Xung quanh một bài toán hình học trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán hình học hay trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014 ngày thứ 2 với các công cụ hình học thuần túy.

Trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014 ngày thứ 1 có bài toán hình học như sau

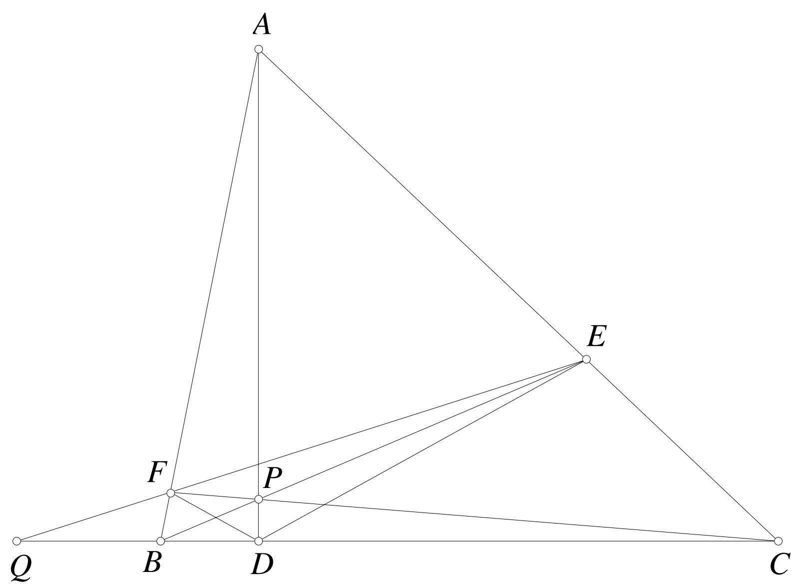
Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn không cân đường cao AD và P thuộc AD. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F.

a) Giả sử tứ giác $AEDF$ nội tiếp. Chứng minh rằng $\dfrac{PA}{PD} = (\tan B + \tan C)\cot\dfrac{A}{2}$.

b) Gọi CP cắt đường thẳng qua B vuông góc AB tại M. BP cắt đường thẳng qua C vuông góc AC tại N. K là hình chiếu của A lên MN. Chứng minh rằng $\angle BKC + \angle MAN$ không đổi khi P di chuyển.

Hai câu a) và b) của bài toán không liên quan tới nhau. Ta sẽ tách riêng thành hai bài toán và phân tích từng bài toán một. Câu a) phát biểu điều kiện dưới dạng một biểu thức lượng giác như vậy không đẹp, ta hoàn toàn có thể có một hệ thức lượng thuần túy hình học của câu a). Ta xét bài toán sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nhọn không cân đường cao AD và P thuộc AD. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Chứng minh rằng nếu tứ giác $AEDF$ nội tiếp thì $\dfrac{AD}{PD} = \dfrac{AB.AC + AD^2}{DB.DC}$.



Hình 1.

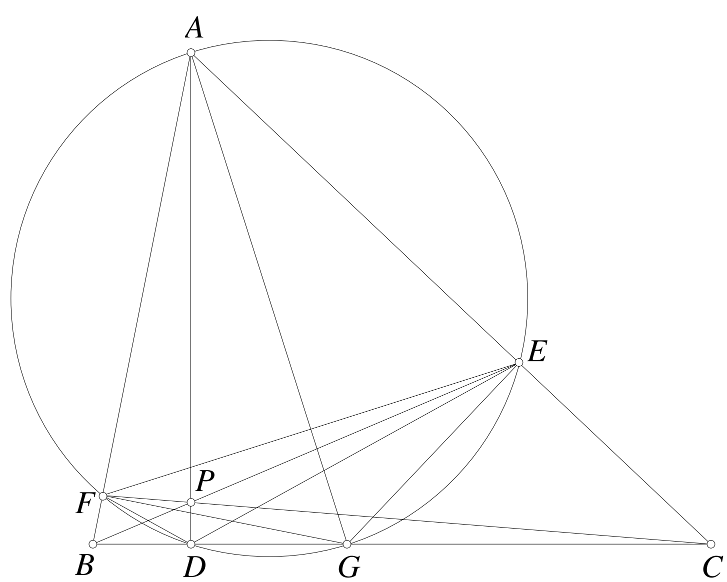
Lời giải 1. Gọi EF cắt BC tại Q. Ta có hàng điều hòa cơ bản $(BC, DQ) = -1$ lại có $DA \perp DQ$ nên DA là phân giác $\angle EDF$. Từ đó với tứ giác $AEDF$ nội tiếp ta dễ suy ra $AE = AF$. Theo định lý Ceva $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1$ suy ra $\frac{EC}{FB} = \frac{DC}{DB}$. Ta lại dễ có $AC - AB = AE + EC - AF - FB = EC - FB$. Từ tỷ số và hiệu của EC, FB ta dễ suy ra $EC = \frac{(AC-AB)DB}{DC-DB}, FB = \frac{(AC-AB)DC}{DC-DB}$ và $AE = AF = AB - FB = \frac{AB.DC - AC.DB}{DC - DB}$.

