Mỗi tuần một bài toán

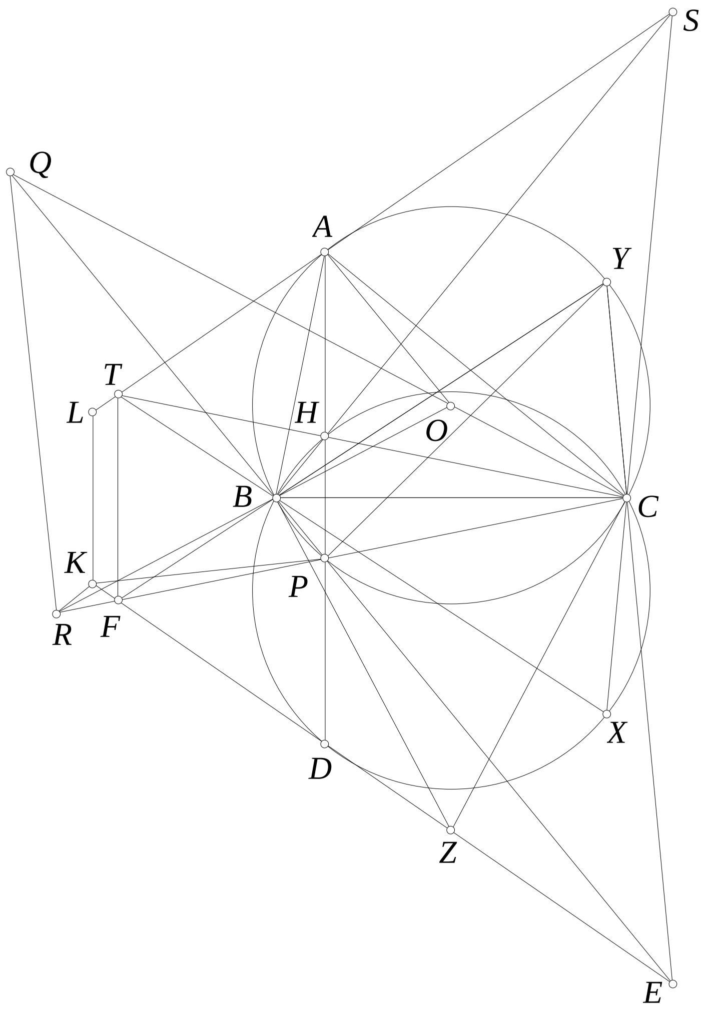
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với trực tâm H. AH cắt (O) tại P khác A. PB, PC lần lượt cắt OC, OB tại Q, R. L đối xứng với trực tâm tam giác PQR qua BC. LA cắt HB, HC tại S, T. Chứng minh rằng CS và BT cắt nhau trên đường tròn (BHC).

Lời giải



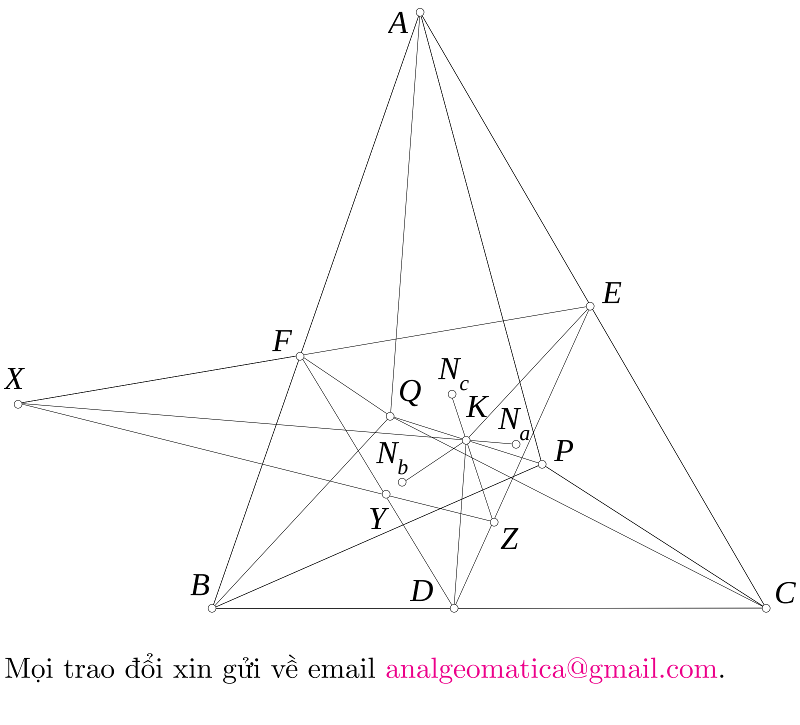
Gọi K là trực tâm tam giác PQR thì K, L đối xứng qua BC. Gọi D là đối xứng của A qua BC. Gọi DK cắt PB, PC lần lượt tại E, F. Như vậy sử dụng đối xứng trục BC thì T và F đối xứng nhau qua BC, tương tự S và E đối xứng qua BC. Ta sẽ chứng minh FB, EC cắt nhau tại Y thuộc (O), khi đó sử dụng đối xứng trục BC thì TB và SC cùng đi qua X là đối xứng của Y qua BC, hiển nhiên X nằm trên (HBC). Do K là trực tâm tam giác PQR và D là trực tâm tam giác PBC nên D, K đều nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BQ và CR. Khi đó tiếp tuyến qua B, C của (O) cắt nhau tại Z thì dễ thấy Z cũng nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BQ và CR, do đó DK đi qua Z. Áp dụng định lý Pascal đảo dễ suy ra FB, EC cắt nhau tại Y thuộc (O).

