CHUYÊN ĐỀ: HÌNH HỌC PHẲNG

BÀI 1: CÁC BÀI TOÁN VỀ TAM GIÁC THI HỌC SINH GIỎI QUỐC TẾ

9.1 (Nam Tư, 81) Cho tam giác nhọn ABC không đều. Kẻ đường cao AH, trung tuyến BM và đường phân giác CI của góc ACB. Trung tuyến BM cắt AH và CL lần lượt ở P và Q, còn CL cắt AH ở R. Chứng minh rằng tam giác PQR không phải là tam giác đều.

9.2 (Bỉ, 77) Chứng minh rằng nếu cho trước các số thực dương a, b, c và với mỗi giá trị của $n \in N$, tồn tại một tam giác có cạnh a^n, b^n, c^n thì tất cả các tam giác đó đều là tam giác cân.

9.3 (Thụy Điển, 82) Tìm tất cả các giá trị của $n \in N$ để với mỗi giá trị đó tồn tại số $m \in N$, mà tam giác ABC có cạnh AB = 33, AC = 21, BC = n và các điểm D, E lần lượt ở trên cạnh AB, AC thỏa mãn điều kiện AD = DE = EC = m.

9.4 (Việt Nam, 79) Tìm tất cả bộ ba các số $a, b, c \in N$ là các độ dài các cạnh của tam giác nội tiếp trong đường tròn đường kính 6,25.

9.5 (Nữu Ước, 78) Tam giác ABC và tam giác DEF cùng nội tiếp trong một đường tròn. Chứng minh rằng chu vi của chúng bằng nhau khi và chỉ khi có:

$$\sin A + \sin B + \sin C = \sin D + \sin E + \sin F$$

9.6 (Nam tư, 81) Một đường thẳng chia một tam giác thành hai phần có diện tích bằng nhau và chu vi bằng nhau, Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác nằm trên đường thẳng ấy.

9.7 (Áo, 83) Cho tam giác ABC, trên các cạnh AB, AC và BC lấy lần lượt các điểm C", B', và A' sao cho các đoạn AA', BB', CC' cắt nhau tại một điểm; các điểm A", B", C" lần lượt đối xứng với các điểm A, B, C qua A', B', C'. Chứng minh rằng: $S_{A"B"C"} = 3S_{ABC} + 4S_{A'B'C'}$.

9.8 (Áo, 71) Các đường trung tuyến của tam giác ABC cắt nhau tại O. Chứng minh rằng:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3\left(OA^2 + OB^2 + OC^2\right)$$

9.9 (Nữu Ước, 79) Chứng minh rằng nếu trọng tâm của một tam giác trùng với trọng tâm của tam giác có các đỉnh là trung điểm các đường biên của nó, thì tam giác đó là tam giác đều.

9.10 (Anh, 83) Giả sử O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, D là trung điểm cạnh AB, còn E là giao điểm của các đường trung tuyến của tam giác ACD. Chứng minh rằng nếu AB = AC, thì OE vuông góc với CD.

9.11 (Tiệp Khắc, 72) Tìm tất cả các cặp số thực dương a, b để từ chúng tồn tại tam giác vuông CDE và các điểm A, B ở trên cạnh huyền DE thỏa mãn điều kiện:

$$\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BE}$$ VÀ AC = a, BC = b.

9.12 (Nữu ước, 76) Tìm một tam giác vuông có các cạnh là số nguyên có thể chia mỗi góc của nó thành ba phần bằng nhau bằng thước kẻ và compa.

9.13 (Phần Lan, 80) Cho tam giác ABC, dựng các đường trung trực của AB và AC. Hai đường trung trực trên cắt đường thẳng BC ở X và Y tương ứng. Chứng minh rằng đẳng thức: BC = XY.

a) Đúng nếu tgB.tgC = 3.

b) Đẳng thức có thể đúng khi tgB.tgC $\neq$ 3, khi đó hãy tìm tập hợp $M \subset R$ để đẳng thức đã dẫn trên tương đương với điều kiện tgB.tgC $\in$ M.

9.14 (Nữu Ước, 76) Các đường cao của tam giác nhọn ABC cắt nhau ở O. Trên đoạn OB và OC người ta lấy hai điểm B_1, C_1 sao cho $\widehat{AB_1C}=\widehat{AC_1B}=90^\circ$. Chứng minh rằng: $AB_1 = AC_1$.

