Mathley 2 Number 2/May 2014

Mathley là nhóm giải toán trên mạng xuất bản bài toán và lời giải định kỳ, bài viết phù hợp với học sinh trung học có năng khiếu toán học và các bạn trẻ yêu toán học, tham gia các cuộc thi học sinh giỏi toán. Mỗi năm có sáu ấn bản điện tử được ra đời nhằm phục vụ phong trào giải toán. **Mathley** is an online problem solving corner with prolems, solutions, and materials freely accessible to junior up to high school students. The corner is is made public six times per year on a regular basis dedicated to the promotion of problem solving among junior and high school students.

Email: mathley@hus.edu.vn.
Website: www.hexagon.edu.vn/mathley.html

CÁC BÀI TOÁN/PROBLEMS

1. *Vũ Hà Văn, khoa Toán, trường Đại học Yale, Hoa Kỳ.* Vùng nọ có khu đất vàng 100×100 m, chia ra làm 100 lô, mỗi lô 10×10 m. Vua bãi rác muốn lấn chiếm khu đất này nên sai tay chân đổ rác vào một số ô. Nếu một ô nào chưa có rác mà có ít nhất hai ô cạnh nó (có chung cạnh) đã bị đổ rác thì (đáng tiếc) hôm sau nhân dân cũng sẽ đổ rác vào ô đó. Nếu đến một ngày nào đó tất cả các ô đều bị đổ rác thì vua bãi rác sẽ chiếm khu đất. Nếu vua bãi rác muốn chiếm khu đất này thì lúc đầu cần đổ rác vào ít nhất mấy ô?

A large golden square land lot of dimension 100×100 m was subdivided into 100 square lots, each measured 10×10 m. A king of landfill had his men dump wastes onto some of the lots. There was a practice that if a particular lot was not dumped and two of its adjacents had waste materials, then the lot would be filled with wastes the next day by the people. One day if all the lots were filled with wastes, the king would claim his ownership of the whole land lot. At least how many lots should have the kind had his men dump wastes onto?

2. *Nguyễn Minh Hà, trường Đại học Sư phạm Hà Nội, Xuân Thủy, Cầu giấy, Hà Nội.* Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp là (K). Một đường tròn tiếp xúc với AB, AC và tiếp xúc trong với (K) tại K_a. Các điểm K_b, K_c được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng diện tích của tam giác $K_aK_bK_c$ không lớn hơn diện tích tam giác ABC.

Let ABC be a triangle with a circumcircle (K). A circle touching the sides AB, AC is internally tangent to (K) at K_a; two other points K_b, K_c are defined in the same manner. Prove that the area of triangle $K_aK_bK_c$ does not exceed that of triangle ABC.

3. *Trần Quang Hùng, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Thanh Xuân, Hà Nội.* Trong tam giác ABC, gọi D là điểm đối xứng của A qua BC. Đường tròn (K) đường kính AD cắt DB, DC lần lượt tại M, N, khác D. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KEM, KFN cắt nhau tại L, khác K. Biết rằng KL cắt EF tại X; các điểm Y, Z định nghĩa tương tự. Chứng mnh rằng ba đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy.

In a triangle ABC, D is the reflection of A about the sideline BC. A circle (K) with diameter AD meets DB, DC at M, N which are distinct from D. Let E, F be the midpoint of CA, AB. The circumcircles of KEM, KFN meet each other again at L, distinct from K. Let KL meet EF at X; points Y, Z are defined in the same manner. Prove that three lines AX, BY, CZ are concurrent.

4. *Nguyễn Văn Linh, sinh viên trường Đại học Ngoại thương Hà Nội.* Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là một điểm nằm trên cung BC, không chứa A. Gọi (Q) là đường tròn A-mixtilinear của tam giác ABC; và (K), (L) lần lượt là các đường tròn P-mixtilinear của các tam giác PAB, PAC. Chứng minh rằng luôn có một đường thẳng tiếp xúc với các đường tròn (Q), (K), (L).

