TỔNG QUÁT HÓA ĐƯỜNG THẲNG DROZ FARNY

Trần Quang Hùng, THPT chuyên KHTN, Hà Nội

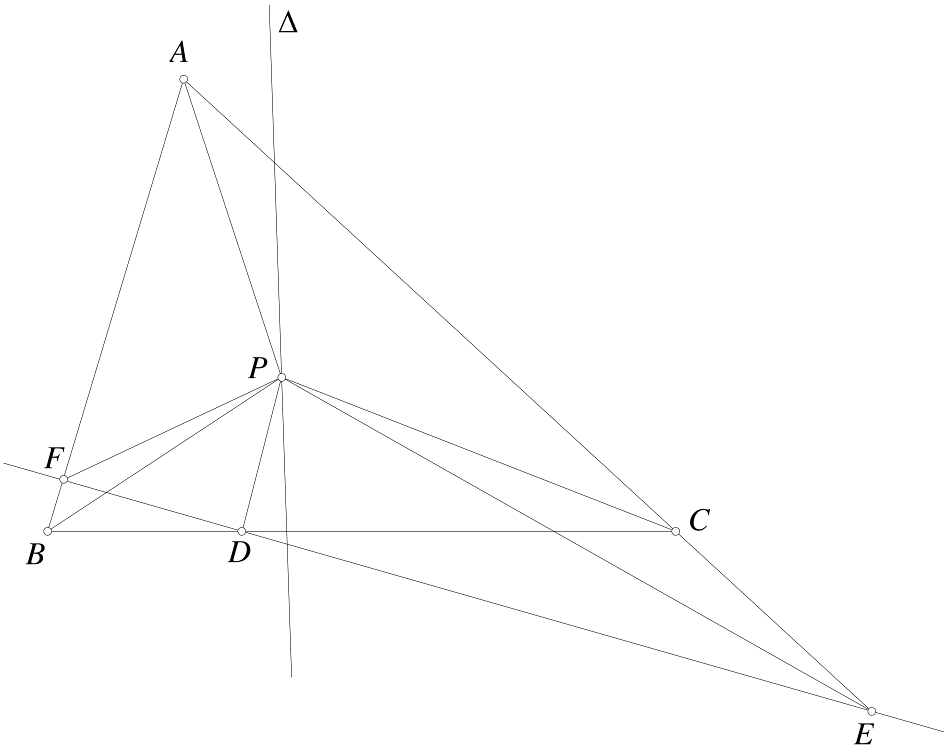
TÓM TẮT

Hai đường thẳng vuông góc với nhau tại trực tâm của tam giác sẽ chắn trên ba cạnh tam giác ba đoạn thẳng mà trung điểm của chúng thẳng hàng. Đó là nội dung một định lý rất nổi tiếng có tên là Droz-Farny. Bài viết này đưa ra một hướng tổng quát cho bài toán đường thẳng Droz-Farny cùng với lời giải sử dụng phép nghịch đảo và một lời giải khác sử dụng tính chất chùm điều hòa.

Định lý lần đầu tiên được đề nghị bởi Arnold Droz năm 1899 trong [1]. Các lời giải sử dụng lượng giác, phương pháp tọa độ hoặc vector lần lượt được đưa ra trong [2,3,4,5,6]. Trong [7] trình bày một hướng tổng quát cho định lý này sử dụng các kiến thức về tỷ số kép và độ dài đại số. Trong [8] một định lý tổng quát khác được đề cập với lời giải sử dụng tính chất điểm Miquel và điểm đẳng giác. Bài viết này sẽ giới thiệu bài toán tổng quát giống trong [8] [1] với lời giải sử dụng phép nghịch đảo. Đồng thời bài viết cũng đề cập tới một bài toán tổng quát hơn nữa, với lời giải sử dụng thuần túy hình học xạ ảnh.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Đường thẳng Δ qua P. Các điểm D, E, F lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho PD, PE, PF lần lượt là đối xứng của PA, PB, PC qua Δ. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

[1] Tác giả tìm ra độc lập với [8]



