Về bài hình học thi HSG lớp 10 KHTN

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

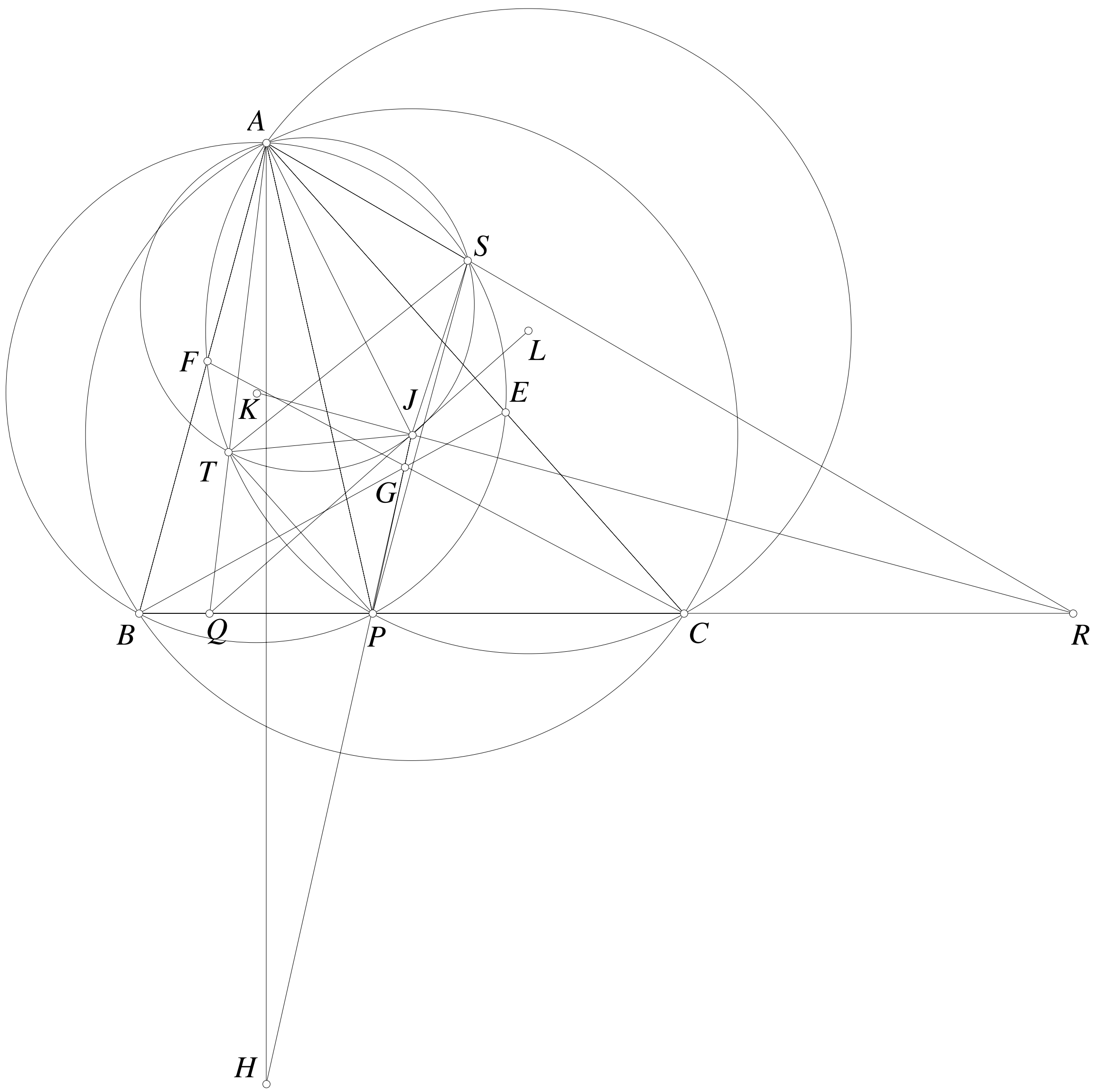
Bài viết xoay quanh bài hình học thi HSG lớp 10 KHTN năm 2014.

Đề thi chọn HSG lớp 10 chuyên KHTN năm 2014 có bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn, cố định. P là điểm di chuyển trên cạnh BC. $(K),(L)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC. Lấy S thuộc (K) sao cho $PS \parallel AB$, lấy T thuộc (L) sao cho $PT \parallel AC$.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AST luôn đi qua một điểm J cố định khác A.

b) Gọi (K) cắt CA tại E khác A. (L) cắt AB tại F khác A. BE cắt CF tại G. Chứng minh rằng đường thẳng PG đi qua J khi và chỉ khi AP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.



