Định lý Sawayama và Thébault

Nhóm thực hiện: Nguyễn Thị Hường, Lương Ánh Nguyệt, Lương Thị Thanh Mai, Đào Thị Quỳnh Nga.
Giáo viên hướng dẫn: Trần Quang Hùng.

Mở đầu. Trong khuôn khổ bài báo này, chúng tôi sẽ gửi tới một cách chứng minh thuần tuý hình học của định lý Sawayama-Thébault và áp dụng vào một số bài toán khác.

1. Mở đầu

Định lý Sawayama-Thébault được coi là một trong những định lý đáng quan tâm nhất của hình học phẳng. Định lý này có một tiểu sử khá thú vị. Theo bài viết trên tạp chí Forum Geometricorum thì năm1938, nhà hình học nổi tiếng người Pháp Victor Thébault đã phát biểu định lý này. Lời giải của nó lần đầu tiên xuất hiện năm1973 ở Hà Lan và trở nên phổ biến vào năm 1989 .

Nhưng câu chuyện chưa dừng lại ở đó. Vào cuối năm 1938, nhà toán học người Thụy Sĩ R.Stark đưa ra một lời giải tổng hợp (tức là chỉ dùng các công cụ của hình học phẳng) của một kết quả mở rộng hơn ban đầu. Lời giải tính toán đầu tiên cho sự mở rộng này được tìm ra bởi K.B.Taylor (người Anh) với chứng minh chiếm mất 24 trang giấy. Đến năm 1986, một chứng minh khác ngắn gọn hơn được tìm ra bởi Gerhard Turnward.

Đến năm 2001, R.Shail đã đưa ra một chứng minh hoàn hảo hơn cho một trường hợp tổng quát mà bài toán của R.Stark chỉ là một trường hợp đặc biệt. Năm 2003, AMM xuất bản một lời giải của B.J.English, đã nhận được từ năm 1975.

Theo báo điện tử JSTOR, lời giải của R.Shail đã được biết tới trước đó rất lâu, vào năm 1905. Y.Sawayama, một giáo viên trung học tại Tokio- Nhật Bản đã chứng minh với phương pháp tổng hợp và tính toán.

Bởi vậy chúng ta có thể gọi định lý này là định lý Sawayama- Thébault.

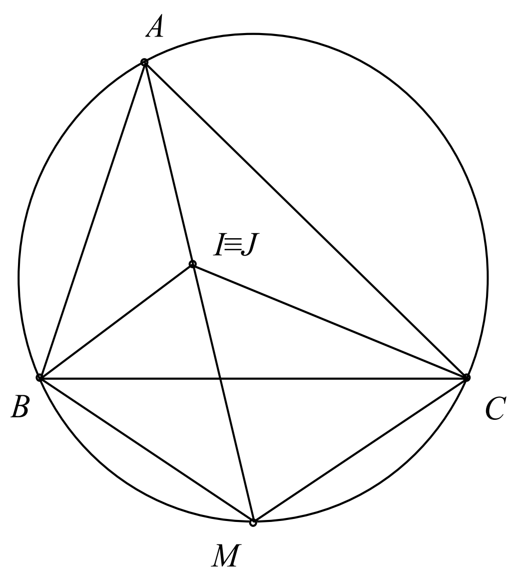
2. Định lý Sawayama- Thébault và mở rộng

2.1. Định lý và lời giải

Định lý Thébault đã được chứng minh trong [1] và [2]. Sau đây chúng tôi trình bày lại rõ ràng hơn cách chứng minh trong [1] nhờ 3 bổ đề. Cách chứng minh này là cơ sở để chúng tôi phát triển định lý ở phần sau.

