

Mỗi tuần một bài toán

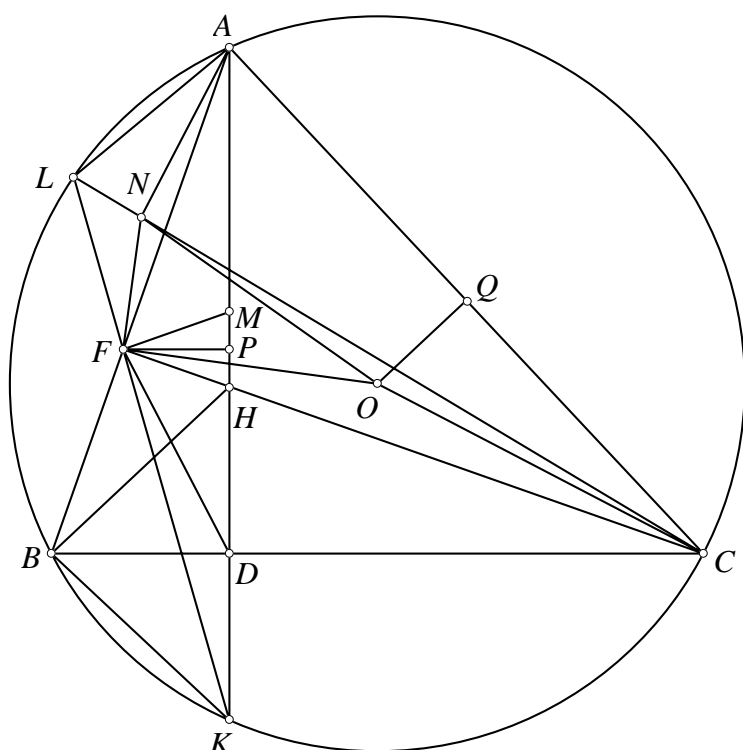
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với các đường cao AD, CF . Gọi AD cắt (O) tại K khác D . Gọi KF cắt (O) tại L khác K . Đường thẳng qua A vuông góc OC cắt CL tại N . Chứng minh rằng FN vuông góc với FO .

Lời giải



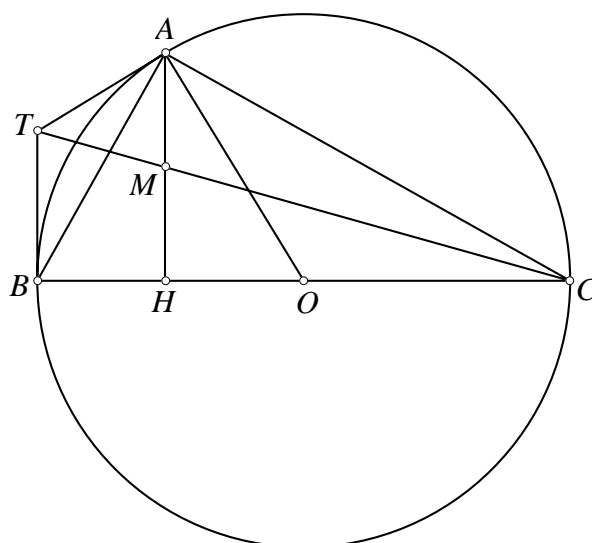
Ta sẽ chứng minh $\triangle FNA \sim \triangle FOC$ để suy ra $\triangle FNO \sim \triangle FAC$ thì $\angle NFO = 90^\circ$, thật vậy. Để chứng minh $\angle NAC = \angle ABC = \angle ALC$. Từ đó dễ thấy $\angle NAF = \angle NAC - \angle BAC = \angle ABC - \angle BAC = \angle FCO$. Gọi AD cắt CF tại H và P là hình chiếu của F lên AD , M đối xứng H qua P . Dễ có $\angle FMH = \angle FHM = \angle ABC = \angle NAC$ và $\angle FKM = \angle ACN$ do đó $\triangle KFM \sim \triangle CNA$. Ta cũng có tam giác $\triangle FAL \sim \triangle FKB$ và $\triangle FDP \sim \triangle ACF$. Từ đó ta có biến đổi tỷ số $\frac{NA}{FA} = \frac{NA}{LA} \cdot \frac{LA}{FA} = \frac{NC}{AC} \cdot \frac{KB}{FK} = \frac{HB}{AC} \cdot \frac{NC}{FK} = \frac{2OQ}{AC} \cdot \frac{AC}{MK} =$

$\frac{2OQ}{2DP} = \frac{OQ}{OC} \cdot \frac{OC}{CF} \cdot \frac{CF}{DP} = \frac{BF}{BC} \cdot \frac{OC}{CF} \cdot \frac{AC}{FD} = \frac{OC}{CF}$. Từ đó suy ra $\triangle FNA \sim \triangle FOC$ theo suy luận phần trên có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Tác giả thu được bài toán này từ việc tổng quát bài toán sau đây

Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AH . Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại T . Chứng minh rằng CT chia đôi AH .



Đây là một bài toán khá kinh điển xuất hiện nhiều trong các tài liệu, bài toán này minh họa rất tốt cho những tính chất đầu tiên đơn giản nhất khi bắt đầu học về tiếp tuyến của đường tròn. Nhưng cũng khá khó để nhận ra rằng vì sao bài toán ban đầu là tổng quát của bài toán này. Trong bài toán ban đầu, ta hãy vẽ thêm đường cao BE của tam giác ABC . Từ đó theo một kết quả đã biết thì CL chia đôi EF . Nhờ kết quả này khi tam giác ABC vuông tại B ta mới thu được bài toán quen thuộc nêu trên.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC với tâm ngoại tiếp O và P, Q là hai điểm đẳng giác nằm trong tam giác. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của P, Q lên BC . Gọi K là trung điểm P, Q . E, F là hình chiếu của K lên CA, AB . G, H đối xứng A qua E, F . Đường tròn ngoại tiếp tam giác GNM và HMN lần lượt cắt CA, AB tại S, T khác G, H . Chứng minh rằng OK vuông góc với ST .

Mọi trao đổi xin gửi về email anageomantica@gmail.com.