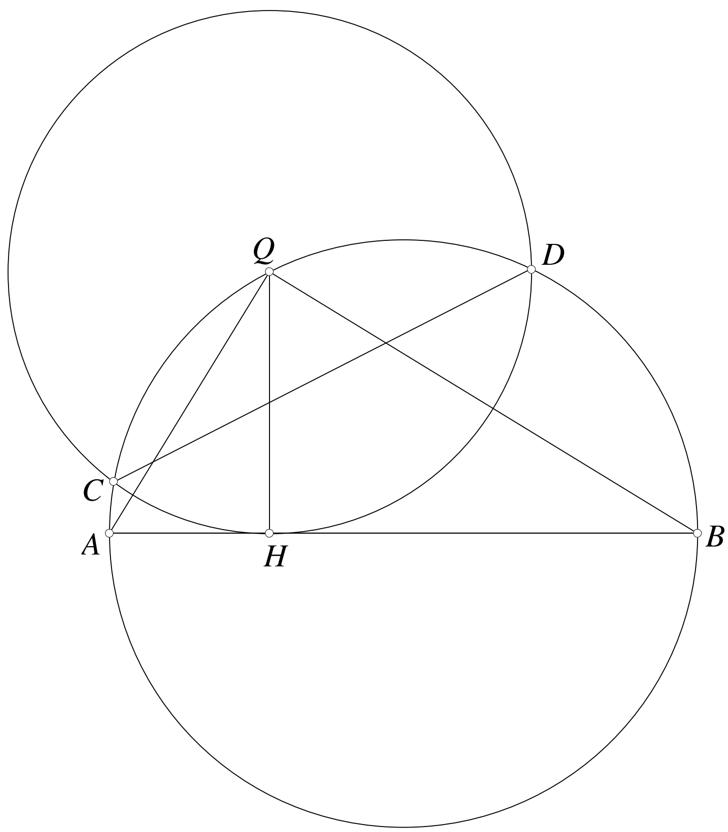
Từ bài thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ tới bài thi Olympic chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh bài toán hình học thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ và bài toán thi Olympic chuyên KHTN với các công cụ về hàng điểm điều hòa.

Đề thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ năm 2006 ngày thứ 2 [1] có bài toán hình học hay như sau

Bài toán 1. Từ điểm Q trên đường tròn đường kính AB vẽ QH vuông góc với AB với H thuộc AB. Đường tròn đường kính AB cắt đường tròn tâm Q bán kính QH tại C, D. Chứng minh rằng CD chia đôi QH.



