Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

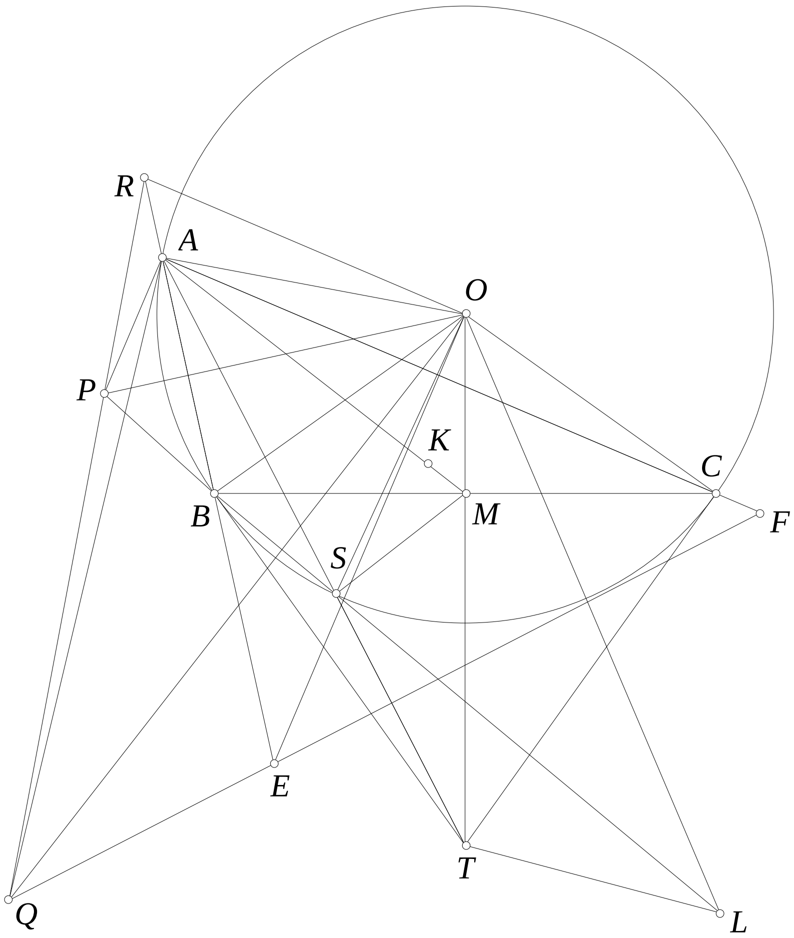
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) với trung tuyến AM. Lấy P thuộc trung trực AB sao cho $AP \perp AC$. Lấy Q sao cho $PQ \perp AO$ và $QO \perp AM$. Trung trực CA cắt AB tại E. QE cắt AC tại F. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác AEF nằm trên AM.

Lời giải

Dựa theo lời giải của bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình.



