Các đề hình học tập huấn đội tuyển Việt Nam năm 2009

Bài 1. *Cho tam giác ABC không cân. P ở trong tam giác thỏa mãn $\angle PAB = \angle PBC$ và $\angle PAC = \angle PCB$. Trung trực của AP cắt BC tại Q. Gọi O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng $\angle AQP = 2\angle OQB$.*

Bài 2. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Đường cao AE, trung tuyến AF. G, H là hình chiếu của B, C lên phân giác trong tại A của ABC. Chứng minh rằng E, F, G, H cùng thuộc một đường tròn có tâm thuộc đường tròn Euler của tam giác ABC.*

Bài 3. *Cho $(I_a), (I_b), (I_c)$ là các đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C của tam giác ABC. $(O_a), (O_b), (O_c)$ đối xứng với $(I_a), (I_b), (I_c)$ qua trung điểm của BC, CA, AB. Chứng minh rằng trục đẳng phương của $(O_b), (O_c)$ chia đôi chu vi tam giác ABC.*

Bài 4. *Cho tam giác ABC có các đường cao AA', BB', CC'. Chứng minh rằng đường đối trung ứng với H của tam giác HAC và đường đối trung ứng với B của tam giác ABC cắt nhau trên $A'C'$.*

Bài 5. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). A' là tiếp điểm của (O) với đường tròn A-mixtillinear. Chứng minh rằng các A-mixtillinear của tam giác $AA'B$ và tam giác $AA'C$ tiếp xúc nhau.*

Bài 6. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). D thuộc BC. (O_1) tiếp xúc với DA, DB và $\overset{\frown}{AB}$. (O_1) tiếp xúc với DA, DC và $\overset{\frown}{AC}$. Chứng minh rằng (O_1) tiếp xúc (O_2) khi và chỉ khi AD là phân giác của $\angle BAC$.*

Bài 7. *Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. D' đối xứng D qua EF. AD' cắt BC tại A'. B', C' định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng A', B', C' thuộc đường thẳng Euler của tam giác DEF.*

Bài 8. *Cho tam giác ABC. Ký hiệu $(O_a), (O_b), (O_c)$ là các đường tròn có đường kính là các trung tuyến tại A, B, C. Chứng minh rằng nếu hai trong ba đường tròn đó tiếp xúc đường tròn nội tiếp (I) thì đường tròn còn lại cũng vậy.*

Bài 9. *Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. AD cắt (I) tại M. MB, MC cắt (I) tại P, Q. Chứng minh rằng AD, PE, FQ đồng quy.*

Bài 10. *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp có AC vuông góc AB vuông góc BD tại I. M, N, P, Q là hình chiếu của I lên AB, BC, CA, DA. Chứng minh rằng M, N, P, Q thuộc đường tròn (ω) có tâm là trung điểm của OI.*

Bài 11. $(O_1) \cap (O_2) = \{A, D\}$, $AO_1 \cap (O_1) = \{B\}$, $AO_2 \cap (O_2) = \{C\}$, $M \in [AD]$. $BM \cap AC = \{E\}, CM \cap AB = \{F\}, DF \cap (O_1) = \{L\}, DF \cap (O_2) = \{K\}$. *Chứng minh rằng đường nối trung điểm của EF, KL đi qua A.*

Bài 12. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Trung tuyến tại A cắt (O) tại A_2, $A_1 \in (O)$. $AA_1 \parallel BC$. B_1, B_2, C_1, C_2 được định nghĩa tương tự. Chứng minh rằng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.*

Bài 13. *(I) nội tiếp tam giác ABC. X, Y, Z thuộc (I). Giả sử $(A, X, Z), (C, Y, Z), (B, X, Y)$ thẳng hàng. Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi tam giác XYZ đều.*

Bài 14. *Cho tam giác ABC. A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc BC, CA, AB sao cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại M. A_2, B_2, C_2 đối xứng với M qua trung điểm của B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy trên MG với G là trọng tâm tam giác ABC.*

Bài 15. *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O). M là điểm bất kỳ. X, Y, Z, T, U, V là hình chiếu của M lên AB, CD, AD, BC, BD. E, F, G là trung điểm của XY, ZT, UV. Chứng minh rằng E, F, G thẳng hàng.*

Bài 16. *Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle BAD = \angle BCD$. I là trung điểm của AC. H, K, L là hình chiếu của D lên BC, CA, AB. Chứng minh rằng I, H, K, L đồng viên.*

Bài 17. *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O), ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc AB, BC, CD, DA tại M, N, P, Q. Chứng minh rằng đường thẳng Gauss của tứ giác $ABCD$ và $MNPQ$ vuông góc với nhau.*

Bài 18. *Cho A, B cố định thuộc (Δ) và M di động trên đoạn AB. Gọi $(O), (O_1), (O_2)$ là các nửa đường tròn đường kính AB, AM, BM. Gọi (I) là đường tròn tiếp xúc trong với (O) và tiếp xúc ngoài với $(O_1), (O_2)$.*

a) Tìm M sao cho $S_{(I)}$ max.

b) Tìm quỹ tích các điểm I.

c) Giải câu b) khi M ở ngoài đoạn AB.

