Tâm tỷ cự và các bài toán phương tích

Trần Quang Hùng - Trường THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

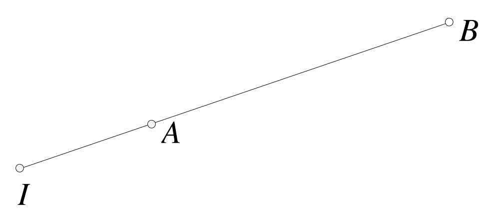
Trong bài viết này trình bày mối liên hệ đặc biệt giữa tâm tỷ cự và phương tích thông qua hệ thức Leibnitz. Tâm tỷ và phương tích là hai khái niệm của chương trình hình học 10, tuy vậy một sự liên hệ giữa chúng hầu như không được đề cập đến. Trong bài báo này tôi xin trình bày mối liên hệ đẹp giữa hai khái niệm này thông qua hệ thức Leibnitz, ý tưởng chính là chúng ta sẽ dùng hệ thức Leibnitz để chứng minh một số công thức tính phương tích từ một điểm có tọa độ tỷ cự xác định tới một đường tròn xác định. Sau đó chúng ta sẽ nêu ra các ứng dụng cơ bản cho của các hệ thức đó, đồng thời với các khái niệm này, các công cụ ta sẽ sử dụng là độ dài đại số và tích vô hướng.

1 Các khái niệm cơ bản

Phần đầu này chúng ta nhắc lại và không chứng minh một số khái niệm cơ bản.

1.1 Tâm tỷ cự của một hệ điểm

Định lý 1 (Tâm tỷ cự cho hệ hai điểm)**.** *Cho đoạn AB và các số thực $\alpha, \beta,\ \alpha + \beta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm I sao cho $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$. Nếu có α', β' sao cho $\alpha'\overrightarrow{IA} + \beta'\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$, thì $\dfrac{\alpha'}{\alpha} = \dfrac{\beta'}{\beta}$, khi đó ta nói I là tâm tỷ cự hệ hai điểm A, B ứng với bộ số (α, β) và ký hiệu $I(\alpha, \beta)$.*



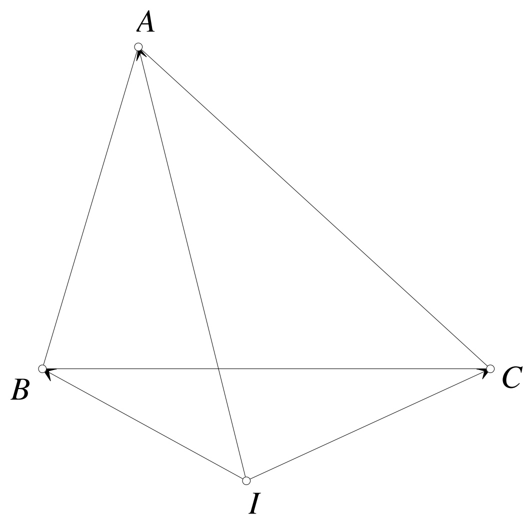
Hình 1.

Chứng minh. Ta có

$$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow -\alpha\overrightarrow{AI}+\beta(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AI})=\overrightarrow{0}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

Như vậy I xác định duy nhất, giả sử có $\alpha'\overrightarrow{IA}+\beta'\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$ tương tự ta suy ra $\overrightarrow{AI}=\frac{\beta'}{\alpha'+\beta'}\overrightarrow{AB}$ từ đây dễ suy ra $\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha'+\beta'}=\frac{\alpha}{\alpha'}$. □

Định lý 2 (Tâm tỷ cự cho hệ ba điểm)**.** *Cho tam giác ABC và các số thực $\alpha,\beta,\gamma\ \alpha+\beta+\gamma\neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm I sao cho $\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ khi đó giả sử có $\alpha',\beta',\gamma',\ \alpha'+\beta'+\gamma'\neq 0$ sao cho $\alpha'\overrightarrow{IA}+\beta'\overrightarrow{IB}+\gamma'\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ thì $\frac{\alpha}{\alpha'}=\frac{\beta}{\beta'}=\frac{\gamma}{\gamma'}$, khi đó ta nói I là tâm tỷ cự của bộ ba điểm A,B,C ứng với bộ số (α,β,γ) và ký hiệu $I(\alpha,\beta,\gamma)$.*



Hình 2.

Chứng minh. Do $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ từ giả thiết đẳng thức vector ta có

$$\alpha\overrightarrow{IA}+\beta\overrightarrow{IB}+\gamma\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$$

Suy ra

$$\overrightarrow{AI}=-(\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC})$$

Theo định lý phân tích vector I tồn tại duy nhất.
Giả sử có $\alpha'\overrightarrow{IA}+\beta'\overrightarrow{IB}+\gamma'\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{0}$ ta suy ra

$$\overrightarrow{AI}=-(\frac{\beta'}{\alpha'+\beta'+\gamma'}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma'}{\alpha'+\beta'+\gamma'}\overrightarrow{AC})$$

Theo sự phân tích vector thì

$$\frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha'+\beta'+\gamma'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$$

Đó là điều phải chứng minh. □

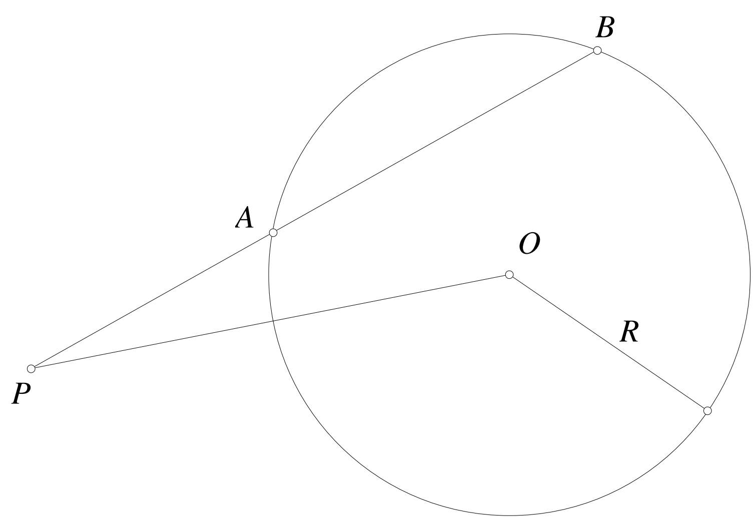
Chú ý. Các định lý 1 và định lý 2 nói về sự tồn tại duy nhất của tâm tỷ cự ứng với tọa độ tỷ cự sai khác nhau một tỷ lệ thức. Tâm tỷ cự hệ n điểm cũng được định nghĩa bằng hệ thức vector tương tự, tức với $A_1, ..., A_n$ phân biệt và các số thực $\alpha_1, ..., \alpha_n$ có tổng khác 0 thì tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{IA_1} = \overrightarrow{0}$. Tuy nhiên điểm khác biệt cơ bản là với $n > 3$ với mỗi điểm điểm I trong mặt phẳng không xác định duy nhất bộ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ sai khác nhau một tỷ lệ thức, tức là với I xác định ta có thể tìm được nhiều bộ $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ không tỷ lệ mà chúng vẫn thỏa mãn đẳng thứ vector trên, chính điều này cho chúng ta thấy ta chỉ có thể dùng bộ ba tọa độ tỷ cự chỉ với tam giác hoặc trong không gian là với tứ diện, đó thực chất cũng chính là hệ quả của các định lý phân tích vector trong mặt phẳng hoặc không gian.

