Tỷ số kép, phép chiếu xuyên tâm, hàng điều hòa, chùm điều hòa

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Mục lục

1 Tóm tắt lý thuyết

1.1 Hàng điểm, tỷ số đơn, tỷ số kép

1.1.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 1. Tập hợp các điểm phân biệt có thứ tự cũng thuộc một đường thẳng gọi là một hàng điểm, đường thẳng chứa các điểm đó gọi là giá của hàng điểm.

Hình 1.

Định nghĩa 2. Hàng điểm gồm ba điểm thẳng hàng A, B thì có tỷ số đơn được ký hiệu và định nghĩa như sau $(AB, M) = \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k$, ta còn nói C chia đoạn AB theo tỷ số k.

Hình 2.

Định nghĩa 3. Hàng điểm gồm bốn điểm A, B, C, D thẳng hàng thì có tỷ số kép được ký hiệu và định nghĩa như sau $(AB, CD) = \dfrac{(AB, C)}{(AB, D)} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = k$, đôi khi còn gọi C, D chia liên hợp A, B tỷ số k, nếu không có gì nhầm lẫn ta gọi hàng bốn điểm là một hàng điểm.

Hình 3.

1.1.2 Các tính chất cơ bản của tỷ số đơn và tỷ số kép

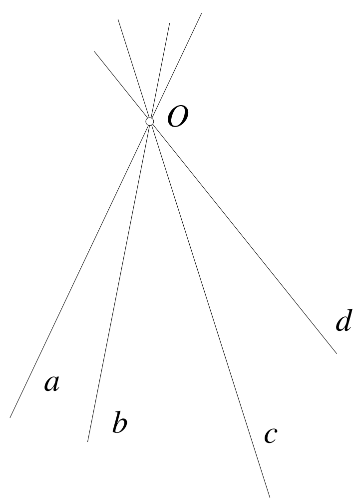
Ta xét hàng điểm A, B, C, D ta luôn có các tính chất sau

- $(AB, M) \neq 1,\ (AB, M) = -1 \Leftrightarrow M$ là trung điểm của AB
- $(AB, CD) = (BA, DC) = (CD, AB) = (DC, BA)$ (phép chia liên hợp chỉ phụ thuộc bộ hai điểm và thứ tự của chúng)
- $(AB, CD) = \dfrac{1}{(BA, CD)} = \dfrac{1}{(AB, DC)} = \dfrac{1}{DC, AB} = \dfrac{1}{(CD, BA)}$ (thay đổi thứ tự hai điểm chia hoặc bị chia làm nghịch đảo tỷ số kép)
- $(AB, CX) = k$ với A, B, C, k xác định thì X tồn tại duy nhất, tương tự với các vị trí còn lại trong tỷ số kép.
- $(ABCD) \neq 1$

1.2 Chùm đường thẳng, tỷ số kép của chùm

1.2.1 Các định lý và định nghĩa

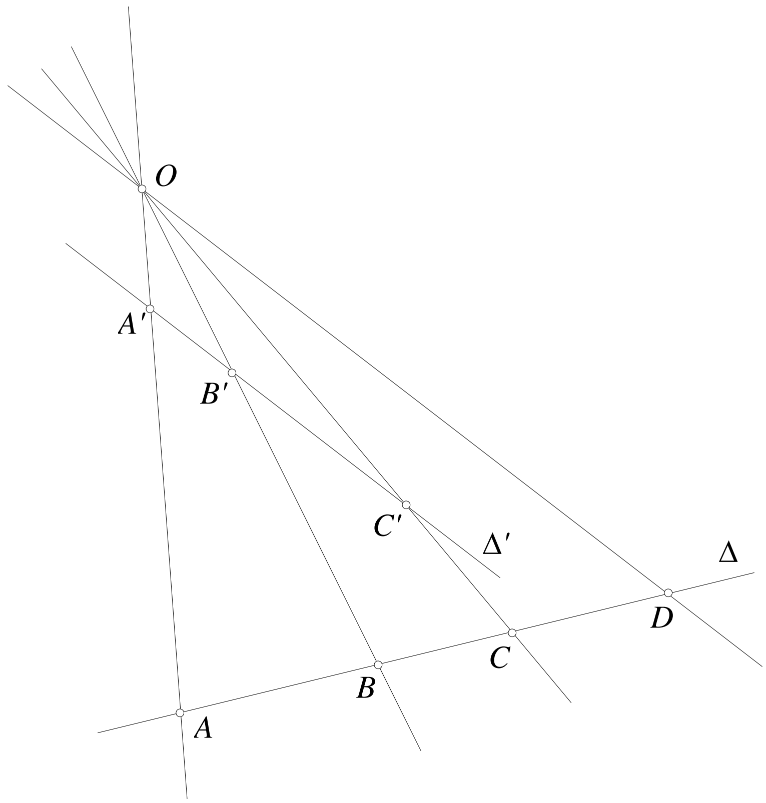
Định nghĩa 4. Tập hợp các đường thẳng phân biệt, có thứ tự cùng đi qua một điểm gọi là một chùm đường thẳng, điểm các đường thẳng đi qua gọi là tâm của chùm, nếu không có gì nhầm lẫn ta gọi chùm bốn đường thẳng là một chùm (hoặc là chùm đường thẳng).



Hình 4.

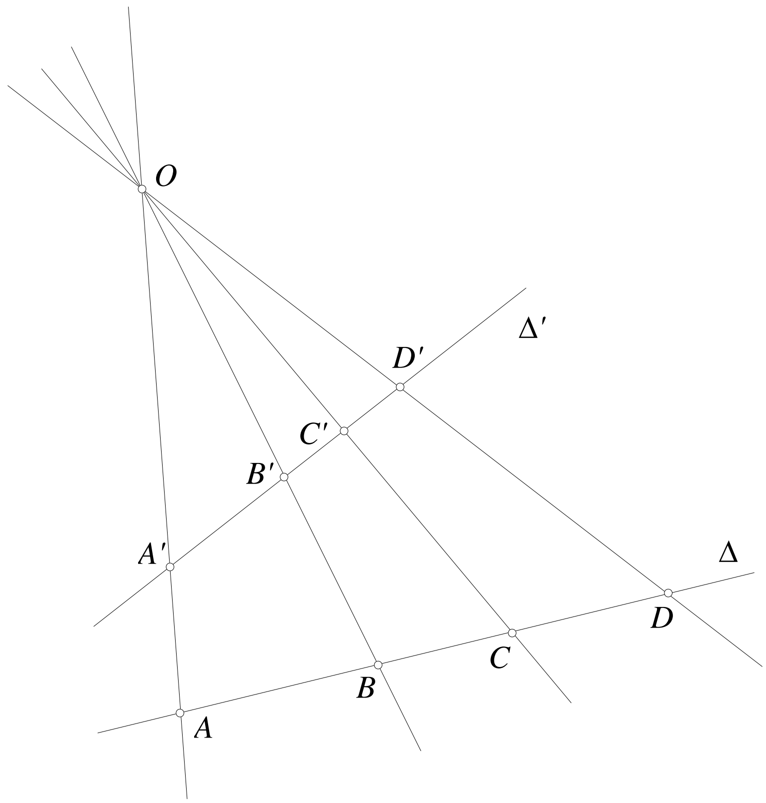
Ta thường có hai cách để định nghĩa tỷ số kép của chùm đường thẳng, cách định nghĩa sau sẽ giúp chúng ta hiểu rõ hơn bản chất của tỷ số kép, ta bắt đầu từ một định lý nói lên liên hệ giữa tỷ số đơn, tỷ số kép và chùm đường thẳng

Định lý 1. Cho chùm đường thẳng a, b, c, d một đường thẳng Δ cắt a, b, c, d lần lượt tại A, B, C, D và một đường thẳng $\Delta' \parallel d$, Δ' cắt a, b, c lần lượt tại A', B', C' thì $(AB, CD) = (A'B', C')$.



