Phép nghịch đảo và ứng dụng

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Mục lục

1 Lý thuyết

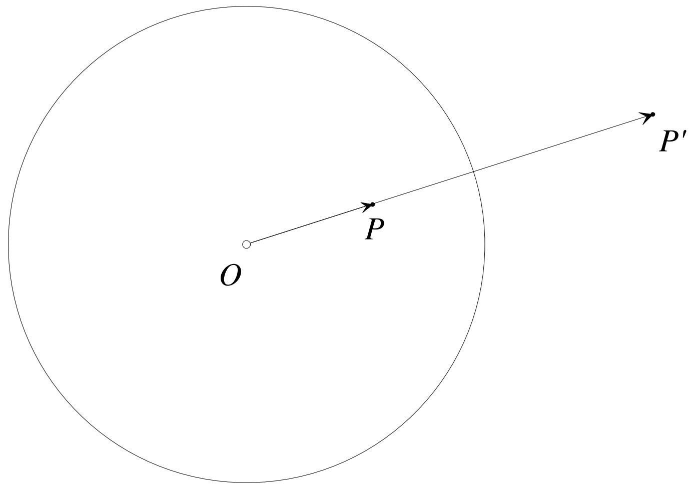
1.1 Định nghĩa và tính chất cơ bản

Như chúng ta đã biết, phép rời hình là các phép biến hình bảo toàn khoảng cách, phép vị tự và đồng dạng (phép vị tự là trường hợp riêng của phép đồng dạng) là các phép biến hình bảo toàn tỷ số khoảng cách. Trong bài viết này ta sẽ tìm hiểu chi tiết một phép biến hình đặc biệt hơn bảo toàn góc giữa hai hình đó là phép nghịch đảo.

Định nghĩa 1. *Cho đường tròn (O, R) phép biến hình biến điểm P thuộc mặt phẳng thành P' thỏa mãn $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = R^2$ gọi là phép nghịch đảo qua đường tròn (O, R), tỷ số R^2 gọi là phương tích của phép nghịch đảo, O gọi là tâm nghịch đảo, đường tròn (O, R) gọi là đường tròn nghịch đảo, R gọi là bán kính nghịch đảo, nếu không quan tâm đến phương tích hay bán kính ta có thể ký hiệu phép nghịch đảo là $I_{(O,R)}$ khi đó $P' = I_{(O,R)}(P)$. Nếu đã xác định rõ đường tròn ta chỉ cần ký hiệu là $P' = I_O(P)$.*

Nhận xét 1. Ta thấy rằng phép nghịch đảo qua đường tròn có thể hình dung như việc ta lấy đối xứng điểm qua đường tròn đó. Khi đường tròn bán kính lớn bằng ∞ thì nó là đường thẳng định nghĩa sẽ trùng với định nghĩa của phép đối xứng trục.

Nhận xét 2. Trong mặt phẳng Euclide, điểm duy nhất không lấy được nghịch đảo chính là tâm nghịch đảo, do đó phép nghịch đảo xác định trên mọi điểm của mặt phẳng Euclide trừ đi điểm O. Tuy nhiên khi bổ sung các điểm ∞ thì ảnh của tâm nghịch đảo chính là đường thẳng vô cực.



Khi muốn ứng dụng một phép biến hình vào giải toán thì cái đầu tiên ta phải làm là khảo sát ảnh của các hình quen thuộc qua phép biến đổi đó. Do vậy định lý quan trọng sau cho chúng ta cái nhìn bao quát về ảnh của một hình qua phép nghịch đảo. Hai hình thông dụng nhất chúng ta tìm hiểu là đường thẳng và đường tròn. Trong phép nghịch đảo, điểm đặc biệt nhất là tâm nghịch đảo, nên chúng ta lần lượt xét vị trí tương đối của các hình với tâm nghịch đảo.

