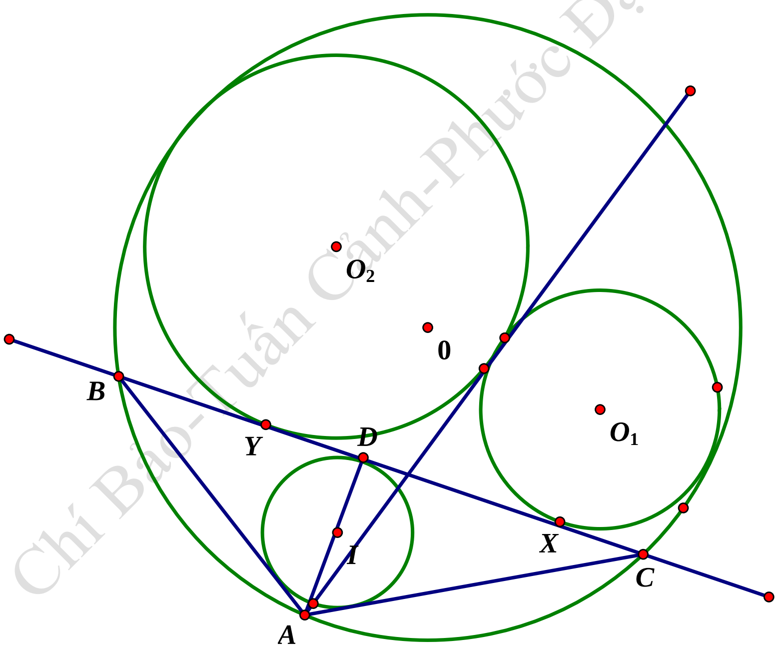
Ứng dụng của định lý Ptoleme mở rộng

Trong bài viết này, chúng ta sẽ không đề cập đến các ứng dụng trực tiếp của định lý Ptoleme, tức là trường hợp đặc biệt của bất đẳng thức Ptoleme, trong việc giải các bài toán hình học, bao gồm việc chứng minh các đẳng thức hình học, các đặc tính hình học, các bài toán tính toán. Tất cả các bài toán dạng này chúng tôi đưa vào phần bài tập.

Dưới đây, xin nêu ra những ứng dụng của định lý Ptolememở rộng (định lý Casey) trong việc chứng minh một số định lý hình học.

<u>Định lý 1.</u> Cho hai đường tròn (O_1), (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại I và cùng tiếp xúc trong với đường tròn (O). Một tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) cắt O tại B và C, trong khi đó tiếp tuyến chung trong của chúng cắt (O) tại điểm A cùng phía với I. Khi đó I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

<u>Chứng minh 1.</u> Giả sử BC tiếp xúc (O_1) tại X và (O_2) tại Y và AI cắt BC tại D. Đặt $BC = a,\ CA = b,\ AB = c, BX = x,\ CY = y,\ AI = z,\ DX = DI = DY = u$.



Áp dụng định lý Ptoleme mở rộng (GPT) cho các bộ 4 đường tròn (A, (O_1), B, C) và (A, (O_2), C, B) ta có

Trừ hai đẳng thức này cho nhau, ta được $bx - cy = u(c-b)$, từ đó $\frac{(x+u)}{(y+u)} = \frac{c}{b}$, tức là $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$, suy ra AD là phân giác góc A và $BD = \frac{ac}{(b+c)}$. Mặt khác, cộng hai đẳng thức này, ta được $az = \frac{u}{b+c}$, suy ra $\frac{z}{u} = \frac{b+c}{a}$ tức là $\frac{AI}{ID} = \frac{BA}{BD}$, suy ra BI là phân giác góc B. Định lý được chứng minh.

<u>Chứng minh 2.</u>

<u>Bổ đề:</u> Cho BC là dây cung của đường tròn (O), S_1, S_2 là hai cung của (O) tạo bởi BC. Gọi M là trung điểm của S_2 và xét tất cả các đường tròn (V) tiếp xúc với S_1 và BC. Khi đó độ dài tiếp tuyến t_{MV} từ M đến (V) không phụ thuộc vào vị trí của V.

<u>Chứng minh bổ đề.</u> Giả sử (V) tiếp xúc (O) tại R và BC tại S. Áp dụng GPT cho bộ 4 đường tròn (B, (V), C, M) ta có BS.CM + CS.BM = t_{MV}.BC. Vì CM = BM nên từ đây ta suy ra t_{MV} = BM (không đổi).

<u>Chứng minh định lý 1.</u> Gọi M là trung điểm cung BC không chứa A. Áp dụng bổ đề, ta có t_{MO1} = MB = MI = MC = t_{MO2}. Từ đó suy ra M nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (O_1), (O_2), tức là trên AI. Điều đó có nghĩa là AI là phân giác góc A.

<u>Định lý 2.</u> Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường tròn (C) tiếp xúc với dây cung BC tại D và các cạnh AB, AC tương ứng tại P và Q. Khi đó trung điểm của PQ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

<u>Chứng minh.</u>Áp dụng GPT cho cặp 4 đường tròn (A, B, (C), C). Đặt $AP = AQ = x$ thì ta có

$$t_{AB} = c,\ t_{A(C)} = AP = x,\ t_{AC} = b,\ t_{B(C)} = BP = c-x,\ t_{BC} = a,\ t_{(C)C} = BQ = b - x.$$

Định lý GPT cho ta $c(b-x) + b(c-x) = ax$, từ đó $x = \frac{bc}{p}$, trong đó $p = \frac{(a+b+c)}{2}$ là nửa chu vi tam giác. Gọi I là trung điểm của PQ thì

$IP = x\sin\left(\frac{A}{2}\right)$ và khoảng cách từ I đến AB bằng $IP\cos\left(\frac{A}{2}\right)$ và bằng $\left(\frac{bc}{p}\right)\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)bc.\sin A}{p} = \frac{S}{p} = r$. Suy ra I chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác.

Rất thú vị là sử dụng GPT, ta có thể tìm được một cách chứng minh ngắn gọn nhất cho một kết quả kinh điển, một viên ngọc của hình học sơ cấp, định lý Feuerbach.

Định lý Feuerbach. Đường tròn nội tiếp và đường tròn 9 điểm Euler tiếp xúc với nhau.

Chứng minh.Gọi D, E, F là trung điểm các cạnh BC, CA, AB tương ứng và (I) là đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh, p là nửa chu vi. Xét bộ bốn (D, E, F, (I)), ta có

$$t_{DE} = \frac{a}{2},\ t_{EF} = \frac{b}{2},\ t_{FD} = \frac{c}{2}$$

$$t_{D(I)} = \left|\frac{a}{2} - (p-b)\right| = \frac{|b-c|}{2},\ t_{E(I)} = \frac{|c-a|}{2},\ t_{F(I)} = \frac{|a-b|}{2}$$

Để áp dụng định lý GPT đảo, ta chỉ cần kiểm tra xem có đẳng thức dạng

$\pm a(b-c) \pm b(c-a) \pm c(a-b) = 0$ hay không. Nhưng điều này là hiển nhiên.

