Về bài toán hình học IMO 2003

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh bài toán hình học IMO năm 2003 với các công cụ hình học thuần túy và ứng dụng với lượng giác.

Năm 2003 trong cuộc thi IMO có bài toán hay như sau [1]

Bài toán 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi P, Q, R là hình chiếu của D lên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng $PQ = QR$ khi và chỉ khi phân giác $\angle ABC$ và $\angle ADC$ đồng quy với AC.

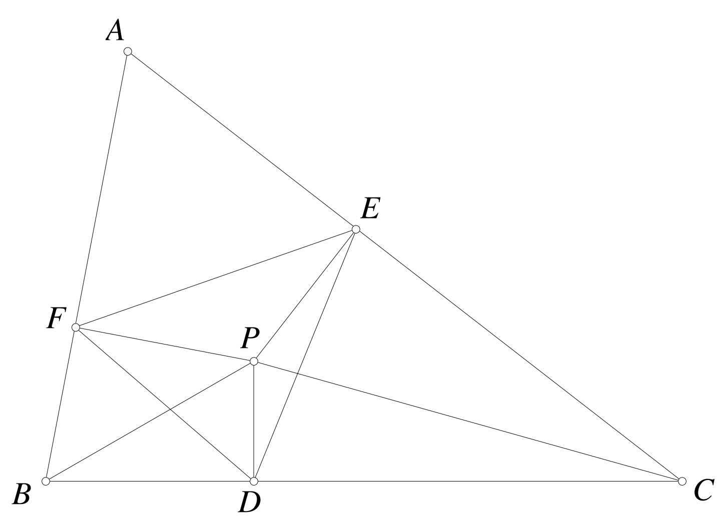
Bài toán trên là bài toán số 4 là một bài ở mức dễ trong kỳ thì. Bài toán là một phát biểu đẹp và có nhiều ý nghĩa. Trong lời giải của shortlist [2] năm đó cũng đã đề xuất một hướng tổng quát hơn như sau

Bài toán 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi P, Q, R là hình chiếu của D lên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\dfrac{QP}{QR} = (AC, DB) = \dfrac{DA}{DC} : \dfrac{BA}{BC}$

Tôi xin đề xuất một hướng tổng quát hơn nữa cho bài toán này như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{PB}{PC} : \dfrac{AB}{AC}$.

Bài toán tuy tổng quát như có một lời giải khá đơn giản



Hình 1.

Lời giải. Ta chú ý PB, PC là đường kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác DBE, DCF, áp dụng định lý hàm số sin ta có $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{PB.\sin B}{PC.\sin C} = \dfrac{PB}{PC} : \dfrac{AB}{AC}$. □

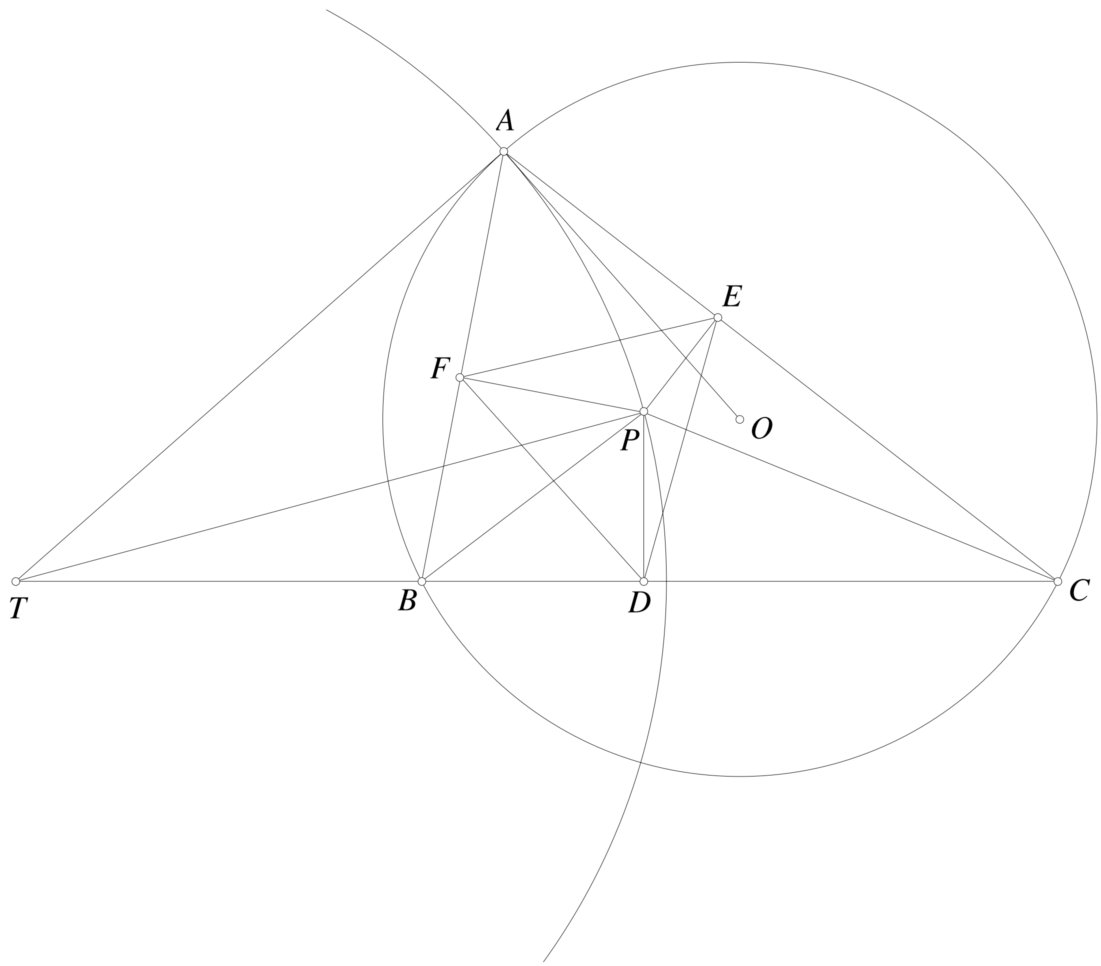
Nhận xét. Ta cũng có thể viết kết quả bài toán dưới dạng tỷ lệ thức như sau $\dfrac{PA.BC}{EF} = \dfrac{PB.CA}{FD} = \dfrac{PC.AB}{DE}$. Bài toán tổng quát xem ra hết sức đơn giản xong nó mang lại nhiều ứng dụng khá thú vị, tiêu biểu là ta xét lại ý tưởng trong bài IMO ta đề xuất bài toán sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. P là một điểm bất kỳ và D, E, F lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng các khẳng định sau là tương đương

