Về bài toán thi Olympic nữ sinh ở châu Âu

Tóm tắt nội dung

Bài viết mở rộng và phát triển bài toán hình học trong kỳ thi Olympic toán dành cho nữ sinh ở châu Âu năm 2014.

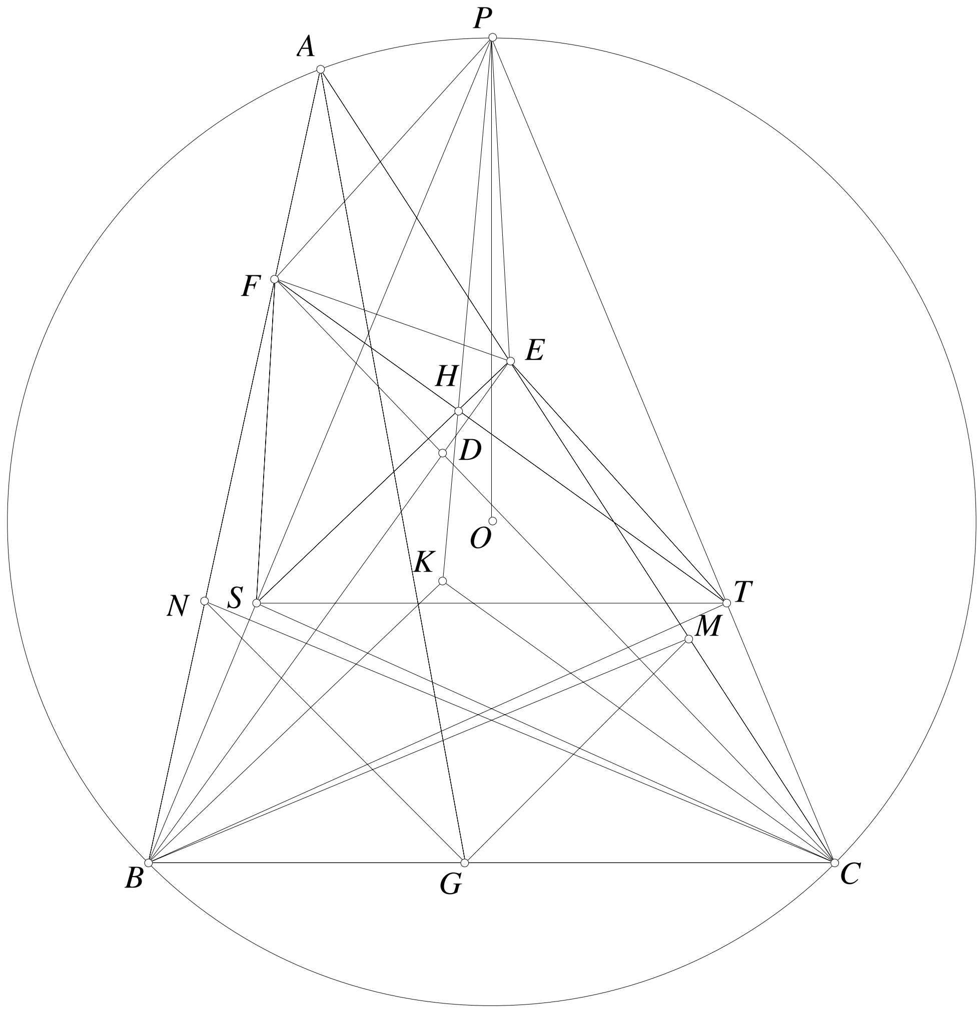
Trong kỳ thi Olympic toán dành cho nữ sinh ở châu Âu năm 2014 có bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho D, E là các điểm nằm trên đoạn AB, AC của tam giác ABC sao cho $DB = BC = CE$. Đường thẳng CD và BE cắt nhau tại F. Chứng minh rằng tâm nội tiếp tam giác ABC, trực tâm tam giác DEF và trung điểm M của cung $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thẳng hàng.

