Xung quanh bài hình học thi VMO năm 2014

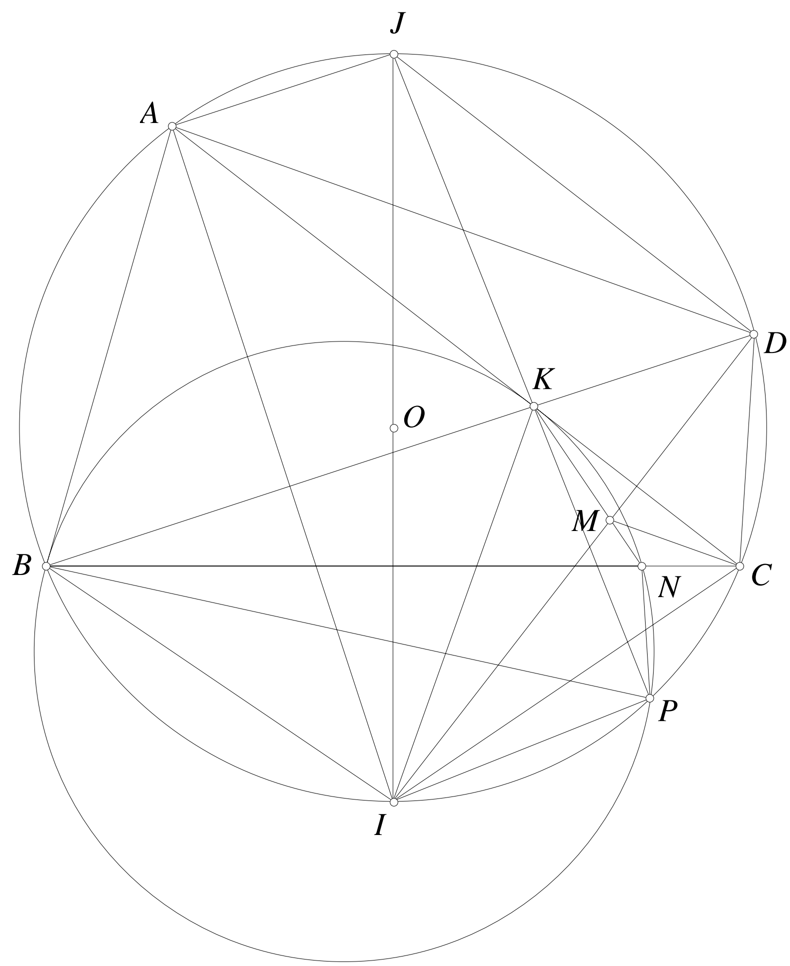
Trần Quang Hùng - Trường THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và khai thác bài hình học thi quốc gia Việt Nam năm 2014 ngày thứ nhất.

Trong kỳ thi học sinh giỏi Việt Nam năm 2014 có một bài toán hay, đề bài được thu gọn cho phù hợp với bài viết như sau

Bài 1. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Gọi I là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A. Trên AC lấy điểm K khác C sao cho $IK = IC$. Đường thẳng BK cắt (O) tại D khác B. Trên DI lấy điểm M sao cho CM song song với AD. Đường thẳng KM cắt đường thẳng BC tại N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BKN cắt (O) tại P khác B. Chứng minh rằng PK chia đôi đoạn AD.*



Hình 1.

Chứng minh. Do I là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A nên $IB = IC = IK$. Từ đó ta có biến đổi góc $\angle IKD = 180^\circ - \angle IKB = 180^\circ - \angle IBK = \angle ICD \quad (1)$. Ta lại chú ý do I là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ nên DI là phân giác $\angle BDC \quad (2)$.

Từ (1),(2) ta dễ suy ra $\angle KID = \angle CID$. Vậy từ đó $\triangle KID = \triangle CID$ $(c.g.c)$ suy ra $DK = DC$ do đó DI là trung trực KC. Tương tự AI là trung trực BK.