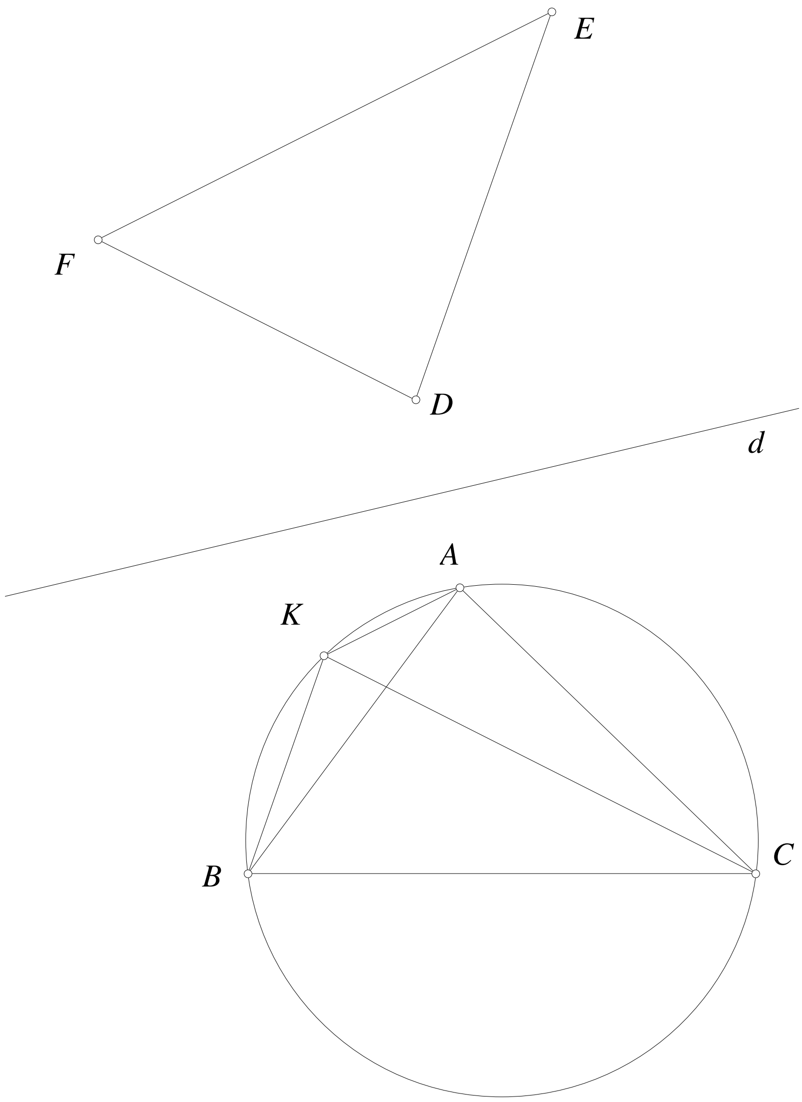
Hình 1.

Sử dụng phép nghịch đảo cực P phương tích bất kỳ ta chuyển bài toán trên về bài toán sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. Gọi $(K), (L), (N)$ lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC, PCA, PAB. D, E, F lần lượt thuộc $(K), (L), (N)$ sao cho PD, PE, PF lần lượt là đối xứng của PD, PE, PF qua Δ. Chứng minh rằng bốn điểm P, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Để giải bài toán trên ta cần một bổ đề sau

