Về hai bài hình học trong kỳ thi IMO năm 2015

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

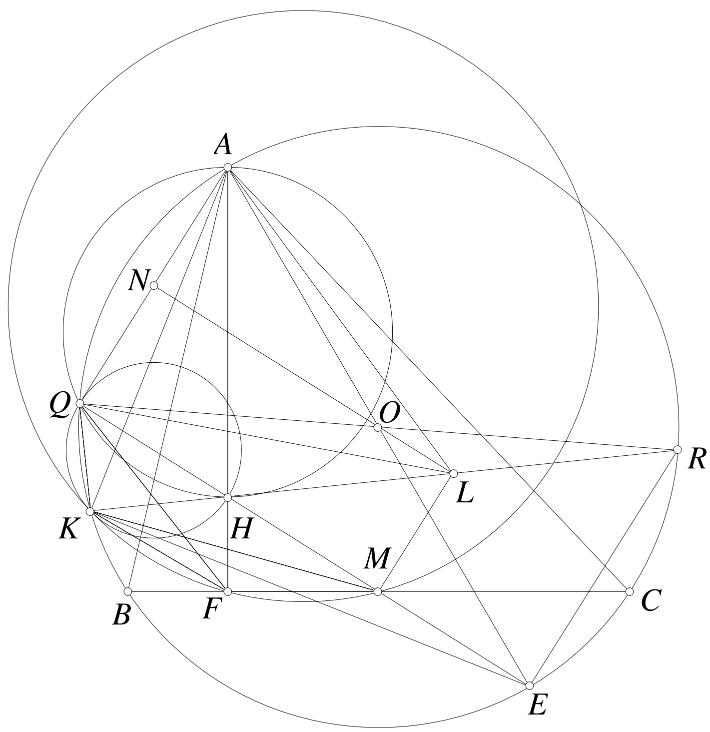
Bài báo giải quyết và đưa ra các ý tưởng mở rộng cùng nhiều ứng dụng cho các đề hình học thi IMO năm 2015.

1 Bài hình ngày thứ nhất

1.1 Mở đầu

Đề thi IMO ngày thứ 1 năm 2015 [1] có bài hình học rất thú vị như sau

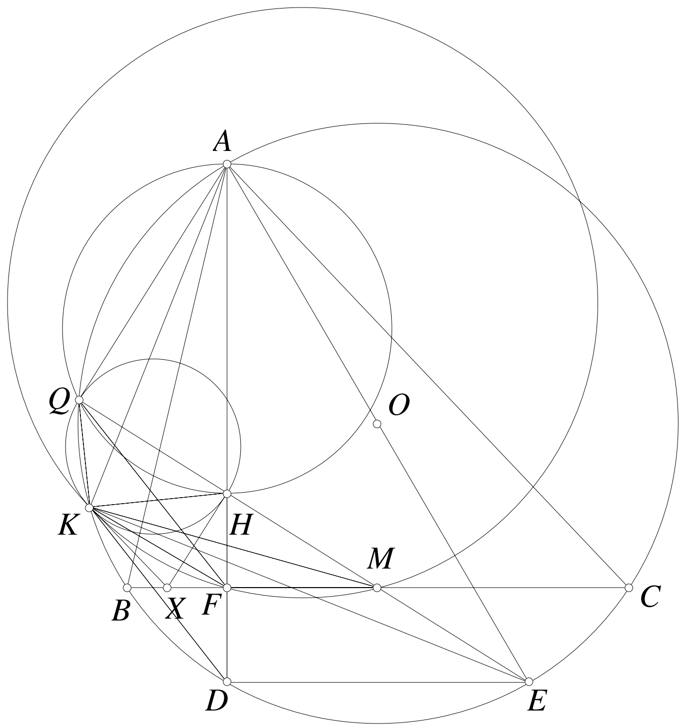
Bài toán 1.1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại Q khác A. Đường tròn đường kính HQ cắt (O) tại K khác Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KHQ và KFM tiếp xúc nhau.



Hình 1.

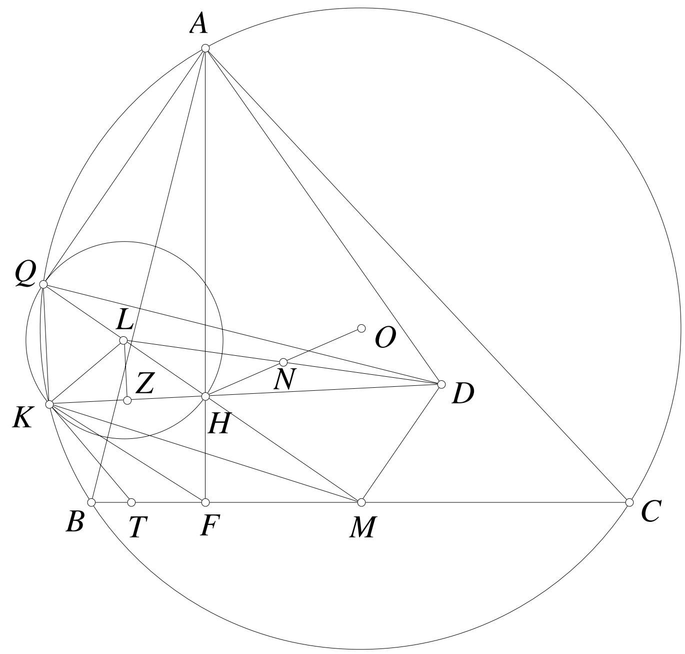
Lời giải thứ nhất. Vẽ đường kính AE và QR của (O). L, N lần lượt là trung điểm HR, QA. Ta có kết quả quen thuộc Q, H, M, E thẳng hàng. Từ đó suy ra $ML \parallel ER \parallel QA$ và $ML = \frac{1}{2}ER = \frac{1}{2}QA = NQ$ nên $NQML$ là hình bình hành. Do đó, $LN \perp QA$. Từ đó ta được $LA = LQ$. Mặt khác, $ML \parallel QA$ nên ML tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp $\triangle LAQ$ tại L (1). Mà dễ thấy $HA.HF = HK.HL = HQ.HM$

nên phép nghịch đảo tâm H phương tích $\overline{HA}.\overline{HF}$ biến $M \to Q, L \mapsto K, A \mapsto F, Q \mapsto M$. Do đó từ (1) kết hợp với phép nghịch đảo tâm H suy ra đường tròn ngoại tiếp $\triangle KHQ, \triangle KFM$ tiếp xúc nhau. $\square$



Hình 2.

Lời giải thứ hai. Gọi AE là đường kính của (O) và D đối xứng H qua BC thì D nằm trên (O). Dễ thấy Q, H, M, E thẳng hàng. Gọi tiếp tuyến tại K, H của đường tròn ngoại tiếp tam giác KHQ cắt nhau tại X. Ta có $\angle KXH = 180^\circ - 2\angle KHX = 180^\circ - 2\angle KQH = 2(90^\circ - \angle KQH) = 2(90^\circ - \angle KAE) = 2\angle AEK = 2\angle KDH$. Lại có $XK = XH$, từ đó X là tâm ngoại tiếp tam giác KDH. Do BC là trung trực HD nên X nằm trên BC. Từ đó theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $XK^2 = XH^2 = XF.XM$ hay XK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp tam giác KQH và KFM hay hai đường tròn này tiếp xúc nhau tại K. $\square$



Hình 3.

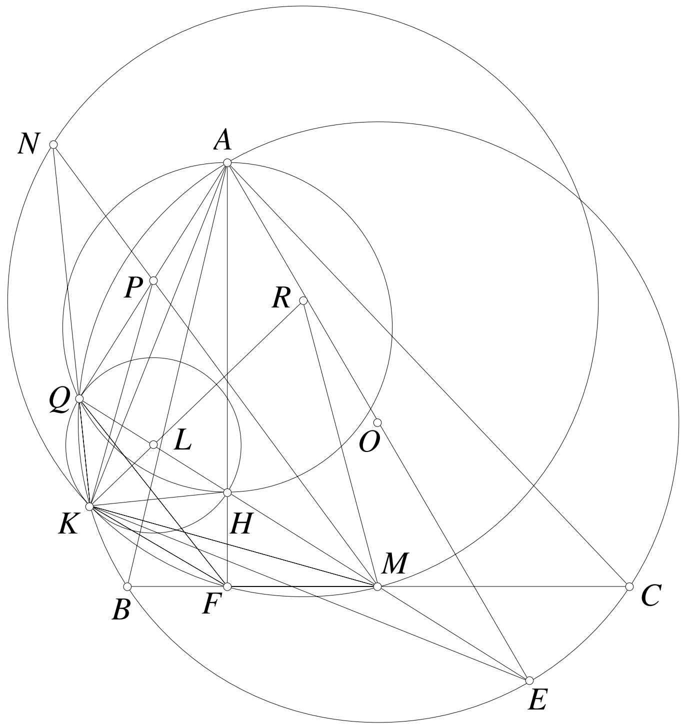
Lời giải thứ ba. Gọi đường thẳng qua M vuông góc với QM cắt KH tại D. Gọi L, Z là trung điểm của HQ, HK thì L, Z nằm trên đường tròn Euler (N) mà M cũng thuộc (N) nên N là trung điểm LD. N cũng là trung điểm OH nên $OD \parallel LH \perp QA$. Từ đó có $DQ = DA$ và $HA.HF = HQ.HM = HK.HD$. Kẻ tiếp tuyến KT của đường tròn ngoại tiếp tam giác KQH ta có $\angle TKF = \angle TKH - \angle HKF = \angle KQH - \angle HAD = \angle HDM - (\angle QAD - \angle QAH) = \angle HDM - \angle QDM + \angle HMF = \angle HMF - \angle QDH = \angle HMF - \angle HMK = \angle KMF$. Từ đó KT cũng là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KFM. □

Nhận xét. Bài toán này là bài toán thứ 3 của ngày thứ nhất, được đánh giá là một bài khó. Tuy vậy một bài toán chứng minh hai đường tròn tiếp xúc mà đã có sẵn tiếp điểm thì mức độ khó chưa cao vì vậy xếp là bài số 3 là hợp lý. Lời giải thứ nhất là một ý tưởng khá tự nhiên khi có hai đường tròn tiếp xúc ta nghĩ tới việc nghịch đảo để đi chứng minh đường thẳng tiếp xúc đường tròn để giảm số lượng đường tròn đi. Lời giải này cùng được đễ xuất bởi **Telv Cohl** và **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp 12A1 Toán THPT chuyên KHTN, bạn **Vũ** đã giúp tác giả trình bày lại lời giải của mình như trên. Cũng có rất nhiều lời giải khác nhau đã được đề xuất trong [1]. Lời giải thứ hai trên có ý tưởng thuần túy hình học rất thông minh là của **Jeck Lim**, nick name **oneplusone** trong [1], tác giả đã chỉnh sửa một chút cách dựng điểm X và biến đổi góc gọn hơn. Lời giải thứ ba thực chất cũng xuất phát từ ý tưởng nghịch đảo trong khi tác giả trao đổi của **Hồ Quốc Đăng Hưng** và đã được tác giả chỉnh sửa lại gọn hơn, bỏ đi cách trình bày nghịch đảo và làm lại thuần túy hình học. Trong lời giải này thì điểm T không cần thiết nhưng ta dựng như vậy cho đẹp. Bài toán có nhiều ứng dụng và mở rộng, phần sau chúng tôi xin giới thiệu một số ứng dụng và mở rộng.

