Về một bài toán hình học trong đề thi Olympic Sharygin 2014 vòng cuối

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết tìm hiểu phân tích, tổng quát và ứng dụng một bài toán hình học đẹp trong đề thi Olympic Sharygin 2014 vòng cuối.

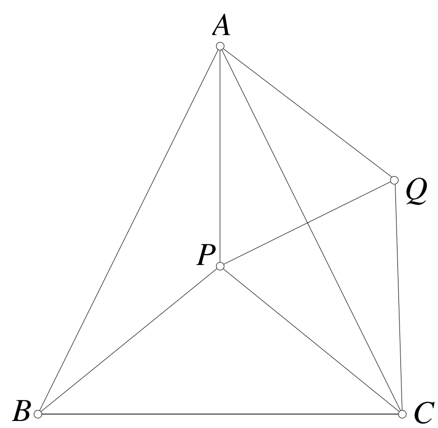
1 Bài toán và lời giải

Trong đề thi Olympic hình học Sharygin vòng cuối của Nga [1]. D.Shvetsov đề nghị bài toán hình học rất thú vị như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với góc $\angle A = 60°$ và phân giác AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OAD cắt (O) tại E khác A. Chứng minh rằng $AE \perp BC$.

Sau đây tôi xin đưa ra lời giải của mình cho bài toán này. Trước hết ta chứng minh một nhận xét rất quan trọng của tam giác cân trong chương trình hình lớp 7 như sau

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC cân tại A và điểm P nằm trong tam giác sao cho $\angle APB = \angle APC$. Thì $PB = PC$.

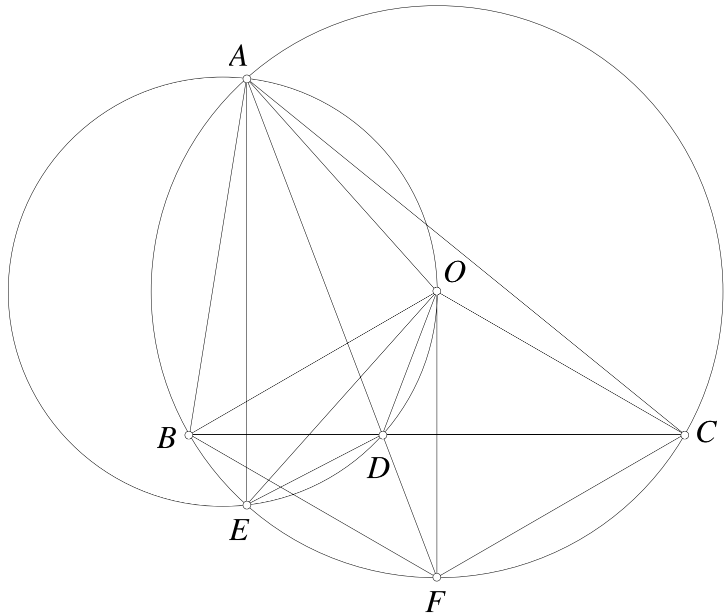


Hình 1.

Chứng minh. Dựng tam giác APQ cân tại A sao cho Q và P khác phía với AC và $\angle PAQ = \angle BAC$. Từ đó dễ chứng minh $\triangle APB = \triangle AQC$ $(c.g.c)$ suy ra $PB = QC$ và $\angle AQC = \angle APB = \angle APC$. Lại có tam giác APQ cân nên suy ra $\angle APQ = \angle AQP$. Từ đó $\angle CPQ = \angle CQP$. Vậy tam giác CPQ cân tại C nên $PC = CQ = PB$. □

Nhận xét. Bài toán sẽ đúng với P nằm ngoài tam giác nhưng ở miền trong góc $\angle BAC$ hoặc miền góc đối đỉnh của $\angle BAC$. Bổ đề này dùng kiến thức đơn giản nhưng nhiều ứng dụng trong nhiều bài toán khác nhau.

Trở lại bài toán 1.