Định lý 1. (Định lý Thébault). *Qua đỉnh A của tam giác ABC dựng đường thẳng AD. D nằm trên cạnh BC. Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội, ngoại tiếp của tam giác. (O_1) là đường tròn tiếp xúc với hai đoạn AD, DC tương ứng P, Q và tiếp xúc trong với (O). (O_2) tiếp xúc với hai đoạn AD, BD tương ứng tại H, G và tiếp xúc trong với (O). Ta có O, O_1, O_2 thẳng hàng.*

Bổ đề 1.1. *Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cung BC không chứa A. Khi đó, nếu MI = MB = MC và I nằm trên đoạn AM thì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*



(Hình 2.1)

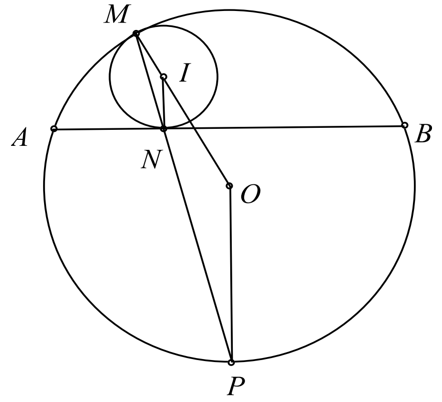
Lời giải bổ đề 1.1. (Hình 2.1) Từ giả thiết ta có MB = MC và AM là phân giác trong ∠BAC. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có đường thẳng BJ đi qua trung điểm của cung AC không chứa B. Nên ta có ∠ABJ = ∠JBC và ∠BAJ = ∠CBM.

Mặt khác, ta có ∠BJM = ∠ABJ + ∠BAJ và ∠JBM = ∠JBC + ∠CBM.

Từ đó, ta nhận được BJM là tam giác cân nên JM = MB = MC. Vì vậy JM = IM.

Do đó, J ≡ I vì I và J cùng nằm trên tia MA.

Vì vậy, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Bổ đề 1.1 được chứng minh hoàn toàn.



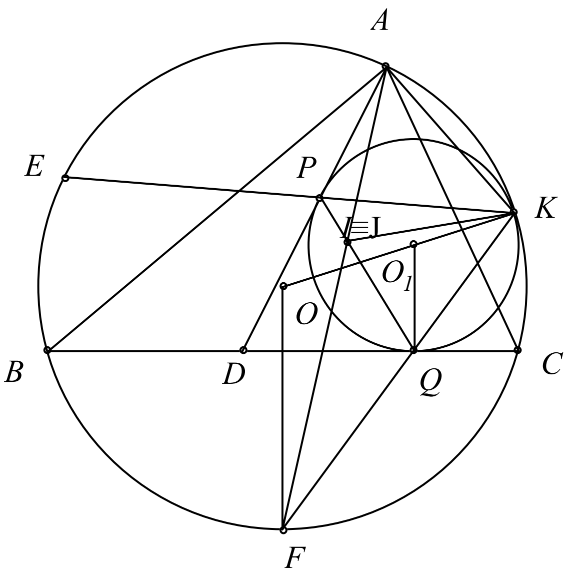
Bổ đề 1.2. *Cho (O) và dây AB của đường tròn. (I) tiếp xúc trong với (O) và BC lần lượt tại M, N. Khi đó MN là phân giác của góc AMB.*

Lời giải bổ đề 1.2. (Hình 2.2) Gọi P là giao điểm thứ 2 của MN và (O). Vì (I) tiếp xúc trong với (O) tại M nên ta suy ra M, O, I thẳng hàng. Do đó tam giác cân IMN và OMP có cùng góc M nên IN // OP hay OP $\perp$ AB. Ta có P là điểm chính giữa của cung AB không chứa M. Vì vậy MP hay MN là phân giác của góc AMB.

(Hình 2.2)

Bổ đề 1.2 được chứng minh.

