

Mỗi tuần một bài toán

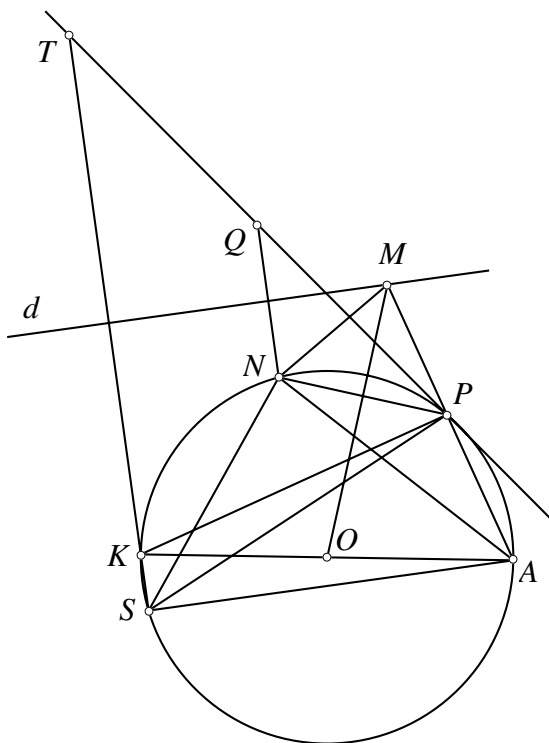
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho A là một điểm cố định trên đường tròn (O) và d là một đường thẳng bất kỳ cố định. P là một điểm di chuyển trên (O) . AP cắt d tại M . N đối xứng P qua OM . Q đối xứng N qua d . Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

Lời giải



Gọi AK là đường kính của (O) . Đường thẳng qua K vuông góc với d cắt (O) tại S khác K và cắt PQ tại T . Ta dễ thấy M là tâm ngoại tiếp tam giác PQN nên biến đổi góc định hướng modulo 180° ta có $(QT, QN) = (QP, QN) = (MP, MO) = (PK, PN) = (SB, SN) = (ST, SN)$. Từ đó ta thấy tứ giác $SNQT$ nội tiếp, mặt khác $SNQT$ là hình thang nên $SNQT$ là hình thang cân và nhận d là trục đối xứng. Vậy T đối xứng S qua d mà A, K, S đều cố định nên T cố định hay PQ đi qua T cố định.

Nhật xét

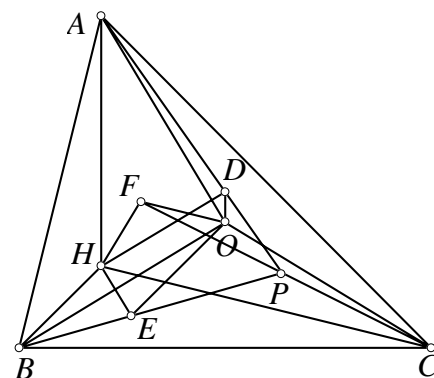
Bài toán này đặc trưng cho việc sử dụng góc định hướng của hai đường thẳng. Vì bài toán phát biểu tổng quát với cấu hình chỉ cần đường thẳng d và một điểm cố định trên đường tròn (O) nên bài toán có tầm ứng dụng rất lớn. Mặt khác bài toán cũng có thể được phát triển theo nhiều cách khác nhau, sau đây là một ví dụ phát triển bài toán này.

Cho A là một điểm cố định trên đường tròn (O) và d là một đường thẳng bất kỳ cố định. P di chuyển trên (O) . PA cắt d tại M . Q đối xứng với A qua d . PQ cắt d tại S . Vẽ các tiếp tuyến SU, SV của (O) với U, V thuộc (O) và T là trung điểm UV . Lấy điểm R sao cho $RM \perp MA$ và $RT \perp TA$. Chứng minh rằng R luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Tác giả đã nhận được lời giải từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương. Các bạn **Nguyễn Minh Quang** lớp 11 toán, THPT Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình, bạn **Phạm Nguyễn Thiện Huy** lớp 12A2 và **Trần Nhân Trung** lớp 11A1 trường chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng, bạn **Nguyễn Cảnh Hoàng** lớp 11 Toán trường chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cho lời giải ở đây. Tác giả còn nhận được các lời giải đúng của các bạn **Bùi Văn Bình**, **Trương Văn Hoàng**, **Bùi Công Minh**, lớp 12 Toán, **Lê Sỹ Quan**, **Lê Phước Tùng**, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước. Ngoài ra bài toán cũng được tham gia giải ngay trên [blog Hình học sơ cấp](#).

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H và tâm ngoại tiếp O . Đường thẳng qua H lần lượt vuông góc với OA, OB, OC theo thứ tự cắt trung trực BC, CA, AB tại D, E, F . Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.