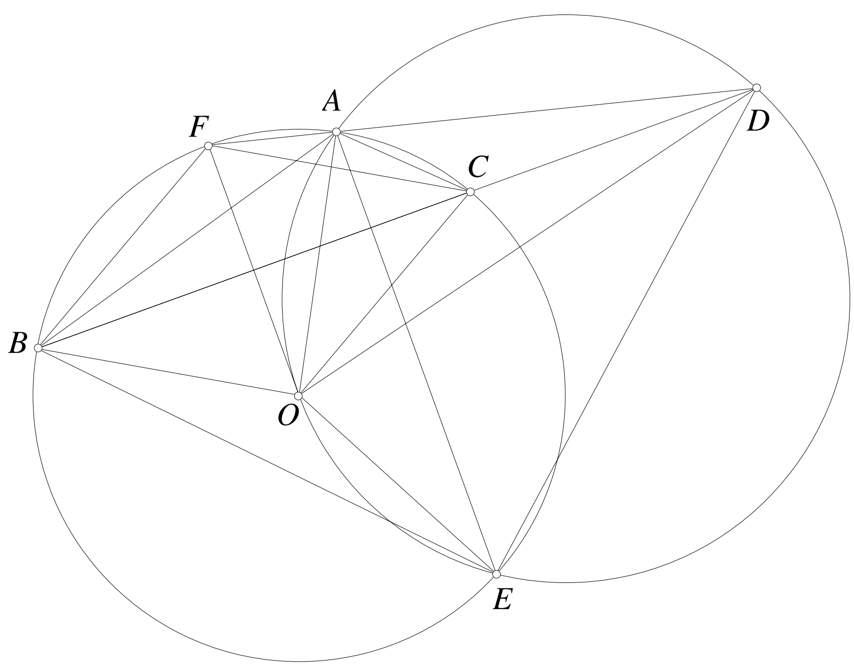


Hình 2.

Lời giải. Gọi AD cắt (O) tại F khác A. Ta có $\angle ODF = 180^\circ - \angle ODA = 180^\circ - \angle OEA = 180^\circ - \angle OAE = \angle ODE$. Lại có tam giác OEF cân tại O nên theo bổ đề $DE = DF$ suy ra $\angle EOD = \angle FOD$. Ta dễ thấy hai tam giác OBF và OCF đều từ đó $FO^2 = FC^2 = FD.FA$ vậy $\angle EAD = \angle EOD = \angle FOD = \angle OAF$. Vậy AO, AE đẳng giác nên $AE \perp BC$ $\square$

Ta có ngay một mở rộng đơn giản sau khi thay bằng phân giác ngoài

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với góc $\angle A = 120^\circ$ và phân giác ngoài AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OAD cắt (O) tại E khác A. Chứng minh rằng $AE \perp BC$.



Hình 3.

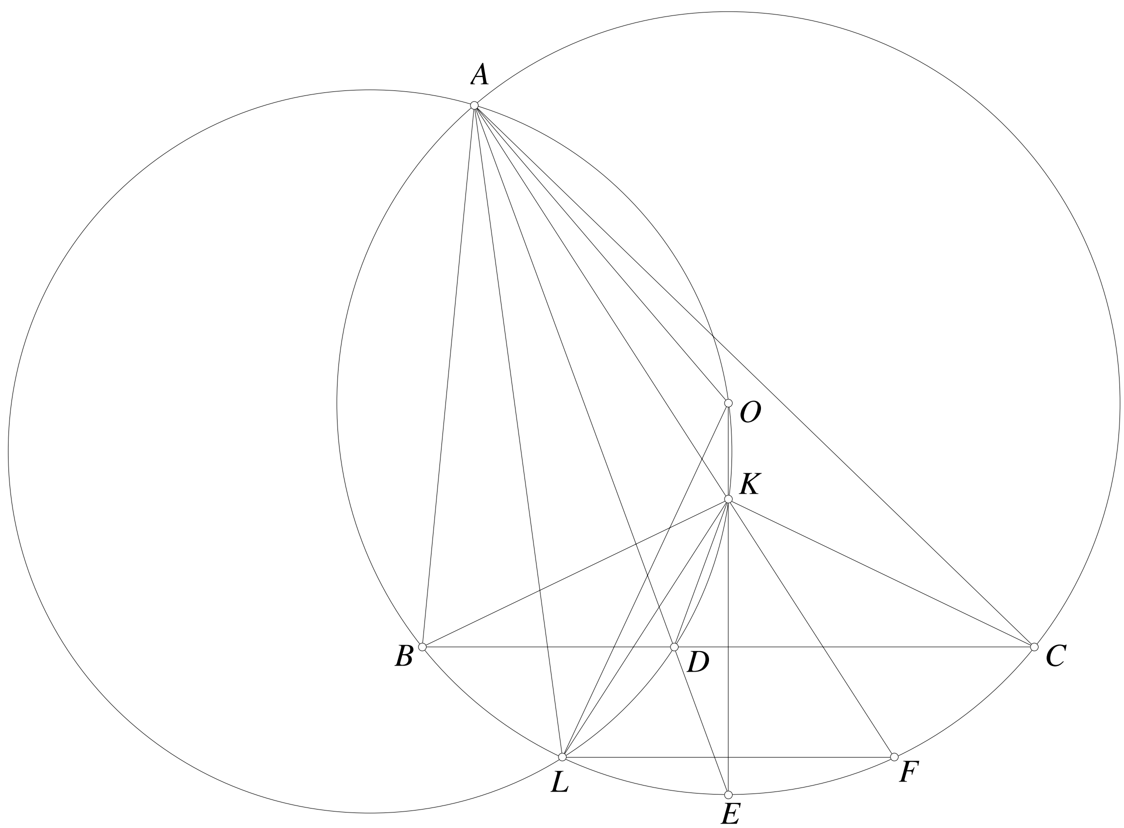
Lời giải. Gọi AD cắt (O) tại F khác A. Ta có $\angle ODF = \angle OEA = \angle OAE = \angle ODE$. Lại có tam giác OEF cân tại O nên theo bổ đề $DE = DF$ suy ra $\angle EOD = \angle FOD$. Ta dễ thấy hai tam giác OBF và OCF đều từ đó $FO^2 = FC^2 = FD.FA$ vậy $\angle FAO = \angle FOD = \angle EOD = \angle EAD$ do AD là phân giác ngoài nên $\angle BAO = \angle CAE$. Vậy AO, AE đẳng giác nên $AE \perp BC$ □

