RÈN LUYỆN KĨ NĂNG
GIẢI CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

****

I) Suy nghĩ về việc học Toán Hình học phẳng hiện nay.

Có khi nào chúng ta tự hỏi làm thế nào để giải một bài toán Hình học phẳng (HHP) chưa? Hay làm sao để có thể giỏi môn HHP, làm sao một bạn nào đó có thể giải nhanh gọn và ấn tượng một bài toán HHP, còn mình thì không? Đúng là những vấn đề này rất thường được đặt ra nhưng muốn trả lời một cách thỏa đáng và đầy đủ thì quả là điều không đơn giản!

Cũng giống như các dạng toán khác, để giải một bài toán HHP nào đó, chúng ta cũng cần phải đi từ giả thiết, thông qua các suy luận để tìm ra con đường đến kết luận hoặc một yêu cầu nào đó đặt ra của đề bài. Nhưng đặc biệt hơn, ở môn HHP, ngoài những tư duy logic thông thường, chúng ta còn cần phải có tư duy hình tượng, chúng ta cần phải tìm được quan hệ giữa các yếu tố hình học thông qua cái nhìn trực quan. Với đặc trưng đó, một mặt làm cho chúng ta có thể thấy được vấn đề đang cần giải quyết một cách rõ ràng hơn nhưng mặt khác cũng đòi hỏi ở chúng ta một khả năng tưởng tượng phong phú và sâu sắc nếu muốn học tốt dạng Toán này.

Trên thực tế, trong những học sinh giỏi Toán, không có nhiều người giỏi HHP; khi tham gia các kì thi HSG, họ sẵn sàng bỏ đi một câu HHP nào đó để có thời gian dành cho những bài Toán khác. Nhưng hầu như trong tất cả các kì thi, ta đều thấy sự góp mặt của một hoặc hai bài Toán HHP nào đó với khoảng 15-25% số điểm cả đề và như thế nó thực sự quan trọng!

Có một điều lạ là chúng ta học hình học với thời gian nhiều hơn bất cứ dạng Toán nào khác. Ngay từ lớp 6 chúng ta đã làm quen với các khái niệm điểm, đoạn thẳng, đường thẳng, góc,… Đến lớp 7 chúng ta đã biết định lí là gì và học cách chứng minh chúng: chứng minh hai góc đối đỉnh thì bằng nhau, chứng minh tổng ba góc của tam giác là 180^0,…Và chúng ta học và rèn luyện chúng suốt cho đến bây giờ, thời gian đó dài hơn việc học bất cứ một bài toán sử dụng đạo hàm, một bài giới hạn hay lượng giác nào đó. Thế nhưng, dường như Hình học luôn không là một lựa chọn hàng đầu khi bắt đầu cho lời giải của một đề thi HSG. Thậm chí đó còn là nỗi ám ảnh, lo sợ của nhiều bạn HSG Toán. Khi nhìn thấy một bài hình nào đó, họ cố đưa về Đại số càng nhanh càng tốt và sẵn sàng chấp nhận biến đổi, khai thác những biểu thức cồng kềnh thay vì bài toán đó có thể giải một cách nhẹ nhàng bằng hình học thuần túy.

Ta cũng không phủ nhận rằng học và giỏi ở HHP không phải là chuyện dễ, có thể cần năng khiếu và rèn luyện lâu dài, phải làm nhiều dạng bài tập để tích lũy cho mình những kinh nghiệm và sự nhạy bén cần thiết để khi đối mặt với một bài HHP nào đó mà không bị ngỡ ngàng, lúng túng. Chẳng hạn như có nhiều học sinh THCS có thể giỏi HHP hơn học sinh THPT là cũng bởi lí do năng khiếu này. Thế nhưng, chẳng may không có năng khiếu thì sao, chẳng lẽ lại bỏ cuộc? Tất nhiên là vẫn còn cách giải quyết, chúng ta hãy tham khảo một số hướng giải quyết và gợi ý rèn luyện sau đây để khắc phục và mong rằng những điều này có thể giúp các bạn rút ra được cho bản thân một ý tưởng mới nào đó cho việc học HHP trong thời gian tới.

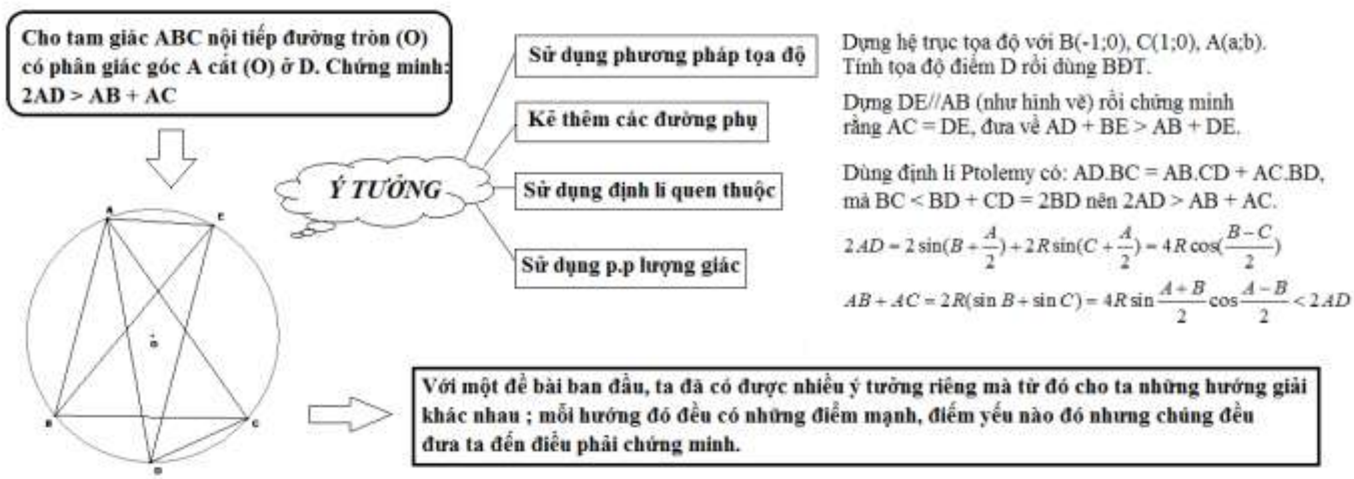
Thế nhưng, đa số các bạn chưa giỏi HHP thường ghét phần này và tránh làm các bài toán về hình học; do đó, trước hết các bạn hãy làm quen và tiếp xúc nhiều với nó, và lâu dần các bạn có thể tìm thấy trong sự thú vị mà những bài toán HHP đem lại một sự tiến bộ nào đó cho mình.

* **Chúng ta hãy suy nghĩ về các vấn đề sau**:

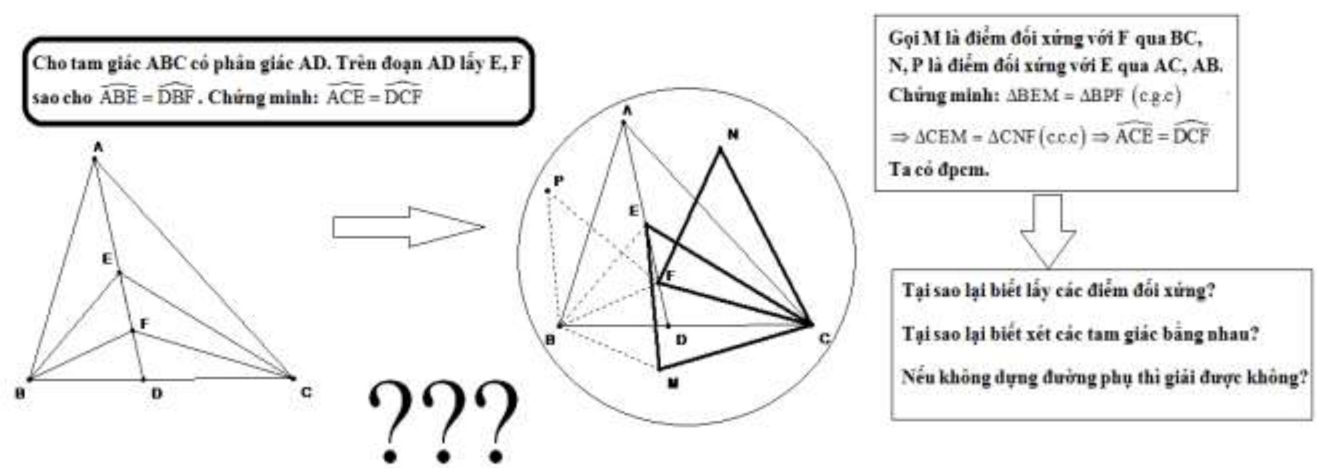
- *Làm sao để rút ngắn con đường đi từ giả thiết đến kết luận?*
- *Làm sao để tận dụng hết giả thiết đề bài cho?*
- *Làm sao đưa các kiến thức hình học sẵn có (như một phương pháp hoặc một định lí nào đó) cho việc giải một bài toán HHP?*
- *Làm cách nào để có thể kẻ đường phụ giải một bài toán?*
- *Làm sao để nâng cao hơn trình độ HHP nếu chúng ta đã có một năng lực nhất định*?

Các nội dung trình bày dưới đây sẽ làm rõ điều đó:

MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC VỚI NHIỀU CÁCH GIẢI



MỘT BÀI TOÁN ĐƠN GIẢN NHƯNG KẺ NHIỀU ĐƯỜNG PHỤ



* *Lời giải của các VD được trình bày dưới đây chủ yếu là dựa trên hướng suy nghĩ chính, chú trọng phân tích các bước lập luận chứ không đi sâu vào xét các trường hợp của hình vẽ có thể xảy ra nhằm hạn chế sự phức tạp. Dù vậy trên thực tế, khi giải các bài toán HHP, chúng ta nên chú ý điều này, nên xét hết các trường hợp (vị trí các điểm, các tia; phân giác trong, ngoài; tam giác cân, không cân; đường tròn thực sự và suy biến,...) để đảm bảo lời giải được đầy đủ và chính xác*!

II) Một số cách rèn luyện tư duy hình học và nâng cao kĩ năng giải toán HHP.

1) Lựa chọn công cụ thích hợp để giải một bài toán HHP.

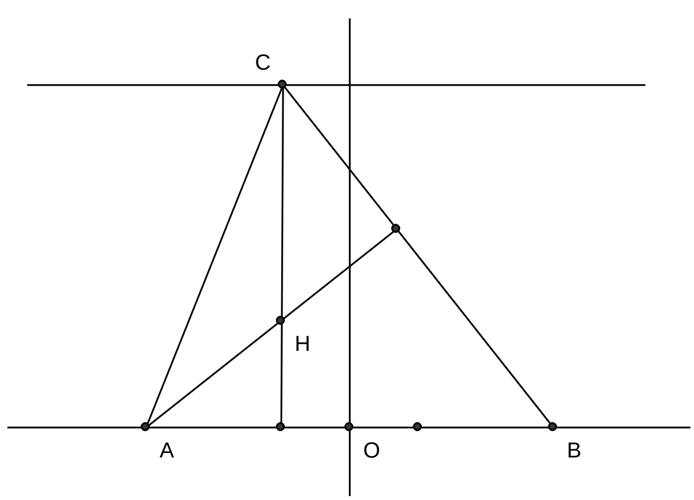
Chúng ta hãy thử ngẫm nghĩ lại, khi đang là học sinh THPT như hiện nay, chúng ta đã biết được hết thảy bao nhiêu phương pháp giải một bài toán HHP. Có thể chúng ta biết nhiều định lí, bổ đề nhưng đó cũng chưa thể gọi là một phương pháp theo nghĩa tổng quát. Ở đây, ta nói đến phương pháp là định hướng, là tư tưởng chính của lời giải; giải bằng cách nào chứ chưa đi sâu vào việc giải như thế nào. Xin nêu một số phương pháp cơ bản sau:

- Phương pháp hình học thuần túy (quan hệ song song, vuông góc; tam giác đồng dạng, bằng nhau; tính chất của tam giác, đường tròn; các định lí hình học quen thuộc; các phép biến hình,…).
- Phương pháp lượng giác (đưa yếu tố trong bài về lượng giác của các góc và biến đổi).
- Phương pháp vectơ (dùng vectơ trong chứng minh tính chất hình học hoặc dựng một hệ vectơ đơn vị để giải bài toán).
- Phương pháp đại số (đưa các yếu tố trong bài về độ dài cạnh và biến đổi).
- Phương pháp tọa độ (đưa giả thiết đã cho vào một hệ trục tọa độ và tìm tọa độ điểm, phương trình đường thẳng, đường tròn liên quan).

