Các bài toán hình học hàng tuần

Trần Quang Hùng

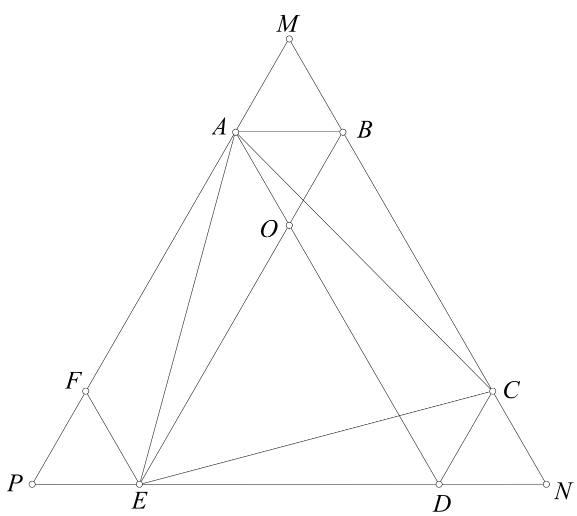
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên những lời giải hay cho ít nhất một bài toán được đề nghị ở trong các tuần trước và đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một số bài toán cho tuần sau. Các bài toán hình học được đề nghị có thể do tôi sáng tác, từ các bạn đọc sáng tác gửi tới hoặc được chọn lọc từ các cuộc thi Olympic trên toàn thế giới, tất cả đề bài và lời giải sẽ đều được ghi rõ nguồn gốc. Lời giải cho bài toán đề nghị, các phát triển cũng như mọi thảo luận và trao đổi xin gửi về địa chỉ email analgeomatica@gmail.com.

Các bài toán tuần trước

Bài toán: (Trần Quang Hùng)

Cho $ABCDEF$ là lục giác lồi thỏa mãn $AB = CD = EF$ và $BC = DE = FA$ đồng thời $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \angle E + \angle F$. Chứng minh rằng $\angle B = \angle D = \angle F$.

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải sau của tác giả bài toán được biên tập bởi **Trần Quang Hùng.**



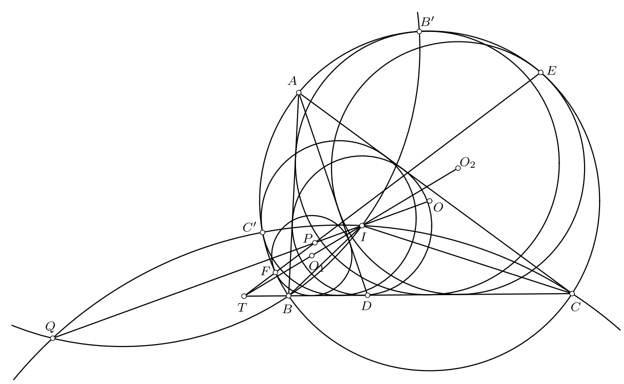
Lời giải. Gọi BC, DE, AF cắt quanh tam giác MNP. Vì tổng các góc của lục giác là $720°$ nên $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \angle E + \angle F = 240°$. Vì vậy, ta dễ thấy tam giác MNP đều. Dựng tam giác đều DEO với O nằm trong lục giác. Ta thấy $EOAF$ và $DOBC$ đều là hình bình hành, nên $AB = EF = OA = CD = OB$, vậy OAB là tam giác đều. Do đó, $\angle AFE + \angle BCD = \angle AOE + \angle BOD = 360° - 60° - 60° = 240°$. Từ $\angle EDC + \angle BCD = 240°$. Từ đó suy ra $\angle AFE = \angle EDC$. Tương tự, $\angle EDC = \angle CBA$. Từ đó $\angle B = \angle D = \angle F$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán là mở rộng bài P1 đề thi IMO năm 2005. Có thể giải theo hướng sử dụng vector và định lý con nhím.