9.15 (Anh, 81) Các đường cao của tam giác ABC cắt nhau ở O, còn các điểm A_1, B_1, C_1 là trung điểm của các cạnh tương ứng BC, CA, AB. Đường tròn tâm O cắt đường thẳng B_1C_1 ở D_1, D_2 , cắt C_1A_1 ở E_1, E_2 và cắt đường thẳng A_1B_1 ở F_1, F_2. Chứng minh rằng:

$$AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$$

9.16 (Nam Tư, 83) Trong tam giác ABC lấy điểm P, còn trên cạnh AC và BC lấy các điểm tương ứng M và L, sao cho: $\widehat{PAC}=\widehat{PBC}$; $\widehat{PLC}=\widehat{PMC}=90^\circ$.

Chứng minh rằng nếu D là trung điểm của cạnh AB thì DM = DL.

9.17 (Rumani, 78) Tìm quỹ tích của những điểm M trong tam giác ABC thỏa mãn điều kiện:

$$\widehat{MAB}+\widehat{MBC}+\widehat{MCA}=90^\circ$$

9.18 (Bungari, 82) Ký hiệu $B_{ij}\left(i, j \in \{1;2;3\}\right)$ là điểm đối xứng của đỉnh A_i của tam giác thường $A_1A_2A_3$ qua phân giác xuất phát từ đỉnh A_j. Chứng minh rằng các đường thẳng $B_{12}B_{21}B_{13}B_{31}$ và $B_{23}B_{32}$ song song với nhau.

9.19 (Bungari, 81) Đường phân giác trong và ngoài của góc C của tam giác ABC cắt đường thẳng AB ở L và M. Chứng minh rằng nếu CL = CM thì: $AC^2 + BC^2 = 4R^2$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

BÀI 1. TAM GIÁC

9.1 Giả sử tam giác PQR đều.

Suy ra $PRQ = 90^\circ \Rightarrow RCH = 30^o$

Mặt khác $RPQ = 60^\circ \Rightarrow MBC = 30^\circ \Rightarrow BMC = 90^\circ$ tam giác ABC đều.

Điều này trái với giả thiết . Vậy tam giác PQR không đều.

9.2 Không giảm tính tổng quát.

Giả sử rằng $a \le b \le c$

Nếu c > b , thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b^n}{c^n} = 0;$ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{c^n} = 0;$ và khi giá trị của n $\in$ N đủ lớn bất đẳng thức $a^n + b^n > c^n$ không đúng, đó là điều kiện cần để tồn tại tam giác có các cạnh a^n, b^n, c^n) . Vậy b = c, khi đó tất cả tam giác đều cân.

9.3 Giả sử m, n $\in$ N thỏa mãn điều kiện bài toán. Khi đó m = CE < AC = 21.

Và từ tam giác ADE có: 21 – m = AE < AD + DE = 2m. Nghĩa là 7 < m > 21.

Mặt khác khi AD = DE, ta tìm được: cos A = AE : 2AD = (21 – m) : 2m.

Theo định lý hàm số sin ta có: $n^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB.AC.\cos\alpha$

$$= 33^2 + 21^2 - 2(33.21)\frac{21-m}{2m} = 2223 - \frac{27.49.11}{m}$$

Vì m, n $\in$N, nên suy ra $27.49.11 \vdots m \Rightarrow m = 9;11$

Với m = 9 $\Rightarrow n^2 = 106$. Trường hợp này không thỏa mãn vì 606 không phải là số chính phương.

Với m = 11 $\Rightarrow n^2 = 900 \Rightarrow n = 30$

Vậy với m = 11, n = 30 thỏa mãn điều kiện đầu bài.

9.4 Giả sử a, b, c $\in$ N là độ dài các cạnh của tam giác nội tiếp trong đường tròn đường kính 2R = 6,25, còn S là diện tích tam giác và $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi của tam giác. Bởi vì a, b, c $\in$ 2R nên a, b, c $\in \{1;2;3;4;5;6\}$.

