Bài toán hình học thi quốc tế năm 2012 và một số mở rộng

Trần Quang Hùng và Ong Thế Phương

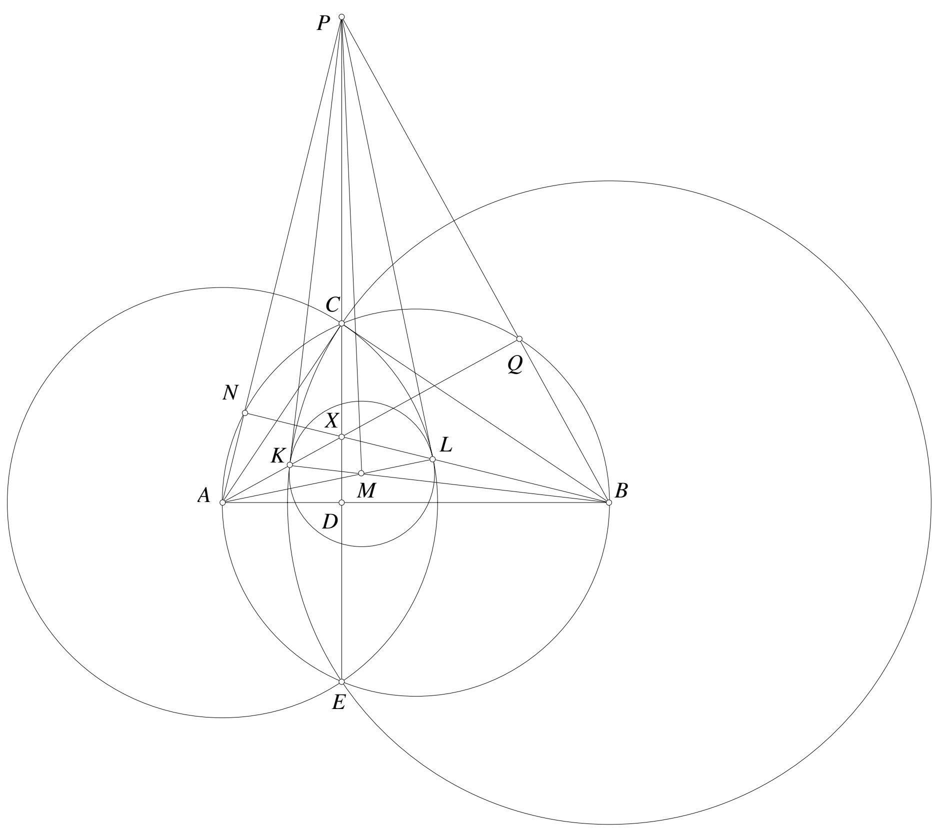
Trong đề thi toán quốc tế ngày thứ 2 năm 2012 có bài toán hay như sau

Bài 1. *Cho tam giác ABC có $\angle BCA = 90^\circ$. D là chân đường cao hạ từ C. X là điểm nằm trong đoạn thẳng CD. K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK = BC$. Tương tự L là điểm trên đoạn BX sao cho $AL = AC$. Gọi M là giao của AL và BK. Chứng minh rằng $MK = ML$.*

Chúng ta sẽ lần lượt đưa ra nhiều lời giải và bình luận cho bài toán này

Lời giải 1. Gọi AX, BX lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại Q, N khác A, B. Do đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn đường kính AB nên $\angle ANB = \angle AQB = 90^\circ$. Gọi AN giao BQ tại P dễ thấy X là trực tâm tam giác PAB nên P thuộc CD.

Ta chú ý tứ giác $PNDB$ nội tiếp và theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $AN.AP = AD.AB = AC^2 = AL^2$. Từ đó suy ra tam giác ALP vuông tại L hay PL tiếp xúc (A, AC). Tương tự PK tiếp xúc (B, BC).



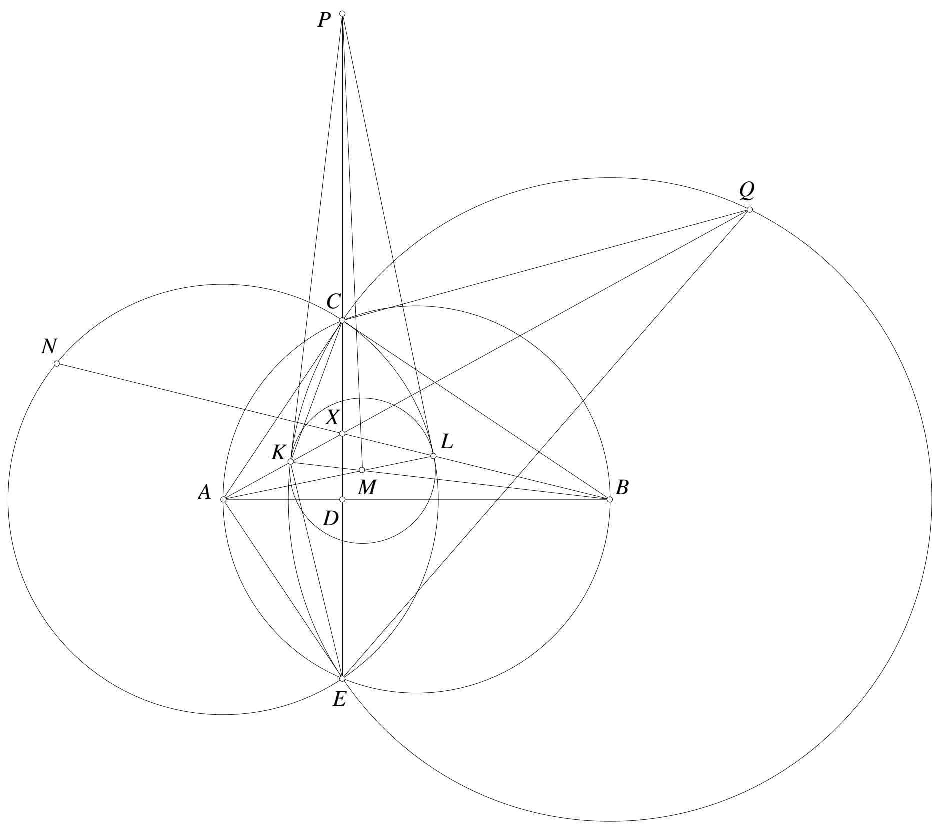
Hình 1.