Nhận xét

Bài toán này tác giả tạo ra nó nhờ định lý Pascal và đối xứng trục như trong đáp án trên nhưng có một bạn gửi tới lời giải thuần túy hình học rất thú vị cho tác giả và yêu cầu không ghi tên.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có P và Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác. K là trung điểm PQ. Các điểm D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB sao cho $KD \parallel QA$, $KE \parallel QB$, $KF \parallel QC$. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng KN_a, KN_b, KN_c lần lượt cắt EF, FD, DE theo ba điểm thẳng hàng.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

Bài toán từ bạn đọc

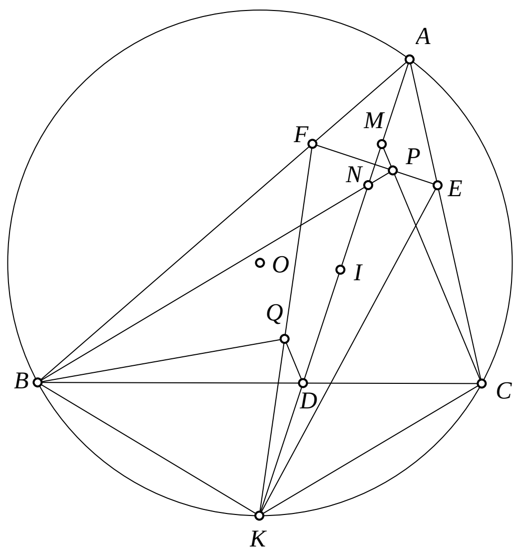
Cho tam giác ABC có phân giác AD có tâm nội tiếp I và trực tâm H. P, Q là các điểm nằm trong tam giác sao cho $PA = PI$, $\angle PBA = \angle PCA = \angle QBC$ và $DQ \parallel CP$. (K) là đường tròn có tâm thuộc AD và tiếp xúc với đường tròn (BDQ) tại Q. Chứng minh rằng đường tròn (K) tiếp xúc với đường tròn (BHC).

Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng**

Lời giải

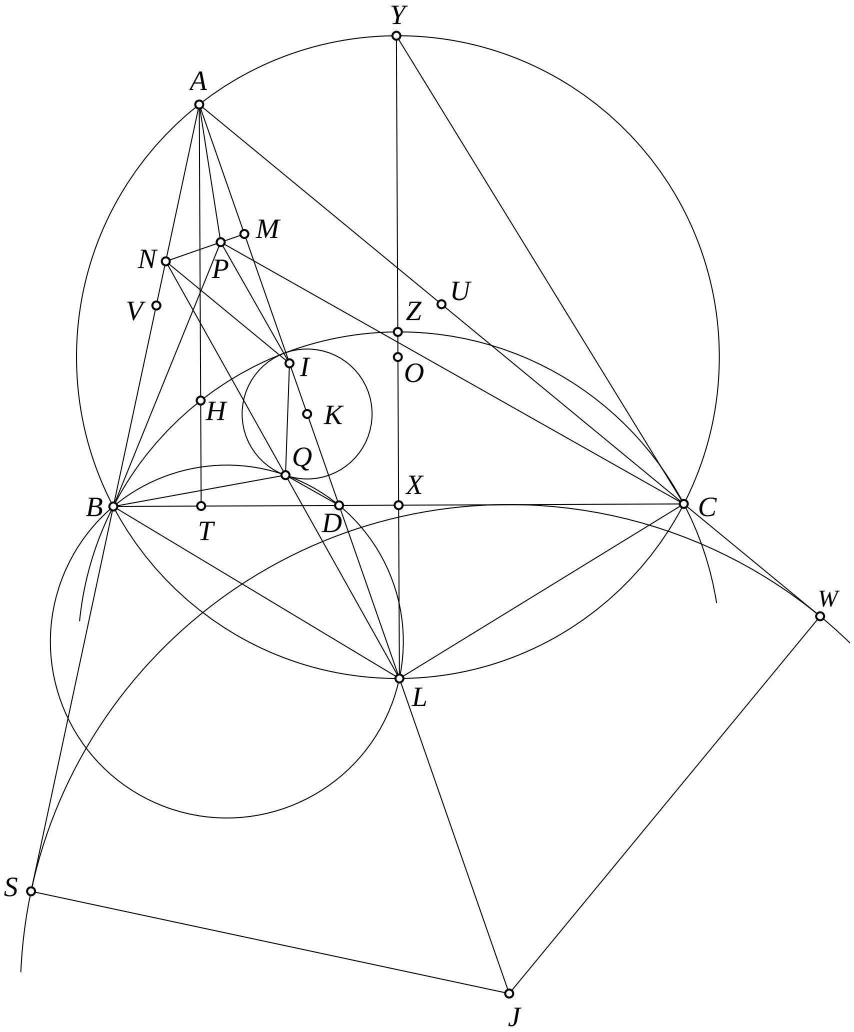
Chúng tôi giới thiệu lời giải của tác giả bài toán. Ta phát biểu không chứng minh một bổ đề đơn giản và hệ quả của nó.

