Về một bài toán hay trên THTT

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và phát triển bài toán hình học trên THTT số 440 tháng 2 năm 2014 với các công cụ hình học thuần túy.

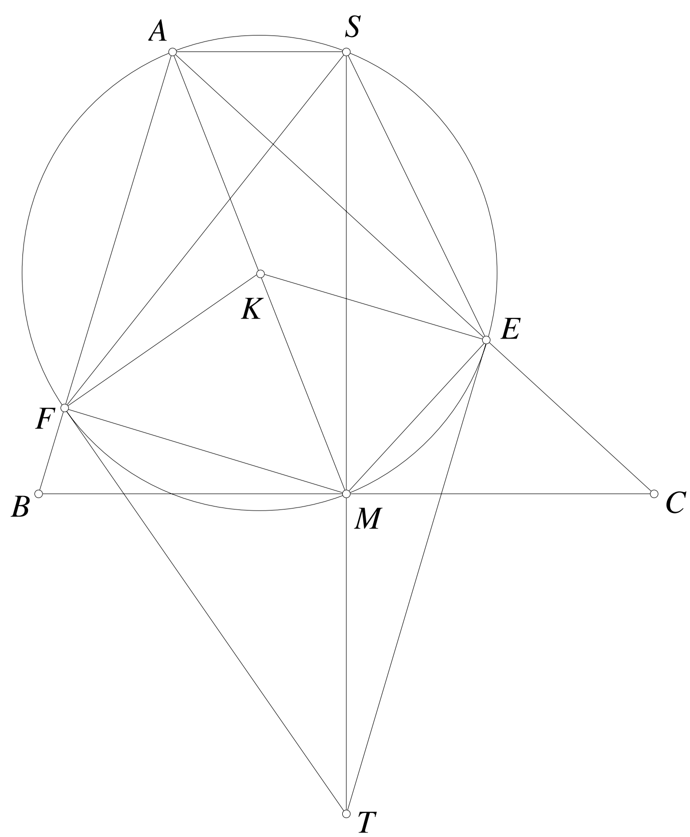
Trên báo THTT số 440 tháng 2 năm 2014, cuộc thi kỷ niệm 50 năm [1] có bài toán hình học hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC, trực tâm H và M là trung điểm BC. P là một điểm thuộc đường thẳng HM. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên trung trực BC.

Bài toán này là một mở rộng khá có ý nghĩa của một bài toán rất nổi tiếng và kinh điển. Bài toán đó xuất hiện lần đầu trong cuộc thi tranh cúp Kolmogorov ở Nga [2] và lại xuất hiện lại trong kỳ thi chọn đội tuyển Kazakhstan thi Olympics Balkan năm 2007 [3]. Bài toán đó như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với trung tuyến AM. Đường tròn đường kính AM cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn đường kính AM cắt nhau tại T. Chứng minh rằng $TM \perp BC$.

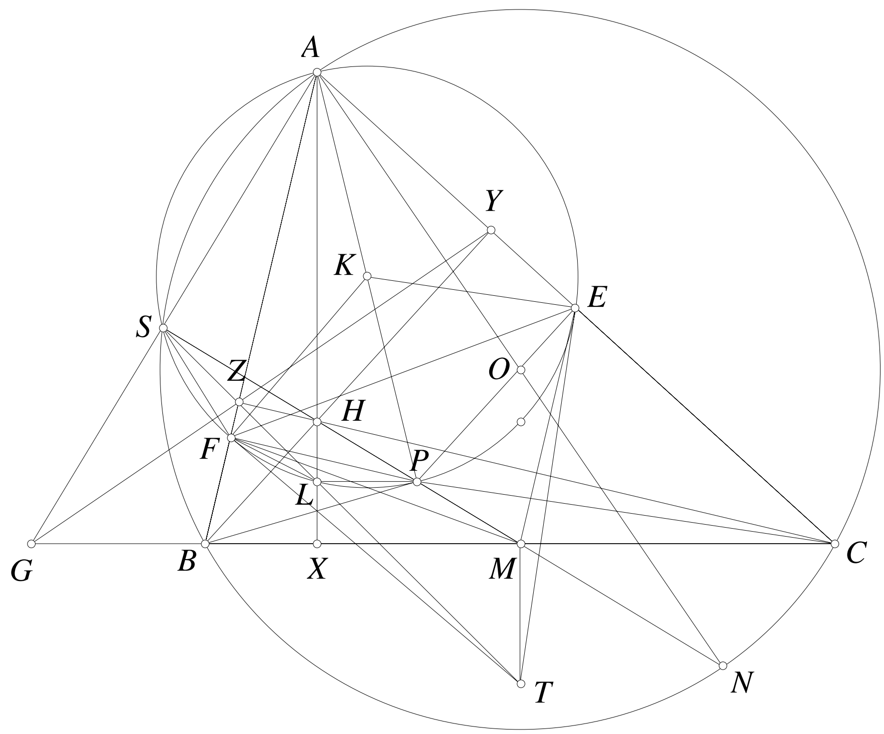
Bài toán này có một lời giải ứng dụng tứ giác điều hòa rất đẹp tôi xin trình bày lại như sau



Hình 1.

Lời giải bài toán 2. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt (K) tại S khác A. Do M là trung điểm BC nên chùm $A(BC, SM) = -1$. Chiếu lên đường tròn (K) suy ra hàng $(FE, SM) = -1$ do đó tứ giác $SEMF$ điều hòa. Vậy tiếp tuyến tại E, F và SM đồng quy. Dễ thấy $SM \perp SA \parallel BC$ do đó SM là trung trực BC nên tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau trên trung trực BC. Ta có điều phải chứng minh. □

Sau đây tôi xin trình bày lại hai lời giải cho bài toán 1.



Hình 2.

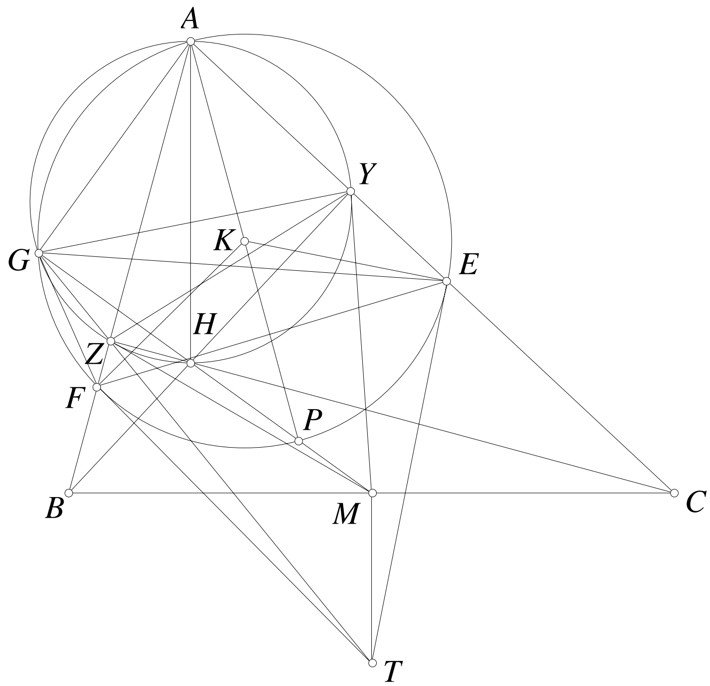
Lời giải thứ nhất bài toán 1. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và AN là đường kính của (O). AX, BY, CZ là đường cao của tam giác ABC. Dễ thấy tứ giác $HBNC$ là hình bình hành do đó HM đi qua N. Gọi NH cắt (O) tại S khác N suy ra $\angle NSA = 90°$. Vậy S cũng thuộc đường tròn đường kính AH, mặt khác dễ thấy Y, Z cũng nằm trên đường tròn đường kính AH. Gọi YZ cắt BC tại G thì dễ có hàng $(BC, XG) = -1$. Ta chú ý M, X, Y, Z đều nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC do đó $\overline{GB}.\overline{GC} = \overline{GX}.\overline{GM} = \overline{GY}.\overline{GZ}$ suy ra G thuộc trục đẳng phương của đường tròn đường kính AH và (O) suy ra G thuộc AS.

Ta lại chú ý $\angle ASP = 90°$ nên S cũng thuộc đường tròn (K). Gọi AX cắt (K) tại L khác A. Ta thấy chùm $A(BC, XG) = -1$ chiếu lên đường tròn (K) suy ra hàng $(FE, LS) = -1$ suy ra tứ giác $SELF$ điều hòa. Vậy tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại điểm T thuộc SL. Theo tính chất tiếp tuyến ta dễ có $\dfrac{TL}{TS} = \dfrac{FL^2}{FS^2}$ (1).

Ta cố định tam giác ABC, xét P di chuyển ta thấy $\angle FSL = \angle FAL$ không đổi khi P di chuyển, $\angle FLS = \angle FAS$ cũng không đổi khi P di chuyển vì ta chú ý S cố định do N, H cố định. Do đó tam giác FSL có hai góc không đổi nên luôn tự đồng dạng do đó tỷ số $\dfrac{FL^2}{FS^2}$ không đổi (2).

Từ (1),(2) ta có tỷ số $\dfrac{TL}{TS}$ luôn không đổi mà S cố định, L di chuyển trên đường cao AX cố định do đó T di chuyển trên đường thẳng song song AX cố định. Theo bài toán 2 khi P trùng M thì T thuộc trung trực BC cũng song song AX. Do đó T luôn thuộc trung trực BC cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Lời giải thứ 2 sau đây thuần túy hình học THCS được trích dẫn từ trên báo THTT số 444 tháng 6 năm 2014 được tác giả làm gọn hơn

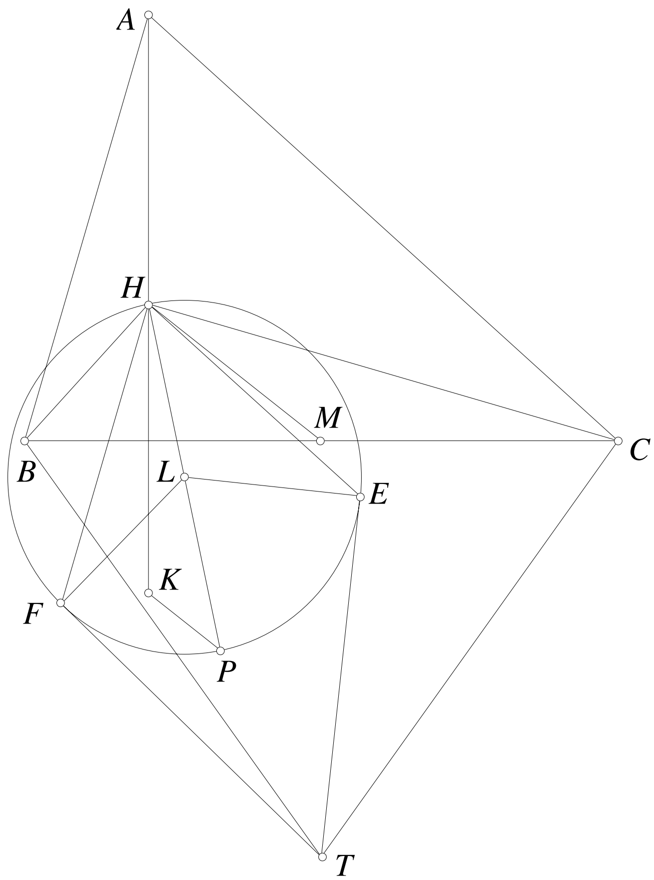


Hình 3.

Lời giải thứ hai bài toán 1. Gọi BY, CZ là đường cao của tam giác ABC dễ thấy đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ đi qua H. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ cắt (K) tại G khác A. Ta dễ thấy $HG \perp GA \perp PG$ từ đó P, H, G thẳng hàng. Ta cũng dễ thấy $\triangle GYE \sim \triangle GZF$ suy ra $\triangle GYZ \sim \triangle GEF$. Dễ thấy M là giao hai tiếp tuyến tại Y, Z của đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ. Gọi hai tiếp tuyến tại E, F của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Từ $\triangle GYZ \sim \triangle GEF$ suy ra $\triangle GFT \sim \triangle GZM$ hay $\triangle GZF \sim \triangle GMT$ suy ra $\angle GMT = \angle GZF = 180^\circ - \angle GZA = 180^\circ - \angle GHA = \angle AHP$ suy ra $TM \parallel AH \perp BC$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Cách giải trong lời giải thứ nhất là cách tác giải nghĩ ra bài toán này. Tuy nhiên cách giải trong lời giải thứ hai mới thực sự là sơ cấp và nhiều ý tưởng khai thác. Việc dựng ra điểm G chính là dựng ra tâm đồng dạng biến đoạn YZ thành EF và biến M thành T. Lời giải chứa đựng ý tưởng sâu sắc về biến hình nhưng được trình bày dưới dạng các bổ đề về tam giác đồng dạng chung đỉnh. Sau đây là một số khai thác cho bài toán này

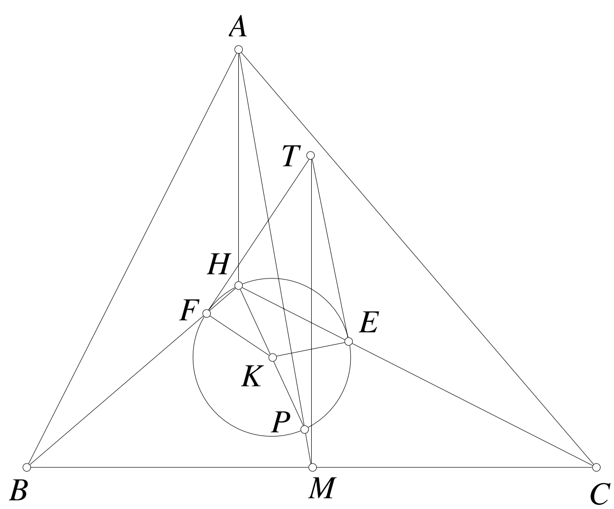
Bài toán 3. Cho tam giác ABC trực tâm H và M là trung điểm BC. K đối xứng A qua H. P là một điểm sao cho $PK \parallel HM$. Trên đường tròn đường kính HP lấy các điểm E, F sao cho $HF \parallel AB, HE \parallel AC$. Tiếp tuyến tại E, F của đường tròn đường kính HP cắt nhau tại T. Chứng minh rằng $TB = TC$.



Hình 4.

Đây là một bài toán hay, các bạn có thể giải nó dễ dàng từ bài toán gốc bằng phép tịnh tiến.

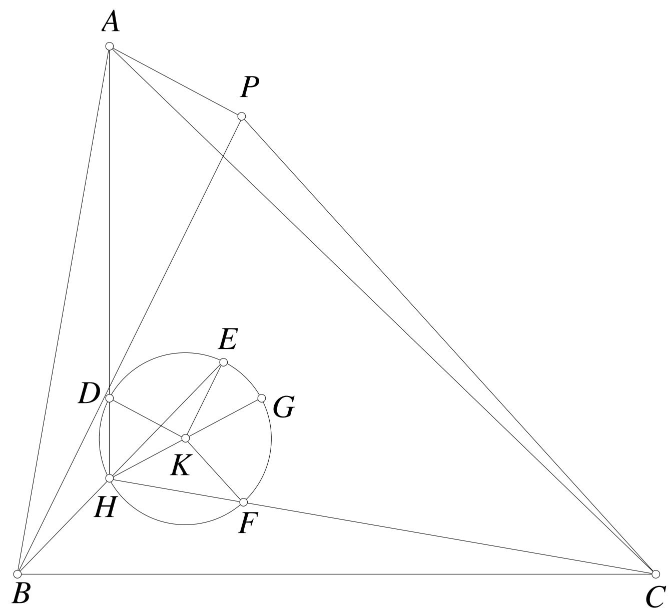
Bài toán 4. Cho tam giác ABC trực tâm H và trung tuyến AM. P là một điểm thuộc AM. Đường tròn (K) đường kính PH lần lượt cắt HC, HB tại E, F khác H. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại E, F của đường tròn đường tròn (K) cắt nhau trên trung trực BC.



Hình 5.

Bài toán trên thực ra chỉ là bài toán 1 viết lại cho tam giác HBC và trực tâm A tuy nhiên bài toán trên sẽ gợi mở cho ta một ý tưởng hay khi P là trọng tâm như sau

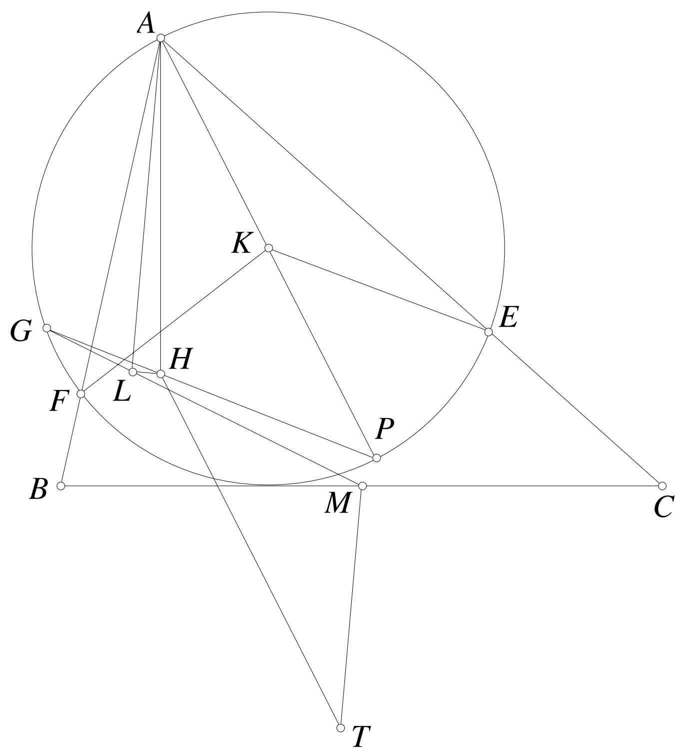
Bài toán 5. Cho tam giác ABC trực tâm H, trọng tâm G. Đường tròn (K) đường kính HG lần lượt cắt HA, HB, HC tại D, E, F khác H. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với KD, KE, KF đồng quy.



Hình 6.

Bài toán trên rất thú vị nhưng thực ra là ý tưởng của tam giác trực giao, các bạn hãy cùng suy nghĩ. Nếu tập trung vào khai thác ý tưởng trong lời giải thứ 2 ta sẽ dẫn ra được nhiều điều thú vị

Bài toán 6. Cho tam giác ABC trực tâm H và P là điểm bất kỳ. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB tại E, F khác A. PH cắt (K) tại G khác H. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. M là trung điểm BC. Đường thẳng qua A song song với MT cắt MG tại L. Chứng minh rằng $LA \perp LH$.



Hình 7.

Bài toán là một mở rộng quan trọng của bài toán 1 với tư tưởng đồng dạng. Các bạn hãy làm bài tập sau như là ứng dụng của bài toán trên

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trên trung trực BC. Đường tròn (K) đường kính AP cắt CA, AB tại E, F khác A. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng $TB = TC$ khi và chỉ khi P là trung điểm BC.

Tài liệu

[1] Tạp chí THTT số 440 tháng 2 năm 2014

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=16779

[3] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=202517

[4] Tạp chí THTT số 444 tháng 6 năm 2014

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Một số đề hình học trong kỳ thi vào trường PTNK

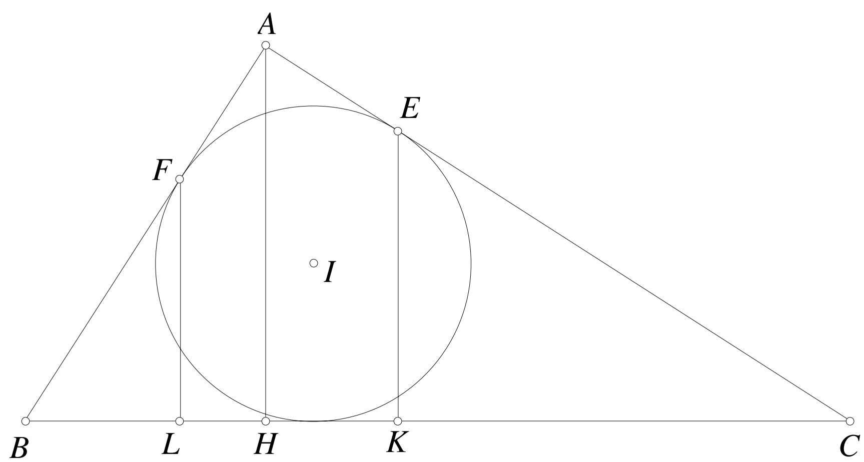
Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết sẽ tập trung khai thác và phát triển một số đề hình học thi vào trường PTNK từ năm 1999 tới năm 2015.

Đề thi vào trường PTNK năm 2000 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn nội tiếp tiếp xúc CA, AB tại E, F. Gọi K, L là hình chiếu của E, F lên BC. Chứng minh rằng $AH^2 = 2EK.FL$.



Hình 1.

Lời giải. Từ tính chất cơ bản của đường tròn nội tiếp thì

$$BF = \frac{BC + BA - AC}{2}, CE = \frac{CB + CA - AB}{2}.$$

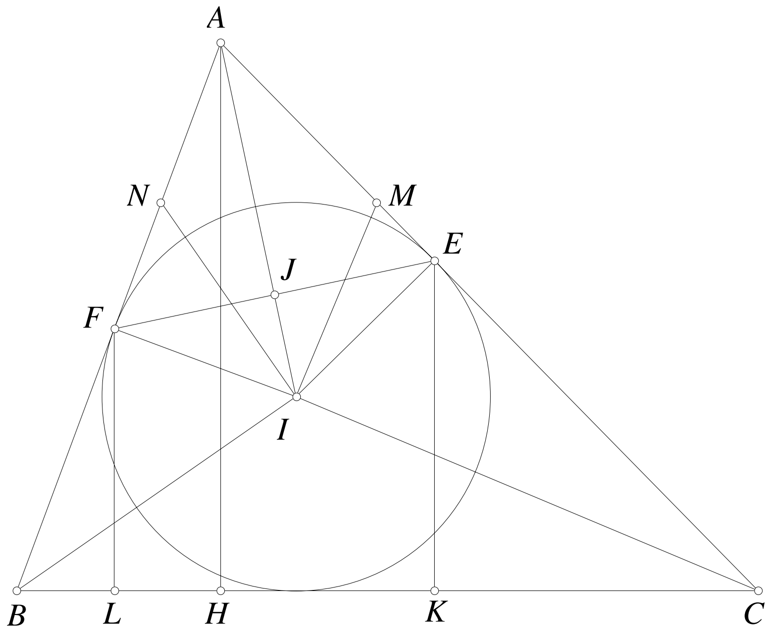
Từ đó theo định lý Thales

$$\frac{EK.FL}{AH^2} = \frac{BF}{BA}.\frac{CE}{CA} = \frac{BC^2 - (AB - AC)^2}{AB.AC} = \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2 + 2AB.AC}{AB.AC} = 2$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán là ứng dụng cơ bản của tính chất đường tròn nội tiếp định lý Thales và định lý Pythagore. Cuối đề bài cũng đặt ra câu hỏi là xét bài toán với tam giác thường ? Đó là vấn đề thú vị khi thay thế góc vuông hiển nhiên bài toán không thể đúng nếu giữ nguyên các giả thiết. Tuy vậy nếu phát triển giả thiết gốc thêm một chút ta sẽ thu được bài toán mới rất thú vị như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC đường cao AH. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. Gọi K, L là hình chiếu của E, F lên BC. Gọi IA cắt EF tại J. Chứng minh rằng $AH^2 = \frac{IA}{IJ}.EK.FL$.



Hình 2.

Lời giải. Ta thấy $\dfrac{IA}{IJ}.\dfrac{EK.FL}{AH^2} = \dfrac{IA^2}{IA.IJ}.\dfrac{BF}{BA}.\dfrac{CE}{CA} = \dfrac{IA^2}{AB.AC}.\dfrac{BF.CE}{IF.IE}$ (1).

Lấy các điểm M, N thuộc CA, AB sao cho $IM \perp IC, IN \perp IB$ ta dễ thấy $\triangle ANI \sim \triangle AIC$, $\triangle AMI \sim \triangle AIB$. Từ đó $\dfrac{BF}{IF} = \dfrac{IB}{IN} = \dfrac{IB}{\frac{IA}{AC}.IC} = \dfrac{IB.AC}{IA.IC}$ (2).

Tương tự $\dfrac{CE}{IE} = \dfrac{IC.AB}{IA.IB}$ (3).

Từ (1),(2),(3) suy ra $\dfrac{IA}{IJ}.\dfrac{EK.FL}{AH^2} = 1$ hay $AH^2 = \dfrac{IA}{IJ}.EK.FL$. □

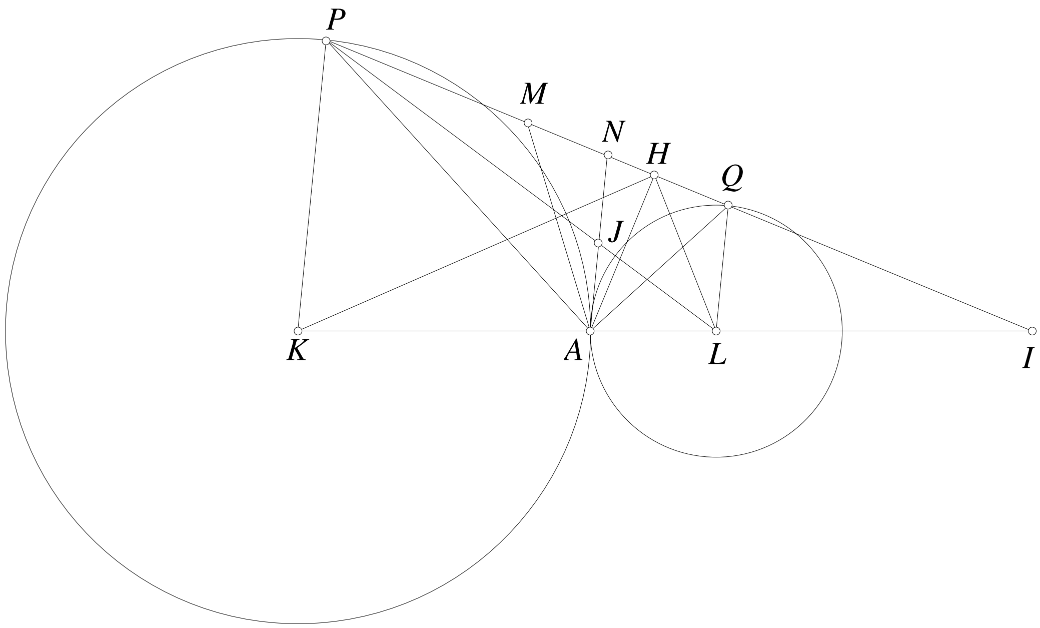
Nhận xét. Ta thấy ngay khi tam giác vuông tại A thì $IA = 2IJ$ ta thu được bài toán ban đầu. Thực chất tác giả đạt được bài toán trên nhờ một số biến đổi lượng giác tương tự cách làm ở bài toán gốc. Tuy vậy trong quá trình giải thì tìm được lời giải như trên thực sự đã thoát ly được ý tưởng lượng giác và làm bài toán trở nên ý nghĩa hơn. Thực chất bài toán 1 vẫn còn rất nhiều điều thú vị chờ các bạn khám phá. Bài toán 2 mới chỉ là khai thác có tính ban đầu, các bạn hãy suy nghĩ thêm về vấn đề này.

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2001 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 3. Cho hai đường tròn (K) và (L) có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài nhau tại A. Các điểm P, Q lần lượt thuộc $(K), (L)$ sao cho $\angle PAQ = 90°$.

a) Gọi H là hình chiếu của A lên P, Q. Chứng minh rằng H luôn thuộc một đường tròn cố định khi P, Q di chuyển.

b) Gọi M là trung điểm PQ. Chứng minh rằng nếu $\dfrac{2}{AH} = \dfrac{1}{KP} + \dfrac{1}{LQ}$ thì AM là tiếp tuyến chung của (K) và (L).



Hình 3.

Lời giải. a) Ta thấy các tam giác KAP và LAQ cân tại K, L nên $\angle KAP + \angle LAQ = 180^\circ - 2\angle PAK + 180^\circ - 2\angle QAL = 360^\circ - 2.90^\circ = 180^\circ$ suy ra $KP \parallel LQ$. Do (K) và (L) bán kính khác nhau nên PQ cắt KL tại I. Theo định lý Thales dễ thấy $\dfrac{IK}{IL} = \dfrac{KP}{LQ}$ không đổi mà K, L cố định nên I cố định. Từ đó H thuộc đường tròn đường kính IA cố định. Ta có điều phải chứng minh.

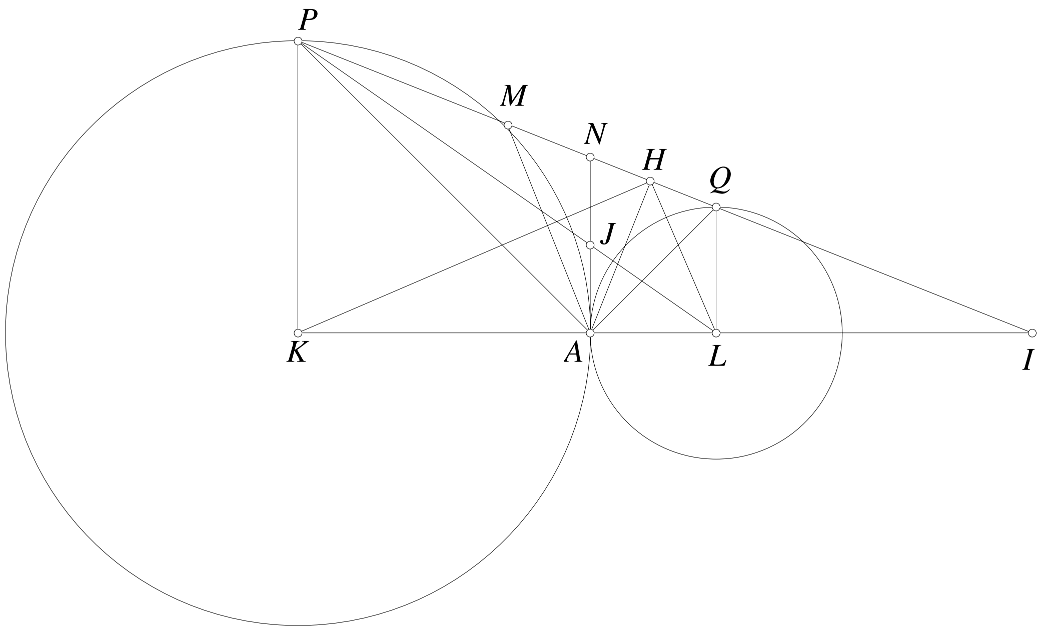
b) Lấy điểm N thuộc PQ sao cho $AN \parallel KP \parallel LQ$. Gọi PL cắt AN tại J. Theo định lý Thales dễ thấy $\dfrac{AJ}{KP} = \dfrac{AL}{KL} = \dfrac{LQ}{KP + LQ}$ vậy $\dfrac{1}{AJ} = \dfrac{1}{KP} + \dfrac{1}{LQ}$. Tương tự $\dfrac{1}{NJ} = \dfrac{1}{KP} + \dfrac{1}{LQ} = \dfrac{1}{AJ}$. Vậy $\dfrac{2}{AN} = \dfrac{1}{KP} + \dfrac{1}{LQ} = \dfrac{2}{AH}$. Suy ra $H \equiv N$. Từ đó $KP \parallel LQ \parallel AH \perp PQ$ nên PQ là tiếp tuyến chung của (K) và (L). Dễ thấy tiếp tuyến chung tại A khi đó phải đi qua M là trung điểm PQ. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đề bài gốc có ý cuối là phát biểu và chứng minh khi hai đường tròn tiếp xúc trong, tuy vậy cách làm hoàn toàn tương tự. Việc chỉ ra điểm cố định đóng vài trò quan trọng trong câu a). Câu b) là một ứng dụng quan trọng của định lý Thales trong hình thang. Bài toán có thể được khai thác như sau

Bài toán 4. Cho hai đường tròn (K) và (L) có bán kính khác nhau, tiếp xúc ngoài nhau tại A. Các điểm P, Q lần lượt thuộc $(K), (L)$ sao cho $\angle PAQ = 90^\circ$.

a) Chứng minh rằng đối xứng của A qua PQ luôn thuộc một đường tròn cố định khi P, Q di chuyển.

b) Gọi M là trung điểm PQ và H là hình chiếu của A lên PQ. Chứng minh rằng nếu phân giác $\angle MAH$ là tiếp tuyến chung của (K) và (L) thì $HK \perp HL$.



Hình 4.

Các bạn hãy làm như một bài luyện tập

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2003 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 5. a) Cho đường tròn (O) và một điểm I cố định. Một đường thẳng thay đổi đi qua I cắt (O) tại MN. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng quay quanh I.

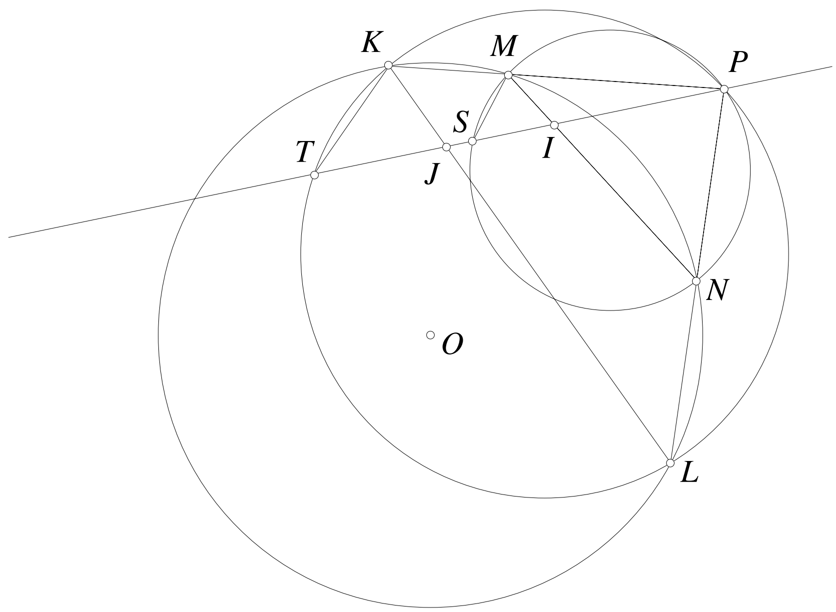
b) Cho đường tròn (O) và đường thẳng d ở ngoài (O). P di chuyển trên d. Đường tròn đường kính PO cắt (O) tại M, N. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Cả hai bài toán trên thực chất đều là các vấn đề đã rất kinh điển và đã xuất hiện trước đó rất lâu trong nhiều tài liệu. Tôi sẽ không đi sâu vào giải mà sẽ mở rộng và khai thác cả hai bài toán đó

Bài toán 6. Cho đường tròn (O) và điểm I không nằm trên (O). MN là một dây cung đi qua I. P là một điểm cố định cũng không thuộc (O).

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN luôn đi qua một điểm cố định khác P.

b) Gọi PM, PN cắt (O) tại K, L khác M, N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL luôn đi qua một điểm cố định khác P.



Hình 5.

Lời giải. a) Gọi R là bán kính của (O). Không mất tổng quát giả sử I nằm trong (O), trường hợp ở ngoài tương tự. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN cắt PI tại S khác P. Áp dụng hệ thức lượng trong đường tròn thì $IS.IP = IM.IN = R^2 - OI^2$ không đổi nên S cố định.

b) Gọi KL cắt PI tại J. Không mất tổng quát giả sử P nằm ngoài (O), trường hợp ở trong tương tự. Ta thấy $\angle MSP = \angle MNP = \angle MKJ$ suy ra tứ giác $MKJS$ nội tiếp. Vậy $PS.PJ = PK.PM = OP^2 - R^2$ nên J cố định. Dây KL đi qua J cố định tương tự câu a) đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL đi qua T cố định khác P. □

Nhận xét. Đây là bài toán rất tổng quát và nhiều ý nghĩa. Chúng ta thường hay gặp những trường hợp đặc biệt của bài toán này trong nhiều bài toán ở các kỳ thi THCS ở Việt Nam. Các bạn một lần nữa thấy trường hợp riêng đó trong đề năm 2006 [1]. Sau đây là một ứng dụng của phần b) bài gốc

Bài toán 7. Cho đường tròn (O) nằm trong hai dải đường thẳng song song a, b. P thuộc a. Tiếp tuyến của (O) qua P cắt b tại A, B. M là trung điểm AB. Chứng minh rằng PM luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

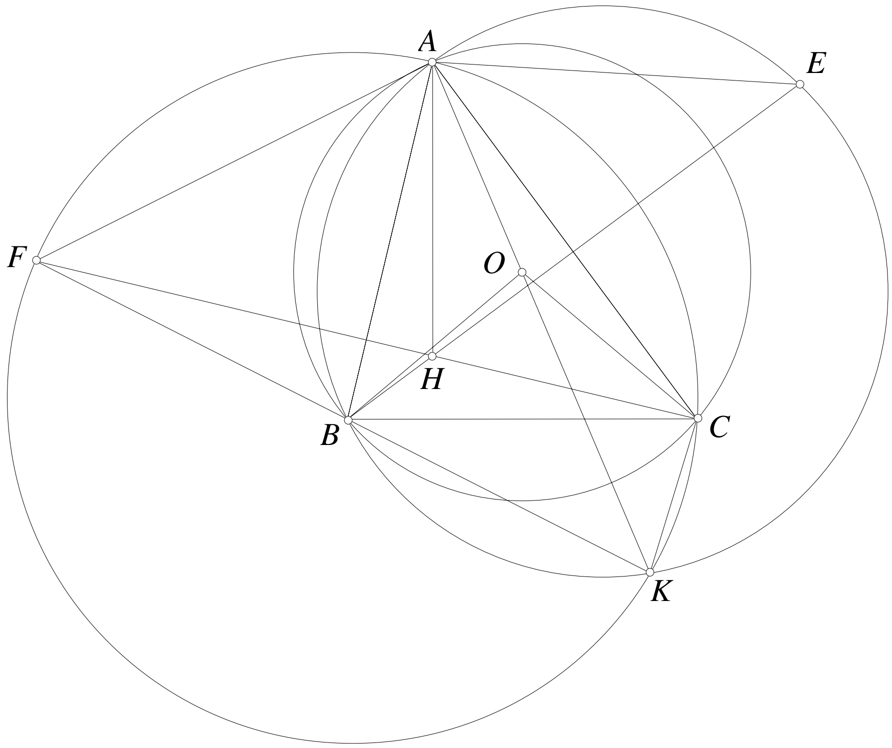
Phần b) là một bài tập kinh điển mà nó có quá nhiều ứng dụng, các bạn hãy tìm hiểu thêm.

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2010 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với dây BC cố định không là đường kính và A di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. Gọi E, F lần lượt là đối xứng của B, C qua CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K khác A.

a) Chứng minh rằng K luôn thuộc một đường tròn cố định khi A di chuyển.

b) Chứng minh rằng AK đi qua O.



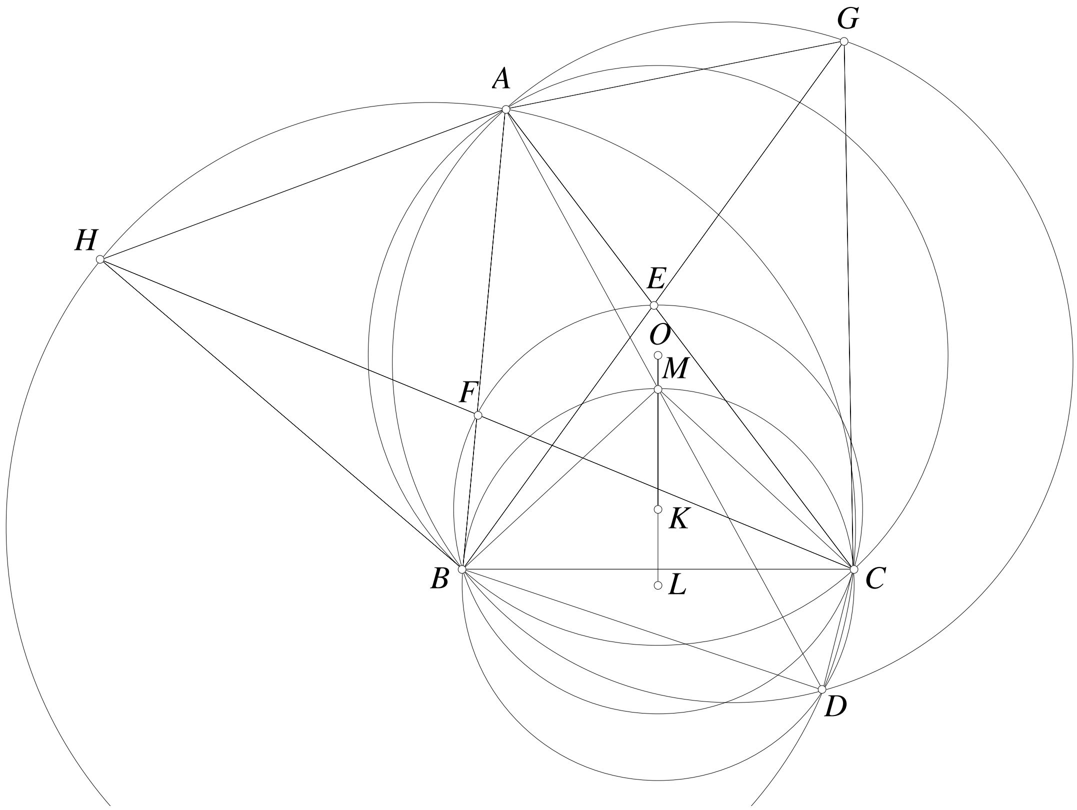
Hình 6.

Lời giải. a) Ta có $\angle BKC = \angle BKA + \angle CKA = \angle AFC + \angle AEB = \angle ACH + \angle ABH = 90° - \angle BAC + 90° - \angle BAC = 180° - \angle BAC = 180° - \angle BOC$. Vậy tứ giác $KBOC$ nội tiếp hay K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC cố định.

b) Từ tứ giác $BOCK$ nội tiếp mà $OB = OC$ nên KO là phân giác $\angle BKC$. Từ trên dễ có $\angle CKA = \angle CFA = \angle ACH = \angle ABH = \angle AEB = \angle AEB = \angle BKA$ vậy KA là phân giác $\angle BKC$ nên K, O, A thẳng hàng. □

Nhận xét. Bài toán gốc phát biểu câu b) là chứng minh AK đi qua điểm cố định nhưng rõ ràng điểm cố định là O đã xuất hiện ngay trong đề nên phát biểu theo cách chứng minh thẳng hàng thuận tiện hơn. Nếu để ký kỹ ta cũng dễ thấy tâm ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC. Bài toán này tuy đơn giản xong có khá nhiều ý tưởng để phát triển, sau đây là một phát triển như thế

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với dây BC cố định không là đường kính và A di chuyển trên cung lớn $\overset{\frown}{BC}$. (K) là một đường tròn cố định đi qua B, C lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác B, C. G, H lần lượt đối xứng B, C theo thứ tự qua E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH và tam giác ABG cắt nhau tại D khác A. Chứng minh rằng AD luôn đi qua một điểm cố định khi A di chuyển.

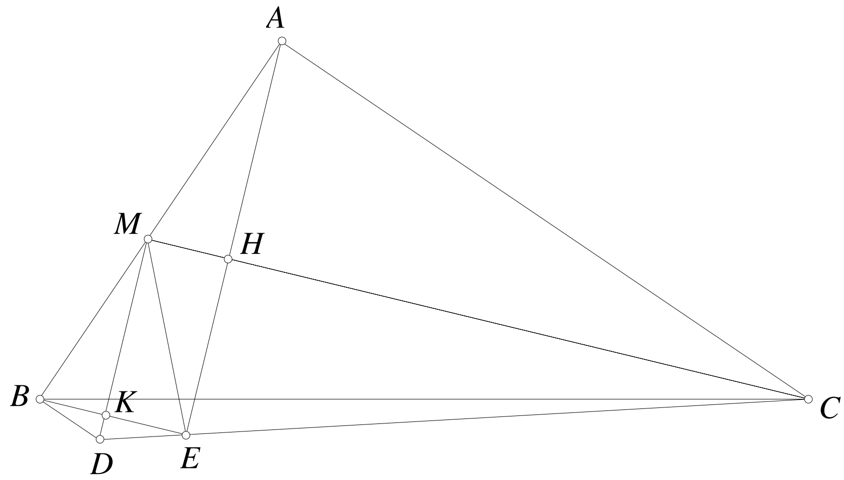


Hình 7.

Lời giải. Trước hết ta thấy AFC có các góc không đổi do (K) và (O) cố định. H lại đối xứng C qua F nên dễ thấy $\angle CDA = \angle CHA$ không đổi. Tương tự $\angle BDA = \angle BGA$ không đổi. Vậy nên $\angle BDC$ không đổi, D sẽ nằm trên đường tròn (L) cố định. Ta lại dễ thấy $\angle AFH = \angle AEG$, mặt khác $\dfrac{AE}{AF} = \dfrac{BE}{CF} = \dfrac{EG}{FH}$. Từ $\triangle AFH \sim \triangle AEG$. Vậy $\angle BDA = \angle AHF = \angle AGE = \angle ADB$. Từ đó DA là phân giác $\angle BDC$. Nếu gọi DA cắt (L) tại M khác A thì dễ thấy M phải thuộc trung trực BC, vậy M là giao của trung trực BC và (L) cố định suy ra AD đi qua M cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2012 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 10. Cho tam giác ABC vuông tại A. M là một điểm trên cạnh AB. Đường thẳng qua M vuông góc MC cắt đường thẳng qua B song song AC tại D. Đường thẳng qua A song song MD cắt đường thẳng qua B song song MC tại E. Chứng minh rằng D, E, C thẳng hàng.



Hình 8.

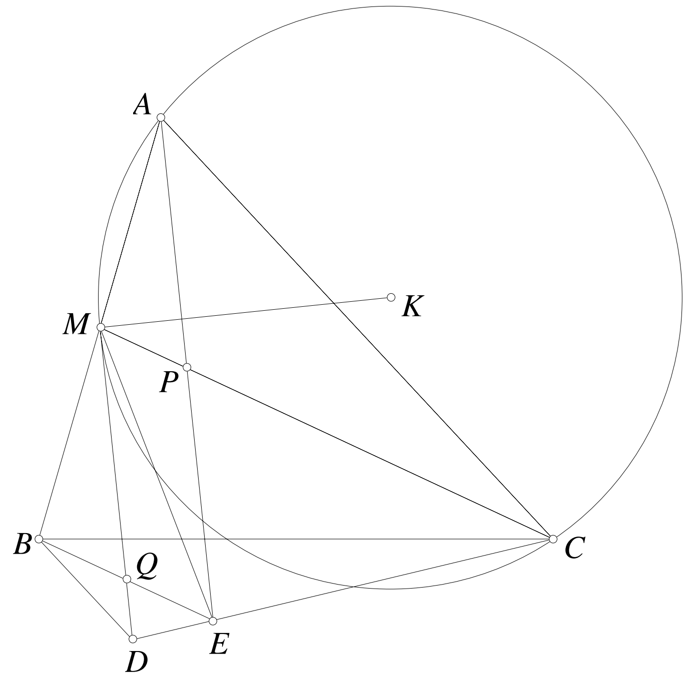
Lời giải. Gọi MC cắt AE tại H, MD cắt BE tại K. Ta dễ thấy các tam giác AMC, BDM vuông. Mặt khác $\angle BMD = \angle BAE = \angle = \angle ACM$. Do đó các tam giác AMC, BDM đồng dạng có đường cao tương ứng là AH, BK nên $\frac{HM}{HC} = \frac{KD}{KM}$. Từ đó dễ thấy trong tam giác DMC đường thẳng qua H song song với MD và đường thẳng qua K song song MC cắt nhau trên CD, vậy E thuộc CD. □

Nhận xét. Cách giải của bài toán chỉ thuần túy kiến thức lớp 8 về tam giác đồng dạng và định lý Thales. Bổ đề về hai đường thẳng cắt nhau trên CD là một bổ đề quen thuộc dùng định lý Thales xin nhắc lại bổ đề như sau.

Bổ đề 10.1. Cho tam giác ABC có E, F lần lượt thuộc cạnh CA, AB. Chứng minh rằng đường thẳng qua E song song AB và đường thẳng qua F song song AC đồng quy với BC khi và chỉ khi $\frac{EA}{EC} = \frac{FB}{FA}$.

Bổ đề là quen thuộc xin không nhắc lại cách chứng minh. Bài toán phát biểu trên tam giác vuông thì cũng sẽ có một cách nhìn trên tam giác bất kỳ như sau

Bài toán 11. Cho tam giác ABC với M là một điểm trên cạnh BC. Tiếp tuyến tại M của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC cắt đường thẳng qua B song song AC tại D. Đường thẳng qua A song song MD cắt đường thẳng qua B song song MC tại E. Chứng minh rằng C, D, E thẳng hàng.



Hình 9.

Lời giải. Do MD tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM nên $\angle MAC = \angle BMD = \angle MAP$. Do đó $\triangle MAP \sim \triangle MCA$ suy ra $\dfrac{MP}{MC} = \dfrac{MP}{MA}.\dfrac{MA}{MC} = \dfrac{AP^2}{AC^2}$ (1).

Ta lại có góc có cạnh tương ứng song song là $\angle DBE = \angle MCA = \angle MAP = \angle BMD$, vậy $\triangle DBQ \sim \triangle DMB$ suy ra $\dfrac{DQ}{DM} = \dfrac{DQ}{DB}.\dfrac{DB}{DM} = \dfrac{BQ^2}{BM^2}$ (2).

Ta lại dễ thấy $\triangle BQM \sim \triangle MPA$ do chúng có cạnh tương ứng song song, từ đó $\dfrac{BQ^2}{BM^2} = \dfrac{MP^2}{MA^2} = \dfrac{AP^2}{AC^2}$ (3).

Từ (1),(2),(3) suy ra $\dfrac{MP}{MC} = \dfrac{DQ}{DM}$ hay $\dfrac{PM}{PC} = \dfrac{QD}{QM}$. Từ theo bổ đề đường thẳng qua A song song MD và đường thẳng qua B song song MC đồng quy với DC. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán thực chất là ứng dụng tính chất tam giác đồng dạng chung cạnh, một trong những kiến thức cơ bản của các tam giác đồng dạng. Ta có thể loại bỏ yếu tố đường tròn và phát biểu một cách thuần túy kiến thức lớp 8. Bài toán còn nhiều vấn đề để khai thác xin dành điều đó cho bạn đọc.

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2014 [1] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ nguyên ý trong đề gốc nhưng được tác giả phát biểu lại cho gọn hơn)

Bài toán 12. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, J là tâm nội tiếp các tam giác AHB, AHC. AI, AJ cắt BC tại M, N. Chứng minh rằng MJ, IN, AH đồng quy.

Bài toán thực chất là ứng dụng một hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có thể tìm một lời giải dùng kiến thức lớp 8 như sau. Ta có bổ đề sau

Bổ đề 12.1. Cho tam giác ABC phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $BE.CF = 2IB.IC$.

Chứng minh. Ta đã biết các hệ thức cơ bản của phân giác $\dfrac{IB}{BE} = \dfrac{BA+BC}{AB+BC+CA}$ và $\dfrac{IF}{IC} = \dfrac{CA+CB}{AB+BC+CA}$ do đó ta có biến đổi tương đương

$BE.CF = 2IB.IC$

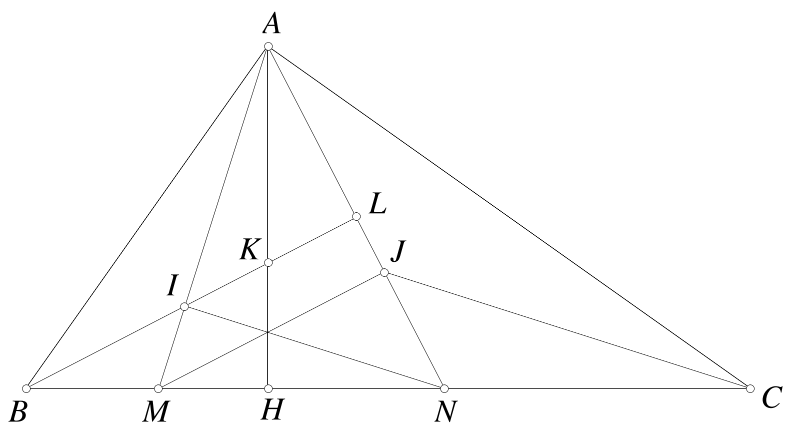
$2(BC+BA)(CB+CA) = (AB+BC+CA)^2$

$2BC^2 + 2BC.BA + 2BC.CA + 2AB.AC = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2BC.BA + 2BC.CA + 2AB.AC$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Tương đương tam giác ABC vuông tại A. □

Trở lại bài toán



Hình 10.

