Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

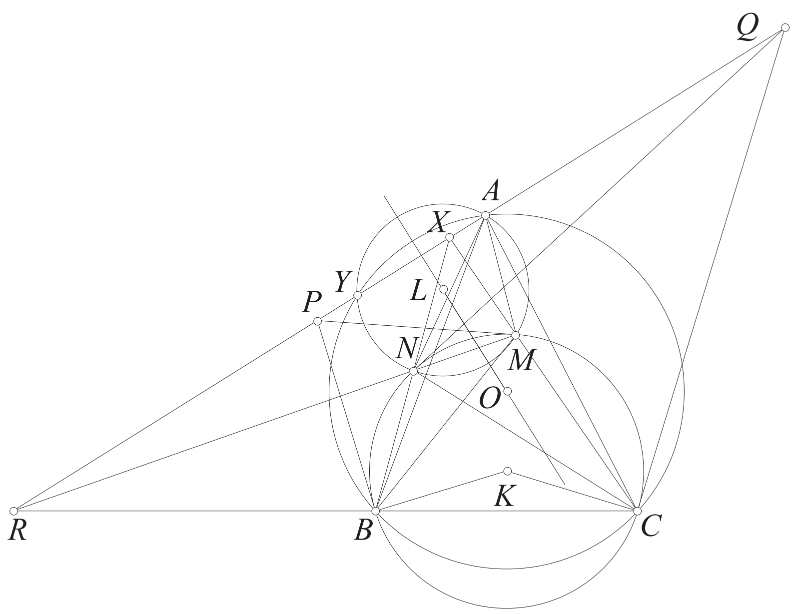
Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn với tâm ngoại tiếp O. (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. Tiếp tuyến tại B, C của (K) lần lượt cắt AO tại P, Q. Lấy M, N khác B, C thuộc (K) sao cho PM, QN tiếp xúc (K). Gọi L là tâm ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng $OL \perp AO$.

Ta đưa ra bài toán tổng quát hơn như sau

Cho tam giác ABC và một đường tròn (K) đi qua B, C. d là một đường thẳng đi qua A. Tiếp tuyến tại B, C của (K) cắt d tại P, Q. Lấy M, N khác B, C thuộc (K) sao cho PM, QN tiếp xúc (K). L là tâm ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng đường thẳng qua L vuông góc d luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi.

Lời giải



Gọi giao điểm của PQ và BC là R. MC cắt NB tại X. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} M & B & N \\ B & M & C \end{pmatrix}$ ta suy ra P nằm trên RX. Tương tự Q nằm trên RX. Từ đó gọi Y là giao điểm khác A của AR và đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN thì $RY.RA = RM.RN = RB.RC$ suy ra Y nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó d là trục đẳng phương của đường tròn (L) ngoại tiếp tam giác AMN và đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Vậy đường thẳng qua L vuông góc d luôn đi qua O cố định.

Nhận xét

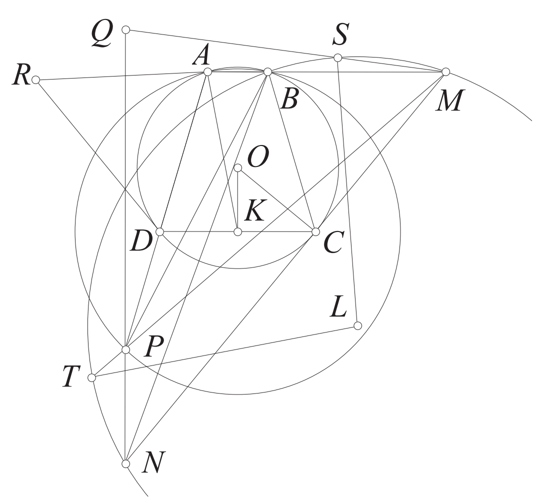
Bài toán cũng có thể được phát biểu dưới dạng khác như sau

Cho tam giác ABC và một đường tròn (K) thay đổi đi qua B, C. d là một đường thẳng cố định đi qua A. Tiếp tuyến tại B, C của (K) cắt d tại P, Q. Vẽ các tiếp tuyến PM, QN tới (K) với M, N khác B, C. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác AMN luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi (K) thay đổi.

Các bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải khác qua email từ bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 11 toán THPT chuyên KHTN.

Bài toán đề nghị

Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). K là trung điểm CD. AD cắt đường tròn (K) đi qua A, B tại P khác A. Q là trực tâm tam giác PAB. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt AB, PQ lần lượt tại M, N. MQ, MP lần lượt cắt đường tròn (L) ngoại tiếp tam giác BMN tại S, T khác M. Tiếp tuyến tại S, T của (L) cắt nhau tại R. Chứng minh rằng RD tiếp xúc (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

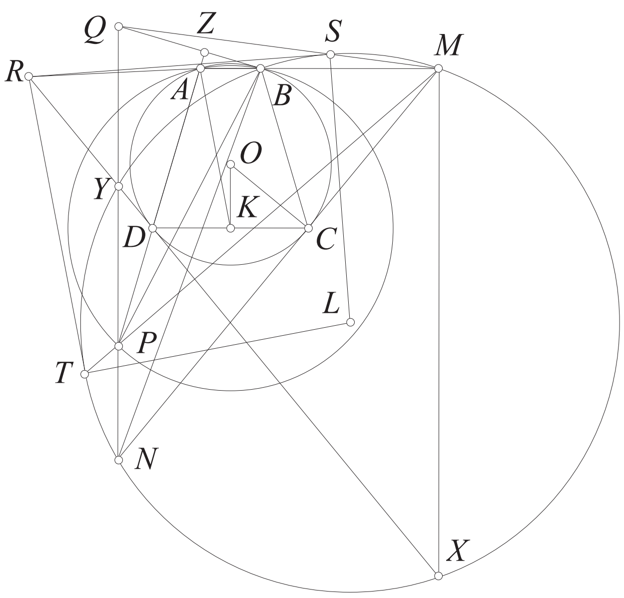
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho hình thang cân $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). K là trung điểm CD. AD cắt đường tròn (K) đi qua A, B tại P khác A. Q là trực tâm tam giác PAB. Tiếp tuyến tại C của (O) cắt AB, PQ lần lượt tại M, N. MQ, MP lần lượt cắt đường tròn (L) ngoại tiếp tam giác BMN tại S, T khác M. Tiếp tuyến tại S, T của (L) cắt nhau tại R. Chứng minh rằng RD tiếp xúc (O).

Lời giải

Lời giải sau là của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đưa ra tại đây.



Gọi Y là trung điểm PQ. Ta có $\angle PQB = 180^\circ - \angle PAB = \angle BCD, \angle QBP = 90^\circ - \angle BPA = 90^\circ - \frac{1}{2}\cdot\angle BKA = \angle BKC$. Do đó $\triangle QPB \sim \triangle CBK$ g.g, suy ra $\frac{KC}{BC} = \frac{QB}{QP}$ hay $\frac{DC}{BC} = \frac{QB}{QY}$. Từ đó $\triangle DBC \sim \triangle BYQ$ c.g.c, suy ra $\angle QYB = \angle DBC = \angle DCN = \angle BMC$. Do đó tứ giác $YBMN$ nội tiếp. Gọi Z là giao điểm của PA với BQ thì $\angle PZB = 90^\circ$. Do $\angle ZYB = \angle YZQ - \angle YBQ = \angle BCD - \angle BDC = \angle BDZ$ nên tứ giác $YZBD$ nội tiếp suy ra $\angle BYD = 90^\circ$. Mặt khác do $\angle YBD = \angle ZBD - \angle ZBY = 90^\circ - \angle BDA - \angle BDC = \angle ODB$ nên $OD \parallel BY$. Do đó YD là tiếp tuyến tại D của (O). Gọi X là giao điểm của YD với đường tròn (BMN). Do tứ giác $YBMX$ nội tiếp nên $\angle BMX = 90^\circ$ suy ra $MX \perp CD$ hay $MX \parallel PQ$. Từ đó suy ra $M(XY, PQ) = -1$ hay tứ giác $SYTX$ điều hòa kéo theo XY đi qua R hay RD là tiếp tuyến với (O).

Nhận xét

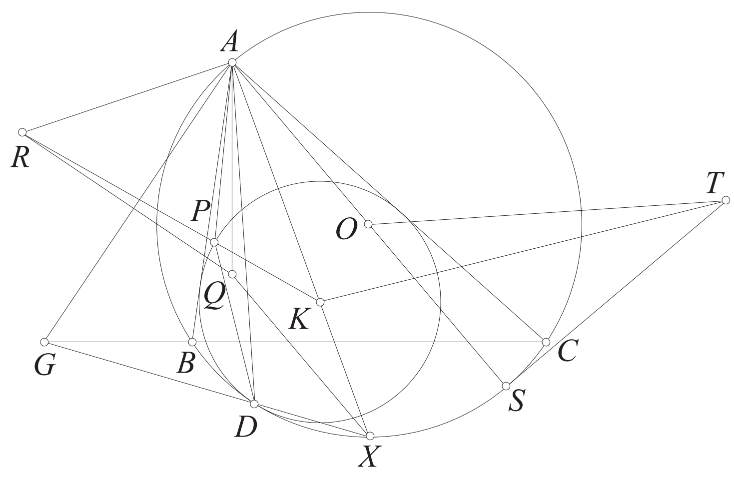
Bài toán là một cách viết khác của đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên KHTN năm 2016 và tác giả cũng nhận được lời giải duy nhất của bạn **Bảo**. Bài toán chọn đội tuyển THPT chuyên KHTN có nhiều biến thể và áp dụng khác. Sau đây là hai bài toán liên quan.

Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O. Đường thẳng qua O song song BC cắt CA, AB tại E, F. Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp các tam giác EBC, FBC cắt nhau tại K. Chứng minh rằng $AK \perp BC$.

Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O và trực tâm H. Đường thẳng qua O song song BC cắt CA, AB tại E, F. AH cắt (O) tại D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DCF, DBE lần lượt cắt CA, AB tại M, N khác E, F. Chứng minh rằng MN chia đôi AH.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AS. Đường tròn (K) tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc trong (O) tại D. Trung trực AD cắt tiếp tuyến tại qua S của (O) tại T. P đối xứng với D qua TK. Trung trực AP cắt PK tại R. AK cắt (O) tại X khác A. DX cắt BC tại G. Lấy Q trên trung trực AX sao cho $AQ \perp BC$. Chứng minh rằng $QR \perp AG$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O và tâm đường tròn Euler là N. D,E,F là hình chiếu của N lên BC,CA,AB. M là trung điểm ON. MD,ME,MF cắt EF,FD,DE lần lượt tại X,Y,Z. Gọi P,Q,R là trung điểm BC,CA,AB. U,V,W là trung điểm AP,BQ,CR. Chứng minh rằng XU,YV,ZW đồng quy.

Lời giải

Dựa theo ý tưởng của các bạn **Nguyễn Đình Hoàng** và **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An.

Gọi G là trọng tâm tam giác. Sử dụng định lý Boutte, phép vị tự tâm G tỷ số 4 biến tam giác pedal của tâm Euler thành tam giác đối xứng. Ta thu được bài toán sau

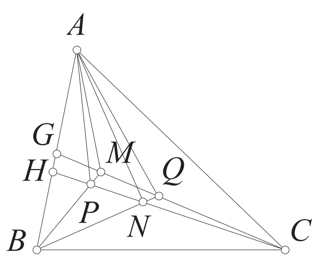
Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O. X,Y,Z lần lượt đối xứng A,B,C qua BC,CA,AB. OX,OY,OZ lần lượt cắt YZ,ZX,XY tại U,V,W. Chứng minh rằng AU,BV,CW đồng quy.

Bài toán được tác giả tổng quát hơn như sau

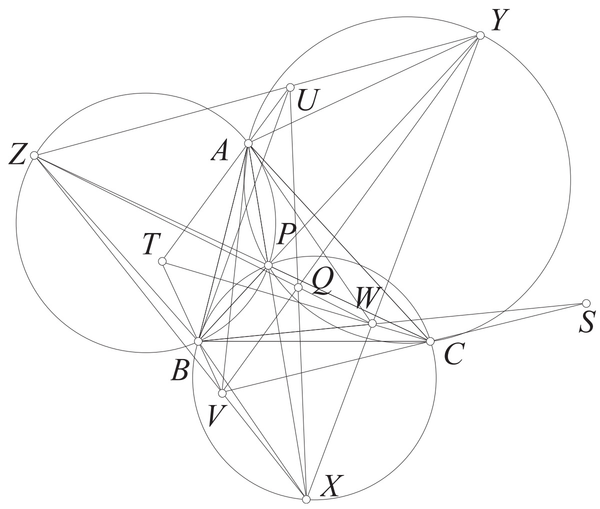
Bài toán tổng quát. Cho tam giác ABC có P,Q là hai điểm đẳng giác. PA,PB,PC cắt các đường tròn $(PBC),(PCA),(PAB)$ tại X,Y,Z khác P. XQ,YQ,ZQ cắt YZ,ZX,XY tại U,V,W. Chứng minh rằng AU,BV,CW đồng quy tại T.

Để giải bài toán này trước hết ta cần bổ đề sau

Bổ đề. Cho tam giác ABC với P,Q nằm trong tam giác sao cho $\angle PAB=\angle QAC$. Gọi PB,QB theo thứ tự cắt QC,QB tại M,N. Chứng minh rằng $\angle MAB=\angle NAC$.



Chứng minh. Gọi CQ,CP cắt AB tại G,H thì $A(CM,QG)=(CM,QG)=B(CM,QG)=(CP,NH)=A(CP,NH)=A(HN,PC)$ dễ thấy AC,AQ,AG theo thứ tự là đối xứng của AH,AP,AC qua phân giác $\angle BAC$ nên khi hai chùm bằng nhau thì AM và AN phải đối xứng qua phân giác $\angle BAC$.



Giải bài toán. Ta có $\angle BAZ=\angle BPZ=\angle CPY=\angle CAY$ nên AB,AC là hai tia đẳng giác trong $\angle YAZ$ nên AX và AQ cũng đẳng giác trong $\angle YAZ$. Áp dụng bổ đề vào tam giác YAZ thì ZQ cắt YX tại W và YQ cắt ZX tại V thì AV,AW đẳng giác trong $\angle YAZ$ hay cũng đẳng giác trong $\angle BAC$. Tương tự BW,BU đẳng giác trong $\angle CBA$ và CU,CV đẳng giác trong $\angle ACB$. Từ đó gọi BW cắt CV tại S thì S,U là hai điểm đẳng giác trong tam giác ABC. Mặc khác cũng theo bổ đề nếu BV cắt CW tại T thì $\angle BAS=\angle CAT$. Từ đó A,U,T thẳng hàng.

Nhật xét

Kết quả nghịch đảo của bài toán đã được phát hiện trước đó trong bài viết của bạn **Ngô Quang Dương** lớp 12 Toán, trường THPT chuyên KHTN. Bài báo của **Dương** và các phát triển của bài toán này có thể tìm thấy ở đây. Tác giả cũng nhận được lời giải đúng qua email từ bạn **Lê Phước Tùng** lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC và tam giác DEF cố định có cạnh tương ứng song song. Giả sử có hai điểm P,Q thay đổi sao cho $PA=QD,PB=QE,PC=QF$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P,Q thay đổi.
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

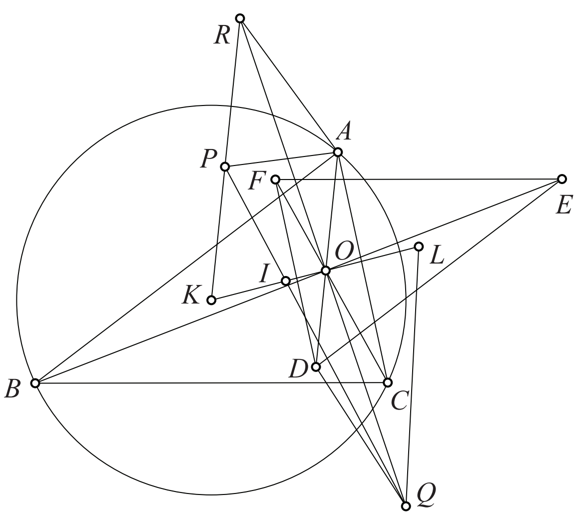
Cho tam giác ABC và tam giác DEF cố định có cạnh tương ứng song song. Giả sử có hai điểm P, Q thay đổi sao cho $PA = QD, PB = QE, PC = QF$. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P, Q thay đổi.