a) $TP = TA$

b) Phân giác $\angle BPC$ và $\angle BAC$ đồng quy.

c) $DE = DF$.



Hình 2.

Lời giải. Từ a) suy ra b), ta chú ý $TP = TA$ thì T thuộc (T, TA) là đường tròn Apollonius ứng với A của tam giác ABC suy ra $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{AB}{AC}$ suy ra phân giác $\angle BPC$ và $\angle BAC$ đồng quy.

b) suy ra c), ra phân giác $\angle BPC$ và $\angle BAC$ đồng quy suy ra $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{AB}{AC}$ theo bài toán 3 đã có $\dfrac{DE}{DF} = \dfrac{PA}{PB} : \dfrac{AB}{AC} = 1$ vậy $DE = DF$.

c) suy ra a), cũng từ bài toán 3 $\dfrac{PA}{PB} : \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DF} = 1$ suy ra P thuộc là đường tròn Apollonius ứng với A của tam giác ABC suy ra $TP = TA$.

Ta có điều phải chứng minh. □

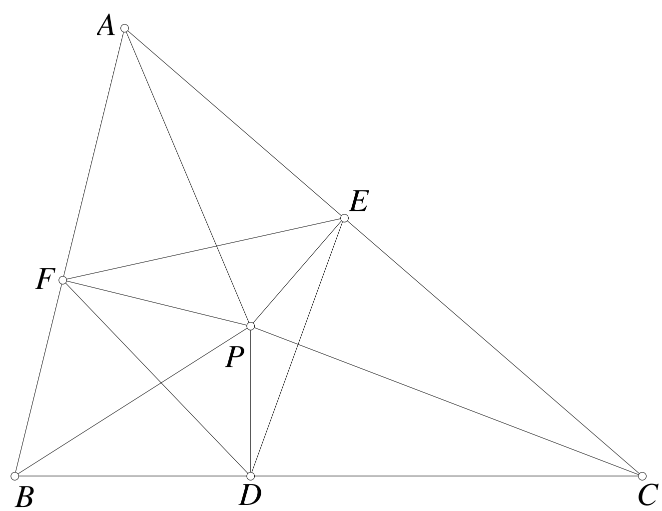
Nhận xét. Bài toán có thể hiểu đơn giản hơn là tam giác DEF cân tại D khi và chỉ khi P nằm trên đường tròn Apollonius ứng với A của tam giác ABC. Ta lại biết rằng ba đường tròn Apollonius ứng với ba đỉnh của tam giác ABC luôn có hai điểm chung gọi, vậy tam giác DEF đều khi và chỉ khi P trùng với một trong hai điểm đó. Từ đó ta đề xuất bài toán sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tồn tại đúng hai vị trí của P để tam giác DEF là tam giác đều.

Ta đi đến một ứng dụng khác như sau có thể coi là một mở rộng của định lý hàm số sin

Bài toán 6. Cho tam giác ABC và P bất kỳ nằm trong tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{PA.BC}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})} = \frac{PB.CA}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})} = \frac{PC.AB}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}.$$



Hình 3.

Lời giải. Gọi D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Theo định lý hàm số sin cho tam giác DEF ta có $\dfrac{EF}{\sin\widehat{EDF}} = \dfrac{FD}{\sin\widehat{FED}} = \dfrac{DE}{\sin\widehat{EFD}}$ (1).

Theo bài toán 3 ta lại có $\dfrac{PA.BC}{EF} = \dfrac{PB.CA}{FD} = \dfrac{PC.AB}{DE}$ (2).

