

# Mỗi tuần một bài toán

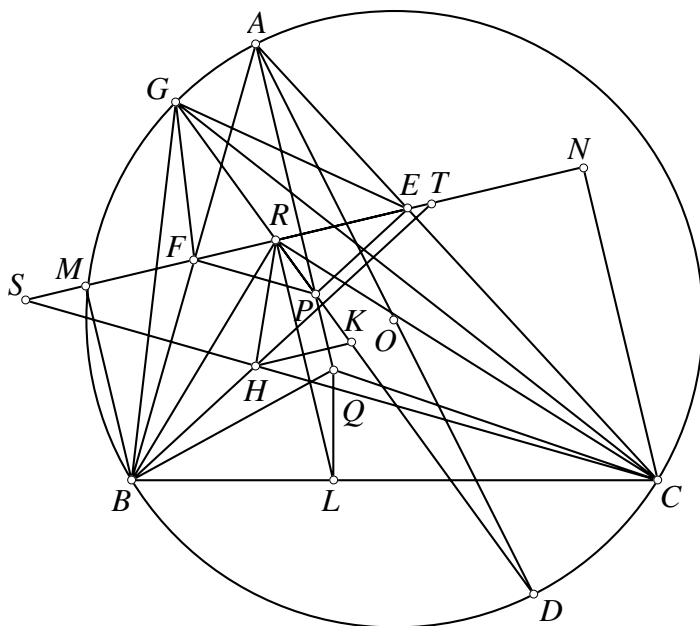
**Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

**D**ây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

## Đề bài

Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  đường kính  $AD$ , trực tâm  $H$ .  $P, Q$  là hai điểm đẳng giác nằm trên phân giác góc  $A$  và ở trong tam giác  $ABC$ .  $K$  thuộc  $PD$  sao cho  $HK \perp AP$ . Chứng minh rằng trung trực  $HK$  đi qua hình chiếu của  $Q$  trên  $BC$ .

## Lời giải



Gọi  $E, F$  là hình chiếu của  $P$  lên  $CA, AB$ . Gọi  $L$  là hình chiếu của  $Q$  lên  $BC$ ,  $R$  là hình chiếu của  $L$  lên  $EF$  và  $M, N$  là hình chiếu của  $B, C$  lên  $EF$ . Trước hết do tính đẳng giác của  $P, Q$  dễ thấy các tam giác đồng dạng  $\triangle PBF \sim \triangle QBL$  và  $\triangle PCE \sim \triangle QCL$  nên  $\frac{LB}{LF} = \frac{QL}{PF} = \frac{QL}{PE} = \frac{LC}{LE}$ . Cũng dễ thấy  $\triangle BMF \sim \triangle CNE$  nên  $\frac{BM}{CN} = \frac{BF}{CE} = \frac{LB}{LC} = \frac{RM}{RN}$ . Từ đó  $\triangle RMB \sim \triangle RNC$  suy ra  $\angle NRC = \angle MRB$  kéo theo  $\triangle RFB \sim \triangle REC$ . Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AEF$  cắt  $(O)$  tại  $G$  khác  $A$  thì  $\triangle GFB \sim \triangle GEC$  nên  $\frac{GE}{GF} = \frac{BF}{CE} = \frac{RF}{RE}$  hay  $GR$  là phân giác  $\angle EGF$  suy ra  $GR$  đi qua  $P$ . Mặt khác dễ thấy  $\angle AGP = 90^\circ$  nên  $GP$  đi qua  $D$  như vậy  $K$  thuộc  $RD$ . Gọi  $HC, HB$  cắt  $EF$  tại  $S, T$ . Dễ thấy  $\angle RCS = \angle RBT$  và  $\angle SRC = \angle TRB$  nên hai tam

