Bài toán. *Chứng minh rằng với mọi điểm P bất kì trong tam giác nhọn ABC, ta có bất đẳng thức sau*

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}} S \left(1 + \frac{OP^2}{3R^2}\right),$$

trong đó S là diện tích tam giác ABC và (O) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

(Trần Quang Hùng)

Lời giải 1 (đáp án). Để giải bài toán này, ta cần 2 bổ đề quen thuộc sau trong tam giác (xin nêu ra không chứng minh, bạn đọc có thể kiểm tra lấy)

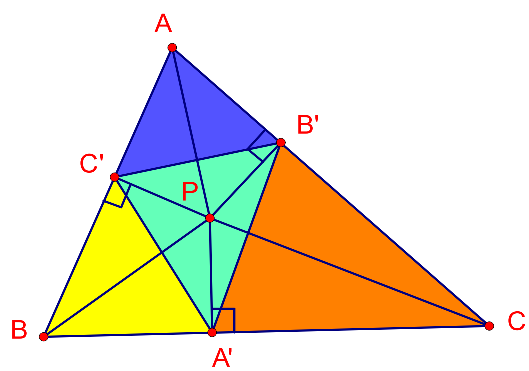
Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC có R và S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích tam giác. Khi đó*

$$3\sqrt{3}R^2 \geq 4S.$$

Bổ đề 2. (Công thức Euler) *Cho tam giác ABC và điểm P bất kì trong tam giác. Gọi A', B', C' là hình chiếu của P lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Khi đó, diện tích tam giác $A'B'C'$ cho bởi công thức*

$$S_{A'B'C'} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S_{ABC}.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán đã cho.



Hình 1

Gọi A', B', C' là hình chiếu của P lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Khi đó, ta dễ thấy rằng tam giác $AB'C'$ nội tiếp đường tròn đường kinh PA, đặt $S_a = S_{AB'C'}$, thế thì theo bổ đề 1, ta có

$$3\sqrt{3}\left(\frac{PA}{2}\right)^2 \geq 4S_a.$$

Lập luận một cách tương tự với $S_b = S_{BC'A'}$ và $S_c = S_{CA'B'}$, ta cũng có

$$3\sqrt{3}\left(\frac{PB}{2}\right)^2 \geq 4S_b, \quad 3\sqrt{3}\left(\frac{PC}{2}\right)^2 \geq 4S_c.$$

Cộng lần lượt vế với vế cả ba bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}(PA^2 + PB^2 + PC^2) \geq 4(S_a + S_b + S_c) = 4(S - S_{A'B'C'}).$$

Mặt khác, theo bổ đề 2 thì $S_{A'B'C'} = \frac{R^2-OP^2}{4R^2}S$, suy ra

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}(PA^2+PB^2+PC^2) \geq 4\left(S - \frac{R^2-OP^2}{4R^2}S\right) = \frac{S(3R^2+OP^2)}{R^2},$$

hay là

$$PA^2+PB^2+PC^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}}S\left(1+\frac{OP^2}{3R^2}\right).$$

Đây chính là bất đẳng thức mà ta cần chứng minh. Dễ thấy rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và điểm P trùng với tâm của tam giác.

Lời giải 2 (Bạch Ngọc Thành Công). Ký hiệu chung a, b, c là 3 cạnh tam giác, p là nửa chu vi, S là diện tích, O, G tương ứng tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm. Khi đó, ta có bổ đề sau

Bổ đề 3. *Trong mọi tam giác nhọn ABC, ta luôn có*

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S+6OG^2. \tag{1}$$

Chứng minh. Với mọi điểm I trên mặt phẳng, ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$, nên $\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)^2 = 9IG^2$, từ đó ta được

$$3(IA^2+IB^2+IC^2)-a^2-b^2-c^2 = 9IG^2. \tag{2}$$

Bây giờ, cho $I \equiv O$, ta được $9OG^2 = 9R^2-a^2-b^2-c^2$. Từ đây, ta có thể biến đổi bất đẳng thức (1) thành

