Hai bài hình học thi Olympic chuyên KHTN 2015

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết tập trung khai thác đề thi Olympic chuyên KHTN năm 2015.

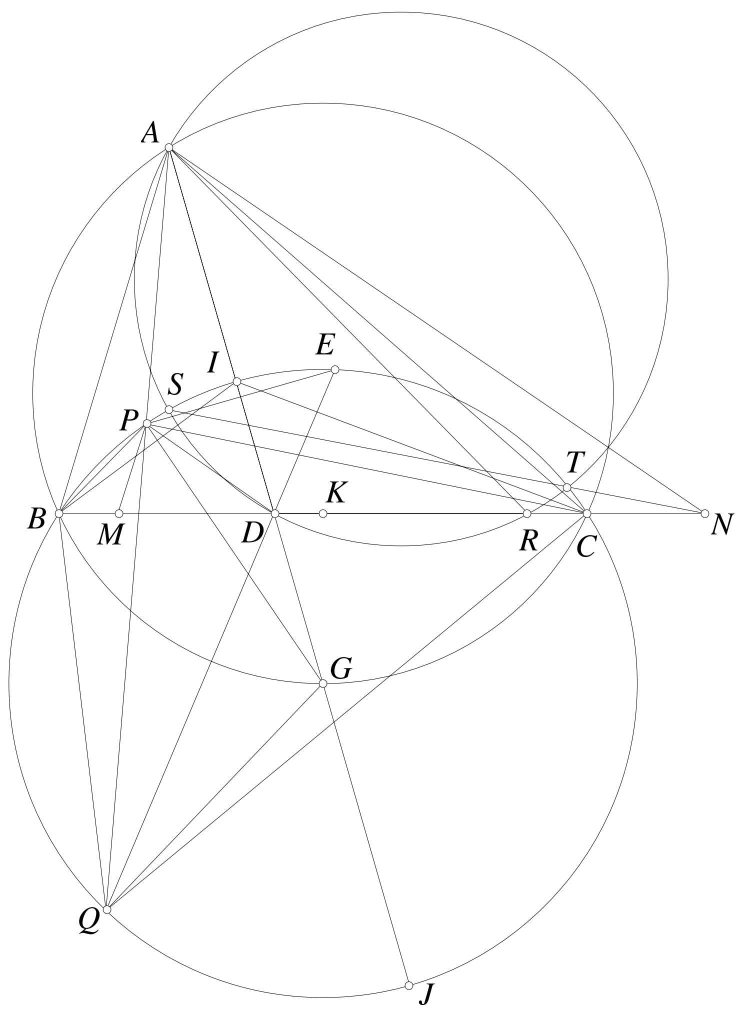
1 Bài hình học thi Olympic chuyên KHTN ngày thứ nhất

Kỳ thi Olympic chuyên KHTN ngày thứ nhất [1] có bài hình học như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I và AI cắt BC tại D. Một đường thẳng đi qua A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại P, Q sao cho P nằm giữa A, Q.

a) Chứng minh rằng tích $DP.DQ$ luôn không đổi khi P, Q thay đổi.

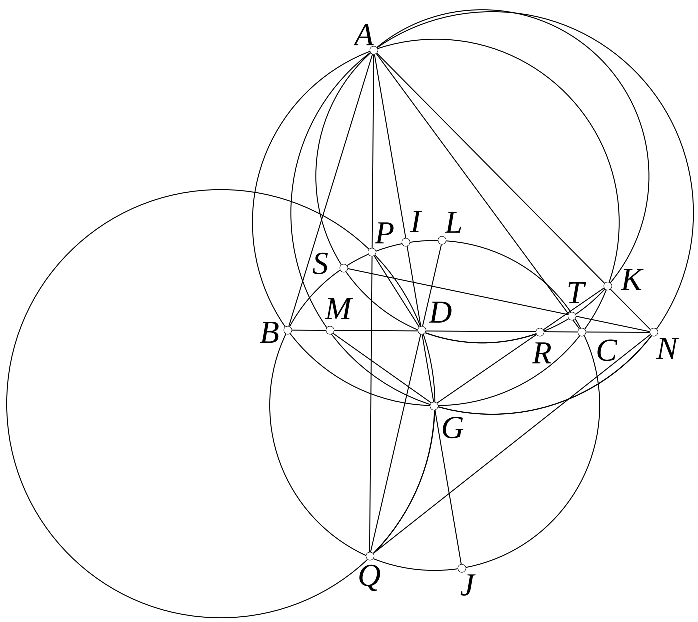
b) Giả sử đoạn thẳng PQ cắt đoạn thẳng BD. Trên đoạn DB lấy các điểm M sao cho $DM = DP$. Lấy R đối xứng M qua trung điểm BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADR cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại S, T. ST cắt BC tại N. Chứng minh rằng tam giác DNQ cân.