Bài toán tổng quát hơn được đề xuất bởi bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 11 Toán, THPT chuyên ĐHSP

Cho hai tam giác ABC, DEF không bằng nhau có các cạnh tương ứng song song. Các điểm P, Q thay đổi sao cho $\frac{PA}{QD} = \frac{PB}{QE} = \frac{PC}{QF} = \ell$ không đổi. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải

Nội dung của lời giải này đầu tiên có ở đây bởi bạn **Phạm Ngọc Khánh**, sau đó tác giả nhận được lời giải gọn hơn từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương. Tôi xin giới thiệu lời giải của bạn **Dũng**



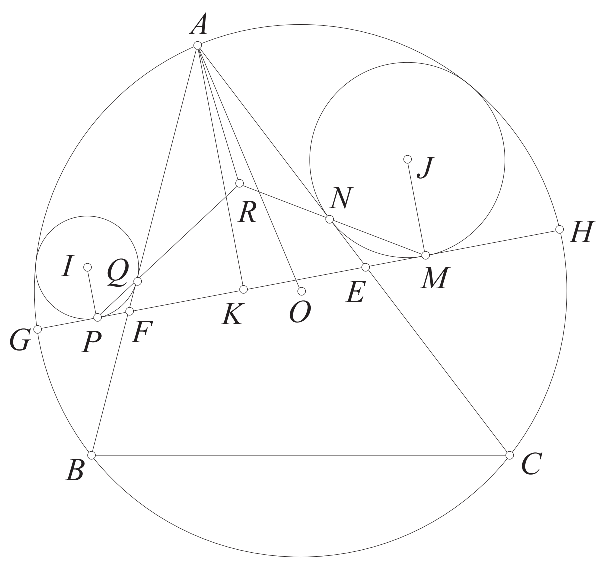
Vì hai tam giác ABC, DEF không bằng nhau có các cạnh tương ứng song song nên tồn tại phép vị tự tâm O tỷ số k biến tam giác ABC thành tam giác DEF. Gọi K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác ABC, DEF và R là ảnh vị tự tỷ tâm O số $1/k$ của Q. Ta có $\frac{AP}{AR} = \frac{AP}{DQ} \cdot \frac{DQ}{AR} = k\ell$. Tương tự $\frac{AP}{AR} = \frac{BP}{BR} = \frac{CP}{CR} = k\ell$ nên A, B, C thuộc đường tròn Apollonius dựng trên đoạn PR ứng với tỷ số $k\ell$. Từ đó KA là tiếp tuyến của đường tròn (APR). Gọi PQ cắt KL tại I. Ta có $\frac{IK}{IL} = \frac{KP}{LQ} = \frac{KP}{KR} \cdot \frac{KR}{LQ} = \left(\frac{AP}{AR}\right)^2 \cdot \frac{OK}{OL} = \frac{(k\ell)^2}{k} = k\ell^2$ không đổi nên I cố định. Vậy PQ luôn đi qua I cố định.

Nhật xét

Bài toán gốc được tác giả tổng quát từ đề thi chọn đội tuyển Iran năm 2011. Cùng với các lời giải của bạn **Khánh** và **Dũng** thì các đoạn thẳng bằng nhau được tổng quát thành các đoạn thẳng tỷ lệ. Bạn **Nguyễn Anh Quân**, lớp 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm Quảng Nam, đã đưa ra lời giải bằng phương pháp vector và tích vô hướng ở đây. Cũng ở đó, tác giả đưa ra lời khác bằng vector và tích vô hướng. Ngoài ra bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 10 Toán THPT chuyên KHTN cũng gửi tới tác giả lời giải qua email.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F là các điểm bất kỳ lần lượt nằm trên các đoạn thẳng CA, AB. Các tia EF, FE lần lượt cắt (O) tại các điểm G, H. Đường tròn (I) tiếp xúc với các đoạn thẳng FG, FA tại P, Q và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (J) tiếp xúc với các đoạn thẳng EH, EA tại M, N và tiếp xúc trong (O). MN cắt PQ tại R. AK là đường cao của tam giác AEF. Chứng minh rằng AR là phân giác góc $\angle OAK$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

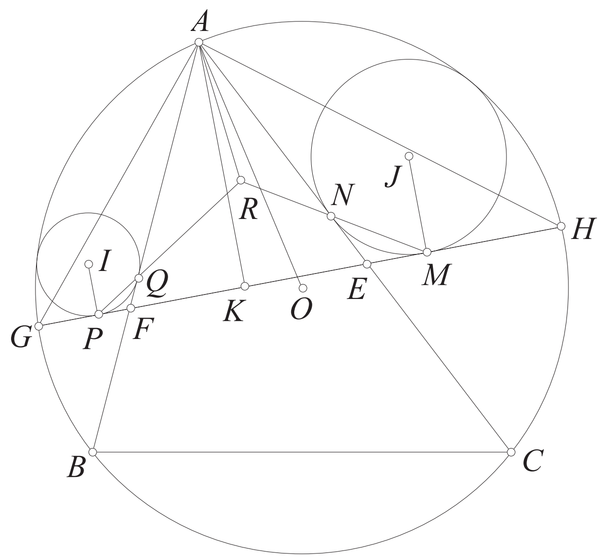
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F là các điểm bất kỳ lần lượt nằm trên các đoạn thẳng CA, AB. Các tia EF, FE lần lượt cắt (O) tại các điểm G, H. Đường tròn (I) tiếp xúc với các đoạn thẳng FG, FA tại P, Q và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (J) tiếp xúc với các đoạn thẳng EH, EA tại M, N và tiếp xúc trong (O). MN cắt PQ tại R. AK là đường cao của tam giác AEF. Chứng minh rằng AR là phân giác góc $\angle OAK$.

Lời giải

Nội dung của lời giải này đã có ở đây bởi bạn **Huỳnh Bách Khoa**, trường THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận



Theo định lý định lý Sawayama và Thébault thì MN, PQ cùng đi qua tâm nội tiếp của tam giác AGH nên R là tâm nội tiếp của tam giác AGH. Từ đó AR là phân giác $\angle GAH$ hay cũng là phân giác $\angle OAK$ do AO, AK đẳng giác trong $\angle GAH$.

Nhật xét

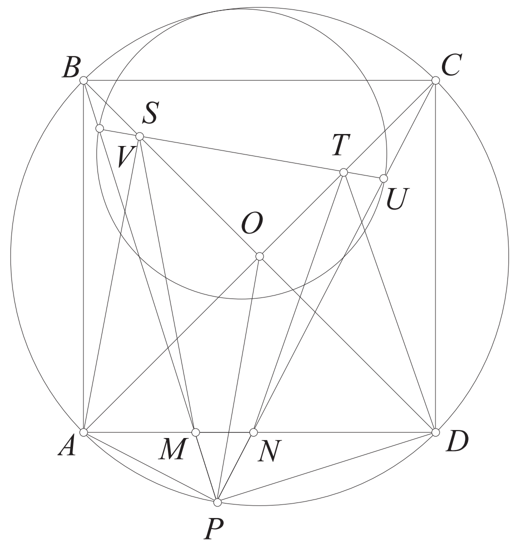
Tác giả cũng nhận được lời giải qua email bởi bạn **Lê Phước Tùng**, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước. Bài toán được tác giả mở rộng một bài toán thi vô địch Nga, trong trường hợp $EF \parallel BC$ thì MN, PQ và phân giác $\angle BAC$ đồng quy. Mặc dù định lý Sawayama và Thébault là một định lý lớn, tuy nhiên khi áp dụng vào bài toán này thì bài toán trở nên rất đơn giản. Do đó bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học Ngoại thương đã đề xuất một cách phát biểu khác đồng thời ứng dụng thú vị của bài toán này như sau, các mở rộng cũng được giải bởi bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An tại đây.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) tiếp xúc với cung nhỏ AB và tiếp xúc với đoạn AB tại Q. Đường tròn (J) tiếp xúc với cung nhỏ AC và tiếp xúc với đoạn AC tại N. Tiếp tuyến chung ngoài không cắt đoạn AQ, AN của (I) và (J) tiếp xúc $(I), (J)$ lần lượt tại M, P. Chứng minh rằng MN, PQ cắt nhau trên phân giác $\angle BAC$ khi và chỉ khi $MP \parallel BC$.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) tiếp xúc với cung nhỏ AB và tiếp xúc với đoạn AB tại Q. Đường tròn (J) tiếp xúc với cung nhỏ AC và tiếp xúc với đoạn AC tại N. Tiếp tuyến chung ngoài không cắt đoạn AQ, AN của (I) và (J) tiếp xúc $(I), (J)$ lần lượt tại M, P. SM cắt AC tại U. TP cắt AB tại V. Chứng minh rằng MP, NQ, UV đồng quy.

Bài toán đề nghị

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm thuộc cung nhỏ AD của (O). PB, PC lần lượt cắt đoạn AD tại M, N. Trung trực của AM, DN lần lượt cắt BD, AC tại S, T. ST cắt PC, PB lần lượt tại U, V. Chứng minh rằng đường tròn đường kính UV tiếp xúc (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

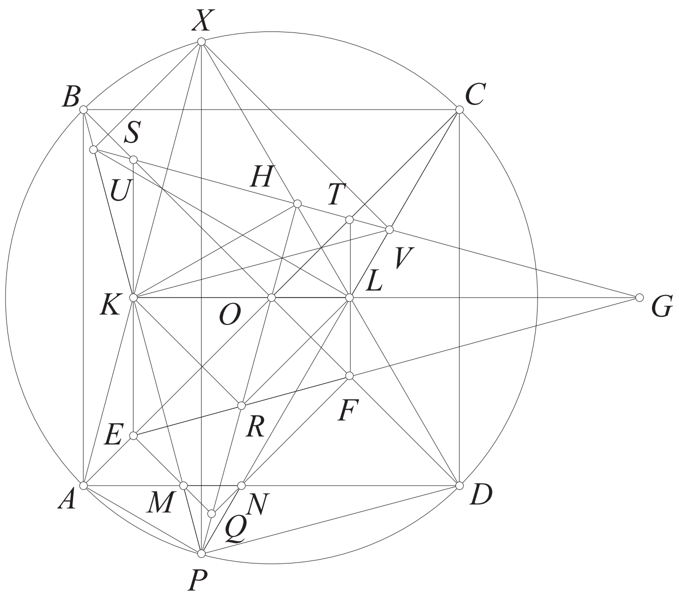
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm thuộc cung nhỏ AD của (O). PB, PC lần lượt cắt đoạn AD tại M, N. Trung trực của AM, DN lần lượt cắt BD, AC tại S, T. ST cắt PC, PB lần lượt tại U, V. Chứng minh rằng đường tròn đường kính UV tiếp xúc (O).

Lời giải



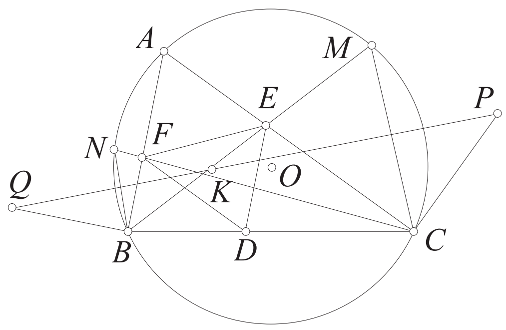
Gọi trung trực AM cắt PB, AC tại K, E. Trung trực DN cắt PC, BD tại L, F. Do tam giác NCD vuông nên L là trung điểm CN, ta suy ra $LO \parallel AD$. Tương tự $KO \parallel AD$ nên K, O, L thẳng hàng. Dễ thấy tam giác AEM vuông cân nên $EM \perp AC$ nên $EM \parallel DB$. Tương tự $FN \parallel AC$. Chú ý $MN \parallel BC$ nên $\frac{PM}{PB} = \frac{PN}{PC}$. Vậy ta lấy điểm Q thuộc PO sao cho $\frac{PQ}{PO} = \frac{PM}{PB} = \frac{PN}{PC}$. Từ đó ta thấy $QM \parallel BD \parallel EM$ nên E, M, Q thẳng hàng. Chứng minh tương tự F, N, Q thẳng hàng. Từ đó dễ thấy $OEQF$ là hình chữ nhật nên PO đi qua trung điểm R của EF. Dễ thấy S, E đối xứng nhau qua K. T, F đối xứng nhau qua L. Vậy ST, KL, EF đồng quy tại G. Ta thấy R cũng là trung điểm OQ. Nên trong $BOQM$ có KR là đường trung bình, ta suy ra $KR \parallel QM$. Tương tự $LR \parallel QN$. Ta cũng có $MN \parallel KL$. Mặt khác dễ thấy tam giác QMN vuông cân nên tam giác RKL vuông cân. Từ đó $\angle RLG = 135^\circ$. Mặt khác dễ có $RO = RF$ và $LO = LF$ nên RL là phân giác của $\angle ORF$. Từ đó gọi PO cắt ST tại H thì L là tâm nội tiếp tam giác RHG và $\angle RLG = 135^\circ$. Từ đó $\angle RHG = 2\angle RLG - 180^\circ = 90^\circ$. Nên $PO \perp ST$ tại H suy ra tứ giác $SHOK$ nội tiếp. Từ đó $\angle SHK = \angle SOK = 45^\circ = \angle KPL$ nên tứ giác $KHVP$ nội tiếp, ta suy ra $\angle PKV = \angle PHV = 90^\circ$. Tương tự $\angle PLU = 90^\circ$ nên K, L nằm trên đường tròn đường kính UV. Gọi X đối xứng P qua KL thì X thuộc (O) nên từ đó $\angle KXL = 45^\circ = \angle KSO = \angle KHP = \angle KVP$ nên X nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KLV cũng là đường tròn đường kính UV. Dễ thấy do $KL \parallel AD$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác XKL hay chính là đường tròn đường kính UV tiếp xúc (O).

