Về một bài toán trên tam giác vuông

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

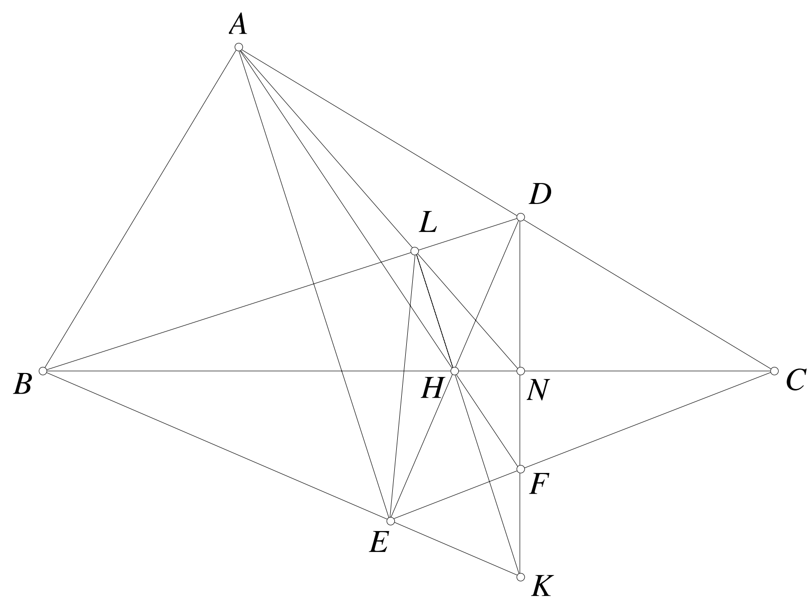
Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán thú vị trên tam giác vuông xuất hiện trong kỳ thi chọn đội tuyển Romani đi thi olympic Balkan năm 2007 cùng với các mở rộng khai thác cho bài toán đó với công cụ tỷ số kép.

Trong [1] có bài toán thú vị sau cho tam giác vuông.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. D là một điểm trên cạnh AC. E đối xứng A qua BD và F là giao điểm của CE và đường thẳng qua D vuông góc BC. Chứng minh rằng AF, DE, BC đồng quy.

Trong [1] xuất hiện rất nhiều lời giải tuy nhiên lời giải sau theo tôi là thú vị nhất, không dùng các khái niệm quá cao, lời giải được đề nghị bởi Petrisor Neagoe trong [1] được tác giả làm gọn.



Hình 1.

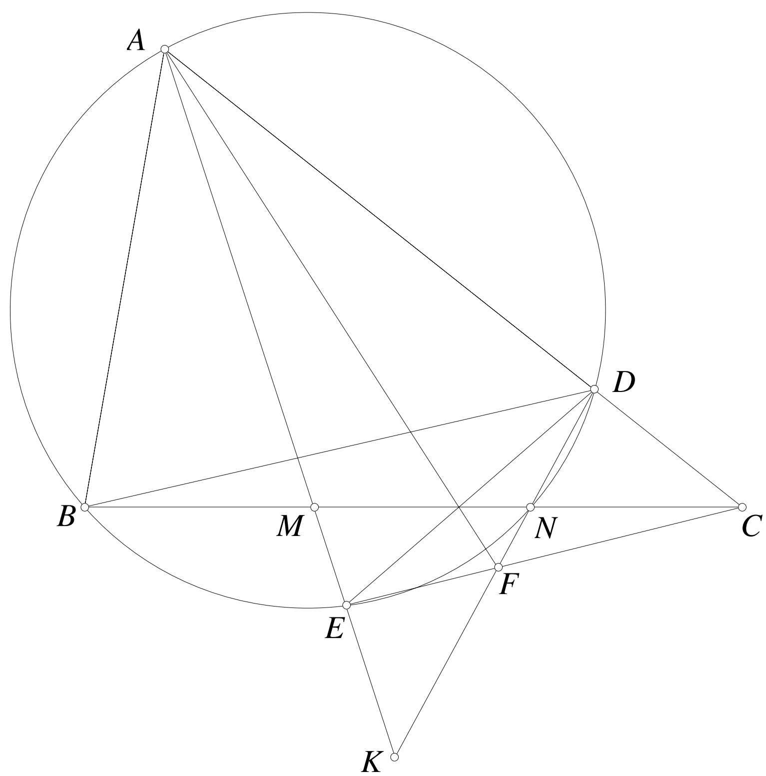
Lời giải. Gọi BE giao DF tại K, DF giao BC tại N, DE giao BN tại H, KH giao BD tại L. Ta dễ thấy H là trực tâm tam giác KBD. Theo tính chất trực tâm thì LB là phân giác ngoài $\angle ELN$ hay các đường thẳng LE, LN đối xứng nhau qua BD. Mặt khác theo giả thiết A, E đối xứng nhau qua BD nên LE, LA đối xứng nhau qua BD suy ra LA, LN trùng nhau. Đến đây áp dụng định lý Desargue cho các tam giác FEK và ADL chú ý giao điểm của các cặp đường thẳng FE giao AD, EK giao DL, KF giao LA theo thứ tự là C, B, N thẳng hàng. Vậy AF, DE, LK đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán có nhiều cách giải bằng hàng điều hòa nhưng cách giải bằng định lý Desargue được xem là đẹp và nhẹ nhàng mang nhiều tính hình học.

