Về bài hình học chọn đội tuyển Việt Nam ngày 2 năm 2015

Tóm tắt nội dung

Bài viết muốn trình bày con đường đi tới bài hình học chọn đội tuyển Việt Nam năm 2015 ngày thứ 2 cùng với một số mở rộng và phát triển.

Đề chọn đội tuyển Việt Nam ngày 2 [1] có bài hình học như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn không cân và có điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC = \alpha > 180^\circ - \angle BAC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt AC ở E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APC cắt AB ở F khác A. Gọi Q là điểm nằm trong tam giác AEF sao cho $\angle AQE = \angle AQF = \alpha$. Gọi D là điểm đối xứng với Q qua EF, phân giác góc $\angle EDF$ cắt AP tại T.

a) Chứng minh rằng $\angle DET = \angle ABC, \angle DFT = \angle ACB$.

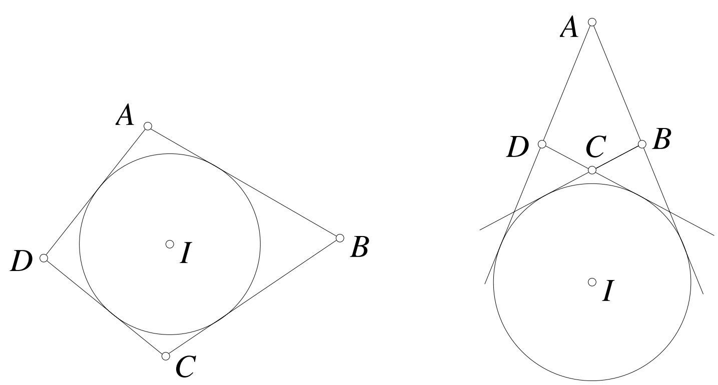
b) Đường thẳng PA cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại M, N. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PEM, PFN và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ. Đường thẳng DT cắt (K) tại H. Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DMN.

Nhận xét. Đây là bài toán hay. Câu a) dùng gợi ý hướng giải cho câu b). Nếu để ý kỹ thực chất bài toán này là sự ghép nối của hai bài toán khác. Sau đây tôi xin giới thiệu lại với các bạn cả hai bài toán đó cùng với nguồn gốc của nó. Trước hết ta nhắc lại hai bài toán quan trọng về tứ giác ngoại tiếp.

Bài toán 2. Cho tứ giác $ABCD$.

a) Nếu $AB + CD = AD + BC$ thì tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp. Tức là tồn tại đường tròn (I) tiếp xúc các cạnh AB, BC, CD, DA.

b) Nếu $AB + AD = CB + CD$ thì tứ giác $ABCD$ bàng tiếp góc A, C. Từ là tồn tại một đường tròn (I) chứa trong góc A hoặc C tiếp xúc với các cạnh AB, BC, CD, DA kéo dài.

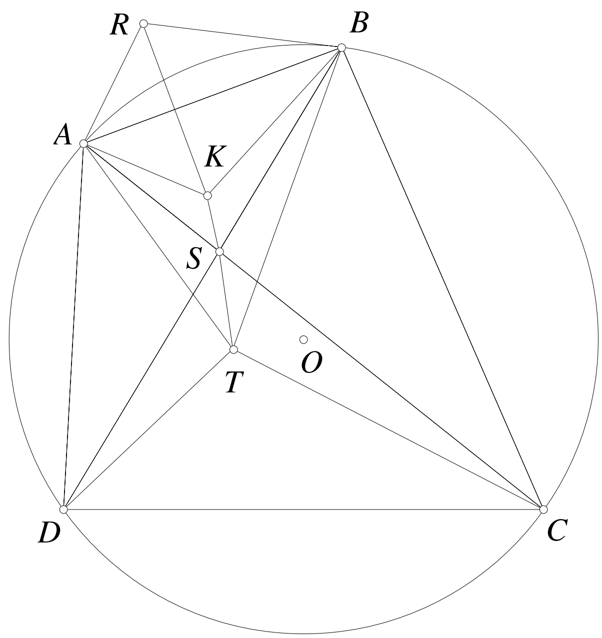


Hình 1.

Bổ đề là kết quả cơ bản có trong nhiều tại liệu. Chúng ta bắt đầu từ bài toán đầu tiên tham khảo [2] là đề chọn đội tuyển Indonesia

Bài toán 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác SAD, SBC cắt tại tại T khác S. Dựng ra ngoài tứ giác tam giác ABR đồng dạng với DCT. Chứng minh rằng tứ giác $ATBR$ là tứ giác ngoại tiếp.

