CỰC, ĐỐI CỰC VÀ ỨNG DỤNG

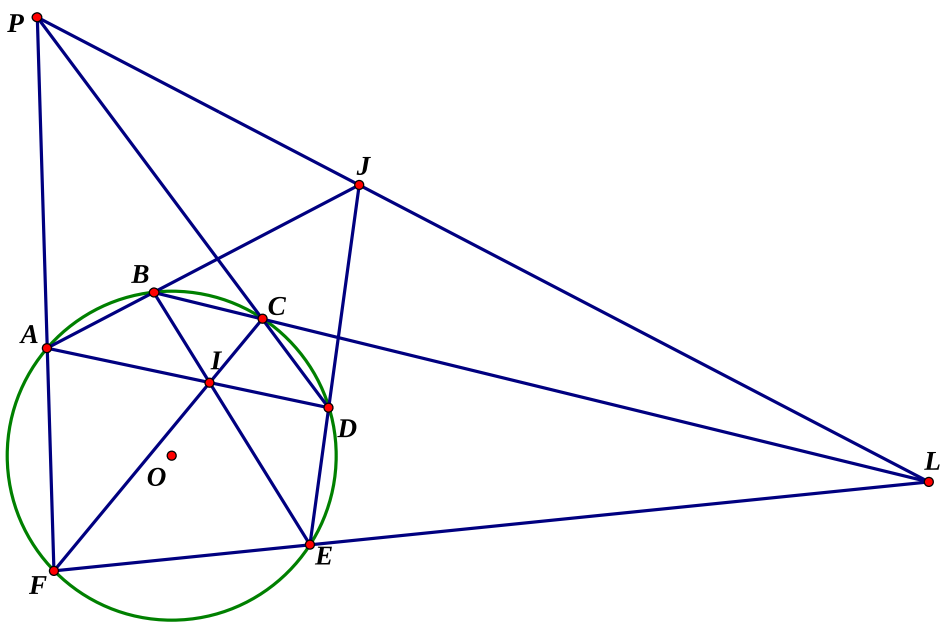
Nguyễn Thái Vấn – Trường THPT Chuyên Lương văn Chánh

Trong các chuyên đề hình học bồi dưỡng học sinh giỏi, Cực và đối cực là một chuyên đề thú vị, được dùng để chứng minh một số bài toán trong hình học phẳng như: các bài toán về quan hệ vuông góc và quan hệ song song giữa hai đường thẳng; chứng minh ba đường thẳng đồng qui, ba điểm thẳng hàng; Các bài toán về chứng minh đường thẳng đi qua điểm cố định, điểm nằm trên đường thẳng cố định….. Việc dùng cực và đối cực có thể giúp tìm lời giải nhanh hơn và ít phức tạp hơn. Trong khuôn khổ bài viết này chỉ đề cập đến cực và đối cực đối với một đường tròn và ứng dụng của nó.

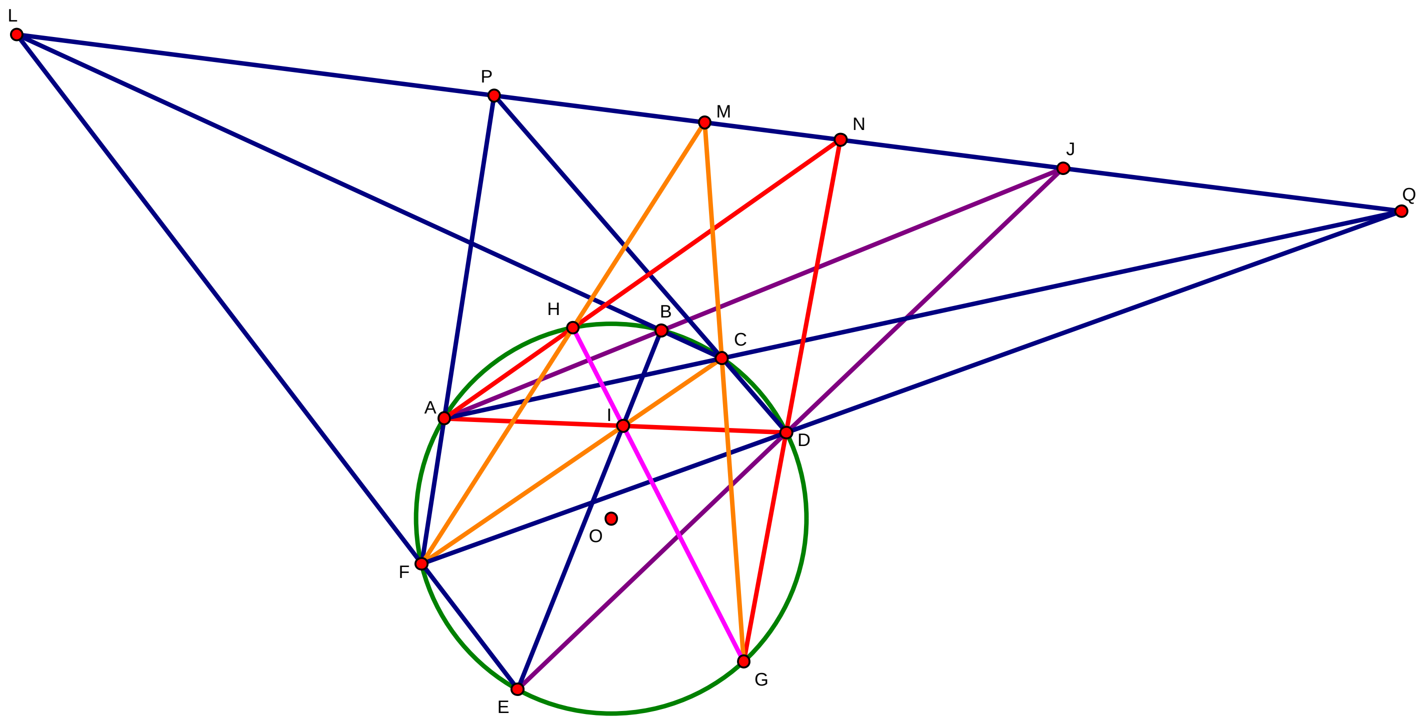
I. Đặt vấn đề

1. Định lý Pascal : Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Khi đó các giao điểm của các cặp cạnh AB và DE, BC và EF, CD và FA thẳng hàng.

+ Xét 1 trường hợp đặc biệt khi AD, BE, CF đồng qui tại I.



(Hình 1)



(Hình 2)

Bây giờ lấy G bất kỳ trên (O), gọi giao điểm của của tia GI và vòng tròn (O) là H. Gọi $AB \cap ED = \{J\}$, $BC \cap EF = \{L\}$, $CD \cap AF = \{P\}$, $AC \cap FD = \{Q\}$, $FH \cap CG = \{M\}$, $HA \cap DG = \{N\}$,

+ Theo định lý **Pascal** 6 điểm A, B, C, D, E, F và định lý **Desargues** cho hai tam giác ABC và DEF, ta suy ra J, L, P, Q thẳng hàng.

+ Tương tự với 6 điểm A, H, F, D, G, C và hai tam giác AHF và DGC, ta cũng suy ra M, N, P, Q thẳng hàng.

+ Từ trên , ta có thể mở rộng thêm ra rằng, giao điểm của các cặp đường thẳng tạo bởi 4 điểm bất kỳ thuộc đường tròn sao cho tồn tại đường thẳng đi qua 2 điểm cũng đi qua I và đường thẳng đi qua hai điểm còn lại cũng đi qua I thì cũng nằm trên đường thẳng tạo bởi các điểm thẳng hàng .

Như vậy sự đồng qui của các đường thẳng tại I với sự thẳng hàng của các giao điểm có mối quan hệ gì không ? Ta có kết quả sau:

2. **Định lí :** Cho 2n điểm thứ tự nằm trên vòng tròn (O) là A_1, A_2, ….., A_{2n}, sao cho các đường thẳng đi qua A_i và A_{i+n} đồng qui tại một điểm I. Khi đó, các giao điểm của các cặp đường thẳng $\left(A_i A_{i+1}; A_{i+n} A_{i+n+1}\right)$ thẳng hàng.

