

KIẾN THỨC CƠ BẢN:

1. Định nghĩa: $\begin{cases} A \geq B \Leftrightarrow A - B \geq 0 \\ A \leq B \Leftrightarrow A - B \leq 0 \end{cases}$

2. Tính chất:

1. $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$

2. $a > b, c < d \Rightarrow a - c > b - d$

3. $a > b, c > 0 \Rightarrow ac > bc$

4. $a > b, c < 0 \Rightarrow ac < bc$

5. $a > b \geq 0, c > d \geq 0 \Rightarrow ac > bd$

6. $a > b > 0 \Rightarrow a^n > b^n$

7. $a > b \Leftrightarrow a^n > b^n, n \text{ chẵn}$

8. $|a| > |b| \Leftrightarrow a^n > b^n, n \text{ chẵn}$

9. $m > n > 0, a > 1 \Rightarrow a^m > a^n$

$a = 1 \Rightarrow a^m = a^n; 0 < a < 1 \Rightarrow a^m < a^n$

10. $a > b, ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

11. $|A + B| \geq |A| + |B|$. Đẳng thức xảy ra khi $A.B > 0$

12. $|A - B| \leq |A| - |B|$. Đẳng thức xảy ra khi $A.B < 0$

3. Một số bất đẳng thức cơ bản thường dùng:

1. $\frac{\sqrt{x-1}}{x} \leq \frac{1}{2}$

2. $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}; a, b, c \in \mathbb{Z}^+$

3. $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4;$

$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$

4. $(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2}$

5. $\frac{a^2+b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2; \frac{a}{1+a^2} \leq \frac{2}{2a} = \frac{1}{2}$

6. $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \text{ hay } (a+b)^2 \geq 4ab$

7. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2; a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2}{a+b}$

8. $a+b \leq \sqrt{2(a+b)}$

9. $\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab}$

10. $0 < a \leq b \leq c \leq 1 \Rightarrow ab+1 \leq ac+1 \leq bc+1$
 $\Rightarrow \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{ab+1}$

11. $\sqrt{4a+1} = \sqrt{(4a+1) \cdot 1} \leq \frac{4a+1+1}{2} = 2a+1$

12. $\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geq \frac{2}{1-xy}$

13. $\sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{a+b+c}{2a}$

14. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}; a, b \geq 0$

15. $\frac{1}{x.y} \geq \frac{4}{(x+y)^2}$

16. $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} > \frac{2}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$

17. $\frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k}} < \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k-1}} = 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Đẳng thức thường dùng :

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$$

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

Chúng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta luôn có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

Giải:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{2} - ab + \frac{b^2}{2} \right) + \left(\frac{c^2}{2} - ac + \frac{a^2}{2} \right) + \left(\frac{c^2}{2} - bc + \frac{b^2}{2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} + \frac{c^2 - 2ac + a^2}{2} + \frac{c^2 - 2cb + b^2}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(c-a)^2}{2} + \frac{(c-b)^2}{2} \geq 0 \text{ đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Chúng minh rằng với mọi số thực a, b không âm ta luôn có: $\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$

Giải:

$$\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} = \frac{a+b}{2} \left(a+b + \frac{1}{2} \right) \geq \sqrt{ab} \left(a+b + \frac{1}{2} \right).$$

Xét hiệu :

$$\sqrt{ab} \left(a+b + \frac{1}{2} \right) - \sqrt{ab} (\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \sqrt{ab} \left(a+b + \frac{1}{2} - \sqrt{a} - \sqrt{b} \right) = \sqrt{ab} \left(\left(\sqrt{a} - \frac{1}{2} \right)^2 + \left(\sqrt{b} - \frac{1}{2} \right)^2 \right) \geq 0 \text{ đúng}$$

Vậy: $\frac{(a+b)^2}{2} + \frac{a+b}{4} \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$

Chúng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d, e ta luôn có: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e)$

Giải:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b+c+d+e) \Leftrightarrow 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) \geq 4a(b+c+d+e)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) + (a^2 - 4ae + 4e^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2b)^2 + (a-2c)^2 + (a-2d)^2 + (a-2e)^2 \geq 0 \text{ đúng.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $b = c = d = e = \frac{a}{2}$.

Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c, d ta luôn có: $\sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2}$

Giải:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \\ \Leftrightarrow & (a-c)^2 + (b-d)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ \Leftrightarrow & (a-c)^2 - (a^2 + c^2) + (b-d)^2 - (b^2 + d^2) \leq 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ \Leftrightarrow & -2ac - 2bd \leq 2\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \Leftrightarrow (-1)(ac + bd) \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} \\ \Leftrightarrow & (ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \Leftrightarrow (ac)^2 + 2(ac)(bd) + (bd)^2 \leq (ac)^2 + (ad)^2 + (bc)^2 + (bd)^2 \\ \Leftrightarrow & 2(ac)(bd) \leq (ad)^2 + (bc)^2 \Leftrightarrow (ad)^2 - 2(ad)(bc) + (bc)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $ad = bc$.

CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÁCH CÁC SỐ HẠNG HOẶC TÁCH CÁC THỪA SỐ MỘT VÊ

Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có: $\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} < \frac{1}{4}$

Giải:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1.5} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{1.5} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \\ \text{Ta có: } \frac{1}{5.9} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5.9} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

.....

$$\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{Cộng vế theo vế ta được: } & \frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4n+1}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{4n}{4n+1} = \frac{n}{4n+1} < \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

PHƯƠNG PHÁP LÀM TRỌI.

NHỮNG BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN TRONG COSI.**NHỮNG QUY TẮC CHUNG TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI**

Quy tắc song hành: hầu hết các BĐT đều có tính đối xứng do đó việc sử dụng các chứng minh một cách song hành, tuần tự sẽ giúp ta hình dung ra được kết quả nhanh chóng và định hướng cách giải nhanh hơn.

Quy tắc dấu bằng: dấu bằng " $=$ " trong BĐT là rất quan trọng. Nó giúp ta kiểm tra tính đúng đắn của chứng minh. Nó định hướng cho ta phương pháp giải, dựa vào điểm rơi của BĐT. Chính vì vậy mà khi dạy cho học sinh ta rèn luyện cho học sinh có thói quen tìm điều kiện xảy ra dấu bằng mặc dù trong các kì thi học sinh có thể không trình bày phần này. Ta thấy được ưu điểm của dấu bằng đặc biệt trong phương pháp điểm rơi và phương pháp tách nghịch đảo trong kỹ thuật sử dụng BĐT Cô Si.

Quy tắc về tính đồng thời của dấu bằng: không chỉ học sinh mà ngay cả một số giáo viên khi mới nghiên cứu và chứng minh BĐT cũng thường rất hay mắc sai lầm này. Áp dụng liên tiếp hoặc song hành các BĐT nhưng không chú ý đến điểm rơi của dấu bằng. Một nguyên tắc khi áp dụng song hành các BĐT là điểm rơi phải được đồng thời xảy ra, nghĩa là các dấu " $=$ " phải được cùng được thỏa mãn với cùng một điều kiện của biến.

Quy tắc biên: Cơ sở của quy tắc biên này là các bài toán quy hoạch tuyến tính, các bài toán tối ưu, các bài toán cực trị có điều kiện ràng buộc, giá trị lớn nhất nhỏ nhất của hàm nhiều biến trên một miền đóng. Ta biết rằng các giá trị lớn nhất, nhỏ nhất thường xảy ra ở các vị trí biên và các đỉnh nằm trên biên.

Quy tắc đối xứng: các BĐT thường có tính đối xứng vậy thì vai trò của các biến trong BĐT là như nhau do đó dấu " $=$ " thường xảy ra tại vị trí các biến đó bằng nhau. Nếu bài toán có gắn hệ điều kiện đối xứng thì ta có thể chỉ ra dấu " $=$ " xảy ra khi các biến bằng nhau và mang một giá trị cụ thể.

Chiều của BĐT: " \leq, \geq " cũng sẽ giúp ta định hướng được cách chứng minh: đánh giá từ TBC sang TBN và ngược lại.

Dạng tổng quát (n số): $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ ta có:

- Dạng 1: $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$
- Dạng 2: $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$
- Dạng 3: $\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^n \geq x_1 x_2 \dots x_n$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi: $x_1 = x_2 = \dots = x_n$

Hệ quả 1:

Nếu: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = S = \text{const}$ **thì:** $\max P(x_1 x_2 \dots x_n) = \left(\frac{S}{n} \right)^n$

khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{S}{n}$

Hệ quả 2:

Nếu: $x_1 x_2 \dots x_n = P = \text{const}$ **thì:** $\min S(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = n \sqrt[n]{P}$

khi $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \sqrt[n]{P}$

Chứng minh rằng nếu mọi số thực a, b, c ta luôn có: $(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8a^2b^2c^2$

Giải:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 \geq 2|ab| \geq 0 \\ b^2 + c^2 \geq 2|bc| \geq 0 \\ c^2 + a^2 \geq 2|ca| \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2) \geq 8|a^2b^2c^2| = 8a^2b^2c^2$$

Bình luận:

- Chỉ nhân các vế của BĐT cùng chiều (kết quả được BĐT cùng chiều) khi và chỉ khi các vế cùng không âm.
- Cần chú ý rằng: $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$ vì x, y không biết âm hay dương.
- Nói chung ta ít gặp bài toán sử dụng ngay BĐT Cô Si như bài toán nói trên mà phải qua một vài phép biến đổi để tình huống thích hợp rồi mới sử dụng BĐT Cô Si.
- Trong bài toán trên dấu " \geq " \Rightarrow đánh giá từ TBC sang TBN. 8 = 2.2.2 gợi ý đến việc sử dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số, 3 cặp số.

Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ và thỏa mãn $a.b.c = 1$ thì $\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$

Giải:

Ta có : $a^2 + b^2 \geq 2ab$; $b^2 + 1 \geq 2b \Rightarrow a^2 + 2b^2 + 3 \geq 2(ab + b + 1) \Rightarrow \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ab + b + 1}$.

Tương tự : $\frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{bc + c + 1}$; $\frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{ac + a + 1}$

Cộng vế theo vế : $\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ac + a + 1} \right)$.

Mặt khác : $\frac{1}{ab + b + 1} + \frac{1}{bc + c + 1} + \frac{1}{ac + a + 1} = \frac{1}{ab + b + 1} + \frac{ab}{ab^2c + abc + ab} + \frac{b}{abc + ab + b}$
 $= \frac{1}{ab + b + 1} + \frac{ab}{ab + b + 1} + \frac{b}{ab + b + 1} = \frac{1 + ab + b}{ab + b + 1} = 1$.

Vậy : $\frac{1}{a^2 + 2b^2 + 3} + \frac{1}{b^2 + 2c^2 + 3} + \frac{1}{c^2 + 2a^2 + 3} \leq \frac{1}{2}$.

Lời bình : Bài toán trên sử dụng đến bất đẳng thức cơ bản $(x - y)^2 \geq 0$ đúng với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Cho x, y là các số thực dương khác 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} \right) + \frac{1}{4} (x^{16} + y^{16}) - (1 + x^2y^2)^2.$$

Giải:

$\frac{1}{2} \left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} \right) \geq x^4y^4$. Đẳng thức xảy ra khi $x^{12} = y^{12}$

$\frac{1}{4} (x^{16} + y^{16}) \geq \frac{1}{2} x^8y^8$. Đẳng thức xảy ra khi $x^{16} = y^{16}$.

$$\Rightarrow Q \geq \frac{1}{2}x^8y^8 + x^4y^4 - (1 + x^2y^2)^2 = \frac{1}{2}(x^8y^8 + 2x^4y^4 + 1) - (1 + x^2y^2)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^4y^4 + 1)^2 - (x^2y^2 + 1)^2 - \frac{1}{2}$$

Mặt khác : $(1^2 + 1^2) \left[(x^2y^2)^2 + 1^2 \right] \geq (x^2y^2 + 1)^2$ hay $2(x^4y^4 + 1) \geq (x^2y^2 + 1)^2$. Đẳng thức xảy ra khi

$$x^2y^2 = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(x^4y^4 + 1)^2 \geq \frac{1}{8}(x^2y^2 + 1)^4 \Rightarrow Q \geq \frac{1}{8}(x^2y^2 + 1)^4 - (x^2y^2 + 1)^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \left[(x^2y^2 + 1)^2 - 4 \right]^2 - \frac{5}{2} \geq -\frac{5}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x^2y^2 = 1$.

$$\text{Vậy : } \min Q = -\frac{5}{2} \text{ khi } x^2 = y^2 = 1.$$

Cho x, y, z là các số thực dương. Chứng minh rằng: $\left(\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 + \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 \geq 12$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân:

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 2\sqrt{\frac{xz}{y\sqrt[3]{xyz}}}; \frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 2\sqrt{\frac{yx}{z\sqrt[3]{xyz}}}; \frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 2\sqrt{\frac{zy}{x\sqrt[3]{xyz}}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 + \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 \geq 4 \left(\sqrt{\frac{xz}{y\sqrt[3]{xyz}}} + \sqrt{\frac{yx}{z\sqrt[3]{xyz}}} + \sqrt{\frac{zy}{x\sqrt[3]{xyz}}} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân:

$$4 \left(\sqrt{\frac{xz}{y\sqrt[3]{xyz}}} + \sqrt{\frac{yx}{z\sqrt[3]{xyz}}} + \sqrt{\frac{zy}{x\sqrt[3]{xyz}}} \right) \geq 4 \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{xz}{y\sqrt[3]{xyz}} \cdot \frac{yx}{z\sqrt[3]{xyz}} \cdot \frac{yz}{x\sqrt[3]{xyz}}} = 12.$$

$$\text{Vậy : } \left(\frac{x}{y} + \frac{z}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 + \left(\frac{y}{z} + \frac{x}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 + \left(\frac{z}{x} + \frac{y}{\sqrt[3]{xyz}} \right)^2 \geq 12.$$

Cho n nguyên và $n \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x + \frac{1}{x^n}$

Giải:

$$A = \underbrace{\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n} + \frac{1}{x^n}}_{n \text{ số } \frac{x}{n}} \geq (n+1) \sqrt[n+1]{\left(\frac{x}{n} \right)^n \frac{1}{x^n}} \geq \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{n^n}}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \frac{x}{n} = \frac{1}{x^n} \Leftrightarrow x = \sqrt[n+1]{n}$$

Giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{n^n}}$

Cho n nguyên và $n \geq 2$ và $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x + \frac{1}{x^n}$

Giải:

Với $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$

$$f(x) \geq f(k) \Leftrightarrow x + \frac{1}{x^n} - k - \frac{1}{k^n} \geq 0 \Leftrightarrow x - k + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{k}\right) \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - k) \left[1 - \frac{1}{xk} \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} \right) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - k)}{xk} \left[xk - \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} \right) \right] \geq 0$$

Ta có: $\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} \leq \frac{n}{k^{n-1}} < \frac{n}{\sqrt[n+1]{n^{n-1}}} = \sqrt[n+1]{n^2} < xk$

Suy ra $f(x) \geq f(k)$ đúng với mọi $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$. Giá trị nhỏ nhất của $A = k + \frac{1}{k^n}$ khi $x = k$.

Cách 2 :

Nháp : $A = \underbrace{\frac{x}{m} + \dots + \frac{x}{m} + \frac{1}{x^n}}_{n \text{ so } \frac{x}{m}, m > 0} + x - \frac{nx}{m} \geq (n+1) \sqrt[n+1]{\left(\frac{x}{m}\right)^n \frac{1}{x^n}} + x \left(1 - \frac{n}{m}\right)$

Ta chọn m sao cho: $\begin{cases} x = k \\ \frac{x}{m} = \frac{1}{x^n} \end{cases} \Rightarrow m = x^{n+1} = k^{n+1}$

Bài giải: $A = \underbrace{\frac{x}{k^{n+1}} + \dots + \frac{x}{k^{n+1}} + \frac{1}{x^n}}_{n \text{ so } \frac{x}{k^{n+1}}} + x - \frac{nx}{k^{n+1}} \geq (n+1) \sqrt[n+1]{\left(\frac{x}{k^{n+1}}\right)^n \frac{1}{x^n}} + x \left(1 - \frac{n}{k^{n+1}}\right)$

Vì $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$ nên $n < k^{n+1}$ suy ra: $A \geq \frac{(n+1)}{k^n} + k \left(1 - \frac{n}{k^{n+1}}\right) = k + \frac{1}{k^n} = f(k)$

Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$.

Đề thi Đại học khối A năm 2006

Giải:

Xét $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$ (*). Chia cả hai vế cho x^2y^2

Đặt $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$.

Ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy} \Rightarrow u + v = u^2 + v^2 - uv \Rightarrow (u+v)^2 - (u+v) = 3uv \leq \frac{3(u+v)^2}{4}$.