Hình 1.

Lời giải 1. a) Gọi DQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại E khác Q. AI cắt (O) ngoại tiếp tam giác ABC tại G khác A và J là tâm bàng tiếp góc A. Ta thấy $GP^2 = GB^2 = GD.GA$. Từ đó suy ra $\angle ADP = \angle GPQ = \angle GQP$ vậy tứ giác $PDGQ$ nội tiếp. Từ đó $\angle PDI = \angle PQG = \angle GPQ = \angle GDQ = \angle EDI$. Vậy P, E đối xứng nhau qua AI suy ra $DP.DQ = DE.DQ = DB.DC$ không đổi. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta dễ thấy $NB.NC = NS.ST = ND.NR$. Từ đó $\dfrac{NB}{ND} = \dfrac{NR}{NC}$ hay $(BD, N) = (RC, N)$ hay $(ND, B) = (NC, R)$. Tương tự $\dfrac{NC}{ND} = \dfrac{NR}{NB}$ suy ra $(CD, N) = (RB, N)$ hay $(ND, C) = (NB, R)$. Từ đó $(ND, BC) = \dfrac{(ND, B)}{(ND, C)} = \dfrac{(NC, R)}{(NB, R)} = (BC, R)$. Vậy ta có biến đổi $(DN, CB) = (ND, BC) = (BC, R) = (CB, M)$ vậy theo hệ thức Maclaurin mở rộng suy ra $DN.DM = DB.DC = DP.DQ = DM.DQ$. Từ đó $DN = DQ$ nên tam giác DQN cân tại D. □



Hình 2.

Lời giải 2. a) Gọi AD cắt (O) tại G khác A và J là tâm bàng tiếp góc A, QD cắt đường tròn ngoại tiếp IBC tại L khác Q. Ta có $(AD, IJ) = -1$ và G là trung điểm IJ. Theo hệ thức Maclaurin, ta có $AP.AQ = AJ.AI = AD.AG$. Suy ra P, Q, D, G cùng thuộc một đường tròn. Vậy $\angle PDI = \angle PQG = \angle GPQ = \angle GDQ = \angle ADL$ suy ra $DP = DL$. Suy ra $DP.DQ = DL.DQ = DB.DC$. Suy ra điều phải chứng minh.

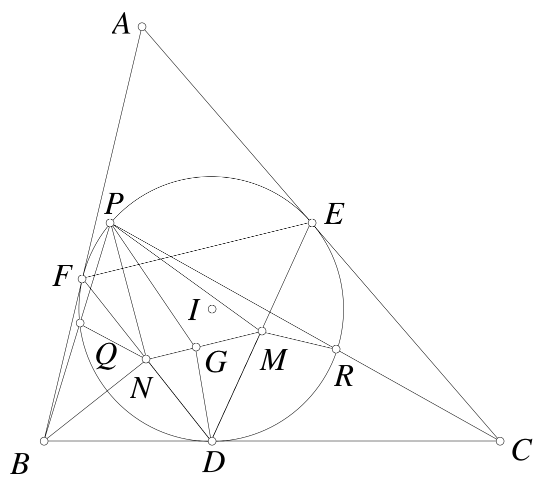
b) Gọi AN cắt ABC tại K khác A. Do $ND.NR = NS.NT = NB.NC = NA.NK$ nên tứ giác $AKRD$ nội tiếp, do đó $\angle AKR = \angle ADB = \angle ACG = \angle AKG$ suy ra K, R, G thẳng hàng. G thuộc trung trực BC suy ra G cũng thuộc trung trực MR. Do $\angle GMN = \angle GRM = \angle GAN$, suy ra A, M, G, N cùng thuộc một đường tròn. Suy ra $DN.DM = DA.DG = DB.DC = DP.DQ$ mà $DP = DM$ suy ra $DQ = DN$ suy ra tam giác DNQ cân tại D. □

