Tổng quát một đề toán hay

Trần Quang Hùng

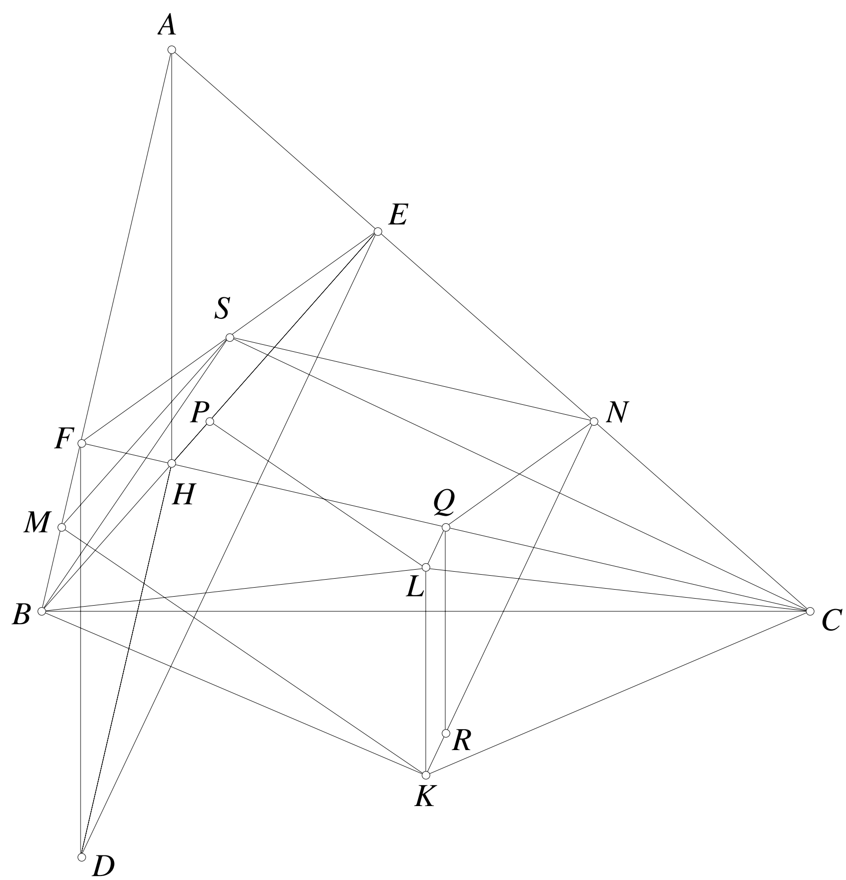
Tóm tắt nội dung

Bài viết đưa ra tổng quát cho một bài toán hay được nhiều bạn đọc quan tâm trên toán tuổi thơ 2 với phép chứng minh sử dụng đồng thời công cụ vector và thuần túy hình học.

Trên TTT2 số 129 năm 2013 mục thách đấu có bài toán hay như sau của thầy Nguyễn Minh Hà

Bài 1. *Cho tam giác ABC không vuông. BE, CF là các đường cao cắt nhau tại trực tâm H. M, N, P, Q, S theo thứ tự là trung điểm của BF, CE, BE, CF, EF. K là giao điểm của đường thẳng qua M vuông góc với BS và đường thẳng qua N vuông góc với CS. L là giao điểm của đường thẳng qua P vuông góc với BS và đường thẳng qua Q vuông góc với CS. Chứng minh rằng $2KL = HA$.*

Lời giải bài toán trên đã có trên TTT2 số 131 năm 2014. Tôi xin trích dẫn lại lời giải của bạn Lê Huy Quang trên báo sử dụng các kỹ thuật về định lý 4 điểm và tam giác đồng dạng.



Hình 1.

Lời giải. Ta thấy $MB = \frac{1}{2}BE$, $MS = \frac{1}{2}BE$, $NS = \frac{1}{2}CF$, $NC = \frac{1}{2}CE$ và $BF^2 + CE^2 = BC^2 = BE^2 + CE^2$. Từ đó, chú ý rằng $KM \perp BS$, $KN \perp CS$, suy ra

$$KB^2 - KS^2 = MB^2 - MS^2 = \frac{1}{4}BF^2 - \frac{1}{4}BE^2 = \frac{1}{4}CE^2 - \frac{1}{4}CF^2 = NC^2 - NS^2 = KC^2 - KS^2.$$

Vậy $KB = KC$. Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$, chú ý rằng BF, CE là các đường cao của ΔHBC, tương tự như trên, ta có $LB = LC$ vậy KL là trung trực BC nên KL vuông góc BC.

