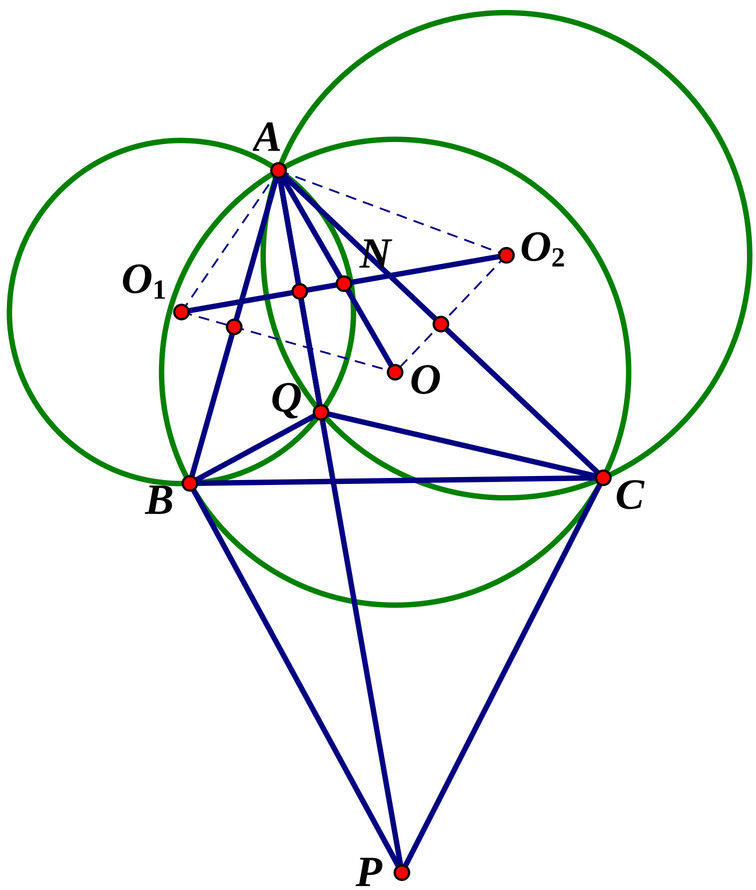
MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

LUYỆN THI TST

Bài 1.

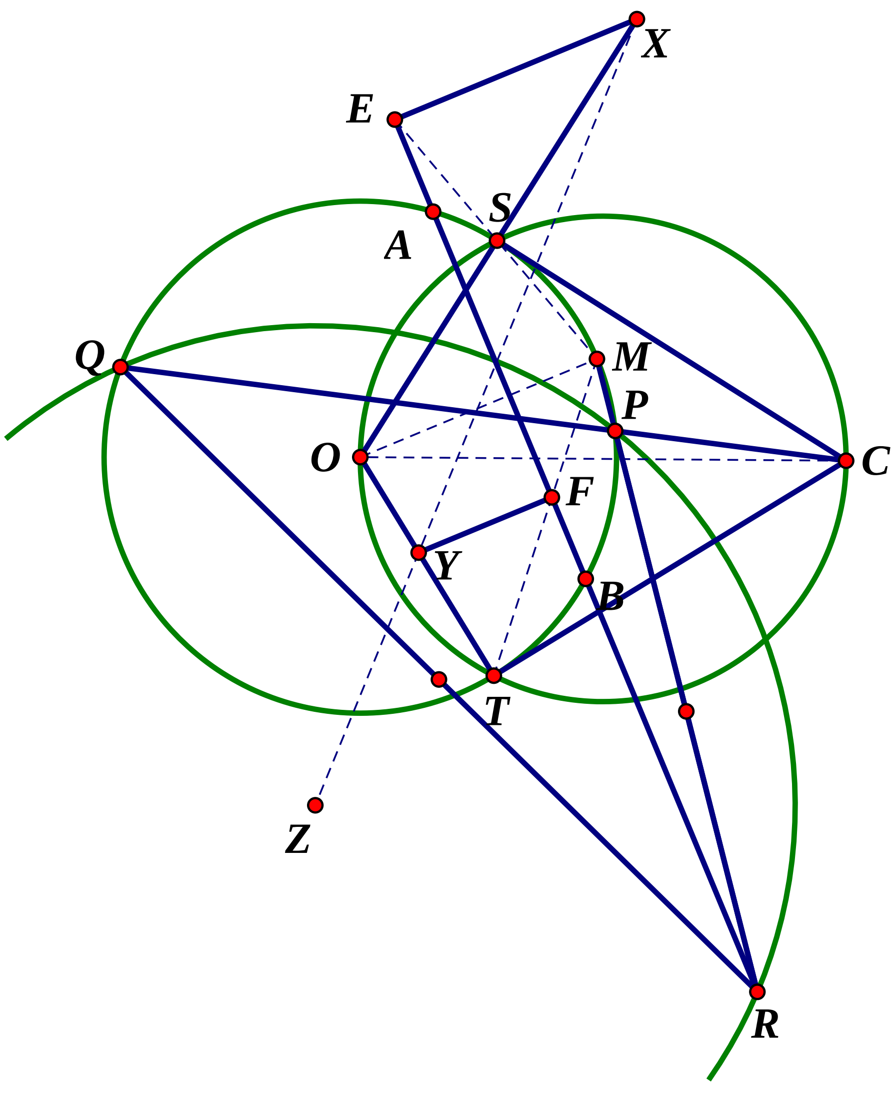
Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có hai tiếp tuyến ở B và C của (O) cắt nhau tại P. Gọi Q là một điểm bất kì thuộc tia AP. Gọi (O_1) và (O_2) lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ và ACQ. Chứng minh rằng trung điểm của O_1O_2 di chuyển trên một đường cố định.