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có tâm nội tiếp I và phân giác AD. Trung trực AI cắt CA, AB lần lượt tại E, F. AD lại cắt (O) tại K. Các đường tròn $(KCE), (KBF)$ lại cắt AI lần lượt tại M, N. Khi đó, EF, BN, CM đồng quy tại một điểm P.



Chứng minh. Nếu gọi (KBD) cắt KF tại Q khác K thì $DQ \parallel CP$. Từ đó, ta có hệ quả sau

Hệ quả. Cho tam giác nội tiếp đường tròn (O) có tâm nội tiếp I và phân giác AD. Trung trực AI cắt AB tại F. AD lại cắt (O) tại K. P, Q là các điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $PA = PI$, $\angle PBA = \angle PCA = \angle QBC$, $DQ \parallel CP$. Khi đó, K, Q, F thẳng hàng, tứ giác $BKDQ$ nội tiếp và $KB^2 = KC^2 = KQ \cdot KF$.



Giải bài toán. Gọi trung trực AI cắt AI, AB lần lượt tại M, N và AD lại cắt (O) tại L. Theo hệ quả của bổ đề trên, L, Q, N thẳng hàng, tứ giác $BLDQ$ nội tiếp và $LB^2 = LC^2 = LQ \cdot LN$. Gọi trung trực BC cắt $BC, (O)$ lần lượt tại X, Y (Y khác L), Z đối xứng với L qua BC. Khi đó, Z thuộc (BHC) và $LA \cdot LD = LB^2 = LC^2 = LX \cdot LY = LO \cdot LZ$. Gọi U, V lần lượt là trung điểm CA, AB; AH cắt BC tại T; đường tròn (J) bàng tiếp góc A của tam giác ABC tiếp xúc với CA, AB lần lượt tại W, S. Ta có $AN \cdot AW = AN \cdot AS = AM \cdot AJ = \frac{1}{2}AI \cdot AJ = \frac{1}{2}AB \cdot AC = AB \cdot AU = AC \cdot AV = AO \cdot AT$. Qua phép biến hình $f = \mathcal{R}_{AL} \circ I_A^{\frac{1}{2}AB\cdot AC} \circ I_L^{LB^2}$: $(BDQ) \mapsto AC$, $(K) \mapsto (J)$, $(BHC) \mapsto (UVT)$. Theo định lý Feuerbach áp dụng cho tam giác ABC, đường tròn Euler (UVT) tiếp xúc với đường tròn (J) bàng tiếp góc A. Do đó, tạo ảnh của của chúng qua f cũng tiếp xúc với nhau hay (K) tiếp xúc với (BHC). Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét

Đây là một bài toán chứng minh tiếp xúc thú vị ứng dụng của định lý Feuerbach và phép nghịch đảo. Chúng tôi không nhận được lời giải nào từ độc giả.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC, (O), (I) theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) và AC, AB. M, N là các giao điểm của EF và (O). P, Q theo thứ tự là giao điểm thứ hai của BI, CI và (O). S là giao điểm của các tiếp tuyến với (O) tại P và Q. Chứng minh rằng S là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN.

Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà,** THPT chuyên SP, Hà Nội.