Ta có thể hình dung trong tam giác vuông thì đường cao cũng là đương đối trung, mặt khác đối xứng của đỉnh góc vuông qua cạnh huyền thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông góc có thể coi là giao của đường đối trung và đường tròn ngoại tiếp. Ý tưởng này giúp ta mở rộng bài toán trên thành một bài toán cho tam giác bất kỳ như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với D là một điểm bất kỳ trên AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt BC tại N khác B. Đường đối trung qua A của tam giác ABD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tại E khác A. BE cắt DN tại F. Chứng minh rằng AF, DE, BC đồng quy.

Bài toán này có một lời giải khá đơn giản bằng hàng điểm điều hòa và tứ giác điều hòa. Lời giải sau do tác giả đề xuất

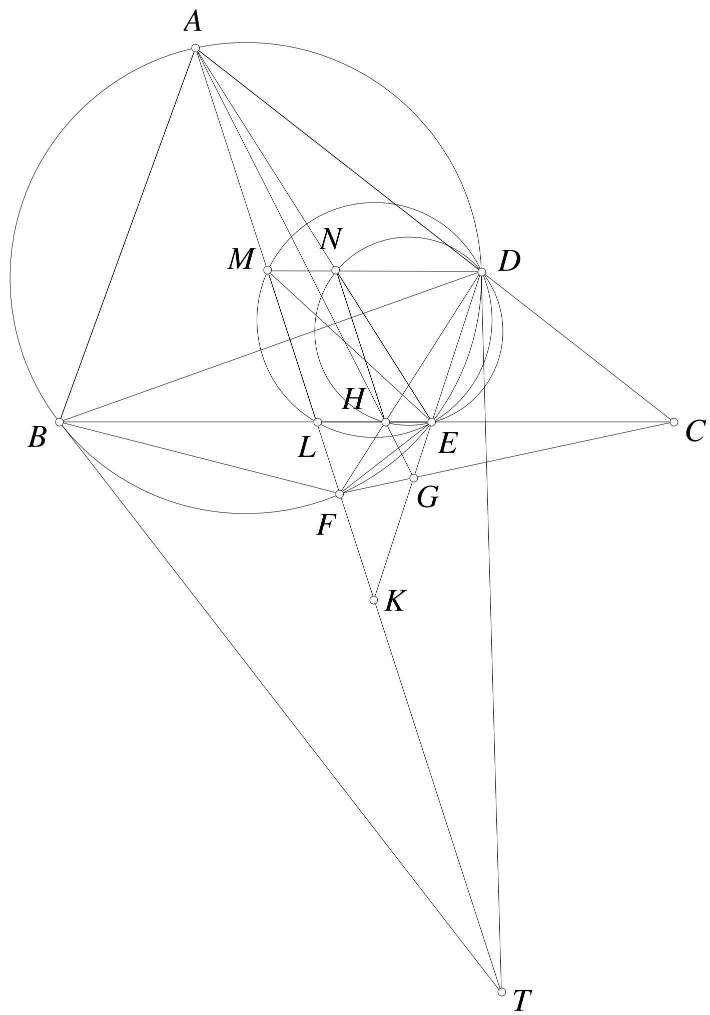


Hình 2.

Lời giải. Gọi DF giao AE tại K. AE giao BC tại M. Do đường đối trung qua A của tam giác ABD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tại E khác A nên tứ giác $ADEB$ điều hòa do đó có hàng (AE, BD) điều hòa trên đường tròn. Chiếu bằng tâm N lên đường AE ta được $(AE, MK) = N(AE, BD) = (AE, BD) = -1$. Chiếu hàng điều hòa (AE, MK) bằng tâm C lên đường thẳng DF ta được $(DF, NK) = C(AE, MK) = -1$. Từ đó ta có hai hàng điều hòa $(KN, FD) = (KM, AE)$ suy ra MN, AF, DE đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Khi tam giác ABC vuông tại A. E chính là đối xứng của A qua BD. Ta thu lại được bài toán ban đầu. Bài toán này có một số khai thác đẹp, tiêu biểu là bài chọn đội tuyển KHTN năm 2012-2013 trong [2] như sau

Bài toán 3. Cho tam giác nhọn ABC. D là một điểm thuộc đoạn AC. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn thẳng BC tại E khác B. Tiếp tuyến tại B, D của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt nhau tại T. AT cắt đường tròn ngoại tiếp tại tam giác ABD tại F khác A. CF giao DE tại G. AG giao BC tại H. M là trung điểm của AF. AE giao MD tại N. Chứng minh rằng $HN \parallel AT$.