Bài toán: (Ngô Quang Dương)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm nằm trên cạnh BC. Một đường tròn tiếp xúc các đoạn thẳng DA, DB và tiếp xúc trong (O) tại F. Một đường tròn tiếp xúc các đoạn thẳng DA, DC và tiếp xúc trong (O) tại E. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IEF luôn trực giao với (O) và đi qua một điểm cố định khác I.

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải sau của tác giả bài toán được biên tập bởi **Ngô Quang Dương.**



Lời giải. (O_1) là đường tròn tiếp xúc với DA, DB và tiếp xúc trong với (O) tại F; (O_2) là đường tròn tiếp xúc với DA, DC và tiếp xúc trong với (O) tại E.
(O_b) là đường tròn tiếp xúc với BC, BA và tiếp xúc trong với (O) tại B'; (O_c) là đường tròn tiếp xúc với CA, CB và tiếp xúc trong với (O) tại C'. Gọi T là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2). P là tâm vị tự ngoài của (O) và đường tròn nội tiếp.
Theo định lý Thébault, I, O_1, O_2 thẳng hàng nên T cũng là tâm vị tự ngoài của (O_1) và đường tròn nội tiếp, (O_2) và đường tròn nội tiếp.
Áp dụng định lý Monge - d'Alembert cho:

- (O), (I), (O_b), suy ra B, P, B' thẳng hàng.
- (O), (I), (O_c), suy ra C, P, C' thẳng hàng.
- (O_1), (I), (O), suy ra T, P, F thẳng hàng, kéo theo T, P, E, F thẳng hàng.

Lấy điểm Q trên IP sao cho $\overline{PI}\cdot\overline{PQ}=\overline{PB}\cdot\overline{PE}=\overline{PC}\cdot\overline{PF}$, ta được (IBB'), (ICC'), (IEF) đi qua Q.
Mà BI đi qua điểm chính giữa cung CA không chứa B, còn $B'I$ đi qua điểm chính giữa cung CA chứa B nên qua phép nghịch đảo cực I, ta được (IBB') trực giao với (O). Hoàn toàn tương tự, (ICC') trực giao với (O).
Từ những điều trên, ta suy ra (IEF) trực giao với (O) và luôn đi qua điểm Q cố định. □

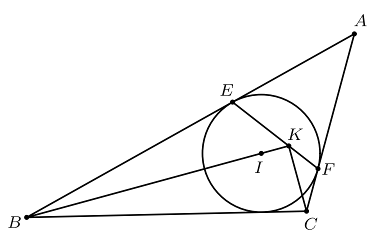
Nhận xét. Đây là bài toán thú vị từ cấu hình các đường tròn Thebault. Cấu hình này đã trở thành rất kinh điển cho các đường tròn tiếp xúc nhưng trên đó vẫn còn nhiều bài toán mới có thể khai thác. Như bài toán trên là một ví dụ cho thấy điều này.

Bài toán: (Nguyễn Minh Hà, trường xuân 2015)

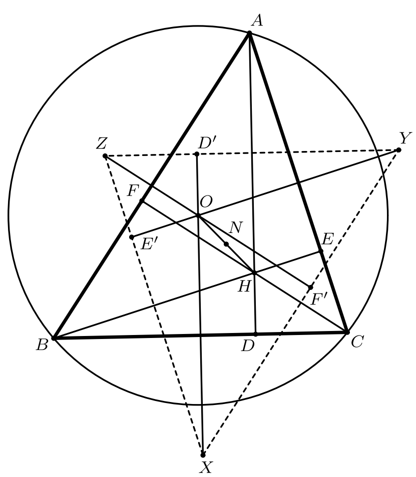
Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm đường tròn Euler N, điểm Lemoine L. AH, BH, CH theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại D, E, F. X, Y, Z theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HCA, HAB. Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy tại một điểm thuộc NL.