1.2 Khai thác bài toán IMO

Bài toán IMO là một cấu hình đẹp, trong cấu hình đó ta sẽ còn thấy rất nhiều bài toán thú vị khác. Bài toán đầu tiên này được tác giả tìm ra một cách tình cơ khi đang cố giải bài toán IMO sử dụng phương pháp đồng dạng trung tuyến

Bài toán 1.2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại Q khác A. Đường tròn đường kính HQ cắt (O) tại K khác Q. KQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KFM tại N khác K. Chứng minh rằng MN chia đôi AQ.

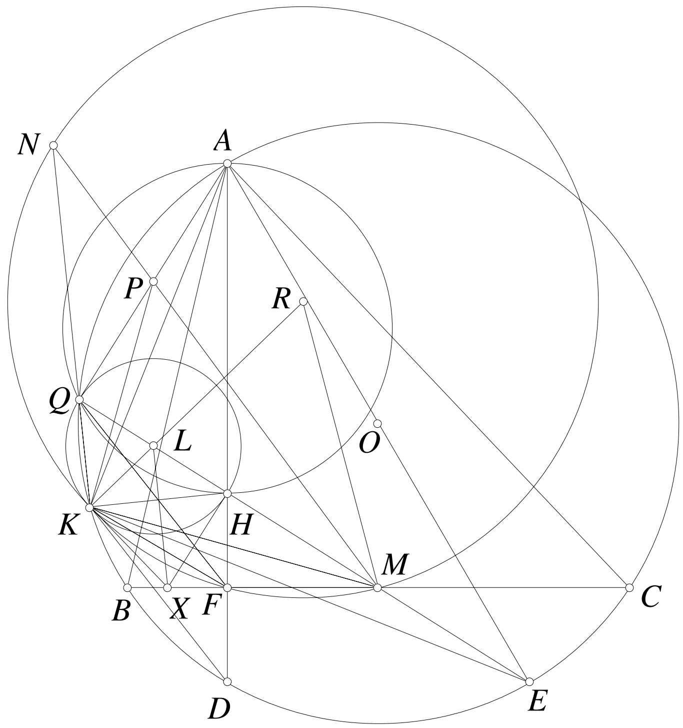


Hình 4.

Lời giải. Gọi L, R là tâm ngoại tiếp tam giác KQH và KFM thì L là trung điểm QH và theo bài toán 1 thì K, L, R thẳng hàng. Gọi P là trung điểm QA, ta sẽ chứng minh M, N, P thẳng hàng, thật vậy. Gọi AE là đường kính của (O) thì Q, H, M, E thẳng hàng. Từ đó $\angle KQH = \angle KAE$ nên hai tam giác vuông KQH và KAE đồng dạng suy ra hai tam giác KQA và KHE đồng dạng, chúng có trung tuyến là KP, KM nên $\angle QPK = \angle QMK$ và $\angle QKP = \angle HKM$. Cũng từ đó tứ giác $QPMK$ nội tiếp. Ta có $\angle CMN = \angle QKF = \angle QKL + \angle LKM + \angle MKF = \angle KPM + \angle RMK + 90^\circ - \angle RMF = 90^\circ - \angle PMK + \angle RMK = 90^\circ - \angle PMK + \angle RMK + 90^circ - \angle RMF = 180^\circ - \angle BMP = \angle CMP$. Từ đó M, N, P thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Chính nhờ ý tưởng của bài toán này cho ta một cách nhìn rất thú vị khi giấu đi tiếp điểm ở bài toán gốc như sau

Bài toán 1.3. Cho tam giác ABC nhọn với trực tâm H, đường cao AF và M là trung điểm BC. Đường tròn đường kính HA cắt HM tại Q khác A. X thuộc BC sao cho $XH \perp QM$. L, P là trung điểm QH, QA. Đường thẳng qua Q song song LX cắt MP tại N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác NFM tiếp xúc đường tròn đường kính QH.



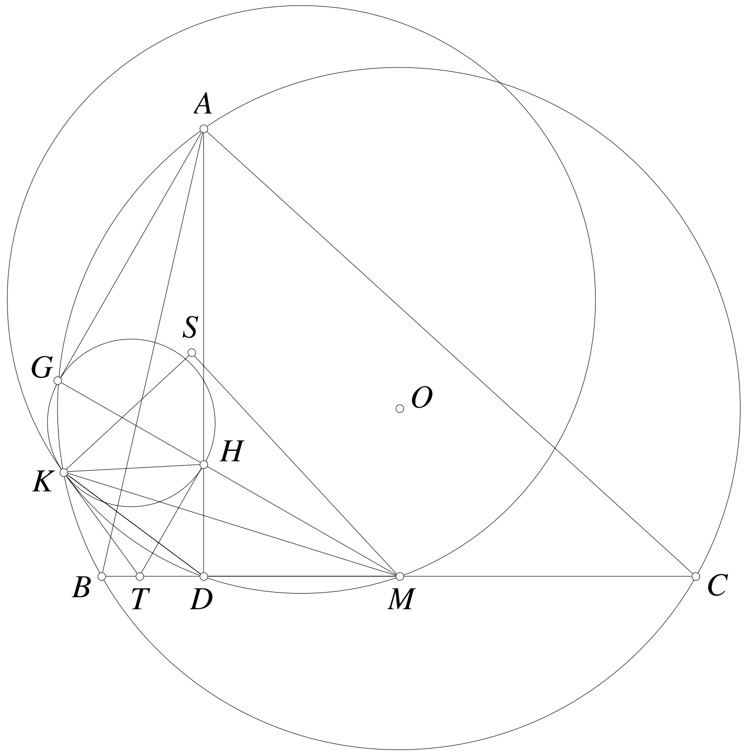
Hình 5.

Lời giải thứ nhất. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi AE là đường kính của (O) thì Q, H, M, E thẳng hàng. Gọi D đối xứng H qua BC. Đường tròn (X, XH) cắt đường tròn (O) tại K khác D. Ta có $\angle XKH = \angle XHK = 90^\circ - \angle KDH = 90^\circ - \angle KEA = \angle KAE = \angle KQE$, từ đó KH, KX tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác QKH. Lại có $\angle KQH = \angle KHX = 90^\circ - \angle KHQ$ nên $\angle QKH = 90^\circ$. K thuộc đường tròn đường kính QH nên $LX \perp KH \perp QK$ suy ra $QK \parallel LX \parallel QN$ nên K, Q, N thẳng hàng. Từ tam giác KQH và tam giác KAE đồng dạng suy ra KQA và KHE đồng dạng, lại có trung tuyến tương ứng là KP, KM nên tam giác KQP và KHM đồng dạng hay KQH và KPM đồng dạng. Lại có $XK^2 = XH^2 = XM.XF$ suy ra XK tiếp xúc đường tròn (R) ngoại tiếp tam giác KFM. Từ đó K, L, R thẳng hàng. Vậy $\angle LKQ = \angle LQK = \angle KPM = 90^\circ - \angle KHQ = 90^\circ - \angle PMK$ từ đây dễ suy ra $\angle KRM = 2\angle N$. Từ đó N thuộc (R) hay (R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác NFM. Hiển nhiên (R) tiếp xúc đường tròn đường kính QH. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải thứ hai. Gọi đường tròn đường kính QH cắt (O) tại K khác A và D đối xứng H qua BC. Chứng minh tương tự bài toán gốc thì QE tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác KHD mà $HX \perp QE$ nên tâm ngoại tiếp tam giác KHD nằm trên HX, lại có X thuộc trung trực HD nên tâm ngoại tiếp tam giác KHD chính là X vậy $XH = XK$. Mà dễ thấy XH tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác QHK nên XK cũng vậy. Từ đó $KH \perp LX \perp QK$ nên $QK \parallel LX \parallel QN$. Từ đó Q, K, N thẳng hàng. Ta có $\angle QKF + \angle FMN = \angle QKL + \angle RKM + \angle MKF + \angle FMP = 90^\circ - \angle KHQ + \angle RMK + 90^\circ - \angle RMF + \angle FMP = 180^\circ$ hay tứ giác $NKFM$ nội tiếp. Từ đó đường tròn ngoại tiếp tam giác NFM tiếp xúc đường tròn đường kính QH. □

Ta lại có một ý tưởng khác phát triển bài toán IMO như sau

Bài toán 1.4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính HG cắt (O) tại K khác G. S đối xứng với D qua HK. Chứng minh rằng đường thẳng qua S vuông góc SK chia đôi BC.