Hình 5.

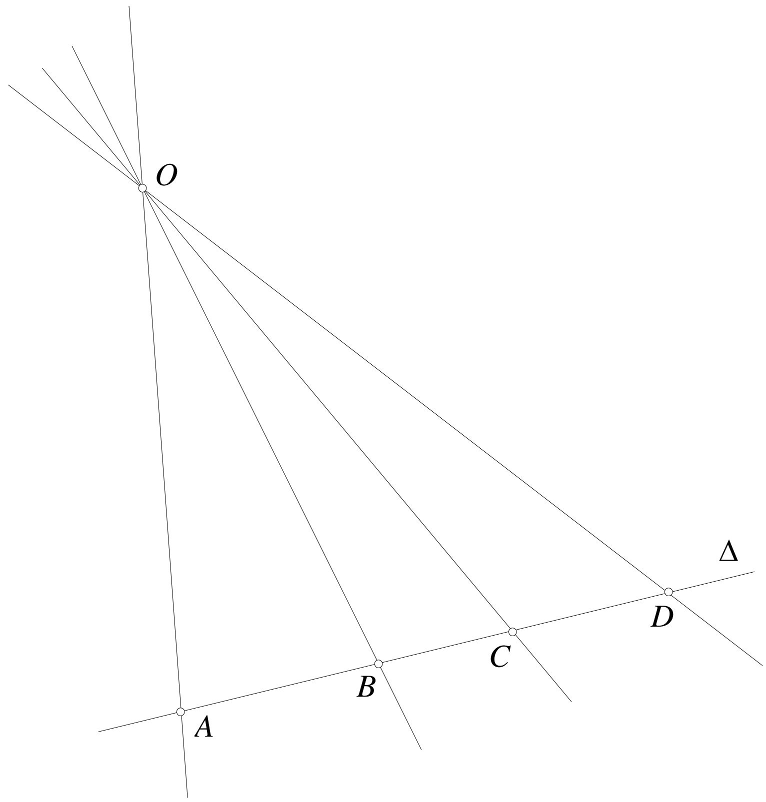
Định lý 2. Cho chùm đường thẳng a, b, c, d một đường thẳng Δ cắt a, b, c, d lần lượt tại A, B, C, D và một đường thẳng Δ' cắt a, b, c, d tại A', B', C', D' thì $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.



Hình 6.

Định lý thứ hai cho ta thấy một đường thẳng bất kỳ cắt chùm đường thẳng thì tỷ số kép của hàng các giao điểm là không đổi, ta dùng nó để định nghĩa tỷ số kép của chùm đường thẳng

Định nghĩa 5. Cho chùm đường thẳng a, b, c, d một đường thẳng Δ cắt a, b, c, d tại A, B, C, D thì tỷ số kép của chùm đường thẳng được định nghĩa và ký hiệu là $(ab, cd) = (AB, CD)$.

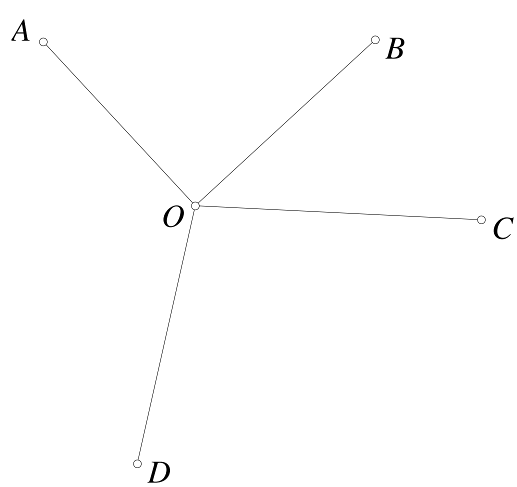


Hình 7.

1.2.2 Các tính chất

Tỷ số kép của chùm được định nghĩa từ tỷ số kép của hàng điểm nên giữ nguyên các tính chất của tỷ số kép hàng điểm, sau đây ta đưa thêm một định nghĩa khác của chùm và các tính chất khác, ta lưu ý thêm là không có khái niệm tỷ số đơn của chùm ba đường thẳng.

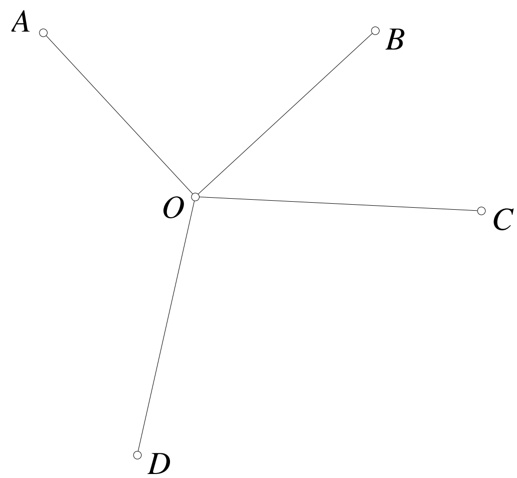
Định nghĩa 6. Trên mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D và điểm O bất kỳ không thẳng hàng với hai trong số bốn điểm đó thì OA, OB, OC, OD là một chùm đường thẳng và tỷ số kép của chùm đường thẳng này ta ký hiệu là $O(AB, CD)$.



Hình 8.

Định nghĩa trên cho ta một cách nhìn chùm đường thẳng thông qua các điểm ở trên nó, định lý sau cho một cách tính khác tỷ số kép một của chùm đường thẳng như vậy

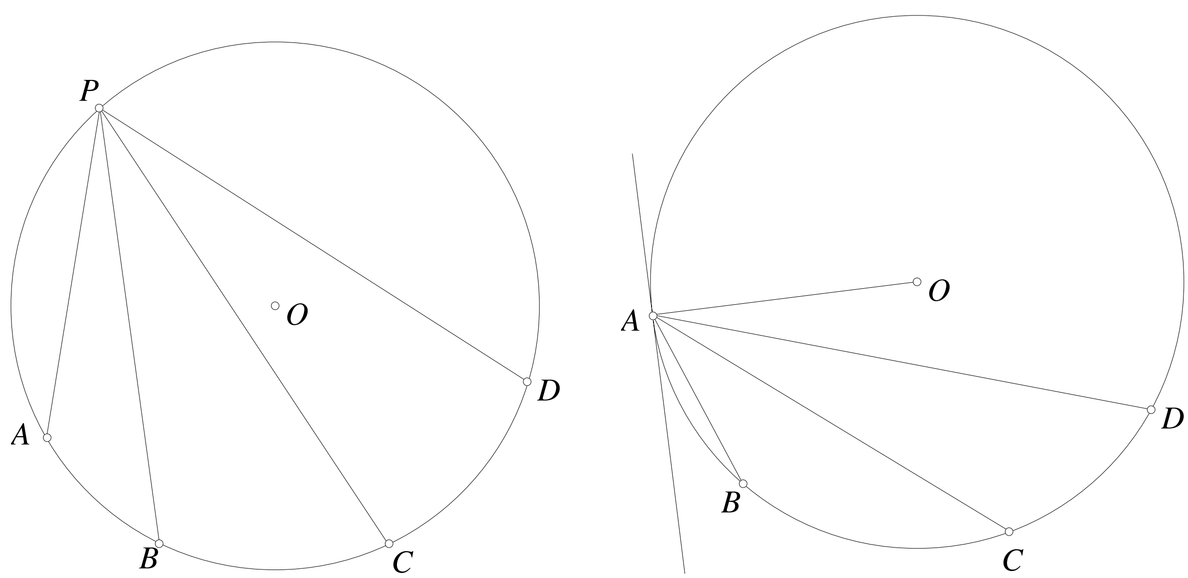
Định lý 3. Trên mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D và điểm O bất kỳ không thẳng hàng với hai trong số bốn điểm đó thì $O(ABCD) = \dfrac{\sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})} : \dfrac{\sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})}{\sin(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})}$



Hình 9.

