Các bài hình học mathley được đề nghị bởi Trần Quang Hùng

1 Đề bài

Bài 1.1. Cho tam giác ABC nhọn tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H, đường cao AD. AO cắt BC tại E. Đường thẳng qua D song song OH lần lượt cắt AB, AC tại M, N. I là trung điểm AE. DI lần lượt cắt AB, AC tại P, Q. MQ cắt NP tại T. Chứng minh rằng D, O, T thẳng hàng.

Bài 1.2. Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn (O) đi qua B, C lần lượt cắt các đoạn BA, CA tại điểm thứ hai F, E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt đường thẳng CF tại M, N sao cho M nằm giữa C và F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACF cắt đường thẳng CE tại P, Q sao cho P nằm giữa B và E. Đường thẳng qua N vuông góc AN cắt BE tại R. Đường thẳng qua Q vuông góc AQ cắt CF tại S. SP giao NR tại U. RM giao QS tại V. Chứng minh rằng NQ, UV, RS đồng quy.

Bài 1.3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P_1, P_2 là hai điểm bất kỳ trong mặt phẳng; P_1A, P_1B, P_1C lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là A_1, B_1, C_1; P_2A, P_2B, P_2C lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai A_2, B_2, C_2.

a) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 lần lượt giao BC, CA, AB tại A_3, B_3, C_3. Chứng minh rằng ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

b) P là một điểm bất kỳ trên đường thẳng P_1P_2; A_1P, B_1P, C_1P lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là A_4, B_4, C_4. Chứng minh rằng ba đường thẳng A_2A_4, B_2B_4, C_2C_4 đồng quy tại một điểm trên P_1P_2.

Bài 1.4. Cho tam giác ABC. Đường tròn (K) bất kỳ tiếp xúc đoạn thẳng AC, AB lần lượt tại E, F. (K) cắt đoạn thẳng BC tại M, N sao cho N nằm giữa B và M. FM giao EN tại I. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác IFN và IEM cắt nhau tại J khác I. Chứng minh rằng IJ đi qua A và KJ vuông góc IJ.

Bài 1.5. Cho tam giác ABC, P là điểm bất kỳ. A_1 là hình chiếu song song của P theo phương l cố định lên BC. A_2 là trung điểm AA_1. A_2P cắt BC tại A_3. A_4 đối xứng A_1 qua A_3. Chứng minh rằng PA_4 luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 1.6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) bất kỳ qua B, C. Đường tròn (O_1) tiếp xúc AB, AC và tiếp xúc trong với (K). Đường tròn (O_2) tiếp xúc DB, DC và tiếp xúc trong với (K). Chứng minh rằng một trong hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) song song với AD.

Bài 1.7. Cho tam giác ABC không cân, (O), H theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác. Đường thẳng qua A và song song với OH lại cắt (O) tại K. Đường thẳng qua K và song song với AH lại cắt (O) tại L. Đường thẳng qua L song song với OA cắt OH tại E. Chứng minh rằng các điểm B, C, O, E cùng thuộc một đường tròn.

Bài 1.8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc trung trực BC. I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB, MAC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2 luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di chuyển.

Bài 1.9. Cho tam giác ABC đường tròn (O) bất kỳ. (O) cắt CA tại L, E và cắt AB tại K, F. D là một điểm thuộc (O). d là đường thẳng bất kỳ đi qua A. DE, DF lần lượt cắt d tại M, N. Chứng minh rằng MK giao NL tại điểm thuộc (O).

Bài 1.10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại T. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia BT, CT sao cho $BM = BC = CN$. Đường thẳng MN cắt CA, AB theo thứ tự tại E, F; BE giao CT tại P, CF giao BT tại Q. Chứng minh rằng $AP = AQ$.

Bài 1.11. Cho tam giác ABC. Gọi (O_a) là đường tròn bất kỳ đi qua B, C; hai đường tròn $(O_b), (O_c)$ xác định tương tự. Hai đường tròn $(O_b), (O_c)$ cắt nhau tại A_1, khác A. Các điểm B_1, C_1 xác định tương tự. Gọi Q là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tam giác ABC. QB, QC lần lượt cắt (O_c), (O_b) tại A_2, A_3 khác B, C. Tương tự ta có B_2, B_3, C_2, C_3. Gọi (K_a), (K_b), (K_c) là các đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, và $C_1C_2C_3$. Chứng minh rằng

a) ba đường tròn $(K_a), (K_b), (K_c)$ có cùng một điểm chung.

b) hai tam giác $K_aK_bK_c$, ABC đồng dạng.

Bài 1.12. Giả sử E, F là hai điểm trên cạnh CA, AB của tam giác ABC. Gọi (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng

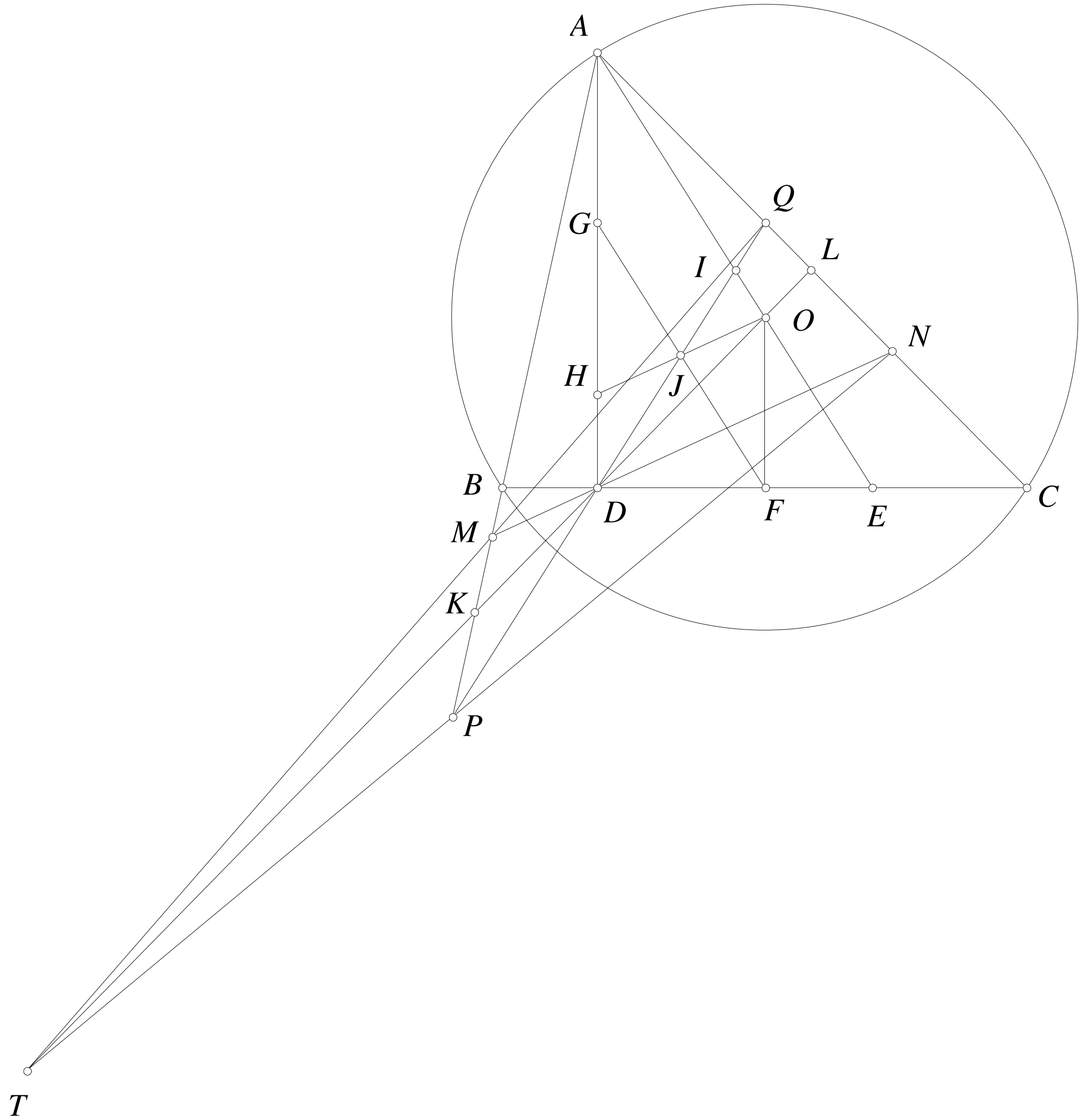
a) T nằm trên BC nếu và chỉ nếu BE cắt CF tại một điểm thuộc đường tròn (K);

b) EF, PQ, BC đồng quy biết rằng BE cắt FT tại M, CF cắt ET tại N, AM và AN cắt đường tròn (K) tại P, Q khác A.

Bài 1.13. Cho tam giác ABC và đường tròn (K) bất kỳ đi qua B, C cắt CA, AB tại M, N. Dựng tam giác APQ bằng và ngược hướng tam giác ABC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác CPM và BQN bằng nhau.

2 Lời giải

Bài 2.1. Cho tam giác ABC nhọn tâm đường tròn ngoại tiếp O, trực tâm H, đường cao AD. AO cắt BC tại E. Đường thẳng qua D song song OH lần lượt cắt AB, AC tại M, N. I là trung điểm AE. DI lần lượt cắt AB, AC tại P, Q. MQ cắt NP tại T. Chứng minh rằng D, O, T thẳng hàng.



Hình 1.