Đây là bài toán hay có rất nhiều cách tiếp cận khác nhau. Tuy vậy chúng tôi chọn lời giải sau gần như là ngắn gọn nhất và cũng chính là sử dụng hướng đi trong bài toán 1.



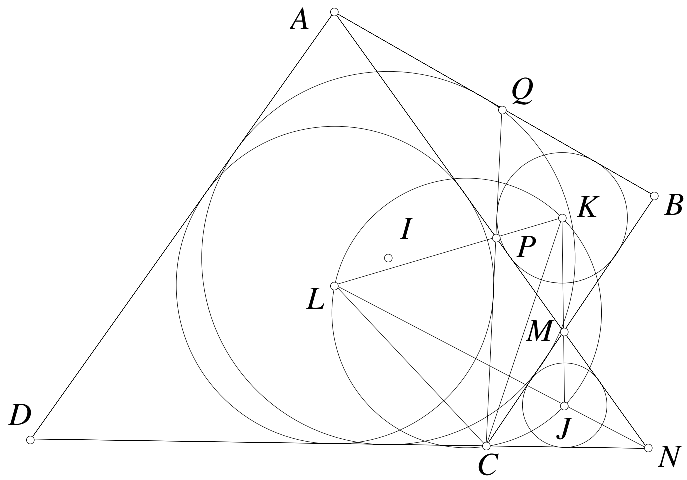
Hình 2.

Lời giải. Gọi K đối xứng R qua BC. Ta thấy $\angle KAS = \angle BAS - \angle BAK = \angle BDC - \angle RAB = \angle BDC - \angle TDC = \angle SDT = \angle SAT$. Từ đó AS là phân giác $\angle KAT$. Tương tự BS là phân giác $\angle KBT$. Dễ thấy TS là phân giác $\angle ATB$. Từ đó đường tròn (S) tiếp xúc với KA, KB, TA, TB suy ra $AK - AT = BK - BT$. Theo tính đối xứng suy ra $AR - AT = BR - BT$ hay $AR + BT = BR + AT$ suy ra tứ giác $ARBT$ ngoại tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Trong [2] cũng có một lời giải khác và ngoài ra bài toán cũng có thể giải bằng phép nghịch đảo hoặc tính chất phương tích. Ta dễ chứng minh được tâm nội tiếp tứ giác $ATBR$ là đẳng giác của K trong tam giác SAB đó chính là nội dung bài toán 1 phần a). Để tiếp tục chúng tôi xin nhắc lại và chứng minh bài toán trong IMO Shortlist 2009 trong [3] như sau

Bài toán 4. Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Một đường thẳng đi qua A cắt đoạn thẳng BC và cắt tia đối tia CD tại N. Gọi J, K, L là tâm nội tiếp tam giác CNM, MAB và NAD. Chứng minh rằng trực tâm tam giác JKL nằm trên MN.

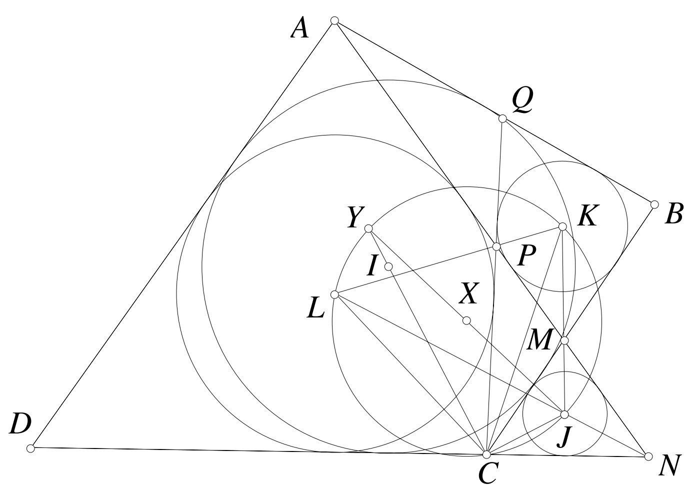
Đây là một kết quả đẹp, bao hàm nhiều ý tưởng. Chúng tôi xin giới thiệu lời giải sử dụng bài toán 2 như sau



Hình 3.

