Mở rộng bài toán hình thi IMO năm 2012

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

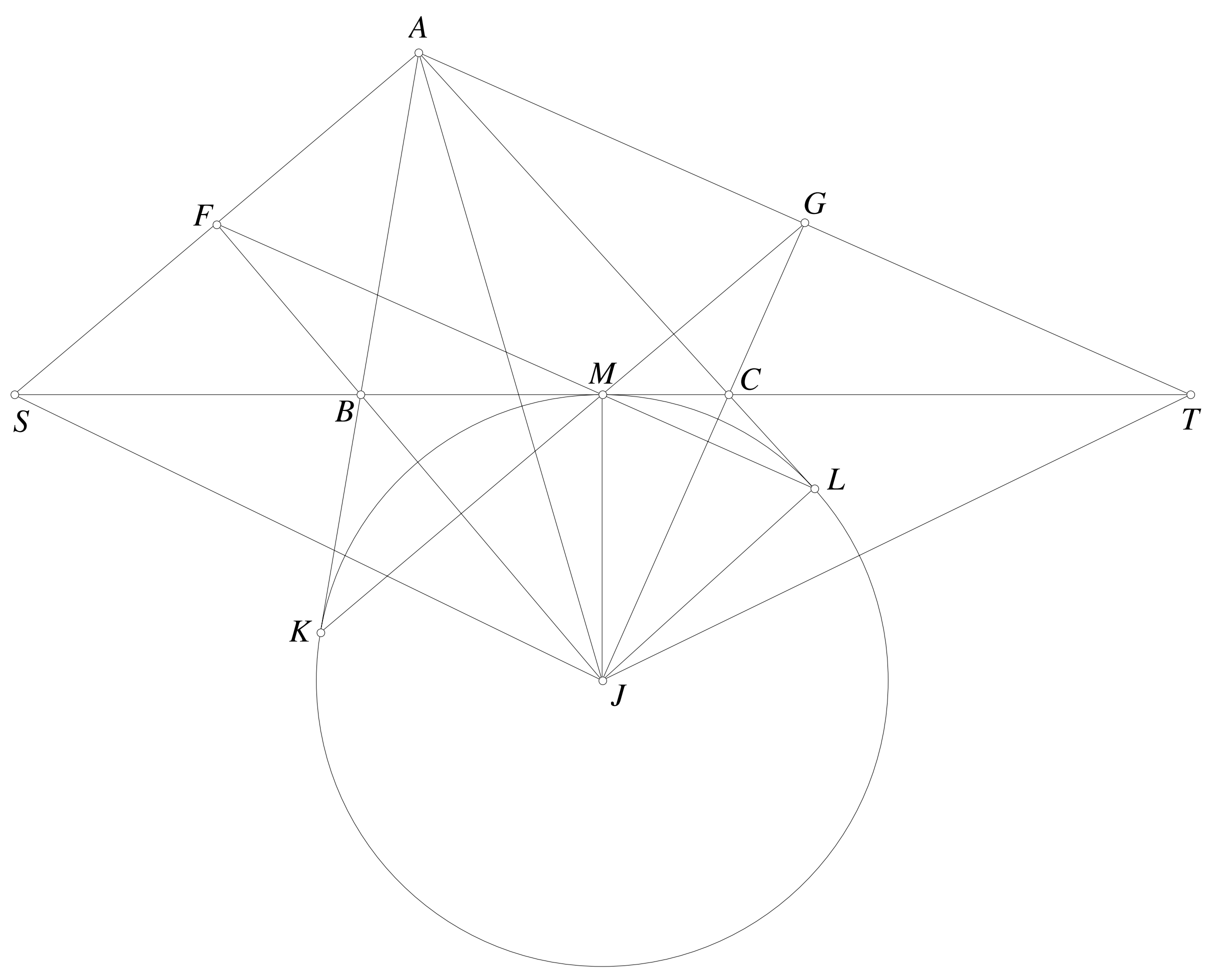
Tóm tắt nội dung

Bài viết đưa ra nhiều hướng mở rộng khác nhau cho bài toán hình thi IMO năm 2012 ngày thứ nhất với các công cụ hình học thuần túy và hàng điểm điều hòa.

Trong kỳ thi IMO năm 2012 ngày thi thứ nhất có một bài toán hình học hay. Bài toán ở vị trí số 1 là bài thi dễ nhất ngày hôm đó. Bài toán như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC và J là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A. Đường tròn bàng tiếp này tiếp xúc với BC tại M và tiếp xúc với các đường thẳng AB, AC tại K, L. Đường thẳng LM và BJ cắt nhau tại F. Đường thẳng KM và CJ cắt nhau tại G. AF, AG lần lượt cắt BC tại S, T. Chứng minh rằng M là trung điểm của ST.