Lời giải. a) Gọi J là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Ta sẽ chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AST đi qua J cố định.

Thật vậy, gọi AT, AS giao BC tại Q, R. Ta dễ thấy các tứ giác $ABPS$ và $ACPT$ là các hình thang cân do đó tam giác ABR và ACQ cân tại R và Q. Dễ thấy JK, JL là trung trực của AB, AC do đó JK đi qua R và JL đi qua Q. Suy ra trong tam giác AQR thì J là tâm nội tiếp hay AJ là phân giác $\angle SAT \quad (1)$.

Ta lại có tứ giác $ACPT$ là hình thang cân nên JQ cũng là trung trực của PT do đó $JT = JP$. Tương tự $JS = JP$. Do đó $JT = JS \quad (2)$.

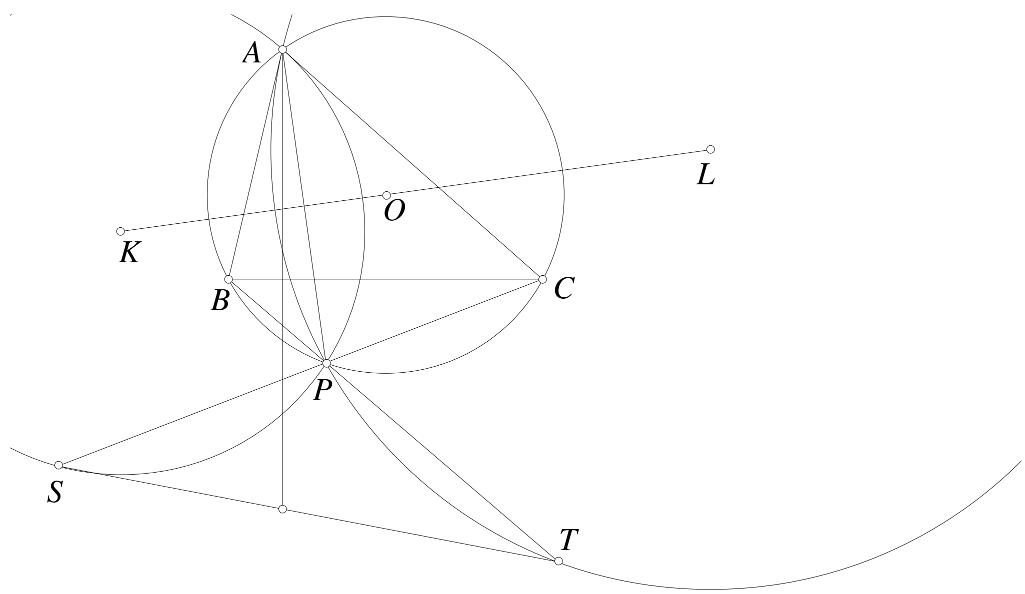
Từ (1),(2) suy ra J thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AST. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta dễ thấy tứ giác $AEGF$ nội tiếp. Từ đó $\angle EGC = \angle EAF = \angle EPG$ nên tứ giác $CEGP$ nội tiếp kéo theo tứ giác $BFGP$ cũng nội tiếp. Từ đó nếu gọi H đối xứng A qua BC thì $\angle BPH = \angle APB = \angle AEB = \angle GPC$ do đó PG đi qua H. Nên đường thẳng PG và AP đối xứng nhau qua BC. Từ đó PG đi qua tâm ngoại tiếp J của tam giác ABC khi và chỉ khi AP đi qua đối xứng của J qua BC khi và chỉ khi AP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.

□

Nhận xét. Đây là bài toán hay có tính chất phân loại, điểm cố định ở câu a) có thể dễ đoán nhận nhờ vào việc xét một số vị trí đặc biết của P. Câu b) đòi hỏi phải biết tính chất PG đi qua đối xứng của A qua BC, tuy nhiên đây là một tính chất khá quen thuộc với các bạn lớp 9. Từng ý của bài toán này có nhiều ý nghĩa ta sẽ phân tích riêng từng ý. Câu a) nếu bạn nào quen với phép nghịch đảo có thể thấy nó cũng chính là bài toán dưới đây

Bài toán 2. Cho tam giác ABC cố định nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O). Gọi (K) là đường tròn qua A, P đồng thời tiếp xúc AC. (K) cắt PC tại S khác P. Gọi (L) là đường tròn qua A, P đồng thời tiếp xúc AB. (L) cắt PB tại T khác P. Chứng minh rằng đường thẳng ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.



Hình 1.

