Hai bài hình học thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN 2015

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung
Bài viết sẽ giải và phân tích hai bài hình học thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN 2015.

Thông thường bài thi phần hình học hay là bài toán phân loại được học sinh và đề bài có ý nghĩa. Các câu trong đề liên quan chặt chẽ tới nhau, câu trước gợi ý cho câu sau và nếu chỉ dùng một câu cuối cùng thì bài toán trở thành đẹp có ý tưởng. Chúng ta hãy cùng đi sâu vào hai bài thi năm nay

1 Bài hình học ngày thứ nhất

Để thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN 2015 vòng 1 có bài hình học như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. AI cắt BC tại D. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của D qua IC, IB.

a) Chứng minh rằng EF song song với BC.

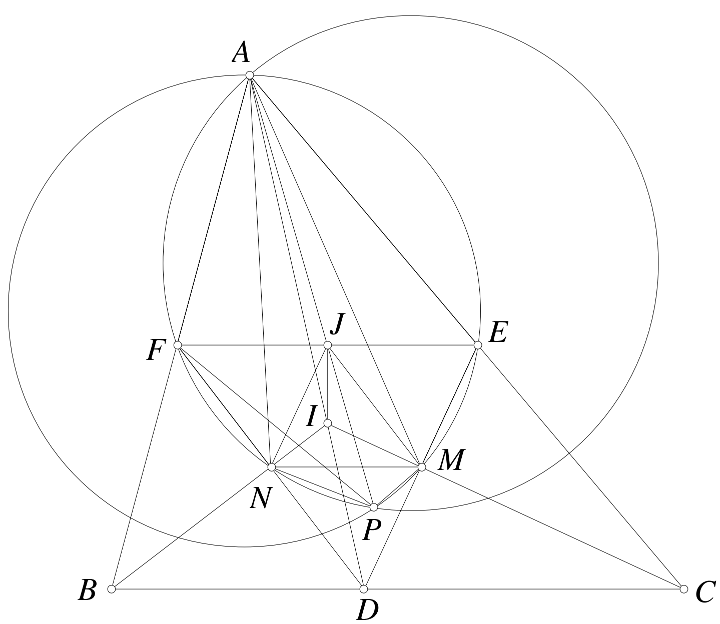
b) Gọi M, N, J lần lượt là trung điểm của DE, DF, EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM và AFN cắt nhau tại P khác A. Chứng minh rằng bốn điểm P, M, J, N cùng thuộc một đường tròn.

c) Chứng minh rằng ba điểm A, J, P thẳng hàng.

Bài toán này là kết quả có ý nghĩa, nếu bỏ đi các phần gợi ý, bài toán có thể phát biểu như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. AI cắt BC tại D. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của D qua IC, IB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của DE, DF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM và AFN cắt nhau tại P khác A. Chứng minh rằng AP chia đôi BC.

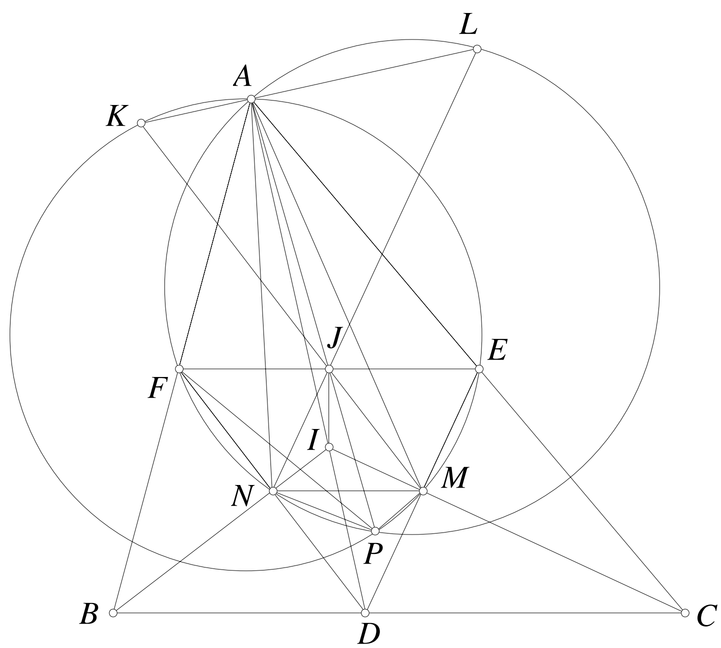
Lời giải đi theo hướng của bài toán hẳn nhiên là một lời giải thuần túy hình học chỉ dùng kiến thức lớp 9



Hình 1.