Let (O) be the circumcircle of triangle ABC, and P a point on the arc BC not containing A. (Q) is the A-mixtilinear circle of triangle ABC, and $(K), (L)$ are the P-mixtilinear circles of triangle PAB, PAC respectively. Prove that there is a line tangent to all the three circles (Q), (K) and (L).

5. *Trần Minh Ngọc, sinh viên trường Đại học Sư phạm Tp Hồ Chí Minh.* Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (I) lần lượt tiếp xúc AC, BD tại M, N. Giả sử MN lần lượt cắt AB, CD tại P, Q. Đường tròn ngoại tiếp tam giác IMN lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác IAB, ICD tại K, L, khác I. Chứng minh rằng các đường thẳng PK, QL, và OI đồng quy.

A quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle (O). Another circle (I) is tangent to the diagonals AC, BD at M, N respectively. Suppose that MN meets AB, CD at P, Q respectively. The circumcircle of triangle IMN meets the circumcircles of IAB, ICD at K, L respectively, which are distinct from I. Prove that the lines PK, QL, and OI are concurrent.

LỜI GIẢI/SOLUTIONS

1. *Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội.* Cho các đoạn AD, BE, CF có trung điểm cùng nằm trên đường thẳng ℓ. Các điểm X, Y, Z lần lượt thuộc đường thẳng EF, FD, DE sao cho $AX \parallel BY \parallel CZ \parallel \ell$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.

Chứng minh. Gọi ℓ là một đường thẳng không song song với d. Gọi AX, BY, CZ, d lần lượt cắt ℓ tại U, V, W, Q. Gọi I, J, K là hình chiếu song song phương d của D, E, F lên ℓ. Ta chú ý Q là trung điểm của UI, VJ, WK. Từ đó ta dễ thấy

$\frac{\overline{XE}}{\overline{XF}} = \frac{\overline{UJ}}{\overline{UK}} = \frac{\overline{QJ}-\overline{QU}}{\overline{QK}-\overline{QU}} = \frac{-\overline{QV}-\overline{QU}}{-\overline{QW}-\overline{QU}} = \frac{\overline{QU}+\overline{QV}}{\overline{QU}+\overline{QW}}$

Tương tự $\frac{\overline{YF}}{\overline{YD}} = \frac{\overline{QV}+\overline{QW}}{\overline{QV}+\overline{QU}}, \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZE}} = \frac{\overline{QW}+\overline{QU}}{\overline{QW}+\overline{QV}}$.

Từ đó ta có $\frac{\overline{XE}}{\overline{XF}}.\frac{\overline{YF}}{\overline{YD}}.\frac{\overline{ZD}}{\overline{ZE}} = 1$, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác DEF ta suy ra X, Y, Z thẳng hàng. □

2. *Đặng Hùng Thắng, trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội.* Cho dãy số (t_n) xác định truy hồi như sau $t_0 = 0$, $t_1 = 6$, $t_{n+2} = 14t_{n+1} - t_n$. Chứng minh rằng với mỗi số $n \geq 1$, thì t_n là diện tích của một tam giác có độ dài ba cạnh đều là các số nguyên.

Solution. Gọi t là diện tích của tam giác có ba cạnh là $x-1$, x, và $x+1$ với $x > 2$, $x \in \mathbb{N}$. Theo công thức Heron cho diện tích tam giác, ta có $t = \frac{1}{4}x\sqrt{3(x^2-4)}$. Suy ra

$$16t^2 = 3x^2(x^2-4). \tag{1}$$

Ta tìm nghiệm nguyên dương (t, x) của phương trình trên. Ta có x phải chẵn. Đặt $x = 2y$, suy ra $t^2 = 3y^2(y^2-1)$, hay $t = y\sqrt{3(y^2-1)}$. Suy ra $3(y^2-1) = h^2$, $h = 3z$, $3(y^2-1) = 9z^2$, tức là $y^2 - 3z^2 = 1$, $t = 3yz$. Ngược lại, nếu (y, z) là nghiệm của phương trình Pell

