TỔNG QUÁT VÀ ỨNG DỤNG MỘT BÀI TOÁN CHIA ĐÔI ĐOẠN THẲNG

Trần Quang Hùng

(*Trường THPT chuyên KHTN*)

Bài báo viết về một bài toán chia đôi đoạn thẳng khá kinh điển với hướng tiếp cận dùng các bổ đề dễ hiểu cùng với một số hướng tổng quát và khai thác với công cụ là các định lý Ceva, Menelaus và tính chất tứ giác ngoại tiếp, phần ứng dụng có sử dụng ứng dụng của phép nghịch đảo.

1. Mở đầu

Trên báo toán học tuổi trẻ số 390 tháng 12 năm 2009 bài T12/390 [3] tác giả Tạ Hồng Sơn có đề nghị một bài toán, cũng trên trên đàn AoPS trong [1,2] có đề xuất bài toán đó, bài toán như sau:

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác HA của đường tròn nội tiếp các tam giác HAB, HAC thì chia đôi BC.*

Bài toán trên đã có lời giải trên THTT số 394 tháng 4 [4]. Cũng trên diễn đàn AoPS trong [2,6] có đề xuất bài toán như sau:

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. Đường tròn nội tiếp tam giác IBC tiếp xúc BC tại D. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác IA của đường tròn nội tiếp các tam giác IAB, IAC đi qua D.*

Nhận xét. Cả hai bài toán trên đẹp và đều có chung một cấu hình là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tôi nghĩ rằng chúng nhất định phải nằm trong một bài toán chung nào đó. Chúng ta hãy tìm hiểu điều đó ở phần sau.

2. Mở rộng

Sau quá trình tìm hiểu tôi đã đề xuất bài toán tổng quát cho cả hai bài toán trên như sau:

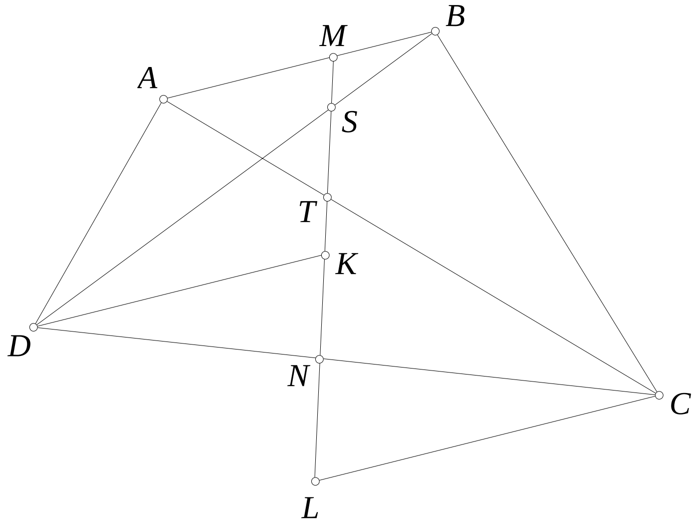
Bài toán 3. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ nằm trong tam giác. Gọi Q là điểm đẳng giác của P trong tam giác ABC. Gọi (K), (L) lần lượt là các đường tròn nội tiếp của tam giác PAB, PAC. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác PA của (K) và (L) đi qua tiếp điểm của đường tròn nội tiếp của tam giác QBC với cạnh BC.*

Để giải quyết bài toán này chúng ta sẽ dùng một số bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Cho tứ giác $ABCD$. S, T bất kỳ lần lượt thuộc BD, AC. ST cắt AB, CD tại M, N. Chứng minh rằng*

$$\frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{ND} = \frac{SB}{SD} \cdot \frac{TC}{TA}.$$

Bổ đề trên là một ứng dụng của định lý Thales.

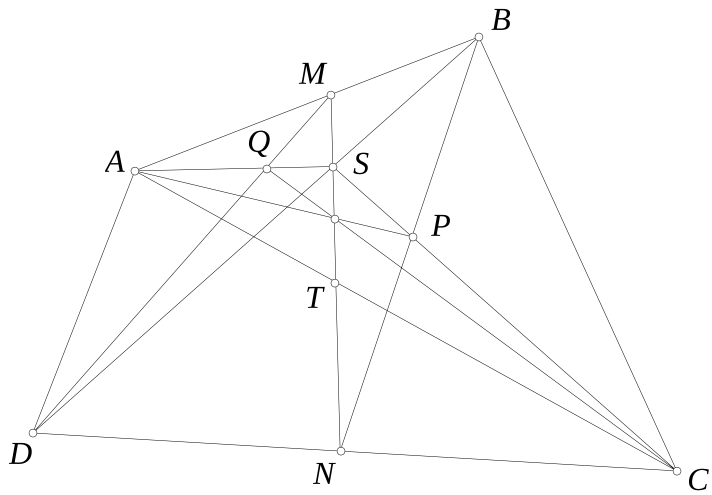


Chứng minh. Lấy K, L thuộc M, N sao cho $DK \parallel CL \parallel AB$. Sử dụng định lý Thales ta có biến đổi tỷ số:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DK} \cdot \frac{DK}{CL} \cdot \frac{CL}{MA} = \frac{SB}{SD} \cdot \frac{ND}{NC} \cdot \frac{TC}{TA}.$$

Suy ra $\frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{ND} = \frac{SB}{SD} \cdot \frac{TC}{TA}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2. *Cho tứ giác $ABCD$. S, T bất kỳ lần lượt thuộc BD, AC. ST cắt AB, CD tại M, N. CS giao BN tại P. AS giao DM tại Q. Chứng minh rằng AP, CQ và ST đồng quy.*



Chứng minh. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABS với M, Q, D thẳng hàng, ta có

$$\frac{QA}{QS} \cdot \frac{DS}{DB} \cdot \frac{MB}{MA} = 1. \tag{1}$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CDS với N, P, B thẳng hàng, ta có

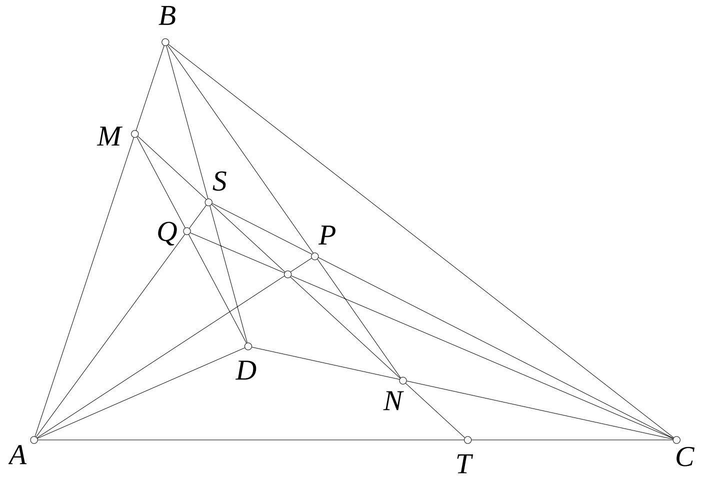
$$\frac{PS}{PC} \cdot \frac{NC}{ND} \cdot \frac{BD}{BS} = 1. \tag{2}$$