Lời giải 1. Theo tính chất đối xứng của phân giác dễ thấy E, F lần lượt thuộc CA, AB. Từ đó theo tính chất phân giác $\dfrac{BF}{BA} = \dfrac{BD}{BA} = \dfrac{CD}{CA} = \dfrac{CE}{CA}$ vậy $EF \parallel BC$. Gọi J là trung điểm EF ta có $\angle MPN = \angle MPA + \angle NPA = \angle MEC + \angle NFB = \angle MDC + \angle NDB = 180^\circ - \angle MDN = 180^\circ - \angle MJN$, suy ra tứ giác $MJNP$ nội tiếp. Từ đó $\angle MPJ = \angle MNJ = \angle MEJ = \angle EDC = \angle DEC = \angle MPA$ suy ra AP chia đôi EF mà $EF \parallel BC$ nên AP chia đôi BC. □

Nhận xét. Đây có thể hiểu là một bài toán trục đẳng phương chia đôi đoạn thẳng. Tuy nhiên lời giải trên hoàn toàn không để cập tới khái niệm trục đẳng phương mà chỉ cần biến đổi góc. Nếu sử dụng ý tưởng về trục đẳng phương ta sẽ đề xuất lời giải thứ 2 như sau



Hình 2.

Lời giải 2. Gọi J là trung điểm EF. Gọi MJ, NJ cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và AFN tại K, L khác M, N. Ta thấy $\angle KAL = \angle NAL + \angle MAK - \angle BAC = 180^\circ - \angle FNL + 180^\circ - \angle EMK - \angle BAC = 360^\circ - 2\angle EDF - \angle BAC = 360^\circ - 2(180^\circ - \angle BIC) - \angle BAC = 2(90^\circ + \dfrac{\angle ABC}{2}) - \angle BAC = 180^\circ$. Từ đó K, A, L thẳng hàng. Vậy $\angle KLN = \angle ALN = \angle BFD = \angle BDF = \angle EFD = \angle JMN$. Từ đó tứ giác $MNKL$ nội tiếp vậy J thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM và AFN hay AP đi qua J vậy AP chia đôi BC. □

Nhận xét. Bài toán này là một bài toán chia đôi đoạn thẳng thú vị. Nếu sử dụng biến hình vị tự các bạn có thể làm tiếp bài ứng dụng sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. IA cắt BC tại D. E, F là hình chiếu của D lên IC, IB. AE cắt phân giác ngoài ở đỉnh C tại M. AF cắt phân giác ngoài ở đỉnh B tại N. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM và ABN chia đôi BC.

2 Bài hình học ngày thứ hai

Để thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN 2015 vòng 2 có bài hình học như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ và M là trung điểm BC. H là hình chiếu của B lên AM. Trên tia đối tia AM lấy điểm N sao cho $AN = 2MH$.

a) Chứng minh rằng $BN = AC$.

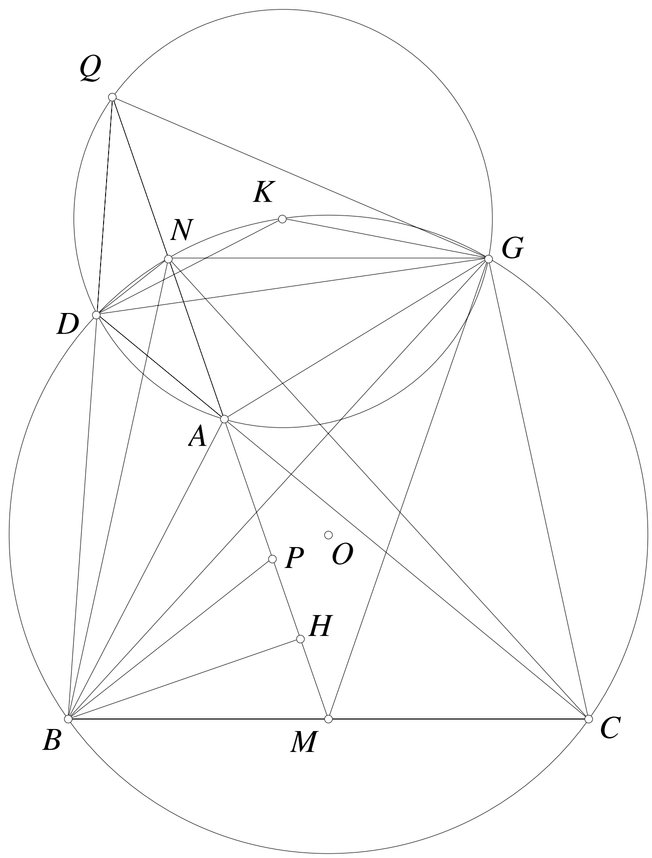
b) Gọi Q đối xứng với A qua N. Gọi AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng bốn điểm B, D, N, C cùng thuộc một đường tròn. Gọi đường tròn này là (O).