Nhưng $S = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$\Rightarrow (abc)^2 = 4(R)^2\, p(p-a)(p-b)(p-c) = (4SR)^2$$

$$\Rightarrow 64a^2b^2c^2 = 625(a+b+c)(c+b-a).(a+c-b)(a+b-c)$$

$\Rightarrow 64a^2b^2c^2 \vdots 625$ còn giá trị của a, b, c ít nhất hai trong ba giá trị đó sẽ bằng 5. Giả thử a = b = 5. Khi đó $64c^2 = (10+c)c^2(10-c)$

Hay $\quad 64^2 = (10-c^2)c^2 \Leftrightarrow 64 = 100 - c^2 \Rightarrow c = 6$

Như vậy bộ ba giá trị a, b, c $\in$ N là 5, 5, 6 mà những giá trị này thỏa mãn điều kiện của bài toán.

9.5 Xét tam giác ABC. Từ định lý sin ta có:

$$\sin A = \frac{a}{2R}$$
$$\sin B = \frac{b}{2R} \qquad \Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{p_1}{2R}$$
$$\sin C = \frac{c}{2R}$$

(p_1 là chu vi tam giác ABC)

Gọi p_2 là chu vi tam giác DEF, và chứng minh tương tự như trên, ta được:

$$\frac{p_2}{2R} = \sin D + \sin E + \mathrm{sinF}$$

Từ điều kiện của bài toán, và từ (1), (2) suy ra: $\frac{p_1}{2R} = \frac{p_2}{2R} \Leftrightarrow p_1 = p_2$(đpcm).

9.6 Giả sử, một đường thẳng cắt cạnh AB và AC của tam giác ABC lần lượt ở K và M, theo giả thiết ta có:

$$S_{AKM}=S_{KBCM}=\frac{1}{2}S_{ABC}(1)\Rightarrow 2S_{AKM}=S_{ABC}$$

Mặt khác: AK + AM + KM = KB + BC + CM + KM

Lại có: AB + BC + AC = AK + KB + BC + CM + AM

Do đó: $AK+AM=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)\Rightarrow\frac{AK+AM}{AB+BC+AC}=\frac{1}{2}(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow\frac{S_{AKM}}{S_{ABC}}=\frac{AK+AM}{AB+BC+AC}(3)$

Gọi r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC ta có:

$$2S_{ABC}=r_1(AB+AC+BC)(4)$$

Giả sử r_2 là bán kính đường tròn có tâm nằm trên KM và đường tròn đó tiếp xúc với AB, AC.

Bởi vậy diện tích tam giác AKM là: $S_{AKM}=\frac{1}{2}r_2(AK+KM)\Leftrightarrow 2S_{AKM}=r_2(AK+KM)(5)$

Từ (4) và (5) : $\Rightarrow\frac{S_{AKM}}{S_{ABC}}=\frac{r_2(AK+AM)}{R_1(AB+BC+AC)}(6)$

Từ (3) và (6) $\Rightarrow r_1=r_2$

Vậy tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên KM.

9.7 Giả sử các đoạn AA', BB', CC' cắt nhau ở O và góc AOB = α . Khi đó ta có:

$$2S_{AOB}=AO.BO.\sin\alpha$$
$$2S_{AOB'}=AO.B'O.\sin\alpha$$
$$2S_{A'OB}=A'O.BO.\sin\alpha$$
$$2S_{A'OB'}=A'O.B'O.\sin\alpha$$

Suy ra: $S_{A''OB''}=\frac{1}{2}A''O.B''\text{O}.\sin\alpha$

$$=\frac{1}{2}(AO+2A'O)(BO+2B'O)\sin\alpha$$

$$=S_{AOB}+2S_{AOB'}+4S_{A'OB'}(1)$$

Chứng minh tương tự ta được: $S_{A''OC''} = S_{AOC} + 2S_{AOC'} + 2S_{COA'} + 4S_{A'OC'}\ (2)$

$$S_{B''OC''} = S_{BOC} + 2S_{BOC'} + 2S_{BOC'} + 4S_{B'OC'}\ (3)$$

Từ (1) (2) và (3) suy ra:

$$S_{A''B''C''} = S_{ABC} + 2(S_{AOB'} + S_{B'OC} + S_{COA'} + S_{A'OB} + S_{BOC'} + S_{C'OA}) + 4S_{A'B'C'} = 3S_{ABC} + 4S_{A'B'C'}$$

9.8 Giả sử $\overrightarrow{AB} = c; \overrightarrow{BC} = a; \overrightarrow{CA} = b;$

Khi đó $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(c-b);$ $\quad \overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}(a-c);$ $\quad \overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}(b-a);$

Và $\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2\right) - 3\left(\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2\right)$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - \frac{1}{3}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac\right)$$

$$= \frac{1}{3}(a+b+c)^2 = 0$$

Từ đó ta có: $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 2\left(OA^2 + OB^2 + OC^2\right)$

9.9 Giả sử trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$ trùng với trọng tâm tam giác ABC (A_1, B_1, C_1 là trung điểm của lần lượt các cạnh BC, CA, AB). Nghĩa là O là giao điểm các đường trung tuyến.

