Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

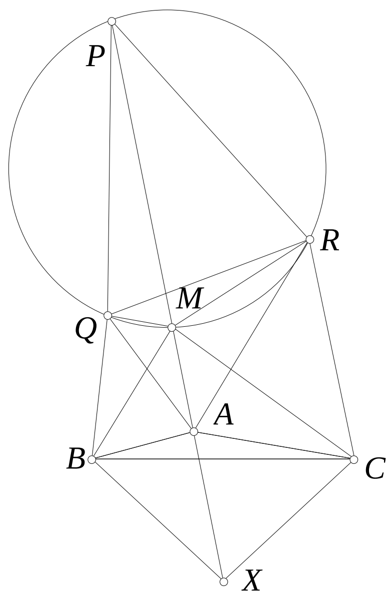
Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P di chuyển trên phân giác trong góc $\angle BAC$. E, F là hình chiếu của P lên CA, AB. EF cắt (O) tại M, N. MP, NP cắt lại (O) tại Q, R. Chứng minh rằng đường thẳng qua P vuông góc QR luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

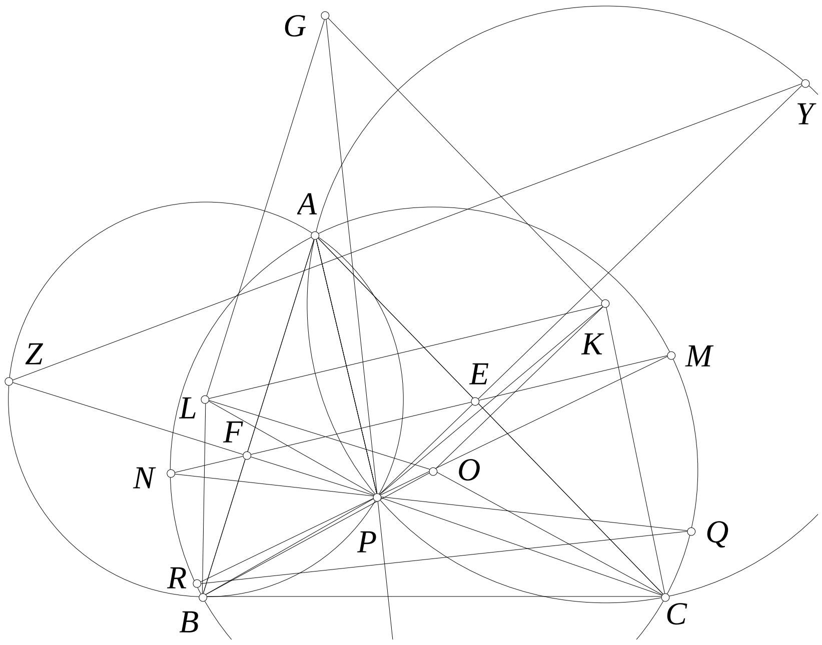
Lời giải

Lời giải kết hợp ý tưởng lời giải gốc của tác giả và của bạn **Trương Tuấn Nghĩa** lớp 9 Toán trường Hà Nội Amsterdam.

Bổ đề. Cho tam giác ABC có B, C cố định và A di chuyển. Dựng ra ngoài các tam giác cân CAQ, ABR cân tại Q, R có các góc $\angle Q = \angle R = \alpha$ không đổi. Dựng ra ngoài tứ giác $BCRQ$ tam giác PQR cân tại P có $\angle P = \alpha$. Khi đó đường thẳng AP luôn đi qua một điểm cố định khi A di chuyển.



Chứng minh. Gọi PA cắt trung trực BC tại X. Gọi giao điểm khác P của AP và (PQR) là M. Khi đó $\angle QMP = \angle QRP = \angle QBA$ suy ra tứ giác $BAMQ$ nội tiếp. Tương tự $CAMR$ nội tiếp. Ta suy ra $\angle AMB = \angle AQB = \angle ARC = \angle AMC$ do đó MX là phân giác $\angle BMC$ vậy tứ giác $MBXC$ nội tiếp. Từ đó $\angle XBC = \angle XMC = \angle ARC = \alpha$ không đổi do đó X cố định.



