MATHSCOPE.ORG

Seeking the Unification of Math

Phan Đức Minh – Trương Tấn Sang

Nguyễn Thị Nguyên Khoa – Lê Tuấn Linh – Phạm Huy Hoàng – Nguyễn Hiền Trang

Tuyển tập các bài toán
HÌNH HỌC PHẲNG

Các bài toán ôn tập tuyển sinh lớp 10

Các bài toán ôn tập Olympiad

Tháng 10/2011

Mục lục

Lời nói đầu

Từ buổi sơ khai trong xã hội loài người, toán học luôn gắn liền với các lĩnh vực đời sống như kiến trúc, hội họa, khoa học,... Và trong hầu hết các lĩnh vực của toán học, hình học phẳng luôn giữ vị trí đứng đầu vì nó chính là nền tảng xây dựng nên hình học không gian, là cơ sở của các ngành kiến trúc, nghệ thuật và toán học ứng dụng. Cũng như lịch sử phát triển, chúng ta đã tiếp xúc với hình học phẳng từ rất sớm. Các khái niệm về điểm, đường thẳng, đoạn thẳng đã được đề cập đến ngay ở tiểu học. Hình học trải dài đến tận năm cuối cấp THPT và đi theo đến những năm đại học, điều này khẳng định vai trò quan trọng của hình học nói chung và hình học phẳng nói riêng.

Đồng thời với sự phát triển của toán học, hình học phẳng cũng phát triển không ngừng. Liên tiếp các kết quả mới được phát hiện và những kỹ thuật mới được khám phá. Chính vì thế, việc bắt kịp các kiến thức của hình học phẳng là cần thiết và quan trọng. Đây cũng chính là lý do quyển sách "Tuyển tập các bài toán hình học phẳng" ra đời. Quyển sách được tổng hợp từ tài nguyên trên diễn đàn MathScope.org và là tài sản của MathScope.org, tác giả các bài toán và lời giải, nhóm tổng hợp đều là các thành viên của diễn đàn MathScope.org với mong muốn cung cấp cho bạn học sinh, sinh viên và thầy cô giáo trên toàn quốc một tài liệu phong phú về hình học phẳng, hỗ trợ cho quá trình học tập và giảng dạy.

"Tuyển tập các bài toán hình học phẳng" không chỉ nhắm vào đối tượng dự thi Olympic mà còn là nguồn tài liệu cho các em học sinh cấp 2 chuẩn bị cho kì thi tuyển sinh lớp 10. Do đó, các bài toán được chia thành 2 phần : dành cho các em ôn thi lớp 10 và các bạn thi Olympic để phù hợp hơn với bạn đọc. Mỗi bài toán đều có những hướng dẫn, gợi ý trước khi nêu ra lời giải chi tiết để giúp bạn đọc suy luận và tiếp tục giải quyết bài toán với những gợi ý đó. Xin lưu ý rằng những lời nhận xét trong phần hướng dẫn và gợi ý là những ý kiến chủ quan của người biên soạn. Xin cảm ơn ban quản trị và các thành viên diễn đàn MathScope.org đã đóng góp, ủng hộ và giúp đỡ hoàn thành quyển sách này. Và xin cảm ơn thầy Châu Ngọc Hùng - giáo viên trường THPT Ninh Hải, Ninh Thuận đã hỗ trợ về LaTeX để hoàn thiện quyển sách.

Tuy nhiên, chắc chắn rằng cuốn sách vẫn còn những hạn chế nhất định, chúng tôi rất hoan nghênh những ý kiến đóng góp, chia sẻ của bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn. Bạn đọc có thể góp ý bằng cách gửi email riêng tới hòm thư alephvn@gmail.com hoặc gửi trực tiếp lên diễn đàn MathScope.org (http://forum.mathscope.org/index.php).

Thay mặt nhóm biên soạn, tôi xin chân thành cảm ơn sự quan tâm của bạn đọc!
Hà Nội, ngày 31 tháng 10 năm 2011

Đại diện nhóm biên soạn
Chủ biên
Phan Đức Minh

Các thành viên tham gia biên soạn

Nội dung

- Phan Đức Minh (novae) - ĐHKHTN, ĐHQGHN.
- Trương Tấn Sang (sang89) - Westminster High School, California, USA.
- Nguyễn Thị Nguyên Khoa (liverpool29) - THCS Nguyễn Tri Phương, Thành phố Huế.
- Lê Tuấn Linh (conami) - THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa.
- Phạm Huy Hoàng (hoangkhtn) - THPT chuyên, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.
- Nguyễn Hiền Trang (tranghieu95) - THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An

Hỗ trợ kĩ thuật LaTeX

- Châu Ngọc Hùng (hungchng) - Giáo viên trường THPT Ninh Hải, Ninh Thuận.

Trình bày bìa

- Võ Anh Khoa (anhkhoavo1210) - ĐHKHTN, ĐHQGTPHCM.
- Phan Đức Minh.

Phần một. Các kiến thức cơ bản

1. Định lý Menelaus

Cho tam giác ABC, các điểm D, E, F theo thứ tự nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = 1$$

Chú ý : Định lý Menelaus có thể mở rộng cho đa giác lồi n cạnh.

2. Định lý Ceva

Cho tam giác ABC, các điểm D, E, F theo thứ tự nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó AD, BE, CF đồng quy khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = -1$$

3. Đường thẳng Euler

Cho tam giác $ABC; O, G, H$ theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp, trọng tâm và trực tâm tam giác. Khi đó O, G, H thẳng hàng và $\overline{OH} = \overline{OG}$. Đường thẳng đi qua O, G, H được gọi là đường thẳng Euler của tam giác ABC.

4. Đường tròn Euler

Với mọi tam giác ABC bất kì, 9 điểm : trung điểm các cạnh, chân các đường cao, trung điểm các đoạn thẳng nối trực tâm tam giác với các đỉnh cùng nằm trên một đường tròn, gọi là đường tròn Euler của tam giác ABC. Đường tròn Euler có bán kính bằng một nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác và có tâm là trung điểm đoạn thẳng nối trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

5. Định lý con bướm

Cho đường tròn (O) và I là trung điểm của một dây cung AB. Qua I dựng hai dây cung tùy ý MN, PQ sao cho MP, NQ cắt AB tại E, F theo thứ tự. Khi đó I là trung điểm EF.

6. Định lý Ptolemy

Với mọi tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn, ta đều có đẳng thức

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

Tổng quát : (bất đẳng thức Ptolemy) Với mọi tứ giác $ABCD$ bất kì, ta có bất đẳng thức

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geqslant AC \cdot BD$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ABCD$ là tứ giác lồi nội tiếp.

7. Định lý Stewart

Với ba điểm A, B, C thẳng hàng và một điểm M bất kì, ta có

$$MA^2 \cdot \overline{BC} + MB^2 \cdot \overline{CA} + MC^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA} = 0$$

Hai hệ quả quen thuộc của định lý Stewart là công thức độ dài đường trung tuyến và độ dài đường phân giác trong : Cho tam giác ABC. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c; m_a, l_a$ lần lượt là độ dài đường trung tuyến và độ dài đường phân giác trong ứng với đỉnh A của tam giác. Khi đó ta có

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

$$l_a^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$

8. Đường thẳng Simson

Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó X, Y, Z thẳng hàng và đường thẳng đi qua chúng được gọi là đường thẳng Simson của điểm M đối với tam giác ABC.

Tổng quát : Cho tam giác ABC và một điểm M bất kì trong mặt phẳng tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó điều kiện cần và đủ để M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là X, Y, Z thẳng hàng.

9. Đường thẳng Steiner

Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là các điểm đối xứng với M qua BC, CA, AB. Khi đó X, Y, Z thẳng hàng và đường thẳng đi qua chúng được gọi là đường thẳng Steiner của điểm M đối với tam giác ABC. Đường thẳng Steiner luôn đi qua trực tâm tam giác.

10. Điểm Miquel của tam giác, tứ giác toàn phần

Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P tương ứng nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ANP, BPM, CMN đồng quy tại điểm Miquel X của M, N, P đối với tam giác ABC.

Khi M, N, P thẳng hàng, ta có X điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCMNP$. Khi đó X nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

11. Đường tròn Miquel của tứ giác toàn phần

Cho tứ giác toàn phần $ABCDEF$, điểm Miquel M của tứ giác và tâm ngoại tiếp các tam giác AEF, CDE, BDF, ABC cùng nằm trên đường tròn Miquel của tứ giác.

12. Định lý Pascal

Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F cùng nằm trên một conic bất kì. Gọi G, H, K theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AB, DE), (BC, EF), (CD, FA)$. Khi đó G, H, K thẳng hàng.

13. Định lý Pappus

Cho hai đường thẳng a, b. Trên a lấy các điểm A, B, C; trên b lấy các điểm D, E, F. Gọi G, H, K lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AE, DB), (AF, CD), (BF, CE)$. Khi đó G, H, K thẳng hàng.
Định lý Pappus là trường hợp suy biến của định lý Pascal khi conic suy biến thành cặp đường thẳng.

14. Bất đẳng thức AM - GM

Với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm thì

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

15. Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

Với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ và $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số thực thì

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2\right) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{b_n}$. Trong đó quy ước nếu mẫu bằng 0 thì tử bằng 0 và ngược lại.

16. Bất đẳng thức Nesbitt

Với a, b, c là các số thực dương thì

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Phần hai. Tuyển tập các bài toán

I. Đề bài

1. Các bài toán ôn tập tuyển sinh lớp 10

Bài 1.1. Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2AB$. Lấy D, E nằm trên AC, AB sao cho $\widehat{ABD} = \dfrac{1}{3}\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACE} = \dfrac{1}{3}\widehat{ACB}$. F là giao điểm của BD, CE. H, K là điểm đối xứng của F qua AC, BC.

(a) Chứng minh H, D, K thẳng hàng.

(b) Chứng minh tam giác DEF cân.

Bài 1.2. Đường tròn (O) nội tiếp tam giác $ABC(AB > AC)$ tiếp xúc với AB, AC tại P, Q. Gọi R, S lần lượt là trung điểm BC, AC. Giao điểm của PQ, RS là K. Chứng minh rằng B, O, K thẳng hàng.

Bài 1.3. Cho tam giác ABC nhọn nhận H làm trực tâm. Chứng minh rằng, ta có bất đẳng thức :

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA)$$

Bài 1.4. Gọi AB là một dây cung cố định của đường tròn (O). P là điểm di động trên dây cung AB nhưng không trùng với hai đầu mút. Vẽ đường tròn (C) đi qua A, P tiếp xúc trong với (O) và đường tròn (D) đi qua B, P tiếp xúc trong với (O). Lấy N là giao điểm thứ 2 của $(C), (D)$.

(a) Chứng minh rằng $\triangle ANB \backsim \triangle CPD$. Từ đó hãy chỉ ra N di động trên đường nào.

(b) Chứng minh rằng NP luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.5. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và các đường phân giác AA', BB', CC'. Tính $\widehat{B'A'C'}$.

Bài 1.6. Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Một đường thẳng đi qua A cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng CD ở N. Gọi K là giao điểm của EM và BN. Chứng minh rằng $CK \perp BN$.

Bài 1.7. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ $(AB < AC)$. Đường tròn $(O; r)$ đường kính AB và đường tròn $(P; R)$ đường kính AC cắt nhau ở D và A.

(a) Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ DC, AM cắt (O) tại N, cắt BC tại E. Chứng minh $\triangle ABE$ cân và các điểm O, N, P thẳng hàng.

(b) Dựng đường kính NQ của (O). Chứng minh Q, D, M thẳng hàng.

(c) Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh $PK \perp OK$.

Bài 1.8. Tam giác ABC nhọn có 3 đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại trực tâm H. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm của các tam giác $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$, hãy chứng minh rằng

$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle H_aH_bH_c$.

Bài 1.9. Cho dây cung AB cố định trên (O) và $\widehat{AOB} = 120^\circ$. M là một điểm di động trên cung lớn AB, đường tròn nội tiếp tam giác MAB tiếp xúc với MA, MB tại E, F. Chứng minh rằng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Bài 1.10. Cho đường tròn (O) và đường thẳng d nằm ngoài đường tròn. Gọi S là hình chiếu vuông góc của O lên d. Vẽ các cát tuyến SAB, SEF. AF, BE lần lượt cắt d tại C, D. Chứng minh S là trung điểm của CD.

Bài 1.11. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH và đường phân giác BE của tam giác ABC ($H \in BC, E \in AC$). Đường thẳng qua A vuông góc với BE cắt BC, BE lần lượt tại M, N.

(a) Chứng minh tứ giác $ANHB$ nội tiếp một đường tròn. Gọi đường tròn đó là (O).

(b) Đường thẳng CN cắt (O) tại T ($T \neq N$). Chứng minh rằng : $CH \cdot BC = CN \cdot CT$.

(c) Gọi I là giao điểm của ON và AH. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{4HI^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

Bài 1.12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có đường cao AD. Gọi E là hình chiếu của B trên AO, K là trung điểm của BC, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABDE$. Chứng minh rằng IK là đường trung trực của DE.

Bài 1.13. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

(a) Kẻ đường kính AA' của (O), I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, I, A' thẳng hàng.

(b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng $S_{AHG} = 2S_{AOG}$.

Bài 1.14. Cho M là một điểm nằm bên trong hình bình hành $ABCD$. Khi đó, hãy chứng minh bất đẳng thức

$$MA \cdot MC + MB \cdot MD \leqslant AC \cdot BC$$

Bài 1.15. Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính BC. A là điểm di động trên nửa đường tròn ($A \neq B, C$). Trên nửa đường tròn kia lấy I là điểm chính giữa cung BC. Dựng $AH \perp BC$ tại H. Gọi $(O_1; R_1); (O_2; R_2); (O_3; R_3)$ lần lượt là các đường tròn nội tiếp các tam giác ABH, ACH, ABC.

(a) Chứng minh $AI \perp O_1O_2$.

(b) HO_1 cắt AB tại E, HO_2 cắt AC tại F. Chứng minh $\triangle O_1O_2H \backsim \triangle ABC$.

(c) Tìm vị trí điểm A để $R_1 + R_2 + R_3$ lớn nhất.

Bài 1.16. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. C là một điểm trên nửa đường tròn ($C \neq A, B$). Dựng $CH \perp AB$ tại H. E, F lần lượt là hình chiếu của H trên CA, CB.

(a) Chứng minh EF song song với tiếp tuyến tại C của (O).

(b) Chứng minh tứ giác $ABFE$ nội tiếp.

(c) Tìm vị trí điểm C để chu vi và diện tích tam giác ABC lớn nhất.

(d) Chứng minh khi C di động, tâm I của đường tròn nội tiếp $\triangle OCH$ di chuyển trên đường cố định.

Bài 1.17. Cho hình vuông $ABCD$ cố định, cạnh a. E là điểm di chuyển trên cạnh CD. Đường thẳng AE và BC cắt nhau tại F. Đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

(a) Chứng minh $AF(CK - CF) = BD \cdot FK$.

(b) Chứng minh rằng trung điểm I của KF di động trên một đường thẳng cố định khi E di động trên CD.

(c) Chỉ ra vị trí của E để độ dài EK ngắn nhất.

Bài 1.18. Cho tam giác ABC đều. Gọi D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi $(I_1; R_1); (I_2; R_2); (I_3; R_3)$ lần lượt là các đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, ACD, ABC và $(I_3; R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tia AD cắt $(I_3; R)$ tại E.

(a) Chứng minh $\dfrac{1}{ED} = \dfrac{1}{EB} + \dfrac{1}{EC}$.

(b) Tìm vị trí của E để $\dfrac{1}{ED} + \dfrac{1}{EB} + \dfrac{1}{EC}$ nhỏ nhất. Chứng minh khi ấy S_{ABEC} lớn nhất.

(c) Tìm vị trí điểm D để $R_1 + R_2$ lớn nhất.

Bài 1.19. Cho $(O; R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ M dựng hai tiếp tuyến MA, MB đối với $(O; R)$. Gọi E là trung điểm của BM; H là giao điểm của OM với AB. Đoạn thẳng AE cắt $(O; R)$ tại C.

(a) Chứng minh tứ giác $HCEB$ nội tiếp.

(b) Chứng minh $\triangle EMC \backsim \triangle EAM$.

(c) MC cắt (O) tại D. Tính DB theo R biết $OM = 3R$.

(d) OB cắt (O) tại T và cắt AD tại S. MT giao SA tại N. Chứng minh N là trung điểm AS.

Bài 1.20. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. E là điểm di động trên cạnh AD ($E \neq A$). Tia phân giác của $\widehat{EBA}, \widehat{EBC}$ cắt DA, DC tại M, N.

(a) Chứng minh $BE \perp MN$.

(b) Tìm vị trí điểm E để S_{DMN} lớn nhất.

Bài 1.21. Cho $\triangle ABC$. Một đường tròn (O) qua A và B cắt AC và BC ở D và E. M là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và DEC. Chứng minh rằng $\widehat{OMC} = 90°$.

Bài 1.22. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 60°$. Một đường thẳng qua D không cắt hình thoi nhưng cắt các đường thẳng AB, BC lần lượt tại E, F. Gọi M là giao điểm của AF và CE. Chứng minh rằng AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF.

Bài 1.23. Cho đường tròn (O) và dây AD. Gọi I là điểm đối xứng với A qua D. Kẻ tiếp tuyến IB với đường tròn (O). Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A cắt IB ở K. Gọi C là giao điểm thứ hai của KD với đường tròn (O). Chứng minh rằng BC song song với AI.

Bài 1.24. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O và ngoại tiếp đường tròn tâm I . AI, BI, CI cắt (O) lần lượt tại D, E, F. DE cắt CF tại M, DF cắt BE tại N.

(a) Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.

(b) Gọi Q là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DMN$, P là giao điểm của AD và EF . Chứng minh các điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 1.25. Cho $\triangle ABC$ cố định, M là điểm di động trên cạnh BC. Dựng đường kính BE của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$ và đường kính CF của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACM$. Gọi N là trung điểm EF. Chứng minh rằng khi M di động trên BC thì N di động trên một đường thẳng cố định.

Bài 1.26. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135°, AB = a, AC = b$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM} = 45°$. Tính độ dài AM theo a, b.

Bài 1.27. Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm M nằm trong hình vuông sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 15°$. Hỏi tam giác MCD là tam giác gì? Tại sao?

Bài 1.28. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp $(O; R)$ sao cho tia BA và tia CD cắt nhau tại I, các tia DA và CB cắt nhau ở K (I, K nằm ngoài (O)). Phân giác của góc $\widehat{BIC}$ cắt AD, BC lần lượt tại Q, N. Phân giác của góc $\widehat{AKB}$ cắt AB, AC lần lượt tại M, P.

(a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

(b) Chứng minh $IK^2 = ID \cdot IC + KB \cdot KC$.

(b) Gọi F là trung điểm của AB, J là hình chiếu của F trên OB, L là trung điểm của FJ. Chứng minh $AJ \perp OL$.

Bài 1.29. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại M. Đường vuông góc với OM tại M cắt AB, BC, CD, DA lần lượt tại M_1, M_2, M_3, M_4. Chứng minh $M_1M_4 = M_2M_3$.

Bài 1.30. Cho tứ giác lồi $ABCD$ với E, F là trung điểm của BD và AC. Chứng minh rằng

$$AB^2 + CD^2 + BC^2 + DA^2 = 4EF^2 + AC^2 + BD^2$$

Bài 1.31. Trên $(O; R)$ lấy hai điểm B, C cố định sao cho $BC = \sqrt{3}R$. A là một điểm trên cung lớn BC ($A \neq B; C$).

(a) Chứng minh khi A di động, phân giác $\widehat{BAC}$ luôn đi qua một điểm cố định I.

(b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của I trên các đường thẳng AB, AC. Chứng minh $BE = CF$.

(c) Chứng minh khi A di động thì EF luôn đi qua một điểm cố định.

(d) Tìm vị trí diểm A để S_{AEIF} lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo R.

Bài 1.32. Cho $(O; R)$ và điểm A cố định với $OA > R$. Dựng cát tuyến AMN của (O) không qua tâm ($AM < AN$). Chứng minh rằng

(a) Đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMN$ luôn đi qua một điểm cố định H (H không trùng O) khi cát tuyến di động.

(b) Tiếp tuyến tại M và N của (O) cắt nhau tại T. Chứng minh T di động trên một đường thẳng cố định khi cát tuyến AMN di động.

Bài 1.33. Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 60°, AC = b, AB = c$ $(b > c)$. Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M. I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống $AB; AC$; H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống $AB; AC$.

(a) Chứng minh $IJ \perp HK$.

(b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b và c.

(c) Tính $AH + AK$ theo b và c.

Bài 1.34. Cho tam giác ABC. Một điểm D di động trên cạnh BC. Gọi P, Q tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng khi D di động thì đường tròn đường kính PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.35. Cho tam giác ABC có phân giác AD và trung tuyến AM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB tại E và AC tại F. Gọi L là trung điểm EF. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng ML và AD.

Bài 1.36. Cho BC là dây cung của $(O; R)$. Đặt $BC = aR$. Điểm A trên cung BC lớn, kẻ các đường kính CI, BK. Đặt $S = \dfrac{AB + AC}{AI + AK}$. Chứng minh rằng $S = \dfrac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{a}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của S.

Bài 1.37. Cho tam giác ABC nội tiếp (O, R) có $\widehat{BAC} \geqslant 90°$. Các đường tròn $(A; R_1)$, $(B; R_2)$, $(C; R_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau.
Chứng minh rằng

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot R_1^2 + AC \cdot R_2^2 + AB \cdot R_3^2 + 2R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{4R}$$

Bài 1.38. Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh là 1. Trên cạnh BC lấy M, CD lấy N sao cho chu vi $\triangle CMN$ bằng 2 và $2\widehat{NAM} = \widehat{DAB}$. Tính các góc của hình thoi.

Bài 1.39. Về phía ngoài của tam giác ABC dựng các hình vuông $BCMN, ACPQ$ có tâm O và O'.

(a) Chứng minh rằng khi cố định hai điểm A, B và cho C thay đổi thì đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh $\triangle IOO'$ là tam giác vuông cân.

Bài 1.40. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ ở ngoài nhau biết $OO' = d > R + R'$. Một tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tiếp xúc với (O) tại E và tiếp xúc với (O') tại F. Đường thẳng OO' cắt (O) tại A, B và cắt (O') tại C, D (B, C nằm giữa A, D). AE cắt CF tại M, BE cắt DF tại N. Gọi giao điểm của MN với AD là I. Tính độ dài OI.

Bài 1.41. Cho tam giác ABC có diện tích S_0. Trên các cạnh BC, CA, AB lấy các điểm M, N, P sao cho $\dfrac{MB}{MC} = k_1, \dfrac{NC}{NA} = k_2, \dfrac{PA}{PB} = k_3$ $(k_1, k_2, k_3 < 1)$.
Hãy tính diện tích tam giác tạo bởi các đoạn thẳng AM, BN, CP.

2. Các bài toán ôn tập Olympiad

Bài 2.1. *(APMO 2000)* Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và phân giác AN. Đường thẳng vuông góc với AN tại N cắt AB, AM lần lượt tại P, Q. Đường thẳng vuông góc với AB tại P cắt đường thẳng AN tại O. Chứng minh rằng OQ vuông góc với BC.

Bài 2.2. *(Dự tuyển IMO 1994)* Tam giác ABC không cân tại A có D, E, F là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp lên BC, CA, AB. X là điểm bên trong tam giác ABC sao cho đường tròn nội tiếp tam giác XBC tiếp xúc với BC tại D, và tiếp xúc với XB, XC tại Y, Z. Chứng minh rằng E, F, Y, Z đồng viên.

Bài 2.3. Dựng hình vuông $DEFG$ nội tiếp tam giác ABC sao cho $D, E \in BC; F \in AC; G \in AB$. Gọi d_A là trục đẳng phương của hai đường tròn $(ABD), (ACE)$. Ta định nghĩa các đường thẳng d_B, d_C tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng d_A, d_B, d_C đồng quy.

Bài 2.4. Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Một đường thẳng d đi qua G cắt BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng, ta có đẳng thức :

$$\frac{1}{\overline{GM}} + \frac{1}{\overline{GN}} + \frac{1}{\overline{GP}} = 0$$

Bài 2.5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có các cạnh đối không song song và các đường chéo cắt nhau tại E. F là giao điểm của AD với BC. M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN.

Bài 2.6. Cho tam giác ABC với đường tròn nội tiếp (I) và E, F là các tiếp điểm của (I) với CA, AB. Lấy K bất kì thuộc đoạn EF, gọi H, L là giao điểm của BK, CK với AC, AB tương ứng. Chứng minh rằng HL tiếp xúc với (I).

Bài 2.7. Gọi BH, BD lần lượt là đường cao và phân giác của tam giác ABC. N, L, M lần lượt là trung điểm của BH, BD, AC. Lấy K là giao điểm của MN và BD. Chứng minh rằng, AL, AK là hai đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$.

Bài 2.8. Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên các tia AB, AC lấy E, F tương ứng sao cho $BE = BC = CF$. Chứng minh rằng với mọi điểm M nằm trên đường tròn đường kính BC, ta đều có

$$MA + MB + MC \leqslant EF$$

Bài 2.9. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$IA + IB + IC \leqslant \sqrt{ab + bc + ca}$$

Bài 2.10. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O). Gọi E, F là trung điểm của AB, AC. Lấy D là một điểm bất kì trên EF, vẽ các tiếp DP, DQ tới đường tròn. PQ cắt BC, EF lần lượt tại N, M. Chứng minh rằng, $ON \parallel AM$.

Bài 2.11. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Trên cạnh đáy BC, lấy điểm M (M khác B, C). Vẽ đường tròn tâm D qua M tiếp xúc với AB tại B và đường tròn tâm E qua M tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn này.

(a) Chứng minh rằng tổng bán kính của hai đường tròn $(D), (E)$ là không đổi khi M di động trên BC.

(b) Tìm tập hợp trung điểm I của DE.

Bài 2.12. Cho M là điểm di động trên đường tròn (O, r) có hai đường kính cố định AB, CD vuông góc với nhau. Gọi I là hình chiếu của M lên CD và P là giao điểm của OM, AI. Tìm tập hợp các điểm P.

Bài 2.13. Cho tam giác đều ABCvà một điểm M bất kì trong mặt phẳng tam giác. Gọi x, y, z là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C và p, q, r là khoảng cách từ M đến các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng :

$$p^2 + q^2 + r^2 \geqslant \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Bài 2.14. Cho đa giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ và điểm M bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

$$MA_1 + MA_3 + MA_5 + M_7 \geqslant MA_2 + MA_4 + MA_6$$

Bài 2.15. Tam giác ABC không cân nội tiếp (O) có A_1, B_1, C_1 là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi A_2 là một điểm trên tia OA_1 sao cho 2 tam giác OAA_1 và OA_2A đồng dạng. Các điểm B_2, C_2 định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Bài 2.16. Cho tam giác ABC với M là trung điểm BC. Vẽ đường tròn (O) tùy ý qua A và cắt các đoạn AB, AC, AM lần lượt tại B_1, C_1, M_1. Chứng minh rằng,

$$AB_1 \cdot AB + AC_1 \cdot AC = 2AM_1 \cdot AM$$

Bài 2.17. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R.Gọi q là chu vi tam giác có các đỉnh là tâm các đường tròn bàng tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$q \leqslant 6\sqrt{3}R$$

Bài 2.18. Cho tam giác ABC có : $BC = a; CA = b; AB = c$; và r và R theo thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{r}{R} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{16R^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

Bài 2.19. Cho tam giác ABC. Các đường phân giác BE, CF cắt nhau tại I. AI cắt EF tại M. Đường thẳng qua M song song với BC theo thứ tự cắt AB, AC tại N, P. Chứng minh rằng

$$MB + MC < 3NP$$

Bài 2.20. Cho tam giác ABC nhọn với đường cao CF và $CB > CA$. Gọi O, H lần lượt là tâm ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng qua F vuông góc với OF cắt AC tại P. Chứng minh rằng $\widehat{FHP} = \widehat{BAC}$.

Bài 2.21. Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm P cố định bên trong đường tròn. AB, CD là 2 dây cung di động của (O) nhưng luôn đi qua P và luôn vuông góc với nhau.

(a) Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không đổi.

(b) Gọi I là trung điểm BC. Hỏi I di động trên đường nào?

Bài 2.22. Cho tam giác ABC và điểm M bất kì nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng :

$$MA + MB + MC + \min\{MA, MB, MC\} < AB + BC + CA$$

Bài 2.23. Tam giác cân ABC nội tiếp (O) có $AB = AC$ và AQ là đường kính của (O). Lấy M, N, P lần lượt trên cạnh AB, BC, CA sao cho $AMNP$ là hình bình hành. Chứng minh rằng $NQ \perp MP$.

Bài 2.24. Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm AB, CD và O là giao điểm của 2 đường chéo. Gọi H, K là trực tâm của tam giác OAB, OCD. Hãy chứng minh $MN \perp HK$.

Bài 2.25. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) có hai đường chéo cắt nhau tại I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. P, Q là chân đường cao kẻ từ I của tam giác IAD, IBC. Chứng minh rằng, $PQ \perp MN$.

Bài 2.26. Cho tam giác ABC và tam giác DBC có tâm nội tiếp lần lượt là H, K. Chứng minh rằng $AD \geqslant HK$.

Bài 2.27. Cho K là điểm nằm trong tam giác ABC. Một đường thẳng qua K cắt hai cạnh AB, AC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng :

$$S_{ABC} \geqslant 8\sqrt{S_{BMK} \cdot S_{CNK}}$$

Bài 2.28. Cho tam giác ABC nhọn và M là một điểm thuộc miền trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của MA, MB, MC với các cạnh tam giác ABC. Lấy A_2, B_2, C_2 là các điểm đối xứng với M qua trung điểm của B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Bài 2.29. Cho tam giác ABC nội tiếp $(O; R)$ có M thuộc cung BC không chứa A. Tìm vị trí của M để $P = 2010 \cdot MB + 2011 \cdot MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 2.30. Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy tại O. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE, DF theo thứ tự tại H và K. Chứng minh O là trung điểm HK.

Bài 2.31. Cho tam giác ABC. M là một điểm bất kì trên mặt phẳng và không nằm trên tam giác ABC. Các đường thẳng AM, BM, CM lần lượt cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi H, K lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BM với FD; CM với ED. Chứng minh các đường thẳng AD, BK, CH đồng quy.

Bài 2.32. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh :

$$\min\{AB, BC, CD, DA\} \leqslant \frac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2} \leqslant \max\{AB, BC, CD, DA\}$$

Bài 2.33. Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B cố định đối xứng với nhau qua O. Gọi M là điểm chạy trên (O). Đường thẳng MA, MB cắt (O) tại P, Q tương ứng. Chứng minh rằng giá trị biểu thức $\dfrac{MA}{AP} + \dfrac{MB}{BQ}$ không đổi khi M di chuyển trên (O).

Bài 2.34. Cho (O) và dây AB. Điểm M di chuyển trên cung lớn AB. Các đường cao AE, BF của $\triangle ABM$ cắt nhau tại H. Kẻ $(H; HM)$ cắt MA, MB ở C và D. Chứng minh đường thẳng kẻ từ H vuông góc với CD luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên cung lớn AB.

Bài 2.35. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). G là trọng tâm tam giác. AG, BG, CG lần lượt cắt (O) tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng :

$$GA_1 + GB_1 + GC_1 \geqslant GA + GB + GC$$

Bài 2.36. Cho $\triangle ABC$ và D, E, F lần lượt là hình chiếu của A, B, C xuống ba cạnh tương ứng. Đường thẳng qua D song song với EF cắt AB, AC tại P, Q. Biết $EF \cap BC = R$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp $\triangle PQR$ đi qua trung điểm BC.

Bài 2.37. Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Cho $AB = a, CD = b, \widehat{AIB} = \alpha$, trong đó I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Tính bán kính đường tròn (O) theo a, b và α.

Bài 2.38. Cho $\triangle ABC$ có trực tâm H. Đường tròn qua B, C cắt AB, AC tại D, E. Gọi F là trực tâm $\triangle ADE$ và I là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng I, H, F thẳng hàng.

Bài 2.39. Cho $\triangle ABC$ không cân, ngoại tiếp đường tròn (I). Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. DE cắt AB ở P. Một đường thẳng qua C cắt AB, FE lần lượt ở N, M. PM cắt AC ở Q. Chứng minh rằng IN vuông góc với FQ.

Bài 2.40. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng :

$$AC + BD + 2IJ < AB + BC + CD + DA$$

Bài 2.41. Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). E thuộc cung BC không chứa A và không trùng B, C. AE cắt tiếp tuyến tại B, C của (O) tại M, N. Gọi giao điểm của CM và BN là F. Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định khi E di chuyển trên cung BC không chứa A.

Bài 2.42. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp thỏa mãn $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Đường tròn (C) qua A, B và tiếp xúc với BC, đường tròn (C') qua A, D và tiếp xúc CD. Chứng minh rằng giao điểm khác A của (C) và (C') là trung điểm BD.

Bài 2.43. Cho tam giác nhọn ABC, gọi H là trực tâm của tam giác. Tìm điều kiện cần và đủ đối với các góc của tam giác để 9 điểm : chân các đường cao của tam giác, trung điểm các cạnh của tam giác, trung điểm các đoạn thẳng HA, HB, HC là đỉnh của một đa giác đều.

Bài 2.44. Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng ID, EF và trung tuyến AM $(M \in BC)$ đồng quy.

Bài 2.45. Cho hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ bằng nhau. Phép quay tâm M biến A thành A', biến B thành B'. Phép quay tâm N biến A thành B', biến B thành A'. Gọi S là trung điểm của AB. Chứng minh rằng SM vuông góc với SN.

Bài 2.46. Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác. AM, BM, CM cắt BC, CA, AB theo thứ tự ở D, E, F. Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB . Kí hiệu $P(HIK)$ là chu vi tam giác HIK. Hãy chứng minh :

$$P(DEF) \geqslant P(HIK)$$

Bài 2.47. Tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), đường cao AH cắt (O) tại A'. OA' cắt BC tại A''. Xác định tương tự cho B'', C''. Chứng minh AA'', BB'', CC'' đồng quy.

Bài 2.48. Cho đường tròn (O) và một đường thẳng d cố định. Gọi H là hình chiếu của của O trên d. Lấy M cố định thuộc đường tròn. A, B thay đổi trên d sao cho H là trung điểm AB. Giả sử AM, BM cắt (O) tại P, Q. Chứng minh PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 2.49. Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AB, AC tại D, E, F. Qua E vẽ đường song song với BC cắt AD, DF ở M, N. Chứng minh rằng M là trung điểm của EN.

Bài 2.50. Cho tam giác ABC có $AB = c, BC = a, AC = b$ và I là tâm đường trròn nội tiếp. Hai điểm B', C' lần lượt nằm trên hai cạnh AB, AC sao cho B', C', I thẳng hàng. Chứng minh rằng

$$S_{ABC} \leqslant \frac{a+b+c}{2\sqrt{bc}} \cdot \sqrt{S_{AB'C} \cdot S_{ABC'}}$$

Bài 2.51. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. E, F, G, H lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh rằng tứ giác $EFGH$ nội tiếp.

Bài 2.52. Cho hình vuông $ABCD$. I tùy ý thuộc AB, DI cắt BC tại E, CI cắt AE tại F. Chứng minh rằng $BF \perp DE$.

Bài 2.53. Cho tam giác ABC không vuông nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. d là đường thẳng bất kì qua H. Gọi d_a,d_b, d_c lần lượt là các đường thẳng đối xứng với d qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng quy tại một điểm trên (O).

Bài 2.54. Cho hình thang $ABCD$ $(AB \parallel CD)$. AC cắt CD tại O. Biết khoảng cách từ O đến AD và BC bằng nhau, hãy chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang cân.

Bài 2.55. Cho tam giác ABC cân tại A. Đường tròn ω tiếp xúc AB, AC, cắt BC tại K. AK cắt ω tại điểm thứ hai là M. P, Q là điểm đối xứng của K qua B, C. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với ω.

Bài 2.56. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 20°$, phân giác trong BI. Điểm H nằm trên cạnh AB sao cho $\widehat{ACH} = 30°$. Hãy tính số đo $\widehat{CHI}$.

Bài 2.57. Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I). Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng với I qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Bài 2.58. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp (O). Điểm M là trung điểm của AC. BM cắt lại (O) tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh rằng $2AQ \leqslant BQ$.

Bài 2.59. Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn $AB + BC = 3CA$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc AB, BC tại D, E. Gọi K, L tương ứng đối xứng với D, E qua I. Chứng minh rằng tứ giác $ACKL$ nội tiếp.

Bài 2.60. Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AID, BIE, CIH thẳng hàng.

Bài 2.61. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). M, N lần lượt là điểm chính giữa cung AB không chứa C và cung AC không chứa B. D là trung điểm MN. G là một điểm bất kì trên cung BC không chứa A. Gọi I, J, K lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác ABC, ABG, ACG. Lấy P là giao điểm thứ hai của (GJK) với (ABC). Chứng minh rằng $P \in DI$.

Bài 2.62. Cho n giác đều $A_1A_2 \ldots A_n$ $(n \geq 4)$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}$$

Hãy tìm n.

Bài 2.63. Gọi AA_1, BB_1, CC_1 tương ứng là các đường phân giác trong của tam giác ABC. AA_1, BB_1, CC_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác đó tại A_2, B_2, C_2 theo thứ tự. Chứng minh rằng :

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} \leqslant \frac{9}{4}$$

Bài 2.64. Cho tam giác ABC, đường thẳng d cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF, BDF, CDE. Chứng minh rằng trực tâm tam giác $O_1O_2O_3$ nằm trên d.

Bài 2.65. Cho tứ giác $ABCD$, AC cắt BD tại O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD, DA. Biết rằng $OM = OP, ON = OQ$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình bình hành.

Bài 2.66. Cho tam giác ABC, phân giác trong $AD (D \in BC)$. Gọi M, N là các điểm thuộc tia AB, AC sao cho $\widehat{MDA} = \widehat{ABC}, \widehat{NDA} = \widehat{ACB}$. Các đường thẳng AD, MN cắt nhau tại P. Chứng minh rằng :

$$AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$$

Bài 2.67. Trên mặt phẳng cho 2000 đường thẳng phân biệt, đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2 đường thẳng mà góc của chúng không lớn hơn $\frac{180}{2000}$ (độ).

Bài 2.68. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) có $AB = AD$. M, N nằm trên các cạnh BC, CD sao cho $MN = BM + DN$. AM, AN cắt (O) tại P, Q.
Chứng minh rằng trực tâm tam giác APQ nằm trên MN.

Bài 2.69. Cho tứ giác $ABCD$. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O. Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 lần

lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác AEB, BEC, CED, DEA.
Chứng minh rằng

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$$

là điều kiện cần và đủ để tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn.

Bài 2.70. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC và H là trực tâm tam giác. Đường thẳng vuông góc với HM tại H cắt AB, AC tại D, E. Chứng minh rằng H là trung điểm của DE.

Bài 2.71. Cho đoạn thẳng $AB = a$ cố định. Điểm M di động trên AB (M khác A, B). Trong cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB dựng hình vuông $AMCD$ và $MBEF$. Hai đường thẳng AF, BC cắt nhau ở N.
Tìm vị trí điểm M sao cho đoạn MN có độ dài lớn nhất.

Bài 2.72. Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp (O). Các đường cao AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy tại H. Các điểm A_1, A_2 thuộc (O) sao cho đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1B_0C_0, A_2B_0C_0$ tiếp xúc trong với (O) tại A_1, A_2. B_1, B_2, C_1, C_2 xác định tương tự.
Chứng minh rằng B_1B_2, C_1C_2, A_1A_2 đồng quy tại một điểm trên OH.

Bài 2.73. Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Các đường thẳng IA_1, IB_1, IC_1 tương ứng cắt các đoạn thẳng B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Bài 2.74. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm E. Giao điểm của BE và phân giác góc $\widehat{BAC}$ là D. Một đường thẳng qua D song song AB cắt BC ở F. AF cắt BE tại M. Chứng minh rằng M là trung điểm BE.

Bài 2.75. Cho tứ giác lồi $ABCD$ sao cho AB ko song song với CD và điểm X bên trong tứ giác thỏa $\widehat{ADX} = \widehat{BCX} < 90^\circ$ và $\widehat{DAX} = \widehat{CBX} < 90^\circ$. Gọi Y là giao điểm đường trung trực của AB và CD. Chứng minh rằng $\widehat{AYB} = 2\widehat{ADX}$.

Bài 2.76. Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong (O). AD cắt BC tại E, AC cắt BD tại $F.M, N$ là trung điểm AB, CD. Chứng minh rằng :

$$\frac{2MN}{EF}=\left|\frac{AB}{CD}-\frac{CD}{AB}\right|$$

Bài 2.77. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được một đường tròn. Chứng minh rằng :

$$\frac{AC}{BD}=\frac{DA\cdot AB+BC\cdot CD}{AB\cdot BC+CD\cdot DA}$$

Bài 2.78. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp $(O; R)$.Gọi R_1, R_2, R_3 tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OCA, OAB. Chứng minh rằng :

$$R_1+R_2+R_3 \geqslant 3R$$

II. Hướng dẫn và gợi ý

1. Các bài toán ôn tập tuyển sinh lớp 10

Bài 1.1.
(a) Ta đã có $\widehat{FHD} = 20°$, việc còn lại chỉ là kiểm tra $\widehat{FHK} = 20°$.
(b) Gọi I là giao điểm của HK, BC. Lần lượt chứng minh các kết quả sau

- $\widehat{DFI} = 120°$
- $BEFI$ nội tiếp
- $\widehat{EFI} = 120°$ và $\widehat{FIE} = 20° = \widehat{DIF}$
- $\triangle DFI = \triangle EFI$

Kết quả cuối chứng tỏ tam giác EFD cân tại F.

Bài 1.2.
Với chú ý rằng $SK = SQ$, sử dụng các biến đổi độ dài đoạn thẳng để chỉ ra rằng $RK = RB$.

Bài 1.3.
Qua H dựng các đường thẳng song song với các cạnh tam giác và các giao điểm đối với các cạnh còn lại. Hãy chú ý các hình bình hành tạo được và sử dụng bất đẳng thức tam giác, ta sẽ có điều cần chứng minh.

Bài 1.4.
(a) Từ hai tam giác đồng dạng ANB, CPD suy ra $\widehat{ANB}$ không đổi. Từ đó rút ra được quỹ tích điểm N.
(b) Điểm cố định cần tìm chính là giao điểm tiếp tuyến tại A, B của O.

Bài 1.5.
Hãy chứng minh rằng B' là tâm bàng tiếp trong góc B của tam giác $AA'B$ và C' là tâm bàng tiếp trong góc C của tam giác $AA'C$ để từ đó suy ra $\widehat{B'A'C'} = 90°$.

Bài 1.6.
Gọi S là giao điểm của EM, CD. Áp dụng định lý Menelaus cho hai tam giác ACN, BCN và định lý Thales để rút ra :

$$\frac{BC^2}{NC^2} = \frac{KB}{KN}$$

Đẳng thức này chứng tỏ tam giác vuông BCN nhận K làm chân đường cao kẻ từ C.

Bài 1.7.
(a) Bằng tính chất của tiếp tuyến và các phép biến đổi góc, hãy chứng minh $\widehat{BAE} = \widehat{BEA}$. Từ đó suy ra N là trung điểm AE và O, N, P thẳng hàng.
(b) Hãy chứng minh $\widehat{MDN} = 90°$.
(c) Chứng minh tứ giác $OKPA$ nội tiếp.

Bài 1.8.
Hãy chứng minh $A_1B_1H_aH_b$ là hình bình hành nhờ bổ đề sau : Với tam giác XYZ, trực tâm Q thì $QX = YZ \cdot \cot X$.

Bài 1.9.
Gọi N là trung điểm của AB. Đường tròn cố định cần tìm là $\left(N, \dfrac{AB}{2}\right)$.

Bài 1.10.
Để chứng minh kết quả của bài toán, ta sẽ chỉ ra rằng OS là phân giác của góc $\widehat{COD}$ bằng cách sử dụng các tam giác đồng dạng và tứ giác nội tiếp.

Bài 1.11.
Hai ý **(a)** và **(b)** đều là những kết quả đơn giản và quen thuộc.
Với ý **(c)**, ta sẽ chứng minh $AH = 2HI$, sau đó áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC.

Bài 1.12.
Bằng cách biến đổi góc dựa vào các tứ giác nội tiếp, hãy chứng minh rằng IK là phân giác trong của góc DIE.

Bài 1.13.
(a) Hãy chứng minh $BHCA'$ là hình bình hành.
(b) Thực chất đây là kết quả quen thuộc về đường thẳng Euler : H, O, G thẳng hàng và $HG = 2OG$.