Mở rộng định lý Ptoleme và bất đẳng thức Ptoleme

Định lý Ptoleme và bất đẳng thức Ptoleme có nhiều hướng mở rộng khác nhau. Thậm chí từ bất đẳng thức Ptoleme, phát sinh ra hẳn một khái niệm gọi là không gian metric Ptoleme, đồ thị Ptoleme … Dưới đây, chúng ta xem xét một số mở rộng của định lý Ptoleme (và cũng là của bất đẳng thức Ptoleme)

<u>Định lý Bretschneider</u>

Cho tứ giác ABCD có độ dài các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt là a, b, c, d và độ dài hai đường chéo AC, BD là m, n. Khi đó ta có

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd.\cos(A+C)$$

Rõ ràng định lý Ptoleme và cả bất đẳng thức Ptoleme đều là hệ quả của định lý Bretschneider. Ta xem xét chứng minh của kết quả này

Trên cạnh AB ra phía ngoài dựng tam giác AKB đồng dạng với tam giác ACD, trong đó $\widehat{BAK} = \widehat{DCA}$, $\widehat{ABK} = \widehat{CAD}$, còn trên cạnh AD dựng tam giác AMD đồng dạng tam giác ABC, $\widehat{DAM} = \widehat{BCA}$, $\widehat{ADM} = \widehat{CAB}$. Từ các tam giác đồng dạng này ta suy ra

$$AK = \frac{ac}{m},\ AM = \frac{bd}{m},\ KB = DM = \frac{ad}{m}$$

Ngoài ra, $\widehat{KBD} + \widehat{MDB} = \widehat{CAD} + \widehat{ABD} + \widehat{BDA} + \widehat{CAB} = 180^0$, nghĩa là tứ giác KBDM là hình bình hành. Nghĩa là $KM = BD = n$. Nhưng $\widehat{KAM} = \widehat{A} + \widehat{C}$. Áp dụng định lý hàm số cos cho tam giác KAM, ta có

$$m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd.\cos(A+C)\,(đpcm).$$

<u>Định lý Casey (định lý Ptoleme mở rộng)</u>

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (C). Bốn đường tròn α, β, γ, δ tiếp xúc với (C) lần lượt tại A, B, C, D. Gọi $t_{\alpha\beta}$ là độ dài đoạn tiếp tuyến chung, trong đó $t_{\alpha\beta}$ là độ dài đoạn tiếp tuyến chung ngoài nếu α, β cùng tiếp xúc ngoài hoặc cùng tiếp xúc trong với (C) và $t_{\alpha\beta}$ là độ dài đoạn tiếp tuyến chung trong trong trường hợp ngược lại. Các đại lượng $t_{\beta\gamma}$, $t_{\gamma\delta}$ … được định nghĩa tương tự. Khi đó ta có

$$t_{\alpha\beta}.t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}.t_{\delta\alpha} = t_{\alpha\gamma}.t_{\beta\delta}. \quad (9)$$

Ta chứng minh cho trường hợp α, β, γ, δ đều tiếp xúc ngoài với (C). Các trường hợp khác chứng minh tương tự.

Gọi R là bán kính đường tròn (C), x, y, z, t là bán kính các đường tròn α, β, γ, δ. Đặt $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, $m = AC$, $n = BD$.

Ta sẽ tính $t_{\alpha\beta}$ theo R, x, y và a. Gọi X, Y là tâm của α, β thì ta có, theo định lý Pythagore

$$(t_{ab})^2 = XY^2 - (x-y)^2$$

Mặt khác, theo định lý hàm số cos thì

$$\begin{aligned} XY^2 &= (R+x)^2 + (R+y)^2 - 2(R+x)(R+y)\cos(XOY) \\ &= 2R^2 + 2R(x+y) + x^2 + y^2 - 2\left(R^2 + R(x+y) + xy\right)\left(1 - a^2/2R^2\right) \\ &= (x-y)^2 + a^2(R+x)(R+y)/R^2 \end{aligned}$$

Từ đó

Tương tự với các đại lượng $t_{\beta\gamma}$, $t_{\gamma\delta}$ …

Thay vào (9) ta thấy rằng định lý Casey được suy ra từ định lý Ptoleme, cụ thể là từ đẳng thức a.c + b.d = m.n.

Ngược lại, định lý Ptoleme chính là trường hợp đặc biệt của định lý Casey, khi x = y = z = t = 0.

Định lý Casey có thể phát biểu một cách khác, như sau: Các đường tròn A, B, C, D tiếp xúc với đường tròn (O); a, b, c, d, x, y là độ dài các tiếp tuyến chung của các cặp đường tròn A và B, B và C, C và D, D và A, A và C và B và D tương ứng. Khi đó x.y = a.c + b.d. Chú ý ta lấy độ dài tiếp tuyến chung trong hay tiếp tuyến chung ngoài theo nguyên tắc đã đề cập ở trên. Cuối cùng, điểm có thể coi như đường tròn bán kính 0 và tiếp tuyến của hai « đường tròn điểm » chính là đường thẳng đi qua chúng. Điều này sẽ được dùng đến trong phần ứng dụng của định lý Casey.

Định lý Ptoleme và tứ giác điều hoà

Tứ giác ABCD nội tiếp một đường tròn được gọi là tứ giác điều hoà nếu các tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tại A và C cắt nhau tại một điểm nằm trên BD, và ngược lại, tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tại các điểm B và D cắt nhau tại một điểm nằm trên AC.

Ngoài ra, có một định nghĩa gọn gàng hơn cho tứ giác điều hoà, nhờ vào tính chất sau:

Định lý: Tứ giác ABCD là tứ giác điều hoà khi và chỉ khi AB.CD = AD.BC.

Chứng minh.

Phần thuận. Giả sử tiếp tuyến của đường tròn tại A và C cắt nhau tại P nằm trên BD. Hai tam giác ABP và DAP đồng dạng, suy ra

$$\frac{AB}{BP} = \frac{DA}{AP}$$
$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BP}{AP}$$

Tương tự hai tam giác CBP và DCP đồng dạng, suy ra

$$\frac{CB}{BP} = \frac{DC}{CP}$$
$$\Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{CP}{BP}$$

Từ đó suy ra $\dfrac{AB.CD}{AD.BC} = 1 \text{ vì } AP = CP$

Phần đảo. Phần đảo có thể chứng minh sử dụng phần thuận và tính chất: Với 3 điểm A, B, C trên đường tròn thì tồn tại một điểm duy nhất sao cho $AB.CD = BC.AD$.

Tứ giác điều hoà có nhiều tính chất thú vị, và khái niệm này liên quan mật thiết đến khái niệm cực, đối cực. Tuy nhiên, bài viết này không đi sâu về các tính chất khác nhau của tứ giác điều hoà mà nói đến việc ứng dụng định lý Ptolemevào tứ giác điều hoà để thu được một tính chất thú vị của tứ giác điều hoà, và xem xét một số ứng dụng của tính chất này.

Tính chất. Nếu ABCD là tứ giác điều hoà thì $AC.BD = 2.AB.CD$.

Chứng minh. Điều này là hiển nhiên do định lý trên và định lý Ptoleme.

Sau đây là một bài toán áp dụng.

Ví dụ 5. Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. BE, CF cắt (I) tại các điểm thứ hai M, N tương ứng. Chứng minh rằng $EF.MN = 3.MF.NE$.

Giải: Áp dụng định lý Ptolemecho tứ giác EFMN ta được $EF.MN + EN.MF = NF.ME$. Như vậy điều cần chứng minh tương đương với $NF.ME = 4.NE.MF$.

Ta có DNEF là một tứ giác điều hoà nên theo tính chất trên

NF.DE = 2.FD.NE

Tương tự, DMEF là tứ giác điều hoà nên

ME.FD = 2.MF.DE

Nhân các đẳng thức trên vế theo vế rồi giản ước cho DE.FD ở hai vế, ta được

NF.ME = 4.NE.MF

chính là điều cần chứng minh.