Gọi IJ là đường kính của (O) ta dễ có $AJ \perp AI \perp BD$ suy ra $AJ \parallel KD$ và $JD \perp ID \perp KC$ do đó $JD \parallel AK$. Từ đó suy ra tứ giác $AJDK$ là hình bình hành vậy KJ đi qua trung điểm AD. Ta chỉ cần chứng minh J, K, P thẳng hàng thì bài toán được giải quyết. Thật vậy, ta có biến đổi góc

$\angle IPK = \angle IPB + \angle BPK$

$= \angle BAI + \angle BNK$ (Do tứ giác $BKNP$ nội tiếp)

$= \angle BAI + (\angle NKC + \angle NCK)$ (Tính chất góc ngoài)

$= \angle BAI + \angle MCK + \angle BCK$ (Do tính đối xứng, chú ý ID là trung trực KC)

$= \angle BAI + \angle CAD + \angle BCK$ (Do $CM \parallel AD$)

$= \angle BAI + \angle CBD + \angle BCK$ (Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp)

$= \angle IAK + \angle AKB$ (Tính chất góc ngoài)

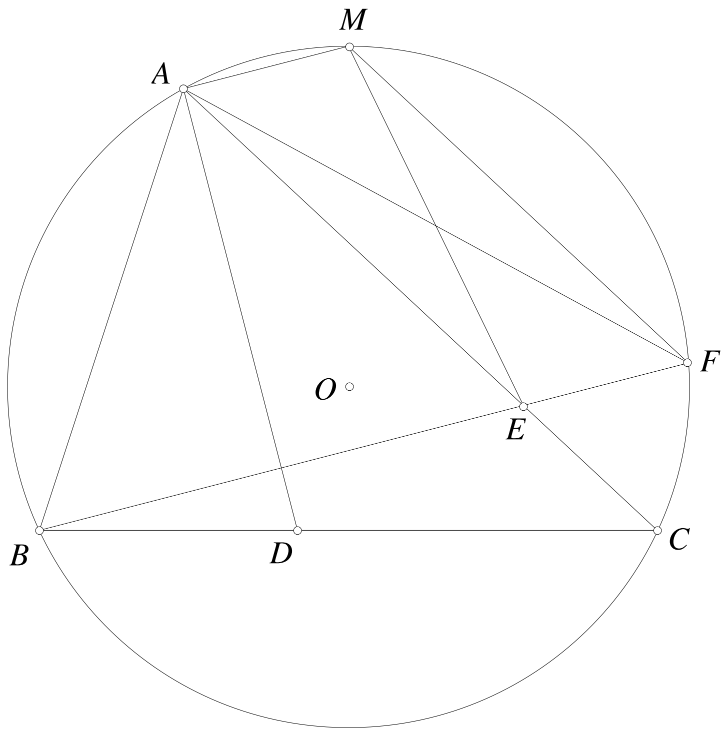
$= 90^\circ$ (Do $BK \perp AI$)

$= \angle IPJ$ (Do IJ là đường kính của (O)).

Từ đó suy ra P, K, J thẳng hàng. Kết hợp các nhận xét ban đầu ta suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán là một kết quả đẹp và chặt chẽ. Trong lời giải trên của bài toán ta có thể tóm lược lại ý chính là nằm trong bài toán sau

Bài 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), phân giác AD. Gọi E đối xứng B qua AD. BE cắt (O) tại F khác B. Gọi M là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của (O). Chứng minh rằng ME đi qua trung điểm AF.*



Hình 2.

Cách giải bài toàn này nằm trong phần đầu của chứng minh trên. Đây là một kết quả khá có ý nghĩa. Bài toán 2 cũng có thể được nhìn dưới một cách khác như sau

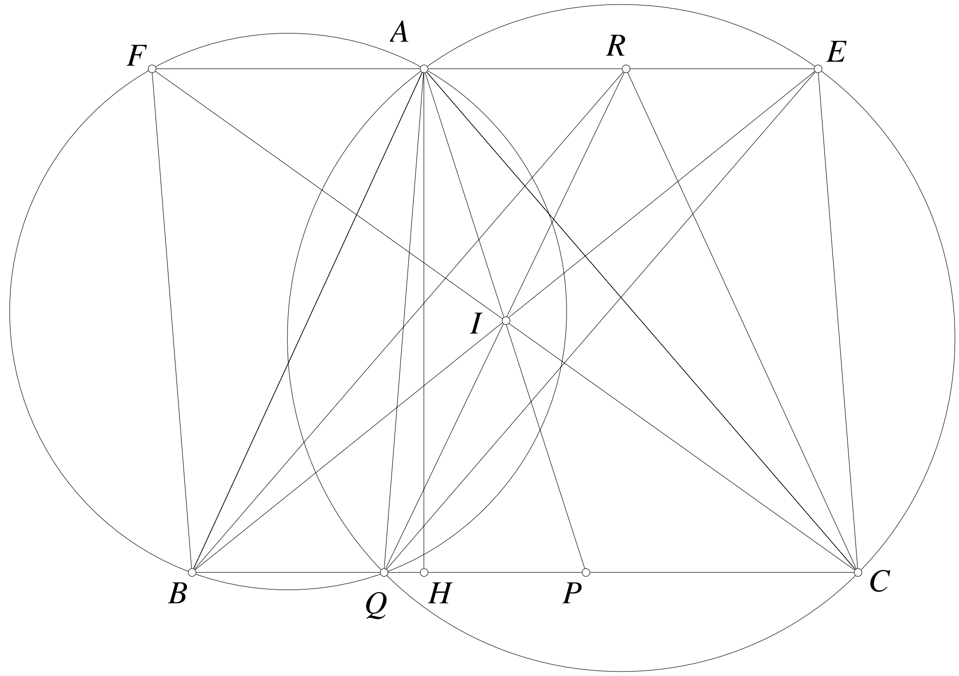
Bài 3. *Cho tam giác ABC cân tại A. P là một điểm thuộc đường thẳng BC. Chứng minh rằng đối xứng của C qua trung điểm AP nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APB.*