$\Rightarrow (u+v)^2 - 4(u+v) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq u+v \leq 4$

Khi đó : $A = \frac{x^3 + y^3}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{x^3y^3} = \frac{(x+y)(x+y)xy}{x^3y^3} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2y^2}$

$\Rightarrow A = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = (u+v)^2 \leq 16$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $u = v = 2$ hay $x = y = \frac{1}{2}$.

Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa : $x + y + z \geq 3$. Tìm GTNN của $A = \frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}}$

Giải:

$\frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}}$.

Ta có : $\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy} \leq x + y + z$.

Suy ra : $\frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z + x+y+z} = \frac{x+y+z}{2} \geq \frac{3}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x = y = z \\ \frac{x}{x + \sqrt{yz}} = \frac{y}{y + \sqrt{zx}} = \frac{z}{z + \sqrt{xy}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$

Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của:

$T = \frac{x^3}{2x + 3y + 5z} + \frac{y^3}{5x + 2y + 3z} + \frac{z^3}{3x + 5y + 2z}$.

Giải:

$$T = \frac{x^4}{x(2x+3y+5z)} + \frac{y^4}{y(5x+2y+3z)} + \frac{z^4}{z(3x+5y+2z)} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+8(xy+yz+zx)}$$

$$T \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+8(x^2+y^2+z^2)} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{10(x^2+y^2+z^2)} \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{10} \geq \frac{1}{30}$$

Đẳng thức xảy ra khi :

$$\begin{cases} \frac{x^4}{x(2x+3y+5z)} = \frac{y^4}{y(5x+2y+3z)} = \frac{z^4}{z(3x+5y+2z)} \\ x = y = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$$

Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $x.y.z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Đề thi Đại học khối A năm 2007

Giải:

Cách 1:

$$P \geq \frac{2x\sqrt{x}\sqrt{xyz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}\sqrt{xyz}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}\sqrt{xyz}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z} \\ b = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x} \\ c = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} = \frac{1}{9}(-2a + 4b + c) \\ y\sqrt{y} = \frac{1}{9}(a - 2b + 4c) \\ z\sqrt{z} = \frac{1}{9}(4a + b - 2c) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } P \geq \frac{2}{9} \left(\frac{-2a+4b+c}{a} + \frac{a-2b+4c}{b} + \frac{4a+b-2c}{c} \right) \geq \frac{2}{9} \left(-6 + 4 \left[\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \right] + \left[\frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \right] \right).$$

$$\text{Hay } P \geq \frac{2}{9}(-6 + 4.3 + 3) = 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức của $P = 2$ khi $a = b = c = 1$.

Lời bình: Lời giải trên khá phức tạp, việc đặt ẩn a, b, c gặp nhiều khó khăn đối với HSPT.

Cách 2:

Phân tích bài toán: Để tiện cho việc trình bày, tạm đặt $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}, c = \sqrt{z}$

Bài toán trở thành : Cho a, b, c là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $P = \frac{a^4(b^2 + c^2)}{b^3 + 2c^3} + \frac{b^4(c^2 + a^2)}{c^3 + 2a^3} + \frac{c^4(a^2 + b^2)}{a^3 + 2b^3}$

Bài giải: Dễ thấy: $b^2 + c^2 \geq 2bc = \frac{2}{a} \Rightarrow a^4(b^2 + c^2) \geq 2a^3$. Tương tự $b^4(c^2 + a^2) \geq 2b^3$; $c^4(a^2 + b^2) \geq 2c^3$

Khi đó $P \geq \frac{2a^3}{b^3 + 2c^3} + \frac{b^3}{c^3 + 2a^3} + \frac{c^3}{a^3 + 2b^3}$

$$\text{Đặt } \begin{cases} m = b^3 + 2c^3 \\ n = c^3 + 2a^3 \\ p = a^3 + 2b^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^3 = \frac{4n + p - 2m}{9} \\ b^3 = \frac{4p + m - 2n}{9} \\ c^3 = \frac{4m + n - 2p}{9} \end{cases} \Rightarrow P \geq \frac{2}{9} \left(\frac{4n + p - 2m}{m} + \frac{4p + m - 2n}{n} + \frac{4m + n - 2p}{p} \right)$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2}{9} \left[4 \left(\frac{n}{m} + \frac{p}{n} + \frac{m}{p} \right) + \left(\frac{p}{m} + \frac{m}{n} + \frac{n}{p} \right) - 6 \right] \geq \frac{2}{9} (4 \cdot 3 + 3 - 6) \Rightarrow P \geq 2$$

Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

Đề thi Đại học khối D năm 2009

Giải:

Nhận xét: vai trò giống nhau (đối xứng) của x, y .

$$S = 12(x^3 + y^3) + 16x^2y^2 + 34xy = 12(x + y)(x^2 + y^2 - xy) + 16x^2y^2 + 34xy$$

$$\text{Hay } S = 12(x + y) \left((x + y)^2 - 3xy \right) + 16x^2y^2 + 34xy = \left(4xy - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{191}{16}$$

$$\text{Vì } x, y \text{ không âm và thỏa mãn } x + y = 1 \text{ suy ra } 0 \leq xy \leq \left(\frac{x + y}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq 4xy - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 0 \leq \left(4xy - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{191}{16} \leq \frac{25}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $S = \frac{25}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$ và giá trị nhỏ nhất của $S = 0$ khi $x = 0, y = 1$.

Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

Đề thi Đại học khối B năm 2009

Giải:

$$\left. \begin{aligned} (x+y)^3 + 4xy &\geq 2 \\ (x+y)^2 &\geq 4xy \end{aligned} \right\} \Rightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 \geq 2 \Rightarrow x+y \geq 1 .$$

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 = \frac{3}{2}(x^4 + y^4 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$A = \frac{3}{2}(x^4 + y^4) + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\text{Mà } x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \geq (x^2 + y^2)^2 - (x^4 + y^4) \Rightarrow x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$$

$$\text{Khi đó } A \geq \frac{3}{4}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 \text{ hay } A \geq \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\text{Đặt } t = (x^2 + y^2)^2, t \geq \frac{(x+y)^2}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow A \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1, t \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1 \text{ xác định và liên tục trên nửa khoảng } \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 \geq \frac{9}{4} - 1 > 0, t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên nửa khoảng } \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Khi đó } \min A = \min_{t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } t = \frac{1}{2}.$$

ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC COSI

Bài toán mở đầu : Cho $a, b > 0$ và thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1 + a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab}.$$

Giải:

$$\text{Lời giải 1. Ta có: } P = \frac{1}{1 + a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{a^2 + 2ab + b^2 + 1} = \frac{4}{(a+b)^2 + 1} \geq \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a^2 + b^2 = 2ab \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 + 1 = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}. \text{ Hệ vô nghiệm. Vậy không tồn tại } \min P.$$

$$\text{Lời giải 2. Ta có: } P = \frac{1}{1 + a^2 + b^2} + \frac{1}{6ab} + \frac{1}{3ab} \geq \frac{4}{a^2 + 6ab + b^2 + 1} + \frac{1}{3ab} = \frac{4}{(a+b)^2 + 1 + 4ab} + \frac{1}{3ab}$$

$$\text{Mặt khác } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}. \text{ Vậy } P \geq \frac{4}{2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{1}{6\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq \frac{8}{3}.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a^2 + b^2 = 3ab \\ a = b \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

Lời bình: lời giải 1. và **lời giải 2** gần như tương tự nhau, cùng áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Tại sao trong cùng một bài toán mà có đến hai đáp số? Do đâu mà lời giải 2 tại sao lại tách $\frac{1}{2ab} = \frac{1}{6ab} + \frac{1}{3ab}$? **Đó chính là kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức.**

Các bất đẳng thức trong các đề thi đại học thông thường là đối xứng với các biến và ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau và xảy ra tại biên.

Cho $x \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = x + \frac{1}{x}$

Giải:

Phân tích bài toán:

Với $\alpha + \beta = 1; \alpha, \beta > 0$, thì $P = \alpha x + \frac{1}{x} + \beta x$.

Ta luôn có: $P = \alpha x + \frac{1}{x} + \beta x \geq 2\sqrt{\alpha x \cdot \frac{1}{x}} + \beta x$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\alpha x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{\frac{1}{\alpha}} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \beta = \frac{3}{4}$

Bài giải:

$$P = x + \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x} \right) + \frac{3}{4}x \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}x \cdot \frac{1}{x}} + \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{5}{2}$$

Vậy min $P = \frac{5}{2}$ khi $x = 2$.

Cho $a, b > 0$ và thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} + 4ab$.

Giải:

Do P là biểu thức đối xứng với a, b , ta dự đoán min P đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ta có: } P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + \left(4ab + \frac{1}{4ab} \right) + \frac{1}{4ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} + 2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{2ab}} + \frac{1}{4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq 7$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ a^2b^2 = \frac{1}{16} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$.

Tham khảo hai lời giải khác :

Lời giải 1:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} + \left(4ab + \frac{1}{4ab}\right) + \frac{1}{4ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} 2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{2ab}} + \frac{1}{4ab} \geq 4 + 2 + \frac{1}{4ab} = 6 + \frac{1}{4ab}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ a^2b^2 = \frac{1}{16} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}. \text{ Thay } a = b = \frac{1}{2} \text{ vào ta được } P \geq 7.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$.

Lời bình 1:

Qua cách giải trên ta đã chọn đúng dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$ nên dẫn đến việc tách các số hạng và

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$ là đúng, nhưng bước cuối cùng ta đã làm sai, ví dụ

$$(1-a)^2 + a \geq a, \text{ đẳng thức xảy ra khi } a = 1 \Rightarrow \min \left[(1-a)^2 + a \right] = a?.$$

Lời giải 2:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab} + 4ab \geq \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} + \frac{1}{2ab} + 4ab = \frac{4}{(a+b)^2} + \left(\frac{1}{2ab} + 4ab \right).$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{2ab} + 4ab \geq 2\sqrt{\frac{1}{2ab} \cdot 4ab} = 2\sqrt{2}. \text{ Vậy } P \geq 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \min P = 2(2 + \sqrt{2})$$

Lời bình 2:

Thoạt nhìn thấy bài toán đã giải đúng. Thực tế thì sao? . Việc tách $\frac{1}{ab} = \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab}$ để làm xuất hiện đẳng

$$\text{thức } a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2.$$

$$\min P = 2(2 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \frac{1}{2ab} = 4ab \\ a + b = 1 \end{cases} \text{ Hệ vô nghiệm. Đẳng thức không xảy ra, do đó không tồn tại } \min P.$$

Cho x, y là hai số thực dương lớn hơn 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)}$

Giải:

$$P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2(x-1) + y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1} \geq \frac{2xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi : $\frac{x^2}{y-1} = \frac{y^2}{x-1}.$

Mặt khác $\sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1) \cdot 1} \leq \frac{x-1+1}{2} = \frac{x}{2}.$ Đẳng thức xảy ra khi : $x-1=1 \Leftrightarrow x=2.$

$\sqrt{y-1} = \sqrt{(y-1) \cdot 1} \leq \frac{y-1+1}{2} = \frac{y}{2}.$ Đẳng thức xảy ra khi : $y-1=1 \Leftrightarrow y=2.$

$\Rightarrow P \geq \frac{2xy}{\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2}} = 8.$ Đẳng thức xảy ra khi $x=y=2.$

Vậy min $P = 8$ khi $x = y = 2.$

Tương tự : Cho a, b, c là hai số thực dương và thỏa mãn $b^2 + c^2 \leq a^2.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2}(b^2 + c^2) + a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Cho x, y, z là 3 số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right)$$

Đề thi Đại học khối B năm 2007

Giải:**Cách 1:**

Phân tích bài toán: Dự đoán điểm rơi $x = y = z.$

Khi đó $P = x\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz}\right) + y\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx}\right) + z\left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy}\right) = 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot \frac{1}{x} = 3\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x}\right)$

$\Rightarrow P \geq 3 \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} \Rightarrow P \geq \frac{9}{2} \Rightarrow \min P = \frac{9}{2}.$ Đẳng thức xảy ra khi $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2x} \Leftrightarrow x = 1.$

Vậy ta dự đoán min $P = \frac{9}{2}$ khi $x = y = z = 1.$

Bài giải:

$$P = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + \frac{xy + yz + zx}{xyz}$$

$$P \geq \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{y} \right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{z} \right) = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \right) + \left(\frac{y^2}{2} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2y} \right) + \left(\frac{z^2}{2} + \frac{1}{2z} + \frac{1}{2z} \right)$$

$$\text{Hay } P \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} + 3\sqrt[3]{\frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{2y} \cdot \frac{1}{2y}} + 3\sqrt[3]{\frac{z^2}{2} \cdot \frac{1}{2z} \cdot \frac{1}{2z}} \Rightarrow P \geq \frac{9}{2}$$

Vậy min $P = \frac{9}{2}$ khi $x = y = z = 1$.

Cách 2:

$$P = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}$$

$$P = (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xyz} \right) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \left(1 + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyz} \right)$$

$$P \geq \frac{1}{2} 9 \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 y^2 z^2}} = \frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{9}{2}$

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{3 + 4^x} + \sqrt{3 + 4^y} + \sqrt{3 + 4^z} \geq 6$$

Đề thi Dự bị Đại học khối D năm 2005

Giải:

Phân tích bài toán: Dự đoán điểm rơi $x = y = z = 0$.

Bài giải: Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\sqrt{3 + 4^x} + \sqrt{3 + 4^y} + \sqrt{3 + 4^z} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{3 + 4^x} \cdot \sqrt{3 + 4^y} \cdot \sqrt{3 + 4^z}} = 3\sqrt[6]{(3 + 4^x)(3 + 4^y)(3 + 4^z)}$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} 3 + 4^x = 1 + 1 + 1 + 4^x \geq 4\sqrt[4]{4^x} \\ 3 + 4^y = 1 + 1 + 1 + 4^y \geq 4\sqrt[4]{4^y} \\ 3 + 4^z = 1 + 1 + 1 + 4^z \geq 4\sqrt[4]{4^z} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3 + 4^x} + \sqrt{3 + 4^y} + \sqrt{3 + 4^z} \geq 3\sqrt[6]{4^3 \sqrt[4]{4^x \cdot 4^y \cdot 4^z}} \geq 6$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 0$.

Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$Q = \sqrt[3]{a + 2b} + \sqrt[3]{b + 2c} + \sqrt[3]{c + 2a}.$$

Giải:

Trước hết dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$. Suy ra $Max Q = 3\sqrt[3]{3}$.

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân cho ba số $a + 2b, 3, 3$, ta được

$$\sqrt[3]{a + 2b} = \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \sqrt[3]{3 \cdot 3(a + 2b)} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cdot \frac{3 + 3 + (a + 2b)}{3} = \frac{6 + a + 2b}{3\sqrt[3]{9}}.$$

$$\text{Tương tự: } \sqrt[3]{b + 2c} \leq \frac{6 + b + 2c}{3\sqrt[3]{9}}; \sqrt[3]{c + 2a} \leq \frac{6 + c + 2a}{3\sqrt[3]{9}}$$

$$\text{Suy ra: } Q \leq \frac{6 + a + 2b}{3\sqrt[3]{9}} + \frac{6 + b + 2c}{3\sqrt[3]{9}} + \frac{6 + c + 2a}{3\sqrt[3]{9}} = 3\sqrt[3]{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ và $\text{Max} Q = 3\sqrt[3]{3}$.

Tham khảo lời giải khác :

$$\text{Ta có: } \sqrt[3]{1 \cdot 1(a + 2b)} \leq \frac{1 + 1 + (a + 2b)}{3} = \frac{2 + a + 2b}{3}, \text{ tương tự ta có:}$$

$$\sqrt[3]{1 \cdot 1(b + 2c)} \leq \frac{2 + b + 2c}{3}; \sqrt[3]{1 \cdot 1(c + 2a)} \leq \frac{2 + c + 2a}{3}$$

$$\text{Suy ra: } Q = \sqrt[3]{a + 2b} + \sqrt[3]{b + 2c} + \sqrt[3]{c + 2a} \leq \frac{2 + a + 2b}{3} + \frac{2 + b + 2c}{3} + \frac{2 + c + 2a}{3} = 5$$

Lời bình : Thoạt nhìn thấy lời giải của bài toán đã giải đúng . Thực tế thì sao? $Q \leq 5$

$$\text{Max} Q = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2b = 1 \\ b + 2c = 1 \\ c + 2a = 1 \\ a + b + c = 3 \end{cases} \text{ hệ vô nghiệm. Vậy } Q < 5.$$

Tương tự: Cho $a, b, c > 0$ thỏa mãn điều kiện $a + b + c = \frac{3}{4}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[3]{a + 3b} + \sqrt[3]{b + 3c} + \sqrt[3]{c + 3a} \leq 3$$

Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z}$$

Đề thi Đại học khối D năm 2007

Giải:

Cách 1:

$$\begin{cases} \frac{1}{2x + y + z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ \frac{1}{x + 2y + z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ \frac{1}{x + y + 2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z} \right) \end{cases} \Rightarrow P \leq \frac{1}{16} \left[\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right) + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right) \right] = 1$$

Vậy: $MaxP = 1$ khi $x = y = z = \frac{4}{3}$.