Bài 1.14.
Dựng thêm hình bình hành $ABMT$. Từ đó hãy áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $AMDT$ với chú ý các đoạn thẳng bằng nhau để suy ra điều cần chứng minh.

Bài 1.15.
(a) Hãy chứng minh (O_3) là trực tâm của $\triangle AO_1O_2$.
(b) Dựa vào các tam giác đồng dạng, ta suy ra đẳng thức

$$\frac{O_1H}{O_2H} = \frac{BH}{AH} = \frac{AB}{AC}$$

Từ đó suy ra $\triangle O_1HO_2 \backsim \triangle BAC$.
(c) Sử dụng kết quả sau

$$\begin{cases} R_3 = \dfrac{AB + AC - BC}{2} \\ R_2 = \dfrac{AH + CH - AC}{2} \\ R_1 = \dfrac{AH + BH - AB}{2} \end{cases}$$

Bài 1.16.
(a) Có 2 cách chứng minh cơ bản nhất cho kết quả này:

- Vẽ tiếp tuyến Cx của O. Hãy chứng minh rằng tiếp tuyến này song song với EF.
- Vẽ đường kính CC', gọi giao điểm của CC', EF là Q. Hãy chứng minh $BFQC'$ nội tiếp để suy ra kết quả.

(b) Suy ra trực tiếp từ ý **(a)**.
(c) Nhận xét $CA^2 + CB^2$ không đổi để đánh giá chu vi và diện tích $\triangle ABC$. Ngoài ra, còn một

cách đơn giản hơn để đánh giá diện tích nhờ vào tính chất : Độ dài đường trung tuyến tam giác không nhỏ hơn độ dài đường cao xuất phát cùng một đỉnh.
(d) Khi C di động trên cung AB thì I luôn di động trên cung chứa góc $135°$ dựng trên đoạn OA hoặc OB nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa C (trừ hai điểm A và B).

Bài 1.17.
(a) Trên tia CD lấy điểm T sao cho $AT = AC$. Hãy chứng minh $CK - CF = CT$.
(b) $I \in BD$ cố định.
(c) Áp dụng đẳng thức $EK = \dfrac{AE^2}{DE}$ để suy ra đoạn EK ngắn nhất khi $E \equiv C$.

Bài 1.18.
(a) Chứng minh tuần tự các đẳng thức sau:

- $EA = EB + EC$
- $\dfrac{1}{ED} = \dfrac{EA}{EB \cdot EC}$

(b) Áp dụng đẳng thức đã chứng minh ở ý **(a)**.
(c) Gọi độ dài các cạnh tam giác đều ABC là a. Hãy chứng minh rằng:

$$R_1 + R_2 = \frac{(3a - 2AD)R_3}{a}$$

Bài 1.19.
(d) Gọi I là giao điểm của AT, BM. Khi đó, chứng minh tuần tự :

- M là trung điểm BI.
- $\dfrac{SN}{MB} = \dfrac{TN}{TM} = \dfrac{AN}{MI}$

Bài 1.20.
(a) Dựng $MI_1 \perp BE$ tại I_1. Hãy chứng minh M, I_1, N thẳng hàng.
(b) Từ ý **(a)**. hãy chứng minh $AM + CN = MN$ và suy ra giá trị lớn nhất của S_{DMN} đạt được khi $E \equiv D$.

Bài 1.21.
Gọi I, K lần lượt là tâm của các đường tròn $(CDE), (ABC)$. Dựng đường kính CP của (I). Chứng minh tuần tự các kết quả sau:

- $PM \perp CM$
- $PO \perp CM$
- M, O, P thẳng hàng

Bài 1.22.
Chứng minh tuần tự các kết quả sau đây:

- $\triangle FCD \backsim \triangle DAE$

- $\triangle ACF \backsim \triangle EAC$
- $\triangle ACM \backsim \triangle AFC$
- $AM \cdot AF = AD^2$

Bài 1.23.
Chú ý rằng $ADBC$ là tứ giác điều hòa, hãy tìm các đẳng thức về tỉ số độ dài đoạn thẳng để có $\triangle BDI \backsim \triangle BCA$. Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bài 1.24.
(a) Hãy chứng minh $INDM$ nội tiếp.
(b) Chứng minh $PN \parallel AB, PM \parallel AC$. Từ đó suy ra tứ giác $PNQM$ nội tiếp vì có tổng 2 góc đối là $180°$.

Bài 1.25.
Gọi H là trung điểm BC, N di động trên đường thẳng vuông góc với AH tại A cố định.

Bài 1.26.
Lấy N trên BC sao cho $\widehat{BAM} = 90°$. Áp dụng công thức đường phân giác để tính độ dài AN theo AM, b; AM theo AN, a. Từ đó rút ra quan hệ giữa AM với a, b.

Bài 1.27.
Dựng tam giác AME đều (E nằm trong tam giác ADM). Từ đó suy ra $DM = DA = DC$.
Đáp số : $\triangle MCD$ đều.

Bài 1.28.
(a) Gọi H là giao điểm của KP và IN. Hãy chứng minh tứ giác $MNPQ$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường để suy ra điều phải chứng minh.
(b) Gọi E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABK với IK. Chứng minh tuần tự các đẳng thức sau:

- $ID \cdot IC = IE \cdot IK$
- $KB \cdot KC = KE \cdot IK$

(c) Gọi R là giao điểm của AJ, OL. Kẻ $AS \perp BO$ ($S \in BO$). Lần lượt chứng minh:

- J là trung điểm BS
- $\triangle OLF \backsim \triangle AJB$
- $AFRO$ nội tiếp
- $AJ \perp OL$

Bài 1.29.
Bài toán này là hệ quả trực tiếp của định lý con bướm. Hãy chứng minh rằng M đồng thời là trung điểm của các đoạn thẳng M_1M_3 và M_2M_4

Bài 1.30.

Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến cho các tam giác ACE, ABD, BCD.

Bài 1.31.

(c) Gọi M là trung điểm BC thì EF luôn đi qua M cố định.

(d) $S_{AEIF}\max \Leftrightarrow S_{ABC}\max$.

Bài 1.32.

(a) Đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMN$ luôn đi qua điểm $H \in AO$ cố định.

(b) T luôn di động trên đường thẳng vuông góc với OA tại H cố định.

Bài 1.33.

(a) Hãy chứng minh các kết quả

- $AE \perp IJ$
- $AE \parallel HK$

(b) $R = \sqrt{\dfrac{b^2+c^2-bc}{3}}$

(c) Để ý rằng $\triangle BHF = \triangle CKF$.

Đáp số : $IH + IK = b + c$.

Bài 1.34.

Điểm cố định cần tìm chính là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với BC. Để có được kết quả này, ta cần sử dụng bổ đề sau :

Bổ đề. Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ không cắt nhau, hai tiếp tuyến chung trong d_1, d_2 cắt tiếp tuyến chung ngoài d tại A, B.Gọi C, D lần lượt là tiếp điểm của $(O_1), (O_2)$ với d. Khi đó, $AC = BD$.

Bài 1.35.

Nếu $\triangle ABC$ cân tại A thì $ML \equiv AD$.

Nếu $AB \neq AC$, hãy chứng minh $BE = CF$. Từ đó suy ra $ML \parallel AD$.

Bài 1.36.

Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $AIBK$. Sau đó, dựa vào $a \leqslant 2$, hãy chứng minh rằng:

$$S = \frac{2+\sqrt{4-a^2}}{a} \geqslant 1$$

Bài 1.37.

Đặt $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, suy ra $R_1 = p-a, R_2 = p-b, R_3 = p-c$. Đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2 + 2(p-a)(p-b)(p-c) = abc$$

Để chứng minh đẳng thức này, có thể dùng phương pháp khai triển rút gọn hoặc dùng phương pháp đa thức. Phần chứng minh dành cho bạn đọc.

Bài 1.38.

Dựng về phía bờ AD không chứa C tam giác ADG sao cho $\triangle ADG = \triangle ABM$. Hãy chứng minh rằng N, D, G thẳng hàng để suy ra rằng $ABCD$ là hình vuông.

Bài 1.39.
(a) Gọi L là trung điểm của QN. Hãy chứng minh $\triangle ALB$ vuông cân để suy ra L cố định.
(b) Chứng minh $OI, O'I$ vuông góc và bằng nhau.

Bài 1.40.
Điểm mấu chốt của bài toán là chứng minh $MN \perp AD$. Từ đó suy ra $\triangle BIN \backsim \triangle CIM$.
Đáp số : $OI = \dfrac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d}$.

Bài 1.41.
Chứng minh đẳng thức

$$S_{BFC} = \frac{k_2}{1 + k_2 + k_2k_3} \cdot S_0$$

Đáp số :

$$S = S_0 \cdot \frac{(k_1k_2k_3 - 1)^2}{(k_1k_2 + k_1 + 1)(k_2k_3 + k_2 + 1)(k_3k_1 + k_3 + 1)}$$

2. Các bài toán ôn tập Olympiad

Bài 2.1.
Dựa vào những quan hệ vuông góc có ở giả thiết và quan hệ vuông góc cần chứng minh, ta có thể suy nghĩ theo các hướng sau :

- *Dựa vào hệ trục tọa độ :* Tất nhiên vì 2 trục tọa độ phải vuông góc với nhau, do đó tâm tọa độ nên đặt ở P hoặc N. Tuy nhiên, do N là chân đường phân giác trong của tam giác ABC nên việc đặt tâm tại N sẽ thuận tiện hơn.

- *Dựa vào ý tưởng trực tâm :* Ta đã có $OA \perp QN$, hãy tìm cách dựng tìm K sao cho Q là trực tâm của tam giác AOK. Từ cách dựng điểm K, giải bài toán ngược để chứng minh rằng Q chính là trực tâm của tam giác AOK theo cách dựng đó.

- *Sử dụng vector :* Sử dụng vector là một phương pháp có sự lựa chọn phong phú. Tất nhiên đẳng thức cần chứng minh phải là $\overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$. Các vector $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{BC}$ có thể biểu diễn thành rất nhiều tổng của các vector khác nhau. Đây vừa là điểm mạnh cũng chính là điểm yếu của vector, ta phải tìm những cặp vector thích hợp để có thể tính toán. Dĩ nhiên $\overrightarrow{BC}$ nên được giữ nguyên, $\overrightarrow{OQ}$ có thể tách thành tổng của 2 vector $\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{PQ}$ vì 2 vector này đều có thể tính được module theo độ dài các cạnh và các góc của 2 vector này hợp với BC cũng có thể xác định theo các góc của tam giác ABC.

Bài 2.2.
Hãy chứng minh rằng EF, YZ, BC đồng quy để suy ra kết quả.

Bài 2.3.
Hãy biểu diễn tỉ số $\dfrac{MB}{MC}$ qua các yếu tố liên quan đến tam giác ABC nhờ tính chất của phương tích. Sau đó sử dụng định lý Ceva cho tam giác ABC để suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.4.
Chiếu M, N, P theo phương song song với BC lên đường trung tuyến xuất phát từ A của tam

giác ABC để đưa hệ thức cần tính toán lên đường trung tuyến đó.

Bài 2.5.

Để chứng minh SE là tiếp tuyến của (EMN) mà tâm đường tròn này chưa xác định, ta có 2 hướng cơ bản sau đây :

- *Chứng minh hệ thức về góc :* Quy về chứng minh $\widehat{FEM} = \widehat{ENM}$. Hãy dựng các hình bình hành $AEBL, CEDK$, tận dụng các tam giác đồng dạng để rút ra đẳng thức về góc trên.

- *Chứng minh hệ thức về cạnh :* Giả sử MN cắt FE tại P (dễ thấy rằng P cũng chính là trung điểm của EF), ta cần chứng minh $PE^2 = PM \times PN$. Gọi giao điểm của AB, CD là S, hãy sử dụng các định lý về hàng điểm điều hòa để chứng minh đẳng thức trên. Phần còn lại xin dành cho bạn đọc.

Bài 2.6.

Thực chất đây là bài toán đảo của bổ đề quen thuộc của tứ giác ngoại tiếp đường tròn : Các đường chéo và các đường thẳng nối các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp một tứ giác ngoại tiếp lên các cạnh đối của tứ giác đó đồng quy tại một điểm.

Bài 2.7.

Hãy chứng minh đẳng thức sau :

$$\frac{\overline{KD}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{LB}} = \frac{AD^2}{AB^2}$$

Đẳng thức trên đủ chứng tỏ AK, AL là hai đường đẳng giác trong góc BAC. Hãy sử dụng định lý Menelaus và chú ý tới các trung điểm để tính toán, rút ra đẳng thức trên.

Bài 2.8.

Hãy chú ý đến 2 đẳng thức sau :

$$a \cdot MA = b \cdot MB + c \cdot MC$$
$$a^2 = MB^2 + MC^2$$

Sử dụng 2 đẳng thức trên và bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta suy ra điều cần chứng minh.

Bài 2.9.

Hãy chú ý bổ đề :

$$IA = \sqrt{\frac{bc(b+c-a)}{a+b+c}}$$

Từ đó, ta có thể đưa bài toán về bất đẳng thức đại số đơn giản hơn.

Bài 2.10.

Ý tưởng chính của bài toán là chứng minh AM, ON cùng vuông góc với AD. Sau đây là 2 hướng cần chú ý để tiếp cận kết quả này :

- Cực và đối cực.

- Phương tích của một điểm với đường tròn (O) và với đường tròn điểm tâm A.

Bài 2.11.
(a) Gọi K là giao điểm của BD, CE. Hãy sử dụng định lý Thales để chứng minh rằng $R_{(D)} + R_{(E)} = BK = CK$.
(b) Để dự đoán trước quỹ tích của I, ta chọn 3 vị trí M khác nhau. Từ đó cho ta giả thuyết I di động trên đường thẳng cố định song song với BC. Cũng chính từ đây cho ta ý tưởng hạ đường thẳng vuông góc IH xuống BC. Hạ vuông góc tương tự cho D, E xuống BC, bằng một số bước tính toán, ta sẽ thấy được độ dài đoạn IH không đổi, từ đó suy ra quỹ tích điểm I.

Bài 2.12.
Cấu hình đường tròn với 2 đường kính cố định vuông góc với nhau làm ta liên tưởng ngay đến hệ trục tọa độ. Nếu chọn $A(-r,0), B(r,0), C(0,-r), D(0,r)$ thì quỹ tích của điểm P sẽ là đường cong có phương trình $y^2 = 2xr + r^2$.

Bài 2.13.
Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng BC, CA, AB theo thứ tự. Ta chứng minh các bất đẳng thức, đẳng thức sau để suy ra điều cần chứng minh :

$$p^2 + q^2 + r^2 \geqslant \frac{1}{3}\left(B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2\right)$$

$$B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2 = \frac{3}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

Bài 2.14.
Áp dụng định lý Ptolemy cho các tứ giác :

- $MA_1A_2A_3$
- $MA_5A_6A_7$
- $MA_2A_4A_6$
- $A_1A_3A_4A_5$

Kết hợp với một số biến đổi hợp lý, ta sẽ có ngay bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 2.15.
Trước tiên, hãy chứng minh rằng A_2 chính là giao điểm của hai tiếp tuyến kẻ từ B, C của (O) và tương tự đối với B_2, C_2. Ta đã đưa về bài toán quen thuộc và có thể làm theo hai cách :

- Ta có thể thấy ngay AA_2, BB_2, CC_2 chính là các đường đối trung của tam giác ABC nên chúng đồng quy tại điểm Lemoine của tam giác ABC.
- Áp dụng định lý Ceva. Thật vậy, do (O) trở thành đường tròn nội tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ nên A, B, C trở thành tiếp điểm của đường tròn nội tiếp đó trên các cạnh tam giác $A_2B_2C_2$. Từ đó, ta có thể áp dụng định lý Ceva cho tam giác $A_2B_2C_2$ để chứng minh AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Bài 2.16.
Ta sẽ đưa $AB_1 \cdot AB, AC_1 \cdot AC, AM_1 \cdot AM$ thành các biểu thức chứa $AB, BC, CA, \mathcal{P}_{B/(O)}, \mathcal{P}_{C/(O)}, \mathcal{P}_{M/(O)}$. Từ đó biến đổi đẳng thức cần chứng minh về một đẳng thức đúng theo công thức trung

tuyến.

Bài 2.17.
Hãy chứng minh hai bổ đề sau đây :

- Tam giác XYZ nội tiếp đường tròn bán kính R thì :

$$XY + YZ + ZX \leqslant 3\sqrt{3}R$$

- Nếu I_a, I_b, I_c là các tâm bàng tiếp của tam giác ABC thì bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_aI_bI_c$ bằng 2 lần bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 2.18.
Điểm mấu chốt của bài toán là bất đẳng thức sau đây :

$$R^2 - 2Rr = OI^2 \geqslant DM^2 = \frac{(b-c)^2}{4}$$

Trong đó D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với BC và M là trung điểm của BC.

Bài 2.19.
Bài toán dựa trên bổ đề sau đây :
Bổ đề. Gọi H, I, K là hình chiếu của điểm M (được định nghĩa trong đề bài) lên BC, CA, AB thì $MH = MI + MK$.
Phần còn lại là sử dụng bất đẳng thức tam giác để khai thác bổ đề này. Ta sẽ thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Bài 2.20.
Lấy K đối xứng với H qua AB. Đường thẳng PF cắt $(O), BK$ tại M, N, Q. Hãy sử dụng định lý con bướm cho tam giác ABC để chứng minh $PKQH$ là hình bình hành.

Bài 2.21.
(a) Đây là một kết quả rất quen thuộc :

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4R^2$$

Một cách nhanh nhất là vẽ đường kính AK của (O) và chú ý $BCDK$ là hình thang cân để suy ra kết quả.
(b) Gọi M là trung điểm của OP. Trước hết hãy chứng minh rằng $IO^2 + IP^2$ không đổi, để từ đây suy ra I di động trên $\left(M, \dfrac{2R^2 - OP^2}{4}\right)$ cố định.

Bài 2.22.
Hãy chứng minh và sử dụng kết quả sau : Với điểm M bất kì nằm trong tứ giác $ABCD$, ta luôn có :

$$MC + MD < DA + AB + BC$$

Trở lại bài toán, hãy gọi trung điểm các cạnh BC, CA, AB để khai thác kết quả trên.

Bài 2.23.
Để chứng minh $QN \perp MP$, ta có hai hướng sau :

- Gọi K là điểm đối xứng của N qua MP. Ta sẽ chứng minh $K \in (O)$. Từ đó suy ra N, K, Q thẳng hàng. Với chú ý rằng $AK \parallel MP$. Ta sẽ có điều cần chứng minh.

- *Sử dụng vector :* Phân tích $\overrightarrow{QN}$ thành tổng của $\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}$; $\overrightarrow{MP}$ thành tổng của $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}$ và chú ý các đường vuông góc với nhau. Để cho tiện cho việc biến đổi, nên đặt $k = \dfrac{NC}{BC}$.

Bài 2.24.
Trước hết, có nhận xét rằng $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. Từ nhận xét này, nếu gọi x, y lần lượt là độ dài hình chiếu của HK lên AC, BD; ta chỉ cần chứng minh $x \cdot AC = y \cdot BD$.

Bài 2.25.
Ta có hai hướng để giải quyết :

- Gọi K là trung điểm AC, hãy chứng minh rằng $\triangle KMN \backsim \triangle IQP$ để suy ra kết quả.

- *Sử dụng vector :* Trước hết, có nhận xét rằng $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$. Từ nhận xét này, nếu gọi x, y lần lượt là độ dài hình chiếu của PQ lên AC, BD; ta chỉ cần chứng minh $x \cdot AC = y \cdot BD$. Và đẳng thức này có thể chứng minh dựa vào tính chất phương tích của điểm I với (O).

Bài 2.26.
Hãy chú ý đến hai bổ đề sau :

- *Bổ đề 1 :* Cho tam giác ABC và một điểm M nằm trong tam giác ấy. Khi đó $MB+MC < AB + AC$.

- *Bổ đề 2 :* Nếu tam giác ABC ngoại tiếp (I) thì :
$$a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

Từ hai bổ đề trên, hãy biến đổi HK để suy ra kết quả.

Bài 2.27.
Bất đẳng thức đầu bài tương đương với :
$$\frac{S^2_{ABC}}{S_{BMK} \cdot S_{CNK}} \geqslant 8$$
Ta thấy rằng tỉ số diện tích tam giác ABC và tam giác BMK hoặc tam giác CNK không thể ngay trực tiếp chuyển thành tỉ số các đoạn thẳng vì chúng không có chung đỉnh cũng không có chung cạnh đáy. Do đó, ta sẽ tìm tam giác khác có quan hệ "gần gũi" hơn với cả 2 tam giác ABC, CNK. Tương tự, ta cũng sẽ chọn tam giác có quan hệ "gần gũi" hơn với tam giác ABC và tam giác CNK. Đây chính là mấu chốt của bài toán. Tam giác cần tìm là tam giác MAN. Phần chứng minh cụ thể còn lại xin dành cho bạn đọc.

Bài 2.28.
Có hai hướng để giải quyết :

- *Sử dụng tính chất của trọng tâm :* Gọi S là điểm đối xứng của M qua trung điểm P của BC. Hãy chứng minh G cũng là trọng tâm của tam giác AMS. Đây chính là chìa khóa của bài toán.

- *Sử dụng định lý Ceva :* Áp dụng trực tiếp định lý Ceva dạng sin cho tam giác ABC với chú ý $MB_1A_2C_1, MC_1B_2A_1, MA_1C_2B_2$ là các hình bình hành để có các cặp cạnh và góc bằng nhau.

Bài 2.29.
Lấy điểm T trên cung BC không chứa điểm M của (O) sao cho $2010 \cdot TB = 2011 \cdot TB$. Sau đó áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $TBMC$.

Bài 2.30.
Đây là một kết quả rất đẹp và có rất nhiều lời giải. Xin nêu ra hai hướng giải :

- Sử dụng tính chất của hàng điểm điều hòa.
- Qua A kẻ đường thẳng song song BC cắt DE, DF tại M, N. Áp dụng định lý Thales và Ceva để chứng minh A là trung điểm MN.

Bài 2.31.
Sử dụng định lý Ceva bằng cách chứng minh lần lượt các đẳng thức :

- $\dfrac{MH}{BH} = \dfrac{MD \cdot FA}{AD \cdot FB}$
- $\dfrac{CK}{MK} = \dfrac{CE \cdot AD}{EA \cdot MD}$
- $\dfrac{AF}{BF} \cdot \dfrac{CE}{AE} \cdot \dfrac{BD}{CD} = 1$

Bài 2.32.
Ta cần đến bổ đề quan trọng sau đây : (với các kí hiệu như giả thiết)

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$$

Hãy dựng hình bình hành thích hợp nhằm tạo ra các đoạn thẳng bằng nhau, kết hợp với một số biến đổi hợp lý để thu được kết quả.

Bài 2.33.
Thông thường khi gặp tổng của các phân thức, một cách tự nhiên ta sẽ cố gắng đưa chúng về dạng có chung mẫu. Ta có thể làm được điều ấy trong bài toán này với chú ý :

$$MA \cdot AP = \mathcal{P}_{A/(O)} = \mathcal{P}_{B/(O)} = MB \cdot BQ$$

Bài 2.34.
Đường thẳng này luôn đi qua điểm O' đối xứng với O qua AB cố định.

Bài 2.35.
Ta có thể dễ dàng nhận ra quan hệ:

$$GA \cdot GA_1 = GB \cdot GB_1 = GC \cdot GC_1 = \delta$$

Ngoài ra, cần chú ý đẳng thức :

$$\delta = \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2}{3}$$

Khi đó, bất đẳng thức hình học trở thành bất đẳng thức đại số tầm thường.

Bài 2.36.
Ta cần chứng minh P, Q, R, M đồng viên, điều này tương đương với $\overline{DP} \cdot \overline{DQ} = \overline{DR} \cdot \overline{DM} \quad (\star)$
Hãy chứng minh rằng $\overline{RB} \cdot \overline{RC} = \overline{RD} \cdot \overline{RM} \quad (\star\star)$. Chú ý P, Q, B, C đồng viên để dùng tính chất của phương tích, từ đó có thể dùng $(\star\star)$ chứng minh $(\star)$.

Bài 2.37.
Biến đổi từ đẳng thức :

$$\cos\alpha = \cos\frac{\widehat{AOB}}{2} \cdot \cos\frac{\widehat{COD}}{2} - \sin\frac{\widehat{AOB}}{2} \cdot \sin\frac{\widehat{COD}}{2}$$

Đáp số :

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$$

Bài 2.38.
Cách quen thuộc và ngắn gọn nhất là sử dụng phương tích : Hãy chứng minh rằng F, H, I đều nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính CE và đường tròn đường kính BD.

Bài 2.39.
Gọi giao điểm của FQ với (I) không trùng với F là T. Giả sử $TD \cap ED = \{M'\}$. Sử dụng định lý Pascal để suy ra $M \equiv M'$.
Từ N kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (I) tại T'. Hãy chứng minh $T \equiv T'$ để suy ra FQ là đường đối cực của N đối với (I). Từ đây ta có kết quả cần chứng minh.

Bài 2.40.
Chú ý đến bổ đề : Trong một tứ giác lồi, tổng độ dài hai đường chéo nhỏ hơn chu vi và lớn hơn tổng độ dài hai cạnh đối của tứ giác.

Bài 2.41.
Gọi K là giao điểm tiếp tuyến tại B, C của (O). Lấy Q là giao điểm AK, BC. Khi đó, có thể dùng cực-đối cực hoặc tỉ số kép để chứng tỏ EF luôn đi Q cố định.

Bài 2.42.
Áp dụng định lý Ptolemy để chứng minh hai kết quả sau, từ đó suy ra ngay điều phải chứng minh :

- Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABE$ tiếp xúc với CB.
- Đường tròn ngoại tiếp ADE tiếp xúc với CD.

Bài 2.43.
Gọi M, N, P, X, Y, Z là trung điểm các đoạn BC, CA, AB, HA, HB, HC và D, E, F là chân đường cao hạ từ A, B, C của tam giác ABC theo thứ tự. Ta xét 3 trường hợp sau đây:

- *Trường hợp 1 :* Có ít nhất 2 trong 3 bộ $(M, D); (N, E); (P, F)$ trùng nhau.
- *Trường hợp 2 :* Có đúng một bộ trong $(M, D); (N, E); (P, F)$ trùng nhau.
- *Trường hợp 3 :* Không bộ nào trong các bộ trên trùng nhau.

Trường hợp 1 cho ta $\triangle ABC$ đều; trường hợp 2 cho ta $\widehat{A} = 45°, \widehat{B} = \widehat{C} = 67,5°$; trong khi trường hợp 3 lại không thể xảy ra.

Bài 2.44.

Gọi N là giao điểm của ID và EF, ta sẽ chứng minh AN đi qua trung điểm BC. Hãy dựng thêm đường thẳng qua N vuông góc với ID và các giao điểm của nó với AB, AC. Chú ý các tứ giác nội tiếp và áp dụng định lý Thales để chứng minh.
Bạn đọc có thể tham khảo thêm cách 1 của bài 2.73.

Bài 2.45.

Gọi S là trung điểm AB và S' là trung điểm $A'B'$. Hãy sử dụng tính chất của phép quay để chứng minh S, S', M, N đồng viên, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.46.

Chú ý hai bổ đề sau :
Bổ đề 1 : Cho điểm M nằm trong góc $\widehat{xOy}$. A, B theo thứ tự là các điểm khác O thuộc tia Ox, Oy; H, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên Ox, Oy. Khi đó, ta có

$$P(MAB) \geqslant 2HK$$

Bổ đề 2 : Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác. AM, BM, CM cắt BC, CA, AB theo thứ tự ở D, E, F. Ta có

$$\frac{AM}{AD} + \frac{BM}{BE} + \frac{CM}{CF} = 2$$

Bài 2.47.

Bằng các biến đổi góc và áp dụng định lý sin, hãy biểu diễn tỉ số $\dfrac{BA''}{CA''}$ theo các góc B, C. Từ đó áp dụng định lý Ceva để suy ra điều cần chứng minh.

Bài 2.48.

Nếu M, O, H thẳng hàng thì PQ luôn song song với (d). Ta xét trường hợp M, O, H không thẳng hàng và (d) không cắt (O). Khi đó, đường thẳng PQ luôn đi qua giao điểm của (d) và (OHR) cố định.

Bài 2.49.

Qua A dựng đường thẳng (d) song song với BC và cắt DF tại P. Với chú ý rằng $AP = AF = AE$, hãy áp dụng định lý Thales để suy ra M là trung điểm EN.

Bài 2.50.

Bài toán này có thể giải quyết theo hai cách sau :

- Hãy chứng minh đẳng thức

$$\frac{bAB}{(a+b+c)AB'} + \frac{cAC}{(a+b+c)AC'} = 1$$

  Từ đẳng thức trên và một số đánh giá, biến đổi thích hợp, ta có điều cần chứng minh.

- Dễ thấy rằng, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{4b^2c^2}{(a+b+c)^2} \leqslant AB' \cdot AC'$$

Chỉ cần chú ý rằng :

$$\frac{IA^2}{\cos^2\dfrac{A}{2}} \leqslant AB' \cdot AC' \text{ và } \frac{IA^2}{\cos^2\dfrac{A}{2}} = \frac{4b^2c^2}{(a+b+c)^2}$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh.

Bài 2.51.
Hãy chứng minh các tứ giác $CDFG, CFEB, AHEB, AHGD$ nội tiếp để suy ra các góc của tứ giác $EFGH$ đều vuông.

Bài 2.52.
Cho BF, AC lần lượt cắt DE tại $T, K \Rightarrow (KITE) = -1$.
Gọi giao điểm của đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ với DE là N. AN cắt BC tại G. Lần lượt chứng minh các kết quả sau :

- $(CBEG) = -1$
- $(KINE) = -1$
- $N \equiv T$

Bài 2.53.
Hãy chú ý rằng

$$S_{BC} \circ S_{AB} = R_{[B,2(BA,BC)]}$$

Trong đó S_d là phép đối xứng trục d, $R_{O,\alpha}$ là phép quay tâm O, góc quay α.

Bài 2.54.
Sử dụng bổ đề hình thang : gọi $H = AD \cap BC$, khi đó HO đi qua trung điểm của AB và CD.

Bài 2.55.
Gọi D, E là tiếp điểm của ω với AB, AC. Mấu chốt của bài toán là sử dụng các tính chất của tứ giác điều hòa, hàng điểm điều hòa chứng minh M, D, P thẳng hàng và M, E, Q thẳng hàng. Bởi vì $DE \parallel BC$ nên nếu vẽ tiếp tuyến tại M của ω thì đó cũng là tiếp tuyến của (MPQ).

Bài 2.56.
Đáp số : $\widehat{CHI} = 20^\circ$.
Xin nêu hai hướng để tiếp cận bài toán :

- *Sử dụng hình học thuần túy :* Kẻ phân giác CK của góc $\widehat{HCB}$, gọi L là hình chiếu của K lên BC. Chú ý rằng tam giác KBC cân tại K và $HI \parallel CK$ để suy ra kết quả.
- *Sử dụng công cụ lượng giác :* Đặt $\alpha = \widehat{CHI}$. Sau đó áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác CHI và sau một số phép biến đổi hợp lý, ta sẽ thu được phương trình theo α sau đây :

  $$\cos(30^\circ + \alpha) = 2\cos 20^\circ \cdot \sin\alpha$$

  Công việc còn lại chỉ là chứng minh phương trình trên có nghiệm duy nhất $\alpha = 20^\circ$.

Bài 2.57.
Thực chất bài toán này là một trường hợp riêng của định lý Kariya : Cho tam giác ABC nhận (I) là đường tròn nội tiếp. Về phía ngoài tam giác lấy các điểm M, N, P sao cho $IM = IN = IP$ và IM, IN, IP tương ứng vuông góc BC, CA, AB. Khi đó ta có AM, BN, CP đồng quy. Mà định lý Kariya cũng là một trường hợp riêng của định lý Kiepert và định lý Jacobi.
Để chứng minh bài toán, hãy áp dụng định lý sin và định lý Ceva dạng sin cho tam giác ABC.

Bài 2.58.
Hãy biểu diễn độ dài các đoạn thẳng AQ, BM, MQ qua a, b với $AB = AC = a, BC = b$ $(2a > b)$. Từ đó đưa bất đẳng thức cần chứng minh về một bất đẳng thức đại số đơn giản.

Bài 2.59.
Gọi G là giao điểm của CK, AB; F là giao điểm của AL, BC; M là giao điểm của AL, CK. Một số kết quả cần chú ý để suy ra kết luận của bài toán :

- $\triangle AGC$ cân tại A.
- $M \in (I)$.

Bài 2.60.
Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm EF, DE, DF. Khi đó, hãy xét phép nghịch đảo tâm I phương tích $k = r^2$ (với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC) và chú ý DA_1, BE_1, CF_1 đồng quy, ta sẽ có điều phải chứng minh.
Ngoài ra, ta có thể sử dụng định lý Menelaus. Tuy nhiên, ta không thể sử dụng định lý Meneleus để chứng minh 3 tâm ngoại tiếp ấy thẳng hàng một cách trực tiếp. Thế nhưng, chỉ cần để ý rằng nếu gọi A_2, B_2, C_2 là chân đường phân giác ngoài tam giác ABC thì tâm ngoại tiếp các tam giác AID, BIE, CIF chính là trung điểm của IA_2, IB_2, IC_2. Bằng định lý Menelaus, dễ thấy rằng A_2, B_2, C_2 thẳng hàng, từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 2.61.
Gọi P' là giao điểm của DI với (O) (P' thuộc cung BC không chứa A). Khi đó, hãy chứng minh rằng:

$$\frac{PM}{PN} = \frac{AM}{AN} = \frac{P'M}{P'N}$$

Đẳng thức này chứng tỏ $AMPN, AMP'N$ đều là tứ giác điều hòa. Và điều này cũng chứng tỏ $P \equiv P'$.

Bài 2.62.
Đặt $x = \dfrac{\pi}{n}$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$. Sử dụng định lý hàm số sin để có được phương trình

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 3x}$$

Công việc còn lại chỉ là giải phương trình trên $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
Đáp số : Bài toán có nghiệm duy nhất $n = 7$.

Bài 2.63.

Hãy tính toán các tỉ số trong đề bài theo độ dài các cạnh tam giác để đưa bất đẳng thức cần chứng minh về một bất đẳng thức đại số.

Bài 2.64.
Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BCEFAD$. Hãy chứng minh rằng d là đường thẳng Steiner của M đối với $(O_1O_2O_3)$ để suy ra điều cần chứng minh (chú ý đường tròn Miquel của tứ giác toàn phần và tính chất của đường thẳng Steiner)

Bài 2.65.
Sử dụng phản chứng để chứng minh : Bỏ qua trường hợp tồn tại một cặp cạnh đối song song, xét trường hợp cả hai cặp cạnh đối đều song song. Khi đó, gọi E là giao điểm của $AD, BC; F$ là giao điểm của AB, CD. Hãy chứng minh rằng, nếu $ABCD$ không là hình bình hành thì $FO \parallel EO$, điều này hiển nhiên vô lý.

Bài 2.66.
Đẳng thức cần chứng minh được suy ra từ 4 đẳng thức sau :

- $AD^2 = AN \cdot AC$
- $AD^2 = AM \cdot AB$
- $AM \cdot AD = AP \cdot AC$
- $AN \cdot AD = AP \cdot AB$

Bài 2.67.
Hãy tịnh tiến các đường thẳng đã cho về một điểm và chú ý rằng góc của chúng vẫn được bảo toàn. Áp dụng nguyên lý Dirichlet ta sẽ có điều cần chứng minh.

Bài 2.68.
Lấy điểm H trên đoạn MN sao cho $MH = BM, NH = DN$. Hãy chứng minh H đối xứng với B qua AP, đối xứng với D qua AQ. Từ đó suy ra $AH \perp PQ, QH \perp AP$ để có điều cần chứng minh.

Bài 2.69.
Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, OA = x, OB = y, OC = z, OD = t$. Hãy tìm cách loại bỏ các đại lượng x, y, z, t trong đẳng thức có ở giả thiết. Ta cần biến đổi tương đương để đích cuối sẽ là $a + c = b + d$. Khi đó, áp dụng định lý Pithot, ta sẽ có $ABCD$ ngoại tiếp.

Bài 2.70.
Có hai cách để tiếp cận bài toán :

- *Cách 1 :* Chú ý hai cặp tam giác đồng dạng $\triangle ADH \backsim CHM$ và $\triangle AHE \backsim \triangle BMH$. Sau đó hãy sử dụng các cặp tỉ lệ về cạnh của hai cặp đồng dạng đó để chứng tỏ $HE = HD$.
- *Cách 2 :* Sử dụng tính chất của tỉ số kép, hãy chứng minh kết quả tổng quát :

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{HE}}$$

Bài 2.71.
Có hai hướng để tiếp cận bài toán :

- *Cách 1 :* Chứng minh NM là phân giác $\widehat{ANB}$ để từ đó suy ra $MN \leqslant \frac{BC}{2}$ (phân giác nhỏ hơn trung tuyến).
- *Cách 2 :* Hãy chứng minh:
$$\frac{1}{MN} = \frac{1}{DM} + \frac{1}{ME}$$
Nhận xét rằng $DM + ME$ không đổi để đánh giá MN.

Bài 2.72.
Gọi X_A là giao điểm của BC, B_0C_0, định nghĩa tương tự cho X_B, X_C. Hãy chứng minh rằng X_A, X_B, X_C là cực của A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2. Từ đó suy ra rằng kết luận của bài toán tương đương với X_A, X_B, X_C thẳng hàng và đường thẳng đi qua chúng vuông góc với OH.

Bài 2.73.
AA_2, BB_2, CC_2 chính là các đường trung tuyến của tam giác ABC.
Ngoài ra, ta cũng có thể sử dụng định lý Ceva dạng sin để chứng tỏ AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Bài 2.74.
Bài toán có thể được giải quyết theo hai cách sau :

- *Cách 1 :* Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle BCE$ với các điểm A, F, M (sau khi đã tính các tỉ số một cách thích hợp).
- *Cách 2 :* Gọi H là trung điểm BC. Hãy chứng minh rằng $MH \parallel CE$.

Bài 2.75.
Sử dụng bổ đề sau : Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại X, Z. Lấy A là một điểm bất kì nằm trên (O_1). Dựng tia ZB đối xứng tia ZA qua ZX với B thuộc (O_2). Gọi O là tâm ngoại tiếp $\triangle ABZ$. Khi đó ta có $OO_1 = OO_2$.

Bài 2.76.
Gọi P là trung điểm EF. Lấy U là điểm đối xứng của F qua N, V là trung điểm EU. Hãy chứng minh các kết quả sau :

- $\triangle EBF \backsim \triangle EDU, \triangle PAB \backsim \triangle VCD$
- $\frac{PM}{AB} = \frac{VN}{CD} = \frac{PF}{CD}$
- $\frac{2PN}{EF} = \frac{CD}{AB}$

Bài 2.77.
Cách nhanh nhất là sử dụng hệ thức liên quan giữa các cạnh, diện tích và bán kính ngoại tiếp tam giác.
Tuy nhiên, đối với các bạn chưa biết tới hệ thức lượng trong tam giác thì có thể làm theo cách kẻ dây DE, CF song song với AC, BD tương ứng rồi áp dụng định lý Ptolemy cho các tứ giác nội tiếp $ABCE, ACDF$ để suy ra kết quả.

Bài 2.78.
Áp dụng định lý hàm số sin và bất đẳng thức quen thuộc $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$.

III. Lời giải chi tiết

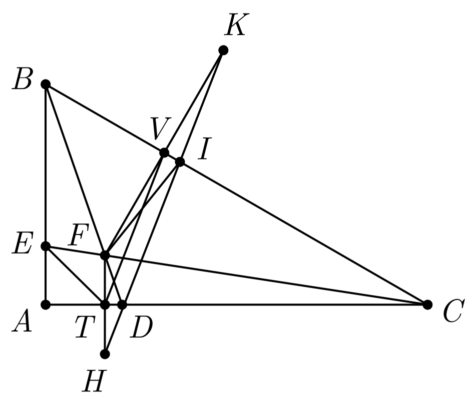
1. Các bài toán ôn tập tuyển sinh lớp 10

Bài 1.1 Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2AB$. Lấy D, E nằm trên AC, AB sao cho $\widehat{ABD} = \frac{1}{3}\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACE} = \frac{1}{3}\widehat{ACB}$. F là giao điểm của BD, CE. H, K là điểm đối xứng của F qua AC, BC.

(a) Chứng minh H, D, K thẳng hàng.

(b) Chứng minh tam giác DEF cân.

Lời giải



(a) Gọi $T = FH \cap AC, V = FK \cap BC$. Từ giải thiết có thể suy ra tam giác ABC là nửa tam giác đều nên việc tính các góc là tầm thường. Ta có, $\widehat{FHD} = \widehat{HFD} = \widehat{ABD} = 20°$.
Mặc khác, $\widehat{FHK} = \widehat{FTV}$ (do $TV \parallel HK$) $= \widehat{ACE}$ (do $CTFV$ nội tiếp) $= 20° = \widehat{FHD}$
Suy ra H, F, K thẳng hàng.

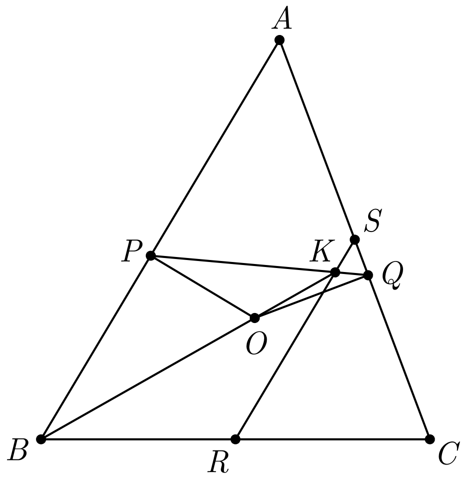
(b) HK cắt BC tại I. Ta lần lượt tính các góc :
$\widehat{DFI} = 180° - \widehat{DIF} - \widehat{IDF} = 180° - 20° - 40° = 120°$
$\widehat{BEC} = 90° + 10° = 100°$ và $\widehat{BIF} = 80^0$ nên $BEFI$ nội tiếp.

Suy ra $\begin{cases} \widehat{EFI} = 180° - \widehat{ABC} = 120° = \widehat{DFI} \\ \widehat{FIE} = 20° = \widehat{DIF} \end{cases}$

Do đó, $\triangle DFI = \triangle EFI \Rightarrow FD = FE$. Do đó, tam giác DEF cân tại F. ❒

Bài 1.2 Đường tròn (O) nội tiếp tam giác $ABC(AB > AC)$ tiếp xúc với AB, AC tại P, Q. Gọi R, S lần lượt là trung điểm BC, AC. Giao điểm của PQ, RS là K. Chứng minh rằng B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



Trước tiên, ta sẽ chứng minh rằng $RB = RK$. Gọi $a = BC, b = CA, c = AB$, chú ý rằng $SK = SQ$ do tam giác SQK có 2 góc đáy bằng nhau. Khi đó :

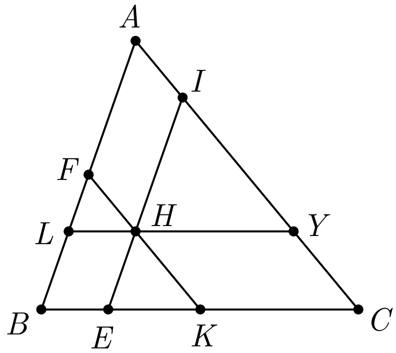
$$\begin{aligned} RK &= RS - SK \\ &= \frac{c}{2} - SQ = \frac{c}{2} - (CS - CQ) \\ &= \frac{c}{2} - \left(\frac{1}{2}b - \frac{a+b-c}{2}\right) \\ &= \frac{c}{2} - \frac{1}{2}b + \frac{a+b-c}{2} \\ &= \frac{1}{2}a = BR \end{aligned}$$

Vì vậy, tam giác BRK cân tại R, suy ra $\widehat{RBK} = \widehat{RKB} = \widehat{KBA}$ ($RK \parallel AB$).
Do đó K thuộc đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ hay B, O, K thẳng hàng. ❒

Bài 1.3 Cho tam giác ABC nhọn nhận H làm trực tâm. Chứng minh rằng, ta có bất đẳng thức :

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA)$$

Lời giải



Qua H vẽ các đường thẳng song song với BC, CA, AB cắt các cạnh tam giác ABC tại E, K, Y, I, F, L sao cho $FK \parallel AC, IE \parallel AB, LY \parallel BC$ và $E, K \in BC; I, Y \in AC; F, L \in AB$. Khi đó, hiển nhiên các đường thẳng LY, FK, IE lần lượt vuông góc với HA, HB, HC.
Tam giác AHL vuông tại H nên $HA < AL$. Tương tự, ta cũng có $HC < CE$. Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta thu được :

$$HB < HL + LB = LB + BE$$

Dấu đẳng thức ở trên do $HLBE$ là hình bình hành. Từ đó, ta thu được :

$$HA + HB + HC < AL + LB + BE + EC = AB + BC$$

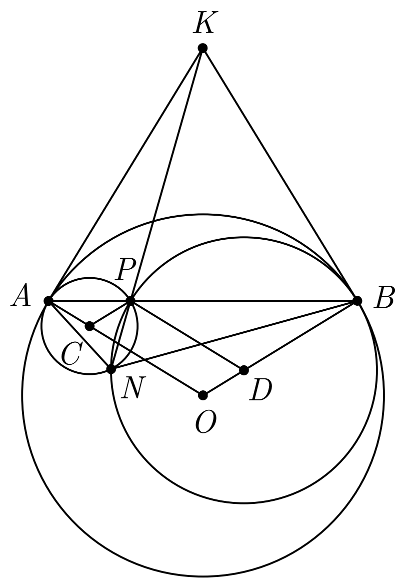
Xây dựng hai bất đẳng thức tương tự rồi cộng theo vế, ta có ngay điều cần chứng minh. ❐

Bài 1.4 Gọi AB là một dây cung cố định của đường tròn (O). P là điểm di động trên dây cung AB nhưng không trùng với hai đầu mút. Vẽ đường tròn (C) đi qua A, P tiếp xúc trong với (O) và đường tròn (D) đi qua B, P tiếp xúc trong với (O). Lấy N là giao điểm thứ 2 của $(C), (D)$.

