Mỗi tuần một bài toán

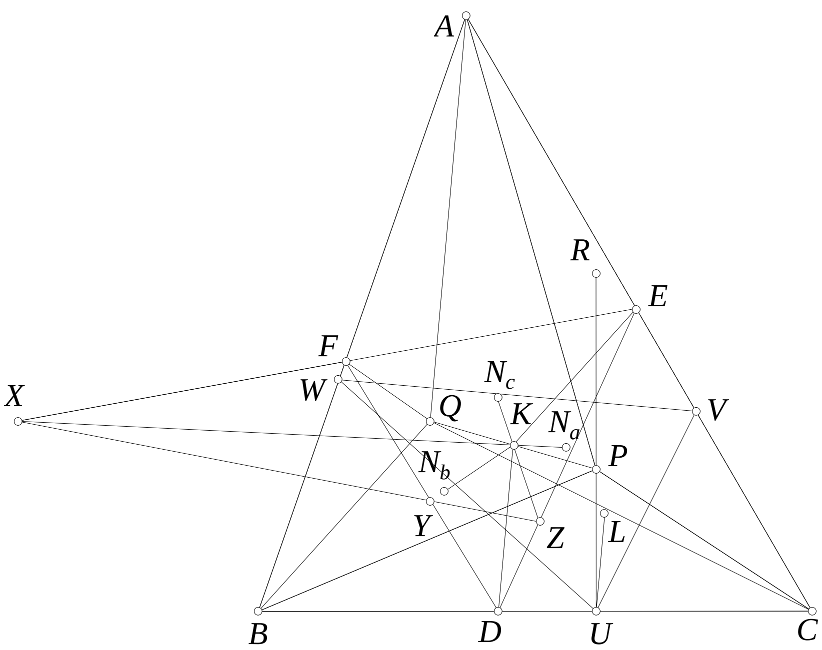
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có P và Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác. K là trung điểm PQ. Các điểm D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB sao cho $KD \parallel QA$, $KE \parallel QB$, $KF \parallel QC$. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng KN_a, KN_b, KN_c lần lượt cắt EF, FD, DE theo ba điểm thẳng hàng.

