Tổng quát hai đề toán hay

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết tổng quát hai bài toán hay được nhiều bạn đọc quan tâm trên toán tuổi thơ 2.

Trên TTT2 số 92 năm 2010 mục giải toán qua thư có bài toán hay như sau của thầy Nguyễn Minh Hà

Bài 1. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Hình vuông $MNPQ$ có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC. Giả sử BN cắt MQ tại E. CM cắt NP tại F. Chứng minh rằng $AE = AF$ và $\angle EAB = \angle FAC$.*

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 94 năm 2010. Phần chứng minh hai góc bằng nhau được mở rộng cho hình chữ nhật của cùng tác giả và có trên TTT2 số 127 năm 2013 trong mục thách đấu như sau

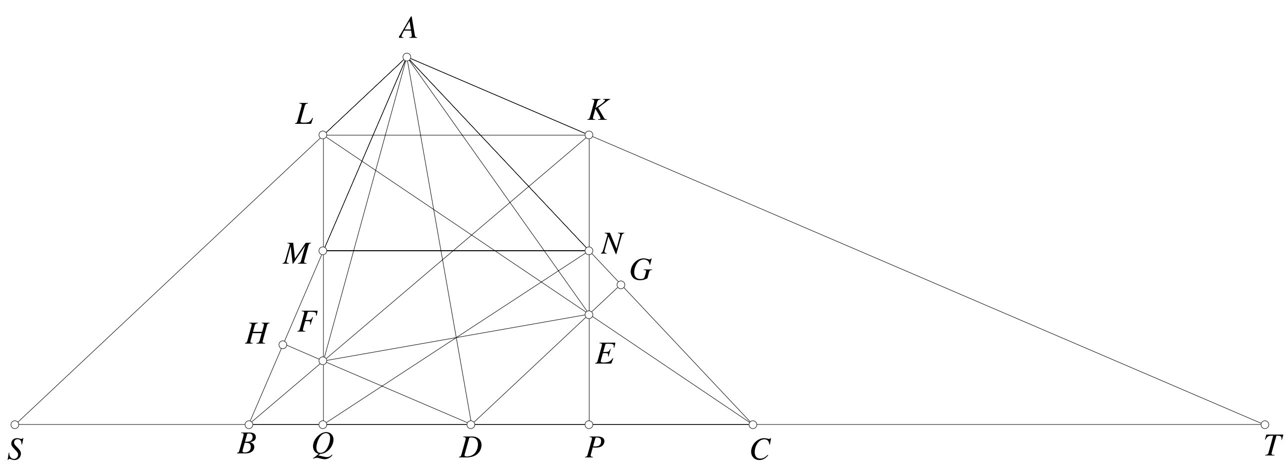
Bài 2. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Hình chữ nhật $MNPQ$ thay đổi thõa mãn M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC. Gọi BN giao MQ tại K, CM giao NP tại L, BN giao CM tại X, QN giao PM tại Y.*

a) Chứng minh rằng $\angle KAB = \angle LAC$.

b) Chứng minh rằng XY luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 129 năm 2013. Bài báo này sẽ trình bày một số mở rộng cho hai bài toán trên. Một cách tự nhiên chúng ta suy nghĩ rằng liệu bài toán 1 có thể có cách phát biểu nào cho tam giác bất kỳ. Ta đi đến mở rộng đầu tiên như sau

Bài 3. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho M thuộc đoạn AB, N thuộc đoạn AC, P, Q thuộc đoạn BC với P nằm giữa Q, C và $\angle MNQ = \dfrac{\angle BAC}{2}$. Đường thẳng qua A vuông góc AB cắt NP tại K. Đường thẳng qua A vuông góc AC cắt MQ tại L. CL cắt NP tại E. BK cắt MQ tại F. Chứng minh rằng $AE = AF$.*



Hình 1.

Chứng minh. Gọi AD là phân giác của tam giác ABC. Gọi AL, AK lần lượt cắt BC tại S, T. Ta sẽ chứng minh rằng DE song song SL, thật vậy

Theo định lý Theles ta có

$\dfrac{CE}{CL} = \dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{CP}{CN}.\dfrac{CN}{CQ}$

$= \dfrac{CA}{CS}.\dfrac{CD}{CA}$ (Chú ý do $\triangle CPN \sim \triangle CAS, \triangle CQN \sim \triangle CAD$)

$= \dfrac{CD}{CS}$.

Từ đó $DE \parallel SL \perp AC$ nên DE vuông góc CA tại G. Tương tự DF vuông góc AB tại H.