Chứng minh:

+ Định lí đúng với n=2

+ Định lý đúng với n= 3. Do định lý Pascan trong trường hợp đặc biệt .

Từ $n \geq 4$, mỗi lần tăng n lên 1 đơn vị, tức là thêm 2 điểm nữa, ta coi như là thêm hai điểm khi có sẵn 6 điểm, tức là chỉ chứng minh cho trường hợp n = 4, các trường hợp khác là hiển nhiên

+ n = 4. Ta có định lí đúng cho 6 điểm A, B, C, D, E, F trên đường tròn, lấy điểm G bất kỳ trên (O), gọi giao điểm của tia GI và đường tròn (O) là H. Gọi

$AB \cap ED = \{J\}, BC \cap EF = \{L\}, CD \cap AF = \{P\}, AC \cap FD = \{Q\}, FH \cap CG = \{M\}, HA \cap DG = \{N\},$

+ Theo định lý Pascal 6 điểm và định lý Desargues cho hai tam giác ABC và DEF, ta suy ra J, L, P,Q thẳng hàng.

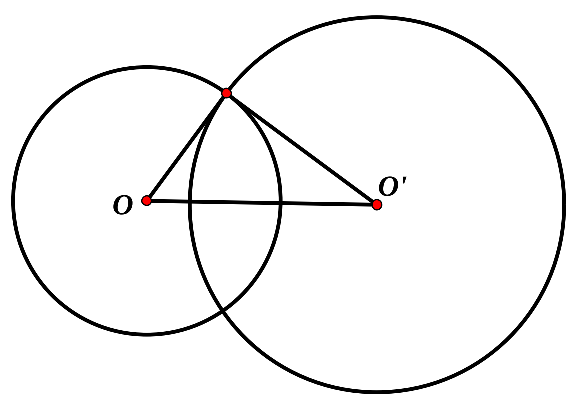
+ Tương tự với 6 điểm A, H, F, D, G, C và hai tam giác AHF và DGC, ta cũng suy ra M, N, P, Q thẳng hàng. Suy ra J, L, M, N thẳng hàng.

Vậy định lí đúng với n = 4, hay định lý đúng với n ≥ 2.

Nhận xét: Từ kết quả trên ta thấy mối quan hệ giữa giao điểm I và đường thẳng chứa các điểm thẳng hàng liên quan đến khái niệm được trình bày sau đây đó là cực và đối cực .

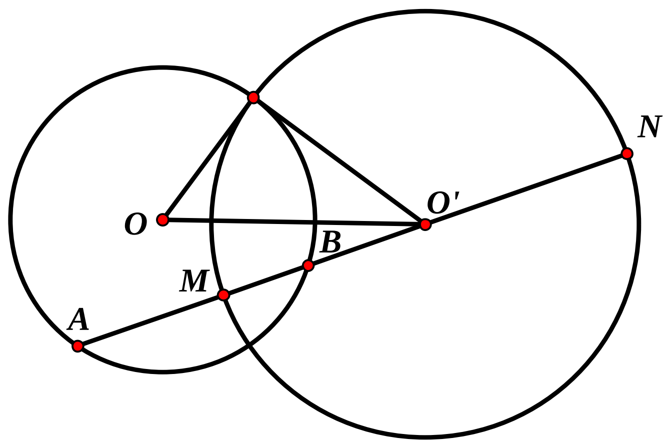
II. Khái niệm cực, đối cực

1. **Định nghĩa 1:** Ta nói hai đường tròn (O,R) và (O’, R’) là hai đường tròn trực giao nếu: $OO'^2 = R^2 + R'^2$.



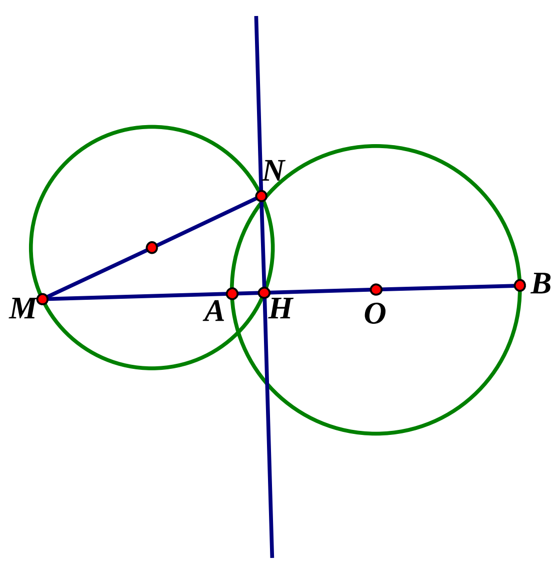
(Hình 3)

2. Định nghĩa 2: Ta nói hai điểm M, N liên hiệp với nhau qua đường tròn(O, R) nếu đường tròn (O, R) và đường tròn đường kính MN là hai đường tròn trực giao.



(Hình 4)

__Mệnh đề 1:__ Cho đường tròn (O;R). Giả sử M, N là hai điểm không nằm trên đường tròn (O; R) và khác O. Đường thẳng MN cắt đường tròn (O; R) tại 2 điểm A, B. Khi đó, hai điểm M, N liên hợp với nhau đối với đường tròn (O; R) khi và chỉ khi (ABMN) = -1.



(Hình 5)

__Chứng minh__ : Gọi O' là trung điểm MN và R' là bán kính của đường tròn đường kính MN. Khi đó hai điểm M, N liên hợp với nhau đối với đường (O) khi và chỉ khi $OO'^2 = R^2 + R'^2$

$$\Leftrightarrow OO'^2 - R^2 = R'^2 \Leftrightarrow P_{O'/(O)} = R'^2 \Leftrightarrow \overline{O'A}.\overline{O'B} = O'M^2 = O'N^2 \Leftrightarrow (ABMN) = -1$$

Mệnh đề 2: Cho đường tròn (O; R) và một điểm M khác O. Tập hợp các điểm N sao cho M và N liên hợp với nhau đối với đường tròn (O; R) là một đường thẳng vuông góc với OM .

Chứng minh: + Nếu N là điểm liên hợp của M đối với đường tròn (O) thì đường tròn đường kính MN trực giao với đường tròn (O). Khi đó đường kính AB đi qua M của đường tròn (O) bị đường tròn đường kính MN chia điều hòa với đường thẳng AB. Ta có (ABMH) = -1.

+ Nếu N là điểm liên hợp của M đối với đường tròn (O) thì đường tròn đường kính MN trực giao với đường tròn (O). Khi đó đường kính AB đi qua M của đường tròn (O) bị đường tròn đường kính MN chia điều hòa với đường thẳng AB. Ta có (ABMH) = -1.

+ Trong hàng điểm điều hòa A, B, M, H thì H được xác định và MH $\perp$ NH hay N nằm trên đường thẳng d vuông góc với OM tại H.

Ngược lại nếu N' bất kì trên d thì đường tròn đường đường kính MN' đi qua H và do (ABMH) = -1 nên đường tròn đường kính MN' trực giao với đường tròn (O). Vậy N' liên hợp với M đối với (O) .

Định nghĩa 2 Cho đường tròn (O; R) và một điểm M khác O. Tập hợp các điểm N sao cho M và N liên hợp với nhau đối với đường tròn (O; R) là một đường thẳng d_M. **Ta gọi d_M là đường đối cực** của điểm M đối với đường tròn (O, R) và điểm M là cực của đường thẳng d_M đối với đường tròn (O; R).

Từ đây ta thu được 2 kết quả :

1) Với hai điểm S, P trên mặt phẳng mà P nằm trên đường đối cực của S đối với (O) và SP cắt (O) ở M, N thì bốn điểm S, P, M, N lập thành 1 hàng điểm điều hòa.

2) Với hai điểm S, P trên mặt phẳng mà SP cắt (O) ở M, N thỏa mãn bốn điểm S, P, M, N lập thành 1 hàng điểm điều hòa thì P nằm trên đường đối cực của S và S nằm trên đường đối cực của P.