Trong đó, mức độ tư duy hình học được thể hiện giảm dần qua thứ tự các phương pháp trên. Nếu chúng ta là một học sinh chưa giỏi HHP thì thường với các bài toán có giả thiết "thuận lợi" thì lập tức sử dụng tọa độ, điều đó tất nhiên có ích cho kĩ năng tính toán, biến đổi đại số của chúng ta nhưng nói chung không có lợi cho việc rèn luyện tư duy hình học. Và đa số các bài toán hình khó có thể sử dụng phương pháp này, chỉ cần một đường tròn hoặc một tâm đường tròn nội tiếp đã khiến cho việc dùng phương pháp tọa độ thật khó khăn rồi. Thế nhưng không phải nói vậy mà ta lại quên đi phương pháp đó được. Có vài bạn đã khá ở nội dung này thì lại không thích sử dụng tọa độ và cố đi tìm một cách giải thuần túy cho nó. Công việc này không phải lúc nào cũng đúng, nhất là đối với các kì thi HSG có thời gian "gấp rút" và số lượng bài toán cần giải được lại tương đối nhiều.

Chúng ta hãy thử nói về một bài toán đơn giản sau:

➢ VD1: ***Cho đoạn thẳng AB cố định và đường thẳng d cố định song song với AB. Điểm C di động trên d. Tìm quỹ tích trực tâm tam giác ABC.***



* **Phân tích**. Một số bạn thấy bài toán này có giả thiết thật đơn giản, chỉ có đoạn thẳng cố định, một điểm di động trên đường thẳng song song rồi tìm trực tâm; thêm nữa, bài toán này có vẻ quen thuộc nên họ chỉ vẽ hình ra và cố gắng kẻ đường phụ để giải. Thế nhưng, chắc chắn các bạn này sẽ khó mà tìm được một lời giải hình học thuần túy cho bài toán này khi mà trên thực tế quỹ tích của H là một đường parabol!

Nếu không cẩn thận vẽ hình trước nhiều lần để dự đoán quỹ tích, chắc chắn rằng đây không còn là một quỹ tích đường thẳng, đường cong thông thường mà mò mẫn đi tìm không đúng cách sẽ không đi đến kết quả muốn có. Bài toán này không khó nhưng nếu không lựa chọn đúng công cụ thì không thể nhanh chóng thành công trong việc giải nó được.

*** Giải.**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét A (-1; 0), B (1; 0) và đường thẳng d có phương trình: $y = a,\ a \neq 0$, do C di động trên đó nên có tọa độ là C (m; a), $m \in \mathbb{R}$.

Ta sẽ tìm tọa độ trực tâm của tam giác ABC.

Phương trình đường cao của tam giác ứng với đỉnh C là: x = m;

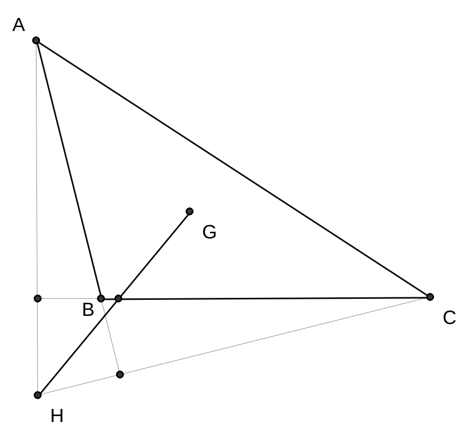
Phương trình đường cao ứng với đỉnh A là: $(m-1)(x+1) + ay = 0 \Leftrightarrow (m-1)x + ay + m - 1 = 0$

Tọa độ trực tâm của tam giác ABC là nghiệm của hệ:

$\begin{cases}(m-1)x + ay + m - 1 = 0\\ x = m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = m\\ y = \dfrac{1-m^2}{a}\end{cases}$. Suy ra: $y = \dfrac{1-x^2}{a}$

Vậy quỹ tích của H là parabol có phương trình: $y = \dfrac{1-x^2}{a}$.

➢ <u>VD2</u>: ***Cho tam giác ABC có cạnh BC cố định, A di động trong mặt phẳng. Gọi G, H lần lượt là trọng tâm, trực tâm của tam giác. Biết rằng đoạn GH cắt BC tại trung điểm của GH, tìm quỹ tích của A.***



* **<u>Phân tích.</u>** Ta thấy giả thiết của bài toán không phức tạp nhưng điều kiện GH cắt BC tại trung điểm của GH quả thật hơi khó vận dụng; ta cũng có thể hiểu đơn giản hơn là trung điểm của GH thuộc BC nhưng vậy thì cũng không đem lại nhiều gợi ý cho lời giải bài toán. Và nếu đứng trước những bài toán có giả thiết đơn giản nhưng khó vận dụng như thế thì hãy thử nghĩ đến phương pháp tọa độ. Khi đó, dù các tính chất hình học chưa được thể hiện đầy đủ nhưng các điều kiện hình học thì sẽ được đảm bảo chặt chẽ hơn.

Cũng tiến hành lựa chọn một hệ trục tọa độ thích hợp tương tự như trên rồi tính tọa độ các điểm G, H và viết phương trình các đường thẳng cần thiết, đặt vào điều kiện của bài toán, ta sẽ tìm được quỹ tích của điểm A chính là một đường hypebol. Các bạn thử giải lại bài toán này với việc giữ nguyên các giả thiết ban đầu, chỉ thay trực tâm H bằng tâm đường tròn ngoại tiếp O, các công việc nói chung cũng được tiến hành tương tự nhưng dù vậy ta cũng có thêm một khám phá mới. Và nếu được, hãy giải lại hai bài toán vừa rồi bằng phương pháp hình học thuần túy dựa trên định nghĩa các đường conic, tìm tiêu điểm và đường chuẩn của chúng! Đây là một vấn đề không đơn giản.

* Ta hãy so sánh hai phương pháp giải bài toán sau để rút ra tầm quan trọng của việc lựa chọn phương pháp phù hợp giải các bài toán HHP:

➢ VD3: ***Cho tam giác ABC. Phía ngoài tam giác ABC dựng các điểm D, E, F sao cho các tam giác BCD, CAE, ABF là các tam giác đều. Chứng minh hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm.***

Giải:

Cách 1. *Sử dụng phương pháp vectơ*: (khá nhẹ nhàng và không cần tốn nhiều thời gian để nghĩ ra cách giải này).

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. Ta có:

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PF}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP})+(\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{PF})$$

Dễ thấy: $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\vec{0}$

Và $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{NE}+\overrightarrow{PF}=\vec{0}$ theo định lí con nhím nên: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$

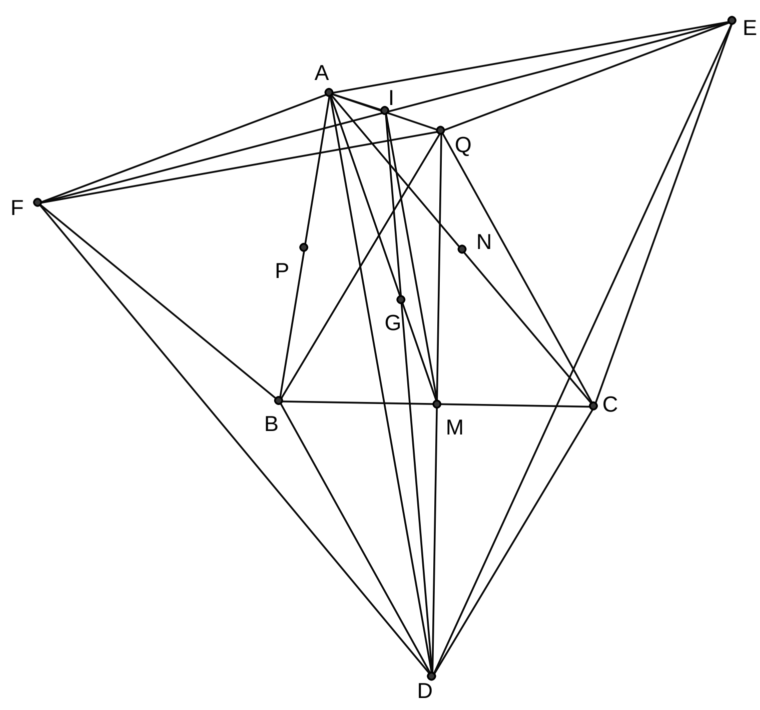
Vậy hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm.

Cách 2. *Sử dụng hình học phẳng thuần túy*: (dựng nhiều đường phụ, hướng suy nghĩ hơi thiếu tự nhiên và đòi hỏi có kinh nghiệm về các bài toán có giả thiết tương tự như thế này).

Gọi I là trung điểm EF và Q là điểm đối xứng với D qua BC, khi đó: ΔBCQ cũng là tam giác đều. Ta thấy phép quay tâm B góc quay 60^0 biến C thành Q, biến A thành F nên:

$\Delta ABC=\Delta FBQ$, tương tự:

$\Delta ABC=\Delta EQC \Rightarrow \Delta FBQ=\Delta EQC$.



Suy ra: FQ = AC = AE, QE = AB = AF và tứ giác AEQF là hình bình hành. Do đó:

I chính là trung điểm của AQ, mà M là trung điểm của QD nên IM chính là đường trung bình của tam giác QAD

$\Rightarrow IM=\frac{1}{2}AD$ và IM //AD.

Gọi G là giao điểm của AM và ID thì theo định lí Thalès:

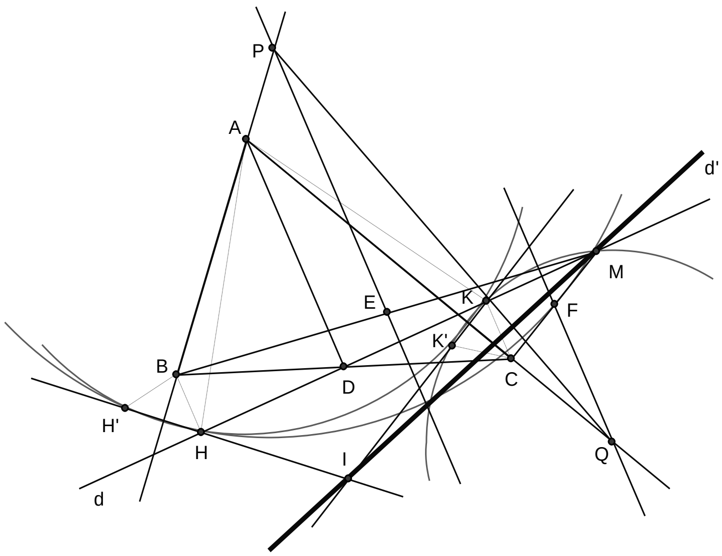
$\frac{GM}{GA}=\frac{GI}{GD}=\frac{IM}{AD}=\frac{1}{2}$.

Hơn nữa G cùng thuộc hai trung tuyến của tam giác ABC và DEF nên nó chính là trọng tâm chung của hai tam giác ABC và DEF.

Vậy hai tam giác ABC và DEF có cùng trọng tâm (đpcm).

* Trong việc giải các bài toán bằng phương pháp tọa độ, ta cũng cần chú ý đến việc chọn các hệ trục tọa độ hợp lí: tọa độ các điểm, phương trình đường thẳng cần viết đơn giản; có nhiều liên hệ với các điểm đã cho trong giả thiết, tận dụng được các yếu tố đường song song, vuông góc, trung điểm do hình cần dựng đơn giản,… Chẳng hạn chúng ta có bài toán sau:

➢ <u>VD4.</u> ***Cho tam giác ABC có D là trung điểm của cạnh BC. Gọi d là đường thẳng qua D và vuông góc với đường thẳng AD. Trên đường thẳng d lấy một điểm M bất kì. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng MB, MC. Đường thẳng qua E vuông góc với d cắt đường thẳng AB tại P, đường thẳng qua F vuông góc với d cắt đường thẳng AC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng qua M, vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường thẳng d.***



* **<u>Phân tích</u>**. Ta thấy trong đề bài này các giả thiết đưa ra chỉ xoay quanh các yếu tố như trung điểm, đường vuông góc, đoạn thẳng,... nhưng vì có hơi nhiều yếu tố như vậy nên việc liên kết chúng lại và đảm bảo sử dụng được tất cả các giả thiết quả là điều không dễ dàng. Chúng ta có một lời giải bằng cách sử dụng phương pháp hình học thuần túy nhờ kiến thức trục đẳng phương như sau nhưng nó hơi phức tạp vì cần phải kẻ nhiều đường phụ:

* **<u>Giải</u>.**

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng d.