Nhân hai đẳng thức (1), (2) chú ý theo bổ đề $\frac{MB}{MA}\cdot\frac{NC}{ND}=\frac{SB}{SD}\cdot\frac{TC}{TA}$, ta thu được

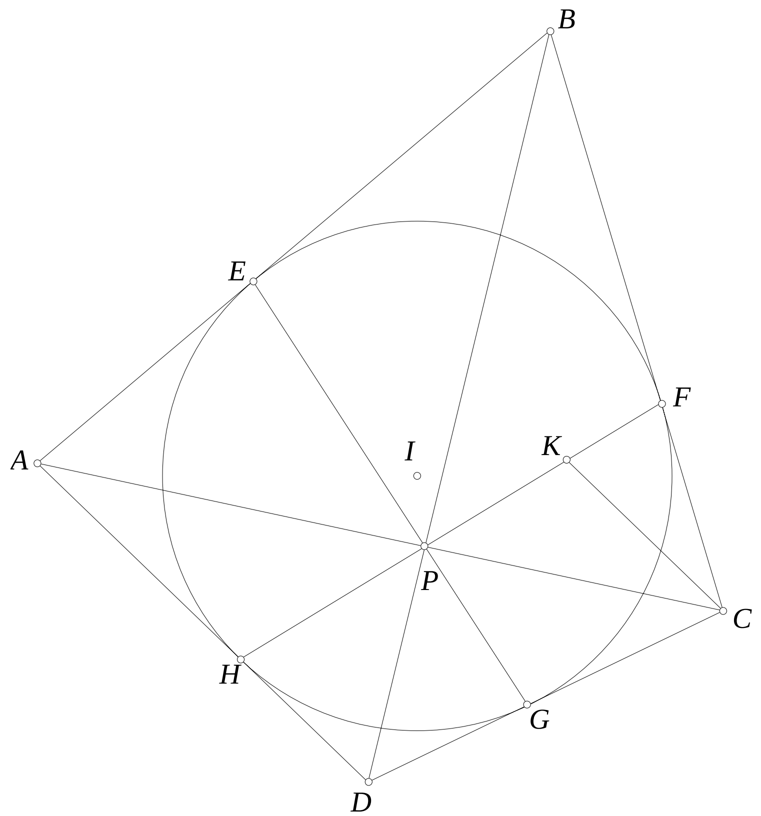
$$\frac{QA}{QS}\cdot\frac{PS}{PC}\cdot\frac{DS}{DB}\cdot\frac{BD}{BS}\cdot\frac{SB}{SD}\cdot\frac{TC}{TA}=1 \text{ hay } \frac{QA}{QS}\cdot\frac{PS}{PC}\cdot\frac{TC}{TA}=1.$$

Vậy AP, CQ và ST đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Chú ý bổ đề thực chất đúng cho mọi vị trí tứ điểm $ABCD$ mà không cần $ABCD$ là tứ giác lồi. Ta có thể quan sát hình vẽ sau:



Bổ đề 3. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc AB, BC, CD, DA lần lượt tại E, F, G, H. Chứng minh rằng EF, GH, AC, BD đồng quy tại P và $\frac{PC}{PA}=\frac{CF}{AH}$.*



Chứng minh. Gọi HF giao AC tại P. Lấy K thuộc HF sao cho $CK \parallel AH$ dễ thấy tam giác KFC cân. Từ đó

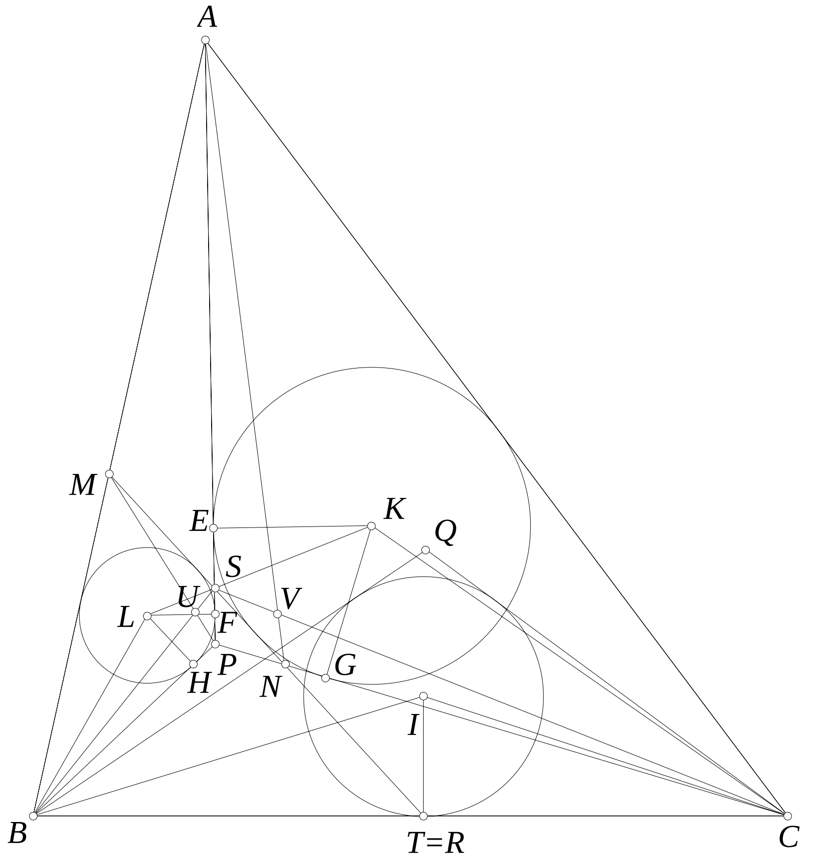
$$\frac{PC}{PA} = \frac{CK}{AH} = \frac{CF}{AH}.$$

Nếu EG cắt AC tại Q, tương tự ta dễ chứng minh

$$\frac{QC}{QA} = \frac{CG}{AE} = \frac{CF}{AH}.$$

Vậy $P \equiv Q$, suy ra AC đi qua giao điểm P của EF, GH. Tương tự BD đi qua P. Ta có điều phải chứng minh. □

Trở lại bài toán:



Lời giải bài toán. Gọi $(K), (L)$ là các đường tròn nội tiếp tam giác PCA, PAB. PA tiếp xúc $(K), (L)$ lần lượt tại E, F. PB, PC lần lượt tiếp xúc $(K), (L)$ tại G, H. Gọi tiếp tuyến chung trong khác PA của $(K), (L)$ cắt AB, BC tại S, T. AN giao CS tại V. BS giao MP tại U.