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq 12\sqrt{3}S+2(9R^2-a^2-b^2-c^2),$$

hay là

$$5(a^2+b^2+c^2) \geq 12\sqrt{3}pr+18R^2.$$

Ta có $a^2+b^2+c^2 \geq 4(R+r)^2$ (bất đẳng thức này tương đương với $p^2 \geq 2R^2+8Rr+3r^2$, một bất đẳng thức nổi tiếng của *Jack Garfunkel*), và do $p\sqrt{3} \leq 4R+r$, nên ta có thể đưa về chứng minh kết quả mạnh hơn là $20(R+r)^2 \geq 12r(4R+r)+18R^2$, hay $2(R-2r)^2 \geq 0$. Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng nên bổ đề của ta được chứng minh. □

Trở lại bài toán, do $\frac{4S}{3\sqrt{3}R^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\sin A\sin B\sin C \leq 1$, nên

$$\frac{4}{\sqrt{3}}S\left(1+\frac{OP^2}{3R^2}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}S+\frac{4S}{3\sqrt{3}R^2}OP^2 \leq \frac{4}{\sqrt{3}}S+OP^2.$$

Do đó, để giải quyết bài toán đã cho, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$PA^2+PB^2+PC^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}}S+OP^2,$$

hay là

$$3(PA^2+PB^2+PC^2) \geq 4\sqrt{3}S+3OP^2.$$

Trong (2) cho $I \equiv P$, ta được $3(PA^2+PB^2+PC^2) = a^2+b^2+c^2+9PG^2$, nên bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$a^2+b^2+c^2+9PG^2 \geq 4\sqrt{3}S+3OP^2.$$

Áp dụng bổ đề 3, ta có

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+9PG^2 &\geq 4\sqrt{3}S+6OG^2+9PG^2 \geq 4\sqrt{3}S+6OG^2+6PG^2 \\ &\geq 4\sqrt{3}S+3(OG+PG)^2 \geq 4\sqrt{3}S+3OP^2. \end{aligned}$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Bài toán. *Cho tam giác ABC với 3 đường trung tuyến m_a, m_b, m_c, các điểm A_1, B_1, C_1 chạy trên các đường thẳng BC, CA, AB, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a} + \frac{C_1A_1^3}{m_b} + \frac{A_1B_1^3}{m_c}.$$

(Trần Quang Hùng)

Lời giải 1 (đáp án). Để giải bài toán đã cho, trước hết ta sẽ chứng minh 2 bổ đề sau
Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC với L là điểm Lemoine*[1]*. Khi đó, với mọi điểm M nằm trên mặt phẳng, ta có*

$$\sum_{cyc} a^2MA^2 \geq \sum_{cyc} a^2MA \cdot LA \geq \sum_{cyc} a^2LA^2.$$

Chứng minh. Dễ thấy

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} a^2MA \cdot LA &\geq \sum_{cyc} a^2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{LA} = \sum_{cyc} a^2\left(\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LA}\right)\overrightarrow{LA} \\ &= \overrightarrow{ML}\sum_{cyc} a^2\overrightarrow{LA} + \sum_{cyc} a^2LA^2 = \sum_{cyc} a^2LA^2. \end{aligned}$$

Từ đây, áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta được

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} a^2MA^2 + \sum_{cyc} a^2LA^2 &= \sum_{cyc} a^2\left(MA^2 + LA^2\right) \geq 2\sum_{cyc} a^2MA \cdot LA \\ &\geq \sum_{cyc} a^2MA \cdot LA + \sum_{cyc} a^2LA^2. \end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{cyc} a^2MA^2 \geq \sum_{cyc} a^2MA \cdot LA \geq \sum_{cyc} a^2LA^2.$$

Bổ đề 1 được chứng minh. Đẳng thức ở cả 2 bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv L$.
Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC. Khi đó, với mọi điểm M nằm trên mặt phẳng thì biểu thức*

$$\frac{a^3MA^3}{m_a} + \frac{b^3MB^3}{m_b} + \frac{c^3MC^3}{m_c}$$

đạt giá trị nhỏ nhất khi $M \equiv L$ với L là điểm Lemoine.

