CHƯƠNG 3.

CÁC BÀI TOÁN NGHIỆM NGUYÊN ĐẶC SẮC QUA CÁC KÌ THI VÀ TẠP TRÍ

Chủ đề 1. Các bài toán nghiệm nguyên qua các kì thì vào lớp 10 chuyên

Bài 1. *(Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương 2016 – 2017)*

Tìm các số nguyên dương x và y thoả mãn phương trình:

$$\left(x^2+4y^2+28\right)^2-17\left(x^4+y^4\right)=238y^2+833.$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
&\left(x^2+4y^2+28\right)^2-17\left(x^4+y^4\right)=238y^2+833\\
&\Leftrightarrow\left[x^2+4\left(y^2+7\right)^2\right]^2=17\left[x^4+\left(y^2+7\right)^2\right]\\
&\Leftrightarrow 16x^4-8x^2\left(y^2+7\right)+\left(y^2+7\right)^2=0\\
&\Leftrightarrow\left[4x^4-\left(y^2+7\right)\right]^2=0\\
&\Leftrightarrow 4x^2-y^2-7=0\\
&\Leftrightarrow\left(2x+y\right)\left(2x-y\right)=7\ \ (1)
\end{aligned}$$

Vì $x,y\in N^*\Rightarrow 2x+y>2x-y$ và $2x+y>0$ Do đó: $\begin{cases}2x+y=7\\2x-y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$

Kết luận: (x, y) = (2, 3) thỏa mãi yêu cầu bài toán.

Bài 2. (Chuyên Hà Nội 2016 – 2017)

Tìm tất cả các cặp số tự nhiên x, y thỏa mãn:

$$2^x.x^2=9y^2+6y+16$$

Lời giải

Ta có: $9y^2+6y+16\equiv\left(\bmod 3\right)\Rightarrow 2^x.x^2\equiv 1\left(\bmod 3\right)$.Mà $x^2\equiv 0;1\left(\bmod 3\right)\Rightarrow\begin{cases}2^x\equiv 1\left(\bmod 3\right)\\x^2\equiv 1\left(\bmod 3\right)\end{cases}$

Nếu x lẻ đặt: $x=2k+1\left(k\in N\right)\Rightarrow 2^x=2.4^k\equiv 2\left(\bmod 3\right)\left(sai\right)$, suy ra x lẻ loại.

Nếu x chẵn đặt: $x=2k\left(k\in N\right)\Rightarrow 2^x=4^k\equiv 1\left(\bmod 3\right)$ (đúng).

Do đó khi x chẵn thì

$2^x.x^2=9y^2+6y+16\Leftrightarrow\left(2k.2^k\right)^2=\left(3k+1\right)^2+15\Leftrightarrow\left(2k.2^k-3y-1\right)\left(2k+3y+1\right)=15.$

Vì $y,k\in N\Rightarrow 2k.2^k+3y+1>2k.2^k-3y-1>0.$

Vậy ta có các trường hợp:

$$+\begin{cases} 2k.2^k - 3y - 1 = 1 \\ 2k.2^k + 3y + 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k.2^k = 8 \\ 3y + 1 = 7 \end{cases} \Rightarrow k \notin N \text{ (loại)}$$

$$+\begin{cases} 2k.2^k - 3y - 1 = 3 \\ 2k.2^k + 3y + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2k.2^k = 4 \\ 3y + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ y = 0 \end{cases}. \text{ Vậy (x, y) = (2; 0).}$$

Bài 3. *(Trích đề vào lớp 10 chuyên ĐHKHTN, ĐHQGHN năm 2014)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2y^2(x+y)+x+y=3+xy$

Lời giải

Đặt x + y = a; xy = b. Phương trình trở thành: $ab^2+a=3+b$

Xét b = 3 suy ra: $a=\frac{3}{5}$ (Vô lý)

Xét $b \neq 3$ ta có:

$$b^2a+a=3+b \Leftrightarrow a\left(b^2+1\right)=3+b \Leftrightarrow a=\frac{3+b}{b^2+1} \Leftrightarrow a(b-3)=\frac{b^2-9}{b^2+1}=1+\frac{-10}{b^2+1}$$

Ta phải có (b^2 + 1) phải là ước dương của 10 do đó:
$b^2+1 \in \{1;2;5;10\} \Rightarrow b \in \{0;\pm1;\pm2;-3\}$

Nếu b = 0 thì a = 3. Ta có: $x+y=3, xy=0 \Rightarrow x=0, y=3$ và $x=3, y=0$

Nếu b = 1 thì a = 2. Ta có $x+y=2, xy=1 \Rightarrow x=1, y=1$

Nếu $b=-1$ thì a = 1

Ta có: x + y = 1, xy = -1 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ và $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}; y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (loại)

Nếu b = 2 thì a = 1. Ta có: x + y = 1 và xy = 2 không tồn tại x, y.

Nếu b = -2 thì $a=\frac{1}{5}$ (vô lý).

Nếu $b=-3$ thì a = 0. Ta có: x + y = 0 và $xy=-3$ không tồn tại x, y nguyên.

Vậy phương trình có 3 nghiệm là (x, y) = (0, 3); (3, 0); (1, 1).

Bài 4. *(Trính đề thi vào lớp 10 Chuyên Thái Nguyên năm 2014-2015)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;\ y)$ thỏa mãn $(x+y)^3=(x-y-6)^2$.

Lời giải

Nếu $x \geq y+6 \Rightarrow x+y > x-(y+6) \geq 1 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm. Do đó $x<y+6 \Rightarrow 2 \leq x+y < y+6-x \Rightarrow x<3 \Rightarrow x \in \{1;2\}$

Với $x=1$ thay vào phương trình ban đầu ta được:

$\left(y+1\right)^3=(y+5)^2 \Leftrightarrow \left(y-3\right)\left(y^2+5y+8\right)=0 \Leftrightarrow y=3$ suy ra phương trình có nghiệm $\left(x;\ y\right)=(1;\ 3)$.

Với $x=2$ thay vào phương trình ban đầu ta được:

$\left(y+2\right)^3=(y+4)^2 \Leftrightarrow y^3+5y^2+4y-8=0$ phương trình này vô nghiệm do $y\ge 1$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $\left(x;\ y\right)=(1;\ 3)$.

Bài 5. *(Trích đề thi vào lớp 10 Chuyên Lê Hồng Phong- Nam Định 2014-2015)*

Tìm các số nguyên *x; y* thỏa mãn $x^3+y^3-3xy=1$

Lời giải

$x^3+y^3-3xy=1$

$<=> (x+y)^3-3xy(x+y)-3xy=1$

Đặt x + y = a và xy = b (a, b nguyên) ta có:

$a^3-3ab-3b=1$

$<=> (a+1)(a^2-a+1)-3b(a+1)=2$

$<=> (a+1)(a^2-a+1-3b)=2$

$1)\begin{cases} a+1=1 \\ a^2-a+1-3b=2 \end{cases} <=> \begin{cases} a=0 \\ b=\dfrac{-1}{3}(L) \end{cases}$

$2)\begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1-3b=1 \end{cases} <=> \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}(TM) <=> \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} => (x;y)\in\{(0;1);(1;0)\}$

$3)\begin{cases} a+1=-1 \\ a^2-a+1-3b=-2 \end{cases} <=> \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}(TM) <=> \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=3 \end{cases} => (x;y)\in\varnothing$

$4)\begin{cases} a+1=-2 \\ a^2-a+1-3b=-1 \end{cases} <=> \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases}(TM) <=> \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=4 \end{cases} => (x;y)\in\varnothing$

Vậy $(x;y)\in\{(0;1);(1;0)\}$

Bài 6. *(Trích đề vào Chuyên Bình Dương 2017)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-y^2=xy+8$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương $x^2-xy-\left(y^2+8\right)=0$

Coi phương trình trên là phương trình ẩn x có y là tham số ta có: $\Delta=y^2+4\left(y^2+8\right)=5y^2+32$

Ta có Δ chia cho 5 dư 2 nên có tận cùng là 2 hoặc 7. Do đó, Δ không là số chính phương vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Bài 7. *(Trích đề vào Chuyên Lê Hồng Phong – Nam Định)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^3+1=4y^2$.