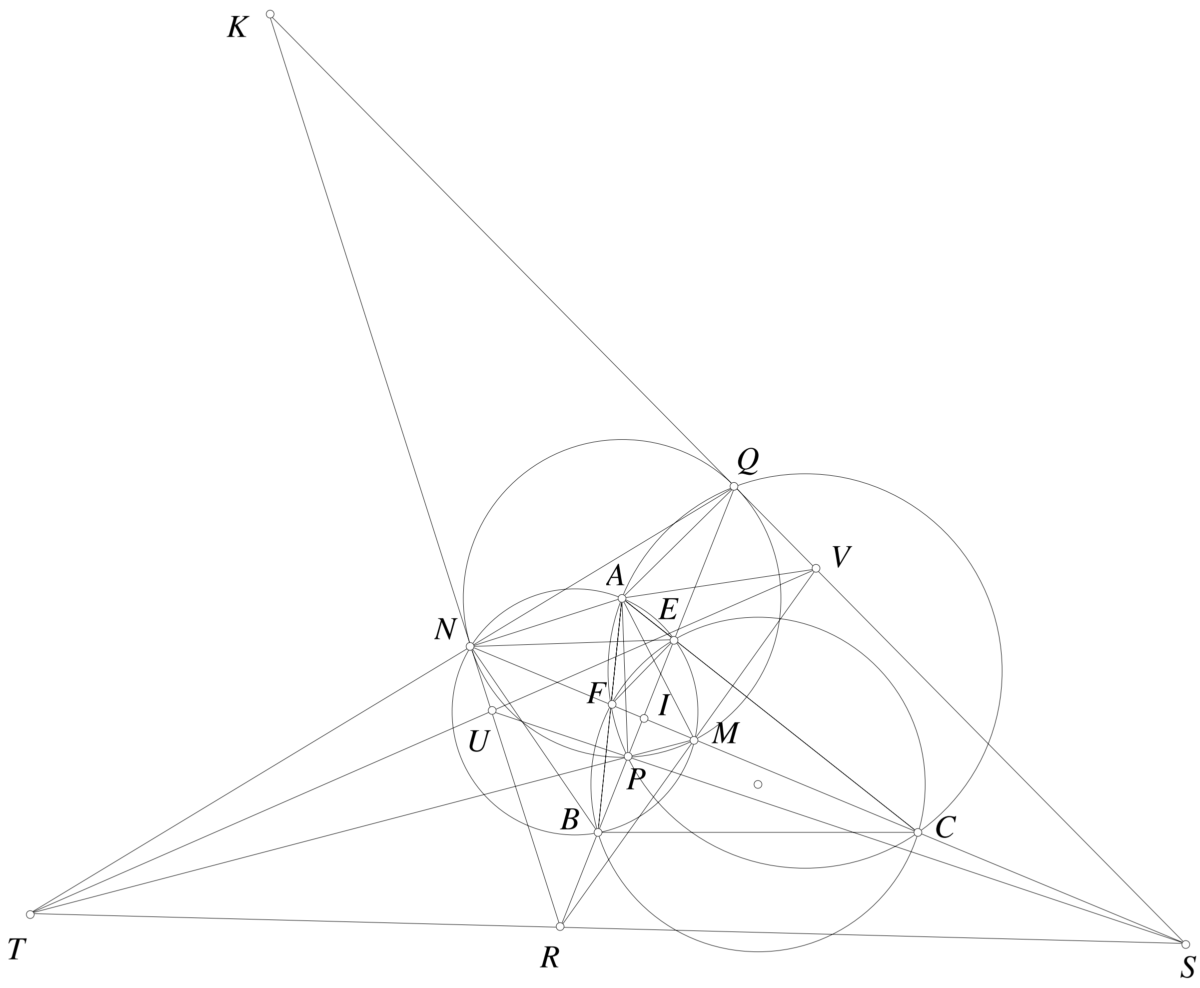
Lời giải. Gọi F là trung điểm BC, G là trung điểm AH. Từ kết quả quen thuộc $2\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{AH}$. Ta có $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OF}$. Tứ đó các tứ giác $AGFO, GHFO$ là hình bình hành suy ra GF song song AE và GF, OH có chung trung điểm J. Trong tam giác ADE có trung tuyến AI đi qua trung điểm đoạn chắn song song GF. Do đó AI đi qua trung điểm J của OH. Chú ý $DN \parallel HO$ từ liên hệ giữa tỷ số đơn và tỷ số kép ta có $D(HOJN) = (HOJ) = -1$.

Gọi OD giao AB, AC tại K, L. Qua phép chiếu xuyên tâm D ta dễ thấy

$$(AKMP) = D(AKMP) = D(ALNQ) = (ALNQ) = D(HOJN) = -1$$

Khi $(AKMP) = -1$ ta cũng có $(AKPM) = -1$. Vậy từ hai đẳng thức trên ta có $(AKPM) = (ALNQ)$ hay KL, PN, MQ đồng quy tại T, nói cách khác D, O, T thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.2. Cho tam giác ABC không cân. Đường tròn (O) đi qua B, C lần lượt cắt các đoạn BA, CA tại điểm thứ hai F, E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE cắt đường thẳng CF tại M, N sao cho M nằm giữa C và F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACF cắt đường thẳng CE tại P, Q sao cho P nằm giữa B và E. Đường thẳng qua N vuông góc AN cắt BE tại R. Đường thẳng qua Q vuông góc AQ cắt CF tại S. SP giao NR tại U. RM giao QS tại V. Chứng minh rằng NQ, UV, RS đồng quy.



Hình 2.

Lời giải. Do các tứ giác $ANBE$ và $BCEF$ nội tiếp $\angle ANE = \angle ABE = \angle ACN$ nên $\triangle ANE \sim \triangle ACN$ do đó $AN^2 = AE.AC$. Tương tự $AM^2 = AE.AC, AP^2 = AQ^2 = AF.AB$, do $BCEF$ nội tiếp nên $AE.AC = AF.AB$. Từ đó ta có $AM = AN = AP = AQ$ hay M, N, P, Q thuộc đường tròn (A).

Gọi CN giao BQ tại I, RN giao SQ tại K. Ta xét phép chiếu xuyên tâm trên đường tròn (A), chú ý NR, QS là tiếp tuyến của (A), ta có

$$(MNPQ) = N(MNPQ) = (IRPQ) = S(IRPQ) = (NRUK) \quad (1)$$

và

$$(MNPQ) = Q(MNPQ) = (MNIS) = R(MNIS) = (VKQS) = (QSVK) \quad (2)$$

Từ $(1), (2)$ suy ra $(NRUK) = (QSVK)$ do đó QN, RS, UV đồng quy, đó là điều phải chứng minh.

□

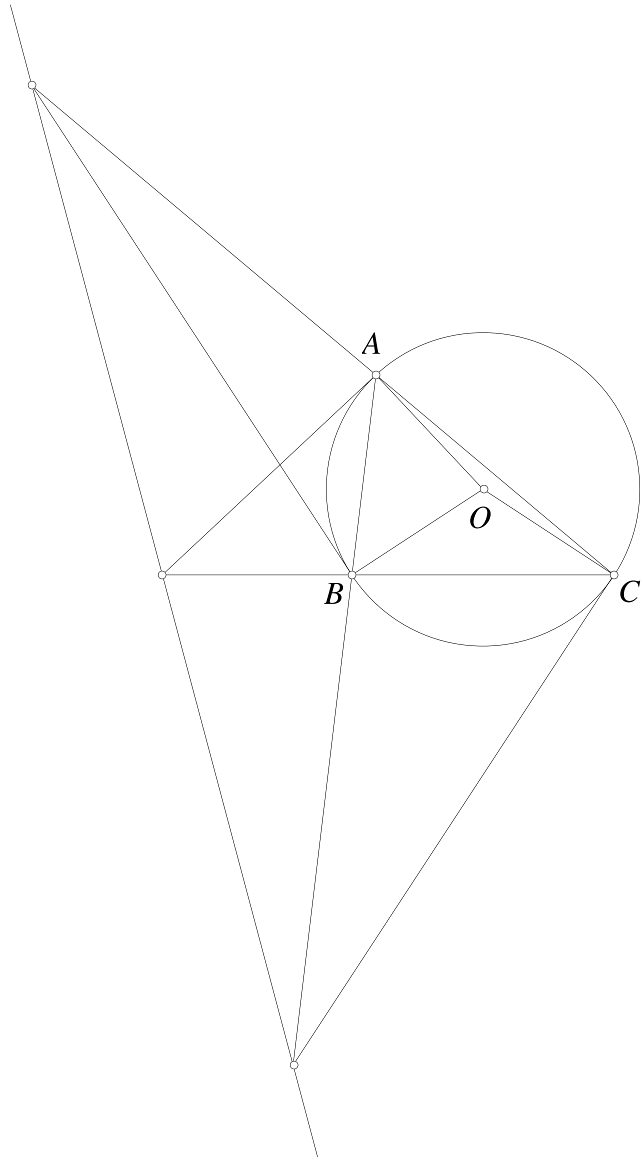
Bài 2.3. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P_1, P_2 là hai điểm bất kỳ trong mặt phẳng; P_1A, P_1B, P_1C lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là A_1, B_1, C_1; P_2A, P_2B, P_2C lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai A_2, B_2, C_2.

a) A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 lần lượt giao BC, CA, AB tại A_3, B_3, C_3. Chứng minh rằng ba điểm A_3, B_3, C_3 thẳng hàng.

b) P là một điểm bất kỳ trên đường thẳng P_1P_2; A_1P, B_1P, C_1P lần lượt cắt (O) tại điểm thứ hai là A_4, B_4, C_4. Chứng minh rằng ba đường thẳng A_2A_4, B_2B_4, C_2C_4 đồng quy tại một điểm trên P_1P_2.

Để giải bài toán ta cần một số bổ đề sau

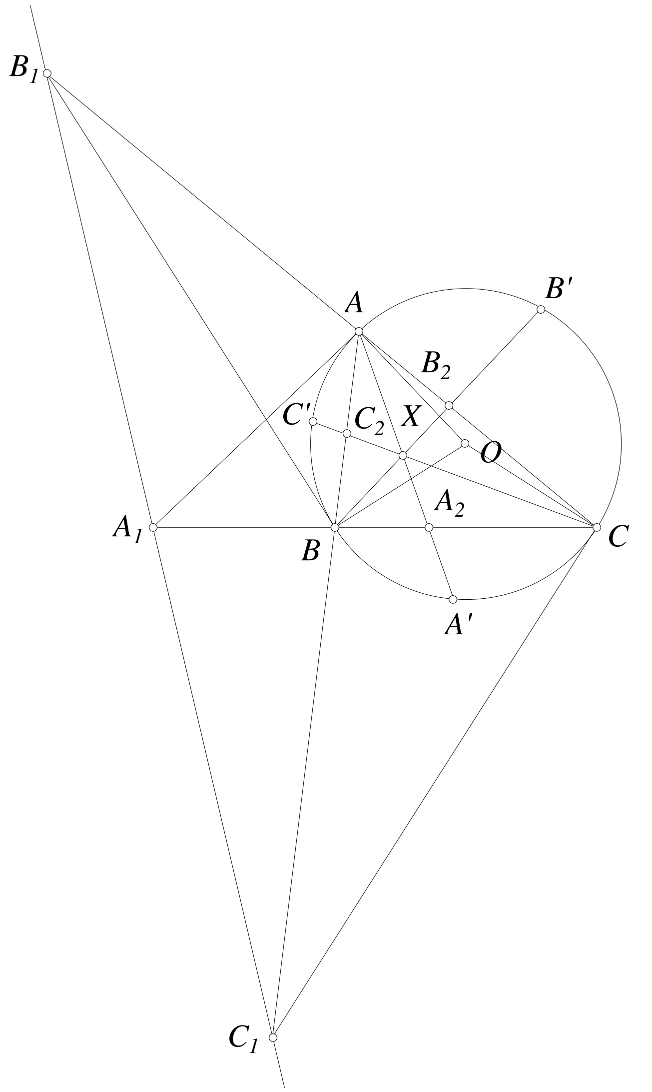
Bổ đề 2.3.1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Khi đó các tiếp tuyến tại A, B, C của (O) tương ứng cắt BC, CA, AB tại ba điểm thẳng hàng.



Hình 3.

Bổ đề này đã rất quen thuộc xin không nêu cách chứng minh.

Bổ đề 2.3.2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với X là điểm bất kỳ. Gọi A', B', C' là giao điểm thứ hai của AX, BX, CX với đường tròn (O). khi đó $(BCAA') \cdot (CABB') \cdot (ABCC') = -1$.



Hình 4.

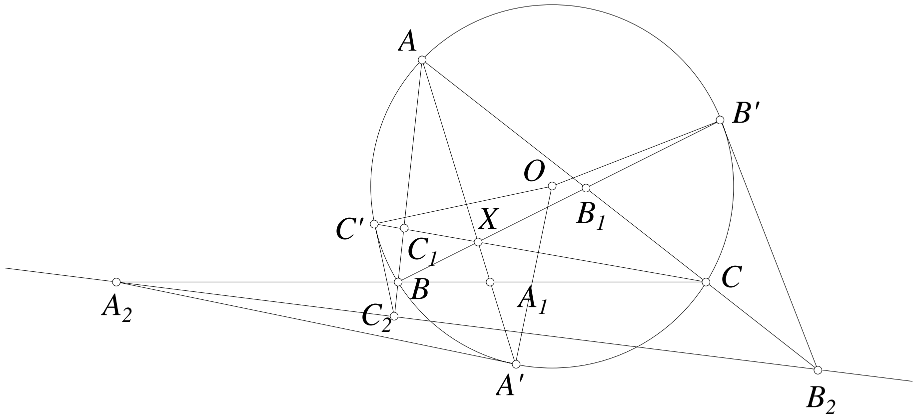
Lời giải. Gọi A_1, B_1, C_1 tương ứng là giao điểm của tiếp tuyến tại A, B, C của (O) với các đường thẳng BC, CA, AB và A_2, B_2, C_2 tương ứng là giao điểm của AX, BX, CX với các đường thẳng BC, CA, AB.