1.2 Phương tích

Phương tích trong chương trình hình học 10 thường được gắn liền với việc khai triển nó theo cát tuyến, tuy nhiên ta sẽ định nghĩa phương tích một cách độc lập và nhìn lại việc khai triển nó theo cát tuyến cũng như một hệ quả của hệ thức Leibnitz cho hai điểm.

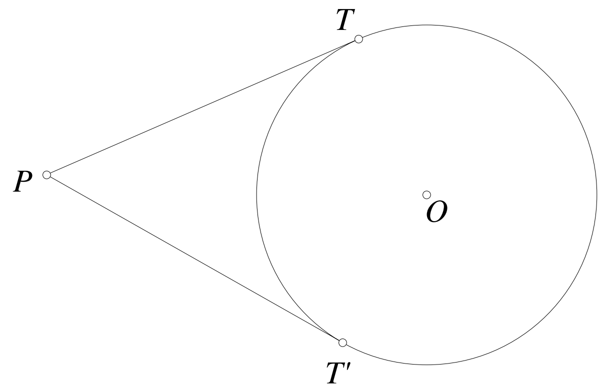
Định nghĩa 1. *Cho đường tròn (O, R) và điểm P bất kỳ ta gọi số thực $OP^2 - R^2$ là phương tích của điểm P đối với đường tròn (O), phương tích được ký hiệu là $\mathscr{P}_{P/(O)}$.*

Như vậy từ định nghĩa ta dễ thấy dấu của phương tích xác định tùy theo vị trí của điểm đối với đường tròn.



Hình 3.

Định lý 3 (Khai triển phương tích theo tiếp tuyến)**.** *Cho đường tròn (O) và P bất kỳ ở ngoài (O). PT là tiếp tuyến của (O), T thuộc (O). Khi đó $\mathscr{P}_{P/(O)} = PT^2$.*



Chứng minh. Định lý là hệ quả trực tiếp từ định nghĩa phương tích thông qua định lý Pythagoras. □

Định lý 4 (Khai triển phương tích theo cát tuyến)**.** *Cho đường tròn* (O) *và điểm* P *bất kỳ, một cát tuyến qua* P *cắt đường tròn tại hai điểm* A, B *thì tích* $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ *luôn không đổi với mọi cát tuyến qua* P *và chính bằng phương tích điểm* P *đối với* (O) *tức* $\mathscr{P}_{P/(O)} = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$

Chứng minh. Chúng ta sẽ chứng minh chi tiết định lý này trong phần bài tập. □

Sau đây chúng ta sẽ đi đến một số bài toán vận dụng kết hợp cả hai kiến thức về tâm tỷ cự và phương tích để giải toán, để nắm rõ các bài tập và ví dụ này yêu cầu các bạn cần có các kiến thức cơ bản nhất về vector và độ dài đại số của vector.

2 Một số bài tập vận dụng

Bài tập đầu tiên chúng ta xây dựng chi tiết hơn bài toán tâm tỷ cự của hai điểm, nói cách khác là ta chỉ ra một bộ số cụ thể.

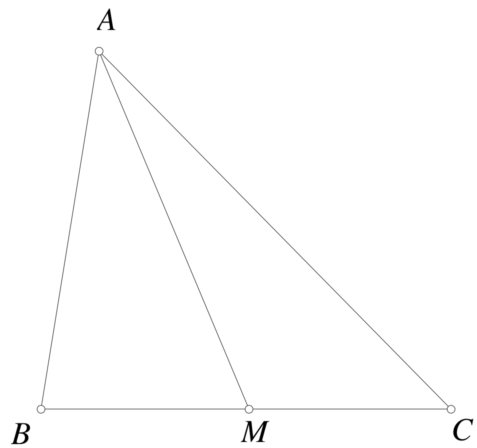
Bài toán 1 (Bài toán về tâm tỷ cự hệ hai điểm)**.** *Cho đoạn* AB *và điểm* I *nằm trên đường thẳng* AB*, chứng minh rằng*

i) $I(\overline{IB}, -\overline{IA})$

ii) Nếu $I(\alpha, \beta)$ *thì với mọi* P *thì* $\alpha PA^2 + \beta PB^2 = (\alpha+\beta)PI^2 + \dfrac{\alpha\beta AB^2}{\alpha+\beta}$

iii) Áp dụng chứng minh hệ thức Sterwartz trong tam giác ABC *với mọi* M *thuộc đoạn* BC *thì*

$$MB.AC^2 + MC.AB^2 = BC.MA^2 + MB.MC.BC.$$



Chứng minh.

i) Gọi $\overrightarrow{e}$ là vector chỉ phương trục AB ta dễ thấy $\overline{IB}.\overrightarrow{IA} - \overline{IA}.\overrightarrow{IB} = \overline{IB}\cdot\overline{IA}\overrightarrow{e} - \overline{IA}\cdot\overline{IB}\overrightarrow{e} = \overrightarrow{0}$
ii) Ta có

$$\begin{aligned}\alpha PA^2 + \beta PB^2 &= \alpha(\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA})^2 + \beta(\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= (\alpha+\beta)PI^2 + 2\overrightarrow{PI}.(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB}) + \alpha IA^2 + \beta IB^2.\end{aligned}$$

Ta chú ý từ $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$. Bình phương vô hướng ta có

$$\begin{aligned}(\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB})^2 = 0 &\Leftrightarrow \alpha^2 IA^2 + \beta^2 IB^2 + 2\alpha\beta\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 IA^2 + \beta^2 IB^2 + 2\alpha\beta\frac{IA^2 + IB^2 - AB^2}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha IA^2 + \beta IB^2 = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}AB^2.\end{aligned}$$

iii)Áp dụng vào tam giác ABC ta dễ thấy với M nằm trên đường thẳng BC thì $M(\overline{MB}, -\overline{MC})$ do đó áp dụng hệ thức Jacobi phần ii) ta dễ suy ra

$$\overline{MB}.AC^2 - \overline{MC}.AB^2 = (\overline{MB} - \overline{MC})AM^2 - \frac{\overline{MB}\cdot\overline{MC}BC^2}{\overline{MB} - \overline{MC}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{MB}AC^2 - \overline{MC}AB^2 = \overline{CB}AM^2 + \overline{MB}\cdot\overline{MC}\cdot\overline{BC}$$

Khi M thuộc đoạn thẳng ta chọn vector chỉ phương trục cùng hướng $\overrightarrow{BC}$ để bỏ dấu của độ dài đại số, suy ra

$$MB.AC^2 + MC.AB^2 = BC.MA^2 + MB.MC.BC$$

Đó là điều phải chứng minh.

