Bài hình học thi IMO năm 2014 ngày 1

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và mở rộng bài hình học thi IMO năm 2014 ngày 1 bằng các công cụ hình học thuần túy.

Năm 2014 kỳ thi IMO năm 2014 ngày thứ 1 có bài toán hay như sau

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ lồi với $\angle ABC = \angle CDA = 90°$. H là hình chiếu của A lên BD. Các điểm S, T thuộc cạnh AB, AD sao cho H nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác CST và $\angle CHS - \angle CSB = 90°$, $\angle THC - \angle DTC = 90°$. Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HST.

Trong [1] cũng dẫn ra nhiều lời giải. Đáng chú ý là lời giải của nick name leader có ý tưởng rất đặc sắc. Với ý tưởng đó tôi xin nêu ra một bài toán tổng quát đồng thời thêm hai ý khai thác nữa kết quả có ý nghĩa này.

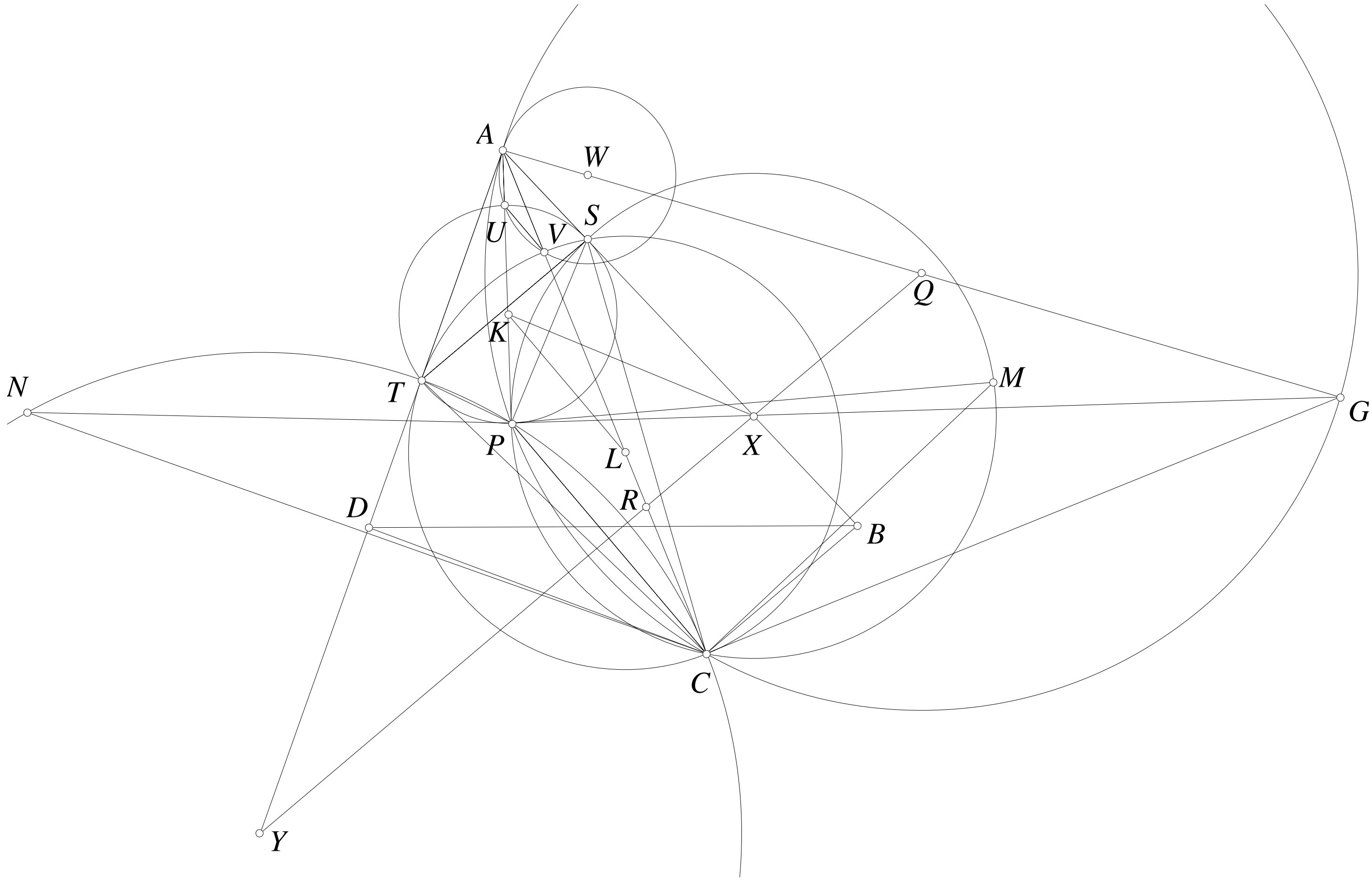
Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ lồi. P là điểm nằm trong tam giác ABD sao cho $\angle PAD = \angle CAB$. Các điểm S, T thuộc các cạnh AB, AD sao cho $\angle CPS - \angle CSB = \angle CPT - \angle CTD = 90°$ và P nằm trong tam giác CST.

a) Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PST thuộc AP.

b) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PST và tiếp tuyến tại C của đường tròn ngoại tiếp tam giác CST cắt nhau tại điểm G trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APC.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác PST cắt AP tại U khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CST cắt AC tại V khác C. Chứng minh rằng AG đi qua tâm ngoại tiếp tam giác AUV.

Lời giải. a) Gọi M, N là đối xứng của C qua AB, AD. Từ điều kiện đề bài $\angle CPS - \angle CSB = \angle CPT - \angle CTD = 90°$ ta dễ thấy các tứ giác $CPSM$ và $CPTN$ nội tiếp với tâm tương ứng là X, Y. Ta phải chứng minh rằng trung trực của PS, PT đồng quy với PA. Thật vậy, áp dụng định lý Menelaus cho các tam giác PAS, PAT ta thấy điều phải chứng minh tương đương với $\frac{XS}{XA} = \frac{YT}{YA}$ hay $\frac{AX}{AY} = \frac{PX}{PY} = \frac{CX}{CY}$. Gọi XY cắt trung trực PA tại Q và cắt AC tại R. Ta có biến đổi góc $\angle XAQ = \angle PAQ - \angle PAX = (90° - \frac{\angle AQP}{2}) - \angle CAD = 90° - \angle ACP - \angle CAD = \angle YRC - \angle CAD = \angle AYX$. Từ đó ta thấy ngay QA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY nhưng Q lại là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APC do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác APC là đường tròn Apollonious của đoạn XY. Ta có điều phải chứng minh.



Hình 1.

b) Theo a) ta dễ thấy tâm K của đường tròn ngoại tiếp tam giác PST thuộc AP. Một cách hoàn toàn tương tự tâm L của đường tròn ngoại tiếp tam giác CST thuộc AC. Tương đó dễ thấy tiếp tuyến tại P, C là các đường thẳng qua P vuông góc PA và qua C vuông góc CA nên chúng cắt nhau tại G chính là đối xứng của A qua Q thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác APC. Ta có điều phải chứng minh.

c) Từ việc áp dụng định lý Menelaus cho các tam giác PAS ta thấy $\frac{KP}{KA} = \frac{XS}{XA} = \frac{LP}{LA}$. Từ đó $KL \parallel PC$. Từ đó dễ thấy $UV \parallel KL \parallel PC$. Từ đó A và tâm ngoại tiếp của AUV và APC thẳng hàng. Nên tâm ngoại tiếp của AUV thuộc AG. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán 1 là bài số 3 trong ngày thi 1. Với vị trí đó bài toán là bài khó nhất trong ngày. Việc dựng thêm điểm đối xứng M, N là cách để khai thác giả thiết $\angle CPS - \angle CSB = \angle CPT - \angle CTD = 90$ một cách tốt nhất. Thực ra nếu không dựng thêm điểm đối xứng bằng cộng góc ta cũng có thể chỉ ra được tiếp tuyến tại S của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPS vuông góc với AC ý này tương đương với việc chỉ ra tâm của của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPS thuộc AC, đó là một hướng khác khai thác giả thiết. Đoạn sau việc xử lý bằng đường tròn Apollonious theo tôi là cách xử lý hay nhất vì từ đó ta dễ dàng đạt được lời giải tương tự cho bài toán tổng quát. Bài toán thi IMO này là một bài toán rất hay có ý nghĩa.

Toàn bộ 3 ý của bài toán 2 có thể tóm gọn lại trong một bài toán như sau

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ lồi. P là điểm nằm trong tam giác ABD sao cho $\angle PAD = \angle CAB$. Các điểm S, T thuộc các cạnh AB, AD sao cho $\angle CPS - \angle CSB = \angle CPT - \angle CTD = 90^\circ$ và P nằm trong tam giác CST. Tếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PST và tiếp tuyến tại C của đường tròn ngoại tiếp tam giác CST cắt nhau tại điểm G. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PST cắt AP tại U khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CST cắt AC tại V khác C. Chứng minh rằng AG đi qua tâm ngoại tiếp tam giác AUV.

Đây là một bài toán khó suy ra từ bài toán IMO. Xung quanh bài toán này còn rất nhiều ý tưởng hay nữa. Xin dành điều đó cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] Đề thi IMO ngày 1 tại

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewforum.php?f=1098

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com