Do D là trung điểm của BC nên DH = DK, suy ra AD là trung trực của HK $\Rightarrow$ AH =AK.

Gọi (ω) là đường tròn tâm A đi qua H và K.

Gọi H', K' lần lượt là các điểm đối xứng với H, K qua các đường thẳng AB, AC

$\Rightarrow$H', K' thuộc (ω).

Giả sử các đường thẳng HH', KK' cắt nhau tại I thì I là điểm cố định. (*)

Ta có : PE // BH (cùng vuông góc với d) mà PE đi qua trung điểm của MB nên cũng qua trung điểm của MH $\Rightarrow$PE là trung trực của MH $\Rightarrow$ PH = PM.

Gọi (ω_1) là đường tròn tâm P đi qua H và M, do tính đối xứng nên H' cũng thuộc (ω_1).

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có: QF là trung trực của MK; nếu gọi (ω_2) là đường tròn tâm Q đi qua K và M thì K'thuộc (ω_2). Ta lại có:

+ (ω), (ω_1) cắt nhau tai H, H' nên HH' là trục đẳng phương của $(\omega), (\omega_1)$.

+ $(\omega), (\omega_2)$ cắt nhau tai K, K' nên KK' là trục đẳng phương của $(\omega), (\omega_2)$.

Mặt khác : M cùng thuộc (ω_1), (ω_2) và P, Q lần lượt là tâm của $(\omega_1), (\omega_2)$ nên đường thẳng d' qua M, vuông góc với PQ chính là trục đẳng phương của $(\omega_1), (\omega_2)$.

Từ đó suy ra: HH', KK', d' đồng quy tại tâm đẳng phương của ba đường tròn $(\omega), (\omega_1), (\omega_2)$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra d' đi qua I là điểm cố định.

Vậy đường thẳng qua M, vuông góc với đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên đường thẳng d. Ta có đpcm.

* Ta có thể sử dụng phương pháp tọa độ để giải nhẹ nhàng bài này vì việc xác định tọa độ trung điểm và viết phương trình đường vuông góc cho các biểu thức đơn giản, đó cũng chính là đáp án chính thức của đề thi HSGQG này. Thế nhưng, cũng không phải cách chọn trục tọa độ nào cũng cho ta một lời giải nhanh gọn. Nếu chọn hệ trục tọa độ gốc D và trục hoành trùng với BC theo suy nghĩ thông thường thì lời giải sẽ dài và phức tạp hơn so với chọn gốc tọa độ là D và trục hoành là đường thẳng d. Các bạn hãy thử với cách này sẽ thấy ngay sự khác biệt đó!

Qua các VD trên, ta thấy rằng việc lựa chọn công cụ thích hợp để giải các bài toán hình học cũng là một yếu tố quan trọng để có thể đi đến kết quả một cách đơn giản và ngắn gọn hơn, nhiều khi đó cũng là cách duy nhất có thể giải quyết được vấn đề.

2) Về việc tận dụng giả thiết của đề bài.

Trong một bài toán thông thường, các giả thiết đưa ra, dù ít hay nhiều, dù gián tiếp hay trực tiếp, thì ở trong bất cứ lời giải nào của bài toán đều được tận dụng. Một bài toán càng có ít giả thiết thì nói chung việc sử dụng chúng càng đơn giản bởi không phải dễ dàng gì cho việc đưa hàng loạt giả thiết, yếu tố, các quan hệ hình học vào lời giải của mình. Mỗi giả thiết đưa ra đều có mục đích và tầm quan trọng nhất định; nhiệm vụ của chúng ta là xác định xem cái nào là quan trọng nhất và làm sao để tận dụng và liên kết tất cả vào trong lời giải bài toán của mình!

Trước hết, ta hãy đặt câu hỏi : *"giả thiết đó nói lên điều gì?"*, chẳng hạn cho giả thiết: *tam giác ABC có M, N, P là trung điểm các cạnh*, điều đó gợi cho ta suy nghĩ rằng:

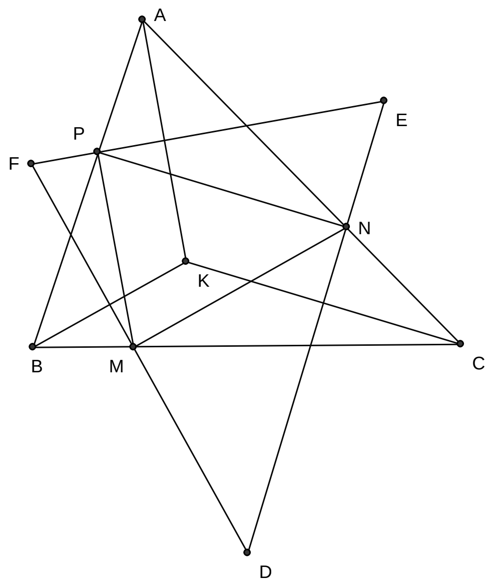
- Các cạnh của tam giác MNP song song và bằng nửa các cạnh của tam giác ABC tương ứng;
- Tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC với tỉ số đồng dạng là ½;
- Diện tích tam giác MNP băng ¼ diện tích tam giác ABC;
- Phép vị tự tâm G – trọng tâm tam giác ABC với tỉ số -1/2 biến tam giác ABC đã cho thành tam giác MNP;
- Hai tam giác này có cùng trọng tâm;
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP chính là đường tròn Euler nên nó cũng đi qua chân các đường cao và trung điểm các đoạn nối trực tâm và đỉnh của tam giác ABC;
- Trực tâm của tam giác MNP cũng là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, ...

* Có thật nhiều suy nghĩ từ một giả thiết và nếu ta bỏ sót một trong số chúng thì có thể không giải được bài toán vì đó chính là chìa khóa vấn đề (tất nhiên cũng không phải dùng hết các ý). Chúng ta càng có được nhiều liên tưởng khi kiến thức hình học của chúng ta càng nhiều và kinh nghiệm càng sâu sắc, điều đó đòi hỏi ta cần làm một số lượng nhất định các bài toán HHP.

Tiếp theo ta lại hỏi: *"vậy nếu chưa có nhiều kinh nghiệm thì sao?"*, tất nhiên cũng có một cách nhỏ này giúp ta có thể thấy trực quan hơn giả thiết đó. Chúng ta hãy thử đi tìm cách dựng các "giả thiết" đó bằng thước và compa, nhất là với các giả thiết có phần phức tạp, điều này nhiều lúc cũng rất có ích. Chúng ta thử tìm hiểu rõ điều đó qua bài toán sau:

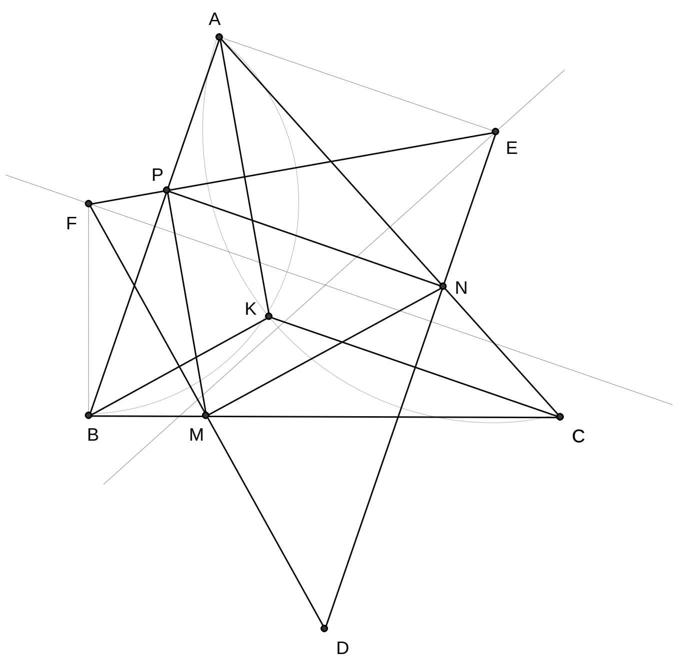
➢ VD5. ***Cho tam giác ABC có K là điểm nằm trong tam giác và thỏa:*** $\widehat{KAB} = \widehat{KBC} = \widehat{KCA}$. ***Gọi D, E, F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác KBC, KCA, KAB. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của BC, FD; CA, DE; AB, EF. Chứng minh rằng: các tam giác ABC, DEF, MNP đồng dạng với nhau.***

* **Phân tích**. Ta thấy điểm K cho như trên là một giả thiết quen thuộc (điểm Brocard) nhưng nói chung các tính chất ta đã biết về nó không phục vụ nhiều cho điều cần chứng minh ở đây. Nếu như ta vẽ một hình đơn điệu như bên dưới thì việc giải và định hướng cho bài toán sẽ không đơn giản. Ta sẽ thử dùng phép dựng hình xác định điểm K trong giả thiết bằng thước và compa để xem thử nó có tính chất gì đặc biệt không. Ta dễ dàng có được phép dựng hình sau:



- *Dựng trung trực của đoạn AB và đường thẳng vuông góc với BC tại B, gọi F là giao điểm của hai đường thẳng trên.*
- *Dựng đường tròn tâm F bán kính FA.*
- *Tương tự, dựng điểm E là giao điểm của trung trực AC và đường thẳng vuông góc với AC tại A.*
- *Dựng đường tròn tâm E, bán kính EA.*
- *Giao điểm của hai đường tròn trên chính là điểm K cần tìm.*

Từ việc tìm cách dựng cho điểm K, ta cũng đã có thêm trên hình một số đường phụ cần thiết, bài toán đã rõ ràng hơn nhiều. Với những gợi ý có được từ hình vẽ ta vừa dựng, có thể giải quyết được bài toán này theo cách như sau:



- Chứng minh $AK \perp EF, BK \perp DE$.
- Chứng minh: $\widehat{AKB} + \widehat{DFE} = 180^0$.
- Chứng minh: $\widehat{AKB} + \widehat{ABC} = 180^0$
- Suy ra: $\Delta ABC \sim \Delta EFD$(g.g)
- Suy ra tứ giác BMPF nội tiếp và $MP \perp EF$.
- Chứng minh: $\widehat{MPN} = \widehat{FED}$.
- Chứng minh: $\Delta MPN \sim \Delta FED$(g.g).

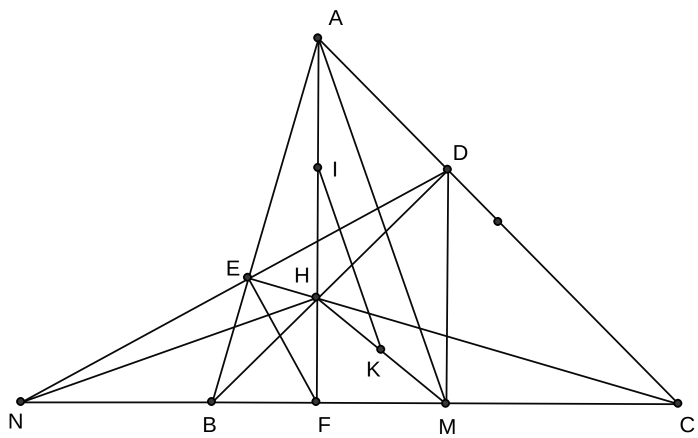
Từ đó suy ra đpcm.

* Còn đối với các bài toán mà hình vẽ không thể dựng được bằng thước và compa thì sao, chẳng hạn như định lí Mooley: "*Cho tam giác ABC. Các đường chia ba các góc của tam giác cắt nhau tại các điểm M, N, P. Chứng minh tam giác MNP đều.*" Ta biết rằng việc chia ba một góc không thể dựng được bằng thước và compa nên cách tìm gợi ý từ việc dựng hình không thể thực hiện được. Và có lẽ vì vậy mà đến sau hơn 50 năm xuất hiện, bài toán nổi tiếng này mới có một lời giải HHP thuần túy rất đẹp và hoàn chỉnh. Nhưng đó là câu chuyện của những bài toán nổi tiếng thế giới; trên thực tế, nếu cần thiết, chúng ta luôn có thể dùng cách dựng hình này cho việc tìm gợi ý cho bài toán và tận dụng được giả thiết của đề bài.

