Một số đề hình học trong kỳ thi vào trường PTNK

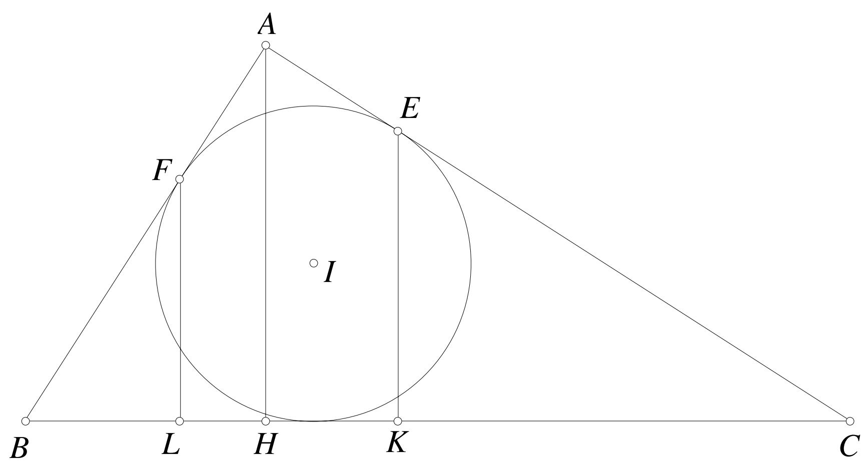
Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết sẽ tập trung khai thác và phát triển một số đề hình học thi vào trường PTNK từ năm 1999 tới năm 2015.

Đề thi vào trường PTNK năm 2000 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn nội tiếp tiếp xúc CA, AB tại E, F. Gọi K, L là hình chiếu của E, F lên BC. Chứng minh rằng $AH^2 = 2EK.FL$.



Hình 1.

Lời giải. Từ tính chất cơ bản của đường tròn nội tiếp thì

$$BF = \frac{BC + BA - AC}{2}, CE = \frac{CB + CA - AB}{2}.$$

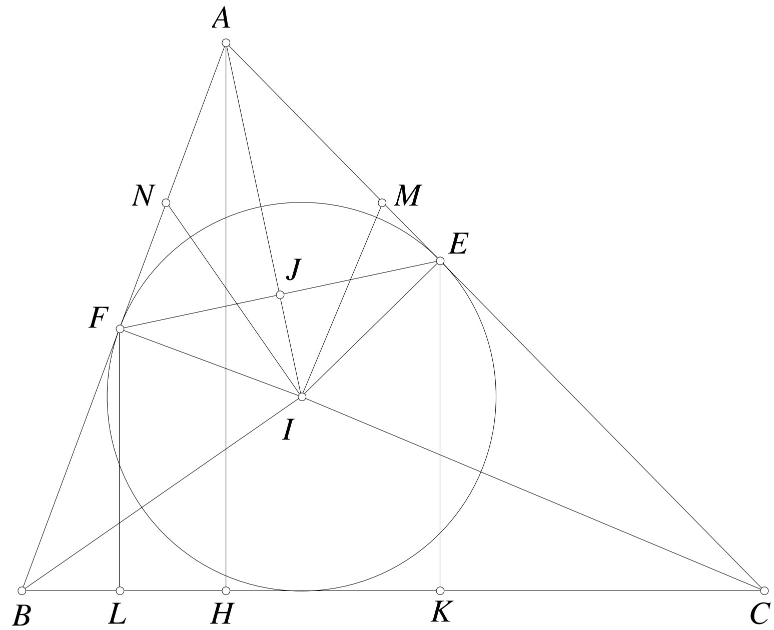
Từ đó theo định lý Thales

$$\frac{EK.FL}{AH^2} = \frac{BF}{BA}.\frac{CE}{CA} = \frac{BC^2 - (AB - AC)^2}{AB.AC} = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB.AC}{AB.AC} = 2$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán là ứng dụng cơ bản của tính chất đường tròn nội tiếp định lý Thales và định lý Pythagore. Cuối đề bài cũng đặt ra câu hỏi là xét bài toán với tam giác thường ? Đó là vấn đề thú vị khi thay thế góc vuông hiển nhiên bài toán không thể đúng nếu giữ nguyên các giả thiết. Tuy vậy nếu phát triển giả thiết gốc thêm một chút ta sẽ thu được bài toán mới rất thú vị như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC đường cao AH. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. Gọi K, L là hình chiếu của E, F lên BC. Gọi IA cắt EF tại J. Chứng minh rằng $AH^2 = \frac{IA}{IJ}.EK.FL$.



Hình 2.

Lời giải. Ta thấy $\dfrac{IA}{IJ}.\dfrac{EK.FL}{AH^2} = \dfrac{IA^2}{IA.IJ}.\dfrac{BF}{BA}.\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{IA^2}{AB.AC}.\dfrac{BF.CE}{IF.IE}$ (1).

Lấy các điểm M, N thuộc CA, AB sao cho $IM \perp IC, IN \perp IB$ ta dễ thấy $\triangle ANI \sim \triangle AIC$, $\triangle AMI \sim \triangle AIB$. Từ đó $\dfrac{BF}{IF} = \dfrac{IB}{IN} = \dfrac{IB}{\frac{IA}{AC}.IC} = \dfrac{IB.AC}{IA.IC}$ (2).

Tương tự $\dfrac{CE}{IE} = \dfrac{IC.AB}{IA.IB}$ (3).

