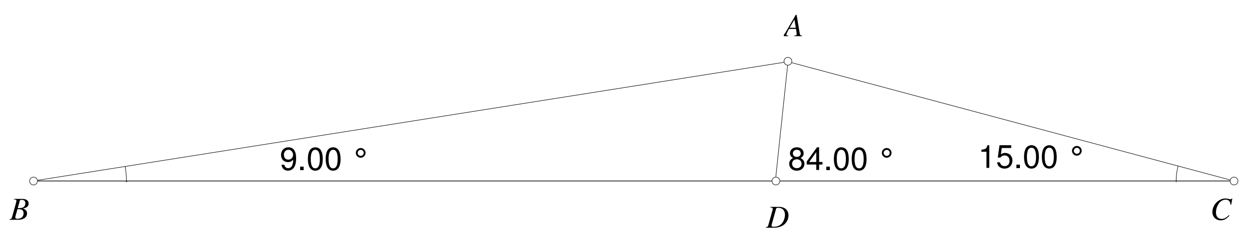
Bài tập Lê Quý Đôn

Bài 68. *Cho tam giác ABC tâm nội tiếp I, trực tâm H. d là một đường thẳng bất kỳ. d_a, d_b, d_c đối xứng với d qua IA, IB, IC. l_a, l_b, l_c đối xứng HA, HB, HC qua d_a, d_b, d_c. Chứng minh rằng l_a, l_b, l_c song song.*

Bài 69. *Cho tam giác ABC trọng tâm G. A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của G lên BC, CA, AB. A_2, B_2, C_2 đối xứng A_1, B_1, C_1 qua G. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.*

Bài 70. *Cho tam giác ABC dựng ra ngoài các tam giác đồng dạng $\triangle B'AC \sim \triangle C'AB$. $B'E, C'B$ là đường cao của các tam giác $B'AC$ và $C'AB$. BE giao CF tại G. Qua G dựng đường thẳng lần lượt vuông góc AC, AB giao BB', CC' tương ứng tại P, Q. Chứng minh rằng đường thẳng qua G vuông góc BC chia đôi đoạn PQ.*

Bài 71. *Cho hình vẽ. Biết $\dfrac{DC}{DB} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Chứng minh $\angle ADC = 84°$.*



Bài 72. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Trung trực AD cắt (O) tại M, N với N thuộc cung AD không chứa B, C. AC giao BD tại E. Trên đường thẳng qua E song song BN lấy điểm F sao cho $\angle EBF = \angle ECF$. Chứng minh rằng C, E, F, M thuộc cùng một đường tròn.*

Bài 73. *Cho tam giác ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1. A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc OA_1, OB_1, OC_1 sao cho các tứ giác $AOBC_2, BOCA_2, COAB_2$ nội tiếp. Chứng minh rằng tâm các đường tròn $(AA_1A_2), (BB_1B_2), (CC_1C_2)$ thẳng hàng.*

Bài 74. *Cho ngũ giác $ABCDE$ vuông tại C và D. Đường tròn ngoại tiếp $(ABC), (ADE)$ giao nhau tại F khác A. C', D' là hình chiếu của C, D lên AE, AB. Chứng minh rằng CC', DD' và AF đồng quy.*

Bài 75. *Cho tứ giác $ABCD$ hai đường chéo AC và BD giao nhau tại E. M, N thuộc AB sao cho $AM = MN = NB$. P, Q thuộc CD sao cho $DP = PQ = QC$. MQ giao AC tại K. NP giao BD tại L. MQ giao NP tại I. Chứng minh rằng EI đi qua trung điểm KL.*

Bài 76. *Cho tam giác ABC. Đường tròn đường kính AC cắt BC, BA tại E, F. H, G là hình chiếu của E, F lên AC. FH giao GE tại D. Chứng minh rằng BD vuông góc AC.*

Bài 77. *Cho tam giác ABC. D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB. I thuộc AD. FI, EI cắt BC tại H, L. FL giao EH tại T. BE giao CF tại K. Chứng minh rằng T, D, K thẳng hàng. Hãy chỉ ra bài toán này là tổng quát bài trên.*

