Bài toán. *Chứng minh rằng với mọi điểm P bất kì trong tam giác nhọn ABC, ta có bất đẳng thức sau*

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}} S \left(1 + \frac{OP^2}{3R^2}\right),$$

trong đó S là diện tích tam giác ABC và (O) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

(Trần Quang Hùng)

Lời giải 1 (đáp án). Để giải bài toán này, ta cần 2 bổ đề quen thuộc sau trong tam giác (xin nêu ra không chứng minh, bạn đọc có thể kiểm tra lấy)

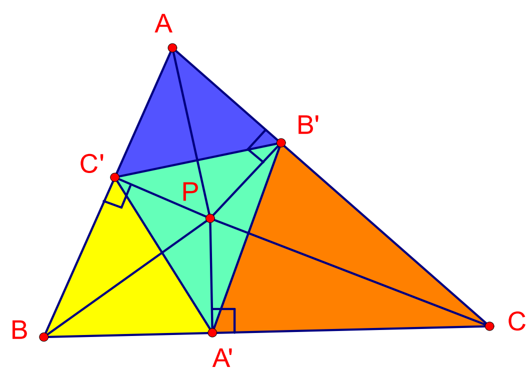
Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC có R và S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và diện tích tam giác. Khi đó*

$$3\sqrt{3}R^2 \geq 4S.$$

Bổ đề 2. (Công thức Euler) *Cho tam giác ABC và điểm P bất kì trong tam giác. Gọi A', B', C' là hình chiếu của P lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Khi đó, diện tích tam giác $A'B'C'$ cho bởi công thức*

$$S_{A'B'C'} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S_{ABC}.$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bài toán đã cho.



Hình 1

Gọi A', B', C' là hình chiếu của P lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Khi đó, ta dễ thấy rằng tam giác $AB'C'$ nội tiếp đường tròn đường kính PA, đặt $S_a = S_{AB'C'}$, thế thì theo bổ đề 1, ta có

$$3\sqrt{3}\left(\frac{PA}{2}\right)^2 \geq 4S_a.$$

Lập luận một cách tương tự với $S_b = S_{BC'A'}$ và $S_c = S_{CA'B'}$, ta cũng có

$$3\sqrt{3}\left(\frac{PB}{2}\right)^2 \geq 4S_b, \quad 3\sqrt{3}\left(\frac{PC}{2}\right)^2 \geq 4S_c.$$

Cộng lần lượt vế với vế cả ba bất đẳng thức trên, ta thu được

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}(PA^2 + PB^2 + PC^2) \geq 4\left(S_a + S_b + S_c\right) = 4\left(S - S_{A'B'C'}\right).$$

Mặt khác, theo bổ đề 2 thì $S_{A'B'C'} = \frac{R^2 - OP^2}{4R^2} S$, suy ra

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}(PA^2+PB^2+PC^2) \geq 4\left(S - \frac{R^2-OP^2}{4R^2}S\right) = \frac{S(3R^2+OP^2)}{R^2},$$

hay là

$$PA^2+PB^2+PC^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}}S\left(1+\frac{OP^2}{3R^2}\right).$$

Đây chính là bất đẳng thức mà ta cần chứng minh. Dễ thấy rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều và điểm P trùng với tâm của tam giác.

Lời giải 2 (Bạch Ngọc Thành Công). Ký hiệu chung a, b, c là 3 cạnh tam giác, p là nửa chu vi, S là diện tích, O, G tương ứng tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm. Khi đó, ta có bổ đề sau

Bổ đề 3. *Trong mọi tam giác nhọn ABC, ta luôn có*

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}S + 6OG^2. \tag{1}$$

Chứng minh. Với mọi điểm I trên mặt phẳng, ta có $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$, nên $\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)^2 = 9IG^2$, từ đó ta được

$$3(IA^2+IB^2+IC^2) - a^2 - b^2 - c^2 = 9IG^2. \tag{2}$$

Bây giờ, cho $I \equiv O$, ta được $9OG^2 = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2$. Từ đây, ta có thể biến đổi bất đẳng thức (1) thành

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq 12\sqrt{3}S + 2(9R^2-a^2-b^2-c^2),$$

hay là

$$5(a^2+b^2+c^2) \geq 12\sqrt{3}pr + 18R^2.$$

Ta có $a^2+b^2+c^2 \geq 4(R+r)^2$ (bất đẳng thức này tương đương với $p^2 \geq 2R^2+8Rr+3r^2$, một bất đẳng thức nổi tiếng của *Jack Garfunkel*), và do $p\sqrt{3} \leq 4R+r$, nên ta có thể đưa về chứng minh kết quả mạnh hơn là $20(R+r)^2 \geq 12r(4R+r)+18R^2$, hay $2(R-2r)^2 \geq 0$. Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng nên bổ đề của ta được chứng minh. ☐

Trở lại bài toán, do $\frac{4S}{3\sqrt{3}R^2} = \frac{8}{3\sqrt{3}}\sin A \sin B \sin C \leq 1$, nên

$$\frac{4}{\sqrt{3}}S\left(1+\frac{OP^2}{3R^2}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}S + \frac{4S}{3\sqrt{3}R^2}OP^2 \leq \frac{4}{\sqrt{3}}S + OP^2.$$

Do đó, để giải quyết bài toán đã cho, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn

$$PA^2+PB^2+PC^2 \geq \frac{4}{\sqrt{3}}S + OP^2,$$

hay là

$$3(PA^2+PB^2+PC^2) \geq 4\sqrt{3}S + 3OP^2.$$

Trong (2) cho $I \equiv P$, ta được $3(PA^2+PB^2+PC^2) = a^2+b^2+c^2+9PG^2$, nên bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$a^2+b^2+c^2+9PG^2 \geq 4\sqrt{3}S + 3OP^2.$$

Áp dụng bổ đề 3, ta có

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2+9PG^2 &\geq 4\sqrt{3}S + 6OG^2 + 9PG^2 \geq 4\sqrt{3}S + 6OG^2 + 6PG^2 \\ &\geq 4\sqrt{3}S + 3(OG+PG)^2 \geq 4\sqrt{3}S + 3OP^2. \end{aligned}$$

Phép chứng minh của ta được hoàn tất.

Bài toán. *Cho tam giác ABC với 3 đường trung tuyến m_a, m_b, m_c, các điểm A_1, B_1, C_1 chạy trên các đường thẳng BC, CA, AB, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a} + \frac{C_1A_1^3}{m_b} + \frac{A_1B_1^3}{m_c}.$$

(Trần Quang Hùng)

Lời giải 1 (đáp án). Để giải bài toán đã cho, trước hết ta sẽ chứng minh 2 bổ đề sau
Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC với L là điểm Lemoine*[1]*. Khi đó, với mọi điểm M nằm trên mặt phẳng, ta có*

$$\sum_{cyc} a^2MA^2 \geq \sum_{cyc} a^2MA \cdot LA \geq \sum_{cyc} a^2LA^2.$$

Chứng minh. Dễ thấy

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} a^2MA \cdot LA &\geq \sum_{cyc} a^2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{LA} = \sum_{cyc} a^2\left(\overrightarrow{ML} + \overrightarrow{LA}\right)\overrightarrow{LA} \\ &= \overrightarrow{ML}\sum_{cyc} a^2\overrightarrow{LA} + \sum_{cyc} a^2LA^2 = \sum_{cyc} a^2LA^2.\end{aligned}$$

Từ đây, áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta được

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} a^2MA^2 + \sum_{cyc} a^2LA^2 &= \sum_{cyc} a^2\left(MA^2 + LA^2\right) \geq 2\sum_{cyc} a^2MA \cdot LA \\ &\geq \sum_{cyc} a^2MA \cdot LA + \sum_{cyc} a^2LA^2.\end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{cyc} a^2MA^2 \geq \sum_{cyc} a^2MA \cdot LA \geq \sum_{cyc} a^2LA^2.$$

Bổ đề 1 được chứng minh. Đẳng thức ở cả 2 bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv L$.
Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC. Khi đó, với mọi điểm M nằm trên mặt phẳng thì biểu thức*

$$\frac{a^3MA^3}{m_a} + \frac{b^3MB^3}{m_b} + \frac{c^3MC^3}{m_c}$$

đạt giá trị nhỏ nhất khi $M \equiv L$ với L là điểm Lemoine.

---

[1]Điểm L được gọi là điểm *Lemoine* nếu nó thỏa mãn hệ thức $a^2\overrightarrow{LA} + b^2\overrightarrow{LB} + c^2\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz* và bổ đề 1 ở trên, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\frac{a^2MA^3}{LA}\right)\left(\sum_{cyc}a^2MA\cdot LA\right) &\geq \left(\sum_{cyc}a^2MA^2\right)^2\\ &\geq \left(\sum_{cyc}a^2LA^2\right)\left(\sum_{cyc}a^2MA\cdot LA\right),\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{cyc}\frac{a^2MA^3}{LA}\geq\sum_{cyc}a^2LA^2,$$

Mặt khác, ta chú ý rằng trong tam giác ABC, LA cho bởi công thức

$$LA=\frac{2bcm_a}{a^2+b^2+c^2},$$

nên từ đây, ta được

$$\sum_{cyc}a^2LA^2\leq\sum_{cyc}\frac{a^2MA^3}{LA}=\sum_{cyc}\frac{a^2(a^2+b^2+c^2)MA^3}{2bcm_a}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}\sum_{cyc}\frac{a^3MA^3}{m_a}.$$

Do đó

$$\sum_{cyc}\frac{a^3MA^3}{m_a}\geq\frac{2abc}{a^2+b^2+c^2}\sum_{cyc}a^2LA^2,$$

là một hằng số. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $M\equiv L$ nên bổ đề 2 được chứng minh.

Bây giờ ta trở lại bài toán đã cho. Sử dụng kết quả của *Miquel*, ta thấy rằng ba đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ đồng quy tại M. Gọi R_a là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AB_1C_1, khi đó ta có $B_1C_1=2R_a\sin A\geq MA\sin A=\frac{aMA}{2R}$, suy ra

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a}\geq\frac{a^3MA^3}{8R^3m_a}.$$

Bằng lập luận tương tự, ta cũng có

$$\frac{C_1A_1^3}{m_b}\geq\frac{b^3MB^3}{8R^3m_b},\quad\frac{A_1B_1^3}{m_c}\geq\frac{c^3MC^3}{8R^3m_c}.$$

Cộng tất cả lại, ta được

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a}+\frac{C_1A_1^3}{m_b}+\frac{A_1B_1^3}{m_c}\geq\frac{1}{8R^3}\left(\frac{a^3MA^3}{m_a}+\frac{b^3MB^3}{m_b}+\frac{c^3MC^3}{m_c}\right),$$

với đẳng thức xảy ra khi A_1, B_1, C_1 là các hình chiếu của M lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Mặt khác, theo bổ đề 2, ta có

$$\frac{a^3MA^3}{m_a}+\frac{b^3MB^3}{m_b}+\frac{c^3MC^3}{m_c}\geq\frac{2abc}{a^2+b^2+c^2}\sum_{cyc}a^2LA^2,$$

với đẳng thức xảy ra khi $M\equiv L$. Kết hợp 2 bất đẳng thức này, ta thu được

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a}+\frac{C_1A_1^3}{m_b}+\frac{A_1B_1^3}{m_c}\geq\frac{abc}{4R^3(a^2+b^2+c^2)}\sum_{cyc}a^2LA^2,$$

với đẳng thức xảy ra khi A_1, B_1, C_1 là các hình chiếu của điểm *Lemoine* L lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Do đó, giá trị nhỏ nhất mà ta cần tìm là

$$\frac{abc}{4R^3(a^2+b^2+c^2)}\sum_{cyc} a^2 LA^2.$$

Lời giải 2 (Đặng Cảnh Thiện, Nguyễn Văn An). Ta sẽ sử dụng các bổ đề sau

Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC, điểm M bất kì nằm trong tam giác; H, J, K là các hình chiếu vuông góc của M xuống BC, CA, AB tương ứng. Khi đó, ta có*

$$MH^2 + MJ^2 + MK^2 \geq \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Chứng minh. Theo bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$\begin{aligned}(MH^2+MJ^2+MK^2)(a^2+b^2+c^2) &\geq (aMH+bMJ+cMK)^2\\ &= (2S_{MBC}+2S_{MCA}+2S_{MAB})^2 = 4S^2.\end{aligned}$$

Do đó

$$MH^2 + MJ^2 + MK^2 \geq \frac{4S^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Bổ đề của ta được chứng minh. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{MH}{a} = \frac{MJ}{b} = \frac{MK}{c}$, tức là

$$MH = \frac{2aS}{a^2+b^2+c^2}, \quad MJ = \frac{2bS}{a^2+b^2+c^2}, \quad MK = \frac{2cS}{a^2+b^2+c^2},$$

hay nói cách khác, M chính là giao điểm của 3 đường đối trung (hay còn gọi là điểm *Lemoine*). □

Bổ đề 4. *Nếu H, J, K là hình chiếu của điểm Lemoine trên các cạnh của tam giác ABC thì*

$$\frac{KI}{m_a} = \frac{HK}{m_b} = \frac{IH}{m_c}.$$

Chứng minh. Ta có $AKMI$ là tứ giác nội tiếp nên $KI = MA\sin A$, suy ra $MA = \frac{MK}{\sin\angle AKM} = \frac{MK}{\sin\angle CAD}$ (với D là trung điểm của BC), từ đó ta tính được

$$\frac{KI}{m_a} = \frac{2cS\sin A}{(a^2+b^2+c^2)m_a\sin\angle CAD}.$$

Mặt khác, do $\frac{DC}{\sin\angle CAD} = \frac{m_a}{\sin C}$ nên $m_a\sin\angle CAD = DC\sin C$, dẫn đến

$$\frac{c\sin A}{m_a\sin\angle CAD} = \frac{a\sin C}{m_a\sin\angle CAD} = 2.$$

Do đó

$$\frac{KI}{m_a} = \frac{4S}{a^2+b^2+c^2}.$$

Lập luận tương tự cho 2 biểu thức còn lại, ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. □

Bổ đề 5. *A_1, B_1, C_1 là các điểm di động trên các cạnh BC, CA, AB* của tam giác ABC. *Khi đó*

$$A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 \geq \frac{12S^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Chứng minh. Gọi G là trọng tâm của tam giác $A_1B_1C_1$ và H, I, K là các hình chiếu của G xuống BC, CA, AB tương ứng, ta có

$$\begin{aligned} A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2 &= 3(GA_1^2 + GB_1^2 + GC_1^2) \geq 3(GH^2 + GI^2 + GK^2) \\ &\geq \frac{12S^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ (theo bổ đề 3).} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $G \equiv M$ là điểm *Lemoine* của tam giác ABC và A_1, B_1, C_1 là các hình chiếu của điểm *Lemoine* xuống các cạnh của tam giác. □

Trở lại bài toán, áp dụng bất đẳng thức *Holder*, ta có

$$\begin{aligned} (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)\left(\frac{B_1C_1^3}{m_a} + \frac{C_1A_1^3}{m_b} + \frac{A_1B_1^3}{m_c}\right)^2 &\geq (B_1C_1^2 + C_1A_1^2 + A_1B_1^2)^3 \\ &\geq \frac{12^3S^6}{(a^2+b^2+c^2)^3} \text{ (theo bổ đề 5).} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{B_1C_1^3}{m_a} + \frac{C_1A_1^3}{m_b} + \frac{A_1B_1^3}{m_c} \geq \frac{48S^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{B_1C_1}{m_a} = \frac{C_1A_1}{m_b} = \frac{A_1B_1}{m_c}$, tức A_1, B_1, C_1 lần lượt là các hình chiếu của điểm *Lemoine* của tam giác ABC xuống các cạnh của tam giác (theo bổ đề 4). Bài toán được giải quyết xong.

Bài toán. *Với mọi điểm M thuộc miền tam giác đều ABC cho trước, ta gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là các khoảng cách từ M đến BC, CA, AB tương ứng. Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{d_a^2}{MB \cdot MC} + \frac{d_b^2}{MC \cdot MA} + \frac{d_c^2}{MA \cdot MB}.$$

(Trần Quang Hùng, Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải 1 (đáp án). Vì M thuộc miền tam giác nên tồn tại các số không âm x, y, z sao cho $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. Sử dụng hệ thức *Leibnitz*, với mọi điểm P nằm trong mặt phẳng ta có

$$\begin{aligned} xPA^2 + yPB^2 + zPC^2 &= (x+y+z)PM^2 + \frac{yzBC^2 + zxCA^2 + xyAB^2}{x+y+z} \\ &= (x+y+z)PM^2 + \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}a^2, \end{aligned}$$

trong đó a là độ dài cạnh của tam giác đều ABC.
Bây giờ, cho $P \equiv A$, ta thu được

$$(y+z)a^2 = (x+y+z)MA^2 + \frac{xy+yz+zx}{x+y+z}a^2,$$

từ đó suy ra

$$MA = \frac{\sqrt{y^2+yz+z^2}}{x+y+z}a.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng tính được

$$MB = \frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{x+y+z}a, \quad MC = \frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{x+y+z}a.$$

Đến đây, từ hệ thức quen thuộc $S_{MBC}\overrightarrow{MA} + S_{MCA}\overrightarrow{MB} + S_{MAB}\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ kết hợp với tính chất tâm tỉ cự, ta được

$$\frac{x}{S_{MBC}} = \frac{y}{S_{MCA}} = \frac{z}{S_{MAB}}.$$

Vì $S_{MBC} = \frac{1}{2}ad_a, S_{MCA} = \frac{1}{2}ad_b, S_{MAB} = \frac{1}{2}ad_c$ nên đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{x}{d_a} = \frac{y}{d_b} = \frac{z}{d_c} = \frac{x+y+z}{d_a+d_b+d_c},$$

suy ra

$$d_a = \frac{x(d_a+d_b+d_c)}{x+y+z}, \quad d_b = \frac{y(d_a+d_b+d_c)}{x+y+z}, \quad d_c = \frac{z(d_a+d_b+d_c)}{x+y+z}.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned}
\frac{d_a^2}{MB\cdot MC}+\frac{d_b^2}{MC\cdot MA}+\frac{d_c^2}{MA\cdot MB} &= \sum_{cyc}\frac{\frac{x^2(d_a+d_b+d_c)^2}{(x+y+z)^2}}{\frac{\sqrt{z^2+zx+x^2}}{x+y+z}a\cdot\frac{\sqrt{x^2+xy+y^2}}{x+y+z}a} \\
&= \frac{(d_a+d_b+d_c)^2}{a^2}\sum_{cyc}\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}} \\
&= \frac{3}{4}\sum_{cyc}\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}}.
\end{aligned}$$

Chú ý rằng ở đây ta đã sử dụng đẳng thức quen thuộc $d_a+d_b+d_c=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ để suy ra được đẳng thức cuối ở trên. Đến đây, sử dụng bổ đề sau (chứng minh xem ở cuối lời giải bài toán này)

Bổ đề. *Với mọi số không âm x,y,z, ta luôn có*

$$1\le\sum_{cyc}\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}}\le\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Đẳng thức ở bên trái xảy ra khi $x=y=z=1$ và đẳng thức ở bên phải xảy ra khi $x=y, z=0$ cùng các hoán vị tương ứng.

Ta có thể dễ dàng suy ra được, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{d_a^2}{MB\cdot MC}+\frac{d_b^2}{MC\cdot MA}+\frac{d_c^2}{MA\cdot MB}$ là $\frac{3}{4}$ đạt được khi $x=y=z=1$ hay M trùng với tâm của tam giác đều ABC; và giá trị lớn nhất của nó là $\frac{\sqrt{3}}{2}$ đạt được chẳng hạn khi $x=y, z=0$ hay M trùng với trung điểm của cạnh AB.

Như vậy, công việc cuối cùng của ta để hoàn thành lời giải của bài toán là chứng minh bổ đề trên. Phép chứng minh như sau

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$x\sqrt{yz}+\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}\le\sqrt{(x^2+xy+y^2+xy)(x^2+xz+z^2+xz)}=(x+y)(x+z),$$

từ đó suy ra

$$\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}\le x^2+yz+\left(y+z-\sqrt{yz}\right)x\le x^2+yz+\frac{y^2+z^2}{y+z}x,$$

hay là

$$\frac{1}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}}\ge\frac{y+z}{x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)}.$$

Thực hiện tương tự cho 2 biểu thức còn lại, rồi cộng tất cả lại, ta thu được

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}}\ge\sum_{cyc}\frac{x^2(y+z)}{x^2(y+z)+y^2(z+x)+z^2(x+y)}=1.$$

Đây chính là vế trái của bất đẳng thức nêu trong bổ đề. Bây giờ, ta sẽ chứng minh vế phải. Để thực hiện điều này, ta sẽ sử dụng tính đối xứng của nó và giả sử rằng $x\ge y\ge z\ge 0$. Với giả thiết này, ta có đánh giá sau

$$\frac{y^2}{\sqrt{y^2+yz+z^2}}\le y-\frac{z}{3}.$$

Đánh giá này đúng bởi vì $(3y-z)^2(y^2+yz+z^2)-9y^4 = z\left[3y^3+z\left(y-z\right)\left(4y-z\right)\right] \geq 0$. Điều này dẫn đến

$$\frac{y^2}{\sqrt{(y^2+yz+z^2)(y^2+yx+x^2)}} \leq \frac{y-\frac{z}{3}}{\sqrt{x^2+xy+y^2}} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3y-z}{x+y}.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}} \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3x-z}{x+y}.$$

Suy ra

$$\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xx+z^2)}}+\frac{y^2}{\sqrt{(y^2+yz+z^2)(y^2+yx+x^2)}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{4z}{3\sqrt{3}(x+y)}.$$

Lúc này, để phép chứng minh được hoàn tất thì ta cần có

$$\frac{4}{3\sqrt{3}(x+y)} \geq \frac{z}{\sqrt{(z^2+zx+x^2)(z^2+zy+y^2)}}.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{x^2+xz+z^2}{z} &= \frac{x^2}{z}+z+x = \frac{x^2}{y}+y+x+\frac{\left(y-z\right)\left(x^2-yz\right)}{yz}\\ &\geq \frac{x^2}{y}+y+x = \frac{x^2+xy+y^2}{y},\end{aligned}$$

và

$$\frac{z^2+zy+y^2}{z} \geq 3y\ (AM-GM).$$

Từ đó suy ra

$$\frac{z}{\sqrt{(z^2+zx+x^2)(z^2+zy+y^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{3(x^2+xy+y^2)}} \leq \frac{2}{3(x+y)} < \frac{4}{3\sqrt{3}(x+y)}.$$

Bổ đề được chứng minh xong và bài toán của ta được giải quyết hoàn toàn.

Lời giải 2 (Nguyễn Văn Thạch). Bài toán gồm 2 phần

+ *Tìm giá trị lớn nhất.* Đặt $AB=BC=CA=a$ và

$$P=\frac{d_a^2}{MB\cdot MC}+\frac{d_b^2}{MC\cdot MA}+\frac{d_c^2}{MA\cdot MB}.$$

Với chú ý rằng

$$\frac{d_a^2}{MB\cdot MC}=\frac{(ad_a)^2}{a^2\cdot MB\cdot MC}=\frac{4S_{MBC}^2}{a^2\cdot MB\cdot MC}=\frac{2S_{MBC}\sin\angle MBC}{a^2},$$

và tương tự cho các biểu thức còn lại, ta được

$$\begin{aligned}P &= \frac{2}{a^2}(S_{MBC}\sin\angle MBC+S_{MCA}\sin\angle MCA+S_{MAB}\sin\angle MAB)\\ &\leq \frac{2}{a^2}(S_{MBC}+S_{MCA}+S_{MAB})=\frac{2}{a^2}S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Ta thấy tồn tại vị trí của M để đẳng thức xảy ra, đó là khi M trùng với trung điểm của BC hoặc CA hoặc AB, nên $\frac{\sqrt{3}}{2}$ chính là giá trị lớn nhất mà ta cần tìm.

+ *Tìm giá trị nhỏ nhất.* Trước hết, xin được nhắc lại không chứng minh kết quả quen thuộc sau: *Cho tam giác NPQ, với mọi điểm K thì $NP \cdot KQ^2 + PQ \cdot KN^2 + QN \cdot KP^2 \geq NP \cdot PQ \cdot QN$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi K trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác NPQ.*

  Bây giờ, trở lại bài toán, gọi D, E, F lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ M xuống BC, CA, AB. Khi đó MB là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MFD nên

$$\frac{FD}{MB} = \sin \angle FMD = \sin 120^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

  Một cách tương tự, ta có

$$\frac{FD}{MB} = \frac{DE}{MC} = \frac{EF}{MA} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

  Từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned} P &= \frac{MD^2}{MB \cdot MC} + \frac{ME^2}{MC \cdot MA} + \frac{MF^2}{MA \cdot MB} = \frac{3}{4}\left(\frac{MD^2}{DE \cdot DF} + \frac{ME^2}{EF \cdot ED} + \frac{MF^2}{FD \cdot FE}\right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{EF \cdot MD^2 + FD \cdot ME^2 + DE \cdot MF^2}{DE \cdot EF \cdot FD} \geq \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF, tức là

$$\angle MFE = \angle MFD, \quad \angle MDF = \angle MDE, \quad \angle MEF = \angle MED,$$

  hay

$$\angle MAC = \angle MBC, \quad \angle MBA = \angle MCA, \quad \angle MAB = \angle MCB.$$

  Từ đó suy ra $\angle MAB + \angle MBA = \angle MBC + \angle MCB = \angle MAC + \angle MCA = 60^{\circ}$, hay $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 120^{\circ}$. Điều này nói lên rằng M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Vậy $\frac{3}{4}$ chính là giá trị nhỏ nhất mà ta cần tìm.

Lời giải 3 (Đặng Cảnh Thiện). Lời giải này cũng giống với lời giải ở đáp án về ý tưởng, tức là đưa bài toán về chứng minh

$$1 \leq \sum_{cyc} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

trong đó x, y, z là các số không âm.
Bạn đã chứng minh theo những cách thường dùng cho dạng căn thức, tuy rằng cách này không có gì mới mẻ như trong lời giải của đáp án nhưng suy cho cùng thì nó cũng giúp ta giải được bài toán. Cách chứng minh của bạn như sau

+ *Chứng minh bất đẳng thức bên trái.* Ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$\sum_{cyc} x^2 \sqrt{y^2+yz+z^2} \geq \sqrt{\prod_{cyc}(x^2+xy+y^2)}.$$

  Bình phương 2 vế, ta được

$$\sum_{cyc} x^4(y^2+yz+z^2) + 2\sum_{cyc} x^2y^2\sqrt{(x^2+xz+z^2)(y^2+yz+z^2)} \geq \prod_{cyc}(x^2+xy+y^2).$$

Do $\sqrt{(x^2+xz+z^2)(y^2+yz+z^2)} \geq \frac{3}{4}(x+z)(y+z)$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc} x^4(y^2+yz+z^2) + \frac{3}{2}\sum_{cyc} x^2y^2(x+z)(y+z) \geq \prod_{cyc}(x^2+xy+y^2).$$

Khai triển và rút gọn, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3+3x^2y^2z^2 \geq xyz\left[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)\right].$$

Đây chính là bất đẳng thức *Schur* dạng bậc 3 áp dụng cho bộ số (xy, yz, zx) nên nó hiển nhiên đúng.

+ *Chứng minh bất đẳng thức bên phải.* Theo bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*,

$$\left[\sum_{cyc} \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}}\right]^2 \leq \left(\sum_{cyc} x\right)\left[\sum_{cyc} \frac{x^3}{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}\right],$$

nên ta có thể đưa về chứng minh kết quả mạnh hơn là

$$\left(\sum_{cyc} x\right)\left[\sum_{cyc} \frac{x^3}{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)}\right] \leq \frac{4}{3},$$

hay

$$2\left(\sum_{cyc} x\right)\left[\sum_{cyc} x^3(y^2+yz+z^2)\right] \leq \prod_{cyc}(x^2+xy+y^2).$$

Khai triển và rút gọn, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$\sum_{cyc} x^2y^2(x-y)^2 + xyz\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} x^2 + \sum_{cyc} xy\right) + 9x^2y^2z^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng nên ta có điều phải chứng minh.

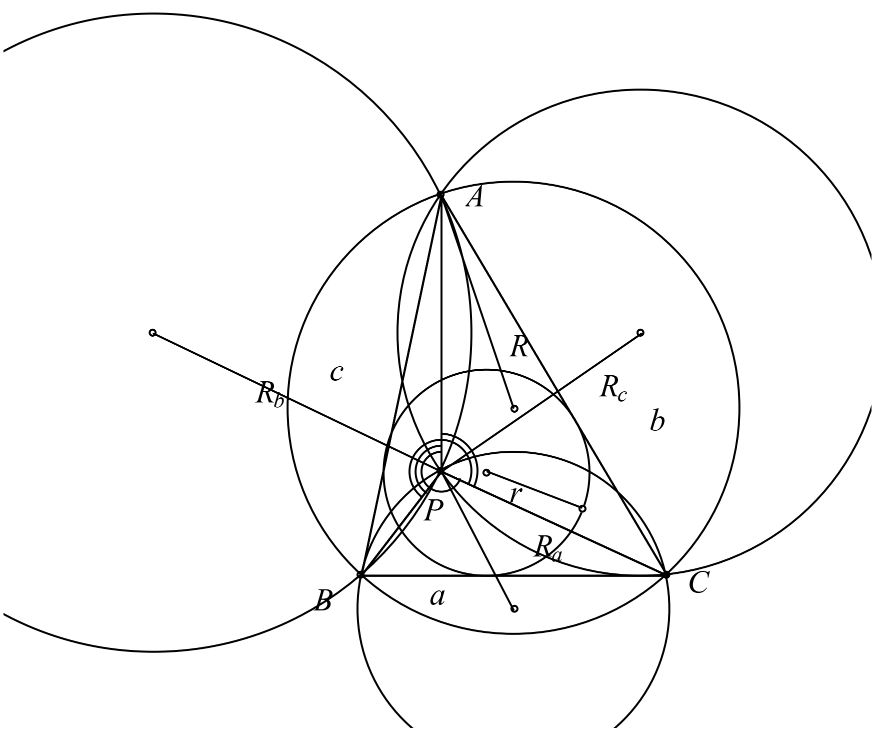
Các bất đẳng thức liên quan đến điểm nằm trong tam giác

Nhóm làm việc: Nguyễn Lê Quân, Đỗ Ngọc Phúc, Nguyễn Đình Đức, Phạm Đức Trung, Lê Đình Thành lớp 10A2 Tin.

Giáo viên hướng dẫn: Trần Quang Hùng.

I. Mở đầu

Trong tam giác *ABC* chúng ta kí hiệu độ dài ba cạnh là *a,b,c*; bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là *R*, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác là r ,l_a,l_b,l_c là độ dài của đường phân giác trong của ba góc $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Lấy *P* là điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Kí hiệu R_a, R_b, R_c lần lượt là độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp của các tam giác *PBA, PCA, PAB* và giá trị các góc $\angle BPC = \alpha$, $\angle CPA = \beta$,$\angle APB = \gamma$.



Trong [1] có xuất hiện bài toán sau dưới dạng một định lý

Đinh lý 1. *Với x, y, z là số thực dương tùy ý, chúng ta có*

$$\frac{xl_a}{\sqrt{R_bR_c}}+\frac{yl_b}{\sqrt{R_aR_c}}+\frac{zl_c}{\sqrt{R_bR_a}}\le\sqrt{\frac{r}{2R}+2.\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{yx}{z}\right)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, P là trọng tâm và x=y=z.

Tác giả của [1] đưa ra định lý trên để chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{l_a}{R_b+R_c}+\frac{l_b}{R_a+R_c}+\frac{l_c}{R_b+R_a}\le\frac{9}{4}$$

Thực chất bất đẳng thức trên là một giả thuyết đã tồn tại khá lâu trong [2] và nó sẽ được chứng minh nhờ định lý 1 như chúng ta thấydưới đây.

Trong quá trình chứng minh định lý 1 và nghiên cứu các tài liệu [1,2,3,4], chúng tôi đã mạnh dạn đề xuất bài toán sau, bài toán cũng được phát biểu dưới dạng một định lý

Đinh lý 2. *Với x, y, z là số thực dương tùy ý, chúng ta có*

$$\frac{x}{\sqrt{R_bR_c}}+\frac{y}{\sqrt{R_aR_c}}+\frac{z}{\sqrt{R_bR_a}}\le\sqrt{\frac{1}{2Rr}\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{yx}{z}\right)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều, P là trọng tâm và x=y=z.

II. Chứng minh định lý và các hệ quả

Trong mục này chúng tôi sẽ đưa ra các chứng minh cho định lý 1 và định lý 2. Trong các chứng minh này, chúng tôi đã sử dụng một số kết quả quen thuộc mà chúng tôi phát biểu chúng dưới dạng các bổ đề dưới đây. Để phát cho phát biểu được ngắn gọn, chúng tôi không viết lại các ký hiệu thộng dụng đã được đề cập trong phần đầu bài viết này.

Bổ đề 1. *Với x, y, z là các số thực tùy ý, chúng ta có*

$$yz\sin^2 A+zx\sin^2 B+xy\sin^2 C\le\frac{(x+y+z)^2}{4}$$

Lời giải. Với mọi số thực x,y,z và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta có

$$\left(x.\overrightarrow{OA}+y.\overrightarrow{OB}+z.\overrightarrow{OC}\right)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)R^2+2\left[xy.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+zy.\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OB}+xz.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2+z^2\right)R^2+2\left[xy\frac{OA^2+OB^2-AB^2}{2}+yz\frac{OB^2+OC^2-BC^2}{2}+xz\frac{OA^2+OC^2-AC^2}{2}\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow R^2\left(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz\right)\geq xyc^2+yza^2+xzb^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x+y+z\right)^2R^2\geq xyc^2+yza^2+xzb^2$$

Dùng định lý hám số sine , bất đẳng thức tương đương

$$\Leftrightarrow R^2(x+y+z)^2\geq 4R^2\left[\sin^2 A.yz+\sin^2 B.xz+\sin^2 C.xy\right]$$

$$\Leftrightarrow \left[yz\sin^2 A+xz\sin^2 B+xy\sin^2 C\right]\leq \frac{(x+y+z)^2}{4}$$

Đó là điều phải chứng minh .

Bổ đề 2. *Với x, y, z là các số thực dương tùy ý thì ta có bất đẳng thức*

$$x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+y^2\sin^2\frac{\beta}{2}+z^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\leq\frac{1}{4}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)^2$$

Lời giải. Từ bổ đề 1, với x,y,z > 0 ta thế biến $yz\mapsto x^2, zx\mapsto y^2, xy\mapsto z^2$ hay $x\mapsto\frac{yz}{x}, y\mapsto\frac{zx}{y}, z\mapsto\frac{xy}{z}$ ta thu được bổ đề 2.

Bổ đề 3. *Trong tam giác ABC ta có bất đẳng thức*

$$l_a=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}\leq\sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}, l_b=\frac{2ca\cos\frac{B}{2}}{c+a}\leq\sqrt{ca}\cos\frac{B}{2}, l_c=\frac{2ab\cos\frac{C}{2}}{a+b}\leq\sqrt{ab}\cos\frac{C}{2}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức là công thức cơ bản của đường phân giác kết hợp bất đẳng thức AM-GM.

Bổ đề 4. Trong tam giác ABC ta có

$$\frac{bc}{4R_bR_c}\leq\sin^2\frac{\alpha}{2}, \frac{ca}{4R_cR_a}\leq\sin^2\frac{\beta}{2}, \frac{ab}{4R_aR_b}\leq\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Lời giải. Theo định lý hàm số sin cho các tam giác PBC, PCA, PAB ta có $a=2R_a\sin\alpha, b=2R_b\sin\beta, c=2R_c\sin\gamma$. Do đó

$$\frac{bc}{4R_bR_c}=\sin\beta\sin\gamma=\frac{1}{2}[\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)]\leq\frac{1}{2}[1-\cos(360^\circ-\alpha)]=\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Tương tự ta có điều phải chứng minh.

Dựa và ba bổ đề trên ta đưa ra các lời giải cho các định lý 1 và định lý 2 như sau

Lời giải định lý 1. Áp dụng các bổ đề 3 và bổ đề 4 ta thu được ngay các bất đẳng thức sau với các số thực dương x, y, z tùy ý

$$\frac{l_a}{\sqrt{R_b.R_c}} \le \sqrt{\frac{bc}{R_b.R_c}}.\cos\frac{A}{2} \le 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{A}{2} \Rightarrow \frac{xl_a}{\sqrt{R_b.R_c}} \le x\sqrt{\frac{bc}{R_b.R_c}}.\cos\frac{A}{2} \le 2\cos\frac{A}{2}x\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$\frac{l_b}{\sqrt{R_c.R_a}} \le \sqrt{\frac{ca}{R_c.R_a}}.\cos\frac{B}{2} \le 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{B}{2} \Rightarrow \frac{yl_b}{\sqrt{R_c.R_a}} \le y\sqrt{\frac{ca}{R_c.R_a}}.\cos\frac{B}{2} \le 2\cos\frac{B}{2}y\sin\frac{\beta}{2}$$
$$\frac{l_c}{\sqrt{R_a.R_b}} \le \sqrt{\frac{ab}{R_a.R_b}}.\cos\frac{C}{2} \le 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{C}{2} \Rightarrow \frac{zl_c}{\sqrt{R_a.R_b}} \le z\sqrt{\frac{ab}{R_a.R_b}}.\cos\frac{C}{2} \le 2\cos\frac{C}{2}z\sin\frac{\gamma}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Swartz kết hợp bổ đề 2 ta thu được

$$\frac{xl_a}{\sqrt{R_b.R_c}} + \frac{yl_b}{\sqrt{R_c.R_a}} + \frac{zl_c}{\sqrt{R_a.R_b}}$$
$$\le 2\cos\frac{A}{2}x\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{B}{2}y\sin\frac{\beta}{2} + \cos\frac{C}{2}z\sin\frac{\gamma}{2}$$
$$\le 2\sqrt{\left(\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}\right)\left(x^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + y^2\sin^2\frac{\beta}{2} + z^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}$$
$$= 2\sqrt{\left(2 + \frac{r}{2R}\right)\left(x^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + y^2\sin^2\frac{\beta}{2} + z^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}$$
$$\le \sqrt{\left(2 + \frac{r}{2R}\right)\left(\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z}\right)}$$

Ta chú ý kết quả quen thuộc $cos^2\frac{A}{2} + cos^2\frac{B}{2} + cos^2\frac{C}{2} = \frac{4R+r}{2R}$

Đó chính là kết quả định lý 1.

Bằng một ý tưởng tương tự, ta chứng minh định lý 2 như sau

Lời giải định lý 2. Theo bổ đề 4 với các số thực dương x,y,z tùy ý ta có các bất đẳng thức sau

$$\frac{bc}{4R_bR_c} \le \sin^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow x\sqrt{\frac{1}{R_bR_c}} \le 2\sqrt{\frac{1}{bc}}x\sin\frac{\alpha}{2}$$
$$\frac{bc}{4R_cR_a} \le \sin^2\frac{\beta}{2} \Rightarrow y\sqrt{\frac{1}{R_cR_a}} \le 2\sqrt{\frac{1}{ca}}y\sin\frac{\beta}{2}$$
$$\frac{ab}{4R_aR_b} \le \sin^2\frac{\gamma}{2} \Rightarrow z\sqrt{\frac{1}{R_aR_b}} \le 2\sqrt{\frac{1}{ab}}z\sin\frac{\gamma}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Swartz kết hợp bổ đề 2 ta có

$$x\sqrt{\frac{1}{R_bR_c}}+y\sqrt{\frac{1}{R_cR_a}}+z\sqrt{\frac{1}{R_aR_b}}$$
$$\leq 2\left(\sqrt{\frac{1}{bc}}x\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{\frac{1}{ca}}y\sin\frac{\beta}{2}+\sqrt{\frac{1}{ab}}z\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$
$$\leq 2\sqrt{\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)\left(x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+y^2\sin^2\frac{\beta}{2}+z^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}$$
$$=2\sqrt{\frac{1}{2Rr}\left(x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+y^2\sin^2\frac{\beta}{2}+z^2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}$$
$$\leq 2\sqrt{\frac{1}{2Rr}\left(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}\right)}$$

Đó chính là kết quả định lý 2.

Hai kết quả định lý này sẽ cho chúng ta nhiều hệ quả hay, từ các hệ quả này chúng ta lại ứng dụng để tìm ra nhiều bất đẳng thức thú vị khác trong tam giác.

Hệ quả 1. *Cho x, y, z là các số thực dương, ta có*

a) $\frac{2xl_a}{R_b+R_c}+\frac{2yl_b}{R_c+R_a}+\frac{2zl_c}{R_a+R_b}\leq\frac{xl_a}{\sqrt{R_b.R_c}}+\frac{yl_b}{\sqrt{R_a.R_c}}+\frac{zl_c}{\sqrt{R_b.R_c}}\leq\frac{3}{2}\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{yx}{z}\right)$

b) $x^2R_a+y^2R_b+z^2R_c\geq\sqrt{\frac{2R}{4R+r}}(yzl_a+zxl_b+xyl_c)\geq\frac{2}{3}(yzl_a+zxl_b+xyl_c)$

Lời giải. a) Ta thấy các bất đẳng thức khá hiển nhiên nhờ các bất đẳng thức cơ bản AM-GM và bất đẳng thức Euler $R\geq 2r$.

b) Ta chú ý phép thế biến $x\mapsto yz\sqrt{R_bR_c}, y\mapsto zx\sqrt{R_cR_a}, z\mapsto xy\sqrt{R_aR_b}$ từ bất đẳng thức câu a) ta đi đến điều phải chứng minh.

Hệ quả 2. *Cho x, y, z là các số thực dương, ta có*

a) $\frac{2x}{R_b+R_c}+\frac{2y}{R_c+R_a}+\frac{2z}{R_a+R_b}\leq\frac{x}{\sqrt{R_bR_c}}+\frac{y}{\sqrt{R_aR_c}}+\frac{z}{\sqrt{R_bR_a}}\leq\frac{1}{2r}\left(\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{yx}{z}\right)$

b) $x^2R_a+y^2R_b+z^2R_c\geq\sqrt{2Rr}(yz+zx+xy)\geq 2r(yz+zx+xy)$

Lời giải. a) Ta thấy các bất đẳng thức khá hiển nhiên nhờ các bất đẳng thức cơ bản AM-GM và bất đẳng thức Euler nổi tiếng $R\geq 2r$.

b) Ta thế biến tương tự $x \mapsto yz\sqrt{R_bR_c}, y \mapsto zx\sqrt{R_cR_a}, z \mapsto xy\sqrt{R_aR_b}$ cho câu a) ta thu được điều phải chứng minh.

III. Các bài toán ứng dụng

Bài toán 1. Chứng minh rằng

$$\frac{l_a}{R_b+R_c}+\frac{l_b}{R_a+R_c}+\frac{l_c}{R_b+R_a} \le \frac{l_a}{\sqrt{R_b.R_c}}+\frac{l_b}{\sqrt{R_a.R_c}}+\frac{l_c}{\sqrt{R_b.R_c}} \le \frac{9}{4}$$

Lời giải. Áp dụng hệ quả 1a) khi x=y=z=1

Bài toán 2. Chứng minh rằng $R_a+R_b+R_c \ge \sqrt{\frac{2R}{4R+r}}(l_a+l_b+l_c) \ge \frac{2}{3}(l_a+l_b+l_c)$

Lời giải. Áp dụng hệ quả 1b) khi x=y=z=1

Chúng ta chú ý rằng bất đẳng thức trên xuất hiện trong [2] và lời giải rất cồng kềnh, nhưng như các bạn thấy, nếu áp dụng các hệ quả đã có của chúng ta thì lời giải không đến một dòng.

Bài toán 3. Chứng minh rằng $\frac{l_aR_a}{l_bl_c}+\frac{l_bR_b}{l_cl_a}+\frac{l_cR_c}{l_al_b} \ge \sqrt{\frac{2R}{4R+r}} \ge \frac{2}{3}$

Lời giải. Áp dụng hệ quả 1b) khi $x=l_a, y=l_b, z=l_c$ và rút gọn.

Bài toán 4. Chứng minh rằng

a) $\frac{R_a}{l_b^2}+\frac{R_b}{l_c^2}+\frac{R_c}{l_a^2} \ge \sqrt{\frac{2R}{4R+r}}\left(\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\right) \ge \frac{2}{3}\left(\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\right)$

b) $\frac{R_a}{l_c^2}+\frac{R_b}{l_a^2}+\frac{R_c}{l_b^2} \ge \sqrt{\frac{2R}{4R+r}}\left(\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\right) \ge \frac{2}{3}\left(\frac{1}{l_a}+\frac{1}{l_b}+\frac{1}{l_c}\right)$

Lời giải. a) Áp dụng hệ quả 1b) khi $x=\frac{1}{l_b}, y=\frac{1}{l_c}, z=\frac{1}{l_a}$

b) Áp dụng hệ quả 1b) khi $x=\frac{1}{l_c}, y=\frac{1}{l_a}, z=\frac{1}{l_b}$

Như chúng ta đã thấy, việc áp dụng hệ quả 1 đã đưa đến rất nhiều bất đẳng thức thú vị, Rõ ràng là trong bốn bài toán nhỏ này chúng tôi chưa thể khai thác hết hệ quả 1. Vậy còn hệ quả 2 thì sao? Các bài tập sau các bạn hãy thử vận dụng các kết quả đã biết trên để tự làm chúng

Bài toán 5. Chứng minh rằng $\frac{\sqrt{R_b R_c}}{R_b + R_c} + \frac{\sqrt{R_c R_a}}{R_c + R_a} + \frac{\sqrt{R_a R_b}}{R_a + R_b} \le \frac{1}{4r}(R_b + R_c + R_a)$

Bài toán 6. Chứng minh rằng $\frac{R_a}{R_b + R_c} + \frac{R_b}{R_c + R_a} + \frac{R_c}{R_a + R_b} \le \frac{1}{4r}\left(\frac{R_b R_c}{R_a} + \frac{R_c R_a}{R_b} + \frac{R_a R_b}{R_c}\right)$

Bài toán 7. Chứng minh rằng $\frac{R_b R_c}{R_a} + \frac{R_c R_a}{R_b} + \frac{R_a R_b}{R_c} \ge 3\sqrt{2Rr}$

Tài liệu tham khảo

[1] Wei-Dong Jiang, *An inequality involving the angle bisectors and an interior point of a triangle*, Forum Geometricorum, 8 (2008).

[2] J. Liu, *A hundred unsolved triangle inequality problems, in Geometric Inequalities in China,* Jiangsu Education Press, Nanjing, 1996.

[3] O. Bottema et al, *Geometric Inequalities*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969.

[4] Dragoslav S. Mitrinovic, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Springer; 1 edition.

Một số tính chất của tam giác đều

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

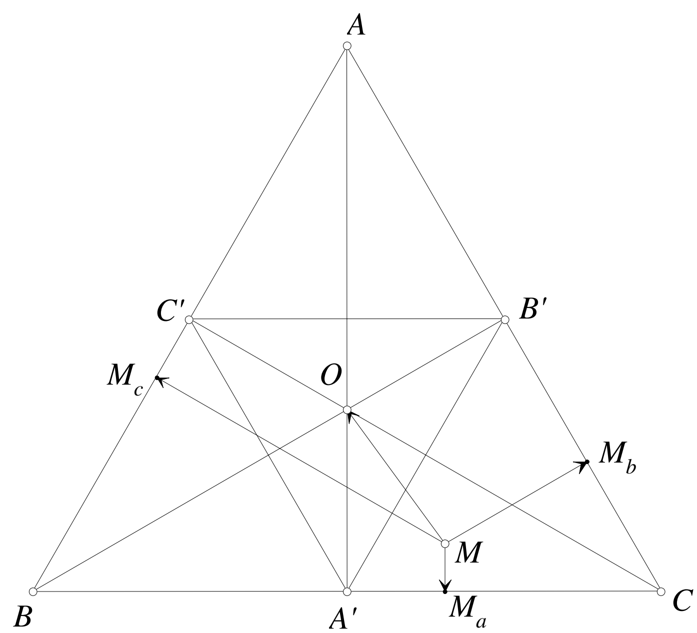
Chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh một số tính chất đẹp của tam giác đều dựa trên một đẳng thức vector và sau đó sẽ mở rộng tương tự cho đa giác.

1 Hai bài toán cơ bản

Trong [1] chúng ta gặp bài toán sau phát biểu với điểm M nằm trong tam giác ABC. Trong bài viết này chúng ta sẽ xét bài toán đó nhưng với mọi M trên mặt phẳng, hơn nữa với cách chứng minh thứ hai được trình bày ở đây, ta có thể mở rộng bài toán cho đa giác đều bất kỳ

Bài toán 1 (Bài toán cơ bản)**.** *Cho tam giác đều ABC và M là điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_a, M_b, M_c là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng, chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{MM_a} + \overrightarrow{MM_b} + \overrightarrow{MM_c} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}.$$



Lời giải thứ nhất. Chúng ta sẽ dùng các khái niệm diện tích đại số và độ dài đại số, ta ký hiệu diện tích đại số các tam giác MBC, MCA, MAB, ABC tương ứng là $[S_a], [S_b], [S_c], [S]$ và AA', BB', CC' là các đường cao của ABC ta có $\dfrac{[S_a]}{[S]} = \dfrac{\overline{M'M_a}}{\overline{AA'}}$ vì vậy

$$\overrightarrow{MM_a} = \frac{\overline{MM_a}}{\overline{AA'}}\overrightarrow{AA'} = \frac{3[S_a]}{2[S]} \cdot \overrightarrow{AO}$$

Tương tự ta có

$$\overrightarrow{MM_b} = \frac{3[S_b]}{2[S]} \cdot \overrightarrow{BO}, \qquad \overrightarrow{MM_c} = \frac{3[S_c]}{2[S]} \cdot \overrightarrow{CO}$$

như vậy

$$\sum \overrightarrow{MM_a} = \sum \frac{3[S_a]}{2[S]} \cdot \overrightarrow{AO} = \frac{3}{2[S]}(\sum [S_a](\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MO})) =$$

$$= \frac{3}{2[S]}(\sum [S_a](\overrightarrow{AM}) + \frac{3}{2[S]}(\sum [S_a])(\overrightarrow{MO}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

Đến đây ta đã dùng các hệ thức cở bản của diện tích đại số

$$[S_a]\overrightarrow{MA} + [S_b]\overrightarrow{MB} + [S_c]\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}, [S_a] + [S_b] + [S_c] = [S].$$

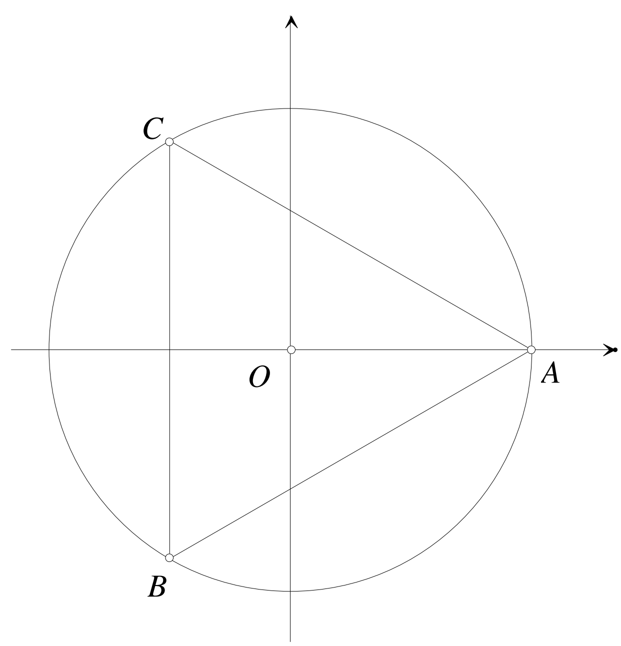
Ta suy ra diều phải chứng minh.

