Về một bổ đề quan trọng

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

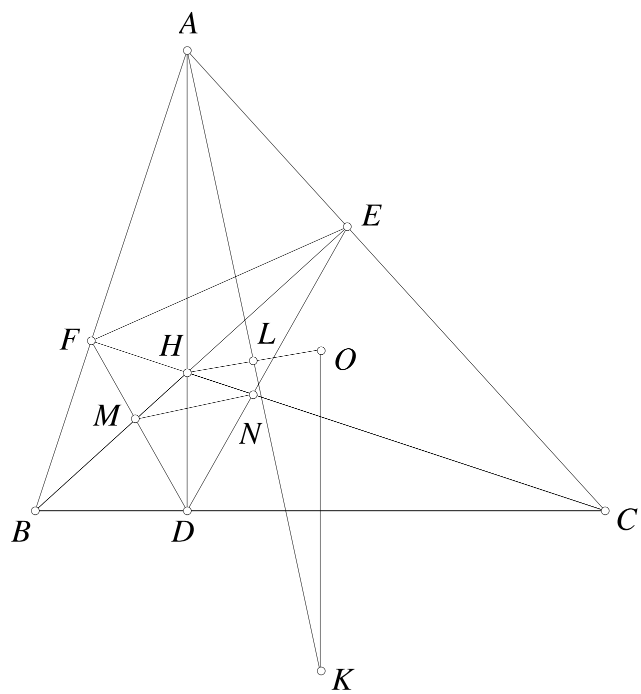
Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bổ đề quan trọng có nhiều ứng dụng trong các bài toán khác nhau với các công cụ về phương tích và trục đẳng phương.

Trên báo THTT số 355 tháng 1 năm 2007 có một bài toán hay sau của tác giả Hồ Quang Vinh [1]

Bài toán 1. Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF. DE, DF lần lượt cắt CF, BE tại M, N. Chứng minh rằng đường thẳng qua A vuông góc với MN đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC.

Bài toán có lời giải sử dụng khái niệm phương tích và trục đẳng phương



Hình 1.

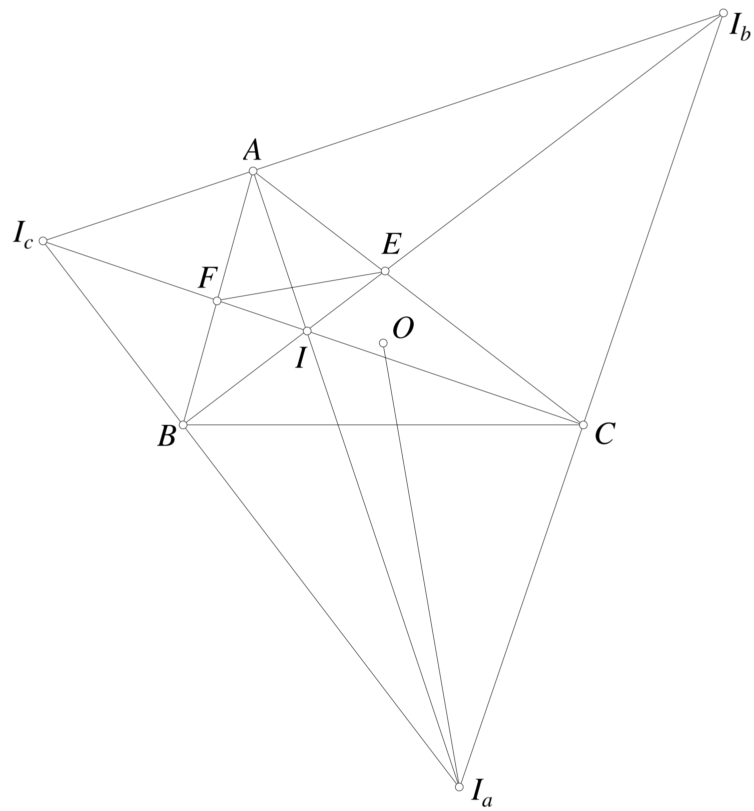
Lời giải. Do đối xứng của H qua BC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đối xứng nhau qua BC. Từ đó tâm K đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC đối xứng O qua BC. Cũng từ đó dễ thấy AK đi qua trung điểm L của OH cũng là tâm đường tròn Euler đi qua D, E, F. Gọi (K) và (L) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và DEF