Từ đó theo hệ thức Van Aubel thì

$$\begin{aligned}
\frac{PA}{PD} &= \frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} = \frac{AB.DC - AC.DB}{DC(AC-AB)} + \frac{AB.DC - AC.DB}{DB(AC-AB)} \\
&= \frac{AB}{AC-AB} - \frac{AC.DB}{DC(AC-AB)} + \frac{AB.DC}{DB(AC-AB)} - \frac{AC}{AC-AB} \\
&= \frac{AB.DC^2 - AC.DB^2}{DB.DC(AC-AB)} - 1 \\
&= \frac{AB(AC^2 - AD^2) - AC(AB^2 - AD^2)}{DB.DC(AC-AB)} - 1 \\
&= \frac{AB.AC + AD^2}{DB.DC} - 1
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\frac{AD}{PD} = 1 + \frac{PA}{PD} = \frac{AB.AC + AD^2}{DB.DC}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Từ áp dụng hệ thức lượng giác cơ bản ta có $\frac{PA}{PD} = \frac{AB.AC + AD^2}{DB.DC} - 1 = \frac{1}{\cos B \cos C} + \tan B.\tan C - 1$. Không khó để kiểm tra đẳng thức $\frac{1}{\cos B \cos C} + \tan B.\tan C - 1 = (\tan B + \tan C)\cot\frac{A}{2}$, từ đó mục đích ban đầu của bài toán được thực hiện. Tuy nhiên việc biến đổi thuần túy hệ thức lượng theo các cạnh không làm ta nhìn rõ bản chất hình học của bài toán này. Chúng ta xét hướng tiếp cận khác câu a) bài toán 1 của tác giả Nguyễn Văn Linh



Hình 2.

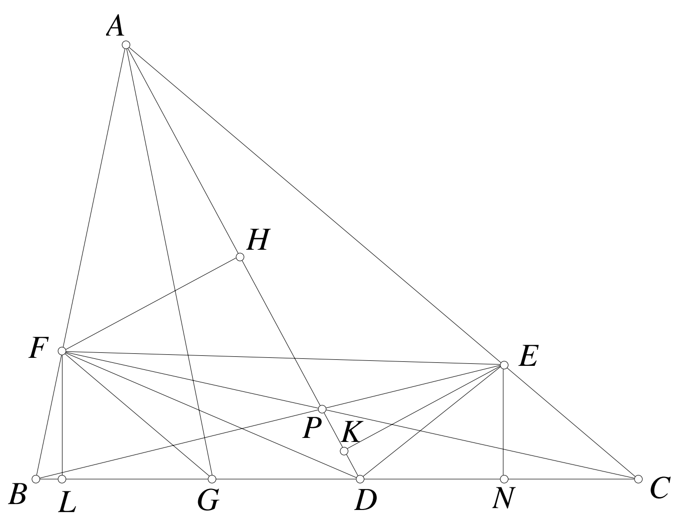
Lời giải 2. Tương tự phân trước ta đã có DA là phân giác $\angle EDF$ nên $AE = AF$. Gọi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEDF$ cắt BC tại G khác D. Dễ có DG là phân giác ngoài tại đỉnh D nên $GE = GF$ do đó $\triangle AGE = \triangle AGF$ nên AG là phân giác $\angle BAC$. Từ đó theo định lý Van Aubel $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{FA}{FB} + \dfrac{EA}{EC} = \dfrac{FA}{GF}.\dfrac{GF}{FB} + \dfrac{EA}{GE}.\dfrac{GE}{EC} = \cot\dfrac{A}{2}\tan B + \cot\dfrac{A}{2}.\tan C = (\tan B + \tan C)\cot\dfrac{A}{2}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc dựng thêm điểm G làm ta đi đến hệ thức lượng nhanh chóng xong điều đó không ý nghĩa bằng ta có nhận xét E, F chính là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADG với CA, AB. Điều này cho ta liên tưởng tới bài toán sau đã có trong Shortlist năm 1994 và lời giải có trong [2]

