# Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng,*** *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

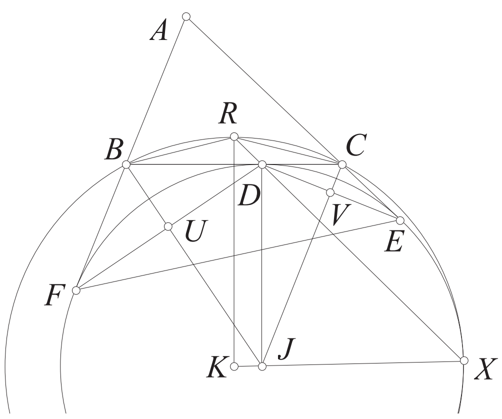
**Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.**

## Đề bài

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp trong đường tròn $(O)$. Đường tròn $(K)$ tiếp xúc $CA, AB$ và tiếp xúc trong $(O)$. Gọi $M, N$ lần lượt là trung điểm các cung $CA, AB$ chứa $B, C$ của $(O)$. $AM, AN$ lần lượt cắt $KC, KB$ tại $P, Q$. $R$ đối xứng $A$ qua $PQ$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $RBC$ tiếp xúc $(K)$.

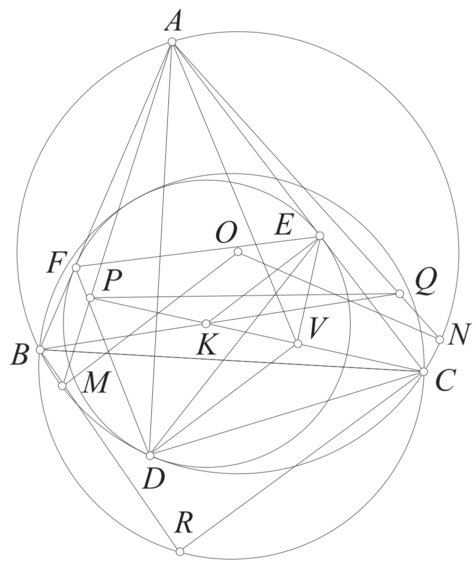
## Lời giải

**Bổ đề.** Cho tam giác $ABC$ đường tròn bàng tiếp góc $A$ là $(J)$ tiếp xúc $BC, CA, AB$ tại $D, E, F$. $JB, JC$ cắt $DF, DE$ tại $U, V$. Trung trực $BU, CV$ cắt nhau tại $R$. Thì đường tròn $(RBC)$ tiếp xúc $(J)$.




Dễ thấy trung trực $BU$ đi qua trung điểm $BD, BF$ nên là trục đẳng phương của đường tròn điểm $B$ và $(J)$. Tương tự trung trực $CV$ là trục đẳng phương của đường tròn điểm $C$ và $(J)$. Do đó nếu $PD$ cắt $(J)$ tại $X$ thì $RC^2 = RD.RX = RB^2$. Do đó $RB = RC$ và $\angle RCD = \angle CXR, \angle RBD = \angle RXB$ nên tứ giác $RCXB$ nội tiếp. Từ đó $X$ thuộc $(K)$ ngoại tiếp tam giác $RBC$. Từ các tam giác $JDX$ và $KDX$ cân và $DJ \parallel KP$, ta suy ra $K, J, X$ thẳng hàng. Do đó $(K)$ và $(J)$ tiếp xúc tại $X$.

**Giải bài toán.** Gọi $(K)$ tiếp xúc $(O)$ tại $D$ và tiếp xúc $CA, AB$ tại $E, F$. Xét phép biến hình $f$ là phép nghịch đảo cực $A$ phương tích bất kỳ thì $f(B), f(C)$ là ảnh của $B, C$ và đường tròn $(K)$ biến thành $(J)$ bàng tiếp góc $A$ của tam giác $Af(B)f(C)$ tiếp xúc với $f(B)f(C), f(C)A, Af(B)$ tại $f(D), f(E), f(F)$. Gọi $V$ là nghịch đảo của $C$ qua $(K)$, qua nghịch đảo thì $f(V)$ là nghịch đảo của $C$ qua $(J)$ là trung điểm của $f(D), f(E)$. Do đó bốn điểm $A, E, V, D$ cũng thuộc một đường tròn.




Ta dễ thấy $DE$ là phân giác $\angle ADC$ nên $\angle AVE = \angle ADE = \frac{1}{2}\angle AMC = 90^\circ - \angle MAC$. Từ đó $\angle MAC = 90^\circ - \angle AVE = \angle AVP$, ta suy ra $PA$ tiếp xúc $(AVC)$ nói cách khác $(P, PA)$ chính là đường tròn $A$-Apollonius của tam giác $AVC$. Tương tự $(Q, QA)$ là $A$-Apollonius của tam giác $AUC$ trong đó $U$ là nghịch đảo của $B$ qua $(K)$. Dễ thấy $R$ là giao điểm khác $A$ của $(P), (Q)$. Qua nghịch đảo $f$ thì hai đường tròn $(P), (Q)$ biến thành trung trực của $f(C)f(V)$ và $f(B)f(U)$ nên ảnh $f(R)$ của $R$ cũng là giao hai trung trực này. Áp dụng bổ đề vào tam giác $Af(B)f(C)$ thì $f(R)f(B)f(C)$ tiếp xúc $(J)$ nên các tạo ảnh là $(RBC)$ tiếp xúc $(K)$. Ta hoàn tất chứng minh.

## Nhận xét

Không có bạn nào tham gia giải bài toán này. Bổ đề xuất phát từ một bài toán trên diễn đàn AoPS được tác giả viết và giải lại cho đường tròn bàng tiếp.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ nhọn nội tiếp trong đường tròn $(O)$ với trực tâm $H$ và trung tuyến $AM$. Dựng $L$ sao cho $A$ là trọng tâm tam giác $LBC$. Trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính $LH$ và $(O)$ lấy $P$ sao cho $HP \parallel BC$. $K$ là hình chiếu của $P$ trên $OH$. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn đường kính $OK$ và đường tròn Euler của tam giác $ABC$ đi qua $H$.

Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.