

Mỗi tuần một bài toán

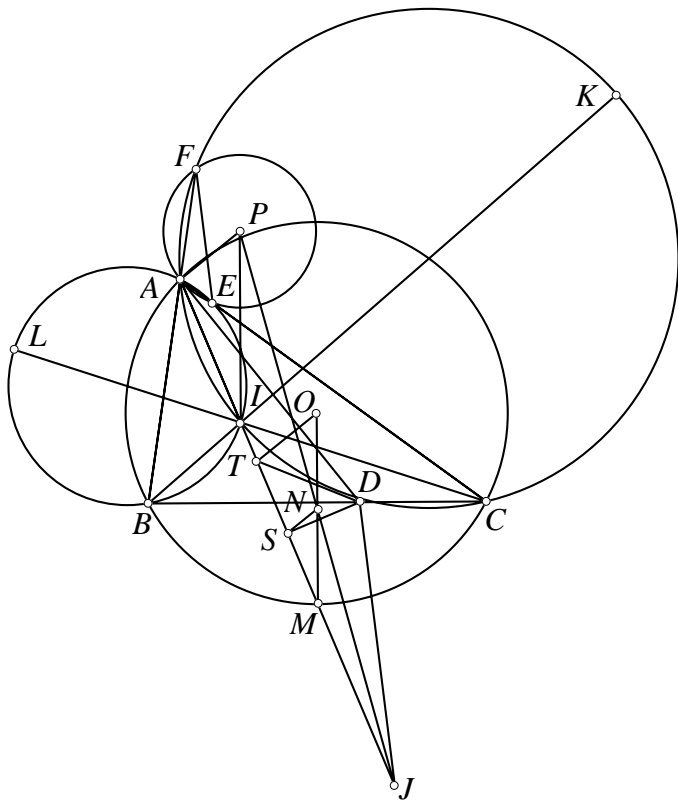
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I , tâm bàng tiếp ứng với đỉnh A là J . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB , AIC lần lượt cắt CA , AB tại E , F khác A . Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt BC tại D . Chứng minh rằng $DA = DJ$.

Lời giải



Gọi K, L là tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B, C của tam giác ABC . Ta dễ thấy rằng K là giao của IB và đường tròn ngoại tiếp tam giác IAC và L là giao của IC và đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB . Gọi P là tâm ngoại tiếp tam giác AEF , ta có

$$PB^2 - PC^2 = \mathcal{P}_{B/(P)} - \mathcal{P}_{C/(P)} = \overline{BA} \cdot \overline{BF} - \overline{CA} \cdot \overline{CE} = \overline{BI} \cdot \overline{BK} - \overline{CI} \cdot \overline{CL} = \overline{BI}(\overline{BI} + \overline{IK}) - \overline{CI}(\overline{CI} + \overline{IL}) = BI^2 - CI^2 + \overline{BI} \cdot \overline{IK} - \overline{CI} \cdot \overline{IL} = IB^2 - IC^2.$$

Đẳng thức cuối do tứ giác $BCKL$ nội tiếp. Từ đó $IP \perp BC$. Gọi AI cắt (O) tại M khác A suy ra

$OM \perp BC \perp IP$ vậy $OM \parallel IP$ mà M là trung điểm IJ suy ra OM đi qua trung điểm N của PJ .

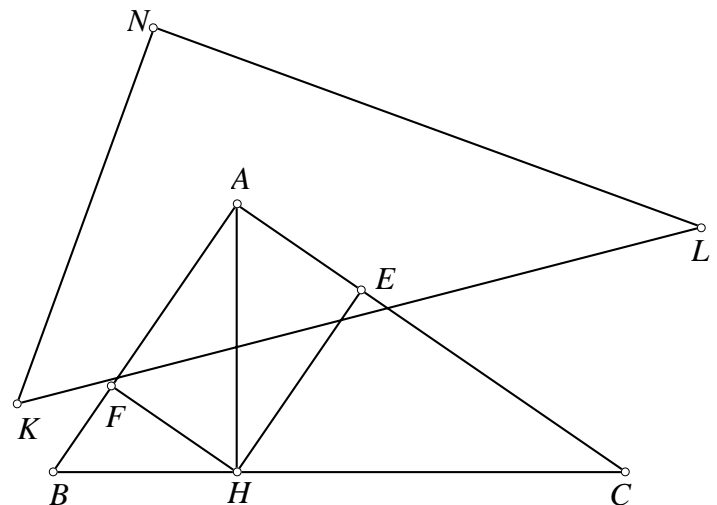
Gọi S là trung điểm AJ và T là đối xứng của M qua S , dễ thấy $TA = MJ = MB$. Ta có $AD \perp AP \parallel SN \parallel OT$ từ đó $OT \perp AD$. Lại chú ý $OM \perp BD$ suy ra $TD^2 - TA^2 = OD^2 - OA^2 = OD^2 - OB^2 = MD^2 - MB^2 = MD^2 - TA^2$ suy ra $TD = MD$ suy ra SD là trung trực MT cũng là trung trực của AJ vậy $DA = DJ$. Ta có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Đây là một bài toán hay đặc trưng cho rất nhiều tính chất của tâm ngoại tiếp và tâm bàng tiếp. Việc dựng thêm ra hai tâm bàng tiếp còn lại cũng là một cách dựng hình rất đặc trưng, khá kinh điển cho dạng bài tập loại này. Ý tưởng ban đầu của tác giả khi tạo ra bài toán này là dùng phép nghịch đảo. Tuy nhiên trong quá trình tập huấn các đội tuyển thì tác giả thu được lời giải thuần túy hình học như trên. Bài toán cũng được quan tâm và đưa ra lời giải khác rất thú vị bởi bạn **Phạm Quang Toàn** từ <http://diendantoanhoc.net>. Các bạn có thể xem lời giải của bạn **Toàn** ở [đây](#).

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH . E, F lần lượt là hình chiếu của H lên CA, AB . Gọi K, L, N lần lượt là tâm bàng tiếp đỉnh H của các tam giác HBF, HCE, HEF . Chứng minh rằng A là tâm nội tiếp tam giác KLN .



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.