Bài hình học thi chuyên sư phạm năm 2014 ngày 2

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và mở rộng bài hình học thi hình học thi chuyên sư phạm năm 2014 ngày 2 bằng các công cụ hình học thuần túy.

Trong kỳ thi chuyên sư phạm ngày 2 có bài toán hình học khá hay như sau

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$ với tâm O. Gọi M là trung điểm AB và N, P theo thứ tự thuộc BC, CD sao cho $MN \parallel AP$.

a) Chứng minh rằng tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và $\angle NOP = 45°$.

b) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP nằm trên OC.

c) Chứng minh rằng BD, AN, PM đồng quy.

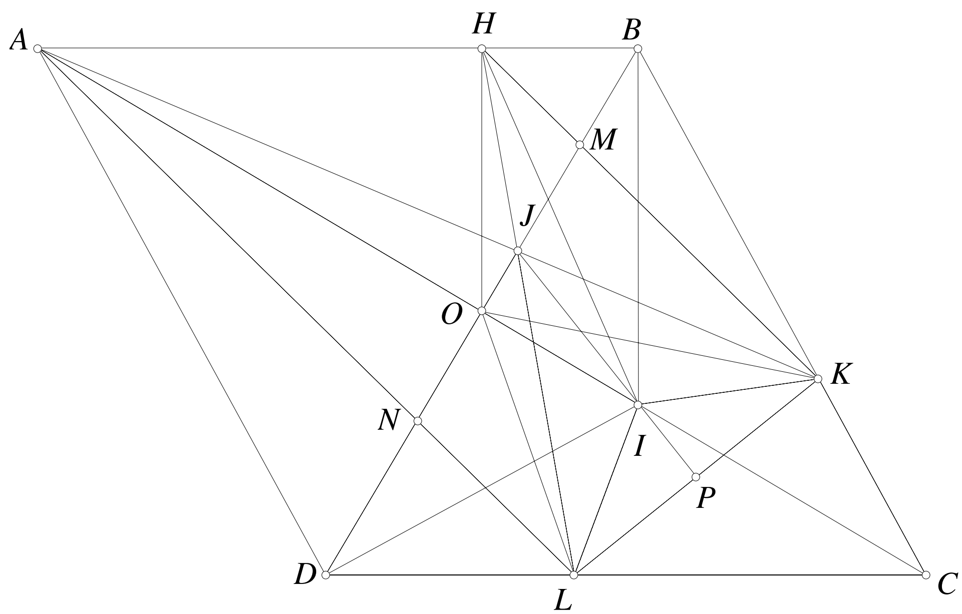
Bài toán là những kết quả đẹp nhiều ý nghĩa. Tuy vậy nếu để ý kỹ thì ý cuối cùng không liên quan tới hai ý trên. Mặt khác điều kiện hình vuông có thể thay thế được bởi điều kiện nhẹ hơn là hình thoi. Do đó tôi xin đề xuất một bài toán tổng quát hơn đồng thời thêm một ý nữa liên kết hai ý hay của bài toán trên

Bài 2. Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo AC giao BD tại O. H là hình chiếu của O lên AB. Các điểm K, L theo thứ tự thuộc đoan CB, CD sao cho $HK \parallel AL$.

a) Chứng minh rằng tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác OKL nằm trên AC.

b) Chứng minh rằng HL, AK và BD đồng quy tại J.

c) Chứng minh rằng IJ chia đôi KL khi và chỉ khi bốn điểm D, L, I, J cùng thuộc một đường tròn.



Hình 1.

Lời giải. a) Ta dễ thấy các tam giác HBC và LDA có các cạnh tương ứng song song nên đồng dạng. Từ đó chú ý tam giác OAB vuông tại O có đường cao OH, ta có $DL.BC = HB.AD = BH.BA = OB^2 = OB.OD$. Mặt khác $\angle KBO = \angle LDO$ nên $\triangle OBK \sim \triangle LOD$. Vậy $\angle KOL = \angle KOD - \angle DOL = (\angle OBK + \angle OKB) - \angle OKB = \angle OBK$. Từ đó với I là tâm ngoại tiếp tam giác OKL, chú ý tam giác DCB cân thì $\angle KIL = 2\angle KOL = 2\angle OBK = 180° - \angle DCB$ suy ra tứ giác $LIKC$ nội tiếp mà $IK = IL$ suy ra CI là phân giác $\angle KCL$ trùng với CA. Vậy I thuộc CA.

