DIỄN ĐÀN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

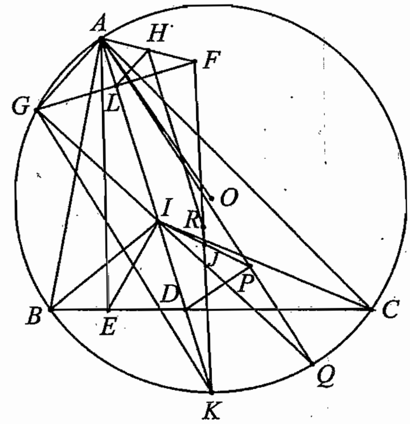
PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC TRONG THỰC HÀNH GIẢI TOÁN

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Đối xứng trục là một phép biến hình quan trọng trong nhóm các phép dời hình. Khi đối xứng trục kết hợp với những mô hình hình học khác nhau sẽ tạo ra những bài toán khá thách thức trong việc giải. Khi ta định nghĩa về đường trung trực đoạn thẳng là ta có thể hiểu được về đối xứng trục. Phép đối xứng trục được giới thiệu lần đầu tiên trong chương trình hình học lớp 8 ở Việt Nam và sau đó một lần nữa được giới thiệu hệ thống hơn cùng với các tính chất trong trương trình hình học lớp 11. Mặc dù đối xứng trục được định nghĩa rất đơn giản, xong chính vì tính đơn giản của nó mà khi áp dụng trong những mô hình và tình huống khác nhau ta có thể thu được những bài toán thú vị. Những bài toán trong bài viết này hướng tới một đối tượng khá rộng, những bạn học sinh THCS học tới tứ giác nội tiếp là hoàn toàn có thể hiểu lời giải, xong để tìm tòi ra hướng giải và cách giải thì các bạn cần có nền kiến thức cao hơn. Chúng tôi viết bài này dựa trên quan điểm là sử dụng một phép biến hình trong giải toán, điều đó có nghĩa là chúng tôi cố gắng nhấn mạnh tính chất của phép biến hình thông qua các bất biến của nó khi ta sử dụng nó. Mặc dù với một phép dời hình như đối xứng trục mà thể hiện rõ được các tính chất bất biến trong giải toán là khá khó khăn vì bất biến của các phép dời hình sinh ra từ việc giữ nguyên khoảng cách nên đôi khi ta dễ bị lẫn các bất biến đó trong các tính chất hình thông thường. Chúng ta hãy đi sâu và phân tích một số ví dụ cụ thể sau.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có tâm đường tròn nội tiếp là I. AI cắt BC tại D và cắt (O) tại K khác A. Lấy P sao cho $DP \perp AO$. AP cắt (O) tại Q khác A. QI cắt (O) tại G khác Q. J là trung điểm của IP. L là hình chiếu vuông góc của G lên AD. Trung trực của KL cắt KJ tại R. Lấy điểm H sao cho $LH \parallel AG$ và $RH \parallel AD$. Chứng minh rằng H luôn thuộc một đường tròn cố định khi P thay đổi.*

Lời giải



Gọi E là điểm đối xứng với P qua AD thì E thuộc BC và $\widehat{EAB} = \widehat{PAC}$. Dễ thấy GK chia đôi EI. Vậy qua phép đối xứng trục AD thì KJ và KG đối xứng nhau qua KA. Từ đó gọi GL cắt KJ tại F thì L là trung điểm GF. Suy ra H là trung điểm AF. Do F và G đối xứng qua AD nên F di chuyển trên ảnh đối xứng của (O) qua AD. H là trung điểm AF và A cố định nên H thuộc một đường tròn cố định.

Nhận xét. *Việc sử dụng đối xứng trục AD đóng vai trò quan trọng trong việc tìm ra điểm F là điểm đối xứng của G qua AD. Bài toán GK chia đôi đoạn EI là bài toán 2 thi IMO năm 2010 nổi tiếng. Từ đó ta thu được đường tròn cố định.*

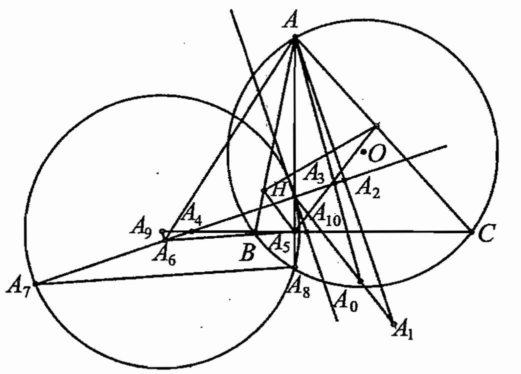
Bài toán 2. *Cho tam giác ABC với trực tâm là H. Tam giác DEF đối xứng với tam giác ABC qua một đường thẳng d bất kỳ đi qua H. Các điểm X, Y, Z chia các đoạn HA, HB, HC theo cùng một tỷ số. Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy.*