Bổ đề 1.3. *Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội và ngoại tiếp tam giác ABC. D là 1 điểm bất kì trên cạnh BC. (O_1) tiếp xúc với AD, DC lần lượt ở P, Q và tiếp xúc trong với (O) khi đó PQ đi qua I.*



(Hình 2.3)

Chứng minh bổ đề 1.3. (Hình 2.3) Giả sử (O) và (O_1) tiếp xúc trong tại K, khi đó K, O_1, O thẳng hàng. Gọi E, F là giao điểm của KP, KQ với (O). Theo bổ đề 1.2, F là trung điểm của $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. (1). Gọi J là giao điểm của AF và PQ. Ta có 2 trường hợp: B, D cùng phía với AF hoặc B, D khác phía với AF. Dưới đây chúng tôi xét trường hợp 1 (với J thuộc đoạn PQ), trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Ta có OF// O_1Q nên $\angle JAK = \angle FAK = \frac{1}{2}\angle FOK = \frac{1}{2}\angle QO_1K = \angle QPK = \angle JPK$.

Tứ giác APJK có $\angle JAK = \angle JPK$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra $\angle AJP = \angle AKP$ lại có $\angle AJP = \angle FJQ$ nên $\angle AKP = \angle FJQ$ (2).

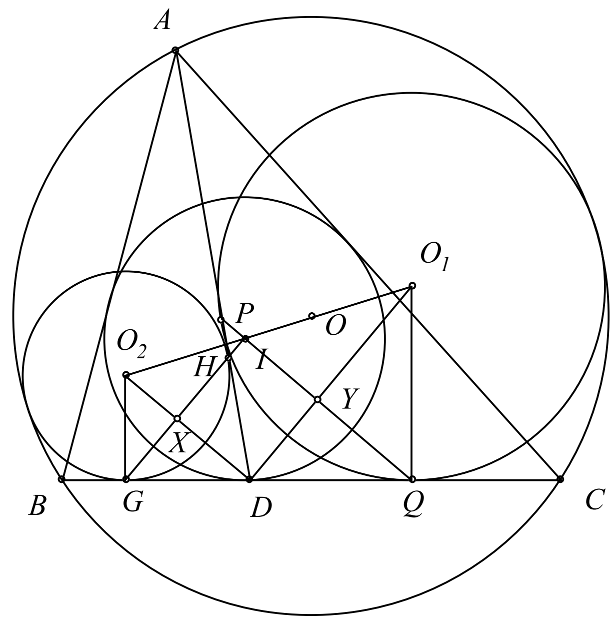
Tứ giác APJK nội tiếp có $\angle AKJ = \angle DPJ$ và $\angle DPJ = \angle DPQ = \angle PKQ$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến, dây cung) hay $\angle AKJ = \angle PKQ$ suy ra $\angle AKP = \angle JKQ$ (3).

Từ (2), (3), ta có $\angle FJQ = \angle JKQ$ nên $\Delta JQF \sim \Delta KJF$.

Ta suy ra $FJ^2 = FK.\ FQ$.

Dễ chứng minh $FC^2 = FK.\ FQ$ nên FC = FJ (4).

Từ (1), (4) và bổ đề 1.1, ta có J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC hay $I \equiv J$, hay PQ đi qua I. Bổ đề 1.3 được chứng minh hoàn toàn.



(Hình 2.4)

Chứng minh định lý 1. (Hình 2.4) Gọi (O_1) tiếp xúc với AD, DC lần lượt ở P, Q và (O_2) tiếp xúc với AD, BD lần lượt ở H, G. Theo bổ đề 1.3, tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC là giao điểm của PQ và GH.