Lời bình : Dự đoán $MaxP$ đạt được tại $x = y = z = \frac{4}{3}$ nên tách các số $2x = x + x; 2y = y + y; 2z = z + z$ ra cho dấu bằng xảy ra.

Cách 2:

Áp dụng mệnh đề “nếu $a, b > 0$, thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$ ”.

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y+z} \right) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2x} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \right] = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z} \right)$$

$$\text{Tương tự : } \frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2z} \right); \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z} \right)$$

Cộng vế theo vế ta được đpcm.

Lời bình : Nếu $a, b > 0$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Tổng quát : Cho $x, y > 0$ và hai số a, b bất kỳ, ta luôn có : $\frac{(a+b)^2}{x+y} \leq \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \right)$ hay

$$\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \right) \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y}.$$

Mở rộng: Nếu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \geq 0$ thì : $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$.

Chứng minh : Với $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \geq 0$, $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \geq n \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq n \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}} \end{cases}$

$$\Rightarrow (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2 \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n} \sqrt[n]{\frac{1}{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

Thực tế cách 2 và cách 1 không có sự khác biệt.

Tương tự :

1. Cho tam giác có độ dài 3 cạnh là a, b, c và p là nửa chu vi . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

2. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\begin{aligned} \text{a. } & \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \\ \text{b. } & \frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c} \leq \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \\ \text{c. } & \frac{1}{2a+3(b+c)} + \frac{1}{2b+3(c+a)} + \frac{1}{2c+3(a+b)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \\ \text{d. } & \frac{1}{a+2b+3c} + \frac{1}{b+2c+3a} + \frac{1}{c+2a+3b} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a+2c} + \frac{1}{b+2a} + \frac{1}{c+2b} \right) \end{aligned}$$

Cách 3: Ta có $2x + y + z = x + x + y + z \geq 4\sqrt[4]{x \cdot x \cdot y \cdot z} \Rightarrow \frac{1}{2x + y + z} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{x^2 y z}}$ và

$$\sqrt[4]{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \Rightarrow \frac{1}{2x + y + z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \triangleleft, \text{ tương tự ta có:}$$

$$\frac{1}{x + 2y + z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right); \frac{1}{x + y + 2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right)$$

$$P \leq \frac{1}{16} \cdot 4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } x = y = z = \frac{4}{3}$$

Vậy: $\text{Max} P = 1$ khi $x = y = z = \frac{4}{3}$.

Tham khảo hai lời giải khác :

Lời giải 1:

$$\text{Ta có } P \leq \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2z} \right) = \frac{5}{18} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{10}{9}$$

$$\Rightarrow \text{Max} P = \frac{10}{9}$$

Lời giải 2:

$$P \leq \frac{1}{3\sqrt[3]{2xyz}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x \cdot 2yz}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{xy \cdot 2z}} \leq \frac{1}{3} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{3} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{3} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2z} \right) = \frac{10}{9}$$

Lời bình : Thoạt nhìn thấy **lời giải 1, lời giải 2** của bài toán đã giải đúng . Thực tế thì sao?

$$\text{Max} P = \frac{10}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y = z \\ 2y = x = z \\ 2z = x = y \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4 \end{cases} \text{ hệ vô nghiệm nghĩa là không tồn tại } (x, y, z) \in D \text{ để } P = \frac{10}{9}$$

Nguyên nhân sai lầm: Cả hai lời giải trên đều đã biết hướng “đích” song chưa biết chọn điểm rơi.

Tương tự :

1. Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{\sqrt{2x+y+z}} + \frac{1}{x+\sqrt{2y+z}} + \frac{1}{x+y+\sqrt{2z}}.$$

2. Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng : $\frac{3}{xy + yz + zx} + \frac{2}{x^2 + y^2 + z^2} > 14$.

3. Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{x^2 + 2yz} + \frac{1}{y^2 + 2zx} + \frac{1}{z^2 + 2xy} \geq 9$.

Cách 4: Nếu $a, b > 0$ thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

$$8 = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) \geq \frac{4}{x+y} + \frac{4}{y+z} + \frac{4}{z+x} \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{4}{3}$.

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) &= \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z}\right) + \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) + \left(\frac{1}{z+x} + \frac{1}{x+y}\right) \\ &\geq \frac{4}{2x+y+z} + \frac{4}{x+2y+z} + \frac{4}{x+y+2z} \quad (2) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Từ (1) và (2) suy ra

$$8\left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+x+z} + \frac{1}{2z+x+y}\right) \leq 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{2y+x+z} + \frac{1}{2z+x+y} \leq 1$$

Vậy: $\max P = 1$ khi $x = y = z = \frac{4}{3}$.

Lời bình : Thực tế cách 1 và cách 4 không có sự khác biệt.

Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì $\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geq 2\left(\sqrt{\frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}}\right)$

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$, ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right) + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}}\right) + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right). \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$, ta có :

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{c}} \right) + \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}} \right) \geq \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{b} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{a} + \sqrt{c}} + \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} &\geq \frac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{2(b+c)}} + \frac{2\sqrt{2b}}{\sqrt{2(a+c)}} + \frac{2\sqrt{2c}}{\sqrt{2(a+b)}} \\ &= 2 \left(\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \right). \end{aligned}$$

Lời bình : Bài toán trên sử dụng đến hai bất đẳng thức cơ bản $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ và $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{2(x+y)}$.

Chứng minh rằng mỗi số thực dương a, b, c ta luôn có: $\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{a+b+c}{6}$

Giải:

Ta có : $\frac{ab}{a+3b+2c} = \frac{ab}{(a+c) + (b+c) + 2b} \leq \frac{ab}{9} \cdot \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{2b} \right).$

Tương tự : $\frac{bc}{b+3c+2a} \leq \frac{bc}{9} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{2c} \right), \quad \frac{ac}{c+3a+2b} \leq \frac{ac}{9} \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a} \right).$

Cộng vế theo vế ta được

$$\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{9} \left(\frac{bc+ac}{a+b} + \frac{bc+ab}{a+c} + \frac{ab+ac}{b+c} \right) + \frac{1}{18} (a+b+c)$$

Hay $\frac{ab}{a+3b+2c} + \frac{bc}{b+3c+2a} + \frac{ca}{c+3a+2b} \leq \frac{1}{9} (a+b+c) + \frac{1}{18} (a+b+c) = \frac{a+b+c}{6}.$

Lời bình : Bài toán trên sử dụng đến bất đẳng thức cơ bản $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}.$

Cho $a, b, c > 0$ và thoả mãn điều kiện $a.b.c = 1$. Chứng minh rằng: $\frac{2}{a^3(b+c)} + \frac{2}{b^3(c+a)} + \frac{2}{c^3(a+b)} \geq 3$

IMO năm 1995

Giải:

Cách 1:

Phân tích bài toán: Dự đoán điểm rơi $a = b = c = 1$ và $\frac{1}{a^3(b+c)} = \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{b+c}{4bc}$

Bài giải: Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{b+c}{4bc} \geq 2\sqrt{\frac{1}{a^3(b+c)} \cdot \frac{b+c}{4bc}} = \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{1}{a} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Chúng minh tương tự, ta được $\frac{1}{b^3(c+a)} \geq \frac{1}{b} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right); \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{c} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

Cộng vế theo vế ta được điều chứng minh.

Cách 2:

Đặt : $a = \frac{1}{x}; b = \frac{1}{y}; c = \frac{1}{z}$. Từ giả thiết suy ra $x.y.z = 1$.

$$\frac{2}{a^3(b+c)} = \frac{2}{\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2x^2}{y+z}; \frac{2}{b^3(c+a)} = \frac{2}{\frac{1}{y^3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)} = \frac{2y^2}{x+z}; \frac{2}{c^3(b+a)} = \frac{2}{\frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right)} = \frac{2z^2}{y+x}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{a^3(b+c)} + \frac{2}{b^3(c+a)} + \frac{2}{c^3(a+b)} = \frac{2x^2}{y+z} + \frac{2y^2}{x+z} + \frac{2z^2}{y+x} \geq \frac{2(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{2(x+y+z)}{2} \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Lời bình : Bài toán trên sử dụng đến việc **Đổi Biến Để Chứng Minh Bất Đẳng Thức**.

Đôi khi chứng minh một bài toán BĐT có rất nhiều cách khác nhau để giải, song không phải cách nào cũng thuận lợi cho việc chứng minh BĐT, có nhiều BĐT đề ra phức tạp làm cho ta cảm giá rối, nhưng qua việc đưa về biến mới thì bài toán trở nên dễ hơn. Bài viết này xin nêu ra một số cách đổi biến để chứng minh BĐT được dễ dàng hơn.

Tương tự:

1. Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng : $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Gợi ý : Đặt : $\begin{cases} x = b+c \\ y = c+a \\ z = a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{y+z-x}{2} \\ b = \frac{x+z-y}{2} \\ c = \frac{x+y-z}{2} \end{cases}$. Bất đẳng thức cần chứng minh

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{y+z-x}{x} + \frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} \right) \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \geq 2\sqrt{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}} + 2\sqrt{\frac{y}{z} \cdot \frac{z}{y}} + 2\sqrt{\frac{z}{x} \cdot \frac{x}{z}} = 6 \text{ đúng.}$$

2. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng : $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \geq 3$.

Gợi ý : Đặt :
$$\begin{cases} a = \frac{xy}{z} \\ b = \frac{yz}{x} \\ c = \frac{zx}{y} \end{cases}$$
 với $a, b, c > 0$. Từ $x^2 + y^2 + z^2 = 3 \Leftrightarrow ab + bc + ca = 3$. Bất đẳng thức cần chứng

minh $\Leftrightarrow a + b + c \geq 3$

Đề ý : $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow a + b + c \geq \sqrt{3(ab + bc + ca)} = 3$.

3. Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng : $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z} \geq 36$.

Gợi ý : Đặt :
$$\begin{cases} x = \frac{a}{a+b+c} \\ y = \frac{b}{a+b+c} \\ z = \frac{c}{a+b+c} \end{cases}$$
 với $a, b, c > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{a} + 4 \cdot \frac{a+b+c}{b} + 9 \cdot \frac{a+b+c}{c} \geq 36 \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + 4 \cdot \frac{a}{b} + 4 \cdot \frac{c}{b} + 9 \cdot \frac{a}{c} + 9 \cdot \frac{b}{c} \geq 22$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{a} + 4 \cdot \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + 9 \cdot \frac{a}{c} \right) + \left(4 \cdot \frac{c}{b} + 9 \cdot \frac{b}{c} \right) \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot 4 \cdot \frac{a}{b}} + 2\sqrt{\frac{c}{a} \cdot 9 \cdot \frac{a}{c}} + 2\sqrt{4 \cdot \frac{c}{b} \cdot 9 \cdot \frac{b}{c}} = 22 \text{ đúng.}$$

4. Cho 3 số thực dương x, y, z . Chứng minh rằng : $xyz \geq (x + y - z)(y + z - x)(z + x - y)$.

Gợi ý : Đặt :
$$\begin{cases} x = b + c \\ y = c + a \\ z = a + b \end{cases}$$
 với $a, b, c > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.

5. Cho 3 số thực dương a, b, c và thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b} \right) \left(b - 1 + \frac{1}{c} \right) \left(c - 1 + \frac{1}{a} \right) \leq 1.$$

Gợi ý : Do $abc = 1$ gợi ý đặt :
$$\begin{cases} a = \frac{x}{y} \\ b = \frac{y}{z} \\ c = \frac{z}{x} \end{cases}$$
 với $x, y, z > 0$. Bất đẳng thức cần chứng minh

$$\left(\frac{x}{y} - 1 + \frac{z}{y} \right) \left(\frac{y}{z} - 1 + \frac{x}{z} \right) \left(\frac{z}{x} - 1 + \frac{y}{x} \right) \leq 1.$$

6. Cho 3 số thực dương x, y, z và thỏa mãn $xyz = x + y + z + 2$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \frac{3}{2} \sqrt{xyz}.$$

Gợi ý : Từ $xyz = x + y + z + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 1$

Đặt : $\frac{1}{1+x} = a, \frac{1}{1+y} = b, \frac{1}{1+z} = c \Rightarrow x = \frac{1-a}{a} = \frac{b+c}{a}, y = \frac{1-b}{b} = \frac{a+c}{b}, z = \frac{1-c}{c} = \frac{a+b}{c}$ với $a, b, c > 0$.

Bất đẳng thức cần chứng minh $\sqrt{\frac{a}{b+c} \cdot \frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a} \cdot \frac{c}{a+b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b} \cdot \frac{a}{b+c}} \leq \frac{3}{2}$.

Đề ý : $\sqrt{\frac{a}{b+c} \cdot \frac{b}{c+a}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+c} \right); \sqrt{\frac{b}{c+a} \cdot \frac{c}{a+b}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+a} \right); \sqrt{\frac{c}{a+b} \cdot \frac{a}{b+c}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+b} \right)$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng :

$$1. a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{15}{2}.$$

$$2. \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

$$3. \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Giải:

$$1. a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{15}{2}$$

$$\text{Ta có thể phạm sai lầm: } a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq 6\sqrt{\sqrt[3]{abc} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}} = 6$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ nhưng khi đó $a + b + c = 3 > \frac{3}{2}$ (trái giả thiết).

Phân tích bài toán :

Từ giả thiết a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$, gợi ý hướng giải bất đẳng thức trung bình cộng, trung

binh nhân. $\frac{3}{2} \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$. Đặt: $x = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$

Khi đó : $a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$

Ta chọn $\alpha > 0$ sao cho: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{\alpha} = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \alpha = x^2 = \frac{1}{4}$.

Bài giải:

$$a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 3\left(4x + \frac{1}{x} - 3x\right) \geq 3.2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} - 9x = 12 - \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

$$2. \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Phân tích bài toán :

Từ giả thiết a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$, gợi ý hướng giải bất đẳng thức trung bình cộng, trung

binh nhân. $\frac{3}{2} \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$. Đặt: $x = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$, đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$.

Xét $x^2 + \frac{1}{x^2}$, chọn $\alpha > 0$ sao cho: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{\alpha x^2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x^4} = 16$.

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân cho 17 số, trong đó 16 số là $\frac{1}{16x^2}$ và số x^2 :

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + 16 \cdot \frac{1}{16x^2} \geq 17 \sqrt[17]{x^2 \left(\frac{1}{16x^2} \right)^{16}} \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \frac{\sqrt{17} x^{\frac{-15}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{\sqrt{17} a^{\frac{-15}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}; \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{\sqrt{17} b^{\frac{-15}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}; \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{\sqrt{17} c^{\frac{-15}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}} \left(a^{\frac{-15}{17}} + b^{\frac{-15}{17}} + c^{\frac{-15}{17}} \right) \geq \frac{\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}} \cdot 3 \left(a^{\frac{-15}{17}} b^{\frac{-15}{17}} c^{\frac{-15}{17}} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}} (abc)^{\frac{-5}{17}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}} \cdot 2^{\frac{15}{17}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Cách khác :

Chọn: $\vec{u} = \left(a; \frac{1}{a} \right), \vec{v} = \left(b; \frac{1}{b} \right), \vec{w} = \left(c; \frac{1}{c} \right)$

Dùng bất đẳng thức vecto $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{\left(a + b + c \right)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} \geq 3 \sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}$$

Tương tự trên, ta đặt $x = \left(\sqrt[3]{abc} \right)^2 \leq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$.

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq 3\sqrt{x + \frac{1}{x}} = 3\sqrt{x + \frac{1}{16x} + \frac{15}{16x}} \geq 3\sqrt{2\sqrt{\frac{x}{16} \cdot \frac{1}{x}} + \frac{15}{16x}}$$

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq 3\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{15}{16x}} \geq 3\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{15}{4}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Hướng phân tích khác :

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{\left(a + b + c\right)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \geq \sqrt{\left(a + b + c\right)^2 + \left(\frac{9}{a + b + c}\right)^2}$$

Lời bình : Nếu $a, b, c > 0$, thì $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a + b + c}$.

Tổng quát : Cho $x, y, z > 0$ và ba số a, b, c bất kỳ, ta luôn có : $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a + b + c)^2}{x + y + z}$ (Bất đẳng thức s-
vac). Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$.