Lời giải. Gọi tiếp tuyến của đường tròn (L) nội tiếp tam giác NAD cắt AM, AB tại P, Q. Như vậy tứ giác $APCD$ nội tiếp. Kết hợp $ABCD$ nội tiếp suy ra $PA - PC = DA - DC = BA - BC$. Từ đó tứ giác $APCB$ bàng tiếp hay tứ giác $BQPM$ ngoại tiếp vậy CP tiếp xúc (K). Từ đó $2\angle LCK = \angle BCD = \angle CMN + \angle CNM = 2\angle JMN + 2\angle JNM = 2\angle MJL$. Từ đó tứ giác $CJKL$ nội tiếp. Từ đó theo định lý đường thẳng Steiner thì đường thẳng nối đối xứng của C qua JK, JL đi qua trực tâm tam giác JKL. Chú ý theo tính chất phân giác thì đường thẳng đó chính là MN. Vậy MN đi qua trực tâm tam giác JKL. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này có kết cấu chặt chẽ và ý tưởng hay. Chú ý điều kiện N thuộc tia đối tia CD cần thiết để bài toán đúng. Để ý rằng $CI \perp CJ$ nên nếu CI cắt đường tròn (X) ngoại tiếp tứ giác $CJKL$ tại Y thì JY là đường kính của (X). Phần nhận xét này chính là kết quả câu b) bài toán 1. Nếu để ý kỹ thi mô hình bài toán shortlist này cũng đã xuất hiện một lần trong đề thi VMO năm 2011 xem [4]



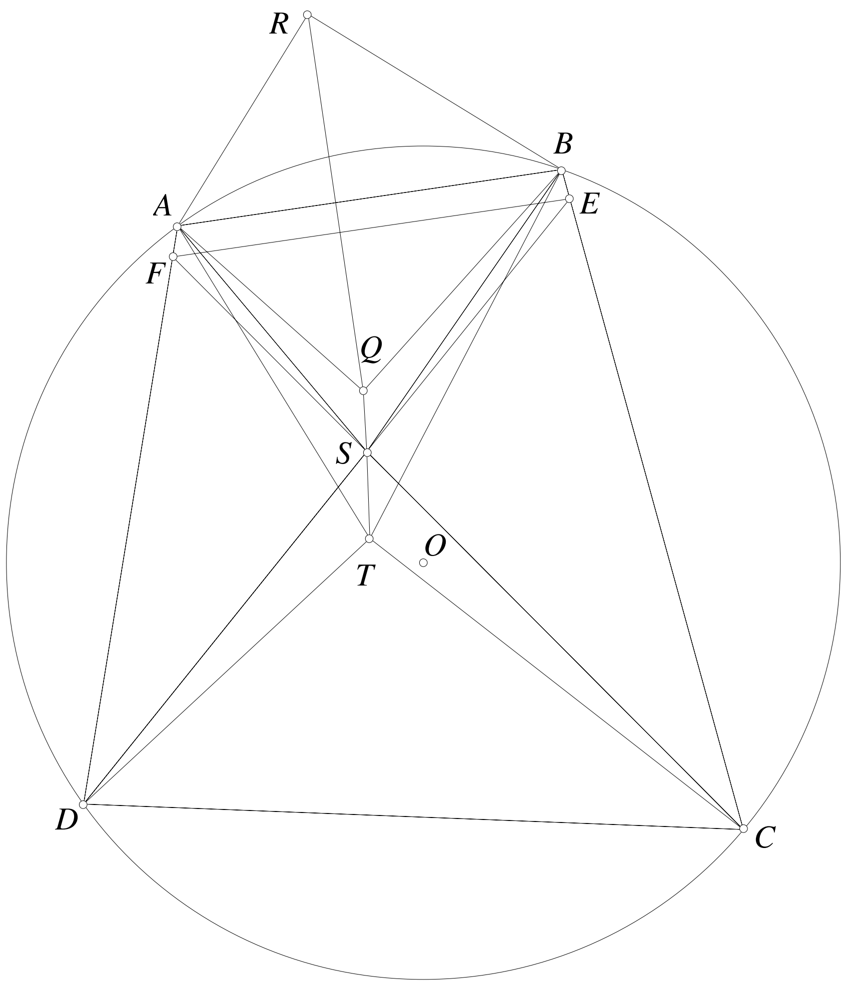
Hình 4.