Gọi X là giao điểm của DO_2 và GH, Y là giao điểm của DO_1 và PQ. Ta có DO_1 và DO_2 tương ứng là phân giác của $\angle ADC$ và $\angle ADB$, nên $\angle O_1DO_2 = 90^0$. Ta có $\angle DXI = \angle DYI = 90^0$ nên DXIY là hình chữ nhật. Vậy $\Delta O_2GD \sim \Delta DQO_1$ nên:

$$\frac{GO_2}{GD} = \frac{DQ}{QO_1} \text{ hay } \frac{GO_2^{\,2}}{GD^2} = \frac{DQ^2}{QO_1^{\,2}} \text{ nên } \frac{O_2X}{XD} = \frac{YD}{YO_1} \text{ hay } \frac{O_2X}{O_2D} = \frac{YD}{DO_1} = \frac{XI}{DO_1}.$$

Ta có $\Delta O_2XI \sim \Delta O_2DO_1$ suy ra $\angle IO_2X = \angle O_1O_2X$. Vậy O_1, I, O_2 thẳng hàng. Định lý 1 được chứng minh hoàn toàn.

2.2. Mở rộng định lý Thébault

Trong quá trình tìm hiểu cách chứng minh định lý Thébault, chúng tôi nhận ra rằng có thể mở rộng định lý bằng cách mở rộng 3 bổ đề trên. Do đó, chúng tôi mạnh dạn đề xuất định lý 2 dưới đây, thực chất đó là "định lý Thébault" cho tâm bàng tiếp.

Định lý 2. (Mở rộng định lý Thébault). *D là điểm bất kì trên cạnh BC của tam giác ABC. (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác và (I_a) là đường tròn bàng tiếp góc A . (O_1) tiếp xúc với AD, BC lần lượt tại M, N và tiếp xúc ngoài với (O). (O_2) tiếp xúc với AD, BC lần lượt tại P, Q và tiếp xúc ngoài với (O). Khi đó I_a, O_1, O_2 thẳng hàng.*

Chúng ta sẽ sử dụng 3 bổ đề sau để chứng minh định lý 2.

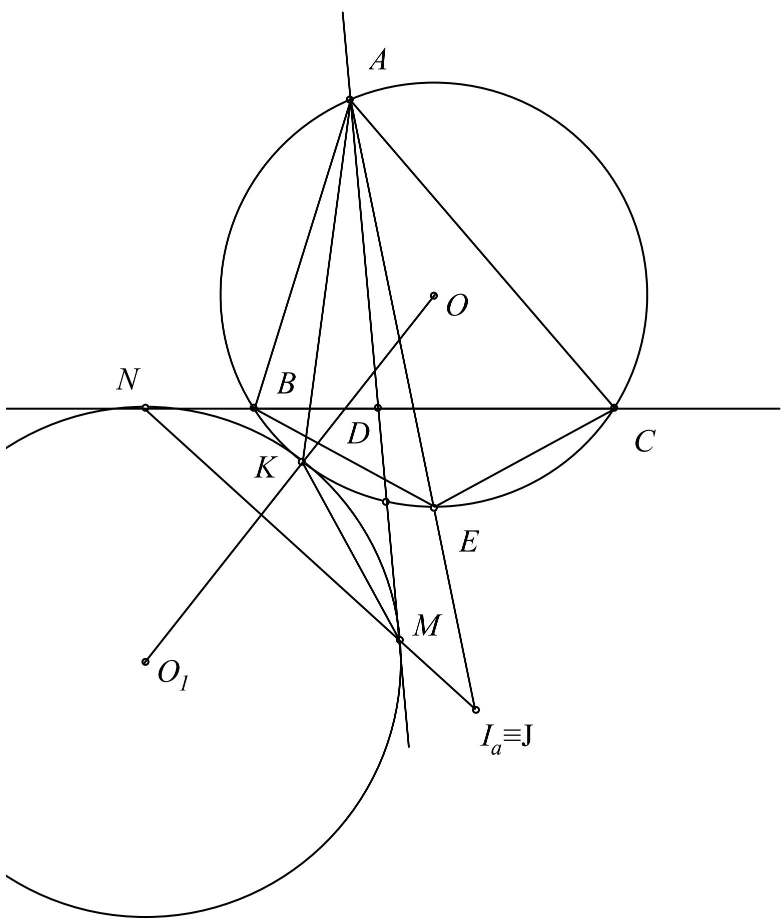
Bổ đề 2.1. *Cho (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Cho E là điểm chính giữa cung BC không chứa A. Nếu EB = EC = EJ và J thuộc tia đối của tia EA thì J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. .*

Bổ đề 2.2. *Cho (O) và dây AB. Dựng (I) tiếp xúc với đường thẳng AB tại M và tiếp xúc ngoài với (O) tại N. E là điểm chính giữa cung AB với I và E cùng phía với AB. Khi đó MN đi qua E.*

(Hai bổ đề này có thể được chứng minh dễ dàng).