$$y^2 - 3z^2 = 1, \tag{2}$$

thìh $x = 2y$, $y > 1$, $t = 3yz$ là nghiệm của phương trình (1). Nghiệm nhỏ nhất của (2) là $(2, 1)$. Vật tất cả các nghiệm của (2) là dãy (y_n) cho bởi $y_0 = 1$, $y_1 = 2$, $y_{n+2} = 4y_{n+1} - y_n$. Suy ra $x_n = 2y_n$ với $n \geq 1$ cho bởi $x_0 = 2$, $x_1 = 4$, $x_{n+2} = 4x_{n-1} - x_n$. Ta có

$$y_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}, \quad z_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}},$$

và $t_n = 3y_n$, $z_n = \frac{\sqrt{3}}{4}((7+4\sqrt{3})^n - (7-4\sqrt{3})^n)$. Suy ra $t_{n+2} = 14t_{n+1} - t_n$, $t_0 = 0$ và $t_1 = 6$. Vậy t_n là diện tích của tam giác có ba cạnh là $x_n - 1$ x_n, $x_n + 1$, $n \geq 1$. □

3. *Nguyễn Tiến Lâm, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội.* Cho đa giác đều có 2013 cạnh, hỏi có bao nhiêu tam giác không cân có các đỉnh là các đỉnh của đa giác đã cho và có một góc lớn hơn 120°?

Lời giải. Ta gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều đã cho. Các đỉnh của đa giác đều chia đường tròn (O) thành 2013 cung, mỗi cung có số đo là $\frac{360}{2013}^\circ = \frac{120}{671}^\circ$.

Trước hết, ta tính số tam giác $A_xA_1A_y$ có góc $\widehat{A_1} > 120°$. Không mất tính tổng quát, giả sử $2 \leq x < y \leq 2013$. Ta có $\widehat{A_xA_1A_y} = \frac{1}{2}(y-x)\frac{120}{671}^\circ$, nên $\widehat{A_xA_1A_y} > 120°$ khi và chỉ khi $y - x > 1342$. Dẫn đến $2 \leq x < y - 1342 \leq 671$. Xét tương ứng $f : (x; y) \to (x; y-1342)$ thì f là một song ánh. Do đó, số cách chọn cặp $(x; y)$ bằng số cách chọn cặp $(x; y-1342)$ và bằng $\binom{670}{2}$. Như vậy có $\binom{670}{2}$ tam giác có góc tại đỉnh A_1 lớn hơn 120°. Bằng việc thực hiện phép quay theo chiều kim đồng hồ một góc $\frac{120}{671}^\circ$ ta cũng suy ra có đúng $\binom{670}{2}$ tam giác có góc tại đỉnh A_i lớn hơn 120° với $i = 1, 2, \ldots, 2013$. Do vậy, số tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn 120° là $2013\binom{670}{2}$.

Tiếp theo ta đếm số tam giác cân $A_xA_1A_y$ mà $\widehat{A_xA_1A_y} > 120°$, trong đó $x < y$. Hiển nhiên, tam giác $A_xA_1A_y$ cân tại đỉnh A_1. Hơn nữa, dễ thấy $2 \leq x \leq 1007$ và với mỗi giá trị của x xác định duy nhất một giá trị $y = 2015 - x$. Khi đó, giá trị của góc $\widehat{A_1A_xA_y} = (x-1)\frac{60}{671}^\circ$. Vì $\widehat{A_xA_1A_y} > 120°$ nên $\widehat{A_1A_xA_y} < 30°$ dẫn đến $2 \leq x \leq 336$. Từ đó, có đúng 335 tam giác cân $A_xA_1A_y$ mà góc $\widehat{A_xA_1A_y} > 120°$. Một cách tương tự, ta suy ra có đúng 335 tam giác cân tại đỉnh A_i và góc tại đỉnh A_i lớn hơn 120° với $i = 1, 2, \ldots, 2013$. Do vậy, số tam giác cân có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn 120° là $2013.335 = 674355$.