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của thầy **Nguyễn Minh Hà** được biên tập bởi bạn **Trần Quang Huy.**

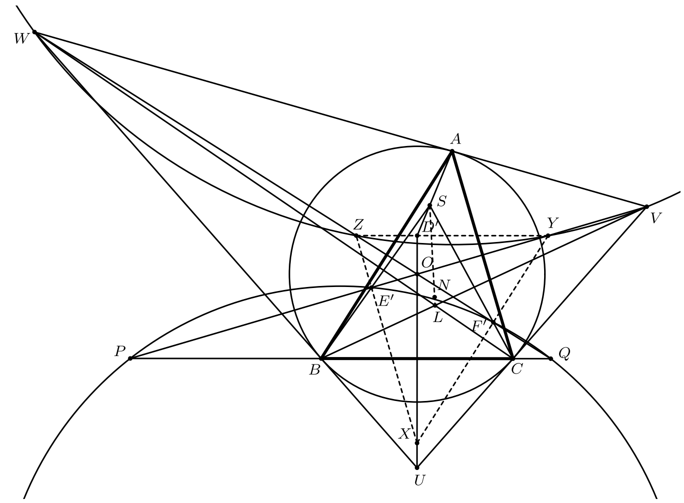
Bổ đề. Nếu đường tròn nội tiếp (I) của $\triangle ABC$ theo thứ tự tiếp xúc với AB, AC tại E, F và K là giao điểm của BI và EF thì $\angle BKC=90^\circ$.



Lời giải. Gọi N là tâm đường tròn Euler của $\triangle ABC$; D', E', F' theo thứ tự là giao điểm của OX, OY, OZ và YZ, ZX, XY.



Dễ thấy, O, X, Y, Z theo thứ tự là ảnh của H, A, B, C qua phép đối xứng $\mathcal{S}_N$.
Từ đó, chú ý rằng BC, CA, AB, YZ, ZX, XY theo thứ tự là trung trực của OX, OY, OZ, HA, HB, HC, suy ra:
$\mathcal{S}_N(D)=\mathcal{S}_N(AH\cap BC)=\mathcal{S}_N(AH)\cap\mathcal{S}_N(BC)=XO\cap YZ=D'$
$\mathcal{S}_N(E)=\mathcal{S}_N(BH\cap CA)=\mathcal{S}_N(BH)\cap\mathcal{S}_N(CA)=YO\cap ZX=E'$
$\mathcal{S}_N(F)=\mathcal{S}_N(CH\cap AB)=\mathcal{S}_N(CH)\cap\mathcal{S}_N(AB)=ZO\cap XY=F'$
Vậy AD', BE', CF' theo thứ tự là ảnh của DX, EY, FZ qua $\mathcal{S}_N$. (1)



