CÁC ĐỊNH LÝ HÌNH HỌC PHẲNG

Đào Sơn Trà

Ngày 7 tháng 10 năm 2018

Mục lục

Chương 1. Các định lý hình học **5**

1.1 Các định lý về các điểm, đường thẳng 5

1.2 Một số điểm và đường đặc biệt được xác định duy nhất với tam giác và tứ giác 62

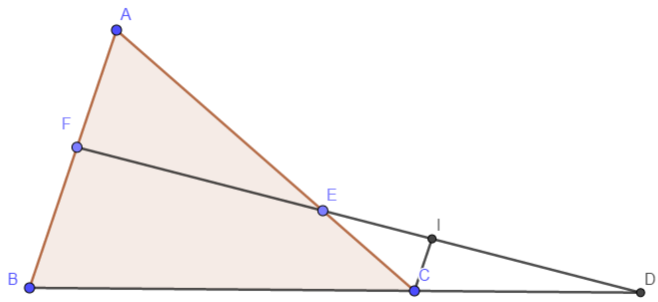
Chương 1

Các định lý hình học

1.1 Các định lý về các điểm, đường thẳng

Định lý 1.1.1 (Định lý Menelaus-Dạng hình học) Cho tam giác ABC. D, E, F lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA và AB. Khi đó các điểm D, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$

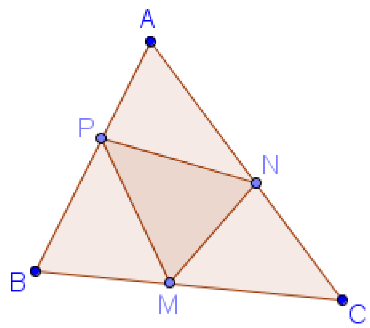
Chứng minh.



Chiều thuận: Giả sử D, E, F thẳng hàng. Lấy điểm I thuộc DE sao cho $CI \parallel AB$. Áp dụng định lý *Thales* ta có:
$\frac{EC}{EA} = \frac{IC}{FA}$; $\frac{DB}{DC} = \frac{FB}{IC} \Rightarrow \frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$
Chiều đảo: Giả sử các điểm D, E, F thỏa mãn $\frac{FA}{FB} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$. Lấy $F' \in AB$ sao cho D, E, F' thẳng hàng. Theo chiều thuận ta có $\frac{F'A}{F'B} \cdot \frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} = 1$, suy ra $\frac{F'A}{F'B} = \frac{FA}{FB}$. Vậy $F \equiv F'$ hay D, E, F thẳng hàng (đpcm)

Định lý 1.1.2 (Mở rộng định lý Menelaus theo diện tích) Cho tam giác ABC, các điểm M, N, P lần lượt nằm trên các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó $\frac{S_{[MNP]}}{S_{[ABC]}} = \frac{\overline{BM}.\overline{CN}.\overline{AP} - \overline{CM}.\overline{AN}.\overline{BP}}{\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}}$.

Chứng minh.



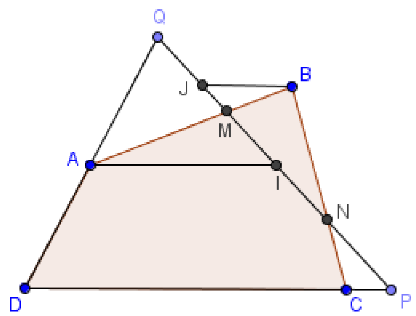
Ta có $S_{[ABC]} = S_{[MAB]} + S_{[MCA]} = S_{[PMA]} + S_{[PBM]} + S_{[NMC]} + S_{[NAM]} = S_{[MNP]} + S_{[BMP]} + S_{[CNM]} + S_{[APN]}$

Mặt khác $\frac{S_{[BMP]}}{S_{[ABC]}} = \frac{\overline{BM}.\overline{BP}}{\overline{BC}.\overline{BA}}; \frac{S_{[CNM]}}{S_{[ABC]}} = \frac{\overline{CN}.\overline{CM}}{\overline{CA}.\overline{CB}}; \frac{S_{[APN]}}{S_{[ABC]}} = \frac{\overline{AP}.\overline{AN}}{\overline{AB}.\overline{AC}}$

Suy ra $\frac{S_{[MNP]}}{S_{[ABC]}} = 1 - \frac{S_{[BMP]}}{S_{[ABC]}} - \frac{S_{[CNM]}}{S_{[ABC]}} - \frac{S_{[APN]}}{S_{[ABC]}} = \frac{\overline{BM}.\overline{CN}.\overline{AP} - \overline{CM}.\overline{AN}.\overline{BP}}{\overline{AB}.\overline{BC}.\overline{CA}}$ (đpcm)

Định lý 1.1.3 (Định lý Menelaus cho tứ giác) Cho tứ giác $ABCD$ và đường thẳng d cắt AB, BC, CD, DA lần lượt ở M, N, P, Q. Khi đó $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}.\frac{\overline{NB}}{\overline{NC}}.\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}.\frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = 1$.

Chứng minh.



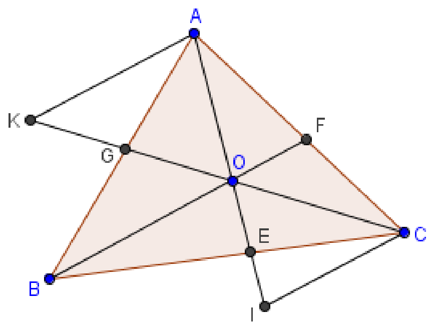
Trên d lấy I, J sao cho $AI//BJ//CD$.

Theo định lý Thales, ta có $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{IA}}{\overline{JB}}; \frac{\overline{NB}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{JB}}{\overline{PC}}; \frac{\overline{QD}}{\overline{QA}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{IA}}$. Từ đó suy ra đpcm.

Chú ý: dạng đảo của định lý trên không đúng và định lý trên có thể mở rộng ra cho đa giác bất kì.

Định lý 1.1.4 (Định lý Céva) Cho tam giác ABC, các điểm E, F, G tương ứng nằm trên BC, CA, AB. Ba đường thẳng AE, BF, CG đồng quy tại một điểm O khi và chỉ khi $\dfrac{\overline{GA}}{\overline{GB}}.\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}}.\dfrac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = -1$.

Chứng minh.



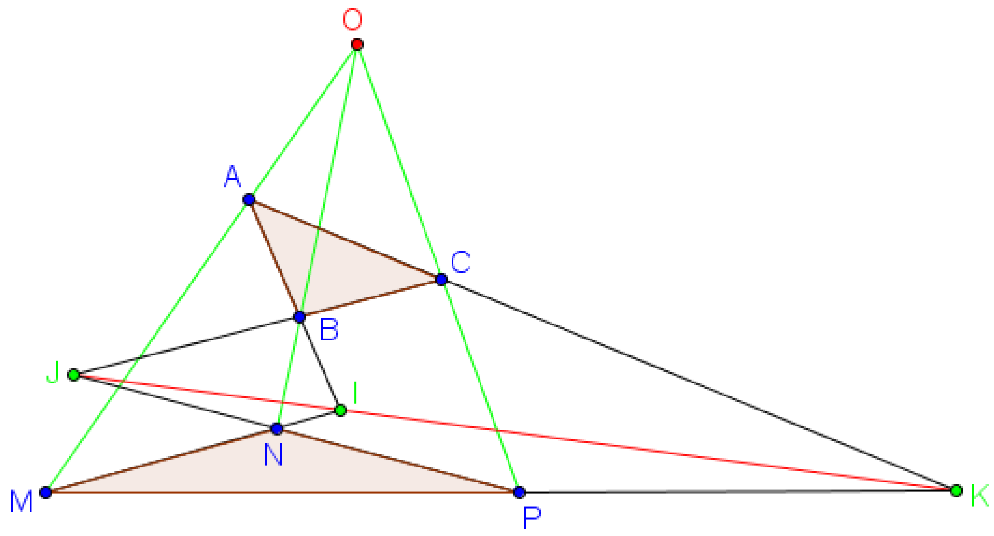
Thuận:
Giả sử ba đường thẳng AE, BF, CG đồng quy tại một điểm O. Từ A và C, kẻ các đường thẳng song song với BF, lần lượt cắt CG và AE tại K, I tương ứng.
Áp dụng định lý Thales, ta có: $\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{OK}}; \dfrac{\overline{CI}}{\overline{AK}} = \dfrac{\overline{CO}}{\overline{OK}} \Rightarrow \dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}} = \dfrac{\overline{CI}}{\overline{AK}}$.
Các cặp tam giác đồng dạng IEC và OEB, AKG và BOG: $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{CE}} = \dfrac{\overline{BO}}{\overline{CI}}; \dfrac{\overline{AG}}{\overline{BG}} = \dfrac{\overline{AK}}{\overline{BO}}$
Do đó: $\dfrac{\overline{GA}}{\overline{GB}}.\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}}.\dfrac{\overline{FC}}{\overline{FA}} = \dfrac{\overline{AK}}{\overline{BO}}.\dfrac{\overline{BO}}{\overline{CI}}.\dfrac{-\overline{CI}}{\overline{AK}} = -1$ (đpcm)
Đảo: chứng minh tương tự định lý Menelaus.

Định lý 1.1.5 (Định lý Céva dạng sin) Cho tam giác ABC, các điểm E, F, G tương ứng nằm trên BC, CA, AB. Ba đường thẳng AE, BF, CG đồng quy tại một điểm O khi và chỉ khi $\dfrac{\sin\widehat{ABF}}{\sin\widehat{CBF}}.\dfrac{\sin\widehat{BCG}}{\sin\widehat{ACG}}.\dfrac{\sin\widehat{CAE}}{\sin\widehat{BAE}}$

Chứng minh.
Ta có: $\dfrac{BE}{CE} = \dfrac{S_{ABE}}{S_{ACE}} = \dfrac{AB.\sin\widehat{BAE}}{AC.\sin\widehat{CAE}}; \dfrac{CF}{AF} = \dfrac{BC.\sin\widehat{CBF}}{BA.\sin\widehat{ABF}}; \dfrac{AG}{BG} = \dfrac{CA.\sin\widehat{ACG}}{CB.\sin\widehat{BCG}}$.
Nhân theo vế 3 đẳng thức trên, ta có đpcm.

Định lý 1.1.6 (Định lý Desargues) Cho 2 tam giác ABC và MNP có AM, BN, CP đồng quy tại O. Gọi I, J, K theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AB, MN), (BC, NP), (CA, PM)$. Khi đó 3 điểm I, J, K thẳng hàng.

Chứng minh.



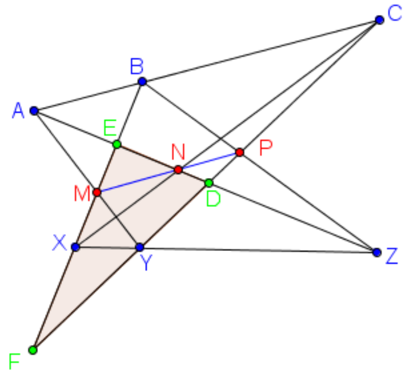
Áp dụng định lý Menelaus cho các tam giác OAB, OBC, OCA, ta có:
$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}}.\frac{\overline{NB}}{\overline{NO}}.\frac{\overline{MO}}{\overline{MA}} = 1; \frac{\overline{JB}}{\overline{JC}}.\frac{\overline{PC}}{\overline{PO}}.\frac{\overline{NO}}{\overline{NB}} = 1; \frac{\overline{KC}}{\overline{KA}}.\frac{\overline{MA}}{\overline{MO}}.\frac{\overline{PO}}{\overline{PC}} = 1$
Nhân theo vế 3 đẳng thức trên, ta có $\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}}.\frac{\overline{JB}}{\overline{JC}}.\frac{\overline{KC}}{\overline{KC}} = 1 \Rightarrow I, J, K$ thẳng hàng (đpcm)
Định lý đảo của định lý Desargues được phát biểu như sau: Cho 2 tam giác ABC và MNP có $AB \cap MN = I, BC \cap NP = J, CA \cap PM = K$ và I, J, K thẳng hàng. Khi đó AM, BN, CP đồng quy tại O.

Chứng minh.

Gọi O là giao điểm của AM và CP. Áp dụng định lý Menelaus cho các tam giác CPK, PKJ, JKC, ta có:
$\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}}.\frac{\overline{MP}}{\overline{MK}}.\frac{\overline{AK}}{\overline{AC}} = 1; \frac{\overline{NP}}{\overline{NJ}}.\frac{\overline{IJ}}{\overline{IK}}.\frac{\overline{MK}}{\overline{MP}} = 1; \frac{\overline{BJ}}{\overline{BC}}.\frac{\overline{AC}}{\overline{AK}}.\frac{\overline{IK}}{\overline{IJ}} = 1$
Nhân theo vế 3 đẳng thức trên, ta có $\frac{\overline{OC}}{\overline{OP}}.\frac{\overline{NP}}{\overline{NJ}}.\frac{\overline{BJ}}{\overline{BC}} = 1 \Rightarrow O, N, B$ thẳng hàng
$\Rightarrow AM, BN, CP$ đồng quy tại O (đpcm)

Định lý 1.1.7 (Định lý Pappus) Cho 2 đường thẳng a, b. Trên a lấy các điểm A, B, C; trên b lấy các điểm X, Y, Z. Gọi M là giao điểm của AX và BY, N là giao điểm của AZ và CX, P là giao điểm của BZ và CY. Khi đó M, N, P thẳng hàng. Định lý Pappus là một trường hợp riêng của định lý Pascal khi conic suy biến thành cặp đường thẳng

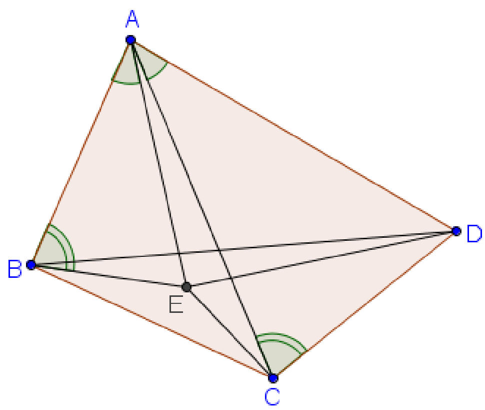
Chứng minh.



Gọi D, E, F là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AZ, CY), (AZ, BX), (BX, CY)$.
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác DEF với cát tuyến CNX, ta có $\frac{\overline{ND}}{\overline{NE}} \cdot \frac{\overline{XE}}{\overline{XF}} \cdot \frac{\overline{CF}}{\overline{CD}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{ND}}{\overline{NE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{XF}}{\overline{XE}}$. Tương tự, ta có $\frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{ZE}}{\overline{ZD}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}}, \frac{\overline{ME}}{\overline{MF}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{YD}}{\overline{YF}} \Rightarrow$
$\frac{\overline{ND}}{\overline{NE}} \cdot \frac{\overline{ME}}{\overline{MF}} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{XF}}{\overline{XE}} \cdot \frac{\overline{ZE}}{\overline{ZD}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{YD}}{\overline{YF}}$
Mặt khác, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác DEF với các cát tuyến ABC, XYZ, ta có $\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{CF}} \cdot \frac{\overline{BF}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{XF}}{\overline{XE}} \cdot \frac{\overline{ZE}}{\overline{ZD}} \cdot \frac{\overline{YD}}{\overline{YF}} = 1$. Suy ra $\frac{\overline{ND}}{\overline{NE}} \cdot \frac{\overline{ME}}{\overline{MF}} \cdot \frac{\overline{PF}}{\overline{PD}} = 1$. Do đó M, N, P thẳng hàng (đpcm)

Định lý 1.1.8 (Bất đẳng thức Ptolemy) Cho tứ giác lồi $ABCD$ bất kỳ, ta có bất đẳng thức sau: $AB.CD + BC.AD \geq AC.BD$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh.

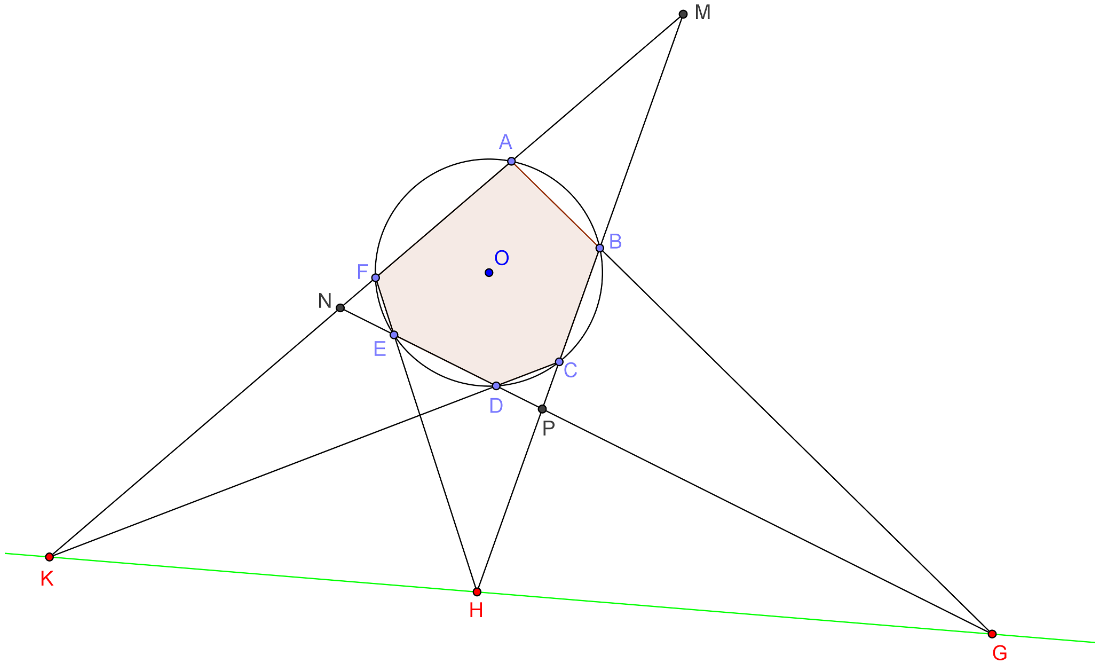


Trong tứ giác $ABCD$, lấy điểm E sao cho $\widehat{EAB} = \widehat{DAC}; \widehat{EBA} = \widehat{ACD}$
$\Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{EAD}$. Khi đó $\Delta ABE \sim \Delta ACD$ nên $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AB.CD = AC.BE$ và $\Delta AED \sim \Delta ABC$. Suy ra $\frac{AD}{AC} = \frac{AD}{BC} \Rightarrow AD.BC = AC.ED$
Do đó $AB.CD + AD.BC = AC.(BE + ED) \geq AC.BD$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow E \in BD \Leftrightarrow \widehat{ABD} = \widehat{ABE} = \widehat{ACD} \Leftrightarrow ABCD$ là tứ giác nội tiếp.
Từ đó suy ra định lý Ptolemy: Tứ giác lồi $ABCD$ là tứ giác nội tiếp $\Leftrightarrow AB.CD + BC.AD = AC.BD$

Định lý 1.1.9 (Định lý Pascal) Cho 6 điểm bất kì A, B, C, D, E, F cùng nằm trên một conic bất kì. Gọi G, H, K theo thứ tự là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AB, DE), (BC, EF), (CD, FA)$. Khi đó 3 điểm G, H, K thẳng hàng.

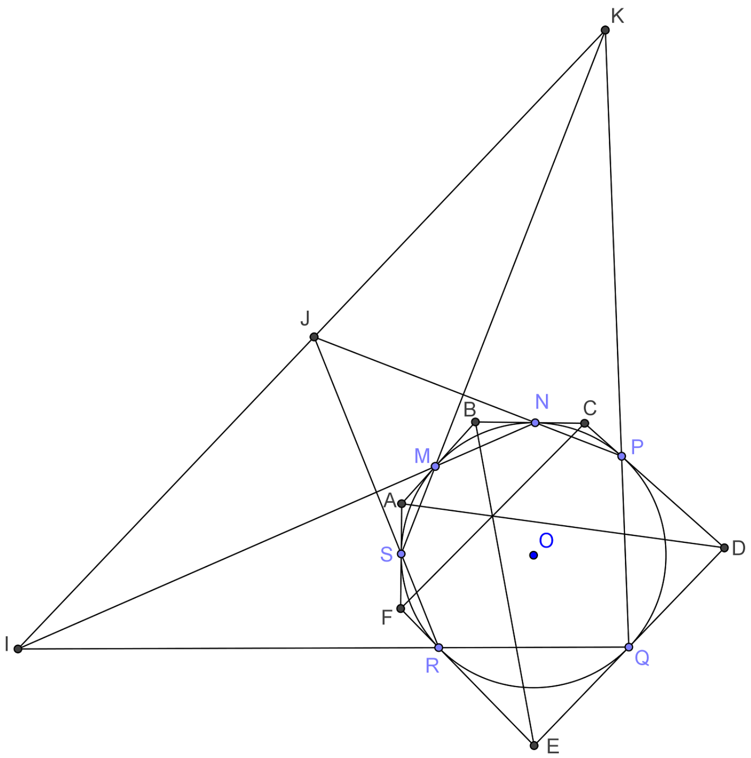
Chứng minh.
• Trước hết, ta xét với trường hợp conic là đường tròn
Cách 1: Sử dụng góc định hướng của 2 đường thẳng. Gọi I là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn (DBG) và (DFK) . Ta có:
$(IB, IF) \equiv (IB, ID) + (ID, IF) \equiv (GB, GD) + (KD, KF) \pmod{\pi}$
Mặt khác:
$(KD, KF) \equiv \frac{1}{2}((OC, OA) - (OF, OD)) \equiv ((OC, OB) + (OB, OA) - (OF, OE) - (OE, OD)) \pmod{\pi}$
$(GB, GD) \equiv \frac{1}{2}((OA, OE) - (OD, OB)) \equiv ((OA, OF) + (OF, OE) - (OD, OC) - (OC, OB)) \pmod{\pi}$
$(HB, HF) \equiv \frac{1}{2}((OB, OF) - (OE, OC)) \pmod{\pi}$
$\Rightarrow (HB, HF) \equiv (KD, KF) + (GB, GD) \equiv (IB, IF) \pmod{\pi} \Rightarrow B, H, I, F$ đồng viên.
Lại có $(IB, IG) \equiv (DB, DG) \equiv (FB, FE) \pmod{\pi}$
4 điểm B, H, I, F đồng viên $\Rightarrow (FB, FE) \equiv (IB, IH) \pmod{\pi}$
Do đó $(IB, IG) \equiv (IB, IH) \pmod{\pi}$ hay 3 điểm I, G, H thẳng hàng. Tương tự, ta có I, H, K thẳng hàng, suy ra đpcm
Cách 2: Áp dụng định lý Menelaus



1 Gọi các giao điểm như hình vẽ. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác MNP với cát tuyến KCD, ta có:
$\frac{\overline{KM}}{\overline{KN}}.\frac{\overline{DN}}{\overline{DP}}.\frac{\overline{CP}}{\overline{CM}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{KM}}{\overline{KN}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CP}}.\frac{\overline{DP}}{\overline{DN}}$
Tương tự, ta có: $\frac{\overline{HP}}{\overline{HM}} = \frac{\overline{FN}}{\overline{FM}}.\frac{\overline{EP}}{\overline{EN}}; \frac{\overline{GN}}{\overline{GP}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}}.\frac{\overline{BM}}{\overline{BP}}.$
Nhân theo vế các đẳng thức trên, kết hợp với các biểu thức phương tích sau:
$\overline{BM}.\overline{CM} = \overline{AM}.\overline{FM}; \overline{DN}.\overline{EN} = \overline{FN}.\overline{AN}; \overline{BP}.\overline{CP} = \overline{DP}.\overline{EP}$
Ta suy ra $\frac{\overline{KM}}{\overline{KN}}.\frac{\overline{GN}}{\overline{GP}}.\frac{\overline{HP}}{\overline{HM}} = 1 \Rightarrow G, H, K$ thẳng hàng (đpcm)
• Ta xét với trường hợp conic bất kì:
Giả sử 6 điểm A, B, C, D, E, F nằm trên conic (C) là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt nón $\mathfrak{N}$ trục Δ, đỉnh S. Xét mặt phẳng (Q) vuông góc với trục Δ của mặt nón. Khi đó thiết diện của (Q) và $\mathfrak{N}$ là đường tròn (T). Xét phép chiếu xuyên tâm S từ (P) lên (Q). Gọi ảnh của điểm X qua phép chiếu trên là X'. Ta có các điểm A', B', C', D', E', F' nằm trên đường tròn $(T) \Rightarrow G', H', K'$thẳng hàng theo chứng minh trên. Gọi δ là đường thẳng đi qua 3 điểm G', H', K'. Ta có các điểm K, H, G tương ứng nằm trên các đường thẳng SK', SH', SG' nên K, H, G cùng nằm trên mặt phẳng (S, δ). Mà K, H, G cùng nằm trên mặt phẳng (P); (P) và (S, δ) là hai mặt phẳng phân biệt $\Rightarrow G, H, K$ cùng nằm trên giao tuyến của (P) và (S, δ). Do đó K, H, G thẳng hàng (đpcm)

Định lý 1.1.10 (Định lý Brianchon) Cho lục giác $ABCDEF$ ngoại tiếp một conic bất kì. Chứng minh rằng ba đường chéo lớn AD, BE, CF đồng quy.

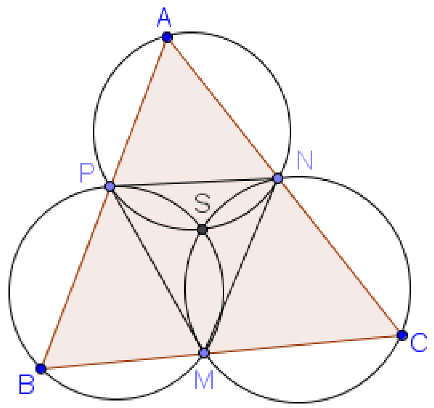
Chứng minh.



• Xét với trường hợp conic là đường tròn:
Ta kí hiệu các tiếp điểm của (O) trên AB, BC, CD, DE, EF, FA lần lượt là M, N, P, Q, R, S. Xét cực và đối cực đối với (O). Gọi K, I, J lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(SM, PQ), (MN, QR), (NP, RS)$. Vì SM và PQ là đường đối cực của A và D nên AD là đường đối cực của K. Tương tự BE và FC lần lượt là đường đối cực của I và J.
Dùng định lý Pascal cho lục giác nội tiếp $MNPQRS$ ta có I, J, K thẳng hàng. Nên ta có các đường đối cực của I, J, K (lần lượt là BE, CF, AD) cùng đi qua cực của đường thẳng này (đường thẳng đi qua I, J, K) nên AD, BE, CF đồng quy (đpcm).
• Với trường hợp conic bất kì: Giả sử lục giác ABCDEF ngoại tiếp conic (C) là giao tuyến của mặt phẳng (P) với mặt nón $\mathfrak{N}$ trục δ, đỉnh S. Xét mặt phẳng (Q) vuông góc với trục δ của mặt nón. Khi đó thiết diện của (Q) và $\mathfrak{N}$ là đường tròn (T). Xét phép chiếu xuyên tâm S từ (P) lên (Q). Gọi ảnh của điểm X qua phép chiếu trên là X'. Ta có lục giác $A'B'C'D'E'F'$ ngoại tiếp đường tròn (T) $\Rightarrow$ $A'D', B'E', C'F'$ đồng quy tại $G \Rightarrow AD, BE, CF$ đồng quy tại giao điểm của SG và (P).

Định lý 1.1.11 (Định lý Miquel) Cho tam giác ABC và ba điểm M, N, P lần lượt nằm trên BC, CA, AB. Khi đó các đường tròn ngoại tiếp các tam giác APN, BPM và CMN đồng quy.

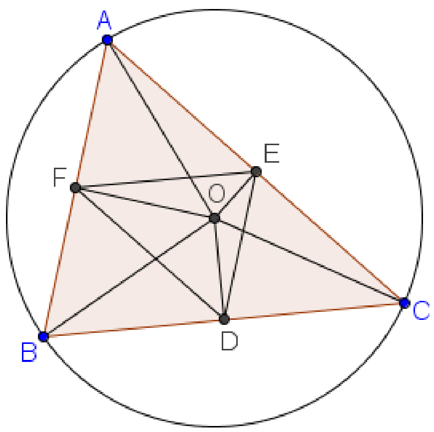
Chứng minh.



Gọi S là giao điểm của (BPM) và (CMN).Ta có:
$(SN, SP) \equiv (SN, SM) + (SM, SP) \equiv (CN, CM) + (BM, BP) \equiv (CA, CB) + (BC, BA) \equiv (CA, BA) \equiv (AN, AP) \pmod{\pi}$
$\Rightarrow S \in (ANP)$, suy ra đpcm.

Định lý 1.1.12 (Công thức Carnot) Cho ΔABC nhọn nội tiếp (O, R), r là bán kính nội tiếp. Kí hiệu d_a, d_b, d_c theo thứ tự là khoảng cách từ O đến các cạnh BC, CA, AB. Khi đó ta có hệ thức sau: $d_a + d_b + d_c = R + r$.

Chứng minh.



Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm $BC, CA, AB \Rightarrow OD, OE, OF \perp BC, CA, AB$. Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác nội tiếp $AEOF$, ta có $OA.EF = AF.OE + AE.OF \Rightarrow aR = c.d_b + b.d_c$; tương tự: $bR = a.d_c + c.d_a, cR = a.d_b + b.d_a$. Suy ra $R(a + b + c) = a(d_b + d_c) + b(d_c + d_a) + c(d_a + d_b)$.

