Ứng dụng một bất đẳng thức đại số vào hình học

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Trong bài viết này chúng ta sẽ trình bày một số những ứng dụng của một bất đẳng thức đại số đặc biệt để tìm ra nhưng bất đẳng thức hình học lạ.

1 Mở đầu

Trên tờ báo mathematical reflections và trong bài báo An unexpectedly useful inequality của tác giả Phạm Hữu Đức [1] ,bất dẳng thức đại số dưới đây đã được chứng minh

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}\ \forall a,b,c,x,y,z>0.$$

Bât đẳng thức đại số trên ở dạng rất đẹp mắt và trong bài báo trên cũng đã trình bày rất nhiều những ứng dụng của bất đẳng thức đó để xây dựng các bất đẳng thức mới, trong bài báo này chúng ta sẽ đưa ra một chứng minh rất đơn giản cho bất đẳng thức đó đồng thời cũng sẽ chỉ ra những ứng dụng khá bất ngờ của bất đẳng thức này trong hình học.

Bài toán 1. *Với mọi số thực dương a,b,c,x,y,z, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
&(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z\\
&=(a+b+c)(x+y+z)-(ax+by+cz)\\
&=\sqrt{[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)][x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)]}-(ax+by+cz)\\
&\geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}+[\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}-(ax+by+cz)]\\
&\geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}.
\end{aligned}$$

Trong [1] cũng đã chỉ ra một số những bất đẳng thức đại số hay được suy ra từ bất đẳng thức trên, chúng ta sẽ nhắc lại dưới đây □

Bài toán 2. *Với mọi số thực dương a,b,c,x,y,z bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{x}{y+z}a+\frac{y}{z+x}b+\frac{z}{x+y}c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}.$$

Chứng minh. Trong bài toán 1 thay (x,y,z) by $(\frac{x}{y+z},\frac{y}{z+x},\frac{z}{x+y})$ và ta chú ý rằng

$$\frac{xy}{(z+x)(z+y)}+\frac{yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{zx}{(y+z)(y+x)} \geq \frac{3}{4}$$

Thật vậy bất đẳng thức này tương đương

$$4[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)] \geq 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \geq 6xyz$$

Là hệ quả của bất đẳng thức AM-GM.

□

Chúng ta sẽ không đi sâu vào các ứng dụng về mặt đại số của nó mà chúng ta chỉ quan tâm tới những ứng dụng trong hình học của bất đẳng thức trên thông qua một bất đẳng thức hình học rất cơ bản sau

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC, với mọi điểm P trong mặt phẳng thì bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{PB\cdot PC}{bc}+\frac{PC\cdot PA}{ca}+\frac{PA\cdot PB}{ab} \geq 1$$

Ở đây a,b,c chỉ độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Chứng minh. Có rất nhiều cách để chứng minh bất đẳng thức trên, xong cách đơn giản nhất có lẽ là phương pháp số phức chúng ta sẽ đưa ra dưới đây, giả sử tọa độ phức các điểm A,B,C,P là $A(a),B(b),C(c),P(p)$ chúng ta dễ dàng kiểm tra đẳng thức số phức sau

$$(b-c)(p-b)(p-c)+(c-a)(p-c)(p-a)+(a-b)(p-a)(p-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$$

Và ứng dụng bất đẳng thức về module số phức ta dễ dàng thu được

$$BC\cdot PB\cdot PC+CA\cdot PC\cdot PA+AB\cdot PA\cdot PB=|(b-c)(p-b)(p-c)|+|(c-a)(p-c)(p-a)|+|(a-b)(p-a)(p-b)|$$

$$\geq |(b-c)(p-b)(p-c)+(c-a)(p-c)(p-a)+(a-b)(p-a)(p-b)|=|(a-b)(b-c)(c-a)|=AB\cdot BC\cdot CA.$$

Chia hai vế cho $AB\cdot BC\cdot CA$ ta thu được

$$\frac{PB\cdot PC}{bc}+\frac{PC\cdot PA}{ca}+\frac{PA\cdot PB}{ab} \geq 1$$

Chú ý đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC là tam giác nhọn và P trùng với trực tâm tam giác. □

Dưới đây chúng ta sẽ đưa ra một vài các đẳng thức hay gặp trong tam giác dưới dạng bổ đề, trong đó với các ký hiệu thông thường là a,b,c và chỉ các cạnh và s,R,r lần lượt chỉ nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC thì*

1/ $(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)=r(4R+r)$

2/ $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{4R+r}{s}$

3/ $r(4R+r)=S(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2})$.