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh BC, CA, AB khi đó: $a\overrightarrow{OA_1} + b\overrightarrow{OB_1} + c\overrightarrow{OB_1} = 0$

Vì rằng: $c\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CC_1} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = -\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right)$

$$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{OA_1} - \overrightarrow{OB_1}$$

Do đó: $(a-c)\overrightarrow{OA_1} + (b-c)\overrightarrow{OB_1} = a\overrightarrow{OA_1} + b\overrightarrow{OB_1} + c\overrightarrow{OB_1}$

Vì $\overrightarrow{OA_1}$ và $\overrightarrow{OB_1}$ không cộng tuyến nên a = b = c, nghĩa là tam giác ABC đều.

9.10 Từ hệ thức: $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$

$$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}\right)$$

$$AB = AC; \overrightarrow{AO} \perp \overrightarrow{BC}$$

Ta nhận được:

$$12\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CD}' = \left(2\overrightarrow{OC} + 3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}\right)$$
$$3\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - 4\overrightarrow{OC}^2 + 4\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$$
$$= 3R^2 + R^2 - 4R^2 + 4\overrightarrow{OA}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) = 4\overrightarrow{OA}\overrightarrow{CB} = 0$$

Ở đây R = OA = OB = OC là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.'

$$12\overrightarrow{OE}.\overrightarrow{CD}' = 0 \Rightarrow OE \perp CD$$

9.11 Ta ký hiệu $\overrightarrow{CA} = x$; $\overrightarrow{CB} = y$

Khi đó $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} = y - x$; $\overrightarrow{CE} = 2y - x$; $\overrightarrow{CD} = 2x - y$

Còn điều kiện $CD \perp CE$ cho ta đẳng thức (2x – y) (2y – x) hay $5(x-y)^2 = x^2 + y^2$

Biết rằng AC = b, BC = a, AB = c thì tam giác ABC thỏa mãn đẳng thức: $5c^2 = a^2 + b^2$

Như vậy tam giác tồn tại khi và chỉ khi các giá trị của a, b thỏa mãn đẳng thức:

$$|a-b| < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}} < a+b$$

Nghĩa là: $5(a-b)^2 < a^2 + b^2 < 5(a+b)^2$

Thật vậy, bất đẳng thức đúng khi tất cả a, b > 0. Mặt khác:

$$5(a-b)^2 < a^2 + b^2 \Leftrightarrow 5a^2 + 5b^2 - 10ab < a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow (2a-b)(2b-a) > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2$$

9.12 Ta chọn góc α thỏa mãn điều kiện $6\alpha < 90^\circ$ và $tg\alpha \in Q$ (ví dụ, giá trị $tg\alpha = \frac{1}{4}$). Khi đó, mỗi số sau đều là số hữu tỉ:

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}; \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}; \qquad \cos 6\alpha = \frac{1-tg^2 3\alpha}{1+tg^2 3\alpha};$$

$$tg3\alpha = \frac{tg2\alpha + tg\alpha}{1-tg2\alpha tg\alpha}; \qquad \sin 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}; \qquad \sin 6\alpha = \frac{2tg3\alpha}{1+tg^2 3\alpha};$$

Bởi vậy tam giác $A_1B_1C_1$ thỏa mãn điều kiện:

$$\widehat{C_1} = 90^\circ; \qquad \widehat{A} = 6\alpha; \qquad A_1B_1 = 1; \qquad A_1C_1 = \cos 6\alpha; \qquad B_1C_1 = \sin 6\alpha;$$

Độ dài các cạnh đều là số hữu tỉ, suy ra tam giác $A_1B_1C_1$ đồng dạng với tam giác ABC nào đó với cạnh là số nguyên (chẳng hạn khi $tg\alpha = \frac{1}{4}$, các cạnh tam giác ABC có thể AB = 4913, AC = 495, BC = 4888). Mặt khác ở tam giác vuông $A_2B_2C_2$ thỏa mãn điều kiện:

$$\widehat{C_1} = 90^\circ; \qquad \widehat{A} = 6\alpha; \qquad A_1B_1 = 1; \qquad A_1C_1 = \cos 6\alpha; \qquad B_1C_1 = \sin 6\alpha;$$

