TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẤT THÀNH
NIÊN KHÓA: 2011-2012

CHUYÊN ĐỀ

MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG LIÊN QUAN ĐẾN TỨ GIÁC TOÀN PHẦN

Người thực hiện

Phan Hồng Hạnh Trinh
Nhóm chuyên toán lớp 11A1

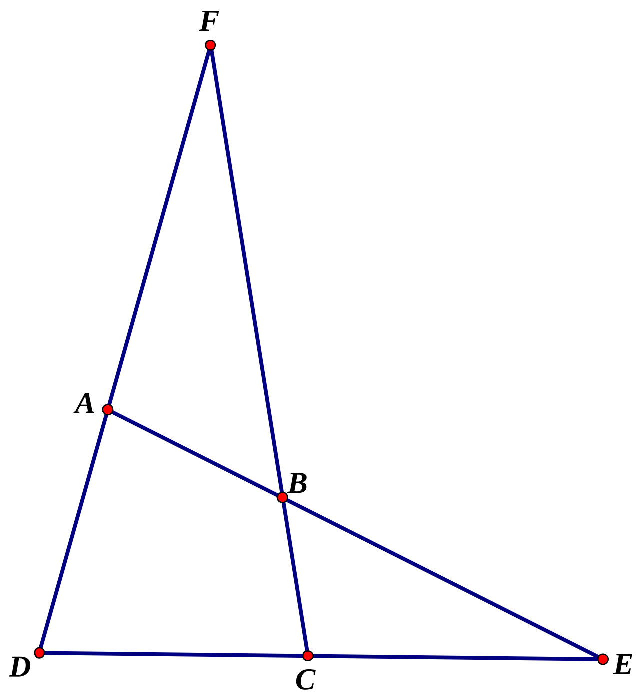
Kon Tum, ngày 26 tháng 03 năm 2012

LỜI NÓI ĐẦU

TỨ GIÁC TOÀN PHẦN

I. CÁC KIẾN THỨC LIÊN QUAN

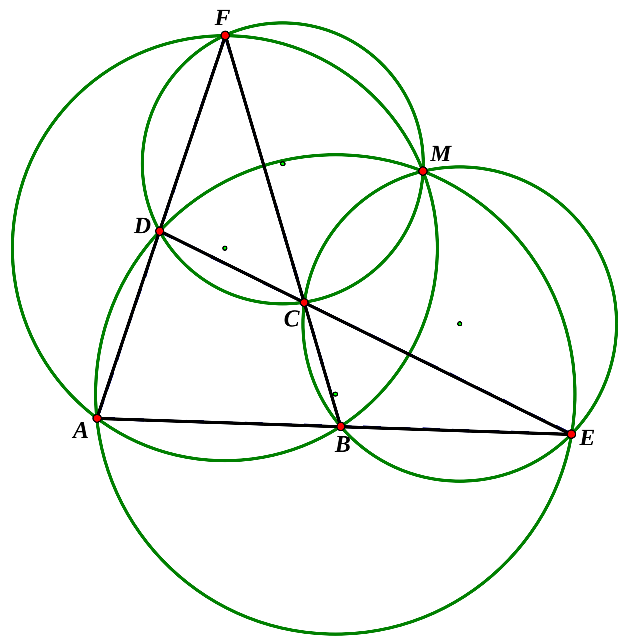
Cho tứ giác lồi ABCD có các cặp cạnh đối không song song. AB cắt CD tại E, AD cắt BC tại F. Hình tạo bởi tứ giác ABCD, và hai tam giác EBC, FCD được gọi là tứ giác toàn phần. Trong cả chuyên đề này, chúng ta quy ước gọi tứ giác như thế là tứ giác toàn phần ABCDEF.



A, B, C, D, E, F là các đỉnh; các đoạn AC, BD, EF là các đường chéo của của tứ giác.
Các góc trong của tứ giác ABCD và của hai tam giác EBC, FCD là các góc trong của tứ giác.
Tứ giác toàn phần ABCDEF được gọi là nội tiếp trong một đường tròn nếu tứ giác ABCD nội tiếp.
Tứ giác toàn phần ABCDEF được gọi là ngoại tiếp một đường tròn nếu tứ giác ABCD ngoại tiếp.
Trong chuyên đề này, chúng tôi sẽ sử dụng kiến thức về góc định hướng và không chứng minh lại các bài toán quen thuộc như bài toán đường thẳng Simson, đường thẳng Steiner của tam giác, bài toán định lý Ptolemy.

II. MỘT SỐ TÍNH CHẤT CƠ BẢN

1/ Tính chất 1: Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCE, CDF, ADE, ABF đồng quy tại một điểm. Điểm này là điểm Miquel của tứ giác toàn phần



Chứng minh:

Gọi M là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABF và AED. Ta sẽ chứng minh các đường tròn còn lại cũng đi qua M.

Thật vậy:

Xét góc định hướng giữa các đường thẳng theo mođun π, ta có:

$$\left(\overline{MA,\ MC}\right) = \left(\overline{BA,\ BC}\right) \pmod{\pi}$$

$$\left(\overline{ME,\ MA}\right) = \left(\overline{FE,\ FA}\right) \pmod{\pi}$$

Từ đây suy ra :

$$\left(\overline{ME,MB}\right) = \left(\overline{ME,MA}\right) + \left(\overline{MA,MB}\right) = \left(\overline{DE,DA}\right) + \left(\overline{FA,FB}\right)$$

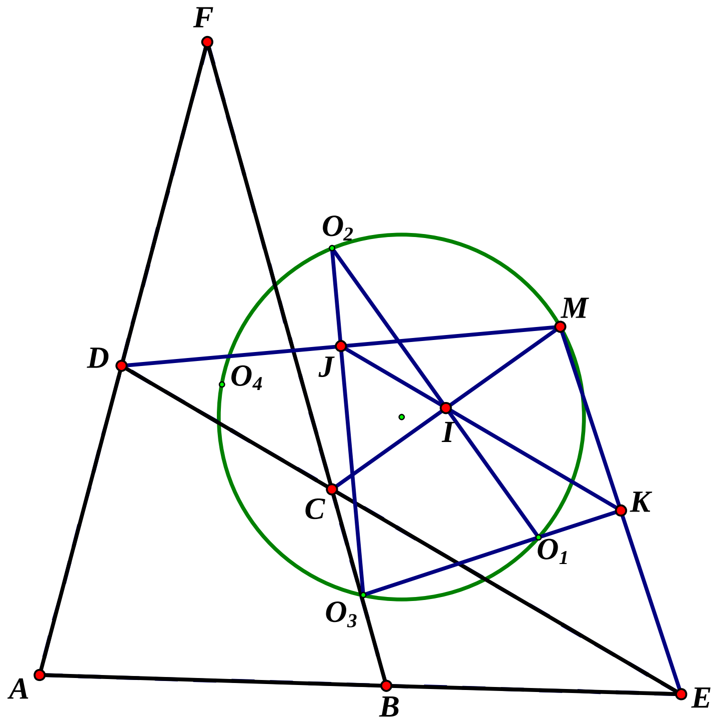
$$= \left(\overline{CE,DA}\right) + \left(\overline{DA,CB}\right) = \left(\overline{CE,CB}\right) \pmod{\pi}$$

Do đó đường tròn ngoại tiếp ΔCBE đi qua điểm M.

Chứng minh tương tự cho ta cũng suy ra được đường tròn ngoại tiếp ΔCDF cũng đi qua điểm M.

Mở rộng: Khi tứ giác ABCDEF nội tiếp thì M, E, F thẳng hàng (tính chất này dành cho bạn đọc tự chứng minh).

