Một số mở rộng bài toán hình học thi Olympic Nhật Bản

Nhóm thực hiện: Nguyễn Anh Tú, Lê Bích Ngọc, Phạm Lê Vũ, Đào Quang Đức
Giáo viên hướng dẫn: Trần Quang Hùng

Tóm tắt. Chúng tôi sẽ đưa ra các mở rộng và khai thác cho hai bài toán thi Olympic Nhật Bản năm 2012 bằng các công cụ thuần túy hình học.

I. Mở đầu

Trong kỳ thi vô địch Nhật Bản năm 2012 có hai bài toán hình học hay như sau

Bài toán 1. *Cho* ΔABC, *tiếp tuyến tại* A *của đường tròn ngoại tiếp* (O) *của tam giác cắt đường thẳng* BC *tại* P. *Lấy* Q,R *lần lượt đối xứng với* P *qua đường thẳng* AB,AC. *Chứng minh rằng* QR *vuông góc với* BC.

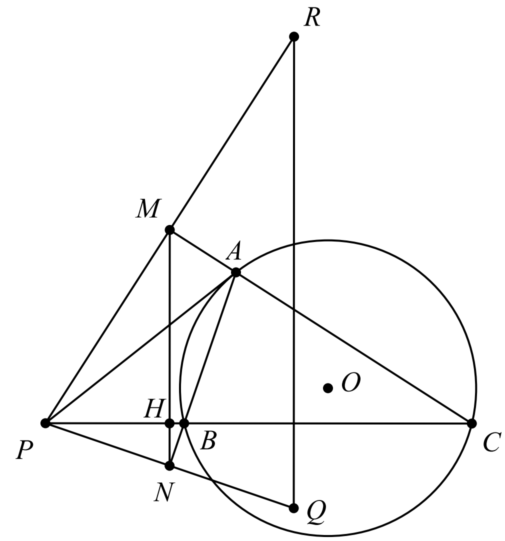
Bài toán 2. *Cho tam giác* PAB *và tam giác* PCD *sao cho* $PA=PB$, $PC=PD$; P, A, C *và* B, P, D *lần lượt thẳng hàng. Đường tròn* (O_1) *qua* A, C *cắt* (O_2) *qua* B, D *tại hai điểm phân biệt* X, Y. *Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác* PXY *là trung điểm đoạn* O_1O_2.

Hai bài toán trên là hai bài toán hay và đẹp mắt. Bên cạnh đó xung quanh chúng còn nhiều vấn đề để mở rộng và khai thác. Sau một thời gian làm việc nhóm chúng em đã được đưa ra một số ý để mở rộng và khai thác hai bài toán này, nhóm em cũng tự mình đưa ra một số cách giải cho hai bài toán đó.

II. Lời giải hai bài toán

Phần này chúng tôi xin đưa ra lời giải của mình cho hai bài toán thi ở trên.

Bài toán 1. *Cho* ΔABC, *tiếp tuyến tại* A *của đường tròn ngoại tiếp* (O) *của tam giác cắt đường thẳng* BC *tại* P. *Lấy* Q,R *lần lượt đối xứng với* P *qua đường thẳng* AB,AC. *Chứng minh rằng* QR *vuông góc với* BC.



Lời giải. Gọi $PR \cap AC \equiv M$; $PQ \cap AB \equiv N$; $MN \cap BC \equiv H$.

Vì $\widehat{PMA} + \widehat{PNA} = 90^o + 90^o = 180^o$ nên tứ giác $PMAN$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{PNH} = \widehat{PAM} = \widehat{ABC} = \widehat{PBN}$.

