Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

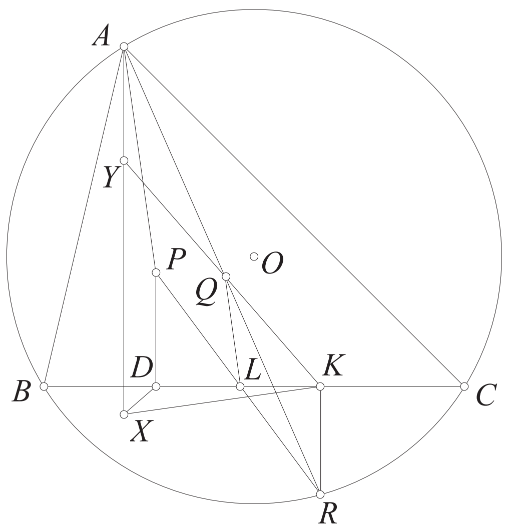
Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với P,Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác đó. AQ cắt (O) tại R khác A. D,K là hình chiếu của P,R lên BC. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A,D,K lần lượt vuông góc với BC,QK,AP đồng quy.

Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P,Q là hai điểm đẳng giác. AP cắt (O) tại M khác A. QM cắt BC tại E thì $PE \parallel AQ$.

Chứng minh của Phan Anh Quân. Gọi AQ cắt (O) tại N khác A và cắt BC tại H. Vì P,Q đẳng giác nên $\triangle CHN \sim \triangle ACM$ và $\triangle CPM \sim \triangle QCN$ (g.g). Ta suy ra $HN.AM = CM.CN = QN.PM$ vì thế nên $\frac{MP}{MA} = \frac{NH}{NQ} = \frac{ME}{MQ}$ hay $PE \parallel AQ$.



Giải bài toán. Gọi đường thẳng qua A vuông góc BC cắt đường thẳng qua K vuông góc AP tại X. Ta sẽ chứng minh $XD \perp QK$, thật vậy. Gọi QK cắt AX tại Y và PR cắt BC tại R, theo bổ đề thì $QL \parallel AP$. Theo định lý Thales ta có $\frac{QK}{QY} = \frac{QR}{QA} = \frac{LR}{LP} = \frac{LK}{LD}$, từ đó ta suy ra $YD \parallel QL \parallel AP \perp XK$. Từ đó trong tam giác XYK thì D là trực tâm nên $XD \perp QK$. Ta hoàn thành chứng minh.

Nhật xét

Bài toán là mở rộng của đề thi vô địch Serbia năm 2016 bài toán 4 ngày 2. Chứng minh có sử dụng kết quả quen thuộc về điểm đẳng giác và cũng bao hàm kết quả $YA = PD$, đó cũng là mở rộng một kết quả quen thuộc trên đường tròn nội tiếp. Bài toán này còn có cách phát biểu khác và có hệ quả như sau

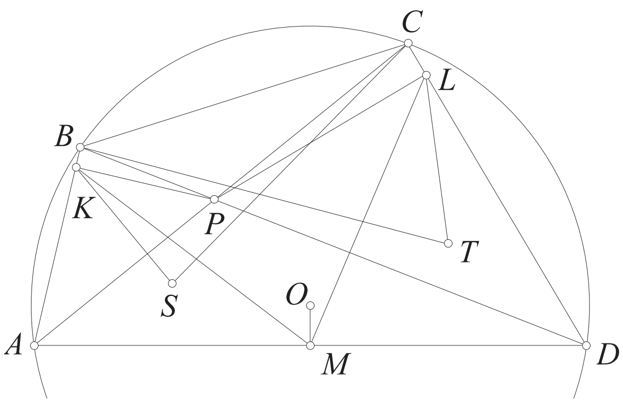
Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. D,E,F là hình chiếu của P lên BC,CA,AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt BC tại M khác D. DP cắt EF tại L. AL cắt BC tại K. Các đường thẳng qua A,M lần lượt vuông góc với BC,QK cắt nhau tại X. Chứng minh rằng $KX \parallel EF$.

Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. D,E,F là hình chiếu của P lên BC,CA,AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt BC tại M khác D. DP cắt EF tại L. AL cắt BC tại K. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A,M,K lần lượt vuông góc với BC,AK,AD đồng quy.

Tác giả nhận được lời giải sớm nhất từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương. Các bạn **Nguyễn Đức Bảo** và **Nguyễn Đình Hoàng** lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cho các lời giải khác ở đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải qua email từ các bạn **Trương Mạnh Tuấn, Trần Anh Tài** lớp 10 Toán, **Trần Quang Huy** lớp 12 Toán, THPT chuyên KHTN, Hà Nội, **Lê Phước Tùng**, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước, **Nguyễn Tiến Long** lớp 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ.

Bài toán đề nghị

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với AC cắt BD tại P. M là trung điểm AD. K,L lần lượt là hình chiếu của P lên AB,CD. Gọi S,T lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác KMA và LMD. Chứng minh rằng $KS.BT = CS.LT$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.