Bài 2.

Cho hai điểm A, B phân biệt nằm trên đường tròn (O) và C nằm ngoài (O). Gọi CS và CT là các tiếp tuyến của C với (O) với S, T là các tiếp điểm, M là trung điểm của cung nhỏ AB. Các đường thẳng MS, MT cắt AB lần lượt tại E, F. Đường thẳng đi qua E, F vuông góc với AB cắt OS, OT lần lượt tại X, Y. Một đường thẳng bất kì qua C cắt (O) tại P, Q (P nằm giữa C và Q). Gọi R là giao của MP với AB, Z là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (PQR).

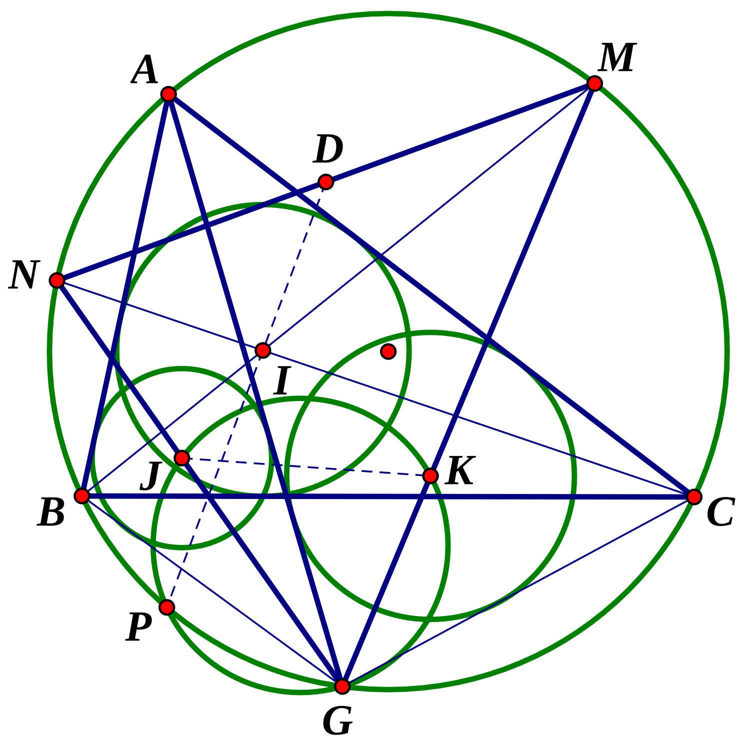
Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.



Bài 3.

Cho tam giác ABC nhọn có M, N lần lượt là trung điểm các cung nhỏ AC, AB. Gọi D là trung điểm của đoạn MN. Gọi G là một điểm bất kì thuộc cung nhỏ BC. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác ABC, ABG, ACG. Gọi P là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp tam giác GJK.