Bài 19. *Tìm x biết $\overrightarrow{BM} = x\overrightarrow{BA}$ biết $\overrightarrow{BN} = (AB, M)\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP} = (AB, N)\overrightarrow{BA}$.*

Bài 20. *A, B cố định trên (Δ). Với mọi $M \in (\Delta)$ ta xác định N, P thỏa mãn $\overrightarrow{BN} = (AB, M)\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP} = (AB, N)\overrightarrow{BA}$. Gọi $(O_1), (O_2), (O_3)$ là các nửa đường tròn đường kính MN, NP, PM. Chứng minh rằng đường tròn (I) nội tiếp tam giác cong MNP không phụ thuộc M.*

Bài 21. *Cho A_1, B_1, C_1 lần lượt thuộc BC, CA, AB sao cho AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại M. A_2, B_2, C_2 đối xứng M qua B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Chứng minh rằng AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy.*

Bài 22. *Gọi F là điểm Fermat của tam giác ABC. d_a, d_b, d_c đối xứng FA, FB, FC qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng quy.*

Bài 23. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O), (I_a) bàng tiếp góc A, tiếp xúc với AC, AB tại B', C'. $BB' \cap CC' = \{K\}$. Chứng minh rằng $K \in (O)$ khi và chỉ khi $r_a = R$.*

Bài 24. *Cho I_1, I_2, I_3 lần lượt tiếp xúc (I) và hai cạnh của góc A_1, A_2, A_3 của tam giác giác $A_1A_2A_3$ ngoại tiếp (I). Gọi r, r_i là bán kính của (I) và (I_i), $i = \overline{1, 3}$. Chứng minh rằng $\sqrt{r_1r_2} + \sqrt{r_2r_3} + \sqrt{r_3r_1} = r$. Nếu thay tiếp xúc trong bởi tiếp xúc ngoài, hệ thức thay đổi thế nào ?*

Bài 25. *Cho (C, R) và (Δ) không cắt (C), cách (C) một đoạn $OC = d > R$. M, N chuyển động trên (Δ) sao cho $[MN]$ tiếp xúc với (C). Chứng minh rằng tồn tại P cố định luôn nhìn MN dưới cùng mộy góc.*

Bài 26. *Cho ngũ giác đều $ABCDE$ nội tiếp (O,R). Chứng minh rằng*

a) $\cos\angle BAC+\cos\angle CBA+\cos\ ACB=1+\dfrac{r(ABC)}{R(ABC)}$.

b) Nếu $r(ABC)=r(ADE)$ và $r(ABD)=r(ACE)$ thì hai tam giác ABC và ADE bằng nhau.

Bài 27. *Cho tam giác ABC cân tại C, (O) tiếp xúc CA,CB tại A,B. Một đường tròn thay đổi qua C tiếp xúc với (O), cắt $A_0B_0(A_0,B_0$ là trung điểm của $CA,CB)$ tại M,N. Chứng minh rằng MN luôn được nhìn từ C với một góc không đổi.*

Bài 28. *D nằm trong tam giác ABC nhọn sao cho $DA.DB.AB+DB.DC.BC+DC.DA.AC$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hãy tìm D.*

Bài 29. *Cho $a,b,c>0$. Chứng minh rằng tồn tại tam giác có ba cạnh a,b,c khi và chỉ khi tồn tại $x,y,z\in\mathbb{R}$ sao cho $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=\dfrac{a}{x},\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}=\dfrac{b}{y},\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{c}{z}$.*

Bài 30. *P,Q thuộc cạnh AB của tam giác ABC sao cho $r(CAP)=r(CBQ)$. Chứng minh răng $r(CAQ)=r(CBP)$.*

Bài 31. *KL,KN tiếp xúc với (v). Trên phần kéo dài của KN về N, lấy M. $\{P\}=(v)\cap(v_1)$ với $(v_1)=(KLM)$. $NQ\perp LM$. Chứng minh rằng $\angle MPQ=2\angle KML$.*

Bài 32. *Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (I). Chứng minh rằng (I) là trọng tâm của tứ giác khi và chỉ khi $IA.IC=IB.ID$.*

