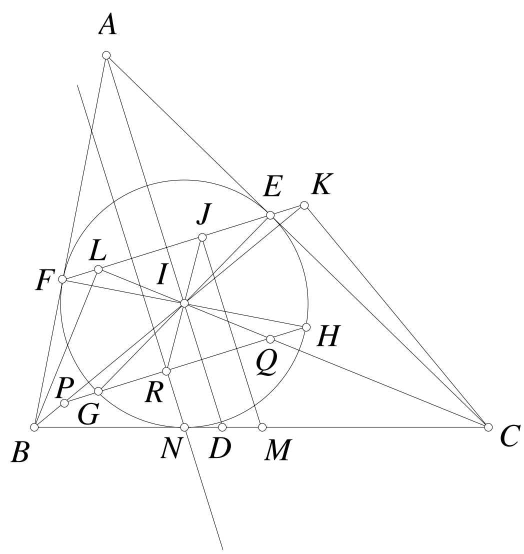
Mở rộng bài toán hình học VMO 2013

Trần Quang Hùng

Đề thi học sinh giỏi quốc gia Việt Nam năm 2013 có một bài toán hay, đề bài có thể viết gọn lại như sau

Bài 1. *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB lần lượt tại E, F. G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I. Đường thẳng GH giao IB, IC lần lượt tại P, Q. Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\frac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*



Chứng minh. Gọi IB, IC lần lượt cắt EF tại K, L. Chú ý tam giác AEF cân tại A nên $\angle KEC = \angle AEF = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 180^\circ - (90^\circ - \frac{\angle A}{2}) = 180^\circ - \angle BIC = \angle KIC$. Từ đó tứ giác $KEIC$ nội tiếp suy ra $\angle IKC = \angle IEC = 90^\circ$. Tương tự $\angle ILB - 90^\circ$. Từ đó nếu gọi M là trung điểm BC, J là trung điểm KL dễ có tam tam giác KLM cân nên $MJ \perp EF \quad (1)$.

Do G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I nên đường thẳng GH đối xứng đường thẳng EF qua I. GH, EF lần lượt cắt IB tại P, K suy ra I là trung điểm PK, tương tự I là trung điểm QL. Vậy hai đoạn KL và PQ đối xứng nhau qua I. Từ đó nếu gọi R là trung điểm PQ thì trung điểm J của KL và R đối xứng nhau qua I hay I là trung điểm RJ.

Gọi trung trực PQ cắt BC tại N, ta thấy RN vuông góc PQ, PQ song song $EF \quad (2)$.

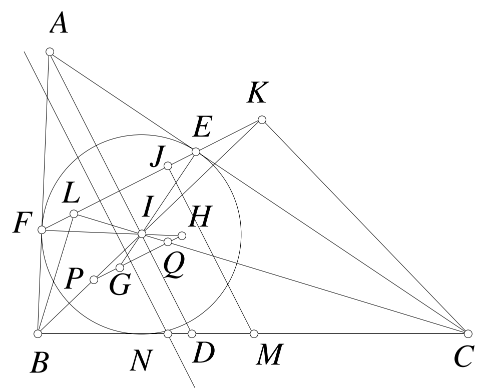
Từ (1) và (2) suy ra RN song song JM. Gọi IA cắt BC tại D, dễ có $ID \equiv IA$ vuông góc EF nên ID cũng song song với RN, JM. Từ đó trong hình thang $RJMN$ có I là trung điểm RJ nên ID là đường trung bình, vậy D là trung điểm MN.

Theo tính chất đường phân giác $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = k$ không đổi nên D cố định. M là trung điểm BC cố định nên N đối xứng M qua D cố định. Vậy trung trực PQ đi qua N cố định. $\square$

Nhận xét. Phần đầu ta chứng minh $\angle IKC = \angle ILB = 90°$ là các bài toán rất cơ bản liên quan tới đường tròn nội tiếp và các tiếp điểm. Trong đề toán còn cho giả thiết $\frac{AB}{AC} = k$ không đổi thực chất giả thiết này chỉ nhằm duy nhất mục đích suy ra chân đường phân giác góc A là cố định.

Với ý tưởng trong chứng minh ta thấy đường tròn đường kính BC và phép đối xứng tâm I có vai trò qua trọng. Dựa vào ý tưởng đó ta có thể dần dần mở rộng bài toán này như sau

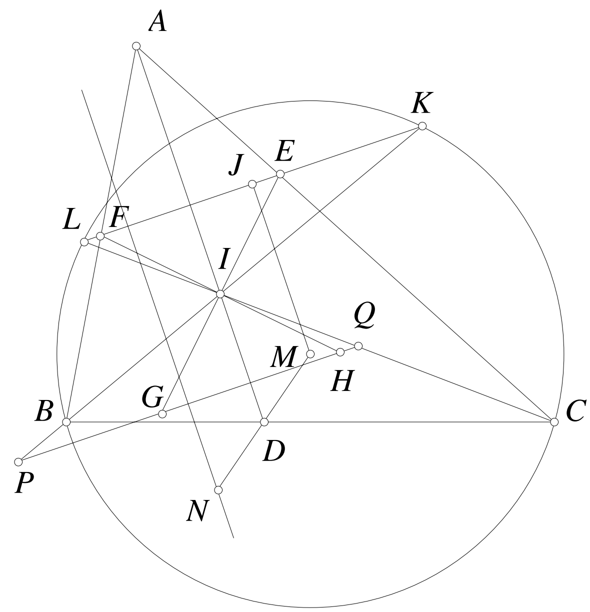
Bài 2. *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB lần lượt tại E, F. G, H lần lượt là điểm chia IE, IF theo một tỷ số m cố định. Đường thẳng GH giao IB, IC lần lượt tại P, Q. Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\frac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*



Chứng minh. Về cơ bản lời giải hoàn toàn giống lời giải bài toán 1 trong trường hợp G, H đối xứng E, F qua I. Ta chỉ chú ý rằng nếu G, H chia IE, IF tỷ số m có nghĩa là đường thẳng GH là ảnh của đường thẳng EF qua phép vị tự tâm I tỷ số m. Qua đó một cách hoàn toàn tương tự ta chứng minh được trung trực PQ đi qua N cố định là ảnh vị tự của M qua tâm D tỷ số m. □

Nhận xét. Trong bài toán trên ta vẫn thấy vai trò qua trọng của đường tròn đường kính BC. Ta có thể tìm cách thay thế yếu tố đó, ta thay thế đường tròn đường kính BC bằng một đường tròn bất kỳ đi qua B, C. Ta thu được bài toán sau

Bài 3. *Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Một đường tròn (M) bất kỳ qua B, C. IB, IC lần lượt cắt (M) tại K, L khác B, C. KL cắt CA, AB lần lượt tại E, F. G, H là đối xứng của E, F qua I. GH cắt IB, IC tại P, Q. Giả sử đường tròn (M) và B, C cố định. A thay đổi sao cho tỷ số $\frac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*



Chứng minh. Về cơ bản lời giải giống lời giải bài toán 1, xong ở đây chỉ khác EF là giao của KL. Ta cố gắng chứng minh EF vuông góc với AI thì bài toán được giải quyết theo ý tưởng bài toán 1, thật vậy ta thấy

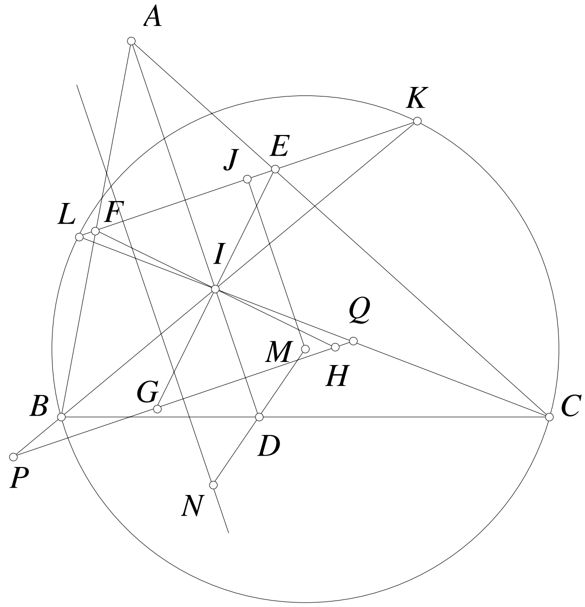
$$\angle EKI = \angle LKB = \angle LCB = \angle ICE.$$

Từ đó tứ giác $EKCI$ nội tiếp, ta suy ra $\angle AEF = \angle KEC = \angle KIC$. Tương tự $\angle AFE = \angle LIB$ mà $\angle KIC = \angle LIB$ do đó tam giác AEF cân có AI là phân giác $\angle BAC$ nên AI vuông góc EF.

Vậy đến đây lời giải hoàn toàn tương tự bài lời giải bài toán 1 bằng phép đối xứng tâm I. Ta chú ý trung trực PQ sẽ đi qua điểm N cố định đối xứng M qua D. □

Nhận xét. Bài toán tuy tổng quát cho bài toán gốc xong lời giải đạt được dễ dàng hơn do đã xuất hiện tâm M trong đề bài. Thực chất ta có thể phát biểu lại bài toán trở thành khó hơn như sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho $\angle IEC = \angle IFB = \alpha$ không đổi. G, H là đối xứng của E, F qua I. GH cắt IB, IC tại P, Q. Giả sử A thay đổi và B, C cố định sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*



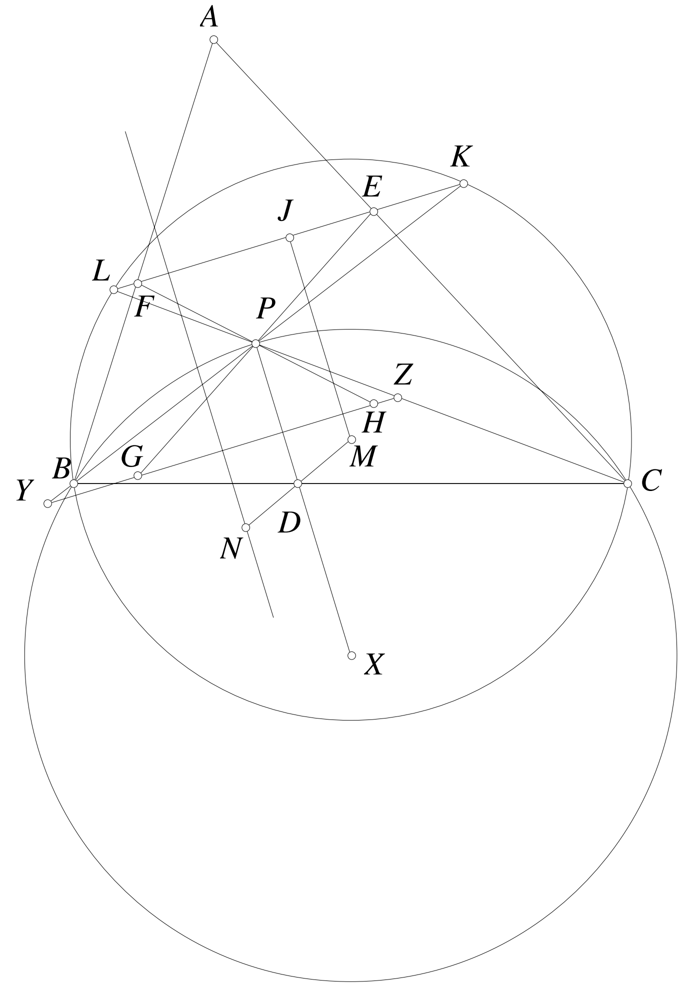
Chứng minh. Do $\angle IEC = \angle IFE = \alpha$ không đổi ta dễ chứng minh tam giác AEF cân và từ đó, nếu gọi IB, IC cắt EF tại K, L ta dễ chỉ ra B, C, K, L nằm trên đường tròn (M) cố định. Chân phân giác góc A là D cố định khi đó trung trực PQ sẽ đi qua điểm đối xứng của M qua D cố định. □

Với ý tưởng mở rộng qua phép vị tự hoàn toàn tương tự bài toán 2. Ta đề xuất bài toán sau lời giải kết hợp bài toán 2 và bài toán 3,4

Bài 5. *Cho tam giác ABC, I là tâm đường tròn nội tiếp. Các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho $\angle IEC = \angle IFE = \alpha$ không đổi. G, H là các điểm lần lượt chia IE, IF tỷ số m cố định. GH cắt IB, IC tại P, Q. Giả sử A thay đổi và B, C cố định sao cho tỷ số $\frac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.*

Nhận xét. Chúng ta bắt đầu có thể nhận thấy vai trò của tâm I đường tròn nội tiếp có thể thay thế được. Tuy vậy khi đó yếu tố chân đường phân giác cố định sẽ không còn được giữ nguyên

Bài 6. *Cho tam giác ABC, P là một điểm bất kỳ. Đường tròn (M) bất kỳ đi qua B, C. BP, CP lần lượt cắt (M) tại K, L. KL cắt CA, AB tại E, F. G, H lần lượt đối xứng E, F qua P. GH cắt PB, PC tại Y, Z. Giả sử B, C và (M) cố định A, P thay đổi sao cho đường nối P và tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC luôn đi qua một điểm cố định trên BC. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua điểm cố định.*



Chứng minh. Về cơ bản lời giải hoàn toàn tương tự các bài toán trên. Ta chỉ chú ý nếu gọi X là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC ta dễ chứng minh được XP vuông góc với EF. Chú ý rằng với giả thiết thì XP đi qua D cố định thuộc BC. Từ đó một cách hoàn toàn tương tự ta chứng minh được trung trực YZ đi qua điểm N đối xứng của M qua D cố định. □

Nhận xét. Tuy rằng bài toán có vài trò tổng quát hơn các bài trước xong ta dễ dàng thu được lời giải hơn nhờ các yếu tố cố định đã cho sẵn. Chúng ta hoàn toàn có thể tổng quát hơn một chút bằng cách thay các điểm chia PE, PF theo tỷ số m không đổi. Thực ra với bài toán tổng quát và P bất kỳ ta có thể khai thác được rất nhiều tính chất mới từ bài toán này, xin dành cho bạn đọc tiếp tục tìm tòi. Cuối cùng tôi xin nêu ra một ví dụ ứng dụng bài toán tổng quát khi P là trực tâm, lời giải nó xin dành cho bạn đọc.

Bài 7. *Cho đoạn BC và D thuộc BC cố định. Đường tròn (O) thay đổi đi qua B, C. M đối xứng với O qua BC. Đường thẳng qua O song song với MD cắt (O) tại A sao cho A và M khác phía với BC. (K) là một đường tròn cố định đi qua B, C. MD cắt đường thẳng qua A vuông góc BC tại H. HB, HC cắt (K) tại E, F khác B, C. Y, Z là đối xứng của E, F qua H. Chứng minh rằng trung trực của YZ luôn đi qua một điểm cố định khi (O) di chuyển.*

Tài liệu

[1] VMO problem 3 at the AoPS

[2] H. S. M. Coxeter and S. L. Greitzer. Geometry revisited, volume 19. The Mathematical Association of America, 1967.

[3] V. V. Prasolov. Problems in Plane Geometry. M.:MCCME, 2006.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN-ĐHKHTN-ĐHQGHN
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Đề hình chọn đội tuyển Việt Nam và các mở rộng

Trần Quang Hùng

Bài 1 (VNTST-Ngày 1)**.** *Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh không song song nội tiếp (O,R). Gọi E là giao điểm hai đường chéo và đường phân giác góc AEB cắt các đường thẳng AB,BC,CD,DA lần lượt tại M,N,P,Q.*

a) Chứng minh rằng các đường tròn $(AQM),(BMN),(CNP),(DPQ)$ cùng đi qua một điểm. Gọi điểm đó là K.

b) Đặt $\min\{AC,BD\}=m$. Chứng minh rằng $OK \le \dfrac{2R^2}{\sqrt{4R^2-m^2}}$.

Bài 2 (Mở rộng bài 1)**.** *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. Một đường thẳng d bất kỳ đi qua E cắt AB,BC,CD,DA lần lượt tại M,N,P,Q. Gọi các giao điểm của các đường tròn $(AQM)\cap(BMN)=\{M,X\}$, $(BMN)\cap(CNP)=\{N,Y\}$, $(CNP)\cap(DPQ)=\{P,Z\}$, $(DPQ)\cap(AQM)=\{Q,T\}$.*

a) Chứng minh rằng X,Y,Z,T cùng thuộc một đường tròn (K).

b) Chứng minh rằng (K) luôn đi qua một điểm cố định khi d di quay quanh E.

Bài 3 (VNTST-Ngày 2)**.** *Cho tam giác ABC nhọn không cân có góc $\angle BAC=45°$. Các đường cao AD,BE,CF đồng quy tại trực tâm H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P. I là trung điểm của BC,IF cắt PH tại Q.*

a) Chứng minh rằng góc $\angle IQH=\angle AIE$.

b) Gọi K là trực tâm của tam giác AEF, (J) là đường tròn ngoại tiếp tam giác KPD. CK cắt đường tròn (J) tại G, IG cắt (J) tại M, JC cắt đường tròn đường kính BC tại N. Chứng minh rằng G,N,M,C cùng thuộc một đường tròn.

Thực sự góc $45°$ là không cần thiết trong bài toán.

Bài 4 (Mở rộng bài 3)**.** *Cho tam giác ABC đường cao AD,BE,CF đồng quy tại H, EF giao BC tại G. Gọi (K) là đường tròn đường kính BC. Trung trực BC cắt (K) tại điểm L sao cho A,L cùng phía BC. Gọi (N) là đường tròn ngoại tiếp tam giác GDL. CL cắt (N) tại M khác L. MK cắt (N) tại P khác M. CN cắt (K) tại Q khác C. Chứng minh rằng M,Q,P,C cùng thuộc một đường tròn.*

Từ bài mở rộng trên nếu $\angle A=45°$ thì ta có bài toán TST. Nếu thay thế đường tròn đường kính BC trong bài toán trên ta có thể mở rộng hơn như sau

Bài 5. *Cho tứ giác lồi $BFEC$ nội tiếp đường tròn (K). BE giao CF tại H. D là hình chiếu của H lên BC. Trung trực BC cắt (K) tại L sao cho H,L cùng phía BC. (N) là đường tròn qua D,L và tiếp xúc KL tại L. CL cắt (N) tại M khác L. CN cắt (K) tại Q khác C. Gọi CX là đường kính của (K). XQ cắt BC tại Y. Gọi Z là trung điểm của CY. MZ cắt (N) tại P khác M. Chứng minh rằng M,Q,P,C cùng thuộc một đường tròn.*

Nếu K là trung điểm BC thì Y trùng B, Z trùng K ta thu được bài toán trên.

Thực ra ta có thể thấy vai trò của hàng điểm điều hòa (BC,DG) và đường tròn (K) không nhất thiết phải gắn liền với nhau hơn nữa yếu tố đường trung trực cắt nửa đường tròn tại điểm L cũng không cần thiết ta có thể mở rộng bài toán hơn nữa như sau

Bài 6. *Cho tam giác* ABC *với* D,G *thuộc* BC *sao cho* $(BC,DG)=-1$. (K) *là một đường tròn bất kỳ đi qua* B,C. L *là một điểm bất kỳ thuộc* (K). CL *cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác* LGD *tại điểm* M *khác* L. *Gọi* I,J *lần lượt là trung điểm của* BC,GD. MI *cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác* LGD *tại* P *khác* M. MJ *cắt đường thẳng qua* L *song song* BC *tại* N. CN *cắt* (K) *tại* Q *khác* C. *Chứng minh rằng* M,Q,P,C *cùng thuộc một đường tròn.*

Xung quanh hai bài toán hình thi IMO năm 2013

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ mở rộng và khai thác hai bài toán hình trong kỳ thi IMO 2013

1 Mở đầu

Trong kỳ thi toán quốc tế năm 2013 có hai bài toán hình hay như sau

Bài 1. *Cho tam giác giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi tâm ngoại tiếp tam giác DEF nằm trên (O).*

Bài toán trên là bài toán 3 của ngày 1, theo sự sắp xếp đó là bài toán khó nhất trong ngày hôm đó.

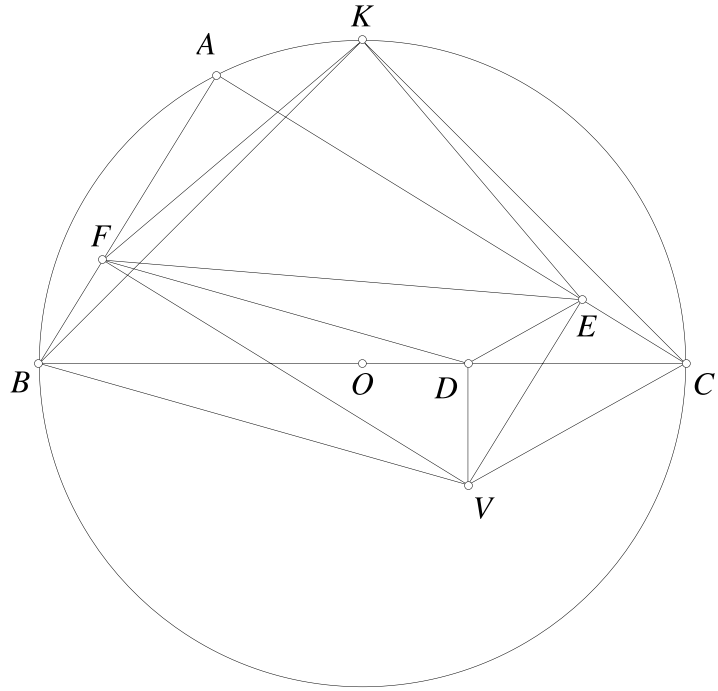
Bài 2. *Cho tam giác ABC, đường cao BE, CF cắt nhau tại H. P là một điểm trên BC. Gọi PK, PL là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBF, PCE. Chứng minh rằng KL đi qua H.*

Bài toán trên là bài toán 4 của ngày 2, theo sự sắp xếp đó là bài toán dễ nhất trong ngày hôm đó.

Trong bài viết này chúng ta sẽ đi sâu tìm hiểu kỹ hơn hai bài toán trên cũng như tìm hiểu các mở rộng và ứng dụng của nó.

2 Lời giải hai bài toán và bình luận

Lời giải bài 1. Gọi phân giác ngoài góc A cắt (O) tại K. Ta dễ chứng minh $BF = CE$ nên trung trực EF đi qua K. Nếu tâm ngoại tiếp tam giác DEF thuộc (O) sẽ nằm ngoài tam giác DEF nên khi đó tam giác DEF tù. Không mất tổng quát giả sử $\angle EDF$ tù. Do tâm ngoại tiếp tam giác DEF cũng thuộc trung trực EF vậy tâm ngoại tiếp tam giác DEF phải là giao của trung trung trực EF và (O). Giao điểm này phải nằm trong góc $\angle EDF$ nên giao điểm này chính là K. Vậy K cũng là tâm ngoại tiếp tam giác DEF.



Dễ thấy các đường thẳng qua tâm bàng tiếp I_a, I_b, I_c lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại điểm V. Từ đó các tứ giác $DFBV, DECV$ nội tiếp. Ta suy ra $\angle BVC = \angle BVD + \angle CVD = \angle AFD + \angle AED = 360° - \angle BAC - \angle EDF = 360° - \angle EKF - (180° - \dfrac{\angle EKF}{2}) = \angle EKF = \dfrac{360° - \angle EKF}{2}$.

Mặt khác $KB = KC$. Từ đó dễ suy ra K là tâm ngoại tiếp tam giác BVC. Từ đó theo tính chất đối xứng dễ suy ra $VF = BD = AE, VE = CD = AF$. Vậy tứ giác $AEVF$ là hình bình hành mà $\angle AEV = \angle AFV = 90°$ vậy đó là hình chữ nhật suy ra $\angle BAC = 90°$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đây là một trong những cách ngắn gọn nhất cho bài toán này mà không phải vẽ thêm một hình phụ nào. Việc làm xuất hiện các tứ giác nội tiếp $DFBV, DECV$ rồi sau đó trở thành hình thang cân là điều rất thú vị. Qua đó ta có thể khai thác được nhiều tính chất khác nữa.

3 Tìm hiểu và khai thác

Nếu chỉ xét phần thuận của bài toán 1, ta có thể phát biểu như sau

Bài 3. *Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF nằm trên (O).*

Nếu coi tam giác vuông là tam giác có trực tâm trùng với đỉnh, ta có thể mở rộng bài toán này cho tam giác bất kỳ như sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I, M là trung điểm của BC. N đối xứng I qua M. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Gọi X, Y, Z là hình chiếu của N lên BC, CH, HB. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác XYZ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.*

Nếu mở rộng hơn một chút cho bài toán này ta có bài toán thú vị sau

Bài 5. *Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm nội tiếp I, M là trung điểm của BC, N đối xứng I qua M. P là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Gọi X, Y, Z là hình chiếu của N lên BC, CP, PB. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Chứng minh rằng K luôn thuộc một đường tròn cố định khi P di chuyển.*

Ta có thể tiếp tục khai thác bài toán như sau, bàng cách làm khó hơn một chút

Bài 6. *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp tiếp xúc BC tại D. Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại K, L, N. Chứng minh rằng D, K, L, N cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $\angle A = 90°$.*

Ta lại có một phát triển khác cho bài toán này

Bài 7. *Cho tam giác ABC. Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Giả sử $\angle EDF = 135°$. Chứng minh rằng $\angle BAC = 90°$.*

Nếu coi tâm nội tiếp I là trực tâm tam giác tạo bởi ba tâm bàng tiếp và A, B, C là chân các đường cao, phát biểu lại bài toán gốc như sau ta sẽ lại có những cái nhìn thú vị khác

Bài 8. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF và tâm ngoại tiếp O. Gọi OA, OB, OC lần lượt cắt EF, FD, DE tại X, Y, Z Giả sử tâm ngoại tiếp tam giác XYZ nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC có một góc là $45°$.*

Nghịch đảo bài toán gốc trên ta có bài toán sau

Bài 9. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Đường tròn qua D, H và trực giao với đường tròn (HBC) cắt (HBC) tại X khác H. Tương tự có Y, Z. Gọi (K) đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Đường thẳng qua H vuông góc với HK cắt (XYZ) tại M, N. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại M, N cắt nhau trên (O) khi và chỉ khi tam giác ABC có một góc là $45°$.*

Khai thác tiếp mô hình tam giác vuông ta có bài toán

Bài 10. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Tâm bàng tiếp góc A là I_a. V đối xứng với I_a qua trung điểm BC. Gọi D, E, F là hình chiếu của V lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giac DEF nằm trên (O).*

Bài 11. *Cho tam giác ABC vuông tại A, tâm nội tiếp I. P là một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Gọi D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF luông thuộc một đường thẳng cố định khi P di chuyển.*

Khi phát biểu bài toán như vậy ta sẽ có một khai thác bài toán trên như sau

Bài 12. *Cho tam giác ABC với đường cao AD, BE, CF và tâm ngoại tiếp O. OA, OB, OC lần lượt cắt EF, FD, DE tại X, Y, Z. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác XYZ. M, N là trung điểm CA, AB. P là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN sao cho $KP \parallel BC$.*

a) Chứng minh rằng D, P, O thẳng hàng.

b) Gọi L là trung điểm BC. Chứng minh rằng $KL = DP$.

Chúng ta lại có thể mở rộng hơn nữa bài toán trên như sau

Bài 13. *Cho tam giác ABC và P là điểm sao cho $AP \perp BC$. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Q là điểm đẳng giác của P trong tam giác ABC. X, Y, Z là hình chiếu của Q lên EF, FD, DE. K là tâm ngoại tiếp tam giác DEF. M, N, L là hình chiếu của Q lên BC, CA, AB. R là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KMN sao cho $PR \parallel BC$.*

a) Chứng minh rằng D, R, Q thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng $KL = DR$.

Chúng ta hoàn toàn có thể khai thác bài toán này trong nhiều trường hợp khác nữa. Trở lại bài toán của ngày 2. Nếu ta cũng coi tâm nội tiếp I là trực tâm tam giác tạo bởi ba tâm bàng tiếp và A, B, C là chân các đường cao, phát biểu lại bài toán gốc một cách thú vị hơn như sau

Bài 14. *Cho tam giác ABC, đường tròn bàng tiếp góc B, C là I_b, I_c. P là một điểm di chuyển trên I_bI_c. Gọi PK, PL là đường kính của các đường tròn ngoại tiếp tam giác PBI_c và PCI_b. Chứng minh rằng KL luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Theo bài toán thi ta thấy ngay điểm cố định chính là tâm nội tiếp I. Tuy nhiên cùng với cách phát biểu này ta có thể nhận thấy các điểm I_b, I_c với vài trò là tâm bàng tiếp thực sự không quan trọng. Ta có thể tổng quát hóa lên như sau

Hoặc khi chúng ta xét tới vị trí tương đối của trực tâm ta lại có một bài toán khá đặc sắc như sau

Bài 15. *Cho tam giác ABC tâm đường tròn bàng tiếp góc B, C là I_b, I_c. Gọi P là một điểm di chuyển trên I_bI_c. Gọi PK, PL là đường kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBI_b và PCI_c. Chứng minh rằng KL luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Bài 16. *Cho tam giác ABC. Với E, F là hai điểm cố định sao cho A nằm giữa E, F. P di chuyển trên đường thẳng EF. Gọi PK, PL là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBF, PCE. Chứng minh rằng KL luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.*

Bài toán trên là bài toán thú vị và có khá nhiều cách khai thác khác nhau trong các trường hợp riêng, các bạn hãy cùng suy nghĩ. Ngoài ra từ bài toán gốc chúng ta lại có thêm hai cách mở rộng như sau, ta thay đường tròn đường kính BC thành đường tròn (K) bất kỳ qua B, C.

Bài 17. *Cho tam giác ABC, đường tròn (K) qua B, C cắt CA, AB tại E, F khác B, C. BE giao CF tại H. d là đường thẳng qua K vuông góc với AH. P là một điểm bất kỳ trên d. PM, PN là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBF, PCE. Chứng minh rằng MN đi qua H.*

Bài 18. *Cho tam giác ABC, đường tròn (K) qua B, C cắt CA, AB tại E, F khác B, C. BE giao CF tại H. Gọi KL là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC. P là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KBC. Gọi LB, LC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PBF, PCE tại M, N. Chứng minh rằng MN đi qua H.*

Nếu ta nhìn lại bài toán 9 theo cách khác như sau

Bài 19. *Cho tam giác ABC. E, F cố định thuộc CA, AB. P di chuyển trên BC. Gọi PK, PL là đường kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBF, PCE. Chứng minh rằng KL luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Trong hai bài toán này nếu cho (K) trùng vào một số đường tròn đặc biệt ta lại có một số bài toán có ý nghĩa khác. Xin cùng với các bạn khác thác điều này.

Ta sẽ lại có một cách phát triển khác cho bài toán này như sau

Bài 20. *Cho tam giác ABC. E, F cố định thuộc CA, AB. P di chuyển trên một đường tròn (K) cố định đi qua B, C. Gọi Q là một điểm cố định thuộc (K). QB, QC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác PBF, PCE tại M, N. Chứng minh rằng MN luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Rõ ràng bài toán trên là một tổng quát hóa nhưng lời giải của nó lại chỉ dùng bài toán góc không đổi rất đơn giản.

Ngoài ra trên mô hình của bài toán IMO ta còn có thể khai thác được rất nhiều kết quả khác từ đó. Các bạn hãy làm một số bài toán sau để luyện tập

Bài 21. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi phân giác $\angle HDB, \angle HCD$ lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác DBF, DCE tại K, L khác D.*

a) Chứng minh rằng KL đi qua H.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DKL đi qua trung điểm của BC.

Mở rộng tiếp bài toán trên ta lại có

Bài 22. *Cho tam giác ABC. Một đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F. BE giao CF tại H. D là hình chiếu của K lên AH. Gọi phân giác các góc $\angle BDF, CDE$ cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác BDF, BCE tại M, N.*

a) Chứng minh rằng MN đi qua H.

b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN đi qua K.

Bài 23. *Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên cạnh BC. Phân giác $\angle APB, \angle APC$ cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác APB, APC tại các điểm K, L khác P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.*

Bài 24. *Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên một đường tròn (K) cố định qua B, C. Phân giác $\angle APB, \angle APC$ cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác APB, APC tại các điểm K, L khác P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.*

Khi nghịch đảo các bài toán gốc ta cũng thu được nhiều điều thú vị.

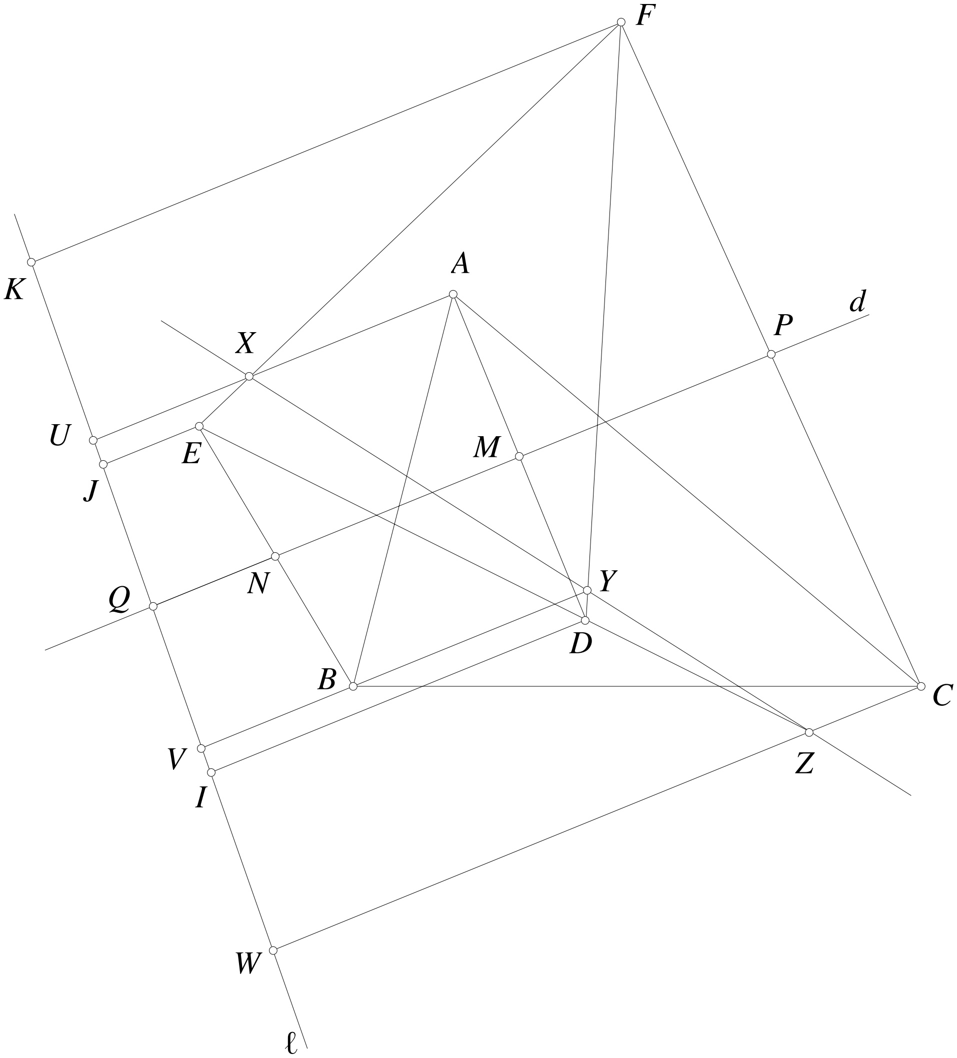
Tài liệu

[1] IMO 2013 problem 3 from AoPS

Trần Quang Hùng Trường THPT chuyên KHTN-ĐHKHTN-ĐQGHN
Email:analgeoamtica@gmail.com

Hình học mathley 1

Bài 1 (Trần Quang Hùng)**.** *Cho các đoạn AD, BE, CF có trung điểm thẳng hàng trên đường thẳng d. Các điểm X, Y, Z lần lượt thuộc EF, FD, DE sao cho $AX \parallel BY \parallel CZ \parallel d$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.*



Lời giải. Gọi ℓ là một đường thẳng không song song với d. Gọi AX, BY, CZ, d lần lượt cắt ℓ tại U, V, W, Q. Gọi I, J, K là hình chiếu song song phương d của D, E, F lên ℓ. Ta chú ý Q là trung điểm của UI, VJ, WK. Từ đó ta dễ thấy

$$\frac{\overline{XE}}{\overline{XF}} = \frac{\overline{UJ}}{\overline{UK}} = \frac{\overline{QJ} - \overline{QU}}{\overline{QK} - \overline{QU}} = \frac{-\overline{QV} - \overline{QU}}{-\overline{QW} - \overline{QU}} = \frac{\overline{QU} + \overline{QV}}{\overline{QU} + \overline{QW}}$$

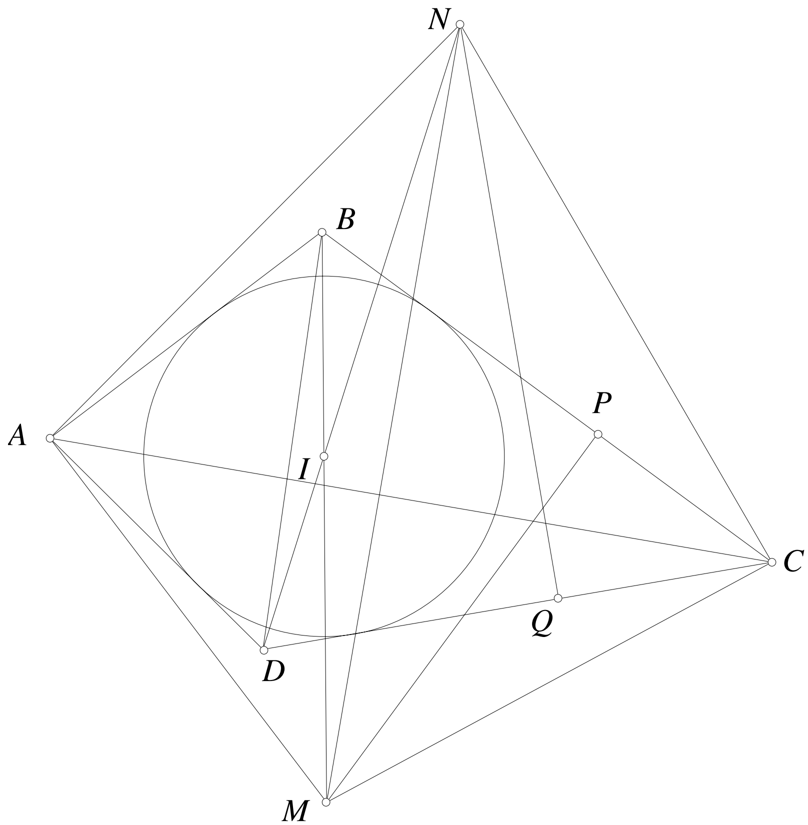
Tương tự $\dfrac{\overline{YF}}{\overline{YD}} = \dfrac{\overline{QV} + \overline{QW}}{\overline{QV} + \overline{QU}}, \dfrac{\overline{ZD}}{\overline{ZE}} = \dfrac{\overline{QW} + \overline{QU}}{\overline{QW} + \overline{QV}}$.

Từ đó ta có $\dfrac{\overline{XE}}{\overline{XF}} . \dfrac{\overline{YF}}{\overline{YD}} . \dfrac{\overline{ZD}}{\overline{ZE}} = 1$, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác DEF ta suy ra X, Y, Z thẳng hàng. □

Bài 2 (Trần Quang Hùng). *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. P di chuyển trên EF. PB cắt CA tại M. MI cắt đường thẳng qua C vuông góc AC tại N. Chứng minh rằng đường thẳng qua N vuông góc PC luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Ta có bổ đề sau

Bổ đề 2.1. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Các điểm M, N lần lượt thuộc IB, ID sao cho $AM \perp AB, AN \perp AC$ thì $MN \perp BD$.*



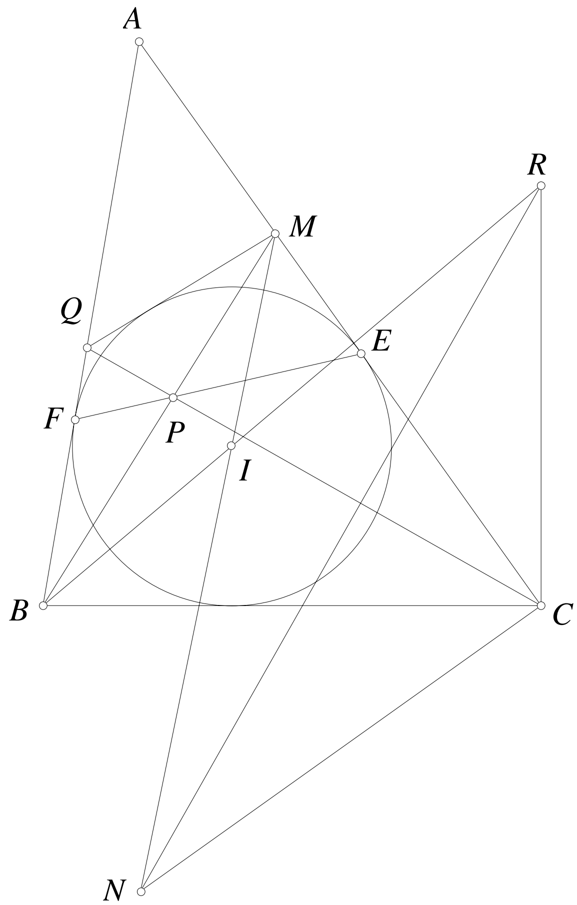
Chứng minh. Gọi P, Q là hình chiếu của M, N lên BC, CD. Từ tính chất phân giác ta dễ thấy $MA = MP, NQ = NQ$ và $BA = BP, DA = DQ$. Từ đó ta có

$MC^2 - MA^2 = MC^2 - MP^2 = PC^2 = (BC - AB)^2 \quad (1)$.

Tương tự $NC^2 - NA^2 = NC^2 - NQ^2 = QC^2 = (DC - DA)^2 \quad (2)$.

Do tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $AB + CD = AD + BC$ hay $BC - AB = CD - AD \quad (3)$.

Từ (1),(2),(3) suy ra $MC^2 - MA^2 = NC^2 - ND^2$ hay $MN \perp BD$. □



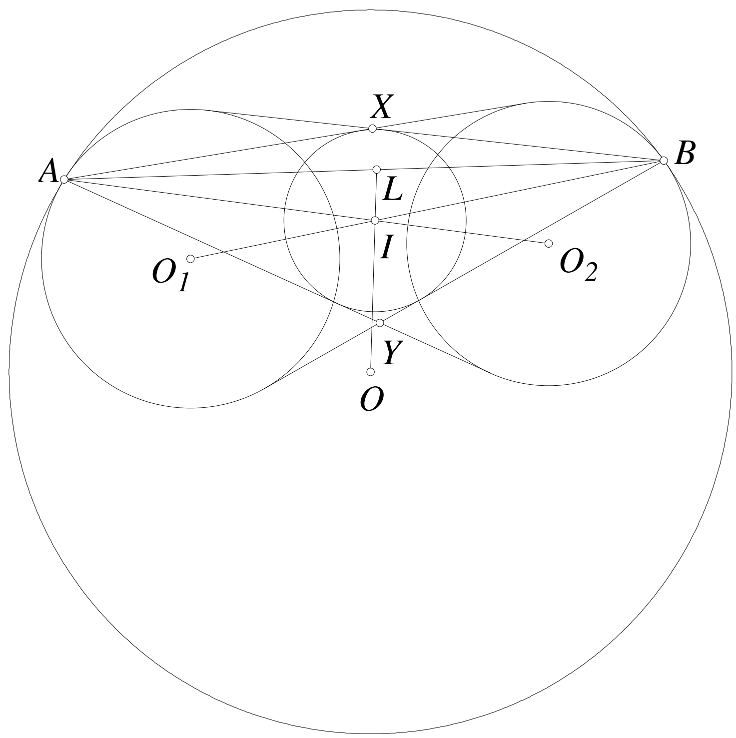
Lời giải. Gọi Q thuộc AB sao cho MQ tiếp xúc (I). Tứ giác $BQMC$ ngoại tiếp theo tính chất quen thuộc thì CQ, BM, EF đồng quy tại P. Gọi BI cắt đường thẳng qua C vuông góc BC tại R. Áp dụng bổ đề trên cho tứ giác $BQMC$ ngoại tiếp suy ra NR vuông góc $CQ \equiv CP$. Vậy đường thẳng qua N vuông góc CP đi qua R. Dễ thấy theo cách dựng R cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 3. *Hai đường tròn γ và δ cùng tiếp xúc trong với đường tròn ω tại A và B. Từ A kẻ tiếp tuyến ℓ_1, ℓ_2 tới δ, từ B kẻ hai tiếp tuyến t_1, t_2 tới γ. Biết rằng ℓ_1 cắt t_1tại X, ℓ_2 cắt t_2 tại Y, hãy chứng minh rằng tứ giác $AXBY$ là tứ giác ngoại tiếp.*

Lời giải của bạn **Lê Thị Hải Linh** học sinh lớp 11 chuyên toán Bắc Ninh. Ta có bổ đề quen thuộc sau

Bổ đề 3.1 (Định lý Monge-D'Alembert)**.** *Cho ba đường tròn $C_1(O_1, R_1), C_2(O_2, R_2), C_3(O_3, R_3)$ phân biệt trên mặt phẳng. Khi đó tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (C_1, C_2), (C_2, C_3), (C_3, C_1) cùng thuộc một đường thẳng. Hai tâm vị tự trong của hai trong ba cặp đường tròn trên và tâm vị tự ngoài của cặp đường tròn còn lại cùng thuộc một đường thẳng.*

Trở lại bài toán.



Lời giải. Gọi O_1, O_2, O lần lượt là tâm của γ, δ, ω. AO_2 giao BO_1 tại I. Gọi α_1 là đường tròn tâm I và tiếp xúc với AX, AY; α_2 là đường tròn tâm I và tiếp xúc với BX, BY. OI giao AB tại L.

Áp dụng bổ đề trên cho 3 đường tròn δ, ω, α_1 ta có A là tâm vị tự ngoài của α_1 và δ, B là tâm vị tự ngoài của δ và ω, suy ra tâm vị tự ngoài của α_1 và ω nằm trên AB hay L là tâm vị tự ngoài của α_1 và ω.

Chứng minh tương tự L cũng là tâm vị tự ngoài của α_2 và ω. Từ đó $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ hay tứ giác $AXBY$ ngoại tiếp. $\square$

Tham dự mục đề ra kỳ này THTT

Trần Quang Hùng-Võ Quốc Bá Cẩn

Bài 1. *Cho tam giác nhọn ABC trực tâm H. Gọi R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\max\{\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB},\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC},\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA}\}\geq\frac{2R}{r}-2$$

Ta cần bổ đề và các công thức quen thuộc sau

Bổ đề 1. *Với mọi $x, y, z \geq 0$ thì*

$$x\cos A+y\cos B+z\cos C\leq\frac{1}{2}(\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z})$$

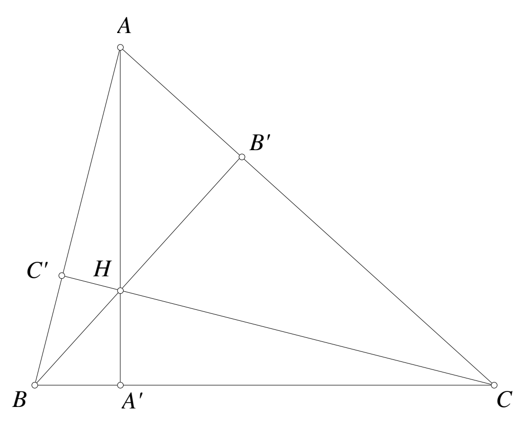
Bổ đề 2. *Cho tam giác nhọn ABC trực tâm H. Gọi R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Ta có một số công thức lượng sau*

$$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{R+r}{R}$$

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C=\frac{2S}{R}$$

$$\cot\frac{A}{2}=\frac{p-a}{r}$$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{a}{HA}=\frac{A'B+A'C}{HA}=\frac{HB\sin C+HC\sin B}{HA}$$



Trở lại bài toán

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau

$$\frac{a}{2}\left(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC}\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA}\right)\geq p\left(\frac{2R}{r}-2\right)$$

Vì ta dễ thấy

$$p\max\left\{\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB},\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC},\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA}\right\}\geq \frac{a}{2}\left(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC}\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA}\right)$$

Sử dụng các đồng nhất thức ở bổ đề 2 ta có

$$\cot\frac{A}{2}\cos A+\cot\frac{B}{2}\cos B+\cot\frac{C}{2}\cos C\leq\frac{1}{2}(\tan A+\tan B+\tan C)$$

$$\Leftrightarrow \sum\frac{p-a}{r}\cos A\leq\frac{1}{2}\sum\frac{HB\sin C+HC\sin B}{HA}$$

$$\Leftrightarrow p\left(\sum\cos A\right)-\sum a\cos A\leq r\sum\frac{a}{4R}\left(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB}\right)$$

$$\Leftrightarrow p\frac{R+r}{R}-\frac{2S}{R}\leq r\sum\frac{a}{4R}\left(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{pR+S-2S}{R}\leq r\sum\frac{a}{4R}\left(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{pR-pr}{r}\leq\sum\frac{a}{2}\left(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2}\left(\frac{HB}{HC}+\frac{HC}{HB}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{HC}{HA}+\frac{HA}{HC}\right)+\frac{c}{2}\left(\frac{HA}{HB}+\frac{HB}{HA}\right)\geq p\left(\frac{2R}{r}-2\right)$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\cot\frac{A}{2}\cos A+\cot\frac{B}{2}\cos B+\cot\frac{C}{2}\cos C\leq\frac{1}{2}(\tan A+\tan B+\tan C)$$

Áp dụng bổ đề 1 ta sẽ chứng minh bất đẳng thức mạnh hơn sau

$$\sum\cot\frac{A}{2}\cos A\leq\frac{1}{2}\sum\frac{\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}}{\cot\frac{A}{2}}\leq\frac{1}{2}\prod\tan A$$

Sử dụng công thức tan góc chia đôi $\tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$, bất đẳng thức trên sẽ tương đương với

$$\sum\tan^2\frac{A}{2}\leq\frac{8\prod\tan^2\frac{A}{2}}{\prod(1-\tan^2\frac{A}{2})}$$

Đặt $\tan\frac{A}{2}=a, \tan\frac{B}{2}=b, \tan\frac{C}{2}=c$ ta sẽ có $ab+bc+ca=1$ và vì tam giác nhọn nên $0<a,b,c<1$. Ta phải chứng minh

$$\frac{8a^2b^2c^2}{(1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)} \geq a^2+b^2+c^2.$$

Trước hết ta sẽ chứng minh hằng đẳng thức sau

$$4a^2bc=(1-b^2)(1-c^2)+(1-a^2)(b-c)^2.$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}(1-b^2)(1-c^2)+(1-a^2)(b-c)^2 &= 1-2bc+b^2c^2-a^2(b-c)^2\\ &=(1-bc)^2-a^2(b-c)^2\\ &=(1-bc-ab+ac)(1-bc-ac+ab)\\ &=4a^2bc.\end{aligned}$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đã cho. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\min\{a,\ b,\ c\}$. Sử dụng hằng đẳng thức trên ta được

$$8a^2b^2c^2=2bc[(1-b^2)(1-c^2)+(1-a^2)(b-c)^2].$$

Do vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2bc}{1-a^2}+\frac{2bc(b-c)^2}{(1-b^2)(1-c^2)} \geq a^2+b^2+c^2,$$

hay

$$\frac{2bc}{1-a^2}-1+\frac{2bc(b-c)^2}{(1-b^2)(1-c^2)} \geq a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca.$$

Ta có $2bc-(1-a^2)=2bc+a^2-(ab+bc+ca)=(a-b)(a-c)$ và

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=(a-b)(a-c)+(b-c)^2.$$

Do đó bất đẳng thức trên có thể được viết lại thành

$$\frac{(a-b)(a-c)}{1-a^2}+\frac{2bc(b-c)^2}{(1-b^2)(1-c^2)} \geq (a-b)(a-c)+(b-c)^2,$$

tương đương

$$\frac{a^2(a-b)(a-c)}{1-a^2}+\frac{(b-c)^2[2bc-(1-b^2)(1-c^2)]}{(1-b^2)(1-c^2)} \geq 0.$$

Để ý rằng $a^2(a-b)(a-c)\geq 0$ và

$$\begin{aligned}2bc-(1-b^2)(1-c^2) &= bc(1-bc)+b^2+c^2+bc-1\\ &= bc(1-bc)+b^2+c^2-ab-ac\geq 0,\end{aligned}$$

suy ra bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Phép chứng minh của ta được hoàn tất tại đây. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Hay ABC là tam giác đều. Ta có điều phải chứng minh.

