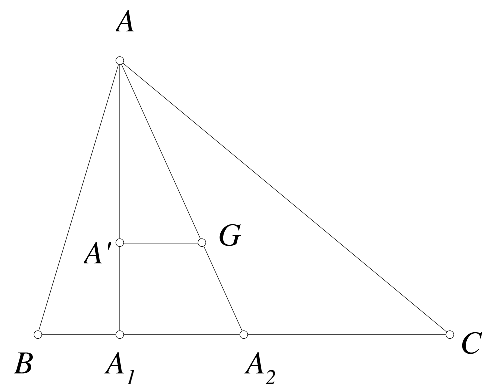
Tham dự đề ra kỳ này

Trần Quang Hùng-Võ Quốc Bá Cẩn

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC trọng tâm G, gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của G lên các đường cao tương ứng với đỉnh A, B, C của tam giác. Chứng minh rằng $2(GB'^2 + GC'^2) \geq GA'^2$.*



Chứng minh. Gọi AA_1, AA_2 lần lượt là đường cao, trung tuyến ứng với A của tam giác ABC, vậy A' là hình chiếu của G lên AA_1. Theo định lý Thales ta có $GA' = \dfrac{2}{3}A_1A_2$.

Vậy $GA'^2 = \dfrac{4}{9}A_1A_2^2 = \dfrac{4}{9}(AA_2^2 - AA_1^2) = \dfrac{4}{9}(m_a^2 - h_a^2)$

Tương tự $GB'^2 = \dfrac{4}{9}(m_b^2 - h_b^2), GC'^2 = \dfrac{4}{9}(m_c^2 - h_c^2)$. Trong đó h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao, m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài trung tuyến của tam giác ABC.

Như vậy ta quy về chứng minh bất đẳng thức

$$2(m_b^2 - h_b^2 + m_c^2 - h_c^2) \geq m_a^2 - h_a^2$$

$$\Leftrightarrow 2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2 \geq 2(h_b^2 + h_c^2) - h_a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}a^2 \geq 2(\frac{4S^2}{b^2} + \frac{4S^2}{c^2}) - \frac{4S^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9a^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} \geq \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2} - \frac{1}{a^2}$$

Đặt $x = p - a, y = p - b, z = p - c$ ta quy về chứng minh bất đẳng thức đại số sau với mọi $x, y, z > 0$.

$$\frac{9(y+z)^2}{16xyz(x+y+z)} + \frac{1}{(y+z)^2} \geq \frac{2}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+z)^2}.$$

Vì bất đẳng thức thuần nhất ta có thể giả sử $y + z = 1$. Ký hiệu $m = yz \leq \dfrac{1}{4}$ và $t = x(x+y+z)$. Từ đó ta có

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} = \frac{2x(x+y+z) + y^2 + z^2}{(x+y)^2(x+z)^2} = \frac{2t + 1 - 2m}{(t+m)^2},$$

Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{9}{16tm} + 1 \geq \frac{2(2t+1-2m)}{(t+m)^2},$$

Hay là

$$\frac{9(t+m)^2}{16tm} + (t+m)^2 \geq 2(2t+1-2m).$$

Mà ta có

$$(t+m)^2 = t^2 + 2tm + m^2 \geq (6tm - 9m^2) + 2tm + m^2 = 8tm - 8m^2,$$

Chúng ta sẽ cần chứng minh rằng

$$9(t+m)^2 + 16tm(8tm - 8m^2) \geq 32tm(2t+1-2m),$$

hay

$$(128m^2 - 64m + 9)t^2 - 2m(64m^2 - 32m + 7)t + 9m^2 \geq 0,$$

Điều này đúng vì $128m^2 - 64m + 9 > 0$ và

$$\Delta = [m(64m^2 - 32m + 7)]^2 - 9m^2(128m^2 - 64m + 9) = 32m^2(4m-1)^2(8m^2 - 4m - 1) \leq 0.$$

(Chú ý $m \leq \frac{1}{4}$) Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hay tam giác ABC đều.

$\square$