Các bài toán hình học hàng tuần

Trần Quang Hùng

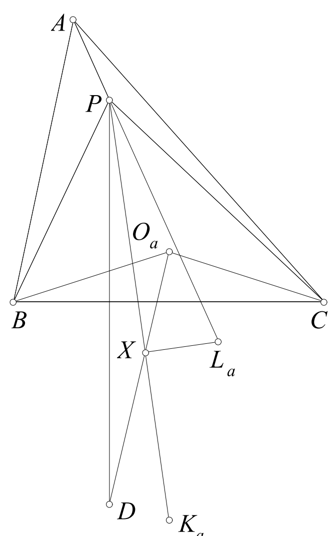
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên những lời giải hay cho ít nhất một bài toán được đề nghị ở trong các tuần trước và đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một số bài toán cho tuần sau. Các bài toán hình học được đề nghị có thể do tôi sáng tác, từ các bạn đọc sáng tác gửi tới hoặc được chọn lọc từ các cuộc thi Olympic trên toàn thế giới, tất cả đề bài và lời giải sẽ đều được ghi rõ nguồn gốc. Lời giải cho bài toán đề nghị, các phát triển cũng như mọi thảo luận và trao đổi xin gửi về địa chỉ email analgeomatica@gmail.com.

Các bài toán tuần trước

Bài toán: Trần Quang Hùng

Cho tam giác ABC và P bất kỳ. D đối xứng P qua BC. O_a là tâm ngoại tiếp tam giác PBC. K_a là tâm ngoại tiếp tam giác O_aBC. DO_a cắt PK_a tại X. L_a thuộc PA sao cho $XL_a \perp XK_a$. Tương tự có L_b, L_c. Chứng minh rằng L_a, L_b và L_c thẳng hàng.

Lời giải sau của tác giả bài toán và được biên tập bởi tác giả.



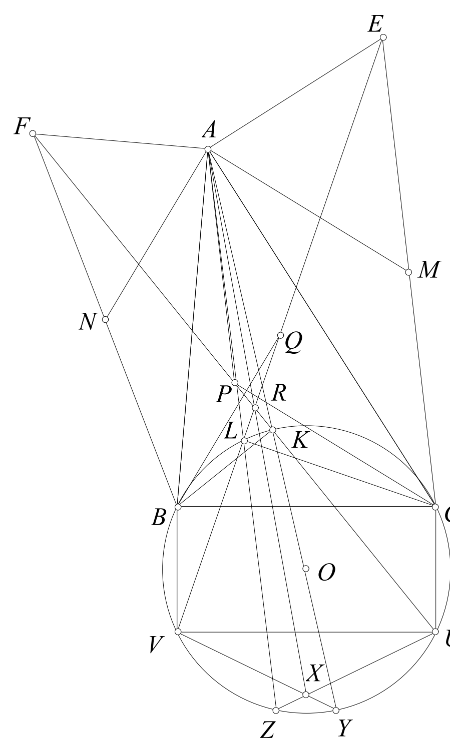
Lời giải. Ta xét đường tròn (L'_a) đi qua P, X có tâm thuộc PA dễ thấy L'_a là trung điểm PL_a. Khi đó tương tự có các đường tròn (L'_b) và (L'_c). Ta sẽ chứng minh các đường tròn (L'_a), (L'_b) và (L'_c) đồng trục để suy ra L'_a, L'_b, L'_c thẳng hàng, vị tự tâm P tỷ số 2 suy ra L_a, L_b, L_c thẳng hàng, thật vậy. Nghịch đảo cực P phương tích bất kỳ thì X biến thành tâm đường tròn Euler của tam giác PBC. Khi đó ta thu đường bài toán chứng minh các đường thẳng đi qua tâm Euler của tam giác PBC, PCA và PAB lần lượt vuông góc với PA, PB và PC đồng quy là bài toán quen thuộc. □

Nhận xét. Đây là bài toán hay được tạo ra nhờ phép nghịch đảo, bản thân bài toán gốc cũng là bài toán mà tác giả tạo ra trong quá trình đi dạy và được dùng làm đề kiểm tra đội tuyển toán ở trường THPT chuyên KHTN năm 2015.

Bài toán: Nguyễn Tiến Dũng, Trần Quang Hùng

Cho tam giác ABC có B, C cố định và A thay đổi. Dựng ra ngoài các tam giác vuông tại A là AEC và AFB đồng dạng và có góc không đổi. M, N là trung điểm CE, BF. P, Q đối xứng với M, N qua CA, AB. FP cắt EQ tại R. Chứng minh rằng đường thẳng AR đi qua điểm cố định khi A thay đổi.

