Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

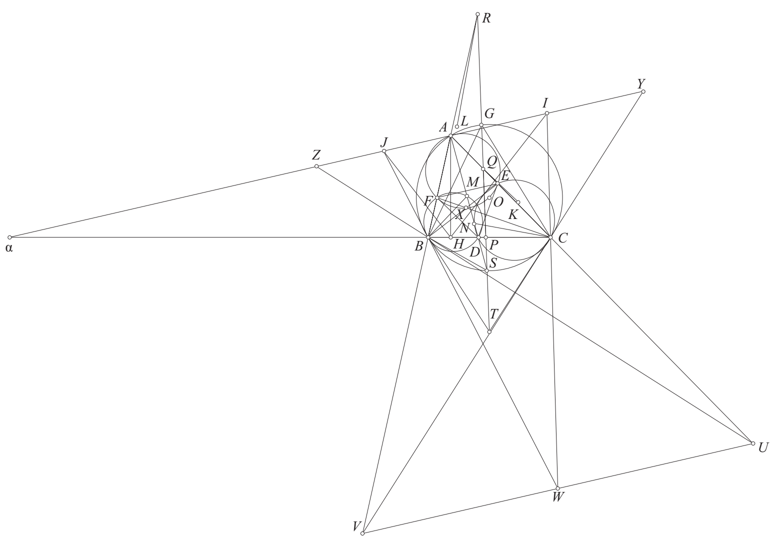
Cho tam giác ABC với phân giác AD và đường cao AH. Các điểm M, N thuộc AD sao cho $BM \perp CA, CN \perp AB$. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác CND, BMD theo thứ tự cắt CA, AB tại E, F khác C, B. Phân giác các góc $\angle AEB, \angle AFC$ lần lượt cắt đường thẳng qua A vuông góc AD tại P, Q. Gọi K, L là trung điểm AP, AQ. Chứng minh rằng HA là phân giác góc $\angle KHL$.

Bài toán trên là trường hợp riêng của bài toán sau

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. S là một điểm trên cung BC không chứa A. ST cắt BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R. Gọi K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác QPC, RPB. Lấy M, N trên AS sao cho $BM \perp QK, CN \perp RL$. AS cắt BC tại D. Đường tròn $(DCN), (DBM)$ lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác C, B. Đường thẳng qua A song song EF lần lượt cắt phân giác ngoài các góc $\angle ACF, \angle ABE$ tại Y, Z. I, J là trung điểm AY, AZ. H là hình chiếu của A lên BC. Chứng minh rằng HA là phân giác $\angle IHJ$.

Lời giải

Bài toán tổng quát được tôi phát triển từ lời giải của bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương, sau đây là lời giải bài tổng quát dựa trên ý tưởng của bạn **Dũng**.



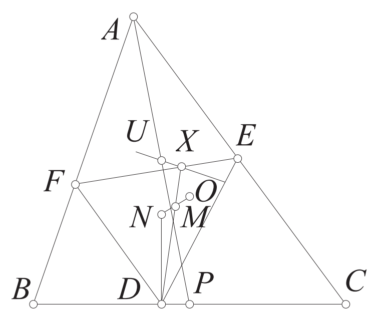
Gọi ST cắt (O) tại G khác S. Ta có biến đổi góc $(ED, EA) = (ED, EC) = (ND, NC) = (ND, AB) + (AB, RL) + (RL, NC) = (AS, AB) + 90° + (BC, PR) + 90° = (BS, BT) + (BC, BS) + (BS, SP) = (BC, BT) + (BT, BG) = (BC, BG) = (CT, CG) \pmod{180°}$ và $(AD, AE) = (AS, AC) = (GS, GC) = (GT, GC) \pmod{180°}$. Từ đó tam giác $AED \sim \triangle GCT$. Tương tự tam giác $AFD \sim \triangle GBT$. Vậy $\triangle AEF \cup D \sim \triangle GBC \cup T$ nên dễ thấy ED, FD là tiếp tuyến của (AEF). Từ đó theo định lý Pascal đảo BE, CF cắt nhau tại X trên (AEF). Gọi BZ, CY cắt CA, AB tại U, V. Ta có $\frac{UE}{UA} = \frac{BE}{BA} = \frac{EF}{AX} = \frac{CF}{CA} = \frac{VF}{VA}$. Từ đó $YZ \parallel EF \parallel UV$, theo tính chất hình thang thì CI, BJ đi qua trung điểm W của UV. Gọi YZ cắt BC tại α. Từ đây chùm $A(UV, W\alpha) = -1$ chiếu lên BC thì $A(BC, W\alpha) = -1$ chiếu qua tâm W thì $W(BC, A\alpha) = -1$ hay hàng $(IJ, A\alpha) = -1$. Từ đây chùm $H(IJ, A\alpha)$ điều hòa nên HA là phân giác $\angle IHJ$.

Nhật xét

Bài toán được tác giả tạo ra bằng việc sử dụng phép nghịch đảo trên một bài toán khác đã biết. Tuy nhiên bạn **Dũng** đã đưa ra lời giải khác dựa trên hàng điều hòa và dựa vào đó bài toán được phát triển hơn. Bạn **Đỗ Trung Phương** lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc và **Nguyễn Tiến Long** lớp 10 toán, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, đã đưa ra lời giải khác độc lập cho bài toán ở đây. Ngoài ra tác giả còn nhận được lời giải qua email từ bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN và bạn **Lê Phước Tùng** lớp 11 Toán THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O và tâm đường tròn Euler là N. D, E, F là hình chiếu của N lên BC, CA, AB. M là trung điểm ON. MD, ME, MF cắt EF, FD, DE lần lượt tại X, Y, Z. Gọi P, Q, R là trung điểm BC, CA, AB. U, V, W là trung điểm AP, BQ, CR. Chứng minh rằng XU, YV, ZW đồng quy.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.