Về một bài toán hay trên THTT

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và phát triển bài toán hình học trên THTT số 440 tháng 2 năm 2014 với các công cụ hình học thuần túy.

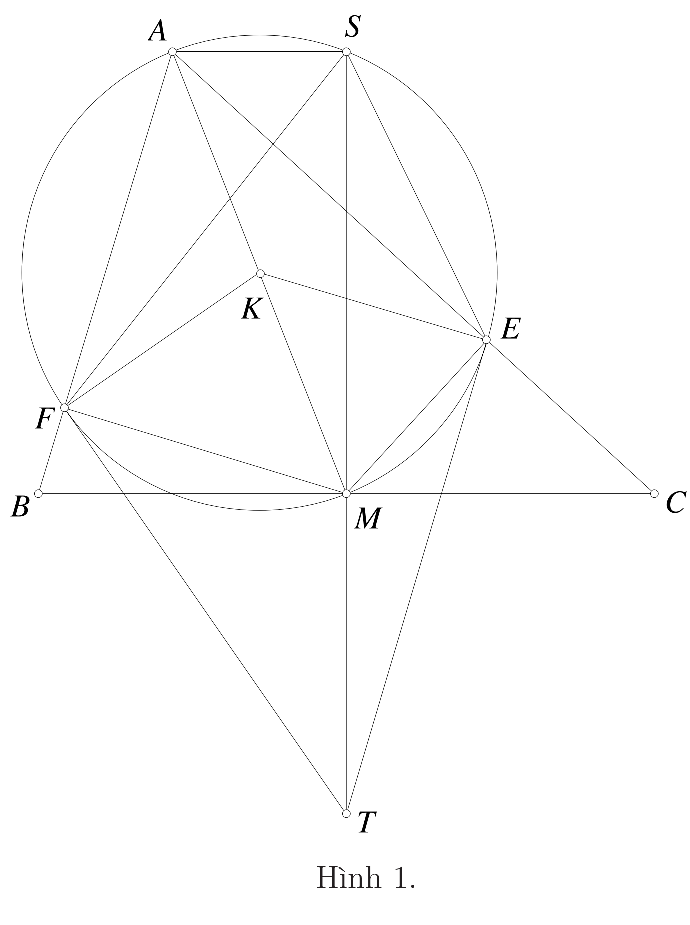
Trên báo THTT số 440 tháng 2 năm 2014, cuộc thi kỷ niệm 50 năm [1] có bài toán hình học hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC, trực tâm H và M là trung điểm BC. P là một điểm thuộc đường thẳng HM. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên trung trực BC.

Bài toán này là một mở rộng khá có ý nghĩa của một bài toán rất nổi tiếng và kinh điển. Bài toán đó xuất hiện lần đầu trong cuộc thi tranh cúp Kolmogorov ở Nga [2] và lại xuất hiện lại trong kỳ thi chọn đội tuyển Kazakhstan thi Olympics Balkan năm 2007 [3]. Bài toán đó như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM. Đường tròn đường kính AM cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn đường kính AM cắt nhau tại T. Chứng minh rằng $TM \perp BC$.