Theo bổ đề 2 thì BV, CU và ST đồng quy. Từ đây suy ra

$$\frac{TC}{TB} = \frac{VC}{VS} \cdot \frac{US}{UB}. \tag{1}$$

Ta chú ý các tứ giác $MSPB$ và $ASNC$ ngoại tiếp. Theo bổ đề 3 ta có

$$\frac{VC}{VS} = \frac{CG}{SE}, \quad \frac{US}{UB} = \frac{SF}{BH}. \tag{2}$$

Từ (1), (2) chú ý LK đi qua S là $EK \parallel LF$, suy ra

$$\frac{TC}{TB} = \frac{CG}{SE} \cdot \frac{SF}{BH} = \frac{SF}{SE} \cdot \frac{CG}{BH} = \frac{LF}{KE} \cdot \frac{CG}{BH} = \frac{LH}{BH} \cdot \frac{CG}{KG}. \tag{3}$$

Nếu gọi tiếp điểm của đường tròn (I) nội tiếp tam giác QBC với BC là R. Theo tính chất đẳng giác ta dễ có $\triangle BLH \sim \triangle BIR,\ \triangle CKG \sim \triangle CIR$. Suy ra

$$\frac{LH}{HB} = \frac{IR}{RB}, \quad \frac{CG}{KG} = \frac{RC}{IR}. \tag{4}$$

Từ (3),(4) ta suy ra

$$\frac{TC}{TB} = \frac{IR}{RB} \cdot \frac{RC}{IR} = \frac{RC}{RB}.$$

Từ đó $T \equiv R$, hay tiếp tuyến chung trong khác PA của $(K), (L)$ đi qua tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác QBC và BC. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Nếu P trùng trực tâm H thì Q trùng tâm ngoại tiếp O khi đó tam giác OBC cân nên tiếp điểm đường tròn nội tiếp tam giác OBC là trung điểm BC ta có bài toán 1. Khi P trùng tâm nội tiếp I thì Q cũng trùng I, ta có bài toán 2. Bài toán này là tổng quát với P bất kỳ nên có giá trị ứng dụng lớn.

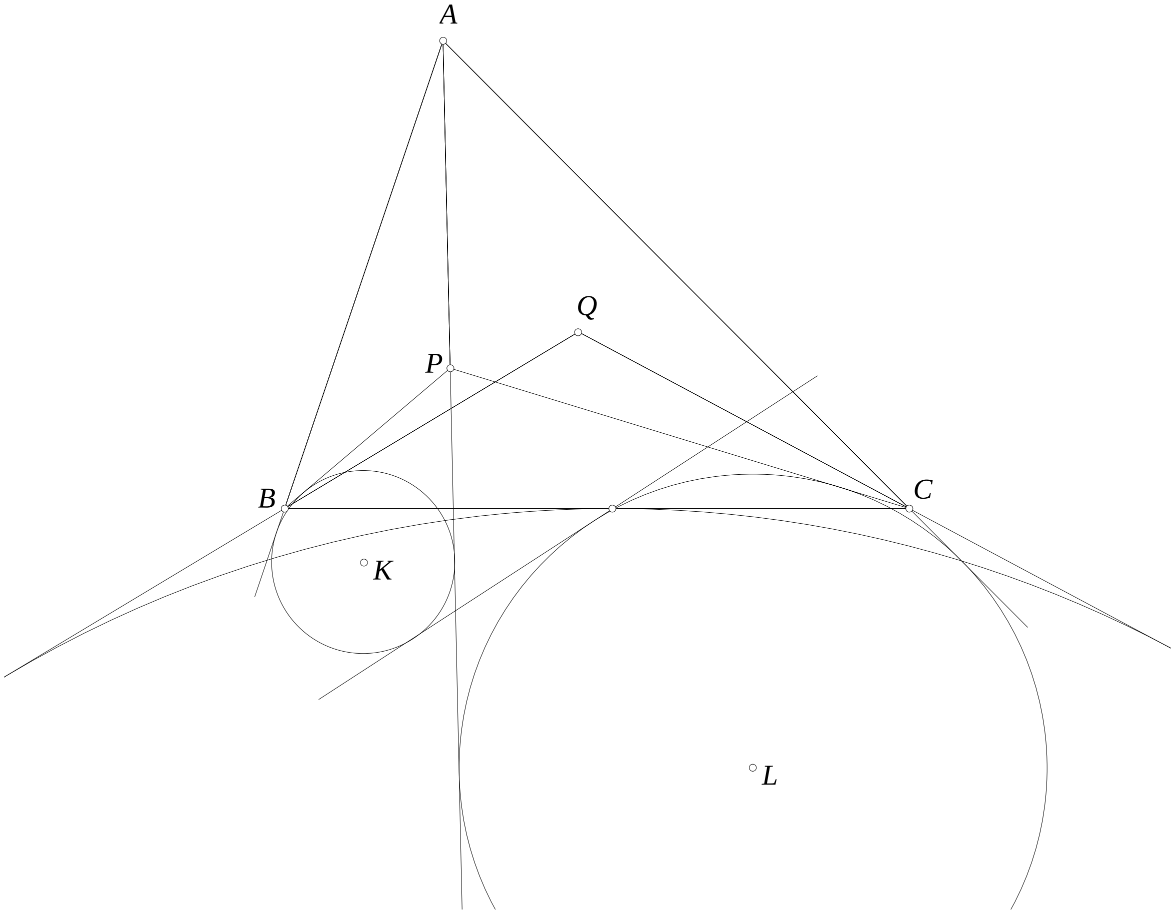
Thực chất có một bài toán tổng quát cũng đã xuất hiện trong lời giải bài toán 1 ở trong THTT số 394 [4] nhưng lần đầu tiên bài toán tổng quát xuất hiện ở [5]. Ở thời điểm sau, trong [2] cũng xuất hiện bài toán tổng quát tương tự và chứng minh giống như đã đăng trên THTT số 394 và trong [5], bài toán tổng quát như sau:

Bài toán 4. *Cho tứ giác $ABCD$ có thể không lồi. Tiếp tuyến chung trong khác BD của đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, CBD cắt AC tại T. Chứng minh rằng*

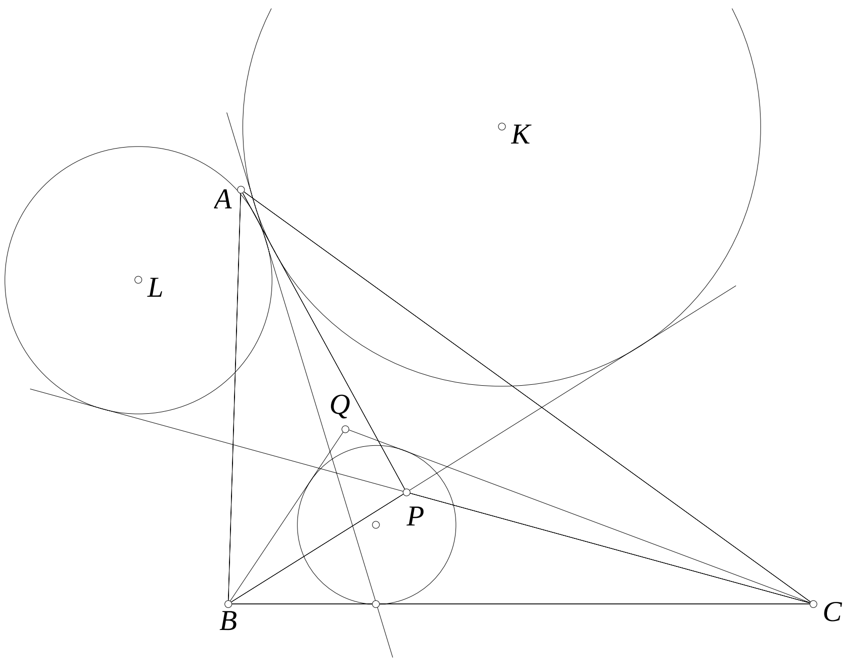
$$\frac{TA}{TC} = \frac{\cot \frac{A}{2}}{\cot \frac{C}{2}}.$$

Về bản chất bổ đề này cũng là một cách phát biểu khác của bài toán 3 tuy nhiên ta thấy rằng phát biểu có liên quan tới yếu tố lượng giác và chứng minh như trong THTT và [2] dùng qua các biến đổi lượng giác không hề đẹp. Hơn nữa cách tiếp cận bài toán 3 tổng quát qua các bổ đề có tính đối xứng như đã làm ở trên cho ta dễ hiểu ý tưởng của lời giải hơn. Cách phát biểu đi qua tiếp điểm nội tiếp đẹp và có nhiều ứng dụng. Mặt khác với các phát biểu đi qua tiếp điểm thì một cách hoàn toàn tương tự, chúng ta có thể chứng minh các bài toán mở rộng cho các đường tròn bàng tiếp như sau:

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Q là điểm đẳng giác của P trong tam giác ABC. Gọi $(K), (L)$ lần lượt là các đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác PAB, PAC. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác PA của (K) và (L) đi qua tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc Q của tam giác QBC với cạnh BC.*



Bài toán 6. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Q là điểm đẳng giác của P trong tam giác ABC. Gọi $(K), (L)$ lần lượt là các đường tròn bàng tiếp góc B, C của tam giác PAB, PAC. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác PA của (K) và (L) đi qua tiếp điểm của đường tròn nội tiếp của tam giác QBC với cạnh BC.*



Bài toán 7. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Q là điểm đẳng giác của P trong tam giác ABC. Gọi (K), (L) lần lượt là các đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PAB, PAC. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác PA của (K) và (L) đi qua tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc Q của tam giác QBC với cạnh BC.*

3. Một số ứng dụng

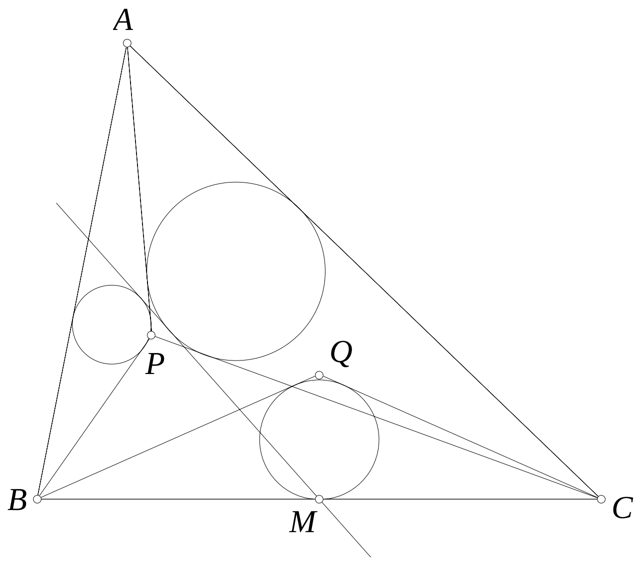
Bài toán 3 phát biểu tổng quát và các trường hợp mở rộng sang đường tròn bàng tiếp có nhiều ứng dụng. Từ 7 bài toán gốc nếu biết sử dụng thêm các phép biến hình làm công cụ ta sẽ tạo ra được nhiều bài toán thú vị và đa dạng , từ các bài toán điểm cố định, đường cố định tới các bài toán tam giác cân và điểm đồng viên. Chúng ta hãy bắt đầu từ ví dụ sau:

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC có điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác PA của đường tròn nội tiếp hai tam giác PAB, PAC luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.*

