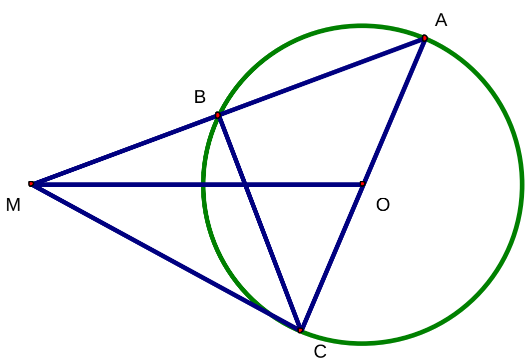
PHƯƠNG TÍCH – TRỤC ĐẲNG PHƯƠNG

I. Phương tích của một điểm đối với đường tròn (Power of a point).

1. **Định lý 1.1** Cho đường tròn (O; R) và điểm M cố định, OM = *d*. Một đường thẳng thay đổi qua M cắt đường tròn tại hai điểm A và B. Khi đó $\overline{MA}.\overline{MB} = MO^2 - R^2 = d^2 - R^2$

Chứng minh:



Gọi C là điểm đối xứng của A qua O. Ta có $CB \perp AM$ hay B là hình chiếu của C trên AM.

Khi đó ta có

$$\overline{MA}.\overline{MB} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MA} = \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)$$
$$= \left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{OA}\right)\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}\right)$$
$$= \overrightarrow{MO}^2 - \overrightarrow{OA}^2$$
$$= OM^2 - OA^2$$
$$= d^2 - R^2$$

2. **Định nghĩa.** Giá trị không đổi $\overline{MA}.\overline{MB} = d^2 - R^2$ trong định lý 1.1 được gọi là **phương tích** của điểm M đối với đường tròn (O) và kí hiệu $\mathscr{P}_{M/(O)}$. Ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O)} = \overline{MA}.\overline{MB} = d^2 - R^2$$

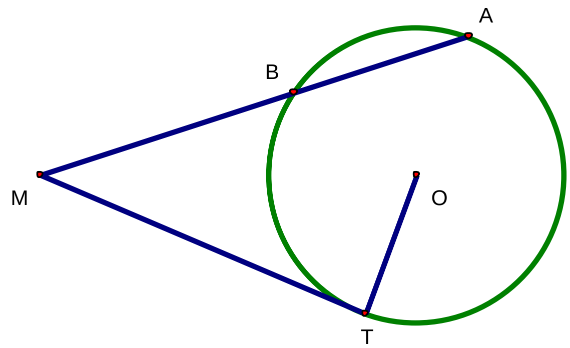
3. **Định lý 1.2** Nếu hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại P và $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$ thì 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Chứng minh. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cắt CD tại D’. Khi đó ta có theo định lý 1.1 ta có $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD'}$, suy ra $\overline{PC}.\overline{PD} = \overline{PC}.\overline{PD'} \Rightarrow D \equiv D'$. Suy ra 4 điểm A, B, C và D cùng thuộc một đường tròn.

4. **Chú ý:**

1) Khi M nằm trên (O) thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = 0$

2) Khi M nằm ngoài đường tròn (O) và MT là tiếp tuyến của (O) thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = MT^2$



3) Nếu A, B cố định và $\overline{AB}.\overline{AM} = const \Rightarrow$ M cố định. Ý tưởng này giúp ta giải các bài toán về đường đi qua điểm cố định.

II. Trục đẳng phương của hai đường tròn (Radical axis) – Tâm đẳng phương(Radical center).

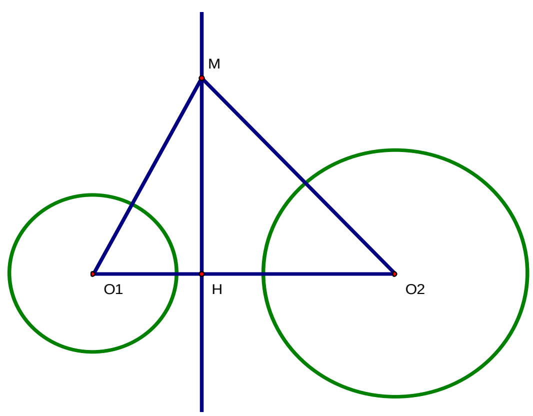
1. Trục đẳng phương

a) Định lý 2.1 Cho hai đường tròn không đồng tâm (O_1; R_1) và (O_2; R_2). Tập hợp các điểm M có phương tích đối với hai đường tròn bằng nhau là một đường thẳng, đường thẳng này được gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1) và (O_2).