Lời giải. Sử dụng đối xứng trục d ta chuyển về bài toán sau

Bài toán. *Cho tam giác ABC với trực tâm H và một đường thẳng d đi qua H.* A_0, B_0, C_0 *là các điểm sao cho* HA_0, HB_0, HC_0 *đối xứng* HA, HB, HC *qua* d *và* $\frac{HA_0}{HA} = \frac{HB_0}{HB} = \frac{HC_0}{HC}$. *Chứng minh rằng* AA_0, BB_0, CC_0 *đồng quy.*

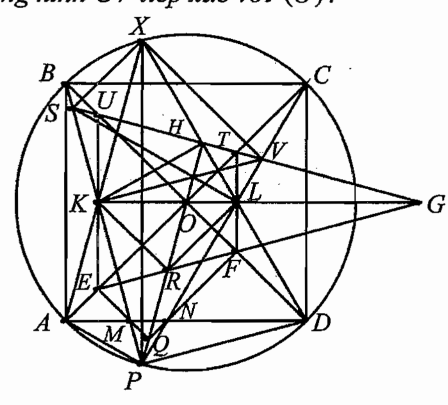
Bổ đề (Mở rộng đường thẳng Droz-Farny). *Hai đường thẳng vuông góc với nhau tại trực tâm một tam giác thì chắn trên ba cạnh tam giác ba đoạn thẳng mà các điểm lần lượt chia các đoạn thẳng đó cùng một tỷ số thì thẳng hàng.*

Bổ đề có trong nhiều tài liệu xin không nhắc lại chứng minh.



Trở lại bài toán. Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng của A, B, C qua *d*. A_2, B_2, C_2 là trung điểm AA_1, BB_1, CC_1. AA_0, BB_0, CC_0 cắt d tại A_3, B_3, C_3. Từ định lý Menelaus dễ thấy A_3, B_3, C_3 chia HA_2, HB_2, HC_2 theo cùng tỷ số. Ta phải chứng minh AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy. Giả sử d cắt BC, CA, AB tại A_4, B_4, C_4. AA_5, BB_5, CC_5 là các đường cao ΔABC thì $HA_4.HA_2 = HA.HA_5 = k$. Phép nghịch đảo cực H phương tích k biến A_4 thành A_2, A thành A_5. Tương tự với các đỉnh B, C, khi đó A_3, B_3, C_3 chia HA_2, HB_2, HC_2 theo cùng tỷ số sẽ biến thành A_6, B_6, C_6 chia HA_4, HB_4, HC_4 cùng tỷ số. Ta cần chứng minh các đường tròn $(HA_5A_6), (HB_5B_6), (HC_5C_6)$ đồng trục. Gọi A_7, B_7, C_7 là các điểm đối xứng của H qua A_5, B_5, C_5 và A_8, B_8, C_8 là các điểm đối xứng của H qua A_6, B_6, C_6. Như vậy qua phép vị tự tâm H tỷ số 2 ta cần chứng minh các đường tròn $(HA_7A_8), (HB_7B_8), (HC_7C_8)$ đồng trục. Chú ý rằng tâm A_9 của (HA_7A_8) chính là giao của đường thẳng qua A_6 vuông góc với d và BC. Tương tự với B_9, C_9. Ta cần chứng minh A_9, B_9, C_9 thẳng hàng. Đường thẳng qua H vuông góc d cắt BC, CA, AB tại A_{10}, B_{10}, C_{10}. Dễ thấy A_9, B_9, C_9 chia $A_4A_{10}, B_4B_{10}, C_4C_{10}$ cùng tỷ số. Theo bổ đề thì A_9, B_9, C_9 thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3 (Mở rộng đề tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội 2016). *Cho hình vuông ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm thuộc cung nhỏ AD của (O). PB, PC lần lượt cắt đoạn AD tại M, N. Trung trực của AM, DN lần lượt cắt BD, AC tại S, T. ST cắt PC, PB lần lượt tại U, V. Chứng minh rằng đường tròn đường kính UV tiếp xúc với (O).*