Ta chú ý rằng $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ chỉ góc có hướng giữa hai vector $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ modulo 2π.

Hệ quả 1. Cho A, B, C, D nằm trên đường tròn (O) thì với mọi P trên (O) thì $P(AB, CD)$ luôn không đổi, ta quy ước khi P trùng vào một trong số bốn điểm A, B, C, D chẳng hạn $P \equiv A$ thì ta thay đường thẳng PA của chùm bởi tiếp tuyến qua A (quy ước này mở rộng định nghĩa của chùm đường thẳng và vẫn phù hợp với lý thuyết).



Hình 10.

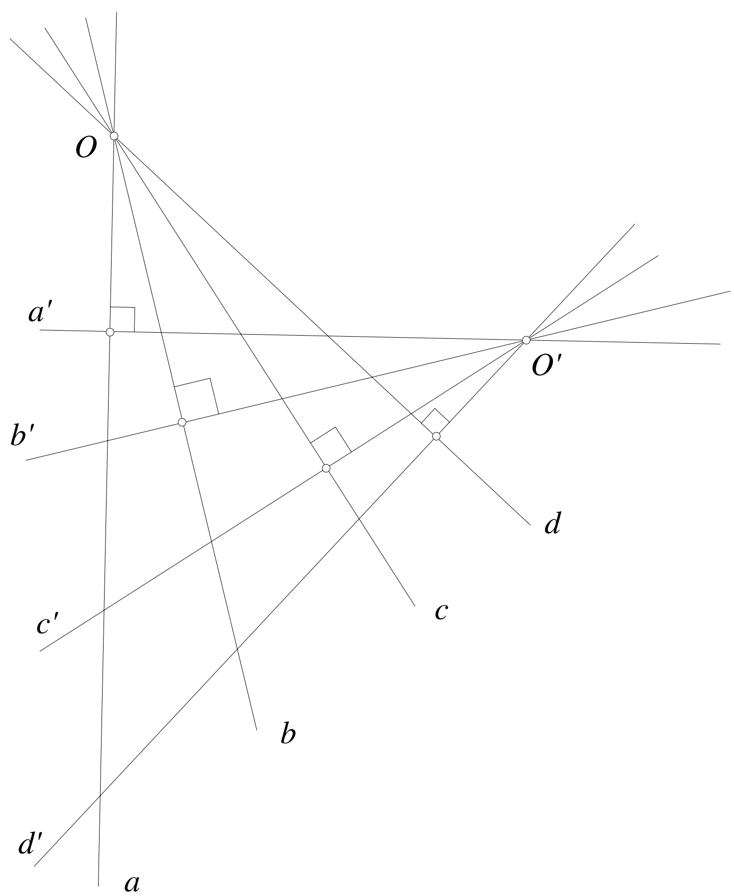
Hệ quả trên giúp ta định nghĩa tỷ số kép của bốn điểm cùng nằm trên đường tròn như sau

Định nghĩa 7. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D nằm trên đường tròn (O) tỷ số kép của A, B, C, D được ký hiệu và định nghĩa là $(AB, CD) = P(AB, CD)$ với P là một điểm bất kỳ trên (O).

Như vậy từ nay trở đi ký hiệu tỷ số kép (AB, CD) có thể áp dụng được cho hàng điểm hoặc bốn điểm đồng viên, ta thấy rằng định nghĩa này cũng phù hợp với lý thuyết, khi mặt phẳng đã bổ sung điểm vô cùng thì khi đó đường thẳng có thể xem như đường tròn tâm ở vô cùng.

Hệ quả 2. Nếu chùm OA, OB, OC, OD có $OA \perp OD$ thì $O(AB, CD) = \dfrac{\cot(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})}{\cot(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB})} = \dfrac{\cot(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OA})}{\cot(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})}$.

Hệ quả 3. Cho hai chùm gồm các đường thẳng a, b, c, d và a', b', c', d' trong đó a, b, c tương ứng vuông góc với a', b', c' khi đó $d \perp d'$ khi và chỉ khi $(ab, cd) = (a'b', c'd')$.



Hình 11.

1.3 Phép chiếu xuyên tâm

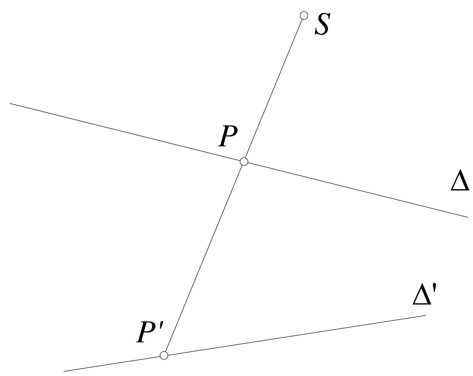
1.3.1 Quy ước và định nghĩa

Để thấy được mối liên hệ giữa chùm và hàng điểm, ta sẽ nghiên cứu các ánh xạ giữa các hàng điểm gọi là phép chiếu xuyên tâm, tuy nhiên trước khi định nghĩa phép chiếu xuyên tâm ta cần thêm một vài quy ước về điểm vô cùng trong mặt phẳng để được định nghĩa tốt.

Ta quy ước như sau, tất cả các đường thẳng song song với nhau thì chúng vẫn cắt nhau tại một điểm gọi là điểm vô cùng, ký hiệu là ∞, vì có vô số các cặp đường thẳng song song với nhau nên cũng có vô số điểm vô cùng, chúng nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng vô cùng, ký hiệu là d_∞.

Cách quy ước trên dẫn đến nhiều tính chất khác xong ta không đi sâu phân tích mà sử dụng để định nghĩa phép chiếu xuyên tâm như sau

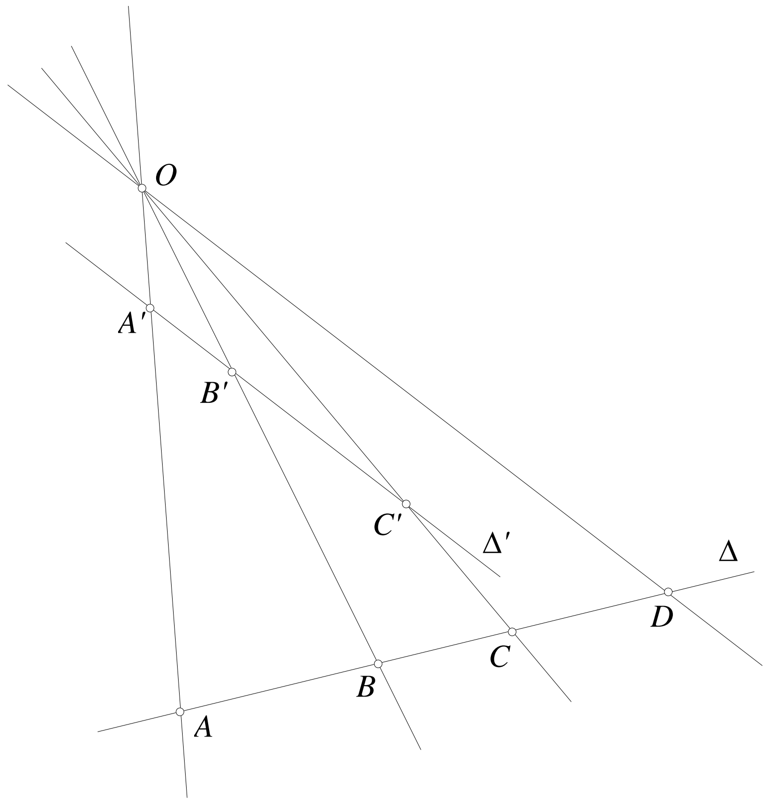
Định nghĩa 8. Cho hai đường thẳng phân biệt Δ và Δ' và điểm S không nằm trên Δ và Δ', phép tương tứng f mỗi $P \in \Delta$ với $P' \in \Delta'$ sao cho S, P, P' thẳng hàng là một ánh xạ và gọi là phép chiếu xuyên tâm S từ Δ lên Δ'.



