Về hai bài toán hình học hay

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết giới thiệu một hướng mở rộng cho hai đề toán, một đề trong kỳ thi Olympic toàn Nga và một đề kỳ thi học sinh giỏi trường chuyên sư phạm với các công cụ về phương tích trục đẳng phương và hình học thuần túy.

Trong kỳ thi olympic toàn Nga năm 2013 cho lớp 9 bài số 3 ngày thứ 2 có bài toán sau [1]

Bài toán 1. Các hình vuông $CAKL$ và $CBMN$ được vẽ ra ngoài tam giác nhọn ABC. CN cắt AK tại X. CL cắt BM tại Y. Điểm P nằm trong tam giác ABC là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KXN và LYM. S là trung điểm AB. Chứng minh rằng $\angle ACS = \angle BCP$.

Trong kỳ thi học sinh giỏi lớp 10 trường THPT chuyên sư phạm 2014 có bài toán sau [2]

Bài toán 2. Cho tam giác ABC không cân tại A với $\angle BAC > 45^\circ$ và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Dựng ra ngoài tam giác ABC các hình vuông $ABKL, ACMN$. Các đường thẳng AN, AL theo thứ tự cắt CM, BK tại E, F. Gọi P là giao điểm nằm trong tam giác ABC của các đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK.

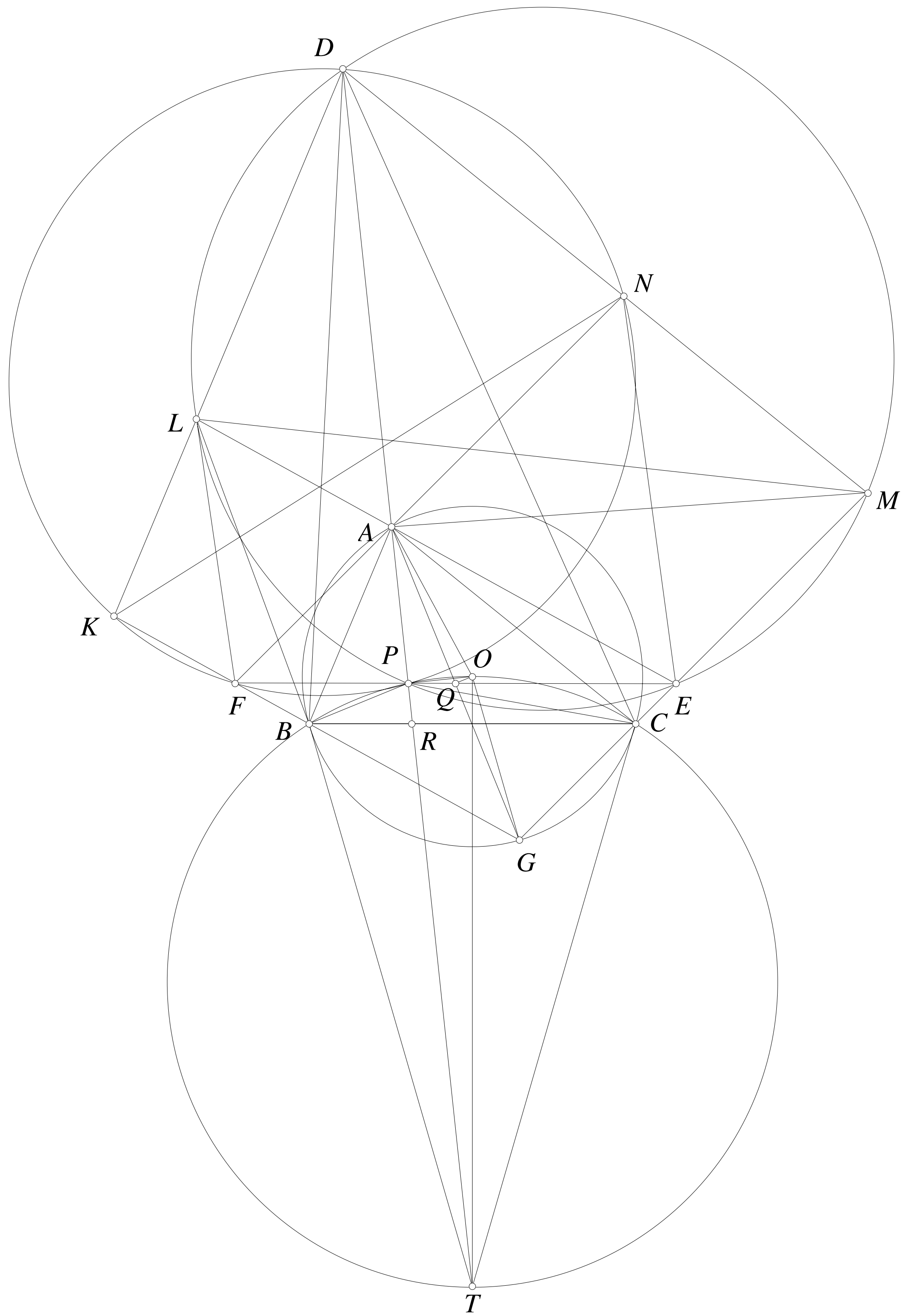
a) Chứng minh rằng E, F, O, P thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng B, C, O, P cùng thuộc một đường tròn.

