

Mỗi tuần một bài toán

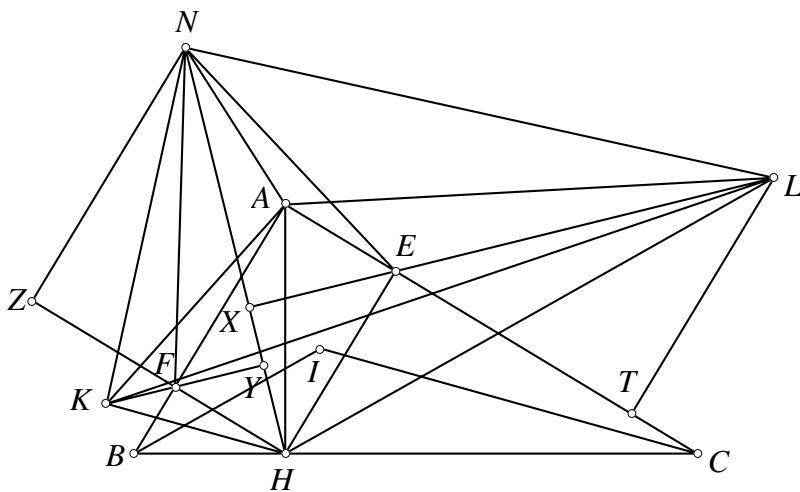
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . E, F lần lượt là hình chiếu của H lên CA, AB . Gọi K, L, N lần lượt là tâm bàng tiếp đỉnh H của các tam giác HBF, HCE, HEF . Chứng minh rằng A là tâm nội tiếp tam giác KNL .

Lời giải



Gọi LE, KF cắt HN tại X, Y . Gọi Z, T là hình chiếu của N lên FH và của L lên CE . Chú ý các tam giác vuông cân ta có $\frac{FY}{FY + NY} = \frac{YH}{YH + NY} = \frac{YH}{HN} = \frac{HF}{2HZ} = \frac{HF}{HE + HF + EF} = \frac{AB + AC + BC}{XH}$ (1).

Lại có $\frac{XH + LX}{HE} = \frac{2XE + LE}{AB} = \frac{HE}{2HE + ET} = \frac{2HE + (CE + CH - HE)}{AB + AC + BC}$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\frac{YF}{YN} = \frac{XH}{XL}$. Tương tự $\frac{XE}{XN} = \frac{YH}{YK}$. Nhân các tỷ số bằng nhau chú ý $YF = YH, XE = XH$ dễ suy ra $\frac{1}{YN \cdot XN} = \frac{1}{XL \cdot YK}$. Từ đó suy ra các tam giác vuông YNK và XLN đồng dạng suy ra $\angle KNL = 90^\circ$.

Ta thấy $\frac{NK}{NL} = \frac{KY}{XN} = \frac{YH}{XE} = \frac{HF}{HE} = \frac{AB}{AC}$. Từ đó tam giác NKL và ABC đồng dạng.

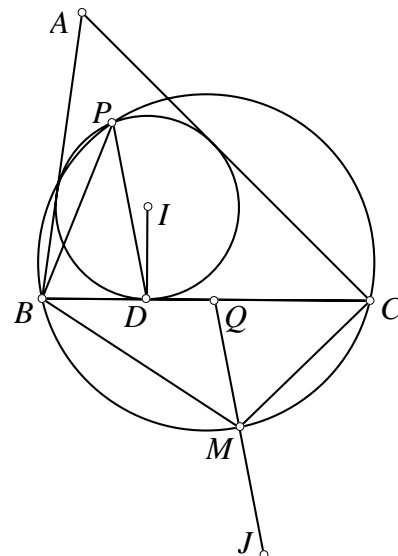
Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC . Ta cũng thấy các tam giác HFK và LEH đồng dạng do đó $AE \cdot AF = HE \cdot HF = FK \cdot EL$ mà $\angle AEL = \angle KFA = 135^\circ$. Từ đó tam giác AEL và KAF đồng dạng. Vậy $\frac{AK}{AL} = \frac{KF}{AE} = \frac{KF}{FH} = \frac{IB}{IC}$. Ta chú ý đẳng thức cuối có do tam giác FKH và IBC đồng dạng. Mặt khác ta cũng có $\angle KAL = 90^\circ + \angle KAF + \angle LAE = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ = \angle BIC$. Từ đó tam giác AKL và IBC đồng dạng. Suy ra A là tâm nội tiếp tam giác NKL .

Nhật xét

Bài toán này được tác giả phát hiện một cách tình cờ trong khi đang làm việc với hệ thức lượng trong tam giác vuông. Nếu thay thuật ngữ "tâm nội tiếp" thành thuật ngữ "giao của ba phân giác trong" thì có thể coi đây là một bài toán của chương trình tam giác đồng dạng. Bài toán này có nhiều phát triển thú vị khi ta thay thế tam giác vuông thành tam giác bất kỳ. Bài toán cũng được quan tâm và đưa ra lời giải khác rất thú vị bởi bạn **Phạm Quang Toàn** từ <http://diendantoanhoc.net>. Ngoài ra bạn **Toàn** còn đưa ra một số phát triển từ cấu hình của bài toán, các bạn có thể xem lời giải và trao đổi ở [đây](#).

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D . Tâm đường tròn bàng tiếp góc A là J . P là một điểm bất kỳ trên (I) không trùng D . Q thuộc BC sao cho $JQ \parallel PD$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC chia đôi QJ .



Mọi trao đổi xin gửi về email anageomatica@gmail.com.