Bổ đề 2.3. *Cho O, I_a lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Dựng (O_1) tiếp xúc ngoài với (O) tại K, tiếp xúc với tia AD tại M và tiếp xúc với tia CB tại N trong đó D là điểm bất kì thuộc cạnh BC. Khi đó M, N, I_a thẳng hàng.*

Chứng minh bổ đề 2.3. (Hình 2.5) Gọi E là giao điểm của AI_a và (O), J là giao điểm của AI_a và MN. Ta có 2 trường hợp: B, D cùng phía với AF hoặc B, D khác phía với AF. Dưới đây chúng tôi xét trường hợp 2 (với J nằm ngoài đoạn MN), trường hợp còn lại chứng minh tương tự.



(Hình 2.5)

Vì AI_a là phân giác trong $\angle$A, nên E là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A ta có OE $\perp$ BC. Mặt khác, $O_1N \perp BC$ nên O_1N // OE. Theo giả thiết ta suy ra O, K, O_1 thẳng hàng. Vì vậy $\angle NO_1K = \angle KOE$, suy ra $\angle$ KMN = $\angle$ KAE (1).

Vậy tứ giác AKMJ là tứ giác nội tiếp.

Nên $\angle$KMA = $\angle$KJA . Nhưng $\angle$KMA = $\angle$KNM nên $\angle$KJA = $\angle$KNM. Theo bổ đề 2.2 lại có K, N, E thẳng hàng nên $\angle$NEJ = $\angle$KEJ. Ta có ΔKEJ ~ Δ JEN vậy JE^2 = EK. EN (2).

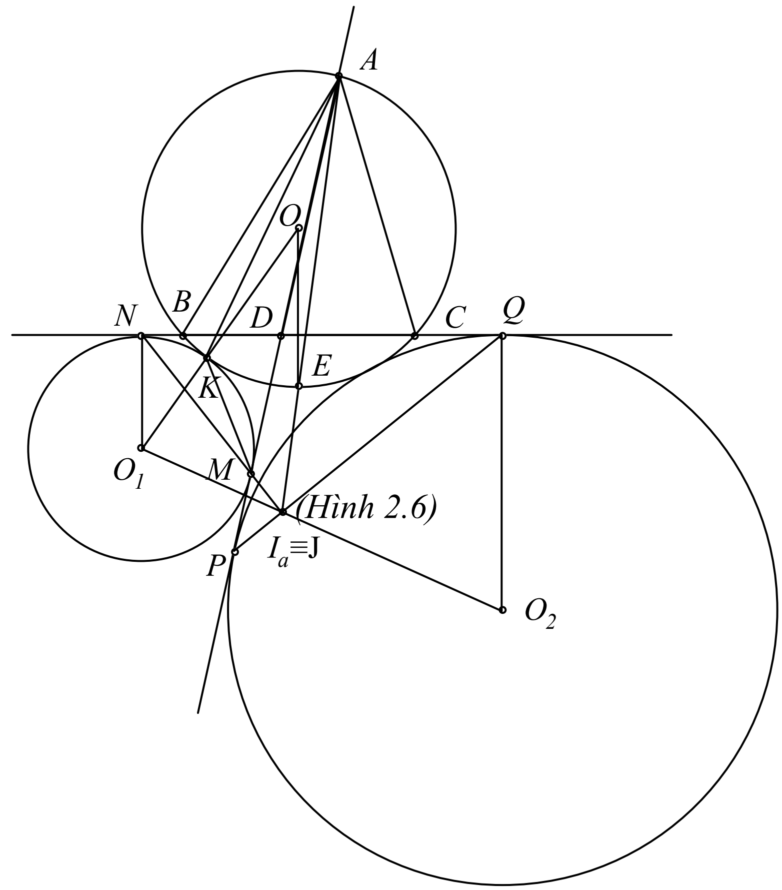
Cũng có $\angle$KMN = $\angle$BNK, $\angle$KAE = $\angle$KBE, nên từ (1), ta có $\angle$KBE = $\angle$ENB. suy ra ΔBKE ~ Δ NBE nên EB^2 = EK. EN (3).