Định lý 1 (Khảo sát ảnh)**.** *Xét phép nghịch đảo I_O khi đó*

a) Ảnh của đường thẳng qua O là chính nó.

b) Ảnh của đường thẳng không đi qua O là đường tròn đi qua O.

c) Ảnh của đường tròn đi qua O là một đường thẳng không qua O

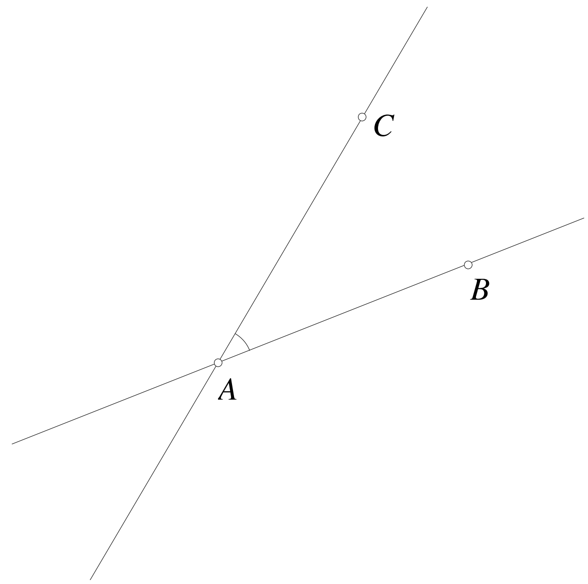
d) Ảnh của một đường tròn không qua O là một đường tròn không qua O.

Sau đây ta nghiên cứu một tính chất được bảo toàn qua phép nghịch đảo (tính bất biến), trước hết ta cần định nghĩa góc của một đường thẳng với một đường tròn và góc giữa hai đường tròn. Ta bắt đầu với khái niệm góc hình học giữa hai đường thẳng.

Định nghĩa 2. *Cho hai đường thẳng d_1 và d_2*

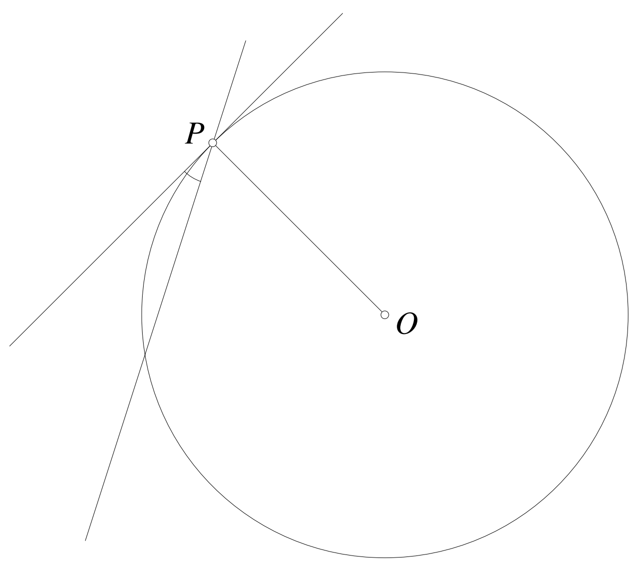
-Nếu $d_1 \parallel d_2$ hoặc $d_1 \equiv d_2$ thì góc giữa hai đường thẳng là $0°$

-Nếu d_1 cắt d_2 thì góc giữa chúng là góc nhỏ nhất trong số bốn góc tạo thành.