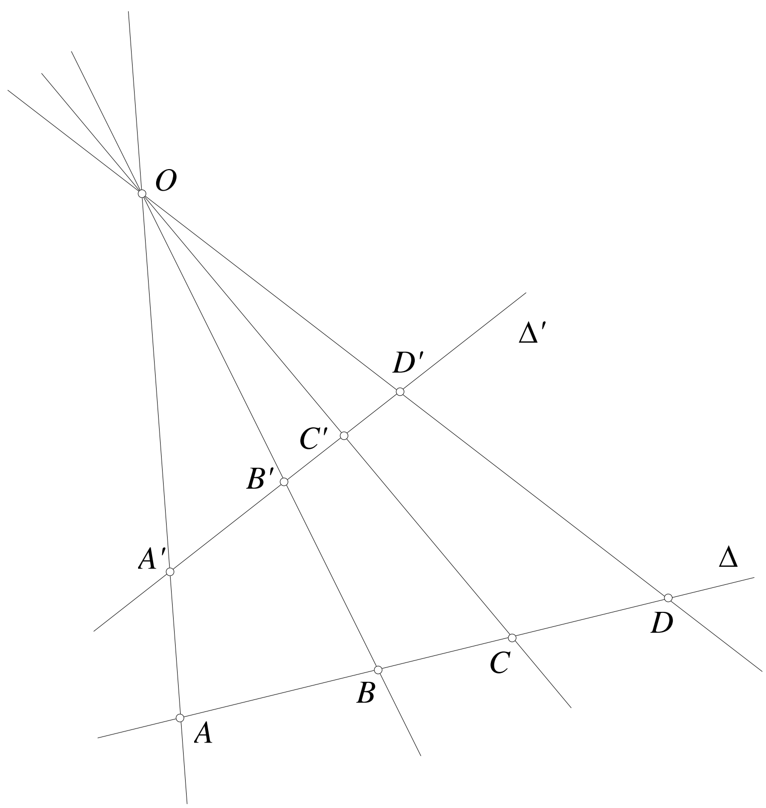
Hình 12.

Rõ rằng nhờ quy ước điểm xa vô cùng f xác định trên toàn Δ (điểm $P \in \Delta$ mà $SP \parallel \Delta'$ sẽ biến thành điểm ∞ của Δ') cũng nhờ quy ước về điểm xa vô cùng ta có thể gộp hai định lý quan trọng là định lý 1 và định lý 2 lại như sau

Định lý 4. Phép chiếu xuyên tâm biến A, B, C, D thành A', B', C', D' thì $(AB, CD) = (A'B', C'D')$ như vậy ta cũng có $(AB, CD) = (A'B', C'\infty) = (A'B', C')$ nếu giá của hàng A', B', C' song song DD'.



Hình 13.



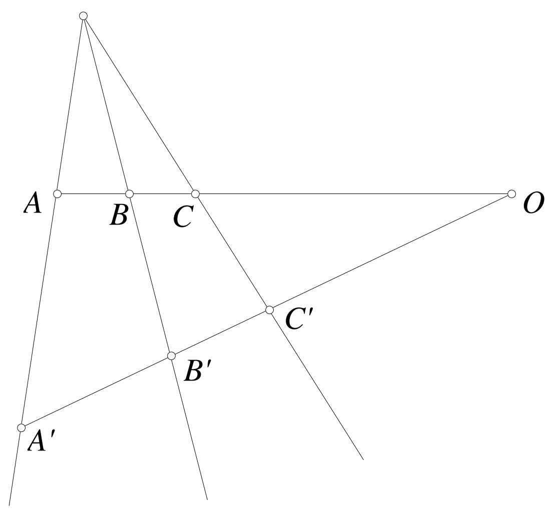
Hình 14.

Nói cách khác phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỷ số kép. Định lý trên là một định lý quan trọng nhất của toàn bộ bài viết này, quan trọng cả về mặt lý thuyết lẫn thực hành.

1.3.2 Các tính chất

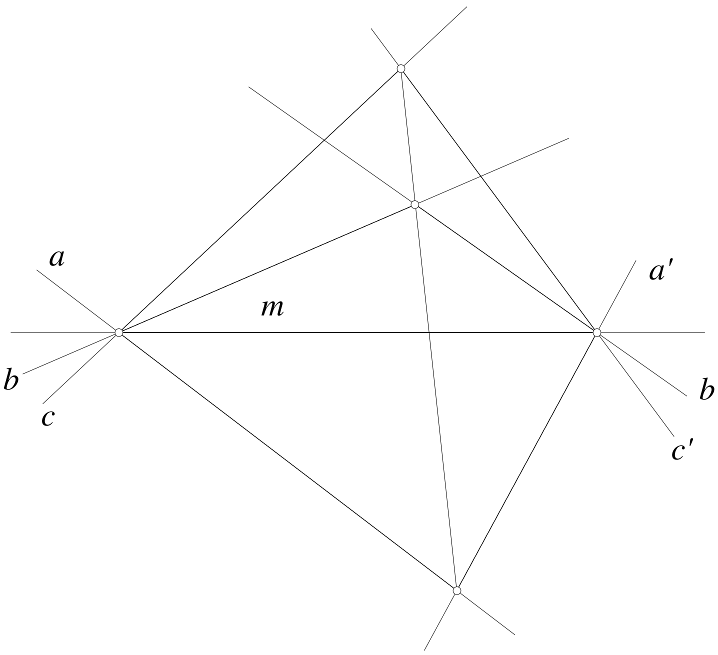
Các tính chất sau đây sẽ cho chúng ta ứng dụng rất lớn các khái niệm và định nghĩa vừa nêu vào các bài toán hình học sơ cấp, đến đây sẽ có một chú ý rằng ta bắt đầu thấy hiện tượng "đối ngẫu", tức các định lý phát biểu trên "điểm" và "đường" thì cũng có thể phát biểu lại trên "đường" và "điểm". Ta sẽ còn gặp lại rất nhiều "bài toán" đối ngẫu trong phần bài tập.

Định lý 5. Cho cho hai hàng điểm gồm các điểm O, A, B, C và O, A', B', C' khi đó AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi $(OA, BC) = (OA', B'C')$.



Hình 15.

Định lý 6. Cho cho hai chùm gồm các đường thẳng m, a, b, c và m, a', b', c' giả sử a, b, c giao a', b', c' lần lượt tại A, B, C thì A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $(ma, bc) = (ma', b'c')$



Hình 16.