$\square$

On Casey inequality

Tran Quang Hung

Casey's theorem is one of famous theorem of geometry, we can see it in [3,4]. Ptolemy's theorem (see in [2]) can be considered as special case of Casey's theorem but Ptolemy inequality (see in [3]) can be considered as an extension of Ptolemy's theorem. Now we will show an extension of Ptolemy inequality. We begin with Casey's theorem.

Theorem 1 (Casey's theorem)**.** *Four circles c_1, c_2, c_3, and c_4 are tangent to a fifth circle or a straight line iff*

$$T_{(12)}T_{(34)} \pm T_{(13)}T_{(42)} \pm T_{(14)}T_{(23)} = 0.$$

where $T_{(ij)}$ is the length of a common tangent to circles i and j.

We can see a nice corollary which we call by "a part of Casey's theorem"

Theorem 2 (Casey's theorem)**.** *Let ABC be a triangle inscribed circle (O). The circle (I) touch to (O) at a point in arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A. From A, B, C draw the tangents AA', BB', CC' to (I) $(A', B', C' \in (I))$, respectively. Prove that $aAA' = bBB' + bCC'$. With a, b, c are the sides of triangle ABC, respectively.*

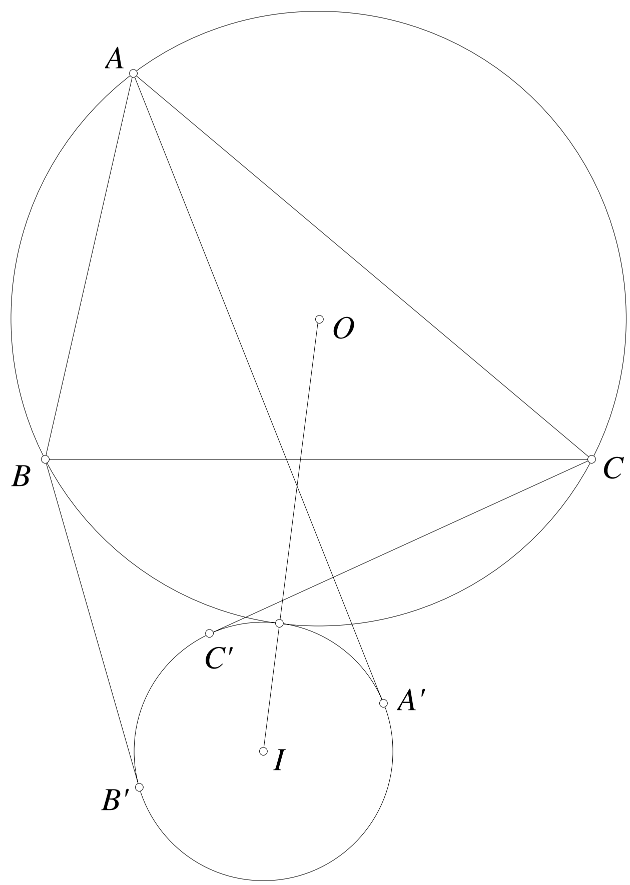


Figure 1.

The folowing theorem is main theorem of this article, it consider as an extension of Ptolemy's inequality. We will call it by Casey's inequality

Theorem 3 (Casey inequality)**.** *Let ABC be a triangle inscribed circle (O). (I) is an arbitrary circle. From A, B, C draw the tangents AA', BB', CC' to (I) $(A', B', C' \in (I))$, respectively. Prove that*

1/ If $(I) \cap (O) = \varnothing$ then $a \cdot AA', b \cdot BB', c \cdot CC'$ are three side of a triangle.

2/ If $(I) \cap (O) \neq \varnothing$ as following

(I) intersects the arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A then $aAA' \geq bBB' + cCC'$

(I) intersects the arc $\overset{\frown}{CA}$ which does not contain B then $bBB' \geq cCC' + aAA'$

(I) intersects the arc $\overset{\frown}{AB}$ which does not contain C then $cCC' \geq aAA' + bBB'$

Equality holds iff circle (I) tangents to (O).

Proof. 1/ If $(I) \cap (O) = \varnothing$. Assume that radius of (I) is r, draw circle (I, r') (circle center I and radius r') touch (O)at a point in arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A. Easily seen $r' \geq r$. Draw the tangents AA'', BB'', CC'' of (I, r') $(A'', B'', C'' \in (I, r'))$, respectively. Apply Pythagoras' theorem we have $AA'^2 + r^2 = IA^2, AA''^2 + r'^2 = IA^2$. Therefore $AA'^2 = AA''^2 + r'^2 - r^2$ and analogously then $BB'^2 = BB''^2 + r'^2 - r^2, CC'^2 = CC''^2 + r'^2 - r^2$ (1)

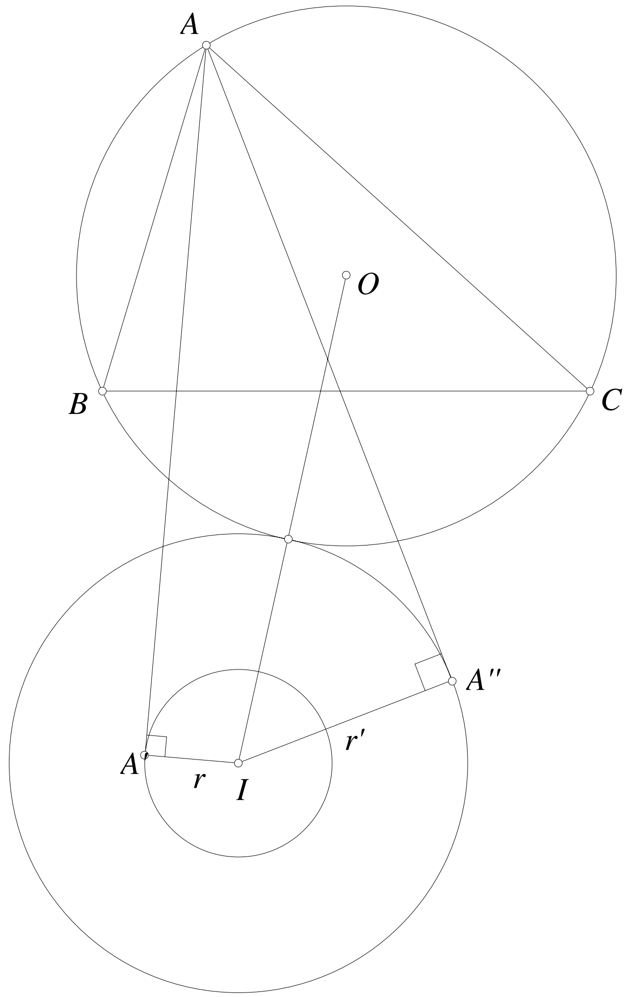


Figure 2.

From theorem 2, square both two sides we get $a^2AA''^2 = b^2BB''^2 + c^2CC''^2 + 2bcBB''CC''$ (2)

Now if we prove that $bBB' + cCC' \geq aAA' \geq |bBB' - cCC'|$ then $a \cdot AA', b \cdot BB', c \cdot CC'$ will be three sides of a triangle. Indeed, the inequality $bBB' + cCC' \geq aAA'$ are equivalent to

$$b^2BB'^2 + c^2CC'^2 + 2bcBB'CC' \geq a^2AA'^2$$
$$b^2(BB''^2 + r'^2 - r^2) + c^2(CC''^2 + r'^2 - r^2) + 2bcBB'CC' \geq a^2AA'^2 \text{ (Get from (1))}$$
$$(b^2 + c^2 - a^2)(r'^2 - r^2) - 2bcBB''CC'' + 2bcBB'CC' \geq 0 \text{ (Get from (2))}$$
$$2bc\cos A(r'^2 - r^2) - 2bcBB''CC'' + 2bc\sqrt{(BB''^2 + r'^2 - r^2)(CC''^2 + r'^2 - r^2)} \geq 0 \text{ (Get from (1))}$$
$$\cos A(r'^2 - r^2) - BB''CC'' + \sqrt{(BB''^2 + r'^2 - r^2)(CC''^2 + r'^2 - r^2)} \geq 0$$

The last inequality is true $\sqrt{(BB''^2 + r'^2 - r^2)(CC''^2 + r'^2 - r^2)} \geq BB''CC'' + r'^2 - r^2$ because of Cauchy-Schwarz inequality, note that the last inequality is true because $\cos A(r'^2 - r^2) + r'^2 - r^2 \geq 0$ from $r' \geq r$ and $(1 + \cos A) \geq 0$. We are done.

Now the inequality $aAA' \geq |bBB' - cCC'|$ is equivalent to $b^2BB'^2 + c^2CC'^2 - 2bbBB'CC' \leq a^2AA'^2$.

Use analogous transforms as above we must prove that

$$\cos A(r'^2 - r^2) - BB''CC'' - \sqrt{(BB''^2 + r'^2 - r^2)(CC''^2 + r'^2 - r^2)} \geq 0$$

Because $-\sqrt{(BB''^2 + r'^2 - r^2)(CC''^2 + r'^2 - r^2)} \leq -BB''CC'' - (r'^2 - r^2)$ therefore $LHS \leq \cos A(r'^2 - r^2) - r'^2 - r^2 - 2BB''CC'' < 0$ which is true inequality.

The cases (I, r') touch are CA which does not contain B and the arc $\overset{\frown}{AB}$ which does not contain C we prove analogously. We are done part 1/.

2/ If $(I) \cap (O) \neq \varnothing$. Assume (I, r) intersect arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A. Draw (I, r'') touch arc $\overset{\frown}{BC}$ which does not contain A. Easily seen $r'' \leq r$. Draw the tangents AA'', BB'', CC'' of (I, r'') $(A'', B'', C'' \in (I, r''))$, respectively. Analogous, apply Pythagoras' theorem as in (1), we get the equalities

$$AA'^2 = AA''^2 + r''^2 - r^2, BB'^2 = BB''^2 + r''^2 - r^2, CC'^2 = CC''^2 + r''^2 - r^2$$

Or

$$AA''^2 = AA'^2 + r^2 - r''^2, BB''^2 = BB'^2 + r^2 - r''^2, CC''^2 = CC'^2 + r^2 - r''^2 \quad (3)$$

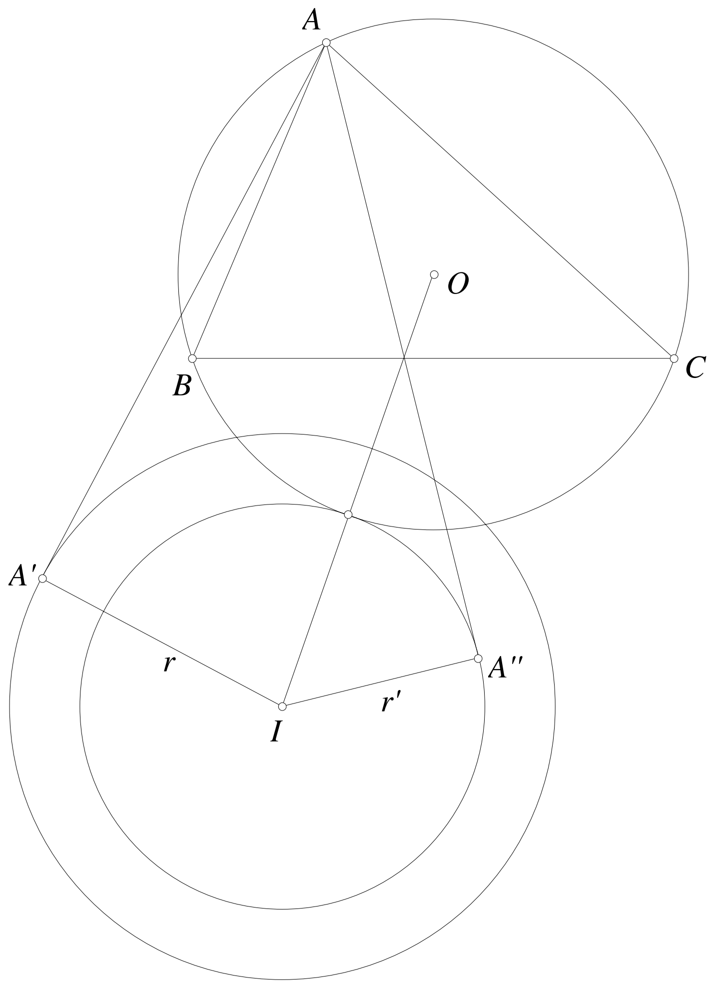


Figure 3.

Use theorem 2 and (3) with analogous transforms the inequality is equivalent to

$$\cos A(r''^2 - r^2) - BB''CC'' + BB'CC' \leq 0 \quad (4)$$

Note that $BB''CC'' = \sqrt{(BB'^2 + r^2 - r''^2)(CC'^2 + r^2 - r''^2)} \geq BB'CC' + r^2 - r''^2$

So that $LHS \leq \cos A(r''^2 - r^2) - (r^2 - r''^2) = (r''^2 - r^2)(1 + \cos A) \leq 0$. which is true because $r'' \leq r, 1 + \cos A \geq 0$.

The cases (I, r'') touch arc $\overset{\frown}{CA}$ which does not contain B and the arc $\overset{\frown}{AB}$ which does not contain C we prove analogously. We are done part 2/. □

References

[1] http://mathworld.wolfram.com/PtolemyInequality.html

[2] http://mathworld.wolfram.com/PtolemysTheorem.html

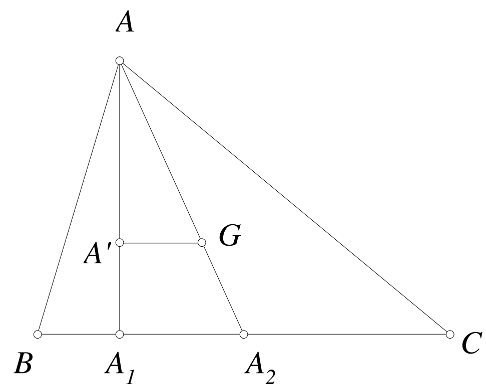
[3] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry* Dover Publications (August 31, 2007)

[4] http://mathworld.wolfram.com/CaseysTheorem.html

Tham dự đề ra kỳ này

Trần Quang Hùng-Võ Quốc Bá Cẩn

Bài toán 1. *Cho tam giác ABC trọng tâm G, gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của G lên các đường cao tương ứng với đỉnh A, B, C của tam giác. Chứng minh rằng $2(GB'^2 + GC'^2) \geq GA'^2$.*



Chứng minh. Gọi AA_1, AA_2 lần lượt là đường cao, trung tuyến ứng với A của tam giác ABC, vậy A' là hình chiếu của G lên AA_1. Theo định lý Thales ta có $GA' = \dfrac{2}{3}A_1A_2$.

Vậy $GA'^2 = \dfrac{4}{9}A_1A_2^2 = \dfrac{4}{9}(AA_2^2 - AA_1^2) = \dfrac{4}{9}(m_a^2 - h_a^2)$

Tương tự $GB'^2 = \dfrac{4}{9}(m_b^2 - h_b^2), GC'^2 = \dfrac{4}{9}(m_c^2 - h_c^2)$. Trong đó h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao, m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài trung tuyến của tam giác ABC.

Như vậy ta quy về chứng minh bất đẳng thức

$$2(m_b^2 - h_b^2 + m_c^2 - h_c^2) \geq m_a^2 - h_a^2$$

$$\Leftrightarrow 2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2 \geq 2(h_b^2 + h_c^2) - h_a^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}a^2 \geq 2(\frac{4S^2}{b^2} + \frac{4S^2}{c^2}) - \frac{4S^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9a^2}{16p(p-a)(p-b)(p-c)} \geq \frac{2}{b^2} + \frac{2}{c^2} - \frac{1}{a^2}$$

Đặt $x = p - a, y = p - b, z = p - c$ ta quy về chứng minh bất đẳng thức đại số sau với mọi $x, y, z > 0$.

$$\frac{9(y+z)^2}{16xyz(x+y+z)} + \frac{1}{(y+z)^2} \geq \frac{2}{(x+y)^2} + \frac{2}{(x+z)^2}.$$

Vì bất đẳng thức thuần nhất ta có thể giả sử $y + z = 1$. Ký hiệu $m = yz \leq \dfrac{1}{4}$ và $t = x(x+y+z)$. Từ đó ta có

$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+z)^2} = \frac{2x(x+y+z) + y^2 + z^2}{(x+y)^2(x+z)^2} = \frac{2t + 1 - 2m}{(t+m)^2},$$

Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{9}{16tm}+1 \geq \frac{2(2t+1-2m)}{(t+m)^2},$$

Hay là

$$\frac{9(t+m)^2}{16tm}+(t+m)^2 \geq 2(2t+1-2m).$$

Mà ta có

$$(t+m)^2 = t^2+2tm+m^2 \geq (6tm-9m^2)+2tm+m^2 = 8tm-8m^2,$$

Chúng ta sẽ cần chứng minh rằng

$$9(t+m)^2+16tm(8tm-8m^2) \geq 32tm(2t+1-2m),$$

hay

$$(128m^2-64m+9)t^2-2m(64m^2-32m+7)t+9m^2 \geq 0,$$

Điều này đúng vì $128m^2-64m+9>0$ và

$$\Delta = [m(64m^2-32m+7)]^2-9m^2(128m^2-64m+9) = 32m^2(4m-1)^2(8m^2-4m-1) \leq 0.$$

(Chú ý $m \leq \frac{1}{4}$) Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hay tam giác ABC đều.

$\square$

Chứng minh các điểm thuộc một đường tròn

Trần Quang Hùng - Trường THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

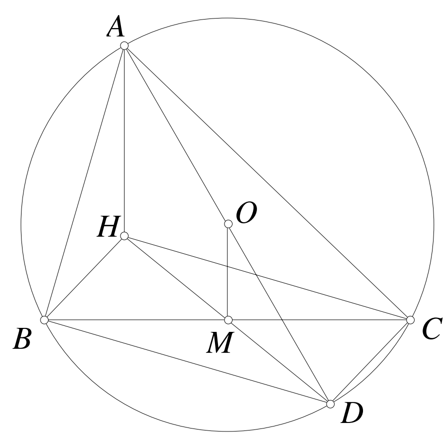
Trong hình học có một phương pháp vô cùng đơn giản nhưng rất hữu ích để chứng minh các điểm thuộc cùng một đường tròn đó là dùng định nghĩa. Ta sẽ chứng minh các điểm cách đều một điểm cho trước hoặc cùng nhìn một đoạn thẳng dưới một góc vuông. Cách này thường hay bị lãng quên khi chúng ta biết các công cụ mạnh về góc nội tiếp hay tứ giác nội tiếp, nhưng thực sự đó luôn là một phương pháp hay và hữu ích. Chúng ta hãy tìm hiểu kỹ hơn qua các ví dụ sau.

Chúng ta hãy bắt đầu với một ví dụ kinh điển, đó là đường tròn 9 điểm Euler.

Bài 1 (Đường tròn Euler)**.** *Cho tam giác ABC. Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H. Các trung tuyến AA_2, BB_2, CC_2. A_3, B_3, C_3 lần lượt là trung điểm HA, HB, HC. Chứng minh rằng 9 điểm $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ cùng thuộc một đường tròn.*

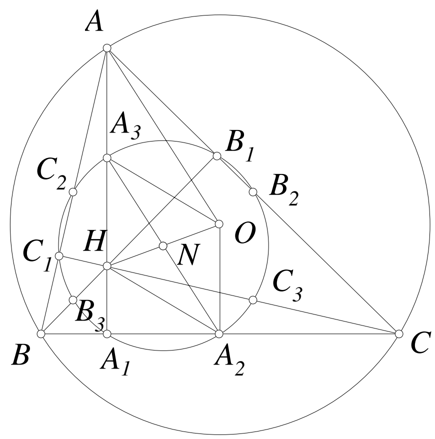
Đây là một bài toán kinh điển với rất nhiều lời giải, lời giải dưới đây tôi xin trình bày thông qua một bổ đề rất quan trọng của hình học

Bổ đề 1.1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), trực tâm H. M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng $HA \parallel OM$ và $HA = 2OM$.*



Giải bổ đề. Gọi AD là đường kính của (O). Ta dễ thấy $CD \perp AC \perp HB$ suy ra $HB \parallel DC$. Tương tự $HC \parallel DB$. Từ đó suy ra tứ giác $HBDC$ là hình bình hành.

Vậy M là trung điểm chung của HD và BC, vậy OM là đường trung bình của tam giác DHA nên $HA \parallel OM$ và $HA = 2OM$. $\square$



Giải bài toán. Gọi (O, R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, N là trung điểm OH. Theo bổ đề $HA \parallel OA_2$ và $HA = 2OA_2$. Vì A_3 là trung điểm HA nên suy ra $HA_3 \parallel OA_2$ và $HA_3 = 2OA_2$ hay tứ giác HA_3OA_2 là hình bình hành, vậy N là trung điểm A_2A_3.

Tam giác $A_1A_2A_3$ vuông tại A_1 nên A_1, A_2, A_3 thuộc đường tròn $(N, \frac{A_2A_3}{2})$ (1).

Cũng theo bổ đề và A_3 là trung điểm HA nên suy ra $AA_3 \parallel OA_2$ và $AA_3 = 2OA_2$ hay tứ giác AOA_2A_3 là hình bình hành. Vậy $A_2A_3 = OA = R$ (2).

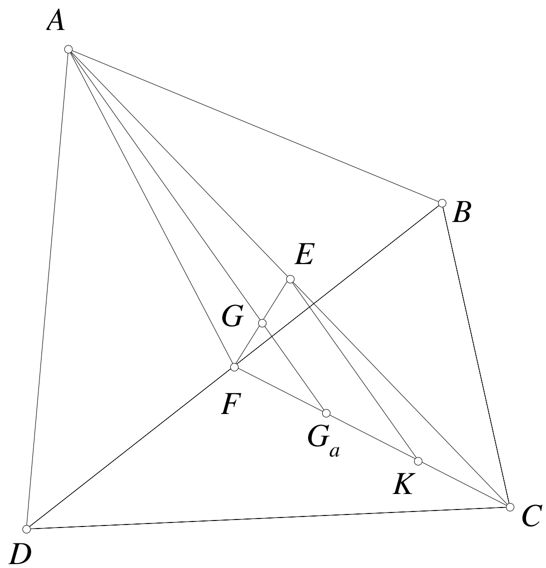
Từ (1), (2) suy ra A_1, A_2, A_3 thuộc đường tròn $(N, \frac{R}{2})$. Tương tự ta có 9 điểm $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$, C_1, C_2, C_3 thuộc đường tròn $(N, \frac{R}{2})$. □

Nhận xét. Với cách làm này không những ta chỉ ra 9 điểm thuộc một đường tròn mà ta còn chỉ rõ tâm N là trung điểm OH (nên cũng thuộc đường thẳng Euler) và bán kính bằng một nửa bán kính đường tròn ngoại tiếp. Đó là các kết quả rất kinh điển mà các cách làm khác có thể không suy ra cùng một lúc được.

Bài 2. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi G_a, G_b, G_c, G_d lần lượt là trọng tâm tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng G_a, G_b, G_c, G_d thuộc một đường tròn.*

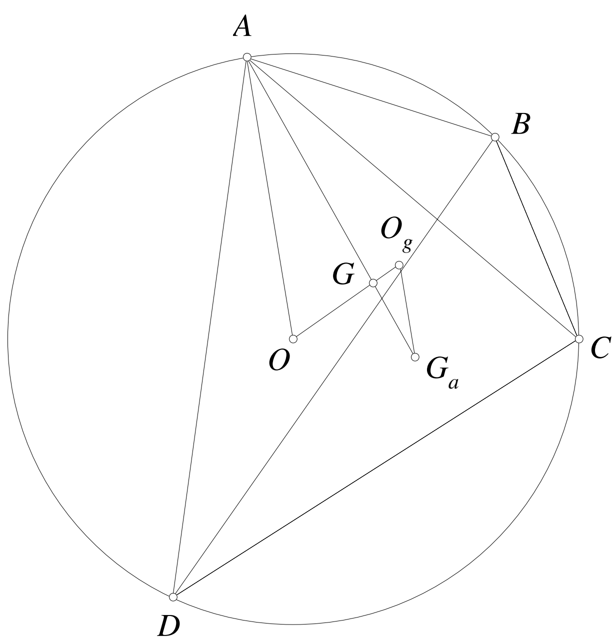
Bổ đề 2.1. *Cho tứ giác $ABCD$. Gọi G_a, G_b, G_c, G_d lần lượt là trọng tâm tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Thì AG_a, BG_c, CG_c, DG_d đồng quy tại G và $\frac{GG_a}{GA} = \frac{GG_b}{GB} = \frac{GG_c}{GC} = \frac{GG_d}{GD} = \frac{1}{3}$. G thường được gọi là trọng tâm tứ giác $ABCD$.*

Giải bổ đề. Gọi E, F là trung điểm AC, BD. vì G_a là trọng tâm tam giác BCD nên theo tính chất trọng tâm G_a thuộc CF và $G_aC = \frac{2}{3}CF$. Vậy gọi K là trung điểm G_aC suy ra $FG_a = G_aK = KC$. Vì E là trung điểm AC nên $EK \parallel AG_a$ mặt khác G_a là trung điểm FK nên AG_a đi qua trung điểm G của EF. Cũng từ tính chất đường trung bình dễ thấy $GG_a = \frac{1}{2}EK = \frac{1}{4}AG_a$ hay $\frac{GG_a}{GA} = \frac{1}{3}$.



Chứng minh tương tự ta có AG_a, BG_c, CG_c, DG_d đi qua trung điểm G của EF và $\frac{GG_a}{GA} = \frac{GG_b}{GB} = \frac{GG_c}{GC} = \frac{GG_d}{GD} = \frac{1}{3}$. Đó là điều phải chứng minh. □

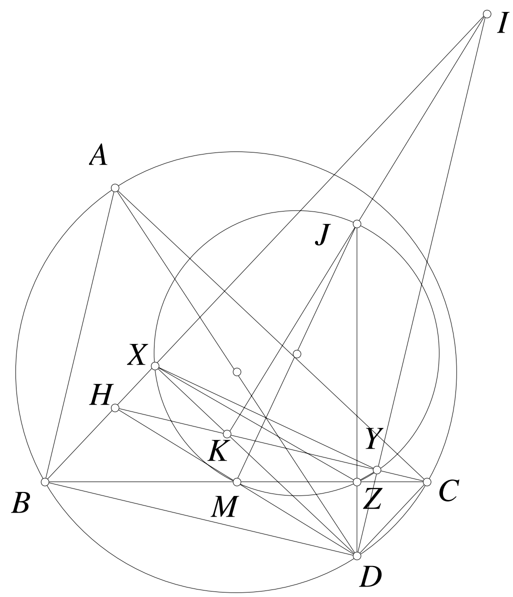
Giải bài toán. Gọi AG_a, BG_c, CG_c, DG_d đồng quy tại G, gọi (O, R) là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$. Gọi O_g là điểm thuộc tia đối tia GO sao cho $\frac{GO_g}{GO} = \frac{1}{3}$. Theo bổ đề $\frac{GG_a}{GA} = \frac{1}{3}$ nên theo định lý Thales đảo $O_gG_a \parallel OA$ và $O_gG_a = \frac{1}{3}OA = \frac{R}{3}$ hay $G_a \in (O_g, \frac{R}{3})$.



Ta thấy G, O, O_g xác định tổng quát với A, B, C, D nên tương tự $G_b, G_c, G_d \in (O_g, \frac{R}{3})$ vậy G_a, G_b, G_c, G_d thuộc một đường tròn. Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Với cách làm này không những ta chỉ ra được G_a, G_b, G_c, G_d thuộc một đường tròn mà còn chỉ ra tâm của đường tròn này thuộc OG và bán kính bằng một phần ba bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$.

Bài 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). AD là đường kính của (O). M là trung điểm BC. H là trực tâm tam giác. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của D lên HB, HC, BC. Chứng minh rằng X, Y, Z, M thuộc một đường tròn.*



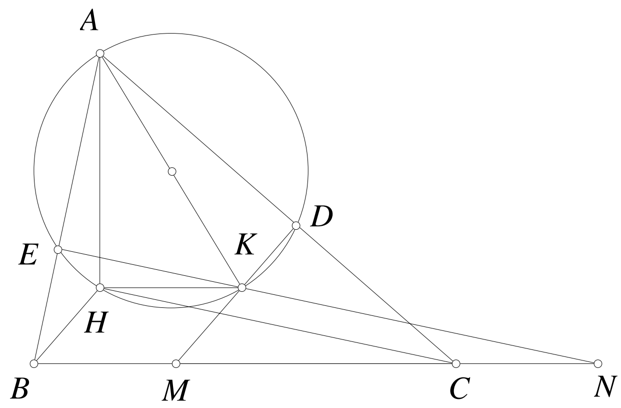
Chứng minh. Gọi HB giao DY tại I, HC giao DX tại K, J là trung điểm IK. Theo chứng minh bổ đề 1.1 thì M cũng là trung điểm HD.

Ta dễ thấy K là trực tâm tam giác IHD nên $\angle KDI = \angle KHI = \angle HCD$ (chú ý $HI \parallel DC$) và $\angle CHD = \angle KID$. Từ đây dễ suy ra $\triangle KID \sim \triangle DHC$.

Mặt khác CM, DJ là hai trung tuyến tương ứng, vậy $\triangle DIJ \sim \triangle CHM$, từ đó $\angle JDI = \angle HCM$. Từ đây dễ suy ra $DJ \perp BC$ tại Z hay $Z \in (MJ)$.

Theo chứng minh bài 1. Đường tròn đường kính (MJ) là đường tròn Euler của tam giác IHD, theo tính chất đường tròn Euler thì $X, Y \in (MJ)$. Từ đó ta có X, Y, Z, M đều cùng nằm trên đường tròn đường kính (MJ). Đó là điều phải chứng minh. □

Bài 4. *Cho tam giác ABC. Lấy M, N thuộc tia BC sao cho $MN = BC$ và M nằm giữa B, C. D, E lần lượt là hình chiếu của M lên AC, AB. Chứng minh rằng các điểm A, D, E, H thuộc một đường tròn.*

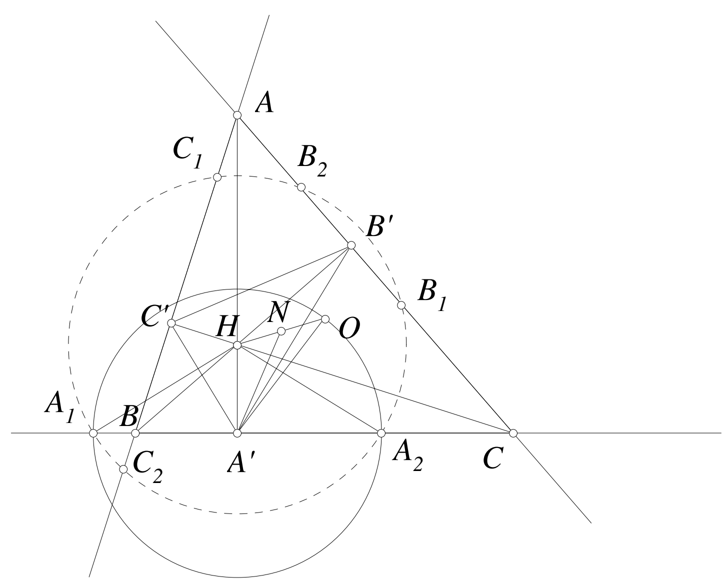


Chứng minh. Gọi MD giao ME tại K. Ta thấy $HB \parallel MK$ do cùng vuông góc AC suy ra góc đồng vị $\angle HBC = \angle KMN$. Tương tự $\angle HCB = \angle KNM$. Kết hợp giả thiết $BC = MN$ suy ra tam giác $\triangle BHC = \triangle KMN$ suy ra $S_{BHC} = S_{KMN}$ hay $HK \parallel BC$. $BC \perp HA$ vậy $HK \perp HA$ hay H thuộc đường tròn đường kính (AK). Dễ thấy $E, D \in (AK)$ vậy $H, D, E \in (AK)$ hay A, D, E, H thuộc một đường tròn. □

Bài 5. *Cho tam giác ABC. Các đường cao AA', BB', CC' đồng quy tại H. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường tròn $(A', A'O)$ cắt BC tại A_1, A_2. Định nghĩa tương tự các điểm B_1, B_2, C_1, C_2. Chứng minh sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ thuộc một đường tròn.*

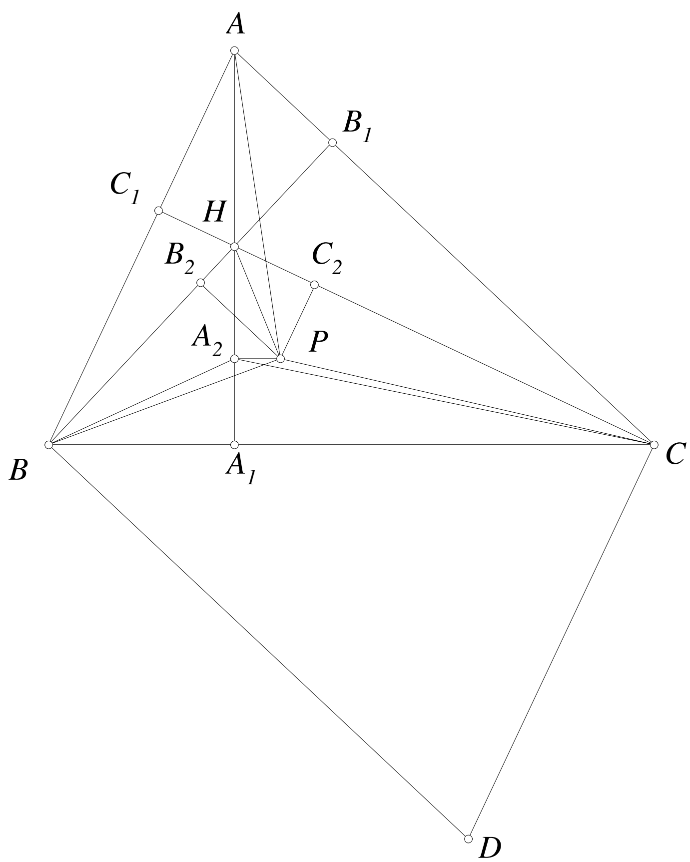
Chứng minh. Gọi N là trung điểm OH cũng là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Ta đã biết kết quả quen thuộc là bán kính đường tròn Euler bằng $\frac{R}{2}$. Khi đó áp dụng định lý Pythagore và công thức trung tuyến ta có

$$HA_1^2 = HA'^2 + A'A_1^2 = HA'^2 + A'O^2 = 2NA'^2 + \frac{OH^2}{2} = \frac{R^2 + OH^2}{2}$$



Như vậy A_1 thuộc $\mathscr{C}(H, \dfrac{R^2+OH^2}{2})$. Chứng minh tương tự, ta có A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 cũng thuộc $\mathscr{C}$. Đó là điều phải chứng minh. □

Bài 6. *Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại H. A_2, B_2, C_2 lần lượt thuộc đoạn thẳng AA_1, BB_1, CC_1 sao cho $S_{A_2BC} + S_{B_2CA} + S_{C_2AB} = S_{ABC}$. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2, H thuộc một đường tròn.*



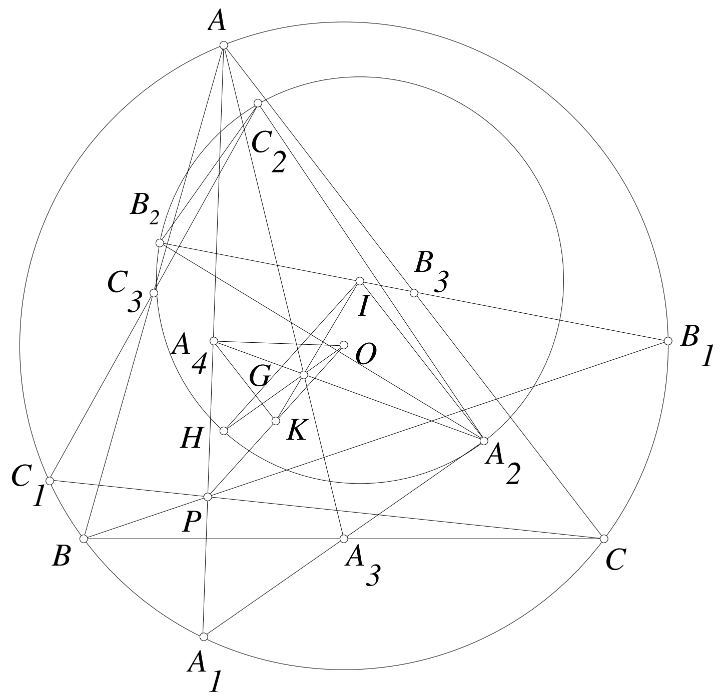
Chứng minh. Qua B_2, C_2 lần lượt dựng các đường thẳng vuông góc với BB_1, CC_1 chúng cắt nhau tại P. Dựng hình bình hành $ABDC$, vì B_2, C_2 lần lượt thuộc đoạn BB_1, CC_1 nên P nằm ở miền trong hình bình hành $ABDC$.

Ta dễ thấy $PB_2 \parallel CA, PC_2 \parallel AB$ nên $S_{PCA} = S_{B_2CA}, S_{PAB} = S_{C_2AB}$ $(*)$. Nếu P nằm ở miền trong tam giác BCD thì $S_{B_2CA} + S_{C_2AB} = S_{PCA} + S_{PAB} > S_{ABC}$ vô lý vì trái với giả thiết, vậy P nằm ở miền trong tam giác ABC.

Khi đó kết hợp giả thiết $S_{PCA} + S_{PAB} + S_{PBC} = S_{ABC} = S_{A_2BC} + S_{B_2CA} + S_{C_2AB}$. Theo $(*)$ suy ra $S_{PBC} = S_{A_2BC}$ suy ra $PA_2 \parallel BC$ hay $PA_2 \perp AA_1$.

Từ đây dễ thấy A_2, B_2, C_2 thuộc đường tròn đường kính (PH) hay A_2, B_2, C_2, H thuộc một đường tròn, ta có điều phải chứng minh. □

Bài 7. *Cho tam giác ABC. P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC tại A_1, B_1, C_1. A_2, B_2, C_2 đối xứng A_1, B_1, C_1 qua trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh rằng A_2, B_2, C_2 và trực tâm H của tam giác ABC cùng thuộc một đường tròn.*



Chứng minh. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC theo bài toán quen thuộc về đường thẳng Euler thì G thuộc đoạn OH và $OG = \dfrac{1}{3}OH \quad (1)$.

Gọi A_3, B_3, C_3 lần lượt là trung điểm BC, CA, AB, theo giả thiết A_3 là trung điểm A_1A_2 vậy G là trọng tâm chung của tam giác ABC và AA_1A_2.

Gọi A_4, B_4, C_4 lần lượt là trung điểm AA_1, BB_1, CC_1. Vì G là trọng tâm của tam giác AA_1A_2 nên $\dfrac{GA_4}{GA_2} = \dfrac{1}{3} \quad (2)$.

Gọi K là trung điểm OP, vì AA_1 là dây cung của (O) nên $OA_4 \perp AA_1$, từ đây suy ra A_4 thuộc đường tròn đường kính (OP) tâm K hay $KA_4 = \dfrac{OP}{2}$.

Gọi I là điểm thuộc tia đối tia GK sao cho $\dfrac{GK}{GI} = \dfrac{1}{3} \quad (3)$.

Từ (1) và (3) ta dễ thấy IH song song KO và $IH = 2KO = OP$.

Từ (2) và (3) ta dễ thấy IA_2 song song KA_4 và $IA_2 = 2KA_4 = OP$.

Kết hợp hai điều trên suy ra $IA_2 = IH$ hay $A_2 \in (I, IH)$. Tương tự ta có $B_2, C_2 \in (I, IH)$ hay A_2, B_2, C_2, H thuộc đường tròn tâm I bán kính $IH = 2OP$. Ta có điều phải chứng minh.

□

Để rèn luyện thêm phương pháp này các bạn hãy làm một số bài tập sau đây.

Luyện tập

Bài 8. *Cho tam giác ABC trực tâm H. A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB. Đường tròn $(A', A'H)$ cắt BC tại A_1, A_2. Tương tự có B_1, B_2, C_1, C_2. Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ thuộc một đường tròn.*

Bài 9. *Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB. Đường tròn (A, R) cắt $B'C'$ tại A_1, A_2. Tương tự có B_1, B_2, C_1, C_2. Chứng minh rằng sáu điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ thuộc một đường tròn.*

Bài 10. *Cho bốn điểm A, B, C, D thuộc một đường tròn.*

a) Gọi H_a, H_b, H_c, H_d lần lượt là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng H_a, H_b, H_c, H_d cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi N_a, N_b, N_c, N_d lần lượt là tâm đường tròn Euler các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Chứng minh rằng N_a, N_b, N_c, N_d cùng thuộc một đường tròn.

Bài 11. *Cho tam giác ABC, phân giác AD. đường cao AH, trung tuyến AM. P, Q là hình chiếu của B, C lên AD.*

a) Chứng minh rằng H, M, P, Q thuộc một đường tròn tâm K.

b) Chứng minh rằng K nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC.

Bài 12. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp và AC, BD vuông góc với nhau tại K. X, Y, Z, T theo thứ tự là trung điểm của $AB, BC, CD, DA.XK, YK, ZK, TK$ theo thứ tự cắt CD, DA, AB, BC tại X', Y', Z', T'. Chứng minh rằng $X, Y, Z, T, X', Y', Z', T'$ cùng thuộc một đường tròn.*

Bài 13 (TTT2 số 38)**.** *Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác sao cho MA, MB, MC đôi một khác nhau. Các điểm X, Y, Z theo thứ tự là trung điểm của các cung $\overset{\frown}{BMC}$, $\overset{\frown}{CMA}$, $\overset{\frown}{AMB}$. Chứng minh rằng M, X, Y, Z cùng thuộc một đường tròn.*

Bài 14. *Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B. Tiếp tuyến với (O_1) tại A cắt (O_2) tại C. Tiếp tuyến với (O_2) tại A cắt (O_1) tại D. E là điểm đối xứng của A qua B. Chứng minh rằng A, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.*

Bài 15. *Cho tam giác nhọn ABC. Từ A kẻ tới đường tròn đường kính BC các tiếp tuyến AA_1, AA_2. Tương tự có B_1, B_2; C_1, C_2. Chứng minh rằng các điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng thuộc một đường tròn.*

Bài 16 (TTT2 số 46)**.** *Cho ba đường tròn $(O_1), (O_2), (O_3)$ cùng đi qua điểm M. Các điểm M_1, M_2, M_3 theo thứ tự thuộc $(O_1), (O_2), (O_3)$ sao cho MM_1, MM_2, MM_3 theo thứ tự song song với O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2. chứng minh rằng M, M_1, M_2, M_3 cùng thuộc một đường tròn.*

Cuối cùng, tác giả xin được bày tỏ lời cảm ơn chân thành tới thầy Nguyễn Minh Hà, người đã cho tác giả nhiều lời nhận xét quan trọng và đã cung cấp thêm cho tác giả nhiều bài toán tham khảo rất hay cho bài viết này.

Tài liệu

[1] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, *Toán nâng hình học 10* NXB GD 2000

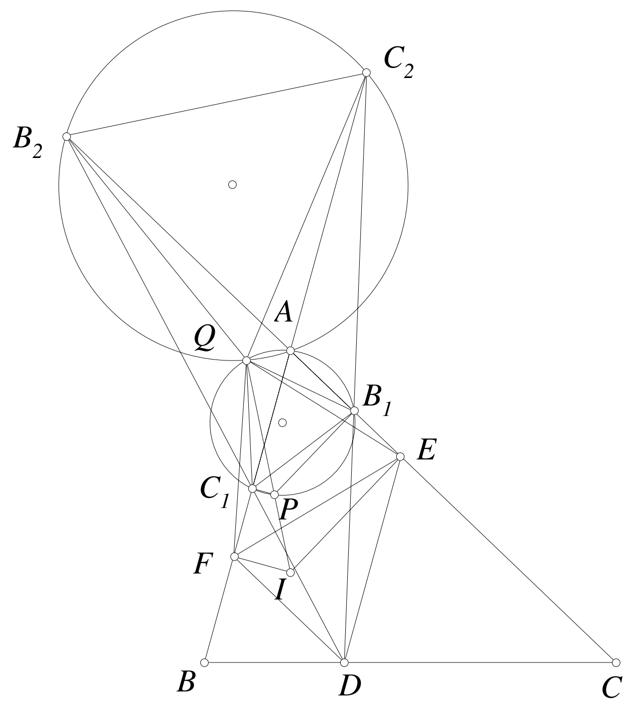
[2] Coxeter, *Geometry Revisited* The Mathematical Association of America; 1ST edition (1967)

[3] Diễn đàn toán học http://www.mathlinks.ro

Đề toán đề nghị

Trần Quang Hùng

Bài 1. *Cho tam giác $ABC, \widehat{A} \neq 90°$. D là điểm cố định trên cạnh BC. P là điểm nằm trong tam giác ABC. Gọi B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của P lên AC, AB. DB_1, DC_1 lần lượt cắt AB, AC tại C_2, B_2. Giao điểm khác A của đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1 và AB_2C_2 là Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.*



Chứng minh. Qua D dựng các đường thẳng song song với AB, AC cắt AC, AB tại E, F. Qua E, F lần lượt kẻ các đường thẳng vuông góc với AC, AB, chúng cắt nhau tại I cố định, ta sẽ chứng minh rằng PQ đi qua I cố định, thật vậy.

Bằng tính chất tỷ số kép, ta thấy

$$\frac{\overline{FC_1}}{\overline{FC_2}} = (C_1C_2F) = (C_1C_2FE) = (C_2C_1EF) = (B_1B_2E) = \frac{\overline{EB_1}}{\overline{EB_2}} \quad (1)$$

Mặt khác từ tính chất góc nội tiếp ta dễ thấy các tam giác $\triangle QB_1B_2 \sim \triangle QC_1C_2 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) ta dễ suy ra $\triangle QB_1E \sim \triangle QC_1F$ suy ra tam giác $\triangle QB_1C_1 \sim \triangle QEF$.

Từ đây với chú ý rằng $Q \in (AB_1C_1)$ suy ra $\angle EQF = \angle B_1QC_1 = \angle B_1AC_1 = \angle EAF$ suy ra $Q \in (AEF) \equiv (AI)$ vậy $AQ \perp QI \quad (3)$.

Cũng từ $Q \in (AB_1C_1) \equiv (AP)$ suy ra $AQ \perp PQ \quad (4)$.

Từ $(3), (4)$ ta dễ suy ra P, Q, I thẳng hàng hay PQ đi qua I cố định, ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán hình học thi quốc tế năm 2012 và một số mở rộng

Trần Quang Hùng và Ong Thế Phương

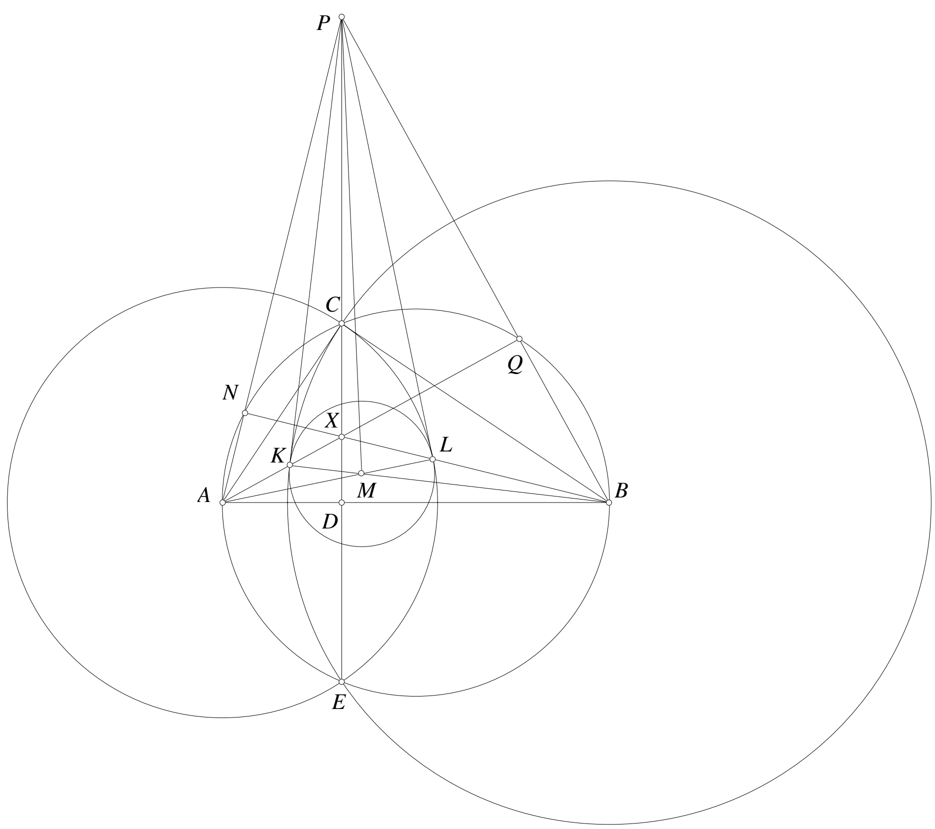
Trong đề thi toán quốc tế ngày thứ 2 năm 2012 có bài toán hay như sau

Bài 1. *Cho tam giác ABC có $\angle BCA = 90^\circ$. D là chân đường cao hạ từ C. X là điểm nằm trong đoạn thẳng CD. K là điểm thuộc đoạn AX sao cho $BK = BC$. Tương tự L là điểm trên đoạn BX sao cho $AL = AC$. Gọi M là giao của AL và BK. Chứng minh rằng $MK = ML$.*

Chúng ta sẽ lần lượt đưa ra nhiều lời giải và bình luận cho bài toán này

Lời giải 1. Gọi AX, BX lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại Q, N khác A, B. Do đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn đường kính AB nên $\angle ANB = \angle AQB = 90^\circ$. Gọi AN giao BQ tại P dễ thấy X là trực tâm tam giác PAB nên P thuộc CD.

Ta chú ý tứ giác $PNDB$ nội tiếp và theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có $AN.AP = AD.AB = AC^2 = AL^2$. Từ đó suy ra tam giác ALP vuông tại L hay PL tiếp xúc (A, AC). Tương tự PK tiếp xúc (B, BC).



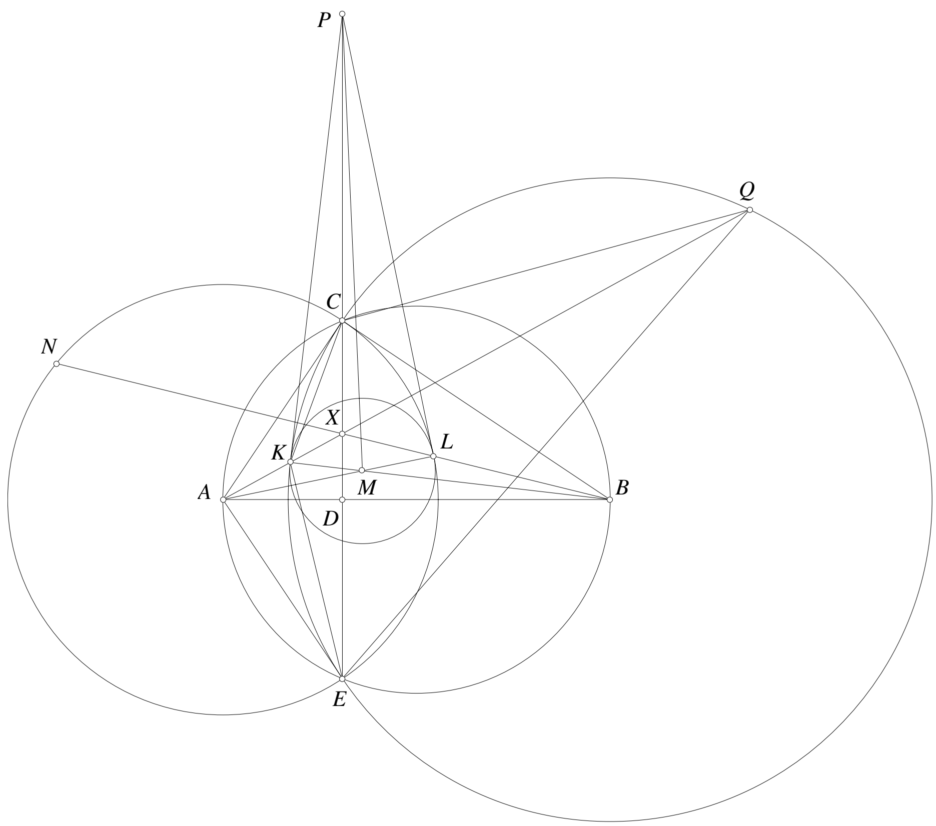
Hình 1.

