Mỗi tuần một bài toán

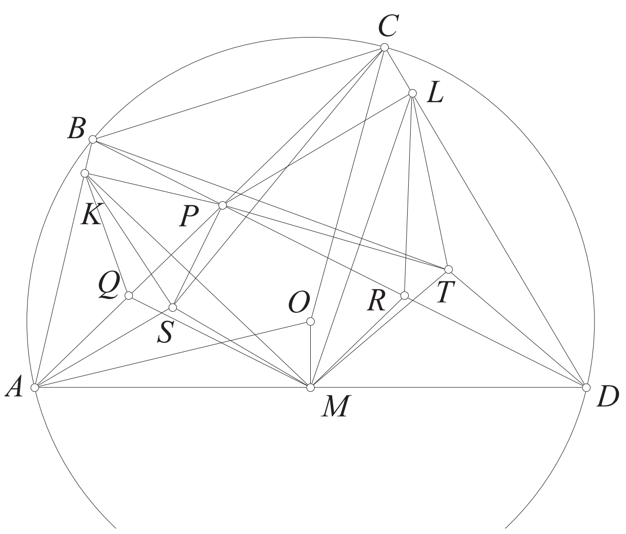
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với AC cắt BD tại P. M là trung điểm AD. K, L lần lượt là hình chiếu của P lên AB, CD. Gọi S, T lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác KMA và LMD. Chứng minh rằng $KS.BT = CS.LT$.

Lời giải



Gọi Q, R là trung điểm của PA, PD. Ta dễ thấy $QM = \frac{1}{2}PD = LR$ và $RM = \frac{1}{2}PA = KQ$ và $\angle KQM = \angle KQP + \angle PQM = 2\angle KAP + \angle PQM = 2\angle LDP + \angle PRM = \angle LRP + \angle PRM = \angle LRM$. Từ đó hai tam giác QKM và RLM bằng nhau c.g.c. Nên $\angle KML = \angle QMR - \angle QMK - \angle RML = 180^\circ - \angle PRM - \angle RLM - \angle RML = \angle PRL = 2\angle PDL$. Từ đó $\angle CAS = \angle KAS - \angle KAC = 90^\circ - \angle KMA - \angle PDL = \angle KMO - \angle PDL = \angle KML - \angle OML - \angle PDL = 2\angle PDL - (90^\circ - \angle LMD) - \angle PDL = \angle PDL - \angle TDL = \angle TDB$. Ta lại có $\angle AOC = 2\angle ADC = \angle MTL$ nên hai tam giác cân OAC và TML đồng dạng. Tương tự hai tam giác cân OBD và SMK đồng dạng. Chú ý $MK = ML$ do hai tam giác QKM và RLM bằng nhau. Từ đó ta có $TD.AC = TL.AC = ML.OC = MK.OB = KS.BD = SA.BD$. Từ đó hai tam giác SAC và TDB đồng dạng. Vậy $BT.KS = BT.AS = CS.TD = CS.LT$. Ta thu được điều phải chứng minh.

Nhật xét

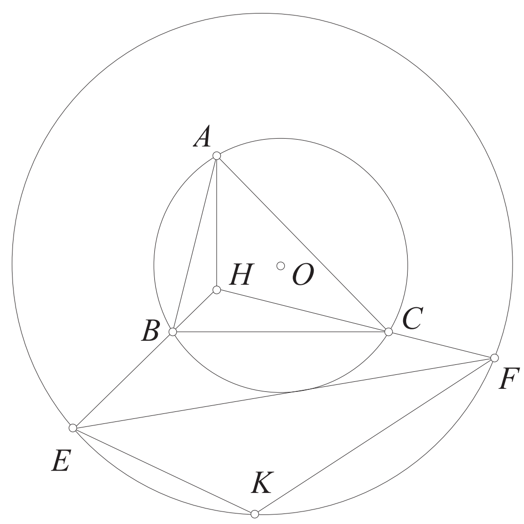
Bài toán là mở rộng của đề thi vô địch miền Tây Trung Quốc năm 2014. Trong chứng minh chúng ta dựng ra hai trung điểm để chỉ ra hai tam giác bằng nhau, thực chất cấu hình này là một bài toán quen thuộc và nổi tiếng. Bài toán có một hệ quả trực tiếp và chứng minh bằng bổ đề E.R.I.Q rất thú vị như sau

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với AC cắt BD tại P. M là trung AD. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu của P lên AB, CD. Gọi S, T lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác KMA và LMD. Gọi SU, TV lần lượt là phân giác các tam giác SCK và TBL. Chứng minh rằng trung trực KL chia đôi UV.

Ngoài ra trên cấu hình đặc biệt này có rất nhiều điểm để khai thác. Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cho lời giải sớm nhất ở đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải qua email từ các bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương, **Nguyễn Đình Hoàng** lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, **Trương Mạnh Tuấn, Trần Anh Tài** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN, Hà Nội, **Lê Phước Tùng**, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H, nội tiếp đường tròn (O). HB, HC lần lượt cắt một tiếp tuyến thay đổi của (O) tại E, F. K đối xứng với H qua EF. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KEF luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi tiếp tuyến thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.