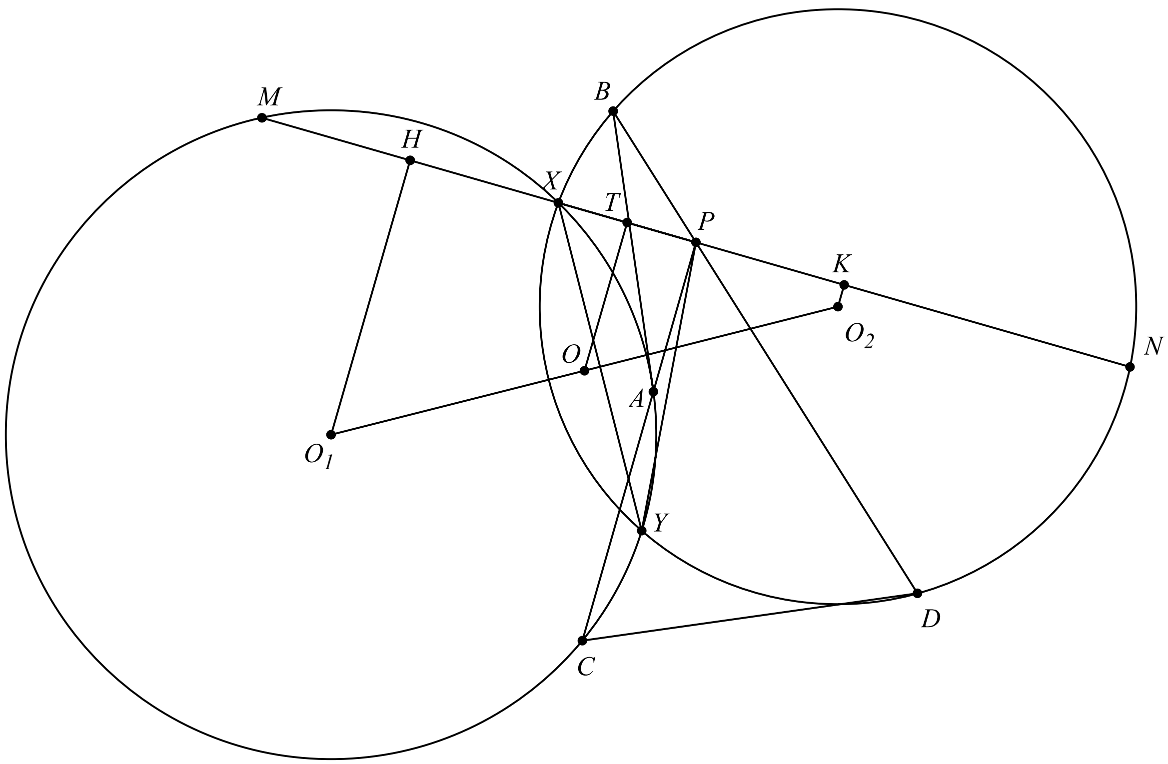
Từ đó $\widehat{PHM} = \widehat{PNH} + \widehat{HPN} = \widehat{PBN} + \widehat{HPN} = 90^o$, suy ra $MN \perp BC$

Mặt khác từ giả thiết ta có MN là đường trung bình của tam giác PQR , nên $MN \parallel QR$

Từ hai điều trên ta có $QR \perp BC$, đây là điều cần chứng minh.

Bài toán 2. *Cho tam giác PAB và tam giác PCD sao cho $PA = PB$, $PC = PD$; P , A , C và B , P , D lần lượt thẳng hàng. Đường tròn (O_1) qua A , C cắt (O_2) qua B , D tại hai điểm phân biệt X , Y . Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PXY là trung điểm đoạn O_1O_2 .*

Lời giải. Gọi O là trung điểm của O_1O_2 , ta chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác PXY .



Cách 1. Gọi r_1, r_2 lần lượt là bán kính của (O_1), (O_2). Áp dụng công thức đường trung tuyến cho tam giác XO_1O_2 và tam giác YO_1O_2 ta có

$$OX^2 = \frac{XO_1^2 + XO_2^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4} \quad (1)$$

$$OY^2 = \frac{YO_1^2 + YO_2^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4} \quad (2)$$

Mặt khác từ giả thiết ta có : $\overline{PA}.\overline{PC} = -\overline{PB}.\overline{PD} \Leftrightarrow P_{P/O_1} = P_{P/O_2} \Leftrightarrow PO_1^2 + PO_2^2 = r_1^2 + r_2^2$

Áp dụng công thức đường trung tuyến cho tam giác PO_1O_2 ta có

$$OP^2 = \frac{PO_1^2 + PO_2^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4} = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} - \frac{O_1O_2^2}{4} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có $OX^2 = OY^2 = OP^2$, suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PXY, đây là điều cần chứng minh.

Cách 2. Gọi H, T, K lần lượt là hình chiếu của O_1, O, O_2 lên PX.

Gọi $PX \cap (O_1) = \{X;\ M\}$; $PX \cap (O_2) = \{X;\ N\}$

Ta có $\overline{PA}.\overline{PC} = P_{P/(O_1)} = \overline{PX}.\overline{PM}$ và $\overline{PB}.\overline{PD} = P_{P/(O_2)} = \overline{PX}.\overline{PN}$

Mặt khác từ giả thiết ta có $\overline{PA}.\overline{PC} = -\overline{PB}.\overline{PD}$

Kết hợp với hai điều trên suy ra $\overline{PM} = -\overline{PN} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{PM} - \overline{PX}}{2} = \dfrac{-\overline{PN} - \overline{PX}}{2} \Leftrightarrow \overline{XH} = \overline{KP}$