Cuối cùng, ta chứng minh một tính chất thú vị của tứ giác điều hoà, cũng dựa vào tính chất nói trên

Định lý. Cho tứ giác điều hoà ABCD. Gọi H là trung điểm của AC và K là trung điểm của BD. Khi đó $HB + HD = KA + KC$.

Chứng minh. Do AC.BD = 2.AB.CD nên ta có AH.BD = AB.CD, từ đó

$$\frac{AH}{AB} = \frac{DC}{DB}$$

Từ đó suy ra các tam giác AHB và DCB đồng dạng với tỷ số AB/DB. Suy ra

$$HB = \frac{AB.BC}{BD}$$

Tương tự

$$HD = \frac{AD.DC}{BD}$$

$$HB + HD = \frac{(AB.BC + AD.DC)}{BD}$$

Suy ra $= \dfrac{AB.BC.\sin(ABC) + AD.DC.\sin(ADC)}{BD\sin(ABC)}$

$$= \frac{4.R.S_{ABCD}}{AC.BD}$$

Công thức này hoàn toàn đối xứng đối với A, B, C, D do đó ta cũng sẽ thu được công thức tương tự khi tính KA + KC. Suy ra HB + HD = KA + KC.

Ghi chú. Cũng từ chứng minh trên, ta suy ra một tính chất đặc trưng khác của tứ giác điều hoà như sau.

Tính chất. Nếu ABCD là tứ giác điều hoà thì đường chéo BD là đường đối trung của các tam giác BAC và DAC, đường chéo AC là đường đối trung của các tam giác ABD, CBD.

Ứng dụng "không hình học" của bất đẳng thức Ptoleme

Chúng ta sẽ đề cập đến những ứng dụng của định lý Ptoleme, của bất đẳng thức Ptoleme trong các lĩnh vực toán học khác, trong đó có lượng giác, giải tích, lý thuyết đồ thị.

Bảng độ dài các dây cung của Ptoleme

Ptoleme là người đầu tiên đã lập ra bảng các hàm số lượng giác của các góc. Thực ra, Ptoleme đã lập ra bảng độ dài các dây cung ứng với góc ở tâm. Tuy nhiên, chúng ta có thể hiểu rằng bảng này hoàn toàn tương đương với bảng các hàm lượng giác.

Trên ngôn ngữ hiện đại, có thể hiểu ý tưởng của Ptoleme như sau: Dùng định lý Ptoleme, ông tìm ra công thức tương đương với công thức lượng giác quen thuộc:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha.\cos\beta - \sin\beta.\cos\alpha$$

Như thế, nếu biết hàm lượng giác của 72^0 và 60^0 thì sẽ tìm được hàm lượng giác của 12^0.

Ptoleme lại tìm được công thức tính độ dài của dây cung góc chia đôi (tương ứng với công thức $\sin^2(\alpha/2) = (1-\cos\alpha)/2$.

Từ đây, lại tìm được hàm lượng giác của các góc 6^0, 3^0, 1.5^0, … Sau đó, Ptoleme dùng công thức hiệu để lập bảng các dây cung, tương ứng với bảng các hàm lượng giác của các góc. Bạn đọc có thể xem chi tiết các lập luận của Ptoleme trong [11].

Không gian metric Ptoleme

Bất đẳng thức Ptoleme trong không gian Euclid 2 chiều đã dẫn đến một khái niệm quan trọng là khái niệm không gian metric Ptoleme.

Nhắc lại, không gian metric là một bộ (X, d) trong đó X là một tập hợp còn d là một ánh xạ từ $X \times X$ vào R^+ (tập hợp các số thực không âm), thoả mãn các tính chất sau

a. $d(x, y) \geq 0$ với mọi x, y thuộc X
b. $d(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$
c. $d(x, y) = d(y, x)$ với mọi x, y thuộc X
d. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ với mọi x, y, z thuộc X

Không gian metric (X, d) được gọi là không gian metric Ptolely nếu như với bốn điểm x, y, z, t bất kỳ ta có bất đẳng thức Ptoleme

$d(x, y).d(z,t) + d(x,t).d(y,z) \geq d(x, z).d(y,t)$ <u>Đồ thị Ptoleme</u>

Tương tự, ta có khái niệm đồ thị Ptoleme : Đồ thị liên thông G được gọi là đồ thị Ptoleme nếu với 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 bất kỳ ta có

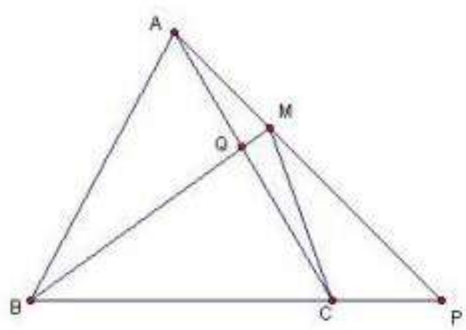
$$d_{12}.d_{34} + d_{14}.d_{23} \geq d_{13}.d_{24}$$

trong đó d_{ij} là khoảng cách giữa A_i và A_j, nghĩa là độ dài đường đi ngắn nhất từ A_i đến A_j.

Những đối tượng này có những tính chất quan trọng và được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu

Bài tập có giải

Bài toán 1: Cho tam giác đều ABC có các cạnh bằng $a(a>0)$. Trên AC lấy điểm Q di động, trên tia đối của tia CB lấy điểm P di động sao cho $AQ.BP=a^2$. Gọi M là giao điểm của BQ và AP. Chứng minh rằng: $AM+MC=BM$
(Đề thi vào trường THPT chuyên Lê Quí Đôn, thị xã Đông Hà, tỉnh Quảng Trị, năm học 2005-2006)



Chứng minh:

Từ giả thiết $AQ.BP=a^2$ suy ra $\dfrac{AQ}{AB}=\dfrac{AB}{BP}$.
Xét ΔABQ và ΔBPA có:

Lại có $\widehat{ABQ}+\widehat{MBP}=60^o(2)$
Từ:

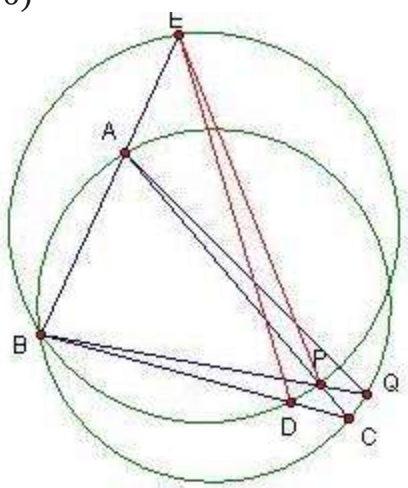
$$(1),(2)\Rightarrow \widehat{BMP}=180^o-\widehat{MBP}-\widehat{MPB}=120^o$$

$$\Rightarrow \widehat{AMB}=180^o-\widehat{BMP}=180^o-120^o=60^o=\widehat{ACB}.$$

Suy ra tứ giác $AMCB$ nội tiếp được đường tròn.
Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác $AMCB$ nội tiếp và giả thiết $AB=BC=CA$ ta có:
$AB.MC+BC.AM=BM.AC\Rightarrow AM+MC=BM$ (đpcm)

Đây là 1 bài toán khá dễ và tất nhiên cách giải này ko được đơn giản lắm. Vì nếu muốn sử dụng đẳng thức Ptô-lê-mê trong 1 kì thi thì có lẽ phải chứng minh nó dưới dạng bổ đề. Nhưng điều chú ý ở đây là ta chẳng cần phải suy nghĩ nhiều khi dùng cách trên trong khi đó nếu dùng cách khác thì lời giải có khi lại ko mang vẻ tường minh.