[1] Điểm L được gọi là điểm *Lemoine* nếu nó thỏa mãn hệ thức $a^2\overrightarrow{LA} + b^2\overrightarrow{LB} + c^2\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* và bổ đề 1 ở trên, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\frac{a^2MA^3}{LA}\right)\left(\sum_{cyc}a^2MA\cdot LA\right) &\geq \left(\sum_{cyc}a^2MA^2\right)^2\\ &\geq \left(\sum_{cyc}a^2LA^2\right)\left(\sum_{cyc}a^2MA\cdot LA\right),\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{cyc}\frac{a^2MA^3}{LA}\geq\sum_{cyc}a^2LA^2,$$

Mặt khác, ta chú ý rằng trong tam giác ABC, LA cho bởi công thức

$$LA=\frac{2bcm_a}{a^2+b^2+c^2},$$

nên từ đây, ta được

$$\sum_{cyc}a^2LA^2\leq\sum_{cyc}\frac{a^2MA^3}{LA}=\sum_{cyc}\frac{a^2(a^2+b^2+c^2)MA^3}{2bcm_a}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}\sum_{cyc}\frac{a^3MA^3}{m_a}.$$

Do đó

$$\sum_{cyc}\frac{a^3MA^3}{m_a}\geq\frac{2abc}{a^2+b^2+c^2}\sum_{cyc}a^2LA^2,$$

là một hằng số. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $M\equiv L$ nên bổ đề 2 được chứng minh.

Bây giờ ta trở lại bài toán đã cho. Sử dụng kết quả của *Miquel*, ta thấy rằng ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ đồng quy tại M. Gọi R_a là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1, khi đó ta có $B_1C_1=2R_a\sin A\geq MA\sin A=\frac{aMA}{2R}$, suy ra

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a}\geq\frac{a^3MA^3}{8R^3m_a}.$$

Bằng lập luận tương tự, ta cũng có

$$\frac{C_1A_1^3}{m_b}\geq\frac{b^3MB^3}{8R^3m_b},\quad\frac{A_1B_1^3}{m_c}\geq\frac{c^3MC^3}{8R^3m_c}.$$

Cộng tất cả lại, ta được

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a}+\frac{C_1A_1^3}{m_b}+\frac{A_1B_1^3}{m_c}\geq\frac{1}{8R^3}\left(\frac{a^3MA^3}{m_a}+\frac{b^3MB^3}{m_b}+\frac{c^3MC^3}{m_c}\right),$$

với đẳng thức xảy ra khi A_1,B_1,C_1 là các hình chiếu của M lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Mặt khác, theo bổ đề 2, ta có

$$\frac{a^3MA^3}{m_a}+\frac{b^3MB^3}{m_b}+\frac{c^3MC^3}{m_c}\geq\frac{2abc}{a^2+b^2+c^2}\sum_{cyc}a^2LA^2,$$

với đẳng thức xảy ra khi $M\equiv L$. Kết hợp 2 bất đẳng thức này, ta thu được

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a}+\frac{C_1A_1^3}{m_b}+\frac{A_1B_1^3}{m_c}\geq\frac{abc}{4R^3(a^2+b^2+c^2)}\sum_{cyc}a^2LA^2,$$

với đẳng thức xảy ra khi A_1, B_1, C_1 là các hình chiếu của điểm *Lemoine* L lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Do đó, giá trị nhỏ nhất mà ta cần tìm là

$$\frac{abc}{4R^3(a^2+b^2+c^2)}\sum_{cyc} a^2 LA^2.$$

Lời giải 2 (Đặng Cảnh Thiện, Nguyễn Văn An). Ta sẽ sử dụng các bổ đề sau

Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC, điểm M bất kì nằm trong tam giác; H, J, K là các hình chiếu vuông góc của M xuống BC, CA, AB tương ứng. Khi đó, ta có*

$$MH^2 + MJ^2 + MK^2 \geq \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned}(MH^2+MJ^2+MK^2)(a^2+b^2+c^2) &\geq (aMH+bMJ+cMK)^2\\ &= (2S_{MBC}+2S_{MCA}+2S_{MAB})^2 = 4S^2.\end{aligned}$$