2/ Tính chất 2: Tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCE, CDF, ADE, và điểm Miquel M cùng thuộc một đường tròn

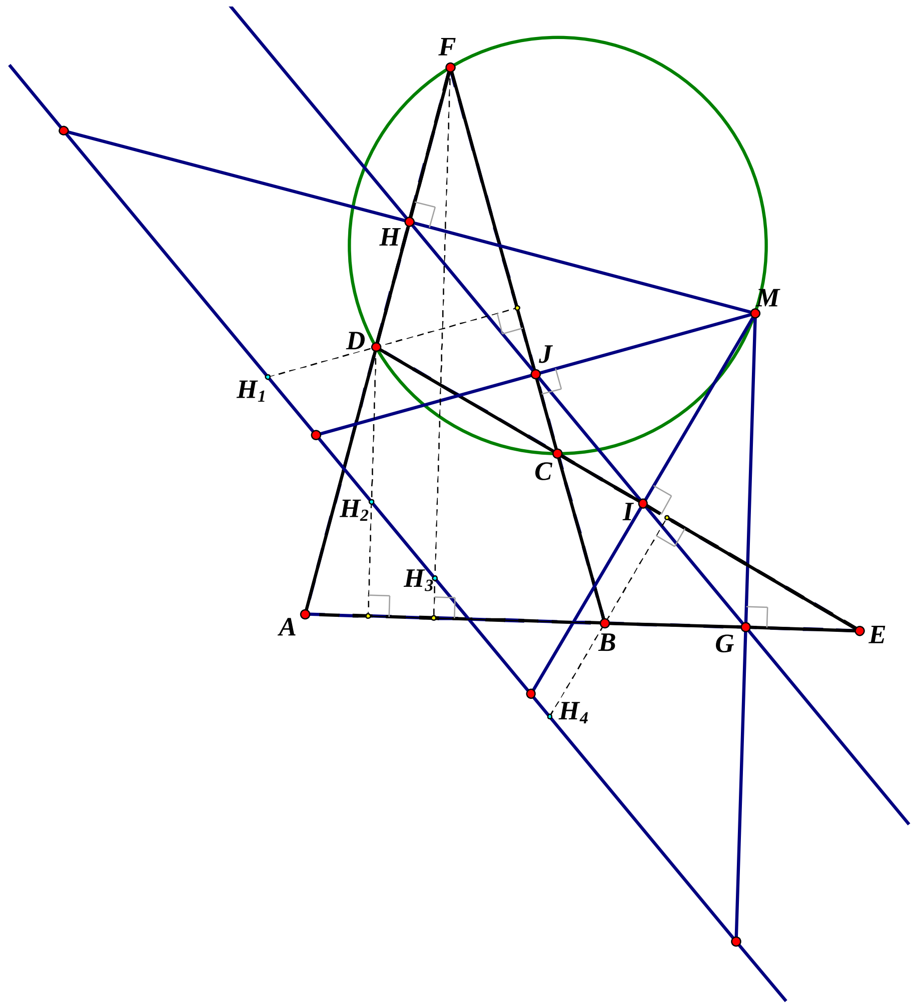


Chứng minh:
Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCE , CDF, ADE và ABF.
Dễ thấy O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3 lần lượt là các đường trung trực của MC, MD, ME. Khi đó các hình chiếu của điểm M lên các đường thẳng này (ta gọi là I, J, K như hình vẽ) lần lượt là các trung điểm cuả MC, MD, ME . Từ đây, theo định lý đảo về đường thẳng Simson, suy ra M thuộc đường tròn đi qua ba điểm O_1, O_2, O_3 .
chứng minh tương tự, ta cũng có M thuộc đường tròn đi qua ba điểm O_2, O_3, O_4. Từ đó suy ra đpcm.

3/ Tính chất 3: Chân các đường vuông góc hạ từ điểm Miquel M lên các đường thẳng AB, BC, CD, DA cùng nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Simson)
Chứng minh:
Gọi G, I, J, H lần lượt là chân đường cao kẻ từ M xuống BE, DE, BF, DF. Vì M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF nên đường thẳng đi qua I, J, H sẽ là đường thẳng Simson của điểm M đối với tam giác FDC, suy ra I, J, H thẳng hàng. Chứng minh tương tự cho các điểm còn lại, ta suy ra điều phải chứng minh.

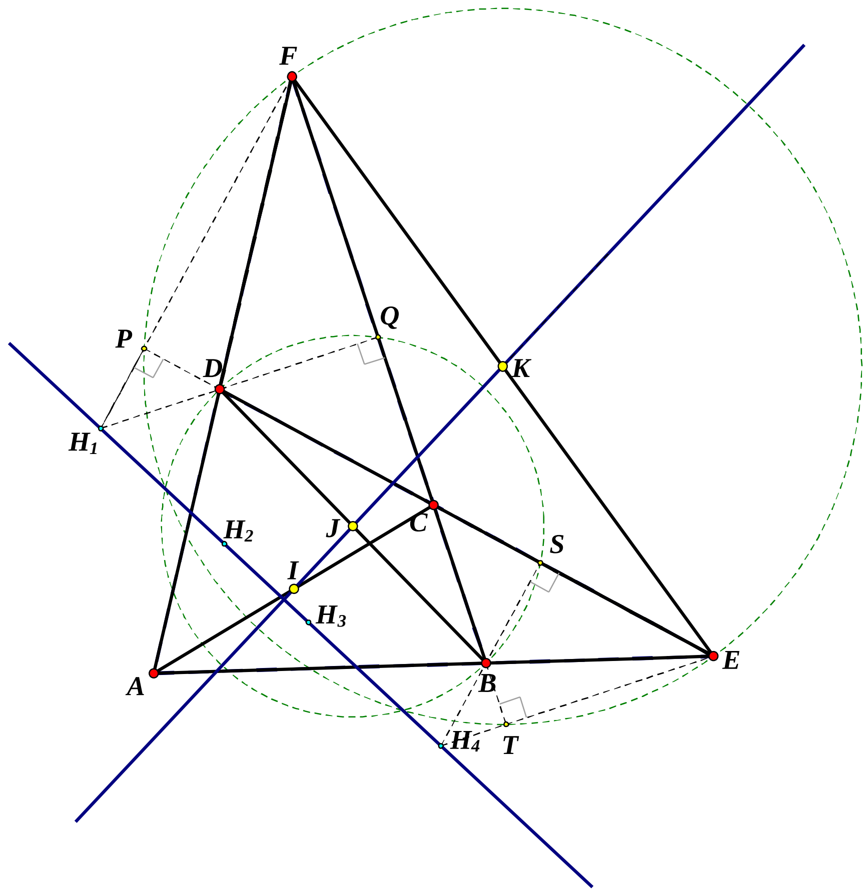
4/ Tính chất 4: Các trực tâm của các tam giác BCE, CDF, ADE, ABF cùng nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Steiner của tứ giác).
Chứng minh:

Gọi M là điểm Miquel của tứ giác toàn phần. phép vị tự tâm M, tỉ số 2 biến đường thẳng Simson của mỗi tam giác BCE, CDF, ADE, ABF thành đường thẳng Steiner của tam giác đó, đi qua trực tâm tam giác . Từ tính chất 3 suy ra các đường thẳng Steiner của bốn tam giác trên trùng nhau và đường thẳng đó đi qua trực tâm của bốn tam giác.



5/ Tính chất 5: Các trung điểm của các đoạn thẳng AC, BD, EF cùng nằm trên một đường thẳng (đường thẳng Gauss). Đường thẳng Gauss vuông góc với đường thẳng Steiner
Chứng minh:
Từ tính chất 4, ta có các trực tâm H_1, H_2, H_3, H_4 của các tam giác CDF, ADE, ABF, BCE cùng thuộc đường thẳng Steiner s của tứ giác toàn phần ABCDEF.
Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ H_1 xuống CD và CB; S, T lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ H_4 xuống CD và CB.
Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AC, BD, EF. (I), (J), (K) lần lượt là các đường tròn đường kính AC, BD, EF.
Dễ thấy $\overline{H_1P}.\overline{H_1F} = \overline{H_1D}.\overline{H_1Q}$ hay $P_{H_1/(K)} = P_{H_1/(J)}$.
$\overline{H_4T}.\overline{H_4E} = \overline{H_4B}.\overline{H_4S}$ hay $P_{H_4/(K)} = P_{H_4/(J)}$.
Do đó s là trục đẳng phương của (J) và (K), suy ra JK $\perp$ s.

Tương tự ta cũng chứng minh được s là trục đẳng phương chung của (I) và (J), suy ra $IJ \perp s$. Từ đó có được ba điểm I, J, K thẳng hàng và đường thẳng đi qua ba điểm này vuông góc với đường thẳng s.



6/ Tính chất 6: Cho tứ giác toàn phần ABCDEF nội tiếp đường tròn (O) tâm O, AC cắt BD tại K. Khi đó O là trực tâm tam giác KEF (định lí Brocard)

Chứng minh:

Gọi H là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác AKD, BKC.

Xét các góc định hướng giữa các đường thẳng theo mod π ta có:Xét tứ giác DOHC ta có:

$$\left(\overline{OC,OD}\right)=\left(\overline{AC,AD}\right)+\left(\overline{BC,BD}\right)=\left(\overline{AK,AD}\right)+\left(\overline{BC,BK}\right)$$
$$=\left(\overline{HK,HD}\right)+\left(\overline{HC,HK}\right)=\left(\overline{HC,HD}\right)\quad (\text{mod } \pi)$$

Suy ra bốn điểm O, C, D, H cùng thuộc một đường tròn.

Tương tự ta chứng minh được bốn điểm A, O, H, B cùng thuộc một đường tròn.