Chứng minh:

a) Phần thuận

Giả sử điểm M có phương tích đến hai đường tròn bằng nhau.



Gọi H là hình chiếu của M trên O_1O_2, I là trung điểm của O_1O_2. Ta có:

$$\mathscr{P}_{M/(O_1)} = \mathscr{P}_{M/(O_2)} \Leftrightarrow MO_1^2 - R_1^2 = MO_2^2 - R_2^2$$
$$\Leftrightarrow MO_1^2 - MO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$
$$\Leftrightarrow \left(MH^2 + HO_1^2\right) - \left(MH^2 + HO_2^2\right) = R_1^2 - R_2^2$$
$$\Leftrightarrow HO_1^2 - HO_2^2 = R_1^2 - R_2^2$$
$$\Leftrightarrow \left(\overline{HO_1} - \overline{HO_2}\right)\left(\overline{HO_1} + \overline{HO_2}\right) = R_1^2 - R_2^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{O_2O_1}.2\overline{HI} = R_1^2 - R_2^2$$
$$\Leftrightarrow \overline{IH} = \frac{R_1^2 - R_2^2}{\overline{O_1O_2}} \qquad (1)$$

Từ đây suy ra H cố định, suy ra M thuộc đường thẳng qua H và vuông góc với O_1O_2.

b) Phần đảo.

Các phép biến đổi trong phần thuận là phép biến đổi tương đương nên ta dễ dàng có điều cần chứng minh.

Vậy tập hợp những điểm M có phương tích đối với hai đường tròn bằng nhau là đường thẳng đi qua điểm H (xác định như (1)) và vuông góc với O_1O_2.

b) Các hệ quả

Cho hai đường tròn (O) và (I). Từ định lý 2.1 ta suy ra được các tính chất sau:

1) Trục đẳng phương của hai đường tròn vuông góc với đường thẳng nối tâm.

2) Nếu hai đường tròn cắt nhau tại A và B thì AB chính là trục đẳng phương của chúng.

3) Nếu điểm M có cùng phương tích đối với (O) và (I) thì đường thẳng qua M vuông góc với OI là trục đẳng phương của hai đường tròn.

4) Nếu hai điểm M, N có cùng phương tích đối với hai đường tròn thì đường thẳng MN chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.

5) Nếu 3 điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn thì 3 điểm đó thẳng hàng.

6) Nếu (O) và (I) tiếp xúc nhau tại A thì đường thẳng qua A và vuông góc với OI chính là trục đẳng phương của hai đường tròn.

2. Tâm đẳng phương (Radical Center)

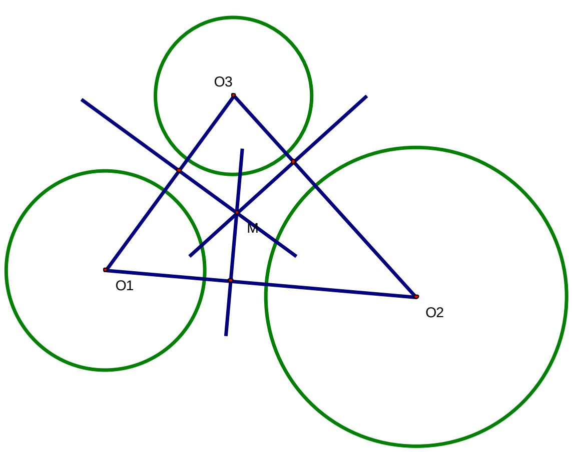
a) Định lý 2.2 Cho 3 đường tròn (C_1), (C_2) và (C_3). Khi đó 3 trục đẳng phương của các cặp đường tròn trùng nhau hoặc song song hoặc cùng đi qua một điểm, điểm đó được gọi là tâm đẳng phương của ba đường tròn.

Chứng minh.

Gọi d_{ij} là trục đẳng phương của hai đường tròn (C_i) và (C_j). Ta xét hai trường hợp sau.

a) Giả sử có một cặp đường thẳng song song, không mất tính tổng quát ta giả sử $d_{12} // d_{23}$.

Ta có $d_{12} \perp O_1O_2, d_{23} \perp O_2O_3$ suy ra O_1, O_2, O_3 thẳng hàng. Mà $d_{13} \perp O_1O_3$ suy ra $d_{13} // d_{23} // d_{12}$



b) Giả sử d_{12} và d_{23} có điểm M chung. Khi đó ta có

$$\begin{cases} \mathscr{P}_{M/(O_1)} = \mathscr{P}_{M/(O_2)} \\ \mathscr{P}_{M/(O_2)} = \mathscr{P}_{M/(O_3)} \end{cases} \Rightarrow \mathscr{P}_{M/(O_1)} = \mathscr{P}_{M/(O_3)} \Rightarrow M \in d_{13}$$

Từ đây suy ra nếu có hai đường thẳng trùng nhau thì đó cũng là trục đẳng phương của cặp đường tròn còn lại.