Mệnh đề 3: OS vuông góc với đường đối cực của S.

Mệnh đề 4: Đối với một đường tròn cho trước, nếu đường đối cực của điểm A đi qua điểm B thì đường đối cực của điểm B đi qua điểm A.

Chứng minh: Nếu điểm B nằm trên đường a của điểm A thì A và B là hai điểm liên hợp đối với đường tròn cho trước. Mặt khác ta biết rằng tập hợp các điểm liên hiệp của điểm B là đường đối cực b của điểm B đi qua điểm A.

Mệnh đề 5: Đối với một đường tròn cho trước, các đường đối cực của các điểm thẳng hàng thì đồng quy và các cực của các đường thẳng đồng quy thì thẳng hàng .

Chứng minh:

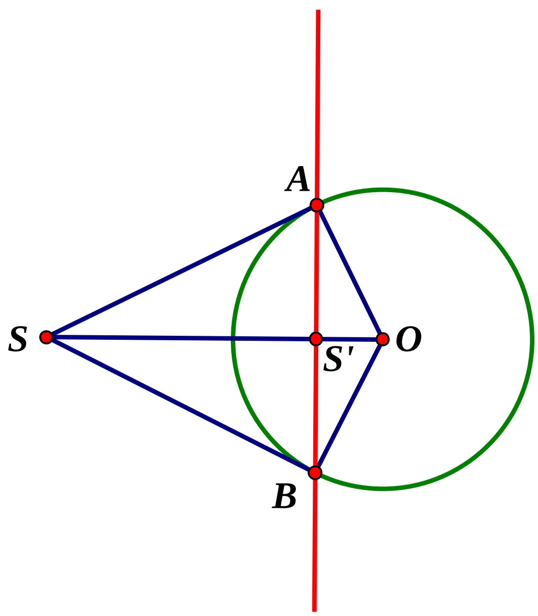
Theo định lí 3, giả sử các điểm A_1, A_2, …, A_n nằm trên đường thẳng b nghĩa là các điểm A_i thuộc b với i=1, 2,… n thì điểm B thuộc các đường thẳng a_i (i=1, 2,…n)

trong đó điểm B là cực của đường thẳng b và a_i là các đường đối cực của các điểm A_i.

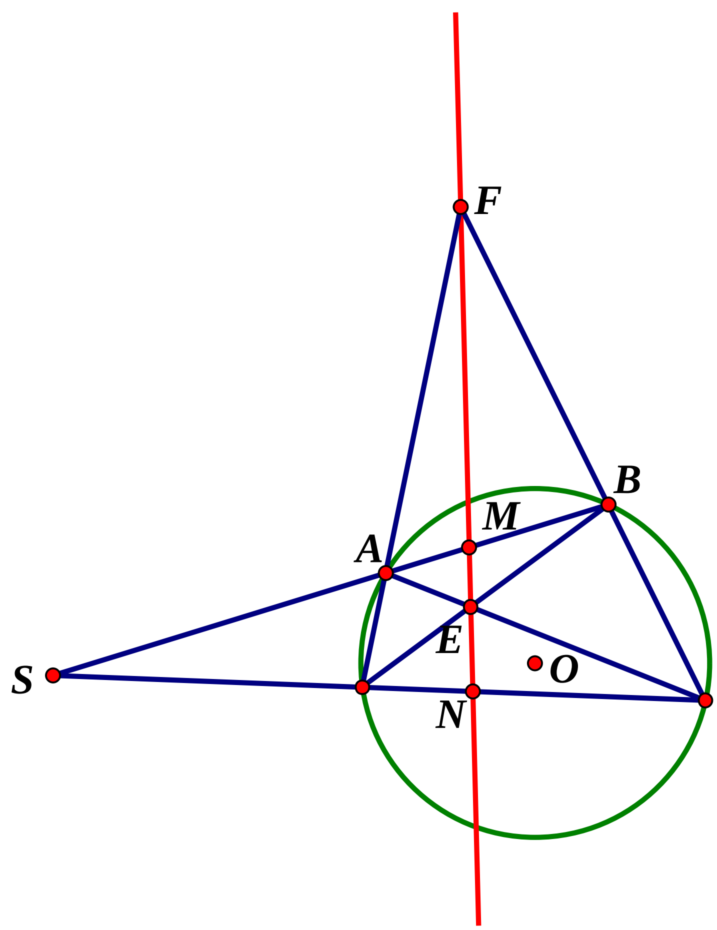
Vậy các đường đối cực của các điểm A_i đều đồng qui tại điểm B. Ý sau chứng minh tương tự.

Mệnh đề 6: (Một số cách xác định đường đối cực thông dụng)

***Trường hợp 1*:** Khi cực S ở ngoài đường tròn (O)

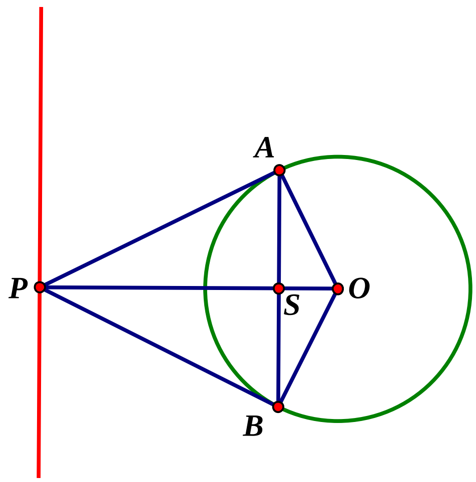


(Hình 6)

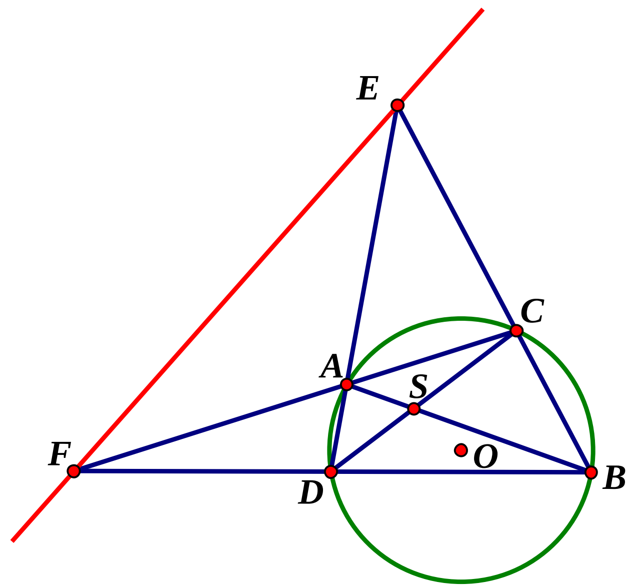


(Hình 7)

Trường hợp 2 **:** Khi cực S nằm trong đường tròn (O)

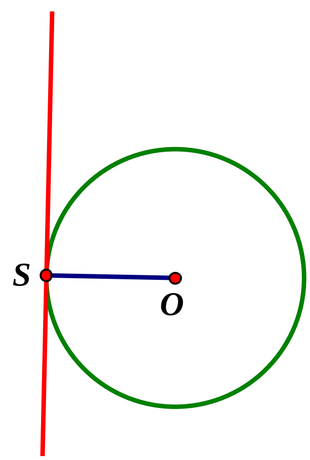


(Hình 8)



(Hình 9)

Trường hợp 3 : S nằm trên (O)



(Hình 10)

III. Ứng dụng cực, đối cực

Bài toán 1: **(HSG quốc gia Việt Nam năm 2012)**

Trong mặt phẳng, cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn tâm O và có các cặp cạnh đối không song song. Gọi M,N tương ứng là giao điểm của các đường thẳng AB và CD, AD và

