Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

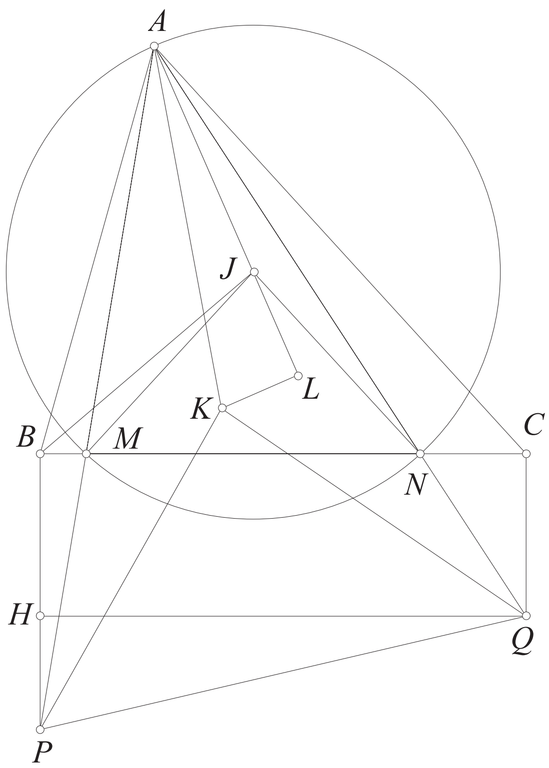
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có các điểm M, N thuộc cạnh BC sao cho M nằm giữa N và B. Trên đường thẳng AM, AN lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho BP và CQ cùng vuông góc với BC. K, J lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác APQ và AMN. L là hình chiếu của K lên AJ. Chứng minh rằng $\frac{AJ}{AL} = \frac{MN}{BC}$.

Lời giải

Dựa theo ý tưởng của các bạn **Nguyễn Quang Trung**, **Nguyễn Tiến Dũng** ở đây.



Gọi H là hình chiếu của Q lên PB ta có biến đổi góc $\angle PQH = \angle PQA - \angle AQH = \angle PQA - \angle ANM = (90^\circ - \angle KAQ) - (90^\circ - \angle JAN) = \angle KAJ$. Từ đó hai tam giác PQH và KAL đồng dạng. Lại chú ý $\angle PKQ = 2\angle PAQ = \angle MJN$ do đó hai tam giác cân MJN và PKQ đồng dạng. Vậy $\frac{MN}{BC} = \frac{MN}{PQ} \cdot \frac{PQ}{BC} = \frac{JM}{KP} \cdot \frac{PQ}{QH} = \frac{AJ}{AK} \cdot \frac{AK}{AL} = \frac{AJ}{AL}$. Ta hoàn tất chứng minh.