Nhận xét. Trong quá trình phân tích bài toán này tôi nhận thấy tâm nội tiếp I thực chất cũng là trực tâm tam giác DEF do có $DB = BC = CE$. Từ đó yếu tố tâm nội tiếp có thể thay thế được, tôi đề xuất bài toán như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC cố định. Các điểm E, F lần lượt di chuyển trên các đoạn CA, AB sao cho $BF = CE$. BE cắt CF tại D. Gọi H, K là trực tâm tam giác DEF, DBC. Chứng minh rằng đường thẳng HK luôn đi qua một điểm cố định khi E, F di chuyển.

Lời giải đầu tiên chúng tôi đưa ra dựa trên một ý tưởng trong [1]. Với lời giải này các biến đổi chỉ cần kiến thức THCS.



Hình 1.

Lời giải 1. Gọi AG là phân giác $\angle BAC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AGB, AGC lần lượt cắt CA, AB tại M, N khác A. Ta dễ thấy $\dfrac{BN}{CM} = \dfrac{BN.BA}{CM.CA}.\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{BD.BC}{CD.CB}.\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{DB}{DC}.\dfrac{CA}{AB} = 1$. Từ đó $BN = CM$, theo giả thiết $CF = CE$ suy ra $NF = ME$. Từ đó $\dfrac{[CNF]}{[BME]} = \dfrac{[CNF]}{[ABC]}.\dfrac{[ABC]}{[BME]} = \dfrac{NF}{AB}.\dfrac{AC}{ME} = \dfrac{AC}{AB}$ (1).

Ta lại dễ thấy $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{BM}{AD}.\dfrac{AD}{CN} = \dfrac{BC}{AC}.\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AB}{AC}$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $\dfrac{[CNF]}{[BME]} = \dfrac{CN}{BM}$ (3).

Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và P là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của (O). Ta sẽ chứng minh rằng HK đi qua P, thật vậy. Gọi EH, FH lần lượt cắt PB, PC tại S, T. Do $SE \perp FC$ nên dùng tổng các góc trong tứ giác dễ thấy $\angle ESB = 360^\circ - \angle SBC - \angle FCB - 90^\circ = 270^\circ - (90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BAC) - \angle FCB = 180^\circ - (\angle FCB - \angle NCB) = 180^\circ - \angle NCF$. Tương tự $\angle FTC = 180^\circ - \angle MCE$.

Từ đó ta dễ thấy $\dfrac{[SBE]}{[CNF]} = \dfrac{SB.SE}{CN.CF}$ và $\dfrac{[TCF]}{[BME]} = \dfrac{TC.TF}{BM.BE}$ (4).

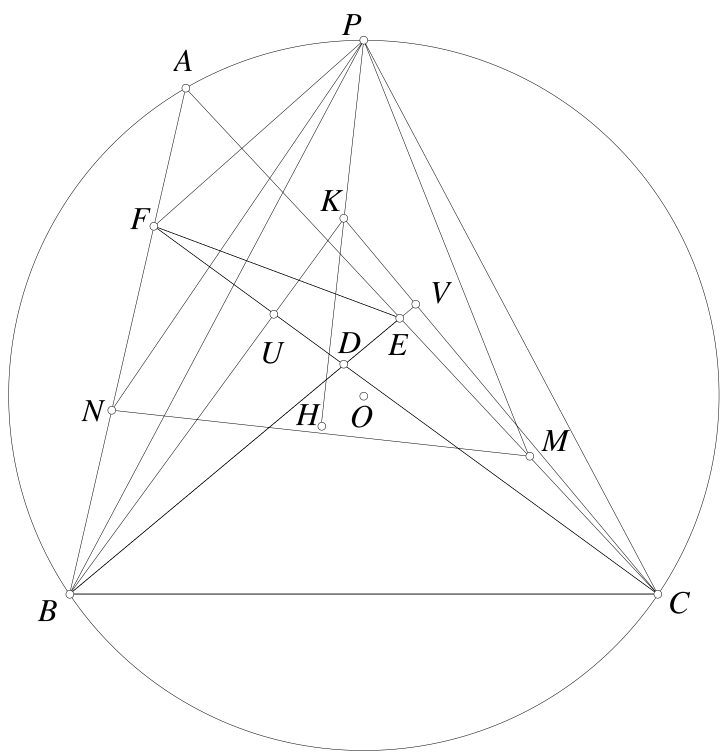
Mặt khác ta lại chú ý rằng $\angle SEB = \angle TFC$. Từ đó ta có