Giải bài toán. Gọi (K), (L) là đường tròn ngoại tiếp các tam giác PCA, PAB. PE, PF lần lượt cắt (K), (L) tại Y, Z khác P. Ta thấy $EM \cdot EN = EA \cdot EC = EP \cdot EY$ suy ra Y nằm trên đường tròn (PMN). Tương tự Z nằm trên (PMN). Gọi G là tâm đường tròn (PMN) ta suy ra $GK \perp GY \perp AC$ suy ra $GK \parallel AC$. Tương tự $GL \parallel AB$. Từ đó ta dễ suy ra $\angle KGL = \angle BAC = 2\angle PAB = \angle PLB = \angle PKC$. Từ đó ta có các tam giác cân GKL, LPB và KPC lần lượt cân tại G, L và K đồng thời các góc ở đỉnh bằng $\angle BAC$ không đổi. Từ đó theo bổ đề PG đi qua điểm cố định. Do $MNRQ$ nội tiếp nên $PG \perp QR$. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét

Bài toán này được tác giả phát triển từ bài toán chọn đội tuyển SP năm 2017. Ban đầu tác giả có ý tưởng dựng ra các điểm Y, Z và dùng trục đẳng phương nhưng bạn **Nghĩa** đưa ra bổ đề làm lời giải gọn hơn. Bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây. Bạn **Nguyễn Việt Dũng** lớp 12 Toán, THPT chuyên Hạ Long gửi lời giải qua email.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với trực tâm H. AH cắt (O) tại P khác A. PB, PC lần lượt cắt OC, OB tại Q, R. K đối xứng với trực tâm tam giác PQR qua BC. LA cắt HB, HC tại S, T. Chứng minh rằng CS và BT cắt nhau trên đường tròn (BHC). Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

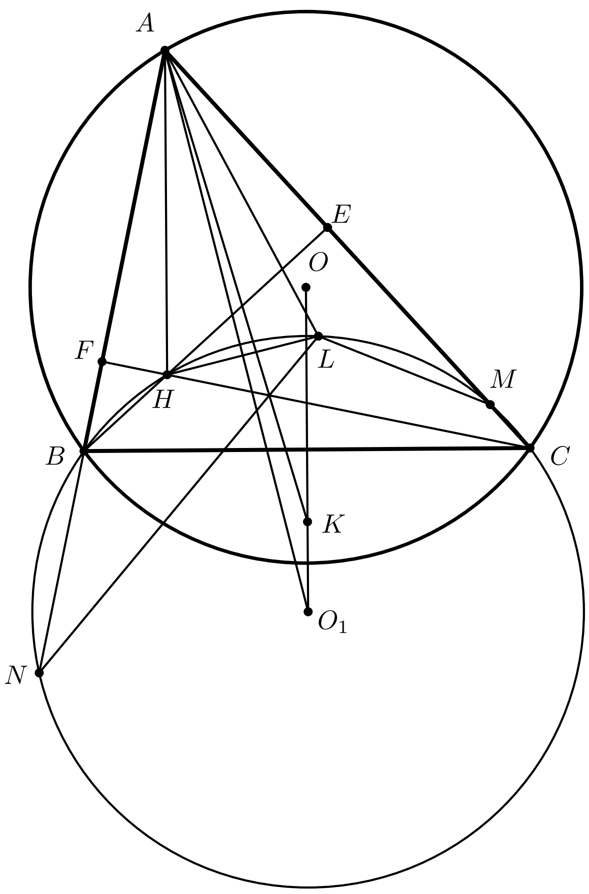
Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm ngoại tiếp O. K là tâm của đường tròn (BOC). Đối xứng của AK qua BH, CH cắt nhau tại L. Chứng minh rằng $AH = AL$.

Tác giả: **Trịnh Huy Vũ**

Lời giải

Gọi M, N lần lượt đối xứng của A qua BH, CH. Khi đó, ta được ML, NL lần lượt là đối xứng của đường thẳng AK qua BH, CH. Gọi O_1 đối xứng của O qua đường thẳng BC.