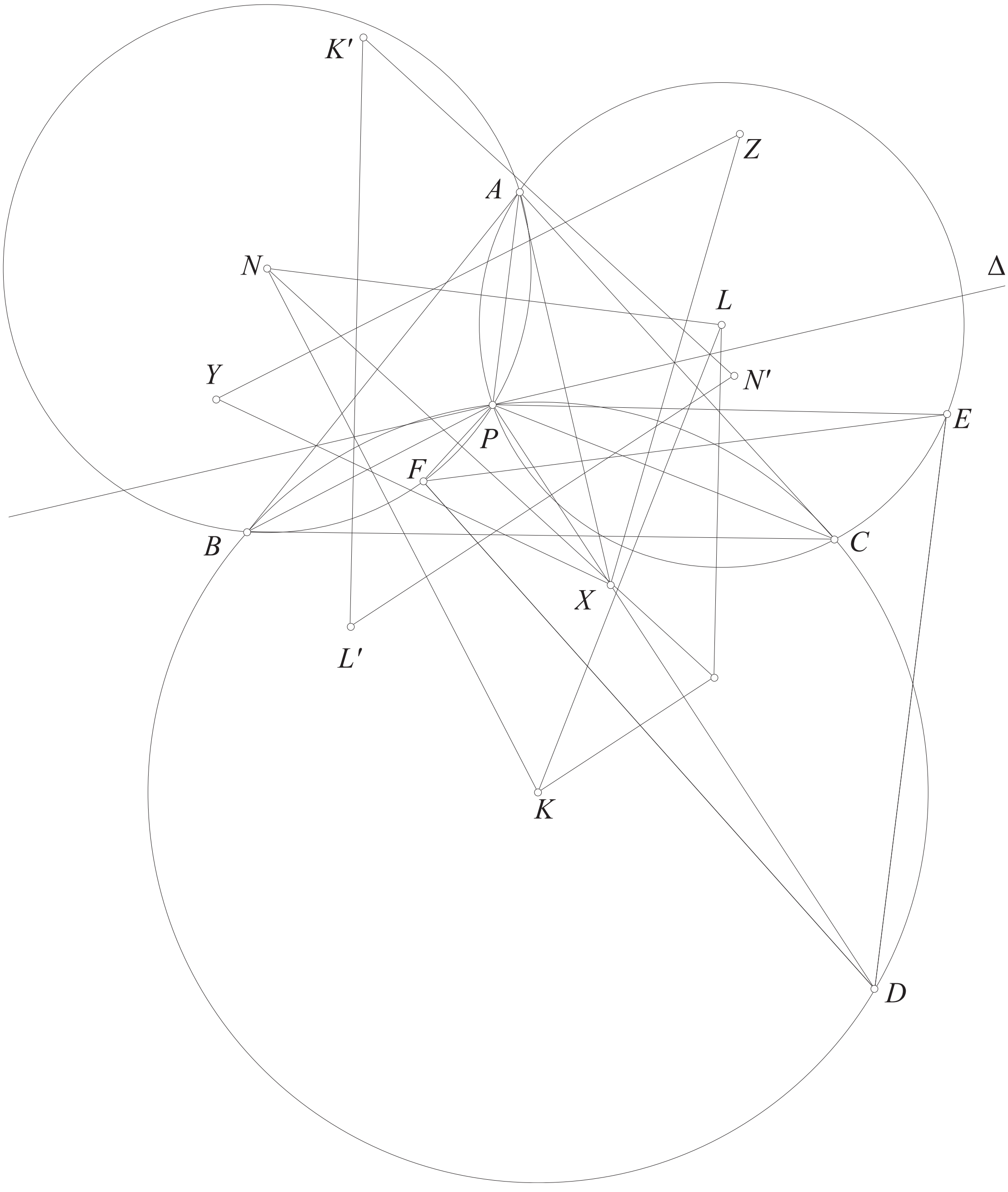
Bổ đề 2.1. Cho tam giác ABC và đường thẳng Δ bất kỳ. Tam giác DEF là đối xứng của tam giác ABC qua Δ, thì các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với EF, FD, DE đồng quy.



Hình 2.

Chứng minh. Gọi đường thẳng qua B, C lần lượt song song với FD, DE cắt nhau tại K. Ta có $(KB, KC) \equiv (FD, DE) \equiv (AB, AC)(\bmod \pi)$. Suy ra điểm K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta lại có $(KA, EF) \equiv (KA, KB) + (KB, EF) \equiv (CA, CB) + (DF, EF) \equiv (CA, CB) + (CB, CA) \equiv 0(\bmod \pi)$. Do đó $KA \parallel EF$. Vậy các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với EF, FD, DE đồng quy tại K. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Trở lại giải bài toán



Hình 3.

Lời giải bài toán. Ta gọi X, Y, Z lần lượt là điểm đối xứng với A, B, C qua Δ, theo giả thiết dễ thấy X, Y, Z thuộc PD, PE, PF. Gọi trung trực của PX, PY, PZ cắt nhau tương ứng tại thành tam giác $K'L'N'$. Ta dễ thấy tam giác $K'L'N'$ đối xứng tam giác KLN qua Δ.

Để chứng minh P, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn ta sẽ chứng minh rằng trung trực của PD, PE, PF đồng quy. Thật vậy, do PD là một dây cung của (K) nên trung trực của PD đi qua K. Do X thuộc PD nên trung trực PD song song với trung trực PX chính là $L'N'$, vậy trung trực PD là đường thẳng qua K song song $K'N'$. Tương tự trung trực PE, PF lần lượt là các đường thẳng qua L, N theo thứ tự song song với $N'K'$ và $K'L'$. Do tam giác KLN và $K'L'N'$ đối xứng nhau qua Δ nên theo bổ đề các trung trực này đồng quy. Vậy P, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Ta thấy rằng nếu kẻ một đường thẳng $\Delta' \perp \Delta$ thì chùm đường thẳng $(\Delta, \Delta', OA, OD)$ là một chùm điều hòa vì OA, OD đối xứng nhau qua Δ. Điều này gợi mở cho chúng ta một hướng tổng quát hơn nữa bài toán này thông qua khái niệm về chùm điều hòa mà bỏ qua tính chất đối xứng. Ta quy ước sử dụng các ký hiệu

$(XY, Z) = \dfrac{ZX}{ZY}$ chỉ tỷ số đơn của bộ ba điểm thẳng hàng X, Y, Z.