□

Để đi đến lời giải thứ 2, ta phát biểu một bổ đề quen thuộc sau

Bổ đề 1.1. *Hai tam giác ABC và XYZ cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{BY} + \overrightarrow{CZ} = \overrightarrow{0}$*

Đây là bổ đề quen thuộc, xong ta chú ý rằng áp dụng bổ đề này cần linh hoạt, tức là ta không cần quan tâm đến thứ tự các đỉnh khi áp dụng



Lời giải thứ hai. Chúng ta sẽ sử dụng phép quay vector. Gọi A', B', C' lần lượt là đối xứng của điểm M qua các cạnh BC, CA, AB. Ta thấy rằng bài toán tương đương với việc ta phải chứng minh tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ có cùng trọng tâm. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$ ta sẽ chứng minh $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0}$, thật vậy

Ta xét $R^{\frac{2\pi}{3}}$ là phép quay vector góc $\dfrac{2\pi}{3}$ khi đó

$$R^{\frac{2\pi}{3}}(3\overrightarrow{GG'}) = R^{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'})$$

$$= R^{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{AC'}) + R^{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{BA'}) + R^{\frac{2\pi}{3}}(\overrightarrow{CB'}) = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'} = 3\overrightarrow{GG'}$$

Như vậy $\overrightarrow{GG'}$ không đổi qua phép quay vector $R^{\frac{2\pi}{3}}$ do đó $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0}$. Ta suy ra điều phải chứng minh. □

Với lời giải thứ hai ta dễ dàng mở rộng bài toán tương tự cho đa giác đều n cạnh như sau

Bài toán 2. *Cho O là tâm của đa giác đều $A_1A_2...A_n$ và M là điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi $M_1, M_2, ..., M_n$ là các hình chiếu của M tới các đường thẳng $A_iA_{i+1}, (i = \overline{1,n}, n+1 \equiv 1)$ tương ứng, chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{MM_2} + ... + \overrightarrow{MM_n} = \frac{n}{2}\overrightarrow{MO}.$$

Ta cũng cần một bổ đề tương tự cho đa giác

Bổ đề 2.1. *Hai đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ cùng trọng tâm khi và chỉ khi $\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iA'_i} = \overrightarrow{0}$*

Ta cũng chú ý rằng bổ đề cần phải áp dụng linh hoạt

Chứng minh. Chúng ta sẽ sử dụng phép quay vector. Gọi A'_i, $(i = \overline{1,n})$ lần lượt là các điểm đối xứng của điểm M qua các cạnh $A_iA_{i+1}, (i = \overline{1,n}, n+1 \equiv 1)$. Ta thấy rằng bài toán tương đương với việc ta phải chứng minh đa giác $A_1A_2...A_n$ và tam giác $A'_1A'_2...A'_n$ có cùng trọng tâm. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm các tam giác $A_1A_2...A_n$ và $A'_1A'_2...A'_n$ ta sẽ chứng minh $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0}$, thật vậy

Ta xét $R^{-\frac{2\pi}{n}}$ là phép quay vector góc $-\dfrac{2\pi}{n}$ khi đó

$$R^{\frac{2\pi}{n}}(n\overrightarrow{GG'}) = R^{\frac{2\pi}{n}}(\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iA'_i}) = \sum_{i=1}^{n}R^{\frac{2\pi}{n}}(\overrightarrow{A_iA'_i}) = \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_iA_{i'-1}} = n\overrightarrow{GG'}$$

Như vậy $\overrightarrow{GG'}$ không đổi qua phép quay vector $R^{-\frac{2\pi}{n}}$ do đó $\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{0}$. Ta suy ra điều phải chứng minh.

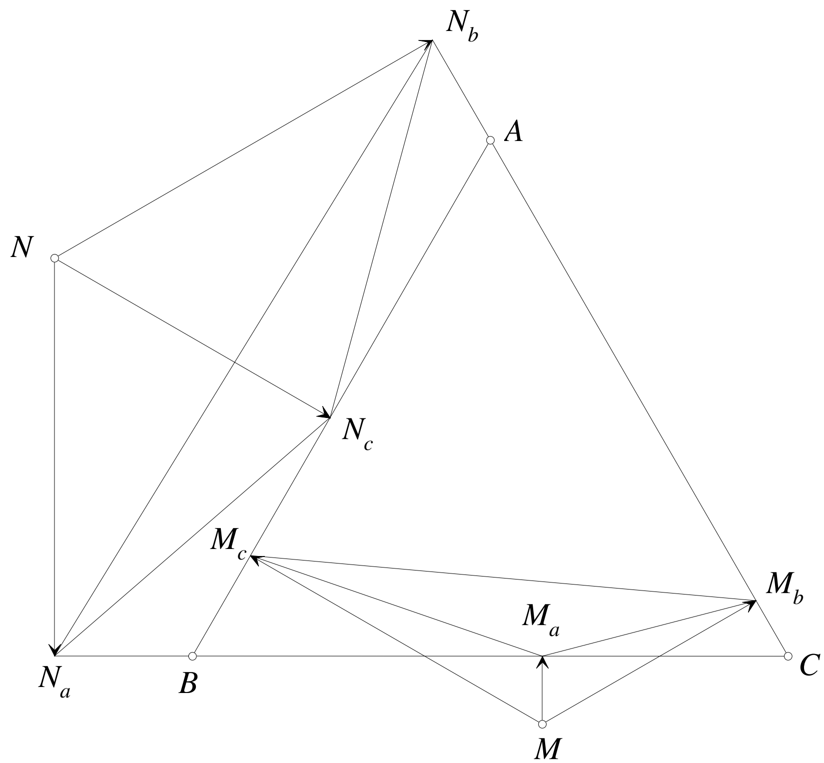
□

2 Một số ứng dụng

Bây giờ ta sẽ chỉ ra một vài ứng dụng đẹp từ các hệ thức trên

Bài toán 3. *Cho tam giác đều ABC và M, N là hai điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_a, N_a là hình chiếu của M, N trên đường thẳng BC, tương tự ta có M_b, N_b, M_c, N_c chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{M_aN_a} + \overrightarrow{M_bN_b} + \overrightarrow{M_cN_c} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MN}.$$



Hình 1.

Chứng minh. Từ hệ thức ban đầu ta có

$$\overrightarrow{MM_a}+\overrightarrow{MM_b}+\overrightarrow{MM_c}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MO},\overrightarrow{NN_a}+\overrightarrow{NN_b}+\overrightarrow{NN_c}=\frac{3}{2}\overrightarrow{NO}$$

và

$$\sum\overrightarrow{M_aN_a}=\sum(\overrightarrow{M_aM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NN_a})=\sum\overrightarrow{M_aM}+3\overrightarrow{MN}+\sum\overrightarrow{NN_a}=$$
$$=-\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}+3\overrightarrow{MN}+\frac{3}{2}\overrightarrow{NO}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MN}$$

như vậy ta đã chứng minh xong. □

Hoàn toàn tương tự ta sẽ có mở rộng trên đa giác đều

Bài toán 4. *Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ và M, N là hai điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_i, N_i là hình chiếu của M, N trên đường thẳng $A_iA_{i+1}, (i=\overline{1,n}, n+1\equiv 1)$ chứng minh rằng*

$$\overrightarrow{M_1N_1}+\overrightarrow{M_2N_2}+...+\overrightarrow{M_nN_n}=\frac{n}{2}\overrightarrow{MN}.$$

Bài toán 5. *Gọi O là tâm tam giác đều ABC với bán kính đườn tròn ngoại tiếp R và M là điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_a, M_b, M_c là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng, chứng minh rằng*

$$MM_a^2+MM_b^2+MM_c^2=\frac{3}{2}MO^2+\frac{3}{4}R^2.$$

Chứng minh. Gọi A', B', C' là trung điểm của BC, CA, AB ta có

$MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2$
$= \sum(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M_a})^2$
$= \sum(MO^2 + OA'^2 + A'M_a^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA'} + 2\overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{A'M_a} + 2\overrightarrow{A'M_a} \cdot \overrightarrow{MO})$
$= 3MO^2 + \frac{3}{4}R^2 + \sum A'M_a^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\sum \overrightarrow{OA'}) + 2\sum \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{A'M_a} + 2\sum \overrightarrow{A'M_a} \cdot \overrightarrow{MO}$ $(*)$

Ở đây $\sum \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{0}$ và A', M_a là các hình chiếu O, M trên BC, tương ứng, vì vậy $\overrightarrow{A'M_a} \cdot \overrightarrow{MO} = -A'M_a^2$ và $\overrightarrow{OA'} \perp \overrightarrow{A'M_a} \Rightarrow \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{A'M_a} = 0$ và hoàn toàn tương tự với các đỉnh B, C. Từ đó chúng ta sẽ nhận được từ $(*)$ đẳng thức sau

$MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 = 3MO^2 + \frac{3}{4}R^2 + (\sum \overrightarrow{A'M_a}) \cdot \overrightarrow{MO} = 3MO^2 + \frac{3}{4}R^2 - \frac{3}{2}MO^2 = \frac{3}{2}MO^2 + \frac{3}{4}R^2.$

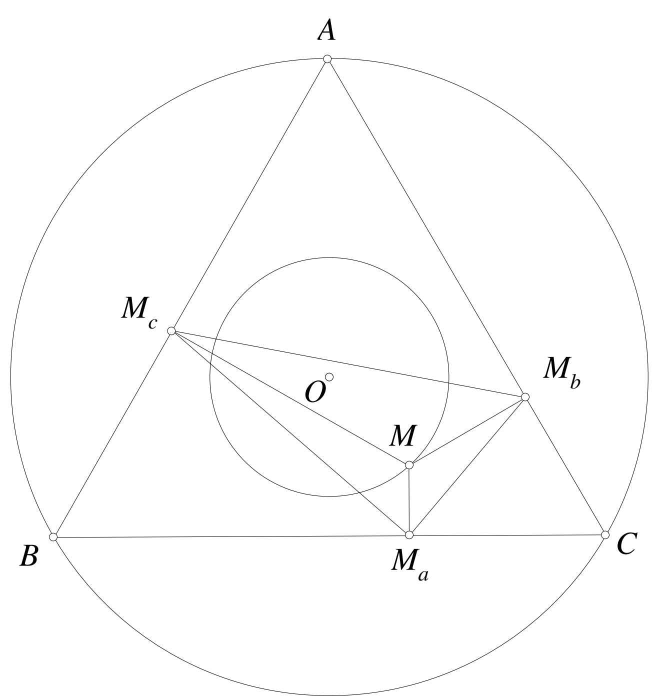
Ở đây chú ý rằng A', B', C' là các hình chiếu của O tới các đường thẳng tương ứng BC, CA, AB, vì vậy từ bài toán 2 ta có $\sum \overrightarrow{A'M_a} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$. □

Chúng ta có ba hệ quả đẹp từ bài toán này

Hệ quả 5.1. *Khi M thuộc đường tròn tâm O bán kính r thì*

$$MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 = \frac{3}{2}r^2 + \frac{3}{4}R^2.$$

Hệ quả 5.2. *Quĩ tích các điểm M sao cho $MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 = k \geq \frac{3}{4}R^2$ là một đường tròn tâm O bán kính $\frac{2}{3}\sqrt{k - \frac{3}{4}R^2}$.*



Hình 2.

Hệ quả 5.3. $MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 \geq \dfrac{3}{4}R^2$ *với mọi* M *trên mặt phẳng đẳng thức có khi* $M \equiv O$.

Bằng cách chứng minh tương tự ta sẽ có vấn đề tổng quát trên đa giác

Bài toán 6. *Gọi* O *là tâm đa giác đều* $A_1A_2...A_n$ *với bán kính đường tròn ngoại tiếp* R *và* M *là điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi* M_i *là hình chiếu của* M *trên các đường thẳng* $A_iA_{i+1}(i = \overline{1,n}, n+1 \equiv 1)$, *chứng minh rằng:*

$$MM_1^2 + MM_2^2 + ... + MM_n^2 = \frac{n}{2}MO^2 + n\cos^2\frac{\pi}{n}R^2.$$

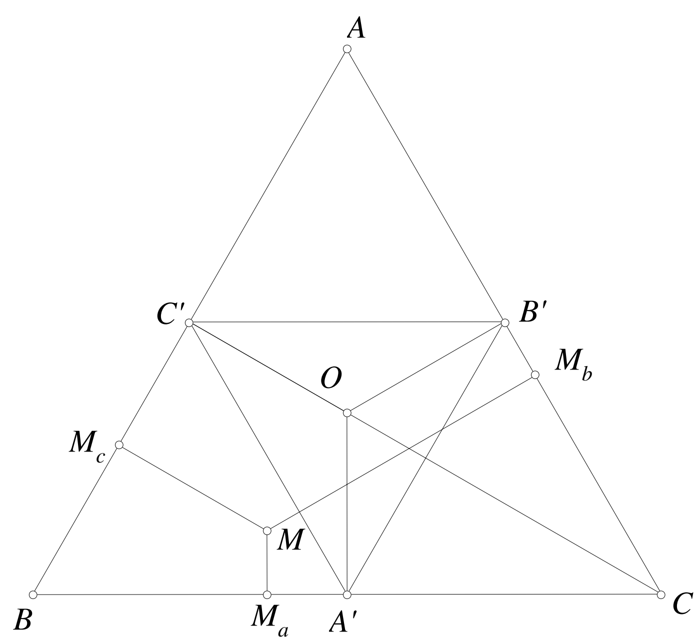
Hệ quả 6.1. *Khi* M *thuộc đương tròn tâm* O *bán kính* r *thì* $MM_1^2 + MM_2^2 + ... + MM_n^2 = \dfrac{n}{2}r^2 + n\cos^2\dfrac{\pi}{n}R^2$

Hệ quả 6.2. *Quỹ tích các điểm* M *sao cho* $MM_1^2 + MM_2^2 + ... + MM_n^2 = k \geq n\cos^2\dfrac{\pi}{n}R^2$ *là một đường tròn tâm* O *bán kính* $\dfrac{2}{n}\sqrt{k - n\cos^2\dfrac{\pi}{n}R^2}$.

Hệ quả 6.3. $MM_1^2 + MM_2^2 + ... + MM_n^2 \geq n\cos^2\dfrac{\pi}{n}R^2$ *với mọi* M *trên mặt phẳng, dấu bằng khi* $M \equiv O$.

Bài toán 7. *Cho tam giác đều* ABC *với* M, N *là hai điểm bất kỳ trên mặt phẳng.Gọi* M_a, N_a *là hình chiếu của* M, N *trên đường thẳng* BC, *tương tự ta có* M_b, N_b, M_c, N_c *chứng minh rằng*

$$M_aN_a^2 + M_bN_b^2 + M_cN_c^2 = \frac{3}{2}MN^2.$$



Hình 3.

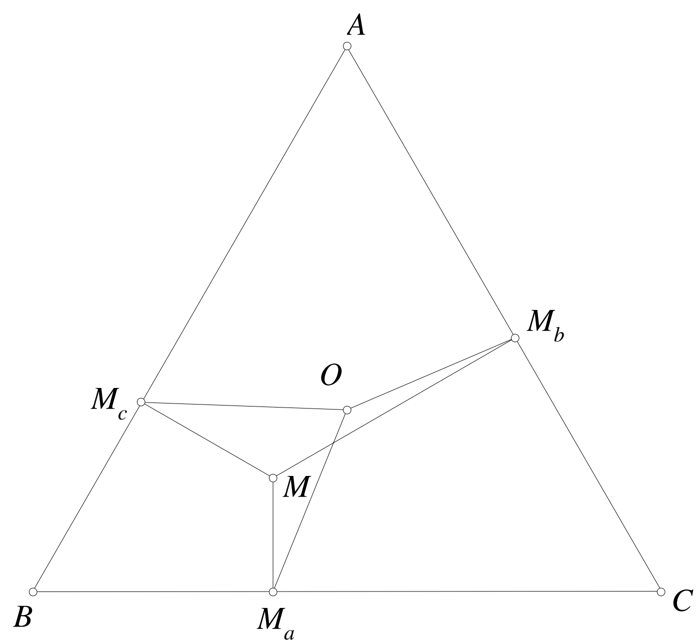
Chứng minh. Vì M_a, N_a là các hình chiếu của M, N trên đường thẳng BC vì vậy theo đính lý hình chiếu $\overrightarrow{M_aN_a} \cdot \overrightarrow{MN} = M_aN_a^2$ do đó

$$\sum M_aN_a^2 = \sum \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{M_aN_a} = \overrightarrow{MN}(\sum \overrightarrow{M_aN_a}) = MN \cdot \frac{3}{2}\overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}MN^2$$

Từ bài toán 2 ta có $\overrightarrow{M_aN_a} + \overrightarrow{M_bN_b} + \overrightarrow{M_cN_c} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{MN}$ □

Lời giải bài toán tuy đơn giản xong chúng ta có thể nhận được một kết quả đẹp từ bài toán đó khi ta cho $N \equiv O$ và đặt A', B', C' là hình chiếu của O tới BC, CA, AB (đây cũng là các chân đương cao của tam giác ABC), từ vấn đề trên ta có $\sum M_aA'^2 = \frac{3}{2}MO^2$ bởi đinh lý Pythagore ta có $M_aA'^2 = OM_a^2 - OA'^2$ và tương tự cho đỉnh B, C ta có

$$\sum(OM_a^2 - OA'^2) = \frac{3}{2}MO^2 \Leftrightarrow OM_a^2 + OM_b^2 + OM_c^2 = \frac{3}{2}MO^2 + 3(\frac{R}{2})^2 = \frac{3}{2}MO^2 + \frac{3}{4}R^2$$



Hình 4.

Bây giờ kết hợp với bài toán 4 ta có hệ quả sau

Hệ quả 7.1. $MM_a^2 + MM_b^2 + MM_c^2 = OM_a^2 + OM_b^2 + OM_c^2$

Ta lại nhận được một bài toán tương tự và hệ quả tương tự cho đa giác đều

Bài toán 8. *Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ và M, N là hai điểm bất kỳ trên mặt phẳng. Gọi M_i, N_i là hình chiếu của M, N trên đường thẳng $A_iA_{i+1}, (i = \overline{1, n}, n + 1 \equiv 1)$ chứng minh rằng:*

$$M_1N_1^2 + M_2N_2^2 + ... + M_nN_n^2 = \frac{n}{2}MN^2.$$

Hệ quả 8.1. $MM_1^2 + MM_2^2 + ... + MM_n^2 = OM_1^2 + OM_2^2 + ... + OM_n^2$ *với O là tâm đa giác đều.*

Tài liệu

[1] Nguyễn Minh Hà (chủ biên) Nguyễn Xuân Bình, *Toán nâng cao hình học 10*, NXBGD năm 2000.

[2] Phan Huy Khải, Nguyễn Đạo Phương, *Các phương pháp giải toán sơ cấp - Hình học 10*, NXB Hà Nội 2000.

[3] L.I.Golovina, I.M.Yaglom, *Phép quy nạp trong hình học*, NXBGD 1997.

Định lý Sawayama và Thébault

Nhóm thực hiện: Nguyễn Thị Hường, Lương Ánh Nguyệt, Lương Thị Thanh Mai, Đào Thị Quỳnh Nga.
Giáo viên hướng dẫn: Trần Quang Hùng.

Mở đầu. Trong khuôn khổ bài báo này, chúng tôi sẽ gửi tới một cách chứng minh thuần tuý hình học của định lý Sawayama-Thébault và áp dụng vào một số bài toán khác.

1. Mở đầu

Định lý Sawayama-Thébault được coi là một trong những định lý đáng quan tâm nhất của hình học phẳng. Định lý này có một tiểu sử khá thú vị. Theo bài viết trên tạp chí Forum Geometricorum thì năm1938, nhà hình học nổi tiếng người Pháp Victor Thébault đã phát biểu định lý này. Lời giải của nó lần đầu tiên xuất hiện năm1973 ở Hà Lan và trở nên phổ biến vào năm 1989 .

Nhưng câu chuyện chưa dừng lại ở đó. Vào cuối năm 1938, nhà toán học người Thụy Sĩ R.Stark đưa ra một lời giải tổng hợp (tức là chỉ dùng các công cụ của hình học phẳng) của một kết quả mở rộng hơn ban đầu. Lời giải tính toán đầu tiên cho sự mở rộng này được tìm ra bởi K.B.Taylor (người Anh) với chứng minh chiếm mất 24 trang giấy. Đến năm 1986, một chứng minh khác ngắn gọn hơn được tìm ra bởi Gerhard Turnward.

Đến năm 2001, R.Shail đã đưa ra một chứng minh hoàn hảo hơn cho một trường hợp tổng quát mà bài toán của R.Stark chỉ là một trường hợp đặc biệt. Năm 2003, AMM xuất bản một lời giải của B.J.English, đã nhận được từ năm 1975.

Theo báo điện tử JSTOR, lời giải của R.Shail đã được biết tới trước đó rất lâu, vào năm 1905. Y.Sawayama, một giáo viên trung học tại Tokio- Nhật Bản đã chứng minh với phương pháp tổng hợp và tính toán.

Bởi vậy chúng ta có thể gọi định lý này là định lý Sawayama- Thébault.

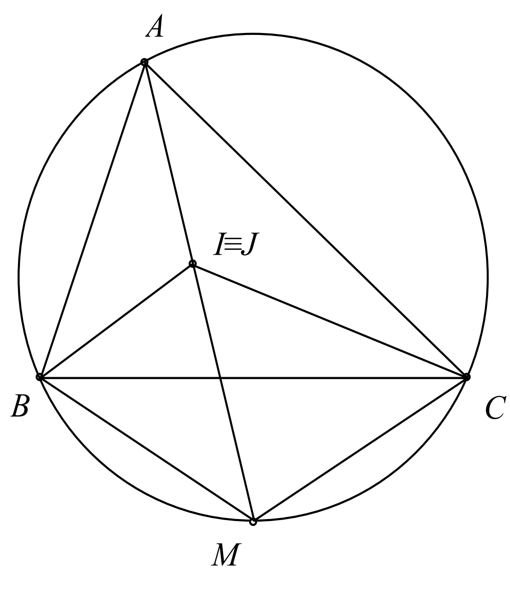
2. Định lý Sawayama- Thébault và mở rộng

2.1. Định lý và lời giải

Định lý Thébault đã được chứng minh trong [1] và [2]. Sau đây chúng tôi trình bày lại rõ ràng hơn cách chứng minh trong [1] nhờ 3 bổ đề. Cách chứng minh này là cơ sở để chúng tôi phát triển định lý ở phần sau.

Định lý 1. (Định lý Thébault). *Qua đỉnh A của tam giác ABC dựng đường thẳng AD. D nằm trên cạnh BC. Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội, ngoại tiếp của tam giác. (O_1) là đường tròn tiếp xúc với hai đoạn AD, DC tương ứng P, Q và tiếp xúc trong với (O). (O_2) tiếp xúc với hai đoạn AD, BD tương ứng tại H, G và tiếp xúc trong với (O). Ta có O, O_1, O_2 thẳng hàng.*

Bổ đề 1.1. *Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M là trung điểm cung BC không chứa A. Khi đó, nếu MI = MB = MC và I nằm trên đoạn AM thì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.*



(Hình 2.1)

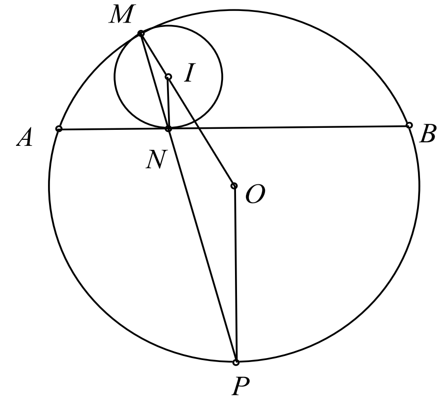
Lời giải bổ đề 1.1. (Hình 2.1) Từ giả thiết ta có MB = MC và AM là phân giác trong ∠BAC. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Ta có đường thẳng BJ đi qua trung điểm của cung AC không chứa B. Nên ta có ∠ABJ = ∠JBC và ∠BAJ = ∠CBM.

Mặt khác, ta có ∠BJM = ∠ABJ + ∠BAJ và ∠JBM = ∠JBC + ∠CBM.

Từ đó, ta nhận được BJM là tam giác cân nên JM = MB = MC. Vì vậy JM = IM.

Do đó, J ≡ I vì I và J cùng nằm trên tia MA.

Vì vậy, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Bổ đề 1.1 được chứng minh hoàn toàn.



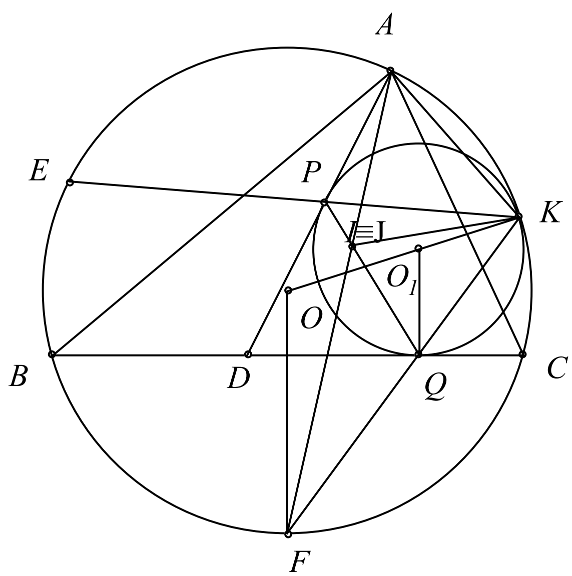
Bổ đề 1.2. *Cho (O) và dây AB của đường tròn. (I) tiếp xúc trong với (O) và BC lần lượt tại M, N. Khi đó MN là phân giác của góc AMB.*

Lời giải bổ đề 1.2. (Hình 2.2) Gọi P là giao điểm thứ 2 của MN và (O). Vì (I) tiếp xúc trong với (O) tại M nên ta suy ra M, O, I thẳng hàng. Do đó tam giác cân IMN và OMP có cùng góc M nên IN // OP hay OP $\perp$ AB. Ta có P là điểm chính giữa của cung AB không chứa M. Vì vậy MP hay MN là phân giác của góc AMB.

(Hình 2.2)

Bổ đề 1.2 được chứng minh.

Bổ đề 1.3. *Gọi I, O lần lượt là tâm đường tròn nội và ngoại tiếp tam giác ABC. D là 1 điểm bất kì trên cạnh BC. (O_1) tiếp xúc với AD, DC lần lượt ở P, Q và tiếp xúc trong với (O) khi đó PQ đi qua I.*



(Hình 2.3)

Chứng minh bổ đề 1.3. (Hình 2.3) Giả sử (O) và (O_1) tiếp xúc trong tại K, khi đó K, O_1, O thẳng hàng. Gọi E, F là giao điểm của KP, KQ với (O). Theo bổ đề 1.2, F là trung điểm của $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. (1). Gọi J là giao điểm của AF và PQ. Ta có 2 trường hợp: B, D cùng phía với AF hoặc B, D khác phía với AF. Dưới đây chúng tôi xét trường hợp 1 (với J thuộc đoạn PQ), trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Ta có OF// O_1Q nên $\angle$JAK = $\angle$FAK = $\frac{1}{2}$ $\angle$FOK = $\frac{1}{2}$ $\angle QO_1K$ = $\angle$QPK = $\angle$JPK.

Tứ giác APJK có $\angle$JAK = $\angle$JPK nên là tứ giác nội tiếp, suy ra $\angle$AJP = $\angle$AKP lại có $\angle$AJP = $\angle$FJQ nên $\angle$AKP = $\angle$FJQ (2).

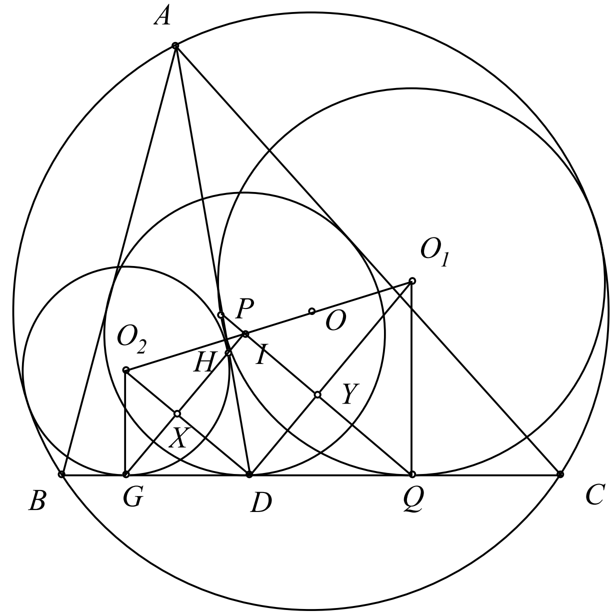
Tứ giác APJK nội tiếp có $\angle$AKJ = $\angle$DPJ và $\angle$DPJ= $\angle$DPQ = $\angle$PKQ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến, dây cung) hay $\angle$AKJ = $\angle$PKQ suy ra $\angle$AKP = $\angle$JKQ (3).

Từ (2), (3), ta có $\angle$FJQ = $\angle$JKQ nên ΔJQF ~ ΔKJF.

Ta suy ra FJ^2 = FK. FQ.

Dễ chứng minh FC^2 = FK. FQ nên FC = FJ (4).

Từ (1), (4) và bổ đề 1.1, ta có J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC hay I $\equiv$ J, hay PQ đi qua I. Bổ đề 1.3 được chứng minh hoàn toàn.



(Hình 2.4)

Chứng minh định lý 1. (Hình 2.4) Gọi (O_1) tiếp xúc với AD, DC lần lượt ở P, Q và (O_2) tiếp xúc với AD, BD lần lượt ở H, G. Theo bổ đề 1.3, tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC là giao điểm của PQ và GH.

Gọi X là giao điểm của DO_2 và GH, Y là giao điểm của DO_1 và PQ. Ta có DO_1 và DO_2 tương ứng là phân giác của $\angle ADC$ và $\angle ADB$, nên $\angle O_1DO_2 = 90^0$. Ta có $\angle DXI = \angle DYI = 90^0$ nên DXIY là hình chữ nhật. Vậy $\Delta O_2GD \sim \Delta DQO_1$ nên:

$$\frac{GO_2}{GD} = \frac{DQ}{QO_1} \text{ hay } \frac{GO_2^{\,2}}{GD^2} = \frac{DQ^2}{QO_1^{\,2}} \text{ nên } \frac{O_2X}{XD} = \frac{YD}{YO_1} \text{ hay } \frac{O_2X}{O_2D} = \frac{YD}{DO_1} = \frac{XI}{DO_1}.$$

Ta có $\Delta O_2XI \sim \Delta O_2DO_1$ suy ra $\angle IO_2X = \angle O_1O_2X$. Vậy O_1, I, O_2 thẳng hàng. Định lý 1 được chứng minh hoàn toàn.

2.2. Mở rộng định lý Thébault

Trong quá trình tìm hiểu cách chứng minh định lý Thébault, chúng tôi nhận ra rằng có thể mở rộng định lý bằng cách mở rộng 3 bổ đề trên. Do đó, chúng tôi mạnh dạn đề xuất định lý 2 dưới đây, thực chất đó là "định lý Thébault" cho tâm bàng tiếp.

Định lý 2. (Mở rộng định lý Thébault). *D là điểm bất kì trên cạnh BC của tam giác ABC. (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác và (I_a) là đường tròn bàng tiếp góc A . (O_1) tiếp xúc với AD, BC lần lượt tại M, N và tiếp xúc ngoài với (O). (O_2) tiếp xúc với AD, BC lần lượt tại P, Q và tiếp xúc ngoài với (O). Khi đó I_a, O_1, O_2 thẳng hàng.*

Chúng ta sẽ sử dụng 3 bổ đề sau để chứng minh định lý 2.

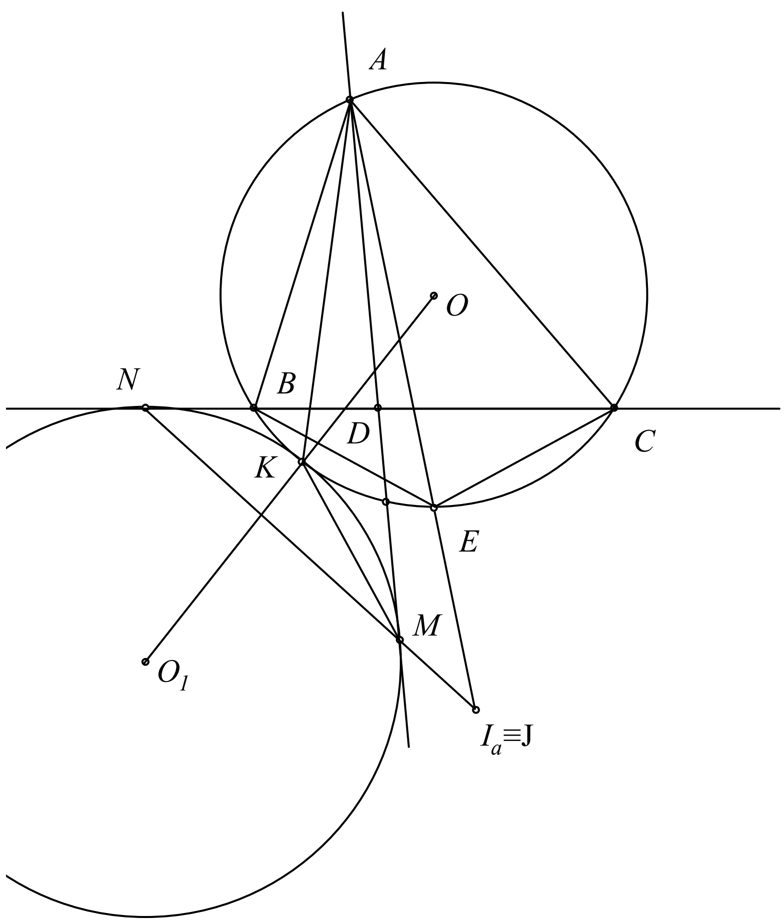
Bổ đề 2.1. *Cho (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Cho E là điểm chính giữa cung BC không chứa A. Nếu EB = EC = EJ và J thuộc tia đối của tia EA thì J là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. .*

Bổ đề 2.2. *Cho (O) và dây AB. Dựng (I) tiếp xúc với đường thẳng AB tại M và tiếp xúc ngoài với (O) tại N. E là điểm chính giữa cung AB với I và E cùng phía với AB. Khi đó MN đi qua E.*

(Hai bổ đề này có thể được chứng minh dễ dàng).

Bổ đề 2.3. *Cho O, I_a lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Dựng (O_1) tiếp xúc ngoài với (O) tại K, tiếp xúc với tia AD tại M và tiếp xúc với tia CB tại N trong đó D là điểm bất kì thuộc cạnh BC. Khi đó M, N, I_a thẳng hàng.*

Chứng minh bổ đề 2.3. (Hình 2.5) Gọi E là giao điểm của AI_a và (O), J là giao điểm của AI_a và MN. Ta có 2 trường hợp: B, D cùng phía với AF hoặc B, D khác phía với AF. Dưới đây chúng tôi xét trường hợp 2 (với J nằm ngoài đoạn MN), trường hợp còn lại chứng minh tương tự.



(Hình 2.5)

Vì AI_a là phân giác trong $\angle$A, nên E là điểm chính giữa của $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A ta có OE $\perp$ BC. Mặt khác, $O_1N \perp BC$ nên O_1N // OE. Theo giả thiết ta suy ra O, K, O_1 thẳng hàng. Vì vậy $\angle NO_1K = \angle KOE$, suy ra $\angle$ KMN = $\angle$ KAE (1).

Vậy tứ giác AKMJ là tứ giác nội tiếp.

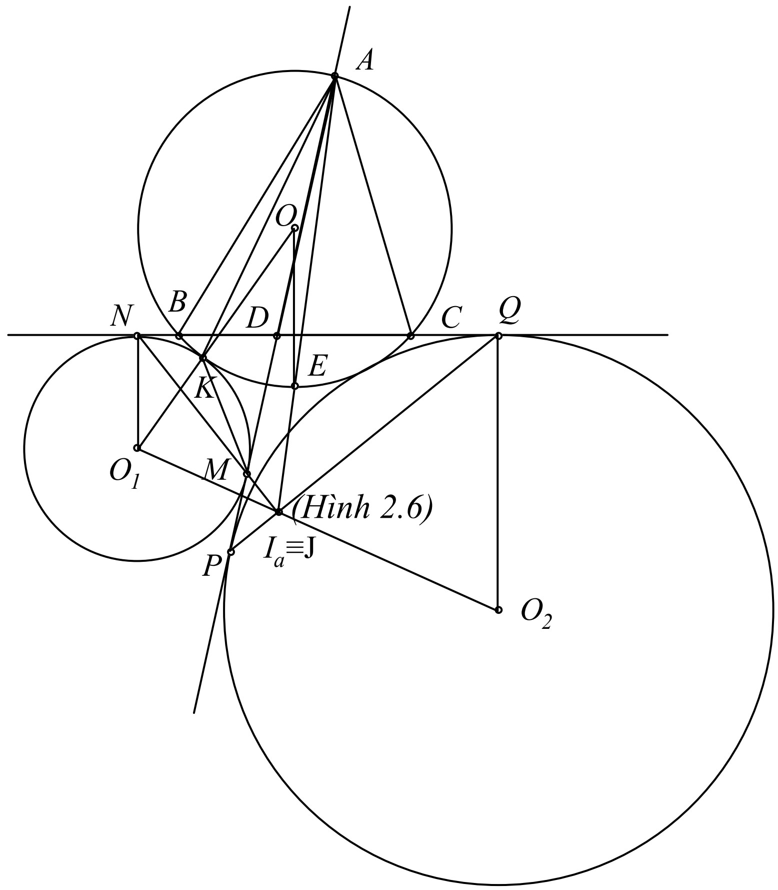
Nên $\angle$KMA = $\angle$KJA . Nhưng $\angle$KMA = $\angle$KNM nên $\angle$KJA = $\angle$KNM. Theo bổ đề 2.2 lại có K, N, E thẳng hàng nên $\angle$NEJ = $\angle$KEJ. Ta có ΔKEJ ~ Δ JEN vậy JE^2 = EK. EN (2).

Cũng có $\angle$KMN = $\angle$BNK, $\angle$KAE = $\angle$KBE, nên từ (1), ta có $\angle$KBE = $\angle$ENB. suy ra ΔBKE ~ Δ NBE nên EB^2 = EK. EN (3).

Từ (2) và (3), ta có JE = EB (4).

Vì I là tâm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC, ta dễ dàng có I_aE = EB = EC (5).

Từ (4) và (5) suy ra $I_a \equiv J$. Vậy bổ đề 2.3 được chứng minh



Chứng minh định lý 2. (Hình 2.6) Gọi X là giao điểm NM và DO_1, Y là giao điểm của PQ và DO_2. Từ bổ đề 2.3, ta có I_a là giao điểm của MN và PQ. Mặt khác, DO_1 là phân giác trong và DO_2 là phân giác ngoài của $\angle BDM$ (D là giao điểm 2 tiếp tuyến của mỗi đường tròn (O_1) và (O_2)).

Ta có $\angle O_1DO_2 = 90^0$ nên DXI_aY là hình chữ nhật nên $DY=XI_a$.

(Hình 2.6)

Nên ta có $\Delta O_1ND \sim \Delta DQO_2$ suy ra $\frac{O_1N}{ND} = \frac{DQ}{QO_2}$ hay $\frac{O_1N^2}{ND^2} = \frac{DQ^2}{QO_2{}^2}$. Vậy $\frac{O_1X}{XD} = \frac{DY}{YO_2}$ nên $\frac{O_1X}{O_1D} = \frac{DY}{DO_2} = \frac{XI_a}{DO_2}$.

Lại có $\Delta O_1XI_a \sim \Delta O_1DO_2$ nên $\angle XO_1I_a = \angle DO_1O_2$.

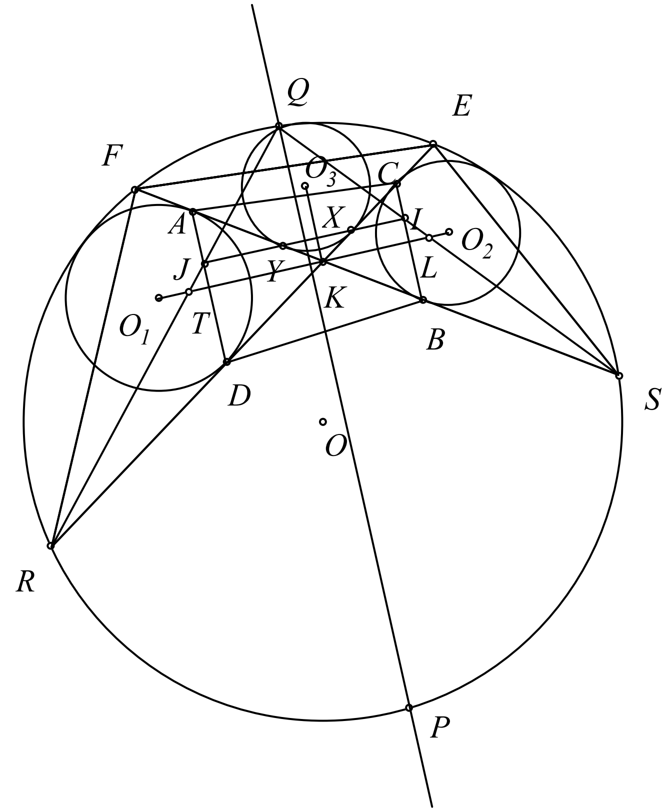
Vậy O_1, I_a, O_2 thẳng hàng.

Định lý 2 được chứng minh.

3. Một số áp dụng

Chúng tôi sẽ sử dụng định lý Thébault để chứng minh một số kết qủa đẹp sau.

Bài toán 1. *Cho (O_1), (O_2) lần lượt tiếp xúc trong với (O) tại M, N. Tiếp tuyến chung AB, CD của (O_1), (O_2) cắt (O)tương ứng tại S, F và R, E (S và R cùng phía so với O_1O_2). Chứng minh rằng PQ là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) với P, Q lần lượt là trung điểm của cung RS không chứa E và cung EF không chứa S.*



Lời giải. (Hình 3.1) Gọi K là giao điểm của AB và CD. Khi đó O_1, O_2, K thẳng hàng. Gọi L, T lần lượt là giao điểm của O_1O_2 và SQ, RQ. Ta có $\angle$SKL = $\angle$LKE = $\angle$ FKT = $\angle$ TKR (1).

Gọi (O_3) là đường tròn tiếp xúc với KE, KF thứ tự tại X, Y và tiếp xúc trong với (O). Gọi I, J lần lượt là giao điểm của XY với BC và AD.

Áp dụng định lý Sawayama-Thébault cho 2 tam giác SEF và REF, ta có I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác SEF và REF.

Nhưng SQ, RQ là phân giác trong của $\angle$ESF và $\angle$ERF Nên I thuộc SQ và J thuộc RQ.

Vì KX và KY là hai tiếp tuyến của (O_3), nên XY vuông góc với phân giác của $\angle$EKF (2).

(Hình 3.1)

Mà KO_1 và KO_2 lần lượt là phân giác trong của $\angle$SKE và $\angle$RKF. Ta suy ra O_1O_2 vuông góc với phân giác trong của $\angle$EKF (3).

Từ (2) và (3) có O_1O_2 // XY hay O_1O_2 // IJ (4).

Ta có $\angle$LSK = $\angle$KRT (Q là trung điểm của $\overset{\frown}{EF}$ không chứa S). Kết hợp với (1), ta có $\angle$QLK = $\angle$KTQ hay $\angle$QLT = $\angle$LTQ. Suy ra tam giác LQT là tam giác cân. Vậy QL = QT (5).

Tương tự, ta có PL = PT (6).

Từ (5) và (6) suy ra PQ là trung trực của LT. Theo (4) có PQ là trung trực của IJ (7).

Mặt khác AD$\perp$$KO_1$, BC$\perp$$KO_2$ nên AD // BC (8).

Từ (7) và (8), PQ đi qua trung điểm của BD và AC. Vậy PQ là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).

Bài toán 2 Cho (O_1), *(O_2) tiếp xúc trong với (O) lần lượt tại M, N. Hai tiếp tuyến chung trong của (O_1) và (O_2) là ES và FR sao cho E, F, R, S thuộc (O) và F, E nằm cùng phía với O_1O_2. Tiếp tuyến chung ngoài của (O_1), (O_2) cắt (O) tại A, B. Chứng minh rằng AB // EF hoặc AB // SR.*

Chứng minh. (Hình 3.2) Không mất tính tổng quát, giả sử AB và EF cùng phía so với O_1O_2 (nếu AB và SR cùng phía với O_1O_2, ta làm tương tự). Ta sẽ chứng minh rằng AB // EF.

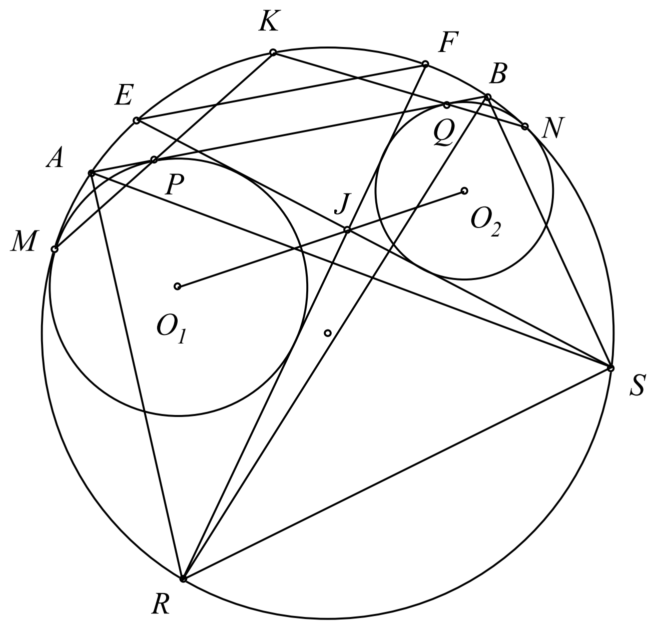
Thật vậy, gọi K là trung điểm của cung AB không chứa R và S. Theo bổ đề 1.2, ta có K, Q, N thẳng hàng và K, P, M thẳng hàng.

Dễ dàng chứng minh được $KA^2=KM.KP=\wp_{K/(O_1)}$ và $KB^2=KN.KQ=\wp_{K/(O_2)}$. K là điểm chính giữa cung AB, nên KA=KB hay $\wp_{K/(O_1)} = \wp_{K/(O_2)}$ hay K thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) (1)

Theo bài toán 1, trục đẳng phương của (O_1), (O_2) đi qua điểm chính giữa của $\overset{\frown}{EF}$ không chứa S (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overset{\frown}{EF}$ và $\overset{\frown}{AB}$ có chung điểm chính giữa hay EF // AB.

(Hai bài toán trên được tham khảo tại diễn đàn mathlink.ro).



(Hình 3.2)

Sau đây, chúng tôi nêu ra 2 bài toán mới được áp dụng từ định lý 2.

Bài toán 3. *Cho (O_1), (O_2) tiếp xúc trong với (O) lần lượt tại M, N. 2 tiếp tuyến trong chung của (O_1) và (O_2) là ES và FR sao cho E, F cùng phía với O_1O_2. Tiếp tuyến chung ngoài của (O_1), (O_2) cắt (O) lần lượt tại A, B. Chứng minh rằng AB // EF hoặc AB // SR.*

Bài toán 4. *Cho (O_1), (O_2) tiếp xúc ngoài với (O) tại M, N. Tiếp tuyến chung trong AC, BD của (O_1), (O_2) cắt (O) lần lượt tại S, F và R, E. Giao điểm của FR và SE không thuộc miền trong (O). Chứng minh rằng PQ là trục đẳng phương của (O_1), (O_2) sao cho P, Q lần lượt là điểm chính giữa cung EF không chứa S và cung SR không chứa E.*

Hai bài toán trên được chứng minh tương tự như bài 1 và 2 dựa vào định lý Thebault mở rộng cho tâm bàng tiếp.

Tài liệu tham khảo

[1] J.-L. Ayme, *Sawayama và Thébault's theorem*, Forum Geom, 3 (2003).

[2] Wilfred Reyes, *An Application của Thébault's Theorem*, Forum Geom, 2 (2002).

[3] R. A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, 1925, Dover reprint.

[4] V. Thébault, Problem 3887, *Three circles with collinear centers*, Amer. Math. Monthly, 45 (1938).

[5] Y. Sawayama*, A new geometrical proposition*, Amer. Math. Monthly, 12 (1905).

[6] R. Shail., *A proof of Thébault's Theorem*, Amer. Math. Monthly, 108 (2001).

[7] K. B. Taylor, *Solution của Problem 3887*, Amer. Math. Monthly, 90 (1983).

[8] Nguyễn Minh Hà, Định lý Lyness, tạp chí toán tuổi thơ 2.

TỔNG QUÁT HÓA ĐƯỜNG THẲNG DROZ FARNY

Trần Quang Hùng, THPT chuyên KHTN, Hà Nội

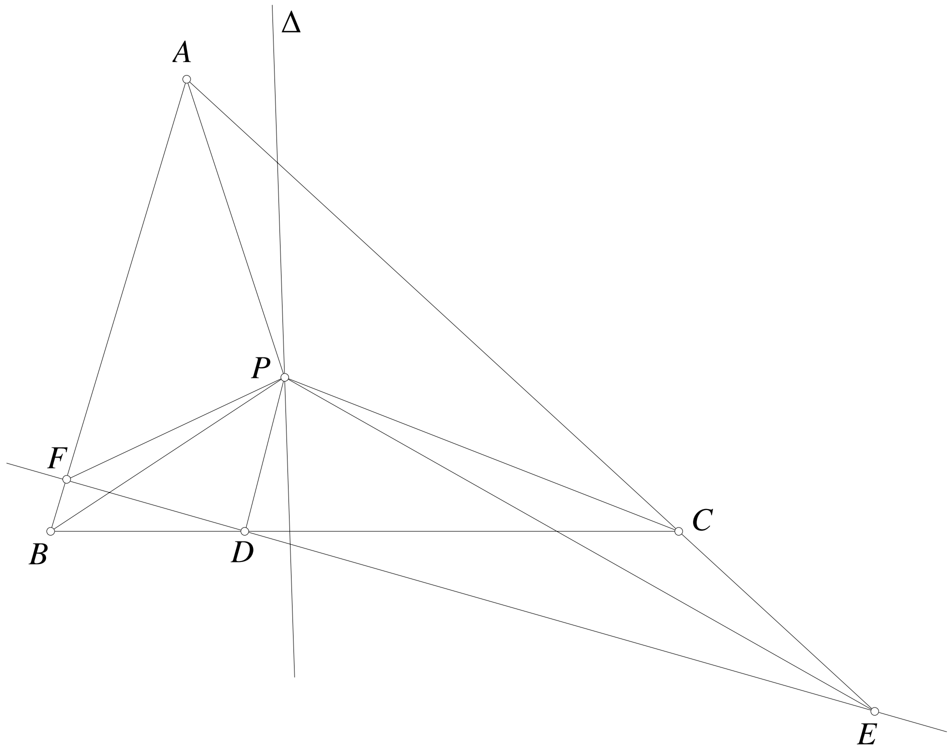
TÓM TẮT

Hai đường thẳng vuông góc với nhau tại trực tâm của tam giác sẽ chắn trên ba cạnh tam giác ba đoạn thẳng mà trung điểm của chúng thẳng hàng. Đó là nội dung một định lý rất nổi tiếng có tên là Droz-Farny. Bài viết này đưa ra một hướng tổng quát cho bài toán đường thẳng Droz-Farny cùng với lời giải sử dụng phép nghịch đảo và một lời giải khác sử dụng tính chất chùm điều hòa.