Trở lại bài toán 1. Ta chú ý rằng do điều kiện chặt chẽ của bài toán Shortlist nên ta cần bổ sung thêm điều kiện cho bài toán 1 là M, N phải luôn cùng phía với P trên đường thẳng AP. Từ đó chú ý tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Bài toán chỉ là sự kết hợp một cách cơ học của bài toán 3 và bài toán 4. Chú ý rằng ta hoàn toàn có thể thay thế AP thành một đường thẳng bất kỳ đi qua P. Vậy ta có thể phát biểu lại bài toán này đẹp hơn như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và có điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC = \alpha$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PAC lần lượt cắt CA, AB tại E, E khác A. Điểm Q là điểm nằm trong tam giác AEF sao cho $\angle AQE = \angle AQF = \alpha$. Gọi D là điểm đối xứng với Q qua EF. Một đường thẳng đi qua P cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại M, N sao cho M, N cùng phía với P. Gọi I, J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác PEM, PFN và K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DIJ. Phân giác $\angle EDF$ cắt (K) tại H. Chứng minh rằng đường thẳng HK đi qua tâm đường tròn nội tiếp của tam giác DMN.

Nhận xét. Do bài toán chỉ là một cách kết hợp cơ học hai bài toán trên nên một khi giải và phân tích rõ hai bài toán trên thì bài toán kết hợp không còn mang nhiều ý nghĩa. Tuy vậy việc sử dụng cả hai bài toán lớn trong cùng một bài toán làm độ khó của bài toán thi tăng nhiều lần và chính vì vậy nó đánh giá cao và phân loại tốt được học sinh. Chúng ta tiếp tục với một mở rộng thú vị sau cho bài toán 3.

Bài toán 6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Các điểm E, F thuộc cạnh CB, AD sao cho $EF \parallel AB$. DE cắt CF tại S. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ASD và BSC cắt nhau tại T khác S. Dựng điểm R ở ngoài tứ giác $ABCD$ sao cho $\angle RAB = \angle ASF + \angle TDC$ và $\angle RBA = \angle BSE + \angle TCD$. Chứng minh rằng tứ giác $ATBR$ nội tiếp.



Hình 5.

Lời giải. Ta dễ thấy tứ giác $CDFE$ nội tiếp nên $\angle STA = \angle SDF = \angle SCE = \angle STB$. Từ đó TS là phân giác $\angle ATB$. Ta lại có $\angle QAS = \angle SAB - \angle QAB = \angle DAB - \angle DAS - \angle RAB = \angle DFE - (\angle DFS - \angle FSA) - (\angle ASF + \angle TDC) = \angle SFE - \angle TDC = \angle SDC - \angle TDC = \angle SDT = \angle SAT$. Vậy AS là phân giác $\angle QAT$. Tương tự BS là phân giác $\angle QBT$. Từ đó đường tròn (S) tiếp xúc với QA, QB, TA, TB suy ra $AQ - AT = BQ - BT$. Theo tính đối xứng suy ra $AR - AT = BR - BT$ hay $AR + BT = BR + AT$ suy ra tứ giác $ARBT$ ngoại tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Khi EF trùng AB ta thu được bài toán 3. Nếu việc kết hợp bài toán 3 và bài toán 4 cho ta bài toán TST thì việc kết hợp bài toán 6 và bài toán 4 sẽ cho ta một mở rộng cho bài TST nhưng rõ ràng việc kết hợp một cách cơ học như các bạn đã thấy nó cũng không còn mang nhiều ý nghĩa nữa.

Tuy vậy để thú vị hơn tôi xin đưa ra một ý tưởng như sau từ đề bài toán 1. Những điểm P nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle APB = \angle APC$ thì các điểm P đó có gì đặc biệt hay nói cách khác, quỹ tích P là gì. Bài toán sau sẽ giải đáp thắc mắc đó, chúng ta sẽ không cố gắng tìm quỹ tích P mà sẽ tìm quỹ tích điểm đẳng giác của P. Đó là một quỹ tích đẹp và chứng minh đơn giản, các bạn hãy làm như một bài luyện tập

Bài toán 7. Cho tam giác ABC có đường tròn Apollonius ứng với A là (K). P là một điểm thuộc (K). Q đẳng giác với P trong tam giác ABC. Chứng minh rằng $\angle AQB = \angle AQC$.

Tài liệu

[1] Đề thi chọn đôi tuyển Việt Nam thì IMO năm 2015

[2] Indonesia IMO 2007 TST, Stage 2, Test 5, Problem 1
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h312083

[3] IMO Shortlist 2009 - Problem G8
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h355795p1932940

[4] A, M, N, P are concyclic iff d passes through I- [VMO 2011]
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h386167p2144390

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com