$(XY, ZT) = \dfrac{ZX}{ZT} : \dfrac{TX}{TY}$ chỉ tỷ số kép của bộ bốn điểm thẳng hàng hoặc đồng viên X, Y, Z, T.

$A(XY, ZT)$ chỉ tỷ số kép của bộ bốn tia (AX, AY, AZ, AT)

Với các độ dài sử dụng là độ dài đại số. Ta xét bài toán tổng quát hơn như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và P, K, L là các điểm bất kỳ. Giả sử có các điểm D, E, F lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho các chùm $P(KL, AD) = P(KL, BE) = P(KL, CF) = -1$. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

Ta thấy ngay rằng nếu $PK \perp PL$. Ta thu được bài toán ban đầu. Bài toán này phát biểu dưới dạng chùm điều hòa nên nó cũng có một lời giải thuần túy xạ ảnh. Ta cần một bổ đề sau

Bổ đề 3.1. Cho các điểm D, E, F, X, Y, Z, K, L cùng thuộc một đường thẳng thỏa mãn $(KL, DX) = (KL, EY) = (KL, FZ) = -1$. Chứng minh rằng tích $(EF, DX).(FD, EY).(DE, FZ) = -1$.

Chứng minh. Bài toán thực chất là các biến đổi độ dài đại số trên trục, để đơn giản ta sử dụng tọa độ trên trục. Cho $D(d), E(e), F(f), X(x), Y(y), Z(z), K(k), L(l)$.

Từ $(KL, DX) = -1$ suy ra $\dfrac{d-k}{d-l} : \dfrac{x-k}{x-l} = -1$ vậy $x = \dfrac{dl - 2kl + dk}{2d - k - l}$. Tương tự $y = \dfrac{el - 2kl + ek}{2e - k - l}, z = \dfrac{fl - 2kl + fk}{2f - k - l}$ (1).

Ta có $(EF, DX).(FD, EY).(DE, FZ)$

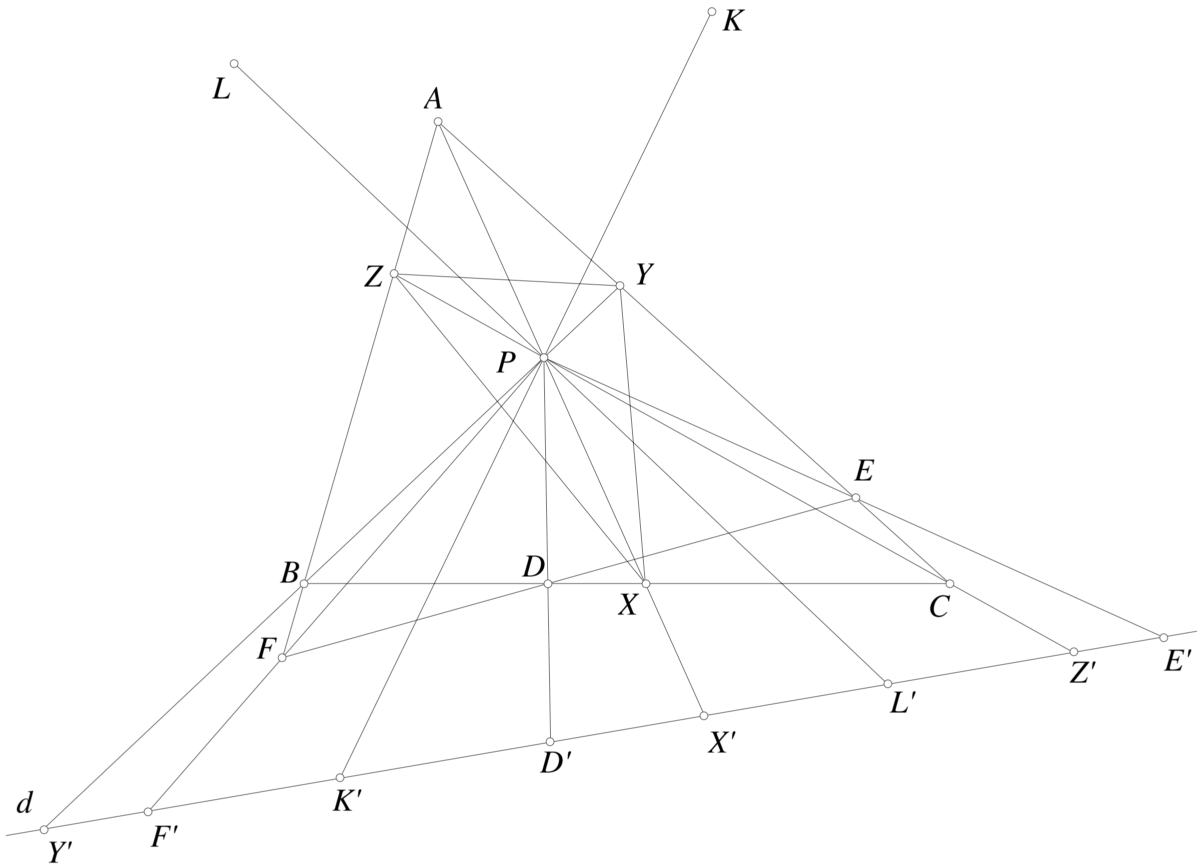
$$= \frac{(EF, D)}{(EF, X)} \cdot \frac{(FD, E)}{(FD, Y)} \cdot \frac{(DE, F)}{(DE, Z)}$$