Định lý lần đầu tiên được đề nghị bởi Arnold Droz năm 1899 trong [1]. Các lời giải sử dụng lượng giác, phương pháp tọa độ hoặc vector lần lượt được đưa ra trong [2,3,4,5,6]. Trong [7] trình bày một hướng tổng quát cho định lý này sử dụng các kiến thức về tỷ số kép và độ dài đại số. Trong [8] một định lý tổng quát khác được đề cập với lời giải sử dụng tính chất điểm Miquel và điểm đẳng giác. Bài viết này sẽ giới thiệu bài toán tổng quát giống trong [8] [1] với lời giải sử dụng phép nghịch đảo. Đồng thời bài viết cũng đề cập tới một bài toán tổng quát hơn nữa, với lời giải sử dụng thuần túy hình học xạ ảnh.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Đường thẳng Δ qua P. Các điểm D, E, F lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho PD, PE, PF lần lượt là đối xứng của PA, PB, PC qua Δ. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

[1] Tác giả tìm ra độc lập với [8]



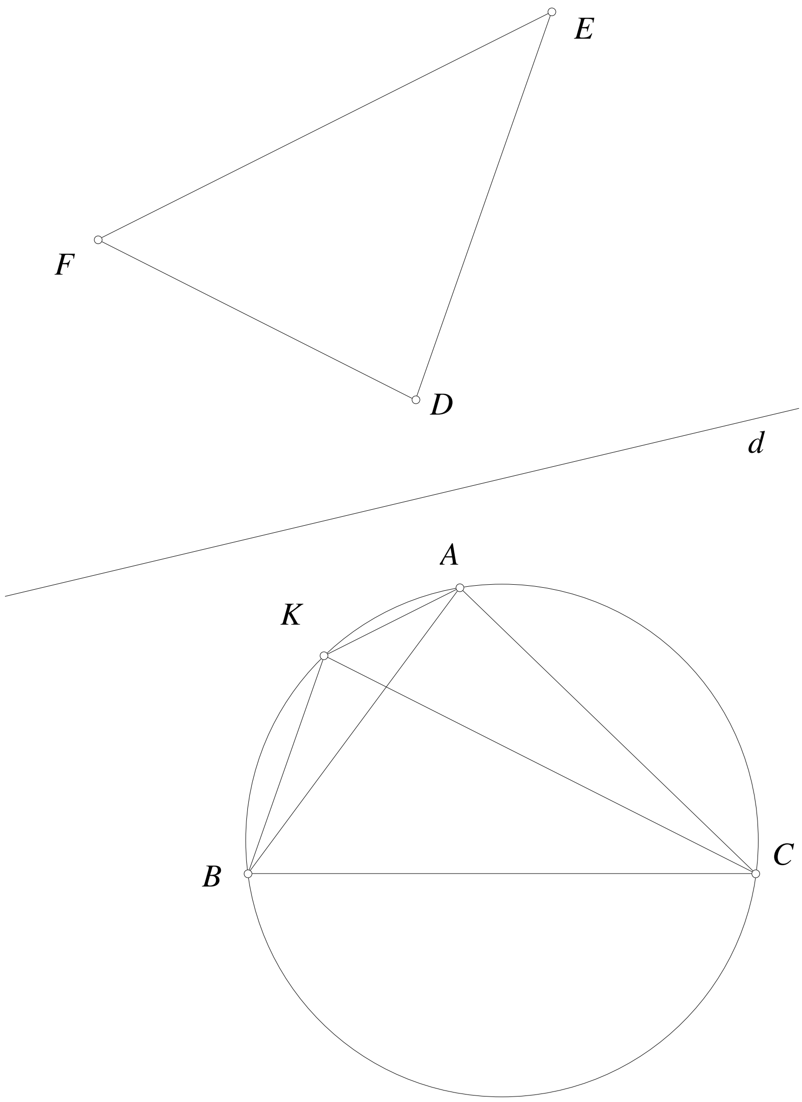
Hình 1.

Sử dụng phép nghịch đảo cực P phương tích bất kỳ ta chuyển bài toán trên về bài toán sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. Gọi $(K), (L), (N)$ lần lượt là các đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC, PCA, PAB. D, E, F lần lượt thuộc $(K), (L), (N)$ sao cho PD, PE, PF lần lượt là đối xứng của PD, PE, PF qua Δ. Chứng minh rằng bốn điểm P, D, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Để giải bài toán trên ta cần một bổ đề sau

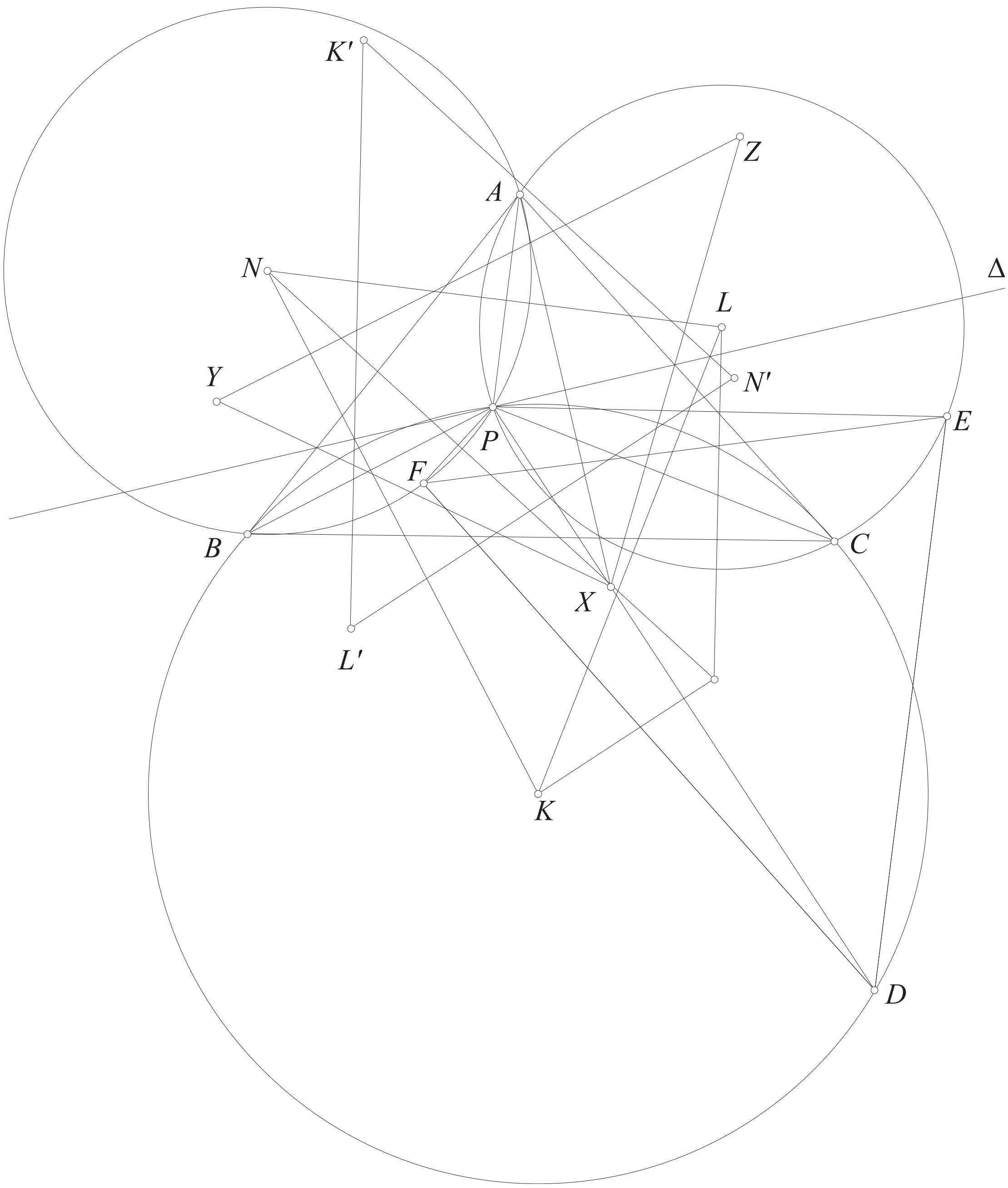
Bổ đề 2.1. Cho tam giác ABC và đường thẳng Δ bất kỳ. Tam giác DEF là đối xứng của tam giác ABC qua Δ, thì các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với EF, FD, DE đồng quy.



Hình 2.

Chứng minh. Gọi đường thẳng qua B, C lần lượt song song với FD, DE cắt nhau tại K. Ta có $(KB, KC) \equiv (FD, DE) \equiv (AB, AC)(\bmod \pi)$. Suy ra điểm K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta lại có $(KA, EF) \equiv (KA, KB) + (KB, EF) \equiv (CA, CB) + (DF, EF) \equiv (CA, CB) + (CB, CA) \equiv 0(\bmod \pi)$. Do đó $KA \parallel EF$. Vậy các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với EF, FD, DE đồng quy tại K. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Trở lại giải bài toán



Hình 3.

Lời giải bài toán. Ta gọi X, Y, Z lần lượt là điểm đối xứng với A, B, C qua Δ, theo giả thiết dễ thấy X, Y, Z thuộc PD, PE, PF. Gọi trung trực của PX, PY, PZ cắt nhau tương ứng tại thành tam giác $K'L'N'$. Ta dễ thấy tam giác $K'L'N'$ đối xứng tam giác KLN qua Δ.

Để chứng minh P, D, E, F cùng nằm trên một đường tròn ta sẽ chứng minh rằng trung trực của PD, PE, PF đồng quy. Thật vậy, do PD là một dây cung của (K) nên trung trực của PD đi qua K. Do X thuộc PD nên trung trực PD song song với trung trực PX chính là $L'N'$, vậy trung trực PD là đường thẳng qua K song song $K'N'$. Tương tự trung trực PE, PF lần lượt là các đường thẳng qua L, N theo thứ tự song song với $N'K'$ và $K'L'$. Do tam giác KLN và $K'L'N'$ đối xứng nhau qua Δ nên theo bổ đề các trung trực này đồng quy. Vậy P, D, E, F cùng thuộc một đường tròn. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta thấy rằng nếu kẻ một đường thẳng $\Delta' \perp \Delta$ thì chùm đường thẳng $(\Delta, \Delta', OA, OD)$ là một chùm điều hòa vì OA, OD đối xứng nhau qua Δ. Điều này gợi mở cho chúng ta một hướng tổng quát hơn nữa bài toán này thông qua khái niệm về chùm điều hòa mà bỏ qua tính chất đối xứng. Ta quy ước sử dụng các ký hiệu

$(XY, Z) = \dfrac{ZX}{ZY}$ chỉ tỷ số đơn của bộ ba điểm thẳng hàng X, Y, Z.

$(XY, ZT) = \dfrac{ZX}{ZT} : \dfrac{TX}{TY}$ chỉ tỷ số kép của bộ bốn điểm thẳng hàng hoặc đồng viên X, Y, Z, T.

$A(XY, ZT)$ chỉ tỷ số kép của bộ bốn tia (AX, AY, AZ, AT)

Với các độ dài sử dụng là độ dài đại số. Ta xét bài toán tổng quát hơn như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và P, K, L là các điểm bất kỳ. Giả sử có các điểm D, E, F lần lượt thuộc các đường thẳng BC, CA, AB sao cho các chùm $P(KL, AD) = P(KL, BE) = P(KL, CF) = -1$. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.

Ta thấy ngay rằng nếu $PK \perp PL$. Ta thu được bài toán ban đầu. Bài toán này phát biểu dưới dạng chùm điều hòa nên nó cũng có một lời giải thuần túy xạ ảnh. Ta cần một bổ đề sau

Bổ đề 3.1. Cho các điểm D, E, F, X, Y, Z, K, L cùng thuộc một đường thẳng thỏa mãn $(KL, DX) = (KL, EY) = (KL, FZ) = -1$. Chứng minh rằng tích $(EF, DX).(FD, EY).(DE, FZ) = -1$.

Chứng minh. Bài toán thực chất là các biến đổi độ dài đại số trên trục, để đơn giản ta sử dụng tọa độ trên trục. Cho $D(d), E(e), F(f), X(x), Y(y), Z(z), K(k), L(l)$.

Từ $(KL, DX) = -1$ suy ra $\dfrac{d-k}{d-l} : \dfrac{x-k}{x-l} = -1$ vậy $x = \dfrac{dl - 2kl + dk}{2d - k - l}$. Tương tự $y = \dfrac{el - 2kl + ek}{2e - k - l}, z = \dfrac{fl - 2kl + fk}{2f - k - l}$ (1).

Ta có $(EF, DX).(FD, EY).(DE, FZ)$

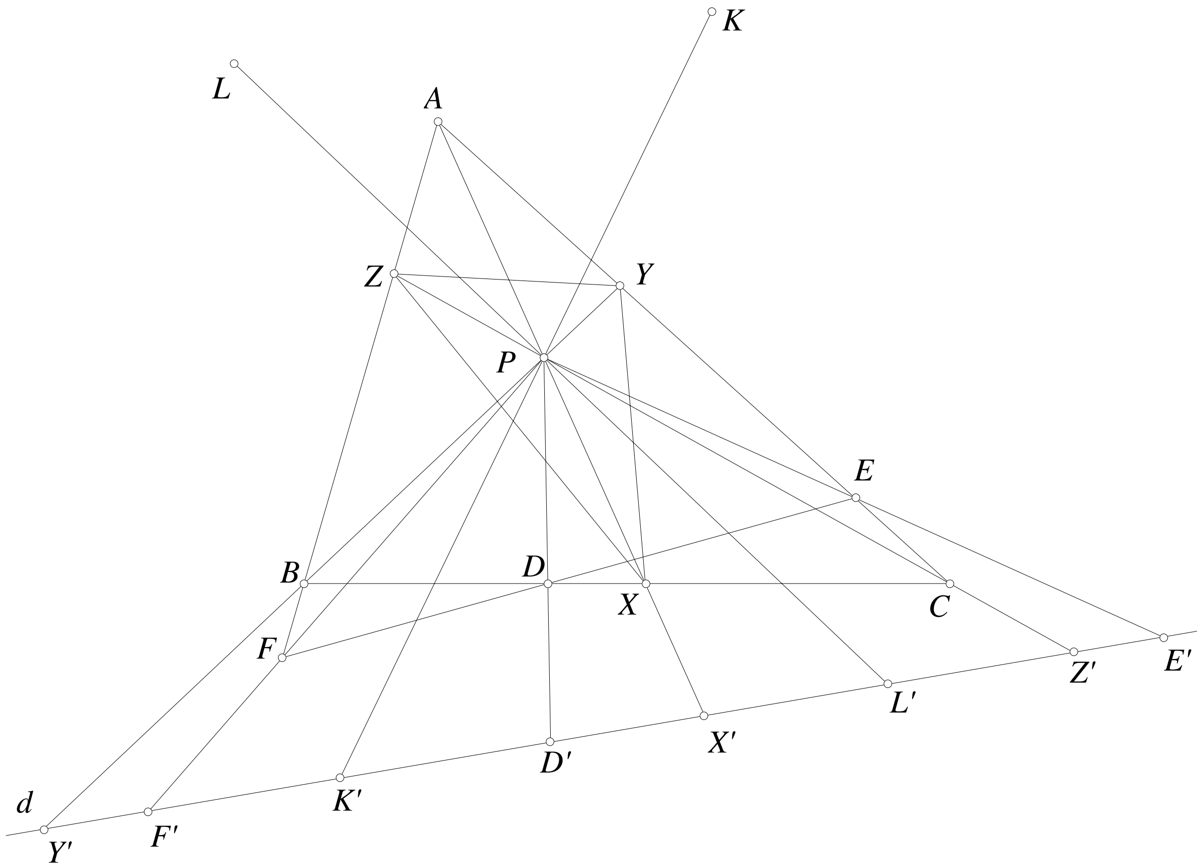
$$= \frac{(EF, D)}{(EF, X)} \cdot \frac{(FD, E)}{(FD, Y)} \cdot \frac{(DE, F)}{(DE, Z)}$$

$$= \frac{-1}{(EF, X).(FD, Y).(DE, Z)}$$

$$= -\frac{x-f}{x-e} \cdot \frac{y-d}{y-f} \cdot \frac{z-e}{z-d} \quad (2).$$

Thay biểu thức từ (1) vào (2) dễ kiểm tra được $(EF, DX).(FD, EY).(DE, FZ) = -1$. $\square$

Trở lại bài toán



Hình 4.

Lời giải bài toán. Gọi PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại X, Y, Z. Gọi d là một đường thẳng bất kỳ. Gọi $PA, PB, PC, PD, PE, PF, PK, PL$ lần lượt cắt d tại $D', E', F', X', Y', Z', K', L'$. Từ giả thiết $P(KL, AD) = P(KL, BE) = P(KL, CF) = -1$, chiếu xuyên tâm P lên d ta có $(K'L', X'D') = (K'L', Y'E') = (K'L', C'F') = -1$.

Áp dụng bổ đề ta suy ra $(E'F', D'X').(F'D', E'Y').(D'E', F'Z') = -1 \quad (1)$.

Sử dụng phép chiếu xuyên tâm P lần lượt các đường thẳng BC, CA, AB thì ta thu được

$P(E'F', D'X') = (BC, DX) = \dfrac{(BC, D)}{(BC, X)}$, $P(F'D', E'Y') = (CA, EY) = \dfrac{(CA, E)}{(CA, Y)}$, $P(D'E', F'Z') = (AB, FZ) = \dfrac{(AB, F)}{(AB, Z)} \quad (2)$.

Vì AX, BY, CZ đồng quy tại P nên theo định lý Ceva $(BC, X).(CA, Y).(AB, Z) = -1 \quad (3)$.

Từ (1),(2),(3) ta suy ra

$$-1 = (E'F', D'X').(F'D', E'Y').(D'E', F'Z')$$

$$= P(E'F', D'X').P(F'D', E'Y').P(D'E', F'Z')$$

$$= \frac{(BC, D)}{(BC, X)}.\frac{(CA, E)}{(CA, Y)}.\frac{(AB, F)}{(AB, Z)}$$

$= -(BC, D).(CA, E).(AB, F)$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC dễ suy ra D, E, F thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Cuối bài viết, tác giả xin được nói lời cảm ơn tới **TS. Nguyễn Minh Hà** người đã cho tác giả một số ý tưởng về lời giải nghịch đảo của bài toán tổng quát này.

Tài liệu

[1] A. Droz-Farny, Question 14111, Ed. Times 71 (1899) 89-90.

[2] J. L. Ayme, Forum Geom., Vol 4, (2004), pp 219-224.

[3] F. M. van Lamoen, Hyacinthor messages 6140, 6144, December 11,2002.

[4] D. Grinberg, Hyacinthor messages 9854, July 23, 2003.

[5] M. Stevanovié, Hyacinthor messages 9130, January 25, 2004.

[6] C. Pohoata and S.H. Ta, A Short Proof of Lamoen's Generalization of the Droz-Farny Line Theorem, Mathematical reflections 2006.

[7] N.M. Ha and L.T. Vinh, Purely synthetic proof of the Generalized Droz-Farny Theorem, Global journal of advanced research on classical and modern geometries.

[8] T. Andreescu and C. Pohoata, Back to Euclidean: Droz-Farny Demystified, Mathematical reflections 2012.

[9] Roger A. Johnson, Advanced Euclidean Geomerty, Dover Publications, Inc., N.Y. (1960).

Đường thẳng Euler và mở rộng

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này giới thiệu các mở rộng của đường thẳng Euler với các kiến thức dùng cho THCS

Đường thẳng Euler có thể coi là một trong những định lý quen thuộc nhất của hình học phẳng. Khái niệm đường thẳng Euler trước hết liên quan đến tam giác, sau đó đã được mở rộng và ứng dụng cho tứ giác nội tiếp và cả n-giác nội tiếp, nhưng vì khối lượng kiến thức quá lớn nên trong bài viết nhỏ này tôi chỉ mong muốn trình bày những vấn đề cô đọng xúc tích nhất liên quan đến khái niệm này trong tam giác. Xin hẹn các bạn chuyên đề mở rộng cho đa giác ở những bài giảng tiếp sau.

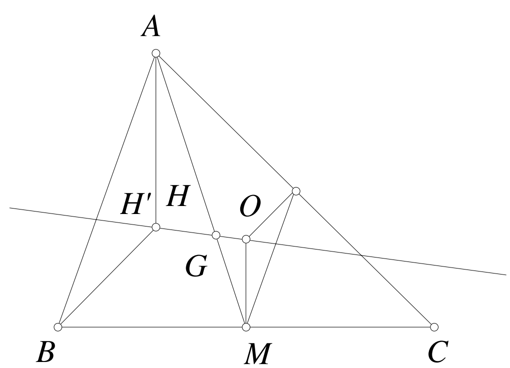
Bài 1 (Đường thẳng Euler)**.** Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng trọng tâm G, trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O cùng nằm trên một đường thẳng. Hơn nữa $\dfrac{GH}{GO} = 2$. Đường thẳng nối H, G, O gọi là đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Lời giải

Bài toán này có nhiều lời giải, lời giải sau đây sử dụng định lý Thales khá đơn giản, nó là chìa khóa cho một bài tổng quát hơn.

Trên tia đối tia GO lấy H' sao cho $GH' = 2GO$. Gọi M là trung điểm BC. Theo tính chất trọng tâm thì G thuộc AM và $GA = 2GM$. Áp dụng định lý Thales vào tam giác GOM dễ suy ra $AH' \parallel OM \quad (1)$.

Mặt khác do O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, M là trung điểm BC nên $OM \perp BC \quad (2)$



Hình 1.

Từ $(1), (2)$ suy ra $AH' \perp BC$, tương tự $BH' \perp CA$ vậy $H' \equiv H$ là trực tâm tam giác ABC. Theo cách dựng H' ta có ngay kết luận bài toán.

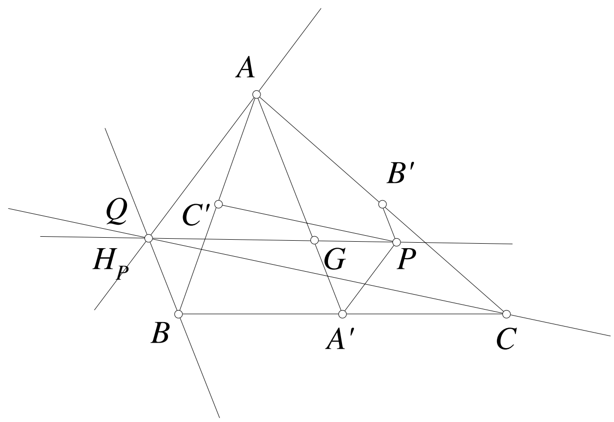
Bài 2 (Mở rộng đường thẳng Euler)**.** Cho tam giác ABC. P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. G là trọng tâm tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với PA', PB', PC' đồng quy tại một điểm H_P, hơn nữa H_P, G, P thẳng hàng và $\frac{GH_P}{GP} = 2$.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng qua A', B', C' lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại một điểm O_P, hơn nữa O_P, G, P thẳng hàng và $\frac{GO_P}{GP} = \frac{1}{2}$.

Lời giải

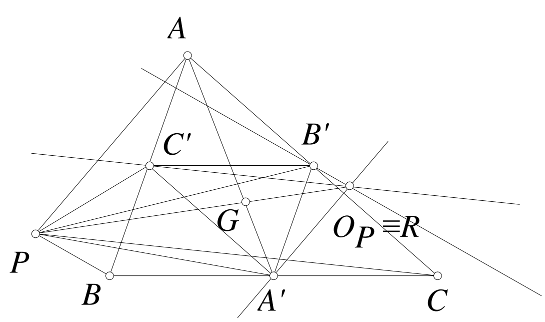
a) Ta thấy rằng kết luận của bài toán khá rắc rối, tuy nhiên ý tưởng của lời giải bài 1 giúp ta đi đến một lời giải rất ngắn gọn như sau



Hình 2.

Lấy điểm Q trên tia đối tia tia GP sao cho $GQ = 2GP$. Theo tính chất trọng tâm ta thấy ngay G thuộc AA' và $GA = 2GA'$. Vậy áp dụng định lý Thales vào tam giác GPA' dễ suy ra $AQ \parallel PA'$. Chứng minh tương tự $BQ \parallel PB', CQ \parallel PC'$. Như vậy các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với PA', PB', PC' đồng quy tại $Q \equiv H_P$. Hơn nữa theo cách dựng Q thì H_P, G, O thẳng hàng và $\frac{GH_P}{GO} = 2$. Ta có ngay các kết luận bài toán.

b) Ta có một lời giải tương tự. Lấy điểm R trên tia đối tia tia GP sao cho $GR = \frac{1}{2}GP$. Theo tính chất trọng tâm ta thấy ngay G thuộc AA' và $GA = 2GA'$. Vậy áp dụng định lý Thales vào tam giác GPA dễ suy ra $AR \parallel PA$. Chứng minh tương tự $BR \parallel PB, CR \parallel PC$. Như vậy các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại $R \equiv O_P$. Hơn nữa theo cách dựng R thì O_P, G, P thẳng hàng và $\frac{GP}{GO_P} = 2$. Ta có ngay các kết luận bài toán.



Hình 3.

Nhận xét. Bài toán trên thực sự là mở rộng của đường thẳng Euler. Phần a) khi $P \equiv O$ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC ta có ngay $H_P \equiv H$ là trực tâm tam giác ABC. Ta thu được nội dung của bài toán đường thẳng Euler. Phần b) khi $P \equiv H$ trực tâm của tam giác ABC thì $O_P \equiv O$ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Sau đây chúng ta hãy ứng dụng các bài toán này vào những bài hình học khác. Ở đây thuật ngữ góc tạo bởi hai đường thẳng để chỉ góc bé nhất trong bốn góc tạo thành khi hai đường thẳng đó cắt nhau, chúng ta thường ký hiệu góc tạo bởi hai đương thẳng x, y là (x, y).

Bài 3. Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ đồng dạng (cùng hướng). Chứng minh rằng góc tạo bởi đường thẳng Euler của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ bằng góc hợp bởi hai đường thẳng BC và $B'C'$.

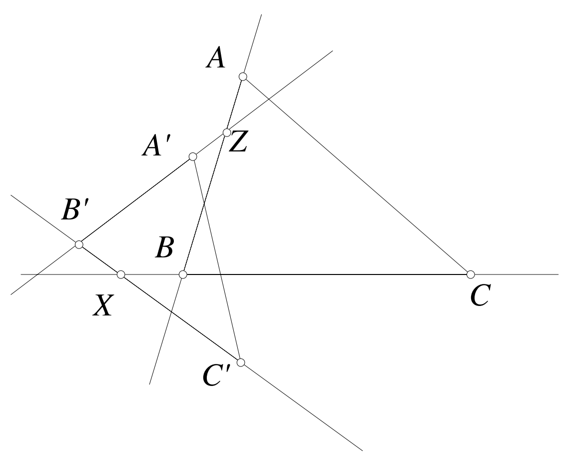
Lời giải

Để chứng minh bài toán này, chúng ta sử dụng bổ đề đơn giản sau

Bổ đề 3.1. Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ đồng dạng (cùng hướng) thì $(AB, A'B') = (BC, B'C') = (CA, C'A')$.

Lời giải

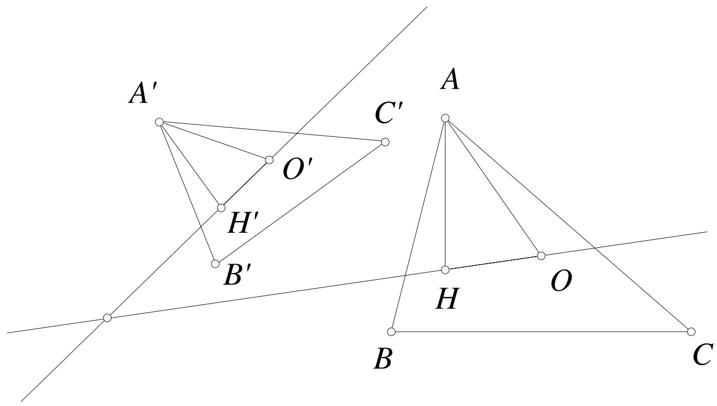
Chúng ta sẽ sử dụng ngôn ngữ của tứ giác nội tiếp để diễn đạt lời giải này cho chặt chẽ. Gọi X là giao điểm của BC và $B'C'$, Z là giao của AB và $A'B'$. Do $\widehat{B} = \widehat{B'}$ nên tứ giác $B'ZBX$ nội tiếp.



Hình 4.

Từ đó dễ suy ra $\widehat{C'XB} = \widehat{BZA'}$ (hoặc $\widehat{B'XB} = \widehat{A'ZA}$) hay $(BC, B'C') = (CA, C'A')$. Chứng minh tương tự ta được $(AB, A'B') = (BC, B'C') = (CA, C'A')$.

Trở lại bài toán. Gọi O, O', H, H' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm các tam giác ABC và $A'B'C'$.



Hình 5.

Đường thẳng Euler của tam giác ABC và $A'B'C'$ là OH và $O'H'$. Từ tính chất cơ bản của hai tam giác đồng dạng ta dễ chứng minh được $\triangle AOH \sim \triangle A'O'H'$. Do đó theo bổ đề $(OH, O'H') = (HA, H'A') = (BC, B'C') = (CA, C'A') = (AB, A'B')$. Đó là điều phải chứng minh.

Sau đây chúng ta chủ yếu tập trung vào chứng minh sự đồng quy của các đường thẳng Euler.

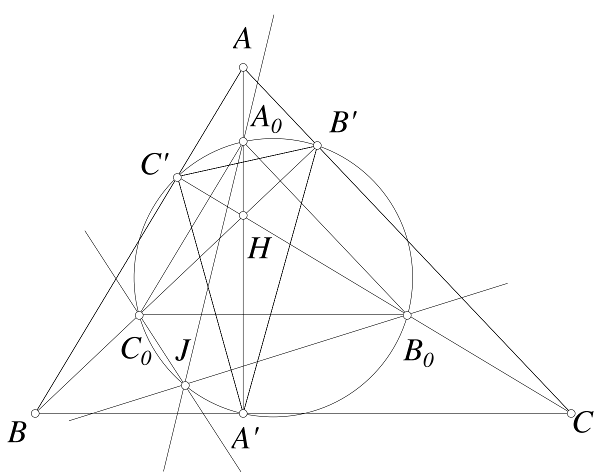
Bài 4. Cho tam giác ABC có các đường cao AA', BB', CC'. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$ đồng quy tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$.

Lời giải

Gọi H là giao điểm ba đường cao AA', BB', CC', A_0, B_0, C_0 lần lượt là trung điểm HA, HB, HC, d_a, d_b, d_c lần lượt là đường thẳng Euler của tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$. Ký hiệu đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ là (XYZ), ký hiệu này chúng ta sẽ dùng trong cả bài viết này.

Ta chú ý rằng A_0, B_0, C_0 cũng chính là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$ nên d_a, d_b, d_c lần lượt đi qua A_0, B_0, C_0.

Ta chú ý rằng $(A'B'C') \equiv (A_0B_0C_0)$ chính là đường tròn chín điểm của tam giác ABC. Nếu ta chứng minh được d_b, d_c cắt nhau tại một điểm trên $(A'B'C')$ thì tương tự d_c, d_a và d_a, d_b chũng cắt nhau tại một điểm trên đường tròn $(A'B'C')$, mặt khác d_a, d_b, d_c lần lượt có điểm chung A_0, B_0, C_0 với $(A'B'C')$ nên chúng chỉ còn một điểm chung khác nữa, do đó chúng đồng quy tại một điểm trên $(A'B'C')$.



Hình 6.

Vậy ta tập trung vào chứng minh kết luận giao điểm J của d_b, d_c nằm trên $(A'B'C')$. Thật vậy, ta dễ chứng minh được các tam giác $A'B'C$ và $A'BC'$ đồng dạng (cùng hướng). Do đó theo bài 3 góc tạo bởi đường thẳng Euler $(d_b, d_c) = (B'C, BC') = (AB, AC) = (A_0B_0, A_0C_0)$ (đẳng thức cuối là do $AB \parallel A_0B_0, AC \parallel A_0C_0$). Ta chú ý rằng góc hợp bởi hai đường thẳng là góc bé nhất trong bốn góc tạo thành khi hai đường thẳng đó cắt nhau, do đó tứ giác $A_0B_0JC_0$ nội tiếp hay giao điểm J của d_b, d_c nằm trên $(A_0B_0C_0) \equiv (A'B'C')$. Bài toán được chứng minh.

Nhận xét. Điểm đồng quy J của ba đường thẳng Euler nói trên thường được gọi là điểm Jerabek của tam giác ABC. Điểm Jerabek có nhiều tính chất hình học thú vị, bạn đọc có thể tham khảo thêm trong [3,4].

Bài 5. Cho tam giác ABC trực tâm H. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác HBC, HCA, HAB đồng quy tại một điểm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

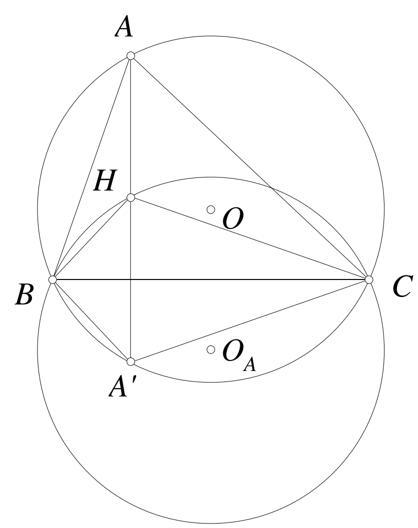
Lời giải

Để giải bài toán này chúng ta cần hai bổ đề quen thuộc sau

Bổ đề 5.1 Cho tam giác ABC trực tâm H. Thì $(HBC), (HCA)$, (HAB) lần lượt đối xứng với (ABC) qua BC, CA, AB.

Lời giải

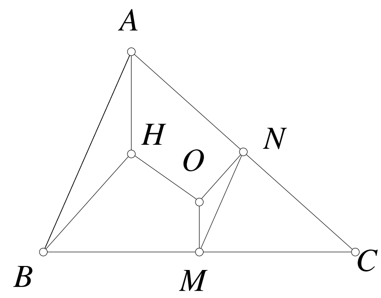
Gọi giao điểm khác A của HA với (ABC) là A'. Theo tính chất trực tâm và góc nội tiếp dễ thấy $\widehat{HBC} = \widehat{HAC} = \widehat{A'BC}$. Do đó tam giác HBA' cân tại B hay H và A' đối xứng nhau qua BC do đó (HBC) đối xứng (ABC). Tương tự cho $(HCA), (HAB)$, ta có điều phải chứng minh.



Hình 7.

Bổ đề 5.2 Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm đường tròn ngoại tiếp O, M là trung điểm BC thì $HA = 2OM$.

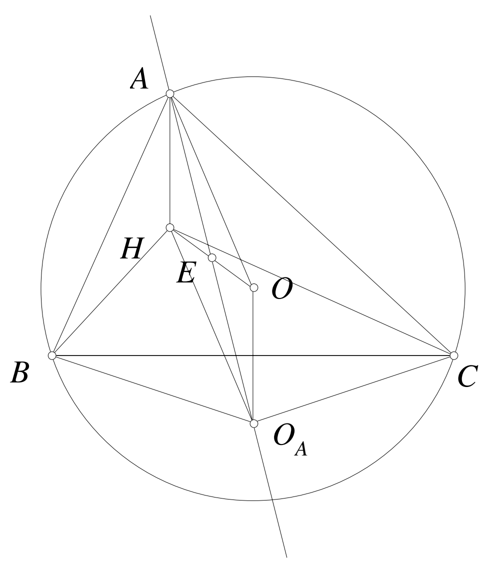
Lời giải



Hình 8.

Gọi N là trung điểm CA dễ thấy $OM \parallel HA$ do cùng vuông góc BC và $OM \parallel HB$ do cùng vuông góc CA nên ta có tam giác $\triangle HAB \sim \triangle OMN$ tỷ số $\dfrac{AB}{MN} = 2$. Do đó $HA = 2OM$, đó là điều phải chứng minh.

Trở lại bài toán. Gọi O_A là tâm (HBC) theo bổ đề 5.1 thì O_A đối xứng O qua BC, kết hợp bổ đề 5.2 suy ra OO_A song song và bằng OH nên tứ giác AHO_AA là hình bình hành nên AO_A đi qua trung điểm E của OH. Tuy nhiên dễ thấy A là trực tâm tam giác HBC do đó đường thẳng Euler của tam giác HBC là AO_A đi qua E. Tương tự thì đường thẳng Euler của các tam giác HCA, HAB cũng đi qua E nằm trên OH là đường thẳng Euler của tam giác ABC. Đó là điều phải chứng minh.



Hình 9.

Nhận xét. Điểm đồng quy E là trung điểm OH cũng chính là tâm đường tròn chín điểm quen thuộc. Đường tròn chín điểm đi qua chín điểm gồm trung điểm ba cạnh, chân ba đường cao và trung điểm đoạn nối trực tâm và đỉnh, đường tròn này cũng được biết đến với tên gọi là đường tròn Euler của tam giác.

Bài 6. Cho tam giác ABC tâm đường tròn nội tiếp I. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác IBC, ICA, IAB đồng quy tại một điểm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Lời giải

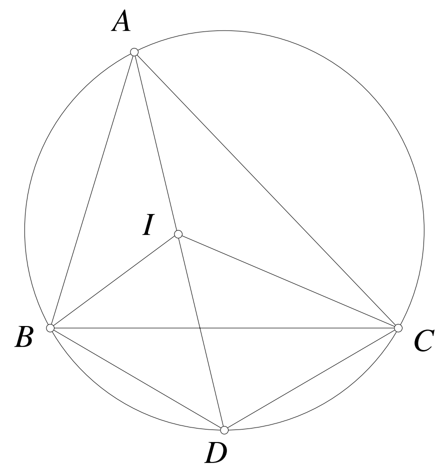
Ta sử dụng các bổ đề sau

Bổ đề 6.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm đường tròn nội tiếp I. IA cắt (O) tại điểm D khác A thì D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

Lời giải

Sử dụng tính chất góc nội tiếp và góc ngoài tam giác ta có
$\widehat{IBD} = \widehat{IBC} + \widehat{CBD} = \widehat{IBA} + \widehat{IAC} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = \widehat{BID}$

Vậy tam giác IDB cân tai D. Tương tự tam giác ICD cân tại D do đó $DI = DB = DC$ vậy D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.



Hình 10.

Bổ đề 6.2 (Định lý Menelaus)**.** Cho tam giác ABC một đường thẳng cắt ba cạnh BC, CA, AB tương ứng tại A', B', C' thì

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1.$$

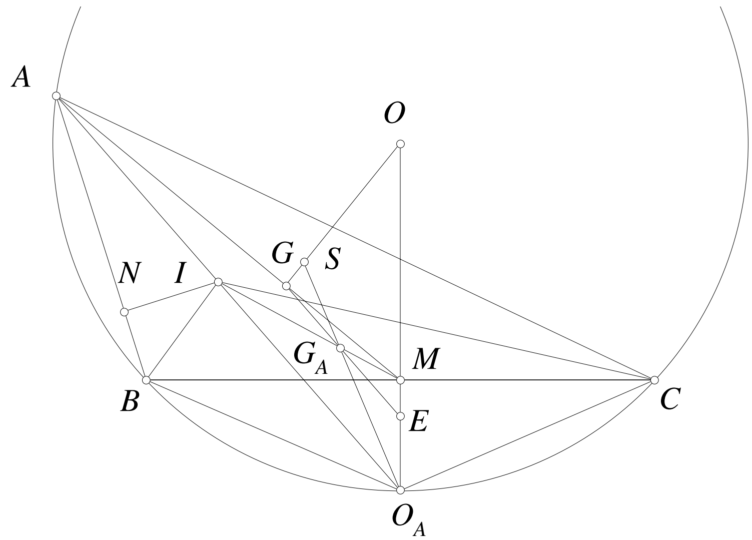
Định lý đã được chứng minh chi tiết trong §7 của [7].

Trở lại bài toán. Gọi O là tâm (ABC), IA giao (ABC) tại điểm O_A khác A, G, G_A lần lượt là trọng tâm tam giác ABC, IBC, M là trung điểm BC, GG_A cắt OO_A tại E.

Theo bổ đề 6.1 và các tính chất cơ bản ta thấy O_A là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O) do đó OO_A vuông góc BC tại M. $\dfrac{IG_A}{IM} = \dfrac{AG}{AM} = \dfrac{2}{3}$ nên $GG_A \parallel AO_A$ suy ra $\dfrac{O_AE}{O_AM} = \dfrac{2}{3}$ (1), hơn nữa $\dfrac{G_AE}{G_AG} = \dfrac{IO_A}{IA} = \dfrac{CO_A}{IA}$ (2).

Gọi G_AO_A (đường thẳng Euler của tam giác IBC) cắt OG (đường thẳng Euler của tam giác ABC tại S). Ta sẽ chứng minh rằng S cố định.

Gọi N là hình chiếu của I lên AB. Do $\widehat{AIB} = \widehat{BCO_A}$ nên hai tam giác vuông $\triangle IAN$ và $\triangle O_ACM$ đồng dạng. Do đó $\dfrac{IA}{O_AC} = \dfrac{IN}{MO_A} = \dfrac{r}{MO_A}$ hay $r = \dfrac{CO_A}{MO_A.IA}$ (3).



Hình 11.

Áp dụng định lý Menelaus vào tam giác GOE có S, G_A, O_A thẳng hàng ta có

$$\begin{aligned}1 &= \frac{SG}{SO}.\frac{O_AO}{O_AE}.\frac{G_AE}{G_AG}\\ &= \frac{SG}{SO}.\frac{R}{\frac{3}{2}O_AM}.\frac{CO_A}{IA} \text{ (do (1),(2))}\\ &= \frac{SG}{SO}.\frac{2R}{3r} \text{ (do (3))}\end{aligned}$$

Vậy $\dfrac{SG}{SO} = \dfrac{3r}{2R}$, do đó S cố định. Tương tự, các đường thẳng Euler của tam giác ICA, IAB cũng đi qua S nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Điểm đồng quy S thường được gọi là điểm Schiffler của tam giác ABC. Bạn đọc có thể tham khảo thêm tính chất điểm này trong [3,4]

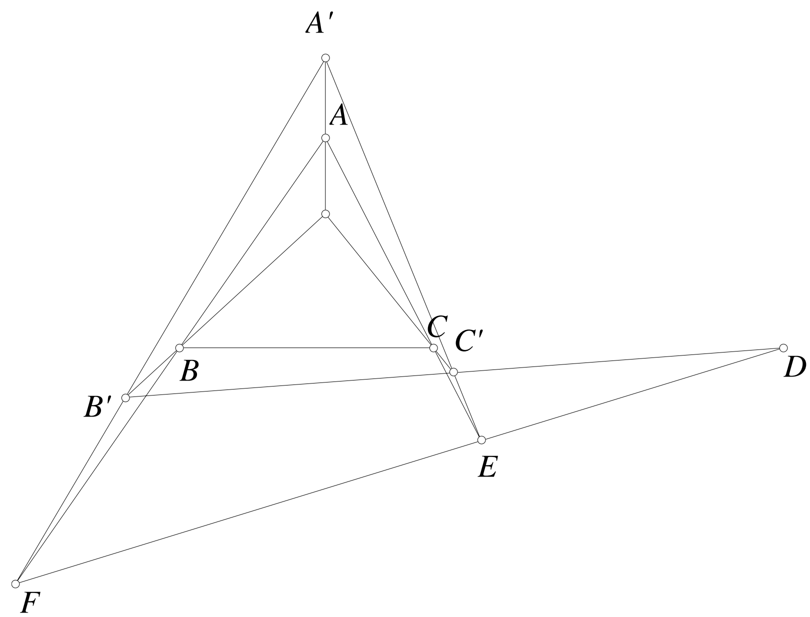
Qua hai bài 5, 6 chúng ta thử đặt ra câu hỏi về một bài toán tổng quát, có những điểm P nào trong tam giác mà đường thẳng Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB đồng quy ?(Rõ ràng là tính chất này không đúng với mọi P trong mặt phẳng). Thực chất quỹ tích các điểm P như vậy là một đường cong bậc 3 hợp với đường tròn ngoại tiếp tam giác, bài toán đó đã vượt qua khuôn khổ của chuyên đề này. Tuy vậy chúng ta có thể đưa bài toán đó về một bài toán đơn giản hơn mà có thể coi như là một dấu hiệu để xét sự đồng quy của ba đường thẳng Euler, đó là bài toán dưới đây

Bài 7. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ. O_A, O_B, O_C lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB đồng quy khi và chỉ khi AO_A, BO_B, CO_C đồng quy.

Lời giải

Ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 7.1 (Định lý Desargues)**.** Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ nếu gọi D, E, F tương ứng là giao của $B'C', C'A', A'B'$ với BC, CA, AB. Khi đó $AA', BB', C'C'$ đồng quy khi và chỉ khi D, E, F thẳng hàng.



Hình 12.

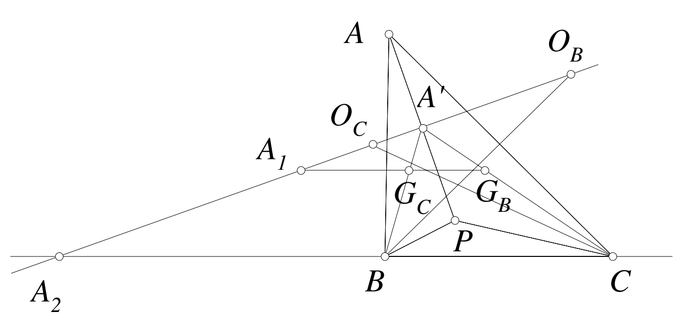
Bổ đề đã được chứng minh chi tiết trong §7 của [7].

Trở lại bài toán. Gọi G_A, G_B, G_C lần lượt là trọng tâm các tam giác PBC, PCA, PAB, các đường thẳng Euler tương ứng là O_AG_A, O_BG_B, O_CG_C. Áp dụng bổ đề 7.1 cho tam giác $O_AO_BO_C$ và tam giác $G_AG_BG_C$ ta thấy O_AG_A, O_BG_B, O_CG_C đồng quy khi và chỉ khi giao điểm tương ứng của $O_BO_C \cap G_BG_C = \{A_1\}; O_CO_A \cap G_CG_A = \{B_1\}; O_AO_B \cap G_AG_B = \{C_1\}$ thẳng hàng (1).

Cũng áp dụng bổ đề 7.1 ta lại thấy AO_A, BO_B, CO_C đồng quy khi và chỉ khi khi giao điểm tương ứng của $O_BO_C \cap BC = \{A_2\}; O_CO_A \cap CA = \{B_2\}; O_AO_B \cap AB = \{C_2\}$ thẳng hàng (2).

Bài toán được chứng minh nếu ta chỉ ra được (1) và (2) tương đương. Tức là A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi A_2, B_2, C_2 thẳng hàng.

Thật vậy, gọi A' là trung điểm PA, ta đẽ thấy O_B, O_C, A_1, A_2 và A' đều nằm trên trung trực của PA. Áp dụng tính chất trọng tâm ta thấy ngay đường thẳng chứa G_B, G_C, A_1 song song đường thẳng chứa B, C, A_2. Từ đó sử dụng hệ quả của định lý Thales ta có ngay $\dfrac{A_1G_B}{A_1G_C} = \dfrac{A_2B}{A_2C}$.



Hình 13.

Tương tự cho các đỉnh B, C ta có $\dfrac{B_1G_C}{B_1G_A} = \dfrac{B_2C}{B_2A}, \dfrac{C_1G_A}{C_1G_B} = \dfrac{C_2A}{C_2B}$. Nhân các tỷ số ta thu được $\dfrac{A_1G_B}{A_1G_C}.\dfrac{B_1G_C}{B_1G_A}.\dfrac{C_1G_A}{C_1G_B} = \dfrac{A_2B}{A_2C}.\dfrac{B_2C}{B_2A}.\dfrac{C_2A}{C_2B}$

Sử dụng đẳng thức trên, ta áp dụng định lý Menelaus vào các tam giác $G_AG_BG_C, ABC$ thì A_1, B_1, C_1 thẳng hàng khi và chỉ khi $\dfrac{A_1G_B}{A_1G_C}.\dfrac{B_1G_C}{B_1G_A}.\dfrac{C_1G_A}{C_1G_B} = 1$ khi và chỉ khi $\dfrac{A_2B}{A_2C}.\dfrac{B_2C}{B_2A}.\dfrac{C_2A}{C_2B} = 1$ khi và chỉ khi A_2, B_2, C_2 thẳng hàng. Suy ngược lại các kết quả ta được điều phải chứng minh.

Nhận xét. Dấu hiệu AO_A, BO_B, CO_C đồng quy có thể coi là kiểm tra dễ dàng hơn so với việc trực tiếp chỉ ra ba đường thẳng Euler đồng quy. Ta dễ dàng kiểm chứng lại điều đó trong các bài 5 và 6. Sau đây là hai bài toán tương tự để áp dụng tính chất này

Bài 8. Cho tam giác ABC dựng ra ngoài các tam giác đều BCA', CAB', ABC'

a) Chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy tại điểm F (Gọi là điểm Fermat của tam giác ABC), nếu $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} < 120°$ thì F nằm trong tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác FBC, FCA, FAB đồng quy tại một điểm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Bài 9. Cho tam giác đều ABC và P là điểm bất kỳ, chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác PBC, PCA, PAB đồng quy.

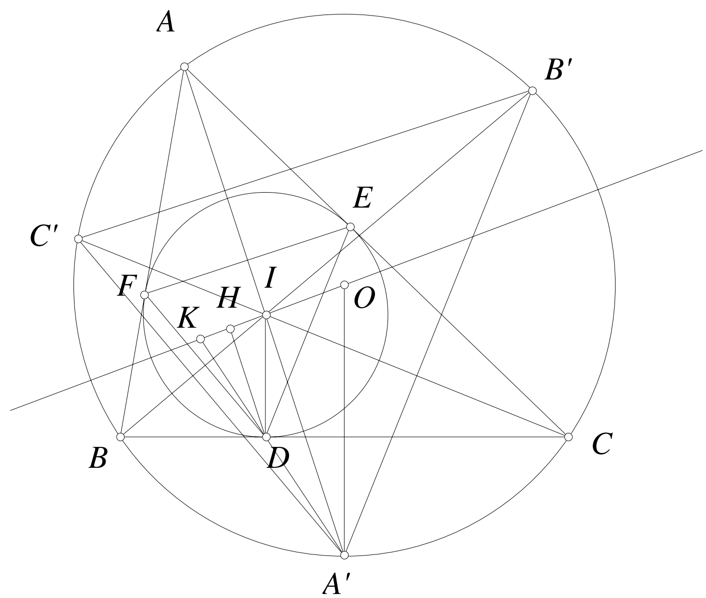
Nhận xét. Chúng ta vẫn còn một điều nghi vấn là tại sao các điểm đồng quy của ba đường thẳng Euler luôn nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC ? Thực chất đây là một tính chất thú vị tuy vậy việc chứng minh nó cũng vượt quá khuôn khổ của chuyên đề này, chúng ta hãy chỉ tham khảo phát biểu của nó

Bài 10. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ. Nếu đường thẳng Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB đồng quy thì điểm đồng quy nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Ta có một chú ý rằng bài 9 cũng đã nói lên tính chất đồng quy này đúng với mọi P trong mặt phẳng nhưng với tam giác ABC đều, điều này cũng phù hợp với bài 10 vì ta biết rằng với tam giác đều ta coi đường thẳng Euler của nó là mọi đường thẳng đi qua trọng tâm của nó.