Nhận xét. Cách chứng minh bài toán mở rộng với phân giác ngoài là hoàn toàn tương tự.

2 Mở rộng

Ta có nhận xét là điều kiện bài toán góc $\angle BAC = 60^\circ$ có thể thay thế được. Chúng ta đề xuất bài toán như sau mở rộng bài toán 1

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Điểm K nằm trong tam giác sao cho $KB = KC$ và $\angle BKC + \angle BAC = 180^\circ$. AD là phân giác của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK cắt (O) tại L khác A. Chứng minh rằng $\angle LAB = \angle KAC$.



Hình 4.

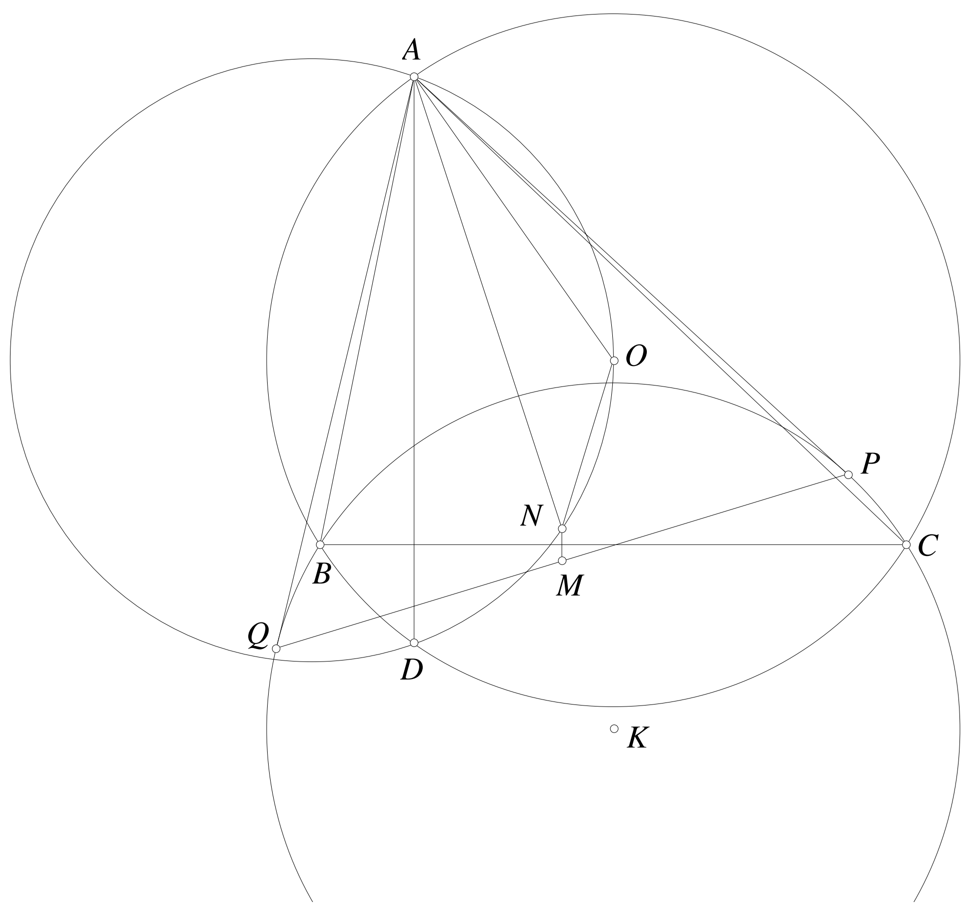
Lời giải. Gọi AD cắt (O) tại E khác A và AK cắt (O) tại F khác A. Ta dễ thấy K và D đối xứng nhau qua BC nên $\angle DKE = \angle DEK = \angle OAD$ do đó tứ giác $AOKD$ nội tiếp. Từ đó ta có biến đổi góc $\angle EKF = \angle OKA = \angle OLA = \angle OAL = \angle LKE$. Từ đó theo tính chất đối xứng dễ suy ra $LF \parallel BC$, vậy $\angle LAB = \angle KAC$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta thấy rằng tuy mở rộng như bài toán mở rộng còn đơn giản hơn bài toán gốc. Chúng ta hoàn toàn có thể áp dụng cách giải bài toán mở rộng này cho bài toán ban đầu bằng cách vẽ thêm đường kính của đường tròn (O) mà không cần dùng bổ đề. Tuy vậy nếu càng hạn chế được vẽ thêm hình mà vẫn có lời giải đẹp được thì càng tốt. Lời giải như ta thấy ở bài toán 1 cũng là một hướng đi đẹp. Chúng ta hoàn toàn có thể phát biểu bài toán tương tự cho phân giác ngoài. Các bạn hãy làm như một bài tập

