Xung quanh một bài toán hay

Trần Quang Hùng

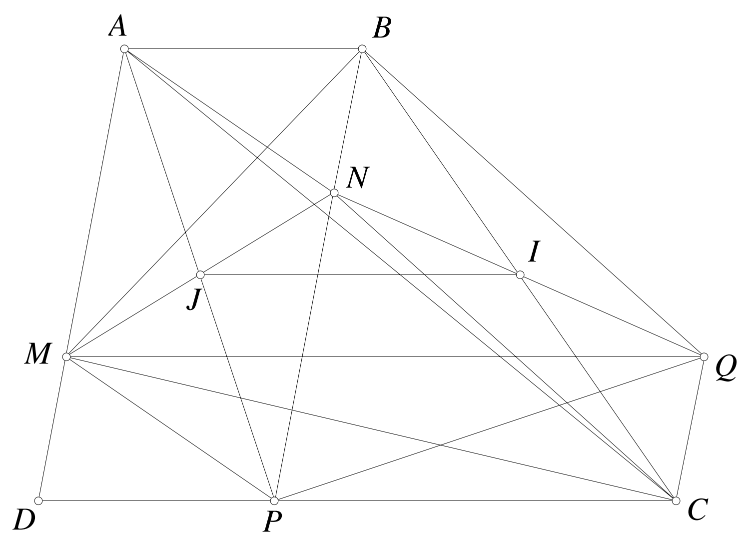
Tóm tắt nội dung

Bài viết đưa ra một hướng tiếp cận mới và một cách nhìn tổng quát cho một bài toán trên báo toán tuổi thơ 2.

Trên TTT2 số 81 năm 2009 mục giải toán qua thư có bài toán hay như sau của thầy Nguyễn Minh Hà

Bài 1. *Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$. Giả sử tồn tại điểm M trên cạnh AD và điểm N bên trong hình thang sao cho $\angle NBC = \angle MBA$, $\angle NCB = \angle MCD$. Gọi P là đỉnh thứ tư của hình bình hành $MANP$. Chứng minh rằng P thuộc cạnh CD.*

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 83 năm 2010. Tôi xin trích dẫn lại lời giải trên báo



Hình 1.

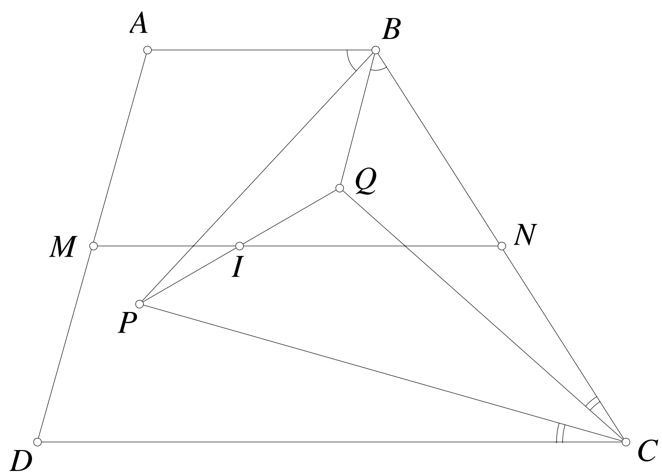
Lời giải. Lấy điểm Q sao cho tứ giác $BNCQ$ là hình bình hành. Gọi BC giao NQ tại I, AP giao MN tại J. Từ giả thiết $\angle NBC = \angle MBA$, $\angle NCB = \angle MCD$ và $AB \parallel CD$ suy ra

$\angle BQC = \angle BNC = 180° - \angle NBC - \angle NCB$
$= 180° - \angle MBA - \angle MCD$
$= 180° - (\angle ABC - \angle MBC) - (\angle BCD - \angle BCM)$
$= 180° - (\angle ABC + \angle BCD) + (\angle MBC + \angle BCM)$
$= 180° - 180° + (180° - \angle BMC)$
$= 180° - \angle BMC$.