Lời giải. Gọi Q là đẳng giác của P trong tam giác ABC. Ta có

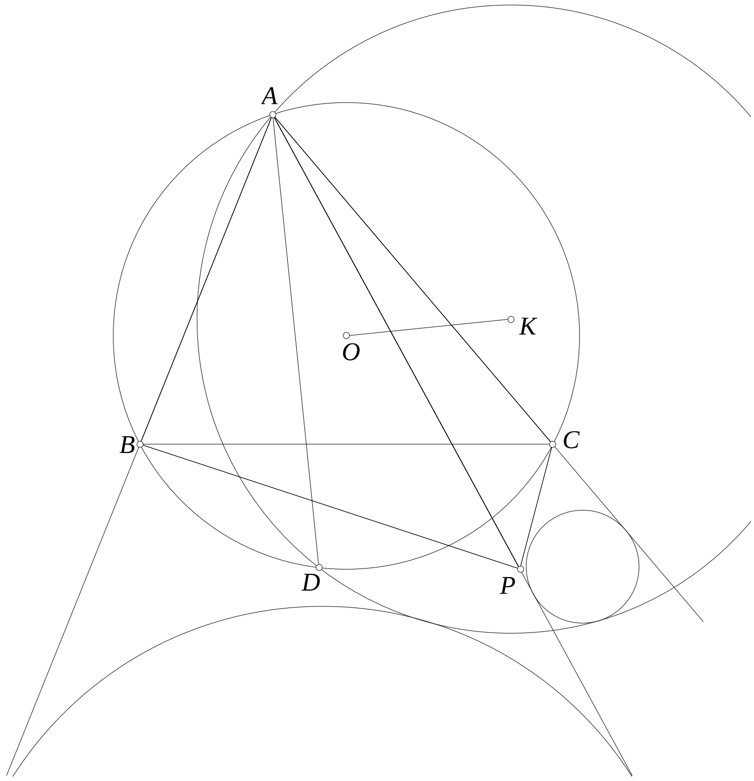
$$\angle QBC = \angle PBA = \angle PCA = \angle QCB$$

nên tam giác QBC cân tại Q. Từ đó đường tròn nội tiếp tam giác QBC tiếp xúc BC tại trung điểm M của BC. Theo bài toán 3 tiếp tuyến chung trong khác PA của đường tròn nội tiếp hai tam giác PAB, PAC luôn đi qua một điểm cố định M khi P thay đổi. □



Bài toán trên là một ứng dụng tuy có phần đơn giản của bài toán 3 nhưng nếu sử dụng phép nghịch đảo ta sẽ thu được bài toán thú vị dưới đây:

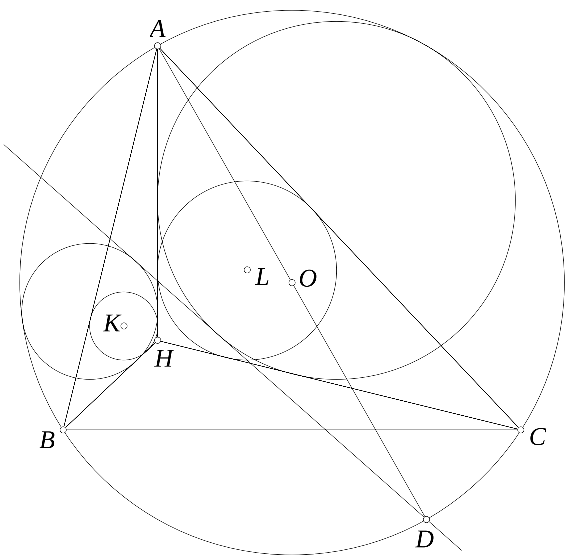
Bài toán 9. *Cho tam giác ABC và điểm P thay đổi sao cho phân giác $\angle BPC$ đi qua A. Đường tròn (K) đi qua A và tiếp xúc với các đường tròn A-mixtilinear ngoại của tam giác APB, APC sao cho tâm hai đường tròn này không cùng ở trong hoặc ở ngoài (K). Chứng minh rằng K luôn di chuyển trên một đường thẳng cố định khi P thay đổi.*



Lời giải. Sử dụng phép nghịch đảo cực A phương tích bất kỳ theo bài thì đường tròn đường tròn (K) đi qua A tiếp xúc với các đường tròn A-mixtilinear ngoại của tam giác APB, APC sao cho tâm hai đường tròn này không cùng ở trong hoạc ngoài (K) thì luôn đi qua điểm D trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho AD là đường đối trung của tam giác ABC. Vậy D cố định nên tâm K nằm trên trung trực AD cố định. □

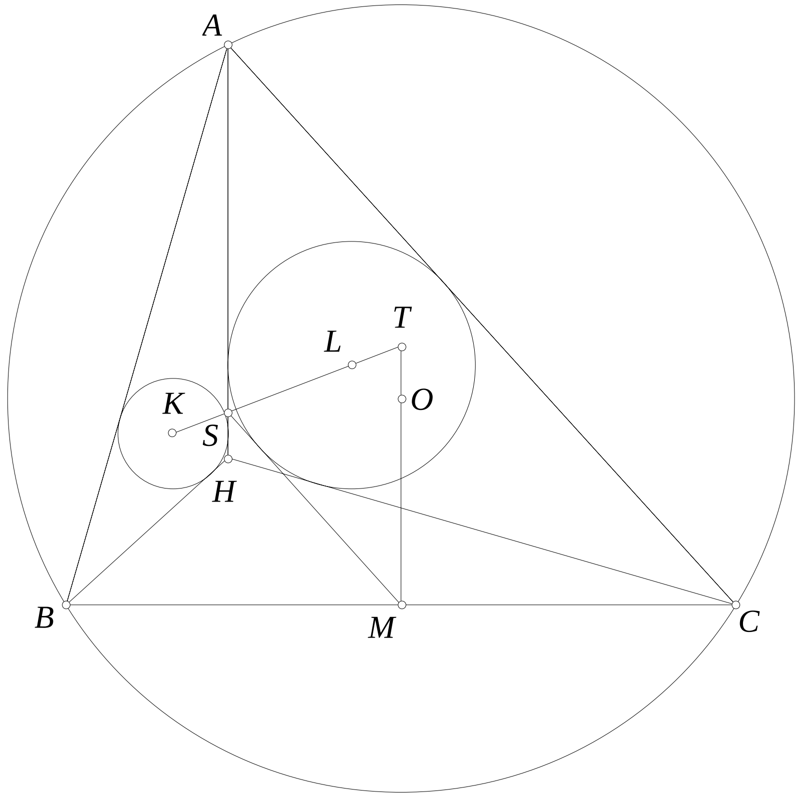
Ta lại tiếp tục một bài toán ứng dụng sau của bài toán 1.