Nếu : $a_i > 0, i = \overline{1, n}, n \in \mathbb{N}$, thì $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$

Tương tự: Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82}. \text{ **Đề thi Đại học khối A năm 2003**}$$

$$3. \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Tương tự trên. Xét $x^2 + \frac{1}{y^2}$, chọn $\alpha > 0$ sao cho: $\begin{cases} x = y = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{\alpha y^2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x^2 y^2} = 16$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân cho 17 số, trong đó 16 số là $\frac{1}{16y^2}$ và số x^2 :

$$x^2 + \frac{1}{y^2} = x^2 + 16 \cdot \frac{1}{16y^2} \geq 17 \sqrt[17]{x^2 \left(\frac{1}{16y^2} \right)^{16}} \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{y^2}} \geq \frac{\sqrt{17} x^{\frac{1}{17}} y^{\frac{-16}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}.$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{\sqrt{17} a^{\frac{1}{17}} b^{\frac{-16}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}; \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{\sqrt{17} b^{\frac{1}{17}} c^{\frac{-16}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}; \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{\sqrt{17} c^{\frac{1}{17}} a^{\frac{-16}{17}}}{2^{\frac{32}{17}}}$$

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}} \left(a^{\frac{1}{17}b^{\frac{-16}{17}}} + b^{\frac{1}{17}c^{\frac{-16}{17}}} + c^{\frac{1}{17}a^{\frac{-16}{17}}} \right) \geq \frac{3\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}} (abc)^{\frac{-5}{17}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2^{\frac{32}{17}}} 2^{\frac{15}{17}} = \frac{3\sqrt{17}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Cho các số không âm a, b, x, y thỏa các điều kiện $\begin{cases} a^{2005} + b^{2005} \leq 1 \\ x^{2005} + y^{2005} \leq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$a^{1975} \cdot x^{30} + b^{1975} \cdot y^{30} \leq 1$$

Toán tuổi thơ 2 – số 27

Giải:

Nhận xét : Các đa thức tham gia trong bài toán cùng bậc $2005 = 1975 + 30$, đồng thời số mũ của các biến tương ứng bằng nhau.

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng , trung bình nhân cho 1975 số a^{2005} và 30 số x^{2005}

$$\frac{1975 \cdot a^{2005} + 30 \cdot x^{2005}}{(1975 + 30)} \geq \sqrt[2005]{(a^{2005})^{1975} \cdot (x^{2005})^{30}} = a^{1975} \cdot x^{30} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{1975 \cdot b^{2005} + 30 \cdot y^{2005}}{(1975 + 30)} \geq \sqrt[2005]{(b^{2005})^{1975} \cdot (y^{2005})^{30}} = b^{1975} \cdot y^{30} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 1975 \cdot (a^{2005} + b^{2005}) + 30 \cdot (x^{2005} + y^{2005}) \geq 2005 \cdot (a^{1975} \cdot x^{30} + b^{1975} \cdot y^{30}) \quad (3)$$

$$\text{Từ } \begin{cases} a^{2005} + b^{2005} \leq 1 \\ x^{2005} + y^{2005} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 2005 \geq 1975 \cdot (a^{2005} + b^{2005}) + 30 \cdot (x^{2005} + y^{2005}) \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } 2005 \geq 2005 \cdot (a^{1975} \cdot x^{30} + b^{1975} \cdot y^{30}) \Rightarrow a^{1975} \cdot x^{30} + b^{1975} \cdot y^{30} \leq 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a^{1975} = x^{30}, b^{1975} = y^{30}$.

Tổng quát : Cho các số không âm a, b, x, y thỏa các điều kiện $\begin{cases} a^{m+n} + b^{m+n} \leq 1 \\ x^{m+n} + y^{m+n} \leq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$a^m \cdot x^n + b^m \cdot y^n \leq 1.$$

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

Giải:

$$\text{Ta có : } A^2 = \left(\frac{xy}{z} \right)^2 + \left(\frac{yz}{x} \right)^2 + \left(\frac{zx}{y} \right)^2 + 2(y^2 + z^2 + x^2).$$

Áp dụng bất đẳng thức: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

Ta được: $A^2 \geq (y^2 + z^2 + x^2) + 2(y^2 + z^2 + x^2) = 3(y^2 + z^2 + x^2) = 3$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{xz}{y} \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\min A = \sqrt{3}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Phân tích bài toán :

• Trường hợp tổng quát , giả sử $0 < a \leq b \leq c$ thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, vậy ta có thể suy ra $0 < a \leq b \leq c < 1$ hay không?. Như vậy điều kiện a, b, c không chính xác vì dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} 0 < a = b = c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a, b, c \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

• Ta thấy mối liên hệ gì của bài toán ?. Dễ thấy $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và $b^2 + c^2, c^2 + a^2, a^2 + b^2$. Gợi ý ta đưa bài

toán về dạng cần chứng minh : $\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

• Vì vai trò a, b, c như nhau và 2 ý phân tích trên gợi ý ta đưa đến cách phân tích

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ và cần chứng minh } \begin{cases} \frac{a}{1-a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \\ \frac{b}{1-b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}b^2 \\ \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2 \end{cases}$$

• Ta thử đi tìm lời giải :

$$\frac{a}{1-a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1-a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}a \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}} \geq a(1-a^2) \Leftrightarrow \frac{4}{27} \geq a^2(1-a^2)^2 \Leftrightarrow \frac{8}{27} \geq 2a^2(1-a^2)^2$$

$$\text{Dễ thấy } \begin{cases} 2a^2(1-a^2)^2 = 2a^2(1-a^2)(1-a^2) \\ 2a^2 + (1-a^2) + (1-a^2) = 2 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$2 = 2a^2 + (1-a^2) + (1-a^2) \geq 3\sqrt[3]{2a^2(1-a^2)(1-a^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \geq \sqrt[3]{2a^2(1-a^2)(1-a^2)} \Leftrightarrow \frac{8}{27} \geq 2a^2(1-a^2)^2$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại.

Giải : hs tự giải

Phương pháp tiếp tuyến:

Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng : $\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$.

Phân tích bài toán :

• Đẳng thức cần chứng minh đưa về dạng :

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + m(a+c) + nb + \frac{b^3}{c(a+b)} + k(b+a) + pc + \frac{c^3}{a(b+c)} + i(b+c) + ja \geq 0.$$

• Giả sử $0 < a \leq b \leq c$. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Từ đó gợi mở hướng giải : $\frac{a^3}{b(c+a)} + m(a+c) + nb \geq 3\sqrt[3]{mna}$. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b(c+a)} = m(a+c) = nb \\ a = b = c \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a^3}{a(a+a)} = m(a+a) = na \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tương tự cho các trường hợp khác .

Giải :

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}(c+a) \geq \frac{3}{2}a . \text{ Đẳng thức xảy ra khi: } \frac{a^3}{b(c+a)} = \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}(c+a).$$

$$\frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}(b+a) \geq \frac{3}{2}b . \text{ Đẳng thức xảy ra khi: } \frac{b^3}{c(a+b)} = \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}(b+a).$$

$$\frac{c^3}{a(b+c)} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}(b+c) \geq \frac{3}{2}c . \text{ Đẳng thức xảy ra khi: } \frac{c^3}{a(b+c)} = \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}(b+c).$$

Cộng vế theo vế ta được : $\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi :

$$a = b = c > 0$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$$a. \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < \frac{7}{2}$$

$$c. \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{18}.$$

$$b. \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}.$$

$$d. a+b+c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 10$$

Giải:

$$a. \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < \frac{7}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{a+1} &= \sqrt{1 \cdot (a+1)} \leq \frac{(a+1)+1}{2} = \frac{a}{2} + 1 \\ \sqrt{b+1} &= \sqrt{1 \cdot (b+1)} \leq \frac{(b+1)+1}{2} = \frac{b}{2} + 1 \\ \sqrt{c+1} &= \sqrt{1 \cdot (c+1)} \leq \frac{(c+1)+1}{2} = \frac{c}{2} + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} \leq \frac{a+b+c}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a+1=b+1=c+1=1 \Leftrightarrow a=b=c=0 \Rightarrow a+b+c=0 \neq 1$

Vậy $\sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < \frac{7}{2}$

b. $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}$.

Phân tích bài toán :

• Trường hợp tổng quát , giả sử $0 < a \leq b \leq c$ thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra

khi $\begin{cases} 0 < a=b=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=\frac{1}{3}$. Hằng số cần thêm là $\frac{1}{3}$.

• Từ giả thiết gợi ý ta đưa đến cách phân tích $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}(a+b+c)$ hay

$$S = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left[\frac{a+\frac{1}{3}+b+\frac{1}{3}}{2} + \frac{b+\frac{1}{3}+c+\frac{1}{3}}{2} + \frac{c+\frac{1}{3}+a+\frac{1}{3}}{2} \right].$$

• Ta thử đi tìm lời giải : Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\sqrt{\frac{3}{2} \frac{a+\frac{1}{3}+b+\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{(a+b)+\frac{2}{3}}{2} \right)} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(a+b) \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{a+b}$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại .

Cách khác :

Giả sử với mọi $m > 0$, ta luôn có : $\sqrt{a+b} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{(a+b)m} \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\frac{a+b+m}{2} \right)$. Vấn đề bây giờ ta dự đoán $m > 0$ bao nhiêu là phù hợp?.

Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a+b=m \\ a=b=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m=\frac{2}{3}$.

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\begin{cases} \sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(a+b) \cdot \frac{2}{3}} \stackrel{AM-GM}{\leq} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(a+b) + \frac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{b+c} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(b+c) \cdot \frac{2}{3}} \stackrel{AM-GM}{\leq} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(b+c) + \frac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{c+a} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(c+a) \cdot \frac{2}{3}} \stackrel{AM-GM}{\leq} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(c+a) + \frac{2}{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2(a+b+c) + 3 \cdot \frac{2}{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2 = \sqrt{6} \text{ (đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

$$c. \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{18}.$$

• Trường hợp tổng quát, giả sử $0 < a \leq b \leq c$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c=1$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra

$$\text{khi } \begin{cases} 0 < a = b = c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Rightarrow a=b=c=\frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a+b=\frac{2}{3} \\ b+c=\frac{2}{3} \\ c+a=\frac{2}{3} \end{cases} \text{ . Hằng số cần thêm là } \frac{2}{3}$$

• Từ giả thiết gợi ý ta đưa đến cách phân tích $\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{18}(a+b+c)$ hay

$$T = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \frac{(a+b) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} + \frac{(b+c) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} + \frac{(c+a) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}$$

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \sqrt[3]{(a+b) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \leq \frac{(a+b) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} \\ \sqrt[3]{b+c} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \sqrt[3]{(b+c) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \leq \frac{(b+c) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} \\ \sqrt[3]{c+a} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \sqrt[3]{(c+a) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}}} \leq \frac{(c+a) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \cdot \frac{2(a+b+c) + 4}{3} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \cdot \frac{6}{3} = \sqrt[3]{18} \text{ (đpcm)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

$$d. a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 10$$

Phân tích bài toán :

• Trường hợp tổng quát , giả sử $0 < a \leq b \leq c$ thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $\begin{cases} 0 < a = b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$.

• Từ điều cần chứng minh ,gợi ý ta đưa đến cách phân tích với mọi $m > 0$, ta luôn có : $ma + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{m}$.

Đẳng thức xảy ra khi : $\begin{cases} ma = \frac{1}{a} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 9$.

• Vì thế mà $T = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 9(a + b + c) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 8(a + b + c)$

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân $\begin{cases} 9a + \frac{1}{a} \geq 6 \\ 9b + \frac{1}{b} \geq 6 \\ 9c + \frac{1}{c} \geq 6 \end{cases}$

$$\Rightarrow T = 9(a + b + c) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 8(a + b + c) \geq 3.6 - 8(a + b + c) = 10 \text{ (đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi : $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài tập tương tự

Cho các số thực dương x, y, z và thoả mãn $mx + ny + pz \geq d$ trong đó $m, n, p, d \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức $A = ax^2 + by^2 + cz^2$

Hướng dẫn : Thực hiện việc chọn điểm rơi : $ax^2 = by^2 = cz^2 = \beta$

Chứng minh rằng nếu $xy + yz + zx = 5$ thì $3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 10$.

Phân tích bài toán :

• Trước hết ta đề ý mối liên hệ giữa $3x^2, 3y^2, z^2, xy, yz, zx$ cho ta điều gì ?, phải chăng những hằng đẳng thức có dạng : $(ax - by)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ax)^2 + (by)^2 \geq 2axy$?.

• Phân tích :

$$ax^2 + ay^2 \geq 2axy. \text{Đẳng thức xảy ra khi } x = y$$

$$by^2 + cz^2 \geq 2\sqrt{bc}yz. \text{Đẳng thức xảy ra khi } by^2 = cz^2$$

$$cz^2 + bx^2 \geq 2\sqrt{cb}zx. \text{Đẳng thức xảy ra khi } cz^2 = bx^2$$

$$\text{Bây giờ ta chọn } a, b, c \text{ sao cho : } \begin{cases} a + b = 3 \\ 2c = 1 \\ a = \sqrt{bc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Giải :

$$x^2 + y^2 \geq 2xy. \text{Đẳng thức xảy ra khi } x = y$$

$$2y^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq 2yz. \text{Đẳng thức xảy ra khi } 2y^2 = \frac{1}{2}z^2$$

$$\frac{1}{2}z^2 + 2x^2 \geq 2zx. \text{Đẳng thức xảy ra khi } \frac{1}{2}z^2 = 2x^2$$

$$\text{Cộng vế theo vế ta được : } 3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 2(xy + yz + zx) \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 10 \text{ (đpcm).}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi : } \begin{cases} x = y \\ 2y^2 = \frac{1}{2}z^2 \\ \frac{1}{2}z^2 = 2x^2 \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = \frac{47}{12}$. Chứng minh rằng : $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 \geq \frac{235}{12}$

Phân tích bài toán :

• Trước hết ta để ý mối liên hệ giữa $3x^2, 4y^2, 5z^2, x, y, z$ cho ta điều gì ?, gợi ý : $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 \geq \frac{235}{12}$ được

biến đổi về dạng $3x^2 + m + 4y^2 + n + 5z^2 + p \geq k, (0 < m \leq n \leq p \leq k = \text{const})$

• Phân tích :

$$3x^2 + m \geq 2\sqrt{3mx}, m > 0. \text{Đẳng thức xảy ra khi } 3x^2 = m$$

$$4y^2 + n \geq 2\sqrt{4ny}, n > 0. \text{Đẳng thức xảy ra khi } 4y^2 = n$$

$$5z^2 + p \geq 2\sqrt{5pz}, p > 0. \text{Đẳng thức xảy ra khi } 5z^2 = p$$

Bây giờ ta chọn x, y, z sao cho :

$$\begin{cases} 3x^2 = m \\ 4y^2 = n \\ 5z^2 = p \\ \sqrt{3m} = \sqrt{4n} = \sqrt{5p} \\ x + y + z = \frac{47}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{4} \\ z = 1 \\ m = \frac{25}{3} \\ n = \frac{25}{4} \\ p = 5 \end{cases}$$

Giải :

$$3x^2 + \frac{25}{3} \geq 2\sqrt{3 \cdot \frac{25}{3}}x. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } 3x^2 = \frac{25}{3}.$$

$$4y^2 + \frac{25}{4} \geq 2\sqrt{4 \cdot \frac{25}{4}}y. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } 4y^2 = \frac{25}{4}.$$

$$5z^2 + 5 \geq 2\sqrt{5 \cdot 5}z. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } 5z^2 = 5.$$

$$\text{Cộng vế theo vế ta được } 3x^2 + 4y^2 + 5z^2 \geq 10(x + y + z) - \frac{235}{12} = \frac{235}{12} \text{ (đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{4} \\ z = 1 \end{cases}.$$

Cho 3 số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng : $1 + \sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$.

Giải :

$$1 + \sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)} \Leftrightarrow \sqrt[3]{1.1.1} + \sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq 1$$

$$\text{Đặt : } T = \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

$$T \leq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \right]$$

$$T \leq \frac{1}{3} \left[\frac{a+1}{1+a} + \frac{b+1}{1+b} + \frac{c+1}{1+c} \right] = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \geq 0$.

Tổng quát :

Chứng minh rằng với mọi $a_i, b_i > 0 (i = \overline{1, n})$ thì ta luôn có :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)}$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng : $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8$.

