ĐỊNH LÝ CARNOT VÀ ỨNG DỤNG GIẢI TOÁN

Biên soạn: Huỳnh Chí Hào

I. Định lý Carnot

Định lí Carnot là định lí khá quan trọng của hình học phẳng, nó cho ta điều kiện cần và đủ để kiểm tra sự đồng quy của ba đường thẳng khi ba đường thẳng đó theo thứ tự vuông góc với ba cạnh của một tam giác.

1. Định lý

Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P. Các đường thẳng Δ_A, Δ_B, Δ_C theo thứ tự qua M, N, P và theo thứ tự vuông góc với BC, CA, AB. Khi đó : Δ_A, Δ_B, Δ_C đồng quy khi và chỉ khi :

$$(MB^2 - MC^2) + (NC^2 - NA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0.$$

a) Bổ đề 1:

Cho hai điểm A, B phân biệt và một số k. Tồn tại duy nhất điểm H thuộc đường thẳng AB sao cho : $HA^2 - HB^2 = k$.

Chứng minh

Gọi I là trung điểm của AB. Ta có :

$$HA^2 - HB^2 = k \Leftrightarrow \overline{HA}^2 - \overline{HB}^2 = k \Leftrightarrow (\overline{HA} - \overline{HB})(\overline{HA} + \overline{HB}) = k$$

$$\Leftrightarrow \overline{BA}(\overline{HI} + \overline{IA} + \overline{HI} + \overline{IB}) = k \Leftrightarrow 2\overline{BA}.\overline{HI} = k \Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{k}{2\overline{AB}}.$$

Đẳng thức trên chứng tỏ sự tồn tại và duy nhất của điểm H.

b) Bổ đề 2:

$$CD \perp AB \Leftrightarrow CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2.$$

Chứng minh

Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của C, D trên AB.

Theo định lí Pythagoras và theo bổ đề 1, ta có :

$$CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2$$

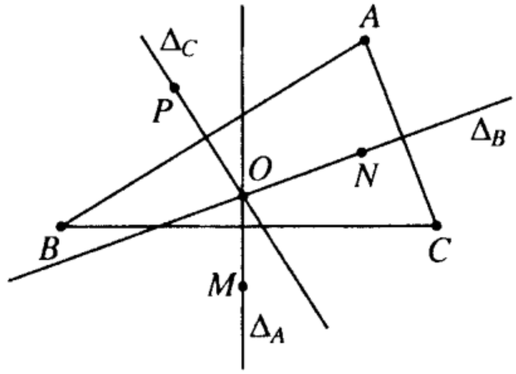
$$\Leftrightarrow (HA^2 + HC^2) - (HB^2 + HC^2) = (KA^2 + KD^2) - (KB^2 + KD^2)$$

$$\Leftrightarrow HA^2 - HB^2 = KA^2 - KB^2$$

$$\Leftrightarrow H \equiv K$$

$$\Leftrightarrow CD \perp AB.$$

CHỨNG MINH



Theo giả thiết, Δ_A , Δ_B theo thứ tự vuông góc với BC, CA. Từ đó, với chú ý rằng BC, CA cắt nhau (tại C), ta có Δ_A , Δ_B cắt nhau. Gọi O là giao điểm của Δ_A và Δ_B. Theo bổ đề 2, ta có :

$$\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C \text{ đồng quy} \Leftrightarrow O \in \Delta_C \Leftrightarrow PO \equiv \Delta_C \Leftrightarrow PO \perp AB$$

$$\Leftrightarrow PA^2 - PB^2 = OA^2 - OB^2 \Leftrightarrow (OB^2 - OA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (OB^2 - OC^2) + (OC^2 - OA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0$$

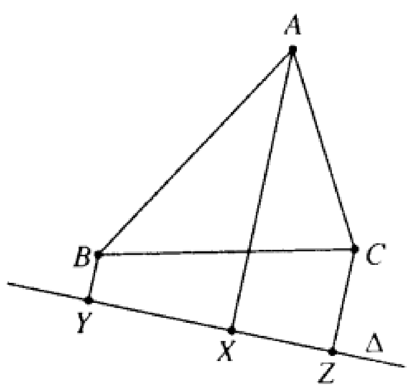
$$\Leftrightarrow (MB^2 - MC^2) + (NC^2 - NA^2) + (PA^2 - PB^2) = 0. \quad \square$$

II. Một số bài toán ứng dụng định lý

Bài 1:

Cho tam giác ABC và đường thẳng Δ. Gọi X, Y, Z theo thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên Δ. Các đường thẳng Δ_A, Δ_B, Δ_C theo thứ tự qua X, Y, Z và tương ứng vuông góc với BC, CA, AB. Chứng minh rằng : Δ_A, Δ_B, Δ_C đồng quy.

