

# Mỗi tuần một bài toán

**Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

**Đ**ây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

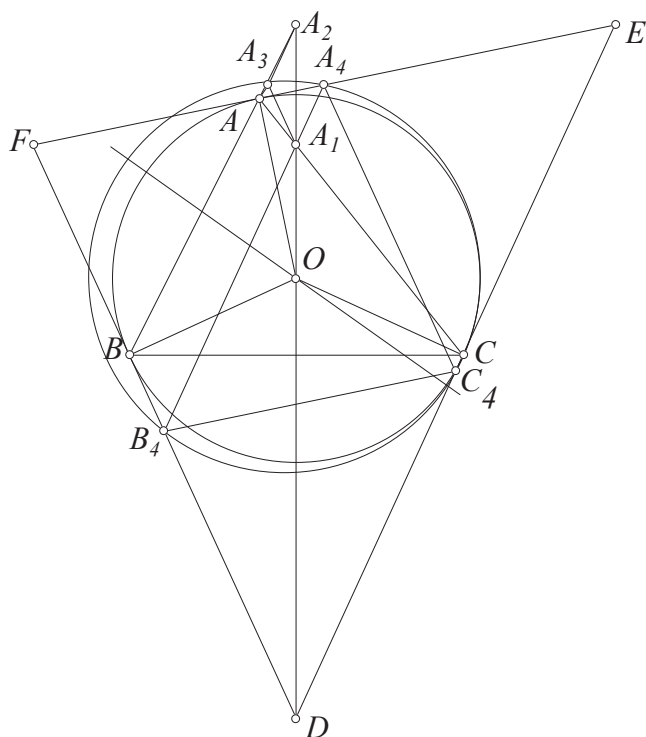
## Đề bài

Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Trung trực  $BC$  cắt  $CA, AB$  tại  $A_1, A_2$ . Trên trung trực  $A_1A_2$  lấy  $A_3$  sao cho  $AA_3$  vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác  $ABC$ . Lấy  $A_4$  đối xứng  $A_3$  qua  $A_1A_2$ . Dựng tương tự các điểm  $B_4, C_4$ . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $A_4B_4C_4$  tiếp xúc  $(O)$ .

## Lời giải

**Bổ đề.** Cho tam giác  $ABC$  có tâm ngoại tiếp  $O$  và tâm nội tiếp  $I$ .  $D$  là hình chiếu của  $I$  lên  $BC$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  $K$  là đối xứng của  $M$  qua  $AI$ . Khi đó  $KD$  vuông góc với  $OI$ .

Bổ đề là một đề toán đề nghị bởi **TS. Nguyễn Minh Hà** trên báo TTT2 và đã được tác giả phát triển tại [đây](#).



**Giải bài toán.** Gọi các tiếp tuyến qua  $A, B, C$  của  $(O)$  cắt nhau tạo thành tam giác  $DEF$  thì đường thẳng Euler của tam giác  $ABC$  chính là đường thẳng  $OI$  của tam giác  $DEF$ . Theo bổ

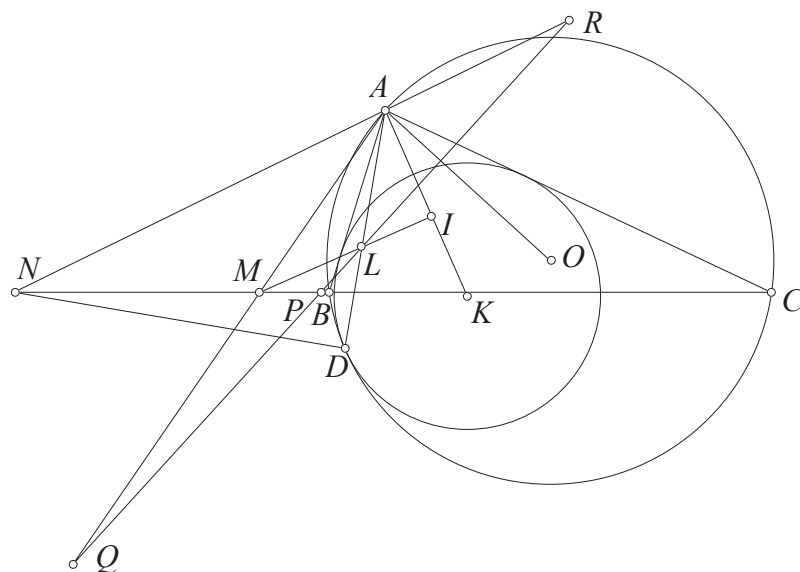
đề thì đường thẳng  $AA_3$  đi qua đối xứng của trung điểm  $EF$  qua  $OD$ . Ta dễ chứng minh được trung điểm  $EF$  cũng nằm trên trung trực  $A_1A_2$ . Do đó qua đối xứng trục  $OD$  thì trung điểm  $EF$  phải là đối xứng của giao điểm đường thẳng qua  $A$  vuông góc đường thẳng Euler và trung trực  $A_1A_2$  với chú ý rằng trung trực  $A_1A_2$  vuông góc  $OD$  nên bất biến qua đối xứng trục  $OD$ . Giao điểm đó chính là  $A_3$  nên  $A_4$  đối xứng  $A_3$  qua  $OD$  chính là trung điểm  $EF$ . Chứng minh tương tự  $B_4, C_4$  là trung điểm  $FD, DE$ . Từ đó theo định lý Feuerbach thì đường tròn ngoại tiếp tam giác  $A_4B_4C_4$  tiếp xúc  $(O)$ .

## Nhận xét

Tác giả tạo ra bài toán này là dựa trên bổ đề trên, bổ đề đó cũng có nhiều ứng dụng và phát triển khác. Các bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, bạn **Nguyễn Hồng Sơn** lớp 10 toán, **Trương Mạnh Tuấn** lớp 11 toán, trường THPT chuyên KHTN và **Phan Vũ Mỹ Quỳnh** lớp 10 toán, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng đã cho các lời giải khác tại [đây](#).

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  tâm nội tiếp  $I$ . Đường tròn  $(K)$  tiếp xúc  $CA, AB$  và tiếp xúc trong  $(O)$  tại  $D$ .  $M, N$  thuộc  $BC$  sao cho  $IM \perp AI$  và  $DN \perp AD$ .  $IM$  cắt  $AD$  tại  $L$ . Đường thẳng qua  $L$  vuông góc với  $OA$  cắt  $BC, AM, AN$  lần lượt tại  $P, Q, R$ . Chứng minh rằng  $P$  là trung điểm  $QR$ .



Mọi trao đổi xin gửi về email [analgeomatica@gmail.com](mailto:analgeomatica@gmail.com).