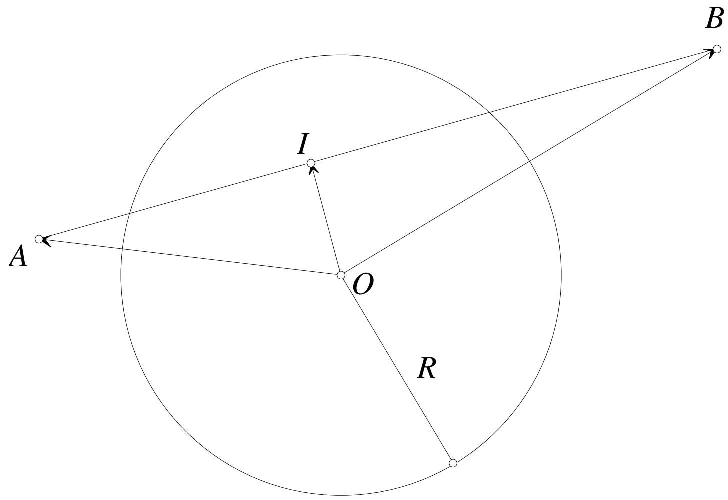
□

Nhận xét. Qua chứng minh ta còn thấy được công thức Sterwartz tổng quát với độ dài đại số

$$\overline{MB}.AC^2 - \overline{MC}.AB^2 = \overline{CB}.AM^2 + \overline{MB} \cdot \overline{MC} \cdot \overline{BC}$$

Bài toán 2 (Công thức khai triển phương tích theo hai điểm và đường tròn)**.** *Cho đường tròn* (O) *và đoạn thẳng* AB *bất kỳ,* I *là tâm tỷ cự của* A, B *theo bộ số* α, β*, chứng minh rằng*

$$\alpha \mathscr{P}_{A/(O)} + \beta \mathscr{P}_{B/(O)} = (\alpha + \beta)\mathscr{P}_{I/(O)} + \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} AB^2.$$



Chứng minh. Gọi bán kính của (O) là R, từ hệ thức phần ii) bài toán 1 trừ hai vế cho $(\alpha + \beta)R^2$ ta được

$$\alpha(IA^2 - R^2) + \beta(IB^2 - R^2) = (\alpha + \beta)(IP^2 - R^2) + \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} AB^2.$$

Theo định nghĩa phương tích hệ thức này cho ta

$$\alpha \mathscr{P}_{A/(O)} + \beta \mathscr{P}_{B/(O)} = (\alpha + \beta)\mathscr{P}_{I/(O)} + \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} AB^2.$$

□

Bây giờ ta quay lại chứng minh định lý 4 về khai triển phương tích theo cát tuyến như sau

Định lý 4 (Khai triển phương tích theo cát tuyến)**.** *Cho đường tròn* (O) *và điểm* P *bất kỳ, một cát tuyến qua* P *cắt đường tròn tại hai điểm* A, B *thì tích* $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ *luôn không đổi với mọi cát tuyến qua* P *và chính bằng phương tích điểm* P *đối với* (O) *tức* $\mathscr{P}_{P/(O)} = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$.

Chứng minh định lý 4. Ta giả sử P là tâm tỷ cự của A, B theo bộ số α, β, khi cho $A, B \in (O)$ thì $\mathscr{P}_{A/(O)} = \mathscr{P}_{B/(O)} = 0$ từ đó suy ra

$$\mathscr{P}_{P/(O)} = -\frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2} AB^2$$

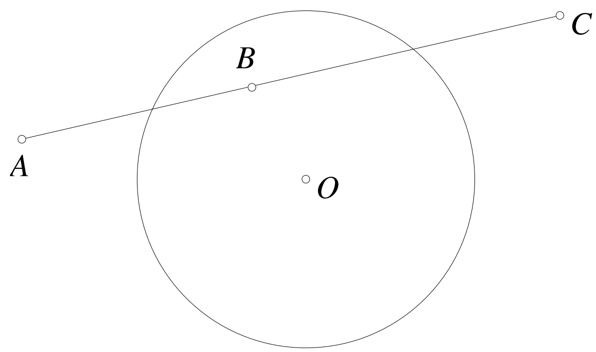
Tuy nhiên theo i) bài toán 1 ta chú ý $\dfrac{\alpha}{\overline{PC}} = -\dfrac{\beta}{\overline{PB}}$ do đó kết hợp hệ thức trên ta suy ra $\mathscr{P}_{P/(O)} = \overline{PB}.\overline{PC}$. □

Nhận xét. Cách làm này tuy dài nhưng có rất nhiều ưu điểm. Thứ nhất chúng ta xây dựng định nghĩa phương tích một cách độc lập và chúng ta khai triển phương tích theo cát tuyến hoặc tiếp tuyến như những hệ quả của định lý Leibnitz. Thứ hai trong quá trình chứng minh, thực chất chúng ta đã đưa ra bài toán tổng quát rất quan trọng đó là ta có thể tính phương tích của một điểm I bất kỳ trên một đoạn thẳng đối với một đường tròn thông qua phương tích của hai mút đoạn thẳng đó. Công thức này có ý nghĩa lớn trong thực hành giải toán.

Công thức tính phương tích của điểm trên đoạn thẳng theo phương tích của hai đầu mút còn có thể viết dưới dạng sau

Bài toán 3. *Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C thẳng hàng, chứng minh rằng*

$$\mathscr{P}_{A/(O)}\overline{BC} + \mathscr{P}_{B/(O)}\overline{CA} + \mathscr{P}_{C/(O)}\overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$$



Chứng minh. Chúng ta chỉ cần để ý rằng vai trò của A, B, I trong bài toán 2 là như nhau như vậy bản chất bài toán này là bài toán 2 nhưng viết theo cách khác mà thôi. □

Các bài toán 2 và 3 có nhiều ứng dụng hay, các bạn hãy vận dụng làm một số bài tập sau

Bài toán 4. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ trong tam giác. Qua P kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại A_1, A_2. Tương tự ta có B_1, B_2, C_2, C_2. Chứng minh rằng*

$$\mathscr{P}_{P/(ABC)} = \overline{PA_1} \cdot \overline{PA_2} + \overline{PB_1} \cdot \overline{PB_2} + \overline{PC_1} \cdot \overline{PC_2}$$

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với P nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$. Qua P kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB, AC tại A_1, A_2. Tương tự ta có B_1, B_2, C_2, C_2. Chứng minh rằng*

$$PA_1 \cdot PA_2 = PB_1 \cdot PB_2 + PC_1 \cdot PC_2.$$

Bài toán 6. *Cho tam giác ABC đều tâm O và điểm P bất kỳ, gọi d_a, d_b, d_c là các khoảng cách từ P đến các cạnh BC, CA, AB của tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{9}{4}PO^2 = d_a^2 + d_b^2 + d_c^2 - d_bd_c - d_cd_a - d_ad_b.$$

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC và tâm đường tròn ngoại tiếp O, giả sử các tia OA, OB, OC cắt các cạnh BC, CA, AB tại A', B', C'. Chứng minh rằng*

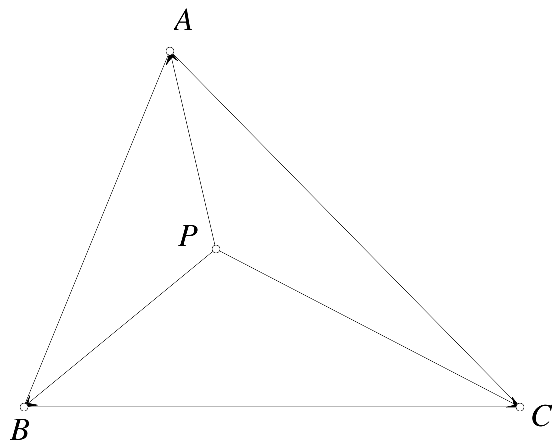
$$\frac{\overline{A'B} \cdot \overline{A'C}}{AA'^2} + \frac{\overline{B'C} \cdot \overline{B'A}}{BB'^2} + \frac{\overline{C'B} \cdot \overline{C'A}}{CC'^2} + 1 = 0$$