(a) Chứng minh rằng $\triangle ANB \backsim \triangle CPD$. Từ đó hãy chỉ ra N di động trên đường nào.

(b) Chứng minh rằng NP luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



(a) Nhận xét rằng $\begin{cases} \widehat{PAN} = \dfrac{1}{2}\widehat{PCN} = \widehat{PCD} \\ \widehat{PBN} = \dfrac{1}{2}\widehat{PDN} = \widehat{PDC} \end{cases}$.

Từ đây suy ra $\triangle ANB \backsim \triangle CPD$
Do đó $\widehat{ANB} = \widehat{CPD}$. Mặc khác, do $OCPD$ là hình bình hành nên $\widehat{CPD} = \widehat{AOB} = \alpha$ nên $\widehat{ANB} = \alpha$ không đổi.
Vậy N di chuyển trên cung chứa góc α dựng trên đoạn thẳng AB.

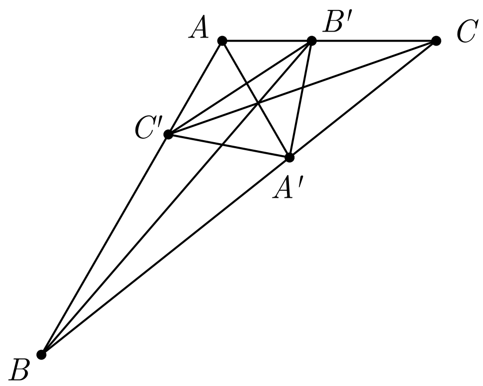
(b) Gọi K là giao điểm của tiếp tuyến tại A, B của (O). Khi đó K thuộc trục đẳng phương của $(C), (D)$ nên NP luôn qua K cố định. Ta có thể chứng minh kết quả này để phù hợp với kiến thức lớp 9 như sau :
Gọi P_1 là giao điểm của KN với (C) và P_2 là giao điểm của KN với (D). Khi đó :

$$KP_1 \cdot KN = KA^2 = KB^2 = KP_2 \cdot KN$$

Từ đây suy ra $P_1 \equiv P_2 \equiv P$. ❒

Bài 1.5 Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120°$ và các đường phân giác AA', BB', CC'. Tính $\widehat{B'A'C'}$.

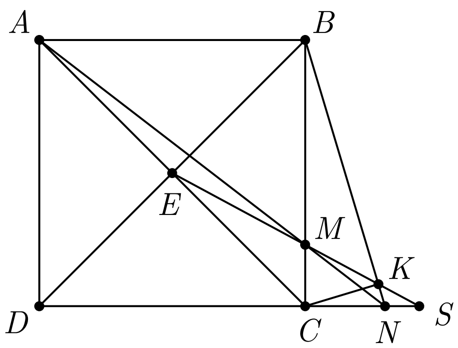
Lời giải



Gọi Ax là tia đối của tia AB. Khi đó, $\widehat{CAx} = 60°$ nên AC là phân giác ngoài đỉnh A của tam giác $AA'B$. Mặc khác, BB' là phân giác trong của tam giác này nên B' chính là tâm bàng tiếp trong góc B của tam giác $AA'B$.
Suy ra $A'B'$ là phân giác $\widehat{AA'C}$.
Chứng minh tương tự, ta có $A'C'$ là phân giác $AA'B$. Vì vậy $\widehat{B'A'C'} = 90°$. ❒

Bài 1.6 Cho hình vuông $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại E. Một đường thẳng đi qua A cắt cạnh BC ở M và cắt đường thẳng CD ở N. Gọi K là giao điểm của EM và BN. Chứng minh rằng $CK \perp BN$.

Lời giải



Bỏ qua trường hợp đơn giản $EM \parallel CD$. Kéo dài EM cắt CD tại S. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ACN với cát tuyến (EMS) và tam giác BCN với cát tuyến (MKS) :

$$\frac{MA}{MN} \cdot \frac{SN}{SC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$$

$$\frac{MC}{MB} \cdot \frac{KB}{KN} \cdot \frac{SN}{SC} = 1$$

Từ đây suy ra :

$$\frac{MA}{MN} = \frac{MC}{MB} \cdot \frac{KB}{KN}$$

Áp dụng định lý Thales, ta thấy rằng :

$$\frac{MA}{MN} = \frac{MB}{MC} = \frac{AB}{CN} = \frac{BC}{CN}$$

Do đó,

$$\frac{BC^2}{NC^2} = \frac{KB}{KN}$$

Gọi K' là cân đường cao kẻ từ C của tam giác BCN thì ta có kết quả quen thuộc :

$$\frac{BC^2}{NC^2} = \frac{K'B}{K'N}$$

K và K' chia trong đoạn BN theo cùng một tỷ số nên trùng nhau.
Điều này chứng tỏ $CK \perp BN$. ❐

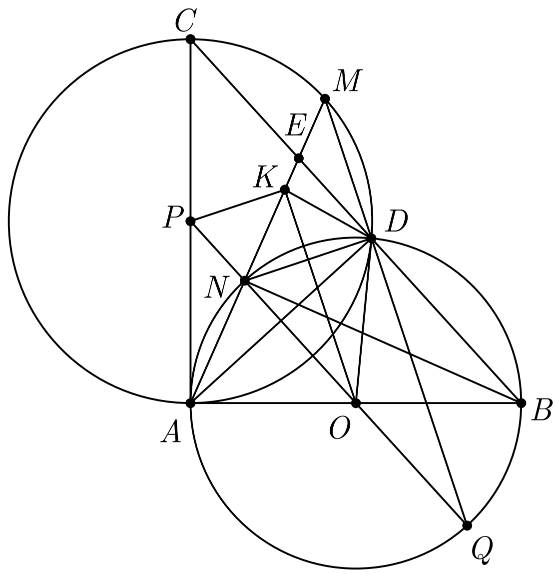
Bài 1.7 Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ $(AB < AC)$. Đường tròn $(O; r)$ đường kính AB và đường tròn $(P; R)$ đường kính AC cắt nhau ở D và A.

(a) Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ DC, AM cắt (O) tại N, cắt BC tại E. Chứng minh $\triangle ABE$ cân và các điểm O, N, P thẳng hàng.

(b) Dựng đường kính NQ của (O). Chứng minh Q, D, M thẳng hàng.

(c) Gọi K là trung điểm MN. Chứng minh $PK \perp OK$.

Lời giải



(a) Với chú ý rằng AB là tiếp tuyến tại A của (P), ta có

$$\begin{aligned} \widehat{BAE} &= \widehat{BAD} + \widehat{DEA} = \widehat{ACD} + \widehat{CAE} \\ &= \widehat{BEA} \end{aligned}$$

Suy ra tam giác ABE cân tại B.
Do đó N vừa là chân đường cao vừa là trung điểm AE.
Từ đây suy ra P, N, O thẳng hàng.
(b) Từ giả thiết suy ra $\widehat{NDQ} = 90°$
Mặt khác :

$$\widehat{DNM} + \widehat{DMN} = \widehat{DBA} + \widehat{DCA} = 90°$$

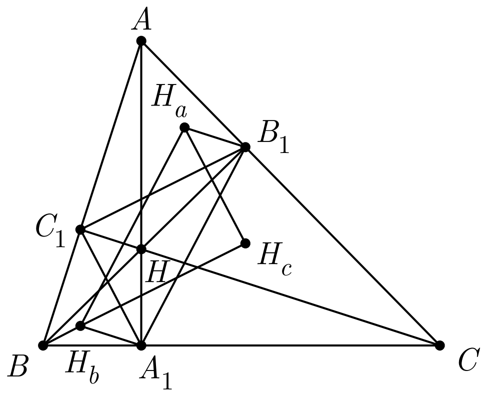
Suy ra $\widehat{MDN} = 90°$. Vì vậy Q, D, M thẳng hàng.
(c) Ta có K là trung điểm MN nên $KN = KD$. Lại có $ON = OD$ nên KO là đường trung trực của ND hay $KO \parallel MD$. Do đó

$$\widehat{OKA} = \widehat{DMA} = \widehat{DCA} = \widehat{OPA}$$

Vì vậy tứ giác $OKPA$ nội tiếp. Suy ra $\widehat{OKP} = 90°$ hay $OK \perp PK$. ❒

$\boxed{\textbf{Bài 1.8}}$ Tam giác ABC nhọn có 3 đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt nhau tại trực tâm H. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm của các tam giác $AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$, hãy chứng minh rằng $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle H_aH_bH_c$.

Lời giải



Trước hết xin phát biểu và không chứng minh một bổ đề quen thuộc : Với tam giác XYZ có trực tâm Q thì $QX = YZ \cot X$.
Áp dụng bổ đề trên, suy ra :

$$B_1H_a = AC_1 \cdot \cot \widehat{AB_1C_1} = AC_1 \cdot \cot \widehat{ABC}$$

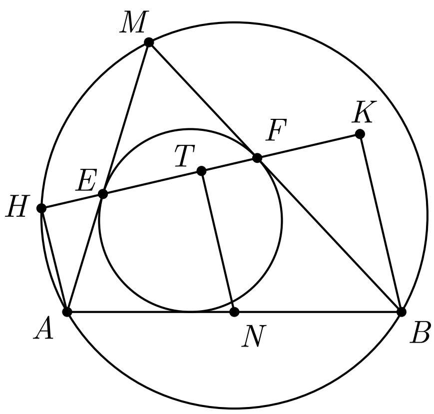
(do $\widehat{AB_1C_1} = \widehat{ABC}$, B_1C_1BC nội tiếp)

$$A_1H_b = BC_1 \cdot \widehat{BA_1C_1} = BC_1 \cdot \cot \widehat{BAC}$$

(do $\widehat{BA_1C_1} = \widehat{BAC}$, ACA_1C_1 nội tiếp)
Mà $\dfrac{AC_1}{BC_1} = \dfrac{AC_1}{CC_1} \cdot \dfrac{CC_1}{BC_1} = \dfrac{\cot \widehat{BAC}}{\cot \widehat{ABC}}$ nên $B_1H_a = A_1H_b$. Hơn nữa, $B_1H_a \parallel A_1H_b$ (cùng vuông góc với AB). Suy ra $A_1B_1H_aH_b$ là hình bình hành.
Từ đó có được $H_aH_b = A_1B_1$. Làm tương tự với hai cạnh còn lại, ta có hai tam giác $H_aH_bH_c$ và $A_1B_1C_1$ bằng nhau theo trường hợp cạnh-cạnh-cạnh. ❒

Bài 1.9 Cho dây cung AB cố định trên (O) và $\widehat{AOB} = 120°$. M là một điểm di động trên cung lớn AB, đường tròn nội tiếp tam giác MAB tiếp xúc với MA, MB tại E, F. Chứng minh rằng EF luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải



Gọi N là trung điểm BC và H, K, T lần lượt là hình chiếu của A, B, N lên EF. Theo định lý về đường trung bình hình thang thì :

$$NT = \frac{AH + BK}{2}$$

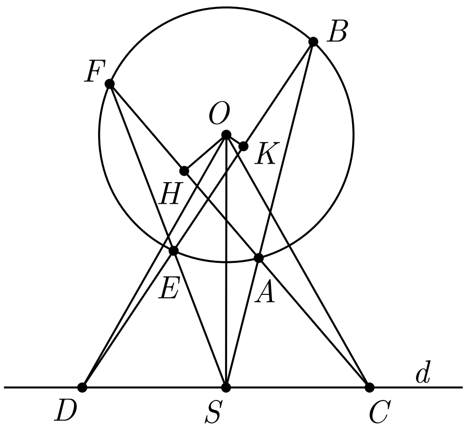
Từ giả thuyết đề bài suy ra $\widehat{AMB} = 60^\circ$ nên tam giác MEF đều. Từ đây ta có AFH, BFK đều là nửa tam giác đều. Do đó, $AH = \frac{1}{2}AE, BK = \frac{1}{2}BF$. Suy ra,

$$NT = \frac{AE + BF}{4}$$

Nhưng rõ ràng $AE + BF = AB$ nên $NT = \frac{AB}{4}$ không đổi và $NT \perp EF$.
Vậy EF luôn tiếp xúc với đường tròn $\left(N; \frac{AB}{4}\right)$ cố định. ❐

Bài 1.10 Cho đường tròn (O) và đường thẳng d nằm ngoài đường tròn. Gọi S là hình chiếu vuông góc của O lên d. Vẽ các cát tuyến SAB, SEF. AF, BE lần lượt cắt d tại C, D. Chứng minh S là trung điểm của CD.

Lời giải



Từ O hạ các đường vuông góc xuống AF, BE với H, K là chân các đường vuông góc đó. Khi đó, H, K lần lượt là trung điểm AF, BE. Vì hai tam giác SAF, SEB đồng dạng và SH, SK là trung tuyến của các tam giác đó nên $\triangle SAH \backsim \triangle SEK$.
Suy ra $\widehat{SHA} = \widehat{SKE}$.
Mà $OHSC, OKSD$ nội tiếp nên $\widehat{SHA} = \widehat{SOC}, \widehat{SKE} = \widehat{SOD}$. Do đó, $\widehat{SOC} = \widehat{SOD}$. Tam giác COD có OS vừa là đường cao vừa là phân giác nên cân tại O. Vì thế, OS cũng chính là trung tuyến tức S là trung điểm CD. ❐

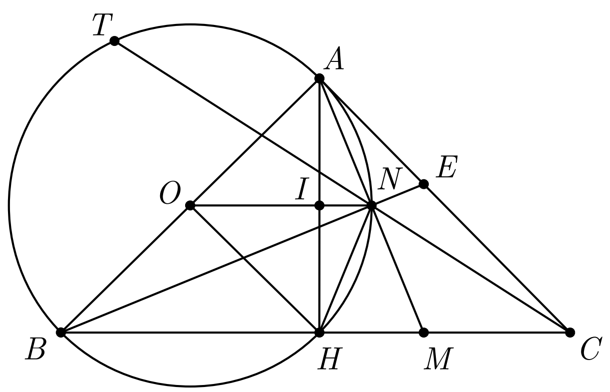
Bài 1.11 Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH và đường phân giác BE của tam giác ABC ($H \in BC, E \in AC$). Đường thẳng qua A vuông góc với BE cắt BC, BE lần lượt tại M, N.

(a) Chứng minh tứ giác $ANHB$ nội tiếp một đường tròn. Gọi đường tròn đó là (O).

(b) Đường thẳng CN cắt (O) tại T ($T \neq N$). Chứng minh rằng : $CH \cdot BC = CN \cdot CT$.

(c) Gọi I là giao điểm của ON và AH. Chứng minh rằng : $\dfrac{1}{4HI^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

Lời giải



(a) Ta có $\widehat{ANB} = \widehat{AHB} = 90^\circ$ nên tứ giác $ANHB$ nội tiếp đường tròn $\left(O; \dfrac{AB}{2}\right)$.

(b) $CH \cdot BC = CN \cdot CT = \mathcal{P}_{M/(O)}$.

(c) Xét tam giác ABM có BN vừa là đường cao, vừa là đường phân giác trong. Do đó tam giác ABM cân tại B. Suy ra N là trung điểm AM.

Lại có AB là một đường kính của (O) nên O là trung điểm AB. Vì vậy I là trung điểm AH hay $AH = 2HI$. Từ đó ta có

$$\frac{1}{4HI^2} = \frac{1}{AH^2}$$

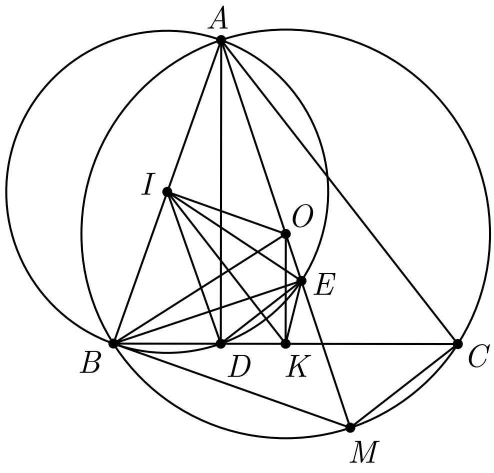
Vậy ta cần chứng minh

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

Mà đẳng thức này hiển nhiên đúng theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC. Ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 1.12 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có đường cao AD. Gọi E là hình chiếu của B trên AO, K là trung điểm của BC, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABDE$. Chứng minh rằng IK là đường trung trực của DE.

Lời giải



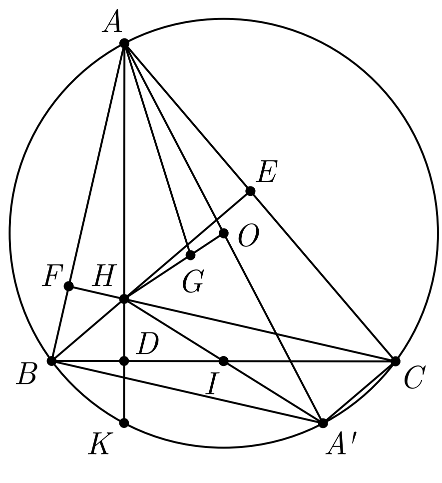
Tứ giác $BDEA$ nội tiếp đường tròn đường kính AB nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác này là trung điểm AB.
Ta có I và K là trung điểm AB, AC nên $OI \perp AB$ và $OK \perp BC$. Suy ra ngũ giác $BIOEK$ nội tiếp đường tròn đường kính OB.
Vì vậy mà $\widehat{EIK} = \widehat{EBK} = \widehat{EBD} = \dfrac{1}{2}\widehat{EID}$ hay IK là phân giác của $\widehat{DIE}$.
Lại có $ID = IE$ nên tam giác IDE cân tại I. Do đó IK là trung trực của DE. ❒

Bài 1.13 Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H.

(a) Kẻ đường kính AA' của (O), I là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, I, A' thẳng hàng.

(b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng $S_{AHG} = 2S_{AOG}$.

Lời giải

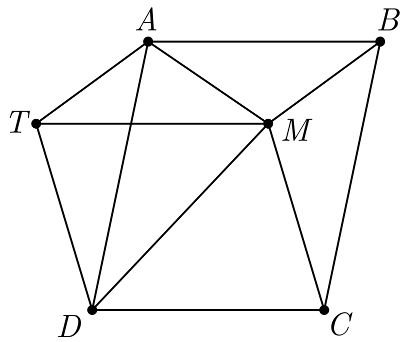


(a) Ta có $BA' \parallel CH$ (cùng vuông góc với AB) và $CA' \parallel BH$(cùng vuông góc với AC) nên tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành, do đó HA' và BC cắt nhau tại trung điểm mỗi đường hay I

đồng thời là trung điểm $A'H$. Vậy H, I, A' thẳng hàng.
(b) Ta có H, G, O thẳng hàng và $HG = 2GO$ (đường thẳng Euler trong tam giác ABC) nên $S_{AHG} = 2S_{AGO}$. ❒

Bài 1.14 Cho M là một điểm nằm bên trong hình bình hành $ABCD$. Khi đó, hãy chứng minh bất đẳng thức
$$MA \cdot MC + MB \cdot MD \leqslant AC \cdot BC$$

Lời giải.



Dựng hình bình hành $ABMT$. Khi đó MT song song và bằng AB, suy ra MT cũng song song và bằng với CD nên $MCDT$ cũng là hình bình hành.
Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy cho tứ giác $AMDT$:

$$MT \cdot AD \leqslant MA \cdot DT + MD \cdot AT$$

Chỉ cần thay $MT = AB, AD = BC, DT = MC, AT = MD$, ta có ngay điều cần chứng minh. ❒

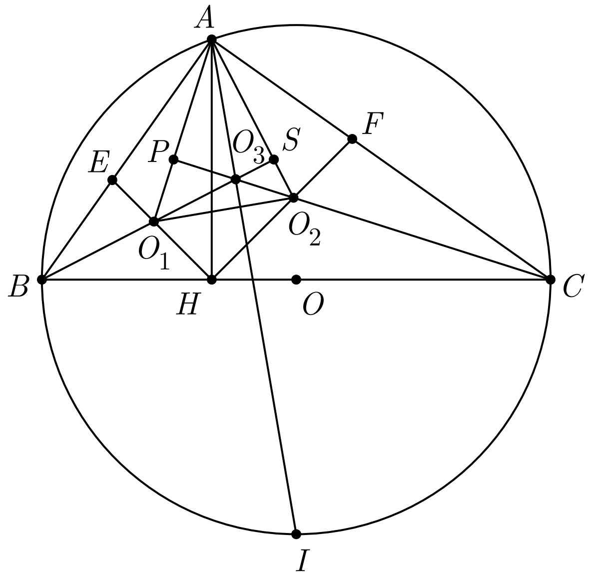
Bài 1.15 Cho đường tròn $(O; R)$, đường kính BC. A là điểm di động trên nửa đường tròn $(A \neq B, C)$. Trên nửa đường tròn kia lấy I là điểm chính giữa cung BC. Dựng $AH \perp BC$ tại H. Gọi $(O_1; R_1); (O_2; R_2); (O_3; R_3)$ lần lượt là các đường tròn nội tiếp các tam giác ABH, ACH, ABC.

(a) Chứng minh $AI \perp O_1O_2$.

(b) HO_1 cắt AB tại E, HO_2 cắt AC tại F. Chứng minh $\triangle O_1O_2H \backsim \triangle ABC$.

(c) Tìm vị trí điểm A để $R_1 + R_2 + R_3$ lớn nhất.

Lời giải



(a) Gọi S, P lần lượt là giao điểm của O_1O_3 với AO_2 và O_2O_3 với AO_2.
Ta có B, O_1, O_3 thẳng hàng nên $\widehat{ABS} + \widehat{BAS} = \widehat{BAH} + 2\widehat{ABS} = 90°$. Suy ra $O_1S \perp AO_2$.
Tương tự, ta có $O_2P \perp AO_1$.
Do đó O_3 là trực tâm tam giác AO_1O_2 hay $AI \perp O_1O_2$.
(b) Ta có $\triangle BO_1H \backsim \triangle AO_2H$ nên

$$\frac{O_1H}{O_2H} = \frac{BH}{AH} = \frac{AB}{AC}$$

Suy ra $\triangle O_1HO_2 \backsim \triangle BAC$.
(c) Theo một kết quả quen thuộc ta có :

$$\begin{cases} R_3 = \dfrac{AB + AC - BC}{2} \\ R_2 = \dfrac{AH + CH - AC}{2} \\ R_1 = \dfrac{AH + BH - AB}{2} \end{cases}$$

Vì vậy $R_1 + R_2 + R_3 = AH \leqslant R$.
Do đó $R_1 + R_2 + R_3$ lớn nhất $\Leftrightarrow A$ là điểm chính giữa cung BC. ❐

Bài 1.16 Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$. C là một điểm trên nửa đường tròn ($C \neq A, B$). Dựng $CH \perp AB$ tại H. E, F lần lượt là hình chiếu của H trên CA, CB.

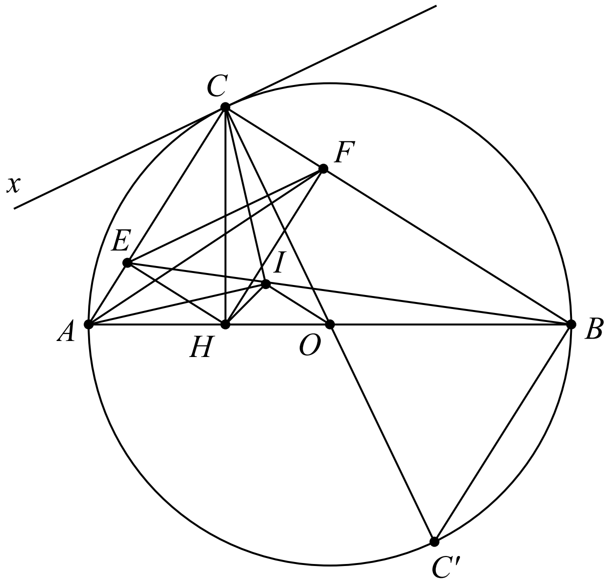
(a) Chứng minh EF song song với tiếp tuyến tại C của (O).

(b) Chứng minh tứ giác $ABFE$ nội tiếp.

(c) Tìm vị trí điểm C để chu vi và diện tích tam giác ABC lớn nhất.

(d) Chứng minh khi C di động, tâm I của đường tròn nội tiếp $\triangle OCH$ di chuyển trên đường cố định.

Lời giải



(a) Gọi tiếp tuyến của (O) tại C là Cx.
Ta có $\widehat{xCA} = \widehat{CBA} = 90^\circ - \widehat{HCB} = \widehat{CHF}$.
Mặt khác tứ giác $CEHF$ là hình chữ nhật nên ta có $\widehat{CHF} = \widehat{CEF} \Rightarrow \widehat{xCA} = \widehat{CEF}$.
Suy ra $Cx \parallel EF$.
(b) Theo chứng minh câu **(a)** ta có $\widehat{CEF} = \widehat{CBA}$ nên tứ giác $AEFB$ nội tiếp.
(c) Ta có $(CA+CB)^2 \leqslant 2(CA^2+CB^2) = 2AB^2 = 8R^2$. Suy ra $CA + CB \leqslant 2\sqrt{2}R$.
Vì vậy

$$CA + CB + AB \leqslant \left(2\sqrt{2} + 2\right) R$$

Lại có

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} CA \cdot CB \leqslant \frac{1}{8}(CA+CB)^2 \leqslant \frac{1}{8} \cdot 8R^2 = R^2$$

Trong cả hai trường hợp, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa cung AB.
Vậy khi C nằm chính giữa cung AB thì chu vi và diện tích tam giác ABC lớn nhất.
(d) Không mất tính tổng quát, giả sử $CA \leqslant CB$.
Ta sẽ chứng minh $\widehat{AIO} = 135^\circ$.
Thật vậy. Kẻ đường kính CC' của (O). Ta có $\widehat{ACH} = \widehat{C'CB}$ nên CI đồng thời là phân giác $\widehat{ACB}$.
Suy ra $\widehat{ACI} = \widehat{IHO} = 45^\circ$ nên tứ giác $AHIC$ nội tiếp.
Vì vậy

$$\begin{aligned}\widehat{AIO} &= \widehat{AIH} + \widehat{HIO}\\ &= \widehat{ACH} + 90^\circ + \widehat{HCI}\\ &= 90^\circ + \widehat{ACI} = 135^\circ\end{aligned}$$

Do đó I luôn nằm trên cung chứa góc 135° dựng trên đoạn OA và thuộc nửa mặt phẳng bờ AB chứa C.
Tương tự với $CA \geqslant CB$ ta có I luôn thuộc cung chứa góc 135° dựng trên đoạn OB và nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa C.
Tóm lại khi C di động trên cung AB thì I luôn di động trên cung chứa góc 135° dựng trên

đoạn OA hoặc OB nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa C (trừ hai điểm A và B). ❒

Chú ý. Câu **(c)** của bài toán này có một cách giải khác có thể áp dụng cho trường hợp tam giác ABC không vuông :

Bài 1.toán. Cho đường tròn $(O; R)$ có dây BC cố định, tìm giá trị lớn nhất của $AB + AC$ với A là điểm di động trên một cung BC của (O).

Lời giải

Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho $AC = AM$. Suy ra $\triangle AMC$ cân tại A

Do đó $\widehat{AMC} = \widehat{ACM} = \dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ nên M di chuyển trên cung chứa góc $\dfrac{\widehat{BAC}}{2}$ dựng trên AB và nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC với A.

Suy ra $AB + AC$ lớn nhất $\Leftrightarrow AM$ lớn nhất $\Leftrightarrow BC \perp CM$.

Khi đó A là điểm chính giữa cung BC của (O).

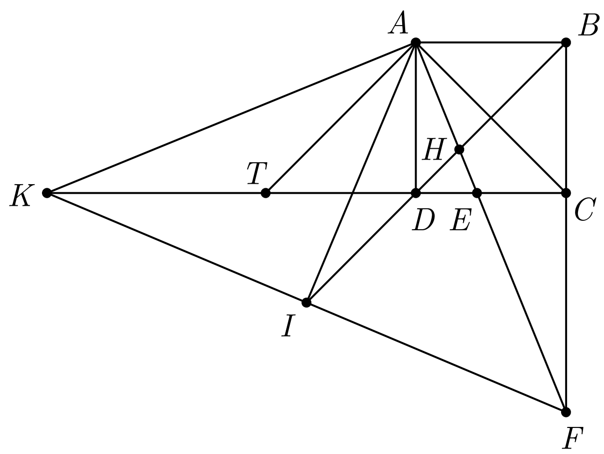
Bài 1.17 Cho hình vuông $ABCD$ cố định, cạnh a. E là điểm di chuyển trên cạnh CD. Đường thẳng AE và BC cắt nhau tại F. Đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K.

(a) Chứng minh $AF(CK - CF) = BD \cdot FK$.

(b) Chứng minh rằng trung điểm I của KF di động trên một đường thẳng cố định khi E di động trên CD.

(c) Chỉ ra vị trí của E để độ dài EK ngắn nhất.

Lời giải



(a) Ta có

$$\widehat{KAD} = 90^\circ - \widehat{DAF} = 90^\circ - \widehat{AFB} = \widehat{FAB}$$

Suy ra $\triangle ABF = \triangle ADK$. Do đó $AK = AF$ hay $\triangle FAK$ vuông cân tại A.

Trên tia CD lấy điểm T sao cho $AT = AC$ thì $\triangle ATK = \triangle ACF$.

Do đó $KT = CF \Rightarrow CK - CF = CT$.

Vì vậy

$$\begin{aligned} AF(CK - CF) &= AF \cdot CT \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} KF \cdot \sqrt{2} AC \\ &= BD \cdot KF \end{aligned}$$

(b) Tam giác AKF vuông cân tại A có I là trung điểm KF nên $AI \perp KF$.
Suy ra tứ giác $ADIK$ nội tiếp. Do đó $\widehat{IAD} = \widehat{IKD}, \widehat{AID} = \widehat{AKD}$.
Vì vậy $\widehat{IAD} + \widehat{AID} = \widehat{AKF} = 45^\circ = \widehat{ADB}$ nên I luôn nằm trên đường thẳng BD.
(c) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có

$$DE \cdot EK = AE^2 \Rightarrow EK = \frac{AE^2}{DE} \leqslant \frac{AC^2}{CD} = \frac{2a^2}{a} = 2a$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi E trùng với C. ❒

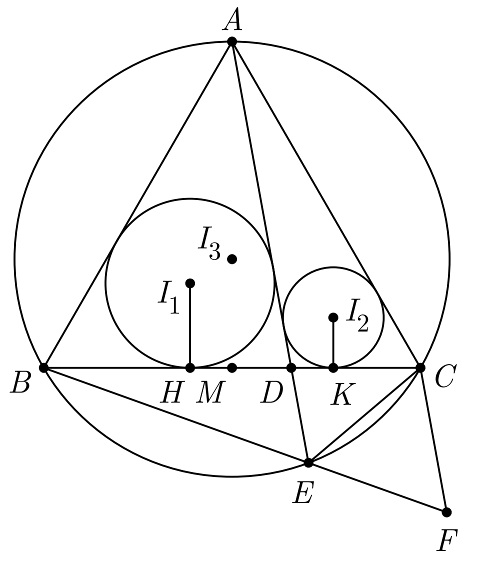
Bài 1.18 Cho tam giác ABC đều. Gọi D là điểm di động trên cạnh BC. Gọi $(I_1; R_1); (I_2; R_2); (I_3; R_3)$ lần lượt là các đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, ACD, ABC và $(I_3; R)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tia AD cắt $(I_3; R)$ tại E.

(a) Chứng minh $\dfrac{1}{ED} = \dfrac{1}{EB} + \dfrac{1}{EC}$.

(b) Tìm vị trí của E để $\dfrac{1}{ED} + \dfrac{1}{EB} + \dfrac{1}{EC}$ nhỏ nhất. Chứng minh khi ấy S_{ABEC} lớn nhất.

(c) Tìm vị trí điểm D để $R_1 + R_2$ lớn nhất.

Lời giải



(a) Ta chứng minh $EA = EB + EC$
Thật vậy. Trên tia đối của tia EB lấy điểm F sao cho $EF = EC$. Khi đó $\triangle ECF$ đều nên suy

ra $\triangle BCF = \triangle ACE$.
Vì vậy mà $EA = FB = EB + EF = EB + EC$.
Từ kết quả trên ta suy ra $\dfrac{1}{EB} + \dfrac{1}{EC} = \dfrac{EA}{EB \cdot EC}$
Ta cần chứng minh $\dfrac{1}{ED} = \dfrac{EA}{EB.EC}$ hay $ED \cdot EA = EB \cdot EC$, điều này đúng do $\triangle EDC \backsim \triangle EBA$.
(b) Từ chứng minh câu **(a)** ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{EB} + \frac{1}{EC} + \frac{1}{ED} &= \frac{2EA}{EB \cdot AC} \\ &\geqslant \frac{8EA}{(EB+EC)^2} = \frac{8}{EA} \\ &\geqslant \frac{4}{R}\end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow EB = EC$ hay E là điểm chính giữa cung nhỏ BC.
Khi E là trung điểm cung nhỏ BC của (ABC) thì khoảng cách giữa E và BC lớn nhất, hay tam giác BEC có diện tích lớn nhất. Khi đó diện tích tứ giác $ABEC$ đạt giá trị lớn nhất.
(c) Gọi độ dài cạnh tam giác ABC là a.
Kẻ I_1H, I_2K vuông góc với BC ($H, K \in BC$), gọi M là trung điểm BC.
Ta có

$$\begin{aligned}HK = DH + DK &= \frac{AD + BD - AB}{2} + \frac{AD + CD - AC}{2} \\ &= \frac{2AD - a}{2}\end{aligned}$$

Theo định lí Thales thì

$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{BH}{BM} = \frac{2BH}{a} \text{ và } \frac{R_2}{R_3} = \frac{CK}{CM} = \frac{2CK}{a}$$

Từ đó ta có các đẳng thức sau

$$\begin{aligned}\frac{R_1 + R_2}{R_3} &= \frac{2(a - HK)}{a} = \frac{3a - 2AD}{a} \\ R_1 + R_2 &= \frac{(3a - 2AD)R_3}{a}\end{aligned}$$

Từ đẳng thức cuối cùng suy ra $R_1 + R_2$ lớn nhất khi AD bé nhất. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi D là trung điểm BC. ❒

Bài 1.19 Cho $(O; R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Từ M dựng hai tiếp tuyến MA, MB đối với $(O; R)$. Gọi E là trung điểm của BM; H là giao điểm của OM với AB. Đoạn thẳng AE cắt $(O; R)$ tại C.

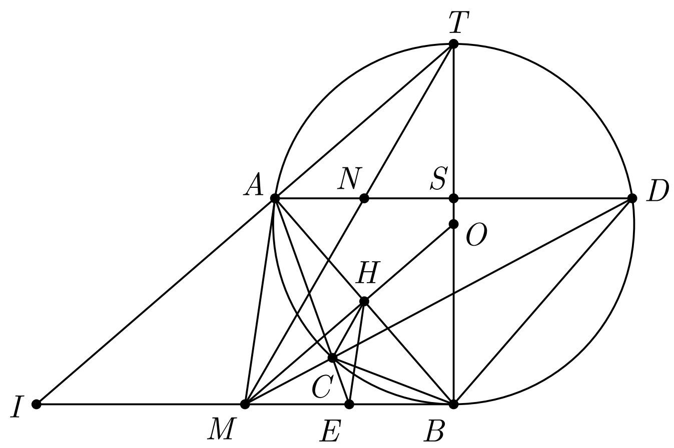
(a) Chứng minh tứ giác $HCEB$ nội tiếp.

(b) Chứng minh $\triangle EMC \backsim \triangle EAM$.

(c) MC cắt (O) tại D. Tính DB theo R biết $OM = 3R$.

(d) OB cắt (O) tại T và cắt AD tại S. MT giao SA tại N. Chứng minh N là trung điểm AS.

Lời giải



(a) Ta có $EH \parallel AM$ nên $\widehat{HEA} = \widehat{EAM} = \widehat{CBA}$. Suy ra tứ giác $HCEB$ nội tiếp.
(b) Ta có
$$EM^2 = EB^2 = EC \cdot EA$$
Suy ra
$$\frac{EM}{EC} = \frac{EA}{EM}$$
Mặt khác, hai tam giác EMC và EAM có góc E chung. Suy ra $\triangle EMC \backsim \triangle EAM$.
(c) Từ câu **(b)**, ta có
$$\widehat{ADM} = \widehat{MAC} = \widehat{EMD}$$
Do đó $AD \parallel MB$. Suy ra $OB \perp AD$ hay $BA = BD$.
Ta có $OB^2 = OH \cdot OM$, suy ra
$$OH = \frac{OB^2}{OM} = \frac{R^2}{3R} = \frac{R}{3}$$
Do đó
$$\begin{aligned} BD = AB = 2HB &= 2\sqrt{OB^2 - OH^2} \\ &= 2\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{9}} = \frac{4\sqrt{2}R}{3} \end{aligned}$$

(d) Gọi I là giao điểm của BM với AT.
Ta có $\triangle BAI$ vuông tại A mà $AM = MB$. Suy ra M là trung điểm của IB. Mà $MB \parallel AD$, suy ra

$$\frac{SN}{MB} = \frac{TN}{TM} = \frac{AN}{MI}$$

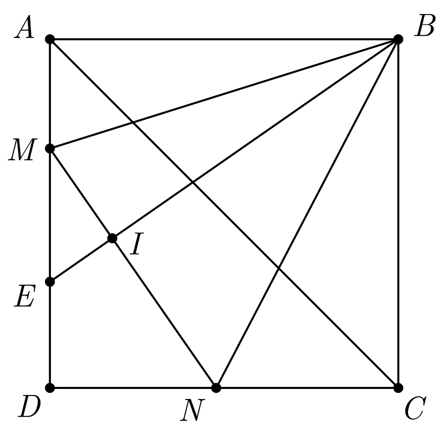
Vì vậy $AN = NS$. ❐

Bài 1.20 Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. E là điểm di động trên cạnh AD ($E \neq A$). Tia phân giác của $\widehat{EBA}, \widehat{EBC}$ cắt DA, DC tại M, N.

(a) Chứng minh $BE \perp MN$.

(b) Tìm vị trí điểm E để S_{DMN} lớn nhất.

Lời giải



(a) Gọi I là điểm đối xứng với A qua BM. Khi đó $I \in BE$ và $BI = a$.
Tương tự, nếu gọi I' là điểm đối xứng với C qua BN thì $I' \in BE$ và $BI' = a$. Suy ra $I \equiv I'$.
Vì vậy mà $I \equiv I'$ và $\widehat{BIM} = \widehat{BIN} = 90°$. Do đó $I \in MN$ và MN vuông góc với BE tại I.
(b) Từ câu **(a)**, ta suy ra $AM + CN = MN$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} 2\sqrt{DM \cdot DN} &\leqslant DM + DN \\ &= 2a - (AM + CN) \\ &= 2a - MN \\ &= 2a - \sqrt{DM^2 + DN^2} \\ &\leqslant 2a - \sqrt{2DM \cdot DN} \end{aligned}$$

Do đó

$$2\sqrt{2S_{DMN}} \leqslant 2a - \sqrt{4S_{DMN}}$$

Vì vậy

$$S_{DMN} \leqslant \left(\frac{a}{3 + 2\sqrt{2}}\right)^2$$

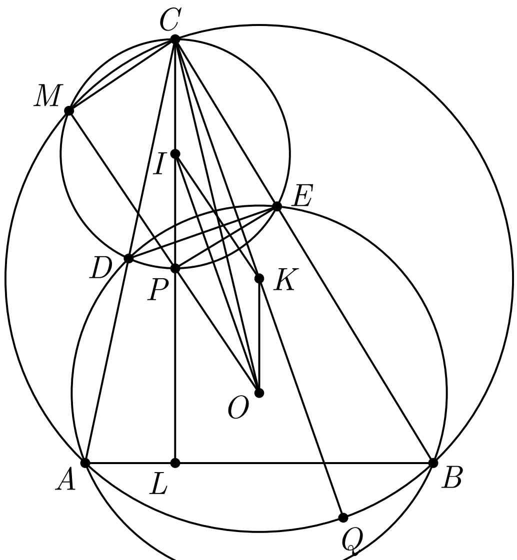
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow DM = DN \Leftrightarrow E \equiv D$.

Vậy diện tích tam giác DMN có giá trị lớn nhất bằng $\left(\dfrac{a}{3+2\sqrt{2}}\right)^2$ khi $E \equiv D$. ❐

Bài 1.21 Cho $\triangle ABC$. Một đường tròn (O) qua A và B cắt AC và BC ở D và E. M là giao điểm thứ hai của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và DEC. Chứng minh rằng $\widehat{OMC} = 90°$.

Lời giải

(i) *Cách 1.*

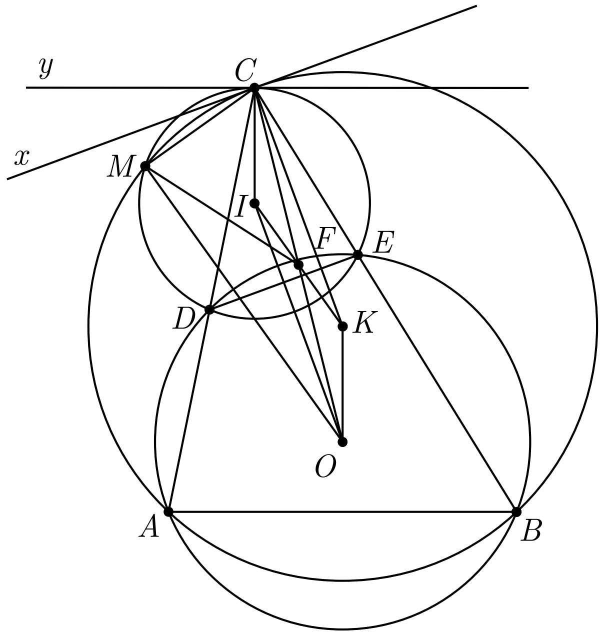


Gọi I, K lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác CDE và ABC.
Kẻ đường kính CP của (I) cắt AB tại L. Suy ra $PM \perp CM$. (1)
Ta có

$$\widehat{ACL} + \widehat{CAB} = \widehat{DEP} + \widehat{DEC} = 90°$$

Do đó $CL \perp AB$ hay $PC \parallel OK$.
Ta có $OI \perp DE$ (tính chất đường nối tâm của 2 đường tròn cắt nhau) và $CK \perp DE$ (kẻ đường kính CQ của (K), chứng minh tương tự $CL \perp AB$)
Suy ra $CIOK$ là hình bình hành. Mà I là trung điểm CP nên $PIKO$ cũng là hình bình hành. Do đó $PO \parallel IK$.
Mà $IK \perp CM$ (tính chất đường nối tâm của 2 đường tròn cắt nhau) nên $OP \perp CM$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra O, M, P thẳng hàng, do đó $\widehat{COM} = 90°$. ❐

(ii) *Cách 2.*



Gọi I, K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CDE, ABC. Dựng tiếp tuyến Cx, Cy của các đường tròn (ABC) và (CDE).

Ta có :

$$\widehat{xCA} = \widehat{CBA} = \widehat{CDE}$$

Suy ra $Cx \parallel DE$. Do đó $DE \perp CK$ hay $CK \parallel OI$.