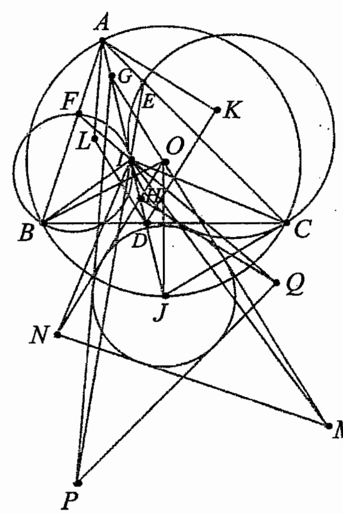
Lời giải. Giả sử trung trực của AM cắt PB, AC tại K, E. Trung trực của DN cắt PC, BD tại L, F. Do tam giác NCD vuông nên L là trung điểm CN, suy ra $LO \parallel AD$. Tương tự $KO \parallel AD$ nên K, O, L thẳng hàng. Dễ thấy tam giác AEM vuông cân nên $EM \perp AC \Rightarrow EM // DB$. Tương tự $FN // AC$. Chú ý $MN // BC$ nên $\frac{PM}{PB} = \frac{PN}{PC}$. Lấy điểm Q thuộc PO sao cho $\frac{PQ}{PO} = \frac{PM}{PB} = \frac{PN}{PC}$. Từ đó $QM // BD // EM$ nên E, M, Q thẳng hàng. Chứng minh tương tự F, N, Q thẳng hàng. Từ đó $OEQF$ là hình chữ nhật, nên PO đi qua trung điểm R của EF. Dễ thấy S, E đối xứng nhau qua K. T, F đối xứng nhau qua L. Vậy ST, KL, EF đồng quy tại G. Ta thấy R cũng là trung điểm OQ. Nên trong hình thang $BOQM$ có KR là đường trung bình, suy ra $KR // QM$. Tương tự $LR // QN$. Ta cũng có $MN // KL$. Mặt khác ΔQMN vuông cân nên ΔRKL vuông cân. Từ đó $\widehat{RLG} = 135°$. Dễ có $RO = RF$ và $LO = LF$ nên RL là phân giác của $\widehat{ORF}$. Từ đó gọi PO cắt ST tại H thì L là tâm đường tròn nội tiếp ΔRHG và $\widehat{RLG} = 135°$. Từ đó $\widehat{RHG} = 2\widehat{RLG} - 180° = 90°$, nên $PO \perp ST$ tại H suy ra tứ giác $SHOK$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{SHK} = \widehat{SOK} = 45° = \widehat{KPL}$ nên tứ giác $KHVP$ nội tiếp, suy ra $\widehat{PKV} = \widehat{PHV} = 90°$. Tương tự $\widehat{PLU} = 90°$ nên K, L nằm trên đường tròn đường kính UV. Gọi X là điểm đối xứng với P qua KL thì X thuộc (O) nên $\widehat{KXL} = 45° = \widehat{KSO} = \widehat{KHP} = \widehat{KVP}$ nên X nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KLV cũng là đường tròn đường kính UV. Do $KL // AD$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác XKL, hay đường tròn đường kính UV tiếp xúc với (O).

Bài toán 4. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển. AD là phân giác và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC, ADB. Lấy G, H trên AD sao cho $OG // DL, OH // DK$. Đường tròn qua I, C tiếp xúc IA cắt AC tại E khác C. Đường tròn qua I, B tiếp xúc IA cắt AB tại F khác B. Trên IE, IF lấy P, Q sao cho $GP // AL, HQ // AK$. Chứng minh rằng PQ luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi A thay đổi.*

Lời giải. Không mất tổng quát giả sử $AB < AC$. Do $OG // DL, GP // AL$ nên $\widehat{OGD} = \widehat{LDA} = \widehat{LAD} = \widehat{PGD}$, nên hai đường thẳng GP và GO đối xứng nhau qua AD. Lấy M thuộc GO sao cho $\widehat{BIM} = 90°$. Ta thấy

$$\widehat{DIM} = 90° - \widehat{BID} = 90° - \left(90° - \frac{\widehat{BCA}}{2}\right) = \widehat{ICA} = \widehat{AIE} = \widehat{PID}$$

nên hai đường thẳng IM và IP đối xứng nhau qua AD. Từ đó M và P đối xứng qua AD. Dựng N tương tự M thì N và Q đối xứng qua AD. Gọi AD cắt (O) tại J khác A. Do K là tâm ngoại tiếp ΔADC nên $DK \perp BJ$ từ đó dễ thấy ON là trung trực của BJ. Chú ý $OJ \perp BC$ nên $\widehat{BON} = \widehat{JON} = \widehat{JBC} = \widehat{JAC} = \widehat{BIC} - 90° = \widehat{BIN}$, suy ra tứ giác $BION$ nội tiếp. Tương tự có tứ giác $COIN$ nội tiếp. Từ hai tứ giác này nội tiếp chú ý tính đối xứng ta có biến đổi góc sau



$$\widehat{NJM} = 360° - \widehat{OJN} - \widehat{OJM}$$
$$= 180° - \widehat{OBN} + 180° - \widehat{OCM}$$
$$= 180° - \widehat{OIN} + \widehat{OIM} = 180° - \widehat{MIN} = \widehat{BIC}$$

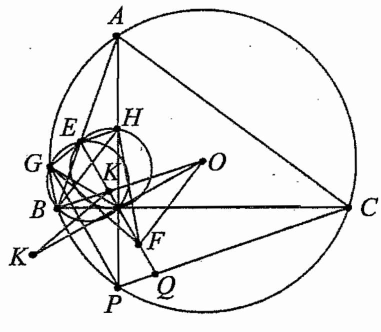
$=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{BAC}=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{MON}$

chú ý đẳng thức cuối có do $\widehat{MON}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}=\widehat{BAC}$.