Các tứ giác $FHDB, EHDC$ nội tiếp suy ra $\mathcal{P}_{M/(K)} = \overline{MH}.\overline{MB} = \overline{MF}.\overline{MD} = \mathcal{P}_{M/(D)}$. Vậy M thuộc trục đẳng phương của (K) và (L). Tương tự N thuộc trục đẳng phương của (K) và (L) nên $MN \perp KL \equiv AL$. Vậy đường thẳng qua A vuông góc MN đi qua K. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán là một kết quả rất đẹp của hình học phẳng. Dựa vào đó ta sẽ khai thác được nhiều tính chất thú vị. Ta xét tiếp bài toán sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC, phân giác BE, CF, tâm ngoại tiếp O, tâm đường tròn bàng tiếp góc A là I_a. Chứng minh rằng $OI_a \perp EF$.

Bài toán này chính là một áp dụng cơ bản của bài toán 1.

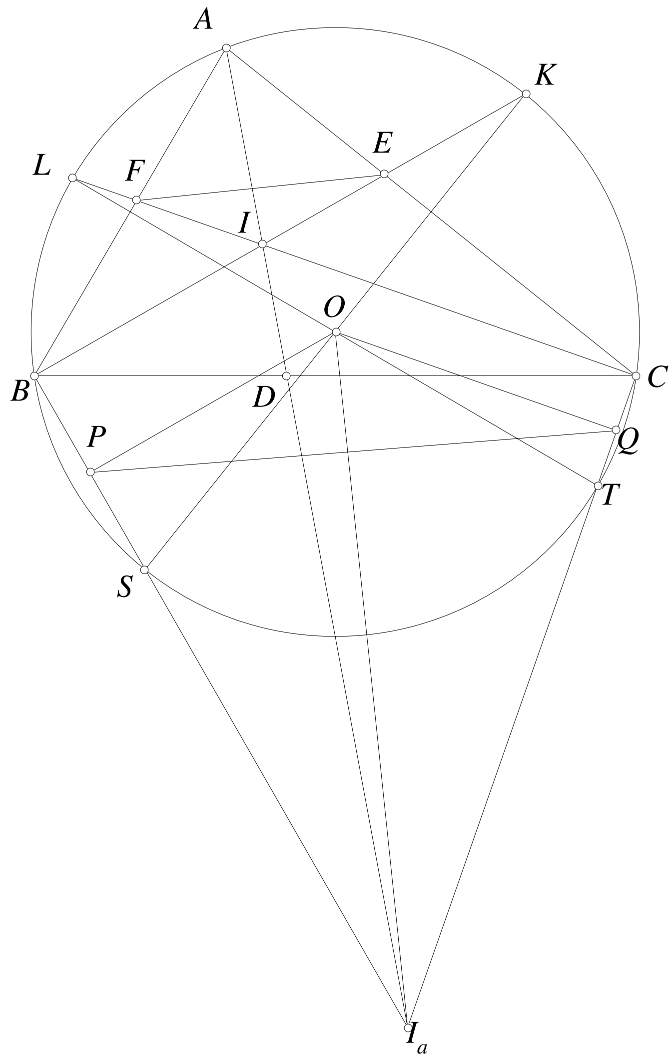


Hình 2.