Khi đó ta dễ thấy

$$(BCAA') = A(BCAA') = A(BCA_2A_1) = (BCA_2A_1) = \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} : \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}}$$

Tương tự với $(CABB'), (ABCC')$ ta chú ý rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy và A_2, B_2, C_2 thẳng hàng khi nhân các tỷ số kép với nhau áp dụng các định lý Menelaus và Ceva ta dễ suy ra $(BCAA') \cdot (CABB') \cdot (ABCC') = -1$. Đó là điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2.3.3. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) với X là điểm bất kỳ. Gọi A', B', C' là giao điểm thứ hai của AX, BX, CX với đường tròn (O). Chứng minh rằng các tiếp tuyến của (O) tại A', B', C' tương ứng cắt BC, CA, AB tại ba điểm thẳng hàng.



Hình 5.

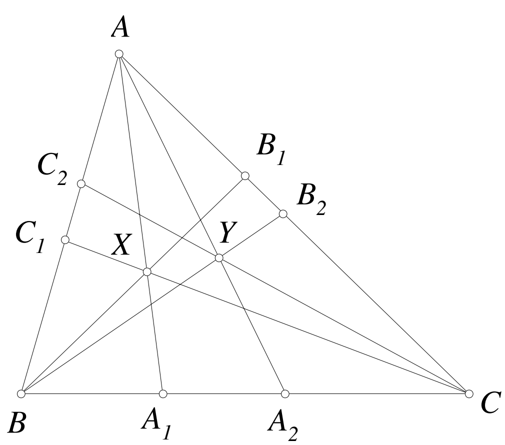
Lời giải. Gọi giao điểm của đường thẳng AA', BB', CC' và tiếp tuyến tại A', B', C' của (O) với BC, CA, AB lần lượt là $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1C_2$. Ta thấy

$$(BCAA') = A'(BCAA') = A'(BCA_1A_2) = (BCA_1A_2) = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} : \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$$

Tương tự với $(CABB'), (ABCC')$ ta chú ý rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy và theo bổ đề 3.2 thì $(BCAA') \cdot (CABB') \cdot (ABCC') = -1$ do đó dễ suy ra $\frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} . \frac{\overline{B_2C}}{\overline{B_2A}} . \frac{\overline{C_2A}}{\overline{C_2B}} = 1$ nên A_2, B_2, C_2 thẳng hàng theo định lý Menelaus, đó là điều phải chứng minh. □

Bổ đề 2.3.4. Cho năm điểm A, B, C, X, Y trên mặt phẳng khi đó

$$A(BCXY) \cdot B(CAXY) \cdot C(ABXY) = 1.$$



Hình 6.

Lời giải. Gọi giao điểm của AX, AY với đường thẳng BC là A_1, A_2 ta dễ thấy

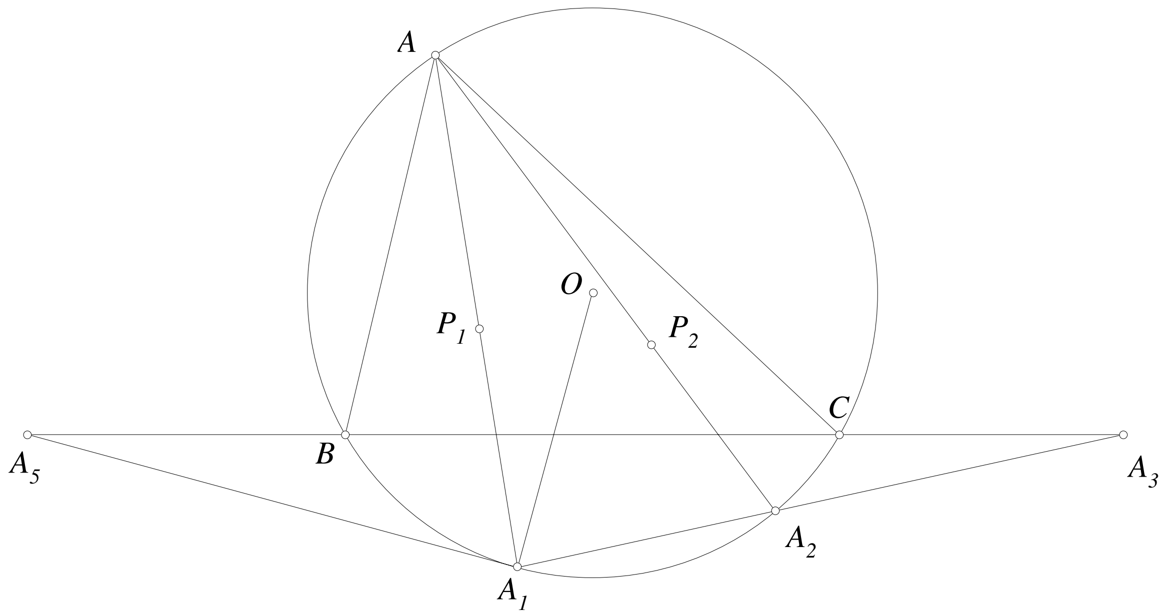
$$A(BCXY) = (BCA_1A_2) = \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} : \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}}$$

Chú ý rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại X, AA_2, BB_2, CC_2 đồng quy tại Y do đó áp dụng định lý Ceva ta có

$$A(BCXY) \cdot B(CAXY) \cdot C(ABXY) = \prod \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} : \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} = \prod \frac{\overline{A_1B}}{\overline{A_1C}} : \prod \frac{\overline{A_2B}}{\overline{A_2C}} = -1 : -1 = 1$$

Đó là điều phải chứng minh. □

Lời giải. a) Gọi A_5, B_5, C_5 lần lượt là giao điểm của tiếp tuyến tại A_1, B_1, C_1 với BC, CA, AB, theo bổ đề 1 ta đã có A_5, B_5, C_5 thẳng hàng.



Hình 7.

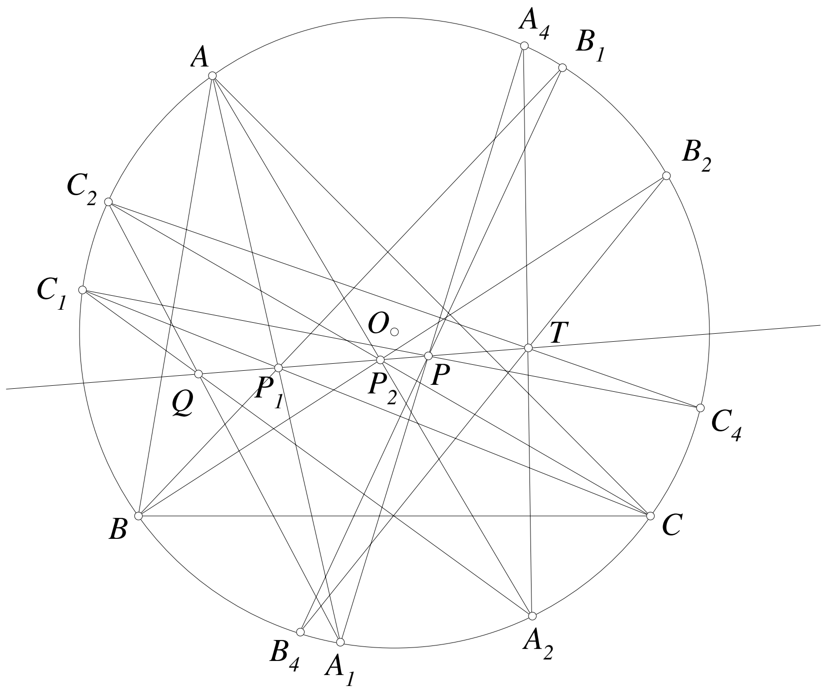
$$A(BCP_1P_2) = A(BCA_1A_2) = (BCA_1A_2) = A_1(BCA_1A_2) = A_1(BCA_5A_3) = (BCA_5A_3) = \frac{\overline{A_5B}}{\overline{A_5C}} : \frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}}$$

Vậy

$$A(BCP_1P_2) \cdot B(CAP_1P_2) \cdot C(ABP_1P_2) = \prod \frac{\overline{A_5B}}{\overline{A_5C}} : \frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}}$$

Theo bổ đề 3.4, $A(BCP_1P_2) \cdot B(CAP_1P_2) \cdot C(ABP_1P_2) = 1$, mặt khác theo bổ đề 3.3 A_5, B_5, C_5 thẳng hàng, áp dụng định lý Menelaus ta có $\prod \frac{\overline{A_5B}}{\overline{A_5C}} = 1$. Vậy kết hợp đẳng thức trên ta suy ra $\prod \frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3C}} = 1$, vậy A_3, B_3, C_3 thẳng hàng theo định lý Menelaus. Ta có điều phải chứng minh.

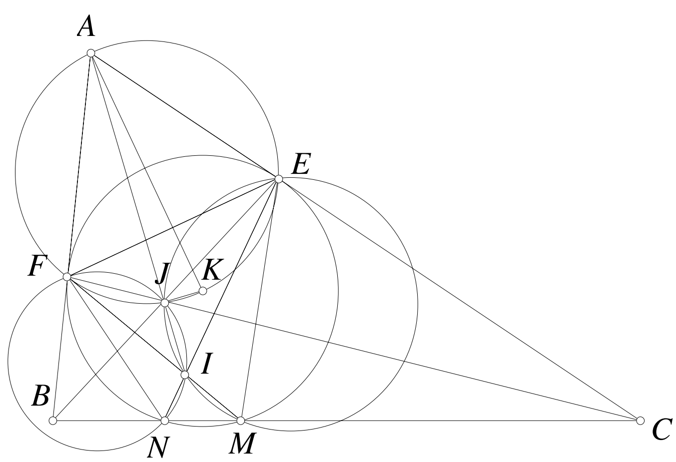
b) Gọi Q là giao điểm của A_1C_2 và A_2C_1. Áp dụng định lý Pascal cho lục giác $C_1C_2ACA_2A_1$ ta có giao điểm của các cặp đường thẳng $(C_2A_1, C_1A_2), (C_1C, A_1A), (AA_2, CC_2)$ thẳng hàng, hay Q thuộc P_1P_2.



Hình 8.

