Mỗi tuần một bài toán

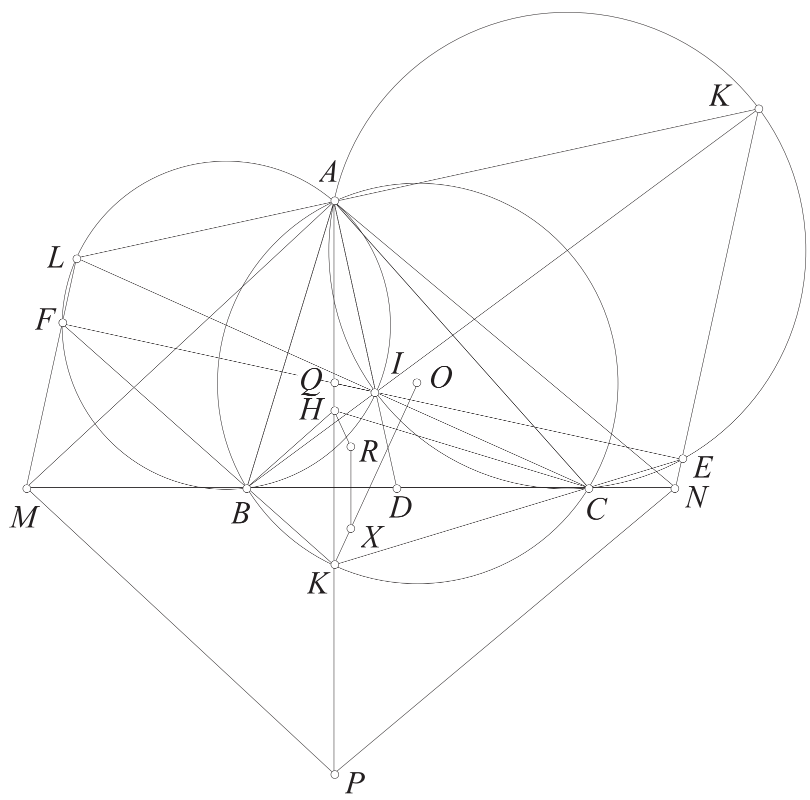
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ có tâm nội tiếp I và phân giác AD. H là trực tâm tam giác ABC. P đối xứng A qua BC. Trên AP lấy Q sao cho $\angle PQI = \angle ADB$. K, L là tâm bàng tiếp góc B, C của tam giác ABC. M, N thuộc BC sao cho KN, LM cùng vuông góc với QI. R là tâm ngoại tiếp tam giác PMN. Chứng minh rằng $\angle RHC = \angle PHB$.

Lời giải



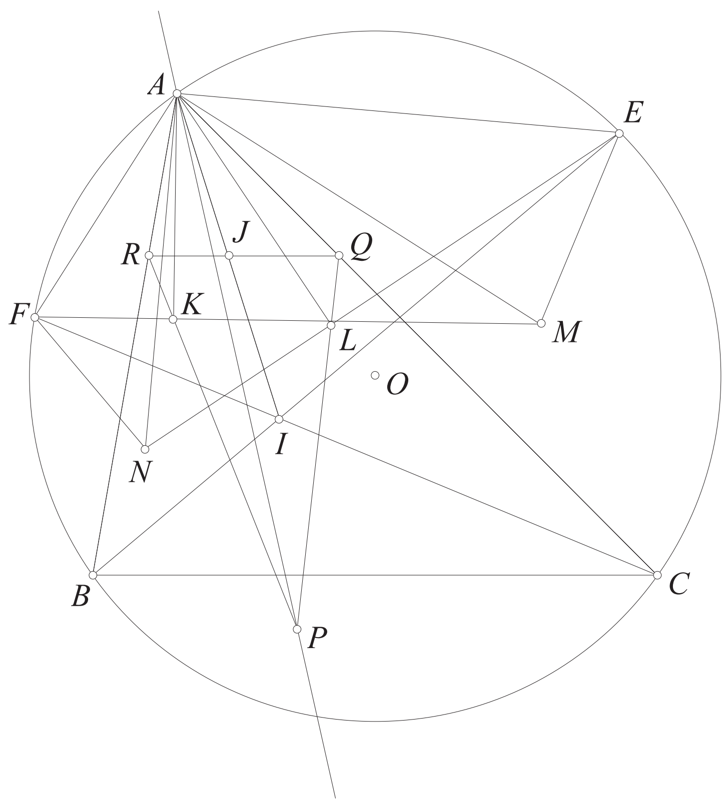
Gọi QI cắt NK, ML tại E, F. AH cắt (O) tại K khác A. Ta thấy $\angle BKQ + \angle BFQ = \angle BCA + \angle BAI = \angle BCA + \angle CAI = \angle ADC = \angle IQK = 180^\circ - \angle FQK$. Suy ra F, B, K. Chứng minh tương tự thì E, C, K thẳng hàng. Từ đó áp dụng bài toán mở rộng từ THTT thì tâm ngoại tiếp X của tam giác KMN nằm trên KO. Qua đối xứng trục BC thì KR đi qua đối xứng của O qua BC hay KR đi qua tâm ngoại tiếp tam giác BHC. Nói cách khác $\angle RHC = \angle PHB$.

