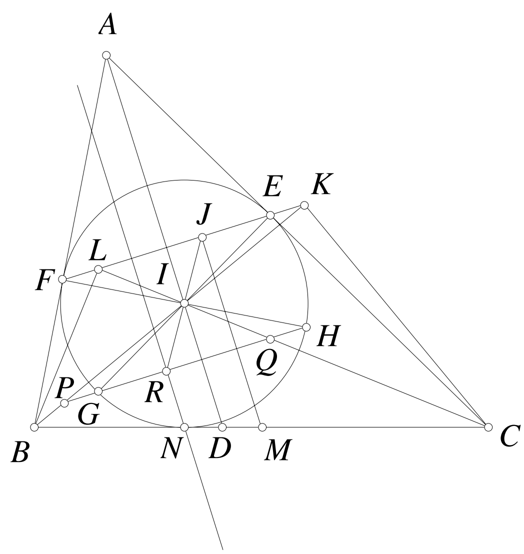
Mở rộng bài toán hình học VMO 2013

Trần Quang Hùng

Đề thi học sinh giỏi quốc gia Việt Nam năm 2013 có một bài toán hay, đề bài có thể viết gọn lại như sau

Bài 1. *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB lần lượt tại E, F. G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I. Đường thẳng GH giao IB, IC lần lượt tại P, Q. Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\frac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*



Chứng minh. Gọi IB, IC lần lượt cắt EF tại K, L. Chú ý tam giác AEF cân tại A nên $\angle KEC = \angle AEF = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\angle A}{2}) = 180^\circ - \angle BIC = \angle KIC$. Từ đó tứ giác $KEIC$ nội tiếp suy ra $\angle IKC = \angle IEC = 90^\circ$. Tương tự $\angle ILB - 90^\circ$. Từ đó nếu gọi M là trung điểm BC, J là trung điểm KL dễ có tam tam giác KLM cân nên $MJ \perp EF \quad (1)$.

Do G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I nên đường thẳng GH đối xứng đường thẳng EF qua I. GH, EF lần lượt cắt IB tại P, K suy ra I là trung điểm PK, tương tự I là trung điểm QL. Vậy hai đoạn KL và PQ đối xứng nhau qua I. Từ đó nếu gọi R là trung điểm PQ thì trung điểm J của KL và R đối xứng nhau qua I hay I là trung điểm RJ.

Gọi trung trực PQ cắt BC tại N, ta thấy RN vuông góc PQ, PQ song song $EF \quad (2)$.

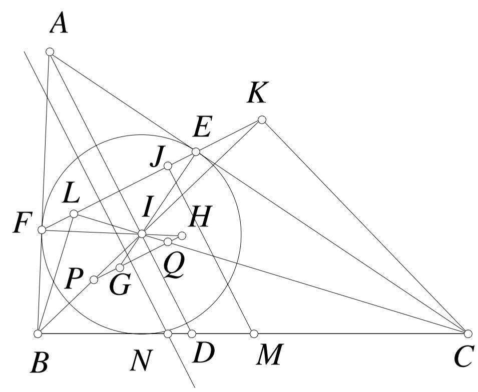
Từ (1) và (2) suy ra RN song song JM. Gọi IA cắt BC tại D, dễ có $ID \equiv IA$ vuông góc EF nên ID cũng song song với RN, JM. Từ đó trong hình thang $RJMN$ có I là trung điểm RJ nên ID là đường trung bình, vậy D là trung điểm MN.

Theo tính chất đường phân giác $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = k$ không đổi nên D cố định. M là trung điểm BC cố định nên N đối xứng M qua D cố định. Vậy trung trực PQ đi qua N cố định. $\square$

Nhận xét. Phần đầu ta chứng minh $\angle IKC = \angle ILB = 90°$ là các bài toán rất cơ bản liên quan tới đường tròn nội tiếp và các tiếp điểm. Trong đề toán còn cho giả thiết $\frac{AB}{AC} = k$ không đổi thực chất giả thiết này chỉ nhằm duy nhất mục đích suy ra chân đường phân giác góc A là cố định.