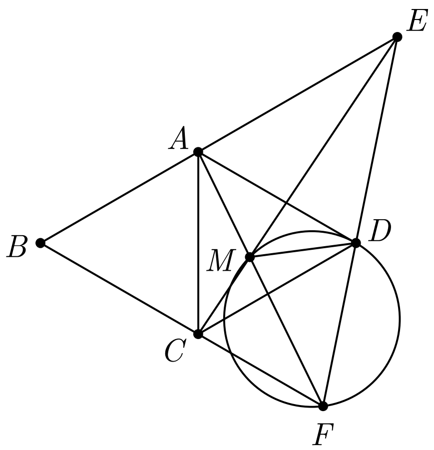
Tương tự, ta có $CI \parallel OK$ nên $CIOK$ là hình bình hành.

Gọi F là trung điểm OC thì F cũng là trung điểm IK. Mà IK là đường trung trực của CM nên $FM = FC = \dfrac{OC}{2}$

Suy ra tam giác COM vuông tại M. ❐

Bài 1.22 Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{ABC} = 60°$. Một đường thẳng qua D không cắt hình thoi nhưng cắt các đường thẳng AB, BC lần lượt tại E, F. Gọi M là giao điểm của AF và CE. Chứng minh rằng AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác MDF.

Lời giải



Từ giả thiết ta có $AC = AD = CD$. Hai tam giác FCD và DAE đồng dạng, suy ra

$$\frac{CF}{AD} = \frac{CD}{AE}$$

Do đó

$$CF \cdot AE = AD \cdot CD = AC^2$$

Tương đương với

$$\frac{AC}{CF} = \frac{AE}{AC}$$

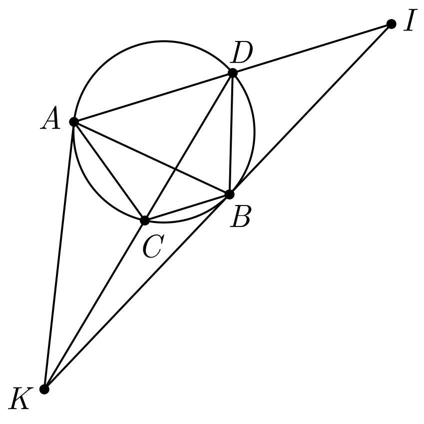
Lại có $\widehat{ACF} = \widehat{EAC}$, suy ra $\triangle ACF \backsim \triangle EAC$.
Từ đó ta có $\widehat{ACM} = \widehat{CFM}$.
Vì vậy $\triangle ACM \backsim \triangle AFC$. Suy ra

$$AD^2 = AC^2 = AM \cdot AF$$

Vậy AD tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác DMF. ❐

Bài 1.23 Cho đường tròn (O) và dây AD. Gọi I là điểm đối xứng với A qua D. Kẻ tiếp tuyến IB với đường tròn (O). Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A cắt IB ở K. Gọi C là giao điểm thứ hai của KD với đường tròn (O). Chứng minh rằng BC song song với AI.

Lời giải



Ta thấy rằng $ADBC$ là tứ giác điều hòa.
Từ đó, theo một bổ đề quen thuộc, ta có $AD \cdot BC = AC \cdot BD$.
Lại có $AD = DI$, suy ra

$$\frac{DB}{DI} = \frac{CB}{CA}$$

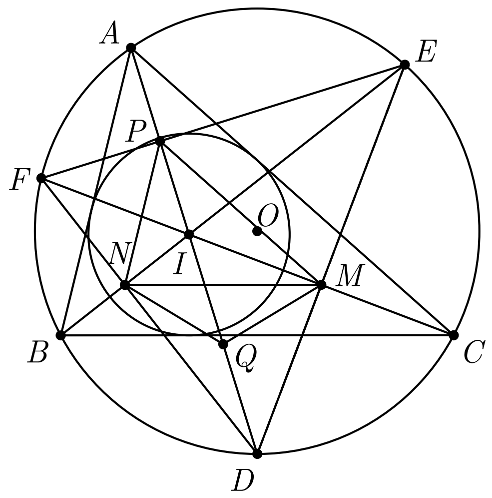
Chú ý rằng $\widehat{BDI} = \widehat{BCA}$, ta suy ra $\triangle BDI \backsim \triangle BCA$.
Vì vậy $\widehat{KBC} = \widehat{BAC} = \widehat{BID}$ hay $BC \parallel AI$. ❐

Bài 1.24 Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm O và ngoại tiếp đường tròn tâm I . AI, BI, CI cắt (O) lần lượt tại D, E, F. DE cắt CF tại M, DF cắt BE tại N.

(a) Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.

(b) Gọi Q là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle DMN$, P là giao điểm của AD và EF . Chứng minh các điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải



(a) Ta có

$$\widehat{NIM} + \widehat{NDM} = 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2} + \widehat{ACI} + \widehat{ABI}$$
$$= 90^\circ + \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB}}{2} = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác $INDM$ nội tiếp.
Do đó

$$\widehat{INM} = \widehat{IDM} = \widehat{ABE} = \widehat{CBE}$$

Vì vậy $MN \parallel BC$.
(b) Tương tự câu **(a)**, ta có $PN \parallel AB, PM \parallel AC$. Suy ra $\widehat{NPM} = \widehat{BAC}$.
Lại có

$$\widehat{NQM} = 2\widehat{NDM} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$$

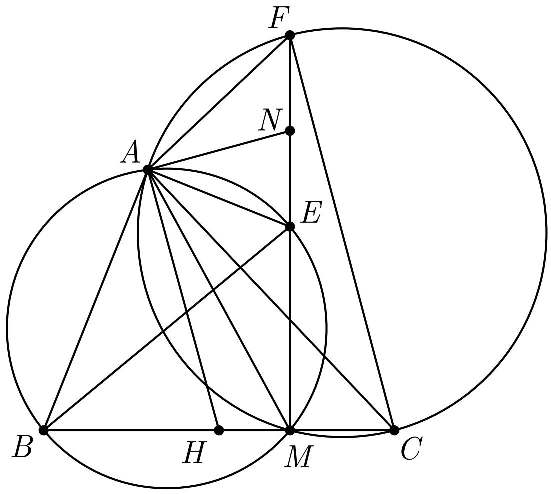
Do đó

$$\widehat{NPM} + \widehat{NQM} = \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

Vậy tứ giác $MPNQ$ nội tiếp. ❒

Bài 1.25 Cho $\triangle ABC$ cố định, M là điểm di động trên cạnh BC. Dựng đường kính BE của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABM$ và đường kính CF của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACM$. Gọi N là trung điểm EF. Chứng minh rằng khi M di động trên BC thì N di động trên một đường thẳng cố định.

Lời giải



Giả sử $AB < AC$, gọi H là trung điểm BC, M nằm giữa H và C
Ta có $\widehat{AEB} = \widehat{AMB} = \widehat{AFC}$ và $\widehat{BAE} = \widehat{CAF}$ nên suy ra

$$\widehat{AME} = \widehat{ABE} = \widehat{AMF}$$

Do đó M, E, F thẳng hàng. Từ đó ta có

$$\widehat{ABC} = \widehat{AEF}, \widehat{ACB} = \widehat{AFE}$$

Suy ra $\triangle ABC \backsim \triangle AEF$. Mà H, N lần lượt là trung điểm BC, EF nên $\triangle AHC \backsim \triangle ANF$. Do đó

$$\begin{aligned}\widehat{HAN} &= \widehat{HAC} + \widehat{CAN} + \widehat{NAF}\\ &= \widehat{CAF} = 90^\circ\end{aligned}$$

Vậy N luôn nằm trên đường thẳng đi qua A vuông góc với AH. ❒

Bài 1.26 Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 135^\circ, AB = a, AC = b$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $\widehat{BAM} = 45^\circ$. Tính độ dài AM theo a, b.

Lời giải
Lấy N trên BC sao cho $\widehat{BAM} = 90^\circ$. Áp dụng công thức độ dài đường phân giác, ta có

$$AN = \frac{\sqrt{2} \cdot AM \cdot b}{AM + b}, AM = \frac{\sqrt{2} \cdot AN \cdot a}{AN + a}$$

Suy ra

$$AN \cdot AM + b \cdot AN = \sqrt{2} \cdot AM \cdot b, AM \cdot AN + a \cdot AM = \sqrt{2} \cdot AN \cdot a$$

Trừ theo vế hai đẳng thức trên, ta có

$$b \cdot AN - a \cdot AM = \sqrt{2}\,(b \cdot AM - a \cdot AN)$$

Tương đương với

$$AN = \frac{AM\left(a + b\sqrt{2}\right)}{a\sqrt{2} + b}$$

Do đó

$$\frac{b\sqrt{2}}{AM+b} = \frac{a+b\sqrt{2}}{a\sqrt{2}+b}$$

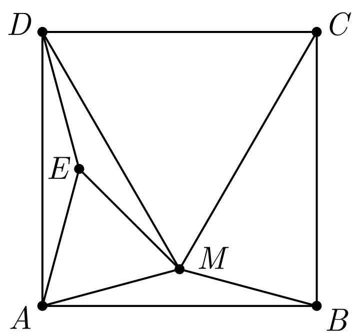
Vậy

$$AM = \frac{ab}{a+b\sqrt{2}}$$

❒

Bài 1.27 Cho hình vuông $ABCD$, lấy điểm M nằm trong hình vuông sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBA} = 15°$. Hỏi tam giác MCD là tam giác gì? Tại sao?

Lời giải



Dựng tam giác đều AME (E nằm trong tam giác ADM). Suy ra $\widehat{DAE} = \widehat{MAB} = 15°$.
Do đó $\triangle DEA = \triangle AMB$. Vì vậy $\widehat{DEA} = \widehat{AMB} = 150°$. Suy ra

$$\widehat{DEM} = 360° - \widehat{DEA} - \widehat{AEM} = 150°$$

Từ đó suy ra $\triangle DEM = \triangle DEA$ hay $DM = DA = DC$.
Tương tự ta có $CM = CD$.
Vậy $\triangle ABC$ là tam giác đều. ❒

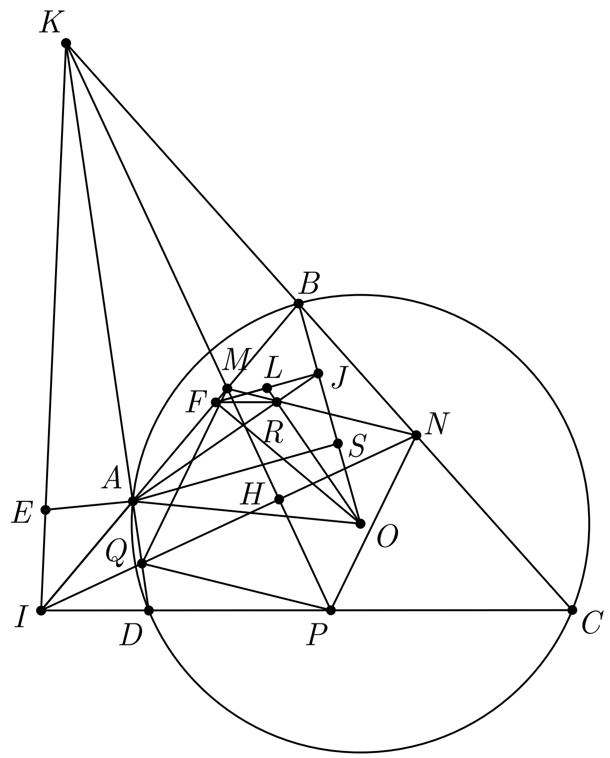
Bài 1.28 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp $(O; R)$ sao cho tia BA và tia CD cắt nhau tại I, các tia DA và CB cắt nhau ở K (I, K nằm ngoài (O)). Phân giác của góc $\widehat{BIC}$ cắt AD, BC lần lượt tại Q, N. Phân giác của góc $\widehat{AKB}$ cắt AB, AC lần lượt tại M, P.

(a) Chứng minh tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

(b) Chứng minh $IK^2 = ID \cdot IC + KB \cdot KC$.

(b) Gọi F là trung điểm của AB, J là hình chiếu của F trên OB, L là trung điểm của FJ. Chứng minh $AJ \perp OL$.

Lời giải



(a) Gọi H là giao điểm của KP và IN.

Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{IKH}+\widehat{KIH}&=\widehat{AKI}+\widehat{AIK}+\frac{1}{2}\widehat{DKC}+\frac{1}{2}\widehat{BIC}\\&=180^\circ-\widehat{BAD}+\frac{1}{2}\widehat{DKC}+\frac{1}{2}\widehat{BIC}\end{aligned}$$

Lại có

$$\widehat{DKC}=\widehat{BAD}-\widehat{ABK}=\widehat{BAD}-\widehat{ADC}$$
$$\widehat{BIC}=\widehat{BAD}-\widehat{ADI}=\widehat{BAD}-\widehat{ABC}$$

Suy ra

$$\widehat{IKH}+\widehat{KIH}=180^\circ-\frac{1}{2}(\widehat{ADC}+\widehat{ABC})=90^\circ$$

Do đó $\widehat{KHI}=90^\circ$.

Vì vậy các tam giác MIP và QKN cân do có đường cao đồng thời là đường phân giác.

Suy ra tứ giác $MNPQ$ có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm H của mỗi đường chéo nên tứ giác $MNPQ$ là hình thoi.

(b) Gọi E là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABK với IK.

Bằng một số biến đổi góc đơn giản, ta suy ra được tứ giác $IEAD$ nội tiếp.

Suy ra

$$ID\cdot IC=IA\cdot IB=IE\cdot IK$$
$$\text{và } KB\cdot KC=KA\cdot KD=KE\cdot IK$$

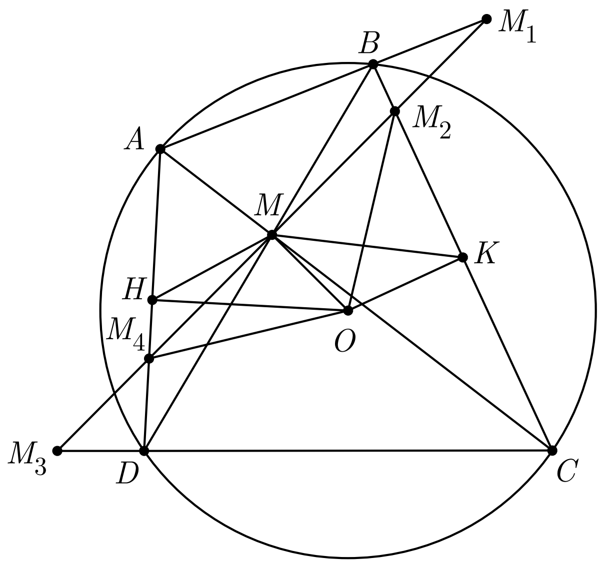
Cộng theo vế hai đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned}ID\cdot IC+KB\cdot KC&=IK(IE+KE)\\&=IK^2\end{aligned}$$

(c) Gọi R là giao điểm của AJ và OL. Kẻ $AS \perp BO\,(S \in BO)$ thì J là trung điểm BS
Ta có tứ giác $AFSO$ nội tiếp nên $\widehat{BAS} = \widehat{FOJ}$. Do đó $\triangle FJO \backsim \triangle BSA$.
Suy ra $\widehat{BAJ} = \widehat{FOL}$ hay tứ giác $AFRO$ nội tiếp.
Vì vậy $\widehat{ARO} = \widehat{AFO} = 90°$. ❒

Bài 1.29 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) có hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại M. Đường vuông góc với OM tại M cắt AB, BC, CD, DA lần lượt tại M_1, M_2, M_3, M_4. Chứng minh $M_1M_4 = M_2M_3$.

Lời giải



Không mất tính tổng quát, giả sử các điểm có vị trí tương đối như hình vẽ trên. Các trường hợp khác chứng minh hoàn toàn tương tự.
Kẻ OH và OK lần lượt vuông góc với AD, BC.
Tứ giác $OMHM_4$ nội tiếp nên $\widehat{M_4OM} = \widehat{AHM}$. Tương tự, ta có $\widehat{M_2OM} = \widehat{M_2KM}$.
Mặt khác $\triangle AMD \backsim \triangle BMC$ nên $\triangle AHM \backsim \triangle BKM$.
Suy ra $\widehat{AHM} = \widehat{M_2KM}$ hay $\widehat{M_4OM} = \widehat{M_2OM}$.
Vì vậy $\triangle M_2OM_4$ cân tại O. Do đó M là trung điểm M_2M_4.
Chứng minh tương tự, ta suy ra M là trung điểm M_1M_3.
Từ đó suy ra điều cần chứng minh. ❒

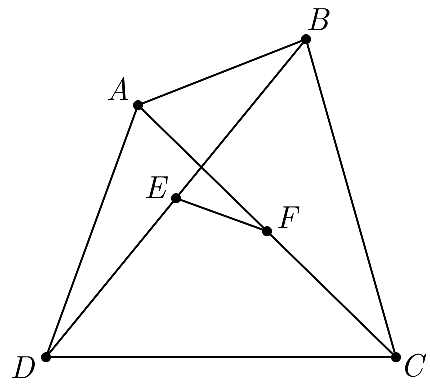
Nhận xét. Bài toán trên là một hệ quả trực tiếp của định lí con bướm. Định lí con bướm tổng quát được phát biểu như sau :
Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). P là giao điểm của AC và BD. Một đường thẳng qua P cắt (O) tại E, F; cắt AB, CD theo thứ tự tại G, H; cắt BC, AD theo thứ tự tại I, J. Khi đó :

$$\frac{1}{PE} - \frac{1}{PF} = \frac{1}{PG} - \frac{1}{PH} = \frac{1}{PI} - \frac{1}{PJ}$$

Bài 1.30 Cho tứ giác lồi $ABCD$ với E, F là trung điểm của BD và AC. Chứng minh rằng

$$AB^2 + CD^2 + BC^2 + DA^2 = 4EF^2 + AC^2 + BD^2$$

Lời giải



Áp dụng công thức đường trung tuyến, ta có :

$$\begin{aligned} 4EF^2 &= 2AE^2 + 2CE^2 - AC^2 \\ &= AB^2 + AD^2 - \frac{BD^2}{2} + BC^2 + CD^2 - \frac{BD^2}{2} - AC^2 \\ &= AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 - BD^2 - AC^2 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$4EF^2 + BD^2 + AC^2 = AB^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2$$

Ta có đẳng thức cần chứng minh. ❐

Bài 1.31 Trên $(O; R)$ lấy hai điểm B, C cố định sao cho $BC = \sqrt{3}R$. A là một điểm trên cung lớn BC $(A \neq B; C)$.

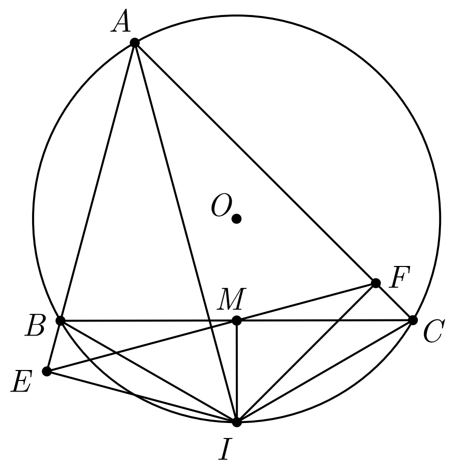
(a) Chứng minh khi A di động, phân giác $\widehat{BAC}$ luôn đi qua một điểm cố định I.

(b) Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của I trên các đường thẳng AB, AC. Chứng minh $BE = CF$.

(c) Chứng minh khi A di động thì EF luôn đi qua một điểm cố định.

(d) Tìm vị trí điểm A để S_{AEIF} lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất đó theo R.

Lời giải



(a) Phân giác $\widehat{BAC}$ luôn đi qua điểm I là điểm chính giữa cung BC nhỏ cố định.
(b) Vì I là trung điểm cung nhỏ BC nên $IB = IC$.
Lại có $\widehat{IEB} = \widehat{IFC} = 90°$ và $\widehat{IBE} = \widehat{ICF}$ nên $\triangle EIB = \triangle FIC$.
Suy ra $BE = CF$.
(c) Gọi M là trung điểm BC thì $IM \perp BC$. Suy ra E, F, M thẳng hàng (đường thẳng Simson) nên EF luôn đi qua M cố định.
(d) Từ $\triangle EIB = \triangle FIC$, ta suy ra

$$S_{AEIF} = S_{ABIC} = S_{ABC} + S_{BIC}$$

Vì I cố định nên S_{AEIF} lớn nhất khi và chỉ khi S_{ABC} lớn nhất. Điều đó chỉ xảy ra khi A là trung điểm cung lớn BC của (O).
Khi đó thì

$$\begin{aligned} S_{AEIF} = \frac{4}{3} S_{ABC} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{BC^2\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\left(R\sqrt{3}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \\ &= R^2\sqrt{3} \end{aligned}$$

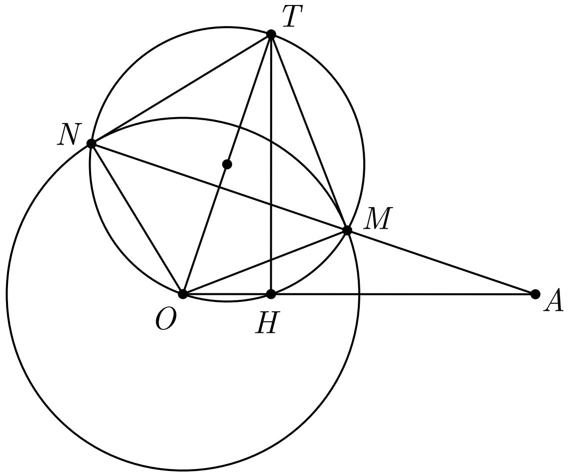
Vậy diện tích tứ giác $AEIF$ lớn nhất bằng $R^2\sqrt{3}$ khi A là trung điểm cung lớn BC của (O). ❒

Bài 1.32 Cho $(O; R)$ và điểm A cố định với $OA > R$. Dựng cát tuyến AMN của (O) không qua tâm $(AM < AN)$. Chứng minh rằng

(a) Đường tròn ngoại tiếp $\triangle OMN$ luôn đi qua một điểm cố định H (H không trùng O) khi cát tuyến di động.

(b) Tiếp tuyến tại M và N của (O) cắt nhau tại T. Chứng minh T di động trên một đường thẳng cố định khi cát tuyến AMN di động.

Lời giải



(a) Gọi H là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN với AO; AB là một tiếp tuyến của (O) đi qua A (B là tiếp điểm).
Khi đó ta có $AH \cdot AO = AB^2 = AM \cdot AN = AO^2 - R^2$ không đổi.
Mà AO và A cố định nên H cố định.
Vậy (OMN) luôn đi qua H cố định.
(b) Dễ thấy OT là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ngũ giác $OHMTN$ nên $\widehat{OHT} = 90°$, tức là T đi động trên đường thẳng vuông góc với OA tại H là đường cố định. ❒

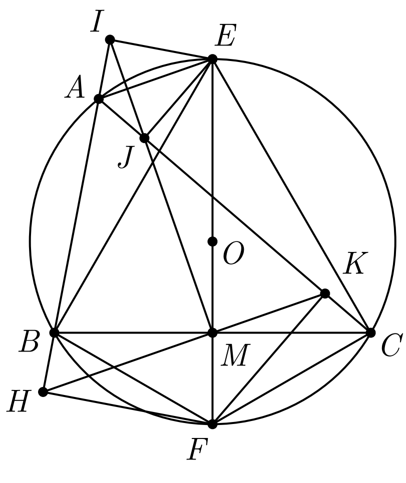
Bài 1.33 Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{BAC} = 60°, AC = b, AB = c$ $(b > c)$. Đường kính EF của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC vuông góc với BC tại M. I và J là chân đường vuông góc hạ từ E xuống AB; AC; H và K là chân đường vuông góc hạ từ F xuống AB; AC.

(a) Chứng minh $IJ \perp HK$.

(b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC theo b và c.

(c) Tính $AH + AK$ theo b và c.

Lời giải



(a) Ta thấy HK đi qua M (đường thẳng Simson)
Gọi L là giao điểm của AE và IJ, ta có

$$\widehat{IAE} = \widehat{ECB} = \widehat{EBC} = \widehat{JAE}$$

Do đó $\triangle AIE = \triangle AJE$. Suy ra $AE \perp IJ$.
Mặt khác, ta có

$$\widehat{EAC} = \widehat{EFC} = \widehat{AKH}$$

Suy ra $AE \parallel HK$. Vì vậy $IJ \perp HK$.
(b) Do $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $BC^2 = b^2 + c^2 - bc$.
Mặt khác, ta có $BC = R\sqrt{3}$. Từ đó suy ra

$$R = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - bc}{3}}$$

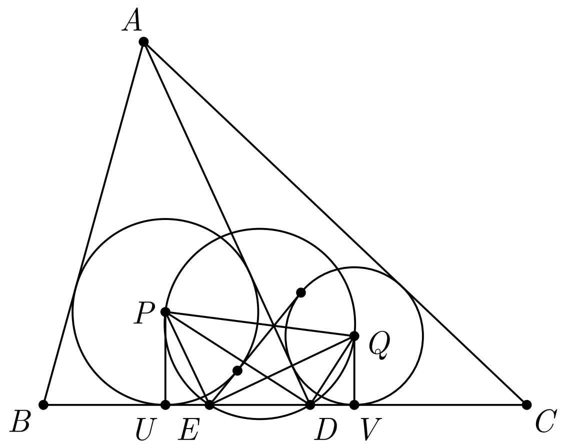
(c) Ta có $\triangle BHF = \triangle CKF$, suy ra $BH = CK$. Do đó

$$AH + AK = b + BH + c - CK = b + c$$

Vậy ta có đẳng thức cần chứng minh. ❒

Bài 1.34 Cho tam giác ABC. Một điểm D di động trên cạnh BC. Gọi P, Q tương ứng là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, ACD. Chứng minh rằng khi D di động thì đường tròn đường kính PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Ta có bổ đề sau (phần chứng minh xin dành cho bạn đọc) :
Bổ đề : Hai đường tròn (O_1) và (O_2) không cắt nhau, hai tiếp tuyến chung trong d_1, d_2 cắt một tiếp tuyến chung ngoài d tại A và B.Gọi C, D lần lượt là tiếp điểm của d trên (O_1) và (O_2) thì $AC = BD$.
Trở lại bài toán : Ta sẽ chứng minh điểm cố định là tiếp điểm F của đường tròn nội tiếp ABC với BC.

Kẻ tiếp tuyến chung trong của (P) và (Q) khác AD cắt BC tại E. Gọi U, V là tiếp điểm của (P) và (Q) với BC.
Áp dụng bổ đề ta có :

$$BE = BU + UE = BU + DV$$

Lại có $BU = \dfrac{BD + BA - AC}{2}$ và $DV = \dfrac{DA + DC - AC}{2}$.
Suy ra $BE = \dfrac{BC + BA - AC}{2}$ hay $E \equiv F$.
Từ bổ đề ta cũng có $EV = UD$, do đó $FV = UD$ và $FU = DV$.
Ta có $\triangle PDU \backsim \triangle DQV$, suy ra

$$DU \cdot DV = PU \cdot QV$$

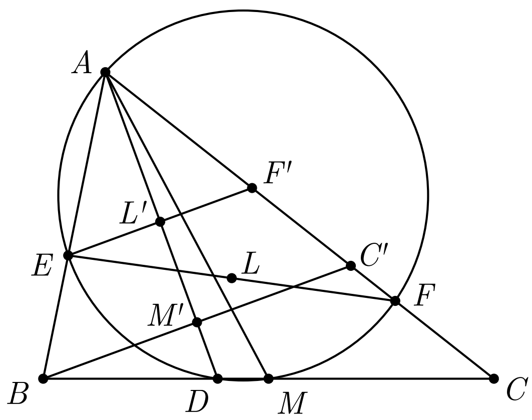
Tương đương với

$$FU \cdot FV = PU \cdot QV$$

Vì vậy $\triangle PUF \backsim \triangle FVQ$. Từ đó suy ra $\widehat{PFQ} = 90°$. Mà $\widehat{PDQ} = 90°$ nên F thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác PDQ. ❐

Bài 1.35 Cho tam giác ABC có phân giác AD và trung tuyến AM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB tại E và AC tại F. Gọi L là trung điểm EF. Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng ML và AD.

Lời giải



Xét trường hợp tam giác ABC cân tại A thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM trở thành đường tròn đường kính AM và tiếp xúc với BC tại M.
Suy ra hai đường thẳng ML và AD trùng nhau.
Xét trường hợp tam giác ABC không cân tại A
Gọi giao điểm của đường thẳng ML với AB, AC lần lượt là P, Q.
Ta có

$$\frac{BE}{BM} = \frac{BD}{BA} = \frac{CD}{CA} = \frac{CF}{CM}$$

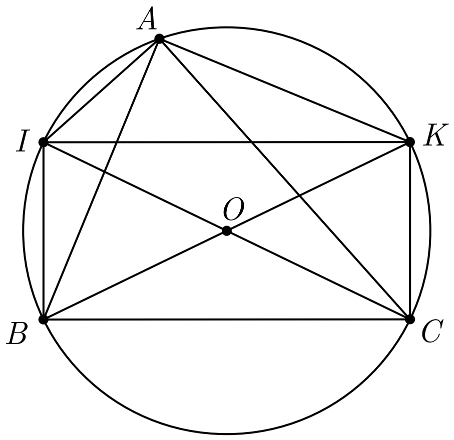
Suy ra

$$BE = CF$$

Gọi C', F' là các điểm đối xứng với B, E qua AD; M', L' là trung điểm BC', EF'.
Dễ thấy rằng M', L' nằm trên AD và $CC' = FF'$. Mặt khác, MM' và LL' là các đường trung bình trong các tam giác BCC' và EFF' nên ta có MM' và LL' cùng song song với AC và có độ dài bằng nhau. Suy ra $MM'L'L$ là hình bình hành.
Do đó $ML \parallel M'L'$ hay $ML \parallel AD$.
Tóm lại nếu tam giác ABC cân tại A thì ML trùng với AD, còn nếu tam giác ABC không cân tại A thì ML song song với AD. ❒

Bài 1.36 Cho BC là dây cung của $(O; R)$. Đặt $BC = aR$. Điểm A trên cung BC lớn, kẻ các đường kính CI, BK. Đặt $S = \dfrac{AB + AC}{AI + AK}$. Chứng minh rằng $S = \dfrac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{a}$. Từ đó tìm giá trị nhỏ nhất của S.

Lời giải



Từ giả thiết ta suy ra $BCKI$ là hình chữ nhật.
Suy ra $IK = BC = aR$ và $BI = CK = R\sqrt{4 - a^2}$
Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác $AIBK$ ta có

$$AI \cdot BK + BI \cdot AK = IK \cdot AB$$

Tương đương với

$$AI \cdot 2R + AK \cdot R\sqrt{4 - a^2} = AB \cdot aR$$

Suy ra

$$2AI + AK \cdot \sqrt{4 - a^2} = AB \cdot a$$

Tương tự, ta có

$$2AK + AI \cdot \sqrt{4 - a^2} = AC \cdot a$$

Do đó

$$\frac{AB + AC}{AI + AK} = \frac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{a}$$

Vì $a \leqslant 2$ nên $S = \dfrac{2 + \sqrt{4 - a^2}}{a} \geqslant 1$.
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = 2$.

Vậy S đạt giá trị nhỏ nhất là 1 khi và chỉ khi BC là đường kính đường tròn (O). ❐

Bài 1.37 Cho tam giác ABC nội tiếp (O, R) có $\widehat{BAC} \geqslant 90°$. Các đường tròn $(A; R_1)$, $(B; R_2)$, $(C; R_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài với nhau.
Chứng minh rằng

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot R_1^2 + AC \cdot R_2^2 + AB \cdot R_3^2 + 2R_1 \cdot R_2 \cdot R_3}{4R}$$

Lời giải

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c, p = \dfrac{a+b+c}{2}$.
Dễ thấy rằng $R_1 = p - a, R_2 = p - b, R_3 = p - c$.
Ta cần chứng minh

$$a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2 + 2(p-a)(p-b)(p-c) = abc$$

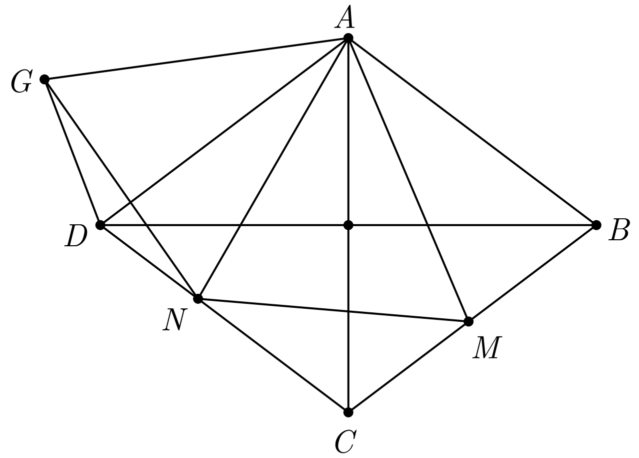
Đặt $E(a, b, c) = a(p-a)^2 + b(p-b)^2 + c(p-c)^2 + 2(p-a)(p-b)(p-c)$.
Ta có

$$\begin{aligned} E(0, b, c) &= b\left(\frac{c-b}{2}\right)^2 + c\left(\frac{b-c}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{b+c}{2} \cdot \frac{c-b}{2} \cdot \frac{b-c}{2} \\ &= \left(\frac{b-c}{2}\right)\left(b + c - 2 \cdot \frac{b+c}{2}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Tương tự, ta có $E(0, b, c) = E(a, 0, c) = E(a, b, 0) = 0$.
Suy ra $E = kabc$, trong đó k là hằng số thực.
Cho $a = b = c$, ta thấy rằng $k = 1$.
Vì vậy $E(a, b, c) = abc$. ❐

Bài 1.38 Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh là 1. Trên cạnh BC lấy M, CD lấy N sao cho chu vi $\triangle CMN$ bằng 2 và $2\widehat{NAM} = \widehat{DAB}$. Tính các góc của hình thoi.

Lời giải



Dựng về phía nửa mặt phẳng bờ AD không chứa C tam giác ADG sao cho $\triangle ADG = \triangle ABM$.
Suy ra $\widehat{ADG} = \widehat{ABM}$ và $BM = DG$.
Vì $MC + NC + MN = 2$ nên

$$\begin{aligned} MN &= 2 - NC - MC \\ &= DN + MB \\ &= DN + DG \end{aligned}$$

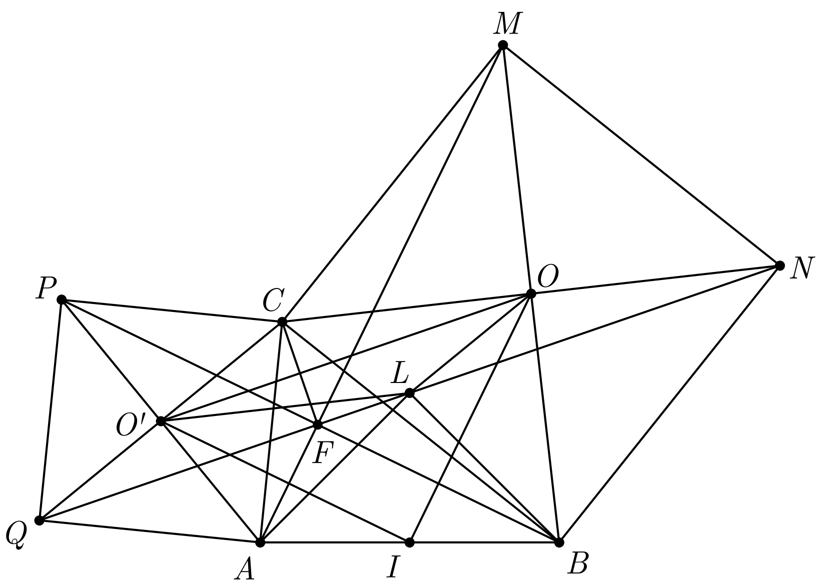
Mặt khác, do $2\widehat{MAN} = \widehat{DAB}$ nên $\triangle AGN = \triangle AMN$.
Do đó $MN = NG$ hay $NG = ND + DG$. Suy ra N, D, G thẳng hàng.
Vì vậy $ABCD$ là hình thoi tổng hai góc đối diện bằng $180°$ nên $ABCD$ là hình vuông. ❒

Bài 1.39 Về phía ngoài của tam giác ABC dựng các hình vuông $BCMN, ACPQ$ có tâm O và O'.

(a) Chứng minh rằng khi cố định hai điểm A, B và cho C thay đổi thì đường thẳng NQ luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Gọi I là trung điểm của AB. Chứng minh $\triangle IOO'$ là tam giác vuông cân.

Lời giải



(a) Gọi L là trung điểm NQ, ta sẽ chứng minh L là điểm cố định.
Thật vậy.
Ta có $O'L = CO = OB, OL = CO' = O'A$ và

$$\widehat{LO'A} = 90° - \widehat{CO'L} = 90° - \widehat{COL} = \widehat{LOB}$$

Suy ra $\triangle LO'A = \triangle BOL$. Do đó $LA = LB$ và $\widehat{O'LA} = \widehat{LBO}$. Vì vậy mà

$$\begin{aligned}\widehat{ALB} &= 360^\circ - \widehat{O'LA} - \widehat{OLB} - \widehat{OLO'}\\ &= 360^\circ - \widehat{LBO} - \widehat{OLB} - \widehat{OCO'}\\ &= 360^\circ - 180^\circ + \left(90^\circ - \widehat{COL}\right) - \widehat{OCO'}\\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\triangle AIB$ vuông cân tại L.

Mặt khác, dễ thấy rằng L và C thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB. Suy ra L cố định.

(b) Ta có $\triangle PCB = \triangle ACM$. Suy ra $PB = AM$ và tứ giác $AFCP$ nội tiếp với F là giao điểm của AM và PB

Do đó $\widehat{PFA} = \widehat{PCA} = 90^\circ$.

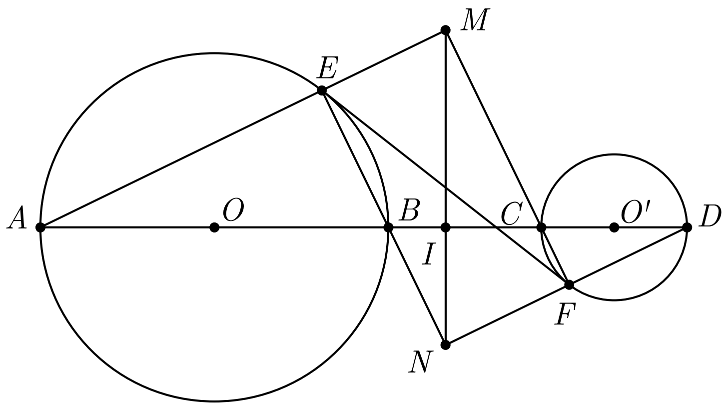
Vì vậy $AM \perp BP$.

Lại có $PB = 2O'I, PB \parallel O'I$ và $AM = 2OI.AM \parallel OI$. Suy ra OI và $O'I$ vuông góc và bằng nhau.

Vậy $\triangle OIO'$ vuông cân tại I. ❐

$\boxed{\textbf{Bài 1.40}}$ Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ ở ngoài nhau biết $OO' = d > R + R'$. Một tiếp tuyến chung trong của hai đường tròn tiếp xúc với (O) tại E và tiếp xúc với (O') tại F. Đường thẳng OO' cắt (O) tại A, B và cắt (O') tại C, D (B, C nằm giữa A, D). AE cắt CF tại M, BE cắt DF tại N. Gọi giao điểm của MN với AD là I. Tính độ dài OI.

Lời giải



Từ giả thiết ta có $BC = d - R - R'$. Do đó

$$IB + IC = d - R - R' \tag{1}$$

Ta thấy tứ giác $EMFN$ là hình chữ nhật, do đó :

$$\widehat{IMF} = \widehat{FEN} = \widehat{EAB} = \widehat{IDF}$$

Suy ra tứ giác $MIFD$ nội tiếp. Do đó $\widehat{MID} = \widehat{MFD} = 90^\circ$ hay $MN \perp AD$.
Vì vậy $\triangle BIN \backsim \triangle CIM$.
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có :

$$\frac{IB^2}{IC^2} = \frac{BN^2}{CM^2} = \frac{IB \cdot DB}{IC \cdot AC}$$

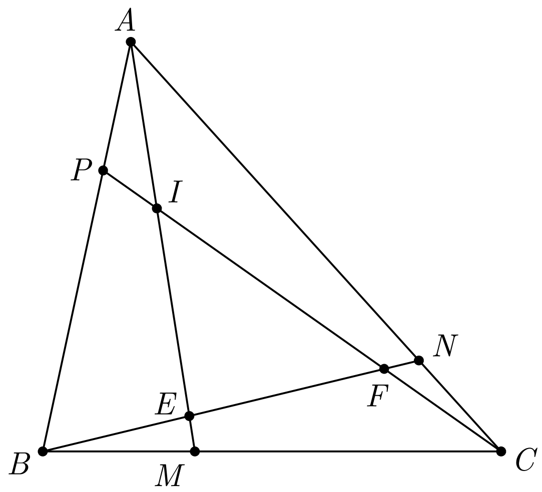
Suy ra

$$\frac{IB}{IC} = \frac{BD}{AC} = \frac{d - R + R'}{d + R - R'} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra $IB = \dfrac{(d-R)^2 - R'^2}{2d} \Rightarrow OI = OB + BI = \dfrac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d}$.
Vậy $OI = \dfrac{d^2 + R^2 - R'^2}{2d}$. ❒

Bài 1.41 Cho tam giác ABC có diện tích S_0. Trên các cạnh BC, CA, AB lấy các điểm M, N, P sao cho $\dfrac{MB}{MC} = k_1, \dfrac{NC}{NA} = k_2, \dfrac{PA}{PB} = k_3$ $(k_1, k_2, k_3 < 1)$.
Hãy tính diện tích tam giác tạo bởi các đoạn thẳng AM, BN, CP.

Lời giải



Gọi EIF là tam giác tạo bởi 3 đoạn thẳng AM, BN, CP. Ta có :

$$\frac{S_{BCN}}{S_0} = \frac{CN}{CA} = \frac{k_2}{k_2+1} \text{ và } \frac{S_{BCF}}{S_{BCN}} = \frac{BF}{BN}$$

Suy ra

$$S_{BCF} = S_0 \cdot \frac{BF}{BN} \cdot \frac{k_2}{k_2+1} \tag{1}$$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ABN và cát tuyến PCF, ta có

$$\frac{FB}{FN} \cdot \frac{CN}{CA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$

Suy ra

$$\frac{BF}{FN} = \frac{1 + k_2}{k_2 k_3}$$

Tương đương với

$$\frac{BF}{BN} = \frac{1+k_2}{1+k_2+k_2k_3} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra

$$S_{BFC} = \frac{k_2}{1+k_2+k_2k_3} \cdot S_0$$

Chứng minh tương tự :

$$S_{ACI} = \frac{k_3}{1+k_3+k_1k_3} \cdot S_0, S_{AEB} = \frac{k_1}{1+k_1+k_1k_2} \cdot S_0$$

Từ đó ta có diện tích tam giác tạo bởi các đoạn thẳng AM, BN, CP là :

$$\begin{aligned} S &= S_0 \left[1 - \left(\frac{k_1}{1+k_1+k_1k_2} + \frac{k_2}{1+k_2+k_2k_3} + \frac{k_3}{1+k_3+k_1k_3}\right)\right] \\ &= S_0 \cdot \frac{(k_1k_2k_3-1)^2}{(k_1k_2+k_1+1)(k_2k_3+k_2+1)(k_3k_1+k_3+1)} \end{aligned}$$

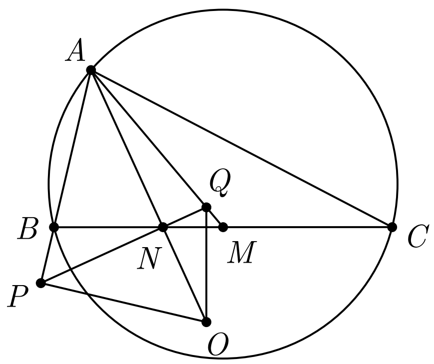
❐

2. Các bài toán ôn tập Olympiad

Bài 2.1 *(APMO 2000)* Cho tam giác ABC với trung tuyến AM và phân giác AN. Đường thẳng vuông góc với AN tại N cắt AB, AM lần lượt tại P, Q. Đường thẳng vuông góc với AB tại P cắt đường thẳng AN tại O. Chứng minh rằng OQ vuông góc với BC.

Lời giải

(i) *Cách 1.* Sử dụng phương pháp tọa độ.