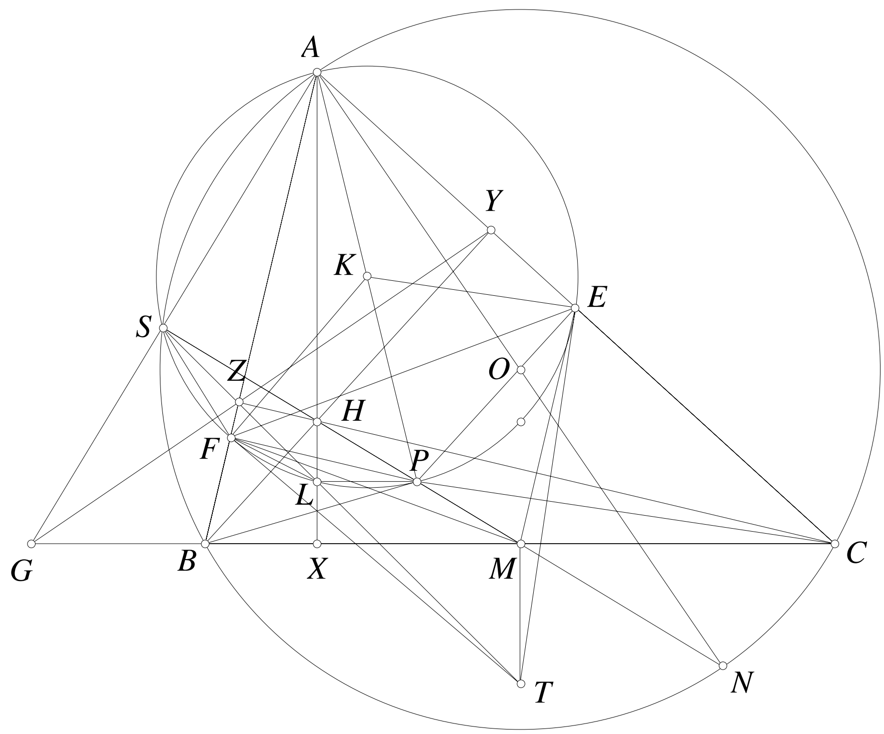
Bài toán này có một lời giải ứng dụng tứ giác điều hòa rất đẹp tôi xin trình bày lại như sau



Hình 1.

Lời giải bài toán 2. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (K) tại S khác A. Do M là trung điểm BC nên chùm $A(BC, SM) = -1$. Chiếu lên đường tròn (K) suy ra hàng $(FE, SM) = -1$ do đó tứ giác $SEMF$ điều hòa. Vậy tiếp tuyến tại E, F và SM đồng quy. Dễ thấy $SM \perp SA \parallel BC$ do đó SM là trung trực BC nên tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên trung trực BC. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Sau đây tôi xin trình bày lại hai lời giải cho bài toán 1.



Hình 2.

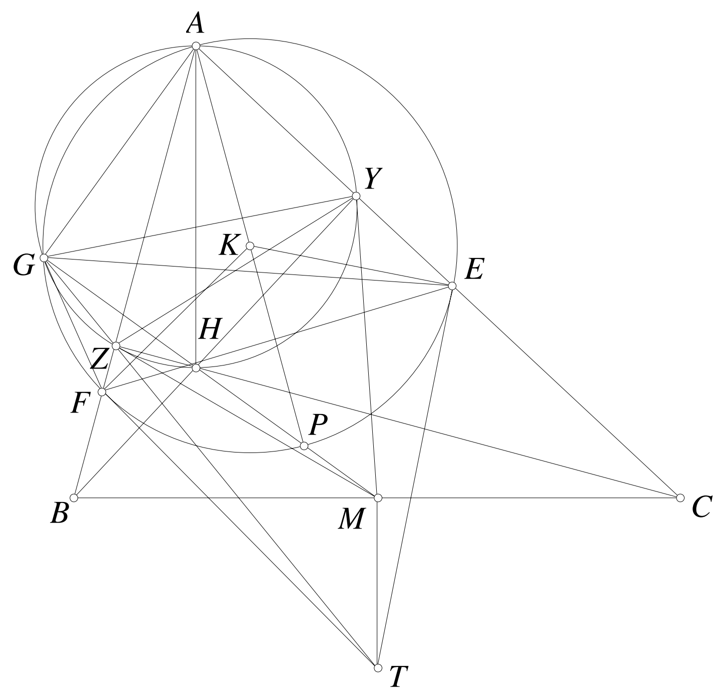
Lời giải thứ nhất bài toán 1. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AN là đường kính của (O). AX, BY, CZ là đường cao của tam giác ABC. Dễ thấy tứ giác $HBNC$ là hình bình hành do đó HM đi qua N. Gọi NH cắt (O) tại S khác N suy ra $\angle NSA = 90°$. Vậy S cũng thuộc đường tròn đường kính AH, mặt khác dễ thấy Y, Z cũng nằm trên đường tròn đường kính AH. Gọi YZ cắt BC tại G thì dễ có hàng $(BC, XG) = -1$. Ta chú ý M, X, Y, Z đều nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC do đó $\overline{GB}.\overline{GC} = \overline{GX}.\overline{GM} = \overline{GY}.\overline{GZ}$ suy ra G thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính AH và (O) suy ra G thuộc AS.