Từ đó chú ý OJ là phân giác của $\widehat{MON}$ nên J là tâm đường tròn nội tiếp ΔOMN, vậy MN luôn tiếp xúc với $\left(J,\frac{JI}{2}\right)$ cố định. Vì hai đường thẳng MN và PQ đối xứng nhau qua trục AD và (J) tự đối xứng qua AD nên PQ luôn tiếp xúc (J) cố định. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. *Việc tìm ra phép đối xứng trục AD là bước quan trọng trong lời giải bài toán này. Nhờ có phép đối xứng trục ta đã chuyển việc chứng minh PQ tiếp xúc với đường tròn cố định thành việc chứng minh MN tiếp xúc với đường tròn cố định có phần đơn giản hơn.*

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD. Đường thẳng qua D vuông góc với OD cắt AB tại E. Trung trực của AC cắt DE tại F. Gọi OB cắt DE tại K. L là đối xứng của O qua EF. Đường tròn ngoại tiếp ΔBDF cắt (O) tại G khác B. Chứng minh rằng GF và KL cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp ΔDEH.*



Lời giải

Bổ đề. *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) và P,Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác. AP cắt (O) tại M khác A. QM cắt BC tại E thì $PE\,//\,AQ$.*

Chứng minh. Gọi AQ cắt (O) tại N khác A và cắt BC tại H. Vì P,Q đẳng giác nên $\Delta CHN \backsim \Delta ACM$ và $\Delta CPM \backsim \Delta QCN$ (g.g). Ta suy ra $HN.AM=CM.CN=QN.PM$ vì thế $\frac{MP}{MA}=\frac{NH}{NQ}=\frac{ME}{MQ}$ hay $PE\,//\,AQ$.

Hệ quả. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) và P,Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác. E thuộc BC sao cho $PE\,//\,AQ$ thì QE và AP cắt nhau trên đường tròn (O).

Trở lại bài toán. Gọi AD cắt (O) tại P khác A, dễ thấy D là trung điểm HP. Gọi DE cắt PC tại Q thì theo bài toán con bướm D là trung điểm EQ nên OD là trung trực của EQ. Vì G là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BED và BAC nên $\Delta GED \backsim \Delta GAC$. Từ đó $\widehat{GED}=\widehat{GAC}=180^\circ-\widehat{GPC}$. Từ đó tứ giác $GEQP$ nội tiếp, như vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác nằm trên OD.

Lại có $\widehat{GDE}=\widehat{GCA}=\widehat{GPA}$ nên đường tròn (GDP) tiếp xúc với DE nói cách khác tâm đường tròn ngoại tiếp tam ΔGDP nằm trên OD. Như vậy OD đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $GEQP$ và tam giác GDP nên $OD\perp GP$. Từ đó $GEQP$ là hình thang cân. Ta dễ chứng minh $\Delta DGE=\Delta DHE$. Vậy QE là trung trực của GH. Ta xét phép đối xứng trục EQ thì GF và KL cắt nhau trên (DEH) khi và chỉ khi các đường đối xứng của GF,KL qua QE cắt nhau trên đường tròn đối xứng của (DEH) qua EQ. Nói cách khác chỉ cần chứng minh FH,OK cắt nhau trên đường tròn (BDE). Ta để ý $\widehat{HBE}=\widehat{OBD}$ và $\widehat{EDH}=\widehat{ODC}$ nên O và H là hai điểm đẳng giác trong ΔBDE. Áp dụng hệ quả trên ta thấy FH,OK cắt nhau trên đường tròn (BDE).

Nhận xét. *Bổ đề có nguồn gốc từ diễn đàn AoPS và phép chứng minh trên của* **Phan Anh Quân** *học sinh lớp A1 Toán K48 trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. Trong việc áp dụng bổ đề ta đã chỉ ra một chi tiết khá thú vị là H và O đẳng giác trong tam giác BDE. Mặt khác việc xử lý bằng phép đối xứng trục để rồi sau đó áp dụng bổ đề là một bước quan trọng của bài toán.*

(Kỳ sau đăng tiếp)