Bài 11. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội (I) tiếp tiếp xúc ba cạnh tam giác tại D, E, F. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác DEF đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC.

Lời giải



Hình 14.

Gọi A', B', C' lần lượt là giao điểm khác A, B, C của IA, IB, IC với đường tròn ngoại tiếp (O). Khi đó A' là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O) do đó $OA' \perp BC$ suy ra $OA' \parallel ID$. Gọi giao điểm của $A'D$ với OI là K, áp dụng định lý Thales vào tam giác KOA' ta thấy ngay $\dfrac{KD}{KA'} = \dfrac{KI}{KO} = \dfrac{ID}{OA'} = \dfrac{r}{R}$ trong đó r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoai tiếp tam giác. Do đó K cố định, tương tự $B'E, C'F$ đi qua K.

Lấy điểm H thuộc đoạn KO sao cho $\dfrac{KH}{KI} = \dfrac{r}{R}$. Áp dụng định lý Thales trong tam giác KIA' ta thấy $\dfrac{KH}{KI} = \dfrac{KD}{KA'}$ (cùng bằng $\dfrac{r}{R}$) nên $DH \parallel IA'$. Bằng tính chất tia phân giác và tam giác cân dễ thấy $IA' \equiv AI \perp EF$ do đó $DH \perp EF$. Chứng minh tương tự $EH \perp DF, FH \perp ED$ hay H là trực tâm của tam giác DEF. Ta chú ý rằng I chính là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF, vậy IH là đường thẳng Euler của tam giác DEF đi qua O. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Bài 11 là một kết quả rất hay gặp về đường thẳng Euler, nhờ đó ta có thể chứng minh được kết quả thú vị khác như sau

Bài 12. Cho tam giác ABC, các đường cao $AA', BB'CC'$ đồng quy tại H. Gọi D, E, F là hình chiếu của H lên $B'C', C'A', A'B'$. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác DEF và tam giác ABC trùng nhau.

Lời giải

Ta đã biết một kết quả quen thuộc đó là trực tâm H của tam giác ABC chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$. Khi đó theo bài 11, đường thẳng Euler của tam giác DEF chính là đường thẳng nối H và N, trong đó N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$. Mặt khác tâm N đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'B'C'$ chính là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC do đó NH cũng chính là đường thẳng Euler của tam giác ABC. Đó là điều phải chứng minh.

Nhận xét. Áp dụng bài 12 ta lại có một kết quả thú vị khác

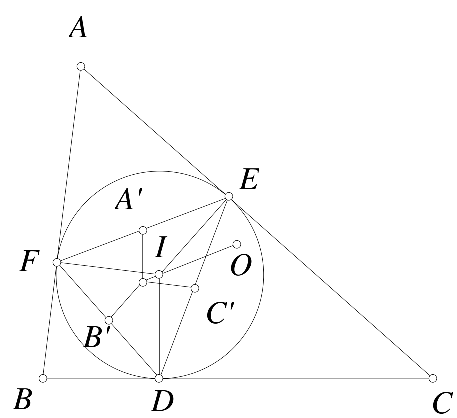
Bài 13. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Tâm các đường tròn bàng tiếp I_a, I_b, I_c. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác DEF và tam giác $I_aI_bI_c$ trùng nhau.

Lời giải

Ta áp dụng kết quả bài 11 vào tam giác $I_aI_bI_c$, ta chú ý rằng I chính là trực tâm tam giác $I_aI_bI_c$ ta có điều phải chứng minh.

Bài 14. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F. A', B', C' lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE. Chứng minh rằng các đường thẳng lần lượt qua A', B', C' và vuông góc với BC, CA, AB đồng qui tại một điểm trên đường thẳng OI trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



Hình 15.

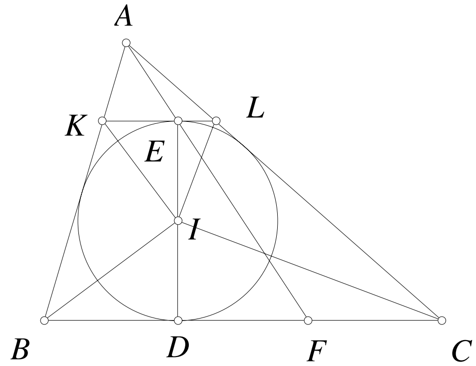
Ta dễ thấy ID, IE, IF lần lượt vuông góc với BC, CA, AB nên các đường thẳng lần lượt qua A', B', C' và vuông góc với BC, CA, AB sẽ tương ứng song song với ID, IE, IF. Áp dụng phần b) bài 2 ta suy ra các đường thẳng này đồng quy tại một điểm trên IG với G là trọng tâm tam giác DEF. Tuy nhiên IG cũng chính là đường thẳng Euler của tam giác DEF. Theo bài 11 IG đi qua O. Như vậy điểm đồng quy nằm trên IO. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Ta có thể có kết quả tổng quát hơn khi thay I bởi điểm P bất kỳ trong tam giác ABC như sau

Bài 15. Cho tam giác ABC, P là điểm bất kỳ, gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua trung điểm $B'C', C'A', A'B'$ tương ứng vuông góc với BC, CA, AB đồng quy.

Bài 16. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Lần lượt gọi DP, EQ, FR là đường kính của (I), chứng minh rằng AP, BQ, CR đồng quy tại một điểm nằm trên đường nối I và trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải

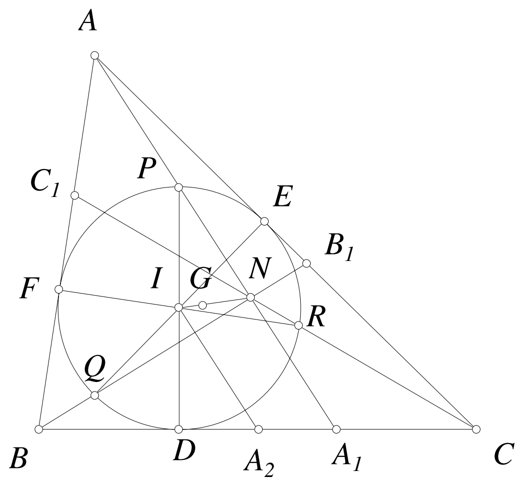


Hình 16.

Bài toán có nhiều cách tiếp cận, ở đây ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 16.1. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) của tam giác tiếp xúc BC tại D. Gọi DE là đường kính của I. AE cắt BC tại F thì $BD = CF$.

Lời giải



Hình 17.

Gọi giao điểm của tiếp tuyến tại E của (I) với AB, AC lần lượt là K, L. Gọi r là bán kính của (I). Ta chú ý rằng KI, LI lần lượt là phân giác các góc $\widehat{BKL}$ và góc $\widehat{CLK}$. Từ đó ta dễ thấy $\triangle KEI \sim \triangle IDB$ (g.g) suy ra $KE.BD = ID.IE = r^2$. Tương tự $EL.DC = ID.IE = r^2$ do đó $KE.BD = EL.DC$

Suy ra $\dfrac{EL}{BD} = \dfrac{KE}{DC} = \dfrac{EL+KE}{DB+DC} = \dfrac{KL}{BC}$ (1)

Dễ thấy $KL \parallel BC$. Theo định lý Thales ta có

$\dfrac{EL}{FC} = \dfrac{AL}{AC} = \dfrac{KL}{BC}$ (2)

Từ $(1), (2)$ ta dễ suy ra $BD = FC$, ta chứng minh được bổ đề.

Trở lại bài toán. Gọi giao điểm của AP với BC là A_1 và trung điểm BC là A_2. Theo bổ đề $BD = CA_1$ vậy A_2 cũng là trung điểm DA_1, I là trung điểm DP do đó suy ra $IA_2 \parallel AA_1$. Tương tự có B_1, B_2, C_1, C_2 thì $IB_2 \parallel BB_1, IC_2 \parallel CC_1$.

Từ đó ta áp dụng bài 2 a) với điểm I ta suy ra AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại một điểm N nằm trên đường nối I và trọng tâm G của tam giác ABC hơn nữa $GN = 2GI$. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Nếu bạn đọc quen với định lý Ceva có thể thấy nếu dùng riêng bổ đề 16.1 cũng có thể chứng minh được các đường AP, BQ, CR đồng quy tuy vậy để chứng minh điểm đồng quy nằm trên IG sẽ gặp không ít khó khăn. Điểm đồng quy N của ba đường thẳng này còn có tên gọi là điểm Nagel trong tam giác ABC. Điểm Nagel cũng có rất nhiều tính chất hình học thú vị, các bạn có thể tham khảo thêm trong [3,4]

Như vậy, khi đọc xong chuyên đề này các bạn dường như đã trải qua một chặng đường khá dài với rất nhiều ứng dụng và mở rộng của đường thẳng Euler. Thực ra trong bài viết nhỏ này mới chỉ đề cập đến ứng dụng và mở rộng của khái niệm đường thẳng Euler trong tam giác, mặt khác với những công cụ khá hạn chế thì những ứng dụng hay và sâu sắc của đường thẳng Euler trong tam giác vẫn chưa được chứng minh hoặc chưa được đề cập tới. Do vậy, việc ứng dụng mở rộng các khái niệm này cho tứ giác hoặc đi tìm những lời giải sơ cấp cho những bài toán còn chưa giải hoặc chưa đề cập đến trong chuyên đề này vẫn còn chờ bạn đọc, rất mong bạn đọc quan tâm.

Tài liệu

[1] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, *Toán nâng hình học 10*, NXBGD 2000

[2] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10*, NXBGD 2008

[3] Altshiller-Court N., *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, Courier Dover Publications, 2 Rev Enl edition, 2007

[4] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*, Courier Dover Publications, 2007.

[5] AoPS Forum http://www.artofproblemsolving.com/

Some geometric inequalities

Tran Quang Hung

Problem 1. *With arbitrary triangle ABC inscribed (O), incenter I and an arbitrary point M in small arc BC. Prove that $MA + 2OI \geq MB + MC \geq MA - 2OI$.*

Proof. By the projection of vectors we have

$$MA^2 = 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MA} \Rightarrow MA = 2\overrightarrow{MO}.\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}$$

similar

$$MB = 2\overrightarrow{MO}.\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}, MC = 2\overrightarrow{MO}.\frac{\overrightarrow{MC}}{MC}$$

From them we have

$$MB + MC - MA = 2\overrightarrow{MO}.(\frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} - \frac{\overrightarrow{MA}}{MA}) \quad (1)$$

By Cauchy-Swart inequality we have

$$-MO|\frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} - \frac{\overrightarrow{MA}}{MA}| \leq \overrightarrow{MO} \cdot (\frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} - \frac{\overrightarrow{MA}}{MA}) \leq MO|\frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} - \frac{\overrightarrow{MA}}{MA}| \quad (2)$$

We have $MO = R$, we will calculate $|\frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} - \frac{\overrightarrow{MA}}{MA}|$

$$\begin{aligned}
&|\frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} - \frac{\overrightarrow{MA}}{MA}|^2 \\
&= 3 + 2(\frac{\overrightarrow{MB}}{MB}.\frac{\overrightarrow{MC}}{MC} - \frac{\overrightarrow{MB}}{MB}.\frac{\overrightarrow{MA}}{MA} - \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}.\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}) \\
&= 3 + 2(\cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) - \cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) - \cos(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})) \\
&= 3 - 2(\cos A + \cos B + \cos C) \text{ (Because } M \text{ in small arc } BC) \\
&= 3 - 2\frac{R+r}{R} \text{ (Here we use the well-know equality: } \cos A + \cos B + \cos C = \frac{R+r}{R} \text{)} \\
&= \frac{R^2 - 2Rr}{R^2} \\
&= \frac{OI^2}{R^2} \text{ (Here we use the Euler's formula)}
\end{aligned}$$

From this we have

$$MO|\frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} - \frac{\overrightarrow{MA}}{MA}| = OI \quad (3)$$

Thus from $(1), (2), (3)$ we have the inequality $MA + 2OI \geq MB + MC \geq MA - 2OI$ and equality when ABC is equaliteral triangle. We completed the solution. □

Problem 2. *Given are $\triangle ABC$ orthorcenter H, circumradius R, with any M on plane find minimum value of sum*

$$MA^3 + MB^3 + MC^3 - \frac{3}{2}R \cdot MH^2$$

Proof. By AM-GM inequality we have

$$\frac{MA^3}{R} + \frac{R^2 + MA^2}{2} \geq \frac{MA^3}{R} + R.MA \geq 2MA^2$$

$$\Rightarrow \frac{MA^3}{R} \geq \frac{3}{2}MA^2 - \frac{R^2}{2}$$

Similar we have

$$\frac{MB^3}{R} \geq \frac{3}{2}MB^2 - \frac{R^2}{2}, \frac{MC^3}{R} \geq \frac{3}{2}MC^2 - \frac{R^2}{2}$$

Thus

$$\frac{MA^3 + MB^3 + MC^3}{R} \geq \frac{3}{2}(MA^2 + MB^2 + MC^2) - \frac{3}{2}R^2 \quad (1)$$

Called O is circumcenter of ABC

$$\begin{aligned}
&MA^2 + MB^2 + MC^2 \\
&= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \\
&= 3MO^2 + 2\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + 3R^2 \\
&= 3MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OH} + 3R^2 \\
&= 3MO^2 - (OM^2 + OH^2 - MH^2) + 3R^2 \\
&= 2MO^2 - OH^2 + MH^2 + 3R^2 \\
&\geq 3R^2 - OH^2 + MH^2 \quad (2)
\end{aligned}$$

(Here we use familiar equal of vector $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$)
Form $(1), (2)$ we have

$$\frac{MA^3 + MB^+ MC^3}{R} \geq \frac{3}{2}(3R^2 - OH^2 + MH^2) - \frac{3}{2}R^2$$

$$\Rightarrow MA^3 + MB^3 + MC^3 - \frac{3}{2}R.MH^2 \geq 3R^3 - \frac{3}{2}R.OH^2 = const$$

Easily seen equal when $M \equiv O$
Thus we have $MA^3 + MB^3 + MC^3 - \dfrac{3}{2}R.MH^2$ has minimum value iff $M \equiv O$ $\square$

Problem 3. *Given are $\triangle ABC$ with sides a, b, c and $\triangle A'B'C'$ with sides a', b', c' and area S'. With any M on plane prove that*

$$\frac{a'^2}{a}MA + \frac{b'^2}{b}MB + \frac{c'^2}{c}MC \geq 4S'$$

Proof. We well know the inequality:
Given triangle ABC and $\forall x, y, z > 0$ then

$$\frac{(x+y+z)^2}{4} \geq yz\sin^2 A + zx\sin^2 B + xy\sin^2 C$$

we can replace $yz \to x, zx \to y, xy \to z$ we will get the inequality:

$$\frac{1}{4}(\sqrt{\frac{yz}{x}} + \sqrt{\frac{zx}{y}} + \sqrt{\frac{xy}{z}})^2 \geq x\sin^2 A + y\sin^2 B + z\sin^2 C(*)$$

Now we let

$$x = \frac{MBMC}{bc.a'^2} = \frac{MBMC}{bc.4R'^2\sin^2 A'}$$
$$y = \frac{MCMA}{ca.b'^2} = \frac{MCMA}{ca.4R'^2\sin^2 B'}$$
$$z = \frac{MAMB}{ab.c'^2} = \frac{MAMB}{ab.4R'^2\sin^2 C'}$$

Thus we will have:

$$\sqrt{\frac{yz}{x}} = \sqrt{\frac{\frac{MCMA}{ca.b'^2}.\frac{MAMB}{ab.c'^2}}{x = \frac{MBMC}{bc.a'^2}}} = \frac{a'}{a.b'c'}MA$$

similar we have

$$\sqrt{\frac{zx}{y}} = \frac{b'}{b.c'a'}MB, \sqrt{\frac{xy}{z}} = \frac{c'}{c.a'b'}MC$$

and using inequality $(*)$ for triangle $A'B'C'$ and x, y, z as above we will get

$$\frac{1}{4}(\sum_{a,b,c}\frac{a'}{a.b'c'}MA)^2 \geq \sum_{a,b,c}\frac{MBMC}{bc.4R'^2\sin^2 A'}\sin^2 A' = \frac{1}{4R'^2}(\sum_{a,b,c}\frac{MBMC}{bc})$$

If we use well know inequality

$$\frac{MB.MC}{bc} + \frac{MC.MA}{ca} + \frac{MA.MB}{ab} \geq 1$$

then we get the consequence inequality:

$$\frac{1}{4}(\sum_{a,b,c}\frac{a'}{a.b'c'}MA)^2 \geq \frac{1}{4R'^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a'}{a.b'c'}MA + \frac{b'}{b.c'a'}MB + \frac{c'}{c.a'b'}MC \geq \frac{1}{R'}$$
$$\Leftrightarrow \frac{a'^2}{a}MA + \frac{b'^2}{b}MB + \frac{c'^2}{c}MC \geq \frac{a'b'c'}{R'} = 4S'$$

Easily seen we have equal when $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$ and $M \equiv H$(Orthocenter of triangle ABC). $\square$

Remark. This inequality have some nice applycations

- If $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$ we get the well know inequality $aMA + bMB + cMC \geq 4S$.

- If $\triangle A'B'C' \equiv \triangle J_aJ_bJ_c$ with J_a, J_b, J_c are three excenter of triangle ABC with noitice $a' = 4R\cos\dfrac{A}{2}, b' = 4R\cos\dfrac{B}{2}, c' = 4R\cos\dfrac{C}{2}$ and $S' = \dfrac{2SR}{r}$ we will get the nice inequality
$$\cot\frac{A}{2}MA + \cot\frac{B}{2}MB + \cot\frac{C}{2}MC \geq a + b + c.$$

- If $\triangle A'B'C' \equiv \triangle BCA$ we will get the non symmetry inequality
$$\frac{b^2}{a}MA + \frac{c^2}{b}MB + \frac{a^2}{c}MA \geq 4S$$

There are some nice other inequality is a consequence of this inequatlity.

Problem 4. *Let M be an arbitrary point inside equaliteral triangle ABC.Find min value of*
$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$$

Proof. We can assume ABC is an equaliteral triangle with side 1,let barycentric coordinates of M is $(x, y, z), x + y + z = 1$ because M inside triangle $\Rightarrow x, y, z > 0$ By distance formula we have $MA^2 = \dfrac{y+z}{x+y+z}a^2 - \dfrac{yz+zx+xy}{(x+y+z)^2}a^2 =$ by $x + y + z = 1$ and $a = 1 \Rightarrow MA = \sqrt{y^2 + yz + z^2}$, similarly $MB = \sqrt{z^2 + zx + x^2}, MC = \sqrt{x^2 + xy + y^2}$ therefore we need find min value of
$$\frac{1}{\sqrt{y^2 + yz + z^2}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + zx + x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + xy + y^2}}$$

when $x, y, z > 0, x + y + z = 1$, we will solve it with Lagrange multipliers
WLOG $0 \leq x \leq y \leq z < 1$
Case 1: $x = 0$ we have to prove
$$f(y, z) = \frac{1}{\sqrt{y^2 + yz + z^2}} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

indeed
$$f(y, z) \geq f(\sqrt{yz}, \sqrt{yz}) \geq f(\frac{y+z}{2}, \frac{y+z}{2}) = 4 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
Case 2: $0 < x \leq y \leq z < 1$
$$F(x, y, z, \lambda) = \sum \frac{1}{\sqrt{x^2 + xy + y^2}} + \lambda(x + y + z - 1)$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$, then

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{2x+y}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)^3}}+\frac{2x+z}{\sqrt{(z^2+zx+x^2)^3}}\right]+\lambda=0$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{2y+x}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)^3}}+\frac{2y+z}{\sqrt{(y^2+yz+z^2)^3}}\right]+\lambda=0$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{2z+x}{\sqrt{(z^2+zx+x^2)^3}}+\frac{2z+y}{\sqrt{(y^2+yz+z^2)^3}}\right]+\lambda=0$$

Adding

$$\lambda=\frac{1}{2}\left[\frac{x+y}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)^3}}+\frac{y+z}{\sqrt{(y^2+yz+z^2)^3}}+\frac{z+x}{\sqrt{(z^2+zx+x^2)^3}}\right]$$

Inserting λ in first we get

$$x\sum\frac{1}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{(y^2+yz+z^2)^3}}$$

Similarly

$$y\sum\frac{1}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{(z^2+zx+x^2)^3}}$$

$$z\sum\frac{1}{\sqrt{(x^2+xy+y^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt{(x^2+xy+z^2)^3}}$$

Hence

$$y^2(z^2+zx+x^2)^3=z^2(x^2+xy+y^2)^3$$

We put $y = ax, z = bx$, where $1 \le a \le b$

$$a^2(b^2+b+1)^3=b^2(a^2+a+1)^3$$

we get $a = b$ Hence $y = z$ as necessary for critical points in the interior of the region $0 < x, y, z < 1$
We have to prove

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+xy+y^2}}+\frac{1}{y\sqrt{3}}\ge 4+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

where $x + 2y = 1$

$$g(y)=\frac{2}{\sqrt{3y^2-3y+1}}+\frac{1}{y\sqrt{3}}\ge 4+\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

where

$$\frac{1}{3}\le y\le\frac{1}{2}$$

since $x \leq y \leq z$ By differentiation it is easily checked that the absolute minimum of $g(y)$ on $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ is $4 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = g(1/2)$.

Thus $\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} + \frac{1}{MC}$ get min value $\Leftrightarrow M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$and others permutation $\Leftrightarrow M$ concur three midpoint of three side. □

Problem 5. *Suppose a, b, c are sidelengths of a triangle and m_a, m_b, m_c are its medians. Prove the inequality*

$$\frac{m_a}{a^2} + \frac{m_b}{b^2} + \frac{m_c}{c^2} \geq \frac{\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)}{2abc}$$

Proof. This inequality equivalent

$$(\frac{m_a bc}{a} + \frac{m_b ca}{b} + \frac{m_c ab}{c})^2 \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

we have

$$(\frac{m_a bc}{a} + \frac{m_b ca}{b} + \frac{m_c ab}{c})^2 \geq 3(\sum \frac{(m_b ca).(m_c ab)}{bc}) = 3(\sum a^2 m_b m_c)$$

we will prove

$$3(\sum a^2 m_b m_c) \geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)^2 \Leftrightarrow 4(\sum a^2 m_b m_c) \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Indeed turn into triangle with three side m_a, m_b, m_c we need prove:

$$\sum 4m_a^2 \frac{3}{4} b \frac{3}{4} c \geq (m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)^2 \Leftrightarrow \sum (2(b^2 + c^2) - a^2)bc \geq (a^2 + b^2 + c^2)^2$$

by equivalent tranformation we have

$$\Leftrightarrow \sum \frac{1}{2}(a^2 - (b - c)^2)(b - c)^2 \geq 0$$

which is true because $a > |b - c|, b > |c - a|, c > |a - b|$ with any triangle ABC. □

Problem 6. *Let triangle ABC and X, Y, Z are arbitrary points on segment BC, CA, AB. Prove that*

$$\frac{1}{S_{AYZ}} + \frac{1}{S_{BZX}} + \frac{1}{S_{CXY}} \geq \frac{3}{S_{XYZ}}$$

Lemma 6.1. *Let $a, b, c > 0$ be positive real numbers then*

$$\frac{1}{a(1 + b)} + \frac{1}{b(1 + c)} + \frac{1}{c(1 + a)} \geq \frac{3}{1 + abc}$$

Proof. We have

$$(1 + abc)(\frac{1}{a(1 + b)} + \frac{1}{b(1 + c)} + \frac{1}{c(1 + a)}) + 3 = \sum \frac{1 + a}{a(1 + b)} + \sum \frac{b(c + 1)}{1 + b} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}} + 3\sqrt[3]{abc} \geq 6$$

So we are done.In fact the ineq could be better and stronger as

$$\frac{1}{a(1 + b)} + \frac{1}{b(1 + c)} + \frac{1}{c(1 + a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}(1 + \sqrt[3]{abc})}$$

□

Proof. We let $\dfrac{BX}{BC} = x, \dfrac{CY}{CA} = y, \dfrac{AZ}{AB} = z, S_{ABC} = S, 0 < x, y, z < 1$ we will have

$$\frac{S_{AYZ}}{S} = z(1-y), \frac{S_{BZX}}{S} = x(1-z), \frac{S_{CXY}}{S} = y(1-x)$$

Thus we have

$$S_{XYZ} = S - S_{AYZ} - S_{BZX} - S_{CXY} = S - S(z(1-y) + x(1-z) + y(1-x)) = S(xyz - (x-1)(y-1)(x-1))$$

Thus we need to prove

$$\frac{1}{S_{AYZ}} + \frac{1}{S_{BZX}} + \frac{1}{S_{CXY}} \geq \frac{3}{S_{XYZ}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{z(1-y)} + \frac{S}{x(1-z)} + \frac{S}{y(1-x)} \geq \frac{3S}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy}{(1-y)} + \frac{yz}{(1-z)} + \frac{zx}{(1-x)} \geq \frac{3}{1 + \dfrac{(1-x)(1-y)(1-z)}{xyz}}$$

Now let $\dfrac{1-x}{x} = a > 0, \dfrac{1-y}{y} = b > 0, \dfrac{1-z}{z} = c > 0$ we will get $\dfrac{1}{(a+1)b} + \dfrac{1}{(b+1)c} + \dfrac{1}{(c+1)a} \geq \dfrac{3}{1+abc}$ now replace $a \to b, b \to c, c \to a$ we will get our above lemma. □

Problem 7. *Given two triangles ABC and $A'B'C'$ with ares S, S' resp prove that*

$$aa' + bb' + bb' \geq 4\sqrt{3SS'}$$

Proof.

$$(\sum aa')^2 \geq 3(\sum bb'cc') = 12SS'(\sum \frac{1}{\sin A \sin A'}) = 24SS' \sum \frac{1}{\cos(A-A') - \cos(A+A')} \geq$$

$$\geq 24SS' \sum \frac{1}{1 - \cos(A+A')} = 12SS' \sum \frac{1}{\sin^2 \dfrac{A+A'}{2}} \geq 48SS' \Rightarrow aa' + bb' + cc' \geq 4\sqrt{3SS'}$$

In the last inequality we easily seen $\sum \dfrac{A+A'}{2} = \pi$ thus they are three angle of a triangle therefore apply the inequality $\sum \dfrac{1}{\sin^2 A} \geq 4$ for them,we are done. □

TỔNG QUÁT VÀ ỨNG DỤNG MỘT BÀI TOÁN CHIA ĐÔI ĐOẠN THẲNG

Trần Quang Hùng

(*Trường THPT chuyên KHTN*)

Bài báo viết về một bài toán chia đôi đoạn thẳng khá kinh điển với hướng tiếp cận dùng các bổ đề dễ hiểu cùng với một số hướng tổng quát và khai thác với công cụ là các định lý Ceva, Menelaus và tính chất tứ giác ngoại tiếp, phần ứng dụng có sử dụng ứng dụng của phép nghịch đảo.

1. Mở đầu

Trên báo toán học tuổi trẻ số 390 tháng 12 năm 2009 bài T12/390 [3] tác giả Tạ Hồng Sơn có đề nghị một bài toán, cũng trên trên đàn AoPS trong [1,2] có đề xuất bài toán đó, bài toán như sau:

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC nhọn có trực tâm H. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác HA của đường tròn nội tiếp các tam giác HAB, HAC thì chia đôi BC.*

Bài toán trên đã có lời giải trên THTT số 394 tháng 4 [4]. Cũng trên diễn đàn AoPS trong [2,6] có đề xuất bài toán như sau:

Bài toán 2. *Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. Đường tròn nội tiếp tam giác IBC tiếp xúc BC tại D. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác IA của đường tròn nội tiếp các tam giác IAB, IAC đi qua D.*

Nhận xét. Cả hai bài toán trên đẹp và đều có chung một cấu hình là tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác. Tôi nghĩ rằng chúng nhất định phải nằm trong một bài toán chung nào đó. Chúng ta hãy tìm hiểu điều đó ở phần sau.

2. Mở rộng

Sau quá trình tìm hiểu tôi đã đề xuất bài toán tổng quát cho cả hai bài toán trên như sau:

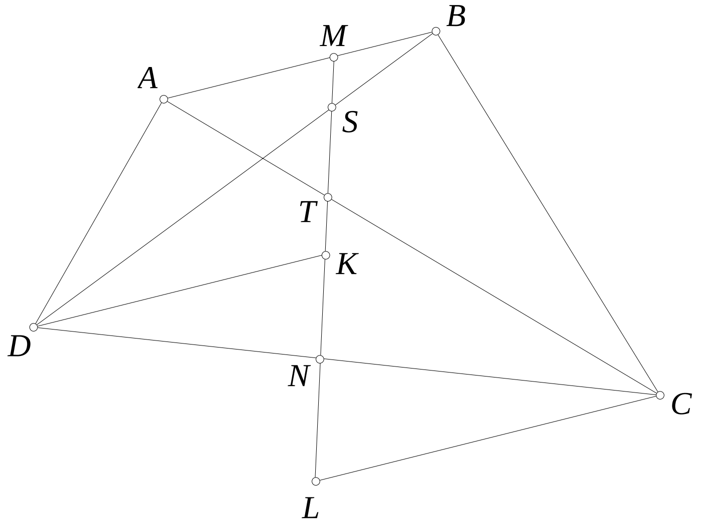
Bài toán 3. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ nằm trong tam giác. Gọi Q là điểm đẳng giác của P trong tam giác ABC. Gọi (K), (L) lần lượt là các đường tròn nội tiếp của tam giác PAB, PAC. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác PA của (K) và (L) đi qua tiếp điểm của đường tròn nội tiếp của tam giác QBC với cạnh BC.*

Để giải quyết bài toán này chúng ta sẽ dùng một số bổ đề sau:

Bổ đề 1. *Cho tứ giác $ABCD$. S, T bất kỳ lần lượt thuộc BD, AC. ST cắt AB, CD tại M, N. Chứng minh rằng*

$$\frac{MB}{MA}\cdot\frac{NC}{ND}=\frac{SB}{SD}\cdot\frac{TC}{TA}.$$

Bổ đề trên là một ứng dụng của định lý Thales.

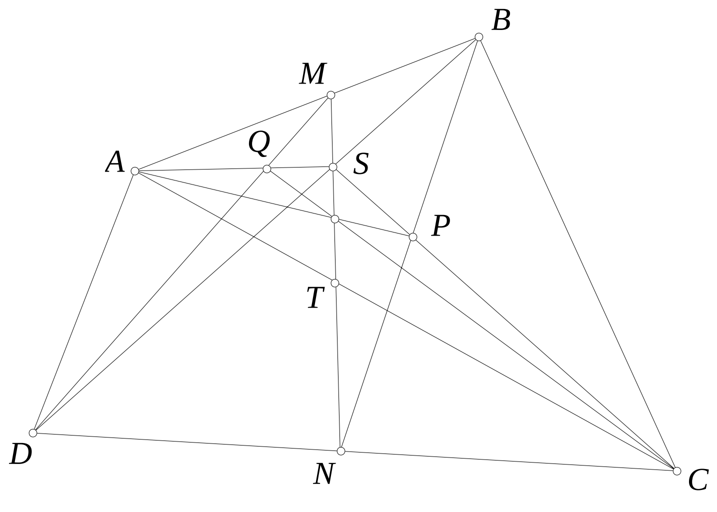


Chứng minh. Lấy K, L thuộc M, N sao cho $DK \parallel CL \parallel AB$. Sử dụng định lý Thales ta có biến đổi tỷ số:

$$\frac{MB}{MA} = \frac{MB}{DK} \cdot \frac{DK}{CL} \cdot \frac{CL}{MA} = \frac{SB}{SD} \cdot \frac{ND}{NC} \cdot \frac{TC}{TA}.$$

Suy ra $\frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{ND} = \frac{SB}{SD} \cdot \frac{TC}{TA}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2. *Cho tứ giác $ABCD$. S, T bất kỳ lần lượt thuộc BD, AC. ST cắt AB, CD tại M, N. CS giao BN tại P. AS giao DM tại Q. Chứng minh rằng AP, CQ và ST đồng quy.*



Chứng minh. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABS với M, Q, D thẳng hàng, ta có

$$\frac{QA}{QS} \cdot \frac{DS}{DB} \cdot \frac{MB}{MA} = 1. \tag{1}$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CDS với N, P, B thẳng hàng, ta có

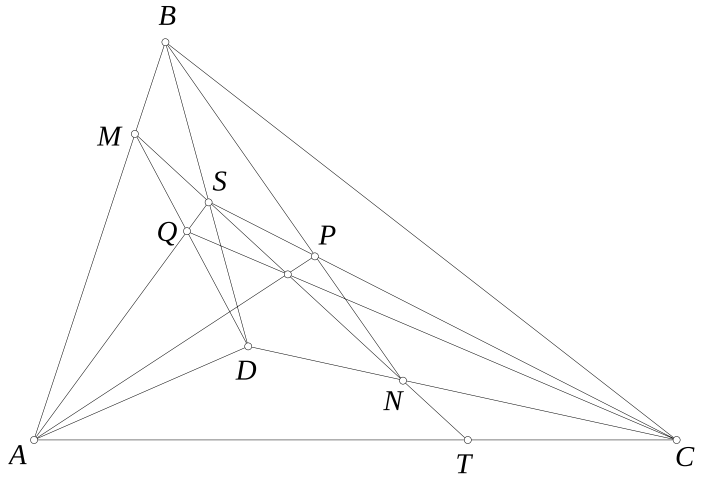
$$\frac{PS}{PC} \cdot \frac{NC}{ND} \cdot \frac{BD}{BS} = 1. \tag{2}$$

Nhân hai đẳng thức (1), (2) chú ý theo bổ đề $\frac{MB}{MA} \cdot \frac{NC}{ND} = \frac{SB}{SD} \cdot \frac{TC}{TA}$, ta thu được

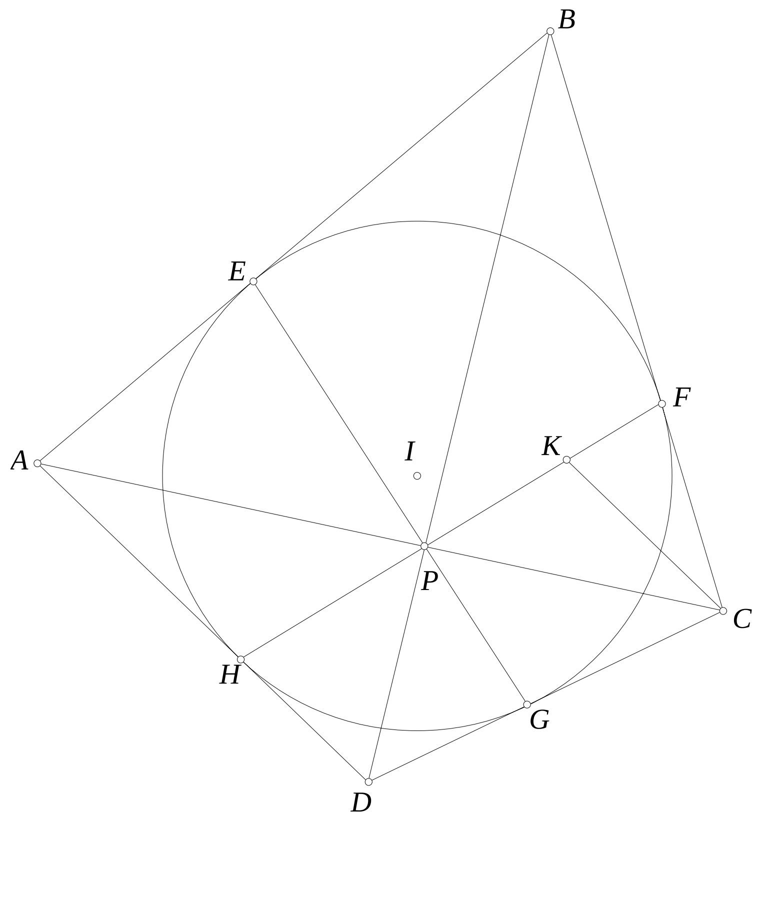
$$\frac{QA}{QS} \cdot \frac{PS}{PC} \cdot \frac{DS}{DB} \cdot \frac{BD}{BS} \cdot \frac{SB}{SD} \cdot \frac{TC}{TA} = 1 \text{ hay } \frac{QA}{QS} \cdot \frac{PS}{PC} \cdot \frac{TC}{TA} = 1.$$

Vậy AP, CQ và ST đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Chú ý bổ đề thực chất đúng cho mọi vị trí tứ điểm $ABCD$ mà không cần $ABCD$ là tứ giác lồi. Ta có thể quan sát hình vẽ sau:



Bổ đề 3. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc AB, BC, CD, DA lần lượt tại E, F, G, H. Chứng minh rằng EF, GH, AC, BD đồng quy tại P và $\frac{PC}{PA} = \frac{CF}{AH}$.*



Chứng minh. Gọi HF giao AC tại P. Lấy K thuộc HF sao cho $CK \parallel AH$ dễ thấy tam giác KFC cân. Từ đó

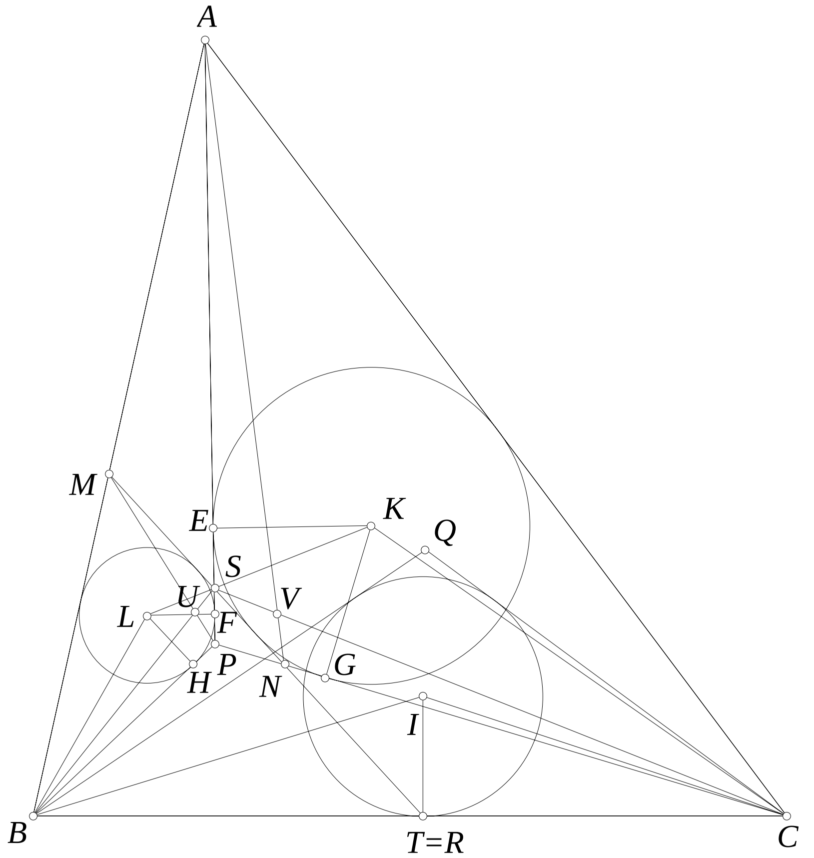
$$\frac{PC}{PA} = \frac{CK}{AH} = \frac{CF}{AH}.$$

Nếu EG cắt AC tại Q, tương tự ta dễ chứng minh

$$\frac{QC}{QA} = \frac{CG}{AE} = \frac{CF}{AH}.$$

Vậy $P \equiv Q$, suy ra AC đi qua giao điểm P của EF, GH. Tương tự BD đi qua P. Ta có điều phải chứng minh. □

Trở lại bài toán:



Lời giải bài toán. Gọi $(K), (L)$ là các đường tròn nội tiếp tam giác PCA, PAB. PA tiếp xúc $(K), (L)$ lần lượt tại E, F. PB, PC lần lượt tiếp xúc $(K), (L)$ tại G, H. Gọi tiếp tuyến chung trong khác PA của $(K), (L)$ cắt AB, BC tại S, T. AN giao CS tại V. BS giao MP tại U.

Theo bổ đề 2 thì BV, CU và ST đồng quy. Từ đây suy ra

$$\frac{TC}{TB} = \frac{VC}{VS} \cdot \frac{US}{UB}. \tag{1}$$

Ta chú ý các tứ giác $MSPB$ và $ASNC$ ngoại tiếp. Theo bổ đề 3 ta có

$$\frac{VC}{VS} = \frac{CG}{SE}, \quad \frac{US}{UB} = \frac{SF}{BH}. \tag{2}$$

Từ (1), (2) chú ý LK đi qua S là $EK \parallel LF$, suy ra

$$\frac{TC}{TB} = \frac{CG}{SE} \cdot \frac{SF}{BH} = \frac{SF}{SE} \cdot \frac{CG}{BH} = \frac{LF}{KE} \cdot \frac{CG}{BH} = \frac{LH}{BH} \cdot \frac{CG}{KG}. \tag{3}$$

Nếu gọi tiếp điểm của đường tròn (I) nội tiếp tam giác QBC với BC là R. Theo tính chất đẳng giác ta dễ có $\triangle BLH \sim \triangle BIR$, $\triangle CKG \sim \triangle CIR$. Suy ra

$$\frac{LH}{HB} = \frac{IR}{RB}, \quad \frac{CG}{KG} = \frac{RC}{IR}. \tag{4}$$

Từ (3),(4) ta suy ra

$$\frac{TC}{TB} = \frac{IR}{RB} \cdot \frac{RC}{IR} = \frac{RC}{RB}.$$

Từ đó $T \equiv R$, hay tiếp tuyến chung trong khác PA của $(K), (L)$ đi qua tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác QBC và BC. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Nếu P trùng trực tâm H thì Q trùng tâm ngoại tiếp O khi đó tam giác OBC cân nên tiếp điểm đường tròn nội tiếp tam giác OBC là trung điểm BC ta có bài toán 1. Khi P trùng tâm nội tiếp I thì Q cũng trùng I, ta có bài toán 2. Bài toán này là tổng quát với P bất kỳ nên có giá trị ứng dụng lớn.

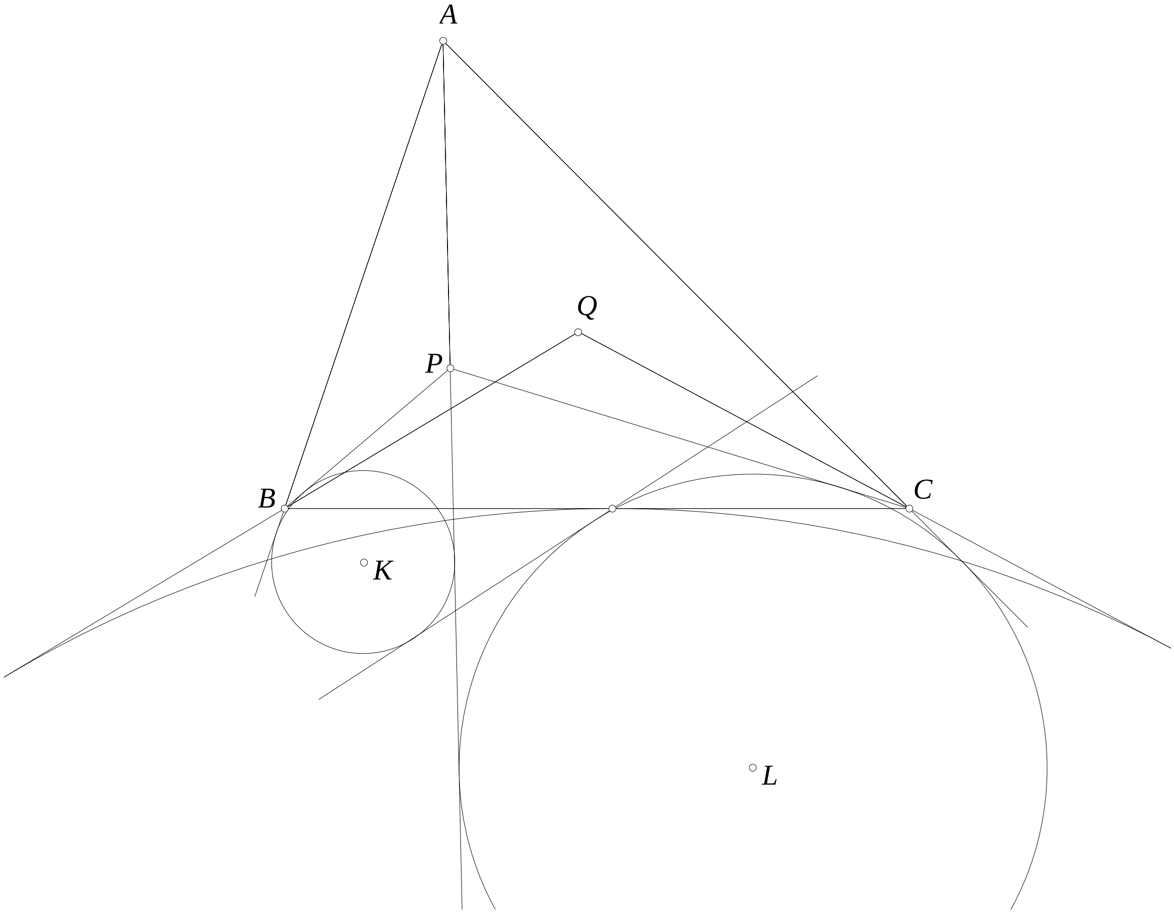
Thực chất có một bài toán tổng quát cũng đã xuất hiện trong lời giải bài toán 1 ở trong THTT số 394 [4] nhưng lần đầu tiên bài toán tổng quát xuất hiện ở [5]. Ở thời điểm sau, trong [2] cũng xuất hiện bài toán tổng quát tương tự và chứng minh giống như đã đăng trên THTT số 394 và trong [5], bài toán tổng quát như sau:

Bài toán 4. *Cho tứ giác $ABCD$ có thể không lồi. Tiếp tuyến chung trong khác BD của đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, CBD cắt AC tại T. Chứng minh rằng*

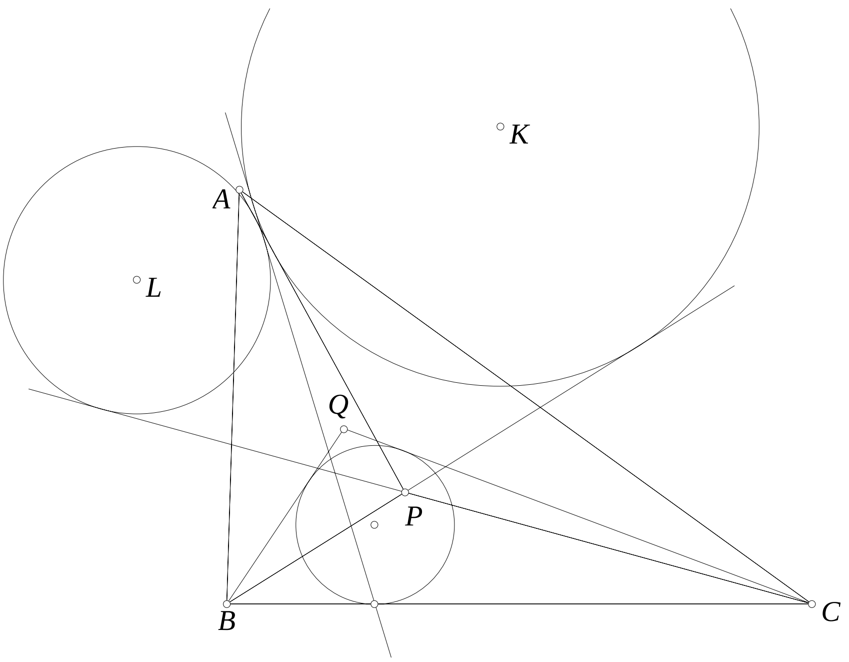
$$\frac{TA}{TC} = \frac{\cot \frac{A}{2}}{\cot \frac{C}{2}}.$$

Về bản chất bổ đề này cũng là một cách phát biểu khác của bài toán 3 tuy nhiên ta thấy rằng phát biểu có liên quan tới yếu tố lượng giác và chứng minh như trong THTT và [2] dùng qua các biến đổi lượng giác không hề đẹp. Hơn nữa cách tiếp cận bài toán 3 tổng quát qua các bổ đề có tính đối xứng như đã làm ở trên cho ta dễ hiểu ý tưởng của lời giải hơn. Cách phát biểu đi qua tiếp điểm nội tiếp đẹp và có nhiều ứng dụng. Mặt khác với các phát biểu đi qua tiếp điểm thì một cách hoàn toàn tương tự, chúng ta có thể chứng minh các bài toán mở rộng cho các đường tròn bàng tiếp như sau:

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Q là điểm đẳng giác của P trong tam giác ABC. Gọi $(K), (L)$ lần lượt là các đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác PAB, PAC. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác PA của (K) và (L) đi qua tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc Q của tam giác QBC với cạnh BC.*



Bài toán 6. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Q là điểm đẳng giác của P trong tam giác ABC. Gọi (K), (L) lần lượt là các đường tròn bàng tiếp góc B, C của tam giác PAB, PAC. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác PA của (K) và (L) đi qua tiếp điểm của đường tròn nội tiếp của tam giác QBC với cạnh BC.*



Bài toán 7. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Q là điểm đẳng giác của P trong tam giác ABC. Gọi (K), (L) lần lượt là các đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác PAB, PAC. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác PA của (K) và (L) đi qua tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc Q của tam giác QBC với cạnh BC.*

3. Một số ứng dụng

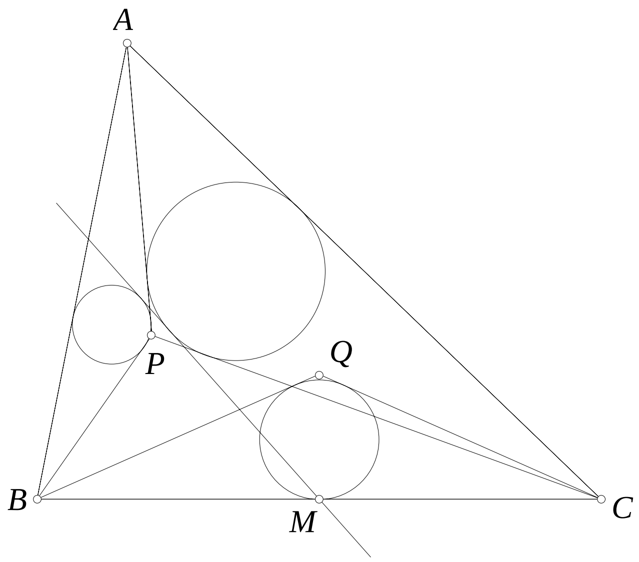
Bài toán 3 phát biểu tổng quát và các trường hợp mở rộng sang đường tròn bàng tiếp có nhiều ứng dụng. Từ 7 bài toán gốc nếu biết sử dụng thêm các phép biến hình làm công cụ ta sẽ tạo ra được nhiều bài toán thú vị và đa dạng , từ các bài toán điểm cố định, đường cố định tới các bài toán tam giác cân và điểm đồng viên. Chúng ta hãy bắt đầu từ ví dụ sau:

Bài toán 8. *Cho tam giác ABC có điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác PA của đường tròn nội tiếp hai tam giác PAB, PAC luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.*

Lời giải. Gọi Q là đẳng giác của P trong tam giác ABC. Ta có

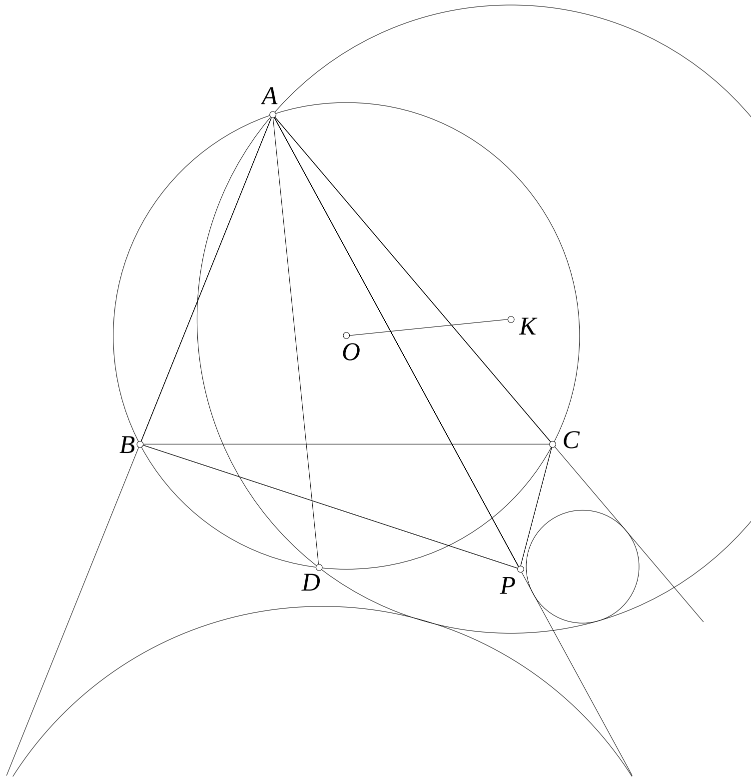
$$\angle QBC = \angle PBA = \angle PCA = \angle QCB$$

nên tam giác QBC cân tại Q. Từ đó đường tròn nội tiếp tam giác QBC tiếp xúc BC tại trung điểm M của BC. Theo bài toán 3 tiếp tuyến chung trong khác PA của đường tròn nội tiếp hai tam giác PAB, PAC luôn đi qua một điểm cố định M khi P thay đổi. □



Bài toán trên là một ứng dụng tuy có phần đơn giản của bài toán 3 nhưng nếu sử dụng phép nghịch đảo ta sẽ thu được bài toán thú vị dưới đây:

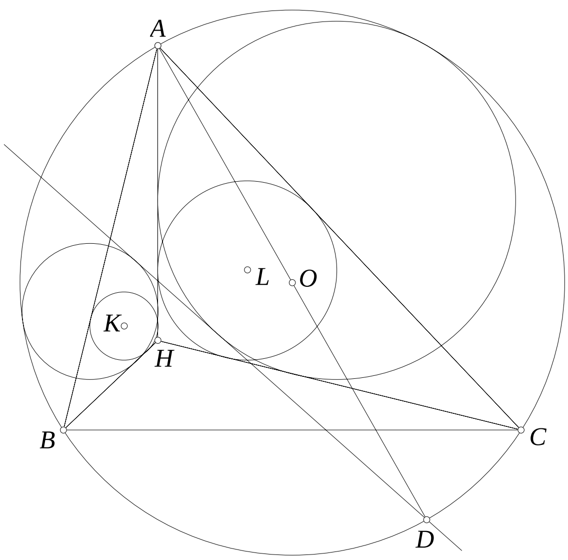
Bài toán 9. *Cho tam giác ABC và điểm P thay đổi sao cho phân giác $\angle BPC$ đi qua A. Đường tròn (K) đi qua A và tiếp xúc với các đường tròn A-mixtilinear ngoại của tam giác APB, APC sao cho tâm hai đường tròn này không cùng ở trong hoặc ở ngoài (K). Chứng minh rằng K luôn di chuyển trên một đường thẳng cố định khi P thay đổi.*



Lời giải. Sử dụng phép nghịch đảo cực A phương tích bất kỳ theo bài thì đường tròn đường tròn (K) đi qua A tiếp xúc với các đường tròn A-mixtilinear ngoại của tam giác APB, APC sao cho tâm hai đường tròn này không cùng ở trong hoạc ngoài (K) thì luôn đi qua điểm D trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho AD là đường đối trung của tam giác ABC. Vậy D cố định nên tâm K nằm trên trung trực AD cố định. □

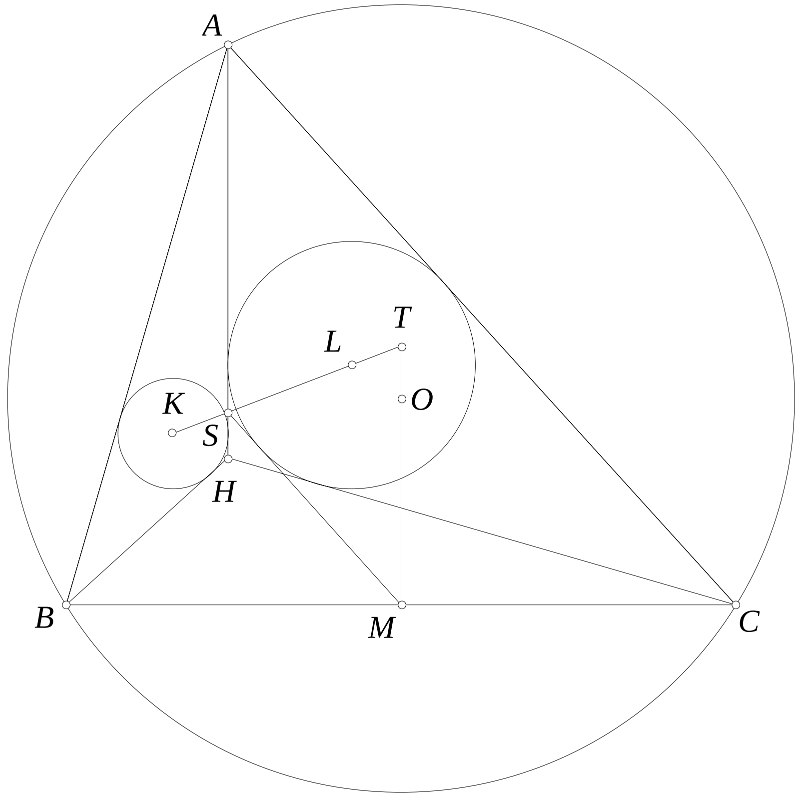
Ta lại tiếp tục một bài toán ứng dụng sau của bài toán 1.