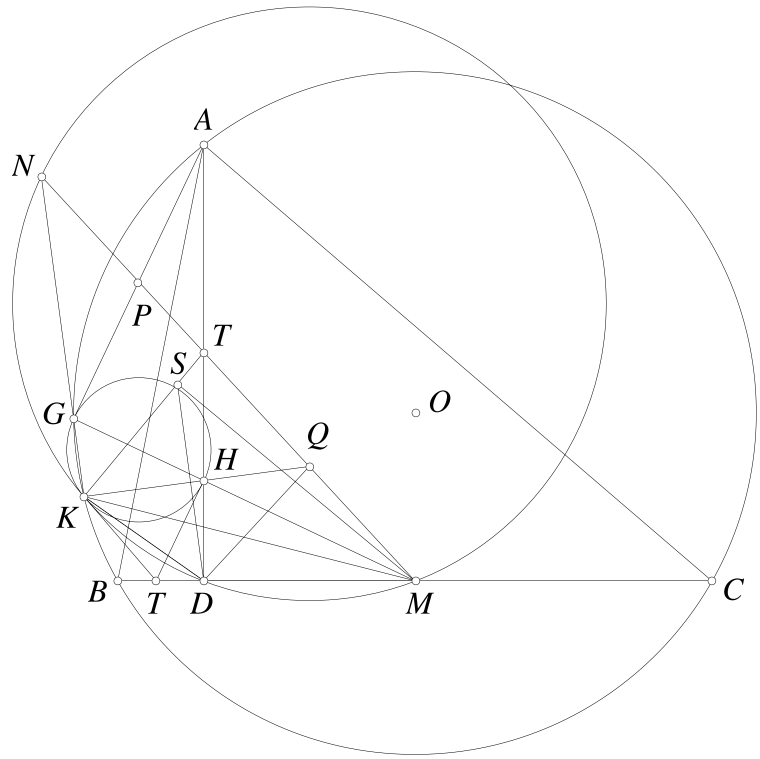


Hình 6.

Lời giải. Gọi M là trung điểm BC, ta sẽ chứng minh rằng tam giác KSM vuông tại S. Thật vậy. Theo bài toán IMO đường tròn ngoại tiếp tam giác KGH và KDM tiếp xúc nhau tại K. Gọi T thuộc BC sao cho KT là tiếp tuyến cung của hai đường tròn đó. Ta có $\angle SKM = \angle SKH + \angle HKM = \angle HKD + \angle GHK - \angle GMK = \angle HKT - \angle DKT + \angle GHK - \angle GMK = \angle HGK + \angle GHK - \angle KMD - \angle GMK = 90^\circ - \angle HMD = \angle DHM$. Cũng theo chứng minh bài toán gốc ta lại có TK và TH là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KGH và hai tam giác TKD và TMK đồng dạng. Từ đó $\dfrac{KS}{KM} = \dfrac{KD}{KM} = \dfrac{TK}{TM} = \dfrac{TH}{TM} = \dfrac{HD}{HM}$. Từ đó dễ thấy hai tam giác KSM và HDM đồng dạng nên $\angle KSM = 90^\circ$. □

Từ hai bài toán trên ta đi đến phát triển sau

Bài toán 1.5. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD, trung tuyến AM. Đường tròn đường kính HA cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính HG cắt BC tại K khác G. KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tại N khác K. KH cắt MN tại Q. Chứng minh rằng $QD = QM$.

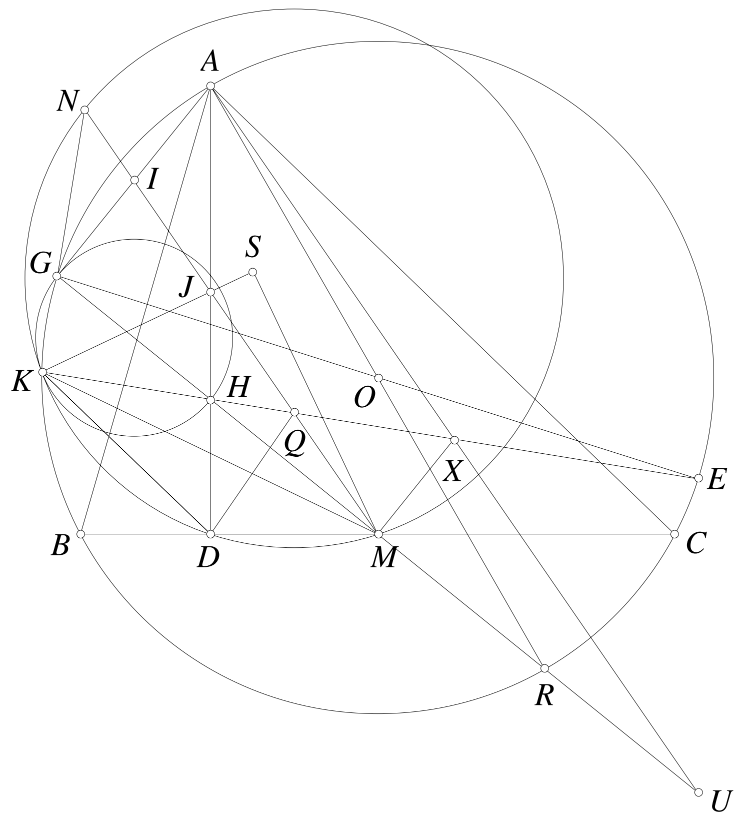


Hình 7.

Lời giải thứ nhất được tác giả đưa ra dựa trên kết quả bài trước

Lời giải thứ nhất. Gọi S đối xứng D qua KH và KS cắt MM tại T. Theo chứng minh bài trước thì MN đi qua trung điểm P của GA nên $\angle QHM = \angle GHK = \angle KMQ$. Từ đó $\angle QMH = \angle QKM$. Vậy $\angle HKD = 90^\circ - \angle HMD - \angle HKM = 90^\circ - \angle QMD$. Từ đó $\angle KSD = 90^\circ - \angle SKH = 90^\circ - \angle HKD = \angle QMD$ suy ra tứ giác $STMD$ nội tiếp. Cũng theo bài trước thì $\angle TSK = 90^\circ$. Từ đây suy ra $\angle TDM = 90^\circ$ hay T thuộc AH. Cũng từ $\angle HKD = 90^\circ - \angle QMD = \angle MTD$ nên tứ giác $KTQD$ nội tiếp, ta thu được $\angle DQM = \angle TKD$ hay hai tam giác QDM và KDS đồng dạng hay $QD = QM$. □

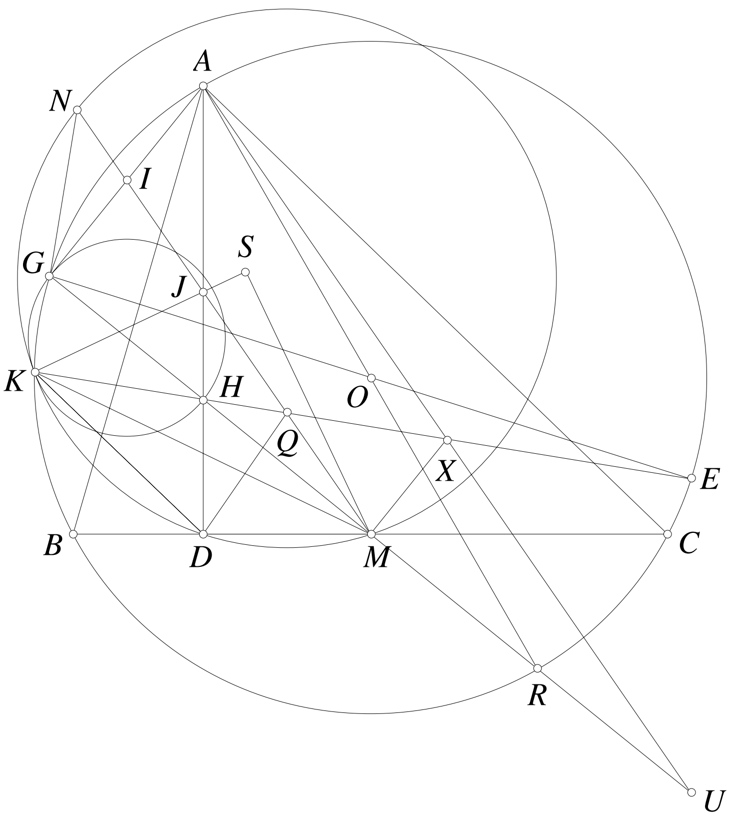
Lời giải thứ hai là chứng minh trực tiếp của bạn **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp 12A1 Toán THPT chuyên KHTN.



Hình 8.

Lời giải. Vẽ đường kính AR, GE của (O).Gọi I là trung điểm GA. Từ kết quả bài trước ta đã có I nằm trên đường thẳng MN. Gọi X là trung điểm HE. Ta có kết quả quen thuộc G, H, M, R thẳng hàng. Từ đó suy ra $MX \parallel GA$ và $MX = \dfrac{1}{2}RE = \dfrac{1}{2}.GA = IA = IG$ vậy $AIMX, IGMX$ là các hình bình hành. Do đó $AX \parallel MI$ và $XI \perp GA$. Từ đó ta thu được $XA = XG$. Gọi MI cắt AD tại J. Lấy U đối xứng A qua X. Từ $XA = XG$ suy ra $\angle AGU = 90°$. Do đó U nằm trên đường thẳng HM. Vậy KH chia đôi MJ do $MJ \parallel AU$ và KH chia đôi AU tại X. Suy ra Q là trung điểm MJ, kết hợp $\angle JDM = 90°$, ta được $QD = QM$. □

Từ đó nếu ta sử dụng kết quả bài này thì bạn **Vũ** lại đưa ra một lời giải khác cho bài toán trước như sau



Hình 9.

Lời giải bài trước. Ta vẫn sử dụng các kí hiệu như lời giải thứ hai ở trên. Từ bài toán này ta suy ra Q là tâm ngoại tiếp tam giác DMS. Suy ra $\angle DSM = \dfrac{1}{2}\angle DQM$. Ta có $HK.HX = HK.\dfrac{1}{2}HE = HG.\dfrac{1}{2}HR = HG.HM = HA.HD$. Suy ra tứ giác $AXDK$ nội tiếp. Do đó ta có $\angle KSD = \angle KDS = 90^\circ - \angle DKH = 90^\circ - \angle DAX = 90^\circ - \angle DJM = 90^\circ - \dfrac{1}{2}.\angle DQM = 90^\circ - \angle DSM$. Vậy $\angle KSM = \angle KSD + \angle DSM = 90^\circ$. □

Nếu sử dụng thêm định lý con bướm ta có hai khai thác như sau

Bài toán 1.6. Cho tam giác ABC nhọn với tâm ngoại tiếp O với trực tâm H, đường cao AD và trung tuyến AM. G là hình chiếu của A lên HM. L là trung điểm HG. K đối xứng với G qua OL. KL cắt trung trực DM tại S. KG cắt BC tại T. Lấy X thuộc MK sao cho $TX \perp ST$. Y đối xứng X qua T. P là trung điểm AG. Chứng minh rằng KG, YD, MP đồng quy.