Ta chọn N là gốc tọa độ và trục hoành, trục tung nằm trên NA, NP tương ứng.
Gọi $y = ax + b$ với $a, b \in \mathbb{R}^*$ là phương trình đường thẳng AB. Khi đó, phương trình đường thẳng AC có dạng $y = -ax - b$.
Giả sử phương trình đường thẳng BC là $y = cx$ với $c \in \mathbb{R}^*$.
Từ đó có thể dễ dàng suy ra tọa độ của điểm B, C là :

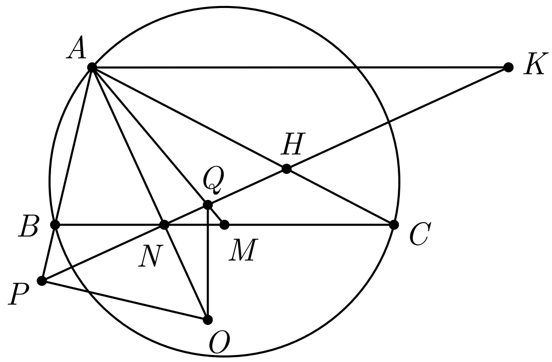
$$B\left(\frac{b}{c-a}, \frac{bc}{c-a}\right), C\left(-\frac{b}{c+a}, -\frac{bc}{c+a}\right)$$

Khi đó, trung điểm M của BC có tọa độ : $M\left(\dfrac{ab}{c^2-a^2}, \dfrac{abc}{c^2-a^2}\right)$.
Từ phương trình đường thẳng AB, PO, ta tính được :

$$A\left(-\frac{b}{a}, 0\right), O\,(ab,\,0)$$

Do đó, ta có thể viết phương trình đường thẳng AM rồi suy ra tọa độ điểm Q là $\left(0, \dfrac{ab}{c}\right)$.
Từ đây, ta thấy rằng hệ số góc của đường thẳng OQ là $-\dfrac{1}{c}$, trong khi hệ số góc của BC là c.
Suy ra $OQ \perp BC$.

(ii) *Cách 2.* Sử dụng hình học xạ ảnh.



Đường thẳng PQ cắt AC tại H và đường thẳng qua A song song với BC tại K.
Đường thẳng $BC \parallel AK$ và cắt các đường thẳng AP, AM, AQ tại B, M, C thỏa mãn M là trung điểm BC. Do đó, $(AP, AH, AQ, AK) = -1$ hay $(PHQK) = -1$. NA vừa là phân giác vừa là đường cao tam giác APH nên N là trung điểm PH. Theo hệ thức Newton :

$$\overline{NQ}\cdot\overline{NK} = NP^2 = \overline{AN}\cdot\overline{NO}$$

Từ đây dễ thấy rằng Q là trực tâm của tam giác AOK.
$\Rightarrow OQ \perp AK$ hay $OQ \perp BC$ (do $BC \parallel QK$)

(iii) *Cách 3.* Ta sẽ sử dụng vector để chứng tỏ rằng :

$$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$$

Trước tiên, ta sẽ tính đoạn PQ. Đặt $\widehat{BAM} = \alpha, \widehat{CAM} = \beta$ và gọi H là giao điểm của PQ và AC. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng $\alpha \geqslant \beta$.
Tam giác APH có AN vừa là đường cao vừa là phân giác nên cân tại A. Do đó :

$$\frac{QP}{\sin\alpha} = \frac{QH}{\sin\beta} = \frac{2PN}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

Suy ra

$$PQ = \frac{2PN\sin\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta} = \frac{2PN}{1+\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}} = \frac{2PN\cdot AC}{AB+AC}$$

Ta biến đổi :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC}\\ &= -AC\cdot OP\cdot\sin A+\frac{2PN\cdot AC\cdot BC}{AB+AC}\cdot\cos\frac{B-C}{2}\end{aligned}$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$\frac{2PN\cdot AC\cdot BC}{AB+AC}\cdot\cos\frac{B-C}{2}=AC\cdot OP\cdot\sin A$$

Tương đương với

$$\frac{2BC}{AB+AC}\cdot\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\sin A$$

Hay

$$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\sin B+\sin C$$

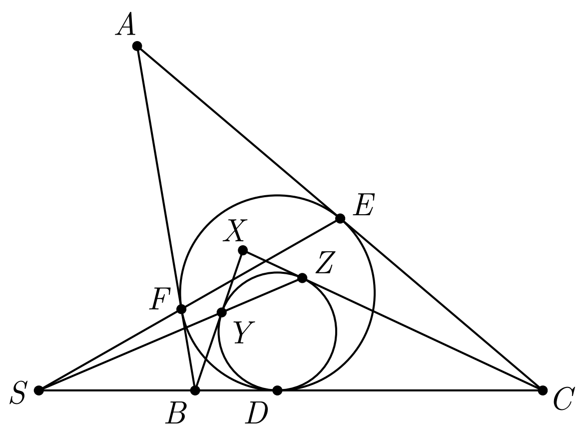
Đẳng thức này là hiển nhiên vì ta có

$$2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}=2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=\sin B+\sin C$$

Bài toán được chứng minh. ❒

Bài 2.2 *(Dự tuyển IMO 1994)* Tam giác ABC không cân tại A có D, E, F là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp lên BC, CA, AB. X là điểm bên trong tam giác ABC sao cho đường tròn nội tiếp tam giác XBC tiếp xúc với BC tại D, và tiếp xúc với XB, XC tại Y, Z. Chứng minh rằng E, F, Y, Z đồng viên.

Lời giải

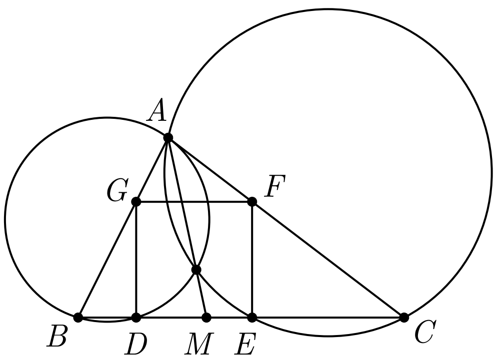


Trước tiên, ta sẽ chứng minh EF, YZ, BC đồng quy tại 1 điểm.
Thật vậy, gọi $S = EF \cap BC, S' = YZ \cap BC$.
Do AD, BE, CF đồng quy nên $(SDBC) = -1$.
Tương tự, XD, BZ, CY đồng quy, suy ra $(S'DBC) = -1$. Từ đó $S \equiv S'$ hay EF, YZ, BC đồng

quy tại S.
Do SD là tiếp tuyến của (DEF) nên $SD^2 = SE \cdot SF$. Mặc khác, SD cũng là tiếp tuyến của (DYZ), suy ra $\overline{SY} \cdot \overline{SZ} = SD^2 = \overline{SE} \cdot \overline{SF}$.
Đẳng thức này chứng tỏ E, F, Y, Z đồng viên. ❐

Bài 2.3 Dựng hình vuông $DEFG$ nội tiếp tam giác ABC sao cho $D, E \in BC; F \in AC; G \in AB$. Gọi d_A là trục đẳng phương của hai đường tròn $(ABD), (ACE)$. Ta định nghĩa các đường thẳng d_B, d_C tương tự. Chứng minh rằng các đường thẳng d_A, d_B, d_C đồng quy.

Lời giải



Gọi M là giao điểm của d_A với đường thẳng BC. Rõ ràng M thuộc đoạn thẳng DE, bạn đọc tự kiểm tra điều này. Hơn nữa, do M thuộc trục đẳng phương của $(ABD), (ACE)$ nên $MD \cdot MB = ME \cdot MC$. Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned}\frac{MB}{MC} = \frac{ME}{MD} &= \frac{BE}{CD} \\ &= \frac{BD + GD}{CE + EF} \\ &= \frac{\cot B + 1}{\cot C + 1}\end{aligned}$$

Suy ra

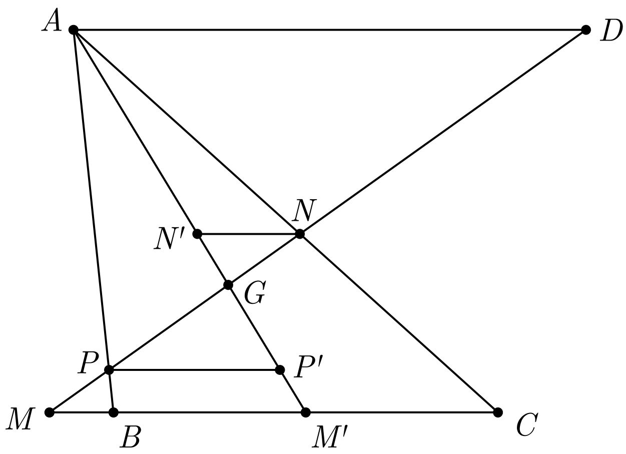
$$\prod \frac{MB}{MC} = \prod \frac{\cot B + 1}{\cot C + 1} = 1$$

Theo định lý Ceva cho tam giác ABC, ta có ngay điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.4 Cho tam giác ABC với trọng tâm G. Một đường thẳng d đi qua G cắt BC, CA, AB lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng, ta có đẳng thức :

$$\frac{1}{\overline{GM}} + \frac{1}{\overline{GN}} + \frac{1}{\overline{GP}} = 0$$

Lời giải



Gọi M', N', P' lần lượt là hình chiếu của M, N, P theo phương song song với BC lên AG. Khi đó M' là trung điểm BC và đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{1}{\overline{GM'}} + \frac{1}{\overline{GN'}} + \frac{1}{\overline{GP'}} = 0$$

Gọi D là giao điểm của MN với đường thẳng qua A song song với BC. Do M' là trung điểm BC nên $A(GDNP) = -1$. Từ đây suy ra $(GAN'P') = -1$. Sử dụng hệ thức Descartes cho hàng điểm này, ta có

$$\frac{1}{\overline{GN'}} + \frac{1}{\overline{GP'}} = \frac{2}{\overline{GA}} = -\frac{1}{\overline{GM'}}$$

Vì vậy

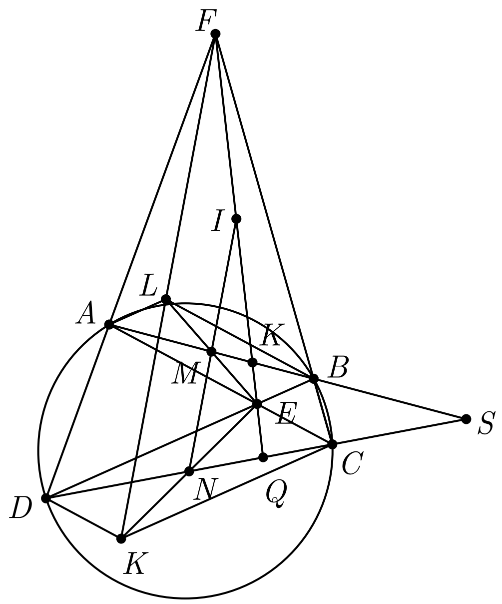
$$\frac{1}{\overline{GM'}} + \frac{1}{\overline{GN'}} + \frac{1}{\overline{GP'}} = 0$$

Đẳng thức được chứng minh. ❐

Bài 2.5 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có các cạnh đối không song song và các đường chéo cắt nhau tại E. F là giao điểm của AD với BC. M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN.

Lời giải

(i) *Cách 1.*



Dựng các hình bình hành $AEBL, CEDK$. Gọi I là trung điểm của EF. Khi đó, I, M, N thẳng hàng vì chúng nằm trên đường thẳng Gauss của tứ giác toàn phần $AEBF$.
Phép vị tự tâm E tỉ số 2 biến $I \to F, M \to L, N \to K$. Do đó, F, L, K thẳng hàng.
Do $\triangle FAB \backsim \triangle FCD$ suy ra :

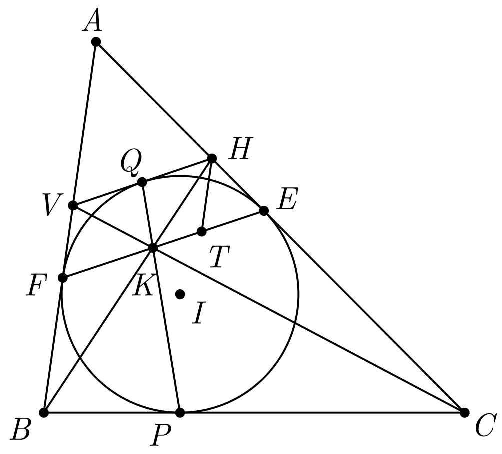
$$\frac{FD}{FB} = \frac{CD}{AB} = \frac{EC}{EB} = \frac{DK}{EB}$$

Hơn nữa, ta có $\widehat{FBE} = \widehat{FDK}$.
Từ hai đẳng thức trên suy ra $\triangle FDK \backsim \triangle FBE$. Do đó $\widehat{FEB} = \widehat{FKD}$.
Mặc khác, $\triangle EAB \backsim \triangle EDC$ mà M, N là trung điểm AB, CD nên $\triangle EBM \backsim \triangle ECN$.
Suy ra $\widehat{MEB} = \widehat{NEC} = \widehat{DKE}$. Kết hợp với $\widehat{FEB} = \widehat{FKD}$, ta có $\widehat{FEM} = \widehat{FKE}$.
Chú ý rằng $MN \parallel LK$ nên $\widehat{FEM} = \widehat{ENM}$.
Đẳng thức này chứng tỏ FE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN.

(ii) *Cách 2.*
Gọi K, Q là giao điểm của AB, CD với EF; S là giao điểm của AB, CD.
Ta cần chứng minh rằng $IE^2 = IM \cdot IN$.
Áp dụng hệ thức Maclaurin cho :
$(DCQS) = -1$ với N là trung điểm CD : $SQ \cdot SN = SC \cdot SD$
$(ABKS) = -1$ với M là trung điểm AB : $SM \cdot SK = SA \cdot SB$.
Do $ABCD$ nội tiếp nên $SA \cdot SB = SC \cdot SD$, suy ra $SQ \cdot SN = SM \cdot SK$.
Suy ra $MNQK$ nội tiếp hay $IM \cdot IN = IQ \cdot IK$.
Do đó, bài toán quy về chứng minh $IQ \cdot IK = IE^2$.
Phép chiếu xuyên tâm B biến hàng điểm điều hòa $(DCQS)$ thành hàng điều hòa $(EFQK)$. Áp dụng hệ thức Newton cho hàng điểm này với I là trung điểm EF, ta có ngay $IQ \cdot IK = IE^2$, đây là điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.6 Cho tam giác ABC với đường tròn nội tiếp (I) và E, F là các tiếp điểm của (I) với CA, AB. Lấy K bất kì thuộc đoạn EF, gọi H, L là giao điểm của BK, CK với AC, AB tương ứng. Chứng minh rằng HL tiếp xúc với (I).

Lời giải



Tiếp tuyến của đường tròn (I) đi qua H và cắt AB tại V. Bài toán quy về chứng minh $V \equiv L$ hay tương đương với BH, CV, EF đồng quy. Đây là một tính chất quen thuộc của tứ giác ngoại tiếp, xin được phép chứng minh lại tính chất này.

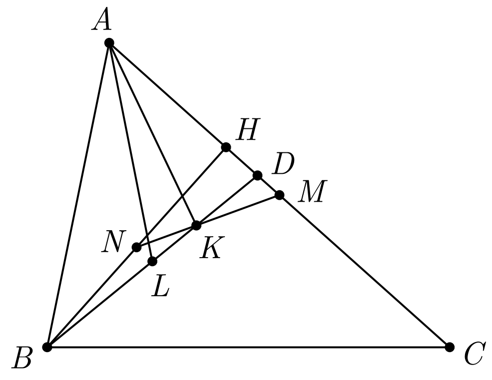
Gọi Q, P là tiếp điểm của (I) lên VH, BC. Vẽ đường thẳng song song với BV qua H và cắt EF tại T. EF cắt BH, PQ tại K_1, K_2. Ta có $\widehat{VFK} = \widehat{HTE}$ và $\widehat{VFK} = \widehat{HET}$. Do đó tam giác HET cân tại H. Suy ra,

$$\frac{K_1B}{K_1H} = \frac{BF}{HT} = \frac{BF}{HE} = \frac{BP}{QH} = \frac{K_2B}{K_2H}$$

K_1, K_2 cùng chia trong đoạn thẳng BH với cùng một tỉ số nên chúng trùng nhau. Điều này chứng tỏ BH đi qua giao điểm của PQ, EF. Chứng minh tương tự, CV cũng đi qua giao điểm này. Do đó, BH, CV, EF, PQ đồng quy tại K, đây là điều cần chứng minh. Bài toán được giải quyết. ❐

Bài 2.7 Gọi BH, BD lần lượt là đường cao và phân giác của tam giác ABC. N, L, M lần lượt là trung điểm của BH, BD, AC. Lấy K là giao điểm của MN và BD. Chứng minh rằng, AL, AK là hai đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải



Để chứng minh AK, AL là hai đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAC}$, ta chỉ cần chỉ ra rằng :

$$\frac{\overline{KD}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{LB}} = \frac{AD^2}{AB^2}$$

Nhưng do L là trung điểm của BD nên đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{\overline{KD}}{\overline{KB}} = -\frac{AD^2}{AB^2} = -\frac{b^2}{(a+c)^2}$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BDH với cát tuyết MNK, ta có

$$\frac{\overline{KD}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{NB}}{\overline{NH}} \cdot \frac{\overline{MH}}{\overline{MD}} = 1$$

Suy ra

$$\frac{\overline{KD}}{\overline{KB}} = -\frac{\overline{MD}}{\overline{MH}}$$

Chọn hướng dương trên đường thẳng AB theo chiều $\overrightarrow{AB}$, khi đó :

$$\overline{AM} = \frac{b}{2}, \overline{AD} = \frac{bc}{a+c}, \overline{AH} = c\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}$$

Suy ra

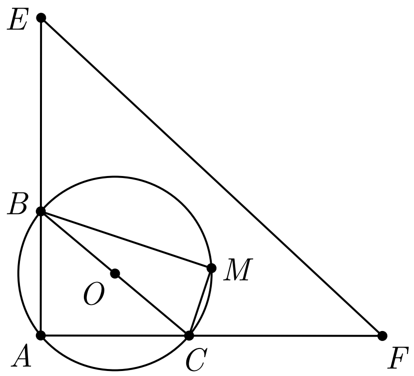
$$\overline{MD} = \frac{b(c-a)}{2(c+a)}, \overline{MH} = \frac{c^2-a^2}{2b}$$

Vì vậy $\dfrac{\overline{MD}}{\overline{MH}} = \dfrac{b^2}{(a+c)^2}$ hay $\dfrac{\overline{KD}}{\overline{KB}} = -\dfrac{b^2}{(a+c)^2}$, đây là điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.8 Cho tam giác ABC vuông tại A. Trên các tia AB, AC lấy E, F tương ứng sao cho $BE = BC = CF$. Chứng minh rằng với mọi điểm M nằm trên đường tròn đường kính BC, ta đều có

$$MA + MB + MC \leqslant EF$$

Lời giải



Đặt $BC = a, CA = b$ và $AB = c$.
Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $MBAC$:

$$aMA = bMB + cMC$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}(MA + MB + MC)^2 &= \frac{1}{a^2}\left[MB(a+b) + MC(a+c)\right]^2 \\ &\leqslant \frac{MB^2 + MC^2}{a^2}\left[(a+b)^2 + (a+c)^2\right] \\ &= EF^2\end{aligned}$$

Với chú ý rằng $MA + MB + MC > 0$ và $EF > 0$, khai căn hai vế, ta có

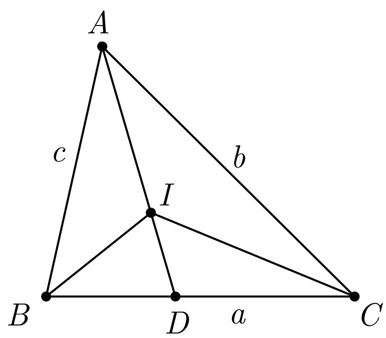
$$MA + MB + MC \leqslant EF$$

Đây là điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.9 Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$ và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$IA + IB + IC \leqslant \sqrt{ab + bc + ca}$$

Lời giải



Ta sẽ sử dụng bổ đề :

$$IA = \sqrt{\frac{bc(b+c-a)}{a+b+c}}$$

Chứng minh bổ đề.

Gọi D là chân đường phân giác từ đỉnh A. Theo công thức đường phân giác :

$$\frac{IA}{c} = \frac{ID}{BD} = \frac{AD}{c+BD}$$

Từ các đẳng thức

$$BD = \frac{ac}{b+c}$$

$$AD^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} \cdot p(p-a)$$

Ta suy ra :

$$IA = \sqrt{\frac{bc(b+c-a)}{a+b+c}}$$

Bổ đề được chứng minh. □

Theo bổ đề, ta cần chứng minh rằng :

$$\sqrt{bc(b+c-a)} + \sqrt{ca(c+a-b)} + \sqrt{ab(a+b-c)} \leqslant \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

Bình phương hai vế, ta có

$$\sum(b^2c+bc^2) - 3abc + 2\sum\sqrt{abc^2\left[c^2-(a-b)^2\right]} \leqslant \sum(b^2c+bc^2) + 3abc$$

Bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sum\sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)}{ab}} \leqslant 3$$

Đến đây ta có thể sử dụng AM-GM như sau :

$$\begin{aligned}\sum\sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)}{ab}} &= \sum\sqrt{\frac{b+c-a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{c+a-b}{a}}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum\left(\frac{b+c-a}{b}+\frac{c+a-b}{a}\right)\\ &= 3\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối được chứng minh nên suy ra

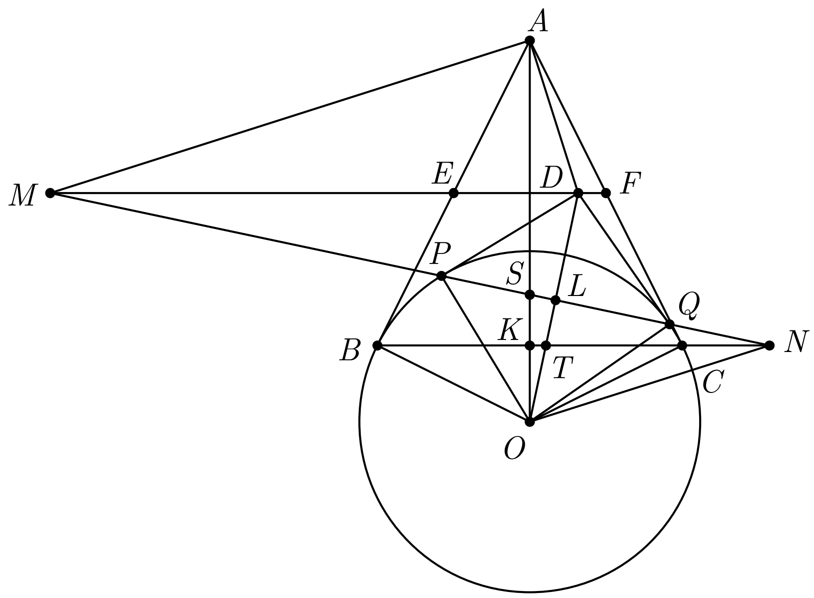
$$IA + IB + IC \leqslant \sqrt{ab+bc+ca}$$

Chứng minh hoàn tất tại đây. ❒

Bài 2.10 Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC đến (O). Gọi E, F là trung điểm của AB, AC. Lấy D là một điểm bất kì trên EF, vẽ các tiếp DP, DQ tới đường tròn. PQ cắt BC, EF lần lượt tại N, M. Chứng minh rằng, $ON \parallel AM$.

Lời giải

(i) *Cách 1.*



Xét cực - đối cực đối với đường tròn (O, R) : A là cực của BC, D là cực của PQ mà $BC \cap PQ = N$ nên N chính là cực của AD đối với O.
$\Rightarrow AD \perp ON$.
Mặc khác, từ $ED \perp OA$ suy ra,

$$\begin{aligned} DO^2 - DA^2 &= EO^2 - EA^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(OA^2 + OB^2\right) - \frac{1}{4}AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 \\ &= R^2 \end{aligned}$$

Vì vậy

$$DA^2 = DO^2 - R^2 = \mathcal{P}_{D/(O)}$$

Đẳng thức này chứng tỏ D là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ. Xét cực - đối cực đối với đường tròn này : O là cực của PQ nên M, O liên hợp. Hơn nữa, $DM \perp OA$ nên M là cực của OA.
Do đó $AM \perp AD$. Từ đây suy ra $ON \parallel AM$ (điều cần chứng minh).

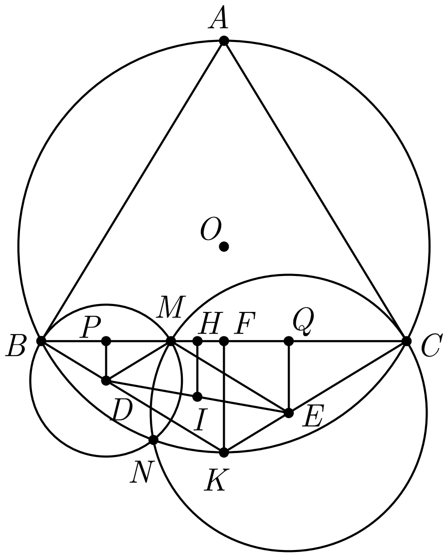
(ii) *Cách 2.*
Theo chứng minh ở cách 1, ta có được $DA = DP = DQ = r$. Hơn nữa, do E, F là trung điểm AB, AC nên EF chính là trục đẳng phương của $(O; R)$ và $(A; 0)$. Từ đó suy ra MA là tiếp tuyến (APQ) hay $AM \perp DA$.
OD cắt BC, PQ ở T, L và OA cắt BC, PQ ở K, S. Ta có $OL \cdot OD = R^2 = OK \cdot OA$ nên $AKLD$ nội tiếp. Dễ thấy rằng $SKTL$ cũng nội tiếp nên $AD \parallel ST$.
Tam giác STO nhận N làm trực tâm nên $ST \perp ON$.
Do đó, $AD \perp ON$. Từ đây suy ra $ON \parallel AM$. ❒

Bài 2.11 Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Trên cạnh đáy BC, lấy điểm M (M khác B, C). Vẽ đường tròn tâm D qua M tiếp xúc với AB tại B và đường tròn tâm E qua M tiếp xúc với AC tại C. Gọi N là giao điểm thứ hai của hai đường tròn này.

(a) Chứng minh rằng tổng bán kính của hai đường tròn $(D), (E)$ là không đổi khi M di động trên BC.

(b) Tìm tập hợp trung điểm I của DE.

Lời giải



(a) Gọi K là giao điểm của BD, CE. Chú ý rằng các tam giác DBM, EMC, BKC cân nên $DM \parallel CK, EM \parallel BK$ và $BK = CK = k$ không đổi. Áp dụng định lý Thales, ta có

$$\frac{DM}{CK} = \frac{BM}{BC}, \frac{EM}{BK} = \frac{CM}{BC}$$

Suy ra

$$\frac{R_{(D)} + R_{(E)}}{k} = \frac{BM + CM}{BC} = 1$$

Vì vậy $R_{(D)} + R_{(E)} = k$ không đổi.

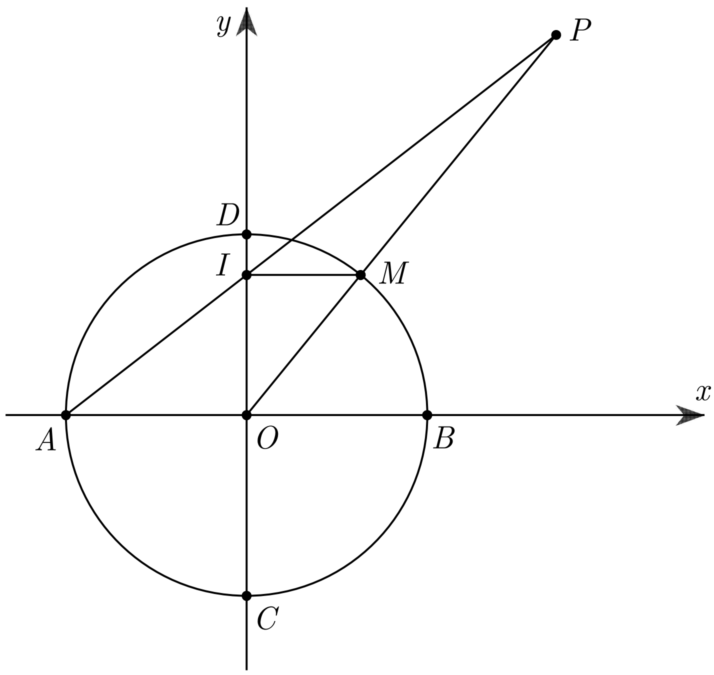
(b) Gọi P, Q, H, F lần lượt là hình chiếu của D, E, I, K lên BC.

$$\frac{DP}{KF} + \frac{EQ}{KF} = \frac{BD}{BK} + \frac{CE}{CK} = 1$$

Suy ra $DP + EQ = KF = \lambda$ không đổi. Từ đây $IH = \dfrac{\lambda}{2}$ cũng không đổi. Do đó, I di chuyển trên đường thẳng song song và cách BC một khoảng $\dfrac{\lambda}{2}$ không đổi. ❐

Bài 2.12 Cho M là điểm di động trên đường tròn (O, r) có hai đường kính cố định AB, CD vuông góc với nhau. Gọi I là hình chiếu của M lên CD và P là giao điểm của OM, AI. Tìm tập hợp các điểm P.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ nhận O làm gốc và $A(-r,0), B(r,0), C(0,-r), D(0,r)$ và $M(r\cos\phi, r\sin\phi)$.
Khi đó ta có :
Phương trình đường thẳng $CD : x = 0$.
Phương trình đường thẳng $IM : y = r\sin\phi$.
Từ đó suy ra tọa độ điểm I là $I(0, r\sin\phi)$.
Phương trình đường thẳng $OM : \dfrac{x}{r\cos\phi} = \dfrac{y}{r\sin\phi}$
Phương trình đường thẳng $AI : \dfrac{x+r}{r} = \dfrac{y}{r\sin\phi}$
Suy ra P có tọa độ thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} \dfrac{x}{r\cos\phi} = \dfrac{y}{r\sin\phi} \\ \dfrac{x+r}{r} = \dfrac{y}{r\sin\phi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan\phi = \dfrac{y}{x} \\ \sin\phi = \dfrac{y}{x+r} \end{cases}$$

Ta lại có $\tan^2\phi = \dfrac{\sin^2\phi}{1-\sin^2\phi}$, suy ra :

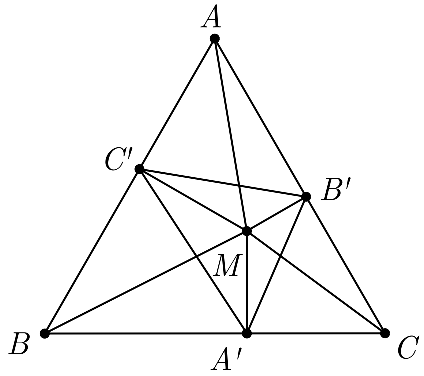
$$\frac{y^2}{x^2} = \frac{\dfrac{y^2}{(x+r)^2}}{1 - \dfrac{y^2}{(x+r)^2}}$$

Đẳng thức này tương đương với $y^2 = 2xr + r^2$.
Vậy tập hợp các điểm P là parabol có phương trình $y^2 = 2xr + r^2$. ❒

Bài 2.13 Cho tam giác đều ABCvà một điểm M bất kì trong mặt phẳng tam giác. Gọi x, y, z là khoảng cách từ M đến các đỉnh A, B, C và p, q, r là khoảng cách từ M đến các cạnh AB, BC, CA. Chứng minh rằng :

$$p^2 + q^2 + r^2 \geqslant \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Lời giải



Nếu M trùng với một trong các đỉnh A, B, C thì dễ thấy bất đẳng thức cần chứng minh là đúng.
Xét trường hợp M không trùng với đỉnh nào của tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng BC, CA, AB theo thứ tự và G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$.
Theo định lý Leibniz, ta có

$$\begin{aligned} MA'^2 + MB'^2 + MC'^2 &= 3MG^2 + \frac{1}{3}\left(B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2\right) \\ &\geqslant \frac{1}{3}\left(B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2\right) \end{aligned}$$

Mặt khác, tam giác $AB'C'$ nội tiếp đường tròn đường kính AM, do đó $\widehat{B'AC'} = 60^\circ$ hoặc $\widehat{B'AC'} = 120^\circ$. Vì vậy (theo định lý sin)

$$B'C' = MA\sin 60^\circ \,(= MA\sin 120^\circ) = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra $B'C'^2 = \dfrac{3x^2}{4}$. Tương tự, ta có $C'A'^2 = \dfrac{3y^2}{4}, A'B'^2 = \dfrac{3z^2}{4}$.
Do đó

$$B'C'^2 + C'A'^2 + A'B'^2 = \frac{3}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

Vì vậy

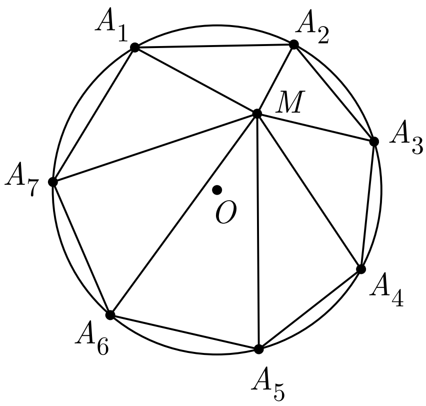
$$p^2 + q^2 + r^2 \geqslant \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$$

Đây chính là bất đẳng thức cần chứng minh. ❐

Bài 2.14 Cho đa giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ và điểm M bất kì trong mặt phẳng. Chứng minh rằng

$$MA_1 + MA_3 + MA_5 + M_7 \geqslant MA_2 + MA_4 + MA_6$$

Lời giải



Đặt $A_1A_2 = a, A_1A_3 = b, A_1A_4 = c.$
Áp dụng định lí Ptolemy :

- Đối với tứ giác $A_1A_2A_3M$:

$$a(MA_1 + MA_3) \geqslant bMA_2 \tag{1}$$

- Đối với tứ giác $A_5A_6A_7M$:

$$a(MA_5 + MA_7) \geqslant bMA_6 \tag{2}$$

- Đối với tứ giác $A_2A_4A_6M$:

$$b(MA_2 + MA_6) \geqslant cMA_4 \tag{3}$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$a(MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7) \geqslant b(MA_2 + MA_6) \tag{4}$$

Từ (3) và (4) suy ra :

$$a(MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7) \geqslant cMA_4 \tag{5}$$

Từ (4) và (5) suy ra :

$$a(MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant MA_2 + MA_4 + MA_6 \tag{6}$$

Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $A_1A_3A_4A_5$, ta có :

$$ab + ac = bc \Leftrightarrow a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1$$

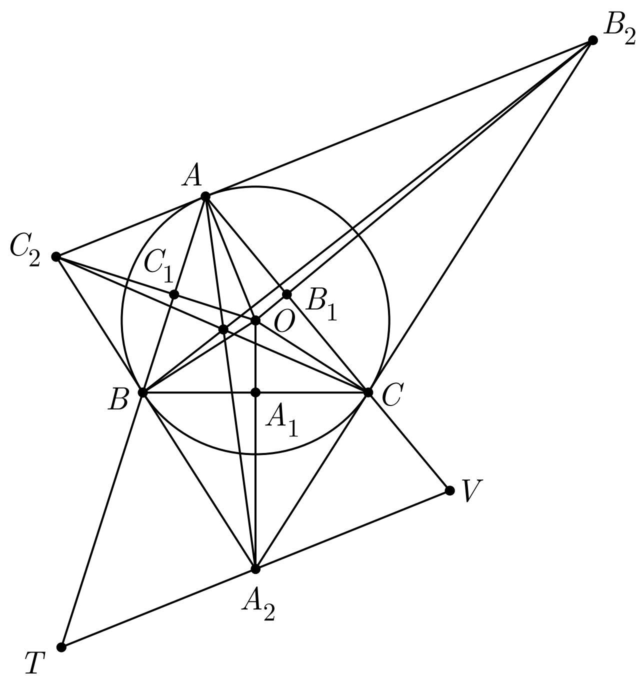
Thay vào (6) ta được :

$$MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 \geqslant MA_2 + MA_4 + MA_6$$

Ta được điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.15 Tam giác ABC không cân nội tiếp (O) có A_1, B_1, C_1 là trung điểm của BC, CA, AB. Gọi A_2 là một điểm trên tia OA_1 sao cho 2 tam giác OAA_1 và OA_2A đồng dạng. Các điểm B_2, C_2 định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Lời giải



(i) *Cách 1.*
Từ hai tam giác OAA_1 và OA_2A đồng dạng suy ra $OA_1 \times OA_2 = OA^2 = R^2$. Do đó, A_2 chính là giao điểm các tiếp tuyến tại B, C của (O).
Đường thẳng qua A_2 song song với tiếp tuyến của (O) tại A cắt AB, AC tại T, V. Do $\widehat{A_2BT} = \widehat{A_2TB}$ nên $A_2B = A_2T$. Một cách tương tự, $A_2T = A_2B = A_2C = A_2V$. Vì thế, $BCVT$ nội tiếp (A_2) hay $\triangle ABC \backsim \triangle AVT$.
Lại có A_1, A_2 lần lượt là trung điểm BC, TV nên $\triangle AA_1C \backsim \triangle AA_2T$. Suy ra $\widehat{CAA_1} = \widehat{TAA_2}$. Đẳng thức này chứng tỏ AA_2 là đường đối trung của tam giác ABC. Do đó, các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 sẽ đồng quy tại điểm Lemoine của tam giác ABC.

(ii) *Cách 2.*
Theo chứng minh ở cách 1 thì (O) chính là đường tròn nội tiếp của tam giác $A_2B_2C_2$. Do $BA_2 = CA_2, CB_2 = AB_2, BC_2 = AC_2$ nên :

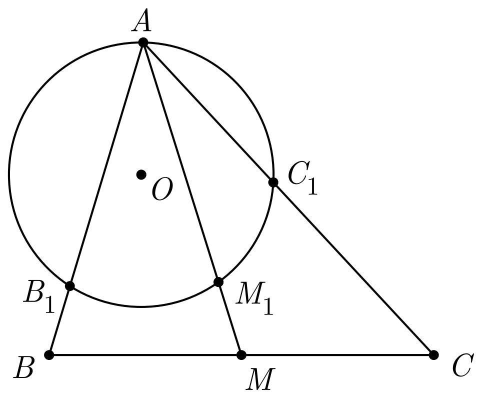
$$\frac{CA_2}{CB_2} \cdot \frac{AB_2}{AC_2} \cdot \frac{BC_2}{BA_2} = 1$$

Theo định lý Ceva, ta có ngay AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy. ❒

Bài 2.16 Cho tam giác ABC với M là trung điểm BC. Vẽ đường tròn (O) tùy ý qua A và cắt các đoạn AB, AC, AM lần lượt tại B_1, C_1, M_1. Chứng minh rằng

$$AB_1 \cdot AB + AC_1 \cdot AC = 2AM_1 \cdot AM$$

Lời giải



Ta có

$$\begin{cases} AB_1 \cdot AB = AB^2 - BB_1 \cdot AB = AB^2 - \mathcal{P}_{B/(O)} \\ AC_1 \cdot AC = AC^2 - CC_1 \cdot AC = AC^2 - \mathcal{P}_{C/(O)} \\ 2AM_1 \cdot AM = 2AM^2 - 2\mathcal{P}_{M/(O)} = AB^2 + AC^2 - \dfrac{BC^2}{2} - 2\mathcal{P}_{M/(O)} \end{cases}$$

Do đó, chỉ cần kiểm tra đẳng thức sau là đủ :

$$\mathcal{P}_{B/(O)} + \mathcal{P}_{C/(O)} - 2\mathcal{P}_{M/(O)} = \frac{BC^2}{2}$$

Đẳng thức này tương đương với :

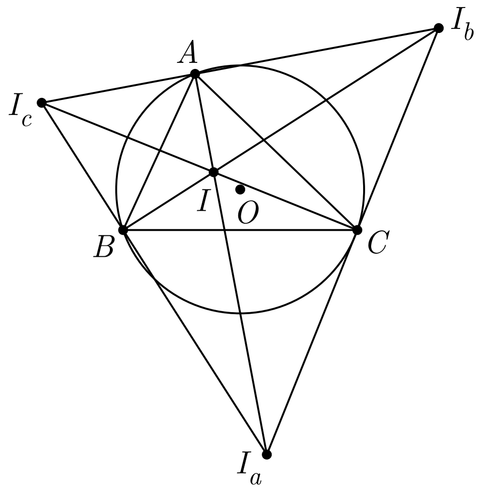
$$OB^2 + OC^2 - 2OM^2 = \frac{BC^2}{2}$$

(đúng theo công thức trung tuyến cho tam giác OBC).
Vì vậy, bài toán được chứng minh hoàn tất. ❒

Bài 2.17 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R.Gọi q là chu vi tam giác có các đỉnh là tâm các đường tròn bàng tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$q \leqslant 6\sqrt{3}R$$

Lời giải



Nội dung của bài toán thực chất là sự kết hợp trực tiếp của hai bổ đề sau :

Bổ đề 1 : Cho tam giác XYZ nội tiếp đường tròn (O, R).
Khi đó $XY + YZ + ZX \leqslant 3\sqrt{3}R$.

Chứng minh.

Gọi G là trọng tâm tam giác XYZ, khi đó theo định lý Leibniz, ta có

$$9R^2 - (XY^2 + YZ^2 + ZX^2) = 9OG^2 \geqslant 0$$

Kết hợp với bất đẳng thức Cauchy-Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} 27R^2 &\geqslant 3(XY^2 + YZ^2 + ZX^2) \\ &\geqslant (XY + YZ + ZX)^2 \end{aligned}$$

Tương đương với

$$3\sqrt{3}R \geqslant XY + YZ + ZX$$

Bổ đề 1 được chứng minh. □

Bổ đề 2 : Cho tam giác ABC nội tiếp (O, R). I_a, I_b, I_c theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C. Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_aI_bI_c$ có bán kính bằng $2R$.

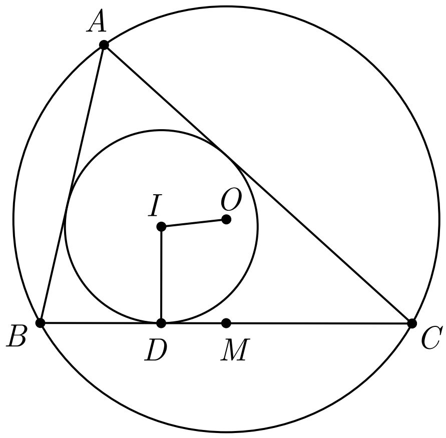
Chứng minh.

Vì AI_a và I_bI_c là các đường phân giác trong và ngoài của góc $\widehat{BAC}$ nên $I_aA \perp I_bI_c$.
Do đó A, B, C là chân các đường cao trong tam giác ABC nên (ABC) là đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$. Vì vậy bán kính đường tròn $(I_aI_bI_c)$ bằng $2R$. Bổ đề 2 được chứng minh. □

Bài 2.18 Cho tam giác ABC có : $BC = a; CA = b; AB = c$; và r và R theo thứ tự là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{r}{R} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{16R^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và D là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) trên cạnh BC, M là trung điểm của BC.
Không mất tính tổng quát, giả sử $b \geqslant a \geqslant c$. Khi đó :

$$R^2 - 2Rr = OI^2 \geqslant DM^2 = \frac{(b-c)^2}{4}$$

Tương đương với

$$\frac{r}{R} + \frac{(b-c)^2}{8R^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

Mặt khác :

$$\begin{aligned}(b-c)^2 &= (a-b)^2 + (c-a)^2 + 2(a-b)(c-a)\\ &\geqslant (a-b)^2 + (c-a)^2\end{aligned}$$

Suy ra :

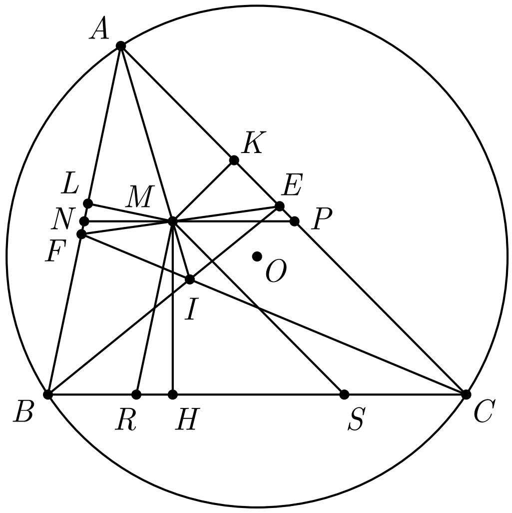
$$\frac{r}{R} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{16R^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

Chứng minh hoàn tất. ❒

Bài 2.19 Cho tam giác ABC. Các đường phân giác BE, CF cắt nhau tại I. AI cắt EF tại M. Đường thẳng qua M song song với BC theo thứ tự cắt AB, AC tại N, P. Chứng minh rằng

$$MB + MC < 3NP$$

Lời giải



Đầu tiên, ta chứng minh bổ đề sau đây :

Bổ đề : Cho tam giác ABC, có phân giác BD, CE. Lấy điểm M bất kì thuộc DE. Kẻ $MH \perp BC, MK \perp AC, ML \perp AB$. Khi đó ta có $MH = ML + MK$.