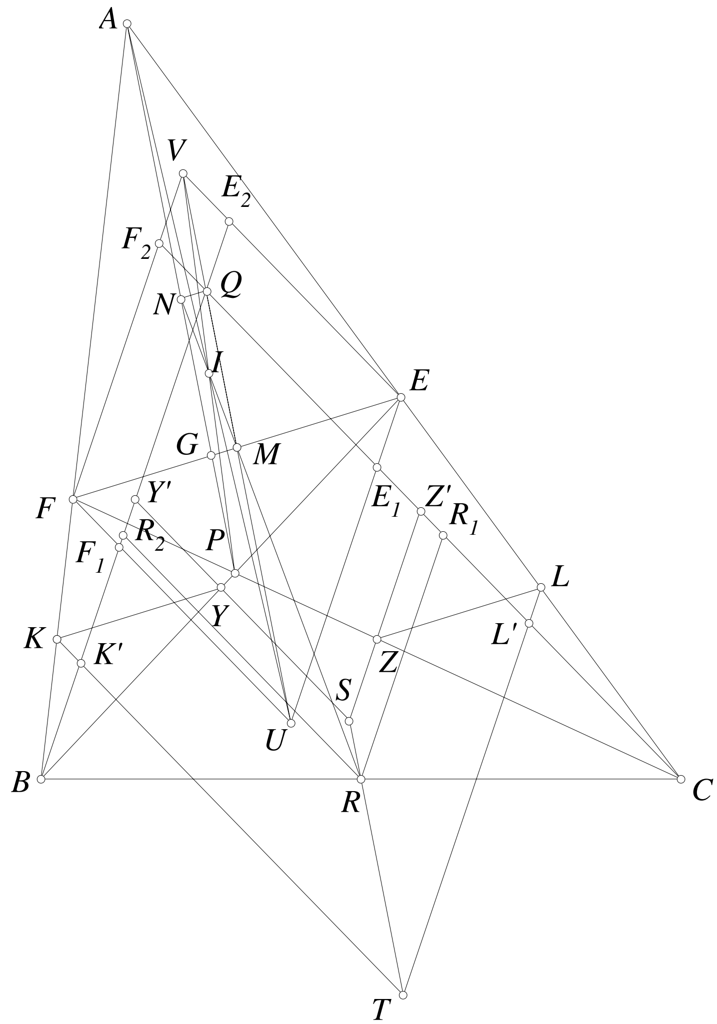
Lấy D, R sao cho các tứ giác $AHDF$, $QRKL$ là hình bình hành với R thuộc NK. Ta thấy $HE \perp NC$ và $HD \parallel AF \perp CF \parallel NS$. Do đó $\widehat{EHD} = \widehat{CNS}$. Mặt khác vì các tam giác CHE, CAF đồng dạng nên $\dfrac{HE}{HD} = \dfrac{HE}{AF} = \dfrac{EC}{HC} = \dfrac{2NC}{2NS} = \dfrac{NC}{NS}$.

Vậy các tam giác EHD, CNS đồng dạng suy ra $\widehat{HED} = \widehat{NCS}$. Kết hợp là $DE \perp SN, SN \perp RN$ suy ra $DE \parallel KR$. Kết hợp với $CF \parallel RQ$; $FE \parallel QN$, suy ra các tam giác DEF và RNQ đồng dạng. Do đó $\dfrac{KL}{HA} = \dfrac{RQ}{DF} = \dfrac{QN}{FE} = \dfrac{1}{2}$. Vậy $2KL = HA$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Đây là một bài toán dạng chứng minh tỷ số đoạn thẳng rất thú vị với THCS. Tuy vậy nếu nhìn theo phương diện hình học vector có thể thấy thực chất yêu cầu của đề toán là chứng minh $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{KL}$. Do đó phương pháp chiếu song song gợi mở cho ta ý tưởng để tổng quát bài toán này như sau.

Bài 2. *Cho tam giác ABC và P bất kỳ. Giả sử PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Gọi PA cắt EF tại G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm EF, PA. Q đối xứng G qua trung điểm MN. Gọi K, L, Y, Z lần lượt là trung điểm của BF, CE, BE, CF. Lấy các điểm S, T sao cho $SY \parallel QC, SZ \parallel QB, TK \parallel QC, TL \parallel QB$. Chứng minh rằng ST đi qua trung điểm BC và $PA = 2ST$.*

Và như vậy lời giải của chúng ta cũng sẽ khác đáp án tách rời khỏi ý tưởng liên quan tới tính trực giao. Tôi sẽ đưa ra một lời giải thuần túy vector cho bài toán tổng quát.



