

Mỗi tuần một bài toán

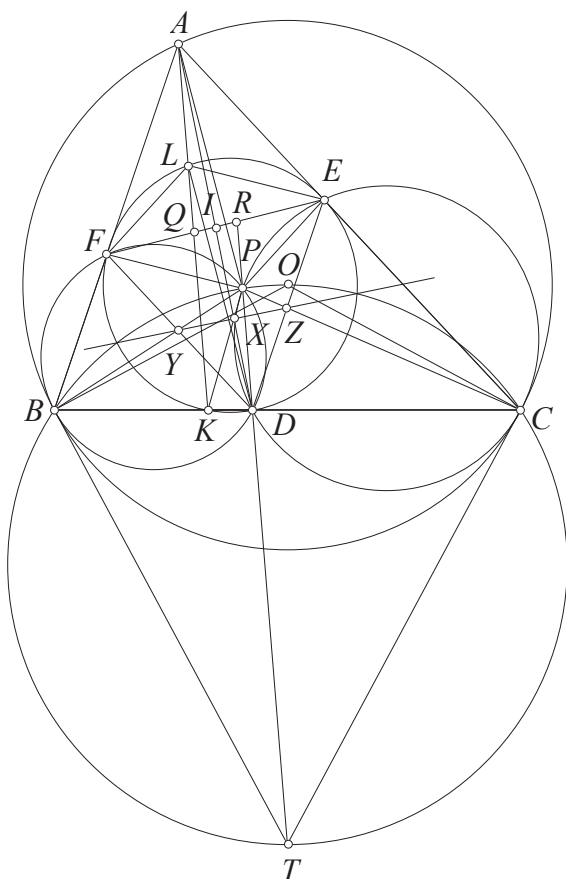
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T . D là một điểm trên cạnh BC . TD cắt (TBC) tại P khác T . K thuộc BC sao cho $AK \parallel PD$. L thuộc AK sao cho $DL \parallel AP$. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn (DKL) và (TBC) đi qua giao điểm của KP và AD .

Lời giải



Gọi giao điểm của các đường tròn $(CDP), (BDP)$ với CA, AB lần lượt là E, F . Ta thấy $\angle DEC = \angle DPC = \angle TBC = \angle TCB$ do đó CT tiếp xúc CDE hay $DE \parallel AB$. Tương tự $DF \parallel AC$. Từ đó các tứ giác $AEFD, ALDP$ là hình bình hành nên trung điểm I của EF là trung điểm AD, PL . Từ đó L đối xứng P

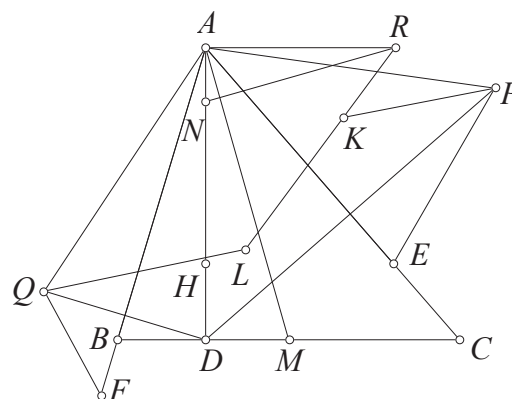
qua I , chú ý P nằm trên (AEF) nên L nằm trên (DEF) . Ta có $\angle LKD = \angle PDC = \angle PFB = \angle PFD + \angle DFB = \angle PFD + \angle BAC = \angle PFD + \angle LFP = \angle LFD$. Từ đó K nằm trên (DEF) . Từ đó gọi DF, DE lần lượt cắt PB, PC tại Y, Z và PK cắt AD tại X . Ta thấy $ZD \cdot ZE = ZP \cdot ZC$ và $YD \cdot YF = YP \cdot YB$ nên YZ là trục đẳng phương của (DEF) và (PBC) . Ta sẽ chứng minh X, Y, Z thẳng hàng, thật vậy. Ta có biến đổi tỷ số kép $P(DX, YZ) = P(DK, BC) = (DK, BC) = A(DK, BC) = A(IQ, FE) = (IQ, FE)$. Trong đó gọi AK, DP lần lượt cắt EF tại Q, R . Ta chú ý rằng phép đối xứng tâm trên đường thẳng bảo toàn tỷ số kép nên $(IQ, FE) = (IR, EF)$. Từ đó $(IQ, FE) = (IR, EF) = D(IR, EF) = D(XP, ZY) = D(PX, YZ)$. Vậy $P(DX, YZ) = D(PX, YZ)$, ta suy ra X, Y, Z thẳng hàng.

Nhận xét

Cách làm trên tuy dài nhưng là cách tác giả tạo ra bài toán này. Cách làm trên là dựa trên lời giải của bạn **Đỗ Xuân Long** lớp 11 toán, THPT chuyên KHTN trên **AOPS**. Các lời giải bằng cộng góc ngắn gọn hơn được đưa ra tại **đây** bởi các bạn **Nguyễn Giang Châu** lớp 11 toán, THPT chuyên KHTN, **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 toán, THPT chuyên SP. Ta giả nhận được lời giải qua email từ bạn **Phạm Hoàng Minh**, lớp 11 toán, trường PTNK và bạn **Nguyễn Hưng Quang Khải** lớp 11 toán THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD , trực tâm H . P, Q đối xứng D qua CA, AB . Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, CA tại F, E . K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác APE, AQF . KL cắt đường thẳng qua A song song BC tại R . Gọi M là trung điểm BC . Lấy N thuộc AH sao cho $RN \perp AM$. Chứng minh rằng $AH = 4AN$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.