

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

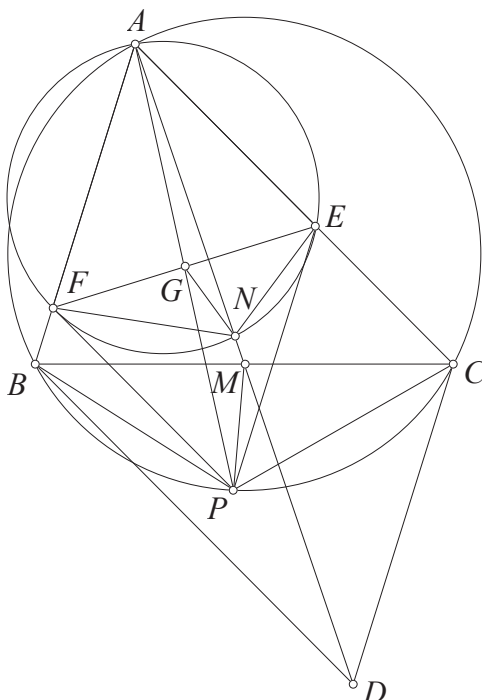
Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và trung tuyến AM . P nằm trên cung BC không chứa A của (O) . E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $PE \parallel AB, PF \parallel AC$. AM cắt (AEF) tại N khác A . Chứng minh rằng $AP^2 = 2AM \cdot AN$.

Lời giải

Lời giải gốc của tác giả dựa trên phép đồng dạng. Tuy nhiên lời giải sau của bạn **Huỳnh Bách Khoa** lớp 10 Toán, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận, trên [diễn đàn toán học](#) sơ cấp hơn, chúng tôi xin giới thiệu lời giải của bạn **Khoa**.



Dễ thấy AP cắt EF tại trung điểm G của mỗi đoạn. Ta có $\angle PBC = \angle PAC$ và $\angle PCB = \angle PAB = \angle APE$ nên hai tam giác PBC và EAP đồng dạng, lại có trung tuyến tương ứng là PM, EG nên $\angle PMB = \angle EGA$. Gọi D đối xứng A qua M thì $ABDC$ là hình bình hành. Ta có $\angle NFE = \angle NAE$ và $\angle NEF = \angle NAF = \angle NDC$. Từ đó hai tam giác NFE và CAD đồng dạng, lại có trung tuyến tương ứng là NG, CM

nên $\angle NGE = \angle CMD = \angle AMB$. Từ đó $\angle AGN = \angle AGE + \angle NGE = \angle PMB + \angle BMA = \angle PMA$. Vậy tứ giác $NGMP$ nội tiếp, ta suy ra $2AN \cdot AM = 2AG \cdot AP = AP^2$.

Nhật xét

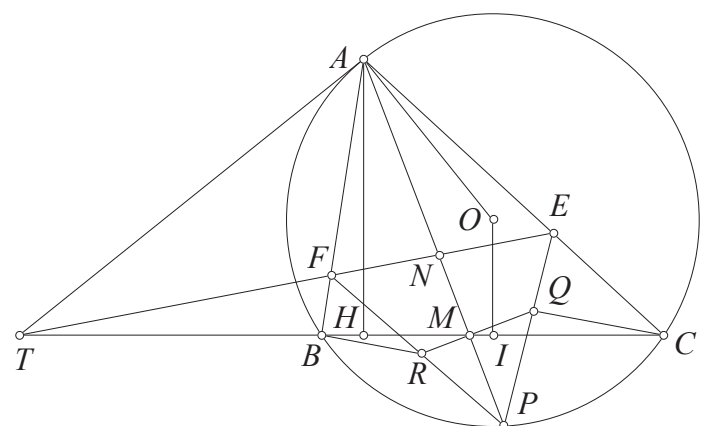
Bài toán là mở rộng của bài toán G4 trong IMO Shortlist 2015. Nếu M trùng N thì (AEF) đi qua trung điểm M của BC khi đó $AP^2 = 2AM^2$ chính là nội dung bài G4.

Ngoài bạn **Khoa** còn có các bạn, **Đỗ Trung Phương** lớp 10 Toán, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, **Nguyễn Tiến Long** lớp 10 toán, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, tham gia giải tại [đây](#). Tác giả còn nhận được lời giải qua email bởi bạn **Nguyễn Hưng Quang Khải** lớp 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên và bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN, Hà Nội. Bài toán còn được mở rộng hơn như sau

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . E, F, M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng CA, AB, BC, EF sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{NF}{NE}$. AN cắt (O) tại P khác A . (AEF) cắt (O) tại G khác F . GP cắt BC tại S . AS cắt EF tại T . Chứng minh rằng GT và AM cắt nhau trên (AEF) .

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có đường cao AH , I là trung điểm của BC . P là điểm thuộc cung BC không chứa A . AP cắt BC tại M . Lấy điểm N nằm trên AM sao cho $2\frac{NM}{NA} = \frac{MH}{IH}$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T . TN lần lượt cắt CA, AB tại E, F . Đường thẳng qua M vuông góc với AP cắt PE, PF lần lượt tại Q, R . Chứng minh rằng $CQ \parallel BR$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.