Bài toán trên là một bài toán không khó nhưng rất thú vị và đặc biệt có rất nhiều lời giải được đề xuất trong [1]. Tôi xin dẫn ra một lời giải gần như đơn giản nhất cho bài toán này

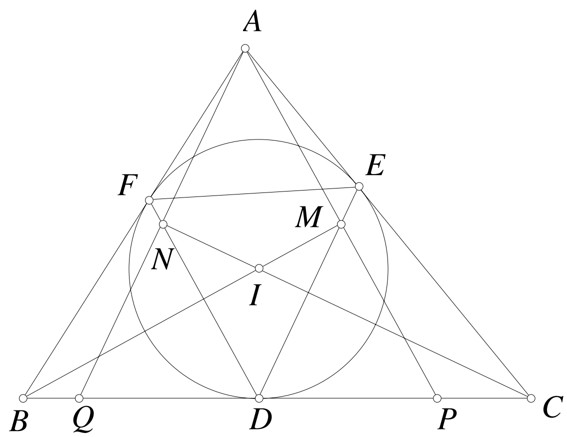


Hình 1.

Lời giải. Theo tính chất góc ngoài $\angle BJA = \angle KBJ - \angle BAJ = \dfrac{1}{2}\angle KBC - \dfrac{1}{2}\angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle ACB = \angle ALF$. (Chú ý đẳng thức cuối do tam giác CML cân tại C). Từ đó tứ giác $AFJL$ nội tiếp suy ra $\angle AFJ = \angle ALJ = 90°$. Mặt khác BF là phân giác $\angle ABS$ suy ra FB là trung trực SA suy ra $JA = JS$. Tương tự $JA = JT$ suy ra $JS = JT$ mà $JM \perp ST$ vậy M là trung điểm ST. □

Nhận xét. Bài toán trên là một bài toán đẹp, tuy đặt ở vị trí số 1 là bài dễ của ngày 1 nhưng vẫn không hề quá đơn giản so với một bài IMO. Bài toán trên phát biểu trên đường tròn bàng tiếp. Hẳn nhiên nó cũng có một cách nhìn qua tâm nội tiếp như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. IB, IC lần lượt cắt DE, DF tại M, N. AM, AN lần lượt cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng D là trung điểm của PQ.



Hình 2.

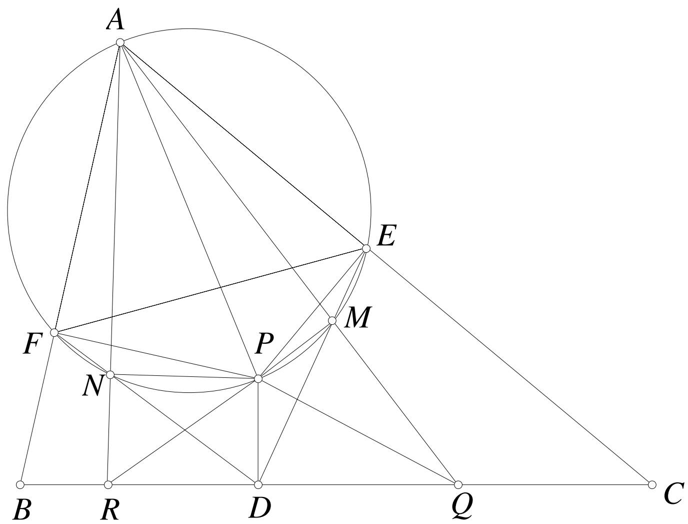
Tương tự như cách làm trong bài toán 1 ta có nhận xét M, N đều thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Ta đi đến bài toán tổng quát như sau

Bài toán 3. Cho P là một điểm nằm trên phân giác trong góc A của tam giác ABC. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt DE, DF lần lượt tại M, N khác E, F. AM, AN cắt BC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng D là trung điểm PQ.

Bài toán trên lại tiếp tục lại được mở rộng hơn nữa như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Gọi D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt DE, DF tại M, N khác E, F. AM, AN cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng $\dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{PE}{PF}$.

