Xung quanh một bài toán hình học trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán hình học hay trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014 với các công cụ hình học thuần túy.

Trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014 ngày thứ 1 có bài toán hình học hay như sau

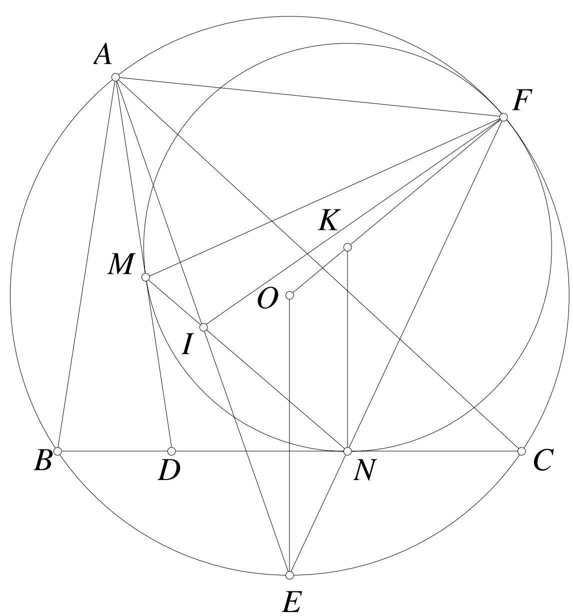
Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O) lấy điểm D. Giả sử CD cắt AB ở E và BD cắt AC ở F. Gọi (K) đường tròn nằm trong tam giác EBD, tiếp xúc với EB, ED và tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi (L) là tâm đường tròn nằm trong tam giác FCD, tiếp xúc với FC, FD và tiếp xúc với đường tròn (O).

a) Gọi M là tiếp điểm của (K) với BE và N là tiếp điểm của (L) với CF. Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN luôn đi qua một điểm cố định khi D di chuyển

b) Đường thẳng qua M và song song với CE cắt AC ở P, đường thẳng qua N và song song với BFcắt AB ở Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP, ANQ cùng tiếp xúc với một đường tròn cố định khi D di chuyển.

Bài toán này nếu ai đã quen thuộc với định lý Sawayama và Thébault và các mở rộng của nó thì khá đơn giản. Để tìm hiểu bài toán cũng như mở rộng của nó ta sẽ tìm hiểu lại định lý Sawayama và Thébault cùng với các mở rộng

Bài toán 2 (Định lý Sawayama và Thébault)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng MN đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.



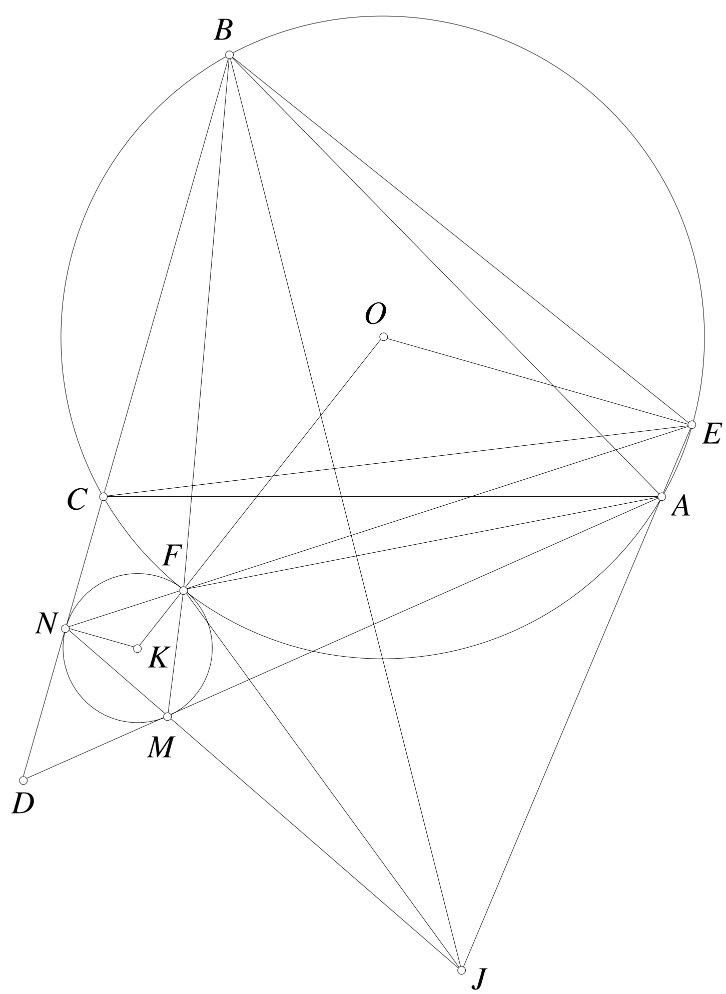
Hình 1.