Lời giải 1. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và tâm các đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh B, C là I_b, I_c thì dễ thấy I là trực tâm tam giác $I_aI_bI_c$ và các đường cao là I_aA, I_bB, I_cC đồng thời đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$. Từ đó áp dụng bài toán 1 cho tam giác $I_aI_bI_c$ ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Việc chuyển qua xét một bài toán áp dụng vào tam giác tạo bởi ba tâm đường tròn bàng tiếp là việc làm rất hay gặp và mang nhiều ý nghĩa cũng như tính sáng tạo. Do đó một trong những yếu tố phụ rất hay vẽ khi gặp các bài toán có tâm nội tiếp là hãy vẽ thêm ba tâm đường tròn bàng tiếp ở ba đỉnh.

Bài toán có một lời giải trực tiếp thuần túy hình học được tác giả tham khảo trong [2] như sau



Hình 3.

Lời giải 2. Gọi BE, CF cắt (O) tại điểm thứ hai K, L. Ta dễ thấy $BE.BK = ac$, $\dfrac{IE}{BE} = \dfrac{b}{a+b+c}$ suy ra $IE.BK = \dfrac{abc}{a+b+c}$. Tương tự ta được $IE.BK = IF.CL$ suy ra $\dfrac{BK}{CL} = \dfrac{IF}{IE}$ (1).

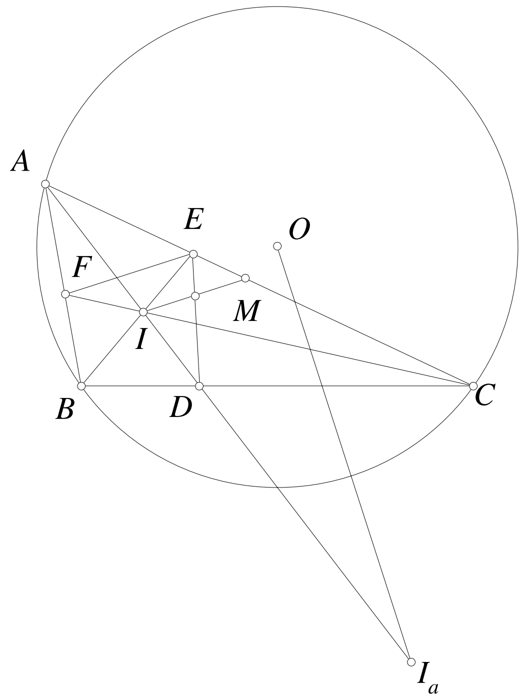
Gọi I_aB, I_aC cắt (O) lần lượt tại S, T. Vì $IB \perp I_aB, IC \perp I_aC$ nên SK, LT là đường kính của (O). Gọi P, Q là trung điểm của PS, CT. Theo tính chất đường trung bình dễ thấy $\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{2BK}{2CL} = \dfrac{IF}{IE}$ (theo (1)). Mặt khác dễ thấy $\angle FIE = \angle POQ$ từ đây suy ra $\triangle OPQ \sim \triangle IFE$ suy ra $\angle IFE = \angle OPQ = \angle OI_aQ$. Mà $IF \perp I_aQ$ suy ra $FE \perp I_aO$. Đó là điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán 2 là một bài toán hay có nhiều ứng dụng. Chúng ta hãy cũng xét qua một số bài toán sau.

Đề toán sau được tác giả đề nghị trên THTT số 424 tháng 10 năm 2012 [3]

Bài toán 3. Cho tam giác ABC, tâm đường tròn ngoại tiếp (O), tâm đường tròn nội tiếp I, tâm đường tròn bàng tiếp góc A là I_a. AI, BI lần lượt cắt BC, CA tại D, E. Đường thẳng qua I vuông góc OI_a cắt AC tại M. Chứng minh rằng DE đi qua trung điểm IM.

Bài toán là một ứng dụng trực tiếp của bài toán 2



Hình 4.

