

Mỗi tuần một bài toán

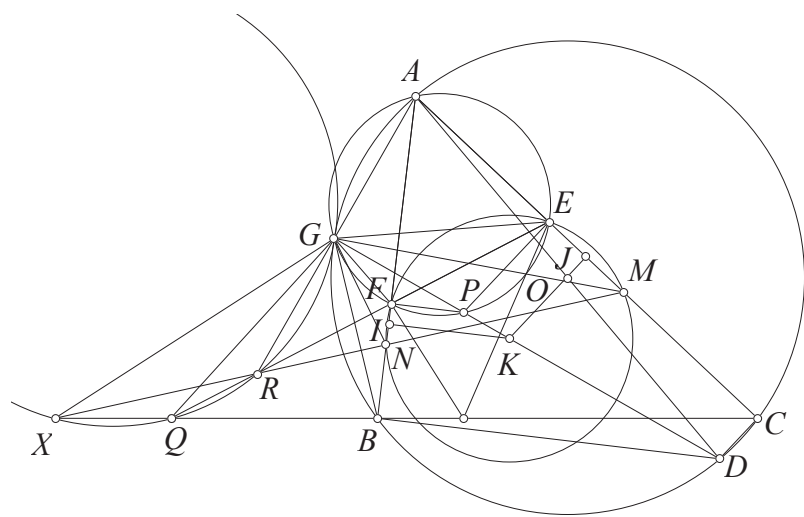
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . AD là đường kính của (O) . E, F là hình chiếu của điểm P bất kỳ trong tam giác lên cạnh CA, AB . PD cắt trung trực EF tại K . Đường tròn (K) đi qua E, F cắt CA, AB lần lượt tại M, N khác E, F . Chứng minh rằng các đường thẳng EF, MN, BC cắt nhau tạo thành một tam giác có đường tròn ngoại tiếp tiếp xúc (O) .

Lời giải



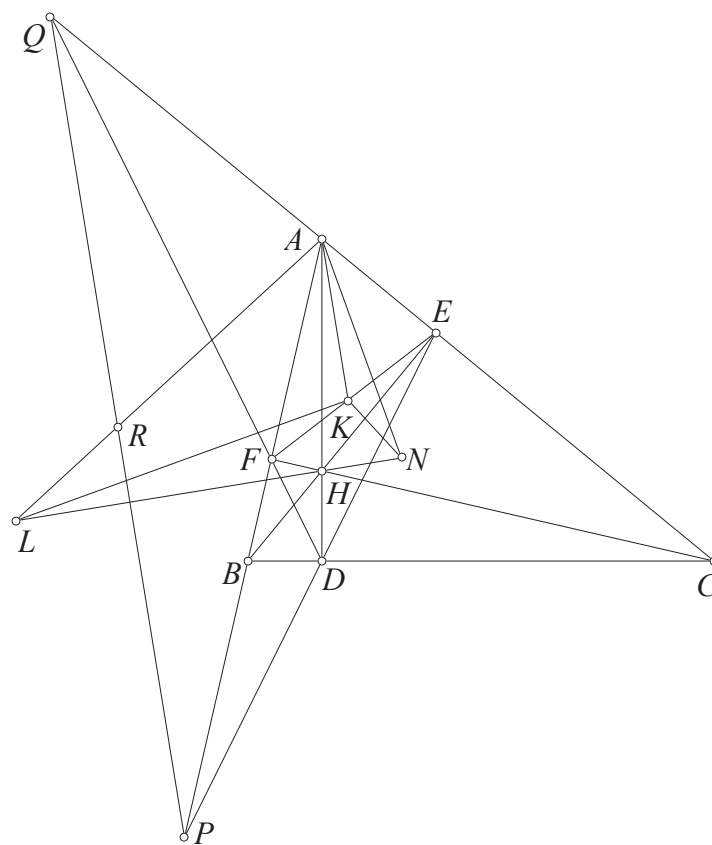
Gọi DP cắt (O) tại G khác D để thấy G nằm trên đường tròn đường kính AP cũng là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF . Gọi I, J là hình chiếu của (K) lên CE, BF thì I, J là trung điểm của EM, FN . Ta thấy $\frac{EJ}{EC} = \frac{PK}{PD} = \frac{FI}{FB}$. Mặt khác dễ thấy tam giác GEC và GFB đồng dạng nên suy ra hai tam giác GEJ và GFI đồng dạng. Gấp đôi các cạnh EJ, FI cho ta hai tam giác GEM và GFN đồng dạng. Gọi MN cắt BC tại X . EF cắt BC, MN lần lượt tại Q, R . Từ đây dễ thấy G là điểm Miquel của tam giác ABC và các đường thẳng EF, MN nên các tứ giác $XGMC$ và $QGFB$ nội tiếp. Từ đó $\angle GXR = \angle GCM = \angle GBN = \angle GQR$. Vậy G nằm trên đường tròn (XQR) . Cũng có tứ giác $QGFB$ nội tiếp nên $\angle QGB = \angle QFB = \angle FRG + \angle GAF = \angle QXG + \angle GCB$. Từ đó ta thấy đường tròn (XQR) tiếp xúc (O) tại G .

Nhận xét

Tác giả nhận được lời giải qua email từ các bạn **Trần Đình Hùng** lớp 12 toán, THPT chuyên Hà Tĩnh, Hà Tĩnh, **Trương Mạnh Tuấn** lớp 11 Toán, THPT chuyên KHTN, **Trần Tiến Mạnh** lớp 11 Toán, chuyên ĐH Vinh. Ngoài ra các bạn **Nguyễn Đình Hoàng**, **Nguyễn Đức Bảo**, lớp 11 toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã cho lời giải tại [đây](#). Cũng ở topic ở đó bạn **Nguyễn Đình Hoàng** cũng đưa ra cách dựng khác cho đường tròn (XQR) . Bên cạnh đó, bạn **Ngô Quang Dương**, sinh viên K61, ĐHKHTN-ĐHQGHN, đã tổng quát tất cả các vấn đề hai đường tròn tiếp xúc nhau tại điểm Miquel thành một bài toán, bài toán đó sẽ có giá trị ứng dụng cao trong các mô hình khác nhau.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . DE, DF lần lượt cắt AB, AC tại P, Q . R là trung điểm PQ . N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF . Gọi HN cắt AR tại L . Chứng minh rằng trục tâm tam giác ALN nằm trên EF .



Mọi trao đổi xin gửi về email analgematica@gmail.com.