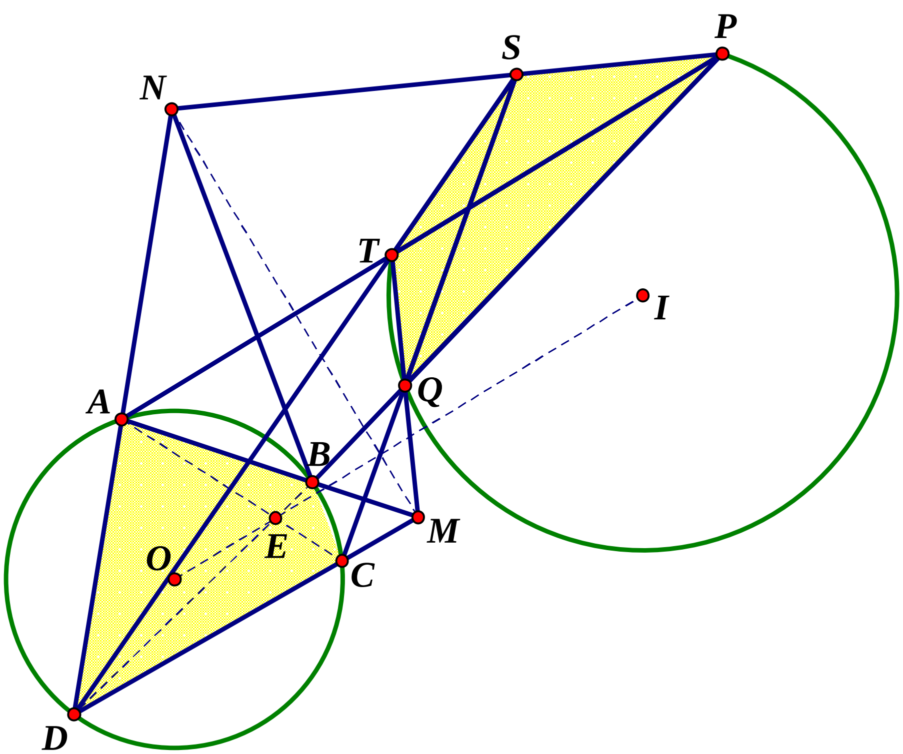
BC. Gọi P,Q,S,T tương ứng là giao điểm các đường phân giác trong của các cặp $\angle MAN$ và

∠MBN,∠MBN và ∠MCN,∠MCN và ∠MDN,∠MDN và ∠MAN. Giả sử bốn điểm P,Q,S,T đôi

một phân biệt.

1) Chứng minh tứ giác PQTS nội tiếp. Gọi I là tâm của đường tròn đó.

2) Gọi E là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm E, O, I thẳng hàng.



(Hình 11)

Bình luận lời giải:

+ Ý1 : Ta chứng minh được $\angle TPQ = \angle QST = 90^0 - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$nên tứ giác PQTS nội tiếp.

+ Ý 2: Ta cần chứng minh OE và OI cùng vuông góc với MN

- Ta chứng minh MN là trục đẳng phương của hai đường tròn (I) và (O)
- Còn đối với OE thì chứng minh E là trực tâm tam giác OMN hay dùng định lý Brocard. Tuy nhiên nếu dùng định lý Brocard thì ta cần phải chứng minh lại đầy đủ nó. Điều này làm cho việc chứng minh bài toán phức tạp hơn.

Còn nếu ta dùng cực, đối cực thì việc chứng minh OE vuông góc với MN khá đơn giản và nó còn định hướng ta chỉ cần chứng minh thêm $OI \perp MN$ thì bài toán hoàn tất. Mặt khác trong việc chứng minh định lý Brocard, nếu dùng cực đối cực cũng rất đơn giản so với dùng trục đẳng phương. Sau đây là lời giải chi tiết cho câu 2

2) Chứng minh rằng ba điểm E, O, I thẳng hàng

Ta có Q, T lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp của các tam giác BCM và ADM nên chúng phải cùng nằm trên phân giác ngoài của góc $\angle AMC$ hay M,Q,T thẳng hàng. Hơn nữa cũng do các tâm đường tròn bàng tiếp nên $\angle MQB = 90^0 - \frac{\angle BCM}{2} = 90^0 - \frac{\angle BAD}{2} = \angle BAT$

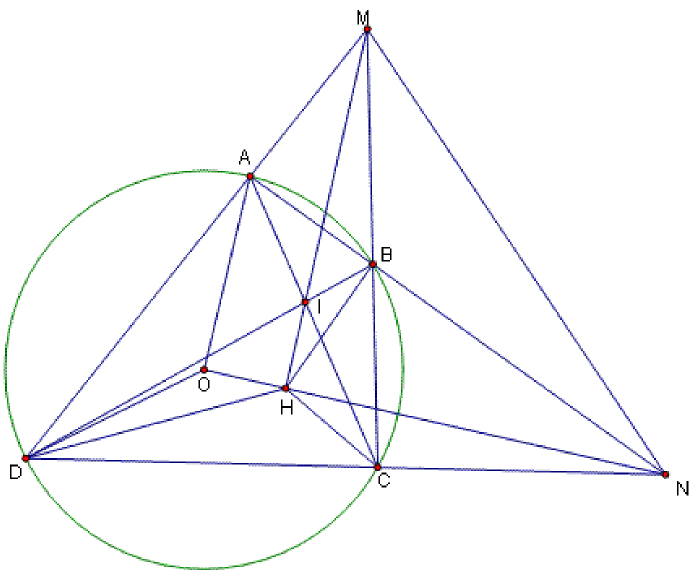
Hay tứ giác ABQT nội tiếp. Suy ra $MA.MB = MQ.MT$ hay M có cùng phương tích đến hai đường tròn (O), (I). Hoàn toàn tương tự đối với điểm N, từ đó suy ra MN là trục đẳng phương của hai đường tròn (O), (I) nên $OI \perp MN$ (1)

Mặt khác MN là đường đối cực của E đối với đường tròn (O) . Nên $OE \perp MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ba điểm E, O, I thẳng hàng.

Bài toán phụ: (**Định lý Brokard**)

Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn tâm O, AD giao BC tại M, AB giao CD tại N, AC giao BD tại I. Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác MIN.



(Hình 12)

Chứng minh:

Cách 1:

Gọi H là giao thứ 2 của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác AID,BIC.

Xét tứ giác DOHC,ta có: $\widehat{DHC} = 360^0 - \widehat{DHI} - \widehat{CHI} = \widehat{DAC} + \widehat{DBC} = \widehat{DOC}$

Từ đó suy ra tứ giác DOHC nội tiếp.Tương tự ta cũng suy ra tứ giác AOHB nội tiếp.

Dễ thấy $\overline{NA}.\overline{NB} = \overline{NC}.\overline{ND}$suy ra N nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn

$(AIHD),(BIHC)$ -->O,H,N thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{IHO}=\widehat{IHD}-\widehat{OHD}=\widehat{ADC}+\widehat{ACD}-\widehat{OCD}=\widehat{OCA}+\widehat{ODA}+\widehat{ODC}=90^o$.

Từ đó suy ra $IM\perp ON$, Tương tự ta có: $IN\perp OM$

Suy ra O là trực tâm tam giác MIN (đpcm).

<u>Cách 2:</u>

+ Xét cực đối cực đối với đường tròn (O)