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có phân giác AD. E, F là hình chiếu của D lên CA, AB. BE giao CF tại P. H là hình chiếu của P lên BC. Chứng minh rằng HP là phân giác $\angle EHF$.

Tuy vậy quan trọng hơn cách làm này cho ta một ý tưởng tổng quát bài toán phần a) này như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với P là điểm bất kỳ trong tam giác ABC. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi H, K là hình chiếu của F, E lên AD và L, N là hình chiếu của F, E lên BC. Chứng minh rằng $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{FH}{FL}.\dfrac{DA}{DB} + \dfrac{EK}{EN}.\dfrac{DA}{DC}$.



Hình 3.

Cách chứng minh sử dụng định lý Van Aubel tương tự. Chú ý khi AD là đường cao và $AEDF$ nội tiếp ta dễ thấy $\dfrac{FH}{FL} = \dfrac{EK}{EN} = \cot\dfrac{A}{2}$ và $\dfrac{DA}{DB} = \tan B$, $\dfrac{DA}{DC} = \tan C$, như vậy ta thu được bài toán ban đầu.

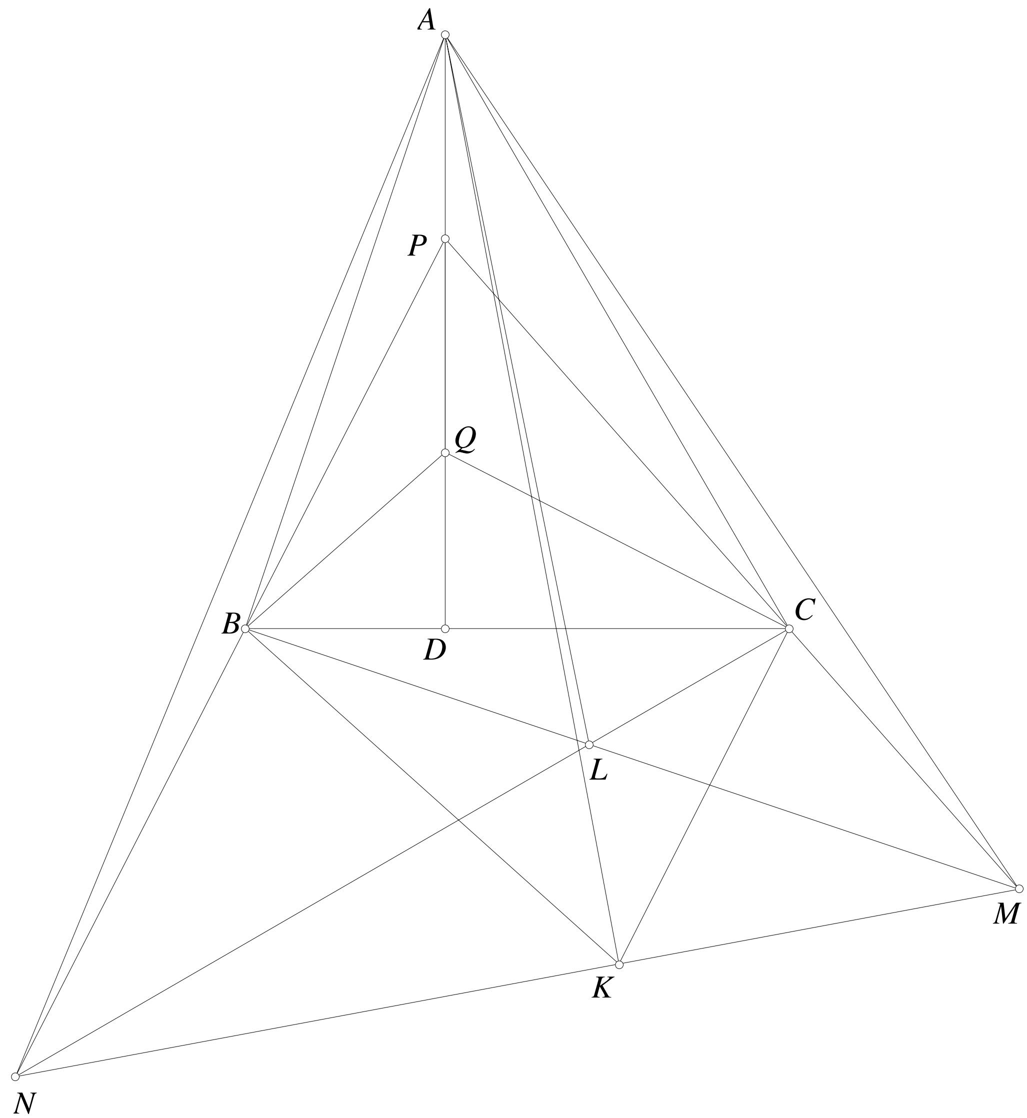
Trở lại phần b) bài toán. Vì phần b) xem ra quá đơn giản nên tôi xin đề xuất thêm một vài ý khác từ mô hình này, ta xét bài toán sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC đường cao AD. P di chuyển trên AD. PB, PC lần lượt cắt các đường thẳng qua C vuông góc CA và qua B vuông góc AB tại N, M. Gọi K là hình chiếu của A lên MN.