Độ dài của các cạnh cũng là số hữu tỉ. Vậy có thể dựng với dụng cụ là compa và thước kẻ góc.

$$2\alpha = \frac{1}{3}A_1$$

Nghĩa là chia được góc A của tam giác ABC thành 3 phần bằng nhau. Chẳng hạn góc bằng 30° cũng có thể dựng được và $\frac{1}{3}\widehat{B} = \frac{1}{3}\left(\widehat{C} - \widehat{A}\right) = 30^\circ - 2\alpha$ thì mỗi góc của tam giác ABC đều chia thành 3 phần bằng nhau bằng thước kẻ và compa. Như vậy tam giác ABC thỏa mãn điều kiện đòi hỏi của bài toán.

9.13 Trong tam giác ABC ta ký hiệu $\widehat{A} = \alpha;\ \widehat{B} = \beta;\ \widehat{C} = \gamma;$ và BC = a, AC = b, AB = c; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp.

Đẳng thức BC = XY đúng khi $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{XY}$ hoặc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{XY}$. Vì rằng đẳng thức:

$$\left|\overrightarrow{XY} \pm \overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CY} \pm \overrightarrow{BC}\right|$$

$$=\left|-\frac{c}{2\cos\beta}+a-\frac{b}{2\cos\gamma}\pm a\right|$$

$$=R\left|-\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}-\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}+2(1\pm1)\sin\alpha\right|$$

Tương tự điều kiện: $2(1\pm1)\sin\alpha=\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}$

Ta có: $\frac{\sin\gamma}{\cos\beta}+\frac{\sin\beta}{\cos\gamma}=\frac{\sin\gamma\cos\gamma+\sin\beta\cos\beta}{\cos\beta\cos\gamma}$

$$\frac{\sin 2\gamma+\sin 2\beta}{2\cos\beta\cos\gamma}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\gamma-\beta)}{\cos\beta\cos\gamma}$$

$$\frac{\sin\alpha(\cos\gamma\cos\beta+\sin\gamma\sin\beta)}{\cos\beta\cos\gamma}=\sin\alpha(1+tg\gamma tg\beta)$$

Do đó: $2(1\pm1)=1+tg\gamma.tg\beta$

Đẳng thức đúng khi $tg\gamma.tg\beta=3$ hoặc $tg\gamma.tg\beta=-1$.

Ta ký hiệu $M=\{-1;3\}$ và khẳng định trường hợp a) đúng, còn để chứng minh trường hợp b, chỉ cần để ý thực hiện $tg\gamma.tg\beta=-1$ chẳng hạn $\alpha=\beta=30^\circ,\gamma=120^\circ$.

9.14 Ta ký hiệu B_2,C_2 là chân đường cao kẻ từ B và C xuống AC, AB. Khi đó, từ các cặp tam giác đồng dạng:

$\Delta AB_1C\sim\Delta AB_2B_1$; $\Delta ABB_2\sim\Delta CC_2$; $\Delta AC_1B\sim\Delta AC_2C_1$;

(mỗi cặp tam giác vuông trên có 1 góc nhọn chung)

Ta có: $AB_1^2=AB_2AC=AC_2AB=AC_1^2$

Suy ra đẳng thức: $AB_1=AC_1$

9.15 Gọi A_2,B_2,C_2 lần lượt là chân đường cao kẻ từ A', B, C xuống các cạnh AB, AC, AB. Khi đó ta có: $AO.A_2O=BO.B_2O=CO.C_2O$

(Vì $\Delta AOB_2\sim\Delta BOA_2;\Delta COB_2\sim\Delta BOC_2$)

Mặt khác, vì là đường trung bình của tam giác ABC nên là đường trung trực của ; và theo định lý pitago ta có:

$$AD_i^2 = AQ^2 + \left(R^2 - OQ^2\right) = R^2 + \left(AQ + OQ\right)\left(AO - OQ\right)\left(i = 1,2\right)$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp). Việc chọn trường hợp khác nhau để xét điểm O trên đường thẳng AA_2 chứng tỏ đẳng thức sau đây đúng: $AD_i^2 = R^2 \pm AO.A_2O$

Đẳng thức lấy dấu + khi điểm O ở trong tam giác ABC còn nếu điểm O ở ngoài tam giác ABC thì đẳng thức lấy dấu -.