Ta lại chú ý $\angle ASP = 90°$ nên S cũng thuộc đường tròn (K). Gọi AX cắt (K) tại L khác A. Ta thấy chùm $A(BC, XG) = -1$ chiếu lên đường tròn (K) suy ra hàng $(FE, LS) = -1$ suy ra tứ giác $SELF$ điều hòa. Vậy tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại điểm T thuộc SL. Theo tính chất tiếp tuyến ta dễ có $\dfrac{TL}{TS} = \dfrac{FL^2}{FS^2}$ (1).

Ta cố định tam giác ABC, xét P di chuyển ta thấy $\angle FSL = \angle FAL$ không đổi khi P di chuyển, $\angle FLS = \angle FAS$ cũng không đổi khi P di chuyển vì ta chú ý S cố định do N, H cố định. Do đó tam giác FSL có hai góc không đổi nên luôn tự đồng dạng do đó tỷ số $\dfrac{FL^2}{FS^2}$ không đổi (2).

Từ (1),(2) ta có tỷ số $\dfrac{TL}{TS}$ luôn không đổi mà S cố định, L di chuyển trên đường cao AX cố định do đó T di chuyển trên đường thẳng song song AX cố định. Theo bài toán 2 khi P trùng M thì T thuộc trung trực BC cũng song song AX. Do đó T luôn thuộc trung trực BC cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Lời giải thứ 2 sau đây thuần túy hình học THCS được trích dẫn từ trên báo THTT số 444 tháng 6 năm 2014 được tác giả làm gọn hơn

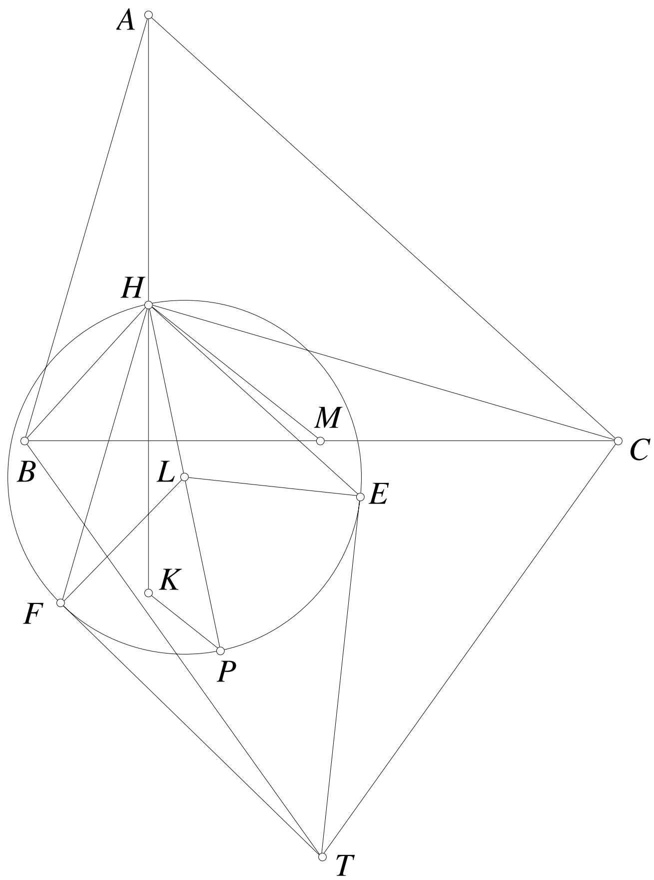


Hình 3.