<u>Bài toán 2:</u> Tam giác ABC vuông có $BC > CA > AB$. Gọi D là một điểm trên cạnh BC, E là một điểm trên cạnh AB kéo dài về phía điểm A sao cho $BD = BE = CA$. Gọi P là một điểm trên cạnh AC sao cho E, B, D, P nằm trên một đường tròn. Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp δABC. Chứng minh rằng: $AQ + CQ = BP$
(Đề thi chọn đội tuyển Hồng Kông tham dự IMO 2000, HongKong TST 2000)

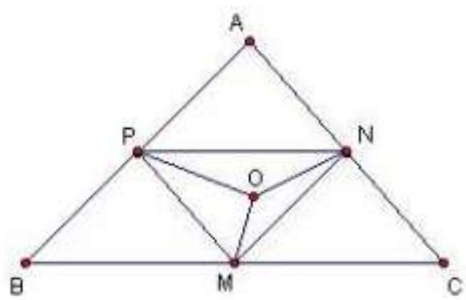


Chứng minh:
Xét các tứ giác nội tiếp $ABCQ$ và $BEPD$ ta có:
$\widehat{CAQ} = \widehat{CBQ} = \widehat{DEP}$
(cùng chắn các cung tròn)
Mặt khác $\widehat{AQC} = 108^o - \widehat{ABC} = \widehat{EPD}$
Xét ΔAQC và ΔEPD có:

(do $AC = BD$)
$\dfrac{AC}{ED} = \dfrac{QC}{PD} \Rightarrow ED.QC = AC.PD = BE.PD(2)$
(do $AC = BE$)
Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp $BEPD$ ta có:
$EP.BD + BE.PD = ED.BP$
Từ $(1), (2), (3)$ suy ra:
$AQ.ED + QC.ED = ED.BP \Rightarrow AQ + QC = BP$ (đpcm)

Có thể thấy rằng bài 1 là tư tưởng đơn giản để ta xây dựng cách giải của bài 2. Tức là dựa vào các đại lượng trong tam giác bằng nhau theo giả thiết ta sử dụng tam giác đồng dạng để suy ra các tỉ số liên quan và sử dụng phép thế để suy ra điều phải chứng minh. Cách làm này tỏ ra khá là hiệu quả và minh họa rõ ràng qua 2 ví dụ mà zaizai đã nêu ở trên. Để làm rõ hơn phương pháp chúng ta sẽ cùng nhau đến với việc chứng minh 1 định lí bằng chính Ptô-lê-mê.

Bài toán 3: (Định lí Carnot)
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp trong đường tròn (O,R) và ngoại tiếp đường tròn (I,r). Gọi x,y,z lần lượt là khoảng cách từ O tới các cạnh tam giác. Chứng minh rằng: $x+y+z=R+r$

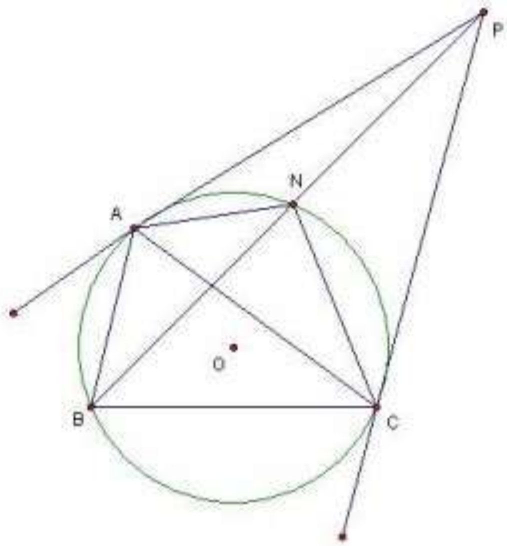


Chứng minh:
Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,CA,AB. Giả sử $x=OM, y=ON, z=OP, BC=a, CA=b, AB=c.$
Tứ giác $OMBP$ nội tiếp, theo đẳng thức Ptô-lê-mê ta có:
$OB.PM=OP.MB+OM.PB$
Do đó: $R.\frac{b}{2}=z.\frac{a}{2}+x.\frac{c}{2}(1)$
Tương tự ta cũng có :
$R.\frac{c}{2}=y.\frac{a}{2}+x.\frac{b}{2}(2)$
$R.\frac{a}{2}=y.\frac{c}{2}+z.\frac{b}{2}(3)$
Mặt khác:
$r(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}+\frac{c}{2})=S_{ABC}=S_{OBC}+S_{OCA}+S_{OAB}=x.\frac{a}{2}+y\frac{b}{2}+z.\frac{c}{2}(4)$
Từ $(1),(2),(3),(4)$ ta có:
$(R+r)(\frac{a+b+c}{2})=(x+y+z)(\frac{a+b+c}{2})\Rightarrow R+r=x+y+z$

Đây là 1 định lí khá là quen thuộc và cách chứng minh khá đơn giản. Ứng dụng của định lí này như đã nói là dùng nhiều trong tính toán các đại lượng trong tam giác. Đối với trường hợp tam giác đó không nhọn thì cách phát biểu của định lí cũng có sư thay đổi.

2, Chứng minh các đặc tính hình học:

Bài toán 1: Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và $AC = 2AB$. Các đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, C cắt nhau ở P. Chứng minh rằng BP đi qua điểm chính giữa của cung BAC.



Chứng minh:

Gọi giao điểm của BP với đường tròn là N. Nối AN, NC.

Xét δNPC và δCPB có: $\widehat{PCN} = \widehat{PBC}, \widehat{P}$ chung

$\Rightarrow \Delta NPC \sim \Delta CPB(g.g) \Rightarrow \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{NC}{BC}(1)$

Tương tự ta cũng có $\Delta PAN \sim \Delta PBA(g.g) \Rightarrow \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{AN}{AB}(2)$

Mặt khác $PA = PC$(do là 2 tiếp tuyến của đường tròn cắt nhau)

Nên từ $(1),(2) \Rightarrow \dfrac{PA}{PB} = \dfrac{NC}{BC} = \dfrac{AN}{AB} \Rightarrow NC.AB = BC.AN(3)$

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp $ABCN$ ta có:

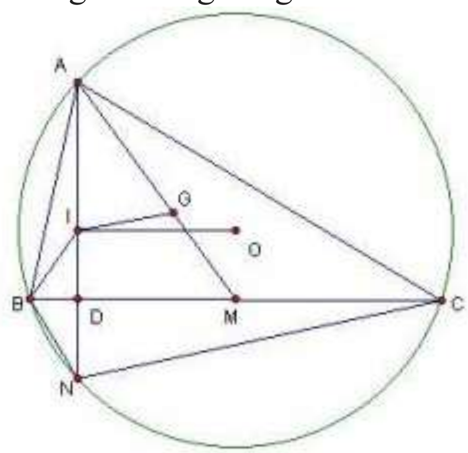
$AN.BC + AB.NC = AC.BN$

Từ $(3) \Rightarrow 2AB.NC = AC.BN = 2AB.BN \Rightarrow NC = BN$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Đây có lẽ là một trong những lời giải khá là ngắn và ấn tượng của bài này.Chỉ cần qua vài quá trình tìm kiếm các cặp tam giác đồng dạng ta đã dễ dàng đi đến kết luận của bài toán. Tư tưởng ban đầu khi làm bài toán này chính là dựa vào lí thuyết trong cùng một đường tròn hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau. Do có liên quan đến các đại lượng trong tứ giác nội tiếp nên việc chứng minh rất dễ dàng.