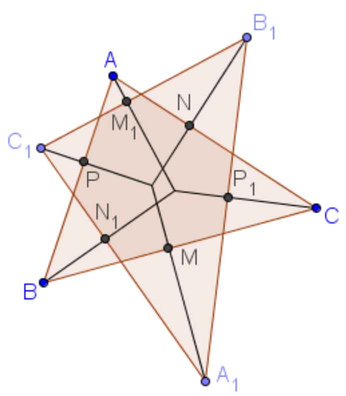
Mặt khác, $r(a+b+c) = 2S_{ABC} = a.d_a + b.d_b + c.d_c$.
Do đó $(a+b+c)(R+r) = (a+b+c)(d_a+d_b+d_c)$, suy ra $d_a+d_b+d_c = R+r$. (đpcm)
Nếu tam giác ABC có $\widehat{A} > 90^o$ thì ta có $-d_a+d_b+d_c = R+r$
Chú ý rằng định lý Carnot tương đương với hệ thức quen thuộc sau: $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$

Định lý 1.1.13 (Định lý Carnot) Cho tam giác ABC, gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh $BC, CA, AB; d_M, d_N, d_P$ là các đường thẳng đi qua M, N, P và vuông góc với các cạnh tương ứng. Khi đó d_M, d_N, d_P đồng quy $\Leftrightarrow MB^2 + NC^2 + PA^2 = MC^2 + NA^2 + PB^2$

Chứng minh. Thuận: Gọi O là giao điểm của 3 đường thẳng. Ta có:
$MB^2 + NC^2 + PA^2 = MC^2 + NA^2 + PB^2$
$\Leftrightarrow MB^2 + OM^2 + NC^2 + ON^2 + PA^2 + OP^2 = MC^2 + OM^2 + NA^2 + ON^2 + PB^2 + OP^2$
$\Leftrightarrow OB^2 + OC^2 + OA^2 = OC^2 + OA^2 + OB^2$
Đẳng thức này luôn đúng nên ta có điều phải chứng minh.
Đảo: Gọi O là giao điểm của d_M, d_N. Qua O, hạ đường vuông góc xuống AB tại P'.
Áp dụng định thuận, ta có $P'A^2 - P'B^2 = PA^2 - PB^2 \Rightarrow P \equiv P' \Rightarrow$ đpcm

Định lý 1.1.14 (Khái niệm về hai tam giác trực giao) Cho tam giác ABC và tam giác $A_1B_1C_1$ như hình vẽ. Nếu các đường thẳng qua A_1, B_1, C_1 và vuông góc với BC, CA, AB đồng quy thì các đường thẳng qua A, B, C và vuông góc B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 đồng quy và ngược lại. Khi đó 2 tam giác ABC và $A_1B_1C_1$ được gọi là 2 tam giác trực giao.

Chứng minh.

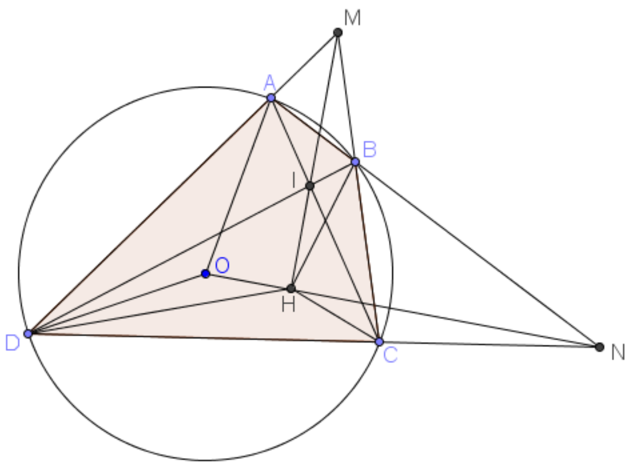


Gọi M, N, P, M_1, N_1, P_1 là chân các đường vuông góc như hình vẽ. Áp dụng định lý Carnot, ta có:
AM_1, BN_1, CP_1 đồng quy

$\Leftrightarrow \left(M_1C_1^2 - M_1B_1^2\right) + \left(P_1B_1^2 - P_1A_1^2\right) + \left(N_1A_1^2 - N_1C_1^2\right) = 0$
$\Leftrightarrow \left(AC_1^2 - AB_1^2\right) + \left(CB_1^2 - CA_1^2\right) + \left(BA_1^2 - BC_1^2\right) = 0$
$\Leftrightarrow \left(A_1B^2 - A_1C^2\right) + \left(B_1C^2 - B_1A^2\right) + \left(C_1A^2 - C_1B^2\right) = 0$
$\Leftrightarrow \left(MB^2 - MC^2\right) + \left(NC^2 - NA^2\right) + \left(PA^2 - PB^2\right) = 0$
$\Leftrightarrow A_1M, B_1N, C_1, P$ đồng quy (đpcm)

Định lý 1.1.15 (Định lý Brocard) Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O. AD giao BC tại M, AB giao CD tại N, AC giao BD tại I. Chứng minh rằng O là trực tâm của tam giác MIN.

Chứng minh.



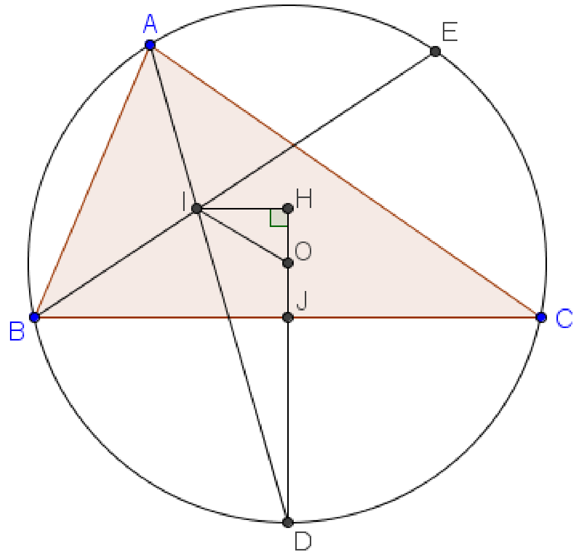
Cách 1:
Gọi H là giao thứ 2 của hai đường tròn ngoại tiếp các tam giác AID, BIC. Xét tứ giác $DOHC$, ta có:
$\widehat{DHC} = 360^o - \widehat{DHI} - \widehat{CHI} = \widehat{DAC} + \widehat{DBC} = \widehat{DOC}$
Từ đó suy ra tứ giác $DOHC$ nội tiếp. Tương tự, ta suy ra tứ giác $AOHB$ nội tiếp.
Mặt khác $\overline{MA}.\overline{MD} = \overline{MB}.\overline{MC}$, suy ra M nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn $(AIHD), (BIHC) \Rightarrow M, I, H$ thẳng hàng.
Ta có $\widehat{IHO} = \widehat{IHD} - \widehat{OHD} = \widehat{ADC} + \widehat{ACD} - \widehat{OCD} = \widehat{ADC} + \widehat{OCA} = 90^o$
Từ đó suy ra $IM \perp ON$. Tương tự, ta có $IN \perp OM$, suy ra đpcm.
Cách 2:
Ta chứng minh bổ đề sau, từ đó suy trực tiếp ra khẳng định của bài toán: Cho 4 điểm A, B, C, D nằm trên đường tròn tâm (O), gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AB, CD), (AD, BC), (AC, BD)$, khi đó đường đối cực của P đối với (O) là đường thẳng QR
Chứng minh:
Gọi E, F lần lượt là cực của AB, CD đối với (O), suy ra EF là đường đối cực của P

đối với (O)

Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $ADDCCB$ (CC là tiếp tuyến tại điểm C), ta có Q, F, R thẳng hàng.Tương tự, ta có Q, E, R thẳng hàng, suy ra 4 điểm E, F, Q, R thẳng hàng, do đó P là cực của đường thẳng QR đối với (O) (đpcm)

Định lý 1.1.16 (Định lý Euler về khoảng cách giữa tâm 2 đường tròn nội, ngoại tiếp của tam giác) Cho ΔABC, nội tiếp (O, R), ngoại tiếp (I, r). Khi đó $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

Chứng minh.



Gọi D, E theo thứ tự là trung điểm các cung nhỏ BC và AC thì $OD \perp BC; \widehat{BAD} = \dfrac{\widehat{A}}{2}$. Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ I xuống OD. J là trung điểm BC. Theo một kết quả quen biết, ta có $ID = BD = 2R.\sin\dfrac{A}{2}$.

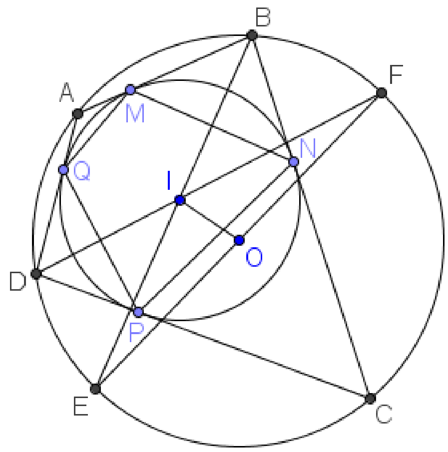
Trong ΔOID, có $OI^2 = ID^2 + OD^2 - 2.\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{OD} = 4R^2.\sin^2\dfrac{A}{2} + R^2 - 2.\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DH}$ (công thức hình chiếu).

Mặt khác, $\overrightarrow{DO}.\overrightarrow{DH} = DO.(DJ + JH) = R.\left(BD.\sin\dfrac{A}{2} + r\right) = 2R^2\sin^2\dfrac{A}{2} + Rr$.

Từ đó suy ra đpcm.

Định lý 1.1.17 (Định lý Euler về khoảng cách giữa tâm 2 đường tròn nội, ngoại tiếp của tứ giác (Định lý Fuss)) Cho tứ giác $ABCD$ vừa nội tiếp (O, R), vừa nội tiếp (I, r). Đặt $d = OI$. Khi đó ta có hệ thức
$$\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2}$$

Chứng minh.



Gọi tiếp điểm của (I) trên AB, BC, CD, DA lần lượt là M, N, P, Q. BI, DI cắt (O) lần lượt ở E, F. Ta thấy:

$(DE, DF) \equiv (DE, DC) + (DC, DF) \equiv (BE, BC) + (DC, DF) \equiv \dfrac{(BA, BC) + (DC, DA)}{2} \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$

Do đó E, O, F thẳng hàng, nên O là trung điểm của EF. Theo công thức đường trung tuyến trong tam giác IEF ta có: $d^2 = \dfrac{IE^2 + IF^2}{2} - \dfrac{EF^2}{4} = \dfrac{IE^2 + IF^2}{2} - R^2$.

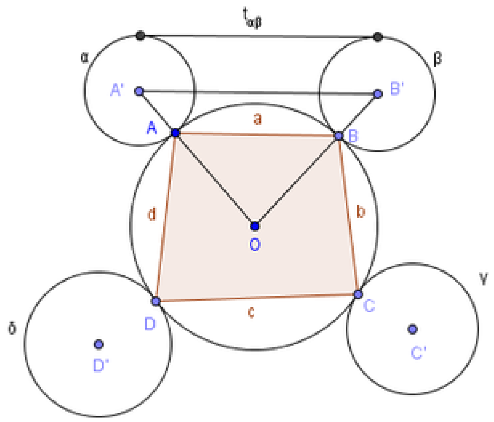
Suy ra:

$$\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{2\left(R^2+d^2\right)}{\left(R^2-d^2\right)^2} = \frac{IE^2+IF^2}{\left(P_{I/(O)}\right)^2} = \frac{IE^2}{\left(P_{I/(O)}\right)^2} + \frac{IF^2}{\left(P_{I/(O)}\right)^2} = \frac{IE^2}{(IE.IB)^2} + \frac{IF^2}{(IF.ID)^2}$$

$$= \frac{1}{IB^2} + \frac{1}{ID^2} = \frac{\sin^2\frac{B}{2}}{IM^2} + \frac{\sin^2\frac{D}{2}}{IP^2} = \frac{1}{r^2}$$

Định lý 1.1.18 (Định lý Casey (định lý Ptolemy mở rộng)) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O, R). Đặt các đường tròn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ là các đường tròn tiếp xúc với (O) tại các đỉnh A, B, C, D. Đăt $t_{\alpha\beta}$ là độ dài đoạn tiếp tuyến chung của hai đường tròn α, β. Trong đó $t_{\alpha\beta}$ là độ dài tiếp tuyến chung ngoài nếu hai đường tròn α, β cùng tiếp xúc trong hoặc cùng tiếp xúc ngoài với (O), và là độ dài đoạn tiếp xúc trong với trường hợp còn lại. Các đoạn $t_{\alpha\gamma}, t_{\beta\gamma}, \ldots$ được xác định tương tự. Khi đó ta có $t_{\alpha\beta}.t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}.t_{\alpha\delta} = t_{\alpha\gamma}.t_{\beta\delta}$.

Chứng minh.



Ta chứng minh cho trường hợp $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ cùng tiếp xúc ngoài với (O), các trường hợp khác chứng minh tương tự. Gọi tâm các đường tròn trên là A', B', C', D' và bán kính lần lượt là x, y, z, t. Đặt độ dài các đoạn thẳng như hình vẽ và $AC = m, BD = n$. Theo định lý Pythagore: $t_{\alpha\beta}^2 = A'B'^2 - (x-y)^2$. Áp dụng định lý cosin, ta có:

$A'B'^2 = (R+x)^2 + (R+y)^2 - 2(R+x)(R+y)\cos\widehat{A'OB'} = (R+x)^2 + (R+y)^2 - 2(R+x)(R+y)\left(1 - \dfrac{a^2}{2R^2}\right)$

$= (R+x)^2 + (R+y)^2 - 2(R+x)(R+y) + (R+x)(R+y)\dfrac{a^2}{R^2} = (x-y)^2 + (R+x)(R+y)\dfrac{a^2}{R^2}$

$\Rightarrow t_{\alpha\beta} = \dfrac{a}{R}\sqrt{(R+x)(R+y)}$

Tương tự với các đoạn thẳng còn lại, ta có $t_{\alpha\beta}.t_{\gamma\delta} + t_{\beta\gamma}.t_{\alpha\delta} = t_{\alpha\gamma}.t_{\beta\delta} \Leftrightarrow ac + bd = mn$ (luôn đúng theo định lý Ptolemy)

Cho $x = y = z = t = 0$, ta có định lý Ptolemy.

Định lý 1.1.19 (Định lý Stewart) Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng và điểm M bất kì. Ta có hệ thức sau: $MA^2.\overline{BC} + MB^2.\overline{CA} + MC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = 0$

Chứng minh. Qua M, hạ $MH \perp ABC$, ta có

$MA^2.\overline{BC} + MB^2.\overline{CA} + MC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$

$= \left(MH^2 + HA^2\right)\overline{BC} + \left(MH^2 + HB^2\right)\overline{CA} + \left(MH^2 + HC^2\right)\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$

$= MH^2\left(\overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AB}\right) + HA^2.\overline{BC} + HB^2.\overline{CA} + HC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$

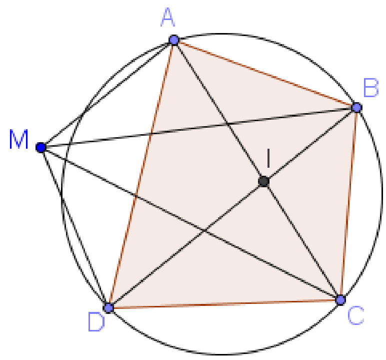
$= HA^2.\overline{BC} + HB^2.\overline{CA} + HC^2.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB}$

$= HA^2\left(\overline{HC} - \overline{HB}\right) + HB^2\left(\overline{HA} - \overline{HC}\right) + HC^2\left(\overline{HB} - \overline{HA}\right) + \left(\overline{HC} - \overline{HB}\right)\left(\overline{HA} - \overline{HC}\right)\left(\overline{HB} - \overline{HA}\right) =$

0

Định lý 1.1.20 (Định lý Feuerbach–Luchterhand) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp, M là điểm bất kì trong mặt phẳng tứ giác. Ta có hệ thức:
$MA^2.BC.CD.DB - MB^2.CD.DA.AC + MC^2.DA.AB.BD - MD^2.AB.BC.CA = 0$

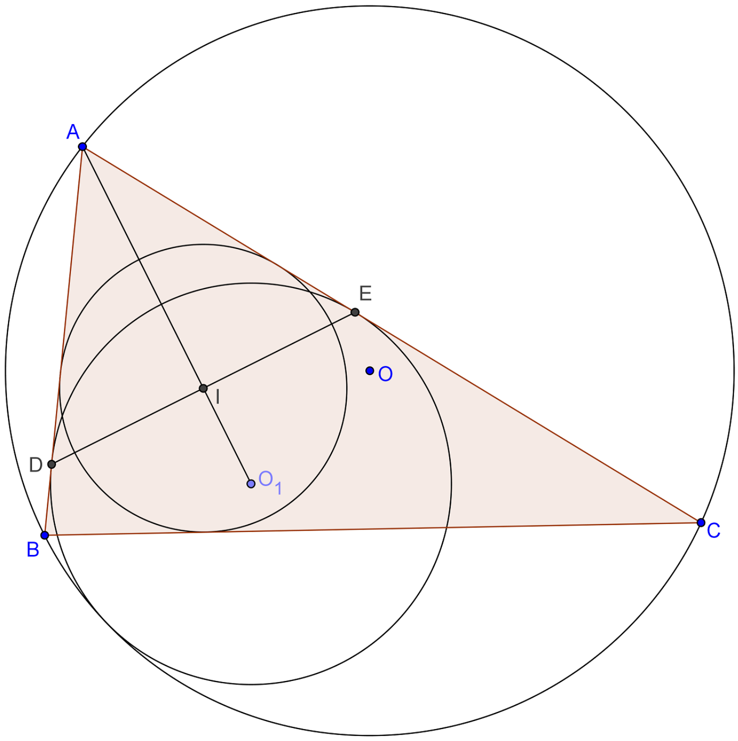
Chứng minh.



Gọi I là giao điểm AC và BD. Áp dụng định lý Stewart, ta có:
$MA^2.IC + MC^2.IA - IA.IC.AC = MI^2.AC; MB^2.ID + MD^2.IB - IB.ID.BD = MI^2.BC$
$\Rightarrow MA^2.IC.BD + MC^2.IA.BD - IA.IC.AC.BD = MI^2.AC.BD = MB^2.ID.AC + MD^2.IB.AC - IB.ID.BD.AC$
$\Rightarrow MA^2.IC.BD + MC^2.IA.BD = MB^2.ID.AC + MD^2.IB.AC(1)$
Mặt khác, ta có $\dfrac{IA}{IC} = \dfrac{S_{ABD}}{S_{CBD}} = \dfrac{AD, AB}{CB.CD} \Rightarrow IC = \dfrac{CB.CD}{AD.AB}.IA$. Tương tự: $ID = \dfrac{DA.DC}{BA.BC}.IB$
Thay vào (1), ta có:
$MA^2.\dfrac{CB.CD}{AD.AB}.IA.BD + MC^2.IA.BD = MB^2.\dfrac{DA.DC}{BA.BC}.IB.AC + MD^2.IB.AC$
$\Leftrightarrow \dfrac{IA}{AB.AD}\left(MA^2.BC.CD.DB + MC^2.AB.BD.DA\right) = \dfrac{IB}{AB.AC}\left(MB^2.AC.DC.CA + MD^2.AB.BC.C\right.$
Lại có $\Delta IAD \sim \Delta IBC \Rightarrow \dfrac{IA}{AD} = \dfrac{IB}{IC}$, thay vào (2), ta có đpcm.

Định lý 1.1.21 (Định lý Lyness) Cho tam giác ABC, đường tròn ngoại tiếp (O, R), đường tròn nội tiếp (I, r). Đường tròn (O_1, ρ) tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc với các cạnh AB, AC theo thứ tự tại D, E. Khi đó I là trung điểm DE.

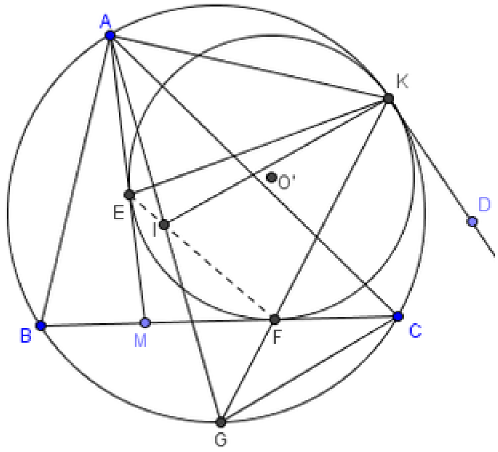
Chứng minh.



Ta có $AI = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}; AO_1 = \dfrac{\rho}{\sin\dfrac{A}{2}} \Rightarrow IO_1 = \dfrac{\rho - r}{\sin\dfrac{A}{2}} \Rightarrow \dfrac{IO_1}{AO_1} = \dfrac{\rho - r}{\rho} = 1 - \dfrac{r}{\rho}$. Áp dụng định lý Stewart cho tam giác AOO_1, ta có: $OO_1^2.AI + OA^2.O_1I - OI^2.AO_1 = AI.O_1I.AO_1$. Chú ý rằng $OO_1 = R - \rho, OI^2 = R^2 - 2Rr, OA = R$, ta tính được $\sin^2\dfrac{A}{2} = 1 - \dfrac{r}{\rho}$. Suy ra $\dfrac{IO_1}{AO_1} = \sin^2\dfrac{A}{2} = \dfrac{\rho^2}{AO_1^2} \Rightarrow IO_1.AO_1 = \rho^2$. Do đó I nằm trên đường đối cực của A đối với $(O_1) \Rightarrow I \in DE \Rightarrow I = AO_1 \cap DE \Rightarrow I$ là trung điểm DE (đpcm)

Định lý 1.1.22 (Định lý Lyness mở rộng (Bổ đề Sawayama)) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc BC (có cách phát biểu khác là: cho tứ giác $ABDC$ và M là giao của BC và $AD\ldots$; nhưng hai cách phát biểu này là tương đương). Một đường tròn (O') tiếp xúc với hai cạnh MA và MC tại E và F đồng thời tiếp xúc trong với đường tròn (O) tại K. Khi đó ta có tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC nằm trên đường thẳng EF.

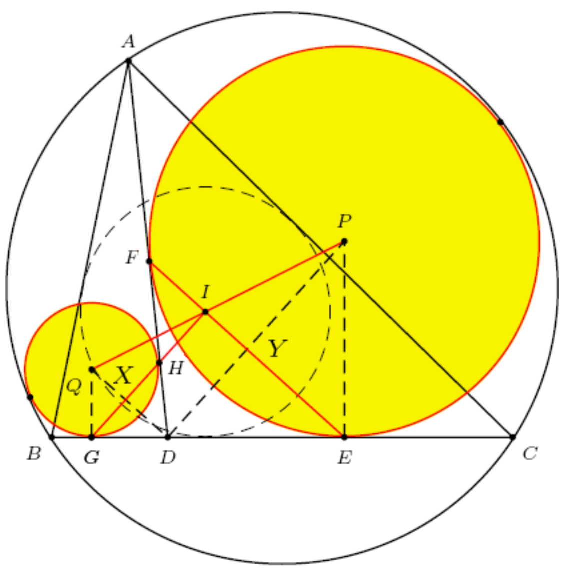
Chứng minh.



Gọi G là giao điểm khác K của KF và (O). Phép vị tự biến $(O') \to (O)$ biến $F \to G, BC \to$ tiếp tuyến của (O) song song với BC tại $G \Rightarrow G$ là trung điểm cung BC $\Rightarrow GC^2 = GF.GK$. Gọi I là giao AG và EF. Ta có $\widehat{IEK} = \widehat{IAK} (= \widehat{FKD}) \Rightarrow AEIK$ nội tiếp
$\Rightarrow \widehat{AIK} = \widehat{EFK} (= \widehat{AEK}) \Rightarrow \Delta AIK \sim \Delta IFK$ (g.g)
$\Rightarrow \widehat{GKI} = \widehat{GIF} (= \widehat{EKA}) \Rightarrow \Delta GIF \sim \Delta GKI$ (g.g) $\Rightarrow GI^2 = GF.GK \Rightarrow GI = GC \Rightarrow I$ là tâm nội tiếp ΔABC

Định lý 1.1.23 (Định lý Thébault) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là một điểm nằm trên cạnh BC. Đường tròn tâm P tiếp xúc với 2 đoạn AD, DC và tiếp xúc trong với (O). Đường tròn tâm Q tiếp xúc với 2 đoạn AD, DB và tiếp xúc trong với (O). Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Ta có P, I, Q thẳng hàng.

Chứng minh.

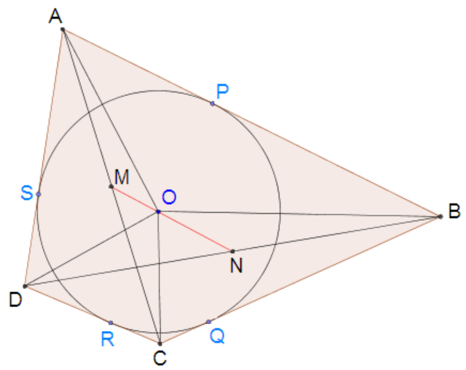


Gọi E, F là tiếp điểm của (P) với BC, AD; G, H là tiếp điểm của (Q) với BC, AD.

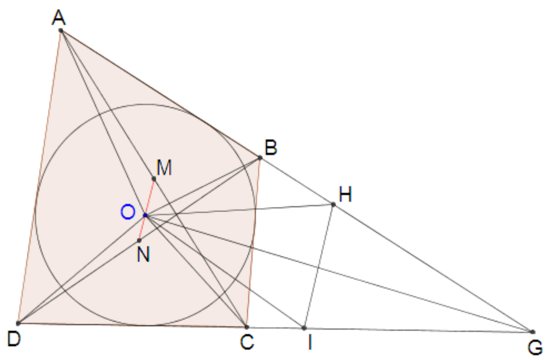
Gọi I là giao điểm của EF và GH $\Rightarrow$ I là tâm nội tiếp ΔABC. Gọi X là giao điểm GH và QD; Y là giao điểm EF và PD. Ta thấy $IXDY$ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ $\dfrac{IX}{PD} = \dfrac{YD}{PD} = \dfrac{QX}{QD} \Rightarrow P, I, Q$ thẳng hàng (đẳng thức thứ 2 có là do $\Delta QGD \sim \Delta DEP$)

Định lý 1.1.24 (Định lý Newton cho tứ giác ngoại tiếp) Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Khi đó trung điểm 2 đường chéo của tứ giác thẳng hàng với O.

Chứng minh.
Cách 1:



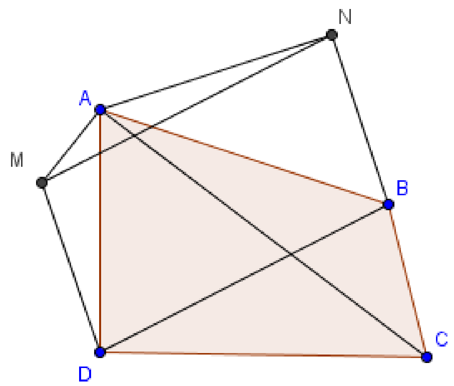
Gọi P, Q, R, S lần lượt là các tiếp điểm của các đoạn thẳng AB, BC, CD, DA đối với đường tròn (O). Đặt $SA = AP = a, BP = BQ = b, CQ = CR = c, DR = DS = d$.
Áp dụng định lý con nhím cho tứ giác $ABCD$ ta có:
$(a+b)\overrightarrow{OP} + (b+c)\overrightarrow{OQ} + (c+d)\overrightarrow{OR} + (d+a)\overrightarrow{OS} = \vec{0}$
$\Leftrightarrow \sum (a+b)\left(\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{OA} + \dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{OB}\right) = \vec{0}$
$\Leftrightarrow (b+d)\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) + (a+c)\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right) = \vec{0}$
$\Leftrightarrow (b+d)\overrightarrow{OM} + (a+c)\overrightarrow{ON} = \vec{0}$
Suy ra 2 vector $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ cùng phương $\Rightarrow O, M, N$ thẳng hàng (đpcm)
Cách 2:



Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của hai đường chéo AC, BD. Ta xét trường hợp AB cắt CD tại G. Ta có:
$S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}r(AB + CD); S_{OBC} + S_{ODA} = \frac{1}{2}r(AD + BC)$ (r là bán kính đường tròn nội tiếp tứ giác). Mà tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp $\Rightarrow AB + CD = AD + BC \Rightarrow S_{OAB} + S_{OCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Trên các tia GA, GD lấy các điểm H, I theo thứ tự sao cho $GH = AB, GI = CD$. Khi đó $S_{OAB} = S_{OHG}, S_{OCD} = S_{OIG}$.
$\Rightarrow S_{OHI} = S_{OHG} + S_{OIG} - S_{GHI} = S_{OAB} + S_{OCD} - S_{GHI} = \frac{1}{2}S_{ABCD} - S_{GHI}$.
Mặt khác, ta cũng có $S_{MAB} + S_{MCD} = S_{NAB} + S_{NCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$. Suy ra $S_{OHI} = S_{MHI} = S_{NHI} \Rightarrow d(O, HI) = d(M, HI) = d(N, HI) \Rightarrow O, M, N$ thẳng hàng.
Với trường hợp $AB//CD$ thì $d(O, AB) = d(M, AB) = d(N, AB) = r \Rightarrow O, M, N$ thẳng hàng (đpcm)

Định lý 1.1.25 (Định lý Breichneider) Cho tứ giác lồi $ABCD, AB = a, BC = b, CD = c, DA = d, AC = m, BD = n$. Khi đó $m^2n^2 = a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd\cos(A + C)$

Chứng minh.



Trên cạnh AB ra phía ngoài dựng tam giác ABN đồng dạng với tam giác CAD, và dựng ra phía ngoài cạnh AD tam giác ADM đồng dạng với tam giác CAB. Khi đó dễ thấy $AN = \frac{ac}{m}, AM = \frac{bd}{m}, NB = DM = \frac{ad}{m}$ và $BDMN$ là hình bình hành. Đồng thời có $\widehat{NAM} = \widehat{A} + \widehat{C}$.
Áp dụng định lý cosin cho tam giác AMN, ta có $n^2 = \left(\frac{ac}{m}\right)^2 + \left(\frac{bd}{m}\right)^2 - 2.\frac{ac}{m}.\frac{bd}{m}.\cos(A + C)$, suy ra đpcm.
Vì $0^o < \widehat{A} + \widehat{C} < 360^o$ nên ta có $mn \leq ac + bd$, do đó bất đẳng thức Ptolemy là một hệ quả của định lý Breichneider.

Định lý 1.1.26 (Định lý con nhím) Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ bất kỳ, điểm M bất kỳ nằm trong đa giác. Gọi $\overrightarrow{e_i}$ là các vector đơn vị có gốc tại M, hướng ra ngoài đa giác và $\overrightarrow{e_i} \perp A_iA_{i+1}$ (coi $A_{n+1} \equiv A_1$). Khi đó ta có $\sum\limits_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}.\overrightarrow{e_i} = \vec{0}$. Các vector $A_iA_{i+1}.\overrightarrow{e_i}$ được gọi là các "lông nhím".

Chứng minh. Giả sử đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ có hướng dương (tức là chiều đi theo thứ tự chỉ số các đỉnh đa giác tăng dần ngược chiều kim đồng hồ). Gọi f là phép quay 90^o ngược chiều kim đồng hồ.