Nhật xét

Bài toán là kết quả tổng hợp của bài toán thi vòng 2 vào lớp 10 chuyên toán THPT chuyên KHTN 2016. Các bạn **Nguyễn Đình Hoàng, Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và **Nguyễn Tiến Long** lớp 10 toán THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ đã tham gia giải tại đây. Trong topic đó bạn **Nguyễn Đức Bảo, Nguyễn Quang Dương** đã đưa ra nhiều mở rộng hay và bài toán cũng được mở rộng sang hình chữ nhật. Bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 11 toán THPT chuyên SP đã giải bài mở rộng. Tác giả còn nhận được lời giải qua email bởi bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 10 toán THPT chuyên KHTN.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D, E, F lần lượt thuộc đoạn BC, CA, AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Trên trung trực CM, BN lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $CP \perp CA, BQ \perp BA$. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm ngoại tiếp tam giác DEF.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Một số đề hình học thi chuyên toán năm 2016

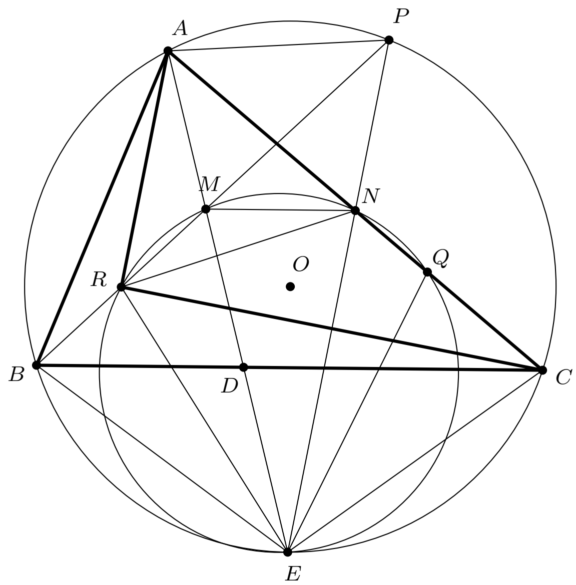
Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Bài toán 1 (THPT chuyên KHTN 2016 vòng 1)**.** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Phân giác của $\angle BAC$ cắt BC tại D và cắt (O) tại E khác A. M là trung điểm của đoạn thẳng AD. Đường thẳng BM cắt (O) tại P khác B . Giả sử các đường thẳng EP và AC cắt nhau tại N.

1) Chứng minh rằng tứ giác $APNM$ nội tiếp và N là trung điểm của AC.

2) Giả sử đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác EMN cắt đường thẳng AC tại Q khác N. Chứng minh rằng B và Q đối xứng qua AE.

3) Giả sử (K) cắt đường thẳng BM tại R khác M. Chứng minh rằng $RA \perp RC$.



Hình 1:

Lời giải của Trịnh Huy Vũ. 1) Do tứ giác $ABEP$ nội tiếp nên $\angle MPN = \angle BPE = \angle BAE$. Mà AE lại là phân giác của $\angle BAC$, do vậy $\angle BAE = \angle EAC = \angle MAN$. Suy ra $\angle MPN = \angle MAN$. Vậy tứ giác $APNM$ nội tiếp.
Do $P \in (O)$ nên $\angle APB = \angle ACB$. Mặt khác, $\angle APM = \angle ANM$ (do tứ giác $APNM$ nội tiếp). Suy ra $\angle ACB = \angle ANM$. Do đó ta được $MN \parallel BC$. Mà M lại là trung điểm của AD nên theo tính chất đường trung bình suy ra N là trung điểm của AC.
2) Do $EMNQ$ và $APNM$ là các tứ giác nội tiếp nên $\angle EQC = \angle EMN = \angle APE = 180° - \angle ABE$. Suy ra $\angle AQE = \angle ABE$, kết hợp với $\angle QAE = \angle BAE$ ta được $\angle AEB = \angle AEQ$. Ta được $\triangle AEB = \triangle AEQ$(g.c.g). Từ đó suy ra B, Q đối xứng qua AE.
3) Do $ERMN$ và $APNM$ là các tứ giác nội tiếp nên $\angle ERB = \angle MNE = \angle EAP = \angle EBR$. Suy ra tam giác EBR cân tại E, kết hợp với $EB = EC$ (do E là trung điểm cung BC không chứa A), ta được $ER = EC$. Mặt khác ta cũng có $\angle REN = \angle PMN = \angle PAC = \angle NEC$. Từ đó suy ra $\triangle REN = \triangle CEN$ (c.g.c), do đó $NR = NC = NA$. Suy ra $\angle ARC = 90°$ hay $RA \perp RC$. □

Nhận xét. Đây là bài toán mới và nằm ở đề chung cho các thí sinh, ý 1) khá nhẹ nhàng ý 2) khó hơn một chút và ý 3) có tính phân loại. Cấu trúc đề bài chặt chẽ với 3 câu, ý 2) dùng ý 1) và ý 3) dùng cả ý 1) và 2). Kết quả này cũng nằm trong một bài toán có ý nghĩa khi thu gọn lại đề bài như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác AD cắt (O) tại E khác A. N là trung điểm AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EMN cắt MB tại R khác M. Chứng minh rằng $RA \perp RC$.

Bài toán có mở rộng như sau [2]

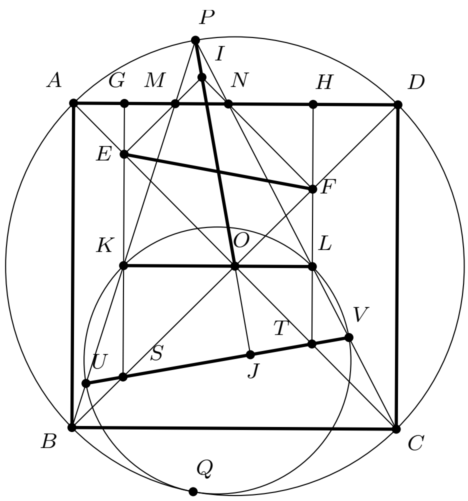
Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F thuộc (O) sao cho $EF \parallel BC$. AE, AF cắt BC tại M, N. P, Q, R là trung điểm của AM, AN, AC. BP, BQ cắt đường tròn $(EPR), (FQR)$ tại S, T khác P, Q. Chứng minh rằng $\angle ASC + \angle ATC = 180°$.

Bài toán 4 (THPT chuyên KHTN 2016 vòng 2)**.** Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm (O). P là điểm thuộc cung nhỏ AD của đường tròn (O) và P khác A, D. Các đường thẳng PB, PC lần lượt cắt AD tại M, N. Đường trung trực của AM cắt đường thẳng AC, PB lần lượt tại E, K. Đường trung trực DN cắt các đường thẳng BD, PC lần lượt tại F, L.

1) Chứng minh rằng ba điểm K, O, L thẳng hàng.

2) Chứng minh rằng đường thẳng PO đi qua trung điểm của đọan thẳng EF.

3) Giả sử đường thẳng EK cắt đường thẳng BD tại S, các đường thẳng FL và AC cắt nhau tại T, đường thẳng ST cắt các đường thẳng PB, PC lần lượt tại U và V. Chứng minh rằng bốn điểm K, L, U, V cùng thuộc một đường tròn.



Hình 2:

Lời giải của Trịnh Huy Vũ. 1) Gọi G, H lần lượt là trung điểm của AM và DN. Ta có $GK \parallel AB(\perp AM)$ và $HL \parallel DC(\perp DN)$. Do vậy theo tính chất đường trung bình suy ra K, L tương ứng là trung điểm của MB và NC. Từ đây ta có OK và OL là đường trung bình của

$\triangle BMD$ và $\triangle CNA$. Suy ra $OK \parallel MD$ và $OL \parallel AN$. Do đó, K, O, L thẳng hàng (tiên đề Euclid).
2) Xét các tam giác AME và DNF lần lượt cân tại E, F, có $\angle EAM = \angle FDN = 45°$ nên $\triangle AME$ và $\triangle DNF$ là các tam giác vuông cân, do đó $ME \perp OA$ và $NF \perp OD$. Đặt ME cắt PO tại I. Áp dụng định lý Thales cho $MN \parallel BC$ và $MI \parallel BD(\perp OA)$, ta được $\dfrac{PI}{PO} = \dfrac{PM}{PB} = \dfrac{PN}{PC}$. Suy ra $IN \parallel OC$ và $IN \perp OD$. Từ đó, I, N, F thẳng hàng. Ta được $OEIF$ là hình chữ nhật. Vì vậy IO đi qua trung điểm EF. Mà $I \in PO$, nên ta được PO đi qua trung điểm EF.
3) Đặt PO cắt ST tại J. Do $IM \parallel OB$ và $IN \parallel OC$ nên $\angle IMP = \angle OBP = \angle OPM$ và $\angle INP = \angle OCP = \angle IPN$, vì vậy $IP = IM = IN$ hay I là tâm ngoại tiếp của $\triangle PMN$. Mặt khác, từ $ME \parallel SB$ và $KM = KB$, áp dụng định lý Thales suy ra $KE = KS$ và $\triangle OES$ vuông cân tại O. Tương tự $FL = LT$ và $\triangle OFT$ vuông cân tại O. Từ đó ta được $\triangle OEF = \triangle OST$. Suy ra $\angle OTS = \angle OFE = \angle POF = 90° - \angle POE = 90° - \angle JOT$, vì vậy $\angle OJT = 90°$ hay $PO \perp ST$. Từ đó suy ra $\angle PVU = 90° - \angle IPV = \dfrac{1}{2}\angle PIN = \angle PMN = \angle PKL$ (do I là tâm ngoại tiếp $\triangle PMN$ và $MN \parallel KL$). Do đó ta được tứ giác $KLVU$ nội tiếp. □

Nhận xét. Đây là bài toán mới và nằm ở đề thi vào các lớp chuyên toán, ý 1) khá nhẹ nhàng, ý 2) khó hơn một chút và ý 3) có tính phân loại. Cả ý 2) và ý 3) đều đòi hỏi phải dựng thêm hình phụ để làm bài, mục đích này làm đề thi trở nên rất khác biệt so với các đề trường khác. Cấu trúc đề bài chặt chẽ với 3 câu, ý 2) dùng ý 1) và ý 3) dùng ý 2). Kết quả này cũng nằm trong một bài toán có ý nghĩa khi thu gọn lại đề bài như sau

Bài toán 5. Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm thuộc cung nhỏ AD của (O). PB, PC lần lượt cắt đoạn AD tại M, N. Trung trực của AM, DN lần lượt cắt BD, AC tại S, T. ST cắt PC, PB lần lượt tại U, V. Chứng minh rằng đường tròn đường kính UV tiếp xúc (O).

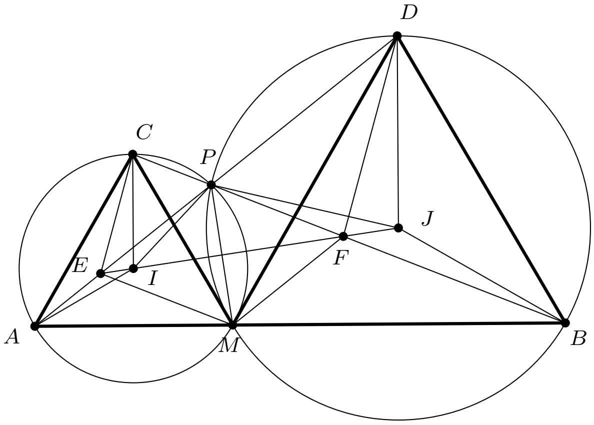
Bài toán 6 (THPT chuyên ĐHSP 2016 vòng 1)**.** Cho ba điểm phân biệt A, M, B thẳng hàng và M nằm giữa A và B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

1) Chứng minh $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.

2) Chứng minh rằng $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = AB$

3) Đường nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp các tứ giác $AMPC$ và $BMPD$ cắt PA và PB tại E và F. Chứng minh $CDFE$ là hình thang.

Lời giải của Trịnh Huy Vũ. 1) Ta có $MC = MA, MB = MD$ và $\angle CMB = \angle AMD = 120°$, do đó $\triangle MCB = \triangle MAD$(c.g.c). Từ đó suy ra $\angle MCP = \angle MAP$ và $\angle MBP = \angle MDP$. Vậy $AMPC$ và $BMPD$ là các tứ giác nội tiếp.
2) Do $\angle CMD = 180° - \angle AMC - \angle BMD = 60° = \angle MBD$ nên CM tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp $\triangle BMD$. Ta được $\angle CMP = \angle MBP$, suy ra $\triangle CPM \sim \triangle CMB$(g.g), suy ra $\dfrac{CP}{CM} = \dfrac{CM}{CB}$ hay $CM^2 = CP \cdot CB$. Chứng minh tương tự ta cũng được $DM^2 = DP \cdot DA$. Vậy $\sqrt{CP \cdot CB} + \sqrt{DP \cdot DA} = CM + DM = AM + BM = AB$.
3) Gọi I, J lần lượt tâm ngoại tiếp của các tứ giác $AMPC$ và $BMPD$. Ta có $\angle EPM = \angle FPM = 60°$ nên E, F đối xứng qua PM và $PEMF$ là hình thoi. Do đó theo định lý Thales



Hình 3:

ta được $\dfrac{AE}{AP} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{PF}{PB}$ hay $\dfrac{AE}{PF} = \dfrac{AP}{PB}$. Mặt khác ta có $\angle PIA = 2\angle PMA = 2\angle PDB = \angle PJB$ hay $\triangle PIA \sim \triangle BJP$, suy ra $\dfrac{IA}{JP} = \dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AE}{PF}$, suy ra $\triangle IAE \sim \triangle JPF$(c.g.c). Từ đó ta được $\dfrac{IE}{JF} = \dfrac{IA}{JP} = \dfrac{IC}{JD}$, kết hợp $\angle CIE = \angle DJF$ (do $IC \parallel JD(\perp AB)$), ta được $\triangle CIE \sim \triangle DJF$(c.g.c), suy ra $\angle CEI = \angle DFJ$. Do vậy, $CE \parallel DF$ hay $CDFE$ là hình thang. $\square$

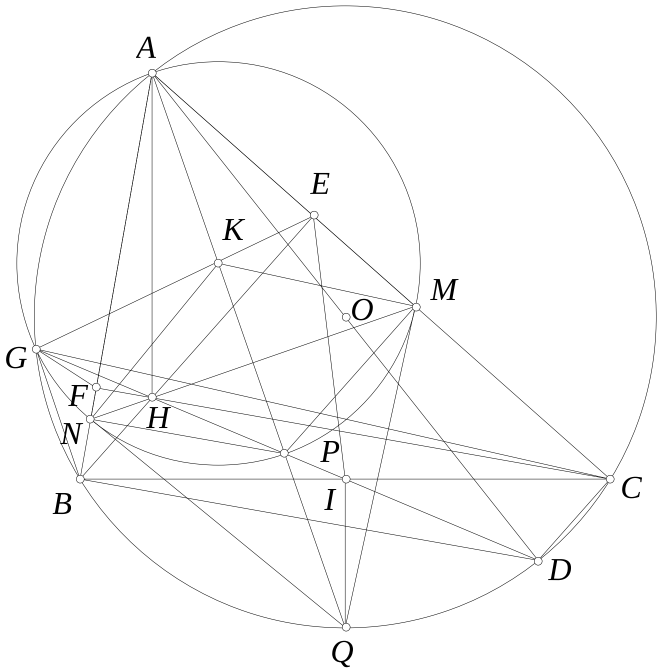
Nhận xét. Cấu hình của đề ra không mới nhưng ý 3) mới và phù hợp với phân loại. Bài toán có ba ý đúng theo cấu trúc một bài toán thi hình học rõ ràng kết hợp với hau ý đầu dễ và ý 3) phân loại phù hợp cho một đề thi chung. Kết quả này cũng nằm trong một bài toán có ý nghĩa khi tổng quát như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC với D thuộc đoạn BC. E, F thuộc đoạn CA, AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. Đường tròn $(K), (L)$ ngoại tiếp tam giác DCF và DBE cắt nhau tại G khác D. KL cắt GB, GC tại M, N. Chứng minh rằng $FM \parallel EN$.

Bài toán 8 (Chuyên Hà Nội vòng 2 năm 2016)**.** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại G khác A. Phân giác góc $\angle CGE, \angle BGF$ cắt CA, AB tại M, N. (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

1) Gọi AK cắt GH tại P. Chứng minh rằng G và P đều nằm trên (K).

2) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại M, N của (K) cắt nhau trên (O).