Ta cũng có thể phát biểu bài toán trên cách khác, bài toán này cũng có nhiều giá trị

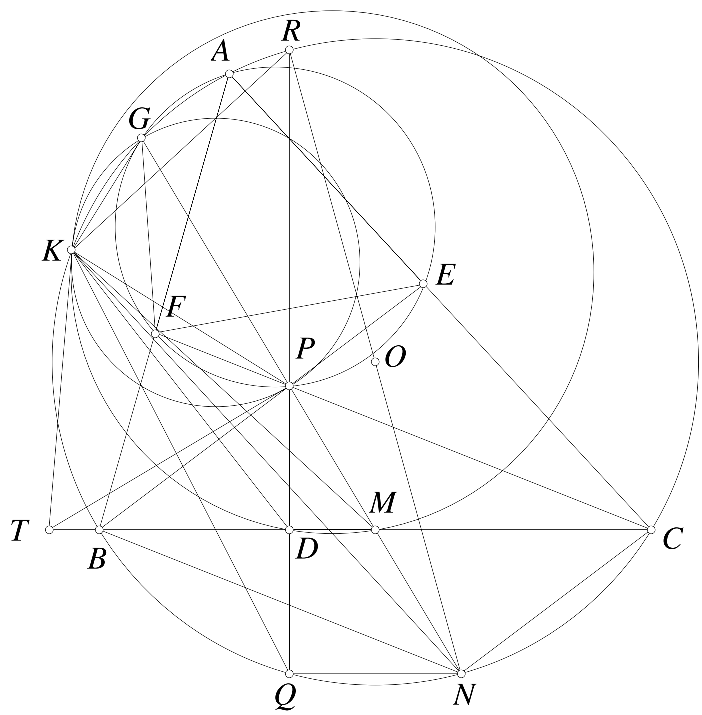
Bài toán 1.7. Cho tam giác ABC nhọn với tâm ngoại tiếp O với trực tâm H, đường cao AD và trung tuyến AM. G là hình chiếu của A lên HM. L là trung điểm HG. K đối xứng H qua OL. KL cắt trung trực DM tại S. P là trung điểm GA. N là đối xứng của M qua hình chiếu của S lên MP. NG cắt BC tại T. Lấy X thuộc ND sao cho $XT \perp ST$. Y đối xứng X qua T. Chứng minh rằng MY, NG, KL đồng quy.

Như vậy từ mô hình bài toán gốc ta đã thu được một số bài toán khác nhau đều là các kết quả đẹp và có giá trị.

1.3 Mở rộng bài toán IMO

Bài toán IMO này là một bài toán hay theo nghĩa có nhiều phát triển mở rộng. Trong [1] cũng đưa ra nhiều mở rộng nhưng trong bài viết này tôi chỉ viết về các mở rộng của mình, ta đi tới mở rộng đầu tiên như

Bài toán 1.8. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm trong tam giác sao cho $\angle BPC = 180^\circ - \angle A$. PB, PC cắt CA, AB tại E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính PG cắt (O) tại K khác G. D là hình chiếu của P lên BC và M là trung điểm BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGP và KDM tiếp xúc với nhau.



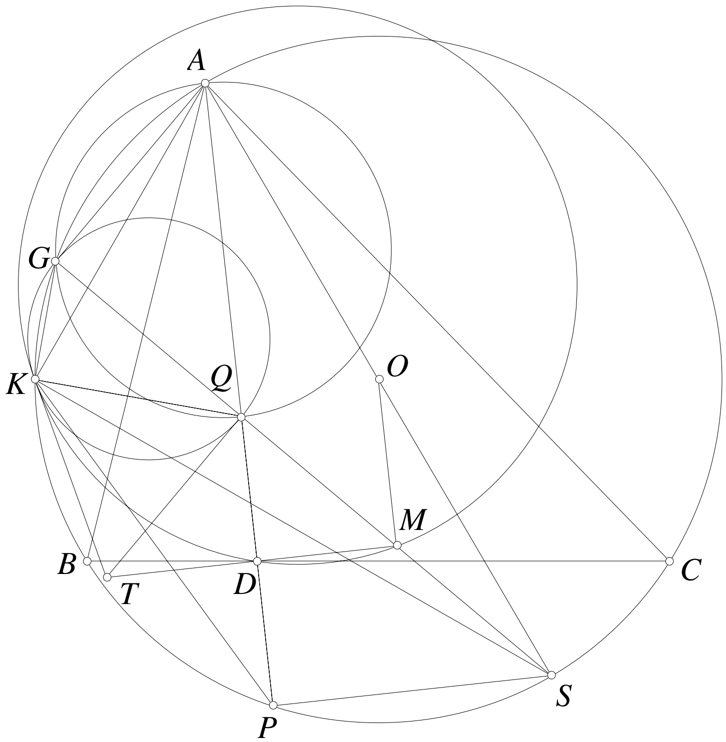
Hình 10.

Lời giải. Gọi Q là đối xứng của P qua D, thì Q nằm trên (O). Gọi GP cắt (O) tại N khác G. Ta thấy $\angle NPC = \angle FPG = \angle FAG = \angle BNP$ suy ra $BN \parallel PC$. Tương tự, $CN \parallel BP$. Từ đó M là trung điểm của PN. Gọi AS, NR là đường kính của (O). Ta dễ thấy $\angle PQN = 90^\circ$ vậy nên P, Q, R thẳng hàng. Từ đó, GN là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ. Gọi tiếp tuyến tại K, P của đường tròn ngoại tiếp tam giác KPG cắt nhau tại T. Ta có $\angle KTP = 180^\circ - 2\angle KGP = 2(90^\circ - \angle KRN) = 2\angle RNK = 2\angle KQP$ và $TK = TP$. Từ đó T là tâm ngoại tiếp tam giác KPQ nhưng vì BC là trung trực PQ nên T thuộc BC. Từ đây ta có $TK^2 = TP^2 = TD.TM$ suy ra TK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KDM và KHM hay hai đường tròn đó tiếp xúc nhau tại K. $\square$

Nhận xét. Mở rộng trên lần đầu được tác giải đăng trong [1] và sau đó tác giả cũng chỉnh sửa lại cho ngắn gọn hơn như trên. Khi cho P là trực tâm hoặc khi cho góc A đặc biệt ta sẽ thu được nhiều trường hợp riêng giá trị. Một cách nhìn khác dễ dàng hơn khi dễ thấy P là trực tâm tam giác RBC

nên ta áp dụng trực tiếp bài toán gốc trên tam giác RBC thì thu bài toán trên. Sau đây là một mở rộng khác của tôi cho bài toán này

Bài toán 1.9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại D. Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính GQ cắt (O) tại K khác G. GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGQ và KDM tiếp xúc nhau.



Hình 11.

Lời giải. Gọi GQ cắt (O) tại S khác G, do $\angle AGQ = 90^\circ$ nên AS là đường kính của (O). Do $OM \parallel AP$ và O là trung điểm AS nên M là trung điểm QS. Từ đó $DM \parallel PS \perp PA$ nên DM là trung trực PA. Lại có $\angle KQG = 90^\circ - \angle KGQ = 90^\circ - \angle KAS = \angle ASK = \angle QPK$. Từ đó GS tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác KQP. Gọi tiếp tuyến tại K, Q của đường tròn ngoại tiếp tam giác GKQ cắt nhau tại T. Ta có $\angle KTQ = 180^\circ - 2\angle KGQ = 2\angle KQG = 2\angle KPQ$. Từ đó T là tâm ngoại tiếp tam giác KPQ. Ta đã chứng minh DM là trung trực PQ nên T thuộc DM. Từ đây ta có $TK^2 = TP^2 = TD.TM$ suy ra TK là tiếp tuyến chung của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KGQ và KDM hay hai đường tròn đó tiếp xúc nhau tại K. Ta có điều phải chứng minh. □

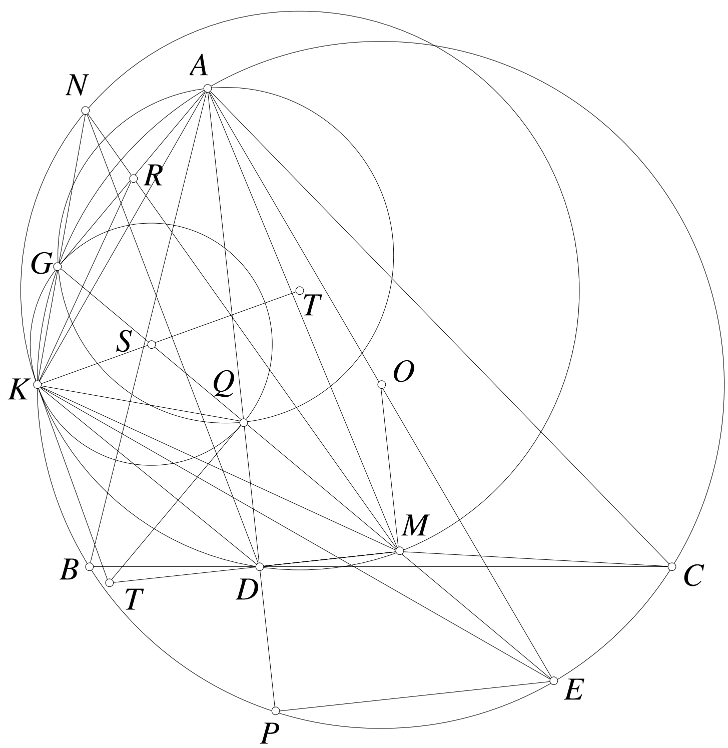
Nhận xét. Mở rộng này khá quan trọng vì nó dựa trên một mô hình rất giống bài toán gốc. Do đó những ứng dụng của bài toán gốc đều có thể phát triển trên mô hình này. Tuy nhiên ta cũng có thể có cái nhìn đơn giản hơn khi kéo dài trung trực PQ cắt (O) tại hai điểm Y, Z thì Q là trực tâm tam giác AYZ nên áp dụng bài toán gốc IMO vào tam giác AYZ. Ta thu được bài toán này. Một cách tương tự các bạn có thể làm với mở rộng sau

Bài toán 1.10. Cho tam giác ABC có P là hai điểm trong tam giác. X, Y, Z là đối xứng của P qua BC, CA, AB. PX cắt đường tròn (Q) ngoại tiếp tam giác XYZ tại T khác X. Đường tròn đường kính PT cắt (Q) tại G khác T. Đường tròn đường kính PG cắt (Q) tại K khác G. D, M là hình chiếu của P, Q lên BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM và KPG tiếp xúc nhau.