Bài toán 4. Cho tam giác ABC tù nội tiếp đường tròn (O). Điểm K nằm ngoài tam giác và trong $\angle BAC$ sao cho $KB = KC$ và $\angle BKC = \angle BAC$. AD là phân giác ngoài của tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADK cắt (O) tại L khác A. Chứng minh rằng $\angle LAB = \angle KAC$.

Ta đi đến một mở rộng khác thú vị như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) đối xứng với (O) qua BC. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ tới (K) với P, Q thuộc (K). M là trung điểm PQ và N đối xứng với M qua BC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AON cắt (O) tại D khác A. Chứng minh rằng $AD \perp BC$.



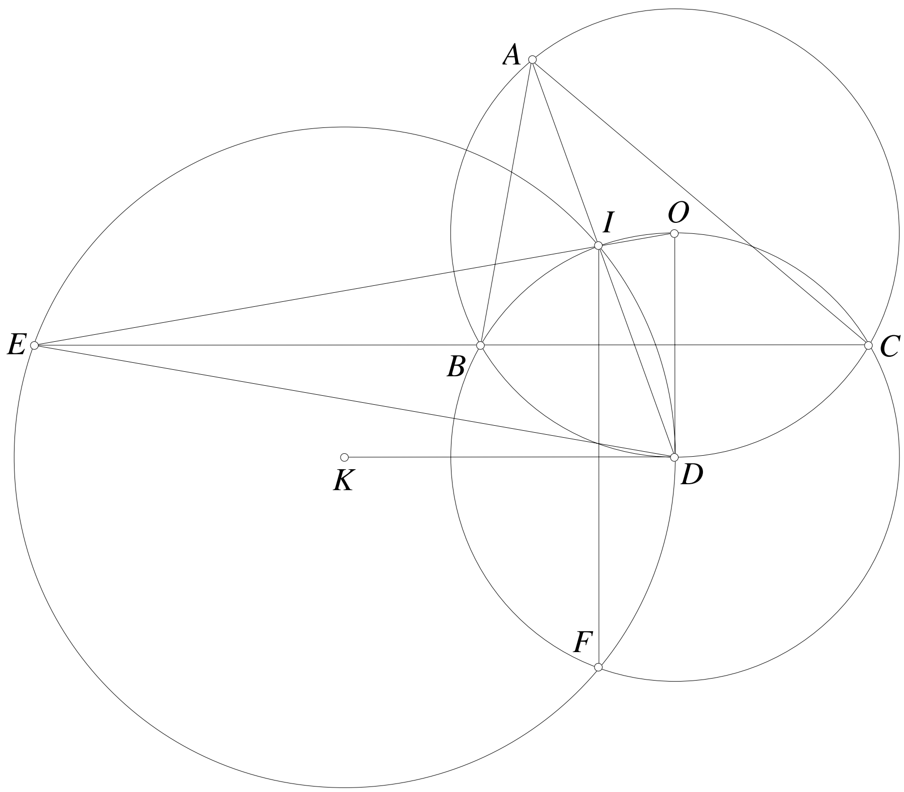
Hình 5.