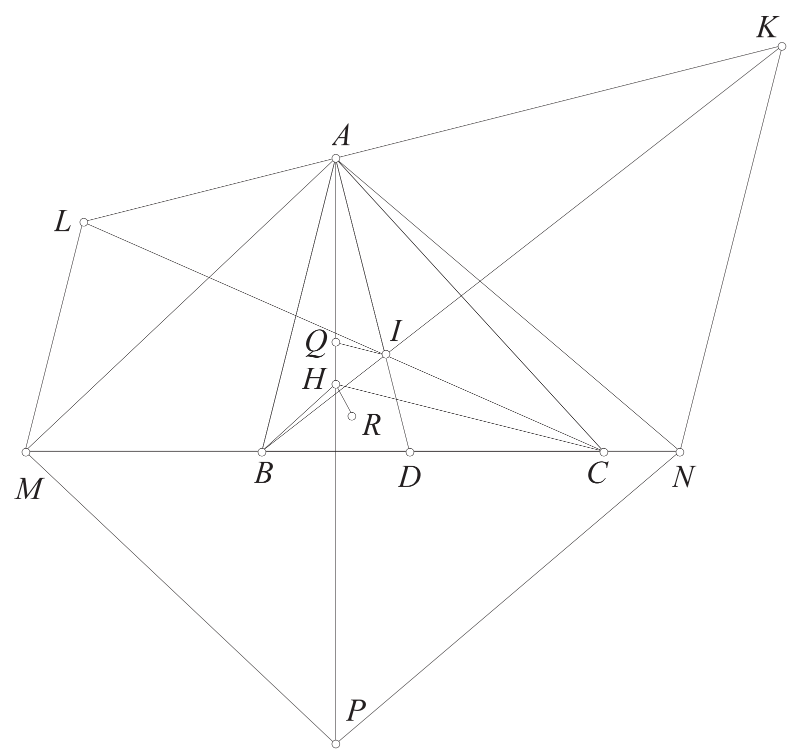
Nhận xét

Đây là một bài toán đơn giản không khó nhưng có ý nghĩa là mở rộng của bài toán trong cuộc thi Olympic hình học của Iran là IGO năm 2017. Nếu nhìn nhận theo cách tổng quát thì bài toán IGO đúng là đẹp và có phần đơn giản. Có thêm bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây. Nếu sử dụng ý tưởng bài toán IGO chúng ta có một trường hợp riêng như sau

Cho tam giác ABC có điểm M, N thuộc đường thẳng B, C sao cho B nằm giữa M, C và $MN = 2BC$. Trên AM, AN lần lượt lấy P, Q sao cho BP, CQ cùng vuông góc với BC. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng trung trực AK đi qua tâm ngoại tiếp tam giác APQ.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ có tâm nội tiếp I và phân giác AD. H là trực tâm tam giác ABC. P đối xứng A qua BC. Trên AP lấy Q sao cho $\angle PQI = \angle ADB$. K, L là tâm bàng tiếp góc B, C của tam giác ABC. M, N thuộc BC sao cho KN, LM cùng vuông góc với QI. R là tâm ngoại tiếp tam giác PMN. Chứng minh rằng $\angle RHC = \angle PHB$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

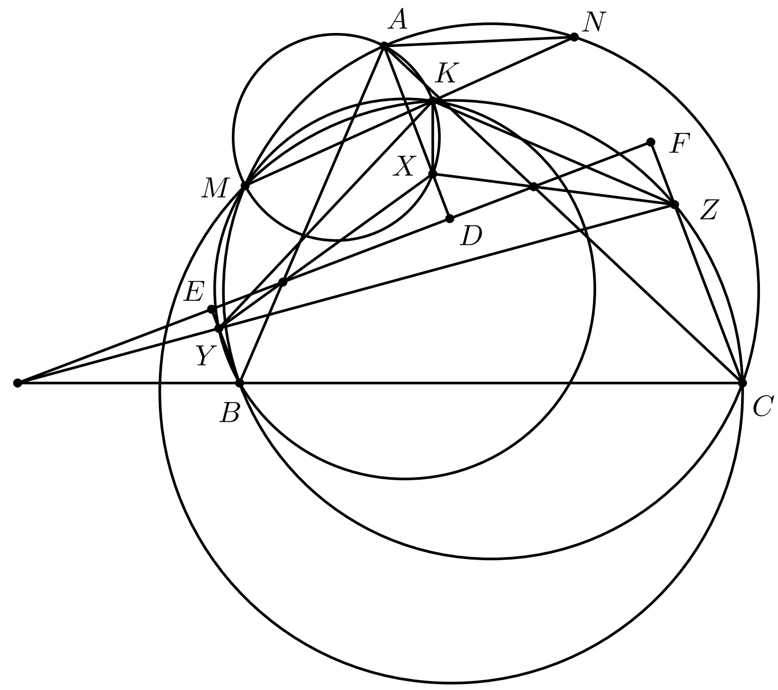
Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác ABC và đường thẳng ℓ bất kỳ. D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên ℓ. X, Y, Z chia AD, BE, CF theo cùng một tỉ số k. Các đường lần lượt thẳng qua X, Y, Z và vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại một điểm K. Chứng minh rằng các đường tròn (KAX), (KBY), (KCZ) đồng trục và trục đẳng phương của chúng luôn đi qua một điểm cố định khi tỷ số k thay đổi.