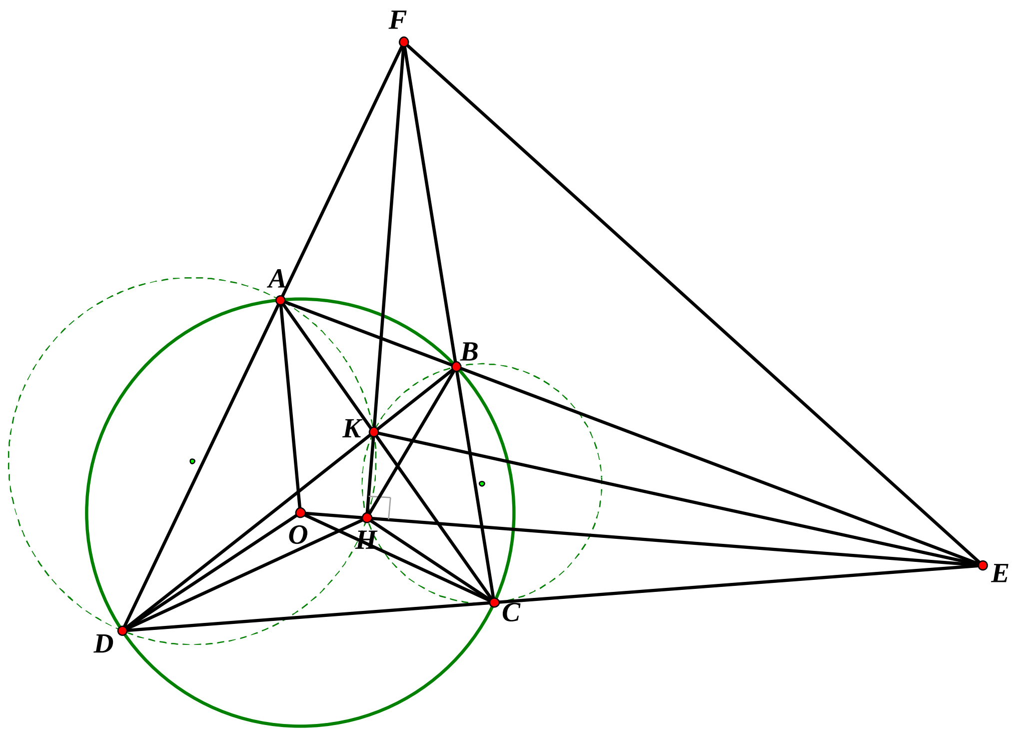
Mặt khác $\overline{EA}.\overline{EB}=\overline{EC}.\overline{ED}$, suy ra E nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đi qua bốn điểm O, C, D, H và đường tròn đi qua bốn điểm A, O, H, B.

Suy ra E, H, O thẳng hàng.

Ta lại có:

$$\left(\overline{HO,HK}\right)=\left(\overline{HO,HD}\right)+\left(\overline{HD,HK}\right)$$
$$=\left(\overline{CO,CD}\right)+\left(\overline{AD,AK}\right)=\left(\overline{CO,CD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{OD,OC}\right)=\frac{\pi}{2}\ (\text{mod } \pi)$$

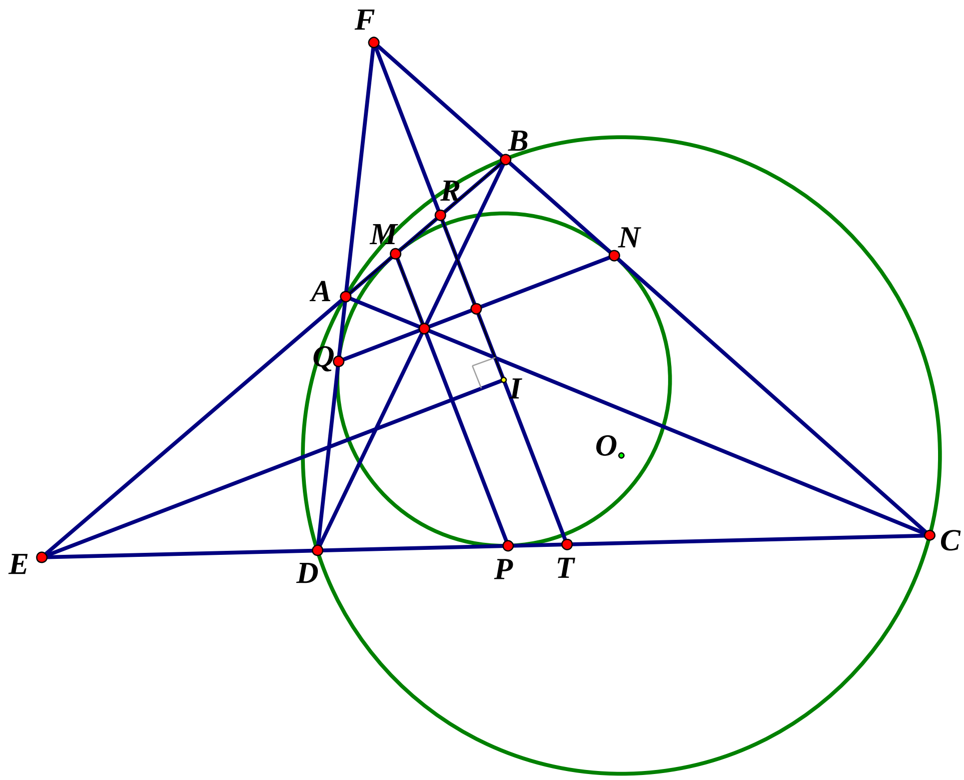
(vì tam giác OCD cân tại O).
Do đó, HO $\perp$ HK hay OE $\perp$ KF.
Chứng minh tương tự ta được OF $\perp$ KE.
Vậy, O là trực tâm tam giác KEF.



Như vậy, ta lướt 6 tính chất quan trọng và cơ bản nhất của tứ giác toàn phần, để thấy rõ hơn về nét đẹp của tứ giác toàn phần chúng ta hãy cùng xem xét, suy nghĩ về những bài toán ở phần tiếp theo.

III. MỘT SỐ BÀI TOÁN MỞ RỘNG

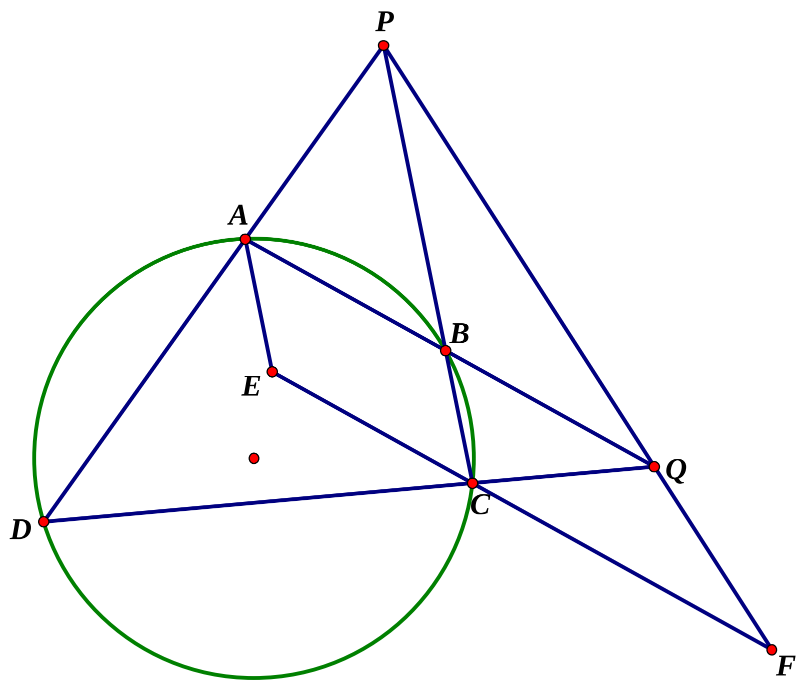
<u>Bài toán 1</u>: Cho tứ giác ABCD có các cặp cạnh đối không song song, ngoại tiếp đường tròn (O), nội tiếp đường tròn (I). Gọi M, N, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng MP $\perp$ NQ.



<u>Lời giải</u>:
Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử A nằm giữa B và E, A nằm giữa D và F (như hình vẽ trên). FI cắt cắt AB, CD lần lượt tại R và T.

Ta có EI, FI là các đường phân giác của $\widehat{AED}, \widehat{AFB}$. Hơn nữa dễ thấy MP $\perp$ EI và NQ $\perp$ EI. Như vậy việc chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được EI $\perp$ FI.
Thật vậy, theo tính chất góc ngoài của tam giác ta có:
$\widehat{ERT} = \widehat{AFR} + \widehat{FAR} = \widehat{TFC} + \widehat{FCT} = \widehat{RTE}$
Suy ra ΔERT cân tại E. Do đó $EI \perp RT$ hay EI $\perp$ FI.
Vậy, bài toán được chứng minh.
<u>Nhận xét</u>: *Qua bài toán, ta biết thêm một cách dựng tứ giác vừa ngoại tiếp vừa nội tiếp đường tròn, đồng thời rút ra được bổ đề sau:*
Cho tứ giác toàn phần ABCDEF nội tiếp. Khi đó các đường phân giác trong của góc E và góc F vuông góc với nhau.