Với ý tưởng trong chứng minh ta thấy đường tròn đường kính BC và phép đối xứng tâm I có vai trò qua trọng. Dựa vào ý tưởng đó ta có thể dần dần mở rộng bài toán này như sau

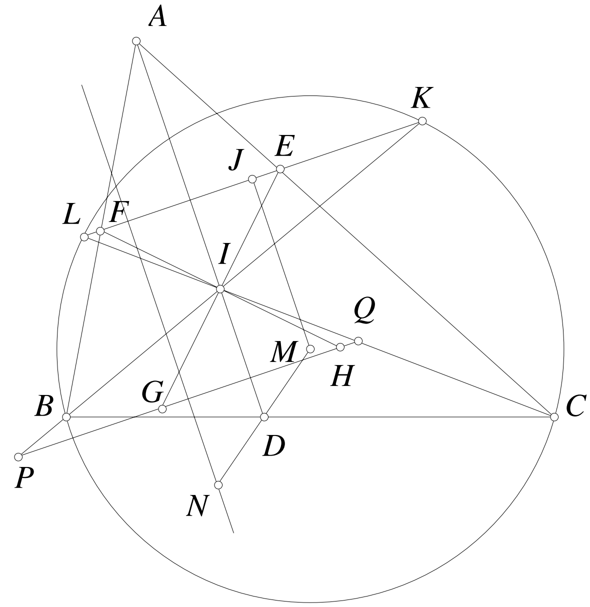
Bài 2. *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB lần lượt tại E, F. G, H lần lượt là điểm chia IE, IF theo một tỷ số m cố định. Đường thẳng GH giao IB, IC lần lượt tại P, Q. Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\frac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*



Chứng minh. Về cơ bản lời giải hoàn toàn giống lời giải bài toán 1 trong trường hợp G, H đối xứng E, F qua I. Ta chỉ chú ý rằng nếu G, H chia IE, IF tỷ số m có nghĩa là đường thẳng GH là ảnh của đường thẳng EF qua phép vị tự tâm I tỷ số m. Qua đó một cách hoàn toàn tương tự ta chứng minh được trung trực PQ đi qua N cố định là ảnh vị tự của M qua tâm D tỷ số m. □

Nhận xét. Trong bài toán trên ta vẫn thấy vai trò qua trọng của đường tròn đường kính BC. Ta có thể tìm cách thay thế yếu tố đó, ta thay thế đường tròn đường kính BC bằng một đường tròn bất kỳ đi qua B, C. Ta thu được bài toán sau

Bài 3. *Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Một đường tròn (M) bất kỳ qua B, C. IB, IC lần lượt cắt (M) tại K, L khác B, C. KL cắt CA, AB lần lượt tại E, F. G, H là đối xứng của E, F qua I. GH cắt IB, IC tại P, Q. Giả sử đường tròn (M) và B, C cố định. A thay đổi sao cho tỷ số $\frac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*



Chứng minh. Về cơ bản lời giải giống lời giải bài toán 1, xong ở đây chỉ khác EF là giao của KL. Ta cố gắng chứng minh EF vuông góc với AI thì bài toán được giải quyết theo ý tưởng bài toán 1, thật vậy ta thấy