Bài toán 2: Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm G. Giả sử rằng $\widehat{OIA} = 90^o$. Chứng minh rằng IG song song với BC



Kéo dài AI cắt (O) tại N. Khi đó N là điểm chính giữa cung BC (không chứa A).

Ta có: $BN = NC(1)$. Lại có :

$\widehat{IBN} = \widehat{BIN} \Rightarrow BN = IN(2)$

Do $OI \perp AE$ suy ra $IA = IN = \frac{1}{2}$sđ cung $BC(3)$

Từ $(1),(2),(3) \Rightarrow BN = NC = IN = IA(4)$

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp $ABNC$ ta có:

$BN.AC + AB.NC = BC.AN$

Từ $(4) \Rightarrow BN(AC + AB) = 2BN.BC \Rightarrow AC + AB = 2BC(5)$

Áp dụng tính chất đường phân giác trong tam giác và (5) ta có:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{IA}{ID} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB+AC}{BD+CD}$$

$$= \frac{AB+AC}{BC} = \frac{2BC}{BC} = 2$$

Vậy $\frac{IA}{ID} = 2(6)$

Mặt khác G là trọng tâm của tam giác suy ra $\frac{AG}{GM} = 2(7)$

Từ $(6),(7) \Rightarrow \frac{IA}{ID} = 2 = \frac{AG}{GM}$

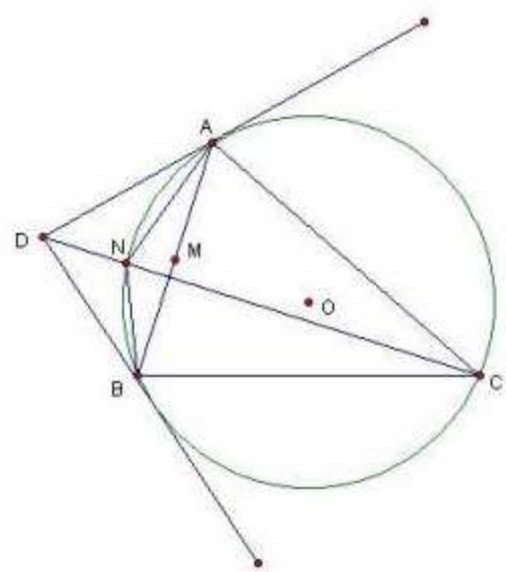
Suy ra IG là đường trung bình của tam giác ADM hay IG song song với BC.

Đây là một bài toán khá là hay ít nhất là đối với THCS và với cách làm có vẻ "ngắn gọn" này ta đã phần nào hình dung được vẻ đẹp của các định lí.

<u>Bài toán 3:</u>

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), CM là trung tuyến. Các tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau ở D. Chứng minh rằng:

$\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$



Chứng minh:

Gọi N là giao điểm của CD với (O). Xét tam giác DNB và DBC có:

$\widehat{DBN} = \widehat{DCB}, \widehat{D}$ chung.

$\Rightarrow \Delta DBN \sim \Delta DCB(g.g)$

$\Rightarrow \frac{NB}{CB} = \frac{BD}{CD}(1)$

Tương tự ta cũng có :

$\Delta DNA \sim \Delta DAC(g.g) \Rightarrow \frac{NA}{AC} = \frac{DA}{CD}(2)$

Mà $BD = DA$ nên từ $(1),(2) \Rightarrow \frac{NB}{CB} = \frac{NA}{AC} \Rightarrow NB.AC = AN.BC(3)$

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp $ANBC$ ta có:

$AN.BC + BN.AC = AB.NC$
Từ (3) và giả thiết
$AB = 2BM \Rightarrow 2AN.BC = 2BM.NC \Rightarrow \dfrac{AN}{NC} = \dfrac{BM}{BC}$
Xét ΔBMC và ΔNAC có:

Vậy bài toán được chứng minh.

Cơ sở để ta giải quyết các bài toán dạng này là tạo ra các tứ giác nội tiếp để áp dụng định lí sau đó sử dụng lí thuyết đồng dạng để tìm ra mối quan hệ giữa các đại lượng. Đây là một lối suy biến ngược trong hình học.

3, Chứng minh các đẳng thức hình học:

Bài toán 1: Giả sử M, N là các điểm nằm trong δABC sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}, \widehat{MBA} = \widehat{NBC}$. Chứng minh rằng:
$$\frac{AM.AN}{AB.AC} + \frac{BM.BN}{BA.BC} + \frac{CM.CN}{CA.CB} = 1$$

Chứng minh:

Lấy điểm K trên đường thẳng BN sao cho $\widehat{BCK} = \widehat{BMA}$, lúc đó $\Delta BMA \sim \Delta BCK$ suy ra:
$\dfrac{AB}{BK} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{AM}{CK} (1)$
$\Rightarrow \dfrac{AB}{MB} = \dfrac{BK}{BC}$
Mặt khác dễ thấy rằng $\widehat{ABK} = \widehat{MBC}$, từ đó $\Delta ABK \sim \Delta MBC$ dẫn đến
$\dfrac{AB}{BM} = \dfrac{BK}{BC} = \dfrac{AK}{CM} (2)$.
Cũng từ $\Delta BMA \sim \Delta BCK$ ta có:
$\widehat{CKN} = \widehat{BAM} = \widehat{NAC}$.
suy ra tứ giác $ANCK$ nội tiếp đường tròn.
Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác $ABCK$ ta có:
$AC.NK = AN.CK + CN.AK (3)$
Nhưng từ (1) và (2) thì :
$CK = \dfrac{AM.BC}{BM}, AK = \dfrac{AB.CM}{BM}, BK = \dfrac{AB.BC}{BM}$
Nên ta có đẳng thức (3)

Đây là 1 trong những bài toán khá là cổ điển của IMO Shortlist. Ta vẫn có thể giải quyết bài toán theo một hướng khác nhưng dài và phức tạp hơn đó là sử dụng bổ đề: Nếu M,N là các điểm thuộc cạnh BC của ΔABC sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{NAC}$ thì $AM.AN = AB.AC - \sqrt{BM.BN.CM.CN}$. Đây là một bổ đề mà các bạn cũng nên ghi nhớ.

Bài toán 2: Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O). Chứng minh rằng: $\dfrac{AC}{BD} = \dfrac{BC.CD + AB.BD}{BC.BA + DC.DA}$

Chứng minh:

Lấy E và F thuộc đường tròn sao cho:

$\widehat{CDB} = \widehat{ADE}, \widehat{BDA} = \widehat{DCF}$

Khi đó: $AE = BC, FD = AB, EC = AB, BF = AD$

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho hai tứ giác nội tiếp AECD và BCDF ta có:

$$AC.ED = AE.CD + AD.EC = BC.CD + AD.AB (1)$$

$$BD.CF = BC.DF + BF.CD = BC.AB + AD.CD (2)$$

Mặt khác:

$\widehat{CDE} = \widehat{CDB} + \widehat{BDE} = \widehat{ADE} + \widehat{BDE} = \widehat{ADB} = widehat FCD$

Do đó:

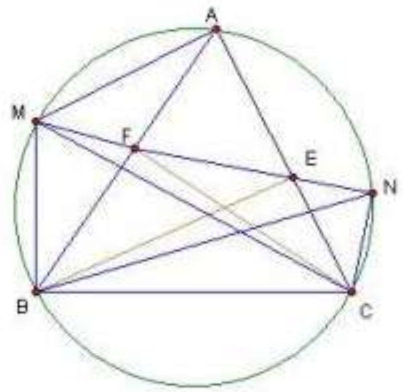
$\widehat{FDC} = \widehat{FDE} + \widehat{EDC} = \widehat{FCE} + \widehat{FCD} = \widehat{ECD}$

Suy ra: $ED = FC (3)$

Từ (1), (2), (3) ta có điều phải chứng minh.