Lời giải

Ta có: $x^3+1=4y^2 \Leftrightarrow (2y-1)(2y+1)=x^3$

Do $(2y-1,2y+1)=1$ cho nên $2y+1=a^3, 2y-1=b^3\ (a,b\in Z)$

Suy ra: $a^3-b^3=2 \Leftrightarrow (a-b)(a^2+ab+b^2)=2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a-b=2 \\ a^2+ab+b^2=1\end{cases} \\ \begin{cases} a-b=1 \\ a^2+ab+b^2=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} a=1 \\ b=-1\end{cases} \\ \begin{cases} a=\dfrac{3+\sqrt{33}}{6} \\ b=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{6}\end{cases}\end{array}\right.$$

Do a, b là số nguyên nên chỉ nhận được giá trị a =1 và b = -1 suy ra y = 0 và x = -1

Vậy phương trình có nghiệm (x, y) = (-1, 0)

Bài 8. *(Trích đề vào Chuyên bạc Liêu 2017)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau $x^2+y^2+5x^2y^2+60=37xy$

Lời giải

Ta có: $x^2+y^2+5x^2y^2+60=37xy$

$$\Leftrightarrow x^2-2xy+y^2=-5x^2y^2+35xy-60$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2=-5(x^2y^2+7xy-12) \quad (1)$$

Do $(x-y)^2\ge 0 \Rightarrow -5(x^2y^2+7xy-12)\ge 0$. Đặt t = xy ($t\in Z$) ta có:

$-5(t^2+7t-12)\ge 0 \Leftrightarrow 3\le t\le 4$. Mà t là số nguyên nên t = 3 hoặc t = 4

Khi t = 3 ta có $\begin{cases}(x-y)^2=0\\ xy=3\end{cases} \Leftrightarrow x^2=y^2=3$ (không tồn tại giá trị nguyên của x, y)

Khi t = 4 ta có $\begin{cases}(x-y)^2=0\\ xy=4\end{cases} \Leftrightarrow$ x = y = 2 hoặc $x=y=-2$

Vậy phương trình có hai nghiệm là (x, y) = (2, 2); (-2, -2).

Bài 10. *(Trích đề vào Chuyên Hưng Yên 2017)*

Giải phương trình nghiệm nguyên $y^3-2x-2=x(x+1)^2$. (1)

Lời giải

Ta có: $(1) \Leftrightarrow y^3=x^3+2x^2+3x+2$

Do $2x^2+3x+2=2\left(x+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0 \Rightarrow y^3>x^3$

Xét $|x|>1$ thì: $y^3=x^3+2x^2+3x+2=(x+1)^3+1-x^2<(x+1)^3$

Do đó $x^3<(y+1)^3<(x+1)^3$

Vì x, y nguyên nên phương trình không có nghiệm.

Xét $|x|\le 1$ thì do x nguyên nên x = 1 hoặc x = -1 hoặc x = 0

Với x = -1 ta được y = 0

Với x = 1 thì y = 2

Với x = 0 thì y = $\sqrt[3]{2}$ (loại)

Vậy phương trình có 2nghiệm (x, y) = (-1, 0); (1, 2).

Bài 11 *(Chuyên Lương Thế Vinh – Đồng Nai 2017)*

Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2+2y^2-2xy-4x+8y+7=0 \quad (1)$

Lời giải

Ta có $(1) \Leftrightarrow (x-y-2)^2+(y+2)^2=1$

Do đó ta có: $(y+2)^2\le 1 \Leftrightarrow -1\le y+2\le 1 \Leftrightarrow -3\le y\le -1 \Rightarrow y\in\{-3,-2.-1\}$

Với $y=-3$ thay vào phương trình ta được: $x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$

Với $y=-2$ thay vào phương trình ta được: $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Với $y=-1$ thay vào phương trình ta được: $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow x=1$

Vậy phương trình có 4 nghiệm (x, y) = (-1, -3); (1, -2); (-1, -2); (1, -1).

Bài 12. *(Chuyên Bình Định 2015)*

Tìm x, y nguyên sao cho $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{18}$

Lời giải

Ta có : $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{18}(x\ge 0; y\ge 0)$

Pt viết: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt{2}(1)(0\le\sqrt{x}\le 3\sqrt{2}; 0\le\sqrt{y}\le 3\sqrt{2})$

Pt viết:

$\sqrt{x}=3\sqrt{2}-\sqrt{y}\ge 0 <=> (\sqrt{x})^2=(3\sqrt{2}-\sqrt{y})^2 <=> 6\sqrt{2y}=y-x+18$

$=> \sqrt{2y}=\frac{y-x+18}{6}\in Q$

$<=> \sqrt{2y}=a\in Q <=> 2y=a^2\in Q <=> \begin{cases} a^2\in N(Vi\ 2y\in Z\ \text{va a}\ge 0) \\ \text{a} \vdots 2 \end{cases}$

$a = 2m(m \in N)$

$=> 2y = (2m)^2 <=> y = 2m^2 <=> \sqrt{y} = m\sqrt{2}.TT => \sqrt{x} = n\sqrt{2}$

Pt (1) viết: $n\sqrt{2} + m\sqrt{2} = 3\sqrt{2} <=> m + n = 3(m;n \in N)$

$$<=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} n=0 \\ m=3 \end{cases} => \begin{cases} x=0 \\ y=18 \end{cases} \\ \begin{cases} n=1 \\ m=2 \end{cases} => \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} n=2 \\ m=1 \end{cases} => \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} n=3 \\ m=0 \end{cases} => \begin{cases} x=18 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy Pt đã cho có 4 nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=18 \end{cases}; \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}; \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}; \begin{cases} x=18 \\ y=0 \end{cases}$

Bài 13. *(Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2014)*

Tìm các số nguyên x và y thoả mãn phương trình $9x + 2 = y^2 + y$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với $9x = (y-1)(y+2)(1)$

Nếu y –1 $\vdots$ 3 thì $y + 2 = (y-1) + 3 \vdots 3 => (y-1)(y+2) \vdots 9$

Mà 9x $\vdots$9 $\forall x \in Z$ nên ta có mâu thuẫn.

