Mỗi tuần một bài toán

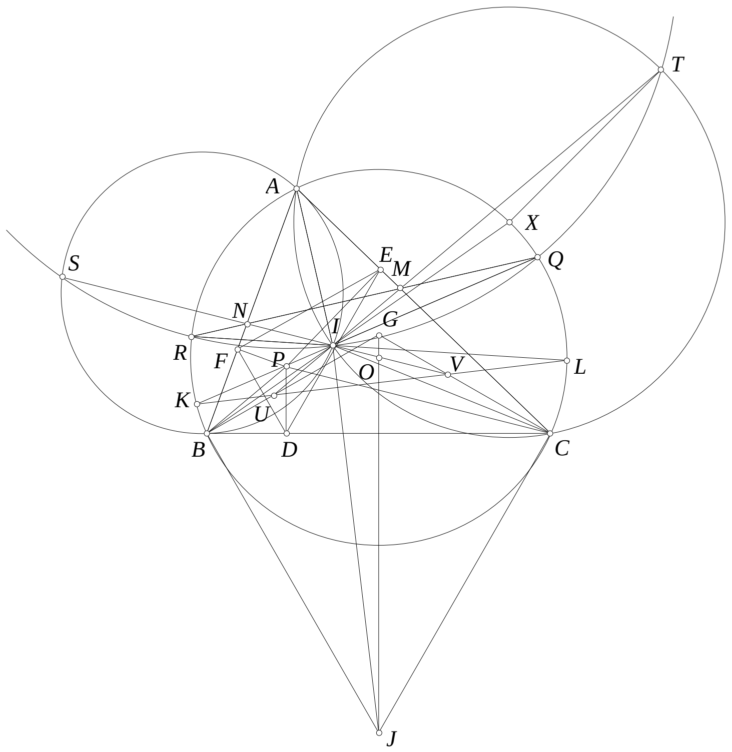
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có tâm nội tiếp I. P là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Trên CA, AB lấy M, N sao cho $IM \parallel PB$, $IN \parallel PC$. MN cắt (O) tại Q, R. QI, RI cắt lại (O) tại K, L. Các đường thẳng qua B, C lần lượt song song với DF, DE cắt nhau tại J. Chứng minh rằng $IJ \perp KL$.

Lời giải



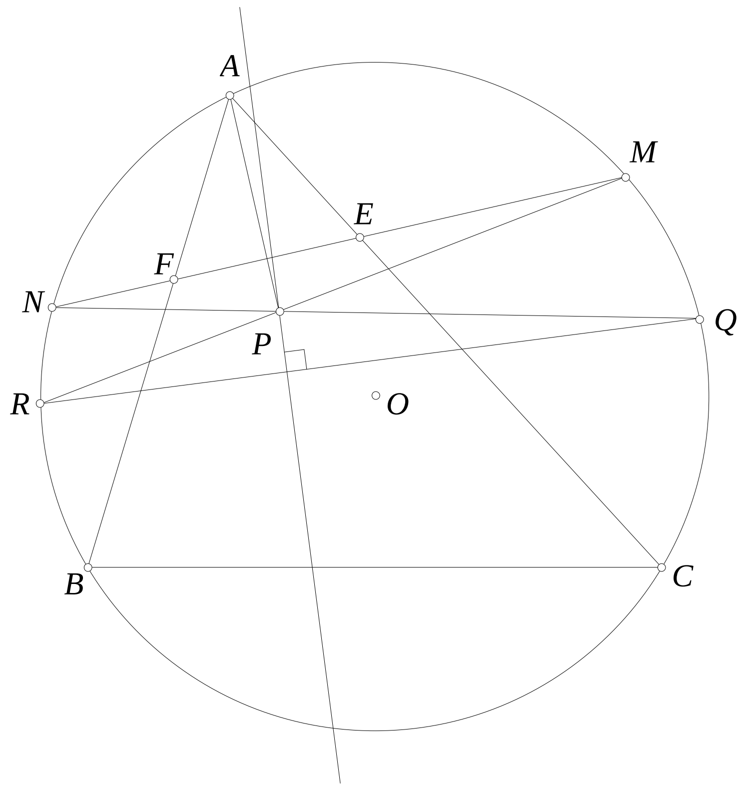
Gọi IM, IN lần lượt cắt các đường tròn (IAC), (IAB) tại T, S khác I. Ta thấy $MI \cdot MT = MA \cdot MC = MR \cdot MQ$ nên T nằm trên đường tròn (IQR). Tương tự S nằm trên đường tròn (IQR). Gọi IM, IN lần lượt cắt KL tại U, V. Ta có $\angle UKI = \angle IRQ = \angle ITQ$ nên tứ giác $KUQT$ nội tiếp. Gọi BI cắt (O) tại X khác B. Ta suy ra $IU \cdot IT = IK \cdot IQ = IB \cdot IX$ do đó tứ giác $BUXT$ nội tiếp mà tam giác XIT cân tại X do đó tam giác UBI cân tại U. Gọi G đẳng giác P trong tam giác ABC. Do $IU \parallel PB$ nên U nằm trên BG. Cũng dễ thấy $GB \perp DE \parallel BJ \parallel BJ$. Tương tự $GC \perp CJ$. Từ đó JB tiếp xúc đường tròn (U, UB). Vậy $\mathcal{P}_{U/(J)} = UB^2 = UI^2 = \mathcal{P}_{U/(I,0)}$ do đó U nằm trên trục đẳng phương của đường tròn (J) và đường tròn điểm I. Tương tự với V nên UV hay KL là trục đẳng phương của đường tròn (J) và đường tròn điểm I do đó $IJ \perp KL$.