Bài 78. *Cho tứ giác $ABCD$ gọi $E \equiv AB \cap CD$, $F \equiv AD \cap BC$ và $P \equiv AC \cap BD$. Lấy trên AB, CD, các điểm K, L sao cho KL đi qua P, gọi $M \equiv BD \cap CK$ và $N \equiv BD \cap AL$. Chứng minh các điểm $S \equiv AL \cap CK, T \equiv AM \cap CN$ đều thuộc EF.*

Bài 79. *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. AI giao BC tại A'. Trung trực AA' cắt IB, IC tại M, N. Chứng minh ME, NF và BC đồng quy.*

Bài 80. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). A', B', C' lần lượt là trung điểm BC, CA, AB. P, Q là hai điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. PA', PB', PC' giao đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_1, B_1, C_1. Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhauh tương ứng tạo thành tam giác $A_2B_2C_2$. QA', QB', QC' giao đường tròn ngoại tiếp tam giác tại A_3, B_3, C_3. Các đường thẳng AA_3, BB_3, CC_3 cắt nhauh tương ứng tạo thành tam giác $A_4B_4C_4$. Gọi A_5, A_6 lần lượt là trung điểm B_2C_4, B_4C_2. Tương tự có B_5, B_6, C_5, C_6. Chứng minh rằng A_5A_6, B_5B_6, C_5C_6 đồng quy.*

Bài 81. *Cho tam giác ABC vuông tại C dựng đường tròn (B) đi qua C. D là điểm bất kỳ trên cạnh AC và DE là tiếp tuyến khác DC của (B). Đường thẳng qua C vuông góc AB cắt BE tại F. Đường thẳng AF cắt DE tại G. Đường thẳng qua A song song BG cắt DE tại H. Chứng minh rằng $GE = GH$.*

Bài 82. *Cho đoạn thẳng AB và $Ax \parallel By$ sao cho có (O) tiếp xúc với AB, Ax, By. C, D thuộc (O). AC giao BD tại E. X, Y, Z thuộc (O) sao cho EY, EZ song song AB, EX song song Ax, By. Chứng minh rằng $CD \parallel AB \iff XY + YE = XZ + ZE$.*

Bài 83. *Cho tam giác ABC điểm Lemoine L, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. BL, CL cắt AC, AB tại D, E. Đường thẳng d qua L vuông góc OL cắt DE và BC tại M, N. Chứng minh rằng $LN = 2LM$.*

Bài 84. *Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại P, Q. Đường thẳng qua P cắt $(O_1), (O_2)$ tại A, B sao cho AB không vuông góc PQ. Gọi X là điểm thuộc PQ sao cho $XA = AB$ và Y là điểm nằm trong tứ giác AO_1O_2B sao cho $\triangle AYO_1 \sim \triangle BYO_2$. Chứng minh rằng $2\angle O_1AY = \angle AXB$.*

Bài 85. *Cho tam giác ABC vuông tại C. Dựng đường tròn (B) bán kính BC. D là điểm trên AC. DE tiếp xúc (B). Đường cao CH của tam giác ABC cắt BE tại F. AF giao DE tại G. Đường thẳng qua A song song BG cắt DE tại H. Chứng minh rằng $GE = GH$.*

Bài 86. *Cho tam giác ABC các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. M, S là trung điểm BC, AH. MF giao AD tại P. R thuộc ME sao cho $FR \parallel BC$. Chứng minh rằng $PE \perp SR$.*

Bài 87. *Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp (I), các phân giác AD, BE, CF. DK_a, EK_b, FK_c là các tiếp tuyến của (I) kẻ từ D, E, F. M_a, M_b, M_c là trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh rằng K_aM_a, K_bM_b, K_cM_c đồng quy trên (I).*

Bài 88. *Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. AD cắt IE, IF tại M, N. Đường thẳng qua M, N song song EF lần lượt cắt AC, AB tại P, Q. Chứng minh rằng P, I, Q thẳng hàng.*

Bài 89. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ. A', B', C' là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. AA' cắt PB', PC' tại M, N, Qua M, N kẻ các đường thẳng song song $B'C'$ lần lượt cắt AB, AC tại K, L. Chứng minh rằng P, K, L thẳng hàng.*