Giải :

$$VT = \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) = \left(\frac{1-a}{a}\right) \cdot \left(\frac{1-b}{b}\right) \cdot \left(\frac{1-c}{c}\right) = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c}$$

$$VT \stackrel{AM-GM}{\geq} \frac{2\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{ca}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8 \text{ (đpcm)}$$

Tổng quát :

Cho $\begin{cases} x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \end{cases}$ Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{1}{x_1} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2} - 1\right)\left(\frac{1}{x_3} - 1\right) \dots \left(\frac{1}{x_n} - 1\right) \geq (n-1)^n.$$

Cho 4 số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \geq 3$. Chứng minh rằng : $abcd \leq \frac{1}{81}$

Giải :

$$\frac{1}{1+a} \geq \left(1 - \frac{1}{1+b}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+c}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+d}\right) = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d}$$

$$\frac{1}{1+a} \stackrel{AM-GM}{\geq} 3 \sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} \frac{1}{1+a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}} \\ \frac{1}{1+b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{cda}{(1+c)(1+d)(1+a)}} \\ \frac{1}{1+c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{dca}{(1+d)(1+c)(1+a)}} \\ \frac{1}{1+d} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geq 81 \frac{abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \Rightarrow abcd \leq \frac{1}{81}$$

Tổng quát :

Cho : $\begin{cases} x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0 \\ \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq n-1 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n \leq \frac{1}{(n-1)^n} .$$

Bài tương tự

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng :

$$a. \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2} . \quad b. \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \geq \frac{3}{2} . \quad c. \frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1 .$$

Hướng dẫn :

$$a. \begin{cases} a+b+c=3 \\ 3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \Rightarrow ab+bc+ca \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \\ 1+b^2 \geq 2b \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{1+b^2} \geq a - \frac{ab}{2}$$

$$\text{Tương tự : } \frac{b}{1+c^2} = b - \frac{bc^2}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}, \frac{c}{1+a^2} = c - \frac{ca^2}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$$

$$\text{Cộng vế theo vế : } \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} .$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a.b.c=1$. Chứng minh rằng :

$$a. \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4} . \quad b. \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \leq 1$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng : $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}$

Giải :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{b+c} + a \right) + \left(\frac{b^2}{c+a} + b \right) + \left(\frac{c^2}{a+b} + c \right) \geq \frac{1}{2} + (a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+a(b+c)}{b+c} + \frac{b^2+b(c+a)}{c+a} + \frac{c^2+c(a+b)}{a+b} \geq \frac{1}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{b(b+c+a)}{c+a} + \frac{c(c+a+b)}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \text{ vì } a+b+c=1.$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}$$

Hướng dẫn : Dùng bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$.

Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng :

$$a. \frac{a^3}{(a+b)(b+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(c+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(a+b)} \geq \frac{1}{4}(a+b+c)$$

$$b. \frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Hướng dẫn :

$$a. \text{ Cách 1 : } \begin{cases} \frac{a^3}{(a+b)(b+c)} + \frac{a+b}{8} + \frac{b+c}{8} \geq \frac{3}{4}a \\ \frac{b^3}{(b+c)(c+a)} + \frac{b+c}{8} + \frac{c+a}{8} \geq \frac{3}{4}b \\ \frac{c^3}{(c+a)(a+b)} + \frac{c+a}{8} + \frac{a+b}{8} \geq \frac{3}{4}c \end{cases}$$

$$\text{Cách 2: } \begin{cases} \frac{8a^3}{(a+b)(b+c)} + (a+b) + (b+c) \geq 6a \\ \frac{8b^3}{(b+c)(c+a)} + (b+c) + (c+a) \geq 6b \\ \frac{8c^3}{(c+a)(a+b)} + (c+a) + (a+b) \geq 6c \end{cases}$$

$$b. \text{ Cách 1: } \begin{cases} \frac{4a^3}{b(c+a)} + 2b + (c+a) \geq 6a \\ \frac{4b^3}{c(a+b)} + 2c + (a+b) \geq 6b \\ \frac{4c^3}{a(b+c)} + 2a + (b+c) \geq 6c \end{cases}$$

$$\text{Cách 2: } \begin{cases} \frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b}{2} + \frac{c+a}{4} \geq \frac{3}{2}a \\ \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c}{2} + \frac{a+b}{4} \geq \frac{3}{2}b \\ \frac{c^3}{a(b+c)} + \frac{a}{2} + \frac{b+c}{4} \geq \frac{3}{2}c \end{cases}$$

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{x^5}{y^3 + z^3} + \frac{y^5}{z^3 + x^3} + \frac{z^5}{x^3 + y^3} + x^4 + y^4 + z^4.$$

Giải:

Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số ta có :

$$\frac{x^5}{y^3 + z^2} + \frac{y^3 + z^2}{4} + \frac{x^4}{2} \geq \frac{3}{2}x^3$$

$$\text{tương tự } \frac{y^5}{z^3 + x^2} + \frac{z^3 + x^2}{4} + \frac{y^4}{2} \geq \frac{3}{2}y^3, \frac{z^5}{x^3 + y^2} + \frac{x^3 + y^2}{4} + \frac{z^4}{2} \geq \frac{3}{2}z^3$$

$$\frac{x^4}{2} + \frac{1}{2} \geq x^2 \text{ tương tự } \frac{y^4}{2} + \frac{1}{2} \geq y^2, \frac{z^4}{2} + \frac{1}{2} \geq z^2$$

Cộng vế với vế các BĐT trên ta được

$$S = \frac{x^5}{y^3 + z^2} + \frac{y^5}{z^3 + x^2} + \frac{z^5}{x^3 + y^2} + x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{5}{4}(x^3 + y^3 + z^3) + \frac{3}{4}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{3}{2}$$

$$\text{Mà } x^3 + x^3 + 1 \geq 3x^2 \text{ hay } 2x^3 + 1 \geq 3x^2 \text{ tương tự } 2y^3 + 1 \geq 3y^2, 2z^3 + 1 \geq 3z^2$$

$$\text{Do đó } 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) - 3 = 6 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq 3 \Rightarrow S \geq \frac{9}{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Cho 3 số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$M = \frac{x^2}{(2y+3z)(2z+3y)} + \frac{y^2}{(2z+3x)(2x+3z)} + \frac{z^2}{(2x+3y)(2y+3x)}$$

Giải :

$$(2y+3z)(2z+3y) = 6(y^2 + z^2) + 13yz \leq 6(y^2 + z^2) + \frac{13}{2}(y^2 + z^2) = \frac{25}{2}(y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(2y+3z)(2z+3y)} \geq \frac{2x^2}{25(y^2 + z^2)}$$

$$\text{Tương tự : } \frac{y^2}{(2z+3x)(2x+3z)} \geq \frac{2y^2}{25(z^2 + x^2)}, \frac{z^2}{(2x+3y)(2y+3x)} \geq \frac{2z^2}{25(x^2 + y^2)}.$$

$$M \geq \frac{2x^2}{25(y^2 + z^2)} + \frac{2y^2}{25(z^2 + x^2)} + \frac{2z^2}{25(x^2 + y^2)} \Rightarrow f(x; y; z) \geq \frac{1}{25} \Rightarrow \min M = \frac{1}{25}.$$

Với x, y, z là số dương và $x.y.z \geq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{\sqrt{x+\sqrt{yz}}} + \frac{y}{\sqrt{y+\sqrt{zx}}} + \frac{z}{\sqrt{z+\sqrt{xy}}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn.

$$\text{Đặt } a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}, c = \sqrt{z}$$

Bài toán trở thành : a, b, c là số dương và $a.b.c \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + bc}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + ac}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Dễ thấy : } \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + bc}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + ac}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + ab}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a^2 + bc} + \sqrt{b^2 + ac} + \sqrt{c^2 + ab}} \quad (*)$$

Bình phương hai vế bất đẳng thức:

$$VT^2(*) \geq \left[\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a^2+bc} + \sqrt{b^2+ac} + \sqrt{c^2+ab}} \right]^2 = \frac{(a+b+c)^4}{\left[\sqrt{a^2+bc} + \sqrt{b^2+ac} + \sqrt{c^2+ab} \right]^2}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^4}{3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)} \geq \frac{(a+b+c)^4}{3\left[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ac)\right]} \geq \frac{(a+b+c)^4}{3\left[(a+b+c)^2 - 3\right]}$$

$$(\text{ Vì } ab+bc+ac \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3 \Rightarrow t = (a+b+c)^2 \geq 9)$$

$$\text{Ta có: } \frac{t^2}{3(t-3)} = \frac{3t+15}{12} + \frac{t-3}{12} + \frac{3}{t-3} \geq \frac{3.9+15}{12} + 2\sqrt{\frac{t-3}{12} \cdot \frac{3}{t-3}} = \frac{9}{2} \Rightarrow VT^2(*) \geq \frac{9}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1 \Rightarrow$ điều phải chứng minh

Tổng quát : ta có bài toán sau: với x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$) là số dương và $x_1.x_2...x_n \leq 1$

$$\text{Cmr: } \frac{x_1}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2.x_3...x_n}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_3.x_4...x_n}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x_1.x_2...x_{n-1}}} \geq \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Tương tự:

Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng :

$$a. \frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \leq \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}.$$

$$b. \frac{1}{a+b+2c} + \frac{1}{b+c+2a} + \frac{1}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}.$$

$$c. \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

$$d. \frac{a-d}{d+b} + \frac{b-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+d} \geq 0$$

$$\text{Cho } x, y, z \in [0; 1]. \text{ Chứng minh rằng : } (2^x + 2^y + 2^z) \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z} \right) < \frac{81}{8}.$$

Giải :

$$\text{Đặt } a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z \Rightarrow a, b, c \in [1; 2]$$

$$\text{Bài toán trở thành : Cho } a, b, c \in [1; 2]. \text{ Chứng minh rằng : } (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) < \frac{81}{8}.$$

$$\text{Thật vậy : } (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) < \frac{81}{8} \Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) < \frac{81}{4} \Leftrightarrow \sqrt{(a+b+c) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right)} < \frac{9}{2}$$

$$1 \leq a \leq 2 \Leftrightarrow (a-1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2 \leq 3a \Leftrightarrow a + \frac{2}{a} \leq 3$$

$$\text{Tương tự : } b + \frac{2}{b} \leq 3, c + \frac{2}{c} \leq 3 \Rightarrow (a+b+c) + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) \leq 9 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân :

$$\Rightarrow (a+b+c) + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}\right) \geq 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}\right)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}\right)} \leq 9 \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}\right) \leq \frac{81}{4} \quad (3)$$

$$\text{Đẳng thức không xảy ra. } (3) \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) < \frac{81}{8} \text{ (đpcm).}$$

Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^3 + b^3 + a^2c + b^2c} + \frac{bc}{b^3 + c^3 + b^2a + c^2a} + \frac{ca}{c^3 + a^3 + c^2b + a^2b} \leq \frac{3}{4} \quad \text{Trích } \a href="http://www.maths.vn">http://www.maths.vn$$

Giải :

$$ab + bc + ca = 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$$

Với $a, b > 0$ ta luôn có $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$, $\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ và với mọi a, b ta luôn có $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

$$\frac{ab}{a^3 + b^3 + a^2c + b^2c} \leq \frac{ab}{ab(a+b) + (a^2 + b^2)c} \leq \frac{ab}{4} \left(\frac{1}{ab(a+b)} + \frac{1}{(a^2 + b^2)c} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{ab(a+b) + (a^2 + b^2)c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{ab}{(a^2 + b^2)c} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{2c} \right)$$

$$\frac{ab}{a^3 + b^3 + a^2c + b^2c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{c} \quad (1)$$

Tương tự :

$$\frac{bc}{b^3 + c^3 + b^2a + c^2a} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a} \quad (2)$$

$$\frac{ca}{c^3 + a^3 + c^2b + a^2b} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{b} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế đẳng thức (1), (2) và (3) ta được đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Cho tam giác ABC có 3 cạnh : $AB = c, BC = a, AC = b$ thỏa mãn $a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh rằng : A là góc nhọn và thỏa : $60^\circ < A < 90^\circ$.

Giải :

$$\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^3 = b^3 + c^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < b < a \\ 0 < c < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{b}{a} < 1 \\ 0 < \frac{c}{a} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{b}{a}\right)^3 < \left(\frac{b}{a}\right)^2 \\ \left(\frac{c}{a}\right)^3 < \left(\frac{c}{a}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a}\right)^3 < \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^3 + c^3}{a^3} < \frac{b^2 + c^2}{a^2} \Rightarrow 1 < \frac{b^2 + c^2}{a^2} \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Rightarrow A < 90^\circ$$

$$a^3 = b^3 + c^3 = (b + c)(b^2 - bc + c^2) > a(b^2 - bc + c^2) \Rightarrow a^2 > b^2 - bc + c^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} < 1 \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < \frac{1}{2} \Rightarrow A > 60^\circ$$

Vậy $60^\circ < A < 90^\circ$.

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện : $15\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 10\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + 2007$. Tìm giá

trị lớn nhất của $P = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}}$

Giải :

Áp dụng đẳng thức : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

$$5a^2 + 2ab + 2b^2 = (2a + b)^2 + (a - b)^2 \geq (2a + b)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} \leq \frac{1}{2a + b} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$

Tương tự : $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} \leq \frac{1}{2b + c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \leq \frac{1}{2c + a} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \end{cases}$. Do đó $P \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

Mặt khác : $\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \\ \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \end{cases}$

Mà giả thiết : $15\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 10\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + 2007$. Do đó : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \sqrt{\frac{6021}{5}}$

Đẳng thức xảy ra khi : $\begin{cases} a = b = c \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{6021}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6021}{5}}$

Vậy $\max P = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6021}{5}}$, khi $a = b = c = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6021}{5}}$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = abc$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq 1.$$

Giải:

Ta có : $ab + bc + ca = abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$

Đặt : $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c} \Rightarrow x + y + z = 1$. Khi đó ta có :

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} = \frac{\frac{1}{x^4} + \frac{1}{y^4}}{\frac{1}{xy}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}\right)} = \frac{x^4 + y^4}{x^3 + y^3} = \frac{x^6}{x^2(x^3 + y^3)} + \frac{y^6}{y^2(x^3 + y^3)} \geq \frac{(x^3 + y^3)^2}{(x^3 + y^3)(x^2 + y^2)}$$

$$\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} \geq \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{x^2}{x(x^2 + y^2)} + \frac{y^2}{y(x^2 + y^2)} \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{(x + y)(x^2 + y^2)} = \frac{x^2 + y^2}{x + y} \geq \frac{x + y}{2}.$$

Tương tự : $\frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} \geq \frac{y + z}{2}; \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq \frac{z + x}{2}.$

Cộng vế theo vế , ta được : $\frac{a^4 + b^4}{ab(a^3 + b^3)} + \frac{b^4 + c^4}{bc(b^3 + c^3)} + \frac{c^4 + a^4}{ca(c^3 + a^3)} \geq x + y + z = 1$

Hãy xác định dạng của tam giác ABC nếu các góc của nó luôn thỏa mãn đẳng thức sau:

$$\frac{\tan \frac{A}{2}}{1 + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}} + \frac{\tan \frac{B}{2}}{1 + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{1 + \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2}} = \frac{1}{4 \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2}}$$

Giải:

Đặt $x = \tan \frac{A}{2}, y = \tan \frac{B}{2}, z = \tan \frac{C}{2}$ thế thì x, y, z dương và $xy + yz + zx = 1$

Hệ thức trở thành: $\frac{x}{1 + yz} + \frac{y}{1 + zx} + \frac{z}{1 + xy} = \frac{1}{4xyz}.$

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1 + yz} + \frac{y}{1 + zx} + \frac{z}{1 + xy} &= \frac{x}{(xy + yz) + (zx + yz)} + \frac{y}{(xy + zx) + (yz + zx)} + \frac{z}{(xy + yz) + (zx + xy)} \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{x}{xy + yz} + \frac{x}{zx + yz} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{y}{xy + zx} + \frac{y}{yz + zx} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{z}{xy + yz} + \frac{z}{zx + xy} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{x+z}{xy+yz} + \frac{x+y}{zx+yz} + \frac{y+z}{xy+zx} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{xy+yz+zx}{4xyz} = \frac{1}{4xyz}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x = y = z$ hay tam giác ABC đều.

Vấn đề liên quan tam giác , hẹn các em ở một chuyên đề khác . Chúc các em ôn tập tốt!!!.

Góp ý gửi về Email: phukhanh@moet.edu.vn

NHỮNG BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN TRONG COSI.