Sau đây là lời giải khá đơn giản cho bài toán mở rộng này



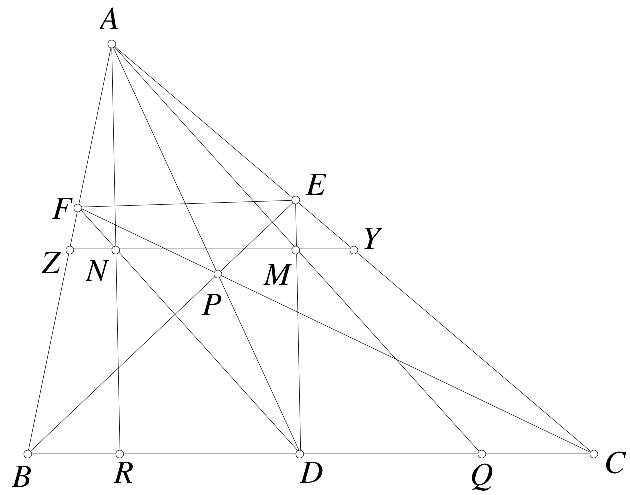
Hình 3.

Lời giải. Do M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cũng là đường tròn đường kính AP nên $\angle AMP = 90°$ suy ra tứ giác $PMQD$ nội tiếp suy ra $\angle PQD = \angle PMD = \angle PAE$. Vậy các tam giác vuông $\triangle PAE \sim \triangle PQD$ suy ra $\dfrac{PQ}{PD} = \dfrac{PA}{PE}$. Tương tự có $\dfrac{PR}{PD} = \dfrac{PA}{PF}$. Chia hai tỷ số cho nhau ta có $\dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{PE}{PF}$ đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Chứng minh bài toán mở rộng khá đơn giản so với suy nghĩ là bài toán mở rộng thường cầu kỳ hơn. Khi P nằm trên đường phân giác góc A ta thu được bài toán 3. Việc cho P trùng với một số điểm đặc biệt cũng sẽ dẫn tới nhiều hệ quả thú vị, xin dành điều đó cho bạn đọc.

Sau đây là một hướng mở rộng khác cho bài toán. Ta chú ý rằng trong bài toán 2 với D, E, F là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp thì AD, BE, CF đồng quy hơn nữa dễ chứng minh M, N thuộc đường trung bình ứng với đỉnh A của tam giác ABC. Đến đây dùng phép chiếu song song ta dễ dàng đề xuất bài toán sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Y, Z lần lượt là trung điểm CA, AB. YZ cắt DE, DF lần lượt tại M, N. AM, AN cắt BC lần lượt tại Q, R. Chứng minh rằng D là trung điểm của QR.



Hình 4.

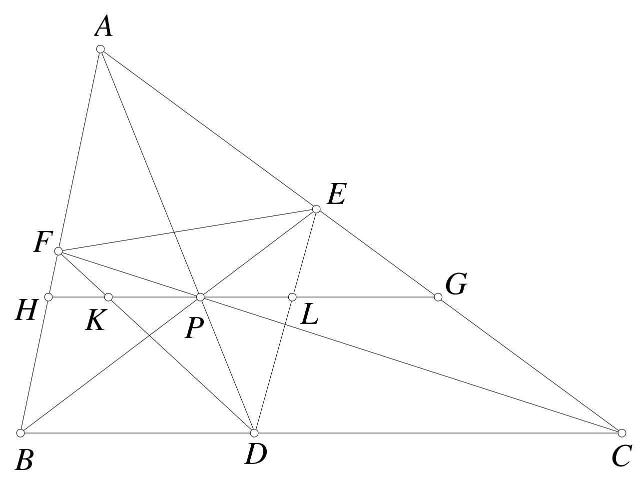
Ta có thể mở rộng bài toán thêm chút nữa nếu thay đường trung bình bằng đường song song bất kỳ như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Y, Z lần lượt thuộc CA, AB sao cho $YZ \parallel BC$. YZ cắt DE, DF lần lượt tại M, N. AM, AN cắt BC lần lượt tại Q, R. Chứng minh rằng D là trung điểm của QR.

Bài toán được giải dựa trên một bổ đề khá cơ bản như sau

Bổ đề 6.1. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng qua P song song BC cắt DE, DF tại L, K thì P là trung điểm KL.