Tóm lại, số tam giác thỏa mãn yêu cầu bài toán là $2013 \times \binom{670}{2} - 674355 = 450469140$. □

Nhận xét. Phương pháp đếm trong bài toán là phương pháp song ánh (tương ứng 1-1) quen thuộc. Bằng phương pháp tương tự, ta có thể giải bài toán trong trường hợp đa giác đều n cạnh.

4. *Michel BATAILLE, 12, rue Sainte-Catherine, 76000 ROUEN (FRANCE)* Gọi S_k là tập tất cả các bộ ba số thực (a, b, c) thỏa mãn $a < k(b+c)$, $b < k(c+a)$, và $c < k(a+b)$. Hỏi với giá trị nào của k thì S_k là một tập con của $\{(a, b, c) | ab + bc + ca > 0\}$?

Lời giải. Đặt $S = \{(a, b, c) | ab + bc + ca > 0\}$. Ta sẽ chứng minh $S_k \subset S$ đúng nếu và chỉ nếu $0 \leq k \leq 2$. Cộng các điều kiện đã cho $a < k(b+c)$, b<k(c+a), $c < k(a+b)$, ta thu được $a+b+c < 2k(a+b+c)$ khi $(a, b, c) \in S_k$. Suy ra rằng $S_k = \emptyset \subset S$ khi $k = \frac{1}{2}$. Mặt khác, nếu $k = -1$, thì $ab + bc + ca < 0$ khi $(a, b, c) = (-1, -1, -1) \in S_k$. Ta giả sử rằng $k \neq \frac{1}{2}$, và $k \neq -1$ trong các lập luận tiếp theo.

Nếu $(a, b, c) \in S_k$, định nghĩa các số thực dương x, y, z bởi

$$x = kb + kc - a, \; y = kc + ka - b, \; z = ka + kb - c.$$

Giải hệ phương trình tìm a, b, c cho ta

$$(3)\quad a = \frac{(1-k)x + ky + kz}{(2k-1)(k+1)},$$
$$b = \frac{kx + (1-k)y + kz}{(2k-1)(k+1)},\ c = \frac{kx + ky + (1-k)z}{(2k-1)(k+1)}$$

và có thể thấy rằng $ab + bc + ca$ cùng dấu với

$$k(2-k)(x^2 + y^2 + z^2) + (2k^2 + 1)(xy + yz + zx).$$

Do đó, $ab + bc + ca > 0$ đúng nếu $0 \le k \le 2$.

Đảo lại, giả sửa $k > 2$ hoặc $k < 0$. Vì $k(2-k) < 0$, ta có thể chọn $z_0 > 0$ sao cho

$$k(2-k)z_0^2 + 2z_0(2k^2 + 1) + 1 + 4k < 0.$$

Chọn $x = y = 1$ và $z = z_0$ trong (3) cho ta

$$a_0 = b_0 = \frac{1 + kz_0}{(2k-1)(k+1)},\ c_0 = \frac{2k + (1-k)z_0}{(2k-1)(k+1)},$$

và với $(a_0, b_0, c_0) \in S_k$ sao cho $a_0b_0 + b_0c_0 + c_0a_0 < 0$. □

5. *Nguyễn Duy Thái Sơn, trường Đại học Đà Nẵng, Đà Nẵng.* Cho dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, trong đó $u_1 = 1, u_2 = 2$, và $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + \frac{(-1)^n - 1}{2}$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng mọi số nguyên dương đều có thể biểu diễn dưới dạng tổng của một số số hạng đôi một phân biệt của dãy số $(u_n)_{n=1}^{\infty}$.

Lời giải. Trước hết, ta nhận xét rằng các số hạng của dãy đã cho đều là các số nguyên dương và $u_1 = 1 < u_2 = 2 = u_3 = 4 < L < u_n < u_{n+1} < L$ (khi $n \ge 3$). Vì thế, nếu đặt $I_n = \{k \in \mathbb{Z} \,|\, u_n \le k < u_{n+1}\}$, thì $\mathbb{N}^* = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$, $I_n = \emptyset$ chỉ với $n = 2$.