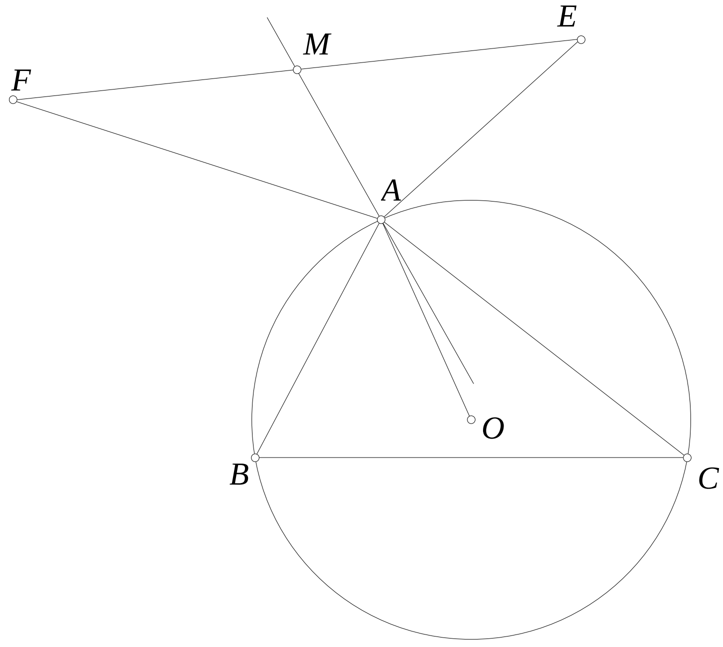
Gọi T là giao các tiếp tuyến qua B, C của (O). AT cắt (O) tại S khác A. BS cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBT tại L khác B. PQ cắt AB tại R. Ta thấy góc có cạnh tương ứng vuông góc bằng nhau $\angle PBR = \angle BAO = \angle OBA$ do đó tứ giác $PBOR$ nội tiếp. Từ đó $\angle BRO = \angle BPO = 90^\circ - \angle PAB = \angle BAC$ do đó $OR \parallel AC$. Lại có $AC \perp OE$ nên tam giác ROE vuông tại O. Vậy $\angle ORE = \angle BAC = \angle BOT$ nên hai tam giác vuông ORE và BOT đồng dạng. Lại có $\angle TOL = \angle TSL = \angle ACB = \angle POB = \angle PRB$ và $\angle TBL = \angle BAS = \angle MAC = \angle QOE$, ta suy ra $\triangle ORE \cup Q \sim \triangle BOT \cup L$. Chú ý $OA^2 = OS^2 = OM \cdot OT$ nên $OASM$ nội tiếp. Từ đây suy ra $\angle SAM = \angle SOM = \angle SLT = \angle OQE$ mà $OQ \perp AM$ nên $AS \perp QE$. Lại có AM, AS đẳng giác trong $\angle EAF$ nên tâm ngoại tiếp tam giác EAF nằm trên AM.

Nhận xét

Bài toán được tác giả tạo ra nhờ sử dụng phép nghịch đảo. Có bạn **Phan Quang Trí** khoa toán đại học Sài Gòn cũng cho lời giải nghịch đảo tương tự.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên (O). E, F lần lượt đối xứng B, C qua CA, AB. M là trung điểm EF. Chứng minh rằng đường thẳng AM luôn đi qua một điểm cố định khi A di chuyển.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

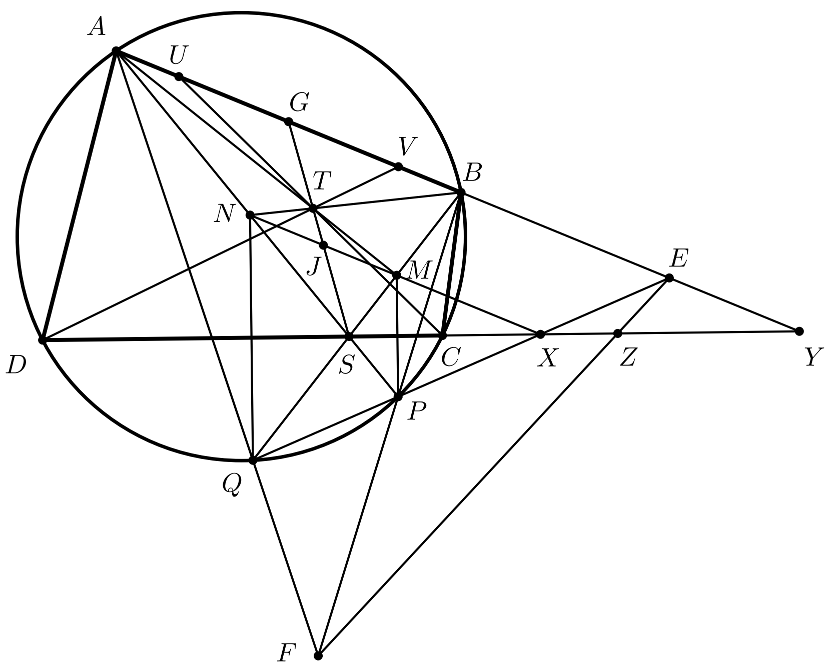
Bài toán từ bạn đọc

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Điểm S thuộc đoạn CD sao cho $\angle DSA = \angle CSB$. P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của AS, BS và (O). M, N theo thứ tự là điểm đối xứng của P, Q qua CD. T là giao điểm của AM và BN. U, V theo thứ tự là giao điểm của CT, DT và AB. Chứng minh rằng $AU = BV$.

Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà**

Lời giải

Dựa theo lời giải của bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình.



Do tính đối xứng và tứ giác nội tiếp $ABPQ$, nên $SN \cdot SB = SQ \cdot SB = SP \cdot SA = SM \cdot SA$ hay $\frac{SN}{SA} = \frac{SM}{SB}$, suy ra MN song song BA. Vì vậy nên ST đi qua trung điểm G của AB. Gọi PQ, PB cắt AB, AQ tương ứng tại E, F. DC cắt PQ, AB, EF lần lượt tại X, Y, Z. Đặt ST cắt MN tại J. Từ đó ta có $(SZ, XY) = E(SF, PB) = -1 = (ST, JG)$ suy ra $TZ \parallel JX \parallel AB$. Mặt khác, ta lại có EF là đối cực của S qua (O) nên $(DC, SZ) = -1$. Do đó, $T(UV, SZ) = (CD, SZ) = -1$. Như vậy, TS cũng đi qua trung điểm VU. Điều này dẫn tới hai đoạn thẳng AB và UV có trung điểm trùng nhau. Do đó, $AU = BV$.

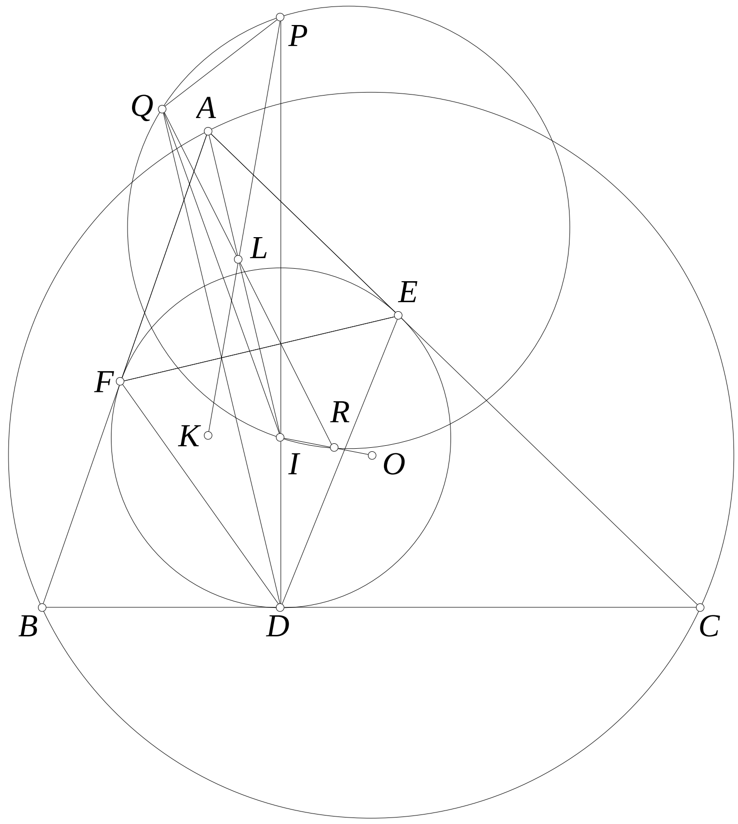
Biên tập. **Trịnh Huy Vũ** sinh viên khoa toán ĐHKHTN, ĐHQGHN.

Nhận xét

Đây là lời giải rất hay và thú vị. Bài toán có nhiều phát triển hay khác.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. O là tâm ngoại tiếp của tam giác ABC. K là trực tâm tam giác ABC. Q, L lần lượt đối xứng với D, I qua EF. DI cắt KL tại P. QL cắt OI tại R. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua I.



Tác giả: **Phạm Thị Hồng Nhung** sinh viên ĐH Bách Khoa TPHCM.