Ta có $f(A_iA_{i+1}.\overrightarrow{e_i}) = \overrightarrow{A_iA_{i+1}} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} f(A_iA_{i+1}.\overrightarrow{e_i}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overrightarrow{A_iA_{i+1}} = \vec{0} \Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} A_iA_{i+1}.\overrightarrow{e_i} = \vec{0}$ (đpcm).

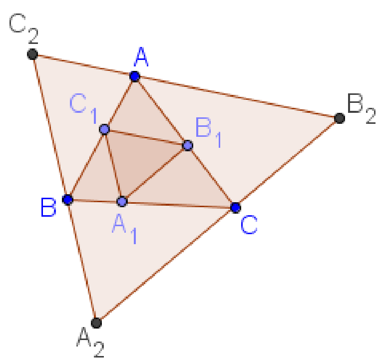
Định lý 1.1.27 (Định lý Gergonne–Euler) Cho tam giác ABC và điểm S trong mặt phẳng tam giác. AS, BS, CS cắt BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Khi đó $\dfrac{\overline{SD}}{\overline{AD}} + \dfrac{\overline{SE}}{\overline{BE}} + \dfrac{\overline{SF}}{\overline{CF}} = 1$.

Chứng minh. Ta có $\dfrac{\overline{SD}}{\overline{AD}} = \dfrac{S_{[SBD]}}{S_{[ABD]}} = \dfrac{S_{[SDC]}}{S_{[ADC]}} = \dfrac{S_{[SBD]} + S_{[SDC]}}{S_{[ABD]} + S_{[ADC]}} = \dfrac{S_{[SBC]}}{S_{[ABC]}}$

Tương tự: $\dfrac{\overline{SE}}{\overline{BE}} = \dfrac{S_{[SCA]}}{S_{[ABC]}}; \dfrac{\overline{SF}}{\overline{CF}} = \dfrac{S_{[SAB]}}{S_{[ABC]}}$. Cộng theo vế 3 đẳng thức trên, ta có đpcm.

Định lý 1.1.28 (Định lý Peletier) Ta nói ΔABC nội tiếp trong $\Delta A_2B_2C_2$ (nghĩa là $A \in B_2C_2, B \in C_2A_2, C \in A_2B_2$) đồng thời ngoại tiếp $\Delta A_1B_1C_1$ (nghĩa là $A_1 \in BC, B_1 \in CA, C_1 \in AB$) nếu $A_2B_2//A_1B_1, B_2C_2//B_1C_1, C_2A_2//C_1A_1$. Khi đó $S^2 = S_1.S_2$.

Chứng minh.



Ta quy ước chỉ số 1 cho $\Delta A_1B_1C_1$, chỉ số 2 cho tam giác $\Delta A_2B_2C_2$. Vì $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$ nên $\dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{h_1}{h_2}$. Do đó $S_1.S_2 = \dfrac{1}{4}(c_1h_2)^2$. Trong đó h_i là đường cao xuất

phát từ đỉnh C của các tam giác.
Mặt khác $S = S_{AB_1C_1} + S_{BC_1A_1} + S_{CA_1B_1} + S_{A_1B_1C_1}$. Lại có $S_{AB_1C_1} = S_{C_2B_1C_1}; S_{BA_1C_1} = S_{C_2A_1C_1}; S_{C_2A_1B_1} = S_{C_2B_1C_1} + S_{C_2A_1C_1} + S_{A_1B_1C_1}$, suy ra $S = S_{CA_1B_1} + S_{C_2A_1B_1} = \frac{1}{2}c_1(h' + h'')$, trong đó h' và h'' tương ứng là khoảng cách từ c và c_2 đến A_1B_1, mà $h' + h'' = h_2$ nên $S = \frac{1}{2}c_1h_2$. Từ đó suy ra đpcm.

Định lý 1.1.29 (Định lý Viviani) Trong tam giác đều ABC ta lấy 1 điểm S. Khi đó tổng các khoảng cách từ điểm S tới ba cạnh sẽ có độ dài bằng 1 đường cao của tam giác.

Chứng minh. Gọi khoảng cách từ S đến BC, CA, AB lần lượt là x, y, z; gọi độ dài cạnh tam giác đều là a, độ dài đường cao của tam giác là h. Ta có $ah = 2S_{ABC} = 2\left(S_{SBC} + S_{SCA} + S_{SAB}\right) = ax + ay + az \Rightarrow x + y + z = h$ (đpcm)

Định lý 1.1.30 (Công thức Lagrange mở rộng) Gọi I là tâm tỉ cự của hệ điểm A_i ứng với các hệ số a_i thì với mọi điểm M ta có

$$\sum_{i=1}^{n} a_i.MA_i^2 = \frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n} a_ia_jA_iA_j^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} + MI^2\sum_{i=1}^{n} a_i$$

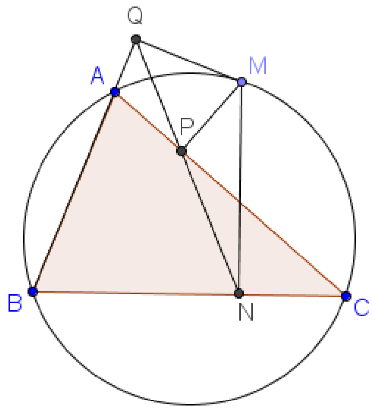
Chứng minh. Do I là tâm tỉ cự của hệ nên $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i.\overrightarrow{IA_i}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2IA_i^2 + 2\sum\limits_{1\le i<j\le n} a_ia_j\overrightarrow{IA_i}\overrightarrow{IA_j} = 0$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i^2IA_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_ia_j\left(IA_i^2 + IA_j^2 - A_iA_j^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} a_iIA_i^2\right) - \sum_{1\le i<j\le n} a_ia_jA_iA_j^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n} a_ia_jA_iA_j^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i.IA_i^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_iMA_i^2 = \frac{\sum\limits_{1\le i<j\le n} a_ia_jA_iA_j^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i} + MI^2\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Định lý 1.1.31 (Đường thẳng Simson) Cho ΔABC và điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tâm O của tam giác. Gọi N, P, Q lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng BC, CA, AB thì chúng cùng thuộc một đường thẳng (gọi là đường thẳng Simson của điểm M đối với ΔABC)

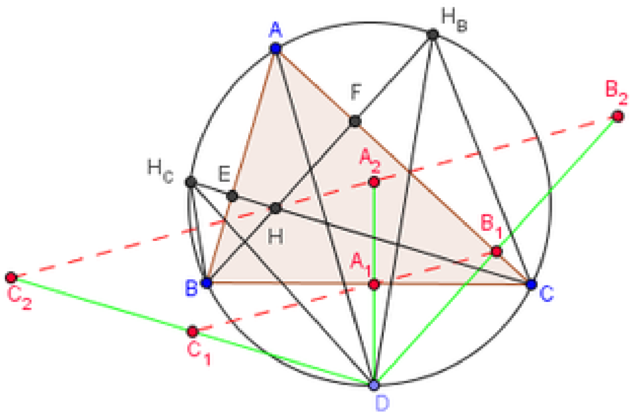
Chứng minh.



$(PN, PQ) \equiv (PN, PM) + (PM, PQ) \equiv (CN, CM) + (AM, AQ) \equiv (BC, MC) + (MA, BA) \equiv 0 \pmod{\pi}$

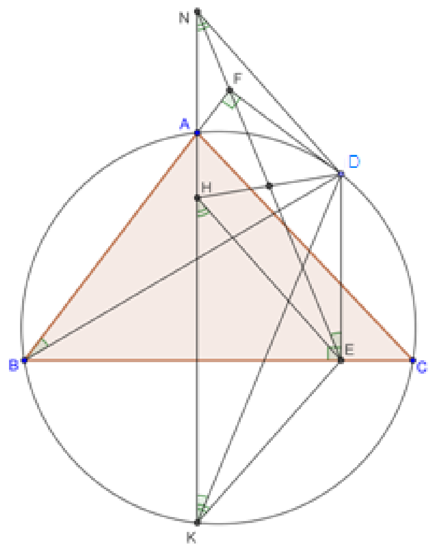
Định lý 1.1.32 (Đường thẳng Steiner) Cho tam giác ABC và điểm D trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là các điểm đối xứng với D qua các đường thẳng BC, CA, AB thì chúng cùng nằm trên một đường thẳng được gọi là đường thẳng Steiner ứng với điểm D của tam giác ABC. Đường thẳng Steiner của một tam giác thì đi qua trực tâm của tam giác đó. Điểm D được gọi là điểm anti-Steiner.

Chứng minh. Dựa vào định nghĩa đường thẳng Simson, ta suy ra A_2, B_2, C_2 thẳng hàng và đường thẳng Steiner là ảnh của đường thẳng Simson qua phép vị tự tâm D, tỉ số 2. Để chứng minh đường thẳng Steiner đi qua trực tâm tam giác, ta có 2 cách sau:
Cách 1:



Gọi H_A, H_B, H_C lần lượt là các điểm đối xứng với trực tâm H qua $BC, CA, AB \Rightarrow H_A, H_B, H_C$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi E, F là giao của CH, BH với AB, AC. Ta có:
$(HC_2, HB_2) \equiv (HC_2, HB) + (HB, HC) + (HC, HB_2) \equiv (H_CB, H_CD) + (HF, HE) + (H_BD, H_BC) \equiv (AB, AD) + (AC, AB) + (AD, AC) \equiv 0 \pmod{\pi}$

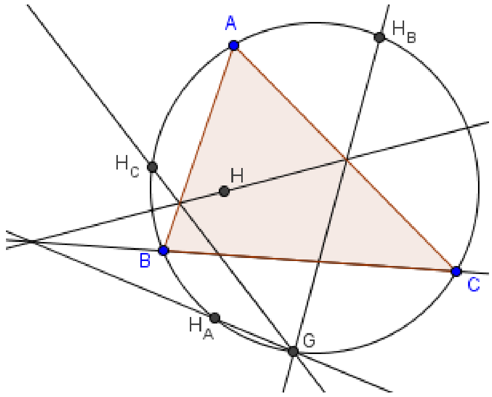
$\Rightarrow H$ nằm trên đường thẳng Steiner của D đối với ΔABC.
Cách 2:



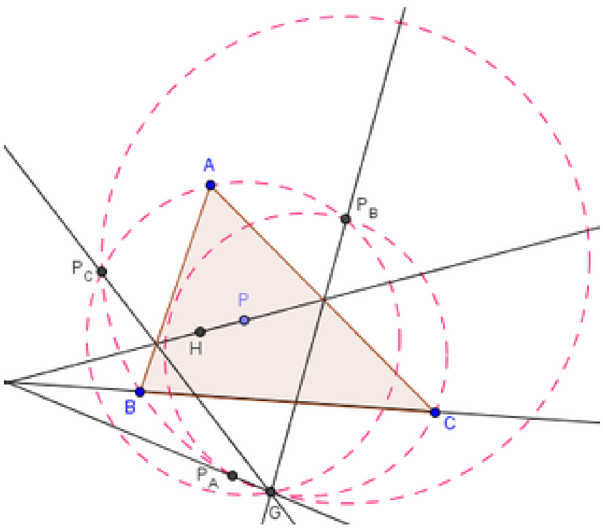
Không mất tính tổng quát, giả sử D nằm trên cung AC không chứa B của (ABC). Gọi E, F là chân đường vuông góc từ D xuống BC, AB; N là giao điểm AH và EF; K là giao điểm khác A của AH với (ABC).
Vì H là trực tâm ΔABC nên $NK \perp BC \Rightarrow NK//DE$ (1)
$\widehat{DEB} = \widehat{DFB} = 90^o$ nên D, E, F, B đồng viên $\Rightarrow \widehat{NED} = \widehat{ABD}$.
$\widehat{NKD} = \widehat{ABD}$ (vì $ABKD$ là tứ giác nội tiếp), do đó $\widehat{NED} = \widehat{NKD} \Rightarrow NKED$ là tứ giác nội tiếp. (2)
Từ (1) và (2) suy ra $NKED$ là hình thang cân. Do đó $\widehat{NKE} = \widehat{DNK}$. (3)
Vì H là trực tâm ΔABC nên H và K đối xứng với nhau qua BC. Suy ra $\widehat{NKE} = \widehat{KHE}$. (4)
Từ (3) và (4), ta suy ra $\widehat{DNK} = \widehat{EHK}$. Do đó $DN//EH$, kết hợp với (1), suy ra $DNHE$ là hình bình hành.
Vậy EF đi qua trung điểm DH. Suy ra H nằm trên đường thẳng Steiner của D đối với ΔABC (vì EF là đường thẳng Simson của D đối với ΔABC).

Định lý 1.1.33 (Định lý Collings) Cho tam giác ABC và đường thẳng d đi qua trực tâm H của tam giác. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là các đường thẳng đối xứng với d qua BC, CA, AB. Các đường thẳng đó đồng quy tại một điểm nằm trên đường tròn (ABC) (điểm anti-Steiner của d). Và d là đường thẳng Steiner của điểm đó.

Chứng minh.



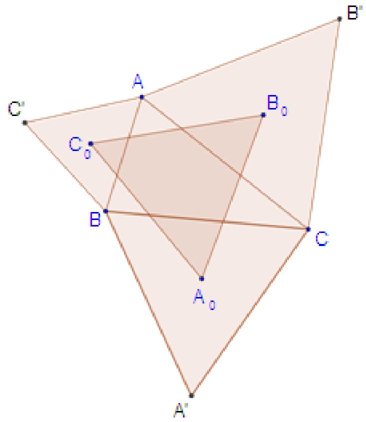
Gọi H_A, H_B, H_C lần lượt là điểm đối xứng của H qua 3 cạnh $\Rightarrow H_A, H_B, H_C$ cùng nằm trên (O) ngoại tiếp ABC và H_A, H_B, H_C lần lượt thuộc d_a, d_b, d_c. Ta có:
$(d_a, d_b) \equiv (d_a, BC) + (BC, CA) + (CA, d_b) \equiv (BC, d) + (BC, CA) + (d, CA) \equiv 2(BC, CA) \equiv (CH_A, CH_B) \pmod{\pi}$
Gọi giao điểm của d_a, d_b là G thì $G \in (O)$. Tương tự, ta suy ra d_a, d_b, d_c đồng quy tại G. Mặt khác, dễ thấy d chính là đường thẳng Steiner của G (đpcm)
Ta có một tính chất khác của điểm anti-Steiner như sau: Gọi P là một điểm bất kì trên d. P_A, P_B, P_C lần lượt là các điểm đối xứng với P qua các cạnh tam giác. Ta có các đường tròn $(AP_BP_C), (BP_CP_A), (CP_AP_B)$ cùng đi qua G.



Chứng minh: $(AP_C, AP_B) \equiv 2(AB, AC) \equiv (d_c, d_b) \pmod{\pi} \Rightarrow G \in (AP_BP_C)$. Tương tự, ta có đpcm.

Định lý 1.1.34 (Định lý Napoleon) Cho tam giác ABC, về phía ngoài tam giác dựng các tam giác đều BCA', CAB', ABC'. Gọi A_0, B_0, C_0 theo thứ tự là tâm của các tam giác đều trên. Khi đó $A_0B_0C_0$ là tam giác đều

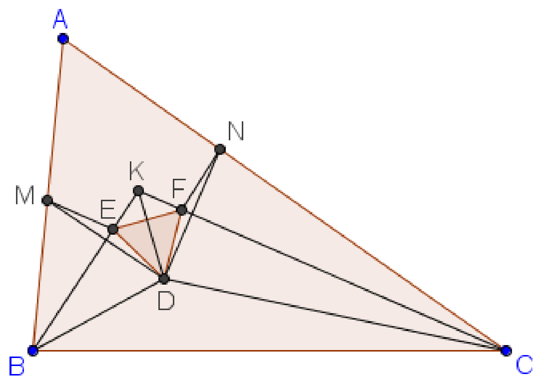
Chứng minh.



Đặt $Z_1 = Z\left(C, 30^o, \sqrt{3}\right), Z_2 = Z\left(B, 30^o, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Xét tích $Z_2 \circ Z_1$. Ta thấy Z_1 : $A_0 \to A', B_0 \to A$ và $Z_2 : A' \to A_0, A \to C_0$. Do đó $Z_2 \circ Z_1 : B_0 \to C_0$ và $A_0 \to A_0$. Mặt khác, $k_1.k_2 = 1, \alpha_1 + \alpha_2 = 60^o$ nên $Z_2 \circ Z_1$ là một phép dời hình, cụ thể là phép quay tâm A_0 biến $B_0 \to C_0$. Mà góc quay bằng 60^o nên $A_0B_0C_0$ là tam giác đều (đpcm)

Định lý 1.1.35 (Định lý Morley) Những đường chia ba của những cặp góc kề nhau của một tam giác bất kì cắt nhau tại ba điểm xác định một tam giác đều.

Chứng minh.



Cách 1:

Đặt $\widehat{A} = 3\alpha, \widehat{B} = 3\beta, \widehat{C} = 3\gamma$. Lấy điểm K trong tam giác sao cho $\widehat{KBA} = \beta, \widehat{KCA} = \gamma$. Gọi D là giao điểm các đường phân giác của tam giác DBC. Lấy E, F theo thứ tự trên KB, KC sao cho $\widehat{KDE} = \widehat{KDF} = 30^o \Rightarrow \Delta KED = \Delta KFD \Rightarrow DE = DF$. Lại có $\widehat{EDF} = 60^o$ nên tam giác DEF đều.

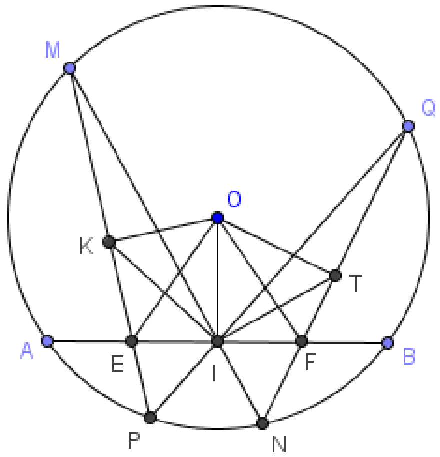
Gọi M, N theo thứ tự là điểm đối xứng với D qua KB, KC. Vì KD là phân giác của góc BKC nên ta chứng minh được $DM = DN$. Tam giác cân DMN có DK là phân giác góc MDN (dễ thấy) nên $DK \perp MN$. Tam giác đều DEF có DK là phân giác góc EDF nên $DK \perp EF$. Suy ra $MN//EF$.

Ta có $\widehat{MEF} = 360^o - 60^o - 2\widehat{DEB} = 300^o - 2\widehat{DEB}$, $\widehat{DEB} = 30^o + \dfrac{1}{2}\widehat{BKC}$, $\widehat{BKC} =$

$180^o - 2(\beta+\gamma) = 180^o - 2(60^o - \alpha) = 60o + 2\alpha$. Từ đó suy ra $\widehat{MEF} = 180^o - 2\alpha$
Lại có $ME = ED = EF$ nên ΔMEF cân có góc ở đỉnh bằng $180^o - 2\alpha$ nên $\widehat{MFE} = 2\alpha$. Suy ra $\widehat{MFN} = \widehat{EFN} - \widehat{MFE} = 180^o - 3\alpha$. Lại có $\widehat{A} = 3\alpha \Rightarrow$ tứ giác $AMFN$ nội tiếp. Mặt khác, $MEFN$ là hình thang cân nên $MEFN$ là tứ giác nội tiếp. Vậy năm điểm A, M, E, F, N đồng viên. Vì $ME = EF = FN$ nên $\widehat{MAE} = \widehat{EAF} = \widehat{FAN}$. Suy ra D, E, F là các giao điểm của các đường chia ba các góc của tam giác $ABC \Rightarrow$ đpcm.
Cách 2:
Đặt $AE = n, AF = m$. Ta có $\alpha+\beta+\gamma = 60^o \Rightarrow \alpha+\beta = 60^o - \gamma$. Áp dụng định lý sin cho tam giác AEB, ta có $\dfrac{n}{c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \Rightarrow n = \dfrac{c\sin\beta}{\sin(60^o-\gamma)}$.
Tương tự: $m = \dfrac{b\sin\gamma}{\sin(60^o-\beta)}$. Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC, ta có $\dfrac{b}{c} = \dfrac{\sin 3\beta}{\sin 3\gamma} \Rightarrow \dfrac{m}{n} = \dfrac{\sin 3\beta.\sin\gamma.\sin(60^o-\gamma)}{\sin 3\gamma.\sin\beta.\sin(60^o-\beta)}$.
Mặt khác, ta có hệ thức $\sin 3x = 4\sin x.\sin(60^o+x).\sin(60^o-x)$. Suy ra $\dfrac{m}{n} = \dfrac{\sin(60^o+\beta)}{\sin(60^o+\gamma)}$. Do đó $\widehat{AEF} = 60^o + \beta, \widehat{AFE} = 60^o + \gamma$. Tương tự, ta có $\widehat{BED} = 60^o + \alpha \Rightarrow \widehat{FEA} + \widehat{AEB} + \widehat{BED} = 300^o \Rightarrow \widehat{DEF} = 60^o$. Tương tự, ta suy ra tam giác DEF có các góc bằng $60^o \Rightarrow$ tam giác DEF đều.
Sau đây là bài toán mở rộng nhất về định lý Morley: Nếu chia n ($n \geq 3$) tất cả các góc của một đa giác m cạnh, thì tất cả các giao của các đường thẳng là các đỉnh phân biệt của một hệ $\dfrac{1}{2}m(m-1)n(n-1)^2$ đa giác đều n cạnh, có thể phân chia làm $\dfrac{1}{2}m(m-1)$ họ, mỗi họ có $n(n-1)^2$ đa giác có tâm thẳng hàng.

Định lý 1.1.36 (Định lý con bướm với đường tròn) Cho đường tròn (O) và dây cung AB. I là trung điểm của AB. Qua I vẽ hai dây cung tùy ý MN và PQ sao cho MP và NQ cắt AB tại E, F. Khi đó I là trung điểm của EF.

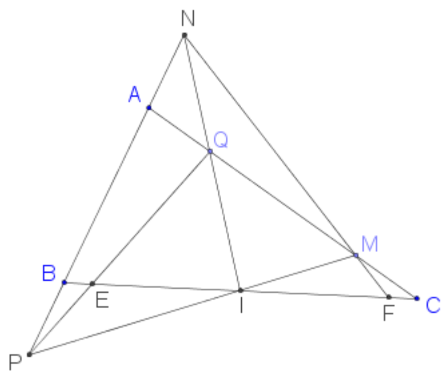
Chứng minh.



Gọi K, T là trung điểm MP và NQ. Ta có $OIEK, OIFT$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow$ $(OE, OI) \equiv (KE, KI)$,
$(OI, OF) \equiv (TI, TF) \pmod{\pi}$
Lại có $\Delta MIP \sim \Delta QIN \Rightarrow (KE, KI) \equiv (TI, TF) \pmod{\pi} \Rightarrow (OE, OI) \equiv (OI, OF)$ $\pmod{\pi} \Rightarrow \Delta EOF$ cân tại $O \Rightarrow I$ là trung điểm EF (đpcm)

Định lý 1.1.37 (Định lý con bướm với cặp đường thẳng) Cho tam giác ABC. Gọi I là trung điểm của BC. Qua I kẻ các đường thẳng Δ cắt AB, AC tại N, Q, đường thẳng Δ' cắt AB, AC tại P, M. Gọi MN, PQ cắt BC tại F, E. Khi đó ta có I là trung điểm của EF.

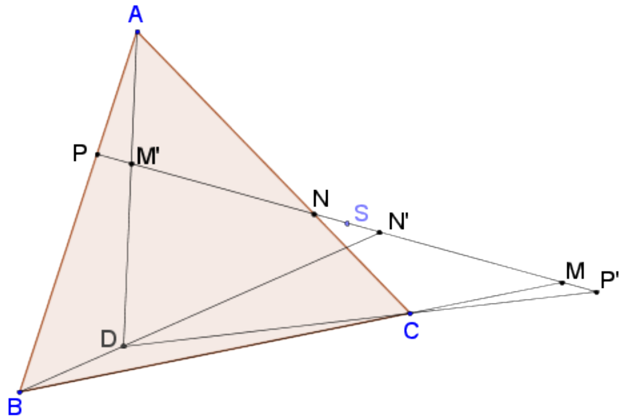
Chứng minh.



Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC, ta có các hệ thức sau:
$\dfrac{\overline{IB}}{\overline{IC}} \cdot \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = 1 \Rightarrow \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \dfrac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = 1; \dfrac{\overline{IC}}{\overline{IB}} \cdot \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \cdot \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = 1 \Rightarrow \dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}} \cdot \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = 1$
$\Rightarrow \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \dfrac{\overline{NB}}{\overline{NA}} \cdot \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MC}}$
Lại có $\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \cdot \dfrac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1; \dfrac{\overline{FC}}{\overline{FB}} \cdot \dfrac{\overline{NB}}{\overline{NA}} \cdot \dfrac{\overline{MA}}{\overline{MC}} = 1 \Rightarrow \dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \dfrac{\overline{FC}}{\overline{FB}} \Rightarrow I$ là trung điểm EF (đpcm)

Định lý 1.1.38 (Định lý Blaikie) Cho tam giác ABC và đường thẳng d sao cho d cắt BC, CA, AB lần lượt ở M, N, P. Gọi S là 1 điểm bất kì trên d. Gọi M', N', P' lần lượt là điểm đối xứng của M, N, P qua S. Khi đó AM', BN', CP' đồng quy tại một điểm D và ta gọi D là điểm Blaikie của d và S đối với tam giác ABC.

Chứng minh.



Gọi D là giao điểm AM' và BN'. Áp dụng định lý Menelaus, ta có:

Xét $\Delta PBN'$ với cát tuyến ADM: $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}}.\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DN'}}.\dfrac{\overline{M'N'}}{\overline{M'P}} = 1$

Xét ΔMBP với cát tuyến CAN: $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CB}}.\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}}.\dfrac{\overline{NP}}{\overline{NM}} = 1$

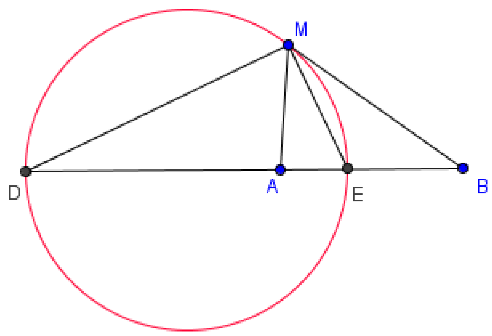
Nhân theo vế 2 đẳng thức trên, chú ý rằng $\overline{M'N'} = \overline{NM}$, ta có $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DN'}}.\dfrac{\overline{NP}}{\overline{M'P}}.\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CB}} = 1$

Lại có $\overline{NP} = \overline{P'N'}, \overline{M'P} = \overline{P'M} \Rightarrow \dfrac{\overline{DB}}{\overline{DN'}}.\dfrac{\overline{P'N'}}{\overline{P'M}}.\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CB}} = 1 \Rightarrow D, C, P'$ thẳng hàng

$\Rightarrow AM', BN', CP'$ đồng quy tại D (đpcm)

Định lý 1.1.39 (Đường tròn Apollonius) Cho 2 điểm A, B cố định. Khi đó quỹ tích các điểm M sao cho $\dfrac{MA}{MB} = k \neq 1$ là một đường tròn cố định được gọi là đường tròn Apollnius của hai điểm A và B với tỉ số K.

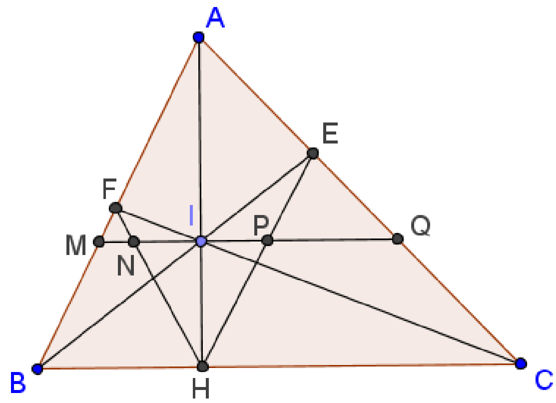
Chứng minh.



Lấy D, E trên đường thẳng AB sao cho $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = k \Rightarrow (DEAB) = -1$.
Thuận: Ta có $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{DA}{DB} = k \Rightarrow MD, ME$ là phân giác ngoài và trong của $\widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{DME} = 90^o \Rightarrow M$ nằm trên đường tròn đường kính DE.
Đảo: Lấy M' trên đường tròn đường kính $DE \Rightarrow \widehat{DM'E} = 90^o \Rightarrow M'E$ là phân giác trong của $\widehat{AMB}$ (vì $(DEAB) = -1$) $\Rightarrow$ đpcm.

Định lý 1.1.40 (Định lý Blanchet) Cho tam giác ABC có AH là đường cao ứng với cạnh BC. Gọi I là một điểm tùy ý thuộc đoạn AH. Các đoạn thẳng BI, CI cắt các cạnh tam giác tại E và F. Chứng minh rằng HA là phân giác của $\widehat{EHF}$.

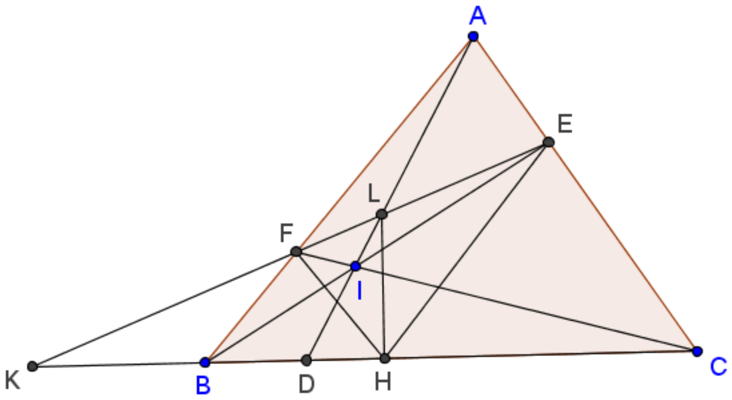
Chứng minh.



Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, HF, HE, AC lần lượt tại M, N, P, Q.
Áp dụng định lý Thales, ta có $\dfrac{IN}{IM} = \dfrac{CH}{CB}, \dfrac{IQ}{IP} = \dfrac{BC}{BH}, \dfrac{CH}{BH} = \dfrac{IQ}{BM}$. Nhân theo vế 3 đẳng thức trên, ta có $IN = IP \Rightarrow \Delta HNP$ cân tại $H \Rightarrow$ đpcm.

