Mỗi tuần một bài toán

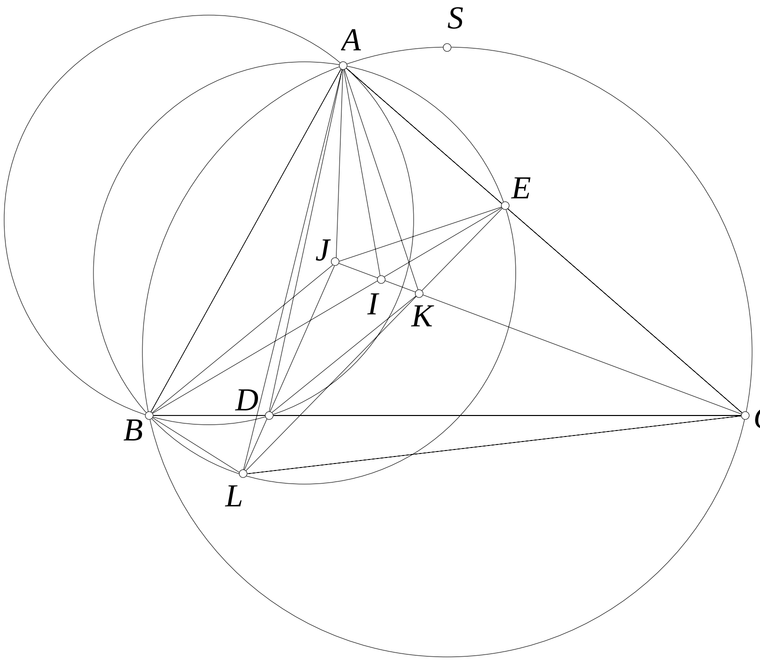
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có phân giác trong BE. D là điểm thuộc BC sao cho $\angle DAC = \angle B$. K là tâm nội tiếp tam giác ADC. EK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại L khác E. Chứng minh rằng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác LBC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



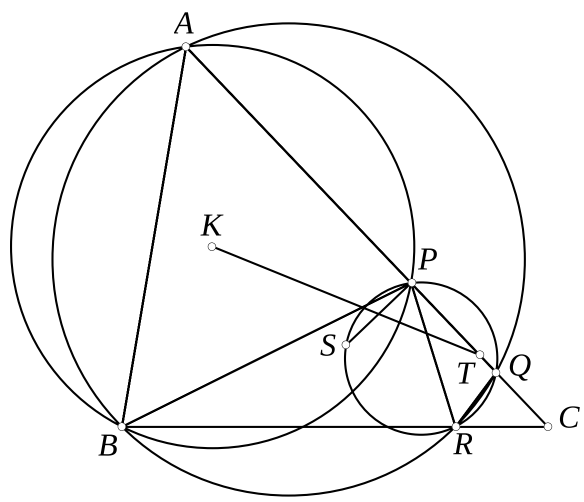
Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIE cắt AI tại J khác I. Ta thấy $CI.CJ = CE.CA$. Lại dễ có $\triangle CKA \sim \triangle CIB$ nên $\frac{CK}{CI} = \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{AC}$. Từ đó $CK.CJ = \frac{CK}{CI}.(CI.CJ) = CE.CD$ nên $\triangle CEK \sim \triangle CJD$ suy ra $\angle CEK = \angle AJD$. Ta định nghĩa lại điểm L là giao của DJ và KE vậy tứ giác $CEJL$ nội tiếp. Suy ra $\angle DLK = \angle KCE = \angle KCD$ suy ra tứ giác $DKCL$ nội tiếp. Cũng từ $\triangle CKA \sim \triangle CIB$ nên $\angle AKJ = \angle CIE = \angle CAJ$. Từ đó $JA^2 = JK.JC = JD.JL$ suy ra $\triangle JAD \sim \triangle JLA$ suy ra $\angle ALD = \angle JAD = \angle DAC - \angle JAC = \angle ABC - \angle AKJ = \angle ABC - \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ACB) = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$. Suy ra $\angle ALE = \angle ALD + \angle DLE = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB) + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle ABE$. Từ đó tứ giác $ABLE$ nội tiếp. Từ đó dễ chứng minh $\angle BLC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ nên tâm ngoại tiếp S của tam giác BLC là trung điểm $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Tác giả tạo ra bài toán này xuất phát từ bài toán số 4 của đề thi IMO 2009. Bài toán đó là một bài toán tính góc không khó nhưng nếu phân tích một cách sâu sắc thì bài toán này là một mở rộng của bài toán thi IMO đó. Bài toán được tham gia giải bởi **Nguyễn Ngọc Chi Lan** học sinh lớp 12A1 Toán trường THPT chuyên KHTN tại đây. Trong đó bạn **Nguyễn Thành Phát** lớp 11CT trường THPT chuyên Nguyễn Du cũng đưa ra lời giải thuần túy hình học và được hoàn thiện bởi bạn **Chi Lan**. Ngoài ra bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương cũng gửi tới tác giả hai lời giải rất thú vị. Bài toán trên còn có một hướng giải khác khá ngắn gọn dùng định lý Pascal, chúng tôi sẽ giới thiệu tới bạn đọc trong một bài viết sau.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\frac{PA}{PC} = \frac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại R khác B. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB. Dựng đường kính QS của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR. Gọi T là trung điểm PC. Chứng minh rằng đường thẳng KT chia đôi đoạn PS.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.