Bài hình học thi chuyên KHTN năm 2014 ngày 2

Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và phát triển bài toán hình học thi chuyên KHTN năm 2014 ngày 2 bằng các công cụ hình học thuần túy.

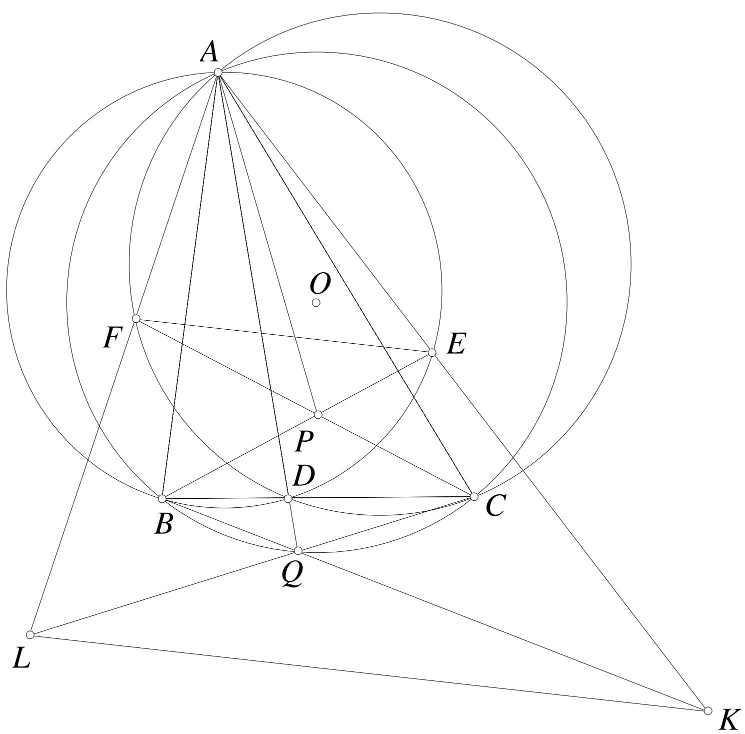
Trong kỳ thi tuyển sinh vào trường THPT chuyên KHTN năm 2014 ngày 2 có bài toán hình học hay như sau

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C.

1) Chứng minh rằng bốn điểm A, E, P, F cùng thuộc một đường tròn.

2) Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Chứng minh rằng tam giác ABE đồng dạng bới tam giác CLF.

3) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AE và đường thẳng QB. Chứng minh rằng $\angle QKL + \angle PAB = \angle QLK + \angle PAC$.



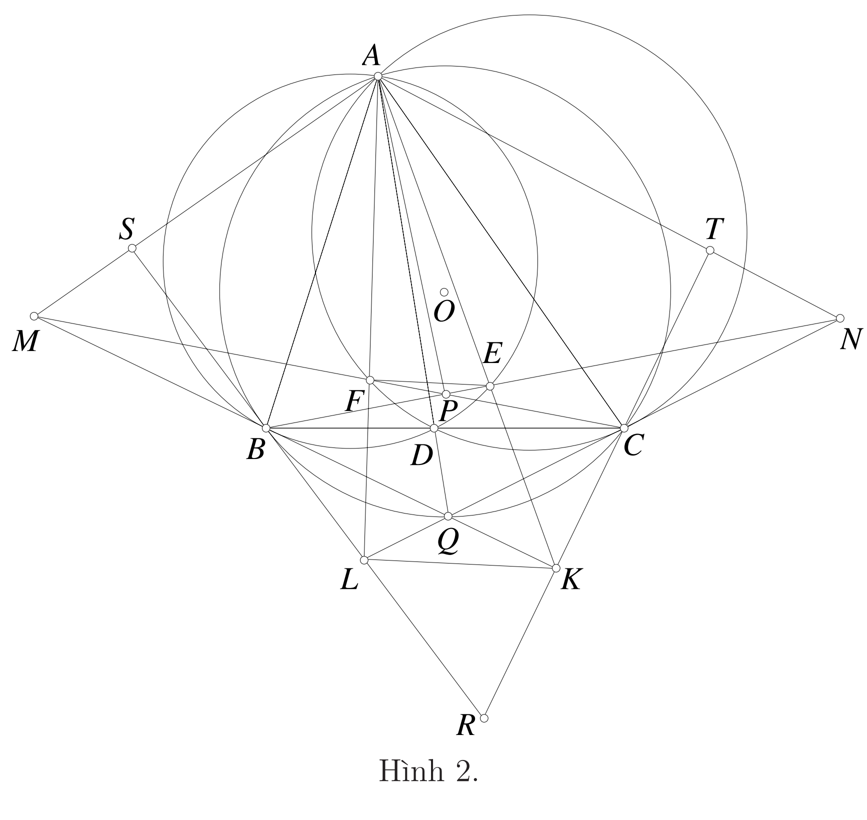
Hình 1.

