Mỗi tuần một bài toán

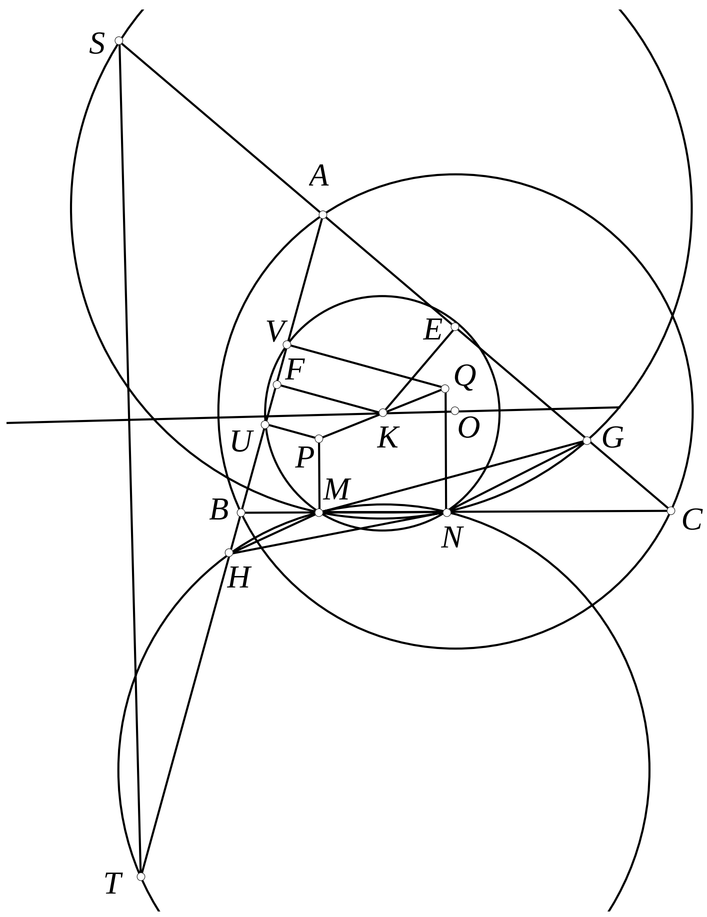
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC với tâm ngoại tiếp O và P,Q là hai điểm đẳng giác nằm trong tam giác. Gọi M,N lần lượt là hình chiếu của P,Q lên BC. Gọi K là trung điểm P,Q. E,F là hình chiếu của K lên CA,AB. G,H đối xứng A qua E,F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GNM và HMN lần lượt cắt CA,AB tại S,T khác G,H. Chứng minh rằng OK vuông góc với ST.

Lời giải



Gọi U,V là hình chiếu của P,Q lên CA. Ta có $BU.BV = BM.BN = BT.BH$ từ đó có $\dfrac{BU}{BT} = \dfrac{BH}{BV}$ hay $(UT,B) = (HV,B)$ hay $(BT,U) = (BV,H)$. Tương tự ta cũng có $\dfrac{BV}{BT} = \dfrac{BH}{BU}$ suy ra $(VT,B) = (HU,B)$ hay $(BT,V) = (BU,H)$. Từ đó $(BT,UV) = \dfrac{(BT,U)}{(BT,V)} = \dfrac{(BV,H)}{(BU,H)} = (UV,H) = \dfrac{HU}{HV} = \dfrac{VA}{UA} = (VU,A)$ hay $(TB,VU) = (VU,A)$. Từ đó theo hệ thức Maclaurin mở rộng suy ra $TV.TU = TB.TA$ chú ý A,G,H thuộc đường tròn (K). Từ đó T thuộc trục đẳng phương của (O) và (K). Tương tự với S suy ra ST là trục đẳng phương của (O) và (K) vậy $ST \perp OK$.

Nhật xét

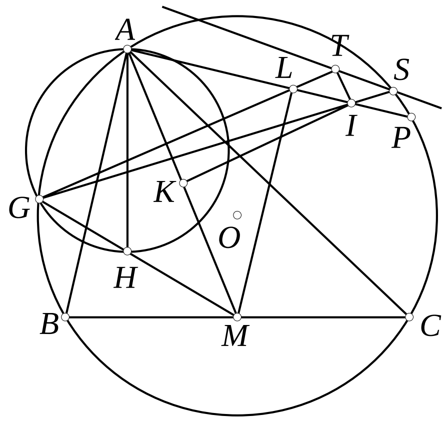
Tác giả thu được bài toán này từ việc tổng quát bài toán thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ năm 2015, bài toán đó như sau

Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I và tâm ngoại tiếp O sao cho $AC > BC > AB$ và đường tròn nội tiếp tiếp xúc BC,CA,AB tại D,E,F. Gọi đối xứng của A qua F,E là F_1,E_1. Đường tròn tiếp xúc BC tại D và đi qua F_1 cắt AB tại điểm thứ hai F_2. Đường tròn tiếp xúc BC tại D và đi qua E_1 cắt AC tại điểm thứ hai E_2. Trung điểm các đoạn OE,IF lần lượt là P,Q. Chứng minh rằng $AB + AC = 2BC$ khi và chỉ khi $PQ \perp E_2F_2$.

Trong bài toán ban đầu khi cho hai điểm đẳng giác P,Q trùng nhau kết hợp một số biến đổi nhỏ ta sẽ thu được bài toán trên.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H, trung tuyến AM. K là trung điểm AM. P là một điểm di chuyển trên (O). L là hình chiếu của M lên AP. I là trung điểm PL. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại G khác A. GI cắt (O) tại S khác G. T là điểm thuộc GL sao cho IT vuông góc KI. Chứng minh rằng ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