Lời giải



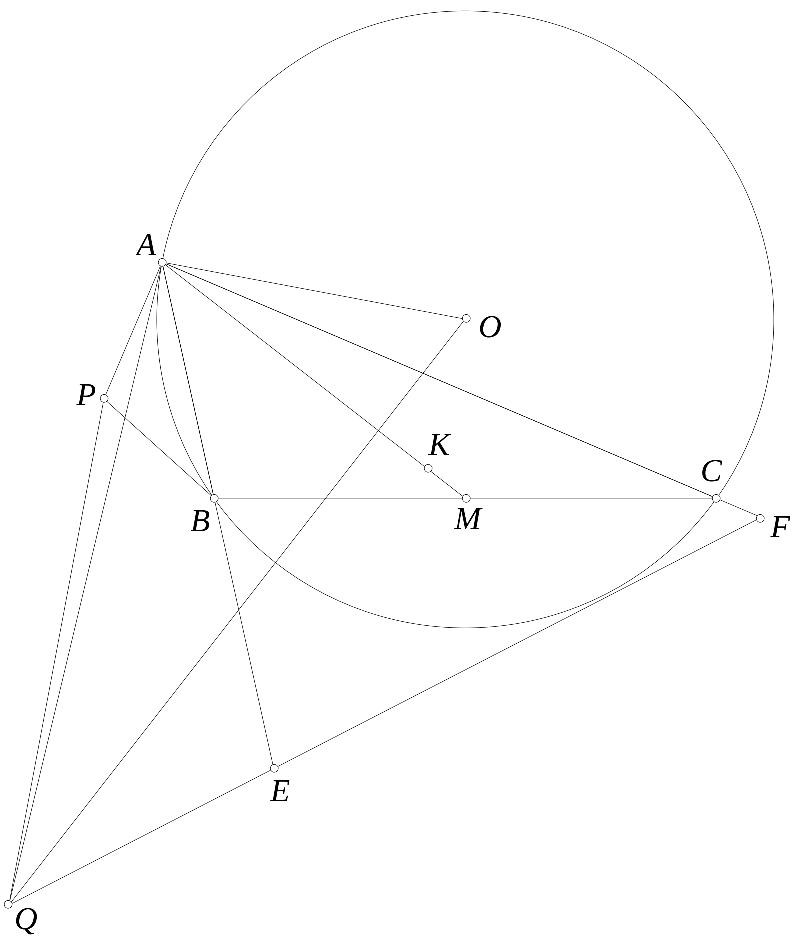
Gọi U, V, W là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Theo định lý Poncelet thì các đường tròn Euler (N_a), (N_b), (N_c) và đường tròn (UVW) có một điểm chung R. Ta chú ý QA, QB, QC lần lượt vuông góc với VW, WU, UV. Lấy X_1 thuộc EF sao cho $KX_1 \perp KD$. Tương tự có Y_1, Z_1 thì X_1, Y_1, Z_1 thẳng hàng theo định lý về cát tuyến trực giao. Gọi L là trực tâm tam giác UVW. Sử dụng tính chất tỷ số kép của chùm vuông góc, ta có biến đổi tỷ số kép $\frac{XE}{XF}/\frac{X_1E}{X_1F} = (EF, XX_1) = K(EF, XX_1) = U(WV, RL)$. Từ đó $\frac{XE}{XF} = \frac{X_1E}{X_1F} \cdot U(WV, RL)$. Tương tự với các tỷ số $\frac{YF}{YD}$ và $\frac{ZD}{ZE}$ ta thu được $\frac{XE}{XF} \cdot \frac{YF}{YD} \cdot \frac{ZD}{ZE} = \frac{X_1E}{X_1F} \cdot \frac{Y_1F}{Y_1D} \cdot \frac{Z_1D}{Z_1E} \cdot U(WV, RL) \cdot V(UW, RL) \cdot W(VU, RL) = 1$. Từ đó X, Y, Z thẳng hàng theo định lý Menelaus.

Nhận xét

Ý tưởng trong lời giải cũng là cách tác giả tạo ra bài toán này. Điểm mấu chốt của lời giải này là dùng định lý Poncelet và tính chất chùm vuông góc. Có bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán, THPT chuyên KHTN cho lời giải tương tự đáp án.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) với trung tuyến AM. Lấy P thuộc trung trực AB sao cho $AP \perp AC$. Lấy Q sao cho $PQ \perp AO$ và $QO \perp AM$. Trung trực CA cắt AB tại E. QE cắt AC tại F. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác AEF nằm trên AM.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