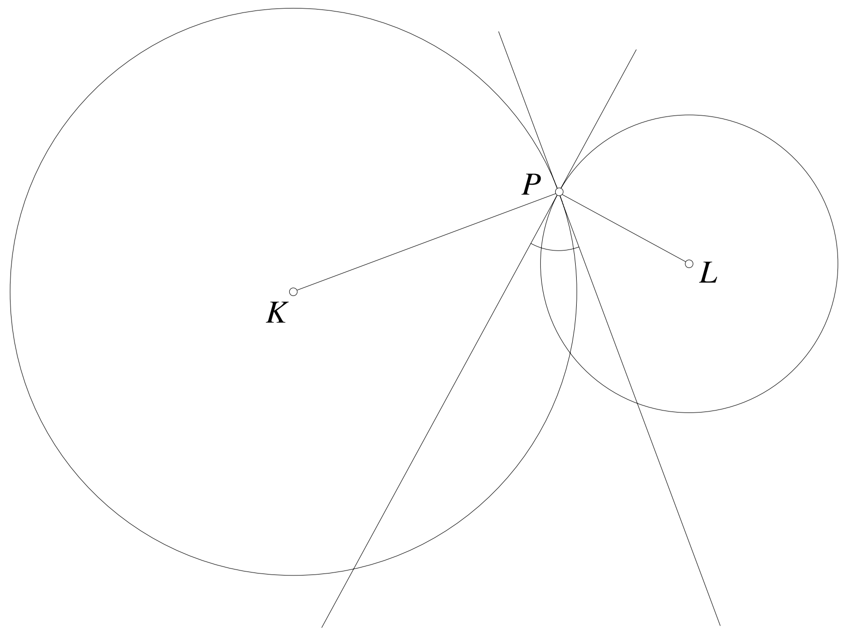


Như vậy góc hình học giữa hai đường thẳng nằm trong khoảng $[0, 90°]$.

Định nghĩa 3. *Cho đường thẳng d có điểm chung với đường tròn (O) là P, khi đó ta gọi góc giữa tiếp tuyến của (O) tại P và đường thẳng d là góc giữa d và (O), ta ký hiệu là $\angle(d, O)$.*



Định nghĩa 4. *Cho hai đường tròn $(P), (Q)$ có điểm chung là M khi đó góc ta gọi góc giữa hai tiếp tuyến của $(P), (Q)$ tại M là góc giữa hai đường tròn $(P), (Q)$ ta ký hiệu là $\angle(P, Q)$.*



Từ khái niệm về góc ta có thể phát biểu một tính chất cơ bản của phép nghịch đảo như sau

Định lý 2 (Tính chất bảo giác). *Góc giữa hai hình không đổi qua phép nghịch đảo (tức là góc giữa hai ảnh bằng góc giữa hai tạo ảnh).*

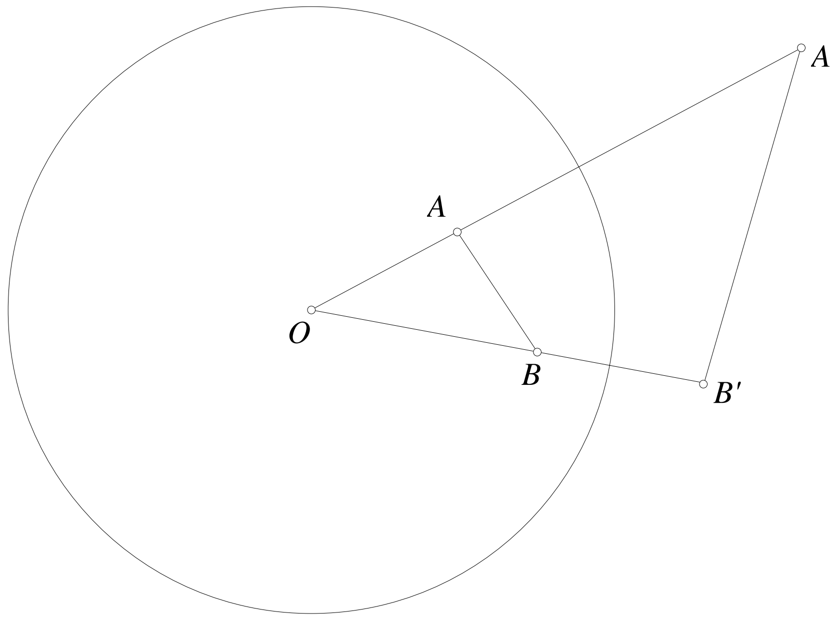
Chú ý. Ta hiểu hình ở đây ta chỉ cần hiểu là đường thẳng và đường tròn mặc dù tính chất bảo giác thực chất đúng với hai hình bất kỳ.

Tính chất bảo giác đưa chúng ta đến một số hệ quả rất đáng chú ý về các hình tiếp xúc bởi lẽ ta hiểu rằng đường thẳng tiếp xúc đường tròn khi góc giữa chúng là $0°$ và hai đường tròn tiếp xúc nhau thì góc giữa chúng cũng là $0°$.