Lời giải. Gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Ta sẽ chứng minh ST đi qua D cố định. Thật vậy, theo tính chất tiếp tuyến dễ thấy $BD^2 = BA^2 = BP.PT$ suy ra $\triangle BPD \sim \triangle BDT$ suy ra

$\angle BDT = \angle BPD$. Tương tự $\angle CDS = \angle CPD$. Từ đó ta có $\angle SDT = \angle BDT + \angle CDS - \angle BDC = \angle BPD + \angle CPD - \angle BAC = 360 - \angle BPC - \angle BAC = 180^\circ$. Từ đó ta có ST đi qua D. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đây chính là đề toán dành cho THCS tác giả đề nghị cho cuộc thi 50 năm THTT. Bài toán có lời giải đơn giản dựa trên kiến thức THCS như trên không liên quan gì tới nghịch đảo. Cả hai bài toán có nhiều ứng dụng vào trong các bài toán khác nhau, chẳng hạn các bạn có thể xem bài toán sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC tâm nội tiếp I. P là một điểm trên BC. Gọi K, L là đối xứng của P qua trung trực IB, IC. Chứng minh rằng IA và trung trực BC cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IKL.

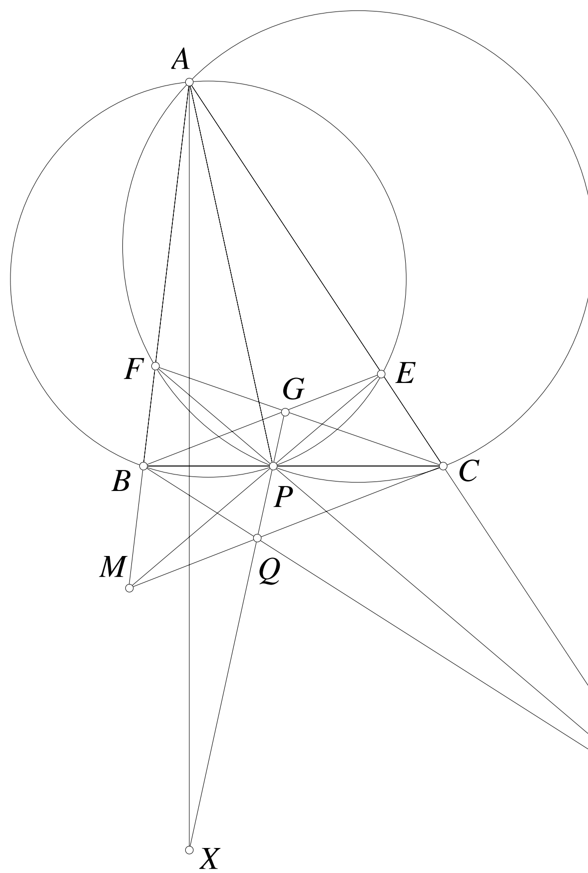
Ý b) của bài toán 1 cũng là một ứng dụng hay của bài toán gốc sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác C, B. BE cắt CF tại G. Chứng minh rằng PG luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Điểm cố định là đối xứng của A qua BC. Lời giải của nó đã nằm trong ý b) bài toán 1. Tuy vậy những phát triển xung quanh bài toán này rất nhiều. Nếu các bạn biết về định lý Pappus không khó để thấy bài toán sau là một hệ quả.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác C, B. PE, PF lần lượt cắt AB, CA tại M, N. BN cắt CM tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

Nếu kết hợp bài toán này với bài toán 1 cho ta một bài toán khá thú vị như sau



Hình 2.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nhọn, cố định. P là điểm di chuyển trên cạnh BC. $(K), (L)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác

PAB, PAC. Lấy S thuộc (K) sao cho $PS \parallel AB$, lấy T thuộc (L) sao cho $PT \parallel AC$. Gọi (K) cắt CA tại E khác A. (L) cắt AB tại F khác A. PE, PF lần lượt cắt AB, CA tại M, N. BN cắt CM tại Q. Chứng minh rằng PQ và trung trực EF cắt nhau tại một điểm trong tam giác ABC và trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AST khi và chỉ khi AP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.

Nếu kết hợp các bài toán trên với bài toán 2 cũng sẽ đưa lại nhiều vấn đề thú vị, ví dụ như bài toán sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại Q. Gọi PB, PC lần lượt cắt các đường tròn qua A, P tiếp xúc AC, AB tại S, T. Gọi K, L là đối xứng của Q qua trung trực CA, AB. Trung trực KL cắt phân giác $\angle KAL$ tại R. QR cắt ST tại H. Chứng minh rằng AH vuông góc BC khi và chỉ khi AP đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.

Tài liệu

[1] Đề thi chọn dự tuyển HSG lớp 10 THPT chuyên KHTN

http://diendantoanhoc.net

[2] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com