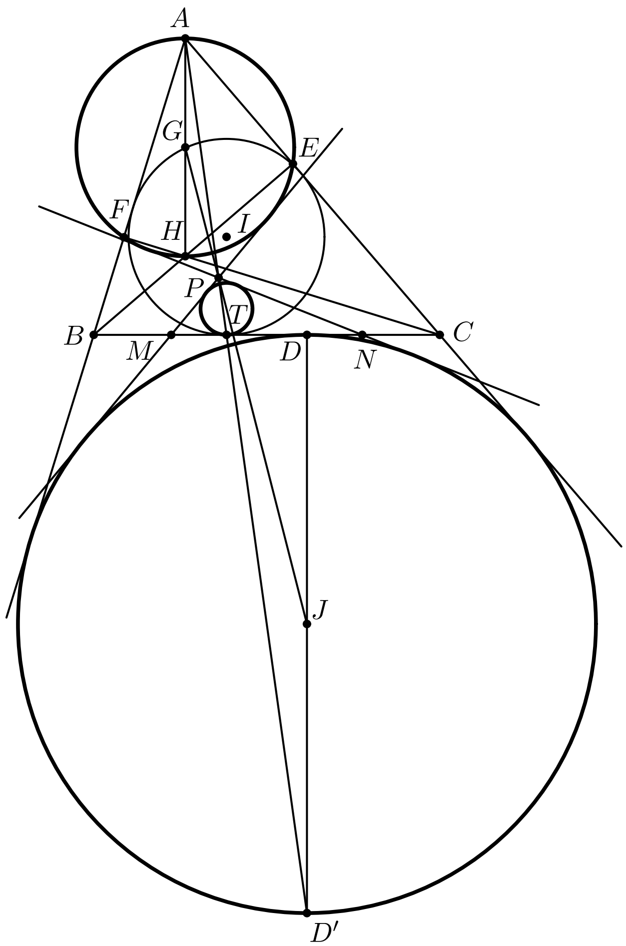
Dựng $\triangle UVW$ ngoại tiếp (O) sao cho VW, WU, UV theo thứ tự tiếp xúc với (O) tại A, B, C; $S=BE'\cap CF'$; $P=YO\cap BC$; $Q=ZO\cap CB$; $K=OU\cap BC$.
Dễ thấy $N=AX\cap BY\cap CZ$; $L=AU\cap BV\cap CW$.
Dễ thấy $\overline{OP}\cdot\overline{OE'}=\overline{OK}\cdot\overline{OX}=\overline{OQ}\cdot\overline{OF'}$.
Do đó, P, Q, E', F' cùng thuộc một đường tròn. (2)
Dễ thấy: $(WZ, WV)\equiv(AB, AO)\equiv(AH, AC)\equiv(BC, OV)\equiv(YZ, YV)\pmod{\pi}$.
Do đó, Y, Z, V, W cùng thuộc một đường tròn. (3)
Từ (2), (3), chú ý rằng $E'P\equiv YV$, $PQ\parallel YZ$, suy ra:
$(E'F', WV)\equiv(E'F', E'P)+(YV, WV)\equiv(QF', QP)+(YZ, WZ)\equiv 0\pmod{\pi}$
Điều này có nghĩa là $E'F'\parallel VW$.
Theo bổ đề trên, $WP\perp VO$, $VQ\perp WO$. Kết hợp với $ZE'\perp VO$, $YF'\perp WO$, suy ra: $WP\parallel ZE'$, $VQ\parallel YF'$. Vậy các điều kiện sau là tương đương:

$$
\begin{aligned}
& N, L, S \text{ thẳng hàng}\\
\Longleftrightarrow\ & B(CNLS)=C(BNLS)\\
\Longleftrightarrow\ & B(PYVE')=C(QZWF')\\
\Longleftrightarrow\ & B(VPE'Y)=C(WQF'Z)\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\overline{E'V}}{\overline{E'P}}:\frac{\overline{YV}}{\overline{YP}}=\frac{\overline{F'W}}{\overline{F'Q}}:\frac{\overline{ZW}}{\overline{ZQ}}\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\overline{E'V}}{\overline{F'W}}\cdot\frac{\overline{ZW}}{\overline{YV}}=\frac{\overline{E'P}}{\overline{F'Q}}\cdot\frac{\overline{ZQ}}{\overline{YP}}\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\overline{E'O}}{\overline{F'O}}\cdot\frac{\overline{ZW}}{\overline{YV}}=\frac{\overline{E'P}}{\overline{F'Q}}\cdot\frac{\overline{ZO}}{\overline{YO}}\quad (\text{vì } E'F'\parallel VW,\ PQ\parallel YZ)\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\overline{E'O}\cdot\overline{YO}}{\overline{F'O}\cdot\overline{ZO}}\cdot\frac{\overline{ZW}}{\overline{YV}}=\frac{\overline{E'P}}{\overline{F'Q}}\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\overline{ZW}}{\overline{E'P}}=\frac{\overline{YV}}{\overline{F'Q}}\quad (\text{vì } Y, Z, E', F' \text{ cùng thuộc một đường tròn})\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\overline{ZO}}{\overline{E'O}}=\frac{\overline{YO}}{\overline{F'O}}\quad (\text{vì } ZE'\parallel WP)\\
\Longleftrightarrow\ & \overline{ZO}\cdot\overline{F'O}=\overline{YO}\cdot\overline{E'O}\quad (\text{đúng vì } Y, Z, E', F' \text{ cùng thuộc một đường}
\end{aligned}
$$

