Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

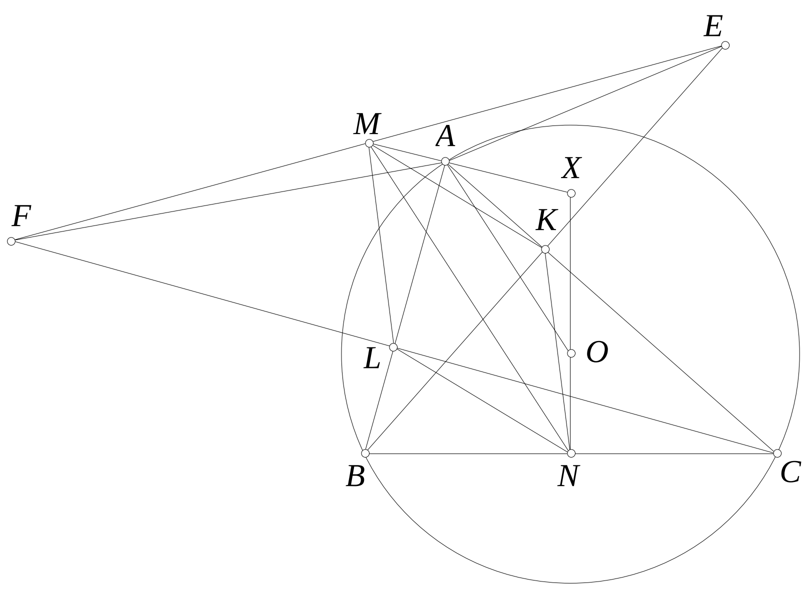
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên (O). E, F lần lượt đối xứng B, C qua CA, AB. M là trung điểm EF. Chứng minh rằng đường thẳng AM luôn đi qua một điểm cố định khi A di chuyển.

Lời giải

Dựa theo lời giải của bạn **Huỳnh Bách Khoa** lớp 12 Toán, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận.



Gọi BK, BL là đường cao của tam giác ABC. N là trung điểm BC. Dễ thấy tứ giác $NKML$ có các cạnh bằng $\frac{BC}{2}$ nên $NKML$ là hình thoi. Mặt khác $\angle KNL = 180^\circ - 2\angle BAC$ không đổi và cạnh hình thoi không đổi nên MN có độ dài cố định. Cũng từ $NKML$ là hình thoi thì $MN \parallel OA$. Gọi AM cắt trung trực BC tại X thì $\frac{XO}{XN} = \frac{AO}{MN}$ không đổi do đó X cố định.

Nhận xét

Bài toán được tác giả tạo ra nhờ sử dụng bài toán tương tự viết cho tâm nội tiếp. Các bạn có thể kiểm chứng bài toán đó như sau

Bài toán. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có tâm nội tiếp I. E, F lần lượt đối xứng với B, C theo thứ tự qua IC, IB. M là trung điểm của EF. Chứng minh rằng IM đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến qua B, C của (O).

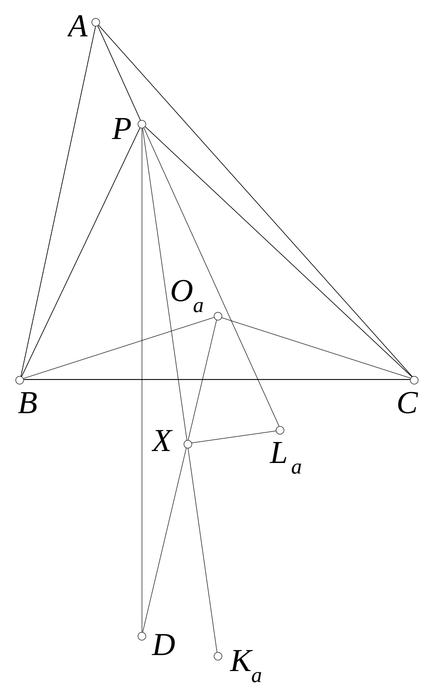
Bài toán trên cũng được bạn **Đỗ Trung Phương** lớp 12 Toán, THPT chuyên Vĩnh Phúc tổng quát trên diễn đàn AoPS bằng cách thay I bởi điểm bất kỳ trên phân giác. Ngoài ra cũng xuất hiện một tổng quát hơn nữa khi thay I bởi điểm bất kỳ trong mặt phẳng như sau

Bài toán. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và P là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Tiếp tuyến qua B, C của (O) cắt nhau tại T. PA cắt (O) tại D khác A. Các đường tròn (PAB), (PAC) cắt lại CA, AB tại E, F. PT cắt EF tại S. TD cắt BC tại M. Chứng minh rằng $\frac{SE}{SF} = \frac{MC}{MB}$.

Có bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán, THPT chuyên KHTN cũng cho một lời giải khác.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC và P bất kỳ. D đối xứng P qua BC. O_a là tâm ngoại tiếp tam giác PBC. K_a là tâm ngoại tiếp tam giác O_aBC. DO_a cắt PK_a tại X. L_a thuộc PA sao cho $XL_a \perp XK_a$. Tương tự có L_b, L_c. Chứng minh rằng L_a, L_b và L_c thẳng hàng.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. O là tâm ngoại tiếp của tam giác ABC. K là trực tâm của tam giác ABC. Q, L lần lượt đối xứng với D, I qua EF. DI cắt KL tại P. QL cắt OI tại R. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR đi qua I.