Mặt khác ta cũng dễ thấy các đường tròn (A, AC) và (B, BC) cắt nhau tại điểm E khác C thì E đối xứng C qua AB. Từ đó P cũng thuộc CE, vậy theo hệ thức lượng trong đường tròn

$PL^2 = PC.PE = PK^2$ hay $PL = PK$. Từ đó ta dễ thấy hai tam giác vuông $\triangle PML = \triangle PMK$ trường hợp cạnh huyền cạnh góc vuông suy ra $MK = ML$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải thuần túy hình học rất đẹp này sử dụng những công cụ hết sức cơ bản như hệ thức lượng trong tam giác vuông và hệ thức lượng trong đường tròn. Để vận dụng các kiến thức này chỉ cần kiến thức trong chương trình lớp 9. Đó là một trong những cách tiếp cận đẹp nhất cho bài toán này. Lời giải sử dụng ý tưởng trong lời giải của nick name vladimir92 trên diễn đàn AoPS.

Lời giải 2. Dễ thấy các đường tròn (A, AC) và (B, BC) cắt nhau tại điểm E khác C thì E đối xứng C qua AB. Khi đó dễ thấy AC, AE cùng tiếp xúc đường tròn (B, BC).



Hình 2.

Gọi AK giao (B, BC) tại Q khác K. Do AC, AE cùng tiếp xúc đường tròn (B, BC) nên tứ giác $CQEK$ là tứ giác điều hòa. Do đó tiếp tuyến tại K và Q của (B, BC) cắt nhau tại điểm P thuộc CE hơn nữa theo hàng điều hòa cơ bản thì $(PXCE) = -1$. Vậy tương tự thì nếu gọi BL giao (A, AC) tại N thì tiếp tuyến tại L và N cắt nhau tại P' thuộc CE và $(P'XCE) = -1$. Do đó $P \equiv P'$. Từ đó chú ý CE là trục đẳng phương của (A, AC) và (B, BC) nên $PL = PK$. Từ đó ta dễ thấy hai tam giác vuông $\triangle PML = \triangle PMK$ trường hợp cạnh huyền cạnh góc vuông suy ra $MK = ML$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải khá ngắn gọn nhưng đòi hỏi phải có những hiểu biết về hàng điều hòa và tứ giác điều hòa, tuy vậy tư tưởng chủ đạo vẫn là chứng minh tiếp tuyến tại K, L đồng quy trên trục đẳng phương. Đây là một trong những ý tưởng khá đặc sắc để tiếp cận bài toán này. Lời giải sử dụng ý tưởng trong lời giải của nick name Jeroen trên diễn đang AoPS.

Lời giải 3. Gọi U là giao điểm của CD với đường tròn đi qua ba điểm A, D, L.

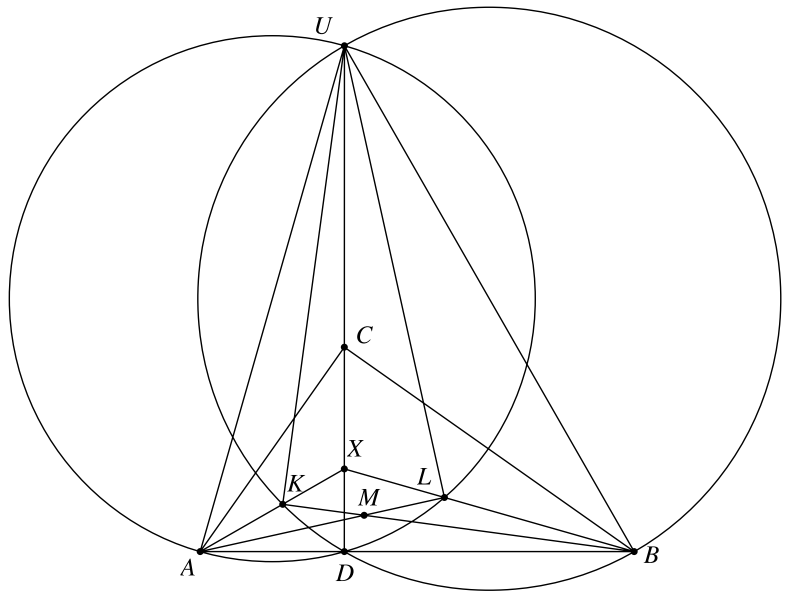
Do $AC = AL$ nên $\overline{AD}.\overline{AB} = AC^2 = AL^2$. Do đó hai tam giác ALD và ABL đồng dạng.

Suy ra $\angle AUD = \angle ALD = \angle DBL$

Do đó hai tam giác UAD và BXD đồng dạng nên $\dfrac{UD}{AD} = \dfrac{BD}{DX}$.

Mà hai tam giác UDB và ADX đều vuông tại đỉnh D nên chúng đồng dạng. Ta thu được $\angle DUB = \angle DAX = \angle DKB$ (vì $\Delta DKB \sim \Delta KAB$)

Từ đó suy ra D, K, U, B thuộc một đường tròn.



Hình 3.

Mặt khác lại có $\angle ULA = \angle UDA = 90°$ và $\angle UKB = \angle UDB = 90°$ nên $UL \perp AL$ và $UK \perp BK$.

Áp dụng định lý Carnot cho tam giác MAB có UL, UK, UD đồng quy tại U thì suy ra

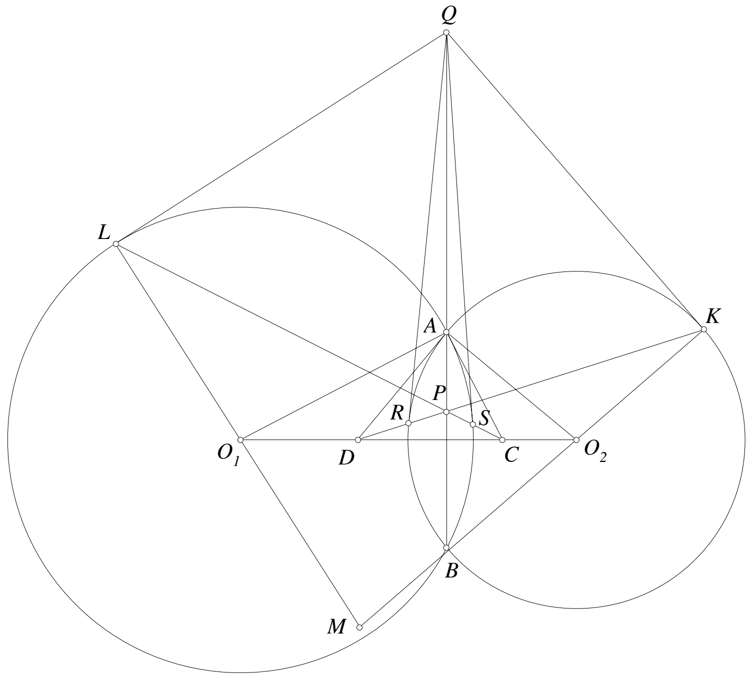
$$\left(KM^2 - KB^2\right) + \left(DB^2 - DA^2\right) + \left(LA^2 - LM^2\right) = 0$$

Hơn nữa $BK^2 = BC^2$; $AL^2 = AC^2$; $BD^2 = CB^2 - CD^2$; $AD^2 = AC^2 - CD^2$. Từ đó thu được $LM^2 = KM^2$ hay $LM = LK$. □

Nhận xét. Sử dụng định lý Carnot cũng là một cách khá lý thú để tiếp cận bài toán này. Chúng ta sẽ còn thấy lợi ích của hướng đi này trong các bài toán dưới đây.

Bài 2 (Mở rộng bài thi IMO)**.** *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt nhau tại A, B. C, D thuộc đường thẳng O_1O_2 sao cho AC vuông góc O_1A và AD vuông góc O_2A. P là điểm thuộc đoạn AB. CP giao (O_1) tại L sao cho C, L khác phía AB. DP giao (O_2) tại K sao cho D, K khác phía AB. LO_1 cắt KO_2 tại M. Chứng minh rằng $MK = ML$.*

Lời giải 1. Gọi DK giao (O_2) tại R khác K. Ta dễ thấy DA, DB tiếp xúc (O_2) do đó tứ giác $ARBK$ điều hòa. Vậy tiếp tuyến tại K và R của (O_2) cắt nhau tại Q thuộc AB và $(ABPQ) = -1$.



Hình 4.

Tương tự gọi CL giao (O_1) tại S khác L thì tiếp tuyến tại S và L của (O_1) cắt nhau tại Q' thuộc AB và $(ABPQ') = -1$ do đó $Q \equiv Q'$. Từ đó QL, QK lần lượt tiếp xúc $(O_1), (O_2)$ mà AB là trục đẳng phương của $(O_1), (O_2)$ do đó $QL = QK$. Từ đó ta dễ thấy hai tam giác vuông $\triangle QML = \triangle QMK$ trường hợp cạnh huyền cạnh góc vuông suy ra $MK = ML$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán là sự mở rộng của bài thi IMO. Khi hai đường tròn (O_1) và (O_2) trực giao ta có lại bài thi IMO. Phương pháp sử dụng hàng điều hòa là một trong những cách ngắn gọn nhất để tiếp cận bài toán này.

Bằng ý tưởng dùng định lý Carnot ở bài toán gốc ta đưa ra lời giải sau

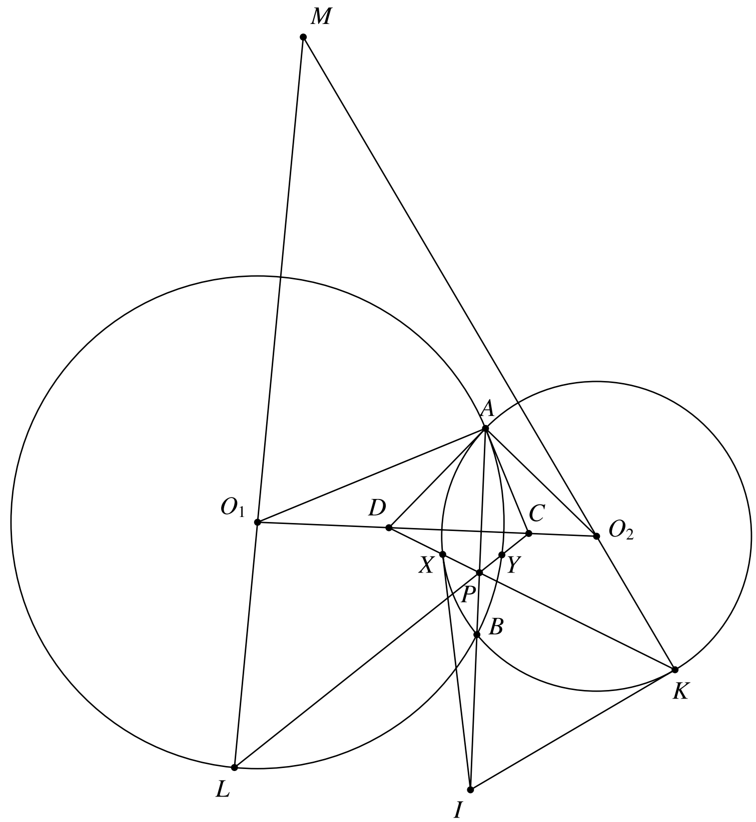
Lời giải 2. Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính của (O_1) và (O_2). Chú ý rằng $P_{P/(O_1)} = P_{P/(O_2)}$ nên $PO_1^2 - R_1^2 = PO_2^2 - R_2^2$.

Xét tam giác PDC ta có

$$(O_1C^2 - O_1P^2) + (O_2P^2 - O_2D^2) + (AD^2 - AC^2)$$
$$= (AC^2 + R_1^2 - O_1P^2) + (O_2P^2 - R_2^2 - AD^2) + (AD^2 - AC^2) = 0$$

Từ đó theo định lý Carnot ta có đường thẳng qua O_1 vuông góc với PC, AB và đường thẳng qua O_2 vuông góc với DP đồng quy. (1)

Gọi X, Y lần lượt là giao điểm thứ 2 của DK với (O_2); CL với (O_1). Từ (1) ta thu được AB, trung trực của YL, XK đồng quy.



Hình 5.

Do DA và DB là tiếp tuyến của (O_2) nên $AKBX$ là tứ giác điều hòa, suy ra tiếp tuyến của (O_2) tại X và K và AB đồng quy tại I. Do đó trung trực của XK đi qua I. Vì AB, trung trực YL, XK đồng quy nên I thuộc trung trực YL

Mặt khác, $AYBL$ là tứ giác điều hòa nên IL và IY là tiếp tuyến của (O_1) và do I thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) nên $IL = IK$ đồng thời $\angle IKO_2 = \angle ILO_1 = 90°$

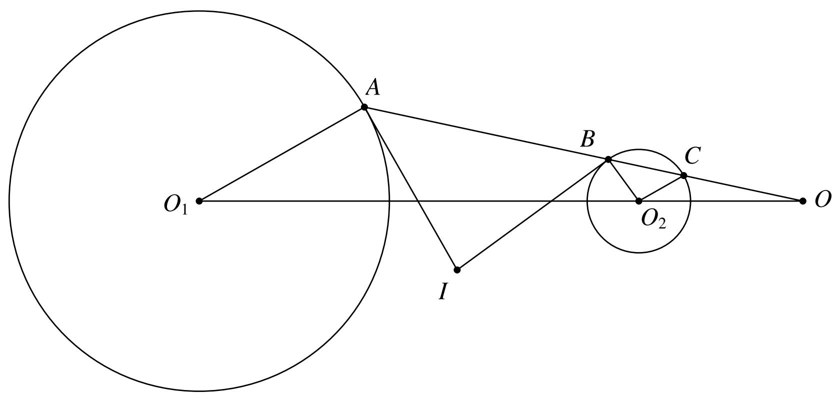
Từ đó suy ra hai tam giác ILM và IKM bằng nhau. Ta thu được $KM = ML$. □

Chúng ta xét tiếp một mở rộng khác như sau

Bài 3. *Cho (O_1) và (O_2) là hai đường tròn với d là trục đẳng phương của chúng. I là một điểm trên d. IA, IB tiếp xúc với $(O_1), (O_2)$ $(A \in (O_1), B \in (O_2))$ và A, B cùng phía với O_1O_2. IA, IB cắt O_1O_2 tại C, D. P là một điểm trên d. PC cắt (O_1) tại M, N thỏa mãn N nằm giữa M và C. PD cắt (O_2) tại K, L thỏa mãn L nằm giữa K và D. MO_1 cắt KO_2 tại U. Chứng minh rằng $UM = UK$.*

Chúng ta sử dụng hai bổ đề

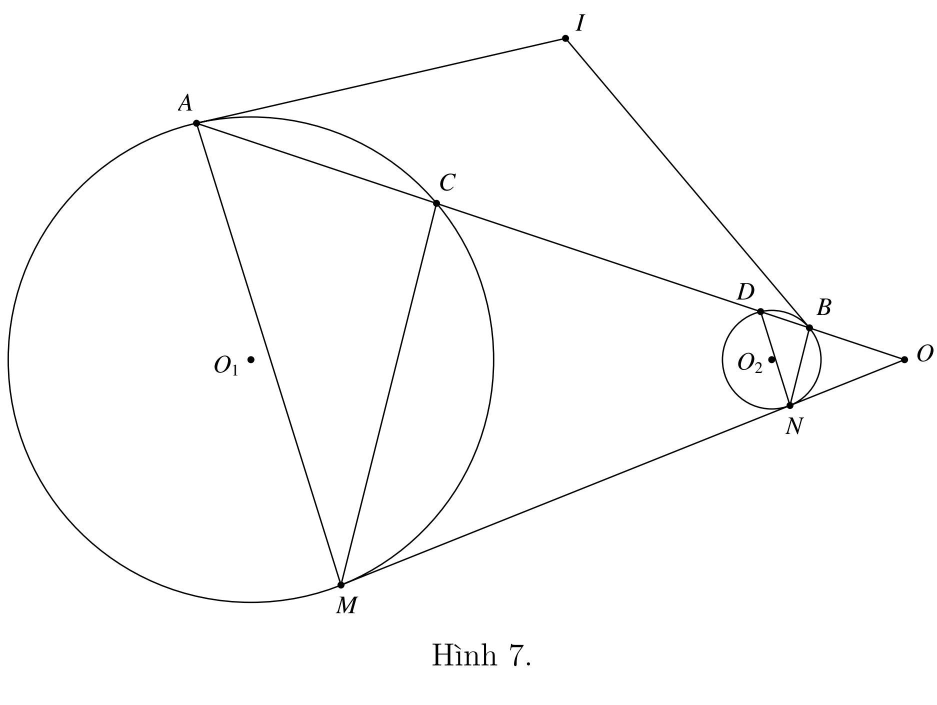
Bổ đề 3.1. *Cho (O_1) và (O_2) là hai đường tròn với d là trục đẳng phương của chúng. I là một điểm trên d. IA, IB lần lượt tiếp xúc với (O_1) và (O_2) sao cho A, B cùng phía với O_1O_2. Chứng minh rằng A, B, O thẳng hàng. Với O là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2).*



Hình 6.

Chứng minh. Gọi C là giao điểm thứ 2 của (O_2) với AB. Khi đó ta có $\angle IAB = \angle IBA$. Và $\angle IBA + \angle O_2BC = 90^\circ$. Do đó $\angle IAB + \angle O_2BC = 90^\circ$ hay $\angle IAB + \angle O_2CA = 90^\circ$. Từ đó thu được $\angle O_1AC + \angle O_2CA = 180^\circ$. Do đó $O_2C \| O_1A$. Như vậy C, A, O thẳng hàng. Suy ra A, B, O thẳng hàng. □

Bổ đề 3.2. *Cho (O_1) và (O_2) là hai đường tròn và d là trục đẳng phương của hai đường tròn đó. O là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn. MN là tiếp tuyến chung của (O_1) và (O_2). Ta đã biết MN đi qua O và phép nghịch đảo tâm (O) phương tích $\overline{OM}.\overline{ON}$ biến đường tròn (O_1) thành đường tròn (O_2). Chứng minh rằng nếu A thuộc (O_1) và B là ảnh của A qua phép nghịch đảo tâm O phương tích $\overline{OM}.\overline{ON}$ thì tiếp tuyến tại A của (O_1), tiếp tuyến tại B của (O_2), d đồng quy.*



Hình 7.

Chứng minh. R_1, R_2 lần lượt là bán kính của (O_1) và (O_2). I là giao điểm của tiếp tuyến tại A của (O_1) và tiếp tuyến tại B của (O_2)

Gọi C là giao điểm thứ hai của (O_1) với OA. D là giao điểm thứ 2 của (O_2) với OA. Do B là ảnh của A qua phép nghịch đảo tâm O phương tích $\overline{OM}.\overline{ON}$ nên B, N, M, A đồng viên. Suy ra $(AM, AB) \equiv (NB, NO) \equiv (DN, DO) (\text{mod}\pi)$

Do đó $ND \| MA$. Đặt $k = \dfrac{R_1}{R_2}$ Thì $H(O, k)\ A \to D$. Tương tự $H(O, k)\ C \to B$. Mà $H(O, k)\ M \to N$ nên $(MA, MC) \equiv (ND, NB) (\text{mod}\pi)$. Do đó $(AI, AC) \equiv (BD, BI) (\text{mod}\pi)$. Hay tam giác IAB cân tại I. Do đó $IA = IB$. Suy ra I thuộc d. □

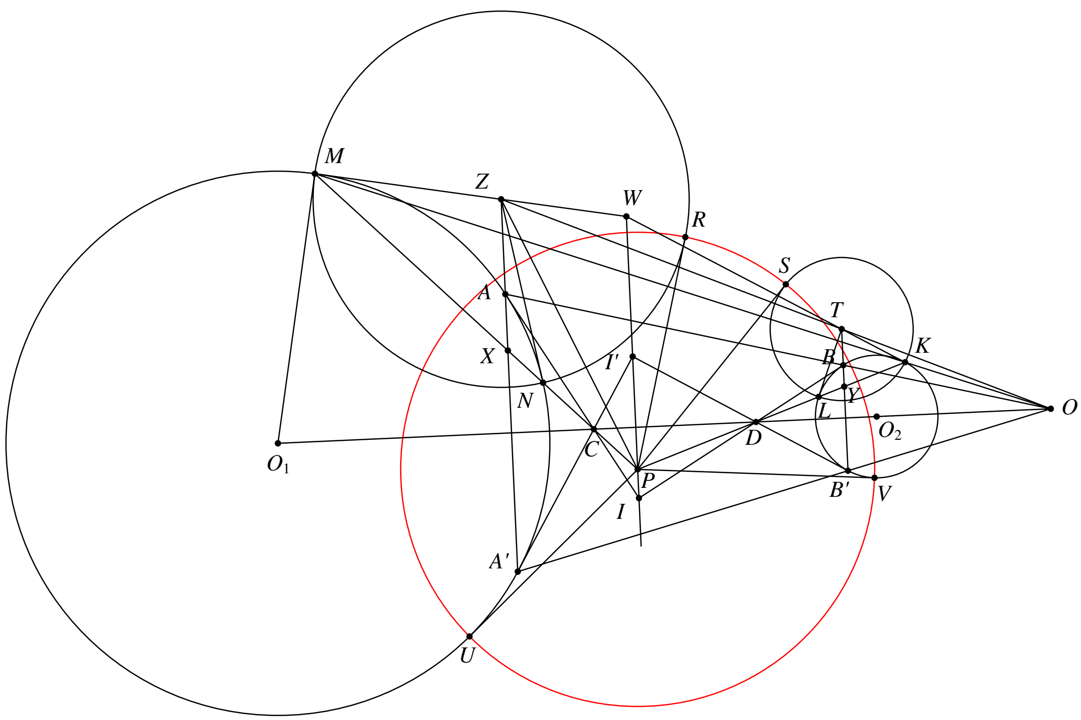
Giải bài toán. Gọi I' là điểm đối xứng của I qua O_1O_2. A', B' là tiếp điểm của hai tiếp tuyến qua I' với (O_1) và (O_2). X, Y lần lượt là giao điểm của PC với AA', PD với BB'.

Do tính đối xứng nên có I', C, A' thẳng hàng, I', D, B' thẳng hàng. Đồng thời $AA' \| BB' \| d$. Do đó $\dfrac{\overline{AX}}{\overline{A'X}} = \dfrac{\overline{IP}}{\overline{I'P}} = \dfrac{\overline{BY}}{\overline{B'Y}}$. Như vậy AB, XY, $A'B'$ đồng quy.

Ta có $ANA'M$ là tứ giác điều hòa. Vậy tiếp tuyến tại M, N của (O_1) và AA' đồng quy tại Z. Đồng thời $(ZXAA') = -1$.

Tương tự tiếp tuyến tại K, L của (O_2) và BB' đồng quy tại T và $(TYBB') = -1$.

Từ đó do AB, XY, $A'B'$ đồng quy nên XY, ZT, AB, $A'B'$ đồng quy tại (O). Mặt khác theo bổ đề 1 thì A, B, O thẳng hàng và A', B', O thẳng hàng. Do đó XY và ZT đi qua O.



Hình 8.

Ta có $\dfrac{ZM^2}{TK^2} = \dfrac{\overline{ZA}.\overline{ZA'}}{\overline{TB}.\overline{TB'}} = \dfrac{OZ^2}{OT^2} \Rightarrow \dfrac{ZM}{TK} = \dfrac{OZ}{OT}$

Do đó O là tâm vị tự ngoài của (Z, ZM) và (T, TK) nên O cũng là tâm nghịch đảo của chúng.

Gọi R, S, U, V là tiếp điểm các tiếp tuyến qua P của (Z, ZM); (T, TK); (O_1); (O_2) sao cho R, S, O thẳng hàng. U, V, O thẳng hàng. Vì P thuộc trục đẳng phương của (Z, ZM) và (T, TK) nên theo bổ đề 2 thì có thể dựng được các điểm R, S, U, V thỏa mãn điều đó. Từ đó vì P là tâm đẳng phương của (O_1), (O_2), (Z, ZM), (T, TK) nên $PR = PS = PU = PV$ do đó R, S, U, V đồng viên hay $\overline{OR}.\overline{OS} = \overline{OU}.\overline{OV} = r$. Như vậy theo bổ đề 1 và bổ đề 2 và vì O là tâm nghịch đảo của (O_1) và (O_2); (Z, ZM) và (T, TK) nên phép nghịch đảo tâm O phương tích r biến (O_1) thành (O_2) và biến (Z, ZM) thành (T, TK). Do đó biến M thành K.

Từ đó theo bổ đề 2 thì tiếp tuyến tại M của (O_1) và K của (O_2) đồng quy tại W thuộc d.

Khi đó dễ có hai tam giác UMW và tam giác UKW bằng nhau. Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải trên cho ta một vài kết quả khá đẹp như phép nghịch đảo tâm O biến (O_1) thành (O_2) thì cũng biến (Z, ZM) thành (T, TK) đồng thời ta thu được một loạt các kết quả đồng quy tại O rất đẹp và lời giải trên chính là ý tưởng để giải quyết bài toán tổng quát hơn.

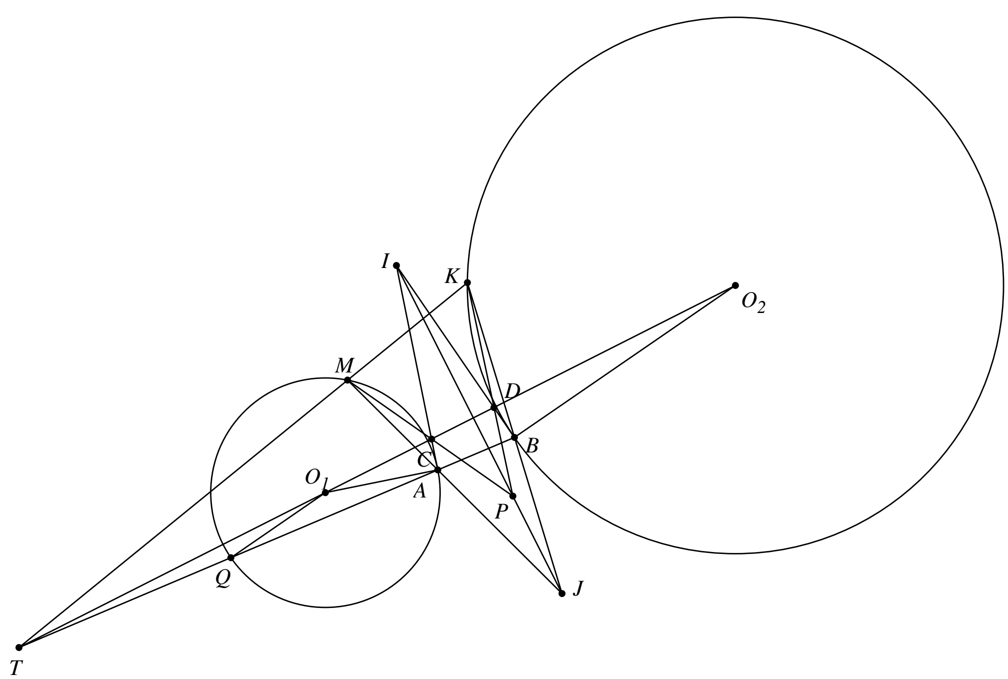
Chúng tôi xin giới thiệu lời giải khác của tác giả Nguyễn Văn Linh

Bổ đề 3.3. *Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2). L là tâm vị tự ngoài của hai đường tròn. Gọi A, B là hai điểm trên $(O_1), C, D$ là hai điểm trên (O_2) sao cho các bộ ba L, A, C và L, B, D thẳng hàng (các cặp O_1A, O_2C và O_1B, O_2D không song song). Khi đó 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.*

Chứng minh. Gọi E, F là giao điểm thứ hai của LC với $(O_2), LD$ với (O_2). Dễ dàng chứng minh $O_2E \parallel O_1A, O_2F \parallel O_1B$. Suy ra $EF \parallel AB$. Áp dụng định lý Reim suy ra điều phải chứng minh. □

Giải bài toán. Gọi T là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2). Ta thấy rằng điều kiện để $UM = UK$ là M, K, T thẳng hang.

Gọi K' là giao điểm của TM với (O_2) sao cho O_1M và O_2K' không song song. AB giao (O_1) tại điểm thứ hai Q.



Hình 9.

Ta có $\angle O_1QA = \angle O_1AQ = \angle IAQ - 90^\circ = 180^\circ - \angle ABO_2$ (do tam giác IAB cân).

Suy ra $O_1Q \parallel O_2B$.

Từ đó T, A, B thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề 3.1 suy ra tứ giác $MK'BA$ nội tiếp. Gọi J là giao của MA và $K'B$ thì $JA.JM = JB.JK'$ nên $J \in d$.

Do MK', CD, AB đồng quy tại T nên áp dụng định lý Desargues ta thu được giao điểm của MC và DK' nằm trên IJ tức là nằm trên d.

Suy ra $K' \equiv K$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải trên cho ta ý tưởng để giải quyết bài toán tổng quát hơn như sau

Bài 4 (Tổng quát bài 3)**.** *Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) và d là trục đẳng phương của chúng. P, Q, R là ba điểm trên d. PA, PB là tiếp tuyến của (O_1) và (O_2) (A, B nằm cùng phía với O_1O_2). QC, QD lần lượt là tiếp tuyến của (O_1), (O_2) (C, D nằm cùng phía với O_1O_2). $E = QC \cap PA$; $F = PB \cap QD$. RE cắt (O_1) tại G, H. RF cắt (O_2) tại I, K sao cho G nằm giữa R và H, I nằm giữa R và K. U là giao điểm của HO_1 và KO_2. Chứng minh rằng $UK = UH$.*

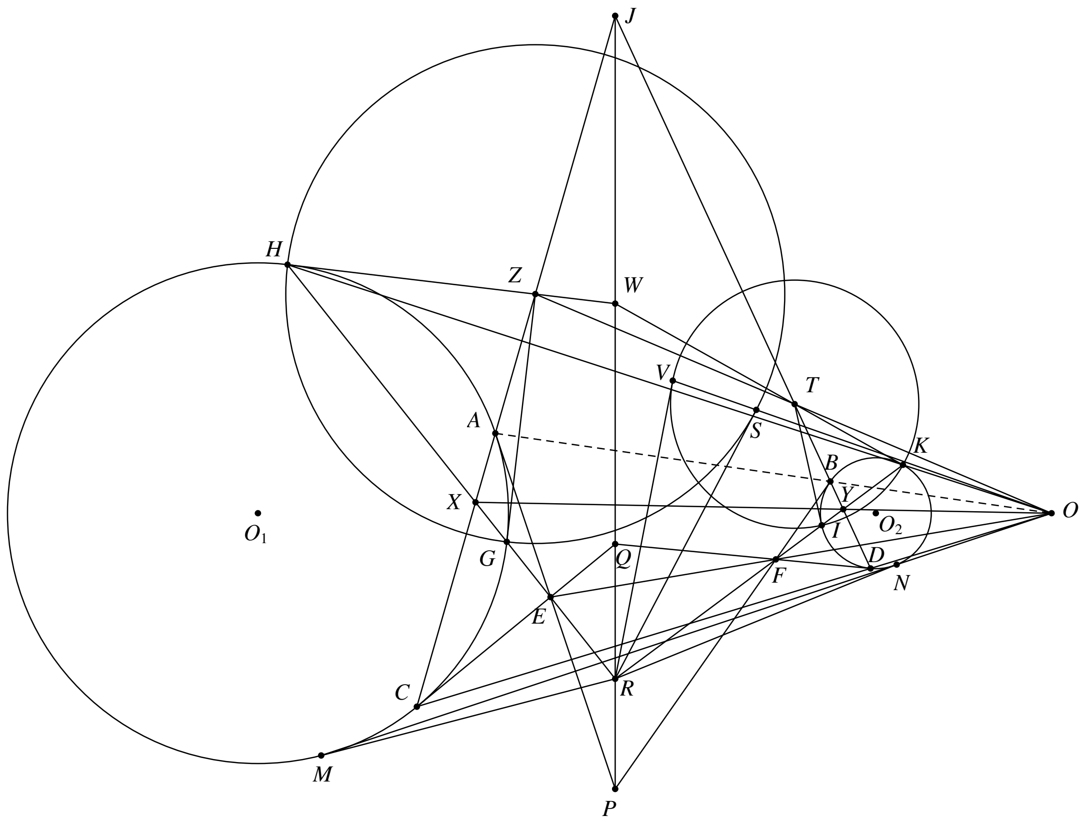
Ta vẫn sử dụng hai bổ đề của bài 3

Chứng minh. Gọi O là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2). Ta có O cũng chính là tâm nghịch đảo của hai đường tròn này.

Xét phép nghịch đảo tâm O biến (O_1) thành (O_2). Từ bổ đề 1 và 2 ta có được A, B, O thẳng hàng và C, D, O thẳng hàng. Từ đó theo bổ đề 2 ta có được B là ảnh của A và D là ảnh của C. Do đó A, B, C, D đồng viên. Như vậy AC và BD cắt nhau tại trục đẳng phương của (O_1) và (O_2).

Ta có $(JAXC) = (JPRQ) = (JBYD)$. Do đó AB, CD, XY đồng quy. Mà AB, CD đồng quy tại O nên XY đi qua O.

Thấy rằng các tứ giác $GAHC$ và $IBKD$ đều là tứ giác điều hòa. Do đó tiếp tuyến tại H, G của (O_1) và AC đồng quy tại một điểm Z. Tiếp tuyến tại I, K của (O_2) và BD đồng quy tại một điểm T. Đồng thời $(ZXAC) = (TYBD) = -1$. Mặt khác AB, XY, CD đi qua (O) nên ZT đi qua O.



Hình 10.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác JZT có A, O, B thẳng hàng ta có $\dfrac{AZ}{AJ}.\dfrac{BJ}{BT}.\dfrac{OT}{OZ}=1$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác JZT có O, C, D thẳng hàng ta có $\dfrac{CZ}{CJ}.\dfrac{DJ}{DT}.\dfrac{OT}{OZ}=1$.

Từ đó nhân 2 đẳng thức lại và chú ý $JA.JC=JB.JD$; $ZA.ZC=ZH^2$; $TB.TD=TK^2$ suy ra $\dfrac{ZH}{TK}=\dfrac{OZ}{OT}$

Như vậy O là tâm vị tự ngoài của (Z,ZH) và (T,TK) do đó O cũng là tâm nghịch đảo của hai đường tròn này.

Thấy rằng R chính là tâm đẳng phương của (O_1), (O_2), (Z,ZH), (T,TK). Gọi RM, RN, RS, RV lần lượt là tiếp tuyến của (O_1), (O_2), (Z,ZH), (T,TK) sao cho O, M, N thẳng hàng và O, S, V thẳng hàng và ta có $RS=RV=RM=RN$ nên S, V, M, N đồng viên. Do đó $\overline{OS}.\overline{OV}=\overline{OM}.\overline{ON}=r$.

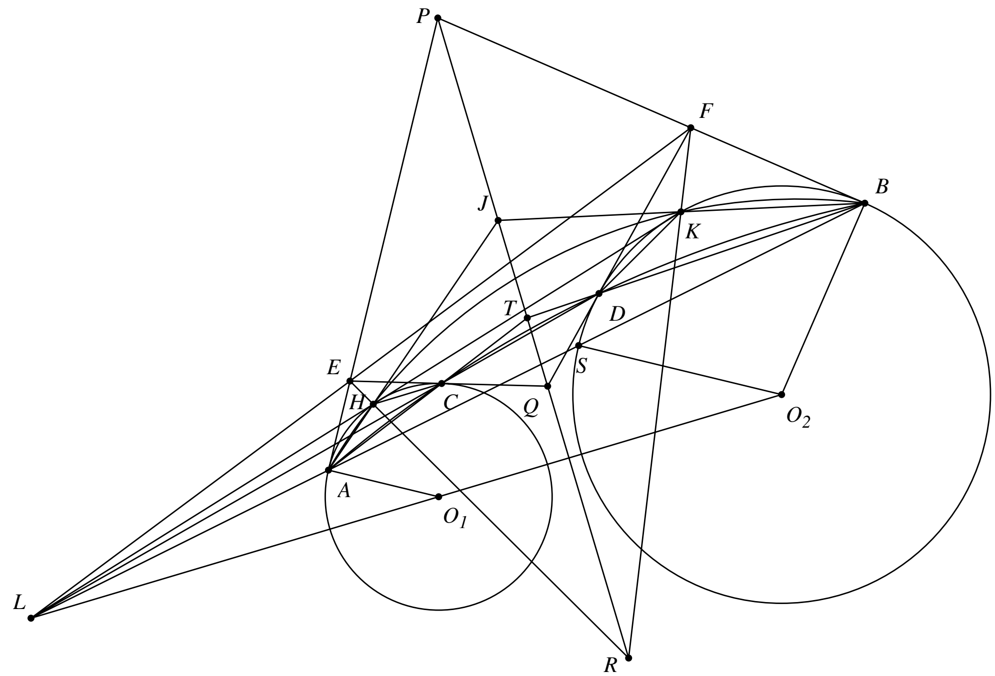
Hơn nữa O là tâm nghịch đảo của (O_1) và (O_2); (Z,ZH) và (T,TK) nên phép nghịch đảo cực O phương tích r biến (O_1) thành (O_2), (Z,HZ) thành (T,TK) do đó biến H thành K.

Từ đó theo bổ đề 2 suy ra tiếp tuyến tại H của (O_1) và K của (O_2) và d đồng quy tại W. Từ đó nhờ tính bằng nhau của UHW và UKW ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán trên bao gồm các kết quả rất đẹp mắt và với ý tưởng dùng phép nghịch đảo như trong cách giải trên ta còn thu được các kết quả sau đây

- HA, KB đồng quy tại một điểm trên d.
- Tiếp tuyến tại G của (O_1) và I của (O_2) đồng quy tại một điểm trên d.

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải khác của tác giả Nguyễn Văn Linh



Hình 11.

Chứng minh. Gọi L là tâm vị tự ngoài của (O_1) và (O_2). Chú ý rằng điều kiện để $UH = UK$ (tức là đường tròn (U, UH) tiếp xúc với (O_1) và (O_2) tại H, K) là L, H, K thẳng hàng.

Gọi K' là giao điểm của LH với (O_2) sao cho O_1H và O_2K' không song song. Ta chứng minh $K' \equiv K$.

Gọi S là giao điểm thứ hai của AB và (O_2). Do PA, PB là hai tiếp tuyến kẻ từ điểm P nằm trên trục đẳng phương d tới hai đường tròn (O_1) và (O_2) nên $PA = PB$.

Suy ra $\angle O_1AB = 90° - \angle PAB = 90° - \angle PBA = \angle O_2BA = \angle O_2SB$.

Từ đó $O_1A \parallel O_2S$ hay L, A, B thẳng hàng. Tương tự, L, C, D thẳng hàng.

Áp dụng bổ đề 1 ta có tứ giác $ACDB$ nội tiếp.Gọi T là giao của AC và BD thì $T \in d$.

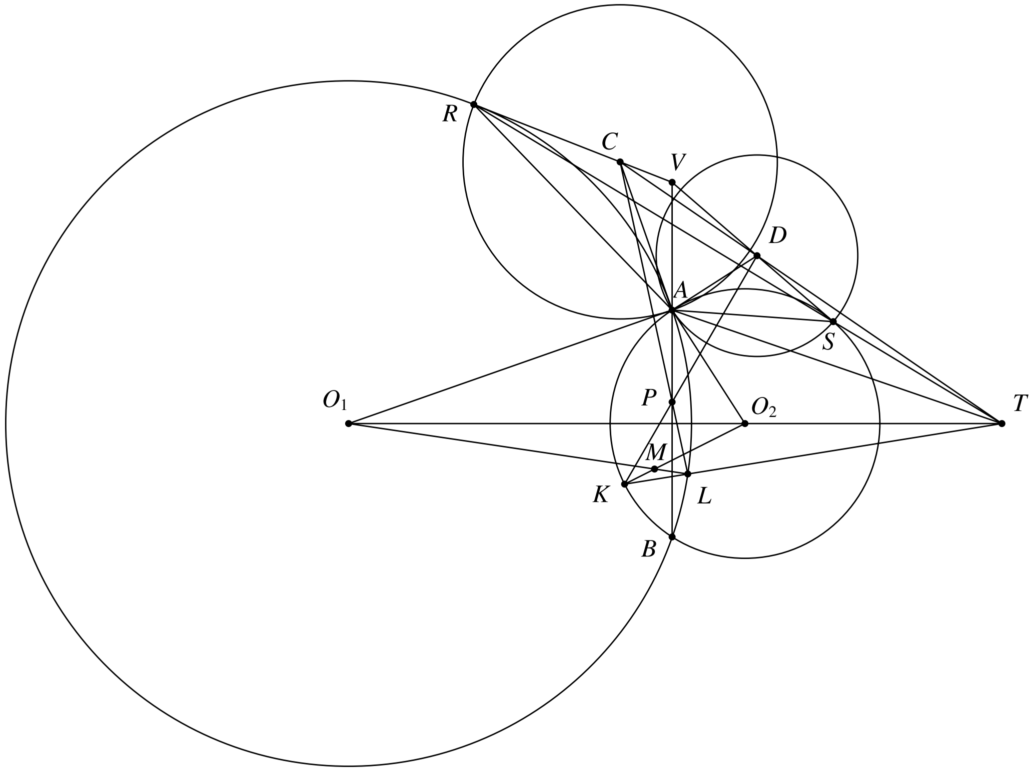
Ta có giao điểm của các cặp đường thẳng $(AE, BF), (AC, BD), (EC, FD)$ lần lượt là P, T, Q thẳng hàng nên theo định lý Desargues ta có EF, CD, AB đồng quy tại L.

Mặt khác, lại áp dụng bổ đề trên ta có $AHK'B$ nội tiếp. Gọi J là giao của AH và $K'B$ thì $J \in d$.

Gọi R' là giao của EH và FK'. Áp dụng định lý Desargues cho các đường thẳng AB, HK', EF ta có P, J, R' thẳng hàng hay $R' \in d$. Tức là $R' \equiv R$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài 4 là một kết quả khá mạnh, và nhờ đó ta có thể giải một số bài toán khác như bài toán dưới đây

Bài 5. *Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) cắt nhau tại A, B. Tiếp tuyến chung ngoài của (O_1), (O_2) cắt nhau tại T. d là đường thẳng bất kỳ qua T. Tiếp tuyến tại A của (O_1), (O_2) lần lượt cắt d tại C, D. P là điểm thuộc AB. CP giao (O_1) tại L sao cho C, L khác phía AB. DP giao (O_2) tại K sao cho D, K khác phía AB. LO_1 cắt KO_2 tại M. Chứng minh rằng $MK = ML$.*



Hình 12.

Chứng minh. Do T là giao điểm của hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) nên AT là phân giác ngoài $\angle O_1AO_2$.

Hơn nữa $AC \perp AO_1$; $AD \perp AO_2$ do đó bằng biến đổi góc dễ dàng có được AT là phân giác ngoài của góc $\angle CAD$. Như vậy $\dfrac{TC}{TD} = \dfrac{AC}{AD}$.

Do đó T là tâm vị tự ngoài của (C, CA) và (D, DA). Như vậy T cũng là tâm nghịch đảo của (C, CA) và (D, DA).

Gọi R, S lần lượt là điểm đối xứng của A qua O_1C và O_2D. Như vậy $R \in (C, CA)$ và $S \in (D, DA)$.

Thấy rằng phép nghịch đảo tâm T phương tích TA^2 biến (O_1) thành (O_2) và (C, CA) thành (D, DA). Do đó biến R thành S.

Như vậy tiếp tuyến tại R của (O_1) và tiếp tuyến tại S của (O_2) cắt nhau tại V thuộc AB.

Áp dụng kết quả bài 4 với V, A, P thuộc trục đẳng phương AB của (O_1) và (O_2) ta có điều phải chứng minh. □

Ngoài ra chúng tôi xin đề xuất một số mở rộng tiếp nữa cho các bài toán mở rộng đề IMO mà ý tưởng chính cũng đã nằm trong các bài toán 3,4,5. Các bạn hãy xem như các bài luyện tập thêm

Bài 6. *Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B. Tiếp tuyến chung ngoài của $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại T. d là đường thẳng bất kỳ qua T. Tiếp tuyến tại A của $(O_1), (O_2)$ lần lượt cắt d tại C, D. P là điểm thuộc AB. CP giao (O_1) tại L sao cho C, L khác phía AB. DP giao (O_2) tại K sao cho D, K khác phía AB. LO_1 cắt KO_2 tại M. Chứng minh rằng $MK = ML$.*

Bài 7. *Cho (O_1) và (O_2) ở ngoài nhau. d là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). I là điểm trên d. Kẻ IA, IB tiếp xúc với $(O_1), (O_2)$ sao cho A, B cùng phía O_1O_2. T giao của hai tiếp tiếp tuyến chung* *ngoài của* $(O_1), (O_2)$. *Đường thẳng* l *qua* T *cắt* IA, IB *tại* C, D. P *là điểm thuộc* d. PC *cắt* (O_1) *tại* E, F *sao cho* F *nằm giữa* P *và* E. PD *cắt* (O_2) *tại* G, H *sao cho* G *nằm giữa* P *và* H. O_1E *giao* O_2H *tại* K. *Chứng minh rằng* $KE = KH$.

Chúng tôi xin chân thành cám ơn bạn **Nguyễn Văn Linh** sinh viên đại học ngoại thương đã có những nhận xét và góp ý quý báu cho chúng tôi trong bài viết này.

Trần Quang Hùng GV trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN-ĐHQGHN.
Email: analgeomatica@gmail.com
Ong Thế Phương học sinh lớp 12T trường THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa Đồng Nai.
Email: mathkidonline@gmail.com

Tài liệu

[1] Topic Problem 5 IMO 2012 appears at
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=834&t=488511

[2] Topic Equivalent to IMO 2012 Q5 appears at
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=3680

[3] Topic Equal segment appears at
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=488712

Các bài hình học mathley được đề nghị bởi Trần Quang Hùng

1 Đề bài

Bài 1.1. Cho tam giác ABC nhọn tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H, đường cao AD. AO cắt BC tại E. Đường thẳng qua D song song OH lần lượt cắt AB, AC tại M, N. I là trung điểm AE. DI lần lượt cắt AB, AC tại P, Q. MQ cắt NP tại T. Chứng minh rằng D, O, T thẳng hàng.

Bài 1.2. Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn (O) đi qua B, C lần lượt cắt các đoạn BA, CA tại điểm thứ hai F, E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt đường thẳng CF tại M, N sao cho M nằm giữa C và F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACF cắt đường thẳng CE tại P, Q sao cho P nằm giữa B và E. Đường thẳng qua N vuông góc AN cắt BE tại R. Đường thẳng qua Q vuông góc AQ cắt CF tại S. SP giao NR tại U. RM giao QS tại V. Chứng minh rằng NQ, UV, RS đồng quy.

Bài 1.3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P_1, P_2 là hai điểm bất kỳ trong mặt phẳng; P_1A, P_1B, P_1C lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là A_1, B_1, C_1; P_2A, P_2B, P_2C lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai A_2, B_2, C_2.

a) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 lần lượt giao BC, CA, AB tại A_3, B_3, C_3. Chứng minh rằng ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

b) P là một điểm bất kỳ trên đường thẳng P_1P_2; A_1P, B_1P, C_1P lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là A_4, B_4, C_4. Chứng minh rằng ba đường thẳng A_2A_4, B_2B_4, C_2C_4 đồng quy tại một điểm trên P_1P_2.

Bài 1.4. Cho tam giác ABC. Đường tròn (K) bất kỳ tiếp xúc đoạn thẳng AC, AB lần lượt tại E, F. (K) cắt đoạn thẳng BC tại M, N sao cho N nằm giữa B và M. FM giao EN tại I. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác IFN và IEM cắt nhau tại J khác I. Chứng minh rằng IJ đi qua A và KJ vuông góc IJ.

Bài 1.5. Cho tam giác ABC, P là điểm bất kỳ. A_1 là hình chiếu song song của P theo phương l cố định lên BC. A_2 là trung điểm AA_1. A_2P cắt BC tại A_3. A_4 đối xứng A_1 qua A_3. Chứng minh rằng PA_4 luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) bất kỳ qua B, C. Đường tròn (O_1) tiếp xúc AB, AC và tiếp xúc trong với (K). Đường tròn (O_2) tiếp xúc DB, DC và tiếp xúc trong với (K). Chứng minh rằng một trong hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) song song với AD.

Bài 1.7. Cho tam giác ABC không cân, (O), H theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác. Đường thẳng qua A và song song với OH lại cắt (O) tại K. Đường thẳng qua K và song song với AH lại cắt (O) tại L. Đường thẳng qua L song song với OA cắt OH tại E. Chứng minh rằng các điểm B, C, O, E cùng thuộc một đường tròn.

Bài 1.8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc trung trực BC. I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB, MAC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2 luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di chuyển.

Bài 1.9. Cho tam giác ABC đường tròn (O) bất kỳ. (O) cắt CA tại L, E và cắt AB tại K, F. D là một điểm thuộc (O). d là đường thẳng bất kỳ đi qua A. DE, DF lần lượt cắt d tại M, N. Chứng minh rằng MK giao NL tại điểm thuộc (O).

Bài 1.10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại T. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia BT, CT sao cho $BM = BC = CN$. Đường thẳng MN cắt CA, AB theo thứ tự tại E, F; BE giao CT tại P, CF giao BT tại Q. Chứng minh rằng $AP = AQ$.

Bài 1.11. Cho tam giác ABC. Gọi (O_a) là đường tròn bất kỳ đi qua B, C; hai đường tròn $(O_b), (O_c)$ xác định tương tự. Hai đường tròn $(O_b), (O_c)$ cắt nhau tại A_1, khác A. Các điểm B_1, C_1 xác định tương tự. Gọi Q là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tam giác ABC. QB, QC lần lượt cắt (O_c), (O_b) tại A_2, A_3 khác B, C. Tương tự ta có B_2, B_3, C_2, C_3. Gọi (K_a), (K_b), (K_c) là các đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, và $C_1C_2C_3$. Chứng minh rằng

a) ba đường tròn $(K_a), (K_b), (K_c)$ có cùng một điểm chung.

b) hai tam giác $K_aK_bK_c$, ABC đồng dạng.

Bài 1.12. Giả sử E, F là hai điểm trên cạnh CA, AB của tam giác ABC. Gọi (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng

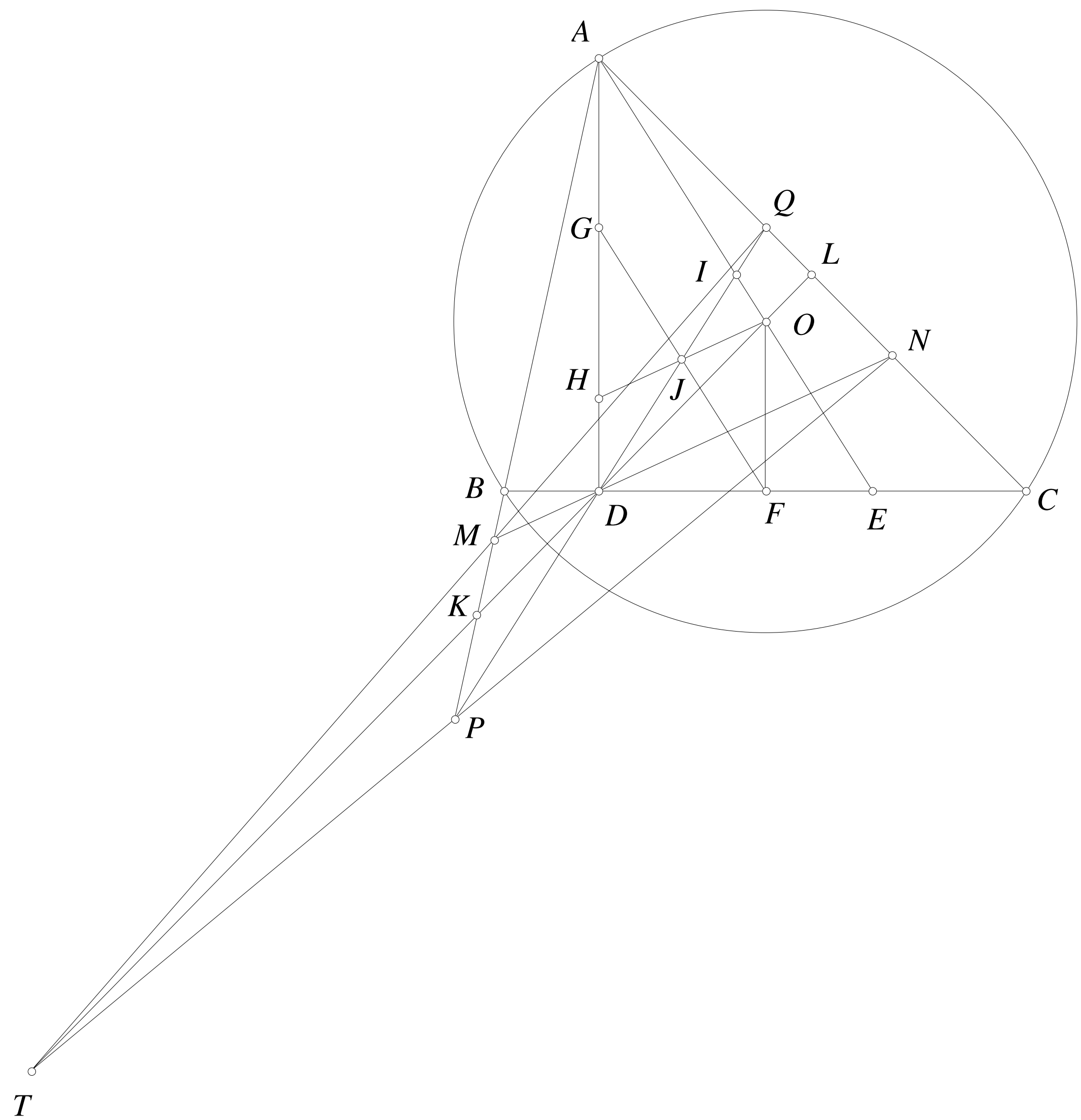
a) T nằm trên BC nếu và chỉ nếu BE cắt CF tại một điểm thuộc đường tròn (K);

b) EF, PQ, BC đồng quy biết rằng BE cắt FT tại M, CF cắt ET tại N, AM và AN cắt đường tròn (K) tại P, Q khác A.