Như vậy qua hai bài toán trên có thể thấy bài toán IMO gốc vẫn đóng một vài trò rất quan trọng, khi áp dụng bài toán đó vào các mô hình khác nhau cho ta nhiều bài toán phát triển rất thú vị.

Ta tiếp tục đi tới một số khai thác của bài toán tổng quát giống như các khai thác của bài toán IMO

Bài toán 1.11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại D. Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính GQ cắt (O) tại K khác G. GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tại N khác K. Chứng minh rằng MN chia đôi GA.

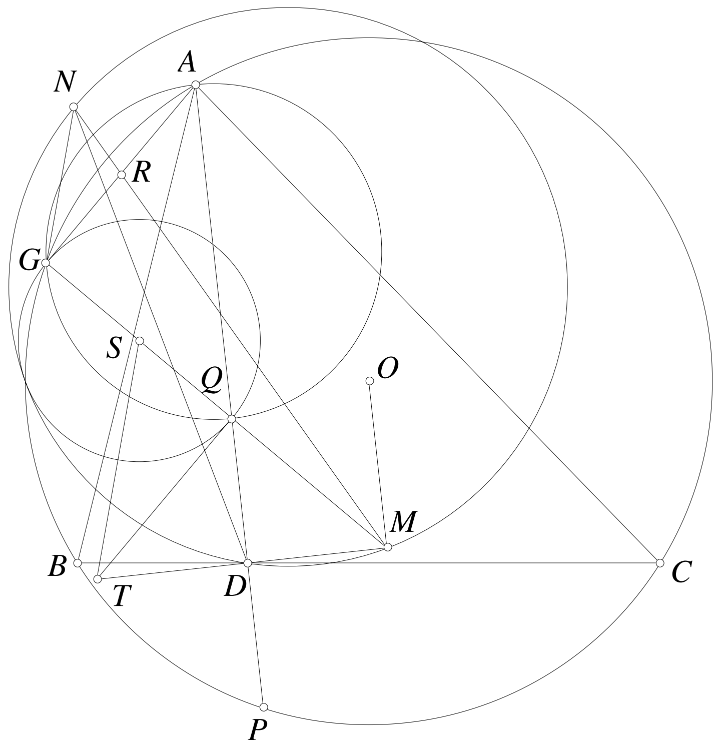


Hình 12.

Lời giải. Gọi AE là đường kính của (O). Chứng minh tương tự bài toán 1.9 ta có G, Q, M, E thẳng hàng và M là trung điểm QE. Từ đó dễ có các tam giác vuông KGQ và KAE đồng dạng, suy ta giác KGQ và KQE đồng dạng. Gọi R là trung điểm GA thì hai tam giác KGR và KQM đồng dạng. Từ đó dễ thấy tứ giác $KGRM$ nội tiếp. Ta có $\angle DMN = 180^\circ - \angle DKN = 180^\circ - (\angle GKS + \angle TKM + \angle MKD) = 180^\circ - (90^\circ - \angle KMR + \angle TMK + 90^\circ - \angle TMD) = \angle DMR$. Từ đó ta có M, N, R thẳng hàng. $\square$

Bài toán 1.12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. AP cắt BC tại D. Q đối xứng với P qua D. Đường tròn đường kính AQ cắt (O) tại G khác A.

GQ cắt đường thẳng qua O song song với AP tại M. Đường thằng qua Q vuông góc GM cắt DM tại T. S, R là trung điểm GQ, GA. Đường thẳng qua G song song ST cắt MR tại N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MND tiếp xúc đường tròn đường kính GQ.



Hình 13.

Ta xây dựng thêm các mô hình khác nữa cho bài toán IMO như sau

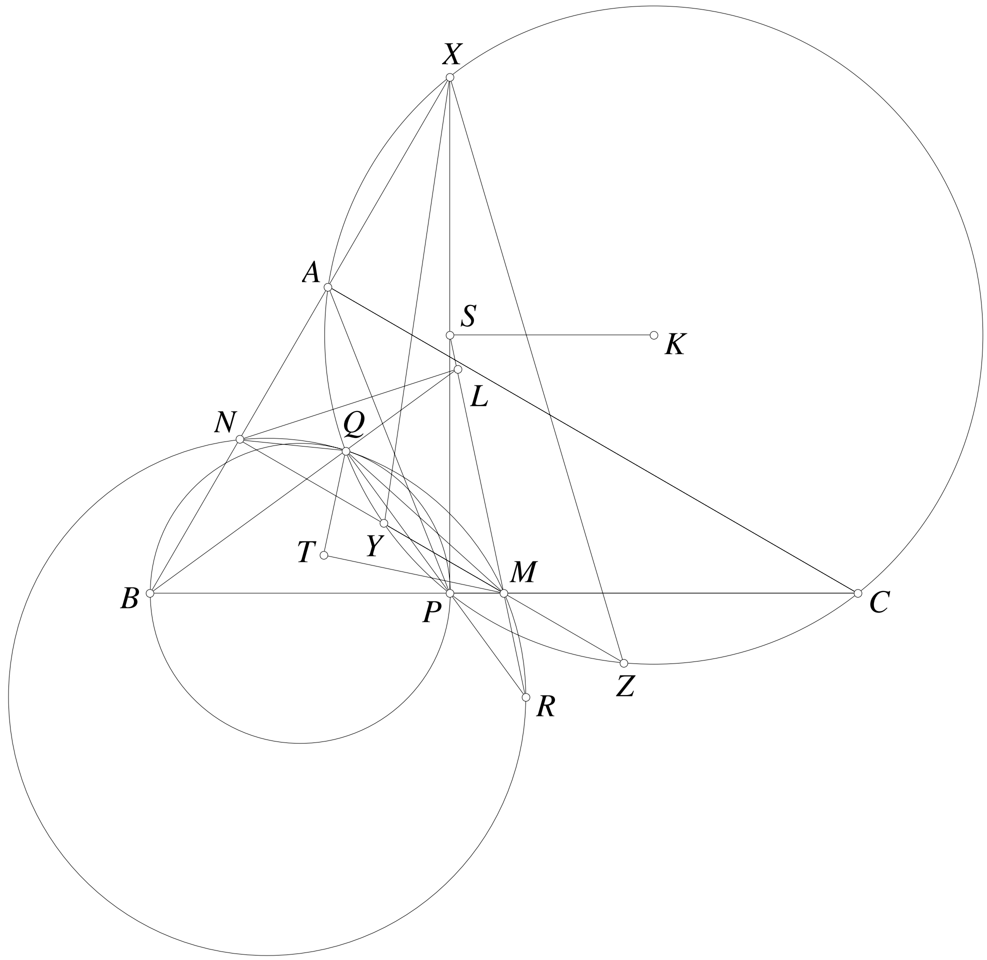
Bài toán 1.13. Cho tam giác ABC vuông tại A. P là một điểm trên BC. Đường tròn đường kính BP cắt đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác APC tại Q khác P. Gọi M, N là trung điểm của BC, AB.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN và QPB tiếp xúc nhau.

b) Gọi PQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN tại R khác Q. MR cắt đường thẳng qua P vuông góc BC tại S. Chứng minh rằng $KS \parallel BC$.

c) Gọi T đối xứng N qua BQ. Chứng minh rằng $\angle QTM = 90°$.

d) Gọi BQ cắt ST tại L. Chứng minh rằng tam giác LMN cân.

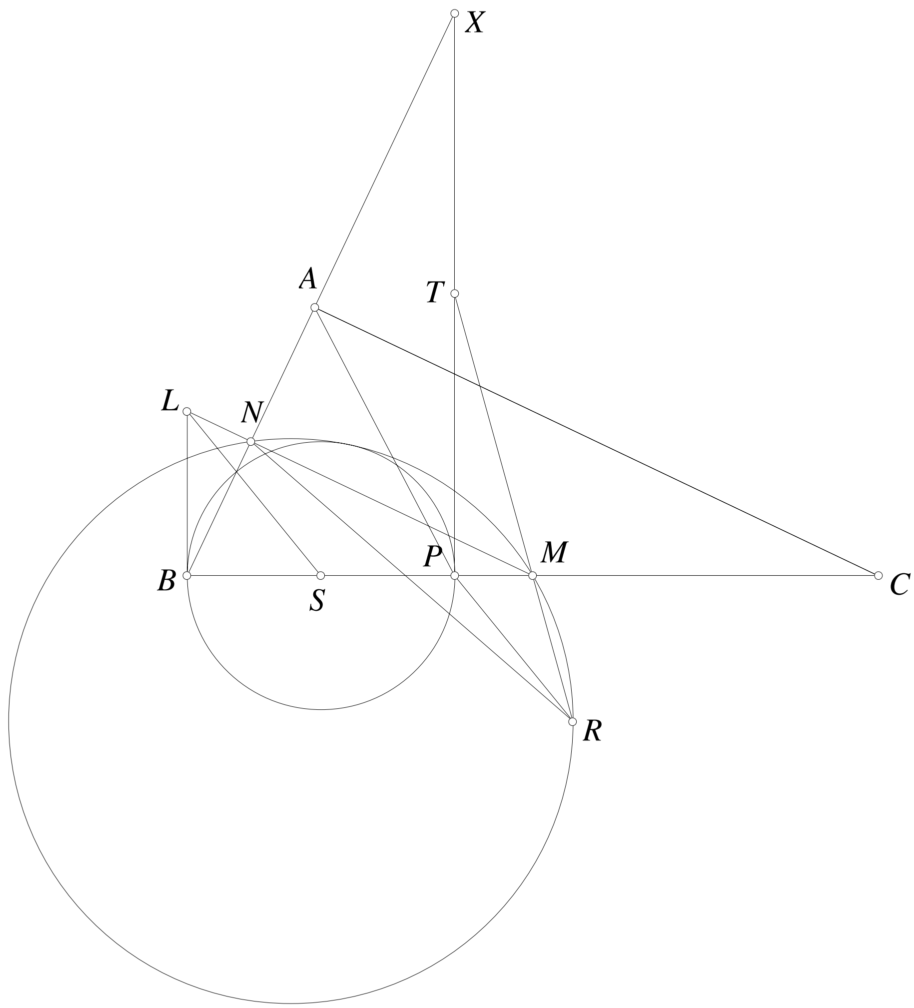


Hình 14.