Ta sẽ chứng minh rằng các mệnh đề P_n (n nguyên dương) sau đây là đúng

$$\forall k \in I_n,\ \exists X_k \subseteq \{u_i \,|\, i \in \mathbb{N}^*,\ i \le n\},\ k = \sum_{x \in X_k} x.$$

Thật vậy, vì $I_2 = \emptyset$ nên không có gì phải bàn với P_2, còn P_1 thì dễ thấy là đúng. Giả sử P_n đã đúng đến $n > 1$ nào đó. Lấy tùy ý $k \in I_{n+1}$. Nếu $k = u_{n+1}$ thì chỉ cần chọn $X_k := \{u_{n+1}\}$.

Khhi $u_{n+1} < k < u_{n+2}$ ta có

$$1 \le \ell := k - u_{n+1} < u_{n+2} - u_{n+1} = u_n + \frac{(-1)^n - 1}{2} \le u_n$$

nên, theo giả thiết quy nạp, tồn tại $X_\ell \subset \{u_i|\ i \in \mathbb{N}^*,\ i \le n-1\}$ để $\ell = \sum_{x \in X_\ell} x$. Chỉ cần chọn $X_k := \{u_{n+1}\} \cup X_\ell$ ta có ngay $X_k \subset \{u_i|\ i \in \mathbb{N}^*,\ i \le n+1\}$ và $k = u_{n+1} + 1 = u_{n+1} + \sum_{x \in X_\ell} x$ chú ý rằng $u_{n+1} > u_{n-1}$, suy ra $u_{n+1} \notin X_\ell$. Suy ra P_{n+1} đúng. Theo nguyên lý quy nạp, P_n đúng với mọi n nguyên dương. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

□

6. *Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội.* Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. P di chuyển trên EF, PB cắt CA tại M, MI cắt đường thẳng qua C vuông góc AC tại N. Chứng minh rằng đường thẳng qua N vuông góc với PC luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

Lời giải. Ta có bổ đề sau

Bổ đề 1. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Các điểm M, N lần lượt thuộc IB, ID sao cho $AM \perp AB, AN \perp AC$ thì $MN \perp BD$.*

Chứng minh. Gọi P, Q là hình chiếu của M, N lên BC, CD. Từ tính chất phân giác ta dễ thấy $MA = MP, NQ = NQ$ và $BA = BP, DA = DQ$. Từ đó ta có

$$MC^2 - MA^2 = MC^2 - MP^2 = PC^2 = (BC - AB)^2.$$

Tương tự $NC^2 - NA^2 = NC^2 - NQ^2 = QC^2 = (DC - DA)^2$.

Do tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $AB + CD = AD + BC$ hay $BC - AB = CD - AD$.

Từ đó suy ra $MC^2 - MA^2 = NC^2 - ND^2$ hay $MN \perp BD$. Lời giải hoàn tất. □

Gọi Q thuộc AB sao cho MQ tiếp xúc (I). Tứ giác $BQMC$ ngoại tiếp theo tính chất quen thuộc thì CQ, BM, EF đồng quy tại P. Gọi BI cắt đường thẳng qua C vuông góc BC tại R. Áp dụng bổ đề trên cho tứ giác $BQMC$ ngoại tiếp suy ra NR vuông góc $CQ \equiv CP$. Vậy đường thẳng qua N vuông góc CP đi qua R. Dễ thấy theo cách dựng R cố định. Ta có điều phải chứng minh.

□

7. *Nguyễn Văn Linh, trường THPT chuyên Khoa học Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội.* Hai đường tròn γ và δ cùng tiếp xúc trong với đường tròn ω tại A và B. Từ A kẻ tiếp tuyến ℓ_1, ℓ_2 tới δ, từ B kẻ hai tiếp tuyến t_1, t_2 tới γ. Biết rằng ℓ_1 cắt t_1 tại X, ℓ_2 cắt t_2 tại Y, hãy chứng minh rằng tứ giác $AXBY$ là tứ giác ngoại tiếp.

Chứng minh. của bạn **Lê Thị Hải Linh**, học sinh lớp 11 toán trường THPT chuyên Bắc Ninh.

