Võ Quốc Bá Cẩn - Phạm Thị Hằng

CHUYÊN ĐỀ

Bất Đẳng Thức Hiện Đại

Tài Liệu Chuyên Toán

Chuyên đề

Bất đẳng thức hiện đại

Võ Quốc Bá Cẩn-Phạm Thị Hằng

Mục lục

Lời nói đầu

Bất đẳng thức là một trong những vấn đề hay và khó nhất của chương trình toán phổ thông bởi nó có mặt trên hầu khắp các lĩnh vực của toán học và nó đòi hỏi chúng ta phải có một vốn kiến thức tương đối vững vàng trên tất cả các lĩnh vực. Mỗi người chúng ta, đặc biệt là các bạn yêu toán, dù ít dù nhiều thì cũng đã từng đau đầu trước một bất đẳng thức khó và cũng đã từng có được một cảm giác tự hào phấn khích mà mình chứng minh được bất đẳng thức đó. Nhằm "kích hoạt" niềm say mê bất đẳng thức trong các bạn, chúng tôi thực hiện quyển sách "Chuyên đề bất đẳng thức hiện đại".

Sách gồm 2 chương. Chương I chúng tôi xin được giới thiệu đến các bạn những kỹ thuật (xin chỉ gọi là kỹ thuật) mà chúng tôi tìm tòi tích lũy được trong suốt thời gian học tập của mình. Do tất cả các kỹ thuật mà chúng tôi đề cập ở đây đều có mỗi liên hệ khăng khít với nhau (cái này bổ trợ cái kia và ngược lại) nên chúng tôi xin được phép trình bày theo kiểu từng bài chuyên đề nhỏ, mỗi chuyên đề là một kỹ thuật. Tuy nhiên, lĩnh vực bất đẳng thức hiện nay rất phát triển (phát triển nhất của toán học sơ cấp hiện nay), cho nên chúng tôi không thể đề cập hết các kỹ thuật (phương pháp) được, các kỹ thuật (phương pháp) đã từng xuất hiện ở các sách, chúng tôi sẽ không nhắc lại ở đây, các bạn có thể tìm đọc chúng dựa vào các tài liệu mà chúng tôi đặt ở phần tài liệu tham khảo. Về các kỹ thuật mà chúng tôi sẽ giới thiệu trong sách, hầu hết chúng là những kỹ thuật mạnh và được dùng để giải những bài toán khó (đến rất khó) nên đôi khi (việc giải các bài toán khó) thì có thể gặp phải những tính toán, biến đổi phức tạp, đây là điều không thể tránh khỏi. Nhưng các bạn hãy yên tâm, vì các bài toán xuất hiện trong các kỳ thi học giỏi (quốc gia, olypimpic 30/4, thậm chí thi toán quốc tế) thường chỉ là những bài rất đơn giản, bình thường nên việc sử dụng các kỹ thuật này rất nhẹ nhàng và đơn giản. Chẳng hạn như bài toán thi IMO 2006 sau

Bài toán 0.1 *Tìm hằng số nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với các số thực* a, b, c

$$\left|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)\right| \le k(a^2+b^2+c^2)^2.$$

Lời giải của đáp án là một lời giải rất dài và phức tạp (sử dụng bất đẳng thức AM-GM), đòi hỏi người làm phải "rất khéo léo", nhưng với lời giải bằng kỹ thuật "đánh

giá các bất đẳng thức hoán vị", chúng ta chỉ nhận được một lời giải ngắn gọn 1/3 so với lời giải gốc ban đầu.
Chương II của sách là tuyển tập những bài toán mà chúng tôi (theo quan niệm của bản thân) là hay và rất khó. Chúng tôi chủ yếu tuyển chọn những bài bất đẳng thức chứa căn hoặc những bài "không mẫu mực" vì chúng ta không thể dùng những biến đổi thông thường để giải chúng và như thế thì mới thúc đẩy chúng ta sáng tạo được. Trong chương này, phần lớn chúng tôi đều giải bằng cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz-Holder (CYH techniques) và bất đẳng thức Schur (bậc 3, bậc 4). Thực tế là đối với một số bài toán thì không chỉ có một lời giải duy nhất mà còn có nhiều lời giải khác nữa, nhưng ở đây chúng tôi chọn lời giải bằng các bất đẳng thức trên, vì chúng tôi muốn các bạn "hòa nhập" vào quan điểm của chúng tôi là "Cái đơn giản nhất là cái mạnh nhất!" Trong chương này, có một số bài toán khó, lời giải mà chúng tôi tìm được rất phức tạp, chúng tôi rất mong các bạn sẽ suy nghĩ về chúng và tìm được một lời giải đơn giản hơn.
Chúng tôi thực hiện quyển sách này với mong muốn cung cấp thêm cho các bạn thêm một nguồn bài tập (khó) về bất đẳng thức để có thể luyện tập thêm kĩ năng giải toán của mình. Mặc dù đã rất cố gắng nhưng không có điều gì là tuyệt đối cả, nên khó tránh khỏi những thiếu sót, sai lầm. Mong các bạn thông cảm và góp ý cho chúng tôi để có thể quyển sách có thể được chỉnh sửa và hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn.
Xin gửi tặng quyển sách này đến người con gái tôi yêu quý nhất, bạn Phạm Thị Hằng, học sinh chuyên toán K34, trường THPT Chuyên Phan Bội Châu, thành phố Vinh, tỉnh Nghệ An.

Võ Quốc Bá Cẩn
SV lớp YY0647A1, trường ĐHYD Cần Thơ
Số nhà C65 khu dân cư Phú An, phường Phú Thứ, quận Cái Răng, tp. Cần Thơ
E-mail: `can_hang2007@yahoo.com`

Chương 1

Tìm tòi một số kỹ thuật giải toán

1.1 Đại lượng $(a-b)(b-c)(c-a)$

Với những bất đẳng thức hoán vị vòng quanh, việc xử lý chúng khó hơn các bất đẳng thức đối xứng rất nhiều. Tuy nhiên, một điểm đáng chú ý ở các dạng bất đẳng thức này, chúng ta có thể biến đổi chúng thành dạng "bán đối xứng" như sau
Đặt $f(a,b,c)$ chính là biểu thức hoán vị vòng quanh ở đề bài, ta có thể viết lại $f(a,b,c)$ như sau

$$f(a,b,c)=\frac{1}{2}[f(a,b,c)+f(c,b,a)]+\frac{1}{2}[f(a,b,c)-f(c,b,a)]$$

Khi đó, có một điểm đáng chú ý là $f(a,b,c)+f(c,b,a)$ là một biểu thức đối xứng theo a,b,c và $f(a,b,c)-f(c,b,a)$, ta có thể tách ra một đại lượng khá đặc biệt là $(a-b)(b-c)(c-a)$. Từ đó, việc đánh giá bài toán trở nên đơn giản hơn nhiều.
Sau đây là một vài ví dụ

Ví dụ 1.1 *Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{3a^2+b^2}+\frac{bc}{3b^2+c^2}+\frac{ca}{3c^2+a^2}\le\frac{3}{4}.$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)(3a-b)}{3a^2+b^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)\left[\frac{2(3a-b)}{3a^2+b^2}-\frac{a+b}{a^2+b^2}\right] \ge -\sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(3a^2-2ab+3b^2)}{(a^2+b^2)(3a^2+b^2)} \ge \prod_{cyc}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(3a^2-2ab+3b^2)}{(a^2+b^2)(3a^2+b^2)} \ge 3\sqrt[3]{\prod_{cyc}\frac{(a-b)^2(3a^2-2ab+3b^2)}{(a^2+b^2)(3a^2+b^2)}}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$3\sqrt[3]{\prod_{cyc}\frac{(a-b)^2(3a^2-2ab+3b^2)}{(a^2+b^2)(3a^2+b^2)}} \ge \prod_{cyc}\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow 27\prod_{cyc}\frac{(a-b)^2(3a^2-2ab+3b^2)}{(a^2+b^2)(3a^2+b^2)} \ge \prod_{cyc}\frac{(a^2-b^2)^3}{(a^2+b^2)^3}$$

$$\Leftrightarrow 27\prod_{cyc}(3a^2-2ab+3b^2)(a^2+b^2)^2 \ge \prod_{cyc}(a-b)(a+b)^3(3a^2+b^2)$$

Bất đẳng thức này được chứng minh nếu ta chứng minh được bất đẳng thức sau với mọi $x, y > 0$

$$3(3x^2-2xy+3y^2)(x^2+y^2)^2 \ge |x-y|\,(x+y)^3(3x^2+y^2)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$x^2+y^2 \ge \frac{1}{2}(x+y)^2$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$3(3x^2-2xy+3y^2)(x^2+y^2) \ge 2\left|x^2-y^2\right|(3x^2+y^2)$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do

$$x^2+y^2 \ge \left|x^2-y^2\right|$$

và

$$3(3x^2-2xy+3y^2)-2(3x^2+y^2) = 3x^2-6xy+7y^2 = 3(x-y)^2+4y^2 \ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.2 *Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nhọn. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

LỜI GIẢI. Trước hết, ta hãy chú ý rằng

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{b^3-a^3}{a^2+b^2} &= \sum_{cyc}\frac{(b-a)(a^2+ab+b^2)}{a^2+b^2} = \sum_{cyc}(a-b)+\sum_{cyc}\frac{ab(b-a)}{a^2+b^2)} \\
&= \frac{\sum\limits_{cyc} ab(b-a)(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \\
&= \frac{\left(\sum\limits_{cyc}a^2b^2\right)\left(\sum\limits_{cyc}ab(b-a)\right)+abc\sum\limits_{cyc}c^3(a-b)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \\
&= \frac{(a-b)(b-c)(c-a)\left(\sum\limits_{cyc}a^2b^2+abc\sum\limits_{cyc}a\right)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}
\end{aligned}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{a+b}=\sum_{cyc}(a-b)=0$$

Từ đó, ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau

$$\sum_{cyc}\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}-\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \sum_{cyc}\frac{b^3-a^3}{a^2+b^2}+\sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)(a^2+b^2)} \geq \frac{(a-b)(b-c)(c-a)\left(\sum\limits_{cyc}a^2b^2+abc\sum\limits_{cyc}a\right)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)(a^2+b^2)} \geq 3\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}$$

Ta cần chứng minh

$$3\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} \geq \frac{(a-b)(b-c)(c-a)\left(\sum\limits_{cyc}a^2b^2+abc\sum\limits_{cyc}a\right)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{27a^2b^2c^2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq \frac{(a-b)^3(b-c)^3(c-a)^3\left(\sum\limits_{cyc}a^2b^2+abc\sum\limits_{cyc}a\right)^3}{(a^2+b^2)^3(b^2+c^2)^3(c^2+a^2)^3}$$

$$\Leftrightarrow 27a^2b^2c^2(a^2+b^2)^2(b^2+c^2)^2(c^2+a^2)^2 \geq (a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)\left(\sum_{cyc}a^2b^2+abc\sum_{cyc}a\right)^3$$

Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nhọn nên ta dễ dàng chứng minh được

$$a^2b^2c^2 \geq \left|(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)\right|$$

Ngoài ra, ta cũng có

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) &= \left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}a^2b^2\right)-a^2b^2c^2\\ &\geq \frac{8}{9}\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}a^2b^2\right)\\ &\geq \frac{8}{9}\sqrt{3\left(\sum_{cyc}a^2b^2\right)^3}\\ &\geq \frac{8}{9}\sqrt{3\left(\frac{\sum\limits_{cyc}a^2b^2+abc\sum\limits_{cyc}a}{2}\right)^3}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)^2(b^2+c^2)^2(c^2+a^2)^2 \geq \frac{8}{27}\left(\sum_{cyc}a^2b^2+abc\sum_{cyc}a\right)^3$$

Nhân tương ứng vế với vế các bất đẳng thức này, ta thu được bất đẳng thức ở trên. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị. ■

Ví dụ 1.3 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \ge \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Viết lại bất đẳng thức như sau

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}-\frac{a+b}{2}\right) \ge \sqrt{3\sum_{cyc}a^2}-\sum_{cyc}a+\sum_{cyc}\frac{b^3-a^3}{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(a+b)}{2(a^2+b^2)} \ge \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{\sqrt{3\sum\limits_{cyc}a^2}+\sum\limits_{cyc}a}$$

$$+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)\left(\sum\limits_{cyc}a^2b^2+abc\sum\limits_{cyc}a\right)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Do $\sqrt{3\sum\limits_{cyc}a^2} \ge \sum\limits_{cyc}a$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(a+b)}{2(a^2+b^2)}$$

$$\ge \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{2\sum\limits_{cyc}a}+\frac{(a-b)(b-c)(c-a)\left(\sum\limits_{cyc}a^2b^2+abc\sum\limits_{cyc}a\right)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{a+b}{a^2+b^2}-\frac{1}{a+b+c}\right)$$

$$\ge \frac{2(a-b)(b-c)(c-a)\left(\sum\limits_{cyc}a^2b^2+abc\sum\limits_{cyc}a\right)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\cdot\frac{2ab+ac+bc}{a^2+b^2}$$

$$\ge \frac{2(a-b)(b-c)(c-a)\left(\sum\limits_{cyc}a\right)\left(\sum\limits_{cyc}a^2b^2+abc\sum\limits_{cyc}a\right)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}&\sum_{cyc}(a-b)^2\cdot\frac{2ab+ac+bc}{a^2+b^2}\\ \geq\ &3\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(2ab+ac+bc)(2bc+ab+ac)(2ac+bc+ba)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}\end{aligned}$$

Ta phải chứng minh

$$\begin{aligned}&3\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2(2ab+ac+bc)(2bc+ab+ac)(2ac+bc+ba)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}\\ \geq\ &\frac{2(a-b)(b-c)(c-a)\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a^2b^2+abc\sum_{cyc}a\right)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 27\left[\prod_{cyc}(2ab+ac+bc)\right]\left[\prod_{cyc}(a^2+b^2)^2\right]&\\ \geq\ 8\left[\prod_{cyc}(a-b)\right]\left(\sum_{cyc}a\right)^3\left(\sum_{cyc}a^2b^2+abc\sum_{cyc}a\right)^3&\end{aligned}$$

Vì

$$\prod_{cyc}(2ab+ac+bc)\geq 2\left(\sum_{cyc}ab\right)^3$$

và

$$\prod_{cyc}(a^2+b^2)^2\geq\frac{64}{81}\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2\left(\sum_{cyc}a^2b^2\right)^2$$

nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\begin{aligned}&\frac{16}{3}\left(\sum_{cyc}ab\right)^3\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2\left(\sum_{cyc}a^2b^2\right)^2\\ &\qquad\geq\ \left[\prod_{cyc}(a-b)\right]\left(\sum_{cyc}a\right)^3\left(\sum_{cyc}a^2b^2+abc\sum_{cyc}a\right)^3\end{aligned}$$

Bây giờ, chú ý rằng

$$\begin{aligned}
&8\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right)^2\left(\sum_{cyc} ab\right)^2 - 3\left(\sum_{cyc} a^2b^2 + abc\sum_{cyc} a\right)^3\\
&= 8\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right)^2\left(\sum_{cyc} a^2b^2 + 2abc\sum_{cyc} a\right) - 3\left(\sum_{cyc} a^2b^2 + abc\sum_{cyc} a\right)^3\\
&= A\left(\sum_{cyc} a^2b^2 - abc\sum_{cyc} a\right) \ge 0
\end{aligned}$$

trong đó

$$A = 5\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right)^2 + 12abc\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right)\left(\sum_{cyc} a\right) + 3a^2b^2c^2\left(\sum_{cyc} a\right)^2$$

Ta còn phải chứng minh

$$2\left(\sum_{cyc} ab\right)\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 \ge \left[\prod_{cyc}(a-b)\right]\left(\sum_{cyc} a\right)^3$$

Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$ thì ta có

$$\begin{aligned}
(a-b)(b-c)(c-a) &\le \sqrt{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}\\
&= \sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}
\end{aligned}$$

Ta phải chứng minh

$$2q(1-2q)^2 \ge \sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}$$

Nếu $9q \le 2$ thì

$$2q(1-2q)^2 - \sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2} \ge q\left[2(1-2q)^2 - \sqrt{1-4q}\right] \ge 0$$

Do

$$2(1-2q)^2 - \sqrt{1-4q} = \left(\sqrt{1-4q} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}[2(1-4q)^2+1] \ge 0$$

Nếu $9q \ge 2$ thì

$$\begin{aligned}
\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2} &= \sqrt{\frac{4}{27}(1-3q)^3 - \frac{1}{27}(27r-9q+2)^2}\\
&\le \sqrt{\frac{4}{27}(1-3q)^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow 2q(1-2q)^2-\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}\\ &\ge\ 2q(1-2q)^2-\sqrt{\frac{4}{27}(1-3q)^3}=2q(1-2q)^2-\frac{2}{9}(1-3q)\sqrt{3(1-3q)}\\ &\ge\ 2q(1-2q)^2-\frac{2}{9}(1-3q)=\frac{8}{729}(9q-2)(81q^2-63q+13)+\frac{46}{729}>0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.4 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Xác định hằng số k nhỏ nhất sao cho*

$$\frac{a}{b+c^2}+\frac{b}{c+a^2}+\frac{c}{a+b^2}\le k\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Cho $a=b=c$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{3}{a+1}\le\frac{9k}{a}$$

$$\Leftrightarrow k\ge\frac{a}{3(a+1)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3(a+1)}$$

Cho $a\to+\infty$, ta được $k\ge\frac{1}{3}$. Ta sẽ chứng minh đây chính là giá trị mà ta cần tìm, tức là

$$\frac{a}{b+c^2}+\frac{b}{c+a^2}+\frac{c}{a+b^2}\le\frac{1}{3}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b^2}+\frac{b}{c^2}+\frac{c}{a^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^3}+\sum_{cyc}\frac{a}{bc}+\sum_{cyc}\frac{b}{a^2}\ge 3\sum_{cyc}\frac{a}{b+c^2}$$

Do $\sum\limits_{cyc}\frac{a}{b+c^2}\le\sum\limits_{cyc}\frac{a}{c^2}$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^3}+\sum_{cyc}\frac{a}{bc}+\sum_{cyc}\frac{b}{a^2}\ge 3\sum_{cyc}\frac{a}{c^2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^3}+\sum_{cyc}\frac{a}{bc}-2\sum_{cyc}\frac{b}{a^2}\ge 0$$

Đặt $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$, khi đó x,y,z là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{y^3}{x^2}+\sum_{cyc}\frac{yz}{x}-2\sum_{cyc}\frac{x^2}{y}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{y^3}{x^2}+y-\frac{2y^2}{x}\right)+\sum_{cyc}\frac{yz}{x}-\sum_{cyc}x+2\left(\sum_{cyc}\frac{y^2}{x}-\sum_{cyc}\frac{x^2}{y}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2\left(\frac{y}{x^2}+\frac{z}{2xy}\right)\geq \frac{2(x-y)(y-z)(z-x)\sum\limits_{cyc}x}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(x-y)^2(2y^2+zx)}{2x^2y}\geq \frac{2(x-y)(y-z)(z-x)\sum\limits_{cyc}x}{xyz}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2(2y^2+zx)}{2x^2y}\geq \frac{3\sqrt[3]{\prod\limits_{cyc}(x-y)^2\cdot\prod\limits_{cyc}(2x^2+yz)}}{2xyz}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{3\sqrt[3]{\prod\limits_{cyc}(x-y)^2\cdot\prod\limits_{cyc}(2x^2+yz)}}{2xyz}\geq \frac{2(x-y)(y-z)(z-x)\sum\limits_{cyc}x}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow 27\prod_{cyc}(2x^2+yz)\geq 64(x-y)(y-z)(z-x)\left(\sum_{cyc}x\right)^3$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, trước hết ta sẽ chứng minh

$$9\prod_{cyc}(2x^2+yz)\geq\left(\sum_{cyc}x\right)^3\left(\sum_{cyc}xy\right)$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $x+y+z=1$. Đặt $q=xy+yz+zx, r=xyz$, khi đó ta có $\frac{1}{3}\geq q\geq\frac{1}{4}$ và

$$\prod_{cyc}(2x^2+yz)=27r^2+2(1-9q)r+4q^3$$

Bất đẳng thức trở thành

$$243r^2+18(1-9q)r+36q^3-q\geq 0$$

Đây là một hàm lõm theo r và với chú ý rằng $r \le \frac{5q-1}{18}$[1], ta có

$$\begin{aligned} 243r^2 + 18(1-9q)r + 36q^3 - q &\ge 243\left(\frac{5q-1}{18}\right)^2 + (1-8q)(5q-1) + 36q^3 - q \\ &= \frac{1}{4}(16q-1)(1-3q)^2 \ge 0 \end{aligned}$$

Tiếp theo, sử dụng bất đẳng thức trên, ta chỉ cần chứng minh

$$3\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} xy\right) \ge 64(x-y)(y-z)(z-x)$$

Đặt $x = m+n, y = n+p, z = p+m$ $(m,n,p > 0)$, bất đẳng thức này tương đương với

$$3\left(\sum_{cyc} m\right)\left(\sum_{cyc} m^2 + 3\sum_{cyc} mn\right) \ge 32(m-n)(n-p)(m-p)$$

Từ đây, giả sử $p = \min\{m,n,p\}$, và đặt $m = p+u, n = p+v$ $(u,v \ge 0)$, ta có

$$\sum_{cyc} m = 3p + u + v \ge u + v$$

$$\sum_{cyc} m^2 + 3\sum_{cyc} mn = 12p^2 + 8(u+v)p + u^2 + 3uv + v^2 \ge u^2 + 3uv + v^2$$

$$(m-n)(n-p)(m-p) = uv(u-v)$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$3(u+v)(u^2+3uv+v^2) \ge 32uv(u-v)$$

$$\Leftrightarrow 3u^3 - 20u^2v + 44uv^2 + 3v^3 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3u\left(u - \frac{10}{3}v\right)^2 + \frac{32}{3}uv^2 + 3v^3 \ge 0.$$

hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm. ∎

Ví dụ 1.5 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a-b)(13a+5b)}{a^2+b^2} + \frac{(b-c)(13b+5c)}{b^2+c^2} + \frac{(c-a)(13c+5a)}{c^2+a^2} \ge 0.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

[1] Đây chính là bất đẳng thức Schur bậc 3

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{4(a-b)^2+9(a^2-b^2)}{a^2+b^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} \ge 9\sum_{cyc} \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} \ge \frac{9(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM,

$$4\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} \ge 12\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}$$

Ta cần chứng minh

$$4\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} \ge \frac{3(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Bất đẳng thức này là hệ quả của bất đẳng thức sau với mọi $x > y \ge 0$

$$4(x^2+y^2)^2 \ge 3(x^2-y^2)(x+y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^4-6x^3y+8x^2y^2+6xy^3+7y^4 \ge 0$$

Nếu $x \ge 6y$ thì

$$x^4-6x^3y+8x^2y^2+6xy^3+7y^4 = x^3(x-6y)+8x^2y^2+6xy^3+7y^4 \ge 0$$

Nếu $x \le 6y$, ta có

$$x^4-6x^3y+8x^2y^2+6xy^3+7y^4 = x^2(x-3y)^2+xy^2(6y-x)+7y^4 \ge 0.$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.6 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{a^2+4b^2}+\frac{bc}{b^2+4c^2}+\frac{ca}{c^2+4a^2} \le \frac{3}{5}.$$

Ví dụ 1.7 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a-b)(3a-b)}{3a^2+2ab+3b^2}+\frac{(b-c)(3b-c)}{3b^2+2bc+3c^2}+\frac{(c-a)(3c-a)}{3c^2+2ca+3a^2} \ge 0.$$

(Thomas Mildorf)

1.2 Những kiểu lời giải đặc biệt bằng AM-GM

Ví dụ 1.8 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+3c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+3a^2}}\geq\frac{3}{2}.$$

(Phan Thành Việt)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^3}{a^2+3b^2}} &= 6\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{4a(a+b+c)\cdot 3(a^2+3b^2)}}\\ &\geq 6\sum_{cyc}\frac{a^2}{4a(a+b+c)+3(a^2+3b^2)}\\ &= 6\sum_{cyc}\frac{a^2}{7a^2+9b^2+4ab+4ca}\end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz thì

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{7a^2+9b^2+4ab+4ca}\right)\left[\sum_{cyc}(c+2a)^2(7a^2+9b^2+4ab+4ca)\right]\\ &\geq\left[\sum_{cyc}a(c+2a)\right]^2=\left(2\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$8\left(2\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2\geq\sum_{cyc}(c+2a)^2(7a^2+9b^2+4ab+4ca)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}a^2b^2+3\sum_{cyc}a^3b-3\sum_{cyc}ab^3-2abc\sum_{cyc}a\geq 0$$

Giả sử $a=\min\{a,b,c\}$, đặt $b=a+x, c=a+y$ $(x,y\geq 0)$ thì bất đẳng thức trở thành

$$6(x^2-xy+y^2)a^2+(4x^3+9x^2y-9xy^2+4y^3)a+x^4+3x^3y+x^2y^2-3xy^3+y^4\geq 0$$

Ta có

$$4x^3+9x^2y-9xy^2+4y^3=4x^3+\frac{9}{4}y(2x-y)^2+\frac{7}{4}y^3\geq 0$$

$$x^4+3x^3y+x^2y^2-3xy^3+y^4=\left(x^2+\frac{3}{2}xy-y^2\right)^2+\frac{3}{4}x^2y^2\geq 0.$$

Nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi va chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Ví dụ 1.9 *Cho các số không âm a,b,c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$5(a+b+c)\geq 2\left(\sqrt{4a^2+bc}+\sqrt{4b^2+ca}+\sqrt{4c^2+ab}\right).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a\geq b\geq c$, khi đó theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2\sqrt{4a^2+bc}\leq 2a+c+\frac{4a^2+bc}{2a+c}=4a+c+\frac{c(b-2a)}{2a+c}$$

$$2\sqrt{4b^2+ca}\leq 2b+c+\frac{4b^2+ca}{2b+c}=4b+c+\frac{c(a-2b)}{2b+c}$$

$$2\sqrt{4c^2+ab}\leq b+\frac{c}{2}+\frac{2(ab+4c^2)}{2b+c}$$

$$\Rightarrow 2\sum_{cyc}\sqrt{4a^2+bc}\leq 4a+5b+\frac{5}{2}c+\frac{2(ab+4c^2)}{2b+c}+c\left(\frac{b-2a}{2a+c}+\frac{a-2b}{2b+c}\right)$$

Ta cần chứng minh

$$a+\frac{5}{2}c\geq\frac{2(ab+4c^2)}{2b+c}+c\left(\frac{b-2a}{2a+c}+\frac{a-2b}{2b+c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{c(2a+10b-11c)}{2(2b+c)}\geq c\left(\frac{b-2a}{2a+c}+\frac{a-2b}{2b+c}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2a+10b-11c}{2(2b+c)}\geq\frac{b-2a}{2a+c}+\frac{a-2b}{2b+c}$$

$$\Leftrightarrow\frac{14b-11c}{2(2b+c)}+\frac{2a-b}{2a+c}\geq 0.$$

hiển nhiên đúng vì $a\geq b\geq c$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b,c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.10 *Cho các số không âm* a, b, c, *không có 2 số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$a\sqrt{a^2+3bc}+b\sqrt{b^2+3ca}+c\sqrt{c^2+3ab}\ge 2(ab+bc+ca).$$

(Vasile Cirtoaje)

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc} a\sqrt{a^2+3bc}=\sum_{cyc}\frac{a(b+c)(a^2+3bc)}{(b+c)\sqrt{a^2+3bc}}\ge 2\sum_{cyc}\frac{a(b+c)(a^2+3bc)}{a^2+3bc+(b+c)^2}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$2\sum_{cyc}\frac{a(b+c)(a^2+3bc)}{a^2+3bc+(b+c)^2}\ge 2\sum_{cyc} ab$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\frac{a(b+c)(a^2+3bc)}{a^2+3bc+(b+c)^2}\ge \sum_{cyc} a(b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a(b+c)(a^2-b^2-c^2+bc)}{s+5bc}\ge 0 \quad (s=a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^3(b+c)-a(b^3+c^3)}{s+5bc}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a^2-b^2)}{s+5bc}-\sum_{cyc}\frac{ca(c^2-a^2)}{s+5bc}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a^2-b^2)}{s+5bc}-\sum_{cyc}\frac{ab(a^2-b^2)}{s+5ca}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 5abc\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{(s+5bc)(s+5ca)}\ge 0.$$

hiển nhiên đúng.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 1 *Chúng ta cũng có một cách khác để giải bài toán này như sau*
Viết lại bất đẳng thức như sau

$$\sum_{cyc} a\left(\sqrt{a^2+3bc}-a\right)\ge 2\sum_{cyc} ab-\sum_{cyc} a^2$$

$$\Leftrightarrow 3abc\sum_{cyc}\frac{1}{a+\sqrt{a^2+3bc}} \geq 2\sum_{cyc}ab-\sum_{cyc}a^2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{1}{a+\sqrt{a^2+3bc}} &\geq \frac{9}{\sum\limits_{cyc}a+\sum\limits_{cyc}\sqrt{a^2+3bc}} \geq \frac{9}{\sum\limits_{cyc}a+\sqrt{3\left(\sum\limits_{cyc}a^2+3\sum\limits_{cyc}bc\right)}}\\ &\geq \frac{9}{\sum\limits_{cyc}a+\sqrt{4\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}} = \frac{3}{\sum\limits_{cyc}a}\end{aligned}$$

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{9abc}{\sum\limits_{cyc}a} \geq 2\sum_{cyc}ab-\sum_{cyc}a^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a^3+3abc \geq \sum_{cyc}ab(a+b).$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur bậc 3 nên ta có đpcm.

■

Ví dụ 1.11 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 sốn ào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+b}{\sqrt{3ab+c^2}}+\frac{b+c}{\sqrt{3bc+a^2}}+\frac{c+a}{\sqrt{3ca+b^2}} \geq 3.$$

(Michael Rozenberg)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{a+b}{\sqrt{3ab+c^2}} &= \sum_{cyc}\frac{6(a+b)(a+b+c)}{2(a+b+c)\cdot 3\sqrt{3ab+c^2}}\\ &\geq \sum_{cyc}\frac{12(a+b)(a+b+c)}{4(a+b+c)^2+9(3ab+c^2)}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{12(a+b)(a+b+c)}{4(a+b+c)^2+9(3ab+c^2)} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{8a^2+8b^2-11ab+4c(a+b)-13c^2}{4s^2+27ab+9c^2} \ge 0 \quad (s=a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-c)(16a-11b+13c)+(b-c)(16b-11a+13c)}{4s^2+27ab+9c^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(b-c)\left(\frac{16b-11a+13c}{4s^2+27ab+9c^2}-\frac{16c-11a+13b}{4s^2+27ca+9b^2}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} x(b-c)^2(4s^2+27bc+9a^2) \ge 0$$

trong đó

$$x = 99a^2-150(b+c)a+48b^2+87bc+48c^2+4s^2$$

và y, z tương tự.
Đặt $t=\frac{b+c}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}
x &= 99a^2-150(b+c)a+48b^2+87bc+48c^2+4s^2\\
&= 99a^2-300at+4(a+2t)^2+183t^2+\frac{9}{4}(b-c)^2\\
&\ge 99a^2-300at+4(a+2t)^2+183t^2\\
&= 103a^2-284at+199t^2\\
&= \frac{1}{103}[(103a-142t)^2+333t^2] \ge 0
\end{aligned}$$

Tương tự, ta có $y, z \ge 0$.
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.12 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{2a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b}{2b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c}{2c^2+ab}} \ge 2.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{2a^2+bc}} &= \sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a(a+b+c)\cdot(2a^2+bc)}}\\
&\ge 2\sum_{cyc}\frac{a}{a(a+b+c)+2a^2+bc}\\
&= 2\sum_{cyc}\frac{a}{3a^2+ab+bc+ca}
\end{aligned}$$

Đặt $q = ab + bc + ca, r = abc$, ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{a}{3a^2 + q} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a(3b^2 + q)(3c^2 + q) \ge (3a^2 + q)(3b^2 + q)(3c^2 + q)$$

$$\Leftrightarrow 9abc \sum_{cyc} ab + 3q \sum_{cyc} a^2(b + c) + q^2 \sum_{cyc} a \ge 27a^2b^2c^2 + 9q \sum_{cyc} a^2b^2 + 3q^2 \sum_{cyc} a^2 + q^3$$

$$\Leftrightarrow 9qr + 3q(q - 3r) + q^2 \ge 27r^2 + 9q(q^2 - 2r) + 3q^2(1 - 2q) + q^3$$

$$\Leftrightarrow [q^2 - 4q^3 + 2(9q - 2)r - 27r^2] + 4r \ge 0$$

Chú ý rằng $r \ge 0$ và

$$q^2 - 4q^3 + 2(9q - 2)r - 27r^2 = (a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 \ge 0.$$

Nên bất đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Nhận xét 2 *Từ bài toán này, ta suy ra kết quả rất khó sau, hiện chỉ mới nhận được một lời giải của chúng tôi trên mathlinks*

$$\sqrt{\frac{a}{a^2 + bc}} + \sqrt{\frac{b}{b^2 + ca}} + \sqrt{\frac{c}{c^2 + ab}} \ge 2\sqrt{2}.$$

■

Ví dụ 1.13 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a + b^2} + \sqrt{b + c^2} + \sqrt{c + a^2} \ge 2.$$

(Phan Thành Nam)

Lời giải. Ta có

$$\sqrt{a + b^2} + \sqrt{b + c^2} + \sqrt{c + a^2} \ge 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\sqrt{a + b^2} - b\right) \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a + b^2} + b} \ge 1$$

Theo bất đẳng thức AM-GM,

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a+b^2}+b} &= \sum_{cyc} \frac{a}{\frac{2(a+b)\sqrt{a+b^2}}{2(a+b)}+b} \geq \sum_{cyc} \frac{a}{\frac{(a+b)^2+a+b^2}{2(a+b)}+b} \\ &= \sum_{cyc} \frac{a(a+b)}{2a^2+5ab+4b^2+ca}\end{aligned}$$

Do đó, chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc} \frac{a(a+b)}{2a^2+5ab+4b^2+ca} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc} a^4b^2 + 3\sum_{cyc} a^3b^2c - 19\sum_{cyc} a^2b^3c + 16\sum_{cyc} a^4bc - 12a^2b^2c^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sum_{cyc} a^4b^2 - \sum_{cyc} a^2b^3c\right) + 3\left(\sum_{cyc} a^3b^2c - a^2b^2c^2\right) + 15\left(\sum_{cyc} a^4bc - \sum_{cyc} a^2b^3c\right)$$
$$+\left(\sum_{cyc} a^4bc - 3a^2b^2c^2\right) \geq 0$$

Bằng cách sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta thấy ngay được

$$\sum_{cyc} a^4b^2 \geq \sum_{cyc} a^2b^3c,\ \ \sum_{cyc} a^3b^2c \geq a^2b^2c^2,\ \ \sum_{cyc} a^4bc \geq \sum_{cyc} a^2b^3c,\ \ \sum_{cyc} a^4bc \geq 3a^2b^2c^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc $a = 1, b = c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.14 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \geq \frac{4}{a+b+c}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}} &= \sum_{cyc} \frac{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c}{\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c\right)\sqrt{4a^2+bc}} \\ &\geq 2\sum_{cyc} \frac{\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c}{4a^2+bc+\left(\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c\right)^2} \\ &= 4\sum_{cyc} \frac{3a+b+c}{16a^2+4bc+(3a+b+c)^2}\end{aligned}$$

Cuối cùng, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{3a+b+c}{16a^2+4bc+(3a+b+c)^2} \geq \frac{1}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(3a+b+c)(a+b+c)}{16a^2+4bc+(3a+b+c)^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left[\frac{3(3a+b+c)(a+b+c)}{16a^2+4bc+(3a+b+c)^2} - 1\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} \frac{b^2+c^2-8a^2+3a(b+c)}{16a^2+4bc+(3a+b+c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(c+4a)(c-a)-(b+4a)(a-b)}{16a^2+4bc+(3a+b+c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(c+4a)(c-a)}{16a^2+4bc+(3a+b+c)^2} - \sum_{cyc} \frac{(b+4a)(a-b)}{16a^2+4bc+(3a+b+c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a+4b)(a-b)}{16b^2+4ca+(3b+c+a)^2} - \sum_{cyc} \frac{(b+4a)(a-b)}{16a^2+4bc+(3a+b+c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 7\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(7a^2+7b^2-c^2+34ab-6ca-6bc)}{[16a^2+4bc+(3a+b+c)^2][16b^2+4ca+(3b+c+a)^2]} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2(7a^2+7b^2-c^2+34ab-6ca-6bc)[16c^2+4ab+(3c+a+b)^2] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó dễ thấy $S_b, S_c \geq 0$. Ta có

$$a^2[16b^2+ca+(3b+c+a)^2] \geq b^2[16a^2+bc+(3a+b+c)^2]$$

$$\begin{aligned}&(7b^2+7c^2-a^2+34bc-6ca-6ab)+(7c^2+7a^2-b^2+34ca-6ab-6bc)\\ &= \ 6(a-b)^2+28c(a+b) \geq 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2S_b + b^2S_a \geq 0$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} S_c(a-b)^2 &\geq S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 \geq S_a(b-c)^2 + \frac{a^2}{b^2}S_b(b-c)^2 \\ &= \frac{(b-c)^2}{b^2}(a^2S_b + b^2S_a) \geq 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.15 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{8}} + \sqrt{b + \frac{(c-a)^2}{8}} + \sqrt{c + \frac{(a-b)^2}{8}} \leq \sqrt{3}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{8}} &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\sum_{cyc}\frac{\sqrt{3}(a+1)\cdot\sqrt{16a + 2(b-c)^2}}{a+1} \\ &\leq \frac{1}{8\sqrt{3}}\sum_{cyc}\frac{3(a+1)^2 + 16a + 2(b-c)^2}{a+1} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{3}}\left[12 + \sum_{cyc}\frac{16a + 2(b-c)^2}{a+1}\right] \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left[6 + \sum_{cyc}\frac{8a + (b-c)^2}{a+1}\right]\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum \frac{8a + (b-c)^2}{a+1} \leq 6$$

$$\Leftrightarrow \sum [8a + (b-c)^2](b+1)(c+1) \leq 6(a+1)(b+1)(c+1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} a^3 - \sum_{cyc} ab(a+b) + \sum_{cyc} bc(b-c)^2 + 4\sum_{cyc} ab + 18abc \leq 2$$

Do

$$\sum_{cyc} ab(a+b) \geq 6abc$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$2\sum_{cyc} a^3 + 12abc + \sum_{cyc} bc(b-c)^2 + 4\sum_{cyc} ab \le 2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} a^3 + 12abc + \sum_{cyc} bc(b-c)^2 + 4\sum_{cyc} ab \le 2\left(\sum_{cyc} a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} a^3 + 12abc + \sum_{cyc} bc(b-c)^2 \le 2\sum_{cyc} a^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} a^3 + 12abc + \sum_{cyc} bc(b-c)^2 \le 2\left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc} a\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sum_{cyc} ab(a+b) - 6abc\right) \ge \sum_{cyc} ab(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sum_{cyc} ab(a+b) - 6abc\right)\left(\sum_{cyc} a\right) \ge \sum_{cyc} ab(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3(b+c) + 6\sum_{cyc} a^2b^2 \ge 8abc\sum_{cyc} a.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. ■

Ví dụ 1.16 *Cho các số không âm* a, b, c, *không có 2 số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{ab+3c^2}} + \frac{b}{\sqrt{bc+3a^2}} + \frac{c}{\sqrt{ca+3b^2}} \ge \frac{3}{2}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{ab+3c^2}} &= \sum_{cyc} \frac{a(c+a)}{(c+a)\sqrt{ab+3c^2}} \ge 2\sum_{cyc} \frac{a(c+a)}{(c+a)^2+ab+3c^2} \\ &= 2\sum_{cyc} \frac{a(c+a)}{a^2+ab+2ca+4c^2}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$2\sum_{cyc} \frac{a(c+a)}{a^2+ab+2ca+4c^2} \ge \frac{3}{2}$$

Bằng biến đổi tương đương, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$4\sum_{cyc} ab^5 + 12\sum_{cyc} a^2b^4 + 16\sum_{cyc} a^4b^2 - 24\sum_{cyc} a^3b^3 + 18\sum_{cyc} a^4bc$$
$$+39\sum_{cyc} a^2b^3c - 17\sum_{cyc} a^3b^2c - 144a^2b^2c^2 \geq 0$$

Ta có

$$12\sum_{cyc} a^2b^4 + 12\sum_{cyc} a^4b^2 - 24\sum_{cyc} a^3b^3 = 12\sum_{cyc} a^2b^2(a-b)^2 \geq 0$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$4\sum_{cyc} ab^5 + 4\sum_{cyc} a^4b^2 + 18\sum_{cyc} a^4bc + 39\sum_{cyc} a^2b^3c \geq 17\sum_{cyc} a^3b^2c + 144a^2b^2c^2$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
4\sum_{cyc} ab^5 &\geq 12a^2b^2c^2 \\
4\sum_{cyc} a^4b^2 &\geq 12a^2b^2c^2 \\
\sum_{cyc} a^4bc &\geq 3a^2b^2c^2 \\
17\sum_{cyc} a^4bc &\geq 17\sum_{cyc} a^3b^2c \\
39\sum_{cyc} a^2b^3c &\geq 117a^2b^2c^2.
\end{aligned}$$

Cộng tương ứng vế với vế các bất đẳng thức trên, ta suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

1.3 Kỹ thuật *pqr*

1.3.1 Lời nói đầu

Kỹ thuật *pqr* là một trong những kỹ thuật hay, hữu ích và hiệu quả nhất đối với bất đẳng thức 3 biến. Phần lớn các bài toán trong sách, chúng tôi đều chọn kỹ thuật *pqr* để giải, vì vậy, việc hệ thống lại một số kiến thức cần biết về chúng là không thể thiếu được. Bạn sẽ thấy được những điều ngạc nhiên, lạ lẫm khi mà không chỉ có những bài toán đối xứng mới có thể được giải quyết theo *pqr* mà thậm chí cả những bài toán dạng hoán vị vòng quanh, ta cũng có thể dùng nó để giải trong khi những phương pháp, những kỹ thuật khác lại không đủ khả năng để thực hiện điều này. Sau khi xin được bắt đầu bài viết của chúng tôi "Kỹ thuật *pqr*".

1.3.2 Những đẳng thức cần nhớ

Với 3 biến bất kì a, b, c, ta đặt $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc$ ($p^2 \geq 3q, q^2 \geq 3pr$). Khi đó, chúng ta có những đẳng thức sau

$$\begin{aligned}
a^2+b^2+c^2 &= p^2-2q \\
a^3+b^3+c^3 &= p^3-3pq+3r \\
ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) &= pq-3r \\
(a+b)(b+c)(c+a) &= pq-r \\
a^4+b^4+c^4 &= p^4-4p^2q+2q^2+4pr \\
a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 &= q^2-2pr \\
a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b) &= p^2q-2q^2-pr \\
a^3(b^2+c^2)+b^3(c^2+a^2)+c^3(a^2+b^2) &= pq^2-(2p^2+q)r \\
a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b) &= qp^3-3pq^2+(5q-p^2)r \\
a^5+b^5+c^5 &= p^5-5p^3q+5pq^2+5(p^2-q)r
\end{aligned}$$

Còn rất nhiều những đẳng thức khác nữa, các bạn hãy tự xây dựng cho mình thêm nhé, chúng sẽ rất có ứng dụng về sau.

1.3.3 Bất đẳng thức Schur

Định lý 1.1 (Bất đẳng thức Schur) *Cho các số không âm a, b, c. Khi đó, với mọi $r > 0$, ta có bất đẳng thức sau*

$$a^r(a-b)(a-c)+b^r(b-c)(b-a)+c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

CHỨNG MINH. Do tính đối xứng, giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, ta viết bất đẳng thức lại như sau

$$(a-b)[a^r(a-c)-b^r(b-c)]+c^r(a-c)(b-c) \geq 0$$

Ta có

$$a-c \geq b-c \geq 0, \quad a^r \geq b^r$$

Nên bất đẳng thức đúng. Bất đẳng thức Schur được chứng minh. ■

Chúng ta có 2 trường hợp đặc biệt thường hay được ứng dụng để giải toán là $r = 1$ và $r = 2$. Khi đó, chúng ta được những bất đẳng thức tương ứng là

Hệ quả 1.1 (Bất đẳng thức Schur bậc 3) *Cho các số không âm a, b, c. Khi đó, bất đẳng thức sau đúng*

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geq ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)$$

$$\Leftrightarrow abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Hệ quả 1.2 (Bất đẳng thức Schur bậc 4) *Cho các số không âm a, b, c. Khi đó, bất đẳng thức sau đúng*

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Dạng pqr tương ứng của 2 bất đẳng thức trên là

$$r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9}$$

$$r \geq \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p}$$

Nhưng do $4q - p^2$ có thể không dương mà r thì luôn luôn không âm nên chúng ta hay dùng cả 2 bất đẳng thức trên ở dạng sau (sẽ rất hiệu quả)

$$r \geq \max\left\{0, \frac{p(4q-p^2)}{9}\right\}$$

$$r \geq \max\left\{0, \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p}\right\}$$

Đôi khi bạn sẽ gặp phải trường hợp giả thiết bài toán là a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác (khi đó ta có $4q \geq p^2$), khi đó ta thấy $a+b-c, b+c-a, c+a-b$ là những số không âm, vậy nên theo bất đẳng thức Schur, ta có

$$\sum_{cyc}(b+c-a)[(b+c-a)-(c+a-b)][(b+c-a)-(a+b-c)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(b+c-a)(a-b)(a-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow r \leq \frac{p(5q-p^2)}{18}$$

Tương tự, ta có

$$\sum_{cyc}(b+c-a)^2(a-b)(a-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow r \le \frac{p^4 - 7p^2q + 13q^2}{9p}$$

Vậy chúng ta có các đánh giá

$$\min\left\{\frac{p(5q-p^2)}{18}, \frac{p^4 - 7p^2q + 13q^2}{9p}\right\} \ge r \ge \max\left\{0, \frac{(4q-p^2)(p^2-q)}{6p}, \frac{p(4q-p^2)}{9}\right\}.$$

Chúng ta thường dùng bất đẳng thức Schur để giải bất đẳng thức trong trường hợp bất đẳng thức có những đẳng thức tại các điểm $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc trong trường hợp a, b, c là độ dài 3 cạnh tam giác thì là $a = 2, b = c = 1$.

Ví dụ 1.17 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca = 3$. Chứng minh rằng*

$$a^3 + b^3 + c^3 + 7abc \ge 10.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$10r + p^3 - 9p - 10 \ge 0$$

Nếu $p \ge 2\sqrt{3}$ thì ta có

$$p^3 - 9p - 10 \ge 3p - 10 \ge 6\sqrt{3} - 10 > 0$$

Nếu $2\sqrt{3} \ge p \ge 3$ thì theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có

$$r \ge \frac{p(12-p^2)}{9}$$

Do đó

$$10r + p^3 - 9p - 10 \ge \frac{10(p(12-p^2)}{9} + p^3 - 9p - 10 = \frac{1}{9}(p-3)(30-p^2-3p)$$

Mà

$$30 - p^2 - 3p \ge 30 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 - 3 \cdot 2\sqrt{3} = 18 - 6\sqrt{3} > 0.$$

Nên bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ∎

Ví dụ 1.18 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$abc + \frac{12}{ab+bc+ca} \ge 5.$$

(Vasile Cirtoaje)

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương với

$$r + \frac{12}{q} - 5 \geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có

$$r \geq \frac{4q - 9}{3}$$

Do đó

$$r + \frac{12}{q} - 5 \geq \frac{4q-9}{3} + \frac{12}{q} - 5 = \frac{4(q-3)^2}{3q} \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ■

Ví dụ 1.19 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0 thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh*

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \sqrt{2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc} \frac{a^3(b+c)}{b^3 + c^3} \geq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left[\frac{a^3(b+c)}{b^3+c^3} + b + c \right] \geq 2 \sum_{cyc} a + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} a^3 \right) \left(\sum_{cyc} \frac{1}{a^2 - ab + b^2} \right) \geq 2 \sum_{cyc} a + \sqrt{2}$$

Ta có

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{9}{2 \sum\limits_{cyc} a^2 - \sum\limits_{cyc} ab}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{9 \sum\limits_{cyc} a^3}{2 \sum\limits_{cyc} a^2 - \sum\limits_{cyc} ab} \geq 2 \sum_{cyc} a + \sqrt{2}$$

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc \Rightarrow q = \frac{p^2-1}{2}$. Bất đẳng thức tương đương

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - p\right)\left(7p^2 + 6\sqrt{2}p - 5\right) + 27r \geq 0$$

Nếu $p \geq \sqrt{2}$ theo bất dẳng thức Schur, ta có $r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9} = \frac{p(p^2-2)}{9}$, do đó

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - p\right)\left(7p^2 + 6\sqrt{2}p - 5\right) + 27r &\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - p\right)\left(7p^2 + 6\sqrt{2}p - 5\right) + 3p(p^2 - 2)\\ &= \frac{1}{2}\left(p - \sqrt{2}\right)(5 - p^2) \geq 0\end{aligned}$$

Nếu $\sqrt{2} \geq p$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.
Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = 0$ và các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.20 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0 thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{2}{\sqrt{b+c}} - 1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{c+a}} - 1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{a+b}} - 1\right) \geq \left(\sqrt{2} - 1\right)^3.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Chú ý là các biểu thức trong các dấu ngoặc đều dương và

$$\left(2 + \sqrt{b+c}\right)\left(2 + \sqrt{c+a}\right)\left(2 + \sqrt{a+b}\right) \leq 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)^3$$

Nên

$$\begin{aligned}2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^3 \prod_{cyc}\left(\frac{2}{\sqrt{b+c}} - 1\right) &\geq \left[\prod_{cyc}\left(2 + \sqrt{b+c}\right)\right]\left[\prod_{cyc}\left(\frac{2}{\sqrt{b+c}} - 1\right)\right]\\ &= \frac{(4-b-c)(4-c-a)(4-a-b)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}}\end{aligned}$$

Từ giả thiết ta suy ra $p^2 - 2q = 3$. Do đó theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có

$$r \geq \frac{p(4q - p^2)}{9} = \frac{p(p^2 - 6)}{9}$$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{(4-b-c)(4-c-a)(4-a-b)}{\sqrt{(a+b)(b+c)(c+a)}} &= \frac{4(4-p)^2+(4-p)q+r}{\sqrt{pq-r}} \\
&= \frac{(4-p)(p^2-8p+29)+2r}{\sqrt{2[p(p^2-3)-2r]}} \\
&\geq \frac{(4-p)(p^2-8p+29)+\frac{2p(p^2-6)}{9}}{\sqrt{2\left[p(p^2-3)-\frac{2p(p^2-6)}{9}\right]}} \\
&= \frac{1044-561p+108p^2-7p^3}{3\sqrt{2p(7p^2-15)}} = f(p)
\end{aligned}$$

Dễ thấy $f(p)$ là hàm nghịch biến trên $\left[\sqrt{3},3\right]$ nên $f(p)\geq f(3)=2\sqrt{2}$, do đó

$$2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)^3\prod_{cyc}\left(\frac{2}{\sqrt{b+c}}-1\right)\geq 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \prod_{cyc}\left(\frac{2}{\sqrt{b+c}}-1\right)\geq\left(\sqrt{2}-1\right)^3.$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. ■

1.3.4 Đại lượng $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$

Đối với những bất đẳng thức rất chặt và đẳng thức xảy ra tại những điểm không đặc biệt như bất đăng thức Schur (chẳng hạn đẳng thức xảy ra tại $a=3,b=2,c=2$) thì việc sử dụng bất đẳng thức Schur để giải chúng là điều hiển nhiên không thực hiện được, do đó chúng ta cần tìm một đánh giá khác phù hợp hơn và hiệu quả hơn để giải chúng. Đại lượng

$$P=(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\geq 0$$

là đại lượng trung gian khác mà chúng ta chọn ở đây. Tại sao ta lại chọn nó? Vì hầu hết các bất đẳng thức đối xứng đều xảy ra đẳng thức khi có ít nhất 2 biến bằng nhau mà biểu thức P để xảy ra dấu đẳng thức, ta cũng chỉ cần $a=b$ hoặc $b=c$ hoặc $c=a$ là đủ, cho nên ta có thể thấy P rất chặt. Vì vậy, ta sẽ khai thác xem P có ứng dụng gì không? Khai triển ra theo pqr ta được

$$P=p^2q^2-4q^3+2p(9q-2p^2)r-27r^2\geq 0$$

Ta hãy xem đây là một tam thức bậc 2 theo r, khi đó giải ra ta có nghiệm

$$\frac{p(9q-2p^2)-2(p^2-3q)\sqrt{p^2-3q}}{27}\leq r\leq\frac{p(9q-2p^2)+2(p^2-3q)\sqrt{p^2-3q}}{27}$$

Đến đây, có lẽ các bạn vẫn chưa thấy được gì ngoài sự cồng kềnh của bất đẳng thức trên. Đừng vội nản lòng bạn ạ, biết đâu sẽ có một phép màu nào đấy. Và thực sự là như vậy, ta hãy đặt

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{p+\sqrt{p^2-3q}}{3}, v_0 = \frac{p-2\sqrt{p^2-3q}}{3} \\ u_1 &= \frac{p-\sqrt{p^2-3q}}{3}, v_0 = \frac{p+2\sqrt{p^2-3q}}{3} \end{aligned}$$

Khi đó, ta thu được một điều đặc biệt là

$$\begin{cases} 2u_0+v_0 = 2u_1+v_1 = p \\ u_0^2+2u_0v_0 = u_1^2+2u_1v_1 = q \\ u_0^2v_0 \le r \le u_1^2v_1 \end{cases}$$

Ngoài ra, trong trường hợp a, b, c là các số không âm, ta thấy u_0, u_1, v_1 là những số không âm và $v_0 \ge 0$ nếu $4q \ge p^2$ và $v_0 \le 0$ nếu $p^2 \ge 4q$.
Như vậy, ta thu được một kết quả hết sức đặc biệt sau khi chứng minh một bất đẳng thức. Khi đưa bất đẳng thức đó về dạng pqr có dạng $f(r) \ge 0$ thì
1) Nếu $f(r)$ là hàm đồng biến, khi đó ta chỉ cần chứng minh

$$f(u_0^2v_0) \ge 0$$

tức là ta chỉ cần xét nó trong trường hợp có 2 biến bằng nhau là đủ.
Nếu bất đẳng thức yêu cầu chứng minh với các số không âm thì ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(\max\left\{0, u_0^2v_0\right\}\right) \ge 0$$

tức là ta chỉ cần chứng minh nó đúng trong trường hợp có 2 biến bằng nhau và trong trường hợp $p^2 \ge 4q$ thì $f(0) \ge 0$.
2) Nếu $f(r)$ là hàm nghịch biến, khi đó ta chỉ cần chứng minh

$$f(u_1^2v_1) \ge 0$$

tức là ta chỉ cần xét nó trong trường hợp có 2 biến bằng nhau là đủ.
3) Nếu $f(r)$ là hàm lõm ($f''(x) \le 0$), khi đó ta chỉ cần chứng minh

$$\min\left\{f(u_1^2v_1), f(u_0^2v_0)\right\} \ge 0$$

tức là ta chỉ cần xét nó trong trường hợp có 2 biến bằng nhau là đủ.
Nếu bất đẳng thức yêu cầu chứng minh với các số không âm thì ta chỉ cần chứng minh

$$\min\left\{f(u_1^2v_1), f\left(\max\left\{0, u_0^2v_0\right\}\right)\right\} \ge 0$$

tức là ta chỉ cần chứng minh nó đúng trong trường hợp có 2 biến bằng nhau và trong trường hợp $p^2 \ge 4q$ thì $f(0) \ge 0$.

Ví dụ 1.21 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{c+a}+\frac{c^2}{a+b}\ge \frac{3}{2}\sqrt[5]{\frac{a^5+b^5+c^5}{3}}.$$

(Michael Rozenberg)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c} &= \sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{b+c}+b+c-2a\right)=\sum_{cyc}\frac{(b+c-a)^2}{b+c}\\ &\ge \frac{\left[\sum\limits_{cyc}(b+c-a)^2\right]^2}{\sum\limits_{cyc}(b+c)(b+c-a)^2}\end{aligned}$$

Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$ và đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$. Ta có

$$\sum_{cyc}(b+c-a)^2=\sum_{cyc}(1-2a)^2=3\sum_{cyc}-4\sum_{cyc}a+4\sum_{cyc}a^2=3-8q$$

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}(b+c)(b+c-a)^2 &= \sum_{cyc}(1-a)(1-2a)^2=3-5\sum_{cyc}a+8\sum_{cyc}a^2-4\sum_{cyc}a^3\\ &= -2+8(1-2q)-4(1-3q+3r)=2(1-2q-6r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}a^5 &= \left(\sum_{cyc}a^3\right)\left(\sum_{cyc}a^2\right)-\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a^2b^2\right)+abc\sum_{cyc}ab\\ &= (1-3q+3r)(1-2q)-(q^2-2r)+qr\\ &= 5(1-q)r+1-5q+5q^2\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(3-8q)^2}{1-2q-6r}\ge 3\sqrt[5]{\frac{5(1-q)r+1-5q+5q^2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow f(r)=81(1-2q-6r)^5[(5-5q)r+1-5q+5q^2]-(3-8q)^{10}\le 0$$

Ta có

$$f'(r)=405(1-2q-6r)^4[36(q-1)r+(1-4q)(7q-5)]$$

Nếu $1\ge 4q$ thì ta có

$$36(q-1)r+(1-4q)(7q-5)\le(1-4q)(7q-5)\le 0$$

Nếu $4q \ge 1$ thì theo bất đẳng thức Schur bậc 4, $r \ge \frac{(4q-1)(1-q)}{6}$, ta có

$$\begin{aligned} 36(q-1)r + (1-4q)(7q-5) &\le 6(q-1)(4q-1)(1-q) + (1-4q)(7q-5) \\ &= (1-3q)(2q-1)(4q-1) \le 0 \end{aligned}$$

Vậy nên $f'(r) \le 0$, tức $f(r)$ nghịch biến, từ đó ta suy ra để chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\left[\sum_{cyc}(b+c-a)^2\right]^2}{\sum_{cyc}(b+c)(b+c-a)^2} \ge \frac{3}{2}\sqrt[5]{\frac{a^5+b^5+c^5}{3}}$$

ta chỉ cần xét nó trong 2 trường hợp sau là đủ: $b=0, c=1$ hoặc $b=c=1$.
Trường hợp 1. $b=c=1$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(4-4a+3a^2)^2}{4-4a+2a^2+a^3} \ge 3\sqrt[5]{\frac{a^5+2}{3}}$$

$$\Leftrightarrow g(a) = \frac{(4-4a+3a^2)^{10}}{(a^5+2)(4-4a+2a^2+a^3)^5} \ge 81$$

Ta có

$$g'(a) = \frac{10(a-1)^3(7a^5+5a^4+16)(4-4a+3a^2)^9}{(a^5+2)^2(4-4a+2a^2+a^3)^6}$$

$$g'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Từ đây, ta dễ dàng kiểm tra được

$$g(a) \ge g(1) = 81$$

Trường hợp 2. $b=0, c=1$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(3a^2-2a+3)^2}{(a^2+1)(a+1)} \ge 3\sqrt[5]{\frac{a^5+1}{3}}$$

$$\Leftrightarrow h(a) = \frac{(3a^2-2a+3)^{10}}{(a^2+1)^5(a+1)^5(a^5+1)} \ge 81$$

Ta có

$$h'(a) = \frac{5(a-1)k(a)(3a^2-2a+3)^9}{(a^2+1)^6(a+1)^5(a^5+1)^2}$$

với

$$k(a) = 7a^6 - 4a^5 + 7a^4 - 12a^3 + 7a^2 - 4a + 7$$

Ta sẽ chứng minh

$$k(a) > 0 \Leftrightarrow 7\left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) - 4\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + 7\left(a + \frac{1}{a}\right) - 12 > 0$$

Đặt $t = a + \frac{1}{a} \geq 2$ thì bất đẳng thức trở thành

$$7(t^3 - 3t) - 4(t^2 - 2) + 7t - 12 > 0$$

$$\Leftrightarrow 7t^3 > 4t^2 + 14t + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{t^3} + \frac{14}{t^2} + \frac{4}{t} < 7$$

Ta có

$$\frac{4}{t^3} + \frac{14}{t^2} + \frac{4}{t} \leq \frac{4}{2^3} + \frac{14}{2^2} + \frac{4}{2} = 6 < 7$$

Từ đây, ta được

$$h'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

Và từ đó

$$h(a) \geq h(1) = 512 > 81.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Ví dụ 1.22 *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$l_a l_b + l_b l_c + l_c l_a \geq 3\sqrt{3}S.$$

(Walther Janous)

Lời giải. Đây là một bài toán rất khó trên tạp chí Crux Mathematicorum, hiện nay theo chúng tôi được biết vẫn chưa có được một lời giải nào cho nó. Lời giải sau (khá phức tạp), chúng tôi tìm được sau một thời gian dài cố gắng tìm lời giải cho nó
Đặt $x = p - a, y = p - b, z = p - c$, ta có

$$l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c} = \frac{2\sqrt{x(x+y+z)(x+y)(x+z)}}{2x+y+z}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{xyz(x+y+z)}$$

Do đó, bất đẳng thức tương đương

$$4\sum_{cyc} \frac{xy\left(\sum\limits_{cyc} x\right)(x+y)\sqrt{xy(z+x)(z+y)}}{(2x+y+z)(2y+z+x)} \geq 3\sqrt{3xyz\sum_{cyc} x}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}(2x+y+z)\sqrt{\frac{y+z}{x}} \geq \frac{3\sqrt{3}\prod\limits_{cyc}(2x+y+z)}{\sqrt{\left(\sum\limits_{cyc}x\right)\left(\prod\limits_{cyc}(x+y)\right)}}$$

$$\Leftrightarrow 8\sum_{cyc}\sqrt{x(y+z)}+4\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(y+z)^3}{x}} \geq \frac{3\sqrt{3}\prod\limits_{cyc}(2x+y+z)}{\sqrt{\left(\sum\limits_{cyc}x\right)\left(\prod\limits_{cyc}(x+y)\right)}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left[\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(y+z)^3}{x}}\right]^2\left[\sum_{cyc}x(y+z)^3\right] \geq \left[\sum_{cyc}(y+z)^2\right]^3$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\sqrt{\frac{(y+z)^3}{x}} \geq \sqrt{\frac{\left[\sum\limits_{cyc}(y+z)^2\right]^3}{\sum\limits_{cyc}x(y+z)^3}}$$

Lại có

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\sqrt{x(y+z)} &= \sqrt{\left[\sum_{cyc}\sqrt{x(y+z)}\right]^2} = \sqrt{2\sum_{cyc}xy+2\sum_{cyc}\sqrt{xy(z+x)(z+y)}} \\
&\geq \sqrt{2\sum_{cyc}xy+2\sum_{cyc}\sqrt{xy}\,(z+\sqrt{xy})} = \sqrt{4\sum_{cyc}xy+2\sum_{cyc}z\sqrt{xy}} \\
&\geq \sqrt{4\sum_{cyc}xy+6\sqrt[3]{x^2y^2z^2}} \geq \sqrt{4\sum_{cyc}xy+\frac{18xyz}{\sum\limits_{cyc}x}}
\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$8\sqrt{4\sum_{cyc}xy+\frac{18xyz}{\sum\limits_{cyc}x}}+4\sqrt{\frac{\left[\sum\limits_{cyc}(y+z)^2\right]^3}{\sum\limits_{cyc}x(y+z)^3}} \geq \frac{3\sqrt{3}\prod\limits_{cyc}(2x+y+z)}{\sqrt{\left(\sum\limits_{cyc}x\right)\left(\prod\limits_{cyc}(x+y)\right)}}$$

Chuẩn hóa cho $x+y+z=1$, đặt $xy+yz+zx=q, r=xyz$, bất đẳng thức trở thành

$$f(r)=\frac{\sqrt{(9r+2q)(q-r)}}{r+q+2}+\frac{(1-q)\sqrt{(1-q)(q-r)}}{(r+q+2)\sqrt{5r+q-2q^2}}\geq\frac{3\sqrt{6}}{16}$$

Ta có

$$f'(r)=\frac{3q^2+14q-(36+25q)r}{2(r+q+2)^2\sqrt{(9r+2q)(q-r)}}-\frac{\sqrt{(1-q)^3}[6q+2q^2-3q^3+(q^2+7q)r-5r^2]}{(r+q+2)^2\sqrt{(q-r)(5r+q-2q^2)^3}}$$

Ta chứng minh

$$f'(r)\leq 0\Leftrightarrow\frac{2\sqrt{(1-q)^3}[6q+2q^2-3q^3+(q^2+7q)r-5r^2]}{\sqrt{(5r+q-2q^2)^3}}\geq\frac{3q^2+14q-(36+25q)r}{\sqrt{(9r+2q)}}$$

Ta dễ dàng chứng minh

$$\frac{\sqrt{1-q}}{\sqrt{5r+q-2q^2}}\geq\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9r+2q}}>\frac{1}{\sqrt{9r+2q}}$$

do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{2(1-q)[6q+2q^2-3q^3+(q^2+7q)r-5r^2]}{5r+q-2q^2}\geq 3q^2+14q-(36+25q)r$$

$$\Leftrightarrow g(r)=5(34+25q)r^2-10q(2+6q+5q^2)r+12q-10q^2+19q^3+6q^4\geq 0$$

Ta có

$$\Delta'_g=-5q(408-60q+276q^2+399q^3-150q^4-125q^5)\leq 0$$

nên hiển nhiên $g(r)\geq 0$. Do đó $f'(r)\leq 0$ nên $f(r)$ nghịch biến, như vậy ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong trường hợp có 2 biến bằng nhau là đủ. Cho $y=z=1$, bất đẳng thức trở thành

$$8\sqrt{4(2x+1)+\frac{18x}{x+2}}+4\sqrt{\frac{[2(x+1)^2+4]^3}{2(x+1)^3+8x}}\geq\frac{3\sqrt{3}(2x+2)(x+3)^2}{\sqrt{2(x+2)(x+1)^2}}$$

$$\Leftrightarrow 8\sqrt{\frac{2(4x^2+19x+4)}{x+2}}+8\sqrt{\frac{(x^2+2x+3)^3}{x^3+3x^2+7x+1}}\geq\frac{3\sqrt{6}(x+3)^2}{\sqrt{x+2}}$$

$$\Leftrightarrow h(x)=\frac{\sqrt{2(4x^2+19x+4)}}{(x+3)^2}+\sqrt{\frac{(x^2+2x+3)^3(x+2)}{(x+3)^4(x^3+3x^2+7x+1)}}\geq\frac{3\sqrt{6}}{8}$$

Ta có

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\frac{(x-1)(8x+41)}{(x+3)^3\sqrt{8x^2+38x+8}} + \frac{\sqrt{(x^2+2x+3)}(x^2-1)(7x^3+37x^2+103x+105)}{2(x+3)^3\sqrt{(x+2)(x^3+3x^2+7x+1)^3}} \\ &= \frac{x-1}{2(x+3)^3}\left[\frac{\sqrt{(x^2+2x+3)}(x+1)(7x^3+37x^2+103x+105)}{\sqrt{(x+2)(x^3+3x^2+7x+1)^3}} - \frac{2(8x+41)}{\sqrt{8x^2+38x+8}}\right] \end{aligned}$$

Ta chứng minh

$$\frac{\sqrt{(x^2+2x+3)}(x+1)(7x^3+37x^2+103x+105)}{\sqrt{(x+2)(x^3+3x^2+7x+1)^3}} \ge \frac{2(8x+41)}{\sqrt{8x^2+38x+8}}$$

Dễ thấy

$$\frac{\sqrt{(x^2+2x+3)}}{\sqrt{(x+2)(x^3+3x^2+7x+1)}} \ge \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{8x^2+38x+8}} > \frac{8}{3\sqrt{8x^2+38x+8}}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4(x+1)(7x^3+37x^2+103x+105)}{3(x^3+3x^2+7x+1)} \ge 8x+41$$

$$\Leftrightarrow 4x^4 - 19x^3 + 23x^2 - 53x + 297 \ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng, do đó $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Từ đây bằng cách lập bảng biến thiên, ta thấy $h(x) \ge h(1) = \frac{3\sqrt{6}}{8}$. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, tức ΔABC đều. ■

Khai thác thêm nữa (với a, b, c không âm), ta có

$$\begin{aligned} 27r &\le p(9q-2p^2) + 2(p^2-3q)\sqrt{p^2-3q} \\ &= p(9q-2p^2) + \frac{2(p^2-3q)\left(p^2-\frac{3}{2}q\right)p\sqrt{p^2-3q}}{p\left(p^2-\frac{3}{2}q\right)} \\ &\le p(9q-2p^2) + \frac{(p^2-3q)\left[\left(p^2-\frac{3}{2}q\right)^2 + p^2(p^2-3q)\right]}{p\left(p^2-\frac{3}{2}q\right)} \\ &= \frac{27q^2(p^2-q)}{2p(2p^2-3q)} \end{aligned}$$

Và ta thu được

$$r \le \frac{q^2(p^2-q)}{2p(2p^2-3q)}$$

Có thể thấy được bất đẳng thức này chặt hơn bất đẳng thức đã biết sau (mà ta vẫn hay dùng)

$$r \le \frac{q^2}{3p}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned}
27r &\ge p(9q-2p^2) - 2(p^2-3q)\sqrt{p^2-3q} \\
&= p(9q-2p^2) - \frac{2(p^2-3q)(p^2-2q)p\sqrt{p^2-3q}}{p(p^2-2q)} \\
&\ge p(9q-2p^2) - \frac{2(p^2-3q)\left[(p^2-2q)^2+p^2(p^2-3q)\right]}{p(p^2-2q)} \\
&= \frac{(4q-p^2)(4p^4-10p^2q+3q^2)}{p(p^2-2q)}
\end{aligned}$$

Và ta cũng thu được

$$r \ge \max\left\{0, \frac{(4q-p^2)(4p^4-10p^2q+3q^2)}{p(p^2-2q)}\right\}$$

Có thể thấy bất đẳng thức này chặt hơn 2 bất đẳng thức Schur bậc 3 và bậc 4.