Nhận xét

Bài toán này được tác giả phát triển từ bài toán chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHSP năm 2017. Bạn **Nguyễn Minh Hiếu** gửi tới tác giả lời giải tương tự đáp án, bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải dùng định lý Pascal rất thú vị.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P di chuyển trên phân giác trong góc $\angle BAC$. E, F là hình chiếu của P lên CA, AB. EF cắt (O) tại M, N. MP, NP cắt lại (O) tại Q, R. Chứng minh rằng đường thẳng qua P vuông góc QR luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

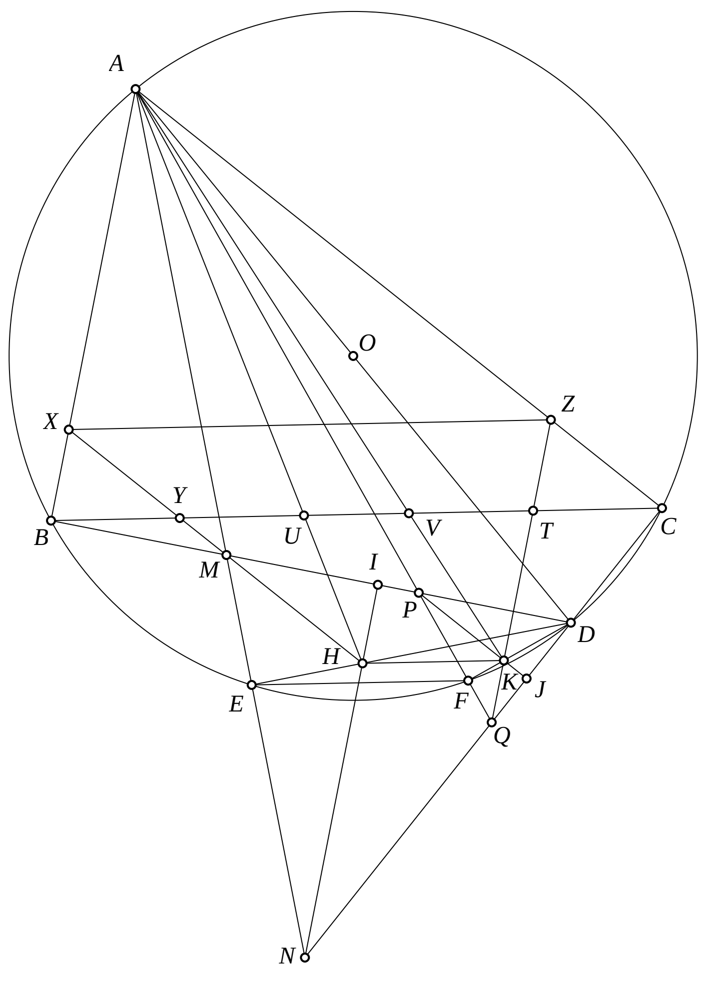
Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. E, F thuộc (O) sao cho $EF \parallel BC$. AE cắt DB, DC tại M, N. AF cắt DB, DC tại P, Q. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giac DMN và DPQ. AH, AK cắt BC tại U, V. Chứng minh rằng $BU = CV$.