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQD cắt (O) tại G khác D. Chứng minh rằng NG song song với BC.

Bài toán là kết quả có ý nghĩa, nếu bỏ đi các phần gợi ý bài toán trở thành như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ và M là trung điểm BC. H là hình chiếu của B lên AM. Lấy điểm Q trên tia đối tia AM sao cho $AQ = 4MH$. AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Lời giải. Gọi N là trung điểm AQ. Gọi P đối xứng M qua H thì $BP = MB = MC$. Lại có $AN = 2MH = MP$ suy ra $NP = AM$. Lại có tam giác BPM cân tại B nên $\angle BPM = \angle BMP$ suy ra $\angle BPN = \angle AMC$. Từ đó suy ra hai tam giác BPN và CMA bằng nhau trường hợp c.g.c, từ đó $BN = AC$. Cũng từ hai tam giác BPN và CMA bằng nhau suy ra $\angle BNP = \angle MAC$ suy ra $\angle BNQ = \angle NAC$. Lại có $BN = AC$ và $QN = NA$. Từ đó hai tam giác NBQ và ACN bằng nhau c.g.c suy ra $\angle NBQ = \angle NCA$ suy ra tứ giác $BDNC$ nội tiếp đường tròn (O). Khi đó đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác ADQ cắt (O) tại G khác D. Ta có $\angle CAG = \angle BQG$ mà $\angle GBQ = \angle GCA$ suy ra $\triangle GBQ \sim \triangle GCA$, suy ra $\dfrac{GA}{AC} = \dfrac{GQ}{QB} =$ suy ra $\dfrac{GA}{NB} = \dfrac{GQ}{NC}$ mà $\angle BNC = \angle BDC = \angle AGQ$ suy ra $\triangle NBC \sim \triangle GAQ$ suy ra $\angle GQA = \angle NCB$ suy ra $\angle NCB = \angle GDC$ suy ra $GC = NB$ suy ra $NG \parallel BC$. Từ đó $\angle DKG = 2\angle DQG = 2\angle GAC = 2\angle GNM = \angle GNM + \angle BMN = \angle GNM + \angle BPM = \angle GNM + \angle DNM = \angle DNG$. Từ đó tứ giác $DNKG$ nội tiếp. $\square$



Hình 3.

Nhận xét. Kết quả đạt được trong bài toán đòi hỏi phải dựng được điểm N. Tuy nhiên ta cũng có thể chứng minh trực tiếp mà không cần dựng điểm G bằng cách biến đổi góc như sau

Ta có $\angle NKD = \angle NKA - \angle DKA = \dfrac{1}{2}\angle QKA - 2\angle DQA = \dfrac{1}{2}(360^\circ - 2\angle QDA) - 2\angle DQA = 180^\circ - \angle QDA - 2\angle DQA = \angle BDC - 2\angle ANC = \angle BNA - \angle ANC = \angle MAC - \angle ANC = \angle ACN$. Từ đó tứ giác $DNKC$ nội tiếp. Tuy vậy việc chỉ ra $NG \parallel BC$ sẽ dẫn tới nhiều hệ quả thú vị.

Ta lại để ý rằng, khác với nhiều bài toán khác trong bài toán này điều kiện $AB < AC$ là cần thiết để bài toán đúng. Điều kiện $AB < AC$ có thể diễn giải là tương đương với $\angle AMB < 90^\circ$ hay để cho H luôn nằm trên đoạn AM. Khi đó ta dễ dàng tính được đoạn $MH = \dfrac{AC^2 - AB^2}{2AM}$. Do đó ta đề xuất bài toán như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC với $AB < AC$ và M là trung điểm BC. Lấy điểm Q trên tia đối tia AM sao cho $2AQ.AM = AC^2 - AB^2$. Gọi AC cắt BQ tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Ta thử ứng dụng bài toán trên vào một vấn đề khác như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC với $AB < AC$, tâm nội tiếp I, tâm ngoại tiếp O, trung tuyến AM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC cắt CA tại N khác C. Lấy điểm Q trên đia đối tia AM sao cho $AQ.AM = CB.CN$. Gọi AC cắt BQ tại D. Giả sử I nằm trên đường tròn đường kính OA. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADQ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD.

Tài liệu

[1] Đề thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN năm 2015-2016

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com