Vậy, BE', CF' và NL đồng quy.
Tương tự, BE', AD' và NL đồng quy.
Tóm lại, AD', BE', CF' đồng quy tại một điểm thuộc NL. (4)
Từ (1), (4) suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán: (I.Frolov, Sharygin Olympiad 2017 Final Round)

Cho tam giác ABC có đường cao BE, CF và đường tròn bàng tiếp góc A là (J). Hai tiếp tuyến chung trong của các đường tròn (AEF) và (J) cắt BC tại M, N. Chứng minh rằng $BM = CN$.



Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của tác giả bài toán được biên tập bởi bạn **Trịnh Huy Vũ.**

Lời giải. P là tâm vị tự trong của hai đường tròn (AEF) và (J). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và G là trung điểm của AH. Ta có G đồng thời cũng là tâm của đường tròn (AEF). Đặt T là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC với BC, T' là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác MNP với MN, D là tiếp điểm của đường tròn (J) với BC. Dựng đường kính DD' của đường tròn (J).

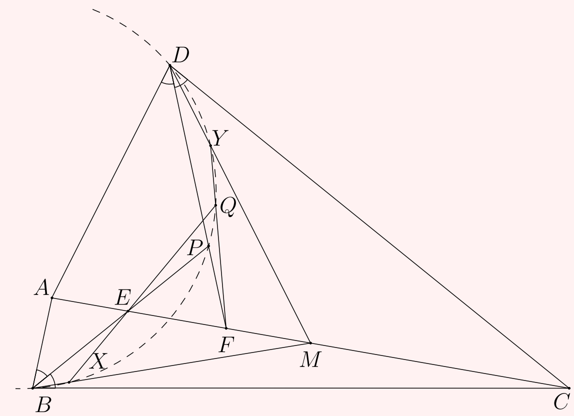
Do $AG \parallel DD'$ và P là tâm vi tự trong của (AEF) và (J) nên A, P, D' thẳng hàng. Hơn nữa ta cũng có A là tâm vị tự ngoài của đường tròn (I) và (J), vì vậy A, T, D' thẳng hàng. Như vậy, bốn điểm A, P, T, D' cùng nằm trên một đường thẳng. Mặt khác, (J) cũng là đường tròn bàng tiếp góc P của tam giác MNP, do đó đường thẳng PD' đi qua tiếp điểm T' của đường tròn nội tiếp tam giác MNP với BC. Từ đó suy ra $T \equiv T'$.

Như vậy, T, D tương ứng là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của các tam giác ABC, MNP với đường thẳng BC. Do đó, ba đoạn thẳng BC, DT, MN có trung điểm trùng nhau. Vì vậy, $BM = CN$. □

Các bài toán tuần này

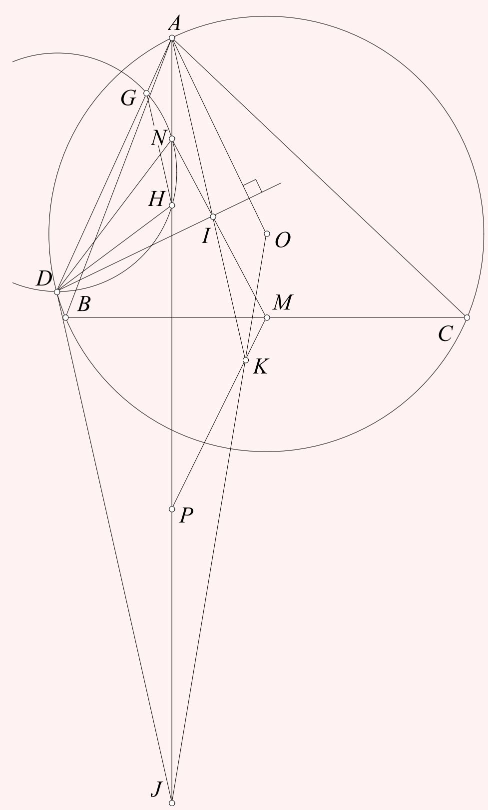
Bài toán: (IMO Shortlist 2016 G6)