Lời giải. 1) Ta có $\angle EAF = \angle EAD + \angle DAF = \angle EBD + \angle FCB = 180^\circ - \angle BPC = 180^\circ - \angle EPF$ suy ra tứ giác $AEPF$ nội tiếp, điều phải chứng minh.

2) Từ tứ giác $AEPF$ nội tiếp suy ra $\angle AEB = \angle LFC$ (1).
Ta lại có $\angle FCL = \angle FCB + \angle BCL = \angle PBC + \angle BAQ = \angle DAE + \angle BAQ = \angle BAE$ (2).
Từ (1),(2) suy ra $\Delta FCL \sim \Delta EAB$, điều phải chứng minh.
3) Từ $\triangle FCL \sim \triangle EAB$ suy ra $\dfrac{FL}{BE} = \dfrac{FC}{AE}$ hay $FL.EA = FC.EB$ (3).
Chứng minh tương tự $EK.FA = FC.EB$ (4).
Từ (3),(4) suy ra $FL.EA = EK.FA$ hay $\dfrac{FL}{FA} = \dfrac{EK}{EA}$ suy ra $EF \parallel KL$.
Ta lại có $\angle QLK = \angle ALK - \angle ALQ = \angle AFE - \angle ABE = \angle APE - \angle ABE = \angle PAB$.
Tương tự ta có $\angle QKL = \angle PAC$.
Từ đó suy ra $\angle QKL + \angle PAB = \angle QLK + \angle PAC$, điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đây là bài toán hay có kết cấu chặt chẽ các ý liên quan tới nhau. Ba câu được chia ra ba mức độ dễ, trung bình và khó để phân loại được học sinh. Ý chính của bài toán tập trung vào việc chứng minh $EF \parallel KL$. Ý cuối của bài toán là một cách khai thác sự kiện này. Việc chỉ ra các tam giác đồng dạng và hai đường thẳng song song có thể dùng để khai thác thêm nhiều bài toán thú vị khác từ mô hình này, xin giới thiệu với bạn đọc một vài bài toán như vậy

Bài 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác s $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và DAC. PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C. AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A. AE cắt đường thẳng QB tại K. AF cắt đường thẳng QC tại L. CK giao BL tại R. CF giao QB tại M. BE giao QC tại N. RB cắt AM tại S. RC cắt AN tại T. Chứng minh rằng bốn điểm A, S, R, T cùng thuộc một đường tròn.