Mặt khác ta cũng dễ thấy các đường tròn (A, AC) và (B, BC) cắt nhau tại điểm E khác C thì E đối xứng C qua AB. Từ đó P cũng thuộc CE, vậy theo hệ thức lượng trong đường tròn

$PL^2 = PC.PE = PK^2$ hay $PL = PK$. Từ đó ta dễ thấy hai tam giác vuông $\triangle PML = \triangle PMK$ trường hợp cạnh huyền cạnh góc vuông suy ra $MK = ML$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải thuần túy hình học rất đẹp này sử dụng những công cụ hết sức cơ bản như hệ thức lượng trong tam giác vuông và hệ thức lượng trong đường tròn. Để vận dụng các kiến thức này chỉ cần kiến thức trong chương trình lớp 9. Đó là một trong những cách tiếp cận đẹp nhất cho bài toán này. Lời giải sử dụng ý tưởng trong lời giải của nick name vladimir92 trên diễn đàn AoPS.

Lời giải 2. Dễ thấy các đường tròn (A, AC) và (B, BC) cắt nhau tại điểm E khác C thì E đối xứng C qua AB. Khi đó dễ thấy AC, AE cùng tiếp xúc đường tròn (B, BC).



Hình 2.

Gọi AK giao (B, BC) tại Q khác K. Do AC, AE cùng tiếp xúc đường tròn (B, BC) nên tứ giác $CQEK$ là tứ giác điều hòa. Do đó tiếp tuyến tại K và Q của (B, BC) cắt nhau tại điểm P thuộc CE hơn nữa theo hàng điều hòa cơ bản thì $(PXCE) = -1$. Vậy tương tự thì nếu gọi BL giao (A, AC) tại N thì tiếp tuyến tại L và N cắt nhau tại P' thuộc CE và $(P'XCE) = -1$. Do đó $P \equiv P'$. Từ đó chú ý CE là trục đẳng phương của (A, AC) và (B, BC) nên $PL = PK$. Từ đó ta dễ thấy hai tam giác vuông $\triangle PML = \triangle PMK$ trường hợp cạnh huyền cạnh góc vuông suy ra $MK = ML$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải khá ngắn gọn nhưng đòi hỏi phải có những hiểu biết về hàng điều hòa và tứ giác điều hòa, tuy vậy tư tưởng chủ đạo vẫn là chứng minh tiếp tuyến tại K, L đồng quy trên trục đẳng phương. Đây là một trong những ý tưởng khá đặc sắc để tiếp cận bài toán này. Lời giải sử dụng ý tưởng trong lời giải của nick name Jeroen trên diễn đang AoPS.

Lời giải 3. Gọi U là giao điểm của CD với đường tròn đi qua ba điểm A, D, L.

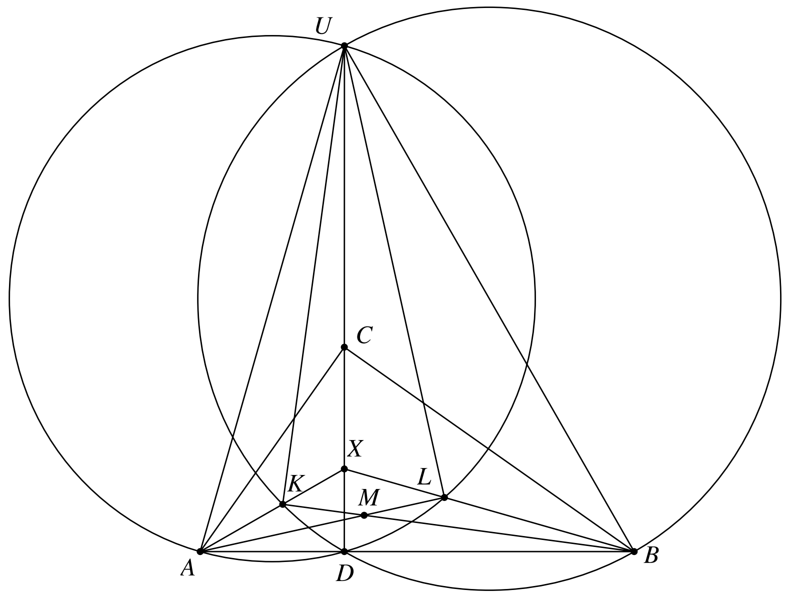
Do $AC = AL$ nên $\overline{AD}.\overline{AB} = AC^2 = AL^2$. Do đó hai tam giác ALD và ABL đồng dạng.

Suy ra $\angle AUD = \angle ALD = \angle DBL$

Do đó hai tam giác UAD và BXD đồng dạng nên $\dfrac{UD}{AD} = \dfrac{BD}{DX}$.

Mà hai tam giác UDB và ADX đều vuông tại đỉnh D nên chúng đồng dạng. Ta thu được $\angle DUB = \angle DAX = \angle DKB$ (vì $\Delta DKB \sim \Delta KAB$)

Từ đó suy ra D, K, U, B thuộc một đường tròn.



Hình 3.

Mặt khác lại có $\angle ULA = \angle UDA = 90°$ và $\angle UKB = \angle UDB = 90°$ nên $UL \perp AL$ và $UK \perp BK$.

Áp dụng định lý Carnot cho tam giác MAB có UL, UK, UD đồng quy tại U thì suy ra

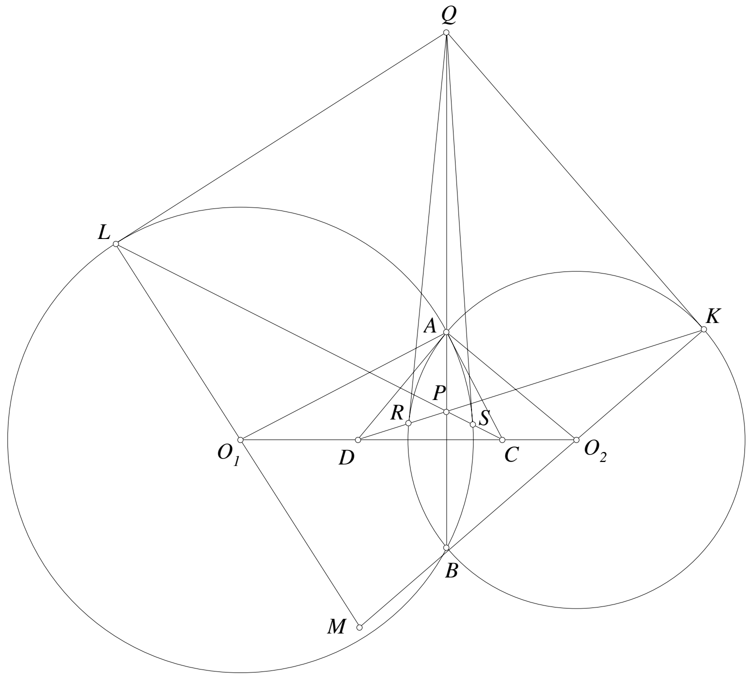
$$\left(KM^2 - KB^2\right) + \left(DB^2 - DA^2\right) + \left(LA^2 - LM^2\right) = 0$$

Hơn nữa $BK^2 = BC^2$; $AL^2 = AC^2$; $BD^2 = CB^2 - CD^2$; $AD^2 = AC^2 - CD^2$. Từ đó thu được $LM^2 = KM^2$ hay $LM = LK$. □

Nhận xét. Sử dụng định lý Carnot cũng là một cách khá lý thú để tiếp cận bài toán này. Chúng ta sẽ còn thấy lợi ích của hướng đi này trong các bài toán dưới đây.