Cho tứ giác $ABCD$ lồi với $\angle ABC = \angle ADC < 90°$. Phân giác các góc $\angle ABC$ và $\angle ADC$ lần lượt cắt AC tại E và F đồng thời cắt nhau tại P. M là trung điểm AC và ω là đường tròn ngoại tiếp tam giác BPD. BM và DM cắt lại ω tại X và Y. Gọi Q là giao điểm của XE và YF. Chứng minh rằng $PQ \perp AC$.



Bài toán: (Từ AoPS)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H và tâm nội tiếp I. Đường thẳng qua I vuông góc OA cắt cung nhỏ AB tại D. M là trung điểm BC. MI cắt AH tại N. Đường tròn (DNH) cắt AD lần nữa tại G. Đường thẳng qua D song song GH cắt AH tại J. AI cắt OJ tại K. MK cắt AJ tại P. Chứng minh rằng $PA = HB + HC$.

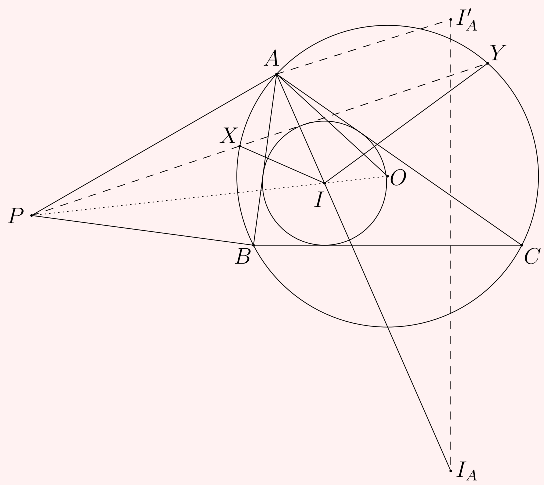


Bài toán: (IMO Shortlist 2016 G7)

Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC và I_A là tâm bàng tiếp góc A của tam giác. I'_A đối xứng với I_A qua BC và l_A là đối xứng của đường thẳng AI'_A qua AI. Đính nghĩa tương tự các điểm I_B, I'_B và đường thẳng l_B. l_A cắt l_B tại P.

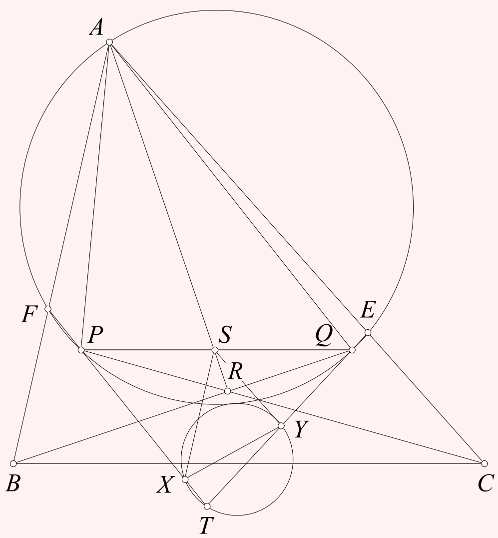
a) Chứng minh rằng P nằm trên OI với O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Gọi một tiếp tuyến qua P của đường tròn nội tiếp (I) cắt (O) tại X và Y. Chứng minh rằng $\angle XIY = 120°$.