Với tâm tỷ cự cho hai điểm chúng ta đã ứng dụng và xây dựng lại được định lý khai triển phương tích theo cát tuyến đồng thời đã tổng quát hơn định lý này ở bài toán 2 và 3, câu hỏi đặt ra là với tâm tỷ cự hệ ba điểm ta sẽ thu được điều gì

Bài toán 8 (Bài toán về tâm tỷ cự hệ ba điểm)**.** *Cho tam giác ABC và I là tâm tỷ cự của A, B, C ứng với các bộ số α, β, γ, chứng minh rằng*

i) Nếu I nằm trong tam giác ABC thì α, β, γ luôn cùng dấu, hãy xét dấu α, β, γ trong các miền còn lại của mặt phẳng.

ii) Khi I nằm trong tam giác hãy chứng minh rằng $\dfrac{\alpha}{S_a} = \dfrac{\beta}{S_b} = \dfrac{\gamma}{S_c}$ với $S_a = S_{IBC}, S_b = S_{ICA}, S_c = S_{IAB}$.



iii)Với mọi điểm P trong mặt phẳng, chứng minh các đồng nhất thức sau

$$\alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)PI^2 + \alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2.$$

$$\alpha IA^2 + \beta IB^2 + \gamma IC^2 = \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha + \beta + \gamma}.$$

$$\alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)PI^2 + \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha + \beta + \gamma}$$ *(Đồng nhất thức Jacobi Lagrange).*

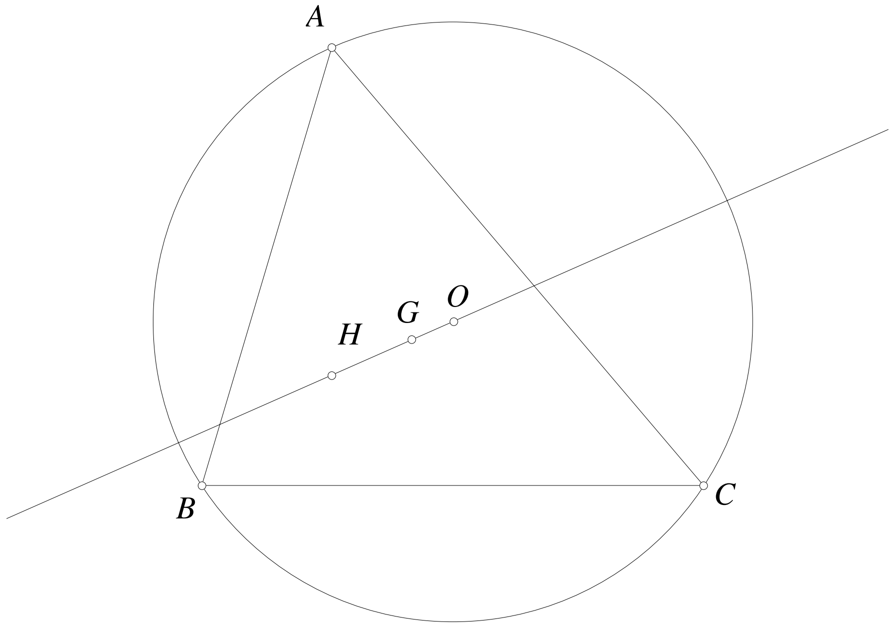
iv) Chứng minh một số tâm tỷ cự đặc biệt, ở đây H, O, I, G tương ứng là trực tâm, tâm ngoại tiếp, tâm nội tiếp, trọng tâm tam giác ABC thì

- Trực tâm $H(\tan A, \tan B, \tan C)$.

- Trọng tâm $G(1, 1, 1)$.

- Tâm đường trong ngoại tiếp $O(\sin 2B, \sin 2C, \sin 2A)$.

- Tâm đường tròn nội tiếp $I(\sin A, \sin B, \sin C)$.



Chứng minh.

i) Gọi đường thẳng IA giao BC tại A' bằng phép chiếu vector dễ dàng suy ra $A'(\beta,\gamma)$ trên BC tương tự có $B'(\gamma,\alpha)$ trên CA và $C'(\alpha,\beta)$ trên AB như vậy I ở trong tam giác ABC khi và chỉ khi $A'\in[BC], C'\in[AB], B'\in[CA] \Leftrightarrow \alpha,\beta,\gamma$ cùng dấu.

ii) Khi I ở trong tam giác thì như câu i) trên, đường thẳng IA giao BC tại A' thì $A'(\beta,\gamma)$ trên BC mặt khác dễ chứng minh $A'(A'B,A'C)$ mà $\dfrac{A'B}{A'C}=\dfrac{S_b}{S_c}$ vậy suy ra $\dfrac{\beta}{S_b}=\dfrac{\gamma}{S_c}$ và tương tự ta có điều phải chứng minh.

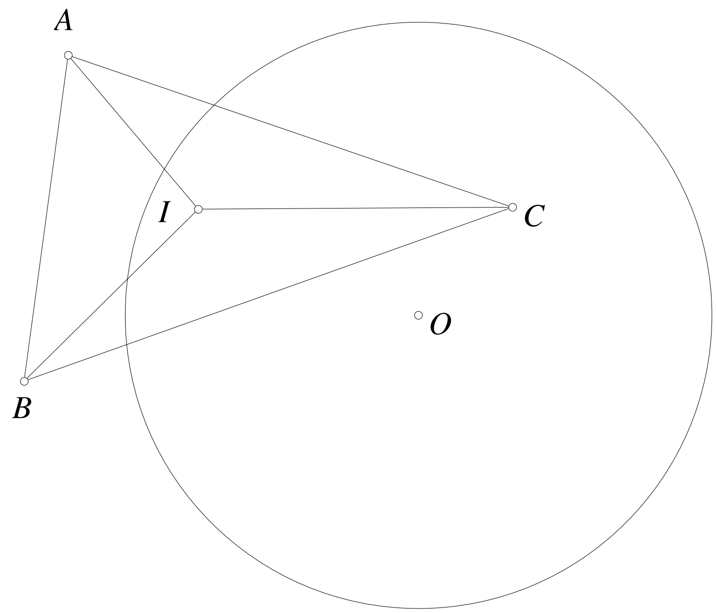
iii) Bài toán được chứng minh bằng tích vô hướng hoàn toàn tương tự với hai điểm.

iv) Ta cần xét tỷ lệ các bộ ba tỷ số đó theo các diện tích S_a, S_b, S_c tương ứng với các điểm đặc biệt. □

Sau đây chúng ta sẽ ứng dụng đồng nhất thức Jacobi Lagrange vào xây dựng cách tính phương tích của tâm tỷ cự hệ 3 điểm