Lời giải 1. Gọi SY, TK cắt QB tại Y', K'. SZ, TL cắt QC tại Z', L'. R là trung điểm BC. Lấy các điểm E_1, E_2 thuộc QC, QB sao cho QE_1EE_2 là hình bình hành. Lấy các điểm F_1, F_2 thuộc QB, QC sao cho QF_1FF_2 là hình bình hành. Lấy các điểm R_1, R_2 thuộc QC, QB sao cho QR_1RR_2 là hình bình hành. Ta dễ thấy

$2\overrightarrow{SR} = 2(\overrightarrow{Z'R_1} + \overrightarrow{Y'R_2}) = \overrightarrow{F_2Q} + \overrightarrow{E_2Q}$ (1)

$2\overrightarrow{ST} = 2(\overrightarrow{Z'L'} + \overrightarrow{Y'K'}) = \overrightarrow{F_2E_1} + \overrightarrow{E_2F_1}$ (2).

Lấy U đối xứng A qua trung điểm I của MN và V đối xứng P qua trung điểm I của MN. Ta có $2\overrightarrow{FU} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{FE}$ và $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF}$. Giả sử $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}, \alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Khi đó ta dễ chứng minh được dễ chỉ ra $\overrightarrow{FU} \parallel \overrightarrow{QC}$. Từ đó tương tự $\overrightarrow{EU} \parallel \overrightarrow{QB}$ và $\overrightarrow{FV} \parallel \overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{EV} \parallel \overrightarrow{QC}$. Vậy tứ giác $EUFV$ và QE_2VF_2 là hình bình hành.

Từ đó theo (1),(2) dễ thấy

$\overrightarrow{VQ} = \overrightarrow{F_2Q} + \overrightarrow{E_2Q} = 2\overrightarrow{SR}$ (3)

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{VU} = \overrightarrow{VE} + \overrightarrow{VF} = \overrightarrow{F_2E_1} + \overrightarrow{E_2F_1} = 2\overrightarrow{ST}$ (4).

Từ (3),(4) suy ra $\overrightarrow{SR} \parallel \overrightarrow{ST}$ suy ra ST đi qua R.

Cũng từ (4) có $PA = 2ST$. Ta có điều phải chứng minh. □

Lời giải trên sử dụng công cụ vector phù hợp với học sinh lớp 10. Lời giải sau chỉ thuần túy hình học về đường trung bình và định lý Thales do bạn Trịnh Huy Vũ lớp 10A1 Toán THPT chuyên KHTN đề nghị.