Suy ray –1 $\vdots$ 3, do đó: y –1 = 3k($k \in Z$)=>y=3k+1($k \in Z$)

Thay vào (1) ta có: $9x = 3k(3k+3) => x = k(k+1)$

Vậy phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = k(k+1) \\ y = 3k+1 \end{cases} (k \in Z)$

Bài 14. *(Chuyên TP. Hồ Chí Minh 2014)*

Tìm cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn phương trình: $2015(x^2 + y^2) - 2014(2xy + 1) = 25$

Lời giải

$2015(x^2 + y^2) - 2014(2\text{xy} + 1) = 25$

$<=> 2014(\text{x} - \text{y})^2 + x^2 + y^2 = 2039$

Đặt t=|x-y| , $t \in N$ do x, y nguyên

Xét các trường hợp:

TH1: t = 0, tức x = y ⇒ phương trình vô nghiệm

TH2: t = 1, tức là x – y = ±1

+ Với x – y = 1 hay x = y + 1, phương trình trở thành:

$(y+1)^2+y^2=25 <=> y^2+y-12=0$

$<=> \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-4 \end{array}\right.$

Với y = 3 thì x = 4; với y = –4 thì x = –3

+ Với x – y = –1 hay x = y – 1, phương trình trở thành:

$(y-1)^2+y^2=25 <=> y^2-y-12=0$

$<=> \left[\begin{array}{l} y=-3 \\ y=4 \end{array}\right.$

Với y = –3 thì x = –4; với y = 4 thì x = 3

TH3: t ≥ 2, VT > VP ⇒ phương trình vô nghiệm

Vậy các cặp (x;y) thỏa là (4;3), (–3;–4), (–4;–3), (3;4)

Cách khác: Sử dụng phương pháp biến đổi phương trình về dạng vế trái là tổng của các bìnhphương. Vế phải là tổng của các số chính phương, hoặc cách điều kiện có nghiệm của phươngtrình bậc hai cũng có thể giải ra đáp số.

Câu 15. *(Chuyên Lam Sơn 2014)*

Tìm nghiệm của phương trình: $x^3+y^3-x^2y-xy^2=5$

Lời giải

$x^3+y^3-x^2y-xy^2=5$

$<=> (x+y)(x^2-xy+y^2)-\mathrm{xy(x+y)}=5$

$<=> \mathrm{(x+y)(x^2}-2xy+y^2)=5$

$<=> \mathrm{(x+y)(x-y)^2}=5$

Do (x-y)² ≥ 0 và x y thuộc Z nên xảy ra hai trường hợp:

Th1: $\begin{cases} x+y=5 \\ (x-y)^2=1 \end{cases} => \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} <=> \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right.$

Th2: $\begin{cases} x+y=1 \\ (x-y)^2=5 \end{cases} => \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\pm\sqrt{5} \end{cases}$ (L)

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x;y)\in\{(3;2);(2;3)\}$

Bài 16. *(Chuyên Hà Nội Amsterdam 2014)*

1) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn

$\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$

2) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thoả mãn $x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$

Lời giải

1) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x,y thỏa mãn
$$\begin{cases} p-1=2x(x+2) \\ p^2-1=2y(y+2) \end{cases}$$

Từ (1) ⇒ p – 1 là số chẵn ⇒ p là số nguyên tố lẻ.

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được
$p^2-p=2y^2-2x^2+4y-4x \Leftrightarrow p(p-1)=2(y-x)(y+x+2)(*)$

⇒ 2(y – x)(y + x + 2) ⋮ p. Mà (2;p) = 1 nên xảy ra 2 TH:

• y – x ⋮ p ⇒ y – x = kp (k ∈ N*)

Khi đó từ (*) ⇒ p – 1 = 2k(x + y + 2) ⇒ kp – k = $2k^2$(x + y + 2) ⇒ y – x – k = $2k^2$(x + y + 2)

(loại vì x + y + 2 > y – x – k > 0 ; $2k^2$> 1 ⇒ $2k^2$(x + y + 2) > y – x – k)

• y + x + 2 ⋮ p ⇒ x + y + 2 = kp (k ∈ N*)

Từ (*) ⇒ p – 1 = 2k(y – x) ⇒ kp – k = $2k^2$(y – x) ⇒ x + y + 2 – k = $2k^2$(y – x) (**)

Ta chứng minh k = 1. Thật vậy nếu k ≥ 2 thì từ (**) ⇒ x + y = $2k^2$(y – x) + k – 2 ≥ 8(y – x) (vì y – x > 0)
⇒ 9x ≥ 7y ⇒ 7y < 14x ⇒ y < 2x

Do đó từ (2) ⇒ (p – 1)(p + 1) = 2y(y + 2) < 4x(2x + 2) < 4x(2x + 4) = 8x(x + 2) = 4(p – 1)

(vì 2x(x + 2) = p – 1 theo (1))

⇒ p + 1 < 4 ⇒ p < 3, mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Do đó k = 1, suy ra

$$\begin{cases} x+y+2=p \\ p-1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ x+y+1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ y=3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ p-1=4x+2 \end{cases}$$

Thay p – 1 = 4x + 2 vào (1) ta có: $4x+2=2x(x+2) \Leftrightarrow 2x+1=x^2+2x \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$

⇒ y = 4, p = 7 (thỏa mãn)

Vậy x = 1, y = 4 và p = 7.

2) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thoả mãn $x^3+y^3+z^3=nx^2y^2z^2$ (1)

Giả sử n là số nguyên dương sao cho tồn tại các số nguyên dương x,y,z thỏa mãn (1)

Không mất tính tổng quát, giả sử x ≥ y ≥ z ≥ 1.

Từ (1) $\Rightarrow 0<y^3+z^3=x^2(ny^2z^2-1) \Rightarrow ny^2z^2-1>0 \Rightarrow ny^2z^2-1 \geq 1$

$\Rightarrow y^3+z^3=x^2(ny^2z^2-1) \geq x^2 (*)$

Vì x ≥ y ≥ z nên $3x^3 \ge x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2 \Rightarrow ny^2z^2 \Rightarrow 9x^2 \ge n^2y^4z^4$

Kết hợp với (*) ta có $9\left(y^3+z^3\right) \ge 9x^2 \ge n^2y^4z^4 \Rightarrow 9\left(1+\dfrac{z^3}{y^3}\right) \ge n^2yz^4$

Mà $y \ge z \Rightarrow \dfrac{z^3}{y^3} \le 1 \Rightarrow n^2yz^4 \le 9\left(1+\dfrac{z^3}{y^3}\right) \le 18(**)$

Ta có: $(**) \Rightarrow z^4 \le 18 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=2 \end{array}\right.$

- Nếu z = 2 : $(**)\ \Rightarrow 16n^2y \le 18 \Rightarrow n = y = 1$ (loại vì y < z)
- Nếu z = 1 : $(**)\ \Rightarrow n^2y \le 18 \Rightarrow n^2 \le 18 \Rightarrow n \le 4$

Ta chứng minh n ∉ {2;4}. Thật vậy,

*Nếu n = 4 thì từ $n^2y \le 18 \Rightarrow 16y \le 18 \Rightarrow y = 1$. Từ (1) ⇒ $x^3 + 2 = 4x^2 \Rightarrow x^2(4 - x) = 2 \Rightarrow x^2$ là ước của 2 ⇒ x = 1 (không thỏa mãn)

*Nếu n = 2 thì từ $n^2y \le 18$ suy ra $4y \le 18 \Rightarrow 1 \le y \le 4$.

+ $y=1: (1) \Rightarrow x^3 - 2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2(x-2) = -2 < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x = 1(L)$

+ $y=2: (1) \Rightarrow x^3 - 8x^2 + 9 = 0 \Rightarrow 9 = x^2(8-x)$. Suy ra x^2 là ước của 9. Mà $x^2 \ge y^2 = 4$ nên x=3 (không thỏa mãn)

+ $y=3: (1) \Rightarrow x^3 - 18x^2 + 28 = 0 \Rightarrow x^2(18-x) = 28.$ Suy ra x^2 là ước của 28. Mà $x^2 \ge y^2 = 9$ nên không tồn tại x thỏa mãn.