Bài 90. *Cho tam giác ABC. I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A. A' là trung điểm BC. I là tâm đường tròn nội tiếp, L là điểm Lemoine, G là trọng tâm, Ge là điểm Gergonne. Chứng minh rằng IL, GGe, I_aA' đồng quy.*

Bài 91. *Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi S là điểm Lemoine của tam giác ABC. EF giao BC tại L. Chứng minh rằng $I \in LO \iff IS \parallel BC$.*

Bài 92. *Cho tam giác ABC vuông tại A, (I) là đường tròn nội tiếp, d là đường kính của (I). M là trung điểm BC. MI giao phân giác ngoài đỉnh A tại X. Chứng minh rằng*

$$2MX = \sqrt{BC(BC-2d)}\frac{BC+d}{BC-d}.$$

Bài 93. *Cho tam giác ABC, tâm đường tròn ngoại tiếp O. Phân giác trong BE, CF cắt nhau tại I. AH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $I \in OH \iff O \in EF$.*

Bài 94. *Cho tam giác ABC và đường cao AD. X, Y là giao của đường tròn đường kính (AD) với AB, AC. Tiếp tuyến của (AD) tại X, Y cắt BC tại E, F. Goi BY giao CX tại P, EY giao FX tại Q. Chứng minh rằng PQ chia đôi BC.*

Bài 95. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. M, N là trung điểm các cung $A\overset{\frown}{C}B$,$C\overset{\frown}{B}D$. EO giao MN tại K. Chứng minh rằng $\dfrac{KM}{KN} = \dfrac{AB}{CD}$.*

Bài 96. *Cho tam giác ABC. Đường tròn (O) tiếp xúc AB, AC tại D, E và cắt BC tại K, L. AL và DE giao nhau tại P. CD giao BE tại Q. Chứng minh rằng P, Q, K thẳng hàng.*

Bài 97. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H, điểm Lemoine L. BL, CL cắt CA, AB lần lượt tại B_1, C_1. B_2, C_2 lần lượt đối xứng B_1, C_1 qua trung điểm CA, AB. BB_2 giao CC_2 tại T. Chứng minh rằng $HT \parallel OL$.*

Bài 98. *Cho tam giác ABC hai điểm Brocard W_1, W_2. L là điểm Lemoine AL giao BC tại K. G_1, G_2 là trọng tâm tam giác ABK, ACK. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng G_1G_2, W_1W_2 và BC thẳng hàng.*

Bài 99. *Cho tam giác ABC. Đường tròn (K) thay đổi qua B, C cắt AC, AB tại E, F. BE giao CF tại M. B', C' là hình chiếu của M lên CA, AB. Chứng minh rằng trung tuyến MT của tam giác $MB'C'$ luôn đi qua điểm cố định.*

Bài 100. *Cho tam giác ABC. (O) là đường tròn bất kỳ qua B, C. Đường tròn (O') tiếp xúc trong (O) tại S và tiếp xúc AC, AB tại E, F. EF giao BC tại T. AS giao (O) tại K khác S. KT giao (O) tại L khác K. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp (TLS) chia đôi đoạn EF.*

Bài 101. *Cho đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại M, N. MP là đường kính của (O'). A thuộc MP sao cho AN giao (O) tại B khác N thì $AP^2 = AN.AB$. E thuộc OP sao cho $AE = AP$. Chứng minh rằng P, B, E, M cùng thuộc một đường tròn.*

Bài 102. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), A thay đổi và BC cố định. H là trực tâm tam giác ABC. AA' là đường kính của (O). B', C' là hình chiếu của H lên $A'C, A'B$. K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $MB'C'$. Chứng minh rằng HK luôn đi qua điểm cố định.*

Bài 103. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định, B, C cố định, A di chuyển. B', C' đối xứng B, C lần lượt qua AC, AB. Chứng minh rằng đường thẳng qua A vuông góc $B'C'$ luôn đi qua điểm cố định.*

Bài 104. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc AB tại P. M thuộc CB, N thuộc CD sao cho MN tiếp xúc (I). Chứng minh rằng giao điểm của AN và MP luôn thuộc đường thẳng cố định khi MN di chuyển.*

Bài 105. *Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp (I). Đường tròn Ω_A qua B, C tiếp xúc trong (I) tại A'. Tương tự có B', C'. Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy.*