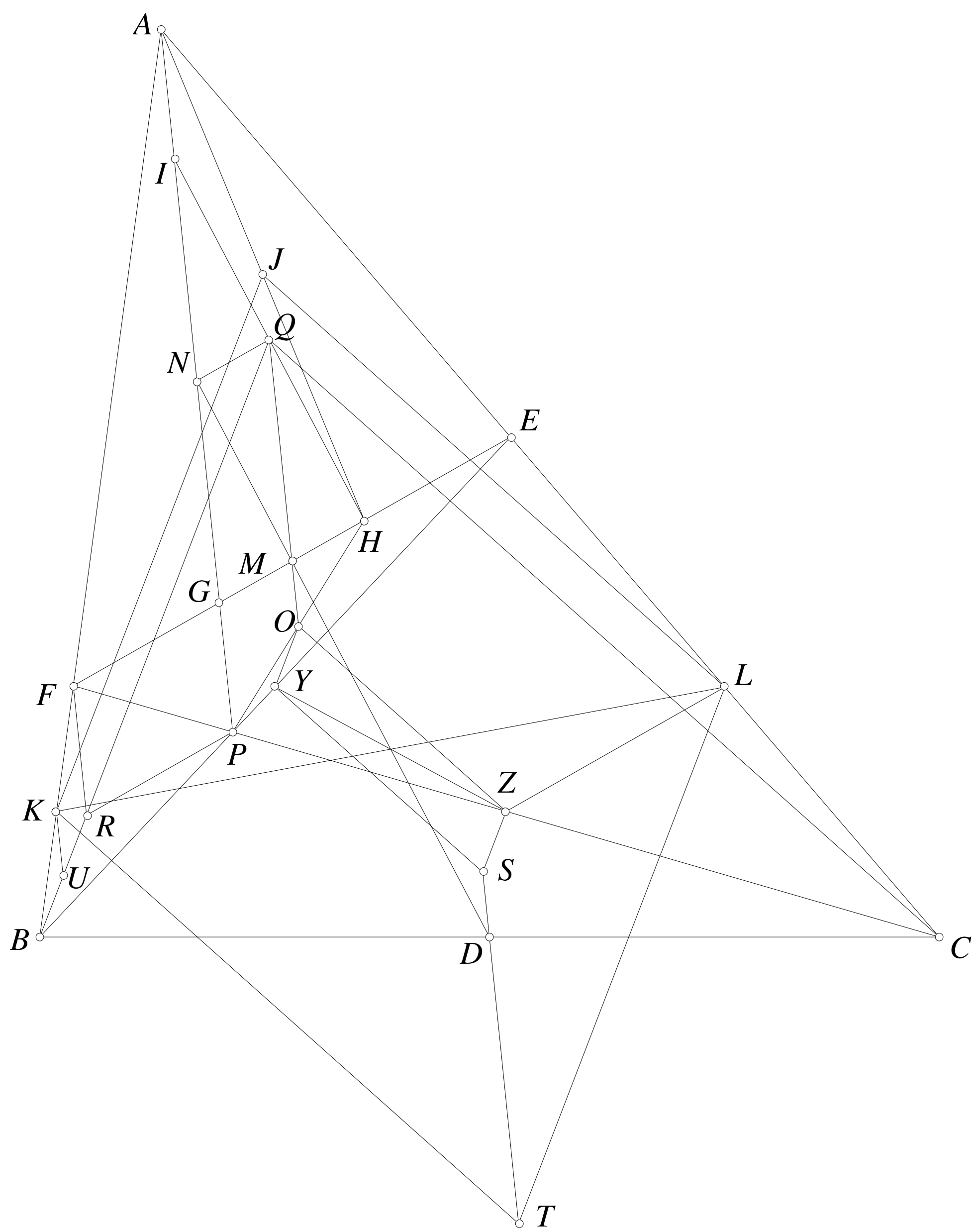
Ta cần một bổ đề sau

Bổ đề 2.1. *Cho tứ giác $ABCD$. AB giao CD tại E. AD giao BC tại F. AC giao BD tại G.*

a) Chứng minh rằng trung điểm của AC, BD, EF thẳng hàng.

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD. Dựng các hình bình hành $AGDX, GMYN$. Chứng minh rằng E, X, Y thẳng hàng.

Bổ đề phần a) là kết quả rất cơ bản và nổi tiếng của hình học phẳng gọi là đường thẳng Gauss xin không trình bày lại chứng minh. Phần b) chỉ là hệ quả trực tiếp của phần a).



Lời giải 2. Gọi D là trung điểm cua BC. Gọi I, H lần lượt đối xứng G qua N, M, từ đề bài dễ thấy I, Q, H thẳng hàng. Dựng hình bình hành $FGPR$, áp dụng bổ đề cho tứ giác $AEPF$ dễ suy ra R thuộc BQ. Gọi U là trung điểm BR. Từ đó ta có $2KU = FR = GP = AI = 2JQ$ suy ra $KU = JQ$. Mặt khác $KU \parallel JQ$ vì cùng song song PA. Do đó tứ giác $KUQJ$ là hình bình hành, suy ra $KJ \parallel BQ$. Tương tự $LJ \parallel CQ$. Vậy J đối xứng T qua trung điểm KL. Tương tự O đối xứng S qua trung điểm YZ. Theo tính chất đường trung bình, JO đi qua trung điểm EF và $PA = 2JO$. Từ đó với chú ý rằng KL, YZ, MD có chung trung điểm, sử dụng phép đối xứng qua trung điểm KL thì ST đi qua trung điểm BC và $PA = 2ST$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Lời giải thứ 2 thuần túy hình học phù hợp với kiến thức học sinh lớp 8. Tuy vậy nếu để ý kỹ các biến đổi về song song và hình bình hành để cho chặt chẽ thì cần viết dưới dạng ngôn ngữ vector. Khi P là trực tâm của tam giác ABC. Ta thu được bài toán ban đầu. Việc cho P trùng vào một số điểm đặc biệt sẽ nảy sinh ra nhiều bài toán mới rất thú vị, xin dành điều đó cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] Tạp chí TTT2 số 129 năm 2013.

[2] Tạp chí TTT2 số 131 năm 2014.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN. E-mail: analgeomatica@gmail.com