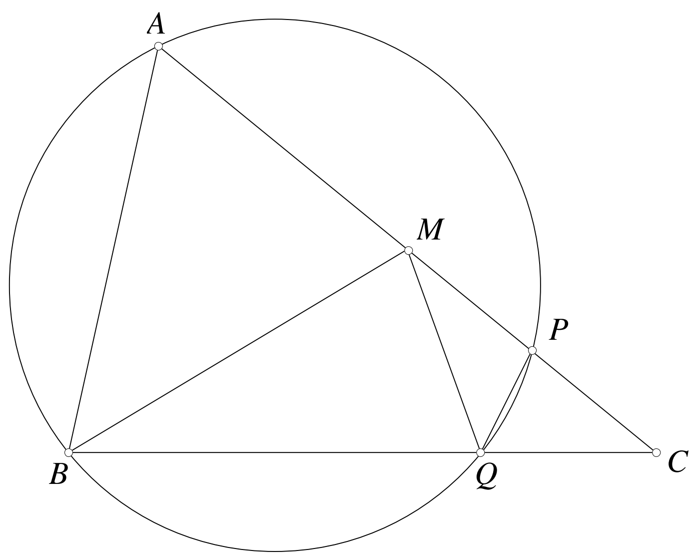
Từ bài thi Olympic Moscow tới bài thi Olympic chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh bài toán hình học Olympic Moscow và bài toán thi Olympic chuyên KHTN với các công cụ hình học thuần túy.

Đề thi Olympic Moscow năm 2014 lớp 10 [1] có bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC với M là trung điểm AC và P là trung điểm CM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP cắt đoạn thẳng BC tại Q khác B. Chứng minh rằng $\angle ABM = \angle MQP$.



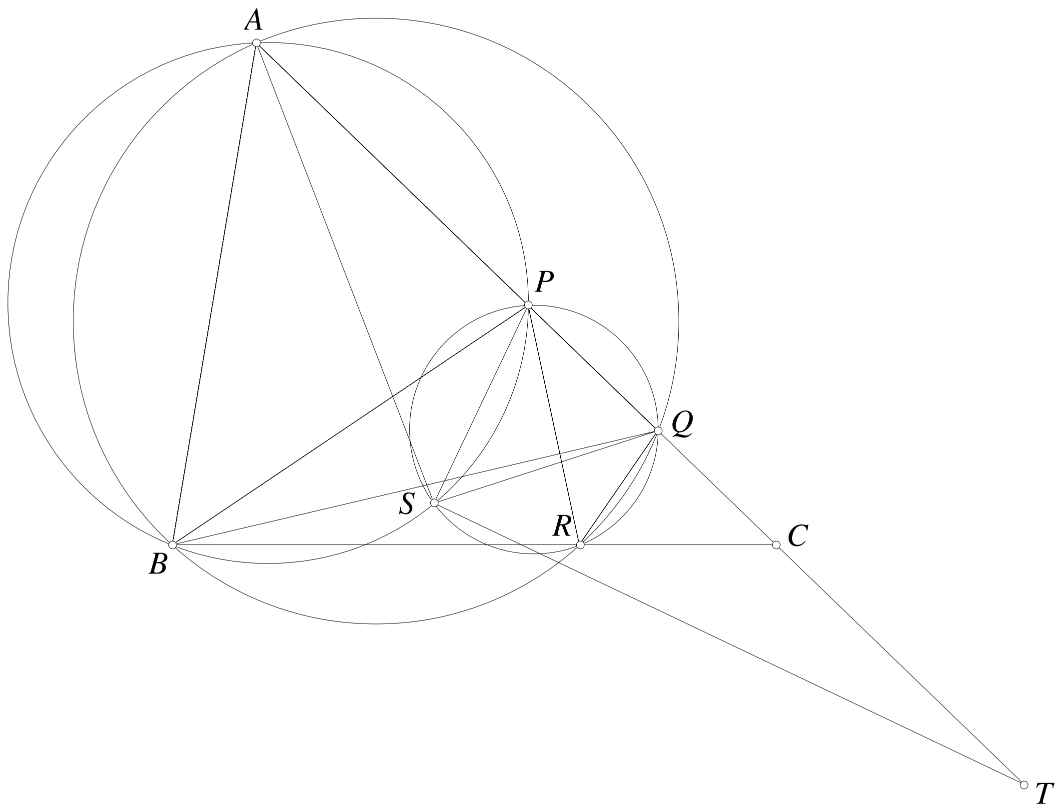
Hình 1.