Lời giải. Gọi IC cắt AB tại F. Dễ thấy $E(FD, IC) = -1$ mà theo bài toán 2 $IM \parallel EF$ do cùng vuông góc OI_a. Theo tính chất hàng điều hòa suy ra ED đi qua trung điểm IM. □

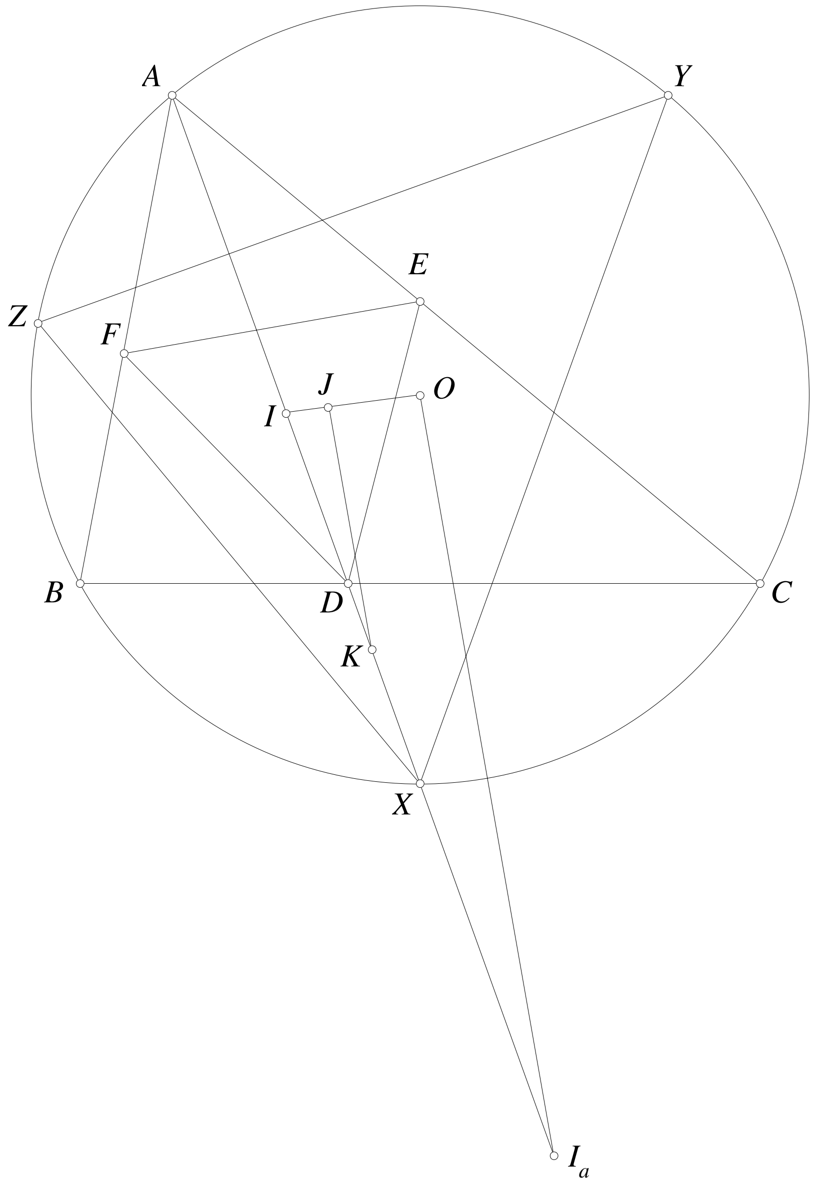
Bài toán sau khá thú vị là ý b) đề thi học sinh giỏi toán lớp 10 trường THPT chuyên sư phạm

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O) và tâm đường tròn nội tiếp I. AI, BI, CI theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 và cắt (O) tại A_2, B_2, C_2 khác A, B, C. Các đường thẳng $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ theo thứ tự đi qua A_2, B_2, C_2 và vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ đồng quy tại một điểm thuộc OI.

