Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

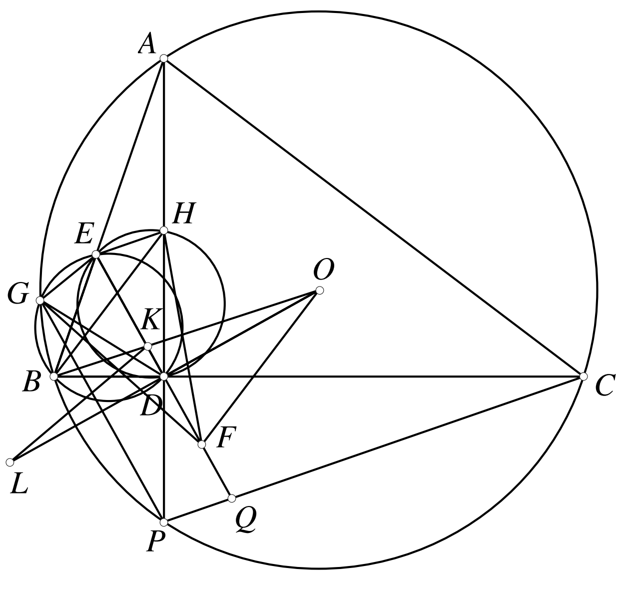
Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD. Đường thẳng qua D vuông góc với OD cắt AB tại E. Trung trực AC cắt DE tại F. Gọi OB cắt DE tại K. L là đối xứng của O qua EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE cắt (O) tại G khác B. Chứng minh rằng GF và KL cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DEH.

Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q là hai điểm đẳng giác. AP cắt (O) tại M khác A. QM cắt BC tại E thì $PE \parallel AQ$.

Chứng minh của Phan Anh Quân. Gọi AQ cắt (O) tại N khác A và cắt BC tại H. Vì P, Q đẳng giác nên $\triangle CHN \sim \triangle ACM$ và $\triangle CPM \sim \triangle QCN$ (g.g). Ta suy ra $HN.AM = CM.CN = QN.PM$ vì thế nên $\frac{MP}{MA} = \frac{NH}{NQ} = \frac{ME}{MQ}$ hay $PE \parallel AQ$.

Hệ quả. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q là hai điểm đẳng giác. E thuộc BC sao cho $PE \parallel AQ$ thì QE và AP cắt nhau trên đường tròn (O).



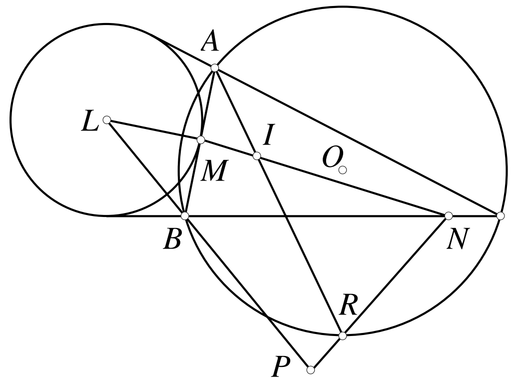
Giải bài toán. Gọi AD cắt (O) tại P khác A, dễ thấy D là trung điểm HP. Gọi DE cắt PC tại Q thì theo bài toán con bướm D là trung điểm EQ nên OD là trung trực EQ. Vì G là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BED và BAC nên $\triangle GED \sim \triangle GAC$. Từ đó $\angle GED = \angle GAC = 180^\circ - \angle GPC$. Từ đó tứ giác $GEQP$ nội tiếp và như vậy tâm ngoại tiếp tứ giác nằm trên OD. Lại có $\angle GDE = \angle GCA = \angle GPA$ nên đường tròn (GDP) tiếp xúc DE nói cách khác tâm ngoại tiếp tam giác GDP nằm trên OD. Như vậy OD đi qua tâm ngoại tiếp tứ giác $GEQP$ và tam giác GDP nên $OD \perp GP$. Từ đó $GEQP$ là hình thang cân. Ta dễ chứng minh $\triangle DGE = \triangle DHE$. Vậy QE là trung trực GH. Ta xét phép đối xứng trục EQ thì GF và KL cắt nhau trên (DEH) khi và chỉ khi đối xứng của GF, KL qua QE cắt nhau trên đối xứng của (DEH) qua EQ. Nói cách khác ta chỉ cần chứng minh FH, OK cắt nhau trên đường tròn (BDE). Ta để ý $\angle HBE = \angle OBD$ và $\angle EDH = \angle ODC$ nên O và H là hai điểm đẳng giác trong tam giác BDE. Áp dụng hệ quả trên ta thấy ngay FH, OK cắt nhau trên đường tròn (BDE).

Nhật xét

Bài toán là một sự kết hợp đẹp của bài toán G3 trong IMO shortlist 1996 và hệ quả của bổ đề điểm đẳng giác. Phần đầu của chứng minh chúng ta đã lặp lại một số bước trong chứng minh của bài toán G3. Mặt khác bổ đề điểm đẳng giác trên sự thực là một bài toán lớn của điểm đẳng giác, nhiều bài toán khó của điểm đẳng giác cần được giải thông qua bổ đề này. Sự kiện H và O đẳng giác trong tam giác BED cũng là một sự kiện thú vị đáng chú ý. Tôi không nhận được lời giải nào cho bài toán này.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp I. Đường tròn bàng tiếp (L) tại đỉnh C của tam giác ABC tiếp xúc với AB tại M. MI cắt BC tại N. P là hình chiếu của C lên LB. Chứng minh rằng AI và PN cắt nhau trên đường tròn (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.