Từ (1),(2),(3) suy ra $\dfrac{IA}{IJ}.\dfrac{EK.FL}{AH^2} = 1$ hay $AH^2 = \dfrac{IA}{IJ}.EK.FL$. □

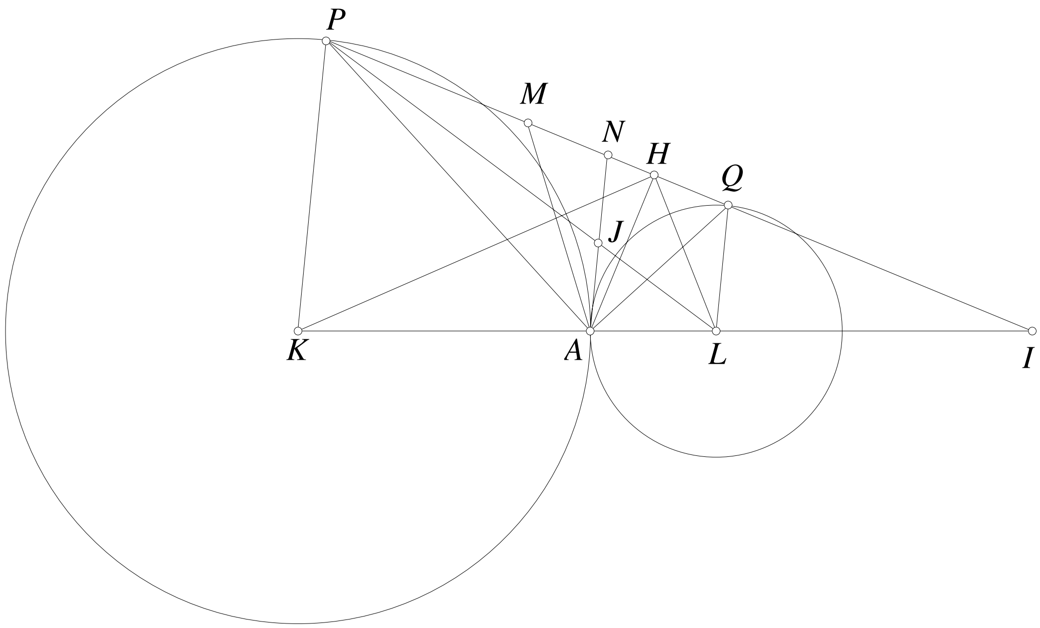
Nhận xét. Ta thấy ngay khi tam giác vuông tại A thì $IA = 2IJ$ ta thu được bài toán ban đầu. Thực chất tác giả đạt được bài toán trên nhờ một số biến đổi lượng giác tương tự cách làm ở bài toán gốc. Tuy vậy trong quá trình giải thì tìm được lời giải như trên thực sự đã thoát ly được ý tưởng lượng giác và làm bài toán trở nên ý nghĩa hơn. Thực chất bài toán 1 vẫn còn rất nhiều điều thú vị chờ các bạn khám phá. Bài toán 2 mới chỉ là khai thác có tính ban đầu, các bạn hãy suy nghĩ thêm về vấn đề này.

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2001 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 3. Cho hai đường tròn (K) và (L) có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài nhau tại A. Các điểm P, Q lần lượt thuộc $(K), (L)$ sao cho $\angle PAQ = 90°$.

a) Gọi H là hình chiếu của A lên P, Q. Chứng minh rằng H luôn thuộc một đường tròn cố định khi P, Q di chuyển.

b) Gọi M là trung điểm PQ. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{2}{AH} = \dfrac{1}{KP} + \dfrac{1}{LQ}$ thì AM là tiếp tuyễn chung của (K) và (L).



Hình 3.

Lời giải. a) Ta thấy các tam giác KAP và LAQ cân tại K, L nên $\angle KAP + \angle LAQ = 180^\circ - 2\angle PAK + 180^\circ - 2\angle QAL = 360^\circ - 2.90^\circ = 180^\circ$ suy ra $KP \parallel LQ$. Do (K) và (L) bán kính khác nhau nên PQ cắt KL tại I. Theo định lý Thales dễ thấy $\dfrac{IK}{IL} = \dfrac{KP}{LQ}$ không đổi mà K, L cố định nên I cố định. Từ đó H thuộc đường tròn đường kính IA cố định. Ta có điều phải chứng minh.