Bài 1.13. Cho tam giác ABC và đường tròn (K) bất kỳ đi qua B, C cắt CA, AB tại M, N. Dựng tam giác APQ bằng và ngược hướng tam giác ABC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác CPM và BQN bằng nhau.

2 Lời giải

Bài 2.1. Cho tam giác ABC nhọn tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H, đường cao AD. AO cắt BC tại E. Đường thẳng qua D song song OH lần lượt cắt AB, AC tại M, N. I là trung điểm AE. DI lần lượt cắt AB, AC tại P, Q. MQ cắt NP tại T. Chứng minh rằng D, O, T thẳng hàng.



Hình 1.

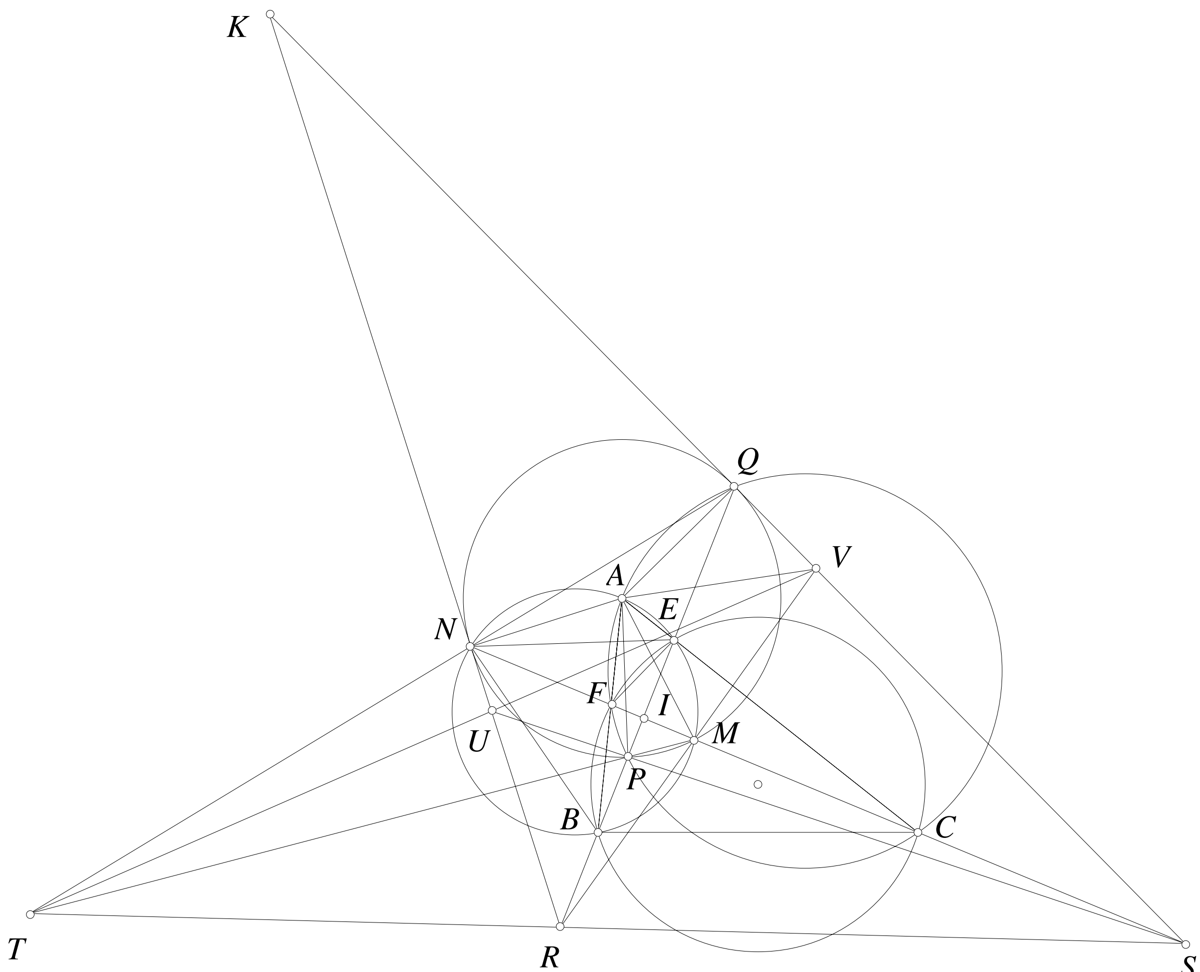
Lời giải. Gọi F là trung điểm BC, G là trung điểm AH. Từ kết quả quen thuộc $2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AH}$. Ta có $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OF}$. Tứ đó các tứ giác $AGFO, GHFO$ là hình bình hành suy ra GF song song AE và GF, OH có chung trung điểm J. Trong tam giác ADE có trung tuyến AI đi qua trung điểm đoạn chắn song song GF. Do đó AI đi qua trung điểm J của OH. Chú ý $DN \parallel HO$ từ liên hệ giữa tỷ số đơn và tỷ số kép ta có $D(HOJN) = (HOJ) = -1$.

Gọi OD giao AB, AC tại K, L. Qua phép chiếu xuyên tâm D ta dễ thấy

$$(AKMP) = D(AKMP) = D(ALNQ) = (ALNQ) = D(HOJN) = -1$$

Khi $(AKMP) = -1$ ta cũng có $(AKPM) = -1$. Vậy từ hai đẳng thức trên ta có $(AKPM) = (ALNQ)$ hay KL, PN, MQ đồng quy tại T, nói cách khác D, O, T thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.2. Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn (O) đi qua B, C lần lượt cắt các đoạn BA, CA tại điểm thứ hai F, E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt đường thẳng CF tại M, N sao cho M nằm giữa C và F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACF cắt đường thẳng CE tại P, Q sao cho P nằm giữa B và E. Đường thẳng qua N vuông góc AN cắt BE tại R. Đường thẳng qua Q vuông góc AQ cắt CF tại S. SP giao NR tại U. RM giao QS tại V. Chứng minh rằng NQ, UV, RS đồng quy.



Hình 2.

Lời giải. Do các tứ giác $ANBE$ và $BCEF$ nội tiếp $\angle ANE = \angle ABE = \angle ACN$ nên $\triangle ANE \sim \triangle ACN$ do đó $AN^2 = AE.AC$. Tương tự $AM^2 = AE.AC, AP^2 = AQ^2 = AF.AB$, do $BCEF$ nội tiếp nên $AE.AC = AF.AB$. Từ đó ta có $AM = AN = AP = AQ$ hay M, N, P, Q thuộc đường tròn (A).

Gọi CN giao BQ tại I, RN giao SQ tại K. Ta xét phép chiếu xuyên tâm trên đường tròn (A), chú ý NR, QS là tiếp tuyến của (A), ta có

$$(MNPQ) = N(MNPQ) = (IRPQ) = S(IRPQ) = (NRUK) \quad (1)$$

và

$$(MNPQ) = Q(MNPQ) = (MNIS) = R(MNIS) = (VKQS) = (QSVK) \quad (2)$$

Từ $(1), (2)$ suy ra $(NRUK) = (QSVK)$ do đó QN, RS, UV đồng quy, đó là điều phải chứng minh.

□

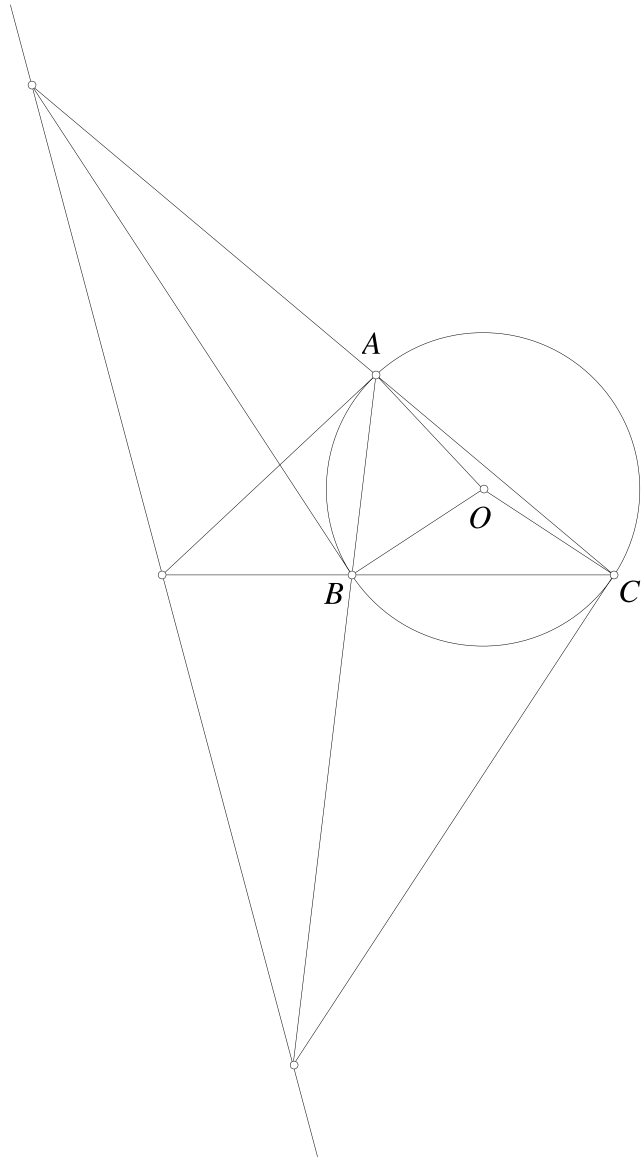
Bài 2.3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P_1, P_2 là hai điểm bất kỳ trong mặt phẳng; P_1A, P_1B, P_1C lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là A_1, B_1, C_1; P_2A, P_2B, P_2C lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai A_2, B_2, C_2.

a) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 lần lượt giao BC, CA, AB tại A_3, B_3, C_3. Chứng minh rằng ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

b) P là một điểm bất kỳ trên đường thẳng P_1P_2; A_1P, B_1P, C_1P lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là A_4, B_4, C_4. Chứng minh rằng ba đường thẳng A_2A_4, B_2B_4, C_2C_4 đồng quy tại một điểm trên P_1P_2.

Để giải bài toán ta cần một số bổ đề sau

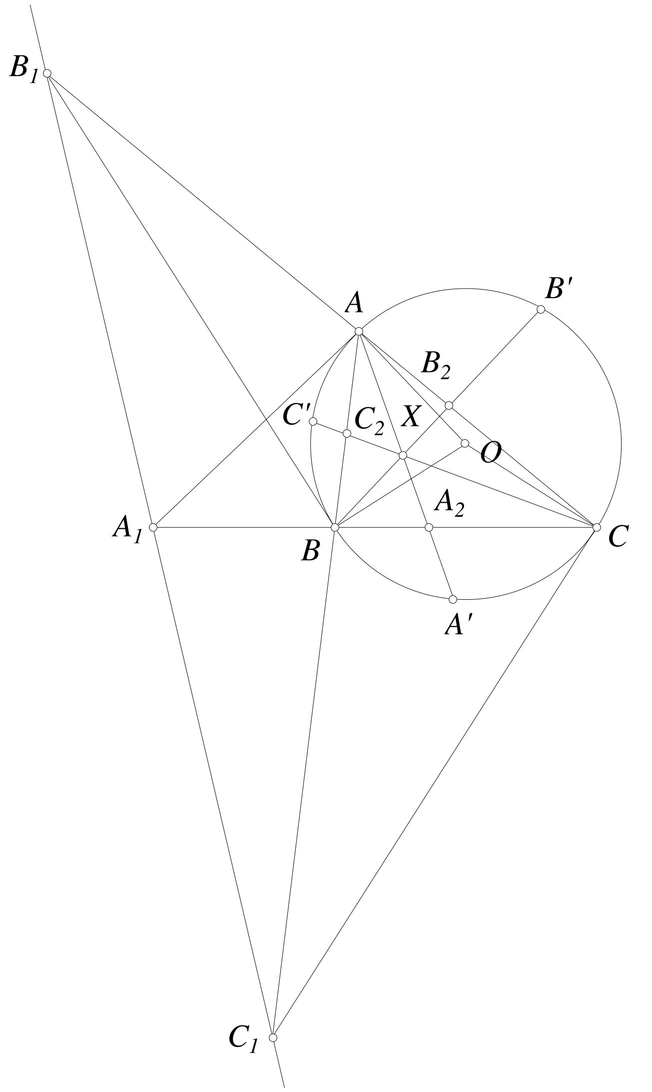
Bổ đề 2.3.1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Khi đó các tiếp tuyến tại A, B, C của (O) tương ứng cắt BC, CA, AB tại ba điểm thẳng hàng.



Hình 3.

Bổ đề này đã rất quen thuộc xin không nêu cách chứng minh.

Bổ đề 2.3.2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với X là điểm bất kỳ. Gọi A', B', C' là giao điểm thứ hai của AX, BX, CX với đường tròn (O). khi đó $(BCAA') \cdot (CABB') \cdot (ABCC') = -1$.



Hình 4.

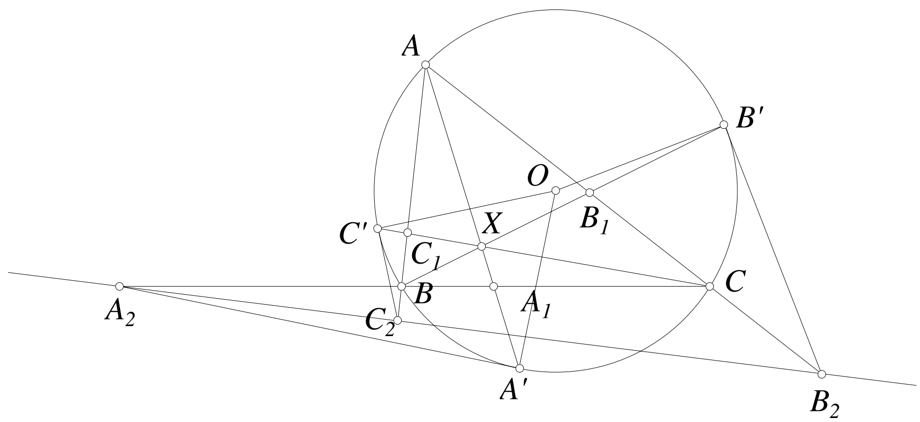
Lời giải. Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là giao điểm của tiếp tuyến tại A, B, C của (O) với các đường thẳng BC, CA, AB và A_2, B_2, C_2 tương ứng là giao điểm của AX, BX, CX với các đường thẳng BC, CA, AB.

Khi đó ta dễ thấy

$$(BCAA') = A(BCAA') = A(BCA_2A_1) = (BCA_2A_1) = \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} : \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}$$

Tương tự với $(CABB'), (ABCC')$ ta chú ý rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy và A_2, B_2, C_2 thẳng hàng khi nhân các tỷ số kép với nhau áp dụng các định lý Menelaus và Ceva ta dễ suy ra $(BCAA') \cdot (CABB') \cdot (ABCC') = -1$. Đó là điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2.3.3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với X là điểm bất kỳ. Gọi A', B', C' là giao điểm thứ hai của AX, BX, CX với đường tròn (O). Chứng minh rằng các tiếp tuyến của (O) tại A', B', C' tương ứng cắt BC, CA, AB tại ba điểm thẳng hàng.



Hình 5.

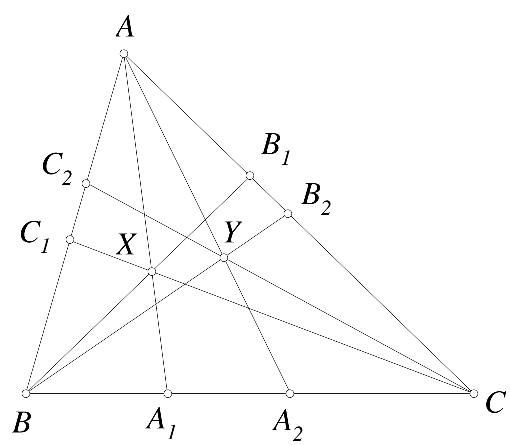
Lời giải. Gọi giao điểm của đường thẳng AA', BB', CC' và tiếp tuyến tại A', B', C' của (O) với BC, CA, AB lần lượt là $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1C_2$. Ta thấy

$$(BCAA') = A'(BCAA') = A'(BCA_1A_2) = (BCA_1A_2) = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} : \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$$

Tương tự với $(CABB'), (ABCC')$ ta chú ý rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy và theo bổ đề 3.2 thì $(BCAA') \cdot (CABB') \cdot (ABCC') = -1$ do đó dễ suy ra $\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} . \frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}} . \frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}} = 1$ nên A_2, B_2, C_2 thẳng hàng theo định lý Menelaus, đó là điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2.3.4. Cho năm điểm A, B, C, X, Y trên mặt phẳng khi đó

$$A(BCXY) \cdot B(CAXY) \cdot C(ABXY) = 1.$$



Hình 6.

Lời giải. Gọi giao điểm của AX, AY với đường thẳng BC là A_1, A_2 ta dễ thấy

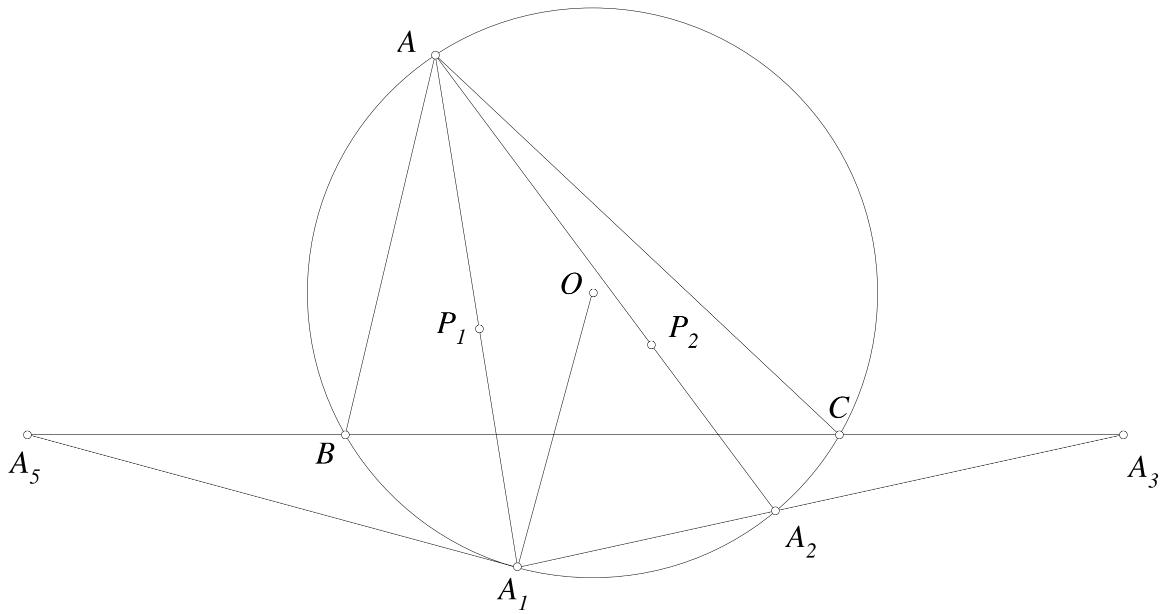
$$A(BCXY) = (BCA_1A_2) = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} : \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$$

Chú ý rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại X, AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại Y do đó áp dụng định lý Ceva ta có

$$A(BCXY) \cdot B(CAXY) \cdot C(ABXY) = \prod \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} : \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} = \prod \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} : \prod \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} = -1 : -1 = 1$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Lời giải. a) Gọi A_5, B_5, C_5 lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến tại A_1, B_1, C_1 với BC, CA, AB, theo bổ đề 1 ta đã có A_5, B_5, C_5 thẳng hàng.



Hình 7.

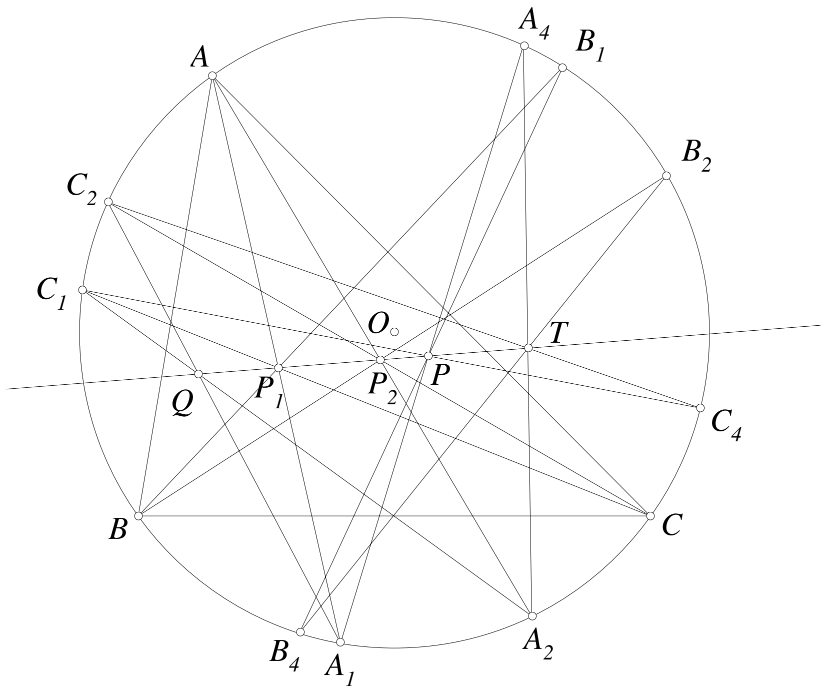
$$A(BCP_1P_2) = A(BCA_1A_2) = (BCA_1A_2) = A_1(BCA_1A_2) = A_1(BCA_5A_3) = (BCA_5A_3) = \frac{\overline{A_5B}}{\overline{A_5C}} : \frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}}$$

Vậy

$$A(BCP_1P_2) \cdot B(CAP_1P_2) \cdot C(ABP_1P_2) = \prod \frac{\overline{A_5B}}{\overline{A_5C}} : \frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}}$$

Theo bổ đề 3.4, $A(BCP_1P_2) \cdot B(CAP_1P_2) \cdot C(ABP_1P_2) = 1$, mặt khác theo bổ đề 3.3 A_5, B_5, C_5 thẳng hàng, áp dụng định lý Menelaus ta có $\prod \frac{\overline{A_5B}}{\overline{A_5C}} = 1$. Vậy kết hợp đẳng thức trên ta suy ra $\prod \frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}} = 1$, vậy A_3, B_3, C_3 thẳng hàng theo định lý Menelaus. Ta có điều phải chứng minh.

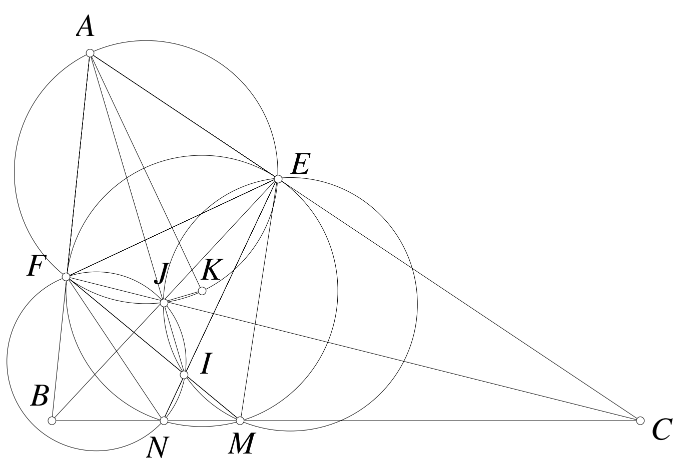
b) Gọi Q là giao điểm của A_1C_2 và A_2C_1. Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $C_1C_2ACA_2A_1$ ta có giao điểm của các cặp đường thẳng $(C_2A_1, C_1A_2), (C_1C, A_1A), (AA_2, CC_2)$ thẳng hàng, hay Q thuộc P_1P_2.



Hình 8.

Tiếp tục áp dụng định lý Pascal cho lục giác $C_1C_2A_4C_4A_2A_1$ ta có giao điểm của các cặp đường thẳng $(C_2A_1, C_1A_2), (C_2C_4, A_2A_4), (A_4A_1, C_4C_1)$ thẳng hàng hay giao điểm T của A_4A_2 và C_4C_2 nằm trên P_1P_2. Tương tự ta có giao điểm T' của A_4A_2 và B_4B_2 nằm trên P_1P_2. Do đó $T' \equiv T$. Như vậy A_4A_2, B_4B_2, C_4C_2 đồng quy tại một điểm T nằm trên P_1P_2. □

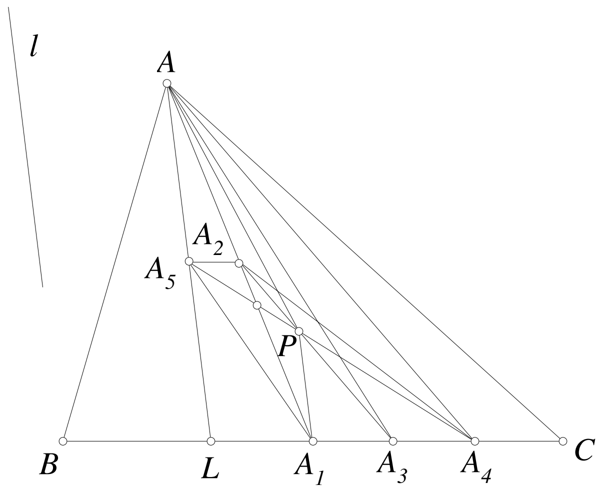
Bài 2.4. Cho tam giác ABC. Đường tròn (K) bất kỳ tiếp xúc đoạn thẳng AC, AB lần lượt tại E, F. (K) cắt đoạn thẳng BC tại M, N sao cho N nằm giữa B và M. FM giao EN tại I. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác IFN và IEM cắt nhau tại J khác I. Chứng minh rằng IJ đi qua A và KJ vuông góc IJ.



Hình 9.

Lời giải. Gọi J' là hình chiếu của K lên AI dễ thấy A, F, J', K, E thuộc đường tròn đường kính AK. Từ đó ta có góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng nhau $\angle AJ'F = \angle AEF = \angle FNI$ suy ra tứ giác $FJ'IN$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $EJ'IM$ nội tiếp từ đó J' là điểm chung khác I của đường tròn ngoại tiếp tam giác IFN và IEM, vậy $J' \equiv J$ suy ra A, I, J thẳng hàng và $KJ \perp IJ$. Đó là điều phải chứng minh. □

Bài 2.5. Cho tam giác ABC, P là điểm bất kỳ. A_1 là hình chiếu song song của P theo phương l cố định lên BC. A_2 là trung điểm AA_1. A_2P cắt BC tại A_3. A_4 đối xứng A_1 qua A_3. Chứng minh rằng PA_4 luôn đi qua một điểm cố định.



Hình 10.

Lời giải. Gọi L là hình chiếu song song phương l của A lên BC. Gọi A_5 là trung điểm AL ta sẽ chứng minh rằng A_4, P, A_5 thẳng hàng thật vậy, từ liên hệ tỷ số đơn và tỷ số kép dễ thấy

$A_1(A_4A_2A_5P) = (LAA_5) = -1$ (Do $PA_1 \parallel AL$ và A_5 là trung điểm AL)

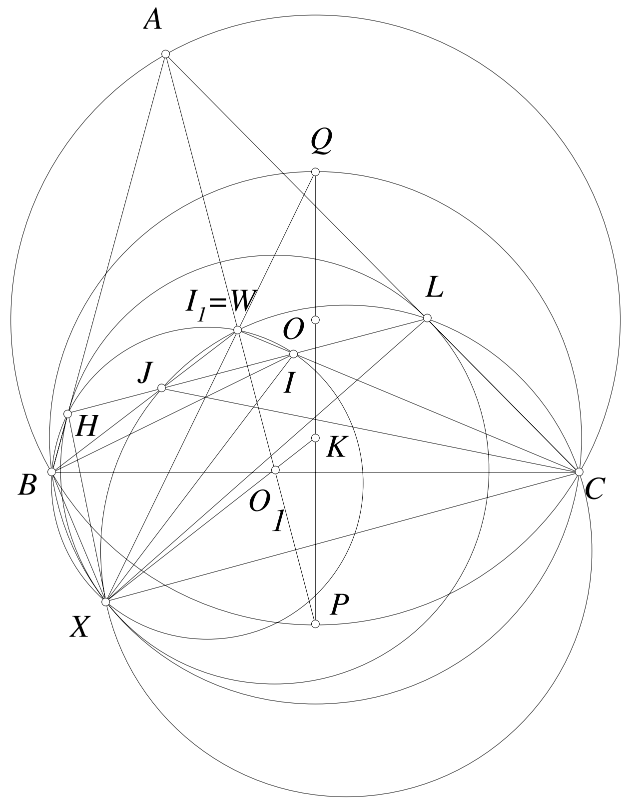
$A_2(A_4A_1A_3A_5) = (A_4A_1A_3) = -1$ (Do $A_2A_5 \parallel A_1A_4$ và A_3 là trung điểm A_1A_4)

Từ đó $A_1(A_4A_2A_5P) = A_2(A_4A_1A_3A_5)$ nên A_4, A_5, P thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) bất kỳ qua B, C. Đường tròn (O_1) tiếp xúc AB, AC và tiếp xúc trong với (K). Đường tròn (O_2) tiếp xúc DB, DC và tiếp xúc trong với (K). Chứng minh rằng một trong hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) song song với AD.

Lời giải. Ta có một số nhận xét sau

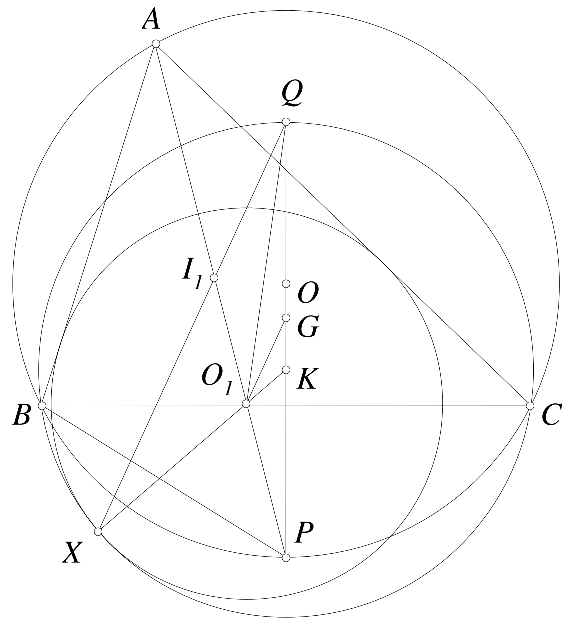
Nhận xét 1. $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc (K) tại X, Y. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và DBC. Thì XI_1, YI_2 cắt nhau tại điểm Q thuộc (K) là trung điểm cung BC không chứa X, Y của (K).



Hình 11.

Thật vậy, ta chỉ cần chứng minh XI_1 là phân giác $\angle BXC$. Gọi (O_1) tiếp xúc AB, AC tại H, L. Gọi W là giao điểm khác X của đường tròn (XBH) và (XCL). CW giao (BHX) tại I khác W, BW giao (CLX) tại J khác W. Ta có $\angle XLJ = \angle XWJ = \angle XWB = \angle BHX = \angle XLH$ từ đó J thuộc HL. Tương tự I thuộc HL. Từ đó dễ chứng minh tứ giác $IJBC$ nội tiếp bằng cộng góc. Vậy $\angle CBW = \angle WIH = \angle HBW$ hay BW là phân giác $\angle ABC$. Tương tự CW là phân giác $\angle ACB$, vậy $W \equiv I_1$. Từ đó $\angle BXI_1 = \angle BII_1 = 180^\circ - \angle BIC = 180^\circ - \angle BJC = \angle CJI_1 = \angle CXI_1$. Vậy ta hoàn thành chứng minh.

Nhận xét 2. Gọi P là trung điểm cung BC không chứa A, D của (O) thì $\dfrac{I_1O_1}{R_1} = \dfrac{PB}{PQ} = \dfrac{PC}{PQ} = \dfrac{I_2O_2}{R_2}$, với R_1, R_2 là bán kính của $(O_1), (O_2)$.

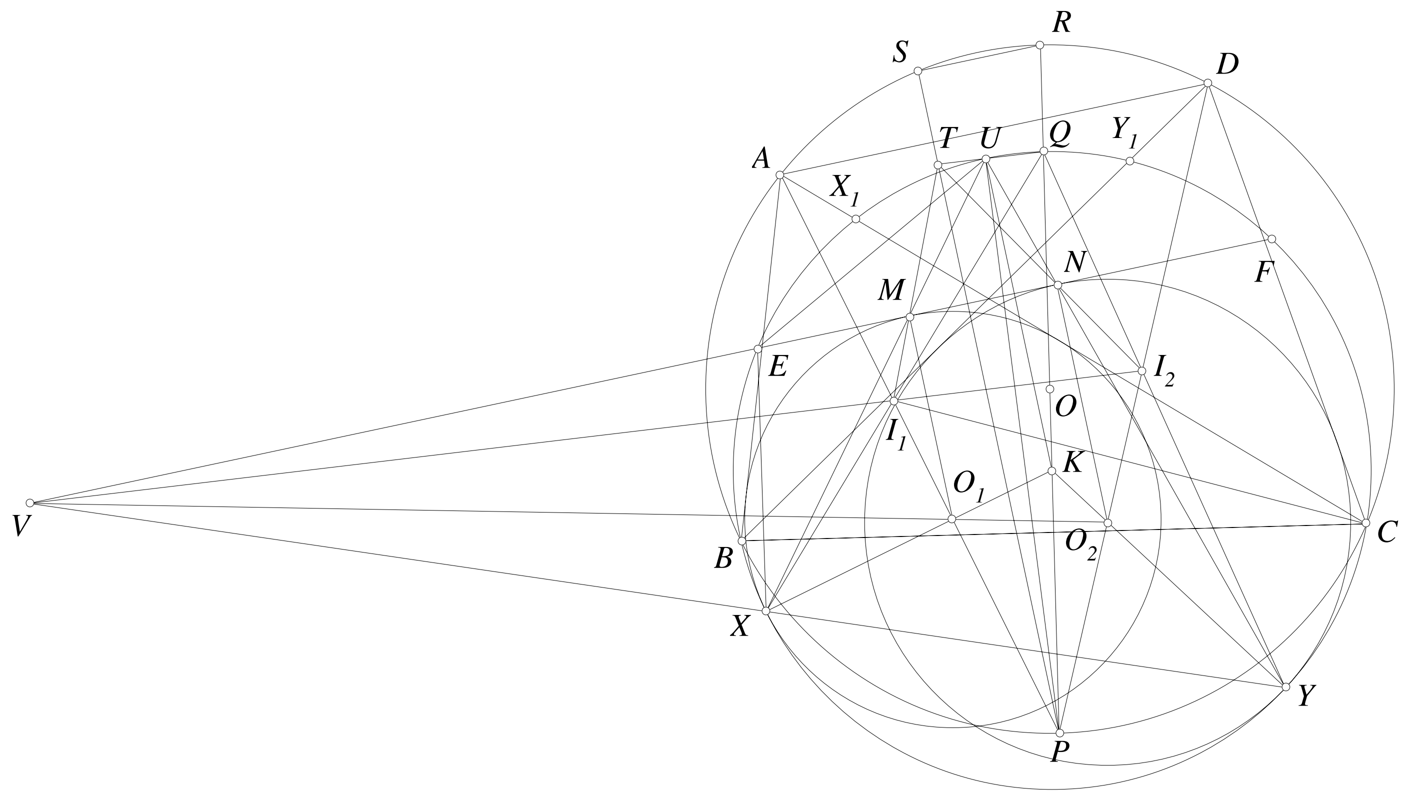


Hình 12.

Thật vậy, từ nhận xét 1 thì O, K, Q thẳng hàng. Lấy G thuộc KQ sao cho $KG = KO_1$ từ đó dễ thấy $O_1G \parallel XQ$ vậy ta có

$$\frac{PB}{PQ} = \frac{PI_1}{PQ} = \frac{PO_1}{PG} = \frac{PI_1 - PO_1}{PQ - PG} = \frac{I_1O_1}{GQ} = \frac{I_1O_1}{KQ - KG} = \frac{I_1O_1}{KX - KO_1} = \frac{I_1O_1}{R_1}.$$

Nhận xét 3. Gọi AC, BD giao (K) tại điểm thứ hai X_1, Y_1. U là trung điểm cung X_1Y_1 không chứa B, C của (K) thì $I_1I_2 \parallel UQ$.



Hình 13.

Thật vậy, ta chú ý $\angle BI_1C = 90^\circ + \dfrac{\angle BAC}{2} = 90^\circ + \dfrac{\angle BDC}{2} = \angle BI_2C$ do đó tứ giác BI_1I_2C nội tiếp. Ta có $(I_1I_2, BC) = (I_1I_2, I_2B) + (I_2B, BC) = (CI_1, CB) + (BI_2, BC) (\bmod \pi)$ (1).

Ta lại có $(UQ, BC) = (UQ, QB) + (QB, BC) = (CU, CB) + (BQ, BC) = (CU, CX_1) + (CX_1, CI_1) + (CI_1, CB) + (BQ, BY_1) + (BY_1, BI_2) + (BI_2, BC) = (BY_1, BU) + 2(CI_1, CB) + (BQ, BY_1) + 2(BI_2, BC) = (BQ, BU) + 2(CI_1, CB) + 2(BI_2, BC) (\bmod \pi)$ (2)

Mặt khác $(CX_1, CB) + (BY_1, BC) = (CX_1, CU) + (CU, CQ) + (CQ, CB) + (BY_1, BU) + (BU, BQ) + (BQ, BC) = (CU, CQ) + (BU, BQ) = 2(BU, BQ) (\bmod \pi)$.

Từ đó suy ra $(CI_1, CB) + (BI_2, BC) = \dfrac{1}{2}[(CX_1, CB) + (BY_1, BC)] = (BU, BQ) (\mod \pi)$ (3).

Từ (2), (3) ta suy ra $(UQ, BC) = (CI_1, CB) + (BI_2, BC) (\bmod \pi)$ (4).

Từ (1), (4) ta suy ra $I_1I_2 \parallel UQ$.

Trở lại bài toán, qua P vẽ đường thẳng song song KU giao QU tại T. Ta định nghĩa lại các điểm M, N, gọi đoạn I_1T cắt (O_1) tại M, gọi đoạn I_2T cắt (O_2) tại N. Theo nhận xét 2 thì $\dfrac{O_1M}{PT} = \dfrac{R_1}{PQ} = \dfrac{I_1O_1}{PI_1}$ do đó $O_1M \parallel PT \parallel KU$ suy ra X, M, U thẳng hàng, tương tự Y, N, U thẳng hàng.

Gọi V là tâm vị tự ngoài của $(O_1), (O_2)$ thì V thuộc O_1O_2, chú ý $O_1M \parallel O_2N$ nên V thuộc MN. X, Y là tâm vị tự trong của (K) và (O_1), của (K) và (O_2) nên XY đi qua V. Chú ý tam giác I_1O_1M và I_2O_2M có I_1M giao I_2N tại T, I_1O_1 giao I_2O_2 tại P và $PT \parallel MO_1 \parallel NO_2$ do đó theo định lý Desargues I_1I_2 đi qua V là giao của MN và O_1O_2.

Ta dễ chứng minh $PT = PQ, PI_1 = PI_2$ kết hợp $QT \parallel I_1I_2$ của nhận xét 3 suy ra tứ giác

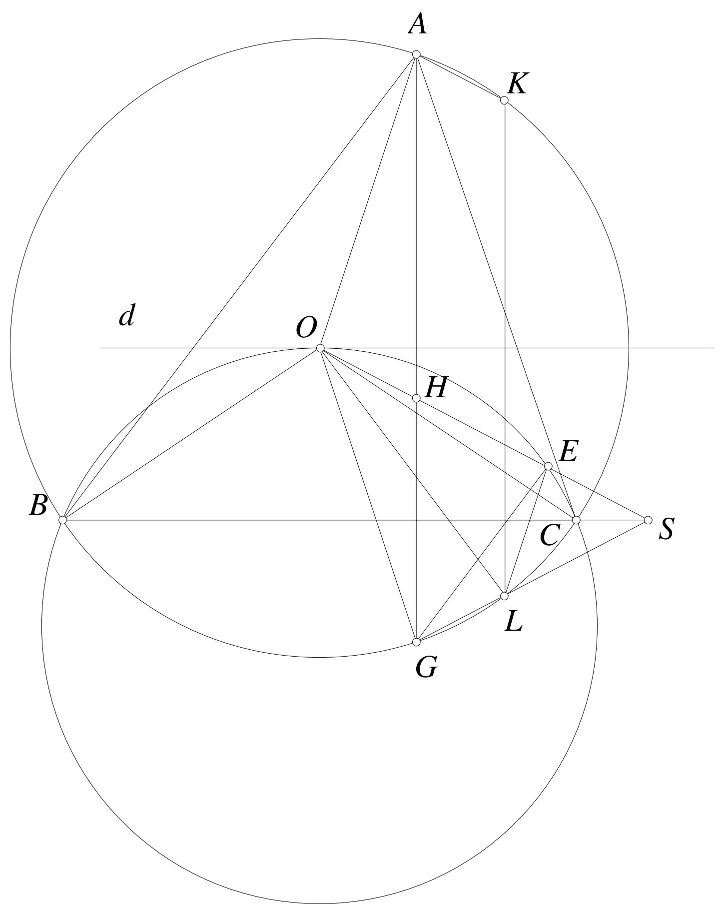
TI_1I_2Q là hình thang cân do đó $(I_1M, I_1V) = (I_1T, I_1I_2) = (QT, QI_2) = (QU, QY) = (XU, XY) = (XM, XV)(\bmod \pi)$ từ đó tứ giác I_1MVX nội tiếp, tương tự tứ giác I_2NVY nội tiếp. Vậy ta có $(MN, MX) = (MV, MX) = (I_1V, I_1X) = (I_1I_2, I_1Q) = (I_2T, I_2I_1) = (I_2N, I_2V) = (YN, YV) = (YN, YX)(\bmod \pi)$, từ đó tứ giác $XMNY$ nội tiếp.

Ta gọi MN giao (K) tại E, F. Ta thấy $\angle EMU = \angle XMN = 180^\circ - \angle XYN = \angle XEU$ suy ra $\triangle EMU \sim \triangle XEU$ vậy $UE^2 = UM.UX$. Tương tự $UF^2 = UN.UY$ mà XMNY nội tiếp nên $UM.UX = UN.UY$ do đó $UE = UF$, vậy tam giác UEF cân suy ra $KU \perp EF$. Từ trên đã có $O_1M \parallel O_2N \parallel KU$ suy ra O_1M, O_2N vuông góc MN hay MN là tiếp tuyến chung của $(O_1), (O_2)$.

Gọi PT, PQ cắt (O) tại S, R. Từ trên đã có $PT = PQ, PI_1 = PI_2$ và TI_1I_2Q là hình thang cân nên $\angle APS = \angle DPR$ hay $SR \parallel AD$. Chú ý PR là đường kính của (O) nên $PS \perp SR$ vậy $PS \perp AD$. Cũng từ chứng minh trên ta đã có $PS \equiv PT \parallel KU \perp MN$ vậy từ đó $MN \parallel AD$ do cùng vuông góc PS. Ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 2.7. Cho tam giác ABC không cân, (O), H theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác. Đường thẳng qua A và song song với OH lại cắt (O) tại K. Đường thẳng qua K và song song với AH lại cắt (O) tại L. Đường thẳng qua L song song với OA cắt OH tại E. Chứng minh rằng các điểm B, C, O, E cùng thuộc một đường tròn.



Hình 14.

Lời giải. Gọi AH giao (O) tại G khác A. Do $KL \parallel AH$ nên $AKLG$ là hình thang cân. Ta lại chú ý $AKHF$ là hình bình hành nên $FHGL$ là hình thang cân. Do tính chất trực tâm H đối xứng G qua

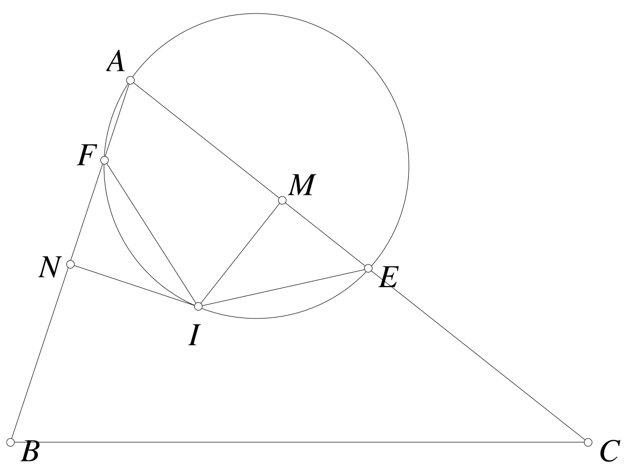
BC do đó BC là trục đối xứng của $FHGL$ vậy FH, GL, BC đồng quy tại S. Gọi d là trục đối xứng của $AKHF$ ta có các biến đổi góc sau

$$\begin{aligned}(LE, LG) &\equiv (LE, LK) + (LK, LG)\\ &\equiv (AO, AG) + (KA, KL)(\text{Do } LK \parallel AL \text{ và phép đối xứng trục } d)\\ &\equiv (GA, GO) + (OE, GA)(\text{Do phép đối xứng trục } d \text{ và } KA \parallel OE, KL \parallel GA)\\ &\equiv (OE, OG)(\operatorname{mod} \pi)\end{aligned}$$

Từ đó bốn điểm O, L, E, G cùng thuộc một đường tròn. Vậy $\overline{SE}.\overline{SO} = \overline{SG}.\overline{SL} = \overline{SB}.\overline{SC}$ hay các điểm B, C, O, E cùng thuộc một đường tròn. Đó là điều phải chứng minh. □

Bài 2.8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc trung trực BC. I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB, MAC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2 luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di chuyển.

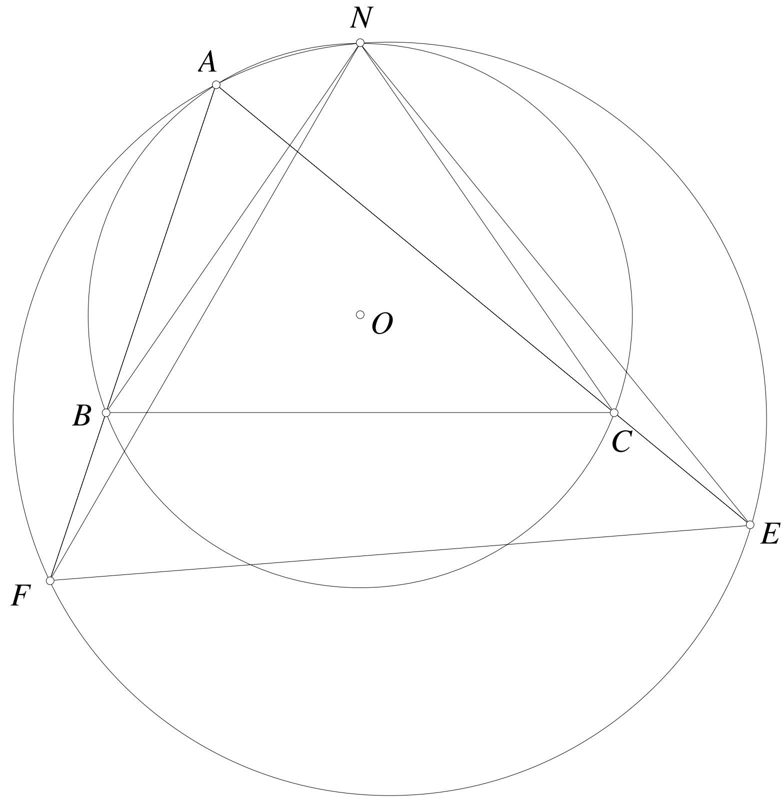
Bổ đề 2.8.1. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn bất kỳ qua A, I cắt CA, AB tại E, F khác A thì $AE + AF = CA + AB - BC$.



Hình 15.

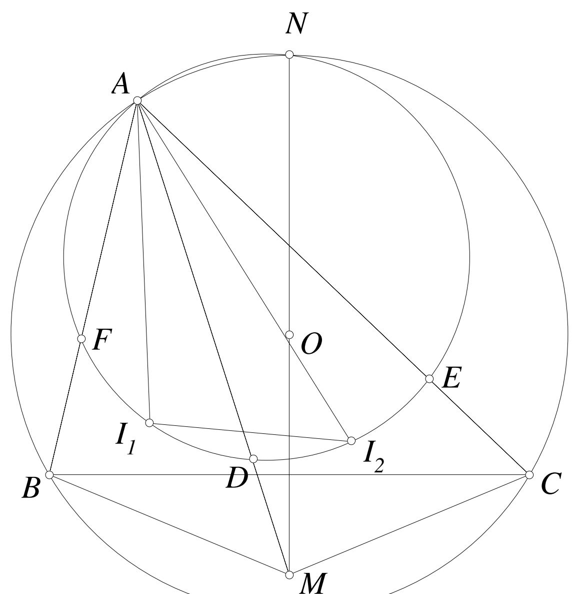
Lời giải. Gọi M, N là hình chiếu của I lên CA, AB. Dễ thấy $\triangle INF = \triangle IME(c.g.c)$ từ đó suy ra $AE = AF = AM + AN = CA + AB - BC$. □

Bổ đề 2.8.2. Cho tam giác ABC. E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $CE = BF$ và E, F cùng phía với BC thì đường tròn ngoại tiếp (AEF) đi qua trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A.



Hình 16.

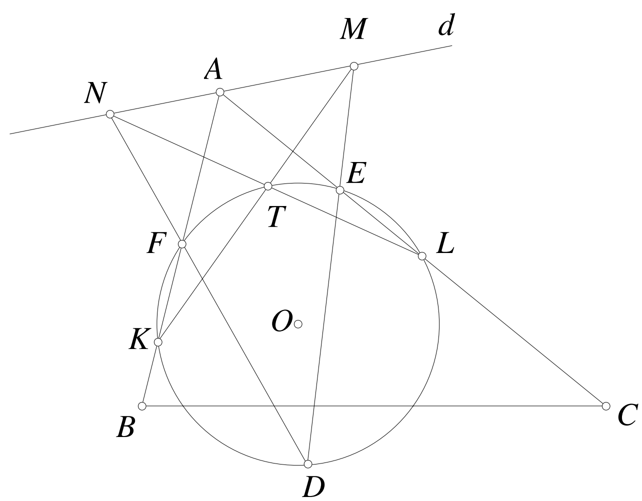
Lời giải. Gọi N là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. Giả sử E, F khác phía A với BC. Trường hợp còn lại chứng minh hoàn toàn tương tự. Ta dễ thấy $\angle ABN = \angle ACN$ suy ra $\angle FBN = \angle ACN$. Kết hợp $NB = BC, FB = CE$ suy ra $\triangle FBN = \triangle ECN$. Từ đó $\angle BFN = \angle CEN$ hay A, F, E, N cùng thuộc một đường tròn. $\square$



Hình 17.