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) trực tâm H và AD là đường kính của (O). Đường tròn (K) tiếp xúc HA, HB và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc HA, HC và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác HA của (K) và (L) đi qua D.*



Lời giải. Theo định lý Feuerbach thì đường tròn nội tiếp tam giác HBC tiếp xúc trong đường tròn Euler của tam giác HAB tuy nhiên đường tròn Euler của tam giác HAB cũng chính là đường tròn Euler của tam giác ABC. Vị tự tâm H tỷ số 2 thì đường tròn Euler của tam giác ABC biến thành đường tròn (O). Như vậy đường tròn nội tiếp tam giác HAB biến thành đường tròn tiếp xúc HA, HB và tiếp xúc trong (O) chính là (K). Tương tự đường tròn nội tiếp tam giác HAC qua phép vị tự tâm H tỷ số 2 biến thành (L). Theo bài toán 1 tiếp tuyến chung trong khác HA của đường tròn nội tiếp các tam giác HAB, HAC thì đi qua trung điểm M của BC nên qua phép vị tự tâm H tỷ số 2 thì tiếp tuyến chung trong khác HA của (K) và (L) đi qua D vì dễ chứng minh D là ảnh của M qua phép vị tự tâm H tỷ số 2. □

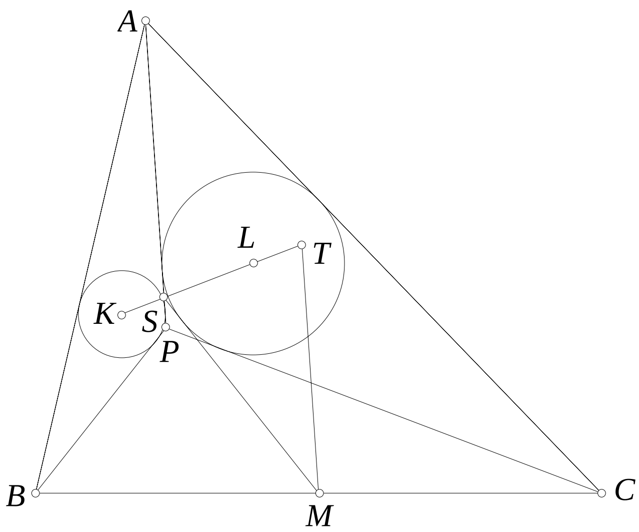
Bài toán 11. *Cho $\triangle ABC$ trực tâm H. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác HAB, HAC. KL cắt HA và trung trực BC tại S, T. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $\triangle MST$ cân.*



Lời giải. Vì AH là một tiếp tuyến chung trong của (K) và (L) nên S là tâm vị tự trong của (K) và (L). Từ đó theo bài toán 1 SM là tiếp tuyến chung trong khác của (K) và (L). Từ đó dễ có HA và SM đối xứng nhau qua KL hay ST là phân giác $\angle ASM$ lại có $OM \parallel AH$ ta dễ thu được tam giác MST cân. □

Ta có bài toán mở rộng tương tự:

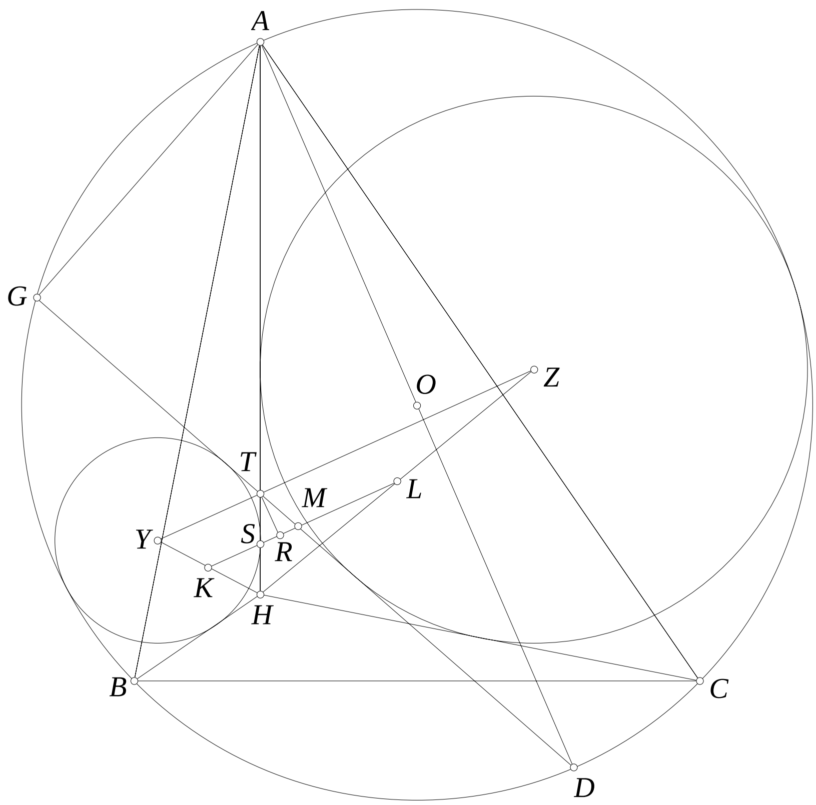
Bài toán 12. *Cho tam giác ABC có P là điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác PAB, PAC. Gọi M là trung điểm BC. KL cắt PA và đường thẳng qua M song song PA lần lượt tại S và T. Chứng minh rằng tam giác MST cân.*



Tổng quát hơn nữa ta thu được bài toán sau:

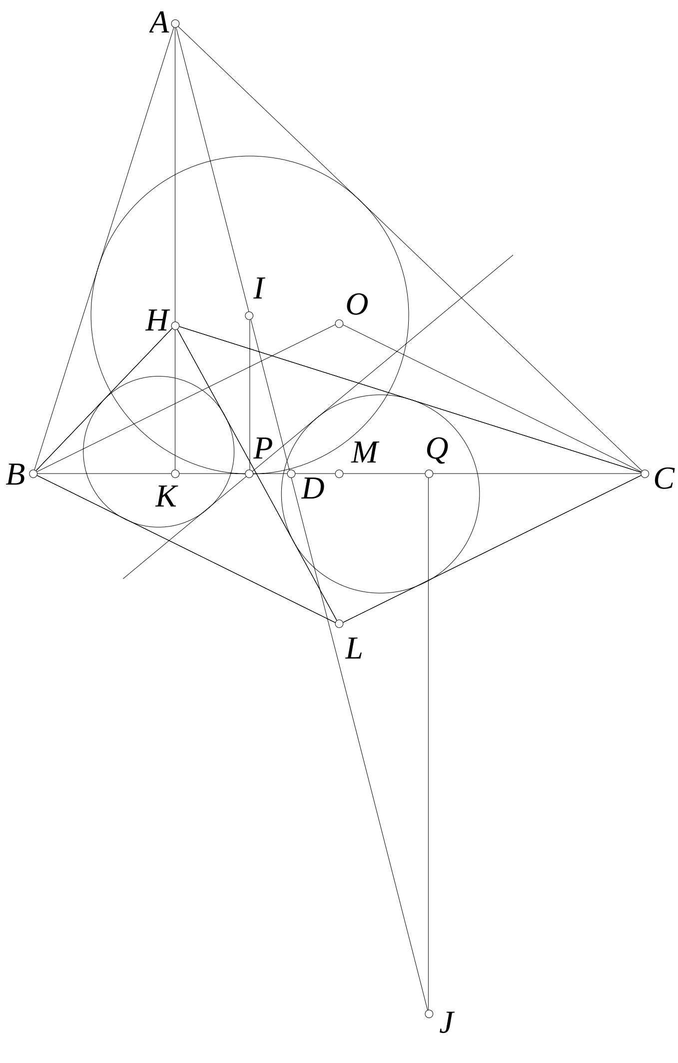
Bài toán 13. *Cho tam giác ABC có P là điểm nằm trong tam giác. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác PAB, PAC. Q là đẳng giác của P trong tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc BC tại M. KL cắt PA và đường thẳng qua M song song PA lần lượt tại S và T. Chứng minh rằng tam giác MST cân.*