<u>Bài toán 2</u>: Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của AD và BC, AB và CD. Dựng hình bình hành ABCE. Gọi F là giao điểm của CE và PQ. Chứng minh rằng D, Q, E, F cùng thuộc một đường tròn.



Lời giải:

Ta xét trường hợp B nằm giữa P và C, B nằm giữa A và Q (như hình vẽ trên). Các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Dễ thấy: $\Delta PAB \sim \Delta PCD$ và chú ý rằng ABCE là hình bình hành, suy ra:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{AB}{DC} = \frac{EC}{DC}$$

Mặt khác: $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{\sin\widehat{PBA}}{\sin\widehat{PAB}} = \dfrac{\sin\widehat{QBC}}{\sin\widehat{QCB}} = \dfrac{QC}{QB}$

Áp dụng định lý Thales đối với $BQ \parallel CF$, ta có: $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{QB}{CF}$

Ta có: $\dfrac{EC}{DC} = \dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PA}{PB} . \dfrac{PB}{PC} = \dfrac{QC}{QB} . \dfrac{BQ}{CF} = \dfrac{QC}{CF}$

Suy ra: $\Delta CED \sim \Delta CQF \Rightarrow CE.CF = CD.CQ$

Vậy, bốn điểm E, D, Q, F cùng thuộc một đường tròn.

<u>Bài toán 3</u>: *Cho tứ giác toàn phần ABCDEF nội tiếp đường tròn tâm O. AD cắt BC tại I. M là điểm Miquel của tứ giác. Chứng minh rằng O, I, M thẳng hàng*

Lời giải:

Từ mở rộng của tính chất 4, suy ra M thuộc đường chéo EF. Theo định lý Brocard ta có O là trực tâm Δ IEF nên OI $\perp$ EF. Như vậy ta chỉ cần chứng minh OM $\perp$ EF.

Bổ đề: (định lý bốn điểm) Trong mặt phẳng, cho điểm A, đoạn thẳng BC và điểm H thuộc đường thẳng BC. Chứng minh rằng nếu $AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2$ thì $AH \perp BC$.

Bổ đề khá đơn giản nên các bạn có thể tự chứng minh.

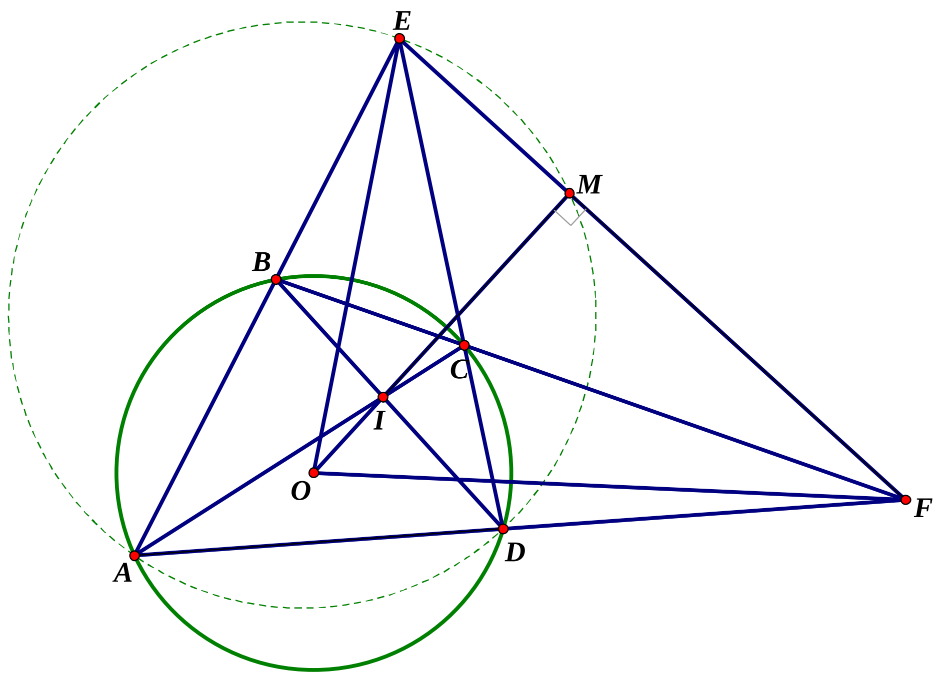
Trở lại bài toán. Đặt R = OA.

Ta có $OE^2 - OF^2 = \left(OE^2 - R^2\right) - \left(OF^2 - R^2\right) = \mathcal{P}_{E/(O)} - \mathcal{P}_{F/(O)}$

$= \overline{EB}.\overline{EA} - \overline{FD}.\overline{FA} = \overline{EM}.\overline{EF} - \overline{FM}.\overline{FE}$ (do $M \in (ADE)$, $M \in (ABF)$)

$= \overline{EF}\left(\overline{EM} + \overline{FM}\right) = \left(\overline{ME} - \overline{MF}\right)\left(\overline{ME} + \overline{MF}\right) = ME^2 - MF^2$.

Do đó $OM \perp EF$. Bài toán được chứng minh.



<u>Bài toán 4</u>: Cho tứ giác ABCD. Gọi P, Q lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC. AC cắt BD tại O. Dựng $OR \perp PQ$ ($R \in PQ$). Gọi M, N, S, T lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ R xuống CD, BC, DA, AB. Chứng minh rằng M, N, S, T cùng thuộc một đường tròn

Lời giải:

Gọi L là giao điểm của AC và PQ.

Khi đó, từ tính chất quen thuộc của hàng điểm điều hòa, suy ra: (ACOL) = -1.

Mặt khác: $RO \perp RL$, suy ra: RO là phân giác của $\widehat{ARC}$.

Xét góc định hướng giữa các đường thẳng theo mođun π, ta có:

$\left(\overline{TM}, \overline{TS}\right) = \left(\overline{TM}, \overline{TP}\right) + \left(\overline{TA}, \overline{TS}\right) = \left(\overline{RM}, \overline{RP}\right) + \left(\overline{RA}, \overline{RS}\right) \pmod{\pi}$

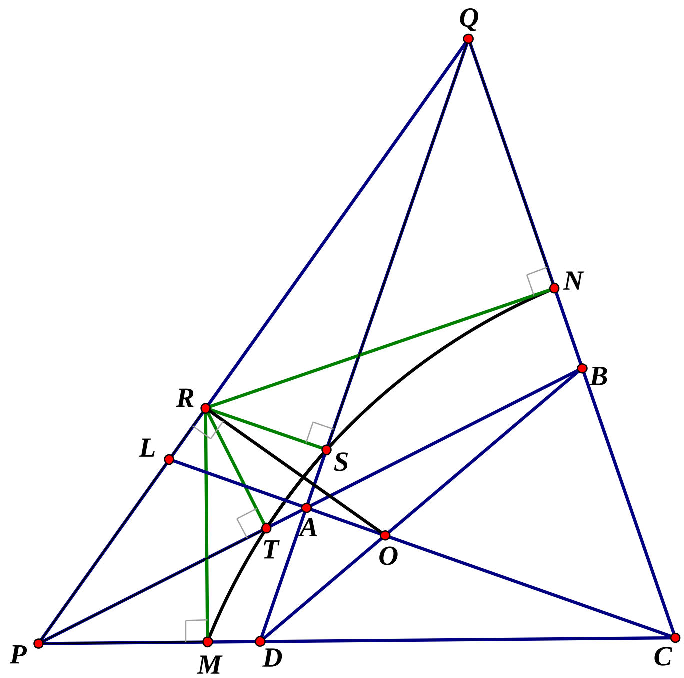
$\left(\overline{NM}, \overline{NS}\right) = \left(\overline{NM}, \overline{NP}\right) + \left(\overline{NQ}, \overline{NS}\right) = \left(\overline{RM}, \overline{RC}\right) + \left(\overline{RQ}, \overline{RS}\right) \pmod{\pi}$

Ta cần chứng minh: $\left(\overline{RM}, \overline{RP}\right) + \left(\overline{RA}, \overline{RS}\right) = \left(\overline{RM}, \overline{RC}\right) + \left(\overline{RQ}, \overline{RS}\right)$ (1)

Thật vậy: (1) $\Leftrightarrow \left(\overline{RM}, \overline{RP}\right) - \left(\overline{RM}, \overline{RC}\right) = \left(\overline{RQ}, \overline{RS}\right) - \left(\overline{RA}, \overline{RS}\right)$

$\Leftrightarrow \left(\overline{RC}, \overline{RP}\right) = \left(\overline{RQ}, \overline{RA}\right) \Leftrightarrow \left(\overline{RC}, \overline{RO}\right) = \left(\overline{RO}, \overline{RA}\right)$ (đúng do RO là phân giác của $\widehat{ARC}$).

