Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

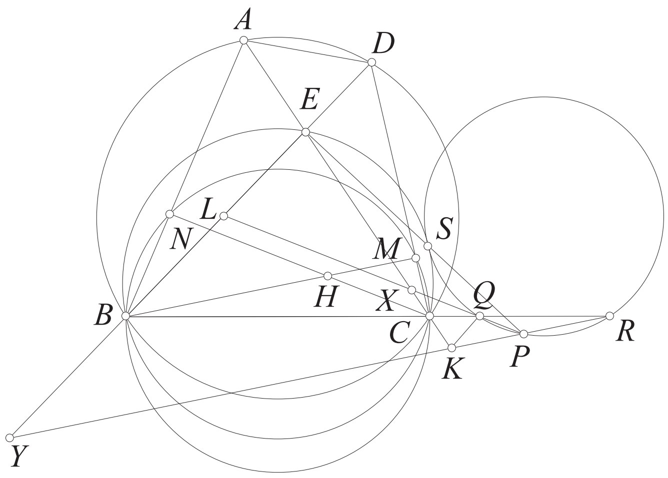
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F khác C, B. BE cắt CF tại H. HK cắt CA, AB lần lượt tại M, N. Trên BC lấy P, Q sao cho $MP \parallel BE$ và $NQ \parallel CF$. MP cắt NQ tại R. Chứng minh rằng đường tròn (PQR) tiếp xúc (O).

Bài toán trên là trường hợp riêng của bài toán sau

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp có AC cắt BD tại E. Một đường tròn qua B, C cắt CD, AB lần lượt tại M, N. BM cắt CN tại H. Một đường thẳng qua H cắt AC, BD lần lượt tại K, L. Trên BC lấy Q, R sao cho $KR \parallel BM, LQ \parallel CN$. KR cắt LQ tại P. Chứng minh rằng đường tròn (PQR) tiếp xúc với đường tròn(EBC).

Lời giải

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương.



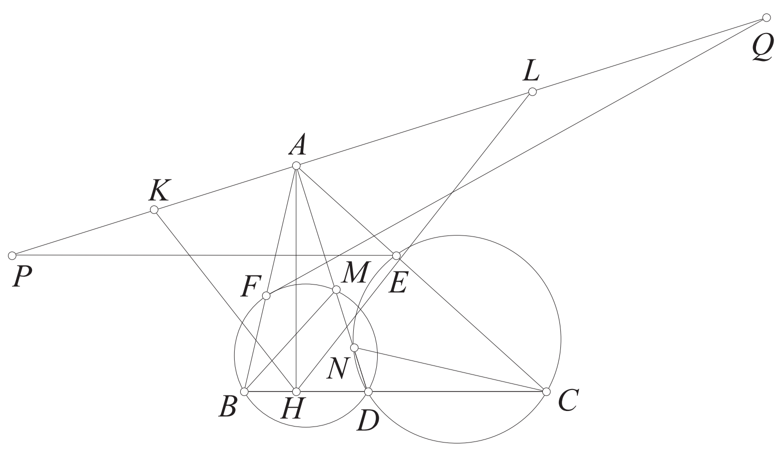
Gọi PQ cắt AC tại X, PR cắt BD tại Y. Chú ý rằng các tứ giác $ABCD, BCMN$ nội tiếp và $KR \parallel BM, LQ \parallel CN$, ta có$\angle EXL = \angle ECN = \angle EBM = \angle EYK$ nên tứ giác $XKYL$ nội tiếp. Do đó điểm Miquel S của tứ giác toàn phần $XKYLEP$ thuộc EP. Dễ thấy hai tam giác SXK, SLY đồng dạng và theo định lý Thales thì $\frac{BL}{BY} = \frac{HL}{HK} = \frac{CX}{CK}$ nên hai tam giác SCK, SBL đồng dạng. Do đó các tam giác SCB, SKY đồng dạng. Vì thế $\angle BSC = \angle BEC, \angle CSK = \angle CRK$ nên các tứ giác $BCSE, SCKR$ nội tiếp. Chứng minh tương tự tứ giác $SXCQ$ nội tiếp. Ta có $\angle XQS = \angle XCS = \angle PRS$ nên tứ giác $PQSR$ nội tiếp. Vì $\angle CSQ = \angle CXQ = \angle SEC + \angle SPQ$ nên ta thấy ngay các đường tròn $(PQR), (EBC)$ tiếp xúc với nhau tại S.

Nhật xét

Bài toán gốc được tác giả lấy ý tưởng từ đề thi vô địch Nga năm 2016. Tuy nhiên trong quá trình tìm tòi lời giải thì tác giả thu được bài toán tổng quát trên và lời giải của bạn **Dũng** gần như là tối ưu nhất cho bài toán tổng quát đó. Trong bài tổng quát nếu ba điểm A, D, E trùng nhau ta sẽ thu được bài toán gốc. Các bạn **Nguyễn Đức Bảo, Nguyễn Đình Hoàng** trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, **Ngô Quang Dương** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN và **Phạm Ngọc Khánh** lớp 11 Toán THPT chuyên sư phạm, đã đưa ra các lời giải khác nhau cho bài toán ở đây. Ngoài ra tác giả còn nhận được lời giải qua email từ các bạn **Lê Sỹ Quan** lớp 11 Toán THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước, **Trương Mạnh Tuấn, Trần Anh Tài** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC với phân giác AD và đường cao AH. Các điểm M, N thuộc AD sao cho $BM \perp CA, CN \perp AB$. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác CND, BMD theo thứ tự cắt CA, AB tại E, F khác C, B. Phân giác các góc $\angle AEB, \angle AFC$ lần lượt cắt đường thẳng qua A vuông góc AD tại P, Q. Gọi K, L là trung điểm AP, AQ. Chứng minh rằng HA là phân giác góc $\angle KHL$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Copyright © 2015 http://analgeomatica.blogspot.com/