+ $y=4: (1) \Rightarrow x^3 - 32x^2 + 65 = 0 \Rightarrow x^2$ là ước của 65 (loại vì 65 không có ước chính phương)

Vậy n ∉ {2;4}. Do đó n ∈ {1;3}

Thử lại với n = 1, tồn tại bộ (x;y;z) nguyên dương chẳng hạn (x;y;z) = (3;2;1) thỏa mãn (1)

với n = 3, tồn tại bộ (x;y;z) = (1;1;1) thỏa mãn (1).

Vậy tất cả các giá trị n thỏa mãn bài toán là n ∈ {1;3}

$y=4: (1) \Rightarrow x^3 - 32x^2 + 65 = 0 \Rightarrow x^2$ là ước của 65 (loại vì 65 không có ước chính phương)

Vậy n ∉ {2;4}. Do đó n ∈ {1;3}

Thử lại với n = 1, tồn tại bộ (x;y;z) nguyên dương chẳng hạn (x;y;z) = (3;2;1) thỏa mãn (1)

với n = 3, tồn tại bộ (x;y;z) = (1;1;1) thỏa mãn (1).

Vậy tất cả các giá trị n thỏa mãn bài toán là n ∈ {1;3}

Bài 17. *(Chuyên Bạc Liêu 2015)*

Tìm nghiệm (x; y) của phương trình $x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$ với x, y thuộc N*.

Lời giải

Ta có: $x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$

<=> $x^2 + 2xy + xy + 2y^2 - 8(x + y) - (x + 2y) + 8 = 0$

<=> $x(x + 2y) + y(x + 2y) - 8(x + y) - (x + 2y) + 8 = 0$

<=> $(x + y - 1)(x + 2y) - 8(x + y - 1) = 0$

<=> $(x + y - 1)(x + 2y - 8) = 0$ (a)

Với $x \ge 1$, $y \ge 1$ (vì thuộc N*) suy ra $x + y - 1 \ge 1 > 0$

Do đó (a) <=> $x + 2y = 8$

Ta có $2y \le 8 - 1 = 7$

Nên $y \le 7/2$

Mà y thuộc N* suy ra y = 1; 2; 3

Lập bảng kết quả

x	1	2	3
y	6	4	2

Vậy tập hợp bộ số (x, y) thỏa mãn là {(6; 1), (4; 2), (2; 3)}

Bài 18. *(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình 2015)*

Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = z \\ x^3 + y^3 = z^2 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $x^3 + y^3 = (x+y)^2 <=> (x+y)(x^2 - xy + y^2 - x - y) = 0$

Vì x, y nguyên dương nên x+y > 0, ta có: $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$

$<=> 2(x^2 - xy + y^2 - x - y) = 0$

$<=> (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

Vì x, y nguyên nên có 3 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x - y = 0 \\ (x-1)^2 = 1 <=> x = y = 2, z = 4 \\ (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ (x-y)^2 = 1 <=> x = 1, y = 2, z = 3 \\ (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} y-1=0 \\ (x-y)^2=1 <=> x=2, y=1, z=3 \\ (x-1)^2=1 \end{cases}$

Vậy hệ có 3 nghiệm (1,2,3);(2,1,3);(2,2,4)

Bài 19.*(Chuyên Hùng Vương Phú Thọ 2015)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2-2y(x-y)=2(x+1)$

Lời giải

Ta có

$x^2-2y(x-y)=2(x+1) <=> x^2-2(y+1)x+2(y^2-1)=0(1)$

Để phương trình (1) có nghiệm nguyên x thì Δ' theo y phải là số chính phương

Ta có $\Delta'=y^2+2y+1-2y^2+2=-y^2+2y+3=4-(y-1)^2\le 4$

Δ'chính phương nên $\Delta' \in\{0;1;4\}$

+ Nếu $\Delta'=4 => (y-1)^2=0 <=> y=1$ thay vào phương trình (1) ta có :

$x^2-4x=0 <=> x(2-4) <=> \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x-4 \end{array}\right.$

+ Nếu $\Delta'=1 => (y-1)^2=3 <=> y\notin Z.$

+ Nếu $\Delta'=0 => (y-1)^2=4 <=> \left[\begin{array}{l} y=3 \\ y=-1 \end{array}\right.$

+ Với y = 3 thay vào phương trình (1) ta có: $x^2-8x+16=0 <=> (x-4)^2=0 <=> x=4$

+ Với y =-1 thay vào phương trình (1) ta có: $x^2=0 <=> x=0$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên : $(x;y)\in\{(0;1);(4;1);(4;3);(0;-1)\}$

Bài 20. *(Chuyên Nam Định 2015)*

Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn

$$\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879.$$

Lời giải

$\left(2^x+1\right)\left(2^x+2\right)\left(2^x+3\right)\left(2^x+4\right)-5^y=11879.$

$\Leftrightarrow\left(2^{2x}+5.2^x+4\right)\left(2^{2x}+5.2^x+6\right)-5^y=11879 \qquad (1)$

Đặt $t=2^{2x}+5.2^x+5, t\in\mathbb{N}^*,$ ta có:

$(1)\Leftrightarrow(t-1)(t+1)-5^y=11879$

$\Leftrightarrow t^2-5^y=11880(2)$

Xét các TH sau:

• TH1: $y \geq 2 \Rightarrow 5^y \vdots 25$

Từ (2) suy ra $t^2 \vdots 5 \Rightarrow t^2 \vdots 25$. Do đó từ (2) $\Rightarrow 11880 \vdots 25$ (vô lí)

• TH2: $y = 1$

(2) $\Leftrightarrow t^2 = 11885$ (loại vì 11885 không phải là số chính phương)

• TH3: $y = 0$

(2) $\Leftrightarrow t^2 = 11881 \Rightarrow t = 109$

$\Rightarrow 2^{2x} + 5.2^x + 5 = 109 \Rightarrow 2^{2x} + 5.2^x - 104 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x = 8(tm) \\ 2^x = -13(L) \end{array}\right. \Rightarrow x = 3.$$

Vậy x = 3, y = 0 là các số tự nhiên cần tìm.

Bài 21. *(Chuyên Nguyễn Du – Đắc Lắc)*

Tìm tất cả các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617}$

Lời giải

Ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow xy - 617(x+y) = 0 \Leftrightarrow xy - 617x - 617y + 617^2 = 617^2$$

$$\Leftrightarrow (x-617)(y-617) = 617^2$$

Vì x, y nguyên dương nên x – 617 và y – 617 là ước lớn hơn –617 của 617^2.

Do 617 là số nguyên tố nên xảy ra 3 trường hợp:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 617 = 617 \\ y - 617 = 617 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 617 = 1 \\ y - 617 = 617^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 617 = 617^2 \\ y - 617 = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1234 \\ x = 618; y = 381306 \\ x = 381306; y = 618 \end{array}\right.$$

Vậy tất cả các cặp (x;y) nguyên dương cần tìm là (1234;1234) , (618; 381306), (381306; 618)

Bài 22. *(Chuyên Nguyễn Trãi Hải Dương 2015)*

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0.$

Lời giải

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$

Ta thấy $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \leq x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$

$\Leftrightarrow x^2(x^2+1) < y(y+1) \le (x^2+4)(x^2+5)$

Vì x, y $\in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau

+ TH1. $y(y+1) = (x^2+1)(x^2+2) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Với $x^2 = 9$, ta có $y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0$

$\Leftrightarrow y = 10; y = -11 (t.m)$

+ TH2. $y(y+1) = (x^2+2)(x^2+3) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{7}{2}$ (loại)

+ TH3. $y(y+1) = (x^2+3)(x^2+4) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4}{3}$ (loại)

+ TH4. $y(y+1) = (x^2+4)(x^2+5) \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Với $x^2 = 0$, ta có $y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5; y = 4$

Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên (x;y) là :

(3;10), (3;-11), (-3; 10), (-3;-11), (0; -5), (0;4).

