Một số đề hình học thi chuyên toán năm 2016

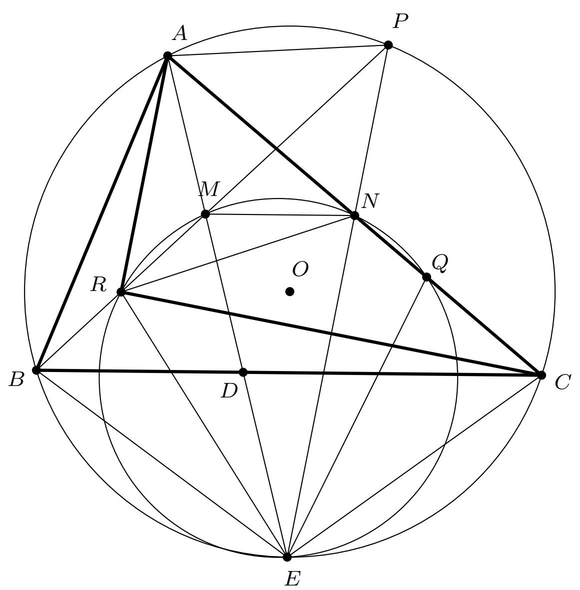
Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Bài toán 1 (THPT chuyên KHTN 2016 vòng 1)**.** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Phân giác của $\angle BAC$ cắt BC tại D và cắt (O) tại E khác A. M là trung điểm của đoạn thẳng AD. Đường thẳng BM cắt (O) tại P khác B . Giả sử các đường thẳng EP và AC cắt nhau tại N.

1) Chứng minh rằng tứ giác $APNM$ nội tiếp và N là trung điểm của AC.

2) Giả sử đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác EMN cắt đường thẳng AC tại Q khác N. Chứng minh rằng B và Q đối xứng qua AE.

3) Giả sử (K) cắt đường thẳng BM tại R khác M. Chứng minh rằng $RA \perp RC$.



Hình 1:

Lời giải của Trịnh Huy Vũ. 1) Do tứ giác $ABEP$ nội tiếp nên $\angle MPN = \angle BPE = \angle BAE$. Mà AE lại là phân giác của $\angle BAC$, do vậy $\angle BAE = \angle EAC = \angle MAN$. Suy ra $\angle MPN = \angle MAN$. Vậy tứ giác $APNM$ nội tiếp.
Do $P \in (O)$ nên $\angle APB = \angle ACB$. Mặt khác, $\angle APM = \angle ANM$ (do tứ giác $APNM$ nội tiếp). Suy ra $\angle ACB = \angle ANM$. Do đó ta được $MN \parallel BC$. Mà M lại là trung điểm của AD nên theo tính chất đường trung bình suy ra N là trung điểm của AC.
2) Do $EMNQ$ và $APNM$ là các tứ giác nội tiếp nên $\angle EQC = \angle EMN = \angle APE = 180^\circ - \angle ABE$. Suy ra $\angle AQE = \angle ABE$, kết hợp với $\angle QAE = \angle BAE$ ta được $\angle AEB = \angle AEQ$. Ta được $\triangle AEB = \triangle AEQ$(g.c.g). Từ đó suy ra B, Q đối xứng qua AE.
3) Do $ERMN$ và $APNM$ là các tứ giác nội tiếp nên $\angle ERB = \angle MNE = \angle EAP = \angle EBR$. Suy ra tam giác EBR cân tại E, kết hợp với $EB = EC$ (do E là trung điểm cung BC không chứa A), ta được $ER = EC$. Mặt khác ta cũng có $\angle REN = \angle PMN = \angle PAC = \angle NEC$. Từ đó suy ra $\triangle REN = \triangle CEN$ (c.g.c), do đó $NR = NC = NA$. Suy ra $\angle ARC = 90^\circ$ hay $RA \perp RC$. □

Nhận xét. Đây là bài toán mới và nằm ở đề chung cho các thí sinh, ý 1) khá nhẹ nhàng ý 2) khó hơn một chút và ý 3) có tính phân loại. Cấu trúc đề bài chặt chẽ với 3 câu, ý 2) dùng ý 1) và ý 3) dùng cả ý 1) và 2). Kết quả này cũng nằm trong một bài toán có ý nghĩa khi thu gọn lại đề bài như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác AD cắt (O) tại E khác A. N là trung điểm AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN cắt MB tại R khác M. Chứng minh rằng $RA \perp RC$.