Tiếp tục áp dụng định lý Pascal cho lục giác $C_1C_2A_4C_4A_2A_1$ ta có giao điểm của các cặp đường thẳng $(C_2A_1, C_1A_2), (C_2C_4, A_2A_4), (A_4A_1, C_4C_1)$ thẳng hàng hay giao điểm T của A_4A_2 và C_4C_2 nằm trên P_1P_2. Tương tự ta có giao điểm T' của A_4A_2 và B_4B_2 nằm trên P_1P_2. Do đó $T' \equiv T$. Như vậy A_4A_2, B_4B_2, C_4C_2 đồng quy tại một điểm T nằm trên P_1P_2. □

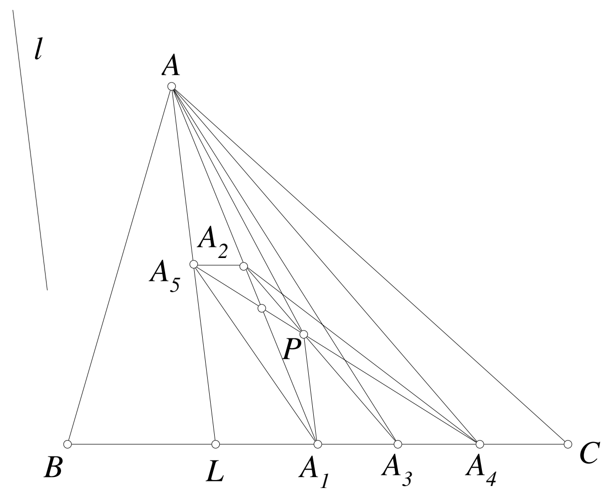
Bài 2.4. Cho tam giác ABC. Đường tròn (K) bất kỳ tiếp xúc đoạn thẳng AC, AB lần lượt tại E, F. (K) cắt đoạn thẳng BC tại M, N sao cho N nằm giữa B và M. FM giao EN tại I. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác IFN và IEM cắt nhau tại J khác I. Chứng minh rằng IJ đi qua A và KJ vuông góc IJ.



Hình 9.

Lời giải. Gọi J' là hình chiếu của K lên AI dễ thấy A, F, J', K, E thuộc đường tròn đường kính AK. Từ đó ta có góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng nhau $\angle AJ'F = \angle AEF = \angle FNI$ suy ra tứ giác $FJ'IN$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $EJ'IM$ nội tiếp từ đó J' là điểm chung khác I của đường tròn ngoại tiếp tam giác IFN và IEM, vậy $J' \equiv J$ suy ra A, I, J thẳng hàng và $KJ \perp IJ$. Đó là điều phải chứng minh. □

Bài 2.5. Cho tam giác ABC, P là điểm bất kỳ. A_1 là hình chiếu song song của P theo phương l cố định lên BC. A_2 là trung điểm AA_1. A_2P cắt BC tại A_3. A_4 đối xứng A_1 qua A_3. Chứng minh rằng PA_4 luôn đi qua một điểm cố định.



Hình 10.

Lời giải. Gọi L là hình chiếu song song phương l của A lên BC. Gọi A_5 là trung điểm AL ta sẽ chứng minh rằng A_4, P, A_5 thẳng hàng thật vậy, từ liên hệ tỷ số đơn và tỷ số kép dễ thấy

$A_1(A_4A_2A_5P) = (LAA_5) = -1$ (Do $PA_1 \parallel AL$ và A_5 là trung điểm AL)

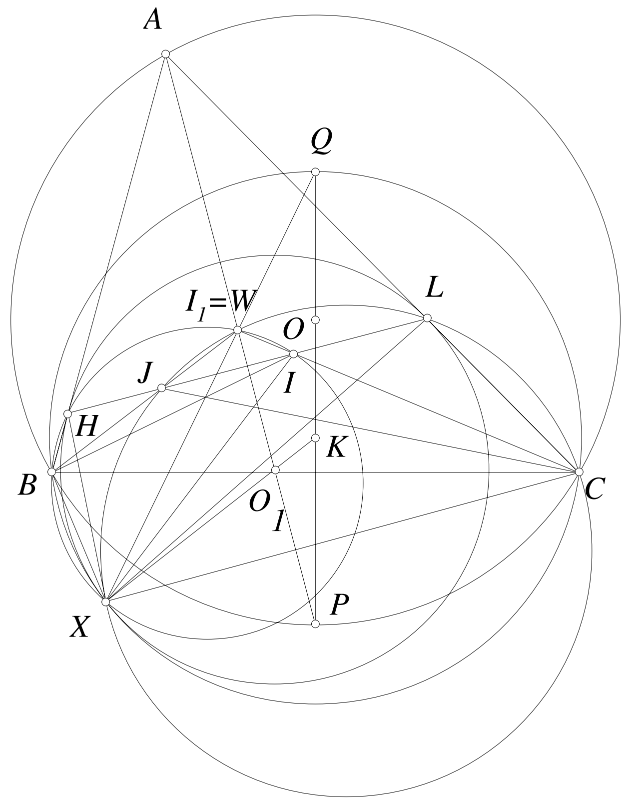
$A_2(A_4A_1A_3A_5) = (A_4A_1A_3) = -1$ (Do $A_2A_5 \parallel A_1A_4$ và A_3 là trung điểm A_1A_4)

Từ đó $A_1(A_4A_2A_5P) = A_2(A_4A_1A_3A_5)$ nên A_4, A_5, P thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.6. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (K) bất kỳ qua B, C. Đường tròn (O_1) tiếp xúc AB, AC và tiếp xúc trong với (K). Đường tròn (O_2) tiếp xúc DB, DC và tiếp xúc trong với (K). Chứng minh rằng một trong hai tiếp tuyến chung ngoài của (O_1) và (O_2) song song với AD.

Lời giải. Ta có một số nhận xét sau

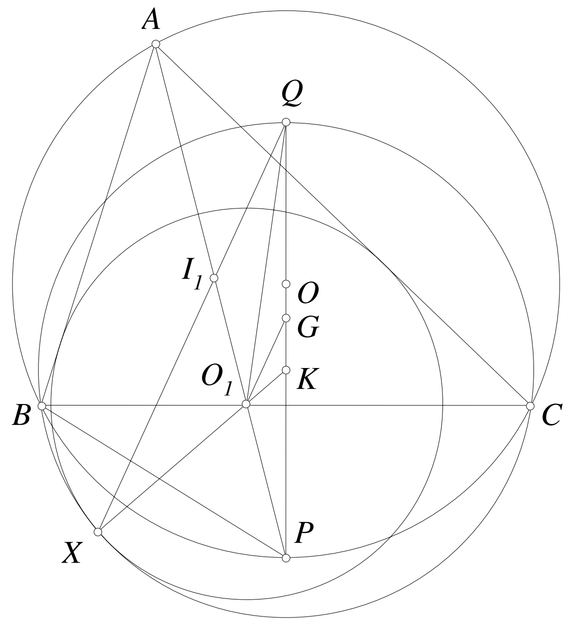
Nhận xét 1. $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc (K) tại X, Y. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và DBC. Thì XI_1, YI_2 cắt nhau tại điểm Q thuộc (K) là trung điểm cung BC không chứa X, Y của (K).



Hình 11.

Thật vậy, ta chỉ cần chứng minh XI_1 là phân giác $\angle BXC$. Gọi (O_1) tiếp xúc AB, AC tại H, L. Gọi W là giao điểm khác X của đường tròn (XBH) và (XCL). CW giao (BHX) tại I khác W, BW giao (CLX) tại J khác W. Ta có $\angle XLJ = \angle XWJ = \angle XWB = \angle BHX = \angle XLH$ từ đó J thuộc HL. Tương tự I thuộc HL. Từ đó dễ chứng minh tứ giác $IJBC$ nội tiếp bằng cộng góc. Vậy $\angle CBW = \angle WIH = \angle HBW$ hay BW là phân giác $\angle ABC$. Tương tự CW là phân giác $\angle ACB$, vậy $W \equiv I_1$. Từ đó $\angle BXI_1 = \angle BII_1 = 180^\circ - \angle BIC = 180^\circ - \angle BJC = \angle CJI_1 = \angle CXI_1$. Vậy ta hoàn thành chứng minh.

Nhận xét 2. Gọi P là trung điểm cung BC không chứa A, D của (O) thì $\dfrac{I_1O_1}{R_1} = \dfrac{PB}{PQ} = \dfrac{PC}{PQ} = \dfrac{I_2O_2}{R_2}$, với R_1, R_2 là bán kính của $(O_1), (O_2)$.

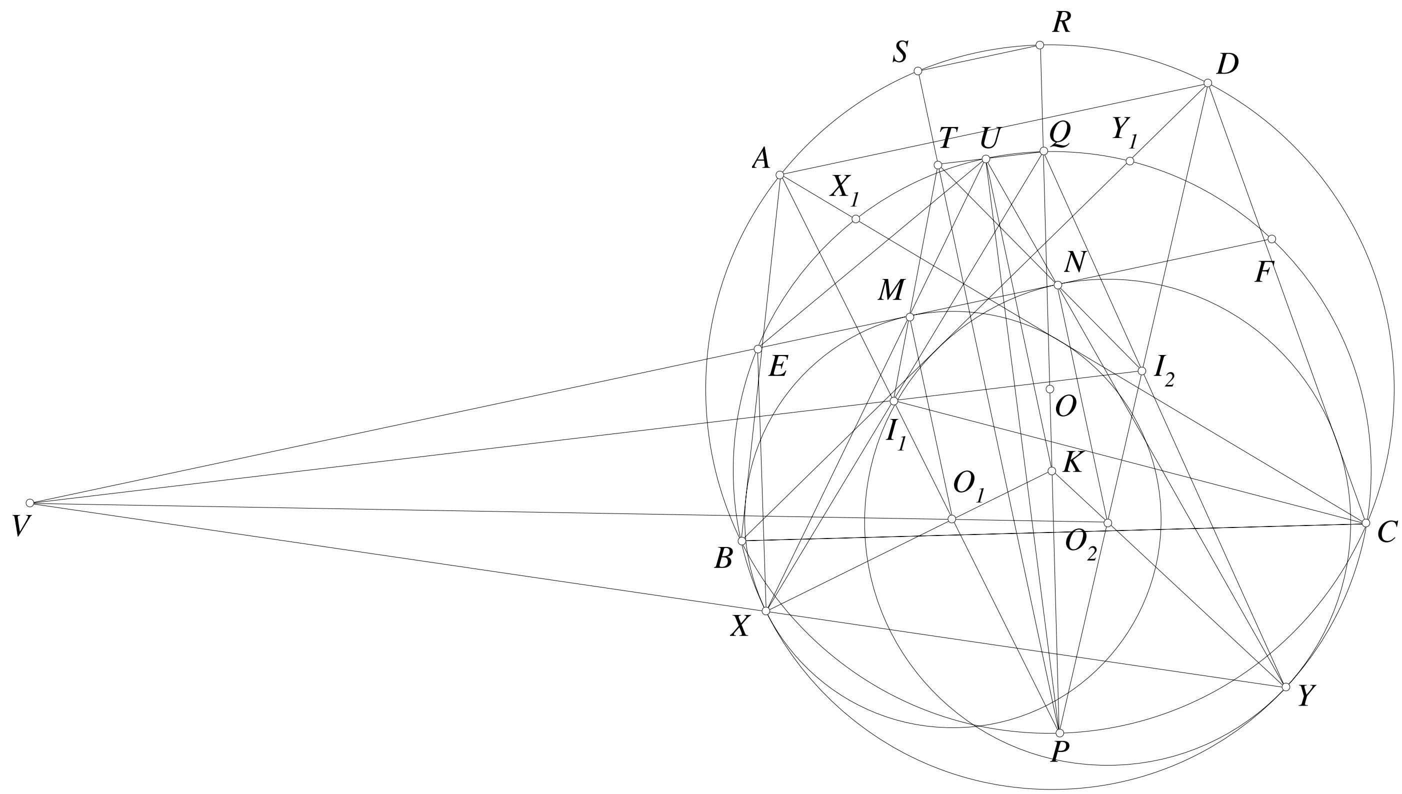


Hình 12.

