

Mỗi tuần một bài toán

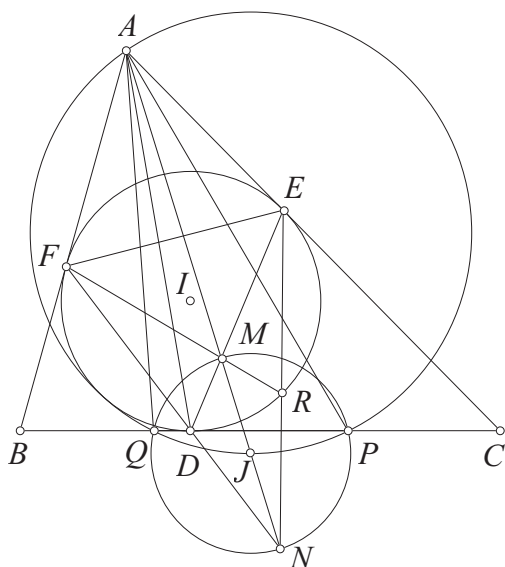
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F . Một đường thẳng đi qua A cắt DE, DF lần lượt tại M, N sao cho đường tròn đường kính MN cắt đoạn BC tại P, Q . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác APQ tiếp xúc (I) .

Lời giải



Từ hàng điều hòa cơ bản dễ thấy $D(EF, AB)$ điều hòa, chiếu lên đường thẳng MN và chiếu tiếp tâm Q , ta suy ra chùm $Q(MN, AD)$ điều hòa. Lại có $QM \perp QN$ nên QM là phân giác $\angle AQP$. Chứng minh tương tự PM là phân giác $\angle APQ$. Từ đó M là tâm nội tiếp tam giác APQ và N là tâm bàng tiếp tam giác APQ . Do đó trung điểm J của MN nằm trên đường tròn (APQ) . Gọi FM cắt EN tại R . Áp dụng định lý Pascal đảo cho $\begin{pmatrix} E & F & D \\ F & E & R \end{pmatrix}$ từ A, M, N thẳng hàng ta suy ra R nằm trên (I) .

Theo định lý Brokard cho tứ giác $EFDR$ dễ thấy M, N liên hợp với (I) nên đường tròn (J) đường kính MN trực giao với (I) . Vậy xét phép nghịch đảo qua đường tròn (J) thì đường tròn (I) bất biến. Đường tròn (APQ) đi qua tâm J biến thành đường

thẳng PQ hay cũng chính là BC . Vì BC tiếp xúc (I) nên ảnh nghịch đảo là (APQ) tiếp xúc (I) .

Nhật xét

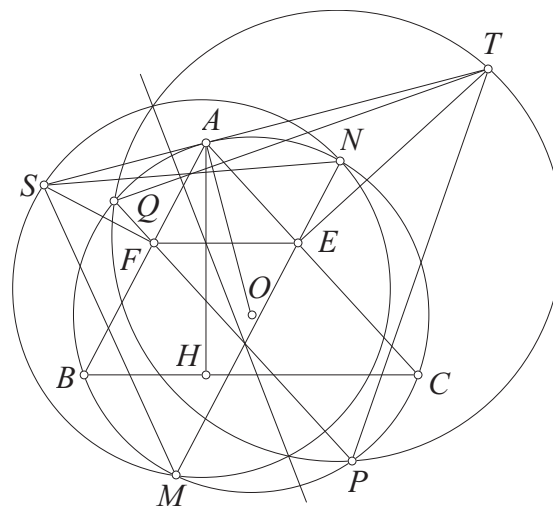
Bài toán là mở rộng của bài toán 6 trong kỳ thi ELMO 2016. Bài toán được giải đầu tiên theo cách sử dụng bổ đề Sawayama bởi bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An tại [đây](#). Ngoài ra tác giả nhận được lời giải qua email từ bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 10 toán, THPT chuyên KHTN. Cũng trong topic đó bạn **Bảo** cũng đưa ra một phát triển thú vị với điểm Feuerbach, tác giả cũng đề cập tới một phát triển khác và phát triển đó đã được giải bởi bạn **Đỗ Xuân Long** lớp 10 toán, THPT chuyên KHTN trên [AoPS](#).

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F . P là một điểm sao cho đẳng giác của P nằm trên OI . PA cắt DE, DF tại M_a, N_a sao cho đường tròn đường kính $M_a N_a$ cắt BC tại P_a, Q_a .

- Chứng minh rằng đường tròn $(AP_a Q_a)$ tiếp xúc (I) tại X .
- Tương tự có Y, Z . Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) với đường cao AH . E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. Trên tiếp tuyến qua A của (O) lấy S, T sao cho $SF \perp AB, TE \perp AC$. Đường thẳng qua E song song AB cắt (O) tại M, N . Đường thẳng qua F song song AC cắt (O) tại P, Q . Chứng minh rằng giao điểm của EF và AH nằm trên trục đẳng phương của hai đường tròn (SMN) và (TPQ) .



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.