Lời giải thứ hai bài toán 1. Gọi BY, CZ là đường cao của tam giác ABC dễ thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ đi qua H. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ cắt (K) tại G khác A. Ta dễ thấy $HG \perp GA \perp PG$ từ đó P, H, G thẳng hàng. Ta cũng dễ thấy $\triangle GYE \sim \triangle GZF$ suy ra $\triangle GYZ \sim \triangle GEF$. Dễ thấy M là giao hai tiếp tuyến tại Y, Z của đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ. Gọi hai tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Từ $\triangle GYZ \sim \triangle GEF$ suy ra $\triangle GFT \sim \triangle GZM$ hay $\triangle GZF \sim \triangle GMT$ suy ra $\angle GMT = \angle GZF = 180^\circ - \angle GZA = 180^\circ - \angle GHA = \angle AHP$ suy ra $TM \parallel AH \perp BC$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Cách giải trong lời giải thứ nhất là cách tác giải nghĩ ra bài toán này. Tuy nhiên cách giải trong lời giải thứ hai mới thực sự là sơ cấp và nhiều ý tưởng khai thác. Việc dựng ra điểm G chính là dựng ra tâm đồng dạng biến đoạn YZ thành EF và biến M thành T. Lời giải chứa đựng ý tưởng sâu sắc về biến hình nhưng được trình bày dưới dạng các bổ đề về tam giác đồng dạng chung đỉnh. Sau đây là một số khai thác cho bài toán này

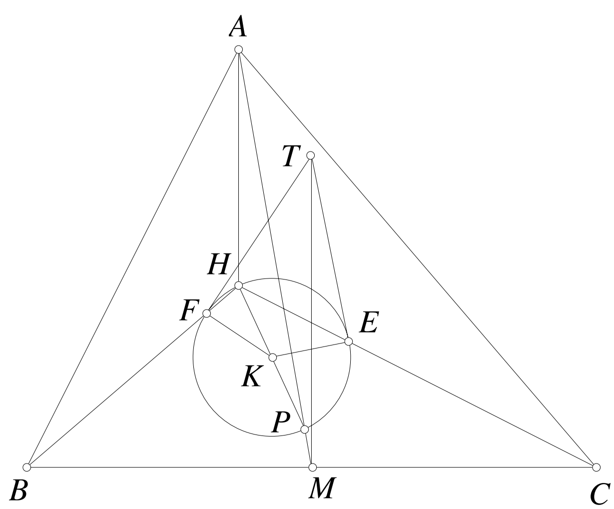
Bài toán 3. Cho tam giác ABC trực tâm H và M là trung điểm BC. K đối xứng A qua H. P là một điểm sao cho $PK \parallel HM$. Trên đường tròn đường kính HP lấy các điểm E, F sao cho $HF \parallel AB, HE \parallel AC$. Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn đường kính HP cắt nhau tại T. Chứng minh rằng $TB = TC$.



Hình 4.

Đây là một bài toán hay, các bạn có thể giải nó dễ dàng từ bài toán gốc bằng phép tịnh tiến.

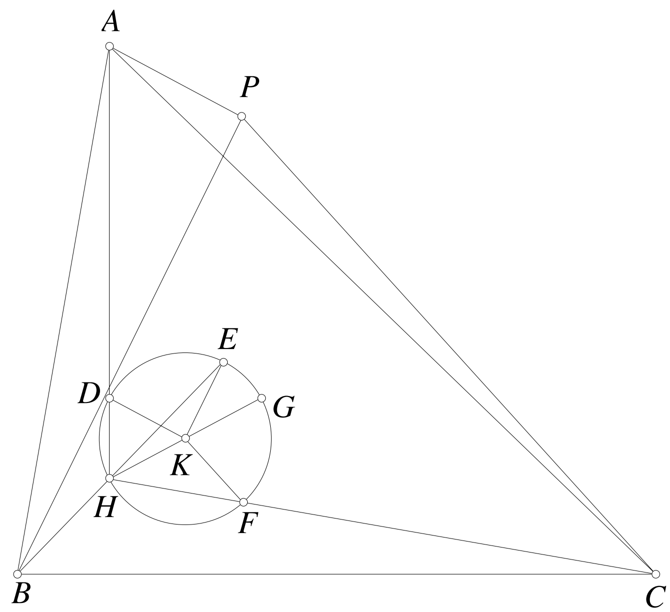
Bài toán 4. Cho tam giác ABC trực tâm H và trung tuyến AM. P là một điểm thuộc AM. Đường tròn (K) đường kính PH lần lượt cắt HC, HB tại E, F khác H. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E, F của đường tròn đường tròn (K) cắt nhau trên trung trực BC.