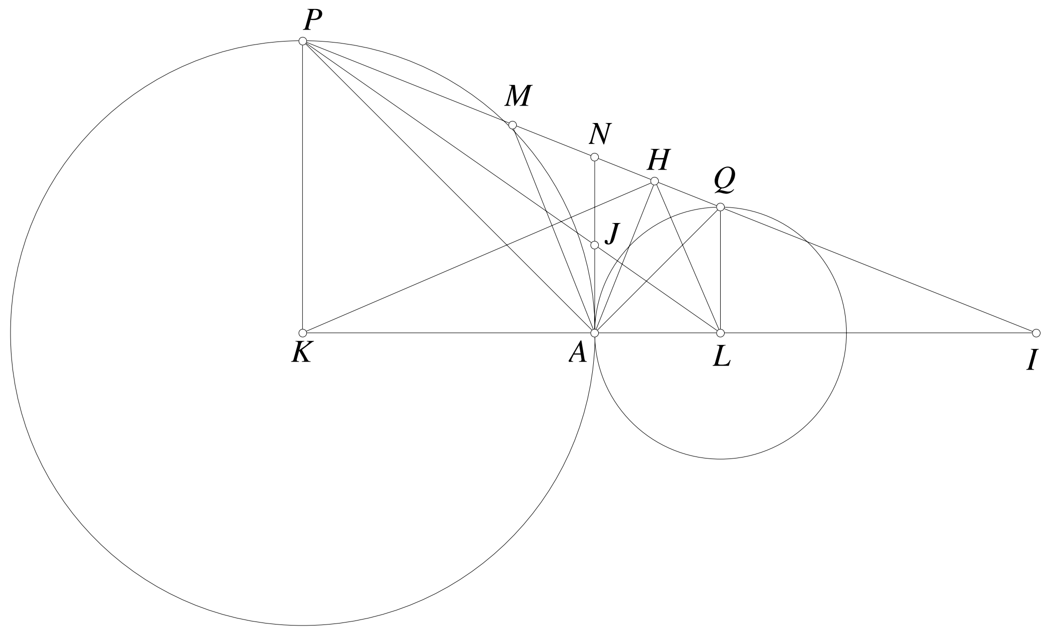
b) Lấy điểm N thuộc PQ sao cho $AN \parallel KP \parallel LQ$. Gọi PL cắt AN tại J. Theo định lý Thales dễ thấy $\dfrac{AJ}{KP} = \dfrac{AL}{KL} = \dfrac{LQ}{KP + LQ}$ vậy $\dfrac{1}{AJ} = \dfrac{1}{KP} + \dfrac{1}{LQ}$. Tương tự $\dfrac{1}{NJ} = \dfrac{1}{KP} + \dfrac{1}{LQ} = \dfrac{1}{AJ}$. Vậy $\dfrac{2}{AN} = \dfrac{1}{KP} + \dfrac{1}{LQ} = \dfrac{2}{AH}$. Suy ra $H \equiv N$. Từ đó $KP \parallel LQ \parallel AH \perp PQ$ nên PQ là tiếp tuyến chung của (K) và (L). Dễ thấy tiếp tuyến chung tại A khi đó phải đi qua M là trung điểm PQ. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đề bài gốc có ý cuối là phát biểu và chứng minh khi hai đường tròn tiếp xúc trong, tuy vậy cách làm hoàn toàn tương tự. Việc chỉ ra điểm cố định đóng vài trò quan trọng trong câu a). Câu b) là một ứng dụng quan trọng của định lý Thales trong hình thang. Bài toán có thể được khai thác như sau

Bài toán 4. Cho hai đường tròn (K) và (L) có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài nhau tại A. Các điểm P, Q lần lượt thuộc $(K), (L)$ sao cho $\angle PAQ = 90^\circ$.

a) Chứng minh rằng đối xứng của A qua PQ luôn thuộc một đường tròn cố định khi P, Q di chuyển.

b) Gọi M là trung điểm PQ và H là hình chiếu của A lên PQ. Chứng minh rằng nếu phân giác $\angle MAH$ là tiếp tuyến chung của (K) và (L) thì $HK \perp HL$.



Hình 4.

Các bạn hãy làm như một bài luyện tập

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2003 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 5. a) Cho đường tròn (O) và một điểm I cố định. Một đường thẳng thay đổi đi qua I cắt (O) tại MN. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng quay quanh I.

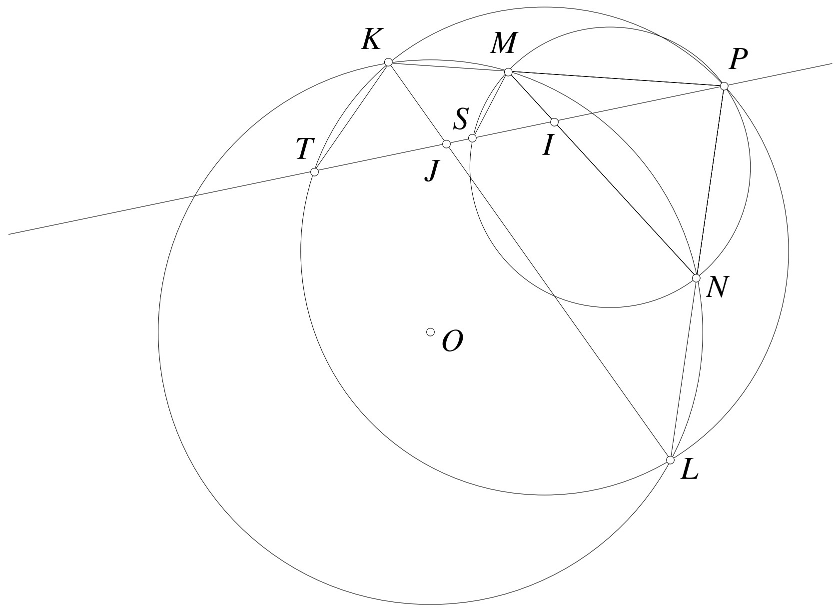
b) Cho đường tròn (O) và đường thẳng d ở ngoài (O). P di chuyển trên d. Đường tròn đường kính PO cắt (O) tại M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Cả hai bài toán trên thực chất đều là các vấn đề đã rất kinh điển và đã xuất hiện trước đó rất lâu trong nhiều tài liệu. Tôi sẽ không đi sâu vào giải mà sẽ mở rộng và khai thác cả hai bài toán đó

Bài toán 6. Cho đường tròn (O) và điểm I không nằm trên (O). MN là một dây cung đi qua I. P là một điểm cố định cũng không thuộc (O).

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN luôn đi qua một điểm cố định khác P.

b) Gọi PM, PN cắt (O) tại K, L khác M, N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL luôn đi qua một điểm cố định khác P.



Hình 5.