Từ (2) và (3), ta có JE = EB (4).

Vì I là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC, ta dễ dàng có I_aE = EB = EC (5).

Từ (4) và (5) suy ra $I_a \equiv$ J. Vậy bổ đề 2.3 được chứng minh

Chứng minh định lý 2. (Hình 2.6) Gọi X là giao điểm NM và DO_1, Y là giao điểm của PQ và DO_2. Từ bổ đề 2.3, ta có I_a là giao điểm của MN và PQ. Mặt khác, DO_1 là phân giác trong và DO_2 là phân giác ngoài của $\angle BDM$ (D là giao điểm 2 tiếp tuyến của mỗi đường tròn (O_1) và (O_2)).



Ta có $\angle O_1DO_2 = 90^0$ nên DXI_aY là hình chữ nhật nên $DY=XI_a$.

(Hình 2.6)

Nên ta có $\Delta O_1ND \sim \Delta DQO_2$ suy ra $\frac{O_1N}{ND} = \frac{DQ}{QO_2}$ hay $\frac{O_1N^2}{ND^2} = \frac{DQ^2}{QO_2^{\ 2}}$. Vậy $\frac{O_1X}{XD} = \frac{DY}{YO_2}$ nên $\frac{O_1X}{O_1D} = \frac{DY}{DO_2} = \frac{XI_a}{DO_2}$.

Lại có $\Delta O_1XI_a \sim \Delta O_1DO_2$ nên $\angle XO_1I_a = \angle DO_1O_2$.

Vậy O_1, I_a, O_2 thẳng hàng.

Định lý 2 được chứng minh.

3. Một số áp dụng

Chúng tôi sẽ sử dụng định lý Thébault để chứng minh một số kết qủa đẹp sau.

Bài toán 1. *Cho (O_1), (O_2) lần lượt tiếp xúc trong với (O) tại M, N. Tiếp tuyến chung AB, CD của (O_1), (O_2) cắt (O)tương ứng tại S, F và R, E (S và R cùng phía so với O_1O_2). Chứng minh rằng PQ là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) với P, Q lần lượt là trung điểm của cung RS không chứa E và cung EF không chứa S.*