2 Các ứng dụng của bất đẳng thức đại số

Trong mục này chúng ta sẽ chỉ ra các ứng dụng vào hình học của bất đẳng thức đại số trong bài toán 1 thông qua việc sử dụng bài toán 2.

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC, và mọi $x, y, z > 0$ và mọi P trong mặt phẳng, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$(y+z)\frac{PA}{a}+(z+x)\frac{PB}{b}+(x+y)\frac{PC}{c}\geq 2\sqrt{xy+yz+zx}$$

Chứng minh. Áp dụng các bài toán 1 và 2 ta thế các biến trong bài toán 1 các bộ số dương $(x, y, z), (a, b, c)$ bởi $(\frac{PA}{a}, \frac{PB}{b}, \frac{PC}{c}), (a, b, c)$ tương ứng chúng ta thu được

$$(y+z)\frac{PA}{a}+(z+x)\frac{PB}{b}+(x+y)\frac{PC}{c}\geq$$

$$\geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(\frac{PB\cdot PC}{bc}+\frac{PC\cdot PA}{ca}+\frac{PA\cdot PB}{ab})}\geq 2\sqrt{xy+yz+zx}$$

□

Hệ quả 4.1. *Cho tam giác ABC và mọi điểm P thì*

$$\frac{PA}{a}+\frac{PB}{b}+\frac{PC}{c}\geq 3$$

Chứng minh. Thật vậy ở bài toán 3 hoặc hệ quả 1 của bài toán 3 ta đặt $x=y=z=1$ chúng ta thu được bất đẳng thức trên. Dấu bằng đạt được khi tam giác ABC đều và P trùng tâm.

Chú ý rằng bất đẳng thức trên là bất đẳng thức hình học khá thông dụng ta thường thấy chúng được chứng minh qua cách sử dụng tích vô hướng. □

Hệ quả 4.2. *Cho tam giác ABC, mọi $x, y, z > 0$ và mọi P trên mặt phẳng thì*

$$\frac{xPA}{(y+z)a}+\frac{yPB}{(z+x)b}+\frac{zPC}{(x+y)c}\geq 2\sqrt{3}$$

Hệ quả 4.3. *Cho hai tam giác $ABC, A'B'C'$ với mọiP và P' trên mặt phẳng thì*

$$(\frac{P'B'}{b'}+\frac{P'C'}{c'})\frac{PA}{a}+(\frac{P'C'}{c'}+\frac{P'A'}{a'})\frac{PB}{b}+(\frac{P'A'}{a'}+\frac{P'C'}{b'})\frac{PC}{c}\geq 2$$

Chứng minh. Trong bài toán 3 ta đặt $x=\dfrac{P'A'}{a'}, y=\dfrac{P'B'}{b'}, z=\dfrac{P'C'}{c'}$ và ứng dụng bài toán 2 ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 5. *Cho tam giác ABCmọi $x, y, z > 0$ và R, r là các bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tương ứng, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$xa+yb+zc\geq 2\sqrt{xy+yz+zx}\sqrt{r(4R+r)}$$

Chứng minh. Sử dụng bài toán 1 ta thay thế bộ số dương (a,b,c) bởi $(p-a,p-b,p-c)$ và ta chú ý rằng bài toán 1 có thể được viết dưới dạng

$$x(b+c)+y(c+a)+z(a+b)\ge 2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}$$

Vì vậy ta nhận được

$$x(s-b+s-c)+y(s-c+s-a)+z(s-a+s-b)\ge$$

$$\ge 2\sqrt{(xy+yz+zx)((s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b))}$$