Bài 33. *Tứ giác lồi $ABCD$ có $AB\cap CD=\{E\},AD\cap BC=\{F\}$. Vẽ $CH\perp EF$ tại H. Gọi $(I_1),(I_2)$ là đường tròn nội tiếp tam giác EBC và tam giác FCD. Gọi $\alpha_i(i=1,2)$ là góc giữa 2 tiếp tuyến từ H đên (I_i). Chứng minh rằng $ABCD$ là tứ giác ngoại tiếp $\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_2$.*

Bài 34. *(O_1) và (O_2) ở ngoài nhau. AB là tiếp tuyến chung ngoài $(A\in(O_1),B\in(O_2))$. C đối xứng với A qua O_1O_2, D là trung điểm của AC. $DB\cap(O_2)=\{E\}$. Chứng minh rằng CE tiếp xúc với (O_2).*

Bài 35. *(O_1) cắt (O_2) tại $A,P.B\in(O_1),C\in(O_2)$ sao cho BC đi qua P. $Q\in BC.B_1\in(O_2),C_1\in(O_2)$ sao cho $QB_1\parallel AB,QB_2\parallel AC$. Chứng minh rằng P,Q,B_1,C_1 đồng viên.*

Bài 36. *Cho tam giác ABC có đường cao AD,BE,CF và trực tâm $H.DP\perp AB,DQ\perp AC,DP\cap BE=R,DQ\cap CF=S,BQ\cap CP=M,PS\cap RQ=N$. Chứng minh rằng M,N,H thẳng hàng.*

Bài 37. *$ABCD$ nội tiếp (O). (O_1), (O_2), (O_3), (O_4) ngoại tiếp các tam giác OAB, OBC, OCD, ODA. Chứng minh rằng O_1O_3,O_2O_4,OP đồng quy với $P=AC\cap BD$.*

Bài 38. *$ABCD$ nội tiếp (O), $AC\cap BD=P$. (O_1) qua P,A và (O_2) qua P,B. $(O_1)\cap(O)=E_1,(O_2)\cap(O)=E_2,(O_1)\cap(O_2)=Q$. Chứng minh rằng PQ,CE_1,CE_2 đồng qui.*

Bài 39. *Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) hai đường chéo AC,BD cắt nhau tại P. $(O_1),(O_2),(O_3),(O_4)$ là đường tròn ngoại tiếp các tam giác OAB,OBC,OCD,ODA. Chứng minh rằng O_1O_3,O_2O_4,OP đồng quy.*

Bài 40. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P di động trong tam giác ABC. $AP, BP, CP \cap (O) = A_1, B_1, C_1$. A_0, B_0, C_0 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB. A_2, B_2, C_2 đối xứng với A_1, B_1, C_1 qua A_0, B_0, C_0. Chứng minh rằng $(A_2B_2C_2)$ đi qua trực tâm H của tam giác ABC.*

Bài 41. *P, Q, R nằm trong tam giác ABC sao cho $(B, C, Q, R), (C, A, P, R), (A, B, P, Q)$ đều đồng viên. Chứng minh rằng nếu tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC là tâm đẳng phương của ba đường tròn trên thì tâm đường tròn ngoại tiếp O của tam giác ABC thuộc đường thẳng Euler của tam giác PQR.*

Bài 42. *Cho tam giác ABC nội tiếp (O). P thuộc tia đối của AO. b, c đối xứng PB qua AB và PC qua AC. Tìm quỹ tích các giao điểm của b và c.*

Bài 43. *Cho K cố định trong (O). (O') di động quạ K và có bán kính bằng bằng (O). Tìm quỹ tích trung điểm dây cung chung của (O) và (O').*

Bài 44. *Hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD. AC \cap BD = E$. Trung trực của CD cắt AB tại $F.(O_1) \equiv (ADF), (O_2) \equiv (BCF)$. Chứng minh rằng $O_1O_2 \perp EF$.*

Bài 45. *K, L, M, N là trung điểm của các cạnh cạnh AB, BC, CD, DA của tứ giác lồi $ABCD$. KM cắt AC, BD tại $P, Q. LN$ cắt AC, BD tại R, S. Chứng minh rằng $PA.PC = QB.QD \Leftrightarrow RA.RC = SB.SD$.*

Bài 46. *Cho tam giác ABC cân tại C, (O) tiếp xúc CA, CB tại A, B. Một đường tròn thay đổi qua C tiếp xúc với (O), cắt A_0B_0 (A_0, B_0 là trung điểm của CA, CB) tại M, N. Chứng minh rằng MN luôn tiếp xúc với một hình cố định.*

Bài 47. *Cho $(ABCD) = -1$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với bốn đường tròn có đường kính AB, BC, CD, AD.*