Bài toán 3: Cho tam giác ABC với BE, CF là các đường phân giác trong. Các tia EF, FE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{BM} + \frac{1}{CN} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CM}$$



Chứng minh:

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$

Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho hai tứ giác nội tiếp $AMBC$ và $ANCB$ ta có:

$a.AM + b.BM = c.CM (1)$

$a.AN + a.CN = b.BN (2)$ Từ (1) và (2) ta được:

$a(AM + AN) = b(BN - BM) + c(CM - CN)(3)$

Mặt khác ta lại có:

$$\Delta ANF \sim \Delta NBF(g.g) \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{MF}{BF}(4)$$

Tương tự :

$$\Delta ANF \sim \Delta MBF(g.g) \Rightarrow \frac{AN}{BM} = \frac{AF}{MF}(5)$$

Từ (4), (5) và tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{AM.AN}{BM.BN} = \frac{AF}{BF} = \frac{b}{a}(6)$$

Chứng minh tương tự ta được:

$$\frac{AM.AN}{CM.CN} = \frac{AE}{CE} = \frac{c}{a}(7)$$

Từ (3), (6), (7) ta có điều phải chứng minh.

Có thể dễ dàng nhận ra nét tương đồng giữa cách giải của 3 bài toán đó là vận dụng cách vẻ hình phụ tạo ra các cặp góc bằng các cặp góc cho sẵn từ đó tìm ra các biểu diễn liên quan. Một đường lối rất hay được sử dụng trong các bài toán dạng này.

4, Chứng minh bất đẳng thức và giải toán cực trị trong hình học:

Bài toán 1: (Thi HSG các vùng của Mĩ, năm 1987)

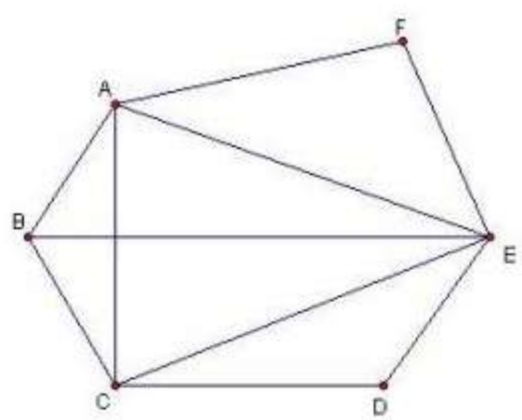
Cho một tứ giác nội tiếp có các cạnh liên tiếp bằng a, b, c, d và các đường chéo bằng p, q. Chứng minh rằng:

$pq \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)}$

Chứng minh:
Áp dụng định lí Ptô-lê-mê cho tứ giác nội tiếp thì $ac + bd = pq$
Vậy ta cần chứng minh $p^2q^2 = (ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$
Bất đẳng thức này chính là một bất đẳng thức rất quen thuộc mà có lẽ ai cũng biết đó là bất đẳng thức Bunhiacopxki-BCS. Vậy bài toán được chứng minh.

Một lời giải đẹp và vô cùng gọn nhẹ cho 1 bài toán tưởng chừng như là khó. Ý tưởng ở đây là đưa bất đẳng thức cần chứng minh về 1 dạng đơn giản hơn và thuần đại số hơn. Thật thú vị là bất đẳng thức đó lại là BCS.

<u>Bài toán 2:</u>
Cho lục giác lồi ABCDEF thỏa mãn điều kiện
$AB = BC, CD = DE, EF = FA$
Chứng minh rằng:
$$\frac{BC}{BE} + \frac{DE}{DA} + \frac{FA}{FC} \geq \frac{3}{2} + \frac{(AC - CE)^2 + (CE - AE)^2 + (AE - AC)^2}{(AC + CE)^2 + (CE + AE)^2 + (AE + AC)^2}$$



Chứng minh:
Đặt $AC = a, CE = b, AAE = c$. Áp dụng định lí Ptô-lê-mê mở rộng cho tứ giác $ACEF$ ta có: $AC.EFkCE.AF \geq AE.CF$. Vì $EF = AF$ nên suy ra:
$$\frac{FA}{FC} \geq \frac{c}{a+b}$$
Tương tự ta cũng có:
$$\frac{DE}{DA} \geq \frac{b}{c+a}, \frac{BC}{BE} \geq \frac{a}{b+c}$$

Từ đó suy ra

Bất đẳng thức đã qui về dạng chính tắc **SOS** :

$$\boxed{S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0}$$

Dễ thấy:

$$2(a+c)(b+c)\leq (a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2(a+c)(b+c)}\geq \frac{1}{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2}$$

Như vậy $S_c\geq 0$, đánh giá tương tự ta cũng dễ dàng thu được kết quả $S_a, S_b\geq 0$.

Vậy bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Tức là khi ABCDEF là một lục giác đều nội tiếp.

Bài toán 3:

Cho lục giác lồi ABCDEF thỏa mãn điều kiện $AB=BC, CD=DE, EF=FA$ và tổng độ dài ba cạnh AC, CE, AE bằng 3

Chứng minh rằng:

$$\frac{BC}{BE}+\frac{DE}{DA}+\frac{FA}{FC}\geq \frac{21}{16}+\frac{27(AC^3+CE^3+AE^3)}{16(AC+CE+AE)^3}$$

Lời giải:

Ta chuyển việc chứng minh bất đẳng thức trên về chứng minh bất đẳng thức sau:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq \frac{21}{16}+\frac{27(a^3+b^3+c^3)}{16(a+b+c)^3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-a}\geq \frac{21}{16}+\frac{(a^3+b^3+c^3)}{16}$$

Bằng cách sử dụng phương pháp hệ số bất định ta dễ dàng tìm được bất đẳng thức phụ đúng:

$$\frac{a}{3-a}\geq \frac{9a+a^3-2}{16}$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2-a+6)\geq 0$$

Tương tự với các phân thức còn lại ta có điều phải chứng minh.

Khi định hướng giải bài này chắc hẳn bạn sẽ liên tưởng ngay đến **SOS** nhưng thật sự thì nó ko cần thiết trong bài toán này bởi chỉ làm phức hóa bài toán. Dùng phương pháp hệ số bất định giúp ta tìm ra 1 lời giải ngắn và rất

đẹp.
Thực ra cách làm mới bài toán này cũng cực kì đơn giản vì xuất phát điểm của dạng chuẩn là bất đẳng thức Nesbit quen thuộc vì vậy dễ dàng thay đổi giả thiết để biến đổi bài toán. Mà cách thay đổi điều kiện ở đây chính là bước chuẩn hóa trong chứng minh bất đẳng thức đại số. Nói chung là dùng để đồng bậc bất đẳng thức thuần nhất. Với tư tưởng như vậy ta hoàn toàn có thể xây dựng các kết quả mạnh hơn và thú vị hơn qua một vài phương pháp như SOS, hệ số bất định, dồn biến và chuẩn hóa. Đặc biệt sau khi chuẩn hóa ta có thể dùng 3 phương pháp còn lại để chứng minh.

Bài toán 4::
Cho đường tròn (O) và BC là một dây cung khác đường kính của đường tròn. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC sao cho $AB + AC$ lớn nhất.