a) Chứng minh rằng $\angle MAN + \angle BKC$ không đổi khi P di chuyển.

b) Chứng minh rằng $\angle MAC = \angle NAB$.

c) Chứng minh rằng KA là phân giác $\angle BKC$.



Hình 4.

Lời giải. a) Gọi BM giao CN tại L thì L cố định. Ta chú ý các tứ giác $ACKN, ABKM$ nội tiếp ta có $\angle MAN + \angle BKC = \angle MAK + \angle NAK + \angle BKC = \angle MBK + \angle NCK + \angle BKC = \angle BLC$ không đổi. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi Q là trực tâm tam giác PBC ta có $\angle NBC = 180^\circ - \angle PBC = \angle AQC$ và $\angle QAC = 90^\circ - \angle ACD = \angle BCN$. Từ đây suy ra $\triangle BCN \sim \triangle QAC$ suy ra $\dfrac{CA}{CN} = \dfrac{QA}{BC}$. Tương tự $\dfrac{BA}{BM} = \dfrac{QA}{BC}$.

Từ đó $\dfrac{CA}{CN} = \dfrac{BA}{BM}$ suy ra các tam giác vuông $\triangle CAN \sim \triangle BAM$ suy ra $\angle BAM = \angle CAN$ hay $\angle CAM = \angle BAN$. Ta có điều phải chứng minh.

c) Ta dễ có các góc ngoài bằng nhau $\angle CKM = \angle CAN = \angle BAM = \angle BKN$ từ đây dễ suy ra $\angle CKA = \angle BKA$ hay KA là phân giác $\angle BKC$. Ta có điều phải chứng minh. □