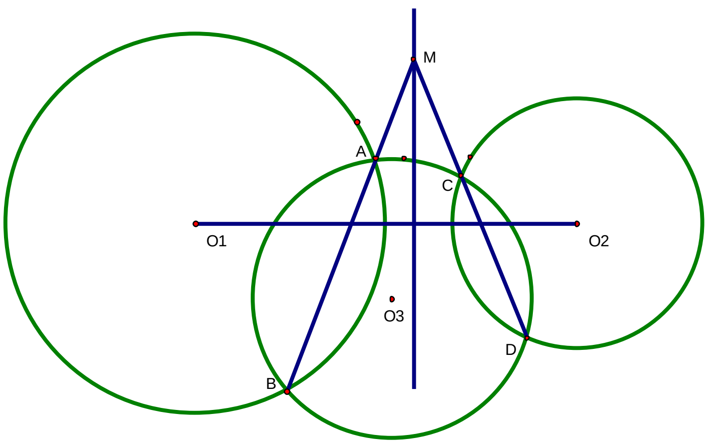
Nếu hai trục đẳng phương chỉ cắt nhau tại một điểm thì điểm đó cũng thuộc trục đẳng phương còn lại

b) Các hệ quả.

1. Nếu 3 đường tròn đôi một cắt nhau thì các dây cung chung cùng đi qua một điểm
2. Nếu 3 trục đẳng phương song song hoặc trùng nhau thì tâm của 3 đường tròn thẳng hàng.
3. Nếu 3 đường tròn cùng đi qua một điểm và có các tâm thẳng hàng thì các trục đẳng phương trùng nhau.
4. Cách dựng trục đẳng phương của hai đường tròn không cắt nhau:

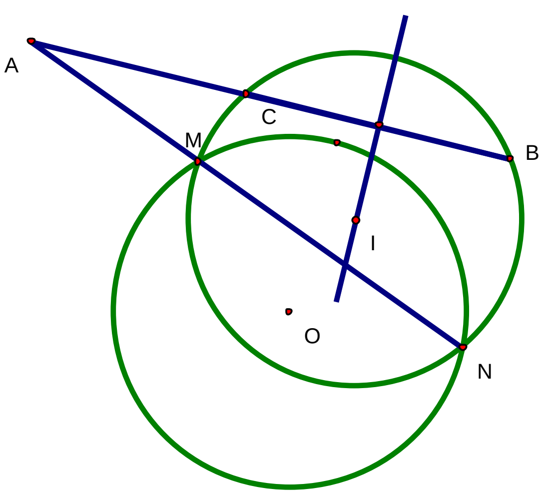
Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) không cắt nhau, ta có cách dựng trục đẳng phương của hai đường tròn như sau:

- Dựng đường tròn (O_3) cắt cả hai đường tròn (O_1) và (O_2) lần lượt tại A, B và C, D.
- Đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M
- Đường thẳng qua M vuông góc với O_1O_2 chính là trục đẳng phương của (O_1) và (O_2). (Hình vẽ)



III. Các ví dụ.

1. Các bài toán về phương tích



Ví dụ 1: Cho đường tròn (O) và hai điểm A, B cố định. Một đường thẳng quay quanh A, cắt (O) tại M và N. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN thuộc một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNB.

Gọi C là giao điểm của AB và (I). Khi đó ta có:

$\mathscr{P}_{A/(I)} = \overline{AC}.\overline{AB} = \overline{AM}.\overline{AN} = \mathscr{P}_{A/(O)}$ (không đổi vì A, (O) cố định).

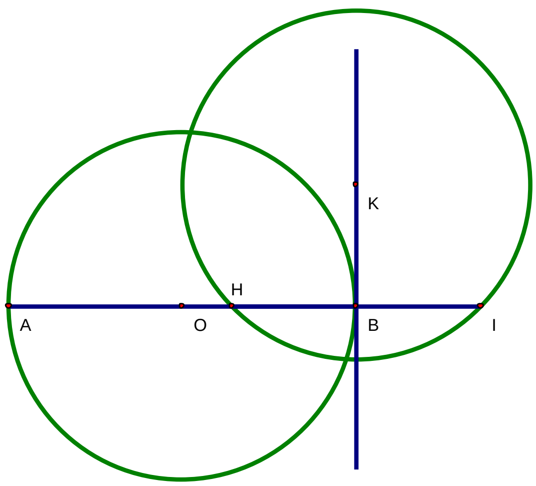
Suy ra $\overline{AC} = \dfrac{\mathscr{P}_{A/(O)}}{\overline{AB}}$

Vì A, B cố định và C thuộc AB nên từ hệ thức trên ta có C cố định.