Bài toán 14. *Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác HAB, HAC. KL cắt AH tại S. T đối xứng với H qua S. R là hình chiếu của T lên KL. M đối xứng với S qua R. Gọi G là hình chiếu của A lên TM. Chứng minh rằng G nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*



Lời giải. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi AD là đường kính của (O). Phép vị tự tâm H tỷ số 2 biến đường tròn (K) nội tiếp tam giác HAB thành đường tròn (Y) tiếp xúc HA, HB và tiếp xúc trong (O), đường tròn (L) nội tiếp tam giác HAC thành đường tròn (Z) tiếp xúc HA, HC và tiếp xúc trong (O) và biến S thành T. Từ đó YZ đi qua T, như vậy T chính là tâm vị tự trong của (Y) và (Z). Theo bài toán 10 thì TD là tiếp tuyến chung trong của (Y) và (Z). Vậy TD và TA đối xứng nhau qua YZ, nhưng do TR vuông góc với YZ nên TD và TA cũng đối xứng nhau qua TR. Ta lại có S và M đối xứng nhau qua R nên cũng đối xứng nhau qua TR. Từ đó TD đi qua M. Vậy hình chiếu G của A lên TM phải nằm trên đường tròn đường kính AD cũng chính là đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 15. *Cho tam giác ABC có đường cao AK, trung tuyến AM, phân giác AD, tâm ngoại tiếp O và trực tâm H. Gọi L đối xứng O qua BC. Giả sử K, D, M cố định và B, C thay đổi. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác LH của đường tròn ngoại tiếp tam giác LHB và LHC luôn đi qua một điểm cố định.*



Lời giải. Gọi đường tròn nội tiếp (I) và đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc BC tại P, Q. Ta dễ thấy hàng (AD, IJ) điều hòa, chiếu vuông góc xuống BC cho ta hàng (HD, PQ) điều hòa. Theo kết quả đã biết M là trung điểm PQ nên

$$MP^2 = MQ^2 = MD \cdot MK,$$

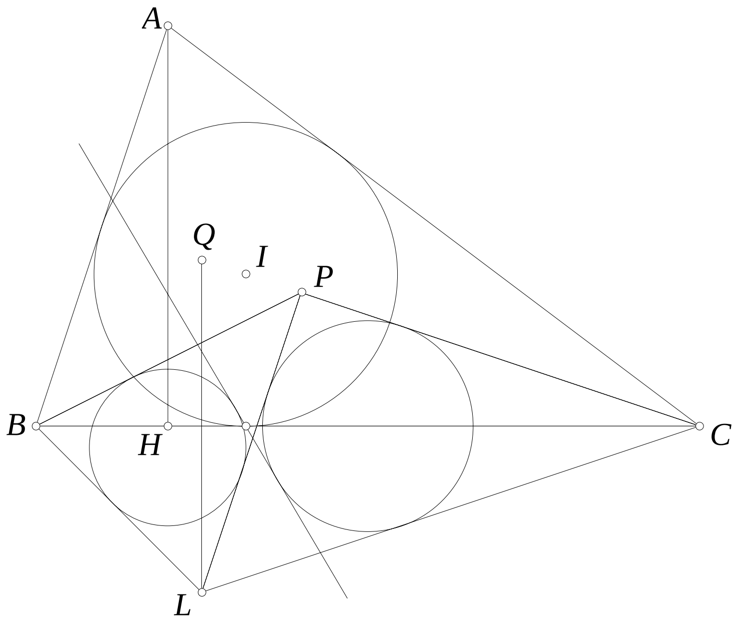
do M, D, K cố định nên P cố định. Do O và L đối xứng nhau qua BC nên

$$\angle LBC = \angle OBC = \angle ABH.$$

Tương tự $\angle LCB = \angle ACH$ nên A và L đẳng giác trong tam giác HBC. Theo bài toán 3 tiếp tuyến chung trong khác LH của đường tròn ngoại tiếp tam giác LHB và LHC luôn đi qua tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với BC đó chính là P cố định. □

Tổng quát hơn bài toán trên cho ta bài toán sau, lời giải hoàn toàn tương tự.

Bài toán 16. *Cho tam giác ABC có đường cao AK, trung tuyến AM, phân giác AD. Hai điểm P, Q đẳng giác trong tam giác ABC. Gọi L đối xứng Q qua BC. Giả sử K, D, M cố định và B, C, P, Q thay đổi. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác LP của đường tròn ngoại tiếp tam giác LPB và LPC luôn đi qua một điểm cố định.*



Lời giải. Tương tự lời giải trên ta dễ chứng minh A và L đẳng giác trong tam giác PBC và đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với BC tại điểm cố định nên tuyến chung trong khác LP của đường tròn ngoại tiếp tam giác LPB và LPC luôn đi qua một điểm cố định đó. □

