

Mỗi tuần một bài toán

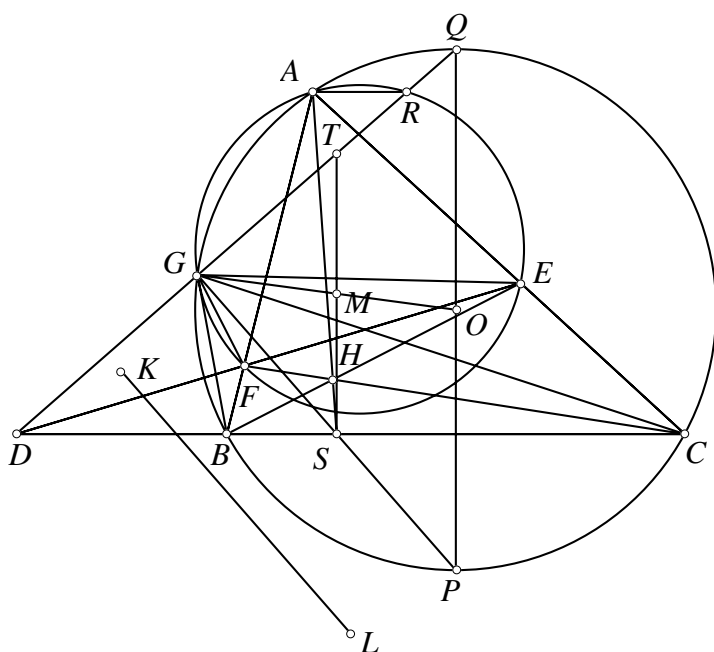
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC với E, F là hai điểm lần lượt nằm trên cạnh CA, AB sao cho $AE = AF$. EF cắt BC tại D . K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác DBF, DCE . G là đối xứng của D qua KL . R nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF sao cho $AR \parallel BC$. Gọi BE cắt CF tại H . AH cắt BC tại S . Lấy T thuộc GR sao cho $ST \perp BC$. M là trung điểm ST . Chứng minh rằng GM luôn đi qua một điểm cố định khi E, F thay đổi.

Lời giải



Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Dễ thấy G là giao điểm khác D của đường tròn ngoại tiếp tam giác DBF và DCE nên theo định lý Miquel G cũng nằm trên (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Từ đây ta suy ra hai tam giác GFB và GEC đồng dạng. Lại theo định lý Ceva cho tam giác ABC với các đường AS, BE, CF đồng quy tại H và chú ý $AE = AF$ ta có $\frac{SB}{SC} = \frac{BF}{CE} = \frac{GB}{GC}$. Vậy GS là phân giác $\angle BGC$ nên GS đi qua trung điểm P của cung BC không chứa G . Ta lại có $\angle ARG = \angle AFG = \angle GDB$ mà $AR \parallel BC$ nên D, G, R thẳng hàng. Lại theo định lý Menelaus cho tam giác ABC với D, E, F

thẳng hàng và chú ý $AE = AF$ ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{BF}{CE} = \frac{GB}{GC}$ nên GD là phân giác ngoài tam giác GBC . Từ đó GD đi qua trung điểm Q của cung BC chứa G . Như vậy O là trung điểm PQ , mà trong tam giác GPQ có $ST \parallel PQ$ nên G, M, O thẳng hàng hay GM đi qua O cố định.

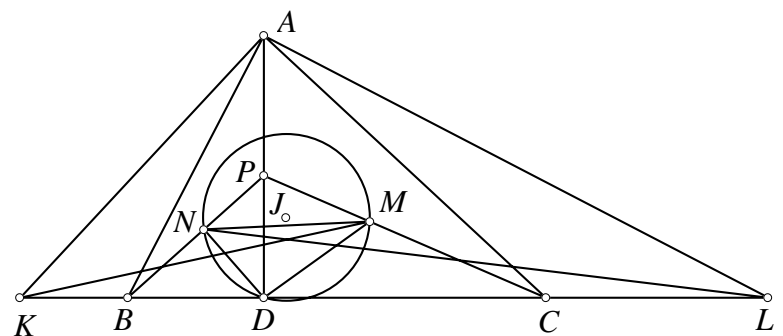
Nhật xét

Bài toán này đã giấu đi sự xuất hiện của điểm cố định là tâm ngoại tiếp O bằng việc sử dụng định lý Miquel quen thuộc. Dã số các lời giải được gửi tới các bạn đều dùng hàng điểm điều hòa tuy nhiên chúng ta hoàn toàn có thể tránh việc nhắc đến hàng điểm điều hòa như cách làm trong đáp án. Chúng ta luôn cố gắng hướng tới những lời giải thuần túy hình học mà sử dụng ít công cụ nhất có thể.

Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương cũng cho lời giải giống đáp án. Bạn **Nguyễn Cảnh Hoàng** lớp 11A1 trường chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và bạn **Trần Nhân Trung**, lớp 11A2, trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng cho lời giải tương tự ở đây. Bạn **Ngô Quang Dương** lớp 12A2 Toán THPT chuyên KHTN cũng gửi tới lời giải bằng tiếng Anh. Các bạn **Bùi Công Minh, Bùi Văn Bình, Phạm Ngọc Huy, Trương Văn Hoàng** lớp 12 toán và các bạn **Lê Sỹ Quan, Lê Phước Tùng, Trần Đình Phát** lớp 11 toán, THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước đều cho lời giải đúng và theo ý tưởng của đáp án.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD . P là một điểm bất kỳ di chuyển trên đoạn thẳng AD . Các điểm K, L thuộc đường thẳng BC sao cho $AK \perp AC, AL \perp AB$. Trên đoạn thẳng PC, PB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $KM = KA, LN = LA$. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác DMN luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P di chuyển.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.