Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

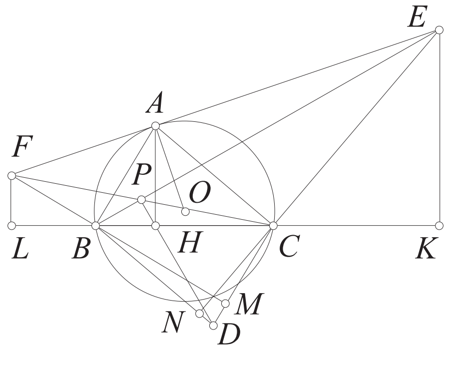
Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) với đường cao AH. E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. Trên tiếp tuyến qua A của (O) lấy S, T sao cho $SF \perp AB, TE \perp AC$. Đường thẳng qua E song song AB cắt (O) tại M, N. Đường thẳng qua F song song AC cắt (O) tại P, Q. Chứng minh rằng giao điểm của EF và AH nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (SMN) và (TPQ).

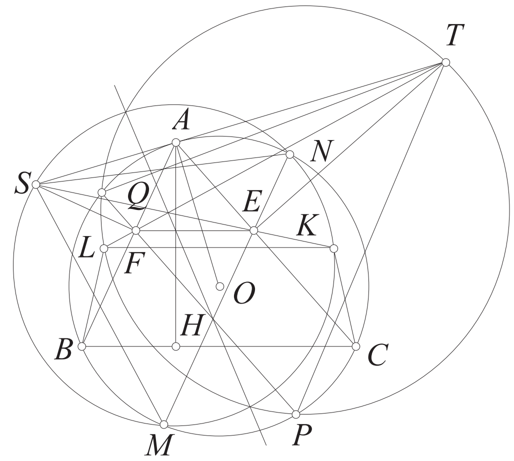
Lời giải

Lời giải sau dựa trên lời giải của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An. Ta đưa ra bổ đề, bổ đề này cũng được đề nghị bởi bạn **Bảo** trên diễn đàn AoPS.

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Trên tiếp tuyến qua A của (O) lấy các điểm E, F sao cho $CE \perp CA, BF \perp BA$. Dựng hình bình hành $ABDC$. Thì BE, CF và DH đồng quy.



Chứng minh. Gọi BE cắt CF tại P. Ta có $\angle FBC = 90^\circ + \angle ABC = 90^\circ + \angle EAC = 180^\circ - \angle CEF$, suy ra tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Vậy $PB.PE = PC.PF$ nên P nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BE, CF. Ta lại dễ thấy các tam giác vuông đồng dạng $\triangle AHB \sim \triangle ACE$ và $\triangle AHC \sim \triangle ABF$. Từ đó $HB.AE = AB.AC = HC.AF$, vậy nếu gọi K, L là hình chiếu của E, F lên BC thì $\frac{HK}{HL} = \frac{AE}{AF} = \frac{HC}{HB}$ hay $HB.HK = HC.HL$. Từ đó H nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BE, CF. Gọi FB, EC lần lượt cắt DC, DB tại M, N thì dễ thấy M, N nằm trên đường tròn đường kính BC nên $DM.DC = DN.DB$. Vậy D cũng nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BE, CF. Từ đó D, H, P thẳng hàng.



Giải bài toán. Gọi SE, TF lần lượt cắt các đường tròn $(SMN), (TPQ)$ tại K, L khác S, T. Ta có $ES.EK = EM.EN = EA.EC$ nên tứ giác $SAKC$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $TALB$ nội tiếp. Giống như chứng minh bổ đề, dễ thấy tứ giác $EFST$ nội tiếp. Từ đó $\angle KCB = \angle KCA + \angle ACB = \angle ESA + \angle SAB = 90^\circ - \angle FSE$. Tương tự $\angle LBC = 90^\circ - \angle FTE = 90^\circ - \angle FSE = \angle KCB$. Từ đây chú ý rằng $\angle SET = \angle SFT$ nên $\frac{[FST]}{[EST]} = \frac{FS.FT}{ES.ET}$, ta có biến đổi tỷ số $\frac{CK}{BL} = \frac{CK}{EC} \cdot \frac{EC}{FB} \cdot \frac{FB}{BL} = \frac{SA}{SE} \cdot \frac{AE}{AF} \cdot \frac{FT}{TA} = \frac{SA}{SE} \cdot \frac{[EAT]/ET}{[FAS]/SF} \cdot \frac{FT}{TA} = \frac{[EAT]}{[FAS]} \cdot \frac{FS.FT}{ES.ET} \cdot \frac{SA}{TA} = \frac{[EAT]}{[FAS]} \cdot \frac{[FST]}{[EST]} \cdot \frac{SA}{TA} = \frac{AT}{ST} \cdot \frac{ST}{SA} \cdot \frac{SA}{TA} = 1$. Vậy $CK = BL$, kết hợp $\angle LBC = \angle KCB$ ta thu đươc hai tam giác BCK và CBL bằng nhau nên $KL \parallel BC$. Từ đó tứ giác $STKL$ nội tiếp, ta suy ra giao điểm của SK, TL nằm trên Δ là trục đẳng phương của (SMN) và (TPQ). Lại dễ thấy giao điểm của MN, PQ cũng nằm trên Δ. Áp dụng bổ đề vào tam giác AEF thì đường nối hai giao điểm này đi qua hình chiếu của A trên EF. Ta hoàn tất chứng minh.

Nhật xét

Bài toán là mở rộng của bài toán 6 trong kỳ thi chọn đội tuyển Mỹ năm 2016. Duy nhất bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và trung tuyến AM. P nằm trên cung BC không chứa A của (O). E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $PE \parallel AB, PF \parallel AC$. AM cắt (AEF) tại N khác A. Chứng minh rằng $AP^2 = 2AM.AN$.
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.