Như vậy ta đã hoàn thành lý thuyết về tỷ số kép của các hàng điểm và chùm đường thẳng sau đây ta sẽ xét một hàng điểm và chùm đường thẳng có một tỷ số kép đặc biệt, chúng sẽ cho ta thêm rất nhiều các ứng dụng hay vào hình học sơ cấp.

1.4 Hàng điểm điều hòa, chùm đường thẳng điều hòa

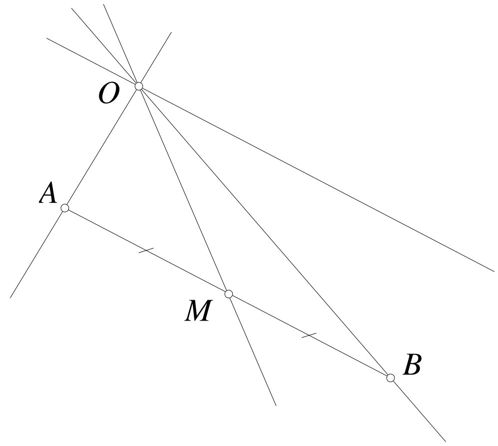
1.4.1 Các định nghĩa

Định nghĩa 9. Ta gọi hàng điểm A, B, C, D là hàng điểm điều hòa nếu $(AB, CD) = -1$, tương tự ta cũng gọi chùm đường thẳng a, b, c, d là chùm đường thẳng điều hòa nếu $(ab, cd) = -1$ hay gọi tắt là chùm điều hòa.

Nhờ các tính chất về tỷ số kép ta thấy ngay vì tỷ số kép đặc biệt là -1 nên việc C, D chia A, B cũng như A, B chia C, D tức là $(AB, CD) = (CD, AB) = (BA, DC) = (DC, BA) = (BA, CD) = (CD, BA) = (AB, DC) = (DC, BA) = -1$ nên khi đó ta còn nói A, B liên hợp điều hòa với C, D. Ta cũng có các tính chất tương tự cho chùm điều hòa.

Nhờ sự liên hệ giữa tỷ số đơn và tỷ số kép ta cũng có một định lý cơ bản sau của chùm điều hòa

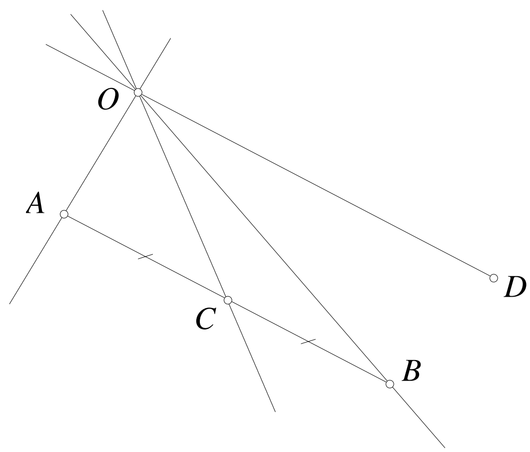
Định lý 7. Một chùm là điều hòa khi và chỉ khi một đường thẳng bất kỳ song song với một đường thẳng của chùm bị ba đường thẳng thẳng còn lại chắn hai đoạn thẳng bằng nhau.



Hình 17.

Định lý trên còn được phát biểu dưới dạng chùm cho bởi các điểm như sau

Định lý 8. Cho chùm $O(ABCD) = -1$ với A, B, C thẳng hàng, thì B là trung điểm AC khi và chỉ khi $AC \parallel OD$.



Hình 18.

Do tính đặc biệt của tỷ số kép -1 ta có một loạt các tính chất sau cũng tương đương với định nghĩa của hàng điểm điều hòa

Định lý 9. Cho hàng điểm A, B, C, D và I là trung điểm AB, J là trung điểm CD khi đó ta có các khẳng định sau là tương đương

1) $(AB, CD) = -1$

2) $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$ (Hệ thức Descartes)

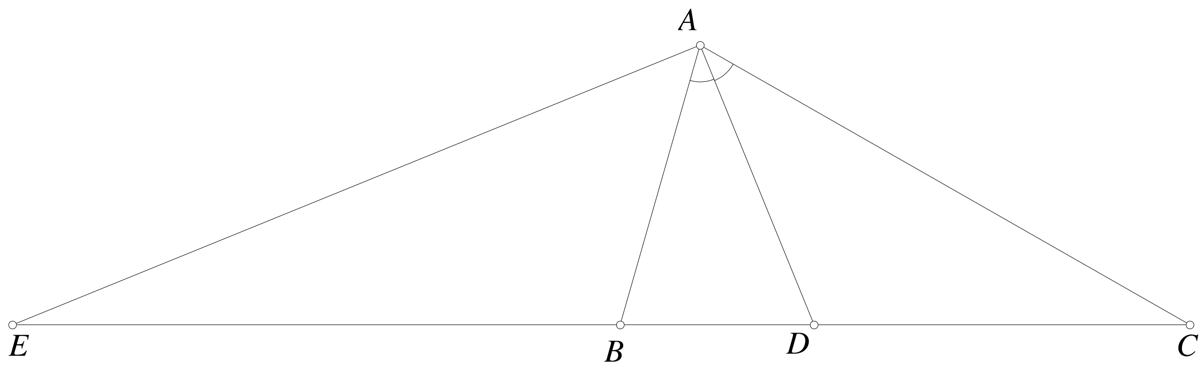
3) $IA^2 = IB^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$ (Hệ thức Newton)

4) $\overline{AB}.\overline{AJ} = \overline{AC}.\overline{AD}$ (Hệ thức Maclaurin)

1.4.2 Ba hàng điểm điều hòa và chùm điều hòa đặc biệt

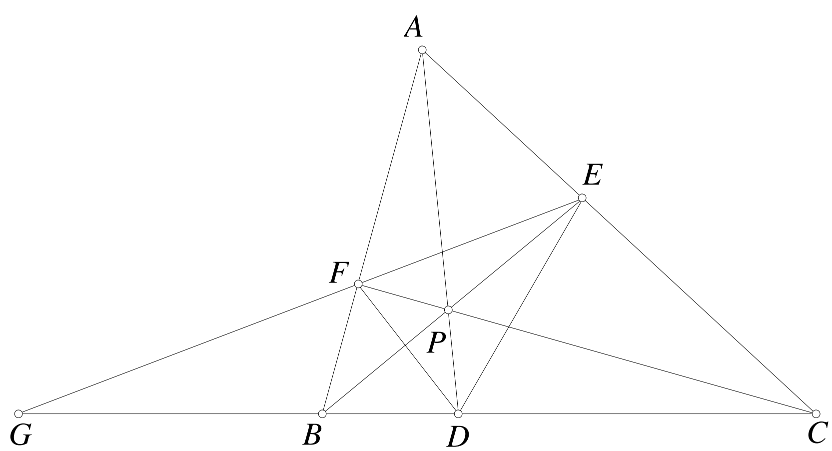
Ta đưa ra đây là ba ví dụ về hàng điểm điều hòa cũng như chùm điều hòa

Định lý 10. Cho tam giác ABC và AD, AE là hai phân giác trong và ngoài của tam giác thì $(BCDE) = -1$ kéo theo $A(BCDE) = -1$.



