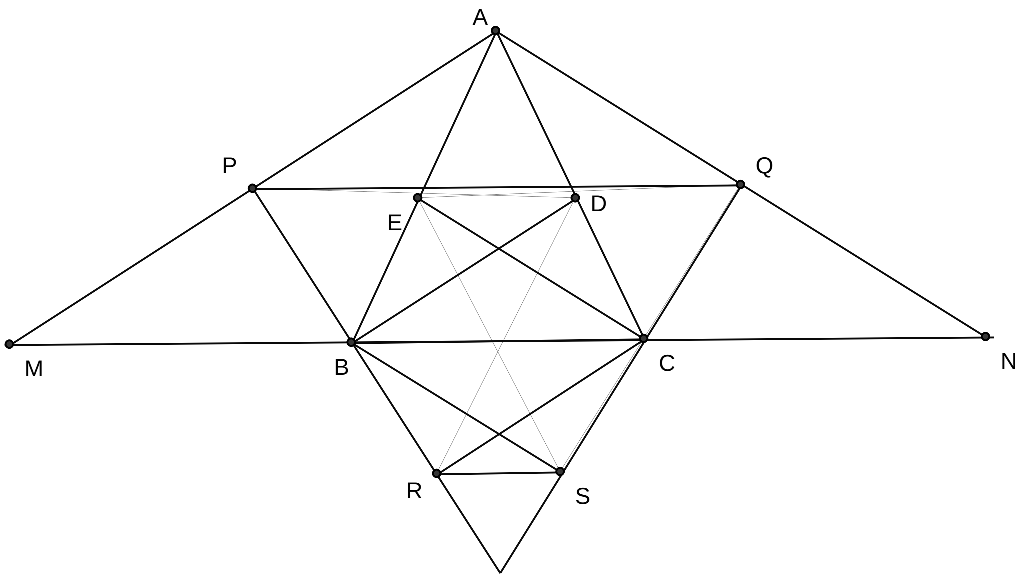
1/ Tam giác có hai đường phân giác bằng nhau là tam giác cân.



Xét tam giác ABC có hai phân giác BD và CE bằng nhau.Gọi M, N lần lượt là các điểm đối xứng với A qua phân giác ngoài của tam giác ABC tại B và C. Khi đó, rõ rang M, N thuộc BC. Giả sử AM cắt phân giác ngoài góc B tại P, AN cắt phân giác ngoài góc C tại Q. Gọi R là hình chiếu của C trên đường thẳng BP, S là hình chiếu của B trên đường thẳng CQ.

Dễ thấy các tam giác ABM, CAN cân nên P, Q lần lượt là trung điểm của AM, AN; tức là PQ là đường trung bình của tam giác AMN hay PQ // BC.

Ta biết rằng hai tam giác có chung đáy và đỉnh còn lại nằm trên cùng một đường thẳng song song với đáy thì diện tích của chúng bằng nhau. Từ AP // BD // CR (cùng vuông góc với BP) , ta có:

$$S_{PBD} = S_{ABD}, S_{RBD} = S_{CBD}$$
$$\Rightarrow S_{PDR} = S_{PBD} + S_{RBD} = S_{SBD} + S_{CBD} = S_{ABC}.$$

Hoàn toàn tương tự: $S_{ESQ} = S_{ABC}$.

Suy ra: $S_{PDR} = S_{ESQ} \Rightarrow \frac{1}{2}BD.PR = \frac{1}{2}CE.SQ \Rightarrow PR = SQ$ (do BD = CE).

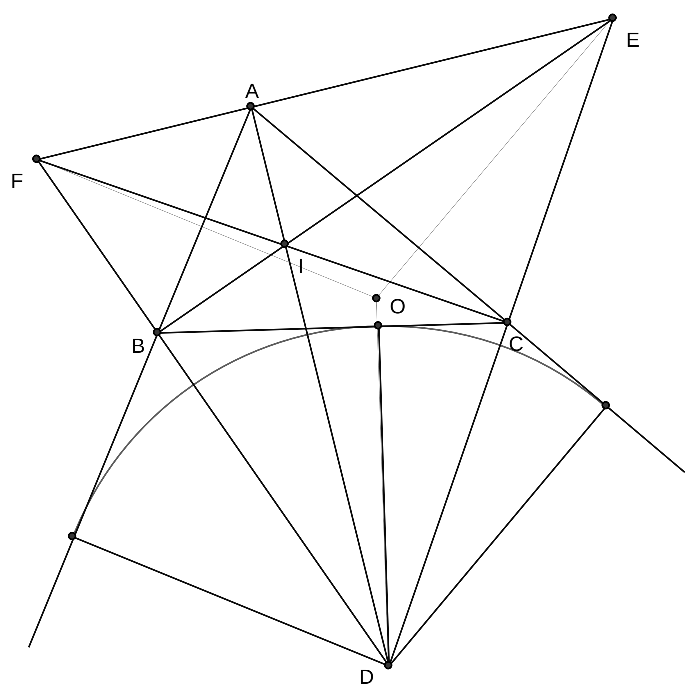
Tứ giác BCSR có $\widehat{BSC} = \widehat{BRC} = 90^0$ nên là tứ giác nội tiếp, mà PQ // BC nên tứ giác PQSR cũng nội tiếp. Ta lại có PR = SQ nên tứ giác này là hình thang cân, suy ra: $\widehat{RPQ} = \widehat{SQP} \Rightarrow \widehat{PBM} = \widehat{QCM}$.