Lời giải của Trần Quang Hùng. 1) Gọi AD là đường kính của (O), I là trung điểm BC. Dễ thấy G, H, I, D thẳng hàng và G, E, F đều nằm trên đường tròn đường kính AH. Từ đó hai tam giác GFB và GEC đồng dạng g.g nên theo tính chất phân giác $\frac{NB}{NF} = \frac{GB}{GF} = \frac{GC}{GE} = \frac{MC}{ME}$. Từ đó hai tam giác GFN và GEM đồng dang, suy ra $\angle GNF = \angle GME$ nên G nằm trên (K) ngoại tiếp AMN. Ta dễ thấy hai tam giác GEF và GBC đồng dạng nên $\frac{NB}{NF} = \frac{GB}{GF} = \frac{EF}{BC} = \frac{HF}{HB}$. Từ đó HN là phân giác $\angle FHB$. Tương tự HM là phân giác $\angle FHC$ nên M, H, N thẳng hàng. Vậy $\angle AMH = 90° - \angle MHE = 90° - \angle NHF = \angle ANH$. Từ đó tam giác AMN cân tại A. Vậy AK là phân giác $\angle MAN$ cũng là phân giác $\angle HAD$. Từ đó chú ý tam giác AHF và ADC đồng dạng nên $\frac{PH}{PD} = \frac{HF}{CD} = \frac{HF}{HB} = \frac{NF}{NB}$. Từ đó chú ý $HFBD$ là hình thang nên $PN \parallel HF \parallel BD$ hay $PN \perp AB$. Tương tự $PM \perp AC$. Vậy AP là đường kính của đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AMN nên P thuộc (K).
2) Ta dễ chứng minh được IE, IF đều tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF hay nói cách khác tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác GEF cắt nhau tại I. Lại có tiếp tuyến tại M, N của (K) ngoại tiếp tam giác GMN cắt nhau tại Q. Chú ý hai tam giác GEF và GMN đồng dạng. Từ đây ta dễ suy ra hai tam giác GEI và GMQ đồng dạng hay GIQ đồng dạng GEM. Từ đó $\angle GIQ = \angle GEM = 180° - \angle GEA = 180° - \angle GHA = \angle AHI$. Từ đây $IQ \parallel AH$ nên Q thuộc trung trực BC. Dễ thấy Q nằm trên AK do tam giác AMN cân nên Q nằm trên phân giác $\angle BAC$. Vậy Q là giao điểm của trung trực BC và phân giác $\angle BAC$ thì Q nằm trên (O). □

Nhận xét. Đề ra không mới và thực chất ý 2) dùng các kiến thức của phép đồng dạng nhưng viết một cách khác bằng kiến thức THCS.

Bài toán này có mở rộng thú vị như sau

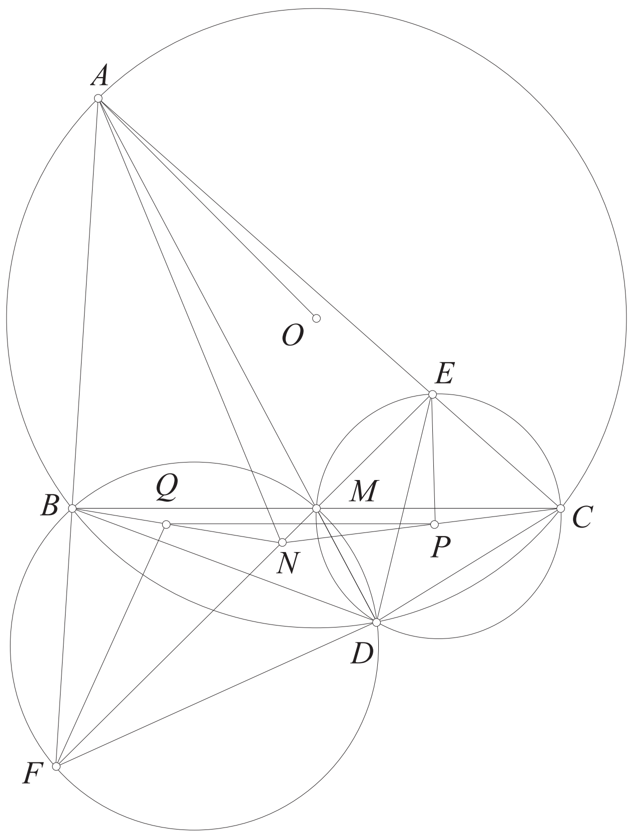
Bài toán 9. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) và M là trung điểm BC. P nằm trong tam giác sao cho $\angle BPC = 180° - \angle A$. Q là một điểm nằm trên PM sao cho nếu lấy E, F thuộc CA, AB để $QE \parallel PB, QF \parallel PC$ thì EF đi qua P. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E, F của đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau trên (O).

Bài toán 10 (Chuyên Vĩnh Phúc 2016 vòng 2)**.** Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Gọi M là trung điểm BC. AM cắt (O) tại điểm D khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDC cắt đường thẳng AC tại E khác C. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDB cắt đường thẳng AB tại F khác B.

1) Chứng minh rằng hai tam giác BDF, CDE đồng dạng và ba điểm E, M, F thẳng hàng.

2) Chứng minh rằng $OA \perp EF$.

3) Phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt EF tại điểm N. Phân giác của các góc $\widehat{CEN}$ và $\widehat{BFN}$ lần lượt cắt CN, BN tại P và Q. Chứng minh rằng PQ song song với BC.



Hình 1.

Lời giải của Trần Quang Hùng. 1) Ta có $\angle DEC = \angle DMC = \angle DFB$ và $\angle ECD = \angle FBD$ nên hai tam giác DBF và DCE đồng dạng g.g. Từ đó $\angle EMC = \angle EDC = \angle FDB = \angle FMB$ nên E, M, F thẳng hàng.
2) Lại có $AE.AC = AM.AD = AB.AF$ nên tứ giác $BECF$ nội tiếp. Từ đó $AO \perp EF$ nên $AO \perp ME$.
3) Chú ý hai tam giác DBF và DCE đồng dạng nên $\frac{S_{DBF}}{S_{DCE}} = \frac{BF^2}{CE^2}$. Từ đó $1 = \frac{MB}{MC} = \frac{S_{DAB}}{S_{DAC}} = \frac{S_{DAB}}{S_{DBF}} \cdot \frac{S_{DBF}}{S_{DEC}} \cdot \frac{S_{DEC}}{S_{DAC}} = \frac{AB}{BF} \cdot \frac{BF^2}{CE^2} \cdot \frac{CE}{AC} = \frac{AB.BF}{AC.CE}$. Từ đó $\frac{BF}{CE} = \frac{AC}{AB} = \frac{AF}{AE} = \frac{NF}{NE}$. Từ đó vẫn theo tính chất phân giác thì $\frac{PN}{PC} = \frac{EN}{EC} = \frac{FN}{FB} = \frac{QN}{QB}$ nên $PQ \parallel BC$. □

Nhận xét. Đây là đề thi mới và câu 3) có tính phân loại cao.

Nhận xét. Các năm gần đây, phần hình học trong một số đề thi vào các lớp chuyên toán ở các trường chuyên có truyền thống có nhiều bài toán hình học mới có nội dung khác các đề thi vào lớp 10 thông thường. Là một giáo viên theo sát đội tuyển và có tham gia vào công việc bồi dưỡng học sinh giỏi thì tôi cũng có một đôi lời bàn. Việc các trường đổi mới đề thi theo phong cách sát hơn cho các đối tượng học sinh giỏi không làm mất đi tính truyền thống của đề thi cấp 2 vào cấp 3, vì mục đích chính của thi vào trường chuyên là để chọn lọc ra các học sinh giỏi toán. Như khảo sát qua điểm số một số trường thì vẫn có luôn điểm 10 toán chuyên và phổ điểm 8,9 khá cao, điều đó cho thấy rằng đề thi vẫn phù hợp. Mặt khác như đáp án đã công bố thì rõ ràng các bài toán đó nằm hoàn toàn trong chương trình cấp 2. Một số ý kiến cho rằng các bài toán đó phù hợp hơn khi giải trên máy tính với các công cụ hình học mạnh có trên mạng, liệu rằng có mất tính khách quan khi bắt học sinh phải tự vẽ hình và giải. Trả lời cho ý kiến này khá đơn giản, bản thân tôi là một người hay ra đề hình thì đối với tôi máy tính hoàn toàn chỉ là công cụ để giúp đỡ con người chứ chắc chắn không thay con người ra đề. Chẳng hạn khi bạn cộng hoặc nhân hai số lớn để đỡ mất thời gian thì bấm máy tính bỏ túi, đối với các bài toán hình cũng vậy, nếu thiếu thời gian vẽ tay căn chỉnh tay thì dùng máy cho đỡ mất thời gian. Nhưng một đề hình hay là hoàn toàn nằm ở tính chất hình mà người ra đề đạt được và muốn kiểm tra kiến thức đó của học sinh. Sự thực rằng một học sinh có tư duy hình tốt thì cũng không cần vẽ hình bằng thước và compass cũng có thể nghĩ ra lời giải và viết lại. Tất nhiên rằng với các bài toán phức tạp như hiện nay thì sự tưởng tượng là chưa đủ mà phải nhìn hình vẽ, nhưng điều đó không có nghĩa là máy tính đã thay thế con người, nó chỉ đóng vai trò hỗ trợ. Vậy nên việc có máy tính hay không có máy tính khi giải hình cũng không quan trọng bằng người giải có tư duy hình học sắc sảo tới đâu.

Tài liệu

[1] Box đề thi THCS từ
http://diendantoanhoc.net

[2] Right angle
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1256044

[3] Tangent circles in square
http://www.artofproblemsolving.com/community/c6t48f6h1257954

Mỗi tuần một bài toán

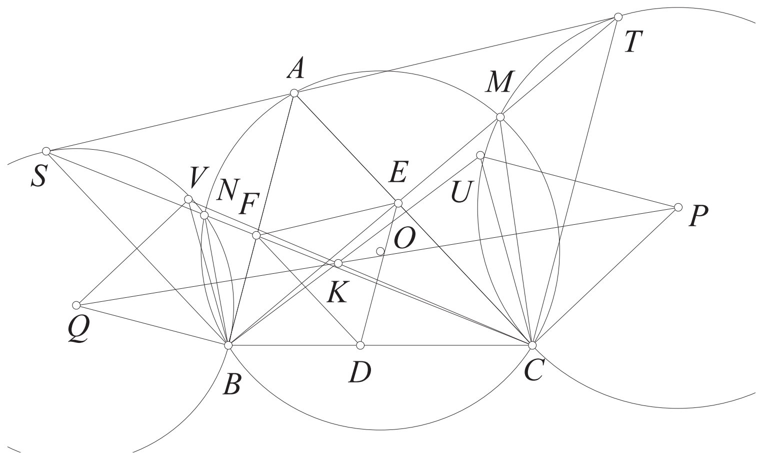
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D,E,F lần lượt thuộc đoạn BC,CA,AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. BE,CF lần lượt cắt (O) tại M,N khác B,C. Trên trung trực CM,BN lần lượt lấy các điểm P,Q sao cho $CP \perp CA, BQ \perp BA$. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm ngoại tiếp tam giác DEF.

Lời giải



Gọi (P) là đường tròn đi qua C tiếp xúc AC. Gọi BM cắt (P) tại T khác M thì $EC^2 = EM.ET$ do đó $\frac{EC}{ET} = \frac{EM}{EC} = \frac{EA}{EB}$ suy ra $CT \parallel AB$. Từ đó $\frac{FB}{FA} = \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{ET}$ nên $AT \parallel EF$. Từ đó hai tam giác DEF và CTA có cạnh tương ứng song song nên nếu U là tâm ngoại tiếp tam giác CTA thì B,K,U thẳng hàng và $CU \parallel DK$. Tương tự gọi CN cắt (Q) tại S khác N và V là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB thì C,K,V thẳng hàng và $BV \parallel DK$. Từ đó $CU \parallel BV$. Mặt khác dễ thấy $PU \perp CT \parallel AC \perp BQ$ nên $PU \parallel QB$. Tương tự $QV \parallel CV$. Vậy hai tam giác CUP và VBQ có cạnh tương ứng song song nên BU, CV, PQ đồng quy tại K.

Nhật xét

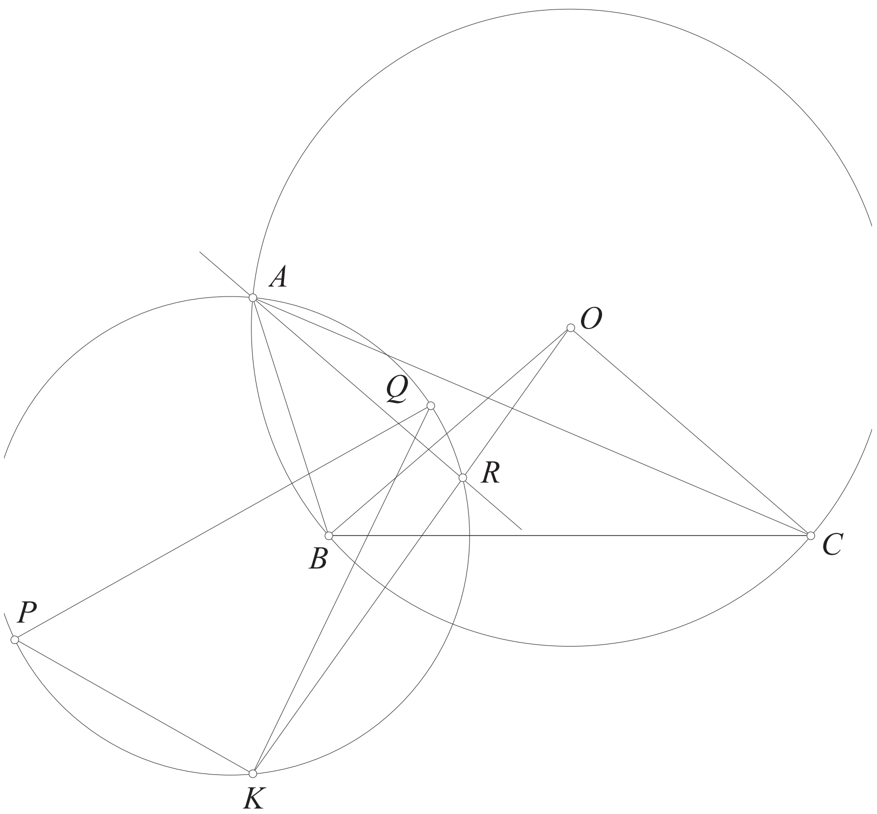
Bài toán là kết quả tổng quát đề thi trong Shortlist của kỳ thi ELMO năm 2013. Các bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 11 Toán THPT chuyên SP và và **Nguyễn Đình Hoàng** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã tham gia giải tại đây. Tác giả còn nhận được lời giải qua email bởi bạn **Đỗ Xuân Long** lớp 10 toán THPT chuyên KHTN và bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương.