Thật vậy, từ nhận xét 1 thì O, K, Q thẳng hàng. Lấy G thuộc KQ sao cho $KG = KO_1$ từ đó dễ thấy $O_1G \parallel XQ$ vậy ta có

$$\frac{PB}{PQ} = \frac{PI_1}{PQ} = \frac{PO_1}{PG} = \frac{PI_1 - PO_1}{PQ - PG} = \frac{I_1O_1}{GQ} = \frac{I_1O_1}{KQ - KG} = \frac{I_1O_1}{KX - KO_1} = \frac{I_1O_1}{R_1}.$$

Nhận xét 3. Gọi AC, BD giao (K) tại điểm thứ hai X_1, Y_1. U là trung điểm cung X_1Y_1 không chứa B, C của (K) thì $I_1I_2 \parallel UQ$.



Hình 13.

Thật vậy, ta chú ý $\angle BI_1C = 90^\circ + \dfrac{\angle BAC}{2} = 90^\circ + \dfrac{\angle BDC}{2} = \angle BI_2C$ do đó tứ giác BI_1I_2C nội tiếp. Ta có $(I_1I_2, BC) = (I_1I_2, I_2B) + (I_2B, BC) = (CI_1, CB) + (BI_2, BC) (\operatorname{mod} \pi)$ (1).

Ta lại có $(UQ, BC) = (UQ, QB) + (QB, BC) = (CU, CB) + (BQ, BC) = (CU, CX_1) + (CX_1, CI_1) + (CI_1, CB) + (BQ, BY_1) + (BY_1, BI_2) + (BI_2, BC) = (BY_1, BU) + 2(CI_1, CB) + (BQ, BY_1) + 2(BI_2, BC) = (BQ, BU) + 2(CI_1, CB) + 2(BI_2, BC) (\operatorname{mod} \pi)$ (2)

Mặt khác $(CX_1, CB) + (BY_1, BC) = (CX_1, CU) + (CU, CQ) + (CQ, CB) + (BY_1, BU) + (BU, BQ) + (BQ, BC) = (CU, CQ) + (BU, BQ) = 2(BU, BQ) (\operatorname{mod} \pi)$.

Từ đó suy ra $(CI_1, CB) + (BI_2, BC) = \dfrac{1}{2}[(CX_1, CB) + (BY_1, BC)] = (BU, BQ) (\mod \pi)$ (3).

Từ (2), (3) ta suy ra $(UQ, BC) = (CI_1, CB) + (BI_2, BC) (\operatorname{mod} \pi)$ (4).

Từ (1), (4) ta suy ra $I_1I_2 \parallel UQ$.

Trở lại bài toán, qua P vẽ đường thẳng song song KU giao QU tại T. Ta định nghĩa lại các điểm M, N, gọi đoạn I_1T cắt (O_1) tại M, gọi đoạn I_2T cắt (O_2) tại N. Theo nhận xét 2 thì $\dfrac{O_1M}{PT} = \dfrac{R_1}{PQ} = \dfrac{I_1O_1}{PI_1}$ do đó $O_1M \parallel PT \parallel KU$ suy ra X, M, U thẳng hàng, tương tự Y, N, U thẳng hàng.

Gọi V là tâm vị tự ngoài của $(O_1), (O_2)$ thì V thuộc O_1O_2, chú ý $O_1M \parallel O_2N$ nên V thuộc MN. X, Y là tâm vị tự trong của (K) và (O_1), của (K) và (O_2) nên XY đi qua V. Chú ý tam giác I_1O_1M và I_2O_2M có I_1M giao I_2N tại T, I_1O_1 giao I_2O_2 tại P và $PT \parallel MO_1 \parallel NO_2$ do đó theo định lý Desargues I_1I_2 đi qua V là giao của MN và O_1O_2.

Ta dễ chứng minh $PT = PQ, PI_1 = PI_2$ kết hợp $QT \parallel I_1I_2$ của nhận xét 3 suy ra tứ giác

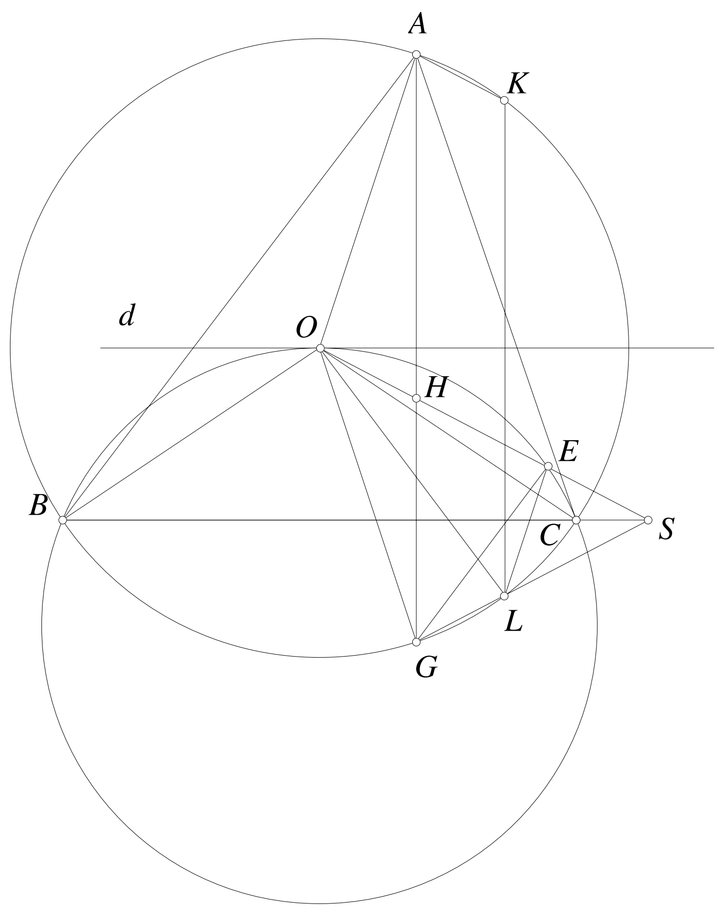
TI_1I_2Q là hình thang cân do đó $(I_1M, I_1V) = (I_1T, I_1I_2) = (QT, QI_2) = (QU, QY) = (XU, XY) = (XM, XV)(\bmod \pi)$ từ đó tứ giác I_1MVX nội tiếp, tương tự tứ giác I_2NVY nội tiếp. Vậy ta có $(MN, MX) = (MV, MX) = (I_1V, I_1X) = (I_1I_2, I_1Q) = (I_2T, I_2I_1) = (I_2N, I_2V) = (YN, YV) = (YN, YX)(\bmod \pi)$, từ đó tứ giác $XMNY$ nội tiếp.

Ta gọi MN giao (K) tại E, F. Ta thấy $\angle EMU = \angle XMN = 180^\circ - \angle XYN = \angle XEU$ suy ra $\triangle EMU \sim \triangle XEU$ vậy $UE^2 = UM.UX$. Tương tự $UF^2 = UN.UY$ mà XMNY nội tiếp nên $UM.UX = UN.UY$ do đó $UE = UF$, vậy tam giác UEF cân suy ra $KU \perp EF$. Từ trên đã có $O_1M \parallel O_2N \parallel KU$ suy ra O_1M, O_2N vuông góc MN hay MN là tiếp tuyến chung của $(O_1), (O_2)$.

Gọi PT, PQ cắt (O) tại S, R. Từ trên đã có $PT = PQ, PI_1 = PI_2$ và TI_1I_2Q là hình thang cân nên $\angle APS = \angle DPR$ hay $SR \parallel AD$. Chú ý PR là đường kính của (O) nên $PS \perp SR$ vậy $PS \perp AD$. Cũng từ chứng minh trên ta đã có $PS \equiv PT \parallel KU \perp MN$ vậy từ đó $MN \parallel AD$ do cùng vuông góc PS. Ta có điều phải chứng minh.

□

Bài 2.7. Cho tam giác ABC không cân, (O), H theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và trực tâm của tam giác. Đường thẳng qua A và song song với OH lại cắt (O) tại K. Đường thẳng qua K và song song với AH lại cắt (O) tại L. Đường thẳng qua L song song với OA cắt OH tại E. Chứng minh rằng các điểm B, C, O, E cùng thuộc một đường tròn.



Hình 14.

Lời giải. Gọi AH giao (O) tại G khác A. Do $KL \parallel AH$ nên $AKLG$ là hình thang cân. Ta lại chú ý $AKHF$ là hình bình hành nên $FHGL$ là hình thang cân. Do tính chất trực tâm H đối xứng G qua

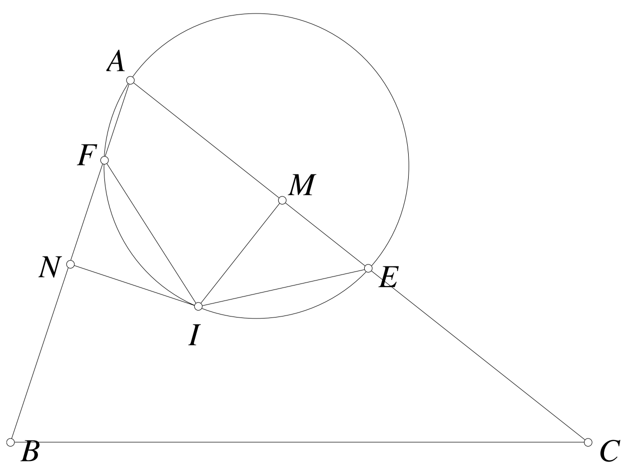
BC do đó BC là trục đối xứng của $FHGL$ vậy FH, GL, BC đồng quy tại S. Gọi d là trục đối xứng của $AKHF$ ta có các biến đổi góc sau

$$\begin{aligned}(LE,LG) &\equiv (LE,LK)+(LK,LG)\\ &\equiv (AO,AG)+(KA,KL)(\text{Do } LK \parallel AL \text{ và phép đối xứng trục } d)\\ &\equiv (GA,GO)+(OE,GA)(\text{Do phép đối xứng trục } d \text{ và } KA \parallel OE, KL \parallel GA)\\ &\equiv (OE,OG) \pmod{\pi}\end{aligned}$$

Từ đó bốn điểm O, L, E, G cùng thuộc một đường tròn. Vậy $\overline{SE}.\overline{SO} = \overline{SG}.\overline{SL} = \overline{SB}.\overline{SC}$ hay các điểm B, C, O, E cùng thuộc một đường tròn. Đó là điều phải chứng minh. □

Bài 2.8. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). M thuộc trung trực BC. I_1, I_2 là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB, MAC. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AI_1I_2 luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M di chuyển.