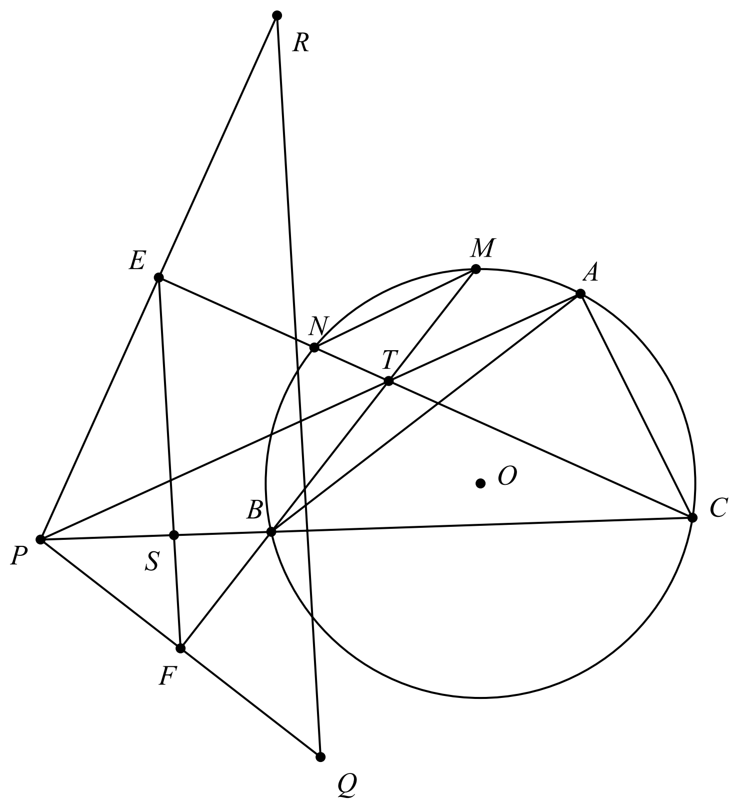
Vì O là trung điểm của O_1O_2 nên $\overline{TH} = -\overline{TK}$.

Từ hai điều trên suy ra $\overline{TX} = -\overline{TP}$, do đó OT là đường trung trực của PX. Suy ra O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PXY .Vậy ta có điều phải chứng minh.

III. Một số mở rộng

Phần này chúng ta sẽ đưa ra một số mở rộng cho bài toán 1 và bài toán 2.

Bài toán 3 (Mở rộng bài toán 1). *Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). P thuộc BC và ở ngoài (O). T ∈ AP sao cho BT, CT cắt (O) lần thứ 2 lần lượt tại M, N và MN ∥ PA. Q đối xứng P qua MB, R đối xứng P qua NC. Chứng minh rằng QR vuông góc với BC.*



Lời giải. Gọi $PR \cap NC \equiv E$; $PQ \cap MB \equiv F$; $EF \cap BC \equiv S$.

Vì $\widehat{PET} + \widehat{PFT} = 90^o + 90^o = 180^o$ nên tứ giác $PFTE$ nội tiếp.

Từ $MN \parallel PA$ và tính chất góc nội tiếp ta có $\widehat{PFS} = \widehat{PTE} = \widehat{MNT} = \widehat{MBC} = \widehat{PBF}$

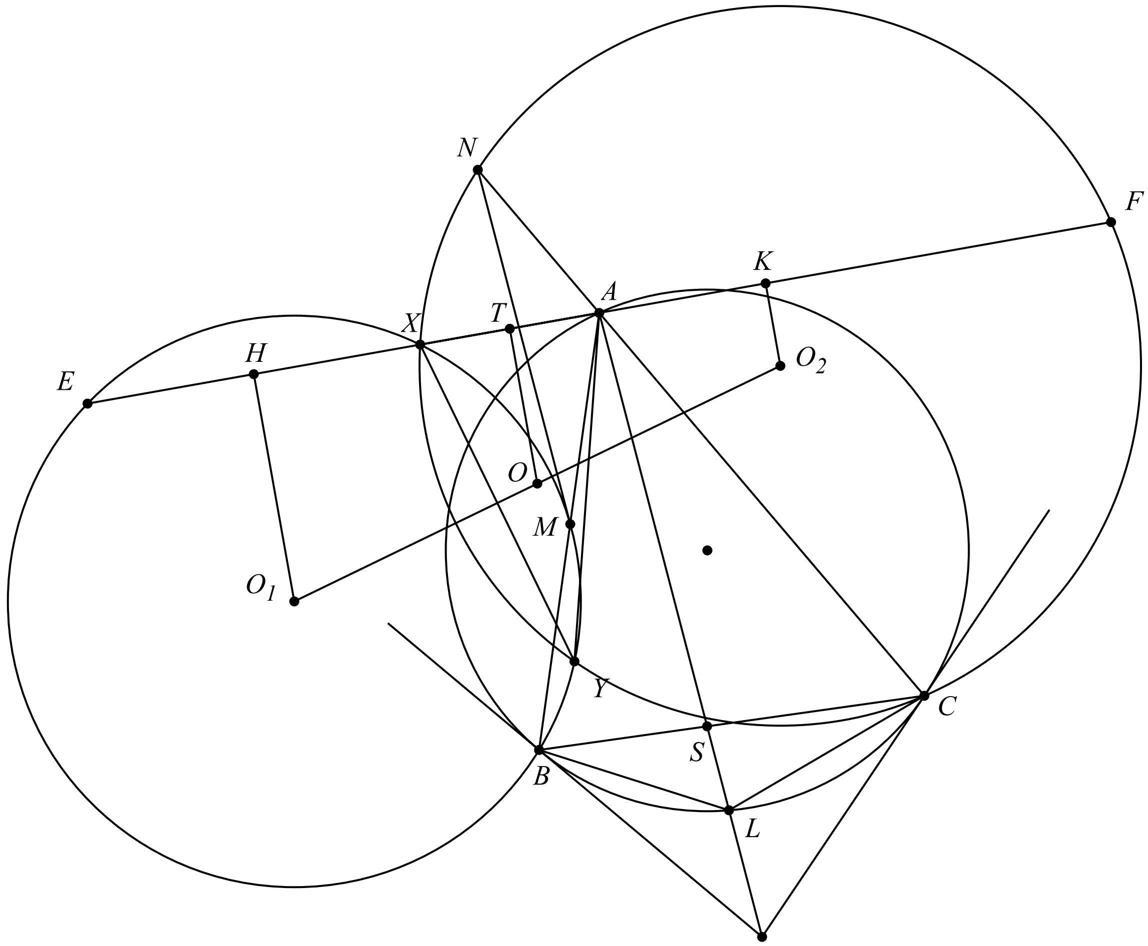
Suy ra $\widehat{PSE} = \widehat{PFS} + \widehat{BPF} = \widehat{PBF} + \widehat{BPF} = 90^o$, do đó $EF \perp BC$