Lời giải sau của **Telv Cohl** trên diễn đàn AoPS được biên tập bởi **Trần Quang Hùng.**



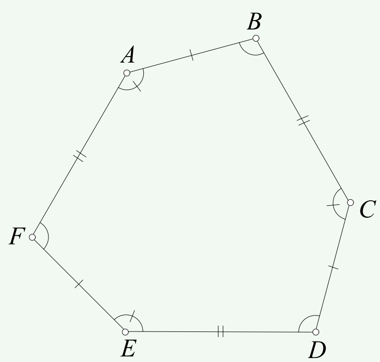
Lời giải. Dựng hình chữ nhận $BCUV$ ra ngoài tam giác ABC sao cho $\angle UBC = \angle ACE$ không đổi khi đó $BCUV$ cố định. Theo bài toán quen thuộc về các tam giác vuông đồng dạng dựng ra ngoài tam giác thì FP đi qua U và EQ đi qua V. Dễ thấy hình chiếu K, L của B, C lần lượt trên FU, EV nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp hình chữ nhật. AK, AL cắt (O) tại U, V khác K, L theo định lý Pascal dễ thấy AR đi qua X. Ta dễ thấy $\angle YVU = \angle YKU = \angle AKF = \angle ABF$ không đổi. Tương tự $\angle XUV$ không đổi nên X cố định. □

Nhận xét. Đây là bài toán đi qua điểm cố định hay với điểm cố định không dễ đoán nhận và có sử dụng một kết quả về các tam giác cân đồng dạng dựng ra ngoài một tam giác bất kỳ.

Các bài toán tuần này

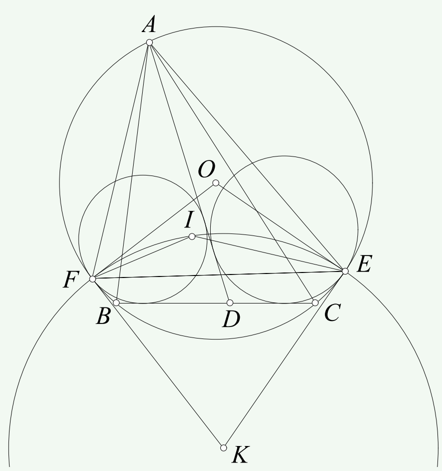
Bài toán: Trần Quang Hùng

Cho $ABCDEF$ là lục giác lồi thỏa mãn $AB = CD = EF$ và $BC = DE = FA$ đồng thời $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \angle E + \angle F$. Chứng minh rằng $\angle B = \angle D = \angle F$.



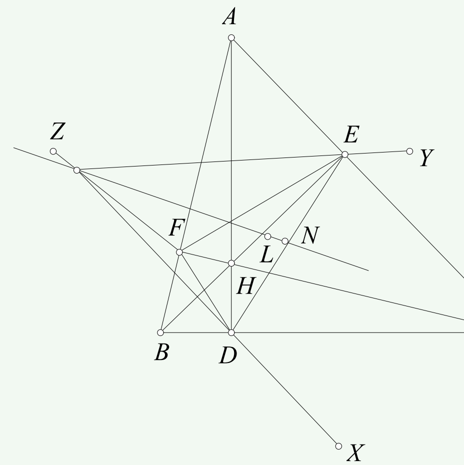
Bài toán: Ngô Quang Dương

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm nằm trên cạnh BC. Một đường tròn tiếp xúc các đoạn thẳng DA, DB và tiếp xúc trong (O) tại F. Một đường tròn tiếp xúc các đoạn thẳng DA, DC và tiếp xúc trong (O) tại E. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác IEF luôn trực giao với (O) và đi qua một điểm cố định khác I.



Bài toán: Nguyễn Minh Hà, trường xuân 2015

Cho tam giác ABC, trực tâm H, tâm đường tròn Euler N, điểm Lemoine L. AH, BH, CH theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại D, E, F. X, Y, Z theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác HBC, HCA, HAB. Chứng minh rằng DX, EY, FZ đồng quy tại một điểm thuộc NL.



Bài toán: I.Frolov, Sharygin Olympiad 2017 Final Round

Cho tam giác ABC có đường cao BE, CF và đường tròn bàng tiếp góc A là (J). Hai tiếp tuyến chung trong của các đường tròn (AEF) và (J) cắt BC tại M, N. Chứng minh rằng $BM = CN$.