Bài toán có mở rộng như sau [2]

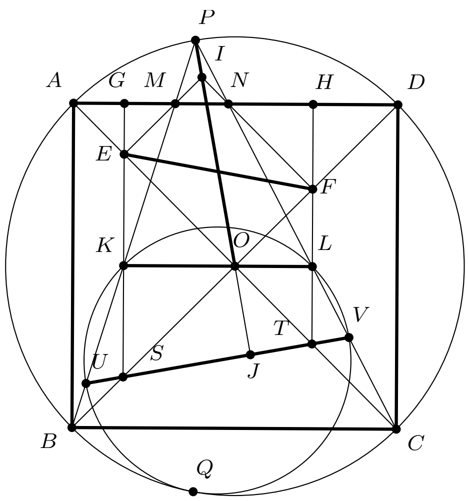
Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F thuộc (O) sao cho $EF \parallel BC$. AE, AF cắt BC tại M, N. P, Q, R là trung điểm của AM, AN, AC. BP, BQ cắt đường tròn $(EPR), (FQR)$ tại S, T khác P, Q. Chứng minh rằng $\angle ASC + \angle ATC = 180°$.

Bài toán 4 (THPT chuyên KHTN 2016 vòng 2)**.** Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm (O). P là điểm thuộc cung nhỏ AD của đường tròn (O) và P khác A, D. Các đường thẳng PB, PC lần lượt cắt AD tại M, N. Đường trung trực của AM cắt đường thẳng AC, PB lần lượt tại E, K. Đường trung trực DN cắt các đường thẳng BD, PC lần lượt tại F, L.

1) Chứng minh rằng ba điểm K, O, L thẳng hàng.

2) Chứng minh rằng đường thẳng PO đi qua trung điểm của đọan thẳng EF.

3) Giả sử đường thẳng EK cắt đường thẳng BD tại S, các đường thẳng FL và AC cắt nhau tại T, đường thẳng ST cắt các đường thẳng PB, PC lần lượt tại U và V. Chứng minh rằng bốn điểm K, L, U, V cùng thuộc một đường tròn.



Hình 2:

Lời giải của Trịnh Huy Vũ. 1) Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AM và DN. Ta có $GK \parallel AB(\perp AM)$ và $HL \parallel DC(\perp DN)$. Do vậy theo tính chất đường trung bình suy ra K, L tương ứng là trung điểm của MB và NC. Từ đây ta có OK và OL là đường trung bình của

$\triangle BMD$ và $\triangle CNA$. Suy ra $OK \parallel MD$ và $OL \parallel AN$. Do đó, K, O, L thẳng hàng (tiên đề Euclid).
2) Xét các tam giác AME và DNF lần lượt cân tại E, F, có $\angle EAM = \angle FDN = 45^\circ$ nên $\triangle AME$ và $\triangle DNF$ là các tam giác vuông cân, do đó $ME \perp OA$ và $NF \perp OD$. Đặt ME cắt PO tại I. Áp dụng định lý Thales cho $MN \parallel BC$ và $MI \parallel BD(\perp OA)$, ta được $\dfrac{PI}{PO} = \dfrac{PM}{PB} = \dfrac{PN}{PC}$. Suy ra $IN \parallel OC$ và $IN \perp OD$. Từ đó, I, N, F thẳng hàng. Ta được $OEIF$ là hình chữ nhật. Vì vậy IO đi qua trung điểm EF. Mà $I \in PO$, nên ta được PO đi qua trung điểm EF.
3) Đặt PO cắt ST tại J. Do $IM \parallel OB$ và $IN \parallel OC$ nên $\angle IMP = \angle OBP = \angle OPM$ và $\angle INP = \angle OCP = \angle IPN$, vì vậy $IP = IM = IN$ hay I là tâm ngoại tiếp của $\triangle PMN$. Mặt khác, từ $ME \parallel SB$ và $KM = KB$, áp dụng định lý Thales suy ra $KE = KS$ và $\triangle OES$ vuông cân tại O. Tương tự $FL = LT$ và $\triangle OFT$ vuông cân tại O. Từ đó ta được $\triangle OEF = \triangle OST$. Suy ra $\angle OTS = \angle OFE = \angle POF = 90^\circ - \angle POE = 90^\circ - \angle JOT$, vì vậy $\angle OJT = 90^\circ$ hay $PO \perp ST$. Từ đó suy ra $\angle PVU = 90^\circ - \angle IPV = \dfrac{1}{2}\angle PIN = \angle PMN = \angle PKL$ (do I là tâm ngoại tiếp $\triangle PMN$ và $MN \parallel KL$). Do đó ta được tứ giác $KLVU$ nội tiếp. □