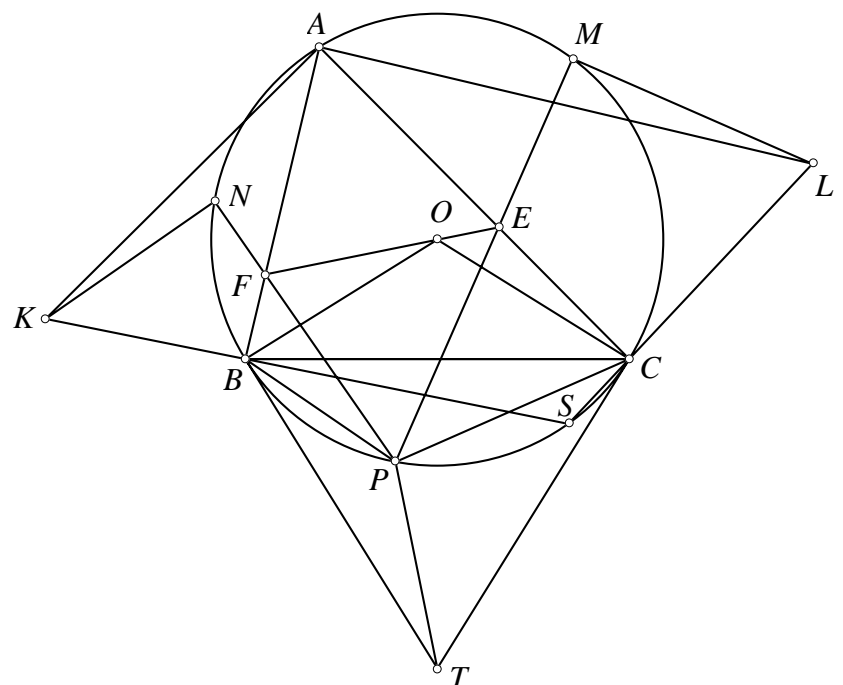
giác  $\triangle RSC \sim \triangle RTB$ , ta suy ra  $\frac{RS}{RT} = \frac{RC}{RB} = \frac{RE}{RF}$ . Mặt khác lại dễ có  $\triangle PFE \sim \triangle HST$  nên suy ra  $\triangle PRE \sim \triangle HRS$  hay  $\angle PRL = \angle HRL$  mà  $HK \perp RL$ , vậy  $L$  thuộc trung trực  $HK$ .

## Nhật xét

Bài toán này nếu nhìn theo hướng của đáp án thì có thể coi nó là sự kết hợp của hai bài toán hay đó là chứng minh  $RL$  là phân giác của  $\angle HRP$  và chứng minh  $GR$  là phân giác  $\angle EGF$ . Cách chứng minh  $RL$  là phân giác của  $\angle HRP$  như trong đáp án là một cách làm hoàn toàn mới và chỉ dùng kiến thức lớp 8. Tuy nhiên nếu muốn chứng minh trực tiếp mà không phải vẽ thêm hình chiếu của  $P$  lên  $CA, AB$  thì đó là công việc rất thú vị. Làm theo cách này có bạn **Phạm Nguyễn Thiện Huy** lớp 12A2, trường Lê Quý Đôn, Đà Nẵng và bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương, các lời giải đó đã có ở [đây](#).

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác  $ABC$  nhọn nội tiếp đường tròn  $(O)$  và  $P$  là một điểm nằm trên cung nhỏ  $BC$ . Tiếp tuyến tại  $B, C$  của  $(O)$  cắt nhau tại  $T$ . Đường thẳng qua  $O$  vuông góc  $PT$  cắt  $CA, AB$  tại  $E, F$ .  $PE, PF$  lần lượt cắt  $(O)$  tại  $M, N$  khác  $P$ . Lấy các điểm  $K, L$  sao cho  $KA \perp AC, KN \perp NP, LA \perp AB, LM \perp MP$ . Chứng minh rằng  $KB$  và  $LC$  cắt nhau trên  $(O)$ .



Mọi trao đổi xin gửi về email [analgeomatica@gmail.com](mailto:analgeomatica@gmail.com).