Lời giải. a) Gọi R là bán kính của (O). Không mất tổng quát giả sử I nằm trong (O), trường hợp ở ngoài tương tự. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN cắt PI tại S khác P. Áp dụng hệ thức lượng trong đường tròn thì $IS.IP = IM.IN = R^2 - OI^2$ không đổi nên S cố định.

b) Gọi KL cắt PI tại J. Không mất tổng quát giả sử P nằm ngoài (O), trường hợp ở trong tương tự. Ta thấy $\angle MSP = \angle MNP = \angle MKJ$ suy ra tứ giác $MKJS$ nội tiếp. Vậy $PS.PJ = PK.PM = OP^2 - R^2$ nên J cố định. Dây KL đi qua J cố định tương tự câu a) đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL đi qua T cố định khác P. □

Nhận xét. Đây là bài toán rất tổng quát và nhiều ý nghĩa. Chúng ta thường hay gặp những trường hợp đặc biệt của bài toán này trong nhiều bài toán ở các kỳ thi THCS ở Việt Nam. Các bạn một lần nữa thấy trường hợp riêng đó trong đề năm 2006 [1]. Sau đây là một ứng dụng của phần b) bài gốc

Bài toán 7. Cho đường tròn (O) nằm trong hai dải đường thẳng song song a, b. P thuộc a. Tiếp tuyến của (O) qua P cắt b tại A, B. M là trung điểm AB. Chứng minh rằng PM luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

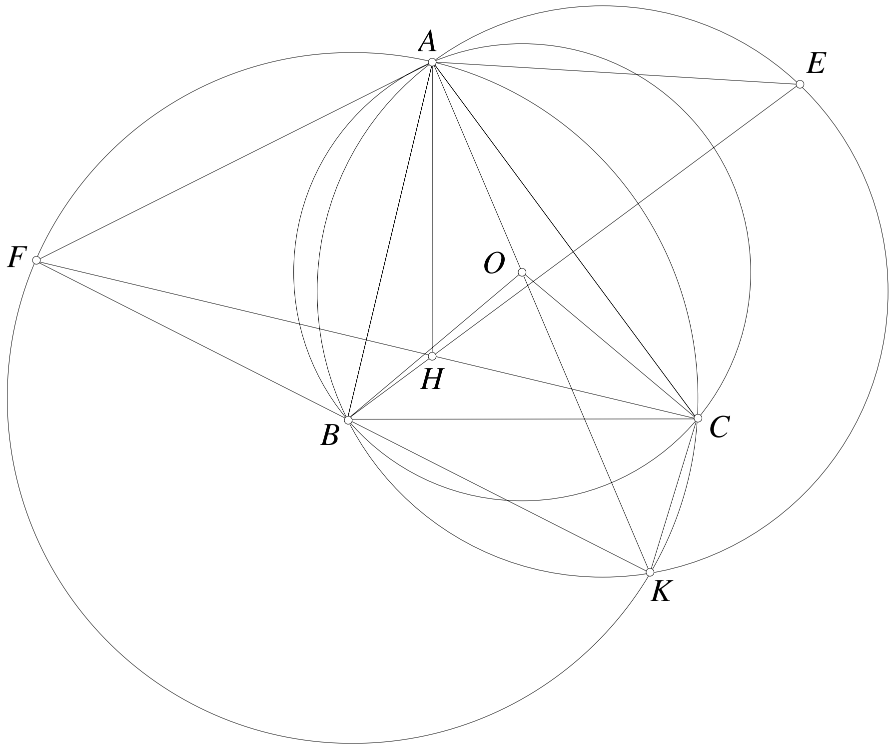
Phần b) là một bài tập kinh điển mà nó có quá nhiều ứng dụng, các bạn hãy tìm hiểu thêm.

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2010 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với dây BC cố định không là đường kính và A di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của B, C qua CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K khác A.

a) Chứng minh rằng K luôn thuộc một đường tròn cố định khi A di chuyển.

b) Chứng minh rằng AK đi qua O.



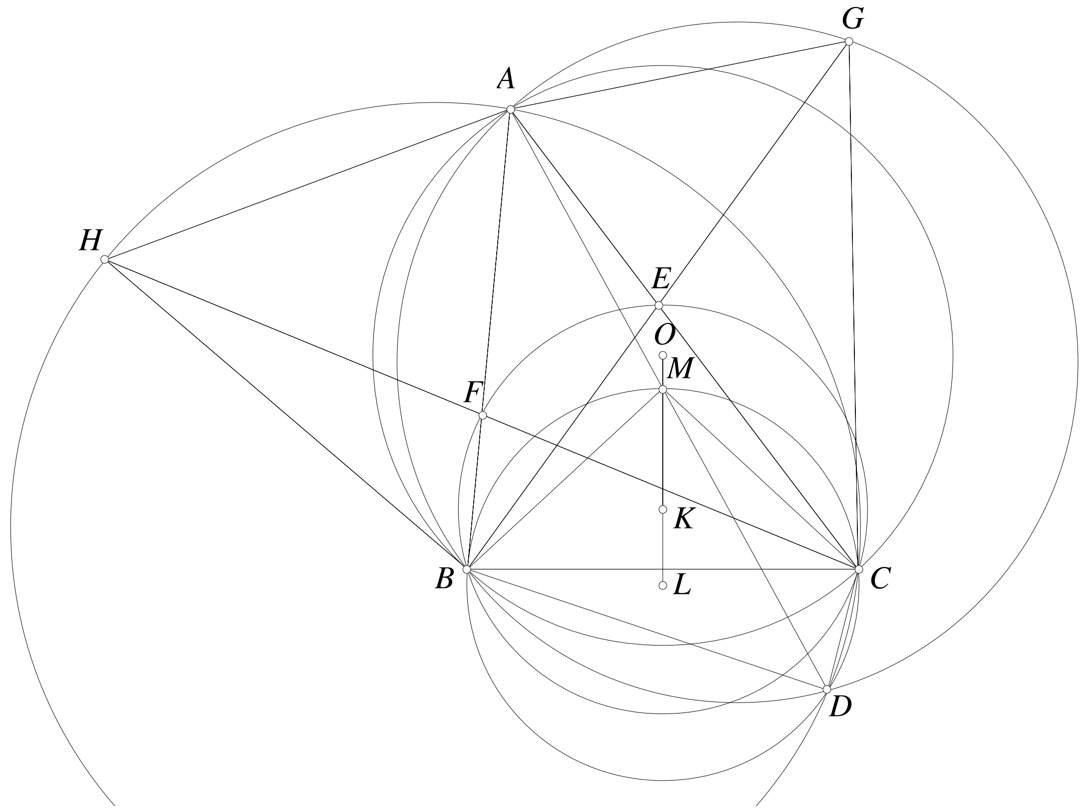
Hình 6.

