Mỗi tuần một bài toán

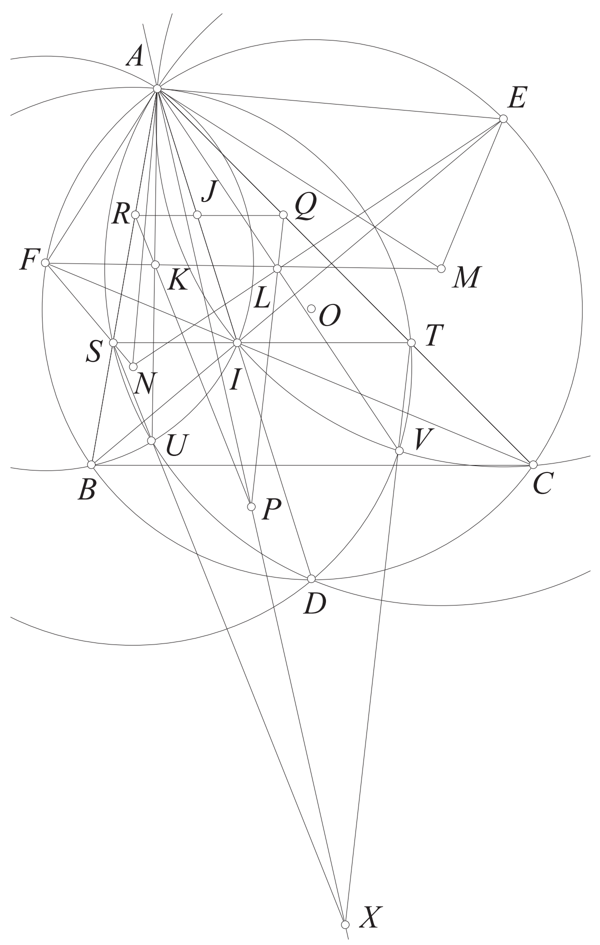
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

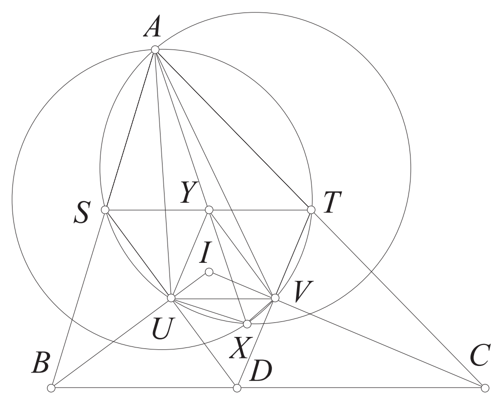
Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A thay đổi trên (O). I là tâm nội tiếp. IB, IC cắt (O) tại E, F khác B, C. Lấy M, N sao cho $AM \perp AF$, $EM \perp CF$, $AN \perp AE$, $FN \perp BE$. K, L là hình chiếu của A lên FM, EN. Đường thẳng qua trung điểm IA song song với BC cắt CA, AB tại Q, R. QL cắt RK tại P. Chứng minh rằng đường thẳng AP luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.

Lời giải



Gọi U, V đối xứng với A qua K, L. AI cắt (O) tại D khác A. (M) là đường tròn đi qua A, D và trực giao với đường tròn (F) ngoại tiếp tam giác AIB. (M) cắt (F) tại U khác A. Tương tự với đường tròn (N) và V. Gọi (M) cắt AB tại S khác A. (N) cắt AC tại T khác A. Dễ thấy $ST \parallel BC$ và khi đó dùng phép vị tự tâm A tỷ số 2. Đường thẳng RK, QL tương ứng biến thành các đường thẳng SU, TV. Vậy AP sẽ đi qua giao điểm X của SU, TV. Ta sẽ chứng minh rằng AX chính là đường đối trung của tam giác ABC bằng cách xét phép nghịch đảo cực A. Khi đó ta thu được bài toán sau.

