

Mỗi tuần một bài toán

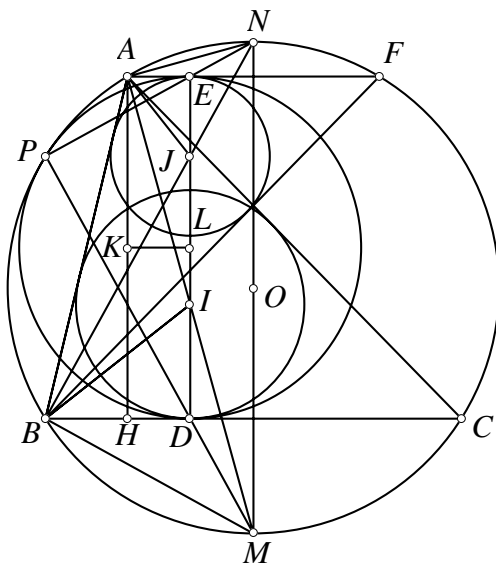
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AH . Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D . K là trung điểm AH . L đối xứng K qua trung điểm AD . Chứng minh rằng đường tròn (L, LD) tiếp xúc (O) .

Lời giải



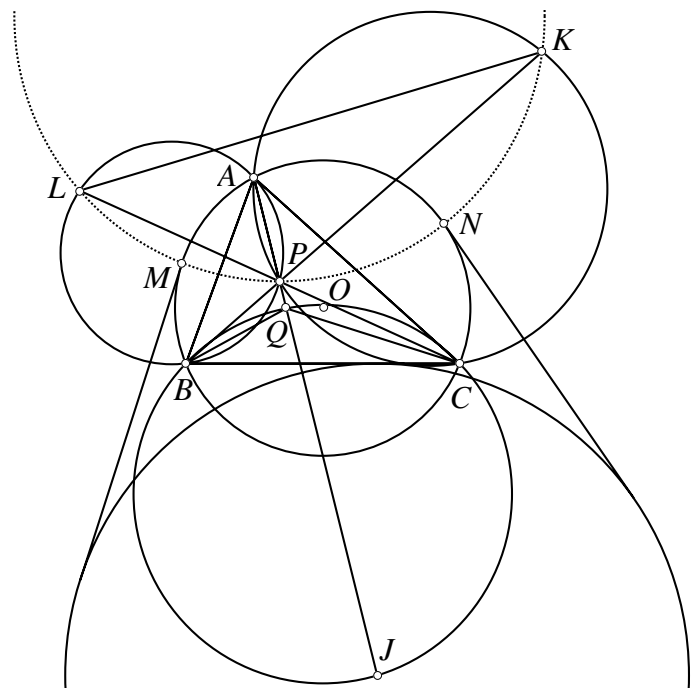
Gọi DE là đường kính của (L) để thấy $AE \parallel BC$. Gọi AE cắt (O) tại F khác E . Gọi (J) là đường tròn nội tiếp tam giác FAB . Ta thấy $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2} = 90^\circ + \frac{\angle AFB}{2} = \angle AIB$, suy ra tứ giác $AJIB$ nội tiếp. Từ đó chú ý $AF \parallel BC$ nên $\angle BID = 90^\circ - \angle IBD = \angle BAJ$ ta suy ra J, I, D thẳng hàng. Từ đó dễ thấy (J) tiếp xúc AF tại E . Gọi AI, BJ lần lượt cắt (O) tại M, N khác A, B . Ta dễ thấy MN là đường kính của (O) . Mặt khác lại có $\angle ANJ = \angle BMI$ nên có hai tam giác cân đồng dạng $\triangle ANJ \sim \triangle BMI$. Lại có hai tam giác vuông đồng dạng $\triangle AEJ \sim \triangle IDB$. Từ đây ta suy ra $\triangle ANE \sim \triangle IMD$. Vậy $\angle ANE = \angle IMD$ hay NE và MD cắt nhau tại P thuộc (O) . Do MN là đường kính của (O) nên $\angle MPN = 90^\circ$ suy ra P nằm trên (L) là đường tròn đường kính DE . Từ $DE \parallel MN$ suy ra (L) tiếp xúc (O) .

Nhật xét

Bài toán này có thể coi là một hệ quả của định lý Sawayama và Thebault nhưng cách giải trên hoàn toàn không sử dụng đến định lý này mặc dù ý tưởng lời giải mô phỏng lại một phần cách chứng minh định lý. Mặt khác các bạn cũng có thể thấy một mở rộng của bài toán này từ hình thang cân nội tiếp sang tứ giác nội tiếp trong [đề thi olympic chuyên KHTN ngày 2 năm 2015](#). Tác giả nhận được lời giải sớm nhất từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương. Tác giả còn nhận được lời giải đúng từ các bạn **Phạm Ngọc Huy**, **Bùi Công Minh**, **Bùi Văn Bình** lớp 12 toán và **Lê Sỹ Quan** lớp 11 toán THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước. Bạn **Nguyễn Minh Quang** lớp 11 toán, THPT Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình cho lời giải đúng tại [đây](#). Bạn **Ngô Quang Dương** lớp 12A2 Toán THPT chuyên KHTN gửi tới lời giải có sử dụng Parabol.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có P, Q là hai điểm đẳng giác nằm trên phân giác góc $\angle BAC$. PB, PC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác PCA, PAB tại K, L khác P . QA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác QBC tại J khác Q . Đường tròn (J) tiếp xúc BC . Tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (J) tiếp xúc (O) tại M, N . Chứng minh rằng năm điểm P, K, L, M, N cùng thuộc một đường tròn.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.