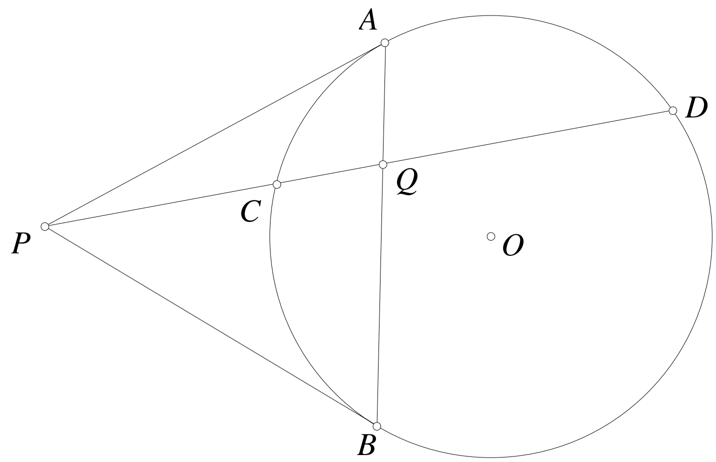
Hình 19.

Định lý 11. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng PA, PB, PC với BC, CA, AB. Gọi EF giao BC tại G thì $(BC, DG) = -1$.



Hình 20.

Định lý 12. Cho P là điểm nằm ngoài đường tròn (O) và PA, PB là hai tiếp tuyến kẻ từ P với A, B thuộc (O). Một đường thẳng qua P cắt (O) tại C, D. AB giao CD tại Q thì $(PQ, CD) = -1$.



Hình 21.

1.4.3 Các định lý ứng dụng

Ta sẽ thấy hàng điều hòa và chùm điều hòa có ứng dụng rất lớn trong hình học sơ cấp qua các định lý ứng dụng sau

Định lý 13. Cho chùm $(ab, cd) = -1$ thì các mệnh đề sau là tương đương
1) $c \perp d$
2) c là phân giác góc tạo bởi a và b
3) d là phân giác góc tạo bởi a và b

Sử dụng định nghĩa tỷ số kép của bốn điểm đồng viên ta có thể định nghĩa tứ giác điều hòa như sau

Định nghĩa 10. Tứ giác nội tiếp $ABCD$ gọi là tứ giác điều hòa nếu $(AB, CD) = -1$.

Định lý sau cũng cho các khẳng định tương đương với định nghĩa tứ giác điều hòa

Định lý 14. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), gọi $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c, \Delta_d$ lần lượt là các tiếp tuyến của (O) tại A, B, C, D thì các điều kiện sau là tương đương
1) Tứ giác $ABCD$ là điều hòa,
2) $AB \cdot CD = AD \cdot BC$,
3) Δ_b, Δ_d, AC đồng quy,
4) Δ_c, Δ_a, BD đồng quy.

1.5 Các định lý cơ bản của hình học xạ ảnh

Định lý 15 (Định lý Pappus)**.** Cho hai đường thẳng Δ và Δ', các điểm $A, B, C \in \Delta$, $A', B', C' \in \Delta'$ khi đó các giao điểm của các cặp đường thẳng AB' và $A'B$, BC' và $B'C$, CA' và $C'A$ thẳng hàng.

Định lý 16 (Đối ngẫu định lý Pappus)**.** Cho hai chùm đường thẳng a, b, c và a', b', c' gọi d_a là đường thẳng đi qua giao hai điểm của b, b' và c, c' tương tự ta có d_b, d_c thì d_a, d_b, d_c đồng quy.

Định lý 17 (Định lý Desargues)**.** Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ chứng minh rằng AA', BB', CC' đồng quy khi và chỉ khi giao điểm của các cặp đường thẳng BC và $B'C'$, CA và $C'A'$, AB và $A'B'$ thẳng hàng.

Ta thấy định lý Desargues phát biểu hai chiều chính là đối ngẫu của nhau.

Định lý 18 (Định lý Pascal)**.** Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ nội tiếp cùng một đường tròn khi đó các giao điểm của các cặp đường thẳng AB' và $A'B$, BC' và $B'C$, CA' và $C'A$ thẳng hàng.

Định lý 19 (Định lý Brianchon đối ngẫu của định lý Pascal)**.** Cho hai tam giác ABC và $A'B'C'$ cùng ngoại tiếp một đường tròn, ta gọi D_a là giao điểm của BC' và $B'C$ tương tự có D_b, D_c thì D_a, D_b, D_c thẳng hàng.

2 Luyện tập

Trong mục này mức độ khó dễ của bài toán sẽ được đánh số từ 1 tới 3 được ghi trong ngoặc.

Bài 1 (1)**.** Cho bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D. Chứng minh rằng $(AB, CD) + (AC, BD) = 1$.

Bài 2 (1)**.** Cho bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D. Chứng minh rằng $(AB, CD) = -1$ khi và chỉ khi $(AC, BD) = 2$.

Bài 3 (2)**.** Cho bốn điểm thẳng hàng A, B, C, D. Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương

a) $(AB, CD) = \lambda$.

b) $\dfrac{1-\lambda}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AD}} - \dfrac{\lambda}{\overline{AC}}$ (Mở rộng hệ thức Descartes).

c) $IA^2 = \overline{IC}.\overline{ID} + \dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\overline{IA}.\overline{DC}$, $IB^2 = \overline{IC}.\overline{ID} + \dfrac{1+\lambda}{1-\lambda}\overline{IB}.\overline{CD}$. Với I là trung điểm AB (Mở rộng hệ thức Newton).

d) $\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AK}$ với K là điểm thỏa mãn $(CD, K) = \lambda$ (Mở rộng hệ thức Maclaurin).

Bài 4 (2)**.** Cho ba điểm thẳng hàng A, B, C. Gọi D, E, F là hình chiếu của A, B, C lên một đường thẳng d bất kỳ. Chứng minh rằng $\overline{AD}.\overline{BC} + \overline{BE}.\overline{CA} + \overline{CF}.\overline{AB} = 0$.

Bài 5 (3)**.** Cho tam giác ABC và một đường thẳng d cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi X, Y, Z là hình chiếu của A, B, C lên d. Chứng minh rằng $\overline{BY}.\overline{CZ}.\overline{EF} + \overline{CZ}.\overline{AX}.\overline{FD} + \overline{AX}.\overline{BY}.\overline{DE} = 0$.

Bài 6 (1)**.** Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. Gọi PA, PB, PC cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi PA cắt EF tại G. Chứng minh rằng $(AP, GD) = -1$.

Bài 7 (2)**.** Cho A, B, C, D, E, F thẳng hàng với $(BC, AD) = -1, (CA, BE) = -1, (AB, CF) = -1$. Chứng minh rằng $(AD, EF) = (BE, FD) = (CF, DE) = -1$.

Bài 8 (3)**.** Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. AH cắt BC tại D. E là điểm thuộc đoạn AD sao cho $\angle BEC = 90^\circ$. M là trung điểm EH. Gọi đường tròn đường kính AM cắt đường tròn Euler của tam giác ABC tại P, Q. Chứng minh rằng PQ đi qua E.

Bài 9 ((2) VMO-2010)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định B, C cố định và A di chuyển trên (O). Gọi phân giác trong và ngoài của tam giác là AD và AE với D, E thuộc BC. M là trung điểm DE. H là trực tâm tam giác ABC. Chứng minh rằng đường thẳng qua H vuông góc AM luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.

Bài 10 (3)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. AT cắt BC tại D. Đường tròn (K) qua A, D tiếp xúc BC tại D cắt (O) tại E khác A. AE cắt BC tại F. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{FD} = \dfrac{1}{FB+FD} + \dfrac{1}{FC+FD}$.

Bài 11 (1)**.** Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. DE, DF lần lượt cắt AB, AC tại K, L. Gọi M, N lần lượt là trung điểm KF, LE. Chứng minh rằng B, C, M, N thuộc một đường tròn khi và chỉ khi E, F, K, L cùng thuộc một đường tròn.