+ MI là đường đối cực của N, suy ra $ON\perp MI$

+ NI là đường đối cực của M, suy ra $OM\perp NI$

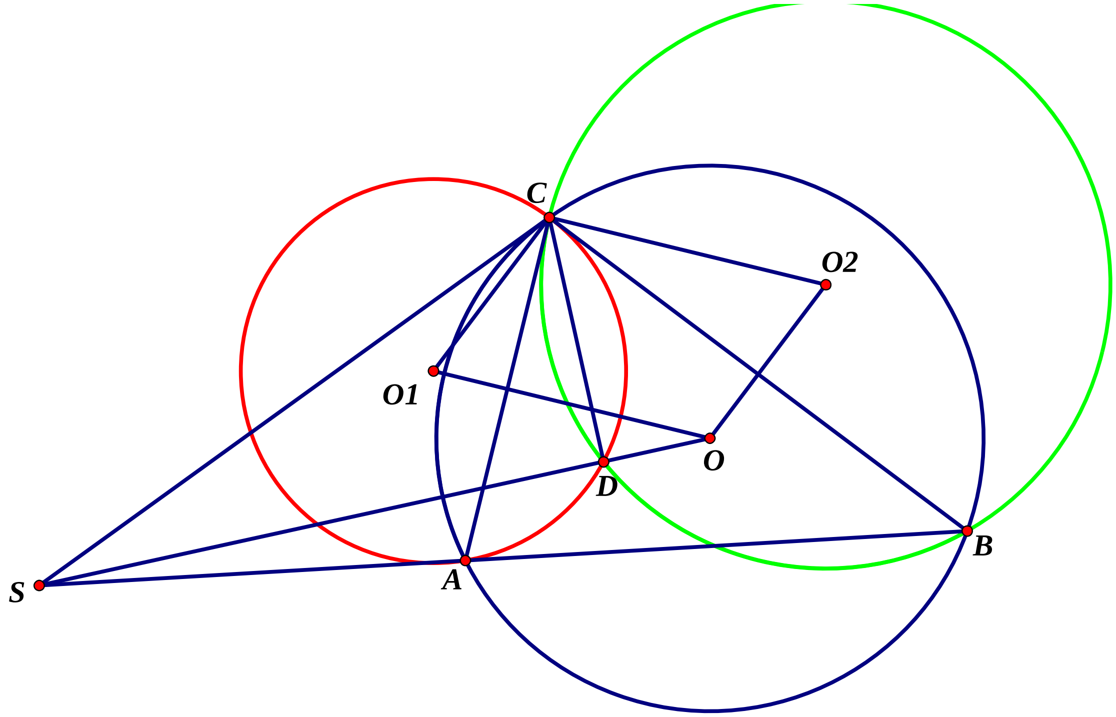
Vậy I là trực tâm tam giác IMN.

<u>Bài toán 2:</u> (HSG quốc gia Việt Nam bảng A năm học 2004-2005)

Trong mặt phẳng cho đường tròn (O) cố định bán kính R. Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên (O) sao cho ba điểm A, B, O không thẳng hàng. Xét một điểm C nằm trên đường tròn (O), C không trùng với A và B. Dựng đường tròn *(O_1)* đi qua A và tiếp xúc với đường thẳng BC ở C; dựng đường tròn *(O_2)* đi qua B và tiếp xúc với đường thẳng AC ở C.Hai đường tròn này cắt nhau tại điểm thứ hai D khác C. Chứng minh rằng:

1) $CD\le R$

2) Đường thẳng CD luôn đi qua một điểm cố định , khi điểm C di động trên đường tròn (O) sao cho C không trùng với A và B.((O) kí hiệu đường tròn tâm O)



(Hình 13)

Ta thấy $O_1C \perp CB, OO_2 \perp CB \Rightarrow O_1C // OO_2$

Tương tự $O_2C // OO_1$ Suy ra OO_1CO_2 là hình bình hành. Nên O_1O_2 đi qua trung điểm của OC.

Mà O_1O_2 đi qua trung điểm của CD nên $O_1O_2 // OD$. Lại vì $O_1O_2 \perp CD$ nên $O\hat{D}C = 90^0$

Từ đó sẽ có $CD \leq OC = R$.

2) Chú ý rằng

$$(DA, DB) \equiv (DA, DA) + (DC, DB) \equiv \frac{(O_1A, O_1C) + (O_2C, O_2B)}{2} = 2(CA, CB) \equiv (OA, OB) \pmod{\pi}$$

+ Suy ra A, D, O, B đồng viên. Ta thấy OD, AB, tiếp tuyến tại C của (O) lần lượt là các trục đẳng phương của từng cặp đường tròn (ADOB) và (COD), (O) và (ADOB) , (O) và (COD)

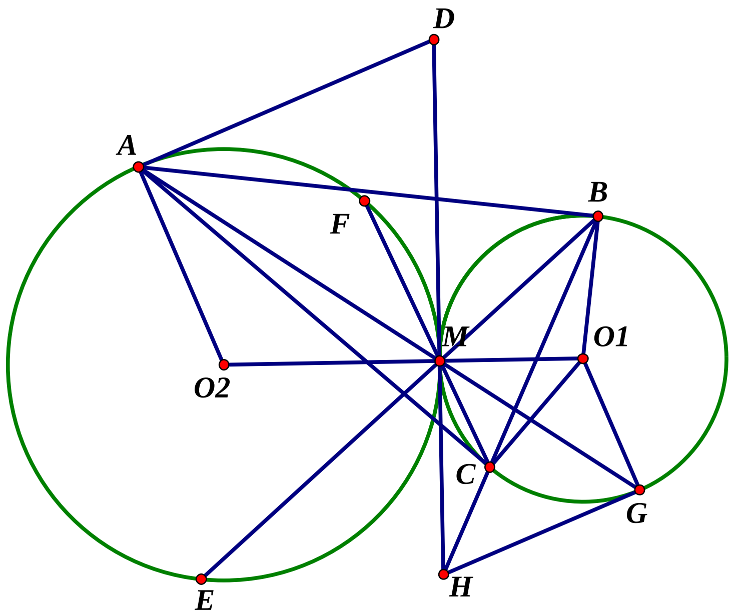
+ Do đó 3 đường nói trên đồng quy ở một điểm S. Xét cực và đối cực đối với (O).

+ Chú ý đường đối cực của S phải đi qua C và vuông góc với OS nên CD chính là đường đối cực của S. Vì S thuộc AB cố định nên CD sẽ đi qua cực của AB là một điểm cố định.

<u>Bài toán 3:</u> (HSG quốc gia Việt Nam bảng A năm học 2002-2003)

Trong mặt phẳng cho hai đường tròn cố định (O_1), (O_2) tiếp xúc nhau tại điểm M và bán kính đường tròn (O_2)lớn hơn bán kính đường tròn (O_1). Xét điểm A nằm trên đường tròn (O_2)sao cho ba điểm O_1, O_2, A không thẳng hàng .Từ A kẻ các tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O_1) (B,C là tiếp điểm). Các đường thẳng MB và MC cắt lại đường tròn (O_2) tương ứng tại

E và F. Gọi D là giao điểm của đường thẳng EF và tiếp tuyến tại A của đường tròn (O_2). Chứng minh rằng điểm D di động trên một đường thẳng cố định khi A di động trên đường tròn (O_2) sao cho ba điểm O_1, O_2, A không thẳng hàng.



(Hình 14)

+ Có hai trường hợp là tiếp xúc trong hoặc ngoài với nhau. Ở đây sẽ giải khi chúng tiếp xúc ngoài, khi tiếp xúc trong thì hoàn toàn tương tự AM cắt lại (O_1)ở G.Tiếp tuyến của (O_1) tại G, M cắt nhau ở H.

+ Xét cực và đối cực đối với (O_1). Ta thấy đường đối cực của H là MG đi qua A nên đường đối cực của A sẽ đi qua H, nói cách khác B, C, H thẳng hàng.

Trong phép vị tự tâm M biến $O_1 \to O_2$ thì:

$B \to E, C \to F, G \to A$

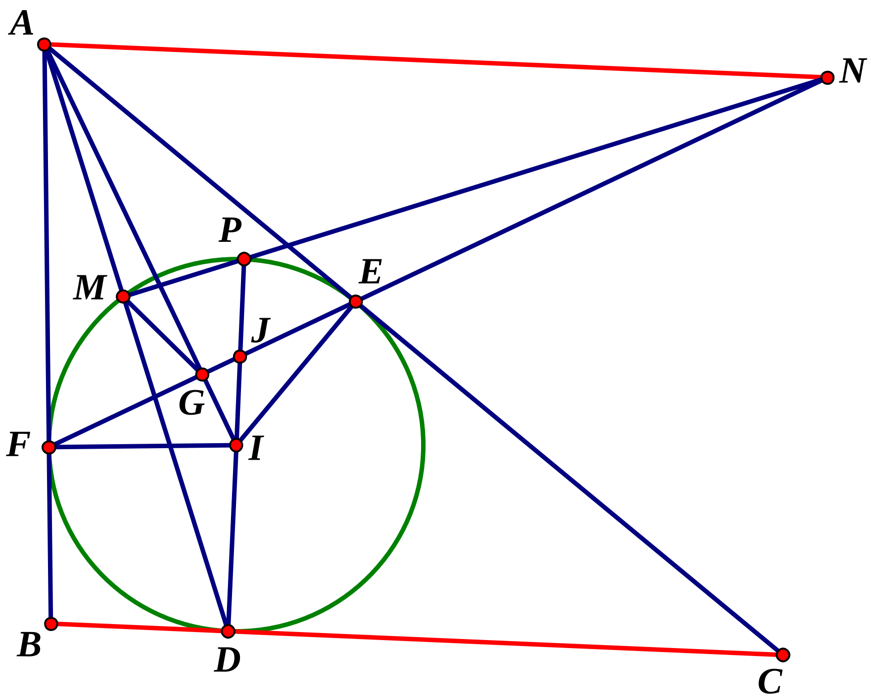
Suy ra: $H \to D$ qua phép vị tự ấy.