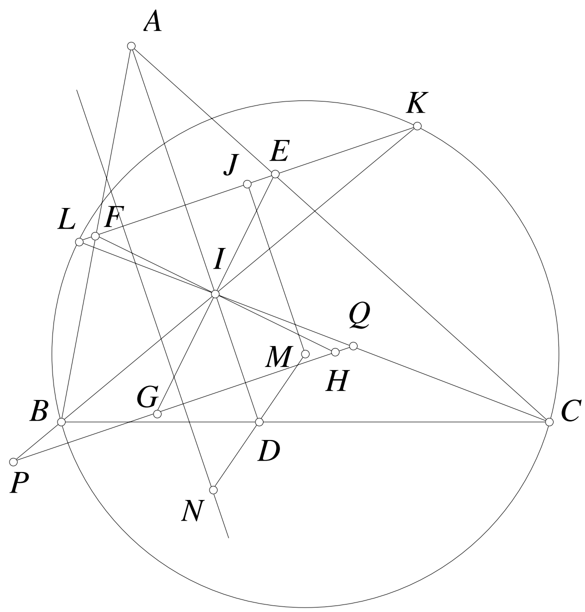
$$\angle EKI = \angle LKB = \angle LCB = \angle ICE.$$

Từ đó tứ giác $EKCI$ nội tiếp, ta suy ra $\angle AEF = \angle KEC = \angle KIC$. Tương tự $\angle AFE = \angle LIB$ mà $\angle KIC = \angle LIB$ do đó tam giác AEF cân có AI là phân giác $\angle BAC$ nên AI vuông góc EF.

Vậy đến đây lời giải hoàn toàn tương tự bài lời giải bài toán 1 bằng phép đối xứng tâm I. Ta chú ý trung trực PQ sẽ đi qua điểm N cố định đối xứng M qua D. □

Nhận xét. Bài toán tuy tổng quát cho bài toán gốc xong lời giải đạt được dễ dàng hơn do đã xuất hiện tâm M trong đề bài. Thực chất ta có thể phát biểu lại bài toán trở thành khó hơn như sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho $\angle IEC = \angle IFB = \alpha$ không đổi. G, H là đối xứng của E, F qua I. GH cắt IB, IC tại P, Q. Giả sử A thay đổi và B, C cố định sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*



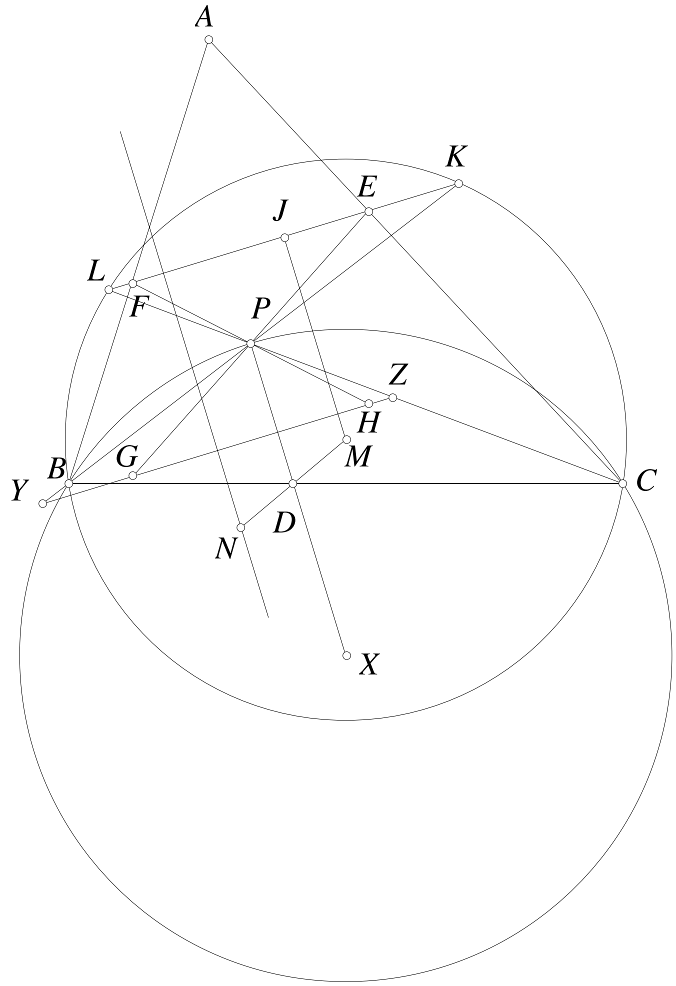
Chứng minh. Do $\angle IEC = \angle IFE = \alpha$ không đổi ta dễ chứng minh tam giác AEF cân và từ đó, nếu gọi IB, IC cắt EF tại K, L ta dễ chỉ ra B, C, K, L nằm trên đường tròn (M) cố định. Chân phân giác góc A là D cố định khi đó trung trực PQ sẽ đi qua điểm đối xứng của M qua D cố định. □