Ứng dụng bổ đề ta thu được điều phải chứng minh

$$xa+yb+zc\ge 2\sqrt{xy+yz+zx}\sqrt{r(4R+r)}.$$

□

Bài toán trên có một vài hệ quả rất thú vị

Hệ quả 5.1. *Cho hai tam giác $ABC, A'B'C'$, với mọi P , R, r là bán kinh các đường trong ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC ta có*

$$\frac{a}{a'}PA'+\frac{b}{b'}PB'+\frac{c}{c'}PC'\ge 2\sqrt{r(4R+r)}$$

Chứng minh. Ở trong bài toán và ứng dụng bài toán 2 cho tam giác $A'B'C'$ và điểm P ta đặt $x=\dfrac{PA'}{a'}, y=\dfrac{PB'}{b'}, z=\dfrac{PC'}{c'}$ chúng ta nhận được

$$\frac{PA'}{a'}a+\frac{PB'}{b'}b+\frac{PC'}{c'}c\ge$$

$$\ge 2\sqrt{\frac{PB'\cdot PC'}{b'c'}+\frac{PC'\cdot PA'}{c'a'}+\frac{PA'\cdot PB'}{a'b'})}\sqrt{r(4R+r)}\ge 2\sqrt{r(4R+r)}$$

Đó là điều phải chứng minh □

Hệ quả 5.2. *a/ Cho tam giác ABC và $A'B'C'$ ta có*

$$\tan\frac{A'}{2}a+\tan\frac{B'}{2}b+\tan\frac{C'}{2}c\ge 2\sqrt{r(4R+r)}$$

b/ Cho tam giác ABC và tam giác nhọn $A'B'C'$ ta có

$$\cot A'a+\cot B'b+\cot C'c\ge 2\sqrt{r(4R+r)}$$

Chứng minh. a/ Chúng ta luôn có $\tan\dfrac{A}{2},\tan\dfrac{B}{2},\tan\dfrac{C}{2}>0$, bây giờta ứng dụng bài toán 4 và đặt $x=\tan\dfrac{A'}{2}, y=\tan\dfrac{B'}{2}, z=\tan\dfrac{C'}{2}$ trong đo chú ý rằng $\tan\dfrac{B'}{2}\tan\dfrac{C'}{2}+\tan\dfrac{C'}{2}\tan\dfrac{A'}{2}+\tan\dfrac{A'}{2}\tan\dfrac{B'}{2}=1$ chúng ta thu được

$$\tan\frac{A'}{2}a+\tan\frac{B'}{2}b+\tan\frac{C'}{2}c\geq 2\sqrt{\tan\frac{B'}{2}\tan\frac{C'}{2}+\tan\frac{C'}{2}\tan\frac{A'}{2}+\tan\frac{A'}{2}\tan\frac{B'}{2}}\sqrt{r(4R+r)}=2\sqrt{r(4R+r)}$$

b/trong tam giác nhọn $A'B'C'$ ta có $\cot A',\cot B',\cot C'>0$ và chú ý rằng $\cot B'\cot C'+cotC'\cot A'+\cot A'\cot B'=1$ và áp dụng bài toán 4 thì

$$\cot A'a+\cot B'b+\cot C'c\geq 2\geq 2\sqrt{\cot B'\cot C'+cotC'\cot A'+\cot A'\cot B'}\sqrt{r(4R+r)}=2\sqrt{r(4R+r)}$$

□

3 Các ứng dụng của các bất đẳng thức hình học

Trong mục trên chúng ta đã chỉ ra rất nhiều bất đẳng hình học như là những ứng dụng của bất đẳng thức đại số, chúng ta thấy đó là các bất đẳng thức ở dạng khá tổng quát, trong phần này chúng ta tiếp tục trình bày những ứng dụng của các bất đẳng thức hình học đó dưới dạng những hệ quả.

Đến đây chúng ta có một chú ý là bài toán tổng quát sau cho bài toán Fermat trong tam giác đã được giải quyết hoàn toàn trong các bài báo của thầy Nguyễn Minh Hà trên THTT trong [2] và trên bài báo Extending the Fermat-Toricelli problem đã đăng trên tạp chí The mathematical gazette trong [4].