Chứng minh tương tự ta được: $BE_i^2 = R^2 \pm BO.B_2O; CF_i^{\,2} = R^2 \pm CO.C_2O;$

Từ đó suy ra: $AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2$

9.16 Giả sử E và F lần lượt là trung điểm của đoạn AP và BP. Khi đó DE và DF là đường trung bình của tam giác ABP, do đó tứ giác DFPE là hình bình hành và các tam giác APM, BPL vuông nên ta có: $ME = \frac{1}{2}AP = DF$

$$LF = \frac{1}{2}BP = DE$$

Mặt khác: $\widehat{PEM} = 2\widehat{EAM} = 2\widehat{FBL} = \widehat{PLE}$

$$\widehat{PED} = \widehat{PFD}$$

Như vậy các tam giác DEM và DFL bằng nhau theo trường hợp (c.g.c) (sự bằng nhau của đại lượng $\alpha = \widehat{PEM} + \widehat{PED} = \widehat{PFL} + \widehat{PFD}$ nếu $\alpha < 180^\circ$ và bằng $360^\circ - \alpha$ nếu $\alpha > 180^\circ$; nếu $\alpha = 180^\circ$ ta có ngay DM = ME + DE = DF + LF = DL). Từ đó suy ra DM = DL.

9.17 Tất cả các điểm M nằm trên đường cao của tam giác đều ABC thỏa mãn điều kiện của bài toán. Thí dụ xét điểm M_1 nằm trên đường cao dựng từ A ta có:

$$\widehat{M_1AB} + \widehat{M_1BC} + \widehat{M_1CA} = \widehat{M_1AB} + \widehat{M_1BC} + \widehat{M_1BA} = \widehat{M_1AB} + \widehat{ABC} = 90^\circ$$

(Chứng minh tam giác AM_1B = tam giác $AM_1C \Rightarrow \widehat{M_1OA} = \widehat{M_1BA}$). Ta sẽ chứng minh rằng những điểm M không nằm trên đường cao sẽ không thỏa mãn điều kiện bài toán. Giả sử điểm M không nằm trên đường cao nào của tam giác. Khi đó BM cắt đường cao AD, CF lần lượt tại M_1

và M_2. Nếu cả 3 điểm đều thỏa mãn điều kiện bài toán thì ta có:

$\widehat{MAM_1} = \widehat{MCM_1}; \widehat{MAM_2} = \widehat{MCM_2}$.

9.20 Giả sử CH là đường cao của tam giác ABC cắt đường thẳng AM ở E. Khi đó AE = BE và

$\widehat{AEM} = \widehat{EAB} - \widehat{MAB} = 30^\circ - 10^\circ = 20^\circ$.

$\widehat{ACE} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = 40^\circ$

$\widehat{EAC} = \widehat{CAH} - \widehat{EAB} = \left(90^\circ - 40^\circ\right) - 30^\circ = 20^\circ$

$\widehat{AME} = \widehat{MAB} + \widehat{MBA} = 10^\circ + 30^\circ = 40^\circ$

Nghĩa là tam giác AME = tam giác ACE vì có một cạnh chung và hai góc bằng nhau. Bởi vậy:

$$AM = AC, \widehat{AMC} = \widehat{ACM} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{CAM}\right) = 70^\circ$$

9.21 Giả sử O là giao điểm của đường thẳng AD và BE, khi đó:

$$\widehat{AOB} = 180^\circ - 30^\circ - 50^\circ = 100^\circ$$

$$\widehat{BAD} = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$$

$$\widehat{CBE} = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ$$

$$\widehat{AEB} = CBE + ECB = 70^\circ$$

$$\widehat{CAD} = 180^\circ - \widehat{ACB} - \widehat{ABC} - \widehat{BAD} = 30^\circ$$

Theo định lý hàm số sin ta có: $\frac{OD}{OB} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 80^\circ}$; $\frac{OB}{OA} = \frac{\sin 50^\circ}{\sin 30^\circ}$; $\frac{OA}{OE} = \frac{\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ}$;