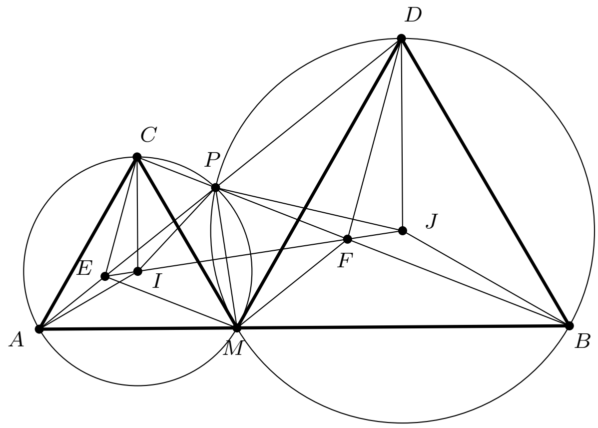
Nhận xét. Đây là bài toán mới và nằm ở đề thi vào các lớp chuyên toán, ý 1) khá nhẹ nhàng, ý 2) khó hơn một chút và ý 3) có tính phân loại. Cả ý 2) và ý 3) đều đòi hỏi phải dựng thêm hình phụ để làm bài, mục đích này làm đề thi trở nên rất khác biệt so với các đề trường khác. Cấu trúc đề bài chặt chẽ với 3 câu, ý 2) dùng ý 1) và ý 3) dùng ý 2). Kết quả này cũng nằm trong một bài toán có ý nghĩa khi thu gọn lại đề bài như sau

Bài toán 5. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm thuộc cung nhỏ AD của (O). PB, PC lần lượt cắt đoạn AD tại M, N. Trung trực của AM, DN lần lượt cắt BD, AC tại S, T. ST cắt PC, PB lần lượt tại U, V. Chứng minh rằng đường tròn đường kính UV tiếp xúc (O).

Bài toán 6 (THPT chuyên ĐHSP 2016 vòng 1)**.** Cho ba điểm phân biệt A, M, B thẳng hàng và M nằm giữa A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

1) Chứng minh $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.
2) Chứng minh rằng $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = AB$
3) Đường nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp các tứ giác $AMPC$ và $BMPD$ cắt PA và PB tại E và F. Chứng minh $CDFE$ là hình thang.

Lời giải của Trịnh Huy Vũ. 1) Ta có $MC = MA, MB = MD$ và $\angle CMB = \angle AMD = 120^\circ$, do đó $\triangle MCB = \triangle MAD$(c.g.c). Từ đó suy ra $\angle MCP = \angle MAP$ và $\angle MBP = \angle MDP$. Vậy $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.
2) Do $\angle CMD = 180^\circ - \angle AMC - \angle BMD = 60^\circ = \angle MBD$ nên CM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp $\triangle BMD$. Ta được $\angle CMP = \angle MBP$, suy ra $\triangle CPM \sim \triangle CMB$(g.g), suy ra $\dfrac{CP}{CM} = \dfrac{CM}{CB}$ hay $CM^2 = CP \cdot CB$. Chứng minh tương tự ta cũng được $DM^2 = DP \cdot DA$. Vậy $\sqrt{CP \cdot CB} + \sqrt{DP \cdot DA} = CM + DM = AM + BM = AB$.
3) Gọi I, J lần lượt tâm ngoại tiếp của các tứ giác $AMPC$ và $BMPD$. Ta có $\angle EPM = \angle FPM = 60^\circ$ nên E, F đối xứng qua PM và $PEMF$ là hình thoi. Do đó theo định lý Thales