Hệ quả 1. *Hai hình tiếp xúc nhau và tiếp điểm không ở tâm nghịch đảo thì qua phép nghịch đảo là hai hình tiếp xúc nhau. Trường hợp hai đường tròn tiếp xúc nhau ở tâm nghịch đảo thì ảnh là hai đường thẳng song song.*

Ta biết rằng ảnh của đoạn thẳng nói chung không phải là đoạn thẳng, nên sẽ không có khái niệm về độ dài qua phép nghịch đảo, tuy nhiên ta vẫn có thể nghiên cứu về khoảng cách giữa hai điểm ảnh và hai điểm tạo ảnh qua phép nghịch đảo qua định lý sau

Định lý 3. *Xét phép nghịch đảo I_O phương tích R^2 có $I_O(A) = A'$, $I_O(B) = B'$ khi đó $A'B' = \dfrac{R^2}{OA \cdot OB}AB$, hoặc $AB = \dfrac{R^2}{OA' \cdot OB'}A'B'$.*



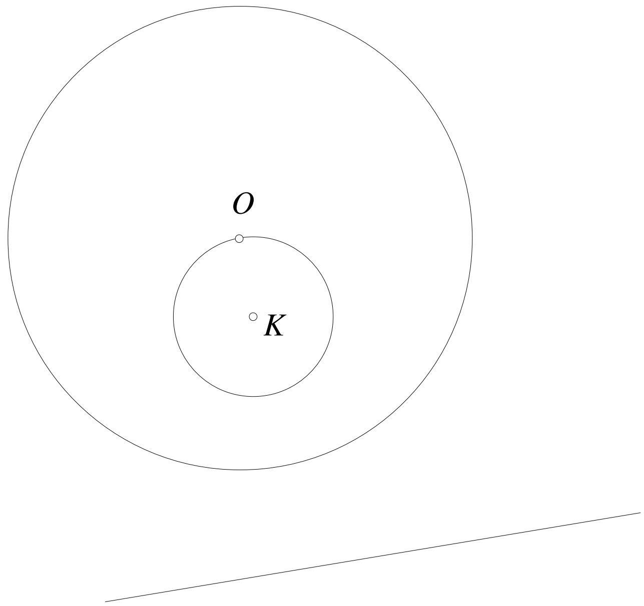
1.2 Một số định lý ứng dụng giải toán

Dựa trên các tính chất cơ bản về ảnh và bất biến, ta có thể ứng dụng chúng vào hình học sơ cấp qua các định lý ứng dụng. Trước hết ta nêu ra các phép dựng ảnh cơ bản qua phép nghịch đảo, qua các phép dựng này, ta có thể nhận biết dễ dàng ảnh hoặc tạo ảnh của một hình. Ta chú ý rằng khi khảo sát ảnh thì trường hợp đơn giản nhất là đường thẳng qua tâm nghịch đảo có ảnh là chính nó, còn ba trường hợp còn lại ta sẽ nêu cụ cách dựng ảnh nghịch đảo

+ Ảnh của đường tròn đi qua tâm nghịch đảo

Thông thường ta xác định ảnh nghịch đảo của đường tròn qua tâm nghịch đảo bằng cách lấy hai điểm trên đường tròn đó và xét ảnh nghịch đảo của chúng, khi đó đường thẳng nối hai ảnh nghịch đảo chính là ảnh của đường tròn qua tâm nghịch đảo. Tuy nhiên có một cách khác xác định như sau