Do đó : D, M, H thẳng hàng.

+ Lại chú ý HM là tiếp tuyến chung của nên D luôn thuộc một đường cố định là tiếp tuyến chung của (O_1), (O_2) .

<u>Bài toán 4:</u> **(** Chuyển thể từ bài **MEMO - 2010)** Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp là (I). Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. AD cắt lại (I) ở M. Đường thẳng qua M vuông góc với AD cắt EF ở N. Chứng minh rằng AN//BC.

<u>Giải</u>



(Hình 15)

Xét cực và đối cực đối với (I)

Gọi P là giao điểm thứ hai của MN với (I), dễ thấy D, P, I thẳng hàng EF cắt IP, IA lần lượt ở J, G. Ta thấy $\overline{AM}.\overline{AD} = AE^2 = \overline{AG}.\overline{AI}$ suy ra M, G, I, D đồng viên. Do đó

$$(GM, GF) \equiv (GA, GF) - (GA, GM) \equiv \frac{\pi}{2} - (DI, DM) \equiv MD, MP) - (DI, DM) \equiv (PM, PD) (mod\pi)$$

Suy ra MGJP nội tiếp Từ đó có : $\overline{NJ}.\overline{NG} = \overline{NP}.\overline{NM} = \overline{NE}.\overline{NF}$

Chú ý rằng G là trung điểm của FE nên suy ra (NJEF)= -1 (Theo Maclaurine)

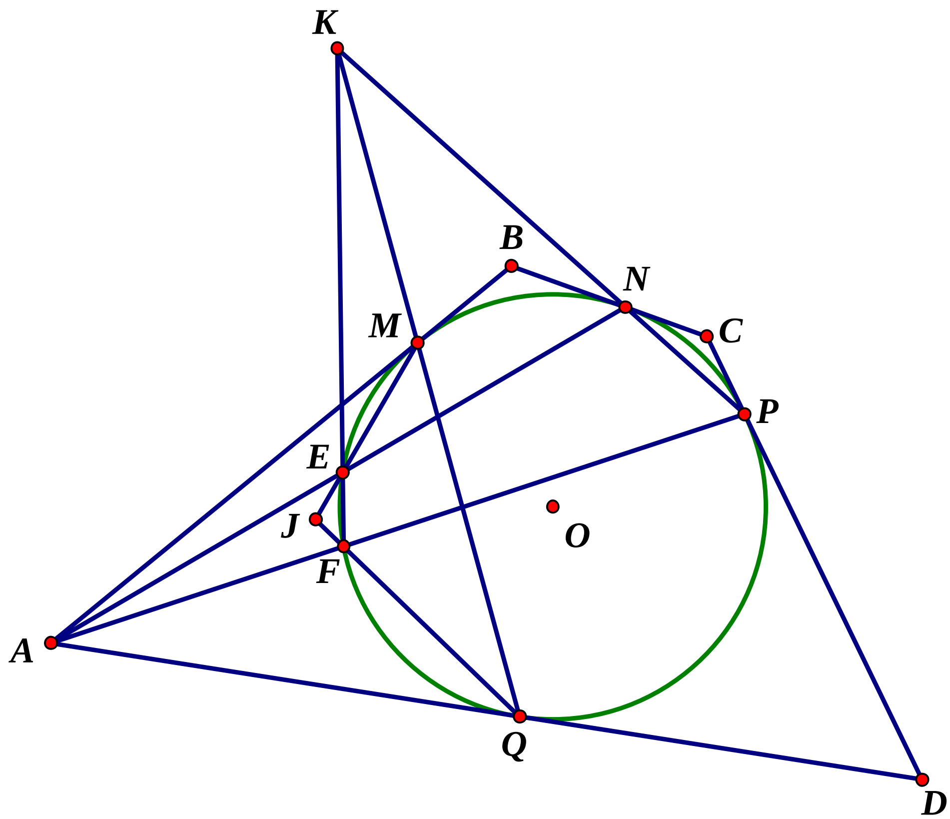
Hay N thuộc đường đối cực của J (theo hệ quả 2) (1)

+ Mặt khác đường đối cực của A là EF đi qua J nên đường đối cực của J đi qua A .

Từ (1) và (2) suy ra đường đối cực của J là AN ,

Nên IJ vuông góc với AN Mà IJ vuông góc với BC nên suy ra điều phải chứng minh.

<u>Bài toán 5</u> (MOP- 1995) Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp (O). Tiếp điểm thuộc các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q. AN, AP cắt (O) tại E, F. Chứng minh rằng ME, QF, AC đồng qui.



(Hình 16)

Giải :

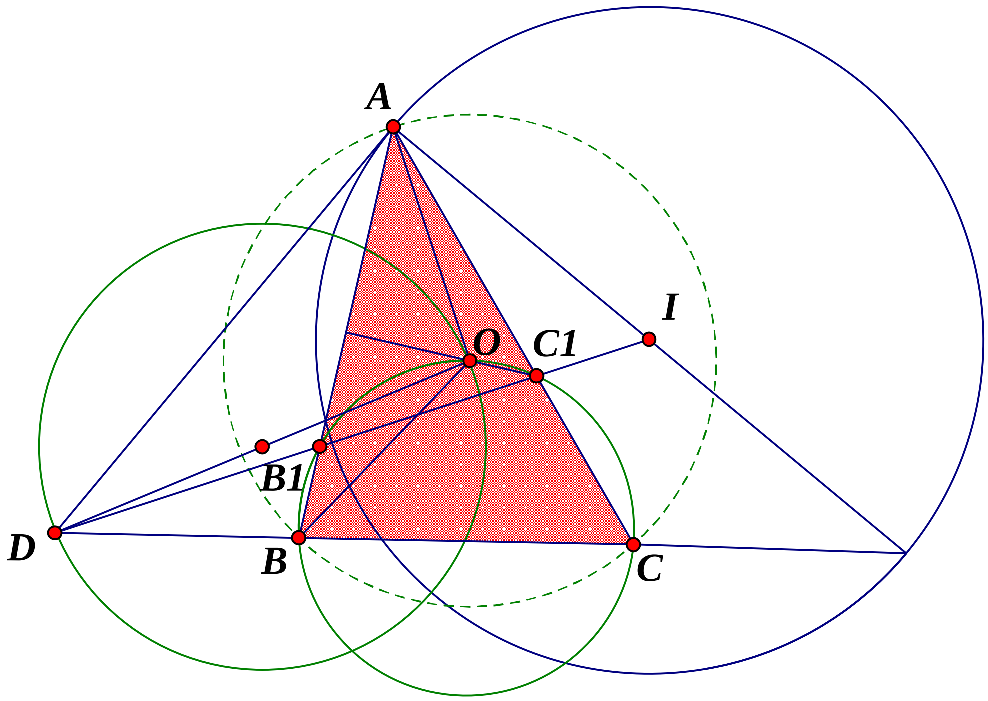
Gọi K là cực của AC. Xét tứ giác nội tiếp MNPQ thì theo tính chất cực và đối cực của tứ giác nội tiếp ta có MQ và NP cắt nhau tại K.

Lại xét đến tứ giác nội tiếp EFPN thì cũng có EF và NP cắt nhau tại K, suy ra MQ và EF cắt nhau tại K.