Chú ý rằng PC,QB cắt nhau trên (O) là đối xứng của A qua O. Từ đó bài toán có một biến thể khá thú vị như sau khi thay điểm đối tâm A bằng một điểm thuộc (O) nằm trên đường thẳng vuông góc với EF kẻ từ A.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có D,E,F thuộc BC,A,AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. BE,CF cắt (O) tại M,N khác B,C. Đường thẳng qua A vuông góc EF cắt (O) tại P. PC,PB lần lượt cắt trung trực CM,BN tại Q,R. Chứng minh rằng QR đi qua tâm ngoại tiếp tam giác DEF.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B,C cố định và A di chuyển trên (O). Gọi P,Q là hai điểm Isodynamic của tam giác ABC. K đối xứng A qua BC. OK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ tại R khác K. Chứng minh rằng đường thẳng AR luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

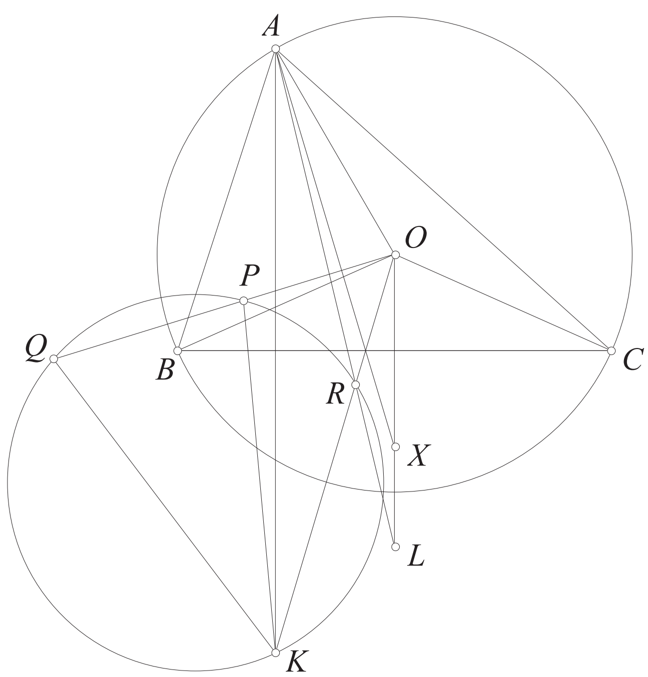
Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên (O). Gọi P, Q là hai điểm Isodynamic của tam giác ABC. K đối xứng A qua BC. OK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ tại R khác K. Chứng minh rằng đường thẳng AR luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.

Vì hai điểm Isodynamic là nghịch đảo của nhau qua đường tròn ngoại tiếp tam giác nên bài toán có mở rộng như sau

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên (O). Gọi P, Q là hai điểm bất kỳ nghịch đảo nhau qua (O). K đối xứng A qua BC. OK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ tại R khác K. Chứng minh rằng đường thẳng AR luôn đi qua điểm cố định khi A, P, Q thay đổi.

Lời giải



Gọi X là đối xứng của O qua BC và AR cắt OX tại L. Ta chú ý rằng $AOXK$ là hình thang cân và do P, Q nghịch đảo qua (O) nên $OR.OK = OP.OQ = OA^2$. Từ đó $\angle OAR = \angle OKA = \angle OXA$. Suy ra $OL.OX = OA^2$ hiển nhiên độ dài OA không đổi và X cố định nên L cố định. Ta thu được điều phải chứng minh.

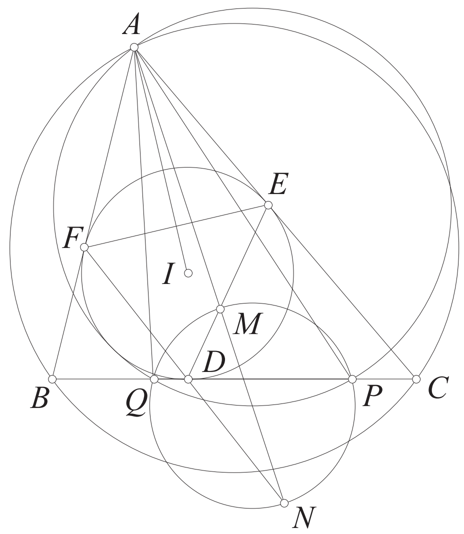
Nhật xét

Bài toán được giải đầu tiên bởi bạn **Ngô Quang Dương** lớp 12 toán, THPT chuyên KHTN, ngoài ra bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và bạn **Phạm Ngọc Khánh** đã lần lượt giải tiếp và giải bài tổng quát hơn tại đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải qua email từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học ngoại thương và các bạn **Trương Mạnh Tuấn, Trần Anh Tài** lớp 10 toán, THPT chuyên KHTN. Cũng trong topic đó tác giả đã đưa ra bài toán mở rộng khác nữa như sau

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác. AQ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác QBC tại R khác Q. Đường tròn (K) qua A, R trực giao với (O). S đối xứng P qua trung trực BC. L là tâm ngoại tiếp tam giác PBC. Chứng minh rằng RS và AL cắt nhau trên (K).

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Một đường thẳng đi qua A cắt DE, DF lần lượt tại M, N sao cho đường tròn đường kính MN cắt đoạn BC tại P, Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ tiếp xúc (I).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

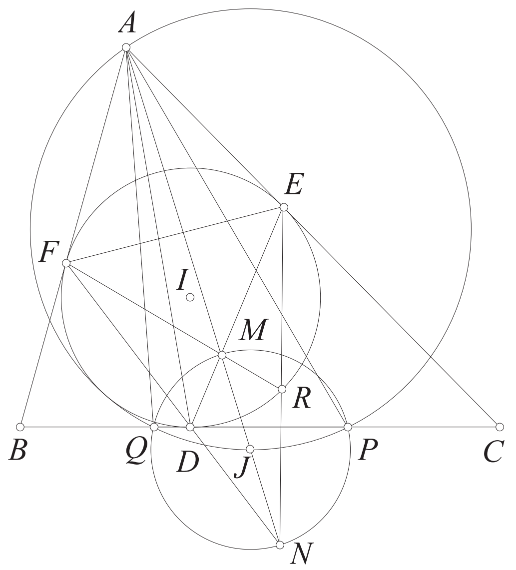
***Trần Quang Hùng,** Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. Một đường thẳng đi qua A cắt DE, DF lần lượt tại M, N sao cho đường tròn đường kính MN cắt đoạn BC tại P, Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ tiếp xúc (I).

Lời giải



Từ hàng điều hòa cơ bản dễ thấy $D(EF, AB)$ điều hòa, chiếu lên đường thẳng MN và chiếu tiếp tâm Q, ta suy ra chùm $Q(MN, AD)$ điều hòa. Lại có $QM \perp QN$ nên QM là phân giác $\angle AQP$. Chứng minh tương tự PM là phân giác $\angle APQ$. Từ đó M là tâm nội tiếp tam giác APQ và N là tâm bàng tiếp tam giác APQ. Do đó trung điểm J của MN nằm trên đường tròn (APQ). Gọi FM cắt EN tại R. Áp dụng định lý Pascal đảo cho $\begin{pmatrix} E & F & D \\ F & E & R \end{pmatrix}$ từ A, M, N thẳng hàng ta suy ra R nằm trên (I). Theo định lý Brokard cho tứ giác $EFDR$ dễ thấy M, N liên hợp với (I) nên đường tròn (J) đường kính MN trực giao với (I). Vậy xét phép nghịch đảo qua đường tròn (J) thì đường tròn (I) bất biến. Đường tròn (APQ) đi qua tâm J biến thành đường thẳng PQ hay cũng chính là BC. Vì BC tiếp xúc (I) nên ảnh nghịch đảo là (APQ) tiếp xúc (I).

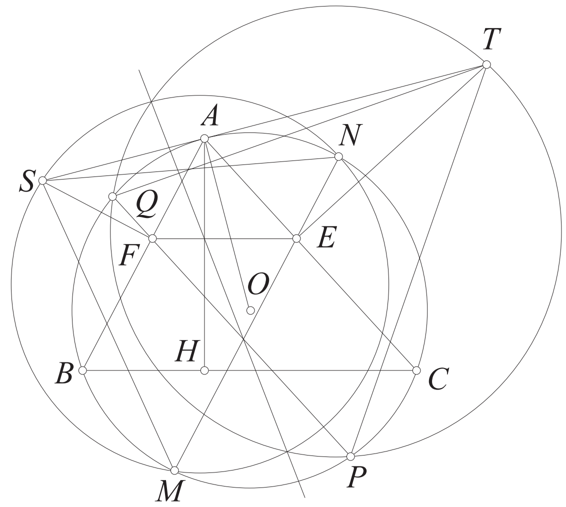
Nhật xét

Bài toán là mở rộng của bài toán 6 trong kỳ thi ELMO 2016. Bài toán được giải đầu tiên theo cách sử dụng bổ đề Sawayamabởi bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An tại đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải qua email từ bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 10 toán, THPT chuyên KHTN. Cũng trong topic đó bạn **Bảo** cũng đưa ra một phát triển thú vị với điểm Feuerbach, tác giả cũng đề cập tới một phát triển khác và phát triển đó đã được giải bởi bạn **Đỗ Xuân Long** lớp 10 toán, THPT chuyên KHTN trên AoPS.

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. P là một điểm sao cho đẳng giác của P nằm trên OI. PA cắt DE, DF tại M_a, N_a sao cho đường tròn đường kính M_aN_a cắt BC tại P_a, Q_a.
a) Chứng minh rằng đường tròn (AP_aQ_a) tiếp xúc (I) tại X.
b) Tương tự có Y, Z. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) với đường cao AH. E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. Trên tiếp tuyến qua A của (O) lấy S, T sao cho $SF \perp AB, TE \perp AC$. Đường thẳng qua E song song AB cắt (O) tại M, N. Đường thẳng qua F song song AC cắt (O) tại P, Q. Chứng minh rằng giao điểm của EF và AH nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (SMN) và (TPQ).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

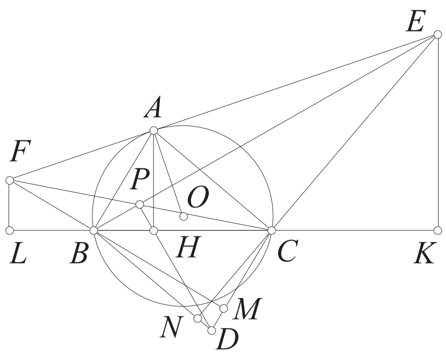
Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) với đường cao AH. E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. Trên tiếp tuyến qua A của (O) lấy S, T sao cho $SF \perp AB, TE \perp AC$. Đường thẳng qua E song song AB cắt (O) tại M, N. Đường thẳng qua F song song AC cắt (O) tại P, Q. Chứng minh rằng giao điểm của EF và AH nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (SMN) và (TPQ).

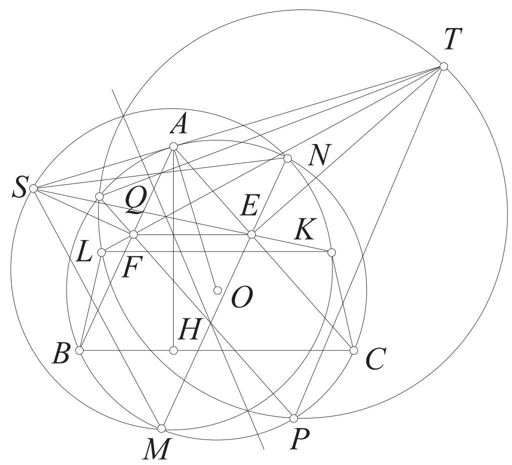
Lời giải

Lời giải sau dựa trên lời giải của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An. Ta đưa ra bổ đề, bổ đề này cũng được đề nghị bởi bạn **Bảo** trên diễn đàn AoPS.

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH. Trên tiếp tuyến qua A của (O) lấy các điểm E, F sao cho $CE \perp CA, BF \perp BA$. Dựng hình bình hành $ABDC$. Thì BE, CF và DH đồng quy.



Chứng minh. Gọi BE cắt CF tại P. Ta có $\angle FBC = 90° + \angle ABC = 90° + \angle EAC = 180° - \angle CEF$, suy ra tứ giác $BCEF$ nội tiếp. Vậy $PB.PE = PC.PF$ nên P nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BE, CF. Ta lại dễ thấy các tam giác vuông đồng dạng $\triangle AHB \sim \triangle ACE$ và $\triangle AHC \sim \triangle ABF$. Từ đó $HB.AE = AB.AC = HC.AF$, vậy nếu gọi K, L là hình chiếu của E, F lên BC thì $\frac{HK}{HL} = \frac{AE}{AF} = \frac{HC}{HB}$ hay $HB.HK = HC.HL$. Từ đó H nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BE, CF. Gọi FB, EC lần lượt cắt DC, DB tại M, N thì dễ thấy M, N nằm trên đường tròn đường kính BC nên $DM.DC = DN.DB$. Vậy D cũng nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BE, CF. Từ đó D, H, P thẳng hàng.



Giải bài toán. Gọi SE, TF lần lượt cắt các đường tròn $(SMN), (TPQ)$ tại K, L khác S, T. Ta có $ES.EK = EM.EN = EA.EC$ nên tứ giác $SAKC$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $TALB$ nội tiếp. Giống như chứng minh bổ đề, dễ thấy tứ giác $EFST$ nội tiếp. Từ đó $\angle KCB = \angle KCA + \angle ACB = \angle ESA + \angle SAB = 90° - \angle FSE$. Tương tự $\angle LBC = 90° - \angle FTE = 90° - \angle FSE = \angle KCB$. Từ đây chú ý rằng $\angle SET = \angle SFT$ nên $\frac{[FST]}{[EST]} = \frac{FS.FT}{ES.ET}$, ta có biến đổi tỷ số $\frac{CK}{BL} = \frac{CK}{EC} \cdot \frac{EC}{FB} \cdot \frac{FB}{BL} = \frac{SA}{SE} \cdot \frac{AE}{AF} \cdot \frac{FT}{TA} = \frac{SA}{SE} \cdot \frac{[EAT]/ET}{[FAS]/SF} \cdot \frac{FT}{TA} = \frac{[EAT]}{[FAS]} \cdot \frac{FS.FT}{ES.ET} \cdot \frac{SA}{TA} = \frac{[EAT]}{[FAS]} \cdot \frac{[FST]}{[EST]} \cdot \frac{SA}{TA} = \frac{AT}{ST} \cdot \frac{ST}{SA} \cdot \frac{SA}{TA} = 1$. Vậy $CK = BL$, kết hợp $\angle LBC = \angle KCB$ ta thu đươc hai tam giác BCK và CBL bằng nhau nên $KL \parallel BC$. Từ đó tứ giác $STKL$ nội tiếp, ta suy ra giao điểm của SK, TL nằm trên Δ là trục đẳng phương của (SMN) và (TPQ). Lại dễ thấy giao điểm của MN, PQ cũng nằm trên Δ. Áp dụng bổ đề vào tam giác AEF thì đường nối hai giao điểm này đi qua hình chiếu của A trên EF. Ta hoàn tất chứng minh.

Nhật xét

Bài toán là mở rộng của bài toán 6 trong kỳ thi chọn đội tuyển Mỹ năm 2016. Duy nhất bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và trung tuyến AM. P nằm trên cung BC không chứa A của (O). E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $PE \parallel AB, PF \parallel AC$. AM cắt (AEF) tại N khác A. Chứng minh rằng $AP^2 = 2AM.AN$.
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng,** Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

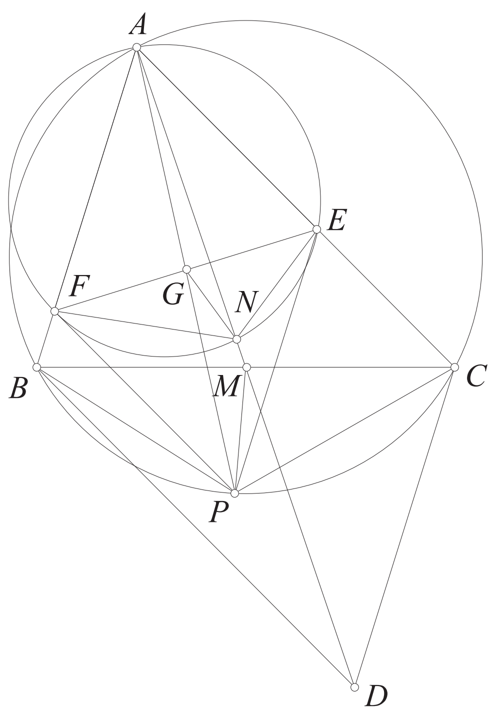
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và trung tuyến AM. P nằm trên cung BC không chứa A của (O). E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $PE \parallel AB, PF \parallel AC$. AM cắt (AEF) tại N khác A. Chứng minh rằng $AP^2 = 2AM.AN$.

