

Mỗi tuần một bài toán

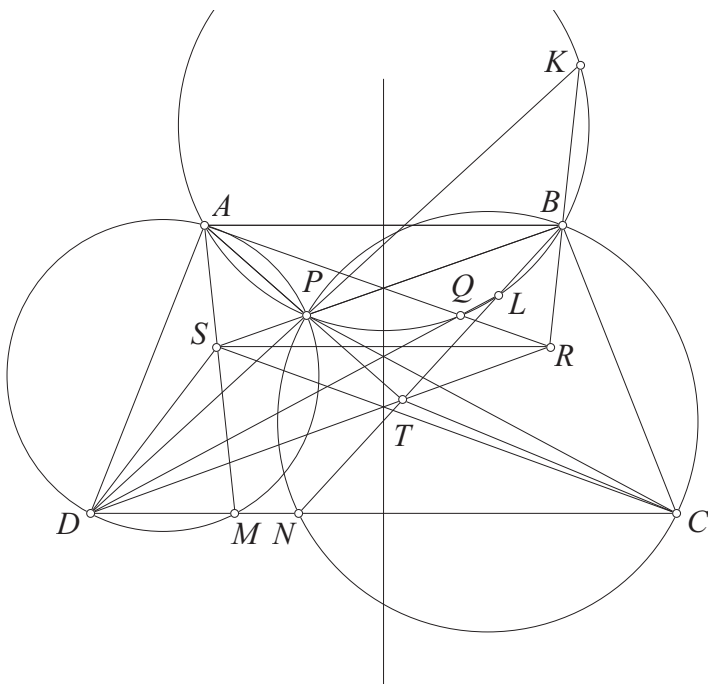
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho hình thang cân $ABCD$ với $AB \parallel CD$. P là một điểm nằm trong hình thang. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAD, PBC cắt CD tại M, N khác C, D . PB, PA lần lượt cắt AM, BN tại S, T . Chứng minh rằng $\angle SCD = \angle TDC$.

Lời giải



Gọi Q, R đối xứng P, S qua trung trực CD , dễ thấy A, Q, R thẳng hàng. DP cắt BR tại K . DQ cắt BN tại L . Dễ thấy $ABQP$ là hình thang cân nên nội tiếp. Theo tính đối xứng ta thấy $\angle AQD = \angle BPC = \angle BNC = \angle ABL$ nên tứ giác $ABLQ$ nội tiếp. Vẫn từ tính đối xứng ta có $\angle ABR = \angle BAS = \angle DMA = \angle DPA$, ta suy ra $APBK$ nội tiếp. Từ đó sáu điểm A, P, Q, L, B, K thuộc một đường tròn. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} P & Q & B \\ L & K & A \end{pmatrix}$ ta suy ra D, T, R thẳng hàng. Từ đó theo tính đối xứng thì $\angle SCD = \angle TDC$.

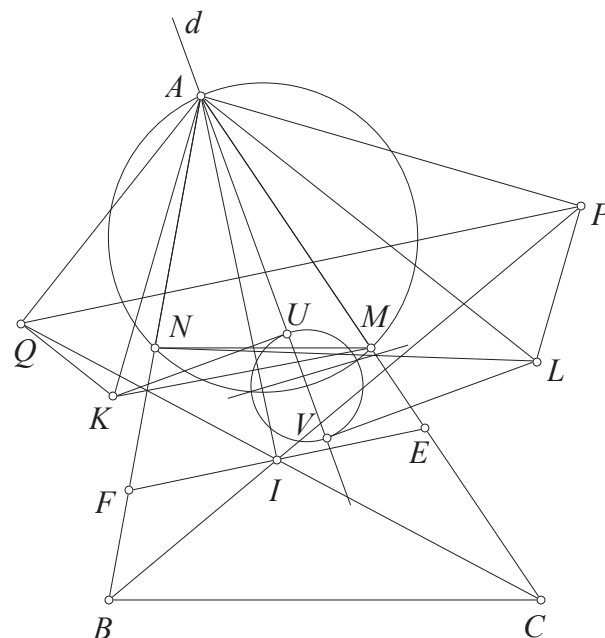
Nhận xét

Bạn **Nguyễn Giang Châu** lớp 11 Toán THPT chuyên KHTN và bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình, đã cho lời giải tại [đây](#). Ngoài ra tác giả nhận được lời giải khác qua email từ bạn **Phan Văn Tín** sinh viên ĐHSP. Cũng trong topic trên bạn **Ngô Quang Dương** sinh viên ĐHKHTN đã đề xuất bài toán tổng quát khi thay hình thang cân thành hình thang bất kỳ

Cho hình thang $ABCD$ với hai đáy $AB \parallel CD$. AD cắt BC tại P , AC cắt BD tại K . O, M, N thuộc CD sao cho $\frac{OM}{OC} = \frac{ON}{OD}$. H là điểm bất kì trên PO , BH và AH lần lượt cắt AM, BN tại E, F . DF cắt CE tại Q . Chứng minh rằng P, K, Q thẳng hàng.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I . M, N là trung điểm CA, AB . BI, CI cắt trung trực IA tại P, Q . Đường thẳng qua I vuông góc IA lần lượt cắt CA, AB tại E, F . Lấy K, L lần lượt thuộc trung trực AE, AF sao cho $KQ \perp AQ$ và $LP \perp AP$. d là một đường thẳng thay đổi đi qua A . U, V là hình chiếu của K, L lên d . Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn đường kính UV và (AMN) luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi đường thẳng d thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.