Lời giải. Gọi đường tròn ngoại tiếp (AI_1I_2) cắt AM, CA, AB lần lượt tại D, E, F khác A. Theo bổ đề 1 dễ thấy $AD + AF = AB + AM - MB, AD + AE = AC + AM - MC$. Trừ hai đẳng thức chú ý $MB = MC$ ta được $AF - AE = AB - AC$ hay $AB - AF = AC - AE$. Do đó trong các trường hợp E, F cùng phía hoặc khác phía BC ta cũng đều có $BF = CE$. Vậy theo bổ đề 2 gọi N là trung điểm cung BC chứa A thì $(AI_1I_2) \equiv (AEF)$ đi qua N. Vậy tâm ngoại tiếp AI_1I_2 thuộc trung trực AN cố định. Đó là điều phải chứng minh. □

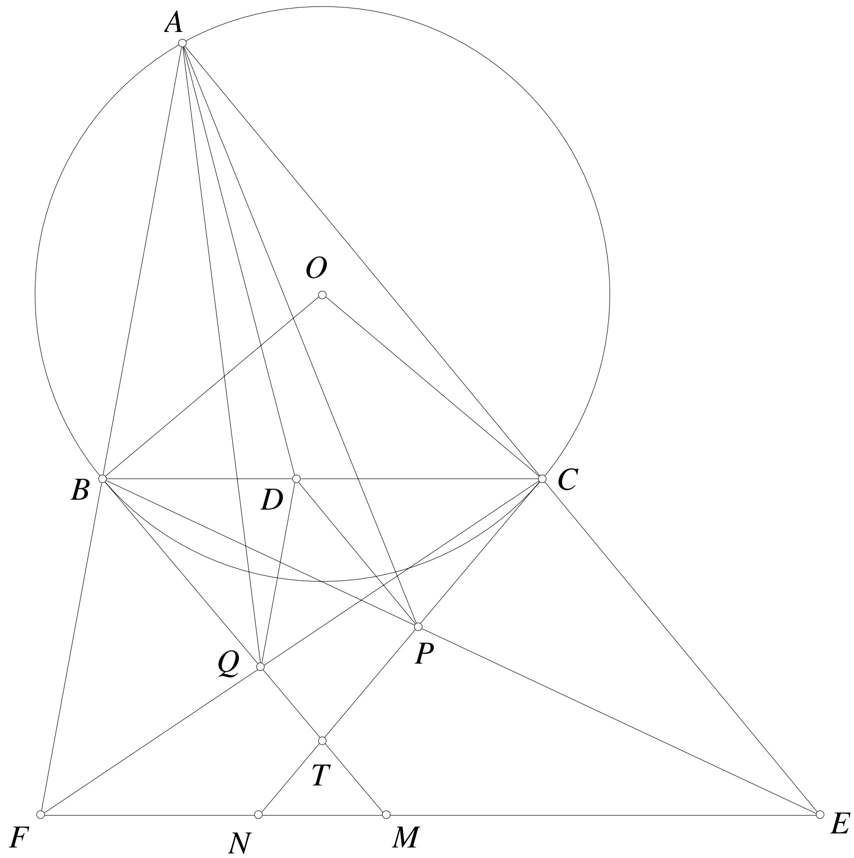
Bài 2.9. Cho tam giác ABC đường tròn (O) bất kỳ. (O) cắt CA tại L, E và cắt AB tại K, F. D là một điểm thuộc (O). d là đường thẳng bất kỳ đi qua A. DE, DF lần lượt cắt d tại M, N. Chứng minh rằng MK giao NL tại điểm thuộc (O).



Hình 18.

Lời giải. Gọi NL giao (O) tại T khác L. KT giao DE tại M'. Áp dụng định lý Pascal cho $\begin{pmatrix} KLD \\ EFT \end{pmatrix}$ ta suy ra các giao điểm N, A, M' thẳng hàng. Vậy M' thuộc $NA \equiv d$ suy ra $M' \equiv M$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại T. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia BT, CT sao cho $BM = BC = CN$. Đường thẳng MN cắt CA, AB theo thứ tự tại E, F; BE giao CT tại P, CF giao BT tại Q. Chứng minh rằng $AP = AQ$.



Hình 19.

Lời giải. Gọi AD là phân giác của tam giác ABC. Do B, C đối xứng nhau qua OT và $BM = CN$ nên M, N đối xứng qua OT, suy ra $BC \parallel MN$.

Ta có $\angle FBM = 180^\circ - \angle ABC - \angle CBM = 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB = \angle ACB$, chú ý góc đồng vị $\angle ABC = \angle BFM$ do đó $\triangle ABC \sim \triangle MFB$. Từ đó ta chú ý $FM \parallel BC$ nên theo định lý Thales $\dfrac{QC}{QF} = \dfrac{BC}{FM} = \dfrac{BM}{FM} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DC}{DB}$ suy ra $QD \parallel BF$. Tương tự $PD \parallel CE$.

Từ đó theo định lý Thales và tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{DQ}{DP} = \dfrac{DQ}{BF}.\dfrac{BF}{CE}.\dfrac{CE}{DP} = \dfrac{CD}{BC}.\dfrac{AB}{AC}.\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{CD}{BD}.\dfrac{AB}{AC} = 1$. Vậy $DP = DQ \quad (1)$.

Ta lại có $\angle ADQ = \angle ADB + \angle BDQ = \dfrac{\angle BAC}{2} + \angle ACB + \angle ABC$. Vậy tương tự $\angle ADP = \dfrac{\angle BAC}{2} + \angle ACB + \angle ABC$ do đó $\angle ADQ = \angle ADP \quad (2)$

Từ $(1), (2)$ suy ra $\triangle ADQ = \triangle ADP$ $(c.g.c)$ suy ra $AP = AQ$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.11. Cho tam giác ABC. Gọi (O_a) là đường tròn bất kỳ đi qua B, C; hai đường tròn $(O_b), (O_c)$ xác định tương tự. Hai đường tròn $(O_b), (O_c)$ cắt nhau tại A_1, khác A. Các điểm B_1, C_1 xác định tương tự. Gọi Q là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tam giác ABC. QB, QC lần lượt cắt (O_c), (O_b) tại A_2, A_3 khác B, C. Tương tự ta có B_2, B_3, C_2, C_3. Gọi (K_a), (K_b), (K_c) là các đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, và $C_1C_2C_3$. Chứng minh rằng

a) ba đường tròn $(K_a), (K_b), (K_c)$ có cùng một điểm chung.

b) hai tam giác $K_aK_bK_c$, ABC đồng dạng.

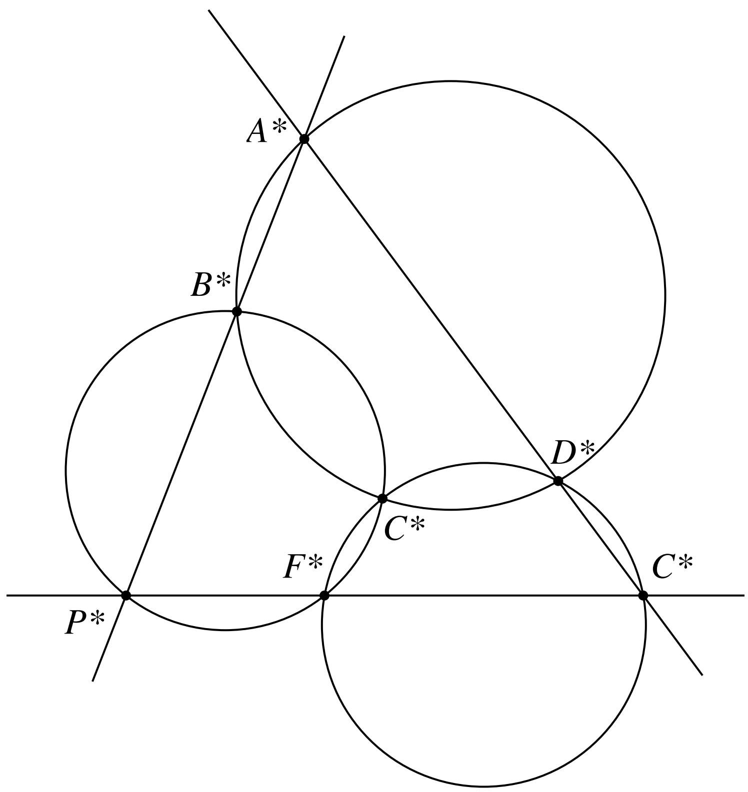
Ta đưa ra bổ đề sau

Bổ đề 2.11.1. Cho bốn đường tròn C_1, C_2, C_3, C_4 cắt nhau tại bốn điểm A, B, C, D; C_1 cắt C_4 tại A; C_2 cắt C_1 tại B, C_2 cắt C_3 tại C, C_4 cắt C_3 tại D. E, P, F, Q là các giao điểm khác A, B, C, D của C_1 và C_4; C_2 và C_1, C_2 và C_3, C_4 và C_3.

a) Chứng minh E, P, F, Q đồng viên (hoặc thẳng hàng) khi và chỉ khi A, B, C, D đồng viên (hoặc thẳng hàng)

b) Với giả thiết A, B, C, D thẳng hàng, đồng thời (ω) là một đường tròn bất kì đi qua E, F và cắt C_1, C_2, C_3, C_4 lần lượt tại I, J, H, G. Khi đó GJ, IH và AB đồng quy.

Lời giải. a) Nếu E, P, F, Q đồng viên.



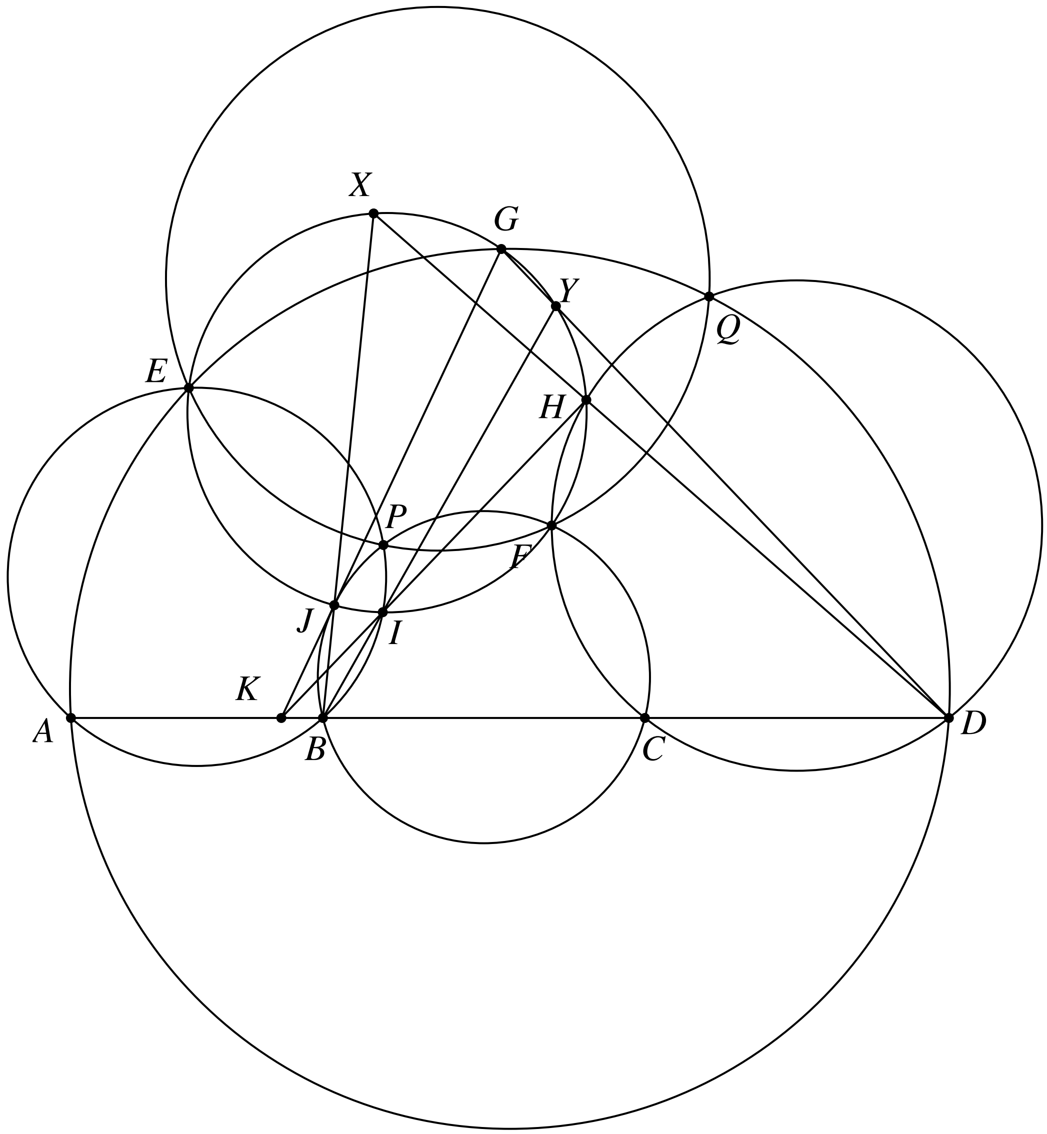
Hình 20.

Xép phép nghịch đảo tâm E phương tích bất kì, như vậy các đường tròn C_1, C_4, C_5 sẽ biến thành các đường thẳng C_1^*, C_4^*, C_5^*. Còn các đường tròn C_2, C_3 biến thành các đường tròn C_2^* và C_3^*, F thành $F*$ thẳng hàng với P^* và Q^*, D thành D^* thẳng hàng với A^* và Q^*, B thành B^* thẳng hàng với A^* và P^*. Như vậy C_2^* và C_3^* chính là các đường tròn $(P^*B^*F^*)$ và $(F^*D^*Q^*)$. Từ đó theo định lý Miquel thì A^*, B^*, C^*, D^* đồng viên như vậy A, B, C, D thẳng hàng hoặc đồng viên.

Nếu E, P, F, Q thẳng hàng chứng minh tương tự.

b) Theo định lý Miquel thì với ba đường tròn ω, C_2, C_3 đồng quy tại F ta có được HD cắt JB tại một điểm X thuộc ω, tương tự thì BI cắt DG tại một điểm Y thuộc ω. Từ đó áp dụng định lý

Pascal cho 6 điểm X, H, I, Y, G, J có $D = XH \cap DG$; $K = IH \cap JG$; $B = XJ \cap YI$ như vậy K, B, D thẳng hàng. Từ đó suy ra GJ, HI và AD đồng quy.

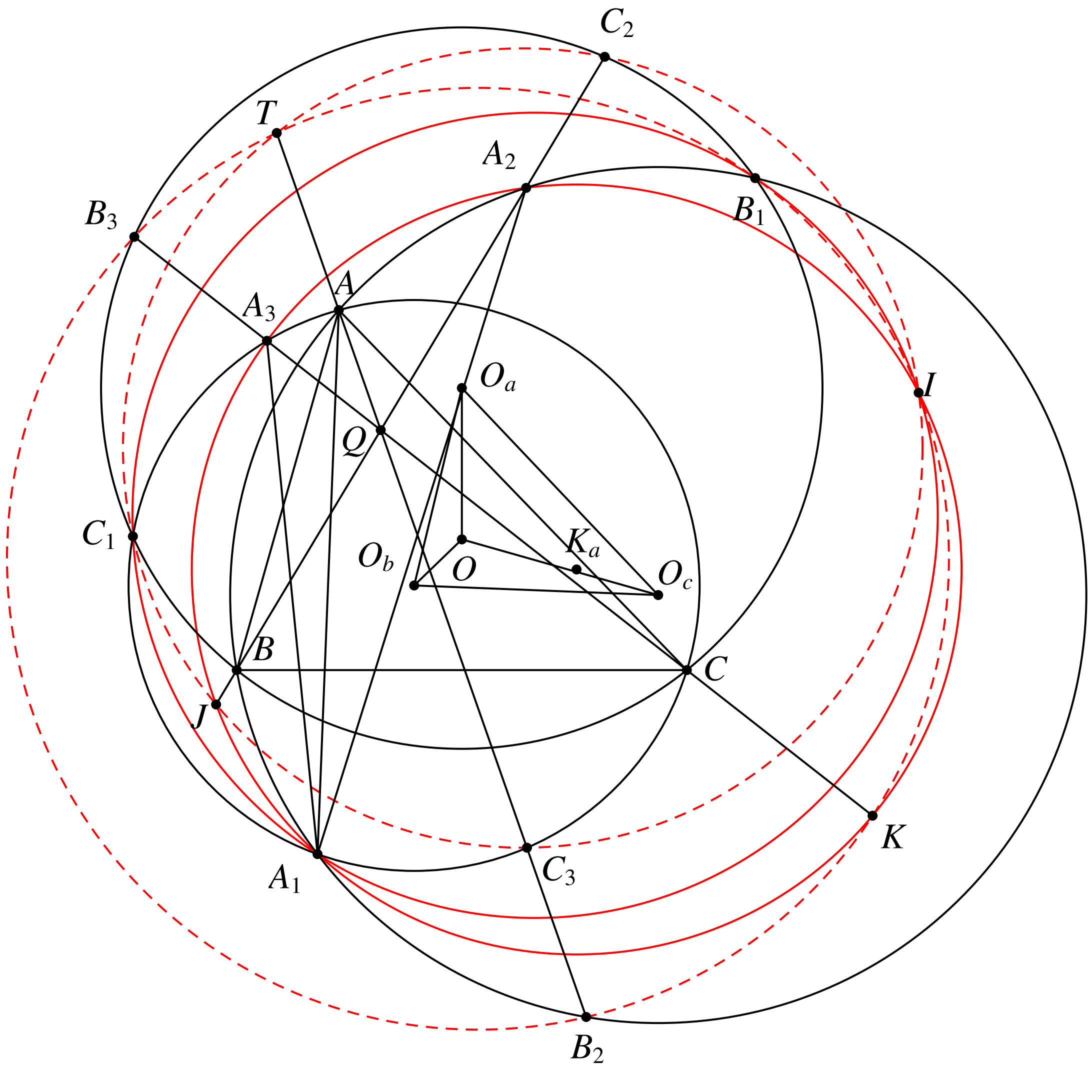


Hình 21.

Ta hoàn tất chứng minh bổ đề. □

Lời giải. Gọi T là giao điểm của đường tròn $(C_1C_2C_3)$ với AQ. B_3' là giao điểm của (O_a) với (TB_1B_2).

Chú ý rằng bốn đường tròn (O_c), (O_b), $(C_1C_2C_3)$, (TB_1B_2) cắt nhau tại 4 điểm A, T, C_3, B_2 thẳng hàng nên theo câu b của bổ đề với đường tròn ω chính là đường tròn (O_a) ta có CB_3', BC_2, AB_2 đồng quy. Từ đó suy ra $B_3' \equiv B_3$. Suy ra các đường tròn $(B_1B_2B_3)$ và $(C_1C_2C_3)$ cắt nhau tại một điểm T thuộc AQ.



Hình 22.

Áp dụng câu a của bổ đề suy ra các giao điểm còn lại của bốn đường tròn (O_c), (O_b), $(B_1B_2B_3)$, $(C_1C_2C_3)$ đồng viên. Nói cách khác $(A_1B_1C_1)$ đi qua I, trong đó I là giao điểm khác T của $(B_1B_2B_3)$ và $(C_1C_2C_3)$.

Tương tự như vậy $(A_1B_1C_1)$ đi qua I' trong đó I' là một giao điểm của $(B_1B_2B_3)$ và $(A_1A_2A_3)$

Từ đó suy ra $I \equiv I'$ (vì I và I' khác B_1), từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Gọi J, K là giao điểm của $(A_1A_2A_3)$ với QB, QC.

Ta có

$(AB, AC) \equiv (AB, AA_1) + (AA_1, AC) \equiv (A_2B, A_2A_1) + (A_3A_1, A_3C) \equiv (IJ, IA_1) + (IA_1, IK)$
$\equiv (IJ, IK) \equiv (K_aK_b, K_aK_c) (\bmod \pi)$

Tương tự ta cũng có $(BC, BA) \equiv (K_bK_c, K_bK_a) (\bmod \pi)$

Từ đó suy ra $\Delta ABC \sim \Delta K_aK_bK_c$. Ta có điều phải chứng minh □

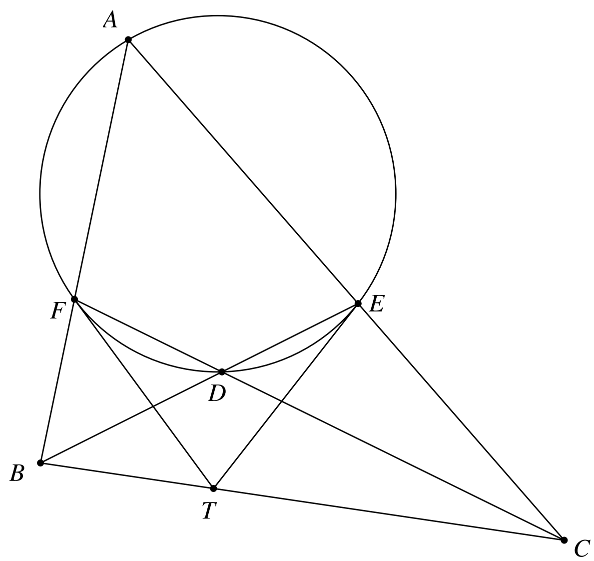
Bài 2.12. Giả sử E, F là hai điểm trên cạnh CA, AB của tam giác ABC. Gọi (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng

a) T nằm trên BC nếu và chỉ nếu BE cắt CF tại một điểm thuộc đường tròn (K);

b) EF, PQ, BC đồng quy biết rằng BE cắt FT tại M, CF cắt ET tại N, AM và AN cắt đường tròn (K) tại P, Q khác A.

Lời giải. a)Gọi D là giao điểm của CF và BE

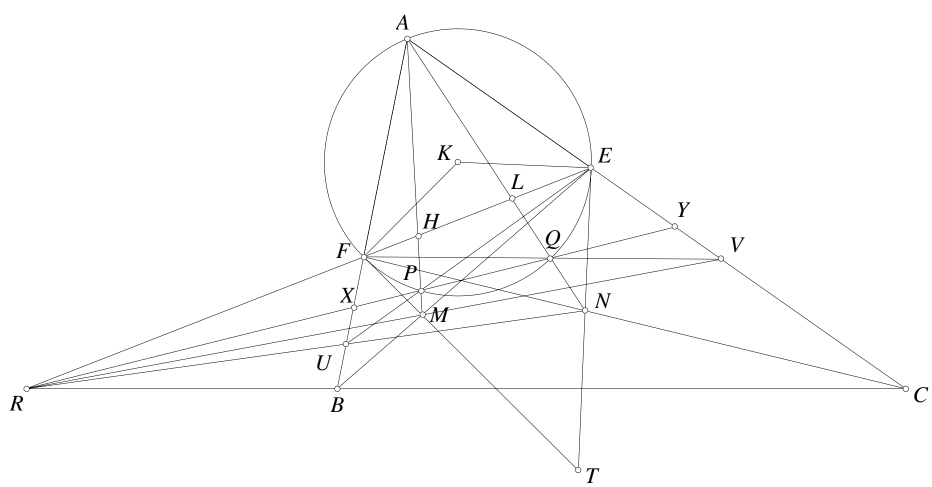
Nếu D thuộc (K). Khi đó áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm F, F, D, E, E, A thì thu được T, B, C thẳng hàng.



Hình 23.

Nếu T, B, C thẳng hàng thì áp dụng định lý đảo định lý Pascal với chú ý là $T = EE \cap FF$, $FD \cap AE = C$, $DE \cap AF = B$. Như thế thì D, E, A, F đồng viên. Ta có điều phải chứng minh.

b) Cách 1 chúng tôi xin giới thiệu lời giải của bạn Trần Đăng Phúc



Hình 24.

Gọi PQ giao AB, AC lần lượt tại X, Y, EP giao AB tại U, FQ giao AC tại V, AM, AN cắt EF tại H, L.

Áp dụng định lý Pascal cho bộ sáu điểm P, Q, A, F, E, E suy ra R, N, U thẳng hàng. Tương tự có R, M, V thẳng hàng.

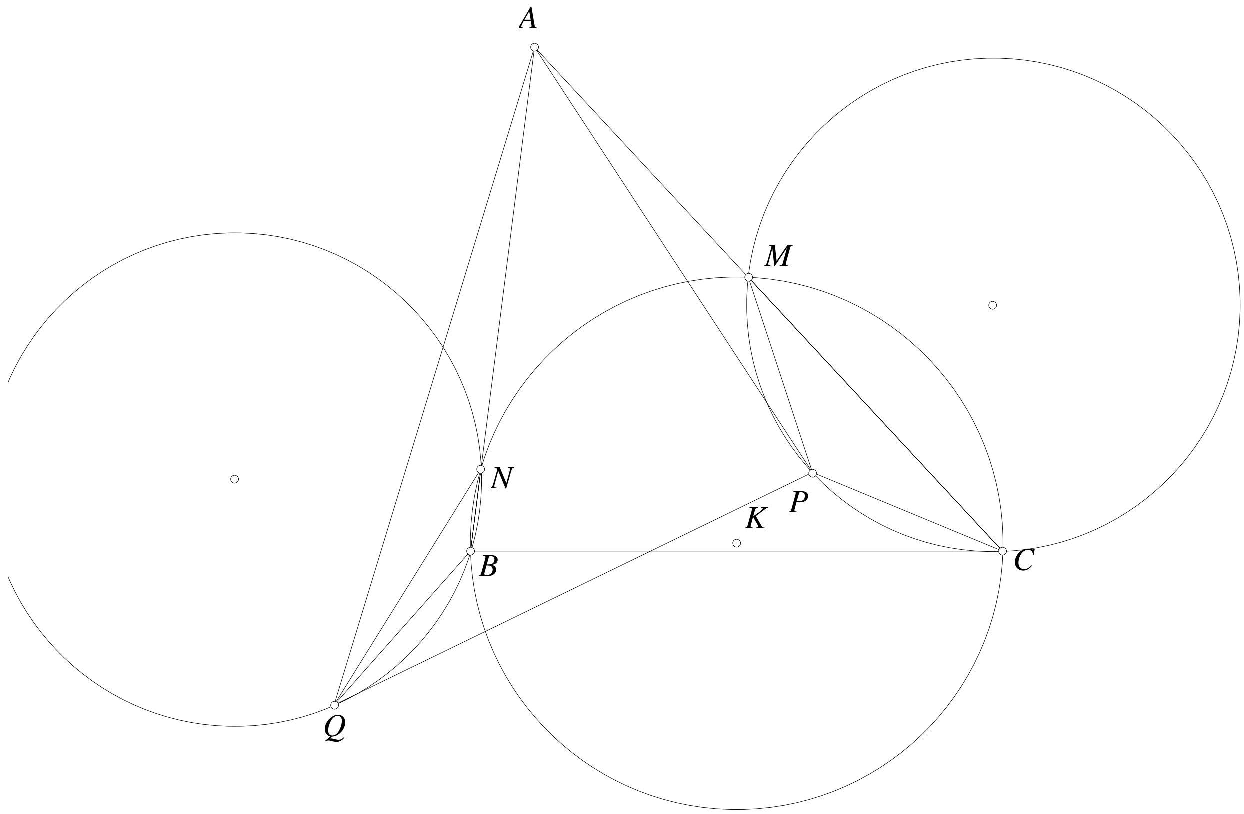
Ta lại có

$(AFUB) = E(AFUB) = (AHPM) = R(AHPM) = (AEYV)$ suy ra $\dfrac{(AFU)}{(AFB)} = \dfrac{(AEY)}{(AEV)}$ (1)

$(AEVC) = F(AEVC) = (ALQN) = R(ALQN) = (AFXU)$ suy ra $\dfrac{(AEV)}{(AEC)} = \dfrac{(AFX)}{(AFU)}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{(AFX)}{(AFB)} = \dfrac{(AEY)}{(AEC)} \iff (AFXB) = (AEYC)$ hay EF, PQ, BC đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.13. Cho tam giác ABC và đường tròn (K) bất kỳ đi qua B, C cắt CA, AB tại M, N. Dựng tam giác APQ bằng và ngược hướng tam giác ABC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác CPM và BQN bằng nhau.



Hình 25.

Lời giải. Từ tam giác $\triangle APQ = \triangle ABC$ và B, C, M, N thuộc một đường tròn ta có $\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AN}{AM}$, kết hợp $\angle QAN = \angle PAM$ suy ra tam giác $\triangle AQN \sim \triangle APM$ suy ra $\angle ANQ = \angle AMP$. Chú ý $\triangle APQ = \triangle ABC$ ngược hướng dễ suy ra $QB = PC$. Từ đây áp dụng định lý hàm số sin suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác CPM và BQN bằng nhau. Đó là điều phải chứng minh. □

Tổng quát hai đề toán hay

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết tổng quát hai bài toán hay được nhiều bạn đọc quan tâm trên toán tuổi thơ 2.

Trên TTT2 số 92 năm 2010 mục giải toán qua thư có bài toán hay như sau của thầy Nguyễn Minh Hà

Bài 1. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Hình vuông $MNPQ$ có M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC. Giả sử BN cắt MQ tại E. CM cắt NP tại F. Chứng minh rằng $AE = AF$ và $\angle EAB = \angle FAC$.*

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 94 năm 2010. Phần chứng minh hai góc bằng nhau được mở rộng cho hình chữ nhật của cùng tác giả và có trên TTT2 số 127 năm 2013 trong mục thách đấu như sau

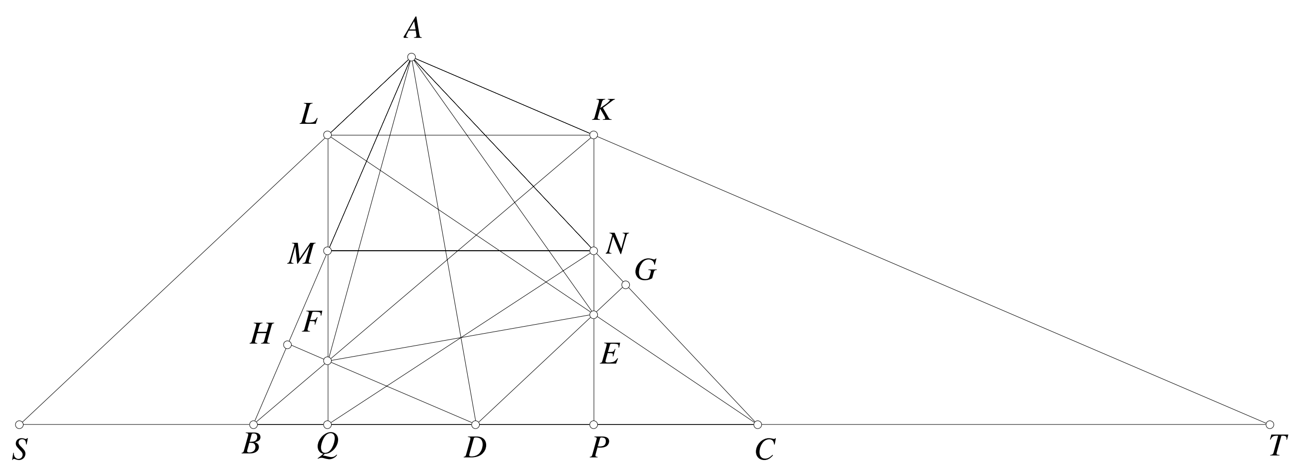
Bài 2. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Hình chữ nhật $MNPQ$ thay đổi thõa mãn M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC và P, Q thuộc cạnh BC. Gọi BN giao MQ tại K, CM giao NP tại L, BN giao CM tại X, QN giao PM tại Y.*

a) Chứng minh rằng $\angle KAB = \angle LAC$.

b) Chứng minh rằng XY luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 129 năm 2013. Bài báo này sẽ trình bày một số mở rộng cho hai bài toán trên. Một cách tự nhiên chúng ta suy nghĩ rằng liệu bài toán 1 có thể có cách phát biểu nào cho tam giác bất kỳ. Ta đi đến mở rộng đầu tiên như sau

Bài 3. *Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho M thuộc đoạn AB, N thuộc đoạn AC, P, Q thuộc đoạn BC với P nằm giữa Q, C và $\angle MNQ = \frac{\angle BAC}{2}$. Đường thẳng qua A vuông góc AB cắt NP tại K. Đường thẳng qua A vuông góc AC cắt MQ tại L. CL cắt NP tại E. BK cắt MQ tại F. Chứng minh rằng $AE = AF$.*



Hình 1.

Chứng minh. Gọi AD là phân giác của tam giác ABC. Gọi AL, AK lần lượt cắt BC tại S, T. Ta sẽ chứng minh rằng DE song song SL, thật vậy

Theo định lý Theles ta có

$\dfrac{CE}{CL} = \dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{CP}{CN}.\dfrac{CN}{CQ}$

$= \dfrac{CA}{CS}.\dfrac{CD}{CA}$ (Chú ý do $\triangle CPN \sim \triangle CAS, \triangle CQN \sim \triangle CAD$)

$= \dfrac{CD}{CS}.$

Từ đó $DE \parallel SL \perp AC$ nên DE vuông góc CA tại G. Tương tự DF vuông góc AB tại H.

Dễ chứng minh A, M, N, K, L nội tiếp đường tròn đường kính NL, MK nên $MNKL$ là hình chữ nhật. Vậy cũng từ định lý Thales ta dễ thấy $\dfrac{DE}{DG} = \dfrac{SL}{SA} = \dfrac{TK}{TA} = \dfrac{DF}{DH}$. Chú ý rằng AD là phân giác góc A và G, H là hình chiếu của D lên CA, AB nên $DG = DH$. Từ đó dễ có $DE = DF \quad (1)$.

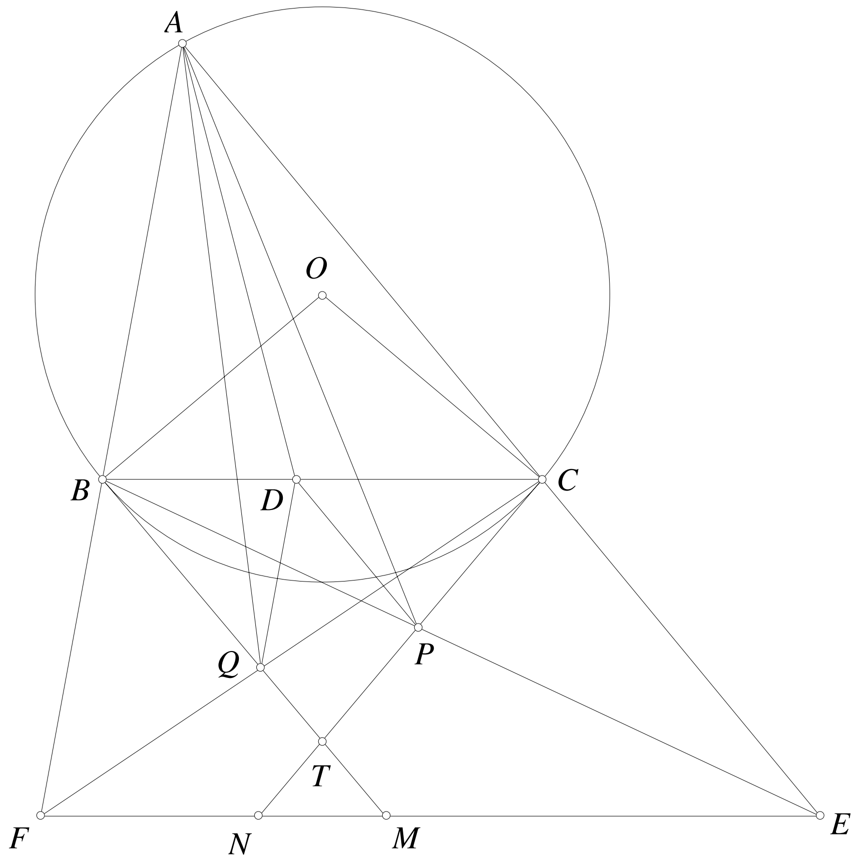
Cũng từ $DE \parallel SA, DF \parallel AT$ và AD là phân giác $\angle SAT$ dễ có $\angle GDA = \angle DAL = \angle DAK = \angle FDA \quad (2)$.

Từ (1),(2) dễ chỉ ta tam giác $\triangle DAE = \triangle DAF$ $(c.g.c)$ suy ra $AE = AF$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Trong chứng minh trên dễ chỉ ra được $\angle EAB = \angle FAC$.

Nếu trong bài toán 1, ta coi MQ, NP là các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông AMN thì ta sẽ có một hướng mở rộng khác như sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại T. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia BT, CT sao cho $BM = BC = CN$. Đường thẳng MN cắt CA, AB theo thứ tự tại E, F; BE giao CT tại P, CF giao BT tại Q. Chứng minh rằng $AP = AQ$.*



Hình 2.

Chứng minh. Gọi AD là phân giác của tam giác ABC. Do B, C đối xứng nhau qua OT và $BM = CN$ nên M, N đối xứng qua OT, suy ra $BC \parallel MN$.

Ta có $\angle FBM = 180^\circ - \angle ABC - \angle CBM = 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB = \angle ACB$, chú ý góc đồng vị $\angle ABC = \angle BFM$ do đó $\triangle ABC \sim \triangle MFB$. Từ đó ta chú ý $FM \parallel BC$ nên theo định lý Thales $\dfrac{QC}{QF} = \dfrac{BC}{FM} = \dfrac{BM}{FM} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DC}{DB}$ suy ra $QD \parallel BF$. Tương tự $PD \parallel CE$.

Từ đó theo định lý Thales và tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{DQ}{DP} = \dfrac{DQ}{BF}.\dfrac{BF}{CE}.\dfrac{CE}{DP} = \dfrac{CD}{BC}.\dfrac{AB}{AC}.\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{CD}{BD}.\dfrac{AB}{AC} = 1$. Vậy $DP = DQ \quad (1)$.

Ta lại có $\angle ADQ = \angle ADB + \angle BDQ = \dfrac{\angle BAC}{2} + \angle ACB + \angle ABC$. Vậy tương tự $\angle ADP = \dfrac{\angle BAC}{2} + \angle ACB + \angle ABC$ do đó $\angle ADQ = \angle ADP \quad (2)$

Từ $(1), (2)$ suy ra $\triangle ADQ = \triangle ADP$ $(c.g.c)$ suy ra $AP = AQ$. Ta có điều phải chứng minh. □

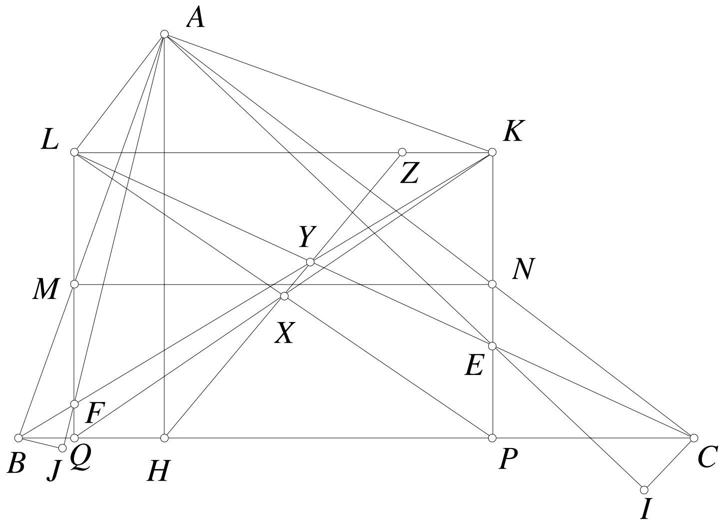
Nhận xét. Trong chứng minh trên ta cũng dễ thấy $\angle PAB = \angle QAC$.

Hướng mở rộng của bài toán 3 cũng có thể áp dụng tiếp được cho bài toán 2. Ta có bài toán như sau

Bài 5. *Cho tam giác ABC dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho M, N lần lượt thuộc AB, AC và P, Q thuộc BC. Đường thẳng qua A vuông góc AB cắt NP tại K. Đường thẳng qua A vuông góc AC cắt MQ tại L. CL cắt NP tại E. BK cắt MQ tại F.*

a) Chứng minh rằng $\angle EAC = \angle FAB$.

b) Gọi LP giao QK tại X, BK giao CL tại Y. Chứng minh rằng XY luôn đi qua một điểm cố định khi hình chữ nhật $MNPQ$ di chuyển.



Hình 3.

Chứng minh. a) Gọi AL, AK cắt BC lần lượt tại S, T. Gọi I, J là hình chiếu của C, B lên AE, AF. Ta xét tỷ số

$$\frac{BJ}{CI} = \frac{BJ}{AK}.\frac{AK}{AL}.\frac{AL}{CI}$$
$$= \frac{BF}{FK}.\frac{AK}{AL}.\frac{LE}{EC}$$
$$= \frac{BQ}{LK}.\frac{AT}{AS}.\frac{LK}{PC}$$
$$= \frac{BQ}{AB}.\frac{AB}{AC}.\frac{AC}{PC}.\frac{AT}{AS}$$
$$= \frac{MQ}{AT}.\frac{AB}{AC}.\frac{AS}{NP}.\frac{AT}{AS} \text{ (Chú ý } \triangle BMQ \sim \triangle BAT, \triangle CNP \sim \triangle CSA)$$
$$= \frac{AB}{AC}.$$

Từ đó dễ có $\triangle ABJ \sim \triangle ACI$ suy ra $\angle BAF = \angle CAE$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi XY giao LK, BC lần lượt tại Z, H. Vì tứ giác $LKPQ$ là hình chữ nhật, X là giao hai đường chéo. Sử dụng định lý Thales ta có các biến đổi tỷ số sau

$$\frac{HP}{HC} = \frac{LZ}{HC} = \frac{LY}{YC} = \frac{LK}{BC} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}.$$

Suy ra $AH \parallel NP \perp BC$. Vậy AH vuông góc BC suy ra H cố định. Vậy XY đi qua H cố định. □

Tài liệu

[1] Tạp chí TTT2 số 92,94 năm 2010.

[2] Tạp chí TTT2 số 127,129 năm 2013.

Tổng quát một đề toán hay

Trần Quang Hùng

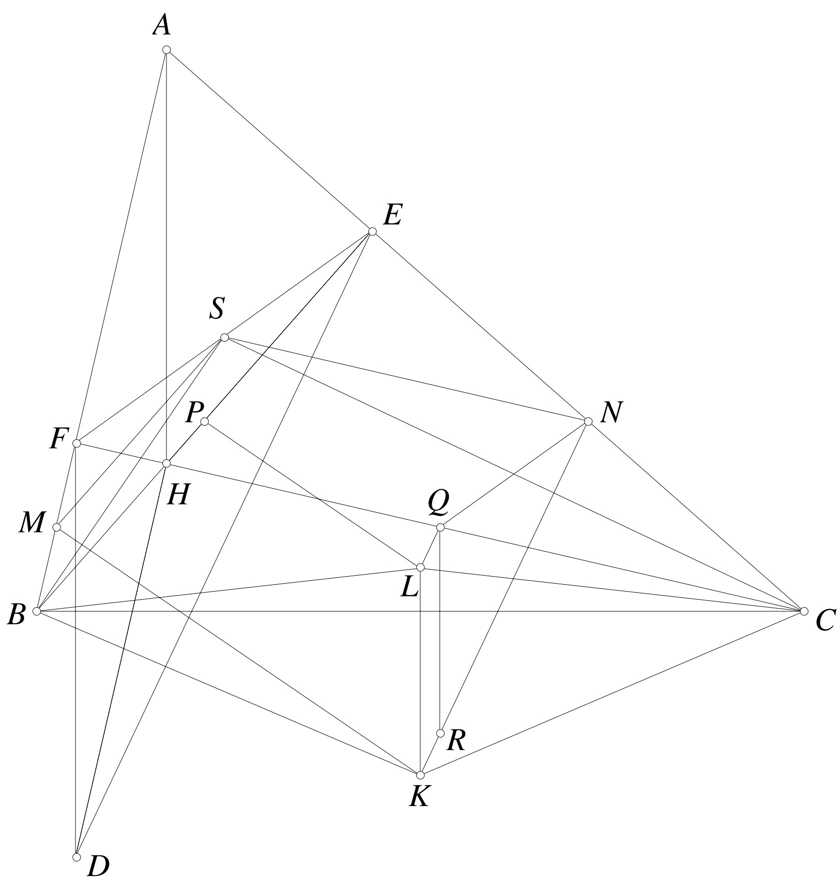
Tóm tắt nội dung

Bài viết đưa ra tổng quát cho một bài toán hay được nhiều bạn đọc quan tâm trên toán tuổi thơ 2 với phép chứng minh sử dụng đồng thời công cụ vector và thuần túy hình học.

Trên TTT2 số 129 năm 2013 mục thách đấu có bài toán hay như sau của thầy Nguyễn Minh Hà

Bài 1. *Cho tam giác ABC không vuông. BE, CF là các đường cao cắt nhau tại trực tâm H. M, N, P, Q, S theo thứ tự là trung điểm của BF, CE, BE, CF, EF. K là giao điểm của đường thẳng qua M vuông góc với BS và đường thẳng qua N vuông góc với CS. L là giao điểm của đường thẳng qua P vuông góc với BS và đường thẳng qua Q vuông góc với CS. Chứng minh rằng $2KL = HA$.*

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 131 năm 2014. Tôi xin trích dẫn lại lời giải của bạn Lê Huy Quang trên báo sử dụng các kỹ thuật về định lý 4 điểm và tam giác đồng dạng.



Hình 1.

Lời giải. Ta thấy $MB = \frac{1}{2}BE$, $MS = \frac{1}{2}BE$, $NS = \frac{1}{2}CF$, $NC = \frac{1}{2}CE$ và $BF^2 + CE^2 = BC^2 = BE^2 + CE^2$. Từ đó, chú ý rằng $KM \perp BS$, $KN \perp CS$, suy ra

$$KB^2 - KS^2 = MB^2 - MS^2 = \frac{1}{4}BF^2 - \frac{1}{4}BE^2 = \frac{1}{4}CE^2 - \frac{1}{4}CF^2 = NC^2 - NS^2 = KC^2 - KS^2.$$

Vậy $KB = KC$. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$, chú ý rằng BF, CE là các đường cao của ΔHBC, tương tự như trên, ta có $LB = LC$ vậy KL là trung trực BC nên KL vuông góc BC.

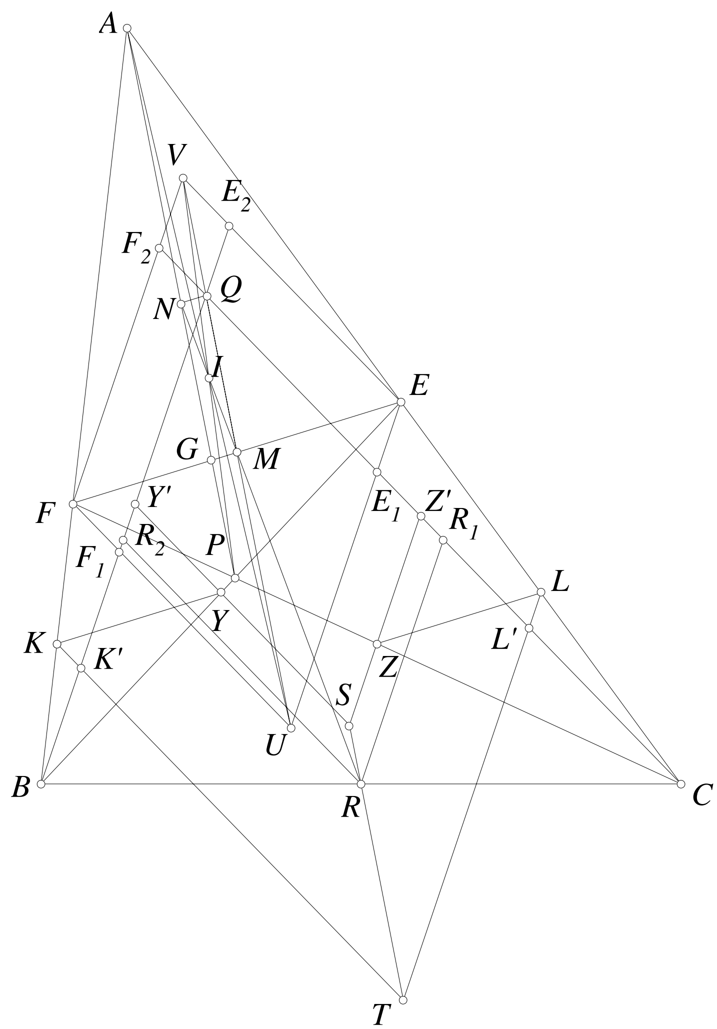
Lấy D, R sao cho các tứ giác $AHDF$, $QRKL$ là hình bình hành với R thuộc NK. Ta thấy $HE \perp NC$ và $HD \parallel AF \perp CF \parallel NS$. Do đó $\widehat{EHD} = \widehat{CNS}$. Mặt khác vì các tam giác CHE, CAF đồng dạng nên $\dfrac{HE}{HD} = \dfrac{HE}{AF} = \dfrac{EC}{HC} = \dfrac{2NC}{2NS} = \dfrac{NC}{NS}$.

Vậy các tam giác EHD, CNS đồng dạng suy ra $\widehat{HED} = \widehat{NCS}$. Kết hợp là $DE \perp SN, SN \perp RN$ suy ra $DE \parallel KR$. Kết hợp với $CF \parallel RQ$; $FE \parallel QN$, suy ra các tam giác DEF và RNQ đồng dạng. Do đó $\dfrac{KL}{HA} = \dfrac{RQ}{DF} = \dfrac{QN}{FE} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $2KL = HA$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Đây là một bài toán dạng chứng minh tỷ số đoạn thẳng rất thú vị với THCS. Tuy vậy nếu nhìn theo phương diện hình học vector có thể thấy thực chất yêu cầu của đề toán là chứng minh $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{KL}$. Do đó phương pháp chiếu song song gợi mở cho ta ý tưởng để tổng quát bài toán này như sau.

Bài 2. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Giả sử PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Gọi PA cắt EF tại G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm EF, PA. Q đối xứng G qua trung điểm MN. Gọi K, L, Y, Z lần lượt là trung điểm của BF, CE, BE, CF. Lấy các điểm S, T sao cho $SY \parallel QC, SZ \parallel QB, TK \parallel QC, TL \parallel QB$. Chứng minh rằng ST đi qua trung điểm BC và $PA = 2ST$.*

Và như vậy lời giải của chúng ta cũng sẽ khác đáp án tách rời khỏi ý tưởng liên quan tới tính trực giao. Tôi sẽ đưa ra một lời giải thuần túy vector cho bài toán tổng quát.



Lời giải 1. Gọi SY, TK cắt QB tại Y', K'. SZ, TL cắt QC tại Z', L'. R là trung điểm BC. Lấy các điểm E_1, E_2 thuộc QC, QB sao cho QE_1EE_2 là hình bình hành. Lấy các điểm F_1, F_2 thuộc QB, QC sao cho QF_1FF_2 là hình bình hành. Lấy các điểm R_1, R_2 thuộc QC, QB sao cho QR_1RR_2 là hình bình hành. Ta dễ thấy

$2\overrightarrow{SR} = 2(\overrightarrow{Z'R_1} + \overrightarrow{Y'R_2}) = \overrightarrow{F_2Q} + \overrightarrow{E_2Q}$ (1)

$2\overrightarrow{ST} = 2(\overrightarrow{Z'L'} + \overrightarrow{Y'K'}) = \overrightarrow{F_2E_1} + \overrightarrow{E_2F_1}$ (2).

Lấy U đối xứng A qua trung điểm I của MN và V đối xứng P qua trung điểm I của MN. Ta có $2\overrightarrow{FU} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{FE}$ và $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}$. Giả sử $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}, \alpha+\beta+\gamma \neq 0$. Khi đó ta dễ chứng minh được dễ chỉ ra $\overrightarrow{FU} \parallel \overrightarrow{QC}$. Từ đó tương tự $\overrightarrow{EU} \parallel \overrightarrow{QB}$ và $\overrightarrow{FV} \parallel \overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{EV} \parallel \overrightarrow{QC}$. Vậy tứ giác $EUFV$ và QE_2VF_2 là hình bình hành.

Từ đó theo (1),(2) dễ thấy

$\overrightarrow{VQ} = \overrightarrow{F_2Q} + \overrightarrow{E_2Q} = 2\overrightarrow{SR}$ (3)

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{VU} = \overrightarrow{VE} + \overrightarrow{VF} = \overrightarrow{F_2E_1} + \overrightarrow{E_2F_1} = 2\overrightarrow{ST}$ (4).

Từ (3),(4) suy ra $\overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{ST}$ suy ra ST đi qua R.