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ trong mặt phẳng hãy tìm điểm cực trị cho biểu thức $xPA+yPB+zPC$ trong đó x,y,z là các số thực dương bất kỳ.*

Như vậy về mặt lý thuyết chúng ta có thể tìm được cực trị biểu thức có dạng $xPA+yPB+zPC$, tuy nhiên trong nhiều trường hợp cụ thể, ta cần đến một đánh giá yếu hơn để không phải xét quá nhiều trường hợp, ta có thể ví dụ một vấn đề chưa có lời giải

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC với mọi điểm P trên mặt phẳng hãy chứng minh*

$$\sin\frac{A}{2}PA+\sin\frac{B}{2}PB+\sin\frac{C}{2}PC\geq\frac{6r^2}{R}$$

Bài toán 8. *Cho hai tam giác $ABC, A'B'C'$ và điểm P bất kỳ, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{PB'\cdot PC+PB\cdot PC'}{bc}+\frac{PC'\cdot PA+PC\cdot PA'}{ca}+\frac{PA'\cdot PC+PA\cdot PB'}{ab}\geq 2$$

Chứng minh. Áp dụng hệ quả 2 của bài toán 3 và cho $P\equiv P'$, chúng ta thu được hệ quả này. Và ta chú ý thêm rằng hệ quả này lại chính là một mở rộng cho bất đẳng thức cơ bản trong bài toán 2 khi mà $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

□

Bài toán 9. *Cho hai tam giác $ABC, A'B'C'$ thì*

$$\frac{\sin A}{\sin A'}+\frac{\sin B}{\sin B'}+\frac{\sin C}{\sin C'}\geq 2\frac{\sqrt{r(4R+r)}}{R}\geq\frac{6r}{R}$$

Chứng minh. Trong hệ quả 1 của bài toán ta cho $P\equiv O'$ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam gaics $A'B'C'$ và ứng dụng định lý sin trong các tam giác $A'B'C'$ và ABC ta thu được điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC và mọi điểm P thì $PA+PB+PC\geq 2\sqrt{r(4R+r)}$*

Chứng minh. Trong hệ quả 1 của bài toán 4 ta cho $\triangle ABC\equiv A'B'C'$ chúng ta thu được bất đẳng thức này. Và ta chú ý rằng đây là một dạng mạnh hơn của bất đẳng thức $PA+PB+PC\geq 6r$ mà ta vẫn gặp nó trong một sô bài viết trên THTT và nó được chứng minh dưới dạng sử dụng bất đẳng thức Erdos-Mordell. Mặt khác ta cũng chú ý thêm rằng nếu sử dụng điểm cực trị Fermat F trong tam giác ta có thể quy bất đẳng thức này về một bất đẳng thức lượng trong tam giác ở dạng sau $FA+FB+FC\geq 2\sqrt{r(4R+r)}$, và sử dụng đẳng thức $2(FA+FB+FC)^2=a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S$ ta nhận được một bất đẳng thức dạng $a^2+b^2+c^2+4\sqrt{3}S\geq 2r(4R+r)$ nếu để ý kỹ ta thấy đây là một bất đẳng thức mạnh hơn bất đẳng thức nổi tiếng Finsler-Hadwiger $a^2+b^2+c^2\geq 4\sqrt{3}S+(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$ $\square$

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC và mọi điểm P trên mặt phẳng thì*

$$a/\ \frac{b}{a}PA+\frac{c}{b}PB+\frac{a}{c}PC\geq 2\sqrt{r(4R+r)}$$

$$b/\ \frac{c}{a}PA+\frac{a}{b}PB+\frac{b}{c}PC\geq 2\sqrt{r(4R+r)}$$

Chứng minh. Trong hệ quả 1 của bài toán 4 ta cho $\triangle A'B'C'\equiv\triangle BCA$ ta thu được phần $a/$ và cho $\triangle A'B'C'\equiv\triangle BAC$ ta thu được phần $b/$. Ta thấy đây là các bất đẳng thức không đối xứng trong tam giác, nó là những dạng bài ít gặp. $\square$