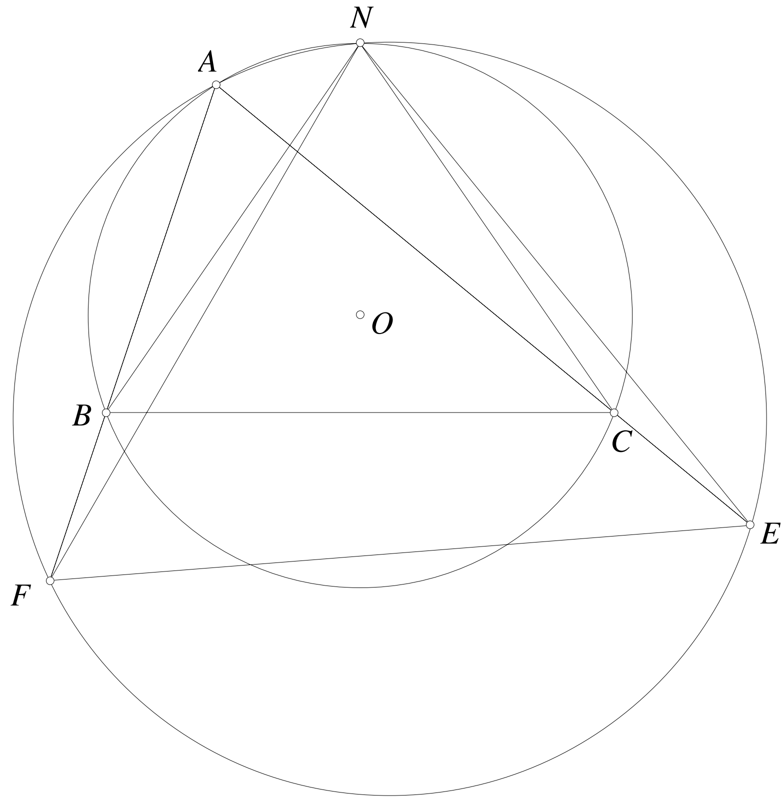
Bổ đề 2.8.1. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp. Đường tròn bất kỳ qua A, I cắt CA, AB tại E, F khác A thì $AE + AF = CA + AB - BC$.



Hình 15.

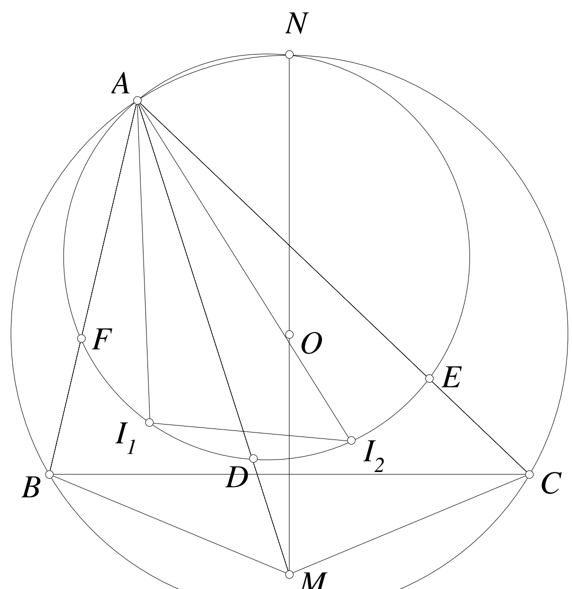
Lời giải. Gọi M, N là hình chiếu của I lên CA, AB. Dễ thấy $\triangle INF = \triangle IME(c.g.c)$ từ đó suy ra $AE = AF = AM + AN = CA + AB - BC$. □

Bổ đề 2.8.2. Cho tam giác ABC. E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $CE = BF$ và E, F cùng phía với BC thì đường tròn ngoại tiếp (AEF) đi qua trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A.



Hình 16.

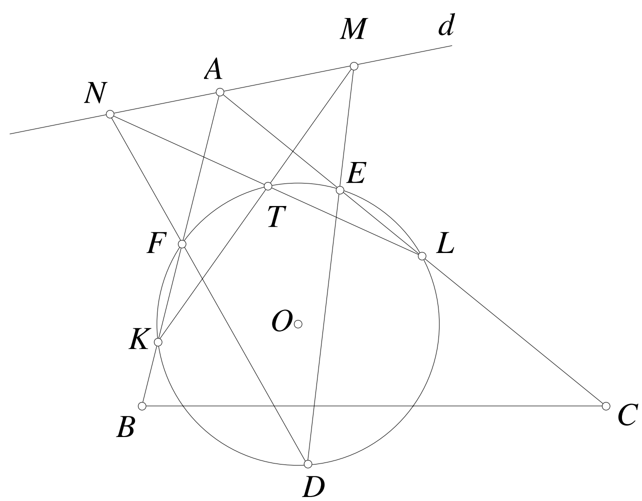
Lời giải. Gọi N là trung điểm cung $\overset{\frown}{BC}$ chứa A. Giả sử E, F khác phía A với BC. Trường hợp còn lại chứng minh hoàn toàn tương tự. Ta dễ thấy $\angle ABN = \angle ACN$ suy ra $\angle FBN = \angle ACN$. Kết hợp $NB = BC, FB = CE$ suy ra $\triangle FBN = \triangle ECN$. Từ đó $\angle BFN = \angle CEN$ hay A, F, E, N cùng thuộc một đường tròn. □



Hình 17.

Lời giải. Gọi đường tròn ngoại tiếp (AI_1I_2) cắt AM, CA, AB lần lượt tại D, E, F khác A. Theo bổ đề 1 dễ thấy $AD + AF = AB + AM - MB$, $AD + AE = AC + AM - MC$. Trừ hai đẳng thức chú ý $MB = MC$ ta được $AF - AE = AB - AC$ hay $AB - AF = AC - AE$. Do đó trong các trường hợp E, F cùng phía hoặc khác phía BC ta cũng đều có $BF = CE$. Vậy theo bổ đề 2 gọi N là trung điểm cung BC chứa A thì $(AI_1I_2) \equiv (AEF)$ đi qua N. Vậy tâm ngoại tiếp AI_1I_2 thuộc trung trực AN cố định. Đó là điều phải chứng minh. □

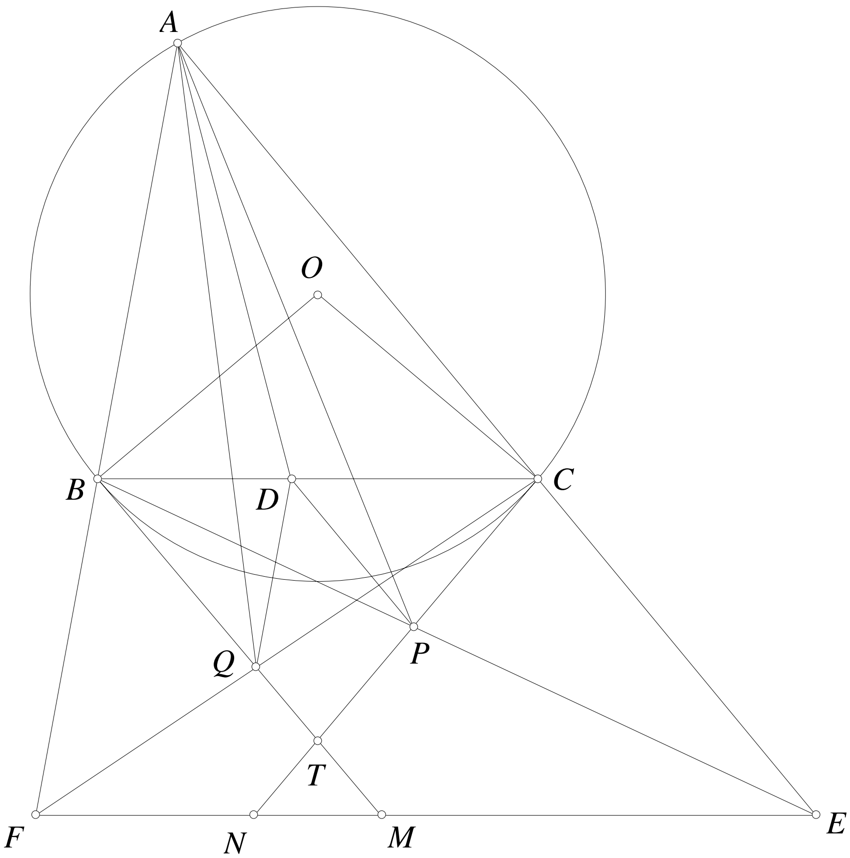
Bài 2.9. Cho tam giác ABC đường tròn (O) bất kỳ. (O) cắt CA tại L, E và cắt AB tại K, F. D là một điểm thuộc (O). d là đường thẳng bất kỳ đi qua A. DE, DF lần lượt cắt d tại M, N. Chứng minh rằng MK giao NL tại điểm thuộc (O).



Hình 18.

Lời giải. Gọi NL giao (O) tại T khác L. KT giao DE tại M'. Áp dụng định lý Pascal cho $\begin{pmatrix} KLD \\ EFT \end{pmatrix}$ ta suy ra các giao điểm N, A, M' thẳng hàng. Vậy M' thuộc $NA \equiv d$ suy ra $M' \equiv M$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của đường tròn (O) cắt nhau tại T. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc tia BT, CT sao cho $BM = BC = CN$. Đường thẳng MN cắt CA, AB theo thứ tự tại E, F; BE giao CT tại P, CF giao BT tại Q. Chứng minh rằng $AP = AQ$.



Hình 19.

Lời giải. Gọi AD là phân giác của tam giác ABC. Do B, C đối xứng nhau qua OT và $BM = CN$ nên M, N đối xứng qua OT, suy ra $BC \parallel MN$.

Ta có $\angle FBM = 180^\circ - \angle ABC - \angle CBM = 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB = \angle ACB$, chú ý góc đồng vị $\angle ABC = \angle BFM$ do đó $\triangle ABC \sim \triangle MFB$. Từ đó ta chú ý $FM \parallel BC$ nên theo định lý Thales $\dfrac{QC}{QF} = \dfrac{BC}{FM} = \dfrac{BM}{FM} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{DC}{DB}$ suy ra $QD \parallel BF$. Tương tự $PD \parallel CE$.

Từ đó theo định lý Thales và tính chất đường phân giác ta có $\dfrac{DQ}{DP} = \dfrac{DQ}{BF}.\dfrac{BF}{CE}.\dfrac{CE}{DP} = \dfrac{CD}{BC}.\dfrac{AB}{AC}.\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{CD}{BD}.\dfrac{AB}{AC} = 1$. Vậy $DP = DQ \quad (1)$.

Ta lại có $\angle ADQ = \angle ADB + \angle BDQ = \dfrac{\angle BAC}{2} + \angle ACB + \angle ABC$. Vậy tương tự $\angle ADP = \dfrac{\angle BAC}{2} + \angle ACB + \angle ABC$ do đó $\angle ADQ = \angle ADP \quad (2)$

Từ $(1), (2)$ suy ra $\triangle ADQ = \triangle ADP$ $(c.g.c)$ suy ra $AP = AQ$. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.11. Cho tam giác ABC. Gọi (O_a) là đường tròn bất kỳ đi qua B, C; hai đường tròn $(O_b), (O_c)$ xác định tương tự. Hai đường tròn $(O_b), (O_c)$ cắt nhau tại A_1, khác A. Các điểm B_1, C_1 xác định tương tự. Gọi Q là một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tam giác ABC. QB, QC lần lượt cắt (O_c), (O_b) tại A_2, A_3 khác B, C. Tương tự ta có B_2, B_3, C_2, C_3. Gọi (K_a), (K_b), (K_c) là các đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, và $C_1C_2C_3$. Chứng minh rằng

a) ba đường tròn $(K_a), (K_b), (K_c)$ có cùng một điểm chung.

b) hai tam giác $K_aK_bK_c$, ABC đồng dạng.