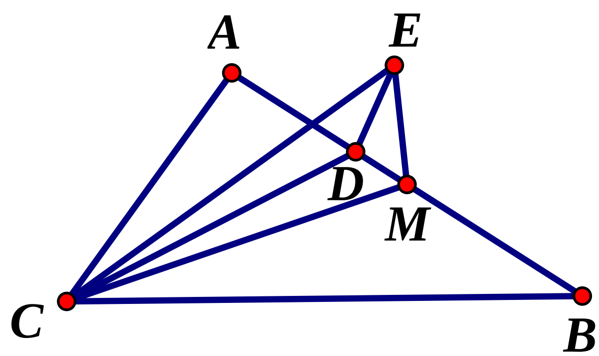
Chứng minh rằng điểm P nằm trên đường thẳng DI.



Bài 4.

Xét ABC là một tam giác không cân thay đổi và thỏa mãn $CA^2 + CB^2 = 2AB^2$. Gọi M là trung điểm AB và D là chân đường phân giác góc C của tam giác. Gọi E là điểm nằm trong mặt phẳng và thỏa mãn D là tâm đường tròn nội tiếp tam giác CME.

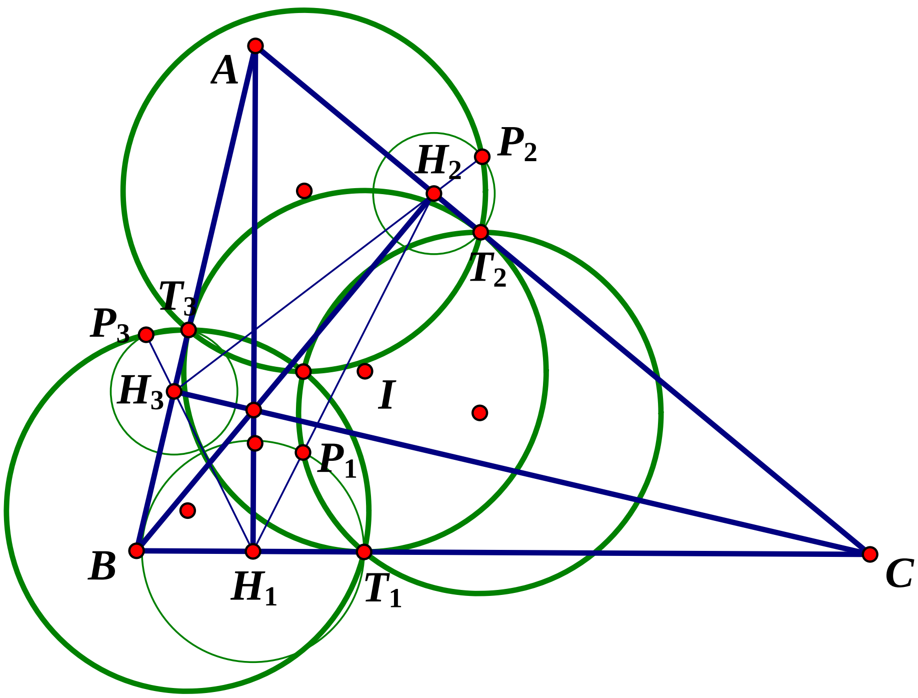
Chứng minh rằng, trong các tỉ số $\frac{MC}{CE}, \frac{CE}{EM}, \frac{EM}{MC}$, có đúng một tỉ số không đổi.



Bài 5.

Cho tam giác ABC nhọn không cân và AH_1, BH_2, CH_3 là các đường cao của tam giác. Đường tròn nội tiếp tam giác này tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại T_1, T_2, T_3. Với $k = 1,2,3$, xét các điểm P_i nằm trên đường thẳng H_iH_{i+1} (quy ước $H_4 \equiv H_1$) và thỏa mãn tam giác $H_iP_iT_i$ nhọn và cân tại H_i.

Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của các tam giác $T_1P_1T_2, T_2P_2T_3, T_3P_3T_1$ cùng đi qua trực tâm của tam giác $T_1T_2T_3$.



Bài 6.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi P, Q lần lượt là hai điểm bất kì trên các cạnh AB, AC. Gọi X là giao điểm của (O) với (APQ) và Y là điểm đối xứng với X qua PQ.

Chứng minh rằng nếu $PX > PB$ thì $S_{XPQ} > S_{YBC}$.