Định lý 1.1.41 (Định lý Blanchet mở rộng) Cho tam giác ABC, lấy D, E, F lần lượt thuộc các đoạn BC, CA, AB sao cho 3 đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại một điểm I.Gọi L là giao điểm của AD và EF.Gọi H là hình chiếu của L xuống BC. Khi đó HL là phân giác của $\widehat{EHF}$.

Chứng minh.



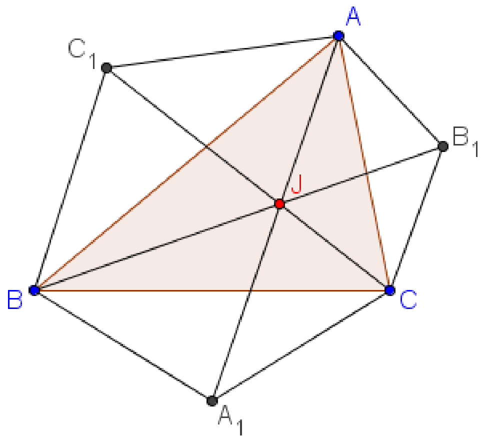
Áp dụng định lý Céva cho tam giác ABC, ta có $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \dfrac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với cát tuyến KEF, ta có $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{KC}} = \dfrac{\overline{EA}}{\overline{EC}} \cdot \dfrac{\overline{FB}}{\overline{FA}}$

$\Rightarrow (KDBC) = -1 \Rightarrow (KFLE) = -1$. Lại có $\widehat{LHK} = 90^o \Rightarrow HL$ là phân giác của $\widehat{FHE}$ (đpcm)

Định lý 1.1.42 (Định lý Jacobi) Cho ΔABC và các điểm A_1, B_1, C_1 trên mặt phẳng sao cho $\widehat{BAC_1} = \widehat{CAB_1} = \alpha, \widehat{ABC_1} = \widehat{CBA_1} = \beta, \widehat{BCA_1} = \widehat{ACB_1} = \gamma$. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm Jacobi J.

Chứng minh.



Ta có AA_1, BA_1, CA_1 đồng quy tại A_1. Áp dụng định lý Céva sin, ta có:

$$\frac{\sin\widehat{CBA_1}.\sin\widehat{BAA_1}.\sin\widehat{ACA_1}}{\sin\widehat{ABA_1}.\sin\widehat{CAA_1}.\sin\widehat{BCA_1}} = 1 \Rightarrow \frac{\sin\beta.\sin\widehat{BAA_1}.\sin(C+\gamma)}{\sin(B+\beta).\sin\widehat{CAA_1}.\sin\gamma} = 1$$

Xây dựng 2 đẳng thức tương tự cho B_1, C_1 rồi nhân theo vế 3 đẳng thức trên, ta có

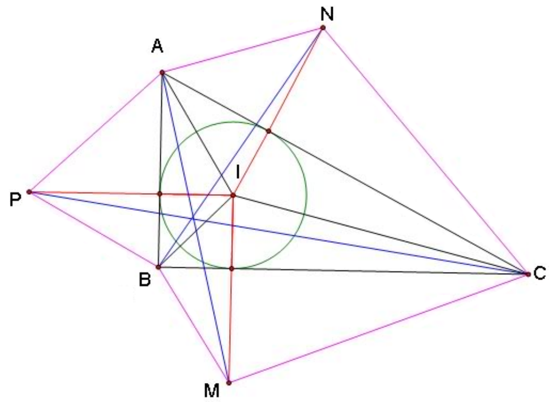
$$\frac{\sin\widehat{BAA_1}.\sin\widehat{ACC_1}.\sin\widehat{CBB_1}}{\sin\widehat{CAA_1}.\sin\widehat{BCC_1}.\sin\widehat{ABB_1}} = 1 \Rightarrow AA_1, BB_1, CC_1 \text{ đồng quy (đpcm)}$$

Định lý 1.1.43 (Định lý Kiepert) Dựng ra phía ngoài tam giác ABC các tam giác cân đồng dạng BCM, CAN, ABP (cân ở M, N, P). Khi ấy ta có AM, BN, CP đồng quy.

Chứng minh. Dễ thấy định lý Kiepert là hệ quả trực tiếp của định lý Jacobi khi $\alpha = \beta = \gamma$.

Định lý 1.1.44 (Định lý Kariya) Cho tam giác ABC có (I) là đường tròn nội tiếp. Ở phía ngoài tam giác lấy các điểm M, N, P sao cho $IM = IN = IP$ và IM, IN, IP tương ứng vuông góc BC, CA, AB. Khi đó ta có AM, BN, CP đồng quy.

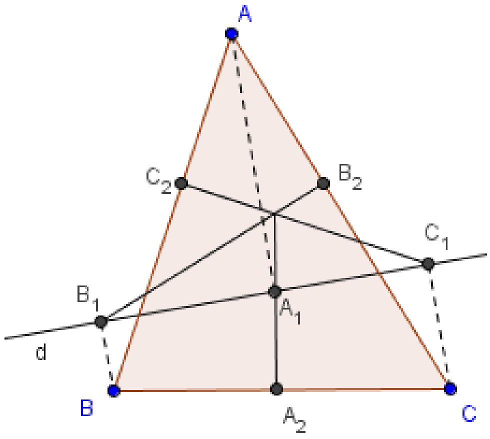
Chứng minh.



Ta thấy $\Delta BIM = \Delta BIP$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{IBM} = \widehat{IBP} \Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{ABP}$. Tương tự: $\widehat{BAP} = \widehat{CAN}, \widehat{ACN} = \widehat{BCM}$. Theo định lý Jacobi ta có đpcm.

Định lý 1.1.45 (Cực trực giao (khái niệm mở rộng của trực tâm tam giác)) Cho tam giác ABC; d là một đường thẳng bất kì trong mặt phẳng. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên d. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là hình chiếu của A_1, B_1, C_1 trên BC, CA, AB. Khi đó A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy tại một điểm gọi là cực trực giao của đường thẳng d đối với tam giác ABC.

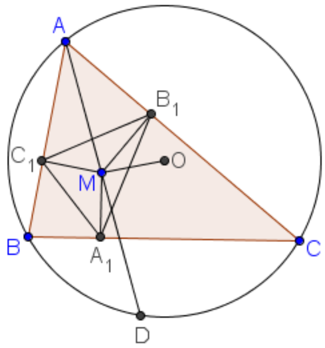
Chứng minh.



Áp dụng định lý Carnot, ta có:
A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy
$\Leftrightarrow (A_2B^2 - A_2C^2) + (B_2C^2 - B_2A^2) + (C_2A^2 - C_2B^2) = 0$
$\Leftrightarrow (A_1B^2 - A_1C^2) + (B_1C^2 - B_1A^2) + (C_1A^2 - C_1B^2) = 0$
$\Leftrightarrow (A_1B^2 - C_1B^2) + (B_1C^2 - A_1C^2) + (C_1A^2 - B_1A^2) = 0$
$\Leftrightarrow (A_1B_1^2 - C_1B_1^2) + (B_1C_1^2 - A_1C_1^2) + (C_1A_1^2 - B_1A_1^2) = 0$ (hiển nhiên đúng)
Trực tâm là trường hợp riêng của cực trực giao khi d trùng với một trong ba cạnh của ΔABC.

Định lý 1.1.46 (Khái niệm tam giác hình chiếu, công thức Euler về diện tích tam giác hình chiếu) Cho ΔABC nội tiếp trong $(O; R)$, M là điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. $\Delta A_1B_1C_1$ được gọi là tam giác hình chiếu của M đối với ΔABC, ta có $S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right) S_{ABC}$, trong đó $d = MO$.

Chứng minh.



Gọi D là giao điểm của AM với $(O), D \neq A$. Ta thấy $\widehat{MC_1A_1} = \widehat{MBA_1}$ và $\widehat{MC_1B_1} = \widehat{MAB_1} = \widehat{DBC}$ nên $\widehat{A_1C_1B_1} = \widehat{MBD}$. Áp dụng định lý sin cho tam giác MBD, ta có $\dfrac{MB}{\sin \widehat{ADB}} = \dfrac{MD}{\sin \widehat{MBD}}$. Do đó:

$S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2}.B_1C_1.C_1A_1.\sin \widehat{A_1C_1B_1} = \dfrac{1}{2}MA.\sin A.MB.\sin B.\sin \widehat{MBD} = \dfrac{1}{2}MA.MD.\sin A.\sin B.$ s

Mặt khác, $MA.MD = P_{M/(O)} = R^2 - OM^2$ và $\sin A.\sin B.\sin C = \dfrac{abc}{8R^3} = \dfrac{S_{ABC}}{2R^2}$.

Từ đó suy ra đpcm.

Định lý 1.1.47 (Khái niệm hai điểm liên hợp đẳng giác) Cho tam giác ABC. M là một điểm nằm trong tam giác.

1. Khi đó các đường thẳng đối xứng với AM, BM, CM qua tia phân giác đồng quy tại M'. M' được gọi là điểm liên hợp đẳng giác của M trong tam giác ABC.

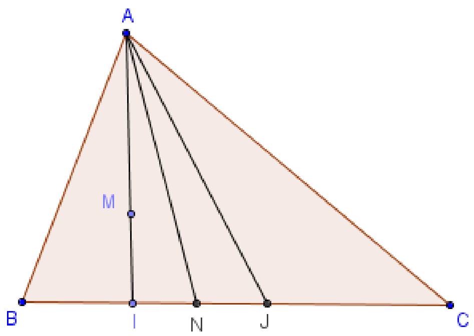
2. Lần lượt đặt D, E, F và D', E', F' là chân các đường cao hạ từ M và M' xuông BC, AC, AB.

a. Khi đó D, E, F, D', E', F' cùng thuộc một đường tròn tâm O. Và O là trung điểm của M và M'.

b. Khi đó cũng có $AM' \perp EF, BM' \perp FD, CM' \perp DE; AM \perp E'F', BM \perp F'D', CM \perp D'E'$.

3. $\dfrac{AM.AM'}{AB.AC} + \dfrac{BM.BM'}{BC.BA} + \dfrac{CM.CM'}{CA.CB} = 1$.

Chứng minh. 1.



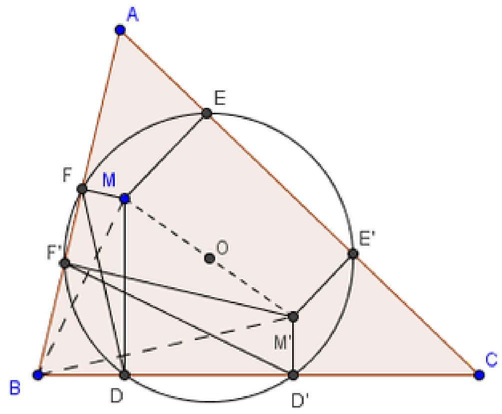
$\dfrac{BI}{CJ} = \dfrac{S_{ABI}}{S_{ACJ}} = \dfrac{AB.AI}{AC.AJ}; \dfrac{BJ}{CI} = \dfrac{S_{ABJ}}{S_{ACI}} = \dfrac{AB.AJ}{AC.AI}$ (vì $\widehat{BAI} = \widehat{CAJ}, \widehat{BAJ} = \widehat{CAI}$)

$\Rightarrow \dfrac{IB}{IC}.\dfrac{JB}{JC} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$. Ta có 2 đẳng thức tương tự, kết hợp với định lý Céva ta có đpcm.

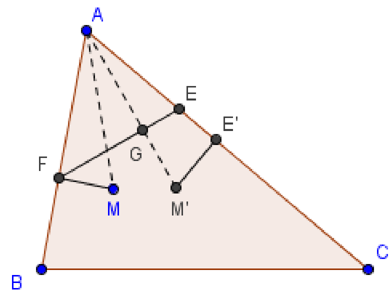
Một cách chứng minh khác xem bài tập 28, chương 1, SBT hình học 11 nâng cao.

2.

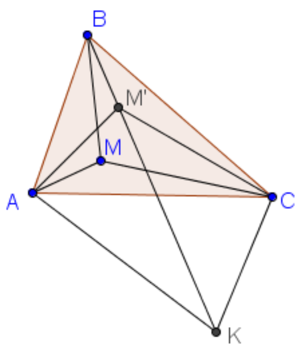
a.



$(BA, BM) \equiv (BM', BC) \Leftrightarrow (DF, DM) \equiv (F'M', F'D') \Leftrightarrow (DF, DM) + \dfrac{\pi}{2} \equiv (F'M', F'D') + \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi}$
$\Leftrightarrow (DF, DM) + (DM, DD') \equiv (F'M', F'D') + (F'F, F'M') \pmod{\pi}$
$\Leftrightarrow (DF, DD') \equiv (F'F, F'D) \pmod{\pi}$
$\Rightarrow FF'DD'$ nội tiếp. Dễ thấy tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác này chính là trung điểm O của MM'. Tương tự, ta suy ra 6 điểm D, D', E, E', F, F' cùng nằm trên một đường tròn tâm O.
b.



$\widehat{MAF} = \widehat{M'AE}, \widehat{AMF} = \widehat{AEF} \Rightarrow \Delta AMF \sim \Delta AEG \Rightarrow \widehat{AGE} = \widehat{AFM} = 90^o$. Tương tự, ta suy ra đpcm. 3.

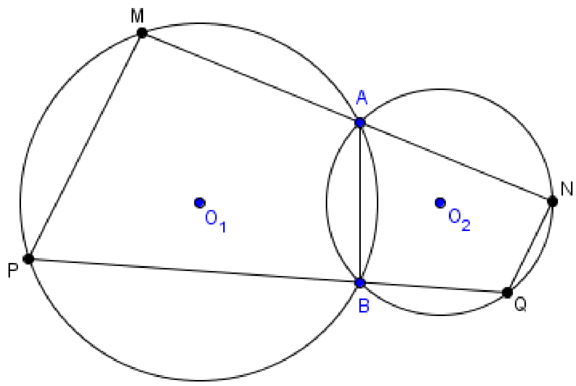


Trên tia BM', lấy điểm K sao cho $\widehat{BCK} = \widehat{BMA}$. $\widehat{BMA} > \widehat{BCA} \Rightarrow K$ nằm ngoài ΔABC.

Có $\widehat{MBA} = \widehat{CBK} \Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta KBC \Rightarrow \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{BM}{BC} = \dfrac{AM}{CK}$. Ta có $\widehat{ABK} = \widehat{MBC}, \dfrac{AB}{BK} = \dfrac{BM}{BC}$
$\Rightarrow \Delta ABK \sim \Delta MBC \Rightarrow \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{BK}{BC} = \dfrac{AK}{CM}$. Mặt khác, $\widehat{CKM'} = \widehat{MAB} = \widehat{M'AC} \Rightarrow$ A, M', C, K đồng viên.
Áp dụng định lý Ptolemy, ta có $AC.M'K = AM'.CK + CM'.AK \Rightarrow AC(BK - BM') = AM'.CK + CM'.AK$. Lại có $CK = \dfrac{AM.BC}{BM}, AK = \dfrac{AB.CM}{BM}, BK = \dfrac{AB.BC}{BM}$
$\Rightarrow AC\left(\dfrac{AB.BC}{BM} - BM'\right) = \dfrac{AM'.AM.BC}{BM} + \dfrac{CM'.AB.CM}{BM}$. Từ đó suy ra đpcm.

Định lý 1.1.48 (Định lý Reim) Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ cắt nhau tại A, B. Một đường thẳng qua A cắt $(O_1), (O_2)$ tại M, N; một đường thẳng qua B cắt $(O_1), (O_2)$ tại P, Q. Khi đó $MP//NQ$.

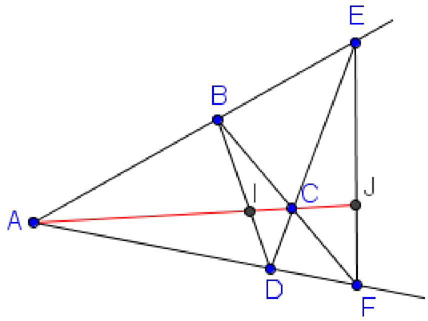
Chứng minh.
Chứng minh:



$(MP, MN) \equiv (MP, MA) \equiv (BP, BA) \equiv (NQ, NA) \equiv (NQ, NM) \pmod{\pi} \Rightarrow$ đpcm.

Định lý 1.1.49 (Khái niệm tứ giác toàn phần) Một tứ giác toàn phần là một hình được tạo nên bởi bốn đường thẳng, từng đôi một cắt nhau nhưng không có ba đường nào đồng qui. Một hình tứ giác toàn phần có 4 cạnh là 4 đường thẳng đã cho, có 6 đỉnh là 6 giao điểm của chúng và 3 đường chéo là 3 đoạn đi qua đỉnh đối diện (chú ý hai đỉnh này không cùng thuộc một cạnh). Chúng ta có một kết quả cơ bản và thú vị về tứ giác này như sau: Trong hình tứ giác toàn phần cặp đỉnh đối diện nằm trên một đường chéo và cặp giao điểm của đường chéo đó với hai đường chéo còn lại lập thành một hàng điểm điều hòa.

Chứng minh.



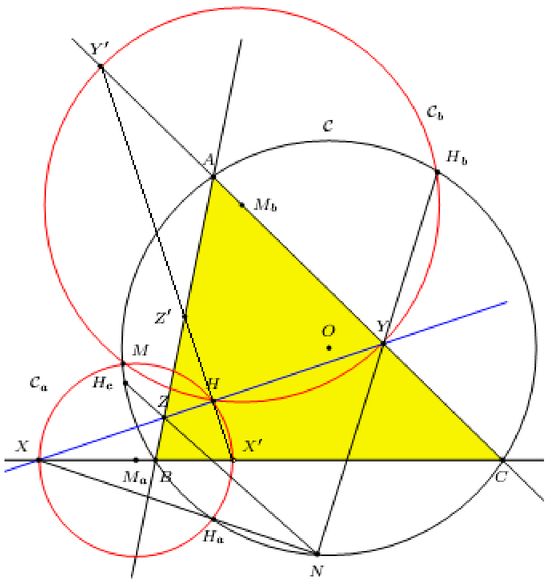
Kí hiệu như hình vẽ. Áp dụng định lý Menelaus, ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IC}}\cdot\dfrac{\overline{DC}}{\overline{DE}}\cdot\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BA}}=1\\[2ex]\dfrac{\overline{JA}}{\overline{JC}}\cdot\dfrac{\overline{FC}}{\overline{FB}}\cdot\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EA}}=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IC}}:\dfrac{\overline{JA}}{\overline{JC}}\right)\cdot\dfrac{\overline{DC}}{\overline{DE}}\cdot\dfrac{\overline{FB}}{\overline{FC}}\cdot\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=-1.$$

Mặt khác, ta có $\dfrac{\overline{FB}}{\overline{FC}}\cdot\dfrac{\overline{DC}}{\overline{DE}}\cdot\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}=1$ (ΔBCE với cát tuyến ADF). Do đó $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IC}}:\dfrac{\overline{JA}}{\overline{JC}}=-1\Rightarrow A,C,I,J$ là hàng điểm điều hòa.

Định lý 1.1.50 (Đường thẳng Droz–Farny) Cho hai đường thẳng bất kì vuông góc với nhau tại trực tâm của tam giác ABC. Chúng tương ứng cắt các cạnh BC, AC, AB tại $X, X'; Y, Y'; Z, Z'$. Khi đó ta có M_a, M_b, M_c tương ứng là các trung điểm của XX', YY', ZZ' thẳng hàng.

Chứng minh.

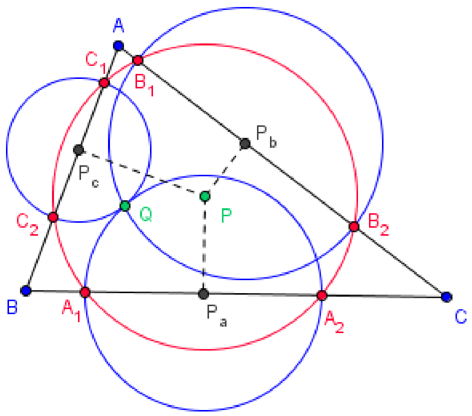


Đặt (C) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. C_a là đường tròn ngoại tiếp HXX' và H_a là điểm đối xứng với H qua BC. Tương tự với các đường tròn khác.
$\Rightarrow C_a, C_b, C_c$ có tâm lần lượt là M_a, M_b, M_c. XX' là đường kính của đường tròn C_a,

H_a nằm trên đường tròn $C_a \Rightarrow H_a$ là giao của (C) và C_a và $HH_a \perp BC$.
Áp dụng định lý Collings với đường thẳng XYZ đi qua H, ta có H_aX, H_bY, H_cZ đồng quy tại N trên C. Áp dụng định lý Miquel cho tam giác XNY với các điểm $H_a, H_b, H \Rightarrow (C), C_a, C_b$ cùng đi qua M. Tương tự C_c cũng đi qua M. Như vậy C_a, C_b, C_c cùng đi qua H và M suy ra tâm của chúng thẳng hàng.

Định lý 1.1.51 (Đường tròn Droz–Farny) Cho điểm P bất kì và tam giác ABC. Điểm Q là điểm liên hợp đẳng giác với P đối với tam giác ABC. Chân các đường vuông góc với các cạnh BC, AC, AB của P là P_a, P_b, P_c. Lấy P_a làm tâm vẽ đường tròn đi qua Q cắt BC tại A_1, A_2; B_1, B_2, C_1, C_2 được định nghĩa tương tự. Khi đó 6 điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ cùng nằm trên một đường tròn tâm P.

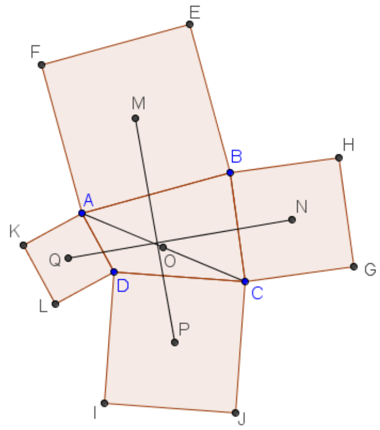
Chứng minh.



Gọi O là trung điểm PQ. Ta đã biết O cách đều P_a, P_b, P_c. Áp dụng công thức trung tuyến, ta có:
$PC_1^2 = PP_C^2 + P_CC_1^2 = PP_C^2 + QP_C^2 = \dfrac{PQ^2}{2} + 2P_CO^2$, Tương tự, ta suy ra đpcm.

Định lý 1.1.52 (Định lý Van Aubel về tứ giác và các hình vuông dựng trên cạnh) Về phía ngoài tứ giác $ABCD$ ta dựng các hình vuông $ABEF, BCGH, CDIJ, DAKL$ với các tâm tương ứng là 4M, N, P, Q.Khi đó ta có MP và NQ vuông góc và bằng nhau.

Chứng minh.



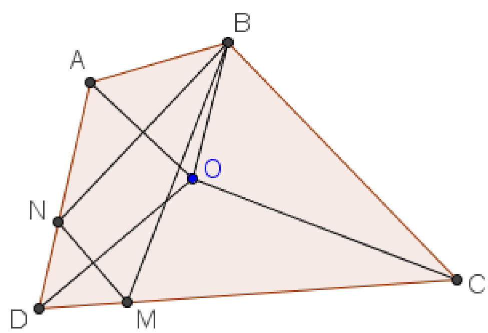
Gọi O là trung điểm đoạn AC. Ta thấy $Z\left(C, \sqrt{2}, 45^o\right) : N \to B; Z\left(A, \frac{1}{\sqrt{2}}, 45^o\right) :$ $B \to M$. Do đó $F = Z\left(C, \sqrt{2}, 45^o\right) \circ Z\left(A, \frac{1}{\sqrt{2}}, 45^o\right) : N \to M$. Mặt khác, F là phép đồng dạng thuận, có góc quay bằng 90^o, tỉ số 1 và có O là điểm bất động nên F là phép quay tâm O, góc quay 90^o. Lại có $F(N) = M, F(Q) = P \Rightarrow$ đpcm.

Định lý 1.1.53 (Hệ thức Van Aubel) Cho ΔABC và một điểm S nằm trong tam giác, 3 đường AD, BE, CF đồng quy tại S (D, E, F tương ứng nằm trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác). Khi đó ta có hệ thức $\frac{\overline{AS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}$.

Chứng minh. Áp dụng định lý Gergonne–Euler cho điểm A với ΔABC, ta có $\frac{\overline{AD}}{\overline{SD}} + \frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} + \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{SD}} - 1 = \frac{\overline{AS}}{\overline{SD}}$ (đpcm)

Định lý 1.1.54 (Định lý Pithot) Tứ giác lồi $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp khi và chỉ khi: $AB + CD = BC + DA$.

Chứng minh.

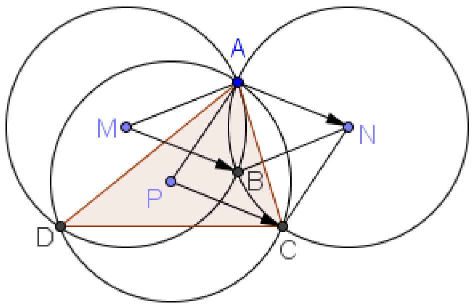


Thuận: Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp $\Rightarrow AB + CD = BC + DA$. (dễ chứng minh)
Đảo: $AB + CD = BC + DA \Rightarrow$ tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp.
Không giảm tổng quát, giả sử $AB \leq AD \Rightarrow BC \leq CD$. Khi đó tồn tại M, N trên

CD, DA sao cho $AN = AB, CM = CB$. Suy ra $DN = DM$.
Do đó các đường phân giác của các góc tại đỉnh A, D, C sẽ là ba đường trung trực của tam giác BMN nên chúng đồng quy tại một điểm O.
Dễ thấy O cách đều 4 cạnh tứ giác nên ta có điều cần chứng minh.

Định lý 1.1.55 (Định lý Johnson) Cho ba đường tròn có cùng bán kính R với tâm lần lượt là M, N, P và cùng đi qua một điểm A. Khi ấy ba giao điểm khác A của ba đường tròn ấy cùng nằm trên một đường tròn có bán kính là R.

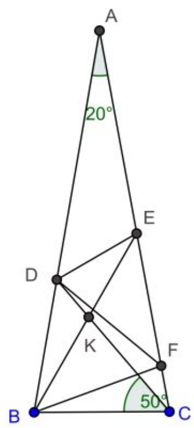
Chứng minh.



Kí hiệu các giao điểm như hình vẽ. Dễ thấy các tứ giác $AMBN, APCN$ là hình thoi, suy ra $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{PC}$
$(= \overrightarrow{AN}) \Rightarrow MPCB$ là hình bình hành $\Rightarrow M$ và C, P và B đối xứng với nhau qua trung điểm O của MC. Tương tự, ta có D và N đối xứng với nhau qua O. Do đó phép đối xứng tâm O biến $(MNP) \to (CBD)$
$\Rightarrow$ đpcm.

Định lý 1.1.56 (Bài toán Langley) Cho ΔABC cân tại A có góc ở đỉnh bằng 20^o. Trên các cạnh AB, AC lấy D, E sao cho $\widehat{BCD} = 50^o, \widehat{CBE} = 60^o$. Tính góc $\widehat{BED}$.

Chứng minh.

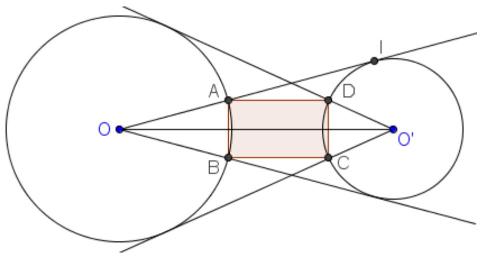


Đặt $\widehat{BED} = x$, trên cạnh AC, lấy điểm F sao cho $BF = BC$.
Mặt khác tam giác BDC cân tại (vì $\widehat{BCD} = \widehat{BDC} = 50^o$) $\Rightarrow BD = BC \Rightarrow BD =$

BF.
Ta tính được $\widehat{DBF} = 60^o \Rightarrow \Delta DBF$ đều $\Rightarrow DF = BF$.
ΔBFE cân tại F ($\widehat{BEF} = \widehat{BFE} = 40^o$) $\Rightarrow EF = BF$
$\Rightarrow DF = EF \Rightarrow \Delta DFE$ cân tại $F \Rightarrow x + 40^o = \dfrac{180^o - 40^o}{2} \Rightarrow x = 30^o$

Định lý 1.1.57 (Định lý Eyeball) Cho hai đường tròn (O) và (O') ngoài nhau. 2 tiếp tuyến kẻ từ O đến (O') cắt (O) tại A và B. 2 tiếp tuyến kẻ từ O' đến (O) cắt (O') tại C và D. Khi đó $ABCD$ là hình chữ nhật.

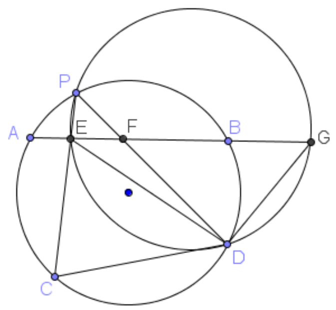
Chứng minh.



Đặt bán kính của (O) và (O') lần lượt là R và R'. Ta có $AB = 2R\sin\widehat{IOO'} = \dfrac{2R.R'}{OO'}$.
Tương tự, ta suy ra $AB = CD$.
Mặt khác, ta có A và B, C và D đối xứng với nhau qua OO'. Suy ra $ABCD$ là hình chữ nhật (đpcm)

Định lý 1.1.58 (Bổ đề Haruki) Cho AB và CD là hai dây cung không cắt nhau của cùng một đường tròn và P là một điểm bất kì trên cung AB không chứa CD của đường tròn ấy. Gọi E và F lần lượt là giao điểm của PC, PD với AB. Khi đó giá trị biểu thức $\dfrac{AE.BF}{EF}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm P.

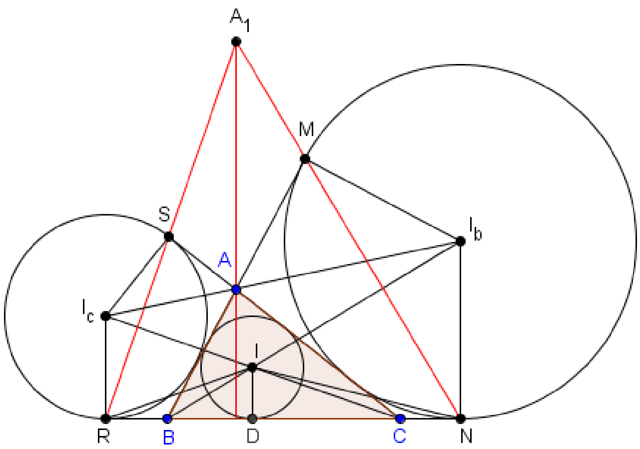
Chứng minh.