Đây là một kết quả hết sức đơn giản về tứ giác nội tiếp. Tuy vậy nếu để ý kỹ các bạn dễ thấy là bài toán 3 thực chất cũng là bài toán 2 áp dụng cho tam giác cân ABE. Bài toán có một mở rộng trong tam giác bất kỳ như sau

Bài 4. *Cho tam giác ABC. P là một điểm di chuyển trên đường thẳng BC. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của B, C qua trung điểm AP.*

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ACE, ABF cắt nhau tại một điểm Q nằm trên BC.

b) Gọi AH là đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\overline{QP} = \overline{HB} + \overline{HC}$.



Hình 3.

Chứng minh. a) Để đơn giản ta xét trường hợp như hình vẽ. Ta dễ thấy tứ giác $BCEF$ là hình bình hành nên $\angle AQB = 180^\circ - \angle AFB = \angle AEC = 180^\circ - \angle AQC$ suy ra $\angle AQB + \angle AQC = 180^\circ$ nên Q thuộc BC.

b) Gọi R đối xứng Q qua trung điểm I của AP dễ thấy R thuộc EF và tứ giác $ARPQ$ là hình bình hành nên $\overline{PQ} = \overline{AR}$. Ta lại dễ thấy tứ giác $BREQ$ là hình bình hành nên $BR = QE$ (1). Mặt khác $AECQ$ là hình thang nội tiếp nên $AECQ$ là hình thang cân do đó $QC = QE$ (2).

Từ (1),(2) suy ra $BR = AC$ từ đó ta có tứ giác $ARCB$ là hình thang cân nên R cố định. Từ đó $\overline{PQ} = \overline{AR}$ không đổi. Mặt khác gọi AH là đường cao của tam giác ABC cũng là đường cao của hình thang cân $ARCB$ ta dễ chứng minh $\overline{AR} = \overline{HB} + \overline{HC}$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Nếu tam giác ABC cân ta thu được bài toán 3. Nếu sử dụng cách phát biểu đối xứng ta có thể đề xuất bài toán như sau từ bài toán 2

Bài 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp là I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AM, AN. Chứng minh rằng EK và FL cắt nhau trên đường tròn (O).*

Qua bài toán 2 ta dễ thấy EK, FL đều đi qua trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. Một cách tự nhiên bài toán 5 có thể mở rộng thành bài toán sau

Bài 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (D) đi qua B, C cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Các điểm K, L lần lượt thuộc AM, AN sao cho $KL \parallel EF$. Gọi BE giao CF tại S. Gọi EK giao FL tại T. Chứng minh rằng A, S, T thẳng hàng.*

Bài toán 5 còn có một khai thác đáng chú ý như sau

Bài 7. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp là I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AM, AN.*

a) Chứng minh rằng EK và FL cắt nhau tại điểm T trên đường tròn (O).

b) Gọi EK và FL cắt (O) tại P, Q khác T. PQ cắt BC tại S. Chứng minh rằng AS tiếp xúc đường tròn (O).

Bài toán 7 lại có một khai thác khá tự nhiên khác như sau

Bài 8. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp là I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của AM, AN.*

a) Chứng minh rằng EK và FL cắt nhau tại điểm T trên đường tròn (O).

b) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại S. Một đường thẳng thay đổi qua S cắt (O) tại P, Q sao cho P nằm giữa S, Q. TP, TQ lần lượt cắt AN, AM tại K, L. Chứng minh rằng KL luôn đi qua một điểm cố định khi P, Q di chuyển.