Bài 23. *(Chuyên Quảng Trung – Bình Phước 2015)*

Giải phương trình trên tập số nguyên $x^{2015} = \sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)} + 1$ (1)

Lời giải

$x^{2015} = \sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)} + 1$ (1)

Có $y(y+1)(y+2)(y+3) = [y(y+3)][(y+1)(y+2)] = (y^2+3y)(y^2+3y+2)$

Đặt $t = y^2 + 3y + 1 \Rightarrow y(y+1)(y+2)(y+3) = t^2 - 1$ ($t \in \mathbb{Z}$, $t^2 \ge 1$)

(1) $\Leftrightarrow x^{2015} - 1 = \sqrt{t^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2015} - 1 \ge 0 \\ (x^{2015} - 1)^2 = t^2 - 1 (2) \end{cases}$

Với x, t là số nguyên ta có:

(2) $\Leftrightarrow \left(x^{2015} - 1 + t\right)\left(x^{2015} - 1 - t\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^{2015} - 1 + t = 1 \\ x^{2015} - 1 - t = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x^{2015} - 1 + t = -1 \\ x^{2015} - 1 - t = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^{2015} = t = 1 \\ \begin{cases} x^{2015} = 1 \\ t = -1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $x^{2015} = t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + 3y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = -3 \end{array}\right. \end{cases}$

Với $\begin{cases} x^{2015}=1 \\ t=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y^2+3y+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=-1 \\ y=-2 \end{array}\right. \end{cases}$

Thử lại ta thấy các cặp (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0) thỏa mãn đề bài

Vậy có 4 cặp (x;y) cần tìm là (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0)

Bài 24. *(Chuyên Quốc Học Huế - Thừa Thiên Huế 2015)*

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x; y) thỏa mãn $x^4-2x^3+6x^2-4y^2-32x+4y+39=0$

Lời giải

Ta có:

$x^4-2x^3+6x^2-4y^2-32x+4y+39=0$

$<=> x^4-2x^3+6x^2-32x+40=4y^2-4y+1$

$<=> (x-2)^2(x^2+2x+10)=(2y-1)^2$

Vì y là số nguyên nên 2y – 1 ≠ 0 ⇒ x ≠ 2

Vì $(2y-1)^2$ và $(x-2)^2$ là số chính phương khác 0 nên $x^2+2x+10$ là số chính phương.

Đặt $x^2+2x+10=m^2$ $(m\in N^*)$ suy ra

$(x+1)^2+9=m^2$

$<=> (x+1-m)(x+1+m)=-9$

$<=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1+m=9 \\ x+1-m=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1+m=1 \\ x+1-m=-9 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1+m=3 \\ x+1-m=-3 \end{cases} \end{array}\right. (Do\text{ x+1+m>x+1-m}) <=> \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ m=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-5 \\ m=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ m=3 \end{cases} \end{array}\right.$

- x = 3 ⇒ $(2y-1)^2=25$ ⇒ y = 3 hoặc y = –2
- x = –5 ⇒ $(2y-1)^2=1225$ ⇒ y = 18 hoặc y = –17
- x = –1 ⇒ $(2y-1)^2=81$ ⇒ y = 5 hoặc y = –4

Vậy các bộ (x;y) nguyên thỏa yêu cầu bài toán là:

(3;3),(3;–2),(–5;18),(–5;–17),(–1;5),(–1;–4)

Bài 25. *(Chuyên KHTN Hà Nội 2011)*

a) Chứng minh không tồn tại các bộ số nguyên (x, y, z) thỏa mãn $x^4+y^4=7z^4+5$

b) Tìm tất cả các nguyện nguyên thỏa mãn đẳng thức $(x+1)^4-(x-1)^4=y^3$

Lời giải

a) Giải sử tồn tại (x, y, z) thỏa mãn $x^4 + y^4 = 7z^4 + 5 \Leftrightarrow x^4 + y^4 + z^4 = 8z^4 + 5 \quad (*)$

Ta có $a^4 \equiv 0,1 \pmod 8$ với mọi số nguyên a $\Rightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 \equiv 0,1,2,3 \pmod 8 \\ 8z^4 + 5 \equiv 5 \pmod 8 \end{cases}$

Mâu thuẫn với (*) vậy không tồn tại (x, y, z) thỏa mãn đẳng thức.

b) Phương trình tương đương với

$$\left[(x+1)^2 + (x-1)^2\right]\left[(x+1)^2 - (x-1)^2\right] = y^3 \Leftrightarrow (2x^2+2).4x = y^3 \Leftrightarrow 8x^3 + 8x = y^3.$$

Nếu $x \geq 1 \Rightarrow 8x^3 < 8x^3 + 8x < (2x+1)^3 \Leftrightarrow (2x)^3 < y^3 < (2x+1)^3$ (mâu thuẩn với y nguyên)

Nếu $x \leq -1$ và (x, y) là nghiệm, ta suy ra (-x, -y) cũng là nghiệm mà $-x \geq 1 \Rightarrow$ mâu thuẫn

Nếu x = 0 thì y = 0 (mâu thuẫn)

Vậy (x, y) = (0, 0) là nghiệm duy nhất

Chủ đề 3. Các bài phương trình nghiệm nguyên qua trong đề Olimpic 30/4

Bài 26. *(Đề đề nghị THPT TP. Cao Lãnh – Đồng Tháp)*

Tìm tất cả các số tự nhiên x, y thỏa mãn phương trình:

$$\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)^4 = 3361 - \sqrt{11296320}$$

Lời giải

Nhận thấy x, y là các số nguyên không âm và $\sqrt{11296320} = 2^3.41.\sqrt{105}$ là số vô tỷ.

Phương trình đã cho có thể viết lại:

$$(x+y)^2 + 4xy - 3361 = 4(x+y)\sqrt{xy} - 328\sqrt{105} \qquad (1)$$

Vế trái của (1) là số hữu tỉ nên điều kiện cần và đủ để phương trình có nghiệm nguyên là của vế trái và vế phải của (1) đều bằng 0. Khi đó ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x+y)^2 + 4xy - 3361 \\ 4(x+y)\sqrt{xy} - 328\sqrt{105} = 0 \end{cases}$$

Đặt $S = x + y, P = xy$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases} S^2 + 4P - 3361 & (2) \\ S\sqrt{P} = 82\sqrt{105} & (3) \end{cases}$

Từ (3) rút ra được: $P = \dfrac{82^2.105}{S^2}$. Thay vào (2) thu gọn ta được:

$$S^4 - 3361.S^2 + 4.82.105 = 0 \Leftrightarrow S^2 = 1681 \vee S^2 = 1680 = 41^2$$

Do đó: $S = 41, P = 420.$

Suy ra x, y là nghiệm của phương trình:

$t^2-42t+420=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=20 \\ t=21 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 2 nghiệm (20 ; 21) và (21 ; 20).