Nhận xét. Khi $\angle BAC = 60^\circ$ dễ thấy M và N trùng nhau và trùng chân đường phân giác góc $\angle BAC$ trên BC ta thu được bài toán 1. Đây là bài toán thú vị, các bạn hãy thử sức nó như một bài tập.

3 Một số ứng dụng

Cả bài toán gốc và bài toán mở rộng đều có nhiều ứng dụng thú vị, các bạn hãy cùng đến với các bài tập sau

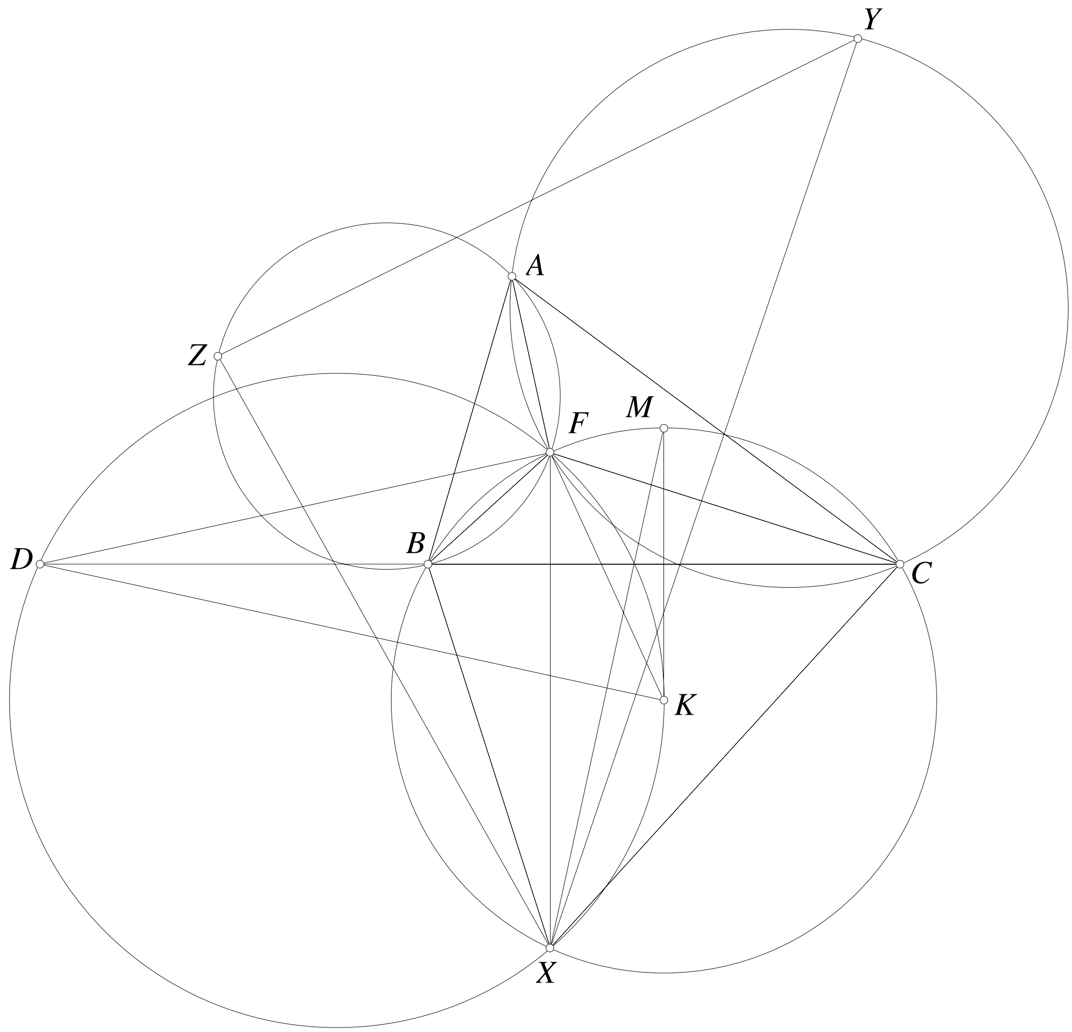
Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\angle BAC = 60°$ với tâm nội tiếp I. Đường thẳng OI cắt BC tại E. AI cắt (O) tại D khác A. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác IDE. Chứng minh rằng KD tiếp xúc (O).