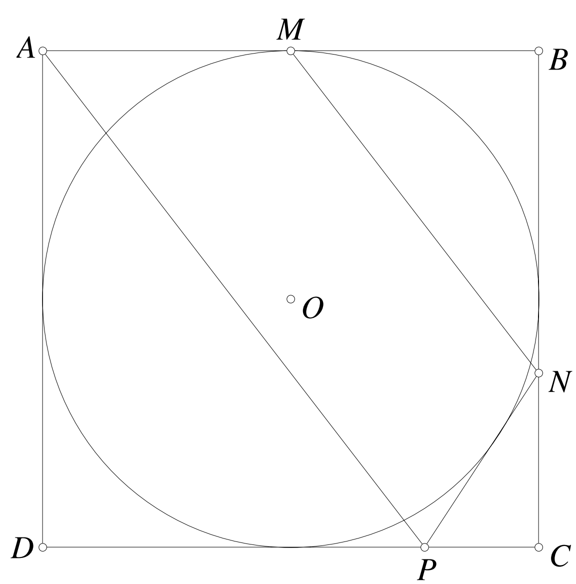
b) Gọi BD cắt HK, AL tại M, N. Ta chú ý các tam giác HBC và LDA đồng dạng mà $\angle MBK = \angle NDA$. Từ đó các tam giác MBK và NDA đồng dạng tương ứng. Vậy dễ suy ra $\dfrac{MH}{MK} = \dfrac{NL}{NA}$. Lại có $HK \parallel AL$. Từ đó theo định lý Theles mở rộng dễ thấy HL, AK và MN đồng quy.

c) Nếu IJ đi qua trung điểm P của KL. Từ tam giác IKL cân suy ra IJ là trung trực KL. Từ đó chú ý tam giác BDC cân tại B nên $\angle JIL = \angle JIL = \dfrac{360° - \angle LIK}{2} = \dfrac{180° + \angle LCK}{2} = 180° - \angle BDC$ suy ra tứ giác $DJIL$ nội tiếp.

Nếu tứ giác $DJIL$ nội tiếp mà tứ giác $LIKC$ nội tiếp, theo định lý Miquel dễ thấy tứ giác $BKIJ$ nội tiếp. Chú ý I nằm trên AC là trung trực BD nên $\angle ILJ = \angle IDJ = \angle IBJ = \angle IKJ$. Lại có $\angle IJL = \angle IDL = \angle IBK = \angle IJK$. Mặt khác đã có $IK = IL$. Vậy $\triangle IKJ = \triangle ILJ$ $(g.c.g)$ suy ra IJ là trung trực KL nên IJ chia đôi KL. □

Nhận xét. Thực ra ý tưởng chính trong câu a) bài toán gốc xuất phát từ một bài toán tiếp xúc khá quen thuộc. Câu a) bài toán mở rộng cũng là sự mở rộng của bài toán tiếp xúc đó. Việc phát triển các ý b), c) làm hai bài toán trở nên mới và lạ hơn cũng như mang nhiều ý nghĩa hơn. Xin giới thiệu lại với các bạn hai bài toán quen thuộc này

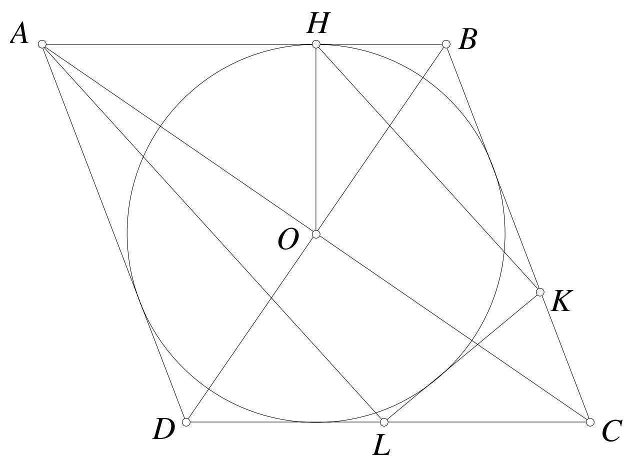
Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$ có (O) là đường tròn nội tiếp. M là trung điểm AB. Các điểm N, P theo thứ tự thuộc cạnh BC, CD sao cho $MN \parallel AP$. Chứng minh rằng NP luôn tiếp xúc đường tròn (O).



Hình 2.

Từ đó bài toán trên hình thoi được đề xuất và phát biểu khó hơn

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$ có AC giao BD tại O. H là hình chiếu của O lên AB. Các điểm K, L theo thứ tự thuộc cạnh BC, CD sao cho $HK \parallel AL$. Chứng minh rằng KL luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi K, L di chuyển.



Hình 3.

Có nhiều điều thú vị khác xoay quanh các bài toán tiếp xúc này. Các bạn hãy cùng khám phá.

Tài liệu

[1] Đề thi chuyên sư phạm ngày 2 tại http://diendantoanhoc.net/home

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com