Mối tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

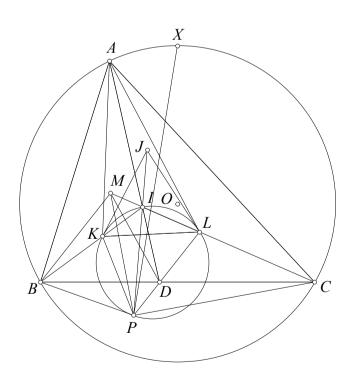
bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghi một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có tâm nội tiếp I và phân giác AD. Gọi K, L lần lượt là tâm nội tiếp tam giác ABD, ACD. J là tâm ngoại tiếp tam giác AKL. IJ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IKL tại P khác I. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PBC nằm trên (O).

Lời giải

Lời giải sau của bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 12 Toán trường THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình.



Ta thấy $\angle JKL = 90^{\circ} - \angle KAL = 90^{\circ} - \frac{\angle BAC}{2} = 180^{\circ} - \angle BIC =$ $\angle KPL$ do đó KJ tiếp xúc (PKL). Tương tự LJ cũng tiếp xúc (PKL) nên tứ giác PKIL điều hòa. Lấy M thuộc IC sao cho $BM \parallel PL$. Từ đó ta có biến đổi tỷ số $\frac{PK}{PL} = \frac{IK}{IL} = \frac{IK}{ID} \cdot \frac{ID}{IL} = \frac{BK}{BD} \cdot \frac{CD}{CL} = \frac{DC}{DB} \cdot \frac{BK}{CL} = \frac{LC}{LM} \cdot \frac{BK}{CL} = \frac{BK}{LM}$. Lại dễ thấy $\angle PKB = \angle PLM$ nên hai tam giác PKB và PLM đồng dạng. Từ đó suy hai tam giác PKL và PBI đồng dạng. Vậy $\angle PBI = \angle KPL = Mọi$ trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

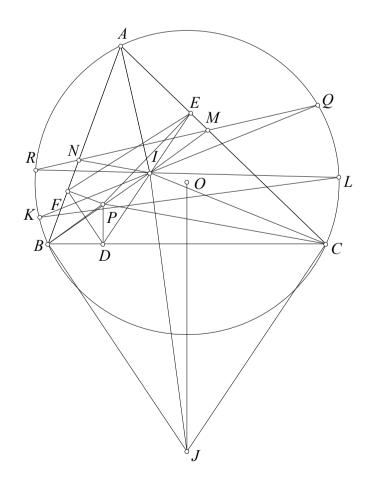
ây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog $180^{\circ} - \angle KIL = 90^{\circ} - \frac{\angle BAC}{2}$. Tương tự $\angle PCI = 90^{\circ} - \frac{\angle BAC}{2}$, ta "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một suy ra $\angle BPC = 360^{\circ} - \angle BAC$ hay tâm ngoại tiếp X của PBCnằm trên (O).

Nhân xét

Bài toán này được tác giả phát triển từ một bài toán vô địch Ba Lan năm 2016. Bạn **Nguyễn Quang Trung** cho lời giải đẹp khác đáp án như trên. Ngoài ra bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghi

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có tâm nội tiếp I. P là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Trên CA, AB lấy M, N sao cho $IM \parallel PB, IN \parallel PC. MN$ cắt (O) tại Q, R. QI, RI cắt lại (O) tại K, L. Các đường thẳng qua B, C lần lượt song song với DF, DE cắt nhau tại J. Chứng minh rằng $IJ \perp KL$.



húng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

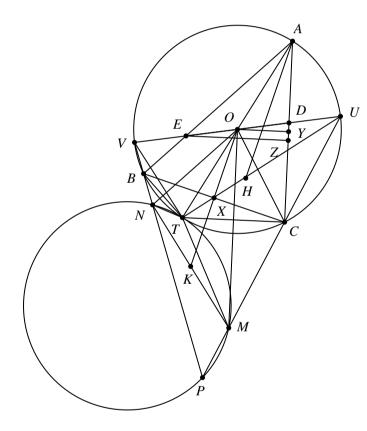
Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và các điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh CA, AB sao cho O là trung điểm DE và DE = OA. K đối xứng O qua BC. M, N là các điểm sao cho $OM \parallel CA$, $ON \parallel AB$ và K là trung điểm MN. BN cắt CM tại P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP tiếp xúc với đường tròn (O).

Tác giả: Nguyễn Tiến Dũng.

Lời giải



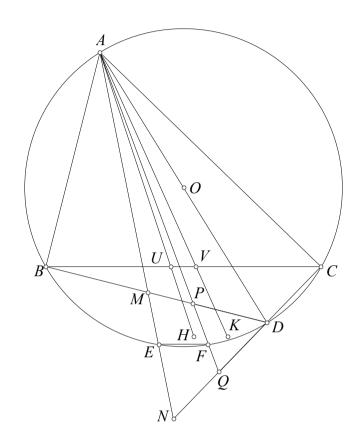
Gọi H là trực tâm tam giác ABC thì $\angle MOK = \angle HAC = \angle EAO$, $\angle NOK = \angle HAB = \angle DAO$. Chú ý rằng AO, OK lần lượt là trung tuyến của các tam giác ADE và ONM, ta thấy hai tam giác này đồng dạng. Gọi X, Y là trung điểm của BC, CA và Z là hình chiếu của E lên CA thì AZ = DC. Chú ý rằng hai tam giác vuông AEZ và OCX đồng dạng, ta có $\frac{DC}{OM} = \frac{AZ}{AE} \cdot \frac{AE}{OM} = \frac{OX}{OC} \cdot \frac{OA}{OK} = \frac{1}{2}$ hay OM = 2CD. Tương tự thì ON = 2BE. Gọi DE cắt PN, PM lần lượt tại U, V thì OU = OV = DE = OA nên U, V nằm trên (O). Gọi AT là đường kính của (O) thì $\angle NVT = \angle BAT = \angle NOT$ nên T nằm trên đường tròn (ONV). Tương tự T nằm trên đường tròn (OMU). Áp dụng định lý Miquel cho tam giác PUV và ba điểm O, M, N thì T nằm trên đường tròn (MNP). Vì $\angle MTU = \angle MOU = \angle ONM = \angle TVU + \angle TNM$ nên đường tròn (MNP) tiếp xúc (O) tại T.

Nhân xét

Đây là một bài toán chứng minh tiếp xúc đẹp rất nhiều ý nghĩa và phát triển. Bạn **Nguyễn Hoàng Nam** lớp 12 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TPHCM và **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. E, F thuộc (O) sao cho $EF \parallel BC$. AE cắt DB, DC tại M, N. AF cắt DB, DC tại P, Q. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giac DMN và DPQ. AH, AK cắt BC tại U, V. Chứng minh rằng BU = CV.



Tác giả: Trần Minh Ngọc, TPHCM.