Mặt khác từ giả thiết ta có EF là đường trung bình của tam giác PQR nên $EF \parallel QR$

Từ hai điều trên ta suy ra $QR \perp BC$, đây là điều cần chứng minh.

Bài toán 4. (Mở rộng bài toán 2). *Cho tam giác ABC, M là điểm thuộc cạnh AB, N thuộc AC sao cho MN song song với đường đối trung xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC. Đường tròn (O_1) đi qua M, B cắt đường tròn (O_2) đi qua N, C tại hai điểm phân biệt X, Y. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY là trung điểm đoạn O_1O_2.*

Lời giải. Gọi O là trung điểm của O_1O_2, ta chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác AXY.



Cách 1. Đường đối trung xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC cắt BC tại S

Vì AS là đường đối trung của tam giác ABC nên $\dfrac{AB^2}{AC^2}=\dfrac{SB}{SC}$

Vì $MN \parallel AS$ nên $\widehat{AMN}=\widehat{BAS}$ và $\widehat{ANM}=\widehat{CAS}$

Ta có $\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{\sin\widehat{ANM}}{\sin\widehat{AMN}}=\dfrac{\sin\widehat{CAS}}{\sin\widehat{BAS}}=\dfrac{SC}{SB}\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC^2}{AB^2}\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{AC}{AB}$

Suy ra $\overline{AM}.\overline{AB}=-\overline{AN}.\overline{AC}$

Đến đây làm tương tự bài toán 2 ta thu được điều cần chứng minh.

Cách 2. Đường đối trung xuất phát từ đỉnh A của tam giác ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai L.

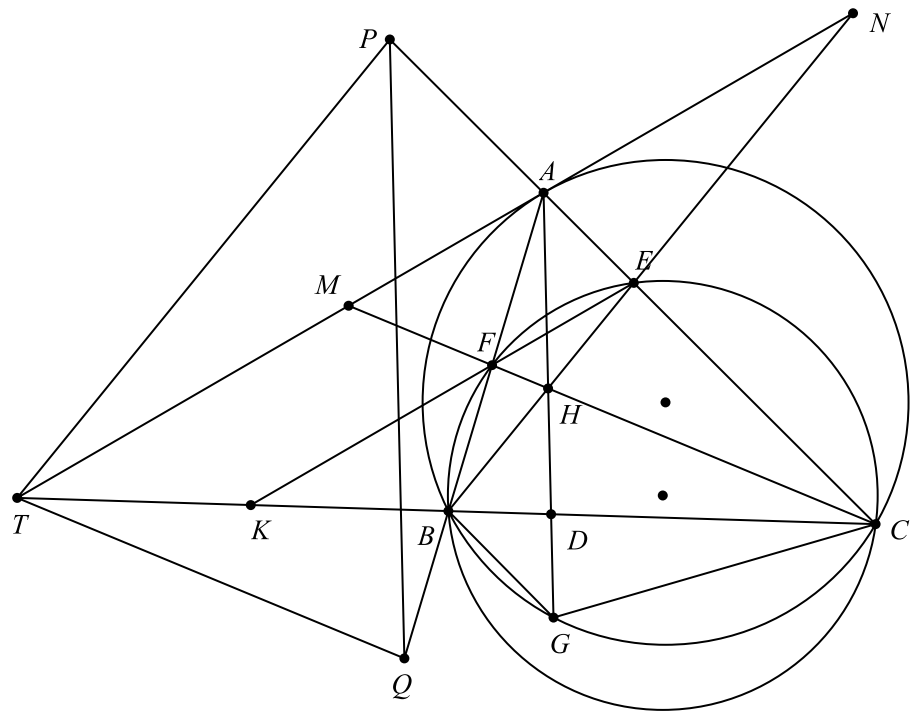
Gọi $AX \cap (O_1)=\{X; E\}$; $AX \cap (O_2)=\{X; F\}$. Gọi H, T, K lần lượt là hình chiếu của O_1, O, O_2 lên AX.