3) *Về việc rút ngắn con đường đi từ giả thiết đến kết luận.*

Cũng tương tự phần trên, ta cũng đặt các câu hỏi: *"kết luận đó từ đâu mà ra?", "những điều đó có liên hệ gì đến giả thiết của chúng ta có?"*. Chúng ta cũng tiến hành đi ngược lên từ điều cần chứng minh, tìm ra các điều cần phải có để tìm ra có được kết luận.

➢ VD6. ***Cho tam giác ABC có đường cao BD và CE cắt nhau tai H. M là trung điểm của BC, N là giao điểm của DE và BC. Chứng minh rằng NH vuông góc với AM.***

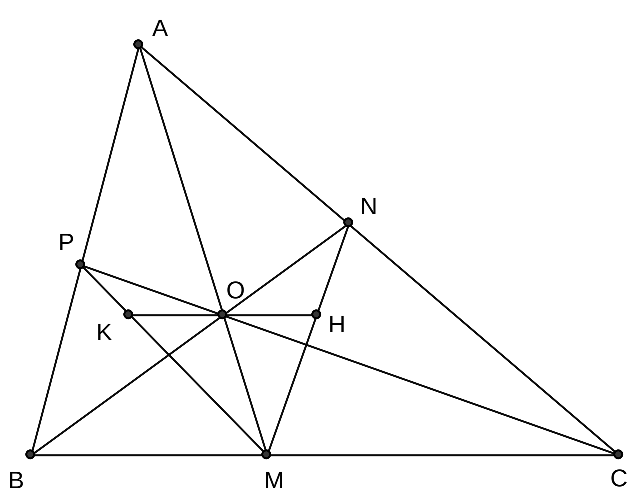


* **Phân tích**. Từ giả thiết ta dễ dàng thấy rằng: tứ giác DEFM nội tiếp trong đường tròn Euler của tam giác ABC nên: $\overline{NE}.\overline{ND} = \overline{NF}.\overline{NM}$, mặt khác D, E nằm trên đường tròn đường kính AH; còn F, M nằm trên đường tròn đường kính HM nên: N nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính MH và đường tròn đường kính AH.

Đến đây ta chưa có ngay kết quả $NH \perp AM$ được.

Ta thấy thiếu một vài yếu tố trong hình, một yếu tố nào đó cần có để kết nối các điều ta vừa phân tích được từ giả thiết đến kết luận của bài, yếu tố đó vừa phải đảm bảo rằng có liên quan đến NH trong các phương tích trên, vừa đảm bảo rằng có liên hệ đến đoạn AM. Và việc chọn 2 điểm phụ dựng thêm là trung điểm AH và HM (I là trung điểm AH, K là trung điểm HM) cũng là điều tự nhiên vì khi đó: IK là đường trung bình của tam giác HAM, I và K cũng là tâm của các đường tròn vừa nêu ở trên nên trục đẳng phương NH vuông góc với đường nối hai tâm đó.

➢ VD7. ***Cho tam giác ABC có O nằm trong tam giác. Các tia AO, BO, CO cắt các cạnh đối diện lần lượt tại M, N, P. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt MN, MP tại H, K. Chứng minh rằng: OH = OK.***



* **Phân tích**.

Ta thấy các giả thiết trong bài cho rất "thoáng" nhưng kết luận có được cũng thật thú vị. Rõ ràng, O là điểm nằm bất kì trong tam giác thì không thể có một tính chất nào đặc biệt có thể khai thác; do đó, ta sẽ đi vào phân tích các tỉ số có được từ đường thẳng song song đã kẻ. Nếu chúng ta đã quen với các bài toán về tỉ số này thì ta thấy có một số công cụ hỗ trợ cho chúng ta như tỉ số diện tích, tỉ số đồng dạng, định lí Thalès, định lí Menelaus, định lí Céva,…Trước tiên, đường thẳng song song trong đề bài gợi ý cho ta sử dụng định lí Thales để đưa các đoạn thẳng OH, OK về các đoạn thẳng "dễ giải quyết" hơn. Ta có: $\frac{OH}{BM}=\frac{ON}{BN}\Rightarrow OH=\frac{ON}{BN}.BM$, $\frac{OK}{CM}=\frac{OP}{CP}\Rightarrow OK=\frac{OP}{CP}.CM$.

Do đó: muốn có OH = OK thì: $\frac{ON}{BN}.BM=\frac{OP}{CP}.CM\Leftrightarrow\frac{ON}{BN}.\frac{CP}{OP}=\frac{CM}{BM}$.

Nếu cứ biến đổi các tỉ số này tiếp tục thì dần dần, ta sẽ bị ngộ nhận với kết luận có sẵn; thay vào đó, ta sẽ đưa các tỉ số đoạn thẳng này về tỉ số diện tích các tam giác.

- Hai tam giác có cùng cạnh đáy thì tỉ số diện tích bằng tỉ số chiều cao.
- Hai tam giác có cùng chiều cao thì tỉ số diện tích bằng tỉ số cạnh đáy.

Ta có thể dễ dàng thay các tỉ số trên có liên quan ở trên như sau:

$$\frac{ON}{BN}=\frac{S_{AON}}{S_{ABN}}=\frac{S_{CON}}{S_{CBN}}=\frac{S_{AON}+S_{CON}}{S_{ABN}+S_{CBN}}=\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}},\frac{OP}{CP}=\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}\Rightarrow\frac{ON}{BN}.\frac{CP}{OP}=\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}.\frac{S_{ABC}}{S_{AOB}}=\frac{S_{AOC}}{S_{AOB}}=\frac{CM}{BM}$$

Đến đây bài toán đã hoàn toàn rõ ràng.

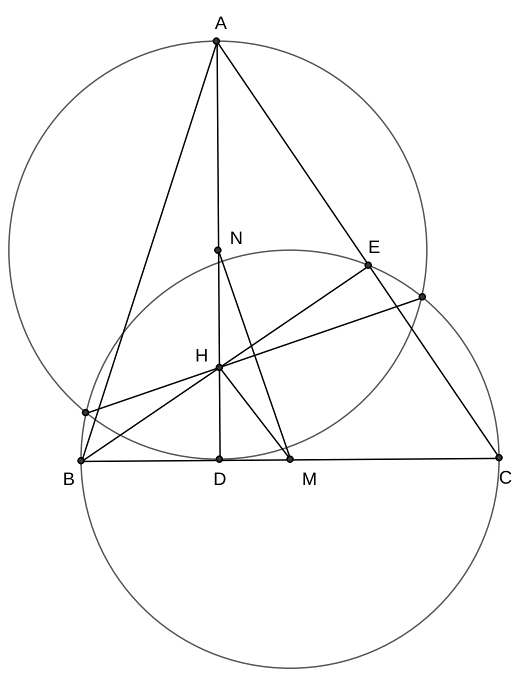
➢ <u>VD8.</u> ***Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD thỏa AD = BC. Gọi H là trực tâm tam giác, M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Chứng minh rằng HN = HM.***

*** <u>Phân tích.</u>** Ta thấy trong giả thiết của bài toán có 2 điều đáng chú ý là: đường cao AD của tam giác ABC bằng BC và M, N lại chính là trung điểm của hai cạnh ấy.

Ta có thể suy nghĩ rằng:

- Diện tích tam giác ABC là: $S_{ABC}=\frac{1}{2}AD.BC=\frac{BC^2}{2}$.

- Sử dụng lượng giác: $BC=BD+CD=AD.\cot B+AD.\cot C=AD(\cot B+\cot C)$



$\Rightarrow\cot B+\cot C=1\Rightarrow\cot A+\cot B.\cot C=1$.

- Tứ giác ANMC có hai cạnh đối AN và CM bằng nhau và đường thẳng qua hai cạnh đó vuông góc với nhau nên có thể có một số tính chất đặc biệt.

- Do M, N đều là trung điểm của BC, AD nên nếu ta vẽ các đường tròn đường kính BC, AD thì M, N chính là tâm của của các đường tròn này. Hơn nữa, AD = BC nên hai đường tròn này bằng nhau và M, N đối xứng nhau qua dây chung.

- …

Và còn nhiều điều có thể suy luận ra từ giả thiết đó, tất nhiên dù dài hay ngắn thì các điều trên đều có thể đưa ta đến lời giải của bài toán; nhưng mục đích của ta là tìm một cách giải hợp lí và đơn giản. Ta thấy suy luận thứ 4 ở trên có thể sử dụng được do có xuất hiện sự đối xứng giữa các yếu tố và giả thiết được sử dụng một cách triệt để hơn. Do đó, ta thử đi theo con đường đó bằng cách dựng thêm 2 đường tròn. Đến đây, có vẻ như giả thiết trực tâm H chưa được dùng đến nhưng vẫn chưa có một con đường rõ ràng chỉ cho ta cách sử dụng nó. Ta hãy dừng việc phân tích giả thiết lại và xem đến kết luận: "*chứng minh HM = HN*".

Kết luận này cũng có thể có được từ nhiều hướng, chẳng hạn như từ tỉ số giữa các cạnh, từ hai tam giác bằng nhau, từ hai hệ thức lượng giác bằng nhau, hay từ một phép biến hình nào đó.
Tất nhiên, với các đòi hỏi cần thiết để đi đến kết luận đó, ta có thể hình thành nhiều ý tưởng cho lời giải nhưng do đã chọn cách dựng đường tròn nên ta thử bám theo tính đối xứng của 2 đường tròn. Muốn có HM = HN thì H phải nằm trên trung trực của MN, mà M, N đã đối xứng nhau qua dây chung nên H phải nằm trên dây chung đó! Đến đây, ta thấy có thể đã gần liên kết được các dữ kiện. Ta tiến thêm một chút nữa! Như vậy, muốn có dây chung thì phải gọi tên 2 giao điểm của hai đường tròn, nhưng trên thực tế hai giao điểm đó nằm quá rời rạc, khó mà chứng minh chúng và H thẳng hàng. Ta sẽ không chọn cách này. Thử nhìn dây chung đó ở một phương diện khác, không phải là điểm chung của hai đường tròn thuần túy nữa mà là trục đẳng phương của hai đường tròn, như thế muốn H nằm trên đó thì H phải có cùng phương tích đến hai đường tròn. Nhưng phương tích đó có dễ dàng tính được không? Với đường tròn đường kính AD thì quá đơn giản, đó chính là HA.HD; còn với đường tròn đường kính BC thì chưa có, ta có thể vẽ qua H một dây cung của đường tròn này gắn với một đầu mút là B hoặc C, ta thử vẽ dây BE và phương tích có được là HB.HE, giờ chỉ cần chứng minh HA.HD = HB.HE nữa là xong!
Hơn nữa, nếu ta vẽ như thế thì BE phải vuông góc với AC do H là trực tâm tam giác; mà E thuộc đường tròn đường kính BC nên BE vuông góc với EC. Do đó, hóa ra A, E, C thẳng hàng hay E chính là chân đường cao của tam giác ABC, cộng với H là trực tâm thì đẳng thức cần có là: HA.HD = HB.HE không có khó khăn gì nữa. Và các mắc xích trên đã được nối liền, bài toán đã được giải quyết. Việc trình bày lời giải chỉ còn là chuyện ghi chép mà thôi!

Rõ ràng bài toán này không quá khó và vẫn còn nhiều cách giải khác cho nó nữa mà chúng ta có thể thấy ngay rằng tọa độ cũng là một cách tốt. Thế nhưng, nếu có đủ thời gian, chúng ta hãy phân tích bài toán từ từ để tìm được một lời giải hình học thuần túy thật đẹp như trên!
* Có thể nói trước những bài toán HHP khó, các công việc phân tích bài toán như ở trên là rất cần thiết. Đó là cách chúng ta mò mẫn, dò tìm cách giải bài toán, cách có được đpcm từ những yếu tố cho trước thông qua việc kết nối các "mắc xích" liên hệ giữa chúng. Ta hiểu "mắc xích" ở đây có thể là "một bước xuống dòng", "một dấu $\Rightarrow, \Leftrightarrow$", "một phép biến đổi", ... nào đó; nhưng tất nhiên không dễ dàng gì mà ta có được chúng. Chúng ta phân tích được càng nhiều điều từ giả thiết và kết luận càng tốt, bởi có như thế thì việc dùng những liên tưởng, những phán đoán, những kinh nghiệm cho việc viết tiếp những "mắc xích" quan trọng vào giữa bài nhằm hoàn chỉnh lời giải sẽ dễ dàng hơn. Đó chính là tầm quan trọng của việc *rút ngắn con đường đi từ giả thiết đến kết luận*.