Bài toán 9 (Khai triển phương tích theo bộ ba điểm)**.** *Cho đường tròn (O) và tam giác ABC bất kỳ. I là tâm tỷ cự của A,B,C ứng với các bộ số α,β,γ, chứng minh rằng*

$$\mathscr{P}_{I/(O)}=\frac{\alpha\mathscr{P}_{A/(O)}+\beta\mathscr{P}_{B/(O)}+\gamma\mathscr{P}_{C/(O)}}{\alpha+\beta+\gamma}-\frac{\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2+\alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}.$$



Chứng minh. Từ đồng nhất thức Jacobi Lagrange

$$\alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2 = (\alpha+\beta+\gamma)PI^2 + \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Trừ hai vế cho $(\alpha+\beta+\gamma)R^2$ và theo định nghĩa phương tích ta thu được

$$\alpha(PA^2 - R^2) + \beta(PB^2 - R^2) + \gamma(PC^2 - R^2) = (\alpha+\beta+\gamma)(PI^2 - R^2) + \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$\Leftrightarrow \alpha\mathscr{P}_{A/(O)} + \beta\mathscr{P}_{B/(O)} + \gamma\mathscr{P}_{C/(O)} = (\alpha+\beta+\gamma)\mathscr{P}_{I/(O)} + \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

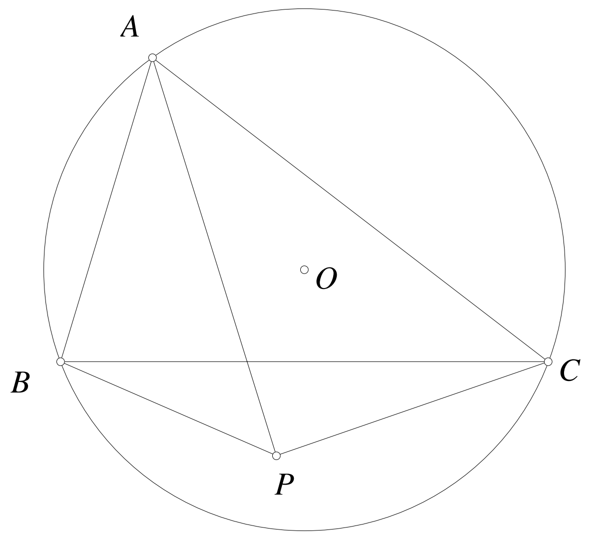
$$\Leftrightarrow \mathscr{P}_{I/(O)} = \frac{\alpha\mathscr{P}_{A/(O)} + \beta\mathscr{P}_{B/(O)} + \gamma\mathscr{P}_{C/(O)}}{\alpha+\beta+\gamma} - \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

□

Bài toán trên có vô cùng nhiều ứng dụng trong thực hành giải toán, chúng ta hãy lần lượt ứng dụng nó để giải một số bài toán sau

Bài toán 10 (Tính phương tích của tâm tỷ cự đối với đường tròn ngoại tiếp)**.** *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với mọi $P(\alpha,\beta,\gamma)$ trên mặt phẳng, chứng minh rằng phương tích điểm P với (O) cho bởi hệ thức*

$$\mathscr{P}_{P/(O)} = -\frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}.$$



Chứng minh. Ta chú ý A, B, C đều nằm trên đường tròn (O) nên $\mathscr{P}_{A/(O)} = \mathscr{P}_{B/(O)} = \mathscr{P}_{C/(O)} = 0$. Áp dụng tiếp bài toán 9 ta suy ra

$$\mathscr{P}_{P/(O)} = -\frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

Đó là điều phải chứng minh. □

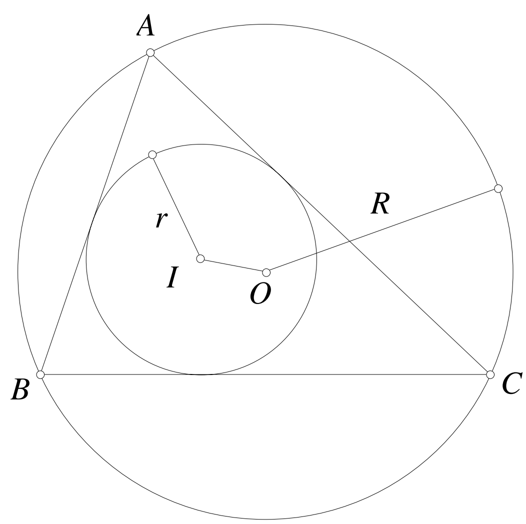
Chú ý. Từ công thức tính phương tích ta thấy $P(\alpha, \beta, \gamma)$ thuộc đường tròn ngoại tiếp khi và chỉ khi

$$\mathscr{P}_{P/(ABC)} = 0 \Leftrightarrow -\frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2} = 0 \Leftrightarrow \beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2 = 0$$

Đây chính là phương trình biểu diễn đường tròn ngoại tiếp trong hệ tọa độ tỷ cự. Dùng hệ tọa độ tỷ cự để nghiên cứu hình học tam giác là một hướng đi rất hay và cho nhiều kết quả rất phong phú. Các bạn có thể xem thêm trong [4].

Bài toán 11 (Hệ thức Euler)**.** *Cho tam giác ABC nội tiếp (O, R) và ngoại tiếp (I, r). Chứng minh rằng*

$$OI^2 = R^2 - 2Rr.$$



Chứng minh. Áp dụng công thức phương tích bài toán 10 cho $I(a, b, c)$ và biến đổi lượng giác ta thu được điều phải chứng minh. □

Chú ý. Từ bài toán trên do $OI^2 \geq 0$ ta suy ra bất đẳng thức nổi tiếng $R \geq 2r$ hay còn gọi là bất đẳng thức Euler. Bất đẳng thức Euler có thể coi là bất đẳng thức lớn nhất trong các các bất đẳng thức của hình học sơ cấp, nó cùng với cách chứng minh của nó là cơ sở, nền tảng của hầu hết các bất đẳng thức hình học nổi tiếng khác.

Bài toán 12 (Hệ thức tương tự cho các tâm bàng tiếp)**.** *Cho tam giác ABC nội tiếp (O, R) và ba đường tròn bàng tiếp $(I_a, r_a), (I_b, r_b), (I_c, r_c)$. Chứng minh rằng*

$$OI_a^2 = R^2 + 2Rr_a,\ OI_b^2 = R^2 + 2Rr_b,\ OI_c^2 = R^2 + 2Rr_c.$$

Chứng minh. Áp dụng công thức phương tích bài toán 10 cho $I_a(-a, b, c), I_b(a, -b, c), I_c(a, b, -c)$ và biến đổi lượng giác ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 13. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O, R), trọng tâm G.*

a) Chứng minh rằng $OG^2 = R^2 - \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.

b) Chứng minh rằng $\mathscr{P}_{H/(O)} = -8R^2 \cos A \cos B \cos C$.

c) Chứng minh hệ thức lượng giác cơ bản $\cos A^2 + \cos B^2 + \cos C^2 + 2 \cos A \cos B \cos C = 1$.