Bài 2 (Mở rộng bài thi IMO)**.** *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B. C, D thuộc đường thẳng O_1O_2 sao cho AC vuông góc O_1A và AD vuông góc O_2A. P là điểm thuộc đoạn AB. CP giao (O_1) tại L sao cho C, L khác phía AB. DP giao (O_2) tại K sao cho D, K khác phía AB. LO_1 cắt KO_2 tại M. Chứng minh rằng $MK = ML$.*

Lời giải 1. Gọi DK giao (O_2) tại R khác K. Ta dễ thấy DA, DB tiếp xúc (O_2) do đó tứ giác $ARBK$ điều hòa. Vậy tiếp tuyến tại K và R của (O_2) cắt nhau tại Q thuộc AB và $(ABPQ) = -1$.



Hình 4.

Tương tự gọi CL giao (O_1) tại S khác L thì tiếp tuyến tại S và L của (O_1) cắt nhau tại Q' thuộc AB và $(ABPQ') = -1$ do đó $Q \equiv Q'$. Từ đó QL, QK lần lượt tiếp xúc $(O_1), (O_2)$ mà AB là trục đẳng phương của $(O_1), (O_2)$ do đó $QL = QK$. Từ đó ta dễ thấy hai tam giác vuông $\triangle QML = \triangle QMK$ trường hợp cạnh huyền cạnh góc vuông suy ra $MK = ML$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán là sự mở rộng của bài thi IMO. Khi hai đường tròn (O_1) và (O_2) trực giao ta có lại bài thi IMO. Phương pháp sử dụng hàng điều hòa là một trong những cách ngắn gọn nhất để tiếp cận bài toán này.

Bằng ý tưởng dùng định lý Carnot ở bài toán gốc ta đưa ra lời giải sau

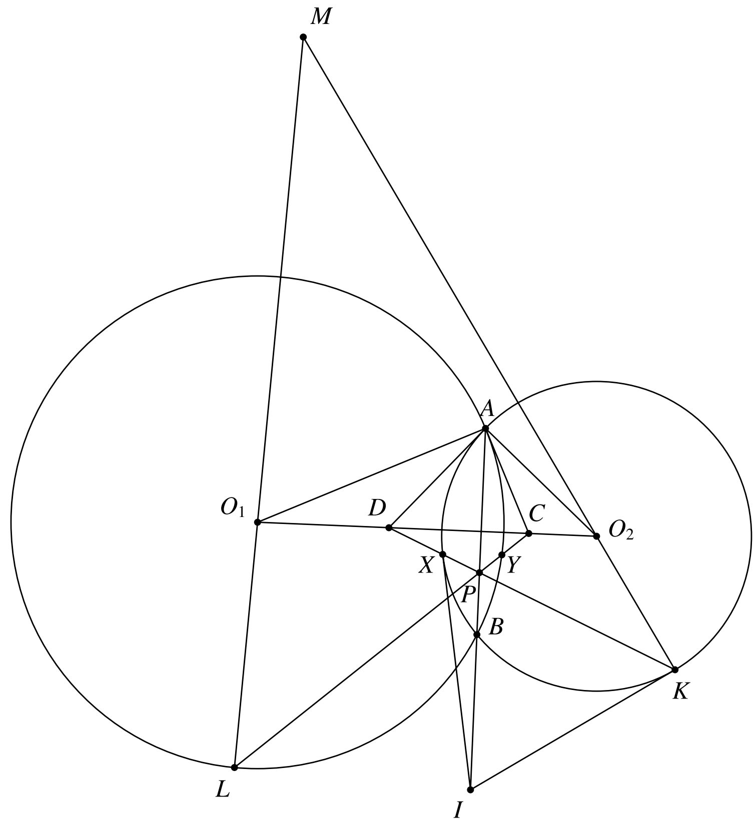
Lời giải 2. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của (O_1) và (O_2). Chú ý rằng $P_{P/(O_1)} = P_{P/(O_2)}$ nên $PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2$.

Xét tam giác PDC ta có

$$(O_1C^2 - O_1P^2) + (O_2P^2 - O_2D^2) + (AD^2 - AC^2)$$
$$= (AC^2 + R_1^2 - O_1P^2) + (O_2P^2 - R_2^2 - AD^2) + (AD^2 - AC^2) = 0$$

Từ đó theo định lý Carnot ta có đường thẳng qua O_1 vuông góc với PC, AB và đường thẳng qua O_2 vuông góc với DP đồng quy. (1)

Gọi X, Y lần lượt là giao điểm thứ 2 của DK với (O_2); CL với (O_1). Từ (1) ta thu được AB, trung trực của YL, XK đồng quy.



Hình 5.

Do DA và DB là tiếp tuyến của (O_2) nên $AKBX$ là tứ giác điều hòa, suy ra tiếp tuyến của (O_2) tại X và K và AB đồng quy tại I. Do đó trung trực của XK đi qua I. Vì AB, trung trực YL, XK đồng quy nên I thuộc trung trực YL

Mặt khác, $AYBL$ là tứ giác điều hòa nên IL và IY là tiếp tuyến của (O_1) và do I thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) nên $IL = IK$ đồng thời $\angle IKO_2 = \angle ILO_1 = 90°$

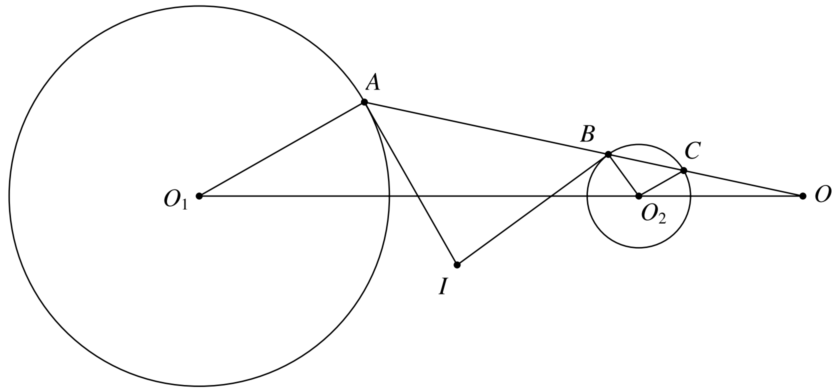
Từ đó suy ra hai tam giác ILM và IKM bằng nhau. Ta thu được $KM = ML$. □