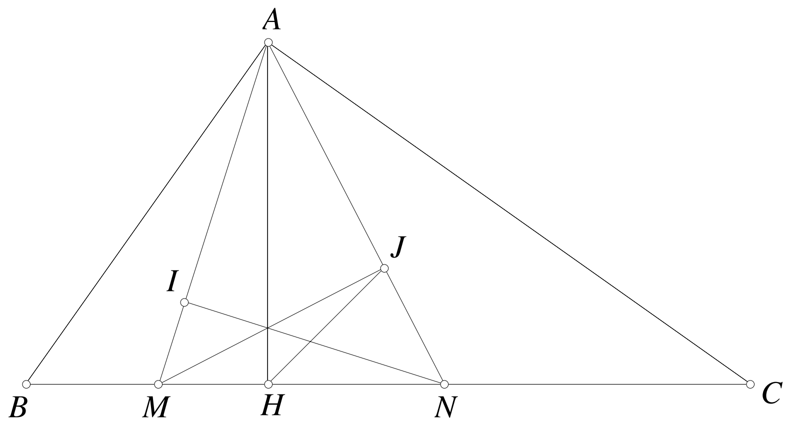
Lời giải 1. Gọi BI cắt AH tại K. Áp dụng bổ đề cho tam giác ABH ta có $BK.AM = 2IB.IA$ hay $\dfrac{AI}{AM} = \dfrac{BK}{2BI}$ (1).

Gọi L là trung điểm AN. Ta chú ý ABK và CAN đồng dạng có phân giác tương ứng là BK và CJ. Nên $\dfrac{BK}{2BI} = \dfrac{AN}{2AJ} = \dfrac{AL}{AJ}$ (2).

Ta dễ thấy $\angle BAN = \angle BAH + \angle HAN = \angle ACB + \angle NAC = \angle ANB$ do đó tam giác ABN cân. Vậy B, I, K, L thẳng hàng (3).

Từ (1),(2),(3) theo định lý Thales đảo thì $MJ \parallel IL \perp AN$. Tương tự $NI \perp AN$. Vậy trong tam giác AMN các đường cao MJ, IN, AH đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải sau sử dụng thêm kiến thức lớp 9 có phần nhẹ nhàng hơn

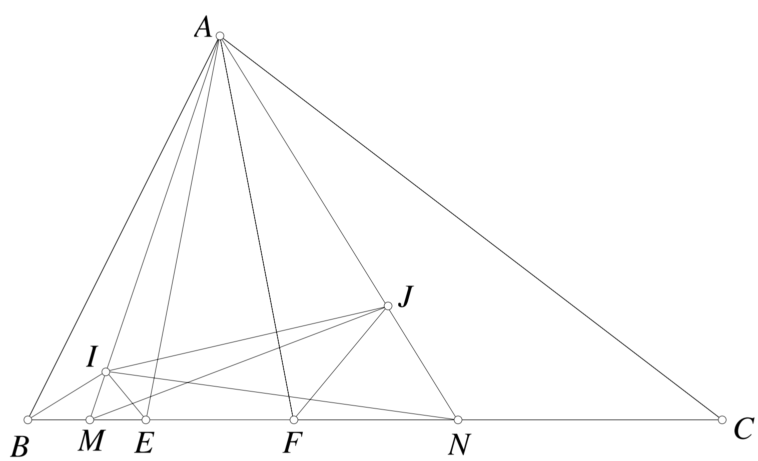


Hình 11.

Lời giải 2. Ta dễ thấy $\angle MAN = \dfrac{1}{2}\angle BAC = 45^\circ = \angle JHC$ nên tứ giác $AMHJ$ nội tiếp. Từ đó $\angle AJM = \angle AHM = 90^\circ$ vậy $MJ \perp AN$. Tương tự $NI \perp AN$. Vậy trong tam giác AMN các đường cao MJ, IN, AH đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải thứ 2 xem ra ngắn gọn hơn lời giải thứ nhất nhưng lại dùng kiến thức cao hơn. Ý chính của bài toán là tập trung chứng minh $MJ \perp AN$, từ đây ta dễ thấy tứ giác $MIJN$ nội tiếp, đây cũng là một ý hay từ đề toán gốc. Ta có thể mở rộng bài toán như sau

Bài toán 13. Cho tam giác ABC có các điểm E, F lần lượt thuộc tia CB, BC sao cho tam giác $\angle BAF = \angle BCA, \angle CAE = \angle ABC$. I, J là tâm nội tiếp tam giác ABE, ACF. AI, AJ cắt BC tại M, N. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, I, J cùng thuộc một đường tròn.



Hình 12.

Lời giải. Không mất tổng quát giả sử vị trí các điểm như hình vẽ, các trường hợp khác ta làm tương tự. Ta có $\angle EAF = 180^\circ - \angle AEF - \angle AFE = 180^\circ - (\angle ABC + \angle BAE) - (\angle ACB + \angle CAF) = 180^\circ - (\angle ABC + \angle ABC - \angle ABC) - (\angle ACB + \angle ABC - \angle ACB) = 180^\circ - 2\angle BAC$. Từ đó $\angle IAJ = \angle IAF + \angle EAF + \angle FAJ = \dfrac{1}{2}(\angle BAC - \angle ABC) + (180^\circ - 2\angle BAC) + \dfrac{1}{2}(\angle BAC - \angle ACB) = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BAC$.

Từ đó $2\angle JFN = \angle AFC = \angle ABC + \angle BAF = \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle BAC = 2\angle IAJ$. Từ đó tứ giác $AJFM$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $AIEN$ nội tiếp. Từ đó ta có $\angle IMJ = \angle AFJ = \frac{1}{2}\angle AFN = \frac{1}{2}\angle AEM = \angle IEA = \angle INJ$ suy ra tứ giác $IJNM$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

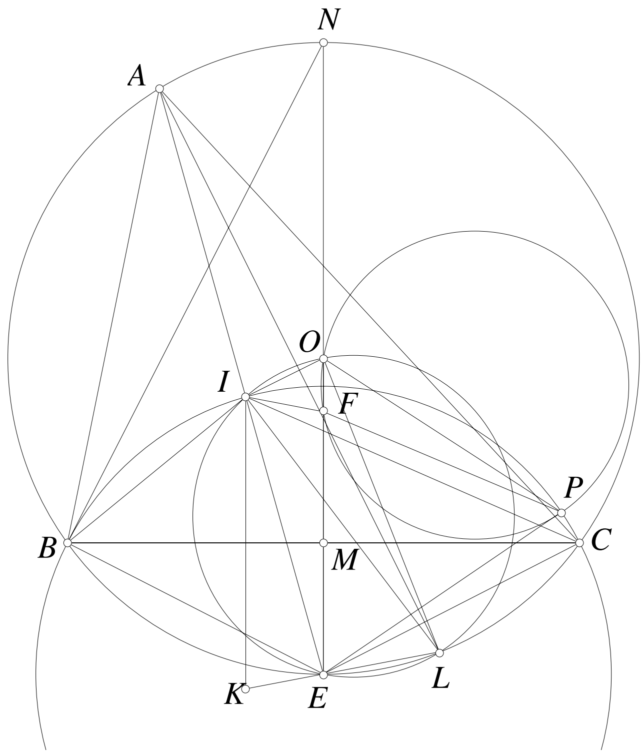
Nhận xét. Cách giải dùng tứ giác nội tiếp có hiệu lực hơn trong trường hợp tổng quát.

Tiếp tục đề thi vào trường PTNK năm 2015 [3] có bài toán hình học có nội dung như sau (đề bài giữ một số ý tưởng trong đề gốc nhưng được tác giả chỉnh sửa lại một chút cho đẹp hơn)

Bài toán 14. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I và nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn qua O, I tiếp xúc IA cắt trung trực BC tại F khác O. P là một điểm di chuyển trên đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

a) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF luôn đi qua điểm E cố định khi P thay đổi.

b) Gọi K đối xứng I qua BC. KE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác OIE tại L khác E. Chứng minh rằng L nằm trên (O).



Hình 13.

Lời giải. a) Gọi AI cắt (O) tại E khác A thì E là tâm ngoại tiếp tam giác IBC. Từ đó $EP^2 = EI^2 = EO.EF$. Từ đó EP tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác POF hay tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua E cố định.

b) Gọi M là trung điểm BC và EN là đường kính của (O). Từ hệ thức lượng trong tam giác vuông ta thấy $EF.EO = EI^2 = EB^2 = EM.EN = EM.2EO$. Từ đó $EF = 2EM$ như vậy E và F đối xứng nhau qua BC. Từ đó $IFEK$ là một hình thang cân. Ta có biến đổi góc $\angle OLE = \angle IOA =$

$180° - \angle EIO = 180° - \angle IFE = \angle IFO = \angle IKE = \angle OEL$. Từ đó tam giác $OL = OE$ nên L thuộc (O). □

Nhận xét. Ý a) chủ yếu dùng để phát hiện điểm E, vì yếu tố cố định không có mặt trong đề bài nên bài toán có phần thú vị. Ý b) sau khi chỉ ra được hai điểm đối xứng chỉ là bước đầu. Bước sau dùng biến đổi góc để chỉ ra tam giác cân và chứng minh điểm thuộc đường tròn bằng định nghĩa là một ý rất thú vị, vì thường khi biến đổi góc để chứng minh điểm thuộc đường tròn ta chỉ hay suy nghĩ đi chứng minh góc nnội tiếp bằng nhau rồi để đưa về tứ giác nội tiếp. Ý b) tác giả xây dựng lại từ hai ý bài toán gốc dựa trên một kết quả đã có trong kỳ thi thử vào chuyên KHTN năm 2012. Ta chú ý rằng có một hệ quả thú vị của ý b) chính là chứng minh $AL \perp OI$, các bạn hãy thử như một bài luyện tập.

Lời kết. Các đề thi toán chuyên của trường PTNK từ năm 1999 tới 2015 có nhiều bài toán hay có ý tưởng. Trong bài viết không bao quát hết tất cả các bài toán hình học trong 15 năm vì ở đây tác giả chỉ chọn lọc ra các bài toán mà theo ý chủ quan của tác giả là hay và mang ý nghĩa. Quan điểm hình học đẹp được thể hiện xuyên suốt bài viết do đó một số bài toán có nội dung cực trị, bất đẳng thức hoặc tính toán cũng không được đề cập tới. Bài viết có mục đích mang lại một cái nhìn khác lạ hơn cho các đề toán thi. Bài viết cũng không thể tránh khỏi thiếu sót, mong nhận được sự góp ý của bạn đọc.

Tài liệu

[1] Đề thi toán chuyên PTNK 1999 - 2013 tại
http://www.ptnk.edu.vn/kqts/dethi/De_thi_tuyen_sinh_lop_10_mon_Toan_chuyen.pdf

[2] Đề thi toán chuyên PTNK 2014 tại http://diendantoanhoc.net/home

[3] Đề thi toán chuyên PTNK 2015 tại http://diendantoanhoc.net/home

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Bài hình học thi IMO năm 2014 ngày 1

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và mở rộng bài hình học thi IMO năm 2014 ngày 1 bằng các công cụ hình học thuần túy.

Năm 2014 kỳ thi IMO năm 2014 ngày thứ 1 có bài toán hay như sau

Bài 1. Cho tứ giác $ABCD$ lồi với $\angle ABC = \angle CDA = 90^\circ$. H là hình chiếu của A lên BD. Các điểm S, T thuộc cạnh AB, AD sao cho H nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác CST và $\angle CHS - \angle CSB = 90^\circ$, $\quad \angle THC - \angle DTC = 90^\circ$. Chứng minh rằng BD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HST.

Trong [1] cũng dẫn ra nhiều lời giải. Đáng chú ý là lời giải của nick name leader có ý tưởng rất đặc sắc. Với ý tưởng đó tôi xin nêu ra một bài toán tổng quát đồng thời thêm hai ý khai thác nữa kết quả có ý nghĩa này.

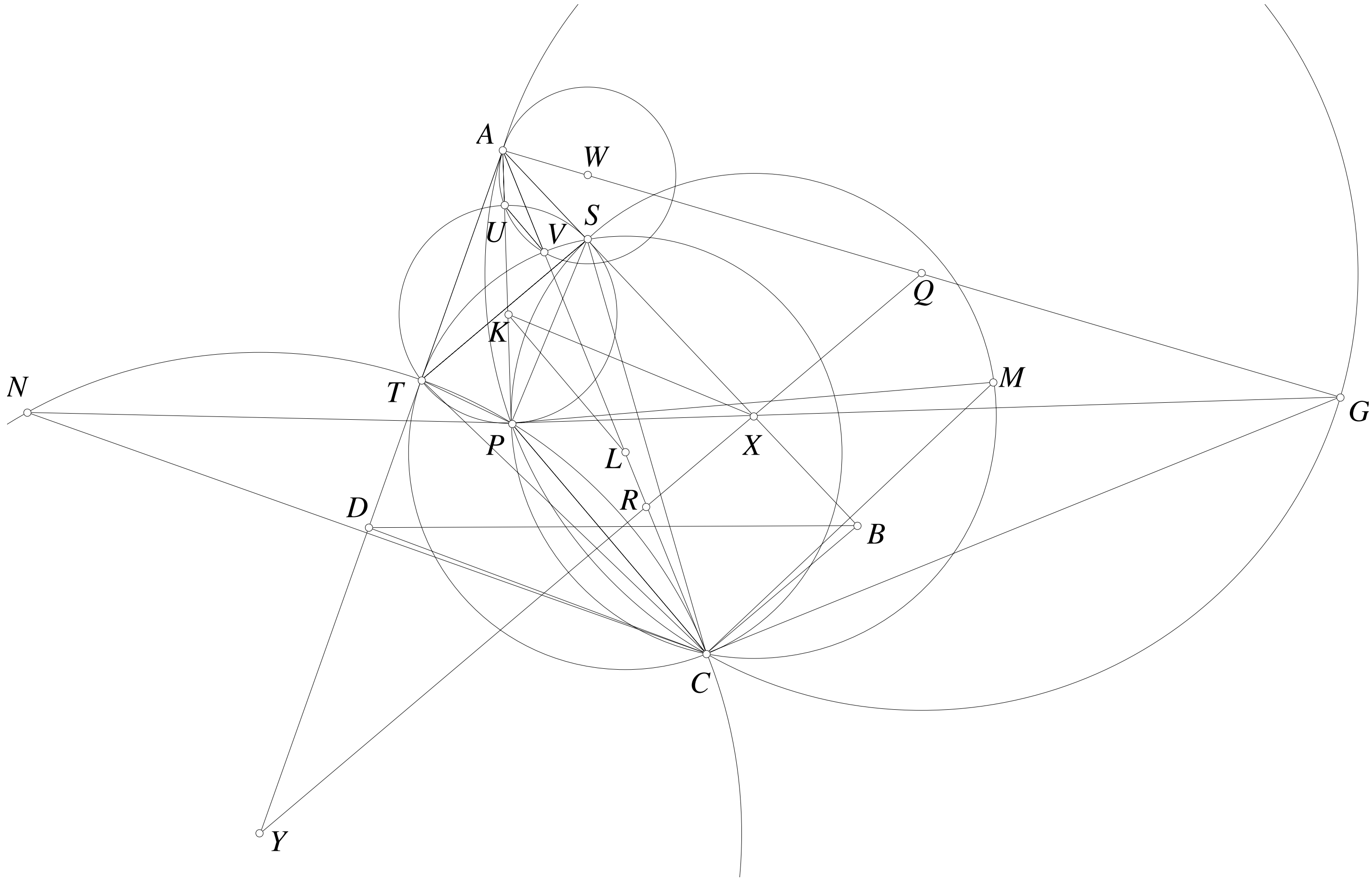
Bài 2. Cho tứ giác $ABCD$ lồi. P là điểm nằm trong tam giác ABD sao cho $\angle PAD = \angle CAB$. Các điểm S, T thuộc các cạnh AB, AD sao cho $\angle CPS - \angle CSB = \angle CPT - \angle CTD = 90^\circ$ và P nằm trong tam giác CST.

a) Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PST thuộc AP.

b) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PST và tiếp tuyến tại C của đường tròn ngoại tiếp tam giác CST cắt nhau tại điểm G trên đường tròn ngoại tiếp tam giác APC.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác PST cắt AP tại U khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CST cắt AC tại V khác C. Chứng minh rằng AG đi qua tâm ngoại tiếp tam giác AUV.

Lời giải. a) Gọi M, N là đối xứng của C qua AB, AD. Từ điều kiện đề bài $\angle CPS - \angle CSB = \angle CPT - \angle CTD = 90^\circ$ ta dễ thấy các tứ giác $CPSM$ và $CPTN$ nội tiếp với tâm tương ứng là X, Y. Ta phải chứng minh rằng trung trực của PS, PT đồng quy với PA. Thật vậy, áp dụng định lý Menelaus cho các tam giác PAS, PAT ta thấy điều phải chứng minh tương đương với $\dfrac{XS}{XA} = \dfrac{YT}{YA}$ hay $\dfrac{AX}{AY} = \dfrac{PX}{PY} = \dfrac{CX}{CY}$. Gọi XY cắt trung trực PA tại Q và cắt AC tại R. Ta có biến đổi góc $\angle XAQ = \angle PAQ - \angle PAX = (90^\circ - \dfrac{\angle AQP}{2}) - \angle CAD = 90^\circ - \angle ACP - \angle CAD = \angle YRC - \angle CAD = \angle AYX$. Từ đó ta thấy ngay QA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AXY nhưng Q lại là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác APC do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác APC là đường tròn Apollonious của đoạn XY. Ta có điều phải chứng minh.



Hình 1.

b) Theo a) ta dễ thấy tâm K của đường tròn ngoại tiếp tam giác PST thuộc AP. Một cách hoàn toàn tương tự tâm L của đường tròn ngoại tiếp tam giác CST thuộc AC. Tương đó dễ thấy tiếp tuyến tại P, C là các đường thẳng qua P vuông góc PA và qua C vuông góc CA nên chúng cắt nhau tại G chính là đối xứng của A qua Q thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác APC. Ta có điều phải chứng minh.

c) Từ việc áp dụng định lý Menelaus cho các tam giác PAS ta thấy $\frac{KP}{KA} = \frac{XS}{XA} = \frac{LP}{LA}$. Từ đó $KL \parallel PC$. Từ đó dễ thấy $UV \parallel KL \parallel PC$. Từ đó A và tâm ngoại tiếp của AUV và APC thẳng hàng. Nên tâm ngoại tiếp của AUV thuộc AG. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán 1 là bài số 3 trong ngày thi 1. Với vị trí đó bài toán là bài khó nhất trong ngày. Việc dựng thêm điểm đối xứng M, N là cách để khai thác giả thiết $\angle CPS - \angle CSB = \angle CPT - \angle CTD = 90$ một cách tốt nhất. Thực ra nếu không dựng thêm điểm đối xứng bằng cộng góc ta cũng có thể chỉ ra được tiếp tuyến tại S của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPS vuông góc với AC ý này tương đương với việc chỉ ra tâm của của đường tròn ngoại tiếp tam giác CPS thuộc AC, đó là một hướng khác khai thác giả thiết. Đoạn sau việc xử lý bằng đường tròn Apollonious theo tôi là cách xử lý hay nhất vì từ đó ta dễ dàng đạt được lời giải tương tự cho bài toán tổng quát. Bài toán thi IMO này là một bài toán rất hay có ý nghĩa.

Toàn bộ 3 ý của bài toán 2 có thể tóm gọn lại trong một bài toán như sau

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ lồi. P là điểm nằm trong tam giác ABD sao cho $\angle PAD = \angle CAB$. Các điểm S, T thuộc các cạnh AB, AD sao cho $\angle CPS - \angle CSB = \angle CPT - \angle CTD = 90^\circ$ và P nằm trong tam giác CST. Tếp tuyến tại P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PST và tiếp tuyến tại C của đường tròn ngoại tiếp tam giác CST cắt nhau tại điểm G. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PST cắt AP tại U khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CST cắt AC tại V khác C. Chứng minh rằng AG đi qua tâm ngoại tiếp tam giác AUV.

Đây là một bài toán khó suy ra từ bài toán IMO. Xung quanh bài toán này còn rất nhiều ý tưởng hay nữa. Xin dành điều đó cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] Đề thi IMO ngày 1 tại

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewforum.php?f=1098

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Xung quanh bài hình học số 4 trong kỳ thi IMO năm 2010

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

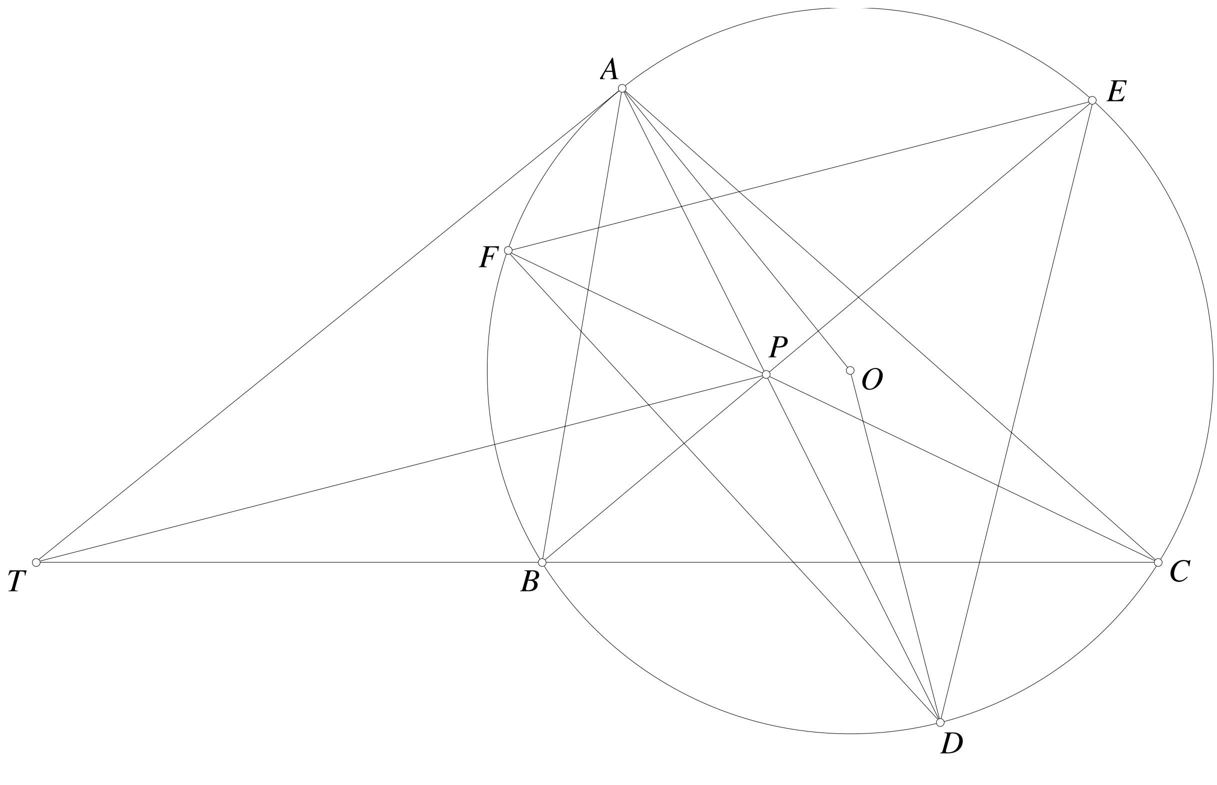
Bài viết xoay quanh bài toán số 4 thi IMO năm 2010 là một bài hình học hay nhiều ý nghĩa. Chúng tôi sẽ mở rộng và khai thác bài toán này với các lời giải thuần túy hình học. Cơ sở của bài viết này là [4].

1 Một số mở rộng

Trong kỳ thi IMO năm 2010 có bài toán số 4 là bài hình học như sau [1], ký hiệu được thay đổi đôi chút cho bài toán trở nên dễ hiểu

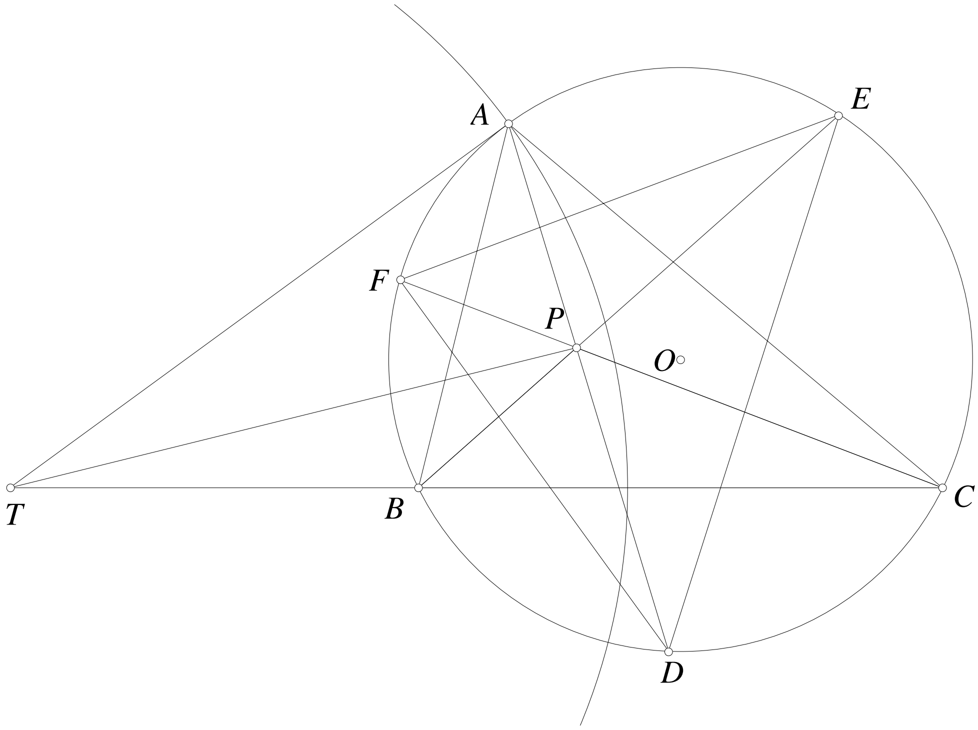
Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. Chứng minh rằng nếu $TA = TP$ thì $DE = DF$.

Bài toán trên theo sắp xếp trong đề thi là bài toán dễ nhất của ngày 2. Có rất nhiều lời giải được đề nghị trong [1] và cả trong shortlist. Sau đây tôi xin giới thiệu 2 lời giải. Một lời giải tôi cho là ngắn gọn nhất cho bài này có tham khảo trong [1] và một lời giải thứ 2 rất mới do tôi đề xuất. Và với lời giải thứ 2 ta hoàn toàn có thể nhìn bài toán dưới con mắt tổng quát.



Lời giải 1. Nếu $TA = TP$ thì do TA là tiếp tuyến của (O) nên $TP^2 = TA^2 = TB.TC$ do đó TP là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC. Từ đó $\angle TPB = \angle PCB = \angle PEF$

suy ra $TP \parallel EF$. Mặt khác các tam giác TAP và OAD cân tại T và O có cạnh bên $TA \perp OA$ dễ suy ra cạnh bên còn lại vuông góc là $TP \perp OD$. Vậy từ đó $OD \perp EF$ với O là tâm ngoại tiếp tam giác DEF nên tam giác DEF cân tại D. Ta có điều phải chứng minh. □



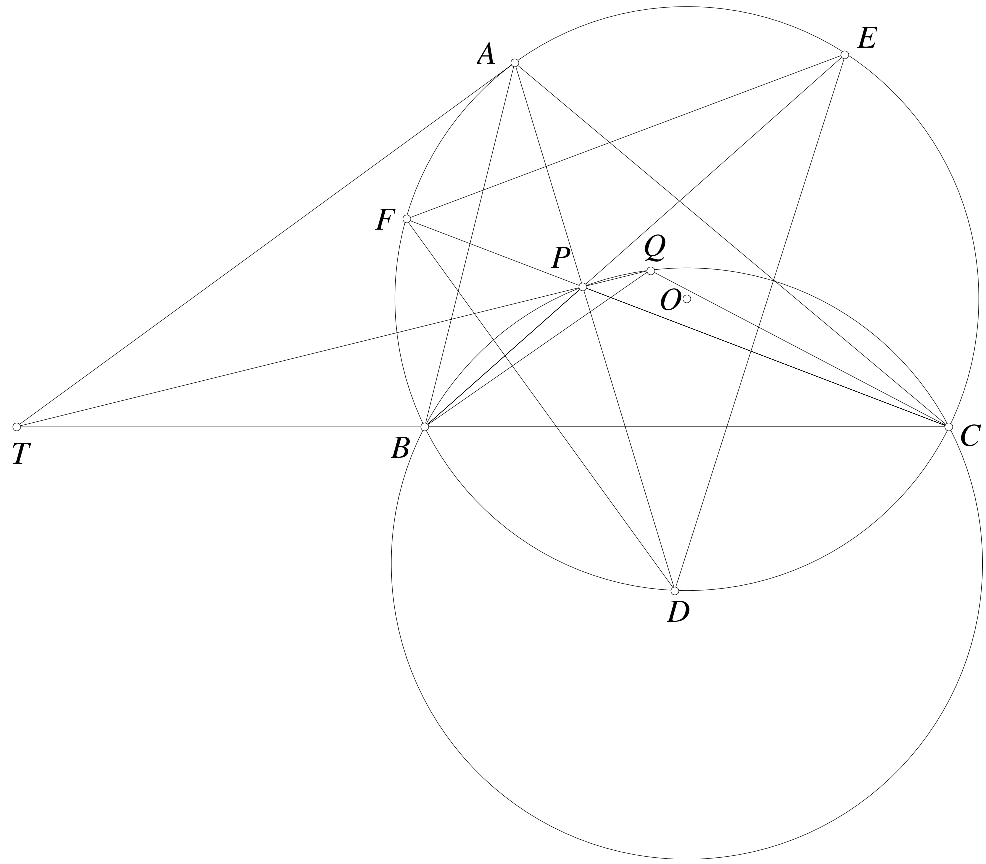
Lời giải 2. Ta có các tam giác đồng dạng PAB và PED nên $\frac{PB}{PD} = \frac{AB}{DE}$. Tương tự $\frac{PC}{PD} = \frac{AC}{DF}$. Từ hai tỷ số này suy ra $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}.\frac{DF}{DE}$ hay $\frac{DF}{DE} = \frac{PB}{AB} : \frac{PC}{AC}$.
Đến đây ta chú ý đường tròn (T, TA) chính là đường tròn Apollonius ứng với A của tam giác ABC nên $TA = TP$ khi và chỉ khi P thuộc (T, TA) khi và chỉ khi $\frac{PB}{AB} = \frac{PC}{AC}$ khi và chỉ khi $DF = DE$. □

Nhận xét. Lời giải 1 dựa vào tính chất tiếp tuyến và cộng góc ngắn gọn. Lời giải 2 thực chất dài hơn vì cần đến hiểu biết về đường tròn Apollonius cùng với một số tính chất của đường tròn này. Tuy nhiên qua lời giải 2 ta thấy ngay được bản chất vấn đề là từ đường tròn Apollonius. Nhờ lời giải trên ta dễ dàng đưa ra bài toán đảo như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. Chứng minh rằng nếu $DE = DF$ thì $TA = TP$.

Từ đó ta có thể đề xuất bài toán như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. TP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tại Q khác P. Chứng minh rằng $\frac{DF^2}{DE^2} = \frac{PB}{PC} : \frac{QB}{QC}$.



Lời giải. Tương tự như lời giải 2 ta đã có $\frac{DF}{DE}=\frac{PB}{AB}:\frac{PC}{AC}$ (1).
Từ các tam giác đồng dạng có bản ta có $\frac{PB}{QC}=\frac{TB}{TQ},\frac{QB}{PC}=\frac{TQ}{TC}$. Từ đó $\frac{TB}{TC}=\frac{PB}{PC}.\frac{QB}{QC}$. Mặt khác theo tính chất tiếp tuyến thì $\frac{TB}{TC}=\frac{AB^2}{AC^2}$. Vậy $\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{PB}{PC}.\frac{QB}{QC}$ (2).
Từ (1),(2) suy ra $\frac{DF^2}{DE^2}=\frac{AC^2}{AB^2}.\frac{PB^2}{PC^2}=\frac{QC}{QB}:\frac{PB}{PC}.\frac{PB^2}{PC^2}=\frac{PB}{PC}:\frac{QB}{QC}$. Ta có điều phải chứng minh. □

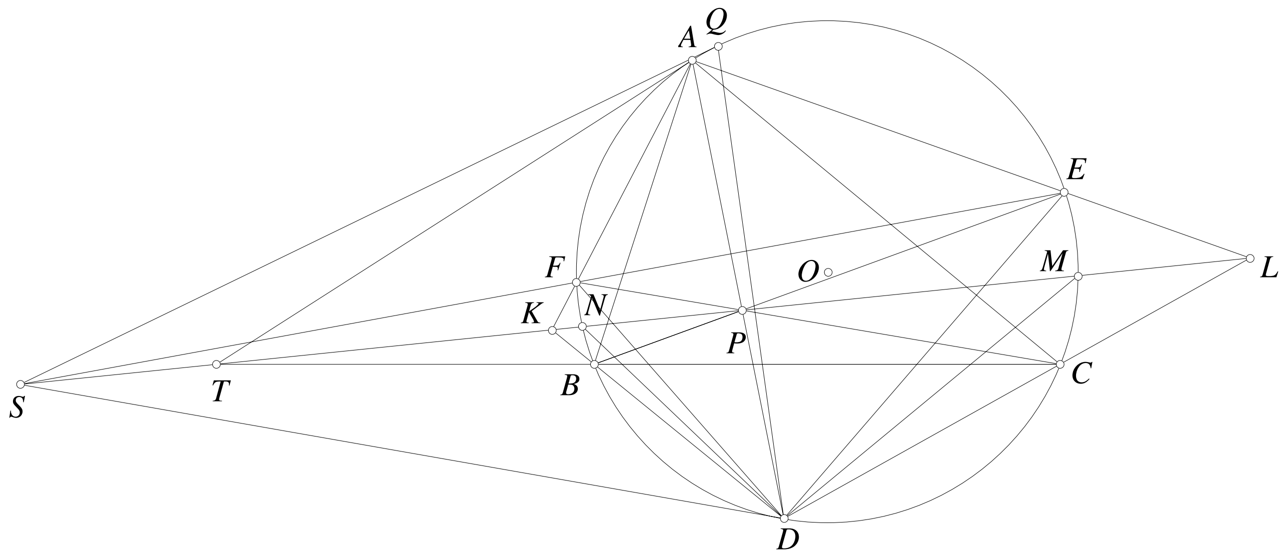
Nhận xét. Bài toán trên là một mở rộng của bài IMO khi mà $TA=TP$ thì $P\equiv Q$ ta thu được kết quả bài IMO. Như vậy lời giải 2 làm ta tổng quát được vấn đề. Để ý kỹ với cách làm hoàn toàn tương tự ta có thể tổng quát hơn nữa như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA,PB,PC cắt (O) lần lượt tại D,E,F khác A,B,C. T là một điểm bất kỳ trên đường thẳng BC. TA,TP lần lượt cắt (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tại G,Q khác A,P. Chứng minh rằng

$$\frac{DF^2}{DE^2}=\left(\frac{GB}{GC}:\frac{AB}{AC}\right).\left(\frac{PB}{PC}:\frac{QB}{QC}\right).$$

Ta thấy nếu TA tiếp xúc (O) thì $A\equiv G$ ta thu được bài toán 2. Chúng ta tiếp tục tìm cách mở rộng bài toán 1. Trong [2] tác giả có đề xuất một bài toán mở rộng khác như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA,PB,PC cắt (O) lần lượt tại D,E,F khác A,B,C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. TP cắt (O) tại M,N. Chứng minh rằng tam giác DEF và tam giác DMN có chung đường đối trung.



Lời giải sau sử dụng ý tưởng trong [2] được tác giả làm gọn hơn

Lời giải. Gọi AF giao BD tại K áp dụng định lý Pascal cho $\begin{pmatrix} A & B & F \\ C & A & D \end{pmatrix}$ suy ra K, P, T thẳng hàng. Tương tự L, P, T thẳng hàng, vậy K, L thuộc TP (1).

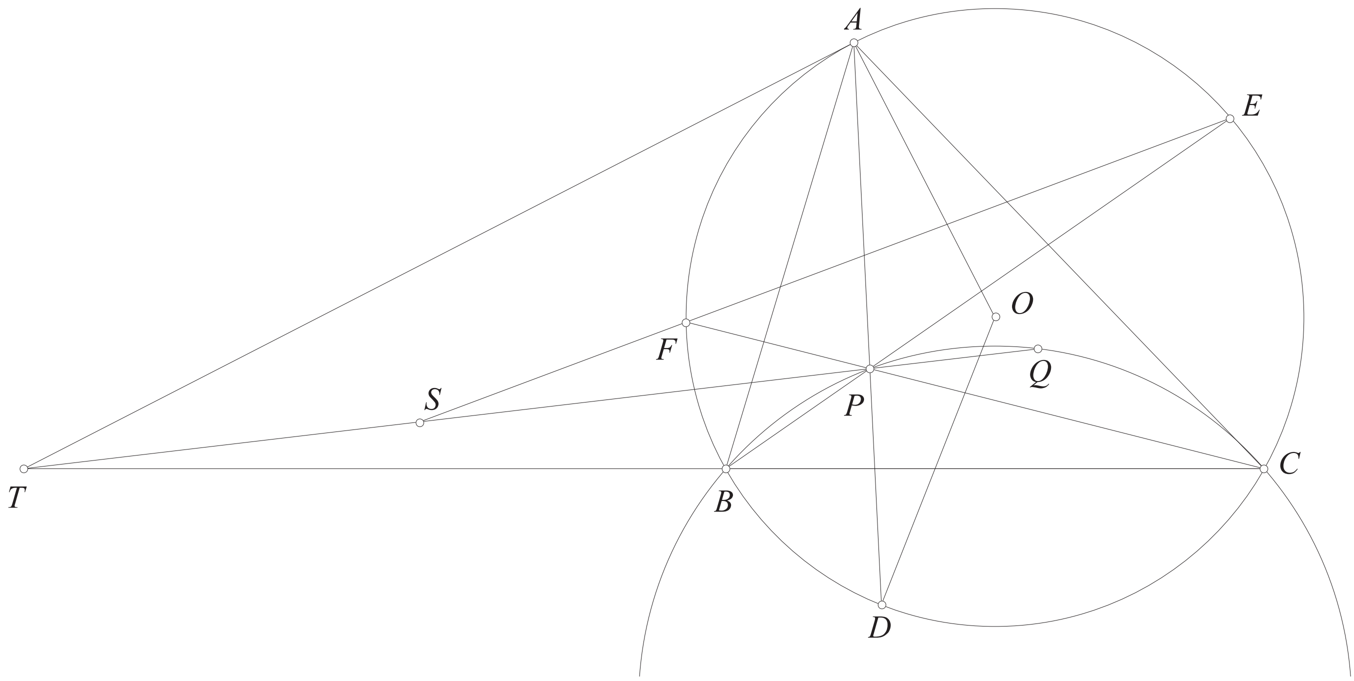
Gọi tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại S. Áp dụng định lý Pascal cho $\begin{pmatrix} D & F & B \\ E & D & A \end{pmatrix}$ suy ra S, K, P thẳng hàng. Tương tự S, L, P thẳng hàng, vậy K, L thuộc SP (2).

Từ (1),(2) suy ra S thuộc MN. Từ đây nếu gọi SQ là tiếp tuyến của (O) khác SD thì các tứ giác $DMQN$ và $DEQF$ điều hòa hay các tam giác DMN và DEF có cùng đường đối trung DQ. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Nếu $TA = TP$ thì dễ có $TP \perp OD$ nên tam giác DMN cân và có OD là đường đối trung nên DEF cũng có OD là đường đối trung nên DEF cân. Bài toán trên là một mở rộng đẹp của bài toán 1 theo kiểu tìm bất biến.

2 Một số ứng dụng vào các bài toán khác nhau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. TP cắt EF tại S. Giả sử $\frac{SE}{SF}$ không đổi. Chứng minh rằng P luôn nằm trên một đường tròn cố định.



Lời giải. Gọi PT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC tại Q khác P. Xét phép nghịch đảo tâm P với phương tích $k = \overline{PA}.\overline{PD} = \overline{PB}.\overline{PE} = \overline{PC}.\overline{PF}$. Khi đó đường tròn (PBC) sẽ biến thành đường thẳng EF. Vì đường thẳng PT là không đổi qua nghịch đảo cực P nên giao điểm Q của PT và (PBC) sẽ biến thành giao điểm S của PT và EF. Theo bài toán 3 thì $\frac{DF^2}{DE^2} = \frac{PB}{PC} : \frac{QB}{QC}$, qua nghịch đảo ta thu được

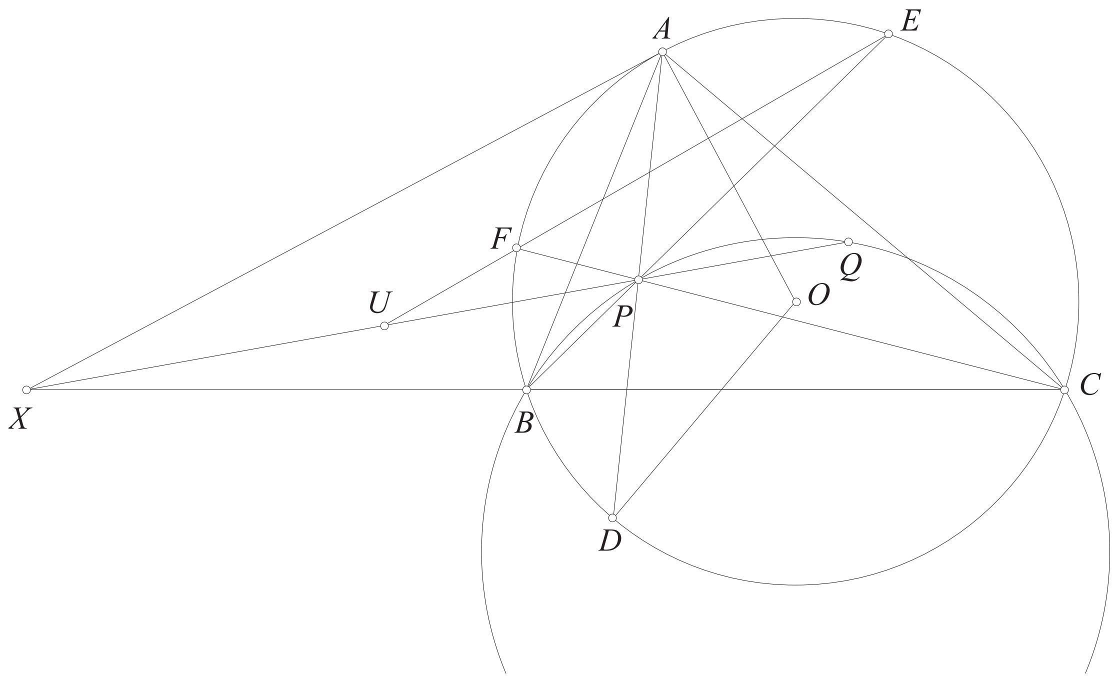
$$\left(\frac{\frac{|k|AC}{PA.PC}}{\frac{|k|AB}{PA.PB}}\right)^2 = \frac{|k|/PE}{|k|/PF} : \left(\frac{\frac{|k|SE}{PQ.PF}}{\frac{|k|SF}{PQ.PE}}\right).$$

Ta thu được

$$\frac{AC^2}{AB^2} : \frac{PC^2}{PB^2} = \frac{SF}{SE}.$$

Từ đó nếu P thay đổi mà $\frac{SE}{SF}$ không đổi thì $\frac{PB}{PC}$ không đổi nên P thuộc đường tròn Apollonius dựng trên đoạn BC ứng với tỷ số $\frac{PB}{PC} = \frac{SF}{SE}.\frac{AB^2}{AC^2}$. $\square$

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A, B, C của (O) cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z. Chứng minh rằng PX, PY, PZ lần lượt cắt EF, FD, DE theo ba điểm thẳng hàng.



Lời giải thứ nhất. Gọi PX, PY, PZ lần lượt cắt EF, FD, DE tại U, V, W. Theo kết quả chứng minh bài toán 6 thì $\frac{UE}{UF} = \frac{AB^2}{AC^2} : \frac{PB^2}{PC^2}$, tương tự với V, W. Nhân các tỷ số tương ứng và chú ý U, V, W luôn nằm ngoài các đoạn EF, FD, DE nên U, V, W thẳng hàng. $\square$

Lời giải sau được đề nghị bởi bạn **Đỗ Xuân Long** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN

Lời giải thứ hai. Ta biến đổi tỷ số
$\frac{UE}{UF} = \frac{[PUE]}{[PUF]} = \frac{[PUE]}{[PXB]} \cdot \frac{[PXB]}{[PXC]} \cdot \frac{[PXC]}{[PUF]} = \frac{PU.PE}{PX.PB} \cdot \frac{XB}{XC} \cdot \frac{PX.PC}{PU.PF} = \frac{XB}{XC} \cdot \frac{PE}{PF} : \frac{PB}{PC} = \frac{XB}{XC} : \frac{PB^2}{PC^2}$.
Từ đó tương tự với V, W và các tỷ số tương ứng và chú ý U, V, W luôn nằm ngoài các đoạn EF, FD, DE nên U, V, W thẳng hàng. $\square$

Chú ý. Từ cách làm thứ hai ta có thể thay X, Y, Z bởi ba điểm thẳng hàng bất kỳ lần lượt trên BC, CA, AB bài toán vẫn đúng. Một hệ quả thú vị khi quay trở lại mô hình ban đầu cũng bằng phép nghịch đảo ta có bài toán sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A, B, C của (O) cắt BC, CA, AB lần lượt tại X, Y, Z. PX, PY, PZ lần lượt cắt đường tròn $(PBC), (PCA), (PAB)$ lần lượt tại U, V, W. Chứng minh rằng bốn điểm P, U, V, W cùng thuộc một đường tròn.

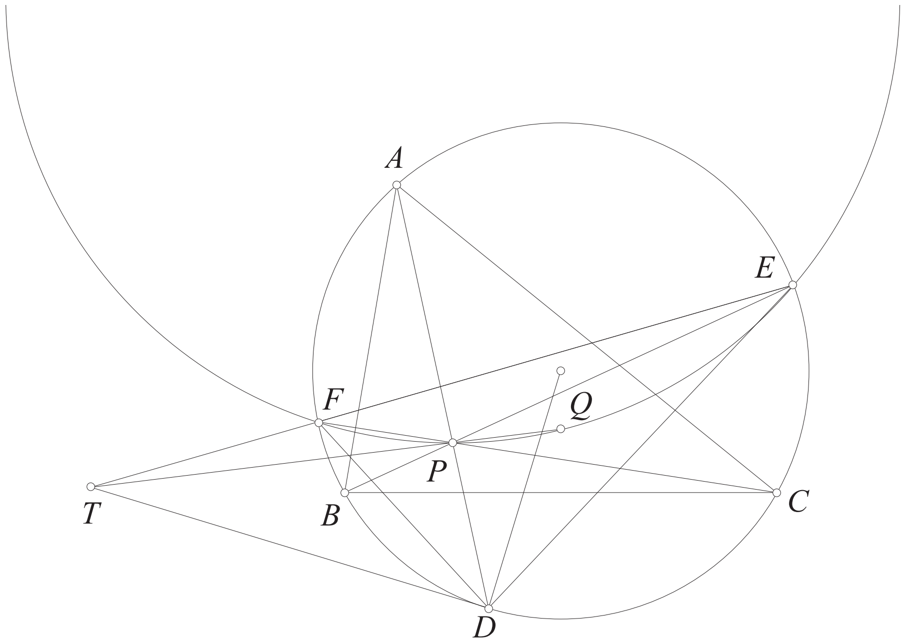
Lời giải. Theo cách chứng minh bài toán 6 thì qua nghịch đảo cực P phương tích $k = \overline{PA}.\overline{PD} = \overline{PB}.\overline{PE} = \overline{PC}.\overline{PF}$. thì U, V, W lần lượt biến thành giao điểm của PX, PY, PZ với EF, FD, DE. Theo bài toán 7 thì các giao điểm đó thẳng hàng nên bốn điểm P, U, V, W đồng viên. $\square$

Ta hoàn toàn có thể mở rộng hơn như sau

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. X, Y, Z thẳng hàng và lần lượt thuộc BC, CA, AB. PX, PY, PZ lần lượt cắt đường tròn $(PBC), (PCA), (PAB)$ lần lượt tại U, V, W. Chứng minh rằng bốn điểm P, U, V, W cùng thuộc một đường tròn.

Chú ý rằng sử dụng bài toán 4 ta dễ dàng mở rộng các bài toán mới xây dựng trên cho các cát tuyến thay vì tiếp tuyến. Tiếp tục sử dụng bài toán 3, ta thu được bài toán sau

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. TP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P. Chứng minh rằng tỷ số $\frac{PE}{PF} : \frac{QE}{QF}$ luôn không đổi với mọi P.

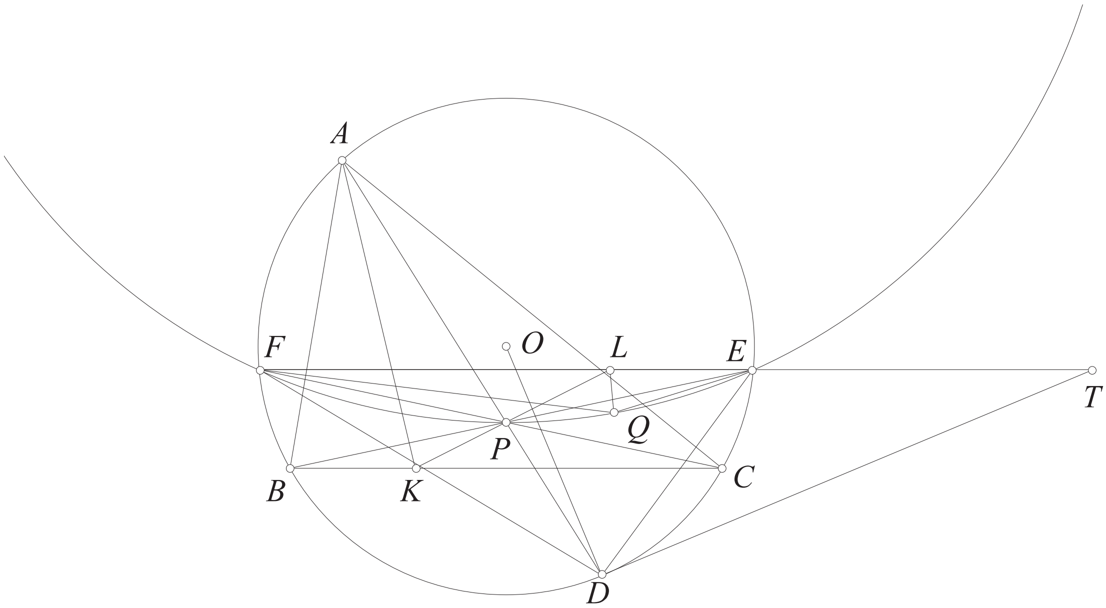


Lời giải. Áp dụng bài toán 3 vào tam giác DEF, ta thu được $\frac{PE}{PF} : \frac{QE}{QF} = \frac{AC^2}{AB^2}$ không đổi. □

Ta có hệ quả đơn giản là hai bài toán sau

Bài toán 11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ di chuyển trên trung trực BC. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. TP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P. Chứng minh rằng tỷ số $\frac{QE}{QF}$ luôn không đổi khi P thay đổi.

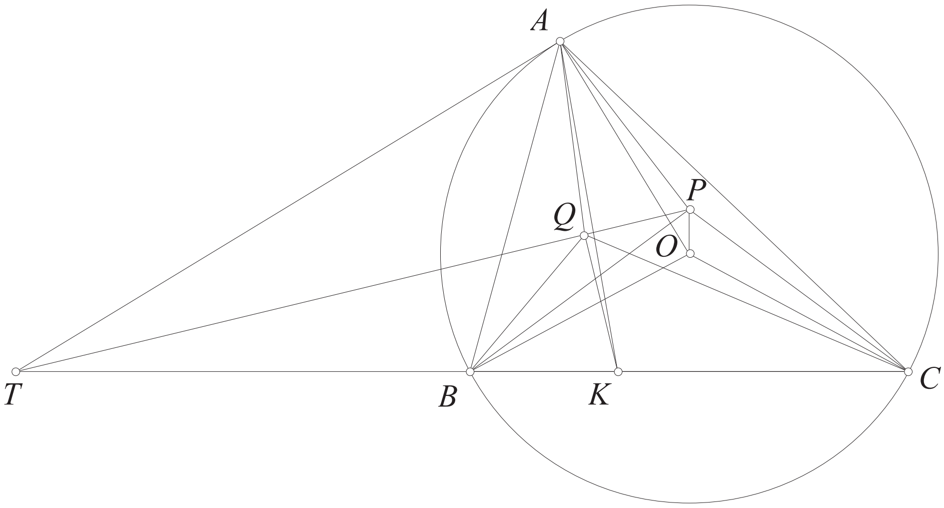
Bài toán 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ di chuyển trên trung trực BC. PA, PB, PC cắt (O) lần lượt tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. TP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF tại Q khác P. AK là đường đối trung của tam giác ABC. KP cắt EF tại L. Chứng minh rằng $QL \perp QP$.



Lời giải. Theo bài toán 9 $\frac{PE}{PF} : \frac{QE}{QF} = \frac{AC^2}{AB^2}$, ta lại dễ thấy $PE = PF$ và $EF \parallel BC$ nên ta thu được $\frac{QF}{QE} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{KB}{KC} = \frac{LF}{LE}$. Từ đó QL là phân giác $\angle EQF$, mặt khác QP là phân giác ngoài tam giác EQF nên $QL \perp QP$. □

Bài toán sau có tính chất tương tự

Bài toán 13. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm nằm trong tam giác nằm trên trung trực BC. Lấy điểm Q trên đường tròn (PBC) và nằm trong tam giác sao cho $\angle PQA + \angle OAP = 90°$. Gọi AK là đường đối trung của tam giác ABC. Chứng minh rằng $\angle AQK + \angle OAP = 180°$.