Suy ra tứ giác $BMCQ$ nội tiếp. Mà $NB \parallel CQ$ và $\angle NBC = \angle MBA$ nên $\angle BMQ = \angle BCQ = \angle NBC = \angle MBA$. Suy ra $MQ \parallel BA$. Mà $IJ \parallel MQ$ mà IJ là đương trung bình của tam giác ABC nên $IJ \parallel AB$. Lại có $\dfrac{JA}{JP} = \dfrac{IB}{IC} = 1$ nên theo định lý Thales đảo ta có $PC \parallel AB$ vậy P thuộc CD. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán có phát biểu khá hấp dẫn là chứng minh đỉnh thứ tư của hình bình hành nằm trên cạnh. Tuy vậy phát biểu này có thể hiểu đơn giản là chứng minh đối xứng của A qua trung điểm MN nằm trên cạnh CD. Nếu nhìn theo cách này có thể hiểu bài toán đơn giản hơn nữa là chứng minh trung điểm của MN nằm trên đường trung bình của hình thang. Đây là một cách nhìn thú vị. Thực chất bài toán sẽ đúng cho mọi điểm M trong mặt phẳng không nhất thiết thuộc cạnh AD. Đó là một cách tổng quát bài toán. Tôi xin đưa ra lời giải cho bài toán này nhờ một số bổ đề tổng quát. Ta có một lưu ý rằng giả thiết $\angle NBC = \angle MBA$ thực chất có thể hiểu các tia BN, BA đối xứng qua phân giác $\angle BAC$.

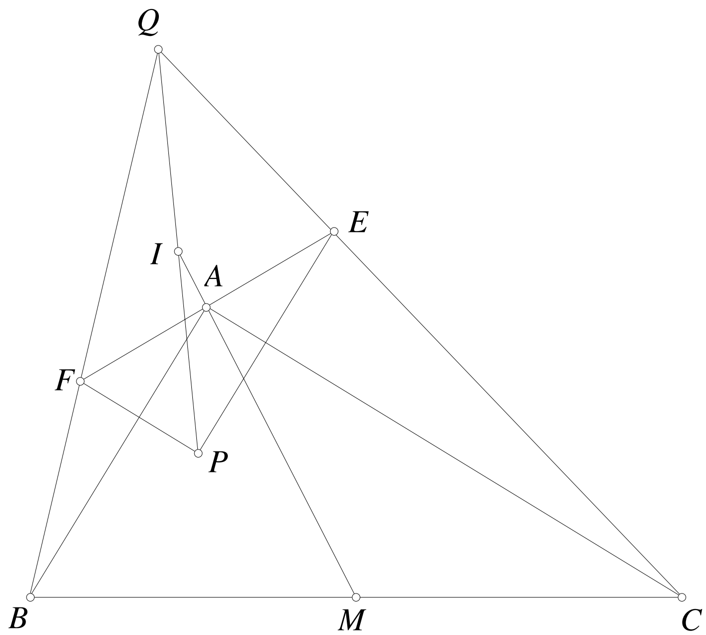
Bài 2. *Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ và P là một điểm bất kỳ. Đối xứng của PB qua phân giác $\angle ABC$ cắt đối xứng của PC qua phân giác $\angle BCD$ tại Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ luôn thuộc đường thẳng cố định khi P di chuyển trong mặt phẳng.*



Hình 2.

Nhận xét. Ta dễ thấy đường thẳng cố định chính là đường trung bình của hình thang. Nếu để ý kỹ ta thấy rằng các phân giác $\angle ABC$ và $\angle BCD$ vuông góc nhau và cắt nhau cũng trên đường trung bình của hình thang và đường trung bình là trung tuyến của tam giác vuông đó. Vậy thực chất trong bài toán này yếu tố hình thang không cần thiết. Ta đưa ra một bài toán khác trên tam giác vuông như sau

Bài 3. *Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AM và P là điểm bất kỳ. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của P qua CA, AB. Gọi CE cắt BF tại Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ thuộc AM.*



Hình 3.