Lời giải. a) Ta có $\angle BKC = \angle BKA + \angle CKA = \angle AFC + \angle AEB = \angle ACH + \angle ABH = 90^\circ - \angle BAC + 90^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - \angle BOC$. Vậy tứ giác $KBOC$ nội tiếp hay K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC cố định.

b) Từ tứ giác $BOCK$ nội tiếp mà $OB = OC$ nên KO là phân giác $\angle BKC$. Từ trên dễ có $\angle CKA = \angle CFA = \angle ACH = \angle ABH = \angle AEB = \angle AEB = \angle BKA$ vậy KA là phân giác $\angle BKC$ nên K, O, A thẳng hàng. □

Nhận xét. Bài toán gốc phát biểu câu b) là chứng minh AK đi qua điểm cố định nhưng rõ ràng điểm cố định là O đã xuất hiện ngay trong đề nên phát biểu theo cách chứng minh thẳng hàng thuận tiện hơn. Nếu để ký kỹ ta cũng dễ thấy tâm ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC. Bài toán này tuy đơn giản xong có khá nhiều ý tưởng để phát triển, sau đây là một phát triển như thế

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với dây BC cố định không là đường kính và A di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. (K) là một đường tròn cố định đi qua B, C lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác B, C. G, H lần lượt đối xứng B, C theo thứ tự qua E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH và tam giác ABG cắt nhau tại D khác A. Chứng minh rằng AD luôn đi qua một điểm cố định khi A di chuyển.

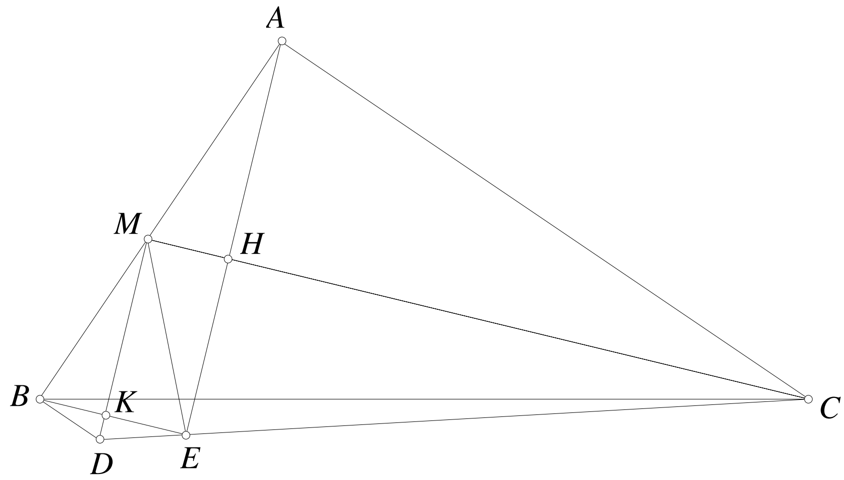


Hình 7.

Lời giải. Trước hết ta thấy AFC có các góc không đổi do (K) và (O) cố định. H lại đối xứng C qua F nên dễ thấy $\angle CDA = \angle CHA$ không đổi. Tương tự $\angle BDA = \angle BGA$ không đổi. Vậy nên $\angle BDC$ không đổi, D sẽ nằm trên đường tròn (L) cố định. Ta lại dễ thấy $\angle AFH = \angle AEG$, mặt khác $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{EG}{FH}$. Từ $\triangle AFH \sim \triangle AEG$. Vậy $\angle BDA = \angle AHF = \angle AGE = \angle ADB$. Từ đó DA là phân giác $\angle BDC$. Nếu gọi DA cắt (L) tại M khác A thì dễ thấy M phải thuộc trung trực BC, vậy M là giao của trung trực BC và (L) cố định suy ra AD đi qua M cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2012 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. M là một điểm trên cạnh AB. Đường thẳng qua M vuông góc MC cắt đường thẳng qua B song song AC tại D. Đường thẳng qua A song song MD cắt đường thẳng qua B song song MC tại E. Chứng minh rằng D, E, C thẳng hàng.



Hình 8.

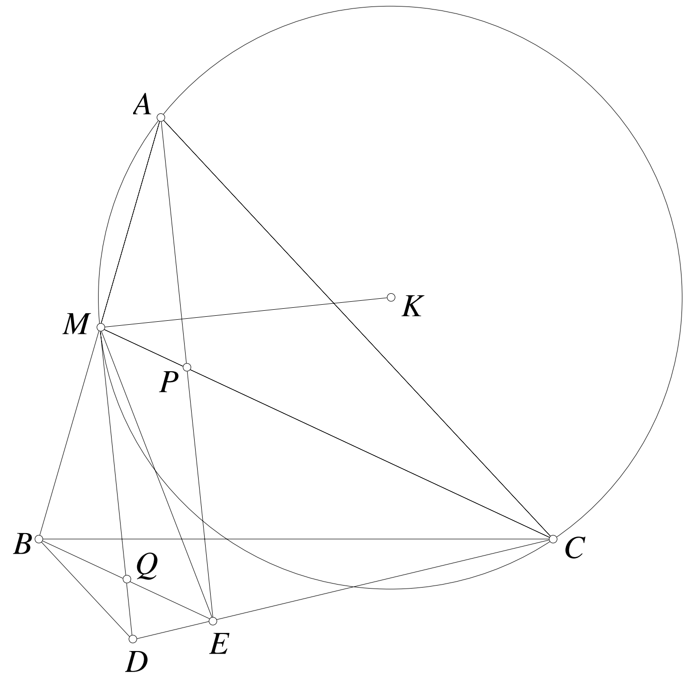
Lời giải. Gọi MC cắt AE tại H, MD cắt BE tại K. Ta dễ thấy các tam giác AMC, BDM vuông. Mặt khác $\angle BMD = \angle BAE = \angle = \angle ACM$. Do đó các tam giác AMC, BDM đồng dạng có đường cao tương ứng là AH, BK nên $\dfrac{HM}{HC} = \dfrac{KD}{KM}$. Từ đó dễ thấy trong tam giác DMC đường thẳng qua H song song với MD và đường thẳng qua K song song MC cắt nhau trên CD, vậy E thuộc CD. $\square$