Lời giải. Gọi AB cắt (K) tại X khác A và MN cắt (K) tại Y, Z. Dễ thấy B là trực tâm tam giác XYZ. Áp dụng các bài toán đã xây dựng cho tam giác XYZ trực tâm B ta thu được điều phải chứng minh. □

Ta lại sử dụng cách đã làm để giấu đi tiếp điểm ta thu được bài toán thú vị sau

Bài toán 1.14. Cho tam giác ABC vuông tại A. M, N là trung điểm BC, AB. Một đường thẳng vuông góc BC tại P cắt AB tại X. S, T là trung điểm PB, PX. Lấy điểm L thuộc MN sao cho $BL \perp BC$. Lấy R thuộc MT sao cho $PR \parallel LS$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN tiếp xúc đường tròn đường kính PB.



Hình 15.

Ngoài ta tôi còn thu được một bài toán tổng quát khá lạ rất thú vị như sau

Bài toán 1.15. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F. BE cắt CF tại H. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A. Đường tròn đường kính HG cắt (O) tại L khác G. D là hình chiếu của K lên AH. GK cắt BC tại M. ML cắt KD tại N. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác LHG và LDN tiếp xúc nhau.

Mặt khác bài toán gốc vẫn còn nhiều phát triển và mở rộng khác các bạn hãy luyện tập các bài sau

Bài toán 1.16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường kính AD. M là một điểm trên BC. MD cắt (O) tại G khác D. Q là đối xứng của D qua M. Đường tròn đường kính QG cắt (O) tại K khác G. N là hình chiếu của M lên AQ.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN và KQG tiếp xúc nhau.

b) Gọi KG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN tại P khác K. Chứng minh rằng MP chia đôi AG.

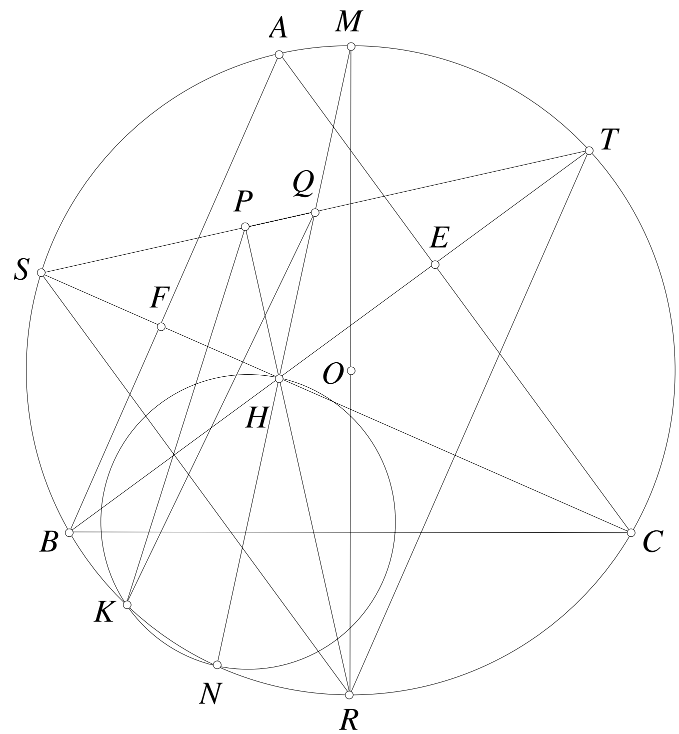
c) Gọi R đối xứng N qua QK. Chứng minh rằng $\angle KRM = 90°$.

Bài toán 1.17. Cho tam giác ABC có $\angle A = 60^\circ$ nội tiếp đường tròn (O). Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. M là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. MH cắt (O) tại N khác M. Đường tròn đường kính HN cắt (O) tại K khác N. P là đối xứng của H qua EF và Q là trung điểm HM.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KPQ và KHN tiếp xúc nhau.

b) Gọi KN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ tại L khác K và R là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Chứng minh rằng QL chia đôi KR.

c) Gọi Z đối xứng P qua KH. Chứng minh rằng $\angle KZQ = 90^\circ$.



Hình 16.

Lời giải. Gọi S, T đối xứng H qua F, E và MR là đường kính của (O). Từ $\angle BAC = 60^\circ$ ta thấy H là trực tâm tam giác RST. Từ đó áp dụng các bài toán đã biết trên tam giác RST. Ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 1.18. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) tâm nội tiếp I. Đường tròn A-mixtilinear tiếp xúc (O) tại P. Đường tròn đường kính PI cắt (O) tại K khác P. N là trung điểm AI và trung trực AI cắt PI tại M.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác KMN và KPI tiếp xúc nhau.

b) Gọi KP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN tại L khác K. AI cắt (O) tại D khác A. Chứng minh rằng ML chia đôi PD.

c) Gọi Q đối xứng N qua KI. Chứng minh rằng $\angle KQM = 90^\circ$.

Bài toán 1.19. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao BE, CF. K, L đối xứng O qua CA, AB. KE cắt LF tại H. T thuộc trung trực BC sao cho $HT \parallel OA$. M là trung điểm AT. MO cắt tiếp tuyến qua A của (O) tại N. Đường thẳng qua N song song OA cắt đường thẳng Euler của tam giác ABC tại P. G là hình chiếu của T lên NH. Q là trung điểm HG. S đối xứng G qua PQ. TH cắt AN tại D.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác SDN và SGH tiếp xúc nhau.

b) Gọi GS cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác SDN tại R khác S. Chứng minh rằng NR chia đôi TG.

c) Gọi W đối xứng với D qua SH. Chứng minh rằng $\angle SWN = 90°$.

Cuối cùng là một mô hình mở rộng đã có trong [1] được tìm ra bởi bạn **Trịnh Huy Vũ**.

Bài toán 1.20. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (D) bất kì đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F. Dựng đường kính AP của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. K là hình chiếu của D trên AP. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) lần thứ hai tại G. Đường tròn đường kính GP cắt (O) lần thứ hai tại J.

a) Chứng minh rằng đường tron ngoại tiếp tam giác JGP và JKD tiếp xúc nhau.

b) Đặt JG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác JKD lần thứ hai tại M. Chứng minh rằng DM chia đôi GA.

c) Gọi L đối xứng K qua JP. Chứng minh rằng $\angle JLD = 90°$.

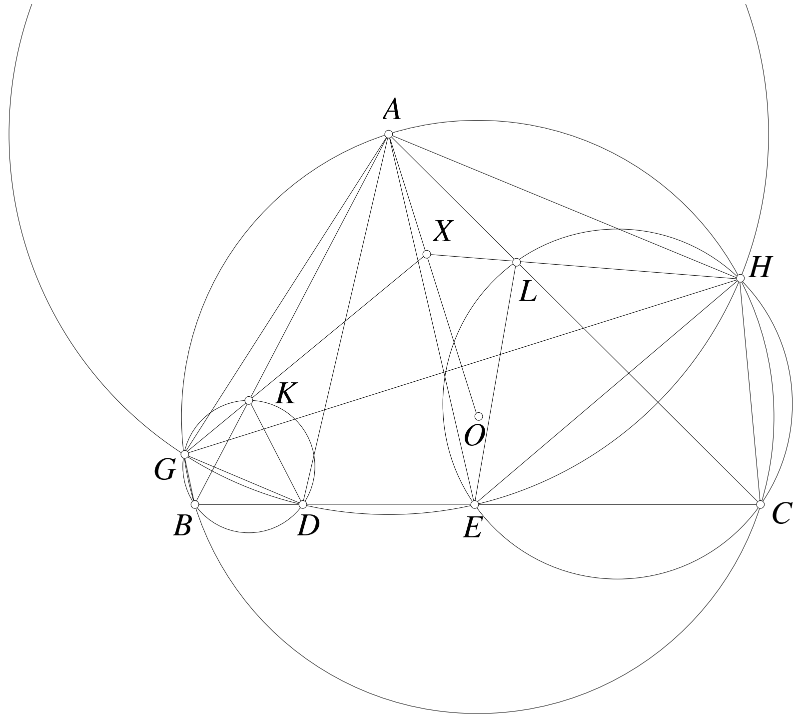
2 Bài hình ngày thứ 2

2.1 Mở đầu

Đề thi IMO ngày thứ 2 năm 2015 [2] có bài hình học rất thú vị như sau

Bài toán 2.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại D, E và cắt (O) tại G, H sao cho D nằm giữa B, E và tia AB nằm giữa tia AC, AG. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDG và CEH lần lượt cắt AB, AC tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.

Tôi xin trình bày lời giải của mình cho bài toán này



Hình 17.