Ta thấy ME và QF cắt nhau tại 1 điểm thuộc đường đối cực của K tức thuộc AC hay ME, QF, AC đồng qui.

Bài toán 6 **(MOP- 1997)** Cho ABC là một tam giác và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của nó. Các đường thẳng AB và AC cắt lại đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC ở B_1, C_1 tương ứng. Gọi D là giao điểm của BC và B_1C_1. Chứng minh rằng đường tròn tiếp xúc với AD tại A và có tâm nằm trên B_1C_1 trực giao với đường tròn đường kính OD **.**

Giải :



(Hình 17)

Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc với AD tại A và có tâm nằm trên B_1C_1

Xét cực và đối cực đối với (I) Ta thấy: $(AB_1, AC_1) \equiv \frac{(OB,OC)}{2} \equiv \frac{(C_1B, C_1C)}{2} \pmod{\pi}$

$=> C_1A = C_1B$ (1) Mà OA= OB (2)

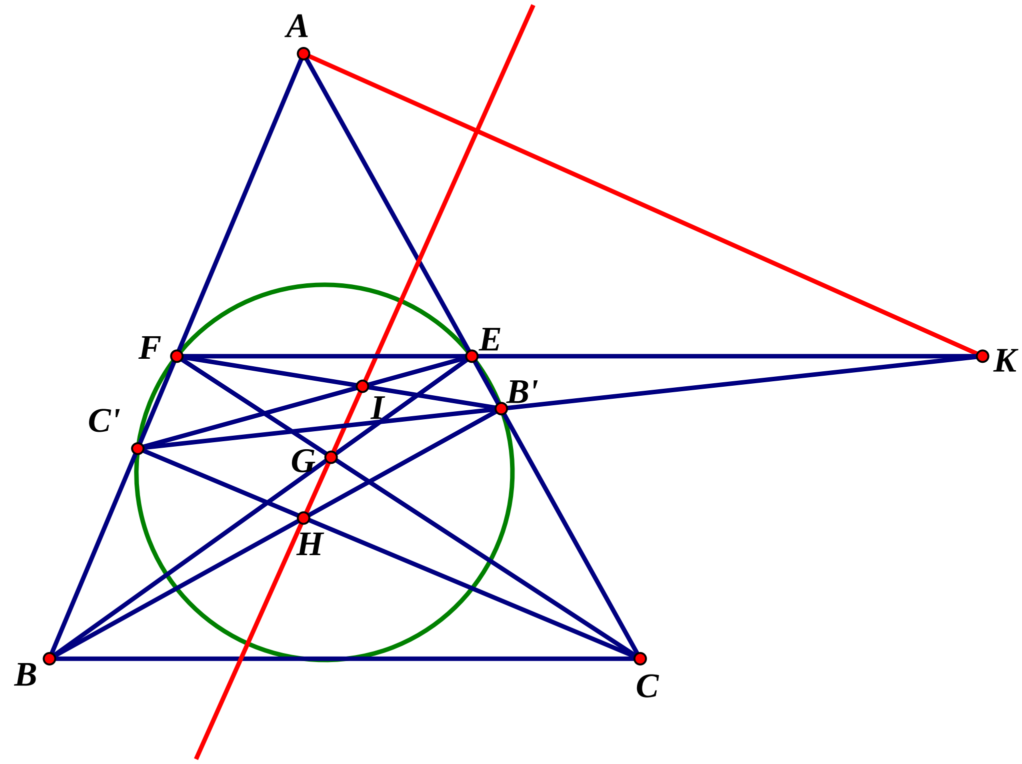
Từ (1) và (2) suy ra : $C_1O \perp AB$ (3)

Tương tự : $B_1O \perp AC$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $AO \perp B_1C_1$

Từ đây sẽ dễ có O thuộc đường đối cực của D suy ra điều phải chứng minh.

<u>Bài toán 7:</u> Cho tam giác ABC với các đường cao BB', CC'. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AC và AB. EF cắt B'C' ở K. Chứng minh rằng AK vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC.



(Hình 18)

Ta xét cực và đối cực đối với đường tròn Euler của tam giác ABC (kí hiệu là (S) với S là tâm)

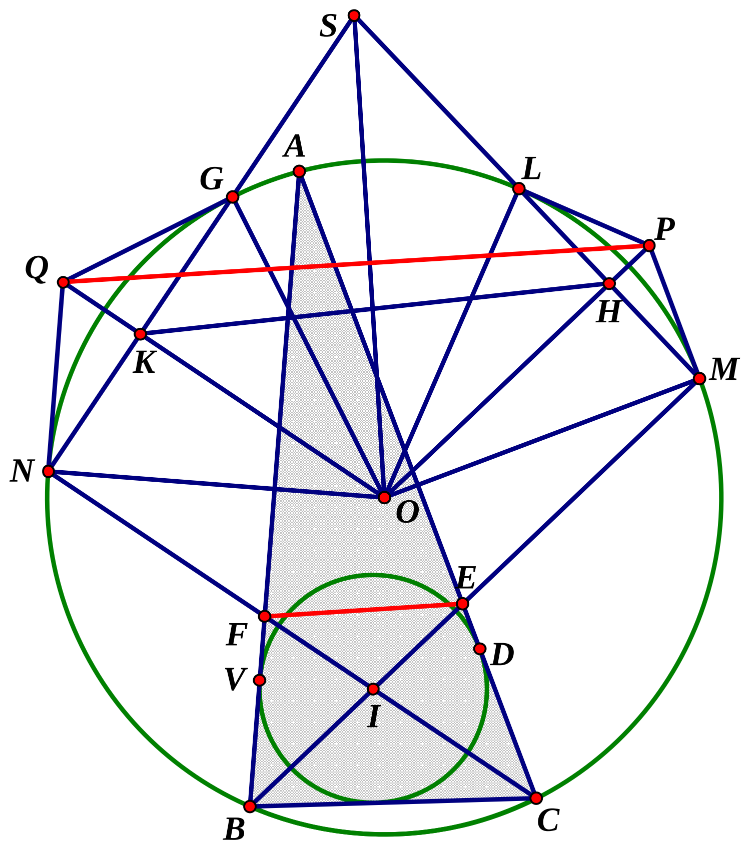
+ Gọi I là giao điểm của FB' và EC', G là giao điểm của CF và BE, H là giao điểm của BB' và CC'

+ Sử dụng định lí Pappus cho hai bộ 3 điểm (F,C',B) và (E,B',C) ta suy ra H, G, I thẳng hàng, do đó SI chính là đường thẳng Euler của tam giác ABC. (1)

+ Mặt khác, chú ý E, F, B', C' cùng nằm trên (S) thì suy ra AK chính là đường đối cực của I, suy ra SI vuông góc với AK. (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều cần chứng minh.

Bài toán 8: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R). Các phân giác trong BE, CF cắt lại (O) lần lượt ở M, N. Đường thẳng qua M vuông góc với BM cắt đường thẳng qua N vuông góc với CN tại S. Chứng minh rằng SO vuông góc với EF.



(Hình 19)

Nhận xét: Xét cực và đối cực với (O), ta sẽ xác định đường đối cực của S , rồi chứng minh nó song song với EF

+ SN, SM cắt lại (O) lần lượt ở L, G, ta có C, O, G thẳng hàng; B, O, L thẳng hàng.

+ Tiếp tuyến của (O) tại G, N cắt nhau ở Q, Tiếp tuyến của (O) ở L, M cắt nhau ở P

OP cắt LM ở H , OQ cắt NG ở K.

+ Ta thấy đường đối cực của Q là GN đi qua S nên đường đối cực của S đi qua Q.

+ Tương tự có đường đối cực của S cũng đi qua P, Do đó đường đối cực của S là PQ.