4. Một số bài luyện tập

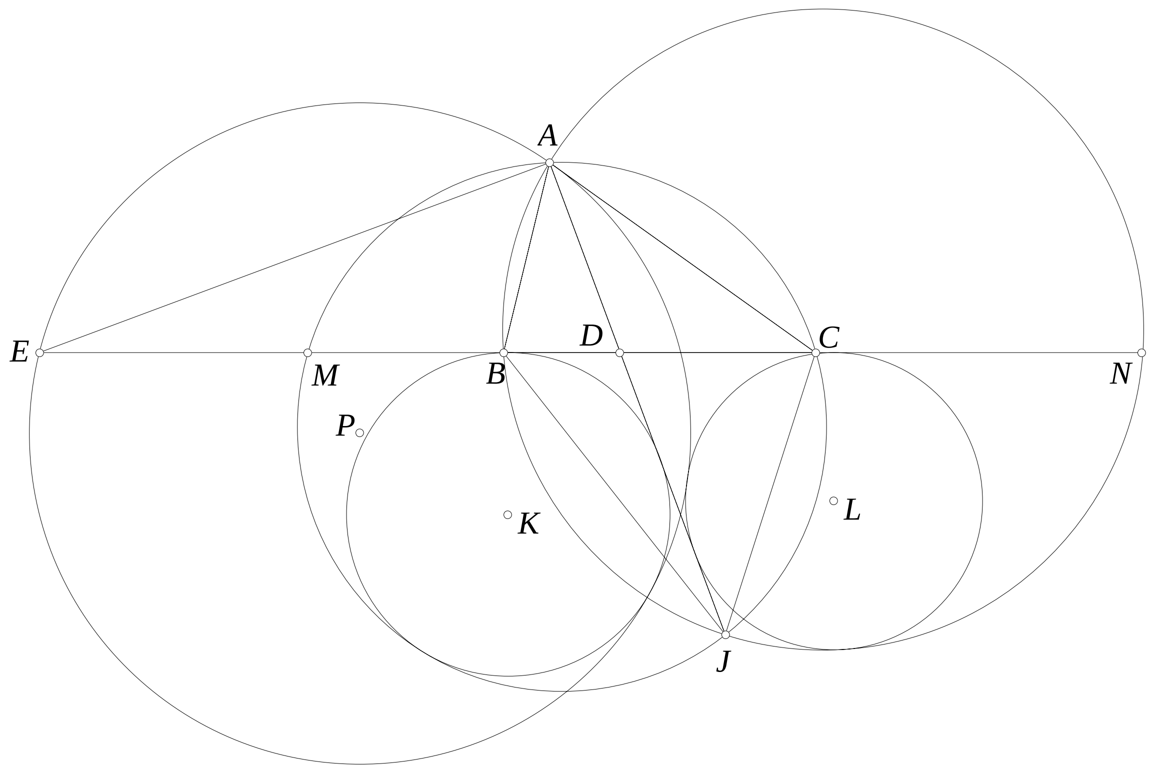
Các ứng dụng của các bài toán trên còn rất nhiều, các bạn hãy làm các bài tập sau để luyện tập.

Bài tập 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên (O). I là tâm nội tiếp tam giác ABC. IA, IB, IC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn ID, IE và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn ID, IF và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác ID của (K) và (L) luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.

Bài tập 2. Cho tam giác ABC nhọn có tâm ngoại tiếp O. Tiếp tuyên chung trong khác OA của đường tròn nội tiếp tam giác OAB, OAC cắt BC tại D. Tương tự có E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Bài tập 3. Cho tam giác ABC với P, Q đẳng giác trong tam giác ABC. R đối xứng với Q qua BC. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác RPB, RPC. KL cắt RP tại S. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc BC tại D. Đường thẳng qua D song song với RP cắt KL tại T. Chứng minh rằng tam giác DST cân.

Bài tập 4. Cho tam giác ABC có phân giác AD và tâm bàng tiếp góc A là J. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACJ, ABJ cắt BC tại M, N khác C, B. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn DM, DJ và tiếp xúc trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ACJ. Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn DN, DJ và tiếp xúc trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ABJ. Đường tròn (P) đi qua A và tiếp xúc với (K), (L) sao cho K và L không cùng ở trong hoặc ở ngoài (P). Chứng minh rằng P đi qua chân phân giác ngoài kẻ từ A của tam giác ABC.



Bài tập 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) trực tâm H. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn HA, HB và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn HA, HC và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng có một tiếp tuyến chung ngoài của (K) và (L) song song với BC.

Bài tập 6. Cho tam giác ABC với trực tâm H. Chứng minh rằng có một tiếp tuyến chung ngoài của đường tròn nội tiếp tam giác HAB, HAC song song với BC.

Bài tập 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn A-mixtilinear tiếp xúc (O) tại D. Gọi (K), (L) là các đường tròn I- mixtilinear của tam giác IAB, IAC. Đường tròn (P) đi qua I và tiếp xúc với (K), (L) sao cho K và L không cùng ở trong hoặc ở ngoài (P). (P) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại Q khác I. Chứng minh rằng Q, I, D thẳng hàng.

Bài tập 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn A-mixtilinear tiếp xúc (O) tại D. Gọi (K) tiếp xúc đoạn IA,IB và tiếp xúc trong (O) và đường tròn (L) tiếp xúc đoạn IA, IC và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (P) đi qua I và tiếp xúc với (K), (L) sao cho K và L không cùng ở trong hoặc ở ngoài (P). Chứng minh rằng (P) đi qua D.

Bài tập 9. Cho tam giác ABC với trực tâm H.

1) Chứng minh rằng có một và có một tiếp tuyến chung trong của đường tròn bàng tiếp góc H của các tam giác HAB, HAC chia đôi BC và có tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này song song với BC.

2) Chứng minh rằng có một và có một tiếp tuyến chung trong của đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác HAB, HAC chia đôi BC và có tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này song song với BC.

3) Chứng minh rằng có một và có một tiếp tuyến chung trong của đường tròn bàng tiếp góc B của tam giác HAB và đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác HAC chia đôi BC và có tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này song song với BC.

Bài tập 10. Cho tam giác ABC với điểm P sao cho $\angle PBA = \angle PCA$.

1) Chứng minh rằng có một và có một tiếp tuyến chung trong của đường tròn bàng tiếp góc P của các tam giác PAB, PAC chia đôi BC.

2) Chứng minh rằng có một và có một tiếp tuyến chung trong của đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác PAB, PAC chia đôi BC.

3) Chứng minh rằng có một và có một tiếp tuyến chung trong của đường tròn bàng tiếp góc B của tam giác PAB và đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác PAC chia đôi BC.

Cuối cùng là một kết quả rất thú vị liên quan tới bài toán ban đầu do tác giả tìm ra.

Bài tập 11. Cho $\triangle ABC$, trực tâm H. Gọi d_a là tiếp tuyến chung trong khác HA của đường tròn nội tiếp tam giác HAB, HAC. Tương tự có d_b, d_c. Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng quy.

Tài liệu tham khảo

[1] Topic common tangent passes through midpoint.
`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h411403`

[2] Topic A pretty problem with 3 incircles (by Tiks).
`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h354536`

[3] Tạp chí toán học và tuổi trẻ số 390 tháng 12 năm 2009.

[4] Tạp chí toán học và tuổi trẻ số 394 tháng 4 năm 2010.

[5] Topic Segment ratio.
`http://artofproblemsolving.com/community/c6h246658`

[6] Circles [incircles of BCI, CAI, ABI].
`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h3680`

[7] Topic Tangent to incircles.
`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h487427`

[8] Topic common tangent and parallel.
`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h359843`