Bài 106. *Cho tam giác nhọn ABC. Lấy điểm K nằm trong tam giác sao cho $\angle AKC = 2\angle ABC$ và $\dfrac{AK}{KC} = \dfrac{AB^2}{BC^2}$. Gọi A_1, C_1 là trung điểm BC, AB. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác A_1BC_1 đi qua K.*

Bài 107. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AB, CD cắt nhau tại E. P, R là hình chiếu của E lên BC, AD. EP, ER lần lượt cắt AD, BC tại Q, S. Giả sử K là trung điểm QS. Chứng minh rằng E, O, K thẳng hàng.*

Bài 108. *Cho tam giác ABC các đường cao AD, BE, CF. X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của D, E, F lên EF, FD, DE. AX, BY, CZ đồng quy tại một điểm T. DD', EE', FF' lần lượt là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. AD', BE', CF' đồng quy tại điểm S. Chứng minh rằng S, T đẳng giác với tam giác ABC.*

Bài 109. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường chéo AC, BD giao nhau tại P. X là một điểm bất kỳ. Y, Z là hình chiếu của X lên AB, CD. Chứng minh rằng $\dfrac{YA}{YB} = \dfrac{ZD}{ZC} \iff X \in OP$.*

Bài 110. *Cho M ở ngoài đường tròn (O). MA, MB tiếp xúc (O), A, B thuộc (O). I, K là trung điểm MA, MB. P là điểm thuộc IK. PC, PD là tiếp tuyến của (O). CD giao AB, IK tại Q, R sao cho D nằm giữa C, R. OC, OD cắt MR tại E, F. Giả sử D là trung điểm CR. Chứng minh rằng $\dfrac{QD}{QC} = 2\dfrac{RE}{RF}$.*

Bài 111. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại P. M, L thuộc AD, N, K thuộc BC sao cho tứ giác $MNKL$ nội tiếp và MK, NL cùng đi qua P. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp $(MNKL)$ thuộc OP.*

Bài 112. *Cho BC là dây cung cố định của (O) cố định. A di chuyển trên (O). E, F thuộc AC, AB sao cho $CE = BF = BC$. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*
a) Chứng minh rằng EI đi qua T cố định, FI đi qua S cố định.
b) Chứng minh rằng B, C, S, T thuộc một đường tròn có tâm thuộc đường thẳng AI.

Bài 113. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy các điểm A_1, A_2 sao cho $A_1A = A_1B$ và $BA_1 \perp BC$, $A_2A = A_2C$ và $CA_2 \perp BC$. A_1A_2 giao (O) tại A_3, A_4. L_a là điểm Lemoine của tam giác AA_3A_4. Tương tự có L_b, L_c. Chứng minh rằng AL_a, BL_b, CL_c đồng quy.*

Bài 114. *Cho tam giác ABC có $\angle B = 30^\circ$, trực tâm H. G là trọng tâm tam giác HAB. CG giao AH tại N. K là hình chiếu của H lên CG. Chứng minh rằng $2HK.HC = 3HN^2$.*

Bài 115. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) tiếp xúc (O) tại A và tiếp xúc BC tại D. AD giao (O) tại Q khác A. Đường thẳng qua B vuông góc AD cắt đường tròn (Q, QB) tại E. Giả sử AO là phân giác $\angle DAC$. Chứng minh rằng E thuộc (K).*

Bài 116. *Cho tam giác ABC, đường tròn (O) tiếp xúc AB, AC tại D, E cắt BC tại K, L. CD giao BE tại Q. LQ giao DE tại R. I là trung điểm DE. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp (IRK) tiếp xúc (O).*

Bài 117. *Cho tam giác ABC và một đường tròn qua B, C cắt AB, AC tại F, E. M là trung điểm của BC. MP, MQ tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp (AEF). K, L là trung điểm MP, MQ. KL cắt BC tại T. EF cắt đường thẳng qua A song song BC tại S. Chứng minh rằng ST tiếp xúc đường tròn (AEF).*

Bài 118. *Cho tam giác ABC. B', C' là trung điểm của CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp (ABB') và (ACC') giao nhau tại P khác A. AP giao đường tròn ngoại tiếp $(AB'C')$ tại Q khác A. Chứng minh rằng $AQ = 2PQ$.*