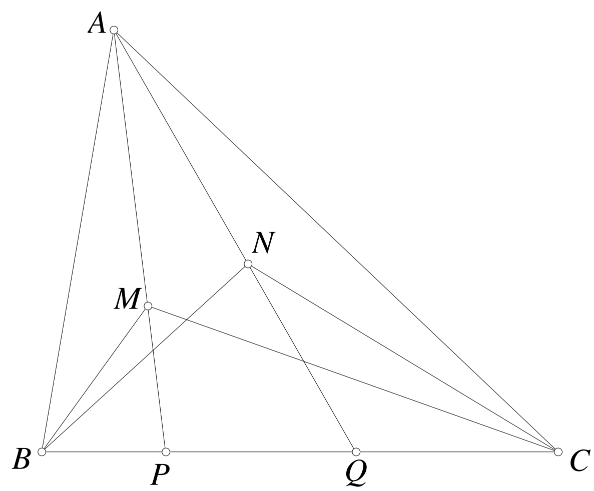
Nhận xét. Rõ ràng ý chứng minh phần a) quá đơn giản. Phần b) thực chất cũng là một bài toán đẳng giác quen thuộc. Tuy nhiên việc chỉ KA là phân giác $\angle BKC$ ở phần c) là một ý thú vị. Bài toán cho thấy MN là phân giác ngoài góc $\angle BKC$. Hay trung trực BC cắt MN tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BKC.

Ý b) của bài toán 5 cũng có thể mở rộng hơn nữa như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F cố định thuộc (O) sao cho $EF \parallel BC$. P, Q lần lượt thuộc AE, AF. PB, PC lần lượt cắt QC, QB tại N, M. Chứng minh rằng $\angle MAB = \angle NAC$.

Ta cần có một bổ đề

Bổ đề 6.1. Cho tam giác ABC và hai điểm M, N bất kỳ cùng nằm trong hoặc cùng nằm ngoài tam giác. Chứng minh rằng $\angle MAB = \angle NAC$ khi và chỉ khi $\dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.



Hình 5.

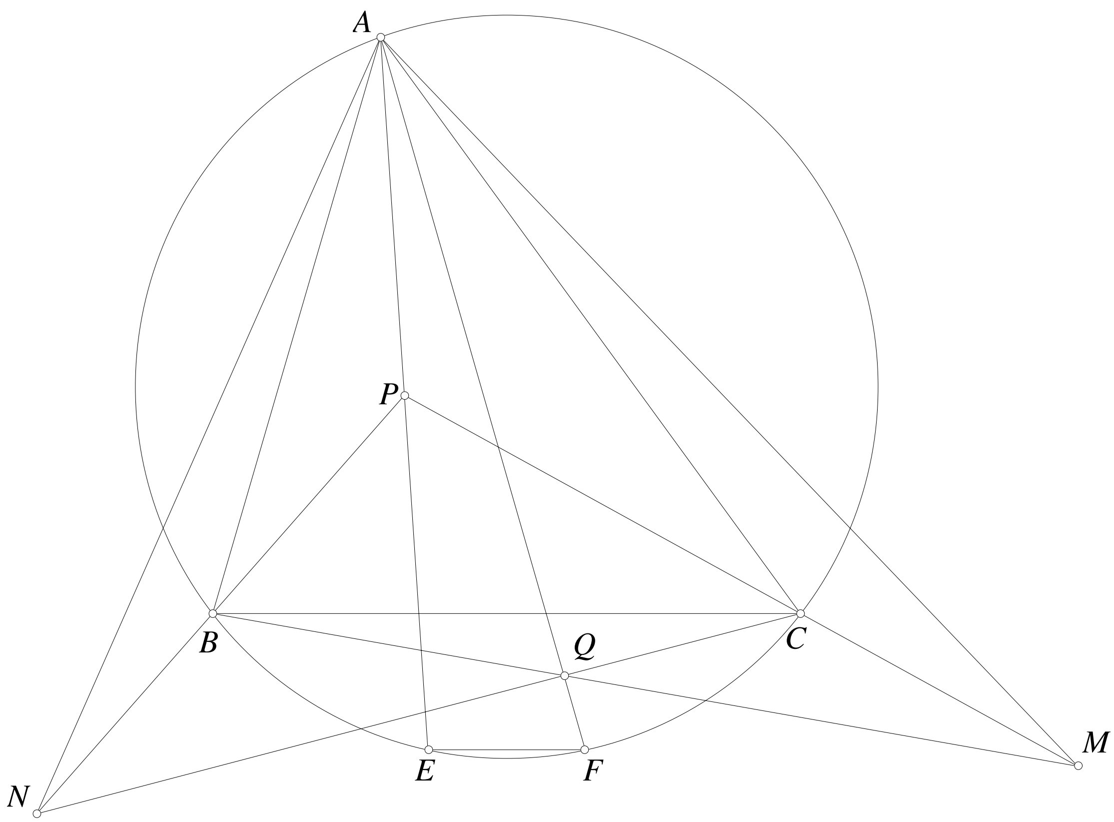
Chứng minh. Trường hợp M, N cùng nằm trong tam giác.

