

# Mỗi tuần một bài toán

**Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

**D**ây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

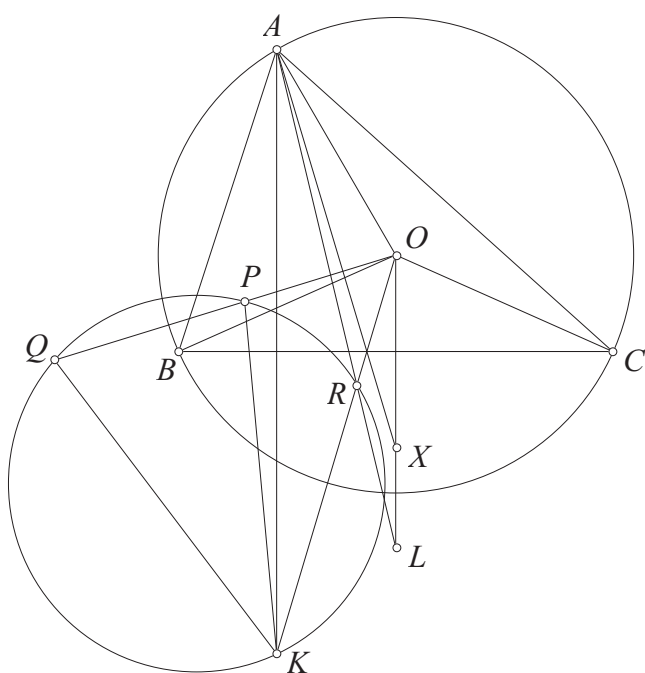
## Đề bài

Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp trong đường tròn  $(O)$  cố định với  $B, C$  cố định và  $A$  di chuyển trên  $(O)$ . Gọi  $P, Q$  là hai điểm Isodynamic của tam giác  $ABC$ .  $K$  đối xứng  $A$  qua  $BC$ .  $OK$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $KPQ$  tại  $R$  khác  $K$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $AR$  luôn đi qua một điểm cố định khi  $A$  thay đổi.

Vì hai điểm Isodynamic là nghịch đảo của nhau qua đường tròn ngoại tiếp tam giác nên bài toán có mở rộng như sau

Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  cố định với  $B, C$  cố định và  $A$  di chuyển trên  $(O)$ . Gọi  $P, Q$  là hai điểm bất kỳ nghịch đảo nhau qua  $(O)$ .  $K$  đối xứng  $A$  qua  $BC$ .  $OK$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $KPQ$  tại  $R$  khác  $K$ . Chứng minh rằng đường thẳng  $AR$  luôn đi qua điểm cố định khi  $A, P, Q$  thay đổi.

## Lời giải



Gọi  $X$  là đối xứng của  $O$  qua  $BC$  và  $AR$  cắt  $OX$  tại  $L$ . Ta chú ý rằng  $AOXK$  là hình thang cân và do  $P, Q$  nghịch đảo qua  $(O)$  nên

$OR \cdot OK = OP \cdot OQ = OA^2$ . Từ đó  $\angle OAR = \angle OKA = \angle OXA$ . Suy ra  $OL \cdot OX = OA^2$  hiển nhiên độ dài  $OA$  không đổi và  $X$  cố định nên  $L$  cố định. Ta thu được điều phải chứng minh.

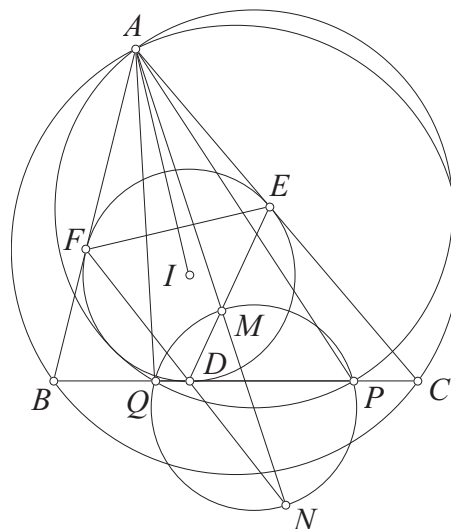
## Nhật xét

Bài toán được giải đầu tiên bởi bạn **Ngô Quang Dương** lớp 12 toán, THPT chuyên KHTN, ngoài ra bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và bạn **Phạm Ngọc Khánh** đã lần lượt giải tiếp và giải bài tổng quát hơn tại [đây](#). Ngoài ra tác giả nhận được lời giải qua email từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học ngoại thương và các bạn **Trương Mạnh Tuấn**, **Trần Anh Tài** lớp 10 toán, THPT chuyên KHTN. Cũng trong topic đó tác giả đã đưa ra bài toán mở rộng khác nữa như sau

Cho tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$  và  $P, Q$  là hai điểm đẳng giác trong tam giác.  $AQ$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $QBC$  tại  $R$  khác  $Q$ . Đường tròn  $(K)$  qua  $A, R$  trực giao với  $(O)$ .  $S$  đối xứng  $P$  qua trung trực  $BC$ .  $L$  là tâm ngoại tiếp tam giác  $PBC$ . Chứng minh rằng  $RS$  và  $AL$  cắt nhau trên  $(K)$ .

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác  $ABC$  có đường tròn nội tiếp  $(I)$  tiếp xúc  $BC, CA, AB$  tại  $D, E, F$ . Một đường thẳng đi qua  $A$  cắt  $DE, DF$  lần lượt tại  $M, N$  sao cho đường tròn đường kính  $MN$  cắt đoạn  $BC$  tại  $P, Q$ . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác  $APQ$  tiếp xúc  $(I)$ .



Mọi trao đổi xin gửi về email [analgeomatica@gmail.com](mailto:analgeomatica@gmail.com).