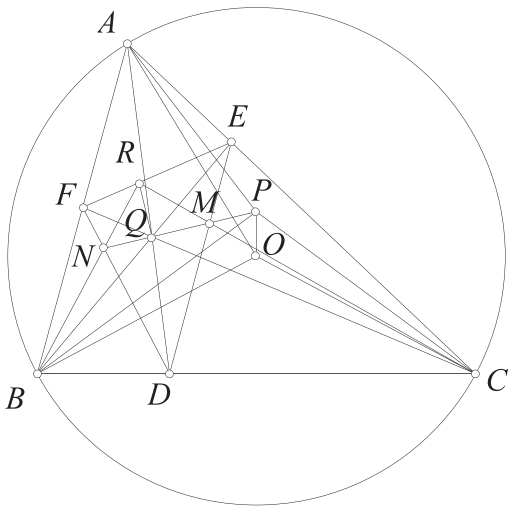
Lời giải. Gọi tiếp tuyến tại A của (O) cắt PQ tại T. Ta có $\angle TQA = 180° - \angle AQP = 180° - (90° - \angle PAO) = 90° + \angle PAO = OAT + \angle PAO = \angle PAT$. Từ đó AT cũng là tiếp tuyến của đường tròn (APQ) nên là trục đẳng phương của (O) và (APQ). PQ là trục đẳng phương của (APQ) và (PBC) còn BC là trục đẳng phương của (PBC) và (O). Từ đó AT, PQ, BC đồng quy hay T thuộc BC. Từ đó $\frac{KB}{KC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{TB}{TC} = \frac{QB}{QC} \cdot \frac{PB}{PC} = \frac{QB}{QC}$. Vậy QK là phân giác

$\angle BQC$ hay $\angle PQK = 90°$. Vậy $\angle AQK + \angle OAP = 90° + \angle PQA + \angle OAP = 90° + 90° = 180°$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này là mở rộng trực tiếp một bài toán quen thuộc về đường đối trung trong đó có sử dụng kỹ thuật tương tự trong cách chứng minh bài toán 3.

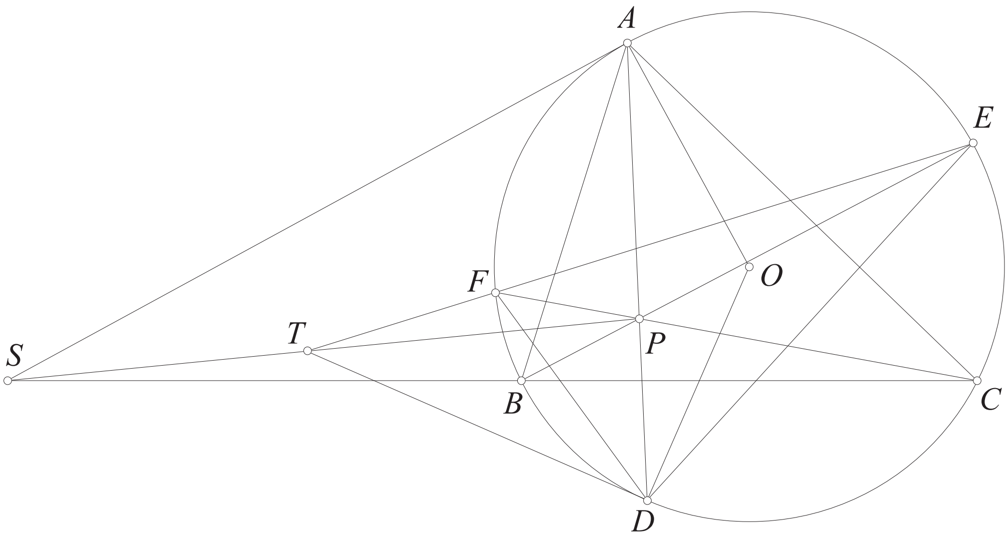
Bài toán 14. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm nằm trong tam giác nằm trên trung trực BC. Lấy điểm Q trên đường tròn (PBC) và nằm trong tam giác sao cho $\angle PQA + \angle OAP = 90°$. QA, QB, QC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. DE, DF lần lượt cắt PQ tại M, N. Chứng minh rằng BN, CM, EF đồng quy tại R và $\angle RQA = \angle PAO$.

Lời giải sau được đề nghị bởi bạn **Huỳnh Bách Khoa** lớp 10 toán, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận.



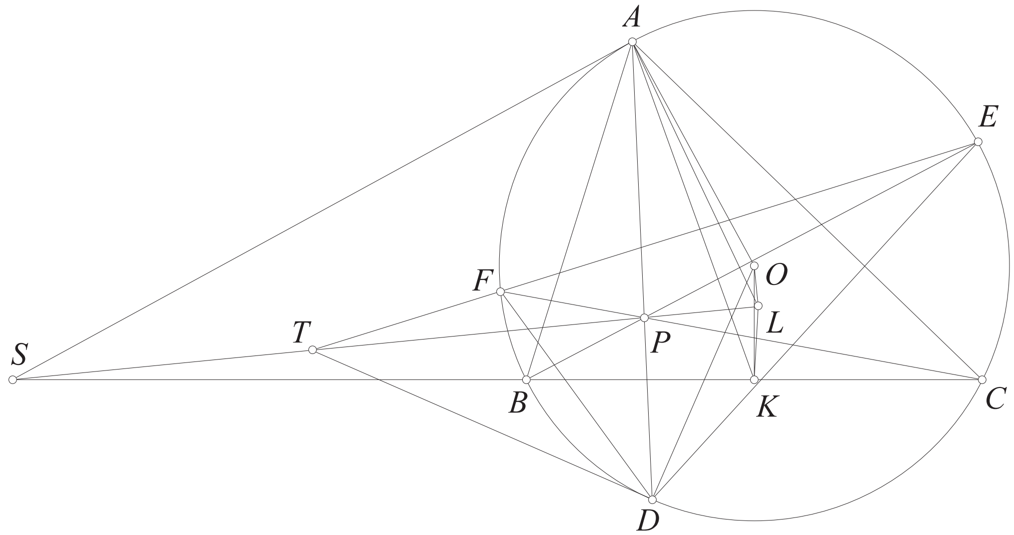
Lời giải. Dễ thấy BN, CM, EF đồng quy tại R theo định lý Pappus đảo. Ngoài ra ta có biến đổi tỷ số kép $Q(RP, BC) = N(RQ, EF) = N(BQ, EF) = -1$, mà QP là phân giác ngoài góc BQC nên $QR \perp PQ$. Do đó $\angle RQA = 90° - \angle AQP = \angle PAO$ □

Bài toán 15. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm bất kỳ và PA, PB, PC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. Chứng minh rằng đường thẳng PT luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.



Lời giải. Áp dụng cách chứng minh bài toán 5 vào tam giác DEF thì PT luôn đi qua giao điểm S của tiếp tuyến qua A của (O) với BC, điểm đó hiển nhiên cố định. □

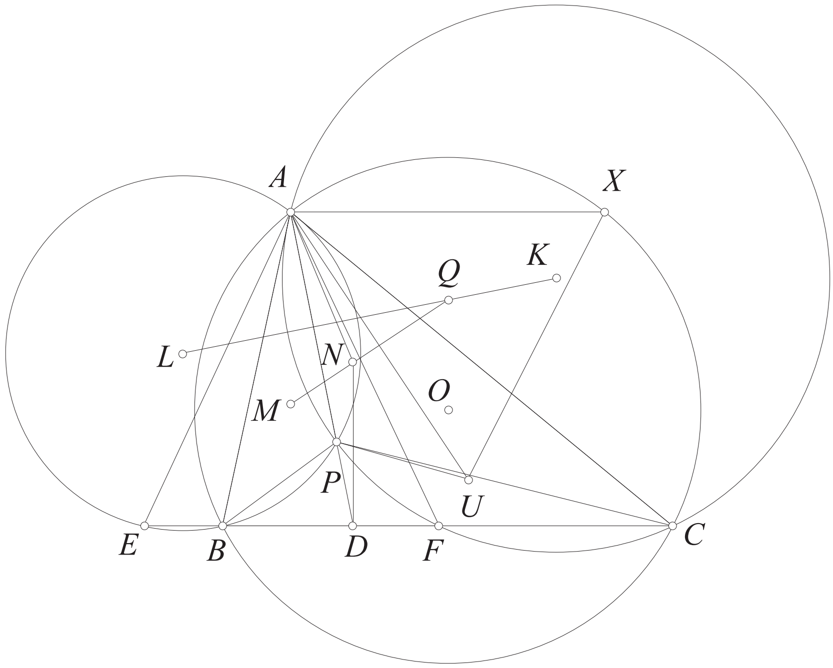
Bài toán 16. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm bất kỳ và PA, PB, PC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. K, L là hình chiếu của O lên BC, PT. Chứng minh rằng bốn điểm A, O, K, L cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải. Áp dụng cách chứng minh bài toán 5 vào tam giác DEF thì PT luôn đi qua giao điểm S của tiếp tuyến qua A của (O) với BC. Dễ thấy các điểm A, O, L đều nhìn OS dưới góc vuông nên A, O, K, L cùng thuộc một đường tròn. □

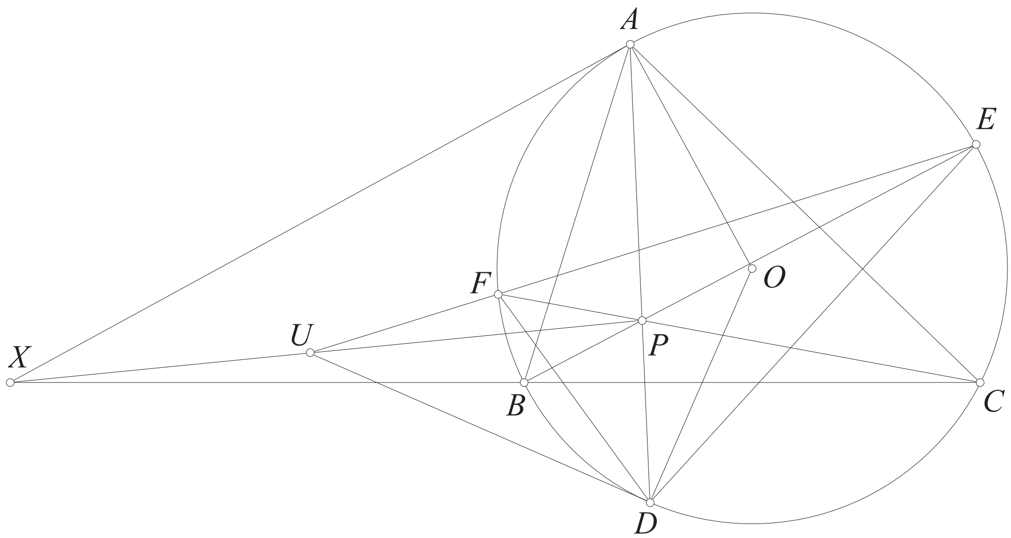
Nhận xét. Mặc dù hai bài toán trên khi để cạnh nhau làm ta thấy hiển hiên nhưng khi tách rời mỗi bài lại có một giá trị và ý nghĩa riêng.

Bài toán 17. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ trong tam giác. Đường tròn $(K), (L)$ lần lượt ngoại tiếp các tam giác PAC, PAB lần lượt cắt BC tại F, E khác C, B. M là tâm ngoại tiếp tam giác AEF. PA cắt BC tại D. Trung trực AD cắt đường thẳng qua D vuông góc BC tại N. MN cắt KL tại Q. Chứng minh rằng Q nằm trên trung trực BC.



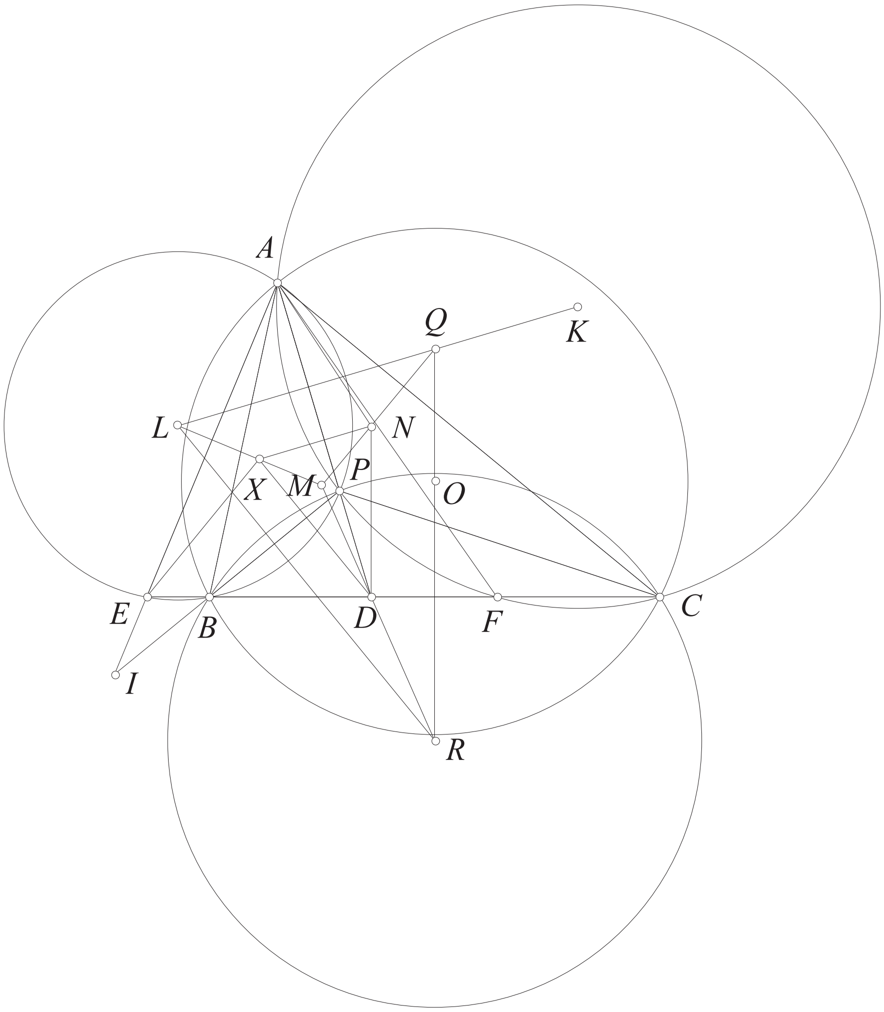
Lời giải. Gọi U đối xứng với A qua MN dễ thấy Q là tâm ngoại tiếp tam giác APU. Gọi X đối xứng A qua trung trực BC. Ta sẽ chứng minh bốn điểm A, P, U, X đồng viên khi đó hiển nhiên Q là tâm của đường tròn đi qua A, P, U, X nên Q nằm trên trung trực AX hay cũng là trung trực BC, thật vậy. Ta chú ý rằng U là giao điểm của đường tròn (M) ngoại tiếp tam giác AEF và đường tròn (N) qua A, D tiếp xúc với BC tại D. Từ đó sử dụng phép nghịch đảo cực A phương tích bất kỳ ta chuyển về bài toán sau

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm bất kỳ và PA, PB, PC cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại X. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại U. Chứng minh rằng P, U, X thẳng hàng.



Đây chính là nội dung bài toán 14. □

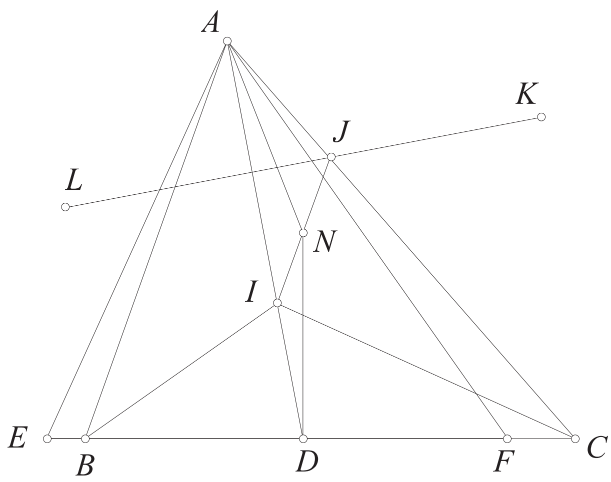
Lời giải sau không sử dụng nghịch đảo được đề nghị bởi **Huỳnh Bách Khoa** lớp 10 toán THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận [5].



Lời giải. Ta có $DE.DB = DF.DC = DA.DP$ nên D là tâm vị tự trong của (AEF) và (PBC). Gọi R là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC thì M, D, R thẳng hàng. Gọi X là tâm của (AED) thì ta có $\angle MXD = 180° - \angle EXD - \angle LXE = \angle AED - \angle EAD = \angle AED - \angle PBD = \angle AIP = \angle MLR$ với I là giao điểm của AE và PB. Do đó $DX \parallel LR$, mà $XN \parallel LK$ nên $\frac{MN}{MQ} = \frac{MX}{ML} = \frac{MD}{MR}$, do đó $RQ \parallel ND \perp BC$ mà R thuộc trung trực BC nên Q thuộc trung trực BC. □

Nhận xét. Bài toán trên sẽ rất thú vị nếu xem nó như một bài toán tổng quát của những trường hợp P đặc biệt. Vậy ta xét bài toán sau

Bài toán 18. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. E, F lần lượt là đối xứng của A qua IC, IB. AI cắt BC tại D. Trung trực AD cắt đường thẳng qua D vuông góc BC tại N. Chứng minh rằng IN, trung trực AI và trung trực BC đồng quy.



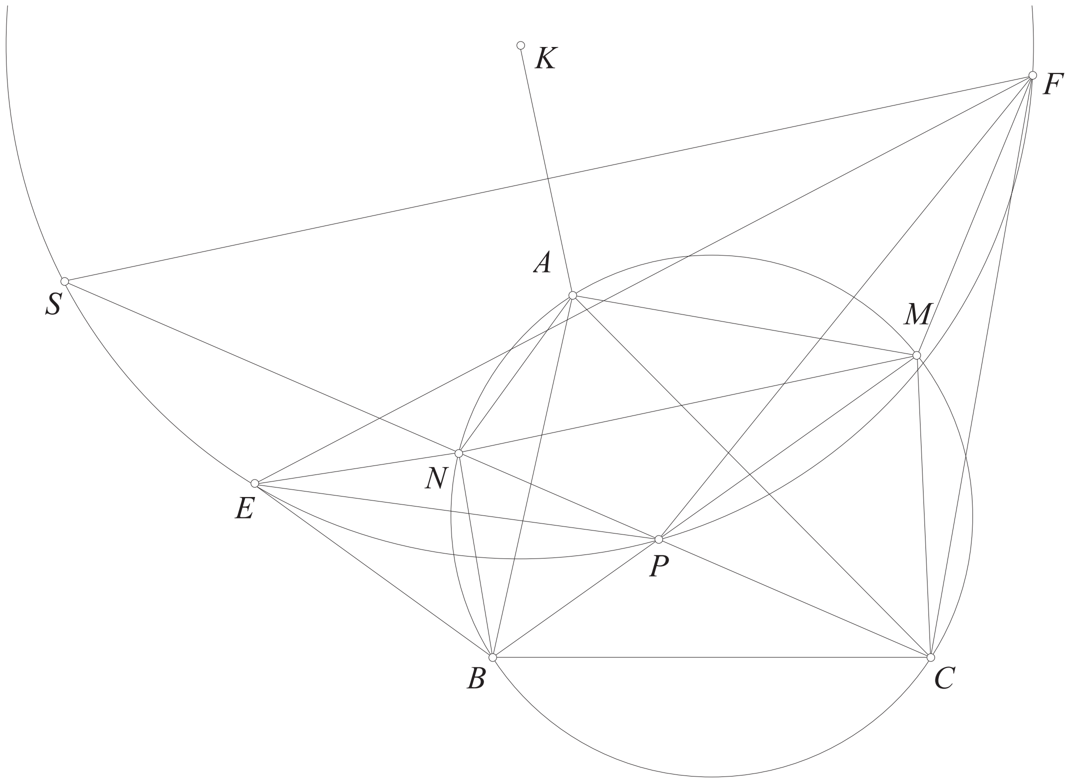
Lời giải. Ta dễ thấy I là tâm ngoại tiếp tam giác AEF. Mặt khác ta biết một kết quả quen thuộc là các điểm A, I, C, F cùng thuộc một đường tròn (K) và các điểm A, I, B, E cũng thuộc một đường tròn (L) và hiển nhiên KL là trung trực AI. Từ đó nếu IN cắt KL tại J theo bài trước thì J nằm trên trung trực BC ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Trong riêng trường hợp với tâm nội tiếp trên bài toán cũng có rất nhiều phát triển khác nữa. Ta tiếp tục với một số ứng dụng tiếp theo

Bài toán 19. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. P nằm trong tam giác sao cho $TP = TA$. PB, PC lần lượt cắt (O) tại E, F khác B, C. Dựng tam giác cân BAQ đồng dạng cùng hướng với FOD và tam giác cân CAR đồng dạng cùng hướng với EOD. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PQR nằm trên AO.

Trước hết ta chứng minh một bài toán khác như sau [5] là mở rộng của bài toán 2 trong cuộc thi ELMO 2016 [6]

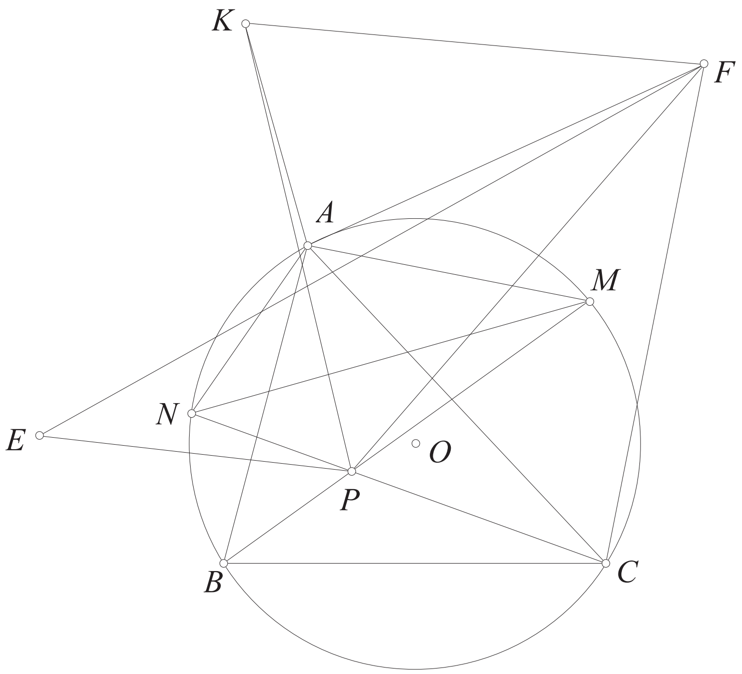
Bài toán 20. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là điểm bất kỳ trong tam giác. PB, PC lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. E, F lần lượt là đối xứng của B, C qua AN, AM. K là tâm ngoại tiếp tam giác PEF. Chứng minh rằng $AK \perp MN$.



Lời giải sau được đề nghị bởi **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An [5].

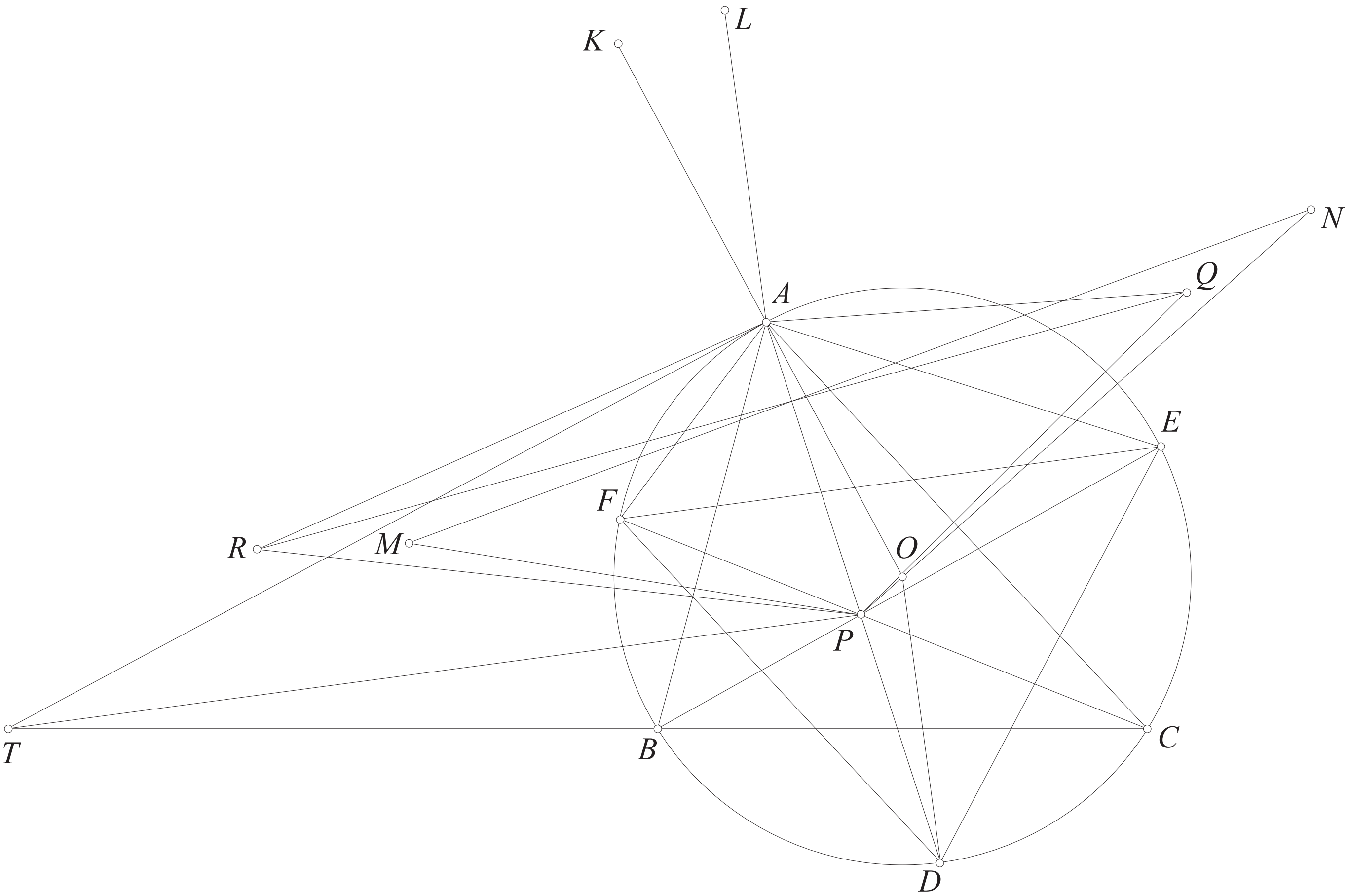
Lời giải. Chú ý rằng $\angle AMC = \angle AMF$ and $\angle ANE = \angle ANB$ nên $\angle PMF = \angle PMA + \angle AMF = \angle ACB + 180° - \angle ABC$ và $\angle PNE = 360° - \angle ANP - \angle ANP = 180° + 180° - \angle ABC - \angle ANB = 180° - \angle ABC + \angle ACB$. Như vậy $\angle PMF = \angle PNE$. Ta lại có $\frac{NP}{NE} = \frac{NP}{NB} = \frac{MP}{MC} = \frac{MP}{MF}$, vì vậy hai tam giác PMF và PNE đồng dạng nên suy ra hai tam giác PMN và PFE đồng dạng. Gọi PN cắt (K) tại S khác P. Ta thấy $\angle PSF = \angle PEF = \angle PNM$, nên $FS \parallel MN$. Chú ý rằng $AC = AF$ và $\angle FAC = 2\angle MAC = 2\angle MNC = 2\angle FSC$. Từ đây A là tâm ngoại tiếp tam giác SFC. Dễ thấy $AK \perp SF \parallel MN$. □

Lời giải sau được đề nghị bởi **Nguyễn Nga Nhi** lớp 9 toán THPT chuyên Hà Nội Amsterdam [7].



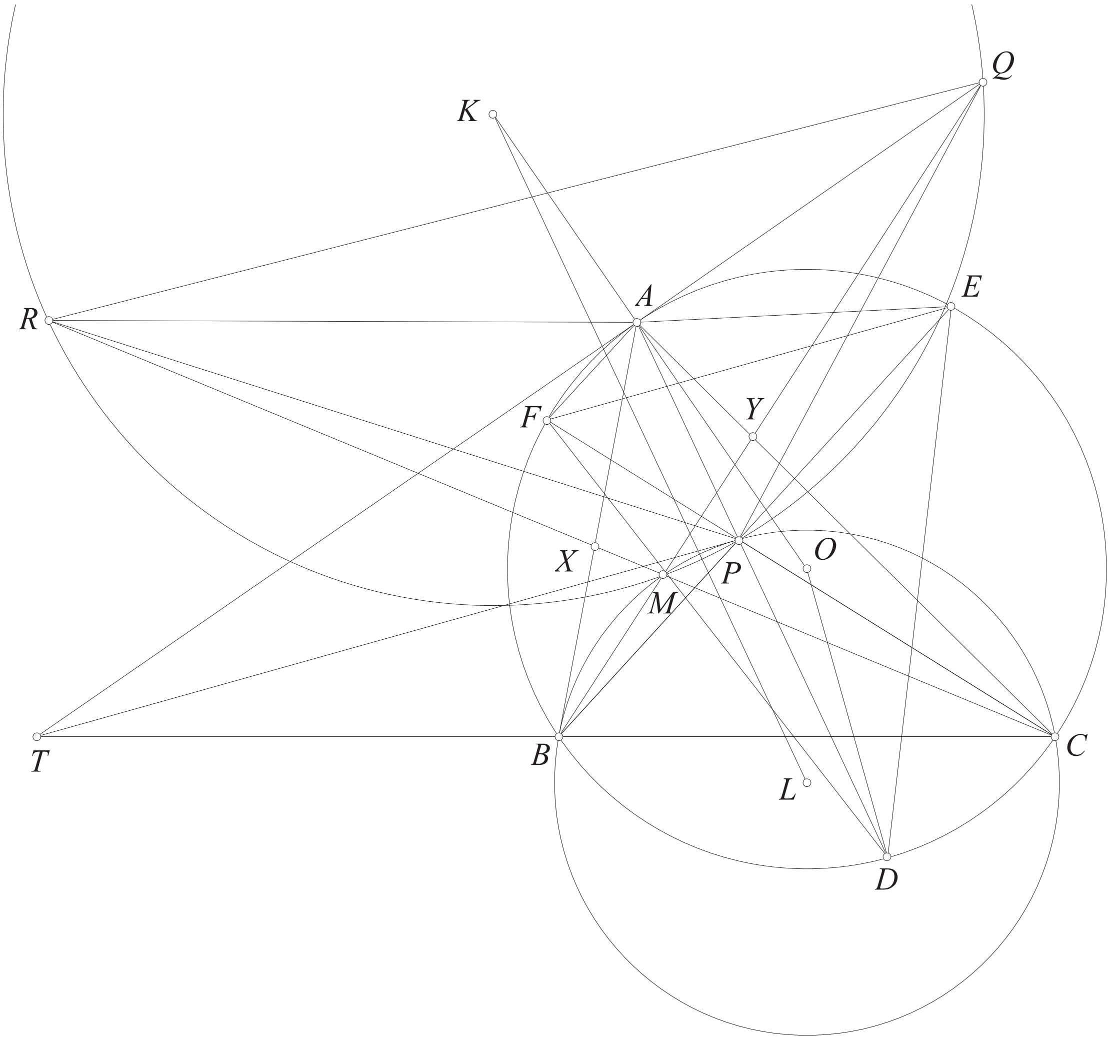
Lời giải. Chú ý rằng $\angle AMC = \angle AMF$ and $\angle ANE = \angle ANB$ nên $\angle PMF = \angle PMA + \angle AMF = \angle ACB + 180^\circ - \angle ABC$ và $\angle PNE = 360^\circ - \angle ANP - \angle ANP = 180^\circ + 180^\circ - \angle ABC - \angle ANB = 180^\circ - \angle ABC + \angle ACB$. Như vậy $\angle PMF = \angle PNE$. Ta lại có $\frac{NP}{NE} = \frac{NP}{NB} = \frac{MP}{MC} = \frac{MP}{MF}$, vì vậy hai tam giác PMF và PNE đồng dạng nên suy ra hai tam giác PMN và PFE đồng dạng. Từ đó $\angle PKF = 2\angle PEF = 2\angle PNM = 2\angle CAM = \angle CAF$. Vậy hai tam giác cân FAC và FKP đồng dạng. Ta suy ra hai tam giác FKA và FPC đồng dạng. Vậy $\angle KAM = \angle KAF + \angle FAM = \angle PCF + \angle CAM = \angle PCA + 90^\circ = \angle NMA + 90^\circ$. Từ đó $AK \perp MN$. □

Trở lại bài toán 19.



Lời giải. Gọi M, N lần lượt đối xứng với B, C qua AF, AE. Chú ý rằng, tích hai phép đối xứng trục không song song là một phép quay, ta dễ thấy phép quay tâm A với góc quay $\angle FOD = 2\angle FAP$ biến B thành Q. Mặt khác đối xứng trục AF biến B thành M. Từ đó đối xứng trục AP biến M thành Q. Tương tự đối xứng trục AP biến N thành R. Từ đó qua đối xứng trục AP thì tâm K ngoại tiếp tam giác PQR biến thành tâm L ngoại tiếp tam giác PMN. Chú ý rằng theo bài toán trên và bài toán 1 thì $AL \perp EF \perp OD$. Từ đó $AL \parallel OD$. Kết hợp tính đối xứng thì $\angle KAP + \angle PAO = \angle LAP + \angle ODA = 180°$, suy ra K, A, O thẳng hàng. $\square$

Lời giải sau được đề nghị bởi **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An [5].



Lời giải. Gọi BQ cắt CR tại M. Để ý $\triangle CAR \sim \triangle EOD$ và $\triangle BAQ \sim \triangle FOD$ dễ suy ra $\angle BMC = \angle BPC$ hay B, M, P, C đồng viên. Theo bài toán 1 thì $DE = DF$ từ đó $\triangle CAR \sim \triangle BAQ$. Để ý $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$ suy ra $\frac{PB}{BQ} = \frac{PC}{CR}$, từ đây $\triangle RPC \sim \triangle QPB$ nên R, Q, P, M đồng viên. Gọi AB, AC lần lượt cắt MC, MB tại X, Y. Để ý $\angle ACR = \angle ABQ$ nên B, X, Y, C đồng viên, ta suy ra $XY \perp AO$. Lại có $\angle ABM = \angle ACR = \angle ARC$ nên A, R, B, M đồng viên suy ra $XR.XM = XB.XA$ hay X thuộc trục đẳng phương của (O) và (PQR). Tương tự thì XY là trục đẳng phương của (O) và (PQR) vậy $XY \perp OK$ hay A, O, K thẳng hàng. □

3 Một số bài toán áp dụng

Phần này các bạn hãy làm một số bài toán sau để thực hành các bài toán có trong phần trước

Bài toán 21. Cho tam giác ABC với phân giác AD. Trung trực AD cắt BC tại T. P là một điểm nằm trong tam giác. G, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng $GE = GF$ khi và chỉ khi $TP = TD$.

Bài toán 22. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng có duy nhất hai vị trí của điểm P trong mặt phẳng sao cho tam giác Pedal của P ứng với tam giác ABC là tam giác đều.

Bài toán 23. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P là điểm bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Tiếp tuyến tại D của (O) cắt EF tại T. TP cắt (O) tại M, N. Gọi R, Q là trung điểm của MN, BC. Chứng minh rằng $\angle RAQ = |\angle MAB - \angle NAC|$.

Bài toán 24 (IMO Shorlist 2013 G4)**.** Cho tam giác ABC với đường phân giác AD. (K) là đường tròn qua A, D và tiếp xúc với AB. E là điểm đối xứng của A qua CK. DE cắt AC tại F. Chứng minh rằng $BA = BF$.

Bài toán 25. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P bất kỳ nằm trong tam giác. PA, PB, PC lần lượt cắt (O) tại D, E, F khác A, B, C. Dựng tam giác cân BAQ đồng dạng cùng hướng với FOD và tam giác cân CAR đồng dạng cùng hướng với EOD. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PQR nằm trên AO khi và chỉ khi $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$.

Bài toán 26. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). P bất kỳ nằm trong tam giác. PB, PC lần lượt cắt (O) tại E, F khác B, C. M, N lần lượt là đối xứng của B, C qua AF, AE. K là tâm ngoại tiếp tam giác PMN. Gọi L đối xứng K qua trung trực AP. Chứng minh rằng $PL \parallel AO$ khi và chỉ khi $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$.

Lời cảm ơn

Tác giả xin được nói lời cảm ơn chân thành tới bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương và bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã giúp tác giả đọc cẩn thận bài viết này.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h356195

[2] http://www.artofproblemsolving.com/community/c6h460401

[3] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

[4] http://analgeomatica.blogspot.com/2014/02/xung-quanh-bai-hinh-hoc-thi-imo-nam-2010.html

[5] VMF's Marathon Hình học http://diendantoanhoc.net/

[6] ELMO 2016 P2 http://artofproblemsolving.com/community/q1h1262190

[7] Trần Quang Hùng, Bài giảng tập huấn đội tuyển Arab Saudi năm 2016.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về một bài toán trên tam giác vuông

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

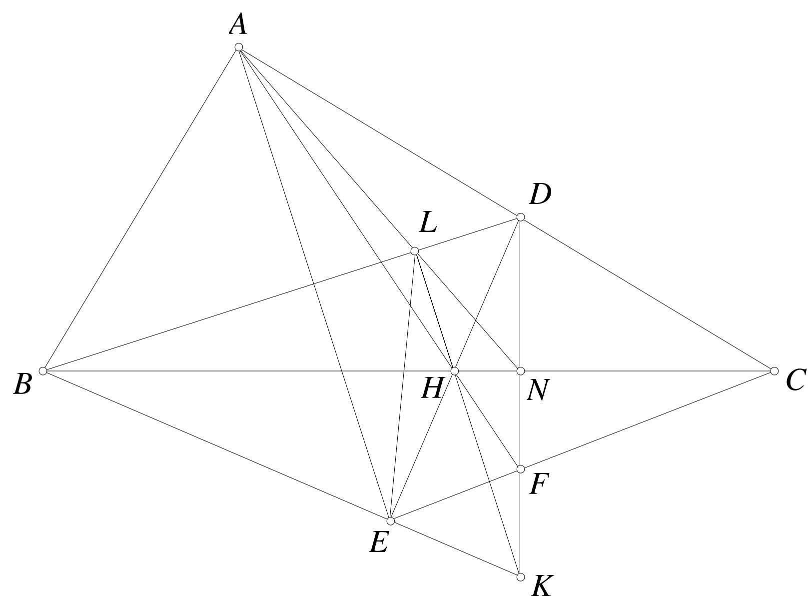
Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán thú vị trên tam giác vuông xuất hiện trong kỳ thi chọn đội tuyển Romani đi thi olympic Balkan năm 2007 cùng với các mở rộng khai thác cho bài toán đó với công cụ tỷ số kép.

Trong [1] có bài toán thú vị sau cho tam giác vuông.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. D là một điểm trên cạnh AC. E đối xứng A qua BD và F là giao điểm của CE và đường thẳng qua D vuông góc BC. Chứng minh rằng AF, DE, BC đồng quy.

Trong [1] xuất hiện rất nhiều lời giải tuy nhiên lời giải sau theo tôi là thú vị nhất, không dùng các khái niệm quá cao, lời giải được đề nghị bởi Petrisor Neagoe trong [1] được tác giả làm gọn.



Hình 1.

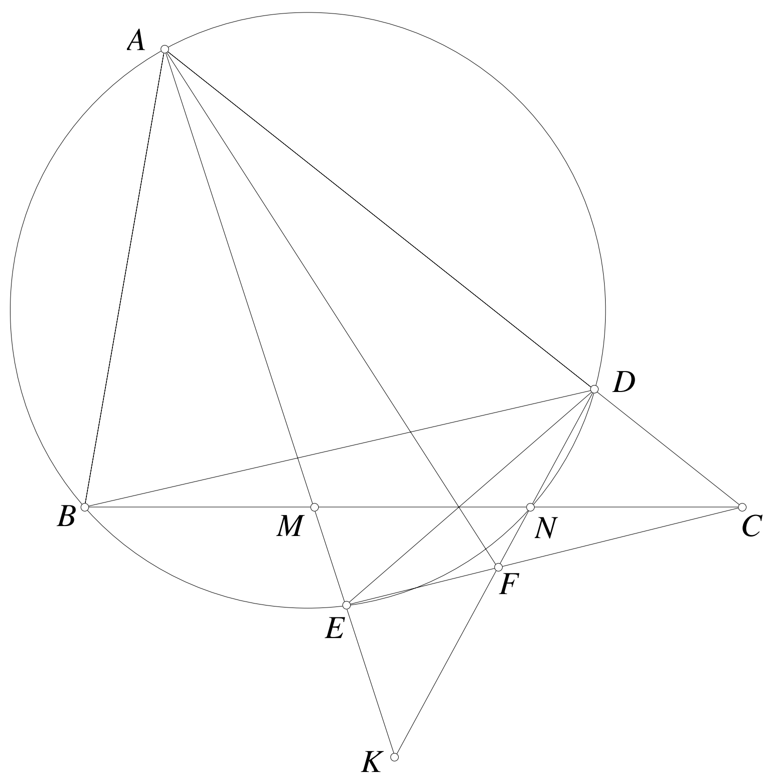
Lời giải. Gọi BE giao DF tại K, DF giao BC tại N, DE giao BN tại H, KH giao BD tại L. Ta dễ thấy H là trực tâm tam giác KBD. Theo tính chất trực tâm thì LB là phân giác ngoài $\angle ELN$ hay các đường thẳng LE, LN đối xứng nhau qua BD. Mặt khác theo giả thiết A, E đối xứng nhau qua BD nên LE, LA đối xứng nhau qua BD suy ra LA, LN trùng nhau. Đến đây áp dụng định lý Desargue cho các tam giác FEK và ADL chú ý giao điểm của các cặp đường thẳng FE giao AD, EK giao DL, KF giao LA theo thứ tự là C, B, N thẳng hàng. Vậy AF, DE, LK đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán có nhiều cách giải bằng hàng điều hòa nhưng cách giải bằng định lý Desargue được xem là đẹp và nhẹ nhàng mang nhiều tính hình học.

Ta có thể hình dung trong tam giác vuông thì đường cao cũng là đương đối trung, mặt khác đối xứng của đỉnh góc vuông qua cạnh huyền thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông góc có thể coi là giao của đường đối trung và đường tròn ngoại tiếp. Ý tưởng này giúp ta mở rộng bài toán trên thành một bài toán cho tam giác bất kỳ như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với D là một điểm bất kỳ trên AC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt BC tại N khác B. Đường đối trung qua A của tam giác ABD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tại E khác A. BE cắt DN tại F. Chứng minh rằng AF, DE, BC đồng quy.

Bài toán này có một lời giải khá đơn giản bằng hàng điểm điều hòa và tứ giác điều hòa. Lời giải sau do tác giả đề xuất

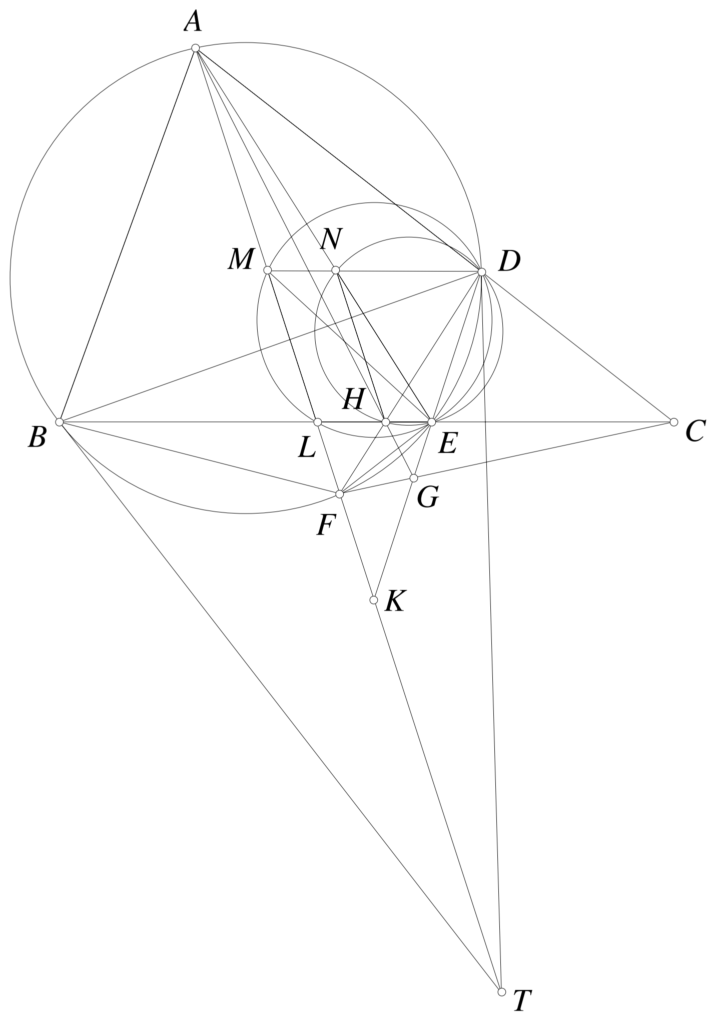


Hình 2.

Lời giải. Gọi DF giao AE tại K. AE giao BC tại M. Do đường đối trung qua A của tam giác ABD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tại E khác A nên tứ giác $ADEB$ điều hòa do đó có hàng (AE, BD) điều hòa trên đường tròn. Chiếu bằng tâm N lên đường AE ta được $(AE, MK) = N(AE, BD) = (AE, BD) = -1$. Chiếu hàng điều hòa (AE, MK) bằng tâm C lên đường thẳng DF ta được $(DF, NK) = C(AE, MK) = -1$. Từ đó ta có hai hàng điều hòa $(KN, FD) = (KM, AE)$ suy ra MN, AF, DE đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Khi tam giác ABC vuông tại A. E chính là đối xứng của A qua BD. Ta thu lại được bài toán ban đầu. Bài toán này có một số khai thác đẹp, tiêu biểu là bài chọn đội tuyển KHTN năm 2012-2013 trong [2] như sau

Bài toán 3. Cho tam giác nhọn ABC. D là một điểm thuộc đoạn AC. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn thẳng BC tại E khác B. Tiếp tuyến tại B, D của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt nhau tại T. AT cắt đường tròn ngoại tiếp tại tam giác ABD tại F khác A. CF giao DE tại G. AG giao BC tại H. M là trung điểm của AF. AE giao MD tại N. Chứng minh rằng $HN \parallel AT$.



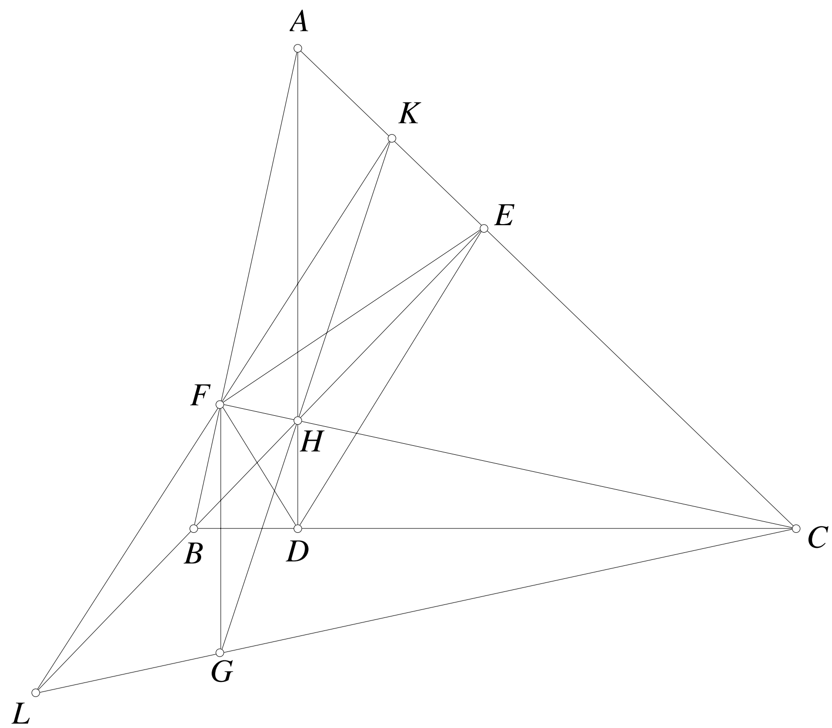
Hình 3.

Lời giải. Gọi DE giao AT tại K. Ta dễ thấy tứ giác $ABFD$ điều hòa nên $(AF, LK) = E(AF, BD) = -1$. Từ đó $(DG, EK) = C(DG, EK) = (AF, LK) = -1$ hay $(GD, EK) = -1 = (AF, LK)$ suy ra AG, DF, EL đồng quy tại H.

Từ $(AF, LK) = -1$, theo hệ thức Maclaurin, chú ý tứ giác $ABED$ nội tiếp ta suy ra $\overline{KM}.\overline{KL} = \overline{KF}.\overline{KA} = \overline{KE}.\overline{KD}$. Do đó tứ giác $MDEL$ nội tiếp. Từ đó ta có $\angle NDH = \angle MDH = \angle MDE - \angle HDE = \angle MLB - \angle FDE = \angle MLB - \angle FBE = \angle LFB = \angle AEB = \angle NEH$. Suy ra tứ giác $NDEH$ nội tiếp suy ra $\angle DNH = \angle DEC = \angle DML$ vậy $HN \parallel ML \equiv AT$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nếu áp dụng mô hình trong cách giải bài toán 1 ta có thể đề xuất bài toán thú vị sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. G đối xứng F qua BC. CG cắt BE tại L. LF cắt AC tại K. Chứng minh rằng KG đi qua trực tâm H.



Hình 4.

Nếu để ý kỹ các bạn thấy thực ra bài toán này là bài toán 1 "xoay ngược" áp dụng vào tam giác KBD trực tâm H. Tuy vậy dựa vào bài toán mới này ta dễ dàng đề xuất bài toán tổng quát như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường thẳng qua F song song AD cắt BC tại M. G đối xứng F qua M. CG cắt BE tại L. LF cắt AC tại K. Chứng minh rằng KG đi qua P.

Các bạn hãy làm bài toán đơn giản này như một bài luyện tập và chú ý rằng tuy đơn giản nhưng nó có những khai thác và ứng dụng khá bất ngờ. Các bạn hãy khám phá.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=860114

[2] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Mở rộng bài toán hình thi IMO năm 2012

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

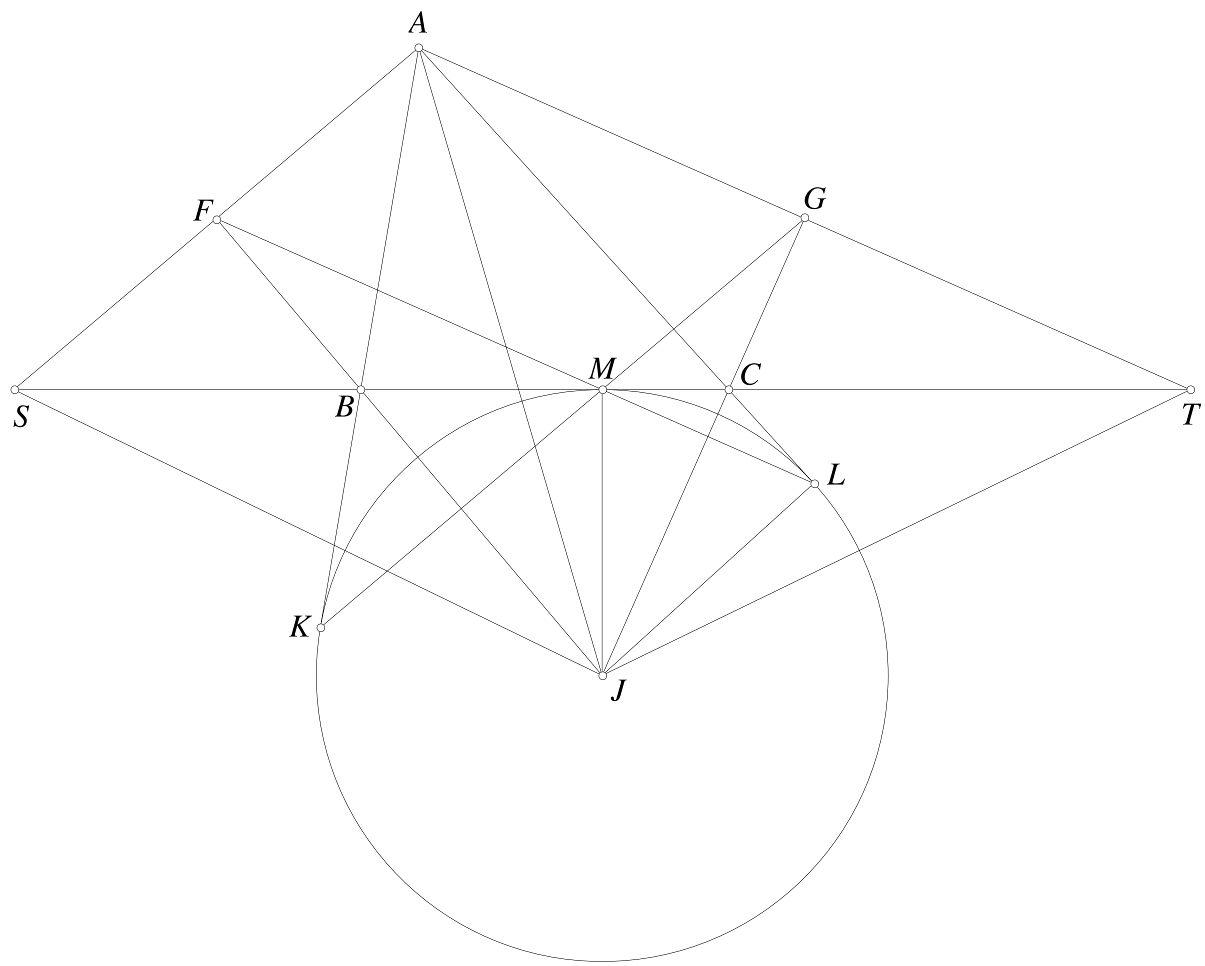
Tóm tắt nội dung

Bài viết đưa ra nhiều hướng mở rộng khác nhau cho bài toán hình thi IMO năm 2012 ngày thứ nhất với các công cụ hình học thuần túy và hàng điểm điều hòa.