Nhận xét. Cách giải của bài toán chỉ thuần túy kiến thức lớp 8 về tam giác đồng dạng và định lý Thales. Bổ đề về hai đường thẳng cắt nhau trên CD là một bổ đề quen thuộc dùng định lý Thales xin nhắc lại bổ đề như sau.

Bổ đề 10.1. Cho tam giác ABC có E, F lần lượt thuộc cạnh CA, AB. Chứng minh rằng đường thẳng qua E song song AB và đường thẳng qua F song song AC đồng quy với BC khi và chỉ khi $\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{FB}{FA}$.

Bổ đề là quen thuộc xin không nhắc lại cách chứng minh. Bài toán phát biểu trên tam giác vuông thì cũng sẽ có một cách nhìn trên tam giác bất kỳ như sau

Bài toán 11. Cho tam giác ABC với M là một điểm trên cạnh BC. Tiếp tuyến tại M của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC cắt đường thẳng qua B song song AC tại D. Đường thẳng qua A song song MD cắt đường thẳng qua B song song MC tại E. Chứng minh rằng C, D, E thẳng hàng.



Hình 9.

Lời giải. Do MD tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM nên $\angle MAC = \angle BMD = \angle MAP$. Do đó $\triangle MAP \sim \triangle MCA$ suy ra $\dfrac{MP}{MC} = \dfrac{MP}{MA}.\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{AP^2}{AC^2}$ (1).

Ta lại có góc có cạnh tương ứng song song là $\angle DBE = \angle MCA = \angle MAP = \angle BMD$, vậy $\triangle DBQ \sim \triangle DMB$ suy ra $\dfrac{DQ}{DM} = \dfrac{DQ}{DB}.\dfrac{DB}{DM} = \dfrac{BQ^2}{BM^2}$ (2).

Ta lại dễ thấy $\triangle BQM \sim \triangle MPA$ do chúng có cạnh tương ứng song song, từ đó $\dfrac{BQ^2}{BM^2} = \dfrac{MP^2}{MA^2} = \dfrac{AP^2}{AC^2}$ (3).

Từ (1),(2),(3) suy ra$\dfrac{MP}{MC} = \dfrac{DQ}{DM}$ hay $\dfrac{PM}{PC} = \dfrac{QD}{QM}$. Từ theo bổ đề đường thẳng qua A song song MD và đường thẳng qua B song song MC đồng quy với DC. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán thực chất là ứng dụng tính chất tam giác đồng dạng chung cạnh, một trong những kiến thức cơ bản của các tam giác đồng dạng. Ta có thể loại bỏ yếu tố đường tròn và phát biểu một cách thuần túy kiến thức lớp 8. Bài toán còn nhiều vấn đề để khai thác xin dành điều đó cho bạn đọc.

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2014 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, J là tâm nội tiếp các tam giác AHB, AHC. AI, AJ cắt BC tại M, N. Chứng minh rằng MJ, IN, AH đồng quy.

Bài toán thực chất là ứng dụng một hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có thể tìm một lời giải dùng kiến thức lớp 8 như sau. Ta có bổ đề sau

Bổ đề 12.1. Cho tam giác ABC phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $BE.CF = 2IB.IC$.

Chứng minh. Ta đã biết các hệ thức cơ bản của phân giác $\dfrac{IB}{BE} = \dfrac{BA+BC}{AB+BC+CA}$ và $\dfrac{IF}{IC} = \dfrac{CA+CB}{AB+BC+CA}$ do đó ta có biến đổi tương đương

$BE.CF = 2IB.IC$

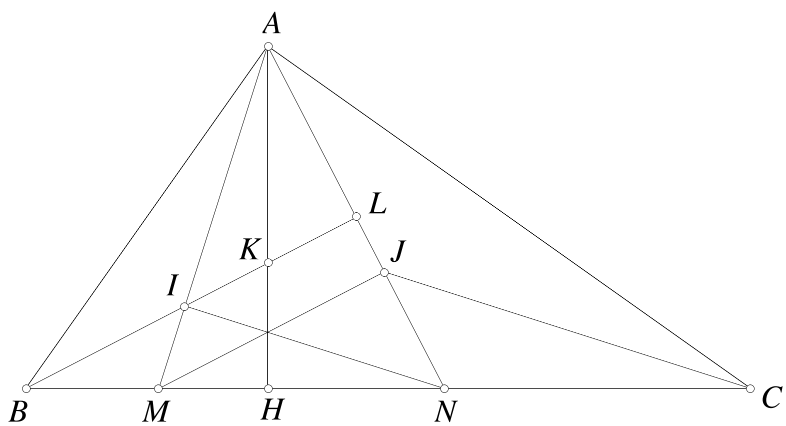
$2(BC+BA)(CB+CA) = (AB+BC+CA)^2$

$2BC^2 + 2BC.BA + 2BC.CA + 2AB.AC = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2BC.BA + 2BC.CA + 2AB.AC$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Tương đương tam giác ABC vuông tại A. □

Trở lại bài toán



Hình 10.