Lời giải. Gọi phân giác góc $\angle BAC$ cắt (O) tại E khác A. AE cắt MN tại I. (K) tiếp xúc (O) tại F. Dễ có E, N, F thẳng hàng và $EB^2 = EC^2 = EN.EF$.

Ta lại có $\angle FMN = \dfrac{1}{2}\angle FKN = \dfrac{1}{2}\angle FOE = \angle FAE$ suy ra tứ giác $AFIM$ nội tiếp. Suy ra $\angle IFN = \angle MFN - \angle MFI = \angle DMN - \angle MFI = \angle AFI - \angle MFI = \angle AFM = \angle AIM = \angle EIN$. Từ đó $\triangle EIN \sim \triangle EFI$ suy ra $EI^2 = EN.EF = EC^2 = EB^2$. Suy ra I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải trên là một trong những cách tiếp cận nhanh gọn nhất cho định lý Sawayama và Thébault. Bài toán phát biểu trên tâm nội tiếp hẳn nhiên sẽ có cách phát biểu trên tâm bàng tiếp, ta tìm hiểu phát biểu sau

Bài toán 3 (Định lý Sawayama và Thébault mở rộng)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc tia đối tia CB. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC lần lượt tại M, N và tiếp xúc ngoài (O). Chứng minh rằng MN đi qua tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B của tam giác ABC.



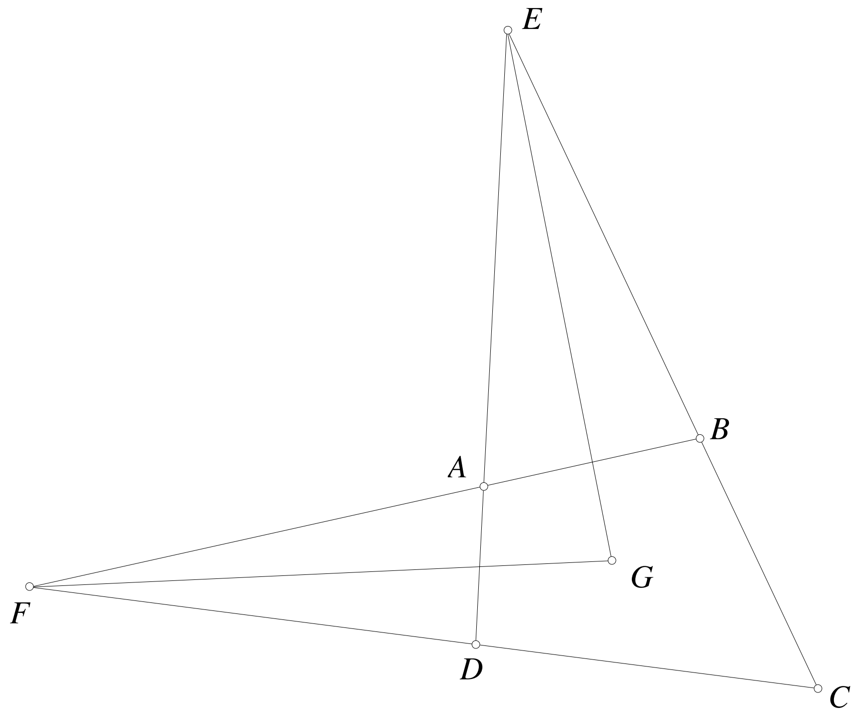
Hình 2.