Chứng minh. a) Ta cũng chỉ cần áp dụng công thức phương tích bài toán 10 cho $G(1, 1, 1)$ và $H(\tan A, \tan B, \tan C)$, phần sau ta cũng chỉ cần chú ý rằng $OH = 3OG$ kết hợp công thức a),b) ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Cách làm của ta nếu hiểu theo một cách nào đó thì hơi dài xong cái lợi của cách làm đó là đặt các bài toán quen thuộc của chúng ta trong một cái nhìn thống nhất hơn khi xem chúng đều là hệ quả của công thức phương tích bài toán 10. Một điều qua trọng khác là ta thấy được ý nghĩa hình học của đồng nhất thức lượng giác cơ bản trên bắt nguồn từ đường thẳng Euler và các bài toán phương tích. Đồng nhất thức lượng giác trên có ý nghĩa đặc biệt đối với những người yêu thích bất đẳng thức hình học, bất đẳng thức đại số và nó là chiếc cầu nối quan trọng giữa hai lĩnh vực lớn bất đẳng thức.

Sau đây ta trình bày một bài toán có ý nghĩa đặc biệt trong hình học phẳng với phép chứng minh sử dụng các công cụ vừa xây dựng

Bài toán 14 (Đẳng thức Ptolemy dạng chi tiết)**.** *Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và P nằm trên (O) trong ba số aPA, bPB, cPC có một số bằng tổng ba số kia, cụ thể là khi*

i) P nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ thì $aPA = bPB + cPC$

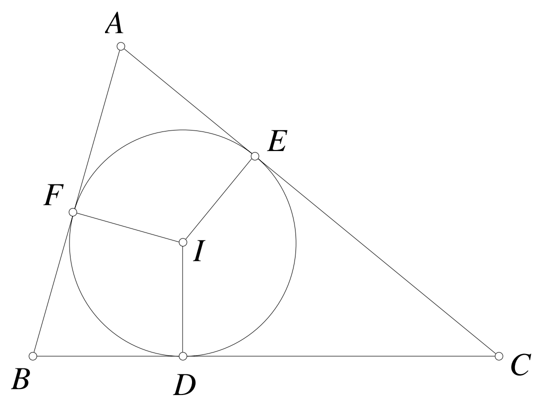
ii) P nằm trên cung nhỏ $\overset{\frown}{CA}$ thì $bPB = cPC + aPA$

iii) P nằm trên cung nhỉ $\overset{\frown}{AB}$ thì $cPC = aPA + bPB$

Chứng minh. Khi P thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{BC}$ ta dễ chỉ ra P là tâm tỷ cự của A, B, C ứng với bộ số $P(-\dfrac{a}{PA}, \dfrac{b}{PB}, \dfrac{c}{PC})$ sau đó áp dụng công thức phương tích bài toán 10 ta suy ra điều phải chứng minh. Với P thuộc các cung tròn khác ta chứng minh tương tự. □

Bài toán 15 (Phương tích tâm tỷ cự đối với đường tròn nội tiếp)**.** *Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) với $P(\alpha,\beta,\gamma)$, chứng minh rằng phương tích của P đối với (I) cho bởi hệ thức*

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{P/(I)} &= \frac{\alpha(p-a)^2+\beta(p-b)^2+\gamma(p-c)^2}{\alpha+\beta+\gamma}-\frac{\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2+\alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}\\ &= \frac{\alpha(p-a)^2+\beta(p-b)^2+\gamma(p-c)^2}{\alpha+\beta+\gamma}+\mathscr{P}_{P/(O)}\end{aligned}$$



Chứng minh. Gọi đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F theo công thức phương tích và tiếp tuyến ta có

$\mathscr{P}_{A/(O)} = AE^2 = AF^2 = (p-a)^2, \mathscr{P}_{B/(O)} = BD^2 = BF^2 = (p-b)^2, \mathscr{P}_{C/(O)} = CE^2 = CD^2 = (p-c)^2$.

Sau đó áp dụng công thức bài toán 9, ta thu được điều phải chứng minh. □

Bài toán 16. *Chứng minh một số đẳng thức cơ bản của lượng giác trong tam giác sau*

i) $ab+bc+ac = p^2+4Rr+r^2$

ii) $a^2+b^2+c^2 = 2p^2-2r(4R+r)$

iii) $(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2 = p^2-2r(4R+r)$

Chứng minh. i) Sử dụng $S = \dfrac{abc}{4R} = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ta dễ suy ra $p^2+4Rr+r^2 = p^2+\dfrac{abc}{p}+\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} = p^2+\dfrac{p^3-p^2(a+b+c)+p(ab+bc+ca)}{p} = p^2+p^2-2p^2+ab+bc+ca = ab+bc+ca$, đó là điều phải chứng minh

ii),iii) Chỉ là hệ quả của i). □

Từ các đẳng thức trên suy ra được công thức phương tích của trọng tâm G đối với (I)

Bài toán 17. *Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) và trọng tâm G. Chứng minh rằng rằng công thức của phương tích G đối với đường tròn nội tiếp tam giác ABC cho bởi*

$$\mathscr{P}_{G/(I)} = \frac{p^2-4r(4R+r)}{9}.$$

Chứng minh. Áp dụng công thức tính phương tích với đường tròn nội tiếp cho $G(1,1,1)$ ta có

$$\mathscr{P}_{G/(I)} = \frac{(p-a)^2+(p-b)^2+(p-c)^2}{3} + \frac{a^2+b^2+c^2}{9}.$$

Kết hợp các đẳng thức bài toán 15 ta dễ suy ra điều phải chứng minh. □

Chú ý. Từ công thức trên ta dễ chỉ ra $0 \le IG^2 = \dfrac{16Rr-5r^2}{9}$, từ đây suy ra bất đẳng thức cơ bản $p^2 \ge 16Rr - 5r^2$ gọi là bất đẳng thức Gerretsen thứ nhất.

Bài toán 18. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O,R), bán kính nội tiếp r, trực tâm H. Chứng minh rằng công thức của phương tích H đối với đường tròn nội tiếp tam giác ABC cho bởi*

$$\mathscr{P}_{H/(I)} = 4R^2 + 4Rr + 2r^2 - p^2.$$

Chứng minh. Ta đa tính được $GI^2 = \dfrac{16Rr-5r^2}{9}$, $OI^2 = R^2 - 2Rr$ và $OG^2 = \dfrac{9R^2-(a^2+b^2+c^2)}{9}$ chú ý từ kết quả đường thẳng Euler ta có $3\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{HO}$ hay $3\overrightarrow{HG} - 2\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{0}$ áp dụng hệ thức Jacobi ta suy ra $3IG^2 - 2IO^2 = IH^2 - 6OG^2$ kết hợp bài toán 15 bằng các tính toán cụ thể ta suy ra điều phải chứng minh. □

Chú ý. Từ công thức phương tích trên ta dễ chỉ ra $0 \le IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - p^2$ từ đó suy ra bất đẳng thức cơ bản $p^2 \le 4R^2 + 4Rr + 3r^2$ gọi là bất đẳng thức Gerretsent thứ hai.

Bất đẳng thức Gerretsen $4R^2 + 4Rr + 3r^2 \ge p^2 \ge 16Rr - 5r^2$ là các bất đẳng thức khó và cơ bản của các bất đẳng thức hình học phẳng nó thường được dùng làm bổ đề để chứng minh một số bài toán bất đẳng thức đại số và hình học khác, qua đây ta thấy được ý nghĩa hình học đẹp về mặt phương tích của chúng.