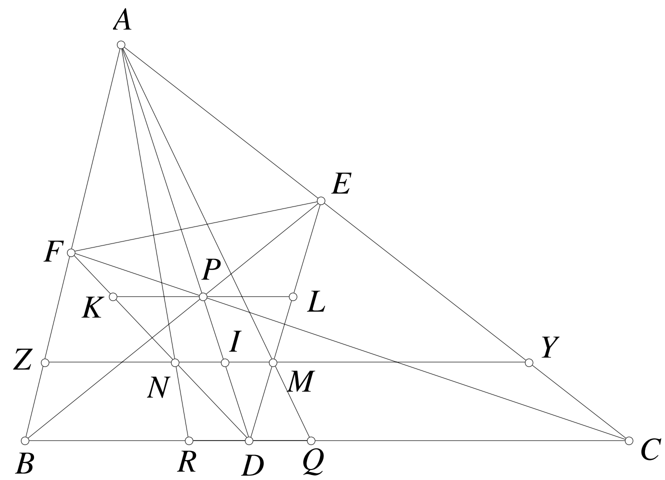
Bổ đề có lời giải rất đơn giản chỉ nhờ định lý Thales



Hình 5.

Chứng minh. Gọi KL cắt CA, AB lần lượt tại G, H. Dựa vào định lý Thales ta có biến đổi tỷ số $\dfrac{PK}{PL} = \dfrac{PK}{PH}.\dfrac{PH}{PG}.\dfrac{PG}{PL} = \dfrac{CD}{CB}.\dfrac{BD}{CD}.\dfrac{BC}{BD} = 1$. Vậy P là trung điểm KL. Ta có điều phải chứng minh. □

Quay lại bài toán



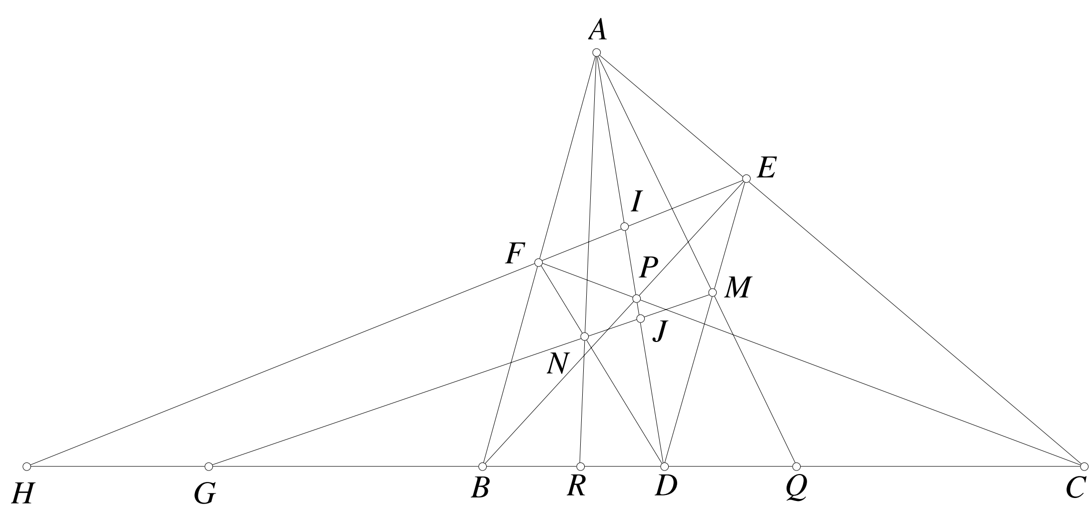
Hình 6.

Lời giải. Qua P kẻ đường thẳng song song BC cắt DE, DF lần lượt tại L, K. Theo bổ đề P là trung điểm KL. Gọi PD giao MN tại I vì $MN \parallel KL$ nên dễ suy ra I là trung điểm MN. Lại có $MN \parallel RQ$ nên D là trung điểm RQ. Ta hoàn tất chứng minh. □

Nếu dùng phép chiếu xuyên tâm, ta dễ dàng đề xuất bài toán mở rộng hơn như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Một đường thẳng bất kỳ cắt DE, DF, BC lần lượt tại M, N, G. AM, AN lần lượt cắt BC tại Q, R. Chứng minh rằng $(QR, DG) = -1$.