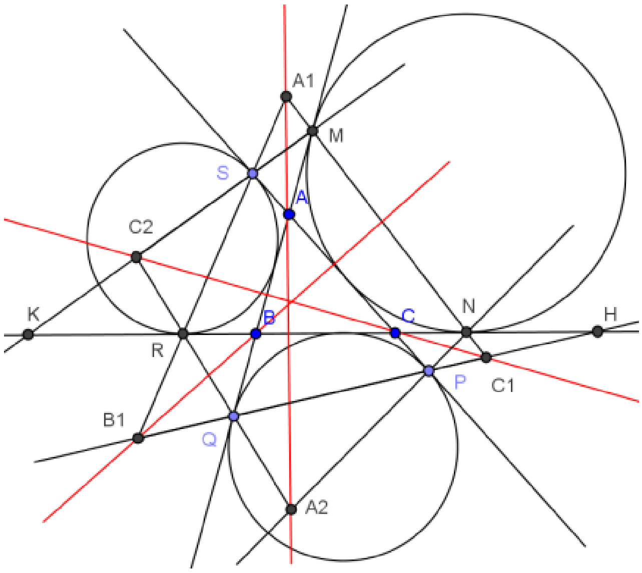
Gọi G là giao điểm khác E của (PDE) với AB. Ta có $\widehat{AGD} = \widehat{CPD}$ không đổi $\Rightarrow G$ cố định $\Rightarrow BG$ không đổi. Mặt khác: $AF.FB = PF.FD = EF.FG \Rightarrow (AE + EF)FB = EF(FB + BG)$
$\Rightarrow AE.FB = EF.BG \Rightarrow \dfrac{AE.BF}{EF} = BG$ không đổi (đpcm)

Định lý 1.1.59 (Định lý Paul Yiu về đường tròn bàng tiếp) Cho ΔABC, các đường tròn bàng tiếp trong các góc tiếp xúc với các cạnh như hình vẽ. Các đường thẳng MN, PQ, RS cắt nhau đôi một tại A_1, B_1, C_1. Khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại trực tâm H của tam giác ABC.

Chứng minh.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, D là tiếp điểm của (I) với BC. Ta sẽ chứng minh $AA_1 \perp BC$.
Ta biết rằng: $CR = p, CD = p - c$ nên $RD = c$. Suy ra $RB = RD - BD = c - (p - b) = p - a$. Hoàn toàn tương tự thì $ND = bvNC = p - a$. Ta thấy
$RI^2 - RC^2 + AC^2 - AB^2 + NB^2 - NI^2$
$= (RI^2 - NI^2) + b^2 - c^2 = (DR^2 - DN^2) + b^2 - c^2 = c^2 - b^2 + b^2 - c^2 = 0$
Từ đó theo định lí Carnot thì đường thẳng đi qua A vuông góc với BC, đường thẳng đi qua A vuông góc với CI và đường thẳng đi qua N vuông góc với BI đồng quy.
Do đó AA_1 vuông góc với BC, hay AA_1 đi qua H.
Hoàn toàn tương tự, ta có BB_1, CC_1 đi qua H. Như vậy ta có đpcm.
Ta có kết quả sau: Các đường thẳng NP, RQ, MS cắt nhau đôi một tại A_2, B_2, C_2. Khi đó các bộ 3 điểm $(A, A_1, A_2), (B, B_1, B_2), (C, C_1, C_2)$ thẳng hàng và các đường thẳng qua chúng đồng quy.
Chứng minh:



Gọi H, K là giao điểm của PQ và MS với BC. Áp dụng định lí Menelaus cho ΔMBK với cát tuyến C_2RQ) và ΔBMN với cát tuyến QC_1H ta có: $\frac{\overline{QB}}{\overline{QM}} \cdot \frac{\overline{C_1M}}{\overline{C_1N}} \cdot \frac{\overline{HN}}{\overline{HB}} = 1$; $\frac{\overline{C_2K}}{\overline{C_2M}} \cdot \frac{\overline{QM}}{\overline{QB}} \cdot \frac{\overline{RB}}{\overline{RK}} = 1$. Nhân theo vế 2 đẳng thức trên, suy ra $\frac{\overline{C_1M}}{\overline{C_1N}} \cdot \frac{\overline{C_2K}}{\overline{C_2M}} \cdot \frac{\overline{RB}}{\overline{RK}} \cdot \frac{\overline{HN}}{\overline{HB}} = 1$ (1). Áp dụng định lí Menelaus cho ΔABC với cát tuyến MSK và QPH, ta có $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} \cdot \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = 1 = \frac{\overline{HC}}{\overline{HB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}$.

Mặt khác, ta tính được $MA = BQ = p - c, SA = CP = p - b$

$\Rightarrow \frac{\overline{SC}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}, \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{QB}}{\overline{QA}} \Rightarrow \frac{\overline{KB}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{HC}}{\overline{HB}}$

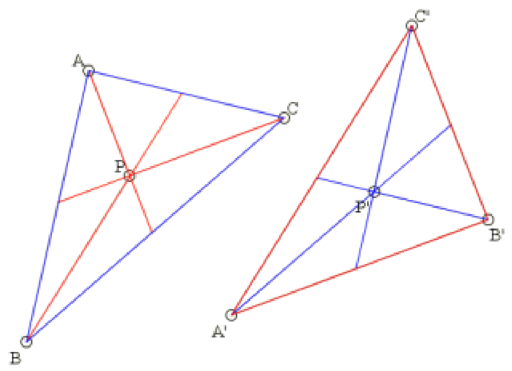
$\Rightarrow \overline{KB}(\overline{HC} + \overline{CB}) = \overline{HC}(\overline{KB} + \overline{BC}) \Rightarrow \overline{HC} = \overline{BK} \Rightarrow \overline{HB} = \overline{CK}, \overline{HN} = \overline{RK}, \frac{\overline{RB}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{CN}}{\overline{CK}}$

(vì $\overline{NC} = \overline{BR} = \pm(p - a)$)

Thay vào (1), ta có $\frac{\overline{C_2K}}{\overline{C_2M}} \cdot \frac{\overline{C_1M}}{\overline{C_1N}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{CK}} = 1 \Rightarrow C, C_1, C_2$ thẳng hàng. Hai bộ 3 điểm còn lại chứng minh tương tự.

Định lý 1.1.60 (Định lý Maxwell) Cho ΔABC và một điểm P, các cạnh của $\Delta A'B'C'$ song song với các đường thẳng đi qua một đỉnh ΔABC và điểm P. Qua A', B', C' kẻ các đường thẳng song song với các cạnh của ΔABC. Khi đó ta có các đường thẳng này đồng quy tại một điểm P'.

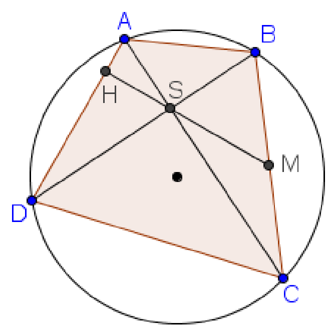
Chứng minh.



Dễ kiểm tra được các góc bằng nhau nên áp dụng định lý Céva sin thuận và đảo, ta có đpcm. Trường hợp tương tự cũng xảy ra nếu đổi 'song song' thành 'vuông góc'.

Định lý 1.1.61 (Định lý Brahmagupta về tứ giác nội tiếp có hai đường chéo vuông góc) Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có AC vuông góc với BD tại S. Khi đó đoạn nối trung điểm một cạnh với S sẽ vuông góc với cạnh đối diện.

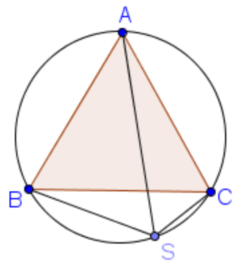
Chứng minh.



Ta chứng minh đại diện,chẳng hạn gọi M là trung điểm BC ta cần chứng minh MS vuông góc với AD. Thật vậy, MS cắt AD ở H. Ta có $\widehat{BSC} = 90^o$, M là trung điểm BC nên $MS = MC \Rightarrow$ tam giác SMC cân tại M.
$\Rightarrow \widehat{ASH} = \widehat{MSC} = \widehat{MCS} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$. Từ đây dễ suy ra đpcm.

Định lý 1.1.62 (Định lý Schooten) Cho tam giác đều ABC nội tiếp (O). Khi đó với mọi điểm S nằm trên (O) thì một trong 3 đoạn SA, SB, SC có một đoạn có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn còn lại.

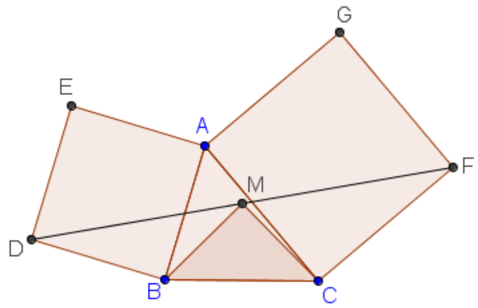
Chứng minh.



Gọi độ dài cạnh tam giác đều là a. Không giảm tính tổng quát, giả sử S nằm trên cung nhỏ BC. Áp dụng định lý Ptolemy, ta có $BS.AC + CS.AB = AS.BC \Rightarrow a.BS + a.CS = a.AS \Rightarrow BS + CS = AS$ (đpcm)

Định lý 1.1.63 (Định lý Bottema) Cho 2 điểm B, C cố định, điểm A di động trong nửa mặt phẳng bờ BC. Về phía ngoài tam giác ABC, ta dựng hai hình vuông $ABDE, ACFG$. Gọi M là trung điểm DF. Khi đó trí điểm M không phụ thuộc vào vị trí điểm A và tam giác MBC vuông cân tại M.

Chứng minh.



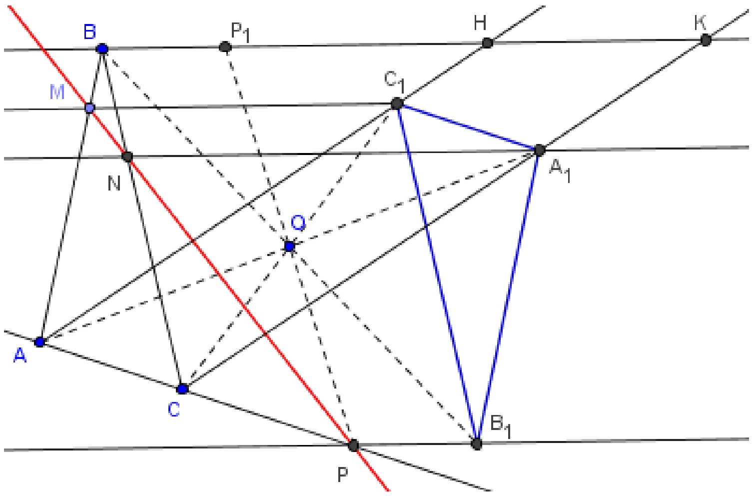
Ta có $Q\left(C, \frac{\pi}{2}\right) : F \to A$ và $Q\left(B, \frac{\pi}{2}\right) : A \to D$. Do đó $F = Q\left(C, \frac{\pi}{2}\right) \circ Q\left(B, \frac{\pi}{2}\right) : F \to D$. Mặt khác, F phép quay góc π nên F là phép đối xứng tâm có tâm là trung điểm DF. Gọi Bx, Cy là 2 đường thẳng được xác định bởi $(Cy, CB) \equiv (BC, By) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$, $D(\Delta)$ là phép đối xứng trục Δ thì ta có
$F = Q\left(C, \frac{\pi}{2}\right) \circ Q\left(B, \frac{\pi}{2}\right) = (D(Cy) \circ D(CB)) \circ (D(BC) \circ D(Bx)) = D(Cy) \circ D(Bx)$ nên M là giao điểm của Bx và Cy hay MBC là tam giác vuông cân (đpcm)

Định lý 1.1.64 (Định lý Pompeiu) Cho tam giác ABC đều, và một điểm D trên mặt phẳng tam giác. Khi đó luôn tồn tại một tam giác (có thể suy biến) với độ dài các cạnh là DA, DB, DC.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức Ptolemy, ta suy ra 3 BĐT sau: $DA + DB \geq DC, DB + DC \geq DA, DC + DA \geq DB$. Do đó tồn tại một tam giác với độ dài 3 cạnh là DA, DB, DC, kí hiệu là $\mathfrak{T}(DA, DB, DC)$. Nếu một (và chỉ một) trong 3 bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức thì tam giác $\mathfrak{T}$ suy biến thành một đoạn thẳng. (đpcm)

Định lý 1.1.65 (Định lý Zaslavsky) Cho tam giác ABC và điểm O. Tam giác $A_1B_1C_1$ là ảnh của tam giác ABC qua phép đối xứng tâm O. Từ A_1, B_1, C_1 kẻ các đường thẳng song song với nhau cắt BC, CA, AB tại N, P, M. Khi đó M, N, P thẳng hàng.

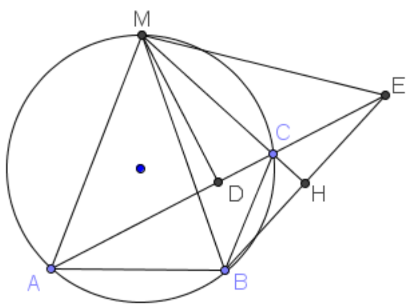
Chứng minh.



Từ B kẻ đường thẳng song song với C_1M cắt AC_1, CA_1, A_1C_1 tại H, K, P_1. Vì BK, A_1C_1 là ảnh của B_1P, AC qua phép đối xứng tâm O nên P_1 là ảnh của P qua phép đối xứng tâm O, suy ra $\overrightarrow{P_1C_1} = -\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{P_1A_1} = -\overrightarrow{PA}$. Suy ra $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MA}} \cdot \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} \cdot \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NB}} = \dfrac{\overline{C_1H}}{\overline{C_1A}} \cdot \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} \cdot \dfrac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1K}} = -\dfrac{\overline{C_1H}}{\overline{A_1K}} \cdot \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = -\dfrac{\overline{C_1P_1}}{\overline{A_1P_1}} \cdot \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = 1$. Do đó M, N, P thẳng hàng (đpcm)

Định lý 1.1.66 (Định lý Archimedes) Cho đường tròn (O) và 2 điểm A,B cố định trên (O). M là trung điểm cung AB của (O), điểm C chuyển động tùy ý trên cung AB chứa M. Từ M kẻ $MD \perp AC$. Ta có $AD = BC + CD$.

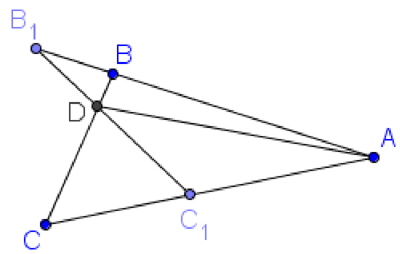
Chứng minh.



Lấy điểm E đối xứng với B qua MC. MC cắt BE tại H.
Ta có $\widehat{BCH} = \widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{BCE} = 2\widehat{MAB} \Rightarrow \widehat{ACB} + \widehat{BCE} = \widehat{AMB} + 2\widehat{MAB} = 180^o \Rightarrow A, C, D, E$ thẳng hàng. Có $ME = MB = MA \Rightarrow \Delta AME$ cân tại $M \Rightarrow D$ là trung điểm $AE \Rightarrow AD = DE = DC + CE = DC + CB$ (đpcm)

Định lý 1.1.67 (Định lý Urquhart) Cho 2 bộ 3 điểm thẳng ABB_1 và ACC_1, D là giao điểm BC và B_1C_1. Chứng minh rằng $AB + BD = AC_1 + C_1D \Leftrightarrow AB_1 + B_1D = AC + CD$.

Chứng minh.



Bổ đề: Với mọi ΔABC, ta có $a = p\left(1 - \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)$

Chứng minh: Áp dụng định lý sin, ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} \Rightarrow \frac{a}{p} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$\Rightarrow$ đpcm

Áp dụng bổ đề, ta có

$$AB + BD = AC_1 + C_1D \Leftrightarrow \tan\frac{\widehat{BAD}}{2}\tan\frac{\widehat{ADB}}{2} = \tan\frac{\widehat{CAD}}{2}\tan\frac{\widehat{C_1DA}}{2} \Leftrightarrow \frac{\tan\frac{\widehat{CAD}}{2}}{\tan\frac{\widehat{BAD}}{2}} = \frac{\tan\frac{\widehat{ADB}}{2}}{\tan\frac{\widehat{ADC_1}}{2}}$$

$$AB_1 + B_1D = AC + CD \Leftrightarrow \tan\frac{\widehat{BAD}}{2}\tan\frac{\widehat{ADB_1}}{2} = \tan\frac{\widehat{CAD}}{2}\tan\frac{\widehat{CDA}}{2} \Leftrightarrow \frac{\tan\frac{\widehat{CAD}}{2}}{\tan\frac{\widehat{BAD}}{2}} =$$

$$\frac{\tan\dfrac{\widehat{ADB_1}}{2}}{\tan\dfrac{\widehat{ADC}}{2}}$$

Mặt khác, $\widehat{ADB}+\widehat{ADC}=\widehat{ADC_1}+\widehat{ADB_1}=180^o \Rightarrow \dfrac{\tan\dfrac{\widehat{ADB}}{2}}{\tan\dfrac{\widehat{ADC_1}}{2}}=\dfrac{\tan\dfrac{\widehat{ADB_1}}{2}}{\tan\dfrac{\widehat{ADC}}{2}}$.

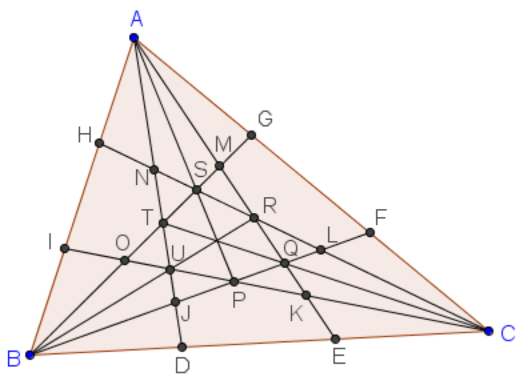
Suy ra đpcm.

Định lý 1.1.68 (Định lý Poncelet về bán kính đường tròn nội tiếp, bàng tiếp trong tam giác vuông) Cho tam giác ABC có r là bán kính nội tiếp; r_a, r_b, r_c là các bán kính bàng tiếp. Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $r_a = r + r_b + r_c$.

Chứng minh. $r_a = r + r_b + r_c \Leftrightarrow \dfrac{S}{p-a} = \dfrac{S}{p} + \dfrac{S}{p-b} + \dfrac{S}{p-c} \Leftrightarrow \dfrac{1}{p-a} - \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} \Leftrightarrow \dfrac{a}{p(p-a)} = \dfrac{a}{(p-b)(p-c)}$
$\Leftrightarrow p(p-a) = (p-b)(p-c) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ (đpcm)

Định lý 1.1.69 (Định lý Marion Walter) Cho tam giác ABC và D, E, F, G, H, I là các điểm chia 3 các cạnh, các giao điểm được xác định như hình vẽ. Ta có $S_{PQRSTU} = \dfrac{1}{10} S_{ABC}$.

Chứng minh.



Bổ đề: Cho ΔABC, các điểm N, M trên đường thẳng AB, AC sao cho $\overrightarrow{MA} = m\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{NA} = n\overrightarrow{NB}$. Gọi P là giao điểm BM và CN, ta có $\dfrac{\overline{PN}}{\overline{PC}} = \dfrac{m}{1-n}$

Chứng minh:

Gọi Q là giao điểm của AP và BC, áp dụng định lý Céva, ta có $\dfrac{\overline{QB}}{\overline{QC}} = \dfrac{-m}{n}$

Áp dụng định lý Van Aubel, ta có: $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{PN}} = \dfrac{\overline{CM}}{\overline{MA}} + \dfrac{\overline{CQ}}{\overline{QB}} = \dfrac{-1}{m} + \dfrac{n}{m} \Rightarrow$ đpcm

Áp dụng bổ đề nhiều lần, ta tính được

$S_{BIPFC} = \frac{7}{15}S_{ABC}, S_{AQF} = \frac{1}{6}S_{ABC}, S_{AHR} = \frac{2}{15}S_{ABC}, S_{HIOS} = \frac{5}{42}S_{ABC}, S_{OUT} = \frac{1}{70}S_{ABC}$

$\Rightarrow S_{PQRSTU} = \frac{1}{10}S_{ABC}$ (đpcm)

Cùng với giả thiết trên, ta có kết quả sau: Các bộ 3 điểm $(A, S, P), (B, U, R), (C, Q, T)$ thẳng hàng và các đường thẳng đi qua chúng đồng quy tại trọng tâm tam giác ABC.

Chứng minh:

Ta tính được $\frac{\overline{AG}}{\overline{AF}} = \frac{1}{2}, \frac{\overline{PF}}{\overline{PB}} = -\frac{2}{3}, \frac{\overline{SB}}{\overline{SG}} = -3 \Rightarrow \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}}.\frac{\overline{PF}}{\overline{PB}}.\frac{\overline{SB}}{\overline{SG}} = 1 \Rightarrow A, P, S$ thẳng hàng. Gọi X là trung điểm BC, ta có $\frac{\overline{XC}}{\overline{XB}} = -1, \frac{\overline{SB}}{\overline{SG}} = -3, \frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\overline{XC}}{\overline{XB}}.\frac{\overline{SB}}{\overline{SG}}.\frac{\overline{AG}}{\overline{AC}} = 1 \Rightarrow A, S, X$ thẳng hàng $\Rightarrow$ đường thẳng ASP là trung tuyến của ΔABC. Tương tự, ta suy ra đpcm.

Định lý 1.1.70 (Định lý Hansen) Cho tam giác ABC có r là bán kính nội tiếp; r_a, r_b, r_c là các bán kính bàng tiếp. Khi đó các khẳng định sau là tương đương:

1. ΔABC vuông.
2. $r + r_a + r_b + r_c = a + b + c$
3. $r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Chứng minh.

Ta có các bổ đề sau:

a. $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

b. $r_a = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

c. $\sum\sin^2 A = 2 + 2\prod\cos A$

d. $\sum\sin A = 4\prod\cos\frac{A}{2}$

e. $\sum\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = 1$

Các bổ đề trên tương đối đơn giản nên không nêu ra chứng minh ở đây.

Ta có:

$r + r_a + r_b + r_c = a + b + c \Leftrightarrow 4R\left(\prod\sin\frac{A}{2} + \sum\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right) = 2R\sum\sin A$

$\Leftrightarrow \prod\sin\frac{A}{2} + \sum\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = 2\prod\cos\frac{A}{2}$

Chia cả 2 vế cho $\prod\cos\frac{A}{2}$, đặt $x = \tan\frac{A}{2}, y = \tan\frac{B}{2}, z = \tan\frac{C}{2}$, ta có

$(2) \Leftrightarrow xyz + x + y + z = 2 = 1 + xy + yz + zx \Leftrightarrow (1 - x)(1 - y)(1 - z) = 0 \Leftrightarrow (1)$

$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow (4R)^2\left(\prod\sin^2\frac{A}{2} + \sum\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\right) = (2R)^2\left(\sum\sin^2 A\right)$

$\Leftrightarrow 4\left(\prod\sin^2\frac{A}{2} + \sum\sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{C}{2}\right) = 2\left(1 + \prod\cos A\right)$

$\Leftrightarrow 4\left(\prod \cos^2\frac{A}{2}\right)\left(\prod \tan^2\frac{A}{2}+\sum \tan^2\frac{A}{2}\right) = 2\left(1+\prod \cos A\right)$

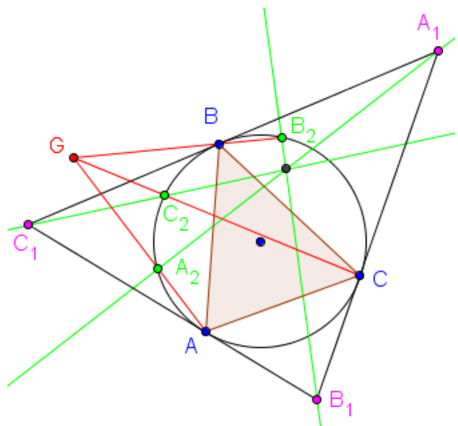
Chú ý rằng $\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{1+x^2}, \cos A = \frac{1-x^2}{1+x^2}$, ta có:

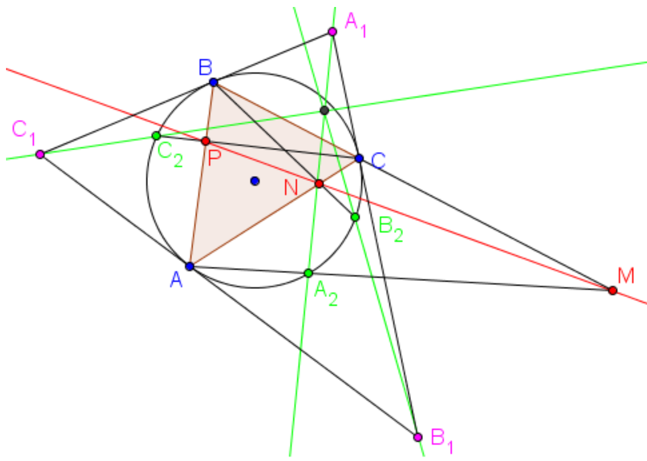
$(3) \Leftrightarrow \frac{2\left((xyz)^2+\sum x^2\right)}{\prod(1+x^2)} = 1+\prod\frac{1-x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow 2\left((xyz)^2+\sum x^2\right) = \prod\left(1+x^2\right)+\prod\left(1-x^2\right)$

$\Leftrightarrow (xyz)^2+\sum x^2 = 1+\sum(xy)^2 \Leftrightarrow (1-x^2)(1-y^2)(1-z^2) = 0$. Vì $x,y,z > 0$ nên $(3) \Leftrightarrow (1)$ (đpcm)

Định lý 1.1.71 (Định lý Steinbart suy rộng) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Các tiếp tuyến của đường tròn tại A, B, C giao nhau tại A_1, B_1, C_1. Trên (O) lấy các điểm A_2, B_2, C_2. Chứng minh rằng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy khi và chỉ khi AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy hoặc các giao điểm của AA_2, BB_2, CC_2 với 3 cạnh tam giác thẳng hàng.

Chứng minh.





Ta có $\frac{S_{[A_1BA_2]}}{S_{[A_1CA_2]}} = \frac{BA_2.BA_1.\sin\left(\overrightarrow{BA_2};\overrightarrow{BA_1}\right)}{CA_2.CA_1.\sin\left(\overrightarrow{CA_2};\overrightarrow{CA_1}\right)} = \frac{A_1B.A_1A_2.\sin\left(\overrightarrow{A_1B};\overrightarrow{A_1A_2}\right)}{A_1C.A_1A_2.\sin\left(\overrightarrow{A_1C};\overrightarrow{A_1A_2}\right)}$

$\Rightarrow \frac{BA_2.\sin\left(\overrightarrow{BA_2};\overrightarrow{BA_1}\right)}{CA_2.\sin\left(\overrightarrow{CA_2};\overrightarrow{CA_1}\right)} = \frac{\sin\left(\overrightarrow{A_1B};\overrightarrow{A_1A_2}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{A_1C};\overrightarrow{A_1A_2}\right)}$

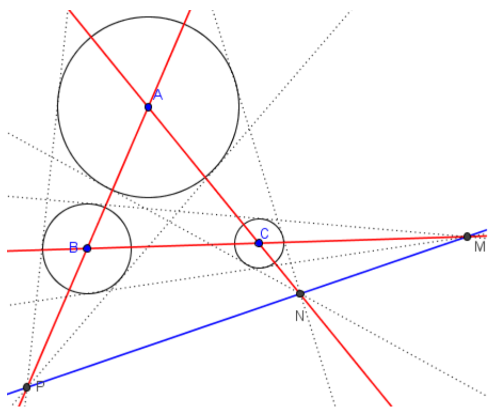
Áp dụng định lý sin, ta có $-\frac{BA_2}{CA_2} = \frac{\sin\left(\overrightarrow{AA_2};\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AA_2};\overrightarrow{AC}\right)} = \frac{\sin\left(\overrightarrow{BA_2};\overrightarrow{BA_1}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CA_2};\overrightarrow{CA_1}\right)}$.

Do đó $\frac{\sin\left(\overrightarrow{A_1B};\overrightarrow{A_1A_2}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{A_1C};\overrightarrow{A_1A_2}\right)} = -\left(\frac{\sin\left(\overrightarrow{AA_2};\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AA_2};\overrightarrow{AC}\right)}\right)^2$. Ta xây dựng được 2 đẳng thức tương tự, suy ra $\left(\frac{\sin\left(\overrightarrow{AA_2};\overrightarrow{AB}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{AA_2};\overrightarrow{AC}\right)}\frac{\sin\left(\overrightarrow{BB_2};\overrightarrow{BC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{BB_2};\overrightarrow{BA}\right)}\frac{\sin\left(\overrightarrow{CC_2};\overrightarrow{CA}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CC_2};\overrightarrow{CB}\right)}\right)^2 = -\frac{\sin\left(\overrightarrow{A_1B};\overrightarrow{A_1A_2}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{A_1C};\overrightarrow{A_1A_2}\right)}.\frac{\sin\left(C_1\right.}{\sin\left(C_1\right.}$

Đặt biểu thức trong ngoặc ở vế trái là E, biểu thức ở vế phải (không tính dấu - là F). Khi AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy hoặc các giao điểm của AA_2, BB_2, CC_2 với 3 cạnh tam giác thẳng hàng thì ta có $E = \pm 1 \Leftrightarrow F = -1 \Leftrightarrow A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2$ đồng quy (đpcm)

Định lý 1.1.72 Định lý Monge & d'Alembert 1 Cho 3 đường tròn $(A, R_1), (B, R_2), (C, R_3)$ có bán kính khác nhau và ngoài nhau. Tiếp tuyến chung ngoài của mỗi đường tròn giao nhau lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng

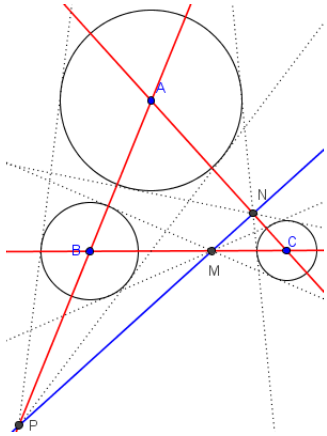
Chứng minh.