Nếu $\angle MAB = \angle NAC$. Áp dụng tính chất về diện tích tam giác có hai góc bằng nhau ta có $\dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{[NAB]}{[MAC]}.\dfrac{[MAB]}{[NAC]} = \dfrac{AB.AN}{AM.AC}.\dfrac{AB.AM}{AN.AC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Ta có điều phải chứng minh.

Nếu $\dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Gọi AM, AN cắt đoạn BC tại P, Q. Suy ra $\dfrac{QB}{QC}.\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Gọi P' là điểm thuộc BC sao cho $\angle P'AB = \angle QAC$. Theo phần trên thì $\dfrac{QB}{QC}.\dfrac{P'B}{P'C} =$

$\dfrac{[QAB]}{[QAC]}.\dfrac{[P'AB]}{[P'AC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Từ đó suy ra $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{P'B}{P'C}$ vậy $P' \equiv P$ vậy $\angle PAB = \angle QAC$ hay $\angle MAB = \angle NAC$. Ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp M, N nằm ngoài tam giác ta chứng minh tương tự. □



Hình 6.

Lời giải. Áp dụng bổ đề ta phải chứng minh rằng $\dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Thật vậy ta có

$$\dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = (\dfrac{[NAB]}{[PAB]}.\dfrac{[PAB]}{[PAC]}.\dfrac{[PAC]}{[NAC]}).(\dfrac{[MAB]}{[QAB]}.\dfrac{[QAB]}{[QAC]}.\dfrac{[QAC]}{[MAC]})$$
$$= \dfrac{BN}{BP}.\dfrac{BM}{BQ}.(\dfrac{[PAC]}{[NAC]}.\dfrac{[QAC]}{[MAC]}).(\dfrac{[PAB]}{[PAC]}.\dfrac{[QAB]}{[QAC]})$$
$$= \dfrac{BN}{BP}.\dfrac{BM}{BQ}.\dfrac{CP}{CM}.\dfrac{CQ}{CN}.\dfrac{AB^2}{AC^2}.$$

Vậy ta sẽ chứng minh rằng $\dfrac{BN}{BP}.\dfrac{BM}{BQ}.\dfrac{CP}{CM}.\dfrac{QC}{QN} = 1$.