Cũng trong năm 2014 đề thi Olympic chuyên KHTN [2] có bài toán hay như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại R khác B.

a) Chứng minh rằng $\angle ABP = \angle PRQ$.

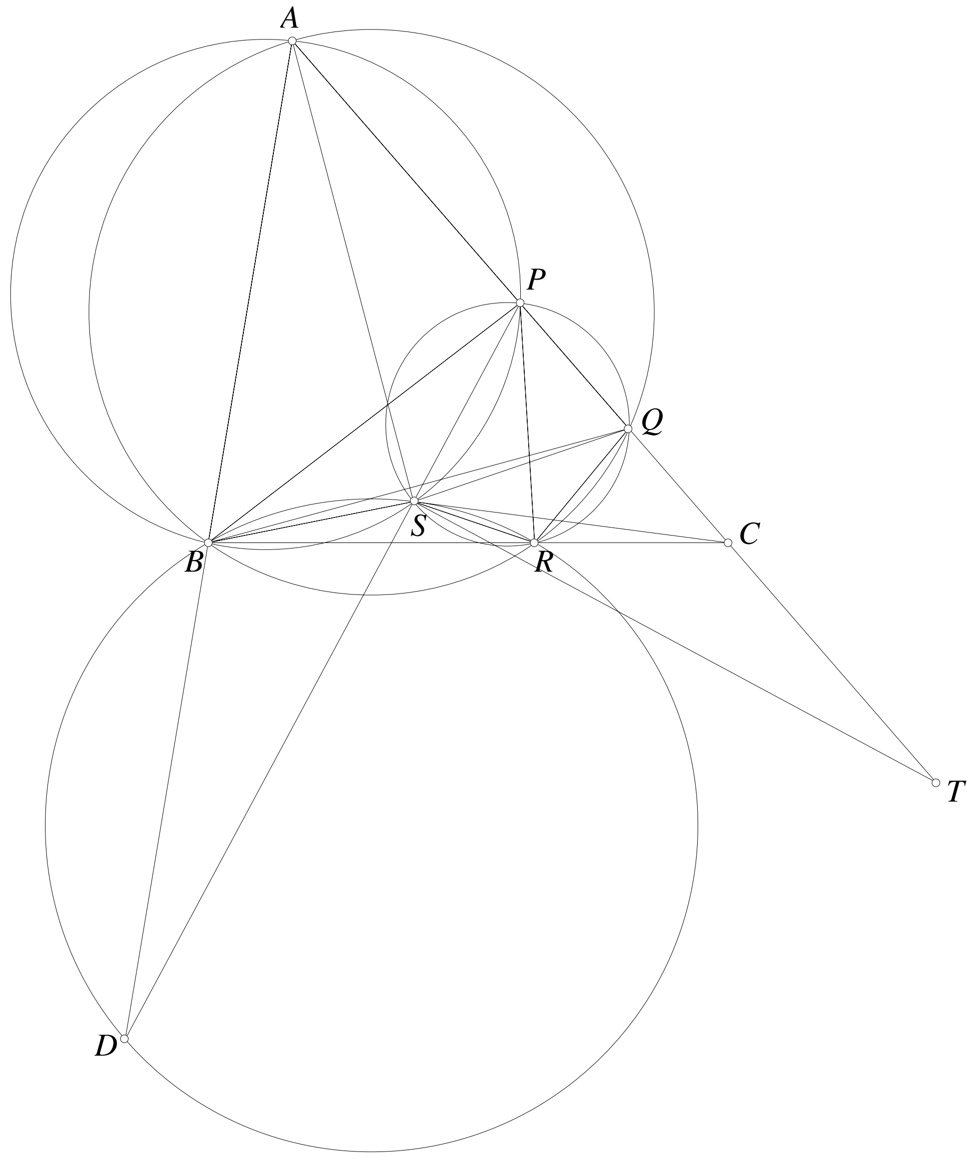
b) Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB và PQR cắt nhau tại S khác P. Chứng minh rằng tam giác CPS cân.