Tác giả: **Phạm Thị Hồng Nhung**

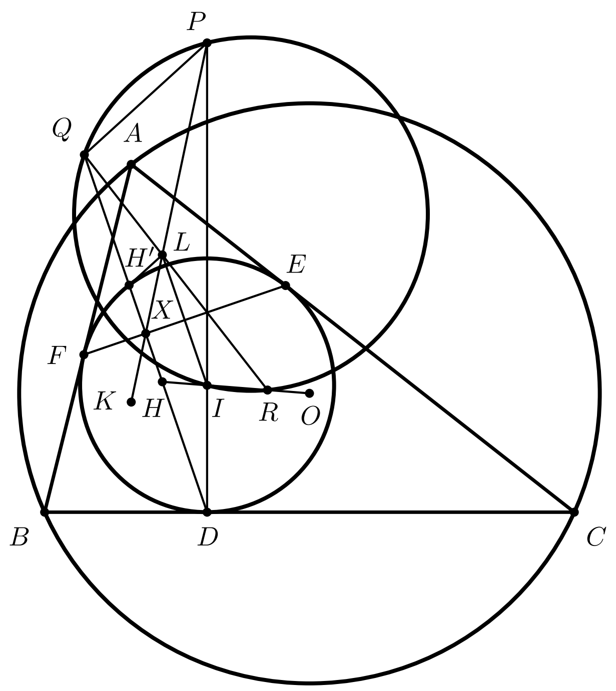
Lời giải

Dựa theo lời giải của bạn **Trương Mạnh Tuấn**, lớp 12 Toán trường THPT chuyên KHTN.

Ta phát biểu không chứng minh một số bổ đề quen thuộc:

Bổ đề 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Khi đó, OI là đường thẳng Euler của tam giác DEF.

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. X là hình chiếu của D lên EF. Khi đó, XD là phân giác của góc $\angle HXI$.



Giải bài toán. Đặt X là hình chiếu của D lên EF. Theo bổ đề 2 thì XD là phân giác của $\angle KXI$. Từ đó suy ra K, X, L thẳng hàng. Gọi H là trực tâm DEF và DH cắt (I) lần thứ hai tại H'. Theo bổ đề 1 ta được H, I, R, O thẳng hàng. Hơn nữa, ta lại có $\frac{PL}{PX} = \frac{LI}{DX} = \frac{DH}{DX} = \frac{QH'}{QX}$, suy ra $QP \parallel LH'$. Do đó, $\angle RQP = \angle QLH' = 180^\circ - \angle RLH' = 180^\circ - \angle PIH = \angle RIP$. Từ đó suy ra bốn điểm Q, R, P, I cùng nằm trên một đường tròn.

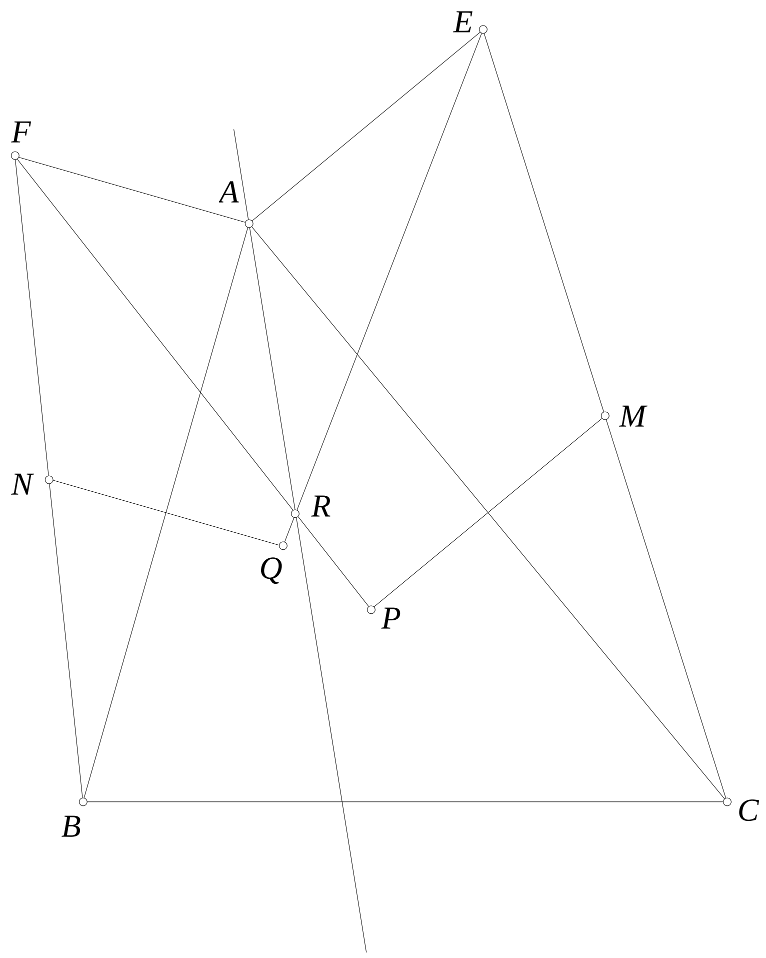
Biên tập. **Trịnh Huy Vũ** sinh viên khoa toán ĐHKHTN, ĐHQGHN.

Nhận xét

Đây là bài toán hay có nhiều ứng dụng và phát triển trong các mô hình khác nhau.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có B, C cố định và A thay đổi. Dựng ra ngoài các tam giác vuông tại A là AEC và AFB đồng dạng và có góc không đổi. M, N là trung điểm CE, BF. P, Q đối xứng với M, N qua CA, AB. FP cắt EQ tại R. Chứng minh rằng đường thẳng AR đi qua điểm cố định khi A thay đổi.



Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng, Trần Quang Hùng,** Hà Nội