Tác giả: **Ngô Quang Dương**.

Lời giải



Gọi M là giao điểm khác K của (KAX) và (KBY).

$$\begin{aligned}(MA, MB) &\equiv (MA, MK) + (MK, MB) \pmod \pi \\ &\equiv (XA, XK) + (YK, YB) \pmod \pi \\ &\equiv (XA, YB) + (KY, KX) \pmod \pi \\ &\equiv (CA, CB) \pmod \pi\end{aligned}$$

Suy ra M nằm trên (ABC). Tiếp theo ta chỉ ra M cũng nằm trên (KCZ).

$$\begin{aligned}(MC, MK) &\equiv (MC, MA) + (MA, MK) \pmod \pi \\ &\equiv (BC, BA) + (XA, XK) \pmod \pi \\ &\equiv (XK, ZK) + (XA, XK) \pmod \pi \\ &\equiv (XA, KZ) \pmod \pi \\ &\equiv (ZC, ZK) \pmod \pi\end{aligned}$$

Do đó, (KAX), (KBY), (KCZ) đồng trục.
Gọi N là giao điểm của MK với (ABC).

$$\begin{aligned}(AN, AC) &= (MN, MC) \pmod \pi \\ &= (MK, MC) \pmod \pi \\ &= (ZK, ZC) \pmod \pi \\ &= (AB, \ell) \pmod \pi\end{aligned}$$

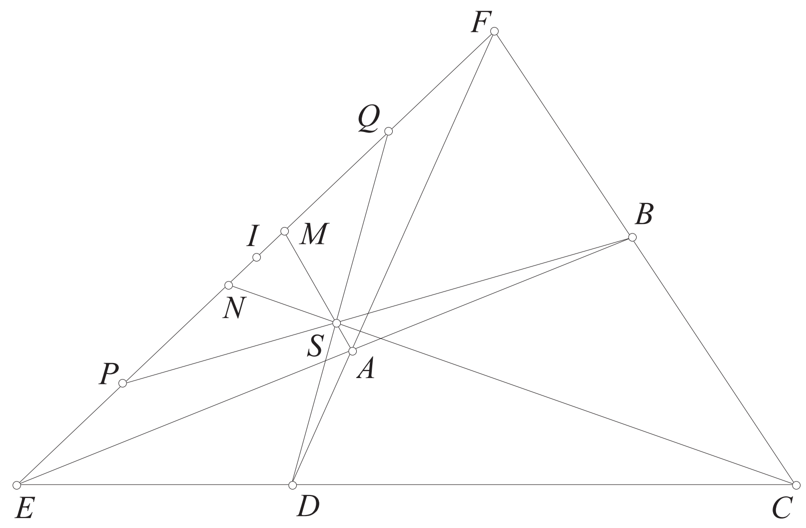
Đẳng thức cuối chứng minh rằng góc giữa AN và AC không đổi, tức là N cố định. Vậy MK luôn đi qua điểm N cố định trên (ABC).

Nhận xét

Bài toán này chia ra ba phần rõ rệt là kết quả hay. Phần chứng minh đồng quy đầu tiên là mở rộng kết quả về cực trực giao nổi tiếng. Các phần sau là các ý phát triển thú vị của tác giả. Có bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tứ giác $ABCD$. Các cạnh đối AB và CD cắt nhau tại E còn AD và BC cắt nhau tại F. M, N là hai điểm thuộc EF và đối xứng với nhau qua trung điểm của EF. S là giao điểm của AM và CN. P, Q theo thứ tự là giao điểm của SB, SD và EF. Chứng minh rằng hai điểm P, Q đối xứng với nhau qua trung điểm của EF.



Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà** trường THPT chuyên SP, ĐHSPHN.