Trước tiên ta phát biểu và không chứng minh một bổ đề quen thuộc.

Bổ đề 2. *(Định lý Monge-D'Alembert). Cho ba đường tròn $C_1(O_1, R_1), C_2(O_2, R_2), C_3(O_3, R_3)$ phân biệt trên mặt phẳng. Khi đó tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (C_1, C_2), (C_2, C_3), (C_3, C_1) cùng thuộc một đường thẳng. Hai tâm vị tự trong của hai trong ba cặp đường tròn trên và tâm vị tự ngoài của cặp đường tròn còn lại cùng thuộc một đường thẳng.*

Trở lại bài toán.

Gọi O_1, O_2, O lần lượt là tâm của γ, δ, ω. AO_2 giao BO_1 tại I. Gọi α_1 là đường tròn tâm I và tiếp xúc với AX, AY; α_2 là đường tròn tâm I và tiếp xúc với BX, BY. OI giao AB tại L.

Áp dụng bổ đề trên cho 3 đường tròn δ, ω, α_1 ta có A là tâm vị tự ngoài của α_1 và δ, B là tâm vị tự ngoài của δ và ω, suy ra tâm vị tự ngoài của α_1 và ω nằm trên AB hay L là tâm vị tự ngoài của α_1 và ω.

Chứng minh tương tự L cũng là tâm vị tự ngoài của α_2 và ω. Từ đó $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ hay tứ giác $AXBY$ ngoại tiếp. □

8. *Hà Duy Hưng, trường THPT chuyên Đại học Sư phạm Hà Nội, Xuân Thủy, Cầu Giấy, Hà Nội.* Với mỗi n nguyên dương ta kí hiệu

$$\frac{x_n}{y_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}}$$

ở đó x_n, y_n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng y_n không chia hết cho 2^n với mọi số nguyên dương n.

Lời giải. *Cách thứ nhất.* Ta kí hiệu $v_2(A)$ là số mũ của 2 ở trong số nguyên A, nghĩa là số nguyên không âm k lớn nhất mà $2^k \mid A$. Nếu x_n là số chẵn thì y_n là số lẻ và do đó $v_2(y_n) = 0 \le n-1$. Do đó ta có thể coi x_n là số lẻ. Ta có

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k}{B}$$

ở đó $B = \prod\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$ và $A_k = \frac{B}{k\binom{n}{k}}$ với mỗi $k = 1, \ldots, n$. Do đó ta chỉ cần chứng minh $v_2\left(k\binom{n}{k}\right) \le n-1$ với mọi $k = 1, \ldots, n$. Tuy nhiên điều này hoàn toàn hiển nhiên vì

$$v_2\left(k\binom{n}{k}\right) = v_2(n!) - v_2((k-1)!) - v_2((n-k)!) \le v_2(n!) \le n-1,$$

trong đó ước lượng cuối cùng suy từ công thức Legendre.

Cách thứ hai. Đặt $a_n = \frac{x_n}{y_n}$ và $b_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \text{ lẻ}}}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k}$ thì bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được $2a_n - a_{n-1} = \frac{2}{n}$ và $2b_n - b_{n-1} = \frac{2}{n}$ với mọi $n \ge 2$. Vì $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = b_2 = 1$ và $a_3 = b_3 = \frac{5}{6}$ nên bằng quy nạp ta có

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ lẻ}}}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k},$$

với mọi số nguyên dương n. Từ đẳng thức trên ta suy ra ngay $v_2(y_n) \le n-1$. □

Bình luận. Tôi xin giới thiệu thêm một bài toán có cùng dạng trên. Bài toán này được đề xuất trên tạp chí Kvant của Nga và đề chọn đội tuyển trường THPT chuyên SPHN 2003. Lưu ý rằng câu (a) của bài toán này là bài toán trong đề thi USATST 2000.