Nhận xét. Ý a) lời giải thứ nhất chỉ dùng đến kiến thức THCS với lời giải thứ hai thì cần hàng điểm điều hòa, tuy vậy mỗi cách đều có một cái hay riêng. Nếu ý b) giải như lời giải thứ nhất thì chỉ cần đường tròn bất kỳ đi qua D, R là được nhưng vai trò của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADR thực sự cần thiết trong lời giải thứ 2. Bài toán này có nhiều ý nghĩa, sau đây là một số khai thác ứng dụng

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. M là trung điểm E, F. Một đường thẳng đi qua A cắt (I) tại P, Q. Chứng minh rằng tích $MP.MQ$ không đổi khi đường thẳng thay đổi.

Với bài toán trên là trường hợp đặc biệt của câu a) bài toán gốc, ta chú ý đường tròn nội tiếp (I) đi qua tâm nội tiếp tam giác AEF. Từ đó có điều phải chứng minh. Nếu áp dụng tiếp bài này ta thu được một bài toán thú vị sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. P là một điểm trên (I). PB, PC cắt (I) tại Q, R khác P. Gọi M, N là trung điểm DE, DF. DG là đường đối trung của tam giác AMN. Chứng minh rằng phân giác $\angle MPN$ đi qua G khi và chỉ khi $QN = MR$.



Hình 3.

Lời giải. Theo bài trước ta có $NP.NQ = ND^2$ và $MP.MR = MD^2$. Từ đó theo tính chất đường đối trung $\dfrac{NP.NQ}{MP.MR} = \dfrac{ND^2}{MD^2} = \dfrac{GN}{GM}$. Vậy $NQ = MR$ khi và chỉ khi $\dfrac{NP}{MP} = \dfrac{GN}{GM}$ khi và chỉ khi PG là phân giác của tam giác PMN. Ta có điều phải chứng minh. □

Ý b) của bài toán 1 có thể viết lại độc lập hơn với ý a) như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I và AI cắt BC tại D. P là một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và nằm trong tam giác ABC. Giả sử AP cắt đoạn BD. Trên đoạn DB lấy điểm M sao cho $DM = DP$. Lấy R đối xứng M qua trung điểm BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADR cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại S, T. ST cắt BC tại N. Chứng minh rằng đường tròn (D, DN) và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau trên PD.