Lời giải. Gọi phân giác ngoài tại đỉnh A cắt (O) tại E khác A. AE cắt MN tại J. (K) tiếp xúc (O) tại F. Dễ có E, N, F thẳng hàng và $EB^2 = EC^2 = EN.EF$.

Ta lại có $\angle FMN = \dfrac{1}{2}\angle FKN = \dfrac{1}{2}\angle FOE = \angle FBE = \angle FAJ$ suy ra tứ giác $AFMJ$ nội tiếp. Suy ra $\angle EFJ = 180^\circ - \angle NFJ = 180^\circ - \angle NFM - \angle MFJ = 180^\circ - \angle JMA - \angle MAJ = \angle MJA$. Từ đó $\triangle EFJ \sim \triangle EJN$ suy ra $EJ^2 = EN.EF = EC^2 = EB^2$. Suy ra J là tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B của tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

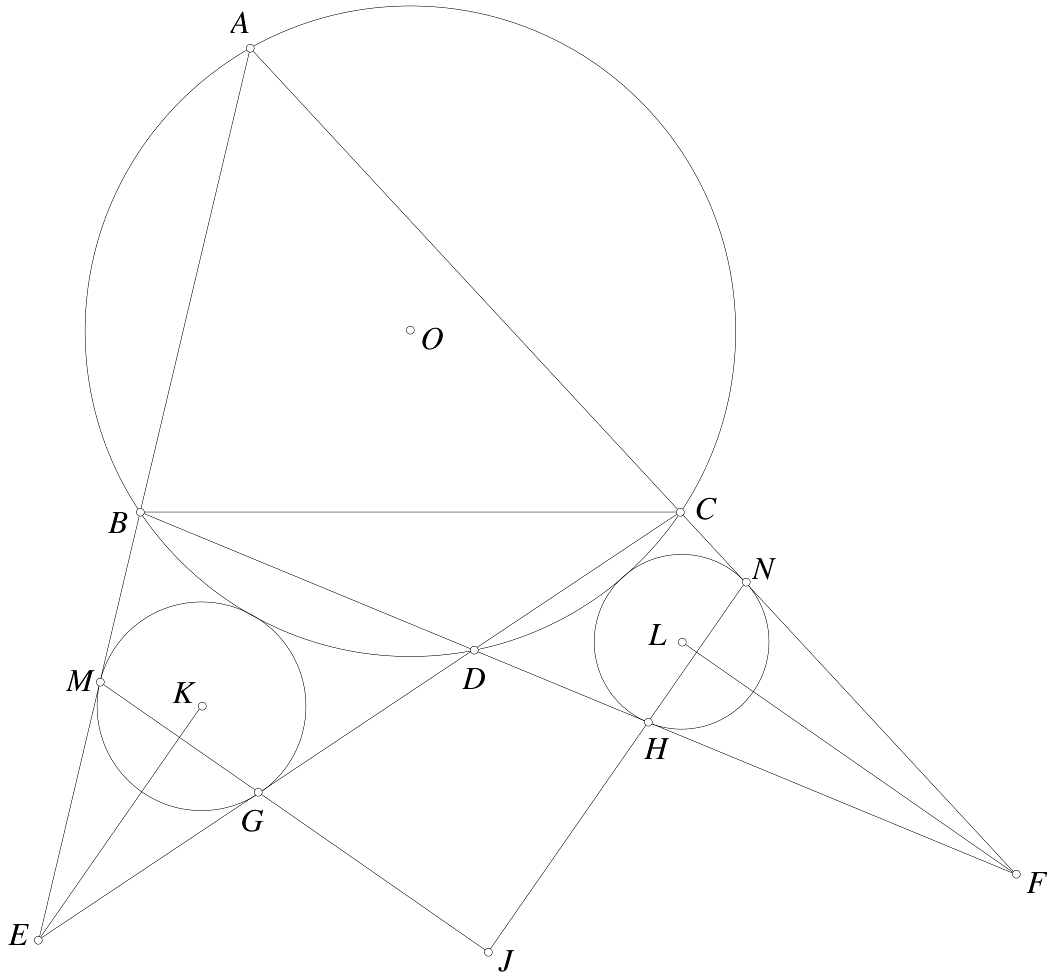
Để giải quyết bài toán 1 và mở rộng nó ta cần thêm một bài toán cơ bản sau