Lời giải

Lời giải gốc của tác giả dựa trên phép đồng dạng. Tuy nhiên lời giải sau của bạn **Huỳnh Bách Khoa** lớp 10 Toán, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận, trên diễn đàn toán học sơ cấp hơn, chúng tôi xin giới thiệu lời giải của bạn **Khoa**.



Dễ thấy AP cắt EF tại trung điểm G của mỗi đoạn. Ta có $\angle PBC = \angle PAC =$ và $\angle PCB = \angle PAB = \angle APE$ nên hai tam giác PBC và EAP đồng dạng, lại có trung tuyến tương ứng là PM, EG nên $\angle PMB = \angle EGA$. Gọi D đối xứng A qua M thì $ABDC$ là hình bình hành. Ta có $\angle NFE = \angle NAE$ và $\angle NEF = \angle NAF = \angle NDC$. Từ đó hai tam giác NFE và CAD đồng dạng, lại có trung tuyến tương ứng là NG, CM nên $\angle NGE = \angle CMD = \angle AMB$. Từ đó $\angle AGN = \angle AGE + \angle NGE = \angle PMB + \angle BMA = \angle PMA$. Vậy tứ giác $NGMP$ nội tiếp, ta suy ra $2AN.AM = 2AG.AP = AP^2$.

Nhật xét

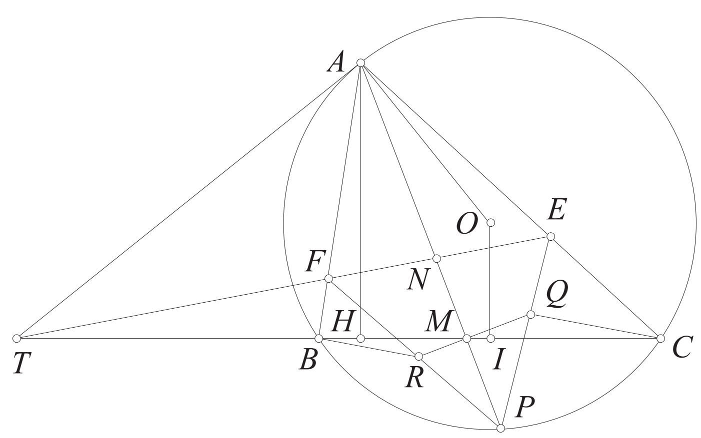
Bài toán là mở rộng của bài toán G4 trong IMO Shortlist 2015. Nếu M trùng N thì (AEF) đi qua trung điểm M của BC khi đó $AP^2 = 2AM^2$ chính là nội dung bài G4.

Ngoài bạn **Khoa** còn có các bạn, **Đỗ Trung Phương** lớp 10 Toán, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, **Nguyễn Tiến Long** lớp 10 toán, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, tham gia giải tại đây. Tác giả còn nhận được lời giải qua email bởi bạn **Nguyễn Hưng Quang Khải** lớp 11 Toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên và bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN, Hà Nội. Bài toán còn được mở rộng hơn như sau

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). E, F, M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng CA, AB, BC, EF sao cho $\frac{MB}{MC} = \frac{NF}{NE}$. AN cắt (O) tại P khác A. (AEF) cắt (O) tại G khác F. GP cắt BC tại S. AS cắt EF tại T. Chứng minh rằng GT và AM cắt nhau trên (AEF).

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có đường cao AH, I là trung điểm của BC. P là điểm thuộc cung BC không chứa A. AP cắt BC tại M. Lấy điểm N nằm trên AM sao cho $2\frac{NM}{NA} = \frac{MH}{IH}$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. TN lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Đường thẳng qua M vuông góc với AP cắt PE, PF lần lượt tại Q, R. Chứng minh rằng $CQ \parallel BR$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

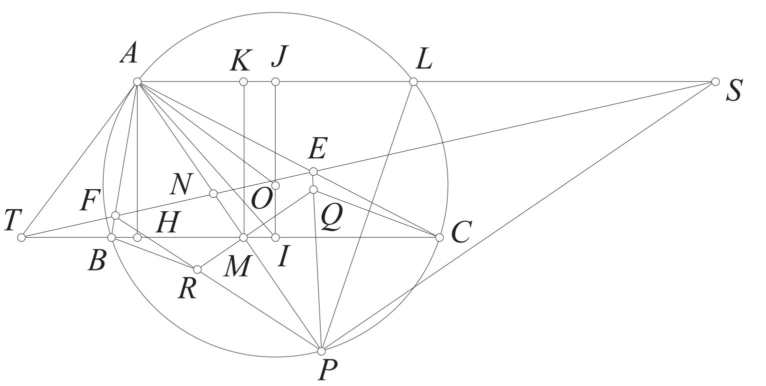
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có đường cao AH, I là trung điểm của BC. P là điểm thuộc cung BC không chứa A. AP cắt BC tại M. Lấy điểm N nằm trên AM sao cho $2\frac{NM}{NA} = \frac{MH}{IH}$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. TN lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Đường thẳng qua M vuông góc với AP cắt PE, PF lần lượt tại Q, R. Chứng minh rằng $CQ \parallel BR$.

Lời giải



Đường thẳng qua P vuông góc AP cắt đường thẳng qua A song song BC tại S. AS cắt (O) tại L khác A. Gọi J là trung điểm AL và K là hình chiếu của M trên AL. Ta dễ thấy $\angle ALP = \angle TAM, \angle LAT = \angle AMT$. Từ đó hai tam giác ALP và MAT đồng dạng và chú ý tứ giác $MKSP$ nội tiếp, ta thu được $TM.AL = AM.AP = AK.AS$. Suy ra $\frac{TM}{AS} = \frac{AK}{AL} = \frac{HM}{2HI} = \frac{NM}{NA}$, vậy theo định lý Thales đảo thì T, N, S thẳng hàng. Từ đó theo liên hệ giữa tỷ số đơn và tỷ số kép ta có $(BC, M) = A(BC, MS) = (FE, NS) = P(FE, NS) = (RQ, M)$. Từ đây dễ suy ra $\frac{MB}{MC} = \frac{MR}{MQ}$ nên $CQ \parallel BR$.

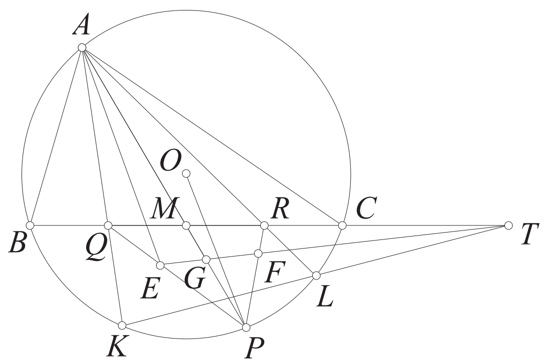
Nhật xét

Bài toán là mở rộng của bài toán hay được tác giả trao đổi với bạn **Nguyễn Lê Phước**. Bài toán được giải duy nhất bởi bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An tại đây. Trong lời giải của bạn **Bảo** có một chi tiết thú vị giúp chúng ta có thể phát biểu lại bài toán đẹp hơn như sau

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có đường cao AH và trọng tâm G. N là một điểm thuộc GH. AN cắt (O) tại P khác A và cắt BC tại M. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. TN lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Đường thẳng qua M vuông góc với AP cắt PE, PF lần lượt tại Q, R. Chứng minh rằng $CQ \parallel BR$.

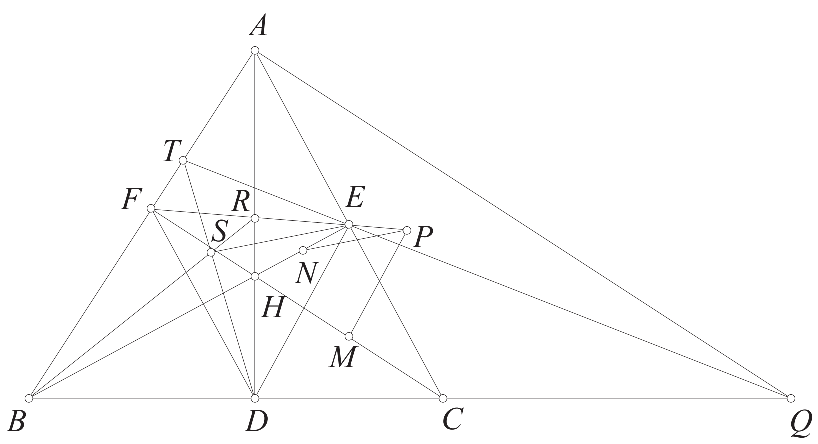
Ngoài ra bài toán khi N trùng với trọng tâm có thể được mở rộng như sau

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) với trung tuyến AM cắt (O) tại P khác A. Các điểm Q, R thuộc BC và đối xứng nhau qua trung điểm BC. AQ, AR cắt (O) tại K, L khác A. KL cắt BC tại T. G là trọng tâm tam giác PQR. TG cắt PQ, PR tại E, F. Chứng minh rằng AM là phân giác $\angle EAF$.



Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD, BE, CF. M, N là trung điểm của HC, HE. Trên EF lấy P sao cho $MP \parallel DE$. Q thuộc BC sao cho $AQ \perp AB$. AD cắt EF tại R. Trên BR lấy S sao cho $ES \parallel NP$. Chứng minh rằng QE, AB, SD đồng quy.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

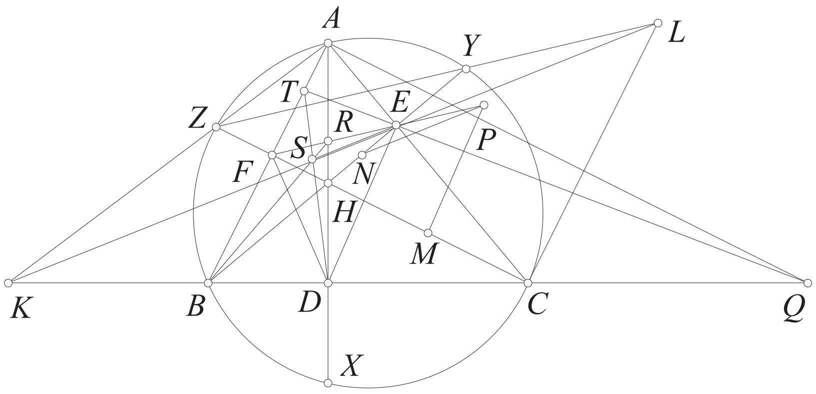
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD, BE, CF. M, N là trung điểm của HC, HE. Trên EF lấy P sao cho $MP \parallel DE$. Q thuộc BC sao cho $AQ \perp AB$. AD cắt EF tại R. Trên BR lấy S sao cho $ES \parallel NP$. Chứng minh rằng QE, AB, SD đồng quy.

Lời giải



Gọi X, Y, Z đối xứng H qua BC, CA, AB dễ thấy X, Y, Z nằm trêm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Phép vị tự tâm H tỷ số 2 biến giao điểm P của đường thẳng EF và đường thẳng qua M song song DE thành giao điểm L của YZ và tiếp tuyến tại C của (ABC). Do $ES \parallel NP \parallel EL$ nên E, S, L thẳng hàng. Gọi AZ cắt BC tại K, áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} Y & C & A \\ C & Z & B \end{pmatrix}$ ta suy ra E, K, L thẳng hàng. Từ đó với chú ý AQ song song với hàng điểm Z, F, H trong đó F là trung điểm ZH nên chùm $A(ZH, FQ) = -1$ chiếu lên đường thẳng BC suy ra hàng $(KD, BQ) = -1$ chiếu xuyên tâm E thì $E(KD, BQ) = -1$. Lại dễ thấy hàng điều hòa cơ bản $B(RD, EA) = -1$. Từ đó $E(KD, BQ) = B(RD, EA)$ nên D, S, T thẳng hàng.

Nhật xét

Bài toán này là bài toán được tác giả tạo ra nhờ định lý Pascal kết hợp dùng hàng điều hòa, chùm điều hòa. Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã nhận xét rằng bài toán đúng với mọi đường AD, BE, CF đồng quy tại một điểm P bất kỳ thay vì H tại đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải duy nhất qua email của bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN. Bài toán có nhiều biến thể và ứng dụng, chẳng hạn như

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD, BE, CF. M, N là trung điểm của HC, HE. Trên EF lấy P sao cho $MP \parallel DE$. Q thuộc BC sao cho $AQ \perp AB$. Lấy G thuộc EF sao cho $EG \parallel NP$. Chứng minh rằng QE, BG, AD đồng quy.

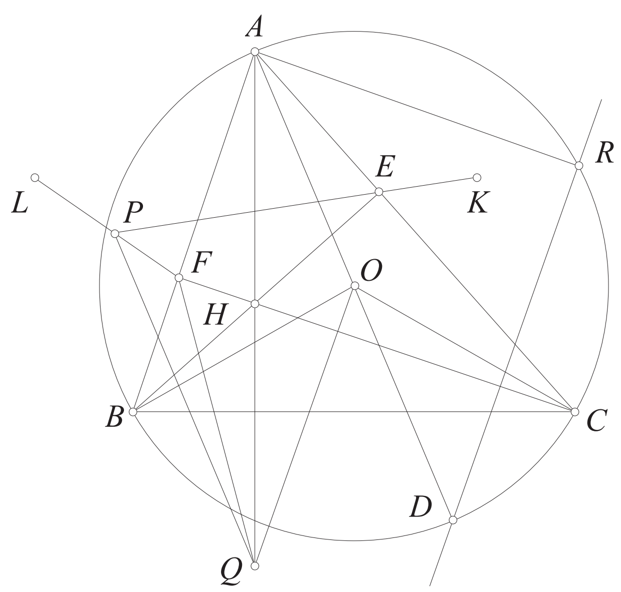
Khi kết hợp cả hai bài này cho ta bài toán sau

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD, BE, CF. M, N là trung điểm của HC, HE. Trên EF lấy P sao cho $MP \parallel DE$. AD cắt EF tại R. Trên BR lấy S sao cho $ES \parallel NP$. ES cắt FD tại G. DS cắt AB tại T. Chứng minh rằng ET, AD, BG đồng quy.

Trên các cấu hình này còn rất nhiều bài toán thú vị khác.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên (O). Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. K, L lần lượt đối xứng với O qua CA, AB. KE cắt LF tại P. Trên AH lấy Q sao cho $PQ \parallel AO$. R đối xứng với A qua OQ. Gọi AD là đường kính của (O). Chứng minh rằng đường thẳng DR luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

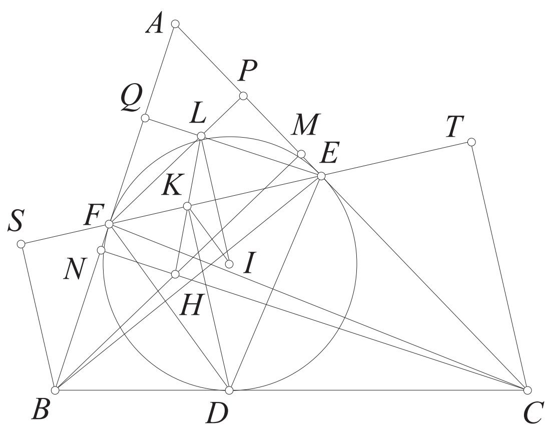
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên (O). Đường cao BE, CF cắt nhau tại H. K, L lần lượt đối xứng với O qua CA, AB. KE cắt LF tại P. Trên AH lấy Q sao cho $PQ \parallel AO$. R đối xứng với A qua OQ. Gọi AD là đường kính của (O). Chứng minh rằng đường thẳng DR luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.