Tác giả: **Trần Minh Ngọc**

Lời giải

Lời giải sau kết hợp ý tưởng của bạn **Nguyễn Minh Hiếu** lớp 12 Toán THPT chuyên SP và **Nguyễn Tiến Dũng,** Hà Nội



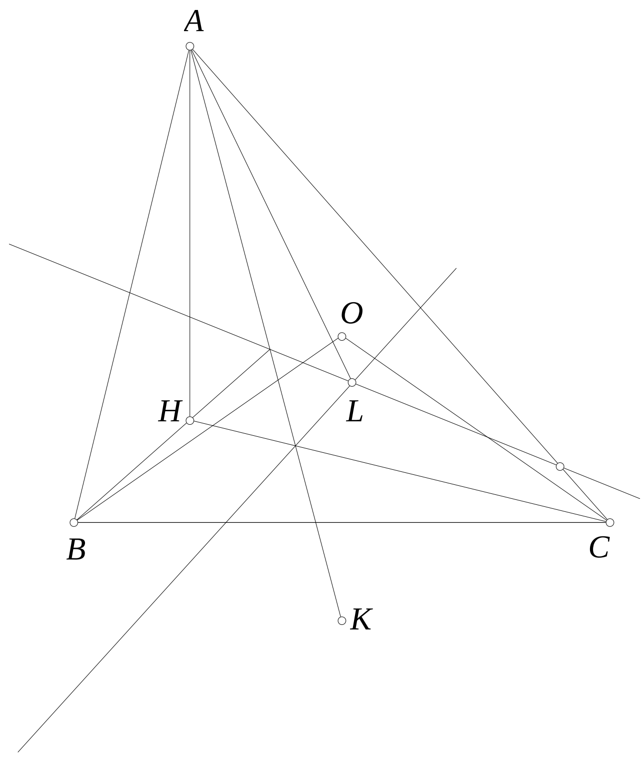
Gọi NH cắt DM tại I. PK cắt DQ tại J. MH cắt BA, BC lần lượt tại X, Y. QK cắt CA, CB lần lượt tại Z, T. Hai tam giác DMN và DPQ đồng dạng g.g nên $\frac{DH}{DE} = \frac{DK}{DF}$ và $\frac{NH}{NI} = \frac{PK}{PJ}$. Từ đó, dễ thấy $HK \parallel EF$. Do $TH \parallel NH \parallel AB$ và $XY \parallel PK \parallel AC$ nên $\frac{CY}{CB} = \frac{AX}{AB} = \frac{NH}{NI} = \frac{PK}{PJ} = \frac{AZ}{AC} = \frac{BT}{BC}$. Vì thế $XZ \parallel BC$ và $BT = -CY$. Chú ý rằng các tứ giác $BXZT$ và $CZXY$ là các hình bình hành và $XZ \parallel YT \parallel HK$, ta có $\frac{\overline{UC}}{\overline{UY}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{YH}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CZ}} \cdot \frac{\overline{YX}}{\overline{YH}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{TZ}}{\overline{TK}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{TK}} = \frac{\overline{VB}}{\overline{VT}}$. Kết hợp $\overline{BT} = -\overline{CY}$, ta thấy $\overline{BU} = -\overline{CV}$, đó là điều phải chứng minh.

Nhận xét

Đây là một bài toán chứng minh từ đẳng giác tới đẳng cự rất thú vị. Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** đã cho một lời giải khác nữa tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm ngoại tiếp O. K là tâm của đường tròn (BOC). Đối xứng của AK qua BH, CH cắt nhau tại L. Chứng minh rằng $AH = AL$.



Tác giả: **Trịnh Huy Vũ** sinh viên khoa Toán, ĐHKTN, ĐHQGHN.