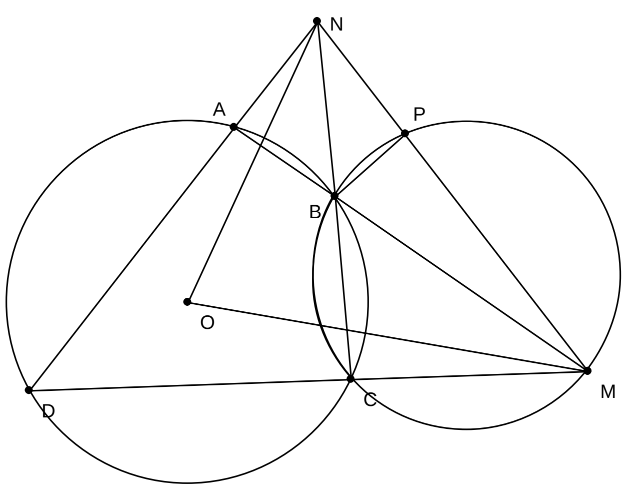
4) *Dựng thêm yếu tố phụ trong các bài toán hình học.*

Ta thấy đa số các ví dụ trên đều có đưa thêm các yếu tố phụ vào, đó có thể là một giao điểm, một trung điểm, chân đường vuông góc, đường thẳng song song hay thậm chí là cả một đường tròn. Yếu tố phụ chính là cầu nối giữa giả thiết và kết luận, nó liên kết các yếu tố rời rạc có sẵn lại và giúp tận dụng triệt để và phát triển giả thiết đã cho thành nhiều kết quả, để rồi cuối cùng đi đến được kết luận. Nếu không có chúng, ta có thể giải bài toán rất khó khăn hoặc không thể giải được.

Có thể nói rằng nếu một học sinh đã biết cách kẻ đường phụ trong việc giải các bài HHP thì đó không thể nào là một học sinh kém ở phần này được. Muốn kẻ được đường phụ, đòi hỏi chúng ta phải có sự quan sát, đánh giá vấn đề tốt; có một kinh nghiệm sâu sắc và khả năng phân tích, sáng tạo ở mức độ nhất định. Việc gọi tên cho một điểm chưa có tên trong hình vẽ trên thực tế cũng là một chuyện không đơn giản dù điểm đó đã có sẵn nói chi đến việc dựng thêm một hoặc nhiều yếu tố phụ, những cái không hề có trước đó. Điều này cũng không khó hiểu vì khi làm các bài toán Đại số - Giải tích, chúng ta thường quen với các lập luận logic có sẵn, mọi thứ xuất hiện đều phải có một lí do rõ ràng. Còn HHP thì không phải như vậy, nếu cứ cứng nhắc cho rằng một đường phụ nào đó muốn kẻ được đều cần phải có một lập luận logic nào đó cho nó thì khó mà thực hiện được công việc này bởi trên thực tế, nhiều khi ta kẻ một đường phụ mà không có một lí do xác đáng! Do đó trong phần này ta sẽ suy nghĩ thêm về việc kẻ đường phụ và vai trò quan trọng của kinh nghiệm qua một quá trình rèn luyện lâu dài để giải toán HHP bằng cách kẻ thêm đường phụ. Ta xét bài toán sau:

- <u>VD 9</u>. ***Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O, R) có M, N lần lượt là giao điểm của các cặp cạnh đối. Chứng minh rằng:*** $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = R^2$**.**

* **<u>Phân tích.</u>** khi đi giải bài toán này, chắc chắn các bạn cũng sẽ mò mẫn biến đổi tích vô hướng của hai vectơ ở vế trái để đi đến kết quả nhưng cuối cùng cũng sẽ bị ngộ nhận hoặc càng lúc càng phức tạp thêm. Do đó, việc dựng thêm một yếu tố phụ sẽ là một điều tất yếu. Chúng ta đừng lầm tưởng bởi hình thức đơn giản của bài toán này! Việc dựng đường phụ dưới đây có thể là khó với một số bạn nhưng nếu chúng ta đã quen với bài toán sau thì mọi chuyện sẽ trở nên đơn giản hơn rất nhiều:



"*Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O) có M, N lần lượt là giao điểm của AD, BC và AB, CD. Chứng minh rằng:* $MA.MB + NA.ND = MN^2$*".*

Ta sẽ giải bài toán này xem như một bổ đề và áp dụng nó vào bài toán đã cho:

Gọi P là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM với MN. Ta thấy:

BPMC rõ ràng là một tứ giác nội tiếp nên: $\widehat{BPM} = \widehat{BCD} = \widehat{NAB}$.

$\Rightarrow$ Tứ giác ANBP cũng nội tiếp. Theo tính chất phương tích, ta có:

$MA.MB = MP.MN, \quad NA.ND = NP.NM$

Từ đó suy ra: $MA.MB + NA.ND = MN(MP + NP) = MN^2$.

Ta sẽ quay trở lại bài toán đã cho, biến đổi biểu thức cần chứng minh một chút cho vấn đề được rõ ràng hơn: $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = R^2 \Leftrightarrow OM^2 + ON^2 - MN^2 = 2R^2$

(giả sử M là giao điểm của AB và CD, N là giao điểm của AD và BC).

Áp dụng bổ đề trên, thay $MA.MB + NA.ND = MN^2$ vào biểu thức trên:

$OM^2 + ON^2 - (MA.MB + NA.ND) = 2R^2$

Nhưng điều này là đúng do theo tính chất phương tích:

$MA.MB = OM^2 - R^2,\ NA.ND = ON^2 - R^2$

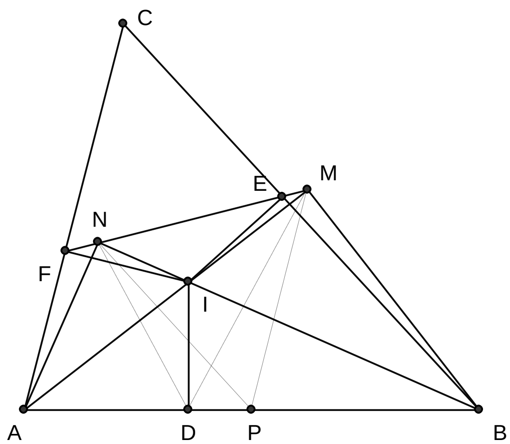
Từ đó, ta đã giải thành công bài toán. Thử nghĩ nếu không có sự hỗ trợ của bổ đề trên thì việc kẻ đường tròn ngoại tiếp tam giác BCM rồi đi chứng minh tuần tự như trên quả là chuyện không đơn giản. Và phải công nhận rằng kinh nghiệm giải toán HHP thể hiện trong bài này không ít!

Ta tiếp tục phân tích một VD khác:

- VD10. ***Trong mặt phẳng cho hai điểm A, B cố định (A khác B). Một điểm C di động trong mặt phẳng sao cho góc*** $\widehat{ACB} = \alpha$ ***không đổi*** $(0^0 < \alpha < 180^0)$***. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CA lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng AI, BI lần lượt cắt đường thẳng EF tại M, N. Chứng minh rằng:***

1. Đoạn MN có độ dài không đổi.

2. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua một điểm cố định.



* **Phân tích**. Nếu ở bài này ta đọc kĩ giả thiết thì sẽ thấy rằng các điểm M và N xác định như trên đã xuất hiện trong nhiều bài toán quen thuộc trước đó mà yêu cầu của đề chỉ dừng lại ở việc chứng minh các tam giác MBC, NBC vuông. Nếu đã biết điều này, ta sẽ chứng minh lại kết quả đó và sử dụng vào việc giải bài toán đã cho như một bổ đề (trong bài này không xét các vị trí có thể có của M, N). Ta thấy:

$\widehat{MEB} = \widehat{CEF} = \dfrac{180^0 - \widehat{C}}{2}$, $\widehat{MIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA} =$

$= \dfrac{1}{2}(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = \dfrac{180 - \widehat{C}}{2} \Rightarrow \widehat{MEB} = \widehat{MIB} \Rightarrow$ Tứ giác EMBI nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IMB} = \widehat{IEB} = 90^0$ hay tam giác AMB vuông ở M. Tương tự, ta cũng có tam giác NAB vuông tại N.

Áp dụng điều này vào bài toán: ta được tứ giác ANMB nội tiếp đường tròn đường kính AB.

$$\Delta AIB : \Delta NIM \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{IA}{NI} \Rightarrow MN = AB.\frac{IN}{IA} = AB.\sin\widehat{NAI} = AB.\sin(90^0 - \frac{\widehat{CAB} + \widehat{CBA}}{2})$$

$$= AB.\sin\frac{\widehat{C}}{2} = AB.\sin\frac{\alpha}{2}, \text{ không đổi.}$$

Hơn nữa, ta thấy: $\widehat{MDN} = \widehat{IDN} + \widehat{IDM} = 2(90^0 - \dfrac{\widehat{CAB} + \widehat{CBA}}{2}) = \widehat{C}$.

Gọi P là trung điểm của AB thì P chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ANMB:

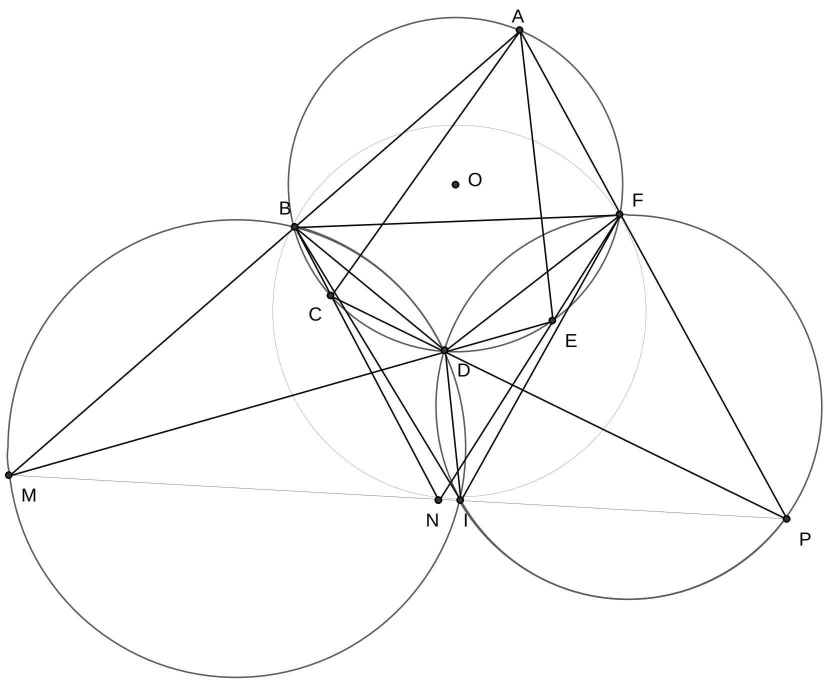
$$\widehat{MPN} = \widehat{MPA} - \widehat{NPA} = 2(\widehat{MBA} - \widehat{NBA}) = 2(90^0 - \widehat{MAB} - \widehat{NBA}) = 2(90^0 - \frac{\widehat{CAB} + \widehat{CBA}}{2}) = \widehat{C}.$$

Do đó: $\widehat{MPN} = \widehat{MDN} \Rightarrow$ Tứ giác MNDP nội tiếp hay đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN luôn đi qua P cố định. Đây chính là đpcm.

Bài toán này vẫn còn nhiều cách giải khác nhưng có lẽ cách này đơn giản, ngắn gọn hơn cả.

* Một số bài toán cũng có thể giải được bằng nhiều cách dựng đường phụ và nếu chúng ta càng có nhiều công cụ hỗ trợ như những bổ đề, định lí quen thuộc thì việc dựng hình sẽ đơn giản và lời giải sẽ nhẹ nhàng hơn, chúng ta hãy xét việc chứng minh định lí Pascal sau đây:

➢ VD 11: ***Cho lục giác ABCDEF nội tiếp đường tròn (O) có M, N, P lần lượt là giao điểm của AB, DE; BC, EF; CD, FA. Chứng minh rằng: M, N, P thẳng hàng.***



* **Phân tích.** Việc chứng minh định lí này đã quá quen thuộc bằng cách gọi thêm G là giao điểm của ME với AQ và sử dụng định lí Menelaus thuận và đảo cho các tam giác. Cách chứng minh đó tương đối ngắn gọn và không kẻ nhiều đường phụ. Nhưng nếu như ta không biết trước định lí Menelaus và sử dụng một cách chứng minh khác thì mời các bạn hãy theo dõi lời giải sau đây với việc kẻ thêm 2 đường tròn phụ:

Gọi I là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM và FDQ. Ta sẽ chứng minh rằng cả bốn điểm M, N, P, I thẳng hàng bằng cách chứng minh từng bộ ba điểm thẳng hàng.