Ta lại có $\angle EDF = \angle EDP + \angle FDP = \angle ECP + \angle FBP = 180^\circ - \angle PAC - \angle PAC + 180^\circ - \angle PAB - \angle PAB = \angle BPC - \angle A$. Tương tự $\angle FED = \angle CPA - \angle B, \angle EFD = \angle APB - \angle C$ (3)

Từ (1),(2) và (3) dễ suy ra $\dfrac{PA.BC}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})} = \dfrac{PB.CA}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})} = \dfrac{PC.AB}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}$. □

Nhận xét. Bài toán trên có thể coi là mở rộng định lý hàm số sin vì khi tam giác ABC nhọn có P trùng với tâm ngoại tiếp thì $PA = PB = PC$ và $\widehat{BPC} - \widehat{A} = \widehat{A}$. Từ đó ta thu được định lý sin cho tam giác ABC. Mặt khác $\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A}) = \sin\widehat{BPC}\cos A - \cos\widehat{BPC}\sin A$. Từ đó ta có thể viết bài toán tương đương $\dfrac{\sin\widehat{BPC}\cot A - \cos\widehat{BPC}}{PA} = \dfrac{\sin\widehat{CPA}\cot B - \cos\widehat{CPA}}{PB} = \dfrac{\sin\widehat{APB}\cot C - \cos\widehat{APB}}{PC}$. Từ đó ta có thể đề xuất bài toán sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nhọn. Giả sử có điểm P nằm trong tam giác sao cho

$$\sin\widehat{BPC}\cot A - \cos\widehat{BPC} = \sin\widehat{CPA}\cot B - \cos\widehat{CPA} = \sin\widehat{APB}\cot C - \cos\widehat{APB}.$$

Chứng minh rằng P là tâm ngoại tiếp tam giác ABC.

Tuy nhiên bài toán 6 cũng dẫn ta đến một hệ quả thú vị là tính được tọa độ tỷ cự điểm Fermat như sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC có các góc không quá $120°$ và F là điểm Fermat. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sin(60^\circ + A)}\overrightarrow{FA} + \frac{b}{\sin(60^\circ + B)}\overrightarrow{FB} + \frac{c}{\sin(60^\circ + C)}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0}.$$

Lời giải. Vì F là điểm Fermat nên $\angle BFC = \angle CFA = \angle AFB = 120°$. Từ đó theo nhận xét bài 6 ta có $\dfrac{a.FA}{\sin(120^\circ - A)} = \dfrac{b.FB}{\sin(120^\circ - B)} = \dfrac{c.FC}{\sin(120^\circ - C)}$ hay $\dfrac{a.FA}{\sin(60^\circ + A)} = \dfrac{b.FB}{\sin(60^\circ + B)} = \dfrac{c.FC}{\sin(60^\circ + C)}$.

Ta lại biết kết quả cơ bản $\dfrac{\overrightarrow{FA}}{FA} + \dfrac{\overrightarrow{FB}}{FB} + \dfrac{\overrightarrow{FC}}{FC} = \overrightarrow{0}$. Từ đó ta thu được $\dfrac{a}{\sin(60^\circ + A)}\overrightarrow{FA} + \dfrac{b}{\sin(60^\circ + B)}\overrightarrow{FB} + \dfrac{c}{\sin(60^\circ + C)}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0}$. Đó là điều phải chứng minh. □

Tổng quát hơn cho ta đẳng thức vector thú vị sau đây

Bài toán 9. Cho tam giác ABC và P nằm trong tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a\sin\widehat{BPC}}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})}\overrightarrow{PA} + \frac{b\sin\widehat{CPA}}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})}\overrightarrow{PB} + \frac{c\sin\widehat{APB}}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}.$$

Lời giải. Ta đã biết đẳng thức vector cơ bản với P nằm trong tam giác là $[PBC].\overrightarrow{PA} + [PCA]\overrightarrow{PB} + [PAB]\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ đẳng thức tương đương $\dfrac{\sin\widehat{BPC}}{PA}\overrightarrow{PA} + \dfrac{\sin\widehat{CPA}}{PB}\overrightarrow{PB} + \dfrac{\sin\widehat{APB}}{PC}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$.

Theo nhận xét bài toán 6 lại có $\dfrac{PA.BC}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})} = \dfrac{PB.CA}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})} = \dfrac{PC.AB}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}$.

Từ hai đẳng thức trên dễ cho ta

$$\frac{a\sin\widehat{BPC}}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})}\overrightarrow{PA} + \frac{b\sin\widehat{CPA}}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})}\overrightarrow{PB} + \frac{c\sin\widehat{APB}}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}.$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đẳng thức vector thú vị trên cho phép ta tính các tọa độ tỷ cực của các điểm trong tam giác mà ta biết các góc $\widehat{BPC}, \widehat{CPA}, \widehat{APB}$ chẳng hạn như các đỉnh tam giác Morley. Còn nhiều thú vị ẩn chứa trong các bài toán này bạn đọc hãy tiếp tục khám phá.

Tài liệu

[1] IMO 2003 bài 4 http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=14&t=96

[2] IMO Shortlist 2003 http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=177&t=15621

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com