Do $\angle HMA = \angle HAM = \angle HBC$ nên điểm M nằm trên đường tròn (HBC). Chứng minh tương tự ta được N cũng nằm trên đường tròn (HBC). Hơn nữa, vì ML, NL lần lượt là đối xứng của đường thẳng AK qua BH, CH nên $\angle LMA = \angle KAC$ và $\angle LNA = \angle KAB$. Từ đó ta được

$$\begin{aligned}\angle MLN &= \angle BAC + \angle LMA + \angle LNA\\ &= \angle BAC + \angle KAC + \angle KAB\\ &= 2\angle BAC\end{aligned}$$

Mặt khác, ta cũng có H là tâm ngoại tiếp của tam giác AMN, vì vậy $\angle MHN = 2\angle BAC$. Vậy $\angle MLN = \angle MHN$. Do đó, L nằm trên đường tròn $(HMN) \equiv (HBC)$. Suy ra $O_1H = O_1L$.

Trong khi đó, ta cũng có một kết quả nổi tiếng: AK và AO_1 là hai đường đẳng giác trong góc $\angle BAC$. Từ đó ta có $\angle EHL = \angle BML = \angle BMA - \angle LMA = \angle BAC - \angle KAC = \angle KAB = \angle O_1AC$. Suy ra

$$\begin{aligned}\angle O_1AH + \angle AHL &= \angle O_1AH + \angle EHL + \angle AHE\\ &= \angle O_1AH + \angle O_1AC + \angle AHE\\ &= \angle HAC + \angle AHE\\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

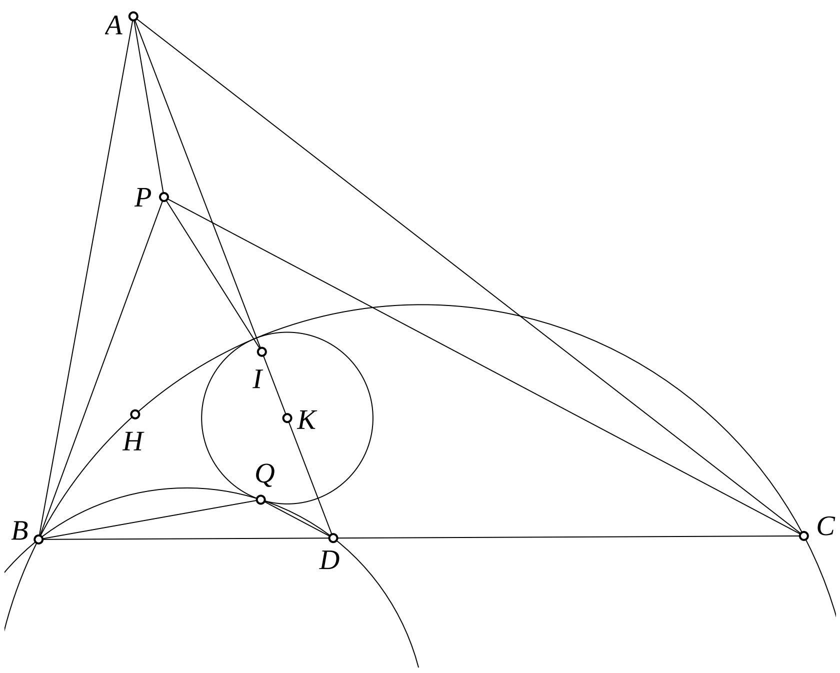
Do đó, $AO_1 \perp HL$. Mà $O_1H = O_1L$ nên AO_1 là trung trực của HL. Từ đó suy ra $AH = AL$.

Nhận xét

Bài toán là một mở rộng của bài toán số 5 trong đề thi ITOT mùa xuân 2017 (Senior A level). Bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây, bạn **Trương Tuấn Nghĩa** lớp 9 Toán trường Hà Nội Amsterdam gửi lời giải qua email.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có phân giác AD. P, Q là các điểm nằm trong tam giác sao cho $PA = PI$, $\angle PBA = \angle PCA = \angle QBC$ và $DQ \parallel CP$. (K) là đường tròn có tâm thuộc AD và tiếp xúc với đường tròn (BDQ) tại Q. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn (BHC).



Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng,** Hà Nội.