Bài toán trên dưới cách nhìn của bài toán 2 là một bài toán khá quen thuộc. Sau đây là một cách tổng quát cho bài toán này

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), phân giác AD, BE, CF đồng quy tại I. AI, BI, CI lần lượt cắt (O) tại X, Y, Z khác A, B, C. Gọi K, L, N các điểm lần lượt chia IX, IY, IZ cùng một tỷ số. Chứng minh rằng các đường thẳng qua K, L, N lần lượt vuông góc với EF, FD, DE đồng quy trên OI.

Bài toán là một ứng dụng trực tiếp của bài toán 2



Hình 5.

Lời giải. Gọi đường thẳng qua K vuông góc EF cắt OI tại J. Gọi I_a là tâm bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Theo bài toán 2 thì $I_aO \perp EF \perp KJ$ vậy $KJ \parallel OI_a$. Chú ý X là trung điểm II_a. Giả sử K chia IX tỷ số k tức là $\overline{IK} = k\overline{IX} = \frac{k}{2}\overline{II_a}$. Do đó theo định lý Thales $\frac{\overline{IJ}}{\overline{IO}} = \frac{\overline{IK}}{\overline{II_a}} = \frac{k}{2}$. Từ đó J xác định trên OI. Tương tự các đường thẳng qua L, N lần lượt vuông góc với FD, DE cũng đi qua J trên OI. □

Nhận xét. Việc chỉ ra một điểm cố định và chứng minh các đường thẳng cùng đi qua điểm đó là một cách làm rất hay gặp trong bài toán chứng minh các đường thẳng đồng quy. Qua hai bài toán ta thấy rằng nhờ có bài toán 2 mà toàn bộ các bài toán có yếu tố vuông góc với EF ta hầu như quy về song song với OI_a.

Bài toán sau là một cách phát biểu đẹp khác của bài toán 5

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên cung lớn. Phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Điểm J trên OI chia OI tỷ số k cố định. Chứng minh rằng đường thẳng qua J vuông góc EF luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.

Qua bài toán 2 và cách làm bài toán 5 ta dễ nhận ra điểm cố định nằm trên trung trực BC. Bài toán trên là bài toán hay và có nhiều áp dụng phong phú xin dành cho bạn đọc. Ta cũng có một cách nhìn khác cho bài toán trên như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên cung lớn. Phân giác BE, CF cắt nhau tại I. J là điêm trên đường thẳng IA sao cho $IJ = k$ không đổi. Chứng minh rằng đường thẳng qua J vuông góc EF luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.

Các bạn hãy làm thêm các bài toán sau để rèn luyện thêm kỹ năng về bổ đề này.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác BE, CF cắt nhau tại I. EF cắt (O) tại M, N. Chứng minh rằng tam giác IMN cân.

Bài toán trên có tham khảo trong [2]

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I. IB, IC lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. P, Q lần lượt nằm trên tia đối tia BC, CB sao cho $BP = BA, CQ = CA$. K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác NBP, MCQ. BL cắt CK tại D. Đường tròn bàng tiếp góc A là (I_a) cắt (O) tại S, T. Chứng minh rằng $AD \perp ST$.

Bài toán trên có tham khảo trong [4]

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác góc B, C cắt (O) tại E, F khác B, C. P, Q thuộc tia đối tia BC, CB sao cho $BP = BA, CQ = CA$. Từ A vẽ tiếp tuyến AX, AY tới đường tròn ngoại tiếp tam giác BFP và tiếp tuyến AZ, AT tới đường tròn ngoại tiếp tam giác CEQ. Gọi M, N là trung điểm XY, ZT. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM và ABN cắt nhau tại R khác A. Đường tròn (K) tiếp xúc AB, AC và tiếp xúc trong (O) cắt BC tại G, H. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AGH nằm trên AR.

Bài toán trên là của tác giả và được tác giả dùng trong quá trình tập huấn đội tuyển TST của trường THPT chuyên KHTN.

Tài liệu

[1] Tạp chí toán học tuổi trẻ số 355 tháng 1 năm 2007

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=136301

[3] Tạp chí toán học tuổi trẻ số 424 tháng 10 năm 2012

[4] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=329713

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com