Ví dụ 1.23 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{\sqrt{a(a+bc)}}{b+ca} + \frac{\sqrt{b(b+ca)}}{c+ab} + \frac{\sqrt{c(c+ab)}}{a+bc} \le \frac{1}{2\sqrt{abc}}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{cyc} \frac{\sqrt{a(a+bc)}}{b+ca}\right]^2 &= \left[\sum_{cyc} \frac{\sqrt{a(a+b)(a+c)}}{(b+c)(b+a)}\right]^2 \\
&= \left[\sum_{cyc} \frac{\sqrt{a(a+c)}}{(b+c)\sqrt{a+b}}\right]^2 \\
&\le \left[\sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(b+c)}\right]\left(\sum_{cyc} \frac{a+c}{b+c}\right) \\
&= \frac{\sum\limits_{cyc} a^2 + \sum\limits_{cyc} ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\sum_{cyc} \frac{a+c}{b+c}\right)
\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{a+c}{b+c} &= \sum_{cyc}\frac{1-b}{b+c} = \sum_{cyc}\frac{1}{b+c} - \sum_{cyc}\frac{b}{b+c} \\
&\le \sum_{cyc}\frac{1}{b+c} - \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2}{\sum\limits_{cyc} a^2 + \sum\limits_{cyc} ab}
\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{\sum\limits_{cyc} a^2 + \sum\limits_{cyc} ab}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left[\sum_{cyc}\frac{1}{b+c} - \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2}{\sum\limits_{cyc} a^2 + \sum\limits_{cyc} ab}\right] \le \frac{1}{4abc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-q}{q-r}\left(\frac{1+q}{q-r} - \frac{1}{1-q}\right) \le \frac{1}{4r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(1-q^2)}{q-r} - 4 \le \frac{q-r}{r}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4(1-q^2)}{q-r} - \frac{q}{r} \le 3$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{4(1-q^2)}{q-r} - \frac{q}{r} &\le \frac{4(1-q^2)}{q - \frac{q^2(1-q)}{2(2-3q)}} - \frac{q}{\frac{q^2(1-q)}{2(2-3q)}} \\
&= \frac{8(1-q^2)(2-3q)}{q(4-7q+q^2)} - \frac{2(2-3q)}{q(1-q)} \\
&= \frac{2(2-3q)(3-5q+4q^2)}{(1-q)(4-7q+q^2)} \\
&= 3 - \frac{q(1-3q)(5-7q)}{(1-q)(4-7q+q^2)} \le 3.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

■

Ví dụ 1.24 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}} + \sqrt[3]{\frac{c^2+a^2}{b^2+ca}} + \sqrt[3]{\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}} \le \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}.$$

(Phạm Hữu Đức)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt[3]{\frac{b^2+c^2}{a^2+bc}}\right)^3 \le 3\left[\sum_{cyc}(b^2+c^2)\right]\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+bc}\right) = 6\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+bc}\right)$$

Ta cần chứng minh

$$6\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+bc}\right) \le \frac{\left(\sum_{cyc}a\right)^3}{abc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sum_{cyc}a\right)^3}{\sum_{cyc}a^2} \ge 6\sum_{cyc}\frac{abc}{a^2+bc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sum_{cyc}a\right)^3}{\sum_{cyc}a^2} + 6\sum_{cyc}\frac{a^3}{a^2+bc} \ge 6\sum_{cyc}a$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{a^2+bc} \ge \frac{\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2}{\sum_{cyc}a(a^2+bc)} = \frac{\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2}{\sum_{cyc}a^3+3abc}$$

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{\left(\sum_{cyc}a\right)^3}{\sum_{cyc}a^2} + \frac{6\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2}{\sum_{cyc}a^3+3abc} \ge 6\sum_{cyc}a$$

$$\Leftrightarrow \frac{p^3}{p^2-2q} + \frac{6(p^2-2q)^2}{p^3-3pq+6r} - 6p \ge 0$$

Chuẩn hóa cho $p=1$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{1-2q} + \frac{6(1-2q)^2}{1-3q+6r} \ge 6$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-2q}+\frac{6(1-2q)^2}{1-3q+6r} &\geq \frac{1}{1-2q}+\frac{6(1-2q)^2}{1-3q+\frac{3q^2(1-q)}{2-3q}}\\ &= \frac{1}{1-2q}+\frac{6(1-2q)^2(2-3q)}{2-9q+12q^2-3q^3}\\ &= \frac{14-99q+264q^2-315q^3+144q^4}{(1-2q)(2-9q+12q^2-3q^3)}\end{aligned}$$

Lại có

$$14-99q+264q^2-315q^3+144q^4 \geq 6(1-2q)(2-9q+12q^2-3q^3)$$

$$\Leftrightarrow (2-9q+12q^2)(1-3q)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Do đó ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.25 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+48(ab+bc+ca) \geq 25.$$

LỜI GIẢI 1. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{q}{r}+48q-25 \geq 0$$

Đây là một hàm nghịch biến theo r nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức trong trường hợp có 2 biến bằng nhau là đủ, giả sử $a=b \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}, c=1-2a$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{c}+48(a^2+2ac) \geq 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{a}+\frac{1}{1-2a}+48[a^2+2a(1-2a)] \geq 25$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(1-3a)^2(1-4a)^2}{a(1-2a)} \geq 0.$$

Hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=\frac{1}{2}, b=c=\frac{1}{4}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Lời giải 2. Ta có

$$\begin{aligned}27r &\le 9q-2+2(1-3q)\sqrt{1-3q}\\ &= 9q-2+\frac{2(1-3q)\left(1-\frac{12}{5}q\right)\sqrt{1-3q}}{1-\frac{12}{5}q}\\ &\le 9q-2+\frac{(1-3q)\left[\left(1-\frac{12}{5}q\right)^2+1-3q\right]}{1-\frac{12}{5}q}\\ &= \frac{27q^2(7-16q)}{5(5-12q)}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow r \le \frac{q^2(7-16q)}{5(5-12q)}$$

Do đó

$$\frac{q}{r}+48q-25 \ge \frac{5(5-12q)}{q(7-16q)}+48q-25=\frac{(1-3q)(5-16q)^2}{q(7-16q)} \ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Ví dụ 1.26 *Cho các số không âm a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{(a+b)(a+c)}}+\sqrt{\frac{(b^2+c^2)(b^2+a^2)}{(b+c)(b+a)}}+\sqrt{\frac{(c^2+a^2)(c^2+b^2)}{(c+a)(c+b)}} \ge a+b+c.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Đặt $a=x^2, b=y^2, c=z^2$ $(x,y,z\ge 0)$. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$(x^4+y^4)(x+y)^2 \ge (x^2+y^2)^3$$

$$\Rightarrow \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \ge \frac{(x^2+y^2)^2}{(x+y)^2}$$

$$\Rightarrow VT=\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(x^4+y^4)(x^4+z^4)}{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}} \ge \sum_{cyc}\frac{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}{(x+y)(x+z)}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
VT &\geq \sum_{cyc}\frac{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}{(x+y)(x+z)} = \sum_{cyc}\frac{[(x+y)^2-2xy][(x+z)^2-2xz]}{(x+y)(x+z)}\\
&= \sum_{cyc}(x+y)(x+z) - 2\sum_{cyc}\frac{xy(z+x)}{x+y} - 2\sum_{cyc}\frac{zx(x+y)}{z+x} + \sum_{cyc}\frac{4x^2yz}{(x+y)(x+z)}\\
&= \sum_{cyc}(x+y)(x+z) - 2\sum_{cyc}\frac{xy(x+y+2z)}{x+y} + \sum_{cyc}\frac{4x^2yz}{(x+y)(x+z)}\\
&= \sum_{cyc}(x+y)(x+z) - 2\sum_{cyc}xy + 4xyz\left[\sum_{cyc}\frac{x}{(x+y)(x+z)} - \sum_{cyc}\frac{1}{x+y}\right]\\
&= \sum_{cyc}x^2 + \sum_{cyc}xy - \frac{4xyz\left(\sum\limits_{cyc}x^2+\sum\limits_{cyc}xy\right)}{(x+y)(y+z)(z+x)}
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}xy - \frac{4xyz\left(\sum\limits_{cyc}x^2+\sum\limits_{cyc}xy\right)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \geq 0$$

Chuẩn hóa cho $p=1$, bất đẳng thức trở thành

$$q(q-r) \geq 4r(1-q)$$

$$\Leftrightarrow q^2 \geq (4-3q)r$$

Ta có

$$q^2-(4-3q)r \geq q^2-(4-3q)\cdot\frac{q^2(1-q)}{2(2-3q)} = \frac{q^3(1-3q)}{2(2-3q)} \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a>0, b=c\to 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.27 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+9 \geq 10(a^2+b^2+c^2).$$

(Vasile Cirtoaje)

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{8q}{r}+20q \geq 81$$

Đây là một hàm nghịch biến theo r nên ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong trường hợp có 2 biến bằng nhau là đủ. Giả sử $a = b \Rightarrow a \leq \frac{3}{2}$ và $c = 3 - 2a$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{16}{a} + \frac{8}{3-2a} + 9 \geq 20a^2 + 10(3-2a)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(2a-1)^2(10a^2-25a+16)}{a(3-2a)} \geq 0.$$

Hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{1}{2}, c = 2$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

1.3.5 Làm mạnh hơn nữa

Đối với các bài toán thông thường, chúng ta có thể làm theo cách trên để giải, nhưng đối với những bài toán có chứa căn thức, lũy thừa tổng quát,... Rõ ràng các cách trên là bất khả thi. Do đó, chúng ta cần làm mạnh kỹ thuật của chúng ta hơn nữa để làm sao nó có thể giải quyết được các dạng toán đó. Chúng ta xuất phát từ bổ đề sau đây

Bổ đề 1.1 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a \leq b \leq c$, không có 2 số nào đồng thời bằng 0, ta cố định $a + b + c = p, abc = r$. Khi đó tồn tại 2 số không âm $a_0 \leq a_1$ sao cho $a \in [a_0, a_1]$. Ngoài ra, nếu $a = a_0$ thì $b = c$ và nếu $a = a_1$ thì $a = c$.*

Chứng minh. Theo bất đẳng thức AM-GM, $p^3 \geq 27r$. Từ giả thiết, ta có $b + c = p - a, bc = \frac{r}{a}$ nên theo định lý Viet, b, c là các nghiệm của phương trình $f(x) = x^2 - (p-a)x + \frac{r}{a} = 0$. Do $c \geq b \geq a$ nên ta phải có

$$\begin{cases} \Delta_f \geq 0 \\ f(a) \geq 0 \\ \frac{b+c}{2} = \frac{p-a}{2} \geq a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p-a)^2 \geq \frac{4r}{a} \\ a^2 - (p-a)a + \frac{r}{a} \geq 0 \\ \frac{p}{3} \geq a \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(a) = a(p-a)^2 - 4r \geq 0 \\ h(a) = 2a^3 - pa^2 + r \geq 0 \\ \frac{p}{3} \geq a \geq 0 \end{cases}$$

Ta có $g'(a) = (p-a)(p-3a) \geq 0$ nên g đồng biến. Mặt khác,

$$g(0) = -4r \leq 0, \quad g\left(\frac{p}{3}\right) = \frac{4(p^3 - 27r)}{27} \geq 0$$

nên tồn tại duy nhất $a_0 \in [0, \frac{p}{3}]$ sao cho $g(a_0) = 0$, nhưng do $g(a) \geq 0$ nên $a \geq a_0$. Tương tự, $h'(a) = 2p(3a - p) \leq 0$ nên h nghịch biến. Mặt khác

$$h(a_0) = 2a_0^3 - pa_0^2 + r = 2a_0^3 - pa_0^2 + \frac{a_0(p-3a_0)^2}{4} \geq 0, \quad h\left(\frac{p}{3}\right) = \frac{27r - p^3}{27} \leq 0$$

nên tồn tại duy nhất $a_1 \in [a_0, \frac{p}{3}]$ sao cho $h(a_1) = 0$, nhưng $h(a) \leq 0$ nên $a \leq a_1$. Mặt khác, nếu $a = a_0$ thì $b = c$ và nếu $a = a_1$ thì $a = c$. Bổ đề được chứng minh. ∎

Định lý 1.2 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0, ta cố định $a + b + c = p, abc = r$. Khi đó với mọi hàm f khả vi trên $[0, +\infty)$ thỏa mãn $k(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)$ là hàm lồi thì*

$$P(a, b, c) = f(a) + f(b) + f(c)$$

đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) khi có 2 biến bằng nhau.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$, từ bổ đề trên, ta suy ra được

$$\begin{cases} b = b(a) = \frac{p-a-\sqrt{(p-a)^2-\frac{4r}{a}}}{2} \\ c = c(a) = \frac{p-a+\sqrt{(p-a)^2-\frac{4r}{a}}}{2} \end{cases}$$

Từ đó, ta có

$$\begin{aligned} b'(a) &= \frac{-1 - \frac{a-p+\frac{2r}{a^2}}{\sqrt{(p-a)^2-\frac{4r}{a}}}}{2} = \frac{-1 - \frac{-(b+c)+\frac{2bc}{a}}{p-a-2b}}{2} = \frac{-1 - \frac{-(b+c)+\frac{2bc}{a}}{c-b}}{2} \\ &= \frac{2b - \frac{2bc}{a}}{2(c-b)} = \frac{b(a-c)}{a(c-b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c'(a) &= \frac{-1 + \frac{a-p+\frac{2r}{a^2}}{\sqrt{(p-a)^2-\frac{4r}{a}}}}{2} = \frac{-1 + \frac{-(b+c)+\frac{2bc}{a}}{p-a-2b}}{2} = \frac{-1 + \frac{-(b+c)+\frac{2bc}{a}}{c-b}}{2} \\ &= \frac{\frac{2bc}{a} - 2c}{2(c-b)} = \frac{c(b-a)}{a(c-b)} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P'_a(a,b,c) &= (f(a) + f(b(a)) + f(c(a)))' \\ &= f'(a) + b'(a) \cdot f'(b(a)) + c'(a) \cdot f'(c(a)) \\ &= f'(a) + \frac{b(a-c)}{a(c-b)} f'(b) + \frac{c(b-a)}{a(c-b)} f'(c) \\ &= \frac{a(c-b)f'(a) + b(a-c)f'(b) + c(b-a)f'(c)}{a(c-b)} \\ &= \frac{a(c-b)(f'(a) - f'(b)) + c(b-a)(f'(c) - f'(b))}{a(c-b)} \end{aligned}$$

Do $k(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)$ là hàm lồi nên

$$f'\left(\frac{1}{a}\right) \geq f'\left(\frac{1}{b}\right) + k'\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{a}\right) - f'\left(\frac{1}{b}\right) \geq k'\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

$$f'\left(\frac{1}{c}\right) \geq f'\left(\frac{1}{b}\right) + k'\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{c}\right) - f'\left(\frac{1}{b}\right) \geq k'\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&a(c-b)[f'(a) - f'(b)] + c(b-a)[f'(c) - f'(b)] \\
&\qquad \geq a(c-b)k'\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + c(b-a)k'\left(\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right) \\
&\qquad = k'\left(\frac{1}{b}\right)\left[a(c-b)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + c(b-a)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

Vậy nên $P'_a(a,b,c) \geq 0$, tức $P(a,b,c) = P_a(a,b,c)$ là hàm đồng biến, và từ đây, ta dễ dàng suy ra đpcm. ■

Hệ quả 1.3 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0, ta cố định $a + b + c = p, abc = r$. Khi đó với mọi hàm f khả vi trên $[0, +\infty)$ thỏa mãn $k(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right)$ là hàm lõm thì*

$$P(a,b,c) = f(a) + f(b) + f(c)$$

đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) khi có 2 biến bằng nhau.

Bổ đề 1.2 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a \leq b \leq c$, không có 2 số nào đồng thời bằng 0, ta cố định $a+b+c = p, ab+bc+ca = q$. Khi đó tồn tại 2 số không âm $a_0 \leq a_1$ sao cho $a \in [a_0, a_1]$. Ngoài ra, nếu $a = a_0$ thì $b = c$ hoặc $a = 0$, và nếu $a = a_1$ thì $a = b$.*

Chứng minh. Theo bất đẳng thức AM-GM, $p^2 \geq 3q$. Từ giả thiết trên, ta có $b + c = p - a, bc = q - a(p - a)$ nên theo định lý Viet, b, c là các nghiệm của phương trình $f(x) = x^2 - (p - a)x + q - a(p - a) = 0$. Do $c \geq b \geq a$ nên

$$\begin{cases} \Delta_f \geq 0 \\ f(a) \geq 0 \\ \frac{b+c}{2} = \frac{p-a}{2} \geq a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (p-a)^2 \geq q - a(p-a) \\ a^2 - (p-a)a + q - a(p-a) \geq 0 \\ \frac{p}{3} \geq a \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(a) = -3a^2 + 2ap + p^2 - 4q \geq 0 \\ h(a) = 3a^2 - 2pa + q \geq 0 \\ \frac{p}{3} \geq a \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{p-2\sqrt{p^2-3q}}{3} \leq a \leq \frac{p+2\sqrt{p^2-3q}}{3} \\ a \leq \frac{p-2\sqrt{p^2-3q}}{3} \vee a \geq \frac{p+2\sqrt{p^2-3q}}{3} \\ \frac{p}{3} \geq a \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \max\left\{0, \frac{p-2\sqrt{p^2-3q}}{3}\right\} \leq a \leq \frac{p+2\sqrt{p^2-3q}}{3}$$

Đặt $a_0 = \max\left\{0, \frac{p-2\sqrt{p^2-3q}}{3}\right\}$, $a_1 = \frac{p+2\sqrt{p^2-3q}}{3}$, thì ta có $a_0 \leq a \leq a_1$ và nếu $a = a_1$ thì $a = b$ và nếu $a = a_0$ thì khi $p^2 \leq 4q$ thì $b = c$, khi $p^2 \geq 4q$ thì $a = 0$. Bổ đề được chứng minh. ■

Định lý 1.3 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0, ta cố định $a + b + c = p, ab + bc + ca = q$. Khi đó với mọi hàm f khả vi trên $[0, +\infty)$ thỏa mãn $k(x) = f'(x)$ là hàm lồi thì*

$$P(a, b, c) = f(a) + f(b) + f(c)$$

đạt giá trị lớn nhất (nếu có) khi có 2 biến bằng nhau và giá trị nhỏ nhất (nếu có) khi có 2 biến bằng nhau hoặc có một biến bằng 0.

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$, khi đó, từ bổ đề trên ta có

$$\begin{cases} b = b(a) = \frac{p-a-\sqrt{(p-a)^2+4a(p-a)-4q}}{2} \\ c = c(a) = \frac{p-a+\sqrt{(p-a)^2+4a(p-a)-4q}}{2} \end{cases}$$

Do đó

$$b'(a) = \frac{-1 - \frac{p-3a}{\sqrt{(p-a)^2+4a(p-a)-4q}}}{2} = \frac{-1 - \frac{b+c-2a}{p-a-2b}}{2} = \frac{-1 - \frac{b+c-2a}{c-b}}{2} = \frac{a-c}{c-b}$$

$$c'(a) = \frac{-1 + \frac{p-3a}{\sqrt{(p-a)^2+4a(p-a)-4q}}}{2} = \frac{-1 + \frac{b+c-2a}{p-a-2b}}{2} = \frac{-1 + \frac{b+c-2a}{c-b}}{2} = \frac{b-a}{c-b}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P'_a(a,b,c) &= (f(a)+f(b(a))+f(c(a)))' \\ &= f'(a)+b'(a)\cdot f'(b(a))+c'(a)\cdot f'(c(a)) \\ &= f'(a)+\frac{a-c}{c-b}f'(b)+\frac{b-a}{c-b}f'(c) \\ &= \frac{(c-b)f'(a)+(a-c)f'(b)+(b-a)f'(c)}{c-b} \\ &= \frac{(c-b)(f'(a)-f'(b))+(b-a)(f'(c)-f'(b))}{c-b} \end{aligned}$$

Do $k(x)=f'(x)$ là hàm lồi nên

$$f'(a)-f'(b)\ge k'(b)(a-b), \quad f'(c)-f'(b)\ge k'(b)(c-b)$$

Và do đó

$$\begin{aligned} &(c-b)(f'(a)-f'(b))+(b-a)(f'(c)-f'(b)) \\ &\qquad \ge \ k'(b)[(c-b)(a-b)+(b-a)(c-b)]=0 \end{aligned}$$

Vậy nên $P'_a(a,b,c)\ge 0$, tức $P(a,b,c)=P_a(a,b,c)$ là hàm đồng biến và từ đây, ta dễ dàng suy ra đpcm. ∎

Hệ quả 1.4 *Cho các số không âm a,b,c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0, ta cố định $a+b+c=p, ab+bc+ca=q$. Khi đó với mọi hàm f khả vi trên $[0,+\infty)$ thỏa mãn $k(x)=f'(x)$ là hàm lõm thì*

$$P(a,b,c)=f(a)+f(b)+f(c)$$

đạt giá trị lớn nhất (nếu có) khi có 2 biến bằng nhau hoặc có một biến bằng 0 và giá trị nhỏ nhất (nếu có) khi có 2 biến bằng nhau.

Ví dụ 1.28 *Cho các số không âm a,b,c,k thỏa mãn không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P(a,b,c)=(ab+bc+ca)^k\left(\frac{1}{(a+b)^{2k}}+\frac{1}{(b+c)^{2k}}+\frac{1}{(c+a)^{2k}}\right).$$

(Phạm Sinh Tân)

Lời giải. Cố định $a+b+c=p, ab+bc+ca=q$, xét hàm số $k(x)=\left(\frac{1}{(p-x)^{2k}}\right)'$. Ta có

$$k''(x)=\frac{4k(k+1)(2k+1)}{(p-x)^{2k+3}}\ge 0$$

Do đó, theo định lý trên, ta chỉ cần xét các trường hợp sau là đủ

Trường hợp 1. $b = c$, khi đó biểu thức P được viết lại là

$$P(a,b) = (2ab + b^2)^k \left[\frac{2}{(a+b)^{2k}} + \frac{1}{(2b)^{2k}}\right]$$

Chuẩn hóa cho $b = 1$, xét hàm số

$$f(a) = (2a+1)^k \left[\frac{2}{(a+1)^{2k}} + \frac{1}{(2)^{2k}}\right]$$

Ta có

$$f'(a) = \frac{k(2a+1)^{k-1}[(a+1)^{2k+1} - 2^{2k+1}a]}{2^{2k-1}(a+1)^{2k+1}}$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow (a+1)^{2k+1} = 2^{2k+1}a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ \begin{cases} a \neq 1 \\ g(a) = \frac{a-1}{\sqrt[2k+1]{a}-1} - 2 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Từ đây, ta có thể dễ dàng chứng minh được $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm dương là 1 và $\alpha \neq 1$, từ đó, bằng cách lập bảng biến thiên, ta có thể thấy

$$f(a) \geq \min\{f(0), f(1), f(\alpha)\} = \min\left\{\frac{3^{k+1}}{2^{2k}}, 2 + \frac{1}{2^{2k}}, \frac{(2\alpha+1)^{k+1}}{2^{2k}\alpha}\right\}$$

Trường hợp 2. $a = 0$, khi đó biểu thức P được viết lại là

$$P(a,b,c) = (bc)^k \left[\frac{1}{(b+c)^{2k}} + \frac{1}{b^{2k}} + \frac{1}{c^{2k}}\right]$$

do tính đối xứng và thuần nhất nên ta có thể giả sử $0 \leq c \leq b = 1$, xét hàm số

$$h(c) = (c)^k \left[\frac{1}{(1+c)^{2k}} + 1 + \frac{1}{c^{2k}}\right]$$

Ta có

$$h'(c) = \frac{k\left[(c+1)^{k+1}(c^{2k}-1) - c^{2k}(c-1)\right]}{(c+1)^{2k}c^{k+1}}$$

$$h'^{k+1}(c^{2k}-1) = c^{2k}(c-1)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 1 \\ \begin{cases} 0 \leq c < 1 \\ k(c) = (2k+1)\ln(c+1) + \ln(1-2^{2k}) - 2k\ln c - \ln(1-c) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Và

$$k'(c) = \frac{2\left[kc^{k+2} - (k+1)c^{2k+1} + (k+1)c - k\right]}{c(1-c^2)(1-c^{2k})} = \frac{2l(c)}{c(1-c^2)(1-c^{2k})}$$

$$l'(c) = (k+1)\left[2kc^{2k+1} - (2k+1)c^{2k} + 1\right] \geq 0$$

Suy ra $l(c)$ đồng biến, mà

$$l(0) = -k \leq 0, \quad l(1) = 0 \Rightarrow l(c) \leq 0 \quad \forall c \in [0,1) \Rightarrow k'(c) \leq 0 \quad \forall c \in [0,1)$$

Nên $k(c)$ nghịch biến với mọi $c \in [0,1)$, suy ra $k(c)$ có tối đa 1 nghiệm thuộc $[0,1)$. Do đó $h'(c)$ có tối đa 2 nghiệm là 1 (luôn là nghiệm) và β (tùy trường hợp mà tồn tại hay không). Bằng cách lập bảng biến thiên, ta có thể thấy $h(c) \geq \max\{h(\beta), h(1)\}$. Từ đây, ta dễ dàng đi đến kết luận của bài toán.

Nhận xét 3 *Một số kết quả đã có*
⋆ *Với $k = 1$, ta có bất đẳng thức Iran 1996*

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

⋆ *Với $k = \frac{1}{2}, ab+bc+ca = 1$, ta có*

$$\frac{1}{(a+b)} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \geq \frac{5}{2}$$

⋆ *Với $k = \frac{1}{4}, ab+bc+ca = 1$, ta có*

$$\frac{1}{\sqrt{a+b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c}} + \frac{1}{\sqrt{c+a}} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

■

Ví dụ 1.29 *Cho các số không âm a, b, c, k thỏa mãn $a+b+c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P(a,b,c) = (ab)^k + (bc)^k + (ca)^k.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Ta có

$$P(a,b,c) = (abc)^k\left(\frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{c^k}\right)$$

Nên nếu ta có định $abc = r$ thì $P(a,b,c)$ sẽ có dạng định lý của ta, xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x^k}$, ta có

$$f'(x) = -\frac{k}{x^{k+1}} \Rightarrow k(x) = f'\left(\frac{1}{x}\right) = -kx^{k+1} \Rightarrow k''^2(k+1)x^{k-1} \leq 0$$

Do đó $f(x)$ là hàm số thỏa mãn điều kiện của hệ quả định lý , nên $P(a,b,c)$ sẽ đạt giá trị lớn nhất (nếu có) khi có 2 biến bằng nhau. Cho $b = c$, ta có

$$P(a,b,c) = 2a^kb^k + b^{2k} = \frac{2a^kb^k + b^{2k}}{(a+2b)^{2k}} = \frac{2x^k+1}{(x+1)^{2k}} = g(x) \quad \left(x = \frac{a}{b} \geq 0\right)$$

Ta có

$$g'(x) = \frac{-2k(x^k - 2x^{k-1} + 1)}{(x+2)^{2k+1}}$$

Dễ thấy $g'(x)$ có tối đa 2 nghiệm là 1 (luôn là nghiệm) và α ($\alpha \in [0,1]$) nên từ đây bằng cách lập bảng biến thiên, ta có

$$g(x) \le \max\{g(0), g(1)\} = \max\left\{\frac{1}{3^{2k-1}}, \frac{1}{4^k}\right\}.$$

Bài toán được giải quyết. ■

Ví dụ 1.30 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{5a+1} + \frac{b^2}{5b+1} + \frac{c^2}{5c+1} \le \frac{1}{8\sqrt{3(ab+bc+ca)}}.$$

(Bùi Việt Anh)

Lời giải. Cố định $ab+bc+ca=q$, xét hàm số $f(x) = \frac{x^2}{5x+1}$, ta có

$$k(x) = f'(x) = \frac{x(5x+2)}{(5x+1)^2} \Rightarrow k''(x) = -\frac{30}{(5x+1)^4} < 0$$

Do đó, ta chỉ cần xét bài toán trong 2 trường hợp sau là đủ
Trường hợp 1. Nếu $b = c \Rightarrow a = 1-2b$ và $b \le \frac{1}{2}$. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{2b^2}{5b+1} + \frac{(1-2b)^2}{2(3-5b)} \le \frac{1}{8\sqrt{3b(2-3b)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-3b)^2(256b^4 - 128b^3 - 71b^2 + 18b + 9)}{192b(2-3b)(3-5b)^2(5b+1)^2} \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng do $b \le \frac{1}{2}$.
Trường hợp 2. Nếu $a = 0 \Rightarrow c = 1-b$. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{b^2}{5b+1} + \frac{(1-b)^2}{6-5b} \le \frac{1}{8\sqrt{3b(1-b)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-2b)^2(1+4b-4b^2)(527+1278b-1278b^2)+49}{3072b(2-3b)(6-5b)^2(5b+1)^2} \ge 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng do $0 < b \le 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. ■

Ví dụ 1.31 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng với $k = \frac{\ln 3}{\ln 3 - \ln 2}$, ta có*

$$\left(\frac{a^2}{b^2+bc+c^2}\right)^{1/k} + \left(\frac{b^2}{c^2+ca+a^2}\right)^{1/k} + \left(\frac{c^2}{a^2+ab+b^2}\right)^{1/k} \geq 2.$$

(Phạm Sinh Tân)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left[\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{b^2+bc+c^2}\right)^{1/k}\right]^k \left[\sum_{cyc} a(b^2+bc+c^2)\right] \geq \left(\sum_{cyc} a^{\frac{3}{k+1}}\right)^{k+1}$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc} a^{\frac{3}{k+1}}\right)^{k+1} \geq 2^{k+1}\left[\sum_{cyc} a(b^2+bc+c^2)\right] = 2^{k+1}\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} ab\right)$$

Cố định $a+b+c = p, ab+bc+ca = q$ và xét hàm số $f(x) = x^{\frac{3}{k+1}}$, ta có

$$k(x) = f'(x) = \frac{3}{k+1}x^{\frac{2-k}{k+1}} \Rightarrow k''(x) = \frac{3(2k-1)(k-2)}{(k+1)^3}x^{-\frac{3k}{k+1}} > 0$$

Do đó, ta chỉ cần xét bài toán trong 2 trường hợp sau

Trường hợp 1. $a = 0$, chuẩn hóa cho $b \geq c = 1$, khi đó bất đẳng thức tương đương với

$$\left(a^{\frac{3}{k+1}}+1\right)^{k+1} \geq 2^k b(b+1)$$

$$\Leftrightarrow g(t) = \frac{\left(t^3+1\right)^{k+1}}{t^{k+1}(t^{k+1}+1)} \geq 2^k \quad (t = \sqrt[k+1]{b} \geq 1)$$

Ta có

$$g'(t) = \frac{(k+1)(t^3+1)^k(t^{k+4}-3t^{k+1}-2t^3+1)}{t^{k+2}(t^{k+1}+1)^2}$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^{k+4} - 3t^{k+1} - 2t^3 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 1 + t^3\left(t^{\frac{k+1}{2}}-1\right)^2 + 2t^{k+1}\left(t^{\frac{5-k}{2}}-1\right) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Từ đây, bằng cách lập bảng biến thiên, ta dễ thấy $g(t) \geq g(1) = 2^k \; \forall t \geq 1$.

Trường hợp 2. $b = c$, chuẩn hóa cho $b = c = 1$ và đặt $x = \sqrt[k+1]{a}$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$h(x) = \frac{(x^3+2)^{k+1}}{(x^{k+1}+2)(2x^{k+1}+1)} \geq 2^k$$

Ta có

$$h'(x) = \frac{2(k+1)x^2(x^3+2)^k(x^{2k+2} - 5x^{2k-1} + 5x^{k+1} - 5x^{k-2} + 3)}{(x^{k+1}+2)^2(2x^{k+1}+1)^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^{2k+2} - 5x^{2k-1} + 5x^{k+1} - 5x^{k-2} + 3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ u(x) = \frac{x^{2k+2}-5x^{2k-1}+5x^{k+1}+3}{5x^{k-2}} - 1 = 0 \quad (x > 0) \end{array}\right.$$

$$u'(x) = \frac{(k+4)x^{2k+2} - (k+1)x^{2k-1} + 15x^{k+1} - 3k + 6}{5x^{k-1}}$$

$$u'(x) = 0 \Leftrightarrow v(x) = (k+4)x^{2k+2} - (k+1)x^{2k-1} + 15x^{k+1} - 3k + 6 = 0$$

$$v'(x) = (k+1)(2(k+4)x^{k+1} - 4(2k-1)x^{k-2} + 15)$$

Dễ thấy

$$\begin{aligned} \frac{v'(x)}{(k+1)x^k} &\geq 2(k+4)x_0^{k+1} - 4(2k-1)x_0^{k-2} + 15 \\ &= 2x_0^{k-2}((k+1)x_0^3 - 2(2k-1)) + 15 \\ &> 2((k+1)x_0^3 - 2(2k-1)) + 15 > 0 \end{aligned}$$

trong đó $\frac{2}{3} < x_0 = \sqrt{\frac{2(k-2)(2k-1)}{(k+1)(k+4)}} < 1$.

Suy ra $u'(x)$ đồng biến, lại có $u'(0) = 3(2-k) < 0, u'(1) = 3(7-2k) > 0$ nên nó có duy nhất một nghiệm $x_1 \in (0,1)$ do đó $u(x)$ đồng biến trên $[x_1, +\infty)$ và nghịch biến trên $(0, x_1]$, do $u(1) = 0$ nên $u(x_1) < 0$ mà $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = +\infty$ nên $u(x)$ có đúng 2 nghiệm là $x_2 \in (0, x_1)$ và 1. Từ đây, bằng cách lập bảng biến thiên, ta có

$$h(x) \geq \min\{h(0), h(1)\} = 2^k.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.32 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Nếu $k \geq 1$, ta có

$$\frac{1}{3}\sum_{cyc} \frac{a^k}{(b+c)^k} \geq \left(\frac{1}{3}\sum_{cyc} \frac{a}{b+c}\right)^k \geq \frac{1}{2^k}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^k}{(b+c)^k} \geq \frac{3}{2^k}$$

Nếu $k \leq 1$, sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left[\sum_{cyc} \frac{a^k}{(b+c)^k}\right] \left[\sum_{cyc} a(b+c)\right]^k \geq \left(\sum_{cyc} a^{\frac{2k}{k+1}}\right)^{k+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^k}{(b+c)^k} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a^{\frac{2k}{k+1}}\right)^{k+1}}{\left[\sum\limits_{cyc} a(b+c)\right]^k} = \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a^{\frac{2k}{k+1}}\right)^{k+1}}{2^k\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^k}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{\left(\sum\limits_{cyc} a^{\frac{2k}{k+1}}\right)^{k+1}}{2^k\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^k} \geq \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\}$$

Cố định $a+b+c=p, ab+bc+ca=q$ và xét hàm số $f(x) = x^{\frac{2k}{k+1}}$, ta có

$$f'(x) = \frac{2k}{k+1}x^{\frac{1-k}{1+k}} \Rightarrow k(x) = \frac{2k}{k+1}x^{\frac{k-1}{k+1}} \Rightarrow k''(x) = \frac{4k(1-k)}{(k+1)^3}x^{-\frac{k+3}{k+1}} > 0$$

Do đó, ta chỉ cần xét bài toán trong 2 trường hợp sau là đủ

Trường hợp 1. $a=0$, ta cần chứng minh

$$\frac{\left(b^{\frac{2k}{k+1}} + c^{\frac{2k}{k+1}}\right)^{k+1}}{2^k b^k c^k} \geq \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

Trường hợp 2. $b=c$, chuẩn hóa cho $b=c=1$ và đặt $t = a^{\frac{1}{k+1}}$, ta cần chứng minh

$$\frac{(t^{2k}+2)^{k+1}}{2^k(2t^{k+1}+1)^k} \geq \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\}$$

$$\Leftrightarrow g(t) = \frac{(t^{2k}+2)^{k+1}}{(2t^{k+1}+1)^k} \geq \min\left\{2^{k+1}, 3\right\}$$

Ta có

$$g'(t) = \frac{2kt^{2k-1}(k+1)(t^{2k}+2)^k(t^{k+1}-2t^{1-k}+1)}{(2t^{k+1}+1)^{k+1}}$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t^{k+1} - 2t^{1-k} + 1 = 0 \Leftrightarrow h(t) = \frac{t^{k+1}+1}{t^{1-k}} - 2 = 0$$

$$h'(t) = \frac{2kt^{k+1} + k - 1}{t^{2-k}}$$

Từ đây dễ thấy $h'(t)$ có tối đa một nghiệm thuộc $(0,1]$, suy ra có tối đa 2 nghiệm thuộc $(0,1]$, trong đó luôn có một nghiệm là 1. Bằng cách cách lập bảng biến thiên, dễ thấy

$$g(t) \geq \min\{g(0), g(1)\} = \min\left\{2^{k+1}, 3\right\}.$$

Bài toán được giải quyết xong. ■

Ví dụ 1.33 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c+abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$ab + bc + ca \leq \frac{(2+abc)(1+2abc)}{7-abc}.$$

Lời giải. Giống như các bài trước, bài này ta cũng chỉ cần xét $a = b$ là đủ. Khi đó, ta có $c = \frac{1-2a}{1+a^2} \Rightarrow a \leq \frac{1}{2}$, bất đẳng thức trở thành

$$a^2 + 2ac \leq \frac{(2+a^2c)(1+2a^2c)}{7-a^2c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(1-a)(2+a)}{a^2+1} \leq \frac{(2+3a^2-2a^3)(1-a)(4a^2+a+1)}{(2a^3+6a^2+7)(a^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow a(1-a)(2+a)(2a^3+6a^2+7) \leq (2+3a^2-2a^3)(4a^2+a+1)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3+3a-1)^2 \geq 0.$$

Vậy ta có đpcm. ■

Ví dụ 1.34 *Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 8$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^2}{\sqrt{(x^3+1)(y^3+1)}} + \frac{y^2}{\sqrt{(y^3+1)(z^3+1)}} + \frac{z^2}{\sqrt{(z^3+1)(x^3+1)}} \geq \frac{4}{3}.$$

(APMO 2005)

Lời giải. Đặt $x = 2\sqrt[3]{\frac{a}{b}}, y = 2\sqrt[3]{\frac{c}{a}}, z = 2\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$, bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{a^{7/6}}{b^{1/6}\sqrt{(8a+b)(8c+a)}} \geq \frac{1}{3}$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left[\sum_{cyc} \frac{a^{7/6}}{b^{1/6}\sqrt{(8a+b)(8c+a)}}\right]^6 \left[\sum_{cyc}(8a+b)(8c+a)\right]^3 \left(\sum_{cyc} ab\right) \geq \left(\sum_{cyc} a^{4/5}\right)^{10}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} 3^6\left(\sum_{cyc} a^{4/5}\right)^{10} &\geq \left(\sum_{cyc} ab\right)\left[\sum_{cyc}(8a+b)(8c+a)\right]^3 \\ &= \left(\sum_{cyc} ab\right)\left(8\sum_{cyc} a^2 + 73\sum_{cyc} ab\right)^3 \end{aligned}$$

Do

$$\begin{aligned} \left(\sum_{cyc} ab\right)\left(8\sum_{cyc} a^2 + 73\sum_{cyc} ab\right)^3 &\leq \left(\sum_{cyc} ab\right)\left(9\sum_{cyc} a^2 + 72\sum_{cyc} ab\right)^3 \\ &= 3^6\left(\sum_{cyc} ab\right)\left(\sum_{cyc} a^2 + 8\sum_{cyc} ab\right)^3 \end{aligned}$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc} a^{4/5}\right)^{10} \geq \left(\sum_{cyc} ab\right)\left(\sum_{cyc} a^2 + 8\sum_{cyc} ab\right)^3$$

Đến đây, sử dụng kết quả của ta, dễ dàng suy ra được ta chỉ cần xét các trường hợp $a = 0$ hoặc $b = c$.

Trường hợp 1. $a = 0$, giả sử $b \geq c = 1$, bất đẳng thức trở thành

$$(b^{4/5}+1)^{10} \geq b(b^2+8b+1)^3$$

$$\Leftrightarrow f(b) = \frac{(b^{4/5}+1)^{10}}{b(b^2+8b+1)^3} \geq 1$$

$$\begin{aligned} f'(b) &= \frac{(b^{4/5}+1)^9(b^{14/5} - 7b^2 + 32b^{9/5} - 32b + 7b^{4/5} - 1)}{b^2(b^2+8b+1)^4} \\ &= \frac{(b^{4/5}+1)^9(b^{2/5}-1)m(b)}{b^2(b^2+8b+1)^4} \geq 0 \end{aligned}$$

trong đó

$$m(b) = b^{12/5} + b^2 - 6b^{8/5} + 32b^{7/5} - 6b^{6/5} + 32b - 6b^{4/5} + b^{2/5} + 1 > 0$$

$$\Rightarrow f(b) \geq f(1) = \frac{128}{125} > 1$$

Trường hợp 2. $b = c$, giả sử $b = c = 1$, bất đẳng thức trở thành

$$(a^{4/5} + 2)^{10} \geq (2a + 1)(a^2 + 16a + 10)^3$$

$$\Leftrightarrow g(a) = \frac{(a^{4/5} + 2)^{10}}{(2a + 1)(a^2 + 16a + 10)^3} \geq 1$$

$$\begin{aligned} g'(a) &= \frac{2(a^{4/5} + 2)^9(a^3 - 14a^{11/5} + 65a^2 - 134a^{6/5} + 110a - 68a^{1/5} + 40)}{a^{1/5}(2a + 1)^2(a^2 + 16a + 10)^4} \\ &= \frac{2(a^{4/5} + 2)^9(a^{1/5} - 1)h(a^{1/5})}{a^{1/5}(2a + 1)^2(a^2 + 16a + 10)^4} \end{aligned}$$

Trong đó

$$\begin{aligned} h(x) &= x^{14} + x^{13} + x^{12} + x^{11} - 13x^{10} + 52x^9 + 52x^8 + 52x^7 + 52x^6 - 82x^5 + 28x^4 \\ &\quad +28x^3 + 28x^2 + 28x - 40 \end{aligned}$$

Dễ thấy $h(x)$ đồng biến, và $h(0) \cdot h(1) < 0$ nên tồn tại duy nhất nghiệm $x_0 \in (0, 1)$ của $h(x)$, suy ra $g'(a)$ có đúng 2 nghiệm là 1 và $x_0^5 \in (0, 1)$. Từ đây, bằng cách lập bảng biến thiên dễ thấy

$$g(a) \geq \min\{g(0), g(1)\} = \min\left\{\frac{128}{125}, 1\right\} = 1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Nhận xét 4 *Đây là bài toán thi Olympic toán Châu Á-Thái Bình Dương 2005 (APMO). Cách giải ở đáp án rất hay và đẹp mắt nhờ sử dụng kết quả* $\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \geq \frac{1}{x^2+2}$*. Hiện nay, ngoài lời giải ở đáp án và lời giải của chúng tôi ra chưa có một lời giải nào khác cho bất đẳng thức này.*

■

1.3.6 *pqr* hoán vị

Với các kiến thức bổ sung ở trên, ta đã giải được khá nhiều các bài toán dạng đối xứng. Nhưng còn các dạng hoán vị thì sao? Kỹ thuật này liệu có dùng được cho nó không? Câu trả lời là được. Điều khó khăn lớn nhất khi gặp phải các dạng này là ta không biết làm sao để biểu diễn các biểu thức dạng hoán vị sang *pqr*. Có một cách làm rất thú vị để chuyển các dạng này sang *pqr* là dùng tam thức bậc 2. Chúng ta có kết quả cơ bản sau (định lý đảo của định lý Viet): Với 2 số thực u, v thỏa $u + v = S, uv = P$ ($S^2 \geq 4P$) thì u, v là nghiệm của phương trình bậc 2: $X^2 - SX + P = 0$. Dựa trên cơ sở này, ta có thể dễ dàng biểu diễn các biểu thức hoán vị vòng quanh cho 3 biến a, b, c theo p, q, r. Và sau khi biểu diễn về dạng này, ta chỉ việc xét một hàm một biến theo r (hoặc q) khi đã cố định $p = \text{const}$. Như vậy, có thể nói bản chất của kỹ thuật này chẳng qua chỉ là tam thức bậc 2 và khảo sát hàm số.

Ví dụ 1.35 *Biểu diễn $a^2b + b^2c + c^2a, ab^2 + bc^2 + ca^2$ theo p, q, r.*

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = a^2b + b^2c + c^2a \\ y = ab^2 + bc^2 + ca^2 \end{cases}$. Khi đó, ta có

$$x + y = \sum_{cyc} ab(a + b) = \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} ab\right) - 3abc = pq - 3r$$

$$\begin{aligned} xy &= \left(\sum_{cyc} a^2b\right)\left(\sum_{cyc} ab^2\right) = \sum_{cyc} a^3b^3 + \sum_{cyc} a^4bc + 3a^2b^2c^2 \\ &= q^3 - 3pqr + 3r^2 + r(p^3 - 3pq + 3r) + 3r^2 = 9r^2 + p(p^2 - 6q)r + q^3 \end{aligned}$$

Vậy nên x, y là các nghiệm của phương trình $X^2 - (pq - 3r)X + 9r^2 + p(p^2 - 6q)r + q^3 = 0$. Giải phương trình này, ta được

$$\begin{cases} X_1 = \frac{pq - 3r + \sqrt{p^2q^2 - 4q^3 + 2p(9q - 2p^2)r - 27r^2}}{2} \\ X_2 = \frac{pq - 3r - \sqrt{p^2q^2 - 4q^3 + 2p(9q - 2p^2)r - 27r^2}}{2} \end{cases}$$

Các nghiệm này luôn tồn tại vì ta luôn có $p^2q^2 - 4q^3 + 2p(9q - p^2)r - 27r^2 \geq 0$ (bởi vì nó bằng $(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2$!). Do đó $\left[\begin{array}{l} x = X_1, y = X_2 \\ x = X_2, y = X_1 \end{array}\right.$. Tùy theo trường hợp mà ta có thể lựa chọn đáp số, chẳng hạn như trong trường hợp $a \geq b \geq c$ thì $x \geq y$ nên ta phải có $x = X_1, y = X_2$. ■

Ví dụ 1.36 *Biểu diễn $a^3b + b^3c + c^3a, ab^3 + bc^3 + ca^3$ theo p, q, r.*

Lời giải. Đặt $\begin{cases} x = a^3b + b^3c + c^3a \\ y = ab^3 + bc^3 + ca^3 \end{cases}$. Khi đó, ta có

$$x + y = \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) = \left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc} ab\right) - abc\sum_{cyc} a = (p^2 - 2q)q - pr$$

$$\begin{aligned}
xy &= \left(\sum_{cyc} a^3b\right)\left(\sum_{cyc} ab^3\right) = \sum_{cyc} a^4b^4 + abc\sum_{cyc} a^5 + a^2b^2c^2\sum_{cyc} ab \\
&= \left(\sum_{cyc} a^2b^2\right)^2 - 2a^2b^2c^2\sum_{cyc} a^2 + a^2b^2c^2\sum_{cyc} ab \\
&\quad +abc\left[\left(\sum_{cyc} a^3\right)\left(\sum_{cyc} a^2\right) - \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right) + abc\sum_{cyc} ab\right] \\
&= 7p^2r^2 + p(p^4+q^2-5p^2q)r + q^4
\end{aligned}$$

Do đó x, y là các nghiệm của phương trình

$$X^2 - [(p^2-2q)q - pr]X + 7p^2r^2 + p(p^4+q^2-5p^2q)r + q^4 = 0$$

Giải phương trình này, ta được

$$\begin{cases} X_1 = \frac{p^2q-2q^2-pr+p\sqrt{p^2q^2-4q^3+2p(9q-2p^2)r-27r^2}}{2} \\ X_2 = \frac{p^2q-2q^2-pr-p\sqrt{p^2q^2-4q^3+2p(9q-2p^2)r-27r^2}}{2} \end{cases}.$$

Do đó, ta được $\left[\begin{array}{l} x = X_1, y = X_2 \\ x = X_2, y = X_1 \end{array}\right.$. ■

Ví dụ 1.37 *Biểu diễn $a^4b + b^4c + c^4a, ab^4 + bc^4 + ca^4$ theo p, q, r.*

Lời giải. Thực hiện tương tự như trên, ta dễ dàng tìm được

$$\begin{cases} a^4b + b^4c + c^4a = \frac{(5q-p^2)r+pq(p^2-3q)\pm(p^2-q)\sqrt{p^2q^2-4q^3+2p(9q-2p^2)r-27r^2}}{2} \\ ab^4 + bc^4 + ca^4 = \frac{(5q-p^2)r+pq(p^2-3q)\mp(p^2-q)\sqrt{p^2q^2-4q^3+2p(9q-2p^2)r-27r^2}}{2} \end{cases}.$$

■

Ví dụ 1.38 *Biểu diễn $a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2, a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3$ theo p, q, r.*

Lời giải. Thực hiện tương tự như trên, ta dễ dàng tìm được

$$\begin{cases} a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 = \frac{pq^2-(2p^2+q)r\pm q\sqrt{p^2q^2-4q^3+2p(9q-2p^2)r-27r^2}}{2} \\ a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 = \frac{pq^2-(2p^2+q)r\mp q\sqrt{p^2q^2-4q^3+2p(9q-2p^2)r-27r^2}}{2} \end{cases}.$$

■

Ví dụ 1.39 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = a^2b + b^2c + c^2a + abc.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Giả sử $a \geq b \geq c$, ta có

$$\begin{aligned} P &= a^2b + b^2c + c^2a + abc = \frac{q - 3r + \sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q-2)r - 27r^2}}{2} + r \\ &= \frac{q - r + \sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q-2)r - 27r^2}}{2} = f(r) \end{aligned}$$

Ta có

$$f'(r) = \frac{9q - 2 - 27r - \sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q-2)r - 27r^2}}{2\sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q-2)r - 27r^2}}$$

$$f'(r) = 0 \Rightarrow r = r_0 = \frac{7(9q-2) - (1-3q)\sqrt{7(1-3q)}}{189}$$

Nếu $7(9q-2) \leq (1-3q)\sqrt{7(1-3q)}$, ta có $f'(r) \leq 0$, suy ra

$$\begin{aligned} f(r) &\leq f(0) = \frac{q + q\sqrt{1-4q}}{2} = \frac{\frac{1-x^2}{4} + \frac{x(1-x^2)}{4}}{2} = \frac{(1+x)(1-x^2)}{8} \quad \left(x = \sqrt{1-4q}\right) \\ &= -\frac{(3x-1)^2(3x+5)}{216} + \frac{4}{27} \leq \frac{4}{27} \end{aligned}$$

Nếu $7(9q-2) \geq (1-3q)\sqrt{7(1-3q)}$, bằng cách lập bảng biến thiên, ta có

$$\begin{aligned} f(r) &\leq f(r_0) = \frac{q - r_0 + \sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q-2)r_0 - 27r_0^2}}{2} \\ &= \frac{q - r_0 + (9q - 2 - 27r_0)}{2} = 5q - 14r_0 - 1 \\ &= 5q - 1 - \frac{2\left[7(9q-2) - (1-3q)\sqrt{7(1-3q)}\right]}{27} = \frac{9q + 1 + 2(1-3q)\sqrt{7(1-3q)}}{27} \\ &= \frac{3(1-t^2) + 1 + 2\sqrt{7}t^3}{27} = \frac{2\sqrt{7}t^3 - 3t^2 + 4}{27} \quad \left(t = \sqrt{1-3q}\right) \end{aligned}$$

Do $7(9q-2) \geq (1-3q)\sqrt{7(1-3q)} \Rightarrow t^3 \leq \sqrt{7}(1-3t^2) \Rightarrow t \leq \frac{3}{2\sqrt{7}}$, do đó

$$\frac{2\sqrt{7}t^3 - 3t^2 + 4}{27} = \frac{t^2\left(2\sqrt{7}t - 3\right) + 4}{27} \leq \frac{4}{27}$$

Tóm lại, ta có $\max P = \frac{4}{27}$ đạt được khi $\left[\begin{array}{l} a = b = c = \frac{1}{3} \\ a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 0 \\ a = \frac{1}{3}, b = 0, c = \frac{2}{3} \\ a = 0, b = \frac{2}{3}, c = \frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Nhận xét 5 *Chúng ta có một vài điểm cần chú ý*

Thật ra, khi giải phương trình $f'(r) = 0$ ta được đến 2 nghiệm là $\frac{7(9q-2)\pm(1-3q)\sqrt{7(1-3q)}}{189}$ nhưng các nghiệm phải thỏa mãn điều kiện là $r \geq 0$ và $9q - 2 - 27r \geq 0$. Nhưng khi so lại với hệ điều kiện này thì chỉ có nghiệm $r_0 = \frac{7(9q-2)-(1-3q)\sqrt{7(1-3q)}}{189}$ thỏa khi

$$7(9q-2) \geq (1-3q)\sqrt{7(1-3q)}$$

Do đó ta phải xét 2 trường hợp như ở lời giải trên.

Trong trường hợp nghiệm $r_0 = \frac{7(9q-2)-(1-3q)\sqrt{7(1-3q)}}{189}$ thỏa thì chắc hẳn các bạn cũng rất ngại khi thay vào biểu thức ban đầu, bởi lẽ toàn là căn thức (căn trong căn), tính toán rất phức tạp. Nhưng chúng ta có một mẹo nhỏ ở đây là $9q - 2 - 27r_0 = \sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q-2)r_0 - 27r_0^2}$, do đó khi thay r_0 vào biểu thức $f(r)$, ta hãy thay $\sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q-2)r_0 - 27r_0^2}$ bởi $9q - 2 - 27r_0$ rồi hãy thay trực tiếp giá trị của r_0 vào, tính toán sẽ trở nên đơn giản rất nhiều!

■

Ví dụ 1.40 *Cho các số thực a, b, c. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \frac{\left|ab(a^2-b^2) + bc(b^2-c^2) + ca(c^2-a^2)\right|}{(a^2+b^2+c^2)^2}.$$

(IMO 2006)

Lời giải. Chuẩn hóa cho $p = 1$, khi đó, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{|(a-b)(b-c)(c-a)|}{(1-2q)^2} = \frac{\sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q-2)r - 27r^2}}{(1-2q)^2} \\ &= \frac{\sqrt{-27\left(r - \frac{9q-2}{27}\right)^2 + \frac{4(1-3q)^3}{27}}}{(1-2q)^2} \leq \frac{\sqrt{\frac{4(1-3q)^3}{27}}}{(1-2q)^2} = \frac{2(1-3q)\sqrt{3(1-3q)}}{9(1-2q)^2} = f(q) \end{aligned}$$

Ta có

$$f'(q) = -\frac{(6q+1)\sqrt{3(1-3q)}}{9(1-2q)^3}$$

$$f'(q) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} q = -\frac{1}{6} \\ q = \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Bằng cách lập bảng biến thiên, ta thấy

$$f(q) \leq f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{32} \;\; \forall q \leq \frac{1}{3}.$$

Mặt khác, cho $\begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ c = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ thì $P = \frac{9\sqrt{2}}{32}$ nên $\max P = \frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Nhận xét 6 *Bài toán này là bài toán trong đề thi toán quốc tế năm 2006, cách giải trên ngắn gọn hơn cách giải ở đáp án rất nhiều.*

■

Ví dụ 1.41 *Cho các số không âm a, b, c, d. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}{(a+b+c+d)^6} \le \frac{1}{1728}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát, giả sử $d = \min\{a, b, c, d\}$, đặt $a-d = x, b-d = y, c-d = z$ $(x, y, z \ge 0)$, khi đó ta có

$$\begin{aligned}
\frac{(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}{(a+b+c+d)^6} &= \frac{xyz(x-y)(x-z)(y-z)}{(x+y+z+3d)^6} \\
&\le \frac{xyz\,|(x-y)(x-z)(y-z)|}{(x+y+z+3d)^6} \\
&\le \frac{xyz\,|(x-y)(x-z)(y-z)|}{(x+y+z)^6}
\end{aligned}$$

Chuẩn hóa cho $p = 1 \Rightarrow r \le \frac{1}{27}$, ta có

$$\frac{xyz\,|(x-y)(x-z)(y-z)|}{(x+y+z)^6} = r\sqrt{q^2-4q^3+18qr-4r-27r^2} = r\sqrt{f(q)}$$

Ta lại có

$$f'(q) = 2(q-6q^2+9r)$$

$$f'(q) = 0 \Leftrightarrow q = \frac{1+\sqrt{216r+1}}{12}$$

Bằng cách lập bảng biến thiên, ta thấy

$$f(q) \le f\left(\frac{1+\sqrt{216r+1}}{12}\right) = \frac{(216r+1)^{3/2}}{216} - 27r^2 - \frac{5}{2}r + \frac{1}{216}$$

Do đó

$$r\sqrt{q^2-4q^3+18qr-4r-27r^2} \le r\sqrt{\frac{(216r+1)^{3/2}}{216} - 27r^2 - \frac{5}{2}r + \frac{1}{216}}$$

Đặt $t^2 = 216r + 1 \ge 1 \Rightarrow r = \frac{t^2-1}{216}$, từ đây ta có thể thấy

$$r\sqrt{\frac{(216r+1)^{3/2}}{216} - 27r^2 - \frac{5}{2}r + \frac{1}{216}} = \frac{(t^2-1)(3-t)\sqrt{(t+1)(3-t)}}{5184\sqrt{3}} = h(t)$$

Ta có

$$h'(t) = \frac{t(2-t)\sqrt{(t+1)(3-t)}}{1296\sqrt{3}}$$
$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

nên bằng cách lập bảng biến thiên, ta thấy

$$h(t) \le h(2) = \frac{1}{1728}.$$

Từ đây ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a = 2t\cos^2\frac{\pi}{18} \\ b = \left(1-\sin\frac{\pi}{18}\right)t \\ c = \sin\frac{\pi}{18}\left(2\sin\frac{\pi}{18}+1\right)t \\ d = 0 \end{cases}$ và các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.42 *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Chuẩn hóa cho $p = 1$, khi đó ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong trường hợp $a \ge b \ge c$ là đủ, suy ra

$$\sum_{cyc} a^3b = \frac{q-2q^2-r+\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2} = f(r)$$

Ta có

$$f'(r) = \frac{9q-2-27r-\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}$$
$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = r_0 = \frac{7(9q-2)-(1-3q)\sqrt{7(1-3q)}}{189}$$

Lập bảng biến thiên, ta có $f(r) \le f(r_0)$ $\forall r$. Mặt khác, ta lại có

$$\begin{aligned} f(r_0) &= \frac{q-2q^2-r_0+\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r_0-27r_0^2}}{2} \\ &= \frac{q-2q^2-r_0+9q-2-27r_0}{2} = 5q-q^2-1-14r_0 \\ &= 5q-q^2-1-\frac{2\left[7(9q-2)-(1-3q)\sqrt{7(1-3q)}\right]}{27} \\ &= \frac{1+9q-27q^2+2(1-3q)\sqrt{7(1-3q)}}{27} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$3f(r_0) \le (1-2q)^2$$
$$\Leftrightarrow 1+9q-27q^2+2(1-3q)\sqrt{7(1-3q)} \le 9(1-2q)^2$$
$$\Leftrightarrow (1-3q)\left[8-21q-2\sqrt{7(1-3q)}\right] \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(1-3q)[(8-21q)^2-28(1-3q)]}{8-21q+2\sqrt{7(1-3q)}} \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{9(1-3q)(2-7q)^2}{8-21q+2\sqrt{7(1-3q)}} \ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có đpcm. ■

Ví dụ 1.43 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$ và $ab+bc+ca=q$ $(1 \ge 3q)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét $a \ge b \ge c$. Ta có

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} = \frac{\sum\limits_{cyc} ab^3}{abc} = \frac{q-2q^2-r-\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2r} = f(r)$$
$$f'(r) = \frac{q^2-4q^3+(9q-2)r+(2q^2-1)\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2r^2\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}$$
$$f'(r)=0 \Rightarrow r=r_0=\frac{q^3\left[9q^2-2q+(1-3q)\sqrt{(1-2q)(1-3q)}\right]}{27q^4-27q^3+27q^2-9q+1}$$

Từ đây, bằng cách lập bảng biến thiên, dễ thấy $f(r) \ge f(r_0)\ \forall r$, lại có

$$\begin{aligned} f(r_0) &= \frac{q-2q^2-r_0-\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r_0-27r_0^2}}{2r_0} \\ &= \frac{q-2q^2-r_0-\frac{q^2-4q^3+(9q-2)r_0}{1-2q^2}}{2r_0} \\ &= \frac{(2q^2-9q+1)r_0+q+2q^3-3q^2+4q^4}{2r_0(1-2q^2)} \end{aligned}$$

Từ đây, dễ dàng đi đến kết luận bài toán.

Nhận xét 7 *Chúng ta có một vài điểm khá thú vị, không chỉ cho bài này nói riêng mà còn cho tất cả các bài khác nói chung. Xin phân tích rõ hơn ở bài này, các bài khác, ta có thể lấy ý tưởng tương tự. Sau khi thay xong biểu thức* $f(r_0) = \frac{(2q^2-9q+1)r_0+q+2q^3-3q^2+4q^4}{2r_0(1-2q^2)} = g(r_0)$*, chúng ta thấy được gì ở đây?* $g(r_0)$ *là một hàm đơn điệu theo* r_0*, cụ thể là nó nghịch biến, điều này có ý nghĩa rất lớn, các bạn ắt hẳn còn nhớ kết quả sau trong bất đẳng thức ba biến (xem ở bài viết trước)*

$$\frac{p(9q-2p^2)-2(p^2-3q)\sqrt{p^2-3q}}{27} \le r \le \frac{p(9q-2p^2)+2(p^2-3q)\sqrt{p^2-3q}}{27}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(p+\sqrt{p^2-3q}\right)^2\left(p-2\sqrt{p^2-3q}\right)}{27} \le r \le \frac{\left(p-\sqrt{p^2-3q}\right)^2\left(p+2\sqrt{p^2-3q}\right)}{27}$$

Ở đây, ta cũng sẽ có

$$\frac{\left(p+\sqrt{p^2-3q}\right)^2\left(p-2\sqrt{p^2-3q}\right)}{27} \le r_0 \le \frac{\left(p-\sqrt{p^2-3q}\right)^2\left(p+2\sqrt{p^2-3q}\right)}{27}$$

vì ta có

$$q^2-4q^3+(9q-2)r_0+(2q^2-1)\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r_0-27r_0^2}=0$$

$$\Rightarrow [q^2-4q^3+(9q-2)r_0]^2=(1-2q^2)^2[q^2-4q^3+2(9q-2)r_0-27r_0^2]$$

Do đó, ta phải có

$$q^2-4q^3+2(9q-2)r_0-27r_0^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(p+\sqrt{p^2-3q}\right)^2\left(p-2\sqrt{p^2-3q}\right)}{27} \le r_0 \le \frac{\left(p-\sqrt{p^2-3q}\right)^2\left(p+2\sqrt{p^2-3q}\right)}{27}$$

Như vậy, chúng ta sẽ có

$$f(r) \ge f(r_0) \ge g\left(\frac{\left(p-\sqrt{p^2-3q}\right)^2\left(p+2\sqrt{p^2-3q}\right)}{27}\right)$$

Cái lợi của kết quả cuối này ở chỗ đối với những bất đẳng thức không chặt lắm mà dùng cả một kết quả khổng lồ là $f(r_0)$ *để giải thì quả là bất tiện, nhưng với* $g\left(\frac{\left(p-\sqrt{p^2-3q}\right)^2\left(p+2\sqrt{p^2-3q}\right)}{27}\right)$ *thì mọi việc sẽ trở nên đơn giản hơn rất nhiều, chúng ta sẽ không phải tính toán với căn thức (vì nếu ta đặt* $3q = p^2 - x^2$ $(x \ge 0)$ *thì*

$g\left(\frac{\left(p-\sqrt{p^2-3q}\right)^2\left(p+2\sqrt{p^2-3q}\right)}{27}\right)$ *là một biểu thức không chứa căn). Rõ hơn, chúng ta lấy ví dụ đơn giản sau*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

Bất đẳng thức này tương đương

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a} \geq 5-12q.$$

Như vậy, nếu ta chứng minh $f(r_0)=\min\left\{\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right\} \geq 5-12q$ *thì bài toán được giải quyết xong. Vì đây là bất đẳng thức 1 biến theo nên ta tin chắc là sẽ làm được nếu có một kỹ thuật tính toán tốt, nhưng với một bài toán không quá chặt như thế này thì việc dùng* $f(r_0)$ *thì có vẻ là "hơi quá tay", chúng ta hãy thử dùng*

$$g\left(\frac{\left(p-\sqrt{p^2-3q}\right)^2\left(p+2\sqrt{p^2-3q}\right)}{27}\right)=g\left(\frac{\left(1-\sqrt{1-3q}\right)^2\left(1+2\sqrt{1-3q}\right)}{27}\right)$$

Đặt $3q=1-x^2 \Rightarrow 1 \geq x \geq 0$, *khi đó ta có*

$$\begin{aligned} & g\left(\frac{\left(1-\sqrt{1-3q}\right)^2\left(1+2\sqrt{1-3q}\right)}{27}\right) \\ \geq \quad & g\left(\frac{(1-x)^2(1+2x)}{27}\right)=\frac{7+7x+32x^2+16x^3+5x^4+28x^5-8x^6-6x^7}{(1-x)(1+2x)(7+4x^2-2x^4)}\end{aligned}$$

$$5-12q=1+4x^2$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{7+7x+32x^2+16x^3+5x^4+28x^5-8x^6-6x^7}{(1-x)(1+2x)(7+4x^2-2x^4)} \geq 1+4x^2$$

Rất đơn giản, bằng biến đổi tương đương, bạn có thể bất đẳng thức trên tương đương với

$$x^2(14-16x+55x^2+14x^3+28x^4+2x^5-16x^6) \geq 0.$$

Nhưng bất đẳng thức này lại hiển nhiên đúng do $1 \geq x \geq 0$.

$\blacksquare$

Ví dụ 1.44 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq 3\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}}.$$

(Nguyễn Văn Thạch)

Lời giải. Theo bài trên, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}\geq\frac{7+7x+32x^2+16x^3+5x^4+28x^5-8x^6-6x^7}{(1-x)(1+2x)(7+4x^2-2x^4)}$$

Lại có

$$\begin{aligned}3\sqrt{\frac{a^4+b^4+c^4}{a^2+b^2+c^2}} &= 3\sqrt{\frac{4r+2q^2-4q+1}{1-2q}}\\ &\leq 3\sqrt{\frac{\frac{4}{27}(1-x)^2(1+2x)+2q^2-4q+1}{1-2q}}\\ &= \sqrt{\frac{1+12x^2+8x^3+6x^4}{1+2x^2}}\end{aligned}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{7+7x+32x^2+16x^3+5x^4+28x^5-8x^6-6x^7}{(1-x)(1+2x)(7+4x^2-2x^4)}\geq\sqrt{\frac{1+12x^2+8x^3+6x^4}{1+2x^2}}$$

Chú ý là

$$\begin{aligned}&\frac{7+7x+32x^2+16x^3+5x^4+28x^5-8x^6-6x^7}{(1-x)(1+2x)(7+4x^2-2x^4)}-\frac{3+13x^2-7x^4}{3(1-x^2)}\\ &=\frac{x^2(14-62x+63x^2+99x^3+101x^4+40x^5-25x^6-14x^7)}{3(1-x^2)(1+2x)(7+4x^2-2x^4)}\geq 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\frac{7+7x+32x^2+16x^3+5x^4+28x^5-8x^6-6x^7}{(1-x)(1+2x)(7+4x^2-2x^4)}\geq\frac{3+13x^2-7x^4}{3(1-x^2)}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{3+13x^2-7x^4}{3(1-x^2)}\geq\sqrt{\frac{1+12x^2+8x^3+6x^4}{1+2x^2}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2(6-72x+436x^2+144x^3+72x^4-72x^5-369x^6+98x^8)}{9(1-x^2)^2(1+2x^2)}\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng do $1\geq x\geq 0$. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.