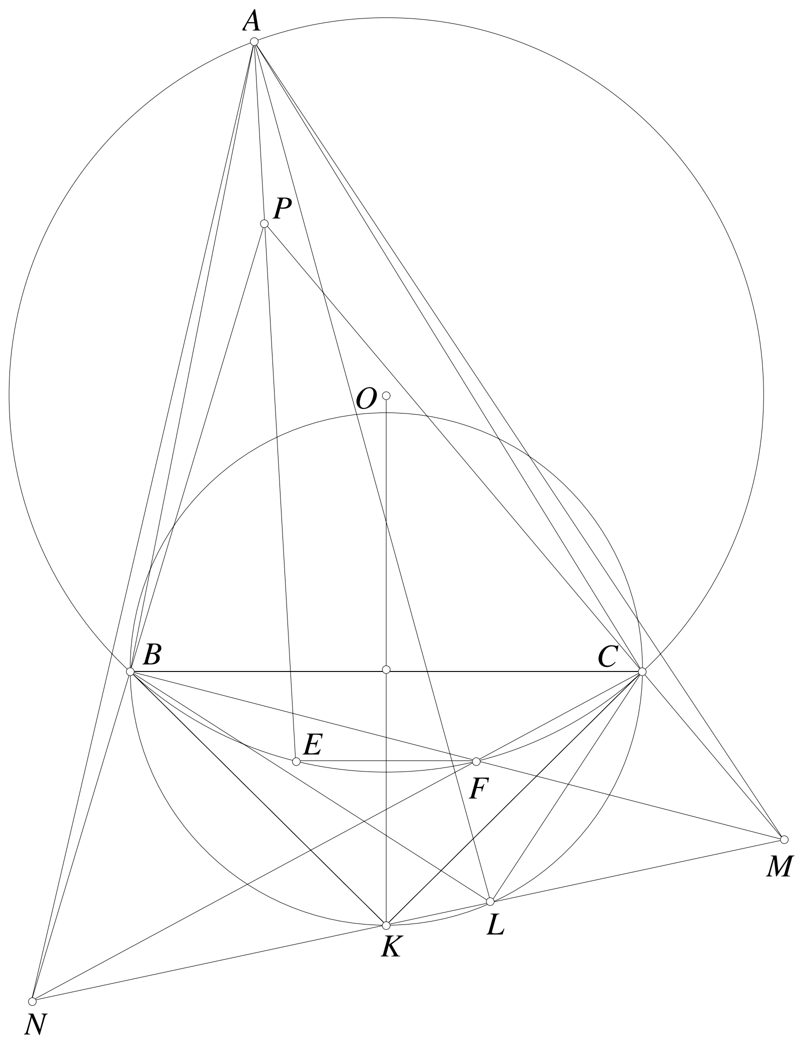
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CPN với Q, B, M thẳng hàng ta có $\dfrac{BN}{BP}.\dfrac{MP}{MC}.\dfrac{QC}{QN} = 1$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CQM với P, B, N thẳng hàng ta có $\dfrac{PC}{PM}.\dfrac{BM}{BQ}.\dfrac{NQ}{NC} = 1$.

Nhân hai đẳng thức trên cho ta $\dfrac{BN}{BP}.\dfrac{BM}{BQ}.\dfrac{CP}{CM}.\dfrac{CQ}{CN} = 1$. Vậy đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ý tưởng chính trong chứng minh là của Lê Thị Hải Linh học sinh lớp 11 chuyên toán Bắc Ninh. Với bài toán này ta có thể tiếp tục mở rộng ý c) của bài toán 5 như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F cố định thuộc (O) sao cho $EF \parallel BC$. P di chuyển trên AE. PB, PC lần lượt cắt FC, FB tại N, M. Trung trực BC cắt MN tại K. Chứng minh rằng $\angle MAN + \angle BKC$ không đổi khi P di chuyển.



Hình 7.

Lời giải. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ACN và ABM cắt nhau tại L khác A. Ta có $\angle ALM + \angle ALN = \angle ABM + \angle ACN = 180°$ suy ra L nằm trên MN. Theo bài toán 6 đã có $\angle NAC = \angle MAB$ suy ra $\angle CLM = \angle NAC = \angle MAB = \angle BLN$ vậy MN là phân giác ngoài tại đỉnh L của tam giác LBC. Từ đó trung trực BC cắt MN tại K thì K nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác LBC. Vậy $\angle MAN + \angle BKC = \angle MAL + \angle NAL + \angle BLC = \angle MBL + \angle NCL + \angle BLC = \angle BFC = 180° - \angle BAC$ không đổi. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Tài liệu

[1] Vietnam TST bài 4 http://diendantoanhoc.net/form

[2] IMO Shortlist 1994, G1 http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=352892

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com