Bài toán. Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I. AI cắt BC tại D. Đường thẳng m qua D vuông góc với IB cắt IB tại U và cắt AB tại S. Đường thẳng n qua D vuông góc với IC cắt IC tại V và cắt AC tại T. Đường tròn ATV và ASU cắt nhau tại X. Chứng minh rằng AX chia đôi BC.



Lời giải. Trước hết ta dễ thấy các tam giác CDT, BDS cân tại C, B do đó $\frac{TC}{CA} = \frac{DC}{CA} = \frac{DB}{AB} = \frac{BS}{BA}$ suy ra $ST \parallel BC$. Gọi Y là trung điểm ST. Ta thấy $\angle UXV = \angle UXA + \angle AXV = \angle USB + \angle VTC = \angle UDB + \angle VDC = 180^\circ - \angle SDT = 180^\circ - \angle UYV$. Từ đó tứ giác $YVXU$ nội tiếp. Ta suy ra $\angle VXY = \angle VUY = \angle VTY = \angle VTC = \angle VXA$. Từ đó A, Y, X thẳng hàng.

Nhận xét

Bài toán sau khi nghịch đảo là đề thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN năm 2016. Bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán trường THPT chuyên KHTN và bạn **Vương Đình Ân** lớp 12 Toán trường THPT Chuyên Bắc Giang đã cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và có trực tâm H. AH, AO lần lượt cắt BC tại D, E. M là trung điểm BC. MH cắt DO tại P. Chứng minh rằng MH và đường thẳng qua D song song EP cắt nhau trên đường tròn (O).
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Copyright © 2015 http://analgeomatica.blogspot.com/

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

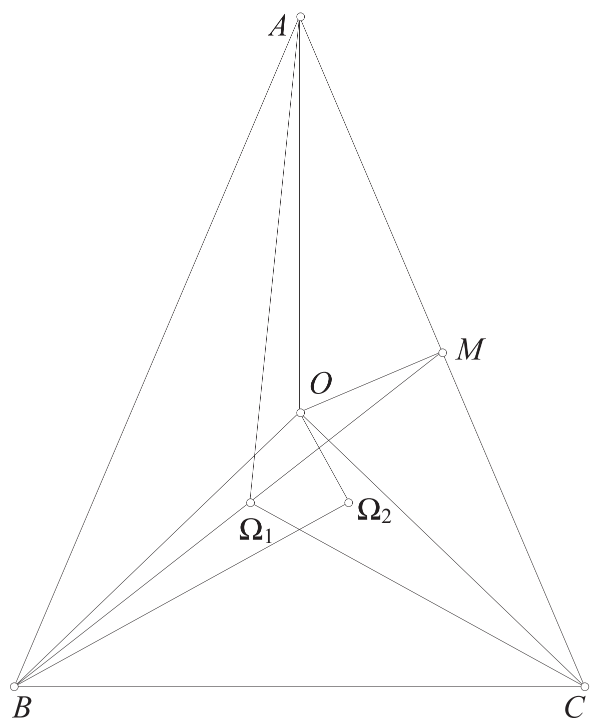
Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có hai điểm Brocard là Ω_1 và Ω_2. Chứng minh rằng nếu một trong sáu góc $A\Omega_1O$, $B\Omega_1O$, $C\Omega_1O$, $A\Omega_2O$, $B\Omega_2O$, $C\Omega_2O$ vuông thì có đúng hai trong sáu góc này vuông.

Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng.**

Lời giải

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của tác giả bài toán.



