Chùm đường tròn và ứng dụng

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

1 Nhắc lại về phương tích, trục đẳng phương, chùm đường tròn và tính chất

- Phương tích. Cho đường tròn (O, R) và điểm M. Phương tích của M đối với (O) là số ký hiệu $\mathscr{P}_{M/(O)} = OM^2 - R^2$.

- Khai triển của phương tích. Theo cát tuyến, theo tiếp tuyến, theo tam giác.

- Trục đẳng phương. Tập hợp những điểm có cùng phương tích với hai đường tròn gọi là trục đẳng phương của đường tròn đó.

- Chùm đường tròn. Tập hợp những đường tròn có chung một trục đẳng phương gọi là chùm đường tròn. Có ba loại chùm đường tròn là chùm Elliptic, Prabolic và Hyperbolic.

- Định lý cơ bản. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) tập hợp $(\Gamma) = \{M|\alpha\mathscr{P}_{M/(O_1)} + \beta\mathscr{P}_{M/(O_2)} = 0\}$ là một đường tròn của chùm.

2 Một số bài toán về chùm đường tròn

Bài 1. *Cho tam giác ABC đường tròn ngoại tiếp (O), đường tròn Euler (N), trọng tâm G, trực tâm H. Chứng minh rằng $(O), (N)$ và đường tròn đường kính (GH) đồng trục.*

Bài 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn nội tiếp (I). Điểm Nagel Na và điểm Gergonne Ge. Gọi K, L là đẳng giác của Na và Ge đối với tam giác ABC. Chứng minh rằng đường tròn đường kính KL và $(O), (I)$ đồng trục.*

Bài 3. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường tròn Apollonius ứng với A, B, C là các đường tròn đồng trục. Trục đẳng phương của ba đường tròn gọi là trục Lemoine của tam giác ABC. Chứng minh rằng trục Lemoine của tam giác ABC đi qua điểm Lemoine của tam giác đó.*

Bài 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. AX là đường kính của (O). Đường thẳng qua X, H vuông góc với XH lần lượt cắt EF, BC tại A_1, A_2.*

a) Chứng minh rằng tứ giác HXA_1A_2 là hình chữ nhật nội tiếp đường tròn (K_a).

b) Tương tự có các đường tròn $(K_b), (K_c)$. Chứng minh rằng các đường tròn $(K_a), (K_b), (K_c)$ đồng trục.

Bài 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A cắt BC tại T_a. M_a là trung điểm của BC. Gọi (N_a) là đường tròn Euler của tam giác AT_aH_a. Tương tự có $(N_b), (N_c)$. Chứng minh rằng các đường tròn $(N_a), (N_b), (N_c)$ đồng trục.*

Bài 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. EF giao BC tại G. AI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADG tại K. Đường thẳng qua D song song AI cắt GK tại L. Gọi (N_a) là đường tròn Euler của tam giác GLD. Tương tự có các đường tròn $(N_b), (N_c)$. Chứng minh rằng các đường tròn $(N_a), (N_b), (N_c)$ đồng trục.*

Bài 7. *Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF và P là một điểm bất kỳ. Chứng minh rằng các đường tròn $(PAD), (PBE), (PCF)$ lập thành một chùm.*

Bài 8. *Cho tam giác ABC trực tâm H. Gọi D, E, F đối xứng với A, B, C qua trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng trung trực của HD, HE, HF cắt BC, CA, AB theo ba điểm thẳng hàng.*

Bài 9. *Cho tam giác ABC tâm ngoại tiếp O. D, E, F lần lượt đối xứng A, B, C qua BC, CA, AB.*

a) Chứng minh rằng các đường tròn OAD, OBE, OCF có điểm chung L.

b) Điểm đẳng giác với tâm đường tròn Euler của tam giác ABC gọi là điểm Kosnita K. Chứng minh rằng O, K, L thẳng hàng.