Hình 3:

ta được $\dfrac{AE}{AP} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{PF}{PB}$ hay $\dfrac{AE}{PF} = \dfrac{AP}{PB}$. Mặt khác ta có $\angle PIA = 2\angle PMA = 2\angle PDB = \angle PJB$ hay $\triangle PIA \sim \triangle BJP$, suy ra $\dfrac{IA}{JP} = \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AE}{PF}$, suy ra $\triangle IAE \sim \triangle JPF$(c.g.c). Từ đó ta được $\dfrac{IE}{JF} = \dfrac{IA}{JP} = \dfrac{IC}{JD}$, kết hợp $\angle CIE = \angle DJF$ (do $IC \parallel JD(\perp AB)$), ta được $\triangle CIE \sim \triangle DJF$(c.g.c), suy ra $\angle CEI = \angle DFJ$. Do vậy, $CE \parallel DF$ hay $CDFE$ là hình thang. $\square$

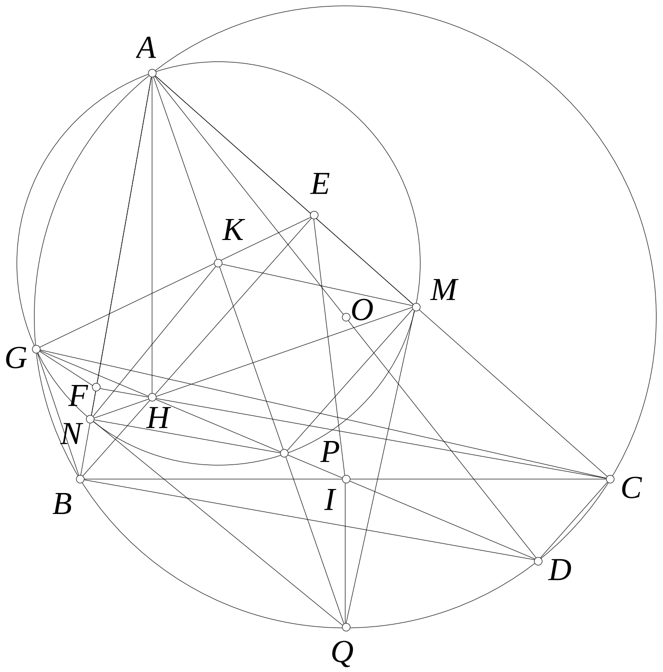
Nhận xét. Cấu hình của đề ra không mới nhưng ý 3) mới và phù hợp với phân loại. Bài toán có ba ý đúng theo cấu trúc một bài toán thi hình học rõ ràng kết hợp với hau ý đầu dễ và ý 3) phân loại phù hợp cho một đề thi chung. Kết quả này cũng nằm trong một bài toán có ý nghĩa khi tổng quát như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC với D thuộc đoạn BC. E, F thuộc đoạn CA, AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. Đường tròn $(K), (L)$ ngoại tiếp tam giác DCF và DBE cắt nhau tại G khác D. KL cắt GB, GC tại M, N. Chứng minh rằng $FM \parallel EN$.

Bài toán 8 (Chuyên Hà Nội vòng 2 năm 2016)**.** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại G khác A. Phân giác góc $\angle CGE, \angle BGF$ cắt CA, AB tại M, N. (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

1) Gọi AK cắt GH tại P. Chứng minh rằng G và P đều nằm trên (K).

2) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại M, N của (K) cắt nhau trên (O).