Ta có $\Delta AMN \sim \Delta LCB$ (g.g), kết hợp với tứ giác $ABLC$ điều hoà ta được $\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{LC}{LB}=\dfrac{AC}{AB}$

Suy ra $\overline{AM}.\overline{AB}=-\overline{AN}.\overline{AC}$

Đến đây làm tương tự bài toán 2 ta thu được điều phải chứng minh.

Bài toán 5 (Mở rộng khác bài toán 1). *Cho tam giác ABC, đường tròn đi qua B, C cắt AC, AB lần lượt tại E, F. Cho BE giao CF tại H. Tiếp tuyến đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt BC tai T. Trên AB lấy điểm Q, trên AC lấy điểm P sao cho TP song song BE, TQ song song CF. Chứng minh rằng PQ song song với AH.*



Lời giải. Gọi $EF \cap BC \equiv K$, $BE \cap AT \equiv N$, $CF \cap AT \equiv M$, $AH \cap BC \equiv D$, $AH \cap (ABC) = \{A; G\}$.

Theo tính chất góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung ta có $\widehat{NAC} = \widehat{ABC} = \widehat{AEF}$, suy ra $EF \parallel AT$.

Trước hết ta có $\dfrac{TC}{TB} = \dfrac{AC^2}{AB^2}$ và $(BCDK) = -1$ nên $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{KB}{KC}$.

Theo định lý Thales $\dfrac{AM}{EF} = \dfrac{TC}{KC}$ và $\dfrac{AN}{EF} = \dfrac{TB}{KB}$, suy ra

$$\frac{AM}{AN} = \frac{TC}{TB}.\frac{KB}{KC} = \frac{AC^2}{AB^2}.\frac{DB}{DC} = \frac{GB}{GC}.\frac{AC}{AB} = \frac{GB}{GC}.\frac{AF}{AE}.$$

Suy ra $\dfrac{GB}{GC} = \dfrac{AM}{AF}.\dfrac{AE}{AN} = \dfrac{AT}{AQ}.\dfrac{AP}{AT} = \dfrac{AP}{AQ}$.

Xét ΔPAQ và ΔBGC có : $\widehat{PAQ} = \widehat{BGC}$ và $\dfrac{GB}{GC} = \dfrac{AP}{AQ}$ nên $\Delta PAQ \sim \Delta BGC$ (c.g.c)

Từ đó $\widehat{PQA} = \widehat{BCG} = \widehat{BAG}$, suy ra $PQ \parallel AH$, đây là điều cần chứng minh.

Bài toán 6 . *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại A_1. Lấy A_2, A_3 đối xứng với A_1 qua AB, AC. Gọi d_a là đường thẳng qua A_2, A_3. Tương tự có d_b, d_c. Các đường d_a, d_b, d_c cắt nhau tạo thành tam giác $A_4B_4C_4$.*

a) Chứng minh rằng $d_a \perp BC$.

b) Chứng minh rằng AA_4, BB_4, CC_4 đồng quy tại một điểm S.

c) Chứng minh S thuộc (ABC) và $(A_4B_4C_4)$.

d) Chứng minh (ABC) và $(A_4B_4C_4)$ trực giao.

e) Chứng minh đường thẳng Simson ứng với S của (ABC) song song với đường thẳng nối A_1, B_1, C_1

Lời giải.

a) Là kết quả bài toán 1.