Hình 5.

Bài toán trên thực ra chỉ là bài toán 1 viết lại cho tam giác HBC và trực tâm A tuy nhiên bài toán trên sẽ gợi mở cho ta một ý tưởng hay khi P là trọng tâm như sau

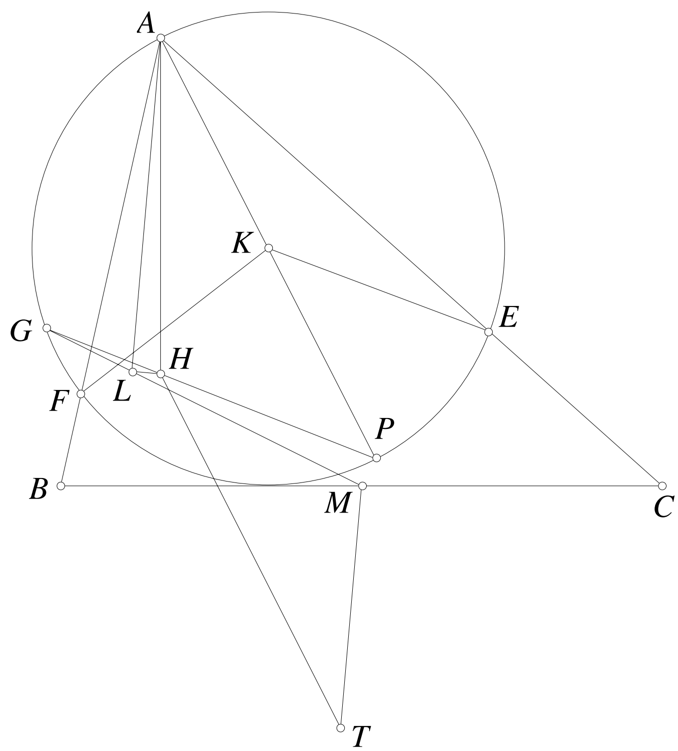
Bài toán 5. Cho tam giác ABC trực tâm H, trọng tâm G. Đường tròn (K) đường kính HG lần lượt cắt HA, HB, HC tại D, E, F khác H. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với KD, KE, KF đồng quy.



Hình 6.

Bài toán trên rất thú vị nhưng thực ra là ý tưởng của tam giác trực giao, các bạn hãy cùng suy nghĩ. Nếu tập trung vào khai thác ý tưởng trong lời giải thứ 2 ta sẽ dẫn ra được nhiều điều thú vị

Bài toán 6. Cho tam giác ABC trực tâm H và P là điểm bất kỳ. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB tại E, F khác A. PH cắt (K) tại G khác H. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. M là trung điểm BC. Đường thẳng qua A song song với MT cắt MG tại L. Chứng minh rằng $LA \perp LH$.



Hình 7.

Bài toán là một mở rộng quan trọng của bài toán 1 với tư tưởng đồng dạng. Các bạn hãy làm bài tập sau như là ứng dụng của bài toán trên

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trên trung trực BC. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB tại E, F khác A. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng $TB = TC$ khi và chỉ khi P là trung điểm BC.

Tài liệu

[1] Tạp chí THTT số 440 tháng 2 năm 2014

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=16779

[3] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=202517

[4] Tạp chí THTT số 444 tháng 6 năm 2014

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com