Nhận xét. Hai bài toán trên là hai bài toán hay mang nhiều ý nghĩa. Ta có thể thấy các yếu tố hình vuông có thể coi như các hình chữ nhật đồng dạng hoặc tổng quát hơn là các hình bình hành đồng dạng. Với ý tưởng đó tôi xin giới thiệu một bài toán tổng quát cho cả hai bài toán trên cũng với lời giải.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC tâm ngoại tiếp O. Dựng ra ngoài tam giác ABC các hình bình hành $ABKL, ACMN$ sao cho $\triangle ABL \sim \triangle CAM$. Các đường thẳng AN, AL theo thứ tự cắt CM, BK tại E, F. Gọi P là giao điểm nằm trong tam giác ABC của các đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK. Chứng minh rằng B, C, O, P cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải. Gọi KB giao CM tại G do $\triangle ABL \sim \triangle CAM$ nên dễ có $\angle ABK + \angle ACM = 180^\circ$ nên G nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Dễ thấy tứ giác $AFGE$ là hình bình hành nên $\angle AFG = 180^\circ - \angle FGE = \angle BAC$. Lại có góc nội tiếp $\angle AGF = \angle ACB$ nên $\triangle AFG \sim \triangle BAC$ suy ra $AC.FA = AB.FG = AB.AE$. Cũng từ tam giác đồng dạng $\triangle ABL \sim \triangle CAM$ dễ có $AC.AL = AB.AN$. Từ đó suy ra $\dfrac{AF}{AL} = \dfrac{AE}{AN}$ hay $AL.AE = AF.AN$ vậy A thuộc trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK.



Hình 1.

Gọi KL giao MN tại D ta thấy $\angle DNF = 180^\circ - \angle ANM = 180^\circ - \angle FKL$ suy ra D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác NFK. Tương tự D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác LME. Vậy DP

là thuộc trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK nên A thuộc DP. Từ đó chú ý các tứ giác $DMEP$ và $DKFP$ nội tiếp dễ có $\angle APF + \angle APE = \angle DME + \angle DKF = 180^\circ$ vậy P thuộc EF.

Gọi Q là trung điểm của AG dễ thấy $\angle AOQ = \frac{1}{2}\angle AOG = \angle ACG = \angle AMC = 180^\circ - \angle DPE = 180^\circ - \angle APQ$ suy ra tứ giác $APQO$ nội tiếp mà $OQ \perp AQ$ nên $AP \perp OP$.

Gọi AP giao BC tại R ta dễ có $\frac{RB}{RC} = \frac{S_{DAB}}{S_{DAC}} = \frac{S_{LAB}}{S_{LAC}} = \frac{AL.AB}{AN.AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Từ đó AP là đường đối trung của tam giác ABC. Vậy AP đi qua giao điểm hai tiếp tuyến tại B, C của (O) là T. Từ $OP \perp AP$ dễ thấy O, P, B, C đều thuộc đường tròn đường kính OT. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Khi các hình bình hành là hình vuông ta thu được các kết quả trong cả hai bài toán trên. Ta thấy rằng để đi tới kết luận B, C, O, P cùng thuộc một đường tròn ta phải đi qua các công đoạn chứng minh AP là đường đối trung như trong bài toán 1 và P thuộc EF như trong ý a) bài toán 2. Điểm P thực chất trong bài toán này là cố định không phục thuộc cách chọn các hình bình hành vì nó là hình chiếu của tâm ngoại tiếp O lên đường đối trung. Hình chiếu của tâm ngoại tiếp O lên đường đối trung là một điểm đặc biệt trong tam giác có rất nhiều ứng dụng, chẳng hạn nó chính là tâm phép đồng dạng biến đoạn thẳng CA thành AB. Việc khai thác bài toán mở rộng sẽ mang lại cho chúng ta nhiều bài toán đẹp. Các bạn hãy làm các bài toán luyện tập sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC không cân tại A. Dựng ra ngoài tam giác ABC các hình chữ nhật đồng dạng $ABKL, ACMN$. Các đường thẳng AN, AL theo thứ tự cắt CM, BK tại E, F. Gọi P là giao điểm nằm trong tam giác ABC của các đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK. Gọi KN giao LM tại Q. Chứng minh rằng $\angle PAB = \angle QAC$.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3067570

[2] http://diendantoanhoc.net/forum/ đề thi học sinh giỏi chuyên sư phạm

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com