Bài 10. *Cho tam giác ABC tâm ngoại tiếp O. Các điểm D, E, F thuộc đoạn OA, OB, OC sao cho $OD = OE = OF$. Chứng minh rằng các đường thẳng qua D, E, F vuông góc với OA, OB, OC cắt BC, CA, AB theo ba điểm thẳng hàng.*

Bài 11. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A, B, C của (O) lần lượt cắt nhau tại D, E, F. Lấy các điểm X, Y, Z sao cho $\dfrac{\overline{XO}}{\overline{XD}} = \dfrac{\overline{YO}}{\overline{YE}} = \dfrac{\overline{ZO}}{\overline{ZF}}$. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.*

Bài 12. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A, B, C cắt nhau tại A_1, B_1, C_1. Lấy các điểm A_2, B_2, C_2 thuộc OA, OB, OC sao cho $OA_2 = OB_2 = OC_2$. Lấy các điểm A_3, B_3, C_3 sao cho $\dfrac{\overline{OA_3}}{\overline{OA_1}} = \dfrac{\overline{OB_3}}{\overline{OB_1}} = \dfrac{\overline{OC_3}}{\overline{OC_1}}$. Chứng minh rằng A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 đồng quy.*

Bài 13. *Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp O. Gọi AD, BE, CF là đường kính của (O) và X, Y, Z là đối xứng của O qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn $(ODX), (OEY), (OFZ)$ đồng trục.*

Bài 14. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kỳ. PA, BP, PC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Gọi X, Y, Z là đối xứng của P qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn $(PDX), (PEY), (PFZ)$ đồng trục.*

Bài 15. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng trung trực của PA, PB, PC cắt EF, FD, DE theo ba điểm thẳng hàng.*

Bài 16. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi X, Y, Z là trung điểm của HA, HB, HC. Chứng minh trung trực của HX, HY, HZ cắt EF, FD, DE theo ba điểm thẳng hàng.*

Bài 17. *Cho tam giác ABC tâm ngoại tiếp O, trung điểm BC, CA, AB là D, E, F. OD, OE, OF cắt EF, FD, DE tại X, Y, Z. Lấy M, N, P sao cho $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{ON} = 3\overrightarrow{OY}, \overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OZ}$. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.*

Bài 18. *Cho tam giác ABC. D, E, F là trung điểm của BC, CA, AB. P bất kỳ. PD, PE, PF cắt EF, FD, DE tại X, Y, Z. M, N, P chia các đoạn PX, PY, PZ cùng tỷ số. Chứng minh rằng AM, BN, CP đồng quy.*

3 Chùm đường tròn và phép nghịch đảo

Bài 19. *Cho tam giác ABC với điểm P bất kỳ. Đường thẳng qua P vuông góc với OP cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC, PCA, PAB tại D, E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.*

Bài 20. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. Đường thẳng qua P vuông góc với OP cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng các đường tròn $(PAD), (PBE), (PCF)$ đồng trục.*

Bài 21. *Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ. Đường thẳng qua P vuông góc với OP cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng các đường tròn APD, BPE, CPF đồng trục.*

Bài 22. *Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi X, Y, Z là hình chiếu của A, B, C xuống một đường thẳng bất kỳ đi qua I. Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy.*

Bài 23. *Cho tam giác ABC. Điểm P nằm trong tam giác sao cho $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{AB}{AC}$. Chứng minh rằng đường nối tâm nội tiếp tam giác PAB, PAC luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Bài 24. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H. Gọi A_1, A_2 là đối xứng của H, A qua BC. Trung trực A_1A_2 cắt tiếp tuyến tại A_1 của (O) tại A_3. Gọi A_4 là đối xứng của A_1 qua AA_3. Gọi X đối xứng A_4 qua BC. Tương tự có Y, Z.*

a) Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

b) Chứng minh rằng các đường tròn $(ADX), (BEY), (CFZ)$ đồng trục.

Bài 25. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại A_1 khác A. A_2 là trung điểm của BC. A_3 là trung điểm của AA_2. HA_3 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HDA_1 tại A_4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác HDA_1 cắt (O) tại A_5 khác A_1. Gọi (K_a) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AA_4A_5. Tương tự có $(K_b), (K_c)$. Chứng minh rằng các đường tròn $(K_a), (K_b), (K_c)$ đồng trục.*

Bài 26. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kỳ. Đường thẳng qua P vuông góc với BC cắt CA, AB tại A_1, A_2. Gọi (K_a) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AA_1A_2. Tương tự có $(K_b), (K_c)$. Gọi (K) là đường tròn tiếp xúc trong với $(K_a), (K_b), (K_c)$. Gọi (L) là đường tròn tiếp xúc ngoài với $(K_a), (K_b), (K_c)$. Chứng minh rằng các đường tròn $(O), (K), (L)$ đồng trục.*

Bài 27. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD, BE, CF. N là tâm đường tròn Euler và K là đẳng giác của N trong tam giác ABC. AD cắt OK tại X. Gọi (L_a) là đường tròn qua A, X và tiếp xúc AN. Tương tự có $(L_b), (L_c)$. Chứng minh rằng $(L_a), (L_b), (L_c)$ có một điểm chung.*