Cũng từ (4) có $PA = 2ST$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Lời giải trên sử dụng công cụ vector phù hợp với học sinh lớp 10. Lời giải sau chỉ thuần túy hình học về đường trung bình và định lý Thales do bạn Trịnh Huy Vũ lớp 10A1 Toán THPT chuyên KHTN đề nghị.

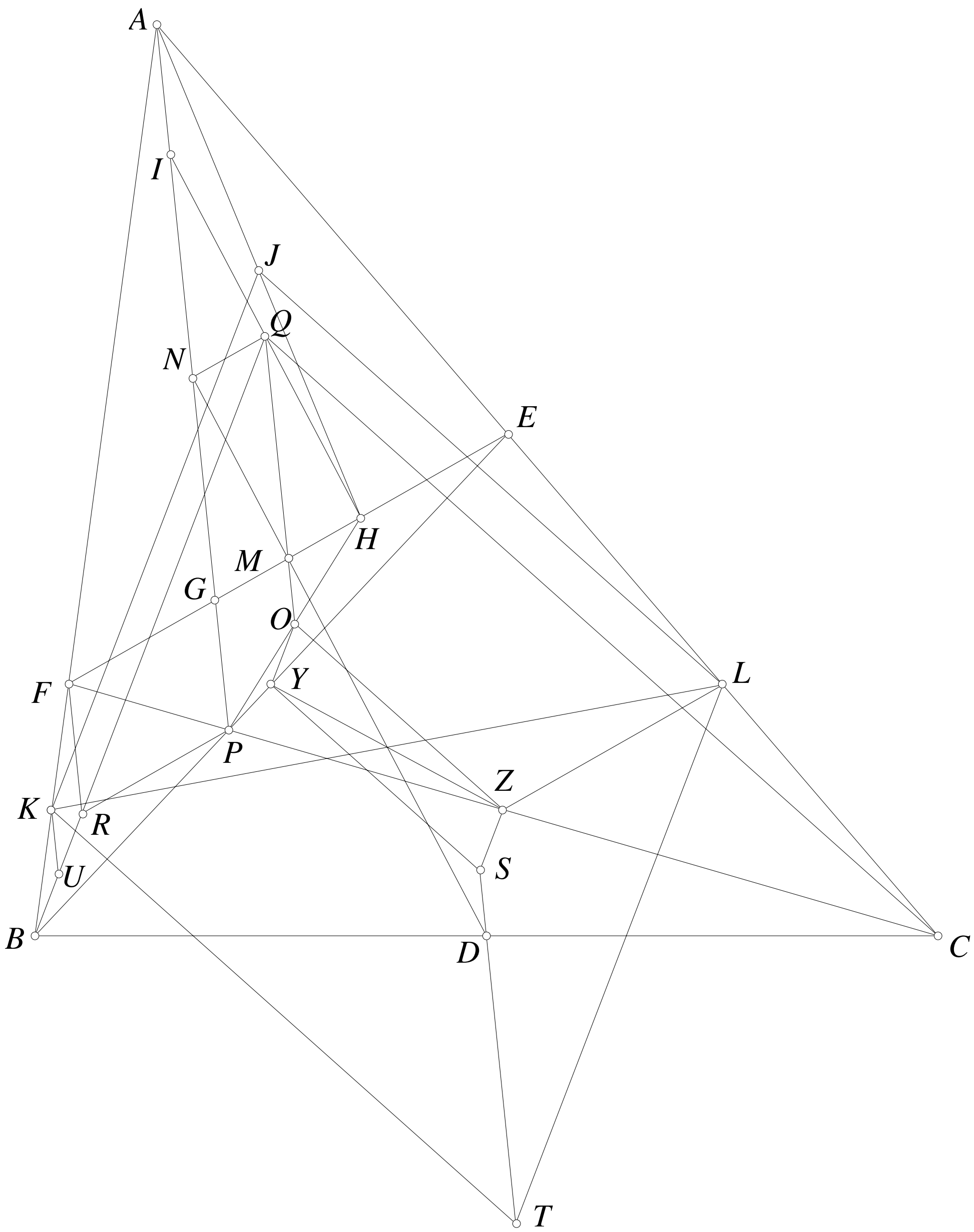
Ta cần một bổ đề sau

Bổ đề 2.1. *Cho tứ giác $ABCD$. AB giao CD tại E. AD giao BC tại F. AC giao BD tại G.*

a) Chứng minh rằng trung điểm của AC, BD, EF thẳng hàng.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Dựng các hình bình hành $AGDX, GMYN$. Chứng minh rằng E, X, Y thẳng hàng.

Bổ đề phần a) là kết quả rất cơ bản và nổi tiếng của hình học phẳng gọi là đường thẳng Gauss xin không trình bày lại chứng minh. Phần b) chỉ là hệ quả trực tiếp của phần a).



Lời giải 2. Gọi D là trung điểm cua BC. Gọi I, H lần lượt đối xứng G qua N, M, từ đề bài dễ thấy I, Q, H thẳng hàng. Dựng hình bình hành $FGPR$, áp dụng bổ đề cho tứ giác $AEPF$ dễ suy ra R thuộc BQ. Gọi U là trung điểm BR. Từ đó ta có $2KU = FR = GP = AI = 2JQ$ suy ra $KU = JQ$. Mặt khác $KU \parallel JQ$ vì cùng song song PA. Do đó tứ giác $KUQJ$ là hình bình hành, suy ra $KJ \parallel BQ$. Tương tự $LJ \parallel CQ$. Vậy J đối xứng T qua trung điểm KL. Tương tự O đối xứng S qua trung điểm YZ. Theo tính chất đường trung bình, JO đi qua trung điểm EF và $PA = 2JO$. Từ đó với chú ý rằng KL, YZ, MD có chung trung điểm, sử dụng phép đối xứng qua trung điểm KL thì ST đi qua trung điểm BC và $PA = 2ST$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải thứ 2 thuần túy hình học phù hợp với kiến thức học sinh lớp 8. Tuy vậy nếu để ý kỹ các biến đổi về song song và hình bình hành để cho chặt chẽ thì cần viết dưới dạng ngôn ngữ vector. Khi P là trực tâm của tam giác ABC. Ta thu được bài toán ban đầu. Việc cho P trùng vào một số điểm đặc biệt sẽ nảy sinh ra nhiều bài toán mới rất thú vị, xin dành điều đó cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] Tạp chí TTT2 số 129 năm 2013.

[2] Tạp chí TTT2 số 131 năm 2014.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN. E-mail: analgeomatica@gmail.com

Xung quanh một bài toán hay

Trần Quang Hùng

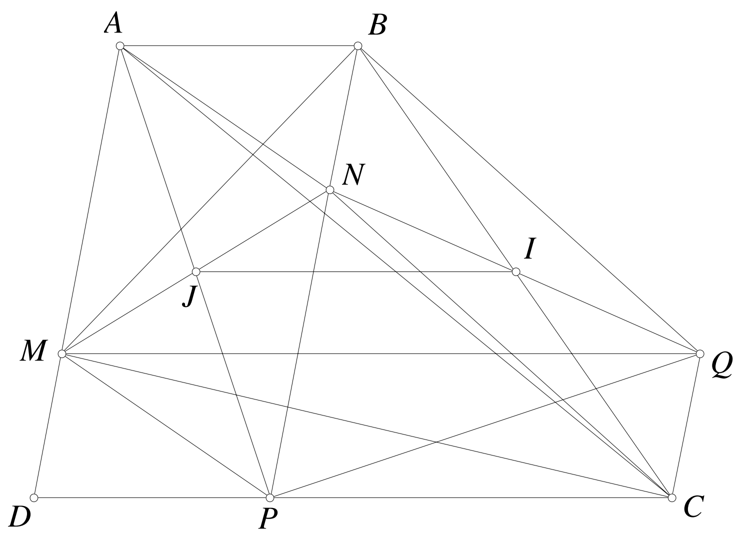
Tóm tắt nội dung

Bài viết đưa ra một hướng tiếp cận mới và một cách nhìn tổng quát cho một bài toán trên báo toán tuổi thơ 2.

Trên TTT2 số 81 năm 2009 mục giải toán qua thư có bài toán hay như sau của thầy Nguyễn Minh Hà

Bài 1. *Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$. Giả sử tồn tại điểm M trên cạnh AD và điểm N bên trong hình thang sao cho $\angle NBC = \angle MBA$, $\angle NCB = \angle MCD$. Gọi P là đỉnh thứ tư của hình bình hành $MANP$. Chứng minh rằng P thuộc cạnh CD.*

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 83 năm 2010. Tôi xin trích dẫn lại lời giải trên báo



Hình 1.

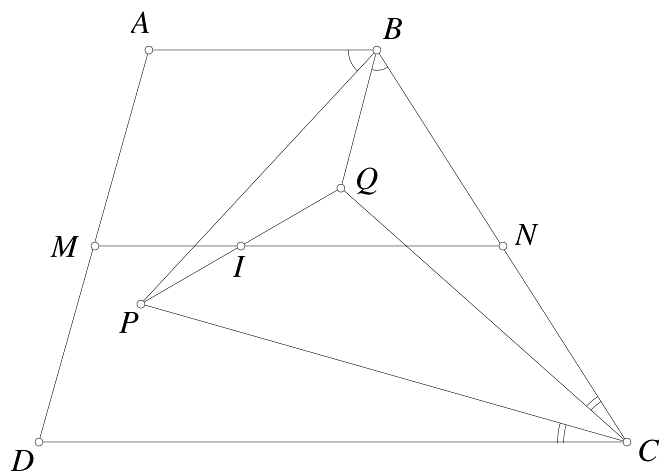
Lời giải. Lấy điểm Q sao cho tứ giác $BNCQ$ là hình bình hành. Gọi BC giao NQ tại I, AP giao MN tại J. Từ giả thiết $\angle NBC = \angle MBA$, $\angle NCB = \angle MCD$ và $AB \parallel CD$ suy ra

$\angle BQC = \angle BNC = 180° - \angle NBC - \angle NCB$
$= 180° - \angle MBA - \angle MCD$
$= 180° - (\angle ABC - \angle MBC) - (\angle BCD - \angle BCM)$
$= 180° - (\angle ABC + \angle BCD) + (\angle MBC + \angle BCM)$
$= 180° - 180° + (180° - \angle BMC)$
$= 180° - \angle BMC.$

Suy ra tứ giác $BMCQ$ nội tiếp. Mà $NB \parallel CQ$ và $\angle NBC = \angle MBA$ nên $\angle BMQ = \angle BCQ = \angle NBC = \angle MBA$. Suy ra $MQ \parallel BA$. Mà $IJ \parallel MQ$ mà IJ là đương trung bình của tam giác ABC nên $IJ \parallel AB$. Lại có $\dfrac{JA}{JP} = \dfrac{IB}{IC} = 1$ nên theo định lý Thales đảo ta có $PC \parallel AB$ vậy P thuộc CD. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán có phát biểu khá hấp dẫn là chứng minh đỉnh thứ tư của hình bình hành nằm trên cạnh. Tuy vậy phát biểu này có thể hiểu đơn giản là chứng minh đối xứng của A qua trung điểm MN nằm trên cạnh CD. Nếu nhìn theo cách này có thể hiểu bài toán đơn giản hơn nữa là chứng minh trung điểm của MN nằm trên đường trung bình của hình thang. Đây là một cách nhìn thú vị. Thực chất bài toán sẽ đúng cho mọi điểm M trong mặt phẳng không nhất thiết thuộc cạnh AD. Đó là một cách tổng quát bài toán. Tôi xin đưa ra lời giải cho bài toán này nhờ một số bổ đề tổng quát. Ta có một lưu ý rằng giả thiết $\angle NBC = \angle MBA$ thực chất có thể hiểu các tia BN, BA đối xứng qua phân giác $\angle BAC$.

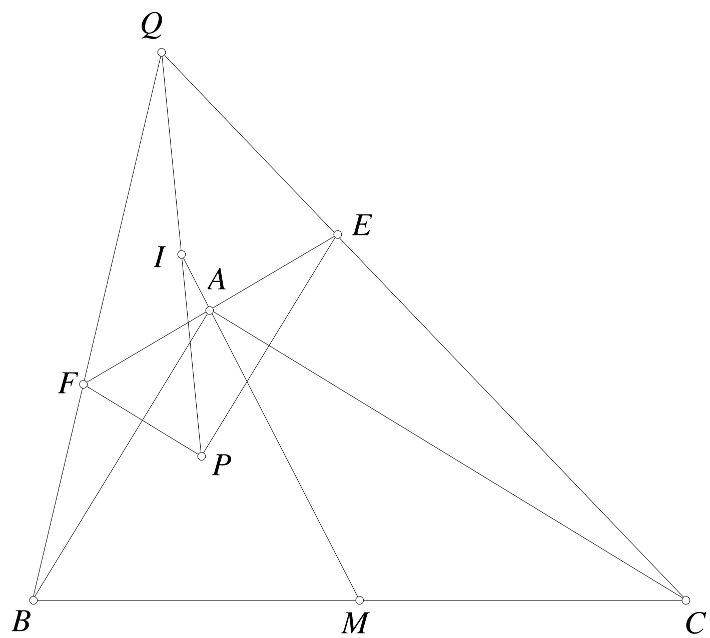
Bài 2. *Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ và P là một điểm bất kỳ. Đối xứng của PB qua phân giác $\angle ABC$ cắt đối xứng của PC qua phân giác $\angle BCD$ tại Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ luôn thuộc đường thẳng cố định khi P di chuyển trong mặt phẳng.*



Hình 2.

Nhận xét. Ta dễ thấy đường thẳng cố định chính là đường trung bình của hình thang. Nếu để ý kỹ ta thấy rằng các phân giác $\angle ABC$ và $\angle BCD$ vuông góc nhau và cắt nhau cũng trên đường trung bình của hình thang và đường trung bình là trung tuyến của tam giác vuông đó. Vậy thực chất trong bài toán này yếu tố hình thang không cần thiết. Ta đưa ra một bài toán khác trên tam giác vuông như sau

Bài 3. *Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AM và P là điểm bất kỳ. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của P qua CA, AB. Gọi CE cắt BF tại Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ thuộc AM.*



Hình 3.

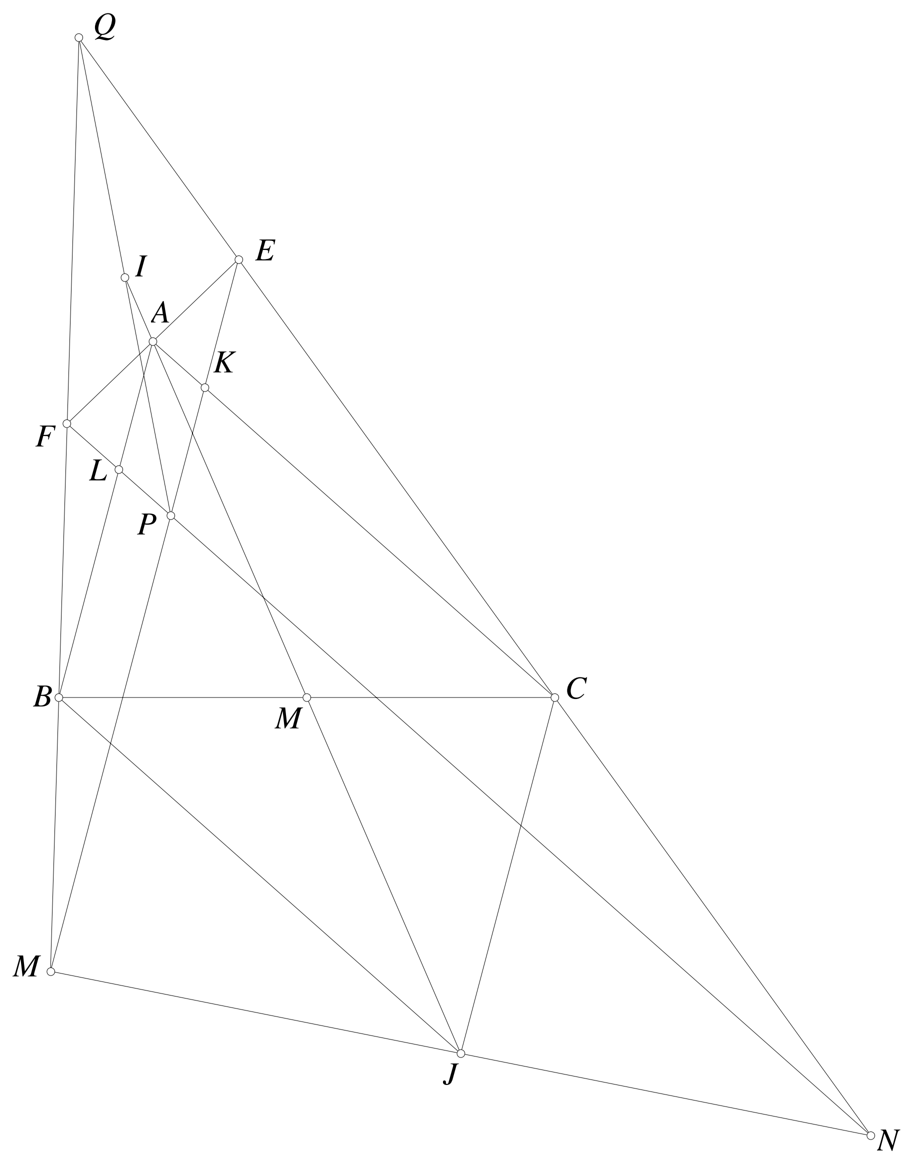
Nhận xét. Nếu nhìn dưới dạng tam giác vuông thế thì trong bài này yếu tố tam giác vuông cũng có thể thay thế và tổng quát hơn được. Ta đưa ra bài toán sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC trung tuyến AM và P là điểm bất kỳ. Gọi K, L lần lượt thuộc các đường thẳng CA, AB sao cho $PK \parallel AB, PL \parallel AC$. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của P qua K, L. Gọi CE cắt BF tại Q. Chứng minh rằng trung điểm của PQ thuộc AM.*

Bài toán này là bài toán thuần túy các yếu tố trung điểm và song song. Thật thú vị khi nhận thấy rằng nó là một hệ quả của đường thẳng Gauss. Ta cũng xem lời giải dưới đây

Bổ đề 4.1. *Cho tứ giác $ABCD$. AB giao CD tại E. AD giao BC tại F. Chứng minh rằng trung điểm của AC, BD, EF thẳng hàng.*

Bổ đề là kết quả rất cơ bản và nổi tiếng của hình học phẳng gọi là đường thẳng Gauss xin không trình bày lại chứng minh. Trở lại bài toán



Hình 4.

Lời giải bài toán. Gọi I là trung điểm PA. Gọi PE, PF lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Dễ thấy A là trung điểm EF nên áp dụng bổ đề cho tứ giác $PEQF$ dễ thấy I, A, J thẳng hàng với J là trung điểm của MN. Do $PK \parallel AB$ mà A là trung điểm EF nên B là trung điểm FM. Tương tự C là trung điểm EN. Từ đó dễ thấy $ACJB$ là hình bình hành. Vậy AJ đi qua trung điểm M của BC, kết hợp I, A, J thẳng hàng ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Việc cho P trùng với các điểm đặc biệt hoặc đặc biệt hóa tam giác ABC để thu được các kết quả tương tự bài trên báo là một việc làm thú vị xin dành cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] Tạp chí TTT2 số 81 năm 2009.

[2] Tạp chí TTT2 số 83 năm 2010.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN. E-mail: analgeomatica@gmail.com

Mở rộng một bài toán hình học trên THTT

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết đưa ra tổng quát cho một bài toán hay được nhiều bạn đọc quan tâm trên báo toán học và tuổi trẻ với phép chứng minh thông qua tính chất chùm điều hòa và ứng dụng bổ đề E.R.I.Q, thêm vào đó là một vài ứng dụng của bài tổng quát.

Trên THTT số 402 tháng 12 năm 2010 mục đề ra kỳ này có bài toán hay như sau của thầy Nguyễn Minh Hà

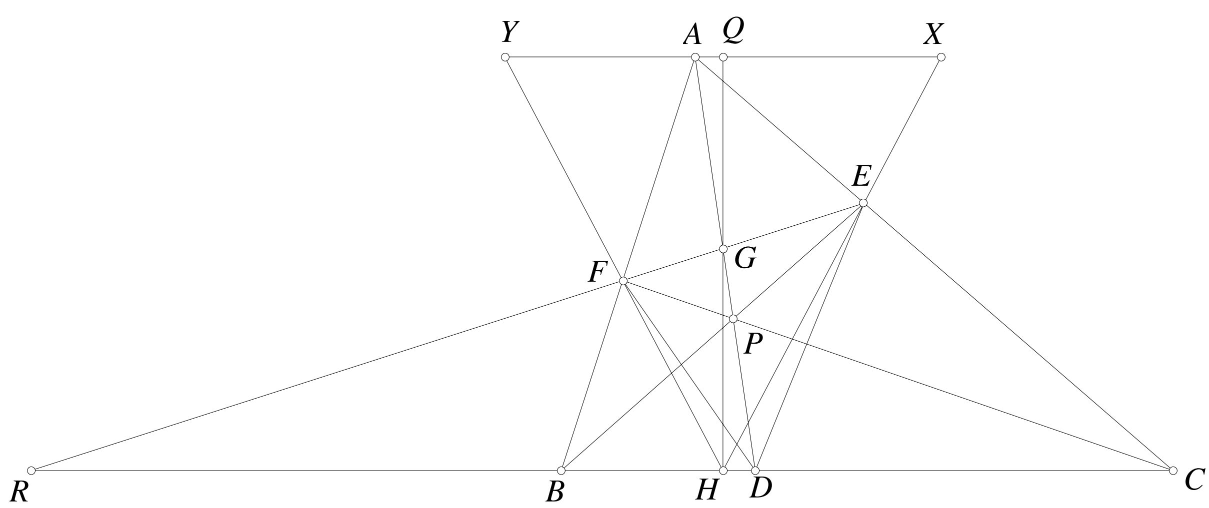
Bài toán 1. Cho tam giác nhọn ABC, đường cao AD. M là một điểm thuộc đoạn AD. Các đường thẳng BM, CM theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F. DE, DF theo thứ tự cắt các đường tròn đường kính AB, AC lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm của EF, KL đi qua A.

Nhận xét. Lời giải bài toán trên đã có trên THTT số 406 năm 2011. Ngoài việc tính toán các tỷ số để sử dụng bổ đề E.R.I.Q như trong đáp án, ta còn có thể giải bài toán bằng cách sử dụng hai cặp tam giác đồng dạng XKA và YAF, XEA và YAL. Tuy nhiên, việc tính toán các tỷ số nhờ việc sử dụng phương tích kết hợp với định lý Thales giúp ta có một góc nhìn khác trong việc khai thác giả thiết các điểm đồng viên. Với ý tưởng sử dụng bổ đề E.R.I.Q như vậy, chúng ta có cách nhìn tổng quát như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. PA cắt EF tại G. H là hình chiếu của G lên BC. HE, HF lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác HAB, HAC tại M, N khác H. HG cắt đường thẳng qua A song song BC tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm MN, EF đi qua Q.

Để giải bài toán ta sử dụng hai bổ đề sau

Bổ đề 2.1. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB tại D, E, F. PA cắt EF tại G. H là hình chiếu của G lên BC. HE, HF, HG lần lượt cắt đường thẳng qua A song song BC tại X, Y, Q thì Q là trung điểm XY và $HX = HY$.

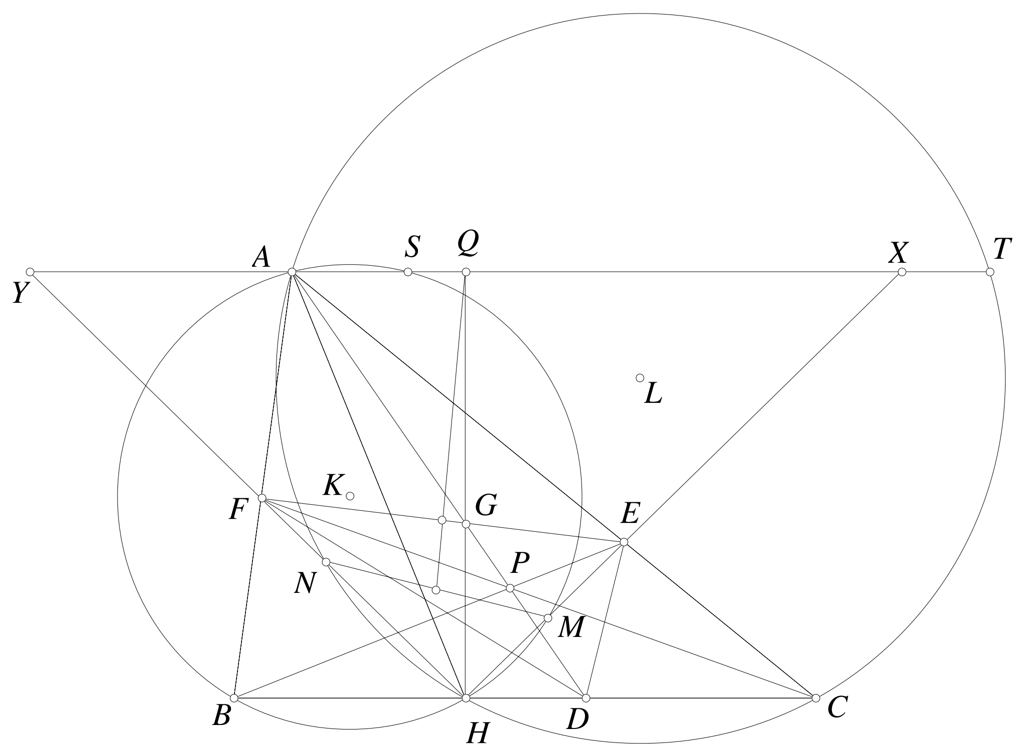


Chứng minh. Gọi EF giao BC tại R ta có hàng điều hòa cơ bản $(BC, DR) = -1$ chiếu xuyên tâm A lên đường thẳng EF ta có hàng $(EF, GR) = -1$ do đó chùm $H(EF, GR) = -1$ lại có $HG \perp HR$ do đó từ tính chất chùm phân giác dễ suy ra HG là phân giác $\angle EHF$. Vậy trong tam giác HXY có $HG \equiv HQ$ là đường cao và phân giác do đó tam giác HXY cân tại H, suy ra Q là trung điểm XY và $HX = HY$. $\square$

Bổ đề sau được đặt tên là E.R.I.Q là viết tắt các chữ cái đầu của cụm từ tiếng Anh "Equal Ratio In Quadrilateral" bởi kiến trúc sư Hy Lạp Kostas Vittas, chúng tôi tạm dịch là "tỷ số bằng nhau trong tứ giác".

Bổ đề 2.2. Cho tứ giác $ABCD$, các điểm M, N thuộc AB, CD sao cho $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{ND}}{\overline{NC}}$ thì các điểm chia AD, BC và MN cùng một tỷ số sẽ thẳng hàng.

Bổ đề là kết quả cơ bản có thể tham khảo nhiều cách chứng minh trong nhiều tài liệu khác nhau. Trở lại bài toán



Lời giải. Gọi AQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HAB, HAC lần lượt tại S, T. HE, HF lần lượt cắt AQ tại X, Y. Ta thấy A, S, H, M thuộc đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AHB và A, T, H, N thuộc đường tròn (L) ngoại tiếp tam giác AHC nên $\overline{XS}.\overline{XA} = \overline{XM}.\overline{XH}$ và $\overline{YT}.\overline{YA} = \overline{YN}.\overline{YH}$, suy ra $\dfrac{\overline{XS}.\overline{XA}}{\overline{YT}.\overline{YA}} = \dfrac{\overline{XM}.\overline{XH}}{\overline{YN}.\overline{YH}}$ (1).

Ta lại chú ý tứ giác $ATCH$ là hình thang cân và có AQ là đường cao nên $\overline{TA} - \overline{CH} = 2\overline{QA}$. Từ đó ta có $\dfrac{\overline{XE}}{\overline{XH}} = \dfrac{\overline{XA}}{\overline{XA} + \overline{CH}} = \dfrac{\overline{XA}}{\overline{XA} + \overline{TA} - 2\overline{QA}} = \dfrac{\overline{XA}}{\overline{QX} + \overline{QT}} = \dfrac{\overline{XA}}{-\overline{QY} + \overline{QT}} = \dfrac{\overline{XA}}{\overline{YT}}$ (2).

Tương tự $\dfrac{\overline{YF}}{\overline{YH}} = \dfrac{\overline{YA}}{\overline{XS}}$ (3).

Từ (2),(3) suy ra $\dfrac{\overline{XE}}{\overline{XH}}.\dfrac{\overline{YH}}{\overline{YF}} = \dfrac{\overline{XA}.\overline{XS}}{\overline{YT}.\overline{YA}}$ (4).

Từ (1),(4) suy ra $\dfrac{\overline{XM}.\overline{XH}}{\overline{YN}.\overline{YH}} = \dfrac{\overline{XE}.\overline{YH}}{\overline{XH}.\overline{YF}}$ hay $\dfrac{\overline{XM}}{\overline{XE}} = \dfrac{\overline{YN}}{\overline{YF}}.\dfrac{YH^2}{XH^2} = \dfrac{\overline{YN}}{\overline{YF}}$. Chú ý $YH = XH$ theo bổ đề 2.1.

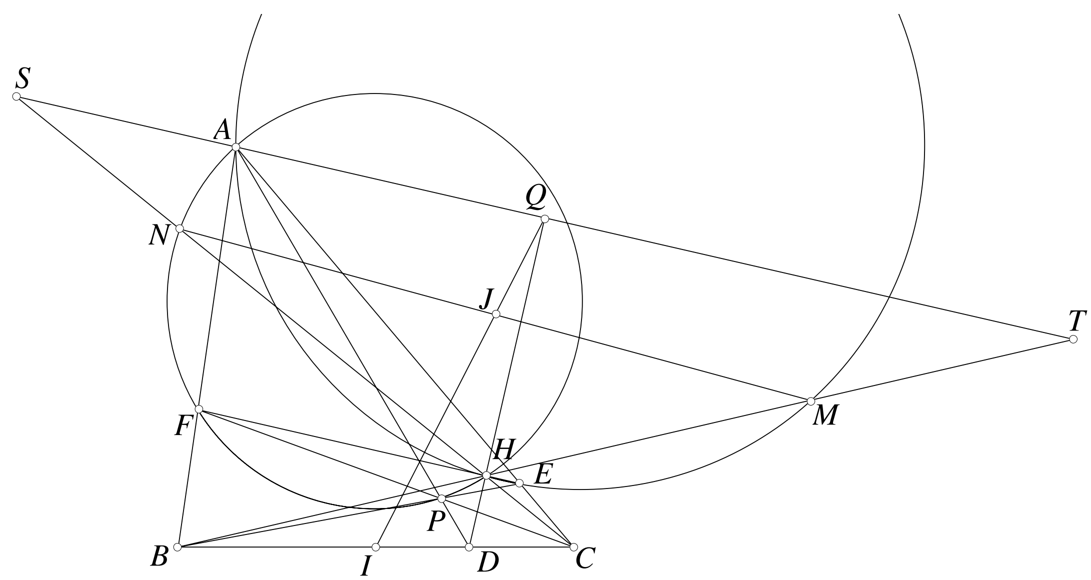
Từ đó cũng theo bổ đề 2.1 và bổ đề 2.2 trung điểm Q của XY và trung điểm của MN, EF thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Khi AD là đường cao của tam giác ABC ta thu được bài toán ban đầu. Bài toán phát biểu với P là điểm bất kỳ sẽ có giá trị ứng dụng lớn trong nhiều trường hợp đặc biệt khác nhau. Sau đây tôi xin dẫn ra một vài ví dụ ứng dụng bài toán này

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Gọi PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi H là hình chiếu của D lên EF. HB, HC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE, AHF tại M, N. Q là hình chiếu của A lên HD. Chứng minh rằng đường nối trung điểm BC, MN đi qua Q.

Lời giải thứ nhất. Áp dụng trực tiếp bài toán 2 cho tam giác AEF với các đường BE, CF và AD đồng quy, ta thu được điều phải chứng minh. $\square$

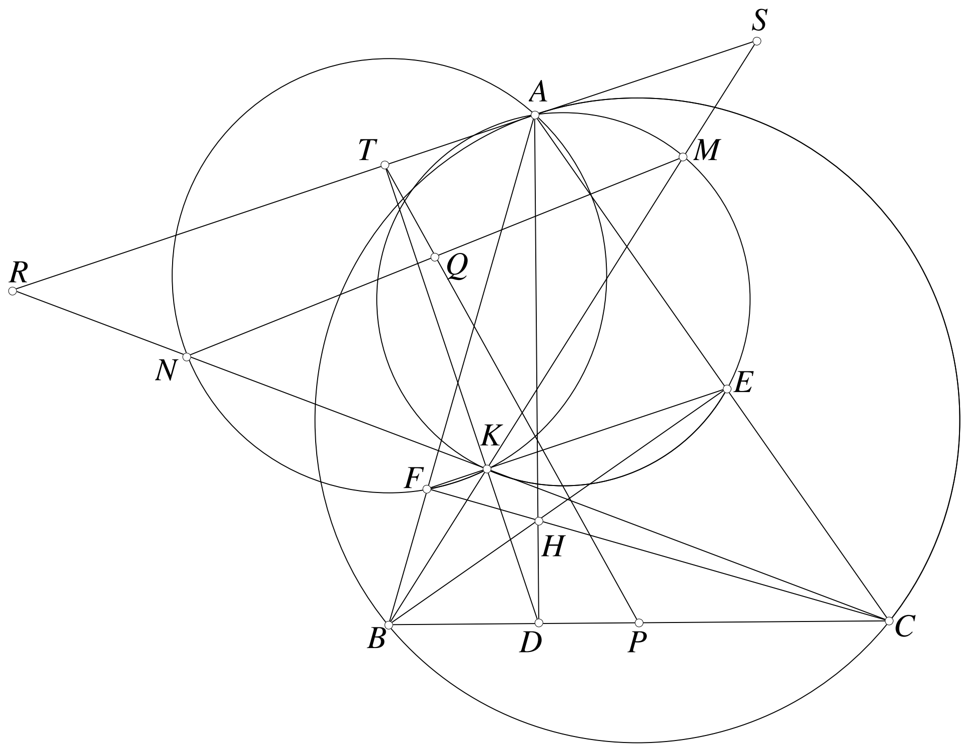
Chúng ta có thể trình bày một cách khác chứng minh bài toán này trực tiếp, đó cũng thể coi là một cách khác chứng minh bài toán 2.



Lời giải thứ hai. Gọi T, S lần lượt là giao điểm của HM, HN với AQ. Áp dụng tính chất chùm điều hòa như trong bổ đề 1 bài toán 2 thì ta suy ra được HQ là phân giác góc $\angle SHT$ mà $HQ \perp ST$ suy ra tam giác HST cân tại H. Suy ra Q là trung điểm ST và $\angle HST = \angle HTS$. Lại có $\angle ANS = 180^\circ - \angle ANH = 180^\circ - \angle AFH = \angle BAT$. Do đó $\triangle SAN \sim \triangle TBA$ suy ra $\dfrac{\overline{SA}}{\overline{TB}} = \dfrac{\overline{SN}}{\overline{TA}}$, hay $\overline{SA}.\overline{TA} = \overline{SN}.\overline{TB}$. Chứng minh tương tự suy ra $\overline{SA}.\overline{TA} = \overline{TM}.\overline{SC}$ suy ra $\overline{TM}.\overline{SC} = \overline{SN}.\overline{TB}$ hay $\dfrac{\overline{SN}}{\overline{SC}} = \dfrac{\overline{TM}}{\overline{TB}}$. Từ đây áp dụng bổ đề E.R.I.Q ta thu được điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Hai bài toán này cũng có thể coi là một. Trong lời giải bài toán 2 chúng ta tính toán các tỷ số nhờ định lý Thales và phương tích rồi dùng E.R.I.Q. Nhưng trong lời giải thứ hai bài toán 3 ta sử dụng hai cặp tam giác đồng dạng. Mỗi phương pháp đều có ưu và nhược điểm. Cách làm tính toán thì hơi dài nhưng logic vì chúng ta biến đổi độ dài đại số trong các bước là đều chính xác. Cách làm sử dụng tam giác đồng dạng ngắn hơn nhưng việc dùng độ dài đại số trên các trục không song song là chưa đảm bảo logic. Việc đưa ra hai lời giải qua hai dạng phát biểu như trong bài viết là hợp lý vì tránh được sự trùng lặp, đồng thời cách phát biểu như đề bài toán 3 đã làm cho vấn đề được "ẩn đi" một chút. Việc áp dụng bài toán 2 và bài toán 3 vào các tam giác khác nhau tạo ra nhiều bài toán mới hoặc bổ đề mới rất thú vị. Ta đến một ví dụ khác áp dụng bài toán 2 và bài toán 3 như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF. K là hình chiếu của D lên EF. Gọi KB, KC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác KAE, KAF tại M, N khác K. Gọi P, Q là trung điểm MN, BC. Chứng minh rằng PQ và DK cắt nhau trên tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

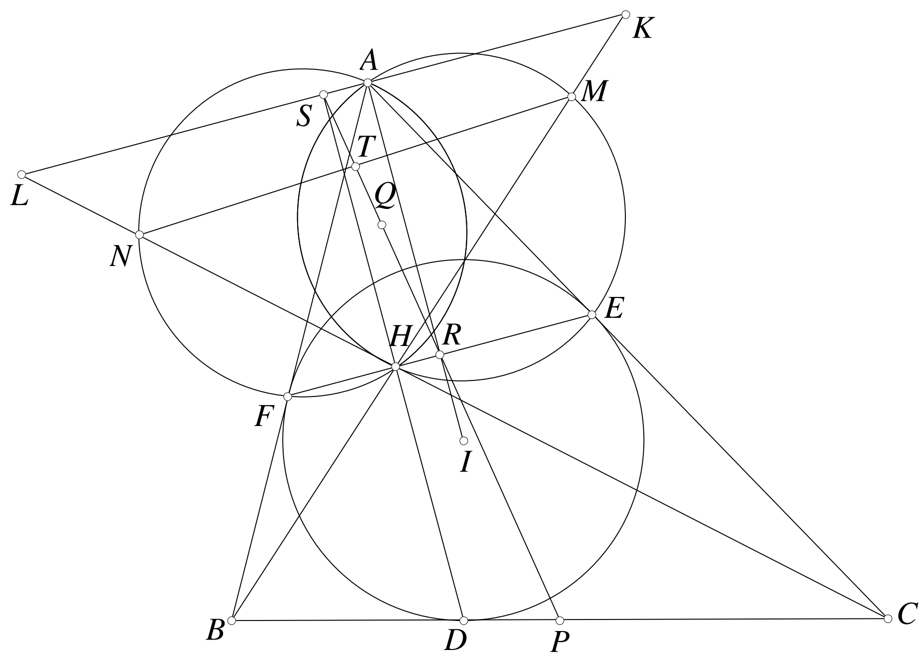


Hình 1.

Lời giải. Gọi S, R lần lượt là giao điểm KM, KN với tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Áp dụng bổ đề chứng minh trên ta suy ra DK là phân giác góc BKC. Lại có kết quả quen thuộc là $EF \parallel RS$ nên DK vuông góc với RS mà DK lại là phân giác $\angle RKS$ suy ra tam giác KRS cân tại K. Gọi T là giao điểm DK, RS, suy ra T là trung điểm RS. Đến đây ta thấy ngay mô hình của bài toán 3 là trung điểm các đoạn thẳng MN, BC và T thẳng hàng. Ta được điều phải chứng minh. □

Sau đây là một ứng dụng đẹp khác

Bài toán 5. Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. H là hình chiếu của D lên EF. HB, HC cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE, HAF tại M, N khác H. Chứng minh rằng trung điểm của BC, MN và AH thẳng hàng.

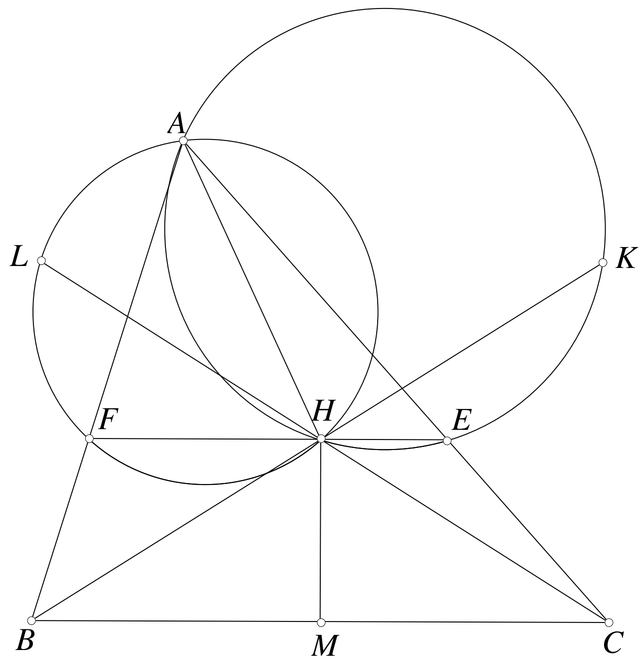


Hình 2.

Lời giải. Gọi P, R, Q, T lần lượt là trung điểm BC, EF, AH, MN. Gọi S là giao điểm QR, DH. Dễ dàng chứng minh được $ASHR$ là hình chữ nhật, suy ra AS là phân giác ngoài đỉnh A của tam giác ABC. Gọi K, L lần lượt là giao điểm AS với HM, HN. Vẫn với tính chất hàng điều hòa như bổ đề 1 bài toán 2, ta suy ra được HS là phân giác $\angle KHL$, mà $DH \perp KL$ suy ra tam giác HKL cân tại H. Suy ra S là trung điểm KL. Áp dụng toán số 3, suy ra S, T, P thẳng hàng. Áp dụng một nhận xét quen thuộc là với điểm H nằm trong tam giác sao cho $\angle HBA = \angle HCA$ thì đường nối chân hình chiếu của H trên phân giác ngoài và phân giác trong góc A đi qua trung điểm BC, ta thu được S, R, P thẳng hàng. Từ đó suy ra P, R, Q thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta có thể không dùng nhận xét trên mà chứng minh trực tiếp P, R, S thẳng hàng như sau. Gọi ID cắt EF tại X và cắt (I) tại Y khác D. AY cắt BC tại Z. Dễ thấy AX đi qua trung điểm P của BC và P cũng là trung điểm của DZ, mặt khác $IP \parallel AY$ và $\dfrac{XR}{AS} = \dfrac{RX}{RH} = \dfrac{IX}{ID} = \dfrac{IX}{IY} = \dfrac{PX}{PA}$ nên P, R, S thẳng hàng.

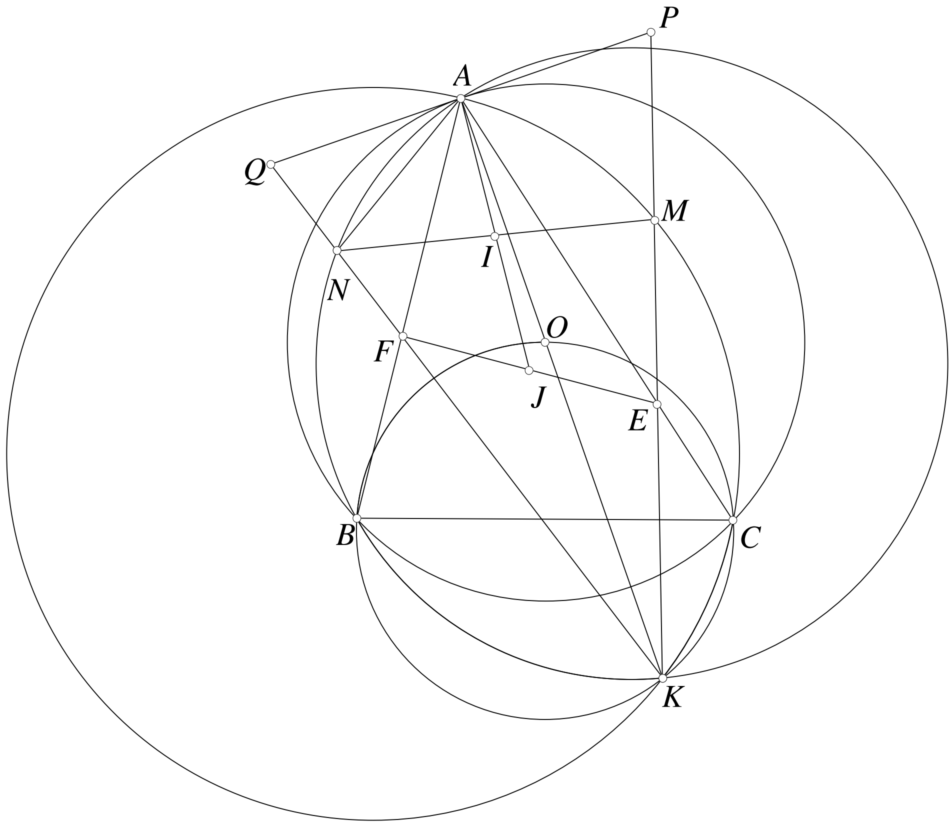
Bài toán 6. Cho tam giác ABC trung tuyến AM. Các điểm E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. H là hình chiếu của M lên EF. HB, HC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE, HAF tại K, L. Chứng minh rằng $HK = HL$.



Hình 3.

Lời giải. Do $EF \parallel BC$, áp dụng định lý Thales suy ra $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = \dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$, lại có M là trung điểm BC suy ra $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -1$. Áp dụng định lý Ceva cho tam giác ABC với các điểm M, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB, ta có $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} . \dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}} . \dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = -1$ suy ra AM, BE, CF đồng qui. Chứng minh tương tự bài toán 3, dễ có HM là phân giác góc KHL và HM đi qua trung điểm KL, suy ra tam giác HKL cân tại H. Suy ra $HK = HL$. Đó là điều phải chứng minh. □

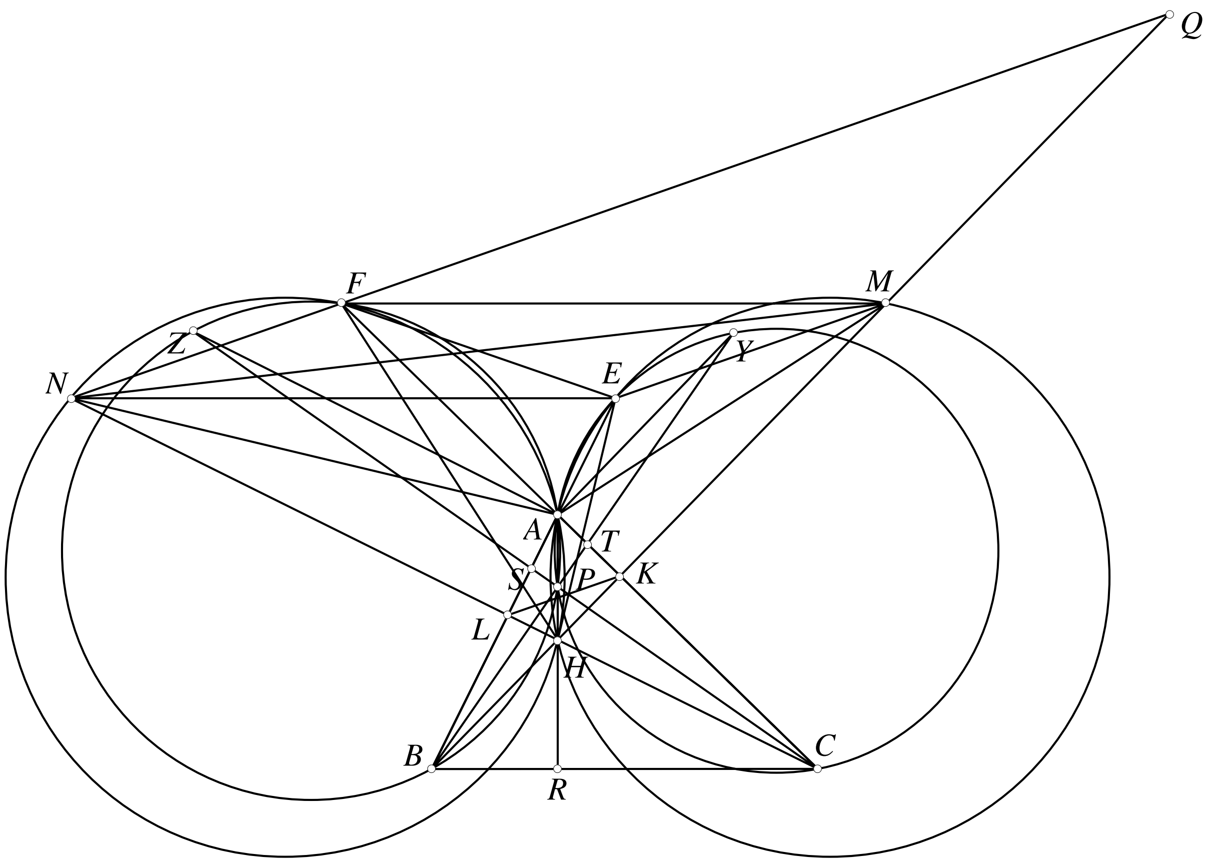
Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC cắt AO tại K khác O. Lấy các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho KA là phân giác $\angle EKF$. KE, KF lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác KAC, KAB tại M, N khác K. Chứng minh rằng đường nối trung điểm của EF, MN đi qua A.



Hình 4.

Lời giải. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) với KE, KF. Dễ chứng minh được tam giác KPQ cân tại K và A là trung điểm PQ. Ta có $\angle KBC = \angle KOC = 2\angle OAC$ suy ra $\angle KBA = 2\angle OAC + \angle ABC = 180^\circ - \angle ABC = \angle KNA$ suy ra $\angle ANQ = \angle ABC = \angle EAP$, lại có $\angle NQA = \angle APE$ suy ra $\triangle ANQ \sim \triangle APE$. Suy ra $\overline{NQ}.\overline{EP} = \overline{AQ}.\overline{AP}$. Chứng minh tương tự suy ra $\overline{MP}.\overline{FQ} = \overline{AQ}.\overline{AP}$. Từ đây áp dụng bổ đề E.R.I.Q suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 8. Cho tam giác ABC trực tâm H. P là điểm bất kỳ trên AH. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APC, APB lần lượt cắt CA, AB tại E, F. HB, HC lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AHF, AHE tại M, N khác H. Chứng minh rằng tam giác AEF và AMN có chung đường đối trung.



Hình 5.

Lời giải. Gọi Q là giao điểm BM, FN. Ta có $\angle CNQ = \angle HAC = \angle CBQ$ suy ra C, B, N, Q cùng thuộc một đường tròn. Suy ra $\angle NQB = \angle NCB = \angle BAH = \angle EMH$ suy ra $NQ \parallel EM$. Cũng từ tứ giác $BCKL$ nội tiếp nên dễ có $KL \parallel ME \parallel NQ$. Gọi PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại T, S và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PAC, PAB tại Y, Z khác P. Gọi AR, BK, CL là đường cao tam giác ABC. Dễ thấy hai tam giác ABY và AZC đồng dạng. Mặt khác lại có $BA.BE = BP.BY$ và $CA.CF = CP.CZ$ suy ra $\dfrac{BA.BE}{CA.CF} = \dfrac{BP.BY}{CP.CZ} = \dfrac{PB}{PC}.\dfrac{AY}{AC}$. Từ đó $\dfrac{BE}{CF} = \dfrac{PB}{PC}.\dfrac{AY}{AB} = \dfrac{PB}{AB}.\dfrac{AY}{PC} = \dfrac{PB}{AB}.\dfrac{AT}{TP} = \dfrac{CA}{SA}.\dfrac{SB}{CT}.\dfrac{AT}{AB} = \dfrac{ZB}{ZC}.\dfrac{CA}{AB} = \dfrac{HB}{HC}$. Ta chú ý các đẳng thức cuối có được do áp dụng Menelaus cho tam giác ABT với S, P, C thẳng hàng và định lý Ceva tam giác ABC với BT, CS và AR đồng quy. Từ đó chú ý $\angle HBE = \angle HCF$ nên hai tam giác HBE và HCF đồng dạng. Suy ra $\angle HFA = \angle HEA = \angle KMA$. Từ đó hai tam giác vuông KFH và KMA đồng dạng. Từ đó $\dfrac{LC}{LN} = \dfrac{KF}{KC} = \dfrac{KF}{KH}.\dfrac{KH}{KC} = \dfrac{KM}{KA}.\dfrac{KH}{KC} = \dfrac{KM.KH}{KH.KB} = \dfrac{KM}{KB}$. Vậy từ hai tam giác ACL và ABK đồng dạng suy ra tam giác ABM và ACN đồng dạng. Vậy ta có

$$\frac{LB}{LE} = \frac{KB}{KM} = \frac{LC}{LN} = \frac{KC}{KF}$$

suy ra $NE \parallel MF \parallel BC$. Ta suy ra tứ giác $EMFN$ là hình bình hành hay EF, MN cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, vậy tam giác AEF, AMN có chung đường trung tuyến kẻ từ A. Ta chứng minh phân giác góc $\angle MAN$ cũng đồng thời là phân giác góc $\angle BAC$ do theo chứng minh trên hai tam giác $\triangle ACN \sim \triangle ABM$ nên $\angle FAN = \angle EAM$ hay phân giác $\angle FAE$ và phân giác $\angle MAN$ trùng nhau. Vậy đường đối trung đỉnh A của tam giác AMN và tam giác AEF trùng nhau. Suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Các bạn hãy làm bài tập sau để luyện tập.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC với P, Q đẳng giác trên phân giác góc A. E, F là hình chiếu của P lên CA, AB. D là hình chiếu của Q lên BC. H là hình chiếu của D lên EF. HB, HC cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác HAE, HAF tại M, N khác H. Chứng minh rằng trung điểm của BC, MN và AH thẳng hàng.

