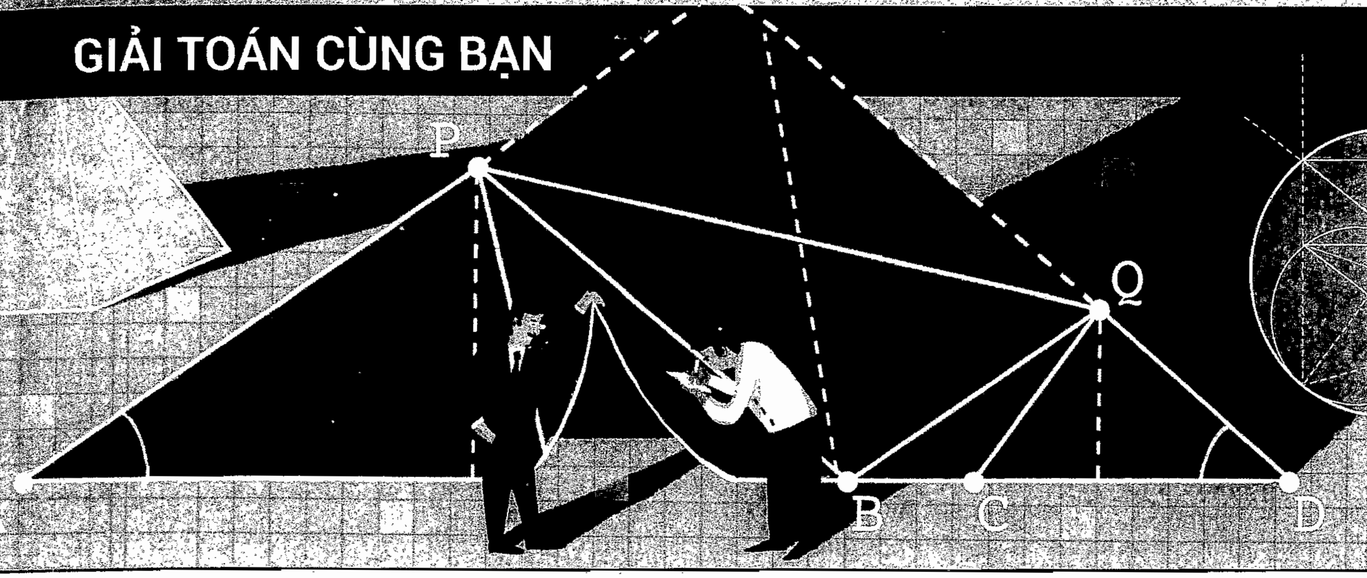


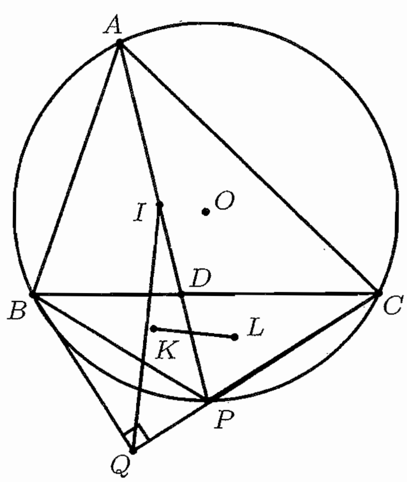
Khai thác một ***bài toán hình học***

Trần Quang Hùng

Bài viết này nhằm trao đổi với bạn đọc những cách tiếp cận, nhìn nhận, cách phân tích các tình huống hình học mà tác giả bài viết đã vận dụng để khai thác một bài toán thi Olympic Toán học Ba Lan năm 2016. Để hiểu nội dung bài viết, bạn đọc cần có kiến thức hình học trong phạm vi Chương trình hình học cấp Trung học cơ sở hiện hành.