Vì M, N, P là tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (B) và (C), (C) và (A), (A) và (B) nên ta có $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{R_1}{R_2}, \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = \frac{R_2}{R_3}, \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} = \frac{R_3}{R_1}$. Nhân theo vế 3 đẳng thức trên và áp dụng định lý Menelaus, ta có đpcm.

Định lý 1.1.73 (Định lý Monge & d'Alembert 2) Cho 3 đường tròn $(A, R_1), (B, R_2), (C, R_3)$ có bán kính khác nhau và ngoài nhau. Tiếp tuyến chung trong của (A) và (C), (B) và (C) giao nhau lần lượt tại N, M; tiếp tuyến chung ngoài của (A) và (B) giao nhau tại (P).Chứng minh rằng M, N, P thẳng hàng.

Chứng minh.



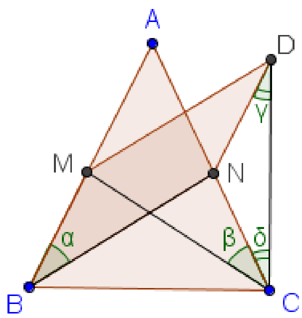
Cách chứng minh hoàn toàn tương tự với cách chứng minh định lý 1. Ngoài ra, ta còn suy ra rằng nếu cả 3 cặp là tiếp tuyến chung trong hoặc 1 cặp tiếp tuyến chung trong và 2 cặp tiếp tuyến chung ngoài thì AM, BN, CP đồng quy.

Định lý 1.1.74 (Định lý Steiner về bán kính các đường tròn) Trong tam giác bất kì ta có hệ thức sau $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

Chứng minh. $r_a + r_b + r_c = 4R + r \Leftrightarrow \dfrac{S}{p-a} + \dfrac{S}{p-b} + \dfrac{S}{p-c} = \dfrac{abc}{S} + \dfrac{S}{p} \Leftrightarrow$
$S^2\left(\dfrac{1}{p-a} + \dfrac{1}{p-b} + \dfrac{1}{p-c} - \dfrac{1}{p}\right) = abc$
$\Leftrightarrow p\left(\sum(p-a)(p-b)\right) - (p-a)(p-b)(p-c) = abc$ Khai triển vế trái và rút gọn ta có đpcm.

Định lý 1.1.75 (Định lý Steiner-Lehmus) Một tam giác có 2 đường phân giác trong bằng nhau là tam giác cân.

Chứng minh.

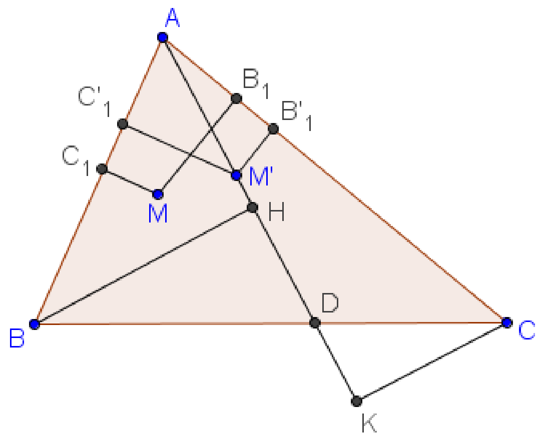


Giả sử ΔABC có 2 đường phân giác trong BN, CM bằng nhau. Dựng hình bình hành $BMDN$ và kí hiệu các góc $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ như hình vẽ. ΔCMD cân tại M nên $\alpha + \gamma = \delta$ (1) Nếu $\alpha > \beta$, ta xét hai tam giác BCN và CBM có BC chung, $BN = CM, \widehat{CBN} > \widehat{BCM} \Rightarrow CN > BM = ND \Rightarrow \gamma > \delta \Rightarrow \alpha + \gamma > +\delta$, mâu thuẫn với (1).

Tương tự, trường hợp $\alpha < \beta$ cũng không thể xảy ra. Do đó $\alpha = \beta$, suy ra đpcm.

Định lý 1.1.76 (Bất đẳng thức Erdös – Mordell) Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác (M không nằm trên biên của tam giác). Gọi d_a, d_b, d_c là khoảng cách từ M đến các cạnh tam giác; R_a, R_b, R_c là khoảng cách từ M đến các đỉnh tam giác. Khi đó ta có bất đẳng thức sau $R_a + R_b + R_c \geq 2\left(d_a + d_b + d_c\right)$

Chứng minh.



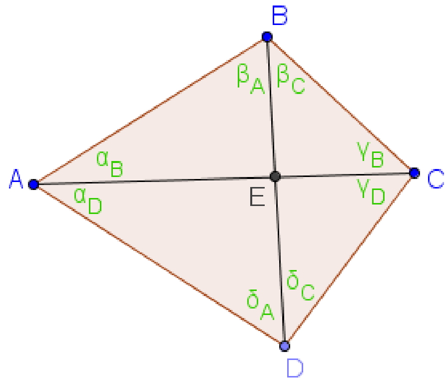
Gọi A_1, B_1, C_1 theo thứ tự là hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB. Lấy M' đối xứng với M qua phân giác trong của góc A, gọi B_1', C_1' là hình chiếu của M' trên AC, AB. Gọi D là giao điểm AM' và BC; H, K là hình chiếu của B, C trên AM'.

Ta có $a = BD + DC \geq BH + CK \Rightarrow a.M'A \geq BH.M'A + CK.M'A = 2S_{M'AB} + 2S_{M'CA} = c.M'C_1' + b.M'B_1'$. Vì M' và M đối xứng với nhau qua phân giác trong góc A nên $R_a = M'A, M'C_1' = MB_1 = d_b, M'B_1' = MC_1 = d_c$. Do đó $a.R_a \geq c.d_b + b.d_c \Rightarrow R_a \geq \frac{c}{a}d_b + \frac{b}{a}d_c$. Tương tự, ta có 2 bất đẳng thức tương tự: $R_b \geq \frac{a}{b}d_c + \frac{c}{b}d_a, R_c \geq \frac{b}{c}d_a + \frac{a}{c}d_b$. Cộng theo vế các bất đẳng thức trên và áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có $R_a + R_b + R_c \geq \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)d_c + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)d_a + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right)d_b \geq 2\left(d_a + d_b + d_c\right)$ (đpcm)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều và M là tâm của tam giác.

Định lý 1.1.77 (Định lý Bellavitis) Cho $ABCD$ là một "balanced quadrilateral" (tứ giác có tích các cặp cạnh đối bằng nhau); kí hiệu các góc như hình vẽ, khi đó ta có $\alpha_B + \beta_C + \gamma_D + \delta_A = \alpha_D + \beta_A + \gamma_B + \delta_C = 180^o$

Chứng minh.



Gọi các góc của tứ giác là $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, góc giữa hai đường chéo là ϵ. Áp dụng định lý sin và định nghĩa "balanced quadrilateral", ta có:

$\sin \gamma_D . \sin \alpha_D = \sin \alpha_B . \sin \gamma_D$

$\Rightarrow \cos(\gamma_B + \alpha_D) - \cos(\gamma_B - \alpha_D) = \cos(\alpha_B + \gamma_D) - \cos(\alpha_B - \gamma_D)$

$\Rightarrow \cos(\gamma_B + \alpha_D) - \cos(\gamma_B - \alpha + \alpha_B) = \cos(\alpha_B + \gamma_D) - \cos(\alpha_B - \gamma + \gamma_B)$

$\Rightarrow \cos(\gamma_B + \alpha_D) + \cos(\alpha + \delta) = \cos(\alpha_B + \gamma_D) + \cos(\gamma + \delta)$

Hoán vị đẳng thức trên, ta có

$\cos(\delta_C + \beta_A) + \cos(\alpha + \beta) = \cos(\beta_C + \delta_A) + \cos(\alpha + \delta)$

Cộng các đẳng thức trên, chú ý rằng $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\gamma + \delta)$, ta có

$\cos(\gamma_B + \alpha_D) + \cos(\delta_C + \beta_A) = \cos(\alpha_B + \gamma_D) + \cos(\beta_C + \delta_A)$

$\Rightarrow \cos \frac{1}{2}(\alpha_D + \beta_A + \gamma_B + \delta_C) . \cos \frac{1}{2}(\alpha_D - \beta_A + \gamma_B - \delta_C)$

$= \cos \frac{1}{2}(\alpha_B + \beta_C + \gamma_D + \delta_A) . \cos \frac{1}{2}(\alpha_B - \beta_C + \gamma_D - \delta_A)$

Chú ý rằng $\alpha_D - \beta_A + \gamma_B - \delta_C = 360^o - 2\epsilon - \beta - \delta, \alpha_B - \beta_C + \gamma_D - \delta_A = 2\epsilon - \beta - \delta$ và $\frac{1}{2}(\alpha_D + \beta_A + \gamma_B + \delta_C) + \frac{1}{2}(\alpha_B + \beta_C + \gamma_D + \delta_A) = 180^o$. Ta suy ra

$\cos \frac{1}{2}(\alpha_D + \beta_A + \gamma_B + \delta_C) . \cos\left(\epsilon + \frac{1}{2}(\beta + \delta)\right) = -\cos \frac{1}{2}(\alpha_D + \beta_A + \gamma_B + \delta_C) . \cos\left(\epsilon - \frac{1}{2}(\beta +\right.$

$\Rightarrow \cos \frac{1}{2}(\alpha_D + \beta_A + \gamma_B + \delta_C) . \cos \epsilon . \cos \frac{1}{2}(\beta + \delta) = 0$

1. Nhân tử đầu tiên bằng 0, ta có ngay đpcm.

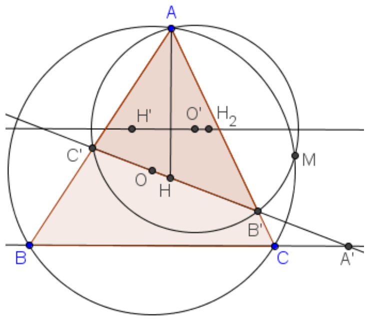
2. Nhân tử thứ 2 bằng 0, ta suy ra $ABCD$ là tứ giác có hai đường chéo vuông góc, suy ra $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$. Kết hợp với $AB.CD = AD.BC$ (định nghĩa), suy ra mỗi cạnh tứ giác bằng với một trong 2 cạnh kề với nó. Dễ thấy định lý Bellavitis đúng trong trường hợp này.

3. Nhân tử thứ 3 bằng 0, khi đó $ABCD$ là tứ giác nội tiếp, theo tính chất góc nội tiếp, ta có đpcm.

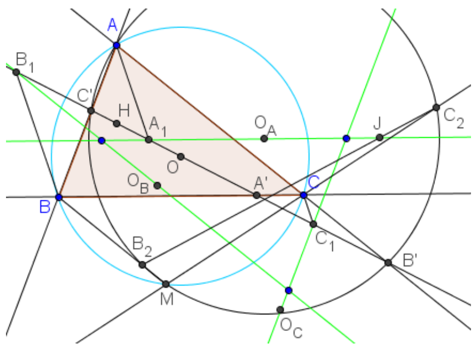
Định lý 1.1.78 (Định lý Gossard) Cho tam giác ABC, đường thẳng Euler l của tam giác cắt các cạnh tại A', B', C'. Gọi l_a, l_b, l_c là đường thẳng Euler của các tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$. Khi đó tam giác được tạo bởi các đường thẳng l_a, l_b, l_c

là ảnh của tam giác ABC qua một phép đối xứng tâm có tâm đối xứng nằm trên đường thẳng Euler của tam giác ABC.

Chứng minh. Ta có 2 bổ đề sau:
1. Đường thẳng Euler của tam giác $AB'C'$ song song với BC.



Đặt $(BC, OH) \equiv \alpha \pmod{\pi}, k = \dfrac{R_{(AB'C')}}{R_{(ABC)}}, f^{\alpha} = Q_{\alpha} \circ V_k, h^{\alpha} = Q_{\alpha} \circ V_{\frac{1}{k}}, M$ là giao điểm khác A của (ABC) và $(AB'C')$. Ta có $f_M^{\alpha} : (MBC) \to (MB'C') \Rightarrow (MO, MO') \equiv \alpha \pmod{\pi}$. Do A đối xứng với M qua OO' nên $(AO, AO') \equiv \alpha \pmod{\pi}$. Suy ra $f_A^{-\alpha} : O \to O'$ (1)
Gọi δ là phân giác trong của $\widehat{BAC}$, ta có $D_{\delta} \circ V_{2\cos A} : H \to O, H' \to O'$. Suy ra $\Delta AOO'$ đồng dạng ngược hướng với $\Delta AHH'$.
Gọi H_2 là điểm đối xứng với H' qua AH, ta có $\Delta AOO'$ đồng dạng cùng hướng với ΔAHH_2. Do đó $f_A^{-\alpha} : H \to H_2$ (2)
Từ (1) và (2), ta có $f_A^{-\alpha} : OH \to O'H_2 \Rightarrow (OH, O'H_2) \equiv -\alpha \pmod{\pi}$. Mà $(BC, OH) \equiv \alpha \pmod{\pi}$ nên ta có $(O'H_2, BC) \equiv 0 \pmod{\pi} \Rightarrow O'H_2 // BC \Rightarrow O'H_2 \perp AH \Rightarrow O', H', H_2$ thẳng hàng $\Rightarrow O'H' // BC$
2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), đường thẳng d bất kì qua O cắt BC, CA, AB tại A', B', C'. Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng với A', B', C' qua O, khi đó AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại một điểm trên (O).
Chứng minh đơn giản bằng cách sử dụng góc định hướng.
Trở lại bài toán:

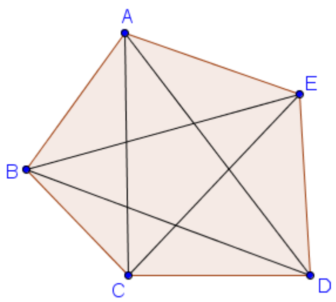


Gọi A_1, B_1, C_1 là giao điểm của l_a, l_b, l_c với l. Ta sẽ chứng minh AA_1, BB_1, CC_1 đôi một song song.

Gọi B_2, C_2 là giao điểm của MB, MC với $(AB'C')$. Đặt $J = B_2C_2 \cap l_a$.
Ta chứng minh được $f_A^{-\alpha} : B \to B_1, C \to C_1 \Rightarrow f_A^{-\alpha} : BC \to B_1C_1$. Mặt khác $f_A^{-\alpha} : l \to l_a; A' = l \cap BC; J = l_a \cap B_2C_2 \Rightarrow f_A^{-\alpha} : A' \to J$. Ta chứng minh được $B'C_2C'B_2$ là hình thang cân và O_A là trung điểm A_1J. Gọi $A_3 = h_A^{\alpha}(A_1) \Rightarrow A_3 \in l$. Ta có $h_A^{\alpha} : A_1 \to A_3, J \to A', O_A \to O$, suy ra O trung điểm $A'A_3$. Tương tự ta xác định các điểm B_3, C_3. Theo bổ đề 2, ta có AA_3, BB_3, CC_3 đồng quy tại P nằm trên (O). Từ đó suy ra $(A_1A, AB) \equiv (B_1B, BA) \equiv (CC_1, AB) \pmod{\pi}$. Suy ra AA_1, BB_1, CC_1 đôi một song song với nhau.
Do $AA_1 // BB_1$ nên $(AA_1, l) \equiv (BB_1, l) \pmod{\pi} \Rightarrow$ tam giác $A'B_1B$ đồng dạng cùng hướng với tam giác AA_1A_3. Suy ra $\dfrac{A'B}{A'B_1} = \dfrac{R}{R'}$, tương tự, ta có $\dfrac{A'C}{A'C_1} = \dfrac{R}{R'} \Rightarrow \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{R}{R'} = \dfrac{BC}{B'C'} \Rightarrow B'C' = B_1C_1$. Chứng minh tương tự, ta có $A'B' = A_1B_1, B'C' = B_1C_1, C'A' = C_1A_1 \Rightarrow$ các đoạn $A'A_1, B'B_1, C'C_1$ có cùng trung điểm X. Suy ra 2 tam giác ABC và tam giác $\Delta(l_a, l_b, l_c)$ đối xứng với nhau qua X (đpcm)

Định lý 1.1.79 (Định lý Möbius) Cho ngũ giác $ABCDE$ có diện tích S. Đặt $S_{ABC} = a, S_{BCD} = b, S_{CDE} = c, S_{DEA} = d, S_{EAB} = e$. Ta có đẳng thức: $S^2 - S(a+b+c+d+e) + (ab+bc+cd+de+ea) = 0$

Chứng minh.



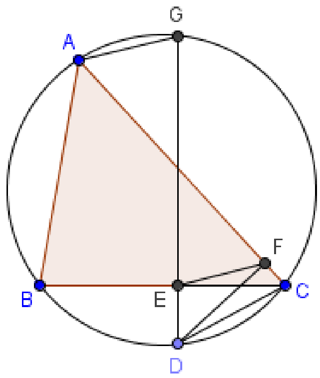
<u>Bổ đề:</u> Với 4 vector bất kì $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{t}$, ta có $(\vec{x} \wedge \vec{y})\left(\vec{z} \wedge \vec{t}\right) + (\vec{x} \wedge \vec{z})\left(\vec{t} \wedge \vec{y}\right) + \left(\vec{x} \wedge \vec{t}\right)(\vec{y} \wedge \vec{z}) = 0$
Chứng minh:
Trước hết, với 3 vector bất kì, ta có $\vec{x}.(\vec{y} \wedge \vec{z}) + \vec{y}.(\vec{z} \wedge \vec{x}) + \vec{z}.(\vec{x} \wedge \vec{y}) = \vec{0}$. Mặt khác $(\vec{x} \wedge \vec{y})(\vec{z} \wedge \vec{t}) = \vec{x} \wedge \left(\vec{y}.(\vec{z} \wedge \vec{t})\right)$. Suy ra:
$(\vec{x} \wedge \vec{y})(\vec{z} \wedge \vec{t}) + (\vec{x} \wedge \vec{z})(\vec{t} \wedge \vec{y}) + (\vec{x} \wedge \vec{t})(\vec{y} \wedge \vec{z}) = \vec{x} \wedge \left(\vec{y}.(\vec{z} \wedge \vec{t})\right) + \vec{x} \wedge \left(\vec{z}.(\vec{t} \wedge \vec{y})\right) + \vec{x} \wedge \left(\vec{t}.(\vec{y} \wedge \vec{z})\right) = \vec{x} \wedge \left(\vec{y}.(\vec{z} \wedge \vec{t}) + \vec{z}.(\vec{t} \wedge \vec{y}) + \vec{t}.(\vec{y} \wedge \vec{z})\right) = \vec{x} \wedge \vec{0} = 0$
Trở lại bài toán, đặt $\vec{x} = \overrightarrow{AB}, \vec{y} = \overrightarrow{AC}, \vec{z} = \overrightarrow{AD}, \vec{t} = \overrightarrow{AE}$. Khi đó
$S_{ACD} = \dfrac{1}{2}\vec{y} \wedge \vec{z} \Rightarrow S = a + \dfrac{1}{2}\vec{y} \wedge \vec{z} + d \Rightarrow \vec{y} \wedge \vec{z} = 2(S-a-d)$. Do đó $(\vec{x} \wedge \vec{t})(\vec{y} \wedge \vec{z}) = 4(S-a-d)e$. Tương tự: $(\vec{x} \wedge \vec{y})(\vec{z} \wedge \vec{t}) = 4ad, (\vec{x} \wedge \vec{z})(\vec{t} \wedge \vec{y}) = -4(S-b-d)(S-a-c)$.

Áp dụng bổ đề, ta suy ra $(S-a-d)e-(S-a-c)(S-d-b)+ad = 0 \Rightarrow S^2 - S(a+b+c+d+e)+(ab+bc+cd+de+ea) = 0$ (đpcm)

Định lý 1.1.80 (Đường tròn Hagge) Cho tam giác ABC nội tiếp (O), P là một điểm bất kì trong tam giác. Các tia AP, BP, CP cắt (O) tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là điểm đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua BC, CA, AB. Khi đó trực tâm H của ΔABC nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\Delta A_2B_2C_2$

Chứng minh. Ta có 3 bổ đề sau:

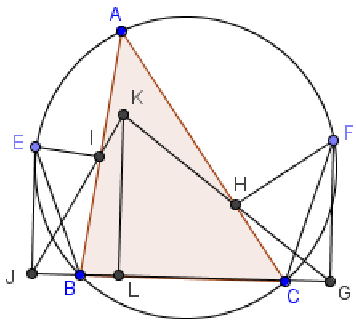
1. Cho ΔABC nội tiếp (O), D là một điểm trên (O). Đường thẳng qua D vuông góc với BC cắt (O) tại G. Khi đó AG song song với đường thẳng Simson của D.



Gọi E, F là chân các đường vuông góc kẻ từ D lên BC, AC, ta có EF là đường thẳng Simson của D.

Ta có $(AG, AC) \equiv (DG, DC) \equiv (FE, FA) \pmod{\pi} \Rightarrow AG//EF$ (đpcm)

2.Cho ΔABC nội tiếp (O), E, F là hai điểm trên(O). Khi đó góc giữa hai đường thẳng Simson của E và F bằng một nửa số đo cung EF.



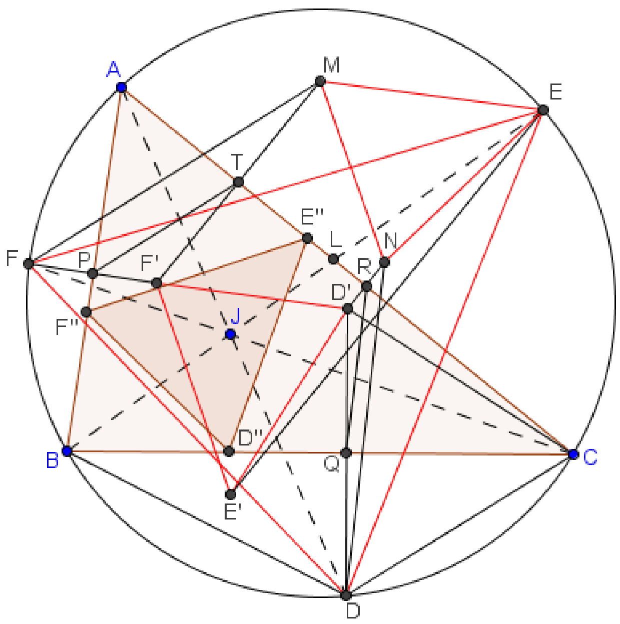
Gọi I, J là hình chiếu vuông góc của E trên AB, BC, G, H là hình chiếu vuông góc của F trên BC, AC, $K = IJ \cap GH$, L là hình chiếu vuông góc của L trên BC.

Ta có $(KJ, KL) \equiv (JE, JI) \equiv (BE, BA) \pmod{\pi}; (KL, KG) \equiv (GK, GF) \equiv (CA, CF)$ $\pmod{\pi}$

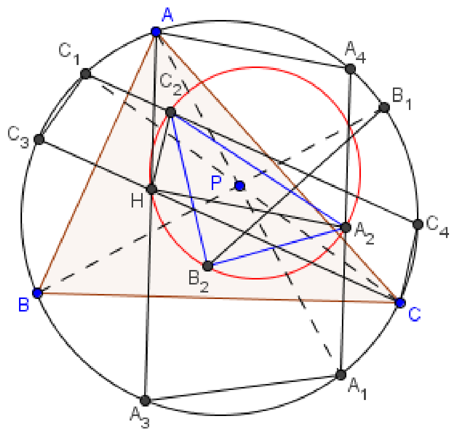
$\Rightarrow$ đpcm.

3. Cho ΔABC nội tiếp (O), J là một điểm bất kì trong tam giác. AJ, BJ, CJ cắt

(O) tại D, E, F. Gọi D', E', F' là điểm đối xứng với D, E, F qua BC, CA, AB. Khi đó $\Delta D'E'F' \sim \Delta DEF$.



Gọi M, N là điểm đối xứng với F', D' qua AC; $R = D'N \cap AC, Q = D'D \cap BC, S = BC \cap ED, L = BE \cap AC, P = FF' \cap AB, T = MF' \cap AC$.
Ta có $RQ//ND \Rightarrow \widehat{NDE} = \widehat{RUE} = \widehat{QDS} - \widehat{D'QR} = 90^o - \widehat{BSD} - \widehat{D'CR} = 90^o - \widehat{BSD} - (\widehat{ACB} - \widehat{BCD}) = 90^o - \widehat{ACB} - \widehat{EDC} = 90^o - \widehat{ACB} - \widehat{ECB} = 90^o - (AC, BE)$ ((AC, BE) là kí hiệu góc giữa hai đường thẳng AC và BE).
Tương tự, ta có $\widehat{MFE} = 90^o - (AC, BE) \Rightarrow \widehat{NDE} = \widehat{MFE}$ (1)
Mặt khác, $\dfrac{ND}{MF} = \dfrac{2RQ}{2TP} = \dfrac{D'C.\sin C}{F'A\sin A} = \dfrac{DC.\sin C}{FA\sin A} = \dfrac{JC.\sin C}{JA\sin A}$ (2)
Gọi $D''E''F''$ là tam giác hình chiếu của J trong ΔABC, khi đó $\Delta DEF \sim \Delta D''E''F'' \Rightarrow$
$\dfrac{DE}{FE} = \dfrac{D''E''}{F''E''} = \dfrac{JC.\sin C}{JA\sin A}$ (3)
Từ (1), (2) và (3), ta suy ra $\Delta DNE \sim \Delta FME \Rightarrow \dfrac{DE}{NE} = \dfrac{FE}{ME} \Rightarrow \dfrac{DE}{D'E'} = \dfrac{FE}{F'E'}$.
Tương tự, suy ra $\dfrac{DE}{D'E'} = \dfrac{EF}{E'F'} = \dfrac{FD}{F'D'} \Rightarrow$ đpcm.
Trở lại với bài toán:

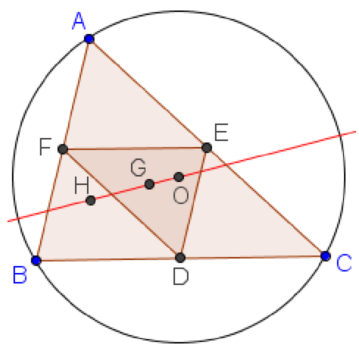


Gọi A_3, C_3 là điểm đối xứng với H qua BC, AB, khi đó $A_3, C_3 \in (O); A_4 = A_1A_2 \cap (O), C_4 = C_1C_2 \cap (O)$.
Ta có $AA_3 // A_1A_4$ và A, A_1, A_3, A_4 đồng viên $\Rightarrow$ $AA_4A_1A_3$ la hình thang cân.
Mặt khác, $HA_2A_1A_3$ là hình thang cân $\Rightarrow HA_2 \Rightarrow AA_4$. Tương tự, ta có $HC_2 // CC_4$.
$\Rightarrow \widehat{C_2HA_2} = (AA_4, CC_4)$. Áp dụng bổ đề 1, ta có $(AA_4, CC_4) = (d_a, d_c)$, trong đó d_a, d_c là đường thẳng Simson của A_1, C_1.
Áp dụng bổ đề 2, $(d_a, d_c) = \widehat{C_1B_1A_1} \Rightarrow \widehat{C_2HA_2} = \widehat{C_1B_1A_1}$.
Áp dụng bổ đề 3, $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2 \Rightarrow \widehat{C_1B_1A_1} = \widehat{C_2B_2A_2} \Rightarrow \widehat{C_2HA_2} = \widehat{C_2B_2A_2} \Rightarrow H, A_2, B_2, C_2$ đồng viên (đpcm)

1.2 Một số điểm và đường đặc biệt được xác định duy nhất với tam giác và tứ giác

Định lý 1.2.1 (Đường thẳng Euler của tam giác) Cho tam giác ABC, tâm ngoại tiếp O, trọng tâm G, trực tâm H. Khi đó O, G, H thẳng hàng và $\overline{OH} = 3\overline{OG}$.

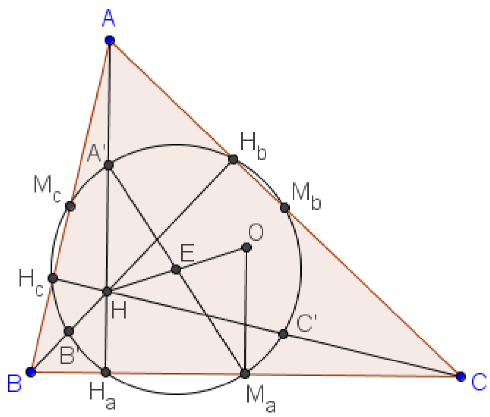
Chứng minh.



Gọi D, E, F là trung điểm các cạnh của tam giác ABC, dễ thấy O là trực tâm tam giác DEF. Ta có phép vị tự tâm G, tỉ số -2 biến tam giác DEF thành tam giác ABC. Do đó biến O thành $H \Rightarrow \overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$. Từ đó suy ra đpcm.

Định lý 1.2.2 (Đường tròn và tâm Euler) Cho ΔABC, 3 trung điểm các cạnh, 3 chân đường cao, 3 trung điểm của 3 đoạn thẳng nối 3 đỉnh tam giác với trực tâm cùng nằm trên đường tròn Euler của ΔABC. Đường tròn Euler của ΔABC có bán kính bằng $\frac{R}{2}$ (R là bán kính ngoại tiếp của ΔABC) và tâm E của nó là trung điểm OH.

Chứng minh.

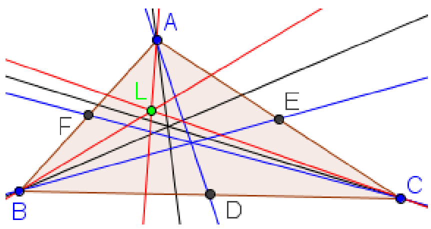


Đặt tên các điểm như hình vẽ. Dễ thấy O và H là 2 điểm đẳng giác trong ΔABC, suy ra các điểm $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c$ cùng nằm trên một đường tròn tâm là trung điểm E của OH. Mặt khác, ta chứng minh được $AH = 2OM_a$, suy ra $A'HM_aO$ là hình bình hành $\Rightarrow M_a$ đối xứng với A' qua E, do đó $M_a, M_b, M_c, H_a, H_b, H_c, A', B', C'$ cùng nằm trên (E).

