

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

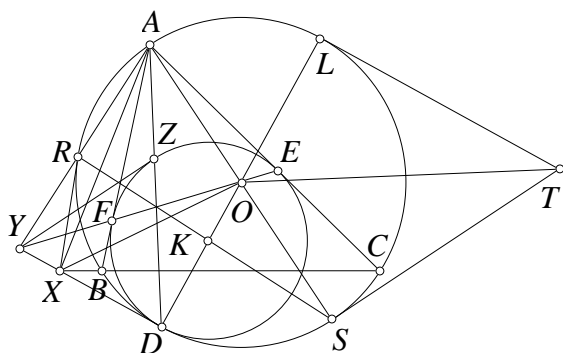
Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AS . Đường tròn (K) tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc trong (O) tại D . Trung trực AD cắt tiếp tuyến tại qua S của (O) tại T . P đối xứng với D qua TK . Trung trực AP cắt PK tại R . AK cắt (O) tại X khác A . DX cắt BC tại G . Lấy Q trên trung trực AX sao cho $AQ \perp BC$. Chứng minh rằng $QR \perp AG$.

Lời giải

Lời giải sau là của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đưa ra tại [đây](#).

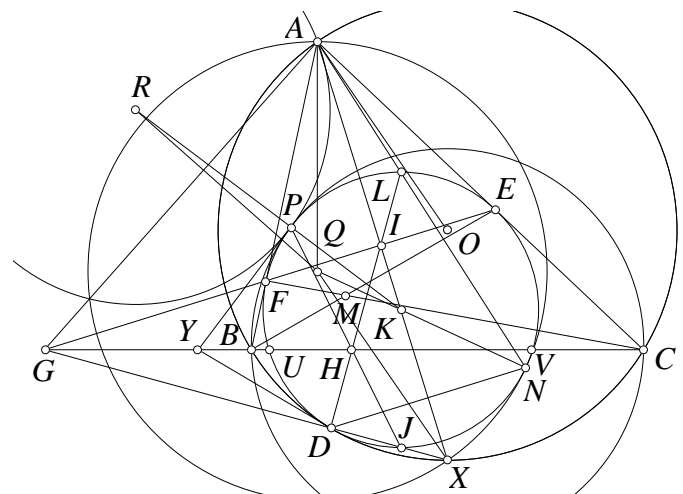
Bổ đề. Đường tròn (PBC) tiếp xúc (K) tại P .



Chứng minh bổ đề. Tiếp tuyến tại D của (K) cắt BC tại X . SK cắt (O) tại R . (K) tiếp xúc CA, AB tại E và F . Z là giao điểm của AD với (K) . Do DZ, EA, FA đồng quy nên tứ giác $DFZE$ điều hòa, suy ra các tiếp tuyến tại Z, D của (K) cắt nhau tại Y trên EF . Do đó $\mathcal{P}_{Y/(O)} = YD^2 = \overline{YF} \cdot \overline{YE} = \mathcal{P}_{Y/(AEF)}$ nên Y thuộc trục đẳng phương của (AEF) và (O) . Vì $\angle ARK = 90^\circ$ nên R thuộc (AEF) nên A, R, Y thẳng hàng. Từ đó $A(RD, FE) = -1$ nên tứ giác $RBDC$ điều hòa, suy ra các tiếp tuyến tại R, D của (O) cắt nhau trên BC hay XR tiếp xúc (O) . L là giao điểm khác D của DO với (O) thì TL tiếp xúc (O) . Theo định lý Newton, DL, RS, XT đồng quy hay XL đi qua K . Do đó P đối xứng với D qua XK hay (BPC) tiếp xúc (K) .

Giải bài toán. AQ, AO đẳng giác nên Q đối xứng với O qua AX . Vậy (Q, QA) đối xứng với (O) qua AX . N là đối xứng của

D qua AX , BE cắt CF tại M , GD cắt (K) tại J khác D . (K) cắt BC tại U, V . L là giao điểm của AN với (K) . Do tứ giác $PUDV$ điều hòa nên $J(DP, UV) = -1$. Gọi H là giao điểm của JP với BC thì $(GH, UV) = -1$.



Do đó DH đi qua I là trung điểm EF . Do DA là đường đối xứng của $\triangle EDF$ nên DA, DI đẳng giác với $\angle EDF$. Mặt khác, AD, AN đối xứng qua AX nên DH đi qua L . Áp dụng định lý Pascal cho hệ điểm $\begin{pmatrix} L & P & D \\ J & D & P \end{pmatrix}$ suy ra PL, DJ, BC đồng quy hay PL đi qua G . Vì tứ giác $LENF$ điều hòa nên $P(LN, EF) = -1$ suy ra $P(GN, EF) = -1$ nên PN, EF, AM đồng quy. Y là giao điểm của hai tiếp tuyến tại P và D của (K) . Xét cực đối cực đối với (K) , AM, EF, PN lần lượt là đường đối cực của G, A, N đối với (K) nên với PN, EF, AM đồng quy, do đó N, A, G thẳng hàng. Mặt khác theo định lý về tâm đẳng phương thì tiếp tuyến tại P, N của (K) và trục đẳng phương của (Q) và (R, RA) đồng quy. Vậy AG là trục đẳng phương của (Q) và (R) nên $AG \perp QR$.

Nhận xét

Bài toán là nghịch đảo kết quả của đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên KHTN năm 2016 vòng 2 và tác giả cũng nhận được lời giải duy nhất của bạn **Bảo**.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm thuộc cung BC không chứa A . PB, PC cắt CA, AB lần lượt tại E, F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE, ACF cắt nhau tại G khác A . AG cắt (O) tại D khác A . Q thuộc (O) sao cho $\angle QAB = \angle PAC$. QD cắt BC tại R . Chứng minh rằng $OR \perp AQ$. Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.