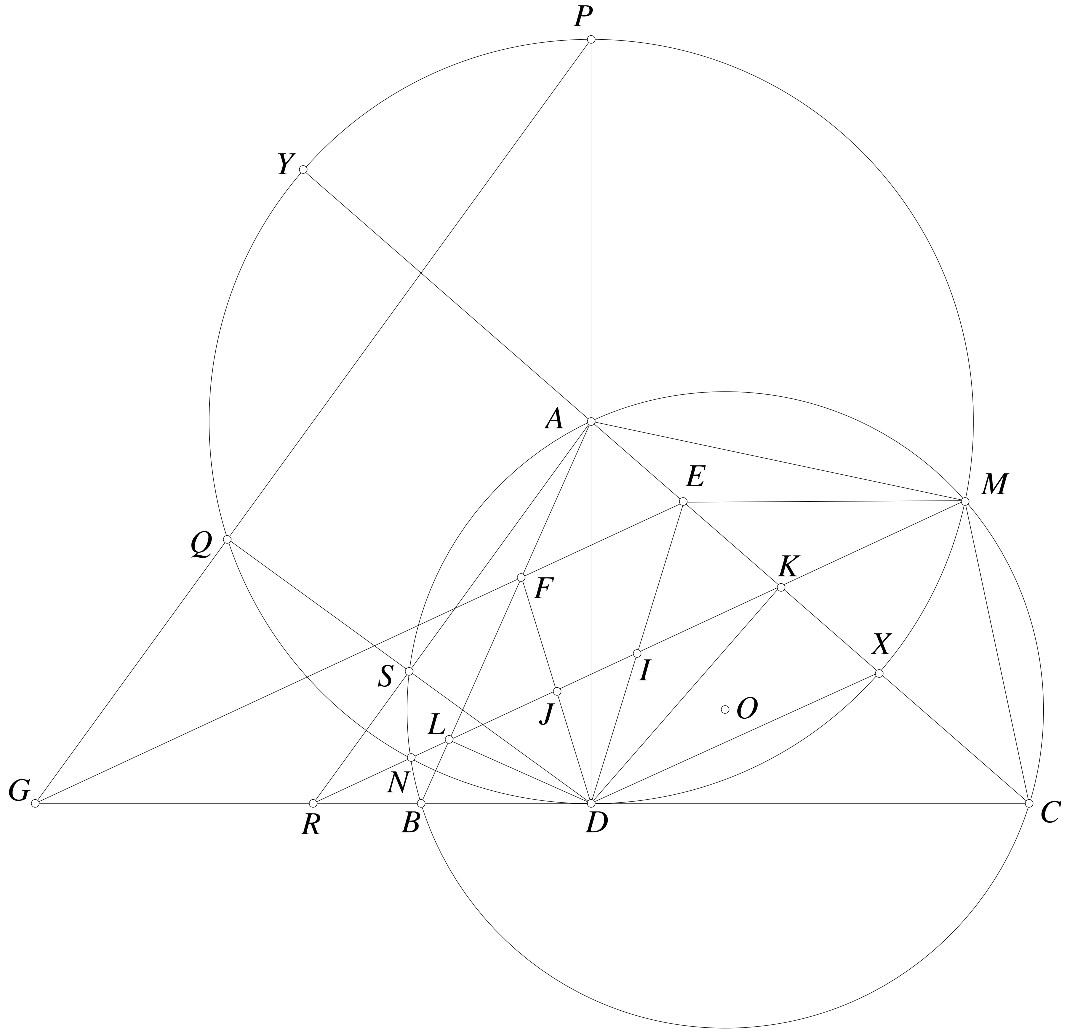
Hình 1.

Bài toán là một kết quả rất hay và mang nhiều ý nghĩa và có nhiều lời giải được đề xuất trong [1]. Bài toán cũng có nhiều lời giải và hướng phát triển cũng như nhiều hướng khai thác. Bài thi Olympic chuyên KHTN [2] là một ví dụ của sự mở rộng và khai thác kết quả này

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AD, BE, CF với D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB. Gọi (ω) là đường tròn tâm A đi qua D. (ω) cắt (O) tại M, N.

a) Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm DE, DF.

b) Gọi EF cắt BC tại G và DP là đường kính của (ω). PG cắt (ω) tại Q khác P. Chứng minh rằng trung điểm của DQ nằm trên (O).



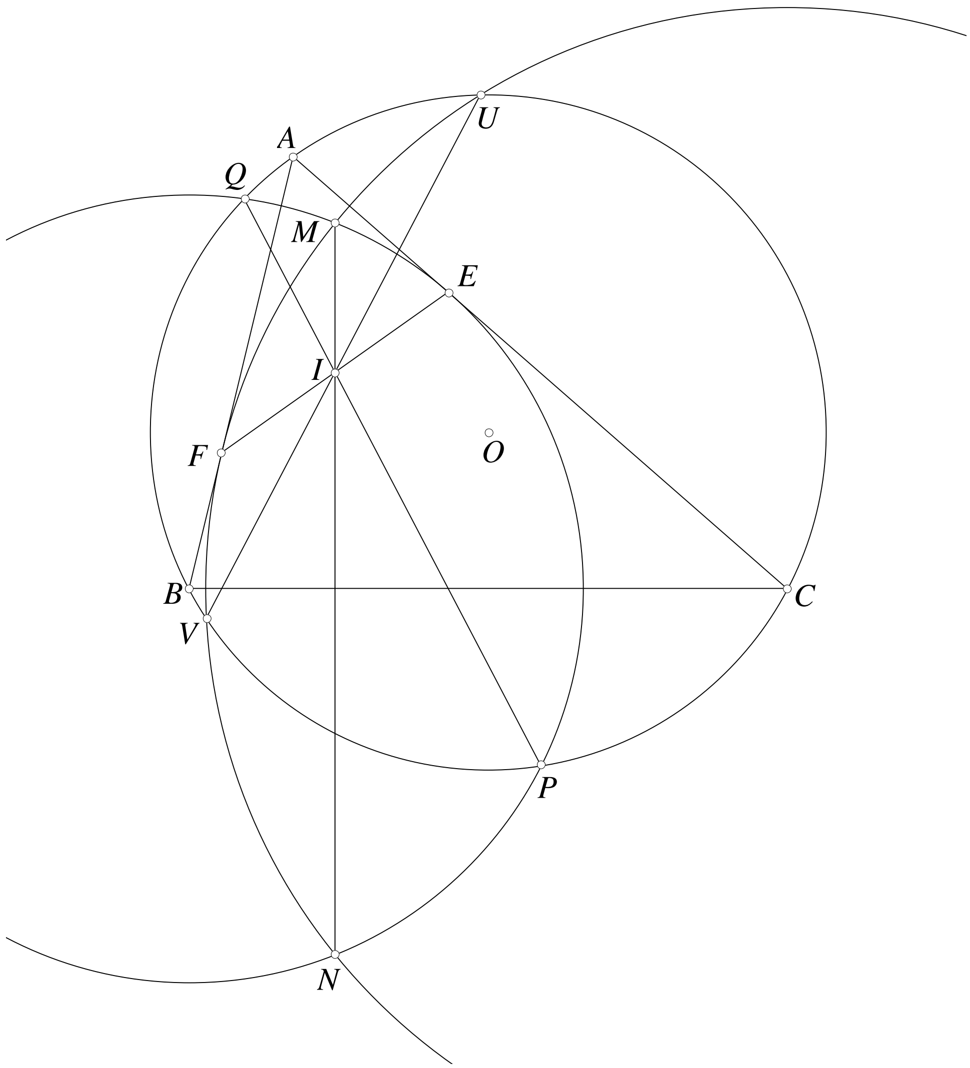
Hình 2.