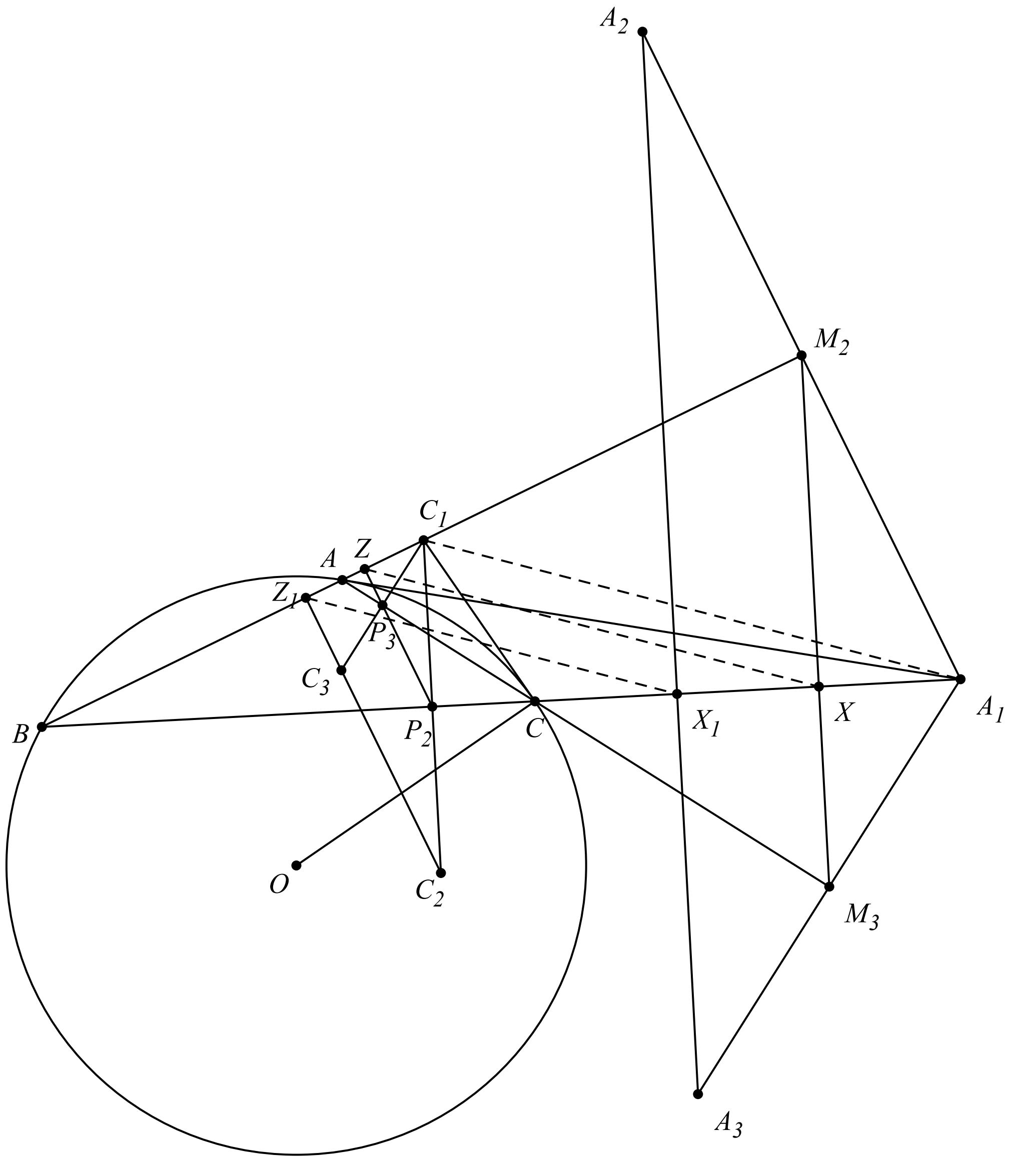
b) Gọi $A_1A_3 \cap AC \equiv M_3$; $A_1A_2 \cap AB \equiv M_2$; $M_2M_3 \cap BC \equiv X$, $d_a \cap BC \equiv X_1$
$C_1C_2 \cap BC \equiv P_2$; $C_1C_3 \cap AC \equiv P_3$; $P_2P_3 \cap AB \equiv Z$; $d_c \cap AB \equiv Z_1$
$d_b \cap AC \equiv Y_1$.

Trước hết ta có $\dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = \dfrac{c^2}{b^2}$, tương tự ta thu được $\prod \dfrac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} = 1$ nên theo định lý Menelaus đảo ta có A_1, B_1, C_1 thẳng hàng.

Tứ giác P_2ZM_2X nội tiếp nên $\widehat{ZXP_2} = \widehat{ZM_2P_2}$

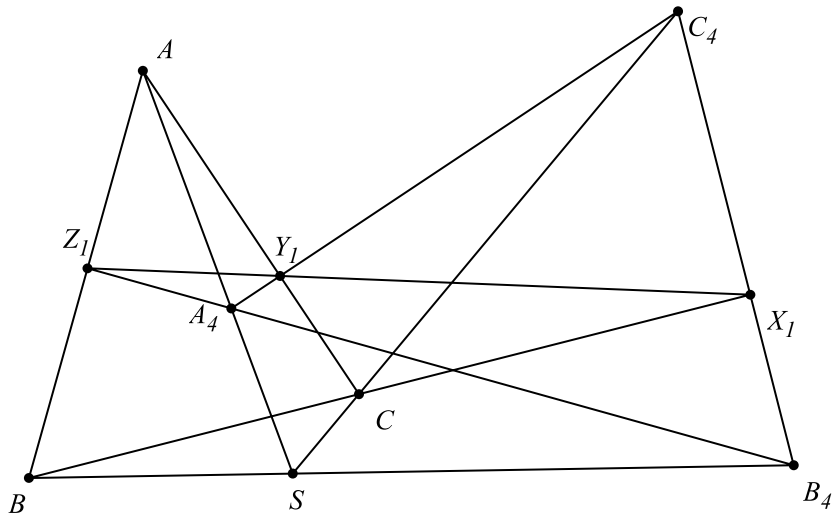
Tứ giác $P_2C_1M_2A_1$ nội tiếp nên $\widehat{ZM_2P_2} = \widehat{C_1A_1P_2}$

