Mỗi tuần một bài toán

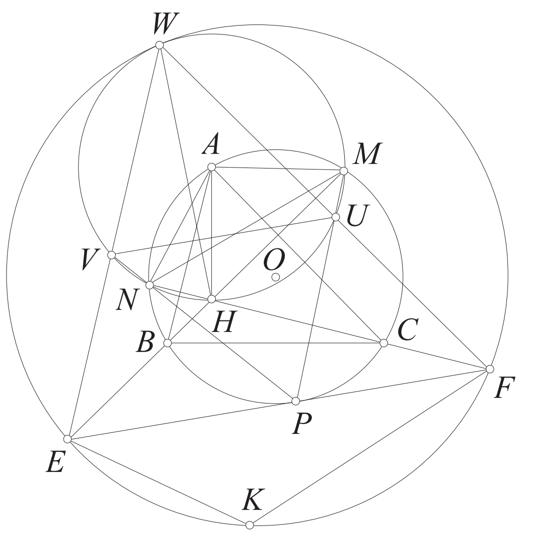
***Trần Quang Hùng,** Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H, nội tiếp đường tròn (O). HB, HC lần lượt cắt một tiếp tuyến thay đổi của (O) tại E, F. K đối xứng với H qua EF. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KEF luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi tiếp tuyến thay đổi.

Lời giải



Gọi (A) là đường tròn tâm A đi qua H. Gọi EF tiếp xúc (O) tại P. HB, HC cắt (O) tại M, N khác B, C. PM, PN cắt (A) tại U, V khác M, N. Do P, E, F thẳng hàng nên theo định lý Pascal đảo thì EV và FU cắt nhau tại W thuộc (A). Ta lại có $\angle NPE = \angle NMP = \angle NVU$ nên $UV \parallel EF$. Ta sẽ chứng minh W thuộc (KEF) từ đó (WEF) sẽ tiếp xúc (A) cố định, thật vậy. Ta có $\angle EWF = 180^\circ - \angle WVU - \angle WUV = 180^\circ - (\angle WVP - \angle UVP) - (\angle WUP - \angle VUP) = 180^\circ - (180^\circ - \angle WHN) + \angle UVP - (180^\circ - \angle WHM) + \angle VUP = \angle MHN - (180^\circ - \angle UVP - \angle VUP) = \angle MHN - \angle MPN = \angle MHN - (180^\circ - \angle MAN) = 180^\circ - \angle MHN = 180^\circ - \angle BHC = 180^\circ - \angle EKF$. Từ đây suy ra tứ giác $WEKF$ nội tiếp. Vậy đó là điều phải chứng minh.

Nhật xét

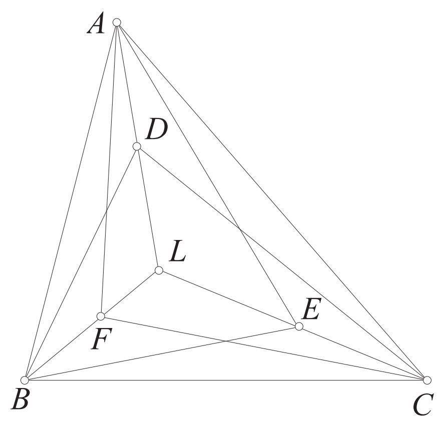
Bài toán là áp dụng kết quả bài toán 3 thi vô địch Serbia năm 2016 vào tam giác (HMN) có tâm ngoại tiếp là A. Việc chứng minh đường tròn (KEF) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định là một kết quả có ý nghĩa, vì những dạng bài đường tròn tiếp xúc đường tròn cố định không nhiều. Bài toán Serbia là một bài toán có ý nhiều ý nghĩa về đường tròn tiếp xúc cũng như có nhiều góc nhìn khá thú vị. Tôi xin giới thiệu một bài toán mở rộng cho bài toán Serbia do tôi tìm ra

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm nằm trong tam giác. Tiếp tuyến tại P của đường tròn (PBC) cắt CA, AB tại E, F. Q là điểm bất kỳ trên (PBC). Đường tròn (QBF) và (QCE) cắt nhau tại R khác Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác REF tiếp xúc (O).

Ngoài ra trên cấu hình đặc biệt này có rất nhiều điểm để khai thác qua phép nghịch đảo. Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương gửi đến tác giả lời giải sớm nhất và điểm thú vị của lời giải này là không dùng Pascal đảo. Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và **Nguyễn Tiến Long**, lớp 10 toán, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, cho lời giải tại đây. Tác giả còn nhận được lời giải qua email từ các bạn **Trương Mạnh Tuấn, Trần Anh Tài** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN, Hà Nội.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có điểm Lemoine là L. Lấy D, E, F lần lượt thuộc đoạn LA, LB, LC sao cho $\angle EAC = \angle DCA$ và $\angle FAB = \angle DBA$. Chứng minh rằng $\angle EBC = \angle FCB$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.