(Việc nghĩ ra hai đường tròn phụ này có thể xuất phát từ một bài toán quen thuộc là: "*Cho ba đường tròn (1), (2), (3) cùng đi qua D. (1) cắt (2) tại A, (2) cắt (3) tại B, (3) cắt (1) tại C (A, B, C khác D). Với M bất kì nằm trên (1), gọi P, Q là giao điểm của MA với (2), MC với (3). Chứng minh rằng PQ đi qua B.*")

Thật vậy, từ các tứ giác nội tiếp: BDIM, FDIP, ta có: $\widehat{DIM} + \widehat{DIP} = \widehat{DBA} + \widehat{DFA} = 180^0$, suy ra: M, I, P thẳng hàng. Tiếp theo ta sẽ chứng minh rằng M, N, I thẳng hàng. Ta có:

Tứ giác BDIM nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BDM} = 180^0 - \widehat{BDE} = 180^0 - \frac{1}{2}\overset{\frown}{BAE} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BDE}$

Mặt khác: $\widehat{BIF} = \widehat{BID} + \widehat{FID} = \widehat{BMD} + \widehat{FPD} = \frac{1}{2}\left[(\overset{\frown}{AFE} - \overset{\frown}{BCD}) + (\overset{\frown}{ABC} - \overset{\frown}{DEF})\right]$

$= \frac{1}{2}\left[(\overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{AB}) - (\overset{\frown}{DC} + \overset{\frown}{DE})\right] = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BAF} - \overset{\frown}{CDE}) = \widehat{BNF} \Rightarrow$ BNIF nội tiếp.

Do đó: $\widehat{BIN} = \widehat{BFN} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BDE} = \widehat{BIM} \Rightarrow$ M, N, I thẳng hàng. Tương tự: N, I, P thẳng hàng.

Vậy ta có M, N, P thẳng hàng (đpcm).

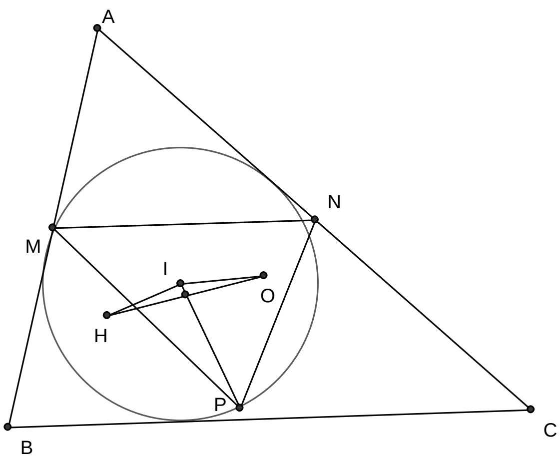
* Qua đó, ta thấy rằng việc dựng đường phụ là công việc đòi hỏi phải có quá trình rèn luyện và tích lũy kinh nghiệm lâu dài. Có thể nói khi chúng ta đã kẻ thành công được đường phụ để giải một bài toán nào đó chính là lúc chúng ta có một bước tiến dài trong việc học tập HHP.

5. ***Về việc học tập và rèn luyện HHP ở mức độ cao.***

Có khi nào chúng ta đặt câu hỏi: "*Tại sao người ta lại có thể nghĩ ra được một bài toán hay như vậy nhỉ?*". Thông thường, chúng ta giải được một bài toán với lời giải thật hay và đẹp rồi gác nó lại mà không dành thời gian tìm hiểu thêm những điều lí thú đằng sau nó hay thậm chí là đưa ra được một bài toán mới từ bài toán cũ đó. Việc tìm tòi như thế sẽ giúp chúng ta chủ động hơn ở các bài toán và phát triển kĩ năng HHP tốt hơn. Khi chúng ta tìm tòi sáng tác ra các bài toán mới chính là lúc chúng ta đi trên con đường mà những người ra đề đã đi và tìm hiểu xem họ đã làm thế nào để có được bài toán như vậy. Thông thường các bài toán HHP đặt ra dưới dạng che giấu các vấn đề và công việc của chúng ta là lần mò theo các giả thiết có sẵn để giải. Việc che giấu càng hay khi mà một số điểm và đường trong hình bị xóa đi mà yêu cầu của bài toán lại không bị ảnh hưởng, người giải các bài như vậy phải khôi phục lại các điểm đó thông qua cách kẻ các yếu tố phụ; cũng có thể là việc biến đổi các yếu tố trong bài, thêm các đường mới để che giấu bản chất vấn đề. Và việc tự nghĩ ra các bài toán HHP hoặc phát triển từ một bài toán cũ là một việc làm rất có ích cho chúng ta khi mà ta trở thành thí sinh trong kì thi nào đó, đối mặt với một bài toán HHP khó, không rơi vào hoàn cảnh bị động và lúng túng.

Ta thử xem các bài toán sau đây:

➢ VD12. ***Cho tam giác ABC nhọn có A là góc lớn nhất, nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I), H là trực tâm. Trung tuyến đỉnh I của tam giác IOH cắt (I) tại P. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Chứng minh:*** $\widehat{BAC} = \widehat{MPN}$.

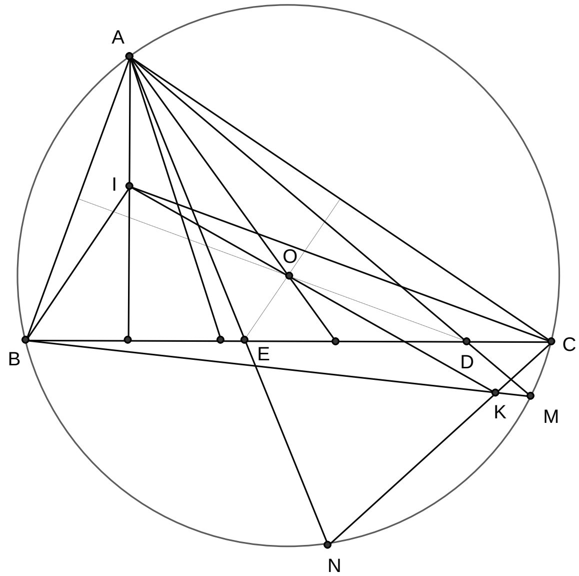


* **Phân tích**. Ta thấy giả thiết của bài toán không quá phức tạp nhưng các yếu tố rời rạc trong hình cũng như việc dựng hình phức tạp có thể khiến ta khó tìm ra lời giải. Thực ra, bài toán này phát triển từ định lí "*đường tròn Euler tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp*". Các vấn đề bị che lấp là:

- Trung điểm của đoạn OH chính là tâm đường tròn Euler.
- Giao điểm P chính là tiếp điểm của đường tròn Euler với đường tròn nội tiếp nên tất nhiên nó sẽ thuộc đường tròn Euler.
- Đường tròn Euler đi qua trung điểm các cạnh nên nếu gọi Q là trung điểm BC thì MNPQ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MPN} = \widehat{MQN}$.
- Do M, N, Q là trung điểm các cạnh nên $\widehat{BAC} = \widehat{MQN}$. Từ đó ta có lời giải của bài toán.

* Nếu chúng ta chưa quen lần mò theo con đường của người cho đề để tìm ra lời giải thì bài toán trên quả thật không đơn giản chút nào, bất kể là chúng ta có năng khiếu HHP hay không. Chẳng hạn bạn là người cho đề, bạn có sẵn một bài toán *chứng minh các điểm M, N, P nào đó cùng nằm trên đường thẳng d*, bạn muốn bài toán này khó hơn và bạn sẽ rất dễ dàng nghĩ ra rằng *nếu A là một điểm nào đó nằm ngoài đường thẳng d thì trực tâm của 3 tam giác AMN, ANP, APM cũng thẳng hàng (cùng nằm trên đường thẳng qua A vuông góc với d)* và như thế, bạn cũng đã tích lũy được thêm một kinh nghiệm cho việc chứng minh 3 điểm thẳng hàng. Thử hỏi nếu là một người đi tìm lời giải bài toán thì việc nhìn ra cách chứng minh đó có dễ dàng không?

➢ VD13. ***Cho tam giác ABC nội tiếp trong (O) có A là góc lớn nhất. Trung trực của AB, AC cắt cạnh BC lần lượt tại D, E. Đường thẳng AD, AE cắt (O) lần lượt tại M, N. Gọi K là giao điểm của BM và CN; d là đường thẳng đối xứng với phân giác góc DAE qua phân giác góc BAC. Đường thẳng OK cắt d tại I. Chứng minh rằng:*** $\widehat{BIC} = \widehat{DOE}$.



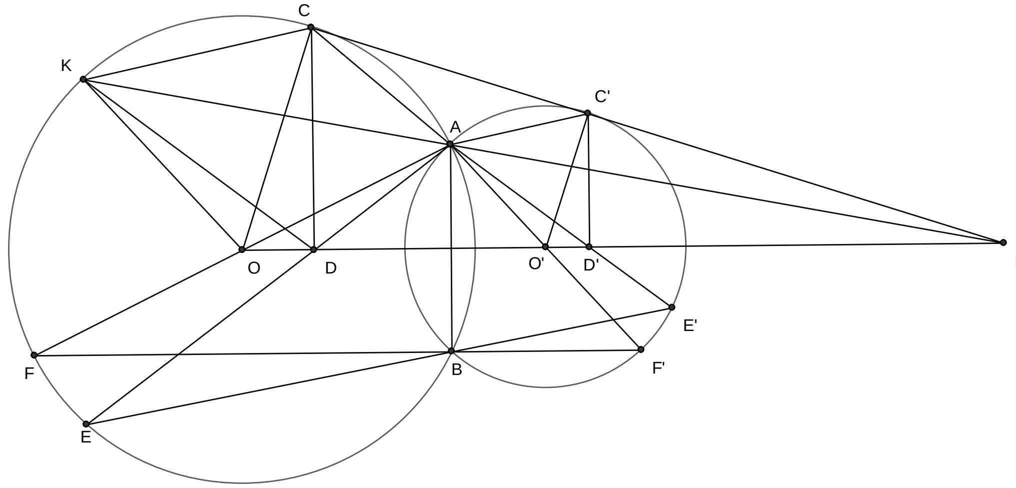
* **Phân tích.** Chắc chúng ta đã từng nghe đến bài toán sau: *"Cho tứ giác ABCD thỏa mãn: $\widehat{DAB} = \widehat{ABC} = \widehat{BCD}$. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua D"*.

Bài toán này là một bài toán khó nhưng nó hầu như đã quen thuộc với chúng ta với nhiều cách giải. Tưởng chừng bài toán này và VD trên không có liên hệ gì nhưng thực ra VD trên là một phát triển của bài toán vừa nêu với việc che lấp và bổ sung thêm hàng loạt vấn đề. Nếu chưa biết đến bài toán vừa nêu thì VD này quả là một bài toán rất khó. Chúng ta thử chứng minh xem tứ giác ABKC trong hình vẽ có tính chất ba góc bằng nhau không, rõ ràng điều đó là đúng. Khi đó đưa kết quả trên vào thì đường thẳng Euler của tam giác ABC đi qua K hay ngược lại OK sẽ đi qua trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng d trong đề bài thực chất là đường cao của tam giác ABC và I chính là trực tâm. Đây là các yếu tố đã bị che lấp đi, nếu chúng ta không tiến hành từng bước để khai thác giả thiết thì khó có thể thấy được điều này. Đến đây thì rõ ràng: BI // OE, CI // OD nên $\widehat{BIC} = \widehat{DOE}$ là đúng.

Vấn đề đã được giải quyết!

Ta sẽ phân tích thêm một VD nữa để thấy rõ vai trò của kinh nghiệm tích lũy được của bản thân trong việc giải các bài toán HHP.