Lời giải của Trần Quang Hùng. 1) Gọi AD là đường kính của (O), I là trung điểm BC. Dễ thấy G, H, I, D thẳng hàng và G, E, F đều nằm trên đường tròn đường kính AH. Từ đó hai tam giác GFB và GEC đồng dạng g.g nên theo tính chất phân giác $\frac{NB}{NF} = \frac{GB}{GF} = \frac{GC}{GE} = \frac{MC}{ME}$. Từ đó hai tam giác GFN và GEM đồng dang, suy ra $\angle GNF = \angle GME$ nên G nằm trên (K) ngoại tiếp AMN. Ta dễ thấy hai tam giác GEF và GBC đồng dạng nên $\frac{NB}{NF} = \frac{GB}{GF} = \frac{EF}{BC} = \frac{HF}{HB}$. Từ đó HN là phân giác $\angle FHB$. Tương tự HM là phân giác $\angle FHC$ nên M, H, N thẳng hàng. Vậy $\angle AMH = 90^\circ - \angle MHE = 90^\circ - \angle NHF = \angle ANH$. Từ đó tam giác AMN cân tại A. Vậy AK là phân giác $\angle MAN$ cũng là phân giác $\angle HAD$. Từ đó chú ý tam giác AHF và ADC đồng dạng nên $\frac{PH}{PD} = \frac{HF}{CD} = \frac{HF}{HB} = \frac{NF}{NB}$. Từ đó chú ý $HFBD$ là hình thang nên $PN \parallel HF \parallel BD$ hay $PN \perp AB$. Tương tự $PM \perp AC$. Vậy AP là đường kính của đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AMN nên P thuộc (K).
2) Ta dễ chứng minh được IE, IF đều tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF hay nói cách khác tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF cắt nhau tại I. Lại có tiếp tuyến tại M, N của (K) ngoại tiếp tam giác GMN cắt nhau tại Q. Chú ý hai tam giác GEF và GMN đồng dạng. Từ đây ta dễ suy ra hai tam giác GEI và GMQ đồng dạng hay GIQ đồng dạng GEM. Từ đó $\angle GIQ = \angle GEM = 180^\circ - \angle GEA = 180^\circ - \angle GHA = \angle AHI$. Từ đây $IQ \parallel AH$ nên Q thuộc trung trực BC. Dễ thấy Q nằm trên AK do tam giác AMN cân nên Q nằm trên phân giác $\angle BAC$. Vậy Q là giao điểm của trung trực BC và phân giác $\angle BAC$ thì Q nằm trên (O). □

Nhận xét. Đề ra không mới và thực chất ý 2) dùng các kiến thức của phép đồng dạng nhưng viết một cách khác bằng kiến thức THCS.

Bài toán này có mở rộng thú vị như sau

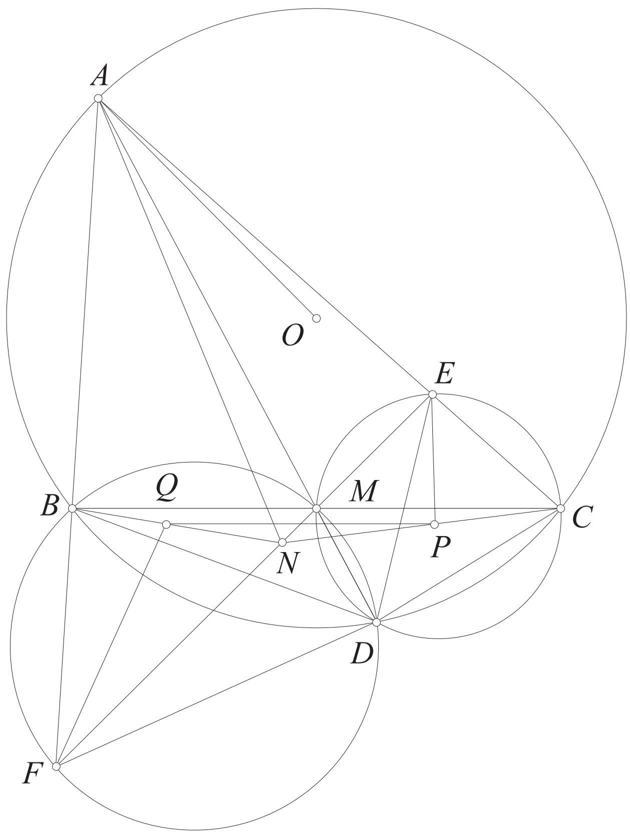
Bài toán 9. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) và M là trung điểm BC. P nằm trong tam giác sao cho $\angle BPC = 180^\circ - \angle A$. Q là một điểm nằm trên PM sao cho nếu lấy E, F thuộc CA, AB để $QE \parallel PB, QF \parallel PC$ thì EF đi qua P. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E, F của đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau trên (O).

Bài toán 10 (Chuyên Vĩnh Phúc 2016 vòng 2)**.** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm BC. AM cắt (O) tại điểm D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B.

1) Chứng minh rằng hai tam giác BDF, CDE đồng dạng và ba điểm E, M, F thẳng hàng.

2) Chứng minh rằng $OA \perp EF$.

3) Phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt EF tại điểm N. Phân giác của các góc $\widehat{CEN}$ và $\widehat{BFN}$ lần lượt cắt CN, BN tại P và Q. Chứng minh rằng PQ song song với BC.



Hình 1.