Sau đây chúng ta xây dựng một cách tương tự cách tính phương tích từ tâm tỷ cự đến các đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC qua các bài tập sau

Bài toán 19. *Cho tam giác ABC trọng tâm G trực tâm H và ba đường tròn bàng tiếp (I_a, r_a), (I_b, r_b), (I_c, r_c) chứng minh rằng*

$$9GI_a^2 = (p-a)^2 + 16Rr_a + 5r_a^2, 9GI_b^2 = (p-b)^2 + 16Rr_b + 5r_b^2, 9GI_c^2 = (p-c)^2 + 16Rr_c + 5r_c^2$$

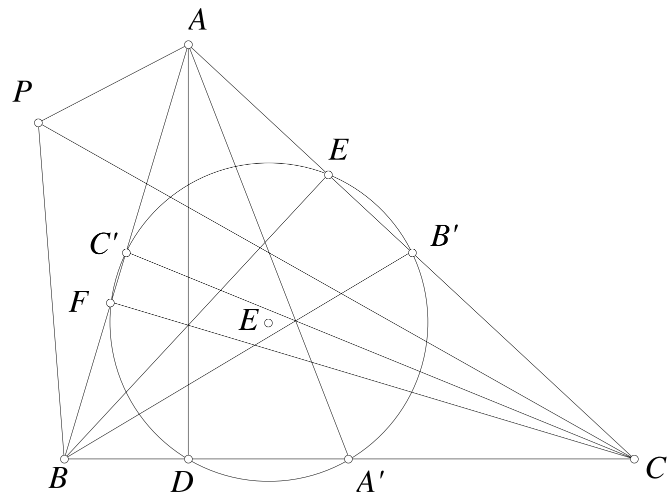
$$HI_a^2 = 4R^2 - 4Rr_a + 3r_a^2 - (p-a)^2, HI_b^2 = 4R^2 - 4Rr_b + 3r_b^2 - (p-b)^2, HI_c^2 = 4R^2 + 4Rr_c - 3r_c^2 - (p-c)^2$$

Từ đó hãy suy ra một số đẳng thức hoặc bất đẳng thức hình học khác.

Ta tiếp tục xây dựng công thức phương tích đối với đường tròn chín điểm Euler.

Bài toán 20 (Công thức phương tích với đường tròn chín điểm Euler)**.** *Cho tam giác ABC đường tròn chín điểm Euler (E), với mọi $P(\alpha,\beta,\gamma)$ trên mặt phẳng, chứng minh rằng phương tích điểm P với (E) cho bởi hệ thức*

$$\mathscr{P}_{P/(E)} = \frac{\alpha bc\cos A + \beta ca\cos B + \gamma ab\cos C}{2(\alpha+\beta+\gamma)} - \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}.$$



Chứng minh. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm BC, CA, AB và D, E, F lần lượt là chân đường cao từ A, B, C. Ta chú ý rằng đường tròn (E) đi qua A', B', C', D, E, F. Khi đó theo công thức khai triển phương tích theo cát tuyến

$\mathscr{P}_{A/(E)} = \overline{AE}.\overline{AB'} = \dfrac{bc\cos A}{2}$ tương tự ta có $\mathscr{P}_{B/(E)} = \dfrac{ca\cos B}{2}, \mathscr{P}_{C/(E)} = \dfrac{ab\cos C}{2}$ do đó áp dụng bài toàn 10 ta được

$$\mathscr{P}_{P/(E)} = \frac{\alpha bc\cos A + \beta ca\cos B + \gamma ab\cos C}{2(\alpha+\beta+\gamma)} - \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}.$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Cũng giống như công thức phương tích với đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp, công thức phương tích với đường tròn chín điểm Euler cũng có rất nhiều ứng dụng phong phú khác nữa, việc tìm hiểu chi tiết xin dành cho bạn đọc.

Sau đây chúng ta ứng dụng các bài toán phương tích để giải một bài toán hay khác, chúng ta bắt đầu từ một bài toán cơ bản trong [2]

Bài toán 21. *Cho tam giác ABC trọng tâm G. Chứng minh rằng*

$$\mathscr{P}_{A/(GBC)} = \mathscr{P}_{B/(GCA)} = \mathscr{P}_{C/(GAB)}.$$

Trong đó, ký hiệu (XYZ) chỉ đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ, ký hiệu $\mathscr{P}_{K/(XYZ)}$ chỉ phương tích của điểm K đối với đường tròn (XYZ). Bài toán trên được chứng minh chi tiết trong [2] và nhiều tài liệu khác xin không nhắc lại chứng minh ở đây. Mặt khác trong bài toán T8/399 của THTT số 399 chúng ta đã biết một tính chất đảo lại rất thú vị đó là

Bài toán 22 (T8/399)**.** *Cho tam giác ABC, nếu điểm P không nằm trên cạnh, không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác và thỏa mãn hệ thức*

$$\mathscr{P}_{A/(PBC)} = \mathscr{P}_{B/(PCA)} = \mathscr{P}_{C/(PAB)}.$$

Chứng minh rằng P là trọng tâm tam giác ABC.

Về phương diện hình học vector chúng ta có thể coi trọng tâm G là tâm tỷ cự của bộ ba điểm (A, B, C) với các hệ số $(1, 1, 1)$. Vậy tại sao chúng ta không xét bài toán cho tâm tỷ cự bất kỳ ? Với ý tưởng đó, tôi đưa ra một bài toán tổng quát hơn không những thế lời giải thu được sẽ dẫn chúng ta đến các kết quả tương tự trong không gian.

Bài toán 23. *Cho tam giác ABC và điểm $P(\alpha, \beta, \gamma)$ bất kỳ không nằm trên cạnh, không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh rằng*

$$\alpha \mathscr{P}_{A/(PBC)} = \beta \mathscr{P}_{B/(PCA)} = \gamma \mathscr{P}_{C/(PAB)} = (\alpha + \beta + \gamma)\mathscr{P}_{P/(ABC)}.$$

Chứng minh. Ta sẽ xét vị trí tương đối của P và tam giác ABC. Vì A, B, C, P là các điểm bất kỳ trên mặt phẳng nên ta cũng có thể tìm "tọa độ" tỷ cự của A trong tam giác PBC sau đó tính $\mathscr{P}_{A/(PBC)}$ theo công thức trong bổ đề trên. Thật vậy, chúng ta sẽ đưa ra công thức đó thông qua một hệ thức quen thuộc của tâm tỷ cự nếu $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$ thì với mọi M ta có

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MP}$$

Sau đó áp dụng $M \equiv A$ ta suy ra

$$\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{AP}$$

hay

$$-(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{AP} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$$

Như vậy từ đây ta dễ thấy A là tâm tỷ cự của tam giác PBC ứng với bộ ba số $(-(\alpha + \beta + \gamma), \beta, \gamma)$. Áp dụng bài toán 10 cho A và tam giác PBC ta thu được

$$\mathscr{P}_{A/(PBC)} = -\frac{\beta\gamma a^2 - \beta(\alpha + \beta + \gamma)PB^2 - (\alpha + \beta + \gamma)\gamma PC^2}{(-(\alpha + \beta + \gamma) + \beta + \gamma)^2} = -\frac{\beta\gamma a^2 - (\alpha + \beta + \gamma)(\beta PB^2 + \gamma PC^2)}{\alpha^2} \quad (*)$$

Bây giờ ta sẽ tính $\beta PB^2 + \gamma PC^2$, từ hệ thức Leibniz cho mọi M ta có