Chúng ta xét tiếp một mở rộng khác như sau

Bài 3. *Cho (O_1) và (O_2) là hai đường tròn với d là trục đẳng phương của chúng. I là một điểm trên d. IA, IB tiếp xúc với $(O_1), (O_2)$ $(A \in (O_1), B \in (O_2))$ và A, B cùng phía với O_1O_2. IA, IB cắt O_1O_2 tại C, D. P là một điểm trên d. PC cắt (O_1) tại M, N thỏa mãn N nằm giữa M và C. PD cắt (O_2) tại K, L thỏa mãn L nằm giữa K và D. MO_1 cắt KO_2 tại U. Chứng minh rằng $UM = UK$.*

Chúng ta sử dụng hai bổ đề

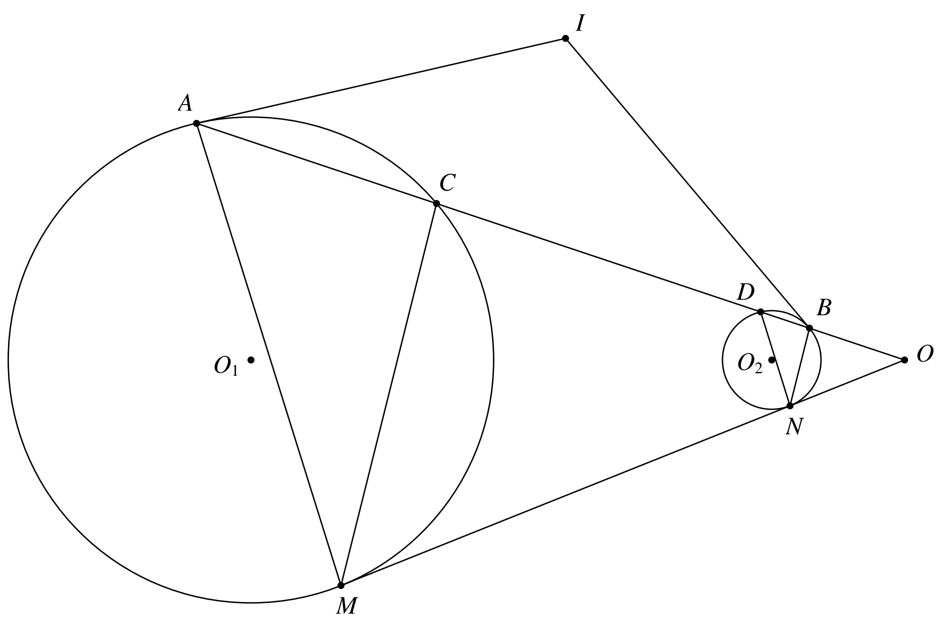
Bổ đề 3.1. *Cho (O_1) và (O_2) là hai đường tròn với d là trục đẳng phương của chúng. I là một điểm trên d. IA, IB lần lượt tiếp xúc với (O_1) và (O_2) sao cho A, B cùng phía với O_1O_2. Chứng minh rằng A, B, O thẳng hàng. Với O là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2).*



Hình 6.

Chứng minh. Gọi C là giao điểm thứ 2 của (O_2) với AB. Khi đó ta có $\angle IAB = \angle IBA$. Và $\angle IBA + \angle O_2BC = 90^\circ$. Do đó $\angle IAB + \angle O_2BC = 90^\circ$ hay $\angle IAB + \angle O_2CA = 90^\circ$. Từ đó thu được $\angle O_1AC + \angle O_2CA = 180^\circ$. Do đó $O_2C \| O_1A$. Như vậy C, A, O thẳng hàng. Suy ra A, B, O thẳng hàng. □

Bổ đề 3.2. *Cho (O_1) và (O_2) là hai đường tròn và d là trục đẳng phương của hai đường tròn đó. O là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn. MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2). Ta đã biết MN đi qua O và phép nghịch đảo tâm (O) phương tích $\overline{OM}.\overline{ON}$ biến đường tròn (O_1) thành đường tròn (O_2). Chứng minh rằng nếu A thuộc (O_1) và B là ảnh của A qua phép nghịch đảo tâm O phương tích $\overline{OM}.\overline{ON}$ thì tiếp tuyến tại A của (O_1), tiếp tuyến tại B của (O_2), d đồng quy.*



Hình 7.

Chứng minh. R_1, R_2 lần lượt là bán kính của (O_1) và (O_2). I là giao điểm của tiếp tuyến tại A của (O_1) và tiếp tuyến tại B của (O_2)

Gọi C là giao điểm thứ hai của (O_1) với OA. D là giao điểm thứ 2 của (O_2) với OA. Do B là ảnh của A qua phép nghịch đảo tâm O phương tích $\overline{OM}.\overline{ON}$ nên B, N, M, A đồng viên. Suy ra $(AM, AB) \equiv (NB, NO) \equiv (DN, DO)(\bmod \pi)$

Do đó $ND \| MA$. Đặt $k = \dfrac{R_1}{R_2}$ Thì $H(O,k)\ A \to D$. Tương tự $H(O,k)\ C \to B$. Mà $H(O,k)\ M \to N$ nên $(MA, MC) \equiv (ND, NB)(\bmod \pi)$. Do đó $(AI, AC) \equiv (BD, BI)(\bmod \pi)$. Hay tam giác IAB cân tại I. Do đó $IA = IB$. Suy ra I thuộc d. □

