Mỗi tuần một bài toán

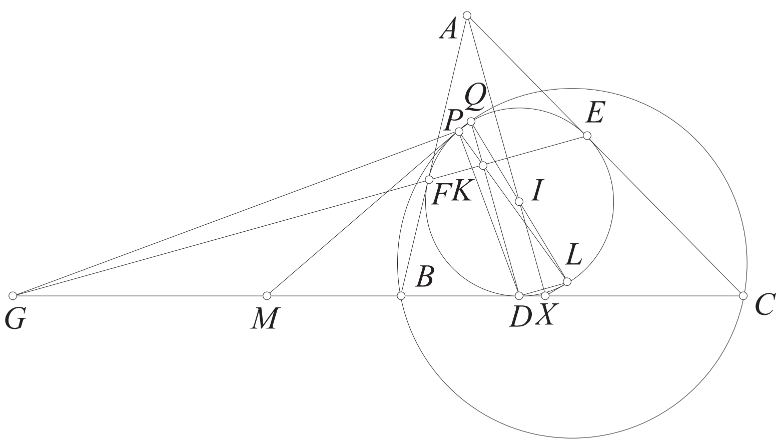
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn qua B, C tiếp xúc (I) tại P. K là hình chiếu của D lên EF. PK cắt (I) tại L khác P. Chứng minh rằng $DL \perp AI$.

Lời giải



Gọi DK cắt (I) tại Q khác D. Gọi EF cắt BC tại G. Tiếp tuyến chung tại P cắt BC tại M thì $MD^2 = MP^2 = MB.MC$ mà $(BC, DG) = -1$ nên M là trung điểm DG. Do đó tam giác GPD vuông tại P nên tứ giác $GPKD$ nội tiếp. Từ đó chú ý BC tiếp xúc (I) tại D nên $\angle PKQ = \angle PGD = 90° - \angle PDG = 90° - \angle PQD$ do đó $\angle KPQ = 90°$. Từ đó PK cắt (I) tại L khác P thì QL là đường kính của (I) nên $DL \perp DQ \parallel AI$.

Nhận xét

Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 Toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 Toán THPT chuyên SP cho lời giải tại đây. Tác giả nhận được lời giải của các bạn **Lê Bá Thành** lớp 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, **Nguyễn Tiến Hoàng** lớp 10 Toán, **Phạm Hoàng Minh** lớp 11 Toán trường PTNK, ĐHQG TPHCM, bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 11 Toán, THPT chuyên KHTN. Bài toán này được tác giả phát triển từ bài toán số 6 chọn đội tuyển Trung Quốc ngày 2. Bài toán lần đầu tiên được mở rộng bởi bạn **Phạm Ngọc Khánh** ở đây và được tác giả mở rộng hơn nữa như sau

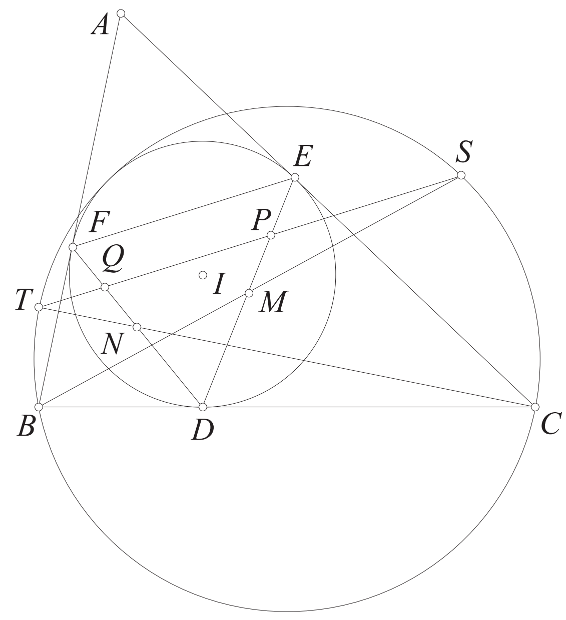
Cho tam giác ABC với P, Q là hai điểm đẳng giác. P_a, P_b, P_c là hình chiếu của P trên BC, CA, AB. Q_a, Q_b, Q_c là hình chiếu của Q trên BC, CA, AB. Khi đó sáu điểm $P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c$ nằm trên đường tròn (K). Q_k là hình chiếu của P_a trên Q_bQ_c. P_k là hình chiếu của Q_a trên P_bP_c. P_l là đối xứng của P_a qua trung trực P_bP_c. Q_l là đối xứng của Q_a qua trung trực Q_bQ_c. P_kP_l cắt (K) tại P^*. Q_kQ_l cắt (K) tại Q^*. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, P^*, Q^* cùng thuộc một đường tròn.

Ngoài ra bạn **Nguyễn Đức Bảo** đã chỉ ra mối liên hệ giữa bài toán này và bài toán G4 trong Shortlist 2011. Kết hợp hai bài toán tôi xin đề xuất một bài toán tiếp xúc khá thú vị như sau

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và đường cao AH. P đối xứng A qua trung trực BC. PH cắt (O) tại Q khác P. Tiếp tuyến qua A của (O) cắt các tiếp tuyến qua B, C của (O) tại S, T. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QST tiếp xúc (O).

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của DE, DF, EM, FN. BM, CN theo thứ tự cắt PQ tại S, T. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, S, T cùng nằm trên một đường tròn tiếp xúc (I).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