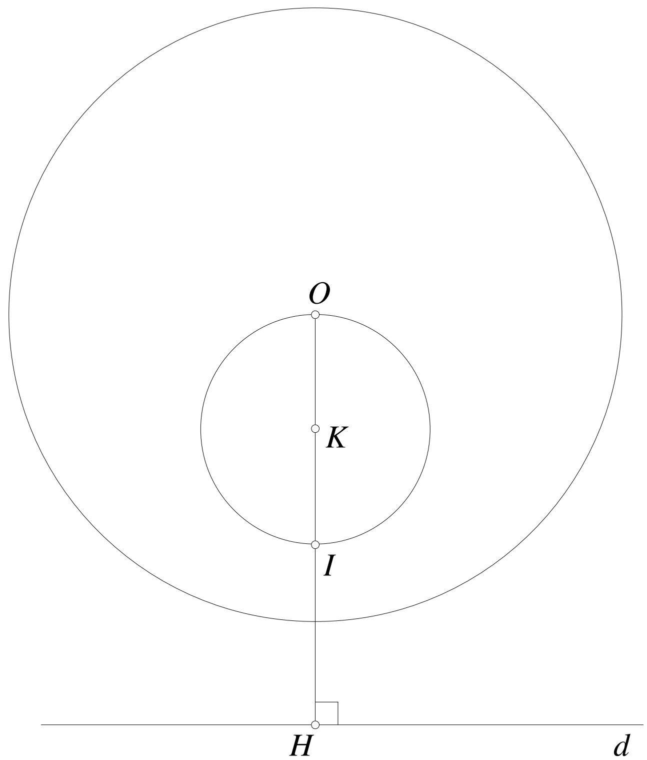
Định lý 4. *Cho đường tròn (O, R) và đường tròn (K) đi qua O. Khi đó ảnh nghịch đảo của (K) qua (O, R) chính là trục đẳng phương của (O, R) và (K).*



+ Ảnh của đường thẳng không đi qua tâm nghịch đảo

Thông thường ta lấy hai điểm trên đường thẳng và xét ảnh nghịch đảo của chúng. Khi đó đường tròn đi qua tâm nghịch đảo và hai ảnh nghịch đảo là ảnh của đường thẳng. Tuy nhiên ta cũng có một cách khác xác định như sau

Định lý 5. *Cho đường tròn (O,R) và đường thẳng d không qua O. Gọi H là hình chiếu của O lên d. Gọi ảnh nghịch đảo của H qua (O,R) là I. Khi đó ảnh nghịch đảo của d qua (O,R) là đường tròn đường kính OI.*



+ Ảnh của đường tròn không đi qua tâm nghịch đảo

Định lý 6. *Cho (O, R) và ba điểm A, B, C. Gọi A', B', C' là ảnh nghịch đảo của A, B, C qua (O, R). Khi đó đường tròn ngoại tiếp $(A'B'C')$ là ảnh nghịch đảo của đường tròn ngoại tiếp (ABC).*

Phép nghịch đảo cũng có ứng dụng để chứng minh các đường thẳng đồng quy, vuông góc, điểm thẳng hàng và các đường tròn đồng quy. Ta nêu ra một số định lý thông dụng

Định lý 7. *Ba đường tròn đi qua tâm nghịch đảo sẽ biến thành ba đường thẳng đồng quy.*

Định lý 8. *Ba đường thẳng đồng quy (không qua tâm nghịch đảo) sẽ biến thành ba đường tròn có hai điểm chung, trong đó một điểm chung là tâm nghịch đảo.*

Định lý 9. *Ảnh của đường thẳng không qua tâm nghịch đảo là một đường tròn qua tâm nghịch đảo, khi đó đường nối tâm đường tròn này và tâm nghịch đảo vuông góc với đường thẳng đã cho. đã cho.*

Định lý 10. *Ảnh của đường tròn không qua tâm nghịch đảo là một đường tròn, khi đó tâm hai đường tròn này thẳng hàng với tâm nghịch đảo.*

Định lý 11. *Tỷ số kép của hàng điểm được bảo toàn qua phép nghịch đảo.*

2 Bài tập

Bài 1. *Cho $\triangle ABC$, P là một điểm nằm trong tam giác . $AP \cap (BCP) = \{P, A_1\}$. Tương tự cho các điểm B_1, C_1 .Gọi X, Y, Z lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $PB_1C_1, PC_1A_1, PA_1B_1$. Chứng minh rằng, các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $(XAP), (YBP), (ZCP)$ có một điểm chung*

Bài 2. *Cho hai tứ giác lồi ngược hướng $ABQP, DCQP$ nội tiếp. Chứng minh rằng, nếu tồn tại điểm E thuộc đoạn PQ sao cho $\angle PAE = \angle QBE, \angle PDE = \angle QCE$ thì $ABCD$ nội tiếp.*