Vậy bài toán được chứng minh.



<u>Bài toán 5</u>: (VMO 2012) Trong mặt phẳng, cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp đường tròn tâm O và có các cặp cạnh đối không song song. Gọi P, Q, S, T tương ứng là giao điểm các đường phân giác trong của các cặp góc $\widehat{MAN}$ và $\widehat{MBN}$, $\widehat{MBN}$ và $\widehat{MCN}$, $\widehat{MCN}$ và $\widehat{MDN}$, $\widehat{MDN}$ và $\widehat{MAN}$. Giả sử bốn điểm P, Q, S, T đôi một phân biệt.

1. Chứng minh rằng bốn điểm P, Q, S, T cùng nằm trên một đường tròn. Gọi I là tâm của đường tròn đó.

2. Gọi E là giao điểm của các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng ba điểm E, O, I thẳng hàng.

Lời giải:

1. Gọi d_1, d_2, d_3, d_4 lần lượt là các đường phân giác trong của các góc $\widehat{MAN}$, $\widehat{MBN}$, $\widehat{MCN}$ và $\widehat{MDN}$. Xét các góc định hướng giữa các đường thẳng theo mod π và chú ý về tính chất của các đường phân giác, ta có:

$$\left(\overline{TP,TS}\right)=\left(\overline{d_1,d_4}\right)=\left(\overline{d_1,AN}\right)+\left(\overline{DN,d_4}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{AM,AN}\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{DN,DM}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{AM,DM}\right)$$

$$\left(\overline{QP,QS}\right)=\left(\overline{d_2,d_3}\right)=\left(\overline{d_2,BN}\right)+\left(\overline{CN,d_3}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{BM,BN}\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{CN,CM}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{BM,CM}\right)$$

Để ý rằng tứ giác ABCD nội tiếp, ta có:

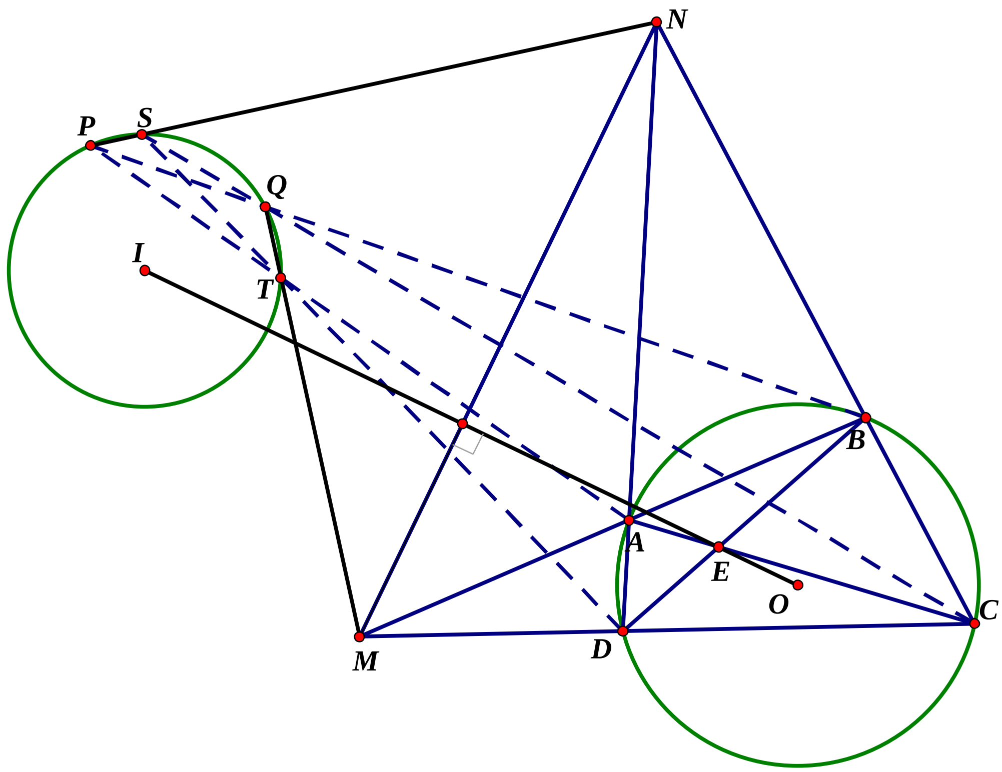
$$\left(\overline{AM,DM}\right)=\left(\overline{AM,AD}\right)+\left(\overline{AD,DM}\right)=\left(\overline{AB,AD}\right)+\left(\overline{AD,DC}\right)$$

$$=\left(\overline{CB,CD}\right)+\left(\overline{BA,BC}\right)=\left(\overline{CN,CM}\right)+\left(\overline{BM,BN}\right)=\left(\overline{BM,CM}\right)$$

Từ đó suy ra: $\left(\overline{TP,TS}\right)=\left(\overline{QP,QS}\right)$, hay bốn điểm, P, Q, S, T cùng thuộc một đường tròn.

2. Theo định lý Brocard, ta có O là trực tâm của ΔEMN. Do đó: $OE\perp MN$.

Do đó việc chứng minh sẽ hoàn tất nếu ta chỉ ra được MN là trục đẳng phương của (O) và (I).



Thật vậy, để tiện cho việc chứng minh và không mất tính tổng quát của bài toán, ta có thể giả sử A nằm giữa M và B, nằm giữa N và D, tức là các điểm phân bố như hình vẽ trên.

Khi đó, xét ΔMBC, ta có: CQ là phân giác trong của $\widehat{BCM}$, BQ là phân giác ngoài của $\widehat{MBC}$, do đó Q nằm trên phân giác ngoài của $\widehat{BMC}$.

Xét ΔMAD, ta cũng suy ra được T nằm trên phân giác ngoài của $\widehat{AMD}$, tức là nằm trên phân giác ngoài của $\widehat{BMC}$.

Từ đó suy ra: M, Q, T thẳng hàng, gọi đường thẳng đó là Δ_1.

Tương tự ta cũng chứng minh được: N, P, S thẳng hàng, gọi đường thẳng đó là Δ_2.

Ta có:

$$\left(\overline{QT,QC}\right)=\left(\overline{\Delta_1,d_3}\right)=\left(\overline{\Delta_1,MC}\right)+\left(\overline{CM,d_3}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{MB,MC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overline{CM,CN}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overline{BM,CN}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{BA,BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{DA,DC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overline{DN,DM}\right)=\left(\overline{d_4,DN}\right)=\left(\overline{DT,DC}\right)$$

Suy ra: Q, T, C, D cùng thuộc một đường tròn.

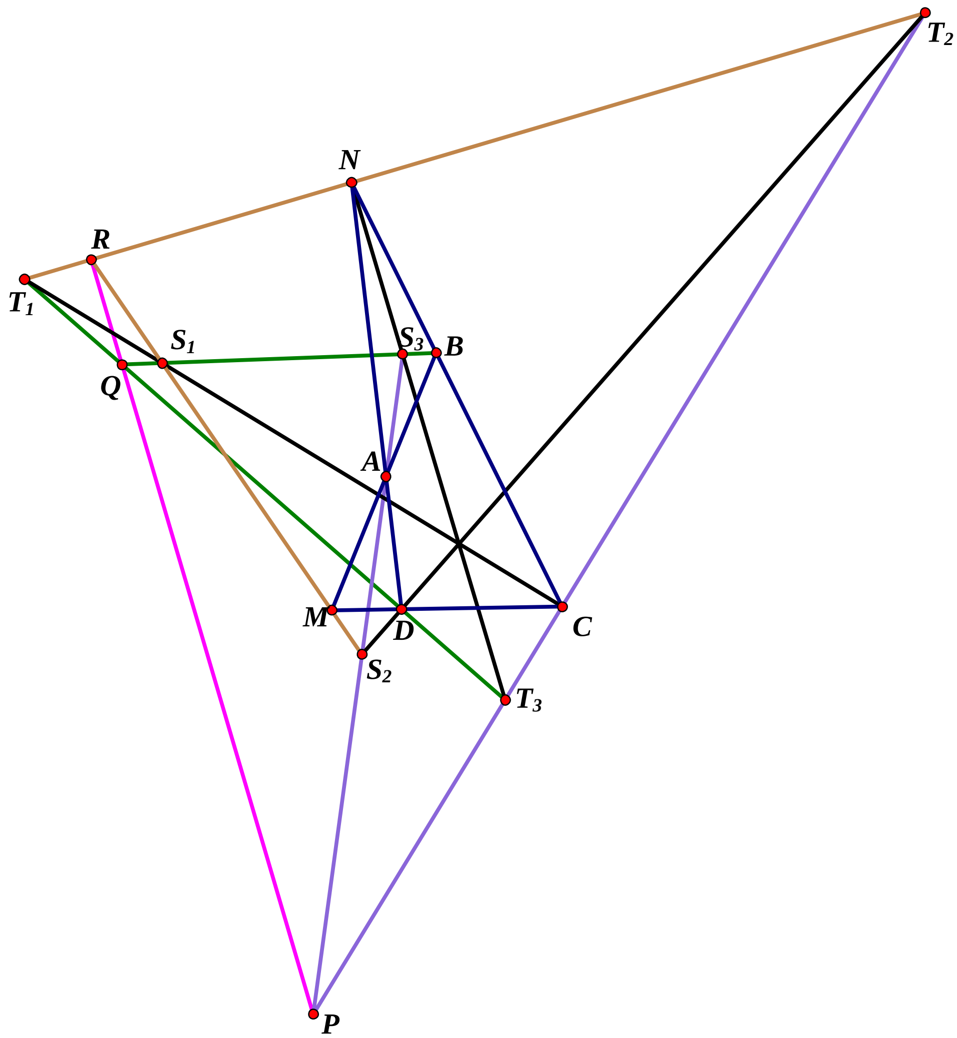
Do đó: $\overline{MQ}.\overline{MT}=\overline{MD}.\overline{MC}$ hay $P_{M/(O)}=P_{M/(I)}$.