Bài toán 12. *Cho tam giác ABC và mọi điểm P thì*

$$\frac{PA}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{PB}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{PC}{\sin\frac{C}{2}}\geq 2\sqrt{r(4R+r)}\geq 6r$$

Chứng minh. Chúng ta cộng hai vế của các bất đẳng thức trong phần $a/$ và $b/$ của hệ quả 6 ta thu được

$$\frac{b+c}{a}PA+\frac{c+a}{b}PB+\frac{a+b}{c}PC\geq 2\sqrt{r(4R+r)}$$

Và bằng định lý sin ta có

$$\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}=\frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\leq\frac{1}{\sin\frac{A}{2}}$$

Vì vậy ta thu được

$$\frac{PA}{\sin\frac{A}{2}}+\frac{PB}{\sin\frac{B}{2}}+\frac{PC}{\sin\frac{C}{2}}\geq 2\sqrt{r(4R+r)}\geq 6r$$

$\square$

Bài toán 13. *Cho hai tam giác $ABC, A'B'C'$ chứng minh rằng*

$$\tan\frac{A'}{2}a^2+\tan\frac{B'}{2}b^2+\tan\frac{C'}{2}c^2\geq 4S\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A'}{2}+\tan\frac{B'}{2}+\tan\frac{C'}{2}}$$

Chứng minh. Bằng bất đẳng thức Cauchy-Swart và theo hệ quả 2 của bài toán 4

$$(\tan\frac{A'}{2}a^2+\tan\frac{B'}{2}b^2+\tan\frac{C'}{2}c^2)(\tan\frac{A'}{2}+\tan\frac{B'}{2}+\tan\frac{C'}{2})\geq$$

$$\geq(\tan\frac{A'}{2}a+\tan\frac{B'}{2}b+\tan\frac{C'}{2}c)^2\geq 4r(4R+r)=4S(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2})$$

Do đó

$$\tan\frac{A'}{2}a^2+\tan\frac{B'}{2}b^2+\tan\frac{C'}{2}c^2\geq 4S\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A'}{2}+\tan\frac{B'}{2}+\tan\frac{C'}{2}}$$

Ta chú ý rằng bất đẳng thức này khá thú vị

Khi ta cho $\triangle A'B'C'\equiv ABC$ thì ta thu được

$$\tan\frac{A}{2}a^2+\tan\frac{B}{2}b^2+\tan\frac{C}{2}c^2\geq 4S$$

Khi ta cho $\triangle A'B'C'\equiv BCA$ ta thu được

$$\tan\frac{B}{2}a^2+\tan\frac{C}{2}b^2+\tan\frac{A}{2}c^2\geq 4S$$

Và khi tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều ta nhận được bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2\geq 4S(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2})\geq 4\sqrt{3}S$$

hay chính là bất đẳng thức quen thuộc.

$$\cot A+\cot B+\cot C\geq\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$$

□

Chú ý. Để kết thúc bài viết ta đưa ra nhận xét là tất cả các bất đẳng thức hình học mà ta đã trình bày như là hệ quả của bất đẳng thức đại số đầu tiên thì chúng đều được triển khai từ bất đẳng thức hình học cơ bản được trình bày trong bài toán 2, bằng ý tưởng tương tự ta có thể áp dụng một bất đẳng thức cũng đã rất quen thuộc trong tam giác là $xa^2+yb^2+zc^2\geq 4\sqrt{xy+yz+zx}S$ và kết hợp với bất đẳng thức hình học cơ bản, ta sẽ còn thu được rất nhiều những dạng bất đẳng thức hình học thú vị khác.

Tài liệu

[1] Pham Huu Duc, An unexpectedly useful inequality, *Mathematical reflections* 2008, Issue 1.

[2] Tuyển tập 5 năm tạo chí toán học và tuổi trẻ, *Nhà xuất bản giáo dục 2004.*

[3] Bottema, Oene; Djordjevic, R.Z.; Janic, R.; Mitrinovic, D.S.; and Vasic, P.M., *Geometric Inequalities.*

[4] Nguyen Minh Ha, Extending the Fermt-Toricelli problem, *The mathematical gazette.*