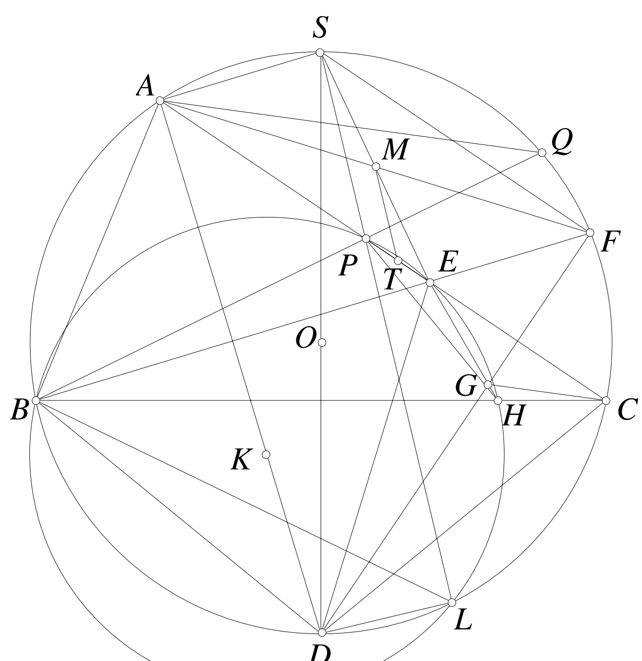
Quay trở lại bài toán 1 ban đầu, ta lại có thể mở rộng tiếp tục như sau

Bài 9. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) phân giác góc $\angle BAC$ cắt (O) tại D khác A. E là điểm đối xứng B qua AD. BE cắt (O) tại F khác B. P là một điểm di chuyển trên cạnh AC. BP cắt (O) tại Q khác B. Đường thẳng qua C song song AQ cắt FD tại điểm G.*

a) Gọi EG cắt BC tại H. Chứng minh rằng B, P, E, H cùng thuộc một đường tròn, gọi đường tròn này là (K).

b) Gọi đường tròn (K) cắt (O) tại L khác B. Chứng minh rằng LP luôn đi qua một điểm S cố định khi P di chuyển.

c) Gọi T là trung điểm PE. Chứng minh rằng đường thẳng qua T song song LS thì chia đôi AF.



Hình 4.

Chứng minh. a) Tương tự trong chứng minh bài 1 ta chứng minh được DF là trung trực EC. Do đó ta có biến đổi góc

$\angle GEC = \angle GCE$ (Do tính đối xứng)
$= \angle CAF$ (Do $CG \parallel AF$)
$= \angle CBF$ (Do A, F, C, B thuộc một đường tròn)
Từ đó dễ suy ra B, P, E, H thuộc một đường tròn. Ta có điều phải chứng minh.

b) Ta sẽ chứng minh rằng LP đi qua điểm S cố định là điểm chính giữa cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. Thật vậy, ta có biến đổi góc

$\angle DLP = \angle DLB + \angle BLP$
$\angle BAD + \angle BEP$ (Do B, L, E, P và A, B, D, L cùng thuộc một đường tròn)
$\angle BAD + \angle EBA$ (Do tính đối xứng)
$= 90^\circ$ (Do $AD \perp BE$)
$= \angle DLS$ (Do DS là đường kính của (O)).
Từ đó dễ có LP đi qua S. Ta có điều phải chứng minh.

c) Sử dụng kết quả bài 1 ta có tứ giác $ASFE$ là hình bình hành nên SE và AF cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường. Theo tính chất đường trung bình ta dễ có $TM \parallel PS \equiv LS$. Hay đường thẳng qua T song song LS đi qua trung điểm M của AF. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán là mở rộng trực tiếp của bài thi VMO. Ta sẽ thu được bài VMO nếu cho $P \equiv E$. Nếu cắt gọn chỉ còn câu c) thì bài toán khá khó, tuy vậy việc trình bày bài toán thông qua ba ý làm bài toán trở nên nhẹ nhàng hơn. Bài toán mở rộng trên cũng mang lại cho ta một số khai thác có ý nghĩa như sau

Bài 10. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC cắt CA, AB tại E, F khác C, B. Một đường tròn (K) bất kỳ đi qua B, C cắt CA, AB tại P, Q khác C, B.*

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BPE và CQF lần lượt cắt (O) tại S, T khác B, C. Chứng minh rằng PS và QT cắt nhau tại điểm U trên (O).

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của PE, QF. Chứng minh rằng đường thẳng qua M song song PS và đường thẳng qua N song song với QT cắt nhau tại điểm V thuộc AU.

Bài toán trên có hướng giải giống như bài số 9. Các bạn hãy làm như một bài luyện tập.

Tài liệu

[1] Đề bài VMO 2014 tại http://diendantoanhoc.net/home