Tương tự ta có: $P_{N/(O)}=P_{N/(I)}$.

Vậy MN là trục đẳng phương của (O) và (I). Ta có đpcm.

Nhận xét: Mấu chốt của bài này là nhận biết được sự thẳng hàng của bộ ba các điểm M, Q, T và N, P, S.

<u>Bài toán 6</u>*: Cho tứ giác toàn phần ABCDMN. Các đường phân giác ngoài các góc A, C cắt nhau tại P. Các đường phân giác ngoài các góc B, D cắt nhau tại Q. Các đường phân giác ngoài các góc M, N cắt nhau tại R. Chứng minh rằng: P, Q, R thẳng hàng.*



Lời giải:

Bổ đề: (định lý Desargues) Cho hai tam giác ABC và A'B'C'. Gọi C_1, B_1, A_1 lần lượt là các giao điểm của AB và A'B', BC và B'C', AC và A'C'. C_1, B_1, A_1 thẳng hàng khi và chỉ khi AA', BB', CC' đồng quy.

Để khỏi cồng kềnh, chúng tôi sẽ không chứng minh lại bổ đề. Về chứng minh của nó, bạn đọc có thể tham khảo ở *Tài liệu giáo khoa chuyên toán Hình học 10*, phần *Chuyên đề Hình học phẳng*; hoặc xem *bài tập 9, trang 51, Bài tập Hình học 11(chương trình nâng cao).*

Trở về bài toán, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử A nằm giữa N và D, giữa M và B.

Gọi d_A, d_B, d_C, d_D, d_M, d_N lần lượt là các đường phân giác ngoài của các góc A, B, C, D, M, N.

Gọi T_1, T_2, T_3 lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng d_D và d_N, d_N và d_C, d_C và d_D; S_1, S_2, S_3 lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng d_B và d_M, d_M và d_A, d_A và d_B.

Xét ΔMBC có MS_1, BS_1 là các đường phân giác ngoài của $\widehat{BMC}$ và $\widehat{MBC}$. Do đó S_1 nằm trên đường phân giác trong của $\widehat{BCM}$. (1)

Xét ΔNCD có NT_1, DT_1 là các đường phân giác ngoài của $\widehat{CND}$ và $\widehat{CDN}$. Do đó T_1 nằm trên đường phân giác trong của $\widehat{DCN}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra T_1S_1 là phân giác trong của $\widehat{DCN}$.

Tương tự ta cũng chứng minh được T_2S_2 là phân giác trong của $\widehat{CDN}$, T_3S_3 là phân giác trong của $\widehat{CND}$.

Do đó, T_1S_1, T_2S_2 và T_3S_3 đồng quy.

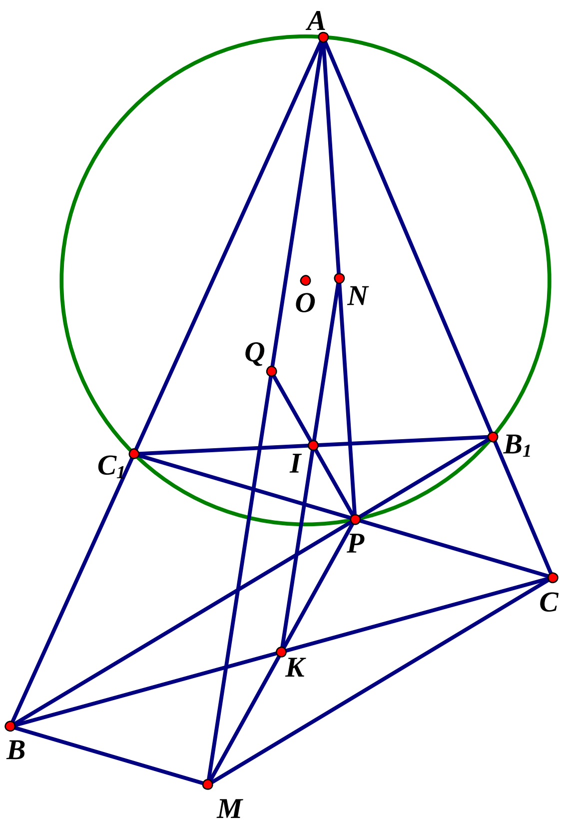
Áp dụng định lý Desargues cho hai $\Delta S_1S_2S_3$ và $\Delta T_1T_2T_3$ suy ra P, Q, R thẳng hàng.

Nhận xét: Giả thiết bài toán đề cập đến giao điểm của các cặp đường thẳng và yêu cầu chứng minh các điểm đó thẳng hàng dễ gợi cho chúng ta nghĩ đến định lý Desargues. Như vậy, chỉ cần dựng thêm hình phụ cho phù hợp, chúng ta sẽ có ngay lời giải.

<u>Bài toán 7</u>: Cho ΔABC và điểm P nằm trong tam giác. Các đường thẳng PB và PC cắt các cạnh AB và AC tương ứng tại C_1 và B_1. Q là điểm đối xứng với P qua trung điểm của đoạn B_1C_1. Chứng minh rằng nếu P nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$ thì $\widehat{QAB} = \widehat{PBC}$ và $\widehat{QAC} = \widehat{PCB}$.

Lời giải:

Cách 1: (Dùng tính chất đường thẳng Gauss)



Gọi N, I, K lần lượt là trung điểm của AP, B_1C_1, BC. Ta có N, I, K thẳng hàng (vì cùng nằm trên đường thẳng Gauss của tứ giác toàn phần AB_1PC_1CB). Lấy M đối xứng với P qua K.

Từ đó suy ra A, Q, M thẳng hàng.

Chú ý rằng: $PC_1 \| BM$, $PB_1 \| CM$ và AB_1PC_1 là tứ giác nội tiếp, suy ra tứ giác ABMC nội tiếp.

Từ đó có: $\widehat{QAB} = \widehat{MAB} = \widehat{MCB} = \widehat{PBC}$.

Tương tự ta cũng chứng minh được $\widehat{QAC} = \widehat{PCB}$.

Cách 2: (Sử dụng tính chất điểm Miquel của tứ giác toàn phần nội tiếp)

Gọi J là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác BPC_1 và PCB_1, suy ra J là điểm Miquel của tứ giác toàn phần AB_1PC_1CB. Vì tứ giác AB_1PC_1 nên J thuộc đoạn thẳng BC.

Xét ΔAC_1J và ΔB_1PJ, ta có:

$\widehat{AJC} = \widehat{ACC_1} = \widehat{B_1JB}$

$\widehat{C_1AJ} = \widehat{C_1CJ} = \widehat{PB_1J}$

Suy ra: $\Delta AC_1J \sim \Delta B_1PJ$ (1).

Xét ΔAC_1Q và ΔAJB_1, ta có:

$\widehat{AC_1Q}=\widehat{ABB_1}=\widehat{AJB_1}$

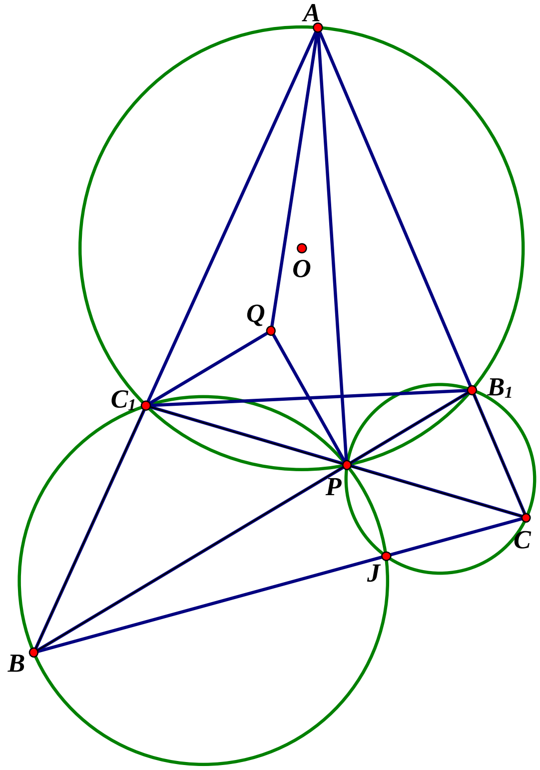
$\frac{C_1A}{C_1Q} = \frac{C_1A}{PB_1} = \frac{JA}{JB_1}$ (do (1))

Suy ra: $\Delta AC_1Q \sim \Delta AJB_1$.