Bài toán 4. Cho tứ giác $ABCD$. Giả sử tia BA giao tia CD tại E, tia DA giao CB tại F. Phân giác góc $\angle E, \angle F$ cắt nhau tại G. Chứng minh rằng $2\angle G = \angle A + \angle C$.



Hình 3.

Bài toán trên rất đơn giản xin không trình bày cách chứng minh. Trở lại bài toán 1



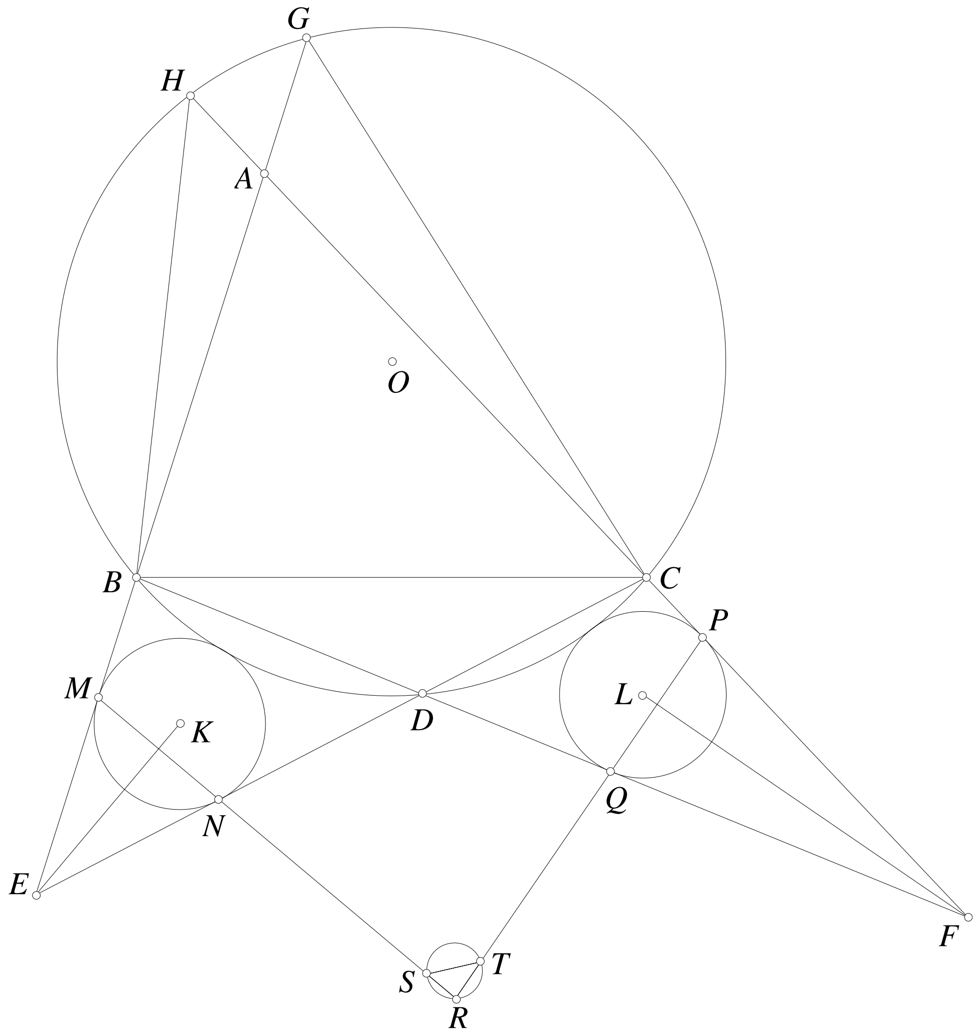
Hình 4.