Lời giải



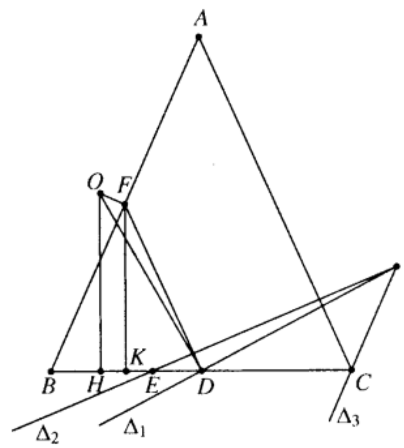
Vì AX, BY, CZ vuông góc với Δ nên :

$$(XB^2 - XC^2) + (YC^2 - YA^2) + (ZA^2 - ZB^2)$$
$$= (ZA^2 - YA^2) + (XB^2 - ZB^2) + (YC^2 - XC^2)$$
$$= (ZX^2 - YX^2) + (XY^2 - ZY^2) + (YZ^2 - XZ^2)$$
$$= 0.$$

Bài 2:

Cho tam giác ABC cân tại A. D là trung điểm của BC. E nằm trên đường thẳng BC. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE. Đường thẳng Δ_1 qua D, vuông góc với OD. Đường thẳng Δ_2 qua E, vuông góc với AC. Đường thẳng Δ_3 qua C, song song với AB. Chứng minh rằng : $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng quy.

Lời giải



Gọi F là hình chiếu của O trên AB và H, K theo thứ tự là hình chiếu của O, F trên BC (h.1.61).

Coi BC là một trục. Giả sử : $D(0)$, $B(a)$, $E(x)$.

Dễ thấy : $C(-a)$, $K\left(\frac{a}{2}\right)$, $H\left(\frac{a+x}{2}\right)$. Từ đó, với chú ý rằng $OH \perp BC$, $FK \perp BC$, theo bổ đề 2 trong phép chứng minh định lí Carnot, ta có :

$$(DO^2 - DD^2) + (ED^2 - EF^2) + (CF^2 - CO^2)$$
$$= (DO^2 - CO^2) + (CF^2 - EF^2) + ED^2$$
$$= (DH^2 - CH^2) + (CK^2 - EK^2) + ED^2$$
$$= \left(\frac{a+x}{2} - 0\right)^2 - \left[\frac{a+x}{2} - (-a)\right]^2 + \left[\frac{a}{2} - (-a)\right]^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 + (0 - x)^2.$$

Từ đó, với chú ý rằng $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ lần lượt vuông góc với OD, DF, FO, áp dụng định lí Carnot cho tam giác FOD, ta có : $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ đồng quy. □

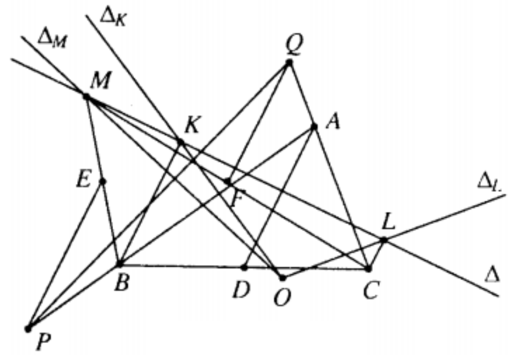
Bài 3:

Cho tam giác ABC, trung tuyến AD. Đường thẳng Δ vuông góc với AD. M chạy trên Δ. E, F theo thứ tự là trung điểm của MB, MC. Các điểm P, Q theo thứ tự thuộc AB, AC sao cho EP, FQ cùng vuông góc với Δ. Chứng minh rằng đường thẳng đi qua M và vuông góc với PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Gọi K, L theo thứ tự là hình chiếu của B, C trên Δ. Gọi Δ_M, Δ_K, Δ_L là các đường thẳng theo thứ tự đi qua M, K, L và vuông góc với QP, PA, AQ

Vì E, F, D theo thứ tự là trung điểm của MB, MC, BC nên PE, QF, AD theo thứ tự là trung trực của MK, ML, KL.