Do đó:

$\widehat{BAQ} = \widehat{C_1AQ} = \widehat{JAB} = \widehat{JBB_1} = \widehat{PBC}$.

Tương tự, ta cũng chứng minh được $\widehat{QAC} = \widehat{PCB}$.



<u>Bài toán 8</u>*: Cho tứ giác toàn phần ABCDMN nội tiếp. Kí hiệu I và J lần lượt là trung điểm các đường chéo AC và BD. Chứng minh rằng:*

a) Hình chiếu của I và J trên các đường thẳng MA, MD nằm trên cùng một đường tròn. Tương tự như vậy với các hình chiếu của các điểm đó trên NA và NB.

b) Nếu AB.CD = AD.BC thì các hình chiếu của I và J trên các đường thẳng MA, MD, NA, NB cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải:

a) Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của I lên MA, MD; S, T lần lượt là hình chiếu của J lên MA, MD. Ta cần chứng minh P, Q, S, T cùng thuộc một đường tròn.

$\Delta MAC \sim \Delta MBD$ có I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD nên $\Delta MIA \sim \Delta MJD$

Suy ra: $\widehat{IMA} = \widehat{JMD} = \alpha$ (hay MI, MJ là hai đường đẳng giác trong góc $\widehat{AMD}$).

Đặt $\widehat{AMD} = \beta$.

Ta có: $\overline{MS}.\overline{MP} = MI.\cos\alpha.MJ.\cos(\beta - \alpha) = \overline{MQ}.\overline{MT}$.

Từ đó suy ra bốn điểm P, Q, S, T cùng thuộc một đường tròn.

Chú ý rằng tâm của đường tròn này là trung điểm của IJ (tính chất này dành cho bạn đọc tự chứng minh).

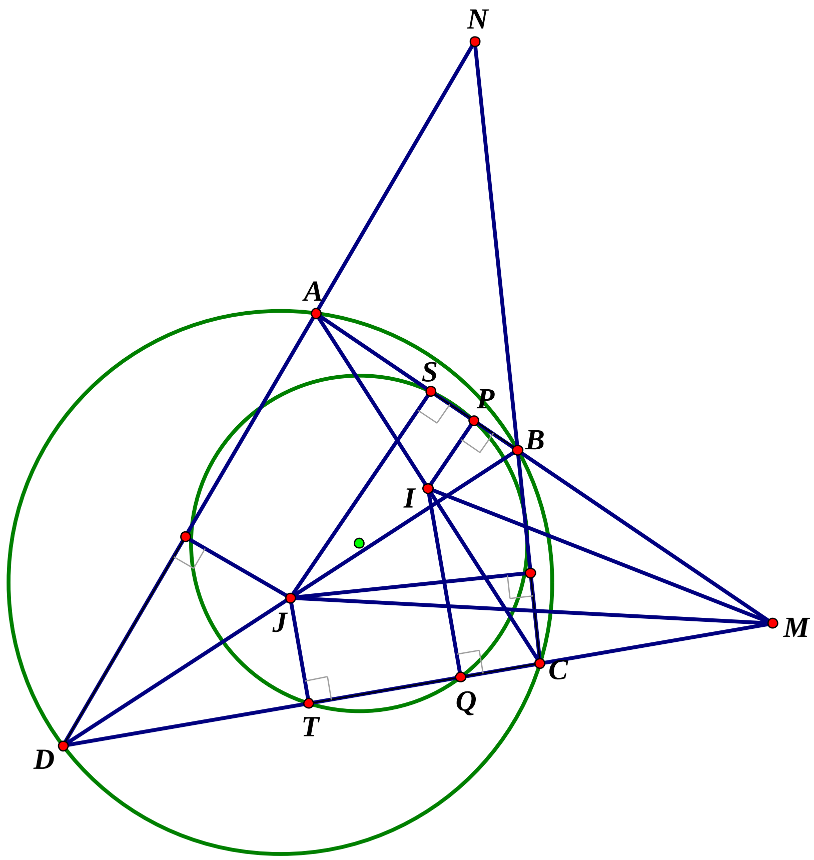
b) Ta sẽ chứng minh AI, AJ là các đường đẳng giác trong góc $\widehat{BAD}$.

Thật vậy, theo định lý Ptolemy đối với tứ giác nội tiếp ABCD, ta có:

AD.BC + AB.CD = AC.BD

Mặt khác, vì AB.CD = AD.BC nên $AD.BC = \frac{1}{2}AC.BD = AC.DJ$

Suy ra: $\frac{DA}{DJ} = \frac{CA}{CB}$.



Kết hợp với $\widehat{JDA} = \widehat{BCA}$ suy ra $\Delta JDA \sim \Delta BCA$. Từ đó có $\widehat{DAJ} = \widehat{CAB}$. Đến đây tương tự câu A, ta chứng minh được các hình chiếu của I và J trên AB và AD cùng nằm trên đường tròn có tâm là trung điểm G của IJ, bán kính GS. Như vậy ta đã đó điều phải chứng minh.

Nhận xét: Bài toán này thực chất là một tính chất quen thuộc về các đường đẳng giác trong một góc.

<u>Bài toán 9</u>: Cho tứ giác lồi ABCD nội tiếp trong (O). AD cắt BC tại E, AC cắt BD tại F. M, N là trung điểm của AB, CD. Chứng minh rằng $\dfrac{2MN}{EF} = \left|\dfrac{AB}{CD} - \dfrac{CD}{AB}\right|$.

Lời giải:

Cách 1: Dùng phương pháp vectơ

Đặt $\widehat{AEB} = \gamma$, EC = c, ED = d, $\vec{i} = \dfrac{1}{c}\overrightarrow{EC}$, $\vec{j} = \dfrac{1}{d}\overrightarrow{ED}$.

Vì ABCD là tứ giác nội tiếp nên $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AE}{CE} = \dfrac{BE}{DE} = k$.

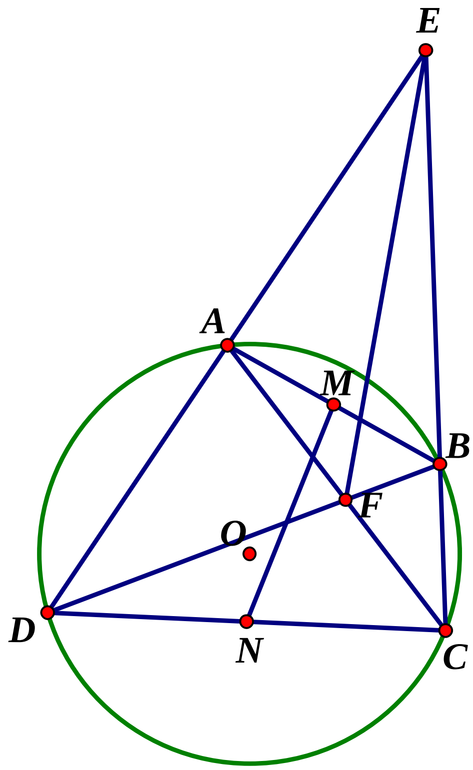
Suy ra $\overrightarrow{EA} = kc\vec{j}$ và $\overrightarrow{EB} = kd\vec{i}$.

Vì $F \in AC$, $F \in BD$ nên tồn tại các số x, y thỏa mãn:

$\overrightarrow{EF} = x\overrightarrow{EA} + (1-x)\overrightarrow{EC} = xkc\vec{j} + (1-x)c\vec{i}$

$\overrightarrow{EF} = y\overrightarrow{EB} + (1-y)\overrightarrow{ED} = ykd\vec{j} + (1-y)d\vec{i}$

So sánh các hệ số của $\vec{i}$ và $\vec{j}$ từ các đẳng thức trên ta được: $xkc=(1-y)d$ và $ykd=(1-x)c$



Từ đó suy ra $x=\dfrac{kd-c}{\left(k^2-1\right)c}$.