Lời giải hoàn toàn tương tự

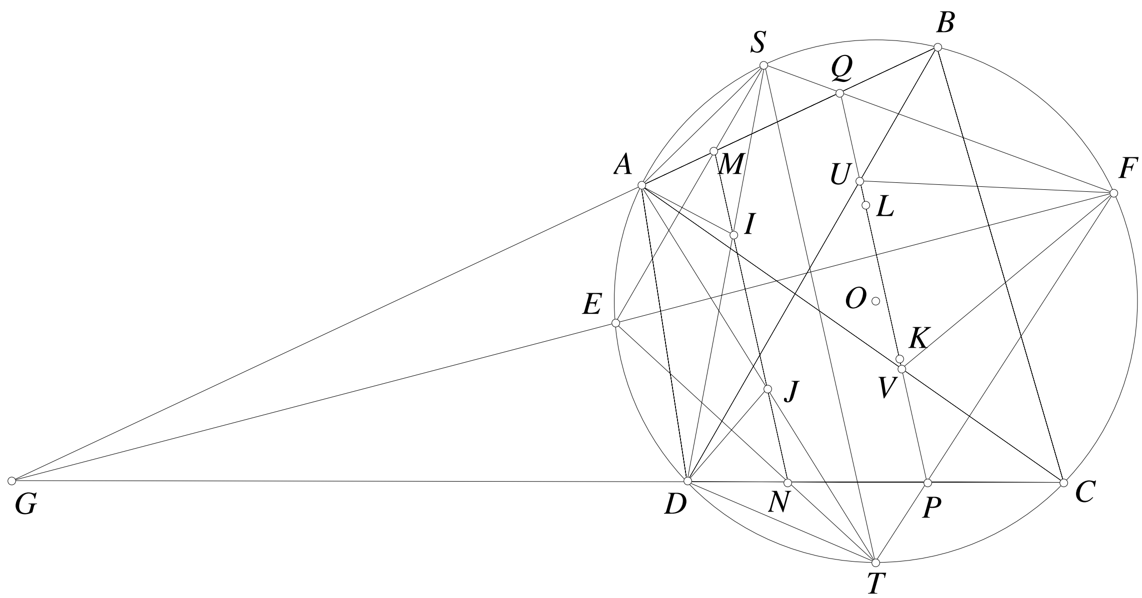
2 Bài hình học thi Olympic chuyên KHTN ngày thứ hai

Kỳ thi Olympic chuyên KHTN ngày thứ nhất [2] có bài hình học như sau

Bài toán 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAD, CAD. Gọi DI, AJ lần lượt cắt (O) tại S, T khác D, A. Đường thẳng IJ lần lượt cắt AB, CD tại M, N.

a) Chứng minh rằng SM và TN cắt nhau trên đường tròn (O).

b) Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q khác M. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC.



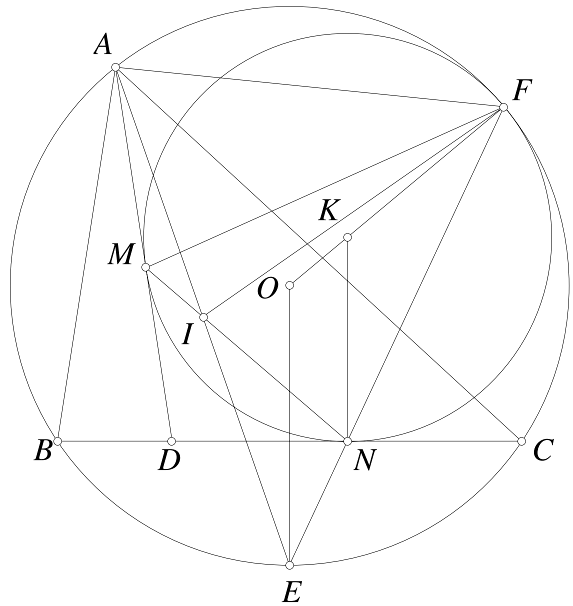
Hình 4.

Lời giải. a) Dễ thấy tam giác SAI và DTJ cân và có $\angle ASI = \angle DTJ$ nên hai tam giác đó đồng dạng. Lại dễ chứng minh tứ giác $AIJD$ nội tiếp nên $\angle MAI = \angle IAD = \angle DJN$ và $\angle NDJ = \angle JDA = \angle AIM$. Từ đó hai tam giác MAI và NJD đồng dạng. Từ đó suy ra SMA và TNJ đồng dạng. Vậy $\angle ASM = \angle NTJ$ do đó SM và TN cắt nhau tại E trên đường tròn (O).

b) Gọi AB cắt CD tại G. GE cắt (O) tại F khác E. Ta thấy $GC.GD = GE.GF = GM.GQ$. Từ đó tứ giác $MQFE$ nội tiếp nên $\angle QFE = \angle AME = \angle MAS + \angle MSA = \angle MBS + \angle AFE = \angle SFA + \angle ASE = \angle EFS$. Từ đó S, Q, F thẳng hàng. Tương tự T, P, F thẳng hàng. Từ chứng minh trên SMA và TNJ đồng dạng nên tam giác GMN cân suy ra $GM = GN$. Lại có $GM.GQ = GN.GP$ nên $GP = GQ$ suy ra $PQ \parallel MN \parallel ST$. Từ đó đường tròn nội tiếp tam giác FPQ tiếp xúc (O). Vậy theo định lý Poncelet nếu PQ cắt DB, AC tại U, V thì đường tròn ngoại tiếp tam giác FUV cũng tiếp xúc (O) và tiếp xúc DB, AC. Từ đó theo định lý Thebault thì PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC. □

