

1 Năm 2011-2012

Bài 1.1 (KHTN vòng 1 năm 2011-2012 ngày thứ nhất). Cho tam giác ABC . P là điểm bất kỳ trong tam giác. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại A', B', C' .

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$ có chung một điểm. Gọi điểm đó là Q .

b) Giả sử Q không thuộc các đường thẳng AA', BB', CC' . Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AQA', BQB', CQC' có chung một điểm khác Q .

Bài 1.2 (KHTN vòng 1 năm 2011-2012 ngày thứ hai). Cho tam giác ABC nhọn và điểm P bất kỳ nằm trong tam giác ABC . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB . A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm PA, PB, PC . O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$. Giả sử OA_1, OB_1, OC_1 lần lượt cắt B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 tại A_3, B_3, C_3 . Chứng minh rằng A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 đồng quy.

Bài 1.3 (KHTN vòng 2 năm 2011-2012 ngày thứ nhất). Cho tam giác không cân ABC . Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . AD giao EF tại J . M, N di chuyển trên đường tròn (I) sao cho M, J, N thẳng hàng và M nằm về phía nửa mặt phẳng chứa C bờ AD , N nằm về phía nửa mặt phẳng chứa B bờ AD . Giả sử DM, DN lần lượt cắt AC, AB tại P, Q .

a) Giả sử MN giao PQ tại T . Chứng minh rằng T luôn thuộc một đường thẳng d cố định.

b) Giả sử tiếp tuyến tại M, N của (I) cắt nhau tại S . Chứng minh rằng S thuộc d .

c) Giả sử SJ giao BC tại K . Chứng minh rằng IK vuông góc TD .

Bài 1.4 (KHTN vòng 2 năm 2011-2012 ngày thứ hai). Cho tứ giác lồi $ABCD$ không có hai đường chéo vuông góc nội tiếp đường tròn (O) . P là điểm di chuyển trên cung \widehat{AB} không chứa C, D . PD cắt AC tại M , PC cắt BD tại N . Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APM, BPN cắt nhau tại điểm Q khác P .

a) Chứng minh rằng PQ luôn đi qua điểm T cố định.

b) Gọi AC giao BD tại E , I là trung điểm CD . Chứng minh rằng E, I, T thẳng hàng.

Bài 1.5 (KHTN vòng 3 năm 2011-2012 ngày thứ nhất). Cho tam giác ABC . M là điểm di chuyển trên đoạn thẳng BC . B' thuộc đoạn thẳng AC , C' thuộc đoạn thẳng AB sao cho $MB' \parallel AB, MC' \parallel AC$. Gọi N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của tam giác MBC' và MCB' . T là trung điểm N_bN_c . Chứng minh rằng MT luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.6 (KHTN vòng 3 năm 2011-2012 ngày thứ hai). Cho tứ giác lồi $ABCD$ không là hình thang nội tiếp đường tròn (O) . AD giao BC tại E . I là trung điểm CD . EI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác EAB tại M khác E . AC giao BD tại F . EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác EAB tại N khác E . Chứng minh rằng bốn điểm C, D, N, M cùng thuộc một đường tròn.

2 Năm 2012-2013

Bài 2.1 (KHTN vòng 1 năm 2012-2013 ngày thứ nhất). Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với AB không là đường kính của (O) . P là điểm di chuyển trên cung \widehat{CD} không chứa A, B của (O) . PA cắt DB, DC lần lượt tại E, F . PB cắt CA, CD lần lượt tại G, H . GF giao EH tại Q . Chứng minh rằng PQ luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

Bài 2.2 (KHTN vòng 1 năm 2012-2013 ngày thứ hai). Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O) . P là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC . AP cắt (O) tại D khác A . DE, AF là đường kính của (O) . EP, FP lần lượt cắt (O) tại G, H khác E, F . AH giao DG tại K . L là hình chiếu của K lên đường thẳng OP .

- Chứng minh rằng bốn điểm A, L, K, D cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (S) .
- Chứng minh rằng OP cắt EF tại điểm T thuộc (S) .

Bài 2.3 (KHTN vòng 2 năm 2012-2013 ngày thứ nhất). Cho tam giác nhọn ABC . D là một điểm thuộc đoạn AC . Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn thẳng BC tại E khác B . Tiếp tuyến tại B, D của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt nhau tại T . AT cắt đường tròn ngoại tiếp tại tam giác ABD tại F khác A . CF giao DE tại G . AG giao BC tại H . M là trung điểm của AF . AE giao MD tại N . Chứng minh rằng $HN \parallel AT$.

Bài 2.4 (KHTN vòng 2 năm 2012-2013 ngày thứ hai). Cho tam giác ABC cân tại A và ABC là tam giác nhọn. D là một điểm thuộc đoạn thẳng BC sao cho $\angle ADB < 90^\circ$. Từ điểm C kẻ các tiếp tuyến CM, CN tới đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (M, N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của CM, CN . Giả sử PQ cắt đoạn thẳng BC tại E . Lấy điểm F trên đoạn thẳng AE sao cho $\angle EFC = \angle DAC$. Chứng minh rằng $\angle BFE = \angle BAC$.

3 Năm 2013-2014

Bài 3.1 (KHTN vòng 1 năm 2013-2014 ngày thứ nhất). Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho M thuộc đoạn AB , N thuộc đoạn AC , P, Q thuộc đoạn BC với P nằm giữa Q, C và $\angle MNQ = \frac{\angle BAC}{2}$. Đường thẳng qua A vuông góc AB cắt NP tại K . Đường thẳng qua A vuông góc AC cắt MQ tại L . CL cắt NP tại E . BK cắt MQ tại F . Chứng minh rằng $AE = AF$.

Bài 3.2 (KHTN vòng 1 năm 2013-2014 ngày thứ hai). Cho tam giác ABC với $AC > AB$. Phân giác góc $\angle BAC$ cắt BC tại D . E là điểm nằm giữa B, D sao cho $\frac{ED}{EA} = \frac{AC - AB}{AC + AB}$. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EAB, EAC . Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KAB, LAC . Chứng minh rằng PQ song song KL .

Bài 3.3 (KHTN vòng 2 năm 2013-2014 ngày thứ nhất). Cho tam giác ABC cố định, nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O) . D là điểm thuộc đoạn BC sao cho AD là phân giác $\angle BAC$. P là một điểm di chuyển trên đoạn thẳng AD . Q là điểm thuộc đoạn thẳng AD sao cho $\angle PBC = \angle QBA$. R là hình chiếu của Q lên đoạn BC . Gọi d là đường thẳng đi qua R và vuông góc với OP . Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Bài 3.4 (KHTN vòng 2 năm 2013-2014 ngày thứ hai). Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi K, L, N lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác DEC, BCA, FAE . Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của K, L, N theo thứ tự lên AD, BE, CF . Chứng minh rằng trung trực của AX, EY, CZ đồng quy.