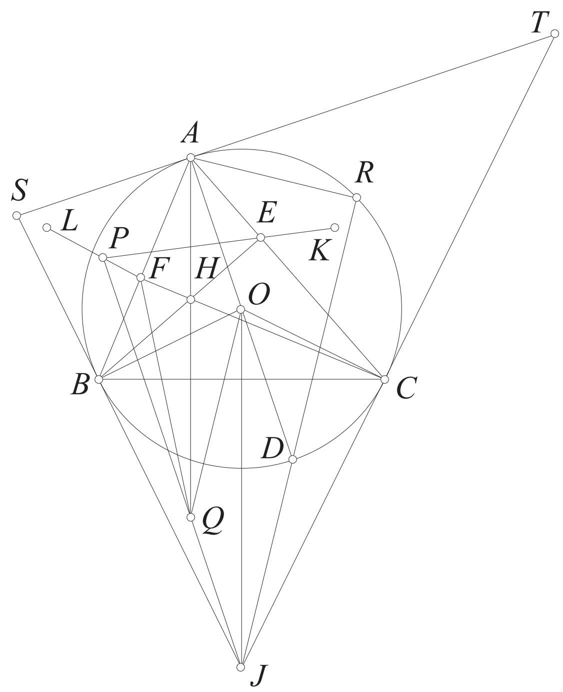
Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC, trực tâm H, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. K là hình chiếu của D lên EF. L là đối xứng của I qua EF. Chứng minh rằng H, K, L thẳng hàng.



Gọi BM, CN là đường cao của tam giác ABC. Dễ thấy L là trực tâm tam giác AEF. Gọi EQ, FP là đường cao của tam giác AEF. Ta dễ thấy $HM.HB = HN.HC$ và $LE.LQ = LF.LP$, từ đó H và L đều nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính BE, CF. Gọi S, T lần lượt là hình chiếu của B, C lên EF. Ta dễ chứng minh $\frac{KS}{KT} = \frac{DB}{DC} = \frac{BF}{CE} = \frac{KF}{KE}$, từ đó suy ra $KF.KT = KE.KS$ vậy K cũng thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính BE, CF. Từ đó L, H, K thẳng hàng.

Giải bài toán. Gọi các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại J. JB, JC lần lượt cắt các tiếp tuyến tại B, C của (O) tại S, T, khi đó (O) là đường tròn nội tiếp tam giác JST. Áp dụng bổ đề ta thấy P là trực tâm tam giác JST nên $JP \perp ST \perp AO$.



Từ đó Q thuộc JP. Vậy tứ giác $AOJQ$ có các cạnh đối song song nên là bình hành do đó QJ song song và bằng AO, O lại là trung điểm AD nên QJ song song và bằng OD. Từ đó tứ giác $ODJQ$ là hình bình hành. Ta suy ra $JD \parallel OQ \perp AR \perp RD$ nên J, D, R thẳng hàng. Ta thu được DR đi qua J cố định.

Nhật xét

Tác giả nhận được lời giải qua email từ các bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và bạn **Lê Ngọc Trường Giang** lớp 11 Toán, chuyên ĐH Vinh. Ngoài ra các bạn **Nguyễn Đức Thịnh**, lớp 11 toán, trường THPT chuyên Nguyễn Thị Minh Khai và bạn **Phạm Công Bách** lớp 10 Toán trường chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng đã cho lời giải tại đây. Ngoài ra bạn **Nguyễn Đình Hoàng** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cũng đưa ra mở rộng cho bài toán.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). AD là đường kính của (O). E, F là hình chiếu của điểm P bất kỳ trong tam giác lên cạnh CA, AB. PD cắt trung trực EF tại K. Đường tròn (K) đi qua E, F cắt CA, AB lần lượt tại M, N khác E, F. Chứng minh rằng các đường thẳng EF, MN, BC cắt nhau tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp tiếp xúc (O).
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

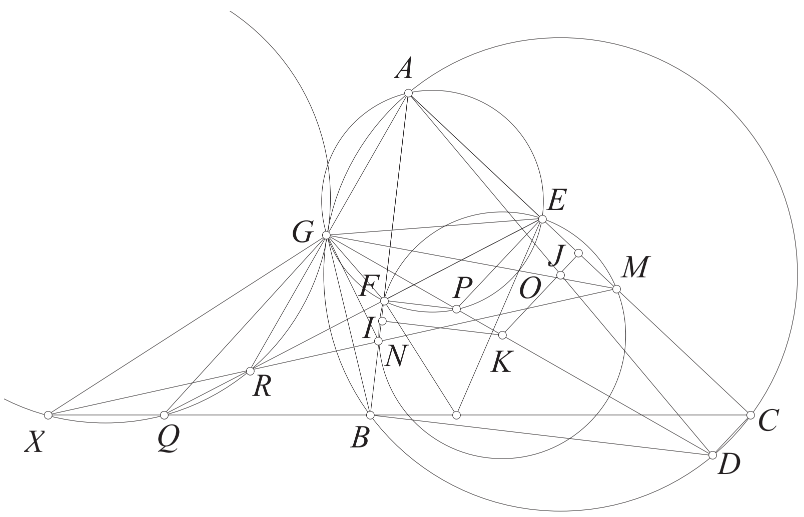
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). AD là đường kính của (O). E, F là hình chiếu của điểm P bất kỳ trong tam giác lên cạnh CA, AB. PD cắt trung trực EF tại K. Đường tròn (K) đi qua E, F cắt CA, AB lần lượt tại M, N khác E, F. Chứng minh rằng các đường thẳng EF, MN, BC cắt nhau tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp tiếp xúc (O).

Lời giải



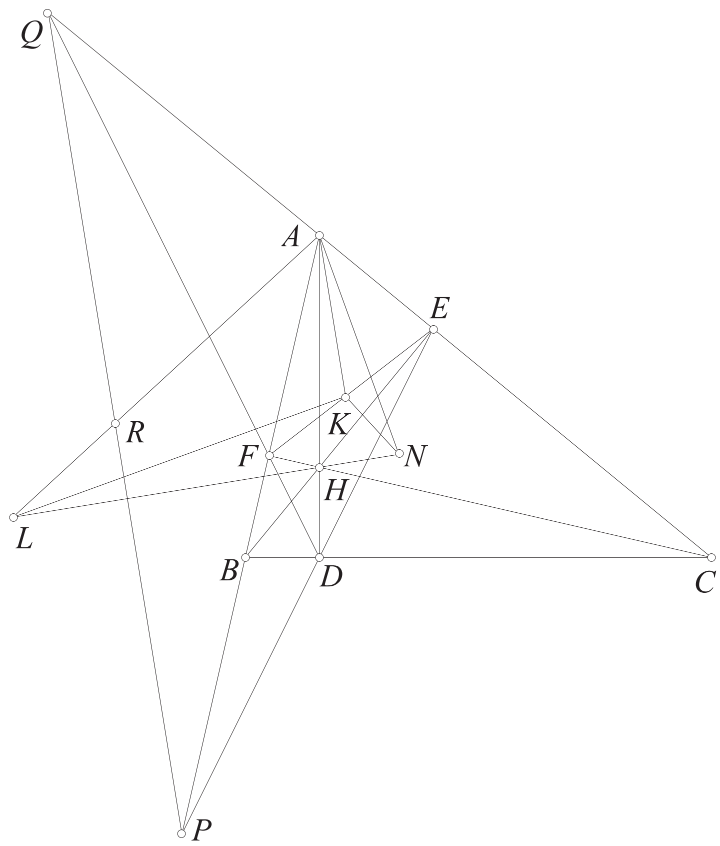
Gọi DP cắt (O) tại G khác D dễ thấy G nằm trên đường tròn đường kính AP cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Gọi I, J là hình chiếu của (K) lên CE, BF thì I, J là trung điểm của EM, FN. Ta thấy $\frac{EJ}{EC} = \frac{PK}{PD} = \frac{FI}{FB}$. Mặt khác dễ thấy tam giác GEC và GFB đồng dạng nên suy ra hai tam giác GEJ và GFI đồng dạng. Gấp đôi các cạnh EJ, FI cho ta hai tam giác GEM và GFN đồng dạng. Gọi MN cắt BC tại X. EF cắt BC, MN lần lượt tại Q, R. Từ đây dễ thấy G là điểm Miquel của tam giác ABC và các đường thẳng EF, MN nên các tứ giác $XGMC$ và $QGFB$ nội tiếp. Từ đó $\angle GXR = \angle GCM = \angle GBN = \angle GQR$. Vậy G nằm trên đường tròn (XQR). Cũng có tứ giác $QGFB$ nội tiếp nên $\angle QGB = \angle QFB = \angle FRG + \angle GAF = \angle QXG + \angle GCB$. Từ đó ta thấy đường tròn (XQR) tiếp xúc (O) tại G.

Nhận xét

Tác giả nhận được lời giải qua email từ các bạn **Trần Đình Hùng** lớp 12 toán, THPT chuyên Hà Tĩnh, Hà Tĩnh, **Trương Mạnh Tuấn** lớp 11 Toán, THPT chuyên KHTN, **Trần Tiến Mạnh** lớp 11 Toán, chuyên ĐH Vinh. Ngoài ra các bạn **Nguyễn Đình Hoàng, Nguyễn Đức Bảo**, lớp 11 toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã cho lời giải tại đây. Cũng ở topic ở đó bạn **Nguyễn Đình Hoàng** cũng đưa ra cách dựng khác cho đường tròn (XQR). Bên cạnh đó, bạn **Ngô Quang Dương**, sinh viên K61, ĐHKHTN-ĐHQGHN, đã tổng quát tất cả các vấn đề hai đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm Miquel thành một bài toán, bài toán đó sẽ có giá trị ứng dụng cao trong các mô hình khác nhau.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. DE, DF lần lượt cắt AB, AC tại P, Q. R là trung điểm PQ. N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Gọi HN cắt AR tại L. Chứng minh rằng trực tâm tam giác ALN nằm trên EF.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

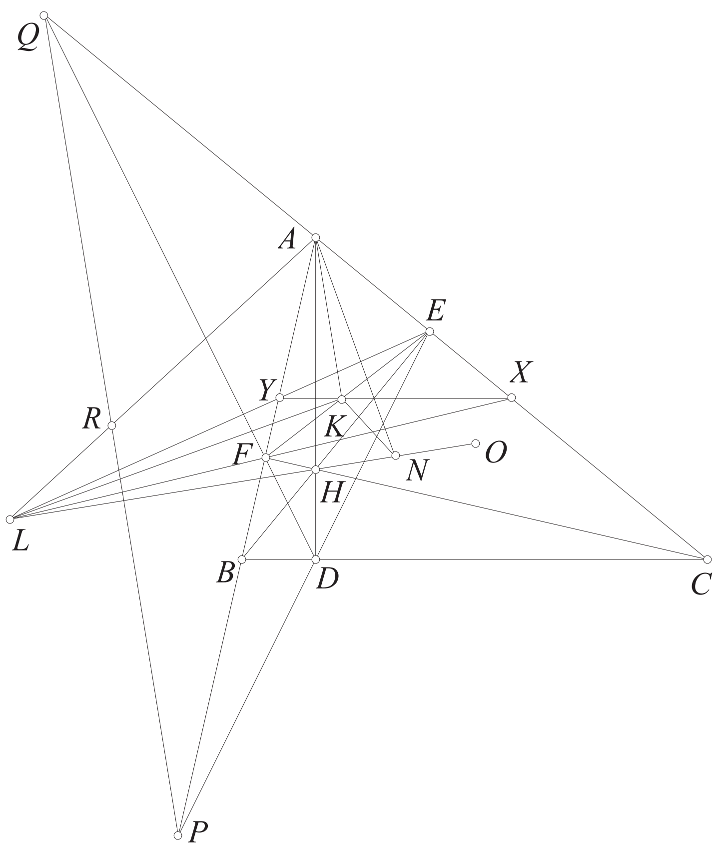
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. DE, DF lần lượt cắt AB, AC tại P, Q. R là trung điểm PQ. N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF. Gọi HN cắt AR tại L. Chứng minh rằng trực tâm tam giác ALN nằm trên EF.

Lời giải

Lời giải sau dựa trên lời giải của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An tại đây.



Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của AC, AB và (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. K là giao điểm của XY với EF. Ta sẽ chứng minh K là trực tâm của tam giác ALN, thật vậy. Ta có $QF.QD = QA.QC$ nên Q thuộc trục đẳng phương của (O) và (N). Tương tự ta suy ra PQ là trục đẳng phương của (O) và (N). Do đó PQ vuông góc với đường thẳng Euler ON của tam giác ABC. Do $KX.KY = KE.KF$ nên K thuộc trục đẳng phương của các đường tròn đường kính AO và AH nên AK vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC hay $AK \parallel PQ$. Theo định lí Brokard ta suy ra EY, FX cắt nhau tại trực tâm tam giác AKN và trực tâm này nằm trên OH do $OH \perp AK$. Lại do R là trung điểm PQ nên $A(QP, RK) = -1$ do đó theo tính chất tứ giác toàn phần thì AR đi qua giao điểm của EY và FX. Từ hai kết luận trên suy ra L là giao điểm của EY và FX. Vậy theo định lý Brokard, K là trực tâm tam giác ALN.

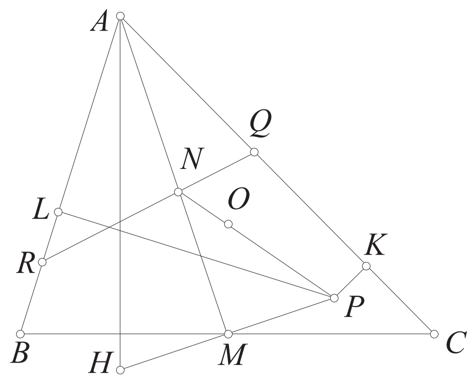
Nhận xét

Tác giả nhận được lời giải qua email từ các bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình, **Trương Mạnh Tuấn, Trần Anh Tài, Đỗ Xuân Long** lớp 11 Toán, THPT chuyên KHTN, **Nguyễn Hưng Quang Khải** lớp 11 toán, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên. Bạn **Khải** cũng đưa ra một bổ đề rất thú vị. Bài toán được tác giả tổng quát và lời giải được đề nghị bởi bạn **Nguyễn Đức Bảo**.

Cho tam giác ABC, đường cao AD, tâm ngoại tiếp O và P thuộc AD. E, F là hình chiếu của P lên CA, AB. DE, DF lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Q là trung điểm MN. Đường thẳng qua P vuông góc với MN cắt AQ, AO tại R, S. T là trung điểm của PS. Chứng minh rằng trực tâm tam giác ART nằm trên EF.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Lấy điểm H sao cho $AH \perp BC$ và $HM \perp AM$. P đối xứng H qua M. K, L là hình chiếu của P lên CA, AB. Trên cạnh CA, AB lấy Q, R sao cho $AQ = 2KC$ và $AR = 2BL$. AM cắt QR tại N. Chứng minh rằng PN đi qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

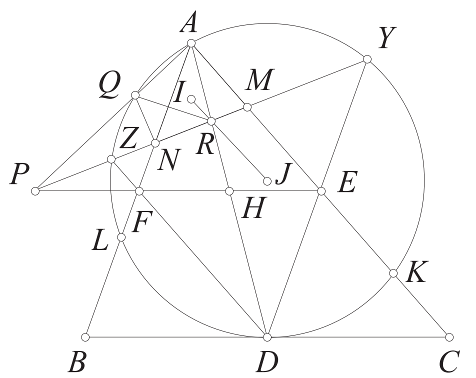
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM. Lấy điểm H sao cho $AH \perp BC$ và $HM \perp AM$. P đối xứng H qua M. K, L là hình chiếu của P lên CA, AB. Trên cạnh CA, AB lấy Q, R sao cho $AQ = 2KC$ và $AR = 2BL$. AM cắt QR tại N. Chứng minh rằng PN đi qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC.