Lời giải bài toán 1. a) Gọi (K) tiếp xúc ED tại G và (L) tiếp xúc FD tại H. Theo bài toán 3 thì MG, NH đi qua tâm bàng tiếp J ứng với đỉnh A. Theo bài toán 4 góc tạo bởi $(EK, LF) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D) = 90^\circ$ do đó $EK \perp LF$. Lại dễ có $MG \perp EK \perp LF \perp NH$ từ đó MG vuông góc NH tại J nên đường tròn đường kính MN đi qua J cố định.

b) Dễ thấy tam giác EMG cân nên MJ cũng là phân giác ngoài tam giác AMP nên J cũng là tâm bàng tiếp góc A của tam giác AMP. Giả sử đường tròn (R) tiếp xúc với CA, AB tại Y, Z và tiếp xúc ngoài (O) thì tâm bàng tiếp J của tam giác ABC là trung điểm YZ. Do J là tâm bàng tiếp của AMP nên đường tròn (R) tiếp xúc AP, AM tại Y, Z cũng tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP luôn tiếp xúc (R) cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ý tưởng chính chứng minh bài toán 1 rõ ràng sáng sủa và ngắn gọn như vậy là của Nguyễn Văn Linh sinh viên đại học ngoại thương. Câu b) tiếp cận theo hướng trong lời giải xem ra khá đơn giản. Ta thử tập trung vào khai thác ý a). Câu a) nói lên MG, NH đi qua J cố định. Bài toán có thể được mở rộng hơn nữa như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC một đường tròn (O) bất kỳ cố định đi qua B, C. D là điểm di chuyển trên (O) sao cho A, D khác phía BC. Giả sử CD cắt AB ở E và BD cắt AC ở F. Gọi (K) là đường tròn tiếp xúc EB, ED lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong (O). Gọi (L) là đường tròn tiếp xúc FC, FD lần lượt tại P, Q và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng giao điểm của MN, PQ luôn nằm trên một đường tròn cố định khi D di chuyển.