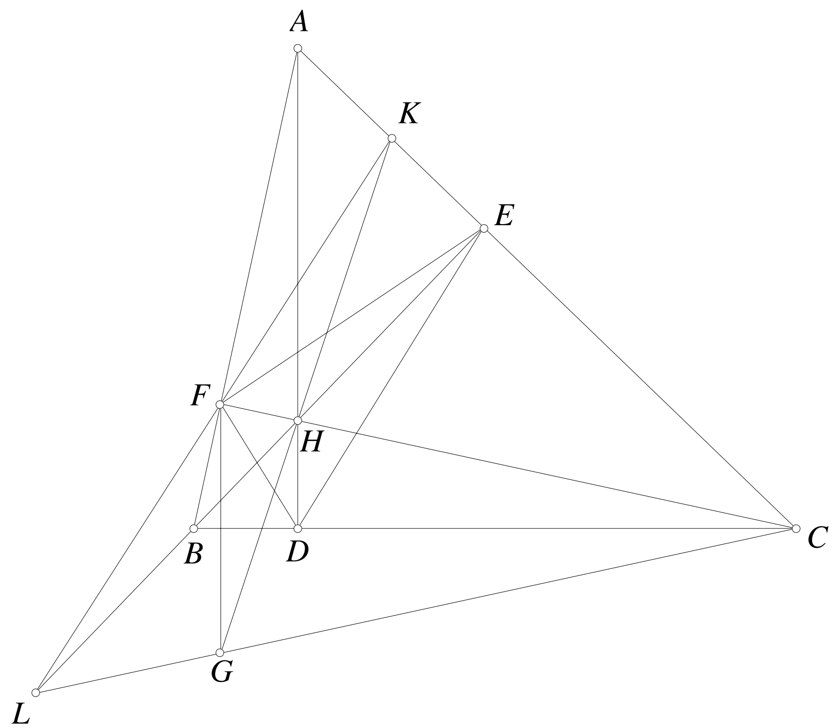
Hình 3.

Lời giải. Gọi DE giao AT tại K. Ta dễ thấy tứ giác $ABFD$ điều hòa nên $(AF, LK) = E(AF, BD) = -1$. Từ đó $(DG, EK) = C(DG, EK) = (AF, LK) = -1$ hay $(GD, EK) = -1 = (AF, LK)$ suy ra AG, DF, EL đồng quy tại H.

Từ $(AF, LK) = -1$, theo hệ thức Maclaurin, chú ý tứ giác $ABED$ nội tiếp ta suy ra $\overline{KM}.\overline{KL} = \overline{KF}.\overline{KA} = \overline{KE}.\overline{KD}$. Do đó tứ giác $MDEL$ nội tiếp. Từ đó ta có $\angle NDH = \angle MDH = \angle MDE - \angle HDE = \angle MLB - \angle FDE = \angle MLB - \angle FBE = \angle LFB = \angle AEB = \angle NEH$. Suy ra tứ giác $NDEH$ nội tiếp suy ra $\angle DNH = \angle DEC = \angle DML$ vậy $HN \parallel ML \equiv AT$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nếu áp dụng mô hình trong cách giải bài toán 1 ta có thể đề xuất bài toán thú vị sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. G đối xứng F qua BC. CG cắt BE tại L. LF cắt AC tại K. Chứng minh rằng KG đi qua trực tâm H.



Hình 4.

Nếu để ý kỹ các bạn thấy thực ra bài toán này là bài toán 1 "xoay ngược" áp dụng vào tam giác KBD trực tâm H. Tuy vậy dựa vào bài toán mới này ta dễ dàng đề xuất bài toán tổng quát như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua F song song AD cắt BC tại M. G đối xứng F qua M. CG cắt BE tại L. LF cắt AC tại K. Chứng minh rằng KG đi qua P.

Các bạn hãy làm bài toán đơn giản này như một bài luyện tập và chú ý rằng tuy đơn giản nhưng nó có những khai thác và ứng dụng khá bất ngờ. Các bạn hãy khám phá.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=860114

[2] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com