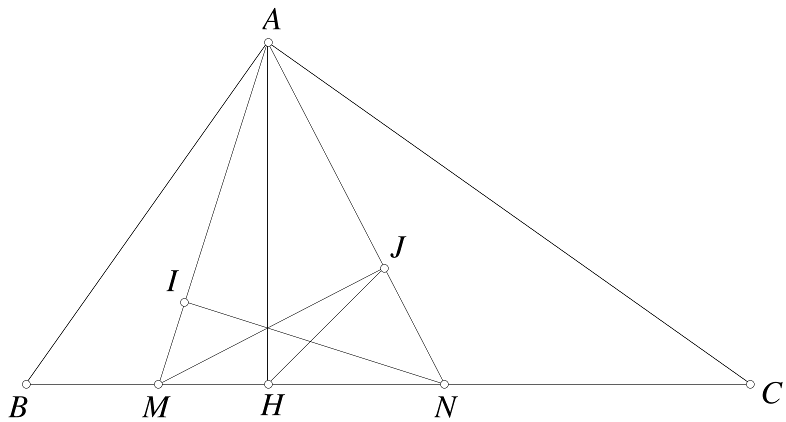
Lời giải 1. Gọi BI cắt AH tại K. Áp dụng bổ đề cho tam giác ABH ta có $BK.AM = 2IB.IA$ hay $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{BK}{2BI}$ (1).

Gọi L là trung điểm AN. Ta chú ý ABK và CAN đồng dạng có phân giác tương ứng là BK và CJ. Nên $\dfrac{BK}{2BI} = \dfrac{AN}{2AJ} = \dfrac{AL}{AJ}$ (2).

Ta dễ thấy $\angle BAN = \angle BAH + \angle HAN = \angle ACB + \angle NAC = \angle ANB$ do đó tam giác ABN cân. Vậy B, I, K, L thẳng hàng (3).

Từ (1),(2),(3) theo định lý Thales đảo thì $MJ \parallel IL \perp AN$. Tương tự $NI \perp AN$. Vậy trong tam giác AMN các đường cao MJ, IN, AH đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải sau sử dụng thêm kiến thức lớp 9 có phần nhẹ nhàng hơn

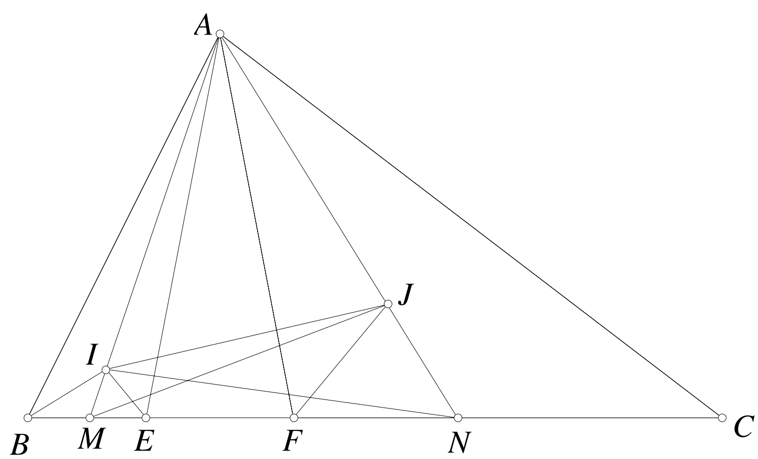


Hình 11.

Lời giải 2. Ta dễ thấy $\angle MAN = \frac{1}{2}\angle BAC = 45^\circ = \angle JHC$ nên tứ giác $AMHJ$ nội tiếp. Từ đó $\angle AJM = \angle AHM = 90^\circ$ vậy $MJ \perp AN$. Tương tự $NI \perp AN$. Vậy trong tam giác AMN các đường cao MJ, IN, AH đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải thứ 2 xem ra ngắn gọn hơn lời giải thứ nhất nhưng lại dùng kiến thức cao hơn. Ý chính của bài toán là tập trung chứng minh $MJ \perp AN$, từ đây ta dễ thấy tứ giác $MIJN$ nội tiếp, đây cũng là một ý hay từ đề toán gốc. Ta có thể mở rộng bài toán như sau

Bài toán 13. Cho tam giác ABC có các điểm E, F lần lượt thuộc tia CB, BC sao cho tam giác $\angle BAF = \angle BCA, \angle CAE = \angle ABC$. I, J là tâm nội tiếp tam giác ABE, ACF. AI, AJ cắt BC tại M, N. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, I, J cùng thuộc một đường tròn.



Hình 12.

Lời giải. Không mất tổng quát giả sử vị trí các điểm như hình vẽ, các trường hợp khác ta làm tương tự. Ta có $\angle EAF = 180^\circ - \angle AEF - \angle AFE = 180^\circ - (\angle ABC + \angle BAE) - (\angle ACB + \angle CAF) = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ABC - \angle ABC) - (\angle ACB + \angle ABC - \angle ACB) = 180^\circ - 2\angle BAC$. Từ đó $\angle IAJ = \angle IAF + \angle EAF + \angle FAJ = \frac{1}{2}(\angle BAC - \angle ABC) + (180^\circ - 2\angle BAC) + \frac{1}{2}(\angle BAC - \angle ACB) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$.

