Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

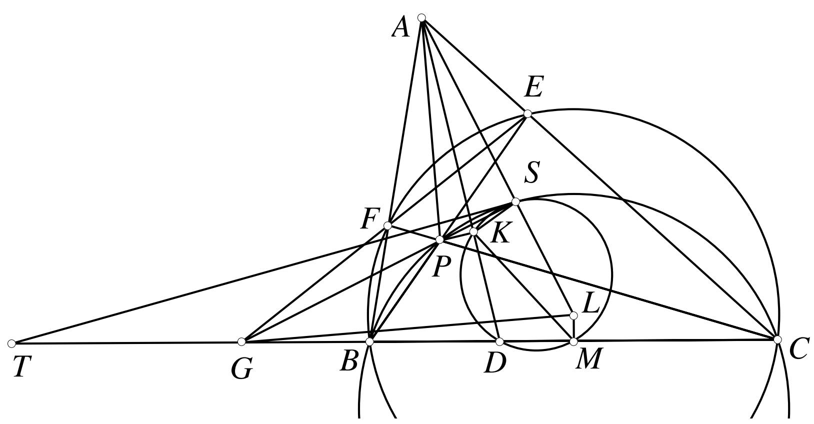
Đề bài

Cho tam giác ABC có đường đối trung AD và trung tuyến AM. P là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. K là hình chiếu của P lên AD. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC.

Lời giải

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC cắt BD tại E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EAB và ECD cắt nhau tại F khác E thì $OF \perp FE$.

Chứng minh. Theo tính chất trục đẳng phương EF, AB, CD đồng quy tại G. Cũng theo định lý Miquel dễ thấy F nằm trên các đường tròn ngoại tiếp tam giác GAC, GBD. Từ đó gọi R là bán kính của (O) thì $OE^2 - OG^2 = (OE^2 - R^2) - (OG^2 - R^2) = \overline{EA}.\overline{EC} - \overline{GB}.\overline{GB} = \overline{EF}.\overline{EG} - \overline{GE}.\overline{GF} = \overline{EG}.(\overline{EF} + \overline{GF}) = (\overline{EF} - \overline{GF})(\overline{EF} + \overline{GF}) = FE^2 - FG^2$. Từ đó $OF \perp FE$.



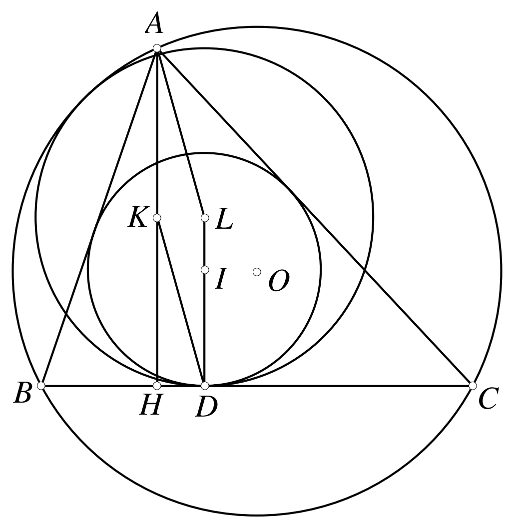
Giải bài toán. Gọi PB, PC theo thứ tự cắt CA, AB tại E, F. Gọi S là giao điểm khác P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF và PBC. Do $\angle PBA = \angle PCA$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (L). Gọi EF cắt BC tại G. Theo định lý Brocard thì $PG \perp AL$, theo bổ đề thì $PS \perp SL$, mặt khác theo tính chất trục đẳng phương thì S, P, G thẳng hàng. Từ đó PG vuông góc AL tại S. Từ đó chú ý các tứ giác $GSLM$ và $ASKP$ nội tiếp và góc có cạnh tương ứng vuông góc ta có $\angle SDM = \angle SLG = \angle SPA = \angle SKA$. Suy ra S nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM. Kẻ tiếp tuyến tại S của đường tròn ngoại tiếp tam giác SPB cắt BC tại T. Ta chú ý $\triangle SBE \sim \triangle SCF$ và tính chất đường đối trung $\frac{TB}{TC} = \frac{SB^2}{SC^2} = \frac{BE^2}{CF^2} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{DB}{DC}$. Từ đó $(BC, DT) = -1$, ta suy ra $TS^2 = TB.TC = TD.TM$ hay TS tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM và PBC tiếp xúc nhau tại S.

Nhật xét

Bài toán này xuất phát từ bài toán chọn đội tuyển KHTN năm 2014 và được phát biểu theo cách khác. Đây là một bài toán tiếp xúc thú vị, điểm S thực chất là một trong các điểm Miquel của tứ giác $BCEF$. Tác giả nhận được lời giải sớm nhất từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương, bạn **Dũng** đã gửi tới tác giả một lời giải thuần túy hình học chỉ dùng kiến thức THCS. Tác giả còn nhận được lời giải đúng từ các bạn **Nguyễn Ngọc Hiếu** lớp 12A2 THPT chuyên KHTN, **Phạm Ngọc Huy, Bùi Công Minh, Bùi Văn Bình** lớp 12 toán và **Lê Sỹ Quan** lớp 11 toán THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước. Bạn **Nguyễn Minh Quang** lớp 11 toán, THPT Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình cho lời giải đúng tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AH. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D. K là trung điểm AH. L đối xứng K qua trung điểm AD. Chứng minh rằng đường tròn (L, LD) tiếp xúc (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