Nhận xét 8 *Bất đẳng thức*

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge \frac{3+13x^2-7x^4}{3(1-x^2)}$$

Có dạng tương đương là

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{y}\ge \frac{3\sum\limits_{cyc}x^4+13\sum\limits_{cyc}x^3(y+z)-\sum\limits_{cyc}x^2y^2-xyz\sum\limits_{cyc}x}{3\left(\sum\limits_{cyc}x\right)\left(\sum\limits_{cyc}xy\right)}\quad \forall x,y,z\ge 0$$

Chúng ta có thể dùng kết quả này để chứng minh kết quả sau (hiện vẫn unsolved trên mathlinks)

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge 3\sqrt[6]{\frac{a^6+b^6+c^6}{3}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

■

Ví dụ 1.45 *Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\left(3\sqrt[3]{4}-2\right)\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge 3\sqrt[3]{4}+1.$$

Lời giải. Rõ ràng ta chỉ cần xét bất đẳng thức trong trường hợp $a\ge b\ge c$ là đủ. Chuẩn hóa cho $p=1$, khi đó, ta có

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{q-3r-\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2r}$$

$$\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}=\frac{q}{1-2q}$$

Nên bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{q-3r-\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2r}+\frac{\left(3\sqrt[3]{4}-2\right)q}{1-2q}\ge 3\sqrt[3]{4}+1$$

Xét hàm số

$$f(r)=\frac{q-3r-\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2r}$$

Ta có

$$f'(r)=\frac{q^2-4q^3+(9q-2)r-q\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2r^2\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}$$

$$f'(r) = 0 \Leftrightarrow r = r_0 = \frac{q^2\left[9q^2 - 2q + (1-3q)\sqrt{q(1-3q)}\right]}{27q^2 - 9q + 1}$$

Lập bảng biến thiên, ta có thể thấy $f(r) \geq f(r_0)\ \forall r > 0$. Ta lại có

$$\begin{aligned} f(r_0) &= \frac{q - 3r_0 - \sqrt{q^2 - 4q^3 + 2(9q-2)r_0 - 27r_0^2}}{2r_0} = \frac{q - 3r_0 - \frac{q^2 - 4q^3 + (9q-2)r_0}{q}}{2r_0} \\ &= \frac{2q^3 + (1-6q)r_0}{qr_0} = \frac{2q^2}{r_0} + \frac{1}{q} - 6 \\ &= \frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1-3q)\sqrt{q(1-3q)}} + \frac{1}{q} - 6 \end{aligned}$$

Như vậy, để hoàn tất yêu cầu của bài toán, ta chỉ cần chứng minh được

$$f(r_0) + \frac{\left(3\sqrt[3]{4} - 2\right)q}{1-2q} \geq 3\sqrt[3]{4} + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1-3q)\sqrt{q(1-3q)}} + \frac{1}{q} + \frac{\left(3\sqrt[3]{4} - 2\right)q}{1-2q} \geq 3\sqrt[3]{4} + 7$$

Bằng khai triển trực tiếp, ta thấy

$$\begin{aligned} &\frac{2(27q^2 - 9q + 1)}{9q^2 - 2q + (1-3q)\sqrt{q(1-3q)}} + \frac{1}{q} + \frac{\left(3\sqrt[3]{4} - 2\right)q}{1-2q} - 3\sqrt[3]{4} - 7 \\ &= \frac{(1-3q)A}{q(1-2q)\left[9q^2 - 2q + (1-3q)\sqrt{q(1-3q)}\right]} \end{aligned}$$

Với $A = [3(k+6)q^2 - (k+11)q + 1]\sqrt{q(1-3q)} - q^2[2k + 9 - 9(k+2)q]$, $k = 3\sqrt[3]{4} - 2$. Do $2k + 9 \geq 9(k+2)q$ nên nếu $3(k+6)q^2 - (k+11)q + 1 \geq 0$ thì hiển nhiên $A \geq 0$ nên bất đẳng thức của ta đúng. Ngược lại, nếu $3(k+6)q^2 - (k+11)q + 1 \leq 0$ thì ta có

$$A \geq 0 \Leftrightarrow q^2[2k + 9 - 9(k+2)q] \geq -[3(k+6)q^2 - (k+11)q + 1]\sqrt{q(1-3q)}$$

$$\Leftrightarrow q^4[2k + 9 - 9(k+2)q]^2 \geq [3(k+6)q^2 - (k+11)q + 1]^2 q(1-3q)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(9\sqrt[3]{16} + 6\sqrt[3]{4} + 4\right)q(27q^2 - 9q + 1)\left(20q - 4 - \sqrt[3]{16}\right)^2\left(8q + 2 - \sqrt[3]{16}\right)}{800} \geq 0$$

Do $3(k+6)q^2 - (k+11)q + 1 \leq 0$ nên

$$q \geq \frac{k + 11 - \sqrt{k^2 + 10k + 49}}{6(k+6)}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
8q+2-\sqrt[3]{16} &\geq \frac{4\left(k+11-\sqrt{k^2+10k+49}\right)}{3(k+6)}+2-\sqrt[3]{16}\\
&= \frac{4\left(k+11-\sqrt{k^2+10k+49}\right)}{3(k+6)}+2-\frac{12}{k+2}\\
&= \frac{2\left[5k^2+32k-28-2(k+2)\sqrt{k^2+10k+49}\right]}{3(k+2)(k+6)}\\
&= \frac{3k(7k^2+46k-152)}{3(k+2)\left[5k^2+32k-28+2(k+2)\sqrt{k^2+10k+49}\right]}
\end{aligned}$$

Do $k>\frac{5}{2}$ nên

$$7k^2+46k-152>7\left(\frac{5}{2}\right)^2+46\left(\frac{5}{2}\right)-152=\frac{27}{4}>0\Rightarrow A>0.$$

Bài toán được giải quyết xong.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc

$$\begin{cases}
a=\left[\frac{1}{3}+\sqrt[3]{2}-\frac{\sqrt[3]{4}}{3}+\frac{2}{3}\sqrt{\sqrt[3]{4}+8\sqrt[3]{2}-11}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{17-3\sqrt[3]{4}}{20}}\right)\right]t\\
c=t\\
b=\left[\frac{2}{3}\sqrt[3]{4}+\frac{2}{3}\sqrt{3\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}-3}\sin\left(\frac{1}{3}\arccos\sqrt{\frac{27+27\sqrt[3]{2}-27\sqrt[3]{4}}{20}}\right)\right]t
\end{cases} \qquad {}_2$$

và các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.46 *Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng với $k=3\sqrt[3]{2}-3$, ta có*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+k\geq\frac{3(k+3)(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn, Bách Ngọc Thành Công)

Lời giải. Chuẩn hóa cho $p=1$, theo kết quả trên, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b}\geq\frac{2(27q^2-9q+1)}{9q^2-2q+(1-3q)\sqrt{q(1-3q)}}+\frac{1}{q}-6$$

Ta phải chứng minh

$$\frac{2(27q^2-9q+1)}{9q^2-2q+(1-3q)\sqrt{q(1-3q)}}+\frac{1}{q}-6+k\geq 3(k+3)(1-2q).$$

Ta có

$$VT - VP = \frac{(1-3q)A}{q\left[9q^2 - 2q + (1-3q)\sqrt{q(1-3q)}\right]}$$

Trong đó

$$A = [6(k+3)q^2 - (2k+15)q + 1]\sqrt{q(1-3q)} + q^2[4k+21-18(k+3)q].$$

Do $4k+21 \geq 18(k+3)q$ nên nếu ta có $q \leq \frac{2k+15-\sqrt{4k^2+36k+153}}{12(k+3)} \Leftrightarrow 6(k+3)q^2 - (2k+15)q + 1 \geq 0$ thì $A \geq 0$ nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng, trong trường hợp ngược lại $\frac{2k+15-\sqrt{4k^2+36k+153}}{12(k+3)} \leq q \leq \frac{1}{3}$. Ta có

$$\begin{aligned} A \geq 0 &\Leftrightarrow q^2[4k+21-18(k+3)q] \geq -[6(k+3)q^2-(2k+15)q+1]\sqrt{q(1-3q)} \\ &\Leftrightarrow q^3[4k+21-18(k+3)q]^2 \geq [6(k+3)q^2-(2k+15)q+1]^2(1-3q) \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{4}(27q^2-9q+1)\left(12q+1-\sqrt[3]{4}\right)\left(12q-2-\sqrt[3]{4}\right)^2}{12} \geq 0 \end{aligned}$$

Do $q \geq \frac{2k+15-\sqrt{4k^2+36k+153}}{12(k+3)}$ nên

$$12q + 1 - \sqrt[3]{4} > 0.$$

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh đúng. ■

Ví dụ 1.47 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+2c}{a+2b} + \frac{b+2a}{b+2c} + \frac{c+2b}{c+2a} \geq \sqrt{\frac{5(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca} + 4}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Ví dụ 1.48 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng với $k = \frac{3\left(3\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}+1\right)}{8}$ thì*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + k \cdot \frac{ab^2+bc^2+ca^2}{a^2b+b^2c+c^2a} \geq k+1.$$

(Bách Ngọc Thành Công)

Ví dụ 1.49 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0 thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P(a,b,c) = \frac{a-b}{\sqrt{a+b}} + \frac{b-c}{\sqrt{b+c}} + \frac{c-a}{\sqrt{c+a}}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Một điều hạn chế của kỹ thuật này là mặc dù rất mạnh nhưng nó đòi hỏi chúng ta phải tính toán nhiều. Nhưng các bạn ạ, các bài toán ở đây chúng tôi đưa ra đều là những bài toán rất khó, đẳng thức của chúng hầu hết xảy ra tại những điểm lệch nhau. Điều này rất khó cho chúng ta tìm được 1 lời giải đẹp mắt cho nó ngoài những lời giải như thế này. Tuy nhiên, chúng ta có thể thấy một điều là nếu dùng kỹ thuật này để giải những bài toán thi quốc gia, quốc tế thì chúng ta lại thu được những lời giải gọn đẹp và rất nhẹ nhàng bởi lẽ các bài toán ấy đều là những bài toán "rất lỏng". Vì vậy, chúng tôi viết về kỹ thuật này với mong muốn thiết lập cho chúng ta một kỹ thuật, một phương pháp để chúng ta có thể giải được những bài toán ấy khi "chạm trán" chúng trong các kỳ thi.

1.4 The CYH techniques

1.4.1 Lời nói đầu

Ngay từ khi còn học ở mái trường THCS, chúng ta đã được làm quen với bất đẳng thức Cauchy Schwarz và khi bước sang THPT, chúng ta được làm quen thêm với bất đẳng thức Holder, cả 2 bất đẳng thức này đều rất thường được sử dụng, ngay cả trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia, quốc tế. Có thể nói chúng và bất đẳng thức trung bình cộng-trung bình nhân (AM-GM) là những bất đẳng thức cổ điển thông dụng nhất hiện nay, nhưng việc sử dụng chúng như thế nào là hiệu quả? Bài viết nhỏ này, chúng tôi xin được chia sẻ với các bạn một vài kỹ thuật thông dụng, mong nhận được ý kiến đóng góp của các bạn.

1.4.2 Bất đẳng thức Cauchy Schwarz và Holder.

Trước khi bắt đầu bài viết, chúng ta hãy nhắc lại vài nét về bất đẳng thức Cauchy Schwarz và Holder.

Định lý 1.4 (Bất đẳng thức Cauchy Schwarz) *Với mọi số thực* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *và* $(b_1, b_2, ..., b_n)$, *ta có*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n)^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i : a_j = b_i : b_j \ \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Chứng minh bất đẳng thức trên có rất nhiều cách nhưng cách ngắn gọn nhất là sử dụng đẳng thức Lagrange

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)-(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 = \sum_{i\neq j}(a_ib_j - a_jb_i)^2$$

Hệ quả 1.5 *Với mọi số thực* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ *và* $(b_1, b_2, ..., b_n), b_i > 0\ \forall i = 1, 2, ..., n$, *ta có*

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n}\right)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i : a_j = b_i : b_j\ \ \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Định lý 1.5 (Bất đẳng thức Holder) *Cho các số dương* x_{ij} $(i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n})$. *Khi đó với mọi* $\omega_1, ..., \omega_n \geq 0$ *thỏa* $\omega_1 + \cdots + \omega_n = 1$, *ta có*

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right)^{\omega_j} \geq \sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} x_{ij}^{\omega_j}\right).$$

Chứng minh bất đẳng thức này bằng cách dùng bất đẳng thức AM-GM tổng quát như sau

Giả sử $\sum\limits_{j=1}^{m} x_{ij} = 1\ \ \forall i = \overline{1,n}$ (ta luôn có thể giả sử được điều này! Tại sao?), khi đó bất đẳng thức ở trên trở thành

$$1 \geq \sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} x_{ij}^{\omega_j}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m}\left(\prod_{i=1}^{n} x_{ij}^{\omega_j}\right) &\leq \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_j x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j x_{ij}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \omega_j\left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức Holder được chứng minh.

Một trường hợp đặc biệt thường gặp của bất đẳng thức Holder là khi $n = 3$, ta có

$$(a^3+b^3+c^3)(m^3+n^3+p^3)(x^3+y^3+z^3) \geq (amx+bny+cpz)^3\ \ \forall a, b, c, m, n, p, x, y, z \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} \\ \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} \end{cases}$. Và khi $(m, n, p) \equiv (x, y, z)$ thì

$$(a^3 + b^3 + c^3)(m^3 + n^3 + p^3)^2 \geq (am^2 + bn^2 + cp^2)^3\ \ \forall a, b, c, m, n, p \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$.

1.4.3 Một số kỹ thuật cần chú ý

Tham số hóa

Đây là kỹ thuật cơ bản nhất trong các kỹ thuật được trình bày ở đây, các bạn hãy xem xét kỹ nó trước khi sang phần khác.

Ví dụ 1.50 *Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $2x+3y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = x^3+y^3+z^3.$$

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$(x^3+y^3+z^3)(a^3+b^3+c^3)(m^3+n^3+p^3) \geq (xam+ybn+zcp)^3 \ \ \forall a,b,c,m,n,p \geq 0$$

$$\Rightarrow P = x^3+y^3+z^3 \geq \frac{(xam+ybn+zcp)^3}{(a^3+b^3+c^3)(m^3+n^3+p^3)}$$

Ta hãy chọn a,b,c,m,n,p sao cho giả thiết $2x+3y+z=1$ được tận dụng triệt để, từ đó theo lẽ tự nhiên ta có thể chọn a,b,c,m,n,p thỏa $\frac{am}{2} = \frac{bn}{3} = \frac{cp}{1} = 1$. Hơn nữa, do ta cần tìm $\min P$ nên đẳng thức ở bất đẳng thức này phải xảy ra, tức là

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \\ \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{2a} = \frac{3y}{3b} = \frac{z}{c} = \frac{2x+3y+z}{2a+3b+c} = \frac{1}{2a+3b+c} \\ 2ax = 3by = cz \end{cases}$$

Từ phương trình thứ nhất suy ra $\begin{cases} x = \frac{a}{2a+3b+c} \\ y = \frac{b}{2a+3b+c} \\ z = \frac{c}{2a+3b+c} \end{cases}$. Từ phương trình thứ 2 suy ra

$$2ax = 3by = cz \Leftrightarrow \frac{2a^2}{2a+3b+c} = \frac{3b^2}{2a+3b+c} = \frac{c^2}{2a+3b+c} \Leftrightarrow 2a^2 = 3b^2 = c^2$$

Từ đây, ta chọn được $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{3}}, c = 1 \Rightarrow m = 2\sqrt{2}, n = 3\sqrt{3}, p = 1$, từ đó theo trên, ta có

$$\begin{aligned} P &\geq \frac{(2x+3y+z)^3}{\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + 1\right]\left[\left(2\sqrt{2}\right)^3 + \left(3\sqrt{3}\right)^3 + 1\right]} \\ &= \frac{36}{\left(36+4\sqrt{3}+9\sqrt{2}\right)\left(1+81\sqrt{3}+16\sqrt{2}\right)} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases} x = \frac{a}{2a+3b+c} \\ y = \frac{b}{2a+3b+c} \\ z = \frac{c}{2a+3b+c} \end{cases}$ với $\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ b = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ c = 1 \end{cases}$. Vậy nên

$$\min P = \frac{36}{\left(36 + 4\sqrt{3} + 9\sqrt{2}\right)\left(1 + 81\sqrt{3} + 16\sqrt{2}\right)}.$$

■

Ví dụ 1.51 *Cho các số không âm x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = x + 2y.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$(x^3 + y^3)(a^3 + b^3)(m^3 + n^3) \geq (xam + ybn)^3 \ \ \forall a, b, m, n \geq 0$$

$$\Rightarrow xam + ybn \leq \sqrt[3]{(x^3 + y^3)(a^3 + b^3)(m^3 + n^3)}$$

Lẽ tự nhiên, do yêu cầu của bài toán nên ta phải chọn a, b, m, n sao cho biểu thức $xam + ybn \equiv P$, tức là các số a, b, m, n phải thỏa $\frac{am}{1} = \frac{bn}{2} = 1$. Ngoài ra, cũng như ví dụ trên, ta cần tìm giá trị lớn nhất của P nên bắt buộc đẳng thức ở bất đẳng thức trên phải xảy ra, tức là

$$\begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{y}{b} \\ \frac{x}{m} = \frac{y}{n} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{a} = \frac{2y}{2b} = \frac{x+2y}{a+2b} = \frac{1}{a+2b} \\ ax = 2by \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a+2b} \\ y = \frac{b}{a+2b} \\ ax = 2by \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a+2b} \\ y = \frac{b}{a+2b} \\ \frac{a^2}{a+2b} = \frac{2b^2}{a+2b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a+2b} \\ y = \frac{b}{a+2b} \\ a^2 = 2b^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a+2b} \\ y = \frac{b}{a+2b} \\ a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a}{a+2b} \\ y = \frac{b}{a+2b} \\ a = \sqrt{2} \\ b = 1 \\ m = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ n = 2 \end{cases}$$

Do đó theo trên, ta có

$$P = x + 2y \le \sqrt[3]{(x^3+y^3)(a^3+b^3)(m^3+n^3)} = \sqrt[3]{\left(2\sqrt{2}+1\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+8\right)}$$

Đẳng thức luôn xảy ra nên

$$\max P = \sqrt[3]{\left(2\sqrt{2}+1\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+8\right)}.$$

■

Đối với những bất đẳng thức mà không có đẳng thức xảy ra thì ta chọn tham số là những số mà đẳng thức của bất đẳng thức Cauchy Schwarz hoặc Holder để giải là “lân cận bằng” của bất đẳng thức ban đầu.

Ví dụ 1.52 *Cho các số dương* $a_1, a_2, ..., a_n$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1+a_2} + \cdots + \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n} < 2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, $\forall k = \overline{1,n}, b_i > 0\ \forall i = \overline{1,n}$, ta có

$$\left(\frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{b_k^2}{a_k}\right)(a_1+a_2+\cdots+a_k) \ge (b_1+b_2+\cdots+b_k)^2$$

$$\Rightarrow \frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k} \le \frac{k}{(b_1+b_2+\cdots+b_k)^2} \cdot \left(\frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \cdots + \frac{b_k^2}{a_k}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1+a_2+\cdots+a_k} \le \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{a_i}$$

Với

$$c_k = \frac{kb_k^2}{(b_1+b_2+\cdots+b_k)^2} + \frac{(k+1)b_k^2}{(b_1+b_2+\cdots+b_{k+1})^2} + \cdots + \frac{nb_k^2}{(b_1+b_2+\cdots+b_{k+1})^2}$$

Chọn $b_k = k$, ta có

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{k^3}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} i\right)^2} + \frac{k^2(k+1)}{\left(\sum\limits_{i=1}^{k+1} i\right)^2} + \cdots + \frac{k^2 n}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} i\right)^2} \\
&= 4k^2\left(\frac{1}{k(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)^2}\right) \\
&= 4k^2\left(\frac{1}{k(k+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(k+1)^2} - \cdots - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&< 4k^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}\right) + \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) - \frac{1}{(k+1)^2} - \cdots - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= 4k^2\left(\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(k+1)^2} - \cdots - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \\
&= 4k^2\left(\frac{1}{2k^2} - \frac{1}{2(n+1)^2}\right) < 2 \ \forall k = \overline{1, n}
\end{aligned}$$

Nên từ đây hiển nhiên ta có bất đẳng thức cần chứng minh đúng. ∎

Ví dụ 1.53 *Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$. Chứng minh rằng*

$$4(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \geq a_1^2 + \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^2.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, $\forall k = \overline{1, n}, b_i > 0 \ \forall i = \overline{1, n}$ ta có

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_k^2}{b_k}\right)(b_1 + b_2 + \cdots + b_k) \geq (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}\right)^2 \leq \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_k}{k^2} \cdot \left(\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_k^2}{b_k}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} c_k a_k^2$$

Với

$$c_k = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_k}{k^2 b_k} + \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{k+1}}{(k+1)^2 b_k} + \cdots + \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n^2 b_k}$$

Chọn $b_k = \sqrt{k} - \sqrt{k+1}$, ta có

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{b_1+b_2+\cdots+b_k}{k^2b_k} + \frac{b_1+b_2+\cdots+b_{k+1}}{(k+1)^2b_k} + \cdots + \frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n^2b_k}\\
&= \frac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}\left(\frac{1}{k^{3/2}} + \frac{1}{(k+1)^{3/2}} + \cdots + \frac{1}{n^{3/2}}\right)\\
&\le \frac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}\left[2\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac12}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac12}}\right) + \cdots + 2\left(\frac{1}{\sqrt{n-\frac12}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac12}}\right)\right]\\
&= \frac{1}{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}\left(\frac{1}{\sqrt{k-\frac12}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac12}}\right) < \frac{2}{\sqrt{k-\frac12}\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)}\\
&= \frac{2\sqrt{2}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}{\sqrt{2k-1}} \le 4
\end{aligned}$$

Nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng. ∎

Ví dụ 1.54 *Cho các số $x, y \ge 0, x^3 + y^3 = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x} + 2\sqrt{y} \le \sqrt[6]{\left(1+2\sqrt[5]{2}\right)^5}.$$

Ví dụ 1.55 *Cho các số $a, b, c \ge 0, a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = a^3 + 3b^3 + 2c^3.$$

Hướng dẫn. Dùng bất đẳng thức Holder

$$(a^3+3b^3+2c^3)^2(m^3+n^3+p^3) \ge \left(a^2m + b^2n\sqrt[3]{9} + c^2p\sqrt[3]{4}\right)^3.$$

∎

Ví dụ 1.56 *Cho các số $a, b, c \ge 0, a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = a^4 + 2b^4 + 4c^4.$$

Hướng dẫn. Dùng bất đẳng thức Holder

$$(a^4+2b^4+3c^4)^3(m^4+n^4+p^4) \ge \left(a^3m + b^3n\sqrt[4]{8} + c^3p\sqrt[4]{27}\right)^4.$$

∎

Ví dụ 1.57 *Cho các số thực $x_1, x_2, ..., x_n$. Chứng minh rằng*

$$x_1^2 + (x_1 + x_2)^2 + \cdots + (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 \leq \frac{1}{4\sin^2 \frac{\pi}{2(2n+1)}} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2).$$

Hướng dẫn. Dùng bất đẳng thức Cauchy Schwarz,

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} x_i \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\sum_{i=1}^{k} c_i \right) \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{c_i} \right) \right] = \sum_{k=1}^{n} \left[S_k \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{c_i} \right) \right]$$

Chọn các số c_i sao cho

$$\frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{c_1} = \frac{S_2 + \cdots + S_n}{c_2} = \cdots = \frac{S_n}{c_n} = k$$

$$\Rightarrow c_i = \sin \frac{i\pi}{2n+1} - \sin \frac{(i-1)\pi}{2n+1}.$$

■

Ví dụ 1.58 *Cho các số $a, b, c \geq 0, a + b + c = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = \sqrt{a^2 + \frac{1}{b^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{c^2}} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{a^2}}.$$

Hướng dẫn. Dự đoán đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = \frac{1}{3}$. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{b^2}\right)(m^2 + n^2)} &\geq ma + \frac{n}{b} \\
\sqrt{\left(b^2 + \frac{1}{c^2}\right)(m^2 + n^2)} &\geq mb + \frac{n}{c} \\
\sqrt{\left(c^2 + \frac{1}{a^2}\right)(m^2 + n^2)} &\geq mc + \frac{n}{a}.
\end{aligned}$$

■

"Số không âm"

Đối với các bất đẳng thức dạng $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{b_n} \geq k$ mà ta chưa chắc $a_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1, n}$ hay không, chỉ biết rằng $b_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1, n}$ thôi thì việc thêm vào là một kỹ thuật cần thiết. Ý tưởng đơn giản như sau, cộng các tham số m_i vào tuong ?ng $\frac{a_i}{b_i}$ sao cho $a_i + m_i b_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1, n}$, khi đó đưa bất đẳng thức về dạng

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a'_i}{b_i} \geq k + \sum_{i=1}^{n} m_i$$

Với $a'_i, b_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1, n}$. Từ đây ta có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz-Holder một cách tự nhiên mà không phải lo ngại nữa.

Ví dụ 1.59 *Cho các số thực a, b, c, d thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-cd} + \frac{1}{1-da} \leq \frac{16}{3}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Trước hết, ta hãy viết bất đẳng thức về dạng

$$\sum_{cyc} \frac{-1}{1-ab} \geq -\frac{16}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{k(1-ab)-1}{1-ab} \geq 4k - \frac{16}{3}$$

Vì $1 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq a^2 + b^2 \geq 2ab$, suy ra

$$k(1-ab) - 1 \geq k\left(1 - \frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{k}{2} - 1$$

Ta cần chọn $k > 0$ sao cho $k(1-ab) - 1 \geq 0$. Từ trên, ta chỉ cần chọn $k \geq 2$, và với $k = 2$, bất đẳng thức $k(1-ab) - 1 \geq 0$ có đẳng thức tại $a = b = \frac{1}{\sqrt{2}}, c = d = 0$. Do đó ta hãy thử sử dụng Cauchy Schwarz với $k = 2$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{1-2ab}{1-ab} \geq \frac{8}{3}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{1-2ab}{1-ab} \geq \frac{\left[\sum_{cyc}(1-2ab)\right]^2}{\sum_{cyc}(1-2ab)(1-ab)} = \frac{4[2-(a+c)(b+d)]^2}{4-3(a+c)(b+d)+2(a^2+c^2)(b^2+d^2)}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$3[2-(a+c)(b+d)]^2 \geq 2[4-3(a+c)(b+d)+2(a^2+c^2)(b^2+d^2)]$$
$$\Leftrightarrow 3(a+c)^2(b+d)^2-6(a+c)(b+d)+4-4(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow 3[1-(a+c)(b+d)]^2+1-4(a^2+c^2)(b^2+d^2) \geq 0$$

Sử dụng bát đẳng thức AM-GM, ta có

$$4(a^2+c^2)(b^2+d^2) \leq (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 = 1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\pm\frac{1}{2}$.
■

Ví dụ 1.60 *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2-bc}{a^2+2b^2+3c^2}+\frac{b^2-ca}{b^2+2c^2+3a^2}+\frac{c^2-ab}{c^2+2a^2+3b^2} \geq 0.$$

(Nguyễn Anh Tuấn)

Lời giải. Viết lại bất đẳng thức như sau

$$\sum_{cyc}\frac{4(a^2-bc)}{a^2+2b^2+3c^2} \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[\frac{4(a^2-bc)}{a^2+2b^2+3c^2}+1\right] \geq 3$$
$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{a^2+2b^2+3c^2}+\sum_{cyc}\frac{5a^2+c^2}{a^2+2b^2+3c^2} \geq 3$$

Vì

$$2\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{a^2+2b^2+3c^2} \geq 0$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc}\frac{5a^2+c^2}{a^2+2b^2+3c^2} \geq 3$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\frac{5a^2+c^2}{a^2+2b^2+3c^2}\right)\left(\sum_{cyc}(5a^2+c^2)(a^2+2b^2+3c^2)\right) &\geq \left[\sum_{cyc}(5a^2+c^2)\right]^2 \\ &= 36\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2\end{aligned}$$

và

$$12\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 - \sum_{cyc}(5a^2+c^2)(a^2+2b^2+3c^2) = 4\sum_{cyc} a^4 - 4\sum_{cyc} a^2b^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Ví dụ 1.61 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{5-3ab}{1+c} + \frac{5-3bc}{1+a} + \frac{5-3ca}{1+b} \geq ab+bc+ca.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{9(5-3ab)}{1+c} \geq 9\sum_{cyc} ab$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{9(5-3ab)+7ab(1+c)}{1+c} \geq 16\sum_{cyc} ab$$

$$\Leftrightarrow 5\sum_{cyc} \frac{9-4ab}{1+c} + 7abc\sum_{cyc} \frac{1}{1+c} \geq 16\sum_{cyc} ab$$

Sử dụng bất dẳng thức AM-GM, ta có

$$9 = (a+b+c)^2 \geq (a+b)^2 \geq 4ab$$

Do đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được

$$\sum_{cyc} \frac{9-4ab}{1+c} \geq \frac{\left[\sum\limits_{cyc}(9-4ab)\right]^2}{\sum\limits_{cyc}(9-4ab)(1+c)} = \frac{\left(27-4\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{54-4\sum\limits_{cyc} ab - 12abc}$$

và

$$\sum_{cyc} \frac{1}{1+c} \geq \frac{9}{\sum\limits_{cyc}(1+c)} = \frac{3}{2}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{5\left(27-4\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{54-4\sum\limits_{cyc} ab-12abc} + \frac{21}{2}abc \geq 16\sum_{cyc} ab$$

Đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$, theo bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có $r \geq \max\left\{0, \frac{(4q-9)(9-q)}{18}\right\}$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{5(27-4q)^2}{54-4q-12r} + \frac{21}{2}r - 16q \geq 0$$

Nếu $9 \geq 4q$ thì

$$\frac{5(27-4q)^2}{54-4q-12r} + \frac{21}{2}r - 16q \geq \frac{5(27-4q)^2}{54-4q} - 16q = \frac{9(9-4q)(45-4q)}{2(27-2q)} \geq 0$$

Nếu $4q \geq 9$ thì

$$\begin{aligned}
&\frac{5(27-4q)^2}{54-4q-12r} + \frac{21}{2}r - 16q \\
&\quad\geq \frac{5(27-4q)^2}{54-4q-\frac{2}{3}(4q-9)(9-q)} + \frac{21(4q-9)(9-q)}{36} - 16q \\
&\quad= \frac{(4q-9)(3-q)(36-7q)}{12(6-q)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.62 *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a(a-b)}{a^2+2bc} + \frac{b(b-c)}{b^2+2ca} + \frac{c(c-a)}{c^2+2ab} \geq 0.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc}\left[\frac{a(a-b)}{a^2+2bc} + 1\right] \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{2a^2-ab+2bc}{a^2+2bc} \geq 3$$

Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên $c \geq b - a$, từ đó

$$2a^2 - ab + 2bc \geq 2a^2 - ab + 2b(b-a) = 2(a-b)^2 + ab \geq 0$$

Suy ra, theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2-ab+2bc}{a^2+2bc} \ge \frac{\left[\sum_{cyc}(2a^2-ab+2bc)\right]^2}{\sum_{cyc}(2a^2-ab+2bc)(a^2+2bc)}$$

Ta cần chứng minh

$$\left[\sum_{cyc}(2a^2-ab+2bc)\right]^2 \ge 3\sum_{cyc}(2a^2-ab+2bc)(a^2+2bc)$$

$$\Leftrightarrow 7\sum_{cyc}a^3b+4\sum_{cyc}ab^3 \ge 2\sum_{cyc}a^4+3\sum_{cyc}a^2b^2+6\sum_{cyc}a^2bc$$

Lại doa,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên tồn tại $x,y,z>0$ sao cho $a=y+z, b=z+x, c=x+y$. Bất đẳng thức trở thành

$$2\sum_{cyc}x^4+2\sum_{cyc}xy(x^2+y^2)+3\sum_{cyc}xy^3 \ge 6\sum_{cyc}x^2y^2+3\sum_{cyc}x^2yz$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM vì

$$2\sum_{cyc}x^4+2\sum_{cyc}xy(x^2+y^2) \ge 6\sum_{cyc}x^2y^2, \quad 3\sum_{cyc}xy^3 \ge 3\sum_{cyc}x^2yz.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.63 *Cho các số không âm a,b,c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{2a^2-bc}{b^2-bc+c^2}+\frac{2b^2-ca}{c^2-ca+a^2}+\frac{2c^2-ab}{a^2-ab+b^2} \ge 3.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Viết lại bất đẳng thức như sau

$$\sum_{cyc}\left[\frac{2a^2-bc}{b^2-bc+c^2}+1\right] \ge 6$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{2a^2+(b-c)^2}{b^2-bc+c^2} \ge 6$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2 + (b-c)^2}{b^2 - bc + c^2} \geq \frac{\left[\sum_{cyc} [2a^2 + (b-c)^2]\right]^2}{\sum_{cyc} [2a^2 + (b-c)^2](b^2 - bc + c^2)}$$

Ta cần chứng minh

$$\left[\sum_{cyc} [2a^2 + (b-c)^2]\right]^2 \geq 6 \sum_{cyc} [2a^2 + (b-c)^2](b^2 - bc + c^2)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} a^4 + 2abc\sum_{cyc} a + \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) \geq 6\sum_{cyc} a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} a^2(a-b)(a-c) + 3\sum_{cyc} ab(a-b)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Schur bậc 4. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ∎

Ví dụ 1.64 *Cho các số không âm a, b, c, tất cả không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{3a^2 - bc}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{3b^2 - ca}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{3c^2 - ab}{2c^2 + a^2 + b^2} \leq \frac{3}{2}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Viết lại bất đẳng thức như sau

$$\sum_{cyc} \left[3 - \frac{2(3a^2 - bc)}{2a^2 + b^2 + c^2}\right] \geq 6$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3b^2 + 2bc + 3c^2}{2a^2 + b^2 + c^2} \geq 6$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + 8\sum_{cyc} \frac{bc}{2a^2 + b^2 + c^2} \geq 6$$

Nếu $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2>0$, khi đó theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{2a^2+b^2+c^2} &\ge \frac{\left(\sum\limits_{cyc}(b-c)^2\right)^2}{\sum\limits_{cyc}(b-c)^2(2a^2+b^2+c^2)}\\
&= \frac{4\left(\sum\limits_{cyc}a^2-\sum\limits_{cyc}ab\right)^2}{\left[\sum\limits_{cyc}(b-c)^2\right]\left(\sum\limits_{cyc}a^2\right)+\sum\limits_{cyc}a^2(b-c)^2}\\
&= \frac{2\left(\sum\limits_{cyc}a^2-\sum\limits_{cyc}ab\right)^2}{\left(\sum\limits_{cyc}a^2-\sum\limits_{cyc}ab\right)\left(\sum\limits_{cyc}a^2\right)+\sum\limits_{cyc}b^2c^2-\sum\limits_{cyc}a^2bc}
\end{aligned}$$

và

$$\sum_{cyc}\frac{bc}{2a^2+b^2+c^2}\ge\frac{\left(\sum\limits_{cyc}bc\right)^2}{\sum\limits_{cyc}bc(2a^2+b^2+c^2)}=\frac{\left(\sum\limits_{cyc}bc\right)^2}{\left(\sum\limits_{cyc}bc\right)\left(\sum\limits_{cyc}a^2\right)+\sum\limits_{cyc}a^2bc}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{6\left(\sum\limits_{cyc}a^2-\sum\limits_{cyc}ab\right)^2}{\left(\sum\limits_{cyc}a^2-\sum\limits_{cyc}ab\right)\left(\sum\limits_{cyc}a^2\right)+\sum\limits_{cyc}b^2c^2-\sum\limits_{cyc}a^2bc}+\frac{8\left(\sum\limits_{cyc}bc\right)^2}{\left(\sum\limits_{cyc}bc\right)\left(\sum\limits_{cyc}a^2\right)+\sum\limits_{cyc}a^2bc}\ge 6$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q=\sum\limits_{cyc}bc, r=abc$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\frac{3(1-3q)^2}{(1-3q)(1-2q)+q^2-3r}+\frac{4q^2}{q(1-2q)+r}\ge 3$$

$$\Leftrightarrow\frac{(3r+q-4q^2)^2}{(1-5q+7q^2-3r)(q-2q^2+r)}\ge 0.$$

hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{0}$ hoặc $\frac{a}{1} = \frac{b}{0} = \frac{c}{0}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.65 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2 - bc}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + 3c^2}} + \frac{b^2 - ca}{\sqrt{b^2 + 2c^2 + 3a^2}} + \frac{c^2 - ab}{\sqrt{c^2 + 2a^2 + 3b^2}} \geq 0.$$

(Nguyễn Anh Tuấn)

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} \left[\frac{8(a^2 - bc)}{\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}} + b + c \right] &= \sum_{cyc} \frac{8(a^2 - bc) + (b + c)\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}}{\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}} \\
&\geq \sum_{cyc} \frac{8(a^2 - bc) + (b + c)(a + 2b + 3c)}{\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}} \\
&= \sum_{cyc} \frac{8a^2 + c^2 + ab + bc + ca + 2(b - c)^2}{\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}} \\
&\geq \sum_{cyc} \frac{8a^2 + c^2 + ab + bc + ca}{\sqrt{6(a^2 + 2b^2 + 3c^2)}}
\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc} \frac{8a^2 + c^2 + ab + bc + ca}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + 3c^2}} \geq 2\sqrt{6} \sum_{cyc} a$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{cyc} \frac{8a^2 + c^2 + ab + bc + ca}{\sqrt{a^2 + 2b^2 + 3c^2}} \right)^2 \left[\sum_{cyc} (8a^2 + c^2 + ab + bc + ca)(a^2 + 2b^2 + 3c^2) \right] \\
&\geq 27 \left(3 \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab \right)^3
\end{aligned}$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$, khi đó theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $r \geq \frac{4q-1}{9}$. Từ đây, ta được

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}(8a^2+c^2+ab+bc+ca)(a^2+2b^2+3c^2)\\
&\qquad = 6\left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}a^2\right)+\sum_{cyc}(8a^2+c^2)(a^2+2b^2+3c^2)\\
&\qquad = 6\left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}a^2\right)+11\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2+21\sum_{cyc}a^2b^2\\
&\qquad = 53q^2-38q+11-42r
\end{aligned}$$

và

$$3\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab=3-5q$$

Ta phải chứng minh

$$27(3-5q)^3 \geq 24(53q^2-38q+11-42r)$$

$$\Leftrightarrow 155-911q+1601q^2-1125q^3+336r \geq 0$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&155-911q+1601q^2-1125q^3+336r\\
&\qquad \geq 155-911q+1601q^2-1125q^3+336\cdot\frac{4q-1}{9}\\
&\qquad = \frac{1}{3}(1-3q)(1125q^2-1226q+353) \geq 0.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.66 *Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+2ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \leq 2.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}\left[1-\frac{a(b+c)}{a^2+2bc}\right] \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a(a-b)+(2b-a)c}{a^2+2bc} \geq 1$$

Ta sẽ chỉ ra rằng
$$a(a-b)+(2b-a)c \geq 0$$
Thật vậy, nếu $2b \geq a$, ta có
$$a(a-b)+(2b-a)c \geq a(a-b)+(2b-a)(b-a) = 2(a-b)^2 \geq 0$$
Nếu $a \geq 2b$, ta có
$$a(a-b)+(2b-a)c \geq a(a-b)+(2b-a)(a+b) = 2b^2 \geq 0$$
Từ đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được
$$\left[\sum_{cyc} \frac{a(a-b)+(2b-a)c}{a^2+2bc}\right]\left[\sum_{cyc}[a(a-b)+(2b-a)c](a^2+2bc)\right]$$
$$\geq \quad \left[\sum_{cyc}[a(a-b)+(2b-a)c]\right]^2$$
Ta cần chứng minh
$$\left[\sum_{cyc}[a(a-b)+(2b-a)c]\right]^2 \geq \sum_{cyc}[a(a-b)+(2b-a)c](a^2+2bc)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} ab(a-b)^2 \geq 0.$$
hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.67 *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*
$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{5}{2}.$$
(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với
$$\sum_{cyc}\left(1-\frac{a}{b+c}\right) \geq \frac{1}{2}+\frac{\sum_{cyc} ab}{\sum_{cyc} a^2}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b+c-a}{b+c} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} a\right)^2}{2\sum_{cyc} a^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}2\left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc}\frac{b+c-a}{b+c}\right) &= \left[\sum_{cyc}(b+c)(b+c-a)\right]\left(\sum_{cyc}\frac{b+c-a}{b+c}\right)\\ &\ge \left[\sum_{cyc}(b+c-a)\right]^2 = \left(\sum_{cyc} a\right)^2.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.68 *Cho các số không âm a, b, c, d, không có 3 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab}{a+b+c} + \frac{bc}{b+c+d} + \frac{cd}{c+d+a} + \frac{da}{d+a+b} \le \frac{1}{3}(a+b+c+d).$$

(Park Doo Sung)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(a+b-\frac{4ab}{a+b+c}\right) \ge \frac{2}{3}\sum_{cyc} a$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ac+bc+(a-b)^2}{a+b+c} \ge \frac{2}{3}\sum_{cyc} a$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{ac+bc+(a-b)^2}{a+b+c} \ge \frac{\left[\sum_{cyc}[ac+bc+(a-b)^2]\right]^2}{\sum_{cyc}[ac+bc+(a-b)^2](a+b+c)}$$

Ta có

$$\sum_{cyc}[ac+bc+(a-b)^2] = \sum_{cyc} a^2 + (a+c)^2 + (b+d)^2 - (a+c)(b+d)$$

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}[ac+bc+(a-b)^2](a+b+c) &= 2\sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} a^2b + 3ac(a+c) + 3bd(b+d)\\ &\le 3\sum_{cyc} a^3 + 3ac(a+c) + 3bd(b+d)\\ &= 3(a+c)(a^2+c^2) + 3(b+d)(b^2+d^2)\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{\left[\sum_{cyc} a^2 + (a+c)^2 + (b+d)^2 - (a+c)(b+d)\right]^2}{(a+c)(a^2+c^2) + (b+d)(b^2+d^2)} \geq 2\sum_{cyc} a$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $b + d \geq a + c$. Đặt

$$2x = a + c$$

$$2y = b + d$$

$$t = a^2 + c^2 \geq \frac{(a+c)^2}{2} = 2x^2$$

$$A = b^2 + d^2 + (a+c)^2 + (b+d)^2 - (a+c)(b+d) = b^2 + d^2 + 4x^2 + 4y^2 - 4xy$$

$$B = (b+d)(b^2+d^2) = 2y(b^2+d^2)$$

Bất đẳng thức trở thành

$$f(t) = \frac{(t+A)^2}{2xt+B} - 2(2x+2y) \geq 0$$

Ta có

$$f'(t) = \frac{2(t+A)(xt+B-xA)}{(2xt+B)^2}$$

và

$$\begin{aligned} xt + B - xA &= xt + 2y(b^2+d^2) - x(b^2+d^2+4x^2+4y^2-4xy) \\ &\geq 2x^3 + 2y(b^2+d^2) - x(b^2+d^2+4x^2+4y^2-4xy) \\ &= (b^2+d^2)(2y-x) + 4x^2y - 2x^3 - 4xy^2 \\ &\geq 2y^2(2y-x) + 4x^2y - 2x^3 - 4xy^2 \\ &= 2(y-x)(2y^2 - xy + x^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Nên $f'(t) \geq 0$. Do đó $f(t)$ đồng biến, và vì thế ta chỉ cần chứng minh được

$$f(2x^2) = \frac{(3x^2 - 2xy + 4y^2 - bd)^2}{x^3 - ybd + 2y^3} - 4(x+y) = g(bd) \geq 0$$

Ta có

$$g'(bd) = \frac{(3x^2 - 2xy + 4y^2 - bd)[ybd - x(2x^2 - 3xy + 2y^2)]}{(x^3 - ybd + 2y^3)^2}$$

$$g'(bd) = 0 \Leftrightarrow bd = \frac{x(2x^2 - 3xy + 2y^2)}{y}$$

Do $x \le y$ nên $\frac{x(2x^2-3xy+2y^2)}{y} \le y^2$, khi đó ta dễ dàng kiểm tra được

$$g(bd) \ge g\left(\frac{x(2x^2-3xy+2y^2)}{y}\right) = \frac{4(y-x)^3}{y^2} \ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$. ■

Ví dụ 1.69 *Cho các số $a_1, a_2, a_3 \ge \frac{1}{2}$ thỏa $a_1a_2a_3 = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a_1+2a_2} + \frac{1}{a_2+2a_3} + \frac{1}{a_3+2a_1} \le 1.$$

Lời giải. Đặt $a_1 = \frac{x}{y}, a_2 = \frac{z}{x}, a_3 = \frac{y}{z}$ với $x, y, z > 0$ và do $a_1, a_2, a_3 \ge \frac{1}{2}$ nên

$$\begin{cases} 2x & \ge y \\ 2y & \ge z \\ 2z & \ge x \end{cases}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{xy}{x^2+2yz} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{2}{3} - \frac{xy}{x^2+2yz}\right) \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2x^2-3xy+4yz}{x^2+2yz} \ge 3$$

Do $\begin{cases} 2x & \ge y \\ 2y & \ge z \\ 2z & \ge x \end{cases}$ nên

$$2x^2-3xy+4yz \ge 2x^2-3xy+2xy = x(2x-y) \ge 0$$

Do đó, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc} \frac{2x^2-3xy+4yz}{x^2+2yz}\right)\left[\sum_{cyc}(x^2+2yz)(2x^2-3xy+4yz)\right]$$
$$\ge \left(2\sum_{cyc} x^2 + \sum xy\right)^2$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\left(2\sum_{cyc}x^2+\sum_{cyc}xy\right)^2 \geq 3\sum_{cyc}(x^2+2yz)(2x^2-3xy+4yz)$$

$$\Leftrightarrow 13\sum_{cyc}x^3y+4\sum_{cyc}xy^3 \geq 2\sum_{cyc}x^4+15\sum_{cyc}x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}M_z(x-y)^2 \geq 0$$

với $M_z = 5y^2+26xy-13x^2$ và M_x, M_y tương tự. Đặt $\begin{cases} 2x-y &= 7a \\ 2y-z &= 7b \\ 2z-x &= 7c \end{cases}$ thì ta có $a,b,c \geq 0$ và $\begin{cases} x &= 4a+2b+c \\ y &= 4b+2c+a \\ z &= 4c+2a+b \end{cases}$, thay vào bất đẳng thức trên, ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}M_z(x-y)^2 \\
&= \sum_{cyc}M_z(3a-2b-c)^2 \\
&= 4\sum_{cyc}M_z(a-b)^2+\sum_{cyc}M_z(c-a)^2+4\sum_{cyc}M_z(a-b)(a-c) \\
&= 6\sum_{cyc}M_z(a-b)^2+3\sum_{cyc}M_z(c-a)^2-2\sum_{cyc}M_z(b-c)^2 \\
&= \sum_{cyc}(a-b)^2(3M_x-2M_y+6M_z) \\
&= \sum_{cyc}(a-b)^2(41z^2+78yz-9y^2-88x^2-52zx+156xy) \\
&= 343\sum_{cyc}(a-b)^2(143b^2+180c^2-127a^2+254ab+288bc+144ca) \\
&= 1372\left(4\sum_{cyc}a^4+199\sum_{cyc}a^3b+28\sum_{cyc}ab^3-33\sum_{cyc}a^2b^2-199abc\sum_{cyc}a\right)
\end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$4\sum_{cyc}a^4 \geq 4abc\sum_{cyc}a$$

$$28\sum_{cyc}a^3b+28\sum_{cyc}ab^3 \geq 56\sum_{cyc}a^2b^2$$

$$171\sum_{cyc}a^3b \geq 171abc\sum_{cyc}a$$

$$23\sum_{cyc}a^2b^2 \geq 23abc\sum_{cyc}a$$

Cộng lần lượt vế với vế 4 bất đẳng thức này, ta thu được

$$4\sum_{cyc}a^4 + 199\sum_{cyc}a^3b + 28\sum_{cyc}ab^3 - 33\sum_{cyc}a^2b^2 - 199abc\sum_{cyc}a \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. ■

Đôi khi, ta không nhất thiết phải thêm vào để chuyển tử số thành số không âm vì nó đã là một số không âm nhưng "khá lớn", ta sẽ sẽ bớt đi 1 vài giá trị để biến nó thành số không âm nhưng có giá trị "lớn vừa phải"

Ví dụ 1.70 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{b^2+ca} + \frac{1}{c^2+ab} \geq \frac{3(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}.$$

(Phạm Hữu Đức)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+bc} \geq \frac{3\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}{2\sum\limits_{cyc}ab}$$

$$\Leftrightarrow 3 + \sum_{cyc}\frac{b^2+c^2-bc}{a^2+bc} \geq \frac{3\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}{2\sum\limits_{cyc}ab}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{b^2+c^2-bc}{a^2+bc} \ge \frac{\left[\sum\limits_{cyc}(b^2+c^2-bc)\right]^2}{\sum\limits_{cyc}(b^2+c^2-bc)(a^2+bc)} = \frac{\left(2\sum\limits_{cyc}a^2-\sum\limits_{cyc}ab\right)^2}{\left(\sum\limits_{cyc}ab\right)\left(\sum\limits_{cyc}a^2+\sum\limits_{cyc}ab\right)-4abc\sum\limits_{cyc}a}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$3+\frac{\left(2\sum\limits_{cyc}a^2-\sum\limits_{cyc}ab\right)^2}{\left(\sum\limits_{cyc}ab\right)\left(\sum\limits_{cyc}a^2+\sum\limits_{cyc}ab\right)-4abc\sum\limits_{cyc}a} \ge \frac{3\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}{2\sum\limits_{cyc}ab}$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$3+\frac{(2-5q)^2}{q-q^2-4r} \ge \frac{3}{2q}$$

Nếu $1 \ge 4q$, ta có

$$3+\frac{(2-5q)^2}{q-q^2-4r}-\frac{3}{2q} \ge 3+\frac{(2-5q)^2}{q-q^2}-\frac{3}{2q} = \frac{(5-11q)(1-4q)}{2q(1-q)} \ge 0$$

Nếu $4q \ge 1$, sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $r \ge \frac{4q-1}{9}$, do đó

$$3+\frac{(2-5q)^2}{q-q^2-4r}-\frac{3}{2q} \ge 3+\frac{(2-5q)^2}{q-q^2-\frac{4(4q-1)}{9}}-\frac{3}{2q} = \frac{3(1-3q)(4q-1)(11-4q)}{2q(4-7q-9q^2)} \ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ∎

Ví dụ 1.71 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 só nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{5a^2-ab+5b^2}+\frac{1}{5b^2-bc+5c^2}+\frac{1}{5c^2-ca+5a^2} \ge \frac{1}{a^2+b^2+c^2}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Hướng dẫn.

$$\frac{5(a^2+b^2+c^2)}{5a^2-ab+5b^2}-1=\frac{5c^2+ab}{5a^2-ab+5b^2}\geq 0.$$

■

Ví dụ 1.72 *Cho các số không âm a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1}\leq\frac{3}{4}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Hướng dẫn.

$$1-\frac{2bc}{a^2+1}=\frac{1+a^2-2bc}{a^2+1}=\frac{3a^2+(b-c)^2}{a^2+1}\geq 0.$$

■

Ví dụ 1.73 *Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{3+a^2-2bc}+\frac{1}{3+b^2-2ca}+\frac{1}{3+c^2-2ab}\leq\frac{9}{8}.$$

(Vasile Cirtoaje, Wolfgang Berndt)

Hướng dẫn.

$$1-\frac{2}{3+a^2-2bc}=\frac{1+a^2-2bc}{3+a^2-2bc}=\frac{3a^2+(b-c)^2}{3+a^2-2bc}\geq 0.$$

■

Ví dụ 1.74 *Cho các số không âm a,b,c,d, không có 3 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a-b}{a+2b+c}+\frac{b-c}{b+2c+d}+\frac{c-d}{c+2d+a}+\frac{d-a}{d+2a+b}\geq 0.$$

Hướng dẫn.

$$\frac{2(a-b)}{a+2b+c}+1=\frac{3a+c}{a+2b+c}\geq 0.$$

■

Ví dụ 1.75 *Cho các số không âm a,b,c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2-bc}{2b^2-3bc+2c^2}+\frac{b^2-ca}{2c^2-3ca+2a^2}+\frac{c^2-ab}{2a^2-3ab+2b^2}\geq 0.$$

(Vasile Cirtoaje)

Hướng dẫn.
$$\frac{a^2-bc}{2b^2-3bc+2c^2}+1=\frac{a^2+2(b-c)^2}{2b^2-3bc+2c^2}\geq 0.$$
■

Đối xứng hóa

Trong toán học, bao giờ cũng có một quan niệm là "đối xứng dễ giải hơn hoán vị". Kỹ thuật này cũng dựa trên nền tảng đó, từ một bất đẳng thức chưa đối xứng, chúng ta sẽ tìm cách sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz hoặc Holder để đưa nó trở về đối xứng, rồi giải.

Ví dụ 1.76 *Cho các số không âm* a, b, c, *không có 2 số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*
$$\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{b+c}}+\sqrt{\frac{c}{c+a}}\leq\frac{3}{\sqrt{2}}.$$
(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có
$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)^2\leq\left[\sum_{cyc}(a+c)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(a+c)}\right]=\frac{4\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}ab\right)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$
Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì
$$(a+b)(b+c)(c+a)=\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}ab\right)-abc\geq\frac{8}{9}\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}ab\right)$$
Suy ra
$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)^2\leq\frac{9}{2}.$$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.77 *Cho các số dương* a, b, c. *Chứng minh rằng*
$$\sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}}+\sqrt{\frac{b}{4b+4c+a}}+\sqrt{\frac{c}{4c+4a+b}}\leq 1.$$
(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{4a+4b+c}}\right)^2 \le \left[\sum_{cyc}(4a+b+4c)\right]\left[\frac{a}{(4a+4b+c)(4a+b+4c)}\right] = \frac{9\left(\sum\limits_{cyc}a\right)\left(\sum\limits_{cyc}a^2+8\sum\limits_{cyc}ab\right)}{(4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)}$$

Ta cần chứng minh

$$9\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a^2+8\sum_{cyc}ab\right) \le (4a+4b+c)(4b+4c+a)(4c+4a+b)$$

$$\Leftrightarrow 7\sum_{cyc}a^3+3\sum_{cyc}ab(a+b)\ge 39abc.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.78 *Cho các số không âm a,b,c,d, không có 3 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}+\sqrt{\frac{b}{b+c+d}}+\sqrt{\frac{c}{c+d+a}}+\sqrt{\frac{d}{d+a+b}}\le\frac{4}{\sqrt{3}}.$$

(Phạm Văn Thuận)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+b+c}}\right)^2\\ &\le \left[\sum_{cyc}(a+b+d)(a+c+d)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b+c)(a+b+d)(a+c+d)}\right]\\ &= \frac{2[2(a+b+c+d)^2+(a+c)(b+d)][(a+c)(b+d)+ac+bd]}{(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}P(a,b,c,d) &= 8(a+b+c)(b+c+d)(c+d+a)(d+a+b)\\ &\quad -[2(a+b+c+d)^2+(a+c)(b+d)][(a+c)(b+d)+ac+bd]\ge 0\end{aligned}$$

Đây là một hàm bậc nhất theo ac, bd, nên ta dễ dàng kiểm tra được

$$P(a,b,c,d) \geq \min\left\{P(a+c,b,0,d), P\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right)\right\}$$

$$P(a+c,b,0,d) \geq \min\left\{P(a+c,b+d,0,0), P\left(a+c, \frac{b+d}{2}, 0, \frac{b+d}{2}\right)\right\}$$

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{a+c}{2}, b, \frac{a+c}{2}, d\right) \\ &\quad\geq \min\left\{P\left(\frac{a+c}{2}, b+d, \frac{a+c}{2}, 0\right), P\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)\right\}\end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần xét các trường hợp sau là đủ
Trường hợp 1. $c = d = 0$, bất đẳng thức trở thành

$$8ab(a+b)^2 \geq 3ab(2a^2+5ab+2b^2)$$

$$\Leftrightarrow ab(2a^2+ab+2b^2) \geq 0$$

hiển nhiên đúng.
Trường hợp 2. $a = c, d = 0$, bất đẳng thức trở thành

$$16a(2a+b)(a+b)^2 \geq 6a(a+b)(a+2b)(4a+b)$$

$$\Leftrightarrow 2a(a+b)(4a^2-3ab+2b^2) \geq 0$$

hiển nhiên đúng.
Trường hợp 3. $a = c, b = d$, bất đẳng thức trở thành

$$8(2a+b)^2(a+2b)^2 \geq 12(2a^2+5ab+2b^2)(a^2+4ab+b^2)$$

$$\Leftrightarrow 4(a+2b)(2a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

hiển nhiên đúng.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d$. ■

Ví dụ 1.79 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+ab+4b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{4b^2+bc+4c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{4c^2+ca+4a^2}} \leq 1.$$

(Bin Zhao)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2}{4a^2+ab+4b^2}}\right)^2$$
$$\leq \left[\sum_{cyc}(4a^2+ac+4c^2)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a^2}{(4a^2+ab+4b^2)(4a^2+ac+4c^2)}\right]$$

Ta cần chứng minh

$$\left[\sum_{cyc}(4a^2+ac+4c^2)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a^2}{(4a^2+ab+4b^2)(4a^2+ac+4c^2)}\right] \leq 1$$

Bằng khai triển trực tiếp, ta thấy bất đẳng thức này tương đương với

$$8\sum_{cyc}a^3b^3 + 8\sum_{cyc}a^4bc + 3abc\sum_{cyc}ab(a+b) \geq 66a^2b^2c^2.$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $c = 0$, $\frac{b}{a} \to 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Đổi biến để có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz-Holder

Bất đẳng thức có rất nhiều nét lạ và độc đáo. Một bất đẳng thức ở dạng này, ta không thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz-Holder để giải mà khi đổi biến thì lại giải được bằng chúng! Điều này cũng góp phần tạo nên vẻ đẹp lôi cuốn của bất đẳng thức.

Ví dụ 1.80 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^3}{a^3+abc+b^3} + \frac{b^3}{b^3+abc+c^3} + \frac{c^3}{c^3+abc+a^3} \geq 1.$$

(Nguyễn Văn Thạch)

Lời giải. Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{a}{c}, z = \frac{c}{b} \Rightarrow x, y, z > 0, xyz = 1$ và bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{1}{x^3+\frac{x}{y}+1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{x^3+x^2z+1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{yz}{x^2+yz+zx} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{yz}{x^2+yz+zx} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} yz\right)^2}{\sum\limits_{cyc} yz(x^2+yz+zx)} = 1.$$

Đẳng tức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $c \to 0, \frac{a}{b} \to 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.81 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+7ab+b^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+7bc+c^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+7ca+a^2}} \geq 1.$$

(Lê Hữu Điền Khuê)

Lời giải. Đặt $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c} \Rightarrow x, y, z > 0, xyz = 1$ và bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{x^2+7x+1}} \geq 1$$

Lại do $x, y, z > 0, xyz = 1$ nên tồn tại $m, n, p > 0$ sao cho $x = \frac{n^2p^2}{m^4}, y = \frac{p^2m^2}{n^4}, z = \frac{m^2n^2}{p^4}$, bất đẳng thức được viết lại thành

$$\sum_{cyc} \frac{m^4}{\sqrt{m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4}} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\sum_{cyc} \frac{m^4}{\sqrt{m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4}}\right)^2 \left(\sum_{cyc} m(m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4)\right) \geq \left(\sum_{cyc} m^3\right)^3$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc} m^3\right)^3 \geq \sum_{cyc} m(m^8+7m^4n^2p^2+n^4p^4)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym} (5m^6n^3+2m^3n^3p^3-7m^5n^2p^2) + \sum_{sym} (m^6n^3-m^4n^4p) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $c \to 0, \frac{a}{b} \to 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.82 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{3}{2\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}.$$

LỜI GIẢI. Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $abc = 1$, khi đó tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho $a = \frac{x}{y}, b = \frac{z}{x}, c = \frac{y}{z}$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{y^2}{x^2+yz} \geq \frac{3}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{y^2}{x^2+yz} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} y^2\right)^2}{\sum_{cyc} x^2y^2 + \sum_{cyc} y^3z}$$

Mặt khác

$$\left(\sum_{cyc} y^2\right)^2 - 3\sum_{cyc} x^2y^2 = \frac{1}{2}\sum_{cyc}(x^2-y^2)^2 \geq 0$$

$$\left(\sum_{cyc} y^2\right)^2 - 3\sum_{cyc} y^3z = \frac{1}{2}\sum_{cyc}(x^2-z^2-2xy+yz+zx)^2 \geq 0$$

Do đó

$$\sum_{cyc} \frac{y^2}{x^2+yz} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} y^2\right)^2}{\sum_{cyc} x^2y^2 + \sum_{cyc} y^3z} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} y^2\right)^2}{\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} y^2\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} y^2\right)^2} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét 9 *Chúng ta thường đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ nhưng ở đây ta lại đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{z}{x}, c = \frac{y}{z}$. Thật ra cả 2 phép đặt trên là tương đương nhưng chúng ta nên cố gắng đặt làm sao để biểu thức trên tử càng độc lập với các biến khác thì càng dễ nhìn hơn, sẽ thuận lợi hơn cho chúng ta khi giải toán. Cụ thể, nếu đặt $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$ thì bất đẳng thức trở thành $\sum_{cyc} \frac{y^2z}{x(y^2+zx)} \geq \frac{3}{2}$. Rõ ràng là khó nhìn hơn phép đặt kia.*

■

Ví dụ 1.83 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a\sqrt{a+b}}+\frac{1}{b\sqrt{b+c}}+\frac{1}{c\sqrt{c+a}}\ge \frac{3}{\sqrt{2abc}}.$$

(Phan Thành Nam)

Lời giải. Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $abc = 1$, khi đó tồn tại $x, y, z > 0$ sao cho $a = \frac{x}{y}, b = \frac{z}{x}, c = \frac{y}{z}$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x(x^2+yz)}}\ge \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x(x^2+yz)}}\ge \frac{\left(\sum_{cyc} y\right)^2}{\sum_{cyc}\sqrt{xy(x^2+yz)}}$$

và

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\sqrt{xy(x^2+yz)} &\le \sqrt{\left(\sum_{cyc} xy\right)\left(\sum_{cyc} x^2+\sum_{cyc} xy\right)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(2\sum_{cyc} xy\right)\left(\sum_{cyc} x^2+\sum_{cyc} xy\right)}\\
&\le \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\sum_{cyc} x^2+3\sum_{cyc} xy\right)\le \frac{2}{3\sqrt{2}}\left(\sum_{cyc} x\right)^2
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\sum_{cyc}\frac{y\sqrt{y}}{\sqrt{x(x^2+yz)}}\ge \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Ví dụ 1.84 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\le 3.$$

(Vũ Đình Quý)

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng với mọi $x, y, z > 0$ thỏa mãn $xyz = 1$ thì

$$\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{y^2+y+1} + \frac{1}{z^2+z+1} \geq 1$$

Thật vậy, do $x, y, z > 0, xyz = 1$ nên tồn tại các số $m, n, p > 0$ sao cho $x = \frac{np}{m^2}, y = \frac{pm}{n^2}, z = \frac{mn}{p^2}$. Bất đẳng thức trên được viết lại là

$$\sum_{cyc} \frac{m^4}{m^4 + m^2np + n^2p^2} \geq 1$$

Từ đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz và bất đẳng thức quen thuộc $\sum\limits_{cyc} n^2p^2 \geq \sum\limits_{cyc} m^2np$, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{m^4}{m^4 + m^2np + n^2p^2} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} m^2\right)^2}{\sum\limits_{cyc}(m^4 + m^2np + n^2p^2)} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} m^2\right)^2}{\sum\limits_{cyc} m^4 + 2\sum\limits_{cyc} n^2p^2} = 1$$

Trở lại bài toán ban đầu, sử dụng bất đẳng thức trên ta được

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} + 1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^4}{a^4 + a^2 + 1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2(a^2+1)}{a^4 + a^2 + 1} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a^2+a+1) + (a^2-a+1)}{(a^2+a+1)(a^2-a+1)} \leq 4$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{a^2+a+1} + \sum_{cyc} \frac{1}{a^2-a+1} \leq 4$$

Lại sử dụng bất đẳng thức trên một lần nữa, ta có $\sum\limits_{cyc} \frac{1}{a^2+a+1} \geq 1$, và vì thế

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2-a+1} \leq 3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ∎

Ví dụ 1.85 *Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{y(x^2+2y^2)}+\frac{y}{z(y^2+2z^2)}+\frac{z}{x(z^2+2x^2)}\ge\frac{3}{xy+yz+zx}.$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải. Đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$ thì bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{ab^3}{2a^2+b^2}\ge\frac{3abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{b^2}{c(2a^2+b^2)}\ge\frac{3}{a+b+c}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left[\sum_{cyc}\frac{b^2}{c(2a^2+b^2)}\right]\left[\sum_{cyc}b^2c(2a^2+b^2)\right]\ge\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2\left(\sum_{cyc}a\right)\ge3\sum_{cyc}b^2c(2a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^5+\sum_{cyc}ab^4+2\sum_{cyc}a^3b^2+2\sum_{cyc}a^2b^3\ge2\sum_{cyc}a^4b+6\sum_{cyc}a^2b^2c$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}a^5+\sum_{cyc}a^3b^2&=\sum_{cyc}a^3(a^2+b^2)\ge2\sum_{cyc}a^4b\\\sum_{cyc}ab^4+\sum_{cyc}a^2b^3&=\sum_{cyc}(ab^4+c^2a^3)\ge2\sum_{cyc}a^2b^2c\\\sum_{cyc}a^3b^2+\sum_{cyc}a^2b^3&=\sum_{cyc}a^3(b^2+c^2)\ge2\sum_{cyc}a^3bc\ge2\sum_{cyc}a^2b^2c\end{aligned}$$

Cộng tương ứng vế với vế 3 bất đẳng thức trên, ta suy ra được đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. ■

Ví dụ 1.86 *Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\ge3\left(\frac{x}{x^2+2yz}+\frac{y}{y^2+2zx}+\frac{z}{z^2+2xy}\right).$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải. Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$ thì bất đẳng thức trở thành

$$a+b+c \ge \frac{3abc}{2a^2+bc} + \frac{3abc}{2b^2+ca} + \frac{3abc}{2c^2+ab}$$
$$\Leftrightarrow \left(3a - \frac{3abc}{2a^2+bc}\right) + \left(3b - \frac{3abc}{2b^2+ca}\right) + \left(3c - \frac{3abc}{2c^2+ab}\right) \ge 2(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{a^3}{2a^2+bc} + \frac{b^3}{2b^2+ca} + \frac{c^3}{2c^2+ab}\right) \ge a+b+c$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a^3}{2a^2+bc} + \frac{b^3}{2b^2+ca} + \frac{c^3}{2c^2+ab} &\ge \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(2a^2+bc)+b(2b^2+ca)+c(2c^2+ab)} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^3+b^3+c^3)+3abc}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$3(a^2+b^2+c^2)^2 \ge (a+b+c)[2(a^3+b^3+c^3)+3abc]$$

Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$ thì bất đẳng thức trở thành

$$3(1-2q)^2 \ge 2(1-3q+3r)+3r$$
$$\Leftrightarrow (1-3q)^2 + 3(q^2-3r) \ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$. ■

Ví dụ 1.87 *Cho các số không âm x, y, z, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} + 2\left(2\sqrt{2}-3\right)\sqrt{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \ge 2.$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải. Đặt $x=a^2, y=b^2, z=c^2$ $(a,b,c \ge 0)$, ta phải chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{2\left(2\sqrt{2}-3\right)abc}{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}} \ge 2$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}}\right)^2 \left[\sum_{cyc} a(b^2+c^2)\right] \ge \left(\sum_{cyc} a\right)^3$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b^2+c^2}} \ge \sqrt{\frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^3}{\sum\limits_{cyc} a(b^2+c^2)}}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz,

$$\left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right) \ge \left(\sum_{cyc} a^2b\right)^2$$

và

$$\left(\sum_{cyc} b^2\right)\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right) \ge \left(\sum_{cyc} ab^2\right)^2$$

Suy ra

$$\begin{aligned} 2\left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right) &\ge \left(\sum_{cyc} a^2b\right)^2 + \left(\sum_{cyc} ab^2\right)^2 \\ &\ge \frac{1}{2}\left(\sum_{cyc} a^2b + \sum_{cyc} ab^2\right)^2 \end{aligned}$$

Từ đó, bất đẳng thức AM-GM cho ta

$$\begin{aligned} (a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2) &\ge \frac{8}{9}\left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right) \\ &\ge \frac{2}{9}\left[\sum_{cyc} a^2(b+c)\right]^2 \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^3}{\sum\limits_{cyc} a(b^2+c^2)}} + \frac{2\left(2\sqrt{2}-3\right)abc}{\sqrt{\frac{2}{9}\left[\sum\limits_{cyc} a^2(b+c)\right]^2}} \ge 2$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q = \sum\limits_{cyc} ab, r = abc$, khi đó theo bất đẳng thức Schur bậc 3 và bất đẳng thức Newton, ta có $\frac{q^2}{3} \ge r \ge$

$\max\left\{0, \frac{4q-1}{9}\right\}$. Bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{q-3r}} + \frac{3\left(4-3\sqrt{2}\right)r}{q-3r} \geq 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{q-3r} \geq 2q - 9\left(2-\sqrt{2}\right)r$$

$$\Leftrightarrow q-3r \geq \left[2q-9\left(2-\sqrt{2}\right)r\right]^2 \quad (\text{vì } 2q-9\left(2-\sqrt{2}\right)r \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow f(r) = \left[2q-9\left(2-\sqrt{2}\right)r\right]^2 + 3r - q \leq 0$$

Do $f(r)$ là hàm lồi nên

$$\left[\begin{array}{ll} f(r) \leq \max\left\{f\left(\frac{q^2}{3}\right), f(0)\right\} & \text{nếu } 1 \geq 4q \\ f(r) \leq \max\left\{f\left(\frac{q^2}{3}\right), f\left(\frac{4q-1}{9}\right)\right\} & \text{nếu } 4q \geq 1 \end{array}\right.$$

Ta có

$$f\left(\frac{q^2}{3}\right) = \left(3-2\sqrt{2}\right)q(3q-1)\left[6q^2 + \left(3+2\sqrt{2}\right)(1-2q)\right] \leq 0$$

Nếu $1 \geq 4q$, ta có

$$f(0) = q(4q-1) \leq 0$$

Nếu $4q \geq 1$, ta có

$$f\left(\frac{4q-1}{9}\right) = \frac{17-12\sqrt{2}}{3}(4q-1)(3q-1) \leq 0$$

Suy ra, nếu $1 \geq 4q$, thì

$$f(r) \leq \max\left\{f\left(\frac{q^2}{3}\right), f(0)\right\} \leq 0$$

Nếu $4q \geq 1$, thì

$$f(r) \leq \max\left\{f\left(\frac{q^2}{3}\right), f\left(\frac{4q-1}{9}\right)\right\} \leq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$ hoặc $x=y, z=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 10 *Một điều rất lạ là với bài toán này, nếu ta dùng Holder trực tiếp*

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{x}{y+z}}\right)^2\left[\sum_{cyc}x^2(y+z)\right] \geq \left(\sum_{cyc}x\right)^3$$

Rồi đi đến chứng minh kết quả

$$\sqrt{\frac{\left(\sum\limits_{cyc} x\right)^3}{\sum\limits_{cyc} x^2(y+z)}} + 2\left(2\sqrt{2}-3\right)\sqrt{\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}} \geq 2$$

nhưng bất đẳng thức này lại không đúng.
Thế nhưng sau khi ta dùng phép đặt ẩn $x = a^2, y = b^2, z = c^2$ thì ta lại có thể áp dụng Holder một cách khá hiệu quả.