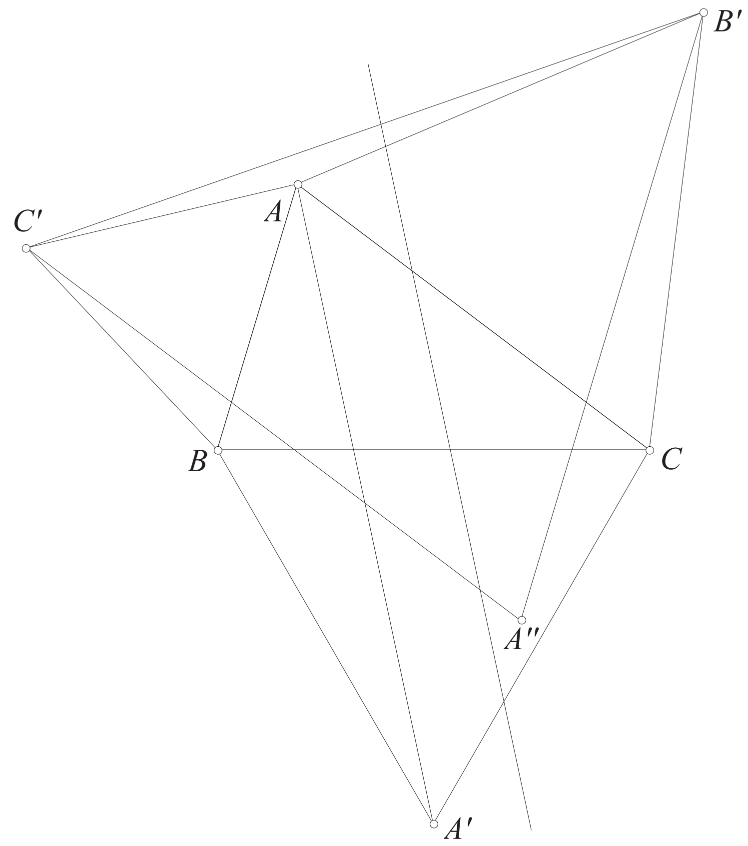
Nhận xét rằng với mỗi i, trong ba góc $A\Omega_iO, B\Omega_iO, C\Omega_iO$ có không quá một góc vuông. Thật vậy, nếu có hai trong ba góc này vuông, chẳng hạn $\angle A\Omega_iO = \angle B\Omega_iO = 90°$ thì điểm Brocard Ω_i thuộc cạnh AB của tam giác ABC. Điều này không thể xảy ra. Như vậy trong sáu góc $A\Omega_iO, B\Omega_iO, C\Omega_iO$ với $i = 1, 2$, có nhiều nhất hai góc vuông. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $\angle AB\Omega_1 = \angle BC\Omega_1 = \angle CA\Omega_1$ và $\angle C\Omega_1O = 90°$. Gọi M là trung điểm của CA. Vì $\angle CMO = \angle C\Omega_1O = 90°$ nên Ω_1, O, C, M cùng thuộc một đường tròn. Ta thấy $\angle B\Omega_1C = 180° - (\angle\Omega_1BC + \angle\Omega_1CB) = 180° - \angle ABC = 180° - \angle MOC = 180° - \angle M\Omega_1C$ nên B, Ω_1, M thẳng hàng. Vì $\angle AB\Omega_1 = \angle CA\Omega_1$ nên $MC^2 = MA^2 = MB \cdot M\Omega_1$, và do vậy $\angle AC\Omega_1 = \angle CB\Omega_1$. Từ đó, $\angle ABC = \angle ACB$ nên tam giác ABC cân tại A. Qua phép đối xứng trục OA thì $\angle C\Omega_1O = \angle B\Omega_2O = 90°$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét

Đây là một bài toán thú vị có phát biểu lạ mắt và lời giải có đoạn dùng phản chứng là một phương pháp ít thấy trong các bài hình học thuần túy. Có bạn **Nguyễn Hoàng Nam** lớp 12 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong TPHCM cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác đều BCA', CAB', ABC'. Gọi A'' là giao điểm của đường thẳng qua B' song song với AB và đường thẳng qua C' song song với AC. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác $A''B'C'$ song song với AA'.



Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà** trường THPT chuyên SP, ĐHSP Hà Nội.