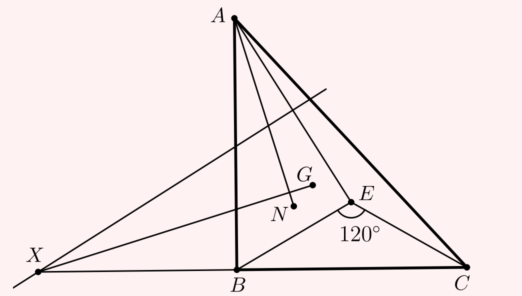
Bài toán: (Trần Quang Hùng, mở rộng Iran TST 2017)

Cho tam giác ABC và P, Q nằm trong tam giác sao cho $PQ \parallel BC$. BQ cắt CP tại R. AR cắt PQ tại S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ cắt CA, AB tại E, F khác A. FP cắt EQ tại T. Các đường thẳng qua S lần lượt song song với AB, AC theo thứ tự cắt FP, EQ tại X, Y. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác TXY tiếp xúc (O).



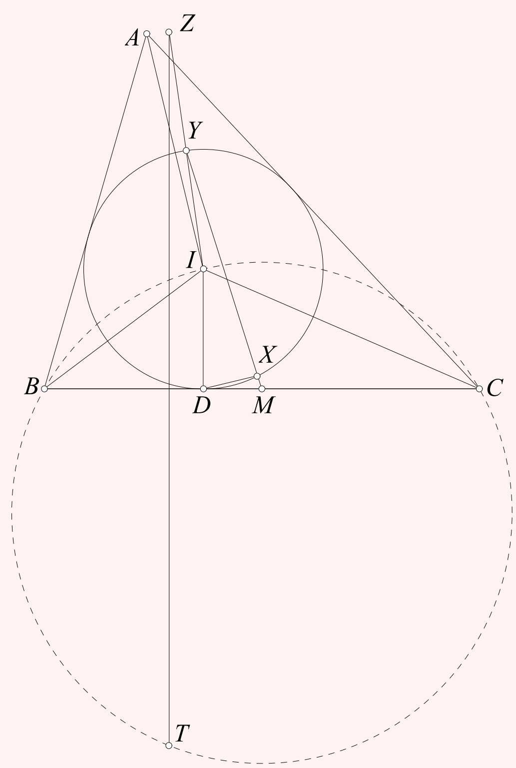
Bài toán: (Trịnh Huy Vũ)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân và $\angle A \neq 60°$. G, N lần lượt là trọng tâm và tâm đường tròn chín điểm của tam giác ABC. Dựng một tam giác EBC cân tại E thỏa mãn A, E cùng phía với BC và $\angle BEC = 120°$. Trung trực của AE cắt BC tại X. Chứng minh rằng $GX \perp AN$.



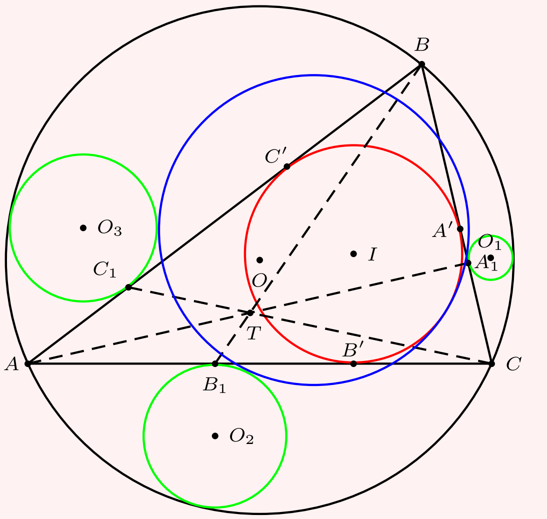
Bài toán: (Nguyễn Minh Hà, trường Xuân năm 2015)

Cho tam giác ABC, M là trung điểm của BC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC tại D. X là điểm đối xứng của D qua AI. MX lại cắt (I) tại Y. Z là điểm đối xứng của I qua Y. T là điểm đối xứng của Z qua BC. Chứng minh rằng bốn điểm I, B, C và T cùng thuộc một đường tròn.