Cho n nguyên và $n \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x + \frac{1}{x^n}$

Giải:

$$A = \underbrace{\frac{x}{n} + \frac{x}{n} + \dots + \frac{x}{n} + \frac{1}{x^n}}_{n \text{ số } \frac{x}{n}} \geq (n+1)^{n+1} \sqrt[n]{\left(\frac{x}{n}\right)^n} \frac{1}{x^n} \geq \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{n^n}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\frac{x}{n} = \frac{1}{x^n} \Leftrightarrow x = \sqrt[n+1]{n}$

Giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{n+1}{\sqrt[n+1]{n^n}}$

Cho n nguyên và $n \geq 2$ và $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = x + \frac{1}{x^n}$

Giải:

Với $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$

$$f(x) \geq f(k) \Leftrightarrow x + \frac{1}{x^n} - k - \frac{1}{k^n} \geq 0 \Leftrightarrow x - k + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{k}\right) \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - k) \left[1 - \frac{1}{xk} \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} \right) \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - k)}{xk} \left[xk - \left(\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} \right) \right] \geq 0$$

Ta có: $\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n-2}k} + \frac{1}{x^{n-3}k^2} + \dots + \frac{1}{k^{n-1}} \leq \frac{n}{k^{n-1}} < \frac{n}{\sqrt[n+1]{n^{n-1}}} = \sqrt[n+1]{n^2} < xk$

Suy ra $f(x) \geq f(k)$ đúng với mọi $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$

Giá trị nhỏ nhất của $A = k + \frac{1}{k^n}$ khi $x = k$.

Cách 2 :

Nháp : $A = \underbrace{\frac{x}{m} + \dots + \frac{x}{m} + \frac{1}{x^n}}_{n \text{ số } \frac{x}{m}, m > 0} + x - \frac{nx}{m} \geq (n+1)^{n+1} \sqrt[n]{\left(\frac{x}{m}\right)^n} \frac{1}{x^n} + x \left(1 - \frac{n}{m}\right)$

Ta chọn m sao cho:
$$\begin{cases} x = k \\ \frac{x}{m} = \frac{1}{x^n} \end{cases} \Rightarrow m = x^{n+1} = k^{n+1}$$

Bài giải:
$$A = \underbrace{\frac{x}{k^{n+1}} + \dots + \frac{x}{k^{n+1}} + \frac{1}{x^n}}_{n \text{ so } \frac{x}{k^{n+1}}} + x - \frac{nx}{k^{n+1}} \geq (n+1) \sqrt[n]{\left(\frac{x}{k^{n+1}}\right)^n \frac{1}{x^n}} + x \left(1 - \frac{n}{k^{n+1}}\right)$$

Vì $x \geq k > \sqrt[n+1]{n}$ nên $n < k^{n+1}$ suy ra:
$$A \geq \frac{(n+1)}{k^n} + k \left(1 - \frac{n}{k^{n+1}}\right) = k + \frac{1}{k^n} = f(k)$$

Cho hai số thực $x \neq 0, y \neq 0$ thay đổi và thỏa mãn điều kiện: $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức:
$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}$$

Đề thi Đại học khối A năm 2006

Giải:

Xét $(x+y)xy = x^2 + y^2 - xy$ (*).

Đặt $u = \frac{1}{x}, v = \frac{1}{y}$.

Ta được $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{xy} \Rightarrow u + v = u^2 + v^2 - uv \Rightarrow (u+v)^2 - (u+v) = 3uv \leq \frac{3(u+v)^2}{4}$.

$\Rightarrow (u+v)^2 - 4(u+v) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq u+v \leq 4$

Khi đó:
$$A = \frac{x^3 + y^3}{x^3 y^3} = \frac{(x+y)(x^2 + y^2 - xy)}{x^3 y^3} = \frac{(x+y)(x+y)xy}{x^3 y^3} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{x^2 y^2}$$

$\Rightarrow A = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} = (u+v)^2 \leq 16$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $u = v = 2$ hay $x = y = \frac{1}{2}$.

Cho x, y, z là 3 số thực dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right)$$

Đề thi Đại học khối B năm 2007

Giải:

$$P = x \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left(\frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left(\frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x}{yz} + \frac{y}{zx} + \frac{z}{xy}$$

$$P = (x^2 + y^2 + z^2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xyz} \right) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2) \left(1 + \frac{1}{xyz} + \frac{1}{xyz} \right)$$

$$P \geq \frac{1}{2} 9 \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 y^2 z^2}} = \frac{9}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{9}{2}$

Đề thi Đại học khối A năm 2009

Cho x, y, z là các số thực dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Đề thi Đại học khối A năm 2007

Giải:

$$P \geq \frac{2x\sqrt{x}\sqrt{xyz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}\sqrt{xyz}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}\sqrt{xyz}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}} \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} a = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z} \\ b = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x} \\ c = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} = \frac{1}{9}(-2a + 4b + c) \\ y\sqrt{y} = \frac{1}{9}(a - 2b + 4c) \\ z\sqrt{z} = \frac{1}{9}(4a + b - 2c) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó: } P \geq \frac{2}{9} \left(\frac{-2a + 4b + c}{a} + \frac{a - 2b + 4c}{b} + \frac{4a + b - 2c}{c} \right) \geq \frac{2}{9} \left(-6 + 4 \left[\frac{b}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} \right] + \left[\frac{c}{a} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} \right] \right).$$

$$\text{Hay } P \geq \frac{2}{9} (-6 + 4.3 + 3) = 2.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức của $P = 2$ khi $a = b = c = 1$.

Cho các số thực không âm x, y thay đổi và thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy$.

Đề thi Cao đẳng khối B năm 2009

Giải:

Nhận xét: vai trò giống nhau (đối xứng) của x, y .

$$S = 12(x^3 + y^3) + 16x^2y^2 + 34xy = 12(x + y)(x^2 + y^2 - xy) + 16x^2y^2 + 34xy$$

$$\text{Hay } S = 12(x + y)\left((x + y)^2 - 3xy\right) + 16x^2y^2 + 34xy = \left(4xy - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{16}$$

$$\text{Vì } x, y \text{ không âm và thỏa mãn } x + y = 1 \text{ suy ra } 0 \leq xy \leq \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4} \leq 4xy - \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \Rightarrow 0 \leq \left(4xy - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{191}{16} \leq \frac{25}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của $S = \frac{25}{2}$ khi $x = y = \frac{1}{2}$ và giá trị nhỏ nhất của $S = 0$ khi $x = 0, y = 1$.

Cho các số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

Đề thi Đại học khối B năm 2009

Giải:

$$\left. \begin{array}{l} (x + y)^3 + 4xy \geq 2 \\ (x + y)^2 \geq 4xy \end{array} \right\} \Rightarrow (x + y)^3 + (x + y)^2 \geq 2 \Rightarrow x + y \geq 1.$$

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1 = \frac{3}{2}(x^4 + y^4 + x^4 + y^4 + 2x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$A = \frac{3}{2}(x^4 + y^4) + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\text{Mà } x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 \geq (x^2 + y^2)^2 - (x^4 + y^4) \Rightarrow x^4 + y^4 \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^2$$

$$\text{Khi đó } A \geq \frac{3}{4}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1 \text{ hay } A \geq \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\text{Đặt } t = (x^2 + y^2)^2, t \geq \frac{(x + y)^2}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow A \geq \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1, t \geq \frac{1}{2}.$$

$$\text{Xét hàm số } f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1 \text{ xác định và liên tục trên nửa khoảng } \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{9}{2}t - 2 \geq \frac{9}{4} - 1 > 0, t \geq \frac{1}{2} \Rightarrow f(t) \text{ đồng biến trên nửa khoảng } \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$\text{Khi đó } \min A = \min_{t \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16}. \text{ Đẳng thức xảy ra khi } t = \frac{1}{2}$$

ĐIỂM RƠI TRONG BẤT ĐẲNG THỨC COSI

Bài toán mở đầu : Cho $a, b > 0$ và thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{2ab}.$$

Giải:

Lời giải 1. Ta có: $P = \frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} \geq \frac{4}{a^2+2ab+b^2+1} = \frac{4}{(a+b)^2+1} \geq \frac{4}{2} = 2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^2+b^2=2ab \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2+1=0 \\ a+b=1 \end{cases}$. Hệ vô nghiệm. Vậy không tồn tại min P .

Lời giải 2. Ta có: $P = \frac{1}{1+a^2+b^2} + \frac{1}{6ab} + \frac{1}{3ab} \geq \frac{4}{a^2+6ab+b^2+1} + \frac{1}{3ab} = \frac{4}{(a+b)^2+1+4ab} + \frac{1}{3ab}$

Mặt khác $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Vậy $P \geq \frac{4}{2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} + \frac{1}{6\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq \frac{8}{3}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^2+b^2=3ab \\ a=b \\ a+b=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=\frac{1}{2}$.

Lời bình: lời giải 1. và lời giải 2 gần như tương tự nhau, cùng áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Tại sao trong cùng một bài toán mà có đến hai đáp số ? Do đâu mà lời giải 2 tại sao lại tách $\frac{1}{2ab} = \frac{1}{6ab} + \frac{1}{3ab}$? **Đó chính là kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức.**

Các bất đẳng thức trong các đề thi đại học thông thường là đối xứng với các biến và ta dự đoán dấu bằng xảy ra khi các biến bằng nhau và xảy ra tại biên.

Cho $a, b > 0$ và thỏa mãn $a + b \leq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{ab} + 4ab$.

Giải:

Do P là biểu thức đối xứng với a, b , ta dự đoán min P đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$.

Ta có: $P = \frac{1}{a^2+b^2} + \frac{1}{2ab} + \left(4ab + \frac{1}{4ab}\right) + \frac{1}{4ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} + 2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{2ab}} + \frac{1}{4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} \geq 7$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ a^2b^2 = \frac{1}{16} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$.

Thao khảo hai lời giải khác :

Lời giải 1:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{ab} + \left(4ab + \frac{1}{4ab}\right) + \frac{1}{4ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} 2\sqrt{4ab \cdot \frac{1}{2ab}} + \frac{1}{4ab} \geq 4 + 2 + \frac{1}{4ab} = 6 + \frac{1}{4ab}$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2ab \\ a^2b^2 = \frac{1}{16} \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}. \text{ Thay } a = b = \frac{1}{2} \text{ vào ta được } P \geq 7.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$.

Lời bình 1:

Qua cách giải trên ta đã chọn đúng dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = \frac{1}{2}$ nên dẫn đến việc tách các số hạng và

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 7$ đạt tại $a = b = \frac{1}{2}$ là đúng, nhưng bước cuối cùng ta đã làm sai, ví dụ

$$(1-a)^2 + a \geq a, \text{ đẳng thức xảy ra khi } a = 1 \Rightarrow \min \left[(1-a)^2 + a \right] = a?.$$

Lời giải 2:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2} + \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab} + 4ab \geq \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} + \frac{1}{2ab} + 4ab = \frac{4}{(a+b)^2} + \left(\frac{1}{2ab} + 4ab \right).$$

$$\text{Mặt khác } \frac{1}{2ab} + 4ab \geq 2\sqrt{\frac{1}{2ab} \cdot 4ab} = 2\sqrt{2}. \text{ Vậy } P \geq 4 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \min P = 2(2 + \sqrt{2})$$

Lời bình 2:

Thoạt nhìn thấy bài toán đã giải đúng. Thực tế thì sao? Việc tách $\frac{1}{ab} = \frac{1}{2ab} + \frac{1}{2ab}$ để làm xuất hiện đẳng

$$\text{thức } a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2.$$

$$\min P = 2(2 + \sqrt{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ \frac{1}{2ab} = 4ab \\ a + b = 1 \end{cases} \text{ Hệ vô nghiệm. Đẳng thức không xảy ra, do đó không tồn tại } \min P.$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$. Chứng minh rằng :

$$\begin{aligned} 1. & a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{15}{2}. \\ 2. & \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}. \\ 3. & \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}. \end{aligned}$$

Giải:

$$1. a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{15}{2}$$

Ta có thể phạm sai lầm: $a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geq 6\sqrt{\sqrt[3]{abc} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}} = 6$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ nhưng khi đó $a + b + c = 3 > \frac{3}{2}$ (trái giả thiết).

Phân tích bài toán :

Từ giả thiết a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$, gợi ý hướng giải bất đẳng thức trung bình cộng, trung

binh nhân. $\frac{3}{2} \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$. Đặt: $x = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$

Khi đó : $a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{abc} + 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}} = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$

Ta chọn $\alpha > 0$ sao cho: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{\alpha} = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \alpha = x^2 = \frac{1}{4}$.

Bài giải:

$$a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 3\left(4x + \frac{1}{x} - 3x\right) \geq 3.2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} - 9x = 12 - \frac{9}{2} = \frac{15}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

$$2. \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Phân tích bài toán :

Từ giả thiết a, b, c dương thỏa mãn $a + b + c \leq \frac{3}{2}$, gợi ý hướng giải bất đẳng thức trung bình cộng, trung

binh nhân. $\frac{3}{2} \geq a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$. Đặt: $x = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{1}{2}$, đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$.

Xét $x^2 + \frac{1}{x^2}$, chọn $\alpha > 0$ sao cho: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{\alpha x^2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x^4} = 16$.

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân cho 17 số, trong đó 16 số là $\frac{1}{16x^2}$ và số x^2 :

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{x^2} &= x^2 + 16 \cdot \frac{1}{16x^2} \geq 17 \sqrt[17]{x^2 \left(\frac{1}{16x^2} \right)^{16}} \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \geq \frac{\sqrt[17]{17x^{\frac{-15}{17}}}}{2^{\frac{32}{17}}} \\ \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} &\geq \frac{\sqrt[17]{17a^{\frac{-15}{17}}}}{2^{\frac{32}{17}}}; \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} \geq \frac{\sqrt[17]{17b^{\frac{-15}{17}}}}{2^{\frac{32}{17}}}; \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{\sqrt[17]{17c^{\frac{-15}{17}}}}{2^{\frac{32}{17}}} \\ \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} &\geq \frac{\sqrt[17]{17}}{2^{\frac{32}{17}}} \left(a^{\frac{-15}{17}} + b^{\frac{-15}{17}} + c^{\frac{-15}{17}} \right) \geq \frac{\sqrt[17]{17}}{2^{\frac{32}{17}}} \cdot 3 \left(a^{\frac{-15}{17}} b^{\frac{-15}{17}} c^{\frac{-15}{17}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} &\geq \frac{3\sqrt[17]{17}}{2^{\frac{32}{17}}} (abc)^{\frac{-5}{17}} \geq \frac{3\sqrt[17]{17}}{2^{\frac{32}{17}}} \cdot 2^{\frac{15}{17}} = \frac{3\sqrt[17]{17}}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Cách khác :

Chọn : $\vec{u} = \left(a; \frac{1}{a} \right), \vec{v} = \left(b; \frac{1}{b} \right), \vec{w} = \left(c; \frac{1}{c} \right)$

Dùng bất đẳng thức vecto $|\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| \geq |\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}|$

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \sqrt{\left(a + b + c \right)^2 + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2} \geq 3 \sqrt{\sqrt[3]{(abc)^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{(abc)^2}}}$$

Tương tự trên, ta đặt $x = \left(\sqrt[3]{abc} \right)^2 \leq \left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 \leq \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} &\geq 3\sqrt{x + \frac{1}{x}} = 3\sqrt{x + \frac{1}{16x} + \frac{15}{16x}} \geq 3\sqrt{2\sqrt{\frac{x}{16} \cdot \frac{1}{x}} + \frac{15}{16x}} \\ \sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2}} &\geq 3\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{15}{16x}} \geq 3\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{15}{4}} = \frac{3\sqrt[17]{17}}{2}. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

$$3. \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{3\sqrt[17]{17}}{2}.$$

Tương tự trên. Xét $x^2 + \frac{1}{y^2}$, chọn $\alpha > 0$ sao cho: $\begin{cases} x = y = \frac{1}{2} \\ x^2 = \frac{1}{\alpha y^2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{x^2 y^2} = 16$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân cho 17 số, trong đó 16 số là $\frac{1}{16y^2}$ và số x^2 :

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{1}{y^2} &= x^2 + 16 \cdot \frac{1}{16y^2} \geq 17 \sqrt[17]{x^2 \left(\frac{1}{16y^2} \right)^{16}} \Rightarrow \sqrt{x^2 + \frac{1}{y^2}} \geq \frac{\sqrt[17]{17x^{\frac{1}{17}} y^{\frac{-16}{17}}}}{2^{\frac{32}{17}}} \\ \Rightarrow \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} &\geq \frac{\sqrt[17]{17a^{\frac{1}{17}} b^{\frac{-16}{17}}}}{2^{\frac{32}{17}}}; \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} \geq \frac{\sqrt[17]{17b^{\frac{1}{17}} c^{\frac{-16}{17}}}}{2^{\frac{32}{17}}}; \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} \geq \frac{\sqrt[17]{17c^{\frac{1}{17}} a^{\frac{-16}{17}}}}{2^{\frac{32}{17}}} \\ \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}} &\geq \frac{\sqrt[17]{17}}{2^{\frac{32}{17}}} \left(a^{\frac{1}{17}} b^{\frac{-16}{17}} + b^{\frac{1}{17}} c^{\frac{-16}{17}} + c^{\frac{1}{17}} a^{\frac{-16}{17}} \right) \geq \frac{3\sqrt[17]{17}}{2^{\frac{32}{17}}} (abc)^{\frac{-5}{17}} \geq \frac{3\sqrt[17]{17}}{2^{\frac{32}{17}}} 2^{\frac{15}{17}} = \frac{3\sqrt[17]{17}}{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Cho $x, y, z > 0$ và thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{x + 2y + z} + \frac{1}{x + y + 2z}$$

Đề thi Đại học khối D năm 2007

Giải:

Cho các số không âm a, b, x, y thỏa các điều kiện $\begin{cases} a^{2005} + b^{2005} \leq 1 \\ x^{2005} + y^{2005} \leq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$a^{1975} \cdot x^{30} + b^{1975} \cdot y^{30} \leq 1$$

Toán tuổi thơ 2 – số 27

Giải:

Nhận xét : Các đa thức tham gia trong bài toán cùng bậc $2005 = 1975 + 30$, đồng thời số mũ của các biến tương ứng bằng nhau.