Bài toán 1 *(Olympic Toán học Ba Lan, 2016). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. AI cắt BC tại D và cắt (O) tại P khác A. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BPD, CPD. Q là điểm đối xứng với I qua KL. Chứng minh rằng $QB \perp QC$.*

Phân tích *(xem Hình 1)*. Từ giả thiết I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và giao điểm của AI với (O) là P, thấy ngay $PB = PI = PC$ (một kết quả quen thuộc). Như thế, tam giác PBI cân tại P và do đó PK là trung trực của BI; suy ra $KB = KI$. Từ đây, do I và Q đối xứng với nhau qua KL, ta có $KQ = KI = KB$. Như vậy, K là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác IBQ. Suy ra, $\angle BQI = \frac{1}{2}\angle BKI$. Từ đây, để ý rằng tia đối của tia KP là phân giác của góc $\angle BKI$ và K là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BPD, suy ra có thể tính góc $\angle BQI$ qua góc $\angle BDP$. Dễ thấy, có thể áp dụng các suy luận vừa nêu cho bộ 3 điểm P, I, C và sẽ đi đến kết luận "có thể tính góc $\angle CQI$ qua góc $\angle CDP$". Vậy là ý tưởng về cộng góc để chứng minh $QB \perp QC$ hình thành.

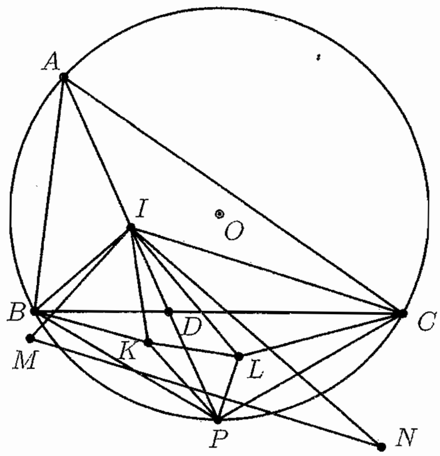


Hình 1

Việc trình bày cụ thể lời giải của Bài toán 1, theo hướng phân tích nêu trên, xin dành cho bạn đọc.

Bài toán 1 là một bài toán đẹp; có nhiều điểm có thể khai thác từ bài toán này. Ta hãy bắt đầu bằng việc sử dụng phép đối xứng trục có trong Bài toán 1 để biến đổi kết luận của bài toán đó. Lấy đối xứng các điểm B, C, Q qua trục KL, ta thu được bài toán "hệ quả" của Bài toán 1:

Bài toán 2 *(xem Hình 2). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. AI cắt BC tại D và cắt (O) tại P khác A. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BPD, CPD. Gọi M, N tương ứng là các điểm đối xứng với B, C qua KL. Chứng minh rằng $IM \perp IN$.*



Hình 2

Việc tạo ra Bài toán 2 từ Bài toán 1 cho thấy, một trong các giải pháp để xử lí các tình huống hình học có cấu trúc phức tạp là sử dụng các phép biến hình để chuyển đổi tình huống đó về tình huống có cấu trúc đơn giản hơn.

Trở lại với việc khai thác Bài toán 1. Như đã phân tích ở trên, giả thiết "K là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BPD" hàm chứa hai thông tin: Một là, K nằm trên trung trực của BI và hai là, có thể dễ dàng tính được góc $\angle BKI$ qua các góc ở đỉnh của tam giác BPD. Điều này dẫn ta tới suy nghĩ thay thế điểm K bởi một điểm nằm trên trung trực của BI (hoặc rộng hơn, nằm trên một đường thẳng vuông góc BI), đảm bảo có thể dễ dàng tính được góc $\angle BKI$ qua các góc ở đỉnh của tam giác BPD. Ta có thể nghĩ tới tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và cả tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BPI thay vì tam giác BPD. Theo hướng này, tác giả bài viết đã thu được hai bài toán sau:

Bài toán 3. *Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. AI cắt (O) tại P khác A. Gọi K, L lần lượt là trực tâm của các tam giác BPI, CPI. Gọi Q là điểm đối xứng với I qua KL. Chứng minh rằng $\angle BQC = \angle BIC$.*

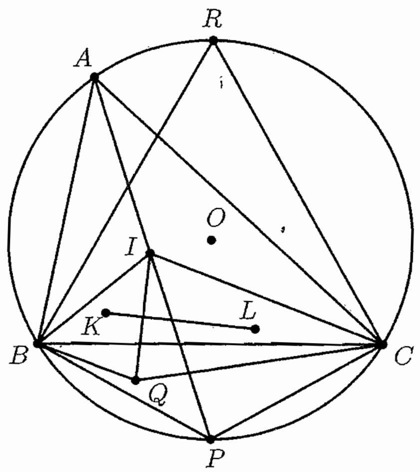
Bài toán 4. *Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. AI cắt (O) tại P khác A. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BPI, CPI. Gọi Q là điểm đối xứng với I qua KL. Chứng minh rằng $\angle BQC = 135° - \frac{1}{4}\angle BAC$.*