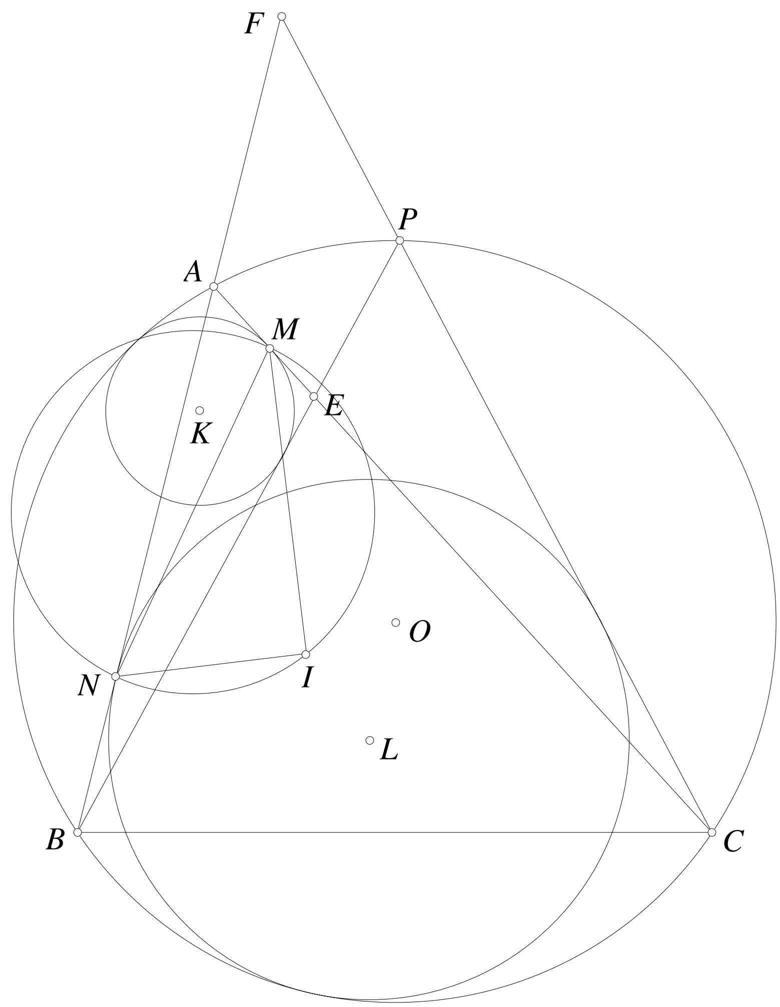


Hình 5.

Lời giải. Gọi AB, AC lần lượt cắt (O) tại G, H khác B, C. Áp dụng bài toán 3 vào tam giác GBC, HBC thì MN đi qua tâm bàng tiếp S ứng với đỉnh G của tam giác BGC cố định và PQ đi qua tâm bàng tiếp T ứng với đỉnh H của tam giác HBC cố định. Gọi MN cắt PQ tại R chú ý $EK \perp MN, FL \perp PQ$, theo bài toán 4 thì $\angle R = \angle(EK, KL) = \dfrac{1}{2}(\angle A + \angle D)$ vì (O) cố định nên $\angle D$ không đổi. Từ đó $\angle R$ không đổi và S, T cố định nên R thuộc đường tròn cố định đi qua S, T. $\square$

Nhận xét. Với ý tưởng thay đường tròn ngoại tiếp thành đường tròn bất kỳ đi qua B, C ta đã thu được một bài toán mới rất thú vị. Ngoài ra bài toán TST của chúng ta đã phát biểu trên định lý Sawayama và Thébault mở rộng. Ta hoàn toàn có thể có bài toán tương tự trên định ký Sawayama và Thébault gốc như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của (O). PB, PC cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn EA, EB và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn FB, FC và tiếp xúc $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O). (K) tiếp xúc AC tại M và (L) tiếp xúc AB tại N. Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN luôn đi một điểm cố định khi P di chuyển.



Hình 6.

Từ bài toán mở rộng ta hoàn toàn có thể đề xuất bài toán sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và đường tròn (O) cố định đi qua B, C. D là điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{BC}$ của (O) sao cho D, A cùng phía BC. DB, DC cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn EA, EB tại M, N và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn FB, FC tại P, Q và tiếp xúc (O) tại một điểm không cùng phía A so với BC. Chứng minh rằng giao điểm của MN và PQ luôn thuộc một đường tròn cố định khi P di chuyển.

Các bạn hãy làm bài toán trên như một bài luyện tập và còn rất nhiều khám phá mới vẫn còn đợi các bạn xung quanh các bài toán này

Tài liệu

[1] Vietnam TST bài 3 http://diendantoanhoc.net/form

[2] Nguyễn Thị Hường, Lương Ánh Nguyệt, Lương Thị Thanh Mai, Đào Thị Quỳnh Nga, Định lý Sawayama và Thébault http://analgeomatica.blogspot.com/2014/02/inh-ly-sawayama-va-thebault.html

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com