Với ý tưởng mở rộng qua phép vị tự hoàn toàn tương tự bài toán 2. Ta đề xuất bài toán sau lời giải kết hợp bài toán 2 và bài toán 3,4

Bài 5. *Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho $\angle IEC = \angle IFE = \alpha$ không đổi. G, H là các điểm lần lượt chia IE, IF tỷ số m cố định. GH cắt IB, IC tại P, Q. Giả sử A thay đổi và B, C cố định sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*

Nhận xét. Chúng ta bắt đầu có thể nhận thấy vai trò của tâm I đường tròn nội tiếp có thể thay thế được. Tuy vậy khi đó yếu tố chân đường phân giác cố định sẽ không còn được giữ nguyên

Bài 6. *Cho tam giác ABC, P là một điểm bất kỳ. Đường tròn (M) bất kỳ đi qua B, C. BP, CP lần lượt cắt (M) tại K, L. KL cắt CA, AB tại E, F. G, H lần lượt đối xứng E, F qua P. GH cắt PB, PC tại Y, Z. Giả sử B, C và (M) cố định A, P thay đổi sao cho đường nối P và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC luôn đi qua một điểm cố định trên BC. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua điểm cố định.*



Chứng minh. Về cơ bản lời giải hoàn toàn tương tự các bài toán trên. Ta chỉ chú ý nếu gọi X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC ta dễ chứng minh được XP vuông góc với EF. Chú ý rằng với giả thiết thì XP đi qua D cố định thuộc BC. Từ đó một cách hoàn toàn tương tự ta chứng minh được trung trực YZ đi qua điểm N đối xứng của M qua D cố định. □

Nhận xét. Tuy rằng bài toán có vài trò tổng quát hơn các bài trước xong ta dễ dàng thu được lời giải hơn nhờ các yếu tố cố định đã cho sẵn. Chúng ta hoàn toàn có thể tổng quát hơn một chút bằng cách thay các điểm chia PE, PF theo tỷ số m không đổi. Thực ra với bài toán tổng quát và P bất kỳ ta có thể khai thác được rất nhiều tính chất mới từ bài toán này, xin dành cho bạn đọc tiếp tục tìm tòi. Cuối cùng tôi xin nêu ra một ví dụ ứng dụng bài toán tổng quát khi P là trực tâm, lời giải nó xin dành cho bạn đọc.

Bài 7. *Cho đoạn BC và D thuộc BC cố định. Đường tròn (O) thay đổi đi qua B, C. M đối xứng với O qua BC. Đường thẳng qua O song song với MD cắt (O) tại A sao cho A và M khác phía với BC. (K) là một đường tròn cố định đi qua B, C. MD cắt đường thẳng qua A vuông góc BC tại H. HB, HC cắt (K) tại E, F khác B, C. Y, Z là đối xứng của E, F qua H. Chứng minh rằng trung trực của YZ luôn đi qua một điểm cố định khi (O) di chuyển.*

Tài liệu

[1] VMO problem 3 at the AoPS

[2] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer. Geometry revisited, volume 19. The Mathematical Association of America, 1967.

[3] V. V. Prasolov. Problems in Plane Geometry. M.:MCCME, 2006.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN-ĐHKHTN-ĐHQGHN
E-mail: analgeomatica@gmail.com