Từ đó $2\angle JFN = \angle AFC = \angle ABC + \angle BAF = \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC = 2\angle IAJ$. Từ đó tứ giác $AJFM$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $AIEN$ nội tiếp. Từ đó ta có $\angle IMJ = \angle AFJ = \frac{1}{2}\angle AFN = \frac{1}{2}\angle AEM = \angle IEA = \angle INJ$ suy ra tứ giác $IJNM$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

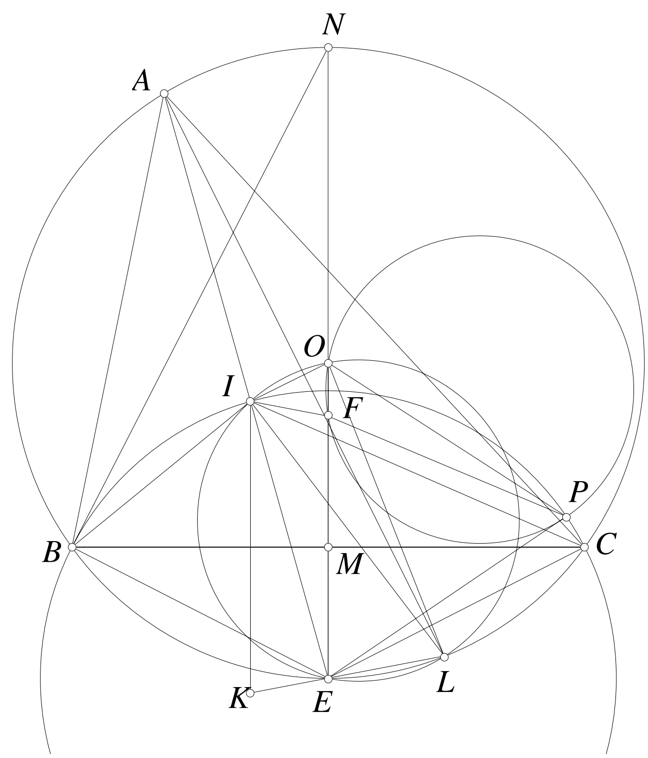
Nhận xét. Cách giải dùng tứ giác nội tiếp có hiệu lực hơn trong trường hợp tổng quát.

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2015 [3] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ một số ý tưởng trong đề gốc nhưng được tác giả chỉnh sửa lại một chút cho đẹp hơn)

Bài toán 14. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I và nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn qua O, I tiếp xúc IA cắt trung trực BC tại F khác O. P là một điểm di chuyển trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

a) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF luôn đi qua điểm E cố định khi P thay đổi.

b) Gọi K đối xứng I qua BC. KE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OIE tại L khác E. Chứng minh rằng L nằm trên (O).



Hình 13.

Lời giải. a) Gọi AI cắt (O) tại E khác A thì E là tâm ngoại tiếp tam giác IBC. Từ đó $EP^2 = EI^2 = EO.EF$. Từ đó EP tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác POF hay tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua E cố định.

b) Gọi M là trung điểm BC và EN là đường kính của (O). Từ hệ thức lượng trong tam giác vuông ta thấy $EF.EO = EI^2 = EB^2 = EM.EN = EM.2EO$. Từ đó $EF = 2EM$ như vậy E và F đối xứng nhau qua BC. Từ đó $IFEK$ là một hình thang cân. Ta có biến đổi góc $\angle OLE = \angle IOA =$

$180° - \angle EIO = 180° - \angle IFE = \angle IFO = \angle IKE = \angle OEL$. Từ đó tam giác $OL = OE$ nên L thuộc (O). □

Nhận xét. Ý a) chủ yếu dùng để phát hiện điểm E, vì yếu tố cố định không có mặt trong đề bài nên bài toán có phần thú vị. Ý b) sau khi chỉ ra được hai điểm đối xứng chỉ là bước đầu. Bước sau dùng biến đổi góc để chỉ ra tam giác cân và chứng minh điểm thuộc đường tròn bằng định nghĩa là một ý rất thú vị, vì thường khi biến đổi góc để chứng minh điểm thuộc đường tròn ta chỉ hay suy nghĩ đi chứng minh góc nnội tiếp bằng nhau rồi để đưa về tứ giác nội tiếp. Ý b) tác giả xây dựng lại từ hai ý bài toán gốc dựa trên một kết quả đã có trong kỳ thi thử vào chuyên KHTN năm 2012. Ta chú ý rằng có một hệ quả thú vị của ý b) chính là chứng minh $AL \perp OI$, các bạn hãy thử như một bài luyện tập.

Lời kết. Các đề thi toán chuyên của trường PTNK từ năm 1999 tới 2015 có nhiều bài toán hay có ý tưởng. Trong bài viết không bao quát hết tất cả các bài toán hình học trong 15 năm vì ở đây tác giả chỉ chọn lọc ra các bài toán mà theo ý chủ quan của tác giả là hay và mang ý nghĩa. Quan điểm hình học đẹp được thể hiện xuyên suốt bài viết do đó một số bài toán có nội dung cực trị, bất đẳng thức hoặc tính toán cũng không được đề cập tới. Bài viết có mục đích mang lại một cái nhìn khác lạ hơn cho các đề toán thi. Bài viết cũng không thể tránh khỏi thiếu sót, mong nhận được sự góp ý của bạn đọc.

Tài liệu

[1] Đề thi toán chuyên PTNK 1999 - 2013 tại http://www.ptnk.edu.vn/kqts/dethi/De_thi_tuyen_sinh_lop_10_mon_Toan_chuyen.pdf

[2] Đề thi toán chuyên PTNK 2014 tại http://diendantoanhoc.net/home

[3] Đề thi toán chuyên PTNK 2015 tại http://diendantoanhoc.net/home

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com