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) trực tâm H và AD là đường kính của (O). Đường tròn (K) tiếp xúc HA, HB và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc HA, HC và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác HA của (K) và (L) đi qua D.*



Lời giải. Theo định lý Feuerbach thì đường tròn nội tiếp tam giác HBC tiếp xúc trong đường tròn Euler của tam giác HAB tuy nhiên đường tròn Euler của tam giác HAB cũng chính là đường tròn Euler của tam giác ABC. Vị tự tâm H tỷ số 2 thì đường tròn Euler của tam giác ABC biến thành đường tròn (O). Như vậy đường tròn nội tiếp tam giác HAB biến thành đường tròn tiếp xúc HA, HB và tiếp xúc trong (O) chính là (K). Tương tự đường tròn nội tiếp tam giác HAC qua phép vị tự tâm H tỷ số 2 biến thành (L). Theo bài toán 1 tiếp tuyến chung trong khác HA của đường tròn nội tiếp các tam giác HAB, HAC thì đi qua trung điểm M của BC nên qua phép vị tự tâm H tỷ số 2 thì tiếp tuyến chung trong khác HA của (K) và (L) đi qua D vì dễ chứng minh D là ảnh của M qua phép vị tự tâm H tỷ số 2. □

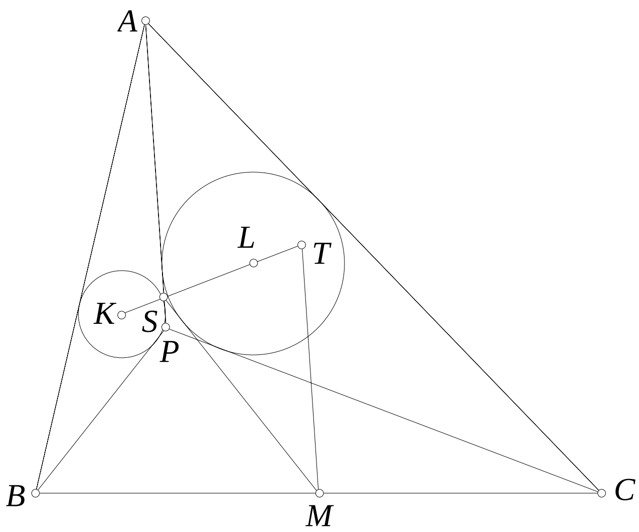
Bài toán 11. *Cho $\triangle ABC$ trực tâm H. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác HAB, HAC. KL cắt HA và trung trực BC tại S, T. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng $\triangle MST$ cân.*



Lời giải. Vì AH là một tiếp tuyến chung trong của (K) và (L) nên S là tâm vị tự trong của (K) và (L). Từ đó theo bài toán 1 SM là tiếp tuyến chung trong khác của (K) và (L). Từ đó dễ có HA và SM đối xứng nhau qua KL hay ST là phân giác $\angle ASM$ lại có $OM \parallel AH$ ta dễ thu được tam giác MST cân. □

Ta có bài toán mở rộng tương tự:

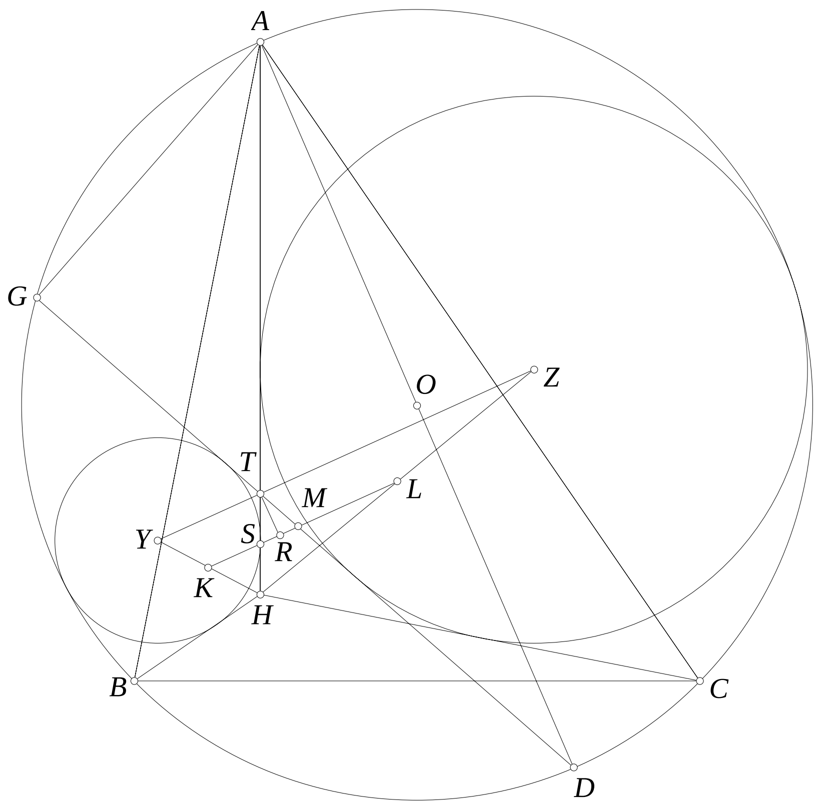
Bài toán 12. *Cho tam giác ABC có P là điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác PAB, PAC. Gọi M là trung điểm BC. KL cắt PA và đường thẳng qua M song song PA lần lượt tại S và T. Chứng minh rằng tam giác MST cân.*



Tổng quát hơn nữa ta thu được bài toán sau:

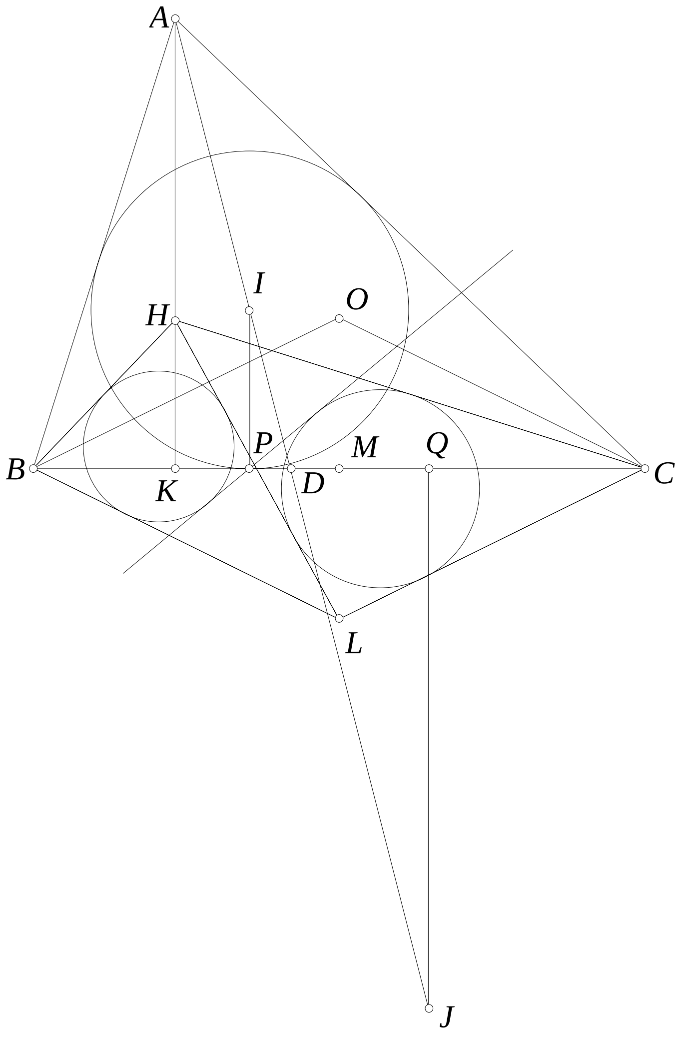
Bài toán 13. *Cho tam giác ABC có P là điểm nằm trong tam giác. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác PAB, PAC. Q là đẳng giác của P trong tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc BC tại M. KL cắt PA và đường thẳng qua M song song PA lần lượt tại S và T. Chứng minh rằng tam giác MST cân.*

Bài toán 14. *Cho tam giác ABC có trực tâm H. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác HAB, HAC. KL cắt AH tại S. T đối xứng với H qua S. R là hình chiếu của T lên KL. M đối xứng với S qua R. Gọi G là hình chiếu của A lên TM. Chứng minh rằng G nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*



Lời giải. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi AD là đường kính của (O). Phép vị tự tâm H tỷ số 2 biến đường tròn (K) nội tiếp tam giác HAB thành đường tròn (Y) tiếp xúc HA, HB và tiếp xúc trong (O), đường tròn (L) nội tiếp tam giác HAC thành đường tròn (Z) tiếp xúc HA, HC và tiếp xúc trong (O) và biến S thành T. Từ đó YZ đi qua T, như vậy T chính là tâm vị tự trong của (Y) và (Z). Theo bài toán 10 thì TD là tiếp tuyến chung trong của (Y) và (Z). Vậy TD và TA đối xứng nhau qua YZ, nhưng do TR vuông góc với YZ nên TD và TA cũng đối xứng nhau qua TR. Ta lại có S và M đối xứng nhau qua R nên cũng đối xứng nhau qua TR. Từ đó TD đi qua M. Vậy hình chiếu G của A lên TM phải nằm trên đường tròn đường kính AD cũng chính là đường tròn (O) ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 15. *Cho tam giác ABC có đường cao AK, trung tuyến AM, phân giác AD, tâm ngoại tiếp O và trực tâm H. Gọi L đối xứng O qua BC. Giả sử K, D, M cố định và B, C thay đổi. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác LH của đường tròn ngoại tiếp tam giác LHB và LHC luôn đi qua một điểm cố định.*



Lời giải. Gọi đường tròn nội tiếp (I) và đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc BC tại P, Q. Ta dễ thấy hàng (AD, IJ) điều hòa, chiếu vuông góc xuống BC cho ta hàng (HD, PQ) điều hòa. Theo kết quả đã biết M là trung điểm PQ nên

$$MP^2 = MQ^2 = MD \cdot MK,$$

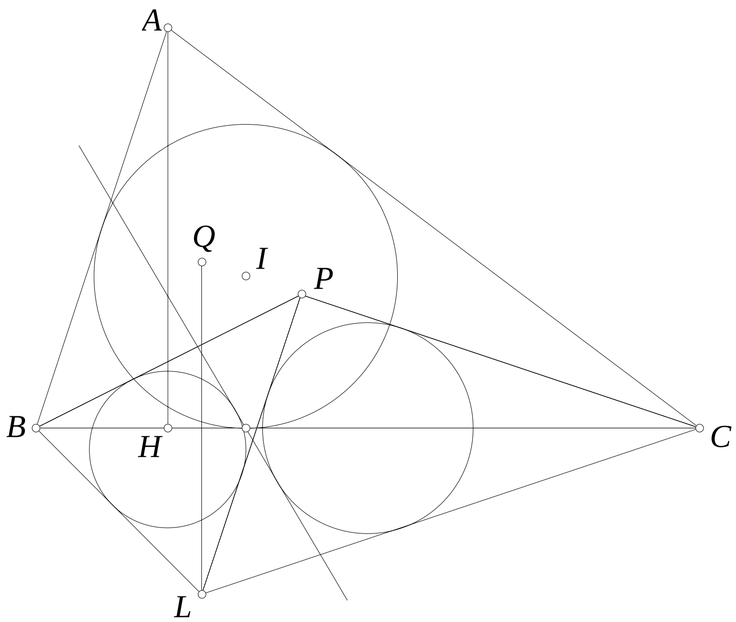
do M, D, K cố định nên P cố định. Do O và L đối xứng nhau qua BC nên

$$\angle LBC = \angle OBC = \angle ABH.$$

Tương tự $\angle LCB = \angle ACH$ nên A và L đẳng giác trong tam giác HBC. Theo bài toán 3 tiếp tuyến chung trong khác LH của đường tròn ngoại tiếp tam giác LHB và LHC luôn đi qua tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với BC đó chính là P cố định. □

Tổng quát hơn bài toán trên cho ta bài toán sau, lời giải hoàn toàn tương tự.

Bài toán 16. *Cho tam giác ABC có đường cao AK, trung tuyến AM, phân giác AD. Hai điểm P, Q đẳng giác trong tam giác ABC. Gọi L đối xứng Q qua BC. Giả sử K, D, M cố định và B, C, P, Q thay đổi. Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác LP của đường tròn ngoại tiếp tam giác LPB và LPC luôn đi qua một điểm cố định.*



Lời giải. Tương tự lời giải trên ta dễ chứng minh A và L đẳng giác trong tam giác PBC và đường tròn (I) nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với BC tại điểm cố định nên tuyến chung trong khác LP của đường tròn ngoại tiếp tam giác LPB và LPC luôn đi qua một điểm cố định đó. □

4. Một số bài luyện tập

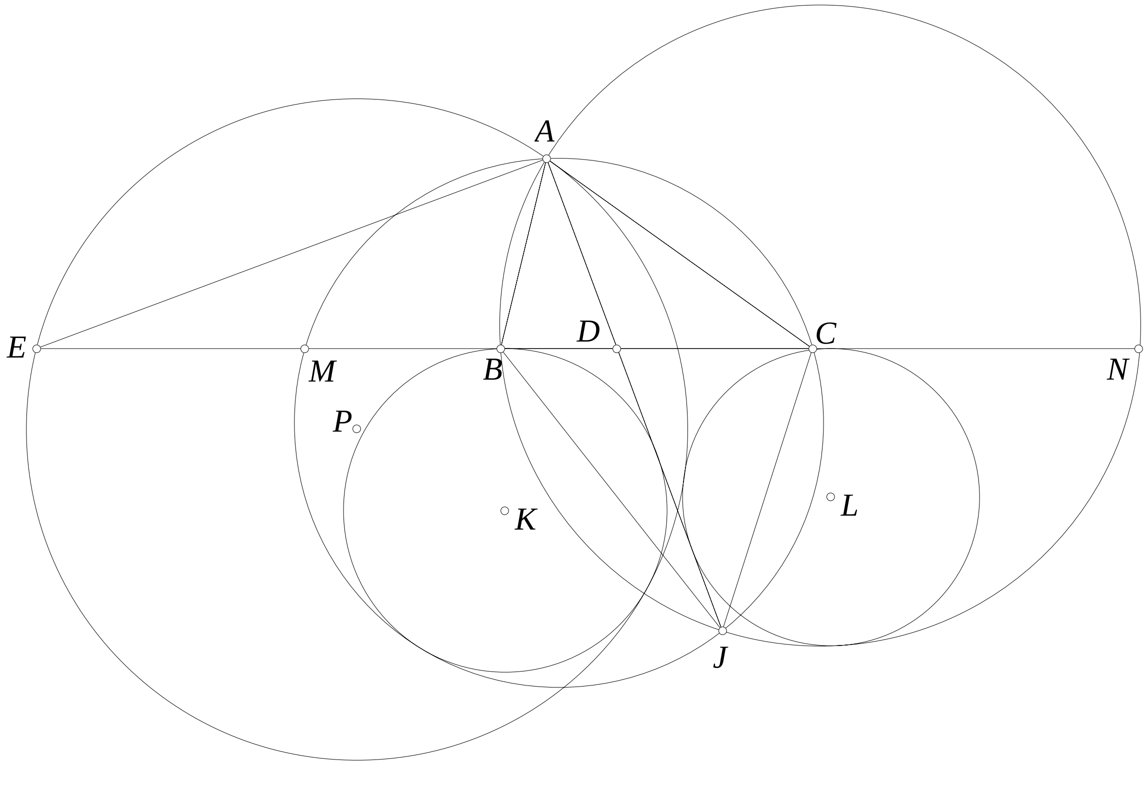
Các ứng dụng của các bài toán trên còn rất nhiều, các bạn hãy làm các bài tập sau để luyện tập.

Bài tập 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên (O). I là tâm nội tiếp tam giác ABC. IA, IB, IC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn ID, IE và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn ID, IF và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng tiếp tuyến chung trong khác ID của (K) và (L) luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.

Bài tập 2. Cho tam giác ABC nhọn có tâm ngoại tiếp O. Tiếp tuyên chung trong khác OA của đường tròn nội tiếp tam giác OAB, OAC cắt BC tại D. Tương tự có E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Bài tập 3. Cho tam giác ABC với P, Q đẳng giác trong tam giác ABC. R đối xứng với Q qua BC. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác RPB, RPC. KL cắt RP tại S. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc BC tại D. Đường thẳng qua D song song với RP cắt KL tại T. Chứng minh rằng tam giác DST cân.

Bài tập 4. Cho tam giác ABC có phân giác AD và tâm bàng tiếp góc A là J. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACJ, ABJ cắt BC tại M, N khác C, B. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn DM, DJ và tiếp xúc trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ACJ. Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn DN, DJ và tiếp xúc trong đường tròn ngoại tiếp tam giác ABJ. Đường tròn (P) đi qua A và tiếp xúc với (K), (L) sao cho K và L không cùng ở trong hoặc ở ngoài (P). Chứng minh rằng P đi qua chân phân giác ngoài kẻ từ A của tam giác ABC.



Bài tập 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) trực tâm H. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn HA, HB và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn HA, HC và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng có một tiếp tuyến chung ngoài của (K) và (L) song song với BC.

Bài tập 6. Cho tam giác ABC với trực tâm H. Chứng minh rằng có một tiếp tuyến chung ngoài của đường tròn nội tiếp tam giác HAB, HAC song song với BC.

Bài tập 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn A-mixtilinear tiếp xúc (O) tại D. Gọi (K), (L) là các đường tròn I- mixtilinear của tam giác IAB, IAC. Đường tròn (P) đi qua I và tiếp xúc với (K), (L) sao cho K và L không cùng ở trong hoặc ở ngoài (P). (P) cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC tại Q khác I. Chứng minh rằng Q, I, D thẳng hàng.

Bài tập 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn A-mixtilinear tiếp xúc (O) tại D. Gọi (K) tiếp xúc đoạn IA,IB và tiếp xúc trong (O) và đường tròn (L) tiếp xúc đoạn IA, IC và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (P) đi qua I và tiếp xúc với (K), (L) sao cho K và L không cùng ở trong hoặc ở ngoài (P). Chứng minh rằng (P) đi qua D.

Bài tập 9. Cho tam giác ABC với trực tâm H.

1) Chứng minh rằng có một và có một tiếp tuyến chung trong của đường tròn bàng tiếp góc H của các tam giác HAB, HAC chia đôi BC và có tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này song song với BC.

2) Chứng minh rằng có một và có một tiếp tuyến chung trong của đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác HAB, HAC chia đôi BC và có tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này song song với BC.

3) Chứng minh rằng có một và có một tiếp tuyến chung trong của đường tròn bàng tiếp góc B của tam giác HAB và đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác HAC chia đôi BC và có tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn này song song với BC.

Bài tập 10. Cho tam giác ABC với điểm P sao cho $\angle PBA = \angle PCA$.

1) Chứng minh rằng có một và có một tiếp tuyến chung trong của đường tròn bàng tiếp góc P của các tam giác PAB, PAC chia đôi BC.

2) Chứng minh rằng có một và có một tiếp tuyến chung trong của đường tròn bàng tiếp góc A của các tam giác PAB, PAC chia đôi BC.

3) Chứng minh rằng có một và có một tiếp tuyến chung trong của đường tròn bàng tiếp góc B của tam giác PAB và đường tròn bàng tiếp góc C của tam giác PAC chia đôi BC.

Cuối cùng là một kết quả rất thú vị liên quan tới bài toán ban đầu do tác giả tìm ra.

Bài tập 11. Cho $\triangle ABC$, trực tâm H. Gọi d_a là tiếp tuyến chung trong khác HA của đường tròn nội tiếp tam giác HAB, HAC. Tương tự có d_b, d_c. Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng quy.

Tài liệu tham khảo

[1] Topic common tangent passes through midpoint.
`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h411403`

[2] Topic A pretty problem with 3 incircles (by Tiks).
`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h354536`

[3] Tạp chí toán học và tuổi trẻ số 390 tháng 12 năm 2009.

[4] Tạp chí toán học và tuổi trẻ số 394 tháng 4 năm 2010.

[5] Topic Segment ratio.
`http://artofproblemsolving.com/community/c6h246658`

[6] Circles [incircles of BCI, CAI, ABI].
`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h3680`

[7] Topic Tangent to incircles.
`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h487427`

[8] Topic common tangent and parallel.
`http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h359843`

GENERALIZATION OF A PROBLEM WITH ISOGONAL CONJUGATE POINTS

TRAN QUANG HUNG AND PHAM HUY HOANG

Abstract. In this note we give a generalization of the problem that was used in the All-Russian Mathematical Olympiad and a purely sythetic proofs.

The following problem was proposed by Andrey Badzyan on All-Russian Mathematical Olympiad (2004–2005, District round, Grade 9, Problem 4).

Problem 1. *Let ABC be a triangle with circumcircle (O) and incircle (I). M is the midpoint of AC, N is the midpoint of the arc AC which contains B. Prove that $\angle IMA = \angle INB$.*

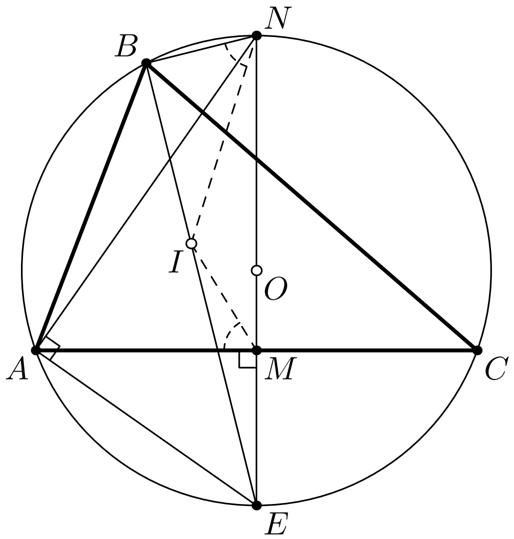


Fig. 1.

Official solution by the Committee. Denote by E be the midpoint of the arc AC which does not contain B. It is clear that B, I, E are collinear, since the line formed by these points is the angle bisector of $\angle ABC$.

Additionally, N, O, M, E are also collinear, since these points all belong to the perpendicular bisector of AC and it is well-known that $AE = EC = IE$.

Since $\angle NAE = \angle AME = 90^\circ$ it is easy to see that $\triangle AME \sim \triangle NAE$ which implies that $|ME| \cdot |NE| = |AE|^2 = |EI|^2$. Hence, we have $\triangle EIM \sim \triangle ENI$ from which we get $\angle IME = \angle EIN$.

Note the following

$$90^\circ + \angle IMA = \angle AME + \angle IMA = \angle IME = \angle EIN =$$
$$= \angle INB + \angle IBN = \angle INB + 90^\circ.$$

We get the required equality

$$\angle IMA = \angle INB.$$

$\square$

Darij Grinberg in [1] gave a solution using the idea of excircle construction while another member named *mecrazywong* on the same forum suggested a different solution by making use of similarity and angle chasing. Now we give a generalized problem.

Problem 2. *Let ABC be a triangle with circumcircle (O). Suppose P, Q are two points lying in the triangle such that P is the isogonal conjugate of Q with respect to $\triangle ABC$. Denote by D the point of intersection of AP and (O) in which $D \neq A$. OD consecutively cuts BC at M and again cuts (O) at N. Prove that $\angle PMB = \angle QNA$.*

If points P and Q are coincide with the incenter I, Problem 2 is coincide with problem 1.

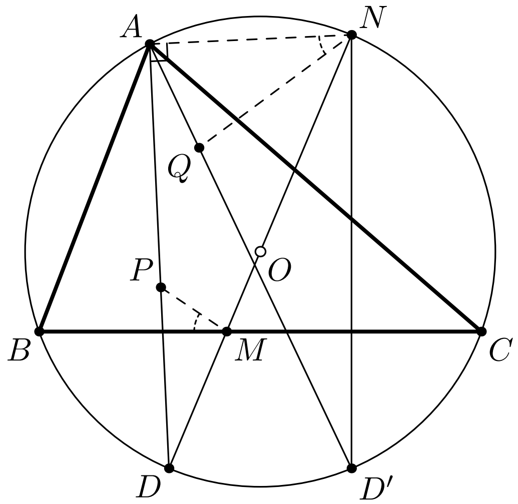


Fig. 2.

Proof. Denote the intersection of AQ and (O) by D'. Since $\angle DAB = \angle D'AC$ we have that $BCD'D$ is an isosceles trapezoid.

We have,

- $\angle PDB = \angle BD'Q$
- $\angle BPD = \angle BAP + \angle PBA = \angle CBD' + \angle QBC = \angle QBD'$.

So $\triangle PBD \sim \triangle BQD'$ and it is easy to conclude that

$$(1) \qquad \frac{|PD|}{|BD'|} = \frac{|BD|}{|QD'|} \Rightarrow |PD| \cdot |QD'| = |BD| \cdot |BD'|.$$

On the other hand,

- $\angle MBD = \angle BND'$ (since $\angle MBD = \frac{1}{2} m \overset{\frown}{CD} = \frac{1}{2} m \overset{\frown}{BD'} = \angle BND'$)
- $\angle BDM = \angle BD'N$

so $\triangle BMD \sim \triangle NBD'$. Hence

$$|BD| \cdot |BD'| = |MD| \cdot |ND'|. \tag{2}$$

From (1) and (2) it is follows that $|PQ|\cdot|QD|' = |MD|\cdot|ND'|$, or $\dfrac{|PD|}{|MD|} = \dfrac{|QD'|}{|ND'|}$. Since $\angle PDM = \angle QD'N$ we get $\triangle PDM \sim \triangle ND'Q$, thus $\angle PMD = \angle NQD'$.

Also, from $\triangle BMD \sim \triangle NBD'$ we get $\angle BMD = \angle NBD' = \angle NAD'$.

Hence

$$\angle PMD - \angle BMD = \angle NQD' - \angle NAD' \Rightarrow \angle PMB = \angle QNA.$$

The proof is completed. □

From the above general problem, we get some corollaries

Corollary 1. *Let ABC be a triangle with bisector AD. Let M be the midpoint of BC. Suppose P and Q are two points on the segment AD such that $\angle ABP = \angle CBQ$, then the circumcenter of the triangle PQM lies on a fixed line when P, Q vary.*

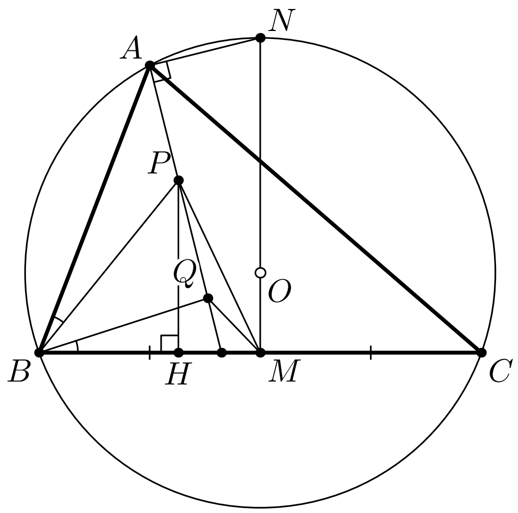


Fig. 3.

Proof. Let H the a point on BC such that $PH \perp BC$. Denote by N the midpoint of the arc BC which contains A. It is easy to see that P, Q are two isogonal conjugate points with repsect to triangle ABC. From our generalized problem, we have $\angle QNA = \angle PMB$ which yields $\angle AQN = \angle HPM = \angle PMN$ (note that $\angle NAD = 90°$), thus $QPMN$ is a concyclic quadrilateral. Therefore the circumcenter of triangle PQM lies on the perpendicular bisector of MN, which is a fixed line. We are done. □

Corollary 2. *From the generalized problem it is follows that $\angle PMN = \angle AQN$, thus if we denote the intersection of PM and AQ by T, then Q, M, N, T are concyclic. Moreover, $PM \parallel AQ$ if and only if $Q \in OM$.*

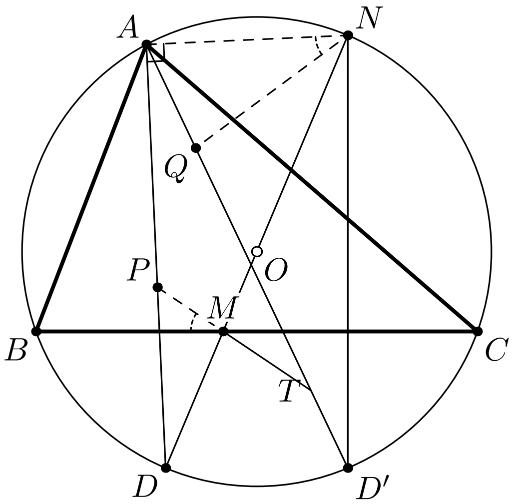


Fig. 4.

Proof. We have $\angle NMT = \angle NMC + \angle CMT = \angle MNB + \angle NBM + \angle PMB = \angle D'AC + \angle NAC + \angle QNA = \angle QAN + \angle QNA = \angle D'QN$. Hence Q, M, N, T are concyclic.

Therefore

$$PM \parallel AQ \iff (PM, AQ) = 0 \iff (NQ, ND) = 0 \iff NQ \equiv ND.$$

We are done.

□

Hence from the above corollary, we can make a new problem.

Problem 3. *Let ABC be a triangle with circumcircle (O). Let d be a line which passes through O and intersects BC at M. Suppose Q is a point on d and P is the isogonal conjugate of Q. Prove that AP and d intersect at a point lying on (O) if and only if $PM \parallel AQ$.*

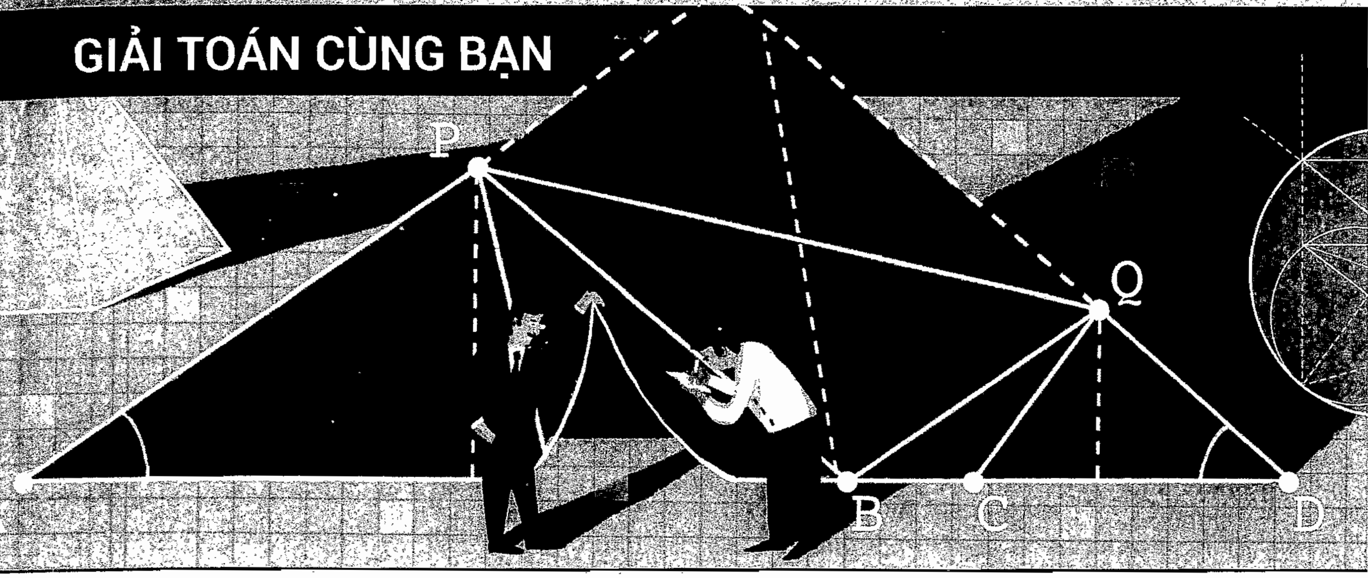
The proof directly follows from Corollary 2.

References

[1] Incenter, circumcircle and equal angles, All-Russian MO Round 4, 2005. *http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?t=32163.*

Tran Quang Hung, Faculty of Mathematics, High school for gifted students at Science, Hanoi University of Science, Hanoi National University, Hanoi, Vietnam.
E-mail address: analgeomatica@gmail.com

Pham Huy Hoang, 11A1 Mathematics, High school for gifted students at Science, Hanoi University of Science, Hanoi National University, Hanoi, Vietnam.
E-mail address: hoangkhtn2010@gmail.com



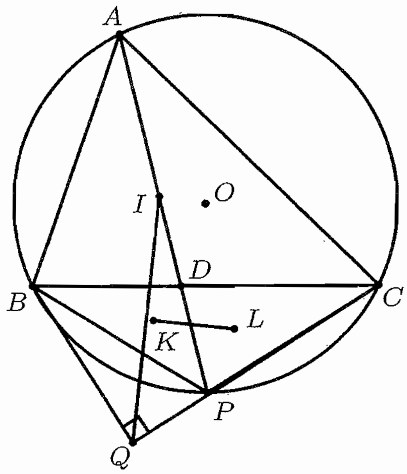
Khai thác một ***bài toán hình học***

Trần Quang Hùng

Bài viết này nhằm trao đổi với bạn đọc những cách tiếp cận, nhìn nhận, cách phân tích các tình huống hình học mà tác giả bài viết đã vận dụng để khai thác một bài toán thi Olympic Toán học Ba Lan năm 2016. Để hiểu nội dung bài viết, bạn đọc cần có kiến thức hình học trong phạm vi Chương trình hình học cấp Trung học cơ sở hiện hành.

Bài toán 1 *(Olympic Toán học Ba Lan, 2016). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. AI cắt BC tại D và cắt (O) tại P khác A. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BPD, CPD. Q là điểm đối xứng với I qua KL. Chứng minh rằng $QB \perp QC$.*

Phân tích *(xem Hình 1)*. Từ giả thiết I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và giao điểm của AI với (O) là P, thấy ngay $PB = PI = PC$ (một kết quả quen thuộc). Như thế, tam giác PBI cân tại P và do đó PK là trung trực của BI; suy ra $KB = KI$. Từ đây, do I và Q đối xứng với nhau qua KL, ta có $KQ = KI = KB$. Như vậy, K là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác IBQ. Suy ra, $\angle BQI = \dfrac{1}{2}\angle BKI$. Từ đây, để ý rằng tia đối của tia KP là phân giác của góc $\angle BKI$ và K là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BPD, suy ra có thể tính góc $\angle BQI$ qua góc $\angle BDP$. Dễ thấy, có thể áp dụng các suy luận vừa nêu cho bộ 3 điểm P, I, C và sẽ đi đến kết luận "có thể tính góc $\angle CQI$ qua góc $\angle CDP$". Vậy là ý tưởng về cộng góc để chứng minh $QB \perp QC$ hình thành.

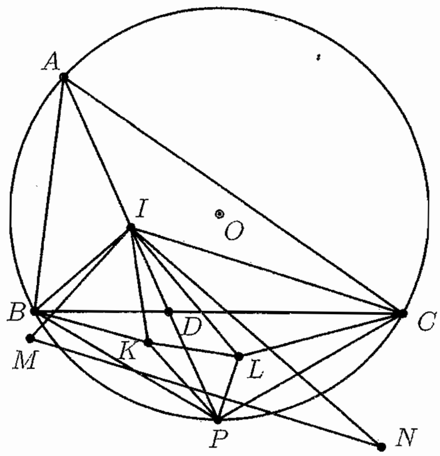


Hình 1

Việc trình bày cụ thể lời giải của Bài toán 1, theo hướng phân tích nêu trên, xin dành cho bạn đọc.

Bài toán 1 là một bài toán đẹp; có nhiều điểm có thể khai thác từ bài toán này. Ta hãy bắt đầu bằng việc sử dụng phép đối xứng trục có trong Bài toán 1 để biến đổi kết luận của bài toán đó. Lấy đối xứng các điểm B, C, Q qua trục KL, ta thu được bài toán "hệ quả" của Bài toán 1:

Bài toán 2 *(xem Hình 2). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. AI cắt BC tại D và cắt (O) tại P khác A. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BPD, CPD. Gọi M, N tương ứng là các điểm đối xứng với B, C qua KL. Chứng minh rằng $IM \perp IN$.*



Hình 2

Việc tạo ra Bài toán 2 từ Bài toán 1 cho thấy, một trong các giải pháp để xử lí các tình huống hình học có cấu trúc phức tạp là sử dụng các phép biến hình để chuyển đổi tình huống đó về tình huống có cấu trúc đơn giản hơn.

Trở lại với việc khai thác Bài toán 1. Như đã phân tích ở trên, giả thiết "K là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BPD" hàm chứa hai thông tin: Một là, K nằm trên trung trực của BI và hai là, có thể dễ dàng tính được góc $\angle BKI$ qua các góc ở đỉnh của tam giác BPD. Điều này dẫn ta tới suy nghĩ thay thế điểm K bởi một điểm nằm trên trung trực của BI (hoặc rộng hơn, nằm trên một đường thẳng vuông góc BI), đảm bảo có thể dễ dàng tính được góc $\angle BKI$ qua các góc ở đỉnh của tam giác BPD. Ta có thể nghĩ tới tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và cả tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BPI thay vì tam giác BPD. Theo hướng này, tác giả bài viết đã thu được hai bài toán sau:

Bài toán 3. *Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. AI cắt (O) tại P khác A. Gọi K, L lần lượt là trực tâm của các tam giác BPI, CPI. Gọi Q là điểm đối xứng với I qua KL. Chứng minh rằng $\angle BQC = \angle BIC$.*

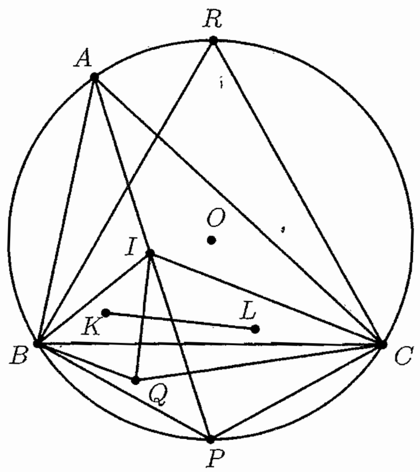
Bài toán 4. *Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. AI cắt (O) tại P khác A. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BPI, CPI. Gọi Q là điểm đối xứng với I qua KL. Chứng minh rằng $\angle BQC = 135^\circ - \frac{1}{4}\angle BAC$.*

Hai bài toán trên đều có thể giải theo phương pháp cộng góc, tương tự cách giải Bài toán 1. Quan sát kết luận của hai bài toán trên, có thể thấy, ta có thể phát biểu các bài toán đó dưới dạng bài toán có các yếu tố di động – một dạng phát biểu thú vị và thách thức người giải hơn. Chẳng hạn, bằng cách giả thiết các điểm B, C cố định và điểm A thay đổi trên nửa mặt phẳng bờ BC sao cho góc $\angle BAC$ không đổi, ta sẽ có các bài toán với yêu cầu chứng minh điểm Q di động trên một đường tròn cố định.

Nhìn nhận Bài toán 4 như bài toán khai thác được từ Bài toán 1 nhờ việc thay thế điểm D

bởi điểm I, ta có thể nghĩ tới việc thay thế D bởi một điểm nào đó khác, nằm trên đường thẳng AI. Điểm "đơn giản" nhất có thể nghĩ tới là điểm A. Ta thu được bài toán sau:

Bài toán 5 *(xem Hình 3). Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. AI cắt (O) tại P khác A. Gọi K,L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BPA, CPA. Gọi Q là điểm đối xứng với I qua KL. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BQC là trung điểm cung BC chứa A của (O).*



Hình 3

Gọi R là trung điểm cung BC chứa A của (O). Ta cần chứng minh R là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BQC. Có thể chứng minh điều này bằng cách chứng minh $\angle BQC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$. Đẳng thức vừa nêu có thể được chứng minh bằng cách tương tự như cách đã làm với Bài toán 1.

Quyết định "táo bạo" thay thế D bởi một điểm tùy ý khác P thuộc đoạn thẳng AP, đưa ta tới bài toán tổng quát sau:

Bài toán 6. *Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. AI cắt (O) tại P khác A. Trên đoạn thẳng AP, lấy điểm J tùy ý, khác P. Gọi K,L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BPJ, CPJ. Gọi Q là điểm đối xứng với I qua KL. Chứng minh rằng $\angle BQC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BJC$.*

Trong bài toán trên, ta hoàn toàn có thể phát biểu kết luận như ở bài toán trước: "Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BQC là trung điểm cung BC chứa J của đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC".

Rõ ràng, các bài toán 1, 4 và 5 là các trường hợp riêng của Bài toán 6, khi J trùng với D, I hoặc A. Điều này cho thấy, dường như ta đã đi "đến cùng" trên con đường đang đi. Nói cách khác, dường như cần một "bước ngoặt" (tức một cách nhìn nhận khác) trên con đường khai thác Bài toán 1. Để ý rằng, vai trò của các đỉnh A, B, C là như nhau trong cách đặt vấn đề ở Bài toán 1. Nghĩa là, ta sẽ có các kết quả hoàn toàn tương tự, khi xét giao điểm của BI hoặc CI với (O). Vì vậy, một câu hỏi tự nhiên có thể đặt ra là: Sự liên kết giữa các kết quả thu được khi xét giao điểm của AI, BI, CI với (O) có thể sinh ra những kết quả mới nào? Bài toán 7 dưới đây là một trong các bài toán mà tác giả bài viết đã thu được theo hướng suy nghĩ vừa nêu. Bài toán này đã được tác giả bài viết sử dụng trong một bài giảng cho Đội tuyển học sinh Việt Nam tham dự Olympic Toán học quốc tế (IMO) năm 2016.

Bài toán 7. *Cho đường tròn (O). Các điểm A, B, C di động trên (O) sao cho tam giác ABC là một tam giác nhọn, không cân. Các phân giác BE, CF (E thuộc AC và F thuộc AB) của tam giác ABC cắt (O), tương ứng, tại các điểm thứ hai M, N. Gọi K và L, tương ứng, là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác CME và BNF. Gọi P và Q, tương ứng, là các điểm đối xứng với B và C qua KL. Gọi I là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng nếu các đường tròn (IPN) và (IQM) cắt* *nhau tại điểm thứ hai R, khác I, nằm trên cung MN chứa A của (O) thì số trị của biểu thức $\angle PRQ - \frac{1}{4}\angle BAC$ không phụ thuộc vào vị trí của các điểm A, B, C.*

Lời giải (*xem Hình 4*).

Gọi J là điểm đối xứng với I qua KL.

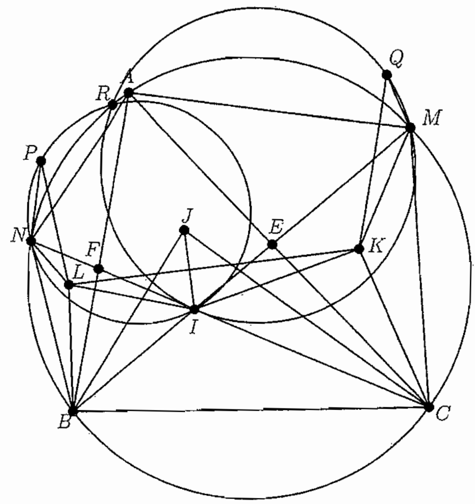
Vì tam giác CMI cân tại M và MK là phân giác của góc $\angle CMI$ nên MK là trung trực của CI. Kéo theo $KC = KI = KQ = KJ$. Tương tự, ta cũng có $LB = LI = LP = LJ$. Suy ra

$$\begin{aligned}
\angle BJC &= \angle BJI + \angle CJI \\
&= \frac{1}{2}\angle BLI + \frac{1}{2}\angle CKI \\
&= \frac{1}{2}(360^\circ - 2\angle BLN) + \frac{1}{2}(360^\circ - 2\angle CKM) \\
&= 360^\circ - \angle BLN - \angle CKM \\
&= 360^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\angle BFN + 90^\circ + \frac{1}{2}\angle CEM) \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BFN + \angle CEM) \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A - \frac{1}{2}\angle C + 180^\circ \\
&\qquad - \angle A - \frac{1}{2}\angle B) \\
&= \angle A + \frac{1}{4}(\angle B + \angle C) \\
&= 45^\circ + \frac{3}{4}\angle A.
\end{aligned}$$

Do giao điểm thứ hai R, khác I, của (IPN) và (IQM) nằm trên cung MN chứa A của (O) nên

$$\begin{aligned}
\angle PRQ &= \angle PRN + \angle MRN + \angle MRQ \\
&= \angle PIN + \angle MAN + \angle MIQ \\
&= \angle PIN + \angle MIQ + \angle BIC \\
&= \angle MIN - \angle PIQ + \angle BIC \\
&= 2\angle BIC - \angle PIQ \\
&= 180^\circ + \angle A - \angle BJC \\
&= \frac{1}{4}\angle BAC + 135^\circ.
\end{aligned}$$

Vì vậy, $\angle PRQ - \frac{1}{4}\angle BAC = 135^\circ$. Suy ra ta có điều cần chứng minh.



Hình 4

Khai thác Bài toán 7 theo cách đã làm đối với Bài toán 1 để có Bài toán 6, tác giả bài viết đã thu được bài toán sau:

Bài toán 8. *Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. Các đường thẳng BI, CI cắt (O), tương ứng, tại các điểm thứ hai M, N. Lần lượt trên các đoạn thẳng BM và CN, lấy các điểm S và T tùy ý, sao cho S khác M và T khác N. Gọi K và L, tương ứng, là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BNT và CMS. Các phân giác của các góc $\angle IBT$ và $\angle ICS$ cắt nhau tại R. Chứng minh rằng điểm đối xứng của I qua KL nằm trên đường tròn (BRC).*

Việc chứng minh Bài toán 8 xin dành cho bạn đọc.