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MP^2 + \alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2$$

hay

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MP^2 + \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Nếu cho $M \equiv A$ ta thu được

$$\beta c^2 + \gamma b^2 = (\alpha + \beta + \gamma)AP^2 + \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha + \beta + \gamma}$$

Do đó

$$PA^2 = \frac{(\beta + \gamma)(\beta c^2 + \gamma b^2) - \beta\gamma a^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

Nêu làm tương tự cho $M \equiv B, C$ ta thu được các hệ thức cho PB, PC

$$PB^2 = \frac{(\gamma + \alpha)(\gamma b^2 + \alpha c^2) - \gamma\alpha b^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}, \ PC^2 = \frac{(\alpha + \beta)(\alpha b^2 + \beta c^2) - \alpha\beta c^2}{(\alpha + \beta + \gamma)^2}$$

Tuy nhiên ta không tính trực tiếp mà sẽ tính thông qua công thức

$$\beta PB^2 + \gamma PC^2 = \alpha PA^2 + \beta PB^2 + \gamma PC^2 - \alpha PA^2 =$$
$$= \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma} - \alpha\frac{(\beta+\gamma)(\beta c^2+\gamma b^2) - \beta\gamma a^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2} = \frac{(\alpha+\beta+\gamma)\beta\gamma a^2 + \alpha(\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2)}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

Thay thế vào đẳng thức $(*)$ ta thu được

$$\mathscr{P}_{A/(PBC)} = -\frac{\beta\gamma a^2 - \dfrac{(\alpha+\beta+\gamma)\beta\gamma a^2 + \alpha(\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2)}{\alpha+\beta+\gamma}}{\alpha^2} = -\frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Mặt khác cũng từ bổ đề ta đã có

$$\mathscr{P}_{P/(ABC)} = -\frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

Từ hai công thức trên dễ suy ra

$$\alpha\mathscr{P}_{A/(PBC)} = (\alpha+\beta+\gamma)\mathscr{P}_{P/(ABC)}$$

Nếu làm tương tự với các đỉnh B, C ta sẽ thu được điều phải chứng minh

$$\alpha\mathscr{P}_{A/(PBC)} = \beta\mathscr{P}_{B/(PCA)} = \gamma\mathscr{P}_{C/(PAB)} = (\alpha+\beta+\gamma)\mathscr{P}_{P/(ABC)}.$$

□

Từ bài toán tổng quát này ta dễ dàng giải được một số trường hợp đặc biệt như sau

Bài toán 24. *Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ bất kỳ không nằm trên cạnh, không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác và thỏa mãn hệ thức*

$$\mathscr{P}_{A/(PBC)} = \mathscr{P}_{B/(PCA)} = \mathscr{P}_{C/(PAB)}$$

Chứng minh rằng P là trọng tâm tam giác ABC.

Chứng minh. Ta giả sử P có tọa độ tỷ cự $P(\alpha, \beta, \gamma)$ áp dụng bài toán phương tích trên ta luôn có

$$\alpha\mathscr{P}_{A/(PBC)} = \beta\mathscr{P}_{B/(PCA)} = \gamma\mathscr{P}_{C/(PAB)}$$

Như vậy

$$\mathscr{P}_{A/(PBC)} = \mathscr{P}_{B/(PCA)} = \mathscr{P}_{C/(PAB)} \Leftrightarrow (\alpha : \beta : \gamma) = (1 : 1 : 1) \Leftrightarrow P \equiv G(1, 1, 1)$$

là trọng tâm tam giác ABC. □

Bài toán 25. *Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ bất kỳ không nằm trên cạnh, không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác và thỏa mãn*

$$\alpha\mathscr{P}_{A/(PBC)} = \beta\mathscr{P}_{B/(PCA)} = \gamma\mathscr{P}_{C/(PAB)}$$

Chứng minh rằng $P(\alpha, \beta, \gamma)$.

Bài toán này chính là tổng quát của đề toán T8/399 và nó có một số hệ quả đơn giản ví dụ như

Bài toán 26. *Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ không nằm trên cạnh, không nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác thỏa mãn*

$$a\mathscr{P}_{A/(PBC)} = b\mathscr{P}_{B/(PCA)} = c\mathscr{P}_{C/(PAB)}$$

Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

3 Một số bài toán khác

Bài toán 27. *Cho tam giác ABC hãy tìm tập hợp điểm P sao cho*

$$\frac{PA}{PA'} + \frac{PB}{PB'} + \frac{PC}{PC'} = 3$$

Bài toán tổng quát hơn

Bài toán 28. *Cho tam giác ABC hãy tìm tập hợp điểm P sao cho*

$$\alpha\frac{PA}{PA'} + \beta\frac{PB}{PB'} + \gamma\frac{PC}{PC'} = \alpha+\beta+\gamma \qquad (\alpha,\beta,\gamma > 0)$$

Bài toán 29. *Cho tam giác ABC trọng tâm G gọi A', B', C' là giao điểm của GA, GB, GC với (O) hãy tính*

$$\frac{1}{GA'^2} + \frac{1}{GB'^2} + \frac{1}{GC'^2}$$

Bài toán 30. *Cho tam giác ABC với $I(\alpha,\beta,\gamma)$ đường thẳng IA, IB, IC cắt (O) tại A', B', C' hãy tính* $\frac{\alpha}{IA'^2} + \frac{\beta}{IB'^2} + \frac{\gamma}{IC'^2}$

Bài toán 31. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O) trọng tâm G, chứng minh rằng*

$$GA + GB + GC + 2\mathscr{P}_{G/(O)}\left(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{a^2}{GA} + \frac{b^2}{GB} + \frac{c^2}{GC}\right) = 0.$$

Sau đó ta sẽ có bài toán tổng quát hơn như sau

Bài toán 32. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O), $I(\alpha,\beta,\gamma)$ chứng minh rằng*

$$\alpha IA + \beta IB + \gamma IC + \mathscr{P}_{I/(O)}\left(\frac{\beta+\gamma}{IA} + \frac{\gamma+\alpha}{IB} + \frac{\alpha+\beta}{IC}\right) + \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\left(\frac{a^2}{IA} + \frac{b^2}{IB} + \frac{c^2}{IC}\right) = 0.$$

Bài toán 33. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) hai phân giác trong AE, BF, tia EF cắt (O) tại I, chứng minh rằng* $\frac{1}{IA} = \frac{1}{IB} + \frac{1}{IC}$.

Thực chất bài toán trên chỉ là một trường hợp đặc biệt của bài toán tổng quát say khi I trùng tâm nội tiếp $I(a,b,c)$.

Bài toán 34. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với $I(\alpha,\beta,\gamma)$ các đường thẳng AI, BI cắt BC, CA tại E, E. Tia EF cắt (O) tại I, chứng minh rằng* $\frac{\alpha}{aIA} = \frac{\beta}{bIB} + \frac{\gamma}{cIC}$.

Tài liệu

[1] Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, *Toán nâng cao hình học 10*, Nxb Giáo dục 2004.

[2] Phan Huy Khải, Nguyễn Đạo Phương, *Các phương pháp giải toán sơ cấp - Hình học 10*, Nxb Hà Nội 2000.

[3] Nguyễn Minh Hà, *Các thuật toán biến đổi tâm tỷ cự trong hình học phẳng*, THTT số 403 (tháng 1 năm 2011).

[4] Weisstein, Eric W http://mathworld.wolfram.com