Dễ chứng minh A, M, N, K, L nội tiếp đường tròn đường kính NL, MK nên $MNKL$ là hình chữ nhật. Vậy cũng từ định lý Thales ta dễ thấy $\dfrac{DE}{DG} = \dfrac{SL}{SA} = \dfrac{TK}{TA} = \dfrac{DF}{DH}$. Chú ý rằng AD là phân giác góc A và G, H là hình chiếu của D lên CA, AB nên $DG = DH$. Từ đó dễ có $DE = DF \quad (1)$.

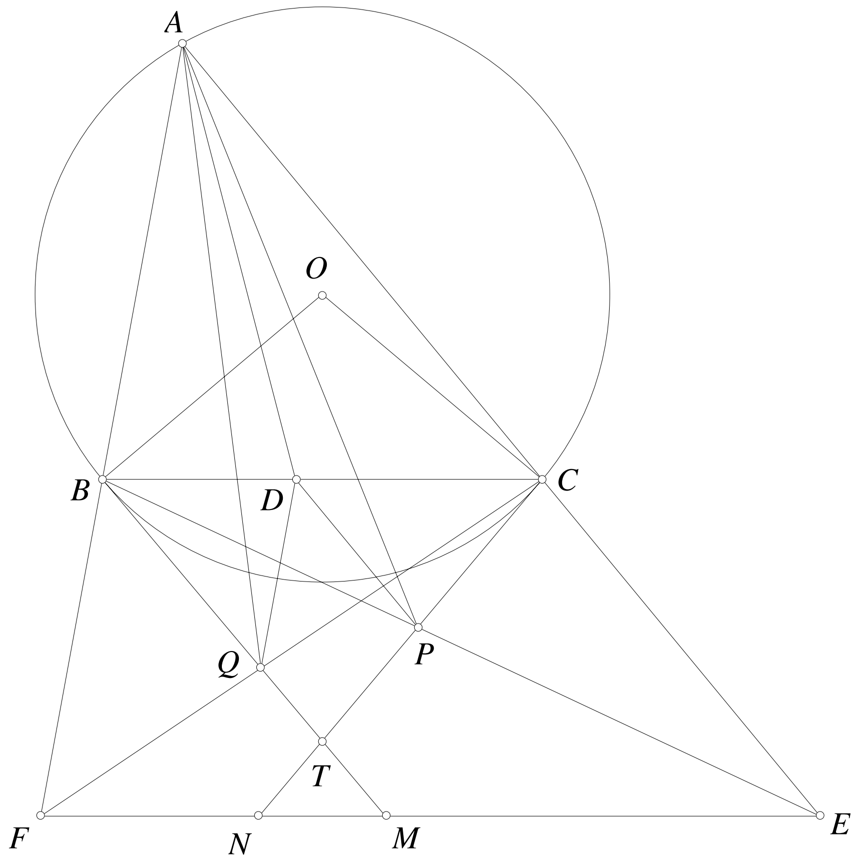
Cũng từ $DE \parallel SA, DF \parallel AT$ và AD là phân giác $\angle SAT$ dễ có $\angle GDA = \angle DAL = \angle DAK = \angle FDA \quad (2)$.

Từ (1),(2) dễ chỉ ta tam giác $\triangle DAE = \triangle DAF$ $(c.g.c)$ suy ra $AE = AF$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Trong chứng minh trên dễ chỉ ra được $\angle EAB = \angle FAC$.

Nếu trong bài toán 1, ta coi MQ, NP là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông AMN thì ta sẽ có một hướng mở rộng khác như sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại T. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia BT, CT sao cho $BM = BC = CN$. Đường thẳng MN cắt CA, AB theo thứ tự tại E, F; BE giao CT tại P, CF giao BT tại Q. Chứng minh rằng $AP = AQ$.*



Hình 2.

Chứng minh. Gọi AD là phân giác của tam giác ABC. Do B, C đối xứng nhau qua OT và $BM = CN$ nên M, N đối xứng qua OT, suy ra $BC \parallel MN$.

Ta có $\angle FBM = 180° - \angle ABC - \angle CBM = 180° - \angle ABC - \angle CAB = \angle ACB$, chú ý góc đồng vị $\angle ABC = \angle BFM$ do đó $\triangle ABC \sim \triangle MFB$. Từ đó ta chú ý $FM \parallel BC$ nên theo định lý Thales $\dfrac{QC}{QF} = \dfrac{BC}{FM} = \dfrac{BM}{FM} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DC}{DB}$ suy ra $QD \parallel BF$. Tương tự $PD \parallel CE$.