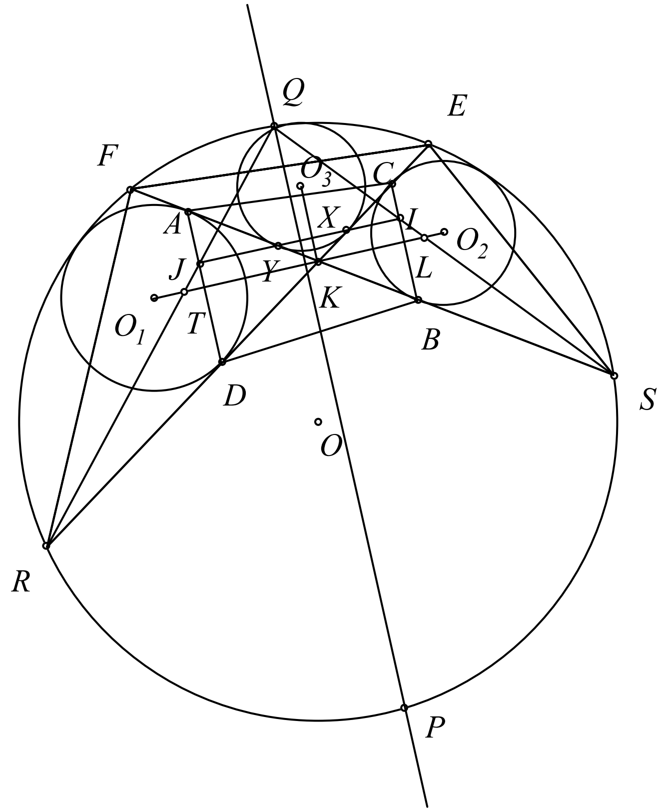
Lời giải. (Hình 3.1) Gọi K là giao điểm của AB và CD. Khi đó O_1, O_2, K thẳng hàng. Gọi L, T lần lượt là giao điểm của O_1O_2 và SQ, RQ. Ta có $\angle SKL = \angle LKE = \angle FKT = \angle TKR$ (1).

Gọi (O_3) là đường tròn tiếp xúc với KE, KF thứ tự tại X, Y và tiếp xúc trong với (O). Gọi I, J lần lượt là giao điểm của XY với BC và AD.

Áp dụng định lý Sawayama-Thébault cho 2 tam giác SEF và REF, ta có I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác SEF và REF.

Nhưng SQ, RQ là phân giác trong của $\angle ESF$ và $\angle ERF$ Nên I thuộc SQ và J thuộc RQ.

Vì KX và KY là hai tiếp tuyến của (O_3), nên XY vuông góc với phân giác của $\angle EKF$ (2).



(Hình 3.1)

Mà KO_1 và KO_2 lần lượt là phân giác trong của $\angle SKE$ và $\angle RKF$. Ta suy ra O_1O_2 vuông góc với phân giác trong của $\angle EKF$ (3).

Từ (2) và (3) có O_1O_2 // XY hay O_1O_2 // IJ (4).

Ta có $\angle LSK = \angle KRT$ (Q là trung điểm của $\overset{\frown}{EF}$ không chứa S). Kết hợp với (1), ta có $\angle QLK = \angle KTQ$ hay $\angle QLT = \angle LTQ$. Suy ra tam giác LQT là tam giác cân. Vậy QL = QT (5).

Tương tự, ta có PL = PT (6).

Từ (5) và (6) suy ra PQ là trung trực của LT. Theo (4) có PQ là trung trực của IJ (7).

Mặt khác $AD \perp KO_1$, $BC \perp KO_2$ nên AD // BC (8).

Từ (7) và (8), PQ đi qua trung điểm của BD và AC. Vậy PQ là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).

Bài toán 2 Cho (O_1)*, (*O_2*) tiếp xúc trong với (O) lần lượt tại M, N. Hai tiếp tuyến chung trong của (*O_1*) và (*O_2*) là ES và FR sao cho E, F, R, S thuộc (O) và F, E nằm cùng phía với* O_1O_2*. Tiếp tuyến chung ngoài của (*O_1*), (*O_2*) cắt (O) tại A, B. Chứng minh rằng AB // EF hoặc AB // SR.*

Chứng minh. (Hình 3.2) Không mất tính tổng quát, giả sử AB và EF cùng phía so với O_1O_2 (nếu AB và SR cùng phía với O_1O_2, ta làm tương tự). Ta sẽ chứng minh rằng AB // EF.

Thật vậy, gọi K là trung điểm của cung AB không chứa R và S. Theo bổ đề 1.2, ta có K, Q, N thẳng hàng và K, P, M thẳng hàng.