Vậy $\overrightarrow{EF}=\dfrac{k}{k^2-1}\left(\left(kd-c\right)\vec{j}+\left(kc-d\right)\vec{i}\right)$, suy ra

$$EF^2=\left(\frac{k}{k^2-1}\right)^2\left[\left(kd-c\right)^2+\left(kc-d\right)^2+2\left(kd-c\right)\left(kc-d\right)\cos\gamma\right]$$

Mặt khác ta có:

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EC}-\overrightarrow{EB}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(d-kc\right)\vec{j}+\left(c-kd\right)\vec{i}\right]$$

Suy ra $MN^2=\dfrac{1}{4}\left[\left(kd-c\right)^2+\left(kc-d\right)^2+2\left(kd-c\right)\left(kc-d\right)\cos\gamma\right]$.

Như vậy ta có $\dfrac{MN^2}{EF^2}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{k^2-1}{k}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(k-\dfrac{1}{k}\right)^2$.

Vậy $\dfrac{2MN}{EF}=\left|\dfrac{AB}{CD}-\dfrac{CD}{AB}\right|$.

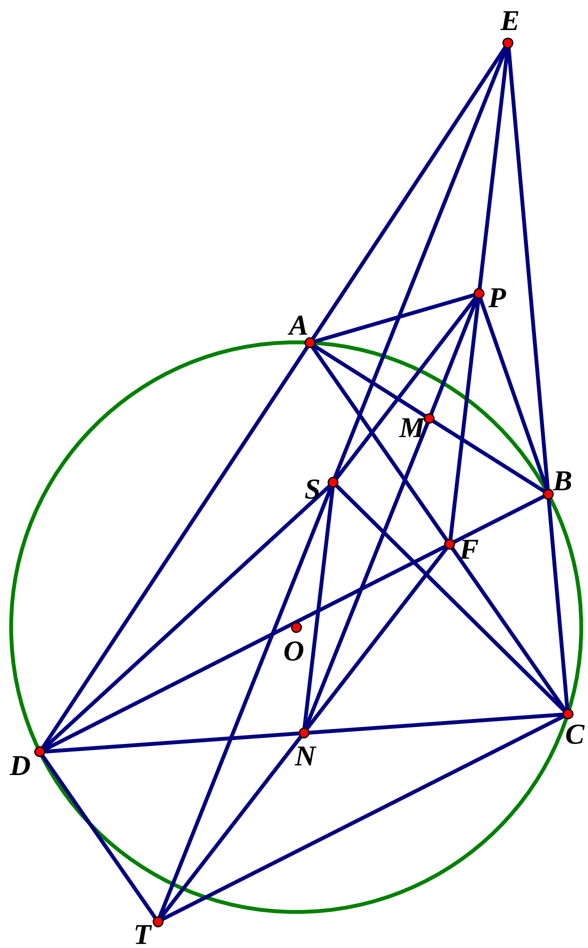
Cách 2: Dùng tính chất của đường thẳng Gauss

Giả sử A nằm giữa E và D.

Gọi P là trung điểm của EF. Khi đó M, N, P thẳng hàng (vì cùng nằm trên đường thẳng Gauss của tứ giác toàn phần AEBFDC).

Gọi T là điểm đối xứng với F qua N, S là trung điểm của ET.

Dễ thấy CFDT và PFNS là các hình bình hành.



Do đó $\widehat{ADT} = 180^o - \widehat{CAD} = 180^o - \widehat{CBD} = \widehat{EBF}$.

Mặt khác, ta có: $\frac{FB}{DT} = \frac{FB}{FC} = \frac{AB}{CD} = \frac{EB}{ED}$.

Do đó $\Delta EBF \sim \Delta EDT$, chú ý rằng BP, DS là hai đường trung tuyến kẻ từ hai đỉnh tương ứng của hai tam giác này, suy ra $\frac{PB}{SD} = \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{DC}$

và $\widehat{PBA} = \widehat{PBF} - \widehat{ABF} = \widehat{SDT} - \widehat{DCF} = \widehat{SDT} - \widehat{CDT} = \widehat{SDC}$.

Vì vậy, $\Delta PAB \sim \Delta SCD$.

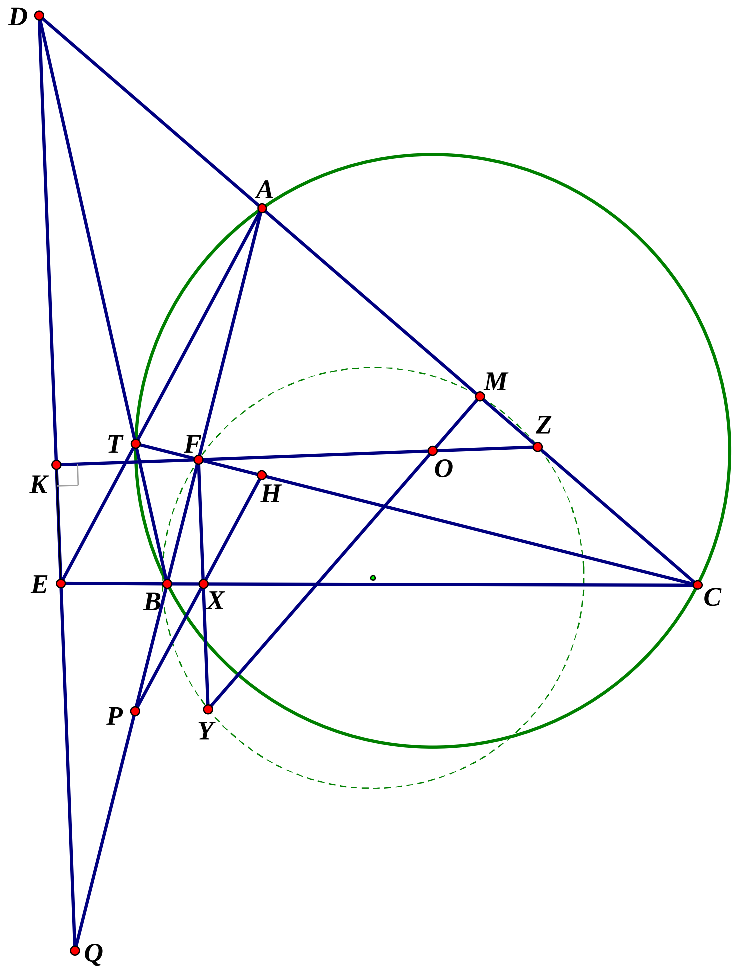
Từ đó có $\frac{PM}{AB} = \frac{SN}{CD} = \frac{PF}{CD}$.

Suy ra $\frac{2PM}{EF} = \frac{AB}{CD}$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $\frac{2PN}{EF} = \frac{CD}{AB}$.

Kết hợp với M,N,P thẳng hàng và P nằm ngoài đoạn MN, ta có đpcm.

<u>Bài toán 10</u>: *Cho tam giác nhọn không cân ABC với AC $\geq$ BC, nội tiếp trong đường tròn (O). H là trực tâm tam giác. F là chân đường cao kẻ từ C. Gọi P là điểm khác A sao cho PF = AF, M là trung điểm AC. Gọi X là giao điểm của PH và BC, Y là giao điểm của OM và FX, Z là giao điểm của OF và AC. CMR: F, M, Z, Y cùng thuộc một đường tròn*



Lời giải:
Rõ ràng ta cần chứng minh bốn điểm F, Y, Z, M cùng thuộc đường tròn đường kính YZ.
Bài toán trở thành chứng minh FX $\perp$ FZ.
Gọi T là giao điểm của CF và (O). Ta chứng minh được F là trung điểm của TH, suy ra ATBH là hình bình hành. Do đó PH || AT, suy ra $\frac{BP}{AB} = \frac{BX}{BE}$
Dựng tứ giác toàn phần ACBTDE. Gọi K, Q lần lượt là giao điểm của OF, AB với DE.
Theo định lý Brokard, ta có OK $\perp$ DE. Ta cần chứng minh FX || EQ.
Thật vậy, theo một bài toán quen thuộc, ta có (ABFQ) = –1
Từ đó có: $\frac{FA}{FB} = \frac{QA}{QB} \Rightarrow \frac{FA}{FB} = 1 + \frac{AB}{QB} \Rightarrow \frac{FP - FB}{FB} = \frac{AB}{QB} \Rightarrow \frac{BP}{FB} = \frac{AB}{QB} \Rightarrow \frac{FB}{QB} = \frac{BP}{AB} = \frac{BX}{BE}$
Suy ra FX || EQ. Bài toán được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đoàn Quỳnh (chủ biên) – Văn Như Cương – Trần Nam Dũng – Nguyễn Minh Hà – Đỗ Thanh Sơn – Lê Bá Khánh Trình, *Tài liệu giáo khoa chuyên toán Hình học 10*, 2009

[2] Đỗ Thanh Sơn, *Một số chuyên đề Hình học phẳng bồi dưỡng học sinh giỏi trung học phổ thông*, 2009

[3] Trang web *mathlinks.ro*