Hai bài toán trên đều có thể giải theo phương pháp cộng góc, tương tự cách giải Bài toán 1. Quan sát kết luận của hai bài toán trên, có thể thấy, ta có thể phát biểu các bài toán đó dưới dạng bài toán có các yếu tố di động – một dạng phát biểu thú vị và thách thức người giải hơn. Chẳng hạn, bằng cách giả thiết các điểm B, C cố định và điểm A thay đổi trên nửa mặt phẳng bờ BC sao cho góc $\angle BAC$ không đổi, ta sẽ có các bài toán với yêu cầu chứng minh điểm Q di động trên một đường tròn cố định.

Nhìn nhận Bài toán 4 như bài toán khai thác được từ Bài toán 1 nhờ việc thay thế điểm D

bởi điểm I, ta có thể nghĩ tới việc thay thế D bởi một điểm nào đó khác, nằm trên đường thẳng AI. Điểm "đơn giản" nhất có thể nghĩ tới là điểm A. Ta thu được bài toán sau:

Bài toán 5 *(xem Hình 3). Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. AI cắt (O) tại P khác A. Gọi K,L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BPA, CPA. Gọi Q là điểm đối xứng với I qua KL. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BQC là trung điểm cung BC chứa A của (O).*



Hình 3

Gọi R là trung điểm cung BC chứa A của (O). Ta cần chứng minh R là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BQC. Có thể chứng minh điều này bằng cách chứng minh $\angle BQC = 180° - \frac{1}{2}\angle BAC$. Đẳng thức vừa nêu có thể được chứng minh bằng cách tương tự như cách đã làm với Bài toán 1.

Quyết định "táo bạo" thay thế D bởi một điểm tùy ý khác P thuộc đoạn thẳng AP, đưa ta tới bài toán tổng quát sau:

Bài toán 6. *Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. AI cắt (O) tại P khác A. Trên đoạn thẳng AP, lấy điểm J tùy ý, khác P. Gọi K,L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BPJ, CPJ. Gọi Q là điểm đối xứng với I qua KL. Chứng minh rằng $\angle BQC = 180° - \frac{1}{2}\angle BJC$.*

Trong bài toán trên, ta hoàn toàn có thể phát biểu kết luận như ở bài toán trước: "Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BQC là trung điểm cung BC chứa J của đường tròn ngoại tiếp tam giác JBC".

Rõ ràng, các bài toán 1, 4 và 5 là các trường hợp riêng của Bài toán 6, khi J trùng với D, I hoặc A. Điều này cho thấy, dường như ta đã đi "đến cùng" trên con đường đang đi. Nói cách khác, dường như cần một "bước ngoặt" (tức một cách nhìn nhận khác) trên con đường khai thác Bài toán 1. Để ý rằng, vai trò của các đỉnh A,B,C là như nhau trong cách đặt vấn đề ở Bài toán 1. Nghĩa là, ta sẽ có các kết quả hoàn toàn tương tự, khi xét giao điểm của BI hoặc CI với (O). Vì vậy, một câu hỏi tự nhiên có thể đặt ra là: Sự liên kết giữa các kết quả thu được khi xét giao điểm của AI, BI, CI với (O) có thể sinh ra những kết quả mới nào? Bài toán 7 dưới đây là một trong các bài toán mà tác giả bài viết đã thu được theo hướng suy nghĩ vừa nêu. Bài toán này đã được tác giả bài viết sử dụng trong một bài giảng cho Đội tuyển học sinh Việt Nam tham dự Olympic Toán học quốc tế (IMO) năm 2016.

Bài toán 7. *Cho đường tròn (O). Các điểm A,B,C di động trên (O) sao cho tam giác ABC là một tam giác nhọn, không cân. Các phân giác BE, CF (E thuộc AC và F thuộc AB) của tam giác ABC cắt (O), tương ứng, tại các điểm thứ hai M,N. Gọi K và L, tương ứng, là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác CME và BNF. Gọi P và Q, tương ứng, là các điểm đối xứng với B và C qua KL. Gọi I là giao điểm của BE và CF. Chứng minh rằng nếu các đường tròn (IPN) và (IQM) cắt* *nhau tại điểm thứ hai R, khác I, nằm trên cung MN chứa A của (O) thì số trị của biểu thức $\angle PRQ - \frac{1}{4}\angle BAC$ không phụ thuộc vào vị trí của các điểm A, B, C.*

Lời giải (*xem Hình 4*).