Suy ra: $\frac{OD}{OE} = \frac{OD}{OB} . \frac{OB}{OA} . \frac{OA}{OE}$

9.22 Nếu điểm C_1 đối xứng với điểm C qua đường thẳng AP thì:

$C_1P = CP = 2BP$ và $\widehat{C_1BP} = 180^\circ - \widehat{APC} - \widehat{APC_1} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

Bởi vậy $\widehat{C_1BP} = 90^\circ$ (vì tam giác C_1BP đồng dạng với tam giác vuông có cạnh huyền bằng 2 và cạnh góc vuông bằng 1) Nghĩa là BA là đường phân giác của góc C_1BP . Như vậy điểm A cách đều các đường thẳng C_1P, PC, C_1B từ đó suy ra A nằm trên đường phân giác của góc DC_1P (ở đây A nằm trên đường kéo dài của đoạn thẳng BC_2 về phía C_1). Bởi vậy:

$$\widehat{ACB} = \widehat{AC_1P} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{BC_1P}\right) = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 30^\circ\right) = 75^\circ$$

9.23 Ta ký hiệu $\alpha = 20^\circ; \beta = 75^\circ; \gamma = 15^\circ$

Khi đó: $\alpha, \beta, \gamma < 30^\circ$; $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$

$$\widehat{KAM} = 60^\circ - \widehat{MAC} - \widehat{KAB} = \alpha$$

Và chứng minh tương tự ta có: $\widehat{LBM} = \beta$; $\widehat{KLC} = \gamma$

Giả sử đoạn AM và CL cắt nhau ở N, đường thẳng BN và AC cắt nhau ở P, còn đường thẳng CL và AB cắt nhau ở O. Vì AB = BC và AN = NC (do $\widehat{NAC} = \widehat{NCA} = \beta$) thì BP là phân giác của góc ANC.

Giả sử có điểm B' nằm trong góc LNM và ở trong tam giác LMN, đồng thời cách đều 3 đường thẳng LN, LM và MN. Điểm này nằm trên đường phân giác của góc LNM của tam giác LMN, bởi vậy:

$$\widehat{LB'M} = 180^\circ - \widehat{B'LM} - \widehat{B'ML}$$

$$= 180^o - \frac{180^\circ - \widehat{NLM}}{2} - \frac{180^\circ - \widehat{NML}}{2}$$

$$\widehat{LB'M} = \frac{\widehat{NLM} + \widehat{NML}}{2} = \frac{180^\circ - \widehat{LNM}}{2} = \frac{\widehat{NAC} - \widehat{NCA}}{2} = \widehat{LBM}$$

Suy ra: B' = B.

Và: $\widehat{BLM} = \widehat{BLQ} = 180^\circ - \widehat{LQB} - \widehat{ABL} = \widehat{ABC} + \widehat{BCQ} - \widehat{ABL}$

$$= 60^\circ + \alpha + \gamma - \gamma = 60^\circ + \alpha$$

Vì: $\widehat{BCL} = 180^\circ - \widehat{LBC} - \widehat{LCB}$

$$= 180^o - (\alpha + \beta) - (\alpha + \gamma) = 120^o - \alpha$$

Thì: $\widehat{MLC} = \widehat{BLC} - \widehat{BLM} = 120^\circ - \alpha - (60^\circ + \alpha) = 60^\circ - 2\alpha$

(Vì rằng $B \equiv B'$ điều ấy chứng tỏ rằng B là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác LMN, do đó LB là phân giác góc ngoài QLM)

Lại xét tam giác LIK và cũng lập luận tương tự như trên ta được: $\widehat{KLB} = 60^\circ - 2\alpha$

Do đó: $\widehat{KLM} = \widehat{BLC} - \widehat{KLB} - \widehat{MLC} = (120^\circ - \alpha) - (60^\circ - 2\alpha) - (60^\circ - 2\alpha) = 3\alpha$

Nghĩa là: $\widehat{KLM} = 3\alpha = 60^\circ$

Chứng minh tương tự ta được: $\widehat{LKN} = 3\beta = 75^\circ$; và $\widehat{KML} = 3\gamma = 45^\circ$.

Trích từ “ CÁC ĐỀ THI VÔ ĐỊCH TOÁN 19 NƯỚC TRONG ĐÓ CÓ VIỆT NAM”- NXB Trẻ

Tài liệu tham khảo cho học sinh giỏi Toán thi vô địch Toán quốc gia & quốc tế (Tập 1)

Người dịch: Nguyễn Đễ - Nguyễn Khánh Nguyên