■

Ví dụ 1.88 *Cho các số $x, y, z \geq 0, xyz = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2+6x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2y^2+6y+1}} + \frac{1}{\sqrt{2z^2+6z+1}} \geq 1.$$

(Nguyễn Văn Thạch)

Hướng dẫn. Đặt $x = \frac{bc}{a^2}, y = \frac{ca}{b^2}, z = \frac{ab}{c^2}$ $(a, b, c \geq 0)$, bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{a^4+6a^2bc+2b^2c^2}} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{a^4+6a^2bc+2b^2c^2}}\right)^2 \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a^2\right)^3}{\sum\limits_{cyc} a^2(a^4+6a^2bc+2b^2c^2)}.$$

■

Ví dụ 1.89 *Cho các số $a, b, c, d > 0$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{cyc} \frac{abc}{(a+d)(b+d)(c+d)} \geq \frac{1}{2}.$$

(Nguyễn Văn Thạch)

Hướng dẫn. Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}, d = \frac{1}{t}$, bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{x^3}{(x+y)(x+z)(x+t)} \geq \frac{1}{2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz

$$\sum_{cyc} \frac{x^3}{(x+y)(x+z)(x+t)} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} x^2\right)^2}{\sum\limits_{cyc} x(x+y)(x+z)(x+t)}.$$

■

Ví dụ 1.90 *Cho các số $x, y, z, k > 0, xyz = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[4]{\frac{x}{y+k}} + \sqrt[4]{\frac{y}{z+k}} + \sqrt[4]{\frac{z}{x+k}} \geq \frac{3}{\sqrt[4]{k+1}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Hướng dẫn. Đặt $x = \frac{a^5}{b^5}, y = \frac{c^5}{a^5}, z = \frac{b^5}{c^5}$ $(a, b, c > 0)$, bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{a^{5/2}}{b^{5/4}\sqrt[4]{c^5 + ka^5}} \geq \frac{3}{\sqrt[4]{k+1}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Holder

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a^{5/2}}{b^{5/4}\sqrt[4]{c^5 + ka^5}}\right)^4 \left[\sum_{cyc} (c^5 + ka^5)\right] \geq \left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{b}\right)^5$$

Hãy chứng minh bổ đề

$$2\sum_{cyc} \frac{a^2}{b} + 3\sum_{cyc} a \geq \frac{15\sum\limits_{cyc} a^2}{\sum\limits_{cyc} a}.$$

■

The CYH technique

Kỹ thuật CYH[3] là kỹ thuật quan trọng nhất mà chúng tôi muốn giới thiệu đến các bạn trong bài viết này. Nó chủ yếu được dùng để giải các dạng toán căn thức, một dạng toán rất khó giải. Ý tưởng của nó cũng giống như kỹ thuật tham số hóa nhưng thay vì chọn những tham số cố định, ta sẽ chọn những tham số chạy. Ý tưởng của kỹ thuật này, chúng tôi xuất phát từ việc giải bài toán sau của Jack Garfunkel, một nhà toán học Mỹ, ông là tác giả của nhiều bất đẳng thức khó mà hiện nay vẫn chưa có lời giải

[3] Cẩn yêu Hằng

Ví dụ 1.91 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c}.$$

(Jack Garfunkel)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 &\le \left[\sum_{cyc}a(5a+b+9c)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right]\\ &= 5\left(\sum_{cyc}a\right)^2\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right]\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc}a\right)\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right] \le \frac{5}{16}$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$\frac{5}{16}-\left(\sum_{cyc}a\right)\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right] = \frac{A+B}{C}$$

trong đó

$$\begin{aligned}A &= \sum_{cyc}ab(a+b)(a+9b)(a-3b)^2 \ge 0\\ B &= 243\sum_{cyc}a^3b^2c+835\sum_{cyc}a^2b^3c+232\sum_{cyc}a^4bc+1230a^2b^2c^2 \ge 0\\ C &= 16(a+b)(b+c)(c+a)(5a+b+9c)(5b+c+9a)(5c+a+9b) > 0.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{3}=\frac{b}{1}=\frac{c}{0}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Chúng ta hãy phân tích lời giải trên, ý tưởng cũng giống như kỹ thuật tham số hóa, chúng ta sẽ thêm vào các bộ số có dạng $ma+nb+pc, mb+nc+pa, mc+na+pb$ với $m, n, p \ge 0$ khi sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 \le \left[\sum_{cyc}a(ma+nb+pc)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a}{(a+b)(ma+nb+pc)}\right]$$

Chú ý là bất đẳng thức ban đầu có đẳng thức xảy ra tại điểm $a=3, b=1, c=0$ (chúng ta biết được điều này là do như chúng tôi đã nói, đối với một bất đẳng thức hoán vị vòng quanh thì gần như điểm "nhạy cảm" luôn có dạng $(x, y, 0)$). Do đó bất đẳng thức Cauchy Schwarz mà ta áp dụng ở trên cũng phải xảy ra đẳng thức tại đây, ngoài ra như đã biết là đẳng thức xảy ra ở bất đẳng thức Cauchy Schwarz xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\sqrt{a(ma+nb+pc)}}{\sqrt{\frac{a}{(a+b)(ma+nb+pc)}}} = \frac{\sqrt{b(mb+nc+pa)}}{\sqrt{\frac{b}{(b+c)(mb+nc+pa)}}} = \frac{\sqrt{c(mc+na+pb)}}{\sqrt{\frac{c}{(c+a)(mc+na+pb)}}}$$

Mục tiêu của chúng là chọn các số m, n, p sao cho điểm $(3, 1, 0)$ thỏa mãn phương trình này, tức là

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3\cdot(3\cdot m+1\cdot n+0\cdot p)}}{\sqrt{\frac{3}{(3+1)(3\cdot m+1\cdot n+0\cdot p)}}} &= \frac{\sqrt{1\cdot(1\cdot m+0\cdot n+3\cdot p)}}{\sqrt{\frac{1}{(1+0)(1\cdot m+0\cdot n+3\cdot p)}}}\\ &= \frac{\sqrt{0\cdot(0\cdot m+3\cdot n+1\cdot p)}}{\sqrt{\frac{0}{(0+3)(0\cdot m+3\dot{n}+1\cdot p)}}}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2(3m+n) = m+3p$$

$$\Leftrightarrow 5m+2n = 3p$$

Hơn nữa, từ dạng $\left(m\sum\limits_{cyc} a^2 + (n+p)\sum\limits_{cyc} ab\right)\left(\sum\limits_{cyc} \frac{a}{(a+b)(5a+b+9c)}\right)$, chúng ta rút ra một nhận xét là nếu biểu thức $m\sum\limits_{cyc} a^2 + (n+p)\sum\limits_{cyc} ab$ có dạng $k\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2$ thì bất đẳng thức sau khi sử dụng Cauchy Schwarz sẽ dễ chứng minh hơn, từ đó ta rút ra ý tưởng là chọn m, n, p sao cho $2m = n+p$. Từ đây, kết hợp với phương trình ở trên, ta rút ra được $m = \frac{5}{9}p, n = \frac{1}{9}p$, từ đó ta chọn được $m = 5, n = 1, p = 9$.

Nhận xét 11 *Chúng ta không thể dùng kỹ thuật tham số hóa ở đây được vì sau khi sử dụng Cauchy Schwarz-Holder xong thì bất đẳng thức không còn đối xứng hay hoán vị gì cả, bất đẳng thức sẽ càng khó chứng minh hơn. Ý tưởng tham số chạy được xuất phát từ đây.*

Ví dụ 1.92 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{1}{(a+b)^2}\right) \geq \frac{9}{4}.$$

(Iran MO 1996, Ji Chen)

LỜI GIẢI. Điều gì gợi mở cho ta việc sử dụng Cauchy Schwarz ở bài này? Chính là biểu thức $\sum\limits_{cyc} \frac{1}{(b+c)^2}$, nó có dạng tổng của các bình phương nên ta hãy thử giải bài toán này bằng Cauchy Schwarz xem sao

$$\left[\sum_{cyc}(ma+nb+nc)^2\right]\left[\sum_{cyc}\frac{1}{(b+c)^2}\right] \geq \left(\sum_{cyc}\frac{ma+nb+nc}{b+c}\right)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{ma+nb+nc}{\frac{1}{b+c}} = \frac{mb+nc+na}{\frac{1}{c+a}} = \frac{mc+na+nb}{\frac{1}{a+b}}$$

Ở bất đẳng thức ban đầu, ta thấy đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$ và $a=b=1, c=0$ nên phải chọn \$m,n\$ sao cho phương trình trên cũng thỏa mãn được điều này. Hiển nhiên là nó thỏa khi $a=b=c=1$ nên ta chỉ cần xét điểm thứ 2 là $(1,1,0)$, ta phải có

$$\frac{m+n}{1} = \frac{m+n}{1} = \frac{2n}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow m = 3n \Rightarrow m = 3, n = 1$$

Từ đây, lời giải của ta cho bất đẳng thức trên như sau
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left(11\sum_{cyc}a^2+14\sum_{cyc}ab\right)\left[\sum_{cyc}\frac{1}{(b+c)^2}\right] &= \left[\sum_{cyc}(3a+b+c)^2\right]\left[\sum_{cyc}\frac{1}{(b+c)^2}\right] \\ &\geq \left(\sum_{cyc}\frac{3a+b+c}{b+c}\right)^2 \\ &= 9\left(1+\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\right)^2\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$4\left(1+\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\right)^2 \geq \frac{11\sum\limits_{cyc}a^2+14\sum\limits_{cyc}ab}{\sum\limits_{cyc}ab}$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=1$, đặt $q=\sum\limits_{cyc}ab, r=abc$, khi đó theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $r \geq \max\left\{0, \frac{4q-1}{9}\right\}$. Bất đẳng thức trở thành

$$4\left(\frac{1+q}{q-r}-2\right)^2 \geq \frac{11-8q}{q}$$

Nếu $1 \geq 4q$ thì

$$4\left(\frac{1+q}{q-r}-2\right)^2-\frac{11-8q}{q} \geq 4\left(\frac{1+q}{q}-2\right)^2-\frac{11-8q}{q}=\frac{(4-3q)(1-4q)}{q^2} \geq 0$$

Nếu $4q \geq 1$ thì

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{1+q}{q-r}-2\right)^2-\frac{11-8q}{q} &\geq 4\left(\frac{1+q}{q-\frac{4q-1}{9}}-2\right)^2-\frac{11-8q}{q} \\ &= \frac{(1-3q)(4q-1)(11-17q)}{q(5q+1)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 12 *Bất đẳng thức trên là một bất đẳng thức rất nổi tiếng về vẻ đẹp cũng như độ khó của nó. Hiện nay có rất nhiều lời giải cho nó nhưng lời giải bằng cách sử dụng Cauchy Schwarz như thế này thì chưa được đề cập trong bất cứ tài liệu nào cả. Các bạn thấy không, cái đơn giản nhất nhưng lại có thể trở thành cái mạnh mẽ nhất!*

■

Ví dụ 1.93 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}}+\frac{1}{\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}}} \geq 5.$$

(Walther Janous)

Lời giải. Mục tiêu lớn nhất của ta khi giải bất đẳng thức chứa căn luôn là tìm cách loại bỏ căn thức, và trong bài này cũng vậy. Và ta nảy sinh ý tưởng bình phương 2 vế, rồi sử dụng bất đẳng thức Holder như sau

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}}\right]^2\left[\sum_{cyc}(ma+nb+nc)^3\left[a+\frac{(b-c)^2}{4}\right]\right] \\ &\qquad \geq \left[\sum_{cyc}(ma+nb+nc)\right]^3=(m+2n)^3 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{(ma+nb+nc)^3\left[a+\frac{(b-c)^2}{4}\right]}{\frac{1}{\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}}} = \frac{(mb+nc+na)^3\left[b+\frac{(c-a)^2}{4}\right]}{\frac{1}{\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}}}} = \frac{(mc+na+nb)^3\left[c+\frac{(a-b)^2}{4}\right]}{\frac{1}{\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}}}}$$

Ngoài ra, đẳng thức ở bài toán ban đầu xảy ra khi $a=1, b=c=0$ (đối với các bài toán đổi xứng, thông thường chúng ta có 2 điểm nhạy cảm là (x,x,y) và $(x,y,0)$, các bạn hãy xét thử 2 trường hợp này thì sẽ tìm được đẳng thức như trên) nên ta phải chọn m,n,p sao cho điểm $(1,0,0)$ thỏa mãn phương trình trên, tức là

$$\frac{m^3}{1} = \frac{n^3\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}} = \frac{n^3\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}}}}$$

$$\Leftrightarrow 2m = n \Rightarrow m=1, n=2$$

Và lời giải của ta như sau

$$\left[\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}}}\right]^2\left[\sum_{cyc}(a+2b+2c)^3\left[a+\frac{(b-c)^2}{4}\right]\right] \geq \left[\sum_{cyc}(a+2b+2c)\right]^3 = 125$$

Ta cần chứng minh

$$5 \geq \sum_{cyc}(a+2b+2c)^3\left[a+\frac{(b-c)^2}{4}\right]$$

Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$, khi đó ta có $q^2\geq 3r$. Bất đẳng thức trở thành

$$5q-\frac{3q^2}{4}-3r\left(11-\frac{q}{4}\right)\geq 0$$

Ta có

$$5q-\frac{3q^2}{4}-3r\left(11-\frac{q}{4}\right) \geq 5q-\frac{3q^2}{4}-q^2\left(11-\frac{q}{4}\right) = \frac{1}{4}q(20-47q+q^2)\geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=1, b=c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 13 *Với các bài toán dạng căn thức thế này, ta không biết nên bắt đầu từ đâu để giải chúng nhưng từ bây giờ với kỹ thuật này, chúng ta hoàn toàn có thể có tự tin giải chúng!*

■

Ví dụ 1.94 *Cho các số $x, y, z > 1$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \le \sqrt{x+y+z}.$$

Lời giải. Với bài toán này, thông thường chúng ta sẽ áp dụng Cauchy Schwarz theo lối tự nhiên là

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} \le \sqrt{3(x+y+z-3)}$$

Rồi đi đến việc chứng minh

$$\sqrt{3(x+y+z-3)} \le \sqrt{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow x+y+z \le \frac{9}{2}.$$

Nhưng bất đẳng thức này lại ngược chiều vì cũng theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$x+y+z \ge \frac{9}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = \frac{9}{2}.$$

Do đó lối đi này không có hiệu quả, chúng ta nảy sinh ý tưởng thêm các tham số vào để sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz như sau

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-1} &= \sqrt{a\cdot\frac{x-1}{a}}+\sqrt{b\cdot\frac{y-1}{b}}+\sqrt{c\cdot\frac{z-1}{c}}\\ &\le \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{x-1}{a}+\frac{y-1}{b}+\frac{z-1}{c}\right)}\end{aligned}$$

Từ đây, nếu ta để ý đến điều kiện bài toán một tí, ta có thể chọn được $a = x, b = y, c = z$ và khi đó

$$\begin{aligned}\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{x-1}{a}+\frac{y-1}{b}+\frac{z-1}{c}\right)} &= \sqrt{(x+y+z)\left(\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}+\frac{z-1}{z}\right)}\\ &= \sqrt{(x+y+z)\left(3-\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)}\\ &= \sqrt{x+y+z}\end{aligned}$$

Bài toán được giải. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{2}$. ■

Do các biểu thức dạng tuyến tính $ma + nb + pc, mb + nc + pa, mc + na + pb$ dễ dàng chọn được các giá trị của m, n, p hơn các biểu thức khác nên ta thường dùng chúng để giải, nhưng đôi khi trong một vài trường hợp việc sử dụng chúng không mang lại hiệu quả mà ta phải sử dụng các biểu thức phụ khác (việc chọn các biểu thức này không có mẫu mực mà phần lớn dựa vào kinh nghiệm của người làm toán)

Ví dụ 1.95 *Cho các số không âm* a, b, c, *không có 2 số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+ab}} \le \sqrt{2}\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b}\right).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{a^2+bc}}\right)^2 &\le \left[\sum_{cyc} \frac{(a+b)(a+c)}{a^2+bc}\right]\left[\sum_{cyc} \frac{1}{(a+b)(a+c)}\right] \\ &= \frac{2\left(\sum\limits_{cyc} a\right)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 3\right)\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{2\left(\sum\limits_{cyc} a\right)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\left(\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 3\right) \le \left(\sum_{cyc} \frac{1}{a+b}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 3 \le \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a^2 + 3\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)\left(\sum\limits_{cyc} a\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} - 3 \le \frac{\sum\limits_{cyc} a^4 - \sum\limits_{cyc} a^2b^2}{(a+b)(b+c)(c+a)\left(\sum\limits_{cyc} a\right)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)(a-c)\left[\frac{1}{a^2+bc} + \frac{1}{(b+c)(a+b+c)}\right] \ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge 0 \Rightarrow a - c \ge \frac{a}{b}(b-c) \ge 0$. Khi đó

$$(c-a)(c-b)\left[\frac{1}{c^2+ab}+\frac{1}{(a+b)(a+b+c)}\right] \ge 0$$

và

$$\begin{aligned}
&(a-b)(a-c)\left[\frac{1}{a^2+bc}+\frac{1}{(b+c)(a+b+c)}\right]\\
&\quad +(b-a)(b-c)\left[\frac{1}{b^2+ca}+\frac{1}{(c+a)(a+b+c)}\right]\\
&\ge \frac{(a-b)(b-c)}{b}\left[\frac{a}{a^2+bc}+\frac{a}{(b+c)(a+b+c)}-\frac{b}{b^2+ca}-\frac{b}{(c+a)(a+b+c)}\right]\\
&= \frac{c(a-b)^2(a+b)(b-c)[(a-b)^2+ab+bc+ca]}{(a^2+bc)(b^2+ca)(b+c)(c+a)(a+b+c)} \ge 0.
\end{aligned}$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.96 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$3(a+b+c) \ge 2\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\right).$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Sử dụng bất đăng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{cyc}\sqrt{a^2+bc}\right)^2 &\le \left[\sum_{cyc}(3a^2+4bc+ab+ac)\right]\left(\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{3a^2+4bc+ab+ac}\right)\\
&= 3\left(\sum_{cyc}a\right)^2\left(\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{3a^2+4bc+ab+ac}\right)
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{3a^2+4bc+ab+ac} \le \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 8\sum_{cyc}a^4(b^2+c^2) - 16\sum_{cyc}a^3b^3 - 11abc\sum_{cyc}a^3 + 43abc\sum_{cyc}a^2(b+c) + 18a^2b^2c^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 8\prod_{cyc}(a-b)^2 + abc\left(\sum_{cyc}a\right)\left(5\sum_{cyc}a^2 + 22\sum_{cyc}ab\right) \ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 14 *Ý tưởng của lời giải này như sau*
Chúng ta thấy là đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$, khi đó có một điểm đặc biệt là

$$a^2 + bc = b^2 + ca = c^2 + ab$$

Do đó, khi ta dùng Cauchy Schwarz để khử căn

$$\left(\sum_{cyc} \sqrt{a^2 + bc}\right)^2 \le \left[\sum_{cyc} g(a, b, c)\right] \left[\sum_{cyc} \frac{a^2 + bc}{g(a, b, c)}\right]$$

Ta cần chọn $g(a, b, c), g(b, c, a), g(c, a, b)$ sao cho đẳng thức trong bất đẳng thức này cũng đạt tại $a = b, c = 0$. Với chú ý trên, ta thấy là nếu ta chọn $g(a, b, c)$ có dạng $a^2 + bc + k$(một đại lượng đối xứng với a, b, c) thì rõ ràng đẳng thức ban đầu vẫn được đảm bảo (các đại lượng đối xứng này càng đơn giản càng tốt, sẽ thuận lợi hơn cho chúng ta trong việc chứng minh bất đẳng thức sau, chúng ta có thể chọn các đại lượng như $(a + b + c)^2, a^2 + b^2 + c^2, ab + bc + ca$). Ngoài ra, ta thấy bên vế trái của bất đẳng thức ban đầu có sự xuất hiện của $(a + b + c)^2$ nên bất đẳng thức sau khi sử dụng Cauchy Schwarz sẽ dễ chứng minh hơn nếu $\sum\limits_{cyc} g(a, b, c)$ cũng có dạng $m(a + b + c)^2$ từ đó, ta dễ dàng thấy được một trường hợp hiển nhiên thỏa là $k = \frac{1}{3}$ và đại lượng đối xứng thêm vào là $ab + bc + ca$. Từ đó dẫn đến lời giải khá đặc sắc như trên.

■

Ví dụ 1.97 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{(b + c)^2}{a^2 + bc} + \frac{(c + a)^2}{b^2 + ca} + \frac{(a + b)^2}{c^2 + ab} \ge 6.$$

(Darij Grinberg)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left[\sum_{cyc} \frac{(b + c)^2}{a^2 + bc}\right] \left[\sum_{cyc} (b + c)^2 (a^2 + bc)\right] \ge \left[\sum_{cyc} (b + c)^2\right]^2 = 4\left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab\right)^2$$

Ta cần chứng minh

$$2\left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab\right)^2 \ge 3\sum_{cyc} (b + c)^2 (a^2 + bc)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} a^4 + 2abc\sum_{cyc} a + \sum_{cyc} ab(a^2 + b^2) - 6\sum_{cyc} a^2 b^2 \ge 0$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ bất đẳng thức Schur bậc 4

$$2\sum_{cyc} a^4 + 2abc\sum_{cyc} a \geq 2\sum_{cyc} ab(a^2+b^2)$$

và

$$3\sum_{cyc} ab(a^2+b^2) \geq 6\sum_{cyc} a^2b^2.$$

với bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.98 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+b}{ab+1} + \frac{b+c}{bc+1} + \frac{c+a}{ca+1} \geq \frac{9}{5}.$$

(Michael Rozenberg)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{(1+a)(1+b)}{1+ab} \geq \frac{24}{5}$$

$$\Leftrightarrow (1+a)(1+b)(1+c)\sum_{cyc} \frac{1}{(1+c)(1+ab)} \geq \frac{24}{5}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left[\sum_{cyc} \frac{1}{(1+c)(1+ab)}\right]\left[\sum_{cyc} (3-c)^2(1+c)(1+ab)\right] \geq \left[\sum_{cyc} (3-c)\right]^2 = 64$$

Ta cần chứng minh

$$40(1+a)(1+b)(1+c) \geq 3\sum_{cyc} (3-c)^2(1+c)(1+ab)$$

Đặt $q = \sum_{cyc} ab, r = abc$. Ta có

$$(1+a)(1+b)(1+c) = 2+q+r$$

$$\sum_{cyc} (3-c)^2(1+c)(1+ab) = (8-2q)r + 26 + 16q$$

Bất đẳng thức trở thành

$$(16+6q)r + 2 - 8q \geq 0$$

Nếu $1 \geq 4q$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $4q \geq 1$, sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có $r \geq \frac{(4q-1)(1-q)}{6}$, do đó

$$\begin{aligned}(16+6q)r+2-8q &\geq (16+6q)\cdot\frac{(4q-1)(1-q)}{6}+2-8q \\ &= \frac{1}{3}(4q-1)(1-3q)(q+2) \geq 0.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=b=\frac{1}{2}, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.99 *Cho các số không âm a,b,c thỏa $a+b+c=1$. Chứng minh rằng với $k=1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, ta có*

$$\sqrt{a+k(b-c)^2}+\sqrt{b+k(c-a)^2}+\sqrt{c+k(a-b)^2} \leq \sqrt{3}.$$

(Phan Thành Nam)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{cyc}\sqrt{a+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(b-c)^2}\right]^2 \\ &\leq \left[\sum_{cyc}\left(a+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a+\left(1-\sqrt{3}2\right)(b-c)^2}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right] \\ &= \left(\sqrt{3}+1\right)\left[\sum_{cyc}\frac{a}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right]\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sqrt{3}+1\right)\left[\sum_{cyc}\frac{a}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{2}\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{a+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right] \leq 3$$

Đặt $q=ab+bc+ca=, r=abc$, khi đó ta có $q^2 \geq 3r$. Bất đẳng thức trở thành

$$9\left(2+\sqrt{3}\right)r-q\left(6q+\sqrt{3}\right) \leq 0$$

Ta có

$$9\left(2+\sqrt{3}\right)r-q\left(6q+\sqrt{3}\right) \leq 3\left(2+\sqrt{3}\right)q^2-q\left(6q+\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}q(3q-1) \leq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=1, b=c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.100 *Cho các số dương* a, b, c, d *thỏa* $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=20$. *Chứng minh rằng*

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\right)\geq 36.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2}\right)\left[\sum_{cyc}(b+c+d-a)^2\right]\geq\left(\sum_{cyc}\frac{b+c+d-a}{a}\right)^2=144$$

Ta cần chứng minh

$$4\sum_{cyc}a^2\geq\sum_{cyc}(b+c+d-a)^2$$

$$\Leftrightarrow 0\geq 0.$$

hiển nhiên đúng. ■

Ví dụ 1.101 *Cho các số không âm* a, b, c, *không có 2 số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\frac{b+c}{2a^2+bc}+\frac{c+a}{2b^2+ca}+\frac{a+b}{2c^2+ab}\geq\frac{6}{a+b+c}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{b+c}{2a^2+bc}\right)\left[\sum_{cyc}(b+c)^3(2a^2+bc)\right]\geq\left[\sum_{cyc}(b+c)^2\right]^2$$

Ta cần chứng minh

$$2\left(\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2\left(\sum_{cyc}a\right)\geq 3\sum_{cyc}(b+c)^3(2a^2+bc)$$

Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$, khi đó theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $r\geq\max\left\{0,\frac{4q-1}{9}\right\}$. Ta có

$$\left(\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2\left(\sum_{cyc}a\right)=(1-q)^2$$

$$\sum_{cyc}(b+c)^3(2a^2+bc) = q + 2q^2 + 12qr - 11r$$

Bất đẳng thức trở thành

$$2(1-q)^2 \ge 3(q + 2q^2 + 12qr - 11r)$$

$$\Leftrightarrow 3(11-12q)r + (q+2)(1-4q) \ge 0$$

Nếu $1 \ge 4q$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $4q \ge 1$, ta có

$$\begin{aligned} 3(11-12q)r + (q+2)(1-4q) &\ge 3(11-12q)\cdot\frac{4q-1}{9} + (q+2)(1-4q) \\ &= \frac{5}{3}(4q-1)(1-3q) \ge 0. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.102 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{cyc}\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} \le \sqrt{3 + \frac{1}{2}\sum_{cyc}(b-c)^2}.$$

(Phan Thành Việt)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \left[\sum_{cyc}\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}}\right]^2 &\le \left[\sum_{cyc}(a+1)\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a + \frac{(b-c)^2}{4}}{a+1}\right] \\ &= \sum_{cyc}\frac{4a + (b-c)^2}{a+1} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{4a+(b-c)^2}{a+1} \le 3 + \frac{1}{2}\sum_{cyc}(b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(b-c)^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{a+1}\right) + 3 - \sum_{cyc}\frac{4a}{a+1} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(b-c)^2\frac{a-1}{2(a+1)} + \sum_{cyc}\frac{1-3a}{1+a} \ge 0$$

Ta có

$$\sum_{cyc} \frac{1-3a}{1+a} = \sum_{cyc} \frac{b+c-2a}{1+a} = \sum_{cyc}(b-c)\left(\frac{1}{1+c} - \frac{1}{1+b}\right) = \sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{(b+1)(c+1)}$$

Do đó, bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{(b+1)(c+1)} + \sum_{cyc}(b-c)^2 \frac{a-1}{2(a+1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(b-c)^2 \left[\frac{1}{(b+1)(c+1)} + \frac{a-1}{2(a+1)}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} x(b-c)^2 \geq 0$$

trong đó $x = 2(a+1) + (a-1)(b+1)(c+1)$ và y, z tương tự.
Do tính đối xứng, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó $a \geq \frac{1}{3} \geq c, \frac{1}{2} \geq b$, ta có

$$\begin{aligned}
x &\geq 2(a+1) + (a-1)\left(1 + \frac{b+c}{2}\right)^2 = 2(a+1) + (a-1)\left(1 + \frac{1-a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}(a^3 - 7a^2 + 23a - 1) \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= 2(b+1) + (b^2-1)(a+c-b+1) + (1-b)(a-b)(b-c) \\
&\geq 2(b+1) + (b^2-1)(a+c-b+1) \\
&= 2(b+1) + (b^2-1)(2-2b) = 2b(b+1)(2-b) \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y+z &= 2(b+c+2) + (a+1)[(b-1)(c+1) + (c-1)(b+1)] \\
&= 2(3-a) + 2(a+1)(bc-1) \geq 2(3-a) - 2(a+1) = 4(1-a) \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} x(b-c)^2 \geq (y+z)(a-b)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc $a = 1, b = c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 15 *Chúng ta có một kết quả tương tự như sau*

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} + \sqrt{b + \frac{(c-a)^2}{4}} + \sqrt{c + \frac{(a-b)^2}{4}} \geq \frac{3}{2}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Xét 2 trường hợp sau
Trường hợp 1. $b \leq \frac{1}{6} \Rightarrow a = 1 - b - c \geq 1 - 2b \geq \frac{2}{3}$, khi đó ta có

$$\sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} \geq \sqrt{a} \geq \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned}\sqrt{b+\frac{(c-a)^2}{4}}+\sqrt{c+\frac{(a-b)^2}{4}} &\geq \sqrt{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2+\frac{(2a-b-c)^2}{4}} \geq \sqrt{b+c+\frac{(2a-b-c)^2}{4}} \\ &= \sqrt{1-a+\frac{(3a-1)^2}{4}} = \sqrt{\frac{(9a-4)(3a-2)+7}{12}} \geq \sqrt{\frac{7}{12}}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\sqrt{a+\frac{(b-c)^2}{4}} \geq \sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{7}{12}} > \frac{3}{2}$$

Trường hợp 2. $b \geq \frac{1}{6}$*, bình phương 2 vế, ta được bất đẳng thức tương đương là*

$$\frac{1}{4}\sum_{cyc}(a-b)^2+2\sum_{cyc}\sqrt{\left[a+\frac{(b-c)^2}{4}\right]\left[b+\frac{(a-c)^2}{4}\right]} \geq \frac{5}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$2\sum_{cyc}\sqrt{\left[a+\frac{(b-c)^2}{4}\right]\left[b+\frac{(a-c)^2}{4}\right]} \geq 2\sum_{cyc}\left[\sqrt{ab}+\frac{1}{4}|(a-b)(a-c)|\right]$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{4}\sum_{cyc}(a-b)^2+2\sum_{cyc}\sqrt{ab}+\frac{1}{2}\sum_{cyc}|(a-b)(a-c)| \geq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2+2\sum_{cyc}\sqrt{ab} \geq \frac{5}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2\sum_{cyc}\sqrt{ab} = 2\sum_{cyc}(a+b+c)\sqrt{ab} \geq 2\sum_{cyc}(a+b)\sqrt{ab} \geq 4\sum_{cyc}ab$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$(a-c)^2+4(ab+bc+ca) \geq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2+4(ab+bc+ca) \geq \frac{5}{4}(a+b+c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(a-b+c)(5b-a-c) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(a-b+c)(6b-1) \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm.

$\blacksquare$

Ví dụ 1.103 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \ge \frac{2}{\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}\right)^2\left[\sum_{cyc}(b+c)^3(4a^2+bc)\right] \ge \left[\sum_{cyc}(b+c)\right]^3 = 8\left(\sum_{cyc}a\right)^3$$

Ta cần chứng minh

$$2\left(\sum_{cyc}a\right)^3\left(\sum_{cyc}ab\right) \ge \sum_{cyc}(b+c)^3(4a^2+bc)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}ab(a^3+b^3)-\sum_{cyc}a^2b^2(a+b)+14abc\sum_{cyc}a^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}ab(a-b)^2(a+b)+14abc\sum_{cyc}a^2 \ge 0.$$

hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.104 *Cho các số không âm a, b, c, tất cả không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a+b)^2}{a^2+2b^2+3c^2}+\frac{(b+c)^2}{b^2+2c^2+3a^2}+\frac{(c+a)^2}{c^2+2a^2+3b^2} \ge \frac{3}{2}.$$

(Dương Đức Lâm, Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left[\sum_{cyc}\frac{(a+b)^2}{a^2+2b^2+3c^2}\right]\left[\sum_{cyc}(2a+b)^2(a^2+2b^2+3c^2)\right]$$
$$\ge \left[\sum_{cyc}(a+b)(2a+b)\right]^2 = 9\left(\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}(2a+b)^2(a^2+2b^2+3c^2)\\
&\quad= 6\sum_{cyc}a^4+4\sum_{cyc}a^3b+8\sum_{cyc}ab^3+24\sum_{cyc}a^2b^2+12\sum_{cyc}a^2bc\\
&\quad\le 6\sum_{cyc}a^4+8\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)+24\sum_{cyc}a^2b^2+12\sum_{cyc}a^2bc
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$3\left(\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2\ge 3\sum_{cyc}a^4+4\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)+12\sum_{cyc}a^2b^2+6\sum_{cyc}a^2bc$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)-3\sum_{cyc}a^2b^2+6\sum_{cyc}a^2bc\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}ab(a-b)^2+\sum_{cyc}a^2b^2+6\sum_{cyc}a^2bc\ge 0.$$

hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{1}=\frac{b}{0}=\frac{c}{0}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.105 *Cho các số không âm a,b,c, tất cả không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b)^2}\le\frac{2}{3}.$$

(Darij Grinberg)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}\left[1-\frac{2a^2}{2a^2+(b+c)^2}\right]\ge\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}\ge\frac{5}{3}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
&\left[\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}\right]\left[\sum_{cyc}(a+3b+3c)^2[2a^2+(b+c)^2]\right]\\
&\qquad\ge\left[\sum_{cyc}(b+c)(a+3b+3c)\right]^2
\end{aligned}$$

Ta cần chứngm inh

$$3\left[\sum_{cyc}(b+c)(a+3b+3c)\right]^2 \geq 2\sum_{cyc}(a+3b+3c)^2[2a^2+(b+c)^2]$$

Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$, ta có

$$\sum_{cyc}(b+c)(a+3b+3c)=6-4q$$

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}(a+3b+3c)^2[2a^2+(b+c)^2] &= \sum_{cyc}(3-2a)^2(3a^2-2a+1)\\ &= 12\sum_{cyc}a^4-44\sum_{cyc}a^3+55\sum_{cyc}a^2-3\\ &= -84r+24q^2-26q+20\end{aligned}$$

Bất đẳng thức trở thành

$$3(6-4q)^2 \geq 5(-84r+24q^2-26q+20)$$

$$\Leftrightarrow 210r+(1-4q)(4+9q)\geq 0$$

Nếu $1\geq 4q$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $4q\geq 1$, sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3 ta có $r\geq \frac{4q-1}{9}$, do đó

$$210r+(1-4q)(4+9q)\geq 210\cdot\frac{4q-1}{9}+(1-4q)(4+9q)=\frac{1}{3}(4q-1)(58-27q)\geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.106 *Cho các số không âm a,b,c, tất cả không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\leq\frac{1}{3}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc}\left[1-\frac{4a^2}{5a^2+(b+c)^2}\right]\geq\frac{5}{3}$$

$$\Leftrightarrow\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left[\sum_{cyc}\frac{1}{5a^2+(b+c)^2}\right]+2\sum_{cyc}\frac{bc}{5a^2+(b+c)^2}\geq\frac{5}{3}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left[\sum_{cyc}\frac{1}{5a^2+(b+c)^2}\right] &\geq \frac{\left[\sum_{cyc}(a+3b+3c)\right]^2}{\sum_{cyc}(a+3b+3c)^2[5a^2+(b+c)^2]}\\ &= \frac{49\left(\sum_{cyc}a\right)^2}{\sum_{cyc}(a+3b+3c)^2[5a^2+(b+c)^2]}\end{aligned}$$

$$\sum_{cyc}\frac{bc}{5a^2+(b+c)^2} \geq \frac{\left(\sum_{cyc}bc\right)^2}{\sum_{cyc}bc[5a^2+(b+c)^2]} = \frac{\sum_{cyc}bc}{\left(\sum_{cyc}a\right)^2}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{49\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}a\right)^2}{\sum_{cyc}(a+3b+3c)^2[5a^2+(b+c)^2]} + \frac{2\sum_{cyc}bc}{\left(\sum_{cyc}a\right)^2} \geq \frac{5}{3}$$

Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$, ta có

$$\sum_{cyc}(a+3b+3c)^2[5a^2+(b+c)^2] = 23-20q+48q^2-144r$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{49(1-2q)}{23-20q+48q^2-144r} + 2q \geq \frac{5}{3}$$

Nếu $1 \geq 4q$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{49(1-2q)}{23-20q+48q^2-144r} + 2q - \frac{5}{3} &\geq \frac{49(1-2q)}{23-20q+48q^2} + 2q - \frac{5}{3}\\ &= \frac{8(4-3q)(1-4q)(1+3q)}{3(23-20q+48q^2)} \geq 0\end{aligned}$$

Nếu $4q \geq 1$, sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3 ta có $r \geq \frac{4q-1}{9}$. Suy ra

$$\begin{aligned}\frac{49(1-2q)}{23-20q+48q^2-144r}+2q-\frac{5}{3} &\geq \frac{49(1-2q)}{23-20q+48q^2-16(4q-1)}+2q-\frac{5}{3}\\ &= \frac{8(1-3q)(4q-1)(2-q)}{3(13-28q+16q^2)} \geq 0.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.107 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{c^2+ab}}+\sqrt{\frac{b^2+bc+c^2}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{c^2+ca+a^2}{b^2+ca}} \geq \frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

(Nguyễn Văn Thạch)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{c^2+ab}}\right)\left[\sum_{cyc}\frac{(a+b)^3(c^2+ab)}{a^2+ab+b^2}\right] \geq 8\left(\sum_{cyc}a\right)^3$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{16}{27}\left(\sum_{cyc}a\right)^3 \geq \sum_{cyc}\frac{(a+b)^3(c^2+ab)}{a^2+ab+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{27}\left(\sum_{cyc}a\right)^3 \geq \sum_{cyc}\frac{(a+b)(a^2+2ab+b^2)(c^2+ab)}{a^2+ab+b^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{27}\left(\sum_{cyc}a\right)^3 \geq 2\sum_{cyc}ab(a+b)+\sum_{cyc}\frac{ab(a+b)(c^2+ab)}{a^2+ab+b^2}$$

Do $a^2+ab+b^2 \geq \frac{3}{4}(a+b)^2$, nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{16}{27}\left(\sum_{cyc}a\right)^3 \geq 2\sum_{cyc}ab(a+b)+\frac{4}{3}\sum_{cyc}\frac{ab(c^2+ab)}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{27}\left(\sum_{cyc}a\right)^3 \geq 2\sum_{cyc}ab(a+b)+\frac{4}{3}\sum_{cyc}\frac{a^2b^2}{a+b}+\frac{4}{3}abc\sum_{cyc}\frac{c}{a+b}$$

Lại do $\frac{4a^2b^2}{a+b} \le ab(a+b)$, nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{16}{27}\left(\sum_{cyc} a\right)^3 \ge 2\sum_{cyc} ab(a+b) + \frac{1}{3}\sum_{cyc} ab(a+b) + \frac{4}{3}abc\sum_{cyc}\frac{c}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{16}{9}\left(\sum_{cyc} a\right)^3 \ge 7\sum_{cyc} ab(a+b) + 4abc\sum_{cyc}\frac{c}{a+b}$$

Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$, khi đó theo bất đẳng thức Schur và bất đẳng thức Newton, ta có $\frac{q^2}{3} \ge r \ge \frac{(4q-1)(1-q)}{6}$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{16}{9} \ge 7(q-3r) + 4r\left(\frac{1+q}{q-r} - 3\right)$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 297r^2 + (52-324q)r - 16q + 63q^2 \le 0$$

Vì $f(r)$ là hàm lồi nên

$$f(r) \le \max\left\{ f\left(\frac{q^2}{3}\right), f\left(\frac{(4q-1)(1-q)}{6}\right)\right\}$$

Mặt khác, ta có

$$f\left(\frac{q^2}{3}\right) = \frac{1}{3}q(3q-1)(33q^2-97q+48) \le 0$$

$$f\left(\frac{(4q-1)(1-q)}{6}\right) = \frac{1}{12}(3q-1)(528q^3-280q^2+29q+5) \le 0$$

vì

$$\begin{aligned} 528q^3-280q^2+29q+5 &= q^3\left(\frac{5}{q^3}+\frac{29}{q^2}-\frac{280}{q}+528\right) \\ &= q^3\left[\left(\frac{1}{q}-3\right)\left(\frac{5}{q^2}+\frac{44}{q}-148\right)+84\right] \\ &\ge q^3\left[\left(\frac{1}{q}-3\right)\left(\frac{5}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{44}{\frac{1}{3}}-148\right)+84\right] \\ &= q^3\left[29\left(\frac{1}{q}-3\right)+84\right] \ge 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.108 *Cho các số không âm a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{a^2+b^2+ab+ca} + \frac{b^2}{b^2+c^2+bc+ab} + \frac{c^2}{c^2+a^2+ca+bc} \ge \frac{3}{4}.$$

(Michael Rozenberg)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{a^2+b^2+ab+ca}\right)\left[\sum_{cyc}(2a+c)^2\left(a^2+b^2+ab+ca\right)\right]$$
$$\geq \left[\sum_{cyc}a(2a+c)\right]^2=\left(2\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$4\left(2\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2\geq 3\sum_{cyc}(2a+c)^2\left(a^2+b^2+ab+ca\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}a^4+6\sum_{cyc}a^2b^2+\sum_{cyc}a^3b-8\sum_{cyc}ab^3-3abc\sum_{cyc}a\geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức Vasile, ta có

$$-8\sum_{cyc}ab^3\geq -\frac{8}{3}\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$4\sum_{cyc}a^4+6\sum_{cyc}a^2b^2+\sum_{cyc}a^3b-\frac{8}{3}\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2-3abc\sum_{cyc}a\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\sum_{cyc}a^4+\frac{2}{3}\sum_{cyc}a^2b^2+\sum_{cyc}a^3b-3abc\sum_{cyc}a\geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{4}{3}\sum_{cyc}a^4\geq\frac{4}{3}\sum_{cyc}a^2b^2$$

$$2\sum_{cyc}a^2b^2\geq 2abc\sum_{cyc}a$$

$$\sum_{cyc}a^3b\geq abc\sum_{cyc}a.$$

Cộng tương ứng vế với vế 3 bất đẳng thức trên, ta thu được bất đẳng thức ở trên. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.109 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{2b^3+c^2a}+\frac{b}{2c^3+a^2b}+\frac{c}{2a^3+b^2c}\ge\frac{3}{a^2+b^2+c^2}.$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\frac{a}{2b^3+c^2a}\right)\left[\sum_{cyc}a(a+c)^2(2b^3+c^2a)\right] &\ge \left[\sum_{cyc}a(a+c)\right]^2\\ &= \left(\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\left(\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2\left(\sum_{cyc}a^2\right)\ge 3\sum_{cyc}a(a+c)^2(2b^3+c^2a)$$

Bằng khai triển trực tiếp, ta dễ thấy

$$\begin{aligned}&\sum_{cyc}a(a+c)^2(2b^3+c^2a)\\ &\quad= \sum_{cyc}a^4(b^2+c^2)+4\sum_{cyc}a^3b^3+2\sum_{cyc}a^3b^2c+4\sum_{cyc}a^2b^3c\\ &\quad\le \sum_{cyc}a^4(b^2+c^2)+4\sum_{cyc}a^3b^3+2abc\sum_{cyc}a^2(b+c)+2abc\sum_{cyc}a^3\\ &\quad= \sum_{cyc}a^4(b^2+c^2)+4\sum_{cyc}a^3b^3+2abc\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a^2\right)\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=1$ và đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$ thì ta có

$$\begin{aligned}&\sum_{cyc}a^4(b^2+c^2)+4\sum_{cyc}a^3b^3+2abc\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a^2\right)\\ &= \left(\sum_{cyc}a^2b^2\right)\left(\sum_{cyc}a^2\right)+4\sum_{cyc}a^3b^3+2abc\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a^2\right)-3a^2b^2c^2\\ &= (1-2q)(q^2-2r)+4(q^3-3qr+3r^2)+2r(1-2q)-3r^2\\ &= q^2+2q^3-12qr+9r^2\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$(1-2q)(1-q)^2 \ge 3(q^2+2q^3-12qr+9r^2)$$

$$\Leftrightarrow 1-4q+2q^2-8q^3+36qr-27r^2 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (1-4q)(1+q^2)+2(9q+2)r+[q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2] \ge 0$$

Ta có

$$q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2 = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \ge 0$$

và theo bất đẳng thức Schur bậc 4 thì $r \ge \frac{(4q-1)(1-q)}{6}$ nên

$$\begin{aligned}(1-4q)(1+q^2)+2(9q+2)r &\ge (1-4q)(1+q^2)+2(9q+2)\cdot\frac{(4q-1)(1-q)}{6}\\ &= \frac{1}{3}(4q-1)^2(1-3q) \ge 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị. ■

Ví dụ 1.110 *Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{2b^2+ca}+\frac{b}{2c^2+ab}+\frac{c}{2a^2+bc} \ge \frac{3}{a+b+c}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{2b^2+ca}\right)\left[\sum_{cyc}a(a+c)^2(2b^2+ca)\right] \ge \left(\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\right)^2$$

Bằng khai triển trực tiếp, ta được

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}a(a+c)^2(2b^2+ca) &= \frac{1}{2}\left[\sum_{cyc}a^4(b+c)+5\sum_{cyc}a^3(b^2+c^2)+12abc\sum_{cyc}ab\right]\\ &\quad+\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)\sum_{cyc}a^2\end{aligned}$$

Do a,b,c là độ dài 3 cạnh tam giác nên ta dễ dàng chứng minh được

$$(a-b)(b-c)(c-a) \le \sum_{cyc}a^3+3abc-\sum_{cyc}a^2(b+c)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \sum_{cyc} a(a+c)^2(2b^2+ca) \\
\leq \quad & \frac{1}{2}\left[\sum_{cyc} a^4(b+c) + 5\sum_{cyc} a^3(b^2+c^2) + 12abc\sum_{cyc} ab\right] \\
& +\frac{1}{2}\left[\sum_{cyc} a^3 + 3abc - \sum_{cyc} a^2(b+c)\right]\left(\sum_{cyc} a^2\right) \\
= \quad & \frac{1}{2}\left(\sum_{cyc} a^5 + 5\sum_{cyc} a^3(b^2+c^2) + 3abc\sum_{cyc} a^2 + 10abc\sum_{cyc} ab\right) \\
= \quad & \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{cyc} a^3\right)\left(\sum_{cyc} a^2\right) + 4\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right)\left(\sum_{cyc} a\right) + 3abc\left(\sum_{cyc} a\right)^2\right]
\end{aligned}$$

Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$, và đặt $ab+bc+ca=q, r=abc \Rightarrow \frac{1}{3} \geq q \geq \frac{1}{4}$, ta có

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{cyc} a^3\right)\left(\sum_{cyc} a^2\right) + 4\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right)\left(\sum_{cyc} a\right) + 3abc\left(\sum_{cyc} a\right)^2 & \\
= \quad & (1-2q)(1-3q+3r) + 4(q^2-2r) + 3r \\
= \quad & 1 - 5q + 10q^2 - 2(1+3q)r
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$2(1-q)^2 \geq 3[1-5q+10q^2-2(1+3q)r]$$

$$\Leftrightarrow 6(1+3q)r + (4q-1)(1-7q) \geq 0$$

Theo bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có $6r \geq (4q-1)(1-q)$ nên

$$\begin{aligned}
6(1+3q)r + (4q-1)(1-7q) \quad & \geq \quad (1+3q)(4q-1)(1-q) + (4q-1)(1-7q) \\
& = \quad (1-3q)(4q-1)(q+2) \geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị. ■

Ví dụ 1.111 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng với mọi $k \geq 2$, ta có*

$$\sum_{cyc} \sqrt{a^2+kab+b^2} \leq \sqrt{4\sum_{cyc} a^2 + (3k+2)\sum_{cyc} ab}.$$

(Michael Rozenberg)

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\sqrt{a^2+kab+b^2}\right)^2 &\le \left[\sum_{cyc}(a+b)\right]\left(\sum_{cyc}\frac{a^2+kab+b^2}{a+b}\right)\\ &= 2\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a^2+kab+b^2}{a+b}\right)\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$2\sum_{cyc}\frac{a^2+kab+b^2}{a+b} \le \frac{4\sum\limits_{cyc}a^2+(3k+2)\sum\limits_{cyc}ab}{\sum\limits_{cyc}a}$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}(a+b)+2(k-2)\sum_{cyc}\frac{ab}{a+b} \le 4\sum_{cyc}a+\frac{3(k-2)\sum\limits_{cyc}ab}{\sum\limits_{cyc}a}$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\frac{ab}{a+b} \le \frac{3\sum\limits_{cyc}ab}{\sum\limits_{cyc}a}$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\frac{ab(a+b+c)}{a+b} \le 3\sum_{cyc}ab$$

$$\Leftrightarrow 2abc\sum_{cyc}\frac{1}{a+b} \le \sum_{cyc}ab$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$2abc\sum_{cyc}\frac{1}{a+b} \le 2abc\sum_{cyc}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) = \sum_{cyc}ab.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.112 *Cho các số không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$a\sqrt{b+3c^2}+b\sqrt{c+3a^2}+c\sqrt{a+3b^2} \le \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

LỜI GIẢI. Ta có bổ đề sau

$$2\sum_{cyc}ab+5\sum_{cyc}a^2b \le \frac{11}{9}$$

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$11\sum_{cyc} a^3 + 15\sum_{cyc} ab^2 + 12abc - 30\sum_{cyc} a^2b \ge 0$$

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, đặt $a = c + x, b = c + y$ $(x, y \ge 0)$, bất đẳng thức trở thành

$$18(x^2 - xy + y^2)c + 11x^3 - 30x^2y + 15xy^2 + 11y^3 \ge 0$$

Ta cần chứng minh

$$f(x) = 11x^3 - 30x^2y + 15xy^2 + 11y^3 \ge 0$$

Ta có

$$f'(x) = 33x^2 - 60xy + 15y^2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\left(10 + 3\sqrt{5}\right)y}{11} \vee x = \frac{\left(10 - 3\sqrt{5}\right)y}{11}$$

Từ đây, ta dễ dàng kiểm tra được

$$f(x) \ge f\left(\frac{\left(10 + 3\sqrt{5}\right)y}{11}\right) = \frac{9\left(109 - 30\sqrt{5}\right)y^3}{121} \ge 0$$

Trở lại bài toán của ta, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta được

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{cyc} a\sqrt{b + 3c^2}\right)^2 &\le \left[\sum_{cyc} a(1+c)\right]\left[\sum_{cyc} \frac{a(b + 3c^2)}{1+c}\right] \\
&= \left(1 + \sum_{cyc} ab\right)\left(\sum_{cyc} \frac{ab}{1+c} + 3\sum_{cyc} ab - 3\sum_{cyc} \frac{ca}{1+c}\right) \\
&\le \left(1 + \sum_{cyc} ab\right)\left[\sum_{cyc} \frac{ab}{1+c} + 3\sum_{cyc} ab - \frac{3\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{\sum\limits_{cyc} ab + \sum\limits_{cyc} a^2b}\right]
\end{aligned}$$

và

$$\sum_{cyc} \frac{ab}{1+c} = \sum_{cyc} ab - abc\sum_{cyc} \frac{1}{c+1} \le \sum_{cyc} ab - \frac{9}{4}abc$$

$$\sum_{cyc} a^2b \le \frac{11}{45} - \frac{2}{5}\sum_{cyc} ab$$

Ta cần chứng minh

$$\left(1+\sum_{cyc} ab\right)\left[4\sum_{cyc} ab - \frac{9}{4}abc - \frac{3\left(\sum_{cyc} ab\right)^2}{\frac{11}{45}+\frac{3}{5}\sum_{cyc} ab}\right] \le \frac{2}{3}$$

Đặt $q = ab + bc + ca, r = abc$, thì bất đẳng thức này trở thành

$$4q - \frac{9}{4}r - \frac{3q^2}{\frac{3}{5}q + \frac{11}{45}} \le \frac{2}{3(q+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3(q+1)} - 4q + \frac{9}{4}r + \frac{135q^2}{27q+11} \ge 0$$

Theo bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có $r \ge \frac{(4q-1)(1-q)}{6}$. Suy ra

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3(q+1)} - 4q + \frac{9}{4}r + \frac{135q^2}{27q+11} \\
&\ge \frac{2}{3(q+1)} - 4q + \frac{9}{4}\cdot\frac{(4q-1)(1-q)}{6} + \frac{135q^2}{27q+11} \\
&= \frac{7-60q-87q^2-36q^3}{24(q+1)} + \frac{135q^2}{27q+11} \\
&= \frac{(1-3q)(324q^3-57q^2-240q+77)}{24(q+1)(27q+11)}
\end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$324q^3 - 57q^2 - 240q + 77 \ge 0$$

Đây là một hàm giảm theo q nên

$$324q^3 - 57q^2 - 240q + 77 \ge 324\cdot\frac{1}{3^3} - 57\cdot\frac{1}{3^2} - 240\cdot\frac{1}{3} + 77 = \frac{8}{3} > 0.$$

Bất đăng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. ■

Ví dụ 1.113 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c^2} + \frac{b}{c+a^2} + \frac{c}{a+b^2} \ge \frac{9}{3+a+b+c}.$$

(Trần Quốc Luật)

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b+c^2}\right)\left[\sum_{cyc}a(b+c^2)(2a+2b+c)^2\right]=\left(2\sum_{cyc}a^2+3\sum_{cyc}ab\right)^2$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\left(2\sum_{cyc}a^2+3\sum_{cyc}ab\right)^2\left(3+\sum_{cyc}a\right)\geq 9\sum_{cyc}a(b+c^2)(2a+2b+c)^2$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ các bất đẳng thức sau

$$\left(2\sum_{cyc}a^2+3\sum_{cyc}ab\right)^2\geq 3\sum_{cyc}ab(2a+2b+c)^2$$

$$\left(2\sum_{cyc}a^2+3\sum_{cyc}ab\right)^2\left(\sum_{cyc}a\right)\geq 9\sum_{cyc}c^2a(2a+2b+c)^2$$

a) Trước hết, ta sẽ chứng minh

$$\left(2\sum_{cyc}a^2+3\sum_{cyc}ab\right)^2\geq 3\sum_{cyc}ab(2a+2b+c)^2$$

Do tính thuần nhất, ta có thể giả sử $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$ thì ta có

$$\left(2\sum_{cyc}a^2+3\sum_{cyc}ab\right)^2=(2-q)^2$$

$$\sum_{cyc}ab(2a+2b+c)^2=\sum_{cyc}ab(2-c)^2=\sum_{cyc}ab(4-4c+c^2)=4q-11r$$

Bất đẳng thức trở thành

$$(2-q)^2\geq 3(4q-11r)$$

$$\Leftrightarrow 33r+4-16q+q^2\geq 0$$

Theo bất đẳng thức Schur, ta có nên

$$33r+4-16q+q^2\geq 33\cdot\frac{4q-1}{9}+4-16q+q^2=\frac{1}{3}(1-q)(1-3q)\geq 0$$

b) Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\left(2\sum_{cyc} a^2 + 3\sum_{cyc} ab\right)^2 \left(\sum_{cyc} a\right) \ge 9\sum_{cyc} c^2a(2a+2b+c)^2$$

Đây cũng là một bất đẳng thức thuần nhất nên ta cũng có thể chuẩn hóa cho $a+b+c = 1$ và đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$ tương tự như trên, khi đó ta có

$$\left(2\sum_{cyc} a^2 + 3\sum_{cyc} ab\right)^2 \left(\sum_{cyc} a\right) = (2-q)^2$$

Và

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} c^2a(2a+2b+c)^2 &= \sum_{cyc} c^2a(2-c)^2 = \sum_{cyc} c^2a(4-4c+c^2) \\ &= 4\sum_{cyc} a^2b - 4\sum_{cyc} a^3b + \sum_{cyc} a^4b \end{aligned}$$

Mà

$$\sum_{cyc} a^3b = \left(\sum_{cyc} a^2b\right)\left(\sum_{cyc} a\right) - \sum_{cyc} a^2b^2 - abc\sum_{cyc} a = \sum_{cyc} a^2b - q^2 + r$$

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} a^4b &= \left(\sum_{cyc} a^3b\right)\left(\sum_{cyc} a\right) - \left(\sum_{cyc} a^2b\right)\left(\sum_{cyc} ab\right) + abc\sum_{cyc} ab \\ &= (1-q)\sum_{cyc} a^2b - q^2 + (1+q)r \end{aligned}$$

Nên

$$\begin{aligned} &\sum_{cyc} c^2a(2a+2b+c)^2 \\ &\quad = 4\sum_{cyc} a^2b - 4\left(\sum_{cyc} a^2b - q^2 + r\right) + (1-q)\sum_{cyc} a^2b - q^2 + (1+q)r \\ &\quad = (1-q)\sum_{cyc} a^2b + 3q^2 + (q-3)r \end{aligned}$$

Sử dụng kết quả quen thuộc $\sum\limits_{cyc} a^2b \le \frac{4}{27} - r$, ta chỉ cần chứng minh được

$$(2-q)^2 \ge 9\left[(1-q)\left(\frac{4}{27} - r\right) + 3q^2 + (q-3)r\right]$$

$$\Leftrightarrow 9(2-q)r + \frac{8}{3} - \frac{8}{3}q - 26q^2 \geq 0$$

Nếu $1 \geq 4q$ thì ta có

$$\frac{8}{3} - \frac{8}{3}q - 26q^2 \geq 0$$

Nếu $4q \geq 1$ thì theo bất đẳng thức Schur, ta có $9r \geq 4q - 1$ nên

$$9(2-q)r + \frac{8}{3} - \frac{8}{3}q - 26q^2 \geq (2-q)(4q-1) + \frac{8}{3} - \frac{8}{3}q - 26q^2 = \frac{2}{3}(17q-2)(1-3q) \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Ví dụ 1.114 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{b + 27c^3} + \frac{b^2}{c + 27a^3} + \frac{c^2}{a + 27b^3} \geq \frac{1}{4}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum \frac{a^2}{b + 27c^3}\right)\left[\sum (2a+b)^2(b + 27c^3)\right] \geq \left(2\sum a^2 + \sum ab\right)^2$$

Đặt $q = ab + bc + ca, r = abc$ thì ta có

$$\left(2\sum a^2 + \sum ab\right)^2 = (2-3q)^2$$

$$\sum b(2a+b)^2 = \sum a^3 + 4\sum a^2(b+c) = 1 - 3q + 3r + 4(q - 3r) = 1 + q - 9r$$

$$\begin{aligned}
27\sum c^3(2a+b)^2 &= 27\left[\sum a^2b^2(a+b) + 4abc\sum a^2 + 3\sum a^3b^2\right] \\
&= 27\left[\left(\sum a\right)\left(\sum a^2b^2\right) + 4abc\sum a^2 - abc\sum ab + 3\sum a^3b^2\right] \\
&= 27\left[q^2 - 2r + 4(1-2q)r - qr + 3\sum a^3b^2\right] \\
&= 27\left[q^2 + (2-9q)r + 3\sum a^3b^2\right]
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
\sum a^3b^2 &= \left(\sum ab\right)\left(\sum a^2b\right) - abc\sum a^2 - abc\sum ab \\
&= q\sum a^2b - (1-q)r = q\left(\sum a\right)\left(\sum a^2b\right) - (1-q)r \\
&= q\left(\sum a^3b + \sum a^2b^2 + abc\sum a\right) - (1-q)r \\
&\le q\left[\frac{1}{3}\left(\sum a^2\right)^2 + \sum a^2b^2 + abc\sum a\right] - (1-q)r \\
&= q\left[\frac{1}{3}(1-2q)^2 + q^2 - r\right] - (1-q)r = \frac{1}{3}q(1-4q+7q^2) - r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow 27\sum c^3(2a+b)^2 &\le 27\left[q^2 + (2-9q)r + q(1-4q+7q^2) - 3r\right] \\
&= 27[-(9q+1)r + q(1-3q+7q^2)]
\end{aligned}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh được

$$4(2-3q)^2 \ge 1 + q - 9r + 27[-(9q+1)r + q(1-3q+7q^2)]$$

$$\Leftrightarrow 9(4+37q)r + 15 - 76q + 117q^2 - 189q^3 \ge 0$$

Theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $9r \ge 4q - 1$ nên

$$\begin{aligned}
&9(4+37q)r + 15 - 76q + 117q^2 - 189q^3 \\
&\quad \ge (4+27q)(4q-1) + 15 - 76q + 117q^2 - 189q^3 \\
&\quad = (1-3q)^2(11-21q) \ge 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.
■

Ví dụ 1.115 *Cho các số $a, b, c \ge 0, a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{ab^2+8} + \frac{1}{bc^2+8} + \frac{1}{ca^2+8} \ge \frac{1}{3}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Hướng dẫn. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz,

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{ab^2+8}\right)\left(\sum_{cyc}(ab^2+8)(a+2c+5)^2\right) \ge \left[\sum_{cyc}(a+2c+5)\right]^2 = 576.$$

■

Ví dụ 1.116 *Cho các số* $a, b, c \geq 0$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2a^2+bc}+\frac{1}{2b^2+ca}+\frac{1}{2c^2+ab} \geq \frac{6}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}.$$

(Vasile Cirtoaje)

HƯỚNG DẪN. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz

$$\sum_{cyc} \frac{1}{2a^2+bc} \geq \frac{\left[\sum\limits_{cyc}(b+c)\right]^2}{\sum\limits_{cyc}(b+c)^2(2a^2+bc)}.$$

■

Ví dụ 1.117 *Cho các số* $a, b, c \geq 0$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \geq \frac{4}{a+b+c}.$$

(Phạm Kim Hùng)

HƯỚNG DẪN. Sử dụng bất đẳng thức Holder

$$\left(\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}\right)^2 \geq \frac{\left[\sum\limits_{cyc}(b+c)\right]^3}{\sum\limits_{cyc}(b+c)^3(4a^2+bc)}.$$

■

Ví dụ 1.118 *Cho các số* $a, b, c \geq 0$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{2a^2+ab+bc}}+\frac{1}{\sqrt{2b^2+ca+ab}}+\frac{1}{\sqrt{2c^2+ca+ab}} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}.$$

HƯỚNG DẪN. Sử dụng bất đẳng thức Holder

$$\left(\sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{2a^2+ab+bc}}\right)^2 \geq \frac{27(a+b+c)^3}{\sum\limits_{cyc}(b+2c)^3(2a^2+ab+bc)}.$$

■

Ví dụ 1.119 *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \sqrt{\frac{3}{2}(a+b+c)}$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Hướng dẫn. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz,

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a+b}}\right)^2 \le \left[\sum_{cyc} a(a+b+2c)\right]\left[\sum_{cyc} \frac{a}{(a+b)(a+b+2c)}\right].$$

■

Ví dụ 1.120 *Cho các số $a, b, c \ge 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+15ca}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+15ab}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+15bc}} \ge \frac{3}{4}.$$

(Park Doo Sung)

Hướng dẫn. Sử dụng bất đẳng thức Holder

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b^2+15ca}}\right)^2 \ge \frac{\left[\sum_{cyc} a(a+2b)\right]^3}{\sum_{cyc} a(a+2b)^3(b^2+15ca)}.$$

■

Ví dụ 1.121 *Cho các số $a, b, c \ge 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+3c^2}} + \frac{b}{\sqrt{c^2+3a^2}} + \frac{c}{\sqrt{a^2+3b^2}} \ge \frac{3}{2}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Hướng dẫn. Sử dụng bất đẳng thức Holder

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{b^2+3c^2}}\right)^2 \ge \frac{\left[\sum_{cyc} a(2a+b)\right]^3}{\sum_{cyc} a(2a+b)^3(b^2+3c^2)}.$$

■

Ví dụ 1.122 *Cho các số $a, b, c \geq 0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{3b^2+ca}}+\frac{b}{\sqrt{3c^2+ab}}+\frac{c}{\sqrt{3a^2+bc}} \geq \frac{3}{2}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Hướng dẫn. Sử dụng bất đẳng thức Holder

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{3b^2+ca}}\right)^2 \geq \frac{\left[\sum_{cyc} a(a+c)\right]^3}{\sum_{cyc} a(a+c)^3(3b^2+ca)}.$$

■

1.5 The Hyberbolic functional technique

1.5.1 Lời nói đầu

Kỹ thuật này có vẻ là khá mới mẻ nếu các bạn chỉ xem tên của kỹ thuật thôi nhưng thực ra nó đã từng được giới thiệu rất nhiều lần trên các diễn đàn, các tạp chí với cái tên phương pháp tiếp tuyến để chứng minh bất đẳng thức (chẳng hạn như ở [5]). Nhưng, trong các bài viết đó, các tác giả đều chưa khai thác thật triệt để các tính chất của tiếp tuyến để kỹ thuật trở nên mạnh hơn và được sử dụng nhiều hơn trong chứng minh bất đẳng thức. Ở đây, trong bài viết này, chúng tôi xin được giới thiệu cùng các bạn một số tìm tòi của mình trong việc làm mạnh kỹ thuật trên.

1.5.2 Một số ví dụ mở đầu

Để chứng minh một bất đẳng thức $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n) \geq 0$, mà việc đánh giá $f(x)$ gặp nhiều khó khăn thì chúng ta sẽ tìm một hàm $g(x)$ dễ đánh giá hơn sao cho $f(x) \geq g(x)$ và ta chỉ còn việc phải chứng minh bất đẳng thức còn lại chặt hơn nhưng dễ hơn là

$$g(x_1)+g(x_2)+\cdots+g(x_n) \geq 0.$$

Ví dụ 1.123 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

(Nesbitt)

Lời giải. Chuẩn hóa cho $a+b+c=3$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a}{3-a}+\frac{b}{3-b}+\frac{c}{3-c}\geq\frac{3}{2}$$

Với mọi $x\leq 3$, ta có

$$\frac{4x}{3-x}\geq 3x-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(x-1)^2}{3-x}\geq 0.$$

Do đó

$$\frac{4a}{3-a}+\frac{4b}{3-b}+\frac{4c}{3-c}\geq(3a-1)+(3b-1)+(3c-1)=6$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Ví dụ 1.124 *Cho các số không âm a,b,c, tất cả không đời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leq 8.$$

(USAMO 2003)

Lời giải. Chuẩn hóa cho $a+b+c=3$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(3+a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3+b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3+c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\leq 8$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}\leq 24$$

Với mọi $x\leq 3$, ta có

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-2x+3}\leq 4x+4$$

$$\Leftrightarrow\frac{(4x+3)(x-1)^2}{x^2-2x+3}\geq 0$$

Do đó

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+6a+9}{a^2-2a+3}\leq\sum_{cyc}(4a+4)=24$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Ví dụ 1.125 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh răng*

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\leq\sqrt{2}(a+b+c).$$

(Gabriel Dospinescu)

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\ln x$ với $x>0$, ta có

$$f'(x)=\frac{(1-x)\left[1-x+2x^2+2x^2\sqrt{2(1+x^2)}\right]}{x\sqrt{2(x^2+1)}\left(\sqrt{2}x^2+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$$

Từ đây dễ thấy

$$f(x)\ge f(1)=0\quad \forall x>0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+1}\le \sqrt{2}x-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln x$$

Do đó

$$\sqrt{a^2+1}+\sqrt{b^2+1}+\sqrt{c^2+1}\le \sqrt{2}(a+b+c)-\frac{1}{\sqrt{2}}(\ln a+\ln b+\ln c)=\sqrt{2}(a+b+c)$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Câu hỏi đặt ra là làm sao để chúng ta có thể chọn được các hàm $g(x)$ thích hợp? Thật ra, ở đây hàm $g(x)$ được lựa chọn dựa vào điều kiện ràng buộc các biến của bài toán, chẳng hạn như nếu điều kiện là $x_1+x_2+\cdots+x_n=n$ thì $g(x)=k(x-1)$, nếu $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=n$ thì $g(x)=k(x^2-1)$, và nếu $x_1x_2\cdots x_n=1$ thì $g(x)=k\ln x$ với k là hằng số mà ta sẽ chọn sau. (Ở đây ta giả sử bất đẳng thức có đẳng thức xảy ra tại $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$). Ở đây nếu f có đạo hàm và liên tục lại $x=1$ thì $k=f'(1)$. Nhưng trong một vài trường hợp, ta không cần phải tính đạo hàm làm gì mà vẫn có thể dễ dàng chọn bằng phép biến đổi tương đương, chẳng hạn như ở bất đẳng thức Nesbitt, chúng ta cần chọn sao cho

$$\frac{x}{3-x}\ge k(x-1)+\frac{1}{2}\quad \forall x\in(0,3)$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[\frac{3}{2(3-x)}-k\right]\ge 0$$

Để bất đẳng thức này không đổi dấu khi x chạy qua giá trị 1 thì ta phải chọn k sao cho

$$\frac{3}{2(3-x)}-k=0$$

có nghiệm $x=1$ (nếu không thì bất đẳng thức sẽ không đúng), từ đó suy ra $k=\frac{3}{4}$.