Ta có EA' là đường trung bình của $\Delta AOH \Rightarrow R_{(E)} = EA' = \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}R$ (đpcm)

Định lý 1.2.3 (Đường đối trung, điểm Lemoine) Trong tam giác, đường thẳng đối xứng với trung tuyến qua phân giác tại cùng một đỉnh được gọi là đường đối trung của tam giác. 3 đường đối trung của tam giác đồng quy tại điểm Lemoine của tam giác. Điểm Lemoine còn được gọi là điểm symmedian (symmedian point) hoặc điểm Grebe.

Chứng minh.

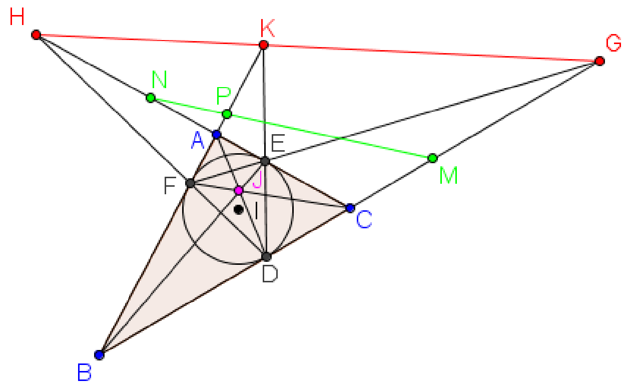


Đây là một trường hợp riêng của hai điểm liên hợp đẳng giác và điểm Lemoine là điểm liên hợp đẳng giác của trọng tâm giác. Ta có một số kết quả sau liên

quan đến đường đối trung và điểm Lemoine (Gọi trung điểm các cạnh tam giác là D, E, F; chân các đường đối trung là X, Y, Z; điểm Lemoine là L)
1. Đường đối trung xuất phát từ một đỉnh là quỹ tích các điểm có tỉ số khoảng cách đến hai cạnh kề của tam giác tỉ lệ thuận với độ dài hai cạnh. Quỹ tích này còn một đường thẳng nữa là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tại đỉnh xuất phát của đường đối trung.
2. Đường đối trung xuất phát từ một đỉnh tam giác đi qua giao điểm của 2 tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp tại 2 đỉnh còn lại.
3. Đường đối trung chia cạnh tam giác thành 2 đoạn tỉ lệ với bình phương 2 cạnh kề.
4. $\dfrac{AX}{AD} = \dfrac{2bc}{b^2+c^2}$
5. Tổng bình phương các khoảng cách từ một điểm bất kì nằm trên một cạnh của tam giác đến 2 cạnh kia nhỏ nhất khi điểm đó trùng với chân đường đối trung ứng với cạnh đó.
6. Tổng bình phương các khoảng cách từ một điểm bất kì trong tam giác đến 3 cạnh của nó nhỏ nhất khi điểm đó trùng với điểm Lemoine.
7. Điểm Lemoine là trọng tâm của tam giác hình chiếu ứng với nó trong tam giác ABC.
8. Diện tích tam giác hình chiếu của điểm Lemoine bằng $\dfrac{12S^3_{ABC}}{(a^2+b^2+c^2)^2}$.
9/.Trong tất cả các tam giác nội tiếp trong một tam giác thì tam giác hình chiếu ứng với điểm Lemoine có tổng bình phương các cạnh nhỏ nhất.
10. $a^2\overrightarrow{LA} + b^2\overrightarrow{LB} + c^2\overrightarrow{LC} = \overrightarrow{0}$

Định lý 1.2.4 (Điểm Gergonne, điểm Nobb, đường thẳng Gergonne) Tam giác ABC với đường tròn nội tiếp (I). Tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Khi đó AD, BE, CF đồng quy tại điểm Gergonne của tam giác ABC.
Kết quả về điểm Nobb và đường thẳng Gergonne (vẫn với các kí hiệu trên): Một tam giác không cân có 3 điểm Nobb tương ứng là giao điểm của các cặp đường thẳng EF và BC, DE và AB, DF và AC. Và 3 điểm Nobb cùng nằm trên một đường thẳng gọi là đường thẳng Gergonne của tam giác ABC.

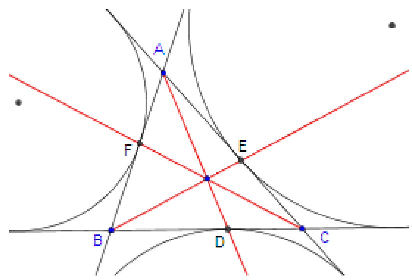
Chứng minh.



1. Áp dụng định lý Céva và các kết quả đơn giản: $DB = DC, EA = EC, FA = FB$ ta có ngay đpcm.
2. Xét cực và đối cực đối với (I): đường đối cực của A là EF đi qua G, nên đường đối cực của G đi qua A. Mặt khác dễ thấy đường đối cực của G đi qua D nên suy ra đường đối cực của G là AD. Hoàn toàn tương tự ta có đường đối cực của H là BE và đường đối cực của K là CF. Mà AD, BE, CF đồng quy nên ta có điều phải chứng minh. Ngoài ra ta có kết quả sau: $(BCDG) = (CAEH) = (BAFK) = -1$; gọi M, N, P là trung điểm của các đoạn GD, HE, KF thì M, N, P thẳng hàng và đường thẳng đi qua chúng là trục đẳng phương của 2 đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác.
Kết quả trên có thể mở rộng như sau:
Cho tam giác ABC và 3 điểm D, E, F theo thứ tự thuộc BC, CA, AB sao cho AD, BE, CF đồng quy và D, E, F khác trung điểm đoạn thẳng. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng $(EF, BC), (DF, CA), (DE, AB)$. Khi đó M, N, P thẳng hàng. Kết quả này chính là hệ quả của định lý Desargues.

Định lý 1.2.5 (Điểm Nagel) Cho tam giác ABC, các đường tròn bàng tiếp tiếp xúc với các cạnh tương ứng tại D, E, F. Ta có 3 đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại điểm Nagel của tam giác.

Chứng minh.



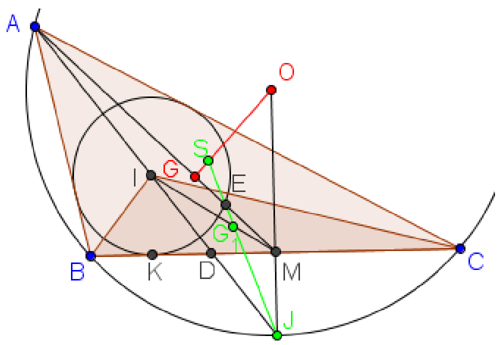
Áp dụng định lý Céva, chú ý rằng $FA = CD = p - b, AE = BD = p - c, CE = BF = p - a$, ta có đpcm.

Định lý 1.2.6 (Điểm Brocard) Trong tam giác ABC, tồn tại 2 điểm M và N thỏa mãn $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCA} = \alpha$ và $\widehat{NAC} = \widehat{NCB} = \widehat{NBA} = \alpha$. Mỗi điểm này được gọi là điểm Brocard của ΔABC. Trong một tam giác thì 2 điểm Brocard liên hợp đẳng giác với nhau. Ta có hệ thức $\cot\alpha = \cot A + \cot B + \cot C$.

Chứng minh. Đặt $MA = x, MB = y, MC = z$, ta có $\cot\alpha = \dfrac{c^2 + x^2 - y^2}{4S_{MAB}} = \dfrac{a^2 + y^2 - z^2}{4S_{MBC}} = \dfrac{b^2 + z^2 - x^2}{4S_{MCA}} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}$.
Mặt khác, $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4S_{ABC}} + \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{4S_{ABC}} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S_{ABC}} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4S_{ABC}}$, suy ra đpcm.
Một số tính chất của hai điểm Brocard:
1. Đường thẳng OL (O là tâm ngoại tiếp, L là điểm Lemoine) là trung trực của MN và 4 điểm O, L, M, N cùng nằm trên đường tròn Brocard.
2. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = \dfrac{1}{\sin^2 A} + \dfrac{1}{\sin^2 B} + \dfrac{1}{\sin^2 C}$
3. $\sin^3\alpha = \sin(A-\alpha)\sin(B-\alpha)\sin(C-\alpha)$
4. $MA.MB.MC = 8R^3\sin^3\alpha$
5. Tam giác hình chiếu của 2 điểm Brocard đồng dạng với tam giác ABC và diện tích của chúng bằng nhau.

Định lý 1.2.7 (Điểm Schiffler) Cho tam giác ABC có I là tâm nội tiếp. Khi đó 4 đường thẳng Euler của 4 tam giác IAB, IBC, ICA, ABC đồng quy tại điểm Schiffler của tam giác.

Chứng minh.



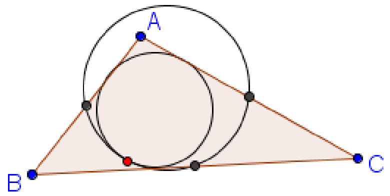
Gọi O là tâm ngoại tiếp tam giác, G là trọng tâm tam giác ABC, M là trung điểm BC, G_1 là trọng tâm tam giác IBC, AI cắt BC tại D, cắt (O) tại J, (I) tiếp xúc với BC tại K, JG_1 cắt AM tại E, OG tại S.
Dễ thấy J là tâm ngoại tiếp tam giác IBC. Do đó JG_1 là đường thẳng Euler của tam giác IBC. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác GOM với cát tuyến SEJ,

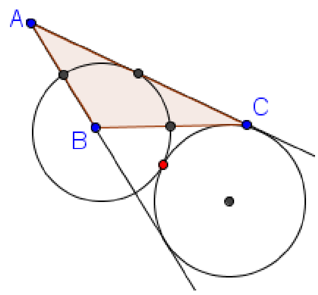
ta có $\dfrac{SG}{SO}.\dfrac{JO}{JM}.\dfrac{EM}{EG} = 1 \Rightarrow \dfrac{SG}{SO} = \dfrac{JM}{R}.\dfrac{EG}{EM}$. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác IAM với cát tuyến JG_1E, ta có $\dfrac{JI}{JA}.\dfrac{EA}{EM}.\dfrac{G_1M}{G_1I} = 1 \Rightarrow \dfrac{EA}{EM} = 2\dfrac{JA}{JI} = 2\dfrac{JI}{JD}$ (vì $JI^2 = JB^2 = JA.JD$)

Do đó $\dfrac{EG}{EM} = \dfrac{GM}{EM} - 1 = \dfrac{1}{3}.\dfrac{AM}{EM} - 1 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{EA}{EM} + 1\right) - 1 = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{JI}{JD} - 1\right) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{ID}{JD} = \dfrac{2}{3}\dfrac{IK}{JM} = \dfrac{2r}{3JM} \Rightarrow \dfrac{SG}{SO} = \dfrac{JM}{R}.\dfrac{EG}{EM} = \dfrac{2r}{3R}$. Tương tự ta thấy các đường thẳng Euler của các tam giác IAC, IAB cũng đi qua điểm S được xác định như trên, suy ra đpcm.

Định lý 1.2.8 (Điểm Feuerbach) Trong một tam giác, đường tròn Euler tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp của nó, và tiếp điểm đó được gọi là điểm Feuerbach của tam giác trên, ngoài ra đường tròn Euler còn tiếp xúc ngoài với 3 đường tròn bàng tiếp của tam giác.

Chứng minh.





Ta có nhận xét sau:

$$\left(m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} + p\overrightarrow{OC}\right)^2 = R^2\left(m^2+n^2+p^2\right) + mn.\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + np.\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + pm.\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}$$

$$= R^2\left(m^2+n^2+p^2\right) + mn\left(2R^2 - c^2\right) + np\left(2R^2 - a^2\right) + pm\left(2R^2 - b^2\right)$$

$$= R^2(m+n+p)^2 - \left(mn.c^2 + np.a^2 + pm.b^2\right)$$

Từ các hệ thức vector quen thuộc: $\begin{cases} \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}; \\ a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \end{cases}$, ta có: $\begin{cases} 2p\overrightarrow{OI} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} \\ 2p\overrightarrow{OE} = p\overrightarrow{OA} + p\overrightarrow{OB} + pO \end{cases}$

Do đó $\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{IE} = \dfrac{p-a}{2p}\overrightarrow{OA} + \dfrac{p-b}{2p}\overrightarrow{OB} + \dfrac{p-c}{2p}\overrightarrow{OC}$, áp dụng nhận xét, ta có:

$$EI^2 = \frac{R^2}{4} - \frac{(p-b)(p-c)a^2 + (p-c)(p-a)b^2 + (p-a)(p-b)c^2}{4p^2}$$

Mặt khác, ta có

$$4\left((p-b)(p-c)a^2 + (p-c)(p-a)b^2 + (p-a)(p-b)c^2\right)$$

$$= a^4 + b^4 + c^4 - 2\left(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2\right) + 4pabc$$

$$= 4pabc - 16S^2 = 16pSR - 16p^2r^2 = 16p^2r(R-r)$$

(khai triển công thức Hérone $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$)

Vậy $EI^2 = \dfrac{R^2}{4} - Rr + r^2 = \left(\dfrac{R}{2} - r\right)^2 \Rightarrow EI = \dfrac{R}{2} - r$, suy ra đpcm.

Để chứng minh đường tròn Euler tiếp xúc ngoài với đường tròn bàng tiếp, ta sử dụng hệ thức vector $-a\overrightarrow{I_aA} + b\overrightarrow{I_aB} + c\overrightarrow{I_aC} = \overrightarrow{0}$, (I_a, r_a) là đường tròn bàng tiếp trong góc A của tam giác.

Tương tự như trên, ta có $\overrightarrow{I_aE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OI_a} = \dfrac{p}{2(p-a)}\overrightarrow{OA} + \dfrac{p-a-b}{2(p-a)}\overrightarrow{OB} + \dfrac{p-a-c}{2(p-a)}\overrightarrow{OC}$

Suy ra $I_aE^2 = \dfrac{R^2}{4} - \dfrac{1}{4\left(p-a\right)^2}\left(p(p-a-b).c^2 + p(p-a-c).b^2 + (p-a-b)(p-a-c).a^2\right)$

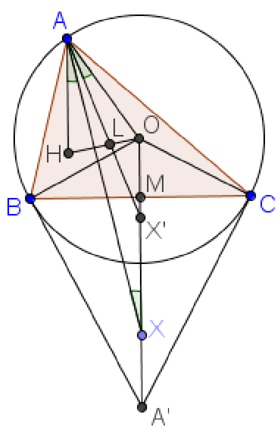
$= \dfrac{R^2}{4} - \dfrac{1}{4\left(p-a\right)^2}\left(-4S^2 + abc\left(a-p\right)\right) = \dfrac{R^2}{4} - \dfrac{1}{4\left(p-a\right)^2}\left(-4\left(p-a\right)^2.r_a^2 - R\left(p-a\right)^2.r_a\right)$

$= \dfrac{R^2}{4} + r_a^2 + Rr_a = \left(\dfrac{R}{2} + r_a\right)^2 \Rightarrow I_aE = \dfrac{R}{2} + r_a \Rightarrow$ đpcm.

Gọi M, N, P là trung điểm các cạnh tam giác ABC thì trong số 3 đoạn thẳng FM, FN, FP có một đoạn độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn còn lại (F là điểm Feuerbach của tam giác)

Định lý 1.2.9 (Điểm Kosnita) Cho tam giác ABC, tâm ngoại tiếp O. X, Y, Z theo thứ tự là tâm ngoại tiếp các tam giác BOC, COA, AOB. Khi đó các đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy tại điểm Kosnita của tam giác ABC.

Chứng minh. Ta xét bài toán tổng quát sau: Cho tam giác ABC, tâm ngoại tiếp O. Các tiếp tuyến tại A, B, C của (O) cắt nhau tạo thành các giao điểm A', B', C'. Gọi X, Y, Z lần lượt là các điểm chia đoạn OA', OB', OC' theo tỉ số $\dfrac{\overline{OX}}{\overline{OA'}} \cdot \dfrac{\overline{OY}}{\overline{OB'}} \cdot \dfrac{\overline{OZ}}{\overline{OC'}}$. Khi đó các đường thẳng AX, BY, CZ đồng quy.

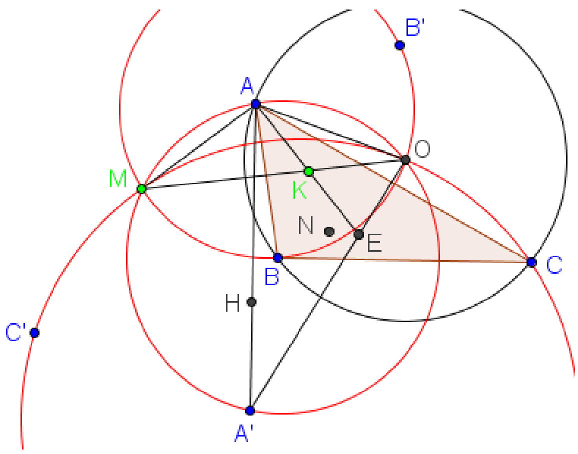


Gọi H là trực tâm tam giác ABC, M là trung điểm BC. Giả sử đường đẳng giác của AX trong góc BAC cắt OA' tại X' và L là giao điểm của AX' và OH. Do O

và H là 2 điểm liên hợp đẳng giác trong tam giác ABC nên $\widehat{OAX'} = \widehat{HAX} = \widehat{AXO}, \widehat{OX'A} = \widehat{HAX'} = \widehat{XAO} \Rightarrow \Delta AOX' \sim \Delta XOA \Rightarrow \overline{OM}.\overline{OA'} = OA^2 = \overline{OX}.\overline{OX'}$. Suy ra $\dfrac{\overline{OX'}}{\overline{OM}} = \dfrac{\overline{OA'}}{\overline{OX}} = \dfrac{1}{t} \Rightarrow \dfrac{\overline{OL}}{\overline{LH}} = \dfrac{\overline{OX'}}{\overline{AH}} = \dfrac{\overline{OX'}}{2\overline{OM}} = \dfrac{1}{2t} \Rightarrow L$ cố định $\Rightarrow AH$ đi qua điểm liên hợp đẳng giác L' của L trong tam giác ABC cố định. Tương tự các đường thẳng BY, CZ đi qua L'. Khi $t = \dfrac{1}{2}$ thì X, Y, Z là tâm ngoại tiếp các tam giác BOC, COA, AOB thì AX, BY, CZ đồng quy tại điểm Kosnita là điểm liên hợp đẳng giác của tâm Euler trong tam giác ABC.

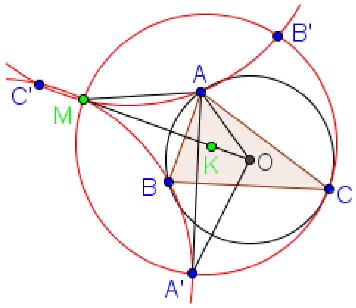
Định lý 1.2.10 (Điểm Musselman, định lý Paul Yiu về điểm Musselman) Cho tam giác ABC nội tiếp (O), các điểm A', B', C' lần lượt đối xứng với A, B, C qua các cạnh đối diện. Khi đó các đường tròn $(AOA'), (BOB'), (COC')$ có một giao điểm chung (khác O) là ảnh của điểm Kosnita qua phép nghịch đảo đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC (tức là $\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{OM} = R^2$, K là điểm Kosnita, M là điểm Musselman)

Chứng minh.



Gọi M và E lần lượt là ảnh của điểm Kosnita K và A' qua phép nghịch đảo đường tròn (ABC). Khi đó ta có $OK.OM = OA^2 = OE.OA' \Rightarrow \Delta OAK \sim \Delta OMA, \Delta OAE \sim \Delta OA' \Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OAK}, \widehat{OA'A} = \widehat{OAE}$. Ta có điểm Kosnita K và tâm Euler N, O và trực tâm H là 2 cặp điểm liên hợp đẳng giác $\Rightarrow \widehat{OAK} = \widehat{NAH}$. Mặt khác, nếu gọi O' là điểm đối xứng với O qua BC thì $AHO'O$ là hình bình hành $\Rightarrow A, N, O'$ thẳng hàng $\Rightarrow \widehat{NAH} = \widehat{O'AH} = \widehat{OA'A} \Rightarrow \widehat{OAK} = \widehat{OA'A} \Rightarrow \widehat{OMA} = \widehat{OA'A} \Rightarrow O, A, A', M$ đồng viên. Tương tự với 2 đường tròn còn lại ta suy ra đpcm.

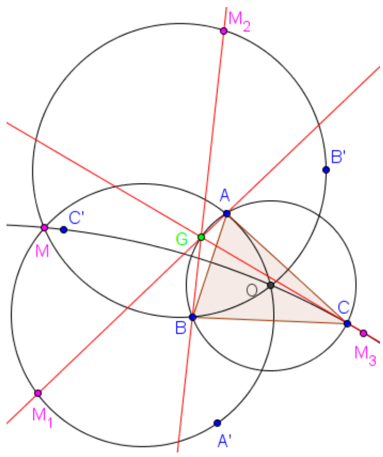
Định lý Paul Yiu về điểm Musselman: Với giả thiết như trên thì 3 đường tròn $(AB'C'), (BC'A'), (CA'B')$ cũng đi qua điểm M.



Ta có $(MB', MC') \equiv (MB', MO) + (MO, MC') \equiv (BB', BO) + (CO, CC') \equiv (BB', BC) + (BC, BO) + (CO, CB) + (CB, CC') \equiv \dfrac{\pi}{2} - (CB, CA) + \dfrac{\pi}{2} - (BA, BC) + 2(AC, AB) \equiv 3(AC, AB) \pmod{\pi}$
Mặt khác, $(AB', AC') \equiv (AB', AC) + (AC, AB) + (AB, AC') \equiv 3(AC, AB) \pmod{\pi}$
$\Rightarrow (MB', MC') \equiv (AB', AC') \pmod{\pi} \Rightarrow M, B', C', A$ đồng viên (đpcm)

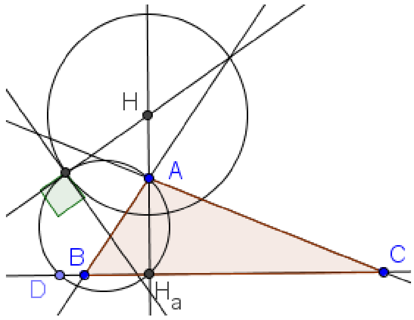
Định lý 1.2.11 (Điểm Gilbert) Cho tam giác ABC, điểm Musselman M. M_1, M_2, M_3 là các điểm đối xứng với M qua các cạnh tam giác. Khi đó các đường thẳng AM_1, BM_2, CM_3 đồng quy tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác.

Chứng minh.



Gọi giao điểm của AM_1 và BM_2 là G. Ta có:
$(GM_1, GB) \equiv (AM_1, AB) + (BA, BM_2) \equiv (A'B, A'M) + (B'M, B'A) \equiv (C'B, C'M) + (C'M, C'A) \equiv (C'B, C'A) \equiv (CA, CB) \pmod{\pi} \Rightarrow G$ nằm trên (ABC). Chứng minh tương tự, ta có đpcm.

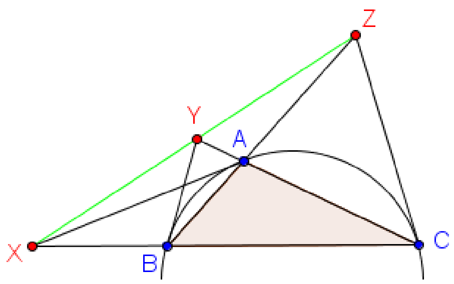
Định lý 1.2.12 (Khái niệm đường tròn cực của tam giác tù) Cho tam giác tù ABC. Chân các đường cao đối diên các đỉnh là H_a, H_b, H_c. Khi đó đường tròn cực của tam giác là đường tròn có tâm là H và bán kính r xác định bởi $r^2 = \overline{HA}.\overline{HH_a} = \overline{HA}.\overline{HH_b} = \overline{HA}.\overline{HH_c} = -4R^2 \cos A \cos B \cos C = 4R^2 - \dfrac{1}{2}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$



Đường tròn cực của tam giác tù có tính chất: cho 3 điểm bất kì chuyển động trên các đường cạnh của tam giác ABC dựng các đường tròn có đường kính là đoạn thẳng nối một đỉnh với điểm chuyển động trên cạnh đối diện thì khi đó vòng cực của tam giác trực giao với tất cả các đường tròn đó (2 đường tròn được gọi là trực giao với nhau nếu chúng có 2 giao điểm và tại mỗi giao điểm thì tiếp tuyến của 2 đường tròn tại giao điểm đó vuông góc với nhau).

Định lý 1.2.13 (Trục Lemoine) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A của đường tròn cắt đường thẳng BC tại X. Định nghĩa tương tự cho Y, Z. Khi đó X, Y, Z thẳng hàng và đường thẳng đi qua X, Y, Z được gọi là trục Lemoine của tam giác ABC.

Chứng minh.

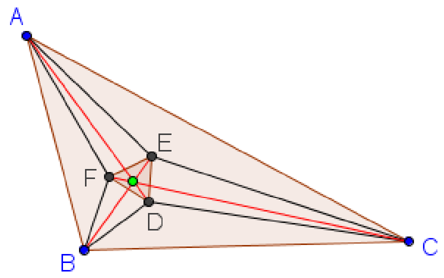


Cách 1:
Hai tam giác ABX và CAX đồng dạng $\Rightarrow \dfrac{XB}{XA} = \dfrac{AB}{AC}, \dfrac{XA}{XC} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \dfrac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.
Tương tự, ta có $\dfrac{\overline{YC}}{\overline{YA}} = \dfrac{BC^2}{BA^2}, \dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \dfrac{CA^2}{CB^2}$. Nhân theo vế 3 đẳng thức trên và áp dụng định lý Menelaus, ta có đpcm.
Cách 2:
Gọi S là giao điểm của BY và $CZ \Rightarrow BC$ là đường đối cực của S đối với $(ABC) \Rightarrow$ đường đối cực của X đi qua S. Mặt khác AX là tiếp tuyến của (ABC) tại $A \Rightarrow$ đường đối cực của X đi qua A. Do đó AS là đường đối cực của X đối với (ABC). Từ cách xác định điểm S, ta suy ra AS là đường đối trung của tam giác ABC (xem mục 2.3). Suy ra 3 đường đối cực của X, Y, Z là 3 đường đối trung trong tam giác

$ABC \Rightarrow X, Y, Z$ thẳng hàng và đường thẳng XYZ là đường đối cực của điểm Lemoine đối với (ABC).

Định lý 1.2.14 (Tâm Morley) Tâm Morley thứ nhất là tâm của tam giác Morley. Tâm Morley thứ hai là tâm phối cảnh của một tam giác với tam giác Morley của nó (tâm phối cảnh, nếu có, của 2 tam giác là điểm đồng quy của 3 đường thẳng nối các đỉnh tương ứng của 2 tam giác)
Chứng minh: (sự tồn tại tâm phối cảnh của 2 tam giác)

Chứng minh.

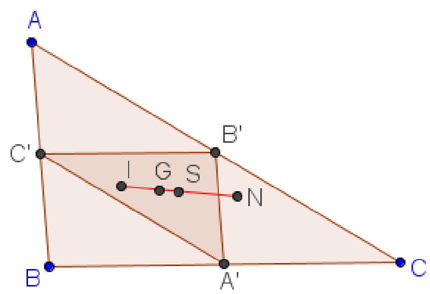


Trong tam giác ABC có AD, BD, CD đồng quy tại D, theo định lý Céva dạng sin, ta có

$\dfrac{\sin\widehat{BAD}.\sin\widehat{CBD}.\sin\widehat{ACD}}{\sin\widehat{CAD}.\sin\widehat{ABD}.\sin\widehat{BCD}} = 1 \Rightarrow \dfrac{\sin\widehat{BAD}}{\sin\widehat{CAD}} = \dfrac{\sin\dfrac{2B}{3}.\sin\dfrac{C}{3}}{\sin\dfrac{B}{3}\sin\dfrac{2C}{3}}$. Tương tự với 2 điểm E, F, ta suy ra AD, BE, CF đồng quy (đpcm)

Định lý 1.2.15 (Tâm Spieker và đường thẳng Nagel) Cho tam giác ABC; A', B', C' là trung điểm các cạnh tam giác. Tâm Spieker được định nghĩa là tâm nội tiếp tam giác $A'B'C'$. Ta có 4 điểm trọng tâm, tâm nội tiếp, điểm Nagel, tâm Spieker cùng nằm trên đường thẳng Nagel của tam giác ABC.

Chứng minh.



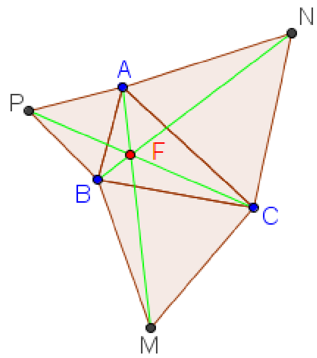
Trước hết, ta có nhận xét sau: cho các điểm M, N, P thuộc các đường thẳng BC, CA, AB và thỏa mãn

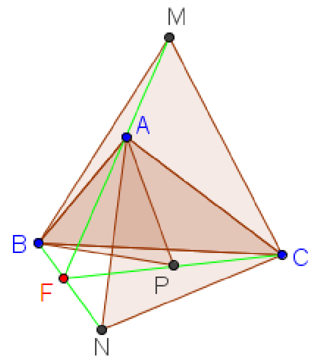
$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma \neq 0 \\ \beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC} = \gamma\overrightarrow{NC}+\alpha\overrightarrow{NA} = \alpha\overrightarrow{PA}+\beta\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{0} \end{cases}$$

Khi đó AM, BN, CP đồng quy và $\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + \gamma\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$. (chứng minh bằng cách sử dụng định lý Céva và định lý Van Aubel).
Gọi M, N, P theo thứ tự là các tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp với các cạnh BC, CA, AB. Ta tính được $BM = p - c, MC = p - b$, suy ra $(p-b)\overrightarrow{MB} + (p-c)\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$. Từ đó và 2 hệ thức vector tương tự, ta có $(p-a)\overrightarrow{NA} + (p-b)\overrightarrow{NB} + (p-c)\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{0} \Rightarrow p\overrightarrow{GN} = (p-a)\overrightarrow{GA} + (p-b)\overrightarrow{GB} + (p-c)\overrightarrow{GC}$. Mặt khác, ta có $a\overrightarrow{IA} + b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow 2p\overrightarrow{GI} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$. Do đó $2p\overrightarrow{GI} + p\overrightarrow{GN} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GN} = 2\overrightarrow{GI} \Rightarrow \overrightarrow{IN} = 3\overrightarrow{IG}$.
Xét phép vị tự tâm G, tỉ số -2 biến tam giác $A'B'C'$ thành tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{GI} = 2\overrightarrow{GS}$, suy ra đpcm.
Ngoài ra ta còn có điểm Spieker là tâm đẳng phương của 3 đường tròn bàng tiếp tam giác ABC.