Các Bài toán 7 và 8 rất có thể là những mảnh đất mầu mỡ để tìm ra thêm những bài toán mới. Mong rằng bạn đọc sẽ tìm hiểu và cùng tác giả bài viết khai phá những mảnh đất mầu mỡ này.

Cuối cùng, tác giả trân trọng cảm ơn thầy Nguyễn Khắc Minh đã đọc bản thảo và cho rất nhiều góp ý quan trọng, giúp tác giả hoàn thành bài viết này.

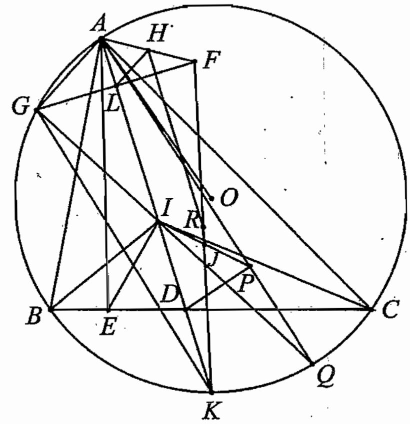
PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC TRONG THỰC HÀNH GIẢI TOÁN

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Đối xứng trục là một phép biến hình quan trọng trong nhóm các phép dời hình. Khi đối xứng trục kết hợp với những mô hình hình học khác nhau sẽ tạo ra những bài toán khá thách thức trong việc giải. Khi ta định nghĩa về đường trung trực đoạn thẳng là ta có thể hiểu được về đối xứng trục. Phép đối xứng trục được giới thiệu lần đầu tiên trong chương trình hình học lớp 8 ở Việt Nam và sau đó một lần nữa được giới thiệu hệ thống hơn cùng với các tính chất trong trương trình hình học lớp 11. Mặc dù đối xứng trục được định nghĩa rất đơn giản, xong chính vì tính đơn giản của nó mà khi áp dụng trong những mô hình và tình huống khác nhau ta có thể thu được những bài toán thú vị. Những bài toán trong bài viết này hướng tới một đối tượng khá rộng, những bạn học sinh THCS học tới tứ giác nội tiếp là hoàn toàn có thể hiểu lời giải, xong để tìm tòi ra hướng giải và cách giải thì các bạn cần có nền kiến thức cao hơn. Chúng tôi viết bài này dựa trên quan điểm là sử dụng một phép biến hình trong giải toán, điều đó có nghĩa là chúng tôi cố gắng nhấn mạnh tính chất của phép biến hình thông qua các bất biến của nó khi ta sử dụng nó. Mặc dù với một phép dời hình như đối xứng trục mà thể hiện rõ được các tính chất bất biến trong giải toán là khá khó khăn vì bất biến của các phép dời hình sinh ra từ việc giữ nguyên khoảng cách nên đôi khi ta dễ bị lẫn các bất biến đó trong các tính chất hình thông thường. Chúng ta hãy đi sâu và phân tích một số ví dụ cụ thể sau.

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có tâm đường tròn nội tiếp là I. AI cắt BC tại D và cắt (O) tại K khác A. Lấy P sao cho $DP \perp AO$. AP cắt (O) tại Q khác A. QI cắt (O) tại G khác Q. J là trung điểm của IP. L là hình chiếu vuông góc của G lên AD. Trung trực của KL cắt KJ tại R. Lấy điểm H sao cho $LH // AG$ và $RH // AD$. Chứng minh rằng H luôn thuộc một đường tròn cố định khi P thay đổi.*

Lời giải



Gọi E là điểm đối xứng với P qua AD thì E thuộc BC và $\widehat{EAB} = \widehat{PAC}$. Dễ thấy GK chia đôi EI. Vậy qua phép đối xứng trục AD thì KJ và KG đối xứng nhau qua KA. Từ đó gọi GL cắt KJ tại F thì L là trung điểm GF. Suy ra H là trung điểm AF. Do F và G đối xứng qua AD nên F di chuyển trên ảnh đối xứng của (O) qua AD. H là trung điểm AF và A cố định nên H thuộc một đường tròn cố định.

Nhận xét. *Việc sử dụng đối xứng trục AD đóng vai trò quan trọng trong việc tìm ra điểm F là điểm đối xứng của G qua AD. Bài toán GK chia đôi đoạn EI là bài toán 2 thi IMO năm 2010 nổi tiếng. Từ đó ta thu được đường tròn cố định.*

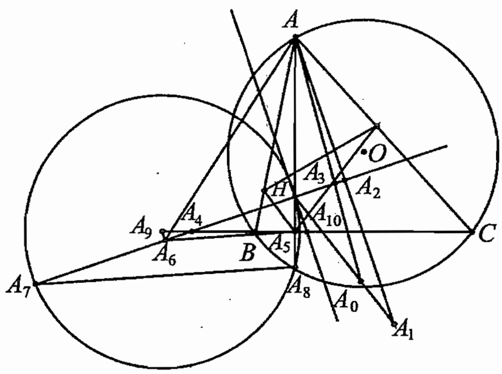
Bài toán 2. *Cho tam giác ABC với trực tâm là H. Tam giác DEF đối xứng với tam giác ABC qua một đường thẳng d bất kỳ đi qua H. Các điểm X, Y, Z chia các đoạn HA, HB, HC theo cùng một tỷ số. Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy.*

Lời giải. Sử dụng đối xứng trục d ta chuyển về bài toán sau

Bài toán. *Cho tam giác ABC với trực tâm H và một đường thẳng d đi qua H. A_0, B_0, C_0 là các điểm sao cho HA_0, HB_0, HC_0 đối xứng HA, HB, HC qua d và $\frac{HA_0}{HA} = \frac{HB_0}{HB} = \frac{HC_0}{HC}$. Chứng minh rằng AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy.*

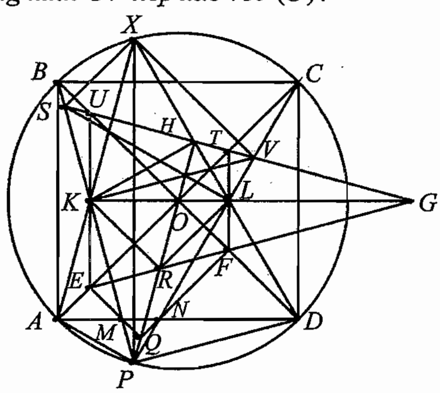
Bổ đề (Mở rộng đường thẳng Droz-Farny). *Hai đường thẳng vuông góc với nhau tại trực tâm một tam giác thì chắn trên ba cạnh tam giác ba đoạn thẳng mà các điểm lần lượt chia các đoạn thẳng đó cùng một tỷ số thì thẳng hàng.*

Bổ đề có trong nhiều tài liệu xin không nhắc lại chứng minh.



Trở lại bài toán. Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng của A, B, C qua d. A_2, B_2, C_2 là trung điểm AA_1, BB_1, CC_1. AA_0, BB_0, CC_0 cắt d tại A_3, B_3, C_3. Từ định lý Menelaus dễ thấy A_3, B_3, C_3 chia HA_2, HB_2, HC_2 theo cùng tỷ số. Ta phải chứng minh AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy. Giả sử d cắt BC, CA, AB tại A_4, B_4, C_4. AA_5, BB_5, CC_5 là các đường cao ΔABC thì $HA_4.HA_2 = HA.HA_5 = k$. Phép nghịch đảo cực H phương tích k biến A_4 thành A_2, A thành A_5. Tương tự với các đỉnh B, C, khi đó A_3, B_3, C_3 chia HA_2, HB_2, HC_2 theo cùng tỷ số sẽ biến thành A_6, B_6, C_6 chia HA_4, HB_4, HC_4 cùng tỷ số. Ta cần chứng minh các đường tròn $(HA_5A_6), (HB_5B_6), (HC_5C_6)$ đồng trục. Gọi A_7, B_7, C_7 là các điểm đối xứng của H qua A_5, B_5, C_5 và A_8, B_8, C_8 là các điểm đối xứng của H qua A_6, B_6, C_6. Như vậy qua phép vị tự tâm H tỷ số 2 ta cần chứng minh các đường tròn $(HA_7A_8), (HB_7B_8), (HC_7C_8)$ đồng trục. Chú ý rằng tâm A_9 của (HA_7A_8) chính là giao của đường thẳng qua A_6 vuông góc với d và BC. Tương tự với B_9, C_9. Ta cần chứng minh A_9, B_9, C_9 thẳng hàng. Đường thẳng qua H vuông góc d cắt BC, CA, AB tại A_{10}, B_{10}, C_{10}. Dễ thấy A_9, B_9, C_9 chia $A_4A_{10}, B_4B_{10}, C_4C_{10}$ cùng tỷ số. Theo bổ đề thì A_9, B_9, C_9 thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3 (Mở rộng đề tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội 2016). *Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm thuộc cung nhỏ AD của (O). PB, PC lần lượt cắt đoạn AD tại M, N. Trung trực của AM, DN lần lượt cắt BD, AC tại S, T. ST cắt PC, PB lần lượt tại U, V. Chứng minh rằng đường tròn đường kính UV tiếp xúc với (O).*



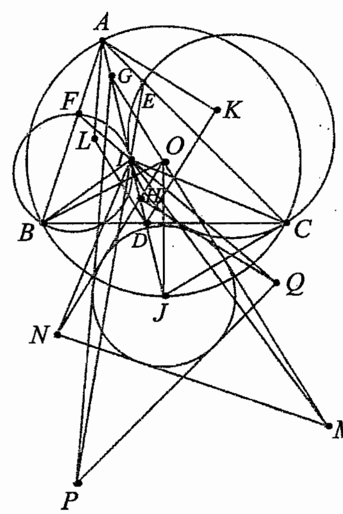
Lời giải. Giả sử trung trực của AM cắt PB, AC tại K, E. Trung trực của DN cắt PC, BD tại L, F. Do tam giác NCD vuông nên L là trung điểm CN, suy ra $LO \mathbin{//} AD$. Tương tự $KO \mathbin{//} AD$ nên K, O, L thẳng hàng. Dễ thấy tam giác AEM vuông cân nên $EM \perp AC \Rightarrow EM // DB$. Tương tự $FN // AC$. Chú ý $MN // BC$ nên $\frac{PM}{PB} = \frac{PN}{PC}$. Lấy điểm Q thuộc PO sao cho $\frac{PQ}{PO} = \frac{PM}{PB} = \frac{PN}{PC}$. Từ đó $QM // BD // EM$ nên E, M, Q thẳng hàng. Chứng minh tương tự F, N, Q thẳng hàng. Từ đó $OEQF$ là hình chữ nhật, nên PO đi qua trung điểm R của EF. Dễ thấy S, E đối xứng nhau qua K. T, F đối xứng nhau qua L. Vậy ST, KL, EF đồng quy tại G. Ta thấy R cũng là trung điểm OQ. Nên trong hình thang $BOQM$ có KR là đường trung bình, suy ra $KR // QM$. Tương tự $LR // QN$. Ta cũng có $MN // KL$. Mặt khác ΔQMN vuông cân nên ΔRKL vuông cân. Từ đó $\widehat{RLG} = 135°$. Dễ có $RO = RF$ và $LO = LF$ nên RL là phân giác của $\widehat{ORF}$. Từ đó gọi PO cắt ST tại H thì L là tâm đường tròn nội tiếp ΔRHG và $\widehat{RLG} = 135°$. Từ đó $\widehat{RHG} = 2\widehat{RLG} - 180° = 90°$, nên $PO \perp ST$ tại H suy ra tứ giác $SHOK$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{SHK} = \widehat{SOK} = 45° = \widehat{KPL}$ nên tứ giác $KHVP$ nội tiếp, suy ra $\widehat{PKV} = \widehat{PHV} = 90°$. Tương tự $\widehat{PLU} = 90°$ nên K, L nằm trên đường tròn đường kính UV. Gọi X là điểm đối xứng với P qua KL thì X thuộc (O) nên $\widehat{KXL} = 45° = \widehat{KSO} = \widehat{KHP} = \widehat{KVP}$ nên X nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KLV cũng là đường tròn đường kính UV. Do $KL // AD$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác XKL, hay đường tròn đường kính UV tiếp xúc với (O).

Bài toán 4. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển. AD là phân giác và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC, ADB. Lấy G, H trên AD sao cho $OG // DL, OH // DK$. Đường tròn qua I, C tiếp xúc IA cắt AC tại E khác C. Đường tròn qua I, B tiếp xúc IA cắt AB tại F khác B. Trên IE, IF lấy P, Q sao cho $GP // AL, HQ // AK$. Chứng minh rằng PQ luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi A thay đổi.*

Lời giải. Không mất tổng quát giả sử $AB < AC$. Do $OG // DL, GP // AL$ nên $\widehat{OGD} = \widehat{LDA} = \widehat{LAD} = \widehat{PGD}$, nên hai đường thẳng GP và GO đối xứng nhau qua AD. Lấy M thuộc GO sao cho $\widehat{BIM} = 90°$. Ta thấy

$$\widehat{DIM} = 90° - \widehat{BID} = 90° - \left(90° - \frac{\widehat{BCA}}{2}\right) = \widehat{ICA} = \widehat{AIE} = \widehat{PID}$$

nên hai đường thẳng IM và IP đối xứng nhau qua AD. Từ đó M và P đối xứng qua AD. Dựng N tương tự M thì N và Q đối xứng qua AD. Gọi AD cắt (O) tại J khác A. Do K là tâm ngoại tiếp ΔADC nên $DK \perp BJ$ từ đó dễ thấy ON là trung trực của BJ. Chú ý $OJ \perp BC$ nên $\widehat{BON} = \widehat{JON} = \widehat{JBC} = \widehat{JAC} = \widehat{BIC} - 90° = \widehat{BIN}$, suy ra tứ giác $BION$ nội tiếp. Tương tự có tứ giác $COIN$ nội tiếp. Từ hai tứ giác này nội tiếp chú ý tính đối xứng ta có biến đổi góc sau



$$\widehat{NJM} = 360° - \widehat{OJN} - \widehat{OJM}$$
$$= 180° - \widehat{OBN} + 180° - \widehat{OCM}$$
$$= 180° - \widehat{OIN} + \widehat{OIM} = 180° - \widehat{MIN} = \widehat{BIC}$$

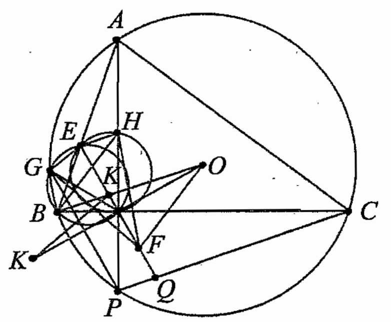
$=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{BAC}=90^\circ+\frac{1}{2}\widehat{MON}$

chú ý đẳng thức cuối có do $\widehat{MON}=\frac{1}{2}\widehat{BOC}=\widehat{BAC}$.

Từ đó chú ý OJ là phân giác của $\widehat{MON}$ nên J là tâm đường tròn nội tiếp ΔOMN, vậy MN luôn tiếp xúc với $\left(J,\frac{JI}{2}\right)$ cố định. Vì hai đường thẳng MN và PQ đối xứng nhau qua trục AD và (J) tự đối xứng qua AD nên PQ luôn tiếp xúc (J) cố định. Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. *Việc tìm ra phép đối xứng trục AD là bước quan trọng trong lời giải bài toán này. Nhờ có phép đối xứng trục ta đã chuyển việc chứng minh PQ tiếp xúc với đường tròn cố định thành việc chứng minh MN tiếp xúc với đường tròn cố định có phần đơn giản hơn.*

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD. Đường thẳng qua D vuông góc với OD cắt AB tại E. Trung trực của AC cắt DE tại F. Gọi OB cắt DE tại K. L là đối xứng của O qua EF. Đường tròn ngoại tiếp ΔBDF cắt (O) tại G khác B. Chứng minh rằng GF và KL cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp ΔDEH.*



Lời giải

Bổ đề. *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) và P,Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác. AP cắt (O) tại M khác A. QM cắt BC tại E thì $PE\,//\,AQ$.*

Chứng minh. Gọi AQ cắt (O) tại N khác A và cắt BC tại H. Vì P,Q đẳng giác nên $\Delta CHN \backsim \Delta ACM$ và $\Delta CPM \backsim \Delta QCN$ (g.g). Ta suy ra $HN.AM=CM.CN=QN.PM$ vì thế $\frac{MP}{MA}=\frac{NH}{NQ}=\frac{ME}{MQ}$ hay $PE\,//\,AQ$.

Hệ quả. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) và P,Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác. E thuộc BC sao cho $PE\,//\,AQ$ thì QE và AP cắt nhau trên đường tròn (O).

Trở lại bài toán. Gọi AD cắt (O) tại P khác A, dễ thấy D là trung điểm HP. Gọi DE cắt PC tại Q thì theo bài toán con bướm D là trung điểm EQ nên OD là trung trực của EQ. Vì G là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BED và BAC nên $\Delta GED \backsim \Delta GAC$. Từ đó $\widehat{GED}=\widehat{GAC}=180^\circ-\widehat{GPC}$. Từ đó tứ giác $GEQP$ nội tiếp, như vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác nằm trên OD.

Lại có $\widehat{GDE}=\widehat{GCA}=\widehat{GPA}$ nên đường tròn (GDP) tiếp xúc với DE nói cách khác tâm đường tròn ngoại tiếp tam ΔGDP nằm trên OD. Như vậy OD đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $GEQP$ và tam giác GDP nên $OD\perp GP$. Từ đó $GEQP$ là hình thang cân. Ta dễ chứng minh $\Delta DGE=\Delta DHE$. Vậy QE là trung trực của GH. Ta xét phép đối xứng trục EQ thì GF và KL cắt nhau trên (DEH) khi và chỉ khi các đường đối xứng của GF,KL qua QE cắt nhau trên đường tròn đối xứng của (DEH) qua EQ. Nói cách khác chỉ cần chứng minh FH,OK cắt nhau trên đường tròn (BDE). Ta để ý $\widehat{HBE}=\widehat{OBD}$ và $\widehat{EDH}=\widehat{ODC}$ nên O và H là hai điểm đẳng giác trong ΔBDE. Áp dụng hệ quả trên ta thấy FH,OK cắt nhau trên đường tròn (BDE).

Nhận xét. *Bổ đề có nguồn gốc từ diễn đàn AoPS và phép chứng minh trên của* **Phan Anh Quân** *học sinh lớp A1 Toán K48 trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội. Trong việc áp dụng bổ đề ta đã chỉ ra một chi tiết khá thú vị là H và O đẳng giác trong tam giác BDE. Mặt khác việc xử lý bằng phép đối xứng trục để rồi sau đó áp dụng bổ đề là một bước quan trọng của bài toán.*

(Kỳ sau đăng tiếp)

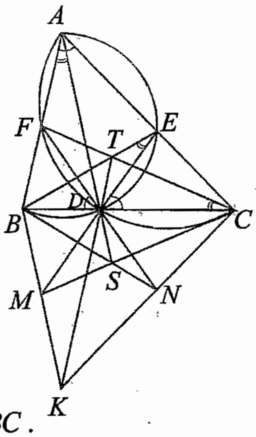
PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC TRONG THỰC HÀNH GIẢI TOÁN

(Tiếp theo kỳ trước)

TRẦN QUANG HÙNG
(GV THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài toán sau xuất hiện trong kỳ thi Romani Master in Mathematic năm 2016

Bài 6. *Cho tam giác ABC và điểm D nằm trên cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB, DAC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A. Gọi K là điểm đối xứng với A qua BC. DE, DF lần lượt cắt KB, KC tại M, N. Chứng minh rằng BN, CM và AD đồng quy.*

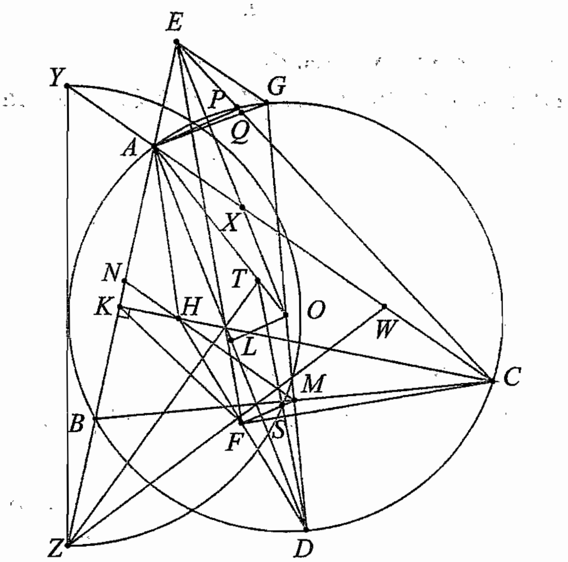


Lời giải. Giả sử BN cắt CM tại S. Ta thấy $\widehat{EDC} = \widehat{BAC} = \widehat{FDB}$ nên DE, DF đối xứng nhau qua BC. KB đối xứng với AB qua BC, do đó KB cắt DE tại M là điểm đối xứng qua BC của giao điểm DF và AB chính là F, vậy F, M đối xứng qua BC.

Tương tự E, N đối xứng qua BC. Vậy S là giao của BN và CM sẽ là điểm đối xứng qua BC của T là giao của BE, CF. Ta có $\widehat{DET} = \widehat{DAB} = \widehat{DCF}$ nên tứ giác $DTEC$ nội tiếp. Từ đó $\widehat{TDC} = \widehat{TEA} = \widehat{BDA}$, suy ra DT và DA đối xứng qua BC, nên DT đi qua K hay D, K, T thẳng hàng. Suy ra ảnh đối xứng qua trục BC của D, K, T là D, A, S thẳng hàng.

Bài 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại D khác A. Lấy X thuộc AC sao cho $OX // AD$. Y là điểm đối xứng với X qua A. Lấy Z trên tia AB sao cho $AZ = AC$. Lấy T thuộc AO sao cho $ZT \perp AC$. Chứng minh rằng đường tròn đường kính YZ chia đôi đoạn DT.*

Lời giải. Giả sử OX cắt AB tại E. Dễ thấy ΔAXE cân tại A nên $AY = AX = AE$, suy ra Y và E đối xứng nhau qua AD.



Dễ thấy Z và C đối xứng nhau qua AD, gọi W là điểm đối xứng với B qua AD thì tam giác ABC và AWZ đối xứng nhau qua trục AD. Do ZW và BC đối xứng qua phân giác $\widehat{BAC}$ nên $AO \perp ZW$, từ đó T là trực tâm ΔAZW, vậy T đối xứng với trực tâm H của ΔABC qua AD. Gọi S, F lần lượt là trung điểm của DT, DH thì S, F đối xứng nhau qua AD. Ta cần chứng minh $\widehat{YSZ} = 90^0$. Qua phép đối xứng trục AD cần chứng minh $\widehat{EFC} = 90^0$, thật vậy gọi DG là đường kính của (O). Dễ thấy $OE // AD \perp AG$ nên $EA = EG$. AG là phân giác $\widehat{EAC}$ nên $\widehat{EGA} = \widehat{EAG} = \widehat{GAC} \Rightarrow EG // AC$. Gọi CE cắt (O) tại P khác C và CE cắt AG tại Q. Ta thấy $\widehat{PGQ} = \widehat{PCA} = \widehat{PEG}$ suy ra

$$\Delta PGQ \backsim \Delta QEG \Rightarrow \frac{PG}{GE}=\frac{QG}{QE}=\frac{AG}{CE}.$$

Từ đó $\frac{PG}{AG}=\frac{GE}{CE}=\frac{EA}{CE}=\frac{AP}{BC} \Rightarrow \frac{PG}{PA}=\frac{AG}{BC}$ (1)

Gọi L, M lần lượt là trung điểm AD, BC dễ có OM và FL cùng song song và bằng $\frac{1}{2}AH$ nên $FMOL$ là hình bình hành. Suy ra

$$FM = OL = \frac{1}{2}AG.$$

Từ (1) có $\frac{PG}{GA}=\frac{AG}{BC}=\frac{2FM}{2MC}=\frac{FM}{MC}$ (2)

Dễ có $\widehat{APG}=180^0-\widehat{ADG}=\widehat{FMC}$ (3)

Từ (2), (3) suy ra $\Delta PAG \backsim \Delta MCF$ suy ra $\widehat{PGA}=\widehat{MFC}$. Từ đó gọi CK là đường cao và N là trung điểm AB ta thấy tứ giác $KNMF$ nội tiếp đường tròn Euler của ΔABC, suy ra

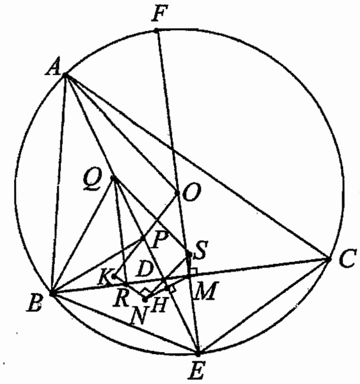
$$\widehat{ECF}=\widehat{ECA}+\widehat{ACB}+\widehat{BCF}$$
$$=\widehat{PGA}+\widehat{NMB}+\widehat{BCF}=\widehat{NMB}+\widehat{MFC}+\widehat{BCF}$$
$$=\widehat{NMA}+\widehat{BMF}=\widehat{NMF}=180^0-\widehat{NKF}.$$

Từ đó tứ giác $EKFC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{EFC}=90^0$.

Nhận xét. *Việc dùng đối xứng trục AD để chuyển mô hình bài toán qua việc chứng minh $\widehat{EFC}=90^0$ là một việc làm quan trọng và vai trò của việc sử dụng phép đối xứng trục ở đây là khá nổi bật. Ta dùng đối xứng trục chuyển toàn bộ mô hình bài toán này thành một bài toán khác là một cách giải đặc trưng cho việc sử dụng phép biến hình trong giải toán.*

Bài 8. *Cho tam giác ABC cố định với tâm đường tròn ngoại tiếp O và phân giác trong AD. P, Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác ABC và nằm trên AD. Lấy điểm S sao cho $QS//AO$ và $DS \perp AO$. Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng đường thẳng qua P vuông góc với SM luôn đi qua một điểm cố định khi P, Q thay đổi.*

Lời giải. Gọi R là hình chiếu của Q trên BC. Do $DS \perp AO$ nên DS và BC đối xứng nhau qua AD, từ đó dễ thấy R và S đối xứng nhau qua AD. Gọi N, T là các điểm đối xứng với M, O qua AD tương ứng. Ta sẽ chứng minh $PT \perp MS$, hay đường thẳng qua P vuông góc với SM đi qua T cố định. Xét qua phép đối xứng trục AD thì cần chứng minh $RN \perp OP$.



Thật vậy gọi AD cắt (O) tại E khác A. EF là đường kính của (O). M là trung điểm của BC. H là trung điểm của MN thì H thuộc AD. Ta có $\widehat{RMN}=\widehat{OEP}$ (1). Theo định lý Thales và chú ý $\Delta HDM \backsim \Delta MDE$ ta có

$$\frac{QE}{RM}=\frac{DE}{DM}=\frac{ME}{HM}=\frac{2ME}{MN} \Rightarrow \frac{MN}{MR}=\frac{2ME}{QE} \quad (2)$$

Lại có $\widehat{PBE}=\widehat{PBC}+\widehat{CBE}=\widehat{QBA}+\widehat{QAB}=\widehat{BQE}$.

Từ đó có $\Delta EBP \backsim \Delta EQB \Rightarrow EP.EQ=EB^2=$

$$=EM.EF=2EM.EO \Rightarrow \frac{2ME}{QE}=\frac{EP}{EO} \quad (3)$$

Từ (2), (3) $\Rightarrow \frac{MN}{MR}=\frac{EP}{EO}$ (4)

Từ (1), (4) $\Rightarrow \Delta EPO \backsim \Delta MNR \Rightarrow \widehat{MNR}=\widehat{EPO}$.

Giả sử RN cắt OP tại K thì tứ giác $PHNK$ nội tiếp, suy ra $\widehat{NKP}=\widehat{PHN}=90^0$. Vậy $RN \perp OP$.

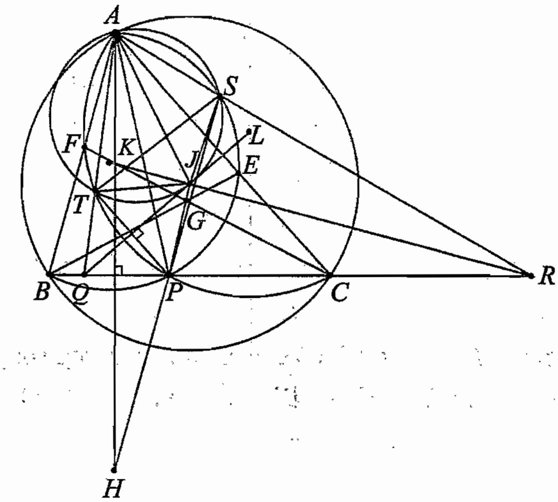
Nhận xét. *Việc sử dụng phép đối xứng trục AD chuyển bài toán về chứng minh $RN \perp OP$ là một việc làm quan trọng trong bài toán này.*

Ta tiếp tục với bài thi HSG lớp 10 ở Trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội năm 2015

Bài 9. *Cho ΔABC nhọn, cố định. P là điểm di chuyển trên cạnh BC. (K),(L) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAB, PAC. Lấy S thuộc (K) sao cho $PS//AB$, lấy T thuộc (L) sao cho $PT//AC$.*

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔAST luôn đi qua một điểm J cố định khác A.

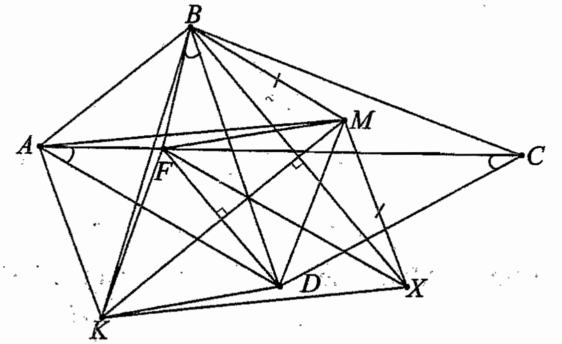
b) Giả sử (K) cắt CA tại E khác A. (L) cắt AB tại F khác A. BE cắt CF tại G. Chứng minh rằng đường thẳng PG đi qua $J \Leftrightarrow AP$ đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác ΔABC.



Lời giải. a) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta sẽ chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔAST đi qua J cố định. Thật vậy, gọi AT, AS giao BC tại Q, R tương ứng. Các tứ giác $ABPS$ và $ACPT$ là hình thang cân, do đó tam giác ABR và ACQ cân tại R và Q. Dễ thấy JK, JL lần lượt là trung trực của AB, AC, do đó JK đi qua R và JL đi qua Q. Suy ra trong ΔAQR thì J là tâm đường tròn nội tiếp hay AJ là phân giác $\widehat{SAT}$ (1). Tứ giác $ACPT$ là hình thang cân nên JQ cũng là trung trực của PT, do đó $JT = JP$. Tương tự $JS = JP$. Do đó $JT = JS$ (2). Từ (1), (2) suy ra J thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔAST.

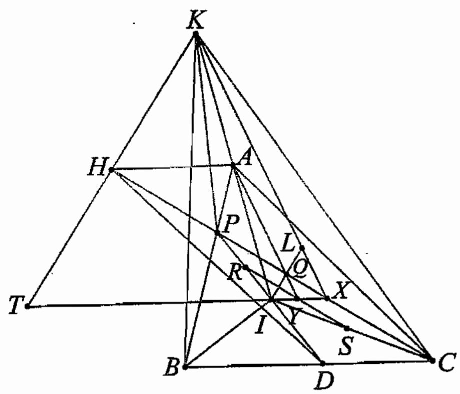
b) Ta thấy tứ giác $AEGF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EGC} = \widehat{EAF} = \widehat{EPG}$ nên tứ giác $CEGP$ nội tiếp kéo theo tứ giác $BFGP$ cũng nội tiếp. Gọi H là điểm đối xứng với A qua BC thì $\widehat{BPH} = \widehat{APB} = \widehat{AEB} = \widehat{GPC}$, do đó PG đi qua H. Do đó PG và AP đối xứng nhau qua BC. Từ đó PG đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp J của ΔABC $\Leftrightarrow AP$ đi qua điểm đối xứng của J qua $BC \Leftrightarrow AP$ đi qua tâm đường tròn Euler của ΔABC.

Bài 10. (Mở rộng bài toán 1 thi IMO 2016). *Cho ΔABC có $\widehat{ABC}$ tù và tâm đường tròn ngoại tiếp là D. Đường trung trực của AB cắt AC tại F. K, M lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADF, BFC. Dựng hình bình hành $AMXN$. Chứng minh rằng KM, FX, BD đồng quy.*



Lời giải. Do $DA = DB$ và $FA = FB$ nên A, B đối xứng nhau qua FD. Từ đó $\widehat{FBD} = \widehat{FAD} = \widehat{DCF}$ nên tứ giác $FBCD$ nội tiếp đường tròn (M). Hai đường tròn $(BFDC)$ và (AFD) có $\Delta AFD = \Delta BFD$ (c.g.c) nên bán kính của chúng bằng nhau. Từ đó $MFKD$ là hình thoi, suy ra K, M đối xứng nhau qua FD. Vậy $ABMK$ là hình thang cân, mà $AMXK$ là hình bình hành nên dễ suy ra B, X đối xứng nhau qua KM. Từ $MFKD$ là hình thoi suy ra F, D đối xứng nhau qua KM, do đó FX, KM, DB đồng quy.

Bài 11. *Cho ΔABC với tâm đường tròn nội tiếp I. P thuộc cạnh AB sao cho $IP \perp IB$. R, S lần lượt là trung điểm IP, IC. Q là hình chiếu của I trên PC. Chứng minh rằng AQ chia đôi đoạn RS.*



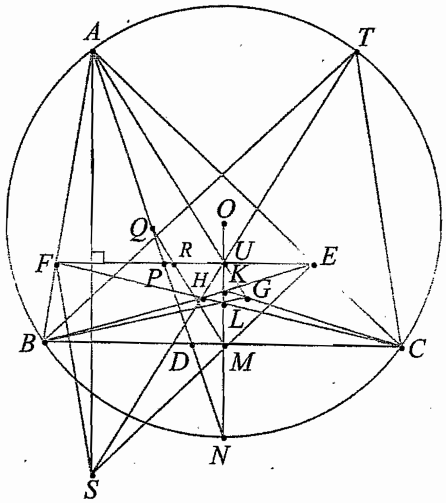
Lời giải. Gọi K,L lần lượt là các điểm đối xứng với I qua A,Q. Ta sẽ chứng minh KL chia đôi PC. Thật vậy.

$\widehat{PIC}=\widehat{PIA}+\widehat{AIC}=\frac{\widehat{ACB}}{2}+90^\circ+\frac{\widehat{ABC}}{2}$

$=180^\circ-\frac{\widehat{BAC}}{2}=\widehat{PAK}$. Lại có $\frac{AP}{AK}=\frac{AP}{AI}=\frac{PI}{IC}$, đẳng thức cuối có do $\Delta API \backsim \Delta AIC$. Từ đó $\Delta APK \backsim \Delta IPC$. Lấy H trên PC sao cho $AH // BC$. Ta thấy $\frac{PB}{PK}=\frac{PB}{PA}\cdot\frac{PA}{PK}=\frac{PC}{PH}\cdot\frac{PI}{PC}=\frac{PI}{PH}$, mà $\widehat{KPB}=\widehat{DPH}$ nên $\Delta PIH \backsim \Delta PBK$ suy ra $\Delta PHK \backsim \Delta PIB$, nên $\widehat{KHP}=90^\circ$. Gọi T là điểm đối xứng với K qua H thì $IT // AH // BC // IX$ với X là trung điểm PC. Từ đó T,I,X thẳng hàng. Qua phép đối xứng trục CP thì K,L,X thẳng hàng.

Nhận xét. *Việc sử dụng đối xứng trục CP biến ba điểm T,I,X thành ba điểm K,L,X thẳng hàng đóng vai trò quan trọng trong cách tìm ra lời giải bài toán.*

Bài 12. *Cho ΔABC có P,Q là hai điểm đẳng giác trên đường phân giác trong AD góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng qua P song song với BC cắt CA,AB tại E,F tương ứng. BE,CF cắt trung trực của BC tại K,L tương ứng; BL cắt CK tại G; M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $QM // AG$.*



Lời giải. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC. AP cắt BC tại D và cắt (O) tại N khác A. Dễ thấy hai tam giác NBP và NQB đồng dạng nên $NP.NQ=NB^2=ND.NA$. Giả sử EF cắt trung trực BC tại U thì $\frac{NM}{NU}=\frac{ND}{NP}=\frac{NQ}{NA}$ $\Rightarrow AU // QM$, ta chứng minh AU đi qua G. Thật vậy, gọi S,T là các điểm đối xứng của A lần lượt qua EF và trung trực BC thì U là trung điểm ST. Ta thấy $\widehat{EFS}=\widehat{EFA}=\widehat{ABC}=\widehat{TCB}$ từ đó $FS // TC$, tương tự $ES // TB$. Vì hai tam giác SEF và TBC có các cạnh tương ứng song song nên ST,CF và BE đồng quy tại H. Qua đối xứng trục là trung trực của BC chú ý BE,CF là đối xứng của CK,BL nên giao điểm G,H đối xứng qua trung trực BC. Chú ý A,U,G lần lượt là ảnh của T,U,H qua phép đối xứng qua trung trực BC, mà T,U,H thẳng hàng nên AU đi qua G.

Nhận xét. *Việc sử dụng đối xứng qua trung trực của BC có vai trò quyết định trong lời giải bài toán.*

Bài viết mới chỉ dừng lại ở việc nêu bật vai trò của phép đối xứng trục trong việc thực hành giải những bài toán khó khác nhau của chương trình hình học Olympic. Cũng giống như những phép biến hình khác thì phép đối xứng trục còn có những bài tập mang tính lý thuyết rất sâu sắc. Mặt khác những dạng toán có liên quan tới tích của phép đối xứng trục với các phép biến hình khác hoặc là việc vận dụng phép đối xứng trục trong các bài toán về tỷ số kép và hàng điều hòa chúng tôi cũng chưa thể nhắc tới do khuôn khổ bài báo có hạn. Tuy nhiên với việc sử dụng đối xứng trục như là một phần không thể thiếu của lời giải bài toán, thì trong các ví dụ trên chúng tôi cũng đã phần nào làm được nhiệm vụ này. Các ứng dụng của phép đối xứng trục trong cả lý thuyết và thực hành giải toán còn rất nhiều, xin hẹn gặp lại các bạn ở những chuyên đề kế tiếp.

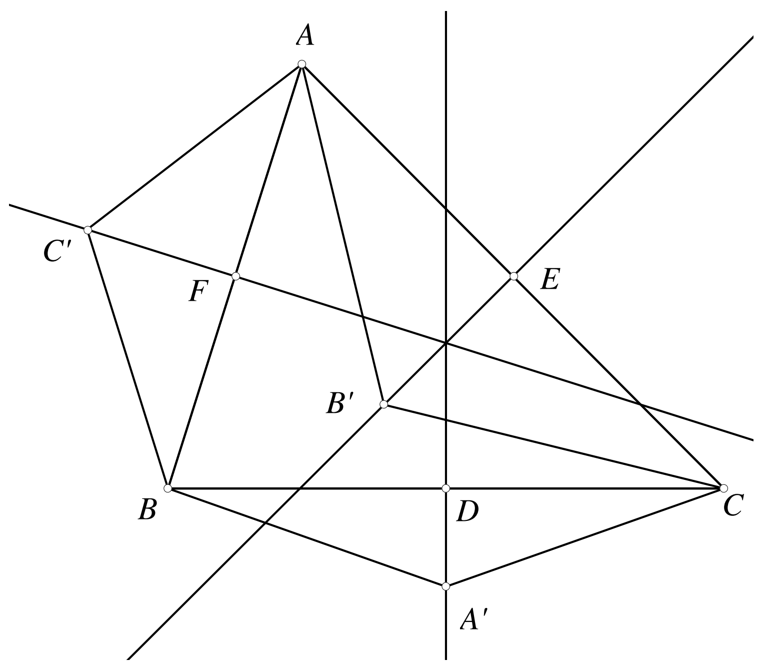
Định lý Menelaus và tâm đường tròn ngoại tiếp

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Trong bài giảng này, chúng ta sẽ đi sâu vào xem xét và ứng dụng một bài toán cơ bản trong tam giác là các trung trực của ba cạnh đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp và định lý Menelaus, đó là hai vấn đề rất cơ bản phù hợp với nội dung hình học lớp 9, tuy vậy khi kết hợp để ứng dụng chúng ta lại có được những bài toán hay.

Bài toán 1 (Tâm đường tròn ngoại tiếp)**.** *Cho tam giác ABC, gọi d_a, d_b, d_c là các đường trung trực của BC, CA, AB thì d_a, d_b, d_c đồng quy tại điểm O, điểm đồng quy tại và O cách đều ba cạnh của tam giác ABC, O được gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

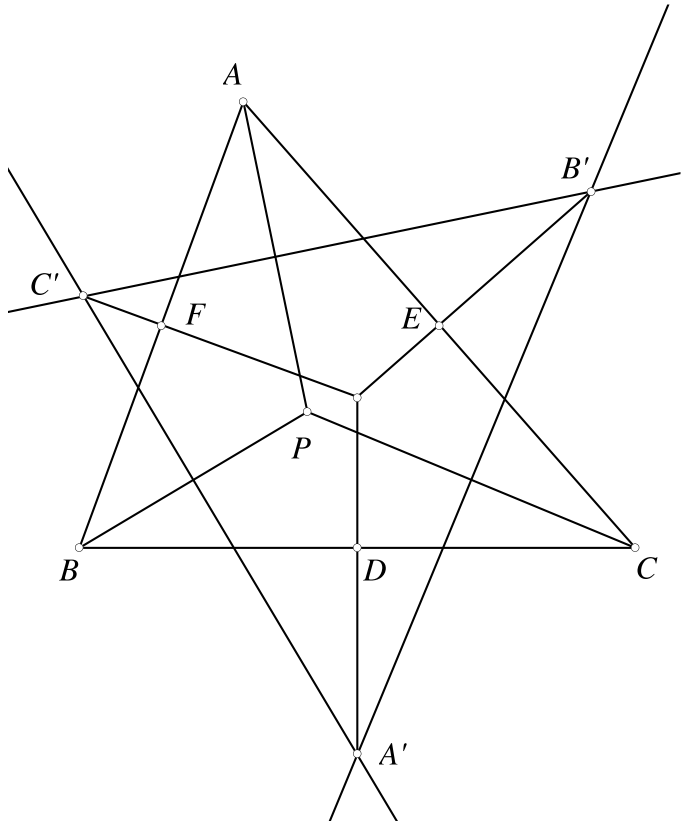
Bài toán 2. *Cho tam giác ABC, dựng các tam giác cân $A'BC, B'CA, C'AB$ cân tại đỉnh A', B', C' tương ứng, gọi D, E, F trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh rằng $A'D, B'E, C'F$ đồng quy.*



Hình 1.

Chứng minh. Theo tính chất tam giác cân dễ thấy $A'D, B'E, C'F$ là trung trực của BC, CA, AB vậy chúng đồng quy tại tâm ngoại tiếp tam giác ABC. □

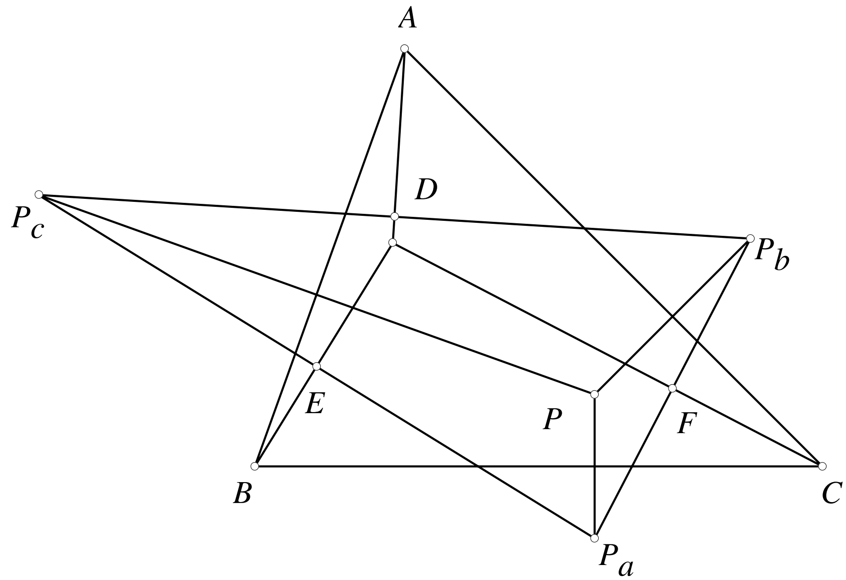
Bài toán 3. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, các trung trực của PA, PB, PC đôi một cắt nhau tương ứng tại A', B', C'. Gọi D, E, F là trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh rằng$A'D, B'E, C'F$ đồng quy*



Hình 2.

Chứng minh. Ta chú ý là các tam giác $A'BC, B'CA, C'AB$ cân vậy đường thẳng qua $A'D, B'E, C'F$ lần lượt là các trung trực của BC, CA, AB vậy chúng đồng quy tại tâm ngoại tiếp tam giác ABC. □

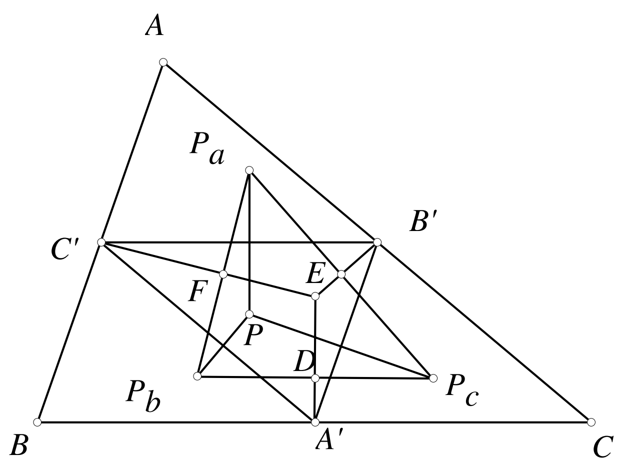
Bài toán 4. *Cho tam giác ABC điểm P bất kỳ, gọi P_a, P_b, P_c là đối xứng của P qua BC, CA, AB, gọi D, E, F là trung điểm của P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy tại tâm ngoại tiếp tam giác $P_aP_bP_c$.*



Hình 3.

Chứng minh. Ta cũng chú ý rằng các tam giác $AP_bP_c, BP_cP_a, CP_aP_b$ cân tại A, B, C tương ứng vậy các đường thẳng AD, BE, CF chính là các đường trung trực của tam giác $P_aP_bP_c$ vậy chúng đồng quy. □

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' là trung điểm của BC, CA, AB, gọi P_a, P_b, P_c là điểm đối xứng của P qua $B'C', C'A', A'B'$, gọi D, E, F là trung điểm P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b. Chứng minh rằng $A'D, B'E, C'F$ đồng quy.*

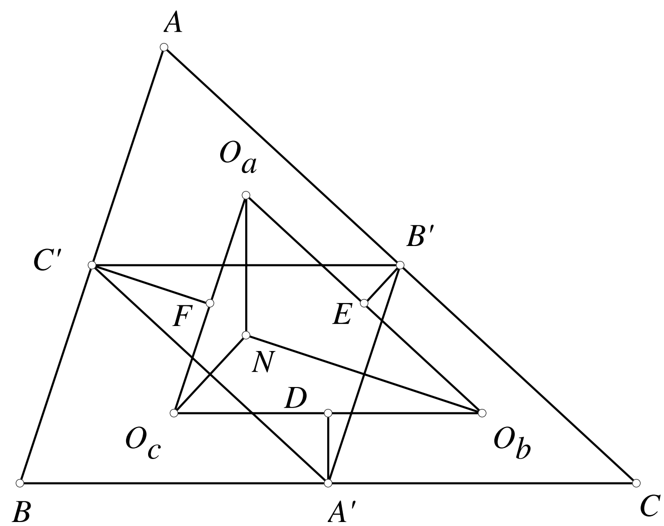


Hình 4.

Chứng minh. Sử dụng bài toán 3 cho tam giác $A'B'C'$ hoặc ta thấy ngay $A'D, B'E, C'F$ là các trung trực đoạn P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b ta thấy ngay điều phải chứng minh. □

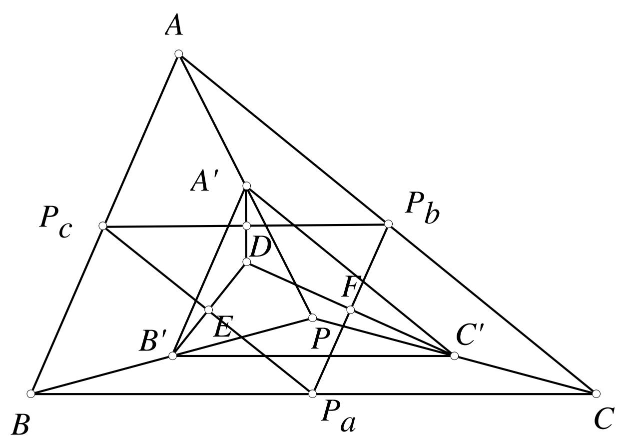
Bài toán 6. *Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' là trung điểm của BC, CA, AB, gọi O_a, O_b, O_c là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$, gọi D, E, F là trung điểm O_bO_c, O_cO_a, O_aO_b. Chứng minh rằng $A'D, B'E, C'F$ đồng quy.*

Chứng minh. Gọi N là tâm đường tròn chín điểm của tam giác ABC, ta chú ý rằng O_a, Ob, O_c chính là đối xứng của N qua $B'C', C'A', A'B'$ vậy áp dụng bài toán 4 dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. □



Hình 5.

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi P_a, P_b, P_c là các hình chiếu của P lên BC, CA, AB, gọi A', B', C' là trung điểm PA, PB, PC, gọi D, E, F là trung điểm của P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b. Chứng minh rằng $A'D, B'E, C'F$ đồng quy.*



Hình 6.

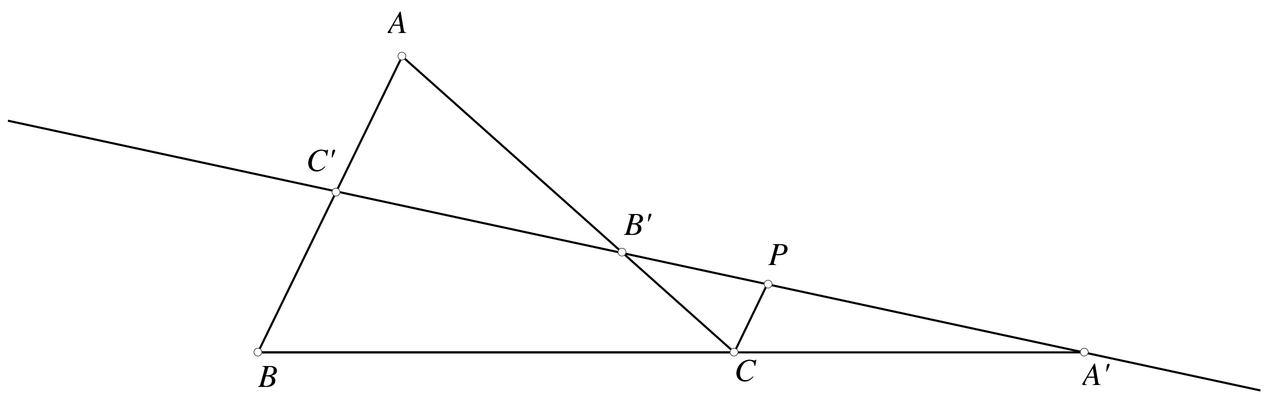
Chứng minh. Ta dễ thấy P_a, P_b, P_c chính là đối xứng của P qua $B'C', C'A', A'B'$, áp dụng bài toán 3 cho tam giác $A'B'C'$ ta suy ra điều phải chứng minh. □

Các bài toán trên có vẻ rất đơn giản song đằng sau chúng là những ứng dụng bất ngờ, chúng ta sẽ ứng dụng chúng thông qua một bổ đề cơ bản

Bổ đề 7.1 (Định lý Menelaus)**.** *Cho tam giác ABC và các điểm A', B', C' nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB tương ứng khi đó nếu A', B', C' thẳng hàng thì*

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1$$

Nếu $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1$ luôn có duy nhất một điểm nằm ngoài cạnh tam giác, hoặc cả ba điểm nằm ngoài ba cạnh tam giác thì A', B', C' thẳng hàng.