Chứng minh bổ đề.

Gọi T là giao điểm DF và MH.

Từ E, D vẽ $EF, DO \perp BC; DN \perp AB; EP \perp AC$. Suy ra : $EF = EP; DN = DO$.

Theo định lý Thales, ta có

$$\frac{MK}{EP} = \frac{MD}{DE} = \frac{MT}{EF}$$

Do $EF = EP$ nên $MT = MK \quad (1)$

Cũng theo định lý Thales, ta có

$$\frac{ML}{DN} = \frac{EM}{ED} = \frac{FH}{FO} = \frac{HT}{DO}$$

Mà $DO = DN$ nên $TH = ML \quad (2)$

Từ $(1), (2)$ suy ra

$$MT + TH = MH = ML + MK$$

Bổ đề được chứng minh. □

Trở lại với bài toán. Gọi H, K, L theo thứ tự là hình chiếu của M lên BC, CA, AB

Qua M kẻ $MR \parallel AB$ và $MS \parallel AC$. Áp dụng bổ đề ta có

$$MH = ML + MK = 2ML = 2MK$$

Chú ý rằng : $\triangle MRH \backsim \triangle MNL$ và $\triangle MSH \backsim \triangle MPK$.

Suy ra $MR = 2MN$ và $MS = 2MP$.

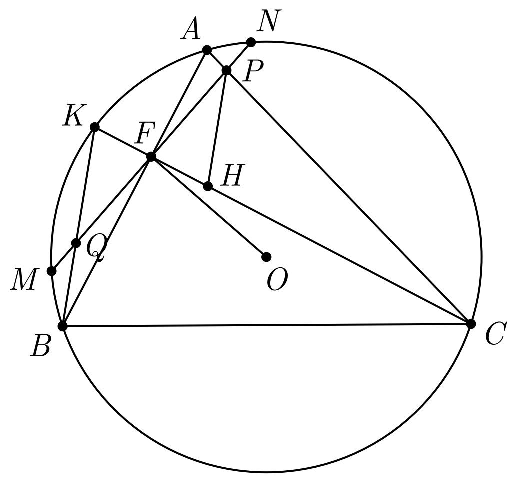
Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

$$\begin{aligned} MB + MC &< (MR + BR) + (MS + SC) \\ &= 3(MN + MP) \\ &= 3NP \end{aligned}$$

Ta có điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.20 Cho tam giác ABC nhọn với đường cao CF và $CB > CA$. Gọi O, H lần lượt là tâm ngoại tiếp và trực tâm của tam giác ABC. Đường thẳng qua F vuông góc với OF cắt AC tại P. Chứng minh rằng $\widehat{FHP} = \widehat{BAC}$.

Lời giải



Gọi K là điểm đối xứng của H qua AB, khi đó $K \in (O)$. Đường thẳng PF cắt (O) và BK, AC lần lượt tại M, M, Q, P, trong đó P, N thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ CK không chứa B. Xét dây cung MN có $OF \perp MN$ nên F là trung điểm của MN. Do đó, áp dụng định lý con bướm cho dây cung MN, ta thấy rằng F cũng là trung điểm của PQ. Mặc khác, F là trung điểm HK nên $PHQK$ là hình bình hành.

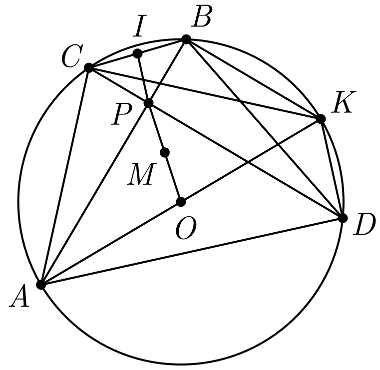
Vậy $\widehat{PHF} = \widehat{BKC} = \widehat{BAC}$, ta có điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.21 Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm P cố định bên trong đường tròn. AB, CD là 2 dây cung di động của (O) nhưng luôn đi qua P và luôn vuông góc với nhau.

(a) Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không đổi.

(b) Gọi I là trung điểm BC. Hỏi I di động trên đường nào?

Lời giải



(a) Áp dụng định lý Pythagore, ta thấy rằng :

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = AC^2 + BD^2 = BC^2 + AD^2$$

Vẽ đường kính AK của đường tròn (O). Khi đó, $BK \perp AB$ mà $AB \perp CD$ nên $BK \parallel CD$. Hình thang $BCDK$ nội tiếp nên là hình thang cân. Từ đây suy ra $CK = BD$.
Áp dụng định lý Pythagore cho tam giác ACK vuông tại C : $AC^2 + CK^2 = AK^2$
Suy ra $AC^2 + BD^2 = 4R^2$ hay $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = 4R^2$ không đổi.
(b) Trước tiên, ta sẽ chứng minh rằng :

$$IO^2 + IP^2 = R^2$$

Thật vậy, áp dụng định lý Pythagore cho tam giác OIB vuông tại I, ta thu được :

$$OB^2 = OI^2 + IB^2$$

Tam giác PBC vuông tại P có I là trung điểm BC nên $PI = IB$. Do đó :

$$R^2 = OI^2 + IP^2$$

Gọi M là trung điểm OP. Theo công thức đường trung tuyến (có thể chứng minh dựa vào kiến thức lớp 9) :

$$IM^2 = \frac{2(IP^2 + IO^2) - OP^2}{4} = \frac{2R^2 - OP^2}{4}$$

Do đó I di chuyển trên $\left(M; \dfrac{2R^2 - OP^2}{4}\right)$ cố định. ❒

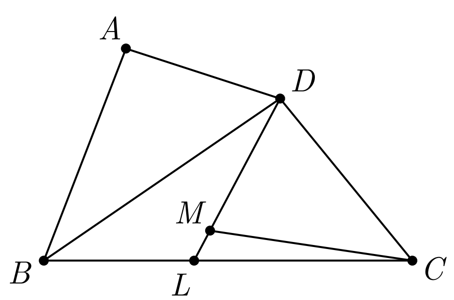
Bài 2.22 Cho tam giác ABC và điểm M bất kì nằm trong tam giác đó. Chứng minh rằng :

$$MA + MB + MC + \min\{MA, MB, MC\} < AB + BC + CA$$

Lời giải
Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau đây :
Bổ đề : Cho tứ giác $ABCD$ và điểm M bất kì nằm trong tứ giác đó. Chứng minh rằng :

$$MD + MC < DA + AB + BC$$

Chứng minh bổ đề.



Xét M nằm trong tam giác DBC. Gọi L là giao điểm của DM và BC.
Áp dụng bất đẳng thức tam giác, ta có

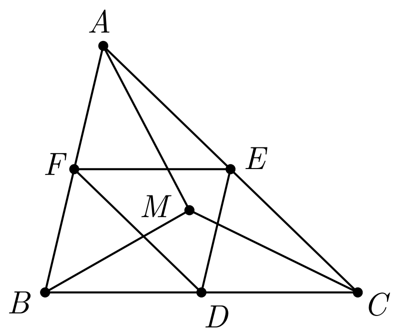
$$\begin{aligned} DA + AB + BC &\geqslant DB + BC = DB + BL + LC \\ &\geqslant DL + LC = DM + ML + LC \\ &\geqslant DM + MC \end{aligned}$$

Tương tự xét M nằm trong tam giác ABD, ta chứng minh được :

$$AD + AB + BC \geqslant DM + MC$$

Suy ra điều cần chứng minh. □

Trở lại với bài toán.



Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của BC, CA, AB.
Dễ thấy với mọi điểm M thuộc tam giác ABC thì tồn tại ít nhất hai trong ba hình thang $BCEF, CAFD, ABDE$ chứa nó. Không mất tính tổng quát, giả sử M nằm trong hình thang $BCEF$ và $ABDE$.
Áp dụng bổ đề, ta có

$$\begin{cases} MA + MB < \dfrac{1}{2}(AB + BC + CA) \\ MB + MC < \dfrac{1}{2}(AB + BC + CA) \end{cases}$$

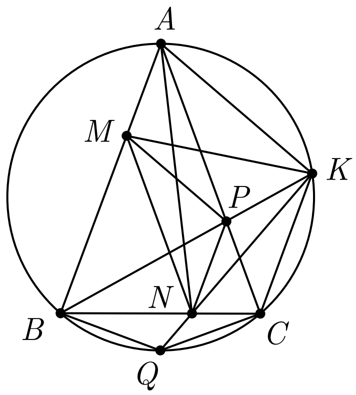
Do đó

$$MA + MB + MC + \min\{MA, MB, MC\} \leqslant MA + 2MB + MC < AB + BC + CA$$

Ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.23 Tam giác cân ABC nội tiếp (O) có $AB = AC$ và AQ là đường kính của (O). Lấy M, N, P lần lượt trên cạnh AB, BC, CA sao cho $AMNP$ là hình bình hành. Chứng minh rằng $NQ \perp MP$.

Lời giải



(i) *Cách 1.*
Lấy K là điểm đối xứng của N qua MP.
Ta có $\widehat{MKP} = \widehat{MNP} = \widehat{MAP}$, suy ra tứ giác $AMPK$ nội tiếp.
Lại có $\widehat{MPK} = \widehat{MPN} = \widehat{AMP}$ nên $AP = MK$. Do đó $\widehat{MAK} = \widehat{PKA}$ (1)
Mặt khác, $PC = PN = PK$ nên tam giác PKC cân tại P hay $\widehat{PKC} = \widehat{PCK}$ (2)
Ta có

$$\widehat{ABC} + \widehat{AKC} + \widehat{BAK} + \widehat{BCK} = 360^\circ$$

Tương đương với

$$\widehat{ABC} + \widehat{AKP} + \widehat{PKC} + \widehat{BAK} + \widehat{BCK} = 360^\circ$$

Từ đó, kết hợp với (1), (2) và tam giác $\triangle ABC$ cân, ta suy ra

$$\widehat{ACB} + \widehat{PCK} + \widehat{MAK} + \widehat{BAK} + \widehat{BCK} = 360^\circ$$

Do đó

$$2\left(\widehat{BCK} + \widehat{BAK}\right) = 360^\circ$$

Vì vậy $\widehat{BCK} + \widehat{BAK} = 180^\circ$ hay $K \in (O)$.
Cũng từ (1), ta có $AK \parallel MP$ hay $AK \perp NK$.
Vậy N, K, Q thẳng hàng hay $MP \perp NQ$.

(ii) *Cách 2.* Sử dụng kiến thức về vector, ta cần chứng minh $\overrightarrow{QN} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$.
Để thực hiện điều này, ta đặt $k = \dfrac{NC}{BC}$ và chú ý rằng $QB \perp MA, QC \perp MN$. Biến đổi như sau :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{QN} \cdot \overrightarrow{MP} &= \left[(1-k)\overrightarrow{QC} + k\overrightarrow{OB}\right](\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MN}) \\
&= (1-k)\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{MN} \\
&= (1-k)\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{MN} \\
&= (1-k)BC \cdot MA \cos B - kBC \cdot MN \cos C
\end{aligned}$$

Với $\cos B = \cos C$, ta chỉ cần chứng minh rằng :

$$(1-k) \cdot MA = k \cdot MN$$

Tương đương với

$$\frac{MA}{MN} = \frac{k}{1-k}$$

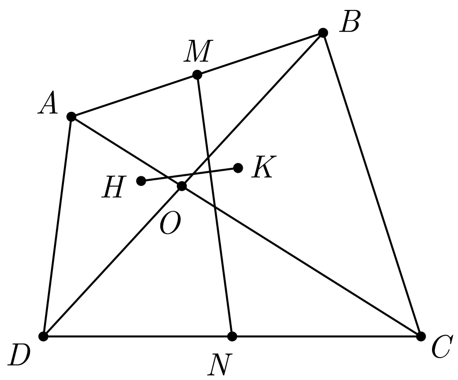
Đẳng thức này đúng vì ta có

$$\frac{k}{1-k} = \frac{\dfrac{NC}{BC}}{\dfrac{NB}{BC}} = \frac{NC}{NB} = \frac{MA}{MB} = \frac{MA}{MN}$$

Bài toán được chứng minh. ❒

Bài 2.24 Cho tứ giác $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm AB, CD và O là giao điểm của 2 đường chéo. Gọi H, K là trực tâm của tam giác OAB, OCD. Hãy chứng minh $MN \perp HK$.

Lời giải



Ta sẽ dùng vector để chứng minh rằng :

$$\overrightarrow{HK} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$$

Trước hết, xin phát biểu mà không chứng minh chứng minh một bổ đề quen thuộc :

$$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$$

Trở lại bài toán, theo bổ đề ta có được :

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{HK} &= \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{HK} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{HK} \\ &= x \cdot AC - y \cdot BD \end{aligned}$$

Trong đó, x, y lần lượt là độ dài tuyệt đối hình chiếu của HK lên AC, BD. Khi đó, không khó để thấy rằng :

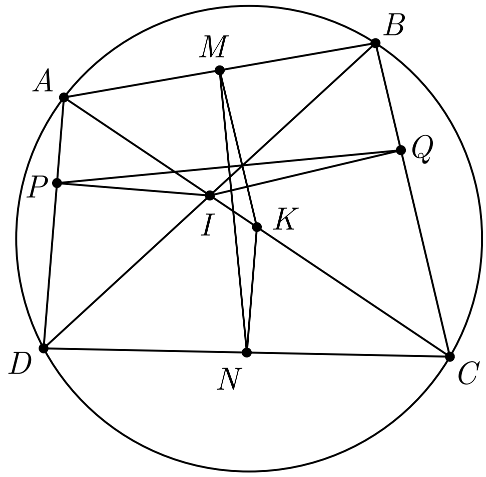
$$x = BD \sin \widehat{OBK}, y = AC \sin \widehat{OCK}$$

Nhưng rõ ràng $\widehat{OBK} = \widehat{OCK}$ nên $x \cdot AC - y \cdot BD = 0$. Từ đây ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.25 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) có hai đường chéo cắt nhau tại I. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. P, Q là chân đường cao kẻ từ I của tam giác IAD, IBC. Chứng minh rằng, $PQ \perp MN$.

Lời giải

(i) *Cách 1.*



Lấy K là trung điểm của AC, khi ấy KM, KN là đường trung bình của các tam giác ABC, ACD nên $KM = \dfrac{BC}{2}, KN = \dfrac{AD}{2}$.
Hai tam giác IAD, IBC đồng dạng có IP, IQ là đường cao tương ứng nên :

$$\frac{IP}{IQ} = \frac{AD}{BC} = \frac{KN}{KM}$$

Hơn nữa, $MK \parallel BC, NK \parallel AD$ nên $\widehat{MKN}$ bù với góc tạo bởi AD, BC, nên góc này cũng bằng với $\widehat{PIQ}$. Do đó, $\triangle KMN \backsim \triangle IQP$.
Suy ra $\widehat{KMN} = \widehat{IQP}$, mà $KM \perp IQ \Rightarrow MN \perp PQ$, ta có điều cần chứng minh.

(ii) *Cách 2.*
Ta có thể sử dụng vector, tức quy về chứng minh :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$$

Tương tự bài 2.24, ta cần chứng minh rằng

$$x \cdot AC = y \cdot BD$$

Trong đó x là hình chiếu của PQ lên AC, y là hình chiếu của PQ lên BD.
Sử dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông thì :

$$x = \frac{IP^2}{IA} + \frac{IQ^2}{IC}, \quad y = \frac{IP^2}{ID} + \frac{IQ^2}{IB}$$

Ta cần chứng minh đẳng thức sau :

$$AC\left(\frac{IP^2}{IA} + \frac{IQ^2}{IC}\right) = BD\left(\frac{IP^2}{ID} + \frac{IQ^2}{IB}\right)$$

Chú ý do 2 tam giác IAD, IBC đồng dạng nên $\dfrac{IP}{IQ} = \dfrac{IA}{IB} = \dfrac{ID}{IC}$ và $IA \cdot IC = IB \cdot ID = \mathcal{P}_{I/(O)}$.
Khi đó, sau khi chia 2 vế đẳng thức trên cho IP^2, ta được dãy các đẳng thức tương đương :

$$(IA \cdot ID^2 + IC \cdot IA^2)(IA + IC) = (IA^2 \cdot ID + IB \cdot ID^2)(IB + ID)$$

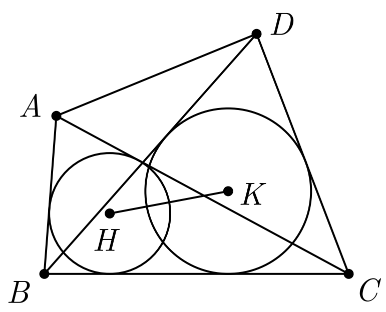
$$IA^3 \cdot IC + IA \cdot IC \cdot ID^2 = IB \cdot ID^3 + IA^2$$

$$\mathcal{P}_{I/(O)}(IA^2 - ID^2) = \mathcal{P}_{I/(O)}(IA^2 - ID^2)$$

Đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng, bài toán được chứng minh. ❐

Bài 2.26 Cho tam giác ABC và tam giác DBC có tâm nội tiếp lần lượt là H, K. Chứng minh rằng $AD \geqslant HK$.

Lời giải



Trước hết, xin phát biểu và không chứng minh hai bổ đề sau đây :

Bổ đề 1 : Cho tam giác ABC, điểm M nằm trong tam giác đó. Khi đó

$$MB + MC < AB + AC$$

Bổ đề 2 : Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). Khi đó ta có

$$BC \cdot \overrightarrow{IA} + CA \cdot \overrightarrow{IB} + AB \cdot \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$$

Trở lại với bài toán, để tiện biến đổi, ta kí hiệu $BC = a, AB = c, CA = b, DB = c_1, DC = b_1$. Từ bổ đề 2 ta có

$$a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$$

$$a\overrightarrow{KD} + b_1\overrightarrow{KB} + c_1\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{0}$$

Suy ra

$$a\overrightarrow{HA} + b\overrightarrow{HB} + c\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$$

$$a\overrightarrow{HD} + b_1\overrightarrow{HB} + c_1\overrightarrow{HC} = (a + b_1 + c_1)\overrightarrow{HK}$$

Do đó

$$a(\overrightarrow{HD} - \overrightarrow{HA}) + (b_1 - b)\overrightarrow{HB} + (c_1 - c)\overrightarrow{HC} = (a + b_1 + c_1)\overrightarrow{HK}$$

Từ đó rút ra

$$a\overrightarrow{AD} + (b_1 - b)\overrightarrow{HB} + (c_1 - c)\overrightarrow{HC} = (a + b_1 + c_1)\overrightarrow{HK} \quad (1)$$

Từ bất đẳng thức tam giác và bổ đề 1, ta có

$$|b - b_1| \leqslant AD, |c - c_1| \leqslant AD, HB + HC < b + c \quad (2)$$

Từ $(1),(2)$ suy ra

$$\begin{aligned}(a+b_1+c_1)HK &\leqslant aAD + HB.AD + HC.AD\\ &= aAD + (BH+HC)AD\\ &\leqslant aAD + (b+c)AD\end{aligned}$$

Ta suy ra

$$(a+b+c)AD \geqslant (a+b_1+c_1)HK \tag{3}$$

Chứng minh tương tự, ta có :

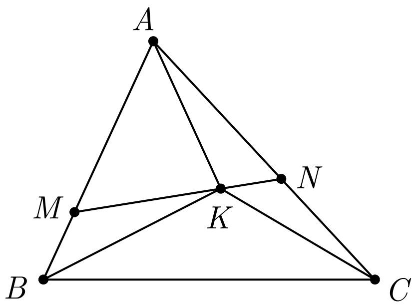
$$(a+b_1+c_1)AD \geqslant (a+b+c)HK \tag{4}$$

Cộng theo vế (3) và (4) rồi thu gọn ta có $AD \geqslant HK$. ❒

Bài 2.27 Cho K là điểm nằm trong tam giác ABC. Một đường thẳng qua K cắt hai cạnh AB, AC theo thứ tự ở M, N. Chứng minh rằng :

$$S_{ABC} \geqslant 8\sqrt{S_{BMK}\cdot S_{CNK}}$$

Lời giải



Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn :

$$\sqrt[3]{S_{BMK}} + \sqrt[3]{S_{CNK}} \leqslant \sqrt[3]{S_{ABC}}$$

Ta kí hiệu : $KM = x_1,\ KN = x_2,\ MB = y_1,\ MA = y_2,\ NC = z_1,\ NA = z_2$.
Ta có

$$\begin{aligned}\frac{S_{BMK}}{S_{ABC}} &= \frac{S_{MBK}}{S_{MAN}}\cdot\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}\\ &= \frac{x_1y_1}{y_2(x_1+x_2)}\cdot\frac{y_2z_2}{(y_1+y_2)(z_1+z_2)}\\ &= \frac{x_1y_1z_2}{(x_1+x_2)(y_1+y_2)(z_1+z_2)}\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sqrt[3]{\frac{S_{BMK}}{S_{ABC}}} = \sqrt[3]{\frac{x_1}{x_1+x_2}\cdot\frac{y_1}{y_1+y_2}\cdot\frac{z_2}{z_1+z_2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$\sqrt[3]{\frac{S_{BMK}}{S_{ABC}}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{y_1}{y_1+y_2}+\frac{z_2}{z_1+z_2}\right) \tag{1}$$

Chứng minh tương tự ta có :

$$\sqrt[3]{\frac{S_{CNK}}{S_{ABC}}} \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{x_2}{x_1+x_2}+\frac{y_2}{y_1+y_2}+\frac{z_1}{z_1+z_2}\right) \tag{2}$$

Cộng theo vế (1), (2) ta có

$$\sqrt[3]{\frac{S_{BMK}}{S_{ABC}}}+\sqrt[3]{\frac{S_{CNK}}{S_{ABC}}} \leqslant 1$$

Suy ra

$$\sqrt[3]{S_{BMK}}+\sqrt[3]{S_{CNK}} \leqslant \sqrt[3]{S_{ABC}}$$

Đến đây, áp dụng AM - GM, ta có

$$2\cdot\sqrt[6]{S_{BMK}\cdot S_{CNK}} \leqslant \sqrt[3]{S_{ABC}}$$

Suy ra

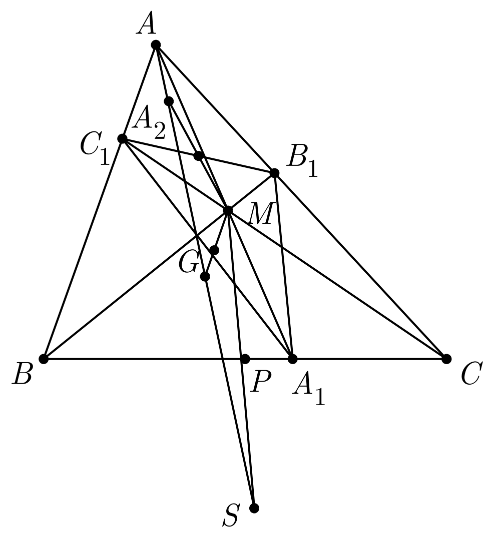
$$S_{ABC} \geqslant 8\sqrt{S_{BMK}\cdot S_{CNK}}$$

Chứng minh hoàn tất. ❒

Bài 2.28 Cho tam giác ABC nhọn và M là một điểm thuộc miền trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của MA, MB, MC với các cạnh tam giác ABC. Lấy A_2, B_2, C_2 là các điểm đối xứng với M qua trung điểm của B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Lời giải

(i) *Cách 1.*



Gọi S là điểm đối xứng của M qua trung điểm P của BC. Do trung điểm của MA, B_1C_1, BC thẳng hàng (vì chúng nằm trên đường thẳng Gauss của tứ giác toàn phần AB_1MC_1BC) nên A, A_2, S cũng thẳng hàng.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, khi đó $GA = \dfrac{2}{3}GP$. Xét tam giác AMS có AP là trung

tuyến mà $GA = \dfrac{2}{3}GP$ nên G cũng là trọng tâm của tam giác này. Điều này chứng tỏ AA_2 cắt MG tại điểm Q chia đoạn MG theo tỉ số $3:1$.
Lý luận tương tự, ta thấy BB_2, CC_2 cũng đi qua Q. Ta có điều cần chứng minh.

(ii) *Cách 2.*
Áp dụng định lý hàm số sin cho hai tam giác AA_2C_1, AA_2B_1 và chú ý $MB_1A_2C_1$ là hình bình hành để suy ra :

$$\sin\widehat{BAA_2} = \sin\widehat{AC_1A_2}\cdot\frac{C_1A_2}{AA_2} = \sin\widehat{ABM}\frac{MB_1}{AA_2}$$
$$\sin\widehat{CAA_2} = \sin\widehat{AB_1A_2}\cdot\frac{B_1A_2}{AA_2} = \sin\widehat{ACM}\frac{MC_1}{AA_2}$$

Do đó

$$\frac{\sin\widehat{BAA_2}}{\sin\widehat{CAA_2}} = \frac{\sin\widehat{ABM}}{\sin\widehat{ACM}}\cdot\frac{MB_1}{MC_1}$$

Vì vậy

$$\prod\frac{\sin\widehat{BAA_2}}{\sin\widehat{CAA_2}} = \prod\frac{\sin\widehat{ABM}}{\sin\widehat{ACM}}\cdot\prod\frac{MB_1}{MC_1}$$

Theo định lý Ceva cho tam giác ABC thì :

$$\prod\frac{\sin\widehat{ABM}}{\sin\widehat{ACM}} = 1$$

Do đó,

$$\prod\frac{\sin\widehat{BAA_2}}{\sin\widehat{CAA_2}} = 1$$

Cũng theo định lý Ceva cho tam giác ABC, ta suy ra AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy. ❒

Bài 2.29 Cho tam giác ABC nội tiếp $(O;R)$ có M thuộc cung BC không chứa A. Tìm vị trí của M để $P = 2010\cdot MB + 2011\cdot MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải
Gọi T là điểm trên cung BC chứa A sao cho $2010\cdot TB = 2011\cdot TC$. Suy ra T cố định.
Áp dụng định lí Ptolemy cho tứ giác $TBMC$ nội tiếp (O) ta có

$$TB\cdot CM + TC\cdot BM = BC\cdot TM$$

Do đó

$$\frac{2011\cdot TC}{2010}\cdot CM + TC\cdot BM = BC\cdot TM$$

Vì vậy

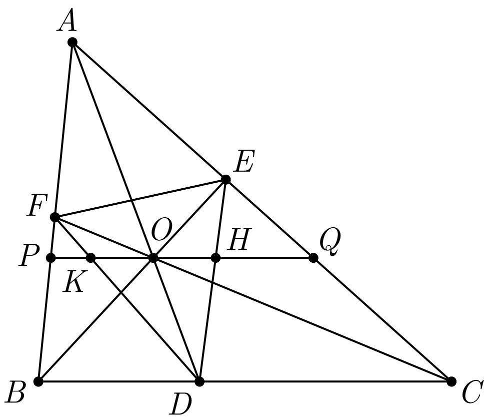
$$P = 2011\cdot CM + 2010\cdot BM = \frac{2010\cdot BC\cdot TM}{TC}$$

Vì T, B, C cố định nên P lớn nhất khi và chỉ khi TM lớn nhất, tức là TM phải là đường kính của (O). ❒

Bài 2.30 Cho tam giác ABC. Các điểm D, E, F nằm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy tại O. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt DE, DF theo thứ tự tại H và K. Chứng minh O là trung điểm HK.

Lời giải

(i) *Cách 1.*



Gọi P, Q là giao điểm của đường thẳng HK với AB, AC.
Áp dụng định lí Thales, ta có :

$$\frac{PO}{PQ} = \frac{BD}{BC} \text{ và } \frac{KO}{PO} = \frac{CD}{BC}$$

Suy ra

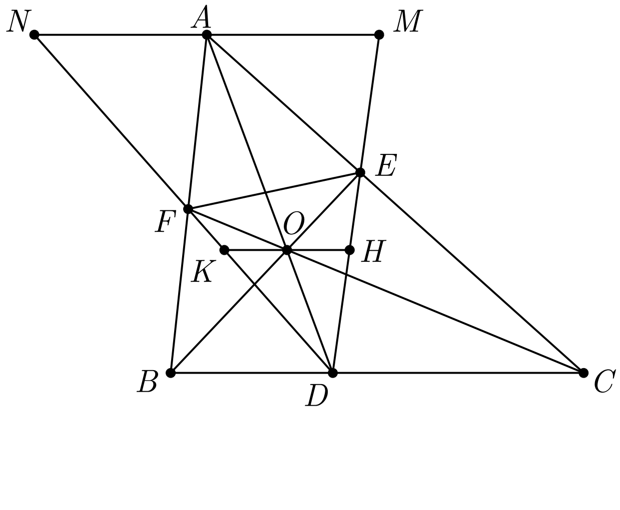
$$\frac{KO}{PQ} = \frac{PO}{PQ} \cdot \frac{KO}{PO} = \frac{BD \cdot CD}{BC^2} \tag{1}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{HO}{PQ} = \frac{BD \cdot CD}{BC^2} \tag{2}$$

Từ (1) và (2), ta có điều cần chứng minh.

(ii) *Cách 2.*



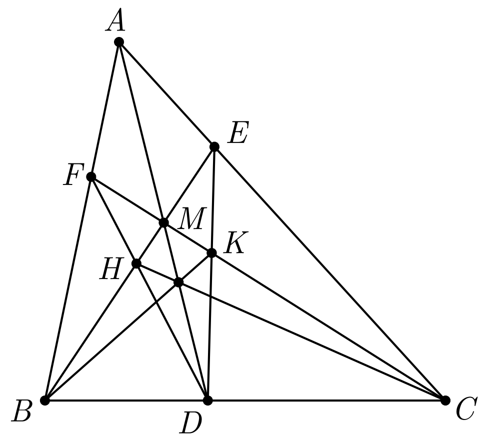
Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt các tia DE, DF tại M, N.
Áp dụng định lí Ceva và định lí Thales, ta có dãy các đẳng thức tương đương sau :

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$
$$\frac{AN}{BD} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CD}{AM} = 1$$
$$\frac{AN}{AM} = 1$$
$$AM = AN$$

Áp dụng định lí Thales một lần nữa, ta suy ra $OK = OH$. ❒

Bài 2.31 Cho tam giác ABC. M là một điểm bất kì trên mặt phẳng và không nằm trên tam giác ABC. Các đường thẳng AM, BM, CM lần lượt cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi H, K lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng BM với FD; CM với ED. Chứng minh các đường thẳng AD, BK, CH đồng quy.

Lời giải



Ta có

$$\frac{MH}{BH} = \frac{S_{FMD}}{S_{FBD}} = \frac{\dfrac{S_{FMD}}{S_{AFD}}}{\dfrac{S_{FBD}}{S_{AFD}}} = \frac{\dfrac{DM}{DA}}{\dfrac{BF}{FA}} = \frac{MD \cdot FA}{AD \cdot FB} \tag{1}$$

Tương tự :

$$\frac{CK}{KM} = \frac{CE \cdot AD}{EA \cdot MD} \tag{2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{MH}{BH} \cdot \frac{CK}{KM} = \frac{AF}{BF} \cdot \frac{CE}{EA}$$
$$\frac{MH}{BH} \cdot \frac{CK}{KM} \cdot \frac{BD}{DC} = \frac{AF}{BF} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{BD}{DC}$$

Theo định lí Ceva, ta có

$$\frac{AF}{BF} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$$

Do đó,

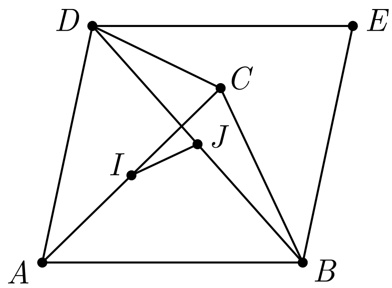
$$\frac{MH}{BH} \cdot \frac{CK}{KM} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$$

Theo định lí Ceva đảo, ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.32 Cho tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh :

$$\min\{AB, BC, CD, DA\} \leqslant \frac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2} \leqslant \max\{AB, BC, CD, DA\}$$

Lời giải



Đặt $m = \min\{AB, BC, CD, DA\}$.
Ta có hai nhận xét sau

- *Nhận xét 1.* Trong tam giác ABC ta có :

$$\widehat{BAC} \geqslant 90^\circ \Leftrightarrow BC^2 \geqslant AB^2 + AC^2$$

- *Nhận xét 2.* Trong tứ giác $ABCD$, gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD; ta có

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4IJ^2$$

Trở lại bài toán :
Bất đẳng thức $\dfrac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2} \leqslant \max\{AB, BC, CD, DA\}$ là hệ quả trực tiếp của nhận xét 2.
Ta chứng minh bất đẳng thức bên trái :

$$\widehat{BAD} + \widehat{ADC} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} = 360^\circ$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử : $\widehat{BAD} + \widehat{ADC} \geqslant 180^\circ; \widehat{BAD} \geqslant 90^\circ$.
Dựng hình bình hành $ABED$. Khi đó, DE nằm giữa DB, DC.
Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD.
Trong tam giác ACE có IJ là đường trung bình nên $CE = 2IJ$.
Có 2 trường hợp xảy ra :

- *Trường hợp 1 :* E nằm trong tứ giác $ABCD$. Trong 2 góc $\widehat{AEB}, \widehat{AED}$ có ít nhất một góc nhọn.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\widehat{AEB} \leqslant 90°$.
Ta suy ra $\widehat{CEB} \geqslant 90°$. Theo nhận xét 1, ta có

$$BC^2 \geqslant BE^2 + CE^2 \Leftrightarrow BC^2 - 4IJ^2 \geqslant AD^2$$

Sử dụng nhận xét 2, ta có

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= AB^2 + AD^2 + CD^2 + (BC^2 - 4IJ^2) \\ &\geqslant AB^2 + AD^2 + CD^2 + AD^2 \\ &\geqslant 4m^2 \end{aligned}$$

Suy ra $m \leqslant \dfrac{\sqrt{AC^2 + BD^2}}{2}$.

- *Trường hợp 2 :* E nằm ngoài tứ giác $ABCD$.
  Khi đó CB nằm giữa CD, CE. Do đó : $\widehat{BEC} \geqslant \widehat{BED} = \widehat{BAD} \geqslant 90°$.
  Chứng minh hoàn toàn tương tự *trường hợp 1*. (Bạn đọc tự chứng minh)

Vậy bài toán đã được chứng minh. ❒

Bài 2.33 Cho đường tròn $(O; R)$ và hai điểm A, B cố định đối xứng với nhau qua O. Gọi M là điểm chạy trên (O). Đường thẳng MA, MB cắt (O) tại P, Q tương ứng. Chứng minh rằng giá trị biểu thức $\dfrac{MA}{AP} + \dfrac{MB}{BQ}$ không đổi khi M di chuyển trên (O).

Lời giải

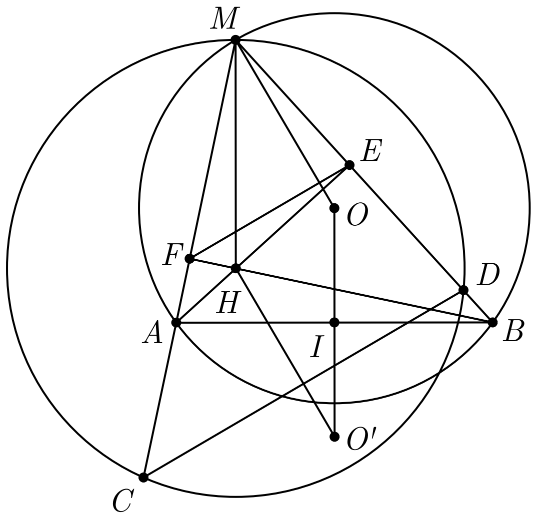
Từ giả thiết suy ra phương tích của điểm A và B với (O) là như nhau. Do đó :

$$\begin{aligned} \frac{MA}{AP} + \frac{MB}{BQ} &= \frac{MA^2}{\mathcal{P}_{A/(O)}} + \frac{MB^2}{\mathcal{P}_{B/(O)}} \\ &= \frac{MA^2 + MB^2}{\mathcal{P}} \\ &= \frac{2MO^2 + \dfrac{AB^2}{2}}{\mathcal{P}} \end{aligned}$$

Vì A, B cố định và $MO = R$ không đổi nên $\dfrac{2MO^2 + \dfrac{AB^2}{2}}{\mathcal{P}}$ không đổi, ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.34 Cho (O) và dây AB. Điểm M di chuyển trên cung lớn AB. Các đường cao AE, BF của $\triangle ABM$ cắt nhau tại H. Kẻ $(H; HM)$ cắt MA, MB ở C và D. Chứng minh đường thẳng kẻ từ H vuông góc với CD luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên cung lớn AB.

Lời giải

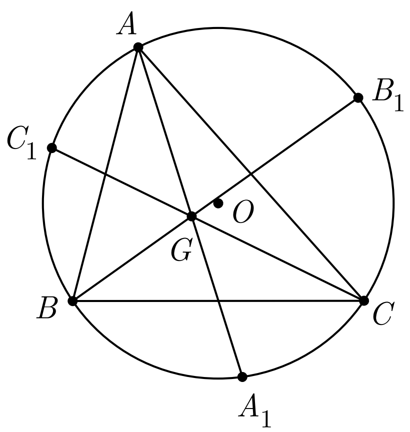


Từ giả thiết ta có E, F tương ứng là các trung điểm của các đoạn thẳng MD, MC. Suy ra $EF \parallel CD$.
Theo một kết quả quen thuộc thì $OM \perp EF$. Do đó $OM \perp CD$.
Gọi O' là điểm đối xứng với O qua AB thì OO' và AB vuông góc với nhau tại trung điểm I của mỗi đường
Theo một tính chất quen thuộc của trực tâm tam giác thì ta có $MH = 2OI \Rightarrow MH = OO'$
Mà $MH \parallel OO'$ (cùng vuông góc với BC) nên $MHO'O$ là hình bình hành. Suy ra $HO' \parallel MO$.
Từ đó ta có $HO' \perp CD$.
Vậy khi M di chuyển trên cung lớn AB thì đường thẳng qua H vuông góc với CD luôn đi qua điểm O' cố định. ❒

Bài 2.35 Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). G là trọng tâm tam giác. AG, BG, CG lần lượt cắt (O) tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng :

$$GA_1 + GB_1 + GC_1 \geqslant GA + GB + GC$$

Lời giải



Kí hiệu δ là phương tích của G đối với (O). Ta có

$$\begin{aligned} GA_1 + GA_2 + GA_3 &= \frac{GA_1 \cdot GA}{GA} + \frac{GB_2 \cdot GB}{GB} + \frac{GC_2 \cdot GC}{GC} \\ &= \delta\left(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC}\right) \\ &\geqslant \frac{9\delta}{GA+GB+GC} \end{aligned}$$

Sử dụng hệ thức Jacobi, ta có

$$\delta = \frac{GA^2+GB^2+GC^2}{3} \geqslant \frac{(GA+GB+GC)^2}{9}$$

Thay đánh giá này vào bất đẳng thức trên, ta có điều cần chứng minh. ❒

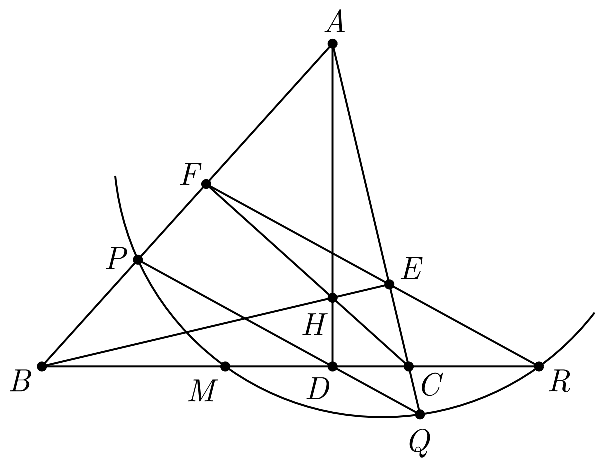
Nhận xét.

Nếu thay trọng tâm G bằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác bởi I và A_1, B_1, C_1 là giao điểm của các tia AI, BI, CI với (O) thì bài toán vẫn đúng, tức là

$$IA_1 + IB_1 + IC_1 \geqslant IA + IB + IC$$

Bài 2.36 Cho $\triangle ABC$ và D, E, F lần lượt là hình chiếu của A, B, C xuống ba cạnh tương ứng. Đường thẳng qua D song song với EF cắt AB, AC tại P, Q. Biết $EF \cap BC = R$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp $\triangle PQR$ đi qua trung điểm BC.

Lời giải



Vì D, E, F, M đồng viên (đường tròn Euler của tam giác ABC), ta có

$$\overline{RD} \cdot \overline{RM} = \overline{RE} \cdot \overline{RF}$$

Vì B, E, F, C đồng viên nên ta có

$$\overline{RB} \cdot \overline{RC} = \overline{RE} \cdot \overline{RF}$$

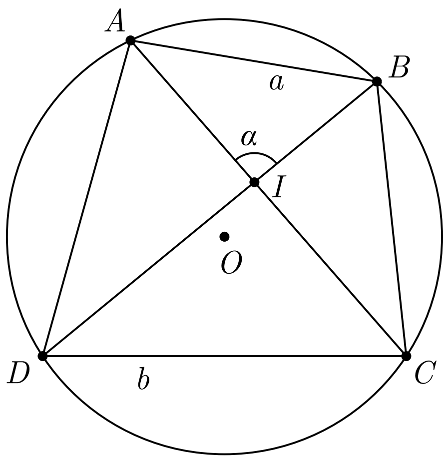
Suy ra

$$\overline{RB} \cdot \overline{RC} = \overline{RD} \cdot \overline{RM} \tag{1}$$

Mặt khác, ta có
$$(PQ, PA) \equiv (FE, FA) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi}$$
Do đó B, C, P, Q đồng viên. Suy ra
$$\overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DP} \cdot \overline{DQ}$$
Để chứng minh P, Q, R, M đồng viên thì ta cần chứng minh
$$\overline{DP} \cdot \overline{DQ} = \overline{DR} \cdot \overline{DM}$$
Tương đương với
$$\overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DR} \cdot \overline{DM}$$
Biến đổi từ (1) ta có ngay điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.37 Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Cho $AB = a, CD = b, \widehat{AIB} = \alpha$, trong đó I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Tính bán kính đường tròn (O) theo a, b và α.

Lời giải



Ta có $\widehat{AIB} = \dfrac{\widehat{AOB}}{2} + \dfrac{\widehat{COD}}{2}$.
Suy ra
$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \cos\frac{\widehat{AOB}}{2} \cdot \cos\frac{\widehat{COD}}{2} - \sin\frac{\widehat{AOB}}{2} \cdot \sin\frac{\widehat{COD}}{2} \\ &= \sqrt{\left(1 - \frac{a^2}{4R^2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{4R^2}\right)} - \frac{ab}{4R^2}\end{aligned}$$
Như vậy, từ đẳng thức trên suy ra
$$\left(4R^2\cos\alpha + ab\right)^2 = \left(4R^2 - a^2\right)\left(4R^2 - b^2\right)$$
Tương đương với
$$4R^2\left(a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha\right) = 16R^4\sin^2\alpha$$

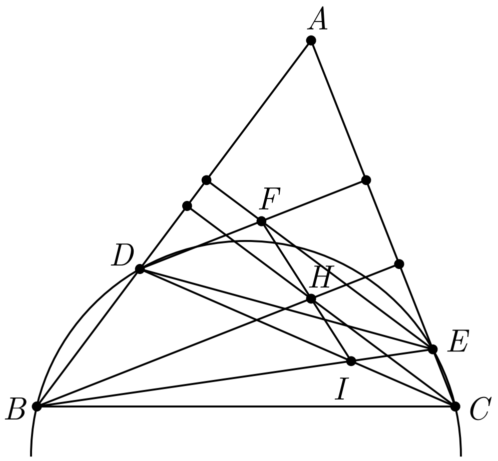
Vì vậy

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$$

Ta có được đáp số của bài toán. ❐

Bài 2.38 Cho $\triangle ABC$ có trực tâm H. Đường tròn qua B, C cắt AB, AC tại D, E. Gọi F là trực tâm $\triangle ADE$ và I là giao điểm của BE và CD. Chứng minh rằng I, H, F thẳng hàng.