$\dfrac{ES.EB}{FT.FC} = \dfrac{[SBE]}{[TCF]} = \dfrac{[SBE]}{[CNF]}.\dfrac{[CNF]}{[BME]}.\dfrac{[BME]}{[TCF]} = \dfrac{SB.SE}{CN.CF}.\dfrac{CN}{BM}.\dfrac{BM.BE}{TC.TF}$ (Do (3) và (4))

$= \dfrac{SB}{TC}.\dfrac{ES.EB}{FT.FC}$.

Từ đó dễ suy ra $SB = TC$ hay $ST \parallel BC$. Từ đó ta thấy các tam giác HST và KBC có các cạnh tương ứng song song nên HK, BS, CT đồng quy tại P hay HK đi qua P cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải thứ 2 chúng tôi đưa ra dựa trên ý tưởng sử dụng phương tích và trục đẳng phương.

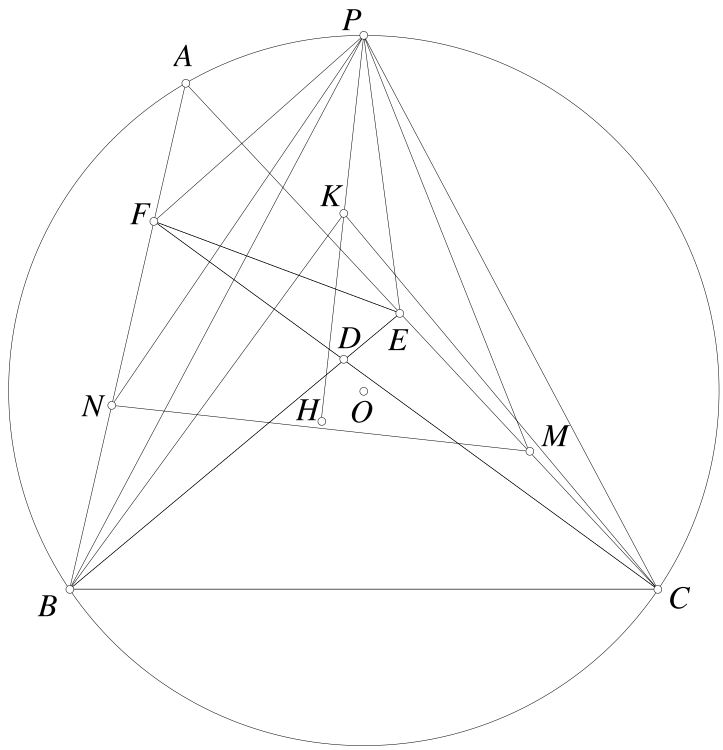


Hình 2.

Lời giải 2. Gọi BU, CV là đường cao của tam giác DBC. Tứ giác $BUVC$ nội tiếp ta suy ra $KU.KB = KV.KC$ từ đó phương tích của K đối với đường tròn đường kính BF và CE bằng nhau. Vậy K thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính BF và CE. Tương tự H cũng thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính BF và CE. Gọi P là trung điểm cung $\overset{\frown}{ABC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M, N là trung điểm CE, BF. Do $BF = CE$ nên ta dễ thấy hai tam giác PFB và PCE bằng nhau. Từ đó suy ra hai trung tuyến $PM = PN$. Từ đó $PM^2 - ME^2 = PN^2 - NF^2$. Từ đó ta cũng thấy phương tích của P đối với đường tròn đường kính BF và CE bằng nhau. Vậy H, K, P thẳng hàng trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BF và CE bằng nhau. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán được tổng quát và phát biểu lại dưới dạng là tìm yếu tố cố định có phần thú vị hơn. Rõ rằng ta phải đoán nhận điểm cố định vì đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC không xuất hiện trong đề bài. Lời giải thứ 2 xem ra ngắn gọn hơn lời giải 1 nhưng lời giải 1 sử dụng kiến thức sơ cấp hơn. Nhờ cách giải thứ 2 ta có thể giải bài toán đảo như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với E, F lần lượt thuộc đoạn CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và (O) cắt nhau tại P khác A. BE cắt CF tại D. Giả sử P và trực tâm các tam giác DEF, DBC thẳng hàng. Chứng minh rằng $CE = BF$.