Bài toán trên thực sự là mở rộng của bài toán 6 nếu các bạn để ý kỹ khi $MN \parallel BC$ thì điểm G ở vô cực $(QR, DG) = -1$ suy ra D là trung điểm QR. Bài toán có lời giải cũng rất đơn giản

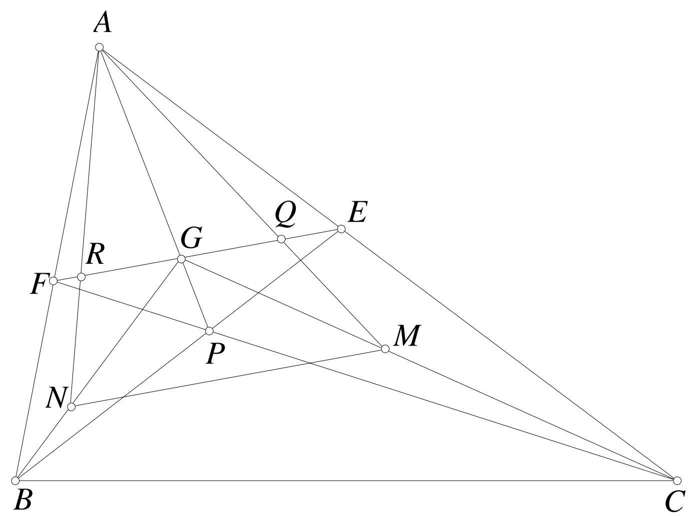


Hình 7.

Lời giải. Gọi EF giao BC tại H, EF giao AD tại I, MN giao AP tại J. Ta có hàng điều hòa cơ bản $(EF, IH) = -1$. Chiếu xuyên tâm D hàng điều hòa (EF, IH) lên đường thẳng MN ta có $(MN, JG) = D(MN, JG) = (EF, IH) = -1$. Chiếu xuyên tâm A lên đường thẳng BC ta có $(QR, DG) = A(QR, DG) = (MN, JG) = -1$. □

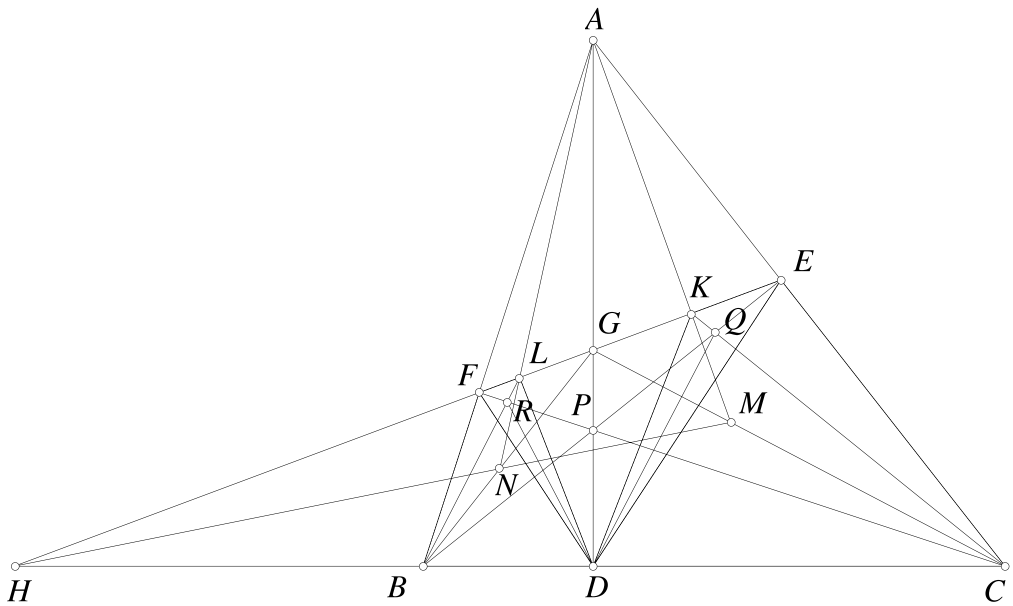
Nhận xét. Lời giải còn xem ra đơn giản hơn trường hợp song song. Tuy vậy cả hai bài toán 6,7 đều có những ứng dụng khá phong phú. Chẳng hạn như bài toán sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. PA cắt EF tại G. Các điểm M, N lần lượt thuộc GC, GB sao cho $MN \parallel EF$. AM, AN lần lượt cắt EF tại Q, R. Chứng minh rằng G là trung điểm QR.



Hình 8.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC đường cao AD. P là điểm trên AD. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. EF giao PA, BC lần lượt tại G, H. Một đường thẳng qua H cắt GC, GB lần lượt tại M, N. AM, AN cắt EF lần lượt tại K, L. CK, BL lần lượt cắt BE, CF tại Q, R. Chứng minh rằng $\angle QDE = \angle RDF$.



Hình 9.

Các bạn hãy làm như các bài luyện tập.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=2736397

[2] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com