Ví dụ 1.126 *Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=6$. Chứng minh rằng*

$$a^4+b^4+c^4\ge 2(a^3+b^3+c^3).$$

Ví dụ 1.127 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

(Russia MO 2002)

Hướng dẫn.

$$2(ab + bc + ca) = 9 - a^2 - b^2 - c^2.$$

■

Ví dụ 1.128 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{1 + bc} + \frac{b}{1 + ca} + \frac{c}{1 + ab} \geq \frac{9}{10}.$$

Hướng dẫn.

$$bc \leq \frac{(b + c)^2}{4} = \frac{(1 - a)^2}{4}.$$

■

Ví dụ 1.129 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$a^2 + b^2 + c^2 + 9(ab + bc + ca) \geq 10(a + b + c).$$

(Vasile Cirtoaje)

Ví dụ 1.130 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{(b + c - a)^2}{a^2 + (b + c)^2} + \frac{(c + a - b)^2}{b^2 + (c + a)^2} + \frac{(a + b - c)^2}{c^2 + (a + b)^2} \geq \frac{3}{5}.$$

(Japan MO 1997)

1.5.3 Đặt vấn đề

Đối với những bài toán không chặt, cách làm trên tỏ ra rất hiệu quả nhưng đối với những bài toán tương đối chặt thì chúng ta khó lòng dùng nó để giải quyết, bởi vì bất đẳng thức $f(x) \geq g(x)$ lúc này không phải luôn đúng nữa mà nó chỉ đúng trong một số trường hợp. Chẳng hạn như với bài toán sau

Ví dụ 1.131 *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}.$$

Bằng cách tương tự, chúng ta thiết lập được bất đẳng thức

$$\frac{x}{x^2+1} \le \frac{36x+3}{50}$$

Nhưng tiếc thay bất đẳng thức này chỉ đúng trong trường hợp $x \ge -\frac{3}{4}$ vì

$$\frac{36x+3}{50} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{(4x+3)(3x-1)^2}{50(x^2+1)}$$

trong khi giả thiết lại yêu cầu chúng ta chứng minh bài toán với các số thực tùy ý. Vì thế, cách làm này không phát huy được tác dụng.
Nhưng chúng ta cũng có thể giải quyết bài toán bằng cách chia thành từng trường hợp nhỏ để giải.
Với bài toán trên, chúng ta có thể giải quyết nó như sau
LỜI GIẢI. *Trường hợp 1.* Nếu $\min\{a,b,c\} \ge -\frac{3}{4}$, khi đó sử dụng bất đẳng thức

$$\frac{x}{x^2+1} \le \frac{36x+3}{50} \quad \forall x \ge -\frac{3}{4}$$

Ta dễ dàng suy ra kết quả bài toán.
Trường hợp 2. Giả sử tồn tại một số trong ba số a,b,c nhỏ hơn $-\frac{3}{4}$, chẳng hạn $c < -\frac{3}{4}$. Khi đó, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{b}{b^2+1} \le \frac{1}{2}$$

Nên bất đẳng thức của ta sẽ đúng nếu

$$\frac{a}{a^2+1} \le \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow a \le \frac{1}{2} \vee a \ge 2$$

Do đó, ta chỉ cần xét trường hợp $2 \ge a \ge \frac{1}{2}$. Hoàn toàn tương tự, ta chỉ cần xét trường hợp $2 \ge a, b \ge \frac{1}{2}$, khi đó ta có

$$-\frac{3}{4} > c = 1 - a - b \ge -3$$

$$\Rightarrow \frac{c}{c^2+1} \le -\frac{3}{10}$$

Do đó

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} < \frac{9}{10}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.
■

Ví dụ 1.132 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}+\frac{1}{3b^2+(b-1)^2}+\frac{1}{3c^2+(c-1)^2}\geq 1.$$

(Lê Hữu Điền Khuê)

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=\frac{1}{3x^2+(x-1)^2}-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\ln x$, ta có

$$f'(x)=\frac{2(x-1)(16x^3-1)}{3x(4x^2-2x+1)^2}$$

Từ đây dễ thấy $f'(x)=0$ không phải chỉ có một nghiệm $x=1$ mà còn có thêm một nghiệm nữa là $x=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ nên chắc chắn rằng bất đẳng thức $f(x)\geq 0$ mà ta đang mong đợi sẽ không phải luôn đúng. Vậy ta hãy xem xét xem nó đúng trong trường hợp nào? Bằng kiểm tra trực tiếp, ta thấy được $f(x)\geq 0\ \ \forall x\geq\frac{1}{2}$. Từ đây, dẫn đến lời giải như sau

Nếu $\min\{a,b,c\}\geq\frac{1}{2}$ khi đó ta có

$$\sum_{cyc}\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}\geq\sum_{cyc}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\ln a\right)=1.$$

Bây giờ, ta giả sử $a\leq\frac{1}{2}$, khi đó ta có

$$\sum_{cyc}\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}\geq\frac{1}{3a^2+(a-1)^2}=\frac{1}{2a(2a-1)+1}\geq 1.$$

nên bất đẳng thức đã cho luôn đúng. Ta có đpcm. ■

Ví dụ 1.133 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

Ví dụ 1.134

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\leq\frac{1}{3}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Giả sử $\begin{cases} a+b+c=1\\ a\geq b\geq c\Rightarrow a\geq\frac{1}{3}\geq c\end{cases}$, bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{6a^2-2a+1}\leq\frac{1}{3}$$

Nếu $c \ge \frac{1}{8}$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} 27\left(\frac{1}{3}-\sum_{cyc}\frac{a^2}{6a^2-2a+1}\right) &= \sum_{cyc}\left(12q-1-\frac{27a^2}{6a^2-2a+1}\right)\\ &= \sum_{cyc}\frac{(1-3a)^2(8a-1)}{6a^2-2a+1} \ge 0 \end{aligned}$$

Nếu $c \le \frac{1}{8}$, ta có

$$\begin{aligned} & 6\left(\frac{1}{6}-\sum_{cyc}\frac{a^2}{6a^2-2a+1}\right)\\ = & \frac{1-2a}{6a^2-2a+1}+\frac{1-2b}{6b^2-2b+1}-\frac{6c^2}{6c^2-2c+1}\\ = & \frac{b+c-a}{6a^2-2a+1}+\frac{a+c-b}{6b^2-2b+1}-\frac{6c^2}{6c^2-2c+1}\\ = & \frac{2(a-b)^2(2-3c)}{(6a^2-2a+1)(6b^2-2b+1)}+c\left(\frac{1}{6a^2-2a+1}+\frac{1}{6b^2-2b+1}-\frac{6c}{6c^2-2c+1}\right)\\ \ge & c\left(\frac{1}{6a^2-2a+1}+\frac{1}{6b^2-2b+1}-\frac{6c}{6c^2-2c+1}\right)\\ \ge & c\left(\frac{1}{6a^2-2a+1}+\frac{1}{6b^2-2b+1}-1\right) \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{6a^2-2a+1}+\frac{1}{6b^2-2b+1} \ge 1$$

Nếu $b \le \frac{1}{3}$ thì bất đẳng thức này hiển nhiên đúng, nếu $b \ge \frac{1}{3}$ thì theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz

$$\begin{aligned} \frac{1}{6a^2-2a+1}+\frac{1}{6b^2-2b+1} &\ge \frac{4}{6(a^2+b^2)-2(a+b)+2}\\ &= \frac{2}{3(a^2+b^2)-(a+b)+1}\\ &= \frac{2(a+b+c)^2}{3(a^2+b^2)+c(a+b+c)} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$2(a+b+c)^2 \ge 3(a^2+b^2)+c(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(2a+2b+c) \geq 3(a^2+b^2)$$

Do $b \geq \frac{1}{3}$ nên $3b \geq a$, suy ra

$$(a+b+c)(2a+2b+c) \geq 2(a+b)^2 = 3(a^2+b^2) + b(a-b) + a(3b-a) \geq 3(a^2+b^2).$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị. ∎

Ví dụ 1.135 *Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2 = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc} \frac{1}{x^5+y^2+z^2} \leq \frac{3}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{x^5-x^2+3} \leq 1.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x^5 = \frac{x^6}{x} \geq \frac{2x^6}{x^2+1}$$

Đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2 \Rightarrow a+b+c = 3$ thì ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{1}{\frac{2a^3}{a+1} - a + 3} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a+1}{2a^3-a^2+2a+3} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-1)^2(3+3a-2a^2)}{2a^3-a^2+2a+3} \geq 0$$

Giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow a \geq 1 \geq c$. Xét 2 trường hợp
Trường hợp 1. $b+c \geq 1 \Rightarrow a \leq 2$, khi đó ta có

$$3+3a-2a^2 \geq 0, \quad 3+3b-2b^2 \geq 0, \quad 3+3c-2c^2 \geq 0$$

Nên bất đẳng thức đúng.

Trường hợp 2. $b+c \le 1 \Rightarrow a \ge 2$, ta có

$$\begin{aligned} 2a^3-a^2+2a+3-5(a+1) &= 2a^3-a^2-3a-2 = a^3\left(2-\frac{1}{a}-\frac{3}{a^2}-\frac{2}{a^3}\right) \\ &\ge a^3\left(2-\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}-\frac{2}{2^3}\right) = \frac{1}{2}a^3 > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a+1}{2a^3-a^2+2a+3} \le \frac{1}{5}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{b+1}{2b^3-b^2+2b+3}+\frac{c+1}{2c^3-c^2+2c+3} \le \frac{4}{5}$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì với mọi ta có

$$\frac{x+1}{2x^3-x^2+2x+3} \le \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow 4x^3 \ge (x+1)(2x-1)$$

Nếu $x \le \frac{1}{2}$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng, nếu $x \ge \frac{1}{2}$, ta có

$$4x^3-(x+1)(2x-1) \ge 4x^3-2(2x-1) \ge 2x^2-2(2x-1) = 2(x-1)^2 \ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Ví dụ 1.136 *Cho các số không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-3a+3}}+\frac{1}{\sqrt{b^2-3b+3}}+\frac{1}{\sqrt{c^2-3c+3}} \le 3.$$

(Nguyễn Văn Thạch)

Lời giải. Chúng ta thiết lập được bất đẳng thức sau

$$\frac{2}{\sqrt{x^2-3x+3}} \le x+1 \quad \forall x \ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow a \ge 1 \ge c$. Nếu $c \ge \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ thì ta có

$$\sum_{cyc} \frac{2}{\sqrt{a^2-3a+3}} \le \sum_{cyc}(a+1) = 6$$

Xét trường hợp ngược lại, $c \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ta xét 2 trường hợp nhỏ

Nếu $b \le 1$, ta có

$$a^2 - 3a + 3 = \left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \ge \frac{3}{4}$$

$$b^2 - 3b + 3 = (2-b)(1-b) + 1 \ge 1$$

$$c^2 - 3c + 3 = (1-c)^2 + 2 - c \ge \left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 + 2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{16}{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{a^2-3a+3}} \le \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 + \frac{\sqrt{5}+1}{2} < 3$$

Nếu $b \ge 1 \Rightarrow 2 \ge a \ge b \ge 1$, xét hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+3}}$ với $x \in [1,2]$, ta có

$$f"(x) = \frac{8x^2 - 24x + 15}{4(x^2-3x+3)^{3/2}} < 0 \quad \forall x \in [1,2]$$

Nên từ đây, theo bất đẳng thức Jensen, ta có

$$f(a) + f(b) \le 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2f(t) = \frac{2}{\sqrt{t^2-3t+3}}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{2}{\sqrt{t^2-3t+3}} + \frac{1}{\sqrt{(3-2t)^2 - 3(3-2t) + 3}} \le 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{t^2-3t+3}} + \frac{1}{\sqrt{4t^2-6t+3}} \le 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{36(t-1)^2(36t^6 - 252t^5 + 749t^4 - 1202t^3 + 1099t^2 - 546t + 117)}{(t^2-3t+3)^2(4t^2-6t+3)^2} \ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm. ■

Cách chia những trường hợp và đi đến những đánh giá khái quát như các ví dụ rất hay và độc đáo nhưng rất khó để thực hiện. Vì vậy, chúng ta cần tìm một con đường khác để giải quyết bài toán tốt hơn khi mà chúng ta không thể tìm được một đánh giá nào cả.

1.5.4 Giải quyết vấn đề

Cách giải quyết vấn đề của chúng ta ở đây hoàn toàn tương tự như trên. Trước hết, chúng ta sẽ tìm điều kiện để bất đẳng thức $f(x) \ge g(x)$ được thỏa mãn với mọi $x_1, x_2, ..., x_n$. Trong trường hợp ngược lại, tồn tại một biến x_n sao cho $f(x_n) \le g(x_n)$, chúng ta sẽ tìm một hàm $g'(x)$ sao cho $f(x) \ge g'(x)$ với mọi $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ (cách tìm hàm $g'(x)$ cũng phải dựa trên giả thiết của bài toán đưa ra). Khi đó, chúng ta sẽ đưa bài toán về chứng minh

$$g'(x_1) + g'(x_2) + \cdots + g'(x_{n-1}) + f(x_n) \geq 0$$

Từ đây, chúng ta sẽ dựa trên mối quan hệ ràng buộc giữa $x_1, x_2, ..., x_n$ để giải quyết bài toán.
Một điều cần lưu ý là sẽ tồn tại rất nhiều hàm $g'(x)$ thỏa mãn $f(x) \geq g'(x)$. Vậy ta làm thế nào để chọn được hàm $g'(x)$ thích hợp? Chúng tôi sẽ không nói rõ ra điều này, các bạn hãy xem xét thật kỹ các ví dụ dưới đây sẽ hiểu ra ngay cách làm của chúng ta.

Ví dụ 1.137 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2a^2+3} + \frac{1}{2b^2+3} + \frac{1}{2c^2+3} \geq \frac{3}{5}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Xét 2 trường hợp
Trường hợp 1. Nếu $c \geq \frac{1}{4}$, ta có

$$\frac{5}{2x^2+3} - 1 + \frac{4}{5}(x-1) = \frac{2(4x-1)(x-1)^2}{5(2x^2+3)} \geq 0 \quad \forall x \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2x^2+3} \geq 1 - \frac{4}{5}(x-1) \quad \forall x \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{5}{2a^2+3} \geq \sum_{cyc} \left[1 - \frac{4}{5}(a-1)\right] = 3$$

Trường hợp 2. Nếu $c \leq \frac{1}{4}$, ta có

$$\frac{15}{2x^2+3} - 2 + \frac{4}{5}(2x-3) = \frac{(4x+1)(2x-3)^2}{5(2x^2+3)} \geq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{15}{2x^2+3} \geq 2 + \frac{4}{5}(3-2x) \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{15}{2a^2+3} + \frac{15}{2b^2+3} \geq 4 + \frac{4}{5}(6-2a-2b) = 4 + \frac{8}{5}c$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{15}{2c^2+3} + \frac{8}{5}c \geq 5$$

hiển nhiên đúng vì

$$\frac{15}{2c^2+3}+\frac{8}{5}c-5=\frac{2c[8c^2+23c+12(1-4c)]}{5(2c^2+3)}\geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=\frac{3}{2}, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.138 *Cho các số không âm a,b,c,d thỏa mãn $a+b+c+d=2$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{3a^2+1}+\frac{1}{3b^2+1}+\frac{1}{3c^2+1}+\frac{1}{3d^2+1}\geq\frac{16}{7}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\geq b\geq c\geq d$, ta xét 2 trường hợp
Trường hợp 1. Nếu $d\geq\frac{1}{12}$, ta có

$$\frac{7}{3x^2+1}-4+\frac{24}{7}(2x-1)=\frac{3(12x-1)(2x-1)^2}{7(3x^2+1)}\geq 0\quad\forall x\geq\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow\frac{7}{3x^2+1}\geq 4-\frac{24}{7}(2x-1)\quad\forall x\geq\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{7}{3a^2+1}\geq\sum_{cyc}\left[4-\frac{24}{7}(2a-1)\right]=16$$

Trường hợp 2. Nếu $d\leq\frac{1}{12}$, ta có

$$\frac{7}{3x^2+1}-3+\frac{12}{7}(3x-2)=\frac{(12x+1)(3x-2)^2}{7(3x^2+1)}\geq 0\quad\forall x\geq 0$$

$$\Rightarrow\frac{7}{3x^2+1}\geq 3+\frac{12}{7}(2-3x)\quad\forall x\geq 0$$

$$\Rightarrow\frac{7}{3a^2+1}+\frac{7}{3b^2+1}+\frac{7}{3c^2+1}\geq 9+\frac{12}{7}(6-3a-3b-3c)=9+\frac{36}{7}c$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{7}{3d^2+1}+\frac{36}{7}d\geq 7$$

hiển nhiên đúng vì

$$\frac{7}{3d^2+1}+\frac{36}{7}d-7=\frac{3d[36d^2+95d+12(1-12d)]}{7(3d^2+1)}\geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\frac{1}{2}$ hoặc $a=b=c=\frac{2}{3}, d=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.139 *Cho các số không âm a, b, c, tất cả không đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{2c^2+(a+b)^2}\le\frac{2}{3}.$$

(Darij Grinberg)

Lời giải. Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$ và giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{3a^2-2a+1}\le\frac{2}{3}$$

Ta xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. Nếu $b\ge\frac{1}{6}$, ta có

$$\frac{3x^2}{3x^2-2x+1}-1-\frac{4}{3}(2x-1)=-\frac{(6x-1)(2x-1)^2}{3(3x^2-2x+1)}\le 0\quad\forall x\ge\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{3x^2}{3x^2-2x+1}\le 1-\frac{4}{3}(1-2x)\quad\forall x\ge\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{3a^2}{3a^2-2a+1}+\frac{3b^2}{3b^2-2b+1}\le 2-\frac{4}{3}(2-2a-2b)=2-\frac{8}{3}c$$

Mặt khác

$$\frac{3c^2}{3c^2-2c+1}-\frac{8}{3}c=-\frac{c[(1-3c)(17-24c)+7]}{9(3c^2-2c+1)}\le 0$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{3c^2}{3c^2-2c+1}\le 2+\frac{3c^2}{3c^2-2c+1}-\frac{8}{3}c\le 2$$

Trường hợp 2. Nếu $\frac{1}{6}\ge b\ge c\Rightarrow a=1-b-c\ge\frac{2}{3}$, ta có

$$\frac{x^2}{3x^2-2x+1}-\frac{2}{9}x=\frac{x(6x-1)(2-x)}{9(3x^2-2x+1)}\le 0\quad\forall x\le\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{x^2}{3x^2-2x+1}\le\frac{2}{9}x\quad\forall x\le\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow\frac{b^2}{3b^2-2b+1}+\frac{c^2}{3c^2-2c+1}\le\frac{2}{9}(b+c)=\frac{2}{9}-\frac{2}{9}a$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{a^2}{3a^2-2a+1}-\frac{2}{9}a-\frac{4}{9}\le 0$$

hiển nhiên đúng vì

$$\frac{a^2}{3a^2-2a+1}-\frac{2}{9}a-\frac{4}{9}=-\frac{(3a-2)(6a^2+3a-4)+4}{27(3a^2-2a+1)}\le 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị. ■

Ví dụ 1.140 *Cho các số không âm* a, b, c, *tất cả không đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(a+b)^2}\le\frac{1}{3}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$ và giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{6a^2-2a+1}\le\frac{1}{3}$$

Ta xét 2 trường hợp
Trường hợp 1. Nếu $c\ge\frac{1}{8}$, thì

$$\frac{9x^2}{6x^2-2x+1}-1-\frac{4}{3}(3x-1)=-\frac{(8x-1)(3x-1)^2}{3(6x^2-2x+1)}\le 0\quad\forall x\ge\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow\frac{9x^2}{6x^2-2x+1}\le 1-\frac{4}{3}(1-3x)\quad\forall x\ge\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{9a^2}{6a^2-2a+1}\le\sum_{cyc}\left[1-\frac{4}{3}(1-3a)\right]=3$$

Trường hợp 2. Nếu $c\le\frac{1}{8}$, thì

$$\frac{6x^2}{6x^2-2x+1}-1-\frac{2}{3}(2x-1)=-\frac{(6x+1)(2x-1)^2}{3(6x^2-2x+1)}\le 0\quad\forall x\ge 0$$

$$\Rightarrow\frac{6x^2}{6x^2-2x+1}\le 1-\frac{2}{3}(1-2x)\quad\forall x\ge 0$$

$$\Rightarrow\frac{6a^2}{6a^2-2a+1}+\frac{6b^2}{6b^2-2b+1}\le 2-\frac{2}{3}(2-2a-2b)=2-\frac{4}{3}c$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{6c^2}{6c^2-2c+1}-\frac{4}{3}c\le 0$$

hiển nhiên đúng vì

$$\frac{6c^2}{6c^2-2c+1}-\frac{4}{3}c=-\frac{2c[12c^2+3c+2(1-8c)]}{3(6c^2-2c+1)}\le 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.141 *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng*

$$(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)\ge (a+1)(b+1)(c+1)(d+1).$$

(Phan Thành Việt)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c\ge d$. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}[\ln(a^2+1)-\ln(a+1)]\ge 0$$

Ta xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. Nếu $a\le 2$, xét hàm số $f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x+1)-\frac{1}{2}(x-1)$ với $x\le 2$, ta có

$$f'(x)=\frac{(x-1)(3-x^2)}{2(x^2+1)(x+1)}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1 \quad \vee \quad x=\sqrt{3}$$

Từ đây, ta dễ dàng kiểm tra được $f(x)\ge \min\{f(1), f(2)\}=0\ \forall x\le 2$. Suy ra

$$\sum_{cyc}[\ln(a^2+1)-\ln(a+1)]\ge \sum_{cyc}\frac{1}{2}(a-1)=0$$

Trường hợp 2. Nếu $a\ge 2\Rightarrow 2\ge b\ge c\ge d$, xét hàm số $g(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x+1)-\frac{7}{65}(3x-2)-\ln\frac{13}{15}$ with $x\le 2$, ta có

$$g'(x)=\frac{(3x-2)(43+10x-7x^2)}{65(x^2+1)(x+1)}$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$$

Từ đây, ta dễ dàng kiểm tra được $g(x)\ge g\left(\frac{2}{3}\right)=0\ \forall x\le 2$. Suy ra

$$\begin{aligned}&[\ln(b^2+1)-\ln(b+1)]+[\ln(c^2+1)-\ln(c+1)]+[\ln(d^2+1)-\ln(d+1)]\\ \ge\ & \frac{7}{65}(3b+3c+3d-6)+3\ln\frac{13}{15}=\frac{21}{65}(2-a)+3\ln\frac{13}{15}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$h(a) = \ln(a^2+1) - \ln(a+1) + \frac{21}{65}(2-a) + 3\ln\frac{13}{15} \geq 0$$

Ta có

$$h'(a) = \frac{(3a-2)(43+10a-7a^2)}{65(a^2+1)(a+1)}$$

$$h'(a) = 0 \Leftrightarrow a = \frac{5+\sqrt{326}}{7}$$

Từ đây, ta dễ thấy $h(a) \geq \min\{h(2), h(4)\} > 0$ $\forall a \geq 2$.
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.
■

Ví dụ 1.142 *Cho các số không âm* a, b, c*, không có 2 số nào đồng thời bằng* 0*. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{1+\frac{48a}{b+c}} + \sqrt{1+\frac{48b}{c+a}} + \sqrt{1+\frac{48c}{a+b}} \geq 15.$$

(Vasile Cirtoaje)

LỜI GIẢI. Chuẩn hóa cho $a+b+c = 1$ và giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{1+47a}{1-a}} \geq 15$$

Ta xét 2 trường hợp
Trường hợp 1. Nếu $c \geq \frac{2}{27}$, thì

$$\frac{1+47x}{1-x} - \left(\frac{54}{5}x + \frac{7}{5}\right)^2 = \frac{12(27x-2)(3x-1)^2}{25(1-x)} \geq 0 \quad \forall 1 \geq x \geq \frac{2}{27}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1+47x}{1-x}} \geq \frac{54}{5}x + \frac{7}{5} \quad \forall 1 \geq x \geq \frac{2}{27}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\sqrt{\frac{1+47a}{1-a}} \geq \sum_{cyc}\left(\frac{54}{5}x + \frac{7}{5}\right) = 15$$

Trường hợp 2. Nếu $c \leq \frac{2}{27}$, thì

$$\frac{1+47x}{1-x} - \left(\frac{96}{7}x + \frac{1}{7}\right)^2 = \frac{48(48x+1)(2x-1)^2}{49(1-x)} \geq 0 \quad \forall 1 \geq x \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1+47x}{1-x}} \geq \frac{96}{7}x + \frac{1}{7} \quad \forall 1 \geq x \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1+47a}{1-a}}+\sqrt{\frac{1+47b}{1-b}} \geq \frac{96}{7}(a+b)+\frac{2}{7}=14-\frac{96}{7}c$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt{\frac{1+47c}{1-c}} \geq 1+\frac{96}{7}c$$

Đặt $\frac{1+47c}{1-c}=t^2$ $(t \geq 0) \Rightarrow \frac{11}{5} \geq t \geq 1$, bất đẳng thức trở thành

$$t \geq 1+\frac{96(t^2-1)}{7(t^2+47)}$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(7t^2-96t+233) \geq 0.$$

hiển nhiên đúng do $\frac{11}{5} \geq t \geq 1$.
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.143 *Cho các số không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1-4a^2}{1+3a-3a^2}+\frac{1-4b^2}{1+3b-3b^2}+\frac{1-4c^2}{1+3c-3c^2} \leq 1.$$

(Michael Rozenberg)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Ta xét 2 trường hợp
Trường hợp 1. Nếu $c \geq \frac{1}{9}$, thì

$$\frac{1-4x^2}{1+3x-3x^2}-\frac{1}{3}-\frac{3}{5}(1-3x)=\frac{(1-9x)(1-3x)^2}{15(1+3x-3x^2)} \leq 0 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{9},1\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1-4x^2}{1+3x-3x^2} \leq \frac{1}{3}+\frac{3}{5}(1-3x)$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{1-4a^2}{1+3a-3a^2} \leq \sum_{cyc}\left[\frac{1}{3}+\frac{3}{5}(1-3a)\right]=1$$

Trường hợp 2. Nếu $c \leq \frac{1}{9}$, thì

$$\frac{1-4x^2}{1+3x-3x^2}-\frac{8}{7}(1-2x)=-\frac{(12x+1)(2x-1)^2}{7(1+3x-3x^2)} \leq 0 \quad \forall x \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \frac{1-4x^2}{1+3x-3x^2} \leq \frac{8}{7}(1-2x)$$

$$\Rightarrow \frac{1-4a^2}{1+3a-3a^2}+\frac{1-4b^2}{1+3b-3b^2} \leq \frac{8}{7}(2-2a-2b)=\frac{16}{7}c$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{16}{7}c + \frac{1-4c^2}{1+3c-3c^2} \le 1$$
$$\Leftrightarrow -\frac{c(48c^2-41c+5)}{7(1+3c-3c^2)} \le 0.$$

hiển nhiên đúng do $c \le \frac{1}{9}$.
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$ hoặc $a = b = \frac{1}{2}, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.144 *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{(1+2a)(1+2b)(1+2c)(1+2d)}{(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)} \ge \frac{125}{8}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge d \Rightarrow d \le \frac{1}{4}$. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}[\ln(1+2a) - \ln(1-a)] \ge 3\ln\frac{5}{2}$$

Ta xét 2 trường hợp
Trường hợp 1. Nếu $c \ge x_0$ với x_0 là nghiệm thuộc $(0, 0.09)$ của phương trình $\ln(1+2x) - \ln(1-x) - \frac{9}{10}(3x-1) - \ln\frac{5}{2} = 0$, xét hàm số $f(x) = \ln(1+2x) - \ln(1-x) - \frac{9}{10}(3x-1) - \ln\frac{5}{2}$ with $x \ge x_0$, ta có

$$f'(x) = \frac{3(6x-1)(3x-1)}{10(1+2x)(1-x)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \quad \vee \quad x = \frac{1}{3}$$

Từ đây, ta dễ dàng kiểm tra được $f(x) \ge \min\left\{f\left(\frac{1}{3}\right), f(x_0)\right\} = 0\ \forall x \ge x_0$. Suy ra

$$\begin{aligned}&[\ln(1+2a) - \ln(1-a)] + [\ln(1+2b) - \ln(1-b)] + [\ln(1+2c) - \ln(1-c)]\\ \ge\ & \frac{9}{10}(3a+3b+3c-3) + 3\ln\frac{5}{2} = -\frac{27}{10}c + 3\ln\frac{5}{2}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$g(d) = \ln(1+2d) - \ln(1-d) - \frac{27}{10}d \ge 0$$

Ta có

$$g'(d) = \frac{3(6d-1)(3d-1)}{10(1+2d)(1-d)}$$

$$g'(d) = 0 \Leftrightarrow d = \frac{1}{6}$$

Từ đây, ta dễ dàng kiểm tra được $g(d) \geq \min\left\{g(0), g\left(\frac{1}{4}\right)\right\} = 0$.
Trường hợp 2. Nếu $x_0 \geq c \geq d$, xét hàm số $h(x) = \ln(1+2x) - \ln(1-x) - \frac{3}{2}(2x-1) - 2\ln 2$ với $x \geq 0$, ta có

$$h'(x) = \frac{3x(2x-1)}{(1+2x)(1-x)}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = \frac{1}{2}$$

Từ đây, ta dễ dàng kiểm tra được $h(x) \geq h\left(\frac{1}{2}\right) = 0\ \forall x \geq 0$. Suy ra

$$\begin{aligned} &[\ln(1+2a) - \ln(1-a)] + [\ln(1+2b) - \ln(1-b)] \\ &\geq \frac{3}{2}(2a+2b-2) + 4\ln 2 = -3c - 3d + 4\ln 2 \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$k(c) + k(d) \geq 0$$

trong đó $k(x) = \ln(1+2x) - \ln(1-x) - 3x + 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln\frac{5}{2}$. Và vì thế, ta chỉ cần chứng minh được $k(x) \geq 0\ \forall x \leq x_0$. Ta có

$$k'(x) = \frac{3x(2x-1)}{(1+2x)(1-x)} \leq 0$$

Suy ra $k(x)$ nghịch biến với mọi $x \leq x_0$, do đo

$$\begin{aligned} k(x) &\geq k(x_0) = \ln(1+2x) - \ln(1-x) - 3x + 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln\frac{5}{2} \\ &= \left[\frac{9}{10}(3x_0 - 1) + \ln\frac{5}{2}\right] - 3x_0 + 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln\frac{5}{2} \\ &= -\frac{3}{10}x_0 + 2\ln 2 - \frac{9}{10} - \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} \\ &> -\frac{3}{10}\cdot 0.09 + 2\ln 2 - \frac{9}{10} - \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} \approx 0.0011 > 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}, d = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Ví dụ 1.145 *Let a, b, c, d be nonnegative real numbers such that $a + b + c + d = 2$. Prove that*

$$\frac{a^2}{(a^2+1)^2} + \frac{b^2}{(b^2+1)^2} + \frac{c^2}{(c^2+1)^2} + \frac{d^2}{(d^2+1)^2} \leq \frac{16}{25}.$$

(Ji Chen)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \geq d$. Ta xét 2 trường hợp
Trường hợp 1. Nếu $12d^3 + 11d^2 + 32d \geq 4$, thì

$$\sum_{cyc} \left[\frac{a^2}{(a^2+1)^2} - \frac{24}{125}(2a-1) - \frac{4}{25} \right]$$

$$= -\sum_{cyc} \frac{(12a^3 + 11a^2 + 32a - 4)(2a-1)^2}{125(a^2+1)^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{(a^2+1)^2} \leq \frac{24}{125} \sum_{cyc} (2a-1) + \frac{16}{25} = \frac{16}{25}$$

Trường hợp 2. Nếu $4 \geq 12d^3 + 11d^2 + 32d \geq 32d \Rightarrow d \leq \frac{1}{8}$, ta có

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{540}{2197}\left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{36}{169}$$

$$= -\frac{(60x^3 + 92x^2 + 216x + 27)(3x-2)^2}{2197(x^2+1)^2} \leq 0 \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{(x^2+1)^2} \leq \frac{540}{2197}\left(x - \frac{2}{3}\right) + \frac{36}{169} \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{(b^2+1)^2} + \frac{c^2}{(c^2+1)^2} + \frac{d^2}{(d^2+1)^2} \leq \frac{540}{2197}(b+c+d-2) + \frac{108}{169} = -\frac{540}{2197}a + \frac{108}{169}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{a^2}{(a^2+1)^2} - \frac{540}{2197}a + \frac{108}{169} \leq \frac{16}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{169a^2}{(a^2+1)^2} - \frac{540}{13}a \leq \frac{4}{25}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{169a^2}{(a^2+1)^2} - \frac{540}{13}a - \frac{4}{25} &\leq \frac{169a^2}{(a^2+1)^2} - \frac{540}{15}a - \frac{4}{25} = \frac{169a^2}{(a^2+1)^2} - 36a - \frac{4}{25} \\
&= -\frac{4 + 900a - 4217a^2 + 1800a^3 + 4a^4 + 900a^5}{25(a^2+1)^2} \\
&\leq -\frac{4 + 8 \cdot 900a^2 - 4217a^2 + 1800a^3 + 4a^4 + 900a^5}{25(a^2+1)^2} \\
&= -\frac{4 + 2983a^2 + 1800a^3 + 4a^4 + 900a^5}{25(a^2+1)^2} < 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = \frac{1}{2}$.
■

Ví dụ 1.146 *Cho các số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 2)$ thỏa mãn $a_1+a_2+\cdots+a_n = n$. Chứng minh rằng*

$$(n-1)(a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3) + n^2 \geq (2n-1)(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2).$$

(Vasile Cirtoaje)

LỜI GIẢI. Nếu $n = 2$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Nếu $n = 3$, đặt $q = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1, r = a_1a_2a_3$, bất đẳng thức trở thành

$$2(27 - 9q + 3r) + 9 \geq 5(9 - 2q)$$

$$\Leftrightarrow 3r + 9 - 4q \geq 0$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur bậc 3.
Suy ra, ta chỉ cần xét trường hợp $n \geq 4$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$. Ta xét 2 trường hợp
Trường hợp 1. Nếu $a_n \geq \frac{1}{n-1}$, ta có

$$(n-1)x^3 - (2n-1)x^2 + (n+1)(x-1) + n = (x-1)^2[(n-1)x - 1] \geq 0 \quad \forall x \geq \frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow (n-1)x^3 + n \geq (2n-1)x^2 - (n+1)(x-1) \quad \forall x \geq \frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}[(n-1)a_i^3 + n] \geq \sum_{i=1}^{n}[(2n-1)a_i^2 - (n+1)(a_i - 1)]$$

$$\Leftrightarrow (n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^3 + n^2 \geq (2n-1)\sum_{i=1}^{n}a_i^2$$

Trường hợp 2. Nếu $a_n \leq \frac{1}{n-1}$, ta có

$$\begin{aligned}(n-1)x^3 - (2n-1)x^2 &+ \frac{n(n-2)}{(n-1)^2}[(n-1)x - n] + \frac{n^2}{n-1} \\ &= \frac{[(n-1)x - n]^2[(n-1)x + 1]}{(n-1)^2} \geq 0 \quad \forall x \geq 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (n-1)x^3 - (2n-1)x^2 + \frac{n^2}{n-1} \geq \frac{n(n-2)}{(n-1)^2}[n - (n-1)x] \quad \forall x \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n-1}\left[(n-1)a_i^3 - (2n-1)a_i^2 + \frac{n^2}{n-1}\right] \geq \frac{n(n-2)}{(n-1)^2}\sum_{i=1}^{n-1}[n - (n-1)a_i]$$

$$\Leftrightarrow (n-1)\sum_{i=1}^{n-1}a_i^3 - (2n-1)\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2 + n^2 \geq \frac{n(n-2)}{n-1}a_n$$

Ta cần chứng minh

$$(n-1)a_n^3 - (2n-1)a_n^2 + \frac{n(n-2)}{n-1}a_n \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_n[(n-1)(2-a_n)[1-(n-1)a_n] + n^2 - 4n + 2]}{n-1} \geq 0.$$

hiển nhiên đúng do $n \geq 4$.
Bất đẳng thức được chứng minh. ■

1.5.5 Một số mở rộng

Mở rộng thứ nhất

Ví dụ 1.147 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{9-ab} + \frac{1}{9-bc} + \frac{1}{9-ca} \leq \frac{3}{8}.$$

Lời giải. Bài toán này có đặc điểm gần giống dạng của các ví dụ trên nhưng chúng ta không thể dùng cách của các bài trên để giải nó vì các biến trong bất đẳng thức dạng $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geq 0$ không phải là a, b, c liên quan đến giả thiết của bài toán mà là ab, bc, ca. Một lí do nữa là khi ta cố gắng thiết lập bất đẳng thức $f(x) \geq g(x)$ trong đó $g(x)$ có dạng $k(x-1)$ thì bất đẳng thức này bị ngược chiều (các bạn hãy kiểm tra). Tuy nhiên, chúng ta có thể dùng dạng sau để giải bài toán này, đó là thiết lập $g(x)$ có dạng $m(x^2-1) + n(x-1)$, chúng ta chỉ việc thiết tìm các tham số m, n sao cho $f(x) \geq g(x)$ được thỏa mãn. Cụ thể, ở bài này, chúng ta sẽ tìm m, n sao cho

$$\frac{8}{9-x} \leq m(x^2-1) + n(x-1) + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left[m(x+1) + n - \frac{1}{9-x}\right] \geq 0$$

Giống như các bài trước, ta sẽ chọn m, n sao cho phương trình $m(x+1) + n - \frac{1}{9-x} = 0$ có một nghiệm là 1, từ đó ta suy ra được $n = \frac{1}{8} - 2m$, thay vào bất đẳng thức trên và phân tích ra, ta được bất đẳng thức tương đương là

$$(x-1)^2(72m - 1 - 8mx) \geq 0$$

Bây giờ hãy chú ý rằng $3 > \max\{ab, bc, ca\}$ và $a, b, c \geq 0$ nên ta chỉ cần tìm m sao cho bất đẳng thức trên đúng với mọi $x \in [0, 3]$ là đủ (nếu cần ta có thể dùng đánh giá mạnh hơn là $\frac{9}{4} \geq \max\{ab, bc, ca\}$, tức là tìm để bất đẳng thức đúng với mọi $x \in \left[0, \frac{9}{4}\right]$ nhưng vì bài này không chặt nên ta không cần phải đánh giá quá chặt như thế). Cho $x = 0 \Rightarrow m > 0$, do đó

$$72m - 1 - 8mx \geq 72m - 1 - 24m = 48m - 1$$

Từ đây, rõ ràng nếu ta chọn $m = \frac{1}{48} \Rightarrow n = \frac{1}{12}$ thì bất đẳng thức đúng. Vậy $m = \frac{1}{48}, n = \frac{1}{12}$ và ta thiết lập được bất đẳng thức

$$\frac{8}{9-x} \le \frac{1}{48}(x^2-1) + \frac{1}{12}(x-1) + 1 = \frac{1}{48}(x^2+4x+3)$$

Và lời giải của ta như sau

Dễ dàng chứng minh được $\frac{8}{9-x} \le \frac{1}{48}(x^2+4x+3)\ \ \forall x \in [0,3]$. Sử dụng bất đẳng thức này với chú ý là $\max\{ab, bc, ca\} \le \frac{9}{4} < 3$, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{8}{9-ab} \le \frac{1}{48}\left(\sum_{cyc} a^2b^2 + 4\sum_{cyc} ab\right) + \frac{43}{16}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} a^2b^2 + 4\sum_{cyc} ab \le 15$$

Đặt $x = ab + bc + ca \Rightarrow x \le 3, abc \ge \max\left\{0, \frac{4x-9}{3}\right\}$.

Nếu $4x \le 9$, ta có

$$\sum_{cyc} a^2b^2 + 4\sum_{cyc} ab = x^2 + 4x - 6abc \le x^2 + 4x \le \frac{225}{16} < 15$$

Nếu $4x \ge 9$, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} a^2b^2 + 4\sum_{cyc} ab &= x^2 + 4x - 6abc \le x^2 + 4x - 2(4x-9) \\ &= (x-1)(x-3) + 15 \le 15\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Ví dụ 1.148 *Cho các số không âm a, b, c thỏa $a^4 + b^4 + c^4 = 3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \le 1.$$

(Moldova TST 2005)

Lời giải. Dễ dàng chứng minh được với mọi $x \le \frac{3}{2}$ thì

$$\frac{3}{4-x} \le \frac{1}{15}(2x^2 + x + 12)$$

Chú ý là $\max\{ab, bc, ca\} \le \sqrt{\frac{3}{2}} < \frac{3}{2}$ nên

$$\sum_{cyc} \frac{3}{4-ab} \le \frac{1}{15}\left(2\sum_{cyc} a^2b^2 + \sum_{cyc} ab + 36\right)$$

Mặt khác, ta có

$$\sum_{cyc} a^2b^2 \le \sum_{cyc} a^4 = 3, \quad \sum_{cyc} ab \le \sqrt{3\sum_{cyc} a^2b^2} \le 3$$

Từ đây dễ dàng suy ra đpcm. ■

Ví dụ 1.149 *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2 = 4$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{3-abc} + \frac{1}{3-bcd} + \frac{1}{3-cda} + \frac{1}{3-dab} \le 2.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Dễ thấy $\max\{abc, bcd, cda\} \le \frac{8}{3\sqrt{3}}$ nên chúng ta cần thiết lập bất đẳng thức

$$\frac{2}{3-x} \le m(x^2-1) + n(x-1) + 1$$

Dễ thấy $n = \frac{1}{2} - 2m$, khi đó bất đẳng thức tương đương

$$(x-1)^2(6m - 1 - 2mx) \ge 0$$

Dễ thấy $m \ge 0$, suy ra

$$6m - 1 - 2mx \ge 6m - 1 - \frac{16}{3\sqrt{3}}m$$

Ta cần có

$$6m - 1 - \frac{16}{3\sqrt{3}}m \ge 0$$

$$\Rightarrow m \ge \frac{1}{6 - \frac{16}{3\sqrt{3}}}$$

Do $\sqrt{3} > \frac{5}{3}$ nên ta chỉ cần chọn sao cho

$$m \ge \frac{1}{6 - \frac{16}{5}} = \frac{5}{14}$$

$$\Rightarrow m = \frac{5}{14}$$

$$\Rightarrow n = -\frac{3}{14}$$

Như vậy, ta thiết lập được bất đẳng thức

$$\frac{2}{3-x} \leq \frac{5x^2 - 3x + 12}{14} \quad \forall x \leq \frac{8}{3\sqrt{3}}$$

Sử dụng các bất đẳng thức này lần lượt, ta suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$5\sum_{cyc} a^2b^2c^2 - 3\sum_{cyc} abc \leq 8$$

Chứng minh bất đẳng thức này bằng cách dùng kỹ thuật hàm lồi. ■

Mở rộng thứ hai

Đối với những bất đẳng thức đối xứng, chúng ta có thể làm như các cách ở trên, phần lớn đều giúp chúng ta đi đến kết quả. Nhưng đối với các bất đẳng thức hoán vị, lại chứa căn thức thì mọi chuyện lại không đơn giản như thế. Chúng ta không thể thiết lập những hàm số trung gian bậc nhất hay bậc hai rồi dựa vào chúng để chứng minh bài toán ban đầu được. Tuy nhiên, trong một số trường hợp, ta có thể tìm các hàm phân thức trung gian (trong một số trường hợp, ta cũng có thể thiết lập hàm bậc 2) để đánh giá các biểu thức trong căn nhằm giúp ta loại bỏ căn thức, điều này giúp ta dễ dàng hơn trong việc giải bài toán. Để thiết lập được các hàm phân thức này, chúng ta có rất nhiều cách, nhưng tốt hơn hết là ta hãy đi từ bất đẳng thức để suy ra bất đẳng thức, chẳng hạn từ bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sqrt{2x^2 + 2y^2} \geq x + y \quad \forall x, y \geq 0$$

Như vậy, ta có

$$\sqrt{2x^2 + 2y^2} - x - y = \frac{(x-y)^2}{\sqrt{2x^2 + 2y^2} + x + y} \leq \frac{(x-y)^2}{2(x+y)}$$

Và như vậy, ta thiết lập được bất đẳng thức

$$\sqrt{2x^2 + 2y^2} \leq x + y + \frac{(x-y)^2}{2(x+y)} = \frac{3x^2 + 2xy + 3y^2}{2(x+y)}$$

Và nó đã giúp ta giải được bài toán rất khó sau

Ví dụ 1.150 *Cho các số dương x, y, z. Chứng minh rằng*

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}} + \frac{y}{\sqrt{y+z}} + \frac{z}{\sqrt{z+x}} \geq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{\sqrt{2}}.$$

(Walther Janous)

Lời giải. Chú ý rằng với mọi $x, y \geq 0$, ta có

$$\frac{3x^2+2xy+3y^2}{2(x+y)} \geq \sqrt{2(x^2+y^2)}$$

Thật vậy, ta có

$$(3x^2+2xy+3y^2)^2 - 8(x+y)^2(x^2+y^2) = (x-y)^4 \geq 0$$

Trở lại bài toán, đặt $a=\sqrt{x}, b=\sqrt{y}, c=\sqrt{z}$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{2(a^2+b^2)}} \geq \frac{1}{2}\sum_{cyc} a$$

Sử dụng bất đẳng thức trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc} \frac{4a^2(a+b)}{3a^2+2ab+3b^2} \geq \sum_{cyc} a$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[\frac{8a^2(a+b)}{3a^2+2ab+3b^2} - 3a + b\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(3b-a)}{3a^2+2ab+3b^2} \geq 0$$

Đặt $x = \frac{3c-b}{3b^2+2bc+3c^2}$ và y, z tương tự. Ta phải chứng minh

$$\sum_{cyc} x(b-c)^2 \geq 0$$

Trường hợp 1. Nếu $a \geq b \geq c$, khi đó ta có $y \geq 0$. Ta sẽ chứng minh

$$a^2y + 2b^2x \geq 0$$

và

$$x + 2z \geq 0$$

Thật vậy, bất đẳng thức thứ nhất tương đương với

$$\frac{a^2(3a-c)}{3a^2+2ac+3c^2} + \frac{2b^2(3c-b)}{3b^2+2bc+3c^2} \geq 0$$

Nếu $3c \geq b$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $b \geq 3c$, ta có thể kiểm tra được đây là một hàm nghịch biến theo b, do đó

$$\begin{aligned}
\frac{a^2(3a-c)}{3a^2+2ac+3c^2} + \frac{2b^2(3c-b)}{3b^2+2bc+3c^2} &= \frac{a^2(3a-c)}{3a^2+2ac+3c^2} + \frac{2a^2(3c-a)}{3a^2+2ac+3c^2} \\
&= \frac{a^2(a+5c)}{3a^2+2ac+3c^2} \geq 0
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức thứ 2 tương đương với

$$\frac{3a-c}{3a^2+2ac+3c^2}+\frac{2(3b-a)}{3a^2+2ab+3b^2}\ge 0$$

Đây là một hàm nghịch biến theo c nên

$$\begin{aligned}\frac{3a-c}{3a^2+2ac+3c^2}+\frac{2(3b-a)}{3a^2+2ab+3b^2} &\ge \frac{3a-b}{3a^2+2ab+3b^2}+\frac{2(3b-a)}{3a^2+2ab+3b^2}\\ &= \frac{a+5b}{3a^2+2ab+3b^2}\ge 0\end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$(a-c)^2\ge \frac{a^2}{b^2}(b-c)^2,\quad (a-c)^2\ge (a-b)^2$$

Nên

$$\begin{aligned}2\sum_{cyc}x(b-c)^2 &= [2x(b-c)^2+y(a-c)^2]+[y(a-c)^2+2z(a-b)^2]\\ &\ge \left[2x(b-c)^2+y\cdot\frac{a^2}{b^2}(b-c)^2\right]+[y(a-b)^2+2z(a-b)^2]\\ &= \frac{a^2y+2b^2x}{b^2}(b-c)^2+(a-b)^2(y+2z)\ge 0\end{aligned}$$

Trường hợp 2. Nếu $c\ge b\ge a$, thì ta có $x,z\ge 0$. Nếu $y\ge 0$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $y\le 0$, tức là $c\ge 3a$, xét những trường hợp nhỏ sau
i) Nếu $2b\ge c+a$, ta sẽ chứng minh

$$z(a-b)^2+y(a-c)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(3b-a)}{3a^2+2ab+3b^2}+\frac{(a-c)^2(3a-c)}{3a^2+2ac+3c^2}\ge 0$$

Đây là một hàm đồng biêns theo b nên

$$\frac{(a-b)^2(3b-a)}{3a^2+2ab+3b^2}\ge \frac{\left(a-\frac{a+c}{2}\right)^2\left(3\cdot\frac{a+c}{2}-a\right)}{3a^2+a(a+c)+3\left(\frac{a+c}{2}\right)^2}=\frac{(a-c)^2(a+3c)}{2(19a^2+10ac+3c^2)}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned}&\frac{(a-c)^2(a+3c)}{2(19a^2+10ac+3c^2)}+\frac{(a-c)^2(3a-c)}{3a^2+2ac+3c^2}\\ &\quad= \frac{(a-c)^2(3a+c)(39a^2-2ac+3c^2)}{2(3a^2+2ac+3c^2)(19a^2+10ac+3c^2)}\ge 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow z(a-b)^2 + y(a-c)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} x(b-c)^2 = x(b-c)^2 + [z(a-b)^2 + y(a-c)^2] \geq 0$$

ii) Nếu $a+c \geq 2b$ và $c \geq 2b - a \geq \left(3+2\sqrt{3}\right)a$, ta sẽ chứng minh

$$z + 3y \geq 0$$

và

$$x + \frac{3}{2}y \geq 0$$

Bất đẳng thức thứ nhất tương đương với

$$\frac{3b-a}{3a^2+2ab+3b^2} + \frac{3(3a-c)}{3a^2+2ac+3c^2} \geq 0$$

Đây là một hàm đồng biến theo c nên

$$\frac{3a-c}{3a^2+2ac+3c^2} \geq \frac{3a-(2b-a)}{3a^2+2a(2b-a)+3(2b-a)^2} = \frac{2a-b}{2(a^2-2ab+3b^2)}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} &\frac{3(2a-b)}{2(a^2-2ab+3b^2)} + \frac{3b-a}{3a^2+2ab+3b^2} \\ &\qquad = \frac{16a^3+13a^2b-6ab^2+9b^3}{2(a^2-2ab+3b^2)(3a^2+2ab+3b^2)} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức thứ hai tương đương với

$$\frac{2(3c-b)}{3b^2+2bc+3c^2} + \frac{3(3a-c)}{3a^2+2ac+3c^2} \geq 0$$

Đây là một hàm đồng biến theo a nên
Nếu $c \geq 2b$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{2(3c-b)}{3b^2+2bc+3c^2} + \frac{3(3a-c)}{3a^2+2ac+3c^2} &\geq \frac{2(3c-b)}{3b^2+2bc+3c^2} + \frac{3(3\cdot 0-c)}{3\cdot 0^2+2\cdot 0\cdot c+3c^2} \\ &= \frac{3c^2-4bc-3b^2}{c(3b^2+2bc+3c^2)} \geq 0 \end{aligned}$$

Nếu $2b \geq c$, ta có

$$\begin{aligned} &\frac{2(3c-b)}{3b^2+2bc+3c^2} + \frac{3(3a-c)}{3a^2+2ac+3c^2} \\ &\qquad \geq \frac{2(3c-b)}{3b^2+2bc+3c^2} + \frac{3[3(2b-c)-c]}{3(2b-c)^2+2(2b-c)c+3c^2} \\ &\qquad = \frac{15b^3+44b^2c-13bc^2-6c^3}{2(3b^2-2bc+c^2)(3b^2+2bc+3c^2)} \geq 0 \end{aligned}$$

Tiếp theo, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}(a-c)^2 &= (a-b)^2+(b-c)^2+2(a-b)(b-c)\\ &= (a-b)^2+(b-c)^2+2\cdot\sqrt{2}(a-b)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(b-c)\\ &\le (a-b)^2+(b-c)^2+2(a-b)^2+\frac{1}{2}(b-c)^2\\ &= 3(a-b)^2+\frac{3}{2}(b-c)^2\end{aligned}$$

Ta có

$$\sum_{cyc} x(b-c)^2 \ge (b-c)^2\left(x+\frac{3}{2}y\right)+(a-b)^2(z+3y)\ge 0$$

iii) Nếu $a+c\ge 2b$ và $\left(3+2\sqrt{3}\right)a\ge 2b-a \Rightarrow a\ge \frac{b}{4}$, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$x(c-b)^2+z(b-a)^2 \ge \frac{[(c-b)+(b-a)]^2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}} = \frac{xz(c-a)^2}{x+z}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{xz}{x+z}+y\ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy+yz+zx\ge 0$$

$$\Leftrightarrow f(c)=9\sum_{cyc}ab^3+22\sum_{cyc}a^2bc-12\sum_{cyc}a^2b^2-3\sum_{cyc}a^3b\ge 0$$

Dễ dàng kiểm tra được $f(c)$ là hàm đồng biến, suy ra

$$f(c)\ge f(b)=2b(3a^3-a^2b+25ab^2-3b^3)\ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Nhận xét 16 *Chúng ta cũng có một lời giải khác rất hay của Peter Scholze như sau Đặt $a=\sqrt{x}, b=\sqrt{y}, c=\sqrt{z}$ và bình phương 2 vế, ta có bất đẳng thức tương đương*

$$\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^2+b^2}+2\sum_{cyc}\frac{a^2b^2}{\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}\ge\frac{1}{2}\left(\sum_{cyc}a\right)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức sắp xếp lại cho 2 dãy

$$\left(\frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b^2c^2}{\sqrt{b^2+c^2}},\frac{c^2a^2}{\sqrt{c^2+a^2}}\right)$$

và

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}, \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}\right)$$

ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} &\geq \sum_{cyc} \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ &= \sum_{cyc} \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{a^4}{a^2+b^2} + \sum_{cyc} \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} \geq \frac{1}{2}\left(\sum_{cyc} a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2a^4}{a^2+b^2} + \sum_{cyc} \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} \geq \left(\sum_{cyc} a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} + \sum_{cyc} \frac{4a^2b^2}{a^2+b^2} \geq \left(\sum_{cyc} a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} \geq \left(\sum_{cyc} a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}}\right)^2 \geq 0.$$

hiển nhiên đúng.

■

Một cách khác để thiết lập hàm phân thức trung gian là sử dụng bất đẳng thức AM-GM, chẳng hạn ta có

$$2\sqrt{8x^2+y^2} = \frac{2(Ax+By)\sqrt{8x^2+y^2}}{Ax+By} \leq \frac{(Ax+By)^2+8x^2+y^2}{Ax+By} \quad \forall A,B,x,y \geq 0$$

Chúng ta sẽ thiết lập một bất đẳng thức có đẳng thức xảy ra khi $x = y$, khi đó ta phải có $A + B = 3$. Ngoài ra, để bất đẳng thức này có độ chặt thì chúng ta nên chọn A, B sao cho bất đẳng thức này có đẳng thức tại 2 điểm. Vì ta cần dùng bất đẳng thức này để giải các bài toán hoán vị chứa căn thức (chú ý là các bất đẳng thức này thường có những điểm "nhạy cảm" là $(x, y, 0)$) nên tốt hơn hết là chúng ta sẽ chọn

A, B sao cho bất đẳng thức trên có đẳng thức tại $x = 1, y = 0$ hoặc $x = 0, y = 1$. Nếu ta chọn A, B sao cho bất đẳng thức có đẳng thức tại $x = 1, y = 0$ thì ta có $A = 2\sqrt{2}$ và $B = 3 - 2\sqrt{2}$, những giá trị này lẻ và sẽ gây trở ngại cho các tính toán của ta. Nếu ta chọn A, B sao cho bất đẳng thức tại $x = 0, y = 1$ thì ta được $A = 2, B = 1$ và ta thiết lập được bất đẳng thức

$$\sqrt{8x^2 + y^2} \le \frac{(2x + y)^2 + 8x^2 + y^2}{2(2x + y)} = \frac{6x^2 + 2xy + y^2}{2x + y}$$

Và ta giải được bài toán sau (cũng rất khó)

Ví dụ 1.151 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$(a + b + c)^2 \ge a\sqrt{8b^2 + c^2} + b\sqrt{8c^2 + a^2} + c\sqrt{8a^2 + b^2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Chú ý rằng

$$\frac{(6b^2 + 2bc + c^2)^2}{(2b + c)^2} - (8b^2 + c^2) = \frac{4b^2(b - c)^2}{(2b + c)^2} \ge 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{8b^2 + c^2} \le \frac{6b^2 + 2bc + c^2}{2b + c} = 3b + c - \frac{3bc}{2b + c}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\left(\sum_{cyc} a\right)^2 \ge \sum_{cyc} a\left(3b + c - \frac{3bc}{2b + c}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3abc\sum_{cyc} \frac{1}{2b + c} + \sum_{cyc} a^2 - 2\sum_{cyc} bc \ge 0$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{1}{2b + c} \ge \frac{3}{\sum\limits_{cyc} a}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{9abc}{\sum\limits_{cyc} a} + \sum_{cyc} a^2 - 2\sum_{cyc} bc \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 + 3abc \geq \sum_{cyc} bc(b+c).$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur bậc 3.
Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■
Đôi khi chúng ta cũng có thể bắt đầu từ việc sử dụng liên phân số, chẳng hạn xuất phát từ bất đẳng thức hiển nhiên sau

$$\sqrt{4x^2+y^2} \leq 2x+y \quad \forall x, y \geq 0$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2+y^2} - 2x - y &= -\frac{4xy}{\sqrt{4x^2+y^2}+2x+y} \\
&= -\frac{4xy}{2(2x+y) - \frac{4xy}{\sqrt{4x^2+y^2}+2x+y}} \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

Chẳng hạn, ta sẽ sử dụng đẳng thức

$$\sqrt{4x^2+y^2} - 2x - y = -\frac{4xy}{2(2x+y) - \frac{4xy}{\sqrt{4x^2+y^2}+2x+y}}$$

kết hợp với $\sqrt{4x^2+y^2} \leq 2x+y$, ta thiết lập được

$$\begin{aligned}
\sqrt{4x^2+y^2} - 2x - y &= -\frac{4xy}{2(2x+y) - \frac{4xy}{\sqrt{4x^2+y^2}+2x+y}} \\
&\leq -\frac{4xy}{2(2x+y) - \frac{4xy}{2(2x+y)}} \\
&= -\frac{2xy(2x+y)}{4x^2+3xy+y^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sqrt{4x^2+y^2} &\leq 2x+y- -\frac{2xy(2x+y)}{4x^2+3xy+y^2} \\
&= \frac{(2x+y)(4x^2+xy+y^2)}{4x^2+3xy+y^2}
\end{aligned}$$

Ta giải được bài toán sau

Ví dụ 1.152 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{3}{4}(a+b+c)^2 \geq a\sqrt{4b^2+c^2} + b\sqrt{4c^2+a^2} + c\sqrt{4a^2+b^2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Chú ý rằng

$$\frac{(2b+c)^2(4b^2+bc+c^2)^2}{(4b^2+3bc+c^2)^2} - 4b^2 - c^2 = \frac{4b^3c^3}{(4b^2+3bc+c^2)^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{4b^2+c^2} \leq \frac{(2b+c)(4b^2+bc+c^2)}{4b^2+3bc+c^2} = 2b+c-\frac{2bc(2b+c)}{4b^2+3bc+c^2}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{3}{4}\left(\sum_{cyc} a\right)^2 \geq \sum_{cyc} a\left[2b+c-\frac{2bc(2b+c)}{4b^2+3bc+c^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow 8abc\sum_{cyc}\frac{2b+c}{4b^2+3bc+c^2} + 3\sum_{cyc} a^2 - 6\sum_{cyc} bc \geq 0$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta chỉ cần chứng minh được

$$8\sum_{cyc}\frac{2b+c}{4b^2+3bc+c^2} \geq \frac{27}{\sum\limits_{cyc} a}$$

khi đó, bất đẳng thức trên là một hệ quả của bất đẳng thức Schur vì

$$\frac{27abc}{\sum\limits_{cyc} a} + 3\sum_{cyc} a^2 - 6\sum_{cyc} bc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 + 3abc \geq \sum_{cyc} bc(b+c)$$

Do đó, tất cả chúng ta phải làm bây giờ là chứng minh

$$8\sum_{cyc}\frac{2b+c}{4b^2+3bc+c^2} \geq \frac{27}{\sum\limits_{cyc} a}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow & 64\sum_{cyc} a^5b + 32\sum_{cyc} ab^5 + 68\sum_{cyc} a^2b^4 - 128\sum_{cyc} a^4b^2 + 60\sum_{cyc} a^3b^3 \\ & \qquad + abc\left(132\sum_{cyc} a^3 + 147\sum_{cyc} ab^2 - 243\sum_{cyc} a^2b - 396abc\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 4\sum_{cyc} ab(16a^2-ab+8b^2)(a-b)^2 + 4\sum_{cyc} a^2b^2(a^2-11ab+34b^2) \\ & \qquad + abc\left(132\sum_{cyc} a^3 + 147\sum_{cyc} ab^2 - 243\sum_{cyc} a^2b - 396abc\right) \geq 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc} ab(16a^2-ab+8b^2)(a-b)^2+\sum_{cyc} a^2b^2(2a-11b)^2+15\sum_{cyc} a^2b^4$$
$$+abc\left(132\sum_{cyc} a^3+147\sum_{cyc} ab^2-243\sum_{cyc} a^2b-396abc\right)\geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc} a^2b^4\geq abc\sum_{cyc} a^2b$$

và

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} a^2b^2(2a-11b)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{cyc}[a^2b^2(2a-11b)^2+b^2c^2(2b-11c)^2]\\ &\geq \sum_{cyc} ab^2c(2a-11b)(2b-11c)\\ &= abc\left(121\sum_{cyc} a^2b+4\sum_{cyc} ab^2-22\sum_{cyc} a^3-66abc\right)\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$121\sum_{cyc} a^2b+4\sum_{cyc} ab^2-22\sum_{cyc} a^3-66abc+15\sum_{cyc} a^2b$$
$$+132\sum_{cyc} a^3+147\sum_{cyc} ab^2-243\sum_{cyc} a^2b-396abc\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 110\sum_{cyc} a^3+151\sum_{cyc} ab^2-107\sum_{cyc} a^2b-462abc\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 107\left(\sum_{cyc} a^3-\sum_{cyc} a^2b\right)+\left(3\sum_{cyc} a^3+151\sum_{cyc} ab^2-462abc\right)\geq 0.$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM.
Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ∎

Ví dụ 1.153 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\geq a\sqrt{3b^2+c^2}+b\sqrt{3c^2+a^2}+c\sqrt{3a^2+b^2}.$$

Lời giải. Chú ý rằng

$$\frac{(2b^2+bc+c^2)^2}{(b+c)^2}-3b^2-c^2=\frac{b^2(b-c)^2}{(b+c)^2}\ge 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{3b^2+c^2}\le \frac{2b^2+bc+c^2}{b+c}=2b+c-\frac{2bc}{b+c}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\ge \sum_{cyc}a\left(2b+c-\frac{2bc}{b+c}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2abc\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}+\sum_{cyc}a^2-2\sum_{cyc}ab\ge 0$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}\ge \frac{9}{2\sum\limits_{cyc}a}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{9abc}{\sum\limits_{cyc}a}+\sum_{cyc}a^2-2\sum_{cyc}ab\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a^3+3abc\ge \sum_{cyc}bc(b+c).$$

hiển nhiên đúng vì đây chính là bất đẳng thức Schur bậc 3.
Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ∎

Nhận xét 17 *Một cách tổng quát, ta có kết quả sau với mọi $k>0$*

$$\left(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca\right)\frac{\sqrt{k+1}}{2}\ge a\sqrt{kb^2+c^2}+b\sqrt{kc^2+a^2}+c\sqrt{ka^2+b^2}$$

(Võ Quốc Bá Cẩn, Vasile Cirtoaje)

Thật vậy, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}a\sqrt{kb^2+c^2}\right)^2\le\left(\sum_{cyc}a\right)\left[\sum_{cyc}a(kb^2+c^2)\right]$$

Từ đây, ta thấy bất đẳng thức trên được suy ra từ 2 bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab\right)^2 &\geq 4\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} a^2 b\right)\\ \left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab\right)^2 &\geq 4\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} ab^2\right)\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức thứ nhất, bất đẳng thức thức 2 được chứng minh tương tự. Ta có bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2 + 2\sum_{cyc} ab^3 - 2\sum_{cyc} a^3 b \geq 0$$

Giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, *đặt* $a = c + x, b = c + y$ *với* $x, y \geq 0$ *thì bất đẳng thức này trở thành*

$$4(x^2 - xy + y^2)c^2 + 4[x(x-y)^2 + y^3]c + (x^2 - xy - y^2)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng nên ta có đpcm.
Chúng ta có kết quả tổng quát của bất đẳng thức

$$\left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab\right)^2 \geq 4\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} a^2 b\right)$$

là

$$[(q+r)a + (r+p)b + (p+q)c]^2 \geq 4(p+q+r)(pbc + qca + rab)$$

với p, q, r *là các số không âm và* a, b, c *là các số thực tùy ý. Chứng minh bất đẳng thức này như sau*
Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$, *khi đó ta có*

$$\begin{aligned}&[(q+r)a + (r+p)b + (p+q)c]^2 - 4(p+q+r)(pbc + qca + rab)\\ &= [(q-r)a + (r+p)b - (p+q)c]^2 + 4qr(a-b)(a-c) \geq 0\end{aligned}$$

Cho $a, b, c \geq 0$ *và* $p = b^k, q = c^k, r = a^k$, *ta được*

$$\left[\sum_{cyc} a^k(a+b)\right]^2 \geq 4\left(\sum_{cyc} a^k\right)\left(\sum_{cyc} a^{k+1} b\right)$$

Với $k = 1$, *ta thu được bất đẳng thức ở trên.*
Với $k = -1$, *ta được*

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + 3 \geq 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}.$$

Ví dụ 1.154 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}} \geq \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{3}}.$$

(Lê Trung Kiên)

HƯỚNG DẪN. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3(x^4+x^2y^2+y^4)} &= 2\sqrt{(x^2+xy+y^2)\cdot 3(x^2-xy+y^2)} \\ &\leq (x^2+xy+y^2)+3(x^2-xy+y^2) \\ &= 2(2x^2-xy+2y^2) \end{aligned}$$

và ta thiết lập được bất đẳng thức

$$2x^2-xy+2y^2 \geq \sqrt{3(x^4+x^2y^2+y^4)}.$$

■

1.6 Các dạng tổng bình phương

Kỹ thuật này dựa trên một kết quả hiển nhiên của bất đẳng thức là $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, nó có thể giúp ta giải được những bài toán mà nếu dùng kỹ thuật thông thường thì rất khó (thông thường đây là các bất đẳng thức bậc 4). Chúng ta có định lý sau

Định lý 1.6 *Xét bất đẳng thức sau với các biến thực a, b, c*

$$m\sum_{cyc} a^4 + n\sum_{cyc} a^2b^2 + p\sum_{cyc} a^3b + g\sum_{cyc} ab^3 - (m+n+p+g)\sum_{cyc} a^2bc \geq 0$$

khi đó bất đẳng thức này đúng nếu $\begin{cases} m > 0 \\ 3m(m+n) \geq p^2+pg+g^2 \end{cases}$.