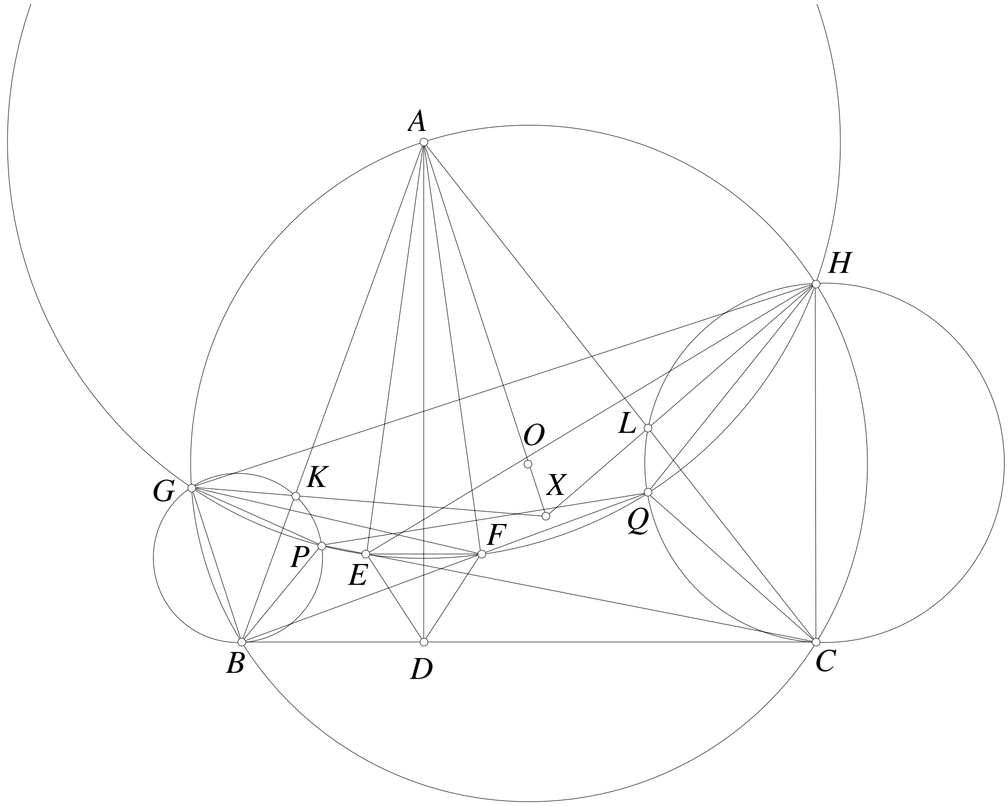
Lời giải. Gọi GK cắt LH tại X ta dễ thấy AO là trung trực GH. Ta chỉ cần chứng minh X thuộc trung trực GH là bài toán hoàn tất, thật vậy. Ta thấy $\angle EHC = \angle GHC - \angle GHE = 180^\circ - \angle GBD - \angle GDB = \angle BGD$. Từ đó $\angle XGH = \angle XGD - \angle HGD = \angle KBD - \angle HEC = 180^\circ - (\angle GBA + \angle BGD + \angle BDG) - \angle HEC = 180^\circ - (\angle HCA + \angle EHC + \angle EHG) - \angle HEC = \angle ACB - \angle GHE = \angle XHE - \angle GHE = \angle XHG$. Từ đó tam giác XGH cân ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này là bài toán thứ 4 của ngày 2 được đánh giá là bài ở mức độ dễ. Lời giải dùng các kỹ thuật cộng góc rất cơ bản. Đây là bài toán đẹp, cấu hình không phức tạp mà đơn giản, có rất nhiều ý nghĩa trong kiểm tra đánh giá cũng như phát triển tư duy. Bài toán cũng có một số mở rộng và ứng dụng, chúng ta hãy theo dõi ở phần sau.

2.2 Mở rộng và khai thác

Đầu tiên ta thấy có thể thay thế đường tròn tâm A thành một đường tròn tâm bất kỳ trên đường thẳng AO bài toán có lời giải hoàn toàn tương tự. Chúng ta đi vào một mở rộng khác có ý nghĩa hơn

Bài toán 2.2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. (A) là đường tròn bất kỳ tâm A. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Đường tròn (A) cắt (O) tại G, H sao cho tia AB nằm giữa tia AG, AC. CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BA, CA tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.



Hình 18.

Lời giải. Trước hết ta có $EF \parallel BC$ nên $\angle QPE = \angle EFB = \angle FBC$. Từ đó tứ giác $PQCB$ nội tiếp. Lại có $\angle EHC = 180^\circ - \angle GBC - \angle GHE = 180^\circ - \angle GBP - \angle PBC - \angle GFE = \angle BGP + \angle GPB - (180^\circ - \angle BPC - \angle PCB) + 180^\circ - \angle GPE = \angle BGP + \angle FEC = \angle BGP + \angle PGF = \angle BGF$.

Từ đó $\angle HGX = \angle HGP - \angle PGK = \angle HEC - \angle PBK = \angle HEC - (\angle GBF - \angle GBA - \angle PBF)(1)$.

Tương tự $\angle GHX = \angle GFB - (\angle HCE - \angle HCA - \angle QCE) \quad (2)$.

Lại dễ có $\angle GBA = \angle HCA, \angle PBF = \angle QCE$ và $\angle BGF = \angle CHE$ nên $\angle GBF + \angle GFB = \angle HEC + \angle EHC$ hay $\angle HEC - \angle GBF = \angle GFB - \angle EHC \quad (3)$.

Từ (1),(2),(3) ta dễ suy ra $\angle HGX = \angle GHX$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán tổng quát vẫn đúng khi thay thế đường tròn (A) thành đường tròn bất kỳ tâm thuộc OA với cách giải biến đổi góc tương tự. Ta để ý kỹ là trong lời giải này cũng như lời giải bài toán gốc thì việc biến đổi góc để chỉ ra $\angle EHC = \angle FGB$ là một bước quan trọng.

Ta có thể thấy rằng thực chất việc G, H nằm trên (O) cũng không mấy quan trọng, ta đi tới bài toán tổng quát hơn như sau

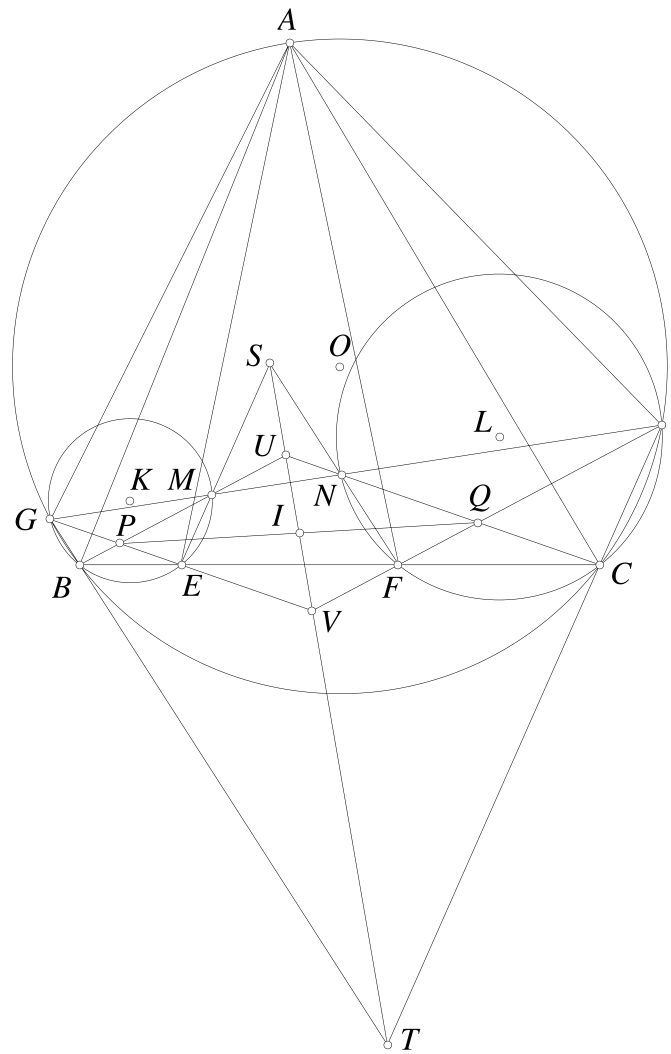
Bài toán 2.3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. (A) là đường tròn bất kỳ tâm A. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Trên đường tròn (A) lấy hai điểm G, H sao cho $GH \perp OA$ đồng thời tia AB nằm giữa tia AG, AC. Gọi CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BA, CA tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.

Mặt khác hơn nữa ta có thể thấy rằng trong bài toán trên ta có thể thay đường tròn (A) thành một đường tròn bất kỳ có tâm trên OA. Từ đó ta nghĩ rằng ta có thể thay đường thẳng OA thành trung trực của một dây cung của (O), ta lại có bài toán sau

Bài toán 2.4. Cho tứ giác $XYBC$ nội tiếp đường tròn (O). (A) là đường tròn bất kỳ tâm với tâm A thuộc trung trực XY. D là hình chiếu của A lên BC. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Trên đường tròn (A) lấy hai điểm G, H sao cho $GH \perp OA$ đồng thời tia AB nằm giữa tia AG, AC. Gọi CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt cắt BY, CX tại K, L khác B, C. Chứng minh rằng GK và HL cắt nhau trên AO.

Nhờ đó ta có thể có nhiều cách khai thác bài toán, ssu đây chúng tôi trình bày một số khai thác trên mô hình bài toán này

Bài toán 2.5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại E, F và cắt (O) tại G, H sao cho E nằm giữa B, E và tia AB nằm giữa tia AC, AG. GH cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác BEG và CFH lần lượt M, N khác G, H. Gọi GE, HF lần lượt cắt BM, CN tại P, Q. Gọi ME, GB lần lượt cắt NF, HC tại S, T. Chứng minh rằng ST chia đôi PQ.