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng, trung bình nhân cho 1975 số a^{2005} và 30 số x^{2005}

$$\frac{1975.a^{2005} + 30.x^{2005}}{(1975 + 30)} \geq \sqrt[2005]{(a^{2005})^{1975} \cdot (x^{2005})^{30}} = a^{1975} \cdot x^{30} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{1975.b^{2005} + 30.y^{2005}}{(1975 + 30)} \geq \sqrt[2005]{(b^{2005})^{1975} \cdot (y^{2005})^{30}} = b^{1975} \cdot y^{30} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 1975.(a^{2005} + b^{2005}) + 30.(x^{2005} + y^{2005}) \geq 2005.(a^{1975} \cdot x^{30} + b^{1975} \cdot y^{30}) \quad (3)$$

$$\text{Từ } \begin{cases} a^{2005} + b^{2005} \leq 1 \\ x^{2005} + y^{2005} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 2005 \geq 1975.(a^{2005} + b^{2005}) + 30.(x^{2005} + y^{2005}) \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } 2005 \geq 2005.(a^{1975} \cdot x^{30} + b^{1975} \cdot y^{30}) \Rightarrow a^{1975} \cdot x^{30} + b^{1975} \cdot y^{30} \leq 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a^{1975} = x^{30}, b^{1975} = y^{30}$.

Tổng quát : Cho các số không âm a, b, x, y thỏa các điều kiện $\begin{cases} a^{m+n} + b^{m+n} \leq 1 \\ x^{m+n} + y^{m+n} \leq 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng :

$$a^m \cdot x^n + b^m \cdot y^n \leq 1.$$

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}.$$

Giải:

$$\text{Ta có : } A^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2(y^2 + z^2 + x^2).$$

$$\text{Áp dụng bất đẳng thức: } x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$\text{Ta được: } A^2 \geq (y^2 + z^2 + x^2) + 2(y^2 + z^2 + x^2) = 3(y^2 + z^2 + x^2) = 3.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \frac{xy}{z} = \frac{yz}{x} = \frac{zx}{y} \Rightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy min } A = \sqrt{3} \text{ đạt được khi } x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Phân tích bài toán :

- Trường hợp tổng quát , giả sử $0 < a \leq b \leq c$ thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, vậy ta có thể suy ra $0 < a \leq b \leq c < 1$ hay không?. Như vậy điều kiện a, b, c không chính xác vì dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi

$$\begin{cases} 0 < a = b = c \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a, b, c \in \left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}\right].$$

- Ta thấy mối liên hệ gì của bài toán ?. Dễ thấy $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ và $b^2 + c^2, c^2 + a^2, a^2 + b^2$. Gợi ý ta đưa bài toán về dạng cần chứng minh : $\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

- Vì vai trò a, b, c như nhau và 2 ý phân tích trên gợi ý ta đưa đến cách phân tích

$$\frac{a}{1-a^2} + \frac{b}{1-b^2} + \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + c^2) \text{ và cần chứng minh } \begin{cases} \frac{a}{1-a^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \\ \frac{b}{1-b^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}b^2 \\ \frac{c}{1-c^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}c^2 \end{cases}.$$

- Ta thử đi tìm lời giải :

$$\frac{a}{1-a^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{1-a^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}a \Leftrightarrow \frac{2}{3\sqrt{3}} \geq a(1-a^2) \Leftrightarrow \frac{4}{27} \geq a^2(1-a^2)^2 \Leftrightarrow \frac{8}{27} \geq 2a^2(1-a^2)^2$$

$$\text{Dễ thấy } \begin{cases} 2a^2(1-a^2)^2 = 2a^2(1-a^2)(1-a^2) \\ 2a^2 + (1-a^2) + (1-a^2) = 2 \end{cases}$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$2 = 2a^2 + (1-a^2) + (1-a^2) \geq 3\sqrt[3]{2a^2(1-a^2)(1-a^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \geq \sqrt[3]{2a^2(1-a^2)(1-a^2)} \Leftrightarrow \frac{8}{27} \geq 2a^2(1-a^2)^2$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại.

Giải :

Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng : $\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$

Phân tích bài toán :

- Đẳng thức cần chứng minh đưa về dạng :

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + m(a+c) + nb + \frac{b^3}{c(a+b)} + k(b+a) + pc + \frac{c^3}{a(b+c)} + i(b+c) + ja \geq 0.$$

- Giả sử $0 < a \leq b \leq c$. Dự đoán đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Từ đó gợi mở hướng giải : $\frac{a^3}{b(c+a)} + m(a+c) + nb \geq 3\sqrt[3]{mna}$. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b(c+a)} = m(a+c) = nb \\ a = b = c \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a^3}{a(a+a)} = m(a+a) = na \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{4} \\ n = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tương tự cho các trường hợp khác .

Giải :

$$\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}(c+a) \geq \frac{3}{2}a . \text{ Đẳng thức xảy ra khi: } \frac{a^3}{b(c+a)} = \frac{1}{2}b = \frac{1}{4}(c+a) .$$

$$\frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{1}{2}c + \frac{1}{4}(b+a) \geq \frac{3}{2}b . \text{ Đẳng thức xảy ra khi: } \frac{b^3}{c(a+b)} = \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}(b+a) .$$

$$\frac{c^3}{a(b+c)} + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}(b+c) \geq \frac{3}{2}c . \text{ Đẳng thức xảy ra khi: } \frac{c^3}{a(b+c)} = \frac{1}{2}a = \frac{1}{4}(b+c) .$$

Cộng vế theo vế ta được : $\frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$. Dấu đẳng thức xảy ra khi :

$$a = b = c > 0$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng :

$$a. \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < \frac{7}{2}$$

$$b. \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6} .$$

$$c. \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{18} .$$

$$d. a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 10$$

Giải:

$$a. \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < \frac{7}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{a+1} &= \sqrt{1 \cdot (a+1)} \leq \frac{(a+1)+1}{2} = \frac{a}{2} + 1 \\ \sqrt{b+1} &= \sqrt{1 \cdot (b+1)} \leq \frac{(b+1)+1}{2} = \frac{b}{2} + 1 \\ \sqrt{c+1} &= \sqrt{1 \cdot (c+1)} \leq \frac{(c+1)+1}{2} = \frac{c}{2} + 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} \leq \frac{a+b+c}{2} + 3 = \frac{7}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $a+1 = b+1 = c+1 = 1 \Leftrightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow a+b+c = 0 \neq 1$

$$\text{Vậy } \sqrt{a+1} + \sqrt{b+1} + \sqrt{c+1} < \frac{7}{2}$$

$$b. \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6} .$$

Phân tích bài toán :

• Trường hợp tổng quát , giả sử $0 < a \leq b \leq c$ thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra khi $\begin{cases} 0 < a = b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{3}$. Hằng số cần thêm là $\frac{1}{3}$.

• Từ giả thiết gợi ý ta đưa đến cách phân tích $\sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{6}(a+b+c)$ hay

$$S = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \left[\frac{a + \frac{1}{3} + b + \frac{1}{3}}{2} + \frac{b + \frac{1}{3} + c + \frac{1}{3}}{2} + \frac{c + \frac{1}{3} + a + \frac{1}{3}}{2} \right]$$

• Ta thử đi tìm lời giải : Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{a + \frac{1}{3} + b + \frac{1}{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{(a+b) + \frac{2}{3}}{2} \right) \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(a+b) \cdot \frac{2}{3}} = \sqrt{a+b}$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại .

Cách khác :

Giả sử với mọi $m > 0$, ta luôn có : $\sqrt{a+b} = \frac{1}{\sqrt{m}} \sqrt{(a+b)m} \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\frac{a+b+m}{2} \right)$. Vấn đề bây giờ ta dự đoán $m > 0$ bao nhiêu là phù hợp?

Đễ thấy đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} a+b=m \\ a=b=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{2}{3}$.

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\begin{cases} \sqrt{a+b} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(a+b) \cdot \frac{2}{3}} \stackrel{AM \leq GM}{\leq} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(a+b) + \frac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{b+c} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(b+c) \cdot \frac{2}{3}} \stackrel{AM \leq GM}{\leq} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(b+c) + \frac{2}{3}}{2} \\ \sqrt{c+a} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{(c+a) \cdot \frac{2}{3}} \stackrel{AM \leq GM}{\leq} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{(c+a) + \frac{2}{3}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a} \leq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2(a+b+c) + 3 \cdot \frac{2}{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot 2 = \sqrt{6} \text{ (đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

$$c. \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{18}.$$

- Trường hợp tổng quát , giả sử $0 < a \leq b \leq c$ thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra

$$\text{khi } \begin{cases} 0 < a = b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a + b = \frac{2}{3} \\ b + c = \frac{2}{3} \\ c + a = \frac{2}{3} \end{cases} . \text{ Hằng số cần thêm là } \frac{2}{3}$$

- Từ giả thiết gợi ý ta đưa đến cách phân tích $\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{18}(a+b+c)$ hay

$$T = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \frac{(a+b) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} + \frac{(b+c) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} + \frac{(c+a) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3}$$

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\begin{cases} \sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \leq \frac{(a+b) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} \\ \sqrt[3]{b+c} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \leq \frac{(b+c) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} \\ \sqrt[3]{c+a} = \sqrt[3]{\frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} \leq \frac{(c+a) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{b+c} + \sqrt[3]{c+a} \leq \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \cdot \frac{2(a+b+c) + 4}{3} = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} \cdot \frac{6}{3} = \sqrt[3]{18} \text{ (đpcm)}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

$$d. a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 10$$

Phân tích bài toán :

- Trường hợp tổng quát , giả sử $0 < a \leq b \leq c$ thoả mãn điều kiện $a + b + c = 1$, dấu đẳng thức chỉ xảy ra

$$\text{khi } \begin{cases} 0 < a = b = c \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{3}.$$

- Từ điều cần chứng minh ,gợi ý ta đưa đến cách phân tích với mọi $m > 0$, ta luôn có : $ma + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{m}$.

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi : } \begin{cases} ma = \frac{1}{a} \\ a = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = 9.$$

- Vì thế mà $T = a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 9(a+b+c) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 8(a+b+c)$

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân

$$\begin{cases} 9a + \frac{1}{a} \geq 6 \\ 9b + \frac{1}{b} \geq 6 \\ 9c + \frac{1}{c} \geq 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = 9(a + b + c) + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - 8(a + b + c) \geq 3.6 - 8(a + b + c) = 10 \text{ (đpcm)}.$$

Đẳng thức xảy ra khi : $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Bài tập tương tự

Cho các số thực dương x, y, z và thỏa mãn $mx + ny + pz \geq d$ trong đó $m, n, p, d \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức $A = ax^2 + by^2 + cz^2$

Hướng dẫn : Thực hiện việc chọn điểm rơi : $ax^2 = by^2 = cz^2 = \beta$

Chứng minh rằng nếu $xy + yz + zx = 5$ thì $3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 10$

Phân tích bài toán :

• Trước hết ta để ý mối liên hệ giữa $3x^2, 3y^2, z^2, xy, yz, zx$ cho ta điều gì ?, phải chăng những hằng đẳng thức có dạng : $(ax - by)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ax)^2 + (by)^2 \geq 2axy$?.

• Phân tích :

$ax^2 + ay^2 \geq 2axy$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$

$by^2 + cz^2 \geq 2\sqrt{bc}yz$. Đẳng thức xảy ra khi $by^2 = cz^2$

$cz^2 + bx^2 \geq 2\sqrt{cb}zx$. Đẳng thức xảy ra khi $cz^2 = bx^2$

Bây giờ ta chọn a, b, c sao cho :
$$\begin{cases} a + b = 3 \\ 2c = 1 \\ a = \sqrt{bc} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Giải :

$x^2 + y^2 \geq 2xy$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y$

$2y^2 + \frac{1}{2}z^2 \geq 2yz$. Đẳng thức xảy ra khi $2y^2 = \frac{1}{2}z^2$

$\frac{1}{2}z^2 + 2x^2 \geq 2zx$. Đẳng thức xảy ra khi $\frac{1}{2}z^2 = 2x^2$

Cộng vế theo vế ta được : $3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 2(xy + yz + zx) \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + z^2 \geq 10$ (đpcm).

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi : } \begin{cases} x = y \\ 2y^2 = \frac{1}{2}z^2 \\ \frac{1}{2}z^2 = 2x^2 \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = \frac{47}{12}$. Chứng minh rằng : $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 \geq \frac{235}{12}$

Phân tích bài toán :

• Trước hết ta để ý mối liên hệ giữa $3x^2, 4y^2, 5z^2, x, y, z$ cho ta điều gì ?, gợi ý : $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 \geq \frac{235}{12}$

được biến đổi về dạng $3x^2 + m + 4y^2 + n + 5z^2 + p \geq k, (0 < m \leq n \leq p \leq k = \text{const})$

• Phân tích :

$3x^2 + m \geq 2\sqrt{3mx}, m > 0$. Đẳng thức xảy ra khi $3x^2 = m$

$4y^2 + n \geq 2\sqrt{4ny}, n > 0$. Đẳng thức xảy ra khi $4y^2 = n$

$5z^2 + p \geq 2\sqrt{5pz}, p > 0$. Đẳng thức xảy ra khi $5z^2 = p$

$$\text{Bây giờ ta chọn } x, y, z \text{ sao cho : } \begin{cases} 3x^2 = m \\ 4y^2 = n \\ 5z^2 = p \\ \sqrt{3m} = \sqrt{4n} = \sqrt{5p} \\ x + y + z = \frac{47}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{4} \\ z = 1 \\ m = \frac{25}{3} \\ n = \frac{25}{4} \\ p = 5 \end{cases}$$

Giải :

$3x^2 + \frac{25}{3} \geq 2\sqrt{3 \cdot \frac{25}{3}x}$. Đẳng thức xảy ra khi $3x^2 = \frac{25}{3}$.

$4y^2 + \frac{25}{4} \geq 2\sqrt{4 \cdot \frac{25}{4}y}$. Đẳng thức xảy ra khi $4y^2 = \frac{25}{4}$.

$5z^2 + 5 \geq 2\sqrt{5 \cdot 5z}$. Đẳng thức xảy ra khi $5z^2 = 5$.

Cộng vế theo vế ta được $3x^2 + 4y^2 + 5z^2 \geq 10(x + y + z) - \frac{235}{12} = \frac{235}{12}$ (đpcm).

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{5}{4} \\ z = 1 \end{cases}$$

Cho 3 số thực không âm a, b, c . Chứng minh rằng : $1 + \sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$

Giải :

$$1 + \sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)} \Leftrightarrow \sqrt[3]{1.1.1} + \sqrt[3]{abc} \leq \sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \leq 1$$

$$\text{Đặt : } T = \sqrt[3]{\frac{1.1.1}{(1+a)(1+b)(1+c)}} + \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

$$T \leq \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} \right]$$

$$T \leq \frac{1}{3} \left[\frac{a+1}{1+a} + \frac{b+1}{1+b} + \frac{c+1}{1+c} \right] = \frac{1}{3} \cdot 3 = 1$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \geq 0$.

Tổng quát :

Chứng minh rằng với mọi $a_i, b_i > 0 (i = \overline{1, n})$ thì ta luôn có :

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 b_2 \dots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1)(a_1 + b_2) \dots (a_n + b_n)}$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng : $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 8$.