Lời giải



Gọi F_1, F_2 là hình chiếu vuông góc của F lên AB, AC; H_1, H_2 là hình chiếu vuông góc của H lên AB, AC.
Theo một kết quả quen thuộc về trực tâm tam giác, ta có

$$\overline{FF_1} \cdot \overline{FE} = \overline{FF_2} \cdot \overline{FD} \text{ và } \overline{HH_1} \cdot \overline{HC} = \overline{HH_2} \cdot \overline{HB}$$

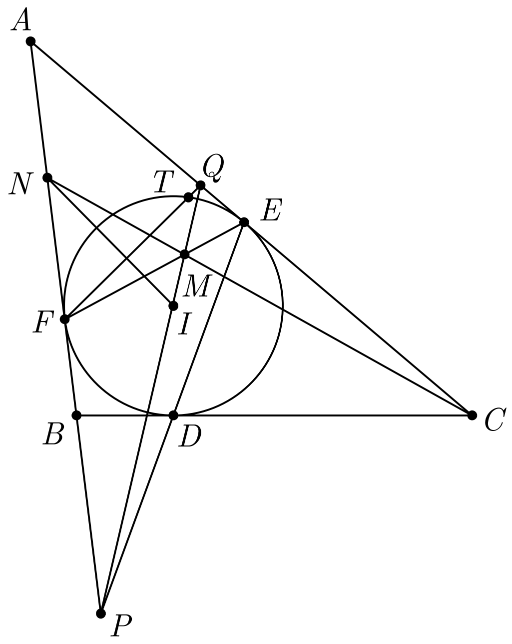
Mặt khác, ta có

$$\overline{IB} \cdot \overline{IE} = \overline{IC} \cdot \overline{ID}$$

Suy ra F, H, I cùng thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính BD và đường tròn đường kính CE. Do đó ta có điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.39 Cho $\triangle ABC$ không cân, ngoại tiếp đường tròn (I). Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. DE cắt AB ở P. Một đường thẳng qua C cắt AB, FE lần lượt ở N, M. PM cắt AC ở Q. Chứng minh rằng IN vuông góc với FQ.

Lời giải

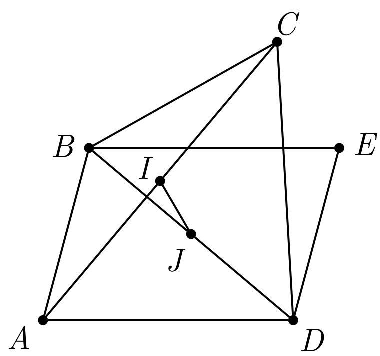


Gọi giao điểm của FQ với (I) là $T \neq F$. Giả sử $TD \cap EF = M'$.
Áp dụng định lý Pascal cho 6 điểm E, E, D, F, T, F ta có Q, M', P thẳng hàng, suy ra $M \equiv M'$.
Từ N kẻ tiếp tuyến tiếp xúc với (I) tại T' và cắt AC tại S.
Theo một tính chất quen thuộc, do tứ giác $NSCB$ ngoại tiếp nên $EF, T'D, NC, SB$ đồng quy, từ đó ta có $T \equiv T'$. Suy ra FQ là đường đối cực của N đối với (I). Từ đó ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.40 Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm của AC, BD. Chứng minh rằng :

$$AC + BD + 2IJ < AB + BC + CD + DA$$

Lời giải



Trước hết, xin phát biểu mà không chứng minh lại bổ đề sau :
Bổ đề : Trong một tứ giác lồi, tổng độ dài hai đường chéo nhỏ hơn chu vi và lớn hơn tổng độ dài hai cạnh đối của tứ giác.
Trở lại với bài toán, có 2 trường hợp xảy ra.

- *Trường hợp 1 :* Tứ giác $ABCD$ có ít nhất một cặp cạnh đối song song.
  Không mất tính tổng quát, giả sử $AB \parallel CD$ và $AB < CD$.
  Khi đó dễ thấy : $2IJ = CD - AB$. Ta có :

$$\begin{aligned} AB + BC + CD + DA &= (AB + BC) + (BA + AD) + CD - AB \\ &> AC + BD + 2IJ \end{aligned}$$

  Từ đây ta có điều cần chứng minh.

- *Trường hợp 2 :* Tứ giác $ABCD$ có các đường thẳng chứa cặp cạnh đối cắt nhau.
  Không mất tính tổng quát, giả sử $\widehat{ABC}$ là góc lớn nhất của tứ giác $ABCD$.
  Khi đó ta có : $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} \geqslant 180^\circ$ hoặc $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} \geqslant 180^\circ$
  Thật vậy, nếu $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} < 180^\circ$ và $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} < 180^\circ$.
  Suy ra

$$\begin{aligned} \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAB} &\leqslant (\widehat{ABC} + \widehat{BCD}) + (\widehat{ABC} + \widehat{BAD}) \\ &< 360^\circ \end{aligned}$$

  Điều này vô lí. Do đó ta có thể giả sử $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} \geqslant 180^\circ$.
  Dựng hình bình hành $ABED$. Khi đó BE nằm giữa BA và BC. (1)
  Lại có : $\widehat{ADE} = \widehat{ABC} \geqslant \widehat{ADC} \Rightarrow DC$ nằm giữa DB và DE. (2)
  Từ $(1), (2)$ suy ra $BCED$ là tứ giác lồi.
  Dễ thấy rằng $CE = 2IJ$. (3)
  Áp dụng bổ đề, ta có

$$CE + BD < CD + BE = CD + AD \tag{4}$$

  Theo bất đẳng thức tam giác, ta có $AC < AB + BC$. (5)
  Từ $(3), (4), (5)$ ta có

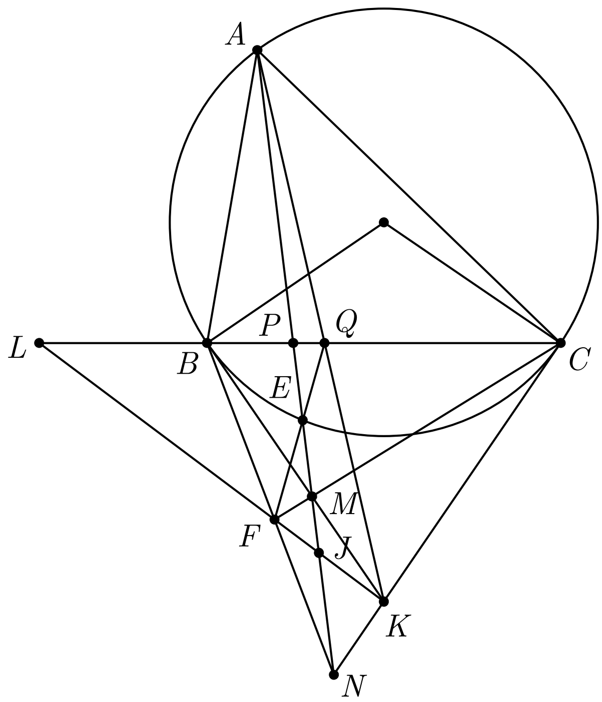
$$AC + BD + 2IJ < AB + BC + CD + DA$$

Chứng minh hoàn tất. ❒

Bài 2.41 Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). E thuộc cung BC không chứa A và không trùng B, C. AE cắt tiếp tuyến tại B, C của (O) tại M, N. Gọi giao điểm của CM và BN là F. Chứng minh rằng EF luôn đi qua một điểm cố định khi E di chuyển trên cung BC không chứa A.

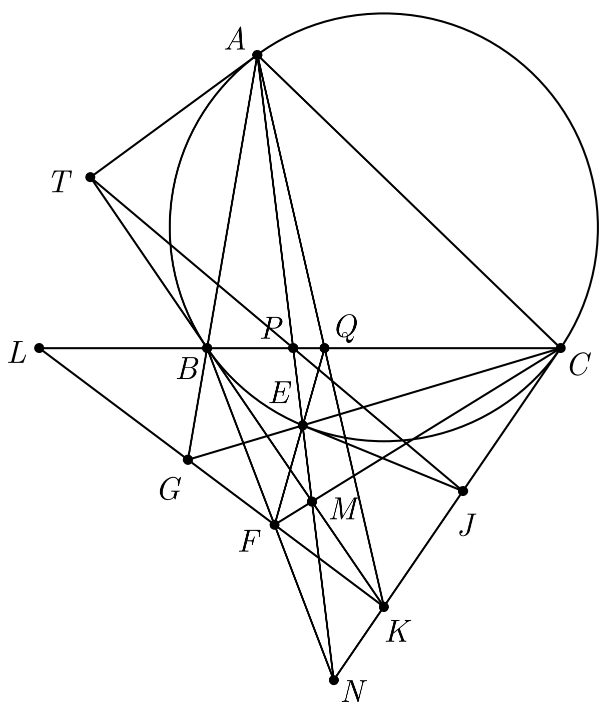
Lời giải

(i) *Cách 1.*



Gọi K là giao điểm của tiếp tuyến tại B và C của (O). AK cắt (O) tại J; AE, AK lần lượt cắt BC tại P, Q; FK cắt BC, AM lần lượt tại L, I.
Ta có $(LPBC) = -1$, suy ra $(EL, EP, EB, EC) = -1$.
Lại có $(EJ, EA, EB, EC) = -1$ nên L, E, J thẳng hàng.
Mặt khác $(EL, EI, EF, EK) = (EJ, EA, EQ, EK) = -1$ nên theo phép chiếu xuyên tâm E ta suy ra được F, E, Q thẳng hàng.
Vậy EF đi qua Q cố định.

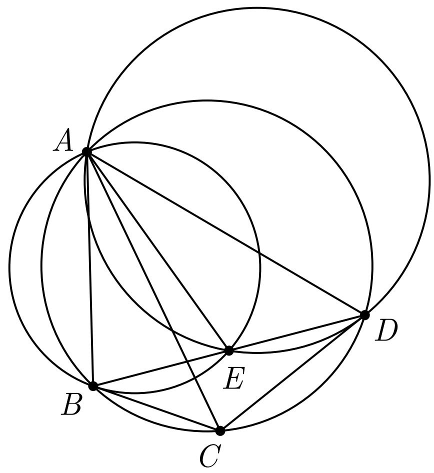
(ii) *Cách 2.*



Cũng gọi K là giao điểm của hai tiếp tuyến; P, Q là giao điểm của AE, AK với BC; L là giao điểm của FK với BC.
Xét cực - đối cực với (O). Gọi T là cực của AB, và J là cực của CE. Ta có $G = AB \cap CE$ là cực của TJ. Mà $P = AE \cap BC$ nên T, P, J thẳng hàng.
Ta có F và K là hai điểm liên hợp với P, suy ra P là cực của FK.
Do đó FK, CE, AB đồng qui tại G.
Áp dụng định lí Pappus cho hai bộ 3 điểm (G, B, A) và (N, K, C), ta suy ra E, F, Q thẳng hàng hay EF đi qua Q cố định. ❐

Bài 2.42 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp thỏa mãn $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Đường tròn (C) qua A, B và tiếp xúc với BC, đường tròn (C') qua A, D và tiếp xúc CD. Chứng minh rằng giao điểm khác A của (C) và (C') là trung điểm BD.

Lời giải



Gọi E là trung điểm BD.Ta sẽ chứng minh rằng (AEB) tiếp xúc với BC và (AED) tiếp xúc với CD
Thật vậy, áp dụng định lý Ptolemy, ta có

$$2BE \cdot AC = BD \cdot AC = AB \cdot CD + AD \cdot BC = 2AB \cdot CD$$

Suy ra

$$BE \cdot AC = AB \cdot CD$$

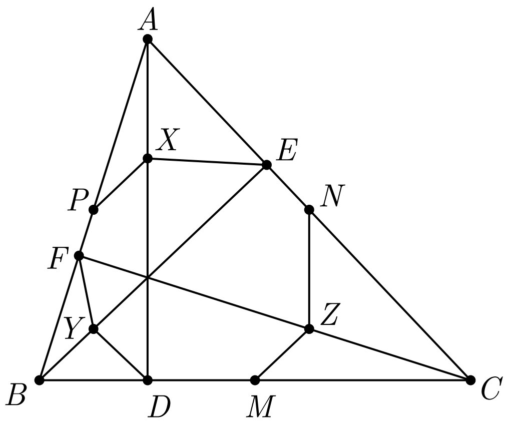
Tương đương với

$$\frac{BA}{BE} = \frac{CA}{CD}$$

Mặt khác, ta có $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$. Do đó $\triangle AEB \backsim \triangle ADC$.
Suy ra $\widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \widehat{BAE}$. Vì vậy (AEB) tiếp xúc với BC tại B.
Chứng minh tương tự như trên ta cũng có (ADE) tiếp xúc CD. Vậy trung điểm E của BD là điểm chung khác A của (C) và (C'). ❐

Bài 2.43 Cho tam giác nhọn ABC, gọi H là trực tâm của tam giác. Tìm điều kiện cần và đủ đối với các góc của tam giác để 9 điểm : chân các đường cao của tam giác, trung điểm các cạnh của tam giác, trung điểm các đoạn thẳng HA, HB, HC là đỉnh của một đa giác đều.

Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB; D, E, F lần lượt là chân đường cao hạ từ A, B, C; X, Y, Z lần lượt là trung điểm HA, HB, HC. Ta có ba trường hợp sau :

- *Trường hợp 1.* Có ít nhất hai trong 3 bộ $(M, D); (N, E); (P, F)$ có hai điểm trong bộ trùng nhau.
  Từ đó suy ra $\triangle ABC$ đều và $M \equiv D,\ N \equiv E,\ P \equiv F$.
  Không khó để chứng minh $MZNXPY$ là lục giác đều.

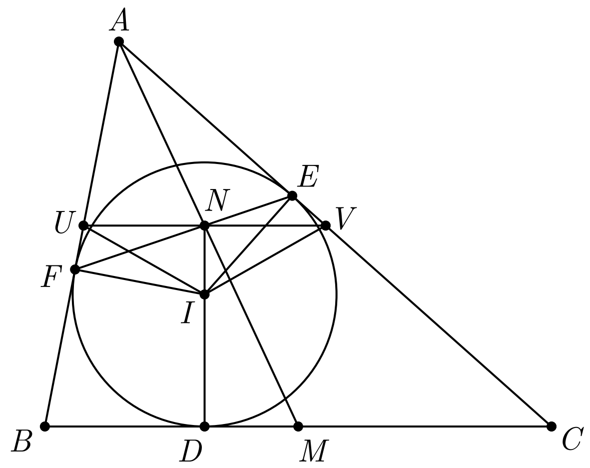
- *Trường hợp 2.* Có đúng một trong 3 bộ $(M, D); (N, E); (P, F)$ có hai điểm trong bộ trùng nhau.
  Giả sử đó là (M, D), khi đó $\triangle ABC$ cân tại A.
  Ta có $MZENXPFY$ là bát giác đều và do $\triangle ABC$ nhọn nên
  $$\begin{cases} \widehat{M} = \widehat{Z} = \widehat{E} = \widehat{N} = \widehat{X} = \widehat{P} = \widehat{F} = \widehat{Y} = 135^\circ \\ MZ = ZE = EN = NX = XP = PF = FY = YM \end{cases}$$
  hay tương đương với :
  $$\begin{cases} \widehat{A} = 45^\circ; \widehat{B} = \widehat{C} = 67,5^\circ \\ \dfrac{AB}{\sqrt{2}} - \dfrac{AB}{2} = AB \cdot \cot(67,5^\circ) \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{A} = 45^\circ; \widehat{B} = \widehat{C} = 67,5^\circ$$

- *Trường hợp 3.* Không có bộ nào trong ba bộ $(M, D);\ (N, E);\ (P, F)$ có hai điểm trong bộ trùng nhau.
  Không mất tính tổng quát, giả sử đoạn EF không cắt đoạn NP.
  Điều kiện cần để thỏa mãn điều kiện bài toán là $\widehat{EXF} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 70^\circ$.
  Cũng không mất tổng quát, giả sử đoạn DF không cắt đoạn MP.
  Do đó, thêm điều kiện cần nữa là $\widehat{MYP} = 140^\circ \Rightarrow \widehat{B} = 40^\circ,\ \widehat{C} = 70^\circ$.
  Do đó ta thấy mâu thuẫn.

Vậy điều kiện cần và đủ để 9 điểm $D, E, F, M, N, P, X, Y, Z$ là các đỉnh của một đa giác đều là $\widehat{A} = 45°$; $\widehat{B} = \widehat{C} = 67,5°$ hoặc $\triangle ABC$ đều. ❐

Bài 2.44 Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC và tiếp xúc với BC, AC, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng ID, EF và trung tuyến AM $(M \in BC)$ đồng quy.

Lời giải



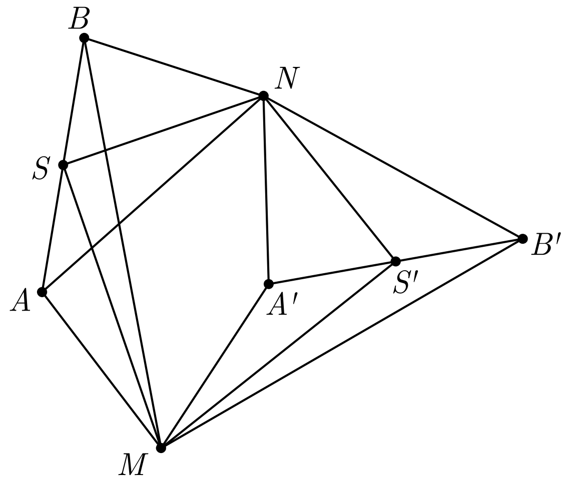
Gọi $N = ID \cap EF$ và $M' = AN \cap BC$.
Ta sẽ chứng minh $M \equiv M'$. Thật vậy, qua N dựng đường thẳng vuông góc với ID cắt AB, AC lần lượt tại U, V.
Khi đó các bộ 4 điểm (I, F, U, N) và (I, V, E, N) đồng viên. Suy ra

$$\widehat{IUN} = \widehat{IFN} = \widehat{IEN} = \widehat{IVN}$$

Như vậy ta có $\triangle IUV$ cân tại I. Do đó $NU = NV$. Áp dụng định lý Thales, ta suy ra $M'B = M'C$ hay M' là trung điểm của BC. ❐

Bài 2.45 Cho hai đoạn thẳng AB và $A'B'$ bằng nhau. Phép quay tâm M biến A thành A', biến B thành B'. Phép quay tâm N biến A thành B', biến B thành A'. Gọi S là trung điểm của AB. Chứng minh rằng SM vuông góc với SN.

Lời giải



Gọi S, S' lần lượt là trung điểm $AB, A'B'$. Gọi f là phép quay tâm M biến $A \to A', B \to B'$; f' là phép quay tâm N biến $A \to B', B \to A'$.
Theo giả thiết ta có : $f(S) = S'$; $f'(S) = S'$. Do đó ta có

$$\begin{cases} (SB, SN) \equiv (S'A', S'N) \pmod{\pi} \\ (SM, SA) \equiv (S'M, S'A') \pmod{\pi} \end{cases}$$

Suy ra

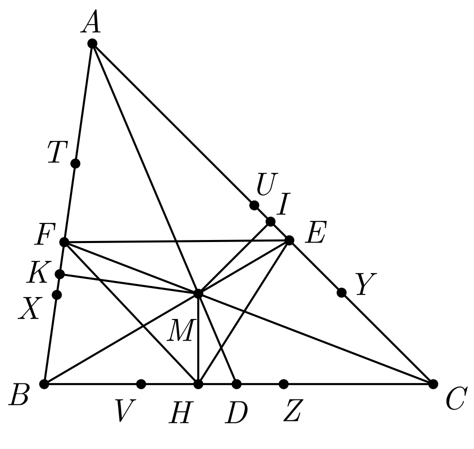
$$\pi - (SN, SM) \equiv (S'M, S'N) \pmod{\pi}$$

Vì vậy S, S', M, N đồng viên.
Lại có $MS = MS', NS = NS'$ nên suy ra $\widehat{MSN} = \widehat{MS'N} = 90^\circ$. ❒

Bài 2.46 Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác. AM, BM, CM cắt BC, CA, AB theo thứ tự ở D, E, F. Gọi H, I, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB . Kí hiệu $P(HIK)$ là chu vi tam giác HIK. Hãy chứng minh :

$$P(DEF) \geqslant P(HIK)$$

Lời giải



Ta có hai bổ đề sau đây :

Bổ đề 1 : Cho điểm M nằm trong góc $\widehat{xOy}$. A, B theo thứ tự là các điểm khác O thuộc tia Ox, Oy; H, K theo thứ tự là hình chiếu của M trên Ox, Oy. Khi đó, ta có

$$P(MAB) \geqslant 2HK$$

Chứng minh bổ đề 1.

Gọi M_1, M_2 theo thứ tự là điểm đối xứng của M qua Ox, Oy. Ta có : $M_1M_2 = 2HK$. Có hai trường hợp xảy ra :

- *Trường hợp 1 :* $\widehat{xOy} < 90°$.
  Ta có $P(MAB) = MA + MB + AB = M_1A + M_1B + AB \geqslant M_1M_2 = 2HK$.

- *Trường hợp 2 :* $\widehat{xOy} \geqslant 90°$.
  Khi đó, M_1M_2 đi qua O hoặc M_1M_2 không đồng thời cắt tia Ox, Oy.
  Ta có bất đẳng thức thực sự : $MA + MB + AB = M_1A + M_1B + AB > 2HK$.
  Do đó, ta luôn có $P(MAB) > 2HK$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi O là tâm bàng tiếp góc M của $\triangle MAB$. □

Bổ đề 2 : Cho tam giác ABC, M là điểm nằm trong tam giác. AM, BM, CM cắt BC, CA, AB theo thứ tự ở D, E, F. Ta có

$$\frac{AM}{AD} + \frac{BM}{BE} + \frac{CM}{CF} = 2$$

Việc chứng minh bổ đề 2 khá đơn giản, xin dành cho bạn đọc. □

Trở lại bài toán :

Qua M kẻ đường thẳng song song với EF, cắt AB, AC tại X, Y; song song với FD cắt BC, BA tại Z, T; song song với DE cắt CA, CB tại U, V

Các tam giác MUT, VMX, ZYM đồng dạng với tam giác DEF theo các tỉ số tương ứng là :

$$\frac{AM}{AD}, \frac{BM}{BE}, \frac{CM}{CF}$$

Từ bổ đề 1, ta có $P(MUT) + P(VMX) + P(ZYM) \geqslant 2IK + 2KH + 2HI$.

Từ đó suy ra $P(MUT) + P(VMX) + P(ZYM) \geqslant 2P(HIK)$. (1)

Từ bổ đề 2, ta có :

$$\frac{AM}{AD} + \frac{BM}{BE} + \frac{CM}{CF} = 2$$

Suy ra

$$2P(DEF) = \frac{AM}{AD}P(DEF) + \frac{BM}{BE}P(DEF) + \frac{CM}{CF}P(DEF)$$

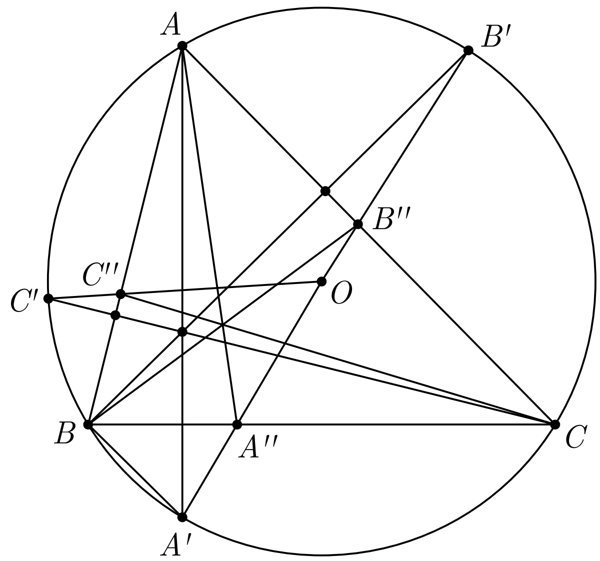
Tương đương với

$$2P(DEF) = P(MUT) + P(VMX) + P(ZYM) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.47 Tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), đường cao AH cắt (O) tại A'. OA' cắt BC tại A''. Xác định tương tự cho B'', C''. Chứng minh AA'', BB'', CC'' đồng quy.

Lời giải



Ta có $\widehat{OBC} = 90^\circ - \widehat{A}$ và $\widehat{CBA'} = \widehat{CAA'} = 90^\circ - \widehat{C}$, suy ra $\widehat{OBA'} = \widehat{B}$.
Lại có $OB = OA'$ nên $\widehat{OA'B} = \widehat{B}$. Suy ra $\widehat{BOA''} = 180^\circ - 2\widehat{B}$.
Tương tự ta có $\widehat{COA''} = 180^\circ - 2\widehat{C}$.
Áp dụng định lý sin trong tam giác ta có

$$\frac{BA''}{\sin\widehat{BOA''}} = \frac{OA''}{\sin\widehat{OBA''}} \text{ và } \frac{CA''}{\sin\widehat{COA''}} = \frac{OA''}{\sin\widehat{OCA''}}$$

Suy ra

$$\frac{BA''}{\sin\widehat{BOA''}} = \frac{CA''}{\sin\widehat{COA''}}$$

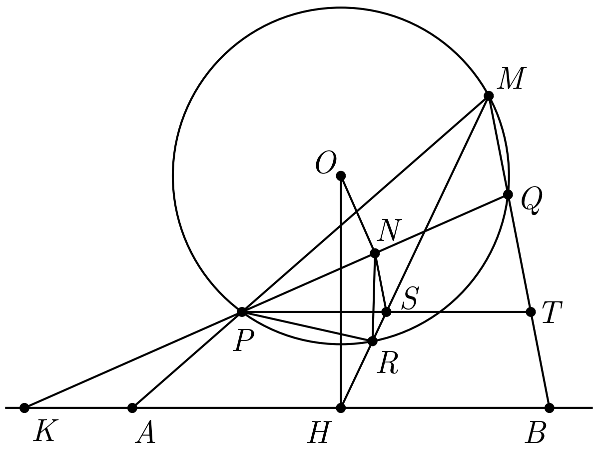
Do đó

$$\frac{BA''}{CA''} = \frac{\sin(180^\circ - 2B)}{\sin(180^\circ - 2C)} = \frac{\sin 2B}{\sin 2C}$$

Tương tự cho hai điểm E, F và áp dụng định lý Ceva, ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.48 Cho đường tròn (O) và một đường thẳng d cố định. Gọi H là hình chiếu của của O trên d. Lấy M cố định thuộc đường tròn. A, B thay đổi trên d sao cho H là trung điểm AB. Giả sử AM, BM cắt (O) tại P, Q. Chứng minh PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



Nếu M, O, H thẳng hàng, khi đó ta có PQ luôn song song với (d). Do đó ta chỉ xét trường hợp M, O, H không thẳng hàng.
Giả sử (d) không cắt (O) (các trường hợp khác chứng minh tương tự).
Không mất tính tổng quát, giả sử M và B cùng phía so với OH. Từ P kẻ đường thẳng d' song song với d cắt MH, MB tương ứng tại S, T. Gọi N là trung điểm của PQ và R là giao điểm khác M của MH với (O).
Ta có $NS \parallel QT$, suy ra

$$(NP, NS) = (QP, QT) = (RP, RS) \pmod{\pi}$$

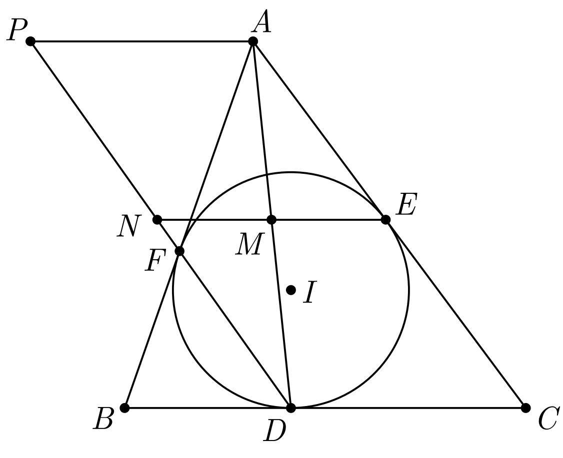
Do đó P, N, R, S đồng viên. Vì vậy

$$(RN, RH) = (PN, PS) = (KN, KH) \pmod{\pi}$$

hay N, R, H, K đồng viên, mà $\widehat{ONK} = \widehat{OHK} = \dfrac{\pi}{2}$ nên O, H, N, K đồng viên. Như vậy ta suy ra K là giao điểm của (d) với (OHR) nên K là điểm cố định.
Vậy PQ luôn đi qua K cố định. ❒

Bài 2.49 Cho đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BC, AB, AC tại D, E, F. Qua E vẽ đường song song với BC cắt AD, DF ở M, N. Chứng minh rằng M là trung điểm của EN.

Lời giải



Qua A dựng đường thẳng (d) song song với BC và cắt DF tại P.
Từ cách dựng trên suy ra $MN \parallel AP$. Do đó theo định lý Thales ta có

$$\frac{MN}{AP} = \frac{DM}{AD}$$

Mặt khác, cũng theo định lý Thales, ta có

$$\frac{EM}{AE} = \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CA} = \frac{DM}{AD}$$

Từ hai đẳng thức trên ta suy ra

$$\frac{EM}{AE} = \frac{MN}{AP}$$

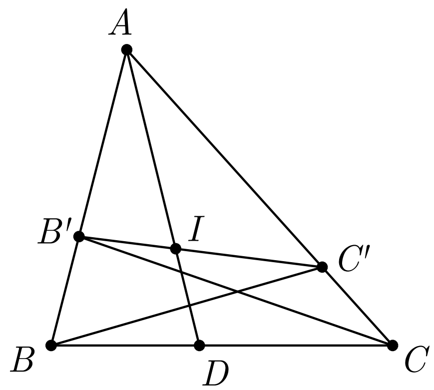
Mặt khác, dễ thấy $AP = AF = AE$ nên suy ra $EM = MN$.
Vậy M là trung điểm EN. ❐

Bài 2.50 Cho tam giác ABC có $AB = c, BC = a, AC = b$ và I là tâm đường trròn nội tiếp. Hai điểm B', C' lần lượt nằm trên hai cạnh AB, AC sao cho B', C', I thẳng hàng. Chứng minh rằng

$$S_{ABC} \leqslant \frac{a+b+c}{2\sqrt{bc}} \cdot \sqrt{S_{AB'C} \cdot S_{ABC'}}$$

Lời giải

(i) *Cách 1.*



Gọi D là chân đường phân giác trong góc A.
Trước tiên ta có các kết quả quen thuộc sau :

$$BD = \frac{ac}{b+c}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

Vì I là chân đường phân giác trong của tam giác ABD nên :

$$\frac{AI}{DI} = \frac{BA}{BD} = \frac{b+c}{a} \Rightarrow \frac{AI}{AD} = \frac{b+c}{a+b+c}$$

Ta suy ra :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \frac{b+c}{a+b+c}\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}\right)\\ &= \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}\\ &= \frac{bAB}{(a+b+c)AB'}\cdot\overrightarrow{AB'}+\frac{cAC}{(a+b+c)AC'}\cdot\overrightarrow{AC'}\end{aligned}$$

Mặt khác B', I, C' thẳng hàng nên $\dfrac{bAB}{AB'(a+b+c)}+\dfrac{cAC}{AC'(a+b+c)}=1$. Tương đương với :

$$\begin{aligned}a+b+c &= \frac{bAB}{AB'}+\frac{cAC}{AC'}\\ &\overset{AM-GM}{\geqslant} 2\cdot\sqrt{\frac{bAB}{AB'}\cdot\frac{cAC}{AC'}}\\ &= 2\sqrt{bc}\cdot\sqrt{\frac{AB\cdot AC}{AC'\cdot AC}\cdot\frac{AB\cdot AC}{AC'\cdot AB}}\\ &= 2\sqrt{bc}\cdot\sqrt{\frac{S^2_{ABC}}{S_{AB'C}\cdot S_{AC'B}}}\end{aligned}$$

Suy ra :

$$S_{ABC}\leqslant\frac{a+b+c}{2\sqrt{bc}}\cdot\sqrt{S_{AB'C}S_{ABC'}}$$

Đến đây chứng minh hoàn tất.

(ii) *Cách 2.*

Bình phương và chuyển vế, bất đẳng thức đầu bài tương đương với :

$$\begin{aligned}\frac{4bc}{(a+b+c)^2} &\leqslant \frac{S_{AB'C}}{S_{ABC}}\cdot\frac{S_{ABC'}}{S_{ABC}}\\ \frac{4bc}{(a+b+c)^2} &\leqslant \frac{AB'\cdot AC'}{AB\cdot AC}\\ \frac{4b^2c^2}{(a+b+c)^2} &\leqslant AB'\cdot AC'\end{aligned}$$

Ta có bổ đề sau :

$$AB'\cdot AC'\geqslant\frac{IA^2}{\cos^2\dfrac{A}{2}}$$

Xin không chứng minh bổ đề này, bạn đọc có thể xem như bài tập.

Tiếp theo, ta có các đẳng thức :

$$IA=\sqrt{\frac{bc(b+c-a)}{a+b+c}},$$

$$
\begin{aligned}
\cos^2\frac{A}{2} &= \frac{\cos A + 1}{2}\\
&= \frac{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1}{2}\\
&= \frac{(b+c-a)(a+b+c)}{4bc}
\end{aligned}
$$

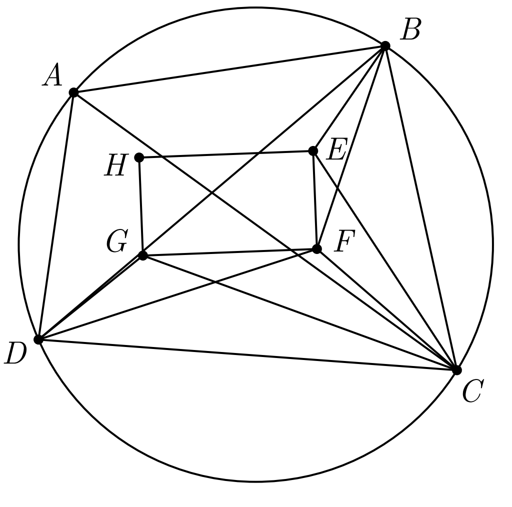
Từ đó thấy rằng :

$$
\begin{aligned}
AB'\cdot AC' &\geqslant \frac{IA^2}{\cos^2\dfrac{A}{2}}\\
&= \frac{4b^2c^2}{(a+b+c)^2}
\end{aligned}
$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ❐

Bài 2.51 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. E, F, G, H lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB. Chứng minh rằng tứ giác $EFGH$ nội tiếp.

Lời giải



Ta có

$$
\widehat{DGC} = 90^\circ + \frac{\widehat{DAC}}{2} = 90^\circ + \frac{DBC}{2} = \widehat{DFC}
$$

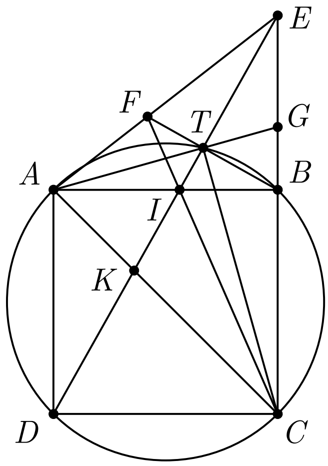
Suy ra tứ giác $DGCF$ nội tiếp. Tương tự, các tứ giác $CFEB, AHEB, AHGD$ nội tiếp.
Từ đó suy ra

$$
\begin{aligned}
\widehat{EFG} &= 360^\circ - \left(\widehat{EFB}+\widehat{BFC}+\widehat{CFD}+\widehat{DFG}\right)\\
&= 360^\circ - \left(\widehat{ECB}+\widehat{BFC}+\widehat{CFD}+\widehat{DCG}\right)\\
&= 360^\circ - \left(\frac{\widehat{ACB}}{2}+90^\circ+\frac{\widehat{BAC}}{2}+90^\circ+\frac{\widehat{DAC}}{2}+\widehat{ACD}\right)\\
&= 90^\circ
\end{aligned}
$$

Chứng minh tương tự cho các góc còn lại, ta suy ra $EFGH$ là hình chữ nhật. ❐

Bài 2.52 Cho hình vuông $ABCD$. I tùy ý thuộc AB, DI cắt BC tại E, CI cắt AE tại F. Chứng minh rằng $BF \perp DE$.

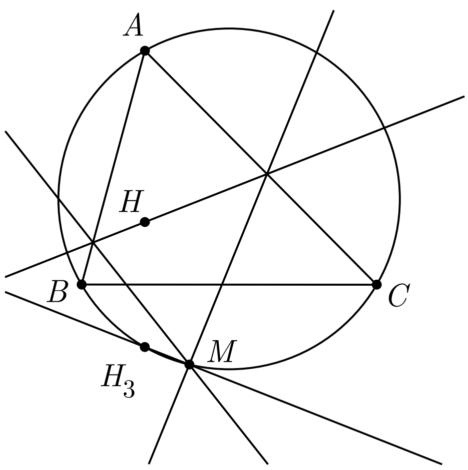
Lời giải



Cho BF, AC lần lượt cắt DE tại T, K. Suy ra $(KTIE) = -1$.
Gọi giao điểm của đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ với DE là N. AN cắt BC tại G.
Ta có : $\widehat{DNC} = \widehat{CNB} = \widehat{BNG} = \widehat{CNE} = 45°$.
Suy ra NC là phân giác ngoài và NG là phân giác trong của tam giác BNE.
Do đó $(CGBE) = -1$ hay $(KNIE) = -1$ (xét phép chiếu xuyên tâm A)
Vì vậy $N \equiv T$. Ta có điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.53 Cho tam giác ABC không vuông nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. d là đường thẳng bất kì qua H. Gọi d_a,d_b, d_c lần lượt là các đường thẳng đối xứng với d qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng quy tại một điểm trên (O).

Lời giải



Gọi H_1, H_2, H_3 lần lượt là các giao điểm thứ hai của AH, BH, CH với (O).
Ta có $S_{AB} : H \to H_3$. Cho nên $H_3 \in d_c$. Tương tự $H_1 \in d_a, H_2 \in d_b$.
Mặt khác $S_{AB} : d_c \to d$ và $S_{BC} : d \to d_a$.
Do đó $S_{BC} \circ S_{AB} = R_{[B,2(BA,BC)]} : d_c \to d_a$ Suy ra $(d_c, d_a) \equiv 2(BA, BC) \pmod{\pi}$
Gọi giao điểm của d_a và d_c là M. Ta có :

$$(CH_3, CH_1) \equiv 2(CH, CB) \equiv 2\left[\frac{\pi}{2} - (BA, BC)\right] \pmod{\pi}$$

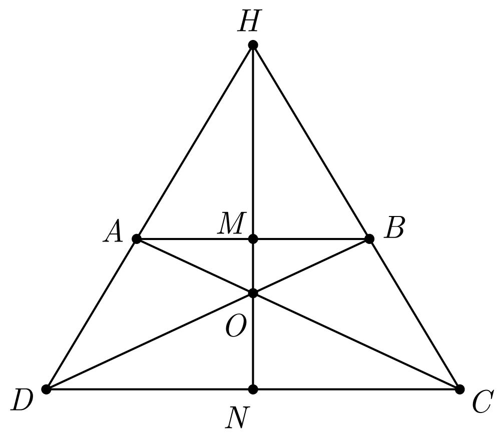
Như vậy thì MCH_3H_1 nội tiếp suy ra M nằm trên (ABC).
Mặt khác, ta có

$$(d_c, MH_2) \equiv (CH_3, CH_2) \equiv 2(AB, AC) \pmod{\pi}$$

Nhưng d_b lại qua H_2 và tạo với d_c một góc $2(AB, AC)$ (chứng minh tương tự trên). Như vậy, MH_2 trùng với d_b, ta có điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.54 Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$). AC cắt CD tại O. Biết khoảng cách từ O đến AD và BC bằng nhau, hãy chứng minh rằng $ABCD$ là hình thang cân.

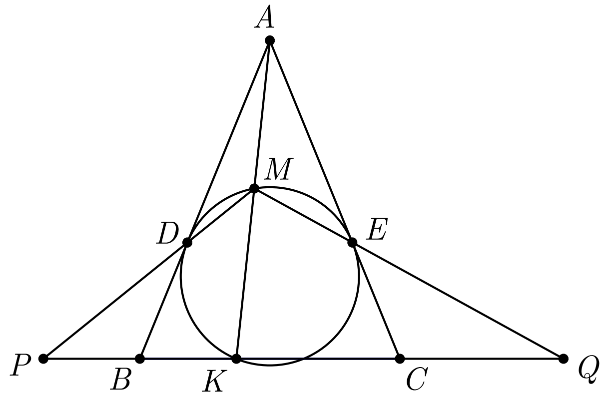
Lời giải



Gọi H là giao điểm của AD, BC. M, N lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(HO, AB), (HO, CD)$.
Suy ra M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.
Vì các khoảng cách từ O đến AD, CB bằng nhau nên HO là phân giác $\widehat{DHC}$. Suy ra tam giác HDC cân tại H do có đường phân giác cũng là đường trung tuyến.
Vậy $ABCD$ là hình thang cân. ❐

Bài 2.55 Cho tam giác ABC cân tại A. Đường tròn ω tiếp xúc AB, AC, cắt BC tại K. AK cắt ω tại điểm thứ hai là M. P, Q là điểm đối xứng của K qua B, C. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MPQ tiếp xúc với ω.

Lời giải

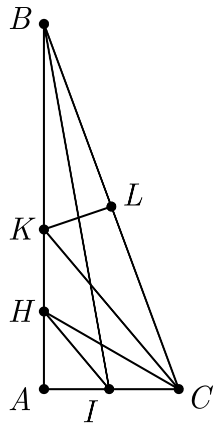


Gọi D, E lần lượt là tiếp điểm của ω với AB, BC; P' là giao điểm của MD và BC.
Ta có $DMEK$ là tứ giác điều hòa nên $D(DEKM) = -1$ hay $D(BEKP') = -1$. Mà $DE \parallel P'K$ nên B là trung điểm $P'K$ hay $P' \equiv P$. Vì vậy mà M, D, P thẳng hàng.
Tương tự ta cũng có M, E, Q thẳng hàng.
Lại có $DE \parallel PQ$ nên tồn tại một phép vị tự $\mathcal{Z}$ biến DE thành PQ.
Suy ra $\mathcal{Z} : (MDE) \to (MPQ)$. Vậy hai đường tròn ω và (MPQ) tiếp xúc với nhau tại M. ❒

Bài 2.56 Cho tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{B} = 20°$, phân giác trong BI. Điểm H nằm trên cạnh AB sao cho $\widehat{ACH} = 30°$. Hãy tính số đo $\widehat{CHI}$.

Lời giải

(i) *Cách 1.*



Kẻ phân giác CK của góc $\widehat{HCB}$.
Gọi L là hình chiếu của K trên BC.
Hai tam giác $\triangle BLK$ và $\triangle BAC$ lần lượt vuông tại L, A và có góc B chung nên chúng đồng dạng, suy ra

$$\frac{LB}{AB} = \frac{KB}{BC} = \frac{KH}{CH}$$

Lại có tam giác BKC cân tại K nên L là trung điểm BC. Vì vậy mà

$$\frac{BC}{AB} = \frac{2KH}{CH} = \frac{KH}{AH}$$

Hay

$$\frac{IC}{IA} = \frac{HK}{HA}$$

Từ đó, theo định lý Thales thì ta có $HI \parallel CK$. Vậy $\widehat{CHI} = \widehat{HCK} = 20^\circ$.