CHỨNG MINH. Viết lại bất đẳng thức như sau

$$m\left(\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2\right) + (m+n)\left(\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc\right) + p\left(\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc\right)$$
$$+g\left(\sum_{cyc} ab^3 - \sum_{cyc} a^2bc\right) \geq 0$$

Chú ý rằng

$$\sum_{cyc} a^4 - \sum_{cyc} a^2b^2 = \frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2$$

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} a^3b - \sum_{cyc} a^2bc &= \sum_{cyc} b^3c - \sum_{cyc} a^2bc = \sum_{cyc} bc(a^2-b^2)\\ &= -\sum_{cyc} bc(a^2-b^2) + \frac{1}{3}(ab+bc+ca)\sum_{cyc}(a^2-b^2)\\ &= \frac{1}{3}\sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+ac-2bc)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} ab^3 - \sum_{cyc} a^2bc &= \sum_{cyc} ca^3 - \sum_{cyc} ab^2c = \sum_{cyc} ca(a^2-b^2)\\ &= \sum_{cyc} ca(a^2-b^2) - \frac{1}{3}(ab+bc+ca)\sum_{cyc}(a^2-b^2)\\ &= -\frac{1}{3}\sum_{cyc}(a^2-b^2)(ab+bc-2ca)\end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{m}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2 + \frac{1}{3}\sum_{cyc}(a^2-b^2)[(p-g)ab-(2p+g)bc+(p+2g)ca]$$
$$+(m+n)\left(\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc\right) \geq 0$$

Mặt khác

$$\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^2bc = \frac{1}{6(p^2+pg+g^2)}\sum_{cyc}[(p-g)ab-(2p+g)bc+(p+2g)ca]^2$$

Bất đẳng thức được viết lại thành

$$\frac{m}{2}\sum_{cyc}(a^2-b^2)^2 + \frac{1}{3}\sum_{cyc}(a^2-b^2)[(p-g)ab-(2p+g)bc+(p+2g)ca]$$
$$+\frac{m+n}{6(p^2+pg+g^2)}\sum_{cyc}[(p-g)ab-(2p+g)bc+(p+2g)ca]^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{18m}\sum_{cyc}[3m(a^2-b^2)+(p-g)ab-(2p+g)bc+(p+2g)ca]^2$$
$$+\frac{3m(m+n)-p^2-pg-g^2}{18m(p^2+pg+g^2)}\sum_{cyc}[(p-g)ab-(2p+g)bc+(p+2g)ca]^2 \geq 0$$

Từ đây, ta có thể dễ dàng kiểm tra được với $\begin{cases} m > 0 \\ 3m(m+n) \geq p^2 + pg + g^2 \end{cases}$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Định lý được chứng minh. ■

Ví dụ 1.155 *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng*

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3(a^3b+b^3c+c^3a).$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc} a^4 + 2\sum_{cyc} a^2b^2 - \sum_{cyc} a^3b \geq 0$$

Từ đây, ta được $m = 1 > 0, n = 2, p = -3, g = 0$, ta có

$$3m(m+n) - p^2 - pg - g^2 = 3 \cdot 1 \cdot (1+2) - (-3)^2 - (-3) \cdot 0 - 0^2 = 0.$$

Do đó, theo định lý của ta, bất đẳng thức được chứng minh. ■

Ví dụ 1.156 *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^4+b^4+c^4+\left(\sqrt{3}-1\right)abc(a+b+c) \geq \sqrt{3}(a^3b+b^3c+c^3a).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Ta có $m = 1 > 0, n = 0, p = -\sqrt{3}, g = 0$ và

$$3m(m+n) - p^2 - pg - g^2 = 3 \cdot 1 \cdot (1+0) - \left(-\sqrt{3}\right)^2 - \left(-\sqrt{3}\right) \cdot 0 - 0^2 = 0.$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng. ■

Ví dụ 1.157 *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng*

$$7(a^4+b^4+c^4) + 10(a^3b+b^3c+c^3a) \geq 0.$$

(Phạm Văn Thuận)

Lời giải. Ta sẽ chứng minh kết quả mạnh hơn là

$$7\sum_{cyc} a^4 + 10\sum_{cyc} a^3b \geq \frac{17}{27}\left(\sum_{cyc} a\right)^4$$

$$\Leftrightarrow 86\sum_{cyc} a^4 - 51\sum_{cyc} a^2b^2 + 101\sum_{cyc} a^3b - 34\sum_{cyc} ab^3 - 102\sum_{cyc} a^2bc \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 86 > 0 \\ n = -51 \\ p = 101 \\ g = -34 \end{cases}$$

Mặt khác, ta có

$$3m(m+n) - p^2 - pg - g^2 = 3 \cdot 86 \cdot (86 - 51) - 101^2 - 101 \cdot (-34) - (-34)^2 = 1107 > 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Ví dụ 1.158 *Cho các số thực a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leq 3.$$

(Vũ Đình Quý)

Lời giải. Do $abc = 1$ nên tồn tại các số x, y, z sao cho $a = \frac{y}{x}, b = \frac{z}{y}, c = \frac{x}{z}$ bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{x^2}{x^2 - xy + y^2} \leq 3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3x^2}{x^2 - xy + y^2} \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(4 - \frac{3x^2}{x^2 - xy + y^2}\right) \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(x - 2y)^2}{x^2 - xy + y^2} \geq 3$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left[\sum_{cyc} \frac{(x - 2y)^2}{x^2 - xy + y^2}\right] \left[\sum_{cyc} (x - 2y)^2 (x^2 - xy + y^2)\right] \geq \left[\sum_{cyc} (x - 2y)^2\right]^2$$

Ta cần chứng minh

$$\left[\sum_{cyc} (x - 2y)^2\right]^2 \geq 3 \sum_{cyc} (x - 2y)^2 (x^2 - xy + y^2)$$

$$\Leftrightarrow 10 \sum_{cyc} x^4 + 39 \sum_{cyc} x^2 y^2 - 25 \sum_{cyc} x^3 y - 16 \sum_{cyc} xy^3 - 8 \sum_{cyc} x^2 yz \geq 0$$

Từ đây, ta được $m = 10 > 0, n = 39, p = -25, g = -16$ và

$3m(m+n)-p^2-pg-g^2 = 3\cdot 10\cdot(10+39)-(-25)^2-(-25)\cdot(-16)-(-16)^2 = 189 > 0.$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Ví dụ 1.159 *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \ge \frac{3}{5}.$$

(Japan MO 1997)

Lời giải. Đặt $x = b+c-a, y = c+a-b, z = a+b-c$, bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{4x^2}{(y+z)^2+(2x+y+z)^2} \ge \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\frac{x^2}{x^2+(x+y+z)^2} \ge \frac{3}{5}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{x^2+(x+y+z)^2} \ge \frac{\left(\sum_{cyc}x^2\right)^2}{\sum_{cyc}x^2[x^2+(x+y+z)^2]}$$

Ta cần chứng minh

$$10\left(\sum_{cyc}x^2\right)^2 \ge 3\sum_{cyc}x^2[x^2+(x+y+z)^2]$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}x^4+14\sum_{cyc}x^2y^2-6\sum_{cyc}x^3y-6\sum_{cyc}xy^3-6xyz\sum_{cyc}x \ge 0$$

Từ đây, ta có $m = 4 > 0, n = 14, p = -6, g = -6$ và

$3m(m+n)-p^2-pg-g^2 = 3\cdot 4\cdot(4+14)-(-6)^2-(-6)\cdot(-6)-(-6)^2 = 108 > 0.$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Ví dụ 1.160 *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \le 8.$$

(USA MO 2003)

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc}\left[3-\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}\right]\geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}\geq \frac{1}{2}$$

Đặt $x=b+c-a, y=c+a-b, z=a+b-c$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{2(y+z)^2+(2x+y+z)^2}\geq \frac{1}{8}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{2(y+z)^2+(2x+y+z)^2}\geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc}x^2\right)^2}{\sum x^2[2(y+z)^2+(2x+y+z)^2]}$$

Ta cần chứng minh

$$8\left(\sum_{cyc}x^2\right)^2\geq \sum_{cyc}x^2[2(y+z)^2+(2x+y+z)^2]$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}x^4+5\sum_{cyc}x^2y^2-2\sum_{cyc}x^3y-2\sum_{cyc}xy^3-3xyz\sum_{cyc}x\geq 0$$

Từ đây, ta có $m=2>0, n=5, p=-2, g=-2$ và

$$3m(m+n)-p^2-pg-g^2=3\cdot 2\cdot(2+5)-(-2)^2-(-2)\cdot(-2)-(-2)^2=30>0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 1.161 *Cho các số $a,b,c\geq 0, a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{4a+5b^2}}+\frac{b}{\sqrt{4b+5c^2}}+\frac{c}{\sqrt{4c+5a^2}}\leq \frac{3}{\sqrt{17}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz,

$$\left(\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{4a+5b^2}}\right)^2\leq\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{4a+5b^2}\right)=\sum_{cyc}\frac{a}{4a+5b^2}$$

nên ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{a}{4a+5b^2} \le \frac{9}{17}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b^2}{4a+5b^2} \ge \frac{3}{17}$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{b^2}{4a+5b^2} \ge \frac{\left(\sum\limits_{cyc} b^2\right)^2}{\sum\limits_{cyc} b^2(4a+5b^2)} = \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a^2\right)^2}{4\left(\sum\limits_{cyc} a\right)\left(\sum\limits_{cyc} ab^2\right) + 5\sum\limits_{cyc} a^4}$$

Ta cần chứng minh

$$17\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 \ge 12\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} ab^2\right) + 15\sum_{cyc} a^4$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4 + 11\sum_{cyc} a^2b^2 - 6\sum_{cyc} ab^3 - 6\sum_{cyc} a^2bc \ge 0$$

Từ đây,

$$\begin{cases} m = 1 > 0 \\ 3m(m+n) - p^2 - pg - g^2 = 3\cdot 1\cdot(1+11) - 0^2 - 0\cdot(-6) - (-6)^2 = 0 \end{cases}$$

nên bất đẳng thức trên đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. ■

Ví dụ 1.162 *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^4 + b^4 + c^4 + a^3b + b^3c + c^3a \ge 2(a^3b + b^3c + c^3a).$$

(Vasile Cirtoaje)

Ví dụ 1.163 *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a(a+b)^3 + b(b+c)^3 + c(c+a)^3 \ge \frac{8}{27}(a+b+c)^4.$$

(Phạm Văn Thuận, Võ Quốc Bá Cẩn)

Ví dụ 1.164 *Cho các số thực a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^4 + b^4 + c^4 + \frac{1}{3}(ab+bc+ca)^2 \ge 2(a^3b + b^3c + c^3a).$$

(Phạm Kim Hùng)

1.7 Hàm lồi, hàm bậc nhất

Hàm lồi có những tính chất rất đặc biệt mà có thể giúp chúng ta giải toán một cách hiệu quả. Dưới đây là một số tính chất mà chúng tôi cho là cần thiết và phù hợp với chương trình toán THPT

Định lý 1.7 *Nếu $f(x)$ lồi trên $[a, b]$ thì*

$$f(x) \leq \max\{f(a), f(b)\}$$

Nếu $f(x)$ lõm trên $[a, b]$ thì

$$f(x) \geq \min\{f(a), f(b)\}.$$

Tính chất này được suy ra từ định nghĩa của hàm lồi. Từ tính chất này, ta suy ra để chứng minh một bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \leq K$$

Với $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ lồi trên $[a, b]$ cho từng biến $x_1, x_2, ..., x_n$ và $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$, ta chỉ cần xét bất đẳng thức tại

$$\begin{cases} x_1 = \cdots = x_k = a \\ x_{k+1} = \cdots = x_n = b \end{cases} \quad (k = 0, 1, ...n)$$

Tương tự nếu $f(x)$ là hàm lõm.

Định lý 1.8 *Nếu $f(x)$ là hàm lồi và khả vi cấp 2 trên khoảng I thì*

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x - y) \quad \forall x, y \in I$$

Nếu $f(x)$ là hàm lõm và khả vi cấp 2 trên khoảng I thì

$$f(x) \leq f(y) + f'(y)(x - y) \quad \forall x, y \in I.$$

Tính chất này ta có thể chứng minh dễ dàng bằng định lý Lagrange. Tính chất 2 được dùng để chứng minh các bất đẳng thức dạng

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq f(y_1) + f(y_2) + \cdots + f(y_n)$$

kết hợp với kỹ thuật nhóm Abel, hoặc các bất đẳng thức dạng

$$m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \cdots + m_n f(x_n) \geq m_1 f(y_1) + m_2 f(y_2) + \cdots + m_n f(y_n)$$

trong đó ta có

$$\begin{cases} m_1 f'(y_1) = m_2 f'(y_2) = \cdots = m_n f'(y_n) \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \end{cases}$$

Từ tính chất thứ hai, chúng ta suy ra được hệ quả sau

Hệ quả 1.6 *Nếu $f(x)$ lồi và khả vi cấp 2 trên khoảng I thì với mọi $x, y, z \in I$ thỏa $x \geq y \geq z$, ta có*

$$f(x) + f(z) \geq f(y) + f(x+z-y)$$

Nếu $f(x)$ lõm và khả vi cấp 2 trên khoảng I thì với mọi $x, y, z \in I$ thỏa $x \geq y \geq z$, ta có

$$f(x) + f(z) \leq f(y) + f(x+z-y).$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh kết quả này trong trường hợp $f(x)$ là hàm lồi (trường hợp hàm lõm chứng minh tương tự).
Nếu $y \geq x+z-y$, theo tính chất 2, ta có

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$$

$$\begin{aligned} f(z) &\geq f(x+z-y) + f'(x+z-y)[z-(x+z-y)] \\ &= f(x+z-y) - f'(x+z-y)(x-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) + f(z) &\geq f(y) + f(x+z-y) + [f'(y) - f'(x+z-y)](x-y) \\ &\geq f(y) + f(x+z-y) \end{aligned}$$

Nếu $x+z-y \geq y$, theo tính chất 2, ta có

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x+z-y) + f'(x+z-y)[x-(x+z-y)] \\ &= f(x+z-y) + f'(x+z-y)(y-z) \end{aligned}$$

$$f(z) \geq f(y) + f'(y)(z-y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) + f(z) &\geq f(y) + f(x+z-y) + [f'(x+z-y) - f'(y)](y-z) \\ &\geq f(y) + f(x+z-y) \end{aligned}$$

Hệ quả của ta được chứng minh xong. ■
Có thể thấy những tính chất này được phát biểu rất đơn giản và nhẹ nhàng, nhưng ứng dụng của chúng thì lại rất lớn. Chúng ta xét 1 vài ví dụ

Ví dụ 1.165 *Cho các số $a, b, c \in [1, 2]$. Chứng minh rằng*

$$a^3 + b^3 + c^3 \leq 5abc.$$

(Toán học tuổi trẻ)

Lời giải. Xét $P(a,b,c) = a^3 + b^3 + c^3 - 5abc$, rõ ràng $P(a,b,c)$ là hàm lồi lần lượt theo các biến a, b, c, do đó ta chỉ cần xét các trường hợp sau là đủ
Trường hợp 1. $a = b = c = 2$, ta có $P(a,b,c) = -16 < 0$.
Trường hợp 2. $a = 1, b = c = 2$, ta có $P(a,b,c) = -3 < 0$.
Trường hợp 3. $a = b = 1, c = 2$, ta có $P(a,b,c) = 0$.
Trường hợp 4. $a = b = c = 1$, ta có $P(a,b,c) = -2 < 0$.
Do đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = 1, c = 2$ và các hoán vị. ■

Ví dụ 1.166 *Cho dãy dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa $\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \ge \sqrt{k}$ $\forall k = 1, 2, ..., n$. Chứng minh rằng*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \ge \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

(Titu Andreescu)

Lời giải. Rõ ràng hàm số $f(x) = x^2$ là hàm lồi, nên theo tính chất 2, ta có

$$f(x_i) \ge f\left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right) + f'\left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right)\left[x_i - \left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right)\right] \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

Do đó

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 &\ge \sum_{i=1}^{n}\left[f\left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right) + f'\left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right)\left[x_i - \left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right)\right]\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} f\left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right) + \sum_{i=1}^{n} f'\left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right)\left[x_i - \left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right)\right]\end{aligned}$$

Sử dụng kỹ thuật nhóm Abel, ta có

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n} f'\left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right)\left[x_i - \left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right)\right] \\ = &\sum_{i=1}^{n-1}\left[f'\left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right) - f'\left(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}\right)\right]\left[\sum_{j=1}^{i} x_j - \sum_{j=1}^{i}\left(\sqrt{j} - \sqrt{j-1}\right)\right] \\ &+ f'\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\left[\sum_{i=1}^{n} x_j - \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right)\right] \\ = &\sum_{i=1}^{n-1}\left[f'\left(\sqrt{i} - \sqrt{i-1}\right) - f'\left(\sqrt{i+1} - \sqrt{i}\right)\right]\left(\sum_{j=1}^{i} x_j - \sqrt{i}\right) \\ &+ f'\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_j - \sqrt{n}\right)\end{aligned}$$

Do $\sqrt{i}-\sqrt{i-1}>\sqrt{i+1}-\sqrt{i}\ \ \forall i=1,2,...,n$ và $f(x)$ lồi nên ta có

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[f'\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)-f'\left(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}\right)\right]\left(\sum_{j=1}^{i}x_j-\sqrt{i}\right)\geq 0$$

Từ đây, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 &\geq \sum_{i=1}^{n}f\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{4i\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)^2}{4i}\\ &> \sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\sqrt{i}+\sqrt{i-1}\right)^2\left(\sqrt{i}-\sqrt{i-1}\right)^2}{4i}=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. ■

Ví dụ 1.167 *Cho các số không âm a,b,c, không có 2 số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$3(a+b+c)\geq 2\left(\sqrt{a^2+bc}+\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab}\right).$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Nếu $abc=0$, giả sử $c=0$ thì dễ thấy bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Nếu $abc>0$, ta chuẩn hóa cho $abc=1$ và giả sử $a\geq b\geq c$, khi đó đó tồn tại các số thực $x\geq y\geq z$ sao cho $a=e^x,b=e^y,c=e^z$ thỏa $x+y+z=0$, bất đẳng thức trở thành $f(x)+f(y)+f(z)\geq 0$ với $f(t)=3e^t-2\sqrt{e^t+e^{-t}}$. Ta có

$$f''(t)=\frac{6e^{3t/2}(e^{3t}+1)^{3/2}-4e^{6t}-14e^{3t}-1}{2e^{2t}(e^{2t}+e^{-t})^{3/2}}$$

$$\begin{aligned}f''(t)=0 &\Leftrightarrow 6e^{3t/2}(e^{3t}+1)^{3/2}=4e^{6t}+14e^{3t}+1\\ &\Leftrightarrow 36e^{3t}(e^{3t}+1)^3=(4e^{6t}+14e^{3t}+1)^2\\ &\Leftrightarrow 36(e^{-3t}+1)^3=(4+14e^{-3t}+e^{-6t})^2\\ &\Leftrightarrow 36(u+1)^3=(4+14u+u^2)^2 \quad (u=e^{-3t}>0)\\ &\Leftrightarrow g(u)=u^4-9u^3+96u^2+4u-20=0\end{aligned}$$

Rõ ràng $g(u)$ là hàm đồng biến, lại có $g(0)=-20<0, g(1)=73>0$, nên tồn tại duy nhất $u_0\in(0,1)$ thỏa mãn $g(u_0)=0$, suy ra $f''(t)$ có đúng một nghiệm t_0, từ đây dễ thấy $f(t)$ lồi trên $[t_0,+\infty)$ và lõm trên $(-\infty,t_0]$.
Trường hợp 1. Nếu $y\geq t_0$, khi đó sử dụng bất đẳng thức Jensen, ta có

$$f(x)+f(y)\geq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Ta cần chứng minh

$$2f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f(z)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 6\sqrt{ab}+3c\geq 4\sqrt{ab+c\sqrt{ab}}+2\sqrt{c^2+ab}$$

$$\Leftrightarrow \left(6\sqrt{ab}+3c\right)^2\geq\left(4\sqrt{ab+c\sqrt{ab}}+2\sqrt{c^2+ab}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 15ab+20c\sqrt{ab}+5c^2\geq 16\sqrt{\left(ab+c\sqrt{ab}\right)(c^2+ab)}$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\sqrt{ab+c\sqrt{ab}}-\sqrt{c^2+ab}\right)^2+3c\left(4\sqrt{ab}-c\right)\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng do $\sqrt{ab}\geq c$.
Trường hợp 2. Nếu $t_0\geq y$, khi đó ta có $t_0\geq y\geq y+z-t_0$ nên theo hệ quả của ta

$$f(y)+f(z)\geq f(t_0)+f(y+z-t_0)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Jensen thì

$$f(x)+f(t_0)\geq 2f\left(\frac{x+t_0}{2}\right)$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$2f\left(\frac{x+t_0}{2}\right)+f(y+z-t_0)\geq 0.$$

Đây chính là trường hợp 1 mà ta đã xét ở trên. Bài toán được giải quyết xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 2 trong 3 số bằng nhau, số còn lại bằng 0. ■

Ví dụ 1.168 *Cho các số không âm a,b,c,d thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{48-11abc}+\frac{1}{48-11bcd}+\frac{1}{48-11cda}+\frac{1}{48-11dab}\leq\frac{4}{37}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

LỜI GIẢI. Đặt $x=ab, y=cd, z=a+b, t=c+d\Rightarrow\begin{cases}\frac{z^2}{4}\geq x\geq 0\\ \frac{t^2}{4}\geq y\geq 0\end{cases}$, với $\begin{cases}\frac{z^2}{4}=x\Leftrightarrow a=b\\ \frac{t^2}{4}=y\Leftrightarrow c=d\end{cases}$.

Bất đẳng thức tương đương

$$\begin{aligned}f(x,y) &= \frac{96-11xt}{2304-528xt+121x^2y}+\frac{96-11yz}{2304-528yz+121xy^2}\\ &= \frac{1}{48-11xc}+\frac{1}{48-11xd}+\frac{96-11yz}{2304-528yz+121xy^2}\\ &= \frac{1}{48-11ya}+\frac{1}{48-11yb}+\frac{96-11xt}{2304-528xt+121x^2y}\leq\frac{4}{37}\end{aligned}$$

Có thể kiểm tra được $f(x, y)$ là hàm lồi cho từng biến x, y, chẳng hạn

$$f"_x(x,y) = \frac{242c^2}{(48-11xc)^3} + \frac{242d^2}{(48-11xd)^3} + \frac{2(96-11yz)}{(2304-528yz+121xy^2)} \geq 0$$

Do đó, ta chỉ cần xét các trường hợp sau là đủ $\left[\begin{array}{l} \frac{z^2}{4}=x, \frac{t^2}{4}=y \\ \frac{z^2}{4}=x, y=0 \\ x=0, \frac{t^2}{4}=y \\ x=y=0 \end{array}\right.$. Có thể thấy việc xét các trường hợp này tương đương với việc xét các trường hợp dưới đây

Trường hợp 1. $a = c = 0$, bất đẳng thức trở thành $\frac{4}{48} \leq \frac{4}{37}$.

Trường hợp 2. $a = b, c = 0$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{48-11abd} \leq \frac{4}{37}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{16} + \frac{1}{48-11abd} \leq \frac{1}{16} + \frac{1}{48-11\left(\frac{a+b+d}{3}\right)^3} = \frac{4}{37}.$$

Trường hợp 3. $a = b, c = d \Rightarrow c = 2 - a$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{2}{1-a^2c} + \frac{2}{1-ac^2} \leq \frac{4}{37}$$

Thay $c = 2 - a$ vào và thu gọn, ta có bất đẳng thức tương đương

$$-\frac{44(a-1)^2(48-22a-33a^2+44a^3-11a^4)}{37(48-22a^2+11a^3)(48-44a+44a^2-11a^3)} \leq 0.$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do $a \leq 2$. Ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$ hoặc ba trong bốn số a, b, c, d bằng $\frac{4}{3}$, số còn lại bằng 0. ■

Ví dụ 1.169 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P = a^3 + 2b^3 + 3c^3.$$

LỜI GIẢI. Rõ ràng hàm $f(x) = x^3$ là hàm lồi, do đó

$$f(a) \geq f(A) + f'(A)(a-A)$$

$$f(b) \geq f(B) + f'(B)(b-B)$$

$$f(c) \geq f(C) + f'(C)(c-C)$$

$$\Rightarrow P \geq f(A) + 2f(B) + 3f(C) + f'(A)(a - A) + 2f'(B)(b - B) + 3f'(C)(c - C)$$

Ý tưởng của ta là chọn các số dương A, B, C sao cho $\begin{cases} f'(A) = 2f'(B) = 3f'(C) \\ A + B + C = 3 \end{cases}$.
Khi đó, ta sẽ có

$$P \geq f(A) + 2f(B) + 3f(C)$$

Như vậy, việc của ta còn lại chỉ là giải hệ phương trình $\begin{cases} f'(A) = 2f'(B) = 3f'(C) \\ A + B + C = 3 \end{cases}$.
Hệ này rất dễ giải nên xin được dành cho các bạn. ■

Ví dụ 1.170 *Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$. Chứng minh rằng*

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{(a_1^2 + 1)(a_2^2 + 1) \cdots (a_n^2 + 1)} \leq \frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-2}}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. **Bổ đề.** *Cho f là một hàm lõm trên $[a, b]$, khi đó với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (n-1)a \leq b$ ta có*

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq (n-1)f(a) + f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (n-1)a)$$

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo n. Nếu $n = 1$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Giả sử khẳng định đúng với n, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n + 1$. Thật vậy, giả sử $x_{n+1} = \max\{x_1, x_n, ..., x_{n+1}\}$, khi đó theo giả thiết quy nạp, ta có

$$f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n) \geq (n-1)f(a) + f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (n-1)a)$$

Ta cần chứng minh

$$f(x_{n+1}) + f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (n-1)a) \geq f(a) + f(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} - na)$$

Ta có

$$b \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} - na \geq x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (n-1)a \geq a$$

Nên theo hệ quả của ta

$$f(x_{n+1}) + f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (n-1)a) \geq f(a) + f(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} - na).$$

Bổ đề được chứng minh.
Trở lại bài toán của ta, bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) \geq 2\ln\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + (n-2)\ln n - (n-1)\ln(n-1)$$

với $f(x) = \ln(1+x^2)$. Ta có

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

nên $f(x)$ lồi trên $(0,1]$ và lõm trên $[1,+\infty)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1$. Nếu tồn tại m sao cho $a_m > 1$, khi đó gọi k là chỉ số nhỏ nhất sao cho $a_k > 1$, ta có $a_n \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_k > 1 \geq a_{k-1} \geq \cdots \geq a_1$. Theo bổ đề trên, ta có

$$f(a_k) + f(a_{k+1}) + \cdots + f(a_n) \geq (n-k)f(1) + f(a_k + a_{k+1} + \cdots + a_n - (n-k))$$

Nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đã cho trong trường hợp $1 \geq a_{n-1} \geq \cdots \geq a_1$, khi đó theo bất đẳng thức Jensen, ta có

$$f(a_1) + f(a_2) + \cdots + f(a_{n-1}) \geq nf\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n}\right)$$

Và từ đây, ta suy ra được ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = x$, tức là

$$\frac{(n-1)^{n-1}}{n^{n-2}}(x^2+1)^{n-1}(a_n^2+1) \geq [(n-1)x + a_n]^2$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}(n-1)^{n-1}(x^2+1)^{n-1} &= \left[[(n-1)^2x^2+1] \cdot \frac{1}{n-1} + n \cdot \frac{n-2}{n-1}\right]^{n-1} \\ &\geq n^{n-2}[(n-1)^2x^2+1]\end{aligned}$$

Lại có

$$[(n-1)^2x^2+1](a_n^2+1) \geq [(n-1)x + a_n]^2.$$

Nên bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$. ■

Ví dụ 1.171 *Cho $x, y, z \in [0,1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = 2(x^3 + y^3 + z^3) - x^2y - y^2z - z^2x.$$

Ví dụ 1.172 *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d = 4$. Chứng minh rằng*

$$abc + bcd + cda + dab + a^2b^2c^2 + b^2c^2d^2 + c^2d^2a^2 + d^2a^2b^2 \leq 8.$$

(Phan Thành Nam)

Ví dụ 1.173 *Cho tam giác nhọn ABC. Chứng minh rằng*

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}\ge\frac{4}{\sqrt{3}}\left(1+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right).$$

(Jack Garfunkel)

Ví dụ 1.174 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+3b+4c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P=\sqrt[3]{a}+4\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}.$$

Ví dụ 1.175 *Cho tam giác nhọn ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\tan A+2\tan B+5\tan C.$$

(VMEO 2005)

Ví dụ 1.176 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $21ab+2bc+8ca\le 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$P=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}.$$

(Vietnam TST 2001)

Ví dụ 1.177 *Cho dãy dương $a_1,a_2,...,a_n$ thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{k}a_i\le\sum\limits_{i=1}^{k}i(i+1)\ \forall k=1,2,...,n.$ Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\ge\frac{n}{n+1}.$$

(Toán học tuổi trẻ)

Ví dụ 1.178 *Cho các số dương $a_1,a_2,...,a_n$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{(a_1^2+1)(a_2^2+1)\cdots(a_n^2+1)}\le\frac{(2n-1)^{n-\frac{1}{2}}}{2^n n^{n-1}}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Tiếp theo, ta sẽ đi đến một tính chất cơ bản của hàm tuyến tính bậc nhất, đó là mọi hàm bậc nhất đều đơn điệu. Ý nghĩa của điều này là gì? Chúng ta hãy xét một trường hợp cụ thể, xét hàm $f(x)=ax+b$ với $x\in[c,d]$, nếu $a\ge 0$, thì rõ ràng $f(x)$ là hàm đồng biến, do đó $f(c)\le f(x)\le f(d)$. Nếu $a\le 0$ thì $f(x)$ là hàm nghịch biến, cho nên $f(d)\le f(x)\le f(c)$. Như vậy, ta được

Định lý 1.9 *Cho hàm $f(x)=ax+b$ (với a,b là các số thực tùy ý), khi đó với mọi $x\in[c,d]$, ta có*

$$\min\{f(c),f(d)\}\le f(x)\le\max\{f(c),f(d)\}.$$

Tính chất này rất đơn giản nhưng lại khá hiệu quả trong việc giải toán. Nó giúp ta thu gọn khoảng xét từ$[c, d]$ đến việc xét 2 điểm cực biên là $x = c$ và $x = d$.

Ví dụ 1.179 *Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng*

$$x^3 + y^3 + z^3 + \frac{15}{4}xyz \geq \frac{1}{4}.$$

Lời giải. Biến đổi bất đẳng thức về dạng tương đương

$$f(yz) = \left(\frac{27}{4}x - 1\right)yz + \frac{1}{4}(1-2x)^2 \geq 0$$

Dễ thấy đây là một hàm bậc nhất theo yz, hơn nữa dễ thấy

$$\frac{(y+z)^2}{4} \geq yz \geq 0$$

Dựa trên định lý trên, ta chỉ cần xét bất đẳng thức tại $yz = \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{(1-x)^2}{4}$ và $yz = 0$ là đủ. Ta có

$$f(0) = \frac{1}{4}(1-2x)^2 \geq 0, \quad f\left(\frac{(1-x)^2}{4}\right) = \frac{3}{16}x(1-3x)^2 \geq 0.$$

Nên bất đẳng thức cần chứng minh hiển nhiên đúng. ■

Ví dụ 1.180 *Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng*

$$xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

Ví dụ 1.181 *Cho các số không âm a, b, c, d. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{c}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{d}{d+a+b}} \leq \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

(Phạm Văn Thuận)

Ví dụ 1.182 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} \geq \frac{9}{10}.$$

1.8 Quy nạp

Quy nạp là một trong những kỹ thuật rất hay của bất đẳng thức. Ý tưởng rất đơn giản như sau, để chứng minh một bất đẳng thức cho n biến, chúng ta sẽ chứng minh bất đẳng thức cho một trường hợp cụ thể, rồi giả định rằng nó đúng trong trường hợp $n = k$, khi đó ta sẽ chứng minh nó đúng cho $n = k + 1$, dựa trên cơ sở này chúng ta có kết luận nó đúng với mọi n.

Ví dụ 1.183 *Cho các số dương $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ $(n \geq 3)$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} \leq n - 1$$

trong đó $x_{n+1} = x_1, x_{n+2} = x_2$.

LỜI GIẢI. Trước hết, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng khi $n = 3$, thật vậy, ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{x^2}{x^2 + yz} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{yz}{x^2 + yz} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{yz}{x^2 + yz} \geq \sum_{cyc} \frac{yz}{2x^2 + yz} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} yz\right)^2}{\sum_{cyc} yz(2x^2 + yz)} = 1$$

Tiếp theo, ta giả sử bất đẳng thức đúng khi $n = k$ $(k \geq 3)$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k + 1$, tức là

$$\sum_{i=1}^{k+1} \frac{x_i^2}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} \leq k$$

Giả sử $x_{k+1} = \max\{x_1, x_2, ..., x_{k+1}\}$. Sử dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{x_i^2}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} \leq k - 1$$

Nên để chứng minh bất đẳng thức trên, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{x_{k+1}^2}{x_{k+1}^2 + x_1x_2} + \frac{x_k^2}{x_k^2 + x_{k+1}x_1} + \frac{x_{k-1}^2}{x_{k-1}^2 + x_kx_{k+1}} - \frac{x_k^2}{x_k^2 + x_1x_2} - \frac{x_{k-1}^2}{x_{k-1}^2 + x_kx_1} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(1-\frac{x_{k+1}^2}{x_{k+1}^2+x_1x_2}\right)+x_k^2\left(\frac{1}{x_k^2+x_1x_2}-\frac{1}{x_k^2+x_{k+1}x_1}\right)$$
$$+x_{k-1}^2\left(\frac{1}{x_{k-1}^2+x_kx_1}-\frac{1}{x_{k-1}^2+x_kx_{k+1}}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1x_2}{x_{k+1}^2+x_1x_2}+\frac{x_k^2x_1(x_{k+1}-x_2)}{(x_k^2+x_1x_2)(x_k^2+x_{k+1}x_1)}+\frac{x_{k-1}^2x_k(x_{k+1}-x_1)}{(x_{k-1}^2+x_kx_1)(x_{k-1}^2+x_kx_{k+1})}\geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Từ đây ta có đpcm. ■

Ví dụ 1.184 *Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $a_1a_2\cdots a_n = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{n-1+a_1}+\frac{1}{n-1+a_2}+\cdots+\frac{1}{n-1+a_n}\leq 1.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Ta chứng minh kết quả tổng quát hơn

$$\frac{1}{m_n+a_1}+\frac{1}{m_n+a_2}+\cdots+\frac{1}{m_n+a_n}\leq 1 \quad \forall m_n\geq n-1$$

Với $n = 1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng với $n = k$, khi đó ta sẽ chứng minh bất đẳng thức cũng đúng cho $n = k+1$. Thật vậy, giả sử $a_{k+1} = \max\{a_1, a_2, ..., a_{k+1}\} \Rightarrow b = \sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k} \leq 1$. Đặt $b_i = \frac{a_i}{b}$ $\forall i = 1, 2, ..., k \Rightarrow b_1b_2\cdots b_k = 1$. Chú ý là $\frac{m_{k+1}}{b} \geq m_{k+1} \geq n > n-1$ nên theo giả thiết quy nạp, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m_{k+1}+a_1}+\frac{1}{m_{k+1}+a_2}+\cdots+\frac{1}{m_{k+1}+a_k}\\
&= \frac{1}{b}\left(\frac{1}{\frac{m_{k+1}}{b}+b_1}+\frac{1}{\frac{m_{k+1}}{b}+b_2}+\cdots+\frac{1}{\frac{m_{k+1}}{b}+b_k}\right)\\
&\leq \frac{k}{b\left(\frac{m_{k+1}}{b}+1\right)}=\frac{k}{m_{k+1}+b}
\end{aligned}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{k}{m_{k+1}+b}+\frac{1}{m_{k+1}+a_{k+1}}\leq\frac{n}{m_{k+1}+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{m_{k+1}+b}+\frac{b^k}{b^km_{k+1}+1}\leq\frac{n}{m_{k+1}+1}$$

$$\Leftrightarrow (b-1)^2\sum_{i=1}^{k-1}[m_{k+1}(k+1)-i(m_{k+1}+1)]b^{k-i}\geq 0$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng do $m_{k+1} \geq n$ do đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Ta có đpcm. ■

Ví dụ 1.185 *Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \ge 2)$ thỏa mãn $a_1a_2\cdots a_n = 1$. Chứng minh rằng*

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - n \ge \frac{2n}{\sqrt[n]{(n-1)^{n-1}}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n).$$

Lời giải. Ta sẽ chứng minh kết quả tổng quát hơn

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 - n \ge m_n(a_1 + a_2 + \cdots + a_n - n) \quad \forall m_n \le \frac{2n}{\sqrt[n]{(n-1)^{n-1}}}$$

Với $n = 2$, bất đẳng thức trở thành

$$a_1^2 + a_2^2 - 2 \ge m_2(a_1 + a_2 - 2)$$

$$\Leftrightarrow a_1^2 + \frac{1}{a_1^2} - 2 \ge m_2\left(a_1 + \frac{1}{a_1} - 2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a_1-1)^2[(a_1+1)^2 - m_2a_1]}{a_1^2} \ge 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì $m_2 \le \frac{2\cdot 2}{\sqrt{(2-1)^{2-1}}} = 4$.

Giả sử bất đẳng thức đúng khi $n = k$ $(k \ge 2)$, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức đúng khi $n = k+1$. Thật vậy, giả sử $a_{k+1} = \min\{a_1, a_2, ..., a_{k+1}\} \Rightarrow b = \sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k} \ge 1$. Đặt $b_i = \frac{a_i}{b}$ $\forall i = 1, 2, ..., k \Rightarrow b_1b_2\cdots b_k = 1$. Ta có $m_k \ge m_{k+1}$, thật vậy với $k = 2, 3$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng, xét với $k > 3$, ta có

$$\frac{2k}{\sqrt[k]{(k-1)^{k-1}}} \ge m_{k+1}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{k^2-1} \ge \frac{\sqrt[k+1]{k}}{\sqrt[k]{k-1}}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{k^2-1}\right)^{k(k+1)} \ge \frac{k^k}{(k-1)^{k+1}}$$

Do $k > 3$ nên

$$\left(1 + \frac{1}{k^2-1}\right)^{k(k+1)} > 2$$

$$\frac{k^k}{(k-1)^{k+1}} = \frac{1}{k-1}\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)\left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1} < \frac{e}{k-1}\left(1 + \frac{1}{k-1}\right) < 2$$

Từ đây, ta có $\frac{m_{k+1}}{b} \le m_{k+1} \le \frac{2k}{\sqrt[k]{(k-1)^{k-1}}}$ nên theo giả thiết quy nạp

$$b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_k^2 - k \ge \frac{m_{k+1}}{b}(b_1 + b_2 + \cdots + b_k - k)$$

$$\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 - kb^2 \geq m_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k - kb)$$
$$\Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 - m_{k+1}(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \geq kb^2 - km_{k+1}b$$

Do đó ta chỉ còn phải chứng minh

$$kb^2 - km_{k+1}b + a_{k+1}^2 - k - 1 - m_{k+1}(a_{k+1} - k - 1) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow kb^2 + a_{k+1}^2 - k - 1 - m_{k+1}(a_{k+1} + kb - k - 1) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow kb^2 + a_{k+1}^2 - k - 1 - \frac{2(k+1)}{\sqrt[k+1]{k}}(a_{k+1} + kb - k - 1) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow f(b) = kb^2 + \frac{1}{b^{2k}} - k - 1 - \frac{2(k+1)}{\sqrt[k+1]{k}}\left(\frac{1}{b^k} + kb - k - 1\right) \geq 0.$$

Dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức này, từ đó ta có đpcm. ■

Ví dụ 1.186 *Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = n$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n \geq \frac{8(n-1)}{n^2}(1 - a_1a_2\cdots a_n).$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Tương tự các bài trước, ta cũng chứng minh kết quả tổng quát hơn

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n \geq m_n(1 - a_1a_2\cdots a_n) \quad \forall m_n \leq \frac{8(n-1)}{n}.$$

Với $n = 1$,bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Giả sử bất đẳng thức đúng với ta sẽ chứng minh nó cũng đúng khi $n = k+1$. Thật vậy giả sử $a_{k+1} = \max\{a_1, a_2, ..., a_{k+1}\} \Rightarrow b = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k} \leq 1$. Đặt $b_i = \frac{a_i}{b}$ $\forall i = 1, 2, ..., k \Rightarrow b_1 + b_2 + \cdots + b_k = n$. Chú ý là

$$\begin{aligned} m_{k+1}b^{k+1}a_{k+1} &\leq m_{k+1}b^k a_{k+1} \leq m_{k+1}\left(\frac{a_{k+1}+kb}{k+1}\right)^{k+1} \\ &= m_{k+1} = \frac{8k}{(k+1)^2} \leq \frac{8(k-1)}{k^2} \end{aligned}$$

Do đó, sử dụng giả thiết quy nạp, ta có

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_k} - k \geq (m_{k+1}b^{k+1}a_{k+1})(1 - b_1b_2\cdots b_k)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} - \frac{k}{b} \geq m_{k+1}b^k a_{k+1}\left(1 - \frac{a_1a_2\cdots a_k}{b^k}\right)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} + m_{k+1}a_1a_2\cdots a_{k+1} \geq \frac{k}{b} + m_{k+1}b^k a_{k+1}$$

Cuối cùng ta phải chứng minh

$$\frac{k}{b}+m_{k+1}b^ka_{k+1}+\frac{1}{a_{k+1}}-k-1-m_{k+1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{b}+\frac{1}{a_{k+1}}-k-1\geq m_{k+1}(1-a_{k+1}b^k)$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{b}+\frac{1}{k+1-kb}-k-1\geq m_{k+1}[1-(k+1-kb)b^k]$$

$$\Leftrightarrow m_{k+1}\leq \frac{n(n+1)}{b(k+1-kb)(1+2b+\cdots+kb^{k-1})}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$\begin{cases} m_{k+1}\leq \frac{8k}{(k+1)^2} \\ b\leq 1 \\ b(k+1-kb)\leq \frac{(k+1)^2}{4k} \end{cases}.$$

Vậy ta có đpcm. ∎

Ví dụ 1.187 *Cho các số dương $a_1,a_2,...,a_n$ thỏa mãn $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-n\geq \frac{3}{n}(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2-n).$$

(Phạm Kim Hùng)

Ví dụ 1.188 *Cho các số dương $a_1,a_2,...,a_n$ thỏa mãn $a_1+a_2+\cdots+a_n=n$. Chứng minh rằng*

$$(n-1)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+na_1a_2\cdots a_n\geq n^2.$$

Ví dụ 1.189 *Cho các số dương $a_1,a_2,...,a_n$ thỏa mãn $a_1a_2\cdots a_n=1$. Chứng minh rằng với mọi $0<k_n\leq \frac{2n-1}{(n-1)^2}$, ta có*

$$\frac{1}{\sqrt{1+k_na_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+k_na_2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+k_na_n}}\leq \frac{n}{\sqrt{1+k_n}}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Chương 2

Sáng tạo bất đẳng thức

Bài toán 2.1 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3+b^2+c}+\frac{1}{b^3+c^2+a}+\frac{1}{c^3+a^2+b}\le 1.$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{1}{a^3+b^2+c} &= \sum_{cyc}\frac{a+b^2+c^3}{(a^3+b^2+c)(a+b^2+c^3)}\\ &\le \sum_{cyc}\frac{a+b^2+c^3}{(a^2+b^2+c^2)^2}=\frac{3+\sum\limits_{cyc}a^2+\sum\limits_{cyc}a^3}{\left(\sum\limits_{cyc}a^2\right)^2}\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2\ge 3+\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}a^3$$

Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$ thì bất đẳng thức này tương đương với

$$(9-2q)^2\ge 3+(9-2q)+(27-9q+3r)$$

$$\Leftrightarrow 3(r-1)+(q-3)-4(q-3)^2\le 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bài toán 2.2 *Cho các số dương* a, b, c *thỏa mãn* $a+b+c=3$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{3a^2+abc+27}+\frac{b}{3b^2+abc+27}+\frac{c}{3c^2+abc+27}\le\frac{3}{31}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Schur, ta có

$$3abc \ge 4(ab+bc+ca)-9$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc}\frac{a}{3a^2+\frac{4(ab+bc+ca)-9}{3}+27}\le\frac{3}{31}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{3a}{9a^2+4(ab+bc+ca)+72}\le\frac{3}{31}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left[1-\frac{31a(a+b+c)}{9a^2+4(ab+bc+ca)+72}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{9a^2+4(ab+bc+ca)+8(a+b+c)^2-31a(a+b+c)}{a^2+s}\ge 0$$

với $s=\frac{4(ab+bc+ca)+72}{9}$.

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(7a+8c+10b)(c-a)-(7a+8b+10c)(a-b)}{a^2+s}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{8a+7b+10c}{b^2+s}-\frac{7a+8b+10c}{a^2+s}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\cdot\frac{8a^2+8b^2+15ab+10c(a+b)+s}{(a^2+s)(b^2+s)}\ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.
■

Bài toán 2.3 *Cho các số dương* a, b, c. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a+2b}{c+2b}+\frac{b+2c}{a+2c}+\frac{c+2a}{b+2a}\le 2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right).$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{a+2b}{c+2b}-3\le 2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}-3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sum\limits_{cyc}a^3+3abc-3\sum\limits_{cyc}a^2b}{(2a+b)(2b+c)(2c+a)}\le\frac{2\sum\limits_{cyc}a^3-\sum\limits_{cyc}ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^3+3abc-3\sum_{cyc}a^2b\le\left[2\sum_{cyc}a^3-\sum_{cyc}ab(a+b)\right]\cdot\frac{(2a+b)(2b+c)(2c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Do $2\sum\limits_{cyc}a^3-\sum\limits_{cyc}ab(a+b)\ge 0$ và $\frac{(2a+b)(2b+c)(2c+a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$2\sum_{cyc}a^3+3abc-3\sum_{cyc}a^2b\le 2\left[2\sum_{cyc}a^3-\sum_{cyc}ab(a+b)\right]$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^3-2\sum_{cyc}ab^2+\sum_{cyc}a^2b-3abc\ge 0$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2\sum_{cyc}a^3-2\sum_{cyc}ab^2\ge 0,\quad \sum_{cyc}a^2b-3abc\ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài toán 2.4 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=10$. Chứng minh rằng*

$$\frac{7+8\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{2}\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\frac{7+5\sqrt{5}-8\sqrt{2}}{2}.$$

(Phạm Kim Hùng, Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Do tính thuần nhất, không mất tính tổng quát giả sử $a+b+c=1$, đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$ thì ta có $q=10r$. Ta có

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{ab^2+bc^2+ca^2}{abc}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức bên trái, ta chỉ cần xét nó trong trường hợp $c \geq b \geq a$ là đủ, từ đó

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} &= \frac{ab^2+bc^2+ca^2}{abc} = \frac{q-3r+\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2r} \\
&= \frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q^2-4q^3+2(9q-2)\cdot\frac{q}{10}-27\left(\frac{q}{10}\right)^2}{\left(\frac{q}{10}\right)^2}} \\
&= \frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{253-40\left(10q+\frac{1}{q}\right)} \leq \frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{253-80\sqrt{10}} \\
&= \frac{7+8\sqrt{2}-5\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức bên phải, rõ ràng ta chỉ cần xét nó trong trường hợp $a \geq b \geq c$ là đủ, khi đó

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} &= \frac{ab^2+bc^2+ca^2}{abc} = \frac{q-3r-\sqrt{q^2-4q^3+2(9q-2)r-27r^2}}{2r} \\
&= \frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{q^2-4q^3+2(9q-2)\cdot\frac{q}{10}-27\left(\frac{q}{10}\right)^2}{\left(\frac{q}{10}\right)^2}} \\
&= \frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{253-40\left(10q+\frac{1}{q}\right)} \geq \frac{7}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{253-80\sqrt{10}} \\
&= \frac{7+5\sqrt{5}-8\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức ở bất đẳng thức bên trái xảy ra khi và chỉ khi $c = \frac{10-\sqrt{10}+5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{20}, b = \frac{\sqrt{10}}{10}, a = \frac{10-\sqrt{10}-5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{20}$ và các hoán vị tương ứng. Đẳng thức ở bất đẳng thức bên phải xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{10-\sqrt{10}+5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{20}, b = \frac{\sqrt{10}}{10}, c = \frac{10-\sqrt{10}-5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{20}$ và các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.5 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$a^4+b^4+c^4+4\left(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\right) \geq 15.$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a+b} \geq \frac{\sum\limits_{cyc}a}{\sum\limits_{cyc}ab}+\frac{\sum\limits_{cyc}a}{2\sum\limits_{cyc}a^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{c(a+b)+ab}{a+b} \geq \sum_{cyc} a + \frac{\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} ab\right)}{2\sum_{cyc} a^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ab}{a+b} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} ab\right)}{2\sum_{cyc} a^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{ab}{a+b} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} ab\right)^2}{\sum_{cyc} ab(a+b)}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$2\left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc} ab\right) \geq \left(\sum_{cyc} a\right)\left[\sum_{cyc} ab(a+b)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} ab(a-b)^2 \geq 0$$

Trở lại bài toán của ta, sử dụng bất đẳng thức GM-HM, ta có

$$\sum_{cyc} \sqrt{ab} \geq 2\sum_{cyc} \frac{ab}{a+b}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc} a^4 + 8\sum_{cyc} \frac{ab}{a+b} \geq 15$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4 + \frac{8}{3}\sum_{cyc} \frac{ab(a+b+c)}{a+b} \geq 15$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4 + \frac{8}{3}\sum_{cyc} ab + \frac{8}{3}abc\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \geq 15$$

Theo trên, ta có

$$\frac{1}{3}\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{\sum_{cyc} ab} + \frac{1}{2\sum_{cyc} a^2}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc} a^4 + \frac{8}{3}\sum_{cyc} ab + 8abc\left(\frac{1}{\sum_{cyc} ab} + \frac{1}{2\sum_{cyc} a^2}\right) \geq 15$$

Đặt $q = ab + bc + ca, r = abc$ thì ta có

$$\sum_{cyc} a^4 = 81 - 36q + 2q^2 + 12r$$

Nên bất đẳng thức tương đương với

$$33 - \frac{50}{3}q + q^2 + \frac{12r(3 + 4q - q^2)}{q(9 - 2q)} \geq 0$$

Nếu $9 \geq 4q$ thì ta có

$$33 - \frac{50}{3}q + q^2 \geq 0$$

nên bất đẳng thức đúng.
Nếu $4q \geq 9$ thì theo bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có $r \geq \frac{(4q-9)(9-q)}{18}$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$33 - \frac{50}{3}q + q^2 + \frac{2(4q - 9)(9 - q)(3 + 4q - q^2)}{3q(9 - 2q)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (99 - 50q + 3q^2)q(9 - 2q) + 2(4q - 9)(9 - q)(3 + 4q - q^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (q - 3)(2q^3 + 11q^2 - 117q + 162) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(q) = 2q^3 + 11q^2 - 117q + 162 \leq 0$$

Dễ thấy $f(q)$ là hàm lồi nên

$$f(q) \leq \max\left\{f(3), f\left(\frac{9}{4}\right)\right\} = \max\left\{-36, -\frac{729}{32}\right\} < 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.
■

Bài toán 2.6 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a \geq b + c$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq 2.$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải. Do $a \geq b+c$ nên

$$\begin{aligned}
\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{abc} &= \frac{b+c}{bc}\left(a+b+c+\frac{bc}{a}\right)\\
&= \frac{b+c}{bc}\left[2b+2c+\frac{bc}{b+c}+\frac{(a-b-c)(ab+ac-bc)}{a(b+c)}\right]\\
&\geq \frac{b+c}{bc}\left(2b+2c+\frac{bc}{b+c}\right) = \frac{2(b+c)^2}{bc}+1 \geq 9
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) \geq 9abc$$

Do đó

$$\begin{aligned}
VT &= \sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+\frac{\sqrt{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}{(a+b)(b+c)(c+a)}-2\\
&\geq \sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+\frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}-2\\
&= \frac{(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b, c=0$ hoặc $a=c, b=0$ hoặc $a=2b=2c$. ∎

Bài toán 2.7 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}} \geq 2+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, ta sẽ chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}} \geq \max\left\{2, \sqrt[3]{\frac{4(a^2+b^2)}{c^2+ab}}\right\}$$

Chú ý rằng

$$\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \geq \frac{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} = 1$$

nên

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}} \geq 2\sqrt[6]{\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} \geq 2$$

Ta cần chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}}\ge\sqrt[3]{\frac{4(a^2+b^2)}{c^2+ab}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}+3\sqrt[3]{\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}}\right)$$

$$\ge\ \frac{4(a^2+b^2)}{c^2+ab}$$

Lại có

$$\frac{b^2+ca}{b^2+c^2}-\frac{a^2+bc}{a^2+c^2}=\frac{c(a-b)(a^2+b^2+c^2+ab-ac-bc)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{b^2+ca}{b^2+c^2}\ge\frac{a^2+bc}{a^2+c^2}\ge 1$$

Do đó, theo bất đẳng thức AM-GM,

$$3\sqrt[3]{\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}}\right)\ \ge\ 6\sqrt{\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}$$

$$\ge\ \frac{6(a^2+bc)}{a^2+c^2}$$

Từ đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}+\frac{6(a^2+bc)}{a^2+c^2}\ge\frac{4(a^2+b^2)}{c^2+ab}$$

$$\Leftrightarrow f(c)+g(c)\ge 0$$

trong đó

$$f(c)=(a+7b)c^5+3(a^2-b^2)c^4+2(a+b)(a+3b)bc^3\ge 0$$

$$g(c)=(a-b)(3b^3+2ab^2+4a^2b-3a^3)c^2+(b^2a^3+6b^4a+a^2b^3)c+ab(a-b)^4$$

Ta sẽ chứng minh rằng $g(c)\ge 0$. Nếu $3b^3+2ab^2+4a^2b-3a^3\ge 0$, điều này là hiển nhiên. Nếu $3b^3+2ab^2+4a^2b-3a^3\le 0$, khi đó do $g(c)$ là hàm lõm theo c nên $g(c)\ge\min\{g(0),g(b)\}$, mà

$$g(0)=ab(a-b)^4\ge 0,\quad g(b)=b\left[\frac{1}{4}(a-b)[(2a^2-6ab-b^2)^2+43b^4]+8b^5\right]\ge 0$$

Khẳng định được chứng minh. Trở lại bài toán của ta, có 2 trường hợp xảy ra
Nếu $\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}\le 2\Leftrightarrow\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}\ge\frac{1}{2}$, khi đó từ khẳng định trên, ta dễ dàng đi đến kết luận.
Nếu $\frac{a^2+b^2}{c^2+ab}\ge 2$, khi đó từ khẳng định trên, ta chỉ cần chứng minh

$$\sqrt[3]{\frac{4(a^2+b^2)}{c^2+ab}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}}\ge 2+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng do hàm $\sqrt[3]{4}x + \frac{1}{x}$ là hàm tăng với mọi $x \ge \sqrt[3]{2}$. Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị. ■

Bài toán 2.8 *Cho a, b, c là các số không âm thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$a^2b + b^2c + \frac{3}{2}abc \le 4.$$

(Vasile Cirtoaje, Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Nếu $a \ge 2b$ thì

$$(a+c)^2b - a^2b - b^2c - \frac{3}{2}abc = \frac{bc(a - 2b + 2c)}{2} \ge 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a^2b + b^2c + \frac{3}{2}abc &\le (a+c)^2b = 4 \cdot \frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+c}{2} \cdot b \\ &\le 4\left(\frac{\frac{a+c}{2} + \frac{a+c}{2} + b}{3}\right)^3 = 4 \end{aligned}$$

Nếu $2b \ge a$, bất đẳng thức tương đương với

$$f(c) = 4(a+b+c)^3 - 27a^2b - 27b^2c - \frac{81}{2}abc \ge 0$$

Ta có

$$f'(c) = \frac{3}{2}[8(a+b+c)^2 - 9b(3a+2b)]$$

$$f'(c) = 0 \Leftrightarrow c = \frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{b(3a+2b)} - a - b$$

Do $2b \ge a$ nên $\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{b(3a+2b)} \ge a + b$, và ta dễ dàng kiểm tra được

$$f(c) \ge f\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\sqrt{b(3a+2b)} - a - b\right) = \frac{27ab(a-2b)^2(2a+b)}{4\left[a^2 + 5ab + 2b^2 + \sqrt{\frac{b(3a+2b)^3}{2}}\right]} \ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 2, b = 1, c = 0$ hoặc $a = 0, b = 2, c = 1$. ■

Bài toán 2.9 *Cho a, b, c là các số không âm, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^2 + ab + b^2} + \frac{1}{b^2 + bc + c^2} + \frac{1}{c^2 + ca + a^2} \ge \frac{9}{(a+b+c)^2}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Bất đẳng thức được viết lại như sau

$$\sum_{cyc}\left[\frac{(a+b+c)^2}{a^2+ab+b^2}-1\right]\ge 6$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{c(a+b+c)+ab+bc+ca}{a^2+ab+b^2}\ge 6$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{c}{a^2+ab+b^2}\right)+\left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+ab+b^2}\right)\ge 6$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{c}{a^2+ab+b^2}\ge \frac{\left(\sum\limits_{cyc}c\right)^2}{\sum\limits_{cyc}c(a^2+ab+b^2)}=\frac{\sum\limits_{cyc}a}{\sum\limits_{cyc}ab}$$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+ab+b^2}\ge \frac{\left(\sum\limits_{cyc}c\right)^2}{\sum\limits_{cyc}c^2(a^2+ab+b^2)}=\frac{\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}{2\left(\sum\limits_{cyc}ab\right)^2-3abc\sum\limits_{cyc}a}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}{\sum\limits_{cyc}ab}+\frac{\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2\left(\sum\limits_{cyc}ab\right)}{2\left(\sum\limits_{cyc}ab\right)^2-3abc\sum\limits_{cyc}a}\ge 6$$

Do tính thuần nhất, ta có thể giả sử $a+b+c=1$. Đặt $q=\sum\limits_{cyc}ab, r=abc$, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{q}+\frac{q}{2q^2-3r}\ge 6$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có $r\ge \frac{(4q-1)(1-q)}{6}$, nên

$$\frac{1}{q}+\frac{q}{2q^2-3r}-6\ge \frac{1}{q}+\frac{q}{2q^2-\frac{(4q-1)(1-q)}{2}}-6=\frac{(1-3q)(4q-1)^2}{q(8q^2-5q+1)}\ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài toán 2.10 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^4}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^4}{c^2+ca+a^2} \ge \frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}.$$

(Phan Thành Việt)

LỜI GIẢI. Ta có

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c} = a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+\frac{3abc}{a+b+c}$$

Nên bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}+ab-a^2\right) \ge \frac{3abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab^3}{a^2+ab+b^2} \ge \frac{3abc}{a+b+c}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\frac{ab^3}{a^2+ab+b^2}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a^2+ab+b^2}{ab}\right) \ge \left(\sum_{cyc}a\right)^2$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc}a\right)^2 \ge \frac{3abc}{a+b+c}\sum_{cyc}\frac{a^2+ab+b^2}{ab}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc}a\right)^3 \ge 3\sum_{cyc}c(a^2+ab+b^2)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}ab\right) \ge 0.$$

Điều này hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $c=0, \frac{a}{b}\to 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.11 *Cho a, b, c, d là các số không âm thỏa mãn $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+d}}+\frac{d}{\sqrt{d+a}} \le \frac{3}{2}.$$

(Mircea Lascu)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a+c \ge b+d \Rightarrow x = a+c \ge \frac{1}{2}$. Sử dụng bất đẳng thức Jack Garfunkel, ta có

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c} = \frac{5}{4}\sqrt{1-d}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} \le \frac{5}{4}\sqrt{1-d} - \frac{c}{\sqrt{c+a}}$$

$$\frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} + \frac{a}{\sqrt{a+c}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+c+d} = \frac{5}{4}\sqrt{1-b}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sqrt{c+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{1-b} - \frac{a}{\sqrt{a+c}}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a+b}} &\le \frac{5}{4}\left(\sqrt{1-b} + \sqrt{1-d}\right) - \sqrt{a+c} \le \frac{5}{4}\sqrt{2(2-b-d)} - \sqrt{c+a} \\ &= \frac{5}{4}\sqrt{2(x+1)} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x}-1)(17\sqrt{x}-7)}{2\sqrt{2}\left(5\sqrt{x+1} + \sqrt{2}(2\sqrt{x}+3)\right)} + \frac{3}{2} \le \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức không xảy ra. ■

Bài toán 2.12 *Cho a, b, c, d là các số không âm, không có 3 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{b}{\sqrt{b+c+d}} + \frac{c}{\sqrt{c+d+a}} + \frac{d}{\sqrt{d+a+b}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d}.$$

Lời giải. Giả sử $d = \min\{a, b, c, d\}$ và đặt $x = a+c$, khi đó ta dễ thấy

$$\frac{a}{\sqrt{a+b+c}} + \frac{d}{\sqrt{d+a+b}} \le \frac{a}{\sqrt{a+b+d}} + \frac{d}{\sqrt{d+a+b}} = \frac{x}{\sqrt{x+b}}$$

$$\frac{b}{\sqrt{b+c+d}} \le \frac{b}{\sqrt{b+c}}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{x}{\sqrt{x+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+d+a}} \le \frac{5}{4}\sqrt{a+b+c+d}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+x}} \le \frac{5}{4}\sqrt{x+b+d}$$

Đây chính là bất đẳng thức Jack Garfunkel nên bất đẳng thức đã cho được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a}{3} = \frac{b}{1} = \frac{c}{0} = \frac{d}{0}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.13 *Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng*

$$\frac{2(a+b+c)(bc+ca+ab)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \le ((2a+b)(2b+c)(2c+a))^{\frac{1}{3}}.$$

(Sung Yoon Kim)

Lời giải 1. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có $a^2b + b^2c + c^2a \ge \frac{(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}$. Suy ra

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (2a+b)(2b+c)(2c+a)\\
&\quad = \; 2(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc + 2(a^2b+b^2c+c^2a)\\
&\quad \ge \; 2(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc + \frac{2(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\begin{aligned}
&\frac{2(a+b+c)(bc+ca+ab)}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}\\
&\qquad \le \left[2(a+b+c)(ab+bc+ca) + 3abc + \frac{2(ab+bc+ca)^2}{a+b+c}\right]^{\frac{1}{3}}
\end{aligned}$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$, khi đó theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta được $r \ge \max\left\{0, \frac{4q-1}{9}\right\}$. Bất đẳng thức trở thành

$$(3r+2q^2+2q)^{\frac{1}{3}} \ge \frac{2q}{1-q}$$

Nếu $1 \ge 4q$, thì

$$(3r+2q^2+2q)^{\frac{1}{3}} \ge (2q^2+2q)^{\frac{1}{3}}$$

và

$$\begin{aligned}
2q^2+2q-\frac{8q^3}{(1-q)^3} &= \frac{2q(1-2q-4q^2+2q^3-q^4)}{(1-q)^3} \ge \frac{2q(1-2q-4q^2)}{(1-q)^3}\\
&\ge \frac{2q(1-3q)}{(1-q)^3} \ge 0
\end{aligned}$$

Nếu $4q \ge 1$, thì

$$(3r+2q^2+2q)^{\frac{1}{3}} \ge \left(2q^2+2q+\frac{4q-1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{6q^2+10q-1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

và

$$\frac{6q^2+10q-1}{3} - \frac{8q^3}{(1-q)^3} = \frac{(1-3q)(2q^4-2q^3+3q^2+10q-1)}{(1-q)^3} \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Lời giải 2. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\begin{aligned}
&[(a+b+c)(bc+ca+ab)]^3 \\
&= [(a+b)(b+c)(c+a)+abc]^3 \\
&\le [(a+b)^3+a^3][(b+c)^3+b^3][(c+a)^3+c^3] \\
&= (2a+b)(2b+c)(2c+a)(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$8(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2) \le (a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)^3$$

Bất đẳng thức này có thể được chứng minh bằng phép khai triển. ■

Lời giải 3. Ta sẽ chứng minh kết quả mạnh hơn là

$$\frac{a+2b}{a+2c}+\frac{b+2c}{b+2a}+\frac{c+2a}{c+2b} \le \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}$$

Cộng 3 vào hai vế, ta viết được bất đẳng thức trên ở dạng

$$2(a+b+c)\left(\frac{1}{a+2c}+\frac{1}{b+2a}+\frac{1}{c+2b}\right) \le \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+3$$

Từ đây, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có thể suy ra bất đẳng thức ban đầu của bài toán.

Do $(a+b+c)^2 = (a+2b)(a+2c)+(b-c)^2$ nên

$$\frac{a+b+c}{a+2c} = \frac{a+2b}{a+b+c}+\frac{(b-c)^2}{(a+2c)(a+b+c)}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{a+b+c}{a+2c} = 3+\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{(a+2c)(a+b+c)}$$

Do đó, bất đẳng thức trên tương đương với

$$6+2\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{(a+2c)(a+b+c)} \le \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}+3$$

$$\Leftrightarrow x(b-c)^2+y(c-a)^2+z(a-b)^2 \ge 0$$

với $x = \frac{3(a+b+c)}{4(ab+bc+ca)} - \frac{1}{a+2c}$ và y, z tương tự.

Không mất tính tổng quát, giả sử b là số hạng nằm giữa a và c, tức là $(b-a)(b-c) \le 0$.