Giải :

$$VT = \left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) = \left(\frac{1-a}{a}\right) \cdot \left(\frac{1-b}{b}\right) \cdot \left(\frac{1-c}{c}\right) = \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \cdot \frac{a+b}{c}$$

$$VT \stackrel{\text{AM-GM}}{\geq} \frac{2\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{2\sqrt{ca}}{b} \cdot \frac{2\sqrt{ab}}{c} = 8 \text{ (đpcm)}$$

Tổng quát :

$$\text{Cho } \begin{cases} x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $\left(\frac{1}{x_1} - 1\right)\left(\frac{1}{x_2} - 1\right)\left(\frac{1}{x_3} - 1\right).....\left(\frac{1}{x_n} - 1\right) \geq (n-1)^n$.

Cho 4 số thực dương a, b, c, d thoả mãn $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} \geq 3$. Chứng minh rằng :

$$abcd \leq \frac{1}{81}.$$

Giải :

$$\frac{1}{1+a} \geq \left(1 - \frac{1}{1+b}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+c}\right) + \left(1 - \frac{1}{1+d}\right) = \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d}$$

$$\frac{1}{1+a} \stackrel{AM \geq GM}{\geq} 3 \sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$$

$$\text{Vậy: } \begin{cases} \frac{1}{1+a} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}} \\ \frac{1}{1+b} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{cda}{(1+c)(1+d)(1+a)}} \\ \frac{1}{1+c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{dca}{(1+d)(1+c)(1+a)}} \\ \frac{1}{1+d} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \geq 81 \frac{abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \Rightarrow abcd \leq \frac{1}{81}$$

Tổng quát :

$$\text{Cho : } \begin{cases} x_1, x_2, x_3, \dots, x_n > 0 \\ \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \geq n-1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $x_1 x_2 x_3 \dots x_n \leq \frac{1}{(n-1)^n}$.

Bài tương tự

Cho 3 số thực dương a, b, c thoả mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng :

$$a. \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

$$b. \frac{a}{a+b^2} + \frac{b}{b+c^2} + \frac{c}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}.$$

$$c. \frac{a^2}{a+2b^2} + \frac{b^2}{b+2c^2} + \frac{c^2}{c+2a^2} \geq 1.$$

Hướng dẫn :

$$a. \begin{cases} a+b+c=3 \\ 3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \Rightarrow ab+bc+ca \leq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{1+b^2} = \frac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \\ 1+b^2 \geq 2b \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{1+b^2} \geq a - \frac{ab}{2}$$

$$\text{Tương tự : } \frac{b}{1+c^2} = b - \frac{bc^2}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2}, \frac{c}{1+a^2} = c - \frac{ca^2}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2}$$

$$\text{Cộng vế theo vế : } \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c - \frac{ab+bc+ca}{2} \geq 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a.b.c = 1$. Chứng minh rằng :

$$a. \frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

$$b. \frac{1}{2+a} + \frac{1}{2+b} + \frac{1}{2+c} \leq 1$$

Hướng dẫn :

a.

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2}$$

Giải :

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{b+c} + a\right) + \left(\frac{b^2}{c+a} + b\right) + \left(\frac{c^2}{a+b} + c\right) \geq \frac{1}{2} + (a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + a(b+c)}{b+c} + \frac{b^2 + b(c+a)}{c+a} + \frac{c^2 + c(a+b)}{a+b} \geq \frac{1}{2} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(a+b+c)}{b+c} + \frac{b(b+c+a)}{c+a} + \frac{c(c+a+b)}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \text{ vì } a+b+c=1.$$

Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng :

$$a. \frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{b+c+2a} + \frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4}.$$

Hướng dẫn :

$$a. \text{ Dùng bất đẳng thức } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}.$$

Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng :

$$a. \frac{a^3}{(a+b)(b+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(c+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(a+b)} \geq \frac{1}{4}(a+b+c)$$

$$b. \frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c^3}{a(b+c)} \geq \frac{1}{2}(a+b+c)$$

Hướng dẫn :

$$a. \text{ Cách 1 : } \begin{cases} \frac{a^3}{(a+b)(b+c)} + \frac{a+b}{8} + \frac{b+c}{8} \geq \frac{3}{4}a \\ \frac{b^3}{(b+c)(c+a)} + \frac{b+c}{8} + \frac{c+a}{8} \geq \frac{3}{4}b \\ \frac{c^3}{(c+a)(a+b)} + \frac{c+a}{8} + \frac{a+b}{8} \geq \frac{3}{4}c \end{cases}$$

$$\text{Cách 2 : } \begin{cases} \frac{8a^3}{(a+b)(b+c)} + (a+b) + (b+c) \geq 6a \\ \frac{8b^3}{(b+c)(c+a)} + (b+c) + (c+a) \geq 6b \\ \frac{8c^3}{(c+a)(a+b)} + (c+a) + (a+b) \geq 6c \end{cases}$$

$$b. \text{ Cách 1 : } \begin{cases} \frac{4a^3}{b(c+a)} + 2b + (c+a) \geq 6a \\ \frac{4b^3}{c(a+b)} + 2c + (a+b) \geq 6b \\ \frac{4c^3}{a(b+c)} + 2a + (b+c) \geq 6c \end{cases}$$

$$\text{Cách 2 : } \begin{cases} \frac{a^3}{b(c+a)} + \frac{b}{2} + \frac{c+a}{4} \geq \frac{3}{2}a \\ \frac{b^3}{c(a+b)} + \frac{c}{2} + \frac{a+b}{4} \geq \frac{3}{2}b \\ \frac{c^3}{a(b+c)} + \frac{a}{2} + \frac{b+c}{4} \geq \frac{3}{2}c \end{cases}$$

Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa : $x + y + z \geq 3$. Tìm GTNN của

$$A = \frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}}$$

$$\frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} \geq \frac{(x + y + z)^2}{x + y + z + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy}}.$$

Ta có : $\sqrt{yz} + \sqrt{zx} + \sqrt{xy} \leq x + y + z$.

$$\text{Suy ra : } \frac{x^2}{x + \sqrt{yz}} + \frac{y^2}{y + \sqrt{zx}} + \frac{z^2}{z + \sqrt{xy}} \geq \frac{(x + y + z)^2}{x + y + z + x + y + z} = \frac{x + y + z}{2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi: } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x = y = z \\ \frac{x}{x + \sqrt{yz}} = \frac{y}{y + \sqrt{zx}} = \frac{z}{z + \sqrt{xy}} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{x^5}{y^3 + z^3} + \frac{y^5}{z^3 + x^3} + \frac{z^5}{x^3 + y^3} + x^4 + y^4 + z^4$$

Áp dụng BĐT Côsi cho 3 số ta có :

$$\frac{x^5}{y^3 + z^2} + \frac{y^3 + z^2}{4} + \frac{x^4}{2} \geq \frac{3}{2}x^3$$

$$\text{tương tự } \frac{y^5}{z^3 + x^2} + \frac{z^3 + x^2}{4} + \frac{y^4}{2} \geq \frac{3}{2}y^3, \frac{z^5}{x^3 + y^2} + \frac{x^3 + y^2}{4} + \frac{z^4}{2} \geq \frac{3}{2}z^3$$

$$\frac{x^4}{2} + \frac{1}{2} \geq x^2 \text{ tương tự } \frac{y^4}{2} + \frac{1}{2} \geq y^2, \frac{z^4}{2} + \frac{1}{2} \geq z^2$$

Cộng về với về các BĐT trên ta được

$$S = \frac{x^5}{y^3 + z^2} + \frac{y^5}{z^3 + x^2} + \frac{z^5}{x^3 + y^2} + x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{5}{4}(x^3 + y^3 + z^3) + \frac{3}{4}(x^2 + y^2 + z^2) - \frac{3}{2}$$

$$\text{Mà } x^3 + x^3 + 1 \geq 3x^2 \text{ hay } 2x^3 + 1 \geq 3x^2 \text{ tương tự } 2y^3 + 1 \geq 3y^2, 2z^3 + 1 \geq 3z^2$$

$$\text{Do đó, } 2(x^3 + y^3 + z^3) \geq 3(x^2 + y^2 + z^2) - 3 = 6 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 \geq 3 \Rightarrow S \geq \frac{9}{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Cho 3 số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{x^2}{(2y+3z)(2z+3y)} + \frac{y^2}{(2z+3x)(2x+3z)} + \frac{z^2}{(2x+3y)(2y+3x)}.$$

Giải :

$$(2y+3z)(2z+3y) = 6(y^2+z^2) + 13yz \leq 6(y^2+z^2) + \frac{13}{2}(y^2+z^2) = \frac{25}{2}(y^2+z^2)$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(2y+3z)(2z+3y)} \geq \frac{2x^2}{25(y^2+z^2)}$$

$$\text{Tương tự : } \frac{y^2}{(2z+3x)(2x+3z)} \geq \frac{2y^2}{25(z^2+x^2)}, \frac{z^2}{(2x+3y)(2y+3x)} \geq \frac{2z^2}{25(x^2+y^2)}.$$

$$M \geq \frac{2x^2}{25(y^2+z^2)} + \frac{2y^2}{25(z^2+x^2)} + \frac{2z^2}{25(x^2+y^2)} \Rightarrow f(x; y; z) \geq \frac{1}{25} \Rightarrow \min M = \frac{1}{25}.$$

Với x, y, z là số dương và $x.y.z \geq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt{yz}} + \frac{y}{\sqrt{y}+\sqrt{zx}} + \frac{z}{\sqrt{z}+\sqrt{xy}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn.

$$\text{Đặt } a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}, c = \sqrt{z}$$

Bài toán trở thành : a, b, c là số dương và $a.b.c \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2+ac}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2+ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Để thấy : } \frac{a^2}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2+ac}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2+ab}} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a^2+bc} + \sqrt{b^2+ac} + \sqrt{c^2+ab}} (*)$$

Bình phương hai vế bất đẳng thức:

$$\begin{aligned} VT^2(*) &\geq \left[\frac{(a+b+c)^2}{\sqrt{a^2+bc} + \sqrt{b^2+ac} + \sqrt{c^2+ab}} \right]^2 = \frac{(a+b+c)^4}{\left[\sqrt{a^2+bc} + \sqrt{b^2+ac} + \sqrt{c^2+ab} \right]^2} \\ &\geq \frac{(a+b+c)^4}{3(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ac)} \geq \frac{(a+b+c)^4}{3\left[(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ac) \right]} \geq \frac{(a+b+c)^4}{3\left[(a+b+c)^2 - 3 \right]} \end{aligned}$$

$$(\text{ Vì } ab+bc+ac \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 3 \Rightarrow t = (a+b+c)^2 \geq 9)$$

$$\text{Ta có: } \frac{t^2}{3(t-3)} = \frac{3t+15}{12} + \frac{t-3}{12} + \frac{3}{t-3} \geq \frac{3.9+15}{12} + 2\sqrt{\frac{t-3}{12} \cdot \frac{3}{t-3}} = \frac{9}{2} \Rightarrow VT^2(*) \geq \frac{9}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1 \Rightarrow$ điều phải chứng minh

Tổng quát : ta có bài toán sau: với x_1, x_2, \dots, x_n ($n \geq 2$) là số dương và $x_1.x_2 \dots x_n \leq 1$

Cmr:
$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 \cdot x_3 \dots x_n}}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2 + \sqrt{x_3 \cdot x_4 \dots x_n}}} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{x_n + \sqrt{x_1 \cdot x_2 \dots x_{n-1}}}} \geq \frac{n}{\sqrt{2}}.$$

Cho 3 số thực dương a, b, c . Chứng minh rằng :

a.
$$\frac{1}{a+3b} + \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{c+3a} \leq \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}.$$

b.
$$\frac{1}{a+b+2c} + \frac{1}{b+c+2a} + \frac{1}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4a} + \frac{1}{4b} + \frac{1}{4c}.$$

c.
$$\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{1}{\sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{1}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

d.
$$\frac{a-d}{d+b} + \frac{b-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+d} \geq 0$$

Cho $x, y, z \in [0; 1]$. Chứng minh rằng : $(2^x + 2^y + 2^z) \left(\frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z} \right) < \frac{81}{8}$

Giải :

Đặt $a = 2^x, b = 2^y, c = 2^z \Rightarrow a, b, c \in [1; 2]$

Bài toán trở thành : Cho $a, b, c \in [1; 2]$. Chứng minh rằng : $(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) < \frac{81}{8}.$

Thật vậy :

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) < \frac{81}{8} \Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) < \frac{81}{4} \Leftrightarrow \sqrt{(a+b+c) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right)} < \frac{9}{2}$$

$$1 \leq a \leq 2 \Leftrightarrow (a-1)(a-2) \leq 0 \Leftrightarrow a^2 - 3a + 2 \leq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2 \leq 3a \Leftrightarrow a + \frac{2}{a} \leq 3$$

$$\text{Tương tự : } b + \frac{2}{b} \leq 3, c + \frac{2}{c} \leq 3$$

$$\Rightarrow (a+b+c) + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) \leq 9 \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức trung bình cộng trung bình nhân :

$$\Rightarrow (a+b+c) + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) \geq 2\sqrt{(a+b+c) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } 2\sqrt{(a+b+c) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right)} \leq 9 \Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c} \right) \leq \frac{81}{4} \quad (3)$$

Đẳng thức không xảy ra . $(3) \Leftrightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) < \frac{81}{8}$ (đpcm).

Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a^3 + b^3 + a^2c + b^2c} + \frac{bc}{b^3 + c^3 + b^2a + c^2a} + \frac{ca}{c^3 + a^3 + c^2b + a^2b} \leq \frac{3}{4}$$

Trích <http://www.maths.vn>

Giải :

$$ab + bc + ca = 3abc \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$$

$$\text{Với } a, b > 0 \text{ ta luôn có } a^3 + b^3 \geq ab(a + b), \frac{1}{a + b} \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

và với mọi a, b ta luôn có $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

$$\frac{ab}{a^3 + b^3 + a^2c + b^2c} \leq \frac{ab}{ab(a + b) + (a^2 + b^2)c} \leq \frac{ab}{4} \left(\frac{1}{ab(a + b)} + \frac{1}{(a^2 + b^2)c} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{ab(a + b) + (a^2 + b^2)c} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a + b} + \frac{ab}{(a^2 + b^2)c} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a + b} + \frac{1}{2c} \right)$$

$$\frac{ab}{a^3 + b^3 + a^2c + b^2c} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{c} \quad (1)$$

Tương tự :

$$\frac{bc}{b^3 + c^3 + b^2a + c^2a} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{a} \quad (2)$$

$$\frac{ca}{c^3 + a^3 + c^2b + a^2b} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{b} \quad (3)$$

Cộng vế theo vế đẳng thức (1), (2) và (3) ta được đpcm. Dấu đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Cho tam giác ABC có 3 cạnh : $AB = c, BC = a, AC = b$ thỏa mãn $a^3 = b^3 + c^3$. Chứng minh rằng : A là góc nhọn và thỏa : $60^\circ < A < 90^\circ$.

Giải :

$$\begin{cases} a, b, c > 0 \\ a^3 = b^3 + c^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < b < a \\ 0 < c < a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{b}{a} < 1 \\ 0 < \frac{c}{a} < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{b}{a} \right)^3 < \left(\frac{b}{a} \right)^2 \\ \left(\frac{c}{a} \right)^3 < \left(\frac{c}{a} \right)^2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{b}{a} \right)^3 + \left(\frac{c}{a} \right)^3 < \left(\frac{b}{a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a} \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^3 + c^3}{a^3} < \frac{b^2 + c^2}{a^2} \Rightarrow 1 < \frac{b^2 + c^2}{a^2} \Rightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Rightarrow A < 90^\circ$$

$$a^3 = b^3 + c^3 = (b + c)(b^2 - bc + c^2) > a(b^2 - bc + c^2) \Rightarrow a^2 > b^2 - bc + c^2$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc} < 1 \Rightarrow \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < \frac{1}{2} \Rightarrow A > 60^\circ$$

Vậy $60^\circ < A < 90^\circ$.

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện : $15\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 10\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + 2007$

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} + \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} + \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}}$

Áp dụng đẳng thức : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

$$5a^2 + 2ab + 2b^2 = (2a+b)^2 + (a-b)^2 \geq (2a+b)^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5a^2 + 2ab + 2b^2}} \leq \frac{1}{2a+b} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$

$$\text{Tương tự : } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5b^2 + 2bc + 2c^2}} \leq \frac{1}{2b+c} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{5c^2 + 2ca + 2a^2}} \leq \frac{1}{2c+a} \leq \frac{1}{9}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) \end{cases}$$

$$\text{Do đó } P \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\text{Mặt khác : } \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \\ \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \leq \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 \end{cases}$$

$$\text{Mà giả thiết : } 15\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = 10\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right) + 2007$$

$$\text{Do đó : } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \sqrt{\frac{6021}{5}}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi : } \begin{cases} a = b = c \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \sqrt{\frac{6021}{5}} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6021}{5}}$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6021}{5}}, \text{ khi } a = b = c = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{6021}{5}}$$