Bài 12 (1)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn nội tiếp (I). Gọi $(K),(L),(N)$ lần lượt là đối xứng của (I) qua BC,CA,AB. Gọi (K) cắt (O) tại A_1A_2. A_1A_2 cắt BC tại A_3. Tương tự có B_3,C_3. Chứng minh rằng A_3,B_3,C_3 thẳng hàng.

Bài 13 (2)**.** Cho tam giác ABC một đường tròn (K) thay đổi đi qua B,C cắt CA,AB tại E,F. BE giao CF tại H. AH cắt BC tại D. EF cắt BC tại G. Đường thẳng qua D song song EF cắt CA,AB lần lượt tại M,N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác GMN luôn đi qua một điểm cố định khi (K) di chuyển.

Bài 14 (2)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. M là trung điểm của AT. MB,MC cắt (O) tại K,L khác B,C. P là một điểm bất kỳ trên AT. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PBK,PCL lần lượt cắt BC tại E,F khác B,C. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau trên AT.

Bài 15 (2)**.** Cho D nằm giữa H và M cố định. Tam giác ABC thay đổi sao cho AH,AD,AM lần lượt là đường cao, phân giác và trung tuyến của tam giác ABC. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC luôn thuộc một đường thẳng cố định khi tam giác ABC thay đổi.

Bài 16 (2)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm bất kỳ. PA,PB,PC cắt BC,CA,AB tại D,E,F. EF cắt BC tại G. Đường tròn đường kính GD cắt (O) tại M,N. MN cắt BC tại Q. Chứng minh rằng đường tròn qua Q,M tiếp xúc (O) và đường tròn qua Q,N tiếp xúc (O) cắt nhau trên BC.

Bài 17 (3)**.** Cho tam giác ABC. D là một điểm nằm trên cạnh BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt AC tại E khác A. Đường tròn ngoại tếp tam giác ACD cắt AB tại F khác A. Hai đường tròn qua A,F tiếp xúc BC lần lượt tại M,N. ME giao NF tại X. MF giao NE tại Y. Hai đường tròn qua A,E tiếp xúc BC lần lượt tại P,Q. PE giao QF tại Z. QF giao PE tại T. Chứng minh rằng X,Y,Z,T cùng thuộc một đường tròn.

Bài 18 (3)**.** Cho tam giác ABC đường cao BE,CF và đường tròn Euler là (O_9), phân giác trong AD, phân giác ngoài AG. ED,FD lần lượt cắt (O_9) lần lượt tại M,N khác E,F. GE,GF cắt (O_9) lần lượt tại P,Q khác E,F. PM giao NQ tại R. Gọi S là đối xứng của G qua trung điểm PQ. Gọi T là đối xứng của D qua trung điểm MN. Chứng minh rằng R,S,T thẳng hàng.

Bài 19 (3)**.** Cho tam giác ABC vuông tại A. P là một điểm nằm trên đường cao AD của tam giác. M,N lần lượt thuộc PB,PC sao cho $CM=CA, BN=BA$. E,F là trung điểm của PM,PN. Gọi Y,Z là trung điểm của PB,PC. Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC. K thuộc trung trực BE sao cho $KY \parallel IC$. L thuộc trung trực CF sao cho $LZ \parallel IB$. Đường thẳng qua M vuông góc IC cắt đường tròn (K,KB) tại S,T. Đường thẳng qua N vuông góc IB cắt đường tròn (L,LC) tại U,V. Chứng minh rằng S,T,U,V cùng thuộc một đường tròn.

Bài 20 ((2) Mở rộng VNTST-2013)**.** Cho tam giác ABC đường cao AD,BE,CF đồng quy tại H, EF giao BC tại G. Gọi (K) là đường tròn đường kính BC. Trung trực BC cắt (K) tại điểm L sao cho A,L cùng phía BC. Gọi (N) là đường tròn ngoại tiếp tam giác GDL. CL cắt (N) tại M khác L. MK cắt (N) tại P khác M. CN cắt (K) tại Q khác C. Chứng minh rằng M,Q,P,C cùng thuộc một đường tròn.

Bài 21 (2)**.** Cho tam giác ABC trọng tâm G. Một đường thẳng qua G cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Chứng minh rằng $\overline{DE}(\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} - \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}) + \overline{EF}(\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} - \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}) + \overline{FD}(\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} - \frac{\overline{DC}}{\overline{DC}}) = 0$.

Bài 22 (2)**.** Cho tứ giác $ABCD$ với K, L thuộc DB, CA sao cho AK, BL và CD đồng quy. Gọi KL cắt AB, CD, AD, BC lần lượt tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng $\frac{1}{KP} + \frac{1}{LQ} = \frac{1}{KN} + \frac{1}{KN} + \frac{1}{LM} + \frac{1}{LN}$.

Bài 23 (2)**.** Cho tứ giác $ABCD$. Một đường thẳng bất kỳ cắt AB, CD, AD, BC, AC, BD lần lượt tại M, N, P, Q, R, S. Giả sử hai trong ba đoạn MN, PQ, RS có cùng trung điểm. Chứng minh rằng cả ba đoạn MN, PQ, RS có cùng trung điểm.

Bài 24 (2)**.** Cho tứ giác $ABCD$. M, N di chuyển trên AD, BC. P, Q là trung điểm DN, CM. DQ giao CP tại T. DN giao CM tại R. Dựng hình bình hành $RDSC$. Chứng minh rằng ST luôn đi qua điểm cố định.

Bài 25 (2)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định, B, C cố định và A di chuyển trên (O). H là trực tâm tam giác ABC. Trung trực BC cắt CA, AB tại M, N. Đường thẳng qua H song song OA cắt CA, AB tại P, Q. MQ giao NP tại R. Chứng minh rằng đường thẳng qua R song song OH luôn đi qua một điểm cố định khi A di chuyển.

Bài 26 (2)**.** Cho tam giác ABC trực tâm H, tâm ngoại tiếp (O), trung tuyến AM. Đường thẳng qua H song song OA cắt BC tại D. Đường thẳng qua D song song AM cắt AH tại E. F đối xứng D qua E. Chứng minh rằng AF và BC cắt nhau trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Bài 27 (3)**.** Cho tam giác ABC, tâm ngoại tiếp O, đường cao AD, BE, CF, N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. OA cắt EF tại N_a. M_a là trung điểm BC. AN cắt M_aN_a tại X. Tương tự có Y, Z. Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Bài 28 (3)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I. AI cắt (O) tại D khác A. M là trung điểm BC. N đối xứng M qua D. P là trung điểm ID. Đường thẳng qua I song song NP cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Gọi K, L lần lượt là đối xứng của B, C theo thứ tự qua IC, IB. J là tâm ngoại tiếp tam giác IKL. IJ cắt CA, AB tại S, T. ET cắt FS tại H. Chứng minh rằng $IH \perp BC$.

Bài 29 (3)**.** Cho tam giác ABC với $AB < AC$, nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I. M là trung điểm BC, N là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác IAN và IBM cắt nhau tại K khác I. BK giao AC tại X. NK giao AI tại Y. Chứng minh rằng XY, BI và AN đồng quy.

Bài 30 (2)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AB giao CD tại E, AD giao BC tại F. M, N là trung điểm của BD, AC. Đường thẳng qua F vuông góc EM cắt trung trực MN tại P. Chứng minh rằng ME vuông góc với MF.

Bài 31 (2)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Giả sử AB giao CD tại E, AD giao BC tại F, AC giao BD tại G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Giả sử AC, BD lần lượt giao EF tại P, Q.

a) Chứng minh rằng M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn (K).

b) Gọi OK giao EF tại L, MN giao EF tại H, GL cắt (O) tại S, T. Chứng minh rằng HS, HT tiếp xúc với (O).