Từ đó, ta có $(a-b)(a-c) \geq 0$ và $(c-a)(c-b) \geq 0$. Chú ý rằng $(a+2b)(a+2c) = 3(ab+bc+ca)+(a-b)(a-c)$, ta có

$$\frac{3(ab+bc+ca)}{a+2c} = a+2b-\frac{(a-b)(a-c)}{a+2c} \leq a+2b \leq 2(a+b+c) \leq \frac{9(a+b+c)}{4}$$

nên $x \geq 0$. Tương tự, ta cũng có $z \geq 0$.
Nếu $a \geq b \geq c$, khi đó dễ thấy $y \geq 0$ do

$$\frac{1}{b+2a} \leq \frac{1}{a+b+c} \leq \frac{a+b+c}{3(ab+bc+ca)} \leq \frac{3(a+b+c)}{4(ab+bc+ca)}$$

nên bất đẳng thức đúng.
Nếu $c \geq b \geq a$ và nếu $y \geq 0$ nên bất đẳng thức đúng. Giả sử $y \leq 0$, khi đó ta có

$$x+2y = \frac{9(a+b+c)}{4(ab+bc+ca)} - \frac{1}{a+2c} - \frac{2}{b+2a} \geq 0$$

do

$$\frac{1}{a+2c}+\frac{2}{b+2a} = \frac{4a+b+4c}{(a+2c)(b+2a)} \leq \frac{2(a+b+c)}{ab+bc+ca} \leq \frac{9(a+b+c)}{4(ab+bc+ca)}$$

và

$$z+2y = \frac{9(a+b+c)}{4(ab+bc+ca)} - \frac{1}{c+2b} - \frac{2}{b+2a} \geq 0$$

do

$$\frac{1}{c+2b}+\frac{2}{b+2a} = \frac{2a+5b+2c}{(c+2b)(b+2a)} \leq \frac{2(a+b+c)}{ab+bc+ca} \leq \frac{9(a+b+c)}{4(ab+bc+ca)}$$

Từ đây, với chú ý rằng $(a-c)^2 \leq 2(a-b)^2+2(b-c)^2$, ta được

$$x(b-c)^2+y(c-a)^2+z(a-b)^2 \geq (x+2y)(b-c)^2+(z+2y)(a-b)^2 \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Bài toán 2.14 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c} \geq \frac{a(a+b)}{a+c}+\frac{b(b+c)}{b+a}+\frac{c(c+a)}{c+b}.$$

(Phạm Hữu Đức)

Lời giải 1. Chú ý rằng

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{a(a+b)}{a+c} &= \sum_{cyc}\frac{a(a+b+c)}{a+c} - \sum_{cyc}\frac{ac}{a+c} \\
&= \left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{a+c}\right) - \sum_{cyc}\frac{ab}{a+b} \\
&= \left(\sum_{cyc}a\right)\left(3-\sum_{cyc}\frac{c}{a+c}\right) - \sum_{cyc}\frac{ab}{a+b}
\end{aligned}$$

Ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau

$$\frac{3\sum\limits_{cyc} a^2}{\sum\limits_{cyc} a} + \sum_{cyc} \frac{ab}{a+b} + \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} \frac{c}{a+c}\right) \geq 3\sum_{cyc} a$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{ab}{a+b} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{\sum\limits_{cyc} ab(a+b)} = \frac{\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)\left(\sum\limits_{cyc} ab\right) - 3abc}$$

và

$$\sum_{cyc} \frac{c}{a+c} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} c\right)^2}{\sum\limits_{cyc} c(a+c)} = \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2}{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2 - \sum\limits_{cyc} ab}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{3\sum\limits_{cyc} a^2}{\sum\limits_{cyc} a} + \frac{\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)\left(\sum\limits_{cyc} ab\right) - 3abc} + \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^3}{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2 - \sum\limits_{cyc} ab} \geq 3\sum_{cyc} a$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$, khi đó theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $r \geq \frac{4q-1}{9}$. Bất đẳng thức trở thành

$$3(1-2q) + \frac{q^2}{q-3r} + \frac{1}{1-q} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{q^2}{q-3r} + \frac{1}{1-q} - 6q \geq 0$$

Ta có

$$\frac{q^2}{q-3r} + \frac{1}{1-q} - 6q \geq \frac{q^2}{q - \frac{4q-1}{3}} + \frac{1}{1-q} - 6q = \frac{(1-3q)^2}{1-q} \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Lời giải 2. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{a(a+b)(a+b+c)}{a+c} \le 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ab(a+b)}{a+c} \le 2\sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} ab$$

Gọi x, y, z là một hoán vị của a, b, c sao cho $x \ge y \ge z$, khi đó với chú ý rằng

$$xy(x+y) \ge xz(x+z) \ge yz(y+z)$$

Sử dụng bất đẳng thức sắp xếp lại, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{ab(a+b)}{a+c} &\le \frac{xy(x+y)}{y+z} + \frac{yz(y+z)}{y+x} + \frac{zx(z+x)}{z+x} \\ &= \frac{xy(x+y)}{y+z} + \frac{yz(y+z)}{y+x} + xz \end{aligned}$$

Bây giờ, ta thấy

$$\begin{aligned} \frac{xy(x+y)}{y+z} + \frac{yz(y+z)}{y+x} - (xy+yz) &= \frac{xy(x-z)}{y+z} + \frac{yz(z-x)}{x+y} \\ &= \frac{y(x-z)^2(x+y+z)}{(x+y)(y+z)} \le (x-z)^2 \end{aligned}$$

Từ đây, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{ab(a+b)}{a+c} &\le (x-z)^2 + (xy+yz+xz) \\ &\le 2(x^2+y^2+z^2) - (xy+yz+zx). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ∎

Bài toán 2.15 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào cùng bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{b+3c}} + \sqrt{\frac{b}{c+3a}} + \sqrt{\frac{c}{a+3b}} \ge \frac{3}{2}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Đặt $\frac{c}{a+3b} = \frac{z^2}{4}, \frac{b}{c+3a} = \frac{y^2}{4}, \frac{a}{b+3c} = \frac{x^2}{4}$, với x, y, z là các số không âm. Khi đó, ta dễ dàng kiểm tra được đẳng thức sau

$$16 = 7x^2y^2z^2 + 3(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2)$$

và ta cần chứng minh

$$x + y + z \geq 3$$

Giả sử $x+y+z < 3$, khi đó tồn tại $k > 1$ sao cho $kx+ky+kz = 3$. Đặt $kx = u, ky = v, kz = w$ thì $u + v + w = 3$ và

$$16 = \frac{7u^2v^2w^2}{k^6} + \frac{3(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)}{k^4} < 7u^2v^2w^2 + 3(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)$$

Nhưng ta dễ dàng chứng minh được

$$16 \geq 7u^2v^2w^2 + 3(u^2v^2 + u^2w^2 + v^2w^2)$$

với mọi $u, v, w \geq 0$ thỏa mãn $u + v + w = 3$, điều này dẫn đến mâu thuẫn nên bất đẳng thức cần chứng minh đúng.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Bài toán 2.16 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} \geq \sqrt[3]{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} + 4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

(Sung Yoon Kim)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2}} + 4\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2}} \\
= &\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} \cdot \frac{(c-a)^2}{(c+a)^2}} + 4\sqrt[3]{\frac{ab}{(a+b)^2} \cdot \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot \frac{ca}{(c+a)^2}} \\
\leq &\frac{1}{3}\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} + \frac{4}{3}\sum_{cyc} \frac{ab}{(a+b)^2} \\
= &\frac{1}{3}\sum_{cyc} \left[\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} + \frac{4ab}{(a+b)^2}\right] = 1.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Bài toán 2.17 *Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 3$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a+bc^2}{2}} + \sqrt{\frac{b+ca^2}{2}} + \sqrt{\frac{c+ab^2}{2}} \leq \frac{3}{abc}.$$

(Sung Yoon Kim)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thứ AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a+bc^2}{2}} &= \sum_{cyc}\sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{ab+b^2c^2}{2}} \le \frac{1}{2}\sum_{cyc}\left(\frac{1}{b}+\frac{ab+b^2c^2}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2\sum_{cyc}\frac{1}{a}+\sum_{cyc}ab+3\right)\end{aligned}$$

và

$$\sum_{cyc}ab \le \frac{1}{2}\sum_{cyc}(a^2b^2+1) = 3$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{a} = \frac{\sum\limits_{cyc}ab}{abc} \le \frac{3}{abc}$$

Do đó

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a+bc^2}{2}} \le \frac{1}{4}\left(\frac{6}{abc}+6\right) = \frac{3}{2abc}+\frac{3}{2} \le \frac{3}{abc}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bài toán 2.18 *Cho $k>0$ là một hằng số cho trước. Tìm hằng số λ lớn nhất sao cho với mọi $a\ge b\ge c\ge d\ge 0$ thỏa $a+b+c+d=1$, bất đẳng thức sau đúng*

$$\frac{a-b}{k+a+b}+\frac{b-c}{k+b+c}+\frac{c-d}{k+c+d}+\frac{d-a}{k+d+a} \ge \lambda(a-b)(b-c)(c-d).$$

(Shalex)

Lời giải. Cho $a=\frac{1}{4}+3\epsilon, b=\frac{1}{4}+\epsilon, c=\frac{1}{4}-\epsilon, d=\frac{1}{4}-3\epsilon$ với $\epsilon\to 0^+$, bất đẳng thức trở thành

$$2\epsilon^3\left[\frac{64}{(2k+1)^3-64(2k+1)\epsilon^2}-\lambda\right]\ge 0$$

Cho $\epsilon\to 0^+$, ta được

$$\lambda \le \frac{64}{(2k+1)^3}$$

Mặt khác, đặt $x = a - b, y = b - c, z = c - d \Rightarrow x, y, z \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{a-b}{k+a+b} + \frac{b-c}{k+b+c} + \frac{c-d}{k+c+d} + \frac{d-a}{k+d+a} \\
&\quad = \left(\frac{a-b}{k+a+b} + \frac{c-d}{k+c+d}\right) + \left(\frac{b-c}{k+b+c} + \frac{d-a}{k+d+a}\right) \\
&\quad = [k(a-b+c-d) + (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)] \cdot \\
&\qquad \cdot \left[\frac{1}{(k+a+b)(k+c+d)} - \frac{1}{(k+b+c)(k+c+d)}\right] \\
&\quad = \frac{[(k+a+b)x + (k+c+d)z](x+y)(y+z)}{(k+a+b)(k+b+c)(k+c+d)(k+d+a)} \\
&\quad \geq \frac{8xyz\sqrt{(k+a+b)(k+c+d)}}{(k+a+b)(k+b+c)(k+c+d)(k+d+a)} \\
&\quad = \frac{8xyz}{\sqrt{(k+a+b)(k+c+d)(k+b+c)^2(k+d+a)^2}} \\
&\quad \geq \frac{64}{(2k+1)^3} xyz.
\end{aligned}$$

với bất đẳng thức cuối đúng theo bất đẳng thức AM-GM và giả thiết $a+b+c+d = 1$. Từ đó, ta đi đến kết luận

$$\lambda_{\max} = \frac{64}{(2k+1)^3}.$$

■

Bài toán 2.19 *Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số dương thỏa mãn $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i^2 + x_{i+1}^2} \leq 2 - \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_{i+1}}}.$$

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương

$$\sum_{i=1}^{n} \left(x_i + x_{i+1} - \sqrt{x_i^2 + x_{i+1}^2}\right) \geq \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_{i+1}}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\frac{x_i^2}{x_{i+1}} + x_i + \frac{x_i}{x_{i+1}}\sqrt{x_i^2 + x_{i+1}^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2} + 2\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{x_{i+1}}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\frac{x_i^2}{x_{i+1}}+x_i+\frac{x_i}{x_{i+1}}\sqrt{x_i^2+x_{i+1}^2}}\right)\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i^2}{x_{i+1}}+x_i+\frac{x_i}{x_{i+1}}\sqrt{x_i^2+x_{i+1}^2}\right)\right]$$

$$\geq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=1$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{x_{i+1}}\sqrt{x_i^2+x_{i+1}^2}-\frac{x_i^2}{x_{i+1}}\right)\leq\sqrt{2}-1$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{x_ix_{i+1}}{\sqrt{x_i^2+x_{i+1}^2}+x_i}\leq\sqrt{2}-1$$

Do

$$\sqrt{x_i^2+x_{i+1}^2}\geq\frac{x_i+x_{i+1}}{\sqrt{2}}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_ix_{i+1}}{\left(1+\sqrt{2}\right)x_i+x_{i+1}}\leq 1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{x_ix_{i+1}}{\left(1+\sqrt{2}\right)x_i+x_{i+1}}\leq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}x_i+\frac{\sqrt{2}-1}{2}x_{i+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)(x_i-x_{i+1})^2}{2\left[\left(1+\sqrt{2}\right)x_i+x_{i+1}\right]}\geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{n}$. ■

Bài toán 2.20 *Cho các số thực a,b,c,d. Chứng minh rằng*

$$\frac{5}{2}\sum_{cyc}a^4+\sum_{sym}a^2b^2\geq\left(\sum_{cyc}a^3\right)\left(\sum_{cyc}a\right)+(a-b)(b-c)(c-d)(d-a).$$

(Phạm Minh Khoa)

Lời giải. Do

$$\frac{5}{2}\sum_{cyc} a^4 + \sum_{sym} a^2b^2 - \left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{sym}(a^2-b^2)^2$$

$$\left(\sum_{cyc} a^3\right)\left(\sum_{cyc} a\right) - \left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 = \sum_{sym} ab(a-b)^2$$

Nên ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau

$$\frac{1}{2}\sum_{sym}(a^2-b^2)^2 \ge \sum_{sym} ab(a-b)^2 + (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum_{sym}(a-b)^2(a^2+b^2) \ge (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$$

Chú ý rằng $a^2+b^2 \ge \frac{1}{2}(a-b)^2$, nên

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{sym}(a-b)^2(a^2+b^2) &\ge \frac{1}{4}\sum_{sym}(a-b)^4\\ &\ge \frac{1}{4}[(a-b)^4+(b-c)^4+(c-d)^4+(d-a)^4]\\ &\ge |(a-b)(b-c)(c-d)(d-a)|\\ &\ge (a-b)(b-c)(c-d)(d-a).\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. ■

Bài toán 2.21 *Cho các số dương a, b, c thỏa $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b+c}} + \sqrt{\frac{b^2}{b^2+c+a}} + \sqrt{\frac{c^2}{c^2+a+b}} \le \sqrt{3}.$$

Lời giải. Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có $a+b+c \le 3$. Từ đó

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2}{a^2+b+c}}\right)^2 &\le \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{a^2+b+c}\right)\\ &\le \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{a^2+\frac{1}{3}(b+c)(a+b+c)}\right)\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{a^2+\frac{1}{3}(b+c)(a+b+c)}\right) \le 3$$

Bất đẳng thức này thuần nhất nên ta có thể bỏ qua giả thiết $a^2+b^2+c^2=3$ và chuẩn hóa cho $a+b+c=1$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{3a}{3a^2-a+1}\le 3$$

Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{3a}{3a^2-a+1}-3&=\sum_{cyc}\left(\frac{3a}{3a^2-a+1}-2a-\frac{1}{3}\right)\\&=-\sum_{cyc}\frac{(2a+1)(3a-1)^2}{3(3a^2-a+1)}\le 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bài toán 2.22 *Cho a,b,c là các số dương. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{b+c^2}+\frac{b}{c+a^2}+\frac{c}{a+b^2}\right)^2\le\frac{1}{4}\left(\frac{a}{c^2}+\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right).$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c^2}+\frac{b}{c+a^2}+\frac{c}{a+b^2}&\le\left(\frac{a}{2\sqrt{bc}}+\frac{b}{2\sqrt{ca}}+\frac{c}{2\sqrt{a}b}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\frac{\sqrt{a}}{c}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{c}}\cdot\frac{\sqrt{b}}{a}+\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}}\cdot\frac{\sqrt{c}}{b}\right)\\&\le\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a}{c^2}+\frac{b}{a^2}+\frac{c}{b^2}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bài toán 2.23 *Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+a^2}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+b^2}{a^2+b^2}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải 1. Bình phương 2 vế, ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{2b}{a}-\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}-2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}\right)\ge 0$$

Suy ra, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{a^2}{b^2}+\frac{2b}{a}-\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}-2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3c^2+2b^5+2b^3c^2-ab^2c^2}{ab^2(b^2+c^2)}\ge 2\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$a^3c^2+2b^3c^2\ge 3ab^2c^2$$

$$\Rightarrow a^3c^2+2b^5+2b^3c^2-ab^2c^2\ge 2b^2(b^3+ac^2)$$

Ta cần phải chứng minh

$$\frac{b^3+ac^2}{a(b^2+c^2)}\ge\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$$

Nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên vì

$$(b^3+ac^2)^2(a^2+c^2)-a^2(b^2+c^2)^3=c^2(a-b)^2(a^2c^2+2b^3a+2c^2ab+b^4)\ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Lời giải 2. Trước hết, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\ge\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}-2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}\ge\frac{\left(\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}\right)^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab}\ge\frac{(a^2-b^2)^2}{\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\left(\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\left(\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}\right)^2\ge ab(a+b)^2$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng vì

$$\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}\ge a+b,\quad (a^2+c^2)(b^2+c^2)\ge a^2b^2$$

Từ đó, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b}+\sum_{cyc}\frac{b}{a}\ge\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}+\sum_{cyc}\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$$

Giả sử $\sum\limits_{cyc} \frac{a}{b} < \sum\limits_{cyc} \sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}$, khi đó ta có $\sum\limits_{cyc} \frac{b}{a} > \sum\limits_{cyc} \sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$. Nhưng

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b} < \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{b^2} + 2\sum_{cyc} \frac{b}{a} < \sum_{cyc} \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} + 2\sum_{cyc} \sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$$

Do $\sum\limits_{cyc} \frac{b}{a} > \sum\limits_{cyc} \sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}}$ nên

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b^2} < \sum_{cyc} \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}$$

điều này mâu thuẫn vì

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b^2} \geq \sum_{cyc} \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}$$

Thật vậy, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, thì bất đẳng thức này tương đương với

$$\left[\frac{1}{a^2b^2} - \frac{1}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\right](a^2-b^2)^2 \\ + \left[\frac{1}{a^2c^2} - \frac{1}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\right](a^2-c^2)(b^2-c^2) \geq 0$$

hiển nhiên đúng. Vậy nên ta phải có

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b} \geq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}.$$

■

Bài toán 2.24 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a+(b-c)^2} + \sqrt{b+(c-a)^2} + \sqrt{c+(a-b)^2} \geq \sqrt{3}.$$

(Phan Thành Nam)

Lời giải. Bình phương 2 vế, bất đẳng thức đã cho có thể được viết lại như sau

$$\sum_{cyc}(b-c)^2 + 2\sum_{cyc} \sqrt{[a+(b-c)^2][b+(a-c)^2]} \geq 2$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\sqrt{[a+(b-c)^2][b+(a-c)^2]} \ge \sum_{cyc}\sqrt{ab}+\sum_{cyc}|(a-c)(b-c)|$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc}(b-c)^2+2\sum_{cyc}\sqrt{ab}+2\sum_{cyc}|(a-c)(b-c)| \ge 2$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}(b-c)^2+2\sum_{cyc}\sqrt{ab}+2\sum_{cyc}|(a-c)(b-c)|-2\\
&\quad= 4(a-c)^2-2\left(1-\sum_{cyc}\sqrt{ab}\right)\\
&\quad= 4(a-c)^2-\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2-\left[\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2\right]\\
&\quad\ge 4(a-c)^2-2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2=2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2\left[2\left(\sqrt{a}+\sqrt{c}\right)^2-1\right]\\
&\quad\ge 2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2[2(a+c)-1]=2\left(\sqrt{a}-\sqrt{c}\right)^2(a-b+c)\ge 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$ hoặc $a=b=\frac{1}{2}, c=0$ hoặc các hoán vị. ■

Bài toán 2.25 *Cho các số dương a,b,c thỏa $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{2b+1}+\frac{b}{2c+1}+\frac{c}{2a+1}\le\frac{1}{abc}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(3-\frac{a}{2b+1}\right)+\left(3-\frac{b}{2c+1}\right)+\left(3-\frac{c}{2a+1}\right)+\frac{1}{abc}\ge 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{7b+c}{2b+1}+\frac{7c+a}{2c+1}+\frac{7a+b}{2a+1}+\frac{1}{abc}\ge 9$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{c-1}{2b+1}+\frac{a-1}{2c+1}+\frac{b-1}{2a+1}\right)+\frac{2}{abc}+3\ge 5\left(\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\right)$$

Nên để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh 2 bất đẳng thức sau

$$\frac{c-1}{2b+1}+\frac{a-1}{2c+1}+\frac{b-1}{2a+1}\ge 0$$

$$\frac{2}{abc}+3\geq 5\left(\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\right)$$

a) Trước hết, ta sẽ chứng minh

$$\frac{c-1}{2b+1}+\frac{a-1}{2c+1}+\frac{b-1}{2a+1}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+4(a^2b+b^2c+c^2a)\geq 12$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+12(a^2b+b^2c+c^2a)\geq 6(ab^2+bc^2+ca^2)+21abc$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad & a^3+b^3+c^3+3(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)-21abc\\ \geq\quad & 6(ab^2+bc^2+ca^2-a^2b-b^2c-c^2a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\quad & (a+b+7c)(a-b)^2+(b+c+7a)(b-c)^2+(c+a+7b)(c-a)^2\\ \geq\quad & 18(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

Từ đây, giả sử $a=\min\{a,b,c\}$ và đặt $b=a+x, c=a+y$ $(x,y\geq 0)$, ta có thể dễ dàng biến đổi bất đẳng thức về dạng tương đương là

$$9(x^2-xy+y^2)a+x^3+3x^2y+y(3x-y)^2\geq 0$$

Nên bất đẳng thức hiển nhiên đúng.
b) Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\frac{2}{abc}+3\geq 5\left(\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}\right)$$

Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$ thì ta có

$$\frac{1}{2a+1}+\frac{1}{2b+1}+\frac{1}{2c+1}=\frac{4q+15}{8r+4q+7}$$

Nên bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{3r+2}{r}\geq\frac{5(4q+15)}{8r+4q+7}$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(1-r)(4q+7-12r)}{r(8r+4q+7)}\geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng vì $3\geq q\geq 3r$. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bài toán 2.26 *Cho các số dương a, b, c thỏa $a \le b \le c$ và $abc = 1$. Chứng minh rằng*

$$a + b^2 + c^3 \ge \frac{1}{a} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^3}.$$

(Rachid)

LỜI GIẢI. Từ giả thiết, ta suy ra $c \ge 1, bc \ge 1$. Bất đẳng thức đã cho tương đương

$$\left(a - \frac{1}{c^3}\right) + \left(c^3 - \frac{1}{a}\right) \ge \frac{1}{b^2} - b^2$$

$$\Leftrightarrow (c^3a - 1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c^3}\right) \ge \frac{1 - b^4}{b^2}$$

Do $c^3a - 1 \ge c^2ba - 1 = c - 1 \ge 0$ nên nếu $b \ge 1$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì

$$(c^3a - 1)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c^3}\right) \ge 0 \ge \frac{1 - b^4}{b^2}$$

Nếu $1 \ge b$, ta có

$$c^3a + b^4 - 2 \ge a(c^3 + b^3) - 2 \ge abc(b + c) - 2 = b + c - 2 \ge 2\left(\sqrt{bc} - 1\right) \ge 0$$

$$\Rightarrow c^3a - 1 \ge 1 - b^4 \ge 0$$

Nên nếu $\frac{1}{a} \ge \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow b^2 \ge a$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Xét trường hợp ngược lại $a \ge b^2$, khi đó ta có

$$\begin{aligned} c^3a - 1 - c(1 - b^4) &\ge c^3b^2 + cb^4 - c - 1 \\ &= c^3b^2 + cb^4 - c \cdot (abc)^{4/3} - (abc)^{5/3} \\ &\ge c^3b^2 + cb^4 - c \cdot (b^2c)^{4/3} - (b^2c)^{5/3} \\ &= b^2c(c^2 + b^2 - b^{4/3}c^{2/3} - b^{2/3}c^{4/3}) \ge 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c^3a - 1 \ge c(1 - b^4) \ge 0$$

Lại có

$$\frac{c}{a} - \frac{1}{b^2} = \frac{b^2c - a}{ab^2} \ge \frac{b - a}{ab^2} \ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.
■

Bài toán 2.27 *Cho các số dương x, y, z thỏa $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{2}{xyz} \ge 9 - 6\sqrt{3}.$$

(Ji Chen)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}-2\geq\left(9-6\sqrt{3}\right)xyz$$

$$\Leftrightarrow\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}+\frac{xy}{z}-2+9\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)xyz\geq 0$$

Đặt $a=\frac{yz}{x},b=\frac{zx}{y},c=\frac{xy}{z}$ và $p=a+b+c$ thì ta có $ab+bc+ca=1$ và $p\geq\sqrt{3}$, bất đẳng thức trở thành

$$p-2+9\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)abc\geq 0$$

Nếu $p\geq 2$ thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Nếu $2\geq p\geq\sqrt{3}$ thì theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $9abc\geq p(4-p^2)$, suy ra

$$\begin{aligned}
p-2+9\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)abc &\geq p-2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)p(4-p^2)\\
&= (2-p)\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)p(p+2)-1\right]\\
&\geq (2-p)\left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\cdot\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}+2\right)-1\right]=0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Bài toán 2.28 *Cho các số dương x,y,z. Tìm hằng số $k>0$ lớn nhất sao cho*

$$\left[3yz+\frac{(y-z)^2}{k}\right]\left[3zx+\frac{(z-x)^2}{k}\right]\left[3xy+\frac{(x-y)^2}{k}\right]\geq xyz(x+y+z)^3.$$

(Ji Chen)

Lời giải. Đặt $a=\frac{1}{x},b=\frac{1}{y},c=\frac{1}{z}$ thì ta có $a,b,c>0$ và bất đẳng thức trên trở thành

$$\left[3ab+\frac{(a-b)^2}{k}\right]\left[3bc+\frac{(b-c)^2}{k}\right]\left[3ca+\frac{(c-a)^2}{k}\right]\geq(ab+bc+ca)^3$$

Cho $c\to 0,a=b=1$ thì bất đẳng thức trở thành

$$\frac{3}{k^2}\geq 1\Leftrightarrow k\leq\sqrt{3}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng

$$27\left[ab+\frac{(a-b)^2}{3\sqrt{3}}\right]\left[bc+\frac{(b-c)^2}{3\sqrt{3}}\right]\left[ca+\frac{(c-a)^2}{3\sqrt{3}}\right]\geq(ab+bc+ca)^3$$

Đặt $t = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ thì ta có

$$\begin{aligned}
&\prod_{cyc}\left[ab + \frac{(a-b)^2}{3\sqrt{3}}\right] \\
&= \prod_{cyc}\left[ab + t(a-b)^2\right] \\
&= [ab + t(a-b)^2][t^2(b-c)^2 + tbc(c-a)^2 + tca(b-c)^2 + abc^2] \\
&= t^3\prod_{cyc}(a-b)^2 + t^2\sum_{cyc} bc(a-b)^2(a-c)^2 + tabc\sum_{cyc} c(a-b)^2 + a^2b^2c^2 \\
&\geq t^2\sum_{cyc} bc(a-b)^2(a-c)^2 + tabc\sum_{cyc} c(a-b)^2 + a^2b^2c^2 \\
&= \frac{1}{27}\left[\sum_{cyc} bc(a-b)^2(a-c)^2 + 3\sqrt{3}abc\sum_{cyc} c(a-b)^2 + 27a^2b^2c^2\right]
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{cyc} ab\right)^3 - 27a^2b^2c^2 \\
&= \left(\sum_{cyc} a^3b^3 - 3a^2b^2c^2\right) + 3abc\left[\sum_{cyc} ab(a+b) - 6abc\right] \\
&= \left(\sum_{cyc} ab\right)\left[\sum_{cyc} bc(a-b)(a-c)\right] + 3abc\sum_{cyc} c(a-b)^2
\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc} bc(a-b)^2(a-c)^2 + 3\sqrt{3}abc\sum_{cyc} c(a-b)^2 \\
&\geq \left(\sum_{cyc} ab\right)\left[\sum_{cyc} bc(a-b)(a-c)\right] + 3abc\sum_{cyc} c(a-b)^2
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} bc(a-b)(a-c)(a^2 - 2ab - 2ac) + 3\left(\sqrt{3}-1\right)abc\sum_{cyc} c(a-b)^2 \geq 0$$

Ta có

$$3\left(\sqrt{3}-1\right)abc\sum_{cyc} c(a-b)^2 \geq 2abc\sum_{cyc} c(a-b)^2 = 2\sum_{cyc}(b+c)(a-b)(a-c)$$

Và

$$\sum_{cyc} bc(a-b)(a-c)(a^2-2ab-2ac)+2abc\sum_{cyc}(b+c)(a-b)(a-c)$$
$$\geq \quad abc\sum_{cyc} a(a-b)(a-c)\geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Ta đi đến kết luận

$$k_{\max}=\sqrt{3}.$$

■

Bài toán 2.29 *Cho các số $x,y,z>0$. Chứng minh rằng*

$$\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}\geq 3\left(\frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2zx}+\frac{z^2}{z^2+2xy}\right).$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải. Ta sẽ sử dụng kết quả sau
Bổ đề. *Với mọi $a,b,c>0$, ta có*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq \frac{9(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2}$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Chứng minh. Bất đẳng thức tương đương

$$\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b}\right)\geq \frac{9\sum\limits_{cyc} a^2}{\sum\limits_{cyc} a}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2}{b}+\sum_{cyc}\frac{ab}{c}+\sum_{cyc} a\geq \frac{9\sum\limits_{cyc} a^2}{\sum\limits_{cyc} a}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}-\sum_{cyc} a\right)+\left(\sum_{cyc}\frac{ab}{c}-\sum_{cyc} a\right)\geq \frac{9\sum\limits_{cyc} a^2}{\sum\limits_{cyc} a}-3\sum_{cyc} a$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{1}{b}+\frac{c}{2ab}-\frac{3}{a+b+c}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{2a}{b}+\frac{3c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{c^2}{ab}-4\right)\geq 0$$

Đặt $z=\frac{2a}{b}+\frac{3c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{c^2}{ab}-4$ và x,y tương tự. Rõ ràng ta chỉ cần xét $a\geq b\geq c$ là đủ, khi đó ta có

$$x=\frac{2b}{c}+\frac{3a}{c}+\frac{a}{b}+\frac{a^2}{bc}-4\geq 2+3+1+1-4=3>0$$

và

$$\begin{aligned}
y+z &= \frac{2a}{b}+\frac{3b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{3c}{b}+\frac{3c}{a}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}-8\\
&= \frac{2a}{b}+\frac{3b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{3c}{b}+\frac{3c}{a}+\left(\frac{b^2}{2ca}+\frac{b^2}{2ca}+\frac{c^2}{ab}\right)-8\\
&\geq \frac{2a}{b}+\frac{3b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{3c}{b}+\frac{3c}{a}+\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{b}{a}-8\\
&\geq \frac{2a}{b}+\frac{9b}{2a}+\frac{b}{c}+\frac{3c}{b}+\frac{3c}{a}-8\\
&= \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{3c}+\frac{3c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{9b}{2a}\right)+\left(\frac{2b}{3c}+\frac{3c}{b}\right)-8\\
&\geq 3+3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-8=5\sqrt{2}-5>0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2y+z &= \frac{2a}{b}+\frac{6b}{a}+\frac{2b}{c}+\frac{3c}{b}+\frac{5c}{a}+\frac{2b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}-12\\
&= \frac{2a}{b}+\frac{6b}{a}+\frac{2b}{c}+\frac{3c}{b}+\frac{5c}{a}+\left(\frac{b^2}{ca}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)-12\\
&\geq \frac{2a}{b}+\frac{6b}{a}+\frac{2b}{c}+\frac{3c}{b}+\frac{5c}{a}+\frac{3b}{a}-12\\
&= \frac{2a}{b}+\frac{9b}{a}+\frac{2b}{c}+\frac{3c}{b}+\frac{5c}{a}-12\\
&= \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{5c}+\frac{5c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}\right)+\left(\frac{9b}{5c}+\frac{3c}{b}\right)-12\\
&\geq 3+6+6\sqrt{\frac{3}{5}}-12=6\sqrt{\frac{3}{5}}-3>0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x+2y &= \frac{a}{b}+\frac{6b}{a}+\frac{4b}{c}+\frac{3a}{c}+\frac{4c}{a}+\frac{a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ca}-12\\
&\geq \frac{a}{b}+\frac{6b}{a}+\frac{4b}{c}+\frac{3a}{c}+\frac{4c}{a}+\frac{a^2}{b\cdot a}+\frac{2b^2}{b\cdot a}-12\\
&= \frac{2a}{b}+\frac{8b}{a}+\frac{4b}{c}+\frac{3a}{c}+\frac{4c}{a}-12\\
&= 2\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\right)+\frac{4b}{c}+3\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{c}{a}-12\\
&\geq 8+4+6+0-12=6>0
\end{aligned}$$

Do đó

Nếu $y \geq 0$ thì ta có

$$\sum_{cyc} z(a-b)^2 \geq y(a-c)^2+z(a-b)^2 \geq (y+z)(a-b)^2 \geq 0$$

Nếu $y \leq 0$ thì ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} z(a-b)^2 &\geq x(b-c)^2+y[2(b-c)^2+2(a-b)^2]+z(a-b)^2\\
&= (x+2y)(b-c)^2+(z+2y)(a-b)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh xong. ■

Trở lại bài toán của ta, đặt $a=\frac{1}{x}, b=\frac{1}{y}, c=\frac{1}{z}$ thì bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b} \geq 3\sum_{cyc}\frac{bc}{2a^2+bc}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a}{b}+6\sum_{cyc}\frac{a^2}{2a^2+bc} \geq 9$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{2a^2+bc} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2}{2\sum\limits_{cyc} a^2+\sum\limits_{cyc} bc}$$

Mặt khác, theo bổ đề trên, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b} \geq \frac{9\sum\limits_{cyc} a^2}{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{3\sum_{cyc} a^2}{\left(\sum_{cyc} a\right)^2} + \frac{2\left(\sum_{cyc} a\right)^2}{2\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} bc} \geq 3$$

Đặt $t = \frac{\sum_{cyc} bc}{\left(\sum_{cyc} a\right)^2} \leq \frac{1}{3}$ thì bất đẳng thức trở thành

$$3(1-2t) + \frac{2}{2(1-2t)+t} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(1-3t)^2}{2-3t} \geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. ■

Bài toán 2.30 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4}{c^3+a^3} \geq \frac{a+b+c}{2}.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a^4}{a^3+b^3}\right)\left[\sum_{cyc} a^2(a^3+b^3)\right] \geq \left(\sum_{cyc} a^3\right)^2$$

Ta cần chứng minh

$$2\left(\sum_{cyc} a^3\right)^2 \geq \left(\sum_{cyc} a\right)\left[\sum_{cyc} a^2(a^3+b^3)\right]$$

Sử dụng bất đẳng thức Vasile $\sum\limits_{cyc} ab^3 \le \frac{1}{3}\left(\sum\limits_{cyc} a^2\right)^2$, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} a^2(a^3+b^3) &= \sum_{cyc} a^5 + \frac{\sum\limits_{cyc} ab}{\sum\limits_{cyc} a}\left(\sum_{cyc} ab^3 + \sum_{cyc} a^2b^2\right) - abc\left(\sum_{cyc} a^2\right) \\
&\le \sum_{cyc} a^5 + \frac{\sum\limits_{cyc} ab}{\sum\limits_{cyc} a}\left[\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 + \sum_{cyc} a^2b^2\right] - abc\left(\sum_{cyc} a^2\right)
\end{aligned}$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$, khi đó ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc} a^5 + \frac{\sum\limits_{cyc} ab}{\sum\limits_{cyc} a}\left[\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 + \sum_{cyc} a^2b^2\right] - abc\left(\sum_{cyc} a^2\right) \\
&\qquad = \frac{1}{3}[3(4-5q)r + 3 - 14q + 11q^2 + 7q^3]
\end{aligned}$$

và

$$\left(\sum_{cyc} a^3\right)^2 = (1-3q+3r)^2$$

Ta phải chứng minh

$$2(1-3q+3r)^2 \ge \frac{1}{3}[3(4-5q)r + 3 - 14q + 11q^2 + 7q^3]$$

$$\Leftrightarrow 54r^2 + 3(8-28q)r + 3 - 22q + 43q^2 - 7q^3 - 9qr \ge 0$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $r \ge \frac{4q-1}{9}$ và chú ý rằng $f(r) = 54r^2 + 3(8-28q)r$ tăng với mọi $r \ge \frac{4q-1}{9}$, ta có

$$\begin{aligned}
f(r) + 3 - 22q + 43q^2 - 7q^3 - 9qr &\ge f\left(\frac{4q-1}{9}\right) + 3 - 22q + 43q^2 - 7q^3 - 9qr \\
&= 1 - \frac{22}{3}q + \frac{49}{3}q^2 - 7q^3 - 9qr
\end{aligned}$$

Từ bất đẳng thức $(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \ge 0$, ta suy ra được

$$r \le \frac{1}{27}\left[9q - 2 + 2(1-3q)\sqrt{1-3q}\right]$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$1-\frac{22}{3}q+\frac{49}{3}q^2-7q^3-\frac{1}{3}q\left[9q-2+2(1-3q)\sqrt{1-3q}\right]\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(1-3q)\left(7q^2-11q+3-2q\sqrt{1-3q}\right)\geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$7q^2-11q+3-2q\sqrt{1-3q}\geq 7q^2-11q+3-(q^2+1-3q)=2(1-q)(1-3q)\geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài toán 2.31 *Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt[3]{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}\geq \sqrt[3]{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}+4\sqrt[3]{a^2b^2c^2}.$$

(Sung Yoon Kim)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2}}+4\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2}}\\
&= \sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\cdot\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}\cdot\frac{(c-a)^2}{(c+a)^2}}+4\sqrt[3]{\frac{ab}{(a+b)^2}\cdot\frac{bc}{(b+c)^2}\cdot\frac{ca}{(c+a)^2}}\\
&\leq \frac{1}{3}\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}+\frac{4}{3}\sum_{cyc}\frac{ab}{(a+b)^2}\\
&= \frac{1}{3}\sum_{cyc}\left[\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}+\frac{4ab}{(a+b)^2}\right]=1.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài toán 2.32 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Tìm hằng số k lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng*

$$\frac{1}{a(1+bc)^2}+\frac{1}{b(1+ca)^2}+\frac{1}{c(1+ab)^2}\leq\frac{k}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}+\frac{3}{4}-\frac{k}{8}$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải 1. Cho $a=2,b=1,c=\frac{1}{2}$, ta được $k\leq 4$. Ta sẽ chứng minh đây là giá trị mà ta cần tìm, tức là

$$4\sum_{cyc}\frac{1}{a(1+bc)^2}\leq 1+\frac{16}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}\frac{a}{(a+1)^2} \le 1 + \frac{16}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$

Đặt $x = \frac{1-a}{1+a}, y = \frac{1-b}{1+b}, z = \frac{1-c}{1+c}$, thì ta có $x, y, z \in [-1, 1]$ và

$$(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z)$$

$$\Rightarrow x + y + z + xyz = 0$$

Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}(1-x^2) \le 1 + 2(1+x)(1+y)(1+z)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) + 2(x + y + z + xyz) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 \ge 0$$

hiển nhiên đúng.
Bất đẳng thức được chứng minh. Vậy ta đi đến kết luận

$$k_{\max} = 4.$$

■

Lời giải 2. Tương tự như trên, ta cần phải chứng minh

$$4\sum_{cyc}\frac{1}{a(1+bc)^2} \le 1 + \frac{16}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}$$

Vì $a, b, c > 0, abc = 1$ nên tồn tại các số $x, y, z > 0$ sao cho $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\frac{xy}{(x+y)^2} \le \frac{1}{4} + \frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\
&= \frac{2[(x+y)(y+z)(z+x) - xy(x+y) - yz(y+z) - zx(z+x)]}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\
&= 2 - \frac{\sum\limits_{cyc}(x^2+yz)(y+z)}{(x+y)(y+z)(z+x)} \\
&= 2 - \left(\sum_{cyc} \frac{x}{x+y} \cdot \frac{x}{x+z} + \sum_{cyc} \frac{y}{x+y} \cdot \frac{z}{x+z}\right) \\
&= 2 - \left[\left(\sum_{cyc} \frac{x}{x+y}\right)\left(\sum_{cyc} \frac{y}{x+z}\right) - \sum_{cyc} \frac{x}{x+y} \cdot \frac{y}{x+y}\right] \\
&= 2 - \left(\sum_{cyc} \frac{x}{x+y}\right)\left(\sum_{cyc} \frac{y}{x+z}\right) + \sum_{cyc} \frac{xy}{(x+y)^2}
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\sum_{cyc} \frac{x}{x+y}\right)\left(\sum_{cyc} \frac{y}{x+z}\right) \le \frac{9}{4}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\left(\sum_{cyc} \frac{x}{x+y}\right)\left(\sum_{cyc} \frac{y}{x+z}\right) \le \frac{1}{4}\left(\sum_{cyc} \frac{x}{x+y} + \sum_{cyc} \frac{y}{x+y}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

■

Bài toán 2.33 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Nếu $a \ge b \ge c \ge 0$, thì $P \le 0$. Nếu $c \ge b \ge a \ge 0$, thì

$$\begin{aligned}
P &= (c-b)(b-a)(c-a)(a+b+c) \quad = (c-b)(b-a)(c^2+bc-a^2-ab) \\
&\le b(c-b)(c^2+bc) = (c^2-bc)(b^2+bc) \le \frac{1}{4}\cdot(b^2+c^2)^2 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Mặt khác, cho $a = 0, b = \sin\frac{\pi}{8}, c = \cos\frac{\pi}{8}$, ta có $P = \frac{1}{4}$. Vậy nên

$$\max P = \frac{1}{4}.$$

■

Bài toán 2.34 *Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng*

$$\frac{b(a+c)}{c(a+b)} + \frac{c(b+d)}{d(b+c)} + \frac{d(c+a)}{a(c+d)} + \frac{a(d+b)}{b(d+a)} \geq 4.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Viết lại bất đẳng thức như sau

$$(a+c)\left(\frac{b}{c(a+b)} + \frac{d}{a(c+d)}\right) + (b+d)\left(\frac{c}{d(b+c)} + \frac{a}{b(d+a)}\right) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow (abc + abd + acd + bcd)\left(\frac{a+c}{ac(a+b)(c+d)} + \frac{b+d}{bd(b+c)(d+a)}\right) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)} + \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{a}\right)}\right) \geq 4$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)} + \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{a}\right)} &\geq \frac{4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2} + \frac{4\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{d}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2} \\ &= \frac{4}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = c$ và $b = d$. ■

Bài toán 2.35 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2+bc}{a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2+ca}{b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2+ab}{c^2+(a+b)^2} \leq \frac{18}{5} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}.$$

(Phạm Hữu Đức)

Lời giải. Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{(b+c)^2 - bc}{a^2+(b+c)^2} + \frac{18}{5} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \geq 3$$

Do $(b+c)^2 \geq 4bc$, nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc} \frac{(b+c)^2}{4[a^2+(b+c)^2]} + \frac{6}{5} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{(b+c)^2}{4[a^2+(b+c)^2]} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum\limits_{cyc}[a^2+(b+c)^2]} = \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)+(a+b+c)^2}$$

Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $x = a^2+b^2+c^2 \Rightarrow 3x \geq 1$, ta phải chứng minh

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{6x}{5} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow x(3x-1) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài toán 2.36 *Cho các số dương a, b, c, d. Chứng minh rằng*

$$(a+b)(a+c)(a+d)(b+c)(b+d)(c+d) \geq 4(abc+bcd+cda+dab)^2.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
(abc+bcd+cda+dab)^2 &\leq (ac+bc+ad+bd)(ab^2c+bcd^2+ac^2d+a^2bd)\\
&= (a+b)(c+d)(ab^2c+bcd^2+ac^2d+a^2bd)\\
(abc+bcd+cda+dab)^2 &\leq (bc+bd+ac+ad)(a^2bc+bc^2d+acd^2+ab^2d)\\
&= (a+b)(c+d)(a^2bc+bc^2d+acd^2+ab^2d)
\end{aligned}$$

Cộng tương ứng vế với vế 2 bất đẳng thức trên, ta được

$$\begin{aligned}
&2(abc+bcd+cda+dab)^2\\
&\quad\leq (a+b)(c+d)(ab^2c+bcd^2+ac^2d+a^2bd+a^2bc+bc^2d+acd^2+ab^2d)\\
&\quad= (a+b)^2(c+d)^2(ab+cd)
\end{aligned}$$

Tương tự, ta cũng có

$$\begin{aligned}
2(abc+bcd+cda+dab)^2 &\leq (a+c)^2(b+d)^2(ac+bd)\\
2(abc+bcd+cda+dab)^2 &\leq (a+d)^2(b+c)^2(ad+bc)
\end{aligned}$$

Nhân tương ứng vế với vế, ta được

$$8(abc+bcd+cda+dab)^6 \le (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)\prod_{sym}(a+b)^2$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$4(ab+cd)(ac+bd) \le (ab+cd+ac+bd)^2 = (a+d)^2(b+c)^2$$

Tương tự,

$$\begin{aligned} 4(ab+cd)(ad+bc) &\le (a+c)^2(b+d)^2 \\ 4(ac+bd)(ad+bc) &\le (a+b)^2(c+d)^2 \end{aligned}$$

Do đó

$$64(ab+cd)^2(ac+bd)^2(ad+bc)^2 \le \prod_{sym}(a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc) \le \frac{1}{8}\prod_{sym}(a+b)$$

Kết hợp với bất đẳng thức $8(abc+bcd+cda+dab)^6 \le (ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)\prod_{sym}(a+b)^2$, ta suy ra được

$$8(abc+bcd+cda+dab)^6 \le \frac{1}{8}\left[\prod_{sym}(a+b)\right]\left[\prod_{sym}(a+b)^2\right] = \frac{1}{8}\prod_{sym}(a+b)^3.$$

Từ đây, ta suy ra đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$. ■

Bài toán 2.37 *Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}.$$

(Phạm Hữu Đức)

Lời giải. Đặt $x^3=a$, $y^3=b, z^3=c$. Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có

$$\begin{aligned} 3+\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} &= 3\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}+\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3} \ge \sum_{cyc}\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right) \\ &= \sum_{cyc}\frac{x^2}{yz}+\sum_{cyc}\frac{xz}{y^2} \end{aligned}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{x^2}{yz}+\sum_{cyc}\frac{xz}{y^2} &= \frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}+\frac{(xz)^3+(yx)^3+(zy)^3}{(xyz)^2}\\
&\geq 2\sqrt{\frac{(x^3+y^3+z^3)(x^3z^3+y^3x^3+z^3y^3)}{x^3y^3z^3}}\\
&= 2\sqrt{(x^3+y^3+z^3)\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}+\frac{1}{z^3}\right)}\\
&= 2\sqrt{(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)}.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ∎

Bài toán 2.38 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$abc+2(a^2+b^2+c^2)+8\geq 5(a+b+c).$$

(Trần Nam Dũng)

LỜI GIẢI. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có

$$\begin{aligned}
&6abc+12(a^2+b^2+c^2)+48-30(a+b+c)\\
&\quad= 3(2abc+1)+12(a^2+b^2+c^2)+45-5\cdot 2\cdot(a+b+c)\cdot 3\\
&\quad\geq 9\sqrt[3]{a^2b^2c^2}+12(a^2+b^2+c^2)+45-5[(a+b+c)^2+9]\\
&\quad= \frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}}+7(a^2+b^2+c^2)-10(ab+bc+ca)\\
&\quad\geq \frac{27abc}{a+b+c}+7(a^2+b^2+c^2)-10(ab+bc+ca)\\
&\quad\geq 3[4(ab+bc+ca)-(a+b+c)^2]+7(a^2+b^2+c^2)-10(ab+bc+ca)\\
&\quad= 4(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\geq 0.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ∎

Bài toán 2.39 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca+6abc=9$. Tìm hằng số k nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng*

$$a+b+c+kabc\geq k+3.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Cho $a = b = 3, c = 0$, ta được $k \geq 3$. Ta sẽ chứng minh đây là giá trị mà ta cần tìm, tức là

$$a + b + c + 3abc \geq 6$$

Đặt $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$ thì ta có $q + 6r = 9$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $p^2 \geq 3q \geq 9$. Bất đẳng thức trở thành

$$p + 3r \geq 6$$

$$\Leftrightarrow 2p - q \geq 3$$

Nếu $p \geq 6$, bất đẳng thức là hiển nhiên.
Nếu $6 \geq p \geq 3$ và nếu $p^2 \geq 4q$, thì

$$2p - q \geq 2p - \frac{p^2}{4} = \frac{(p-2)(6-p)}{4} + 3 \geq 3$$

Nếu$6 \geq p \geq 3$ và nếu $p^2 \leq 4q$, theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $r \geq \frac{p(4q-p^2)}{9} \geq 0$. Do đó

$$27 = 3q + 18r \geq 3q + 2p(4q - p^2)$$

$$\Rightarrow 2p - q \geq 2p - \frac{2p^3 + 27}{8p + 3}$$

Ta cần chứng minh

$$2p - \frac{2p^3 + 27}{8p + 3} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow (p+1)(p-3)(p-6) \leq 0.$$

hiển nhiên đúng. Vậy ta đi đến kết luận

$$k_{\min} = 3.$$

■

Bài toán 2.40 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng*

$$3(a^4 + b^4 + c^4) + a^2 + b^2 + c^2 + 6 \geq 6(a^3 + b^3 + c^3).$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc} \left(3a^4 - 6a^3 + a^2 + 4a - 2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-1)^2(3a^2 - 2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(2a-b-c)^2(3a^2-2) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)(a-c)(4a^2+b^2+c^2-4) \ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \ge 0$, khi đó ta dễ dàng kiểm tra được

$$4a^2+b^2+c^2-4 \ge 4b^2+c^2+a^2-4 \ge 4c^2+a^2+b^2-4$$

Mặt khác

$$4c^2+a^2+b^2-4 \ge 4c^2+\frac{(a+b)^2}{2}-4 = \frac{(3c-1)^2}{2} \ge 0$$

Do đó

$$4a^2+b^2+c^2-4 \ge 4b^2+c^2+a^2-4 \ge 4c^2+a^2+b^2-4 \ge 0$$

Từ đây, viết lại bất đẳng thức như sau

$$(a-b)[(a-c)(4a^2+b^2+c^2-4)-(b-c)(4b^2+a^2+c^2-4)] \\ +(c-a)(c-b)(4c^2+a^2+b^2-4) \ge 0.$$

Ta thu được kết quả cần chứng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a=b=\frac{4}{3}, c=\frac{1}{3}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.41 *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab} \le \frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Viết lại bất đẳng thức như sau

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a}-\frac{b+c}{a^2+bc}\right) \ge \sum_{cyc}\frac{1}{a}-\frac{3(a+b+c)}{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a(a^2+bc)} \ge \sum_{cyc}\frac{bc(a-b)(a-c)}{abc(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)(a-c)\left[\frac{1}{a(a^2+bc)}-\frac{1}{a(ab+bc+ca)}\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)(b+c-a)}{a^2+bc} \ge 0$$

Giả sử $a \geq b \geq c$, do a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên

$$a - c \geq \frac{b(a-b)}{c}$$

Do $a \geq b \geq c$ nên

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)(b+c-a)}{a^2+bc} \\
&\quad \geq \frac{(b-c)(b-a)(c+a-b)}{b^2+ca} + \frac{(c-a)(c-b)(a+b-c)}{c^2+ab} \\
&\quad \geq \frac{(b-c)(b-a)(c+a-b)}{b^2+ca} + \frac{b(a-b)(b-c)(a+b-c)}{c(c^2+ab)} \\
&\quad = (a-b)(b-c)\left[\frac{b(a+b-c)}{c(c^2+ab)} - \frac{c+a-b}{b^2+ca}\right] \\
&\quad \geq (a-b)(b-c)\left[\frac{b(c+a-b)}{c(c^2+ab)} - \frac{c+a-b}{b^2+ca}\right] \\
&\quad = \frac{(a-b)(b-c)(c+a-b)(b^3-c^3)}{c(c^2+ab)(b^2+ca)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $\frac{a}{2} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.42 *Chứng minh rằng với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 9$, ta có*

$$3 \min\{a, b, c\} \leq abc + 1.$$

(Virgil Nicula)

Lời giải. Giả sử $c \geq b \geq a$, bất đẳng thức trở thành

$$abc + 1 \geq 3a$$

Nếu $a \leq 0$, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$abc + 1 - 3a \geq \frac{a(b^2+c^2)}{2} + 1 - 3a = \frac{a(9-a^2)}{2} + 1 - 3a = \frac{(a+1)^2(2-a)}{2} \geq 0$$

Nếu $a \geq 0$, vì $c \geq b \geq a$, ta được $\sqrt{3} \geq a \geq 0$. Nêu $a \leq \frac{1}{3}$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $\sqrt{3} \geq a \geq \frac{1}{3}$, ta có thể dễ dàng kiểm tra được

$$bc \geq a\sqrt{b^2+c^2-a^2} = a\sqrt{9-2a^2}$$

Do đó, ta phải chứng minh

$$a^2\sqrt{9-2a^2} + 1 \geq 3a$$

$$\Leftrightarrow f(a) = 2a^6 - 9a^4 + 9a^2 - 6a + 1 \le 0$$

Nếu $1 \ge a \ge \frac{1}{3}$, ta có

$$2f(a) = a^2(a-1)\left[4a(a-1)^2 + 12a^2 - 18a + 7\right] + (1-3a)(7a^2 - 6a + 3) \le 0$$

Nếu $\sqrt{3} \ge a \ge 1$, thì

$$f(a) \le 2a^6 - 9a^4 + 9a^2 - 5 = (a^2-1)(2a^4 - 7a^2 + 2) - 3 \le -3 < 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = -1, b = c = 2$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.43 *Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{x}{x^3 + yz}} + \sqrt{\frac{y}{y^3 + zx}} + \sqrt{\frac{z}{z^3 + xy}} \ge 2\sqrt{2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Đặt $x^2 = bc, y^2 = ca, z^2 = ab$ $(a, b, c \ge 0)$ thì $ab + bc + ca = 1$ và bất đẳng thức trở thành

$$\frac{1}{\sqrt{a + bc}} + \frac{1}{\sqrt{b + ca}} + \frac{1}{\sqrt{c + ab}} \ge 2\sqrt{2}$$

Do tính đối xứng, ta có thể giả sử $a \ge b \ge c \ge 0$, khi đó ta có $a \ge \frac{1}{\sqrt{3}}$.
Nếu $a \ge 2$, ta sẽ chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a + bc}} \ge \frac{1}{\sqrt{a + t^2}}$$

và

$$\frac{1}{\sqrt{b + ca}} + \frac{1}{\sqrt{c + ab}} \ge \frac{2}{\sqrt{t(a+1)}}$$

trong đó $t = \sqrt{(a+b)(a+c)} - a \ge 0 \Rightarrow t^2 + 2at = 1$.
Thật vậy, ta có

$$(a + t^2) - (a + bc) = a\left(\sqrt{a+b} - \sqrt{a+c}\right)^2 \ge 0$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{b + ca}} + \frac{1}{\sqrt{c + ab}} \ge \frac{2}{\sqrt[4]{(b + ac)(c + ab)}}$$

Suy ra ta chỉ cần chứng minh

$$t^2(a+1)^2 \ge (b + ac)(c + ab)$$

Ta có

$$\begin{aligned} t^2(a+1)^2-(b+ac)(c+ab) &= a(a+1)^2\left(\sqrt{a+b}-\sqrt{a+c}\right)^2-a(b-c)^2 \\ &= \frac{a(b-c)^2\left((a+1)^2-\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}\right)^2} \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+\frac{1}{a}}\right)^2-\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}\right)^2=\frac{bc}{a}\geq 0$$

và

$$\begin{aligned} (a+1)^2-\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+\frac{1}{a}}\right)^2 &= a^2+1-\frac{1}{a}-2\sqrt{a^2+1} \\ &= \sqrt{a^2+1}\left(\sqrt{a^2+1}-2\right)-\frac{1}{a} \\ &\geq \sqrt{2^2+1}\left(\sqrt{2^2+1}-2\right)-\frac{1}{2}=\frac{9-4\sqrt{5}}{2}>0 \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta phải chứng minh

$$\frac{2}{\sqrt{t(a+1)}}+\frac{1}{\sqrt{a+t^2}}\geq 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{1+2t-t^2}}+\sqrt{\frac{t}{2t^3-t^2+1}}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{1+2t-t^2}}+\sqrt{\frac{t}{2t^3-t^2+1}}\right)^2\geq 4$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{(1+2t-t^2)(2t^3-t^2+1)}\geq \sqrt{t}(7-6t-7t^2+20t^3-8t^4)$$

Do $a\geq 2\Rightarrow 1\geq 4t$, do đó

$$(1+2t-t^2)(2t^3-t^2+1)=1+t^4(5-2t)+2t(1-t)\geq 1$$

$$7-6t-7t^2+20t^3-8t^4=7-6t-t^2(7-20t)-8t^4\leq 7$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{(1+2t-t^2)(2t^3-t^2+1)}-\sqrt{t}(7-6t-7t^2+20t^3-8t^4)\geq 4-7\sqrt{t}\geq 0$$

Nếu $2\geq a\geq \frac{1}{\sqrt{3}}$, sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a+bc}}+\frac{1}{\sqrt{b+ca}}+\frac{1}{\sqrt{c+ab}}\geq \frac{3}{\sqrt[6]{(a+bc)(b+ca)(c+ab)}}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab) \leq \frac{729}{512}$$

Đặt $p = a+b+c, r = abc \geq 0$, khi đó từ $a \leq 2, ab+bc+ca = 1$, ta suy ra $\frac{5}{2} \geq p \geq \sqrt{3}$. Mặt khác, lấy $u = \frac{p-\sqrt{p^2-3}}{3}$ và $v = \frac{p+2\sqrt{p^2-3}}{3}$, ta dễ dàng kiểm tra được

$$2u+v = p, \quad u^2+2uv = 1, \quad \frac{5+2\sqrt{13}}{6} \geq v \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \geq u \geq \frac{5-\sqrt{13}}{6}, \quad u^2v \geq r \geq 0$$

Ta có

$$(a+bc)(b+ca)(c+ab) = r^2 + (p^2-2p-1)r + 1 = f(r)$$

Dễ thấy $f(r)$ là hàm lồi nên

$$f(r) \leq \max\left\{f(0), f(u^2v)\right\} = \max\left\{1, f(u^2v)\right\}$$

Ta còn phải chứng minh

$$f(u^2v) \leq \frac{729}{512}$$

$$\Leftrightarrow v^2(u+1)^2(v+u^2) \leq \frac{729}{512}$$

$$\Leftrightarrow g(u) = \frac{(1+2u-u^2)^2(2u^3-u^2+1)}{u} \leq \frac{729}{64}$$

Ta có

$$g'(u) = \frac{(1-3u^2)(1+2u-u^2)(4u^3-7u^2+2u-1)}{u^2} \leq 0$$

$$\Rightarrow g(u) \leq g\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}\right) = \frac{14141-559\sqrt{13}}{1458} < \frac{729}{512}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}, z = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.44 *Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{2x^2+3yz}} + \frac{1}{\sqrt{2y^2+3zx}} + \frac{1}{\sqrt{2z^2+3xy}} \geq \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Lời giải. Đặt $a = yz, b = zx, c = xy$ $(a, b, c \geq 0)$, khi đó từ $xy + yz + zx = 1$, ta được $a + b + c = 1$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{3a^2 + 2bc}} \geq \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\sum\limits_{cyc} a}}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{a}{3a^2 + 2bc} \geq \frac{4}{3\sum\limits_{cyc} a}$$

$$\sum_{cyc} \frac{ab}{(3a^2 + 2bc)(3b^2 + 2ca)} \geq \frac{4}{9\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2}$$

Thật vậy, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a}{3a^2 + 2bc} - \frac{4}{3\sum\limits_{cyc} a} = \frac{18\prod\limits_{cyc}(b-c)^2 + 21\prod\limits_{cyc} a(b+c) + 7\prod\limits_{cyc} a^2}{3\left(\sum\limits_{cyc} a\right)\prod\limits_{cyc}(3a^2 + 2bc)} \geq 0$$

$$\sum_{cyc} \frac{ab}{(3a^2 + 2bc)(3b^2 + 2ca)} - \frac{4}{9\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2}$$

$$= \frac{18\prod\limits_{cyc}(b-c)^2 + 15\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^3\prod\limits_{cyc} a + 36\prod\limits_{cyc} a(b+c) + 22\prod\limits_{cyc} a^2}{9\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2\prod\limits_{cyc}(3a^2 + 2bc)} \geq 0$$

Mặt khác, với mọi $m, n, p \geq 0$, ta có

$$\begin{aligned} m + n + p &= \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 + 2(mn + np + pm)} \\ &= \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 + 2\sqrt{m^2n^2 + n^2p^2 + p^2m^2 + 2mnp(m + n + p)}} \\ &\geq \sqrt{m^2 + n^2 + p^2 + 2\sqrt{m^2n^2 + n^2p^2 + p^2m^2}} \end{aligned}$$

Sử dụng bất đẳng thức này với $m = \sqrt{\frac{a}{3a^2+2bc}}, n = \sqrt{\frac{b}{3b^2+2ca}}, p = \sqrt{\frac{c}{3c^2+2ab}}$, ta được

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a}{3a^2 + 2bc}} \geq \sqrt{\sum_{cyc} \frac{a}{3a^2 + 2bc} + 2\sqrt{\sum_{cyc} \frac{ab}{(3a^2 + 2bc)(3b^2 + 2ca)}}}$$

Từ 2 bất đẳng thức đã chỉ ra ở trên, ta được

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{3a^2+2bc}} &\geq \sqrt{\sum_{cyc}\frac{a}{3a^2+2bc}+2\sqrt{\sum_{cyc}\frac{ab}{(3a^2+2bc)(3b^2+2ca)}}}\\ &\geq \sqrt{\frac{4}{3\sum\limits_{cyc}a}+2\sqrt{\frac{4}{9\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3\sum\limits_{cyc}a}}.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. ■

Bài toán 2.45 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{a+\sqrt{b^2+c^2}}+\sqrt{b+\sqrt{c^2+a^2}}+\sqrt{c+\sqrt{a^2+b^2}}\geq 3\sqrt{\sqrt{2}+1}.$$

(Phan Hồng Sơn)

Lời giải. Sau khi bình phương 2 vế và thu gọn, ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau

$$\sum_{cyc}\sqrt{a^2+b^2}+2\sum_{cyc}\sqrt{\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)\left(b+\sqrt{a^2+c^2}\right)}\geq 9\sqrt{2}+6$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\sqrt{\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)\left(b+\sqrt{a^2+c^2}\right)} &\geq \sum_{cyc}\sqrt{\left(a+\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)\left(b+\frac{a+c}{\sqrt{2}}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{cyc}\sqrt{\left(\left(\sqrt{2}-1\right)a+3\right)\left(\left(\sqrt{2}-1\right)b+3\right)}\\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{cyc}\left(\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{ab}+3\right)=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\sum_{cyc}\sqrt{ab}+\frac{9}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Do đó, ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\sqrt{a^2+b^2}+\left(2-\sqrt{2}\right)\sum_{cyc}\sqrt{ab}\geq 6$$

Để chứng minh bất đẳng thức này, ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức sau với mọi $x, y \geq 0$

$$\sqrt{x^4+y^4}+\left(2-\sqrt{2}\right)xy\geq x^2+y^2$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
&\sqrt{2(x^4+y^4)}+2\left(\sqrt{2}-1\right)xy-\sqrt{2}(x^2+y^2)\\
&\qquad = (x-y)^2\left(\frac{(x+y)^2}{\sqrt{2(x^4+y^4)}+x^2+y^2}-\sqrt{2}+1\right)\\
&\qquad \ge (x-y)^2\left(\frac{(x+y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)^2}+x^2+y^2}-\sqrt{2}+1\right)\\
&\qquad = \frac{2\left(\sqrt{2}-1\right)xy(x-y)^2}{x^2+y^2}\ge 0.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bài toán 2.46 *Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\frac{ab^2}{c^2}+\frac{bc^2}{a^2}+\frac{ca^2}{b^2}+a+b+c\ge\frac{6(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
\left[\sum_{cyc}\frac{ab^2}{c^2}+\sum_{cyc}a\right]\left[\sum_{cyc}\frac{1}{a(b^2+c^2)}\right] &= \left[\sum_{cyc}\frac{a(b^2+c^2)}{c^2}\right]\left[\sum_{cyc}\frac{1}{a(b^2+c^2)}\right]\\
&\ge \left(\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)^2
\end{aligned}$$

Suy ra, ta chỉ cần chứng minh được

$$\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)^2\ge 6\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left[\sum_{cyc}\frac{1}{a(b^2+c^2)}\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)^2-9\sum_{cyc}\frac{1}{a}\ge 3\left(\sum_{cyc}\frac{2a}{b^2+c^2}-\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{ab}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3(a+b)(c^2-ab)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\right]\ge 0$$

Nếu $\frac{1}{c}\ge\frac{2(a+b)}{ab}$, thì

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3(a+b)(c^2-ab)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\ge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3(a+b)}{ab}\ge 0$$

Nếu $\frac{1}{c} \le \frac{2(a+b)}{ab} \Leftrightarrow c \ge \frac{ab}{2(a+b)}$, thì

$$\begin{aligned}
&abc(a^2+c^2)(b^2+c^2)\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{3(a+b)(c^2-ab)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}\right]\\
&\quad = c^4(ab+bc+ca)+abc^2(a^2+b^2)+(a+b)(a^2+b^2+3ab)c^3\\
&\quad\quad +a^3b^3-2a^2b^2c(a+b)\\
&\quad \ge abc^2(a^2+b^2)+(a+b)^3c^3+a^3b^3-2a^2b^2c(a+b)\\
&\quad \ge \frac{a^3b^3(a^2+b^2)}{4(a+b)^2}+(a+b)^3c^3+a^3b^3-2a^2b^2c(a+b)\\
&\quad \ge (a+b)^3c^3+\frac{9}{16}a^3b^3+\frac{9}{16}a^3b^3-2a^2b^2c(a+b)\\
&\quad \ge 3\sqrt[3]{\frac{81}{256}}a^2b^2c(a+b)-2a^2b^2c(a+b) \ge 0.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài toán 2.47 *Cho các số thực a,b,c khác 0 thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$. Chứng minh rằng*

$$P(a,b,c)=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 5$$

$$\frac{1}{12} \le Q(a,b,c)=\frac{a^2b+b^2c+c^2a}{(a+b+c)^3} \le \frac{5}{36}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Nếu tồn tai 2 trong 3 số a,b,c, chẳng hạn $a,b<0$, ta có thể thay a,b,c bởi $-a,-b,-c$, khi đó ta có thể thấy điều kiện bài toán và 2 biểu thức PQ vẫn không thay đổi, do đó ta chỉ cần xét bài toán trong trường hợp trong 3 số a,b,c, tồn tại ít nhất 2 số dương, chẳng hạn $a,b>0$. Nếu $c<0$ thì

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-(a^2+b^2+c^2)=(a-b)^2+c^2-2c(a+b)>0$$

Do đó, ta phải có $c>0$. Từ đây, với giả thiết $a=\max\{a,b,c\}$, ta có

$$\begin{aligned}
0&=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2-(a^2+b^2+c^2)\\
&=-\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a}=\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Do đó, bất đẳng thức trở thành

$$\frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}\ge 5$$

$$\frac{1}{12}\le\frac{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^4 b+b^2c+c^2\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}{\left(\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2+b+c\right)^3}\le\frac{5}{36}$$

Đặt $t=\sqrt{\frac{b}{c}}>0$, ta phải chứng minh

$$\frac{(t+1)^2}{t^2}+t^2+\frac{1}{(t+1)^2}\ge 5$$

$$\frac{2}{3}\le\frac{(t+1)^4t^2+t^4+(t+1)^2}{(t^2+t+1)^3}\le\frac{10}{9}$$

Nhưng chúng hiển nhiên đúng vì

$$\frac{(t+1)^2}{t^2}+t^2+\frac{1}{(t+1)^2}\ge 5\Leftrightarrow (t^3+t^2-2t-1)^2\ge 0$$

$$\frac{2}{3}\le\frac{(t+1)^4t^2+t^4+(t+1)^2}{(t^2+t+1)^3}\Leftrightarrow (t^3+3t^2-1)^2\ge 0$$

$$\frac{(t+1)^4t^2+t^4+(t+1)^2}{(t^2+t+1)^3}\le\frac{10}{9}\Leftrightarrow (t^3-3t^2-6t-1)^2\ge 0$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. ■

Bài toán 2.48 *Cho các số dương a,b,c,n. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a^2+bc}{b+c}\right)^n+\left(\frac{b^2+ca}{c+a}\right)^n+\left(\frac{c^2+ab}{a+b}\right)^n\ge a^n+b^n+c^n.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Do tính đối xứng, ta có thể giả sử $a\ge b\ge c>0$, khi đó ta có

$$\left(\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right)^n\ge 1$$

và

$$(a^2+bc)(b^2+ca)-ab(a+c)(b+c)=c(a-b)^2(a+b)\ge 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right)^n + \left(\frac{b^2+ca}{b(c+a)}\right)^n \geq 2\left[\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)}{ab(a+c)(b+c)}\right]^{n/2} \geq 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right)^n + \left(\frac{b^2+ca}{b(c+a)}\right)^n + \left(\frac{c^2+ab}{c(a+b)}\right)^n \geq 3$$

Do đó

$$x \geq 0, \qquad x+y \geq 0, \qquad x+y+z \geq 0$$

với $x = \left(\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right)^n - 1, y = \left(\frac{b^2+ca}{b(c+a)}\right)^n - 1, z = \left(\frac{c^2+ab}{c(a+b)}\right)^n - 1.$

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$a^n x + b^n y + c^n z \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$a^n x + b^n y + c^n z = (a^n - b^n)x + (b^n - c^n)(x+y) + c^n(x+y+z) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $n \to 0$. ■

Bài toán 2.49 *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} - \frac{abcd}{(ab+cd)^2}$$

trong đó a, b, c, d *là các số thực phân biệt thỏa mãn* $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = 4$ *và* $ac = bd$. *(Phạm Văn Thuận)*

Lời giải. Đặt $x = \frac{a}{b} = \frac{d}{c}, y = \frac{b}{c} = \frac{a}{d}$ và $t = y + \frac{1}{y}$, suy ra $|t| \geq 2$, thì ta có $x + \frac{1}{x} + t = 4$, do đó

$$(4-t)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \geq 4$$

$$\Rightarrow t \leq 2 \vee t \geq 6$$

$$\Rightarrow t \leq -2 \vee t = 2 \vee t \geq 6$$

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} - \frac{abcd}{(ab+cd)^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \frac{b^2d^2}{(a^2+d^2)(b^2+c^2)} \\ &= t(4-t) - \frac{1}{\left(\frac{a^2}{d^2}+1\right)\left(\frac{c^2}{b^2}+1\right)} = t(4-t) - \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Nếu $y > 0$, thì $t \geq 2$ và do đó $t \geq 6$ hoặc $t = 2$, nhưng do a, b, c, d phân biệt nên ta phải có $t \geq 6$, suy ra

$$P = -\frac{(t-6)(36t^3 + 72t^2 - t - 6)}{36t^2} - \frac{433}{36} \leq -\frac{433}{36}$$

Nếu $y < 0$, thì $t \le -2$, suy ra

$$P = \frac{(t+2)[-(t+2)(9-2t)(7-2t)+124]}{4t^2} - \frac{49}{4} \le -\frac{49}{4} < \frac{433}{36}$$

Do đó $P \le -\frac{433}{36}$. Mặt khác, cho $a = -3-2\sqrt{2}, b = 3+2\sqrt{2}, c = 1, d = -1$, ta được $P = -\frac{433}{36}$. Vậy ta đi đến kết luận

$$\max P = -\frac{433}{36}.$$

■

Bài toán 2.50 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thờ bằng 0. Chứng minh rằng*

$$3(a+b+c) \ge 2\left(\sqrt{a^2+bc} + \sqrt{b^2+ca} + \sqrt{c^2+ab}\right).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải 1. Bình phương 2 vế, bất đẳng thức tương đương với

$$5\sum_{cyc} a^2 + 14\sum_{cyc} ab \ge 8\sum_{cyc}\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\sqrt{(a^2+bc)(b^2+ca)} \le \sqrt{3\sum_{cyc}(a^2+bc)(b^2+ca)}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\left(5\sum_{cyc} a^2 + 14\sum_{cyc} ab\right)^2 \ge 24\sum_{cyc}(a^2+bc)(b^2+ca)$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c = 1$. Đặt $q = \sum_{cyc} ab, r = abc$, khi đó theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $r \ge \max\left\{0, \frac{4q-1}{9}\right\}$. Bất đẳng thức trở thành

$$384r + (25-52q)(1-4q) \ge 0$$

Nếu $1 \ge 4q$, bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $4q \ge 1$ thì

$$384r + (25-52q)(1-4q) \ge 384\cdot\frac{4q-1}{9} + (25-52q)(1-4q) = \frac{1}{3}(4q-1)(156q+53) \ge 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Lời giải 2. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2\sqrt{a^2+bc} \le a+c+\frac{a^2+bc}{a+c} = 2a+c+\frac{c(b-a)}{a+c}$$

$$2\sqrt{b^2+ca} \le b+c+\frac{b^2+ca}{b+c} = 2b+c+\frac{c(a-b)}{a+c}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{a^2+bc}+2\sqrt{b^2+ca} \le 2a+2b+2c+\frac{c(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}$$

và

$$2\sqrt{ab+c^2} \le b+c+\frac{ab+c^2}{b+c}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$3(a+b+c) \ge 2a+3b+3c+\frac{ab+c^2}{b+c}+\frac{c(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow a-\frac{ab+c^2}{b+c} \ge \frac{c(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c(a-c)}{b+c} \ge \frac{c(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (a-c)(a+c) \ge (a-b)^2$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì

$$a+c \ge a-c \ge a-b \ge 0.$$

■

Lời giải 3. Giả sử $a \ge b \ge c$. Vì

$$\sqrt{a^2+bc} \le a+\frac{c}{2}$$

và

$$\sqrt{b^2+ca}+\sqrt{c^2+ab} \le \sqrt{2(b^2+c^2+ab+ac)}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$2\sqrt{2(b^2+c^2+ab+ac)} \le a+3b+2c$$

$$\Leftrightarrow a^2-2(b+2c)a+b^2-4c^2+12bc \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b-2c)^2 + 8c(b-c) \geq 0.$$

hiển nhiên đúng. ■

Lời giải 4. Giả sử $a \geq b \geq c$. Ta có

$$\sqrt{b^2+ca} + \sqrt{c^2+ab} \leq \sqrt{2(b^2+c^2+ab+ac)}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sqrt{a^2+bc} + \sqrt{2(b^2+c^2+ab+ac)} \leq \frac{3}{2}(a+b+c)$$