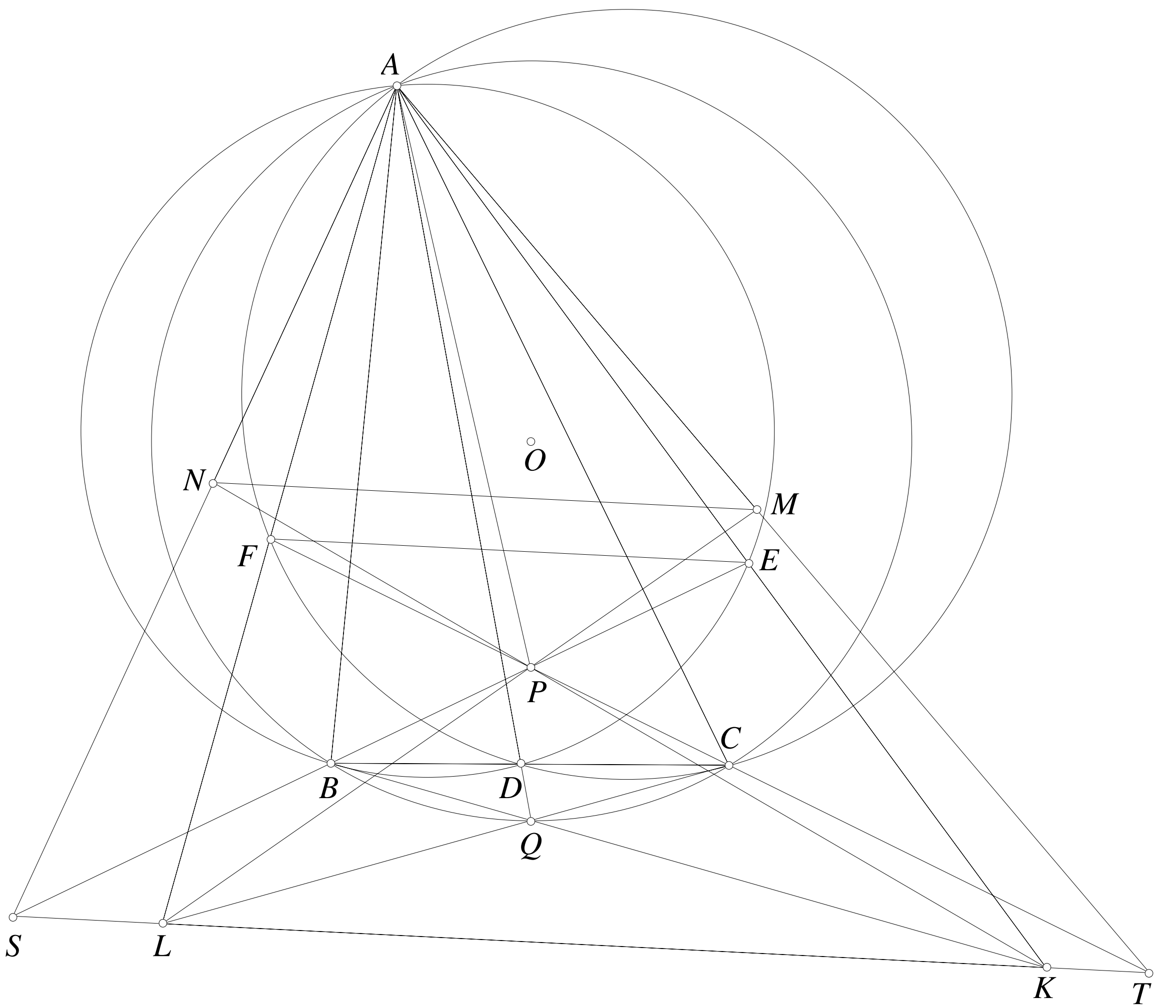


Hình 2.

Lời giải. Từ trong chứng minh bài 1 $\triangle FCL \sim \triangle EAB$ suy ra $\angle FLC = \angle ABE$ suy ra tứ giác $ABLN$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $ACLM$ nội tiếp. Từ đó ta có $\angle SAT = \angle MAC + \angle NAB - \angle BAC = \angle QKR + \angle QLR - (180^\circ - \angle BQC) = 360^\circ - \angle KRL - 180^\circ = 180^\circ - \angle KRL$. Từ đó suy ra tứ giác $ASRT$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán được khai thác tiếp tục như sau

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C. Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AE cắt đường thẳng QB tại K ,đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Giả sử các đường thẳng PE, PF cắt KL tương ứng tại S và T. Các đường thẳng $PL,\ PK$ lần lượt cắt AT, AS tại M và N. Chứng minh rằng $MN \parallel EF$.