Lời giải:
Gọi D là điểm chính giữa cung nhỏ BC.
Đặt $DB = DC = a$ không đổi. Theo định lí Ptô-lê-mê ta có:

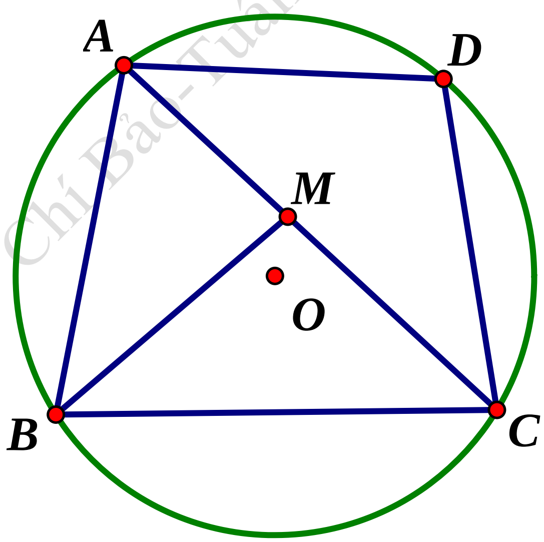
$$AD.BC = AB.DC + AC.BD = a(AB + AC) \Rightarrow AB + AC = \frac{BC}{a}.AD$$

Do BC và a ko đổi nên $AB + AC$ lớn nhất khi và chỉ khi AD lớn nhất khi và chỉ khi A là điểm đối xứng của D qua tâm O của đường tròn.

Định lý.Chứng minh rằng nếu ABCD là tứ giác nội tiếp thì AB.CD + AD.BC= AC.BD

Chứng minh. Giả sử $\widehat{DBC} \geq \widehat{ABD}$

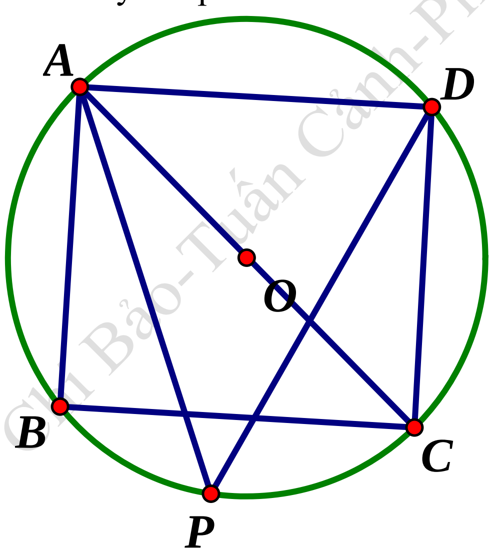
Lấy điểm M trên đoạn AC thỏa mãn $\widehat{MBC} = \widehat{ABD}$



Vì $\triangle ABC : \triangle DBC(g-g)$ nên
AB.CD = BD.AM
Tương tự AD.BC = BD.CM.
Suy ra AB.CD + AD.BC = BD(AM + CM) = AC.BD (dpcm)
Ứng dụng

Bài toán 5:

Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. P là một điểm nằm trên cung nhỏ CD của (O).
Chứng minh rằng PA + PC = $\sqrt{2}PB$
Lời giải. Vì ABCD là hình vuông nội tiếp đường tròn (O;R) nên AB = BC = $R\sqrt{2}$, AC = 2R.
Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác ABCP ta được AB.CP + AP.BC = AC.BP.
Từ đó suy ra đpcm.

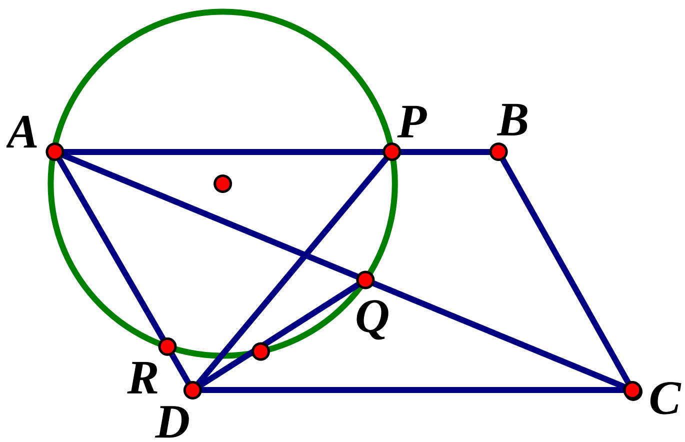


Bài toán 6:

Cho hình bình hành ABCD. Một đường tròn đi qua A cắt đường thẳng AB, AC, AD lần lượt tại điểm thứ hai khác A là P, Q, R. Chứng minh rằng

$$AB.AP + AD.AR = AQ.AC$$

Lời giải.



Vì $\widehat{ACB} = \widehat{CAD} = \widehat{RPQ}$ và $\widehat{BAC} = \widehat{PRQ}$ nên $\Delta ABC \sim \Delta RQP(g-g)$

Suy ra $\dfrac{AB}{RQ} = \dfrac{BC}{QP} = \dfrac{AC}{RP}$ (đặt là t).

Khi đó RQ = $\dfrac{AB}{t}$, QP = $\dfrac{BC}{t}$, RP = $\dfrac{AC}{t}$.

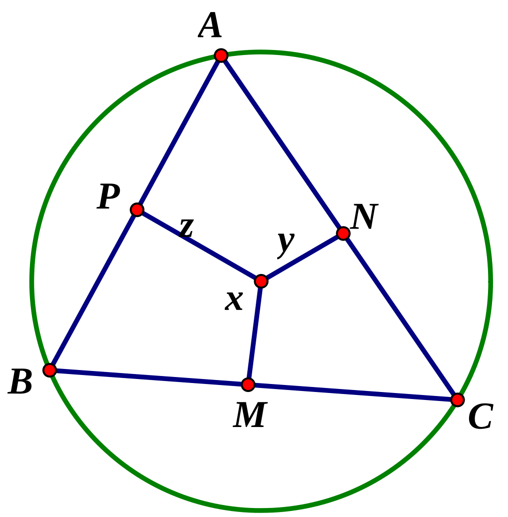
Từ đó suy ra đpcm.

Bài toán 7:

Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R và ngoại tiếp đường tròn tâm I, bán kính r. Gọi x; y; z lần lượt là khoảng cách từ O đến BC; CA; AB.

Chứng minh rằng x + y + z = R + r.

Lời giải. Đặt BC = a, CA = b; AB = c



Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác ANOP ta được

$\frac{cy}{2} = \frac{bz}{2} = \frac{aR}{2}$ (vì NP = $\frac{a}{2}$)

$\Leftrightarrow cy + bz = aR; bx + ay = cR.$

Suy ra

$a(y+z) + b(z+x) + c(x+y) = R(a+b+c).$

Mà ax+by+cz = $2S_{ABC} = (a+b+c)r$

Nên cộng theo vế hai đẳng thức trên rồi chia hai vế cho (a + b + c) suy ra đpcm.

<u>Bài toán 8:</u>

Cho đường tròn (O) và dây BC cố định (khác đường kính). Xác định vị trí của điểm A trên cung lớn BC sao cho AB + AC lớn nhất.

Lời giải. Gọi D là trung điểm của cung nhỏ BC.

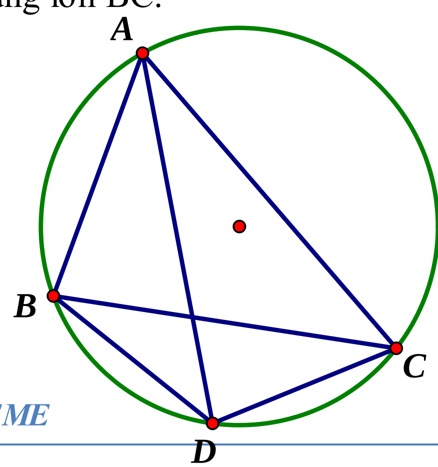
Áp dụng định lý Ptôlêmê cho tứ giác ABDC ta được

AB.DC + AC.BD = AD.BC.