➢ VD14. ***Cho hai đường tròn (O), (O') cắt nhau tại A và B. Gọi CC' là tiếp tuyến chung của hai đường tròn,*** $C \in (O), C' \in (O')$. ***Gọi D, D' lần lượt là hình chiếu của C, C' trên đường thẳng OO'. Giả sử AD cắt (O) tại E, AD' cắt (O') tại E'. Chứng minh: E, B, E' thẳng hàng.***



*** <u>Phân tích.</u>** Đây là một bài toán hình học của kì thi HSG quốc gia và các lời giải của nó nói chung đều mang nhiều tính chất của phép vị tự. Đáp án của Bộ GD – ĐT đưa ra cũng là một lời ngắn gọn và đẹp. Dù vậy, nếu các bạn đã nhiều lần giải các bài toán về hai đường tròn cắt nhau cùng với tiếp tuyến của nó thì sẽ nhiều kinh nghiệm về dạng này và sẽ có thể dùng kinh nghiệm đó như những bổ đề để giải bài toán này một cách ấn tượng hơn. Hãy suy nghĩ về cách giải sau:
Gọi F, F' lần lượt là giao điểm khác A của các đường thẳng AO với (O), AO' với (O').

Do AF, AF' lần lượt là đường kính của các đường tròn (O), (O') tương ứng nên: $\widehat{ABF} = \widehat{ABF'} = 90^0$
$\Rightarrow$ F, B, F' thẳng hàng. Gọi R, R' lần lượt là bán kính của hai đường tròn (O), (O').

Ta sẽ chứng minh rằng: $\widehat{O'AD'} = \widehat{OAD}$ (*)

Thật vậy: Gọi I là giao điểm của CC' với OO' và K là giao điểm của IA với (O). Dễ dàng thấy rằng I chính là tâm vị tự của hai đường tròn. Do đó: $\frac{IO'}{IO} = \frac{R'}{R} = \frac{O'A}{OK} = \frac{IA}{IK} = \frac{IC'}{IC} = \frac{ID'}{ID}$.

Suy ra: AD' // KD hay $\widehat{IAD'} = \widehat{IKD}$.

Ta cũng có: AC' // KC $\Rightarrow \widehat{IAC'} = \widehat{IKC} = \widehat{ICA} \Rightarrow \Delta IAC' \sim \Delta ICA \Rightarrow \frac{IA}{IC} = \frac{IC'}{IA} \Rightarrow IA^2 = IC.IC'$

Tứ giác CC'D'O nội tiếp nên: $IC.IC' = ID'.IO \Rightarrow IA^2 = ID'.IO \Rightarrow \frac{IA}{ID'} = \frac{IO}{IA} \Rightarrow \Delta IAD' \sim \Delta IOA$

Do đó: $\widehat{IAD'} = \widehat{IOA}$, mà $\widehat{IAD'} = \widehat{IKD}$ nên: $\widehat{IKD} = \widehat{IOA} \Rightarrow$ Tứ giác ADOK nội tiếp.

Ta có được: $\widehat{OAD} = \widehat{OKD}$. Hơn nữa: OK // O'A, DK // D'A nên: $\widehat{O'AD'} = \widehat{OKD}$.

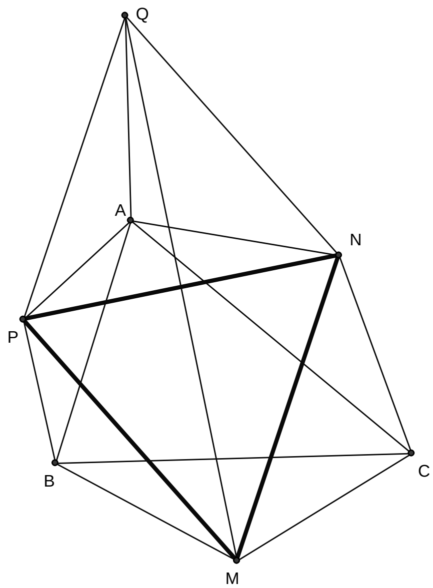
Suy ra: $\widehat{O'AD'} = \widehat{OAD}$, (*) được chứng minh.
Áp dụng vào bài toán, theo tính chất của góc nội tiếp:

$\widehat{OAD} = \widehat{FBE}, \quad \widehat{O'AD'} = \widehat{F'BE'} \Rightarrow \widehat{FBE} = \widehat{F'BE'}$.

Mà F, B, F' thẳng hàng nên theo tính chất của góc đối đỉnh, ta cũng có E, B, E' thẳng hàng.
Ta có đpcm.
* Bên cạnh đó, ta cũng cần phải nhắc đến một số công cụ gọi là "*cao cấp*" để giải các bài toán HHP như: *góc định hướng, độ dài đại số, tích có hướng và diện tích đại số, phương tích và trục đẳng phương, hàng điểm điều hòa, cực và đối cực, phép nghịch đảo và đồng dạng, định lí Carno, Michael,* ...Cũng tương tự như những điều gọi là kinh nghiệm hay bổ đề ở trên, những công cụ này có thể giúp ta giải quyết nhanh gọn và dễ dàng nhiều bài toán khó mà nếu sử dụng công cụ thông thường thì lời giải sẽ dài dòng và phức tạp; có nhiều khi ta không đủ khả năng nhìn ra một lời giải kiểu như thế. Thế nhưng, muốn áp dụng định lí nào đó vào việc giải một bài toán quả là điều không đơn giản khi mà số lượng định lí có sẵn tương đối lớn và càng khó khăn hơn khi đặc trưng của định lí đó chưa thể hiện ở bất cứ mặt nào của bài toán, chúng ta phải lần mò theo giả thiết để đặt ra các yêu cầu cần có nhằm đi đến kết luận và có thể bất chợt một định lí nào đó sẽ xuất hiện hỗ trợ cho ta.

➢ ***<u>VD15</u>. Cho tam giác ABC. Dựng phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều và gọi M, N, P là tâm của chúng. Chứng minh rằng: tam giác MNP đều.***

* Ta thấy đây là nội dung của định lí Napoléon với cách chứng minh quen thuộc là dựng thêm các đường tròn ngoại tiếp các tam giác đều đã có rồi gọi tên giao điểm của chúng.
Sau đây, ta sẽ cùng xem 2 cách chứng minh khác nữa và đưa ra nhận xét so sánh:
<u>Cách 1</u>. (*sử dụng phương pháp thông thường*):



Dựng điểm Q khác phía M so với NP sao cho: $\widehat{QPA} = \widehat{MPB}$ và PQ = MQ. Ta có:

$$\Delta APQ = \Delta BPM\,(c.g.c) \Rightarrow \widehat{PAQ} = \widehat{MBP} = \widehat{ABC} + 60, AQ = BM = CM$$

Do đó:

$$\widehat{NAQ} = 360^0 - (\widehat{PAQ} + \widehat{PAN}) =$$

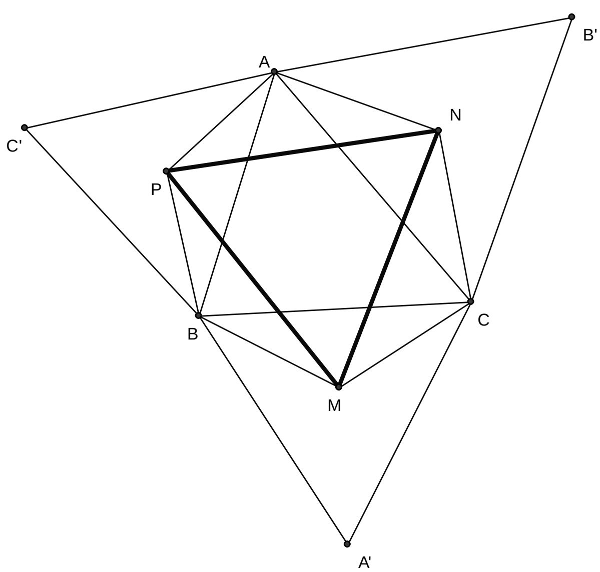
$$= 360^0 - (\widehat{ABC} + 60^0 + \widehat{CAB} + 60^0) = \widehat{ACB} + 60^0 = \widehat{MCN}$$

Suy ra: $\Delta AQN = \Delta CMN(c.g.c) \Rightarrow NQ = NM$. Mà PQ = PM do $\Delta APQ = \Delta BPM$ nên PN là trung trực của MQ, tức là M, Q đối xứng nhau qua PN hay: $\widehat{QPN} = \widehat{MPN}, \widehat{QNP} = \widehat{MNP}$. Mà $\widehat{QPM} = \widehat{APM} + \widehat{QPA} = \widehat{APM} + \widehat{MPB} = \widehat{APB} = 120^0$.

Tương tự: $\widehat{QNM} = 120^0$. Từ đó, ta được:

$\widehat{MPN} = \widehat{MNP} = \dfrac{120^0}{2} = 60^0$ hay tam giác MNP đều.

<u>Cách 2</u>. (*sử dụng phép quay vectơ*).



Gọi A’, B’, C’ là đỉnh của các tam giác đều tương ứng dựng trên các đoạn BC, CA, AB.

Vì các điểm M, N lần lượt là trọng tâm của $\Delta BCA', \Delta CAB'$ nên: $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'}\right)$

Tương tự: $\overrightarrow{MP} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{CA}\right)$.

Xét phép quay vectơ góc quay là $\pi/3$, ta có:

$$Q_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{MN}) = \frac{1}{3} Q_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CB'}) =$$

$$\frac{1}{3}\left[Q_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{BA}) + Q_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{A'C}) + Q_{\frac{\pi}{3}}(\overrightarrow{CB'})\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{MP}$$

Suy ra tam giác MNP đều.

* Ta thấy rằng phép quay vectơ sử dụng trong bài toán đã giúp hạn chế nhiều lập luận hình học phức tạp và cho ta một lời giải hết sức nhẹ nhàng, vấn đề là chúng ta phải biết căn cứ vào các đặc trưng của bài toán để vận dụng cho phù hợp và chính xác. Nói chung ba công cụ sau: *vectơ (tương ứng với đoạn thẳng), góc định hướng (tương ứng với góc), diện tích đại số và tích ngoài (tương ứng với diện tích)* là ba công cụ mạnh, phát triển từ các yếu tố hình học cơ bản. Chúng ta nên tìm hiểu thêm về chúng để có thêm được những sự trợ giúp rất tốt khi đứng trước một bài toán HHP nào đó mà các phương pháp hình học thuần túy khác dường như đã không còn tác dụng nữa.

Tiếp tục nói về việc nghiên cứu ra các bài toán HHP mới, chúng ta thấy một điều rằng: muốn tự nghĩ ra một bài HHP hoàn toàn độc lập với các bài đã có quả là chuyện không đơn giản; ta vẫn có thể sử dụng những sự tương tự giữa các yếu tố đường và điểm tạo ra các bài toán độc đáo.

* Chẳng hạn như trong bài toán trên, các bạn có thể tự hỏi nếu như không dựng các tam giác đều phía ngoài tam giác mà dựng về phía ngược lại thì kết quả trên sẽ ra sao, định lí có còn đúng hay không. Vẫn còn nhiều VD về những phát hiện này như:

- *Tam giác có 2 đường trung tuyến, đường cao bằng nhau là tam giác cân; vậy phân giác thì sao?*
- *Giao điểm các đường chia ba phía trong các góc của một tam giác là một tam giác là tam giác đều (định lí Moocley); vậy thì chia ba phía ngoài thì sao?*
- *Ta có bài toán quen thuộc là: "Cho tam giác ABC nội tiếp (O), có trọng tâm G. Giả sử các tia GA, GB, GC cắt (O) lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng: $GA+GB+GC \le GA'+GB'+GC'$"; vậy thì nếu thay G bởi trực tâm hay tâm đường tròn nội tiếp thì sao?*
- *Quỹ tích trực tâm H của tam giác ABC có BC cố định và $\widehat{BAC}$ không đổi là đường tròn, của trọng tâm G cũng là đường tròn; vậy của tâm đường tròn nội tiếp là gì?*
- *Nếu biết được trung điểm các cạnh có thể dựng được các đỉnh tam giác, biết được chân đường cao có thể dựng được các đỉnh tam giác; vậy nếu biết chân các đường phân giác thì có dựng được không và dựng như thế nào?*

Chẳng hạn từ vấn đề cuối vừa nêu ở trên, chúng ta có được một bài toán sau:

"Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O có các phân giác AD, BE, CF đồng qui ở I. Gọi x, y, z lần lượt là các tiếp tuyến của (O) song song với các đoạn thẳng EF, FD, DE. Giả sử x cắt y tại P, y cắt z tại M, z cắt x tại N. Gọi H, K, L là chân đường phân giác kẻ từ góc M, N, P của tam giác MNP. Chứng minh rằng:

a/ Các đoạn thẳng MD, NE, PF đồng qui. Gọi điểm đó là R.

b/ Các đoạn thẳng HD, KE, LF đồng qui. Gọi điểm đó là S.

c/ Ba điểm R, S, O thẳng hàng. Gọi đường thẳng qua các điểm này là d.

d/ Đường thẳng d đi qua tâm đường tròn nội tiếp của bốn tam giác ABC, DEF, MNP và HKL."

