Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

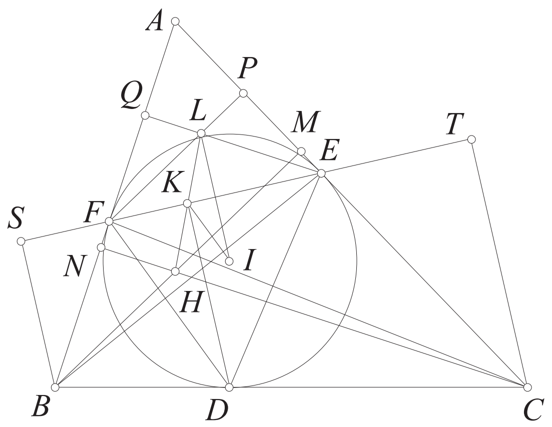
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên (O). Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. K, L lần lượt đối xứng với O qua CA, AB. KE cắt LF tại P. Trên AH lấy Q sao cho $PQ \parallel AO$. R đối xứng với A qua OQ. Gọi AD là đường kính của (O). Chứng minh rằng đường thẳng DR luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.

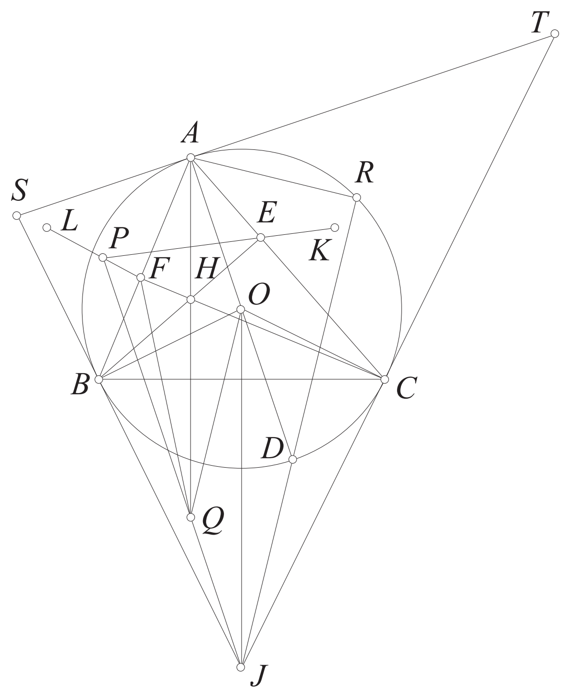
Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC, trực tâm H, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. K là hình chiếu của D lên EF. L là đối xứng của I qua EF. Chứng minh rằng H, K, L thẳng hàng.



Gọi BM, CN là đường cao của tam giác ABC. Dễ thấy L là trực tâm tam giác AEF. Gọi EQ, FP là đường cao của tam giác AEF. Ta dễ thấy $HM.HB = HN.HC$ và $LE.LQ = LF.LP$, từ đó H và L đều nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BE, CF. Gọi S, T lần lượt là hình chiếu của B, C lên EF. Ta dễ chứng minh $\frac{KS}{KT} = \frac{DB}{DC} = \frac{BF}{CE} = \frac{KF}{KE}$, từ đó suy ra $KF.KT = KE.KS$ vậy K cũng thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính BE, CF. Từ đó L, H, K thẳng hàng.

Giải bài toán. Gọi các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại J. JB, JC lần lượt cắt các tiếp tuyến tại B, C của (O) tại S, T, khi đó (O) là đường tròn nội tiếp tam giác JST. Áp dụng bổ đề ta thấy P là trực tâm tam giác JST nên $JP \perp ST \perp AO$.



Từ đó Q thuộc JP. Vậy tứ giác $AOJQ$ có các cạnh đối song song nên là bình hành do đó QJ song song và bằng AO, O lại là trung điểm AD nên QJ song song và bằng OD. Từ đó tứ giác $ODJQ$ là hình bình hành. Ta suy ra $JD \parallel OQ \perp AR \perp RD$ nên J, D, R thẳng hàng. Ta thu được DR đi qua J cố định.

Nhật xét

Tác giả nhận được lời giải qua email từ các bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và bạn **Lê Ngọc Trường Giang** lớp 11 Toán, chuyên ĐH Vinh. Ngoài ra các bạn **Nguyễn Đức Thịnh**, lớp 11 toán, trường THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai và bạn **Phạm Công Bách** lớp 10 Toán trường chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng đã cho lời giải tại đây. Ngoài ra bạn **Nguyễn Đình Hoàng** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cũng đưa ra mở rộng cho bài toán.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). AD là đường kính của (O). E, F là hình chiếu của điểm P bất kỳ trong tam giác lên cạnh CA, AB. PD cắt trung trực EF tại K. Đường tròn (K) đi qua E, F cắt CA, AB lần lượt tại M, N khác E, F. Chứng minh rằng các đường thẳng EF, MN, BC cắt nhau tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp tiếp xúc (O).
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.