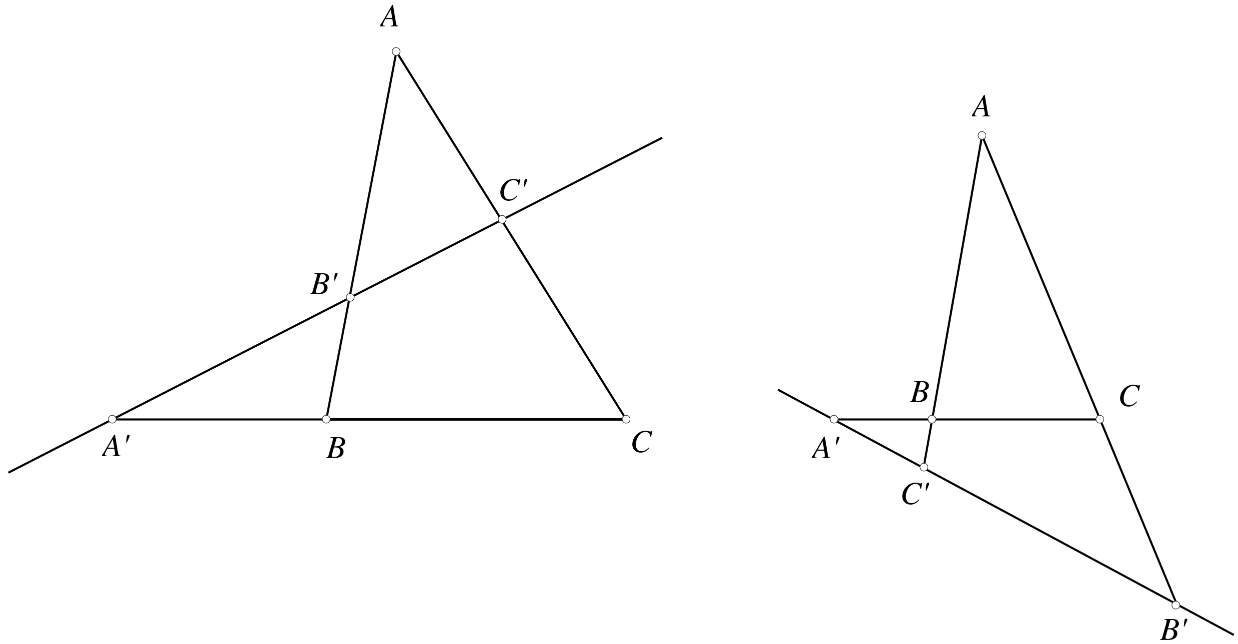


Hình 7.

Chứng minh. Trước hết ta sẽ chứng minh, nếu A', B', C' thẳng hàng thì $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1$, thật vậy, qua C ta kẻ đường thẳng song song với AB cắt $B'C'$ tại P, theo định lý Thales ta có $\frac{A'B}{A'C} = \frac{CP}{C'B}, \frac{B'C}{B'A} = \frac{PC}{C'A}$ vậy ta có

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = \frac{CP}{C'B}.\frac{PC}{C'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1$$

Đảo lại nếu các $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1$, không mất tổng quát giả sử duy nhất A' nằm ngoài BC khi đó hoặc B', C' đều thuộc CA, AB hoặc B', C' đều không thuộc CA, AB khi đó ta gọi $B'C'$ giao đường thẳng BC tại A'', dễ thấy với vị trí như vậy của B', C' thì A'' cũng không thuộc BC

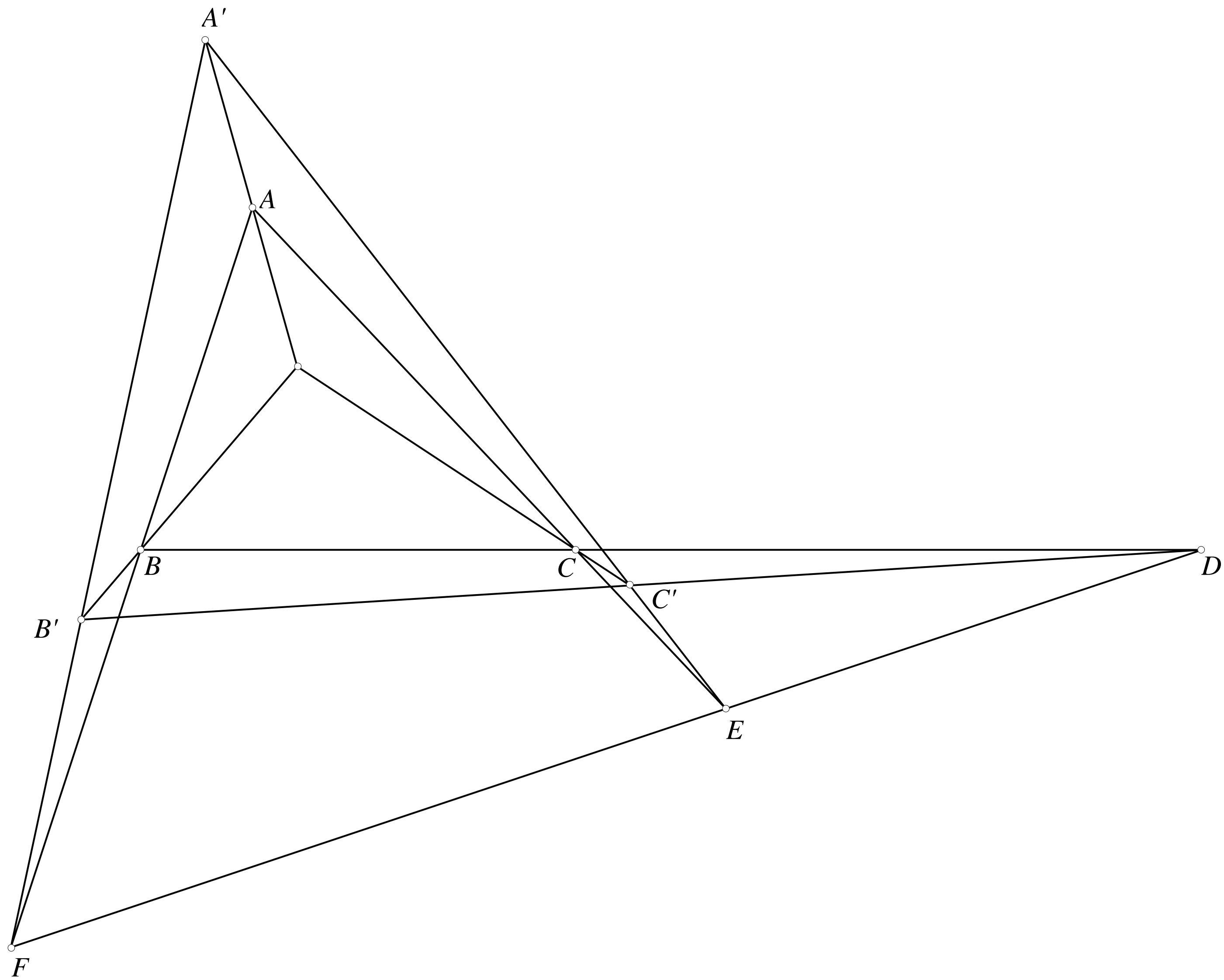


Hình 8.

$$\frac{A''B}{A''C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = \frac{CP}{C'B}.\frac{PC}{C'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1$$

Vậy suy ra $\dfrac{A''B}{A''C} = \dfrac{A'B}{A'C}$, do cả A' và A''nằm ngoài BC nên $A' \equiv A''$ hay A', B', C' thẳng hàng, đó là điều phải chứng minh. □

Bổ đề 7.2 (Định lý Desargues)**.** *Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ nếu gọi D, E, F tương ứng là giao của $B'C', C'A', A'B'$ với BC, CA, AB chứng minh rằng $AA', BB', C'C'$ đồng quy khi và chỉ khi D, E, F thẳng hàng.*

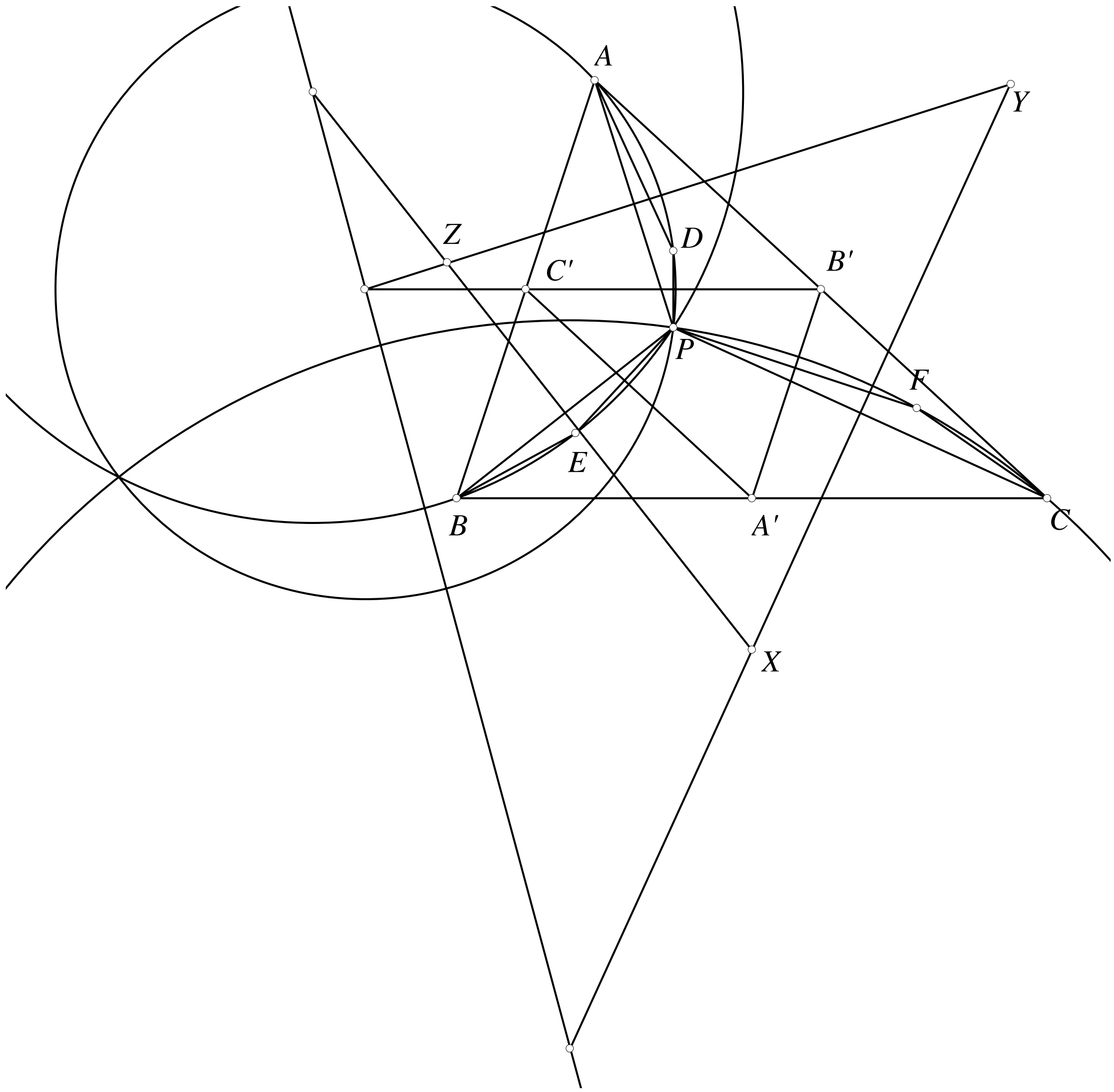


Hình 9.

Lời giải bổ đề. Phần thuận, giả sử AA', BB', CC' giao nhau tại P, ta lần lượt áp dụng định lý Menelaus như sau Tam giác PBC với B', C', D thẳng hàng ta có $\frac{DB}{DC}.\frac{C'C}{C'P}.\frac{B'P}{C'B} = 1$. Tam giác PCA với C', A', E thẳng hàng ta có $\frac{EC}{EA}.\frac{B'A}{B'P}.\frac{C'P}{A'C} = 1$. Tam giác PAB với A', B', F thẳng hàng ta có $\frac{FA}{FB}.\frac{A'B}{A'P}.\frac{A'P}{B'A} = 1$. Vậy ta nhân các tỷ số trên với nhau ta được $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1$ xét tam giác ABC với D, E, F thuộc ba cạnh BC, CA, AB theo định lý Menelaus suy ra D, E, F thẳng hàng. Phần đảo, ta sẽ sử dụng phần thuận, giả sử D, E, F thẳng hàng, ta gọi BB' giao CC' tại P, ta sẽ chứng minh AA', BB', CC' đồng quy bằng cách chỉ ra A', A, P thẳng hàng, thật vậy, xét hai tam giác FBB' và ECC' có $EF, BC, B'C'$ đồng quy tại D, vậy theo phần thuận giao điểm tương ứng $FB \cap EC = \{A\}, BB' \cap CC' = \{P\}, B'F \cap C'E = \{A'\}$ thẳng hàng, đó là điều phải chứng minh. □

Sau đây ta lại đưa ra những ứng dụng hay của bổ đề trên vào các bài toán ta đang xét

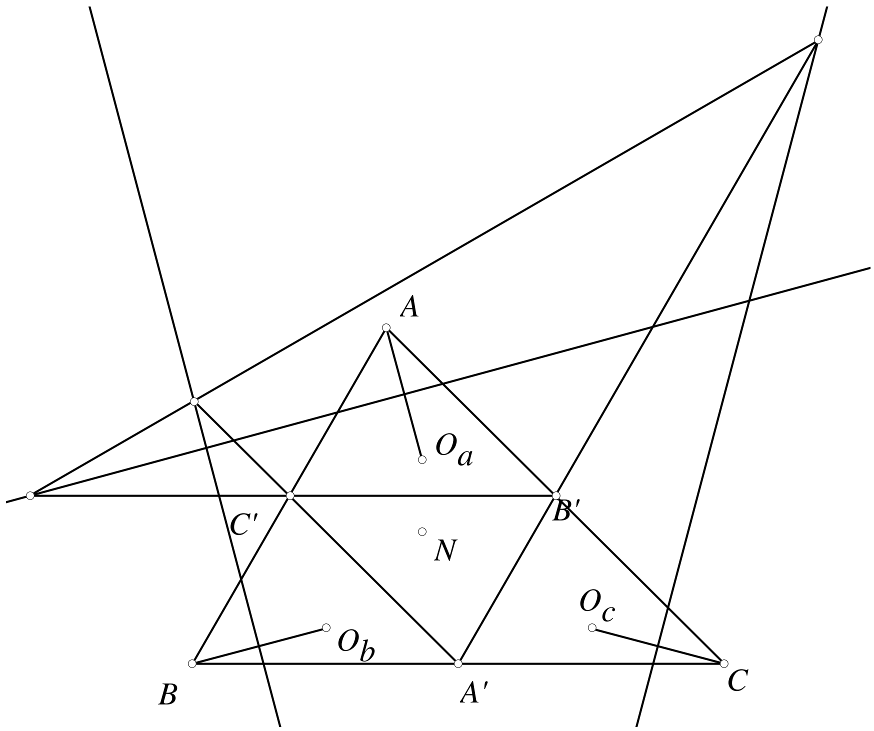
Bài toán 8. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi A', B', C' là trung điểm các cạnh BC, CA, AB , gọi D, E, F là đối xứng của P qua $B'C', C'A', A'B'$. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD, BPE, CPF có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 10.

Chứng minh. Ta chú ý rằng các đường tròn này đã có một điểm chung là P vậy nên để chứng minh chúng có một điểm chung nữa khác P ta chỉ cần chứng minh tâm của chúng thẳng hàng. Gọi trung trực của PA, PB, PC cắt nhau tương ứng tạo thành tam giác X, Y, Z, ta thấy rằng giao điểm của YZ, ZX, XY với $B'C', C'A', A'B'$ tương ứng chính là các tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD, BPE, CPF vậy nên theo Bổ đề 2 các giao điểm này thẳng hàng khi và chỉ khi $A'X, B'Y, C'Z$ đồng quy, áp dụng bài toán 2 cho tam giác ABC với các trung trực YZ, ZX, XY thì $A'X, B'Y, C'Z$ đồng quy, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB, gọi O_a, O_b, O_c là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C, BC'A', CA'B'$. Chứng minh rằng giao điểm của trung trực của các đoạn O_aA, O_bB, O_cC với $B'C', C'A', A'B'$ tương ứng nằm trên một đường thẳng.*



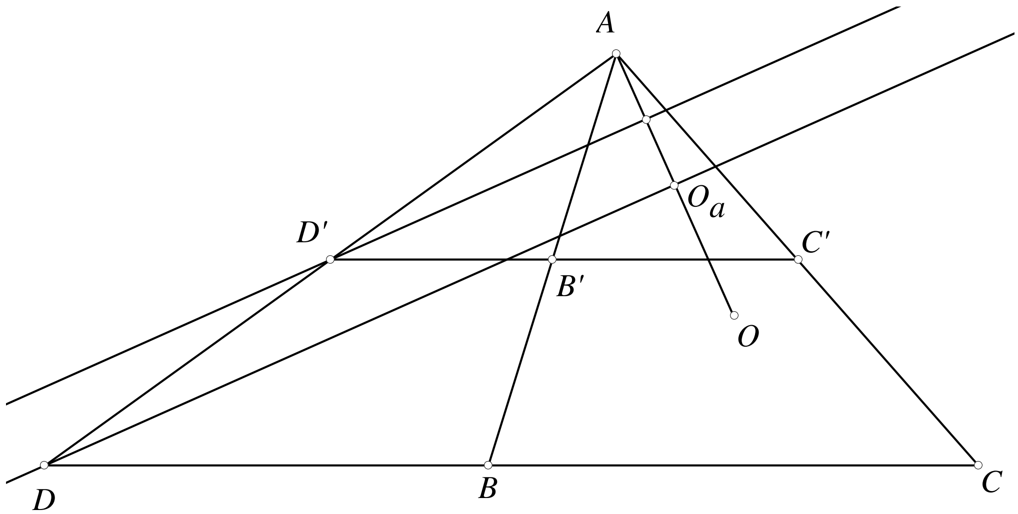
Hình 11.

Chứng minh. Ta chú ý rằng O_a, O_b, O_c chính là đối xứng của tâm đường tròn chín điểm N của tam giác ABC qua $B'C', C'A', A'B'$ giao điểm của trung trực O_aA, O_bB, O_cC với $B'C', C'A', A'B'$ chính là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ANO_a, BNO_b, CNO_c, theo chứng minh bài toán 7 thì chúng thẳng hàng. □

Ta hoàn toàn có thể tổng quát bài toán trên như sau và cách giải hoàn toàn tương tự

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB, gọi P_a, P_b, P_c là đối xứng của P qua $B'C', C'A', A'B'$. Chứng minh rằng giao điểm của trung trực của các đoạn P_aA, P_bB, P_cC với $B'C', C'A', A'B'$ tương ứng nằm trên một đường thẳng.*

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC, gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp, gọi trung trực của OA, OB, OC giao BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.*



Hình 12.

Chứng minh. Ta gọi A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB và O_a, O_b, O_c là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C, BC'A', CA'B'$ ta dễ thấy O_a là trung điểm OA, hay trung trực của OA đi qua O_a và vuông góc với OA. Gọi trung trực của O_aA giao AD tại D', bằng tính chất đường trung bình dễ thấy D' là trung điểm AD mặt khác cũng do tính chất đường trung bình trong tam giác ABC thì $B'C'$ cũng đi qua trung điểm AD hay đi qua D', vậy theo định lý Thales ta dễ thấy $\frac{D'B'}{D'C'} = \frac{DB}{DC}$. Nếu xác định tương tự ta được E', F' và $\frac{E'C'}{E'A'} = \frac{EC}{EA}, \frac{F'A'}{F'B'} = \frac{FA}{FB}$ ta chú ý rằng theo chứng minh bài toán 8 thì D', E', F' thẳng hàng vậy theo định lý Menelaus ta suy ra $\frac{D'B'}{D'C'}.\frac{E'C'}{E'A'}.\frac{F'A'}{F'B'} = 1$ vậy suy ra $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = \frac{D'B'}{D'C'}.\frac{E'C'}{E'A'}.\frac{F'A'}{F'B'} = 1$ hay D, E, F thẳng hàng, cũng theo định lý Menelaus. $\square$

Ta có ngay một số hệ quả của bài toán 10 như sau

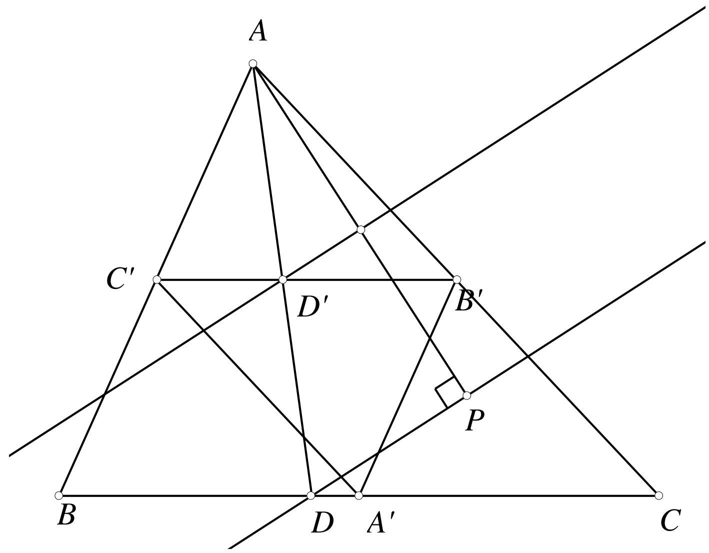
Bài toán 12. *Cho tam giác ABC tâm đường tròn ngoại tiếp O, gọi A', B', C' là đối xứng của A, B, C qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AOA', BOB', COC' có một điểm chung nữa khác O.*

Bài toán 13. *Cho tam giác ABC tâm đường tròn ngoại tiếp O, gọi O_a, O_b, O_c là đối xứng của A, B, C qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AOO_a, BOO_b, COO_c có một điểm chung nữa khác O.*

Sử dụng bài toán 12 ta lại chứng minh được một bài toán giống bài toán 8

Bài toán 14. *Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB, gọi O_a, O_b, O_c là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$, gọi N là tâm đường tròn chín điểm của tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'NO_a, B'NO_b, C'NO_c$ có một điểm chung nữa khác N.*

Bài toán 15. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng qua P vuông góc với PA, PB, PC và BC, CA, AB thì D, E, F thẳng hàng.*

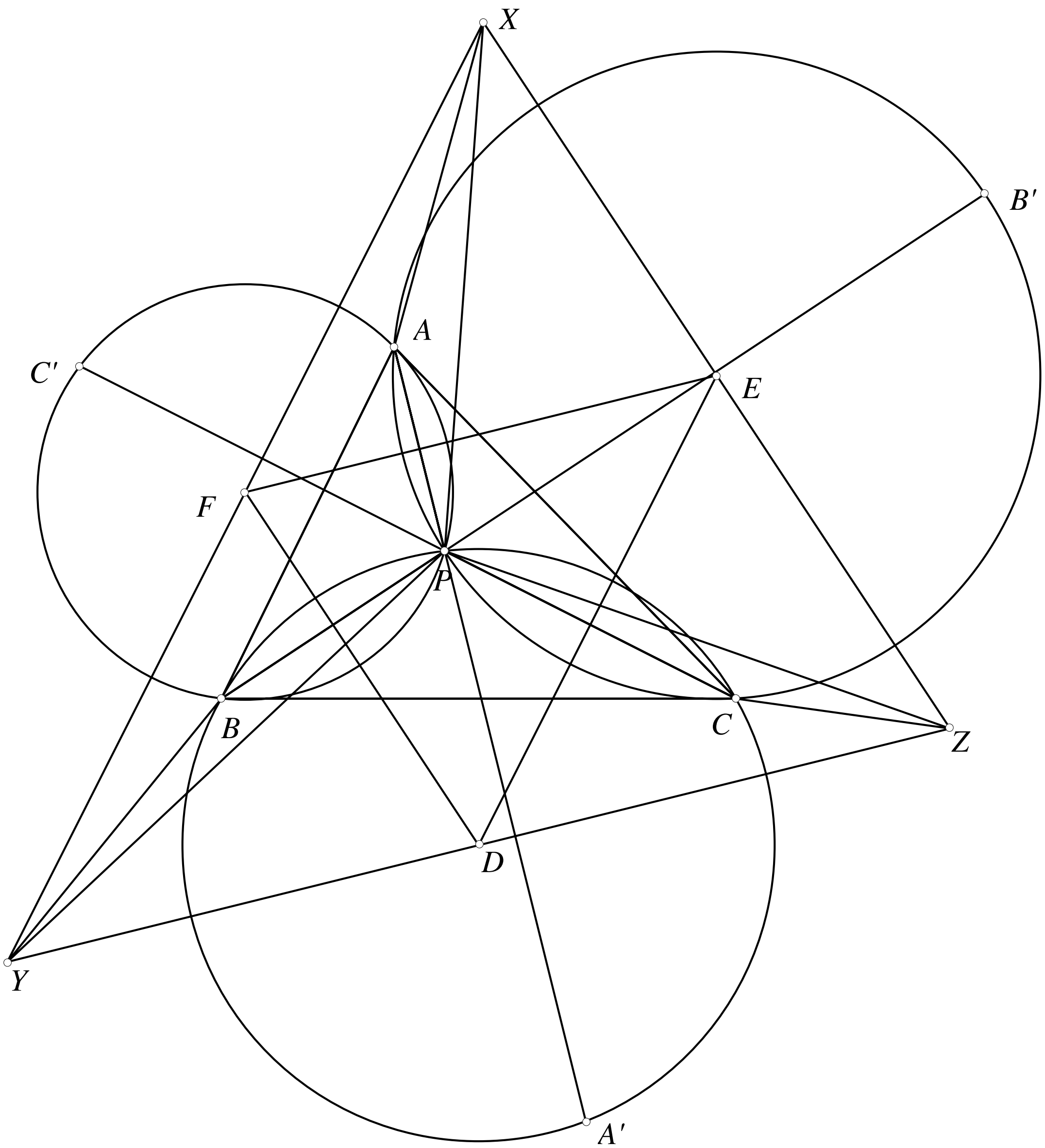


Hình 13.

Chứng minh. Ta gọi A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB, ta gọi D' là giao của trung trực của PA và AD bằng tính chất đường trung bình dễ thấy D' là trung điểm AD mặt khác cũng do tính chất đường trung bình trong tam giác ABC thì $B'C'$ cũng đi qua trung điểm AD hay đi qua D', vậy theo định lý Thales ta dễ thấy $\frac{D'B'}{D'C'} = \frac{DB}{DC}$. Nếu xác định tương tự ta được E', F' và $\frac{E'C'}{E'A'} = \frac{EC}{EA}, \frac{F'A'}{F'B'} = \frac{FA}{FB}$ ta chú ý rằng theo chứng minh bài toán 7 thì D', E', F' thẳng hàng vậy theo định lý Menelaus ta suy ra $\frac{D'B'}{D'C'}.\frac{E'C'}{E'A'}.\frac{F'A'}{F'B'} = 1$ vậy suy ra $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = \frac{D'B'}{D'C'}.\frac{E'C'}{E'A'}.\frac{F'A'}{F'B'} = 1$ hay D, E, F thẳng hàng, cũng theo định lý Menelaus. $\square$

Nhận xét. Đường thẳng nối D, E, F gọi là cát tuyến trực giao của P ứng với tam giác ABC, ta sẽ còn ứng dụng nó trong những bài toán khác.

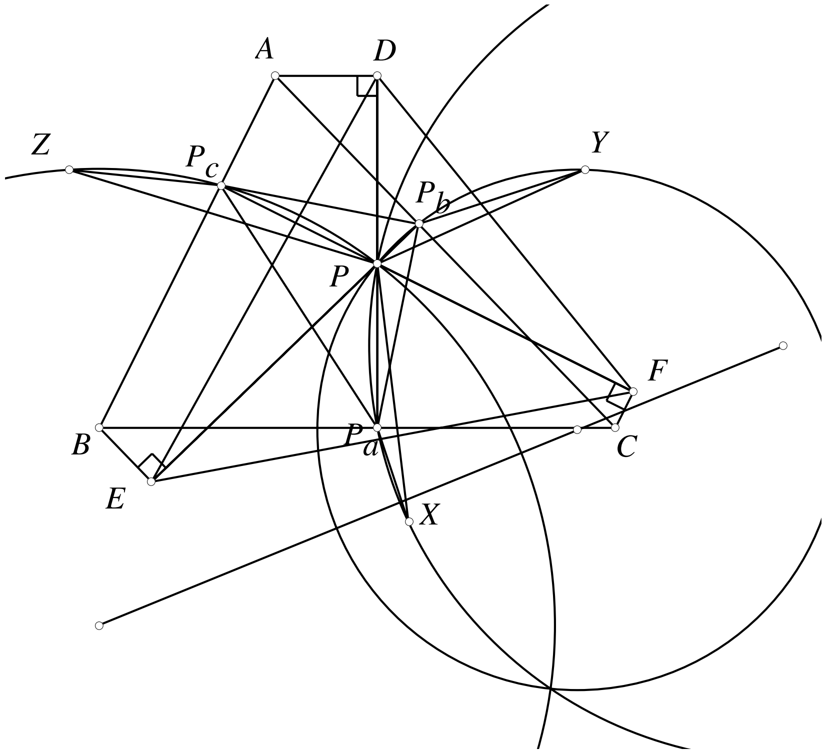
Bài toán 16. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi PA giao đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC là A' tương tự ta có B', C' gọi X, Y, Z là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $PB'C', PC'A', PA'B'$ thì các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAX, PBY, PCZ có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 14.

Chứng minh. Trước hết ta dễ thấy trung trực các đoạn PA', PB', PC' cắt nhau tương ứng tại X, Y, Z, gọi D, E, F lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC, PCA, PAB, tương ứng thì ta dễ thấy D, E, F lần lượt thuộc YZ, ZX, XY, mặt khác ta cũng dễ thấy DE, EF, FD cũng tương ứng song song với XY, YZ, ZX (do chúng cùng vuông góc PA, PB, PC). Khi đó ta cũng dễ thấy A, B, C là đối xứng của P qua EF, FD, DE, áp dụng bài toán 7 cho tam giác XYZ, D, E, F là trung điểm YZ, ZX, XY, với A, B, C lần lượt là đối xứng của P qua EF, FE, ED thì các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAD, PBE, PCF có một điểm chung nữa khác P, ta có điều phải chứng minh. □

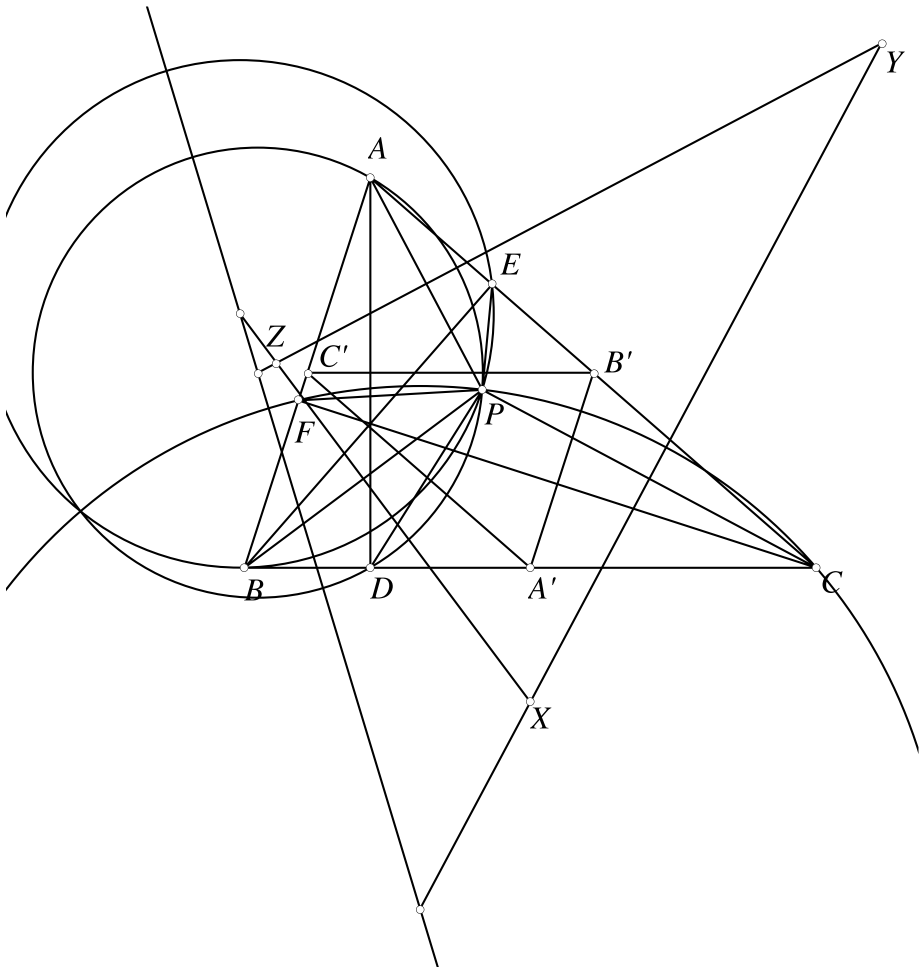
Bài toán 17. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi P_a, P_b, P_c là hình chiếu của P lên ba cạnh BC, CA, AB, gọi D, E, F là hình chiếu của A, B, C lên PP_a, PP_b, PP_c, gọi X, Y, Z là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PEF, PFD, PDE khi đó các đường tròn ngoại tiếp tam giác PP_aX, PP_bY, PP_cZ có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 15.

Chứng minh. Ta dễ thấy $\angle PDA = 90^\circ$ nên D nằm trên đường tròn đường kính PA, mặt khác do P_b, P_c là hình chiếu của P lên AC, AB tương ứng nên P_b, P_c cũng nằm trên đường tròn đường kính PA, nói cách khác D là giao điểm của PP_a và đường tròn ngoại tiếp tam giác PP_bP_c, vậy áp dụng bài toán 15 cho tam giác $P_aP_bP_c$ kiểm tra lại các giả thiết tương ứng, ta có ngay điều phải chứng minh. □

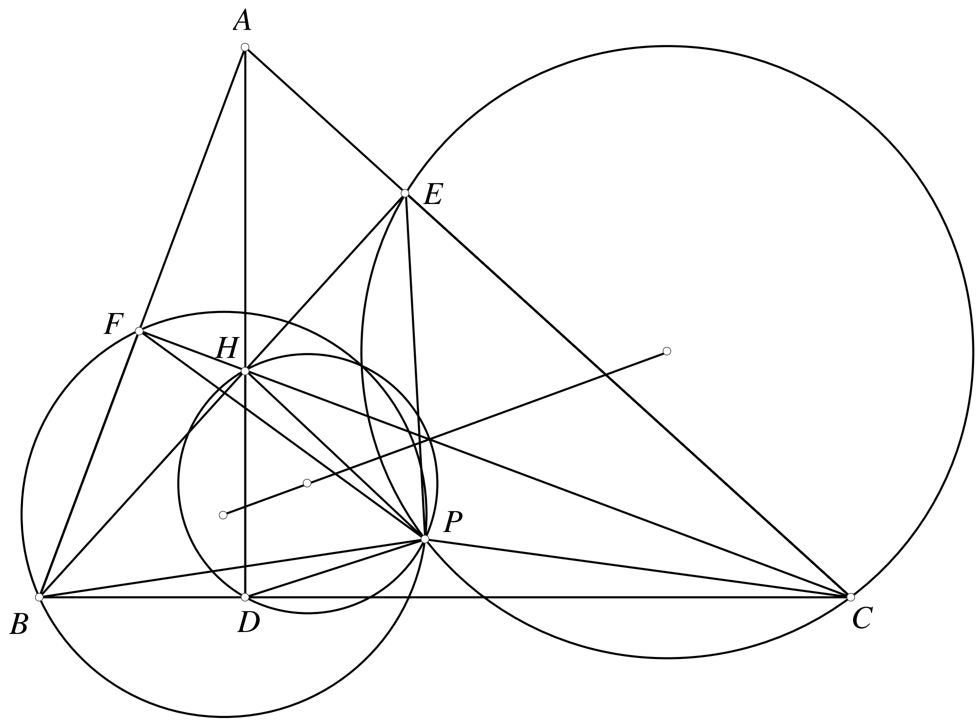
Bài toán 18. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác APD, BPE, CPF có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 16.

Lời giải. Ta vẫn chú ý rằng các đường tròn này đã có một điểm chung là P vậy nên để chứng minh chúng có một điểm chung nữa khác P ta chỉ cần chứng minh tâm của chúng thẳng hàng. Gọi A', B', C' là trung điểm của BC, CA, AB ta dễ thấy $B'C', C'A', A'B'$ lần lượt là trung trực của AD, BE, CF, gọi trung trực của PA, PB, PC cắt nhau tương ứng tạo thành tam giác X, Y, Z, ta thấy rằng giao điểm của YZ, ZX, XY với $B'C', C'A', A'B'$ tương ứng chính là các tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD, BPE, CPF vvậy nên theo Bổ đề 2 các giao điểm này thẳng hàng khi và chỉ khi $A'X, B'Y, C'Z$ đồng quy, nhưng theo bài toán 2 thì $A'X, B'Y, C'Z$ đồng quy, ta có điều phải chứng minh. □

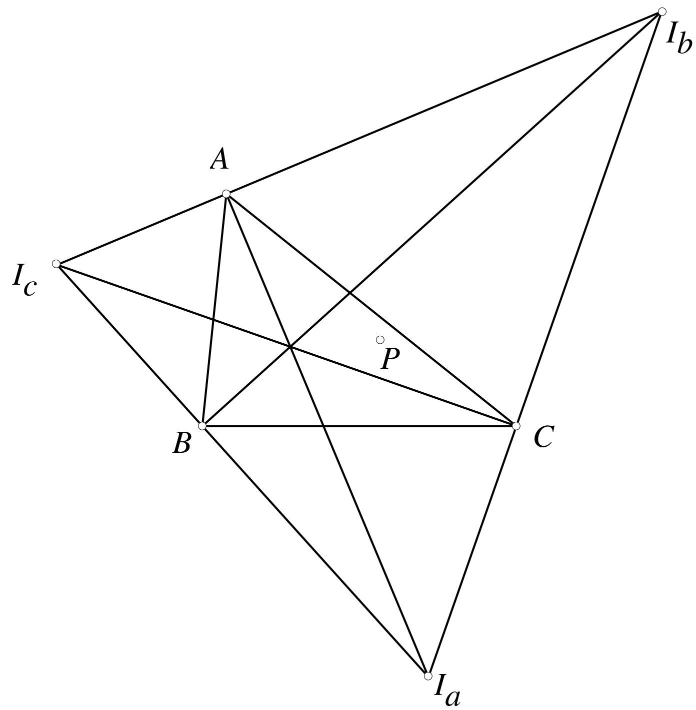
Bài toán 19. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác HPD, BPF, CPE có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 17.

Chứng minh. Sử dụng bài toán 17 cho tam giác HBC có các đường cao là HD, BF, CE và điểm P bất kỳ ta có điều phải chứng minh. □

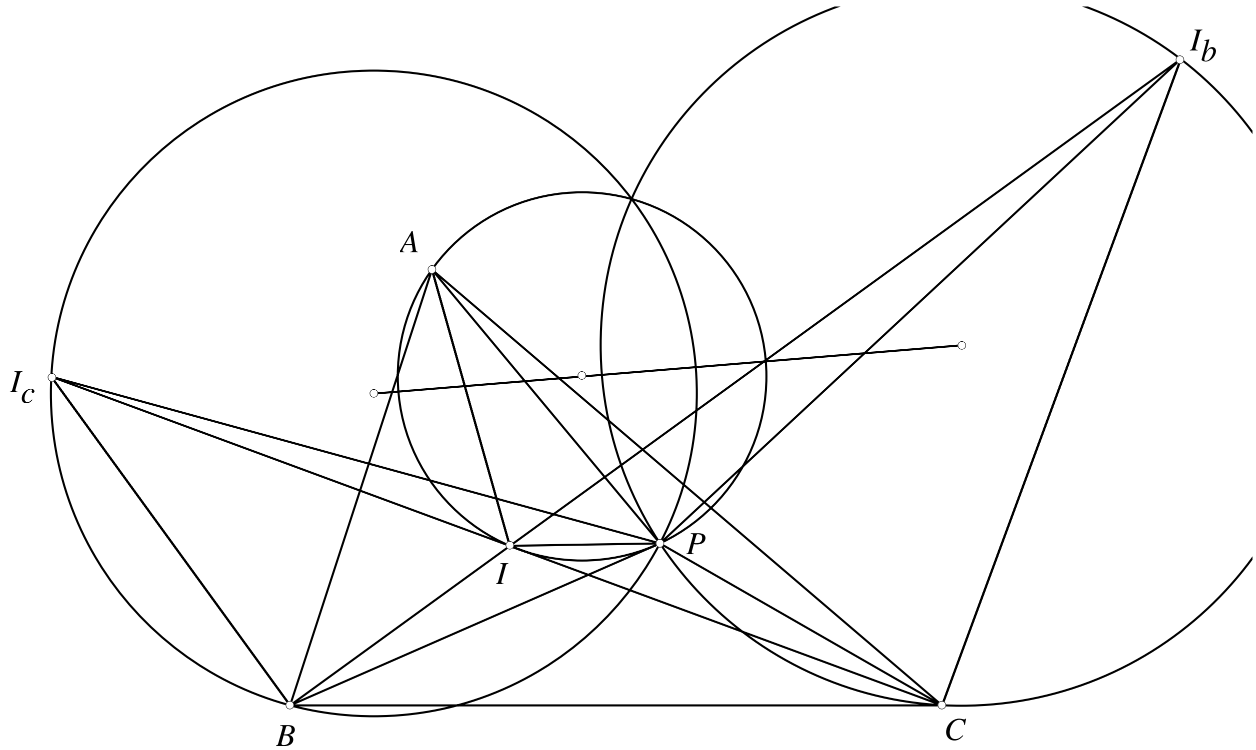
Bài toán 20. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi I_a, I_b, I_c là các tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAI_a, PBI_b, PCI_c có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 18.

Chứng minh. Ta dễ thấy I_aA, I_bB, I_cC là các chân đường cao của tam giác $I_aI_bI_c$, áp dụng bài toán 17 cho tam giác $I_aI_bI_c$ và điểm P bất kỳ, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 21. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi I_b, I_c là các tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC góc B, C tương ứng, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAI, PCI_b, PBI_c có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 19.

Chứng minh. Ta gọi I_a là tâm bàng tiếp góc A, dễ thấy I chính là trực tâm tam giác $I_aI_bI_c$, áp dụng bài toán 19 vào tam giác $I_aI_bI_c$ trực tâm I và điểm P bất kỳ, ta có điều phải chứng minh. □

Lời kết. Chúng ta đã trải qua một chặng đường nhỏ gồm nhiều bài toán thú vị, ai yêu thích môn hình học thì có thể cảm nhận sâu sắc vẻ đẹp của những bài toán về sau, nếu đọc qua thì các bài toán ban đầu chúng ta thấy chúng hầu như rất dễ nhưng về sau có những bài toán thuộc loại khó, tuy vậy chúng ta đã giải chúng vô cùng đơn giản do chúng được sắp xếp thành một chuỗi liên tiếp và khoa học, vẻ đẹp dường như nằm trong những điều đơn giản nhất đó là lời tác giải muốn nói trong toàn bộ bài viết, do hạn chế trong chương trình hình học THCS nên toàn bộ những ứng dụng của các bài toán về ba đường tròn có hai điểm chung không được nhắc tới, nếu độc giả nào biết qua về phép nghịch đảo thì còn có thể thấy được những ứng dụng không ngờ đến của các bài toán đó. Thay cho lời kết xin chúc các bạn thành công trên con đường khám phá hình học.

Một số mở rộng bài toán hình học thi Olympic Nhật Bản

Nhóm thực hiện: Nguyễn Anh Tú, Lê Bích Ngọc, Phạm Lê Vũ, Đào Quang Đức
Giáo viên hướng dẫn: Trần Quang Hùng

Tóm tắt. Chúng tôi sẽ đưa ra các mở rộng và khai thác cho hai bài toán thi Olympic Nhật Bản năm 2012 bằng các công cụ thuần túy hình học.

I. Mở đầu

Trong kỳ thi vô địch Nhật Bản năm 2012 có hai bài toán hình học hay như sau

Bài toán 1. *Cho* ΔABC*, tiếp tuyến tại* A *của đường tròn ngoại tiếp* (O) *của tam giác cắt đường thẳng* BC *tại* P*. Lấy* Q,R *lần lượt đối xứng với* P *qua đường thẳng* AB,AC*. Chứng minh rằng* QR *vuông góc với* BC*.*

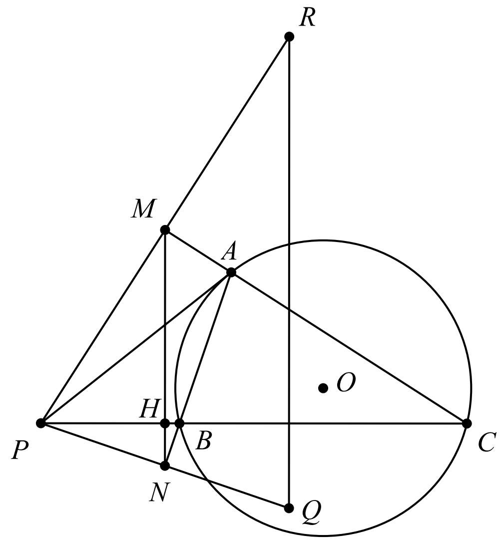
Bài toán 2. *Cho tam giác* PAB *và tam giác* PCD *sao cho* $PA=PB$*,* $PC=PD$ *;* P*,* A*,* C *và* B*,* P*,* D *lần lượt thẳng hàng. Đường tròn* (O_1) *qua* A*,* C *cắt* (O_2) *qua* B*,* D *tại hai điểm phân biệt* X*,* Y*. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác* PXY *là trung điểm đoạn* O_1O_2*.*

Hai bài toán trên là hai bài toán hay và đẹp mắt. Bên cạnh đó xung quanh chúng còn nhiều vấn đề để mở rộng và khai thác. Sau một thời gian làm việc nhóm chúng em đã được đưa ra một số ý để mở rộng và khai thác hai bài toán này, nhóm em cũng tự mình đưa ra một số cách giải cho hai bài toán đó.

II. Lời giải hai bài toán

Phần này chúng tôi xin đưa ra lời giải của mình cho hai bài toán thi ở trên.

Bài toán 1. *Cho* ΔABC*, tiếp tuyến tại* A *của đường tròn ngoại tiếp* (O) *của tam giác cắt đường thẳng* BC *tại* P*. Lấy* Q,R *lần lượt đối xứng với* P *qua đường thẳng* AB,AC*. Chứng minh rằng* QR *vuông góc với* BC*.*



Lời giải. Gọi $PR \cap AC \equiv M$; $PQ \cap AB \equiv N$; $MN \cap BC \equiv H$.

Vì $\widehat{PMA} + \widehat{PNA} = 90^o + 90^o = 180^o$ nên tứ giác $PMAN$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{PNH} = \widehat{PAM} = \widehat{ABC} = \widehat{PBN}$.

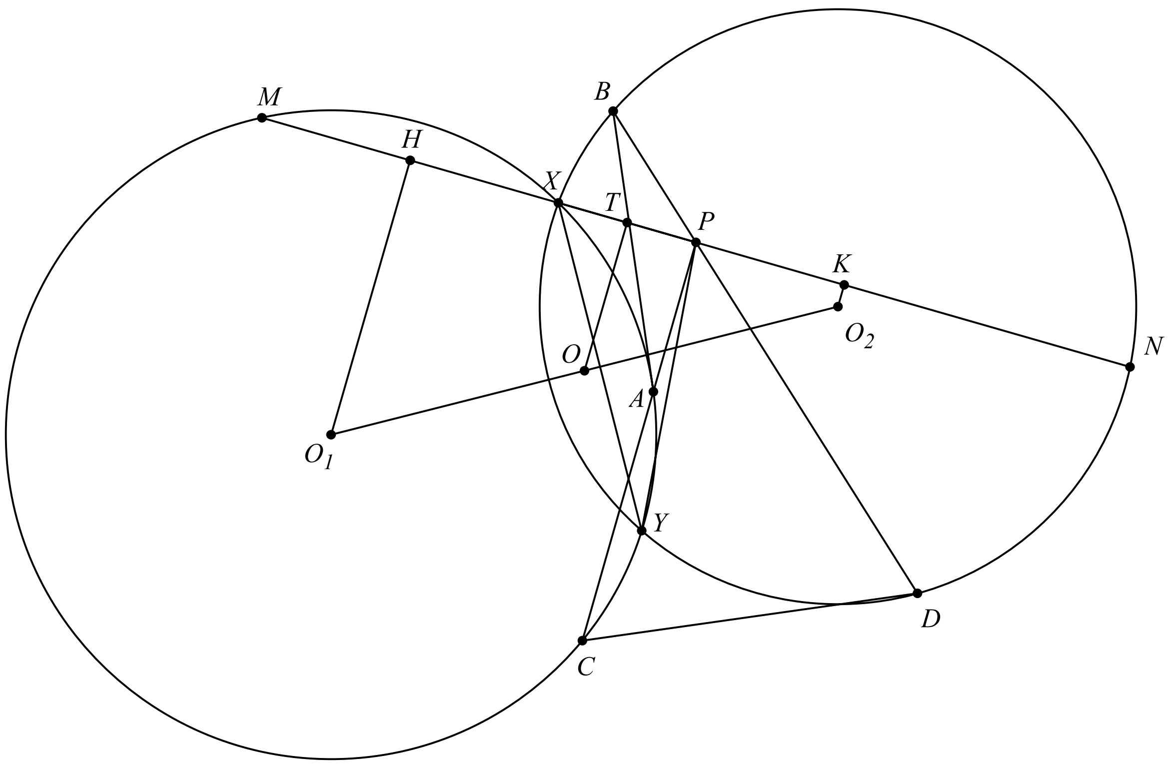
Từ đó $\widehat{PHM} = \widehat{PNH} + \widehat{HPN} = \widehat{PBN} + \widehat{HPN} = 90^o$, suy ra $MN \perp BC$

Mặt khác từ giả thiết ta có MN là đường trung bình của tam giác PQR , nên $MN \parallel QR$

Từ hai điều trên ta có $QR \perp BC$, đây là điều cần chứng minh.

