

# Mỗi tuần một bài toán

**Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

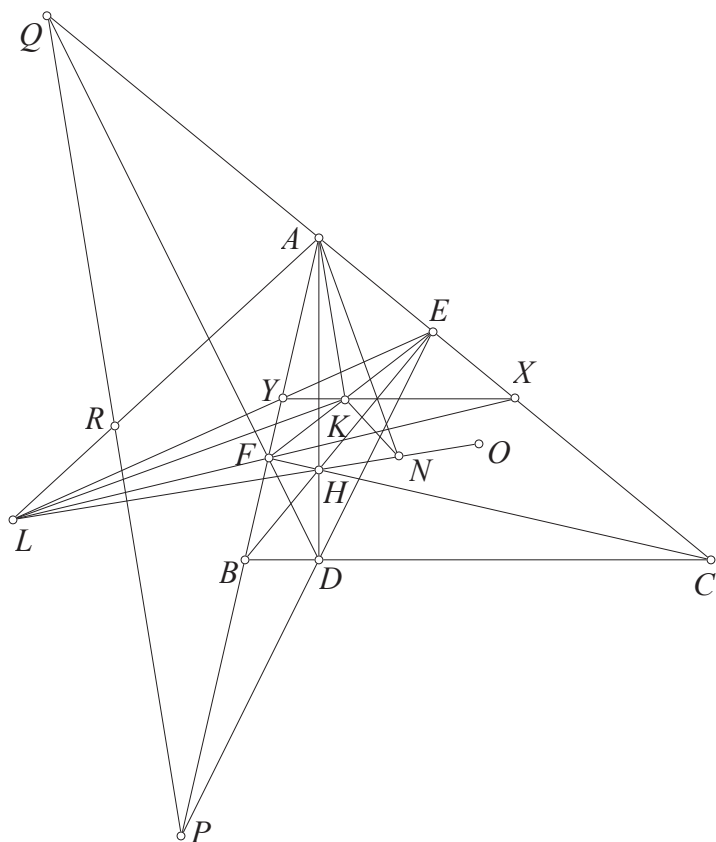
**Đ**ây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

## Đề bài

Cho tam giác  $ABC$  nhọn với đường cao  $AD, BE, CF$  đồng quy tại  $H$ .  $DE, DF$  lần lượt cắt  $AB, AC$  tại  $P, Q$ .  $R$  là trung điểm  $PQ$ .  $N$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DEF$ . Gọi  $HN$  cắt  $AR$  tại  $L$ . Chứng minh rằng trực tâm tam giác  $ALN$  nằm trên  $EF$ .

## Lời giải

Lời giải sau dựa trên lời giải của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An tại [đây](#).



Gọi  $X, Y$  lần lượt là trung điểm của  $AC, AB$  và  $(O)$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .  $K$  là giao điểm của  $XY$  với  $EF$ . Ta sẽ chứng minh  $K$  là trực tâm của tam giác  $ALN$ , thật vậy. Ta có  $QF \cdot QD = QA \cdot QC$  nên  $Q$  thuộc trục đẳng phương của  $(O)$  và

$(N)$ . Tương tự ta suy ra  $PQ$  là trục đẳng phương của  $(O)$  và  $(N)$ . Do đó  $PQ$  vuông góc với đường thẳng Euler  $ON$  của tam giác  $ABC$ . Do  $KX \cdot KY = KE \cdot KF$  nên  $K$  thuộc trục đẳng phương của các đường tròn đường kính  $AO$  và  $AH$  nên  $AK$  vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác  $ABC$  hay  $AK \parallel PQ$ . Theo định lý Brocard ta suy ra  $EY, FX$  cắt nhau tại trực tâm tam giác  $AKN$  và trực tâm này nằm trên  $OH$  do  $OH \perp AK$ . Lại do  $R$  là trung điểm  $PQ$  nên  $A(QP, RK) = -1$  do đó theo tính chất tứ giác toàn phần thì  $AR$  đi qua giao điểm của  $EY$  và  $FX$ . Từ hai kết luận trên suy ra  $L$  là giao điểm của  $EY$  và  $FX$ . Vậy theo định lý Brocard,  $K$  là trực tâm tam giác  $ALN$ .

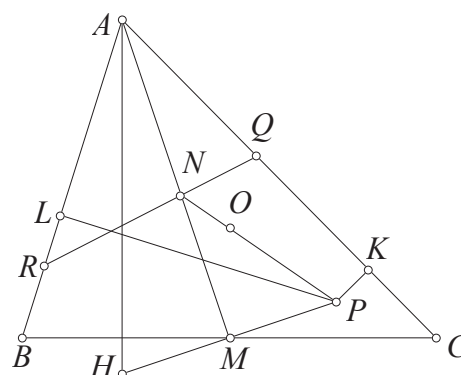
## Nhận xét

Tác giả nhận được lời giải qua email từ các bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình, **Trương Mạnh Tuấn, Trần Anh Tài, Đỗ Xuân Long** lớp 11 Toán, THPT chuyên KHTN, **Nguyễn Hưng Quang Khải** lớp 11 toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên. Bạn **Khải** cũng đưa ra một bổ đề rất thú vị. Bài toán được tác giả tổng quát và lời giải được đề nghị bởi bạn **Nguyễn Đức Bảo**.

Cho tam giác  $ABC$ , đường cao  $AD$ , tâm ngoại tiếp  $O$  và  $P$  thuộc  $AD$ .  $E, F$  là hình chiếu của  $P$  lên  $CA, AB$ .  $DE, DF$  lần lượt cắt  $AB, AC$  tại  $M, N$ .  $Q$  là trung điểm  $MN$ . Đường thẳng qua  $P$  vuông góc với  $MN$  cắt  $AQ, AO$  tại  $R, S$ .  $T$  là trung điểm của  $PS$ . Chứng minh rằng trực tâm tam giác  $ART$  nằm trên  $EF$ .

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Lấy điểm  $H$  sao cho  $AH \perp BC$  và  $HM \perp AM$ .  $P$  đối xứng  $H$  qua  $M$ .  $K, L$  là hình chiếu của  $P$  lên  $CA, AB$ . Trên cạnh  $CA, AB$  lấy  $Q, R$  sao cho  $AQ = 2KC$  và  $AR = 2BL$ .  $AM$  cắt  $QR$  tại  $N$ . Chứng minh rằng  $PN$  đi qua tâm ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .



Mọi trao đổi xin gửi về email [analgeomatica@gmail.com](mailto:analgeomatica@gmail.com).