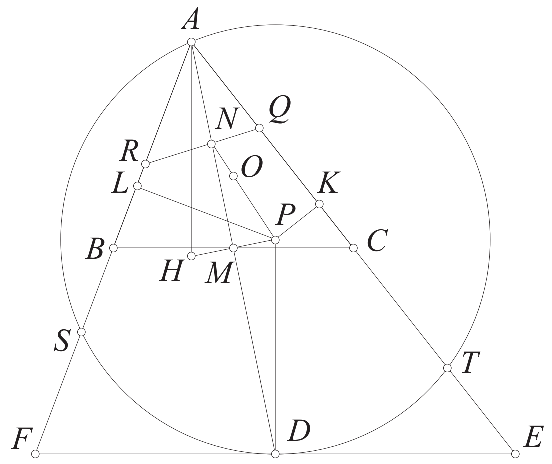
Lời giải

Bổ đề (IMO Shortlist 2015 G5)**.** Cho tam giác ABC có D, E, F là trung điểm BC, CA, AB. Đường tròn (J) qua A, D tiếp xúc BC cắt CA, AB tại K, L khác C, B. M, N lần lượt đối xứng K, L qua E, F. Gọi I là tâm ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng AD, MN, IJ đồng quy.



Chứng minh bổ đề. Ta có $AN.AB = BL.BA = BD^2 = CD^2 = CK.CA = AM.AC$, từ đó tứ giác $BCMN$ nội tiếp. Suy ra $MNFE$ nội tiếp. Gọi DE, DF cắt (J) tại Y, Z khác D. Ta có $ED.EY = EA.EK = EM.EC$ nên tứ giác $MYCD$ nội tiếp, suy ra $\angle MYD = \angle MCD = \angle MNA$, lại có $YE \parallel AN$ nên Y, M, N thẳng hàng. Tương tự Z, M, N thẳng hàng. Gọi P là giao của YZ và EF. AP cắt (J) tại Q khác A, tứ giác $EFZY$ nội tiếp nên $PA.PQ = PY.PZ = PE.PF = PM.PN$ suy ra Q nằm trên (I). Lại có $\angle ANY = \angle ZYD = \angle ZAD$. Từ đó $RN.RZ = RA^2$. Tương tự $RM.RY = RA^2$. Sử dụng phép nghịch đảo tâm R phương tích RA^2 biến A, M, N lần lượt thành A, Y, Z nên đường tròn (AMN) biến thành đường tròn (AYZ). Vậy Q biến thành Q nên $RQ^2 = RA^2$. Từ đó R nằm trên trung trực QA chính là IJ.

Hệ quả. Từ chứng minh trên ta có $PA.PQ = PY.PZ = PE.PF$ nên Q nằm trên (AEF) do đó AQ là dây cung chung của (AEF) và (AMN) nên AQ vuông góc với đường nối tâm (AEF) và (AMN). Mặc khác cũng từ bổ đề trên thì JI cũng vuông góc PQ nên JI đi qua tâm (AEF).



Giải bài toán. Gọi D, E, F là đối xứng của A lần lượt qua M, C, B. Dễ thấy đường tròn (P) đi qua A cũng tiếp xúc EF tại D. (P) cắt AF, AE tại S, T khác A, dễ thấy K là trung điểm AT do đó $AQ = 2KC = TE$. Tương tự $AR = 2BL = SF$. Áp dụng hệ quả vào tam giác AEF thì thì PN đi qua tâm O ngoại tiếp tam giác ABC.

Nhận xét

Tác giả đã phát biểu bổ đề khác với bài toán G5 gốc và chứng minh trên dựa theo ý tưởng của **Telv Cohl** trên AoPS, bài toán trên là một cách nhìn khác của bài G5, bài G5 cũng có nhiều phát triển thú vị khác. Các bạn **Nguyễn Đình Hoàng, Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã cho các lời giải khác nhau tại đây. Ngoài ra tác giả nhận được các lời giải khác qua email từ các bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình, **Đỗ Xuân Long** lớp 11 Toán, THPT chuyên KHTN. Bạn **Nguyễn Lê Phước** cũng gửi tới tác giả một cách giải có sử dụng một bổ đề đẹp mắt về khoảng cách tâm hai đường tròn.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn có phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Đường tròn (K) đi qua B, C và tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC. Đường tròn (L) nằm trong tam giác tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc ngoài (K) tại P. Chứng minh rằng PI chia đôi EF.
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