Bài 119. *Cho* AB, CD, EF *là các dây cung của đường tròn* (O) *sao cho dây* EF *cắt dây* AB, CD *lần lượt tại* M, N *sao cho* A, C *nằm cùng phía với* EF*. Đường tròn* (O_1) *tiếp xúc* ME *tại* P*, tiếp xúc* MB *và tiếp xúc trong với* (O) *tại* R*. Đường tròn* (O_2) *tiếp xúc* NF *tại* Q*, tiếp xúc* ND *và tiếp xúc trong với* (O) *tại* S*. Chứng minh rằng phân giác các góc* $\angle PO_1R, \angle QO_2S, \angle O_1OO_2$ *đồng quy.*

Bài 120. *Cho tam giác* ABC *nội tiếp đường tròn* (O)*, tâm đường tròn bàng tiếp góc* A *là* I_a*. Phân giác trong* BE, CF *cắt nhau tại* I*. Phân giác góc* $\angle FIB$ *cắt* I_aB, I_aC *tại* P, Q*.* M *là trung điểm cung* $\overset{\frown}{BAC}$ *. Phân giác góc* $\angle BI_aC$ *cắt* IM *tại* K*. Chứng minh rằng* $KP = KQ$ *và* PQ, I_aK, MO *đồng quy.*

Bài 121. *Cho tam giác* ABC *các đường cao* BB', CC' *cắt nhau tại* H*. Phân giác góc* $\angle C'HB$ *cắt* AB, AC *tại* P, Q*.* M *là trung điểm* BC*. Phân giác góc* $\angle BAC$ *cắt* HM *tại* R*. Chứng minh rằng* P, Q, R, A *cùng thuộc một đường tròn.*

Bài 122. *Cho tứ giác* $ABCD$ *nội tiếp đường tròn* (O)*. Dựng hình bình hành* $AEDC$*.* BE *giao* AC *tại* G *và giao* (O) *tại* F *khác* B*.* DE *giao* (O) *tại* K *khác* D*.* KG *giao* (O) *tại* L *khác* K*.* AC *giao* BD *tại* I*.* LI *giao* (O) *tại* H *khác* L*.* AB *giao* CD *tại* T*. Chứng minh rằng* $HD \parallel TI$*.*

Bài 123. *Cho tam giác* ABC *cân tại* C*.* D *là điểm thuộc* AC *và* E *là điểm thuộc* BD *sao cho* $BD = 2AD = 4BE$*. Chứng minh rằng* $\angle EDC = 2\angle CED$*.*

Bài 124. *Cho tam giác* ABC *tâm đường tròn nội tiếp* I*, tâm ngoại tiếp* O*. Đường thẳng qua* I *vuông góc với* IA, IB, IC *lần lượt cắt* BC, CA, AB *tại* A', B', C'*. Chứng minh rằng* A', B', C' *thẳng hàng trên đường thẳng vuông góc* OI*.*

Bài 125. *Cho tam giác* ABC*.* M *và* M' *là hai điểm thuộc* BC *và đối xứng nhau qua trung điểm* BC*. Đường thẳng qua* M *vuông góc* AB *cắt đường thẳng qua* B *vuông góc* BC *tại* P*. Đường thẳng qua* M *vuông góc* AC *cắt đường thẳng qua* C *vuông góc* BC *tại* Q*. Chứng minh rằng* $A'M \perp PQ$*.*

Bài 126. *Trên cạnh* AB *của ngũ giác* $ABCDE$ *lấy* F *sao cho* $\triangle ADE \sim \triangle ECF \sim \triangle DBC$*. Chứng minh rằng* $\dfrac{AF}{BF} = \dfrac{EF^2}{CF^2}$.

Bài 127. *Cho tam giác* ABC *nội tiếp đường tròn* (O)*. Đường tròn* (O_a) *tiếp xúc* AB, AC *và tiếp xúc trong* (O) *tại* T*. Đường tròn bàng tiếp góc* A *là* (I_a) *tiếp xúc* BC *tại* D*. Chứng minh rằng* $\angle TAB = \angle DAC$*.*