Nhận xét

Đây là một bài toán ứng dụng của bài toán mở rộng từ tạp chí THTT kết hợp với việc sử dụng phép đối xứng trục. Bài toán có thể viết dưới dạng chứng minh đường thẳng đi qua một điểm cố định. Bài toán này cũng thể hiện rõ ý tưởng của việc sử dụng phép biến hình trong thực hành giải toán. Bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán trường THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A thay đổi trên (O). I là tâm nội tiếp. IB, IC cắt (O) tại E, F khác B, C. Lấy M, N sao cho $AM \perp AF$, $EM \perp CF$, $AN \perp AE$, $FN \perp BE$. K, L là hình chiếu của A lên FM, EN. Đường thẳng qua trung điểm IA song song BC cắt CA, AB tại Q, R. QL cắt RK tại P. Chứng minh rằng đường thẳng AP luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

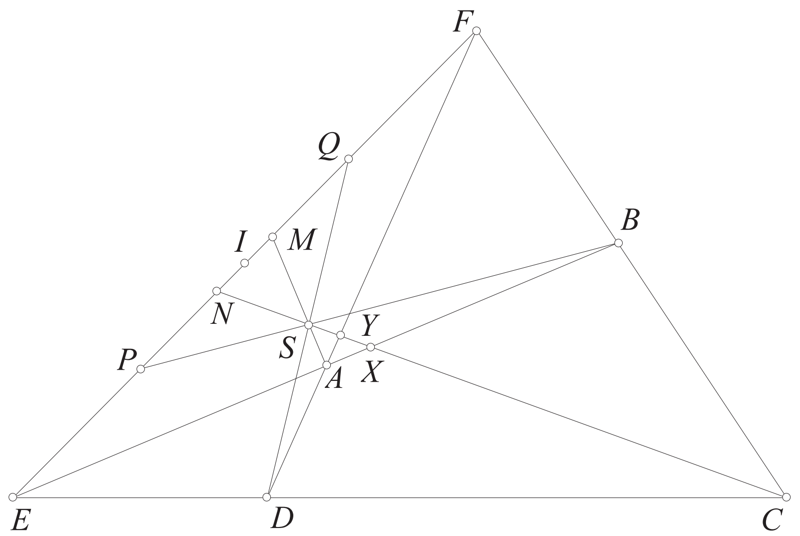
Bài toán từ bạn đọc

Cho tứ giác $ABCD$. Các cạnh đối AB và CD cắt nhau tại E còn AD và BC cắt nhau tại F. M, N là hai điểm thuộc EF và đối xứng với nhau qua trung điểm của EF. S là giao điểm của AM và CN. P, Q theo thứ tự là giao điểm của SB, SD và EF. Chứng minh rằng hai điểm P, Q đối xứng với nhau qua trung điểm của EF.

Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà.**

Lời giải

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của bạn **Nguyễn Minh Hiếu** THPT chuyên SP, ĐHSPHN được tác giả bài toán thầy **Nguyễn Minh Hà** căn chỉnh đẹp hơn.



Gọi X, Y theo thứ tự là giao điểm của CS và AB, AD. Dễ thấy các điều kiện sau tương đương.

1) P, Q đối xứng với nhau qua trung điểm của EF.

2) $\overline{EP} = -\overline{FQ}$.

3) $(PEMN) = (QFNM)$.

4) $S(PEMN) = S(QFNM)$.

5) $S(BEAX) = S(DFYA)$.

6) $(BEAX) = (DFYA)$.

7) $(EBXA) = (DFYA)$.

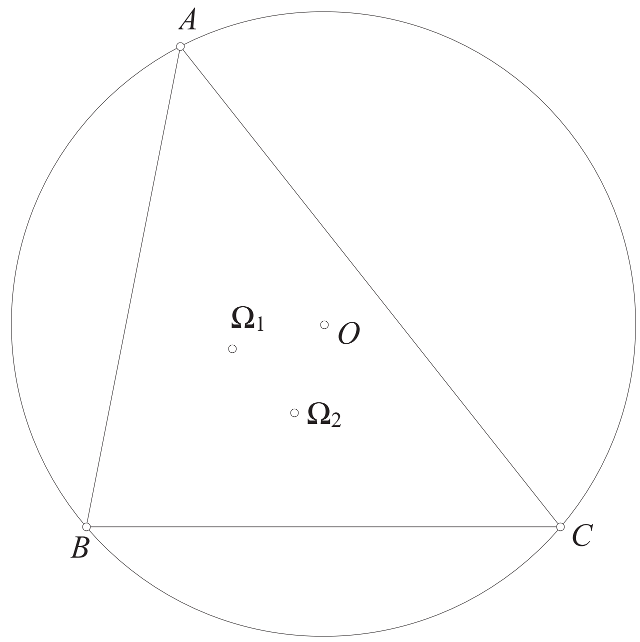
8) ED, BF, XY đồng quy (luôn đúng).

Nhận xét

Có bạn **Trương Đình Nghĩa** lớp Toán, THPT chuyên SP, ĐHSPHN cũng cho lời giải ngắn gọn chỉ dùng định lý Menelaus tại đây. Bạn **Trần Quang Huy** sinh viên đại học Bách Khoa Hà Nội cũng cho lời giải bằng conic và tỷ số kép.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có hai điểm Brocard là Ω_1 và Ω_2. Chứng minh rằng nếu một trong sáu góc $A\Omega_1O$, $B\Omega_1O$, $C\Omega_1O$, $A\Omega_2O$, $B\Omega_2O$, $C\Omega_2O$ vuông thì có đúng hai trong sáu góc này vuông.



Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng**, Hà Nội.