

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

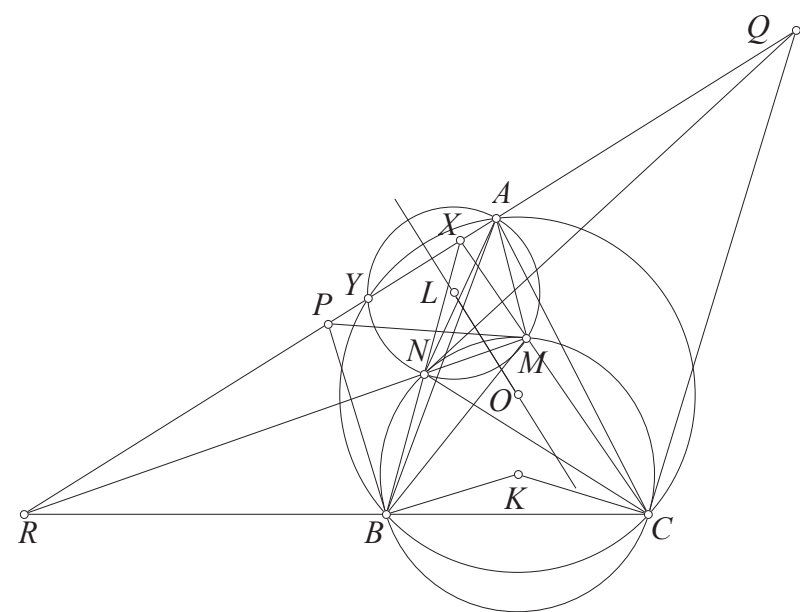
Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn với tâm ngoại tiếp O . (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC . Tiếp tuyến tại B, C của (K) lần lượt cắt AO tại P, Q . Lấy M, N khác B, C thuộc (K) sao cho PM, QN tiếp xúc (K) . Gọi L là tâm ngoại tiếp tam giác AMN . Chứng minh rằng $OL \perp AO$.

Ta đưa ra bài toán tổng quát hơn như sau

Cho tam giác ABC và một đường tròn (K) đi qua B, C . d là một đường thẳng đi qua A . Tiếp tuyến tại B, C của (K) cắt d tại P, Q . Lấy M, N khác B, C thuộc (K) sao cho PM, QN tiếp xúc (K) . L là tâm ngoại tiếp tam giác AMN . Chứng minh rằng đường thẳng qua L vuông góc d luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi.

Lời giải



Gọi giao điểm của PQ và BC là R . MC cắt NB tại X . Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} M & B & N \\ B & M & C \end{pmatrix}$ ta suy ra P nằm trên RX . Tương tự Q nằm trên RX . Từ đó gọi Y là giao điểm

khác A của AR và đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN thì $RY.RA = RM.RN = RB.RC$ suy ra Y nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Từ đó d là trục đẳng phương của đường tròn (L) ngoại tiếp tam giác AMN và đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC . Vậy đường thẳng qua L vuông góc d luôn đi qua O cố định.

Nhận xét

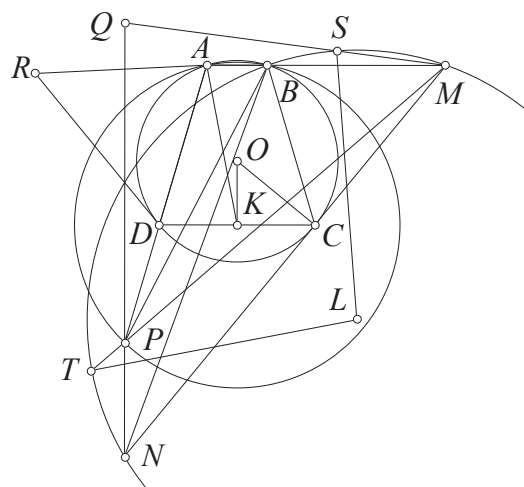
Bài toán cũng có thể được phát biểu dưới dạng khác như sau

Cho tam giác ABC và một đường tròn (K) thay đổi đi qua B, C . d là một đường thẳng cố định đi qua A . Tiếp tuyến tại B, C của (K) cắt d tại P, Q . Vẽ các tiếp tuyến PM, QN tới (K) với M, N khác B, C . Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác AMN luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi (K) thay đổi.

Các bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình **đây**. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải khác qua email từ bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 11 toán THPT chuyên KHTN.

Bài toán đề nghị

Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) . K là trung điểm CD . AD cắt đường tròn (K) đi qua A, B tại P khác A . Q là trực tâm tam giác PAB . Tiếp tuyến tại C của (O) cắt AB, PQ lần lượt tại M, N . MQ, MP lần lượt cắt đường tròn (L) ngoại tiếp tam giác BMN tại S, T khác M . Tiếp tuyến tại S, T của (L) cắt nhau tại R . Chứng minh rằng RD tiếp xúc (O) .



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.