Gợi ý. Gọi K, L là hình chiếu của B, C trên EF. Ta có các cặp tam giác đồng dạng $\triangle BDQ \sim \triangle BFP, \triangle CDQ \sim CEP, \triangle BKF \sim \triangle CLE$. Chú ý rằng $BK \parallel DH \parallel CL$ nên ta có $\dfrac{HK}{HL} = \dfrac{DB}{DC} = \dfrac{DB}{DP}.\dfrac{DP}{DC} = \dfrac{FB}{FP}.\dfrac{EP}{EC} = \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{BK}{CL}$. Từ đó $\triangle KBH \sim \triangle LCH$ ta suy ra điều phải chứng minh.

Cuối bài viết tác giả muốn nói lời cảm ơn chân thành tới học trò **Nguyễn Ngọc Chi Lan** đã giúp tác giả nhiều trong việc hoàn thiện các lời giải bài toán 3, bài toán 6, 7, 8. Tác giả cũng muốn nói lời cảm ơn chân thành tới bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương đã đọc toàn bộ bài viết và cho nhiều góp ý giá trị đồng thời cho các nhận xét xác đáng cho bài toán 1, 2, 3, bạn **Dũng** cũng đưa ra các gợi ý lời giải khác để hoàn thiện cho các bài toán 5, 8, 9.

Tài liệu

[1] Tạp chí THTT số 402 tháng 12 năm 2010.

[2] Tạp chí THTT số 406 tháng 4 năm 2011.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

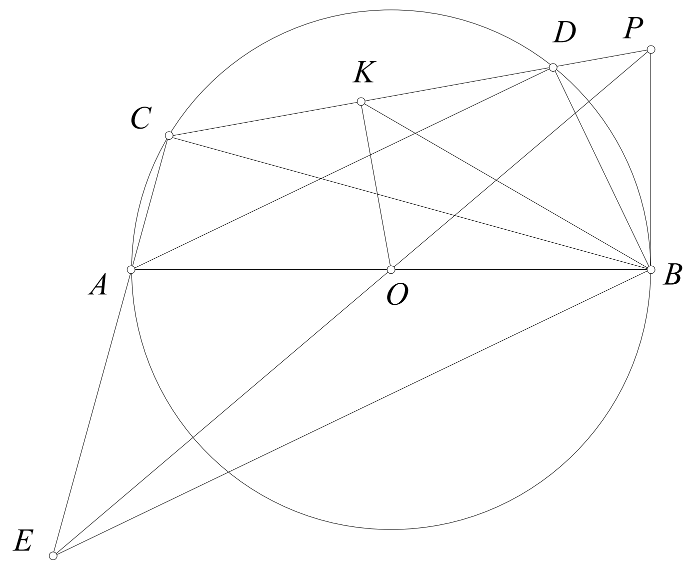
Một bài toán hay có nhiều ứng dụng

Tóm tắt nội dung

Một bài toán nhỏ rất đẹp với lời giải thuần túy hình học được áp dụng vào trong nhiều tình huống khác nhau tạo ra các bài toán thú vị xuất hiện trong nhiều cuộc thi học sinh giỏi.

Trong [1] có đề xuất một bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho C, D thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB. Tiếp tuyến tại B cắt CD tại P. CA cắt OP tại E thì BE song song AD.

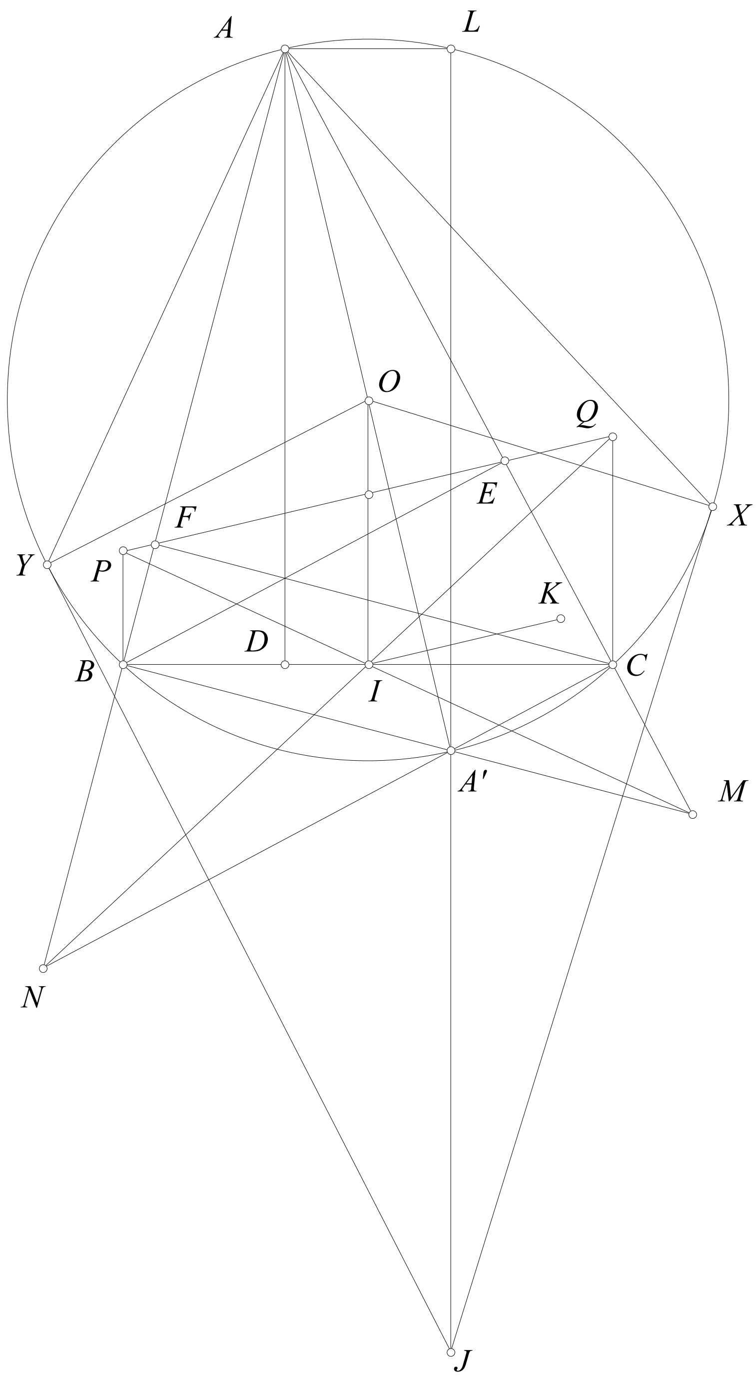


Hình 1.

Lời giải. Gọi K là trung điểm CD thì $OK \perp CD$ nên ta có $OBPK$ nội tiếp. Do đó $\angle BKD = \angle BOP = \angle AOE$, mặt khác $\angle EAO = \angle KDB$ vậy tam giác $\triangle EAO \sim \triangle BDK$ suy ra $\triangle EAB \sim \triangle BDC$. Từ đó $\angle DAB = \angle DCB = \angle ABE$ vậy $BE \parallel AD$. $\square$

Nhận xét. Bài toán tuy rất đơn giản, lời giải đẹp mộc mạc thuần túy hình học nhưng chứa đựng những ý nghĩa rất sâu sắc. Chúng ta hãy xét một số ứng dụng của nó qua các bài toán sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) các đường cao AD, BE, CF. AA' là đường kính của (O). $A'B, A'C$ cắt AC, AB lần lượt tại M, N. P, Q thuộc EF sao cho PB, QC vuông góc với BC. Đường thẳng qua A vuông góc với QN, PM lần lượt cắt (O) tại X, Y. Tiếp tuyến của (O) tại X, Y cắt nhau tại J. Chứng minh rằng JA' vuông góc BC.



Hình 2.

Lời giải. Theo bài toán 1 thấy PM, QN đi qua trung điểm I của BC. Lấy L thuộc (O) sao cho $AL \parallel BC$. Dựng $IK \parallel PQ \equiv EF \perp AA'$ khi đó dễ thấy IO đi qua trung điểm PQ nên chùm $I(KOPQ) = -1$. Ta lại thấy AO, AL, AY, AX lần lượt vuông góc với IK, IO, IP, IQ do đó $(A'LYX) = A(OLYX) = -1$. Vậy tứ giác $LXA'Y$ điều hòa, vậy tiếp tuyến tại X, Y của (O) cắt nhau trên $A'L \perp BC$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

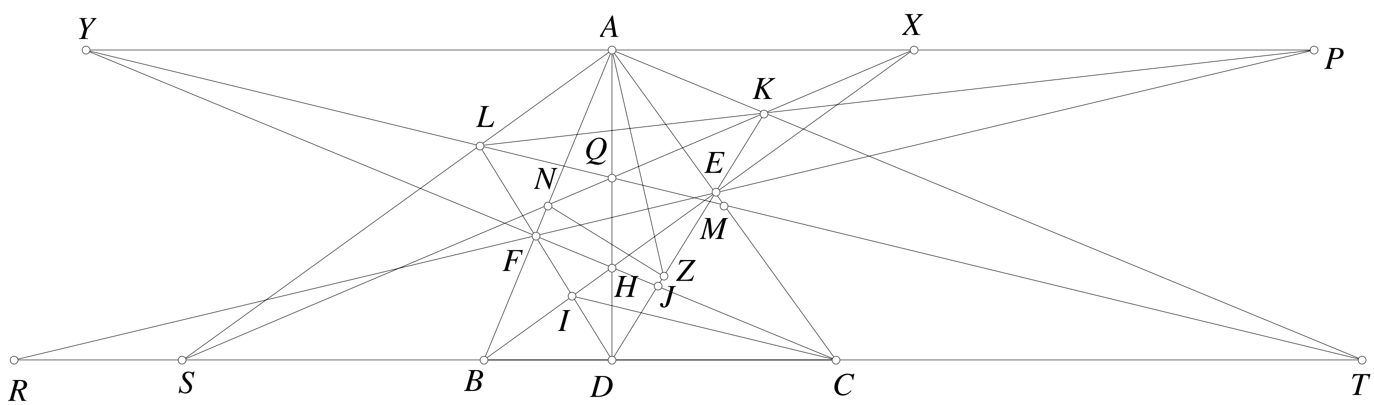
Nhận xét. Bài toán trên được tác giả dùng trong quá trình tập huấn đội tuyển KHTN năm 2009 và là đề ra trên THTT năm 2011.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H, các điểm D, E, F lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, AB. Gọi DE cắt đường thẳng qua A vuông góc AB tại K. Gọi KN giao BC tại S

a) Chứng minh rằng $AS \perp AC$.

b) Gọi DF cắt đường thẳng qua A vuông góc AC tại L. Chứng minh rằng LM, NK, AD đồng quy.

c) Gọi KL cắt EF tại P. Chứng minh rằng $AP \parallel BC$.



Hình 3.

Lời giải. a) Gọi Z là trung điểm của DE. Dễ thấy $NZ \perp DE$ vậy tứ giác $AKNZ$ nội tiếp. Suy ra $\angle AZE = \angle ANK = \angle SNB$. Mặt khác tứ giác $AEDB$ nội tiếp nên $\angle AEZ = \angle SBN$. Từ đó ta có $\triangle AEZ \sim \triangle SBN$. Mà E, N là trung điểm của DE, AB do đó $\triangle AED \sim \triangle SBA$. Từ đó $\angle SAB = \angle ADE = \angle ABE$ nên $AS \parallel BE \perp AC$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi ML cắt BC tại T. Tương tự câu a) có $AT \perp AB$ do đó A, L, S và A, K, T thẳng hàng. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ASC với L, M, T thẳng hàng ta có $\frac{LA}{LS}.\frac{TS}{TC}.\frac{MC}{MA} = 1$ suy ra $\frac{LA}{LS} = \frac{TC}{TS}$. Tương tự $\frac{KT}{KA} = \frac{ST}{SB}$. Từ đó chú ý $CH \parallel AT, BH \parallel AS$ ta có $\frac{LA}{LS}.\frac{DS}{DT}.\frac{KT}{KA} = \frac{TC}{TS}.\frac{DS}{DT}.\frac{ST}{SB} = \frac{TC}{TD}.\frac{DS}{SB} = \frac{AH}{AD}.\frac{AD}{AH} = 1$. Do đó SK, LT, AD đồng quy tại Q. Ta có điều phải chứng minh.

c) Gọi DF giao BE tại I. Ta chú ý trong tam giác AFD có B, I, H thẳng hàng nên áp dụng định lý Menelaus $\frac{HA}{HD}.\frac{ID}{IF}.\frac{BF}{BA} = 1$. Từ đó chú ý $IB \parallel AL$ ta có $\frac{CT}{CD} = \frac{HA}{HD} = \frac{IF}{ID}.\frac{BA}{BF} = \frac{IF}{ID}.\frac{IL}{IF} = \frac{IL}{ID}$. Do đó ta chứng minh được $CI \parallel LT$. Gọi đường thẳng qua A song song BC cắt LT tại Y. Ta thấy các tam giác ALY và BIC có các cạnh tương ứng song song nên IL, CY và BA đồng quy tại F. Tương tự SK giao AY tại X thì DK, BX, CA đồng quy tại E. Gọi EF giao BC tại R. XY là đường thẳng qua A song song BC. Gọi XY cắt EF tại P, ta sẽ chứng minh P, L, K thẳng hàng, thật vậy ta có biến đổi tỷ số

$$\frac{PX}{PY}.\frac{LY}{LQ}.\frac{KQ}{KX}$$

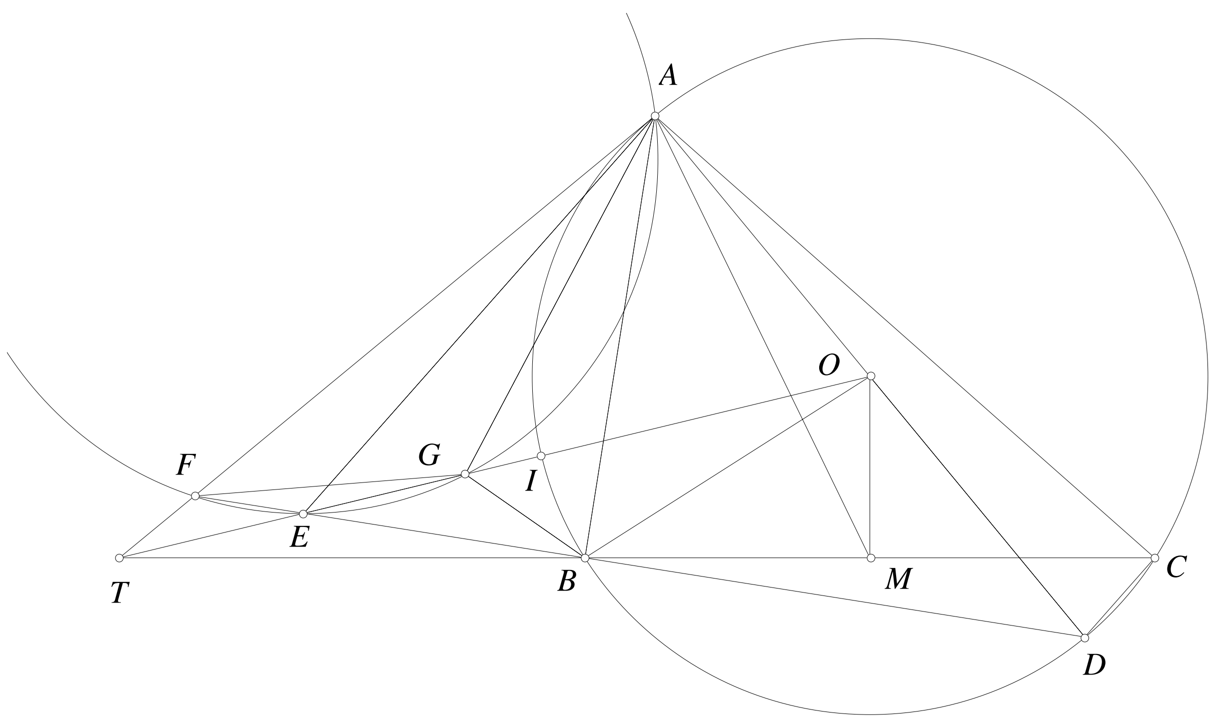
$= \frac{PX}{PA}.\frac{PA}{PY}.\frac{LY}{LT}.\frac{LT}{LQ}.\frac{KQ}{KS}.\frac{KS}{KX}$
$= \frac{RB}{RC}.\frac{RB}{RC}.\frac{AY}{ST}.\frac{LT}{LQ}.\frac{KQ}{KS}.\frac{ST}{AX}$
$= \frac{RB^2}{RC^2}.\frac{AY}{AX}.\frac{DT}{DS}$ (Chú ý áp dụng Ceva cho tam giác SQT với QD, SL, TK đồng quy)
$= \frac{DB^2}{DC^2}.\frac{AY}{AX}.\frac{AY}{AX}$ (Chú ý áp dụng Ceva và Menelaus cho tam giác ABC ta có $\frac{RB}{RC} = \frac{DB}{DC}$)
$= \frac{DB^2}{DC^2}.\frac{DC^2}{DB^2} = 1.$
Vậy P, L, K thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Các bạn để ý kỹ thì nội dung câu a) chính là bài toán 1. Các bước trong lời giải câu a) là mô phỏng lại cách chứng minh bài toán 1. Nếu các bạn biết về phép chiếu song song hoàn toàn có thể mở rộng bài toán bằng cách thay trực tâm H bởi điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Cách chứng minh gần như tương tự. Bài toán trên đã được tác giả dùng trong kỳ thi HSG lớp 10 ở trường THPT chuyên KHTN năm 2013.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. D là điểm đối xứng của A qua O. OT cắt DB tại E.

a) Chứng minh rằng AE song song CD.

b) Gọi BE cắt AT tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt EO tại G khác E. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác AGB nằm trên (O).



Hình 4.

Chứng minh. a) Gọi M là trung điểm BC. Dễ có $OM \perp BC$. Chú ý $OA \perp AT$. Vậy tứ giác $AOMT$ nội tiếp, suy ra $\angle AOT = \angle AMT$ suy ra $\angle EOD = \angle AMC$. Kết hợp góc nội tiếp $\angle BDA = \angle ACM$

suy ra hai tam giác đồng dạng $\triangle AMC \sim \triangle EOD$. Chú ý M là trung điểm BC, O là trung điểm AD ta suy ra hai tam giác đồng dạng tương ứng $\triangle EAD \sim \triangle ABC$. Vậy từ đó $\angle EAD = \angle ABC$. Do tam giác ABC nhọn, dễ có $\angle ABC + \angle OAC = 90°$ suy ra $\angle EAC = \angle EAD + \angle OAC = \angle ABC + \angle OAC = 90°$. Ta có $AE \perp AC \perp CD$ nên AE song song CD. Ta có điều phải chứng minh.

b) Từ a) dễ có $\angle FAE = \angle TAC - 90° = \angle DAC$. Do đó ta có $\angle FGT = \angle FAE = \angle DAC = \angle DBC = \angle FBT$ suy ra tứ giác $FGBE$ nội tiếp. Từ đó dễ có $\angle TGE = \angle TFB = \angle EGA$. Từ đó ta dễ có GO là phân giác $\angle AGB$ mà $OA = OB$ nên tứ giác $AGOB$ nội tiếp. Gọi đoạn GO cắt (O) tại I. Ta dễ có $OI = OA = OB$ mà I thuộc phân giác GO nên I là tâm nội tiếp tam giác AGB. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Các bạn để ý kỹ thì nội dung câu a) cũng chính là bài toán 1. Các bước trong lời giải câu a) là mô phỏng lại cách chứng minh bài toán 1. Bài toán trên được tác giả đề nghị trong kỳ thi HSG Vĩnh Phúc năm 2013.

Với bài toán tưởng chừng rất đơn sơ như bài toán 1 nếu biết ứng dụng vào trong nhiều tính huống khác nhau sẽ tạo ra được nhiều bài toán thú vị nữa. Các khám phá đó đang đợi các bạn.

Tài liệu

[1] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN. E-mail: analgeomatica@gmail.com

1 Năm 2011-2012

Bài 1.1 (KHTN vòng 1 năm 2011-2012 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác ABC. P là điểm bất kỳ trong tam giác. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại A', B', C'.

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$ có chung một điểm. Gọi điểm đó là Q.

b) Giả sử Q không thuộc các đường thẳng AA', BB', CC'. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AQA', BQB', CQC' có chung một điểm khác Q.

Bài 1.2 (KHTN vòng 1 năm 2011-2012 ngày thứ hai)**.** Cho tam giác ABC nhọn và điểm P bất kỳ nằm trong tam giác ABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm PA, PB, PC. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$. Giả sử OA_1, OB_1, OC_1 lần lượt cắt B_2C_2, C_2A_2, A_2B_2 tại A_3, B_3, C_3. Chứng minh rằng A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 đồng quy.

Bài 1.3 (KHTN vòng 2 năm 2011-2012 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác không cân ABC. Đường tròn nội tiếp (I) của tam giác ABC tiếp xúc với BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. AD giao EF tại J. M, N di chuyển trên đường tròn (I) sao cho M, J, N thẳng hàng và M nằm về phía nửa mặt phẳng chứa C bờ AD, N nằm về phía nửa mặt phẳng chứa B bờ AD. Giả sử DM, DN lần lượt cắt AC, AB tại P, Q.

a) Giả sử MN giao PQ tại T. Chứng minh rằng T luôn thuộc một đường thẳng d cố định.

b) Giả sử tiếp tuyến tại M, N của (I) cắt nhau tại S. Chứng minh rằng S thuộc d.

c) Giả sử SJ giao BC tại K. Chứng minh rằng IK vuông góc TD.

Bài 1.4 (KHTN vòng 2 năm 2011-2012 ngày thứ hai)**.** Cho tứ giác lồi $ABCD$ không có hai đường chéo vuông góc nội tiếp đường tròn (O). P là điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{AB}$ không chứa C, D. PD cắt AC tại M, PC cắt BD tại N. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác APM, BPN cắt nhau tại điểm Q khác P.

a) Chứng minh rằng PQ luôn đi qua điểm T cố định.

b) Gọi AC giao BD tại E, I là trung điểm CD. Chứng minh rằng E, I, T thẳng hàng.

Bài 1.5 (KHTN vòng 3 năm 2011-2012 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác ABC. M là điểm di chuyển trên đoạn thẳng BC. B' thuộc đoạn thẳng AC, C' thuộc đoạn thẳng AB sao cho $MB' \parallel AB, MC' \parallel AC$. Gọi N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của tam giác MBC' và MCB'. T là trung điểm N_bN_c. Chứng minh rằng MT luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.6 (KHTN vòng 3 năm 2011-2012 ngày thứ hai)**.** Cho tứ giác lồi $ABCD$ không là hình thang nội tiếp đường tròn (O). AD giao BC tại E. I là trung điểm CD. EI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác EAB tại M khác E. AC giao BD tại F. EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác EAB tại N khác E. Chứng minh rằng bốn điểm C, D, N, M cùng thuộc một đường tròn.

2 Năm 2012-2013

Bài 2.1 (KHTN vòng 1 năm 2012-2013 ngày thứ nhất)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với AB không là đường kính của (O). P là điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{CD}$ không chứa A, B của (O). PA cắt DB, DC lần lượt tại E, F. PB cắt CA, CD lần lượt tại G, H. GF giao EH tại Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

Bài 2.2 (KHTN vòng 1 năm 2012-2013 ngày thứ hai)**.** Cho tam giác ABC không cân nội tiếp đường tròn (O). P là điểm bất kỳ nằm trong tam giác ABC. AP cắt (O) tại D khác A. DE, AF là đường kính của (O). EP, FP lần lượt cắt (O) tại G, H khác E, F. AH giao DG tại K. L là hình chiếu của K lên đường thẳng OP.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A, L, K, D cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (S).

b) Chứng minh rằng OP cắt EF tại điểm T thuộc (S).

Bài 2.3 (KHTN vòng 2 năm 2012-2013 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác nhọn ABC. D là một điểm thuộc đoạn AC. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn thẳng BC tại E khác B. Tiếp tuyến tại B, D của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt nhau tại T. AT cắt đường tròn ngoại tiếp tại tam giác ABD tại F khác A. CF giao DE tại G. AG giao BC tại H. M là trung điểm của AF. AE giao MD tại N. Chứng minh rằng $HN \parallel AT$.

Bài 2.4 (KHTN vòng 2 năm 2012-2013 ngày thứ hai)**.** Cho tam giác ABC cân tại A và ABC là tam giác nhọn. D là một điểm thuộc đoạn thẳng BC sao cho $\angle ADB < 90°$. Từ điểm C kẻ các tiếp tuyến CM, CN tới đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD (M, N thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD). Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của CM, CN. Giả sử PQ cắt đoạn thẳng BC tại E. Lấy điểm F trên đoạn thẳng AE sao cho $\angle EFC = \angle DAC$. Chứng minh rằng $\angle BFE = \angle BAC$.

3 Năm 2013-2014

Bài 3.1 (KHTN vòng 1 năm 2013-2014 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Dựng hình chữ nhật $MNPQ$ sao cho M thuộc đoạn AB, N thuộc đoạn AC, P,Q thuộc đoạn BC với P nằm giữa Q,C và $\angle MNQ = \dfrac{\angle BAC}{2}$. Đường thẳng qua A vuông góc AB cắt NP tại K. Đường thẳng qua A vuông góc AC cắt MQ tại L. CL cắt NP tại E. BK cắt MQ tại F. Chứng minh rằng $AE = AF$.

Bài 3.2 (KHTN vòng 1 năm 2013-2014 ngày thứ hai)**.** Cho tam giác ABC với $AC > AB$. Phân giác góc $\angle BAC$ cắt BC tại D. E là điểm nằm giữa B,D sao cho $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$. Gọi K,L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EAB, EAC. Gọi P,Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KAB, LAC. Chứng minh rằng PQ song song KL.

Bài 3.3 (KHTN vòng 2 năm 2013-2014 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác ABC cố định, nhọn, không cân, nội tiếp đường tròn (O). D là điểm thuộc đoạn BC sao cho AD là phân giác $\angle BAC$. P là một điểm di chuyển trên đoạn thẳng AD. Q là điểm thuộc đoạn thẳng AD sao cho $\angle PBC = \angle QBA$. R là hình chiếu của Q lên đoạn BC. Gọi d là đường thẳng đi qua R và vuông góc với OP. Chứng minh rằng đường thẳng d luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Bài 3.4 (KHTN vòng 2 năm 2013-2014 ngày thứ hai)**.** Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi K, L, N lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác DEC, BCA, FAE. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của K, L, N theo thứ tự lên AD, BE, CF. Chứng minh rằng trung trực của AX, EY, CZ đồng quy.

Từ một bài toán quen thuộc tới các bài toán thi Olympiad

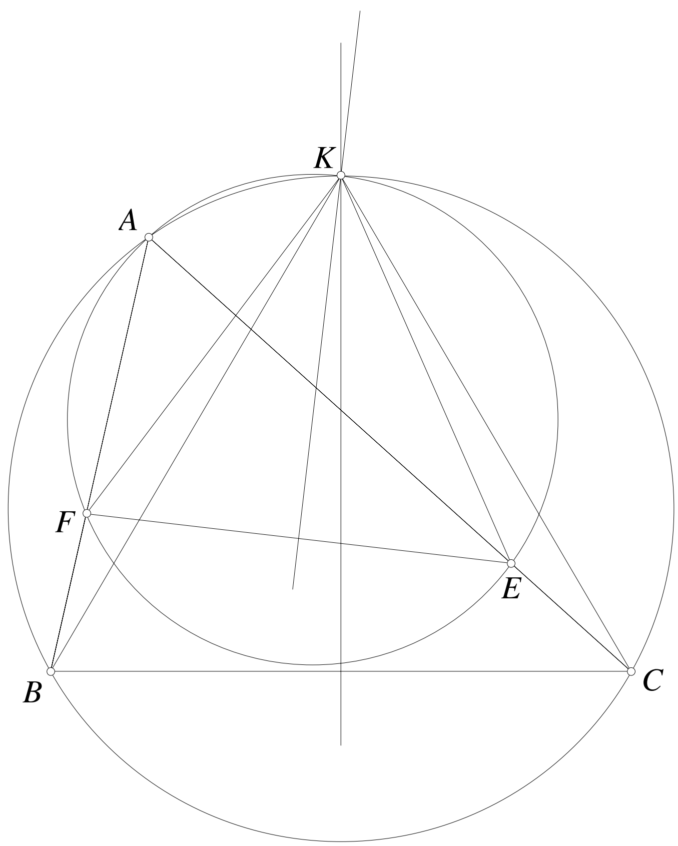
Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài biết này chủ yếu xoay quanh ứng dụng của một bài toán quen thuộc mà các em học sinh có lẽ đã được làm quen từ lớp 7 dưới một số cách phát biểu khác nhau.

Chúng ta hầu như đều biết bài toán quen thuộc sau đây.

Bài 1. *Cho tam giác ABC trên cạnh CA, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $CE = BF$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau trên trung trực của BC và trung trực của EF.*



Hình 1.

Lời giải. Gọi trung trực BC và EF cắt nhau tại K. Dễ chứng minh các tam giác bằng nhau $\triangle KEC = \triangle KFB$ (*c.c.c*). Từ đây suy ra $\angle KCE = \angle KBF$ vậy tứ giác $AKCB$ nội tiếp. Cũng từ hai tam giác bằng nhau suy ra $\angle KEC = \angle KFB$ suy ra $\angle KEA = \angle KFA$ vậy tứ giác $AKEF$ cùng nội tiếp. Vậy K cũng là giao của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và ABC. Ta hoàn tất chứng minh. ☐

Nhận xét. Bài toán mà các bạn lớp 7 quen thuộc chính là chứng minh trung trực EF luôn đi qua điểm cố định. Khi đó trong bài toán và lời giải không cần đến các yếu tố đường tròn. Bạn nào đã quen thuộc phép biến hình thì có thể thấy K chính là tâm quay biến CE thành BF và nội dung của bài toán cũng chính là cách dựng K, ta lấy giao điểm khác A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và ABC. Bài toán này mang đậm chất biến hình xong lời giải của bài toán cũng như trong toàn bộ bài viết này được trình bày một cách đơn giản nhất chỉ mang nội dung kiến thức của cấp THCS chứ không thông qua các phép biến hình.

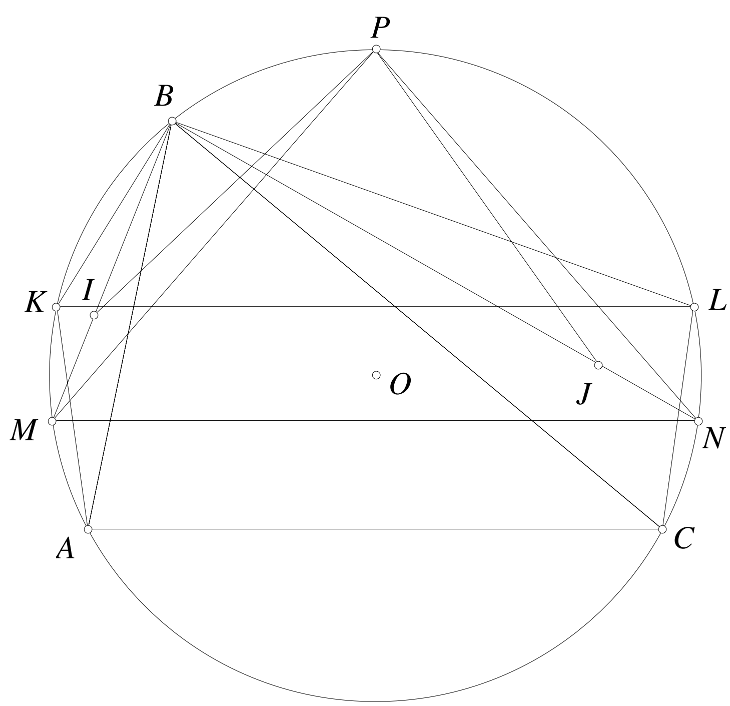
Bài toán có nhiều ứng dụng hay mà nhiều đề thi các nước thậm chí là bài hình học thi toán quốc tế năm 2013 cũng đã khai thác nó. Sau đây là một số ví dụ

Bài 2 (Olympic Toán toàn Nga 2006, lớp 10)**.** *Lấy K, L là hai điểm trên các cung $\overset{\frown}{AB}$ và $\overset{\frown}{BC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho $KL \parallel AC$. Chứng minh rằng tâm nội tiếp các tam giác BAK và BCL cách đều trung điểm cung $\overset{\frown}{ABC}$ của tam giác ABC.*

Chúng ta có bổ đề sau

Bổ đề 1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm đường tròn nội tiếp I. Tia AI cắt đường tròn (O) tại D khác A thì D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.*

Bổ đề trên là một kết quả rất quen thuộc của tâm đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác. Xin không trình bày lại chứng minh ở đây.



Hình 2.

Giải bài toán. Gọi I, J là tâm nội tiếp tam giác BAK và BCL. Gọi BI, BJ cắt đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC tại M, N khác B, ta dễ thấy M, N là trung điểm các cung $\overset{\frown}{KA}$, $\overset{\frown}{LC}$. Do $KL \parallel AC$ nên $KA = LC$ và $MN \parallel AC$ do đó kết hợp bổ đề trên dễ chỉ ra $MI = MK = NL = NJ$.

Áp dụng bổ đề trên cho tam giác BMN nội tiếp (O) với $MI = NJ$ ta suy ra $PI = PJ$ với P là trung điểm $\overset{\frown}{MBN}$. Ta chú ý $MN \parallel AC$ nên P cũng là trung điểm $\overset{\frown}{MBN}$ vậy ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán có thể làm khó hơn bằng cách yêu cầu chứng minh rằng trung trực IJ luôn đi qua điểm cố định hoặc chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ luôn đi qua một điểm cố định khác A khi K, L di chuyển trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Bài toán này là bài toán đẹp có ý nghĩa. Ta có một ứng dụng của nó như sau

Bài 3. *Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với $AB \parallel CD$. P là một điểm trên (O). Gọi K, L, M, N là tâm nội tiếp các tam giác PAD, PBC, PAC, PBD. Chứng minh rằng các đường tròn PKL, PMN và (O) đồng trục.*

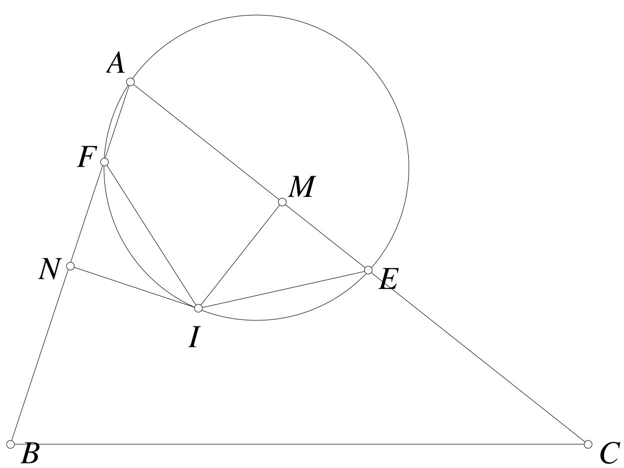
Bài tập này chỉ là ứng dụng đơn giản của bài thi vô địch Nga, các bạn hãy làm nó như một bài tự luyện. Cũng trong kỳ thi vô địch Nga có một bài toán khác thú vị như sau

Bài 4 (Olympic Toán toàn Nga 2011, lớp 11)**.** *Cho N là trung điểm cung $\overset{\frown}{ABC}$ của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. M là trung điểm BC. Gọi I_1, I_2 là tâm nội tiếp tam giác ABM, CBM. Chứng minh rằng I_1, I_2, B, N cùng thuộc một đường tròn.*

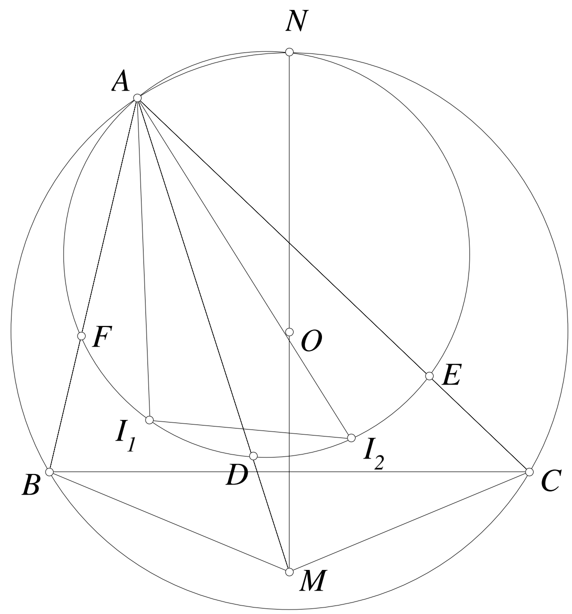
Bài tập trên là một bài toán có phát biểu rất đẹp và nhiều ý nghĩa. Trong quá trình tìm hiểu, tác giả bài viết đã tìm ra một tổng quát của nó và đã đề nghị bài tổng quát này trong cuộc thi Mathley. Bài toán như sau

Bài 5 (Mathley 9)**.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc trung trực BC. I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB, MAC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2 luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di chuyển.*

Bổ đề 2. *Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn bất kỳ qua A, I cắt CA, AB tại E, F khác A thì $AE + AF = CA + AB - BC$.*



Chứng minh. Gọi M, N là hình chiếu của I lên CA, AB. Dễ thấy $\triangle INF = \triangle IME$ $(c.g.c)$ từ đó suy ra $AE = AF = AM + AN = CA + AB - BC$. □

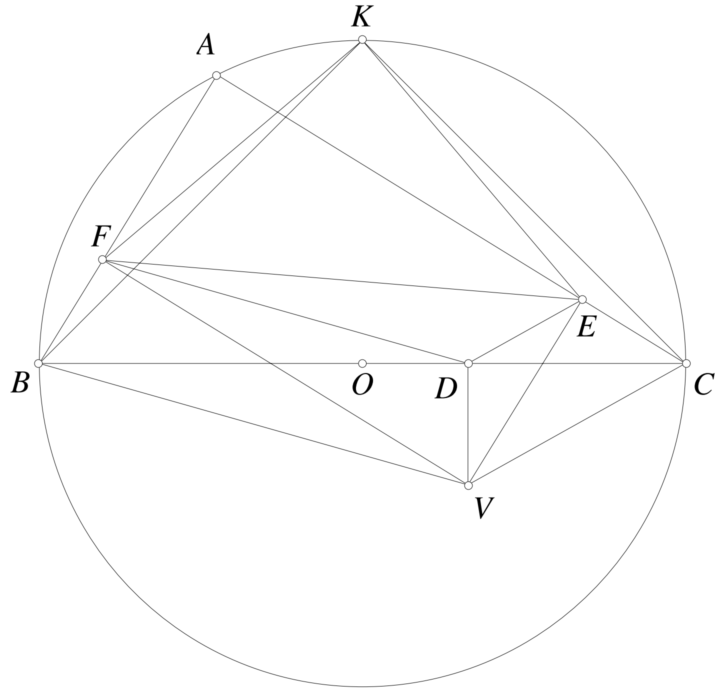


Giải bài toán. Gọi đường tròn ngoại tiếp (AI_1I_2) cắt AM, CA, AB lần lượt tại D, E, F khác A. Theo bổ đề trên dễ thấy $AD + AF = AB + AM - MB, AD + AE = AC + AM - MC$. Trừ hai đẳng thức chú ý $MB = MC$ ta được $AF - AE = AB - AC$ hay $AB - AF = AC - AE$. Do đó trong các trường hợp E, F cùng phía hoặc khác phía BC ta cũng đều có $BF = CE$. Vậy theo bài toán 1 gọi N là trung điểm cung BC chứa A thì $(AI_1I_2) \equiv (AEF)$ đi qua N. Vậy tâm ngoại tiếp AI_1I_2 thuộc trung trực AN cố định. Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Nếu gọi I_3, I_4 lần lượt là tâm bàng tiếp góc A của tam giác $\triangle MAB, \triangle MAC$ thì chứng minh tương tự đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_3I_4 cũng đi qua N. Hơn nữa nếu gọi I_5, I_6 lần lượt chia I_1I_3, I_2I_4 cùng tỷ số thì đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_5I_6 cũng đi qua N. Các nhận xét đó đều chứng minh tương tự bài toán trên dựa vào bài toán ban đầu của chúng ta. Ta bước đầu có sự cảm nhận thú vị về hai bài toán thi vô địch Nga.

Sau đây là một bài toán cũng rất nổi tiếng xuất hiện trong kì thi Olympic Toán quốc tế 2013 vừa qua.

Bài 6 (IMO 2013 bài 3)**.** *Cho tam giác giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông khi và chỉ khi tâm ngoại tiếp tam giác DEF nằm trên (O).*



Lời giải. K là trung điểm cung $\overset{\frown}{BAC}$. Từ tính chất của các tiếp điểm bàng tiếp ta dễ chứng minh $BF = CE$ nên theo bài toán 1 trung trực EF đi qua K. Nếu tâm ngoại tiếp tam giác DEF thuộc (O) sẽ nằm ngoài tam giác DEF nên khi đó tam giác DEF tù. Không mất tổng quát giả sử $\angle EDF$ tù. Do tâm ngoại tiếp tam giác DEF cũng thuộc trung trực EF vậy tâm ngoại tiếp tam giác DEF phải là giao của trung trung trực EF và (O). Giao điểm này phải nằm trong góc $\angle EDF$ nên giao điểm này chính là K. Vậy K cũng là tâm ngoại tiếp tam giác DEF.

Dễ thấy các đường thẳng qua tâm bàng tiếp I_a, I_b, I_c lần lượt vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại điểm V. Từ đó các tứ giác $DFBV, DECV$ nội tiếp. Chú ý K là tâm ngoại tiếp tam giác EDF nên ta suy ra $\angle BVC = \angle BVD + \angle CVD = \angle AFD + \angle AED = 360^\circ - \angle BAC - \angle EDF = 360^\circ - \angle EKF - \dfrac{360^\circ - \angle EKF}{2} = \dfrac{360^\circ - \angle EKF}{2}$.

Mặt khác $KB = KC$. Từ đó dễ suy ra K là tâm ngoại tiếp tam giác BVC hay $KB = KV = KC$. Vậy ta chú ý rằng tứ giác $DFBV$ nội tiếp và các cạnh FD, BV có chung đường trung trực, từ đó theo tính chất đối xứng dễ suy ra $VF = BD = AE$ và tương tự $VE = CD = AF$. Vậy tứ giác $AEVF$ là hình bình hành mà $\angle AEV = \angle AFV = 90^\circ$ vậy đó là hình chữ nhật suy ra $\angle BAC = 90^\circ$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán thi quốc tế là một bài toán đẹp và ý nghĩa. Một điều thú vị là bài toán này cũng là bài toán đề nghị từ nước Nga. Bài toán có nhiều phát triển và mở rộng, dưới đây xin giới thiệu một số phát triển và mở rộng này

Bài 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I, M là trung điểm của BC. N đối xứng I qua M. Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Gọi X, Y, Z là hình chiếu của N lên BC, CH, HB. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác XYZ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC.*

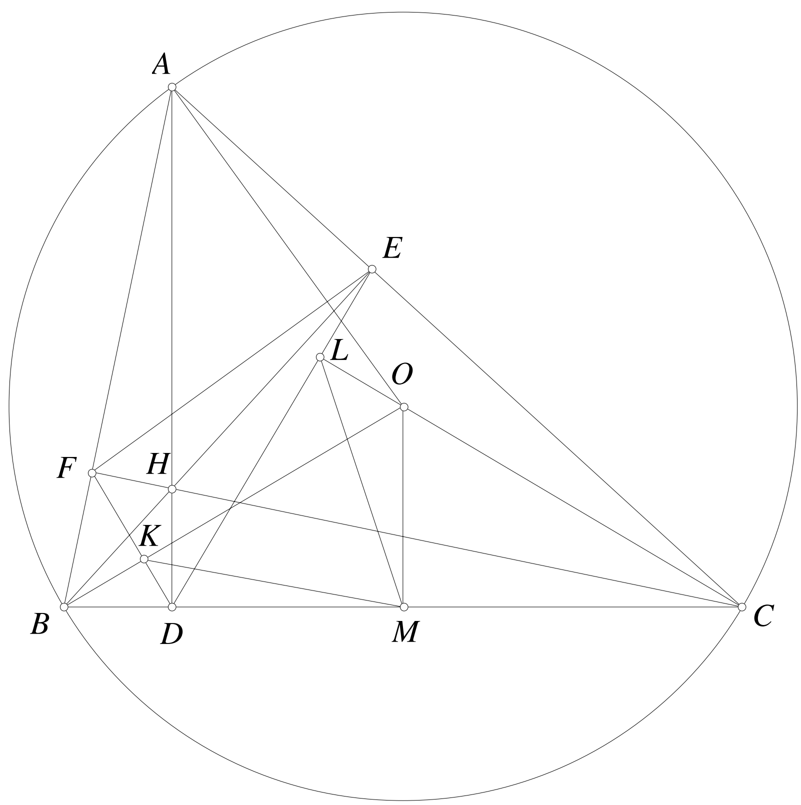
Bài 8. *Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm nội tiếp I, M là trung điểm của BC, N đối xứng I qua M. P là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Gọi X, Y, Z là hình chiếu* *của N lên BC, CP, PB. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Chứng minh rằng K luôn thuộc một đường tròn cố định khi P di chuyển.*

Bài 9. *Cho tam giác ABC vuông tại A. Tâm bàng tiếp góc A là I_a. V đối xứng với I_a qua trung điểm BC. Gọi D, E, F là hình chiếu của V lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giac DEF nằm trên (O).*

Bài 10. *Cho tam giác ABC vuông tại A, tâm nội tiếp I. P là một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC. Gọi D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P di chuyển.*

Các bài toán mở rộng trên đều được phát triển từ bài thi IMO và lời giải cũng tương tự lời giải bài IMO, các bạn hãy làm như các bài tự luyện. Sau đây là một bài toán ứng dụng của bài toán 1

Bài 11. *Cho tam giác ABC nhọn có, trực tâm H, tâm ngoại tiếp O, bán kính đường tròn ngoại tiếp là R. Trên các tia BO, CO lấy các điểm K, L sao cho $\dfrac{BA.BH}{BK} = \dfrac{CA.CH}{CL} = \dfrac{4R^2}{BC}$. Chứng minh rằng trung trực KL đi qua trung điểm BC.*



Hình 3.

Lời giải. Gọi AD, BE, CF là đường cao của tam giác ABC. Gọi OB giao FD tại K'. Dễ thấy BK' là đường cao của tam giác BFD. Ta lại có tam giác BFD và tam giác BCA đồng dạng nên $\dfrac{BK'}{BE} = \dfrac{FD}{AC} = \dfrac{HB.\sin B}{AC} = \dfrac{HB}{2R}$. Suy ra $BK' = \dfrac{BE.BH}{2R} = \dfrac{BE.\frac{4R^2.BK}{BA.BC}}{2R} = BK\dfrac{BE.2R}{BA.BC} = BK$. Do đó $K' \equiv K$. Tương tự L là hình chiếu của C lên DE. Vậy ta chú ý rằng B, C là tâm bàng tiếp của tam giác DEF do đó K, L là các tiếp điểm bàng tiếp với các cạnh DF, DE nên ta dễ chứng minh $FK = EL$. Ta chú ý nếu M là trung điểm BC thì M, D, E, F cùng thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC hơn nữa dễ có $ME = MF$ nên M chính là trung điểm $\overset{\frown}{EDF}$ của đường tròn Euler. Áp dụng bài tập 1 dễ chỉ ra trung trực KL đi qua M. Ta có điều phải chứng minh. □

Một kết quả đẹp khác từ bài toán 1 như sau

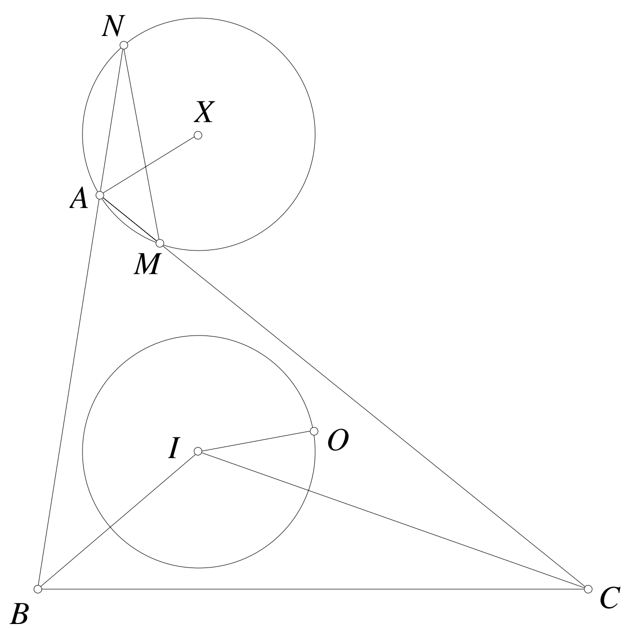
Bài 12. *Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là đối xứng của B, C, C, A, A, B qua IC, IB, IA, IC, IB, IA. Gọi X, Y, Z là tâm ngoại tiếp các tam giác AMN, BPQ, CRS.*

a) Chứng minh rằng I là tâm ngoại tiếp tam giác XYZ.

b) Chứng minh rằng trực tâm tam giác XYZ là tâm ngoại tiếp của tam giác ABC.

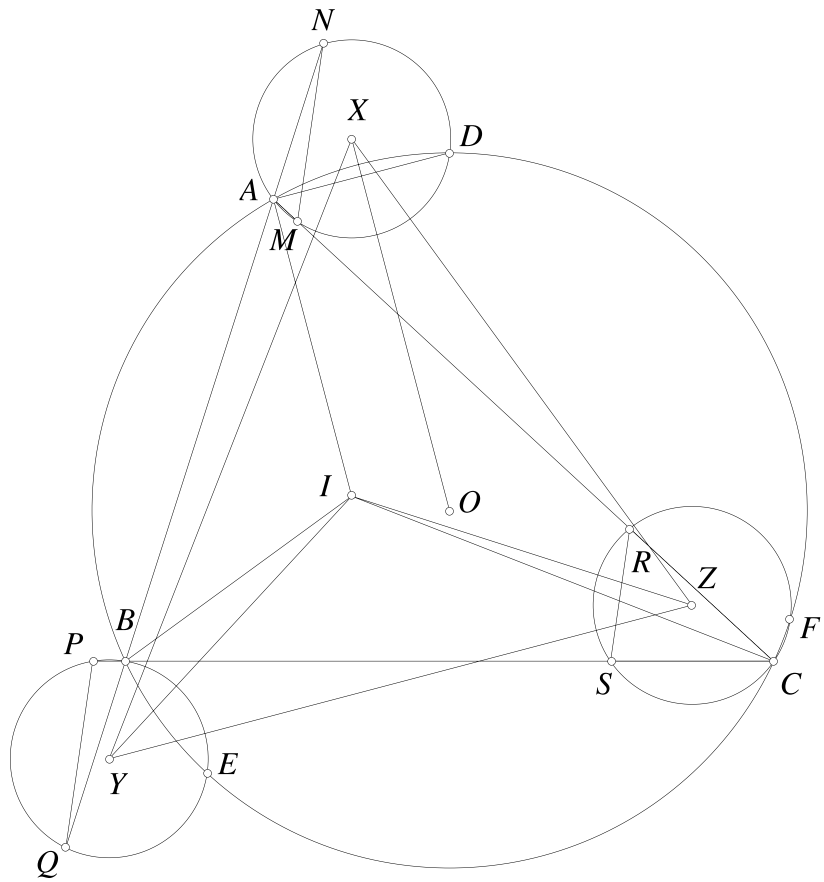
Ta có bổ đề sau

Bổ đề 3. *Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I, tâm ngoại tiếp O. Gọi M, N là đối xứng của B, C lần lượt qua IC, IB thì MN vuông góc OI và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng OI.*



Hình 4.