Bài 27. *(Đề đề nghị THPT Bạc Lưu)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $\dfrac{|4x-6y|+|9x-6y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{313}$ (1)

Lời giải

Ta thấy (x, y) = (0 , 0) không là nghiệm của phương trình.

Với x, y khác 0: $(1) \Leftrightarrow |4x-6y|+|9x-6y|=\sqrt{313\left(x^2+y^2\right)}$

Ta dễ dàng chứng minh được: $|A|+|B|=\begin{cases} |A+B| \ (A.B \geq 0) \\ |A-B| \ (A.B<0) \end{cases}$

Nếu $(4x-6y)(9x-6y) \geq 0$ thì

$(2) \Leftrightarrow |13x-12y|=\sqrt{313\left(x^2+y^2\right)} \Leftrightarrow 144x^2+2.13.12xy+169y^2=0 \Leftrightarrow 12x+13y=0$

Vì (13,12) = 1 nên $(x, y)=(13k;-12k)$ với $k \in Z$ và $k \neq 0$

Nếu $(4x-6y)(9x-6y)<0$ thì

$(2) \Leftrightarrow |5x|=\sqrt{313\left(x^2+y^2\right)} \Leftrightarrow 288x^2+313y^2=0 \ (VN)$

vậy phương trình có nghiệm $(x, y)=(13k;-12k)$ với $k \in Z$ và $k \neq 0$

Bài 28. *(Đề đề nghị Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2+x+1=2xy+y$

Lời giải

Phương trình đã cho được viết dưới dạng: $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4(2x+1)} \Leftrightarrow 4y=2x+1+\dfrac{3}{2x+1}$

Vì $x, y \in Z \Rightarrow 2x+1$ là ước của 3 $\Rightarrow 2x+1 \in \{1;-1;3;-3\}$

Vậy nghiệm của phương trình là: $(0;1),(-1;-1),(1;1)(-2;-1)$

Bài 29. *(Đề đề nghị Chuyên Quang Trung – Bình Phước)*

Chứng tỏ rằng số: $444444+303030\sqrt{3}$ không viết dưới dạng $\left(x+y\sqrt{3}\right)^2$ với $x, y \in Z$

Lời giải

Nếu $\left(A+B\sqrt{3}\right)^2=C+D\sqrt{3}$ thì $C=A^2+3B^2, D=2AB \Rightarrow \left(A-B\sqrt{3}\right)^2=C-D\sqrt{3}$

Do đó nếu $\left(x+y\sqrt{3}\right)^2 = 444444+303030\sqrt{3}$

Thì ta cũng có: $\left(x-y\sqrt{3}\right)^2 = 444444-303030\sqrt{3}$ (vô lý)

Do $444444-303030\sqrt{3}<0$.

Bài 30. *(Đề đề nghị THPT Hùng Vương – Lê Lai)*

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn phương trình:

$$9\left(x^2+y^2+2\right)+2\left(3xy-1\right)=2008$$

Lời giải

Đặt s = x + y, p = x. y khi đó $s, p \in N^*$. Lúc đó phương trình trở thành:

$3s^2 = 4p+664$ (1)

Nếu p =1 thì $s \notin N^*$ (mâu thuẫn)

Vì vậy $p \geq 2$ và $3s^2 \geq 672 \Rightarrow s^2 \geq 224$ (2)

Mặt khác từ điều kiện: $s^2 \geq 4p$, ta có $3s^2 - 664 \leq s^2$. Vì vậy: $s^2 \leq 332$ (3)

Từ (2) và (3) ta có: $s^2 \in \{256; 324\}$

a) $s^2 = 256 \Rightarrow s=16, p=26 \Rightarrow x \notin N^*$.

b) $s^2 = 324 \Rightarrow s=18, p=77 \Rightarrow (x,y)=(11,7);(7,11)$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm (x, y) = (11, 7); (7,11).

Bài 31. *(Đề đề nghị Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên)*

Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^3+x^2y+xy^2+y^3=8\left(x^2+xy+y^2+1\right)$

Lời giải

Ta có:

$x^3+x^2y+xy^2+y^3=8\left(x^2+xy+y^2+1\right)$

$\Leftrightarrow x\left(x^2+y^2\right)+y\left(x^2+y^2\right)=8\left(x^2+y^2\right)+8xy+8$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)\left(x+y-8\right)=8xy+8$ (1)

Suy ra: x, y chung tính chăn lẻ và (x + y – 8) là số chẵn.

Nếu $x+y-8 \geq 6$ thì $x^2+y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{2} \geq \dfrac{14^2}{2} > 4$

Suy ra: $\left(x^2+y^2\right)\left(x+y-8\right) \geq 6\left(x^2+y^2\right) \geq 2\left(x^2+y^2\right)+8xy > 8+8xy,$ phương trình (1) không thỏa.

Nếu $x+y-8\le -4$ thì $\left(x^2+y^2\right)\left(x+y-8\right)\le -4\left(x^2+y^2\right)\le 8xy<8+8xy$, phương trình (1) không thỏa.

Nếu $x+y-8=2$ thì $\left(1\right)\Leftrightarrow x^2+y^2=4xy+4$. Khi đó:

$x+y=10, xy=16\Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=8\end{cases}\vee\begin{cases}x=8\\ y=2\end{cases}$

Nếu $x+y-8=0$ thì $\left(1\right)\Leftrightarrow 8xy+8=0\Leftrightarrow xy+1=0,$ phương trình không có nghiệm nguyên vì x + y = 8

Nếu $x+y-8=-2$ thì $\left(1\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+4xy+4=0$. Khi đó: $x+y=6, xy=-20$ không có nghiệm nguyên.

Kết luận: Nghiệm nguyên của phương trình là (x, y) = (2, 8) ; (8, 2).

Bài 32. Tìm nghiệm nguyên của phương trình

$$x^2+17y^2+34xy+51\left(x+y\right)=1740$$

Lời giải

Phương trình đã cho có dạng: $x^2+17\left[y^2+2xy+3\left(x+y\right)\right]=1740$

Chú ý rằng với số x nguyên, x có thể có dạng như sau:

$x=17k\pm r$ với $r\in\left\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\right\}$ và $k\in Z$

Từ đó suy ra: $x^2\in\left\{17k,17k+1,17k+4,17k+9,17k+8,17k+16,17k+2,17k+15,17k+13\right\}$.

Nhận thấy rằng vế phải là 1740 khi chia cho 17 có số dư là 6. Tron khi đó vế trái khi chia cho 17 trong mọi trường hợp đều không có số dư là 6. Vậy phương trình đã cho không có nghiệm nguyên.

Bài 33. Tìm tất cả các cặp (x, y, z) là các số nguyên thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ x^3+y^3+z^3=3\end{cases}$$

Lời giải

Ta có:

$\left(x+y+z\right)^3-\left(x^3+y^3+z^3\right)=3\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$

$\Leftrightarrow 27-3=3\left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)$

$\Leftrightarrow \left(x+y\right)\left(y+z\right)\left(z+x\right)=8\quad(*)$

Đặt $\begin{cases}x+y=a\in Z\\ y+z=b\in Z\\ z+x=c\in Z\end{cases}$. Khi đó: $(*)\Leftrightarrow abc=8\Rightarrow a,b,c\in\left\{\pm 1;\pm 2;\pm 4;\pm 8\right\}$

Vì x, y, z vai trò bình đẳng nên ta giải sử: $x\le y\le z\Rightarrow a\ge b\ge c$

Khi đó ta có: $a+b+c=2(x+y+z)=2.3=6 \Rightarrow a \geq 2$

Với a = 2 ta có: $\begin{cases} b+c=4 \\ bc=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ c=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=z=1$

Với a = 4 ta có: $\begin{cases} b+c=2 \\ bc=1 \end{cases}$ (không có nguyện nguyên)

Với a = 8 ta có: $\begin{cases} b+c=-2 \\ bc=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x-5; y=4; z=4$.