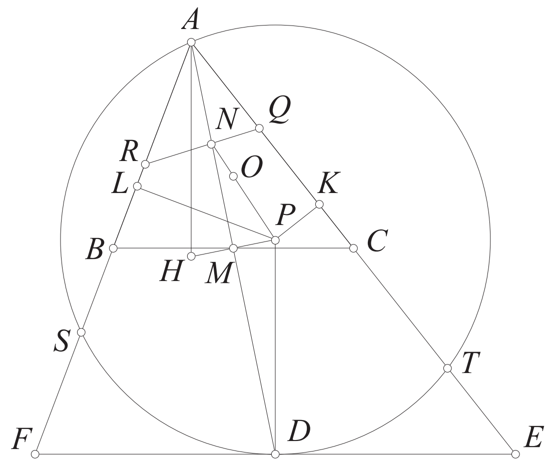
Lời giải

Bổ đề (IMO Shortlist 2015 G5)**.** Cho tam giác ABC có D, E, F là trung điểm BC, CA, AB. Đường tròn (J) qua A, D tiếp xúc BC cắt CA, AB tại K, L khác C, B. M, N lần lượt đối xứng K, L qua E, F. Gọi I là tâm ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng AD, MN, IJ đồng quy.



Chứng minh bổ đề. Ta có $AN.AB = BL.BA = BD^2 = CD^2 = CK.CA = AM.AC$, từ đó tứ giác $BCMN$ nội tiếp. Suy ra $MNFE$ nội tiếp. Gọi DE, DF cắt (J) tại Y, Z khác D. Ta có $ED.EY = EA.EK = EM.EC$ nên tứ giác $MYCD$ nội tiếp, suy ra $\angle MYD = \angle MCD = \angle MNA$, lại có $YE \parallel AN$ nên Y, M, N thẳng hàng. Tương tự Z, M, N thẳng hàng. Gọi P là giao của YZ và EF. AP cắt (J) tại Q khác A, tứ giác $EFZY$ nội tiếp nên $PA.PQ = PY.PZ = PE.PF = PM.PN$ suy ra Q nằm trên (I). Lại có $\angle ANY = \angle ZYD = \angle ZAD$. Từ đó $RN.RZ = RA^2$. Tương tự $RM.RY = RA^2$. Sử dụng phép nghịch đảo tâm R phương tích RA^2 biến A, M, N lần lượt thành A, Y, Z nên đường tròn (AMN) biến thành đường tròn (AYZ). Vậy Q biến thành Q nên $RQ^2 = RA^2$. Từ đó R nằm trên trung trực QA chính là IJ.

Hệ quả. Từ chứng minh trên ta có $PA.PQ = PY.PZ = PE.PF$ nên Q nằm trên (AEF) do đó AQ là dây cung chung của (AEF) và (AMN) nên AQ vuông góc với đường nối tâm (AEF) và (AMN). Mặc khác cũng từ bổ đề trên thì JI cũng vuông góc PQ nên JI đi qua tâm (AEF).



Giải bài toán. Gọi D, E, F là đối xứng của A lần lượt qua M, C, B. Dễ thấy đường tròn (P) đi qua A cũng tiếp xúc EF tại D. (P) cắt AF, AE tại S, T khác A, dễ thấy K là trung điểm AT do đó $AQ = 2KC = TE$. Tương tự $AR = 2BL = SF$. Áp dụng hệ quả vào tam giác AEF thì thì PN đi qua tâm O ngoại tiếp tam giác ABC.

Nhận xét

Tác giả đã phát biểu bổ đề khác với bài toán G5 gốc và chứng minh trên dựa theo ý tưởng của **Telv Cohl** trên AoPS, bài toán trên là một cách nhìn khác của bài G5, bài G5 cũng có nhiều phát triển thú vị khác. Các bạn **Nguyễn Đình Hoàng, Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã cho các lời giải khác nhau tại đây. Ngoài ra tác giả nhận được các lời giải khác qua email từ các bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình, **Đỗ Xuân Long** lớp 11 Toán, THPT chuyên KHTN. Bạn **Nguyễn Lê Phước** cũng gửi tới tác giả một cách giải có sử dụng một bổ đề đẹp mắt về khoảng cách tâm hai đường tròn.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn có phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Đường tròn (K) đi qua B, C và tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC. Đường tròn (L) nằm trong tam giác tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc ngoài (K) tại P. Chứng minh rằng PI chia đôi EF.
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

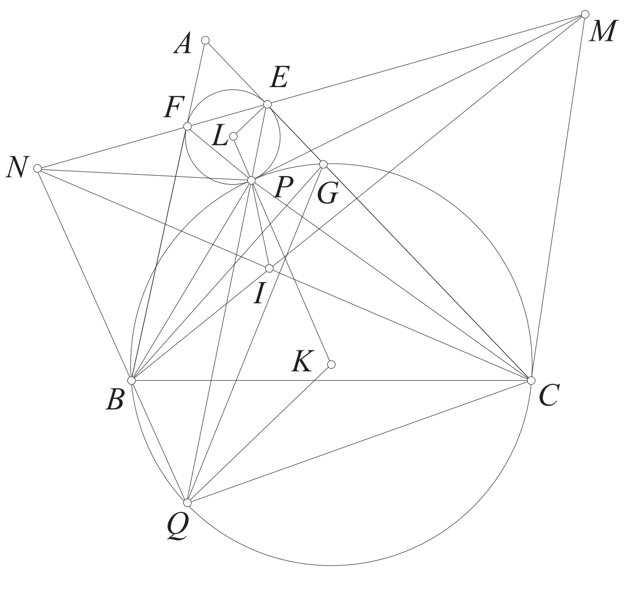
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

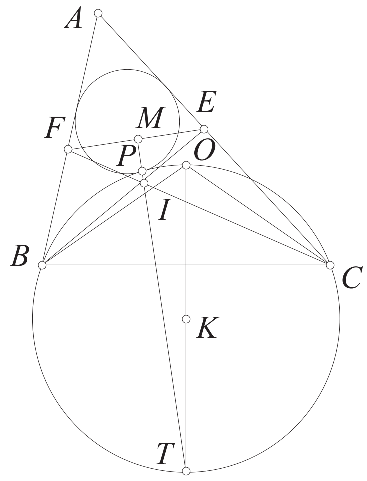
Cho tam giác ABC nhọn có phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Đường tròn (K) đi qua B, C và tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC. Đường tròn (L) nằm trong tam giác tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc ngoài (K) tại P. Chứng minh rằng PI chia đôi EF.

Lời giải

Bổ đề (Định lý Protassov)**.** Cho tam giác ABC và một đường tròn (K) đi qua B, C. Đường tròn (L) tiếp xúc cạnh CA, AB và tiếp xúc ngoài (K) tại P. Thì phân giác góc $\angle BPC$ đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.



Chứng minh bổ đề. Gọi G là giao điểm khác C của CA và (K). PE cắt (K) tại Q khác P. BQ cắt EF tại N. Ta có $\angle PBQ = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle PKQ) = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle PLE = 180^\circ - \angle PFE = \angle PFN$. Từ đó tứ giác nội tiếp. Lại có $\angle EPF = \angle EFA = \angle NFB = \angle NPB$ suy ra $\angle NPE = \angle FPB = 180^\circ - \angle FNQ$. Vậy $\angle FNQ = 180^\circ - \angle NPE = \angle NPQ$, ta suy ra $QN^2 = QE.QP = QC^2 = QG^2$. Do đó N là tâm bàng tiếp góc C của tam giác BCG. CN cắt đường tròn $(PFNB)$ tại I khác N. Thì $\angle BIC = 180^\circ - \angle BIN = 180^\circ - \angle AFE = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}$. Từ đó I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh tương tự I nằm trên đường tròn (PEC) và BI cắt EF tại M nằm trên (PEC). Ta có $\angle IBC = \angle IBA = \angle INF$ nên tứ giác $CBNM$ nội tiếp. Vậy $\angle IPB = \angle INB = \angle IMC = \angle IPC$, suy ra PI là phân giác $\angle BPC$.



Giải bài toán. Gọi PI cắt EF tại M và cắt (K) tại T khác P. Theo bổ đề thì PI là phân giác $\angle BPC$ nên OT là đường kính của (K). Từ đó TB, TC là các tiếp tuyến của đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Với chú ý rằng $\angle IEC = \angle IBT, \angle IFB = \angle ICT$, ta có biến đổi tỷ số $\frac{ME}{MF} = \frac{[IME]}{[IMF]} = \frac{[IME]}{[IBT]} \cdot \frac{[IBT]}{[IEC]} \cdot \frac{[IEC]}{[IFB]} \cdot \frac{[IFB]}{[ICT]} \cdot \frac{[ICT]}{[IMF]} = \frac{IM.IE}{IB.IT} \cdot \frac{BI.BT}{EI.EC} \cdot \frac{IE.IC}{IF.IB} \cdot \frac{FB.FI}{CI.CT} \cdot \frac{IC.IT}{IM.IF} = \frac{IE}{IB} \cdot \frac{BF}{CE} \cdot \frac{IC}{IF} = \frac{CE}{CB} \cdot \frac{BF}{CE} \cdot \frac{BC}{BF} = 1$. Vậy M là trung điểm EF.

Nhận xét

Bài toán là mở rộng bài toán 2 trong đề thi Sharygin 2010, khi thay cạnh huyền BC bởi đường tròn (BOC). Bổ đề lần đầu được phát biểu trên AoPS bởi **Vladimir Protassov** và cách chứng minh được tác giả diễn đạt lại gọn gàng thông qua các bổ đề của định lý Thébault đồng thời dựa trên ý tưởng của **Jean Louis Ayme** ở đây. Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã cho lời giải tại đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải khác qua email từ bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình.

Bài toán đề nghị

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). BC cắt trung trực BD tại P. AP cắt (O) tại Q khác A. CD cắt OP tại R. Trên BR lấy S sao cho $AS \parallel BP$. Lấy T thuộc AC sao cho $ST \parallel BQ$. Chứng minh rằng $TA = TB$.
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

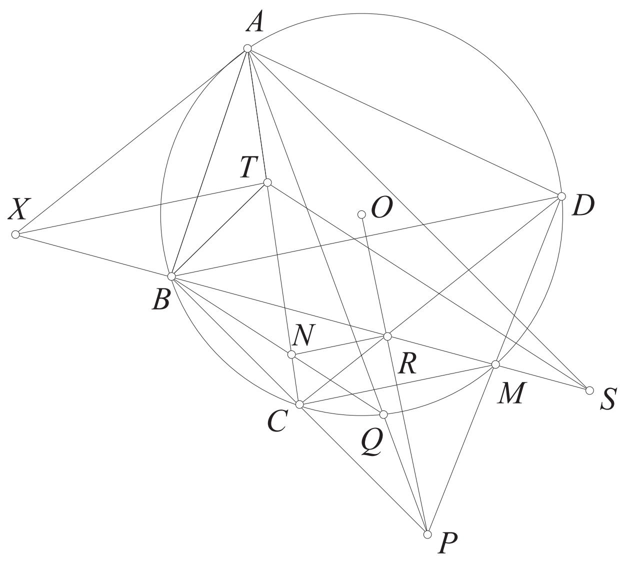
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). BC cắt trung trực BD tại P. AP cắt (O) tại Q khác A. CD cắt OP tại R. Trên BR lấy S sao cho $AS \parallel BP$. Lấy T thuộc AC sao cho $ST \parallel BQ$. Chứng minh rằng $TA = TB$.

Lời giải

Lời giải sau dựa trên ý tưởng của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An tại đây.



Theo tính đối xứng thì PD và BR cắt nhau tại M thuộc (O). Gọi BQ cắt AC tại N. Theo định lý Brokard thì P, N liên hợp với (O) và P, R liên hợp với (O) do đó P là cực của NR nên $NR \perp OP \perp CM$ hay $NR \parallel CM$. Lấy X thuộc BR sao cho $AX \parallel CD$. Vậy hai tam giác AXS và CRB có các cạnh tương ứng song song nên đồng dạng. Lại có tam giác CNB và ATS có các cạnh tương ứng song song nên đồng dạng. Từ đây suy ra hai tam giác XTA và RNC đồng dạng. Do đó $\angle XTA = \angle CNR = 180° - \angle MCA = 180° - \angle MBA = \angle ABX$. Do đó tứ giác $XATB$ nội tiếp. Lại có $\angle AXB = \angle XRC = 2\angle RMC = 2\angle BAC = 2\angle BXT$. Từ đó XT là phân giác $\angle AXB$ nên $TA = TB$

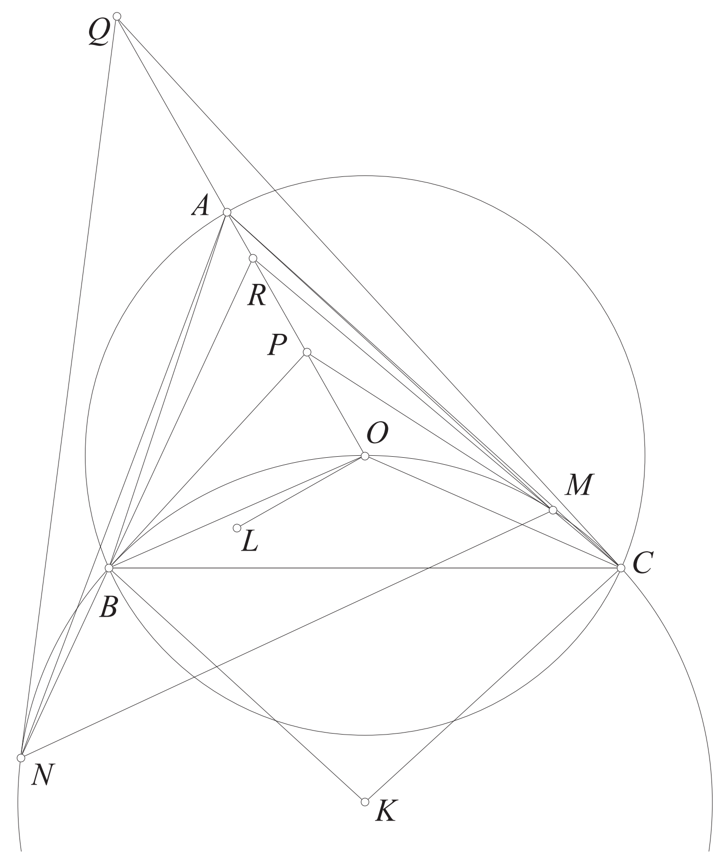
Nhận xét

Bạn **Đỗ Trung Phương** lớp 11 Toán, THPT chuyên Vĩnh Phúc cũng cho lời giải tại đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải khác qua email từ bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình. Bài toán có thể được khai thác ở dạng đối xứng như sau

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). BC, AD lần lượt cắt trung trực BD, AC tại P, Q. AP, BQ cắt (O) tại M, N khác A, B. CD cắt OP, OQ lần lượt tại K, L. Trên BK, AL lấy S, T sao cho $AS \parallel BC, BT \parallel AD$. Lấy U, V thuộc AC, BD sao cho $SU \parallel BM, TV \parallel AN$. Chứng minh rằng U, V, O thẳng hàng.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn với tâm ngoại tiếp O. (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. Tiếp tuyến tại B, C của (K) lần lượt cắt AO tại P, Q. Lấy M khác B thuộc (K) sao cho PM tiếp xúc (K). Lấy N khác C thuộc (K) sao cho QN tiếp xúc (K). Gọi L là tâm ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng $OL \perp AO$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