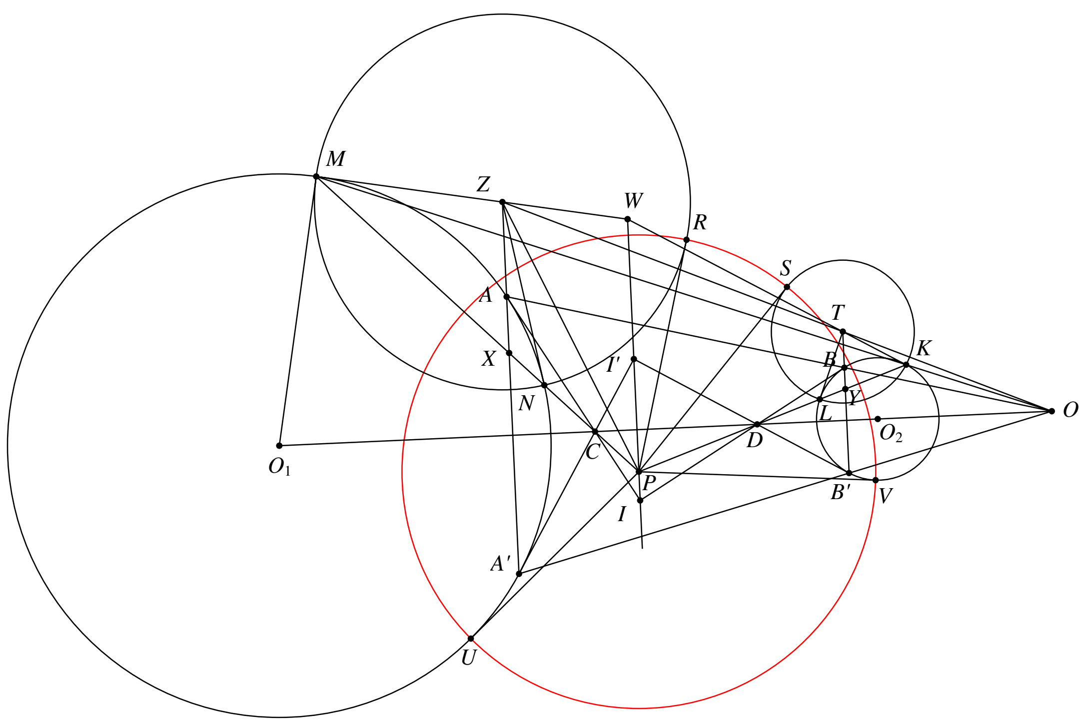
Giải bài toán. Gọi I' là điểm đối xứng của I qua O_1O_2. A', B' là tiếp điểm của hai tiếp tuyến qua I' với (O_1) và (O_2). X, Y lần lượt là giao điểm của PC với AA', PD với BB'.

Do tính đối xứng nên có I', C, A' thẳng hàng, I', D, B' thẳng hàng. Đồng thời $AA' \| BB' \| d$. Do đó $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{A'X}} = \dfrac{\overline{IP}}{\overline{I'P}} = \dfrac{\overline{BY}}{\overline{B'Y}}$. Như vậy AB, XY, $A'B'$ đồng quy.

Ta có $ANA'M$ là tứ giác điều hòa. Vậy tiếp tuyến tại M, N của (O_1) và AA' đồng quy tại Z. Đồng thời $(ZXAA') = -1$.

Tương tự tiếp tuyến tại K, L của (O_2) và BB' đồng quy tại T và $(TYBB') = -1$.

Từ đó do AB, XY, $A'B'$ đồng quy nên XY, ZT, AB, $A'B'$ đồng quy tại (O). Mặt khác theo bổ đề 1 thì A, B, O thẳng hàng và A', B', O thẳng hàng. Do đó XY và ZT đi qua O.



Hình 8.

Ta có $\dfrac{ZM^2}{TK^2} = \dfrac{\overline{ZA}.\overline{ZA'}}{\overline{TB}.\overline{TB'}} = \dfrac{OZ^2}{OT^2} \Rightarrow \dfrac{ZM}{TK} = \dfrac{OZ}{OT}$

Do đó O là tâm vị tự ngoài của (Z, ZM) và (T, TK) nên O cũng là tâm nghịch đảo của chúng.

Gọi R, S, U, V là tiếp điểm các tiếp tuyến qua P của (Z, ZM); (T, TK); (O_1); (O_2) sao cho R, S, O thẳng hàng. U, V, O thẳng hàng. Vì P thuộc trục đẳng phương của (Z, ZM) và (T, TK) nên theo bổ đề 2 thì có thể dựng được các điểm R, S, U, V thỏa mãn điều đó. Từ đó vì P là tâm đẳng phương của (O_1), (O_2), (Z, ZM), (T, TK) nên $PR = PS = PU = PV$ do đó R, S, U, V đồng viên hay $\overline{OR}.\overline{OS} = \overline{OU}.\overline{OV} = r$. Như vậy theo bổ đề 1 và bổ đề 2 và vì O là tâm nghịch đảo của (O_1) và (O_2); (Z, ZM) và (T, TK) nên phép nghịch đảo tâm O phương tích r biến (O_1) thành (O_2) và biến (Z, ZM) thành (T, TK). Do đó biến M thành K.

Từ đó theo bổ đề 2 thì tiếp tuyến tại M của (O_1) và K của (O_2) đồng quy tại W thuộc d.

Khi đó dễ có hai tam giác UMW và tam giác UKW bằng nhau. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải trên cho ta một vài kết quả khá đẹp như phép nghịch đảo tâm O biến (O_1) thành (O_2) thì cũng biến (Z, ZM) thành (T, TK) đồng thời ta thu được một loạt các kết quả đồng quy tại O rất đẹp và lời giải trên chính là ý tưởng để giải quyết bài toán tổng quát hơn.

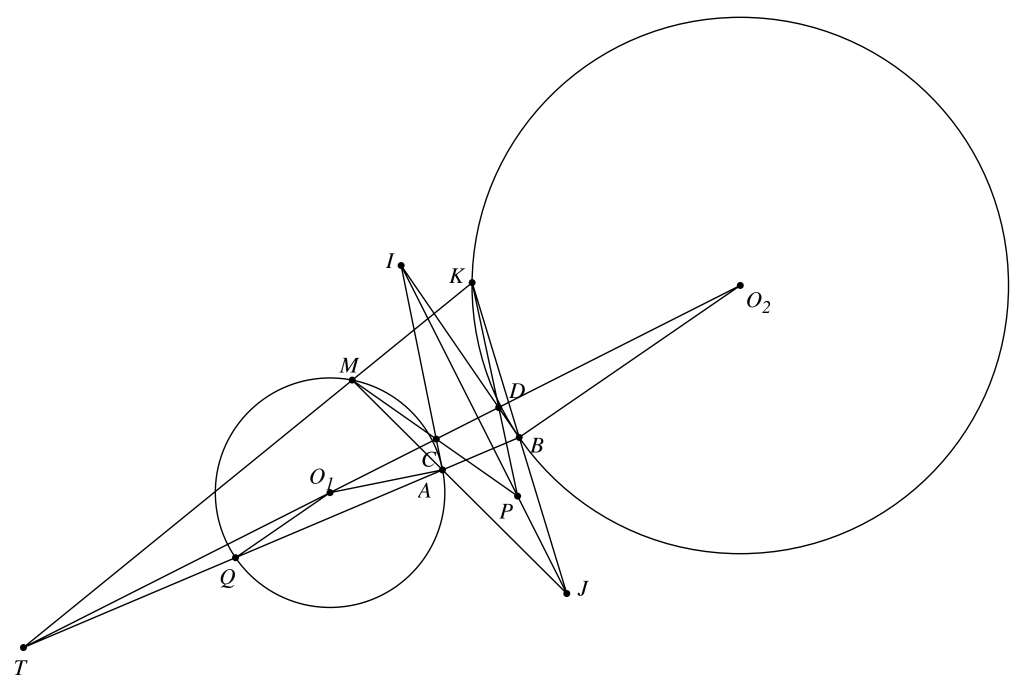
Chúng tôi xin giới thiệu lời giải khác của tác giả Nguyễn Văn Linh