Suy ra I thuộc đường trung trực của BC cố định.

Ví dụ 2: Cho đường tròn tâm O đường kính AB, và điểm H cố định thuộc AB. Từ điểm K thay đổi trên tiếp tuyến tại B của O, vẽ đường tròn (K; KH) cắt (O) tại C và D. Chứng minh rằng CD luôn đi qua một điểm cố định.

Hướng dẫn



Gọi I là điểm đối xứng của H qua B, suy ra I cố định và thuộc (K).

Gọi M là giao điểm của CD và AB.

Vì CD là trục đẳng phương của (O) và (K) nên ta có:

$$\overline{MH}.\overline{MI} = \overline{MC}.\overline{MD} = \overline{MA}.\overline{MB}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\overline{MB}+\overline{BH}\right)\left(\overline{MB}+\overline{BI}\right) = \overline{MB}\left(\overline{MB}+\overline{BA}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\overline{MB}+\overline{BH}\right)\left(\overline{MB}-\overline{BH}\right) = \overline{MB}^2 + \overline{MB}.\overline{BA}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{MB}^2 - \overline{BH}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{MB}.\overline{BA}$$

$$\Leftrightarrow \quad \overline{BM} = \frac{BH^2}{\overline{BA}}$$

Vì A, B, H cố định suy ra M cố định.

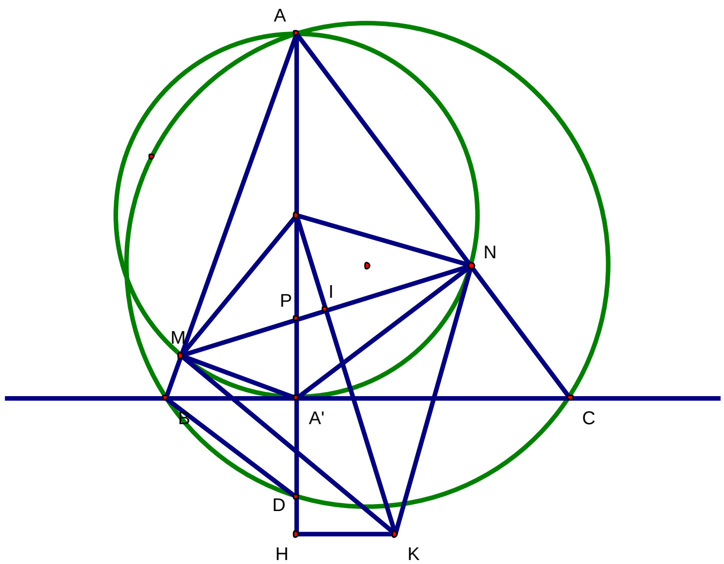
Ví dụ 3 (Chọn đội tuyển PTNK 2008):

Cho tam giác ABC có đỉnh A cố định và B, C thay đổi trên đường thẳng d cố định sao cho nếu gọi A' là hình chiếu của A lên d thì $\overline{A'B}.\overline{A'C}$ âm và không đổi. Gọi M là hình chiếu của A' lên AB. Gọi N là hình chiếu của A' lên AC, K là giao điểm của các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác A'MN tại M và N. Chứng minh rằng K thuộc một đường thẳng cố định.

Hướng dẫn

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác A'MN và I là giao điểm của OK và MN. Ta thấy O chính là trung điểm của AA'.

Gọi D và P là giao điểm của AA' với (ABC) và MN.



Dễ thấy $\overline{AM}.\overline{AB} = \overline{AA'}^2 = \overline{AN}.\overline{AC}$

Suy ra tứ giác BMNC nội tiếp.

$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{ACB}$

Mà $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$

Nên $\widehat{AMN} = \widehat{ADB}$

Suy ra MPDB nội tiếp.

Do đó ta có $\overline{AP}.\overline{AD} = \overline{AM}.\overline{AB} = \overline{AA'}^2$

Mà A, A' và D cố định suy ra P cố định.

Gọi H là hình chiếu của K trên AA'.