Gọi J là điểm đối xứng với I qua KL.

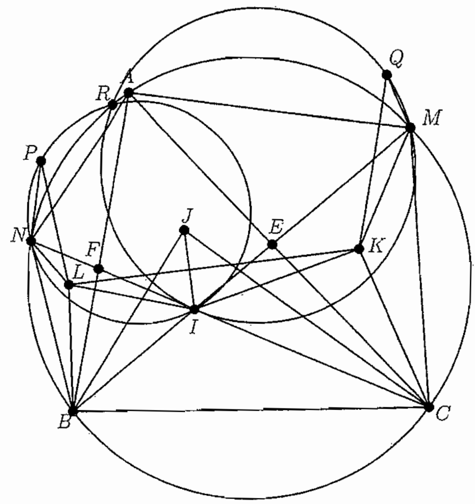
Vì tam giác CMI cân tại M và MK là phân giác của góc $\angle CMI$ nên MK là trung trực của CI. Kéo theo $KC = KI = KQ = KJ$. Tương tự, ta cũng có $LB = LI = LP = LJ$. Suy ra

$$\begin{aligned}
\angle BJC &= \angle BJI + \angle CJI \\
&= \frac{1}{2}\angle BLI + \frac{1}{2}\angle CKI \\
&= \frac{1}{2}(360^\circ - 2\angle BLN) + \frac{1}{2}(360^\circ - 2\angle CKM) \\
&= 360^\circ - \angle BLN - \angle CKM \\
&= 360^\circ - (90^\circ + \frac{1}{2}\angle BFN + 90^\circ + \frac{1}{2}\angle CEM) \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle BFN + \angle CEM) \\
&= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A - \frac{1}{2}\angle C + 180^\circ \\
&\qquad - \angle A - \frac{1}{2}\angle B) \\
&= \angle A + \frac{1}{4}(\angle B + \angle C) \\
&= 45^\circ + \frac{3}{4}\angle A.
\end{aligned}$$

Do giao điểm thứ hai R, khác I, của (IPN) và (IQM) nằm trên cung MN chứa A của (O) nên

$$\begin{aligned}
\angle PRQ &= \angle PRN + \angle MRN + \angle MRQ \\
&= \angle PIN + \angle MAN + \angle MIQ \\
&= \angle PIN + \angle MIQ + \angle BIC \\
&= \angle MIN - \angle PIQ + \angle BIC \\
&= 2\angle BIC - \angle PIQ \\
&= 180^\circ + \angle A - \angle BJC \\
&= \frac{1}{4}\angle BAC + 135^\circ.
\end{aligned}$$

Vì vậy, $\angle PRQ - \frac{1}{4}\angle BAC = 135^\circ$. Suy ra ta có điều cần chứng minh.



Hình 4

Khai thác Bài toán 7 theo cách đã làm đối với Bài toán 1 để có Bài toán 6, tác giả bài viết đã thu được bài toán sau:

Bài toán 8. *Cho tam giác nhọn, không cân ABC nội tiếp đường tròn (O); gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó. Các đường thẳng BI, CI cắt (O), tương ứng, tại các điểm thứ hai M, N. Lần lượt trên các đoạn thẳng BM và CN, lấy các điểm S và T tùy ý, sao cho S khác M và T khác N. Gọi K và L, tương ứng, là tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác BNT và CMS. Các phân giác của các góc ∠IBT và ∠ICS cắt nhau tại R. Chứng minh rằng điểm đối xứng của I qua KL nằm trên đường tròn (BRC).*

Việc chứng minh Bài toán 8 xin dành cho bạn đọc.

Các Bài toán 7 và 8 rất có thể là những mảnh đất mầu mỡ để tìm ra thêm những bài toán mới. Mong rằng bạn đọc sẽ tìm hiểu và cùng tác giả bài viết khai phá những mảnh đất mầu mỡ này.

Cuối cùng, tác giả trân trọng cảm ơn thầy Nguyễn Khắc Minh đã đọc bản thảo và cho rất nhiều góp ý quan trọng, giúp tác giả hoàn thành bài viết này.