Bài 3. *Cho tam giác ABC nhọn và điểm M nằm trong tam giác. X, Y, Z, T theo thứ tự là hình chiếu của M trên AB, MB, AC, MC. Chứng minh rằng AM vuông góc với BC khi và chỉ khi X, Y, Z, T hoặc cùng thuộc một đường tròn hoặc cùng thuộc một đường thẳng.*

Bài 4. *Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc nhau tại P. Điểm A di chuyển trên (O_1), AM, AN là tiếp tuyến của (O_2), E, F là giao điểm khác A của AM, AN với (O_1). Chứng minh rằng $\dfrac{PE}{PF} = \dfrac{ME}{MF}$.*

Bài 5. *Cho tứ giác $AEFT$ nội tiếp (O). Tiếp tuyến qua T cắt AE, AF tại B, C. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{TB} + \dfrac{1}{TC} = \dfrac{EF}{TE.TF}$*

Bài 6. *Cho $(O_1), (O_2), (O_3)$ đôi một tiếp xúc ngoài tại B_1, B_2, B_3 tương ứng và cùng tiếp xúc trong (O) tại A_1, A_2, A_3 tương ứng. Chứng minh rằng A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 đồng quy.*

Bài 7. *Cho sáu đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3), (O_4), (O_5), (O_6)$ sao cho (O_i) tiếp xúc ngoài với (O_{i-1}) và (O_{i+1}), và tất cả cùng tiếp xúc trong (O) tại $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Chứng minh rằng A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 đồng quy.*

Bài 8. *Tứ giác lồi $ABCD$. Gọi O là giao hai đường chéo. Chứng minh rằng, $ABCD$ ngoại tiếp khi và chỉ khi $\dfrac{1}{r_{AOB}} + \dfrac{1}{r_{COD}} = \dfrac{1}{r_{BOC}} + \dfrac{1}{r_{DOA}}$ trong đó r_{XYZ} chỉ bán kính đường tròn nội tiếp tam giác XYZ.*

Bài 9. *Cho tam giác ABC, các điểm A_1, B_1, C_1 thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm P. A_2, B_2, C_2 đối xứng A_1, B_1, C_1 qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ đi qua trực tâm H của tam giác ABC.*

Bài 10. *Cho tam giác ABC không cân, điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn PA, PB, PC có độ dài khác nhau. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm của cung BPC, CPA, APB của các đường tròn ngoại tiếp tam giác BPC, CPA, APB .Chứng minh rằng P, A_1, B_1, C_1 cùng nằm trên một đường tròn.*

Bài 11. *Cho tam giác ABC, P là điểm bất kỳ. Đường tròn bất kỳ qua P cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác $(PBC), (PCA), (PAB)$ tại X, Y, Z. PX, PY, PZ cắt BC, CA, AB tại M, N, P. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.*

Bài 12. *Cho tam giác ABC, P là điểm bất kỳ. Dựng đường tròn $\mathcal{C}$ tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tại P. $\mathcal{C}$ cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác $(PAB), (PAC)$ tại D, E. $\mathcal{C}$ cắt PB, PC tại M, N. Chứng minh rằng ME, ND và AP đồng quy.*

Bài 13. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Các đường tròn đường kính $(AI), (BI), (CI)$ cắt (O) tại M, N, P. Chứng minh rằng DM, EN, FP đồng quy.*

Bài 14. *Cho tam giác ABC. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F, M, N, P là trung điểm BC, CA, AB. d_a là đường thẳng đối xứng với BC qua AI. l_a là đường thẳng qua D vuông góc IM. $J_a \equiv d_a \cap l_a$. Các điểm J_b, J_c xác định tương tự. Chứng minh rằng J_a, J_b, J_c nằm trên một đường thẳng và đường thẳng đó tiếp xúc với (I)*

Bài 15. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). $P \equiv AC \cap BD$. M là điểm miquel của tứ giác. Chứng minh rằng O, P, M thẳng hàng.*

Bài 16. *Cho tam giác ABC, tâm I đường tròn nội tiếp. Đường tròn đường kính $(IA), (IB), (IC)$ cắt đường tròn ngoại tiếp (ABC) lần lượt tại A', B', C'. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác $(IAA'), (IBB'), (ICC')$ có một điểm chung khác I.*