Do đó

$$MH^2 + MJ^2 + MK^2 \geq \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Bổ đề của ta được chứng minh. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{MH}{a} = \frac{MJ}{b} = \frac{MK}{c}$, tức là

$$MH = \frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}, \quad MJ = \frac{2bS}{a^2+b^2+c^2}, \quad MK = \frac{2cS}{a^2+b^2+c^2},$$

hay nói cách khác, M chính là giao điểm của 3 đường đối trung (hay còn gọi là điểm *Lemoine*). □

Bổ đề 4. *Nếu H, J, K là hình chiếu của điểm Lemoine trên các cạnh của tam giác ABC thì*

$$\frac{KI}{m_a} = \frac{HK}{m_b} = \frac{IH}{m_c}.$$

Chứng minh. Ta có $AKMI$ là tứ giác nội tiếp nên $KI = MA\sin A$, suy ra $MA = \frac{MK}{\sin\angle AKM} = \frac{MK}{\sin\angle CAD}$ (với D là trung điểm của BC), từ đó ta tính được

$$\frac{KI}{m_a} = \frac{2cS\sin A}{(a^2+b^2+c^2)m_a\sin\angle CAD}.$$

Mặt khác, do $\frac{DC}{\sin\angle CAD} = \frac{m_a}{\sin C}$ nên $m_a\sin\angle CAD = DC\sin C$, dẫn đến

$$\frac{c\sin A}{m_a\sin\angle CAD} = \frac{a\sin C}{m_a\sin\angle CAD} = 2.$$

Do đó

$$\frac{KI}{m_a} = \frac{4S}{a^2+b^2+c^2}.$$

Lập luận tương tự cho 2 biểu thức còn lại, ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. □

Bổ đề 5. *A_1, B_1, C_1 là các điểm di động trên các cạnh BC, CA, AB* của tam giác ABC. *Khi đó*

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \geq \frac{12S^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Chứng minh. Gọi G là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$ và H, I, K là các hình chiếu của G xuống BC, CA, AB tương ứng, ta có

$$\begin{aligned} A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 &= 3(GA_1^2 + GB_1^2 + GC_1^2) \geq 3(GH^2 + GI^2 + GK^2) \\ &\geq \frac{12S^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ (theo bổ đề 3).} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $G \equiv M$ là điểm *Lemoine* của tam giác ABC và A_1, B_1, C_1 là các hình chiếu của điểm *Lemoine* xuống các cạnh của tam giác. □

Trở lại bài toán, áp dụng bất đẳng thức *Holder*, ta có

$$\begin{aligned} (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)\left(\frac{B_1C_1^3}{m_a} + \frac{C_1A_1^3}{m_b} + \frac{A_1B_1^3}{m_c}\right)^2 &\geq (B_1C_1^2 + C_1A_1^2 + A_1B_1^2)^3 \\ &\geq \frac{12^3S^6}{(a^2+b^2+c^2)^3} \text{ (theo bổ đề 5).} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a} + \frac{C_1A_1^3}{m_b} + \frac{A_1B_1^3}{m_c} \geq \frac{48S^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{B_1C_1}{m_a} = \frac{C_1A_1}{m_b} = \frac{A_1B_1}{m_c}$, tức A_1, B_1, C_1 lần lượt là các hình chiếu của điểm *Lemoine* của tam giác ABC xuống các cạnh của tam giác (theo bổ đề 4). Bài toán được giải quyết xong.