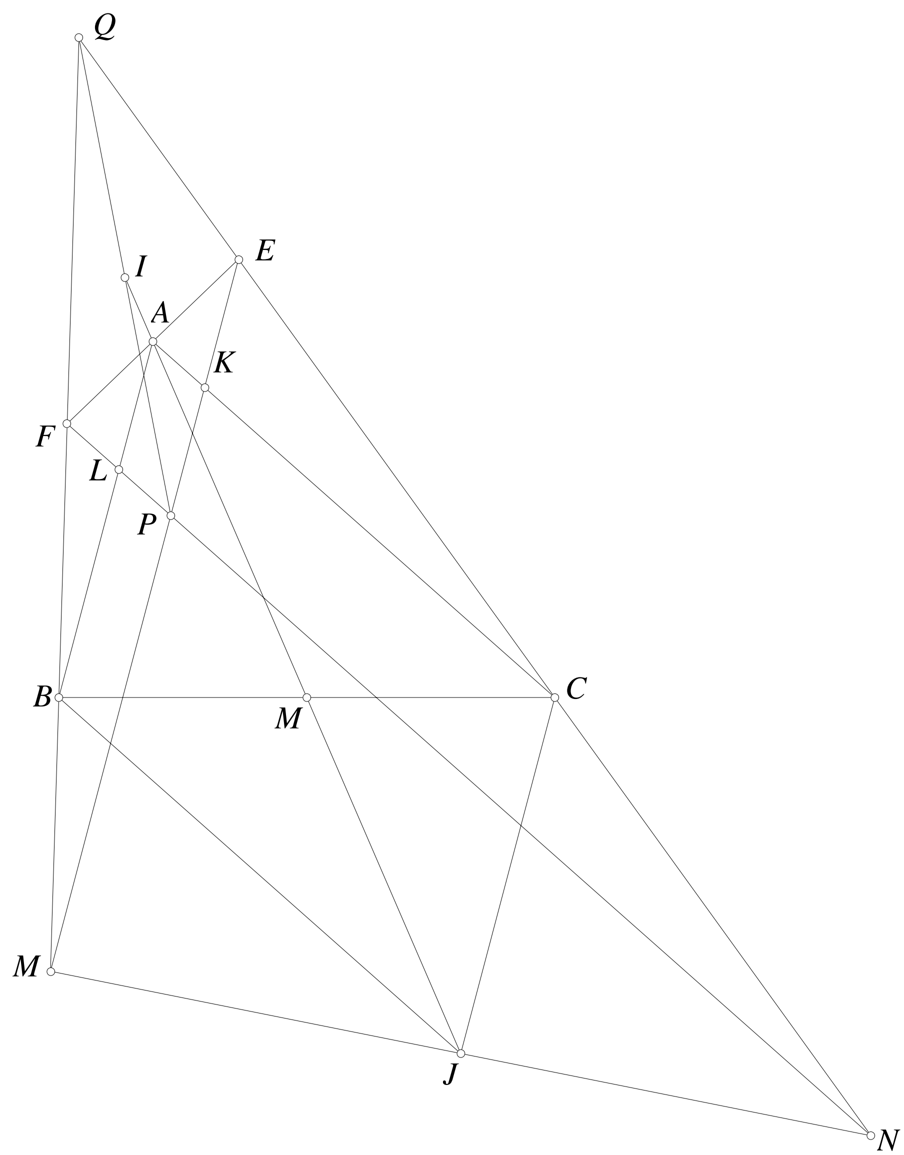
Nhận xét. Nếu nhìn dưới dạng tam giác vuông thế thì trong bài này yếu tố tam giác vuông cũng có thể thay thế và tổng quát hơn được. Ta đưa ra bài toán sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC trung tuyến AM và P là điểm bất kỳ. Gọi K, L lần lượt thuộc các đường thẳng CA, AB sao cho $PK \parallel AB, PL \parallel AC$. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của P qua K, L. Gọi CE cắt BF tại Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ thuộc AM.*

Bài toán này là bài toán thuần túy các yếu tố trung điểm và song song. Thật thú vị khi nhận thấy rằng nó là một hệ quả của đường thẳng Gauss. Ta cũng xem lời giải dưới đây

Bổ đề 4.1. *Cho tứ giác $ABCD$. AB giao CD tại E. AD giao BC tại F. Chứng minh rằng trung điểm của AC, BD, EF thẳng hàng.*

Bổ đề là kết quả rất cơ bản và nổi tiếng của hình học phẳng gọi là đường thẳng Gauss xin không trình bày lại chứng minh. Trở lại bài toán



Hình 4.

Lời giải bài toán. Gọi I là trung điểm PA. Gọi PE, PF lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Dễ thấy A là trung điểm EF nên áp dụng bổ đề cho tứ giác $PEQF$ dễ thấy I, A, J thẳng hàng với J là trung điểm của MN. Do $PK \parallel AB$ mà A là trung điểm EF nên B là trung điểm FM. Tương tự C là trung điểm EN. Từ đó dễ thấy $ACJB$ là hình bình hành. Vậy AJ đi qua trung điểm M của BC, kết hợp I, A, J thẳng hàng ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Việc cho P trùng với các điểm đặc biệt hoặc đặc biệt hóa tam giác ABC để thu được các kết quả tương tự bài trên báo là một việc làm thú vị xin dành cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] Tạp chí TTT2 số 81 năm 2009.

[2] Tạp chí TTT2 số 83 năm 2010.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN. E-mail: analgeomatica@gmail.com