Trong kỳ thi IMO năm 2012 ngày thi thứ nhất có một bài toán hình học hay. Bài toán ở vị trí số 1 là bài thi dễ nhất ngày hôm đó. Bài toán như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC và J là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh A. Đường tròn bàng tiếp này tiếp xúc với BC tại M và tiếp xúc với các đường thẳng AB, AC tại K, L. Đường thẳng LM và BJ cắt nhau tại F. Đường thẳng KM và CJ cắt nhau tại G. AF, AG lần lượt cắt BC tại S, T. Chứng minh rằng M là trung điểm của ST.

Bài toán trên là một bài toán không khó nhưng rất thú vị và đặc biệt có rất nhiều lời giải được đề xuất trong [1]. Tôi xin dẫn ra một lời giải gần như đơn giản nhất cho bài toán này

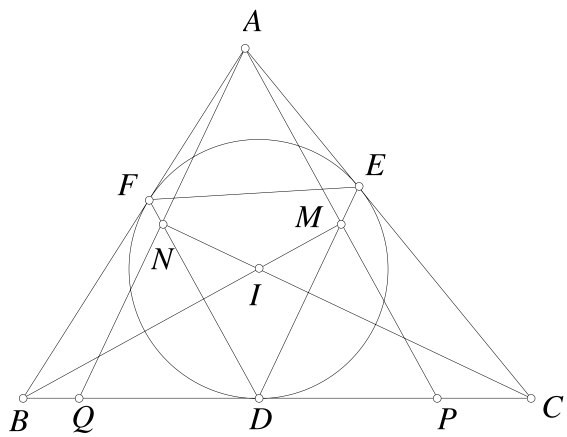


Hình 1.

Lời giải. Theo tính chất góc ngoài $\angle BJA = \angle KBJ - \angle BAJ = \dfrac{1}{2}\angle KBC - \dfrac{1}{2}\angle BAC = \dfrac{1}{2}\angle ACB = \angle ALF$. (Chú ý đẳng thức cuối do tam giác CML cân tại C). Từ đó tứ giác $AFJL$ nội tiếp suy ra $\angle AFJ = \angle ALJ = 90°$. Mặt khác BF là phân giác $\angle ABS$ suy ra FB là trung trực SA suy ra $JA = JS$. Tương tự $JA = JT$ suy ra $JS = JT$ mà $JM \perp ST$ vậy M là trung điểm ST. □

Nhận xét. Bài toán trên là một bài toán đẹp, tuy đặt ở vị trí số 1 là bài dễ của ngày 1 nhưng vẫn không hề quá đơn giản so với một bài IMO. Bài toán trên phát biểu trên đường tròn bàng tiếp. Hẳn nhiên nó cũng có một cách nhìn qua tâm nội tiếp như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. IB, IC lần lượt cắt DE, DF tại M, N. AM, AN lần lượt cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng D là trung điểm của PQ.



Hình 2.

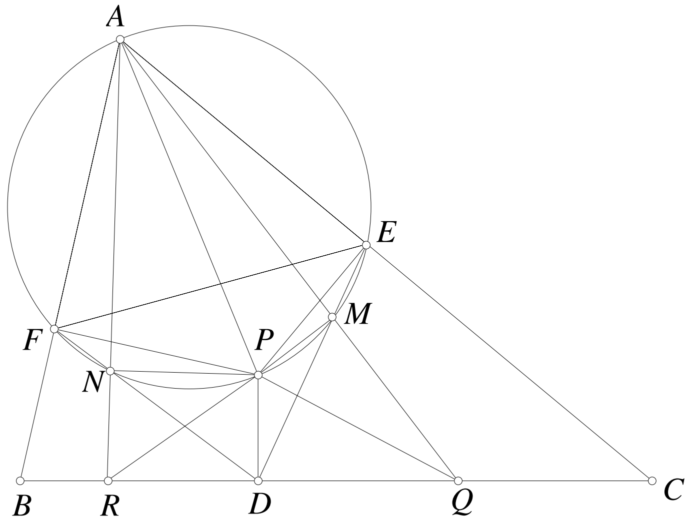
Tương tự như cách làm trong bài toán 1 ta có nhận xét M, N đều thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Ta đi đến bài toán tổng quát như sau

Bài toán 3. Cho P là một điểm nằm trên phân giác trong góc A của tam giác ABC. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt DE, DF lần lượt tại M, N khác E, F. AM, AN cắt BC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng D là trung điểm PQ.

Bài toán trên lại tiếp tục lại được mở rộng hơn nữa như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Gọi D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt DE, DF tại M, N khác E, F. AM, AN cắt BC tại P, Q. Chứng minh rằng $\dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{PE}{PF}$.

Sau đây là lời giải khá đơn giản cho bài toán mở rộng này



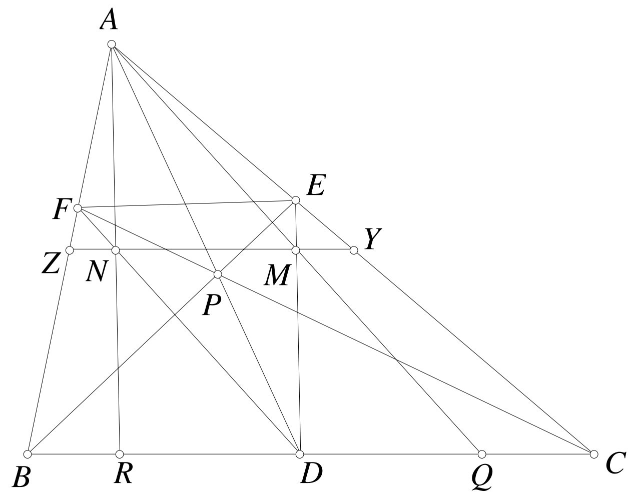
Hình 3.

Lời giải. Do M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cũng là đường tròn đường kính AP nên $\angle AMP = 90°$ suy ra tứ giác $PMQD$ nội tiếp suy ra $\angle PQD = \angle PMD = \angle PAE$. Vậy các tam giác vuông $\triangle PAE \sim \triangle PQD$ suy ra $\dfrac{PQ}{PD} = \dfrac{PA}{PE}$. Tương tự có $\dfrac{PR}{PD} = \dfrac{PA}{PF}$. Chia hai tỷ số cho nhau ta có $\dfrac{PR}{PQ} = \dfrac{PE}{PF}$ đó là điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Chứng minh bài toán mở rộng khá đơn giản so với suy nghĩ là bài toán mở rộng thường cầu kỳ hơn. Khi P nằm trên đường phân giác góc A ta thu được bài toán 3. Việc cho P trùng với một số điểm đặc biệt cũng sẽ dẫn tới nhiều hệ quả thú vị, xin dành điều đó cho bạn đọc.

Sau đây là một hướng mở rộng khác cho bài toán. Ta chú ý rằng trong bài toán 2 với D, E, F là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp thì AD, BE, CF đồng quy hơn nữa dễ chứng minh M, N thuộc đường trung bình ứng với đỉnh A của tam giác ABC. Đến đây dùng phép chiếu song song ta dễ dàng đề xuất bài toán sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Y, Z lần lượt là trung điểm CA, AB. YZ cắt DE, DF lần lượt tại M, N. AM, AN cắt BC lần lượt tại Q, R. Chứng minh rằng D là trung điểm của QR.



Hình 4.

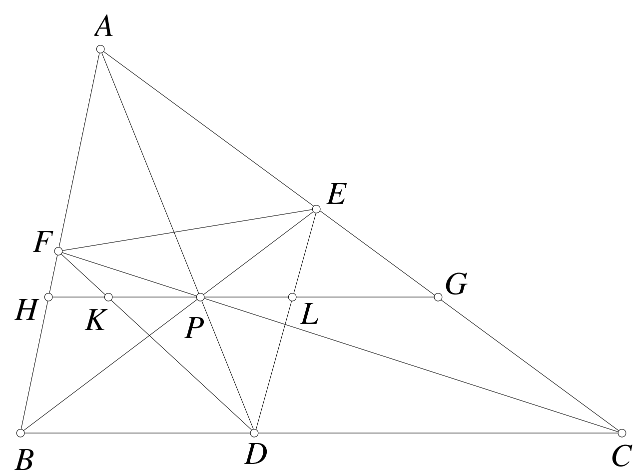
Ta có thể mở rộng bài toán thêm chút nữa nếu thay đường trung bình bằng đường song song bất kỳ như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Y, Z lần lượt thuộc CA, AB sao cho $YZ \parallel BC$. YZ cắt DE, DF lần lượt tại M, N. AM, AN cắt BC lần lượt tại Q, R. Chứng minh rằng D là trung điểm của QR.

Bài toán được giải dựa trên một bổ đề khá cơ bản như sau

Bổ đề 6.1. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng qua P song song BC cắt DE, DF tại L, K thì P là trung điểm KL.

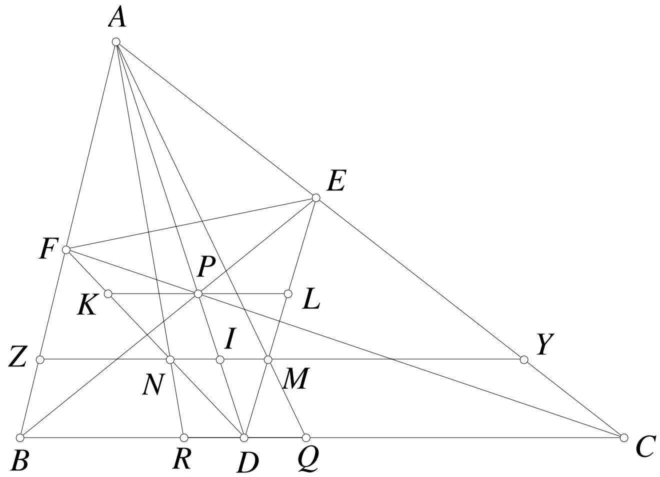
Bổ đề có lời giải rất đơn giản chỉ nhờ định lý Thales



Hình 5.

Chứng minh. Gọi KL cắt CA, AB lần lượt tại G, H. Dựa vào định lý Thales ta có biến đổi tỷ số $\dfrac{PK}{PL} = \dfrac{PK}{PH}.\dfrac{PH}{PG}.\dfrac{PG}{PL} = \dfrac{CD}{CB}.\dfrac{BD}{CD}.\dfrac{BC}{BD} = 1$. Vậy P là trung điểm KL. Ta có điều phải chứng minh. □

Quay lại bài toán



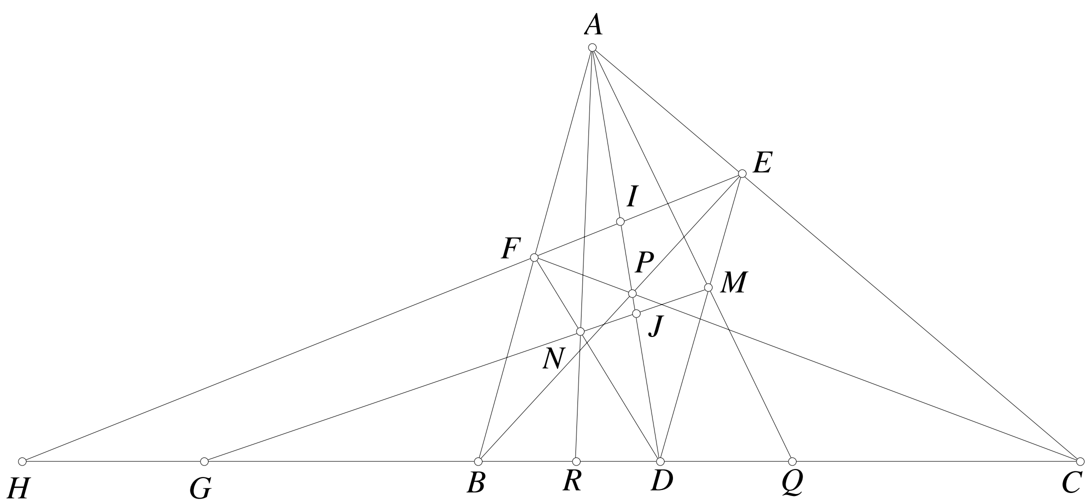
Hình 6.

Lời giải. Qua P kẻ đường thẳng song song BC cắt DE, DF lần lượt tại L, K. Theo bổ đề P là trung điểm KL. Gọi PD giao MN tại I vì $MN \parallel KL$ nên dễ suy ra I là trung điểm MN. Lại có $MN \parallel RQ$ nên D là trung điểm RQ. Ta hoàn tất chứng minh. $\square$

Nếu dùng phép chiếu xuyên tâm, ta dễ dàng đề xuất bài toán mở rộng hơn như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Một đường thẳng bất kỳ cắt DE, DF, BC lần lượt tại M, N, G. AM, AN lần lượt cắt BC tại Q, R. Chứng minh rằng $(QR, DG) = -1$.

Bài toán trên thực sự là mở rộng của bài toán 6 nếu các bạn để ý kỹ khi $MN \parallel BC$ thì điểm G ở vô cực $(QR, DG) = -1$ suy ra D là trung điểm QR. Bài toán có lời giải cũng rất đơn giản

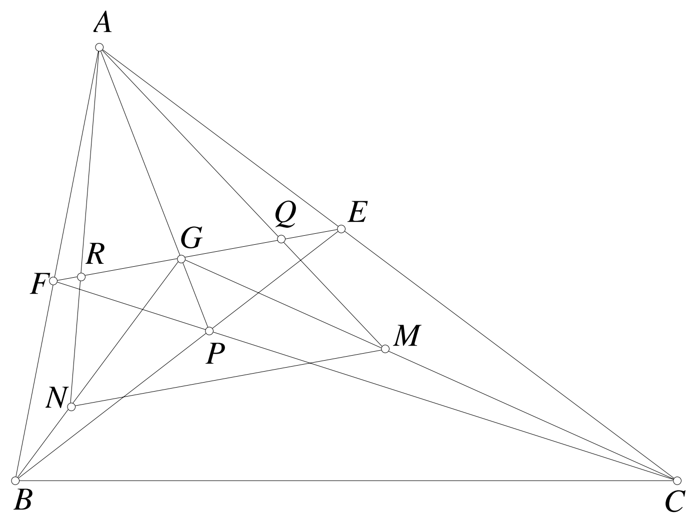


Hình 7.

Lời giải. Gọi EF giao BC tại H, EF giao AD tại I, MN giao AP tại J. Ta có hàng điều hòa cơ bản $(EF, IH) = -1$. Chiếu xuyên tâm D hàng điều hòa (EF, IH) lên đường thẳng MN ta có $(MN, JG) = D(MN, JG) = (EF, IH) = -1$. Chiếu xuyên tâm A lên đường thẳng BC ta có $(QR, DG) = A(QR, DG) = (MN, JG) = -1$. □

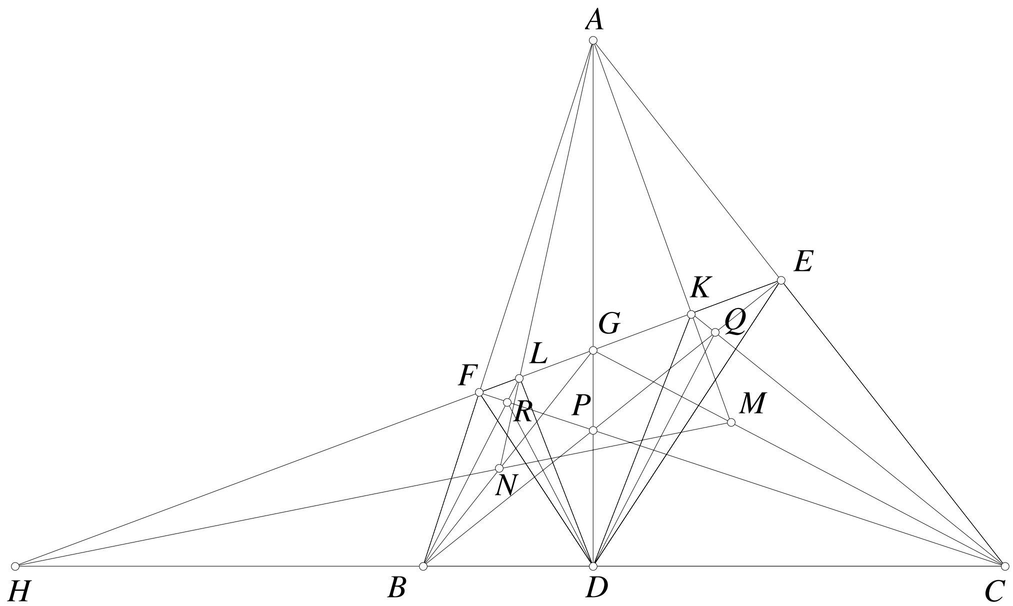
Nhận xét. Lời giải còn xem ra đơn giản hơn trường hợp song song. Tuy vậy cả hai bài toán 6,7 đều có những ứng dụng khá phong phú. Chẳng hạn như bài toán sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. PA cắt EF tại G. Các điểm M, N lần lượt thuộc GC, GB sao cho $MN \parallel EF$. AM, AN lần lượt cắt EF tại Q, R. Chứng minh rằng G là trung điểm QR.



Hình 8.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC đường cao AD. P là điểm trên AD. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. EF giao PA, BC lần lượt tại G, H. Một đường thẳng qua H cắt GC, GB lần lượt tại M, N. AM, AN cắt EF lần lượt tại K, L. CK, BL lần lượt cắt BE, CF tại Q, R. Chứng minh rằng $\angle QDE = \angle RDF$.



Hình 9.

Các bạn hãy làm như các bài luyện tập.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=2736397

[2] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về hai bài toán hình học hay

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết giới thiệu một hướng mở rộng cho hai đề toán, một đề trong kỳ thi Olympic toàn Nga và một đề kỳ thi học sinh giỏi trường chuyên sư phạm với các công cụ về phương tích trục đẳng phương và hình học thuần túy.

Trong kỳ thi olympic toàn Nga năm 2013 cho lớp 9 bài số 3 ngày thứ 2 có bài toán sau [1]

Bài toán 1. Các hình vuông $CAKL$ và $CBMN$ được vẽ ra ngoài tam giác nhọn ABC. CN cắt AK tại X. CL cắt BM tại Y. Điểm P nằm trong tam giác ABC là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác KXN và LYM. S là trung điểm AB. Chứng minh rằng $\angle ACS = \angle BCP$.

Trong kỳ thi học sinh giỏi lớp 10 trường THPT chuyên sư phạm 2014 có bài toán sau [2]

Bài toán 2. Cho tam giác ABC không cân tại A với $\angle BAC > 45°$ và O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Dựng ra ngoài tam giác ABC các hình vuông $ABKL, ACMN$. Các đường thẳng AN, AL theo thứ tự cắt CM, BK tại E, F. Gọi P là giao điểm nằm trong tam giác ABC của các đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK.

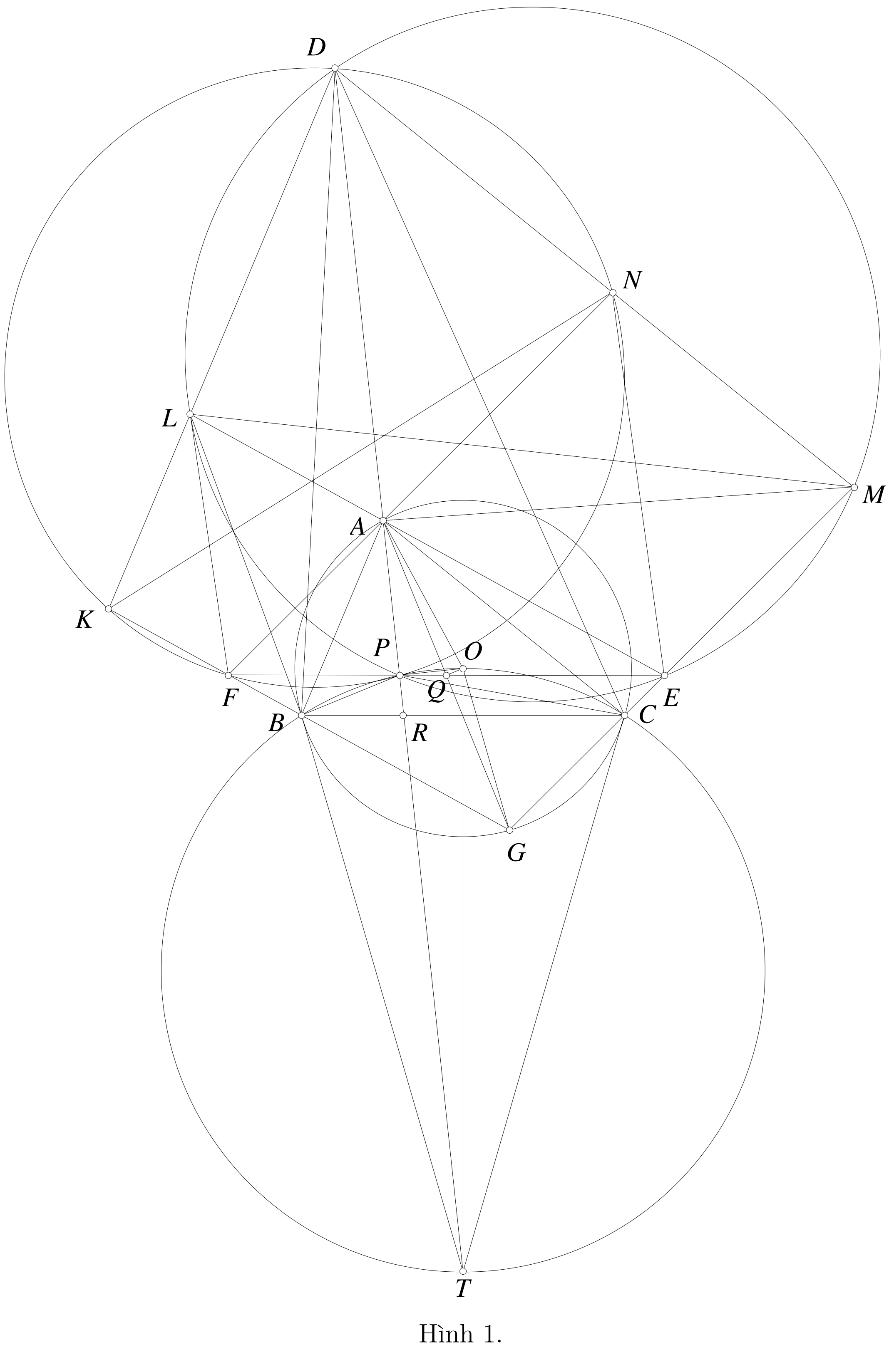
a) Chứng minh rằng E, F, O, P thẳng hàng.

b) Chứng minh rằng B, C, O, P cùng thuộc một đường tròn.

Nhận xét. Hai bài toán trên là hai bài toán hay mang nhiều ý nghĩa. Ta có thể thấy các yếu tố hình vuông có thể coi như các hình chữ nhật đồng dạng hoặc tổng quát hơn là các hình bình hành đồng dạng. Với ý tưởng đó tôi xin giới thiệu một bài toán tổng quát cho cả hai bài toán trên cũng với lời giải.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC tâm ngoại tiếp O. Dựng ra ngoài tam giác ABC các hình bình hành $ABKL, ACMN$ sao cho $\triangle ABL \sim \triangle CAM$. Các đường thẳng AN, AL theo thứ tự cắt CM, BK tại E, F. Gọi P là giao điểm nằm trong tam giác ABC của các đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK. Chứng minh rằng B, C, O, P cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải. Gọi KB giao CM tại G do $\triangle ABL \sim \triangle CAM$ nên dễ có $\angle ABK + \angle ACM = 180°$ nên G nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Dễ thấy tứ giác $AFGE$ là hình bình hành nên $\angle AFG = 180° - \angle FGE = \angle BAC$. Lại có góc nội tiếp $\angle AGF = \angle ACB$ nên $\triangle AFG \sim \triangle BAC$ suy ra $AC.FA = AB.FG = AB.AE$. Cũng từ tam giác đồng dạng $\triangle ABL \sim \triangle CAM$ dễ có $AC.AL = AB.AN$. Từ đó suy ra $\dfrac{AF}{AL} = \dfrac{AE}{AN}$ hay $AL.AE = AF.AN$ vậy A thuộc trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK.



Hình 1.

Gọi KL giao MN tại D ta thấy $\angle DNF = 180° - \angle ANM = 180° - \angle FKL$ suy ra D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác NFK. Tương tự D thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác LME. Vậy DP

là thuộc trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK nên A thuộc DP. Từ đó chú ý các tứ giác $DMEP$ và $DKFP$ nội tiếp dễ có $\angle APF + \angle APE = \angle DME + \angle DKF = 180°$ vậy P thuộc EF.

Gọi Q là trung điểm của AG dễ thấy $\angle AOQ = \frac{1}{2}\angle AOG = \angle ACG = \angle AMC = 180° - \angle DPE = 180° - \angle APQ$ suy ra tứ giác $APQO$ nội tiếp mà $OQ \perp AQ$ nên $AP \perp OP$.

Gọi AP giao BC tại R ta dễ có $\frac{RB}{RC} = \frac{S_{DAB}}{S_{DAC}} = \frac{S_{LAB}}{S_{LAC}} = \frac{AL.AB}{AN.AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Từ đó AP là đường đối trung của tam giác ABC. Vậy AP đi qua giao điểm hai tiếp tuyến tại B, C của (O) là T. Từ $OP \perp AP$ dễ thấy O, P, B, C đều thuộc đường tròn đường kính OT. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Khi các hình bình hành là hình vuông ta thu được các kết quả trong cả hai bài toán trên. Ta thấy rằng để đi tới kết luận B, C, O, P cùng thuộc một đường tròn ta phải đi qua các công đoạn chứng minh AP là đường đối trung như trong bài toán 1 và P thuộc EF như trong ý a) bài toán 2. Điểm P thực chất trong bài toán này là cố định không phục thuộc cách chọn các hình bình hành vì nó là hình chiếu của tâm ngoại tiếp O lên đường đối trung. Hình chiếu của tâm ngoại tiếp O lên đường đối trung là một điểm đặc biệt trong tam giác có rất nhiều ứng dụng, chẳng hạn nó chính là tâm phép đồng dạng biến đoạn thẳng CA thành AB. Việc khai thác bài toán mở rộng sẽ mang lại cho chúng ta nhiều bài toán đẹp. Các bạn hãy làm các bài toán luyện tập sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC không cân tại A. Dựng ra ngoài tam giác ABC các hình chữ nhật đồng dạng $ABKL, ACMN$. Các đường thẳng AN, AL theo thứ tự cắt CM, BK tại E, F. Gọi P là giao điểm nằm trong tam giác ABC của các đường tròn ngoại tiếp tam giác LME và NFK. Gọi KN giao LM tại Q. Chứng minh rằng $\angle PAB = \angle QAC$.

Tài liệu

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3067570

[2] http://diendantoanhoc.net/forum/ đề thi học sinh giỏi chuyên sư phạm

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về một bổ đề quan trọng

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

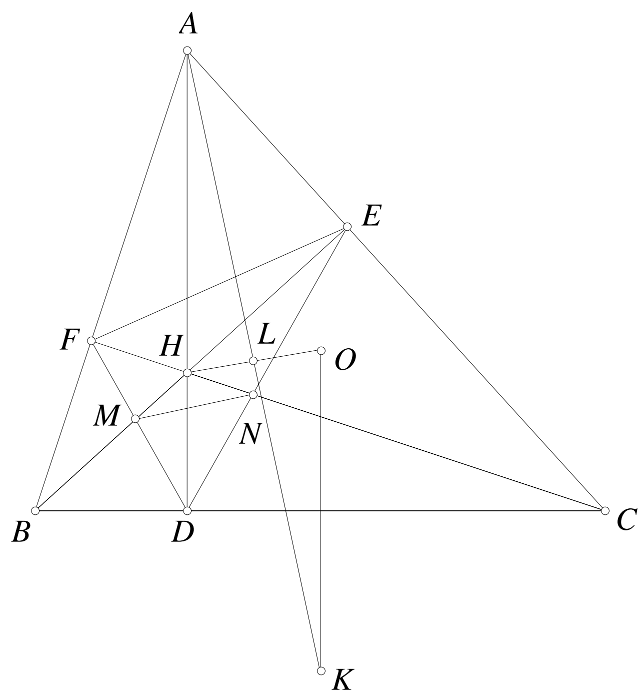
Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bổ đề quan trọng có nhiều ứng dụng trong các bài toán khác nhau với các công cụ về phương tích và trục đẳng phương.

Trên báo THTT số 355 tháng 1 năm 2007 có một bài toán hay sau của tác giả Hồ Quang Vinh [1]

Bài toán 1. Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF. DE, DF lần lượt cắt CF, BE tại M, N. Chứng minh rằng đường thẳng qua A vuông góc với MN đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC.

Bài toán có lời giải sử dụng khái niệm phương tích và trục đẳng phương



Hình 1.

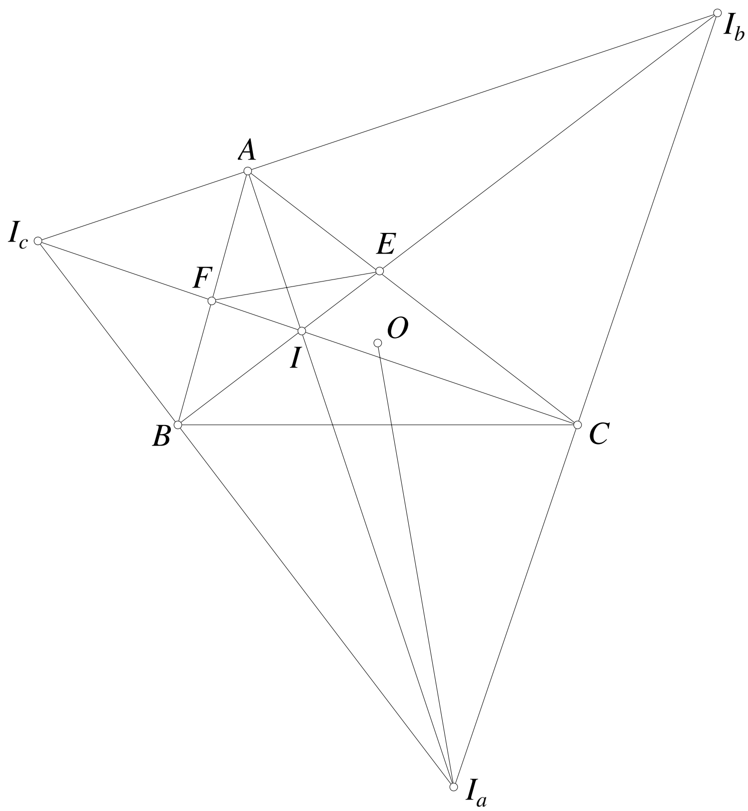
Lời giải. Do đối xứng của H qua BC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên đường tròn ngoại tiếp tam giác BHC và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đối xứng nhau qua BC. Từ đó tâm K đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC đối xứng O qua BC. Cũng từ đó dễ thấy AK đi qua trung điểm L của OH cũng là tâm đường tròn Euler đi qua D, E, F. Gọi (K) và (L) lần lượt là đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC và DEF

Các tứ giác $FHDB, EHDC$ nội tiếp suy ra $\mathcal{P}_{M/(K)} = \overline{MH}.\overline{MB} = \overline{MF}.\overline{MD} = \mathcal{P}_{M/(D)}$. Vậy M thuộc trục đẳng phương của (K) và (L). Tương tự N thuộc trục đẳng phương của (K) và (L) nên $MN \perp KL \equiv AL$. Vậy đường thẳng qua A vuông góc MN đi qua K. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán là một kết quả rất đẹp của hình học phẳng. Dựa vào đó ta sẽ khai thác được nhiều tính chất thú vị. Ta xét tiếp bài toán sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC, phân giác BE, CF, tâm ngoại tiếp O, tâm đường tròn bàng tiếp góc A là I_a. Chứng minh rằng $OI_a \perp EF$.

Bài toán này chính là một áp dụng cơ bản của bài toán 1.

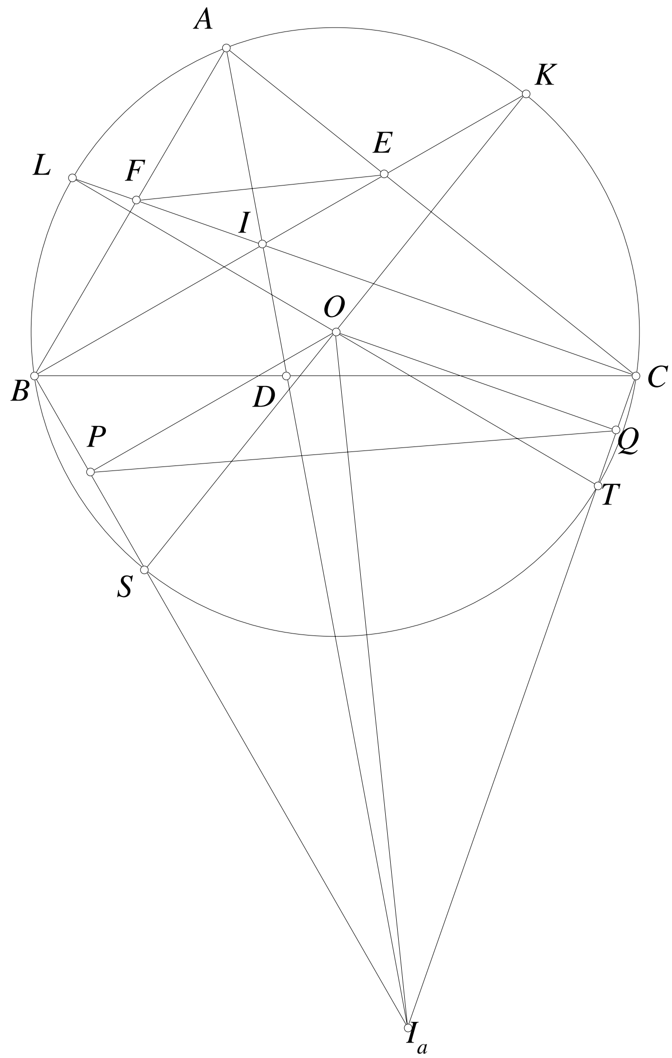


Hình 2.

Lời giải 1. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và tâm các đường tròn bàng tiếp ứng với đỉnh B, C là I_b, I_c thì dễ thấy I là trực tâm tam giác $I_aI_bI_c$ và các đường cao là I_aA, I_bB, I_cC đồng thời đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC là đường tròn Euler của tam giác $I_aI_bI_c$. Từ đó áp dụng bài toán 1 cho tam giác $I_aI_bI_c$ ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc chuyển qua xét một bài toán áp dụng vào tam giác tạo bởi ba tâm đường tròn bàng tiếp là việc làm rất hay gặp và mang nhiều ý nghĩa cũng như tính sáng tạo. Do đó một trong những yếu tố phụ rất hay vẽ khi gặp các bài toán có tâm nội tiếp là hãy vẽ thêm ba tâm đường tròn bàng tiếp ở ba đỉnh.

Bài toán có một lời giải trực tiếp thuần túy hình học được tác giả tham khảo trong [2] như sau



Hình 3.

Lời giải 2. Gọi BE, CF cắt (O) tại điểm thứ hai K, L. Ta dễ thấy $BE.BK = ac$, $\dfrac{IE}{BE} = \dfrac{b}{a+b+c}$ suy ra $IE.BK = \dfrac{abc}{a+b+c}$. Tương tự ta được $IE.BK = IF.CL$ suy ra $\dfrac{BK}{CL} = \dfrac{IF}{IE}$ (1).

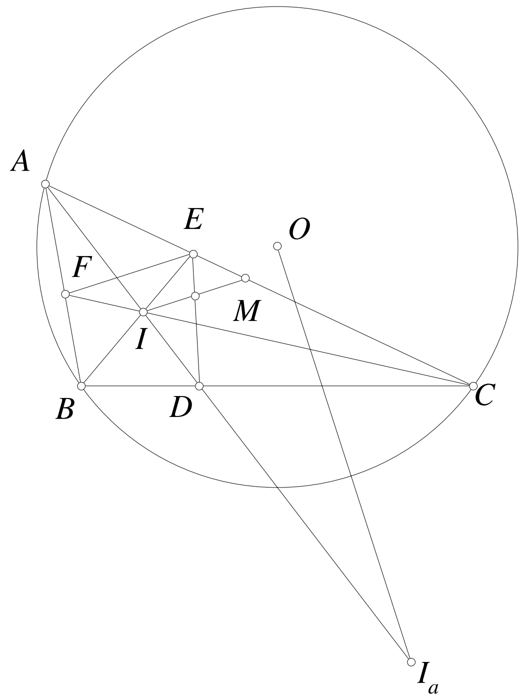
Gọi I_aB, I_aC cắt (O) lần lượt tại S, T. Vì $IB \perp I_aB, IC \perp I_aC$ nên SK, LT là đường kính của (O). Gọi P, Q là trung điểm của PS, CT. Theo tính chất đường trung bình dễ thấy $\dfrac{OP}{OQ} = \dfrac{2BK}{2CL} = \dfrac{IF}{IE}$ (theo (1)). Mặt khác dễ thấy $\angle FIE = \angle POQ$ từ đây suy ra $\triangle OPQ \sim \triangle IFE$ suy ra $\angle IFE = \angle OPQ = \angle OI_aQ$. Mà $IF \perp I_aQ$ suy ra $FE \perp I_aO$. Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán 2 là một bài toán hay có nhiều ứng dụng. Chúng ta hãy cũng xét qua một số bài toán sau.

Đề toán sau được tác giả đề nghị trên THTT số 424 tháng 10 năm 2012 [3]

Bài toán 3. Cho tam giác ABC, tâm đường tròn ngoại tiếp (O), tâm đường tròn nội tiếp I, tâm đường tròn bàng tiếp góc A là I_a. AI, BI lần lượt cắt BC, CA tại D, E. Đường thẳng qua I vuông góc OI_a cắt AC tại M. Chứng minh rằng DE đi qua trung điểm IM.

Bài toán là một ứng dụng trực tiếp của bài toán 2



Hình 4.

Lời giải. Gọi IC cắt AB tại F. Dễ thấy $E(FD, IC) = -1$ mà theo bài toán 2 $IM \parallel EF$ do cùng vuông góc OI_a. Theo tính chất hàng điều hòa suy ra ED đi qua trung điểm IM. □

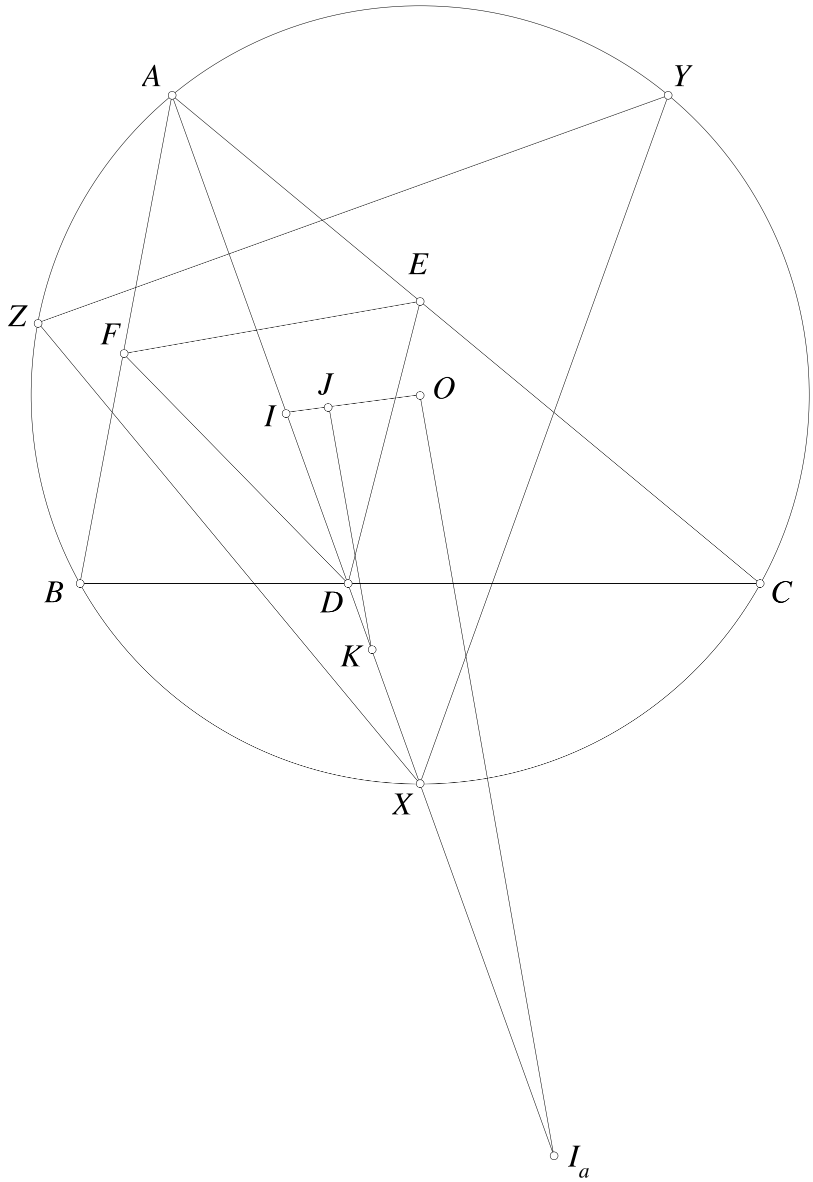
Bài toán sau khá thú vị là ý b) đề thi học sinh giỏi toán lớp 10 trường THPT chuyên sư phạm

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có đường tròn ngoại tiếp (O) và tâm đường tròn nội tiếp I. AI, BI, CI theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 và cắt (O) tại A_2, B_2, C_2 khác A, B, C. Các đường thẳng $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ theo thứ tự đi qua A_2, B_2, C_2 và vuông góc với B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng $\Delta_a, \Delta_b, \Delta_c$ đồng quy tại một điểm thuộc OI.

Bài toán trên dưới cách nhìn của bài toán 2 là một bài toán khá quen thuộc. Sau đây là một cách tổng quát cho bài toán này

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), phân giác AD, BE, CF đồng quy tại I. AI, BI, CI lần lượt cắt (O) tại X, Y, Z khác A, B, C. Gọi K, L, N các điểm lần lượt chia IX, IY, IZ cùng một tỷ số. Chứng minh rằng các đường thẳng qua K, L, N lần lượt vuông góc với EF, FD, DE đồng quy trên OI.

Bài toán là một ứng dụng trực tiếp của bài toán 2



Hình 5.

Lời giải. Gọi đường thẳng qua K vuông góc EF cắt OI tại J. Gọi I_a là tâm bàng tiếp góc A của tam giác ABC. Theo bài toán 2 thì $I_aO \perp EF \perp KJ$ vậy $KJ \parallel OI_a$. Chú ý X là trung điểm II_a. Giả sử K chia IX tỷ số k tức là $\overline{IK} = k\overline{IX} = \frac{k}{2}\overline{II_a}$. Do đó theo định lý Thales $\frac{\overline{IJ}}{\overline{IO}} = \frac{\overline{IK}}{\overline{II_a}} = \frac{k}{2}$. Từ đó J xác định trên OI. Tương tự các đường thẳng qua L, N lần lượt vuông góc với FD, DE cũng đi qua J trên OI. □

Nhận xét. Việc chỉ ra một điểm cố định và chứng minh các đường thẳng cùng đi qua điểm đó là một cách làm rất hay gặp trong bài toán chứng minh các đường thẳng đồng quy. Qua hai bài toán ta thấy rằng nhờ có bài toán 2 mà toàn bộ các bài toán có yếu tố vuông góc với EF ta hầu như quy về song song với OI_a.

Bài toán sau là một cách phát biểu đẹp khác của bài toán 5

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên cung lớn. Phân giác BE, CF cắt nhau tại I. Điểm J trên OI chia OI tỷ số k cố định. Chứng minh rằng đường thẳng qua J vuông góc EF luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.

Qua bài toán 2 và cách làm bài toán 5 ta dễ nhận ra điểm cố định nằm trên trung trực BC. Bài toán trên là bài toán hay và có nhiều áp dụng phong phú xin dành cho bạn đọc. Ta cũng có một cách nhìn khác cho bài toán trên như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên cung lớn. Phân giác BE, CF cắt nhau tại I. J là điêm trên đường thẳng IA sao cho $IJ = k$ không đổi. Chứng minh rằng đường thẳng qua J vuông góc EF luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.

Các bạn hãy làm thêm các bài toán sau để rèn luyện thêm kỹ năng về bổ đề này.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác BE, CF cắt nhau tại I. EF cắt (O) tại M, N. Chứng minh rằng tam giác IMN cân.

Bài toán trên có tham khảo trong [2]

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I. IB, IC lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. P, Q lần lượt nằm trên tia đối tia BC, CB sao cho $BP = BA, CQ = CA$. K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác NBP, MCQ. BL cắt CK tại D. Đường tròn bàng tiếp góc A là (I_a) cắt (O) tại S, T. Chứng minh rằng $AD \perp ST$.

Bài toán trên có tham khảo trong [4]

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác góc B, C cắt (O) tại E, F khác B, C. P, Q thuộc tia đối tia BC, CB sao cho $BP = BA, CQ = CA$. Từ A vẽ tiếp tuyến AX, AY tới đường tròn ngoại tiếp tam giác BFP và tiếp tuyến AZ, AT tới đường tròn ngoại tiếp tam giác CEQ. Gọi M, N là trung điểm XY, ZT. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM và ABN cắt nhau tại R khác A. Đường tròn (K) tiếp xúc AB, AC và tiếp xúc trong (O) cắt BC tại G, H. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AGH nằm trên AR.

Bài toán trên là của tác giả và được tác giả dùng trong quá trình tập huấn đội tuyển TST của trường THPT chuyên KHTN.

Tài liệu

[1] Tạp chí toán học tuổi trẻ số 355 tháng 1 năm 2007

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=136301

[3] Tạp chí toán học tuổi trẻ số 424 tháng 10 năm 2012

[4] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=47&t=329713

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Một số bài toán trên tâm đường tròn Euler

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

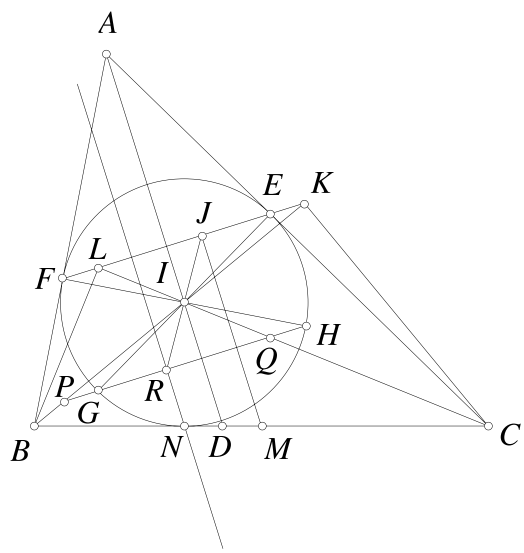
Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một số bài toán hay liên quan tới tâm đường tròn Euler hầu như đều là kết quả của tác giả trong quá trình đi dạy với nhiều công cụ hình học thuần túy khác nhau.

Đường tròn Euler hay tên quốc tế thường gọi là đường tròn 9 điểm [7] đi qua trung điểm ba cạnh, chân ba đường cao và trung điểm ba đoạn thẳng nối trực tâm và ba đỉnh tam giác là một kết quả rất nổi tiếng và được khai thác trong rất nhiều bài toán khác nhau. Tâm đường tròn này cũng là một đề tài thú vị trong các cuộc thi học sinh giỏi toán trong nước và quốc tế. Tôi xin trình bày lại một số bài toán chủ yếu do tôi đề xuất liên quan đến tâm đường tròn thú vị này.

Xuất phát từ kỳ thi học sinh giỏi quốc gia năm 2013 có bài toán hay như sau [1]

Bài toán 1. Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB lần lượt tại E, F. G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I. Đường thẳng GH giao IB, IC lần lượt tại P, Q. Giả sử B, C cố định, A thay đổi sao cho tỷ số $\dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi. Chứng minh rằng trung trực PQ luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải. Gọi IB, IC lần lượt cắt EF tại K, L. Chú ý tam giác AEF cân tại A nên $\angle KEC = \angle AEF = \dfrac{180^\circ - \angle A}{2} = 180^\circ - (90^\circ - \dfrac{\angle A}{2}) = 180^\circ - \angle BIC = \angle KIC$. Từ đó tứ giác $KEIC$ nội tiếp suy ra $\angle IKC = \angle IEC = 90^\circ$. Tương tự $\angle ILB - 90^\circ$. Từ đó nếu gọi M là trung điểm BC, J là trung điểm KL dễ có tam tam giác KLM cân nên $MJ \perp EF \quad (1)$.

Do G, H lần lượt là đối xứng của E, F qua I nên đường thẳng GH đối xứng đường thẳng EF qua I. GH, EF lần lượt cắt IB tại P, K suy ra I là trung điểm PK, tương tự I là trung điểm QL. Vậy hai đoạn KL và PQ đối xứng nhau qua I. Từ đó nếu gọi R là trung điểm PQ thì trung điểm J của KL và R đối xứng nhau qua I hay I là trung điểm RJ.

Gọi trung trực PQ cắt BC tại N, ta thấy RN vuông góc PQ, PQ song song $EF \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra RN song song JM. Gọi IA cắt BC tại D, dễ có $ID \equiv IA$ vuông góc EF nên ID cũng song song với RN, JM. Từ đó trong hình thang $RJMN$ có I là trung điểm RJ nên ID là đường trung bình, vậy D là trung điểm MN.

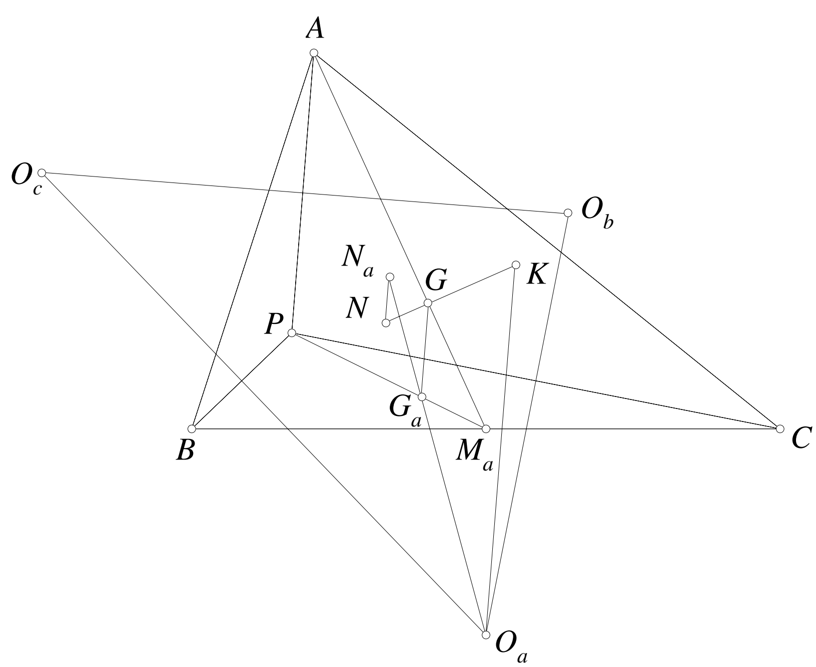
Theo tính chất đường phân giác $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC} = k$ không đổi nên D cố định. M là trung điểm BC cố định nên N đối xứng M qua D cố định. Vậy trung trực PQ đi qua N cố định. □

Nhận xét. Việc dựng ra thêm các điểm phụ L, K trong lời giải đóng vai trò quan trọng, nó cho phép ta sử dụng phép vị tự để chuyển các tính chất đường thẳng RN và JM cho nhau. Trong quá trình tìm hiểu bài toán tôi nhận thấy rằng thực chất K, L, N là các chân đường cao từ C, B, I của tam giác IBC. Như vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác NKL là đường tròn Euler của tam giác IBC nên nó cũng đi qua M và vì vậy tâm đường tròn Euler của tam giác IBC nằm trên trung trực KL cũng là đường thẳng JM. Vậy nếu từ tâm đường tròn Euler của tam giác IBC mà ta vẽ đường thẳng song song với IA thì nó cũng chính là trung trực KL mà đi qua trung điểm BC. Ta dễ thấy là các đường thẳng qua trung điểm BC, CA, AB mà lần lượt song song với IA, IB, IC thì đồng quy. Do đó ta đề xuất bài toán thú vị sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC tâm nội tiếp I. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác IBC, ICA, IAB thì các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song với IA, IB, IC đồng quy.