Bổ đề 3.3. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2). L là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn. Gọi A, B là hai điểm trên $(O_1), C, D$ là hai điểm trên (O_2) sao cho các bộ ba L, A, C và L, B, D thẳng hàng (các cặp O_1A, O_2C và O_1B, O_2D không song song). Khi đó 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.*

Chứng minh. Gọi E, F là giao điểm thứ hai của LC với $(O_2), LD$ với (O_2). Dễ dàng chứng minh $O_2E \parallel O_1A, O_2F \parallel O_1B$. Suy ra $EF \parallel AB$. Áp dụng định lý Reim suy ra điều phải chứng minh. □

Giải bài toán. Gọi T là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2). Ta thấy rằng điều kiện để $UM = UK$ là M, K, T thẳng hang.

Gọi K' là giao điểm của TM với (O_2) sao cho O_1M và O_2K' không song song. AB giao (O_1) tại điểm thứ hai Q.



Hình 9.

Ta có $\angle O_1QA = \angle O_1AQ = \angle IAQ - 90^\circ = 180^\circ - \angle ABO_2$ (do tam giác IAB cân).

Suy ra $O_1Q \parallel O_2B$.

Từ đó T, A, B thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề 3.1 suy ra tứ giác $MK'BA$ nội tiếp. Gọi J là giao của MA và $K'B$ thì $JA.JM = JB.JK'$ nên $J \in d$.

Do MK', CD, AB đồng quy tại T nên áp dụng định lý Desargues ta thu được giao điểm của MC và DK' nằm trên IJ tức là nằm trên d.

Suy ra $K' \equiv K$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải trên cho ta ý tưởng để giải quyết bài toán tổng quát hơn như sau

Bài 4 (Tổng quát bài 3)**.** *Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) và d là trục đẳng phương của chúng. P, Q, R là ba điểm trên d. PA, PB là tiếp tuyến của (O_1) và (O_2) (A, B nằm cùng phía với O_1O_2). QC, QD lần lượt là tiếp tuyến của (O_1), (O_2) (C, D nằm cùng phía với O_1O_2). $E = QC \cap PA$; $F = PB \cap QD$. RE cắt (O_1) tại G, H. RF cắt (O_2) tại I, K sao cho G nằm giữa R và H, I nằm giữa R và K. U là giao điểm của HO_1 và KO_2. Chứng minh rằng $UK = UH$.*

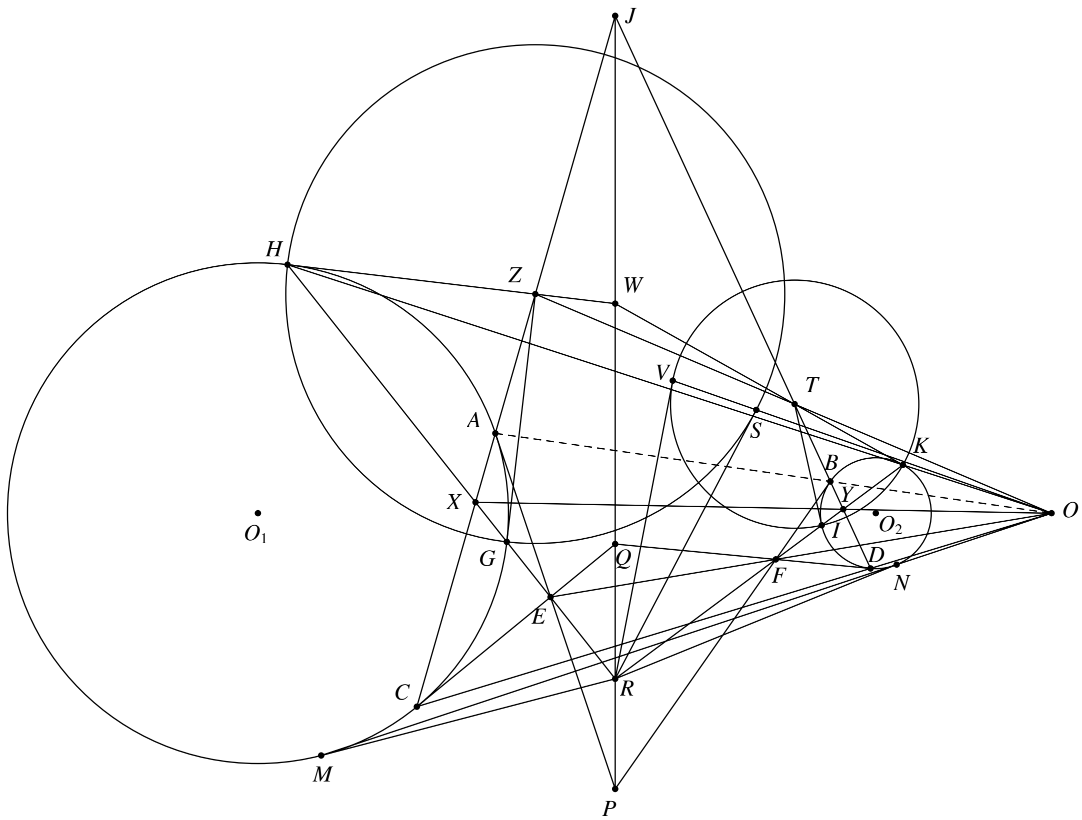
Ta vẫn sử dụng hai bổ đề của bài 3

Chứng minh. Gọi O là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2). Ta có O cũng chính là tâm nghịch đảo của hai đường tròn này.

Xét phép nghịch đảo tâm O biến (O_1) thành (O_2). Từ bổ đề 1 và 2 ta có được A, B, O thẳng hàng và C, D, O thẳng hàng. Từ đó theo bổ đề 2 ta có được B là ảnh của A và D là ảnh của C. Do đó A, B, C, D đồng viên. Như vậy AC và BD cắt nhau tại trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).