$\Leftrightarrow DC(AB + AC) = AD.BC$ (vì $BD = DC$).

Vì DC và BC cố định nên AB +AC lớn nhất khi vì chỉ khi AD lớn nhất.

Vậy A là trung điểm của cung lớn BC.



.Bài tập tự giải

1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và AC = 2AB. Các đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại A, C cắt nhau tại P. Chứng minh rằng BP đi qua điểm chính giữa của cung BAC.

2. Cho tam giác ABC có I là tâm đường tròn nội tiếp, O là tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm G. Giả sử rằng $\angle OIA = 90^0$. Chứng minh rằng IG song song với BC.

3. (IMO Shortlist) Giả sử M, N là các điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle MAB = \angle NAC$, $\angle MBA = \angle NBC$. Chứng minh rằng:

4. (VMO 1997) Trong mặt phẳng, cho đường tròn tâm O bán kính R và điểm P nằm trong được tròn (OP = d < R). Trong tất cả các tứ giác lồi ABCD nội tiếp trong đường tròn (O) và có hai đường chéo AC và BD vuông góc và cắt nhau tại P, hãy tìm tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất này theo R và d.

5. (Bulgaria 2007) Cho tam giác ABC có BC > AB > AC và $\cos A + \cos B + \cos C = \frac{11}{8}$. Xét các điểm X thuộc BC và Y thuộc AC kéo dài về phía C sao cho BX = AY = AB.

a) Chứng minh rằng $XY = \frac{AB}{2}$.

b) Gọi Z là điểm nằm trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác không chứa C sao cho ZC = ZA + ZB. Hãy tính tỷ số $\frac{ZC}{XC+YC}$.

6. Cho tam giác ABC với BE, CF là các đường phân giác trong. Các tia EF, FE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng:

7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') nằm trong (O) tiếp xúc với (O) tại T thuộc cung AC (không chứa B). Kẻ các tiếp tuyến AA', BB', CC' tới (O'). Chứng minh rằng: BB'.AC = AA'.BC + CC'.AB.

8. (Định lý Thebault) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). D là trung điểm của BC. Gọi (O_1), (O_2) là các đường tròn nằm trong (O), tiếp xúc với (O), BC và AD. Khi đó đường thẳng nối tâm của (O_1), (O_2) đi qua I. Hãy chứng minh.

9. (CMO 1988, Trung Quốc) Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp với đường tròn ngoại tiếp có tâm O và bán kính R. Các tia AB, BC, CD, DA cắt đường tròn tâm O bán kính 2R lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng chu vi tứ giác A'B'C'D' không nhỏ hơn hai lần chu vi tứ giác ABCD.

10. Cho đường tròn (O) và dây cung BC khác đường kính. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC của đường tròn để AB + 2AC đạt giá trị lớn nhất.

11. Lục giác lồi ABCDEF có ABF là tam giác vuông cân tại A, BCEF là hình bình hành. AD = 3, BC = 1, CD + DE = 2 Tính diện tích lục giác.

12. Cho ngũ giác đều ABCDE nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là một điểm thuộc cung nhỏ AE. Chứng minh rằng: $MA+MC+ME=MB+MD$.

13. Cho tam giac ABC tù. Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác và x, y, z theo thứ tự là khoảng cách từ tâm O của đường tròn ngoại tiếp tới các cạnh BC, CA, AB.
Chứng minh rằng: $y+z-x=R+r$

14. Cho đường tròn O và dây BC cố định (khác đường kính). Xác định vị trí của điểm A trên cung lớn BC sao cho AB+2AC lớn nhất
Bài 1:(CMO 1988, Trung Quốc)
$ABCD$ là một tứ giác nội tiếp với đường tròn ngoại tiếp có tâm) và bán kính R. Các tia AB, BC, CD, DA cắt $(O, 2R)$ lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng:
$A'B' + B'C' + C'D' + D'A' \geq 2(AB + BC + CD + DA)$

16.Cho đường tròn (O) và dây cung BC khác đường kính. Tìm điểm A thuộc cung lớn BC của đường tròn để $AB + 2AC$ đạt giá trị lớn nhất.

17.Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (O') nằm trong (O) tiếp xúc với (O) tại T thuộc cung AC (ko chứa B). Kẻ các tiếp tuyến AA', BB', CC' tới (O'). Chứng minh rằng:
$BB'.AC = AA'.BC + CC'.AB$
18.Cho lục giác $ABCDEF$ có các cạnh có độ dài nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng trong ba đường chéo AD, BE, CF có ít nhất một đường chéo có độ dài nhỏ hơn 2.

19.Cho hai đường tròn đồng tâm, bán kính của đường tròn này gấp đôi bán kính của đường tròn kia. $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn nhỏ. Các tia AB, BC, CD, DA lần lượt cắt đường tròn lớn tại A', B', C', D'.
Chứng minh rằng: chu vi tứ giác $A'B'C'D'$ lớn hơn 2 lần chu vi tứ giác $ABCD$.

Tư liệu tham khảo

1. I.F.Sharyghin, *Các bài toán hình học phẳng*, NXB "Nauka", Moscow 1986

2. Lê Quốc Hán, *Ẩn sau định lý Ptô-lê-mê*, NBX Giáo dục 2007

3. Internet, *Ptoleme's Theorem*

http://en.wikipedia.org/wiki/Ptoleme's_theorem

4. Internet, *Simson's Line and Its Applications*

http://www.math.uci.edu/~mathcirc/math194/lectures/inscribed/node2.html

5. Internet, *Casey's Theorem – Generalized Ptoleme's Theorem*

http://en.wikipedia.org/wiki/Casey's_theorem

6. Zaizai, Khám phá định lý Ptô-lê-mê

http://toanthpt.net/forums/showthread.php?p=7986

7. Internet, *Ptoleme's Theorem and Interpolation*

http://www.mlahanas.de/Greeks/PtolemeMath.htm

8. Internet, *Peter Scholes IMO website*

www.kalva.demon.co.uk

9. Shailesh Shirali, *On The Generalized* Ptoleme. *Theorem.*

http://journals.cms.math.ca/cgi-bin/vault/public/view/CRUXv22n2/body/PDF/page49-53.pdf?file=page49-53

10. Jean-Louis Aime, *Sawayama and Thebault's Theorem*, Forum Geometricorum, Volume 3 (2003), 225-229.

http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200325.pdf

11. Internet, Ptoleme's Table of Chords. Trigonometry in the second century

http://hypertextbook.com/eworld/chords.shtml

12. **Malesevic, Branko J.,** *The Mobius-Pompeiu metric property,* Journal of Inequalities and Applications

www.hindawi.com/Getpdf.aspx?doi=10.1155/JIA/2006/83206

13. David C.Kay, The ptolemaic inequality in Hilbert geometries, Pacific Journal of Mathematics, Volume 21, N2 (1967), 293-301.

14. Internet, Encyclopedic Dictionary of Distances

www.liga.ens.fr/~deza/1-15.pdf

15. Edward Howorka, A characterization of ptolemaic graphs, Volume 5, Issue 3 Pages 323-331.

16. Takahara et al, The longest path problems on ptolemaic graphs, IEICE Transactions

http://ietisy.oxfordjournals.org/cgi/content/abstract/E91-D/2/170