Ta có $\overline{AP}.\overline{AH} = \overline{AI}.\overline{AK} = IN^2 = \frac{1}{4}AA'^2$

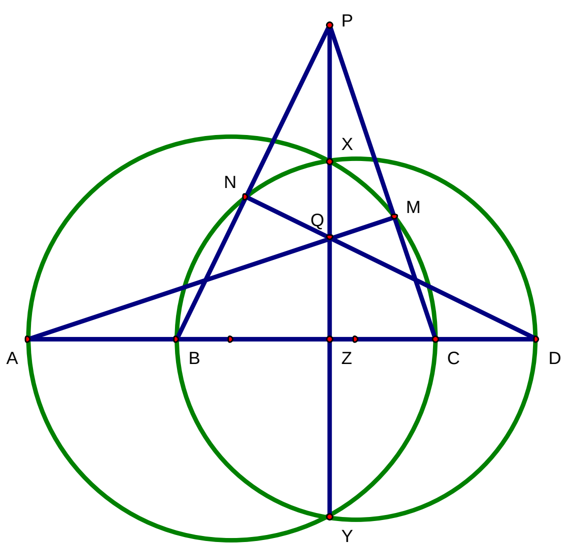
Mà A, P, A' cố định suy ra H cố định.

Vậy K thuộc đường thẳng qua H và vuông góc với AA'

Ví dụ 4 (IMO 95/1)

Trên đường thẳng d lấy 4 điểm A, B, C, D (theo thứ tự đó). Đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại X, Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Lấy P là một điểm trên XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại điểm thứ 2 là M, và BP cắt đường tròn đường kính BD tại điểm thứ 2 là N. Chứng minh rằng AM, DN và XY đồng qui.

Hướng dẫn:



Gọi Q, Q' lần lượt là giao điểm của DN và AM với XY.

Ta cần chứng minh $Q \equiv Q'$.

Tứ giác QMCZ nội tiếp, suy ra $\overline{PM}.\overline{PC} = \overline{PQ}.\overline{PZ}$

Tứ giác NQ'ZB nội tiếp, suy ra $\overline{PQ'}.\overline{PZ} = \overline{PN}.\overline{PB}$

Mà P thuộc XY là trục đẳng phương của đường tròn đường kính AC và đường tròn đường kính BD nên

$\overline{PN}.\overline{PB} = \overline{PX}.\overline{PY} = \overline{PM}.\overline{PC}$

Suy ra $\overline{PQ}.\overline{PZ} = \overline{PQ'}.\overline{PZ} \Rightarrow Q \equiv Q'$

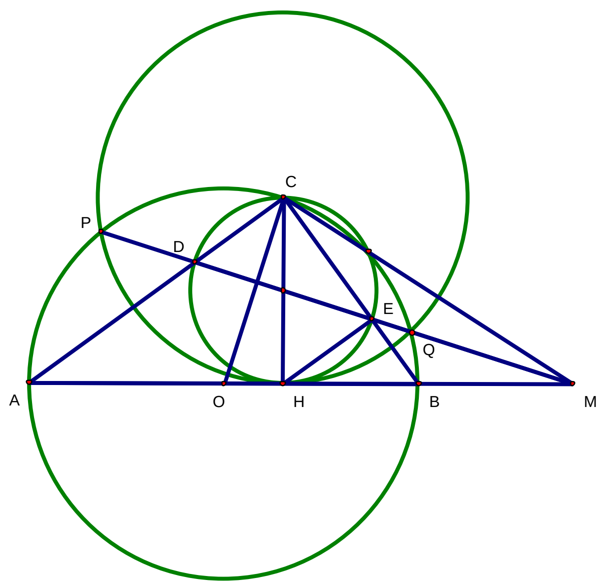
Vậy XY, AM và DN đồng quy.

2. Các bài toán về trục đẳng phương – Tâm đẳng phương

Ví dụ 5. Cho đường tròn tâm O đường kính AB . Một điểm H thuộc đoạn AB. Đường thẳng qua H cắt đường tròn tại C. Đường tròn đường kính CH cắt AC, BC và (O) lần lượt tại D, E và F.

a) Chứng minh rằng AB, DE và CF đồng quy.

b) Đường tròn tâm C bán kính CH cắt (O) tại P và Q. Chứng minh rằng P, D, E, Q thẳng hàng.



Hướng dẫn.