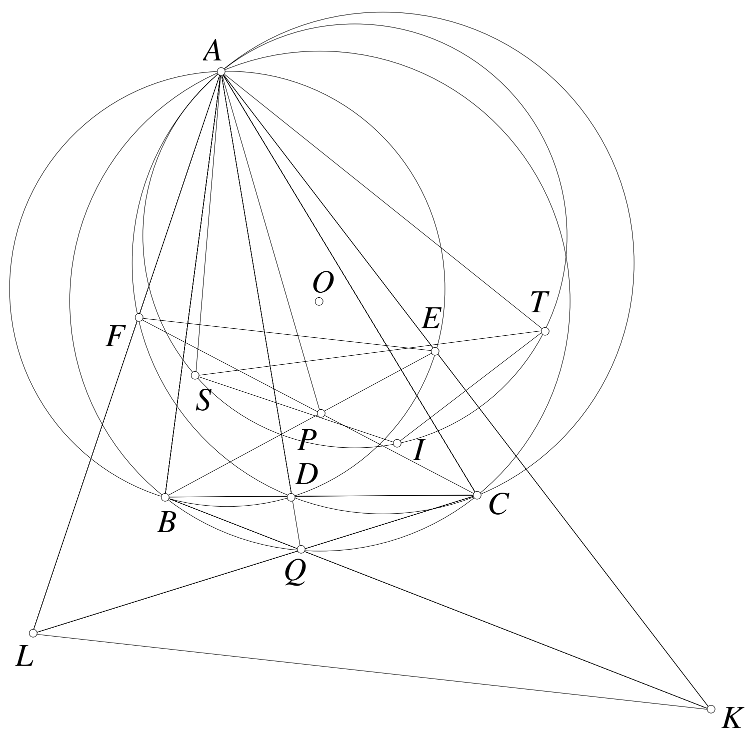
Hình 3.

Lời giải. Theo bài 1 đã có ra $EF \parallel KL$. Ta lại có $\angle FAP = \angle FEP = \angle PSL$ suy ra tứ giác $APLS$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $APKT$ nội tiếp, suy ra $\angle MPN = \angle MPA + \angle APN = \angle AST +$

$\angle ATS = 180^\circ - \angle SAT$ suy ra tứ giác $AMPN$ nội tiếp. Vậy $\angle ANM = \angle APM = \angle AST$ suy ra $MN \parallel ST \parallel EF$, điều phải chứng minh. □

Bài toán vẫn được tiếp tục khai thác như sau

Bài 4. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $PB = PC$. D là điểm thuộc cạnh BC (D khác B và D khác C) sao cho P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB và đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC. Đường thẳng PB cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB tại E khác B. Đường thẳng PC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DAC tại F khác C. Giả sử đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại Q khác A, đường thẳng AE cắt đường thẳng QB tại K ,đường thẳng AF cắt đường thẳng QC tại L. Giả sử P cố định và D di chuyển trên BC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AKL luôn thuộc một đường tròn cố định khi D di chuyển.



Hình 4.

Lời giải. Từ trong chứng minh bài 1 $\triangle FCL \sim \triangle EAB$ suy ra $\angle FLC = \angle ABE$. Ta chú ý P cố đinh nên $\angle ABE$ không đổi do đó $\angle FLC$ không đổi. Mặt khác A, C cố định nên đường tròn (T) ngoại tiếp tam giác ALC là đường tròn cố định. Tương tự đường tròn (S) ngoại tiếp tam giác AKB cũng là đường tròn cố định. Nếu gọi I là tâm ngoại tiếp tam giác AKL thì dễ thất $IS \perp AL, IT \perp AK$ từ đó $\angle SIT = 180^\circ - \angle KAL = \angle EPF$ vì P cố định nên $\angle EPF$ không đổi. Mà S, T cố định, từ đó đường tròn ngoại tiếp tam giác IST cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Chú ý. Ta dễ chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác IST đi qua A.

Như vậy qua một số ví dụ trên, các bạn phần nào thấy được các sự phát triển khác nhau của một số vấn đề được nêu ra trong bài toán thi. Rõ ràng bài toán thi là một bài toán mang nhiều ý nghĩa. Các bạn có thể tự tìm ra cho mình một vài phát triển thú vị khác từ mô hình bài toán gốc từ các yếu tố cố định và di chuyển đã có.

Tài liệu

[1] Đề thi chuyên KHTN ngày 2 tại http://diendantoanhoc.net/forum

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com