Hình 6.

Lời giải. Dễ thấy D là tâm ngoại tiếp tam giác IBC và E, O đối xứng nhau qua BC nên O là trung điểm cung $\overparen{BC}$ chứa I của đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC nên OI là phân giác ngoài $\angle BIC = 120°$. Từ đó đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác IDE cắt (D) ngoại tiếp tam giác IBC tại F thì $IF \perp BC$. Lại có $DK \perp IF \parallel OD$ nên $DK \perp OD$ vậy DK tiếp xúc (O). □

Bài toán 7. Cho tam giác ABC có điểm Fermat là F. Gọi $(K), (L), (N)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác FBC, FCA, FAB. Lấy D thuộc BC sao cho $FD \perp FA$. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác FKD cắt (K) tại X khác F. Tương tự có Y, Z. Chứng minh rằng đối xứng của phân giác các góc $\angle BXC, \angle CYA, \angle AZB$ lần lượt qua BC, CA, AB đồng quy.



Hình 7.

Lời giải. Ta dễ thấy FD là phân giác ngoài tam giác FBC có góc $\angle BFC = 120°$ nên $FX \perp BC$ do đó đối xứng của X qua BC là trực tâm tam giác ABC. Phân giác $\angle BXC$ đi qua trung điểm M cung BC của (K) nhưng do $\angle BKC = 120°$ nên đối xứng của K qua BC là K tâm ngoại tiếp tam giác FBC. Từ đó đỗi xứng của phân giác XM qua BC chính là đường thẳng Euler của tam giác FBC. Chúng ta đã biết kết quả quen thuộc đường thẳng Euler của tam giác FBC, FCA, FAB đồng quy tại trọng tâm tam giác ABC, đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Ta cũng có thể dễ chứng minh được XM và BC cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác FXK hơn nữa KD chính là đường thẳng Euler của tam giác XBC. Các bài toán mở rộng trên còn nhiều ứng dụng khác nữa, các bạn hãy làm thử các bài tập sau

Bài toán 8. Cho tam giác nhọn ABC không cân nội tiếp đường tròn (O). K là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $KB = KC$ và $\widehat{BKC} + \widehat{BAC} = 180°$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOK cắt (O) tại L khác A. Gọi AL cắt BC tại G. I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. M là trung điểm của đoạn thẳng GI. EM cắt (O) tại N khác E. Chứng minh rằng NI và AK cắt nhau trên (O).

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) đối xứng với (O) qua BC. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AP, AQ tới (K) với P, Q thuộc (K). PQ cắt BC tại D. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOD cắt (O) tại E khác A. Giả sử $AE \perp BC$. Chứng minh rằng $AB = AC$ hoặc $\angle BAC = 60°$.

Bài toán 10. Cho tam giác ABC có điểm Kosnita là K. Giả sử AK là phân giác $\angle BAC$. Chứng minh rằng $AB = AC$ hoặc $\angle BAC = 60°$.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O, tâm nội tiếp I và có $\angle BAC = 60°$. D đối xứng I qua BC. Đường thẳng OI cắt BC tại E. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác ODE. Chứng minh rằng $OK \parallel BC$.

Bài toán 12. Cho tam giác ABC có điểm Fermat là F. Gọi $(K), (L), (N)$ lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác FBC, FCA, FAB. Lấy D thuộc BC sao cho $FD \perp FA$. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác FKD cắt (K) tại X khác F. Tương tự có Y, Z. Đường thẳng đối xứng với đường thẳng Euler của tam giác ABC qua ba cạnh BC, CA, AB lần lượt cắt phân giác các góc $\angle BXC, \angle CYA, \angle AZB$ tại U, V, W. Chứng minh rằng $AU \perp VW$ khi và chỉ khi $2BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Bài toán 13. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. HA, HB, HC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Từ A kẻ các tiếp tuyến AA_1, AA_2 tới đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AOD cắt đường thẳng đối xứng của A_1A_2 qua BC tại X nằm trong góc $\angle BAC$. Tương tự có điểm Y, Z. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Tài liệu

[1] Đề thi Olympic Sharygin 2014 vòng cuối
http://jcgeometry.org/Articles/Volume3/JCG2014V3pp60-62.pdf