Lời giải của Trần Quang Hùng. 1) Ta có $\angle DEC = \angle DMC = \angle DFB$ và $\angle ECD = \angle FBD$ nên hai tam giác DBF và DCE đồng dạng g.g. Từ đó $\angle EMC = \angle EDC = \angle FDB = \angle FMB$ nên E, M, F thẳng hàng.
2) Lại có $AE.AC = AM.AD = AB.AF$ nên tứ giác $BECF$ nội tiếp. Từ đó $AO \perp EF$ nên $AO \perp ME$.
3) Chú ý hai tam giác DBF và DCE đồng dạng nên $\frac{S_{DBF}}{S_{DCE}} = \frac{BF^2}{CE^2}$. Từ đó $1 = \frac{MB}{MC} = \frac{S_{DAB}}{S_{DAC}} = \frac{S_{DAB}}{S_{DBF}} \cdot \frac{S_{DBF}}{S_{DEC}} \cdot \frac{S_{DEC}}{S_{DAC}} = \frac{AB}{BF} \cdot \frac{BF^2}{CE^2} \cdot \frac{CE}{AC} = \frac{AB.BF}{AC.CE}$. Từ đó $\frac{BF}{CE} = \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE} = \frac{NF}{NE}$. Từ đó vẫn theo tính chất phân giác thì $\frac{PN}{PC} = \frac{EN}{EC} = \frac{FN}{FB} = \frac{QN}{QB}$ nên $PQ \parallel BC$. □

Nhận xét. Đây là đề thi mới và câu 3) có tính phân loại cao.

Nhận xét. Các năm gần đây, phần hình học trong một số đề thi vào các lớp chuyên toán ở các trường chuyên có truyền thống có nhiều bài toán hình học mới có nội dung khác các đề thi vào lớp 10 thông thường. Là một giáo viên theo sát đội tuyển và có tham gia vào công việc bồi dưỡng học sinh giỏi thì tôi cũng có một đôi lời bàn. Việc các trường đổi mới đề thi theo phong cách sát hơn cho các đối tượng học sinh giỏi không làm mất đi tính truyền thống của đề thi cấp 2 vào cấp 3, vì mục đích chính của thi vào trường chuyên là để chọn lọc ra các học sinh giỏi toán. Như khảo sát qua điểm số một số trường thì vẫn có luôn điểm 10 toán chuyên và phổ điểm 8,9 khá cao, điều đó cho thấy rằng đề thi vẫn phù hợp. Mặt khác như đáp án đã công bố thì rõ ràng các bài toán đó nằm hoàn toàn trong chương trình cấp 2. Một số ý kiến cho rằng các bài toán đó phù hợp hơn khi giải trên máy tính với các công cụ hình học mạnh có trên mạng, liệu rằng có mất tính khách quan khi bắt học sinh phải tự vẽ hình và giải. Trả lời cho ý kiến này khá đơn giản, bản thân tôi là một người hay ra đề hình thì đối với tôi máy tính hoàn toàn chỉ là công cụ để giúp đỡ con người chứ chắc chắn không thay con người ra đề. Chẳng hạn khi bạn cộng hoặc nhân hai số lớn để đỡ mất thời gian thì bấm máy tính bỏ túi, đối với các bài toán hình cũng vậy, nếu thiếu thời gian vẽ tay căn chỉnh tay thì dùng máy cho đỡ mất thời gian. Nhưng một đề hình hay là hoàn toàn nằm ở tính chất hình mà người ra đề đạt được và muốn kiểm tra kiến thức đó của học sinh. Sự thực rằng một học sinh có tư duy hình tốt thì cũng không cần vẽ hình bằng thước và compass cũng có thể nghĩ ra lời giải và viết lại. Tất nhiên rằng với các bài toán phức tạp như hiện nay thì sự tưởng tượng là chưa đủ mà phải nhìn hình vẽ, nhưng điều đó không có nghĩa là máy tính đã thay thế con người, nó chỉ đóng vai trò hỗ trợ. Vậy nên việc có máy tính hay không có máy tính khi giải hình cũng không quan trọng bằng người giải có tư duy hình học sắc sảo tới đâu.

Tài liệu

[1] Box đề thi THCS từ
http://diendantoanhoc.net

[2] Right angle
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1256044

[3] Tangent circles in square
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1257954