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm: $(x,y,z)=(1,1,1);(4,4,-5);(4,-5,4);(-5,4,4)$.

Bài 34. Tìm số nguyên x, y, z thỏa mãn các đẳng thức: $\begin{cases} x-y+z=2 \quad (1) \\ 2x^2-xy+x-2z=1 \quad (2) \end{cases}$

Lời giải

Từ (1) ta được z = 2 + y – x thay vào (2) ta được:

$2x^2-xy+x-4-2y+2x=1 \Leftrightarrow 2x^2+3x-5=y(x+2)$

Do x = - 2 không thỏa mãn phương trình trên nên:

$y=\dfrac{2x^2+3x-5}{x+2}=2x-1-\dfrac{3}{x+2}$

y nguyên nên (x + 2) là ước của 3. Suy ra: $\left[\begin{array}{l} x+2=\pm 1 \\ x+2=\pm 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \in \{-1;-3;1;-5\}$

Từ đó suy nghiệm của hệ là: $(x,y,z)=(1;-6;-3),(-3;-4;1),(1;0;1),(-5;-10;-3)$

Bài 35. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn phương trình:

$3x^2+6y^2+2z^2+3x^2y^2-18x-6=0.$

Lời giải

Ta có:

$3x^2+6y^2+2z^2+3x^2y^2-18x-6=0$

$\Leftrightarrow 3(x^2-6x+9)+6x^2+2z^2+3y^2z^2=33$

$\Leftrightarrow 3(x-3)^2+(3y^2+2)(z^2+2)=37$

Dễ dàng thấy: $3(x-3)^2 \leq 33 \Leftrightarrow (x-3)^2 \leq 11$

Suy ra: $(x-3)^2 \in \{0,1,4,9\}$

+ Với $(x-3)^2=0 \Rightarrow (3y^2+2)(z^2+2)=37$

Nhận xét: $3y^2+2 \geq 2$ và $z^2+2 \geq 2$ (*)

Vậy trương trường hợp này phương trình vô nghiệm

+ Với $(x-3)^2=1 \Rightarrow (3y^2+2)(z^2+2)=34$. Do (*) nên $\begin{cases}3y^2+2=17\\ z^2+2=2\end{cases} \vee \begin{cases}3y^2+2=2\\ z^2+2=17\end{cases}$

Không tồn tại giá trị nguyên của x, y nên trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

+ Với $(x-3)^2=4 \Rightarrow (3y^2+2)(z^2+2)=25$. Do (*) nên $\begin{cases}3y^2+2=5\\ z^2+2=5\end{cases}$

Không tồn tại giá trị nguyên của x, y nên trong trường hợp này phương trình vô nghiệm.

+ Với $(x-3)^2=9$:

$\Rightarrow (3y^2+2)(z^2+2)=10 \Leftrightarrow \begin{cases}3y^2+2=2\\ z^2+2=5\end{cases} \vee \begin{cases}3y^2+2=5\\ z^2+2=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\ z=0\end{cases} \vee \begin{cases}y=-1\\ z=0\end{cases}$

Kết luận phương trình đã cho có 4 nghiệm nguyên:

$(x,y)=(6,1,0);(6,-1,0);(0,1,0);(0,-1,0)$

Bài 36. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) thỏa mãn đẳng thức:

$$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25.$$

Lời giải

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a,b) *thỏa mãn đẳng thức:*

$$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25.$$

$a^3-b^3+3(a^2-b^2)+3(a-b)=(a+1)(b+1)+25$

$\Leftrightarrow (a^3+3a^2+3a+1)-(b^3+3b^2+3b+1)=(a+1)(b+1)+25$

$\Leftrightarrow (a+1)^3-(b+1)^3=(a+1)(b+1)+25$ (*)

Đặt $x=a+1, y=b+1 (x,y\in Z; x,y\geq 2)$.

Khi đó (*) trở thành: $x^3-y^3=xy+25 \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)=xy+25$ (**)

+ Từ (**) suy ra $x>y \Rightarrow x-y\geq 1$, mà $x^2+xy+y^2>0$ nên:

$x^2+xy+y^2\leq xy+25 \Rightarrow x^2+y^2\leq 25 \Rightarrow x\leq 4$ (1).

+ Hơn nữa: $x>y$ và $x,y\geq 2$ nên $xy\geq 6$.

Suy ra $x^3-y^3=xy+25\geq 31 \Rightarrow x^3>31 \Rightarrow x>3$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $x=4$. Do $x>y$ và $y\geq 2$ nên $y\in\{2;3\}$.

+ Thử lại, chỉ có $\begin{cases}x=4\\ y=3\end{cases}$ thỏa (**). Suy ra $\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$ là cặp số cần tìm.

Bài 37. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thoả mãn phương trình:

$$\left(x^2+4y^2+28\right)^2=17\left(x^4+y^4+14y^2+49\right)$$

Lời giải

$PT \Leftrightarrow \left[x^2+4\left(y^2+7\right)\right]=17\left[x^4+\left(y^2+7\right)^2\right]$

$\Leftrightarrow 16x^4-8x^2\left(y^2+7\right)+\left(y^2+7\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[4x^2-\left(y^2+7\right)\right]^2=0$

$\Leftrightarrow 4x^2-y^2-7=0 \Leftrightarrow (2x+y)(2x-y)=7$

Do x, y nguyên dương nên $2x+y \geq 2x-y$ và $2x+y>0$

Vậy $\begin{cases} 2x+y=7 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)=(2;3)$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)=(2;3)$

Chủ đề 3. Các bài toán phương trình nghiệm nguyên trong tạp trí toán học và tuổi trẻ

Bài 38. Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình $x^2(y-5)-xy=x-y+1$.

Lời giải

$x^2(y-1)-xy=x-y+1 \Rightarrow y\left(x^2-x+1\right)=5x^2+x+1 \Rightarrow y=\dfrac{5x^2+x+1}{x^2-x-1}=5+\dfrac{6x-4}{x^2-x+1}$ (1)

Do $x^2-x+1=(x-1)^2+\dfrac{3}{4}>0$ và $x^2-x+1=x(x-1)+1$ là số lẻ

Mặt khác y là số nguyên nên phải có $(3x-2)\vdots\left(x^2-x+1\right)$ hay $\left(3x^2-2x\right)\vdots\left(x^2-x+1\right)$

Lại có: $3\left(x^2-x+1\right)\vdots\left(x^2-x+1\right)$. Suy ra: $(x-3)\vdots\left(x^2-x+1\right) \Rightarrow (3x-9)\vdots\left(x^2-x+1\right)$

Ta có: $\begin{cases} (3x-9)\vdots\left(x^2-x+1\right) \\ (3x-2)\vdots\left(x^2-x+1\right) \end{cases} \Rightarrow 7\vdots\left(x^2-x+1\right)$

Nếu $x^2-x+1=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$. ta được nghiệm (0, 1); (1, 7)

Nếu $x^2-x+1=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right.$

Với x = -2 thì y không nguyên

Với x = 3 thì y = 7.