Bài toán 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta có

$$\binom{n}{0}^{-1} + \binom{n}{1}^{-1} + \cdots + \binom{n}{n}^{-1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}\left(\frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^{n+1}}{n+1}\right).$$

Bài toán 2. Với mỗi số nguyên dương n ta kí hiệu $\frac{x_n}{y_n} = \frac{2}{1} + \frac{2^2}{2} + \cdots + \frac{2^n}{n}$ trong đó x_n, y_n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng x_{2^n} chia hết cho $2^{2^n - n + 1}$.

9. *Vũ Thế Khôi, Viện Toán học, Viện KHCN Việt Nam, Cầu Giấy, Hà Nội.* Có 2014 em học sinh đến từ những trường trung học phổ thông trên toàn quốc ngồi quanh một bàn tròn theo cách tùy ý. Sau đó ban tổ chức muốn xếp lại cho những học sinh cùng một trường ngồi liền nhau bằng cách thực hiện phép đổi chỗ như sau: hoán đổi vị trí của hai nhóm học sinh liền nhau (xem minh họa). Tìm số k nhỏ nhất sao cho có thể đạt được kết quả như mong muốn của ban tổ chức với không quá k phép đổi chỗ. Phép đổi chỗ như sau

$$\cdots \underbrace{ABCD}_{1}\underbrace{EFG}_{2} \cdots \longrightarrow \cdots \underbrace{EFG}_{2}\underbrace{ABCD}_{1} \cdots$$

Lời giải. Chúng ta chứng minh quy nạp theo số em học sinh n là luôn có thể thực hiện không quá $k = \lfloor \frac{n}{2} - 1 \rfloor$ phép đổi chỗ để những học sinh cùng trường ngồi liền một khối với nhau.

Với $n \le 3$ mệnh đề hiển nhiên đúng. Giả sử mệnh đề đúng khi có $\le n$ học sinh, ta chứng minh nó cũng đúng cho $n+1$ học sinh. Ta có 2 nhận xét sau:

Ta luôn có thể giả sử không có hai em học sinh cùng trường ngồi cạnh nhau. Vì nếu có ta có thể gộp hai em làm một và đưa về trường hợp n học sinh.

Một em học sinh được gọi là *lẻ loi* nếu trong bàn không có bạn nào khác học cùng trường với em. Ta có thể giả sử rằng có không quá 1 em học sinh lẻ loi vì nếu ngược lại thì số phép đổi chỗ cần thiết trong trường hợp này cũng không vượt quá trường hợp ta coi như tất cả những em học sinh lẻ loi học cùng một trường.

Với những điều giả sử như trên, ta luôn tìm được 2 học sinh A, B cùng trường sao cho một trong hai đoạn giữa chúng không chứa cặp học sinh cùng trường nào, đồng thời không chứa học sinh lẻ loi nào. Giả sử C là học sinh đứng cạnh B trong đoạn giữa A và B. Khi đó phải có một học sinh D cùng trường với C nằm bên ngoài đoạn giữa A và B. Ta thực hiện phép đổi chỗ như sau:

$$\cdots A \underbrace{\cdots C}_{1}\underbrace{B \cdots}_{2} D \cdots \longrightarrow A \underbrace{B \cdots}_{2}\underbrace{\cdots C}_{1} D \cdots$$

Như vậy ta có thể gộp A với B và C với D để đưa về trường hợp $n-2$ học sinh. Theo giả thiết quy nạp thì ta cần không quá $\lfloor \frac{n-2}{2} - 1 \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n}{2} - 1 \rfloor$ phép đổi chỗ.

Do đó với 2014 học sinh thì sẽ cần không quá $k = 1006$ phép đổi chỗ. Để thấy số 1006 là nhỏ nhất, ta xét trường hợp tất cả 2014 học sinh đến từ 2 trường $T1, T2$ và ngồi xen kẽ nhau. Khi đó có 1007 nhóm học sinh trường $T1$ ngồi rời nhau. Ta nhận thấy mỗi phép đổi chỗ chỉ có thể làm giảm số nhóm này đi nhiều nhất là 1. Do đó phải cần ít nhất 1006 phép đổi chỗ để cho tất cả học sinh trường $T1$ ngồi cạnh nhau.

□