

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

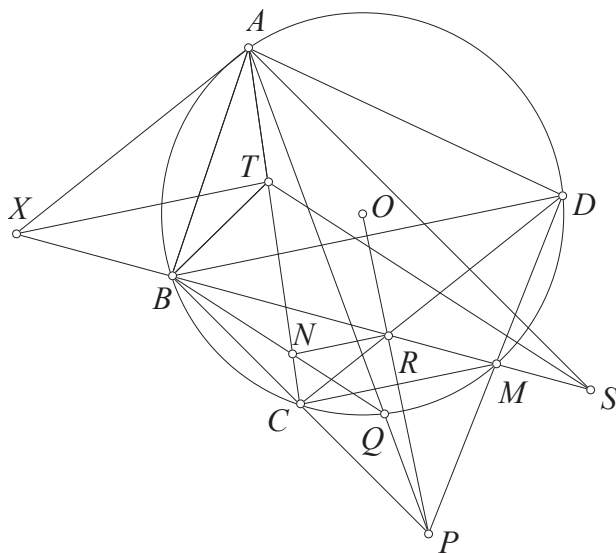
Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) . BC cắt trung trực BD tại P . AP cắt (O) tại Q khác A . CD cắt OP tại R . Trên BR lấy S sao cho $AS \parallel BP$. Lấy T thuộc AC sao cho $ST \parallel BQ$. Chứng minh rằng $TA = TB$.

Lời giải

Lời giải sau dựa trên ý tưởng của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An tại [đây](#).



Theo tính đối xứng thì PD và BR cắt nhau tại M thuộc (O) . Gọi BQ cắt AC tại N . Theo định lý Brocard thì P, N liên hợp với (O) và P, R liên hợp với (O) do đó P là cực của NR nên $NR \perp OP \perp CM$ hay $NR \parallel CM$. Lấy X thuộc BR sao cho $AX \parallel CD$. Vậy hai tam giác AXS và CRB có các cạnh tương ứng song song nên đồng dạng. Lại có tam giác CNB và ATS có các cạnh tương ứng song song nên đồng dạng. Từ đây suy ra hai tam giác XTA và RNC đồng dạng. Do đó $\angle XTA = \angle CNR = 180^\circ - \angle MCA = 180^\circ - \angle MBA = \angle ABX$. Do đó tứ giác $XATB$ nội tiếp. Lại có $\angle AXB = \angle XRC = 2\angle RMC = 2\angle BAC = 2\angle BXT$. Từ đó XT là phân giác $\angle AXB$ nên $TA = TB$.

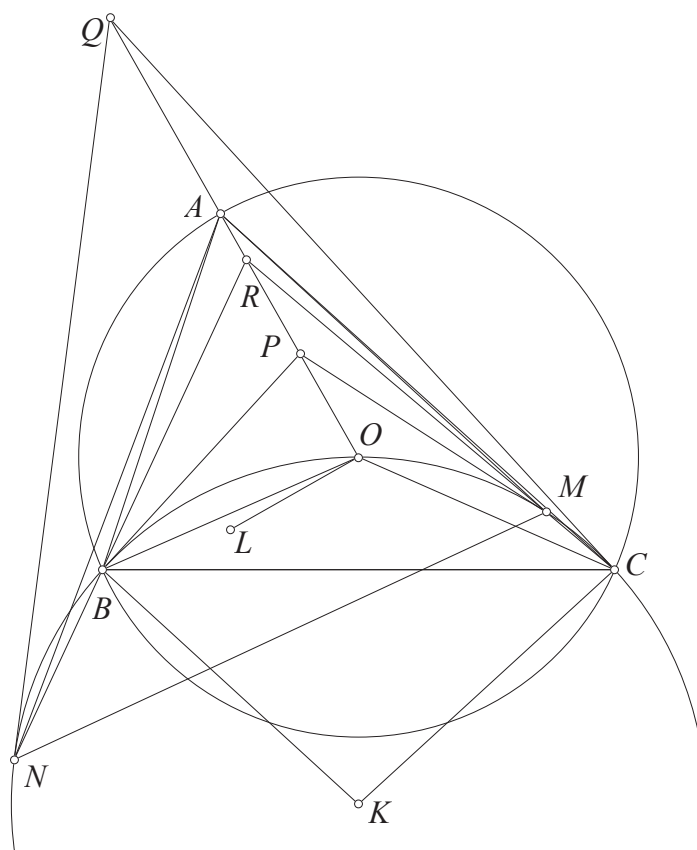
Nhận xét

Bạn **Đỗ Trung Phương** lớp 11 Toán, THPT chuyên Vĩnh Phúc cũng cho lời giải tại [đây](#). Ngoài ra tác giả nhận được lời giải khác qua email từ bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình. Bài toán có thể được khai thác ở dạng đối xứng như sau

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) . BC, AD lần lượt cắt trung trực BD, AC tại P, Q . AP, BQ cắt (O) tại M, N khác A, B . CD cắt OP, OQ lần lượt tại K, L . Trên BK, AL lấy S, T sao cho $AS \parallel BC, BT \parallel AD$. Lấy U, V thuộc AC, BD sao cho $SU \parallel BM, TV \parallel AN$. Chứng minh rằng U, V, O thẳng hàng.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn với tâm ngoại tiếp O . (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC . Tiếp tuyến tại B, C của (K) lần lượt cắt AO tại P, Q . Lấy M khác B thuộc (K) sao cho PM tiếp xúc (K) . Lấy N khác C thuộc (K) sao cho QN tiếp xúc (K) . Gọi L là tâm ngoại tiếp tam giác AMN . Chứng minh rằng $OL \perp AO$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.