Nhận xét. Đây là bài toán sử dụng hai bổ đề quan trọng là định lý Sawayama và Thebaut và định lý Poncelet. Chú ý rằng với định lý Sawayama và Thebaut thì hiểu một cách chặt chẽ phải phát biểu trên đường chéo của tứ giác nội tiếp, do đó việc sử dụng định lý Poncelet để đưa về đường tròn FUV tiếp xúc với CA, BD là cần thiết. Chúng tôi xin nhắc lại hai định lý này phần tiếp sau

Bài toán 6 (Định lý Sawayama và Thébault)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng MN đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.



Hình 5.

Chứng minh này tham khảo [4]

Lời giải. Gọi phân giác góc $\angle BAC$ cắt (O) tại E khác A. AE cắt MN tại I. (K) tiếp xúc (O) tại F. Dễ có E, N, F thẳng hàng và $EB^2 = EC^2 = EN.EF$.

Ta lại có $\angle FMN = \dfrac{1}{2}\angle FKN = \dfrac{1}{2}\angle FOE = \angle FAE$ suy ra tứ giác $AFIM$ nội tiếp. Suy ra $\angle IFN = \angle MFN - \angle MFI = \angle DMN - \angle MFI = \angle AFI - \angle MFI = \angle AFM = \angle AIM = \angle EIN$. Từ đó $\triangle EIN \sim \triangle EFI$ suy ra $EI^2 = EN.EF = EC^2 = EB^2$. Suy ra I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 7 (Định lý Poncelet)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) tiếp xúc AB, CD tại M, N. Đường tròn (L) tiếp xúc với AC, BD tại P, Q. Chứng minh rằng nếu M, N, P, Q thẳng hàng thì $(K), (L)$ và (O) đồng trục.

Chứng minh chi tiết và mở rộng định lý này xem trong [5]

Bài toán gốc có thể phát biểu gọn lại chỉ còn một ý như sau

Bài toán 8. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAD, CAD. Đường thẳng IJ lần lượt cắt AB, CD tại M, N. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q khác M. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC.

Đây là một trong những khai thác thú vị của định lý Thebault. Khai thác này hoàn toàn có thể viết trên các đường chéo như sau

Bài toán 9. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAD, CAD. Đường thẳng IJ lần lượt cắt AC, BD tại M, N. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ACN cắt BD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDM cắt AC tại Q khác M. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm nội tiếp hai tam giác ABC và DBC.

Bài toán có một mở rộng khác đơn giản nhưng thú vị như sau

Bài toán 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi S, T là trung điểm các cung nhỏ $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$. M, N lần lượt thuộc AB, CD. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P khác N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q khác M. Chứng minh rằng SM và TN cắt nhau trên (O) khi và chỉ khi SQ và TP cắt nhau trên (O).

Tài liệu

[1] Đề hình học thi Olympic chuyên KHTN năm 2015 ngày thứ nhất
http://www.artofproblemsolving.com/community/
c6t48f6h1086852_constant_product_and_isocesles_triangles

[2] Đề hình học thi Olympic chuyên KHTN năm 2015 ngày thứ hai
http://www.artofproblemsolving.com/community/
c6t48f6h1087174_lines_intersect_on_circle_and_pass_through_incenters

[3] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài hình học chọn đội tuyển KHTN.

[4] Trần Quang Hùng, Xung quanh một bài toán hình học trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014
http://analgeomatica.blogspot.com/2014/03/xung-quanh-mot-bai-toan-hinh-hoc-trong.html

[5] Topic 3 circles with common tangency point
http://www.artofproblemsolving.com/community/q1h474157p4809875

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com