Đây là một bổ đề rất quen thuộc và xuất hiện nhiều trong các tài liệu khác nhau, các bạn có thể tham khảo nhiều lời giải trong [1,2,3] xin không trình bày lại chứng minh. Quay lại bài toán



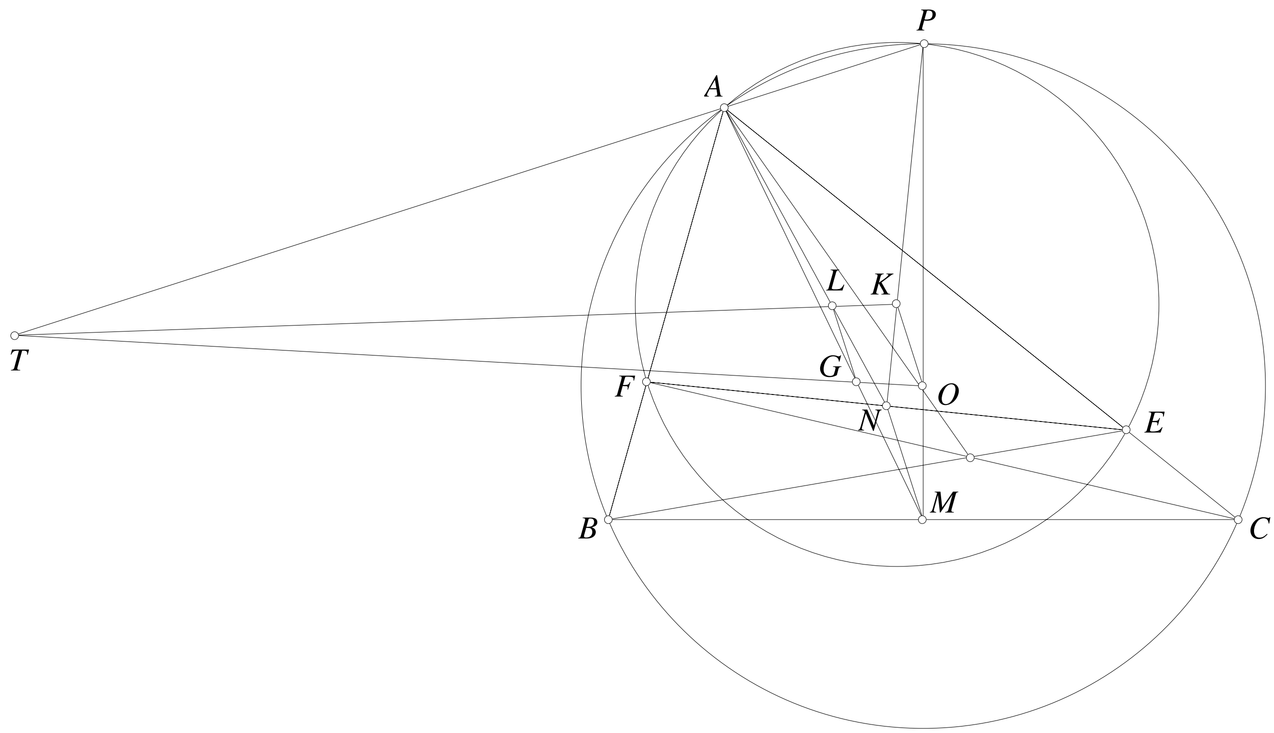
Hình 5.

Lời giải. a) Theo bổ đề trên bán kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ và CRS bằng nhau mà C, Q và B, R đối xứng nhau qua IA, từ đó dễ thấy hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ và CRS đối xứng nhau qua IA. Nên Y và Z là hai tâm tương ứng đối xứng nhau qua IA vậy $IY = IZ$. Tương tự suy ra I là tâm ngoại tiếp tam giác XYZ. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta chú ý rằng do tính đối xứng nên $MN = CM$ cùng bằng BC do đó theo bài toán 1 thì đường tròn (X) ngoại tiếp tam giác AMN đi qua D là trung điểm $\overset{\frown}{BAC}$ của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó dễ suy ra OX vuông góc AD. Ta chú ý AD chính là phân giác ngoài tại A của tam giác ABC nên AD vuông góc AI do đó ta dễ suy ra $OX \parallel AI$. Theo chứng minh trên YZ đối xứng nhau qua AI nên YZ vuông góc AI do đó YZ vuông góc OX. Tương tự dễ chỉ ra O là trực tâm tam giác XYZ. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán là kết quả đẹp có ý nghĩa. Nó xuất phát từ một kết quả nghiên cứu trong [5], thông qua bài toán 1 nó được chứng minh đơn giản hơn như trên. Bài toán này có có một hệ quả đẹp là đường thẳng Euler của tam giác XYZ cũng là đường thẳng OI của tam giác ABC. Ngoài ra ta còn chú ý rằng từ chứng minh phần b) dễ suy ra $IX = OA$ do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ và ABC có bán kính bằng nhau. Ta lại tiếp tục một bài toán khác liên quan tới bài toán 1

Bài 13. *Cho tam giác ABC. E, F di chuyển trên cạnh CA, AB sao cho $CE = BF$. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác AEF luôn đi qua một điểm cố định khi E, F di chuyển.*

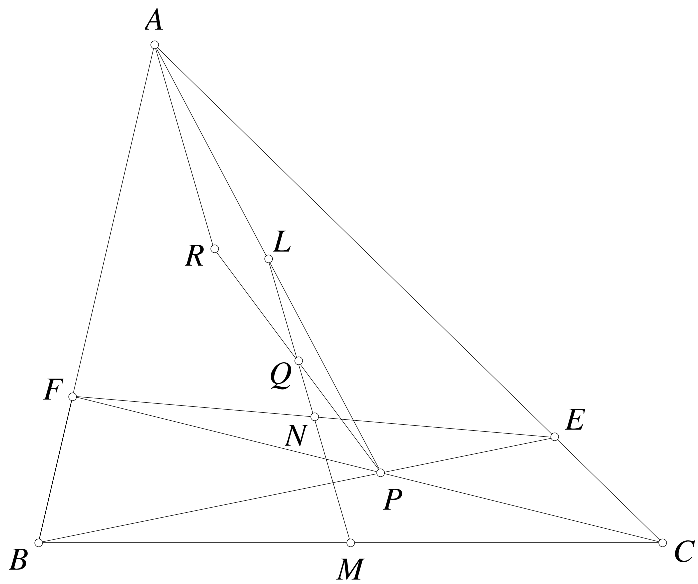


Hình 6.

Lời giải. Gọi G, L lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và AEF. Gọi (O) và (K) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AEF. LK, GO là đường thẳng Euler của tam giác AEF và ABC. Gọi LK giao GO tại T ta sẽ chứng minh T cố định, thật vậy, theo bài toán 1 thì (O) và (K) cắt nhau tại P trên trung trực EF và BC. Gọi M, N là trung điểm BC, EF. Ta dễ thấy các tam giác cân PEF và PCB đồng dạng có tâm ngoại tiếp lần lượt là K và O, trung điểm đáy lần lượt là N, M. Do đó theo tính chất đồng dạng dễ chỉ ra $\dfrac{PK}{PN} = \dfrac{KO}{MN} = \dfrac{PO}{PM}$ là tỷ số cố định, mặt khác từ đây cũng suy ra $MN \parallel KO$. Ta lại chú ý $\dfrac{GL}{MN} = \dfrac{2}{3}$ và $GL \parallel MN$. Do đó $GL \parallel KO$ và $\dfrac{GL}{KO} = \dfrac{GL}{MN}.\dfrac{MN}{KO} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{PM}{PO}$ là tỷ số cố định. Từ đó ta có $\dfrac{TG}{TO} = \dfrac{GL}{KO}$ không đổi do đó T cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán lại cho ta một kết luận quan trọng là đường thẳng Euler của tam giác AEF đi qua điểm cố định nếu ứng dụng nó vào chuỗi các bài toán ta vừa xây dựng ở trên thì nó giúp ta tìm ra nhiều kết quả sâu sắc khác. Ngoài ra trong chứng minh trên ta có thể chỉ ra điểm cố định T nằm trên AP là phân giác ngoài góc A. Ta có một chú ý quan trọng nữa là trong chứng minh trên ta dễ chỉ ra MN song song OK và cùng vuông góc AP hay cùng song song phân giác góc A. Đây là một kết quả đã khá quen thuộc mà các bạn lớp 7,8 thường hay dùng các tính chất trung điểm và tam giác cân trong tứ giác $EFBC$ có hai cạnh bằng nhau để chứng minh. Kết quả này cũng cho ta một hệ quả đẹp sau

Bài 14. *Cho tam giác ABC. E, F nằm trên cạnh CA, AB sao cho $CE = BF$. BE giao CF tại P. Gọi M, N là trung điểm của BC, EF. Q là một điểm trên đường thẳng MN. Gọi R là đối xứng của P qua Q. Chứng minh rằng AR là phân giác của tam giác ABC.*



Hình 7.

Lời giải. Gọi L là trung điểm AP ta đã quen thuộc với kết quả của đường thẳng Gauss-Newton thì M, N, L thẳng hàng do đó theo tính chất đường trung bình thì AR song song $QR \equiv MN$. Theo nhận xét bài trên thì AR là phân giác tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

Để kết thúc bài viết các bạn hãy cùng làm các bài tập sau để thực hành sâu hơn về bài toán 1 cũng như các bài toán trong bài viết.

Bài 15. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF và tâm ngoại tiếp O. Gọi OA, OB, OC lần lượt cắt EF, FD, DE tại X, Y, Z Giả sử tâm ngoại tiếp tam giác XYZ nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC. Chứng minh rằng tam giác ABC có một góc là $45°$.*

Bài 16. *Cho tam giác ABC, đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Đường tròn qua D, H và trực giao với đường tròn (HBC) cắt (HBC) tại X khác H. Tương tự có Y, Z. Gọi (K) đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Đường thẳng qua H vuông góc với HK cắt (XYZ) tại M, N. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại M, N của (XYZ) cắt nhau trên (O) khi và chỉ khi tam giác ABC có một góc $45°$.*

Bài 17. *Cho tam giác giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn bàng tiếp góc A, B, C lần lượt tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Giả sử rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF đi qua tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với BC. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông.*

Bài 18. *Cho tam giác ABC, trên tia đối tia BA, CA lấy các điểm M, N sao cho $BM = BN = BC$. Gọi I_a và O lần lượt là tâm bàng tiếp góc A và tâm ngoại tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng $MN \perp OI_a$ và bán kinh đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN là OI_a.*

Bài 19. *Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là đối xứng của E, F, F, D, D, E qua các đường thẳng AB, AC, BC, BA, CA, CB. Gọi X, Y, Z là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN, EPQ, FRS. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác XYZ và tam giác ABC trùng nhau.*

Bài 20. *Cho tam giác ABC. E, F di chuyển trên cạnh CA, AB sao cho $CE = BF$. Chứng minh rằng tâm đường tròn Euler của tam giác AEF luôn thuộc một đường thẳng cố định khi E, F di chuyển.*

Tài liệu

[1] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, Toán nâng hình học 10, NXBGD 2000

[2] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, Bài tập nâng cao và một số chuyên đề hình học 10, NXBGD 2010

[3] Bosnia and Herzegovina TST 2012 Problem 5 on AoPS

[4] Russia All-Russian Olympiad on AoPS

[5] Quang Tuan Bui, Two triads of congruent circles from reflections, Forum Geometricorum, 8 (2008)

Xung quanh bài hình học thi VMO năm 2014

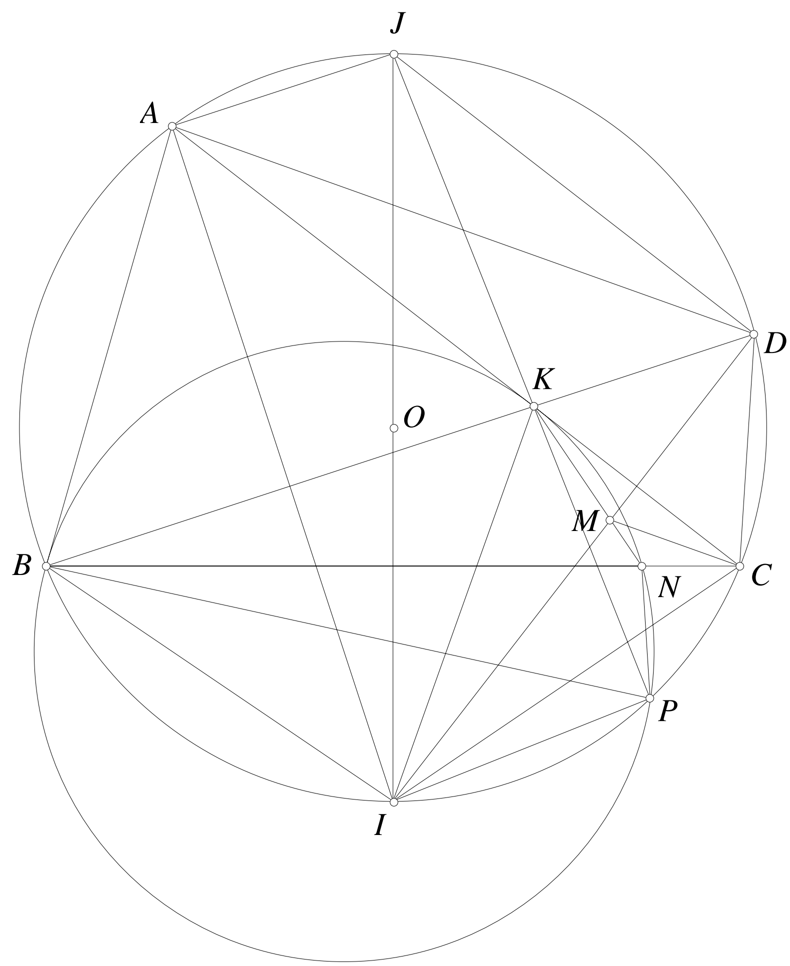
Trần Quang Hùng - Trường THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và khai thác bài hình học thi quốc gia Việt Nam năm 2014 ngày thứ nhất.

Trong kỳ thi học sinh giỏi Việt Nam năm 2014 có một bài toán hay, đề bài được thu gọn cho phù hợp với bài viết như sau

Bài 1. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi I là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Trên AC lấy điểm K khác C sao cho $IK = IC$. Đường thẳng BK cắt (O) tại D khác B. Trên DI lấy điểm M sao cho CM song song với AD. Đường thẳng KM cắt đường thẳng BC tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt (O) tại P khác B. Chứng minh rằng PK chia đôi đoạn AD.*



Hình 1.

Chứng minh. Do I là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A nên $IB = IC = IK$. Từ đó ta có biến đổi góc $\angle IKD = 180^\circ - \angle IKB = 180^\circ - \angle IBK = \angle ICD \quad (1)$. Ta lại chú ý do I là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ nên DI là phân giác $\angle BDC \quad (2)$.

Từ (1),(2) ta dễ suy ra $\angle KID = \angle CID$. Vậy từ đó $\triangle KID = \triangle CID$ $(c.g.c)$ suy ra $DK = DC$ do đó DI là trung trực KC. Tương tự AI là trung trực BK.

Gọi IJ là đường kính của (O) ta dễ có $AJ \perp AI \perp BD$ suy ra $AJ \parallel KD$ và $JD \perp ID \perp KC$ do đó $JD \parallel AK$. Từ đó suy ra tứ giác $AJDK$ là hình bình hành vậy KJ đi qua trung điểm AD. Ta chỉ cần chứng minh J, K, P thẳng hàng thì bài toán được giải quyết. Thật vậy, ta có biến đổi góc

$\angle IPK = \angle IPB + \angle BPK$

$= \angle BAI + \angle BNK$ (Do tứ giác $BKNP$ nội tiếp)

$= \angle BAI + (\angle NKC + \angle NCK)$ (Tính chất góc ngoài)

$= \angle BAI + \angle MCK + \angle BCK$ (Do tính đối xứng, chú ý ID là trung trực KC)

$= \angle BAI + \angle CAD + \angle BCK$ (Do $CM \parallel AD$)

$= \angle BAI + \angle CBD + \angle BCK$ (Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp)

$= \angle IAK + \angle AKB$ (Tính chất góc ngoài)

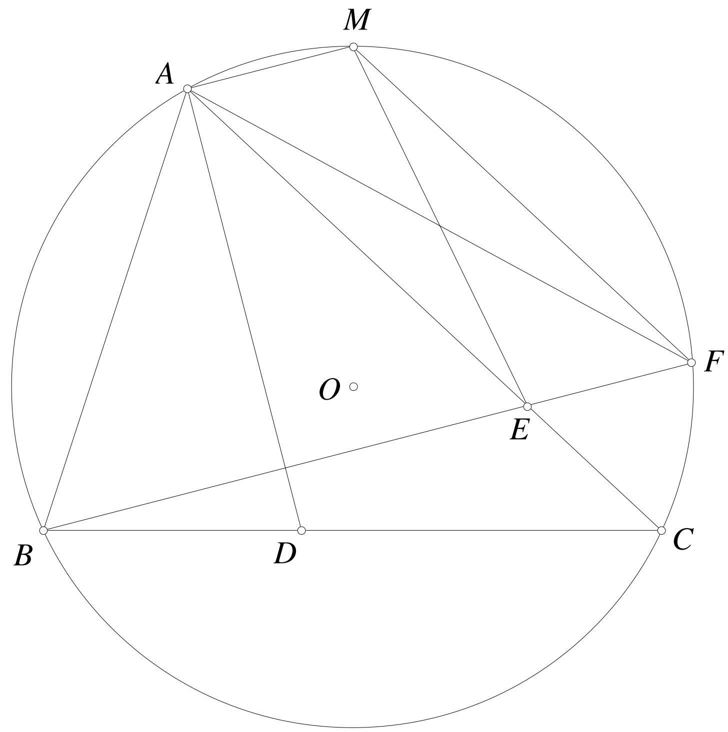
$= 90^\circ$ (Do $BK \perp AI$)

$= \angle IPJ$ (Do IJ là đường kính của (O)).

Từ đó suy ra P, K, J thẳng hàng. Kết hợp các nhận xét ban đầu ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán là một kết quả đẹp và chặt chẽ. Trong lời giải trên của bài toán ta có thể tóm lược lại ý chính là nằm trong bài toán sau

Bài 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), phân giác AD. Gọi E đối xứng B qua AD. BE cắt (O) tại F khác B. Gọi M là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của (O). Chứng minh rằng ME đi qua trung điểm AF.*



Hình 2.

Cách giải bài toàn này nằm trong phần đầu của chứng minh trên. Đây là một kết quả khá có ý nghĩa. Bài toán 2 cũng có thể được nhìn dưới một cách khác như sau

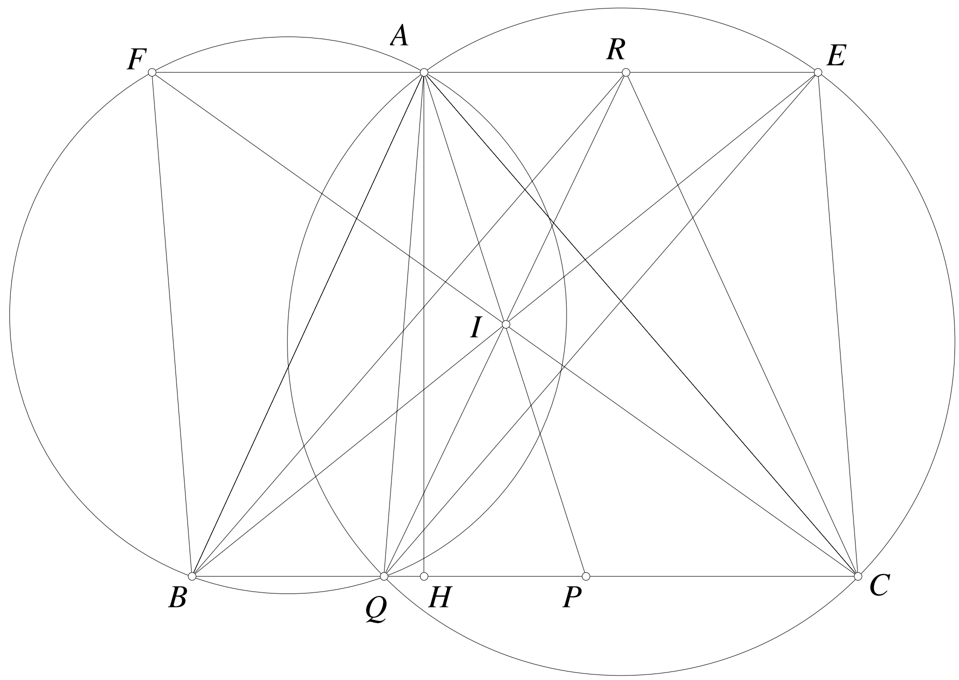
Bài 3. *Cho tam giác ABC cân tại A. P là một điểm thuộc đường thẳng BC. Chứng minh rằng đối xứng của C qua trung điểm AP nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APB.*

Đây là một kết quả hết sức đơn giản về tứ giác nội tiếp. Tuy vậy nếu để ý kỹ các bạn dễ thấy là bài toán 3 thực chất cũng là bài toán 2 áp dụng cho tam giác cân ABE. Bài toán có một mở rộng trong tam giác bất kỳ như sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên đường thẳng BC. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của B, C qua trung điểm AP.*

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE, ABF cắt nhau tại một điểm Q nằm trên BC.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overline{QP} = \overline{HB} + \overline{HC}$.



Hình 3.

Chứng minh. a) Để đơn giản ta xét trường hợp như hình vẽ. Ta dễ thấy tứ giác $BCEF$ là hình bình hành nên $\angle AQB = 180^\circ - \angle AFB = \angle AEC = 180^\circ - \angle AQC$ suy ra $\angle AQB + \angle AQC = 180^\circ$ nên Q thuộc BC.

b) Gọi R đối xứng Q qua trung điểm I của AP dễ thấy R thuộc EF và tứ giác $ARPQ$ là hình bình hành nên $\overline{PQ} = \overline{AR}$. Ta lại dễ thấy tứ giác $BREQ$ là hình bình hành nên $BR = QE \quad (1)$. Mặt khác $AECQ$ là hình thang nội tiếp nên $AECQ$ là hình thang cân do đó $QC = QE \quad (2)$.

Từ (1),(2) suy ra $BR = AC$ từ đó ta có tứ giác $ARCB$ là hình thang cân nên R cố định. Từ đó $\overline{PQ} = \overline{AR}$ không đổi. Mặt khác gọi AH là đường cao của tam giác ABC cũng là đường cao của hình thang cân $ARCB$ ta dễ chứng minh $\overline{AR} = \overline{HB} + \overline{HC}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Nếu tam giác ABC cân ta thu được bài toán 3. Nếu sử dụng cách phát biểu đối xứng ta có thể đề xuất bài toán như sau từ bài toán 2

Bài 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp là I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AM, AN. Chứng minh rằng EK và FL cắt nhau trên đường tròn (O).*

Qua bài toán 2 ta dễ thấy EK, FL đều đi qua trung điểm cung $\overparen{BC}$ chứa A. Một cách tự nhiên bài toán 5 có thể mở rộng thành bài toán sau

Bài 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (D) đi qua B, C cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Các điểm K, L lần lượt thuộc AM, AN sao cho $KL \parallel EF$. Gọi BE giao CF tại S. Gọi EK giao FL tại T. Chứng minh rằng A, S, T thẳng hàng.*

Bài toán 5 còn có một khai thác đáng chú ý như sau

Bài 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp là I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AM, AN.*

a) Chứng minh rằng EK và FL cắt nhau tại điểm T trên đường tròn (O).

b) Gọi EK và FL cắt (O) tại P, Q khác T. PQ cắt BC tại S. Chứng minh rằng AS tiếp xúc đường tròn (O).

Bài toán 7 lại có một khai thác khá tự nhiên khác như sau

Bài 8. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp là I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AM, AN.*

a) Chứng minh rằng EK và FL cắt nhau tại điểm T trên đường tròn (O).

b) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại S. Một đường thẳng thay đổi qua S cắt (O) tại P, Q sao cho P nằm giữa S, Q. TP, TQ lần lượt cắt AN, AM tại K, L. Chứng minh rằng KL luôn đi qua một điểm cố định khi P, Q di chuyển.

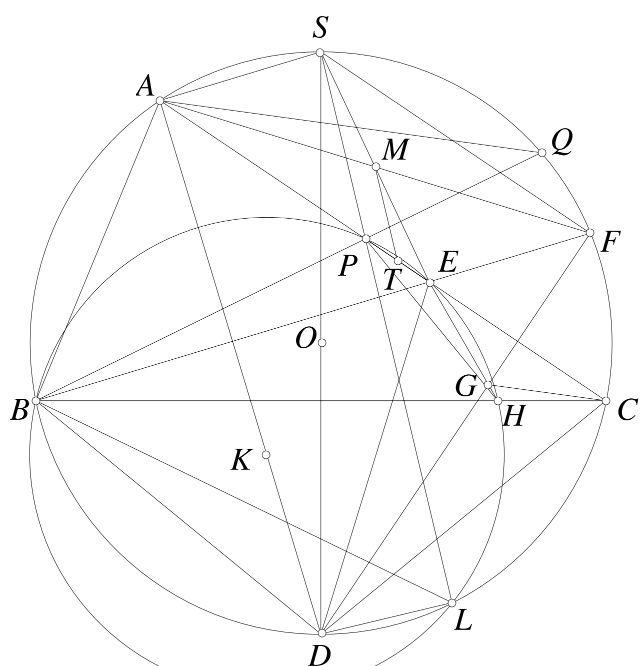
Quay trở lại bài toán 1 ban đầu, ta lại có thể mở rộng tiếp tục như sau

Bài 9. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) phân giác góc $\angle BAC$ cắt (O) tại D khác A. E là điểm đối xứng B qua AD. BE cắt (O) tại F khác B. P là một điểm di chuyển trên cạnh AC. BP cắt (O) tại Q khác B. Đường thẳng qua C song song AQ cắt FD tại điểm G.*

a) Gọi EG cắt BC tại H. Chứng minh rằng B, P, E, H cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (K).

b) Gọi đường tròn (K) cắt (O) tại L khác B. Chứng minh rằng LP luôn đi qua một điểm S cố định khi P di chuyển.

c) Gọi T là trung điểm PE. Chứng minh rằng đường thẳng qua T song song LS thì chia đôi AF.



Hình 4.

Chứng minh. a) Tương tự trong chứng minh bài 1 ta chứng minh được DF là trung trực EC. Do đó ta có biến đổi góc

$\angle GEC = \angle GCE$ (Do tính đối xứng)
$= \angle CAF$ (Do $CG \parallel AF$)
$= \angle CBF$ (Do A, F, C, B thuộc một đường tròn)
Từ đó dễ suy ra B, P, E, H thuộc một đường tròn. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta sẽ chứng minh rằng LP đi qua điểm S cố định là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. Thật vậy, ta có biến đổi góc

$\angle DLP = \angle DLB + \angle BLP$
$\angle BAD + \angle BEP$ (Do B, L, E, P và A, B, D, L cùng thuộc một đường tròn)
$\angle BAD + \angle EBA$ (Do tính đối xứng)
$= 90^\circ$ (Do $AD \perp BE$)
$= \angle DLS$ (Do DS là đường kính của (O)).
Từ đó dễ có LP đi qua S. Ta có điều phải chứng minh.

c) Sử dụng kết quả bài 1 ta có tứ giác $ASFE$ là hình bình hành nên SE và AF cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Theo tính chất đường trung bình ta dễ có $TM \parallel PS \equiv LS$. Hay đường thẳng qua T song song LS đi qua trung điểm M của AF. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán là mở rộng trực tiếp của bài thi VMO. Ta sẽ thu được bài VMO nếu cho $P \equiv E$. Nếu cắt gọn chỉ còn câu c) thì bài toán khá khó, tuy vậy việc trình bày bài toán thông qua ba ý làm bài toán trở nên nhẹ nhàng hơn. Bài toán mở rộng trên cũng mang lại cho ta một số khai thác có ý nghĩa như sau

Bài 10. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt CA, AB tại E, F khác C, B. Một đường tròn (K) bất kỳ đi qua B, C cắt CA, AB tại P, Q khác C, B.*

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPE và CQF lần lượt cắt (O) tại S, T khác B, C. Chứng minh rằng PS và QT cắt nhau tại điểm U trên (O).

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của PE, QF. Chứng minh rằng đường thẳng qua M song song PS và đường thẳng qua N song song với QT cắt nhau tại điểm V thuộc AU.

Bài toán trên có hướng giải giống như bài số 9. Các bạn hãy làm như một bài luyện tập.

Tài liệu

[1] Đề bài VMO 2014 tại http://diendantoanhoc.net/home

Xung quanh bài hình học thi VMO năm 2014

Trần Quang Hùng - Trường THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

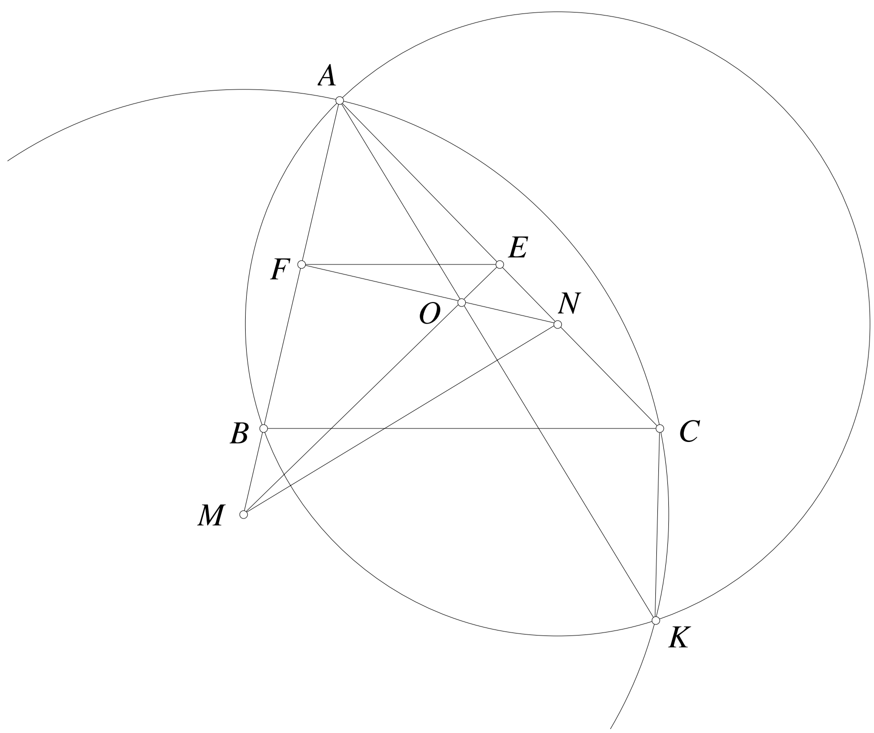
Bài viết này sẽ xoay quanh và khai thác bài hình học thi quốc gia Việt Nam năm 2014 ngày thứ hai.

Trong kỳ thi học sinh giỏi Việt Nam năm 2014 ngày thứ hai có một bài toàn hình học, đề bài được thu gọn cho phù hợp với bài viết như sau

Bài 1. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), trong đó BC cố định và A thay đổi trên (O). Trên các tia AB, AC lấy lần lượt các điểm M và N sao cho $MA = MC$ và $NA = NB$. Gọi D là trung điểm BC. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AK cắt BC tại E. Đường tròn ngoại tiếp ADE cắt (O) tại F khác A. Chứng minh AF đi qua một điểm cố định.*

Bài toán trên thực chất là sự ghép nối của hai bài toán sau

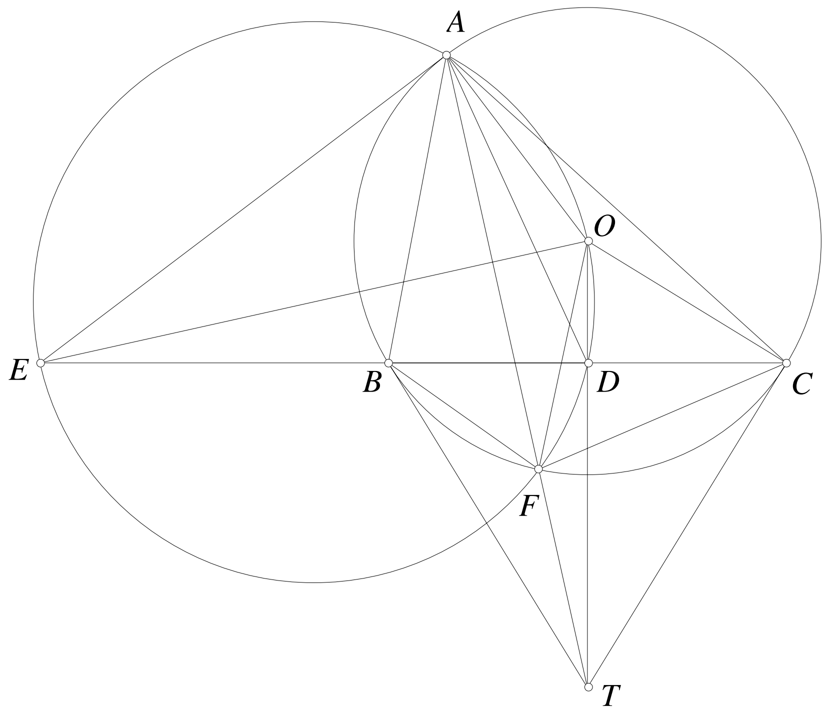
Bài 2. *Cho tam giác ABC trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Chứng minh rằng AK đi qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC.*



Hình 1.

Chứng minh. Gọi E, F là trung điểm CA, AB thì ME, NF là trung trực CA, AB cắt nhau tại tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC. Ta dễ thấy O là trực tâm tam giác ANM nên $AO \perp MN$. Mặt khác đường tròn các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A nên $AK \perp MN$. Từ đó dễ suy ra AK đi qua O. $\square$

Bài 3. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) cố định, B, C cố định và A di chuyển trên (O). D là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại F khác A. Chứng minh rằng AF luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.*

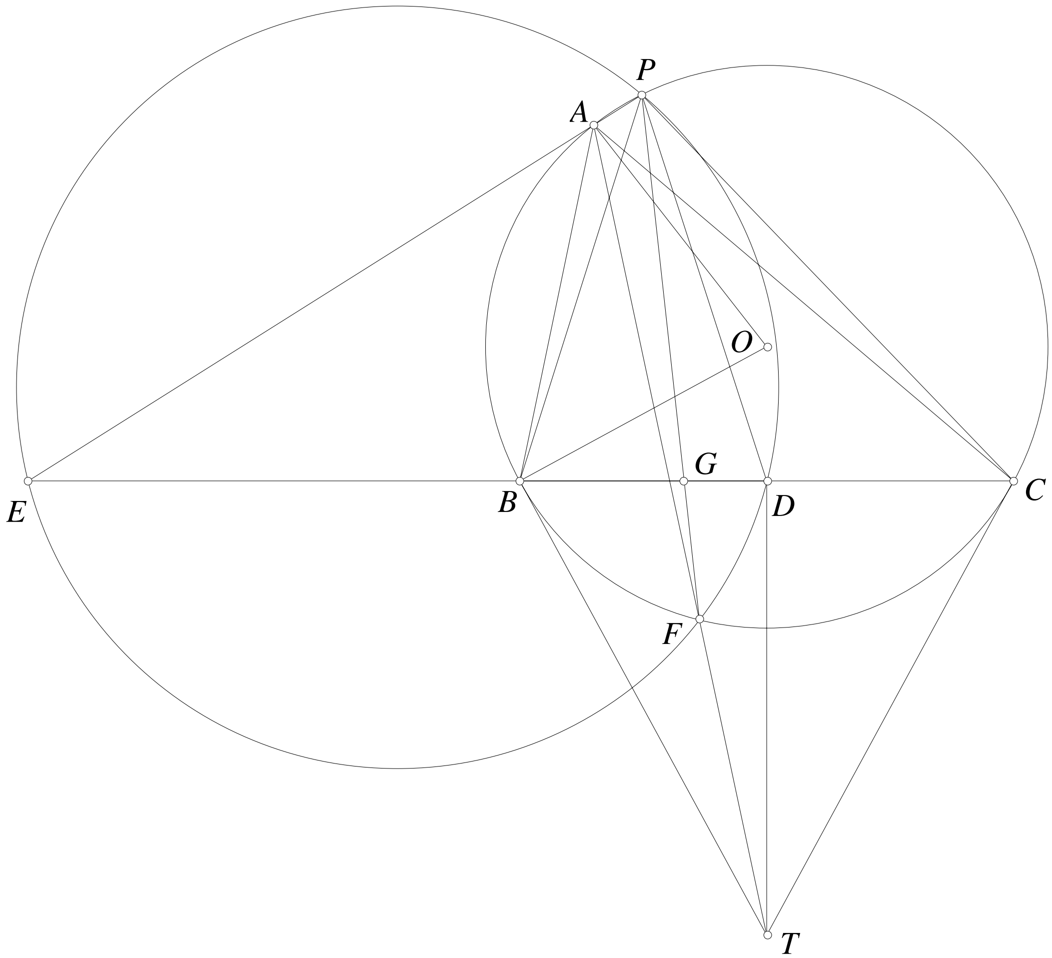


Hình 2.

Chứng minh. Do $\angle EAO = \angle EDO = 90°$ nên dễ thấy O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE. Gọi AF cắt OD tại T. Ta có $\overline{TD}.\overline{TO} = \overline{TF}.\overline{TA} = \mathscr{P}_{T/(O)} = OT^2 - OC^2$ suy ra $OC^2 = TO^2 - \overline{TD}.\overline{TO} = \overline{TO}.\overline{DO}$. Từ đó dễ suy ra $OC \perp TC$ vậy T cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Về cơ bản hai bài toán trên là hai bài toán dễ và rất phổ biến. Lời giải được trình bày trong bài toán 3 có lẽ là lời giải đơn giản nhất cho bài toán này mà không phải thông qua các công cụ như hàng điều hòa hay tứ giác điều hòa. Nếu để ý kỹ ta cũng có một vài nhận xét và mở rộng thú vị. Ta bắt đầu từ việc phát triển bài toán 3

Bài 4. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) cố định, B, C cố định và A di chuyển trên (O). D là trung điểm BC. Một đường thẳng bất kỳ đi qua A cắt BC tại E và cắt (O) tại P khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EPD cắt (O) tại F khác P. Chứng minh rằng AF luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.*



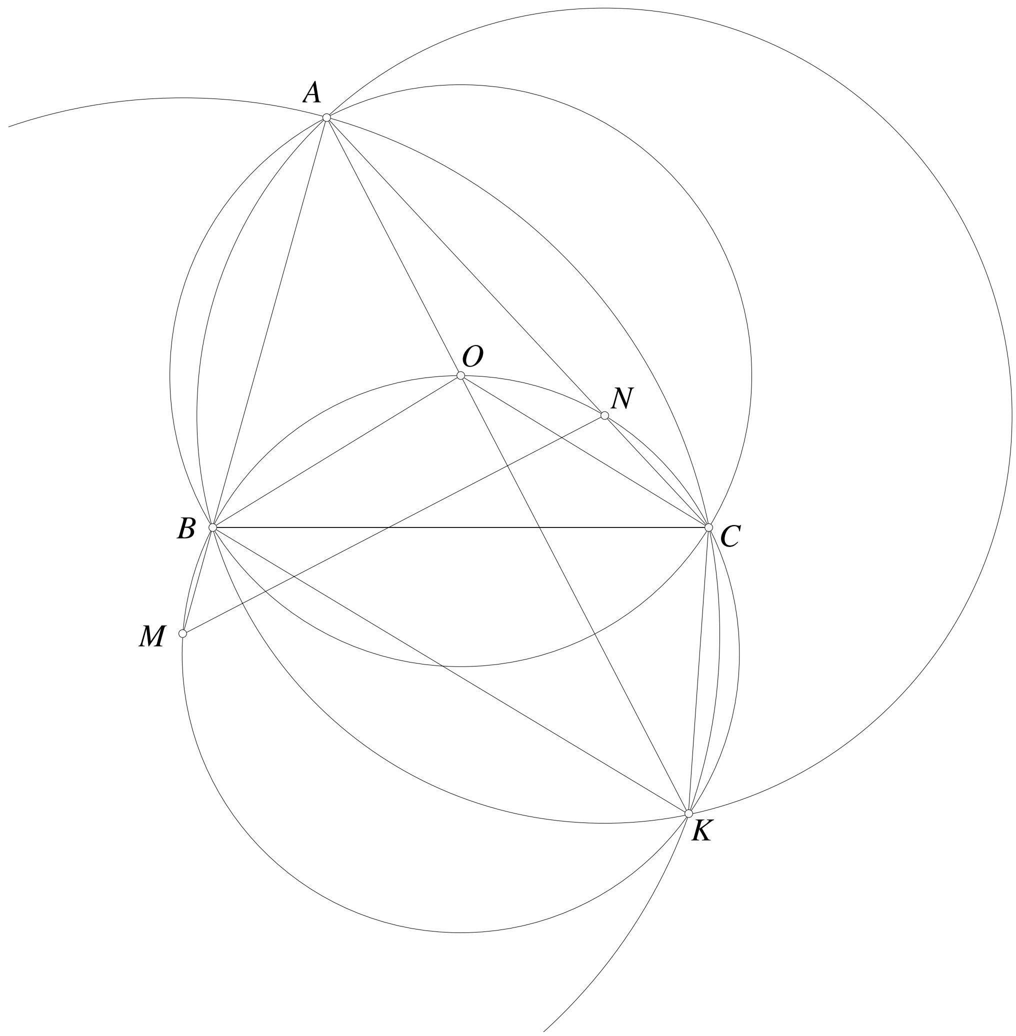
Hình 3.

Chứng minh. Gọi PF giao BC tại G. Từ hệ thức lượng trong đường tròn ta dễ thấy $\overline{GB}.\overline{GC} = \overline{GP}.\overline{GF} = \overline{GD}.\overline{GE}$. Từ đó do D là trung điểm BC nên theo hệ thức Maclaurin thì hàng $(BC, GE) = -1$. Chiếu bằng tâm P lên đường tròn (O) ta có $(BC, FA) = K(BC, FA) = (BC, GE) = -1$. Do đó tứ giác $ABFC$ điều hòa. Vậy AF đi qua giao điểm của tiếp tuyến tại B, C của (O) cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Nếu $P \equiv A$ thì ta thu được bài toán 3. Khác với cách giải đơn giản trong bài 3 ta phải dùng thông qua công cụ tứ giác điều hòa.

Quay trở về bài toán 2, bài toán 2 có lẽ là kết quả quá đơn giản xong trên mô hình của bài toán đó ta lại có thể khai thác được một số điều thú vị

Bài 5. *Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh rằng các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A và đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC có một điểm chung.*

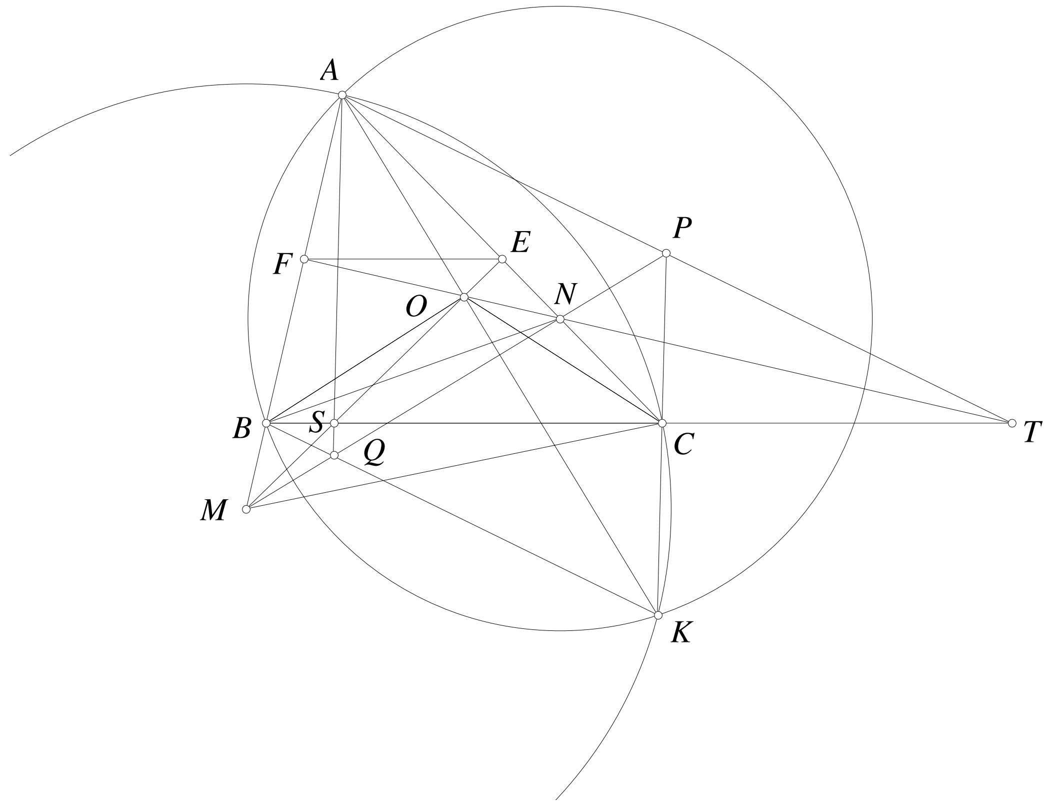


Hình 4.

Chứng minh. Gọi đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Ta để ý rằng $\angle AKC = \dfrac{1}{2}\angle AMC$ do góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm. Tương tự $\angle AKB = \dfrac{1}{2}\angle ANB$. Ta chú các tam giác MAC và NAB cân tại M, N và có chung góc đáy nên $\angle AMC = \angle ANB$. Từ đó ta có KA là phân giác $\angle BKC$. Mặt khác ta tại có O là giao của trung trực BC và KA. Vậy tứ giác $BOCK$ nội tiếp. Các đường tròn tâm M, N cùng đi qua A và đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC có một điểm chung là K. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Từ $\angle AKC = \dfrac{1}{2}\angle AMC = \angle COB$ ta dễ chứng minh được tứ giác $MOCK$ nội tiếp vậy tương tự ta có 6 điểm B, C, O, M, N, K cùng thuộc một đường tròn. Nhận xét này giúp ta tìm ra được nhiều bài toán thú vị

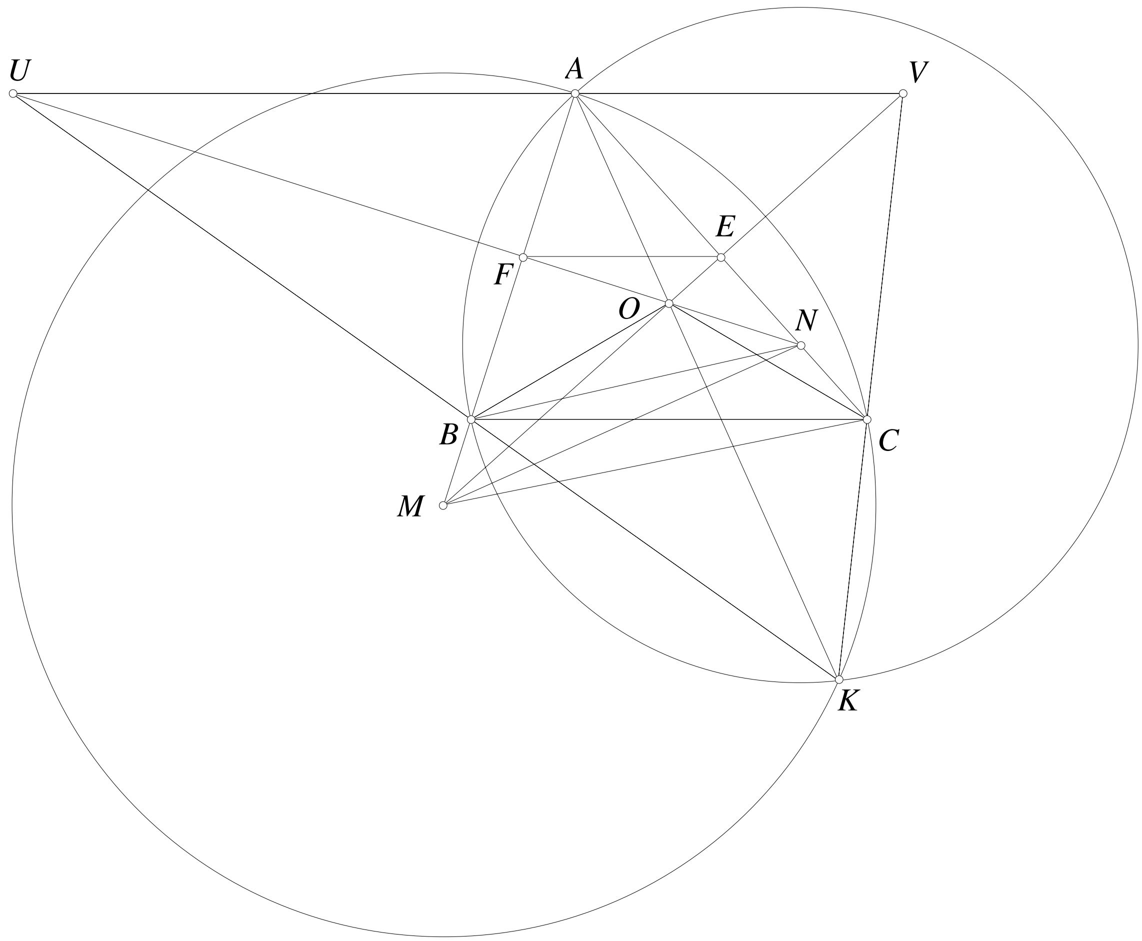
Bài 6. *Cho tam giác ABC. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. MN lần lượt cắt KC, KB tại P, Q. Chứng minh rằng* $\dfrac{NQ}{MP} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.



Hình 5.

Chứng minh. Gọi O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Theo nhận xét trên 6 điểm B, C, O, M, N, K cùng thuộc một đường tròn. Nếu gọi ON giao BC tại T, áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} O & M & C \\ B & K & N \end{pmatrix}$ ta suy ra A, P, T thẳng hàng. Ta chú ý ON là trung trực AB nên dễ suy ra $\angle PAB = \angle ABC$. Mặt khác cũng do tứ giác $MBNC$ nội tiếp nên $\angle AMN = \angle ACB$. Từ đó dễ suy ra $\triangle PAM \sim \triangle ABC$. Tương tự $\triangle QNA \sim \triangle ABC$. Từ đó $\triangle PAM \sim \triangle QNA \sim \triangle ABC$. Ta dễ suy ra $\triangle AQN \sim \triangle MNA$ suy ra $AN^2 = MN.NQ$. Tương tự $AM^2 = MP.MN$. Suy ra $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{AN^2}{AM^2} = \dfrac{NQ}{MP}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 7. *Cho tam giác ABC. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Trung trực AB cắt KB tại U. Trung trực AC cắt KC tại V. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và đường tròn nội tiếp tam giác KUV đồng tâm.*



Hình 6.

Chứng minh. Gọi O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC ta sẽ chứng minh rằng O là tâm nội tiếp tam giác KUV. Theo nhận xét trên 6 điểm B, C, O, M, N, K cùng thuộc một đường tròn. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} M & N & K \\ C & B & O \end{pmatrix}$ ta suy ra A, U, V thẳng hàng. Mặt khác do V thuộc OM là trung trực AC nên VO là phân giác $\angle AVK$. Tương tự UO là phân giác $\angle AUK$. Vậy O là tâm nội tiếp tam giác KUV. □

Nhận xét. Từ kết quả hai bài toán trên ta cũng có thể dễ suy ra $UV \parallel BC$ hoặc suy ra các hệ thức cơ bản như $KB + KC + UV = KU + KV$ hoặc một số kết quả thú vị khác. Các bạn hãy làm bài tập dưới đây để luyện tập

Bài 8. *Cho tam giác ABC. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Trung trực AB cắt KB tại U. Trung trực AC cắt KC tại V. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác BOU, COV và ABC có một điểm chung.*

Như vậy chỉ từ các bài toán gần gũi và quen thuộc nếu ta nhìn dưới con mắt tổng quát hoặc tìm cách khai thác sâu thì ta cũng sẽ thu được nhiều bài toán thú vị và có ý nghĩa. Xin chúc các bạn thành công.

Tài liệu

[1] Đề thi VMO 2014 http://diendantoanhoc.net/forum

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN. E-mail: analgeomatica@gmail.com