Một kĩ thuật chứng minh B.Đ.T

Bài toán B.Đ.T thường là nội dung khó với các bạn học sinh trung học cơ sở .Một lí do đơn giản vì đây là dạng toán "mới mẻ" với các bạn và khi giải các bài toán B.Đ.T các bạn thường cảm thấy "lúng túng" không biết phải sử dụng phương pháp gì?Tuy nhiên, trong nhiều bài toán B.Đ.t có điều kiện chúng ta có thể dựa vào điều kiện của biến để đặt ẩn phụ đưa bài toán về dạng đơn giản có thể đánh giá được trực tiếp mà không cần sử dụng đến các công cụ "đao to búa lớn". Bài viết dưới đây dựa trên ý tưởng của
My Teacher-thầy Hoàng văn Đắc
Chúng ta bắt đầu với một bài toán đơn giản sau

Ví dụ 1 .CMR Với $a, b \in R$ và $a+b=4$ thì $a^4+b^4 \geq 32$
Nhận xét rằng một biểu thức nhiều biến thường đạt giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất khi tất cả các biến bằng nhau (tổng quát hơn là trường hợp một số biến bằng nhau) hoặc một số biến có giá trị trên biên .Điều này gợi ý cho ta cách đổi biến như sau
Lời giải Do a+b=4 nên có thể đặt a=2+x,b=2-x với $x \in R$
Ta có $a^4+b^4=(2+x)^4+(2-x)^4=2x^4+48x^2+32 \geq 32$ (đpcm)
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ x=0 $\Leftrightarrow$ a=b=2.Như vậy bằng cách đổi biến thích hợp chúng ta đã đưa bài toán về dạng đơn giản có thể đánh giá trực tiếp được và B.Đ.T chúng ta sử dụng chỉ là
B.Đ.T cơ bản nhất $x^2 \geq 0, \forall x \in R$

Chúng ta sẽ gặp lại nhau sau ít phút quảng cáo ....

Trở lại với bài viết .Tiếp theo chúng ta xem xét một vài ví dụ khác.Qua đó hi vọng các bạn học sinh THCS sẽ có được một cách nhìn mới với những bài toán B.Đ.T kiểu này.

Ví dụ 2.Cho $a, b \in R$ thỏa mãn $a+b \geq 2$ .CMR
$a^3+b^3 \leq a^4+b^4$
Lời giải. Đặt a=1+x,b=1+y.Từ $a+b \geq 2$ ta có $x+y \geq 0$
B.Đ.T cần chứng minh tương đương với $(1+x)^3+(1+y)^3 \leq (1+x)^4+(1+y)^4$
(B.Đ.T này đúng vì $x+y \geq 0$)
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=0 \Leftrightarrow a=b=1$.

Ví dụ 3.Cho $a, b, c \in R$ thỏa mãn a+b+c=3.
CMR: $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac \geq 6$
Lời giải.Vì a+b+c=3 nên có thể đặt a=1+x,b=1+y,c=1-x-y với $x, y \in R$
Ta
có :
$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac=(1+x)^2+(1+y)^2+(1-x-y)^2+(1-x)(1-y)+(1-y)(1-x-y)+(1-x-y)(1-$$
$$=x^2+xy+y^2+6=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+6 \geq 6 \text{ (đpcm)}$$
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow y=0, x+\frac{y}{2}=0 \Leftrightarrow a=b=c=1$

Ví dụ 4.Cho $a,b,c\in R$ thỏa mãn a+b+c+d=1.CMR:

$$(a+c)(b+d)+2ac+2bd\le\frac{1}{2}$$

Lời giải.Vì a+b+c+d=1 nên có thể đặt

$$a=\frac{1}{4}+x+z,b=\frac{1}{4}-x+z,c=\frac{1}{4}+y-z,d=\frac{1}{4}-y-z$$

Ta có:

$$(a+c)(b+d)+2ac+2bd=(\frac{1}{2}+x+y)(\frac{1}{2}-x-y)+2(\frac{1}{4}+x+z)(\frac{1}{4}+y-z)+2(\frac{1}{4}-x+z)(\frac{1}{4}-y-z)$$

$$=\frac{1}{2}-(x-y)^2-4z^2\le\frac{1}{2}\text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ x-y=0,z=0 $\Leftrightarrow$ a=c,b=d