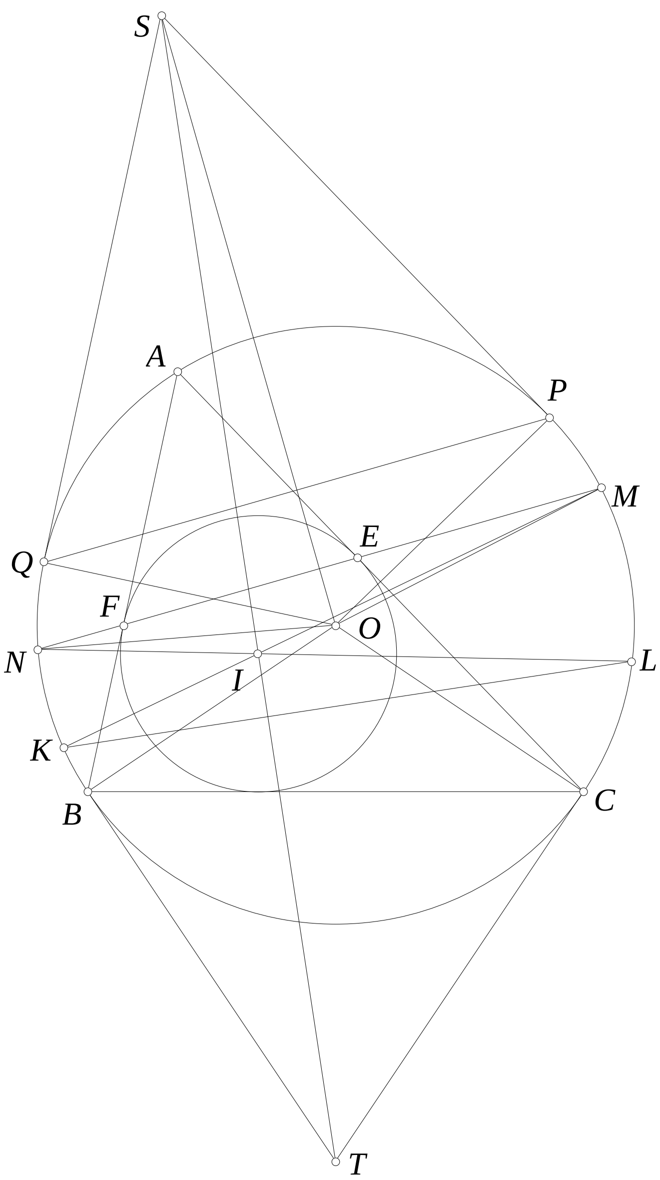
Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác ABC, (O), (I) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và AC, AB. M, N là các giao điểm của EF và (O). P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BI, CI và (O). S là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại P và Q. Chứng minh rằng S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà**

Lời giải



Gọi IM, IN cắt lại (O) tại K, L. Tiếp tuyến qua B, C của (O) cắt nhau tại T. Theo bài toán tuần 4 tháng 10 năm 2017 thì $IT \perp KL$. Tứ giác $MNKL$ nội tiếp dẫn tới tới IT đi qua tâm ngoại tiếp tam giác IMN do đó giao điểm của IT và trung trực MN sẽ là tâm ngoại tiếp tam giác IMN. Theo định lý Pascal thì IT đi qua S, mặt khác $PQ \parallel MN$ do đó S nằm trên trung trực MN. Vậy S là giao của IT và trung trực MN, nói cách khác S là tâm ngoại tiếp tam giác IMN.

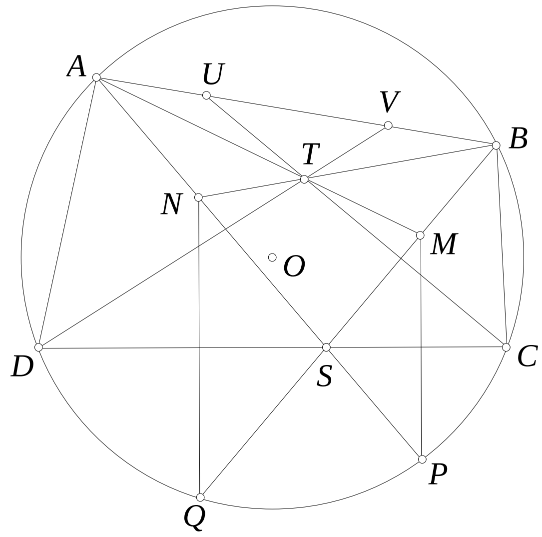
Biên tập: Trần Quang Hùng.

Nhận xét

Đây là một bài toán là phát triển tiếp tục bài toán chọn đội tuyển SP năm 2017, đây là các kết quả đẹp và có ý nghĩa.

Bài toán đề nghị

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Điểm S thuộc đoạn CD sao cho $\angle DSA = \angle CSB$. M, N theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AS, BS và (O). P, Q theo thứ tự là điểm đối xứng của M, N qua CD. T là giao điểm của AP và BQ. U, V theo thứ tự là giao điểm của CT, DT và AB. Chứng minh rằng $AU = BV$.



Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà,** THPT chuyên SP, Hà Nội.