(ii) *Cách 2.*
Đặt $\widehat{CHI} = \alpha \Rightarrow \widehat{AHI} = 60^\circ - \alpha$.
Áp dụng định lí sin cho tam giác CHI ta có

$$\frac{CI}{\sin\widehat{CHI}} = \frac{HI}{\sin\widehat{ACH}}$$

Suy ra

$$\frac{CI}{\sin\alpha} = \frac{HI}{\frac{1}{2}} \qquad (1)$$

Ta lại có :

$$\frac{HI}{AI} = \frac{1}{\sin\widehat{AHI}} = \frac{1}{\sin(60^\circ - \alpha)} \qquad (2)$$

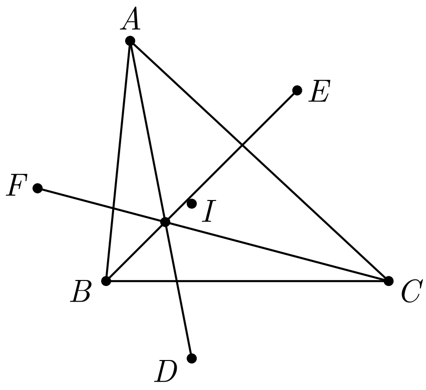
Từ (1) và (2) ta có :

$$\begin{aligned} \frac{CI}{AI} &= \frac{CI}{HI} \cdot \frac{HI}{AI} \\ &= \frac{2\sin\alpha}{\sin(60^\circ - \alpha)} \\ &= \frac{2\sin\alpha}{\cos(30^\circ + \alpha)} \end{aligned}$$

Mà BI là phân giác $\widehat{ABC}$ nên $\dfrac{AI}{CI} = \cos 20^\circ$.
Suy ra $\dfrac{\cos(30^\circ + \alpha)}{2\sin\alpha} = \cos 20^\circ$ hay $\cos(30^\circ + \alpha) = 2\cos 20^\circ \cdot \sin\alpha \quad (\star)$
Mà $0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 60^\circ$ nên vế trái là hàm nghịch biến, vế phải là hàm đồng biến
Do đó phương trình $(\star)$ có nghiệm duy nhất $\alpha = 20^\circ$.
Vậy $\widehat{CHI} = 20^\circ$. ❒

Bài 2.57 Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I). Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng với I qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Lời giải



Ta có :

$$\frac{\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{CAD}} = \frac{\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{ABD}} \cdot \frac{\sin\widehat{ACD}}{\sin\widehat{CAD}} \cdot \frac{\sin\widehat{ABD}}{\sin\widehat{ACD}}$$
$$= \frac{BD}{AD} \cdot \frac{AD}{CD} \cdot \frac{\sin\dfrac{3B}{2}}{\sin\dfrac{3C}{2}}$$
$$= \frac{IB}{IC} \cdot \frac{\sin\dfrac{3B}{2}}{\sin\dfrac{3C}{2}}$$

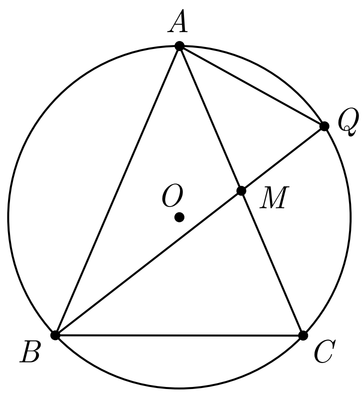
Chứng minh tương tự cho $\dfrac{\sin\widehat{ACF}}{\sin\widehat{BCF}}$ và $\dfrac{\sin\widehat{CBE}}{\sin\widehat{ABE}}$, ta suy ra :

$$\prod \frac{\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{CAD}} = \prod \frac{IB}{IC} \cdot \prod \frac{\sin\dfrac{3B}{2}}{\sin\dfrac{3C}{2}} = 1$$

Theo dụng định lí Ceva dạng sin, ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.58 Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp (O). Điểm M là trung điểm của AC. BM cắt lại (O) tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh rằng $2AQ \leqslant BQ$.

Lời giải



Đặt $AB = AC = a, BC = b$ $(2a > b)$. Ta có :

$$2BM = \sqrt{a^2 + 2b^2}$$

Tam giác AMQ đồng dạng với tam giác BMC nên :

$$\frac{AQ}{BC} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow AQ = \frac{BC \cdot AM}{BM} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

Theo hệ thức lượng trong đường tròn thì :

$$MQ \cdot MB = MA \cdot MC \Rightarrow MQ = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\frac{4ab}{\sqrt{a^2 + 2b^2}} \leqslant \sqrt{a^2 + 2b^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 2b^2}}$$

Tương đương với

$$4ab \leqslant a^2 + 2b^2 + a^2$$

Hay $(a - b)^2 \geqslant 0$. Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng nên ta có điều cần chứng minh. ❒

Nhận xét. Một kết quả rộng hơn hơn là :

$$BQ \geqslant \max\{AC, 2AQ\}$$

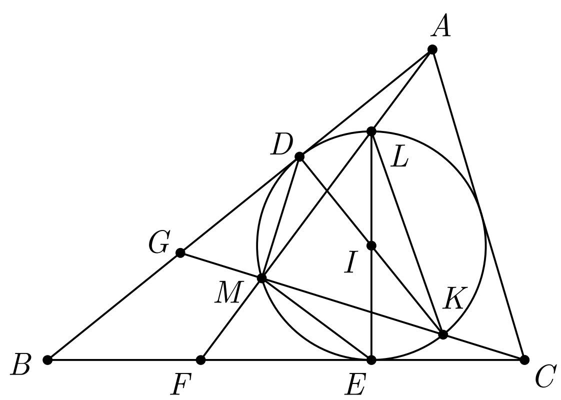
Cả hai bất đẳng thức đều được chứng minh từ đẳng thức

$$BQ = \frac{1}{2}a\left(\frac{b}{AQ} + \frac{AQ}{b}\right)$$

Trong đó, $a = AB = AC, b = BC$. Việc chứng minh đẳng thức này xin dành cho bạn đọc.

Bài 2.59 Cho $\triangle ABC$ thỏa mãn $AB + BC = 3CA$. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc AB, BC tại D, E. Gọi K, L tương ứng đối xứng với D, E qua I. Chứng minh rằng tứ giác $ACKL$ nội tiếp.

Lời giải



Gọi G là giao điểm CK, AB; F là giao điểm AL, BC; M là giao điểm AL, CK.
Đặt $BC = a,\ CA = b,\ AB = c,\ \dfrac{a+b+c}{2} = p.$
Dễ thấy $BG = AD = p - a.$
Do đó $AG = c - (p-a) = c + a - p = \dfrac{c+a-b}{2} = b$ (do $a + c = 3b$)
Suy ra $\triangle AGC$ cân tại A. Tương tự, ta có $\triangle ACF$ cân tại C.
Từ đó ta có

$$\begin{aligned}\widehat{KML} &= \widehat{AGC} + \widehat{BAF}\\ &= 90^\circ - \frac{\widehat{BAC}}{2} + \widehat{BAC} - 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2}\\ &= \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ACB}}{2}\\ &= \frac{1}{2}\left(180^\circ - \widehat{ABC}\right)\\ &= \frac{1}{2}\widehat{KIL}\end{aligned}$$

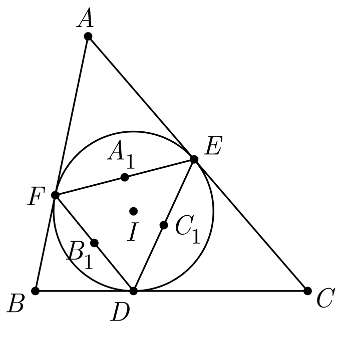
Suy ra $M \in (I)$. Do đó

$$\widehat{MLK} = \widehat{MDK} = \widehat{DGK} = \widehat{ACG}$$

Vậy ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.60 Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AID, BIE, CIH thẳng hàng.

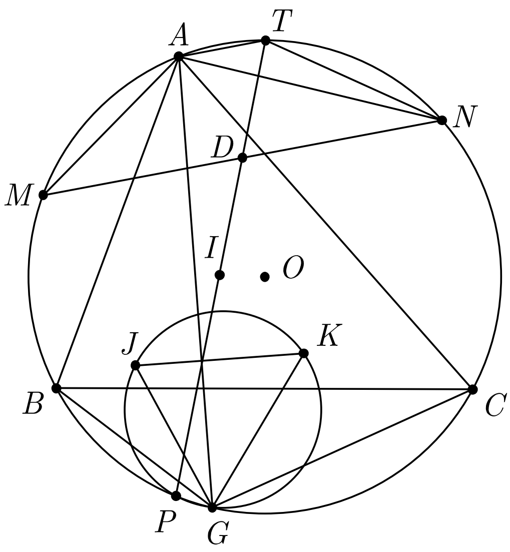
Lời giải



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của EF, FD, DE.
Do đó DA_1, EB_1, FC_1 đồng quy tại trọng tâm G của tam giác DEF.
Xét phép nghịch đảo tâm I phương tích $k = r^2$, biến DA_1, EB_1, FC_1 thành đường tròn ngoại tiếp các tam giác IAD, IBE, ICF.
Mà DA_1, EB_1, FC_1 đồng quy nên các đường tròn đó cũng cùng đi qua một điểm khác I.
Từ đó ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.61 Cho tam giác ABC nội tiếp (O). M, N lần lượt là điểm chính giữa cung AB không chứa C và cung AC không chứa B. D là trung điểm MN. G là một điểm bất kì trên cung BC không chứa A. Gọi I, J, K lần lượt là tâm nội tiếp các tam giác ABC, ABG, ACG. Lấy P là giao điểm thứ hai của (GJK) với (ABC). Chứng minh rằng $P \in DI$.

Lời giải



Do G, J, M và G, K, N thẳng hàng và tứ giác $PJKG$ nội tiếp nên $\widehat{PJM} = \widehat{PKN}$. Lại có $\widehat{PMJ} = \widehat{PNK}$ nên $\triangle PJM \backsim \triangle PKN$, suy ra $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{JM}{KN}$.
Mà $JM = AM$, $KN = AN$ nên $\dfrac{PM}{PN} = \dfrac{AM}{AN}$ hay tứ giác $AMPN$ điều hòa.
Gọi P' là giao điểm DI và (O) (P' thuộc cung BC không chứa A). Ta có $MA = MI$ và $NA = NI$ nên A đối xứng với I qua MN. Vì vậy MN là đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng DA, DP'. Suy ra tứ giác $AMP'N$ điều hòa.
Do đó $P \equiv P'$ và ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.62 Cho n giác đều $A_1A_2\ldots A_n$ $(n \geqslant 4)$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}$$

Hãy tìm n.

Lời giải

Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác đó.
Áp dụng định lí sin ta có

$$A_1A_2 = 2R\sin\frac{\pi}{n}, A_1A_3 = 2R\sin\frac{2\pi}{n}, A_1A_4 = 2R\sin\frac{3\pi}{n}$$

Đặt $\dfrac{\pi}{n} = x\ \left(0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right)$.
Ta có dãy các đẳng thức tương đương sau

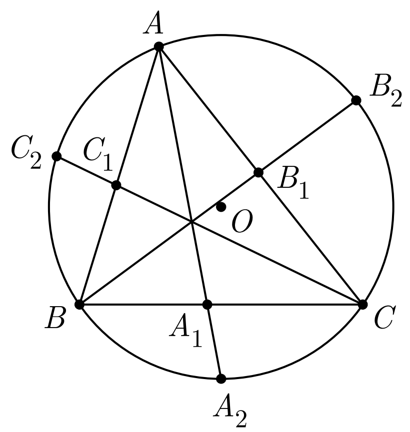
$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x} &= \frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 3x}\\ \frac{1}{\sin x} &= \frac{\sin 2x + \sin 3x}{2\sin 2x \sin 3x}\\ \frac{1}{\sin x} &= \frac{\sin 2x + \sin 3x}{2\sin x\cos x \sin 3x}\\ \sin 2x + \sin 3x &= 2\sin 3x \cos x\\ \sin 2x + \sin 3x &= \sin 2x + \sin 4x\\ \sin 3x &= \sin 4x\end{aligned}$$

Mà $0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{4}$ nên $x = \dfrac{\pi}{7}$.
Do đó, $n = 7$ là giá trị duy nhất cần tìm. ❒

Bài 2.63 Gọi AA_1, BB_1, CC_1 tương ứng là các đường phân giác trong của tam giác ABC. AA_1, BB_1, CC_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác đó tại A_2, B_2, C_2 theo thứ tự. Chứng minh rằng :

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} \leqslant \frac{9}{4}$$

Lời giải



Áp dụng hệ thức lượng trong đường tròn, ta có

$$AA_1 \cdot A_1A_2 = A_1B \cdot A_1C$$

Mà các hệ thức quen thuộc cho ta :

$$A_1B = \frac{ac}{b+c}$$

$$A_1C = \frac{ab}{b+c}$$

$$AA_1 = l_a = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$$

Suy ra :

$$A_1A_2 = \frac{a^2\sqrt{bc}}{(b+c)\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}}$$

Khi đó :

$$\frac{AA_1}{AA_2} = \frac{AA_1}{AA_1 + A_1A_2} = \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2} = 1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}$$

Do vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$\sum \frac{a^2}{(b+c)^2} \geqslant \frac{3}{4}$$

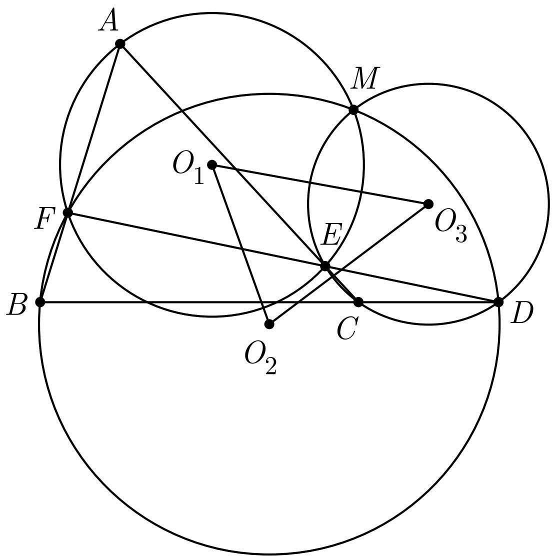
Theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và Nesbitt, ta có :

$$3\sum \frac{a^2}{(b+c)^2} \geqslant \left(\sum \frac{a}{b+c}\right)^2 \geqslant \frac{9}{4}$$

Từ đây ta suy ra điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.64 Cho tam giác ABC, đường thẳng d cắt các đường thẳng BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF, BDF, CDE. Chứng minh rằng trực tâm tam giác $O_1O_2O_3$ nằm trên d.

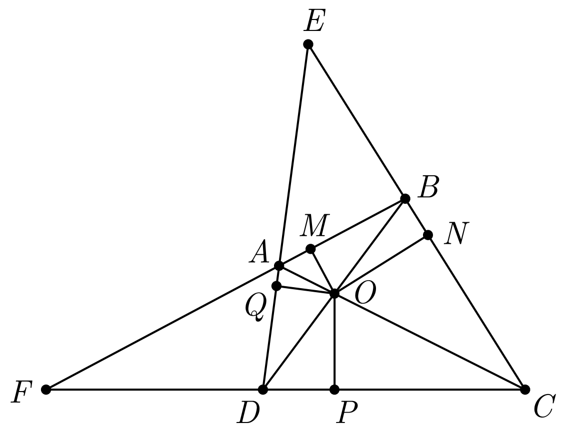
Lời giải



Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $BCEFAD$.
Ta lại có điểm đối xứng của M qua O_1O_2, O_2O_3, O_3O_1 lần lượt là D, E, F.
Suy ra M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $O_1O_2O_3$ và d là đường thẳng Steiner của M đối với $(O_1O_2O_3)$.
Suy ra trực tâm của tam giác $O_1O_2O_3$ nằm trên d.
Ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.65 Cho tứ giác $ABCD$, AC cắt BD tại O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD, DA. Biết rằng $OM = OP, ON = OQ$. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

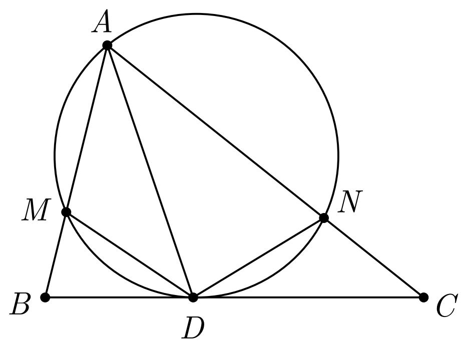


Trường hợp $AB \parallel CD$ hoặc $BC \parallel AD$ thì hiển nhiên ta có điều cần chứng minh.
Trường hợp không song song ta sẽ chứng minh bằng phản chứng.
Giả sử $ABCD$ không phải là hình thang.
Gọi E là giao điểm của AD, BC; F là giao điểm của AB, CD.
Từ giả thiết ta có EO, FO lần lượt là phân giác trong $\widehat{AEB}, \widehat{CFB}$.
Ta lại có $E(ABOF) = -1$ nên EF là phân giác ngoài của $\widehat{AEB}$, suy ra $EF \perp EO$.
Tương tự ta có $EF \perp FO$.
Do đó $FO \parallel EO$ (vô lý)
Từ đó suy ra điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.66 Cho tam giác ABC, phân giác trong $AD (D \in BC)$. Gọi M, N là các điểm thuộc tia AB, AC sao cho $\widehat{MDA} = \widehat{ABC}, \widehat{NDA} = \widehat{ACB}$. Các đường thẳng AD, MN cắt nhau tại P. Chứng minh rằng :

$$AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$$

Lời giải



Ta có : $\widehat{MDN} = \widehat{MDA} + \widehat{NDA} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A}$. Do đó tứ giác $ADMN$ nội tiếp.
Suy ra $\widehat{AMP} = \widehat{ADN} = \widehat{C}$ và $\widehat{ANP} = \widehat{ADM} = \widehat{B}$.
Vì vậy $\triangle AMP \backsim \triangle ACD$ và $\triangle ANP \backsim \triangle ABD$. Từ đó ta có các đẳng thức

$$AM \cdot AD = AP \cdot AC \tag{1}$$
$$AN \cdot AD = AP \cdot AB \tag{2}$$

Mặt khác, $\triangle ADN \backsim \triangle ACD$. Suy ra

$$AD^2 = AN \cdot AC \tag{3}$$

Tương tự ta có :

$$AD^2 = AM \cdot AB \tag{4}$$

Nhân vế theo vế các đẳng thức trên ta có :

$$AM \cdot AN \cdot AD^6 = AM \cdot AN \cdot AB^2 \cdot AC^2 \cdot AP^2$$

Tương đương với

$$AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$$

Bài toán được chứng minh. ❒

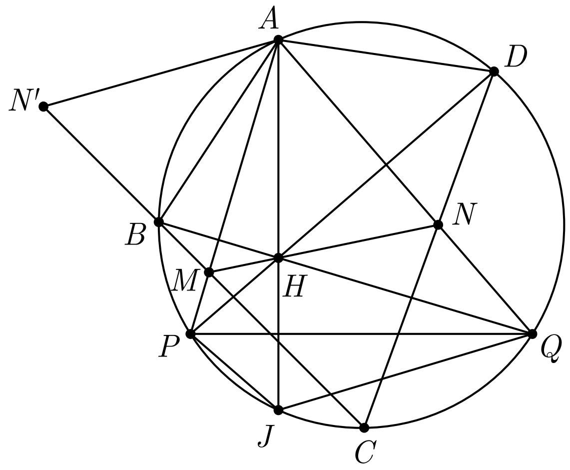
Bài 2.67 Trên mặt phẳng cho 2000 đường thẳng phân biệt, đôi một cắt nhau. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất 2 đường thẳng mà góc của chúng không lớn hơn $\dfrac{180}{2000}$ (độ).

Lời giải

Xét một điểm O bất kì, qua đó ta vẽ 2000 đường thẳng tương ứng song song với các đường đã cho. Khi đó các góc giữa 2 đường thẳng bảo toàn.
2000 đường thẳng trên tạo thành 4000 tia chung gốc O. Mỗi cặp tia liên tiếp tương ứng với một góc giữa 2 đường thẳng nên có đúng 4000 góc và 4000 góc đó có tổng số đo là 360°.
Theo nguyên lý Dirichlet ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.68 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) có $AB = AD$. M, N nằm trên các cạnh BC, CD sao cho $MN = BM + DN$. AM, AN cắt (O) tại P, Q.
Chứng minh rằng trực tâm tam giác APQ nằm trên MN.

Lời giải



Gọi H là điểm trên đoạn MN sao cho $MH = BM, NH = DN$; N' là điểm trên tia đối của tia BC sao cho $BN' = DN$.
Ta có $\widehat{ABN'} = \widehat{ADN}$ và $AB = AD$ nên $\triangle ABN' = \triangle ADN$. Suy ra $AN' = AN$.
Lại có $MN' = MB + BN' = MB + DN = MN$. Do đó N' và N đối xứng với nhau qua AP.
Từ đó suy ra H đối xứng với B qua AP. Tương tự, ta có H đối xứng với D qua AQ.
Gọi J là giao điểm của AH với (O) thì P, Q là trung điểm của các cung BJ, DJ không chứa A. Suy ra $PJ = PB = PH, QJ = QD = QH$ hay H đối xứng với J qua PQ. Vì vậy $AH \perp PQ$.
Suy ra

$$\widehat{PQH} = \widehat{PQJ} = \widehat{PAJ} = \widehat{PAB} = \widehat{PQB}$$

Do đó B, Q, H thẳng hàng hay $QH \perp AP$.
Vậy H là trực tâm tam giác APQ ❐

Bài 2.69 Cho tứ giác $ABCD$. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại O. Gọi r_1, r_2, r_3, r_4 lần lượt là bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác AOB, BOC, COD, DOA.
Chứng minh rằng

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$$

là điều kiện cần và đủ để tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn.

Lời giải

Đặt $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ và $OA = x, OB = y, OC = z, OD = t$. Gọi $\alpha = \widehat{AOB}$.
Khi đó ta có dãy các đẳng thức tương đương sau :

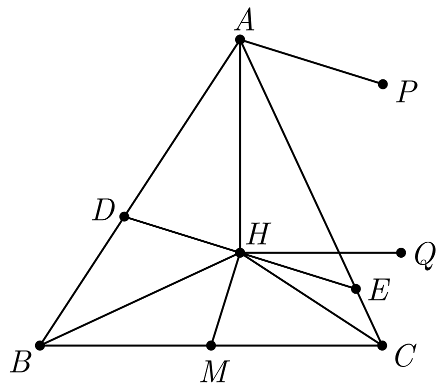
$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_4}$$
$$\frac{p_{AOB}}{S_{AOB}} + \frac{p_{COD}}{S_{COD}} = \frac{p_{BOC}}{S_{BOC}} + \frac{p_{AOD}}{S_{AOD}}$$
$$\frac{x+y+a}{xy\sin\alpha} + \frac{z+t+c}{zt\sin\alpha} = \frac{y+z+b}{yz\sin\alpha} + \frac{x+t+d}{xt\sin\alpha}$$
$$\frac{a}{xy} + \frac{c}{zt} = \frac{b}{yz} + \frac{d}{xt}$$

$$
\begin{gathered}
azt + cxy = btx + dyz \\
a^2z^2t^2 + c^2y^2x^2 + 2acxyzt = b^2x^2t^2 + d^2y^2z^2 + 2bdxyzt \\
-2zt\cos\alpha - 2xy\cos\alpha + 2ca = 2xt\cos\alpha + 2yz\cos\alpha + 2bd \\
(c^2 - z^2 - t^2) + (a^2 - x^2 - y^2) + 2ca = (d^2 - x^2 - t^2) + (b^2 - y^2 - z^2) + 2bd \\
(a + c)^2 = (b + d)^2 \\
a + c = b + d
\end{gathered}
$$

Đẳng thức cuối cùng chứng tỏ tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp và các đẳng thức trên đều tương đương với nhau nên ta có điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.70 Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC và H là trực tâm tam giác. Đường thẳng vuông góc với HM tại H cắt AB, AC tại D, E. Chứng minh rằng H là trung điểm của DE.

Lời giải



(i) *Cách 1.*
Ta có : $\widehat{DAH} = \widehat{MCH}$ $\left(= 90^\circ - \widehat{ABC}\right)$ và $\widehat{MHC} = \widehat{HDA}$ $\left(= 90^\circ - \widehat{IHD}\right)$ (I là giao điểm của CH và AB).
Suy ra $\triangle ADH \backsim \triangle CHM$. Do đó $\dfrac{DH}{HM} = \dfrac{AH}{MC}$. Vì vậy ta có

$$DH = \frac{HM \cdot AH}{MC} \tag{1}$$

Hoàn toàn tương tự, ta có

$$HE = \frac{HM \cdot AH}{MB} \tag{2}$$

Từ (1) và (2), kết hợp với $MB = MC$, ta suy ra $HE = HD$ (điều cần chứng minh)

(ii) *Cách 2.*
Lấy P là một điểm bất kì trên đường thẳng qua A song song với DE ($P \not\equiv A$), Q là một điểm bất kì trên đường thẳng qua H song song với BC ($Q \not\equiv H$).
Ta có : $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = H(BCMQ)$ và $\dfrac{\overline{HD}}{\overline{HE}} = A(DEHP)$.

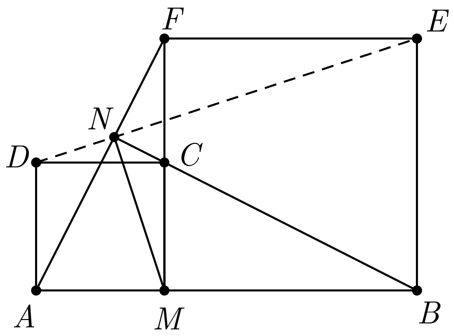
Mà $HB \perp AC, HC \perp AD, HM \perp AP, HQ \perp AH$ nên $H(CBQM) = A(DEHP)$. Suy ra

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{HD}}{\overline{HE}}$$

Mà M là trung điểm BC nên ta có điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.71 Cho đoạn thẳng $AB = a$ cố định. Điểm M di động trên AB (M khác A, B). Trong cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB dựng hình vuông $AMCD$ và $MBEF$. Hai đường thẳng AF, BC cắt nhau ở N.
Tìm vị trí điểm M sao cho đoạn MN có độ dài lớn nhất.

Lời giải



(i) *Cách 1.*
Giả sử các hình vuông $AMCD, BEFM$ có hướng dương. Khi đó $R_{(M,-90^\circ)} : A \to C, F \to B$.
Suy ra $R_{(M,-90^\circ)}(AF) = CB$.
Do đó $\widehat{ANB} = 90^\circ$ nên tứ giác $ANCM$ nội tiếp.
Vì vậy $\widehat{ANM} = \widehat{ACM} = 45^\circ$ hay NM là phân giác của $\widehat{ANB}$.
Mặt khác, trong một tam giác thì đường phân giác luôn có độ dài nhỏ hơn đường trung tuyến xuất phát từ cùng một đỉnh. Suy ra

$$MN \leqslant \frac{AB}{2}$$

(ii) *Cách 2.*
Từ cách 1 ta có $\widehat{DNM} = \widehat{ENM} = 90^\circ$. Suy ra D, N, E thẳng hàng.
Do đó MN là đường cao của tam giác vuông DME. Vì vậy

$$\begin{aligned}\frac{1}{MN^2} &= \frac{1}{DM^2} + \frac{1}{ME^2}\\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{DM} + \frac{1}{EM}\right)^2\\ &\geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{4}{DM + ME}\right)^2\\ &= \frac{4}{AB^2}\end{aligned}$$

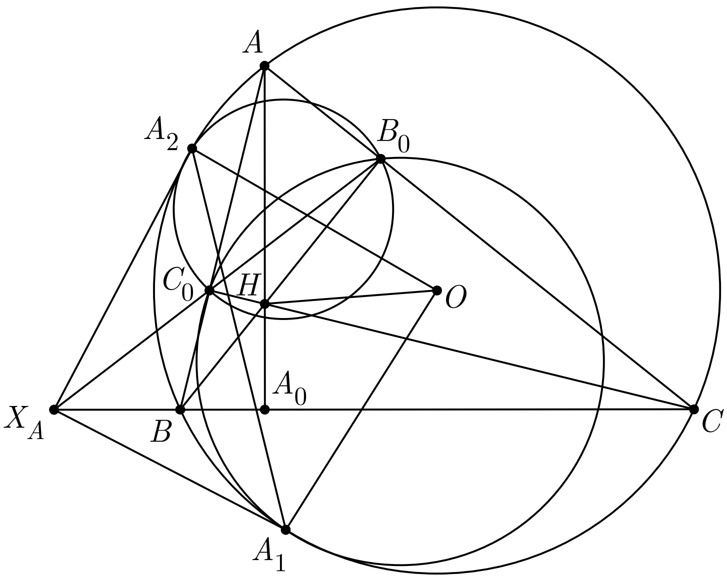
Suy ra

$$MN \leqslant \frac{AB}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi M là trung điểm AB.
Vậy MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{AB}{2}$ khi M là trung điểm AB. ❒

Bài 2.72 Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp (O). Các đường cao AA_0, BB_0, CC_0 đồng quy tại H. Các điểm A_1, A_2 thuộc (O) sao cho đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1B_0C_0, A_2B_0C_0$ tiếp xúc trong với (O) tại A_1, A_2. B_1, B_2, C_1, C_2 xác định tương tự.
Chứng minh rằng B_1B_2, C_1C_2, A_1A_2 đồng quy tại một điểm trên OH.

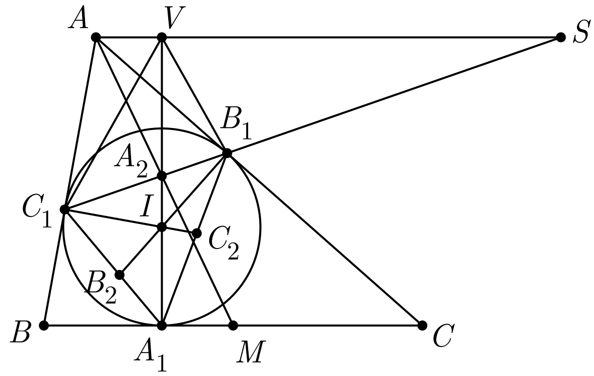
Lời giải



Gọi X_A là giao điểm của B_0C_0 với BC.
Tương tự cho các điểm X_B, X_C.
Dễ chứng minh được X_A, X_B, X_C thẳng hàng và A_1, A_2 là các tiếp điểm của hai tiếp tuyến kẻ từ X_A đối với (O).
Các điểm X_B, X_C được định nghĩa tương tự. Gọi Δ là đường thẳng đi qua X_A, X_B, X_C. Vì A_1A_2 là đường đối cực của X_A đối với (O) nên A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại cực của đường thẳng Δ đối với (O).
Để chứng minh điểm đồng quy nằm trên OH, ta chỉ cần chứng minh Δ vuông góc với OH.
Vì B, C, B_0, C_0 đồng viên nên X_A nằm trên trục đẳng phương của (O) và đường tròn Euler của tam giác ABC.
Tương tự, suy ra Δ là trục đẳng phương của (O) và đường tròn Euler của tam giác ABC.
Do đó đường thẳng Δ vuông góc với OH. Ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.73 Cho đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Các đường thẳng IA_1, IB_1, IC_1 tương ứng cắt các đoạn thẳng B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2. Chứng minh các đường thẳng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.

Lời giải



(i) *Cách 1.* (Sử dụng tính chất hàng điểm điều hòa)
Ta sẽ chứng minh rằng AA_2 đi qua trung điểm M của BC.
Nếu $AB = AC$ thì điều này là hiển nhiên.
Nếu $AB \neq AC$, gọi S là giao điểm của B_1C_1 và đường thẳng qua A song song BC. V là giao điểm của AS và A_1A_2.
Khi đó $\widehat{AVI} = 90°$. Suy ra VB_1IC_1 nội tiếp, mà $IB_1 = IC_1$ nên VA_2 là phân giác trong của $\widehat{B_1VC_1}$
Vì $VS \perp VA_2$ nên VS là phân giác ngoài của $\widehat{B_1VC_1}$.
Do đó $(B_1C_1A_2S) = -1$ hay $A(BCM'S) = -1$ với M' là giao điểm của AA_2 với BC.
Suy ra M' là trung điểm BC hay $M \equiv M'$.
Do đó AA_2, BB_2, CC_2 là các đường trung tuyến của tam giác ABC nên chúng đồng quy tại trọng tâm tam giác.

(ii) *Cách 2.* (Sử dụng định lí Menelaus và Ceva)
Do A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy nên theo định lí Menelaus ta có :

$$\frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{B_2C_1}{B_2A_1} \cdot \frac{A_1C_2}{C_2B_1} = 1$$

Mà $AB_1 = AC_1$ nên :

$$\frac{\sin \widehat{BAA_2}}{\sin \widehat{CAA_2}} = \frac{C_1A_2}{B_1A_2}, \frac{\sin \widehat{ACC_2}}{\sin \widehat{BCC_2}} = \frac{B_1C_2}{B_1C_2}, \frac{\sin \widehat{CBB_2}}{\sin \widehat{ABB_2}} = \frac{A_1B_2}{C_1B_2}$$

Suy ra

$$\frac{\sin \widehat{BAA_2}}{\sin \widehat{CAA_2}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACC_2}}{\sin \widehat{BCC_2}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBB_2}}{\sin \widehat{ABB_2}} = \frac{A_2B_1}{A_2C_1} \cdot \frac{B_2C_1}{B_2A_1} \cdot \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = 1$$

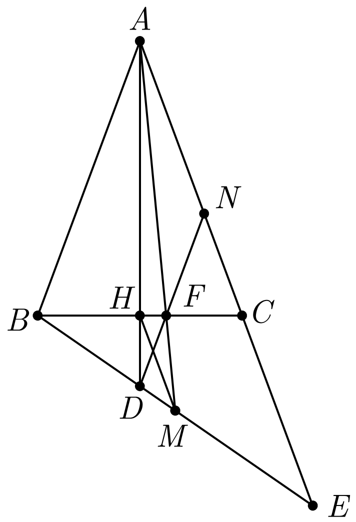
Theo định lí Ceva dạng sin ta có điều cần chứng minh.

(iii) *Cách 3.*
Tương tự như bài 2.44, ta suy ra AA_2 là trung tuyến của tam giác ABC. Suy ra AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại trọng tâm tam giác ABC. ❐

Chú ý. Cách 1 của bài toán này có thể áp dụng cho bài 2.44 như một cách chứng minh khác.

Bài 2.74 Cho tam giác ABC cân tại A. Trên tia đối của tia CA lấy điểm E. Giao điểm của BE và phân giác góc $\widehat{BAC}$ là D. Đường thẳng qua D song song AB cắt BC ở F. AF cắt BE tại M. Chứng minh rằng M là trung điểm BE.

Lời giải



(i) *Cách 1.*

Gọi N là giao điểm DF và AC, dễ có $NA = ND$.

Ta có $\widehat{DNC} = \widehat{EAB}$ và $\widehat{DCN} = \widehat{EBA}$ nên $\triangle DNC \backsim \triangle EAB$. Suy ra

$$\frac{NC}{ND} = \frac{AB}{AE}$$

Do đó

$$\frac{FC}{FB} = \frac{NC}{NA} = \frac{AC}{AE}$$

Từ đó, áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle BCE$ với các điểm A, F, M ta có điều cần chứng minh.

(ii) *Cách 2.*

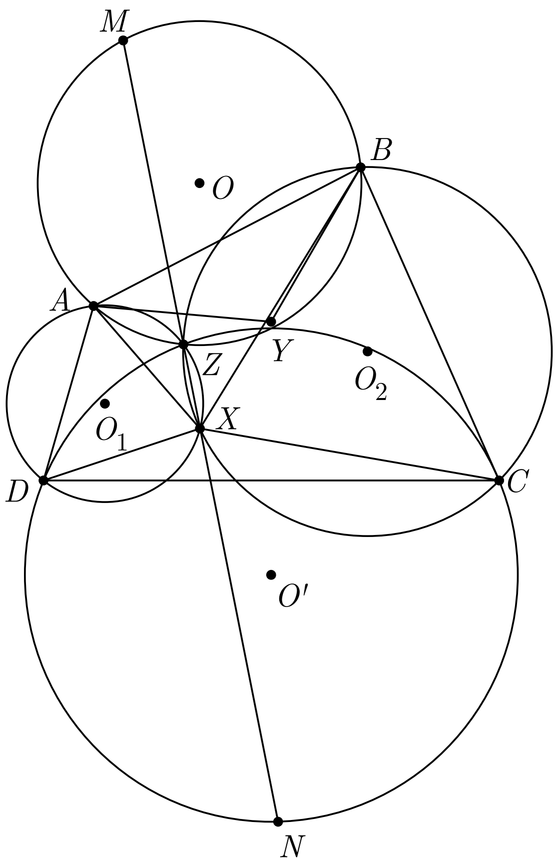
Gọi H là trung điểm của BC.

Ta có $ABDF$ là hình thang nên MH đi qua trung điểm của AB.

Mà MH song song với CE nên suy ra M là trung điểm của BE (đường trung bình trong tam giác BCE). ❒

Bài 2.75 Cho tứ giác lồi $ABCD$ sao cho AB ko song song với CD và điểm X bên trong tứ giác thỏa $\widehat{ADX} = \widehat{BCX} < 90°$ và $\widehat{DAX} = \widehat{CBX} < 90°$. Gọi Y là giao điểm đường trung trực của AB và CD. Chứng minh rằng $\widehat{AYB} = 2\widehat{ADX}$.

Lời giải



Bổ đề : Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại X, Z. Lấy A là một điểm bất kì nằm trên (O_1). Dựng tia ZB đối xứng tia ZA qua ZX với B thuộc (O_2). Gọi O là tâm ngoại tiếp $\triangle ABZ$. Khi đó ta có $OO_1 = OO_2$.

Chứng minh bổ đề.

$$\begin{aligned}(OO_1, O_1O_2) &\equiv (OO_1, AZ) + (AZ, ZX) + (ZX, O_1O_2)\\ &\equiv (O_1O_2, ZX) + (ZX, ZB) + (ZB, OO_2)\\ &\equiv (O_1O_2, OO_2) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Do đó tam giác OO_1O_2 cân tại O nên $OO_1 = OO_2$.

Bổ đề được chứng minh. $\square$

Trở lại bài toán :

Gọi $(O_1), (O_2)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp $\triangle XAD$ và $\triangle XBC$.

Gọi Z là giao điểm thứ hai của $(O_1), (O_2)$.

Gọi $(O), (O')$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ZAB$ và $\triangle ZCD$.

Gọi Y' là giao điểm thứ hai của $(O), (O')$.

Ta có : $M = ZX \cap (O)(M \neq Z), N = ZX \cap (O')\ (N \neq Z)$

Ta có : $(ZA, ZX) \equiv (DA, DX) \equiv (CX, CB) \equiv (ZX, ZB) \pmod{\pi}$ nên áp dụng bổ đề trên ta có $OO_1 = OO_2$. Tương tự ta cũng có $O'O_1 = O'O_2$.

Suy ra $OO' \perp O_1O_2$.

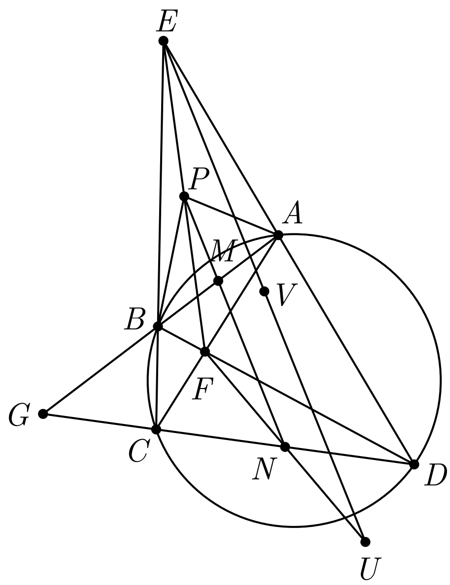
Mặt khác $XZ \perp O_1O_2, ZY' \perp OO'$ nên $ZY' \perp ZX$.

Xét (O) có $ZY' \perp ZM$ và M là điểm chính giữa cung AB không chứa Y', ta suy ra $Y'A = Y'B$.
Tương tự : $Y'C = Y'D$ nên $Y' \equiv Y$.
Vì vậy $\widehat{AYB} = \widehat{AZB} = 2\widehat{ADX}$. Ta có điều cần chứng minh. ❒

Bài 2.76 Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp trong (O). AD cắt BC tại E, AC cắt BD tại $F. M, N$ là trung điểm AB, CD. Chứng minh rằng :

$$\frac{2MN}{EF} = \left|\frac{AB}{CD} - \frac{CD}{AB}\right|$$

Lời giải



Giả sử $AB < CD, BC < AD$.
Gọi P là trung điểm EF. Khi đó M, N, P thẳng hàng (áp dụng định lí Gauss cho tứ giác toàn phần $AEBFDC$) và M nằm trên đoạn PN.
Trước hết, ta sẽ chứng minh

$$\frac{2PM}{EF} = \frac{AB}{CD} \tag{1}$$

Tương đương với

$$\frac{PM}{AB} = \frac{PF}{CD}$$

Gọi U là điểm đối xứng với F qua N, V là trung điểm EU.
Ta có $CFDU$ là hình bình hành. Nên $\widehat{ADU} = 180^\circ - \widehat{CAD} = 180^\circ - \widehat{CBD} = \widehat{EBF}$.
Mặt khác, ta có

$$\frac{FB}{DU} = \frac{FB}{FC} = \frac{AB}{CD} = \frac{EB}{ED}$$

Do đó $\triangle EBF \backsim \triangle EDU$. Suy ra

$$\frac{PB}{AB} = \frac{VD}{DC}$$

Tương tự, ta suy ra $\triangle PAB \backsim \triangle VCD$.
Từ đó ta có

$$\frac{PM}{AB} = \frac{VN}{CD} = \frac{PF}{CD}$$

Đẳng thức (1) được chứng minh.
Hoàn toàn tương tự, ta chứng minh được

$$\frac{2PN}{EF} = \frac{CD}{AB} \tag{2}$$

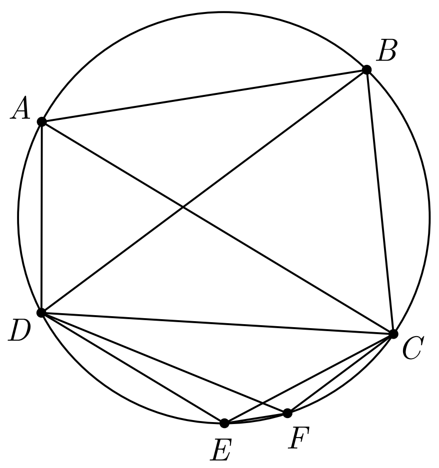
Từ (1) và (2) ta suy ra điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.77 Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp được một đường tròn. Chứng minh rằng :

$$\frac{AC}{BD} = \frac{DA \cdot AB + BC \cdot CD}{AB \cdot BC + CD \cdot DA}$$

Lời giải

(i) *Cách 1.*



Kẻ dây DE, CF song song với AC, BD tương ứng.
Ta có : $AE = DC, CE = AD$.
Áp dụng định lý Ptolemy ta có

$$EA \cdot BC + AB \cdot CE = AC \cdot BE$$

Tương đương với

$$DC \cdot BC + AB \cdot DA = AC \cdot BE \tag{1}$$

Tương tự, ta có

$$AB \cdot BC + CD \cdot DA = AF \cdot BD \tag{2}$$

Chia theo vế hai đẳng thức (1) và (2), với chú ý rằng $AF = BE$, ta có điều cần chứng minh.

(ii) *Cách 2.*

Ta có :

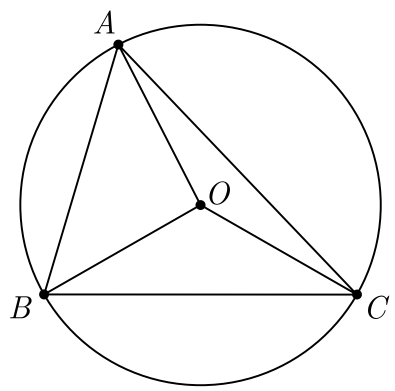
$$\begin{aligned} AC\cdot AB\cdot BC + AC\cdot CD\cdot DA &= 4R(S_{ABC}+S_{CDA})\\ &= 4R(S_{ABD}+S_{BCD})\\ &= DA\cdot AB\cdot BD + BC\cdot CD\cdot BD \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều cần chứng minh. ❐

Bài 2.78 Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp $(O;R)$.Gọi R_1, R_2, R_3 tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác OBC, OCA, OAB. Chứng minh rằng :

$$R_1+R_2+R_3 \geqslant 3R$$

Lời giải



Gọi O_1 là tâm ngoại tiếp của tam giác OBC.Ta có :

$$R_1 = O_1B, \widehat{BOO_1} = \widehat{A}$$

Áp dụng định lí hàm số sin cho tam giác BOO_1 ta có :

$$R_1 = O_1B = \frac{OB\sin\widehat{BOO_1}}{\sin\widehat{BO_1O}} = \frac{R\sin A}{\sin 2A} = \frac{R}{2\cos A}$$

Do đó

$$\begin{aligned} R_1+R_2+R_3 &= \frac{R}{2}\left(\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos B}+\frac{1}{\cos C}\right)\\ &\geqslant \frac{R}{2}\cdot\frac{9}{\cos A+\cos B+\cos C} \geqslant 3R \end{aligned}$$

Đến đây chứng minh hoàn tất. ❐

*"Giữa những bộ óc thông minh ngang nhau và trong những điều kiện tương tự,
ai có tinh thần hình học thì người đó sẽ thắng và thu được một cường lực hoàn toàn mới mẻ."*

Blaise Pascal

"Hình học là khoa học của lý luận chính xác trên các số liệu không chính xác."

George Pólya

"Hình học là nền tảng của tất cả các bức tranh."

Albrecht Dürer

"Cảm hứng luôn cần thiết trong hình học, cũng giống như trong thi ca."

Alexander Pushkin