Bài 48. *Cho hình thang $ABCD(AB \parallel CD)$. Giả sử có $E \in (BC)$. Ngoài đoạn BC và F trong đoạn AD sao cho $\angle DAE = \angle CBF$. I, J là giao của EF với CD, AB. K là trung điểm của $EF(K \notin AB)$. Chứng minh rằng I, A, B, K đồng viên $\Leftrightarrow J, C, D, K$ đồng viên.*

Bài 49. *$ABCD$ là tứ giác lồi. P, Q nằm trong tứ giác sao cho $PQDA$ và $QPBC$ là tứ giác nội tiếp. Giả sử có $E \in PQ$ sao cho $\angle PAE = \angle QDE, \angle PBE = \angle QCE$. Chứng minh rằng A, B, C, D đồng viên.*

Bài 50. *BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. Hai đường tròn đi qua A, E và tiếp xúc với BC tại P, Q sao cho $B \in [CQ]$. Chứng minh rằng PE, QF cắt nhau trên (AEF).*

Bài 51. *Cho tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng tồn tại P trong tứ giác sao cho $\angle PAB + \angle PDC = \angle PBC + \angle PAD = \angle PCD + \angle PBA = \angle PDA + \angle PCB = 90° \Leftrightarrow AC \perp BD$.*

Bài 52. *P thuộc tia đối của tia CA trong hình chữ nhật $ABCD$ sao cho $\angle PBC = \angle DPB$. Tính $\dfrac{PB}{PC}$?*

Bài 53. *Cho tam giác ABC có $\angle ABC = 2\angle ACB$. AD là phân giác $\angle BAC$. M, N là trung điểm AC, BD. Giả sử A, M, D, N đồng viên. Hãy tính ba góc của tam giác ABC.*

Bài 54. *Tam giác* ABC *có đường đối trung* $AA_1(A_1 \in BC)$. *Lấy* $B_a \in AC, C_a \in BA$ *sao cho* $AB_aA_1C_a$ *là hình bình hành.*

a) Chứng minh rằng B, C, B_a, C_a *đồng viên.*

b) Gọi O_a *là tâm của* (BCB_aC_a). *Tương tự ta định nghĩa* O_b, O_c. *Chứng minh rằng* AO_a, BC_b, CO_c *đồng quy.*

Bài 55. *Tam giác* ABC *nội tiếp* (O). *Một đường thẳng qua* A *cắt tiếp tuyến tại* B, C *tại* M, N *cắt* (O) *tại* $E.BN \cap CM = F$. *Chứng minh rằng* EF *luôn đi qua một điểm cố định.*

Bài 56. *Cho tam giác* ABC *có trực tâm* H. *Một đường tròn* (O) *thay đổi nhưng luôn đi qua* H, *cắt* AH, BH, CH *tại* A_1, B_1, C_1. HX *là đường kính của* (O). AX, BX, CX *cắt* (O) *lần nữa tại* A_2, B_2, C_2. *Chứng minh rằng* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *đồng quy hay đội một song song.*

Bài 57. *Cho tam giác* ABC *có* A_1 *là tiếp điểm của* (O) *với mixitillinear excircle tại* A, A_2 *là trung điểm cung* BAC. *Tương tự ta định nghĩa* B_1, B_2, C_1, C_2. *Chứng minh rằng* A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 *đồng quy tại một điểm thuộc đường thẳng Euler của tam giác* DEF *với* D, E, F *là tiếp điểm của* BC, CA, AB *với đường tròn nội tiếp tam giác* ABC.

Bài 58. *Cho tam giác* ABC *nội tiếp* (O). $A_1, B_1, C_1 \in (O)$ *sao cho* $AA_1 \parallel BB_1$ *và* $BB_1 \parallel CC_1$. A_2, B_2, C_2 *đối xứng với* A_1, B_1, C_1 *qua* BC, CA, AB. *Chứng minh rằng* H, A_2, B_2, C_2 *đồng viên với* H *là trực tâm của tam giác* ABC.

Bài 59. *Cho đoạn thẳng* AB *và* $d \perp AB$ *tại* H *cố định.* M *thay đổi trên* $(d).HE \perp MA, HF \perp MB, HK \perp EF$. *Tìm quỹ tích* K *khi* M *di động trên* d.

Bài 60. *Cho* ABC *là tam giác đều có cạnh bằng* 1. M *là điểm bất kỳ trong mặt phẳng.* P, Q, R *là hình chiếu của* M *lên* BC, CA, AB. *Tìm giá trị min, max của biểu thức* $\dfrac{MP + MQ + MR}{MA + MB + MC}$.

Bài 61. *Giải bằng phương pháp hình học bất đẳng thức sau.*

$$(x^2 + y^2)(y^2 + z^2)(z^2 + x^2)(xy + yz + zx)^2 \geq 8x^2y^2z^2(x^2 + y^2 + z^2)^2$$

Trong đó x, y, z *là các số thực dương.*