Do đó : $MP = KP$; $MQ = LQ$; $KA = LA$.

Suy ra :

$$(MQ^2 - MP^2) + (KP^2 - KA^2) + (LA^2 - LQ^2)$$
$$= (MQ^2 - LQ^2) + (KP^2 - MP^2) + (LA^2 - KA^2)$$
$$= 0.$$

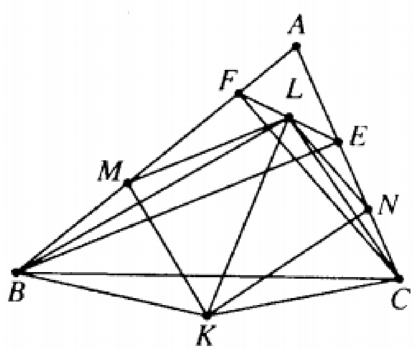
Vậy, áp dụng định lí Carnot cho tam giác QPA, ta có Δ_M, Δ_K, Δ_L đồng quy.

Điều đó có nghĩa là Δ_M luôn đi qua điểm cố định O (giao của Δ_K, Δ_L). □

Bài 4:

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BE, CF. Các điểm M, N, L theo thứ tự là trung điểm của BF, CE, EF. Đường thẳng qua M, vuông góc với BL và đường thẳng qua N, vuông góc với CL cắt nhau tại K. Chứng minh rằng : $KB = KC$.

Lời giải



Theo giả thiết :

$$\begin{cases} MB = \frac{1}{2}FB;\ ML = \frac{1}{2}EB;\ NC = \frac{1}{2}EC;\ NL = \frac{1}{2}FC \\ KM \perp BL;\ KN \perp CL;\ BE \perp CA;\ CF \perp BA. \end{cases}$$

Vậy, theo bổ đề 2 trong phép chứng minh định lí Carnot, ta có :

$$KB^2 - KL^2 = MB^2 - ML^2 = \frac{1}{4}(FB^2 - EB^2)$$
$$= \frac{1}{4}\left[(BC^2 - FC^2) - (BC^2 - EC^2)\right]$$
$$= \frac{1}{4}(EC^2 - FC^2) = NC^2 - NL^2 = KC^2 - KL^2.$$

Suy ra : $KB = KC$. □

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1:

Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) và có góc $\widehat{DAB} = 90°$. Các đường thẳng BI, DI theo thứ tự cắt các đường thẳng AD, AB tại M, N. Chứng minh rằng : $AC \perp MN$.

Bài 2:

Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Δ_A, Δ_B, Δ_C theo thứ tự qua A, B, C và lần lượt vuông góc với IK, KH, HI. Chứng minh rằng : Δ_A, Δ_B, Δ_C đồng quy.

Bài 3:

Cho tam giác ABC. Dựng các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1 theo thứ tự cân tại A_1, B_1, C_1. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB. Các đường thẳng Δ_X, Δ_Y, Δ_Z theo thứ tự đi qua X, Y, Z và lần lượt vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng : Δ_X, Δ_Y, Δ_Z đồng quy.

Bài 4:

Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Các đường tròn bàng tiếp góc A, B, C theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại M, N, P. Các đường thẳng Δ_A, Δ_B, Δ_C theo thứ tự qua M, N, P và theo thứ tự song song với AI, BI, CI. Chứng minh rằng : Δ_A, Δ_B, Δ_C đồng quy.

Bài 5:

Cho tam giác ABC có $\angle BCA = 90°$. D là chân đường cao hạ từ C. X là điểm nằm trong đoạn thẳng CD. K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK = BC$. Tương tự, L là điểm trên đoạn BX sao cho $AL = AC$. Gọi M là giao của AL và BK. Chứng minh rằng $MK = ML$.

------------------------Hết-----------------------