Qua tìm hiểu và khai thác tôi nhận ra rằng bài toán này đúng không chỉ với tâm nội tiếp I mà thực chất nó đúng với mọi điểm P bất kỳ trong mặt phẳng. Do đó tôi đề xuất bài toán sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy.



Hình 1.

Lời giải. Gọi O_a, O_b, O_c lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PBC, PCA, PAB. Ta dễ thấy đường thẳng qua O_a song song PA chính là đường cao từ O_a của tam giác $O_aO_bO_c$ do đó các đường thẳng qua O_a, O_b, O_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại trực tâm K của tam giác $O_aO_bO_c$.

Gọi G_a, G_b, G_c, G lần lượt là trọng tâm tam giác PBC, PCA, PAB, ABC ta dễ thấy PG_a và AG đi qua trung điểm M_a của BC, từ đó dễ thấy G_aG song song PA nói cách khác các đường thẳng qua G_a, G_b, G_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy tại trọng tâm G của tam giác ABC.

Đến đây là lại chú ý vì N_a là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC nên dễ có $2\overrightarrow{G_aN_a}+\overrightarrow{G_aO_a}=\overrightarrow{0}$. Từ đó sử dụng phép chiếu song song phương PA xuống đường thẳng KG, gọi N là hình chiếu song song phương PA của N_a xuống KG ta dễ suy ra $2\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{0}$ nói cách khác đường thẳng qua N_a song song PA đi qua N xác định. Tương tự các đường thẳng qua N_b, N_c lần lượt song song với PB, PC cũng đi qua N ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán trong trường hợp tâm nội tiếp đã thú vị thì bài toán tổng quát của chúng ta còn thú vị hơn rất nhiều. Việc cho P di chuyển trùng một số tâm đặc biệt để tạo ra bài toán mới là công việc thú vị. Qua bài toán này ta cũng dễ rút ra tâm đường tròn Euler cũng chỉ là một trường hợp đặc biệt. Tương tư như cách chứng minh trên thì bài toán cũng sẽ đúng với trực tâm hoặc tổng quát hơn là một điểm trên đường thẳng Euler chia đoạn nối trực tâm, trọng tâm tỷ số cố định. Ta có các bài toán khác như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua H_a, H_b, H_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy.

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi H_a, H_b, H_c lần lượt là trực tâm của các tam giác PBC, PCA, PAB. Gọi G_a, G_b, G_c lần lượt là trọng tâm các tam giác PBC, PCA, PAB. Gọi L_a, L_b, L_c lần lượt chia các đoạn H_aG_a, H_bG_b, H_cG_c cùng một tỷ số. Chứng minh rằng các đường thẳng qua L_a, L_b, L_c lần lượt song song với PA, PB, PC đồng quy.

Hoặc một khai thác tương tự được tác giả đề nghị trong cuộc thi giải toán mathley [3], các bạn hãy làm như bài luyện tập

Bài toán 6. Cho tam giác ABC và DEF nội tiếp đường tròn (O). Gọi N_a, N_b, N_c là tâm đường tròn Euler các tam giác DBC, ECA, FAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song AD, BE, CF đồng quy.

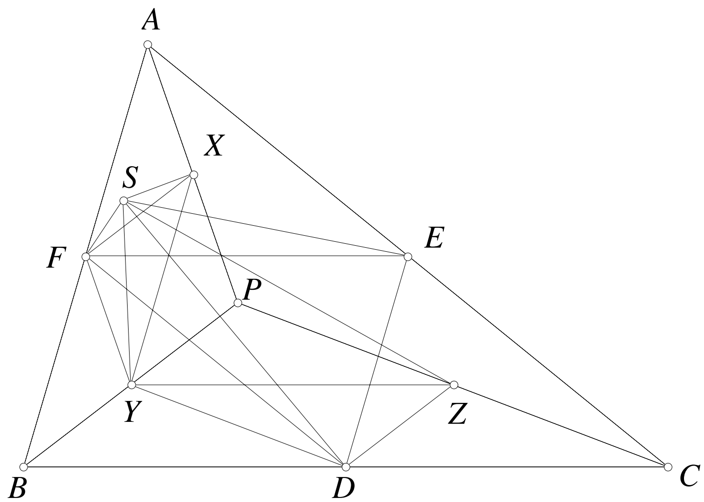
Sau khi đề xuất bài toán 3, tôi đã mạnh dạn nghĩ tới kết quả thay đường thẳng song song bởi đường thẳng vuông góc và thật tuyệt vời khi bài toán vuông góc đúng và rất thú vị như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và P là một điểm bất kỳ. Gọi N_a, N_b, N_c lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB. Chứng minh rằng các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt vuông góc với PA, PB, PC đồng quy.

Bài toán trên theo đánh giá của tôi là bài toán hay. Tôi đã sử sụng bài toán này trong đợt kiểm tra đội tuyển VMO của trường THPT chuyên KHTN thật đáng tiếc là không có em nào giải được bài toán này.

Lời giải đầu tiên của bài toán này được góp ý từ một sinh viên trường ĐH khối kinh tế nhưng dài và không đẹp, sau đây tôi trình bày một lời giải khác tham khảo ý tưởng từ học trò **Tạ Hà**

Nguyên học sinh lớp 12A1 Toán khóa 48 trường THPT chuyên KHTN. Trong suốt bài toán này ta ký hiệu (XYZ) chỉ đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ.



Lời giải. Gọi D, E, F, X, Y, Z lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB, PA, PB, PC, thì các đường tròn $(DYZ), (EZX), (FXY), (DEF)$ lần lượt là các đường tròn Euler của các tam giác PBC, PCA, PAB, ABC. Gọi đường tròn (DYZ) và đường tròn (DEF) cắt nhau tại S khác D. Ta có biến đổi góc

$(SF, SY) = (SF, SD) + (SD, SY)$
$= (EF, ED) + (ZD, ZY)$ (Do S thuộc các đường tròn $(DYZ), (DEF)$)
$= (BD, BF) + (BY, BD)$ (Do $EF \parallel BD, ED \parallel AC, YZ \parallel BD, ZD \parallel BY$)
$= (BY, BF)$
$= (XF, XY)$ (Do $XY \parallel BF, XF \parallel BY$).

Do đó S thuộc (FXY). Tương tự S thuộc (EZX). Ta có điều phải chứng minh.

Theo bài toán 3 thì các đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt song song PA, PB, PC đồng quy tại Q. Ta chỉ cần chứng minh rằng Q nằm trên đường tròn $(N_aN_bN_c)$ thì hiển nhiên đường thẳng qua N_a, N_b, N_c lần lượt vuông góc với PA, PB, PC sẽ đồng quy tại điểm đối tâm Q. Vậy ta biến đổi góc $(QN_b, QN_c) = (PB, PC) = (DZ, DY) = (SZ, SY) = (N_aN_b, N_aN_c)$. Ta chú ý đẳng thức cuối có là do đường tròn (N_a) và (N_b) có dây cung chung là SZ nên $N_aN_b \perp SZ$, tương tự $N_aN_c \perp SY$. Từ đó ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán nếu cho P trùng với một số điểm đặc biệt cũng sẽ dẫn tới nhiều hệ quả thú vị.

Bài toán trên cũng đã được tác giả gửi làm đề đề nghị cho cuộc thi giải toán kỷ niệm 50 năm tạp chí toán học và tuổi trẻ. Xong thật đáng tiếc không hiểu vì lý do gì mà bài toán lại được đăng lên diễn đàn toán học AoPS ở [2] bởi một nick name đến từ Việt Nam trước khi được đăng báo. Vì sự không may mắn này tôi xin thu hồi lại bài toán không gửi cho báo nữa và viết lại trong bài viết này để bạn đọc cùng tìm hiểu.

Ngoài ra khi khai thác các bài toán xoay quanh tâm đường tròn Euler tôi cũng đã tự tìm ra được nhiều bài toán khác khá thú vị, xin giới thiệu một vài bài toán với bạn đọc

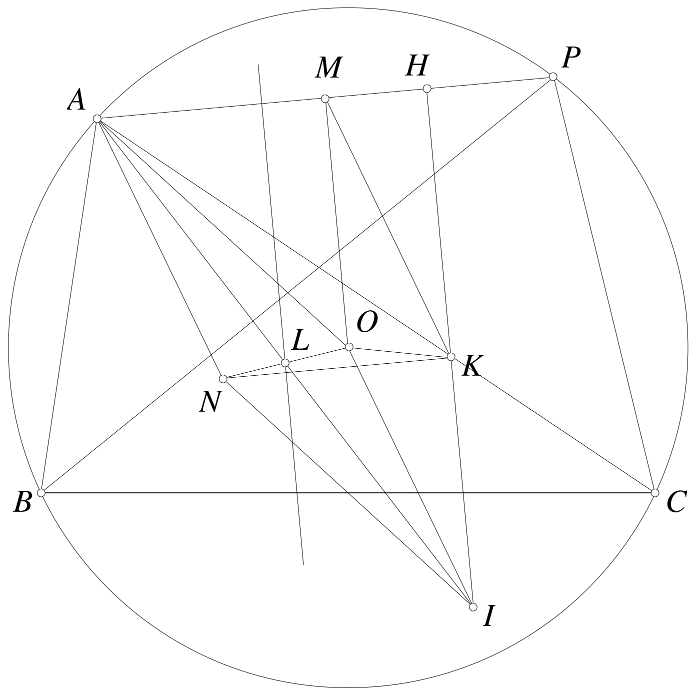
Bài toán 8. Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi K, L, N lần lượt là tâm đường tròn Euler của các tam giác DEC, BCA, FAE. Gọi X, Y, Z lần lượt là hình chiếu của K, L, N theo thứ tự lên AD, BE, CF. Chứng minh rằng trung trực của AX, EY, CZ đồng quy.

Trước hết ta có bổ đề sau

Bổ đề 8.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là một điểm trên (O). K là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC.

a) Chứng minh rằng đường thẳng qua K vuông góc với PA luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.

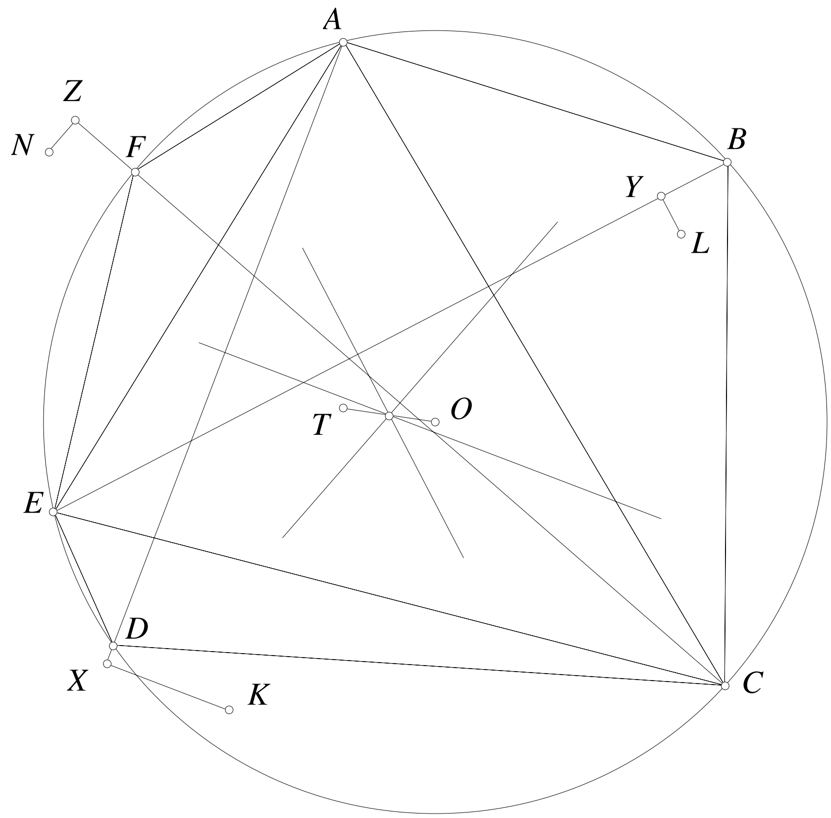
b) Gọi H là hình chiếu của K lên PA. Chứng minh rằng trung trực của AH luôn đi qua điểm cố định khi P di chuyển.



Hình 2.

Chứng minh. a) Gọi N là tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Gọi L là trung điểm của ON. Gọi I đối xứng A qua L, gọi M là trung điểm PA. Ta đã biết kết quả quen thuộc $\overrightarrow{KN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MA}$ suy ra $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MK}$. Do I đối xứng A qua L nên $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{OI}$. Vậy từ đó $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{KI}$ suy ra $KI \parallel OM \perp PA$. Vậy đường thẳng qua K vuông góc PA đi qua I cố định. Ta có điều phải chứng minh.

b) Dễ thấy trung trực của AH đi qua trung điểm L của AI cũng là trung điểm ON cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

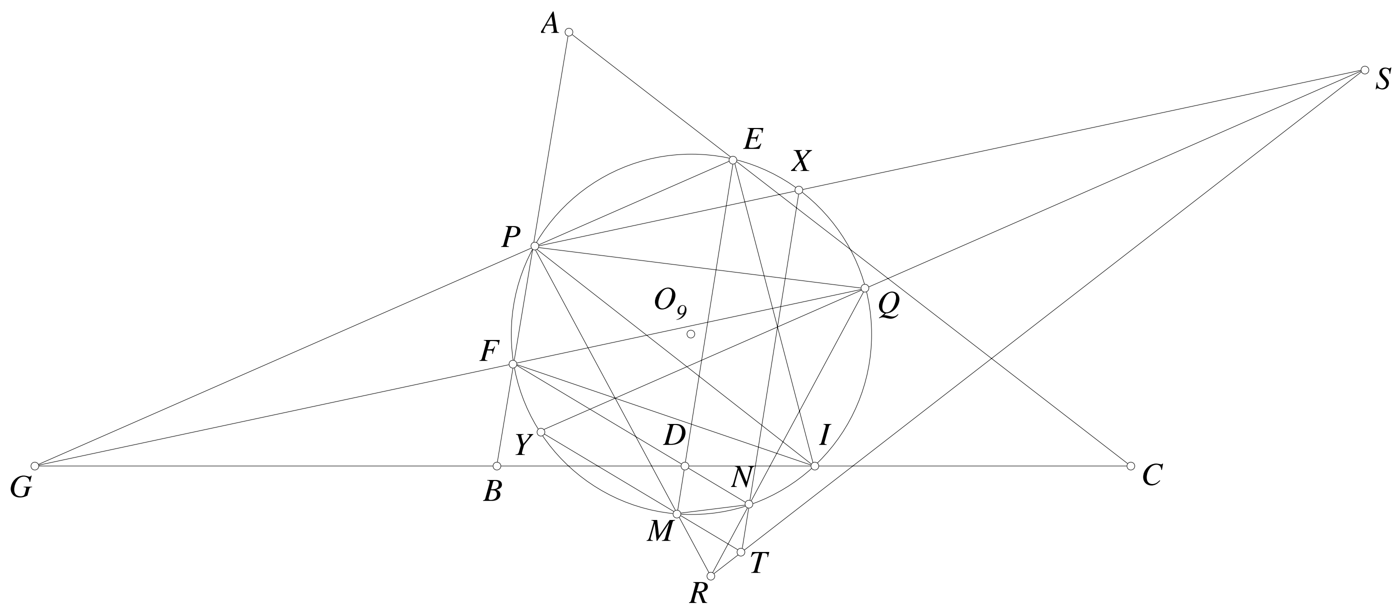


Hình 3.

Lời giải bài toán. Bài toán là hệ quả của bổ đề trên ta dễ thấy trung trực các đoạn AX, EY, CZ đồng quy tại trung điểm OT với T là tâm đường tròn Euler của tam giác AEC. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán trên dựa vào bổ đề là một bài toán đi qua điểm cố định rất thú vị. Chúng ta hoàn toàn có thể dựa vào bài toán đi qua điểm cố định để đề xuất thành các bài toán chứng minh đồng quy như trên. Bài toán trên đã được tác giả đề nghị trong kỳ thi chọn đội tuyển thi học sinh giỏi quốc gia trường THPT chuyên KHTN năm 2013 xem [4].

Bài toán 9. Cho tam giác ABC đường cao BE, CF và đường tròn Euler là (O_9), D, G thuộc BC sao cho $(BC, DG) = -1$. ED, FD lần lượt cắt (O_9) lần lượt tại M, N khác E, F. GE, GF cắt (O_9) lần lượt tại P, Q khác E, F. PM giao NQ tại R. Gọi S là đối xứng của G qua trung điểm PQ. Gọi T là đối xứng của D qua trung điểm MN. Chứng minh rằng R, S, T thẳng hàng.



Hình 4.

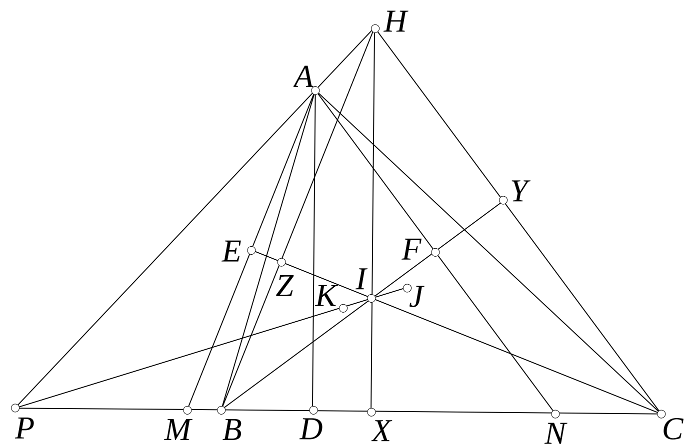
Lời giải. Gọi I là trung điểm của BC theo hệ thức Newton ta dễ có $IE^2 = IF^2 = IB^2 = IC^2 = \overline{ID}.\overline{IG}$.

Từ đó dễ có $\angle IFD = \angle IGF, \angle IED = \angle IGE$. Gọi PS cắt (O_9) tại X. Suy ra $\angle EPX = \angle EGF = \angle IGE - \angle IGF = \angle IED - \angle IFD = \angle IED - \angle IEN = \angle MEN$. Từ đó dễ suy ra $EM \parallel NX$ suy ra NT đi qua X. Tương tự gọi SQ cắt (O_9) tại Y thì MT đi qua Y. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} P & N & Y \\ Q & M & X \end{pmatrix}$ ta thu được R, S, T thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài toán trên cũng là một kết quả đẹp được tác giả tạo ra khi đang tìm hiểu về các hệ thức trong hàng điểm điều hòa. Cũng thật đáng tiếc không hiểu vì một lý do gì mà bài toán cũng được đăng lên trong [6] bởi một nick name người Việt Nam mà cũng không thấy nhắc tới tên tác giả.

Ngoài ra việc khai thác tính chất tâm đường tròn Euler của tam giác IBC như trong bài toán 1 và bài toán 2 cũng đã mang đến rất nhiều bài toán thú vị khác, sau đây là ba bài toán thú vị do tôi đề xuất

Bài toán 10. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. D, E, F là hình chiếu của A lên BC, IC, IB. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác DEF. Chứng minh rằng KI đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác IBC.



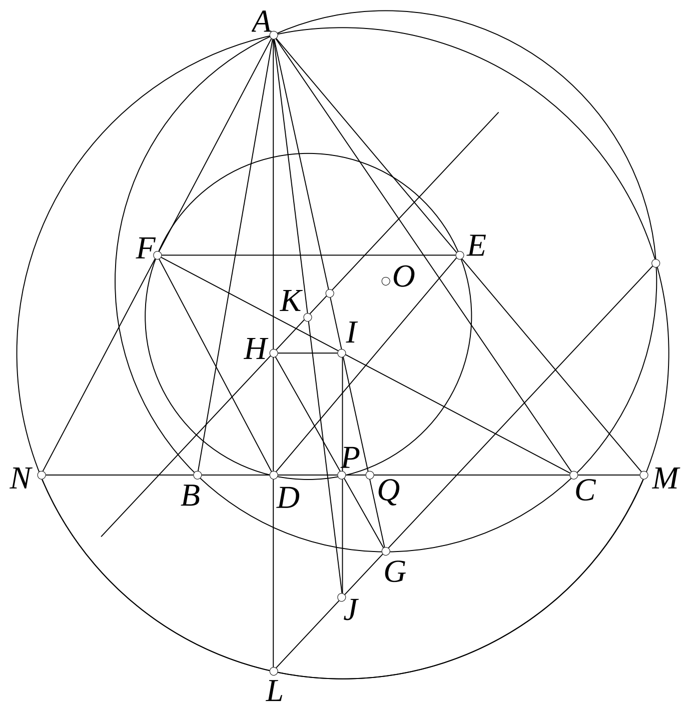
Hình 5.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là giao điểm AE, AF với BC. Dễ dàng chứng minh E, F lần lượt là trung điểm AM, AN. Suy ra K là tâm ngoại tiếp tam giác DEF cũng là tâm đường tròn Euler của tam giác AMN. Cũng chứng minh được I là tâm ngoại tiếp tam giác AMN. Gọi IX, BY, CZ lần lượt là các đường cao của tam giác IBC và H là trực tâm tam giác. Dễ thấy $AM \parallel HB, AN \parallel HC$. Gọi P là giao điểm AH, BC. Phép vị tự tâm P biến tam giác AMN thành tam giác HBC. Lại có IK là đường thằng Euler của tam giác AMN. Gọi J là tâm đường tròn Euler của tam giác HBC, khi đó IJ là đường thẳng Euler của tam giác HBC. Vậy I, J, K thẳng hàng. J là tâm ngoại tiếp (XYZ), suy ra J cũng là tâm Euler của tam giác IBC. Suy ra điều phải chứng minh.

□

Bài toán 11. Cho tam giác ABC có tâm đường tròn nội tiếp là I. D, E, F là hình chiếu của A lên BC, IC, IB. Gọi AI cắt đường tròn ngoại tiếp (O) của tam giác ABC tại G khác A. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác DEF đi qua trung điểm AG.

Lời giải. Gọi M, N lần lượt là giao điểm AE, AF với BC. H, K lần lượt là trực tâm và tâm ngoại tiếp tam giác DEF. AH cắt (AMN) tại L. J là đối xứng của A qua K và P là hình chiếu của I lên BC. Ta có các kết quả quen thuộc: L là đối xứng của A qua H, I là tâm ngoại tiếp tam giác AMN và J là đối xứng của I qua BC. Như vậy, dễ thấy $HK \parallel JL$ hay JL song song với đường thẳng Euler của tam giác DEF. Do $\angle FAH = \angle FCD = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \angle ACF = \angle ADF = \angle FEH$ suy ra A, E, F, H cùng thuộc một đường tròn. Lại có $AE \perp IE, AF \perp IF$ suy ra A, E, F, I cùng thuộc một đường tròn, suy ra H thuộc đường tròn đường kính AI, suy ra $IH \perp AD$ suy ra $IHDP$ là hình chữ nhật.

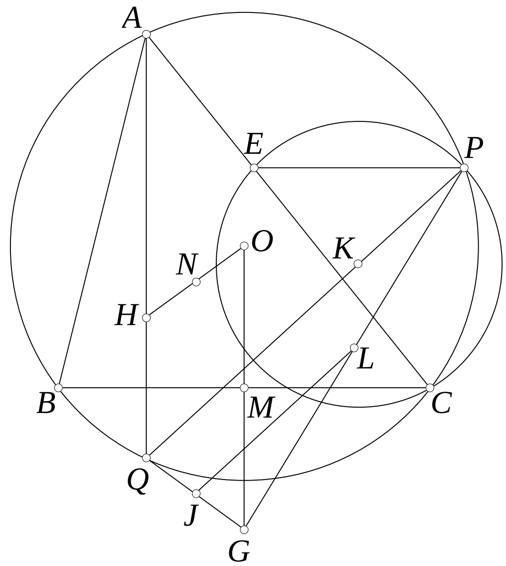


Hình 6.

Ta chứng minh H, P, G thẳng hàng. Gọi Q là giao điểm AG, BC. Lại có G là tâm ngoại tiếp tam giác IBC nên dễ có $QG.QA = QI(QG + GI)$ suy ra $QG.IA = QI.GI$ suy ra $\dfrac{QG}{IG} = \dfrac{IQ}{IA}$ suy ra $\dfrac{PQ}{PD} = \dfrac{PQ}{HI} = \dfrac{QG}{IG}$, suy ra H, P, G thẳng hàng. Suy ra L, J, G thẳng hàng. Suy ra $HK \parallel LG$ suy ra HK đi qua trung điểm AG. $\square$

Bài toán 12. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P di chuyển trên (O). Đường thẳng qua P song song BC cắt CA tại E. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PCE và L là tâm đường tròn Euler của tam giác PBC. Chứng minh rằng đường thẳng qua L song song PK luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.

Lời giải. Gọi H, N lần lượt là trực tâm và tâm đường tròn Euler của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm BC, và G là đối xứng của P qua L. Kết quả quen thuộc, ta có G là đối xứng của O qua BC. Gọi Q là giao điểm AH với (O). Do $PE \parallel BC$ suy ra $\angle CEP = \angle ACB$, suy ra $\angle CPK = 90^\circ - \angle CEP = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAQ = \angle CPQ$ suy ra P, K, Q thẳng hàng.



Hình 7.

Đường thẳng qua L song song PK cắt GQ tại J. Suy ra J là trung điểm LQ. Tứ giác $OHQG$ là hình thang cân, NJ là đường trung bình của hình thang. Suy ra J đối xứng N qua BC. Suy ra đường thẳng qua L song song PK luôn đi qua điểm cố định là điểm đối xứng với tâm Euler của tam giác ABC qua BC. □

Nhận xét. Ba bài toán trên là ba bài toán mởi trên tâm đường tròn Euler và cũng đã được tác giả dùng nhiều lần trong các đợt tập huấn các đội tuyển trên cả nước. Các bài toán trên được hoàn thiện lời giải bởi học trò **Nguyễn Ngọc Chi Lan** học sinh lớp 12A1 Toán khóa 48 trường THPT chuyên KHTN.

Tài liệu

[1] Trần Quang Hùng, mở rộng bài toán hình học trong kỳ thi học sinh giỏi quốc gia năm 2013, tạp chí toán học và tuổi trẻ số 429 tháng 3 năm 2013.

[2] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=577336

[3] Cuộc thi giải toán mathley, http://www.hexagon.edu.vn/mathley.html

[4] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

[5] Trần Quang Hùng, Tỷ số kép, phép chiếu xuyên tâm, hàng điểm điều hòa, chùm điều hòa, http://analgeomatica.blogspot.com/

[6] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=560895

[7] http://mathworld.wolfram.com/Nine-PointCircle.html

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Xung quanh một bài toán hình học trong IMO Shortlist 2012

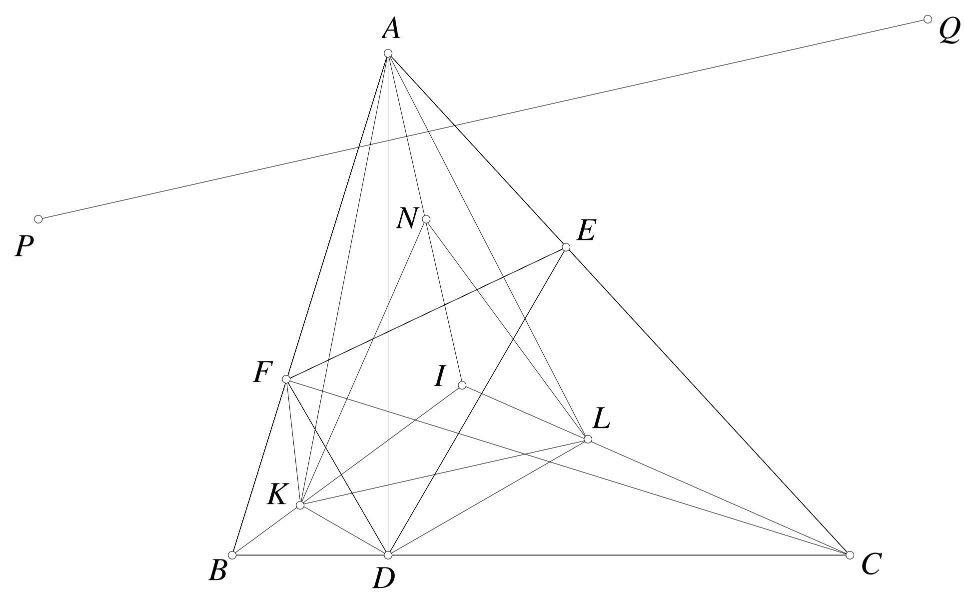
Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán hình học hay trong shortlist năm 2012 với các công cụ hình học thuần túy.

Trong shortlist năm 2012 có một bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm nội tiếp các tam giác BFD, CDE. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác ABK, ACL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

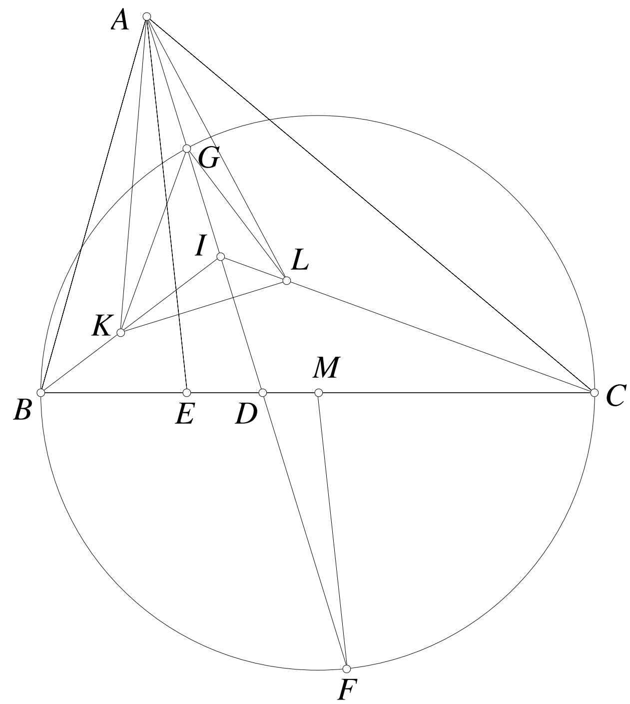


Hình 1.

Lời giải. Ta dễ có các tam giác $\triangle DFB \sim \triangle DCE$ mà K, L là tâm nội tiếp các tam giác này suy ra $\triangle DKF \sim \triangle DLC$. Từ cặp đồng dạng này suy ra $\triangle DKL \sim \triangle DFC$. Suy ra $\angle DKL = \angle DFC = \angle DAC$. Từ đó có $\angle BKL = \angle BKD + \angle DKL = 90^\circ + \dfrac{\angle BFD}{2} + \angle DFC = 90^\circ + \dfrac{\angle ACB}{2} + 90^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \dfrac{\angle ACB}{2} = 180^\circ - \angle LCB$ suy ra tứ giác $BKLC$ nội tiếp. Tương tự nếu gọi N là tâm nội tiếp tam giác AEF thì các tứ giác $ANKB$ và $ANLC$ nội tiếp. Vậy AN là dây cung chung của đường tròn (P) ngoại tiếp ABK và đường tròn (Q) ngoại tiếp ACL suy ra $PQ \perp AN$. Dễ thấy BK, CL, AN đồng quy tại I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Từ đó có các góc ngoài $\angle ILN = \angle NAC = \angle NAC = \angle IKN$. Tương tự $\angle INK = \angle ILK, \angle INL = \angle IKL$ suy ra I là trực tâm tam giác KLN. Vậy $PQ \perp AN \equiv AI \perp KL$ suy ra $PQ \parallel KL$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Việc chứng minh tứ giác $KBCL$ nội tiếp đóng vài trò quan trọng trong lời giải bài toán. Cách trên dùng các tam giác đồng dạng chung đỉnh thật sự hiệu quả và dễ hiểu không phải vẽ thêm một hình phụ nào, cách làm đó dựa vào ý tưởng của bạn Trần Đăng Phúc một học trò cũ của tôi. Ngoài ra trong [1] và trong shortlist gốc cũng đưa ra thêm một số cách khác nhau chứng minh tứ giác $KBCL$ nội tiếp. Bài toán sẽ được khai thác xung quanh vấn đề này, ta đi đến một bài khai thác sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với $AC > AB$. Phân giác góc $\angle BAC$ cắt BC tại D. E là điểm nằm giữa B, D sao cho $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EAB, EAC. Chứng minh rằng tứ giác $KBCL$ nội tiếp.



Hình 2.

Lời giải. Gọi M là trung điểm BC. Lấy F nằm trên đường tròn đường kính BC và nằm ngoài tam giác ABC sao cho $MF \parallel AE$. Ta dễ $DM = MB - DB = \dfrac{BC}{2} - \dfrac{AB.BC}{AB + AC} = \dfrac{BC(AC - AB)}{2(AB + AC)} = \dfrac{MF(AC - AB)}{AB + AC}$. Do đó ta thấy $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{MD}{MF}$. Từ đó dễ chỉ ra $\triangle AED \sim \triangle MFD$. Từ đây dễ có A, D, F thẳng hàng. Gọi AF cắt đường tròn đường kính BC tại G khác F dễ có $\angle EAD = \angle DFM = \angle DGM$.

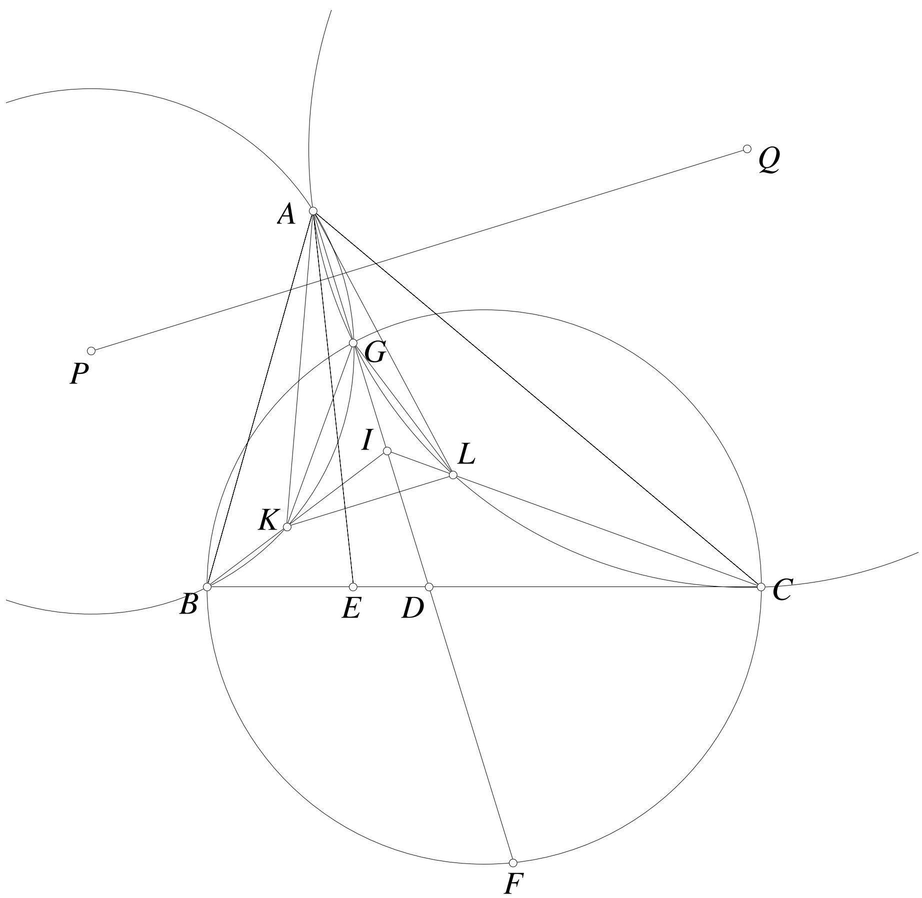
Tổng các góc trong cả hai tam giác EAD và GMD là $360°$ mặt khác $\angle EDG + \angle GDM = 180°$ nên ta suy ra $\angle AED + \angle DMG + 2\angle DGM = 180°$. Chú ý $\angle DMG = 2\angle MGC$ do đó $2(\angle DGM + \angle MGC) = 180° - \angle AED$ hay $\angle DGC = 90° - \dfrac{AED}{2}$. Vậy chú ý L là tâm nội tiếp tam giác AEC nên $\angle AGC = 180° - \angle DGC = 90° + \dfrac{\angle AED}{2} = \angle ALC$ suy ra tứ giác $AGLC$ nội tiếp. Vậy tương tự tứ giác $AGKB$ nội tiếp.

Chú ý các phân giác trong AD, BK, CL đồng quy tại tâm nội tiếp I. Cũng từ hai tứ giác $AGCL$ và $AGKB$ nội tiếp ta có $IK.IB = IG.IA = IL.IC$ nên tứ giác $BKLC$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Điều kiện điểm E thỏa mãn $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$ là điều thú vị nhất của bài toán này. Ta thấy rằng điều kiện được xử lý rất khéo léo qua việc dựng điểm F trên đường tròn đường kính BC. Dựa vào ý tưởng bài toán shortlist ta đưa ra ngay được bài toán sau đây, chính là đề thi chọn đội tuyển KHTN năm 2013 vòng 1 ngày thứ 2 [2]

Bài toán 3. Cho tam giác ABC với $AC > AB$. Phân giác góc $\angle BAC$ cắt BC tại D. E là điểm nằm giữa B, D sao cho $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EAB, EAC. Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KAB, LAC. Chứng minh rằng PQ song song KL.

Lời giải đầu tiên ta có thể sử dụng bài toán 2 như sau



Hình 3.

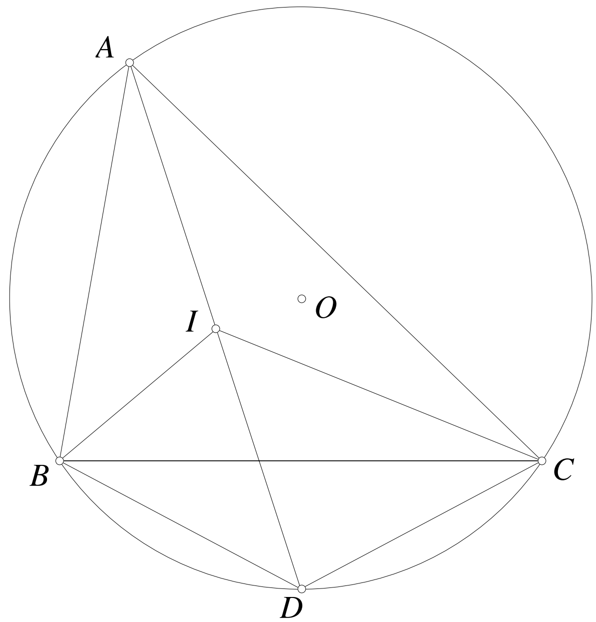
Lời giải 1. Từ các dựng điểm G như lời giải bài toán 2 ta thấy các tứ giác nội tiếp $AGKB, AGLC, BKLC$ ta được

$$\angle IKL + \angle GLK = \angle ICB + (\angle IBC + \angle GAC) = \frac{\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA}{2} = 90°.$$

Hay $IK \perp GL$, tương tự $IL \perp GK$. Từ đây suy ra $AG \equiv IG \perp KL$. Chú ý hai đường tròn $(P), (Q)$ cắt nhau tại A, G do đó $AG \perp PQ$. Vậy từ hai tính chất trên dễ suy ra $PQ \parallel KL$. Ta có điều phải chứng minh. □

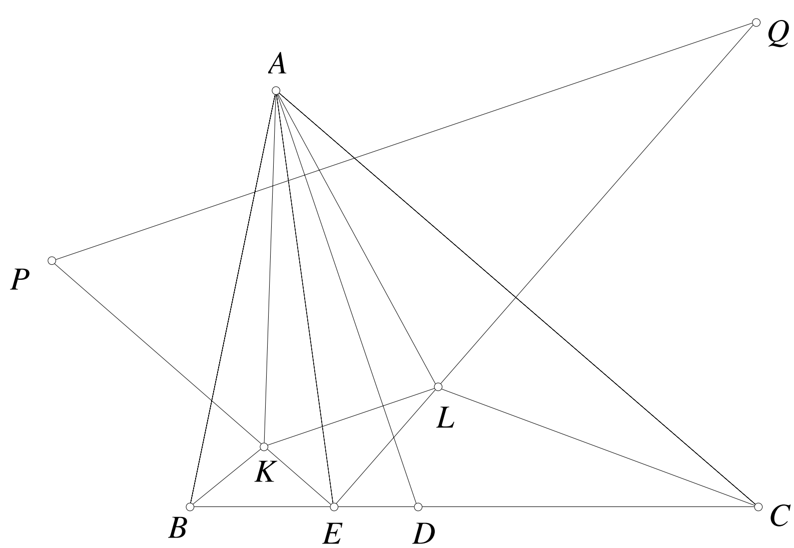
Tuy nhiên lời giải hai sau đây khá ngắn gọn suy ra trực tiếp bài toán, ta cần một bổ đề

Bổ đề 3.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I. AI cắt (O) tại D khác A thì D là tâm ngoại tiếp tam giác IBC và $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{BC}{AB + AC}$.



Hình 4.

Chứng minh. Ta có $\angle BID = \angle IBA + \angle IAB = \angle IAC + \angle IBC = \angle CBD + \angle IBC = \angle IBD$. Do đó tam giác BID cân tại D. Tương tự tam giác CID cân tại D. Vậy $DI = DB = DC$. Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $ABDC$ ta có $DB.CA + DC.AB = DA.AB$ hay $DI(AB + AC) = DA.BC$ suy ra $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{BC}{AB + AC}$. □



Hình 5.

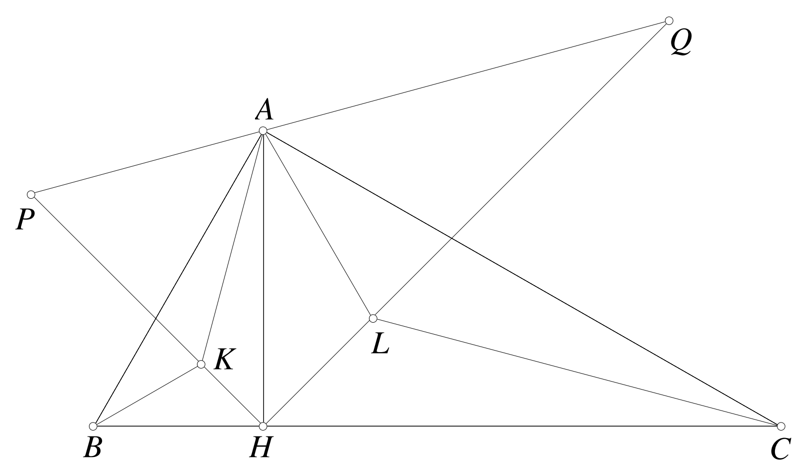
Lời giải 2. Theo bổ đề dễ có $\dfrac{PK}{PE} = \dfrac{AB}{EA+EB}$ và $\dfrac{QL}{QE} = \dfrac{AC}{EA+EC}$. Vậy ta cần chứng minh

$$\frac{AB}{EA+EB} = \frac{AC}{EA+EC}$$
$$\Leftrightarrow \frac{AB}{EA+DB-ED} = \frac{AC}{EA+DC+ED}$$
$$\Leftrightarrow AB(EA+DC+ED) = AC(EA+DB-ED)$$
$$\Leftrightarrow AB(EA+ED) = AC(EA-ED)$$
$$\Leftrightarrow AB(1+\frac{ED}{EA}) = AC(1-\frac{ED}{EA})$$
$$\Leftrightarrow AB(1+\frac{AC-AB}{AB+AC}) = AC(1-\frac{AC-AB}{AC+AB})$$
$$\Leftrightarrow AB.\frac{2AC}{AB+AC} = AC.\frac{2AB}{AB+AC} \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đặc biệt hóa bài toán 1 và bài toán 3 cho ta một trường hợp riêng rất có ý nghĩa sau

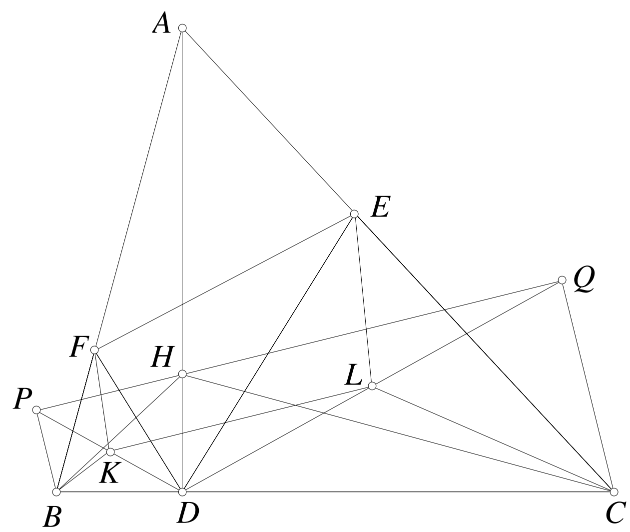
Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông ở A với AH là đường cao. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác AHB, AHC. P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác KAB, LAC. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.



Hình 6.

Nhận xét. Điều thú vị của bài toán trên là nó có thể coi là trường hợp riêng của cả hai bài toán 1 và bài toán 3 do đó cả hai cách giải cho bài toán 1 và bài toán 3 có thể áp dụng tương tự giải bài toán này. Và như vậy hai bài toán trên có thể coi là hai hướng tổng quát cho bài toán trên tam giác vuông này, tuy nhiên điều thú vị hơn là việc phát biểu bài toán cho tam giác vuông có thể giúp cho chúng ta có thêm một hướng mở rộng thứ ba cho bài toán này như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm nội tiếp các tam giác BFD, CDE. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác FBK, ECL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

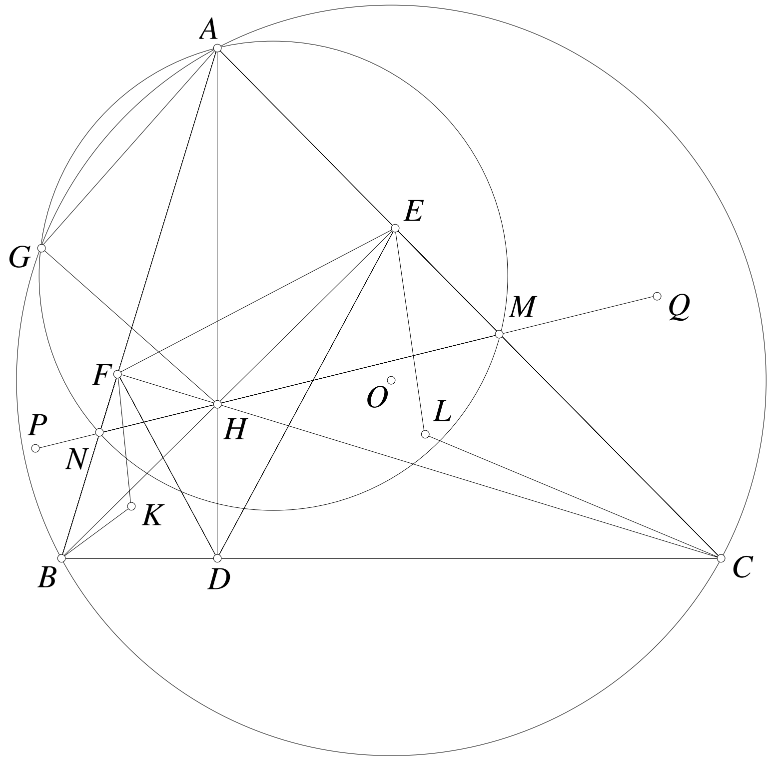


Hình 7.

Lời giải. Tương tự như lời giải thứ 2 của bài toán 3 ta có $KL \parallel PQ$ tương đương với $\dfrac{PK}{PD} = \dfrac{QL}{QD} \Leftrightarrow \dfrac{BF}{DB+DF} = \dfrac{CE}{DC+DE}$. Đẳng thức sau cùng đúng do tam giác DBF và DEC đồng dạng. Vậy bài toán được chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán được chứng minh rất ngắn gọn nhờ ý tưởng của lời giải thứ 2 cho bài toán 3. Một số hệ quả đơn giản được rút ra là PQ đi qua H và là phân giác ngoài của tam giác HBC và như vậy dễ thấy PQ vuông góc với phân giác trong góc $\angle BAC$. Nhờ nhận xét đó bài toán 5 được khai thác như sau

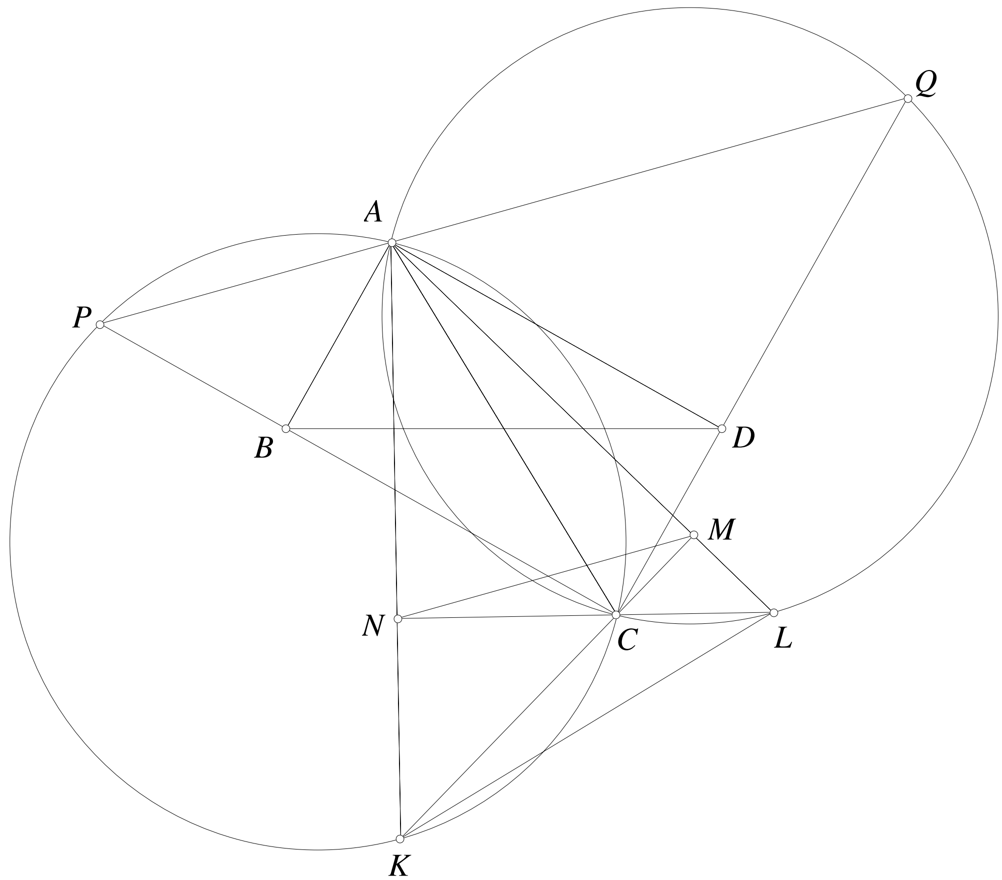
Bài toán 6. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm nội tiếp các tam giác BFD, CDE. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác FBK, ECL. Gọi PQ cắt CA, AB lần lượt tại M, N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt (O) tại G khác A. Chứng minh rằng $GA \perp GH$.



Hình 8.

Bài toán là việc kết hợp bài toán 5 với bài toán chọn đội tuyển Thụy Sĩ năm 2006 [3] rất nổi tiếng. Lời giải chi tiết các bạn có thể tham khảo [3]. Bài toán 4 được khai thác một cách khác như sau

Bài toán 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có K, L là tâm bàng tiếp đỉnh A của các tam giác ABC, ACD. CB, CD lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác ACK, ACL tại P, Q khác C. Gọi CK, CL lần lượt cắt AL, AK tại M, N. Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.



Hình 9.

Việc khai thác các tính chất khác nhau của tức giác $KBCL$ nội tiếp trong bài toán 1 sẽ cũng sẽ đưa ra nhiều được bài toán khác thú vị, tiêu biểu là bài toán sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AD, BE, CF. Gọi $(X), (Y), (Z)$ là các đường tròn nội tiếp tam giác AEF, BFD, CDE. Gọi d_a là tiếp tuyến chung ngoài khác BC của $(Y), (Z)$. Tương tự có d_b, d_c. Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng quy.