Lời giải. a) Gọi MN cắt DE, DF, AC, AB lần lượt tại I, J, K, L. (ω) cắt AC tại X, Y. Ta thấy $\overline{KX}.\overline{KY} = \overline{KM}.\overline{KN} = \overline{KA}.\overline{KC}$ suy ra $(KC, XY) = -1$ vậy $AD^2 = AX^2 = AY^2 = \overline{AK}.\overline{AC}$ từ đó dễ thấy $DK \perp AC$. Tương tự $DL \perp AB$. Vậy tứ giác $AKDL$ nội tiếp suy ra $\angle LKF = \angle LAD = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - \angle DEC = \angle IDK$. Từ đó tam giác IDK cân, mặt khác tam giác DKE vuông suy ra I là trung điểm DE. Tương tự J là trung điểm DF. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi MN giao BC tại R. AR cắt QD tại S. Theo a) dễ thấy R là trung điểm GD mà A là trung điểm DP nên S là trung điểm QD. Do $DQ \perp PG$ nên $DS \perp SA$. Từ đó S, K, L thuộc đường tròn đường kính AD. Dễ thấy hàng $(BC, GD) = -1$ và R là trung điểm DG nên $\overline{RS}.\overline{RA} = \overline{RK}.\overline{RL} = RD^2 = RG^2 = \overline{RB}.\overline{RC}$. Từ đó tứ giác $ASBC$ nội tiếp nên S thuộc (O). Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Rõ ràng bài toán 2 phần a) là sự mở rộng bài toán 1 từ tam giác vuông sang tam giác bất kỳ còn phần b) là một sự phát triển khá đẹp. Chúng tôi chọn cách trình bày bằng hàng điểm điều hòa để mang một phong cách mới thực ra cả 2 phần các bạn đều có thể làm một cách thuần túy hình học THCS. Đằng sau bài toán thi còn nhiều phát triển khác đáng chú ý

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với đường cao BE, CF. Đường tròn (B, BE) cắt đường tròn (C, CF) tại M, N. Chứng minh rằng MN chia đôi EF.

