Mỗi tuần một bài toán

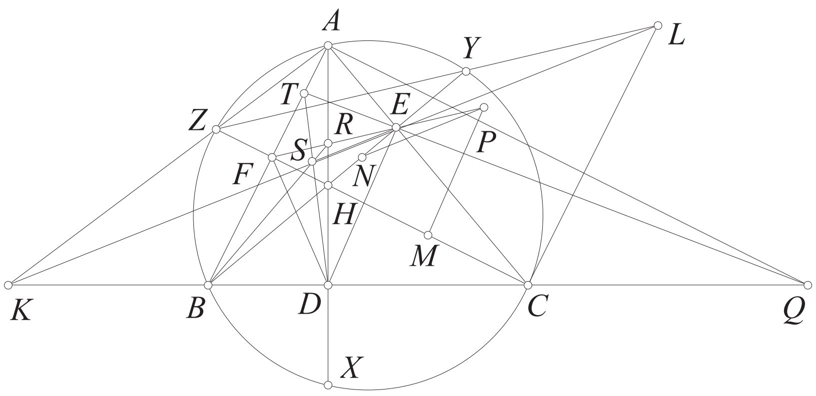
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD, BE, CF. M, N là trung điểm của HC, HE. Trên EF lấy P sao cho $MP \parallel DE$. Q thuộc BC sao cho $AQ \perp AB$. AD cắt EF tại R. Trên BR lấy S sao cho $ES \parallel NP$. Chứng minh rằng QE, AB, SD đồng quy.

Lời giải



Gọi X, Y, Z đối xứng H qua BC, CA, AB dễ thấy X, Y, Z nằm trêm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Phép vị tự tâm H tỷ số 2 biến giao điểm P của đường thẳng EF và đường thẳng qua M song song DE thành giao điểm L của YZ và tiếp tuyến tại C của (ABC). Do $ES \parallel NP \parallel EL$ nên E, S, L thẳng hàng. Gọi AZ cắt BC tại K, áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} Y & C & A \\ C & Z & B \end{pmatrix}$ ta suy ra E, K, L thẳng hàng. Từ đó với chú ý AQ song song với hàng điểm Z, F, H trong đó F là trung điểm ZH nên chùm $A(ZH, FQ) = -1$ chiếu lên đường thẳng BC suy ra hàng $(KD, BQ) = -1$ chiếu xuyên tâm E thì $E(KD, BQ) = -1$. Lại dễ thấy hàng điều hòa cơ bản $B(RD, EA) = -1$. Từ đó $E(KD, BQ) = B(RD, EA)$ nên D, S, T thẳng hàng.

Nhật xét

Bài toán này là bài toán được tác giả tạo ra nhờ định lý Pascal kết hợp dùng hàng điều hòa, chùm điều hòa. Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã nhận xét rằng bài toán đúng với mọi đường AD, BE, CF đồng quy tại một điểm P bất kỳ thay vì H tại đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải duy nhất qua email của bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN. Bài toán có nhiều biến thể và ứng dụng, chẳng hạn như

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD, BE, CF. M, N là trung điểm của HC, HE. Trên EF lấy P sao cho $MP \parallel DE$. Q thuộc BC sao cho $AQ \perp AB$. Lấy G thuộc EF sao cho $EG \parallel NP$. Chứng minh rằng QE, BG, AD đồng quy.

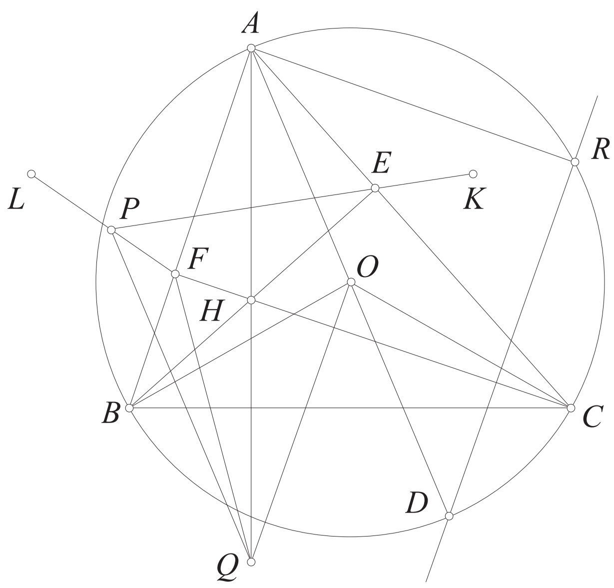
Khi kết hợp cả hai bài này cho ta bài toán sau

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD, BE, CF. M, N là trung điểm của HC, HE. Trên EF lấy P sao cho $MP \parallel DE$. AD cắt EF tại R. Trên BR lấy S sao cho $ES \parallel NP$. ES cắt FD tại G. DS cắt AB tại T. Chứng minh rằng ET, AD, BG đồng quy.

Trên các cấu hình này còn rất nhiều bài toán thú vị khác.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên (O). Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. K, L lần lượt đối xứng với O qua CA, AB. KE cắt LF tại P. Trên AH lấy Q sao cho $PQ \parallel AO$. R đối xứng với A qua OQ. Gọi AD là đường kính của (O). Chứng minh rằng đường thẳng DR luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.