Ta có $(JAXC) = (JPRQ) = (JBYD)$. Do đó AB, CD, XY đồng quy. Mà AB, CD đồng quy tại O nên XY đi qua O.

Thấy rằng các tứ giác $GAHC$ và $IBKD$ đều là tứ giác điều hòa. Do đó tiếp tuyến tại H, G của (O_1) và AC đồng quy tại một điểm Z. Tiếp tuyến tại I, K của (O_2) và BD đồng quy tại một điểm T. Đồng thời $(ZXAC) = (TYBD) = -1$. Mặt khác AB, XY, CD đi qua (O) nên ZT đi qua O.



Hình 10.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác JZT có A, O, B thẳng hàng ta có $\dfrac{AZ}{AJ}.\dfrac{BJ}{BT}.\dfrac{OT}{OZ} = 1$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác JZT có O, C, D thẳng hàng ta có $\dfrac{CZ}{CJ}.\dfrac{DJ}{DT}.\dfrac{OT}{OZ} = 1$.

Từ đó nhân 2 đẳng thức lại và chú ý $JA.JC = JB.JD$; $ZA.ZC = ZH^2$; $TB.TD = TK^2$ suy ra $\dfrac{ZH}{TK} = \dfrac{OZ}{OT}$

Như vậy O là tâm vị tự ngoài của (Z, ZH) và (T, TK) do đó O cũng là tâm nghịch đảo của hai đường tròn này.

Thấy rằng R chính là tâm đẳng phương của (O_1), (O_2), (Z, ZH), (T, TK). Gọi RM, RN, RS, RV lần lượt là tiếp tuyến của (O_1), (O_2), (Z, ZH), (T, TK) sao cho O, M, N thẳng hàng và O, S, V thẳng hàng và ta có $RS = RV = RM = RN$ nên S, V, M, N đồng viên. Do đó $\overline{OS}.\overline{OV} = \overline{OM}.\overline{ON} = r$.

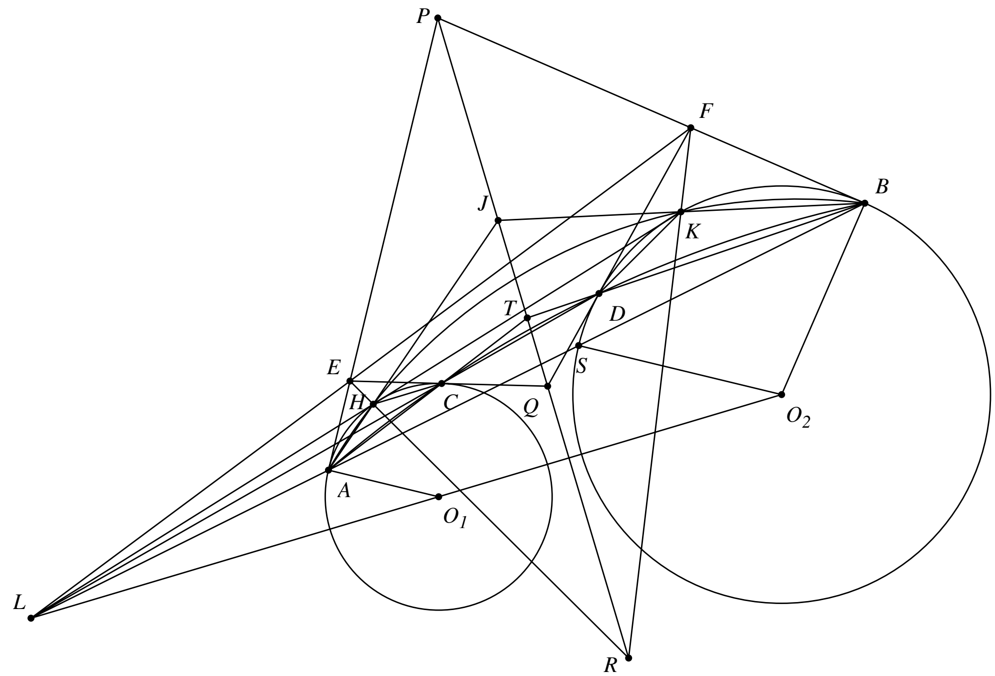
Hơn nữa O là tâm nghịch đảo của (O_1) và (O_2); (Z, ZH) và (T, TK) nên phép nghịch đảo cực O phương tích r biến (O_1) thành (O_2), (Z, HZ) thành (T, TK) do đó biến H thành K.

Từ đó theo bổ đề 2 suy ra tiếp tuyến tại H của (O_1) và K của (O_2) và d đồng quy tại W. Từ đó nhờ tính bằng nhau của UHW và UKW ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán trên bao gồm các kết quả rất đẹp mắt và với ý tưởng dùng phép nghịch đảo như trong cách giải trên ta còn thu được các kết quả sau đây

- HA, KB đồng quy tại một điểm trên d.
- Tiếp tuyến tại G của (O_1) và I của (O_2) đồng quy tại một điểm trên d.

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải khác của tác giả Nguyễn Văn Linh



Hình 11.

Chứng minh. Gọi L là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2). Chú ý rằng điều kiện để $UH = UK$ (tức là đường tròn (U, UH) tiếp xúc với (O_1) và (O_2) tại H, K) là L, H, K thẳng hàng.

Gọi K' là giao điểm của LH với (O_2) sao cho O_1H và O_2K' không song song. Ta chứng minh $K' \equiv K$.

Gọi S là giao điểm thứ hai của AB và (O_2). Do PA, PB là hai tiếp tuyến kẻ từ điểm P nằm trên trục đẳng phương d tới hai đường tròn (O_1) và (O_2) nên $PA = PB$.

Suy ra $\angle O_1AB = 90^\circ - \angle PAB = 90^\circ - \angle PBA = \angle O_2BA = \angle O_2SB$.

Từ đó $O_1A \parallel O_2S$ hay L, A, B thẳng hàng. Tương tự, L, C, D thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề 1 ta có tứ giác $ACDB$ nội tiếp.Gọi T là giao của AC và BD thì $T \in d$.