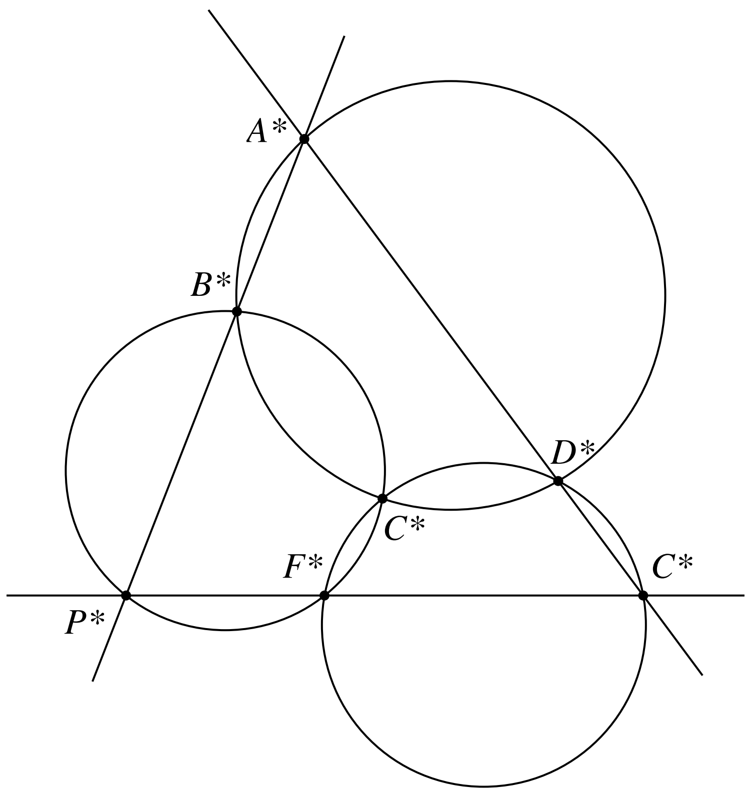
Ta đưa ra bổ đề sau

Bổ đề 2.11.1. Cho bốn đường tròn C_1, C_2, C_3, C_4 cắt nhau tại bốn điểm A, B, C, D; C_1 cắt C_4 tại A; C_2 cắt C_1 tại B, C_2 cắt C_3 tại C, C_4 cắt C_3 tại D. E, P, F, Q là các giao điểm khác A, B, C, D của C_1 và C_4; C_2 và C_1, C_2 và C_3, C_4 và C_3.

a) Chứng minh E, P, F, Q đồng viên (hoặc thẳng hàng) khi và chỉ khi A, B, C, D đồng viên (hoặc thẳng hàng)

b) Với giả thiết A, B, C, D thẳng hàng, đồng thời (ω) là một đường tròn bất kì đi qua E, F và cắt C_1, C_2, C_3, C_4 lần lượt tại I, J, H, G. Khi đó GJ, IH và AB đồng quy.

Lời giải. a) Nếu E, P, F, Q đồng viên.



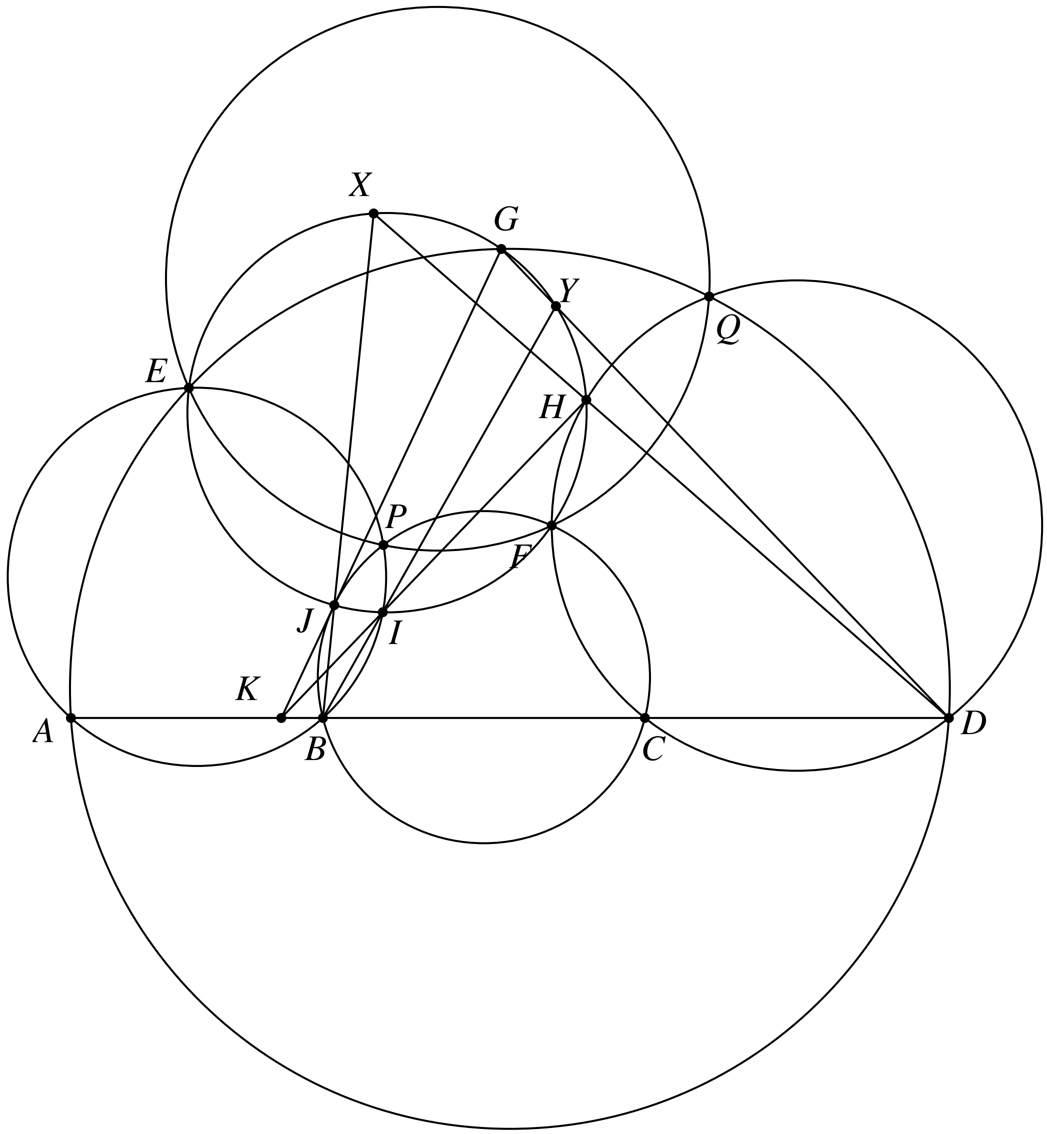
Hình 20.

Xép phép nghịch đảo tâm E phương tích bất kì, như vậy các đường tròn C_1, C_4, C_5 sẽ biến thành các đường thẳng C_1^*, C_4^*, C_5^*. Còn các đường tròn C_2, C_3 biến thành các đường tròn C_2^* và C_3^*, F thành $F*$ thẳng hàng với P^* và Q^*, D thành D^* thẳng hàng với A^* và Q^*, B thành B^* thẳng hàng với A^* và P^*. Như vậy C_2^* và C_3^* chính là các đường tròn $(P^*B^*F^*)$ và $(F^*D^*Q^*)$. Từ đó theo định lý Miquel thì A^*, B^*, C^*, D^* đồng viên như vậy A, B, C, D thẳng hàng hoặc đồng viên.

Nếu E, P, F, Q thẳng hàng chứng minh tương tự.

b) Theo định lý Miquel thì với ba đường tròn ω, C_2, C_3 đồng quy tại F ta có được HD cắt JB tại một điểm X thuộc ω, tương tự thì BI cắt DG tại một điểm Y thuộc ω. Từ đó áp dụng định lý

Pascal cho 6 điểm X, H, I, Y, G, J có $D = XH \cap DG$; $K = IH \cap JG$; $B = XJ \cap YI$ như vậy K, B, D thẳng hàng. Từ đó suy ra GJ, HI và AD đồng quy.

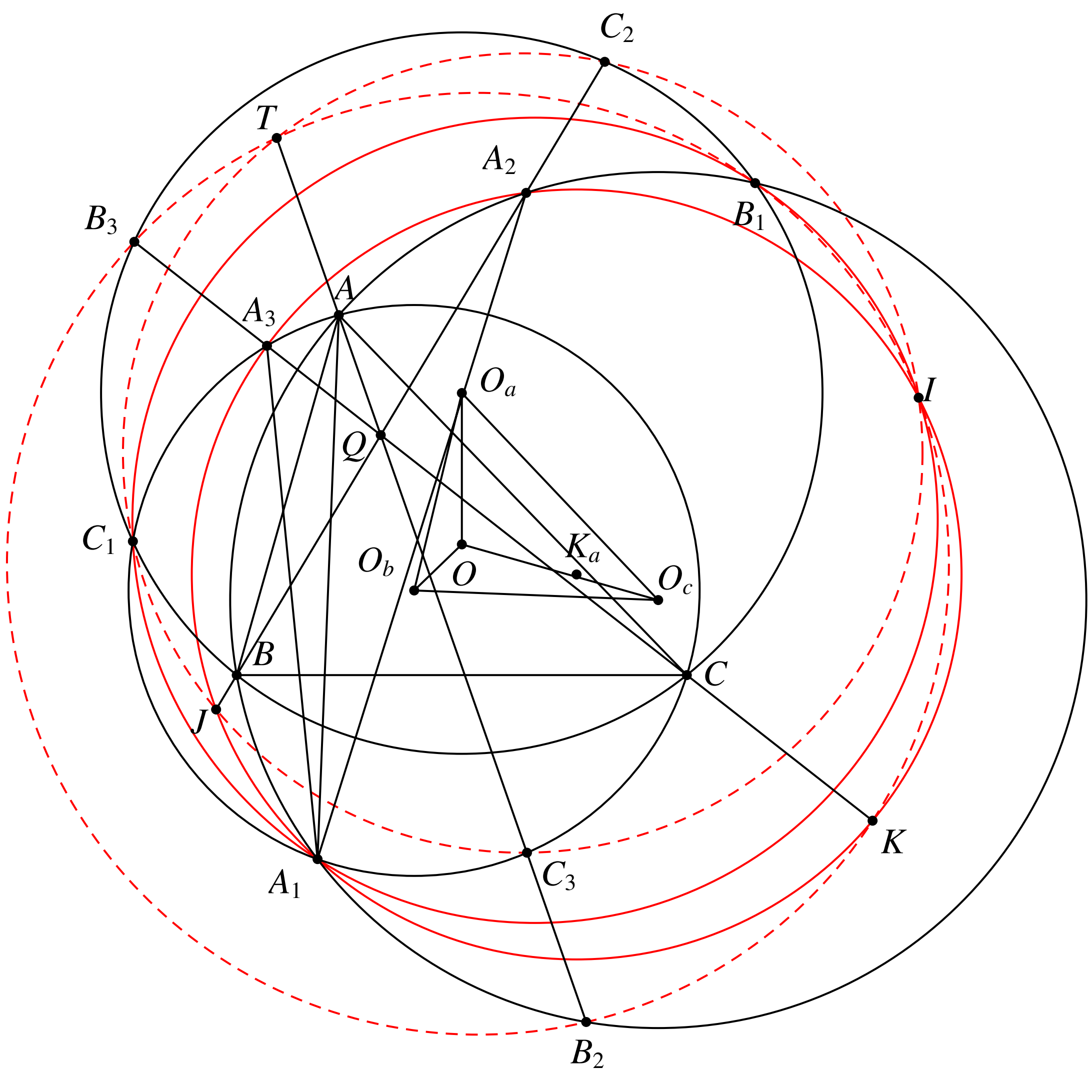


Hình 21.

