Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

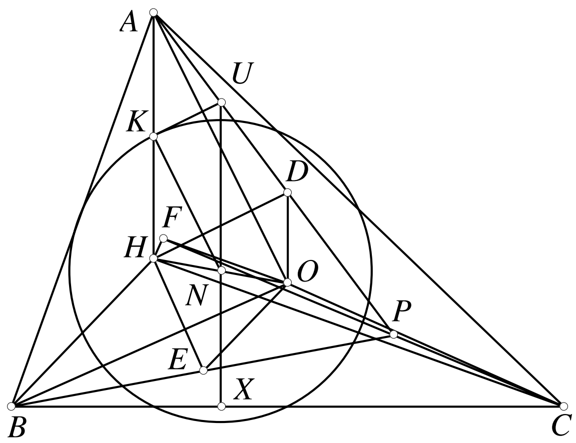
Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H và tâm ngoại tiếp O. Đường thẳng qua H lần lượt vuông góc với OA, OB, OC theo thứ tự cắt trung trực BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Trên PD, PE, PF lấy các điểm X, Y, Z sao cho $\overline{PD}.\overline{PX} = \overline{PE}.\overline{PY} = \overline{PF}.\overline{PZ}$. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Chứng minh. Gọi YZ, ZX, XY lần lượt cắt BC, CA, AB tại U, V, W theo định lý Desargues ta chỉ cần chứng minh U, V, W thẳng hàng. Theo định lý Menelaus ta nhận thấy U, V, W thẳng hàng khi và chỉ khi trung điểm của AU, BV, CW thẳng hàng, điều này đúng do ta dễ nhận ra các đường tròn đường kính AU, BV, CW đồng trục vì có H, P cùng phương tích với các đường tròn này, trong đó H là trực tâm tam giác ABC. Vậy ta hoàn tất chứng minh.



Giải bài toán. Gọi (N) là đường tròn Euler của tam giác ABC. X là hình chiếu của N trên BC. K là trung điểm AH. Tiếp tuyến tại K của (N) cắt NX tại U. Nếu R là bán kính ngoại tiếp tam giác ABC thì bán kính (N) là $\frac{R}{2}$. Từ đó $\overline{NU}.\overline{NX} = -\frac{R^2}{4}$. Phép vị tự tâm A tỷ số 2 biến K thành H và NX thành trung trực BC. Ta chú ý kết quả quen thuộc là $NK \parallel OA$. Từ đó U là giao của đường thẳng qua K vuông góc với KN và NX biến thành giao điểm của đường thẳng qua H vuông góc với OA và trung trực BC chính là D hay AD đi qua U. Tương tự có các điểm V, W lần lượt nằm trên BE, CF và Y, Z là hình chiếu của N trên CA, AB thì $\overline{NU}.\overline{NX} = \overline{NV}.\overline{NY} = \overline{NW}.\overline{NZ} = -\frac{R^2}{4}$. Theo bổ đề dễ có AU, BV, CW đồng quy hay AD, BE, CF đồng quy.

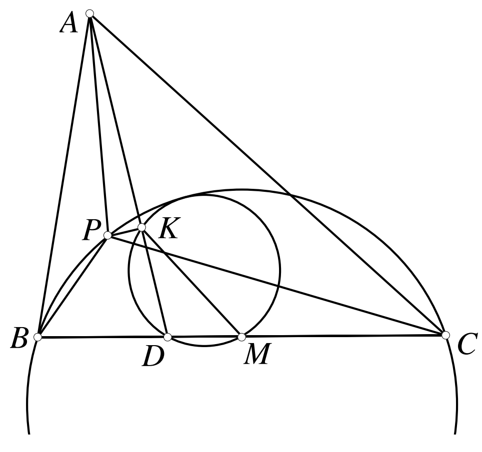
Nhật xét

Tác giả không nhận được lời giải nào cho bài toán này. Lời giải của bài toán cũng là quy trình tác giả tạo ra bài toán này. Thực sự là khi tạo ra bài toán này tác giả cũng không nghĩ là nó quá khó. Tuy vậy trong quá trình tập huấn đội tuyển THPT chuyên KHTN, tác giả cũng ra bài toán này trong 2 tuần nhưng chưa có phản hồi. Sử dụng phép chiếu song song ta dễ dàng đưa ra bài toán tổng quát như sau

Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng qua P song song EF cắt đường thẳng qua trung điểm BC và song song PA tại X. Tương tự có Y, Z. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường đối trung AD và trung tuyến AM. P là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. K là hình chiếu của P lên AD. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