Suy ra $\widehat{ZXP_2} = \widehat{C_1A_1P_2}$, do đó $ZX \parallel A_1C_1$

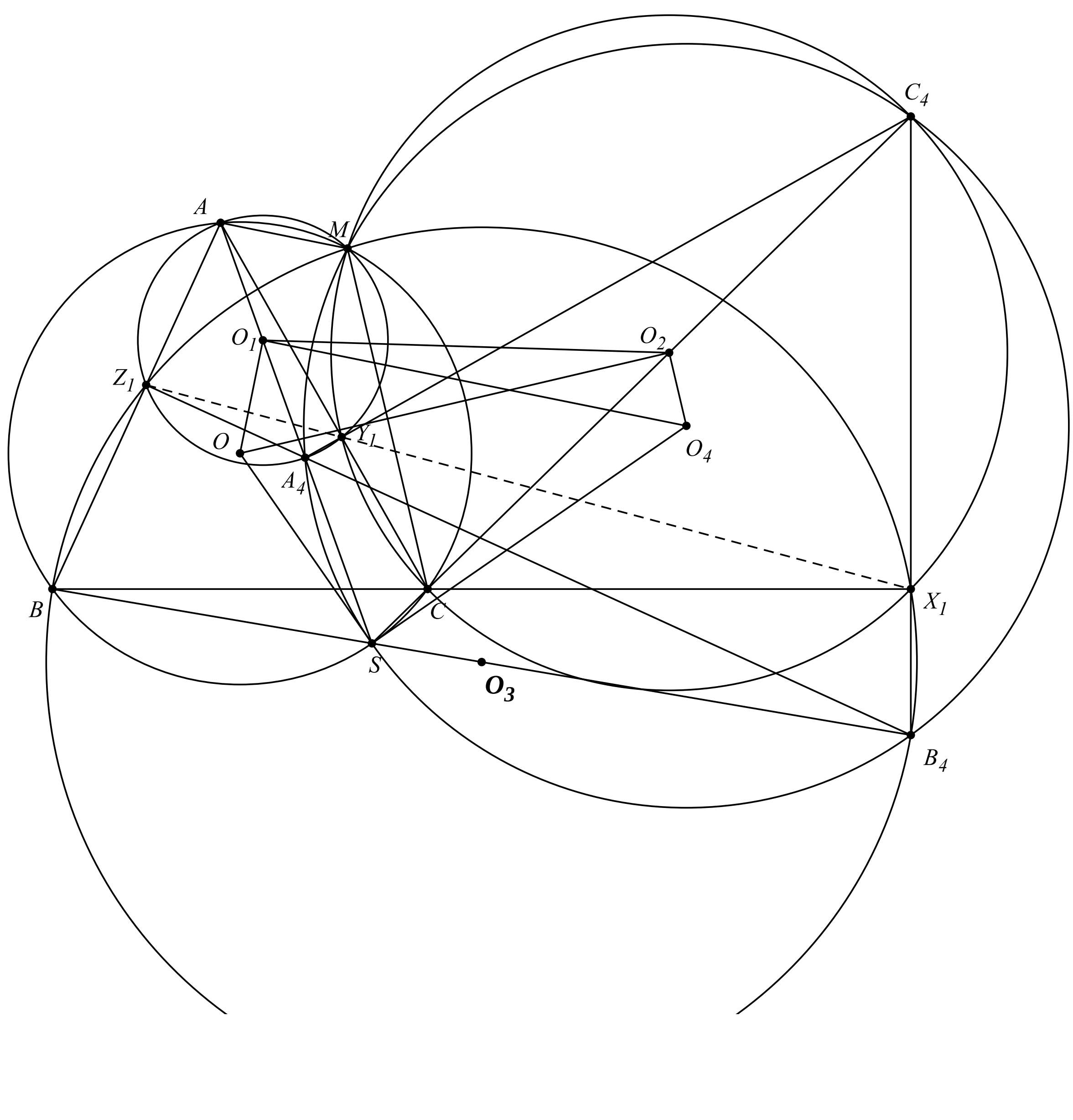


Ta có $(A_1X_1X)=(C_1Z_1Z)=-1$ và $ZX \parallel A_1C_1$ nên $Z_1X_1 \parallel A_1C_1$
Tương tự $X_1Y_1 \parallel A_1B_1$. Mà A_1,B_1,C_1 thẳng hàng nên X_1,Y_1,Z_1 thẳng hàng.
Xét ΔABC và $\Delta A_4B_4C_4$ có giao điểm của các cặp cạnh tương ứng thẳng hàng nên theo định lý Desargues ta có AA_4, BB_4, CC_4 đồng quy tại S, đây là điều cần chứng minh.

c) 4 điểm A, A_4, Y_1, Z_1 cùng thuộc một đường tròn nên $\widehat{ZAA_4}=\widehat{C_4Y_1X_1}$, suy ra $\widehat{C_4CX_1}=\widehat{Z_1AA_4}$ nên $S\in(ABC)$
Tương tự $S\in(A_4B_4C_4)$, ta có điều cần chứng minh.