Ta hoàn tất chứng minh bổ đề. □

Lời giải. Gọi T là giao điểm của đường tròn $(C_1C_2C_3)$ với AQ. B_3' là giao điểm của (O_a) với (TB_1B_2).

Chú ý rằng bốn đường tròn (O_c), (O_b), $(C_1C_2C_3)$, (TB_1B_2) cắt nhau tại 4 điểm A, T, C_3, B_2 thẳng hàng nên theo câu b của bổ đề với đường tròn ω chính là đường tròn (O_a) ta có CB_3', BC_2, AB_2 đồng quy. Từ đó suy ra $B_3' \equiv B_3$. Suy ra các đường tròn $(B_1B_2B_3)$ và $(C_1C_2C_3)$ cắt nhau tại một điểm T thuộc AQ.



Hình 22.

Áp dụng câu a của bổ đề suy ra các giao điểm còn lại của bốn đường tròn (O_c), (O_b), $(B_1B_2B_3)$, $(C_1C_2C_3)$ đồng viên. Nói cách khác $(A_1B_1C_1)$ đi qua I, trong đó I là giao điểm khác T của $(B_1B_2B_3)$ và $(C_1C_2C_3)$.

Tương tự như vậy $(A_1B_1C_1)$ đi qua I' trong đó I' là một giao điểm của $(B_1B_2B_3)$ và $(A_1A_2A_3)$

Từ đó suy ra $I \equiv I'$ (vì I và I' khác B_1), từ đó suy ra điều phải chứng minh.

b) Gọi J, K là giao điểm của $(A_1A_2A_3)$ với QB, QC.

Ta có

$(AB, AC) \equiv (AB, AA_1) + (AA_1, AC) \equiv (A_2B, A_2A_1) + (A_3A_1, A_3C) \equiv (IJ, IA_1) + (IA_1, IK)$
$\equiv (IJ, IK) \equiv (K_aK_b, K_aK_c) (\mathrm{mod}\, \pi)$

Tương tự ta cũng có $(BC, BA) \equiv (K_bK_c, K_bK_a) (\mathrm{mod}\, \pi)$

Từ đó suy ra $\Delta ABC \sim \Delta K_aK_bK_c$. Ta có điều phải chứng minh □

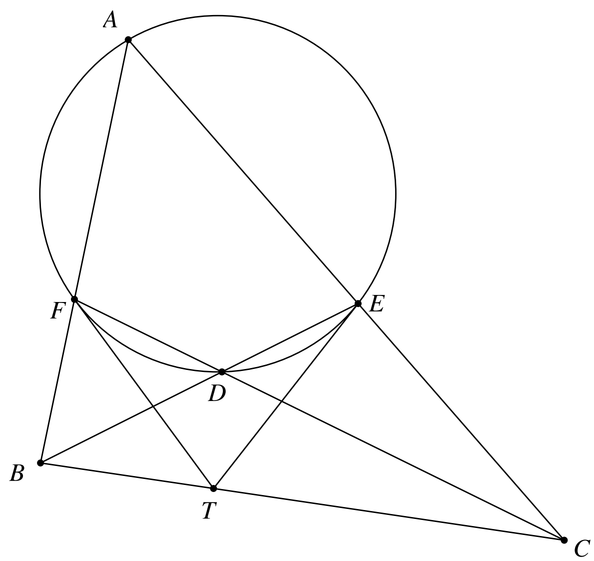
Bài 2.12. Giả sử E, F là hai điểm trên cạnh CA, AB của tam giác ABC. Gọi (K) là đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Tiếp tuyến tại E, F của (K) cắt nhau tại T. Chứng minh rằng

a) T nằm trên BC nếu và chỉ nếu BE cắt CF tại một điểm thuộc đường tròn (K);

b) EF, PQ, BC đồng quy biết rằng BE cắt FT tại M, CF cắt ET tại N, AM và AN cắt đường tròn (K) tại P, Q khác A.

Lời giải. a)Gọi D là giao điểm của CF và BE

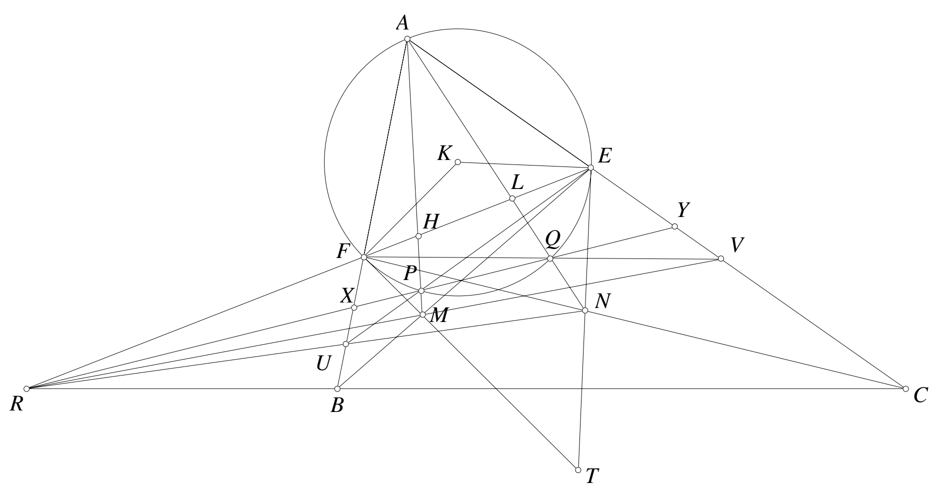
Nếu D thuộc (K). Khi đó áp dụng định lý Pascal cho sáu điểm F, F, D, E, E, A thì thu được T, B, C thẳng hàng.



Hình 23.

Nếu T, B, C thẳng hàng thì áp dụng định lý đảo định lý Pascal với chú ý là $T = EE \cap FF$, $FD \cap AE = C$, $DE \cap AF = B$. Như thế thì D, E, A, F đồng viên. Ta có điều phải chứng minh.

b) Cách 1 chúng tôi xin giới thiệu lời giải của bạn Trần Đăng Phúc



Hình 24.

Gọi PQ giao AB, AC lần lượt tại X, Y, EP giao AB tại U, FQ giao AC tại V, AM, AN cắt EF tại H, L.

Áp dụng định lý Pascal cho bộ sáu điểm P, Q, A, F, E, E suy ra R, N, U thẳng hàng. Tương tự có R, M, V thẳng hàng.

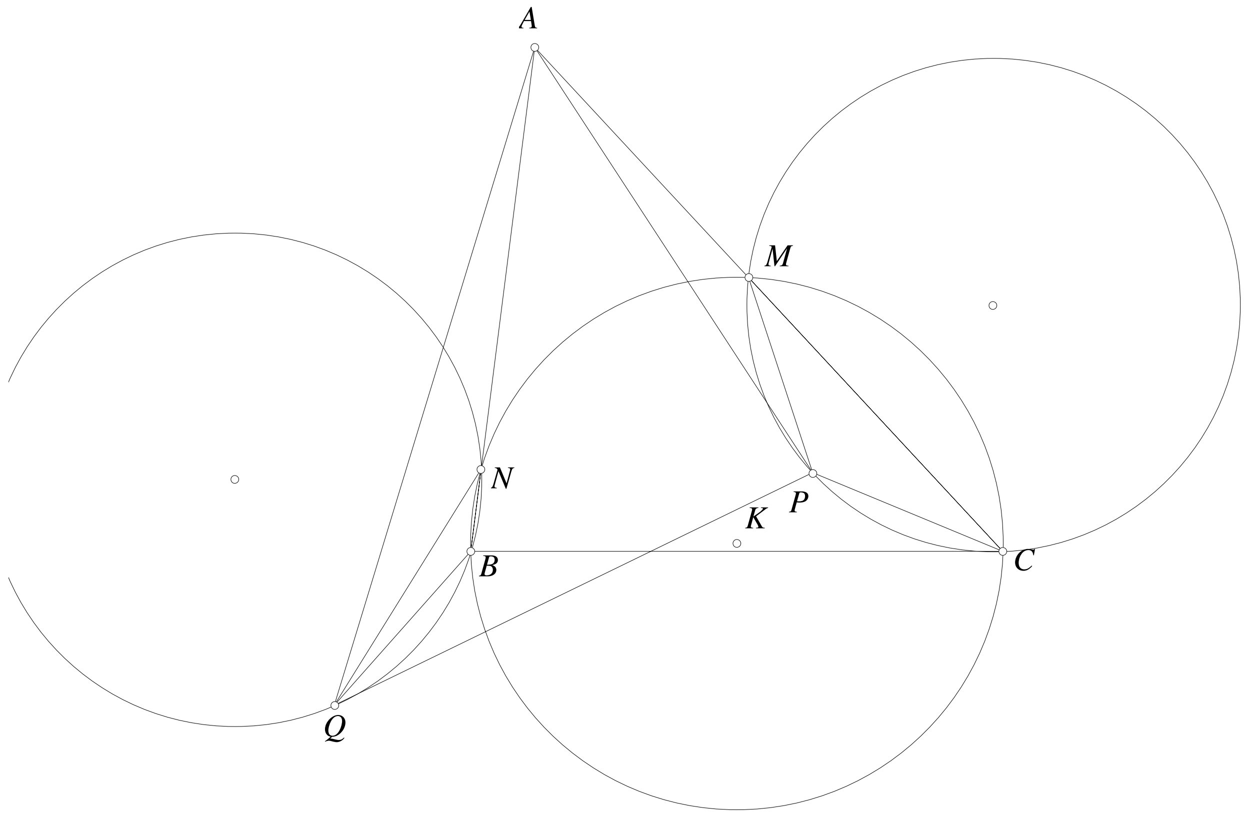
Ta lại có

$(AFUB) = E(AFUB) = (AHPM) = R(AHPM) = (AEYV)$ suy ra $\dfrac{(AFU)}{(AFB)} = \dfrac{(AEY)}{(AEV)}$ (1)

$(AEVC) = F(AEVC) = (ALQN) = R(ALQN) = (AFXU)$ suy ra $\dfrac{(AEV)}{(AEC)} = \dfrac{(AFX)}{(AFU)}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{(AFX)}{(AFB)} = \dfrac{(AEY)}{(AEC)} \iff (AFXB) = (AEYC)$ hay EF, PQ, BC đồng quy. Ta có điều phải chứng minh. □

Bài 2.13. Cho tam giác ABC và đường tròn (K) bất kỳ đi qua B, C cắt CA, AB tại M, N. Dựng tam giác APQ bằng và ngược hướng tam giác ABC. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp các tam giác CPM và BQN bằng nhau.



Hình 25.

Lời giải. Từ tam giác $\triangle APQ = \triangle ABC$ và B, C, M, N thuộc một đường tròn ta có $\dfrac{AQ}{AP} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{AN}{AM}$, kết hợp $\angle QAN = \angle PAM$ suy ra tam giác $\triangle AQN \sim \triangle APM$ suy ra $\angle ANQ = \angle AMP$. Chú ý $\triangle APQ = \triangle ABC$ ngược hướng dễ suy ra $QB = PC$. Từ đây áp dụng định lý hàm số sin suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác CPM và BQN bằng nhau. Đó là điều phải chứng minh. □