

# Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

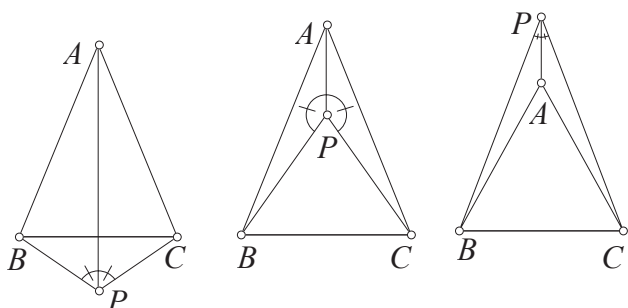
**D**ây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

## Đề bài

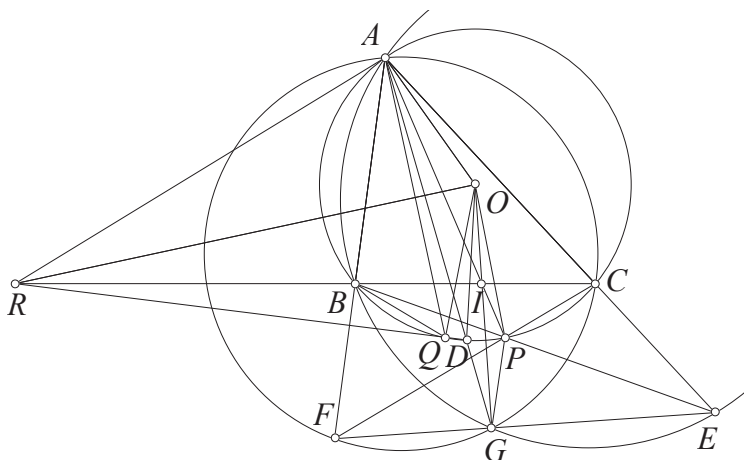
Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  và  $P$  là điểm thuộc cung  $BC$  không chứa  $A$ .  $PB, PC$  cắt  $CA, AB$  lần lượt tại  $E, F$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABE, ACF$  cắt nhau tại  $G$  khác  $A$ .  $AG$  cắt  $(O)$  tại  $D$  khác  $A$ .  $Q$  thuộc  $(O)$  sao cho  $\angle QAB = \angle PAC$ .  $QD$  cắt  $BC$  tại  $R$ . Chứng minh rằng  $OR \perp AQ$ .

## Lời giải

Ta phát biểu không chứng minh lại bổ đề sau.



**Bổ đề.** Cho tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nếu có điểm  $P$  sao cho  $\angle APB = \angle APC$  thì  $B, C$  đối xứng qua  $AP$ .



**Giải bài toán.** Trước hết ta thấy  $E, G, F$  thẳng hàng. Gọi  $AP$  cắt  $BC$  tại  $I$ , theo định lý Miquel thì  $O, I, G$  thẳng hàng. Lại có

$IO \cdot IG = IB \cdot IC = IA \cdot IP$ . Từ đó tứ giác  $AOPG$  nội tiếp. Lại có  $OA = OP$  nên  $GO$  là phân giác  $\angle PGA$ . Mặt khác  $OD = OP$ . Từ đó  $P, D$  đối xứng nhau qua  $OG$  nên  $\angle DOG = \angle POG = \angle DAI$ . Từ đó tứ giác  $AOID$  nội tiếp. Lại có  $\angle QBR = \angle QBC - \angle BQR = \angle QAC - \angle BAD = \angle PAB - \angle BAD = \angle PAD$ . Từ đó tứ giác  $RAID$  nội tiếp. Vậy năm điểm  $R, A, O, I, D$  cũng thuộc một đường tròn. Lại có  $OA = OD$  nên  $RO$  là phân giác  $\angle RAD$  kết hợp  $OA = OQ$  ta suy ra  $A, Q$  đối xứng  $OR$  nên  $AQ \perp OR$ .

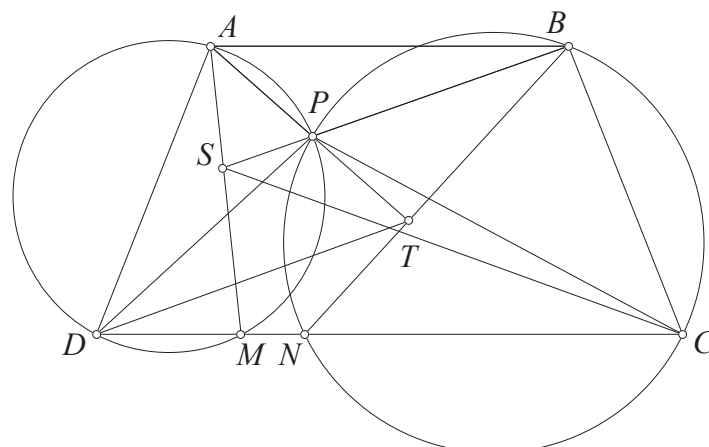
## Nhận xét

Bạn **Nguyễn Hải Huy** lớp 12 Toán THPT chuyên Thái Nguyên, bạn **Nguyễn Tiến Hoàng** lớp 10 Toán, trường PTNK, ĐHQG TPHCM và bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình, đã cho lời giải tại [đây](#). Ngoài ra tác giả nhận được lời giải khác qua email từ bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 11 Toán THPT chuyên KHTN. Bài toán này được tác giả phát triển từ đề chọn đội tuyển TP Hà Nội năm 2016. Khi nghịch đảo bài toán này cực  $A$ , ta thu được bài toán thú vị sau

Cho tam giác  $ABC$  và  $D$  là một điểm trên cạnh  $BC$ . Các đường tròn  $(DAB), (DCA)$  cắt  $CA, AB$  lần lượt tại  $E, F$  khác  $A$ .  $BE$  cắt  $CF$  tại  $P$ .  $AP$  cắt  $BC$  tại  $Q$ .  $R$  thuộc  $BC$  sao cho  $\angle RAB = \angle DAC$ . Đường tròn  $(AQR)$  cắt  $(ABC)$  tại  $G$  khác  $A$ . Chứng minh rằng  $RA = RG$ .

## Bài toán đề nghị

Cho hình thang cân  $ABCD$  với  $AB \parallel CD$ .  $P$  là một điểm nằm trong hình thang. Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $PAD, PBC$  cắt  $CD$  tại  $M, N$  khác  $C, D$ .  $PB, PA$  lần lượt cắt  $AM, BN$  tại  $S, T$ . Chứng minh rằng  $\angle SCD = \angle TDC$ .



Mọi trao đổi xin gửi về email [analgeomatica@gmail.com](mailto:analgeomatica@gmail.com).