Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

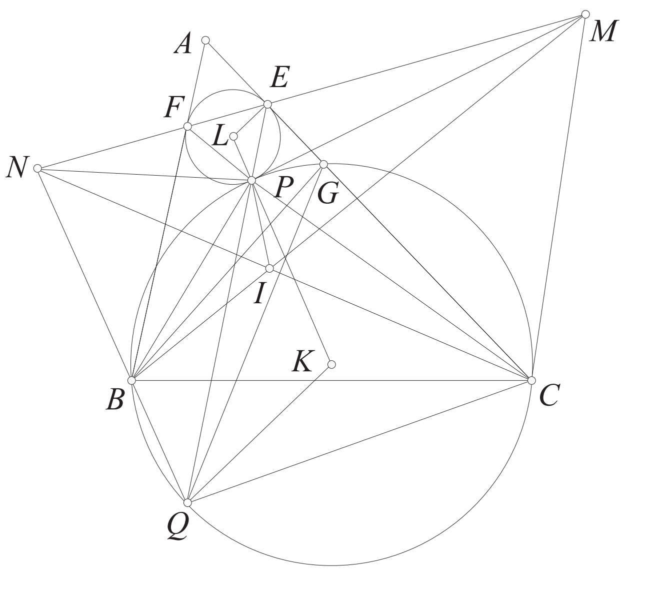
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

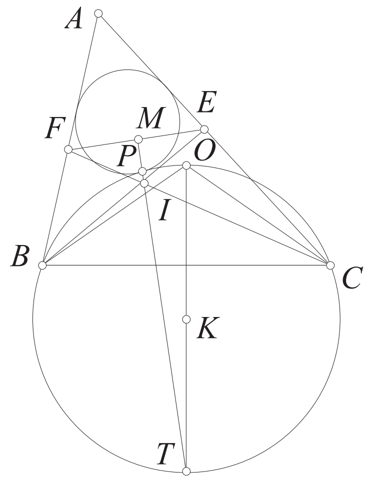
Cho tam giác ABC nhọn có phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Đường tròn (K) đi qua B, C và tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC. Đường tròn (L) nằm trong tam giác tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc ngoài (K) tại P. Chứng minh rằng PI chia đôi EF.

Lời giải

Bổ đề (Định lý Protassov)**.** Cho tam giác ABC và một đường tròn (K) đi qua B, C. Đường tròn (L) tiếp xúc cạnh CA, AB và tiếp xúc ngoài (K) tại P. Thì phân giác góc $\angle BPC$ đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.



Chứng minh bổ đề. Gọi G là giao điểm khác C của CA và (K). PE cắt (K) tại Q khác P. BQ cắt EF tại N. Ta có $\angle PBQ = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle PKQ) = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle PLE = 180^\circ - \angle PFE = \angle PFN$. Từ đó tứ giác nội tiếp. Lại có $\angle EPF = \angle EFA = \angle NFB = \angle NPB$ suy ra $\angle NPE = \angle FPB = 180^\circ - \angle FNQ$. Vậy $\angle FNQ = 180^\circ - \angle NPE = \angle NPQ$, ta suy ra $QN^2 = QE.QP = QC^2 = QG^2$. Do đó N là tâm bàng tiếp góc C của tam giác BCG. CN cắt đường tròn $(PFNB)$ tại I khác N. Thì $\angle BIC = 180^\circ - \angle BIN = 180^\circ - \angle AFE = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$. Từ đó I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh tương tự I nằm trên đường tròn (PEC) và BI cắt EF tại M nằm trên (PEC). Ta có $\angle IBC = \angle IBA = \angle INF$ nên tứ giác $CBNM$ nội tiếp. Vậy $\angle IPB = \angle INB = \angle IMC = \angle IPC$, suy ra PI là phân giác $\angle BPC$.



Giải bài toán. Gọi PI cắt EF tại M và cắt (K) tại T khác P. Theo bổ đề thì PI là phân giác $\angle BPC$ nên OT là đường kính của (K). Từ đó TB, TC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Với chú ý rằng $\angle IEC = \angle IBT, \angle IFB = \angle ICT$, ta có biến đổi tỷ số $\frac{ME}{MF} = \frac{[IME]}{[IMF]} = \frac{[IME]}{[IBT]} \cdot \frac{[IBT]}{[IEC]} \cdot \frac{[IEC]}{[IFB]} \cdot \frac{[IFB]}{[ICT]} \cdot \frac{[ICT]}{[IMF]} = \frac{IM.IE}{IB.IT} \cdot \frac{BI.BT}{EI.EC} \cdot \frac{IE.IC}{IF.IB} \cdot \frac{FB.FI}{CI.CT} \cdot \frac{IC.IT}{IM.IF} = \frac{IE}{IB} \cdot \frac{BF}{CE} \cdot \frac{IC}{IF} = \frac{CE}{CB} \cdot \frac{BF}{CE} \cdot \frac{BC}{BF} = 1$. Vậy M là trung điểm EF.

Nhận xét

Bài toán là mở rộng bài toán 2 trong đề thi Sharygin 2010, khi thay cạnh huyền BC bởi đường tròn (BOC). Bổ đề lần đầu được phát biểu trên AoPS bởi **Vladimir Protassov** và cách chứng minh được tác giả diễn đạt lại gọn gàng thông qua các bổ đề của định lý Thébault đồng thời dựa trên ý tưởng của **Jean Louis Ayme** ở đây. Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã cho lời giải tại đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải khác qua email từ bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình.

Bài toán đề nghị

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). BC cắt trung trực BD tại P. AP cắt (O) tại Q khác A. CD cắt OP tại R. Trên BR lấy S sao cho $AS \parallel BP$. Lấy T thuộc AC sao cho $ST \parallel BQ$. Chứng minh rằng $TA = TB$.
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