Bài 32 (2)**.** Cho tam giác ABC. Đường tròn (K) qua B, C cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE giao CF tại H. Đường thẳng qua A vuông góc AK cắt BE, CF lần lượt tại M, N. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp tam giác BAM, CAN. Chứng minh rằng BP, CQ cắt nhau trên đường tròn (K).

Bài 33 (2)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi AD giao BC tại E. AB giao CD tại F. Chứng minh rằng các đường tròn đường kính EF, BD, AC đồng trục.

Bài 34 (2)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi AD giao BC tại E. AB giao CD tại F. M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN cắt (O) tại X, Y. Đường tròn ngoại tiếp tam giác FMN cắt (O) tại Z, T. Chứng minh rằng XY, ZT, MN đồng quy.

Bài 35 (2)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại L khác A. Chứng minh rằng KL luôn đi qua một điểm cố định khi (K) di chuyển.

Bài 36 ((2) VMO 2011)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi AB giao CD tại M và AD giao BC tại N. Gọi P, Q, S, T lần lượt là giao điểm của phân giác trong các cặp góc $\angle MAN$ và $\angle MBN$; $\angle MBN$ và $\angle MCN$; $\angle MDN$ và $\angle MAN$; $\angle MCN$ và $\angle MDN$.

a) Chứng minh rằng P, Q, S, T thuộc một đường tròn ký hiệu là (I).

b) Gọi AC giao BD tại E. Chứng minh rằng E, O, I thẳng hàng.

Bài 37 (3)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. Phân giác góc $\angle AEB$ lần lượt cắt AD, BC, AB, CD tại M, N, P, Q.

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác APM, BPN, CQN, DQM có một điểm chung K. (Trích đề thi VNTST 2013)

b) Chứng minh rằng tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác APM, BPN, CQN, DQM cũng lập thành một tứ giác nội tiếp và có điểm Miquel là K.

Bài 38 (3)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi K, L là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAC và OBD. OK, OL lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OBD, OAC tại M, N khác O. Chứng minh rằng MN song song với đường nối trung điểm AC và BD.

Bài 39 (3)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác góc $\angle BAC$ cắt (O) tại D khác A. P là điểm di chuyển trên AD. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F và cắt (O) tại M, N khác B, C. MN giao EF tại G. GD cắt (O) tại S khác D. NE giao MF tại H. PH giao EF tại T. Chứng minh rằng ST luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

Bài 40 (2)**.** Cho tam giác ABC đường cao AH. D, E thuộc AB, AC. F, G là hình chiếu của D, E lên BC sao cho DG, EF, AH đồng quy. P là hình chiếu của E lên HD. Giả sử $PA = PH$. Chứng minh rằng $\angle APH = 2\angle EPG$.

Bài 41 (2)**.** Cho tam giác ABC, phân giác trong AD sao cho $\angle ADC = 60°$. G thuộc tia DA sao cho $BD = DG$. CG cắt AB tại E. BG cắt AC tại F. Chứng minh rằng EF vuông góc ED

Bài 42 (2)**.** Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm ngoại tiếp O, tâm nội tiếp I, đường cao AD, phân giác AE, F là trung điểm AE. Đường thẳng qua D song song IH lần lượt cắt AB, AC tại M, N. DF lần lượt cắt AB, AC tại P, Q. MQ giao NP tại T. Giả sử D, T, I thẳng hàng, chứng minh rằng $OI \parallel BC$.

Bài 43 (2)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. ℓ là trung trực BD. P là điểm trên ℓ. Q là đối xứng của P qua phân giác $\angle BAD$. R là đối xứng của P qua phân giác $\angle BCD$. Chứng minh rằng AQ, CR cắt nhau trên ℓ.

Bài 44 (2)**.** Cho hai đường tròn $(K), (L)$ cắt nhau tại A, B. M là trung điểm AB. P, Q nằm trên AB không nằm giữa A, B. Kẻ các tiếp tuyến PE, PF tới (K) với E, F thộc (K). Kẻ các tiếp tuyến QG, QH tới (L) với G, H thuộc (L). Chứng minh rằng EG đi qua M khi và chỉ khi FH đi qua M.

Bài 45 (2)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Phân giác ngoài góc A cắt (O) tại G. GD cắt (O) tại H khác G. AH cắt EF tại K. Chứng minh rằng DK vuông góc EF.

Bài 46 (3)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp và có điểm Miquel là M. AC cắt BD tại E. X, Y, Z, T là hình chiếu của E lên AB, BC, CD, DA. N là điểm Miquel của tứ giác $XYZT$. Chứng minh rằng N là trung điểm của EM.

Bài 47 (3)**.** Cho tam giác ABC, đường cao AD, trung tuyến AM, tâm nội tiếp I. MI cắt AD, AB lần lượt tại S, X. Chứng minh rằng $\angle A = 2\angle B$ khi và chỉ khi $\widehat{SDI} = \widehat{SDX}$.

Bài 48 (3)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác ngoài góc A cắt (O) tại D khác A. P là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc trong (O) tại E và tiếp xúc đoạn PD, PB. Đường tròn (L) tiếp xúc trong (O) tại F và tiếp xúc đoạn PC tại G và tiếp xúc đoạn PD. AP cắt (O) tại Q khác A. QG cắt (O) tại H khác Q. Chứng minh rằng $MH = ME$.

Bài 49 (3)**.** Cho tam giác ABC, tâm nội tiếp I, tâm ngoại tiếp O, các tâm bàng tiếp là I_a, I_b, I_c, các chân phân giác ngoài thẳng hàng trên đường thẳng d. Đường thẳng qua I_a, I_b, I_c lần lượt vuông góc BC, CA, AB cắt d tương ứng tại D, E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF và OI đồng quy.

Tài liệu

[1] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, *Toán nâng hình học 10*, NXBGD 2000

[2] Nguyễn Minh Hà, *Tỷ số kép và ứng dụng*, bản thảo 2008

[3] Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, Lê Bá Khánh Trình *Tài Liệu giáo khoa chuyên toán hình học 10*, NXBGD 2009

[4] Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, Lê Bá Khánh Trình *Tài Liệu giáo khoa chuyên toán bài tập hình học 10*, NXBGD 2009

[5] Trần Quang Hùng, *Bài giảng hàng điểm điều hòa* từ Ego

[6] Nathan Altshiller-Court *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle* Dover Publications; 2 Rev Enl edition (April 19, 2007)

[7] Ross Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry* The Mathematical Association of America (September 5, 1996)

[8] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry* Dover Publications (August 31, 2007)

[9] William Gallatly, *The Modern Geometry Of The Triangle* Merchant Books (April 15, 2007)

[10] Coxeter, *The Real Projective Plane* Springer; 3rd edition (December 23, 1992)

[11] Coxeter, *Introduction to Geometry* Wiley; 2nd edition (February 23, 1989)

[12] Coxeter, *Geometry Revisited* The Mathematical Association of America; 1ST edition (1967)

[13] Coxeter, *Projective Geometry* Springer; 2nd edition (October 9, 2003)

[14] Milivoje Lukić, Projective Geometry

[15] Dušan Djukić, Inversion

[16] Kin Y.Li, Pole and polar Mathematical Excalibur

[17] Hoàng Quốc Khánh, *Cực và đối cực* bản thảo 2008

[18] Mathley http://www.hexagon.edu.vn/tong-hop/mathley/

[19] AOPS Forum http://www.artofproblemsolving.com/

[20] Diễn đàn toán học http://diendantoanhoc.net