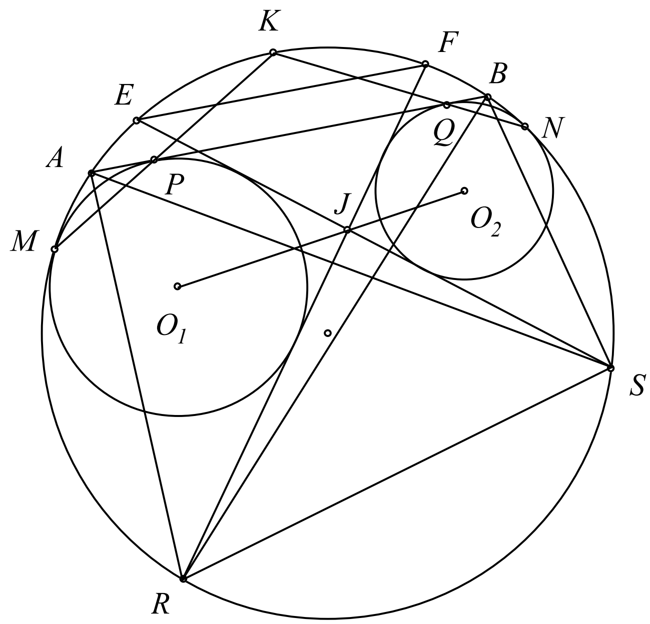
Dễ dàng chứng minh được $KA^2=KM.KP=\wp_{K/(O_1)}$ và $KB^2=KN.KQ=\wp_{K/(O_2)}$. K là điểm chính giữa cung AB, nên KA=KB hay $\wp_{K/(O_1)} = \wp_{K/(O_2)}$ hay K thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) (1)

Theo bài toán 1, trục đẳng phương của (O_1), (O_2) đi qua điểm chính giữa của $\overset{\frown}{EF}$ không chứa S (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{EF}$ và $\overset{\frown}{AB}$ có chung điểm chính giữa hay EF // AB.

(Hai bài toán trên được tham khảo tại diễn đàn mathlink.ro).

Sau đây, chúng tôi nêu ra 2 bài toán mới được áp dụng từ định lý 2.



(Hình 3.2)

Bài toán 3. *Cho (O_1), (O_2) tiếp xúc trong với (O) lần lượt tại M, N. 2 tiếp tuyến trong chung của (O_1) và (O_2) là ES và FR sao cho E, F cùng phía với O_1O_2. Tiếp tuyến chung ngoài của (O_1), (O_2) cắt (O) lần lượt tại A, B. Chứng minh rằng AB // EF hoặc AB // SR.*

Bài toán 4. *Cho (O_1), (O_2) tiếp xúc ngoài với (O) tại M, N. Tiếp tuyến chung trong AC, BD của (O_1), (O_2) cắt (O) lần lượt tại S, F và R, E. Giao điểm của FR và SE không thuộc miền trong (O). Chứng minh rằng PQ là trục đẳng phương của (O_1), (O_2) sao cho P, Q lần lượt là điểm chính giữa cung EF không chứa S và cung SR không chứa E.*

Hai bài toán trên được chứng minh tương tự như bài 1 và 2 dựa vào định lý Thebault mở rộng cho tâm bàng tiếp.

Tài liệu tham khảo

[1] J.-L. Ayme, *Sawayama và Thébault's theorem*, Forum Geom, 3 (2003).

[2] Wilfred Reyes, *An Application của Thébault's Theorem*, Forum Geom, 2 (2002).

[3] R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, 1925, Dover reprint.

[4] V. Thébault, Problem 3887, *Three circles with collinear centers*, Amer. Math. Monthly, 45 (1938).

[5] Y. Sawayama*, A new geometrical proposition*, Amer. Math. Monthly, 12 (1905).

[6] R. Shail., *A proof of Thébault's Theorem*, Amer. Math. Monthly, 108 (2001).

[7] K. B. Taylor, *Solution của Problem 3887*, Amer. Math. Monthly, 90 (1983).

[8] Nguyễn Minh Hà, Định lý Lyness, tạp chí toán tuổi thơ 2.