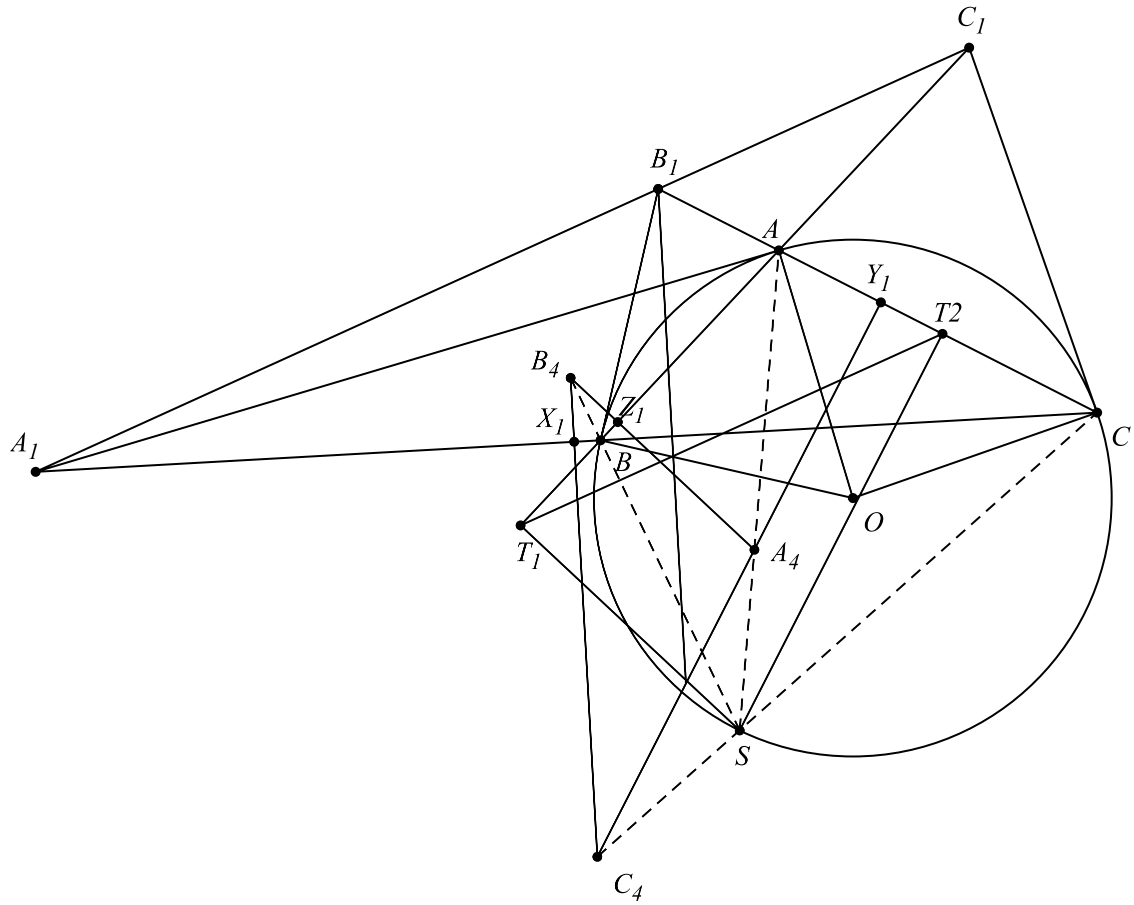


d) Gọi M là điểm Miquel ứng với tứ giác toàn phần $BZ_1Y_1CAX_1$. Gọi O, O_1, O_2, O_4 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $ABC, AY_1Z_1, CX_1Y_1, A_4B_4C_4$.



Theo tính chất đường nối tâm và dây chung ta có $OO_1 \perp AM$ và $OO_2 \perp MC$ suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{O_1OO_2}$. Mặt khác $\widehat{O_1MA} = \widehat{O_1AM} = \widehat{MCO_2} = \widehat{CMO_2}$ nên $\widehat{AMC} = \widehat{O_1MO_2}$.
Từ hai điều trên, kết hợp với A,B,C,M đồng viên, ta có O,O_1,M,O_2 đồng viên.

Tương tự O_4,O_1,M,O_2 đồng viên. Ta lại có $\widehat{ASO_2} = \widehat{ABC} = \widehat{O_1OO_2}$ suy ra S,O,O_1,O_2 đồng viên. Như vậy ta có M,S,O,O_4 đồng viên, suy ra (ABC) và $(A_4B_4C_4)$ trực giao, đây là điều cần chứng minh.



e) Đường thẳng Simson ứng với điểm S của tam giác ABC cắt AB, AC tại T_1, T_2

Ta có $\widehat{AY_1Z_1} = \widehat{AA_4Z_1} = \widehat{AST_1} = \widehat{AT_2T_1}$ suy ra $T_1T_2 \parallel Y_1Z_1$. Mặt khác theo câu b) ta có $Y_1Z_1 \parallel B_1C_1$, suy ra đường thẳng Simson ứng với điểm S của tam giác ABC song song với đường thẳng nối A_1, B_1, C_1, ta có điều cần chứng minh.

Tài liệu tham khảo

[1] Đề thi Olympic Nhật Bản 2012 – Diễn đàn AoPS http://artofproblemsolving.com.