Định lý 1.2.16 (Hai điểm Fermat) Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài (vào trong) ΔABC các tam giác đều BCM, CAN, ABP. Khi đó tâm phối cảnh của hai tam giác ABC và MNP được gọi là điểm Fermat thứ nhất (thứ hai) hoặc còn gọi là điểm Fermat dương (âm).

Chứng minh. Gọi giao điểm của AM, BN, CP với BC, CA, AB là X, Y, Z. Ta có



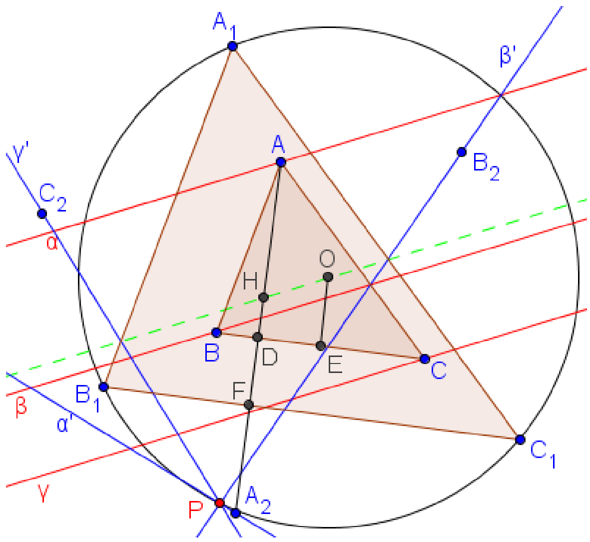


$\dfrac{\overline{XB}}{\overline{XC}} = \dfrac{S_{[ABM]}}{S_{[ACM]}} = \dfrac{BM.BA.\sin\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BA}\right)}{CM.CA.\sin\left(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{CA}\right)}$. Tương tự, ta suy ra $\dfrac{\overline{XB}}{\overline{XC}}.\dfrac{\overline{YC}}{\overline{YA}}.\dfrac{\overline{ZA}}{\overline{ZB}} = \dfrac{\sin\left(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BA}\right).\sin\left(\overrightarrow{CN};\overrightarrow{CB}\right).\sin\left(\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AC}\right)}{\sin\left(\overrightarrow{CM};\overrightarrow{CA}\right).\sin\left(\overrightarrow{AN};\overrightarrow{AB}\right).\sin\left(\overrightarrow{BP};\overrightarrow{BC}\right)}$. Mặt khác: $\left(\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AP};\overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AN}\right) + \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AN}\right) \pmod{\pi}$. Từ đó suy ra đpcm.
Trong trường hợp tam giác ABC không có góc nào quá 120^o, điểm Fermat dương còn được gọi là điểm Torricelli và là cực tiểu của hàm điểm $f(X) = XA + XB + XC$ với mọi điểm X trong mặt phẳng tam giác.
Hai điểm Fermat cùng với tâm ngoại tiếp O, tâm đường tròn Euler E nằm trên

đường tròn Lester, đường tròn này trực giao với đường tròn đường kính GH (orthocentroidal circle). Trung điểm của 2 điểm Fermat nằm trên đường tròn Euler của tam giác ABC.

Định lý 1.2.17 (Điểm Parry reflection) Cho tam giác ABC. Kẻ qua A, B, C các đường thẳng α, β, γ song song với đường thẳng Euler của tam giác. Gọi α', β', γ' là các đường thẳng đối xứng với α, β, γ qua BC, CA, AB. Khi đó các đường thẳng này đồng quy tại điểm Parry reflection của tam giác ABC.

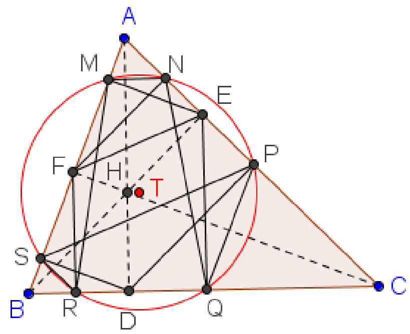
Chứng minh.



Gọi H, O là trực tâm, tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Phép vị tự tâm O, tỉ số 2 biến tam giác ABC thành tam giác $A_1B_1C_1 \Rightarrow$ đường thẳng Euler của 2 tam giác này trùng nhau. A_2, B_2, C_2 là các điểm đối xứng với A, B, C qua các cạnh đối. Gọi giao điểm của AA_2 với BC, B_1C_1 là D, F. E là trung điểm BC.
Ta có $\overline{HA_2} = \overline{AA_2} - \overline{AH} = 2\left(\overline{AD} - \overline{OE}\right) = 2\left(\overline{AH} + \overline{HD} - \overline{OE}\right) = 2\left(\overline{HD} + \overline{DF}\right) = 2\overline{HF}$. Do đó A_2 đối xứng với H qua B_1C_1. Từ đó suy ra α' đối xứng với đường thẳng Euler của tam giác $A_1B_1C_1$ qua B_1C_1. Tương tự với các đường thẳng còn lại, ta suy ra α', β', γ' đồng quy tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$ (định lý Collings)

Định lý 1.2.18 (Đường tròn Taylor, tâm Taylor) Cho tam giác ABC, các đường cao AD, BE, EF. Ta có 6 chân các đường vuông góc hạ từ D, E, F xuống các cạnh tam giác cùng nằm trên đường tròn Taylor của tam giác và tâm của đường tròn này được gọi là tâm Taylor của tam giác.

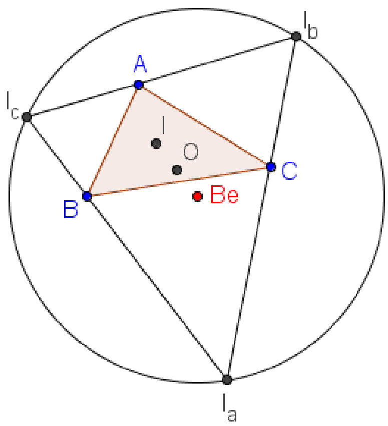
Chứng minh.



Ta có $(SM, SP) \equiv (DA, DP) \equiv (HA, HE) \equiv (FA, FE) \equiv (NM, NA) \pmod{\pi} \Rightarrow M, N, S, P$ đồng viên. Tương tự cho các bộ 4 điểm $(R, S, M, Q), (P, Q, R, N)$. Lại có $(RM, RQ) \equiv (SM, SQ) \equiv (SM, SP) + (SP, SQ) \equiv (NM, NA) + (NP, NQ) \equiv (NM, NQ) \pmod{\pi}$
$\Rightarrow M, N, Q, R$ đồng viên, suy ra đpcm.

Định lý 1.2.19 (Điểm Bevan) Cho tam giác ABC. I_a, I_b, I_c là các tâm bàng tiếp. Khi đó tâm ngoại tiếp tam giác $I_aI_bI_c$ được gọi là điểm Bevan của tam giác ABC.

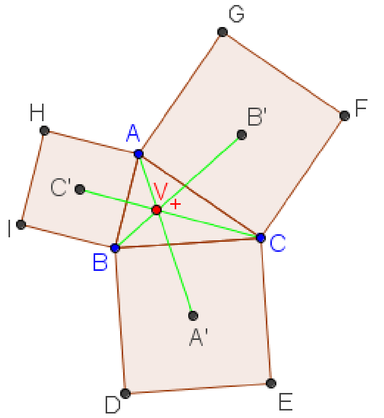
Chứng minh.

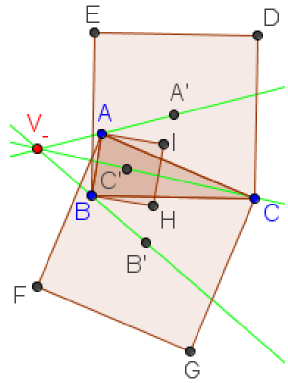


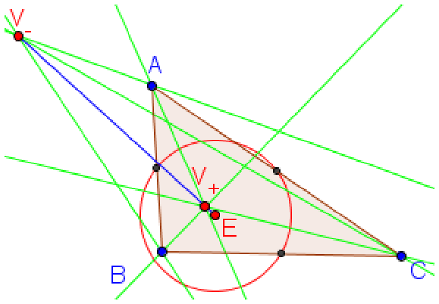
Một số tính chất của điểm Bevan:
1. Ta thấy tâm nội tiếp I của tam giác ABC là trực tâm của tam giác $I_aI_bI_c$, tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC là tâm đường tròn 9 điểm của tam giác $I_aI_bI_c$. Suy ra O là trung điểm của I và B_e.
2. Tâm Spieker là trung điểm của trực tâm H và điểm Bevan.
3. Điểm Bevan là trung điểm của điểm Nagel và điểm de Longchamps, trong đó điểm deLongchamps là điểm đối xứng với trực tâm qua tâm đường tròn ngoại tiếp.

Định lý 1.2.20 (Điểm Vecten) Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài (vào trong) 3 hình vuông trên các cạnh tam giác. Khi đó đường nối một đỉnh của tam giác với tâm hình vuông dựng trên cạnh đối diện đồng quy tại điểm Vecten của tam giác ABC.

Chứng minh.



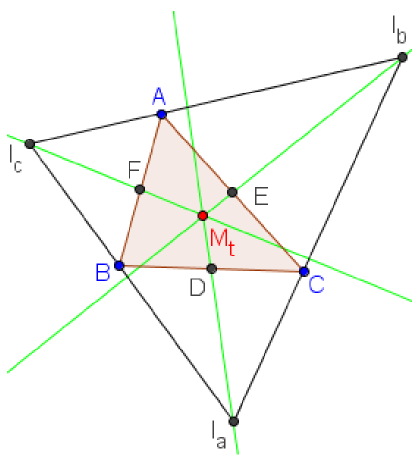




Theo định lý Kiepert thì điều này hiển nhiên và cũng dễ dàng suy ra có 2 điểm Vecten trong (ngoài) hay dương (âm). Ta có tính chất sau về điểm Vecten: 2 điểm Vecten thẳng hàng với tâm đường tròn Euler của tam giác ABC.

Định lý 1.2.21 (Điểm Mittenpunkt) Cho tam giác ABC, I_a, I_b, I_c là các tâm bàng tiếp. D, E, F là trung điểm các cạnh tam giác ABC. Khi đó các đường I_aD, I_bE, I_cF đồng quy tại điểm Mittenpunkt của tam giác ABC.

Chứng minh.



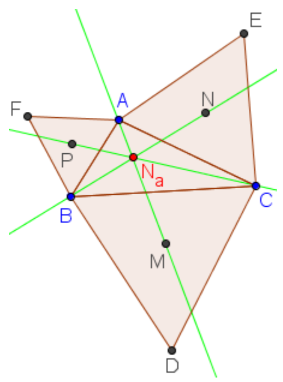
Ta có $2\overrightarrow{I_aD} = \overrightarrow{I_aB} + \overrightarrow{I_aC} = \dfrac{\sin I_c.\cos I_a}{\sin I_b}\overrightarrow{I_aI_c} + \dfrac{\sin I_b.\cos I_a}{\sin I_c}\overrightarrow{I_aI_b}$. Chiếu hệ thức trên theo phương I_aD lên trục I_bI_c, ta có $\dfrac{\sin I_c.\cos I_a}{\sin I_b}\overline{XI_c} + \dfrac{\sin I_b.\cos I_a}{\sin I_c}\overline{XI_b} = 0 \Rightarrow \dfrac{\overline{XI_b}}{\overline{XI_c}} = -\left(\dfrac{\sin I_c}{\sin I_b}\right)^2$ (X là giao điểm của I_aD với I_bI_c). Tương tự, ta suy ra đpcm.

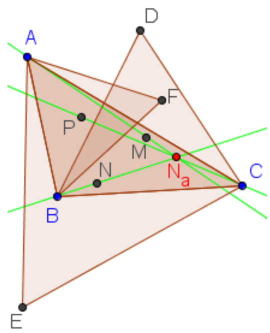
Ta có một số tính chất sau về điểm Mittenpunkt:

1. Gọi M, N, P là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác với các cạnh thì I_aM, I_bN, I_cP đồng quy tại điểm liên hợp đẳng giác với điểm Mittenpunkt trong tam giác ABC.
2. Điểm Mittenpunkt, trực tâm và tâm Spieker thẳng hàng.
3. Điểm Mittenpunkt, tâm nội tiếp và điểm Lemoine thẳng hàng.
4. Điểm Mittenpunkt, trọng tâm và điểm Gergonne thẳng hàng với $G_eG : GM_t = 2 : 1$.
5. Điểm Mittenpunkt là điểm Lemoine của tam giác $I_aI_bI_c$.

Định lý 1.2.22 (Điểm Napoleon) Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài (hay vào trong) các tam giác đều trên các cạnh BC, CA, AB. Khi đó đường nối một đỉnh của tam giác với trọng tâm tam giác đều dựng trên cạnh đối diện đồng quy tại điểm Napoleon của tam giác ABC.

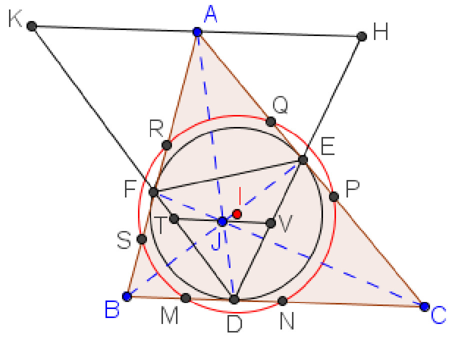
Chứng minh. Áp dụng định lý Kiepert, ta có ngay đpcm.





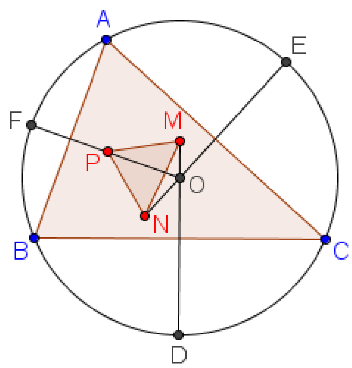
Định lý 1.2.23 (Đường tròn Adam) Cho tam giác ABC với điểm Gergonne J. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, tiếp điểm của (I) trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Đường thẳng qua J song song với EF cắt AB, AC ở S, P. Đường thẳng qua J song song với DE cắt AC, BC ở Q, M. Đường thẳng qua J song song với DF cắt BA, BC ở R, N. Khi đó các điểm M, N, P, Q, R, S cùng thuộc một đường tròn gọi là đường tròn Adam của tam giác ABC.

Chứng minh.



Đường thẳng qua A và J song song với BC tương ứng cắt DE, DF ở $(H, K), (V, T)$.
Ta thấy:
$\dfrac{AK}{AH} = \dfrac{AK}{BD}.\dfrac{BD}{DC}.\dfrac{C}{AH} = \dfrac{AF}{FB}.\dfrac{BF}{EC}.\dfrac{EC}{AE} = 1 \Rightarrow AK = AH \Rightarrow JT = JV$
Để ý rằng $JTDN$ và $JVDM$ là hai hình bình hành nên ta cũng có $DM = DN$. Kết hợp với $ID \perp BC$ ta có $IM = IN$. Tương tự $IP = IQ, IR = IS$. Ta có $IC \perp DE \Rightarrow IC \perp MQ$; IC đi qua trung điểm $DE \Rightarrow IC$ đi qua trung điểm MQ (theo Thales), do đó tam giác IMQ cân tại $I \Rightarrow IM = IQ$. Tương tự ta cũng có $IN = IR$. Từ các khẳng định trên ta suy ra điều cần chứng minh.
Gọi X, Y, Z là các giao điểm của các cặp đường thẳng $(MS, NP), (NP.RQ), (RQ, MS)$ thì điểm Gergonne của ΔABC là điểm Lemoine của ΔXYZ.

Định lý 1.2.24 (Tam giác Fuhrmann, đường tròn Fuhrmann) Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Gọi D, E, F là trung điểm các cung BC, CA, AB không chứa đỉnh đối diện. Lấy các điểm trên đối xứng qua các cạnh tương ứng ta được 3 điểm M, N, P. Tam giác MNP được gọi là tam giác Fuhrmann của tam giác ABC và đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP được gọi là đường tròn Fuhrmann. Đường tròn Fuhrmann là một trường hợp riêng của đường tròn Hagge.



Tính chất:

1. $S_{MNP} = \dfrac{(a+b+c)\,OI^2}{4R} = \dfrac{\left(\sum a^3 + 3abc - \sum\limits_{sym} a^2b\right) S_{ABC}}{(b+c-a)\,(c+a-b)\,(a+b-c)}$

2. $NP = \sqrt{\dfrac{(a+b+c)\,(b+c-a)}{bc}}OI; PM = \sqrt{\dfrac{(a+b+c)\,(c+a-b)}{ca}}OI; MN = \sqrt{\dfrac{(a+b+c)\,(a+b-c)}{ab}}OI$

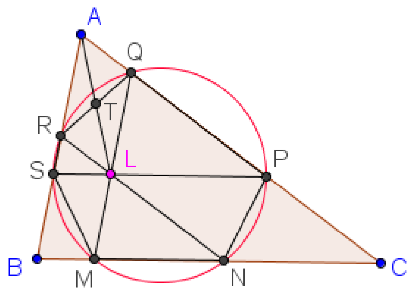
3. Trực tâm của tam giác Fuhrmann trùng với tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC.

4. Tâm đường tròn chín điểm của tam giác Fuhrmann và tam giác ABC trùng nhau. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác Fuhrmann bằng OI.

5. Trực tâm và điểm Nagel của ΔABC nằm trên đường tròn Fuhrmann và đoạn thẳng nối chúng là một đường kính của đường tròn Fuhrmann.

Định lý 1.2.25 (Hình lục giác và đường tròn Lemoine thứ nhất) Cho tam giác ABC, điểm Lemoine L. Qua L kẻ các đường thẳng song song với các cạnh cắt các cạnh còn lại tại M, N, P, Q, R, S. Lục giác $MNPQRS$ được gọi là lục giác Lemoine thứ nhất của tam giác ABC. Lục giác Lemoine thứ nhất nội tiếp trong đường tròn Lemoine thứ nhất của tam giác.

Chứng minh.



Gọi T là giao điểm của AL và RQ; m, n lần lượt là khoảng cách từ T đến AB, AC. Tứ giác $AQLR$ là hình bình hành nên T là trung điểm $RQ \Rightarrow S_{ATR} = S_{ATQ} \Rightarrow m.AR = n.AQ$

Do đó $\dfrac{AQ}{AR} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{AB}{AC} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta AQR \Rightarrow \widehat{AQR} = \widehat{ABC}$.

Tương tự, ta có $\Delta CBA \sim \Delta CPN \Rightarrow \widehat{CBA} = \widehat{CPN}$. Suy ra $\widehat{AQR} = \widehat{CPN} \Rightarrow QPNR$ là hình thang cân. Do đó 4 điểm N, P, Q, R đồng viên. Tương tự, ta có 4 điểm Q, R, S, M đồng viên. Mặt khác, ta có $\widehat{AQR} = \widehat{ABC} = \widehat{ASP} \Rightarrow P, Q, R, S$ đồng viên. Suy ra lục giác $MNPQRS$ nội tiếp (đpcm)

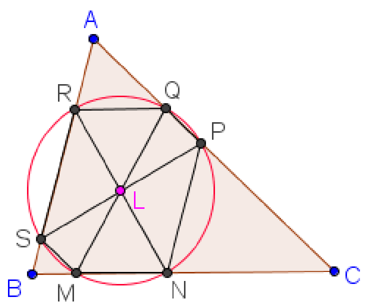
Tính chất:

1. $MN : PQ : RS = a^3 : b^3 : c^3$
2. $NP = QR = SM$
3. $BM : MN : NC = c^2 : a^2 : b^2$
4. Tâm của lục giác Lemoine thứ nhất là trung điểm đoạn OL.
5. Bán kính $R_1 = \dfrac{abc\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{(a^2+b^2+c^2)\,.4S_{ABC}} = \dfrac{R^2 + R_2^2}{4}$, trong đó R_2 là bán kính

đường tròn Lemoine thứ hai.

Định lý 1.2.26 (Hình lục giác và đường tròn Lemoine thứ hai)
Khái niệm về đường đối song (antiparallel): Cho tam giác ABC. Chọn 2 điểm D, E trên AB, AC sao cho tam giác AED đồng dạng với tam giác ABC. Khi đó DE và BC được gọi là các đường đối song trong góc A.
Tính chất của đường đối song: Đường đối trung luôn đi qua trung điểm của các đường đối song tương ứng với cùng một đỉnh.
Kết quả về hình lục giác và đường tròn Lemoine thứ hai: Cho tam giác ABC và điểm Lemoine L. Qua L kẻ các đường đối song tương ứng với các cạnh của tam giác ABC cắt các cạnh còn lại tại M, N, P, Q, R, S. Khi đó lục giác $MNPQRS$ được goi là lục giác Lemoine thứ hai của tam giác ABC. Lục giác Lemoine thứ hai nội tiếp trong đường tròn Lemoine thứ hai của tam giác, còn được gọi là đường tròn cosin (cosine circle).

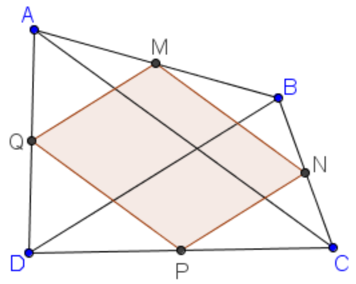
Chứng minh.



Vì SP, RN là các đường đối song trong ΔABC nên ta có $\widehat{ASL} = \widehat{ACB} = \widehat{BRL} \Rightarrow \Delta LRS$ cân tại $L \Rightarrow LR = LS$. Tương tự, ta có $LM = LN, LP = LQ$.
Mặt khác, L là trung điểm SP (tính chất đường đối song), suy ra $LM = LN = LP = LQ = LR = LS$. Do đó 6 điểm M, N, P, Q, R, S cùng nằm trên một đường tròn tâm L.
Tính chất:
1. Bán kính $R_2 = \dfrac{abc}{a^2 + b^2 + c^2}$
2. Các cặp đoạn thẳng $(MN, QR), (PN, RS), (PQ, SM)$ song song và bằng nhau. Độ dài của các đoạn thẳng MN, PQ, RS tỉ lệ với cosin của các góc của ΔABC, điều này giải thích cho tên gọi đường tròn cosin.

Định lý 1.2.27 (Hình bình hành Varignon của tứ giác) Cho tứ giác $ABCD$ có M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Khi đó M, N, P, Q là bốn đỉnh của một hình bình hành gọi là hình bình hành Varignon của tứ giác $ABCD$.

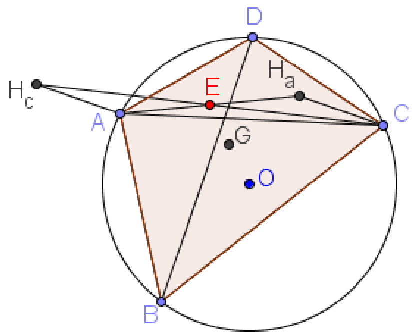
Chứng minh.



MN, PQ tương ứng là đường trung bình của các tam giác ABC và ACD $\Rightarrow$ $MN//PQ, MN = PQ = \dfrac{AC}{2}$. Do đó $MNPQ$ là hình bình hành (đpcm)

Định lý 1.2.28 (Điểm Euler của tứ giác nội tiếp) Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. H_a, H_b, H_c, H_d lần lượt là trực tâm các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC. Khi đó các đường thẳng AH_a, BH_b, CH_c, DH_d đồng quy tại điểm Euler của tứ giác $ABCD$.

Chứng minh.



Ta có AH_c và CH_a song song và cùng bằng 2 lần khoảng cách từ O đến BD nên tứ giác ACH_aH_c là hình bình hành, suy ra AH_c và CH_a giao nhau tại trung điểm của mỗi đường. Tương tự ta suy ra đpcm.

Ta có một số tính chất sau về điểm Euler:

1. Điểm Euler đối xứng với tâm O của đường tròn ngoại tiếp tứ giác qua trọng tâm G của tứ giác.

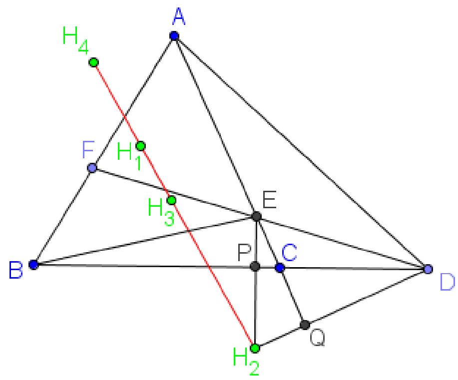
2. Điểm Euler nằm trên đường vuông góc hạ từ trung điểm một cạnh tới cạnh đối diện (hoặc trung điểm đường chéo tới đường chéo còn lại).

3. Điểm Euler nằm trên đường thẳng Simson của đỉnh A với tam giác BCD, tương tự với 3 đỉnh còn lại.

4. Đường tròn 9 điểm của 4 tam giác ABC, BCD, CDA, DAB đồng quy tại điểm Euler.

Định lý 1.2.29 (Đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần) Cho tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Khi đó trực tâm của các tam giác AEF, DCE, ABC, BDF cùng nằm trên đường thẳng Steiner của tứ giác toàn phần.

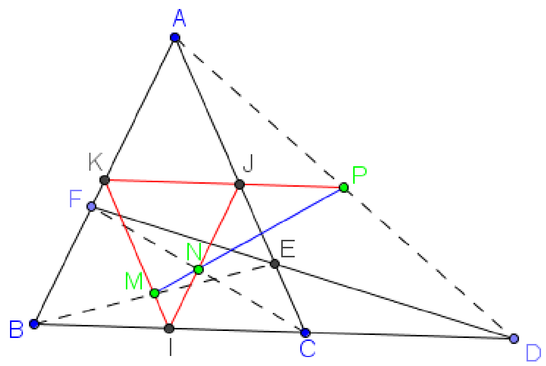
Chứng minh.



Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 lần lượt là trực tâm các tam giác AEF, DCE, ABC, BDF. Gọi X, Z là trung điểm các đường chéo BE, AD. Ta có $P_{H_2/(X,XB)} = H_2P.H_2E = H_2Q.H_2D = P_{H_2/(Z,ZD)}$. Do đó H_2 nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (X, XB) và (Z, ZD). Tương tự với 3 điểm còn lại, ta suy ra đpcm.

Định lý 1.2.30 (Đường thẳng Gauss của tứ giác toàn phần) Cho tứ giác toàn phần $ABCDEF$. Khi đó trung điểm các đường chéo cùng nằm trên một đường thẳng được gọi là đường thẳng Gauss của tứ giác toàn phần.

Chứng minh.

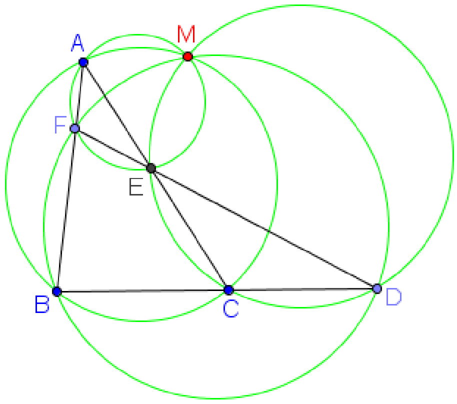


Gọi M, N, P là trung điểm các đường chéo BE, CF, AD; IJK là tam giác trung bình của tam giác ABC. Khi đó các điểm M, N, P nằm trên các cạnh của tam giác IJK. Áp dụng định lý Thales, ta có:
$\frac{\overline{MK}}{\overline{MI}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}; \frac{\overline{NI}}{\overline{NJ}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}; \frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} \Rightarrow \frac{\overline{MK}}{\overline{MI}}.\frac{\overline{NI}}{\overline{NJ}}.\frac{\overline{PJ}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{EC}}.\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = 1 \Rightarrow$ đpcm.

Định lý 1.2.31 (Điểm Miquel của tứ giác toàn phần) Cho tứ giác toàn phần

ABCDEF. Khi đó các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEF, DCE, ABC, BDF đồng quy tại điểm Miquel của tứ giác toàn phần.

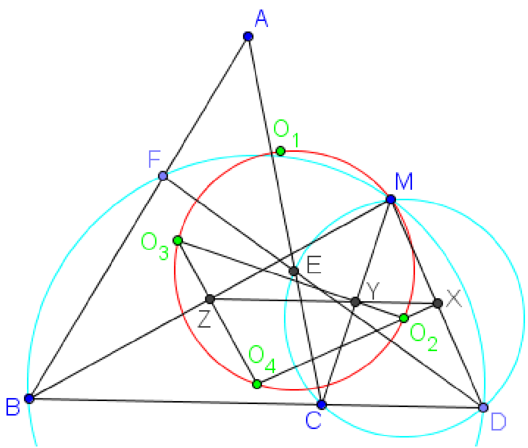
Chứng minh.



Gọi M là giao điểm khác E của (AEF) và (CDE). Áp dụng định lý Miquel cho tam giác DBF và 3 điểm C, E, A ta có (ABC) đi qua M.
Vậy M nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tương tự, ta suy ra đpcm.

Định lý 1.2.32 (Đường tròn Miquel của tứ giác toàn phần) Cho tứ giác toàn phần $ABCDEF$, ta có điểm Miquel M và tâm ngoại tiếp các tam giác AEF, CDE, ABC, BDF cùng nằm trên đường tròn Miquel của tứ giác toàn

Chứng minh.



Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 là tâm ngoại tiếp các tam giác AEF, CDE, ABC, BDF. Gọi X, Y, Z là trung điểm các đoạn thẳng MD, MC, MB. Ta có MD là giao của (O_4) và (O_2) nên $O_4O_2 \perp MD$. Tương tự, ta có $MY \perp O_3O_2, MZ \perp O_3O_4$. Mặt khác, X, Y, Z thẳng hàng (theo Thales). Do đó theo định lí đảo về đường thẳng Simson ta có M, O_2, O_3, O_4 đồng viên. Tương tự, ta suy ra đpcm.