Từ đó dễ dàng có được $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ hay tam giác ABC cân tại A.

Ta có đpcm.

2/ Cho tam giác ABC có r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bang tiếp các góc A, B, C. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Khi đó ta có hệ thức:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$



Gọi D, E, F lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C và S là diện tích của tam giác ABC.

Đặt BC = a, CA = b, AB = c, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.Ta thấy:

$S_{DAB} + S_{DAC} - S_{DBC} = S \Rightarrow r_a(b+c-a) = 2S \Rightarrow r_a(p-a) = S$.

Tương tự, ta cũng có: $r_b(p-b) = r_c(p-c) = S$.

Cộng từng vế các đẳng thức, ta có: $p(r_a + r_b + r_c) - (r_a.a + r_b.b + r_c.c) = 3S$

$\Rightarrow p(r_a + r_b + r_c) = 2(S_{BDC} + S_{ECA} + S_{FAB}) + 3S \Rightarrow p(r_a + r_b + r_c) = 2S_{DEF} + S$ (1)

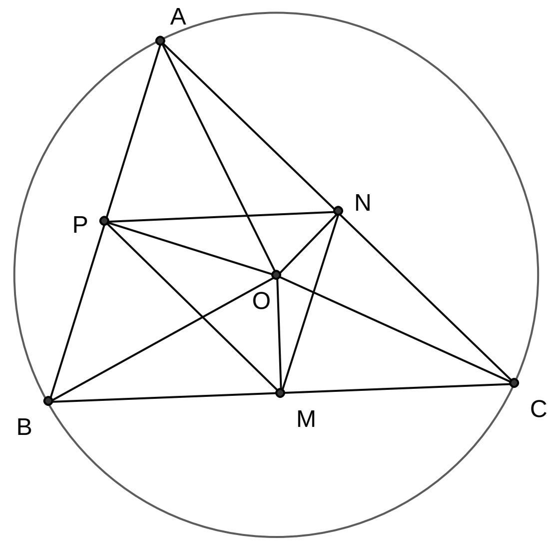
Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF, dễ thấy A, B, C là các chân đường cao của tam giác DEF nên bán kính đường tròn ngoại tiếp ABC bằng $\dfrac{1}{2}$ bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF.

Dễ thấy: OD vuông góc với BC hay $S_{OBDC} = \dfrac{1}{2}OD.BC = R.a$. Tương tự: $S_{OCEA} = R.b, S_{OAFB} = R.c$.

Cộng từng vế lại, ta có: $S_{DEF} = R(a+b+c) = 2Rp \Rightarrow \dfrac{2S_{DEF}}{p} = 4R$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

3/ Cho tam giác ABC nhọn có d_a, d_b, d_c lần lượt là khoảng cách từ tâm đường tròn ngoại tiếp O đến các cạnh BC, CA, AB. Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Khi đó ta có hệ thức: $d_a + d_b + d_c = R + r$



Ta thấy tứ giác ONAP nội tiếp trong đường tròn đường kính AO nên theo định lí Ptoleme:

$$AP.ON + AN.OP = AO.PN \Rightarrow \frac{c}{2}.d_b + \frac{b}{2}.d_c = R.\frac{a}{2} \Rightarrow c.d_b + b.d_c = R.a \text{ .}$$

Hoàn toàn tương tự, ta có: $b.d_a + a.d_b = R.c, a.d_c + c.d_a = R.b$

Ta cũng có: $d_a.a = OM.BC = 2S_{OBC}$.

Tương tự: $d_b.b = S_{OCA}$, $d_c.c = S_{OAB}$.

Cộng tất cả các đẳng thức trên lại , ta có:

$$(a+b+c)(d_a + d_b + d_c) = R(a+b+c) + (S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA})$$

$$\Rightarrow 2p(d_a + d_b + d_c) = R.2p + 2S \Rightarrow d_a + d_b + d_c = R + r \text{ .}$$

Ta có đpcm.

**Nếu tam giác ABC không nhọn thì hệ thức trên có thể thay đổi thành:*

$$d_a + d_b - d_c = R + r\text{ , } d_a - d_b + d_c = R + r\text{ , } d_b + d_c - d_a = R + r$$

Tương ứng với các trường hợp tam giác tù tại C, B, A.

Các hệ thức này cũng được chứng minh tương tự như trên.