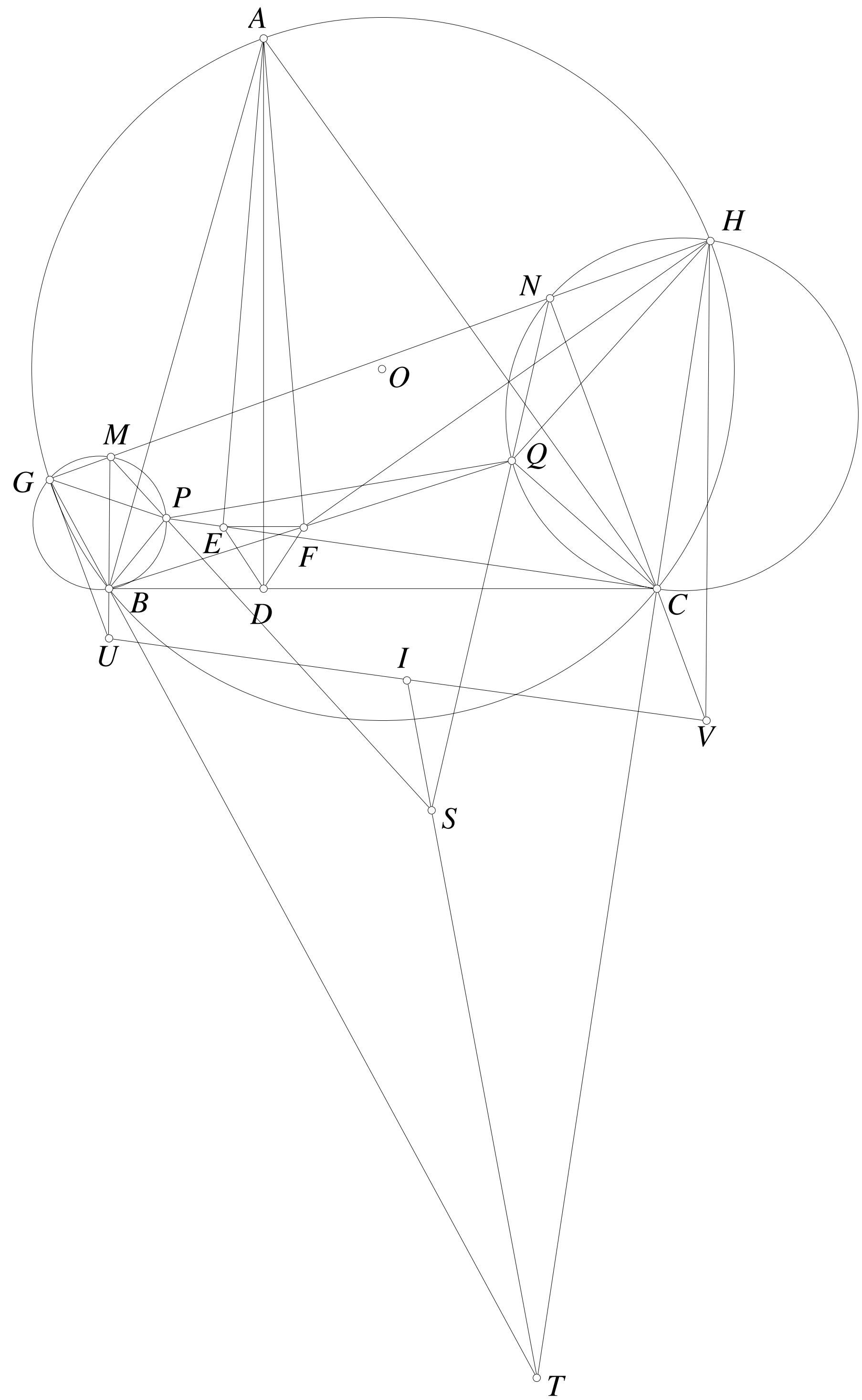
Hình 19.

Lời giải. Theo chứng minh bài toán gốc ta đã chỉ ra $\angle BGE = \angle CHF$. Từ đó có $\angle FNH = \angle FNC + \angle CFH = \angle FHC + \angle CFH = \angle EGB + \angle EGM = \angle BGM = \angle MEF$. Từ đó tứ giác

$MNFE$ nội tiếp. Lại dễ có $\angle HNC = \angle HFC = \angle EGH = \angle MBE$ suy ra tứ giác $BMNC$ nội tiếp. Gọi $(K), (L)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác BEG và CFH thì từ các tứ giác $EMNF$ va $BGHC$ nội tiếp ta suy ra ST là trục đẳng phương của (K) và (L). Ta lại có $\angle GEB = \angle GMB = \angle NCB$ nên $GE \parallel NC$, tương tự $HF \parallel MB$. Gọi BM, GE lần lượt cắt CN, HF tại U, V thì $PUQV$ là hình bình hành nên UV chia đôi PQ. Cũng từ các tứ giác $BMNC$ và $GEFH$ nội tiếp ta suy ra U, V cũng thuộc trục đẳng phương của $(K), (L)$ là ST. Vậy từ đó ST chia đôi PQ. Ta có điều phải chứng minh. □

Một cách hoàn toàn tương tự, ta thu được một bài toán chia đôi đoạn thẳng thú vị trên mô hình bài toán tổng quát

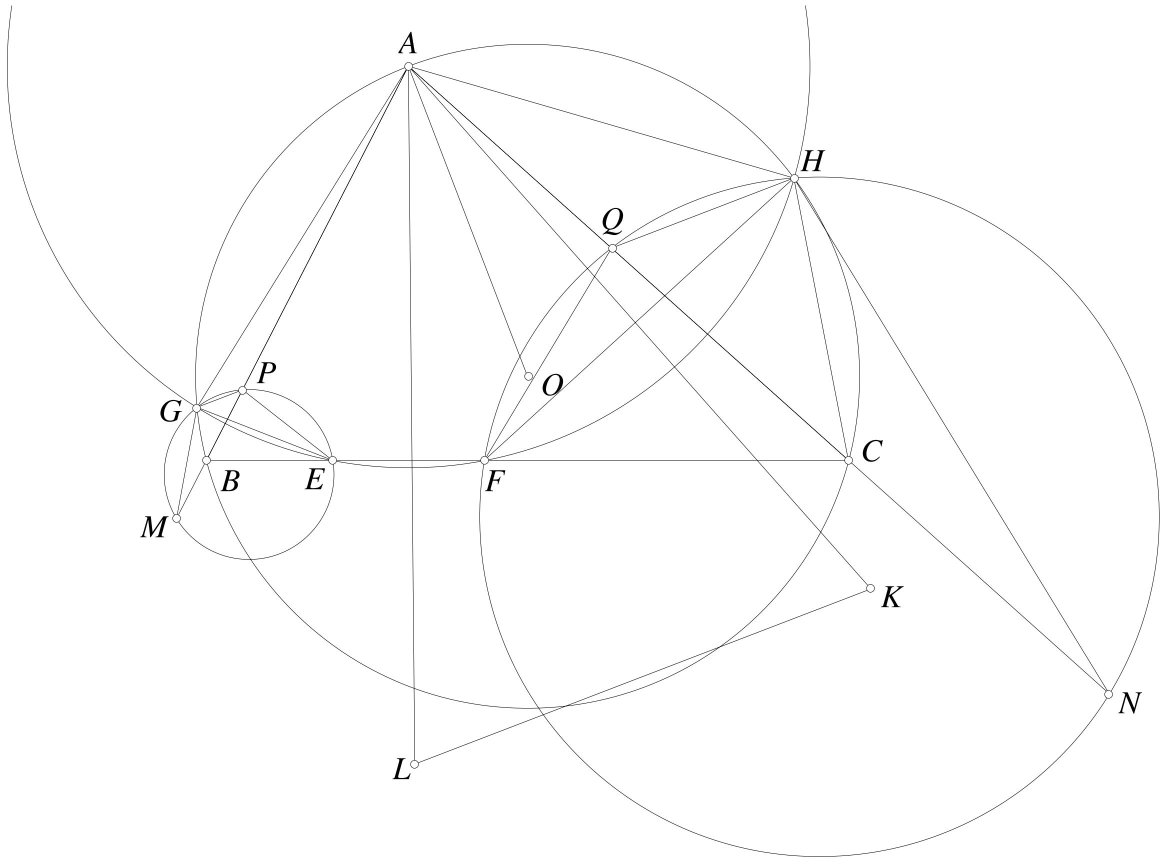
Bài toán 2.6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AD. (A) là đường tròn bất kỳ tâm A. Gọi E, F là hai điểm thuộc (A) sao cho E, F đối xứng qua AD và tia AE nằm giữa AB, AF. Đường tròn (A) cắt (O) tại G, H sao cho tia AB nằm giữa tia AG, AC. CE, BF lần lượt cắt đường tròn (A) tại P, Q khác E, F. GH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BPG và CQH lần lượt tại M, N. MP, GB lần lượt cắt NQ, HC tại S, T. Lấy các điểm U, V trên đường thẳng MB, NC sao cho $UG \parallel NC$ and $VH \parallel MB$. Chứng minh rằng ST chia đôi UV.



Hình 20.

Nếu biết sử dụng phép nghịch đảo các bạn có thể làm thêm bài toán sau để luyện tập

Bài toán 2.7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (A) tâm A cắt BC tại E, F và cắt (O) tại G, H sao cho E nằm giữa B, F và tia AB nằm giữa tia AC, AG. Đường tròn qua H, C tiếp xúc HA cắt CA tại Q khác C. Đường tròn qua G, B tiếp xúc GA cắt AB tại P khác B. Đường tròn ngoại tiếp tam giác GPE và HQF cắt AB, AC tại M, N khác P, Q. Chứng minh rằng bán kính ngoại tiếp hai tam giác AGM và AHN bằng nhau.



Hình 21.

3 Kết luận

Kỳ thi IMO năm nay lại tiếp túc có 2 bài hình lần lượt ở vị trí số 3 và số 4. Hai bài toán hình học thi IMO năm nay đều là các bài toán hay có giá trị cao. Ngoài việc đưa ra những mở rộng khác nhau bài viết còn có ứng dụng các bài toán thi này vào những bài toán chia đôi đoạn thẳng đẹp mắt. Cũng từ bài toán chia đôi đoạn thẳng của ngày 1 ta thu được một cách phát biểu thú vị về hai đường tròn tiếp xúc nhau từ các cách phát biểu mới thu được lại có thể ứng dụng phát biểu cho bài toán tổng quát thứ hai, điều này làm tăng sự hấp dẫn cho bài toán thi. Bài toán chia đôi đoạn thẳng trong phát triển ngày thứ 2 cũng không kém phần thú vị, đó là sự kết hợp ứng dụng của trục đẳng phương và hình bình hành. Hai bài toán hình của kỳ thi năm nay đẹp và có tính gợi mở và phát triển cao, rất xứng đáng là đề bài thi IMO.

Cuối cùng tác giả muốn được nói lời cảm ơn tới bạn **Trịnh Huy Vũ** học sinh lớp 12A1 Toán THPT chuyên KHTN học trò của tác giả, người đã có nhiều đóng góp cho bài viết và giúp tác giả chỉnh sửa một số lỗi trong bài viết.

Tài liệu

[1] Topic Problem3
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1112748_problem3

[2] Topic Problem 4
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1113163_problem_4

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com