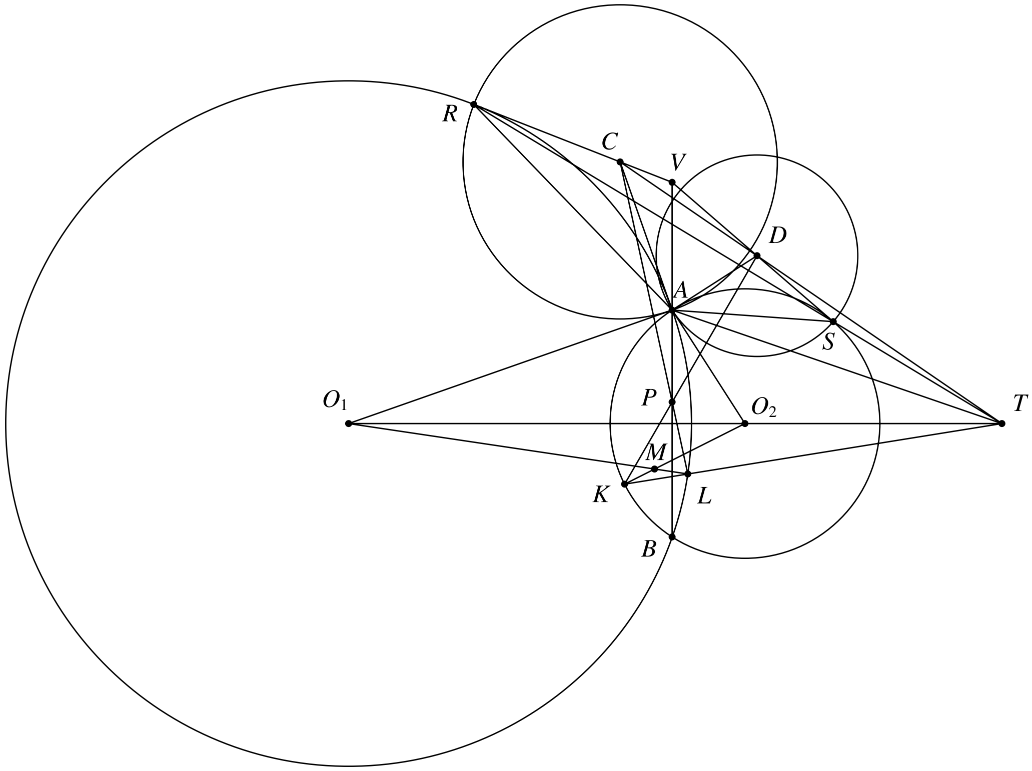
Ta có giao điểm của các cặp đường thẳng $(AE, BF), (AC, BD), (EC, FD)$ lần lượt là P, T, Q thẳng hàng nên theo định lý Desargues ta có EF, CD, AB đồng quy tại L.

Mặt khác, lại áp dụng bổ đề trên ta có $AHK'B$ nội tiếp. Gọi J là giao của AH và $K'B$ thì $J \in d$.

Gọi R' là giao của EH và FK'. Áp dụng định lý Desargues cho các đường thẳng AB, HK', EF ta có P, J, R' thẳng hàng hay $R' \in d$. Tức là $R' \equiv R$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài 4 là một kết quả khá mạnh, và nhờ đó ta có thể giải một số bài toán khác như bài toán dưới đây

Bài 5. *Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A, B. Tiếp tuyến chung ngoài của (O_1), (O_2) cắt nhau tại T. d là đường thẳng bất kỳ qua T. Tiếp tuyến tại A của (O_1), (O_2) lần lượt cắt d tại C, D. P là điểm thuộc AB. CP giao (O_1) tại L sao cho C, L khác phía AB. DP giao (O_2) tại K sao cho D, K khác phía AB. LO_1 cắt KO_2 tại M. Chứng minh rằng $MK = ML$.*



Hình 12.

Chứng minh. Do T là giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) nên AT là phân giác ngoài $\angle O_1AO_2$.

Hơn nữa $AC \perp AO_1$; $AD \perp AO_2$ do đó bằng biến đổi góc dễ dàng có được AT là phân giác ngoài của góc $\angle CAD$. Như vậy $\dfrac{TC}{TD} = \dfrac{AC}{AD}$.

Do đó T là tâm vị tự ngoài của (C, CA) và (D, DA). Như vậy T cũng là tâm nghịch đảo của (C, CA) và (D, DA).

Gọi R, S lần lượt là điểm đối xứng của A qua O_1C và O_2D. Như vậy $R \in (C, CA)$ và $S \in (D, DA)$.

Thấy rằng phép nghịch đảo tâm T phương tích TA^2 biến (O_1) thành (O_2) và (C, CA) thành (D, DA). Do đó biến R thành S.

Như vậy tiếp tuyến tại R của (O_1) và tiếp tuyến tại S của (O_2) cắt nhau tại V thuộc AB.

Áp dụng kết quả bài 4 với V, A, P thuộc trục đẳng phương AB của (O_1) và (O_2) ta có điều phải chứng minh. □

Ngoài ra chúng tôi xin đề xuất một số mở rộng tiếp nữa cho các bài toán mở rộng đề IMO mà ý tưởng chính cũng đã nằm trong các bài toán 3,4,5. Các bạn hãy xem như các bài luyện tập thêm

Bài 6. *Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B. Tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại T. d là đường thẳng bất kỳ qua T. Tiếp tuyến tại A của $(O_1), (O_2)$ lần lượt cắt d tại C, D. P là điểm thuộc AB. CP giao (O_1) tại L sao cho C, L khác phía AB. DP giao (O_2) tại K sao cho D, K khác phía AB. LO_1 cắt KO_2 tại M. Chứng minh rằng $MK = ML$.*

Bài 7. *Cho (O_1) và (O_2) ở ngoài nhau. d là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). I là điểm trên d. Kẻ IA, IB tiếp xúc với $(O_1), (O_2)$ sao cho A, B cùng phía O_1O_2. T giao của hai tiếp tiếp tuyến chung* *ngoài của* $(O_1), (O_2)$*. Đường thẳng* l *qua* T *cắt* IA, IB *tại* C, D*.* P *là điểm thuộc* d*.* PC *cắt* (O_1) *tại* E, F *sao cho* F *nằm giữa* P *và* E*.* PD *cắt* (O_2) *tại* G, H *sao cho* G *nằm giữa* P *và* H*.* O_1E *giao* O_2H *tại* K*. Chứng minh rằng* $KE = KH$*.*

Chúng tôi xin chân thành cám ơn bạn **Nguyễn Văn Linh** sinh viên đại học ngoại thương đã có những nhận xét và góp ý quý báu cho chúng tôi trong bài viết này.

Trần Quang Hùng GV trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN-ĐHQGHN.

Email: analgeomatica@gmail.com

Ong Thế Phương học sinh lớp 12T trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa Đồng Nai.

Email: mathkidonline@gmail.com

Tài liệu

[1] Topic Problem 5 IMO 2012 appears at
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=834&t=488511

[2] Topic Equivalent to IMO 2012 Q5 appears at
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=3680

[3] Topic Equal segment appears at
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=488712