Hoặc một hướng mở rộng nhờ vị trí tương đối của trực tâm

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm nội tiếp của các tam giác của các tam giác DBE, DCF. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác HBK, HCL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

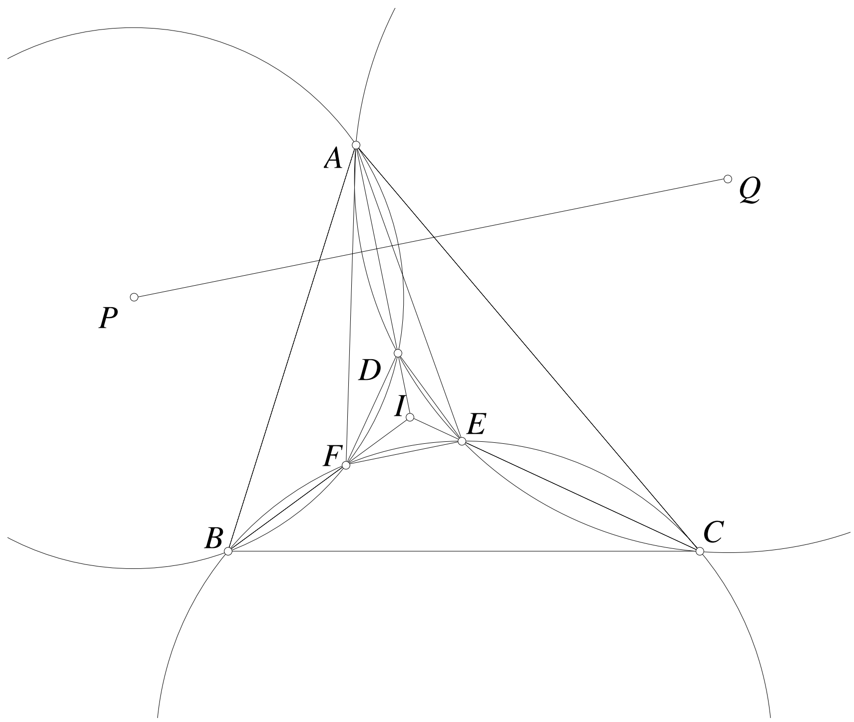
Hoặc một hướng mở rộng cho các tâm bàng tiếp như sau

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm bàng tiếp đỉnh D của các tam giác BFD, CDE. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác ABK, ACL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm bàng tiếp đỉnh D của các tam giác DBE, DCF. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác HBK, HCL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

Hoặc ta hoàn toàn có thể mở rộng bài toán từ sự kiện tứ giác $BKLC$ nội tiếp như sau

Bài toán 12. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. Một đường tròn đi qua B, C cắt IC, IB lần lượt tại E, F. Gọi P, Q lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác ABF, ACE. Chứng minh rằng $PQ \parallel EF$.

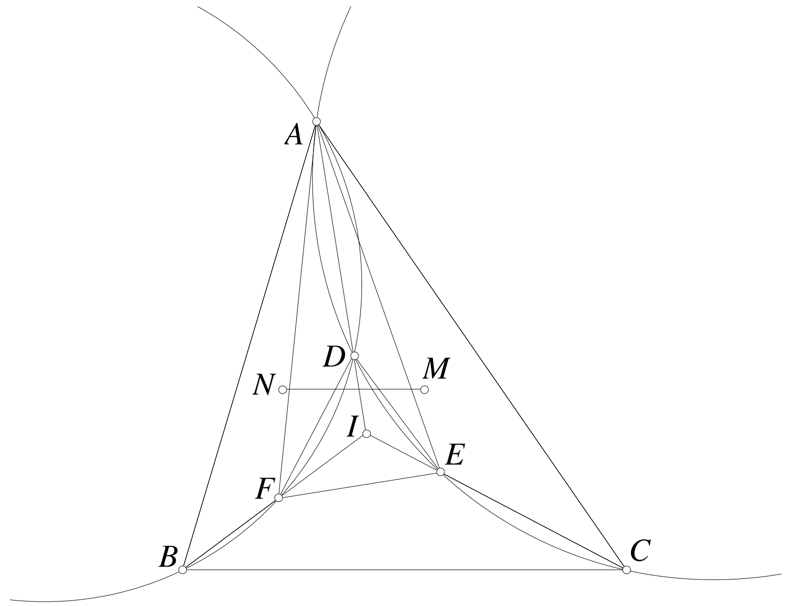


Hình 10.

Lời giải. Gọi đường tròn (P) ngoại tiếp tam giác ABF và đường tròn (Q) ngoại tiếp tam giác ACE cắt nhau tại D khác A. Theo tính chất tâm đẳng phương dễ thấy AD, BF, CE đồng quy. Nên AD đi qua I. Ta biết rằng AI đi qua tâm ngoại tiếp tam giác IBC mà tứ giác $CBEF$ nội tiếp nên $AI \perp EF$. Từ việc AI đi qua D thì $AI \perp PQ$. Từ đó $EF \parallel PQ$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán này là một mở rộng cho bài toán 1. Xung quanh nó vẫn có thể khai thác được thêm nhiều ý thú vị, chẳng hạn như bài toán sau

Bài toán 13. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. D là một điểm trên IA. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB, DAC lần lượt cắt IB, IC tại F, E khác B, C. M, N đối xứng I qua DE, DF. Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.



Hình 11.

Các bài toán trên đều được chứng minh không khó dựa vào các ý chứng minh trong bài viết, xin dành điều đó cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] IMO Shortlist 2012, Geometry 3
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3160579

[2] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013

[3] Topic Hard to approch it ở diễn đàn AoPS
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49p=89098

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

On two nice geometric problems

Tran Quang Hung - Hanoi Vietnam

Abstract

This article is about the extension of two geometric problems by using the power of a point and the radial axis tools and pure geometry. One was introduced on the Russian Maths Olympiad and the other occurred on the HNUE[1] High School for Gifted Students contest.

The following problem was proposed on All-Russian Mathematical Olympiad (2013, Grade 9, Day 2, Problem 3) [1]

Problem 1. Squares $CAKL$ and $CBMN$ are constructed on the sides of acuted-angled triangle ABC. Line CN intersects line AK at X. Line CL intersects line BM at Y. Point P, lying inside triangle ABC, is an intersection of circumcircles of triangles KXN and LYM. Point S is the midpoint of AB. Prove that $\angle ACS = \angle BCP$.

The following problem was presented on HNUE High School for Gifted Students contest 2014 in Vietnam [2]

Problem 2. Let ABC be not an isosceles triangle at A and $\angle BAC > 45°$. Let O be a circumcenter of triangle ABC. Constructing outside triangle ABC squares $ABKL, ACMN$. Lines AN, AL intersect CM, BK at E, F respectively. Denote P by an intersection of circumcircles of triangles LME and NFK such that P is inside triangle ABC.

a) Prove that E, F, O, P are collinear.

b) Prove that B, C, O, P are concyclic.

Comment. Those are two nice and meaningful geometric problems. We could regard square facts as the similar rectangles or similar parallelograms in general. Regarding to this idea, we are pleased to introduce the generalization of two geometric problems above.

Problem 3. Let ABC be triangle and O be its circumcenter. Constructing outside triangle ABC parallelograms $ABKL, ACMN$ such that $\triangle ABL \sim \triangle CAM$. Lines AN, AL intersect lines CM, BK at E, F respectively. Let P be intersection of circumcircles of triangles LME and NFK and P is inside triangle ABC. Prove that B, C, O, P are concyclic.

Solution. Let line KB intersect line CM at G. Because of $\triangle ABL \sim \triangle CAM$, it is easily seen that $\angle ABK + \angle ACM = 180°$. Therefore G lies on circumcircle (O) of triangle ABC. Clearly, quadrilateral $AFGE$ is parallelogram so $\angle AFG = 180° - \angle FGE = \angle BAC$. We also have inscribed angles $\angle AGF = \angle ACB$ so $\triangle AFG \sim \triangle BAC$. Deducing $AC.FA = AB.FG = AB.AE$. In the same way as similar triangles $\triangle ABL \sim \triangle CAM$, it is easily be seen that $AC.AL = AB.AN$. From that, we obtain $\dfrac{AF}{AL} = \dfrac{AE}{AN}$ or $AL.AE = AF.AN$. Thus A belongs to the radical axis of circumcircles of triangles LME and NFK.

[1] Hanoi National University of Education

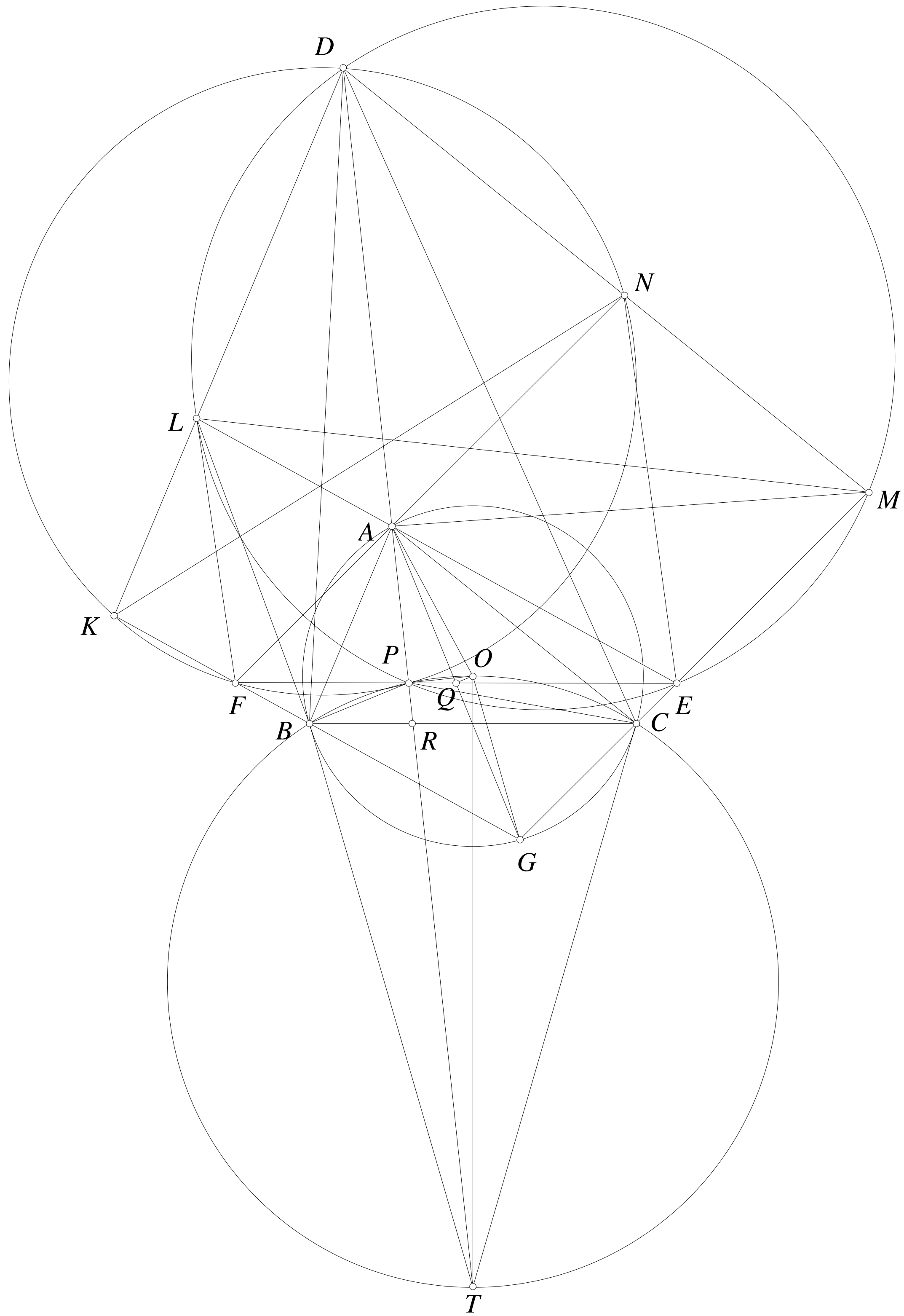


Figure 1.

Let line KL intersects line MN at D, we have $\angle DNF = 180^\circ - \angle ANM = 180^\circ - \angle FKL$ which implies that point D belongs to the circumcirle of triangle NFK. Similarly, D belongs to the circumcircle of triangle LME. Therefore, DP is the radical axis of circumcenters of triangles LME and NFK. We infer point A lies on line DP. Note that $DMEP$ and $DKEP$ are quadrilaterals inscribed in the circles, we get $\angle APF + \angle APE = \angle DME + \angle DKF = 180°$. Thus P lies on EF.

Let Q be a midpoint of AG. Obviously, $\angle AOQ = \frac{1}{2}\angle AOG = \angle ACG = \angle AMC = 180° - \angle DPE = 180° - \angle APQ$. Therefore, the quadrilateral $APQO$ is concyclic, which $OQ \perp AQ$. We imply $AP \perp OP$.

Denote R by an intersection of lines AP and BC, it is easy to prove that $\frac{RB}{RC} = \frac{S_{DAB}}{S_{DAC}} = \frac{S_{LAB}}{S_{LAC}} = \frac{AL.AB}{AN.AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$. Consequently, AP is symmedian of triangle ABC. Thus, AP passes through the intersection of tangents to (O) at B, C, we call T. Since $OP \perp AP$, it is plain that points O, P, B, C lie on the circle of diameter OT. The proof is complete. □

Comment. When the parallelograms are squares, we obtain results of those two geometric problems. It could be seen to infer B, C, O, P be concyclic, we have to prove AP is symmemdian as in first problem and point P lies on EF as part a) of the second problem. In this problem, point P is essentially fixed and does not depend on the way of choosing parallelograms because it is the projection of circumcenter O on the $A-$symmedian line. The projection of circumcenter O on the symmedian line is a special point inside triangle and is useful. For instance, it is the center of the homothety taking segment CA to segment AB. We will discover others nice geometric problems if we exploit the extension of the problem. Let's practice the following problems.

Problem 4. Let ABC be not an isosceles triangle at A. Constructing outside triangle ABC similar rectangles $ABKL, ACMN$. Lines AN, AL intersects lines CM, BK at E, F respectively. Let P be an intersection of circumcircles of triangles LME and NFK such that P is inside triangle ABC. Line KN intersect line LM at Q. Prove that $\angle PAB = \angle QAC$.

References

[1] http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3067570

[2] http://diendantoanhoc.net/forum/

Tran Quang Hung - Hanoi Vietnam
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Xung quanh một bài toán hình học trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán hình học hay trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014 với các công cụ hình học thuần túy.

Trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014 ngày thứ 1 có bài toán hình học hay như sau

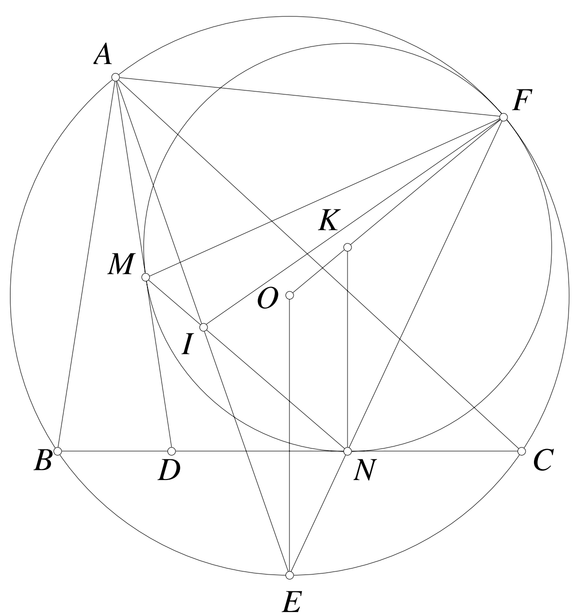
Bài toán 1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Trên cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O) lấy điểm D. Giả sử CD cắt AB ở E và BD cắt AC ở F. Gọi (K) đường tròn nằm trong tam giác EBD, tiếp xúc với EB, ED và tiếp xúc với đường tròn (O). Gọi (L) là tâm đường tròn nằm trong tam giác FCD, tiếp xúc với FC, FD và tiếp xúc với đường tròn (O).

a) Gọi M là tiếp điểm của (K) với BE và N là tiếp điểm của (L) với CF. Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN luôn đi qua một điểm cố định khi D di chuyển

b) Đường thẳng qua M và song song với CE cắt AC ở P, đường thẳng qua N và song song với BFcắt AB ở Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP, ANQ cùng tiếp xúc với một đường tròn cố định khi D di chuyển.

Bài toán này nếu ai đã quen thuộc với định lý Sawayama và Thébault và các mở rộng của nó thì khá đơn giản. Để tìm hiểu bài toán cũng như mở rộng của nó ta sẽ tìm hiểu lại định lý Sawayama và Thébault cùng với các mở rộng

Bài toán 2 (Định lý Sawayama và Thébault)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc đoạn BC. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng MN đi qua tâm nội tiếp tam giác ABC.



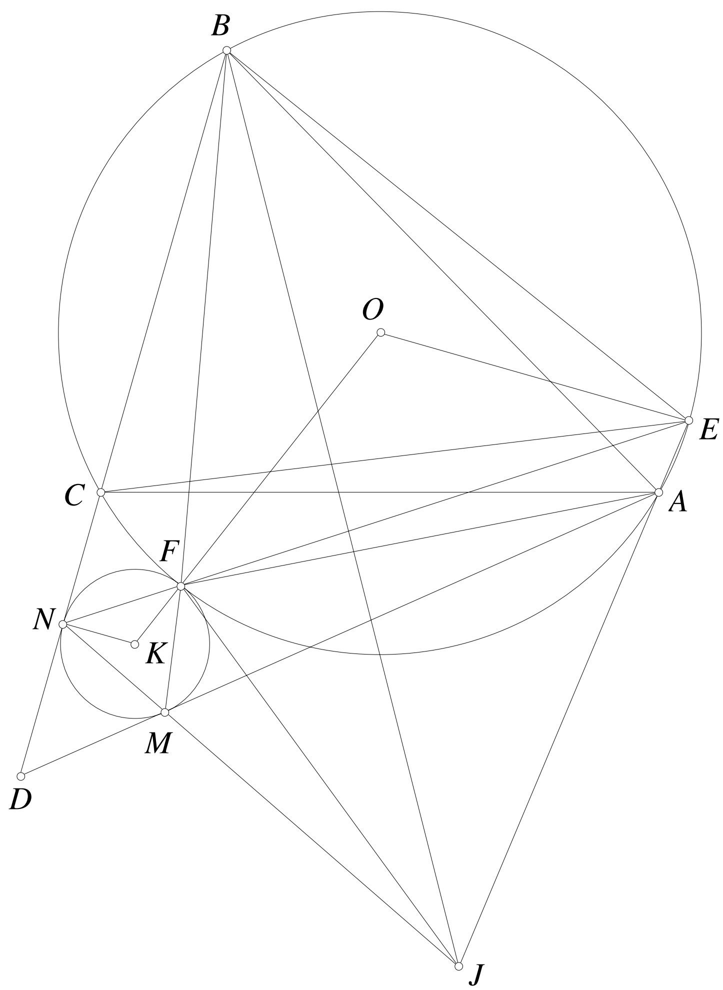
Hình 1.

Lời giải. Gọi phân giác góc $\angle BAC$ cắt (O) tại E khác A. AE cắt MN tại I. (K) tiếp xúc (O) tại F. Dễ có E, N, F thẳng hàng và $EB^2 = EC^2 = EN.EF$.

Ta lại có $\angle FMN = \dfrac{1}{2}\angle FKN = \dfrac{1}{2}\angle FOE = \angle FAE$ suy ra tứ giác $AFIM$ nội tiếp. Suy ra $\angle IFN = \angle MFN - \angle MFI = \angle DMN - \angle MFI = \angle AFI - \angle MFI = \angle AFM = \angle AIM = \angle EIN$. Từ đó $\triangle EIN \sim \triangle EFI$ suy ra $EI^2 = EN.EF = EC^2 = EB^2$. Suy ra I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải trên là một trong những cách tiếp cận nhanh gọn nhất cho định lý Sawayama và Thébault. Bài toán phát biểu trên tâm nội tiếp hẳn nhiên sẽ có cách phát biểu trên tâm bàng tiếp, ta tìm hiểu phát biểu sau

Bài toán 3 (Định lý Sawayama và Thébault mở rộng)**.** Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm thuộc tia đối tia CB. Đường tròn (K) tiếp xúc DA, DC lần lượt tại M, N và tiếp xúc ngoài (O). Chứng minh rằng MN đi qua tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B của tam giác ABC.



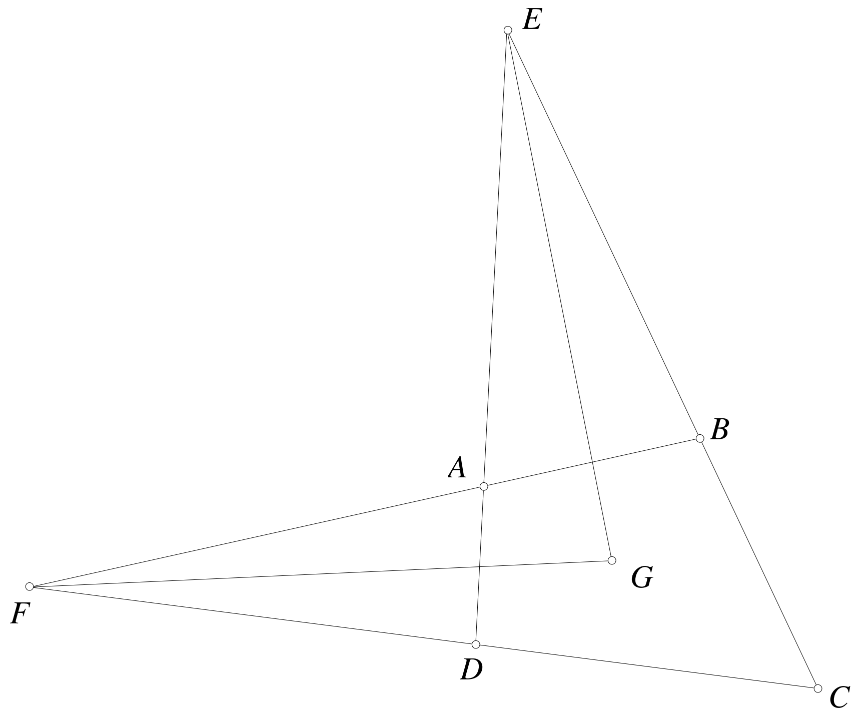
Hình 2.

Lời giải. Gọi phân giác ngoài tại đỉnh A cắt (O) tại E khác A. AE cắt MN tại J. (K) tiếp xúc (O) tại F. Dễ có E, N, F thẳng hàng và $EB^2 = EC^2 = EN.EF$.

Ta lại có $\angle FMN = \dfrac{1}{2}\angle FKN = \dfrac{1}{2}\angle FOE = \angle FBE = \angle FAJ$ suy ra tứ giác $AFMJ$ nội tiếp. Suy ra $\angle EFJ = 180^\circ - \angle NFJ = 180^\circ - \angle NFM - \angle MFJ = 180^\circ - \angle JMA - \angle MAJ = \angle MJA$. Từ đó $\triangle EFJ \sim \triangle EJN$ suy ra $EJ^2 = EN.EF = EC^2 = EB^2$. Suy ra J là tâm bàng tiếp ứng với đỉnh B của tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh. □

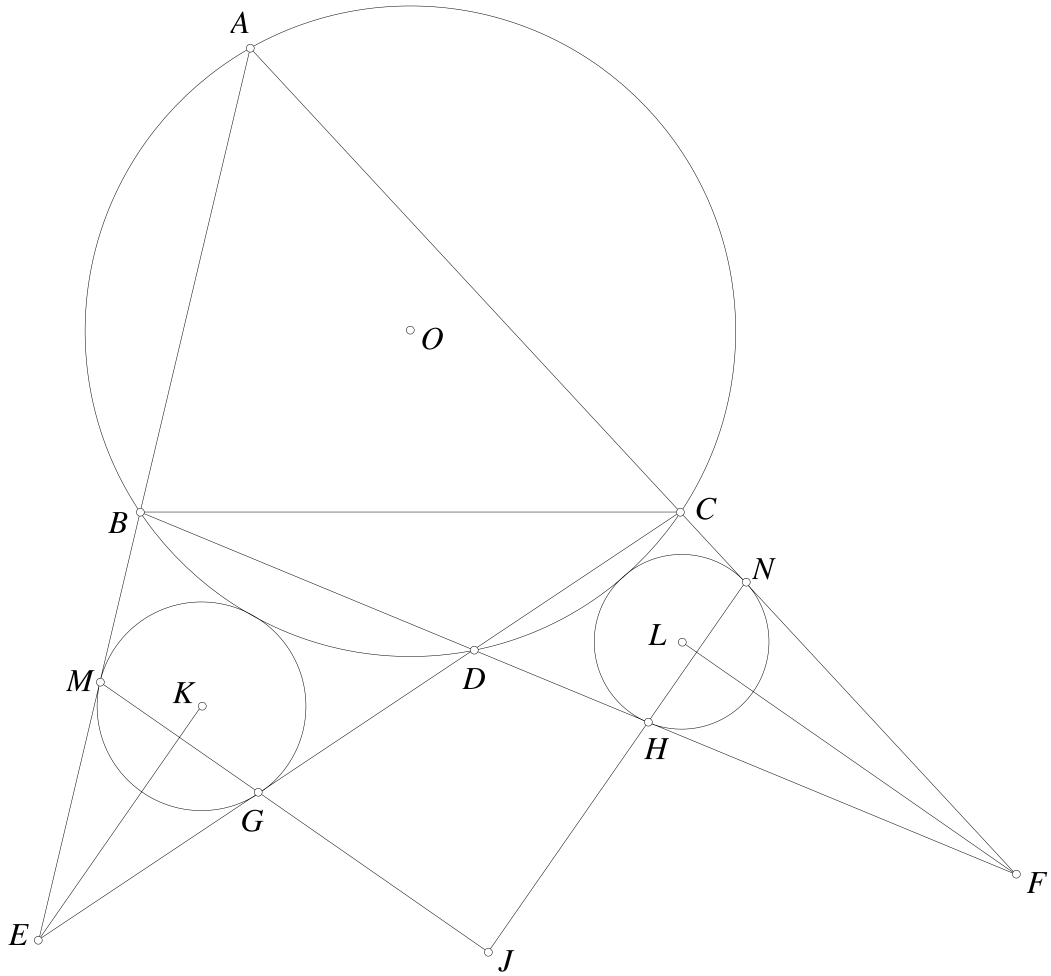
Để giải quyết bài toán 1 và mở rộng nó ta cần thêm một bài toán cơ bản sau

Bài toán 4. Cho tứ giác $ABCD$. Giả sử tia BA giao tia CD tại E, tia DA giao CB tại F. Phân giác góc $\angle E, \angle F$ cắt nhau tại G. Chứng minh rằng $2\angle G = \angle A + \angle C$.



Hình 3.

Bài toán trên rất đơn giản xin không trình bày cách chứng minh. Trở lại bài toán 1



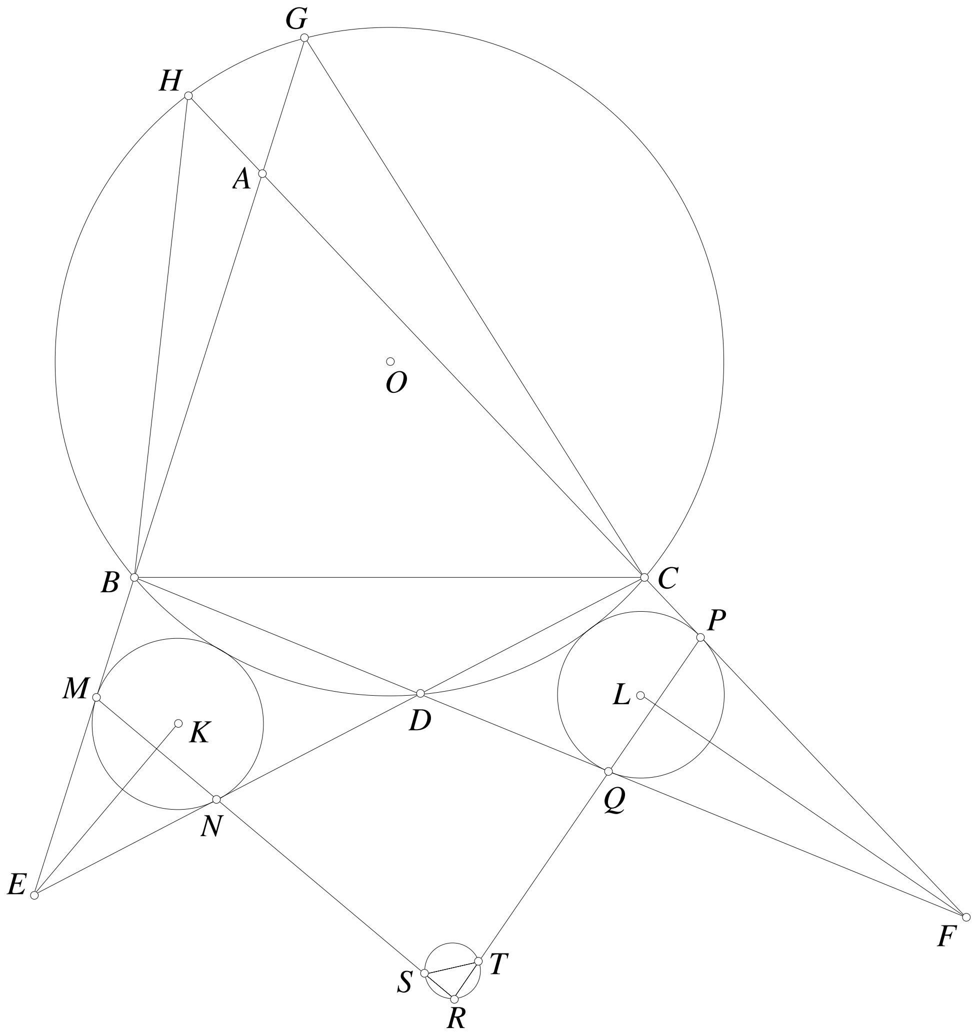
Hình 4.

Lời giải bài toán 1. a) Gọi (K) tiếp xúc ED tại G và (L) tiếp xúc FD tại H. Theo bài toán 3 thì MG, NH đi qua tâm bàng tiếp J ứng với đỉnh A. Theo bài toán 4 góc tạo bởi $(EK, LF) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle D) = 90°$ do đó $EK \perp LF$. Lại dễ có $MG \perp EK \perp LF \perp NH$ từ đó MG vuông góc NH tại J nên đường tròn đường kính MN đi qua J cố định.

b) Dễ thấy tam giác EMG cân nên MJ cũng là phân giác ngoài tam giác AMP nên J cũng là tâm bàng tiếp góc A của tam giác AMP. Giả sử đường tròn (R) tiếp xúc với CA, AB tại Y, Z và tiếp xúc ngoài (O) thì tâm bàng tiếp J của tam giác ABC là trung điểm YZ. Do J là tâm bàng tiếp của AMP nên đường tròn (R) tiếp xúc AP, AM tại Y, Z cũng tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác AMP luôn tiếp xúc (R) cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Ý tưởng chính chứng minh bài toán 1 rõ ràng sáng sủa và ngắn gọn như vậy là của Nguyễn Văn Linh sinh viên đại học ngoại thương. Câu b) tiếp cận theo hướng trong lời giải xem ra khá đơn giản. Ta thử tập trung vào khai thác ý a). Câu a) nói lên MG, NH đi qua J cố định. Bài toán có thể được mở rộng hơn nữa như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC một đường tròn (O) bất kỳ cố định đi qua B, C. D là điểm di chuyển trên (O) sao cho A, D khác phía BC. Giả sử CD cắt AB ở E và BD cắt AC ở F. Gọi (K) là đường tròn tiếp xúc EB, ED lần lượt tại M, N và tiếp xúc trong (O). Gọi (L) là đường tròn tiếp xúc FC, FD lần lượt tại P, Q và tiếp xúc trong (O). Chứng minh rằng giao điểm của MN, PQ luôn nằm trên một đường tròn cố định khi D di chuyển.

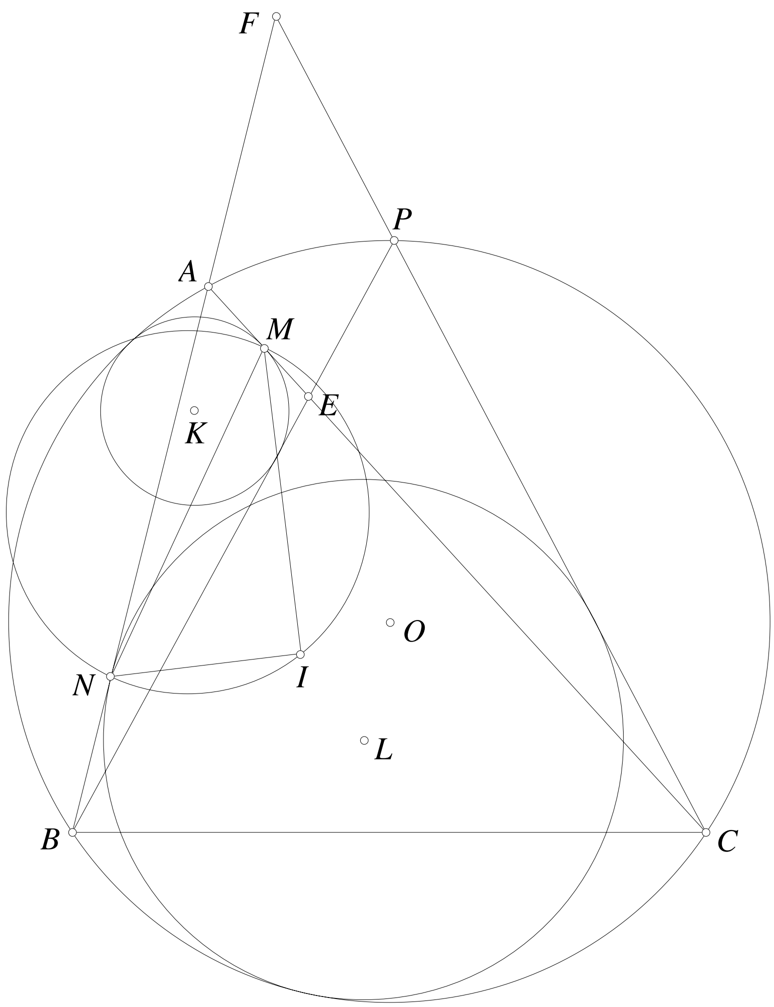


Hình 5.

Lời giải. Gọi AB, AC lần lượt cắt (O) tại G, H khác B, C. Áp dụng bài toán 3 vào tam giác GBC, HBC thì MN đi qua tâm bàng tiếp S ứng với đỉnh G của tam giác BGC cố định và PQ đi qua tâm bàng tiếp T ứng với đỉnh H của tam giác HBC cố định. Gọi MN cắt PQ tại R chú ý $EK \perp MN, FL \perp PQ$, theo bài toán 4 thì $\angle R = \angle(EK, KL) = \dfrac{1}{2}(\angle A + \angle D)$ vì (O) cố định nên $\angle D$ không đổi. Từ đó $\angle R$ không đổi và S, T cố định nên R thuộc đường tròn cố định đi qua S, T. $\square$

Nhận xét. Với ý tưởng thay đường tròn ngoại tiếp thành đường tròn bất kỳ đi qua B, C ta đã thu được một bài toán mới rất thú vị. Ngoài ra bài toán TST của chúng ta đã phát biểu trên định lý Sawayama và Thébault mở rộng. Ta hoàn toàn có thể có bài toán tương tự trên định ký Sawayama và Thébault gốc như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của (O). PB, PC cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn EA, EB và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn FB, FC và tiếp xúc $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A của (O). (K) tiếp xúc AC tại M và (L) tiếp xúc AB tại N. Chứng minh rằng đường tròn đường kính MN luôn đi một điểm cố định khi P di chuyển.



Hình 6.

Từ bài toán mở rộng ta hoàn toàn có thể đề xuất bài toán sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC và đường tròn (O) cố định đi qua B, C. D là điểm di chuyển trên cung $\overset{\frown}{BC}$ của (O) sao cho D, A cùng phía BC. DB, DC cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Đường tròn (K) tiếp xúc đoạn EA, EB tại M, N và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (L) tiếp xúc đoạn FB, FC tại P, Q và tiếp xúc (O) tại một điểm không cùng phía A so với BC. Chứng minh rằng giao điểm của MN và PQ luôn thuộc một đường tròn cố định khi P di chuyển.

Các bạn hãy làm bài toán trên như một bài luyện tập và còn rất nhiều khám phá mới vẫn còn đợi các bạn xung quanh các bài toán này

Tài liệu

[1] Vietnam TST bài 3 http://diendantoanhoc.net/form

[2] Nguyễn Thị Hường, Lương Ánh Nguyệt, Lương Thị Thanh Mai, Đào Thị Quỳnh Nga, Định lý Sawayama và Thébault http://analgeomatica.blogspot.com/2014/02/inh-ly-sawayama-va-thebault.html

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Xung quanh một bài toán hình học trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán hình học hay trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014 ngày thứ 2 với các công cụ hình học thuần túy.

Trong kỳ thi chọn đội tuyển Việt Nam năm 2014 ngày thứ 1 có bài toán hình học như sau

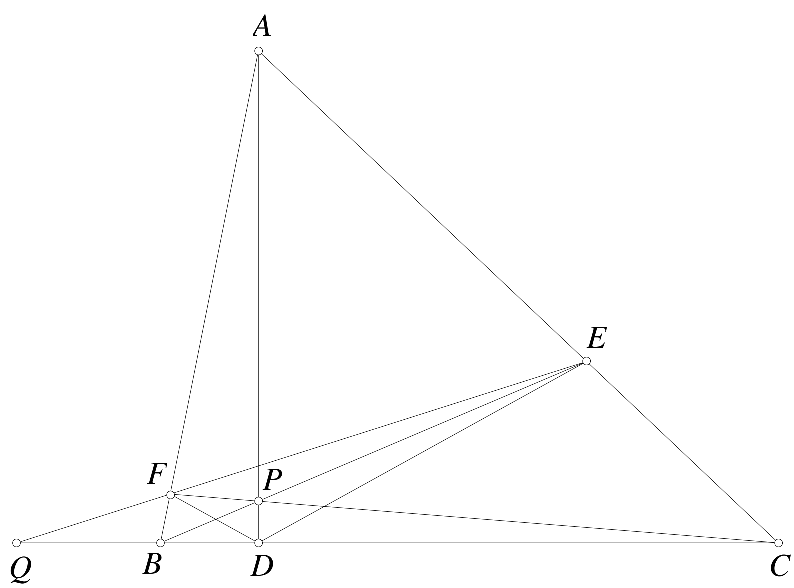
Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn không cân đường cao AD và P thuộc AD. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F.

a) Giả sử tứ giác $AEDF$ nội tiếp. Chứng minh rằng $\dfrac{PA}{PD} = (\tan B + \tan C)\cot\dfrac{A}{2}$.

b) Gọi CP cắt đường thẳng qua B vuông góc AB tại M. BP cắt đường thẳng qua C vuông góc AC tại N. K là hình chiếu của A lên MN. Chứng minh rằng $\angle BKC + \angle MAN$ không đổi khi P di chuyển.

Hai câu a) và b) của bài toán không liên quan tới nhau. Ta sẽ tách riêng thành hai bài toán và phân tích từng bài toán một. Câu a) phát biểu điều kiện dưới dạng một biểu thức lượng giác như vậy không đẹp, ta hoàn toàn có thể có một hệ thức lượng thuần túy hình học của câu a). Ta xét bài toán sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nhọn không cân đường cao AD và P thuộc AD. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Chứng minh rằng nếu tứ giác $AEDF$ nội tiếp thì $\dfrac{AD}{PD} = \dfrac{AB.AC + AD^2}{DB.DC}$.



Hình 1.

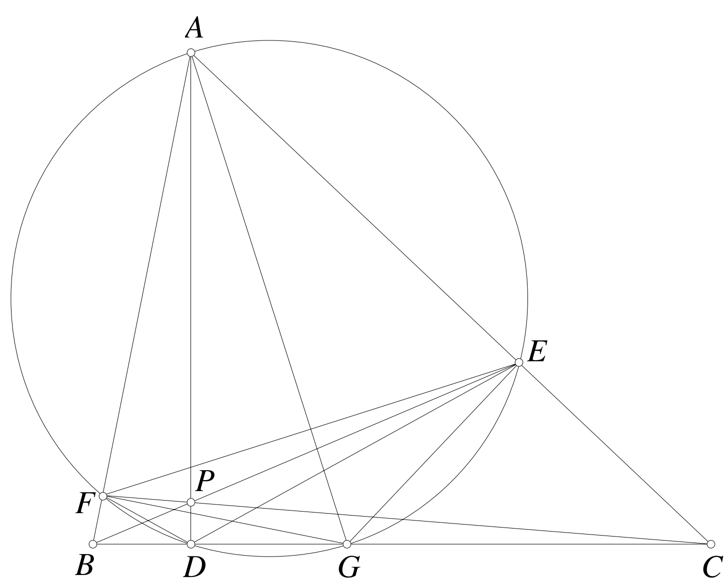
Lời giải 1. Gọi EF cắt BC tại Q. Ta có hàng điều hòa cơ bản $(BC, DQ) = -1$ lại có $DA \perp DQ$ nên DA là phân giác $\angle EDF$. Từ đó với tứ giác $AEDF$ nội tiếp ta dễ suy ra $AE = AF$. Theo định lý Ceva $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1$ suy ra $\frac{EC}{FB} = \frac{DC}{DB}$. Ta lại dễ có $AC - AB = AE + EC - AF - FB = EC - FB$. Từ tỷ số và hiệu của EC, FB ta dễ suy ra $EC = \frac{(AC-AB)DB}{DC-DB}, FB = \frac{(AC-AB)DC}{DC-DB}$ và $AE = AF = AB - FB = \frac{AB.DC - AC.DB}{DC - DB}$.

Từ đó theo hệ thức Van Aubel thì

$$\frac{PA}{PD} = \frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} = \frac{AB.DC - AC.DB}{DC(AC-AB)} + \frac{AB.DC - AC.DB}{DB(AC-AB)}$$
$$= \frac{AB}{AC-AB} - \frac{AC.DB}{DC(AC-AB)} + \frac{AB.DC}{DB(AC-AB)} - \frac{AC}{AC-AB}$$
$$= \frac{AB.DC^2 - AC.DB^2}{DB.DC(AC-AB)} - 1$$
$$= \frac{AB(AC^2 - AD^2) - AC(AB^2 - AD^2)}{DB.DC(AC-AB)} - 1$$
$$= \frac{AB.AC + AD^2}{DB.DC} - 1$$

Từ đó suy ra $\frac{AD}{PD} = 1 + \frac{PA}{PD} = \frac{AB.AC + AD^2}{DB.DC}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Từ áp dụng hệ thức lượng giác cơ bản ta có $\frac{PA}{PD} = \frac{AB.AC + AD^2}{DB.DC} - 1 = \frac{1}{\cos B \cos C} + \tan B.\tan C - 1$. Không khó để kiểm tra đẳng thức $\frac{1}{\cos B \cos C} + \tan B.\tan C - 1 = (\tan B + \tan C)\cot\frac{A}{2}$, từ đó mục đích ban đầu của bài toán được thực hiện. Tuy nhiên việc biến đổi thuần túy hệ thức lượng theo các cạnh không làm ta nhìn rõ bản chất hình học của bài toán này. Chúng ta xét hướng tiếp cận khác câu a) bài toán 1 của tác giả Nguyễn Văn Linh



Hình 2.

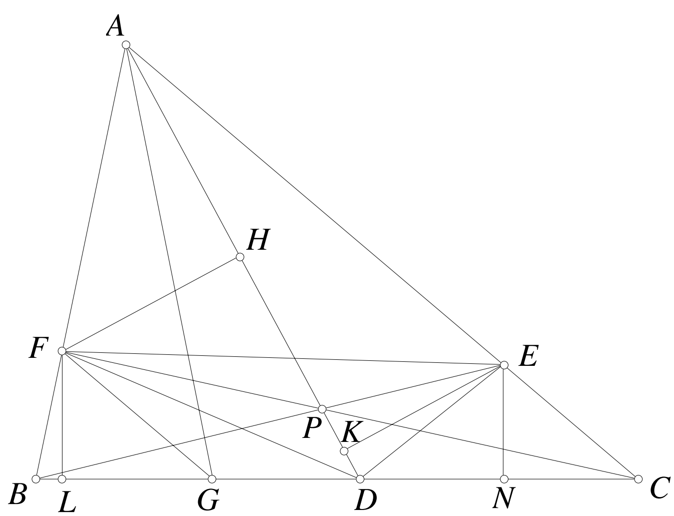
Lời giải 2. Tương tự phần trước ta đã có DA là phân giác $\angle EDF$ nên $AE = AF$. Gọi đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEDF$ cắt BC tại G khác D. Dễ có DG là phân giác ngoài tại đỉnh D nên $GE = GF$ do đó $\triangle AGE = \triangle AGF$ nên AG là phân giác $\angle BAC$. Từ đó theo định lý Van Aubel $\frac{PA}{PD} = \frac{FA}{FB} + \frac{EA}{EC} = \frac{FA}{GF}.\frac{GF}{FB} + \frac{EA}{GE}.\frac{GE}{EC} = \cot\frac{A}{2}\tan B + \cot\frac{A}{2}.\tan C = (\tan B + \tan C)\cot\frac{A}{2}$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc dựng thêm điểm G làm ta đi đến hệ thức lượng nhanh chóng xong điều đó không ý nghĩa bằng ta có nhận xét E, F chính là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADG với CA, AB. Điều này cho ta liên tưởng tới bài toán sau đã có trong Shortlist năm 1994 và lời giải có trong [2]

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có phân giác AD. E, F là hình chiếu của D lên CA, AB. BE giao CF tại P. H là hình chiếu của P lên BC. Chứng minh rằng HP là phân giác $\angle EHF$.

Tuy vậy quan trọng hơn cách làm này cho ta một ý tưởng tổng quát bài toán phần a) này như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC với P là điểm bất kỳ trong tam giác ABC. PA, PB, PC cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi H, K là hình chiếu của F, E lên AD và L, N là hình chiếu của F, E lên BC. Chứng minh rằng $\frac{PA}{PD} = \frac{FH}{FL}.\frac{DA}{DB} + \frac{EK}{EN}.\frac{DA}{DC}$.



Hình 3.

Cách chứng minh sử dụng định lý Van Aubel tương tự. Chú ý khi AD là đường cao và $AEDF$ nội tiếp ta dễ thấy $\frac{FH}{FL} = \frac{EK}{EN} = \cot\frac{A}{2}$ và $\frac{DA}{DB} = \tan B$, $\frac{DA}{DC} = \tan C$, như vậy ta thu được bài toán ban đầu.

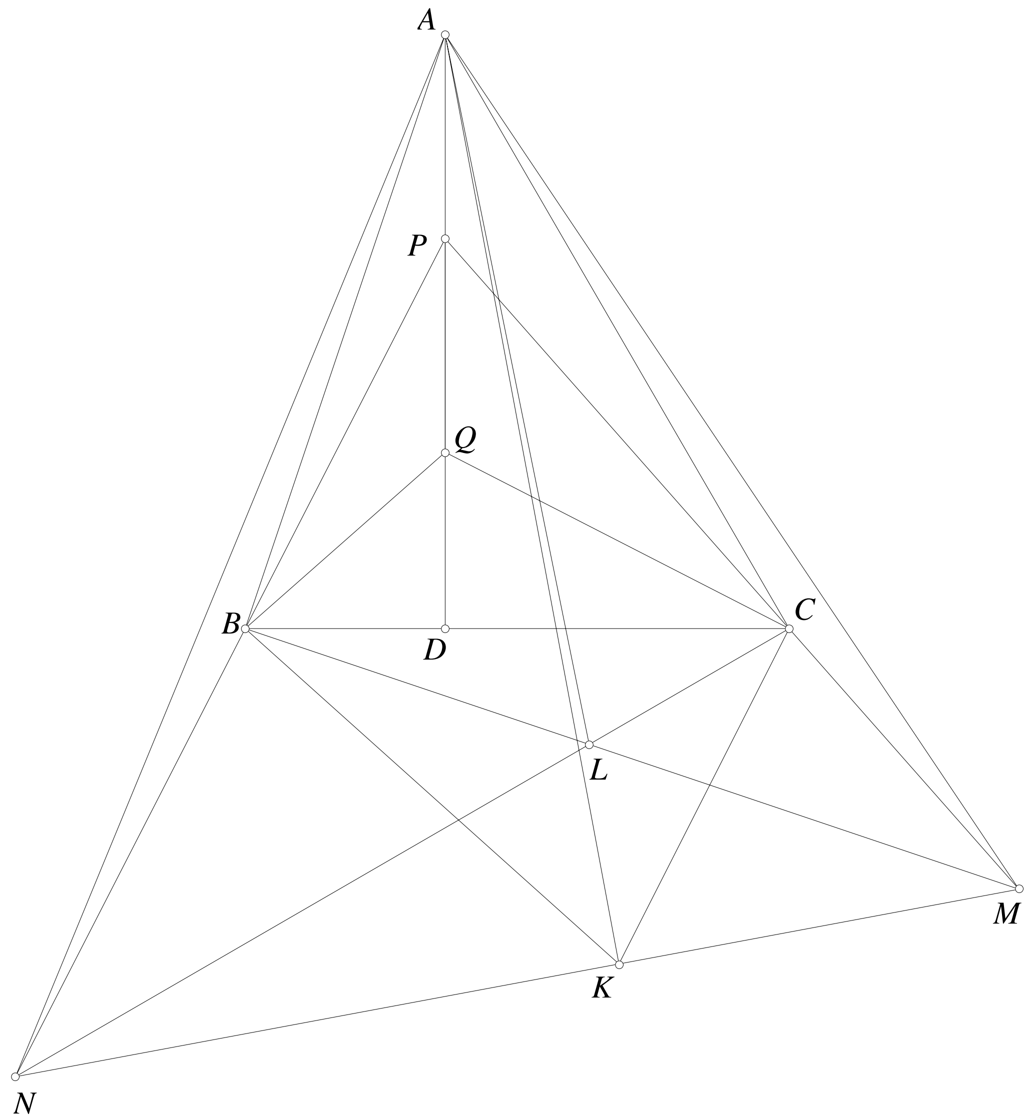
Trở lại phần b) bài toán. Vì phần b) xem ra quá đơn giản nên tôi xin đề xuất thêm một vài ý khác từ mô hình này, ta xét bài toán sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC đường cao AD. P di chuyển trên AD. PB, PC lần lượt cắt các đường thẳng qua C vuông góc CA và qua B vuông góc AB tại N, M. Gọi K là hình chiếu của A lên MN.

a) Chứng minh rằng $\angle MAN + \angle BKC$ không đổi khi P di chuyển.

b) Chứng minh rằng $\angle MAC = \angle NAB$.

c) Chứng minh rằng KA là phân giác $\angle BKC$.



Hình 4.

Lời giải. a) Gọi BM giao CN tại L thì L cố định. Ta chú ý các tứ giác $ACKN, ABKM$ nội tiếp ta có $\angle MAN + \angle BKC = \angle MAK + \angle NAK + \angle BKC = \angle MBK + \angle NCK + \angle BKC = \angle BLC$ không đổi. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi Q là trực tâm tam giác PBC ta có $\angle NBC = 180^\circ - \angle PBC = \angle AQC$ và $\angle QAC = 90^\circ - \angle ACD = \angle BCN$. Từ đây suy ra $\triangle BCN \sim \triangle QAC$ suy ra $\dfrac{CA}{CN} = \dfrac{QA}{BC}$. Tương tự $\dfrac{BA}{BM} = \dfrac{QA}{BC}$.

Từ đó $\dfrac{CA}{CN} = \dfrac{BA}{BM}$ suy ra các tam giác vuông $\triangle CAN \sim \triangle BAM$ suy ra $\angle BAM = \angle CAN$ hay $\angle CAM = \angle BAN$. Ta có điều phải chứng minh.

c) Ta dễ có các góc ngoài bằng nhau $\angle CKM = \angle CAN = \angle BAM = \angle BKN$ từ đây dễ suy ra $\angle CKA = \angle BKA$ hay KA là phân giác $\angle BKC$. Ta có điều phải chứng minh. □

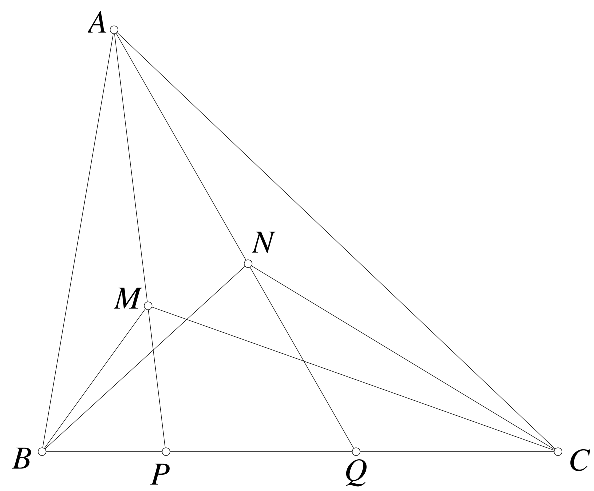
Nhận xét. Rõ ràng ý chứng minh phần a) quá đơn giản. Phần b) thực chất cũng là một bài toán đẳng giác quen thuộc. Tuy nhiên việc chỉ KA là phân giác $\angle BKC$ ở phần c) là một ý thú vị. Bài toán cho thấy MN là phân giác ngoài góc $\angle BKC$. Hay trung trực BC cắt MN tại một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BKC.

Ý b) của bài toán 5 cũng có thể mở rộng hơn nữa như sau

Bài toán 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F cố định thuộc (O) sao cho $EF \parallel BC$. P, Q lần lượt thuộc AE, AF. PB, PC lần lượt cắt QC, QB tại N, M. Chứng minh rằng $\angle MAB = \angle NAC$.