Vậy phương trình cso 3 nghiệm (x, y) = (0, 1); (1, 7); (3, 7).

Bài 39. Tìm các bộ số nguyên $(a.b,c,d)$ thỏa mãn hệ $\begin{cases} ac-3bd=4 \\ ad+bc=3 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $25=(ac-3bd)^2+(ad+bc)^2=8(bd)^2+(ac-bd)^2+(ad-bc)^2\le 8(bd)^2$.

Suy ra $(bd)^2\le\frac{25}{8}<4$ mà bd nguyên nên $|bd|<1$

Với bd = 0 thì ta tìm được các bộ số (a, b, c, d) như sau

$(1,0,4,3),(-1,0,-4,-3),(4,3,1,0),(-4,-3,-1,0)$

Bài 40. Một tam giác có số đo 3 cạnh là các số nguyên x, y, z thỏa mãn

$$2x^2+3y^2+2z^2-4xy+2xz-20=0.$$

Chứng minh tam giác đó là tam giác đều

Lời giải

Ta có: $2x^2+3y^2+2z^2-4xy+2xz-20=0.$

$\Leftrightarrow (x-y+z)^2+(x-y)^2+(y+z)^2=20.$

Ta thấy 20 chỉ có một dạng phân tích thành tổng bình phương 3 số đó là: $20=0^2+2^2+4^2$ Do $x-y+z>0, y+z>0\Rightarrow x-y=0$

Từ đây ta giải ra được nghiệm x = y = z = 2 tức là tâm giác đều

Bài 41. Chứng minh rằng phương trình sau không có nghiệm nguyên dương

$$x^2+y^3=(x+y)^2+(xy)^2$$

Lời giải.

Giả sử phương trình có nghiệm dương (x, y)

Với các số dương a, b kí hiệu (a, b) là ước chung lớn nhất của a và b.

Đặt $(x,y)=d$ ta có $x=dx_1, y=dy_1$ với $x_1,y_1\in N^*$ và $(x_1,y_1)=1$. Khi đó:

$(1)\Leftrightarrow d\left(x_1^3+y_1^3\right)=(x_1+y_1)^2+(x_1y_1)^2$ (2)

Với lưu ý rằng $(x_1y_1)^2 \;\vdots\; (x_1+y_1)$ (3)

Từ $(x_1,y_1)=1$ suy ra $(x_1y_1, x_1+y_1)=1$. Kết hợp với (3) ta được $x_1y_1\;\vdots\;(x_1+y_1)$ và đó đó $x_1+y_1=1$, mâu thuẫn với $x_1,y_1\in N^*$

Vậy phương trình đã cho không cso nghiệm nguyên dương.

Bài 42. Tìm nghiệm tự nhiên của phương trình

$$x^2y^3-4xy^3+y^2+x^2-2y-3=0.$$

Lời giải

Xét phương trình:

$$x^2y^3 - 4xy^3 + y^2 + x^2 - 2y - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(xy^3+1\right) - 4\left(xy^3+1\right) + \left(y^2 - 2y + 1\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(xy^3+1\right)\left(x^2-4\right) + \left(y-1\right)^2 = 0 \qquad (2)$$

Ta thấy với x, y là số tự nhiên thì :

$$xy^2 + 1 > 0, \quad \left(y-1\right)^2 \geq 0$$

Do đó $x^2 - 4 \leq 0$. Nghĩa là x chỉ có thể lấy các giá trị 0, 1, 2

Với x = 0 thay vào (2) ta được: $y^2 - 2y - 3 = 0$ hay y = -1 (loại) hoặc y = 3.

Với x = 1 thì $3y^3 + 3 - (y-1)^2 = 0$ (vô nghiệm)

Với x = 2 thì y = 1

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là (2, 1) (0, 3).

Bài 43. Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình $\begin{cases} x + y = z \\ x^3 + y^3 = z^2 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $x^3 + y^3 = (x+y)^2 <=> (x+y)(x^2 - xy + y^2 - x - y) = 0$

Vì x, y nguyên dương nên x+y > 0, ta có: $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$

$<=> 2(x^2 - xy + y^2 - x - y) = 0$

$<=> (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$

Vì x, y nguyên nên có 3 trường hợp:

+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x - y = 0 \\ (x-1)^2 = 1 <=> x = y = 2, z = 4 \\ (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ (x-y)^2 = 1 <=> x = 1, y = 2, z = 3 \\ (y-1)^2 = 1 \end{cases}$

+ Trường hợp 3: $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ (x-y)^2 = 1 <=> x = 2, y = 1, z = 3 \\ (x-1)^2 = 1 \end{cases}$

Vậy hệ có 3 nghiệm (1,2,3);(2,1,3);(2,2,4)

Bài 44. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}$

Lời giải

Ta có: $x^2-xy+y^2=\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(x-y)^2$

$\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}=\frac{3}{7}\Leftrightarrow 7(x-y)=3\left(x^2-xy+y^2\right)\Leftrightarrow 7(x-y)=\frac{9}{4}(x+y)^2+\frac{3}{4}(x-y)^2$

Đặt $p=x+y,q=x-y$

Khi đó ta có: $28p=3\left(p^2+3q^2\right)$ (2) , từ đó suy ra $28p\,\vdots\,3\Rightarrow p\,\vdots\,3$. Đặt p = 3k $(k\in Z)$

Thay giá trị của p vào (2) ta có: $28k=3\left(3k^2+q^2\right)$ (3)

Suy ra $k\,\vdots\,3\Rightarrow k=3m(m\in Z)$.

Thay k = 3m vào (3) ta được:

$28m=27m^2+q^2\Rightarrow m(27m-28)=-q^2\le 0\Rightarrow 0\le m\le\frac{28}{27}\Rightarrow m=0\vee m=1$

Với m = 0 thì q = p = 0 suy ra x = 0, y = 0 (loại)

Với m = 1 thì p = 9 và q = 1 hoặc q = - 1.

Từ đó suy ra x = 5, y = 4 hoặc x = 4, y = 5

Vậy phương trình có 2 nghiệm (x, y) = (5, 4); (4, 5).

Bài tập tự giải.

Câu 1 . Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^{1994}+y^{1994}=4691^{4691}(x+1).$$

Câu 2. Tìm tất cả các số nguyên (a, b, c, d) thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$\begin{cases}a^3+3b=c^3\\ b^3+3a=d^3\end{cases}$$

Câu 3. Tìm nghiệm nguyên của phương trình $54x^3+1=y^3$.

Câu 4. Tìm cặp số nguyên x, y sao cho $\frac{x^3+x}{xy-1}$ là số nguyên dương

Câu 5. Tìm các bộ số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $x+2y+2z=xyz$.

Câu 6. Giải phương trình nghiệm nguyên $(x+1999)(x+1975)=3^y-81$.

Câu 7. Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{x}{y^2z^2}+\frac{y}{z^2x^2}+\frac{z}{x^2y^2}=t.$$

Câu 8. Tìm mọi nghiệm nguyên của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

Câu 9. Tìm tất cả các số nguyên x, y, z thỏa mãn $3^x + 4^y = 7^z$

Chủ đề 3. Các bài toán phương trình nghiệm nguyên trong các đề thi học sinh giỏi lớp 9

Bài 45. Tìm x, y thỏa mãn: $\sqrt{2\left(\sqrt{x} + y - 2\right)} = \sqrt{\sqrt{x}.y}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 0; y \geq; \sqrt{x} + y - 2 \geq 0$

Với điều kiều kiện trên bình phương 2 vế ta có