$$= \frac{-1}{(EF, X).(FD, Y).(DE, Z)}$$

$$= -\frac{x-f}{x-e} \cdot \frac{y-d}{y-f} \cdot \frac{z-e}{z-d} \quad (2).$$

Thay biểu thức từ (1) vào (2) dễ kiểm tra được $(EF, DX).(FD, EY).(DE, FZ) = -1$. $\square$

Trở lại bài toán



Hình 4.

Lời giải bài toán. Gọi PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại X, Y, Z. Gọi d là một đường thẳng bất kỳ. Gọi $PA, PB, PC, PD, PE, PF, PK, PL$ lần lượt cắt d tại D', E', F', X', Y', Z', K', L'. Từ giả thiết $P(KL, AD) = P(KL, BE) = P(KL, CF) = -1$, chiếu xuyên tâm P lên d ta có $(K'L', X'D') = (K'L', Y'E') = (K'L', C'F') = -1$.

Áp dụng bổ đề ta suy ra $(E'F', D'X').(F'D', E'Y').(D'E', F'Z') = -1 \quad (1)$.

Sử dụng phép chiếu xuyên tâm P lần lượt các đường thẳng BC, CA, AB thì ta thu được

$P(E'F', D'X') = (BC, DX) = \dfrac{(BC, D)}{(BC, X)}$, $P(F'D', E'Y') = (CA, EY) = \dfrac{(CA, E)}{(CA, Y)}$, $P(D'E', F'Z') = (AB, FZ) = \dfrac{(AB, F)}{(AB, Z)} \quad (2)$.

Vì AX, BY, CZ đồng quy tại P nên theo định lý Ceva $(BC, X).(CA, Y).(AB, Z) = -1 \quad (3)$.

Từ (1),(2),(3) ta suy ra

$-1 = (E'F', D'X').(F'D', E'Y').(D'E', F'Z')$

$= P(E'F', D'X').P(F'D', E'Y').P(D'E', F'Z')$

$= \dfrac{(BC, D)}{(BC, X)}.\dfrac{(CA, E)}{(CA, Y)}.\dfrac{(AB, F)}{(AB, Z)}$

$= -(BC, D).(CA, E).(AB, F).$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC dễ suy ra D, E, F thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Cuối bài viết, tác giả xin được nói lời cảm ơn tới **TS. Nguyễn Minh Hà** người đã cho tác giả một số ý tưởng về lời giải nghịch đảo của bài toán tổng quát này.

Tài liệu

[1] A. Droz-Farny, Question 14111, Ed. Times 71 (1899) 89-90.

[2] J. L. Ayme, Forum Geom., Vol 4, (2004), pp 219-224.

[3] F. M. van Lamoen, Hyacinthor messages 6140, 6144, December 11,2002.

[4] D. Grinberg, Hyacinthor messages 9854, July 23, 2003.

[5] M. Stevanovié, Hyacinthor messages 9130, January 25, 2004.

[6] C. Pohoata and S.H. Ta, A Short Proof of Lamoen's Generalization of the Droz-Farny Line Theorem, Mathematical reflections 2006.

[7] N.M. Ha and L.T. Vinh, Purely synthetic proof of the Generalized Droz-Farny Theorem, Global journal of advanced research on classical and modern geometries.

[8] T. Andreescu and C. Pohoata, Back to Euclidean: Droz-Farny Demystified, Mathematical reflections 2012.

[9] Roger A. Johnson, Advanced Euclidean Geomerty, Dover Publications, Inc., N.Y. (1960).