Bây giờ ta cần chứng minh PQ // EF

Chú ý rằng IE // OP, IF // OQ thế nên để có PQ // EF ta chỉ cần chứng minh :

$\left(\overrightarrow{FI}, \overrightarrow{FE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{QO}, \overrightarrow{QP}\right) \pmod{2\pi}$

Mặt khác nhận thấy : $\overline{OK}.\overline{OQ} = OG^2 = OL^2 = \overline{OH}.\overline{OP}$

Từ đó suy ra Q, K, H, P đồng viên nên $\left(\overrightarrow{QO}, \overrightarrow{QP}\right) \equiv \left(\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{HO}\right) \pmod{2\pi}$

Suy ra ta cần có (*) $\left(\overrightarrow{FI}, \overrightarrow{FE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{HO}\right) \pmod{2\pi}$

Kẻ ID, IV lần lượt vuông góc với AC, AB chú ý rằng :

$$\frac{IE}{IF}=\frac{\dfrac{ID}{\sin IED}}{\dfrac{IV}{\sin IFV}}=\frac{\sin IFV}{\sin IED}=\frac{\sin\left(A+\dfrac{C}{2}\right)}{\sin\left(A+\dfrac{B}{2}\right)}=\frac{\sin NAC}{\sin MAB}=\frac{CM}{BM}=\frac{OK}{OH}$$

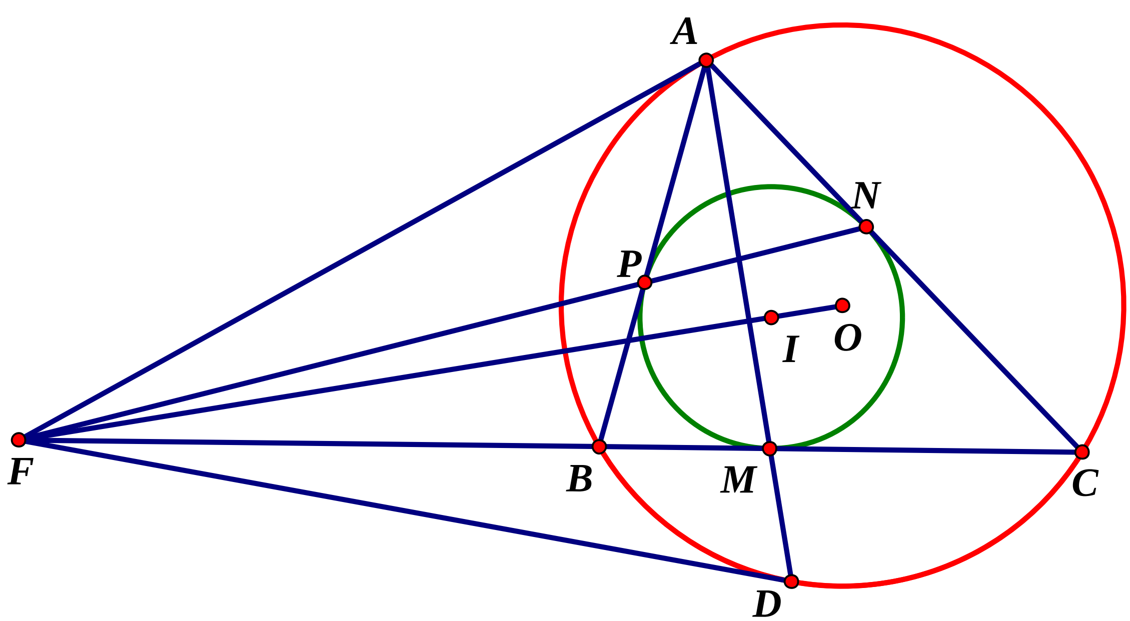
(Vì OK là đường trung bình của tam giác GNC, OH là đường trung bình của tam giác LBM)

Lại có IE // OH, IF // OK nên $\left(\overrightarrow{IE},\overrightarrow{IF}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OH},\overrightarrow{OK}\right)\pmod{2\pi}$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác IEF đồng dạng với tam giác OKH , Do đó (*) đúng .

<u>Bài toán 9:</u> Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O), Đường tròn (I) nội tiếp tam giác. Gọi M là tiếp điểm của BC và (I), D là giao điểm thứ hai của AM và (O). Chứng minh rằng nếu $OI \perp AM$ thì tứ giác ABCD điều hòa.

<u>Giải:</u>



(Hình 20)

Ta chỉ cần xét với tam giác ABC không cân tại A. Khi đó OI cắt BC tại F. Gọi N, P là tiếp điểm của (I) với AC, AB.

Ta có FM là tiếp tuyến của (I), Suy ra đường đối cực của F đi qua M. Mà $OI \perp AM$ nên AM là đường đối cực của F đối với (I) suy ra đường đối cực của A đối với (I) đi qua F, hay F, N, P thẳng hàng.

Lại có AM, BN, CP đồng qui tại điểm Gergonne của tam giác ABC nên (FMBC) = -1. Do đó AM là đường đối cực của F đối với (O).

Suy ra FA là tiếp tuyến của (O). Vì A đối xứng với D qua FO nên FD là tiếp tuyến của (O). Vậy ABCD là tứ giác điều hòa.

- Với kiến thức cực đối cực đã trình bày trên thì định lý ban đầu trong đặt vấn đề được chứng minh dễ dàng vì điểm I là cực còn các giao điểm P, Q, M, N, L, J , … nằm trên đường đối cực của I nên chúng thẳng hàng.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1: Cho hai điểm A,B cố định và (O;R) thay đổi sao cho $\frac{d(A,b)}{d(B,a)} = 2$, trong đó a, b theo thứ tự là đường đối cực của A, B đối với (O). Xác định vị trí của O để S_{OAB} lớn nhất.

Bài 2: Cho tam giác ABC cân tại A. Hai đường thẳng d1,d2 bất kì qua A. Các đường thẳng qua B,C tương ứng vuông góc với d1,d2 cắt nhau tại D. Đường thẳng qua B vuông góc với AB cắt d1 tại E.Đường thẳng qua C vuông góc với AC cắt d2 tại F. Chứng minh rằng AD vuông góc với EF .

Bài 3: Cho tam giác ABC với (I) là đường tròn nội tiếp .Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F.Gọi M, N, P lần lượt là điểm chung của các cặp đường thẳng (EF,BC) ,(DF,CA) ,(DE,AB). Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng .

Bài 4: Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn nội tiếp tam giác DEF tiếp xúc với EF, FD, DE lần lượt tại M, P , N. Chứng minh rằng AM, BP, CN đồng quy.

Bài 5: Gọi M,N,P là các giao điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh AB,BC,CA tương ứng .Chứng minh rằng trực tâm tam giác MNP,tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thẳng hàng.

Bài 6: Cho tam giác ABC nhận (I) là tâm đường tròn nội tiếp. Tiếp điểm của (I) trên BC,CA,AB lần lượt là D,E,F.Phân giác trong tại I của tam giác BIC cắt BC ở M. AM cắt FE ở N. Chứng minh rằng DN là phân giác của góc EDF.

Bài 7: Cho hình vuông ABCD ngoại tiếp (O). Tiếp điểm của (O) trên AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q. Một điểm S nằm trên cung nhỏ PN của (O). Tiếp tuyến của (O) tại S cắt BC, CD lần lượt tại H, K. Chứng minh MH//AK.

<u>Bài 8:</u> (Liên Xô - 1985) Một đường tròn tâm O đi qua các đỉnh A và C của tam giác ABC và cắt lại các đoạn AB, BC lần lượt ở K và N. Đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và KBN cắt nhau tại hai điểm phân biệt B và M. Chứng minh rằng góc OMB vuông **.**

<u>Bài 9:</u> (Ukraina-1998) Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại K, L, M. Đường thẳng qua B và song song với MK cắt LM, LK lần lượt ở R, S. Chứng minh rằng góc RIS nhọn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Hoàng Quốc Khánh – *Khám phá ứng dụng của cực đối cực.*

[2] O. Bottema Topics in Elementary Geometry, Second edition 2008.

[3] Nguyễn Mộng Huy- *Các phép biến hình trong mặt phẳng*

[4] Đào Huy Cường- *Hàng điểm điều hòa, cực đối cực*

[5] Toán học tuổi trẻ.

[6] Lê Hải Châu , *Vô địch toán quốc tế IMO*, 2007.