Hình 2.

Ta dễ thấy rằng phần a) bài toán 2 chính là mở rộng của đề thi Olympic Moscow khi thay trung điểm các đoạn thẳng bằng các điểm chia đoạn thẳng theo tỷ số bất kỳ. Phần b) của bài toán 2 là một ý phát triển khá thú vị cho phần a) và có nhiều cách chứng minh. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu một bài toán phát triển hơn nữa bài toán 2 và trong ý chứng minh của nó bao hàm bài toán 2 cùng với cách chứng minh thuần túy hình học.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại R khác B. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB và PQR cắt nhau tại S khác P. SP cắt AB tại D. Chứng minh rằng B, S, R, D cùng thuộc một đường tròn.



Hình 3.

Lời giải. Từ $\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{QC}{QP}$ suy ra $\dfrac{PC}{PC+PA} = \dfrac{QC}{QC+QP}$ hay $\dfrac{PC}{AC} = \dfrac{QC}{PC}$ suy ra $PC^2 = CA.CQ = CR.CB$. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác PBR tiếp xúc AC tại P suy ra $\angle APB = \angle BRP$. Từ đó $\angle ABP = 180° - \angle BAP - \angle APB = \angle BRQ - \angle BRP = \angle PRQ$. Gọi đường thẳng qua S vuông góc SP cắt AC tại T. Dễ có $\angle ASP = \angle ABP = \angle PRQ = \angle QSP$ nên SP là phân giác trong $\angle ASQ$ vậy ST là phân giác ngoài. Từ đó $\dfrac{TQ}{TA} = \dfrac{PQ}{PA} = \dfrac{CQ}{CP} = \dfrac{PQ+CQ}{PA+CP} = \dfrac{CP}{AC} = \dfrac{TQ-CQ}{TA-CP} = \dfrac{CT}{CT+AP}$. Suy ra $CP(CT+AP) = CT.AC = CT(AP+PC)$ hay $CP.AP = CT.AP$ suy ra $CP = CT$ hay C là trung điểm PT, từ đó tam giác CSP cân. Ta có $CS^2 = CP^2 = CQ.CA = CR.CB$ suy ra $\angle SRC = \angle BSC = \angle BSD + \angle DSC = \angle BAP + \angle APS = \angle 180° - \angle BDS$. Vậy $\angle BDS = 180° - \angle SRC = \angle SRB$ suy ra tứ giác $BSRD$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc biến đổi tỷ số độ dài để chứng minh tam giác CSP cân có thể làm gọn hơn nhờ việc sử dụng hàng điểm điều hòa xong chúng tôi chọn cách làm này vì nó khá sơ cấp hơn và có nội dung gần với chương trình THCS ở Việt Nam. Toàn bộ bài toán và lời giải đều có thể viết dưới dạng độ dài đại số cùng với góc định hướng cho chặt chẽ xong chúng tôi nhận thấy rằng điều này không cần thiết lắm. Hình học thuần túy coi trọng tính trực quan và vẻ đẹp hơn là sự chặt chẽ về logic. Do đó trong việc làm và hiểu bài toán một cách trực quan trên hình vẽ đôi khi chưa được chặt chẽ do có một số trường hợp phải xét không đúng logic trong lời giải nhưng điều này hoàn toàn bỏ qua được khi dựa vào quan điểm của chúng ta xem vẻ đẹp của bài toán và lời giải quan trọng hơn hay tính logic quan trọng hơn.

Tài liệu

[1] Olympic Moscow năm 2014 lớp 10
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=589088

[2] Đề thi Olympic chuyên KHTN năm 2014 bài 2.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com