Ta cần có một bổ đề

Bổ đề 6.1. Cho tam giác ABC và hai điểm M, N bất kỳ cùng nằm trong hoặc cùng nằm ngoài tam giác. Chứng minh rằng $\angle MAB = \angle NAC$ khi và chỉ khi $\dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.



Hình 5.

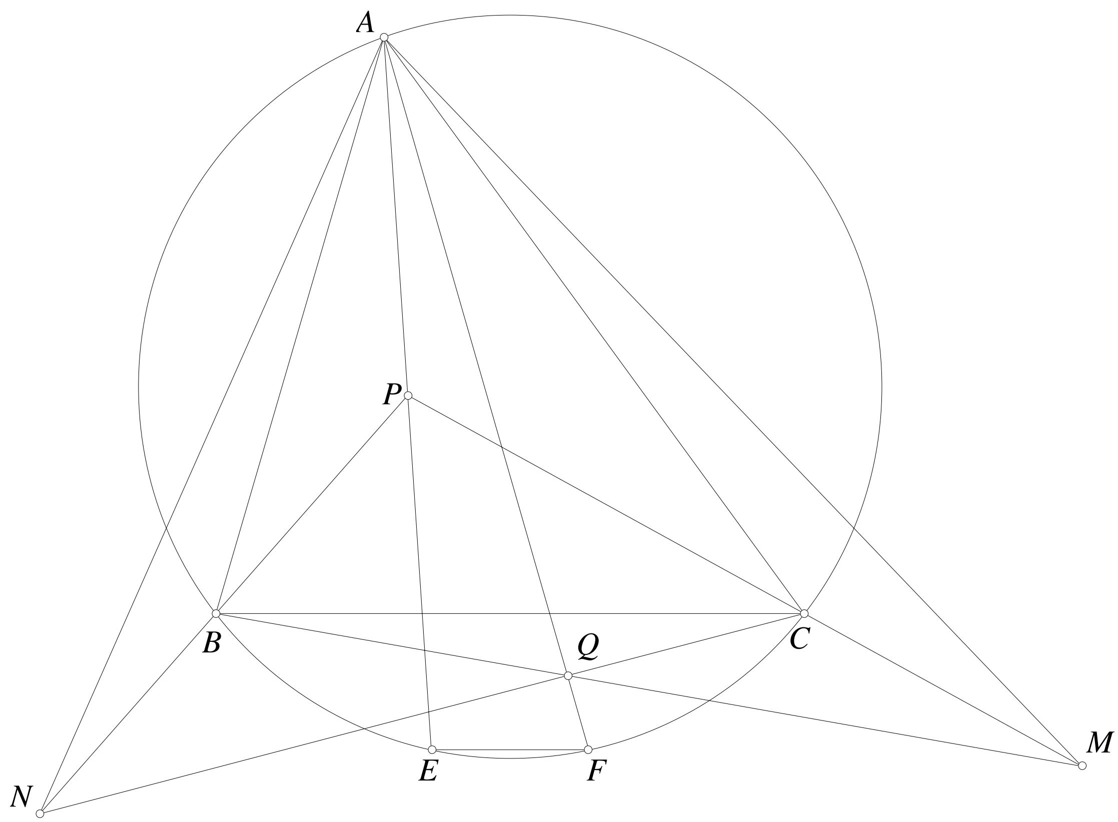
Chứng minh. Trường hợp M, N cùng nằm trong tam giác.

Nếu $\angle MAB = \angle NAC$. Áp dụng tính chất về diện tích tam giác có hai góc bằng nhau ta có $\dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{[NAB]}{[MAC]}.\dfrac{[MAB]}{[NAC]} = \dfrac{AB.AN}{AM.AC}.\dfrac{AB.AM}{AN.AC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Ta có điều phải chứng minh.

Nếu $\dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Gọi AM, AN cắt đoạn BC tại P, Q. Suy ra $\dfrac{QB}{QC}.\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Gọi P' là điểm thuộc BC sao cho $\angle P'AB = \angle QAC$. Theo phần trên thì $\dfrac{QB}{QC}.\dfrac{P'B}{P'C} =$

$\dfrac{[QAB]}{[QAC]}.\dfrac{[P'AB]}{[P'AC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Từ đó suy ra $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{P'B}{P'C}$ vậy $P' \equiv P$ vậy $\angle PAB = \angle QAC$ hay $\angle MAB = \angle NAC$. Ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp M, N nằm ngoài tam giác ta chứng minh tương tự. $\square$



Hình 6.

Lời giải. Áp dụng bổ đề ta phải chứng minh rằng $\dfrac{[NAB]}{[NAC]}.\dfrac{[MAB]}{[MAC]} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Thật vậy ta có

$$\frac{[NAB]}{[NAC]}.\frac{[MAB]}{[MAC]} = (\frac{[NAB]}{[PAB]}.\frac{[PAB]}{[PAC]}.\frac{[PAC]}{[NAC]}).(\frac{[MAB]}{[QAB]}.\frac{[QAB]}{[QAC]}.\frac{[QAC]}{[MAC]})$$
$$= \frac{BN}{BP}.\frac{BM}{BQ}.(\frac{[PAC]}{[NAC]}.\frac{[QAC]}{[MAC]}).(\frac{[PAB]}{[PAC]}.\frac{[QAB]}{[QAC]})$$
$$= \frac{BN}{BP}.\frac{BM}{BQ}.\frac{CP}{CM}.\frac{CQ}{CN}.\frac{AB^2}{AC^2}.$$

Vậy ta sẽ chứng minh rằng $\dfrac{BN}{BP}.\dfrac{BM}{BQ}.\dfrac{CP}{CM}.\dfrac{QC}{QN} = 1$.

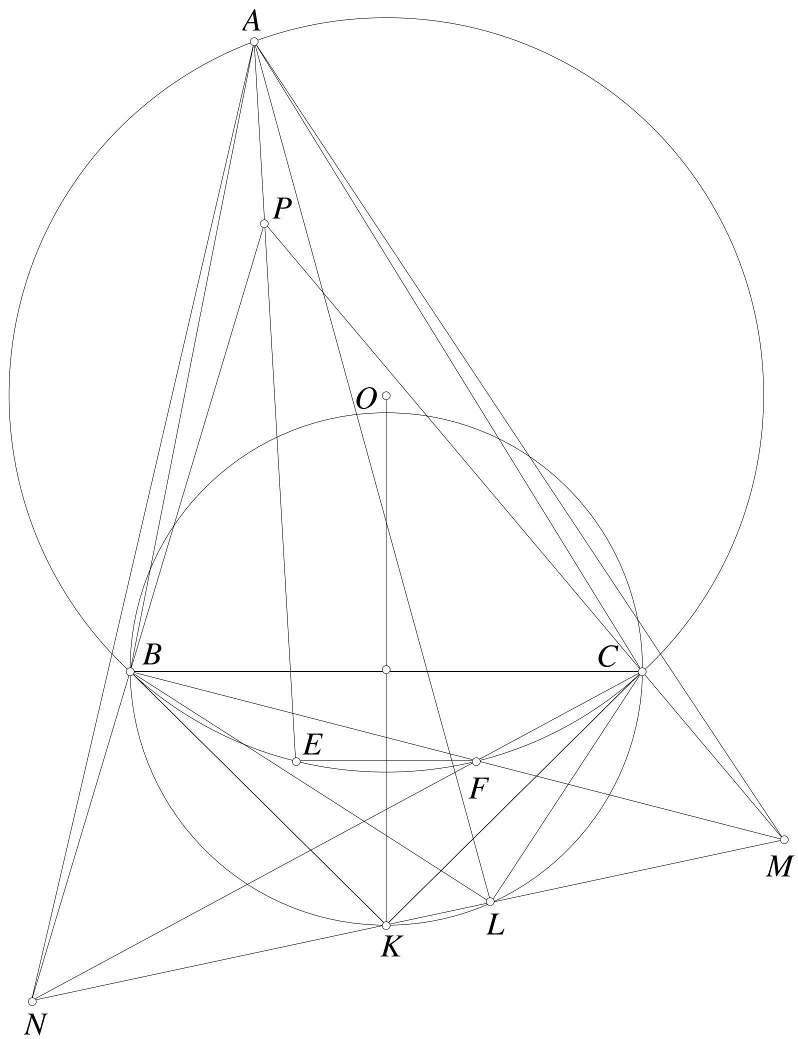
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CPN với Q, B, M thẳng hàng ta có $\dfrac{BN}{BP}.\dfrac{MP}{MC}.\dfrac{QC}{QN} = 1$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CQM với P, B, N thẳng hàng ta có $\dfrac{PC}{PM}.\dfrac{BM}{BQ}.\dfrac{NQ}{NC} = 1$.

Nhân hai đẳng thức trên cho ta $\dfrac{BN}{BP}.\dfrac{BM}{BQ}.\dfrac{CP}{CM}.\dfrac{CQ}{CN} = 1$. Vậy đó là điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Ý tưởng chính trong chứng minh là của Lê Thị Hải Linh học sinh lớp 11 chuyên toán Bắc Ninh. Với bài toán này ta có thể tiếp tục mở rộng ý c) của bài toán 5 như sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F cố định thuộc (O) sao cho $EF \parallel BC$. P di chuyển trên AE. PB, PC lần lượt cắt FC, FB tại N, M. Trung trực BC cắt MN tại K. Chứng minh rằng $\angle MAN + \angle BKC$ không đổi khi P di chuyển.



Hình 7.

Lời giải. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác ACN và ABM cắt nhau tại L khác A. Ta có $\angle ALM + \angle ALN = \angle ABM + \angle ACN = 180^\circ$ suy ra L nằm trên MN. Theo bài toán 6 đã có $\angle NAC = \angle MAB$ suy ra $\angle CLM = \angle NAC = \angle MAB = \angle BLN$ vậy MN là phân giác ngoài tại đỉnh L của tam giác LBC. Từ đó trung trực BC cắt MN tại K thì K nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác LBC. Vậy $\angle MAN + \angle BKC = \angle MAL + \angle NAL + \angle BLC = \angle MBL + \angle NCL + \angle BLC = \angle BFC = 180^\circ - \angle BAC$ không đổi. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Tài liệu

[1] Vietnam TST bài 4 http://diendantoanhoc.net/form

[2] IMO Shortlist 1994, G1 http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=352892

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Về bài toán hình học IMO 2003

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh bài toán hình học IMO năm 2003 với các công cụ hình học thuần túy và ứng dụng với lượng giác.

Năm 2003 trong cuộc thi IMO có bài toán hay như sau [1]

Bài toán 1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi P, Q, R là hình chiếu của D lên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng $PQ = QR$ khi và chỉ khi phân giác $\angle ABC$ và $\angle ADC$ đồng quy với AC.

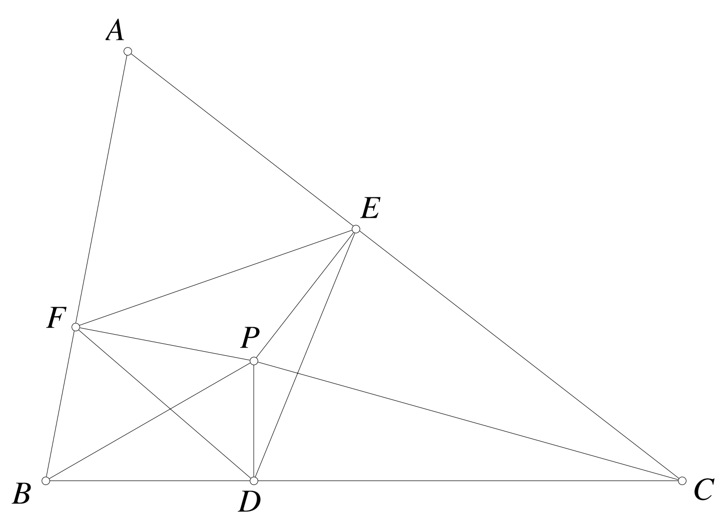
Bài toán trên là bài toán số 4 là một bài ở mức dễ trong kỳ thì. Bài toán là một phát biểu đẹp và có nhiều ý nghĩa. Trong lời giải của shortlist [2] năm đó cũng đã đề xuất một hướng tổng quát hơn như sau

Bài toán 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. Gọi P, Q, R là hình chiếu của D lên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\dfrac{QP}{QR} = (AC, DB) = \dfrac{DA}{DC} : \dfrac{BA}{BC}$

Tôi xin đề xuất một hướng tổng quát hơn nữa cho bài toán này như sau

Bài toán 3. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{PB}{PC} : \dfrac{AB}{AC}$.

Bài toán tuy tổng quát như có một lời giải khá đơn giản



Hình 1.

Lời giải. Ta chú ý PB, PC là đường kính các đường tròn ngoại tiếp tam giác DBE, DCF, áp dụng định lý hàm số sin ta có $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{PB.\sin B}{PC.\sin C} = \dfrac{PB}{PC} : \dfrac{AB}{AC}$. □

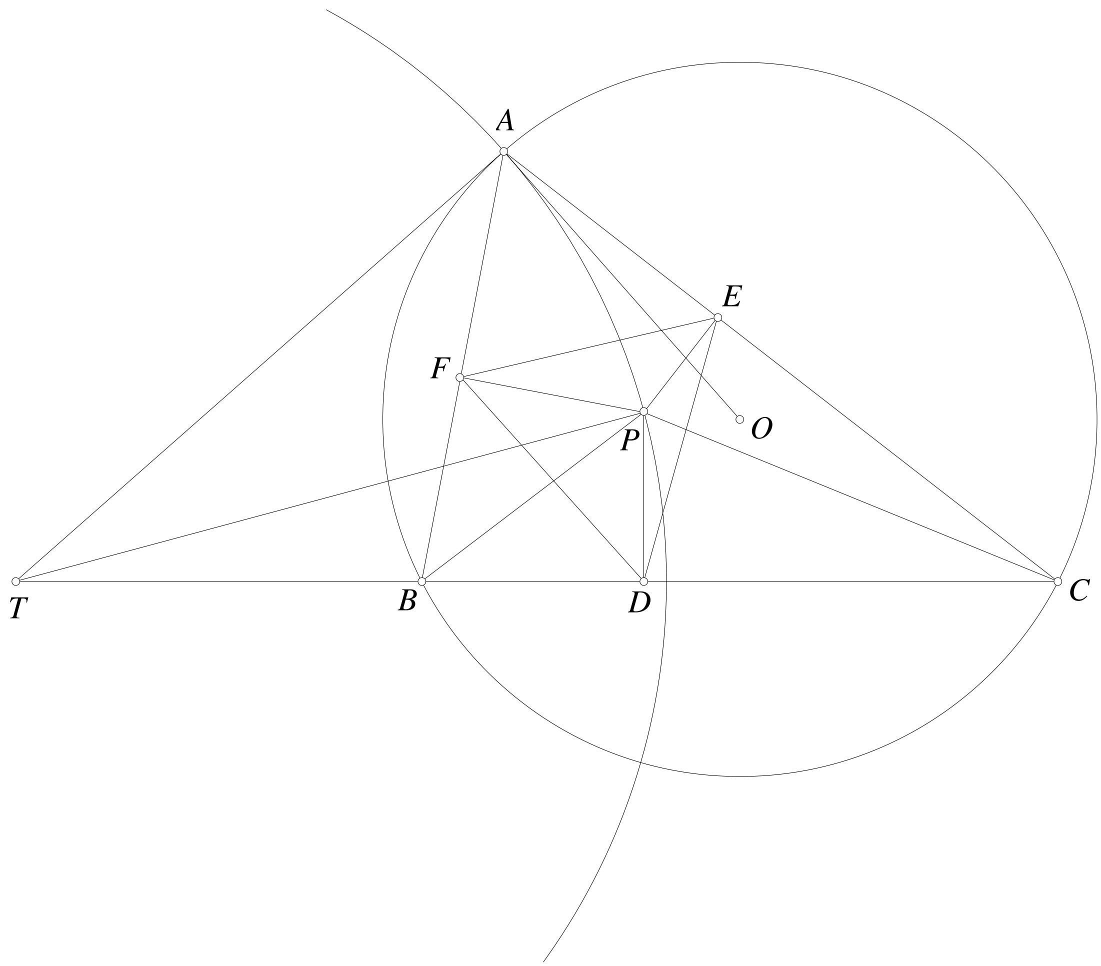
Nhận xét. Ta cũng có thể viết kết quả bài toán dưới dạng tỷ lệ thức như sau $\frac{PA.BC}{EF} = \frac{PB.CA}{FD} = \frac{PC.AB}{DE}$. Bài toán tổng quát xem ra hết sức đơn giản xong nó mang lại nhiều ứng dụng khá thú vị, tiêu biểu là ta xét lại ý tưởng trong bài IMO ta đề xuất bài toán sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. P là một điểm bất kỳ và D, E, F lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng các khẳng định sau là tương đương

a) $TP = TA$

b) Phân giác $\angle BPC$ và $\angle BAC$ đồng quy.

c) $DE = DF$.



Hình 2.

Lời giải. Từ a) suy ra b), ta chú ý $TP = TA$ thì T thuộc (T, TA) là đường tròn Apollonius ứng với A của tam giác ABC suy ra $\frac{PA}{PB} = \frac{AB}{AC}$ suy ra phân giác $\angle BPC$ và $\angle BAC$ đồng quy.

b) suy ra c), ra phân giác $\angle BPC$ và $\angle BAC$ đồng quy suy ra $\frac{PA}{PB} = \frac{AB}{AC}$ theo bài toán 3 đã có $\frac{DE}{DF} = \frac{PA}{PB} : \frac{AB}{AC} = 1$ vậy $DE = DF$.

c) suy ra a), cũng từ bài toán 3 $\frac{PA}{PB} : \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} = 1$ suy ra P thuộc là đường tròn Apollonius ứng với A của tam giác ABC suy ra $TP = TA$.

Ta có điều phải chứng minh. $\square$

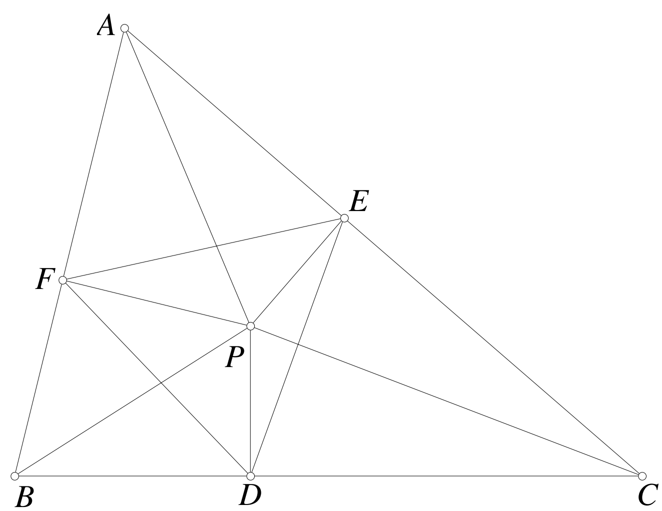
Nhận xét. Bài toán có thể hiểu đơn giản hơn là tam giác DEF cân tại D khi và chỉ khi P nằm trên đường tròn Apollonius ứng với A của tam giác ABC. Ta lại biết rằng ba đường tròn Apollonius ứng với ba đỉnh của tam giác ABC luôn có hai điểm chung gọi, vậy tam giác DEF đều khi và chỉ khi P trùng với một trong hai điểm đó. Từ đó ta đề xuất bài toán sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng tồn tại đúng hai vị trí của P để tam giác DEF là tam giác đều.

Ta đi đến một ứng dụng khác như sau có thể coi là một mở rộng của định lý hàm số sin

Bài toán 6. Cho tam giác ABC và P bất kỳ nằm trong tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{PA.BC}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})} = \frac{PB.CA}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})} = \frac{PC.AB}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}.$$



Hình 3.

Lời giải. Gọi D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Theo định lý hàm số sin cho tam giác DEF ta có $\frac{EF}{\sin\widehat{EDF}} = \frac{FD}{\sin\widehat{FED}} = \frac{DE}{\sin\widehat{EFD}}$ (1).

Theo bài toán 3 ta lại có $\frac{PA.BC}{EF} = \frac{PB.CA}{FD} = \frac{PC.AB}{DE}$ (2).

Ta lại có $\angle EDF = \angle EDP + \angle FDP = \angle ECP + \angle FBP = 180^\circ - \angle PAC - \angle PAC + 180^\circ - \angle PAB - \angle PAB = \angle BPC - \angle A$. Tương tự $\angle FED = \angle CPA - \angle B, \angle EFD = \angle APB - \angle C$ (3)

Từ (1),(2) và (3) dễ suy ra $\frac{PA.BC}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})} = \frac{PB.CA}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})} = \frac{PC.AB}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}$. $\square$

Nhận xét. Bài toán trên có thể coi là mở rộng định lý hàm số sin vì khi tam giác ABC nhọn có P trùng với tâm ngoại tiếp thì $PA = PB = PC$ và $\widehat{BPC} - \widehat{A} = \widehat{A}$. Từ đó ta thu được định lý sin cho tam giác ABC. Mặt khác $\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A}) = \sin\widehat{BPC}\cos A - \cos\widehat{BPC}\sin A$. Từ đó ta có thể viết bài toán tương đương $\dfrac{\sin\widehat{BPC}\cot A - \cos\widehat{BPC}}{PA} = \dfrac{\sin\widehat{CPA}\cot B - \cos\widehat{CPA}}{PB} = \dfrac{\sin\widehat{APB}\cot C - \cos\widehat{APB}}{PC}$. Từ đó ta có thể đề xuất bài toán sau

Bài toán 7. Cho tam giác ABC nhọn. Giả sử có điểm P nằm trong tam giác sao cho

$$\sin\widehat{BPC}\cot A - \cos\widehat{BPC} = \sin\widehat{CPA}\cot B - \cos\widehat{CPA} = \sin\widehat{APB}\cot C - \cos\widehat{APB}.$$

Chứng minh rằng P là tâm ngoại tiếp tam giác ABC.

Tuy nhiên bài toán 6 cũng dẫn ta đến một hệ quả thú vị là tính được tọa độ tỷ cự điểm Fermat như sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC có các góc không quá $120°$ và F là điểm Fermat. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sin(60^\circ + A)}\overrightarrow{FA} + \frac{b}{\sin(60^\circ + B)}\overrightarrow{FB} + \frac{c}{\sin(60^\circ + C)}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0}.$$

Lời giải. Vì F là điểm Fermat nên $\angle BFC = \angle CFA = \angle AFB = 120°$. Từ đó theo nhận xét bài 6 ta có $\dfrac{a.FA}{\sin(120^\circ - A)} = \dfrac{b.FB}{\sin(120^\circ - B)} = \dfrac{c.FC}{\sin(120^\circ - C)}$ hay $\dfrac{a.FA}{\sin(60^\circ + A)} = \dfrac{b.FB}{\sin(60^\circ + B)} = \dfrac{c.FC}{\sin(60^\circ + C)}$.

Ta lại biết kết quả cơ bản $\dfrac{\overrightarrow{FA}}{FA} + \dfrac{\overrightarrow{FB}}{FB} + \dfrac{\overrightarrow{FC}}{FC} = \overrightarrow{0}$. Từ đó ta thu được
$\dfrac{a}{\sin(60^\circ + A)}\overrightarrow{FA} + \dfrac{b}{\sin(60^\circ + B)}\overrightarrow{FB} + \dfrac{c}{\sin(60^\circ + C)}\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{0}$. Đó là điều phải chứng minh. □

Tổng quát hơn cho ta đẳng thức vector thú vị sau đây

Bài toán 9. Cho tam giác ABC và P nằm trong tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a\sin\widehat{BPC}}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})}\overrightarrow{PA} + \frac{b\sin\widehat{CPA}}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})}\overrightarrow{PB} + \frac{c\sin\widehat{APB}}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}.$$

Lời giải. Ta đã biết đẳng thức vector cơ bản với P nằm trong tam giác là $[PBC].\overrightarrow{PA} + [PCA]\overrightarrow{PB} + [PAB]\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ đẳng thức tương đương $\dfrac{\sin\widehat{BPC}}{PA}\overrightarrow{PA} + \dfrac{\sin\widehat{CPA}}{PB}\overrightarrow{PB} + \dfrac{\sin\widehat{APB}}{PC}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$.

Theo nhận xét bài toán 6 lại có $\dfrac{PA.BC}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})} = \dfrac{PB.CA}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})} = \dfrac{PC.AB}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}$.

Từ hai đẳng thức trên dễ cho ta

$$\frac{a\sin\widehat{BPC}}{\sin(\widehat{BPC} - \widehat{A})}\overrightarrow{PA} + \frac{b\sin\widehat{CPA}}{\sin(\widehat{CPA} - \widehat{B})}\overrightarrow{PB} + \frac{c\sin\widehat{APB}}{\sin(\widehat{APB} - \widehat{C})}\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}.$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đẳng thức vector thú vị trên cho phép ta tính các tọa độ tỷ cực của các điểm trong tam giác mà ta biết các góc $\widehat{BPC}, \widehat{CPA}, \widehat{APB}$ chẳng hạn như các đỉnh tam giác Morley. Còn nhiều thú vị ẩn chứa trong các bài toán này bạn đọc hãy tiếp tục khám phá.

Tài liệu

[1] IMO 2003 bài 4 http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=14&t=96

[2] IMO Shortlist 2003 http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=177&t=15621

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Extension of a geometric problem in shortlist 2012

Tran Quang Hung

Abstract

This article turns around a mice geometric problem in shortlist 2012 by using pure geometry tools.

The following problem was proposed in shortlist 2012.

Problem 1. Let ABC be an acute triangle and its altitudes AD, BE, CF. Denote K, L by incenters of triangles BFD, CDE. Let P, Q be a circumcenters of triangles ABK, ACL. Prove that $PQ \parallel KL$.

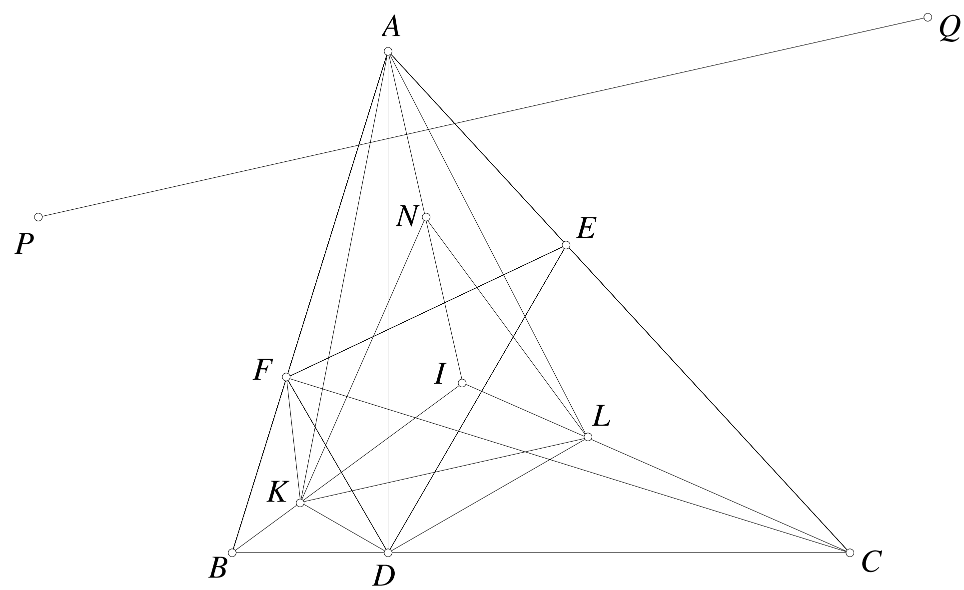


Figure 1.

Solution. It is easy to be seen that triangles $\triangle DFB \sim \triangle DCE$. As well-known, K, L are incenters of those triangle, we imply that $\triangle DKF \sim \triangle DLC$. From this similar pair follows $\triangle DKL \sim \triangle DFC$. Therefore $\angle DKL = \angle DFC = \angle DAC$. Since that, we have $\angle BKL = \angle BKD + \angle DKL = 90^\circ + \dfrac{\angle BFD}{2} + \angle DFC = 90^\circ + \dfrac{\angle ACB}{2} + 90^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \dfrac{\angle ACB}{2} = 180^\circ - \angle LCB$ we deduce that the quadrilateral $BKLC$ is inscribed in a circle. Similarly, if N is incenter of triangle AEF then quadrilaterals $ANKB$ and $ANLC$ are concyclic. Hence AN is a chord of the circle (P) circumscribed about triangle ABK and the circle (Q) circumscribed about ACL. Therefore $PQ \perp AN$. It is obvious that BK, CL, AN are concurrent at I where I is the incenter of triangle ABC. From that, we have external angles $\angle ILN = \angle NAC = \angle NAC = \angle IKN$. Analogously, $\angle INK = \angle ILK, \angle INL = \angle IKL$ infers that I is an orthocenter of triangle KLN. Therefore $PQ \perp AN \equiv AI \perp KL$ follows $PQ \parallel KL$. This completes the proof. $\square$

Comment. Proving a cyclic quadrilateral $KBCL$ play an important role on the solution. On the solution above, the similar triangles having a common vertex was used effectively and clearly. Then, we do not need to draw any auxiliary figure. This solutions based of the idea of Tran Dang Phuc

- my old students. Furthermore, some different ways were proposed to show that the quadrilateral $KBCL$ was cyclic on [1] and on original. From exploiting around this method, we get the following problem.

Problem 2. Let ABC be a triangle and $AC > AB$. The angle bisector of $\angle BAC$ intersects BC at D. E be a point which lies between B and D such that $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$. Denote K, L by incenters of triangles EAB, EAC. Prove that the quadrilateral $KBCL$ is inscribed in a circle.

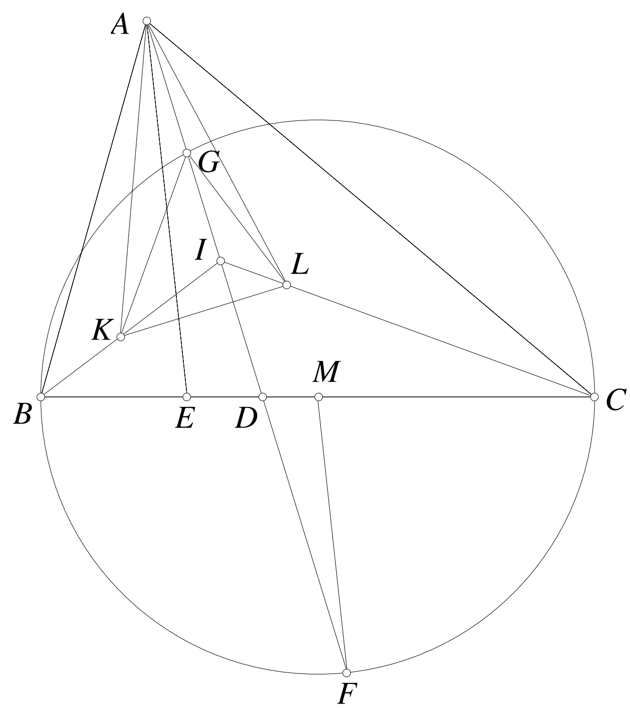


Figure 2.

Solution. Denote M by a midpoint of segment BC. Let F be a point which lies on the circle with diameter BC and outside triangle ABC such that $MF \parallel AE$. It is easy to prove $DM = MB - DB = \dfrac{BC}{2} - \dfrac{AB.BC}{AB + AC} = \dfrac{BC(AC - AB)}{2(AB + AC)} = \dfrac{MF(AC - AB)}{AB + AC}$. Therefore, we have $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{MD}{MF}$. We could point out easily that $\triangle AED \sim \triangle MFD$. From this follows A, D, F are collinear. Let AF meet the circle with diameter BC at G which is differ from F. It is clear that $\angle EAD = \angle DFM = \angle DGM$.

The sum of angles in both triangles EAD and GMD is $360°$. On the other hands, $\angle EDG + \angle GDM = 180°$ we imply that $\angle AED + \angle DMG + 2\angle DGM = 180°$. Note that $\angle DMG = 2\angle MGC$, hence $2(\angle DGM + \angle MGC) = 180° - \angle AED$ or $\angle DGC = 90° - \dfrac{AED}{2}$. Note that L be a center of the incircle of triangle AEC, thus $\angle AGC = 180° - \angle DGC = 90° + \dfrac{\angle AED}{2} = \angle ALC$. So, we deduce that the quadrilateral $AGLC$ is concyclic. Analogously, the quadrilateral $AGKB$ is inscribed in a circle.

Note that the internal angle bisectors AD, BK, CL are concurrent at incenter I. From two concyclic quadrilaterals $AGCL$ and $AGKB$ follows $IK.IB = IG.IA = IL.IC$. Therefore, the quadrilateral $BKLC$ is concyclic. This completes the proof. $\square$

Comment. E satisfied $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$ is the most interesting point of this problem. We could see that the condition is solved ingeniously by drawing point F on the circle with diameter BC. Basing on the idea of the problem on shortlist, we present the following problem, which was proposed on HUS High school for Gifted Students contest (2013, Round 1, Day 2) [2].

Problem 3. Let ABC be a triangle such that $AC > AB$. Angle bisector of $\angle BAC$ intersects BC at D. Point E lies between B, D such that $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$. Denote K, L by incenters of triangles EAB, EAC respectively. Let P, Q be circumcircles of triangles KAB, LAC in turn. Prove that PQ is parallel to KL.

The first proof could be used to solve the problem 2, as follows

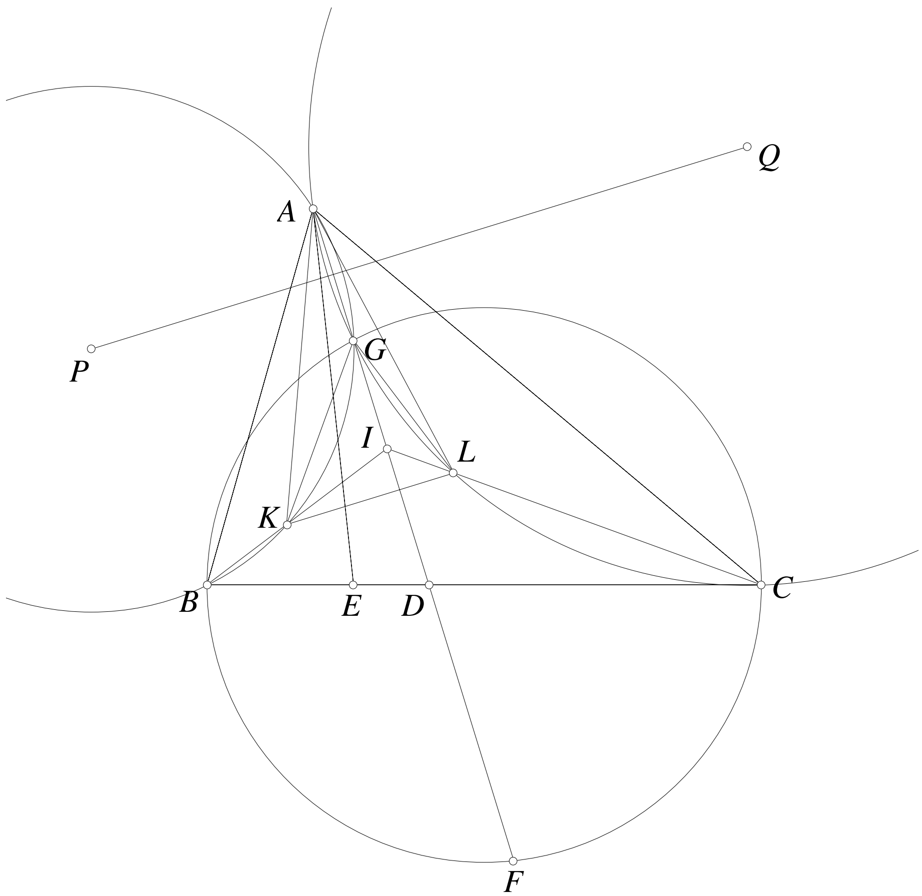


Figure 3.

Solution 1. By an construction analogous to the proof of problem 2, we get concyclic quadrilaterals $AGKB, AGLC, BKLC$. Therefore

$$\angle IKL + \angle GLK = \angle ICB + (\angle IBC + \angle GAC) = \frac{\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA}{2} = 90^\circ.$$

Or we could say that $IK \perp GL$, similarly $IL \perp GK$. So, we infers $AG \equiv IG \perp KL$. Note that two circles $(P), (Q)$ intersect each other at A, G. We get $AG \perp PQ$. Therefore, from properties above, it is easily to be seen that $PQ \parallel KL$. This concludes the proof. $\square$

However, the two following proofs are quite brief. Those solutions infer the problem immediately, so we have to prove a Lemma.

Lemma 3.1. Let ABC be a triangle inscribed in circle (O) and I be incenter. AI intersects (O) at D which differs from A. Show that D is a circumcenter of triangle IBC and $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{BC}{AB + AC}$.

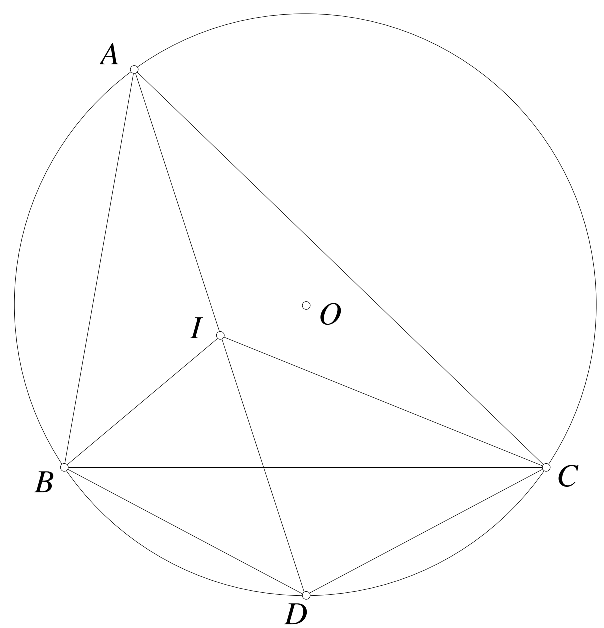


Figure 4.

Proof. We have $\angle BID = \angle IBA + \angle IAB = \angle IAC + \angle IBC = \angle CBD + \angle IBC = \angle IBD$. Then BID is an isosceles triangle at D. Analogously, CID is an isosceles triangle at D. T $DI = DB = DC$. Applying Ptolemy theorem with respect to the quadrilateral $ABDC$, we get $DB.CA + DC.AB = DA.AB$ or $DI(AB + AC) = DA.BC$. Therefore, $\dfrac{DI}{DA} = \dfrac{BC}{AB + AC}$. □

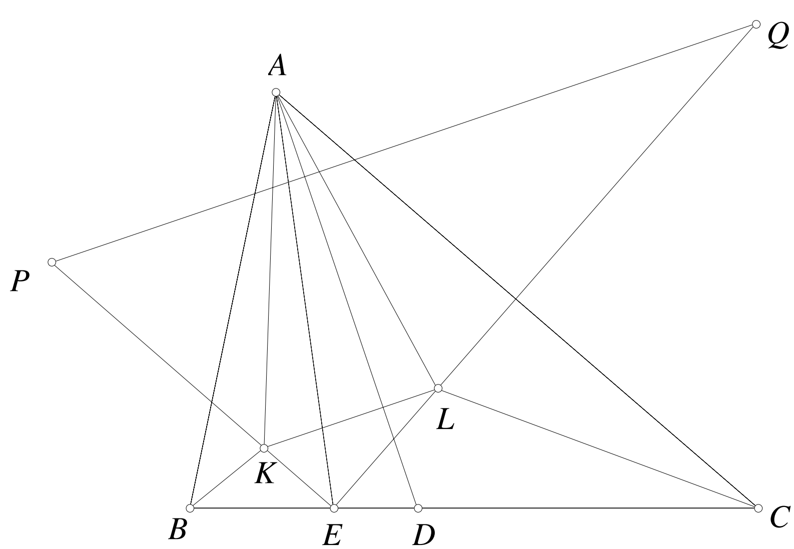


Figure 5.

Solution 2. From Lemma, it is easily to be seen that $\dfrac{PK}{PE} = \dfrac{AB}{EA+EB}$ and $\dfrac{QL}{QE} = \dfrac{AC}{EA+EC}$. Therefore, we have to show that

$$\frac{AB}{EA+EB} = \frac{AC}{EA+EC}$$
$$\Leftrightarrow \frac{AB}{EA+DB-ED} = \frac{AC}{EA+DC+ED}$$
$$\Leftrightarrow AB(EA+DC+ED) = AC(EA+DB-ED)$$
$$\Leftrightarrow AB(EA+ED) = AC(EA-ED)$$
$$\Leftrightarrow AB(1+\frac{ED}{EA}) = AC(1-\frac{ED}{EA})$$
$$\Leftrightarrow AB(1+\frac{AC-AB}{AB+AC}) = AC(1-\frac{AC-AB}{AC+AB})$$
$$\Leftrightarrow AB.\frac{2AC}{AB+AC} = AC.\frac{2AB}{AB+AC} \text{ (always true).}$$

This completes the proof. □

Comment. Exploiting different properties of the concyclic quadrilateral $KBCL$ on problem 1 could generate another interesting problems, especially as the following problem.

Problem 4. Let ABC be an acute triangle and AD, BE, CF be altitudes. Denote $(X), (Y), (Z)$ by circles inscribed in triangles AEF, BFD, CDE. Let d_a be a common tangent line which is different from BC of $(Y), (Z)$. Analogously, we have d_b, d_c. Prove that d_a, d_b, d_c are concurrent.

We will present the extension of the problem basing on the relative position of orthocenter.

Problem 5. Given an acute triangle ABC and its altitudes AD, BE, CF. Denote K, L by centers of incircles of triangles DBE, DCF. Let P, Q be circumcenters of triangles HBK, HCL. Show that $PQ \parallel KL$.

Another way to extend excenters was proposed as follows.

Problem 6. Given an acute triangle ABC and its altitudes AD, BE, CF. Denote K, L by excenters with respect to vertex D of triangles BFD, CDE. Let P, Q be centers of circumcircles of triangles ABK, ACL. Prove that $PQ \parallel KL$.

Problem 7. Given an acute triangle ABC and its altitudes AD, BE, CF. Denote K, L by a center of excircle with respect to vertex D of triangle DBE, DCF. Let P, Q be circumcircle of triangles HBK, HCL. Determine $PQ \parallel KL$.

On the other hands, we could extend the problem completely basing on the cyclic quadrilateral $BKLC$ as follows.

Problem 8. Given a triangle ABC and its incenter I. A circle (K) passing through B, C intersects IC, IB at E, F respectively. Denote P, Q by circumcenters of triangles ACE, ABF respectively. Show that $PQ \parallel EF$.

The reader is referred to the problems above which are solved easily basing on the idea in this article.

References

[1] IMO Shortlist 2012, Geometry 3
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3160579

[2] Tran Quang Hung, Collection of problems from HUS High Shool for Gifted Student contest, 2013.

Tran Quang Hung, High School for Gifted Students, Hanoi University of Science, Vietnam National University, Hanoi.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

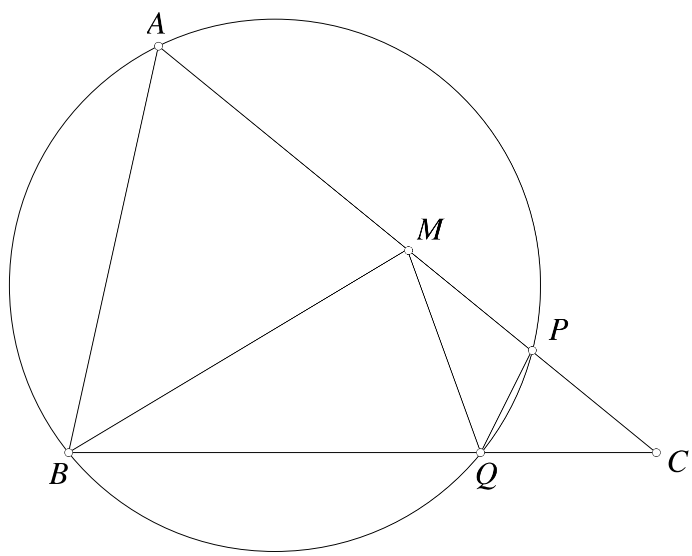
Từ bài thi Olympic Moscow tới bài thi Olympic chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh bài toán hình học Olympic Moscow và bài toán thi Olympic chuyên KHTN với các công cụ hình học thuần túy.

Đề thi Olympic Moscow năm 2014 lớp 10 [1] có bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC với M là trung điểm AC và P là trung điểm CM. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP cắt đoạn thẳng BC tại Q khác B. Chứng minh rằng $\angle ABM = \angle MQP$.



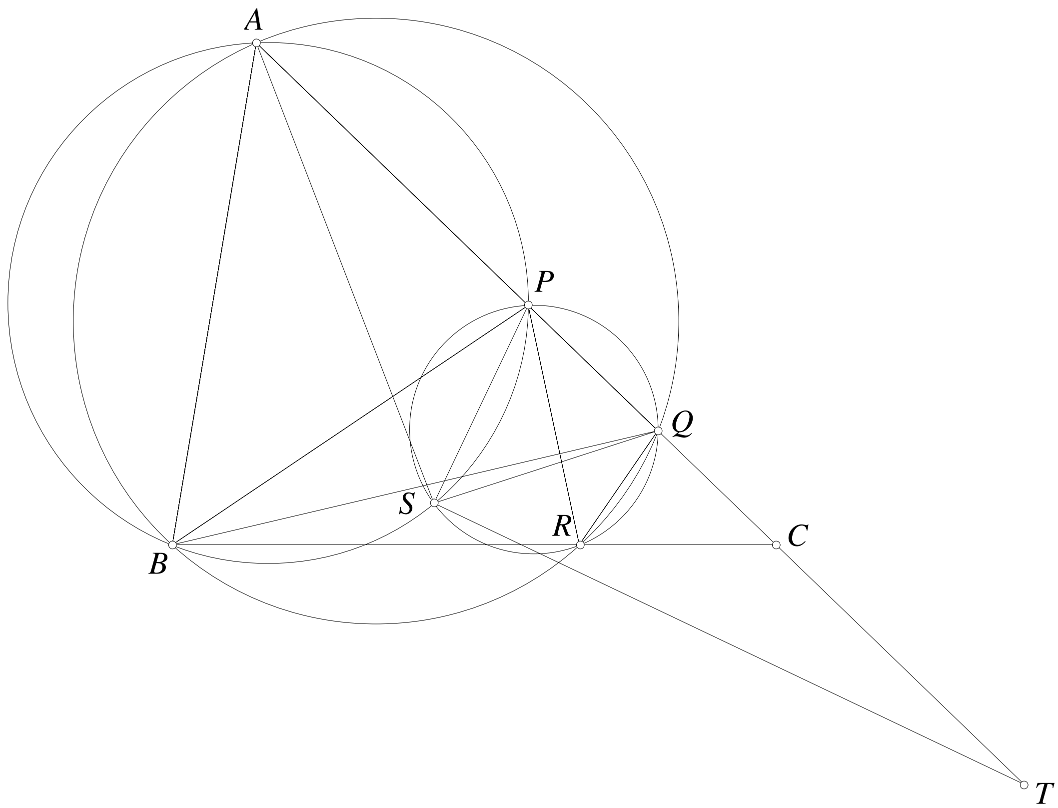
Hình 1.

Cũng trong năm 2014 đề thi Olympic chuyên KHTN [2] có bài toán hay như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại R khác B.

a) Chứng minh rằng $\angle ABP = \angle PRQ$.

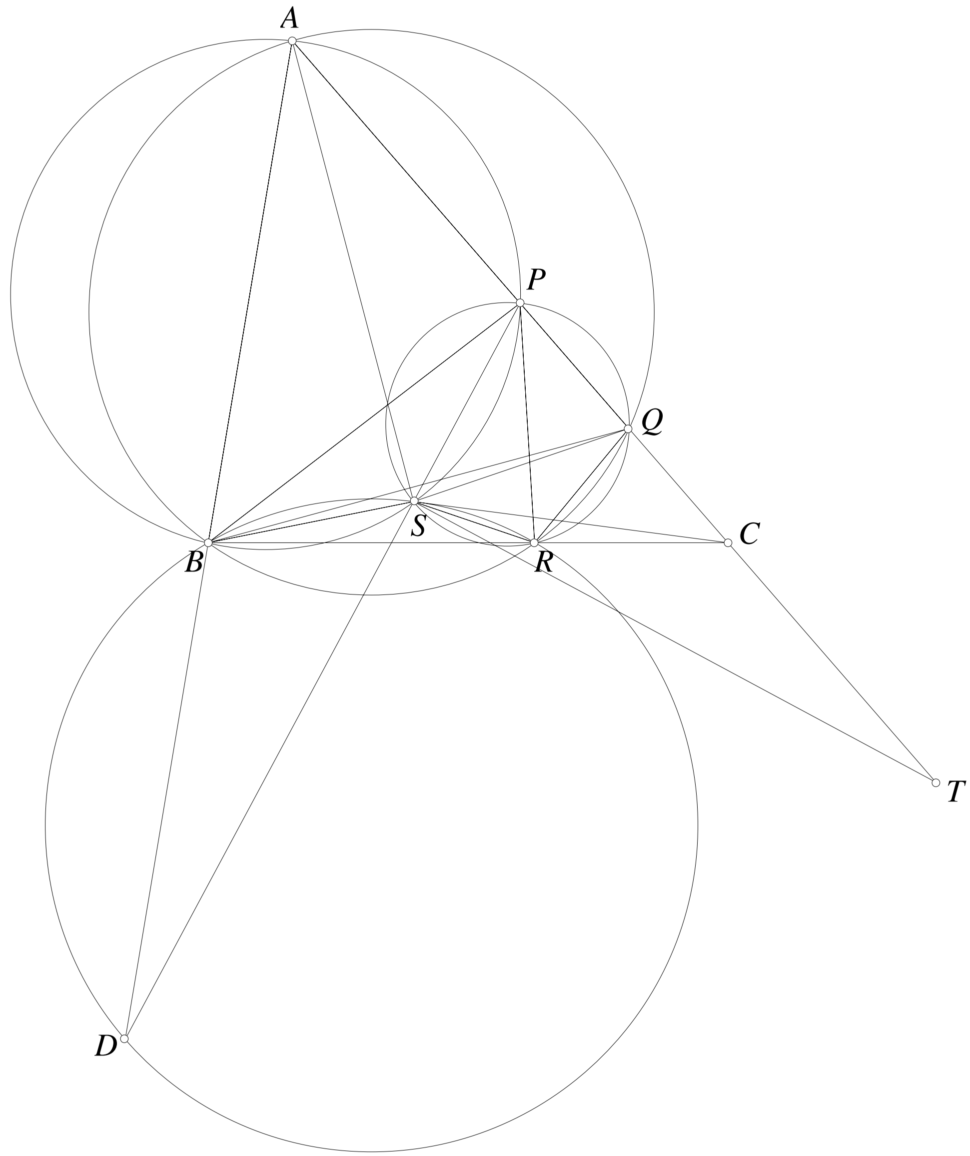
b) Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB và PQR cắt nhau tại S khác P. Chứng minh rằng tam giác CPS cân.



Hình 2.

Ta dễ thấy rằng phần a) bài toán 2 chính là mở rộng của đề thi Olympic Moscow khi thay trung điểm các đoạn thẳng bằng các điểm chia đoạn thẳng theo tỷ số bất kỳ. Phần b) của bài toán 2 là một ý phát triển khá thú vị cho phần a) và có nhiều cách chứng minh. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu một bài toán phát triển hơn nữa bài toán 2 và trong ý chứng minh của nó bao hàm bài toán 2 cùng với cách chứng minh thuần túy hình học.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại R khác B. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB và PQR cắt nhau tại S khác P. SP cắt AB tại D. Chứng minh rằng B, S, R, D cùng thuộc một đường tròn.



Hình 3.

Lời giải. Từ $\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{QC}{QP}$ suy ra $\dfrac{PC}{PC+PA} = \dfrac{QC}{QC+QP}$ hay $\dfrac{PC}{AC} = \dfrac{QC}{PC}$ suy ra $PC^2 = CA.CQ = CR.CB$. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác PBR tiếp xúc AC tại P suy ra $\angle APB = \angle BRP$. Từ đó $\angle ABP = 180^\circ - \angle BAP - \angle APB = \angle BRQ - \angle BRP = \angle PRQ$. Gọi đường thẳng qua S vuông góc SP cắt AC tại T. Dễ có $\angle ASP = \angle ABP = \angle PRQ = \angle QSP$ nên SP là phân giác trong $\angle ASQ$ vậy ST là phân giác ngoài. Từ đó $\dfrac{TQ}{TA} = \dfrac{PQ}{PA} = \dfrac{CQ}{CP} = \dfrac{PQ+CQ}{PA+CP} = \dfrac{CP}{AC} = \dfrac{TQ-CQ}{TA-CP} = \dfrac{CT}{CT+AP}$. Suy ra $CP(CT+AP) = CT.AC = CT(AP+PC)$ hay $CP.AP = CT.AP$ suy ra $CP = CT$ hay C là trung điểm PT, từ đó tam giác CSP cân. Ta có $CS^2 = CP^2 = CQ.CA = CR.CB$ suy ra $\angle SRC = \angle BSC = \angle BSD + \angle DSC = \angle BAP + \angle APS = \angle 180^\circ - \angle BDS$. Vậy $\angle BDS = 180^\circ - \angle SRC = \angle SRB$ suy ra tứ giác $BSRD$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Việc biến đổi tỷ số độ dài để chứng minh tam giác CSP cân có thể làm gọn hơn nhờ việc sử dụng hàng điểm điều hòa xong chúng tôi chọn cách làm này vì nó khá sơ cấp hơn và có nội dung gần với chương trình THCS ở Việt Nam. Toàn bộ bài toán và lời giải đều có thể viết dưới dạng độ dài đại số cùng với góc định hướng cho chặt chẽ xong chúng tôi nhận thấy rằng điều này không cần thiết lắm. Hình học thuần túy coi trọng tính trực quan và vẻ đẹp hơn là sự chặt chẽ về logic. Do đó trong việc làm và hiểu bài toán một cách trực quan trên hình vẽ đôi khi chưa được chặt chẽ do có một số trường hợp phải xét không đúng logic trong lời giải nhưng điều này hoàn toàn bỏ qua được khi dựa vào quan điểm của chúng ta xem vẻ đẹp của bài toán và lời giải quan trọng hơn hay tính logic quan trọng hơn.