Bài 17. *Cho tam giác ABC, P là điểm bất kỳ. Trung trực của PA cắt tiếp tuyến tại P của đường tròn (PBC) tại A_1. A_1A_2 là tiếp tuyến của khác A_1P của (PBC). Tương tự có B_1, B_2, C_1, C_2. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.*

Bài 18. *Cho tam giác ABC trực tâm H. P là điểm bất kỳ, đường thẳng qua H vuông góc PA cắt BC tại A'. Tương tự có B', C'. Chứng minh rằng A', B', C' thẳng hàng trên đường thẳng vuông góc HP.*

Bài 19. *Cho tam giác ABC điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $\angle PBA = \angle PCA$. M, N là hình chiếu của P lên AB, AC. Chứng minh rằng trung tuyến từ P của tam giác PMN luôn đi qua điểm cố định.*

Bài 20. *Cho tam giác ABC. X, Y, Z nằm trên BC, CA, AB sao cho tam giác XYZ đồng dạng tam giác ABC. H, O là trực tâm, tâm ngoại tiếp tam giác ABC. O' là tâm ngoại tiếp tam giác XYZ. Chứng minh rằng $O'H = O'O$.*

Bài 21. *Cho P là điểm di động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, hai tiếp tuyến của P với đường tròn nội tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng BC tại E, F. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác (PEF) luôn đi qua một điểm cố định.*

Bài 22. *Cho tam giác ABC. I là tâm đường tròn nội tiếp. Một đường tròn qua B, C cắt IB, IC tại P, Q. Giả sử $\dfrac{BP}{PI} = \dfrac{IQ}{QC}$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và IPQ tiếp xúc nhau.*

Bài 23. *Cho tam giác ABC trực tâm H. Trung tuyến AA_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A_2. HA_1 cắt cung BC chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại A_3. Tương tự có B_2, B_3, C_2, C_3, chứng minh rằng A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 đồng quy.*

Bài 24. *Cho tam giác ABC, các điểm A_1, B_1, C_1 thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. A_2, B_2, C_2 đối xứng A_1, B_1, C_1 qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$ đi qua trực tâm H của tam giác ABC.*

Bài 25. *Cho tam giác* ABC*, các điểm* A_1, B_1, C_1 *thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác* ABC *sao cho* AA_1, BB_1, CC_1 *đồng quy tại một điểm* P. A_2, B_2, C_2 *đối xứng* A_1, B_1, C_1 *qua* BC, CA, AB. *Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác* $A_2B_2C_2$ *đi qua trực tâm* H *của tam giác* ABC.

Bài 26. *Cho tam giác* ABC*, các điểm* A_1, B_1, C_1 *thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác* ABC *sao cho* AA_1, BB_1, CC_1 *đồng quy tại một điểm* P. A_2, B_2, C_2 *đối xứng* A_1, B_1, C_1 *qua trung điểm* BC, CA, AB. *Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác* $A_2B_2C_2$ *đi qua trực tâm* H *của tam giác* ABC.

Tài liệu

[1] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, *Toán nâng hình học 10* NXB GD 2000

[2] Nguyễn Lâm Minh, *Phép nghịc đảo* Tạp chí mathvn.org

[3] Nathan Altshiller-Court *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle* Dover Publications; 2 Rev Enl edition (April 19, 2007)

[4] Coxeter, *The Real Projective Plane* Springer; 3rd edition (December 23, 1992)

[5] Coxeter, *Introduction to Geometry* Wiley; 2nd edition (February 23, 1989)

[6] Coxeter, *Geometry Revisited* The Mathematical Association of America; 1ST edition (1967)

[7] Coxeter, *Projective Geometry* Springer; 2nd edition (October 9, 2003)

[8] Milivoje Lukic, *Projective Geometry* available at http://www.imomath.com/tekstkut/projgml.pdf

[9] Kin Y.Li, *Invenrsion* Mathematical Excalibur available at http://www.math.ust.hk/excalibur/v11n4.pdf

[10] Ross Honsberger, *Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry* The Mathematical Association of America (September 5, 1996)

[11] Diễn đàn http://www.artofproblemsolving.com