

Mỗi tuần một bài toán

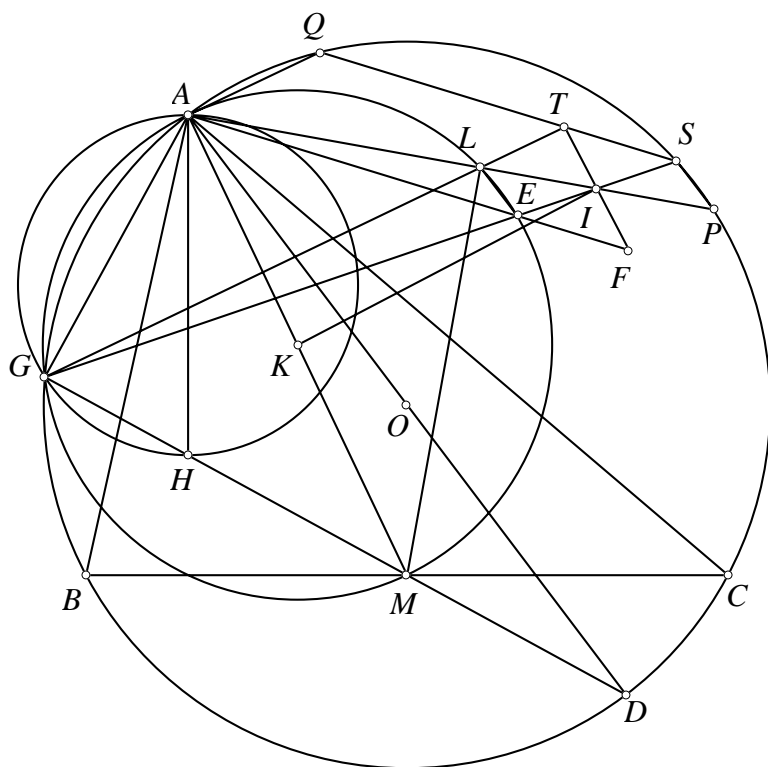
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H , trung tuyến AM . K là trung điểm AM . P là một điểm di chuyển trên O . L là hình chiếu của M lên AP . I là trung điểm PL . Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại G khác A . GI cắt (O) tại S khác G . T là điểm thuộc GL sao cho IT vuông góc KI . Chứng minh rằng ST luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Lời giải



Gọi AD là đường kính của (O) để thấy G, H, M, D thẳng hàng do đó G, L đều thuộc đường tròn (K) đường kính AM . Gọi GI cắt (K) tại E khác G . AE cắt TI tại F . Ta dễ thấy $\angle ELP = \angle AGE = \angle APS$ do đó $PS \parallel LE$ nên I là trung điểm ES . Áp dụng bài toán con bướm cho tứ giác $ALEG$ nội tiếp (K) có $TF \perp KI$ nên I là trung điểm TF . Từ đó dễ thấy $ST \parallel EF$. Gọi ST cắt (O) tại Q khác S . Ta thấy $\angle AQF = 180^\circ - \angle AQS =$

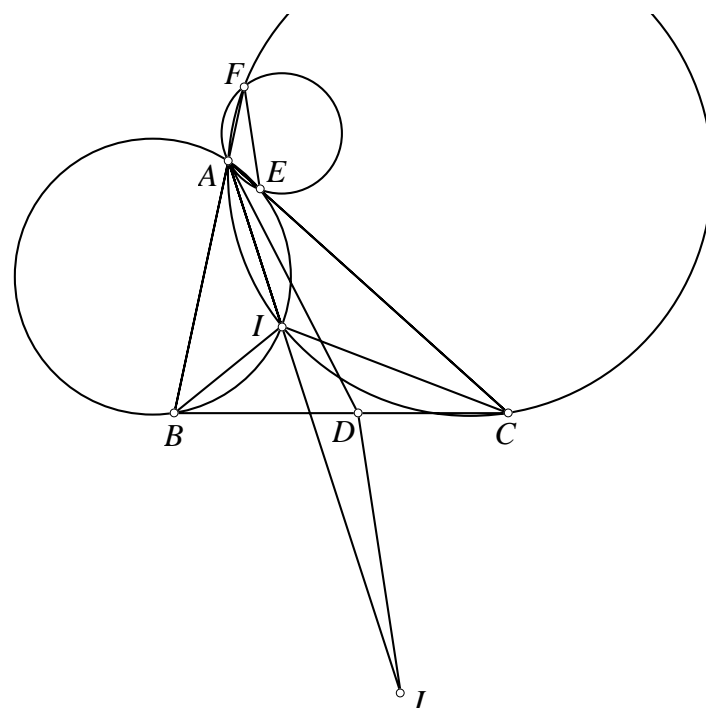
$\angle AGS$. Từ đó dễ thấy AQ tiếp xúc (K) nên Q cố định. Vậy ST đi qua Q cố định. Ta có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Bài toán này được tác giả dùng trong đề kiểm tra đội tuyển IMO của Việt Nam năm 2015. Cấu hình đầu tiên khá đơn giản có thể thấy ngay trong bài toán này là sự thẳng hàng của G, H, M, D . Đây là một trong những bổ đề rất quan trọng cần được nhận ra ngay khi gặp cấu hình như vậy. Bài toán này cũng là một trong những ứng dụng rất đẹp và thú vị của bài toán con bướm. Việc ứng dụng bài toán con bướm vào những mô hình khác nhau thường đem lại những yếu tố hay và bất ngờ trong lời giải, đồng thời cũng tạo nên những tình huống thú vị cho bài toán. Như trong bài toán này, việc đoán nhận điểm cố định Q là một việc không đơn giản.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I , tâm bàng tiếp ứng với đỉnh A là J . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB, AIC lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A . Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt BC tại D . Chứng minh rằng $DA = DJ$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.