Tài liệu

[1] Olympic Moscow năm 2014 lớp 10
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=46&t=589088

[2] Đề thi Olympic chuyên KHTN năm 2014 bài 2.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

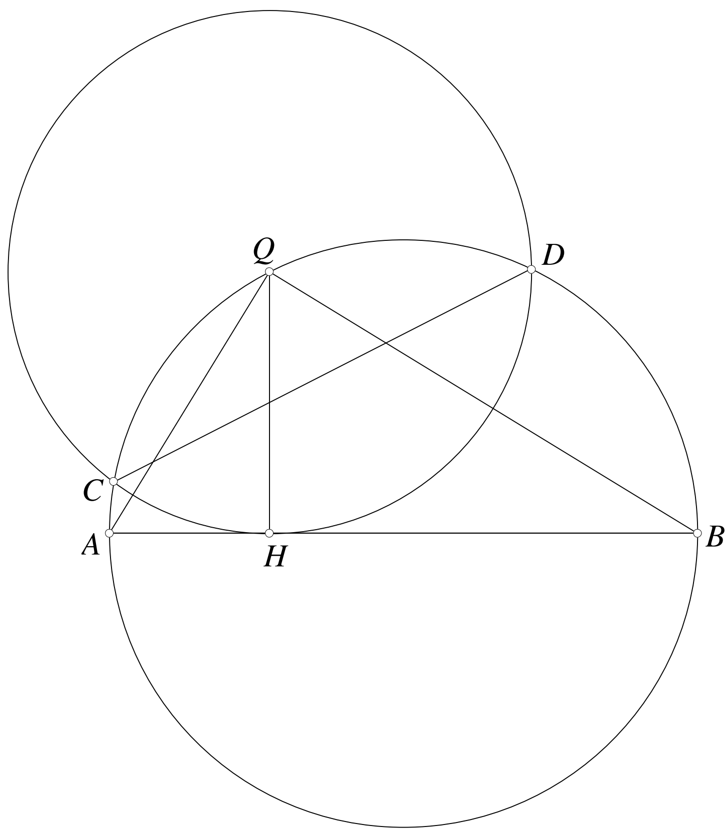
Từ bài thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ tới bài thi Olympic chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh bài toán hình học thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ và bài toán thi Olympic chuyên KHTN với các công cụ về hàng điểm điều hòa.

Đề thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ năm 2006 ngày thứ 2 [1] có bài toán hình học hay như sau

Bài toán 1. Từ điểm Q trên đường tròn đường kính AB vẽ QH vuông góc với AB với H thuộc AB. Đường tròn đường kính AB cắt đường tròn tâm Q bán kính QH tại C, D. Chứng minh rằng CD chia đôi QH.



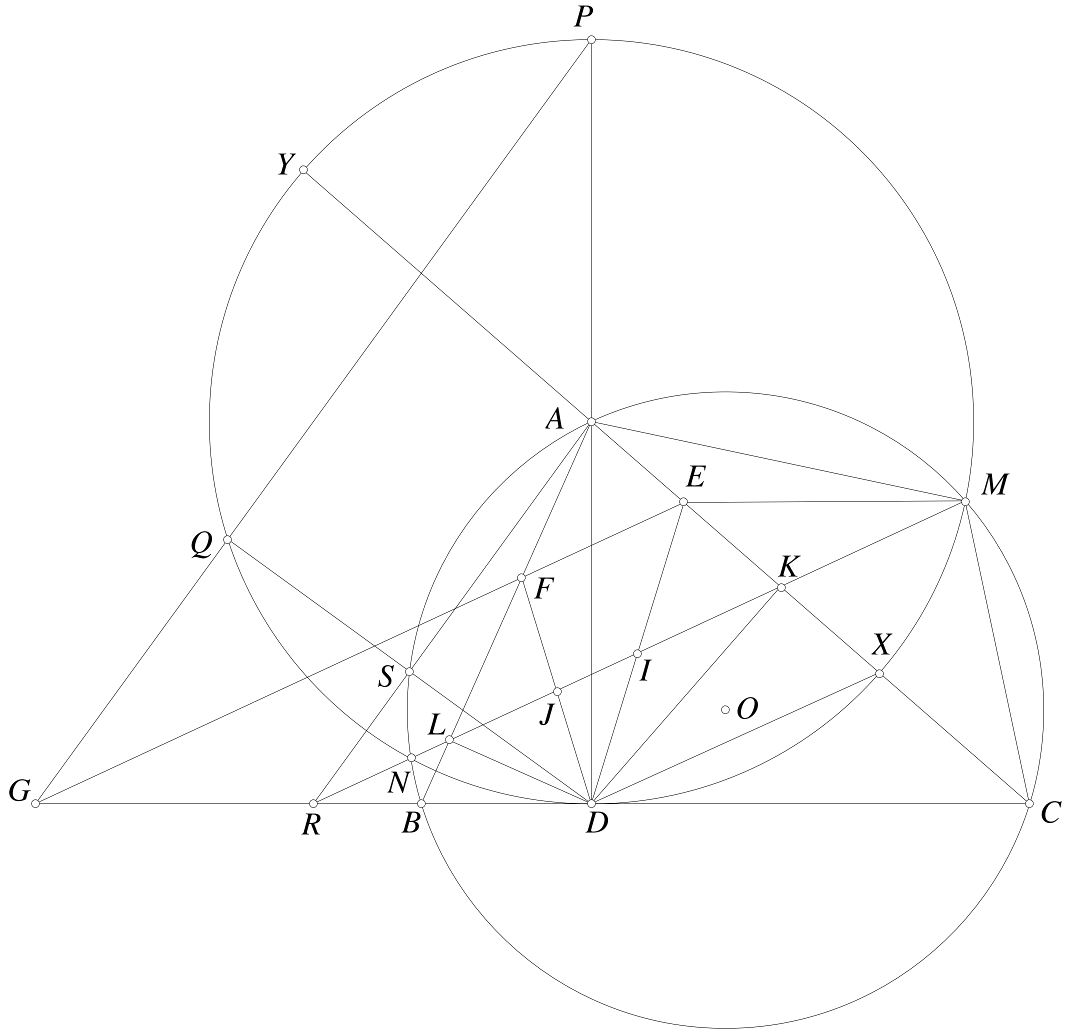
Hình 1.

Bài toán là một kết quả rất hay và mang nhiều ý nghĩa và có nhiều lời giải được đề xuất trong [1]. Bài toán cũng có nhiều lời giải và hướng phát triển cũng như nhiều hướng khai thác. Bài thi Olympic chuyên KHTN [2] là một ví dụ của sự mở rộng và khai thác kết quả này

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AD, BE, CF với D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB. Gọi (ω) là đường tròn tâm A đi qua D. (ω) cắt (O) tại M, N.

a) Chứng minh rằng MN đi qua trung điểm DE, DF.

b) Gọi EF cắt BC tại G và DP là đường kính của (ω). PG cắt (ω) tại Q khác P. Chứng minh rằng trung điểm của DQ nằm trên (O).



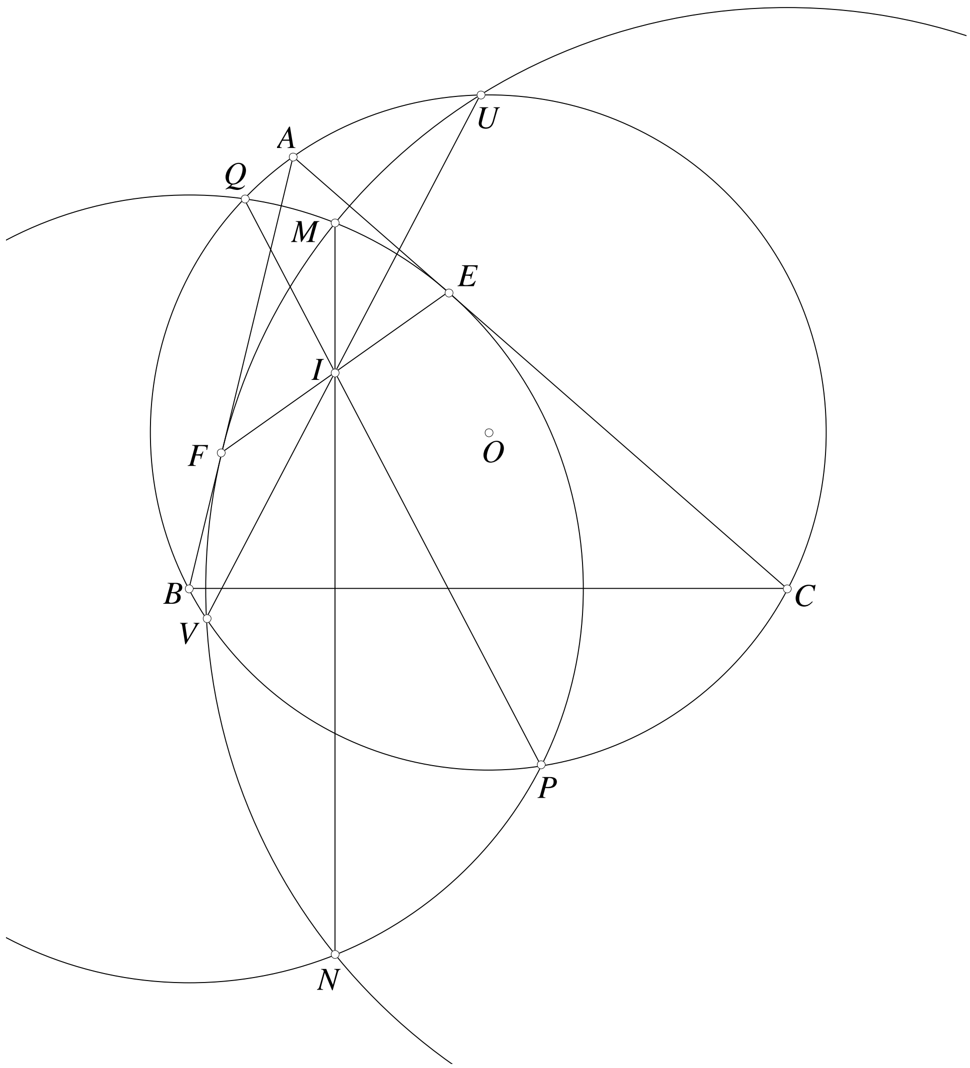
Hình 2.

Lời giải. a) Gọi MN cắt DE, DF, AC, AB lần lượt tại I, J, K, L. (ω) cắt AC tại X, Y. Ta thấy $\overline{KX}.\overline{KY} = \overline{KM}.\overline{KN} = \overline{KA}.\overline{KC}$ suy ra $(KC, XY) = -1$ vậy $AD^2 = AX^2 = AY^2 = \overline{AK}.\overline{AC}$ từ đó dễ thấy $DK \perp AC$. Tương tự $DL \perp AB$. Vậy tứ giác $AKDL$ nội tiếp suy ra $\angle LKF = \angle LAD = 90° - \angle ABD = 90° - \angle DEC = \angle IDK$. Từ đó tam giác IDK cân, mặt khác tam giác DKE vuông suy ra I là trung điểm DE. Tương tự J là trung điểm DF. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi MN giao BC tại R. AR cắt QD tại S. Theo a) dễ thấy R là trung điểm GD mà A là trung điểm DP nên S là trung điểm QD. Do $DQ \perp PG$ nên $DS \perp SA$. Từ đó S, K, L thuộc đường tròn đường kính AD. Dễ thấy hàng $(BC, GD) = -1$ và R là trung điểm DG nên $\overline{RS}.\overline{RA} = \overline{RK}.\overline{RL} = RD^2 = RG^2 = \overline{RB}.\overline{RC}$. Từ đó tứ giác $ASBC$ nội tiếp nên S thuộc (O). Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Rõ ràng bài toán 2 phần a) là sự mở rộng bài toán 1 từ tam giác vuông sang tam giác bất kỳ còn phần b) là một sự phát triển khá đẹp. Chúng tôi chọn cách trình bày bằng hàng điểm điều hòa để mang một phong cách mới thực ra cả 2 phần các bạn đều có thể làm một cách thuần túy hình học THCS. Đằng sau bài toán thi còn nhiều phát triển khác đáng chú ý

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với đường cao BE, CF. Đường tròn (B, BE) cắt đường tròn (C, CF) tại M, N. Chứng minh rằng MN chia đôi EF.

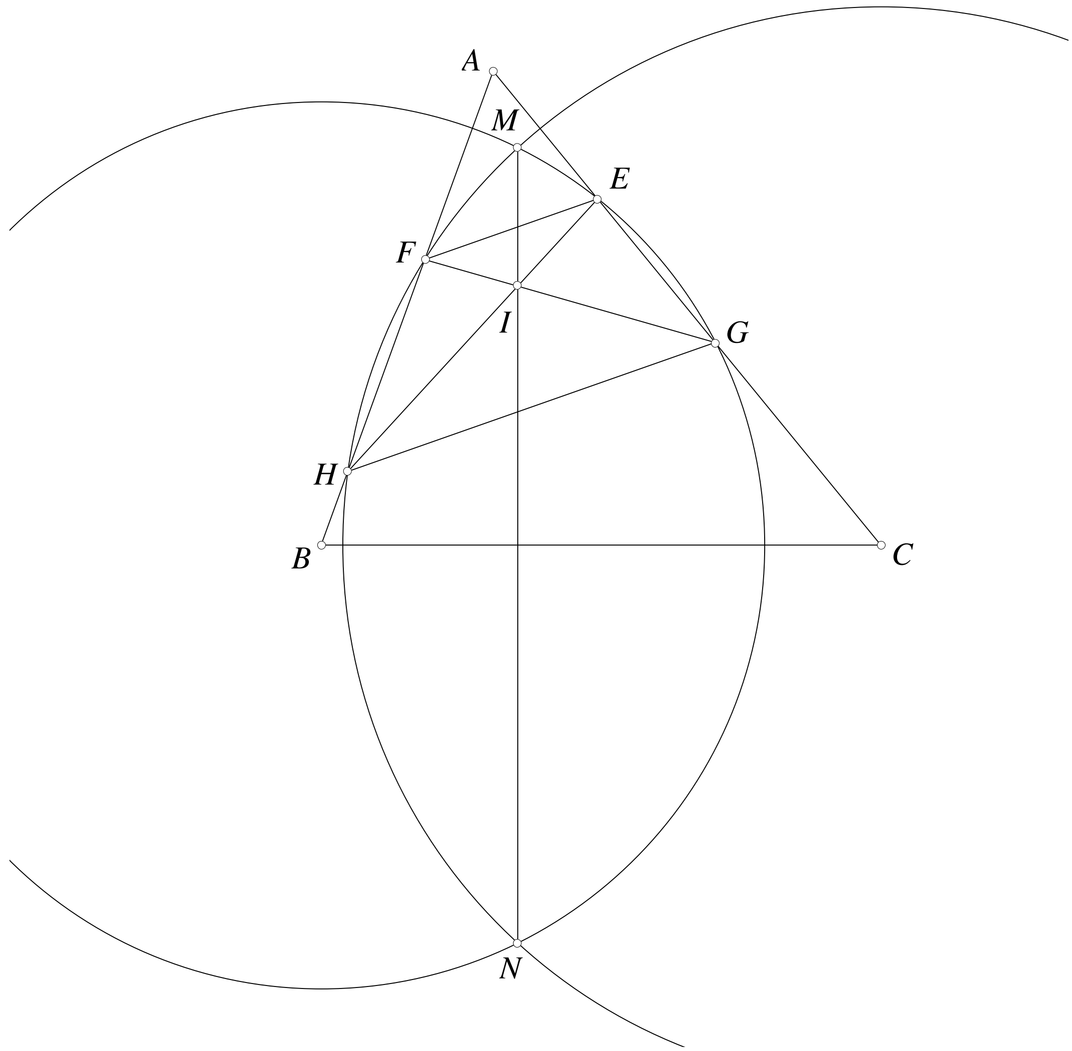


Hình 3.

Lời giải. Gọi đường tròn (B, BE) cắt (O) tại P, Q và (C, CF) cắt (O) tại U, V. Theo bài toán 2 dễ thấy PQ, UV cùng đi qua trung điểm EF. Dễ thấy theo tính chất tâm đẳng phương thì MN, PQ, UV đồng quy do đó MN đi qua trung điểm EF. □

Bài toán trên là một kết quả đẹp nó có một mở rộng như sau

Bài toán 4. Cho tam giác ABC các điểm E, F thuộc CA, AB sao cho B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn. Đường tròn (B, BE) cắt CA tại G khác E. Đường tròn (C, CF) cắt AB tại H khác F. Đường tròn (B, BE) cắt (C, CF) tại M, N. Chứng minh rằng FG, EH và MN đồng quy.



Hình 4.

Xung quanh bài toán 2, 3, 4 vẫn còn nhiều điều thú vị cho các bạn cùng khám phá, xin dành điều đó cho các bạn đọc.

Tài liệu

[1] Đề thi chọn đội tuyển Thổ Nhĩ Kỳ năm 2006 bài 2 ngày 2
www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=508188

[2] Đề thi Olympic chuyên KHTN năm 2014 bài 5.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Bài hình học thi chuyên sư phạm năm 2014 ngày 2

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và mở rộng bài hình học thi hình học thi chuyên sư phạm năm 2014 ngày 2 bằng các công cụ hình học thuần túy.

Trong kỳ thi chuyên sư phạm ngày 2 có bài toán hình học khá hay như sau

Bài 1. Cho hình vuông $ABCD$ với tâm O. Gọi M là trung điểm AB và N, P theo thứ tự thuộc BC, CD sao cho $MN \parallel AP$.

a) Chứng minh rằng tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và $\angle NOP = 45°$.

b) Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP nằm trên OC.

c) Chứng minh rằng BD, AN, PM đồng quy.

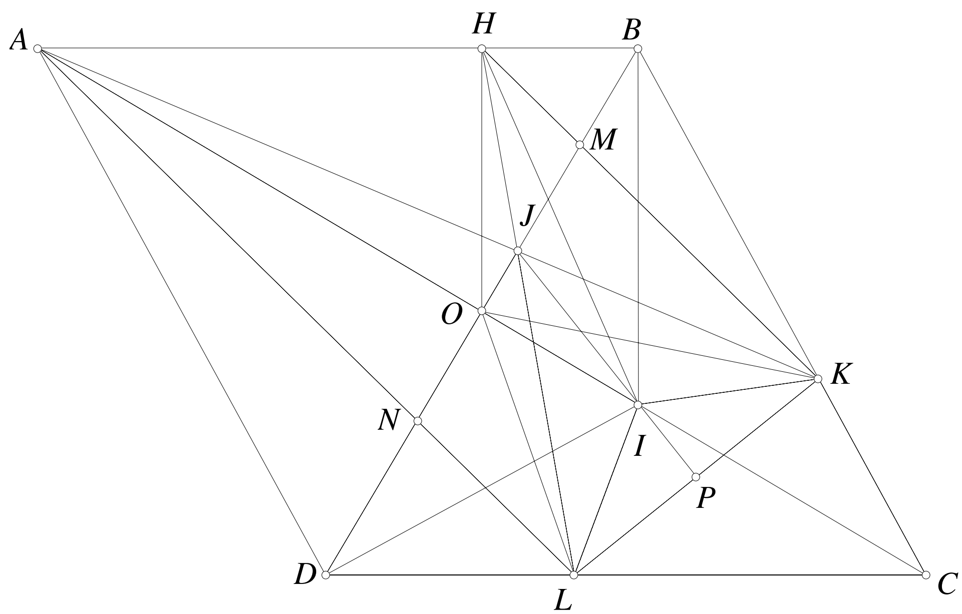
Bài toán là những kết quả đẹp nhiều ý nghĩa. Tuy vậy nếu để ý kỹ thì ý cuối cùng không liên quan tới hai ý trên. Mặt khác điều kiện hình vuông có thể thay thế được bởi điều kiện nhẹ hơn là hình thoi. Do đó tôi xin đề xuất một bài toán tổng quát hơn đồng thời thêm một ý nữa liên kết hai ý hay của bài toán trên

Bài 2. Cho hình thoi $ABCD$ có hai đường chéo AC giao BD tại O. H là hình chiếu của O lên AB. Các điểm K, L theo thứ tự thuộc đoan CB, CD sao cho $HK \parallel AL$.

a) Chứng minh rằng tâm I đường tròn ngoại tiếp tam giác OKL nằm trên AC.

b) Chứng minh rằng HL, AK và BD đồng quy tại J.

c) Chứng minh rằng IJ chia đôi KL khi và chỉ khi bốn điểm D, L, I, J cùng thuộc một đường tròn.



Hình 1.

Lời giải. a) Ta dễ thấy các tam giác HBC và LDA có các cạnh tương ứng song song nên đồng dạng. Từ đó chú ý tam giác OAB vuông tại O có đường cao OH, ta có $DL.BC = HB.AD = BH.BA = OB^2 = OB.OD$. Mặt khác $\angle KBO = \angle LDO$ nên $\triangle OBK \sim \triangle LOD$. Vậy $\angle KOL = \angle KOD - \angle DOL = (\angle OBK + \angle OKB) - \angle OKB = \angle OBK$. Từ đó với I là tâm ngoại tiếp tam giác OKL, chú ý tam giác DCB cân thì $\angle KIL = 2\angle KOL = 2\angle OBK = 180° - \angle DCB$ suy ra tứ giác $LIKC$ nội tiếp mà $IK = IL$ suy ra CI là phân giác $\angle KCL$ trùng với CA. Vậy I thuộc CA.

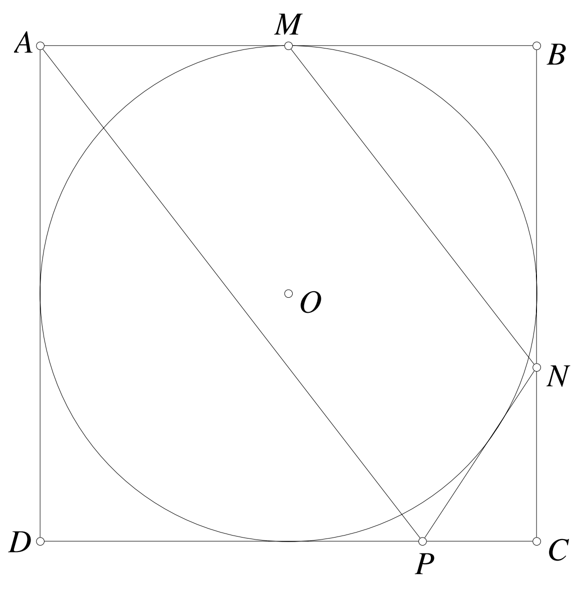
b) Gọi BD cắt HK, AL tại M, N. Ta chú ý các tam giác HBC và LDA đồng dạng mà $\angle MBK = \angle NDA$. Từ đó các tam giác MBK và NDA đồng dạng tương ứng. Vậy dễ suy ra $\frac{MH}{MK} = \frac{NL}{NA}$. Lại có $HK \parallel AL$. Từ đó theo định lý Theles mở rộng dễ thấy HL, AK và MN đồng quy.

c) Nếu IJ đi qua trung điểm P của KL. Từ tam giác IKL cân suy ra IJ là trung trực KL. Từ đó chú ý tam giác BDC cân tại B nên $\angle JIL = \angle JIL = \frac{360° - \angle LIK}{2} = \frac{180° + \angle LCK}{2} = 180° - \angle BDC$ suy ra tứ giác $DJIL$ nội tiếp.

Nếu tứ giác $DJIL$ nội tiếp mà tứ giác $LIKC$ nội tiếp, theo định lý Miquel dễ thấy tứ giác $BKIJ$ nội tiếp. Chú ý I nằm trên AC là trung trực BD nên $\angle ILJ = \angle IDJ = \angle IBJ = \angle IKJ$. Lại có $\angle IJL = \angle IDL = \angle IBK = \angle IJK$. Mặt khác đã có $IK = IL$. Vậy $\triangle IKJ = \triangle ILJ$ $(g.c.g)$ suy ra IJ là trung trực KL nên IJ chia đôi KL. □

Nhận xét. Thực ra ý tưởng chính trong câu a) bài toán gốc xuất phát từ một bài toán tiếp xúc khá quen thuộc. Câu a) bài toán mở rộng cũng là sự mở rộng của bài toán tiếp xúc đó. Việc phát triển các ý b), c) làm hai bài toán trở nên mới và lạ hơn cũng như mang nhiều ý nghĩa hơn. Xin giới thiệu lại với các bạn hai bài toán quen thuộc này

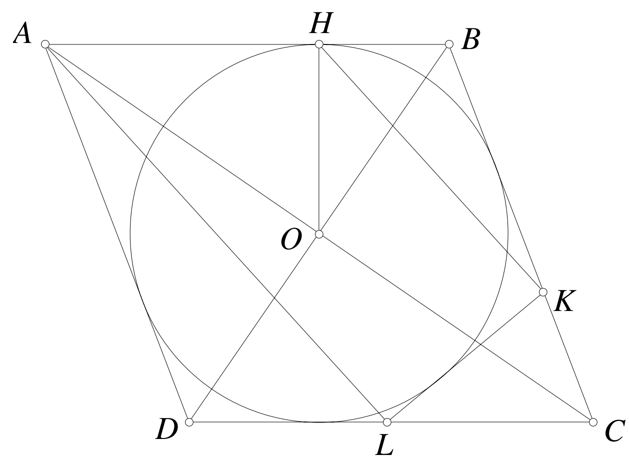
Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$ có (O) là đường tròn nội tiếp. M là trung điểm AB. Các điểm N, P theo thứ tự thuộc cạnh BC, CD sao cho $MN \parallel AP$. Chứng minh rằng NP luôn tiếp xúc đường tròn (O).



Hình 2.

Từ đó bài toán trên hình thoi được đề xuất và phát biểu khó hơn

Bài 4. Cho hình thoi $ABCD$ có AC giao BD tại O. H là hình chiếu của O lên AB. Các điểm K, L theo thứ tự thuộc cạnh BC, CD sao cho $HK \parallel AL$. Chứng minh rằng KL luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi K, L di chuyển.



Hình 3.

Có nhiều điều thú vị khác xoay quanh các bài toán tiếp xúc này. Các bạn hãy cùng khám phá.

Tài liệu

[1] Đề thi chuyên sư phạm ngày 2 tại http://diendantoanhoc.net/home

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Bài hình học thi chuyên KHTN năm 2014 ngày 2

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và phát triển bài toán hình học thi chuyên KHTN năm 2014 ngày 2 bằng các công cụ hình học thuần túy.

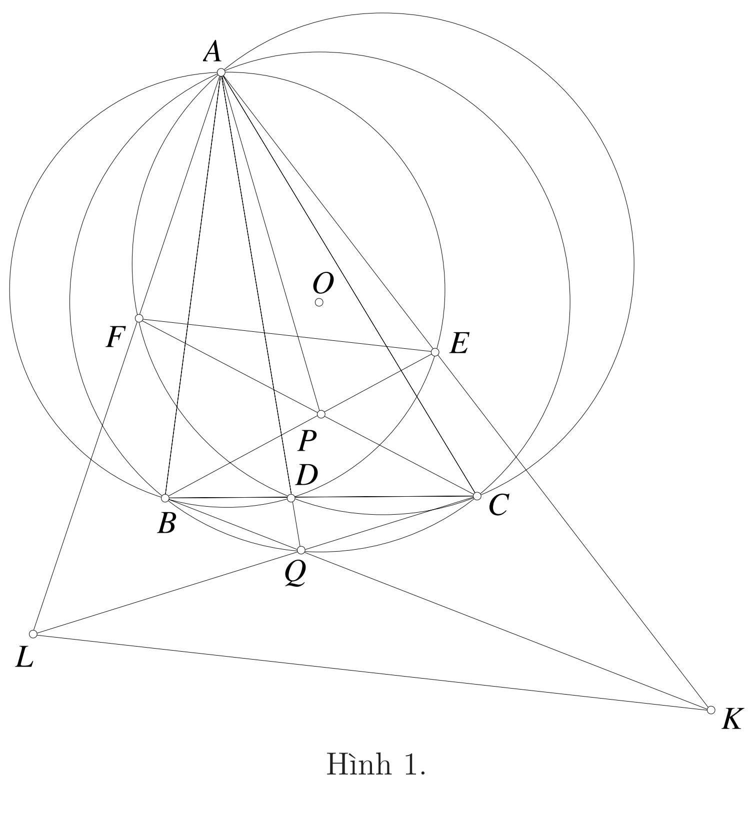
Trong kỳ thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên KHTN năm 2014 ngày 2 có bài toán hình học hay như sau

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C.

1) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, P, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Chứng minh rằng tam giác ABE đồng dạng bới tam giác CLF.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB. Chứng minh rằng $\angle QKL + \angle PAB = \angle QLK + \angle PAC$.



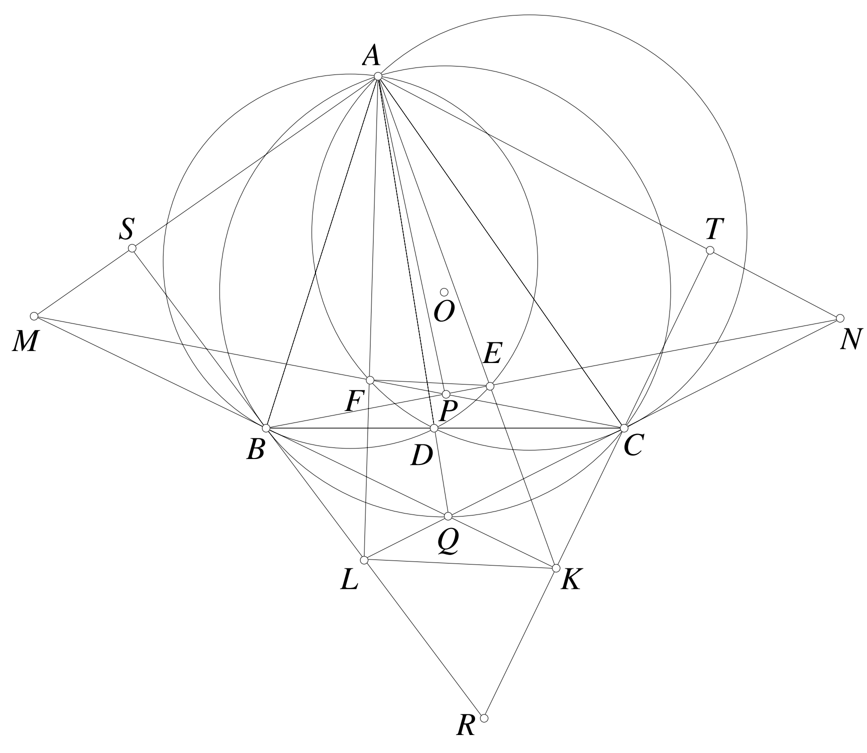
Hình 1.

Lời giải. 1) Ta có $\angle EAF = \angle EAD + \angle DAF = \angle EBD + \angle FCB = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - \angle EPF$ suy ra tứ giác $AEPF$ nội tiếp, điều phải chứng minh.

2) Từ tứ giác $AEPF$ nội tiếp suy ra $\angle AEB = \angle LFC$ (1).
Ta lại có $\angle FCL = \angle FCB + \angle BCL = \angle PBC + \angle BAQ = \angle DAE + \angle BAQ = \angle BAE$ (2).
Từ (1),(2) suy ra $\Delta FCL \sim \Delta EAB$, điều phải chứng minh.
3) Từ $\triangle FCL \sim \triangle EAB$ suy ra $\dfrac{FL}{BE} = \dfrac{FC}{AE}$ hay $FL.EA = FC.EB$ (3).
Chứng minh tương tự $EK.FA = FC.EB$ (4).
Từ (3),(4) suy ra $FL.EA = EK.FA$ hay $\dfrac{FL}{FA} = \dfrac{EK}{EA}$ suy ra $EF \parallel KL$.
Ta lại có $\angle QLK = \angle ALK - \angle ALQ = \angle AFE - \angle ABE = \angle APE - \angle ABE = \angle PAB$.
Tương tự ta có $\angle QKL = \angle PAC$.
Từ đó suy ra $\angle QKL + \angle PAB = \angle QLK + \angle PAC$, điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đây là bài toán hay có kết cấu chặt chẽ các ý liên quan tới nhau. Ba câu được chia ra ba mức độ dễ, trung bình và khó để phân loại được học sinh. Ý chính của bài toán tập trung vào việc chứng minh $EF \parallel KL$. Ý cuối của bài toán là một cách khai thác sự kiện này. Việc chỉ ra các tam giác đồng dạng và hai đường thẳng song song có thể dùng để khai thác thêm nhiều bài toán thú vị khác từ mô hình này, xin giới thiệu với bạn đọc một vài bài toán như vậy

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác s $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và DAC. PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C. AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A. AE cắt đường thẳng QB tại K. AF cắt đường thẳng QC tại L. CK giao BL tại R. CF giao QB tại M. BE giao QC tại N. RB cắt AM tại S. RC cắt AN tại T. Chứng minh rằng bốn điểm A, S, R, T cùng thuộc một đường tròn.

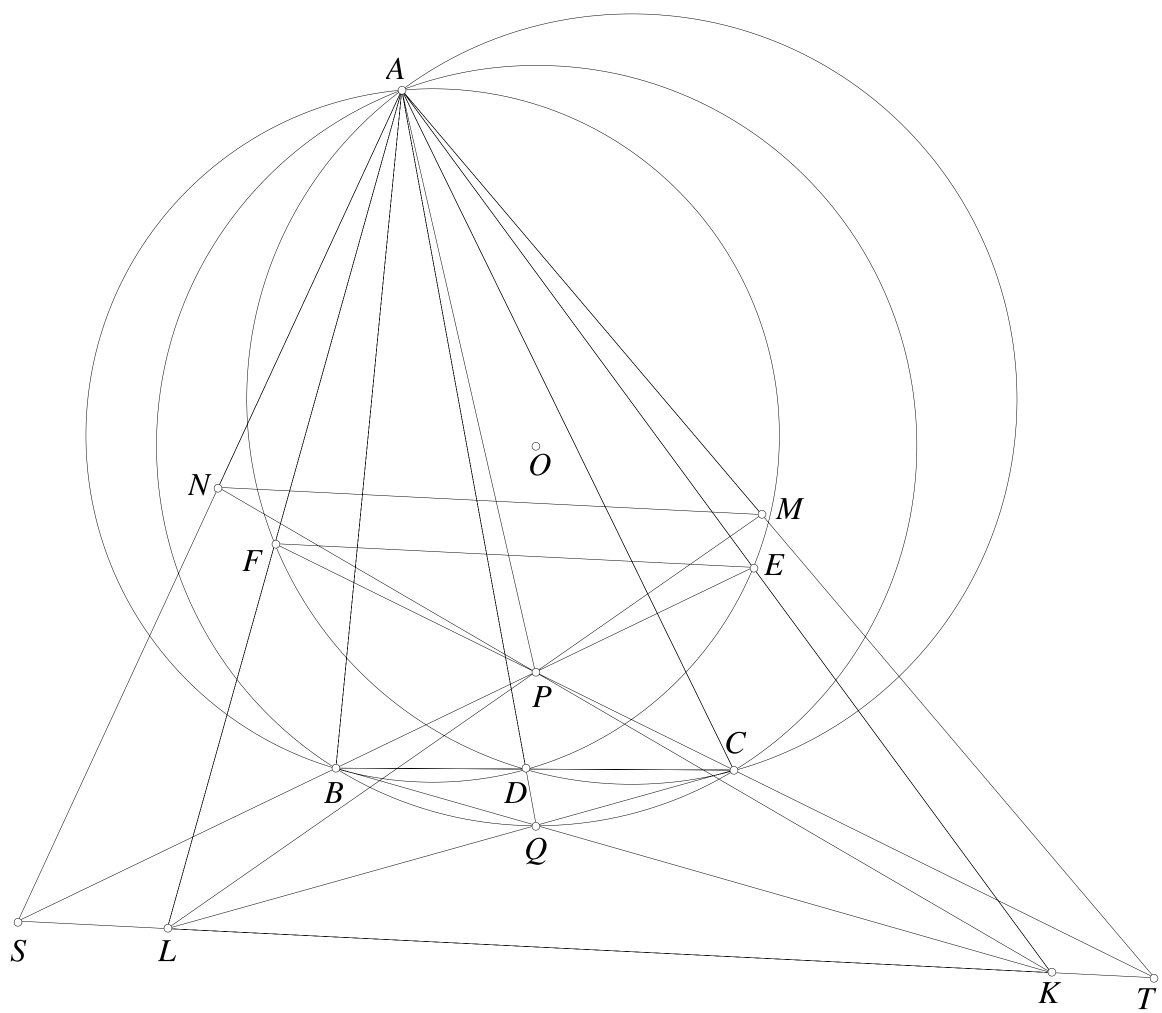


Hình 2.

Lời giải. Từ trong chứng minh bài 1 $\triangle FCL \sim \triangle EAB$ suy ra $\angle FLC = \angle ABE$ suy ra tứ giác $ABLN$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $ACLM$ nội tiếp. Từ đó ta có $\angle SAT = \angle MAC + \angle NAB - \angle BAC = \angle QKR + \angle QLR - (180^\circ - \angle BQC) = 360^\circ - \angle KRL - 180^\circ = 180^\circ - \angle KRL$. Từ đó suy ra tứ giác $ASRT$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán được khai thác tiếp tục như sau

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C. Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AE cắt đường thẳng QB tại K ,đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Giả sử các đường thẳng PE, PF cắt KL tương ứng tại S và T. Các đường thẳng $PL,\ PK$ lần lượt cắt AT, AS tại M và N. Chứng minh rằng $MN \parallel EF$.



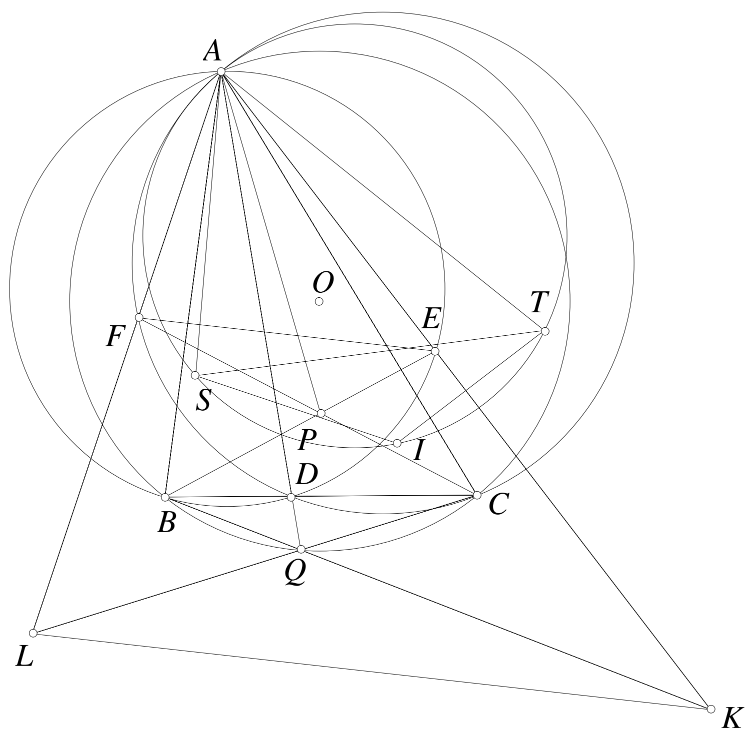
Hình 3.

Lời giải. Theo bài 1 đã có ra $EF \parallel KL$. Ta lại có $\angle FAP = \angle FEP = \angle PSL$ suy ra tứ giác $APLS$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $APKT$ nội tiếp, suy ra $\angle MPN = \angle MPA + \angle APN = \angle AST +$

$\angle ATS = 180^\circ - \angle SAT$ suy ra tứ giác $AMPN$ nội tiếp. Vậy $\angle ANM = \angle APM = \angle AST$ suy ra $MN \parallel ST \parallel EF$, điều phải chứng minh. □

Bài toán vẫn được tiếp tục khai thác như sau

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C. Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AE cắt đường thẳng QB tại K ,đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Giả sử P cố định và D di chuyển trên BC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL luôn thuộc một đường tròn cố định khi D di chuyển.



Hình 4.

Lời giải. Từ trong chứng minh bài 1 $\triangle FCL \sim \triangle EAB$ suy ra $\angle FLC = \angle ABE$. Ta chú ý P cố đinh nên $\angle ABE$ không đổi do đó $\angle FLC$ không đổi. Mặt khác A, C cố định nên đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ALC là đường tròn cố định. Tương tự đường tròn (S) ngoại tiếp tam giác AKB cũng là đường tròn cố định. Nếu gọi I là tâm ngoại tiếp tam giác AKL thì dễ thất $IS \perp AL, IT \perp AK$ từ đó $\angle SIT = 180^\circ - \angle KAL = \angle EPF$ vì P cố định nên $\angle EPF$ không đổi. Mà S, T cố định, từ đó đường tròn ngoại tiếp tam giác IST cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Chú ý. Ta dễ chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác IST đi qua A.

Như vậy qua một số ví dụ trên, các bạn phần nào thấy được các sự phát triển khác nhau của một số vấn đề được nêu ra trong bài toán thi. Rõ ràng bài toán thi là một bài toán mang nhiều ý nghĩa. Các bạn có thể tự tìm ra cho mình một vài phát triển thú vị khác từ mô hình bài toán gốc từ các yếu tố cố định và di chuyển đã có.

Tài liệu

[1] Đề thi chuyên KHTN ngày 2 tại http://diendantoanhoc.net/forum

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com

Bài hình học thi chuyên KHTN năm 2014 ngày 1

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và phát triển bài toán hình học thi chuyên KHTN năm 2014 ngày 1 bằng các công cụ hình học của cấp 3.

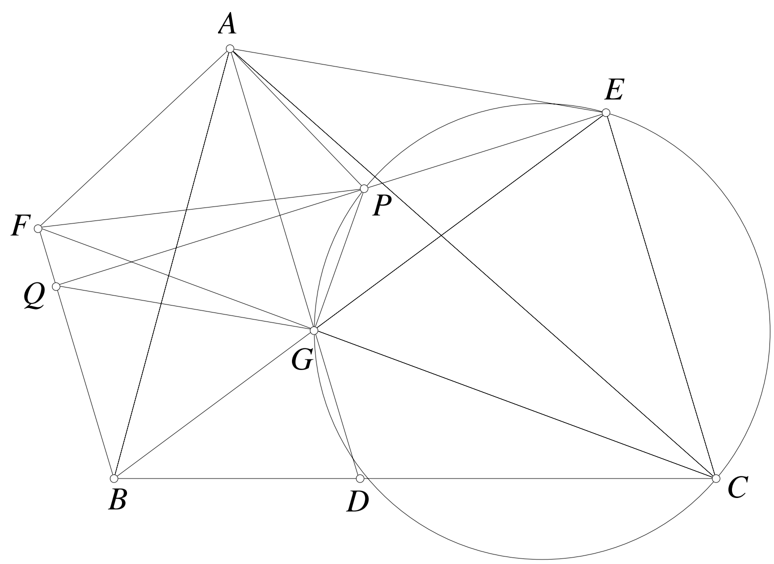
Trong kỳ thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên KHTN năm 2014 ngày 1 có bài toán hình học hay như sau

Bài 1. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < BC$. D là điểm thuộc cạnh BC sao cho AD là phân giác của $\angle BAC$. Đường thẳng qua C song song với AD cắt trung trực của AC tại E. Đường thẳng qua B song song với AD cắt trung trực của AB tại F.

1) Chứng minh rằng tam giác ABF đồng dạng với tam giác ACE.

2) Chứng minh rằng các đường thẳng BE, CF, AD đồng quy tại một điểm, gọi điểm đó là G.

3) Đường thẳng qua G song song với AE cắt đường thẳng BFtại Q. Đường thẳng QEcắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC tại P khác E. Chứng minh rằng các điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn.



Hình 1.

Lời giải. 1) Hai tam giác $\triangle ABF$ và $\triangle ACE$ lần lượt cân tại F, E. Ta có $\angle FBA = \angle BAD = \angle CAD = \angle ECA$ suy ra $\triangle ABF \sim \triangle ACE$, điều phải chứng minh.

2) Giả sử G là giao điểm của BE và CF. Ta có $\dfrac{GF}{GC} = \dfrac{BF}{CE} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$ suy ra $GD \parallel FB$. Kết hợp với $FB \parallel AD$ ta có $G \in AD$, điều phải chứng minh.

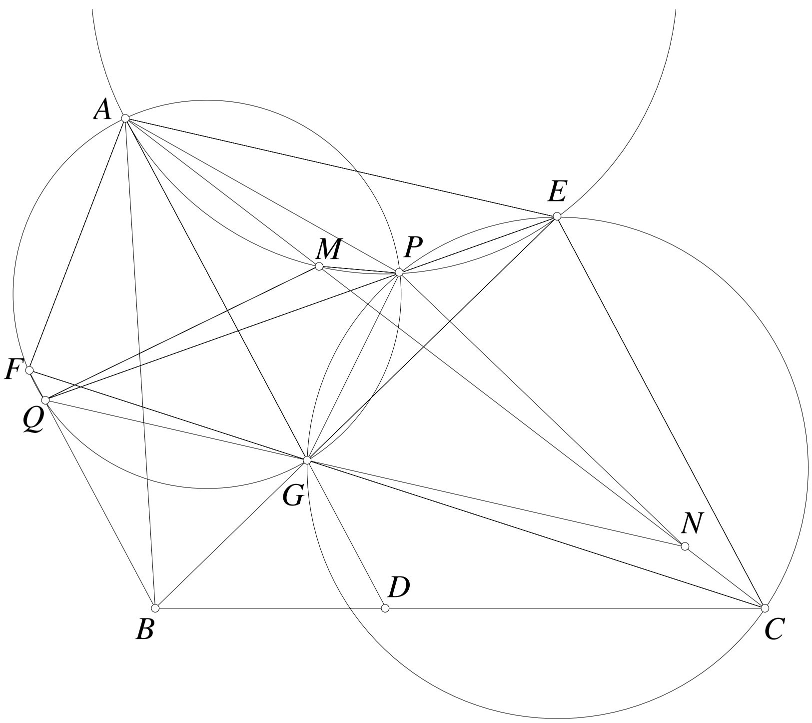
3) Ta có$\angle BQG = \angle QGA = \angle GAE = \angle GAC + \angle CAE = \angle GAB + \angle BAF = \angle GAF$. Suy ra tứ giác $AGQF$ nội tiếp. Mặt khác ta có $\angle QPG = \angle GCE = \angle GFQ$. Vậy tứ giác $FQGP$ nội tiếp. Do đó các điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn, điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Đây là bài toán hay có kết cấu chặt chẽ các ý liên quan tới nhau. Ba câu được chia ra ba mức độ dễ, trung bình và khó để phân loại được học sinh. Ý chính của bài toán tập trung vào việc chứng minh năm điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn. Đây là ý hay có nhiều khai thác thú vị. Xin giới thiệu với bạn đọc một vài khai thác như vậy

Bài 2. Cho tam giác ABC phân giác AD với D thuộc đoạn BC. Đường thẳng qua C song song AD cắt trung trực AC tại E. Đường thẳng qua B song song AD cắt trung trực AB tại F.

1) Chứng minh rằng BE, CF và AD đồng quy tại điểm G.

2) Đường tròn ngoại tiếp tam giác GAF và GCE cắt nhau tại P khác G. PE cắt BF tại Q. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác APE cắt AC tại M khác P. Gọi FG cắt AC tại N. Chứng minh rằng bốn điểm Q, M, P, N cùng thuộc một đường tròn.



Hình 2.

Lời giải. 1) Ta đã chứng minh trong ý 2 của bài 1.

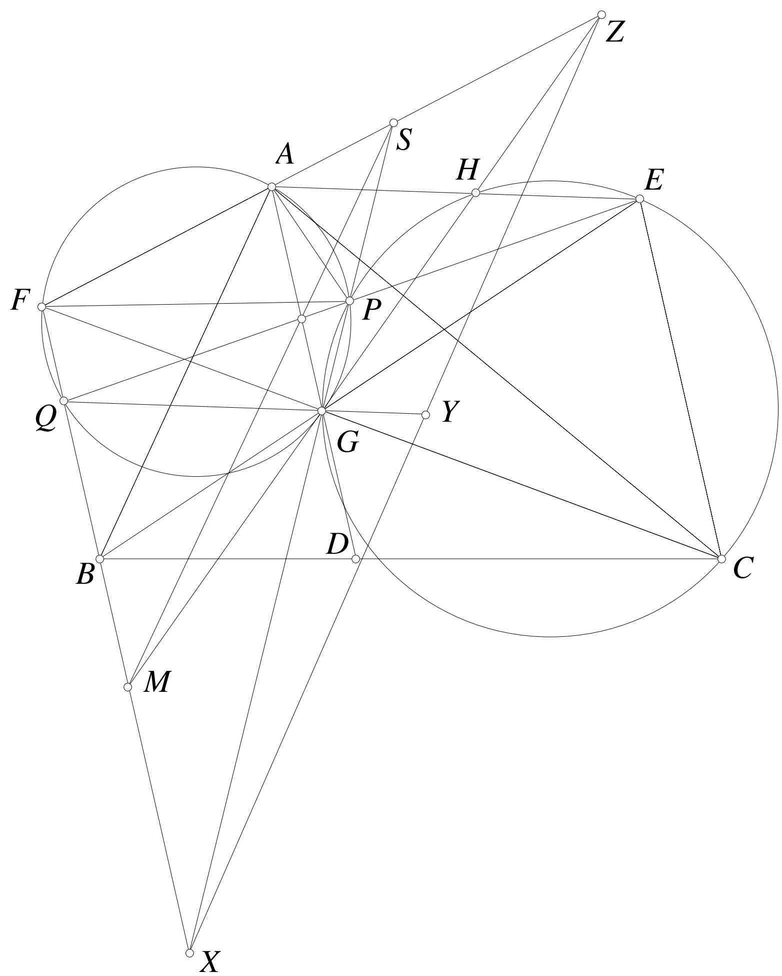
2) Ta có tứ giác $PECG$ nội tiếp suy ra $\angle QPG = \angle ECG = \angle BFG$ đẳng thức cuối do $BF \parallel CE$ nên góc so le trong bằng nhau. Từ đó suy ra tứ giác $FPGQ$ nội tiếp. Suy ra Q nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác GAF. Ta có $\angle QGA = 180^\circ - \angle AFB = 2\angle FAB = \angle GAE$ suy ra $GQ \parallel AE$. Từ đó $\angle MPQ = \angle MAE = \angle MNQ$ suy ra tứ giác $MPNQ$ nội tiếp, điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán là sự khai thác rất đẹp yếu tố $GQ \parallel AE$. Từ bài toán gốc việc năm điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn khiến ta nghĩ nhiều tới định lý Pascal. Sau đây là một hướng khai thác đẹp mắt cho ý tưởng này.

Bài 3. Cho tam giác ABC phân giác AD với D thuộc đoạn BC. Đường thẳng qua C song song AD cắt trung trực AC tại E. Đường thẳng qua B song song AD cắt trung trực AB tại F.

1) Chứng minh rằng BE, CF và AD đồng quy tại điểm G.

2) Gọi AE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC tại H khác E. Đường thẳng qua G song song AE cắt FB tại Q. QE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC tại P khác E. FB cắt GH tại M. FA cắt GP tại S. Chứng minh rằng SM, QE và AD đồng quy.



Hình 3.

Lời giải. 1) Đã chứng minh trong bài toán 1.

2) Trước hết theo bài toán 1 thì năm điểm A, P, G, Q, F cùng thuộc một đường tròn. Ta lại có $\angle PGH = \angle PEH = \angle PQG$. Từ đó PH tiếp xúc đường tròn đi qua A, P, G, Q, F. Áp dụng định lý Pascal cho bộ các điểm $\begin{pmatrix} G & A & Q \\ F & G & P \end{pmatrix}$ ta suy ra các giao điểm của $GP \cap FQ \equiv X,\ AP \cap GQ \equiv Y,\ GH \cap FA \equiv Z$ thẳng hàng. Từ đó áp dụng định lý Desargues cho tam giác $\triangle PSA$ và $\triangle QMG$ có các giao điểm $PS \cap QM \equiv X,\ SA \equiv MG \equiv Z,\ QP \cap GQ \equiv Y$ thẳng hàng. Từ đó PQ, SM, AG đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc chỉ ra PH tiếp xúc đường tròn đi qua A, P, G, Q, F đóng vai trò quan trọng. Sau đó việc xử lý bằng các định lý xạ ảnh là Pascal và Desargues làm bài toán trở nên có ý nghĩa hơn.

Bài toán vẫn còn rất nhiều ứng dụng thú vị khác, các bạn hãy dành thời gian khám phá.

Tài liệu

[1] Đề thi chuyên KHTN ngày 1 tại http://diendantoanhoc.net/forum

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com