Hình 3.

Lời giải. Gọi H, K là trực tâm tam giác DEF và tam giác DBC. Tương tự phần đầu lời giải 2 ta dễ thấy HK là trục đẳng phương của đường tròn đường kính CE và BF. Do đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và (O) cắt nhau tại P khác A. Ta dễ thấy tam giác PBF và tam giá PCE đồng dạng. Từ đó ta có $\dfrac{PF}{PB} = \dfrac{PE}{PC}$ (1).

Ta chú ý do P, H, K thẳng hàng nên P thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính CE và BF. Sử dụng công thức tính phương tích bằng tích vô hướng suy ra $\overrightarrow{PE}.\overrightarrow{PC} = \mathcal{P}_{P/(CE)} = \mathcal{P}_{P/(BF)} = \overrightarrow{PF}.\overrightarrow{PB}$. Từ đó chú ý rằng $\angle EPC = \angle FPB$ nên suy ra $PE.PC = PF.PB$ (2).

Từ $(1), (2)$ suy ra $PF = PE, PB = PC$ kết hợp $\angle EPC = \angle FPB$ suy ra hai tam giác PFB và PEC bằng nhau suy ra $CE = BF$. Ta có điều phải chứng minh. □

Ta có ngay một số bài toán hệ quả như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với E, F là các điểm di chuyển trên đoạn CA, AB sao cho $CE = BF$. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm CA, AB, AE, AF. Lấy điểm S, T sao cho SM và TQ vuông góc

BE còn SN và TP vuông góc với CF. Gọi O, K là tâm ngoại tiếp tam giác ABC và AEF. Chứng minh rằng giao điểm của ST và OK luôn thuộc một đường tròn cố định khi E, F di chuyển.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC với E, F là các điểm thuộc đoạn CA, AB. M, N, P, Q là trung điểm CA, AB, AE, AF. Lấy điểm S, T sao cho SM và TQ vuông góc BE còn SN và TP vuông góc với CF. Gọi O, K là tâm ngoại tiếp tam giác ABC và AEF. ST cắt OK tại R. Chứng minh rằng $AR \perp OK$ khi và chỉ khi $BE = CF$.

Nếu các bạn quen với phép nghịch đảo thì các bạn có thể làm một số bài toán sau để luyện tập

Bài toán 6. Cho tam giác ABC với phân giác AD. P là một điểm trên phân giác AD. PB, PC cắt CA, AB tại E, F. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác APB, APC cắt trung trực CA, AB tại M, N. AM, AN lần lượt cắt trung trực AF, AE tại S, T. Chứng minh rằng giao điểm của MN và ST luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ trong tam giác. PB, PC cắt CA, AB tại E, F. Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác APB, APC cắt trung trực CA, AB tại M, N. AM, AN lần lượt cắt trung trực AF, AE tại S, T. Gọi MN cắt ST tại Q. EF cắt BC tại R. Chứng minh rằng AQ, BC và trung trực AR đồng quy khi và chỉ khi AP là phân giác $\angle BAC$.

Tài liệu

[1] European Girls' Mathematical Olympiad - Day 1 - P2
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=585058

[2] Trần Quang Hùng
Tuyển tập các bài hình học chọn đội tuyển KHTN.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com