Bài toán. *Với mọi điểm M thuộc miền tam giác đều ABC cho trước, ta gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là các khoảng cách từ M đến BC, CA, AB tương ứng. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{d_a^2}{MB \cdot MC} + \frac{d_b^2}{MC \cdot MA} + \frac{d_c^2}{MA \cdot MB}.$$

(Trần Quang Hùng, Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải 1 (đáp án). Vì M thuộc miền tam giác nên tồn tại các số không âm x, y, z sao cho $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. Sử dụng hệ thức *Leibnitz*, với mọi điểm P nằm trong mặt phẳng ta có

$$\begin{aligned} xPA^2 + yPB^2 + zPC^2 &= (x+y+z)PM^2 + \frac{yzBC^2 + zxCA^2 + xyAB^2}{x+y+z} \\ &= (x+y+z)PM^2 + \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}a^2, \end{aligned}$$

trong đó a là độ dài cạnh của tam giác đều ABC.
Bây giờ, cho $P \equiv A$, ta thu được

$$(y+z)a^2 = (x+y+z)MA^2 + \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}a^2,$$

từ đó suy ra

$$MA = \frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{x+y+z}a.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng tính được

$$MB = \frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{x+y+z}a, \quad MC = \frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{x+y+z}a.$$

Đến đây, từ hệ thức quen thuộc $S_{MBC}\overrightarrow{MA} + S_{MCA}\overrightarrow{MB} + S_{MAB}\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ kết hợp với tính chất tâm tỉ cự, ta được

$$\frac{x}{S_{MBC}} = \frac{y}{S_{MCA}} = \frac{z}{S_{MAB}}.$$

Vì $S_{MBC} = \frac{1}{2}ad_a, S_{MCA} = \frac{1}{2}ad_b, S_{MAB} = \frac{1}{2}ad_c$ nên đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{x}{d_a} = \frac{y}{d_b} = \frac{z}{d_c} = \frac{x+y+z}{d_a+d_b+d_c},$$

suy ra

$$d_a = \frac{x(d_a+d_b+d_c)}{x+y+z}, \quad d_b = \frac{y(d_a+d_b+d_c)}{x+y+z}, \quad d_c = \frac{z(d_a+d_b+d_c)}{x+y+z}.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}
\frac{d_a^2}{MB\cdot MC}+\frac{d_b^2}{MC\cdot MA}+\frac{d_c^2}{MA\cdot MB} &= \sum_{cyc}\frac{\frac{x^2(d_a+d_b+d_c)^2}{(x+y+z)^2}}{\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{x+y+z}a\cdot\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{x+y+z}a}\\
&= \frac{(d_a+d_b+d_c)^2}{a^2}\sum_{cyc}\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}}\\
&= \frac{3}{4}\sum_{cyc}\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}}.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng ở đây ta đã sử dụng đẳng thức quen thuộc $d_a+d_b+d_c=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ để suy ra được đẳng thức cuối ở trên. Đến đây, sử dụng bổ đề sau (chứng minh xem ở cuối lời giải bài toán này)

Bổ đề. *Với mọi số không âm x, y, z, ta luôn có*

$$1\le\sum_{cyc}\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}}\le\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Đẳng thức ở bên trái xảy ra khi $x=y=z=1$ và đẳng thức ở bên phải xảy ra khi $x=y, z=0$ cùng các hoán vị tương ứng.

Ta có thể dễ dàng suy ra được, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{d_a^2}{MB\cdot MC}+\frac{d_b^2}{MC\cdot MA}+\frac{d_c^2}{MA\cdot MB}$ là $\frac{3}{4}$ đạt được khi $x=y=z=1$ hay M trùng với tâm của tam giác đều ABC; và giá trị lớn nhất của nó là $\frac{\sqrt{3}}{2}$ đạt được chẳng hạn khi $x=y, z=0$ hay M trùng với trung điểm của cạnh AB.