Ví dụ 5.Cho $a,b,c,d\in R$ thỏa mãn a+b=c+d

CMR: $c^2+d^2+cd\ge 3ab$

Lời giải:.Do a+b=c+d nên ta đặt c=a+x,d=b-x với $x\in R$

Ta có $c^2+d^2+cd=(a+x)^2+(b-x)^2+(a+x)(b-x)=(a-b+\frac{x}{2})^2+\frac{3x^2}{4}+3ab\ge 3ab$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a-b+\frac{x}{2}=x=0\Leftrightarrow a=b=c=d$

Ví dụ 6.Cho $x,y\in R,x<2$ và $x+y>5$.CMR: $5x^2+2y^2+8y>62$

Lời giải.Vì $x<2,x+y>5$ nên ta đặt x=2-t,x+y=5+u(t,u>0)

$$5x^2+2y^2+8y=5(2-t)^2+2(3+t+u)^2+8(3+t+u)=62+2(t+u)^2+5t^2+20u>62$$

Ta có đpcm

Ví dụ 7 Cho $x,y\in R,x\le 1,x+y\ge 3$. Tìm GTNN của $F=3x^2+y^2+3xy$

Lời giải.Đặt x=1-a,x+y=3+b thì y=2+a+b:a,b$\ge$0

Ta có $3x^2+y^2+3xy=3(1-a)^2+(2+a+b)^2+3(1-a)(2+a+b)$

$$=a^2+b^2-5a+7b-ab+13$$

$$=(a-\frac{b}{2}-\frac{5}{2})^2+\frac{3b^2}{4}+\frac{9b}{2}+\frac{27}{4}\ge\frac{27}{4}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=\frac{5}{2},b=0\Leftrightarrow x=\frac{-3}{2},y=\frac{9}{2}$

Ví dụ 8 Cho $x,y\in R,x+y=3,x\le 1$.CMR

$$y^3-x^3-6y^2-x^2+9y\ge 0$$

Lời giải.Đặt $x = 1 - w$ thì $u = 2 + w$ $(w \geq 0)$)

$y^3 - x^3 - 6y^2 - x^2 + 9y \geq 0 \Leftrightarrow (2+w)^3 - (1-w)^3 - 6(2+w)^2 - (1-w)^2 + 9(2+w) \geq 0$

$\Leftrightarrow w(w-1)^2 \geq 0$ (đúng)

Đẳng thức xảy ra $w \in \{0;1\} \Leftrightarrow (x;y) \in \{(1;2),(0;3)\}$

Lời kết.Như vậy với việc đổi biến khéo léo ta có thể đưa việc xét một biểu thức phức tạp về một biểu thức đơn giản hơn,phù hợp với trình độ THCS.Những VD trên là đơn giản (không có VD nào có thể coi là khó!)và những lời giải trên là để minh họa cho kĩ thuật nên có thể chưa phải là lời giải hay nhất,ngắn gọn nhất.Tác giả cho rằng việc đưa ra quá nhiều VD sẽ chỉ nhàm chán và vô vị ,vì vậy chỉ đưa ra vài VD đơn giản để bạn đọc có thể nắm bắt được ý tưởng nhanh chóng.Khi đã nắm bắt được ý tưởng ,bạn hoàn toàn có thể "đánh bay" một lớp các bài toán như vậy và đương nhiên bạn cũng có thể tự tạo ra các bài toán kiểu này.Dưới đây cũng là những BT đơn giản để các bạn thử nghiệm!

BT áp dụng.Bài 1. Cho $a,b \in R, ab \geq 1$.CM $a^2 + b^2 \geq a + b$

Bài 2.Cho $x, y \in R, x + y = 3, x \leq 1$.CM

a) $x^3 + y^3 \geq 9$

b) $2x^4 + y^4 \geq 18$

Bài 3.Cho x,y>0 thỏa mãn x+y=1

Tìm GTNN của $P = \dfrac{1}{x^2 + y^2} + \dfrac{3}{4xy}$

Bài 4 Cho $a,b \in R, a + b > 8, b > 3$

CMR: $27a^2 + 10b^3 > 945$

vuthanhtu_hd