Bài toán 2. *Cho tam giác PAB và tam giác PCD sao cho $PA = PB$, $PC = PD$; P , A , C và B , P , D lần lượt thẳng hàng. Đường tròn (O_1) qua A , C cắt (O_2) qua B , D tại hai điểm phân biệt X , Y . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PXY là trung điểm đoạn O_1O_2 .*

Lời giải. Gọi O là trung điểm của O_1O_2 , ta chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác PXY .



Cách 1. Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính của (O_1), (O_2). Áp dụng công thức đường trung tuyến cho tam giác XO_1O_2 và tam giác YO_1O_2 ta có

$$OX^2 = \frac{XO_1^2 + XO_2^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4} \quad (1)$$

$$OY^2 = \frac{YO_1^2 + YO_2^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4} \quad (2)$$

Mặt khác từ giả thiết ta có : $\overline{PA}.\overline{PC} = -\overline{PB}.\overline{PD} \Leftrightarrow P_{P/O_1} = P_{P/O_2} \Leftrightarrow PO_1^2 + PO_2^2 = r_1^2 + r_2^2$

Áp dụng công thức đường trung tuyến cho tam giác PO_1O_2 ta có

$$OP^2 = \frac{PO_1^2 + PO_2^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $OX^2 = OY^2 = OP^2$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PXY, đây là điều cần chứng minh.

Cách 2. Gọi H, T, K lần lượt là hình chiếu của O_1, O, O_2 lên PX .

Gọi $PX \cap (O_1) = \{X; M\}$; $PX \cap (O_2) = \{X; N\}$

Ta có $\overline{PA}.\overline{PC} = P_{P/(O_1)} = \overline{PX}.\overline{PM}$ và $\overline{PB}.\overline{PD} = P_{P/(O_2)} = \overline{PX}.\overline{PN}$

Mặt khác từ giả thiết ta có $\overline{PA}.\overline{PC} = -\overline{PB}.\overline{PD}$

Kết hợp với hai điều trên suy ra $\overline{PM} = -\overline{PN} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{PM} - \overline{PX}}{2} = \dfrac{-\overline{PN} - \overline{PX}}{2} \Leftrightarrow \overline{XH} = \overline{KP}$

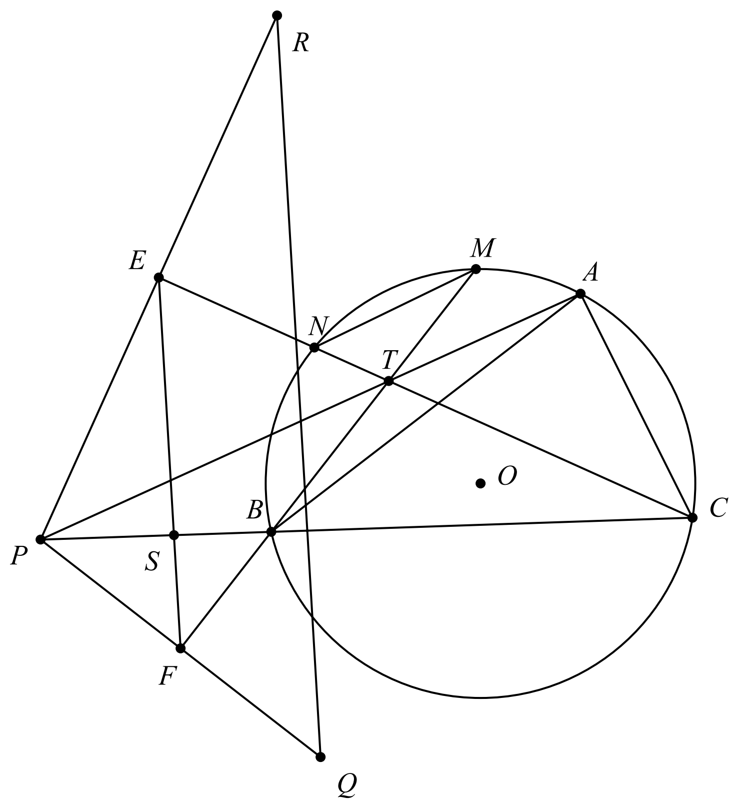
Vì O là trung điểm của O_1O_2 nên $\overline{TH} = -\overline{TK}$.

Từ hai điều trên suy ra $\overline{TX} = -\overline{TP}$, do đó OT là đường trung trực của PX. Suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PXY. Vậy ta có điều phải chứng minh.

III. Một số mở rộng

Phần này chúng ta sẽ đưa ra một số mở rộng cho bài toán 1 và bài toán 2.

Bài toán 3 (Mở rộng bài toán 1). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). P thuộc BC và ở ngoài (O). $T \in AP$ sao cho BT, CT cắt (O) lần thứ 2 lần lượt tại M, N và MN ‖ PA. Q đối xứng P qua MB, R đối xứng P qua NC. Chứng minh rằng QR vuông góc với BC.*



Lời giải. Gọi $PR \cap NC \equiv E$; $PQ \cap MB \equiv F$; $EF \cap BC \equiv S$.

Vì $\widehat{PET} + \widehat{PFT} = 90^o + 90^o = 180^o$ nên tứ giác $PFTE$ nội tiếp.

Từ $MN \parallel PA$ và tính chất góc nội tiếp ta có $\widehat{PFS} = \widehat{PTE} = \widehat{MNT} = \widehat{MBC} = \widehat{PBF}$

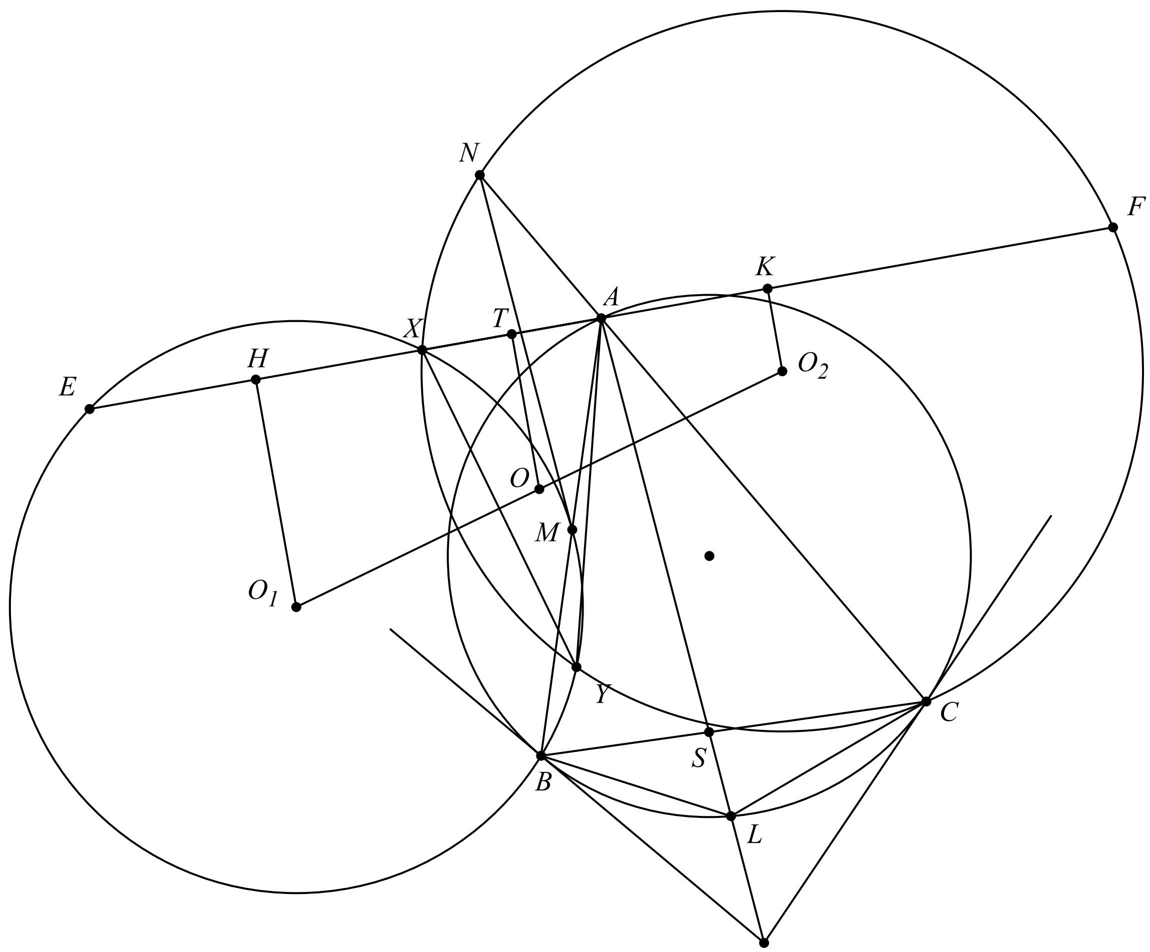
Suy ra $\widehat{PSE} = \widehat{PFS} + \widehat{BPF} = \widehat{PBF} + \widehat{BPF} = 90^o$, do đó $EF \perp BC$

Mặt khác từ giả thiết ta có EF là đường trung bình của tam giác PQR nên $EF \parallel QR$

Từ hai điều trên ta suy ra $QR \perp BC$, đây là điều cần chứng minh.

Bài toán 4. (Mở rộng bài toán 2). *Cho tam giác ABC, M là điểm thuộc cạnh AB, N thuộc AC sao cho MN song song với đường đối trung xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC. Đường tròn (O_1) đi qua M, B cắt đường tròn (O_2) đi qua N, C tại hai điểm phân biệt X, Y. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY là trung điểm đoạn O_1O_2.*

Lời giải. Gọi O là trung điểm của O_1O_2, ta chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác AXY.



Cách 1. Đường đối trung xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC cắt BC tại S

Vì AS là đường đối trung của tam giác ABC nên $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{SB}{SC}$

Vì $MN \parallel AS$ nên $\widehat{AMN} = \widehat{BAS}$ và $\widehat{ANM} = \widehat{CAS}$

Ta có $\frac{AM}{AN} = \frac{\sin \widehat{ANM}}{\sin \widehat{AMN}} = \frac{\sin \widehat{CAS}}{\sin \widehat{BAS}} = \frac{SC}{SB}\frac{AB}{AC} = \frac{AC^2}{AB^2}\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AB}$

Suy ra $\overline{AM}.\overline{AB} = -\overline{AN}.\overline{AC}$

Đến đây làm tương tự bài toán 2 ta thu được điều cần chứng minh.

Cách 2. Đường đối trung xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai L.

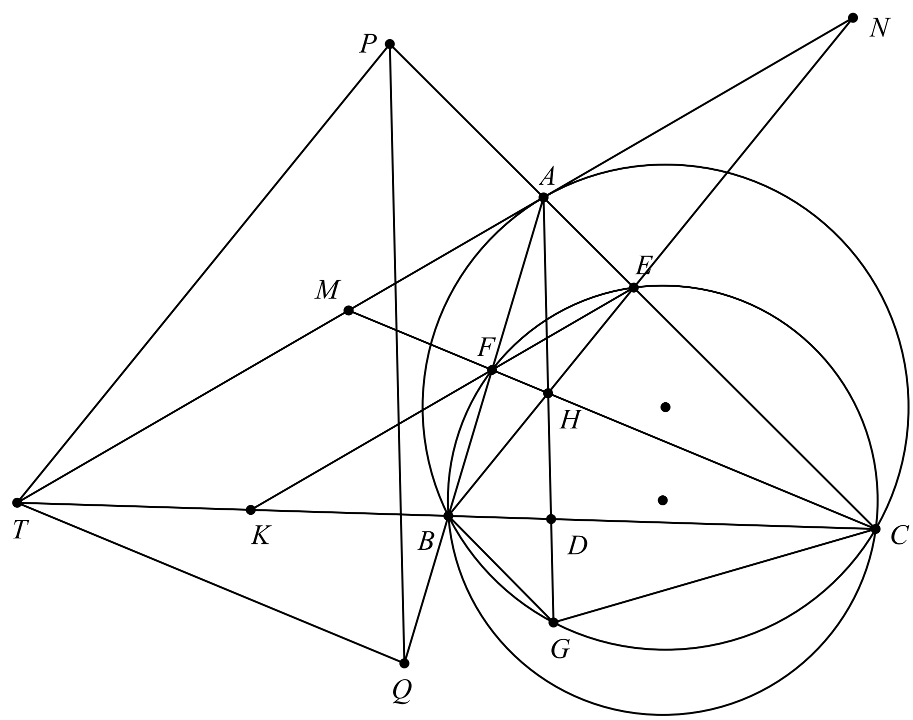
Gọi $AX \cap (O_1) = \{X; E\}$; $AX \cap (O_2) = \{X; F\}$. Gọi H, T, K lần lượt là hình chiếu của O_1, O, O_2 lên AX.

Ta có $\Delta AMN \sim \Delta LCB$ (g.g), kết hợp với tứ giác $ABLC$ điều hoà ta được $\frac{AM}{AN} = \frac{LC}{LB} = \frac{AC}{AB}$

Suy ra $\overline{AM}.\overline{AB} = -\overline{AN}.\overline{AC}$

Đến đây làm tương tự bài toán 2 ta thu được điều phải chứng minh.

Bài toán 5 (Mở rộng khác bài toán 1). *Cho tam giác* ABC*, đường tròn đi qua* B*,* C *cắt* AC*,* AB *lần lượt tại* E*,* F*. Cho* BE *giao* CF *tại* H*. Tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác* ABC *cắt* BC *tai* T*. Trên* AB *lấy điểm* Q*, trên* AC *lấy điểm* P *sao cho* TP *song song* BE*,* TQ *song song* CF*. Chứng minh rằng* PQ *song song với* AH*.*



Lời giải. Gọi $EF \cap BC \equiv K$, $BE \cap AT \equiv N$, $CF \cap AT \equiv M$, $AH \cap BC \equiv D$, $AH \cap (ABC) = \{A; G\}$.

Theo tính chất góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung ta có $\widehat{NAC} = \widehat{ABC} = \widehat{AEF}$, suy ra $EF \parallel AT$.

Trước hết ta có $\dfrac{TC}{TB} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$ và $(BCDK) = -1$ nên $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{KB}{KC}$.

Theo định lý Thales $\dfrac{AM}{EF} = \dfrac{TC}{KC}$ và $\dfrac{AN}{EF} = \dfrac{TB}{KB}$, suy ra

$$\frac{AM}{AN} = \frac{TC}{TB}.\frac{KB}{KC} = \frac{AC^2}{AB^2}.\frac{DB}{DC} = \frac{GB}{GC}.\frac{AC}{AB} = \frac{GB}{GC}.\frac{AF}{AE}.$$

Suy ra $\dfrac{GB}{GC} = \dfrac{AM}{AF}.\dfrac{AE}{AN} = \dfrac{AT}{AQ}.\dfrac{AP}{AT} = \dfrac{AP}{AQ}$.

Xét ΔPAQ và ΔBGC có : $\widehat{PAQ} = \widehat{BGC}$ và $\dfrac{GB}{GC} = \dfrac{AP}{AQ}$ nên $\Delta PAQ \sim \Delta BGC$ (c.g.c)

Từ đó $\widehat{PQA} = \widehat{BCG} = \widehat{BAG}$, suy ra $PQ \parallel AH$, đây là điều cần chứng minh.

Bài toán 6 . *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại A_1. Lấy A_2, A_3 đối xứng với A_1 qua AB, AC. Gọi d_a là đường thẳng qua A_2, A_3. Tương tự có d_b, d_c. Các đường d_a, d_b, d_c cắt nhau tạo thành tam giác $A_4B_4C_4$.*

a) Chứng minh rằng $d_a \perp BC$.

b) Chứng minh rằng AA_4, BB_4, CC_4 đồng quy tại một điểm S.

c) Chứng minh S thuộc (ABC) và $(A_4B_4C_4)$.

d) Chứng minh (ABC) và $(A_4B_4C_4)$ trực giao.

e) Chứng minh đường thẳng Simson ứng với S của (ABC) song song với đường thẳng nối A_1, B_1, C_1

Lời giải.

a) Là kết quả bài toán 1.

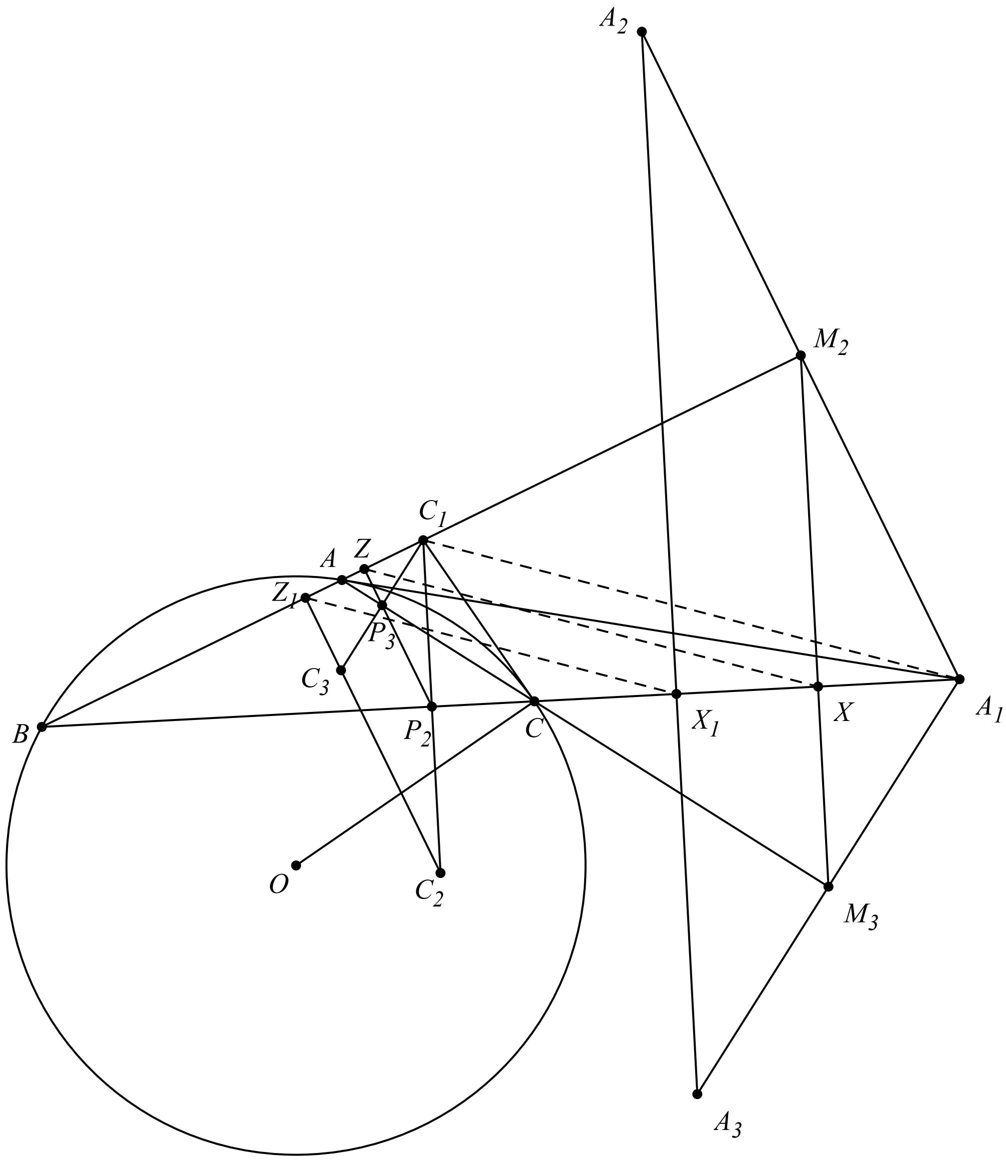
b) Gọi $A_1A_3 \cap AC \equiv M_3$; $A_1A_2 \cap AB \equiv M_2$; $M_2M_3 \cap BC \equiv X$, $d_a \cap BC \equiv X_1$
$C_1C_2 \cap BC \equiv P_2$; $C_1C_3 \cap AC \equiv P_3$; $P_2P_3 \cap AB \equiv Z$; $d_c \cap AB \equiv Z_1$
$d_b \cap AC \equiv Y_1$.

Trước hết ta có $\dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \dfrac{c^2}{b^2}$, tương tự ta thu được $\prod \dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = 1$ nên theo định lý Menelaus đảo ta có A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Tứ giác P_2ZM_2X nội tiếp nên $\widehat{ZXP_2} = \widehat{ZM_2P_2}$

Tứ giác $P_2C_1M_2A_1$ nội tiếp nên $\widehat{ZM_2P_2} = \widehat{C_1A_1P_2}$

Suy ra $\widehat{ZXP_2} = \widehat{C_1A_1P_2}$, do đó $ZX \parallel A_1C_1$



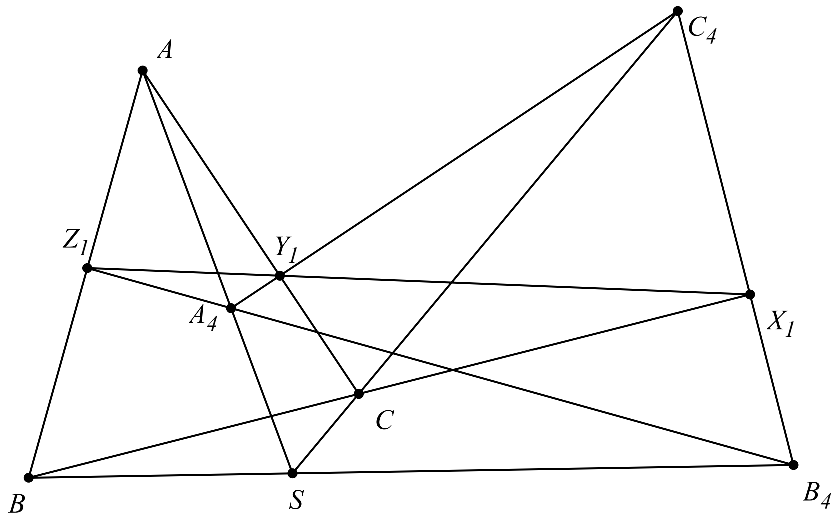
Ta có $(A_1X_1X) = (C_1Z_1Z) = -1$ và $ZX \parallel A_1C_1$ nên $Z_1X_1 \parallel A_1C_1$

Tương tự $X_1Y_1 \parallel A_1B_1$. Mà A_1, B_1, C_1 thẳng hàng nên X_1, Y_1, Z_1 thẳng hàng.

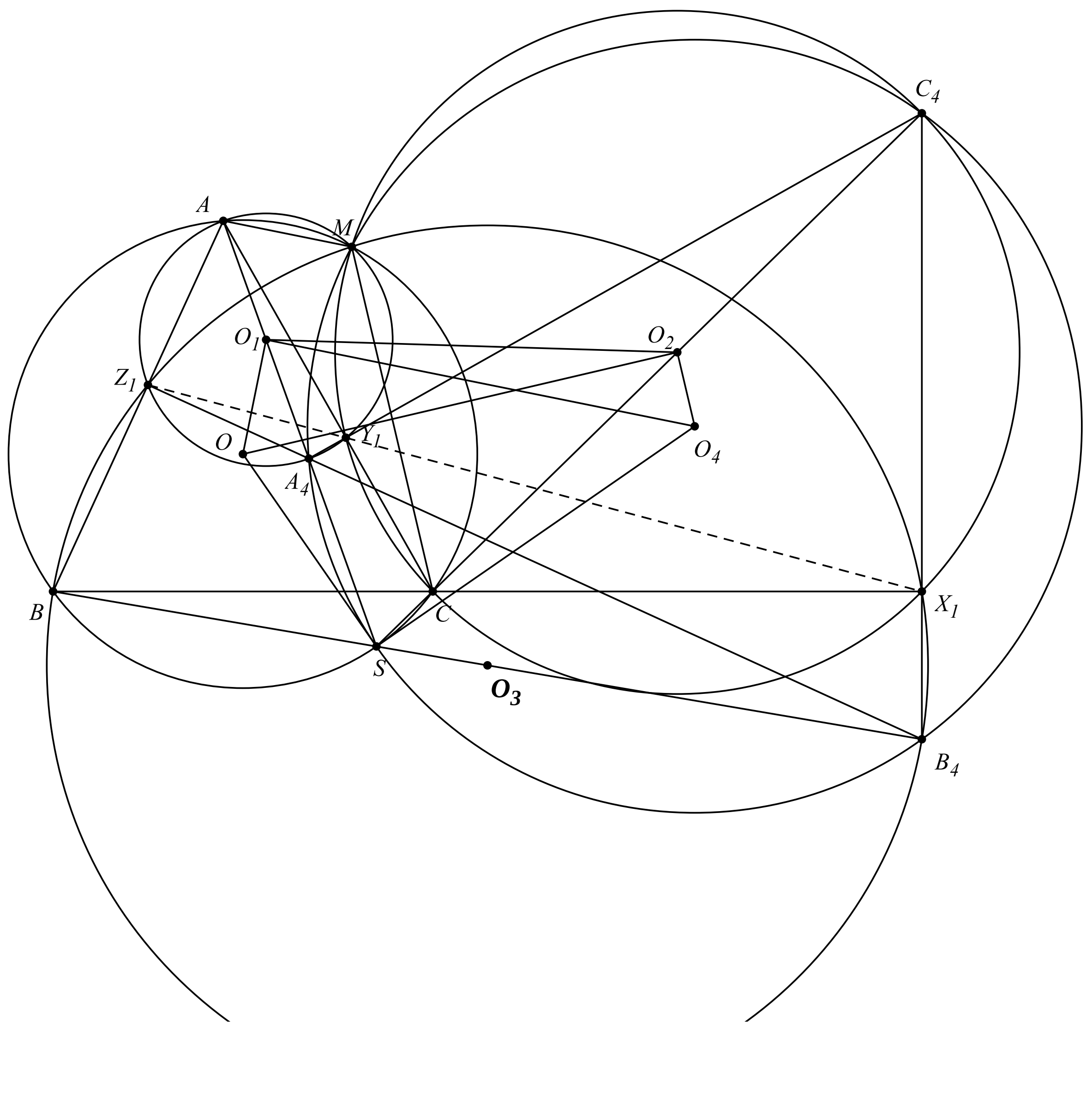
Xét ΔABC và $\Delta A_4B_4C_4$ có giao điểm của các cặp cạnh tương ứng thẳng hàng nên theo định lý Desargues ta có AA_4, BB_4, CC_4 đồng quy tại S, đây là điều cần chứng minh.

c) 4 điểm A, A_4, Y_1, Z_1 cùng thuộc một đường tròn nên $\widehat{ZAA_4} = \widehat{C_4Y_1X_1}$, suy ra $\widehat{C_4CX_1} = \widehat{Z_1AA_4}$ nên $S \in (ABC)$

Tương tự $S \in (A_4B_4C_4)$, ta có điều cần chứng minh.

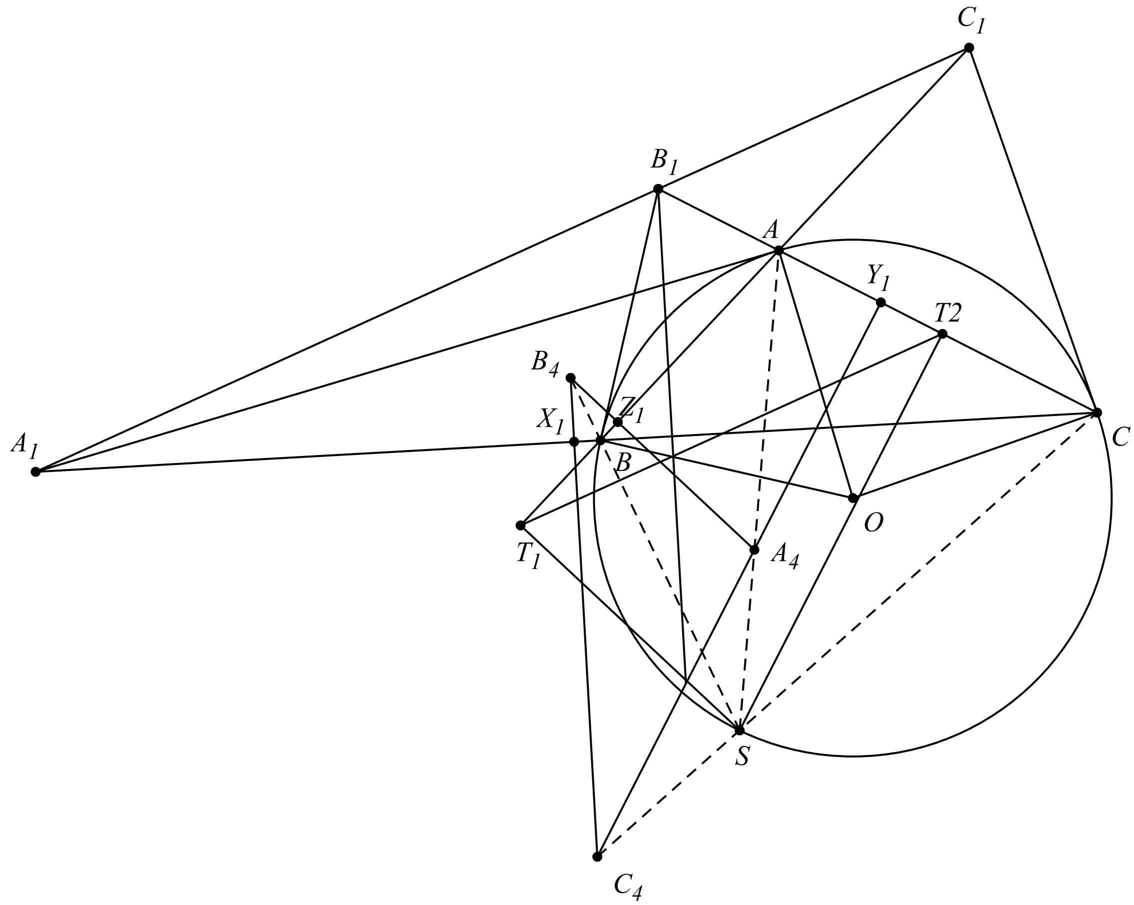


d) Gọi M là điểm Miquel ứng với tứ giác toàn phần $BZ_1Y_1CAX_1$. Gọi O, O_1, O_2, O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $ABC, AY_1Z_1, CX_1Y_1, A_4B_4C_4$.



Theo tính chất đường nối tâm và dây chung ta có $OO_1 \perp AM$ và $OO_2 \perp MC$ suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{O_1OO_2}$. Mặt khác $\widehat{O_1MA} = \widehat{O_1AM} = \widehat{MCO_2} = \widehat{CMO_2}$ nên $\widehat{AMC} = \widehat{O_1MO_2}$.
Từ hai điều trên, kết hợp với A, B, C, M đồng viên, ta có O, O_1, M, O_2 đồng viên.

Tương tự O_4, O_1, M, O_2 đồng viên. Ta lại có $\widehat{ASO_2} = \widehat{ABC} = \widehat{O_1OO_2}$ suy ra S, O, O_1, O_2 đồng viên. Như vậy ta có M, S, O, O_4 đồng viên, suy ra (ABC) và $(A_4B_4C_4)$ trực giao, đây là điều cần chứng minh.



e) Đường thẳng Simson ứng với điểm S của tam giác ABC cắt AB, AC tại T_1, T_2

Ta có $\widehat{AY_1Z_1} = \widehat{AA_4Z_1} = \widehat{AST_1} = \widehat{AT_2T_1}$ suy ra $T_1T_2 \parallel Y_1Z_1$. Mặt khác theo câu b) ta có $Y_1Z_1 \parallel B_1C_1$, suy ra đường thẳng Simson ứng với điểm S của tam giác ABC song song với đường thẳng nối A_1, B_1, C_1, ta có điều cần chứng minh.

Tài liệu tham khảo

[1] Đề thi Olympic Nhật Bản 2012 – Diễn đàn AoPS http://artofproblemsolving.com.

Ứng dụng một bất đẳng thức đại số vào hình học

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Trong bài viết này chúng ta sẽ trình bày một số những ứng dụng của một bất đẳng thức đại số đặc biệt để tìm ra nhưng bất đẳng thức hình học lạ.

1 Mở đầu

Trên tờ báo mathematical reflections và trong bài báo An unexpectedly useful inequality của tác giả Phạm Hữu Đức [1] ,bất dẳng thức đại số dưới đây đã được chứng minh

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}\ \forall a,b,c,x,y,z>0.$$

Bât đẳng thức đại số trên ở dạng rất đẹp mắt và trong bài báo trên cũng đã trình bày rất nhiều những ứng dụng của bất đẳng thức đó để xây dựng các bất đẳng thức mới, trong bài báo này chúng ta sẽ đưa ra một chứng minh rất đơn giản cho bất đẳng thức đó đồng thời cũng sẽ chỉ ra những ứng dụng khá bất ngờ của bất đẳng thức này trong hình học.

Bài toán 1. *Với mọi số thực dương a,b,c,x,y,z, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z \geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}
&(b+c)x+(c+a)y+(a+b)z\\
&=(a+b+c)(x+y+z)-(ax+by+cz)\\
&=\sqrt{[a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)][x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)]}-(ax+by+cz)\\
&\geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}+[\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}-(ax+by+cz)]\\
&\geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(ab+bc+ca)}.
\end{aligned}$$

Trong [1] cũng đã chỉ ra một số những bất đẳng thức đại số hay được suy ra từ bất đẳng thức trên, chúng ta sẽ nhắc lại dưới đây □

Bài toán 2. *Với mọi số thực dương a,b,c,x,y,z bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{x}{y+z}a+\frac{y}{z+x}b+\frac{z}{x+y}c \geq \sqrt{3(ab+bc+ca)}.$$

Chứng minh. Trong bài toán 1 thay (x,y,z) by $(\frac{x}{y+z},\frac{y}{z+x},\frac{z}{x+y})$ và ta chú ý rằng

$$\frac{xy}{(z+x)(z+y)}+\frac{yz}{(x+y)(x+z)}+\frac{zx}{(y+z)(y+x)} \geq \frac{3}{4}$$

Thật vậy bất đẳng thức này tương đương

$$4[xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)] \geq 3(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$\Leftrightarrow xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x) \geq 6xyz$$

Là hệ quả của bất đẳng thức AM-GM.

□

Chúng ta sẽ không đi sâu vào các ứng dụng về mặt đại số của nó mà chúng ta chỉ quan tâm tới những ứng dụng trong hình học của bất đẳng thức trên thông qua một bất đẳng thức hình học rất cơ bản sau

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC, với mọi điểm P trong mặt phẳng thì bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{PB\cdot PC}{bc}+\frac{PC\cdot PA}{ca}+\frac{PA\cdot PB}{ab} \geq 1$$

Ở đây a, b, c chỉ độ dài các cạnh của tam giác ABC.

Chứng minh. Có rất nhiều cách để chứng minh bất đẳng thức trên, xong cách đơn giản nhất có lẽ là phương pháp số phức chúng ta sẽ đưa ra dưới đây, giả sử tọa độ phức các điểm A, B, C, P là $A(a), B(b), C(c), P(p)$ chúng ta dễ dàng kiểm tra đẳng thức số phức sau

$$(b-c)(p-b)(p-c)+(c-a)(p-c)(p-a)+(a-b)(p-a)(p-b)=(a-b)(b-c)(c-a)$$

Và ứng dụng bất đẳng thức về module số phức ta dễ dàng thu được

$$BC\cdot PB\cdot PC+CA\cdot PC\cdot PA+AB\cdot PA\cdot PB=|(b-c)(p-b)(p-c)|+|(c-a)(p-c)(p-a)|+|(a-b)(p-a)(p-b)|$$

$$\geq |(b-c)(p-b)(p-c)+(c-a)(p-c)(p-a)+(a-b)(p-a)(p-b)| = |(a-b)(b-c)(c-a)| = AB\cdot BC\cdot CA.$$

Chia hai vế cho $AB\cdot BC\cdot CA$ ta thu được

$$\frac{PB\cdot PC}{bc}+\frac{PC\cdot PA}{ca}+\frac{PA\cdot PB}{ab} \geq 1$$

Chú ý đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC là tam giác nhọn và P trùng với trực tâm tam giác. □

Dưới đây chúng ta sẽ đưa ra một vài các đẳng thức hay gặp trong tam giác dưới dạng bổ đề, trong đó với các ký hiệu thông thường là a, b, c và chỉ các cạnh và s, R, r lần lượt chỉ nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC thì*

1/ $(p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)=r(4R+r)$

2/ $\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2}=\dfrac{4R+r}{s}$

3/ $r(4R+r)=S(\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{C}{2})$.

2 Các ứng dụng của bất đẳng thức đại số

Trong mục này chúng ta sẽ chỉ ra các ứng dụng vào hình học của bất đẳng thức đại số trong bài toán 1 thông qua việc sử dụng bài toán 2.

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC, và mọi $x, y, z > 0$ và mọi P trong mặt phẳng, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$(y+z)\frac{PA}{a} + (z+x)\frac{PB}{b} + (x+y)\frac{PC}{c} \geq 2\sqrt{xy+yz+zx}$$

Chứng minh. Áp dụng các bài toán 1 và 2 ta thế các biến trong bài toán 1 các bộ số dương $(x, y, z), (a, b, c)$ bởi $(\frac{PA}{a}, \frac{PB}{b}, \frac{PC}{c}), (a, b, c)$ tương ứng chúng ta thu được

$$(y+z)\frac{PA}{a} + (z+x)\frac{PB}{b} + (x+y)\frac{PC}{c} \geq$$

$$\geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)(\frac{PB\cdot PC}{bc} + \frac{PC\cdot PA}{ca} + \frac{PA\cdot PB}{ab})} \geq 2\sqrt{xy+yz+zx}$$

□

Hệ quả 4.1. *Cho tam giác ABC và mọi điểm P thì*

$$\frac{PA}{a} + \frac{PB}{b} + \frac{PC}{c} \geq 3$$

Chứng minh. Thật vậy ở bài toán 3 hoặc hệ quả 1 của bài toán 3 ta đặt $x = y = z = 1$ chúng ta thu được bất đẳng thức trên. Dấu bằng đạt được khi tam giác ABC đều và P trùng tâm.

Chú ý rằng bất đẳng thức trên là bất đẳng thức hình học khá thông dụng ta thường thấy chúng được chứng minh qua cách sử dụng tích vô hướng. □

Hệ quả 4.2. *Cho tam giác ABC, mọi $x, y, z > 0$ và mọi P trên mặt phẳng thì*

$$\frac{xPA}{(y+z)a} + \frac{yPB}{(z+x)b} + \frac{zPC}{(x+y)c} \geq 2\sqrt{3}$$

Hệ quả 4.3. *Cho hai tam giác $ABC, A'B'C'$ với mọiP và P' trên mặt phẳng thì*

$$(\frac{P'B'}{b'} + \frac{P'C'}{c'})\frac{PA}{a} + (\frac{P'C'}{c'} + \frac{P'A'}{a'})\frac{PB}{b} + (\frac{P'A'}{a'} + \frac{P'C'}{b'})\frac{PC}{c} \geq 2$$

Chứng minh. Trong bài toán 3 ta đặt $x = \dfrac{P'A'}{a'}, y = \dfrac{P'B'}{b'}, z = \dfrac{P'C'}{c'}$ và ứng dụng bài toán 2 ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 5. *Cho tam giác ABCmọi $x, y, z > 0$ và R, r là các bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tương ứng, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$xa + yb + zc \geq 2\sqrt{xy+yz+zx}\sqrt{r(4R+r)}$$

Chứng minh. Sử dụng bài toán 1 ta thay thế bộ số dương (a,b,c) bởi $(p-a,p-b,p-c)$ và ta chú ý rằng bài toán 1 có thể được viết dưới dạng

$$x(b+c)+y(c+a)+z(a+b)\geq 2\sqrt{(ab+bc+ca)(xy+yz+zx)}$$

Vì vậy ta nhận được

$$x(s-b+s-c)+y(s-c+s-a)+z(s-a+s-b)\geq$$

$$\geq 2\sqrt{(xy+yz+zx)((s-b)(s-c)+(s-c)(s-a)+(s-a)(s-b))}$$

Ứng dụng bổ đề ta thu được điều phải chứng minh

$$xa+yb+zc\geq 2\sqrt{xy+yz+zx}\sqrt{r(4R+r)}.$$

□

Bài toán trên có một vài hệ quả rất thú vị

Hệ quả 5.1. *Cho hai tam giác $ABC, A'B'C'$, với mọi P , R,r là bán kính các đường trong ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC ta có*

$$\frac{a}{a'}PA'+\frac{b}{b'}PB'+\frac{c}{c'}PC'\geq 2\sqrt{r(4R+r)}$$

Chứng minh. Ở trong bài toán và ứng dụng bài toán 2 cho tam giác $A'B'C'$ và điểm P ta đặt $x=\dfrac{PA'}{a'}, y=\dfrac{PB'}{b'}, z=\dfrac{PC'}{c'}$ chúng ta nhận được

$$\frac{PA'}{a'}a+\frac{PB'}{b'}b+\frac{PC'}{c'}c\geq$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{PB'\cdot PC'}{b'c'}+\frac{PC'\cdot PA'}{c'a'}+\frac{PA'\cdot PB'}{a'b'})}\sqrt{r(4R+r)}\geq 2\sqrt{r(4R+r)}$$

Đó là điều phải chứng minh □

Hệ quả 5.2. *a/ Cho tam giác ABC và $A'B'C'$ ta có*

$$\tan\frac{A'}{2}a+\tan\frac{B'}{2}b+\tan\frac{C'}{2}c\geq 2\sqrt{r(4R+r)}$$

b/ Cho tam giác ABC và tam giác nhọn $A'B'C'$ ta có

$$\cot A'a+\cot B'b+\cot C'c\geq 2\sqrt{r(4R+r)}$$

Chứng minh. $a/$ Chúng ta luôn có $\tan\dfrac{A}{2},\tan\dfrac{B}{2},\tan\dfrac{C}{2}>0$, bây giờta ứng dụng bài toán 4 và đặt $x=\tan\dfrac{A'}{2},y=\tan\dfrac{B'}{2},z=\tan\dfrac{C'}{2}$ trong đo chú ý rằng $\tan\dfrac{B'}{2}\tan\dfrac{C'}{2}+\tan\dfrac{C'}{2}\tan\dfrac{A'}{2}+\tan\dfrac{A'}{2}\tan\dfrac{B'}{2}=1$ chúng ta thu được

$$\tan\frac{A'}{2}a+\tan\frac{B'}{2}b+\tan\frac{C'}{2}c\geq 2\sqrt{\tan\frac{B'}{2}\tan\frac{C'}{2}+\tan\frac{C'}{2}\tan\frac{A'}{2}+\tan\frac{A'}{2}\tan\frac{B'}{2}}\sqrt{r(4R+r)}=2\sqrt{r(4R+r)}$$

$b/$trong tam giác nhọn $A'B'C'$ ta có $\cot A',\cot B',\cot C'>0$ và chú ý rằng $\cot B'\cot C'+cotC'\cot A'+\cot A'\cot B'=1$ và áp dụng bài toán 4 thì

$$\cot A'a+\cot B'b+\cot C'c\geq 2\geq 2\sqrt{\cot B'\cot C'+cotC'\cot A'+\cot A'\cot B'}\sqrt{r(4R+r)}=2\sqrt{r(4R+r)}$$

□

3 Các ứng dụng của các bất đẳng thức hình học

Trong mục trên chúng ta đã chỉ ra rất nhiều bất đẳng hình học như là những ứng dụng của bất đẳng thức đại số, chúng ta thấy đó là các bất đẳng thức ở dạng khá tổng quát, trong phần này chúng ta tiếp tục trình bày những ứng dụng của các bất đẳng thức hình học đó dưới dạng những hệ quả.

Đến đây chúng ta có một chú ý là bài toán tổng quát sau cho bài toán Fermat trong tam giác đã được giải quyết hoàn toàn trong các bài báo của thầy Nguyễn Minh Hà trên THTT trong [2] và trên bài báo Extending the Fermat-Toricelli problem đã đăng trên tạp chí The mathematical gazette trong [4].

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ trong mặt phẳng hãy tìm điểm cực trị cho biểu thức $xPA+yPB+zPC$ trong đó x,y,z là các số thực dương bất kỳ.*

Như vậy về mặt lý thuyết chúng ta có thể tìm được cực trị biểu thức có dạng $xPA+yPB+zPC$, tuy nhiên trong nhiều trường hợp cụ thể, ta cần đến một đánh giá yếu hơn để không phải xét quá nhiều trường hợp, ta có thể ví dụ một vấn đề chưa có lời giải

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC với mọi điểm P trên mặt phẳng hãy chứng minh*

$$\sin\frac{A}{2}PA+\sin\frac{B}{2}PB+\sin\frac{C}{2}PC\geq\frac{6r^2}{R}$$

Bài toán 8. *Cho hai tam giác $ABC,A'B'C'$ và điểm P bất kỳ, bất đẳng thức sau luôn đúng*

$$\frac{PB'\cdot PC+PB\cdot PC'}{bc}+\frac{PC'\cdot PA+PC\cdot PA'}{ca}+\frac{PA'\cdot PC+PA\cdot PB'}{ab}\geq 2$$

Chứng minh. Áp dụng hệ quả 2 của bài toán 3 và cho $P\equiv P'$, chúng ta thu được hệ quả này. Và ta chú ý thêm rằng hệ quả này lại chính là một mở rộng cho bất đẳng thức cơ bản trong bài toán 2 khi mà $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

□

Bài toán 9. *Cho hai tam giác $ABC, A'B'C'$ thì*

$$\frac{\sin A}{\sin A'} + \frac{\sin B}{\sin B'} + \frac{\sin C}{\sin C'} \geq 2\frac{\sqrt{r(4R+r)}}{R} \geq \frac{6r}{R}$$

Chứng minh. Trong hệ quả 1 của bài toán ta cho $P \equiv O'$ tâm đường tròn ngoại tiếp của tam gaics $A'B'C'$ và ứng dụng định lý sin trong các tam giác $A'B'C'$ và ABC ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC và mọi điểm P thì $PA + PB + PC \geq 2\sqrt{r(4R+r)}$*

Chứng minh. Trong hệ quả 1 của bài toán 4 ta cho $\triangle ABC \equiv A'B'C'$ chúng ta thu được bất đẳng thức này. Và ta chú ý rằng đây là một dạng mạnh hơn của bất đẳng thức $PA + PB + PC \geq 6r$ mà ta vẫn gặp nó trong một sô bài viết trên THTT và nó được chứng minh dưới dạng sử dụng bất đẳng thức Erdos-Mordell. Mặt khác ta cũng chú ý thêm rằng nếu sử dụng điểm cực trị Fermat F trong tam giác ta có thể quy bất đẳng thức này về một bất đẳng thức lượng trong tam giác ở dạng sau $FA + FB + FC \geq 2\sqrt{r(4R+r)}$, và sử dụng đẳng thức $2(FA+FB+FC)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S$ ta nhận được một bất đẳng thức dạng $a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S \geq 2r(4R+r)$ nếu để ý kỹ ta thấy đây là một bất đẳng thức mạnh hơn bất đẳng thức nổi tiếng Finsler-Hadwiger $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$ □

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC và mọi điểm P trên mặt phẳng thì*

$$a/\ \frac{b}{a}PA + \frac{c}{b}PB + \frac{a}{c}PC \geq 2\sqrt{r(4R+r)}$$

$$b/\ \frac{c}{a}PA + \frac{a}{b}PB + \frac{b}{c}PC \geq 2\sqrt{r(4R+r)}$$

Chứng minh. Trong hệ quả 1 của bài toán 4 ta cho $\triangle A'B'C' \equiv \triangle BCA$ ta thu được phần $a/$ và cho $\triangle A'B'C' \equiv \triangle BAC$ ta thu được phần $b/$. Ta thấy đây là các bất đẳng thức không đối xứng trong tam giác, nó là những dạng bài ít gặp. □

Bài toán 12. *Cho tam giác ABC và mọi điểm P thì*

$$\frac{PA}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{PB}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{PC}{\sin\frac{C}{2}} \geq 2\sqrt{r(4R+r)} \geq 6r$$

Chứng minh. Chúng ta cộng hai vế của các bất đẳng thức trong phần $a/$ và $b/$ của hệ quả 6 ta thu được

$$\frac{b+c}{a}PA + \frac{c+a}{b}PB + \frac{a+b}{c}PC \geq 2\sqrt{r(4R+r)}$$

Và bằng định lý sin ta có

$$\frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{A}{2}}$$

Vì vậy ta thu được

$$\frac{PA}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{PB}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{PC}{\sin\frac{C}{2}} \geq 2\sqrt{r(4R+r)} \geq 6r$$

□

Bài toán 13. *Cho hai tam giác $ABC, A'B'C'$ chứng minh rằng*

$$\tan\frac{A'}{2}a^2+\tan\frac{B'}{2}b^2+\tan\frac{C'}{2}c^2\ge 4S\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A'}{2}+\tan\frac{B'}{2}+\tan\frac{C'}{2}}$$

Chứng minh. Bằng bất đẳng thức Cauchy-Swart và theo hệ quả 2 của bài toán 4

$$(\tan\frac{A'}{2}a^2+\tan\frac{B'}{2}b^2+\tan\frac{C'}{2}c^2)(\tan\frac{A'}{2}+\tan\frac{B'}{2}+\tan\frac{C'}{2})\ge$$

$$\ge(\tan\frac{A'}{2}a+\tan\frac{B'}{2}b+\tan\frac{C'}{2}c)^2\ge 4r(4R+r)=4S(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2})$$

Do đó

$$\tan\frac{A'}{2}a^2+\tan\frac{B'}{2}b^2+\tan\frac{C'}{2}c^2\ge 4S\frac{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{A'}{2}+\tan\frac{B'}{2}+\tan\frac{C'}{2}}$$

Ta chú ý rằng bất đẳng thức này khá thú vị

Khi ta cho $\triangle A'B'C'\equiv ABC$ thì ta thu được

$$\tan\frac{A}{2}a^2+\tan\frac{B}{2}b^2+\tan\frac{C}{2}c^2\ge 4S$$

Khi ta cho $\triangle A'B'C'\equiv BCA$ ta thu được

$$\tan\frac{B}{2}a^2+\tan\frac{C}{2}b^2+\tan\frac{A}{2}c^2\ge 4S$$

Và khi tam giác $A'B'C'$ là tam giác đều ta nhận được bất đẳng thức

$$a^2+b^2+c^2\ge 4S(\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2})\ge 4\sqrt{3}S$$

hay chính là bất đẳng thức quen thuộc.

$$\cot A+\cot B+\cot C\ge\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$$

□

Chú ý. Để kết thúc bài viết ta đưa ra nhận xét là tất cả các bất đẳng thức hình học mà ta đã trình bày như là hệ quả của bất đẳng thức đại số đầu tiên thì chúng đều được triển khai từ bất đẳng thức hình học cơ bản được trình bày trong bài toán 2, bằng ý tưởng tương tự ta có thể áp dụng một bất đẳng thức cũng đã rất quen thuộc trong tam giác là $xa^2+yb^2+zc^2\ge 4\sqrt{xy+yz+zx}S$ và kết hợp với bất đẳng thức hình học cơ bản, ta sẽ còn thu được rất nhiều những dạng bất đẳng thức hình học thú vị khác.

Tài liệu

[1] Pham Huu Duc, An unexpectedly useful inequality, *Mathematical reflections* 2008, Issue 1.

[2] Tuyển tập 5 năm tạo chí toán học và tuổi trẻ, *Nhà xuất bản giáo dục 2004.*

[3] Bottema, Oene; Djordjevic, R.Z.; Janic, R.; Mitrinovic, D.S.; and Vasic, P.M., *Geometric Inequalities.*

[4] Nguyen Minh Ha, Extending the Fermt-Toricelli problem, *The mathematical gazette.*