Như vậy, công việc cuối cùng của ta để hoàn thành lời giải của bài toán là chứng minh bổ đề trên. Phép chứng minh như sau

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$x\sqrt{yz}+\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}\le\sqrt{(x^2+xy+y^2+xy)(x^2+xz+z^2+xz)}=(x+y)(x+z),$$

từ đó suy ra

$$\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}\le x^2+yz+(y+z-\sqrt{yz})\,x\le x^2+yz+\frac{y^2+z^2}{y+z}x,$$

hay là

$$\frac{1}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}}\ge\frac{y+z}{x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)}.$$

Thực hiện tương tự cho 2 biểu thức còn lại, rồi cộng tất cả lại, ta thu được

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}}\ge\sum_{cyc}\frac{x^2(y+z)}{x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)}=1.$$

Đây chính là vế trái của bất đẳng thức nêu trong bổ đề. Bây giờ, ta sẽ chứng minh vế phải. Để thực hiện điều này, ta sẽ sử dụng tính đối xứng của nó và giả sử rằng $x\ge y\ge z\ge 0$. Với giả thiết này, ta có đánh giá sau

$$\frac{y^2}{\sqrt{y^2+yz+z^2}}\le y-\frac{z}{3}.$$

Đánh giá này đúng bởi vì $(3y-z)^2(y^2+yz+z^2)-9y^4 = z\left[3y^3+z\left(y-z\right)\left(4y-z\right)\right] \geq 0$. Điều này dẫn đến

$$\frac{y^2}{\sqrt{(y^2+yz+z^2)(y^2+yx+x^2)}} \leq \frac{y-\frac{z}{3}}{\sqrt{x^2+xy+y^2}} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3y-z}{x+y}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{3x-z}{x+y}.$$

Suy ra

$$\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}} + \frac{y^2}{\sqrt{(y^2+yz+z^2)(y^2+yx+x^2)}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{4z}{3\sqrt{3}(x+y)}.$$

Lúc này, để phép chứng minh được hoàn tất thì ta cần có

$$\frac{4}{3\sqrt{3}(x+y)} \geq \frac{z}{\sqrt{(z^2+zx+x^2)(z^2+zy+y^2)}}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{x^2+xz+z^2}{z} &= \frac{x^2}{z}+z+x = \frac{x^2}{y}+y+x+\frac{\left(y-z\right)\left(x^2-yz\right)}{yz} \\
&\geq \frac{x^2}{y}+y+x = \frac{x^2+xy+y^2}{y},
\end{aligned}$$

và

$$\frac{z^2+zy+y^2}{z} \geq 3y \; (AM-GM).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{z}{\sqrt{(z^2+zx+x^2)(z^2+zy+y^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(x^2+xy+y^2)}} \leq \frac{2}{3(x+y)} < \frac{4}{3\sqrt{3}(x+y)}.$$

Bổ đề được chứng minh xong và bài toán của ta được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải 2 (Nguyễn Văn Thạch). Bài toán gồm 2 phần

+ *Tìm giá trị lớn nhất.* Đặt $AB = BC = CA = a$ và

$$P = \frac{d_a^2}{MB \cdot MC} + \frac{d_b^2}{MC \cdot MA} + \frac{d_c^2}{MA \cdot MB}.$$

Với chú ý rằng

$$\frac{d_a^2}{MB \cdot MC} = \frac{(ad_a)^2}{a^2 \cdot MB \cdot MC} = \frac{4S_{MBC}^2}{a^2 \cdot MB \cdot MC} = \frac{2S_{MBC}\sin\angle MBC}{a^2},$$

và tương tự cho các biểu thức còn lại, ta được

$$\begin{aligned}
P &= \frac{2}{a^2}(S_{MBC}\sin\angle MBC + S_{MCA}\sin\angle MCA + S_{MAB}\sin\angle MAB) \\
&\leq \frac{2}{a^2}(S_{MBC}+S_{MCA}+S_{MAB}) = \frac{2}{a^2}S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Ta thấy tồn tại vị trí của M để đẳng thức xảy ra, đó là khi M trùng với trung điểm của BC hoặc CA hoặc AB, nên $\frac{\sqrt{3}}{2}$ chính là giá trị lớn nhất mà ta cần tìm.