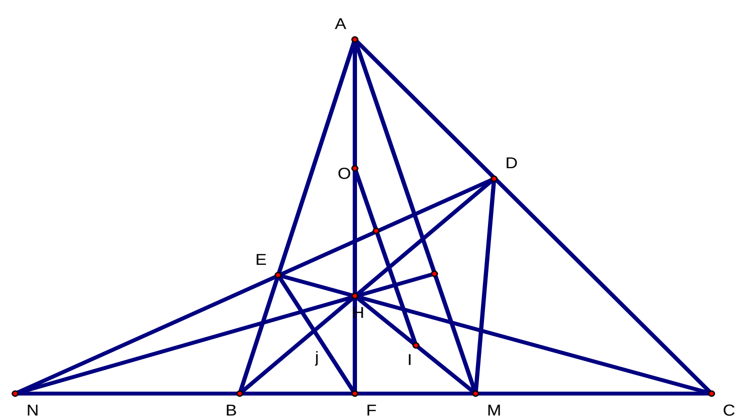
a) Ta có $\overline{CA}.\overline{CD} = \overline{CH}^2 = \overline{CB}.\overline{CE}$, suy ra ADEB nội tiếp. Xét các đường tròn (ADEB), (O) và đường tròn đường kính CH, thì DE, AB và CF lần lượt là các trục đẳng phương của các cặp đường tròn trên nên chúng đồng quy.

b) Ta có PQ là trục đẳng phương của (C) và (O) nên $OC \perp PQ$. Ta cũng dễ thấy $OD \perp DE$. Hơn nữa H chính là tâm đẳng phương của ba đường tròn (O), (C) và đường tròn đường kính CH. Suy ra PQ đi qua H. Vậy DE, PQ cùng đi qua H và cùng vuông góc với OC nên trùng nhau. Hay D, E, P, Q thẳng hàng.

Ví dụ 6 (MOP 95)

Cho tam giác ABC có đường cao BD và CE cắt nhau tai H. M là trung điểm của BC, N là giao điểm của DE và BC. Chứng minh rằng NH vuông góc với AM.

Hướng dẫn.



Ta có $\widehat{DEH} = \widehat{DAH} = \widehat{DBC} = \widehat{FEH}$

$\Rightarrow \widehat{FED} = 2.\widehat{FEH} = 2.\widehat{DBC} = \widehat{DMC}$

Suy ra tứ giác EDMF nội tiếp.

Từ đó ta có $\overline{NE}.\overline{ND} = \overline{NF}.\overline{NM}$, suy ra N nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính MH và đường tròn đường kính AH.

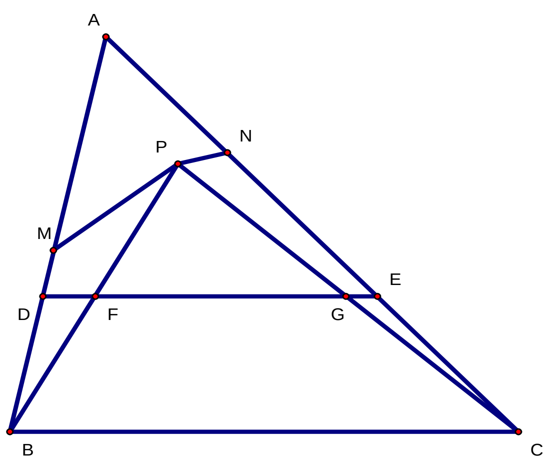
Mặt khác H là giao điểm của (O) và (I), suy ra NH chính là trục đẳng phương của (O) và (I).

Suy ra $NH \perp OI$, rõ rang OI // AM, do đó $NH \perp AM$.

Ví dụ 7 (India, 1995)

Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại D và E. Gọi P là một điểm bên trong tam giác ADE, F và G là giao của DE với BP và CP. Đường tròn tâm (O) ngoại tiếp tam giác PDG, đường tròn tâm (I) ngoại tiếp tam giác PEF cắt nhau tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh rằng $AQ \perp OI$

Hướng dẫn.



Gọi M là giao điểm thứ hai của AB và (PDG), N là giao thứ hai của AC và (PFG)

Ta có $\widehat{AMP} = \widehat{PGD}$ và $\widehat{PGD} = \widehat{PCB}$ (đồng vị), suy ra $\widehat{AMP} = \widehat{PCB}$, suy ra BMPC nội tiếp.

Chứng minh tương tự PNCB nội tiếp.