Còn rất nhiều điều rất gần gũi, quen thuộc mà chúng ta chưa tìm hiểu nhiều về chúng để có thể phát hiện thêm những sự thú vị cũng như rèn luyện cho mình kĩ năng giải toán HHP. Tại sao chúng ta không thử bắt đầu ngay với 1 bài HHP đơn giản nào đó để đi tìm đến những điều thú vị?

* **Tóm lại:** *Muốn học tốt ở môn HHP, chúng ta cần phải có một quá trình rèn luyện đầy đủ cùng với một cách học tập phù hợp. Chúng ta nên rèn luyện tư duy hình học của mình từ nhiều dạng toán và nên tập trung vào các công cụ chính; đừng đi quá sâu vào một phương pháp, một công cụ hỗ trợ đặc biệt nào đó. Ta học thật nhiều định lí, bổ đề nhưng khi cần chúng ta không thể nào nhớ hết chúng và không biết lựa chọn công cụ nào cho phù hợp để giải quyết. Chúng ta cũng nên biết rằng các bài toán HHP trong các kì thi thường không giải dựa trên một bổ đề, định lí khó nào đó để đánh giá kĩ năng nhớ, thuộc bài mà chỉ dùng các công cụ thông thường, quen thuộc để có thể đánh giá được khả năng tư duy, lập luận của học sinh. Hãy trang bị cho mình những thứ cần thiết để có thể đối đầu với các bài toán HHP khó khăn ở phía trước; tất nhiên, một hành trang tốt là một hành trang đầy đủ và gọn gàng, có thể sử dụng được trong nhiều tình huống chứ không phải một hành trang quá cồng kềnh, quá phức tạp để khi cần dùng một thứ nào đó không biết tìm kiếm ở đâu...*

Chúc các bạn có thể rèn luyện tốt và thành công ở bộ môn HHP thật thú vị và hấp dẫn này!

III) Các bài toán rèn luyện.

Sau đây xin mời các bạn hãy tham khảo thử 16 bài toán trong kì thi chọn đội tuyển quốc gia của Việt Nam dự thi IMO dưới đây và hãy thử vận dụng các hướng vừa rồi để tìm cách giải quyết chúng. Đây đều là các bài toán rất hay và cũng rất khó! (Các bài toán được sắp xếp từ dễ đến khó).

Bài 1: Hai đường tròn (C_1) và (C_2) cắt nhau tại hai điểm P và Q. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn gần P hơn Q tiếp xúc với (C_1) tại A và tiếp xúc với (C_2) tại B. Các tiếp tuyến của (C_1), (C_2) kẻ từ P cắt đường tròn kia lần lượt tại E và F, (E, F khác P). Gọi H, K lần lượt là các điểm nằm trên các đường thẳng AF, BE sao cho AH = AP và BK = BP. Chứng minh rằng năm điểm A, H, Q, K, B cùng thuộc một đường tròn.

(*Đề TST 2000*)

Bài 2: Trên các cạnh của tam giác ABC lấy các điểm M_1, N_1, P_1 sao cho các đoạn MM_1, NN_1, PP_1 chia đôi chu vi tam giác, trong đó M, N, P lần lượt là trung điểm của các đoạn BC, CA, AB.
Chứng minh rằng:

1. Các đường thẳng MM_1, NN_1, PP_1 đồng quy tại một điểm. Gọi điểm đó là K.
2. Trong các tỉ số $\frac{KA}{BC}$, $\frac{KB}{CA}$, $\frac{KC}{AB}$ có ít nhất một tỉ số không nhỏ hơn $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(*Đề TST 2003*)

Bài 3: Cho tam giác ABC có H là trực tâm. Đường phân giác ngoài của góc BHC cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. Đường phân giác trong của góc BAC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE tại điểm K. Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua trung điểm của đoạn BC.

(*Đề TST 2006*)

Bài 4: Trong mặt phẳng cho góc xOy. Gọi M, N lần lượt là hai điểm lần lượt nằm trên các tia Ox, Oy. Gọi d là đường phân giác góc ngoài của góc xOy và I là giao điểm của trung trực MN với đường thẳng d. Gọi P, Q là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng d sao cho IM = IN = IP = IQ, giả sử K là giao điểm của MQ và NP.

1. Chứng minh rằng K nằm trên một đường thẳng cố định.
2. Gọi d_1 là đường thẳng vuông góc với IM tại M và d_2 là đường thẳng vuông góc với IN tại N. Giả sử các đường thẳng d_1, d_2 cắt đường thẳng d tại E, F. Chứng minh rằng các đường thẳng EN, FM và OK đồng quy.

(*Đề TST 2006*)

Bài 5: Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi A_1, B_1, C_1 và A_2, B_2, C_2 lần lượt là các chân đường cao của tam giác ABC hạ từ các đỉnh A, B, C và các điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là các giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_2C_2, BC_2A_2, CA_2B_2 với đường tròn (O).
Chứng minh rằng: A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 đồng quy.

(*Đề TST 2009*)

Bài 6: Trong mặt phẳng cho hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm A, B. Gọi PT là một trong hai tiếp tuyến chung của hai đường tròn trong đó P, T là các tiếp điểm. Tiếp tuyến tại P và T của đường tròn ngoại tiếp tam giác APT cắt nhau tại S. Gọi H là điểm đối xứng với B qua đường thẳng PT. Chứng minh rằng các điểm A, S, H thẳng hàng.

(*Đề TST 2001*)

Bài 7: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn Γ. Một đường tròn θ tiếp xúc với các cạnh AB, AC và tiếp xúc trong với đường tròn Γ lần lượt tại các điểm M_1, N_1, P_1. Các điểm M_2, N_2, P_2 và M_3, N_3, P_3 xác định một cách tương tự. Chứng minh rằng các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

(*Đề TST 1999*)

Bài 8: Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là ảnh của các điểm A, B, C qua phép đối xứng tâm M.

1. Chứng minh rằng tồn tại duy nhất một điểm điểm P trong mặt phẳng cách đều hai đầu mút của các đoạn thẳng AB', BC', CA'.
2. Gọi D là trung điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng khi M thay đổi trong tam giác ABC và không trùng với D thì đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP, trong đó N là giao điểm của DM và AP, luôn đi qua một điểm cố định.

(*Đề TST 1995*)

Bài 9: Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A và B. Các tiếp tuyến tại A, B của đường tròn (O_1) cắt nhau tại K. Xét một điểm M không trùng với A, B nằm trên đường tròn (O_1). Gọi P là giao điểm thứ hai của đường thẳng MA với đường tròn (O_2). Gọi C là giao điểm thứ hai của đường thẳng MK với đường tròn (O_1). Gọi Q là giao điểm thứ hai của đường thẳng CA với đường tròn (O_2). Chứng minh rằng:

1. Trung điểm của đoạn thẳng PQ nằm trên đường thẳng MC.
2. Đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên (O_1).

(*Đề TST 2004*)

Bài 10: Cho tam giác ABC có O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi H, K, L lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC. Gọi A_0, B_0, C_0 lần lượt là trung điểm của các đường cao AH, BK, CL. Đường tròn nội tiếp tâm I của tam giác ABC tiếp xúc với các đoạn BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng $A_0D,\ B_0E,\ C_0F$ cùng đi qua một điểm và điểm đó nằm trên đường thẳng OI.

(*Đề TST 2003*)

Bài 11: Cho tam giác ABC là tam giác nhọn, không cân, nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Một đường thẳng d thay đổi sao cho d luôn vuông góc với OA và luôn cắt các tia AB, AC. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của đường thẳng d và các đoạn AB, AC. Giả sử các đường thẳng BN và CN cắt nhau tại K; giả sử đường thẳng AK cắt đường thẳng BC.

1. Gọi P là giao của đường thẳng AK và đường thẳng BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi.
2. Gọi H là trực tâm của tam giác AMN. Đặt BC = a và l là khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng HK. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua trực tâm của tam giác ABC.

   Từ đó suy ra: $l \le \sqrt{4R^2 - a^2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

(*Đề TST 2006*)

Bài 14: Cho đường tròn (O) đường kính AB và M là một điểm bất kì nằm trong (O), M không nằm trên đoạn thẳng AB. Gọi N là giao điểm của phân giác trong góc M của tam giác AMB với đường tròn (O). Đường phân giác ngoài góc $\widehat{AMB}$ cắt các đường thẳng NA, NB lần lượt tại P, Q. Đường thẳng MA cắt đường tròn đường kính NQ tại R, đường thẳng MB cắt đường tròn đường kính NP tại S và R, S khác M.

Chứng minh rằng: đường trung tuyến ứng với đỉnh N của tam giác NRS luôn đi qua một điểm cố định khi M di động phía trong đường tròn.

(*Đề TST 2009*)

Bài 12: Cho tam giác ABC có (I) và (O) lần lượt là các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của đường tròn (I) trên các cạnh BC, CA, AB. Gọi ω_A, ω_B, ω_C lần lượt là các đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn (I) và (O) lần lượt tại các điểm D, K (với đường tròn ω_A); tại E, M (với đường tròn ω_B) và tại F, N (với đường tròn ω_C). Chứng minh rằng:

1. Các đường thẳng DK, EM, FN đồng quy tại P.
2. Trực tâm của tam giác DEF nằm trên đoạn OP.

(*Đề TST 2005*)

Bài 13: Cho tam giác nhọn ABC với đường tròn tâm I nội tiếp. Gọi (K_a) là đường tròn đi qua A, AK_a vuông góc với BC và (K_a) tiếp xúc trong với (I) tại A_1. Các điểm B_1, C_1 xác định tương tự .

1/ Chứng minh: AA_1, BB_1, CC_1 đồng qui tại P.

2/ Gọi (J_a), (J_b), (J_c) tương ứng là các đường tròn đối xứng với các đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC qua trung điểm BC, AC, AB.

Chứng minh P là tâm đẳng phương của 3 đường tròn (J_a), (J_b), (J_c).

(*Đề TST 2007*)

Bài 15: Cho tam giác ABC có: $AB = c, BC = a, CA = b$. Lấy sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ phân biệt không trùng với A, B, C và các điểm A_1, A_2 thuộc đường thẳng BC, B_1, B_2 thuộc đường thẳng CA, các điểm C_1, C_2 thuộc đường thẳng AB. Gọi α, β, γ là các số thực xác định bởi

: $\overrightarrow{A_1A_2} = \dfrac{\alpha}{a}\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{B_1B_2} = \dfrac{\beta}{b}\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{C_1C_2} = \dfrac{\gamma}{c}\overrightarrow{AB}$.

Xét các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB_1C_1, AB_2C_2, BC_1A_1, BC_2A_2, CA_1B_1, CA_2B_2$ và gọi d_A, d_B, d_C lần lượt là các trục đẳng phương của cặp đường tròn đi qua A, B, C. Chứng minh rằng: d_A, d_B, d_C đồng quy khi và chỉ khi $a\alpha + b\beta + c\gamma \neq 0$.

(Đề TST 1995)

Bài 16: Cho k là một số thực. Cho tam giác ABC nhọn, không cân có O là tâm đường tròn ngoại tiếp và AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác. Trên các đường thẳng AD, BE, CF lần lượt lấy các điểm L, M, N sao cho $\dfrac{AL}{AD} = \dfrac{BM}{BE} = \dfrac{CN}{CF} = k$. Gọi ($O_1$), ($O_2$), ($O_3$) lần lượt là các đường tròn đi qua L, tiếp xúc với OA tại A ; đi qua M tiếp xúc với OB tại B và đi qua N tiếp xúc với OC tại C.

1. Chứng minh rằng với $k = \dfrac{1}{2}$, ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung.
2. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho ba đường tròn (O_1), (O_2), (O_3) có đúng hai điểm chung.

(*Đề TST 2008*)