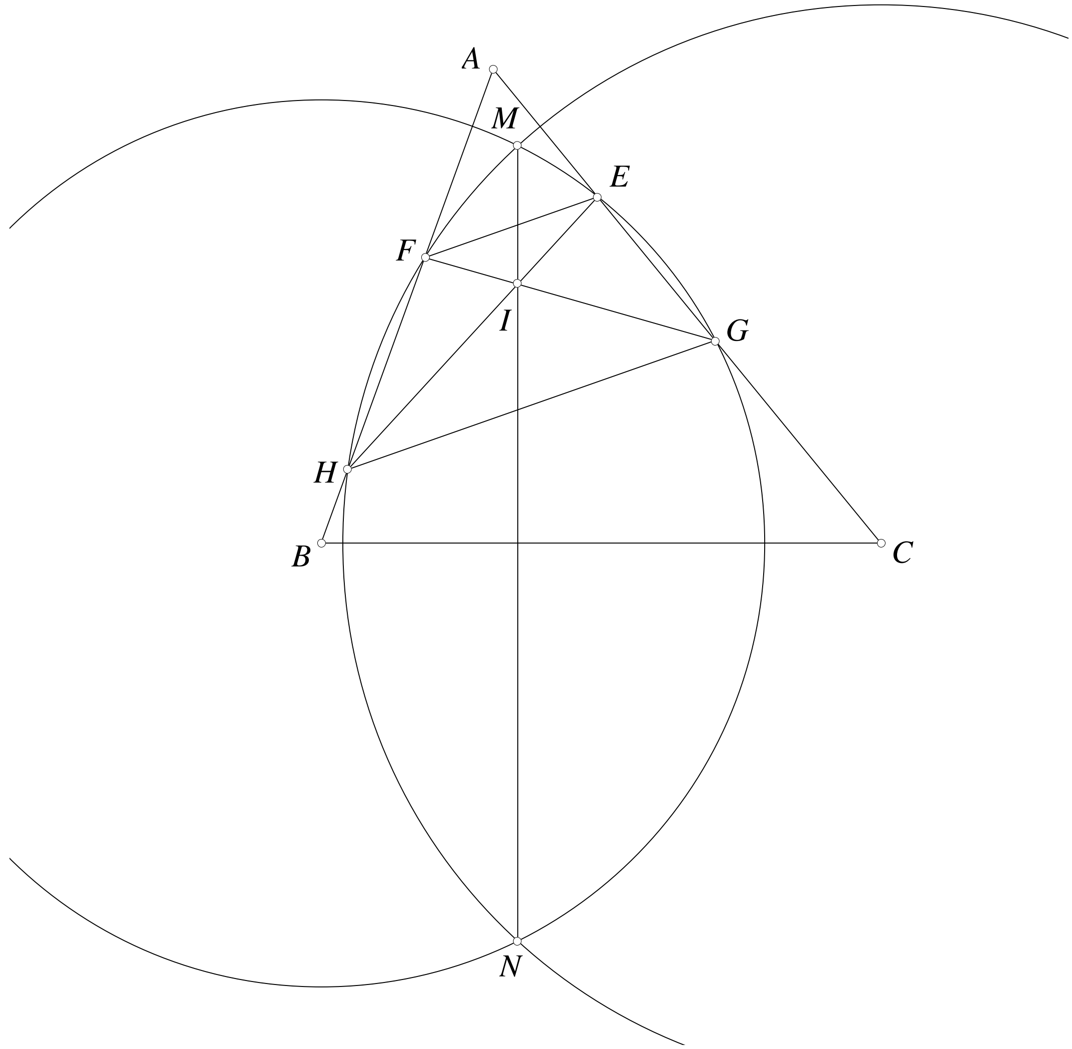


Hình 3.

Lời giải. Gọi đường tròn (B, BE) cắt (O) tại P, Q và (C, CF) cắt (O) tại U, V. Theo bài toán 2 dễ thấy PQ, UV cùng đi qua trung điểm EF. Dễ thấy theo tính chất tâm đẳng phương thì MN, PQ, UV đồng quy do đó MN đi qua trung điểm EF. $\square$

Bài toán trên là một kết quả đẹp nó có một mở rộng như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn. Đường tròn (B, BE) cắt CA tại G khác E. Đường tròn (C, CF) cắt AB tại H khác F. Đường tròn (B, BE) cắt (C, CF) tại M, N. Chứng minh rằng FG, EH và MN đồng quy.



Hình 4.

Xung quanh bài toán 2, 3, 4 vẫn còn nhiều điều thú vị cho các bạn cùng khám phá, xin dành điều đó cho các bạn đọc.

Tài liệu

[1] Đề thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ năm 2006 bài 2 ngày 2

www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=508188

[2] Đề thi Olympic chuyên KHTN năm 2014 bài 5.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com