Từ đó theo định lý Thales và tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{DQ}{DP} = \dfrac{DQ}{BF}.\dfrac{BF}{CE}.\dfrac{CE}{DP} = \dfrac{CD}{BC}.\dfrac{AB}{AC}.\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{CD}{BD}.\dfrac{AB}{AC} = 1$. Vậy $DP = DQ \quad (1)$.

Ta lại có $\angle ADQ = \angle ADB + \angle BDQ = \dfrac{\angle BAC}{2} + \angle ACB + \angle ABC$. Vậy tương tự $\angle ADP = \dfrac{\angle BAC}{2} + \angle ACB + \angle ABC$ do đó $\angle ADQ = \angle ADP \quad (2)$

Từ $(1), (2)$ suy ra $\triangle ADQ = \triangle ADP$ $(c.g.c)$ suy ra $AP = AQ$. Ta có điều phải chứng minh. □

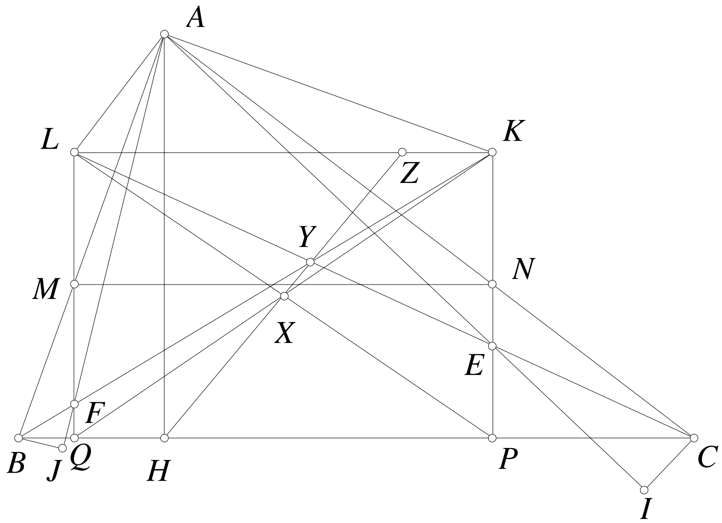
Nhận xét. Trong chứng minh trên ta cũng dễ thấy $\angle PAB = \angle QAC$.

Hướng mở rộng của bài toán 3 cũng có thể áp dụng tiếp được cho bài toán 2. Ta có bài toán như sau

Bài 5. *Cho tam giác ABC dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho M, N lần lượt thuộc AB, AC và P, Q thuộc BC. Đường thẳng qua A vuông góc AB cắt NP tại K. Đường thẳng qua A vuông góc AC cắt MQ tại L. CL cắt NP tại E. BK cắt MQ tại F.*

a) Chứng minh rằng $\angle EAC = \angle FAB$.

b) Gọi LP giao QK tại X, BK giao CL tại Y. Chứng minh rằng XY luôn đi qua một điểm cố định khi hình chữ nhật $MNPQ$ di chuyển.



Hình 3.

Chứng minh. a) Gọi AL, AK cắt BC lần lượt tại S, T. Gọi I, J là hình chiếu của C, B lên AE, AF. Ta xét tỷ số

$$\frac{BJ}{CI} = \frac{BJ}{AK}.\frac{AK}{AL}.\frac{AL}{CI}$$
$$= \frac{BF}{FK}.\frac{AK}{AL}.\frac{LE}{EC}$$
$$= \frac{BQ}{LK}.\frac{AT}{AS}.\frac{LK}{PC}$$
$$= \frac{BQ}{AB}.\frac{AB}{AC}.\frac{AC}{PC}.\frac{AT}{AS}$$
$$= \frac{MQ}{AT}.\frac{AB}{AC}.\frac{AS}{NP}.\frac{AT}{AS} \text{ (Chú ý } \triangle BMQ \sim \triangle BAT, \triangle CNP \sim \triangle CSA)$$
$$= \frac{AB}{AC}.$$

Từ đó dễ có $\triangle ABJ \sim \triangle ACI$ suy ra $\angle BAF = \angle CAE$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi XY giao LK, BC lần lượt tại Z, H. Vì tứ giác $LKPQ$ là hình chữ nhật, X là giao hai đường chéo. Sử dụng định lý Thales ta có các biến đổi tỷ số sau

$$\frac{HP}{HC} = \frac{LZ}{HC} = \frac{LY}{YC} = \frac{LK}{BC} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}.$$

Suy ra $AH \parallel NP \perp BC$. Vậy AH vuông góc BC suy ra H cố định. Vậy XY đi qua H cố định. □

Tài liệu

[1] Tạp chí TTT2 số 92,94 năm 2010.

[2] Tạp chí TTT2 số 127,129 năm 2013.