Suy ra BMNC nội tiếp, suy ra $\overline{AM}.\overline{AB} = \overline{AN}.\overline{AC}$

Mà $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$ (Định lý Thalet)

Suy ra $\overline{AM}.\overline{AD} = \overline{AN}.\overline{AE}$

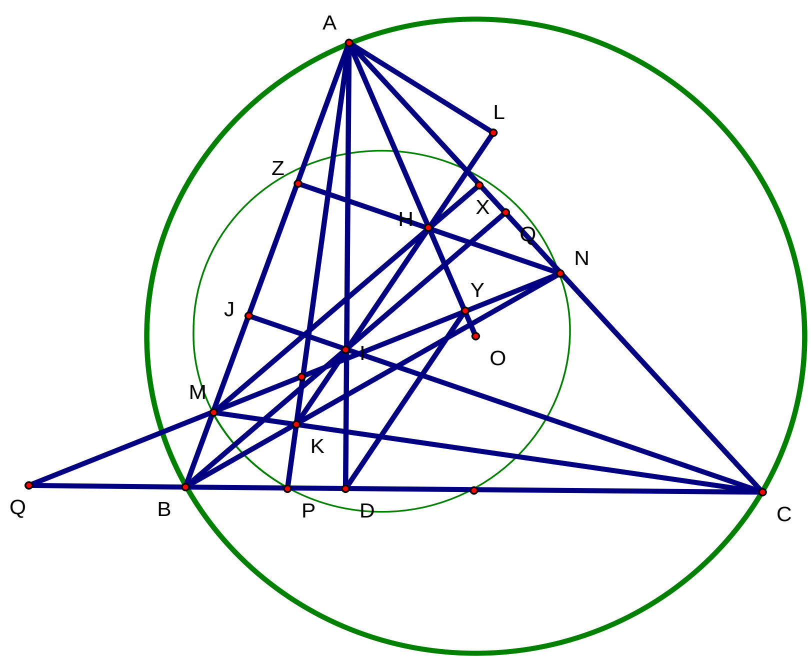
Do đó A thuộc trục đẳng phương PQ của (PDG) và (PEF) suy ra $AQ \perp OI$.

Ví dụ 8. (Chọn đội tuyển Việt Nam 2006) Cho tam giác ABC là tam giác nhọn và không phải tam giác cân nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. Một đường thẳng d thay đổi sao cho vuông góc với OA và luôn cắt tia AB, AC. Gọi M, N lần lượt là giao điểm của d và AB, AC. Giả sử BN và CN cắt nhau tại K, AK cắt BC.

a) Gọi P là giao của AK và BC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua một điểm cố định.

b) Gọi H là trực tâm của tam giác AMN. Đặt BC = a và l là khoảng cách từ A đến HK.Chứng minh KH đi qua trực tâm của tam giác ABC, từ đó suy ra: $l \le \sqrt{4R^2 - a^2}$

Hướng dẫn.



a) Gọi Q là giao điểm của MN và BC, E là trung điểm BC. Xét tứ giác BMPC thì ta biết rằng Q, P, B, C là hang điểm điều hòa. Suy ra (QPBC) = - 1. Khi đó ta có:

$\overline{EP}.\overline{EQ} = \overline{EB}^2$, suy ra $\overline{QE}.\overline{QP} = \overline{QE}^2 - \overline{QE}.\overline{PE} = QE^2 - EB^2 = OQ^2 - OB^2 = \overline{QB}.\overline{QC}$

Mà tứ giác BMNC cũng nội tiếp vì có $\widehat{NCB} = \widehat{xAB} = \widehat{AMN}$ (Ax là tia tiếp tuyến của (O)). Suy ra $\overline{QM}.\overline{QN} = \overline{QB}.\overline{QC}$

Từ đó suy ra $\overline{QM}.\overline{QN} = \overline{QP}.\overline{QE}$, suy ra tứ giác MNIP nội tiếp, suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP luôn đi qua điểm E cố định.

b) Giả sử 3 đường cao AD, BF và CJ của tam giác ABC cắt nhau tại I; ba đường cao MX, AY, NZ của tam giác AMN cắt nhau tại H. Ta cần chứng minh K, I, H thẳng hàng.

Xét đường tròn tâm (O_1) đường kính BN và tâm (O_2) đường kính CM.

Ta thấy:

$$\overline{KC}.\overline{KM} = \overline{KB}.\overline{KN}$$
$$\overline{IC}.\overline{IJ} = \overline{IB}.\overline{IF}$$
$$\overline{HM}.\overline{HX} = \overline{HN}.\overline{HZ}$$

Suy ra K, I, H cùng thuộc trục đẳng phương của (O_1) và (O_2) nên thẳng hang.

Từ đó suy ra $AL \le AI$.