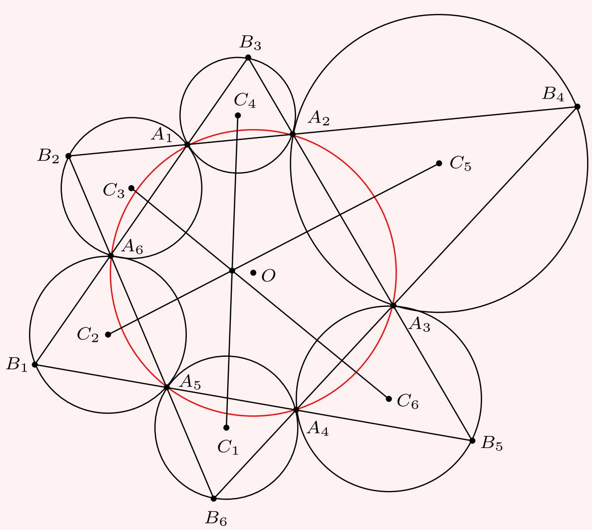
Bài toán: (Lev Emelyanov, từ Forum Geometricorum năm 2001)

Cho các điểm A_1, B_1 và C_1 lần lượt nằm trên các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC. Dựng các đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) ở ngoài tam giác và tiếp xúc với các cạnh của tam giác ABC theo thứ tự tại A_1, B_1 và C_1 và cũng tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu AA_1, BB_1 và CC_1 đồng quy thì đường tròn tiếp xúc ngoài với ba đường tròn (O_1), (O_2) và (O_3) cũng sẽ tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác ABC.



Bài toán: (Đào Thanh Oai, từ Advance Geometry Yahoo Group)

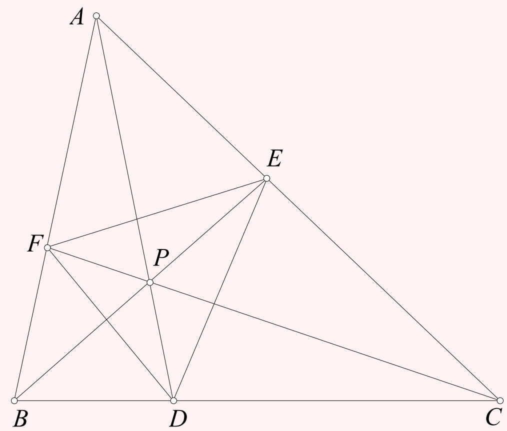
Cho A_i, $i = 1, 2..., 6$, là sáu điểm trên một đường tròn. Sử dụng chỉ số lấy theo module 6, ký hiệu giao điểm của các đường A_iA_{i+1} và $A_{i+2}A_{i+3}$ lần lượt là B_{i+3} và tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_iA_{i+1}B_{i+2}$ là C_{i+3}. Chứng minh rằng các đường thẳng C_1C_4, C_2C_5 và C_3C_6 đồng quy.



Bài toán: (Đỗ Thanh Sơn, bài giảng cho đội tuyển chuyên KHTN)

Cho tam giác ABC. Giả sử có điểm P nằm trong tam giác và nhìn ba cạnh của tam giác dưới ba góc bằng nhau. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{PD} + \frac{1}{PE} + \frac{1}{PF} = 2\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}\right).$$



Bài toán: (Nguyễn Đăng Phất, tập huấn đội tuyển Việt Nam thi IMO năm 2009)

Cho hàng điểm điều hòa $(AB, CD) = -1$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với các đường tròn đường kính AC, CB, BD và DA.