+ *Tìm giá trị nhỏ nhất.* Trước hết, xin được nhắc lại không chứng minh kết quả quen thuộc sau: *Cho tam giác NPQ, với mọi điểm K thì $NP \cdot KQ^2 + PQ \cdot KN^2 + QN \cdot KP^2 \geq NP \cdot PQ \cdot QN$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi K trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác NPQ.*

  Bây giờ, trở lại bài toán, gọi D, E, F lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA, AB. Khi đó MB là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MFD nên

$$\frac{FD}{MB} = \sin \angle FMD = \sin 120^{\text{o}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

  Một cách tương tự, ta có

$$\frac{FD}{MB} = \frac{DE}{MC} = \frac{EF}{MA} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

  Từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned} P &= \frac{MD^2}{MB \cdot MC} + \frac{ME^2}{MC \cdot MA} + \frac{MF^2}{MA \cdot MB} = \frac{3}{4}\left(\frac{MD^2}{DE \cdot DF} + \frac{ME^2}{EF \cdot ED} + \frac{MF^2}{FD \cdot FE}\right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{EF \cdot MD^2 + FD \cdot ME^2 + DE \cdot MF^2}{DE \cdot EF \cdot FD} \geq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF, tức là

$$\angle MFE = \angle MFD, \quad \angle MDF = \angle MDE, \quad \angle MEF = \angle MED,$$

  hay

$$\angle MAC = \angle MBC, \quad \angle MBA = \angle MCA, \quad \angle MAB = \angle MCB.$$

  Từ đó suy ra $\angle MAB + \angle MBA = \angle MBC + \angle MCB = \angle MAC + \angle MCA = 60^{\text{o}}$, hay $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^{\text{o}}$. Điều này nói lên rằng M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vậy $\frac{3}{4}$ chính là giá trị nhỏ nhất mà ta cần tìm.

Lời giải 3 (Đặng Cảnh Thiện). Lời giải này cũng giống với lời giải ở đáp án về ý tưởng, tức là đưa bài toán về chứng minh

$$1 \leq \sum_{cyc} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

trong đó x, y, z là các số không âm.
Bạn đã chứng minh theo những cách thường dùng cho dạng căn thức, tuy rằng cách này không có gì mới mẻ như trong lời giải của đáp án nhưng suy cho cùng thì nó cũng giúp ta giải được bài toán. Cách chứng minh của bạn như sau

+ *Chứng minh bất đẳng thức bên trái.* Ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$\sum_{cyc} x^2\sqrt{y^2+yz+z^2} \geq \sqrt{\prod_{cyc}(x^2+xy+y^2)}.$$

  Bình phương 2 vế, ta được

$$\sum_{cyc} x^4(y^2+yz+z^2) + 2\sum_{cyc} x^2y^2\sqrt{(x^2+xz+z^2)(y^2+yz+z^2)} \geq \prod_{cyc}(x^2+xy+y^2).$$

Do $\sqrt{(x^2+xz+z^2)(y^2+yz+z^2)} \geq \frac{3}{4}(x+z)(y+z)$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc} x^4(y^2+yz+z^2) + \frac{3}{2}\sum_{cyc} x^2y^2(x+z)(y+z) \geq \prod_{cyc}(x^2+xy+y^2).$$

Khai triển và rút gọn, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+3x^2y^2z^2 \geq xyz\left[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\right].$$

Đây chính là bất đẳng thức *Schur* dạng bậc 3 áp dụng cho bộ số (xy, yz, zx) nên nó hiển nhiên đúng.

\+ *Chứng minh bất đẳng thức bên phải.* Theo bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*,

$$\left[\sum_{cyc} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}}\right]^2 \leq \left(\sum_{cyc} x\right)\left[\sum_{cyc} \frac{x^3}{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}\right],$$

nên ta có thể đưa về chứng minh kết quả mạnh hơn là

$$\left(\sum_{cyc} x\right)\left[\sum_{cyc} \frac{x^3}{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}\right] \leq \frac{4}{3},$$

hay

$$2\left(\sum_{cyc} x\right)\left[\sum_{cyc} x^3(y^2+yz+z^2)\right] \leq \prod_{cyc}(x^2+xy+y^2).$$

Khai triển và rút gọn, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$\sum_{cyc} x^2y^2(x-y)^2 + xyz\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} x^2 + \sum_{cyc} xy\right) + 9x^2y^2z^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng nên ta có điều phải chứng minh.