Mà $AI = 2.OE = 2\sqrt{R^2 - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{4R^2 - a^2}$

Nên $AL = l \le \sqrt{4R^2 - a^2}$

IV. Bài tập

1. Cho đường tròn (O). A, B là hai điểm cố định đối xứng nhau qua O. M là điểm chuyển động trên (O). MA, MB giao với (O) tại P và Q. Chứng minh rằng: $\frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} + \frac{\overline{BM}}{\overline{BQ}}$ nhận giá trị không đổi.
2. (Thi vào trường Phổ Thông Năng Khiếu năm 2003 – 2004)

a) Cho đường tròn (C) tâm O và một điểm A khác O nằm trong đường tròn. Một đường thẳng thay đổi qua A nhưng không đi qua O cắt (C) tại M, N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn đi qua một điểm cố định khác O.

b) Cho đường tròn (C) tâm O và một đường thẳng (d) nằm ngoài đường tròn. I là điểm di động trên (d). Đường tròn đường kính IO cắt (C) tại M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

3. Cho 3 điểm C, A, B thẳng hàng và được sắp xếp theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi luôn đi qua hai điểm A và B. CM và CM' là hai tiếp tuyến của (O). Chứng minh rằng:

a) M và M' luôn thuộc một đường tròn cố định

b) Trung điểm H của MM' thuộc một đường cố định.

4. (Việt Nam 2003) Trên mặt phẳng cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) cố định tiếp xúc nhau tại M và bán kính của (O_2) lớn hơn bán kính của (O_2). Một điểm A di chuyển trên (O_2) sao cho 3 điểm O_1, O_2 và A không thẳng hàng. Từ điểm A vẽ tiếp tuyến AB và AC đến (O_1) (B, C là hai tiếp điểm). Đường thẳng MB và MC cắt đường tròn (O_2) tại E và F. Gọi giao điểm của EF với tiếp tuyến tại A của (O_2) là D. Chứng minh rằng D luôn di chuyển trên một đường cố định khi A thay đổi trên (O_2) mà O_1, O_2 và A không thẳng hàng.
5. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. D là một điểm cố định thuộc AB, đường thẳng d đi qua D và vuông góc với AB. H là một điểm thay đổi trên d. AH và BH cắt (O) lần lượt tại P và Q. Chứng minh rằng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

6. Cho tam giác ABC và đường cao AH thỏa AD = BC. Gọi H là trưc tâm tam giác, M và N lần lượt là trung điểm của BC và AD. Chứng minh rằng HN = HM.
7. Cho tứ giác ABCD, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác OAD và OBC; M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng $MN \perp HK$.
8. (Dự tuyển IMO 1994) Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với BA, CA, AB lần lượt tại D, E, F. X là một điểm bên trong tam giác ABC sao cho đường tròn nội tiếp tam giác XBC cũng tiếp xúc với BD tại D, và tiếp xúc với XB, XC lần lượt tại Y, Z. Chứng minh rằng EF, YZ và BC đồng quy.
9. (USAMO 1997) Cho tam giác ABC. Về phía ngoài tam giác dựng các tam giác cân DBC, EAC, FAB có các đỉnh lần lượt là D, E, F. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A, B, C lần lượt vuông góc với EF, FD và DE đồng quy.
10. F là điểm trên cạnh đáy AB của hình thang ABCD sao cho DF = CF. E là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi (O_1), (O_2) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp các tam giác ADF và BCF. Chứng minh răng $EF \perp O_1O_2$.
11. (IMO 1994 Shortlist) Một đường tròn (C) tiếp xúc với hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Đường tròn thứ hai (C_1) tiếp xúc với d_1 tại A và tiếp xúc ngoài với (C) tại C. Đường tròn thứ 3 (C_2) tiếp xúc với d_2 tại B và tiếp xúc ngoài với (C) tại D và tiếp xúc với (C) tại E. Gọi Q là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng QC = QD = QE.
12. Cho tam giác ABC. Dựng hình vuông DEFG nội có các đỉnh D, E thuộc cạnh BC, F, G lần lượt thuộc AC và AB. Gọi d_A là trục đẳng phương của hai đường tròn (ABD) và (ACE). Các đường thẳng d_A, d_B được xác định tương tự. Chứng minh rằng d_A, d_B, d_C đồng quy.
13. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), M là trung điểm BC, M’ là giao điểm của AM và (O). Tiếp tuyến tại M cắt đường thẳng qua M vuông góc với AO tại X. Y, Z được xác định tương tự. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.

Lời kết.

Kiến thức về **phương tích và trục đẳng phương** đơn giản và dễ hiểu, tuy nhiên nó có ứng dụng nhiều và thường cho lời giải khá hay đối với các bài toán chứng minh vuông góc, thẳng hàng hay các bài toán về đồng quy…