Đặt $s = \frac{b+c}{2}$ $(s \leq a)$ và $p = bc$, bất đẳng thức trở thành

$$2\sqrt{a^2+p} + 4\sqrt{2s^2-p+as} \leq 3(a+2s)$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2s^2-p+as} \leq 3(a+2s) - 2\sqrt{a^2+p}$$

$$\Leftrightarrow 16(2s^2-p+as) \leq \left[3(a+2s) - 2\sqrt{a^2+p}\right]^2$$

$$\Leftrightarrow 12(a+2s)\sqrt{a^2+p} \leq 13a^2 + 20as + 4s^2 + 20p$$

$$\Leftrightarrow 12(a+2s)\left(\sqrt{a^2+p} - a\right) \leq (a-2s)^2 + 20p$$

Vì $(a-2s)^2 \geq 0$ và

$$\sqrt{a^2+p} - a = \frac{p}{\sqrt{a^2+p}+a} \leq \frac{p}{2a}$$

INên ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{6(a+2s)p}{a} \leq 20p$$

$$\Leftrightarrow p(6s-7a) \leq 0.$$

hiển nhiên đúng. ■

Bài toán 2.51 *Cho $x, y, z \in [-1, 1]$ thỏa mãn $x+y+z=0$. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{1+x+y^2} + \sqrt{1+y+z^2} + \sqrt{1+z+x^2} \geq 3.$$

(Phan Thành Nam)

Lời giải. Bình phương 2 vế, ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau

$$\sum_{cyc} x^2 + 2\sum_{cyc}\sqrt{(1+x+y^2)(1+y+z^2)} \geq 6$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\sqrt{(1+x+y^2)(1+y+z^2)} &\geq \sum_{cyc}\sqrt{(1+x)(1+y)}+\sum_{cyc}|yz| \\ &\geq \sum_{cyc}\sqrt{(1+x)(1+y)}-\sum_{cyc}yz\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}x^2-2\sum_{cyc}xy+2\sum_{cyc}\sqrt{(1+x)(1+y)}\geq 6$$

Đặt $a^2=1+x, b^2=1+y, c^2=1+z$ $(a,b,c\geq 0)\Rightarrow a^2+b^2+c^2=3$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}a^4-2\sum_{cyc}a^2b^2+2\sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}ab-9\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a^4-2\sum_{cyc}a^2b^2+2\sum_{cyc}ab-\sum_{cyc}a^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}a^4-6\sum_{cyc}a^2b^2+\left(2\sum_{cyc}ab-\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}a^2\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}a^2bc+\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)-4\sum_{cyc}a^2b^2\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a^2(a-b)(a-c)+2\sum_{cyc}ab(a-b)^2\geq 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Schur bậc 4. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0$. ■

Bài toán 2.52 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{\sqrt{bc+(a-1)^2}}+\frac{b^2}{\sqrt{ca+(b-1)^2}}+\frac{c^2}{\sqrt{ab+(c-1)^2}}\geq 3.$$

(Phan Hồng Sơn)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{bc+(a-1)^2}}\geq \frac{\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2}{\sum_{cyc}a^2\sqrt{bc+(a-1)^2}}$$

và

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} a^2\sqrt{bc+(a-1)^2} &= \sum_{cyc}\sqrt{a^3}\cdot\sqrt{abc+a(a-1)^2}\\ &\le \sqrt{\left(\sum_{cyc}a^3\right)\left[\sum_{cyc}[abc+a(a-1)^2]\right]}\end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\left(\sum_{cyc}a^2\right)^4 \ge 9\left(\sum_{cyc}a^3\right)\left[\sum_{cyc}[abc+a(a-1)^2]\right]$$

Đặt $q=\sum_{cyc}ab, r=abc$ thì ta có $9\ge q^2\ge 9r$. Bất đẳng thức trở thành

$$(9-2q)^4 \ge 9(27-9q+3r)(12-5q+6r)$$

Ta có

$$\begin{aligned}&(9-2q)^4-9(27-9q+3r)(12-5q+6r)\\ &\quad= (9-2q)^4-(81-27q+9r)(36-15q+18r)\\ &\quad\ge (9-2q)^4-(81-27q+q^2)(36-15q+2q^2)\\ &\quad= (3-q)^2[14q^2+135(3-q)]\ge 0.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ■

Bài toán 2.53 *Cho các số không âm a,b,c thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng*

$$1\le \frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}\le\sqrt{2}.$$

(Faruk Zejnulahi)

Lời giải. Với mọi $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$, ta có

$$1-\frac{2}{3}x-\frac{1}{1+x}=\frac{x(1-2x)}{3(1+x)}\ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x}\le 1-\frac{2}{3}x$$

Từ đây, chú ý rằng $\max\{ab,bc,ca\}\le\frac{1}{2}$, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{a}{1+bc} &\le \sum_{cyc}a\left(1-\frac{2}{3}bc\right)=\sum_{cyc}a-2abc=a(1-2bc)+b+c\\ &\le \sqrt{[a^2+(b+c)^2][(1-2bc)^2+1]}\\ &= \sqrt{2(2b^2c^2-2bc+1)(1+2bc)}\\ &= \sqrt{2[1-2b^2c^2(1-2bc)]}\le\sqrt{2}\end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a}{1+bc} \ge \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2}{\sum\limits_{cyc} a + 3abc}$$

và

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{cyc} a\right)^2 - \sum_{cyc} a - 3abc &\ge \left(\sum_{cyc} a\right)^2 - \sum_{cyc} a - \frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} ab\right) \\
&= \left(\sum_{cyc} a\right)^2 - \sum_{cyc} a - \frac{1}{6}\left(\sum_{cyc} a\right)\left[\left(\sum_{cyc} a\right)^2 - 1\right] \\
&= \frac{1}{6}\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} a - 1\right)\left(5 - \sum_{cyc} a\right) \ge 0.
\end{aligned}$$

vì $\sqrt{3} \ge \sum\limits_{cyc} a \ge 1$. Bất đẳng thức được chứng minh xong. ■

Bài toán 2.54 *Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $(a+c)(b+d) \ge 4abcd$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{ab(1+c)} + \frac{1}{bc(1+d)} + \frac{1}{cd(1+a)} + \frac{1}{da(1+b)} \ge \frac{32}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}.$$

(Phạm Kim Hùng)

LỜI GIẢI. Đặt $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}, t = \frac{1}{d}$, thì ta có $x, y, z, t > 0$ và $(x+z)(y+t) \ge 4$. Bất đẳng thức trở thành

$$xz\left(\frac{y}{1+z} + \frac{t}{1+x}\right) + yt\left(\frac{x}{1+y} + \frac{z}{1+t}\right) \ge \frac{32xyzt}{(1+x)(1+y)(1+z)(1+t)}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
&xz\left(\frac{y}{1+z} + \frac{t}{1+x}\right) + yt\left(\frac{x}{1+y} + \frac{z}{1+t}\right) \\
&\qquad \ge 2\sqrt{xyzt\left(\frac{y}{1+z} + \frac{t}{1+x}\right)\left(\frac{x}{1+y} + \frac{z}{1+t}\right)} \\
&\qquad = 2\sqrt{\frac{xyzt(x+z+xt+yz)(y+t+xy+zt)}{(1+x)(1+y)(1+z)(1+t)}}
\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$(x+z+xt+yz)(y+t+xy+zt) \geq \frac{256xyzt}{(1+x)(1+y)(1+z)(1+t)}$$

Nếu $u^4 = xyzt \geq 1$ thì ta có

$$\begin{aligned}
&(x+z+xt+yz)(y+t+xy+zt)\\
&\quad = (x+z)(y+t)+(x+z)(xy+zt)+(y+t)(xt+yz)+(xy+zt)(xt+yz)\\
&\quad \geq 4\sqrt{xyzt}+2\sqrt{(x+z)(y+t)(xy+zt)(xt+yz)}+4xyzt\\
&\quad \geq 4\sqrt{xyzt}+8(xyzt)^{3/4}+4xyzt = 4u^2+8u^3+4u^4 = 4u^2(u+1)^2
\end{aligned}$$

$$(1+x)(1+y)(1+z)(1+t) \geq \left(1+(xyzt)^{1/4}\right)^4 = (1+u)^4$$

và

$$\begin{aligned}
4u^2(1+u)^6-256u^4 &= 4u^2[(u+1)^6-64u^2] = 4u^2[(u+1)^3-8u][(u+1)^3+8u]\\
&= 4u^2(u-1)(u^2+4u-1)[(u+1)^3+8u] \geq 0
\end{aligned}$$

Nếu $u^4 = xyzt \leq 1$ thì ta có

$$\begin{aligned}
&(x+z+xt+yz)(y+t+xy+zt)\\
&\quad = (x+z)(y+t)+(x+z)(xy+zt)+(y+t)(xt+yz)+(xy+zt)(xt+yz)\\
&\quad \geq 4+2\sqrt{(x+z)(y+t)(xy+zt)(xt+yz)}+4xyzt\\
&\quad \geq 4+8\sqrt{xyzt}+4xyzt = 4(u^2+1)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1+x)(1+y)(1+z)(1+t)\\
&\qquad = 1+(x+z)+(y+t)+(x+z)(y+t)+xz\\
&\qquad\quad +yt+xz(y+t)+yt(x+z)+xyzt\\
&\qquad \geq 5+2\sqrt{(x+z)(y+t)}+2\sqrt{xyzt}+2\sqrt{xyzt(x+z)(y+t)}+xyzt\\
&\qquad \geq 9+6\sqrt{xyzt}+xyzt = \left(3+\sqrt{xyzt}\right)^2 = (3+u^2)^2
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
4(u^2+1)^2(u^2+3)^2-256u^4 &= 4[(u^2+1)^2(u^2+3)^2-64u^4]\\
&= 4[(u^2+1)(u^2+3)-8u^2][(u^2+1)(u^2+3)+8u^2]\\
&= 4(3-u^2)(1-u^2)[(u^2+1)(u^2+3)+8u^2] \geq 0.
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=1$. ■

Bài toán 2.55 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}} \ge \sqrt{\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{ab+bc+ca}}+\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\left(\sqrt{\frac{2\sum\limits_{cyc}a^2}{\sum\limits_{cyc}ab}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2\sum\limits_{cyc}a^2}{\sum\limits_{cyc}ab}+2\sqrt{\frac{\sum\limits_{cyc}a^2}{\sum\limits_{cyc}ab}}+\frac{1}{2} \le \left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sum\limits_{cyc}a^2}{\sum\limits_{cyc}ab}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\begin{aligned}\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}\right)^2 &= \sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}+2\sum_{cyc}\sqrt{\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}\\ &\ge \left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{\sum\limits_{cyc}a^2}{\sum\limits_{cyc}ab}+\sqrt{2}+\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Giả sử $a \ge b \ge c$, ta sẽ chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{c^2+a^2}} \ge \sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{c^2+ab}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}+2 \ge \frac{2(a^2+b^2)}{c^2+ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}-2 \ge \frac{2(a^2+b^2)}{c^2+ab}-4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \ge \frac{2(a-b)^2-4c^2}{c^2+ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4c^2}{c^2+ab}+(a-b)^2\left[\frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}-\frac{2}{c^2+ab}\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4c^2}{c^2+ab}+\frac{(a-b)^2(ab-c^2)(a^2+b^2+2c^2)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)(ab+c^2)} \ge 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}} \ge \sqrt{\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b^2+c^2}{c^2+a^2}} \ge \sqrt{\frac{2(a^2+b^2)}{c^2+ab}}$$

Mặt khác

$$\sqrt{\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} \geq 1$$

Do đó

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \sqrt{\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} &= \sqrt{\frac{c^2+ab}{a^2+b^2}} \left(\sqrt{\frac{a^2+bc}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{b^2+ca}{c^2+a^2}} \right) \\ &+ \sqrt{\frac{(a^2+bc)(b^2+ca)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} \geq \sqrt{2}+1\end{aligned}$$

Ta còn phải chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{a^2+bc}{b^2+c^2} + \sqrt{2} + \frac{3}{2} \geq \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sum\limits_{cyc} a^2}{\sum\limits_{cyc} ab}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2+bc}{b^2+c^2} - \frac{5}{2} \geq \left(2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \frac{\sum\limits_{cyc} a^2 - 2\sum\limits_{cyc} ab}{\sum\limits_{cyc} ab}$$

Nếu $\sum\limits_{cyc} a^2 \leq 2\sum\limits_{cyc} ab$, bất đẳng thức là hiển nhiên vì

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \frac{a^2+bc}{b^2+c^2} - \frac{5}{2} &\geq \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} + \frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{5}{2} \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{5}{2} \\ &= \frac{(2a^2-ab+2b^2)(a-b)^2}{2ab(a^2+b^2)} \geq 0\end{aligned}$$

Nếu $\sum\limits_{cyc} a^2 \geq 2\sum\limits_{cyc} ab$ thì ta có $a \geq \left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2 \geq b+3c$ và do $2+\frac{1}{\sqrt{2}} < 3$, nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2+bc}{b^2+c^2} - \frac{5}{2} \geq \frac{3\sum\limits_{cyc} a^2 - 6\sum\limits_{cyc} ab}{\sum\limits_{cyc} ab}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} \frac{a^2+bc}{b^2+c^2} - \frac{5}{2} &\geq \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2} + \frac{ab}{a^2+b^2} - \frac{5}{2} \\
&= \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} - \frac{(a-b)^2}{2(a^2+b^2)} \\
&= (a-b)^2 \left[\frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} - \frac{1}{2(a^2+b^2)} \right] \\
&\geq \frac{3(a-b)^2(a+b)^2}{4(a^2+c^2)(b^2+c^2)}
\end{aligned}$$

và

$$\frac{\sum\limits_{cyc} a^2 - 2\sum\limits_{cyc} ab}{\sum\limits_{cyc} ab} = \frac{(a-b)^2 + c(c-2a-2b)}{\sum\limits_{cyc} ab} \leq \frac{(a-b)^2 - 2ac}{\sum\limits_{cyc} ab}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{(a-b)^2(a+b)^2}{4(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \geq \frac{(a-b)^2 - 2ac}{\sum\limits_{cyc} ab}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left[\frac{(a+b)^2}{4(a^2+c^2)(b^2+c^2)} - \frac{1}{ab+bc+ca} \right] + \frac{2ac}{ab+bc+ca} \geq 0$$

Nếu $a \geq b+5c$, ta sẽ chứng minh

$$\frac{(a+b)^2}{4(a^2+c^2)(b^2+c^2)} - \frac{1}{ab+bc+ca} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow f(c) = (a+b)^2(ab+bc+ca) - 4(a^2+c^2)(b^2+c^2) \geq 0$$

Bất đẳng thức này đúng vì $f(c)$ là hàm lõm trên $\left[0, \frac{a-b}{5}\right]$ và

$$f(0) = ab(a-b)^2 \geq 0$$

$$f\left(\frac{a-b}{5}\right) = \frac{1}{625}(a-b)(21a^3 + 1112a^2b - 362ab^2 + 229b^3) \geq 0$$

Nếu $a \leq b+5c$ thì

$$2ac \geq \frac{2}{5}a(a-b) \geq \frac{2}{5}(a-b)^2$$

Suy ra, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a+b)^2}{4(a^2+c^2)(b^2+c^2)} - \frac{3}{5(ab+bc+ca)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow g(c) = 5(a+b)^2(ab+bc+ca) - 12(a^2+c^2)(b^2+c^2) \geq 0$$

Bất đẳng thức vì $g(c)$ là hàm lõm trên $\left[0, \frac{a-b}{3}\right]$ và

$$g(0) = ab(5a^2 - 2ab + 5b^2) \geq 0$$

$$g\left(\frac{a-b}{3}\right) = \frac{1}{27}(5a^4 + 313a^3b - 150a^2b^2 + 133ab^3 - 85b^4) \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ∎

Bài toán 2.56 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng* 0. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b^3+c^3} + \frac{b}{c^3+a^3} + \frac{c}{a^3+b^3} \geq \frac{18}{5(a^2+b^2+c^2) - ab - bc - ca}.$$

(Michael Rozenberg)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{a(a+b+c)}{b^3+c^3} \geq \frac{18\sum\limits_{cyc} a}{5\sum\limits_{cyc} a^2 - \sum\limits_{cyc} ab}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{b^3+c^3} + \sum_{cyc} \frac{a}{b^2-bc+c^2} \geq \frac{18\sum\limits_{cyc} a}{5\sum\limits_{cyc} a^2 - \sum\limits_{cyc} ab}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b^3+c^3} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a^2\right)^2}{\sum\limits_{cyc} a^2(b^3+c^3)} = \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a^2\right)^2}{\left(\sum\limits_{cyc} a^2b^2\right)\left(\sum\limits_{cyc} a\right) - abc\sum\limits_{cyc} ab}$$

và

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b^2-bc+c^2} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2}{\sum\limits_{cyc} a(b^2-bc+c^2)} = \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2}{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)\left(\sum\limits_{cyc} ab\right) - 6abc}$$

Suy ra, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2}{\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right)\left(\sum_{cyc} a\right) - abc\sum_{cyc} ab} + \frac{\left(\sum_{cyc} a\right)^2}{\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} ab\right) - 6abc} \geq \frac{18\sum_{cyc} a}{5\sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} ab}$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q = \sum_{cyc} ab, r = abc$, theo bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có $r \geq \max\left\{0, \frac{(4q-1)(1-q)}{6}\right\}$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{(1-2q)^2}{q^2-(q+2)r} + \frac{1}{q-6r} \geq \frac{18}{5-11q}$$

Nếu $1 \geq 4q$ thì

$$\begin{aligned}\frac{(1-2q)^2}{q^2-(q+2)r} + \frac{1}{q-6r} - \frac{18}{5-11q} \quad &\geq \quad \frac{(1-2q)^2}{q^2} + \frac{1}{q} - \frac{18}{5-11q} \\ &= \quad \frac{(1-4q)(11q^2-6q+5)}{q^2(5-11q)} \geq 0\end{aligned}$$

Nếu $4q \geq 1$ thì

$$\begin{aligned}&\frac{(1-2q)^2}{q^2-(q+2)r} + \frac{1}{q-6r} - \frac{18}{5-11q} \\ &\qquad \geq \quad \frac{(1-2q)^2}{q^2-(q+2)\cdot\frac{(4q-1)(1-q)}{6}} + \frac{1}{q-(6q-1)(1-q)} - \frac{18}{5-11q} \\ &\qquad = \quad \frac{(1-3q)(4q-1)(112q^3-117q^2+39q-4)}{(1-2q)^2(5-11q)(4q^3+9q^2-9q+2)} \geq 0.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.57 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{a+b}} + \sqrt{\frac{b}{b+c}} + \sqrt{\frac{c}{c+a}} \geq \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn, Nguyễn Văn Thạch)

LỜI GIẢI. Trước hết, ta sẽ chứng minh

$$\frac{3\sum_{cyc} a^2}{\sum_{cyc} a} \geq \sum_{cyc} \frac{2a^2}{a+c}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
3\sum_{cyc} a^2 - \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} \frac{2a^2}{a+c}\right) &= 3\sum_{cyc} a^2 - \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{a+b}\right) \\
&= \sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} \frac{c(a^2+b^2)}{a+b} \\
&= \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \geq 0
\end{aligned}$$

Bây giờ, sử dụng bất đẳng thức bất đẳng thức này và bất đẳng thức Holder, ta được

$$\begin{aligned}
&\frac{3\sum\limits_{cyc} a^2}{\sum\limits_{cyc} a}\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)^2\left[\sum_{cyc} a(a+b)(a+c)\right] \\
&\geq \ 2\left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{a+c}\right)\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a+b}}\right)^2\left[\sum_{cyc} a(a+b)(a+c)\right] \geq 2\left(\sum_{cyc} a\right)^4
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$4\left(\sum_{cyc} a\right)^4 \geq 27\left(\sum_{cyc} ab\right)^2\left[\sum_{cyc} a(a+b)(a+c)\right]$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sum_{cyc} a\right)^4 \geq 27\left(\sum_{cyc} ab\right)^2\left[\left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc} a\right) + 3abc\right]$$

Do tính thuần nhất, ta chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q = \sum\limits_{cyc} ab, r = abc$ thì ta có $q^2 \geq 3r$. Bất đẳng thức trở thành

$$4 \geq 27q(1-2q+3r)$$

Ta có

$$4 - 27q(1-2q+3r) \geq 4 - 27q(1-2q+q^2) = (4-3q)(1-3q)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ $a=b=c$. ■

Bài toán 2.58 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\sum_{cyc} \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+2b^2+2c^2} \geq \sum_{cyc} \frac{b^2+bc+c^2}{a^2+(b+c)^2}.$$

(Phạm Hữu Đức)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 - bc}{a^2 + (b+c)^2} \geq \left(\sum_{cyc} a^2\right) \left[\sum_{cyc} \left(\frac{1}{a^2 + (b+c)^2} - \frac{1}{a^2 + 2b^2 + 2c^2}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2 - bc}{a^2 + (b+c)^2} \geq \left(\sum_{cyc} a^2\right) \left[\sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{[a^2 + (b+c)^2](a^2 + 2b^2 + 2c^2)}\right]$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 - bc}{1 + 2bc} \geq \sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{(1+2bc)(1+b^2+c^2)}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} \frac{2(a^2 - bc)}{1 + 2bc} &= \sum_{cyc} \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{1 + 2bc} + \sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{1+2bc} \\
&= \sum_{cyc} (b^2 - c^2) \left(\frac{1}{1 + 2ca} - \frac{1}{1 + 2ab}\right) + \sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{1+2bc} \\
&= \sum_{cyc} (b-c)^2 \left[\frac{2a(b+c)}{(1+2ab)(1+2ac)} + \frac{1}{1+2bc}\right]
\end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc} (b-c)^2 \left[\frac{2a(b+c)}{(1+2ab)(1+2ac)} + \frac{1}{1+2bc} - \frac{2}{(1+2bc)(1+b^2+c^2)}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (b-c)^2 \left[\frac{2a(b+c)}{(1+2ab)(1+2ac)} - \frac{a^2}{(1+2bc)(1+b^2+c^2)}\right] \geq 0$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned}
&2(1+2bc)(1+b^2+c^2) - (1+2ab)(1+2ac) \\
&\quad = [1 + (b+c)^2 - 2a(b+c)] + [(b+c)^2 - 4a^2bc] + 4bc(b^2+c^2) \\
&\quad \geq 2(b+c)(1-a) + 4bc(1-a^2) + 4bc(b^2+c^2) \geq 0
\end{aligned}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc} (b-c)^2 \left[\frac{2a(b+c)}{(1+2ab)(1+2ac)} - \frac{2a^2}{(1+2ab)(1+2ac)}\right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} x(b-c)^2 \geq 0$$

trong đó $x = a(b+c-a)(1+2bc)$ và y, z tương tự.
Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó ta có $y, z \geq 0$ và

$$b(a-c)^2 \geq a(b-c)^2, \quad 1+2ac \geq 1+2bc$$

$$\begin{aligned} & a(b-c)^2(b+c-a)(1+2bc) + b(a-c)^2(a+c-b)(1+2ac) \\ \geq\ & a(b-c)^2(b+c-a)(1+2bc) + a(b-c)^2(a+c-b)(1+2bc) \\ =\ & 2ac(b-c)^2(1+2bc) \geq 0. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Bài toán 2.59 *Cho các số dương x, y thỏa mãn $x + y^2 \geq x^2 + y^3$. Chứng minh rằng*

$$3x^2 + 2y^3 \leq 5.$$

(Ji Chen)

Lời giải 1. Từ $x + y^2 \geq x^2 + y^3$, ta có

$$5(x+y^2) \geq (3x^2+2y^3) + (2x^2+3y^3)$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$5 + 2x^2 + 3y^3 \geq 5(x+y^2)$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)(x-1) + [3y^2 - 2(y+1)](y-1) \geq 0$$

Chú ý rằng nếu $x, y \geq 1$ thì ta có $x + y^2 \leq x^2 + y^3$, điều này mâu thuẫn với giả thiết bài toán.
Nếu $y \geq 1 \geq x$ thì ta có

$$(3-2x)(1-x) \geq x(1-x) \geq y^2(y-1)$$

Do đó

$$(2x-3)(x-1)+[3y^2-2(y+1)](y-1) \geq [4y^2-2(y+1)](y-1) = 2(y-1)^2(2y+1) \geq 0$$

Nếu $x \geq 1 \geq y$ thì

$$[2(y+2) - 3y^2](1-y) \geq y^2(1-y) \geq x(x-1)$$

Do đó

$$(2x-3)(x-1) + [3y^2 - 2(y+1)](y-1) \geq (3x-3)(x-1) = 3(x-1)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$. ■

Lời giải 2. Ta có

$$5 - 3x^2 - 2y^3 = 6(x - x^2 + y^2 - y^3) + 3(1-x)^2 + 2(1-y)^2(1+2y) \geq 0.$$

■

Bài toán 2.60 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{1+a+b^2}+\frac{b}{1+b+c^2}+\frac{c}{1+c+a^2}\ge\frac{3}{4}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Xét 2 trường hợp sau

Trường hợp 1. Nếu $\sum\limits_{cyc}a^2+\sum\limits_{cyc}ab^2\le 9$, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{1+a+b^2}\ge\frac{\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}{\sum\limits_{cyc}a(1+a+b^2)}=\frac{9}{3+\sum\limits_{cyc}a^2+\sum\limits_{cyc}ab^2}\ge\frac{3}{4}$$

Trường hợp 2. Nếu $\sum\limits_{cyc}a^2+\sum\limits_{cyc}ab^2\ge 9$, tức là

$$\sum_{cyc}ab^2\ge 2\sum_{cyc}a^2b+6abc$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$4\sum_{cyc}a(1+b+c^2)(1+c+a^2)\ge 3(1+a+b^2)(1+b+c^2)(1+c+a^2)$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^2b^3+5\sum_{cyc}a^3b+\sum_{cyc}a^3+9abc+&\sum_{cyc}a^2b+5\sum_{cyc}ab\\ &\ge\ 3\sum_{cyc}a^2b^2+3\sum_{cyc}a^2+3a^2b^2c^2\end{aligned}$$

Do $\sum\limits_{cyc}ab^2\ge 2\sum\limits_{cyc}a^2b+6abc$ nên ta có

$$\left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}ab^2\right)\ge 2\left(\sum_{cyc}a^2b+3abc\right)\left(\sum_{cyc}ab\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^2b^3\ge 2\sum_{cyc}a^3b^2+7\sum_{cyc}a^2b^2c+\sum_{cyc}a^3bc$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^2b^3\ge\frac{2}{3}\sum_{cyc}a^2b^2(a+b)+\frac{7}{3}\sum_{cyc}a^2b^2c+\frac{1}{3}\sum_{cyc}a^3bc$$

Đặt $q = ab + bc + ca, r = abc$ thì

$$\frac{2}{3}\sum_{cyc} a^2b^2(a+b) + \frac{7}{3}\sum_{cyc} a^2b^2c + \frac{1}{3}\sum_{cyc} a^3bc = 2q^2 + (q-9)r$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} a^2b^3 \geq 2q^2 + (q-9)r$$

Mặt khác, ta có

$$\sum_{cyc} a^3b \geq \sum_{cyc} a^2bc = 3r, \quad \sum_{cyc} a^2b \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{\sum\limits_{cyc} a} = \frac{1}{3}q^2$$

Từ những bất đẳng thức này, ta chỉ cần chứng minh được

$$[2q^2 + (q-9)r] + 15r + (27 - 9q + 3r) + 9r + \frac{1}{3}q^2 + 5q \geq 3(q^2 - 6r) + 3(9 - 2q) + 3r^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3}q(3-q) + (36+q)r - 3r^2 \geq 0.$$

hiển nhiên đúng do $3 \geq q, 1 \geq r$.
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 3, b = c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.61 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^3(b^2+1) + b^3(c^2+1) + c^3(a^2+1) \geq 8(a+b+c) - 18.$$

(Nguyễn Công Minh)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} a^5b^2 \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a^2b\right)^2}{\sum\limits_{cyc} a}, \quad \sum_{cyc} a^2b \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{\sum\limits_{cyc} b}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} a^5b^2 \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^4}{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^3}$$

Mặt khác, bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\left(\sum_{cyc} a^5b^2 + \sum_{cyc} a\right) + \sum_{cyc} a^3 + 18 - 9\sum_{cyc} a \geq 0$$

Do đó, theo trên và theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc} a^5b^2 + \sum_{cyc} a \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^4}{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^3} + \sum_{cyc} a \geq \frac{2\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{\sum\limits_{cyc} a}$$

Mặt khác,

$$\left(\sum_{cyc} a\right)^3 + 27 + 27 \geq 27\sum_{cyc} a$$

$$\Rightarrow 18 - 9\sum_{cyc} a \geq -\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} a\right)^3$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{2\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{\sum\limits_{cyc} a} + \sum_{cyc} a^3 \geq \frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} a\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2q^2}{p} + \sum_{cyc} a^3 \geq \frac{1}{3}p^3$$

trong đó $p = a + b + c, q = ab + bc + ca$. Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có

$$\sum_{cyc} a^3 \geq \frac{1}{3}p(2p^2 - 5q)$$

Suy ra

$$\frac{2q^2}{p} + \sum_{cyc} a^3 - \frac{1}{3}p^3 \geq \frac{2q^2}{p} + \frac{1}{3}p(2p^2 - 5q) - \frac{1}{3}p^3 = \frac{(p^2 - 3q)(p^2 - 2q)}{3p} \geq 0.$$

vì $p^2 \geq 3q$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ■

Bài toán 2.62 *Cho các số không âm a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d=3$. Chứng minh rằng*

$$ab(a+2b+3c)+bc(b+2c+3d)+cd(c+2d+3a)+da(d+2a+3b)\le 6\sqrt{3}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Đặt
$$f(a,b,c,d)=\sum_{cyc} ab(a+2b+3c)$$

Ta có
$$f(a,b,c,d)-f(a+c,b,0,d)=c(b-d)(a+c-b-d)$$

và
$$f(a,b,c,d)-f(0,b,a+c,d)=-a(b-d)(a+c-b-d)$$

Suy ra, nếu $(b-d)(a+c-b-d)\le 0$ thì $f(a,b,c,d)\le f(a+c,b,0,d)$ và nếu $f(b-d)(a+c-b-d)\ge 0$ thì $f(a,b,c,d)\le f(0,b,a+c,d)$, tức là

$$f(a,b,c,d)\le \max\{f(a+c,b,0,d), f(0,b,a+c,d)\}$$

Tương tự, ta có

$$f(a+c,b,0,d)\le \max\{f(a+c,b+d,0,0), f(a+c,0,0,d)\}$$

$$f(0,b,a+c,d)\le \max\{f(0,b+d,a+c,0), f(0,0,a+c,b+d)\}$$

Mặt khác, ta dễ dàng kiểm tra được

$$\max\{f(a+c,b+d,0,0), f(a+c,0,0,d)\}\le 6\sqrt{3}$$

$$\max\{f(0,b+d,a+c,0), f(0,0,a+c,b+d)\}\le 6\sqrt{3}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=d=0, b=3-\sqrt{3}, c=\sqrt{3}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.63 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a}{a^2+b+4}}+\sqrt{\frac{b}{b^2+c+4}}+\sqrt{\frac{c}{c^2+a+4}}\le \sqrt[4]{\frac{3}{4}(a+b+c)}.$$

(Nguyễn Công Minh)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{a^2+b+4}}\right)^2\le 3\sum_{cyc}\frac{a}{a^2+b+4}\le 3\sum_{cyc}\frac{a}{2a+b+3}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{2a}{2a+b+3} \le \sqrt{\frac{\sum_{cyc} a}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b+3}{2a+b+3} + \sqrt{\frac{\sum_{cyc} a}{3}} \ge 3$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz,

$$\sum_{cyc} \frac{b+3}{2a+b+3} \ge \frac{\left[\sum_{cyc}(b+3)\right]^2}{\sum_{cyc}(b+3)(2a+b+3)} = \frac{\left(\sum_{cyc} a+9\right)^2}{\left(\sum_{cyc} a\right)^2 + 12\sum_{cyc} a + 27}$$

$$= \frac{\sum_{cyc} a+9}{\sum_{cyc} a+3}$$

Đặt $\sum_{cyc} a = 3t^2$ $(t \ge 0)$, ta phải chứng minh

$$\frac{3t^2+9}{3t^2+3} + t \ge 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{t(t-1)^2}{t^2+1} \ge 0.$$

hiển nhiên đúng.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$ hoặc $a = b = c \to 0$. ■

Bài toán 2.64 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{(2b+c)(b+2c)}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{(2c+a)(c+2a)}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{(2a+b)(a+2b)}} \ge \sqrt{2}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left[\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a(b+c)}{(2b+c)(b+2c)}}\right] \left[\sum_{cyc} \frac{a^2(2b+c)(b+2c)}{b+c}\right] \ge \left(\sum_{cyc} a\right)^3$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc} a\right)^3 \geq 2\sum_{cyc} \frac{a^2(2b+c)(b+2c)}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} a\right)^3 \geq 4\sum_{cyc} a^2(b+c) + 2abc\sum_{cyc} \frac{a}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 - \sum_{cyc} a^2(b+c) + 3abc \geq abc\left(\sum_{cyc} \frac{2a}{b+c} - 3\right)$$

Chú ý rằng

$$\sum_{cyc} a^3 - \sum_{cyc} a^2(b+c) + 3abc = \sum_{cyc} a(a-b)(a-c)$$

và

$$\sum_{cyc} \frac{2a}{b+c} - 3 = \sum_{cyc} \frac{(2a+b+c)(a-b)(a-c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc} x(a-b)(a-c) \geq 0$$

trong đó $x = a - \frac{abc(2a+b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{a^2(ab+ac+b^2+c^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0$ và y, z tương tự.
Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó

$$a - c \geq b - c \geq 0$$

và

$$x - y = (a-b)\left[1 - \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right] \geq 0$$

$$\Rightarrow x(a-c) - y(b-c) \geq (b-c)(x-y) \geq 0$$

Mặt khác, ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau

$$(a-b)[x(a-c) - y(b-c)] + z(a-c)(b-c) \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 18 *Chú ý rằng* $2(b^2+c^2) \leq (2b+c)(b+2c)$, *nên*

$$\sum_{cyc} \sqrt{\frac{a(b+c)}{2(b^2+c^2)}} \geq \sum_{cyc} \sqrt{\frac{a(b+c)}{(2b+c)(b+2c)}} \geq \sqrt{2}$$

và ta thu được kết quả đẹp sau

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}}\ge 2.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Đẳng thức đạt được tại $a=b, c=0$ và các hoán vị của nó.

■

Bài toán 2.65 *Cho các số không âm a,b,c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$2\left(\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{c+a}+\frac{c^3}{a+b}\right)\ge 2(a^2+b^2+c^2)-\sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

(Nguyễn Công Minh)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{b+c}\ge\frac{\left(\sum\limits_{cyc}a^2\right)^3}{\left(\sum\limits_{cyc}a\right)\left[\sum\limits_{cyc}a^2(b+c)\right]}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{2\left(\sum\limits_{cyc}a^2\right)^3}{\left(\sum\limits_{cyc}a\right)\left[\sum\limits_{cyc}a^2(b+c)\right]}+\sqrt{3abc\sum_{cyc}a}\ge 2\sum_{cyc}a^2$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$, khi đó theo bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có $r\ge\max\left\{0,\frac{(4q-1)(1-q)}{6}\right\}$. Bất đẳng thức trở thành

$$\frac{2(1-2q)^3}{q-3r}+\sqrt{3r}\ge 2(1-2q)$$

Nếu $1\ge 4q$ thì

$$\begin{aligned}\frac{2(1-2q)^3}{q-3r}+\sqrt{3r}-2(1-2q) &\ge \frac{2(1-2q)^3}{q}-2(1-2q)\\ &= \frac{2(1-2q)(1-q)(1-4q)}{q}\ge 0\end{aligned}$$

Nếu $4q \ge 1$ thì

$$\begin{aligned}\frac{2(1-2q)^3}{q-3r}+\sqrt{3r}-2(1-2q) &\ge \frac{2(1-2q)^3}{q-\frac{(4q-1)(1-q)}{2}}+\sqrt{\frac{(4q-1)(1-q)}{2}}\\ &= \frac{4(1-2q)^3}{4q^2-3q+1}+\sqrt{\frac{(4q-1)(1-q)}{2}}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{4(1-2q)^3}{4q^2-3q+1}+\sqrt{\frac{(4q-1)(1-q)}{2}} \ge 2(1-2q)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(4q-1)(1-q)}{2}} \ge 2(1-2q)-\frac{4(1-2q)^3}{4q^2-3q+1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{(4q-1)(1-q)}{2}} \ge \frac{2(1-2q)(4q-1)(1-q)}{4q^2-3q+1}$$

$$\Leftrightarrow 4q^2-3q+1 \ge 2(1-2q)\sqrt{2(4q-1)(1-q)}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}&4q^2-3q+1-2(1-2q)\sqrt{2(4q-1)(1-q)}\\ &\qquad \ge 4q^2-3q+1-(1-2q)[2(4q-1)+1-2q] = 2(1-3q)^2 \ge 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.66 *Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$(a^2b+b^2c+c^2a)^2 \ge abc(a+b+c)(a^2+b^2+c^2).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải 1. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc} a^4b^2-\sum_{cyc} a^4bc \ge abc(a-b)(a-c)(b-c)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4(b-c)^2+\sum_{cyc} a^4b^2-\sum_{cyc} a^2b^4 \ge 2abc(a-b)(a-c)(b-c)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4(b-c)^2+(a-b)(a-c)(b-c)[(a+b)(b+c)(c+a)-2abc] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^4(b-c)^2 + (a-b)(a-c)(b-c)\sum_{cyc} ab(a+b) \geq 0$$

Do a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên tồn tại các số không âm $x, y, z \geq 0$ sao cho $a = y+z, b = z+x, c = x+y$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}(y+z)^4(y-z)^2 + (x-y)(y-z)(z-x)\left[2\sum_{cyc} x^3 + 5\sum_{cyc} x^2(y+z) + 12xyz\right] \geq 0$$

Từ đây, giả sử $x = \min\{x, y, z\}$ và đặt $y = x+p, z = x+q$, ta có thể dễ dàng viết lại bất đẳng thức như sau

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E \geq 0$$

trong đó

$$\begin{aligned}
A &= 32(p^2 - pq + q^2) \geq 0 \\
B &= 16(4p^3 - 5p^2q + pq^2 + 4q^3) \geq 0 \\
C &= 48(p^4 - p^3q - p^2q^2 + pq^3 + q^4) = 48[p(p-q)^2(p+q) + q^4] \geq 0 \\
D &= 8(p+q)(2p^4 - 3p^3q - p^2q^2 + pq^3 + 2q^4) \\
&= 8(p+q)[2(p-q)^4 + pq(5p^2 - 13pq + 9q^2)] \geq 0 \\
E &= 2(p^3 - pq^2 - q^3)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = c$$

hoặc

$$a = b + c, b = \left(\frac{\sqrt[3]{100 + 12\sqrt{69}}}{6} + \frac{2}{3\sqrt[3]{100 + 12\sqrt{69}}} - \frac{1}{3}\right)c.$$

hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Lời giải 2. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $(a-b)(a-c) \leq 0$. Xét hàm số sau

$$f(x) = (a^2 + b^2 + c^2)x^2 - 2(a^2b + b^2c + c^2a)x + abc(a+b+c)$$

Ta có

$$f(a) = a(a-b)(a-c)(a-b+c) \leq 0$$

và

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$$

Do đó, tồn tại x_0 sao cho $f(x_0) = 0$, và vì thế biệt thức của $f(x)$ phải không âm, tức là

$$(a^2b + b^2c + c^2a)^2 \geq abc(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2).$$

■

Nhận xét 19 *Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz và bất đẳng thức trên, ta có*

$$\sum_{cyc} \frac{a^2b}{c} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a^2b\right)^2}{\sum\limits_{cyc} a^2bc} \geq \sum_{cyc} a^2$$

và ta được

$$\frac{a^2b}{c} + \frac{b^2c}{a} + \frac{c^2a}{b} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

$$\Leftrightarrow a^2\left(\frac{b}{c} - 1\right) + b^2\left(\frac{c}{a} - 1\right) + c^2\left(\frac{a}{b} - 1\right) \geq 0.$$

Đây chính là bất đẳng thức trong kỳ thi chọn đội tuyển đi thi toán quốc tế của Moldova 2006.

Bài toán 2.67 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng*

$$ab\sqrt{a} + bc\sqrt{b} + ca\sqrt{c} \leq 3.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc} ab\sqrt{a}\right)^2 \leq \left(\sum_{cyc} ab\right)\left(\sum_{cyc} a^2b\right)$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc} ab\right)\left(\sum_{cyc} a^2b\right) \leq 9$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} ab\right)\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} a^2b\right) \leq 27$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} ab\right)\left[\sum_{cyc} a^3b + \left(\sum_{cyc} ab\right)^2 - 3abc\right] \leq 27$$

Sử dụng bất đẳng thức Vasile $\sum\limits_{cyc} a^3b \leq \frac{1}{3}\left(\sum\limits_{cyc} a^2\right)^2$. Ta cần phải chứng minh

$$\left(\sum_{cyc} ab\right)\left[\frac{1}{3}\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 + \left(\sum_{cyc} ab\right)^2 - 3abc\right] \leq 27$$

Đặt $q = ab + bc + ca$, ta phải chứng minh

$$q[(9-2q)^2 + 3q^2 - 9abc] \le 81$$

Theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $3r \ge 4q - 9$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$q[(9-2q)^2 + 3q^2 - 3(4q-9)] \le 81$$
$$\Leftrightarrow (3-q)(7q^2 - 27q + 27) \ge 0.$$

hiển nhiên đúng do $q \le 3$.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét 20 *Từ bài này, ta suy ra kết quả sau ở phần trước*

$$\frac{a^3}{a^2+b^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2} + \frac{c^3}{c^2+a^2} \ge \frac{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}}{2}$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Ở đây, chúng ta có một lời giải khác bằng cách sử dụng bất đẳng thức Holder như sau

$$\left(\sum \frac{a^3}{a^2+b^2}\right)^2 \left[\sum (a^2+b^2)^2(a^2+c^2)^3\right] \ge \left[\sum a^2(a^2+c^2)\right]^3 = \frac{1}{8}\left[\sum (a^2+b^2)^2\right]^3$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{8}\left[\sum (a^2+b^2)^2\right]^3 \ge \frac{3}{4}\left(\sum a^2\right)\left[\sum (a^2+b^2)^2(a^2+c^2)^3\right]$$

Đặt $\sqrt{x} = a^2 + b^2, \sqrt{y} = b^2 + c^2, \sqrt{z} = c^2 + a^2$ *thì bất đẳng thức trở thành*

$$(x+y+z)^3 \ge 3\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right)\left(xy\sqrt{x} + yz\sqrt{y} + zx\sqrt{z}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \le \sqrt{3(x+y+z)}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$(x+y+z)^{5/2} \ge 3\sqrt{3}\left(xy\sqrt{x} + yz\sqrt{y} + zx\sqrt{z}\right)$$

Do tính thuần nhất nên ta có thể chuẩn hóa cho $x + y + z = 3$. *Khi đó bất đẳng thức trở thành*

$$xy\sqrt{x} + yz\sqrt{y} + zx\sqrt{z} \le 3.$$

Đây chính là bất đẳng thức được chứng minh ở trên. Vậy nên bất đẳng thức cần chứng minh đúng.

■

Bài toán 2.68 *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+3 \geq 2\left(\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b}\right).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b}+2\sum_{cyc}\frac{c}{b+c} \geq 2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+3$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b}+2\sum_{cyc}\frac{c}{b+c}\right) \geq \left(\sum_{cyc}ab\right)\left(2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+3\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ca^2}{b}+2\sum_{cyc}\frac{bc^2}{b+c} \geq \sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}\frac{abc}{b+c}$$

Sử dụng bất đẳng thức Moldova, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{ca^2}{b} \geq \sum_{cyc}a^2$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc}\frac{bc^2}{b+c} \geq \sum_{cyc}\frac{abc}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{bc(c-a)}{b+c} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}bc(c^2-a^2)(a+b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a^2b^3 \geq \sum_{cyc}a^2b^2c.$$

hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài toán 2.69 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{3(a^3b+b^3c+c^3a)}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \geq 4.$$

(Bách Ngọc Thành Công)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right) + 3\left(\sum_{cyc} a^3b\right)\left(\sum_{cyc} ab\right) \ge 4\left(\sum_{cyc} ab\right)\left(\sum_{cyc} a^2b^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc} a^4b^2 + \sum_{cyc} a^2b^4 + 3\sum_{cyc} a^4bc + 3a^2b^2c^2 \ge 4\sum_{cyc} a^3b^3 + \sum_{cyc} a^3b^2c + 4\sum_{cyc} a^2b^3c$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc} a^4b^2 + \sum_{cyc} a^2b^4 - 4\sum_{cyc} a^3b^3 \ge abc\left(4\sum_{cyc} ab^2 + \sum_{cyc} a^2b - 3\sum_{cyc} a^3 - 3abc\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2b^2(2a-b)^2 \ge abc\left(4\sum_{cyc} ab^2 + \sum_{cyc} a^2b - 3\sum_{cyc} a^3 - 3abc\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 2\sum_{cyc} a^2b^2(2a-b)^2 &= \sum_{cyc}[a^2b^2(2a-b)^2 + a^2c^2(2c-a)^2] \\ &\ge 2\sum_{cyc} a^2bc(2a-b)(2c-a) \\ &= 2abc\left(4\sum_{cyc} ab^2 + \sum_{cyc} a^2b - 2\sum_{cyc} a^3 - 6abc\right) \\ &\ge 2abc\left(4\sum_{cyc} ab^2 + \sum_{cyc} a^2b - 3\sum_{cyc} a^3 - 3abc\right). \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $\frac{a}{1} = \frac{b}{2} = \frac{c}{0}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.70 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thờ bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2(b+c)}{(b^2+c^2)(2a+b+c)} + \frac{b^2(c+a)}{(c^2+a^2)(2b+c+a)} + \frac{c^2(a+b)}{(a^2+b^2)(2c+a+b)} \ge \frac{2}{3}.$$

(Darij Grinberg)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left[\sum_{cyc} \frac{a^2(b+c)}{(b^2+c^2)(2a+b+c)}\right]\left[\sum_{cyc} \frac{a^2(b^2+c^2)(2a+b+c)}{b+c}\right] \ge \left(\sum_{cyc} a^2\right)^2$$

Ta cần chứng minh

$$3\left(\sum_{cyc} a^2\right)^2 \geq 2\sum_{cyc} \frac{a^2(b^2+c^2)(2a+b+c)}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc} a^4 + 6\sum_{cyc} a^2b^2 \geq 4\sum_{cyc} a^2b^2 + 4\sum_{cyc} \frac{a^3(b^2+c^2)}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc} a^4 + 2\sum_{cyc} a^2b^2 \geq 4\sum_{cyc} \frac{a^3(b^2+c^2)}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc} a^4 + 2\sum_{cyc} a^2b^2 \geq 4\sum_{cyc} \frac{a^3[(b+c)^2-2bc]}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc} a^4 + 2\sum_{cyc} a^2b^2 - 4\sum_{cyc} a^3(b+c) + 8abc\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{1}{2}\sum_{cyc} a$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh được

$$3\sum_{cyc} a^4 + 2\sum_{cyc} a^2b^2 - 4\sum_{cyc} a^3(b+c) + 4abc\sum_{cyc} a \geq 0$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$3(4r+2q^2-4q+1) + 2(q^2-2r) - 4(q-2q^2-r) + 4r \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 16r + (3-4q)(1-4q) \geq 0$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có $r \geq \frac{(4q-1)(1-q)}{6}$, suy ra

$$16r + (3-4q)(1-4q) \geq \frac{16(4q-1)(1-q)}{6} + (3-4q)(1-4q) = \frac{1}{3}(1-4q)^2 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ∎

Nhận xét 21 *Chúng ta có cũng có 1 cách khác (đòi hỏi chúng ta phải có sự khéo léo) để chứng minh bất đẳng thức*

$$3\sum_{cyc} a^4 + 2\sum_{cyc} a^2b^2 - 4\sum_{cyc} a^3(b+c) + 4abc\sum_{cyc} a \geq 0$$

bằng cách viết lại nó như sau (sau khi đã giả sử $c = \min\{a, b, c\}$*)*

$$c^4 + 2c^2(a + b - c)^2 + (a - b)^2(3a^2 + 3b^2 + 2ab - 4ac - 4bc) \geq 0$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Bài toán 2.71 *Cho các số không âm* a, b, c*. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} + \frac{7}{16} \cdot \frac{\max\{(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2\}}{ab + bc + ca}.$$

(Phạm Văn Thuận, Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. Bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2} + \frac{7}{16} \cdot \frac{(a-c)^2}{ab + bc + ca}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a[a(b+c) + bc]}{b+c} \geq \frac{3}{2}(ab + bc + ca) + \frac{7}{16}(a-c)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + abc \sum_{cyc} \frac{1}{b+c} \geq \frac{3}{2}(ab + bc + ca) + \frac{7}{16}(a-c)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{1}{b+c} \geq \frac{9}{2(a+b+c)}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{2(a+b+c)} \geq \frac{3}{2}(ab + bc + ca) + \frac{7}{16}(a-c)^2$$

Đặt $a = c + x, b = c + y$ $(x \geq y \geq 0)$, khi đó bất đẳng thức này tương đương với

$$(11x^2 - 32xy + 32y^2)c + (x + y)(3x - 4y)^2 \geq 0.$$

Hiển nhiên đúng.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $\frac{a}{4} = \frac{b}{3} = \frac{c}{0}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.72 *Cho các số dương* a, b, c *thỏa mãn* $abc = 1$*. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = \frac{1}{(a^2 - a + 1)^2} + \frac{1}{(b^2 - b + 1)^2} + \frac{1}{(c^2 - c + 1)^2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow a \ge 1 \ge c$. Xét những trường hợp sau

Trường hợp 1. Nếu $b \ge 1$, ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{(a^2-a+1)^2}+\frac{1}{(b^2-b+1)^2} \le 1+\frac{1}{(a^2b^2-ab+1)^2} = 1+\frac{c^4}{(c^2-c+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left[1-\frac{1}{(a^2-a+1)^2}\right]\left[1-\frac{1}{(b^2-b+1)^2}\right]$$
$$\ge \quad \frac{1}{(a^2-a+1)^2(b^2-b+1)^2}-\frac{1}{(a^2b^2-ab+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow ab(a-1)(b-1)(a^2-b+2)(b^2-b+2)(a^2b^2-ab+1)^2$$
$$\ge \quad (a-1)(b-1)(a+b)[2a^2b^2-ab(a+b)+a^2+b^2-a-b+2]$$

$$\Leftrightarrow ab(a^2-a+2)(b^2-b+2)(a^2b^2-ab+1)^2$$
$$\ge \quad (a+b)[2a^2b^2-ab(a+b)+a^2+b^2-a-b+2]$$

Do $a, b \ge 1$, ta có

$$(a^2-a+2)(b^2-b+2)(a^2b^2-ab+1) \ge 4, \quad 2ab \ge a+b$$

$$\Rightarrow ab(a^2-a+2)(b^2-b+2)(a^2b^2-ab+1)^2 \ge 2(a+b)(a^2b^2-ab+1)$$

Ta cần chứng minh

$$2(a^2b^2-ab+1) \ge 2a^2b^2-ab(a+b)+a^2+b^2-a-b+2$$

$$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)(a+b) \ge 0$$

hiển nhiên đúng. Từ đây, ta có

$$P \le 1+\frac{c^4}{(c^2-c+1)^2}+\frac{1}{(c^2-c+1)^2} = 3-\frac{(c-1)^2}{(c^2-c+1)^2} \le 3$$

Trường hợp 2. Nếu $a \ge 1 \ge b \ge c$. Chú ý rằng

$$(b^2-b+1)^2 \ge \frac{9}{16}, \quad (c^2-c+1)^2 \ge \frac{9}{16}$$

Do đó, nếu $a \ge 4$, ta có

$$(a^2-a+1)^2 \ge (4^2-4+1)^2 = 169$$

$$\Rightarrow P \le \frac{1}{169}+\frac{32}{9} = \frac{5417}{1521}$$

Nếu $4 \ge a \Rightarrow bc \ge \frac{1}{4} \Rightarrow b \ge \frac{1}{2}$, ta có 2 trường hợp nhỏ

i) Nếu $c \leq \frac{1}{2}$, ta có

$$(c^2 - c + 1)^2 \geq \frac{9}{16}$$

$$\begin{aligned}
b^2 - b + 1 &= b(1-2c)(b + 2bc - 1) + (4b^2c^2 - 2bc + 1) \\
&\geq b(1-2c)\left(\frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} - 1\right) + (4b^2c^2 - 2bc + 1) \\
&= 4b^2c^2 - 2bc + 1 = \frac{a^2 - 2a + 4}{a^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{(a^2 - a + 1)^2} + \frac{a^4}{(a^2 - 2a + 4)^2} + \frac{16}{9} = f(a)$$

$$\Rightarrow \max P \leq \max_{4 \geq a \geq 1} f(a)$$

ii) Nếu $4 \geq a \geq 1 \geq b \geq c \geq \frac{1}{2}$, xét hàm số sau

$$g(x) = \frac{1}{(e^{2x} - e^x + 1)^2}$$

với $x \in [-\ln 2, 0]$. Ta có

$$g''(x) = \frac{2e^x(e^x - 1)(8e^{2x} + e^x - 1)}{(e^{2x} - e^x + 1)^4} \leq 0 \quad \forall x \in [-\ln 2, 0]$$

Do đó $g(x)$ lõm trên $[-\ln 2, 0]$. Bây giờ, ta hãy chú ý rằng $\ln b, \ln c \in [-\ln 2, 0]$, nên theo bất đẳng thức Jensen,

$$g(\ln b) + g(\ln c) \leq 2g\left(\frac{\ln b + \ln c}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{(b^2 - b + 1)^2} + \frac{1}{(c^2 - c + 1)^2} \leq \frac{2}{\left(bc - \sqrt{bc} + 1\right)^2} = \frac{2a^2}{\left(a - \sqrt{a} + 1\right)^2}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{1}{(a^2 - a + 1)^2} + \frac{2a^2}{\left(a - \sqrt{a} + 1\right)^2} = h(a)$$

$$\Rightarrow \max P \leq \max_{4 \geq a \geq 1} h(a)$$

Từ những trường hợp đã xét ở trên, ta đi đến kết luận (với chú ý là đẳng thức luôn xảy ra)

$$\max P = \max\left\{\frac{5417}{1521}, \max_{4 \geq a \geq 1} f(a), \max_{4 \geq a \geq 1} h(a)\right\}.$$

■

Bài toán 2.73 *Cho các số không âm a, b, c, d. Chứng minh rằng*

$$\sum_{cyc} a(a-b)(a-c)(a-d) + abcd \geq 0.$$

(Phạm Kim Hùng)

LỜI GIẢI. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c \geq d$. Bất đẳng thức tương đương với

$$(a-b)[a(a-c)(a-d) - b(b-c)(b-d)] + c(c-d)(a-c)(b-c)$$
$$+ d[abc + (d-a)(d-b)(d-a)] \geq 0$$

Ta có

$$a(a-c)(a-d) - b(b-c)(b-d) = (a-b)[a^2 + ab + b^2 - (a+b)(c+d) + cd]$$

và

$$\begin{aligned} & a^2 + ab + b^2 - (a+b)(c+d) + cd \\ & \quad = \quad (a-b)(a+2b-c-d) + (b-c)(3b+c-2d) + c(c-d) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a(a-c)(a-d) - b(b-c)(b-d) \geq 0$$

Mặt khác

$$c(c-d)(a-c)(b-c) \geq 0$$

và

$$abc + (d-a)(d-b)(d-a) = d[d^2 + a(b-d) + b(c-d) + c(a-d)] \geq 0.$$

Bất đăng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c, d = 0$ hoặc $a = b, c = d = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.74 *Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 2$. Chứng minh rằng*

$$\frac{bc}{a^2+1} + \frac{ca}{b^2+1} + \frac{ab}{c^2+1} \leq 1.$$

(Phạm Kim Hùng)

LỜI GIẢI. Bất đẳng thức tương đương với

$$abc \sum_{cyc} \frac{a}{a^2+1} + 1 - \sum_{cyc} bc \geq 0$$

Với mọi $x \geq 0$, ta có

$$\frac{1}{x^2+1} - 1 + \frac{1}{2}x = \frac{x(x-1)^2}{x^2+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \geq 1 - \frac{1}{2}x$$

Sử dụng bất đẳng thức này, ta chỉ cần chứng minh được

$$abc\sum_{cyc} a\left(1-\frac{1}{2}a\right) + 1 - \sum_{cyc} bc \geq 0$$

$$\Leftrightarrow abc\sum_{cyc} bc + 1 - \sum_{cyc} bc \geq 0$$

Đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$. Bất đẳng thức trở thành

$$qr + 1 - q \geq 0$$

Theo bất đẳng thức Schur bậc 4, ta có $r \geq \frac{(q-1)(4-q)}{3}$. Do đó

$$qr + 1 - q \geq \frac{q(q-1)(4-q)}{3} + 1 - q = \frac{1}{3}(3-q)(q-1)^2 \geq 0.$$

do $q \leq \frac{4}{3} < 3$.
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1, c = 0$ hoặc các hoán vị. ■

Bài toán 2.75 *Cho a, b, c là các số thực phân biệt. Chứng minh rằng*

$$\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b-c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c-a)^2} \geq \frac{3}{2}.$$

(Nguyễn Văn Thạch)

Lời giải. Ta dễ dàng kiểm tra được các đẳng thức sau

$$\sum_{cyc} \frac{1+ab}{a-b}\cdot\frac{1+bc}{b-c} = 1, \quad \sum_{cyc} \frac{1-ab}{a-b}\cdot\frac{1-bc}{b-c} = -1$$

Mặt khác, với mọi $x, y, z \in \mathbb{R}$, ta có

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx, \quad x^2+y^2+z^2 \geq -2(xy+yz+zx)$$

Suy ra

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1+ab}{a-b}\right)^2 \geq \sum_{cyc}\frac{1+ab}{a-b}\cdot\frac{1+bc}{b-c} = 1$$

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1-ab}{a-b}\right)^2 \geq -2\sum_{cyc}\frac{1-ab}{a-b}\cdot\frac{1-bc}{b-c} = 2$$

$$\Rightarrow 2\sum_{cyc}\frac{1+a^2b^2}{(a-b)^2}=\sum_{cyc}\left(\frac{1+ab}{a-b}\right)^2+\sum_{cyc}\left(\frac{1-ab}{a-b}\right)^2\geq 3.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Bài toán 2.76 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^{b+c}+b^{c+a}+c^{a+b}\geq 1.$$

Lời giải. Nếu tồn tại ít nhất một trong 3 số a, b, c, chẳng hạn $a \geq 1$, thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Do đó, ta sẽ xét bài toán trong trường hợp $1 > a, b, c > 0$.
Trường hợp 1. Nếu $a+b+c\leq 1 \Rightarrow a+b, b+c, c+a\leq 1$, sử dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\frac{1}{a^{b+c}}=\left(1+\frac{1-a}{a}\right)^{b+c}\leq 1+\frac{(1-a)(b+c)}{a}\leq 1+\frac{b+c}{a}=\frac{a+b+c}{a}$$

$$\Rightarrow a^{b+c}\geq\frac{a}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}a^{b+c}\geq\sum_{cyc}\frac{a}{a+b+c}=1$$

Trường hợp 2. Nếu $a+b+c\geq 1$, lại sử dụng bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$\frac{1}{a^b}\leq\frac{a+b(1-a)}{a},\quad \frac{1}{a^c}\leq\frac{a+c(1-a)}{a}$$

$$\Rightarrow a^{b+c}\geq\frac{a^2}{[a+b(1-a)][a+c(1-a)]}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{[a+b(1-a)][a+c(1-a)]}\geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{[a+b(1-a)][a+c(1-a)]}\geq\frac{\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}{\sum\limits_{cyc}[a+b(1-a)][a+c(1-a)]}$$

và

$$\left(\sum_{cyc}a\right)^2-\sum_{cyc}[a+b(1-a)][a+c(1-a)]$$
$$=\left(\sum_{cyc}ab\right)\left(\sum_{cyc}a-1\right)+abc\left(3-\sum_{cyc}a\right)\geq 0.$$

Từ đây, ta suy ra được kết quả bài toán ban đầu. ■

Bài toán 2.77 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab} \le \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}} \le \frac{a^2+bc}{a(b+c)}+\frac{b^2+ca}{b(c+a)}+\frac{c^2+ab}{c(a+b)}.$$

(Phạm Hữu Đức)

LỜI GIẢI. Trước hết, ta sẽ chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+bc} \le \frac{\sum\limits_{cyc} a}{\sqrt[3]{abc}}$$

Đặt $a = x^3, b = y^3, c = z^3$, và với chú ý rằng $x^3 + y^3 \ge xy(x + y)\ \forall x, y \ge 0$, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+bc} = \sum_{cyc}\frac{x^3(y^3+z^3)}{x^6+y^3z^3} \le \sum_{cyc}\frac{x^3(y^3+z^3)}{x^2yz(x^2+yz)}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{x^3(y^3+z^3)}{x^2yz(x^2+yz)} \le \frac{\sum\limits_{cyc} x^3}{xyz}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} x^3 \ge \sum_{cyc}\frac{x^2(y^3+z^3)}{x^2+yz}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} x^3 - \sum_{cyc}\frac{x^2(y^3+z^3)}{x^2+yz} &= \sum_{cyc}\frac{x^2(x^3+xyz-y^3-z^3)}{x^2+yz} \\ &= \sum_{cyc}\frac{x^3(x-y)(x-z)}{x^2+yz} + \sum_{cyc}\frac{xy(x-y)^2(x+y)(xz+yz-xy)}{(x^2+yz)(y^2+zx)}\end{aligned}$$

Do tính đối xứng, ta có thể giả sử $z = \min\{x, y, z\}$, khi đó

$$\begin{aligned}&\sum_{cyc}\frac{x^3(x-y)(x-z)}{x^2+yz} + \sum_{cyc}\frac{xy(x-y)^2(x+y)(xz+yz-xy)}{(x^2+yz)(y^2+zx)} \\ \ge\ & \frac{x^3(x-y)(x-z)}{x^2+yz} + \frac{y^3(y-z)(y-x)}{x^2+yz} + \frac{xy(x-y)^2(x+y)(xz+yz-xy)}{(x^2+yz)(y^2+zx)} \\ =\ & \frac{z(x-y)^2(x+y)(x^3+y^3-x^2z-y^2z)}{(x^2+yz)(y^2+zx)} \ge 0\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{a(b+c)} \ge \frac{\sum\limits_{cyc} a}{\sqrt[3]{abc}}$$

Nếu $\frac{\sum\limits_{cyc} ab}{\sum\limits_{cyc} a} \ge \sqrt[3]{abc}$, khi đó theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz và bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{a(b+c)} &= \sum_{cyc}\frac{a^2}{a(b+c)} + \sum_{cyc}\frac{b^2c^2}{abc(b+c)} \\
&\ge \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2}{2\sum\limits_{cyc} ab} + \frac{\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)^2}{2abc\sum\limits_{cyc} a} \\
&\ge \sqrt{\frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)}{abc}} \ge \frac{\sum\limits_{cyc} a}{\sqrt[3]{abc}}
\end{aligned}$$

Nếu $\sqrt[3]{abc} \ge \frac{\sum\limits_{cyc} ab}{\sum\limits_{cyc} a}$, ta có

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{cyc} ab\right)\left[\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right] - \frac{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)}{\sqrt[3]{abc}} \\
&\qquad \ge \left(\sum_{cyc} ab\right)\left[\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{a(b+c)}\right] - \left(\sum_{cyc} a\right)^2 \\
&\qquad = \sum_{cyc}\frac{(ab+bc)(bc+ca)}{ab+ca} - \sum_{cyc}(ab+ca) \ge 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Bài toán 2.78 *Cho a, b, c là các số không âm, không có 2 số nào đồng thời bằng 0 thỏa mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{\sqrt{a+2b}} + \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \le \frac{\sqrt[4]{27}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn, Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Nếu $c \geq b \geq a$, khi đó theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a+2b}}\right)^2 \leq \left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} \frac{a}{a+2b}\right) = \sum_{cyc} \frac{a}{a+2b}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc} \frac{a}{a+2b} \leq \left(\frac{\sqrt[4]{27}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}}\right)^2 = 6\sqrt{3}-9$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{1+2x} \leq 6\sqrt{3}-9$$

trong đó $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c} \Rightarrow x, y \geq 1 \geq z, xyz = 1$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{2y+1} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2xy+1} - \frac{2(x-1)(y-1)(4xy-1)}{3(2x+1)(2y+1)(2xy+1)} \\ &\leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2xy+1} = \frac{1}{3} + \frac{z}{z+2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{1}{2x+1} \leq \frac{1}{3} + \frac{z}{z+2} + \frac{1}{2z+1} = \frac{4}{3} - \frac{3z}{(z+2)(2z+1)} \leq \frac{4}{3} < 6\sqrt{3}-9$$

Nếu $a \geq b \geq c$, đặt $f(a,b,c) = \sum\limits_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a+2b}}$, xét 2 trường hợp

Trường hợp 1. Nếu $a \geq 4b$, thì

$$\frac{(a+c)^2}{a+c+2b} - \frac{a^2}{a+2b} = \frac{c(a^2+4ab+ac+2bc)}{(a+2b)(a+2b+c)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a+2b}} \leq \frac{a+c}{\sqrt{a+c+2b}}$$

$$\frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \leq \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+8b}} \leq \sqrt{b}$$

$$\Rightarrow f(a,b,c) \leq \frac{a+c}{\sqrt{a+c+2b}} + \sqrt{b} = f(a+c,b,0)$$

Trường hợp 2. Nếu $4b \geq a$, thì

$$\frac{\left(a+\frac{c}{2}\right)^2}{a+2b+\frac{3c}{2}} - \frac{a^2}{a+2b} = \frac{c(2a(4b-a)+c(a+2b))}{2(a+2b)(2a+4b+3c)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a+2b}} \le \frac{a+\frac{c}{2}}{\sqrt{a+2b+\frac{3c}{2}}}$$

$$\frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2a}} \le \frac{b}{\sqrt{b+2c}} + \frac{c}{\sqrt{c+2b}} \le \sqrt{b+\frac{c}{2}}$$

$$\Rightarrow f(a,b,c) \le \frac{a+\frac{c}{2}}{\sqrt{a+2b+\frac{3c}{2}}} + \sqrt{b+\frac{c}{2}} = f\left(a+\frac{c}{2}, b+\frac{c}{2}, 0\right)$$

Do đó, trong mọi trường hợp, ta luôn có thể đưa bài toán về chứng minh trong trường hợp có một biến bằng 0. Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần xét nó trong trường hợp $abc = 0$, chẳng hạn $c = 0$. Khi đó, ta phải chứng minh

$$f(a,b,0) = f(1-b,b,0) = \frac{1-b}{\sqrt{1+b}} + \sqrt{b} \le \frac{\sqrt[4]{27}\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{2}}.$$

Ta dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức này. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = \frac{2\left(\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}}, b = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, c = 0$ hoặc các hoán vị. ■

Bài toán 2.79 *Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn $xy+yz+zx+xyz = 4$. Chứng minh*

$$x+y+z \le 3 + \frac{1}{4}\max\left\{(x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2\right\}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Đặt $x = \frac{2a}{b+c}, y = \frac{2b}{c+a}, z = \frac{2c}{a+b}$ $(a,b,c \ge 0)$ và giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{2a}{b+c} \le 3 + \left(\frac{a}{b+c} - \frac{c}{a+b}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-c)^2(a+b+c)^2}{(a+b)^2(b+c)^2} \ge \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2\left[\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)^2(b+c)^2} - \frac{1}{(a+b)(b+c)}\right] \ge \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + \frac{(b-c)^2}{(a+b)(a+c)}$$

$$\Leftrightarrow (a-c)^2\left[\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)} - 1\right] \ge \frac{(a-b)^2(a+b)}{a+c} + \frac{(b-c)^2(b+c)}{a+c}$$

Nếu $2(b-c) \ge a-b$, khi đó ta có $(a-c)^2 \ge 2(a-b)^2 + (b-c)^2$ và $(a+b+c)^2 \ge (a+b)(b+c)$, nên ta chỉ cần chứng minh được

$$[2(a-b)^2 + (b-c)^2]\left[\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)} - 1\right] \ge \frac{(a-b)^2(a+b)}{a+c} + \frac{(b-c)^2(b+c)}{a+c}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{2(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)}-2-\frac{a+b}{a+c}\right] + (b-c)^2\left[\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)}-1-\frac{b+c}{a+c}\right]\ge 0$$

Chú ý rằng $\frac{2(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)}-2-\frac{a+b}{a+c}$, $\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)}-1-\frac{b+c}{a+c}$ là các hàm đồng biến theo a, nên

$$\frac{2(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)}-2-\frac{a+b}{a+c}\ge\frac{2(b+b+c)^2}{(b+b)(b+c)}-2-\frac{b+b}{b+c}=\frac{c(2b+c)}{b(b+c)}\ge 0$$

$$\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)}-1-\frac{b+c}{a+c}\ge\frac{(b+b+c)^2}{(b+b)(b+c)}-1-\frac{b+c}{b+c}=\frac{c^2}{2b(b+c)}\ge 0$$

Nếu $a-b\ge 2(b-c)$, khi đó ta có $(a-c)^2\ge(a-b)^2+(b-c)^2$ và $(a+b+c)^2\ge(a+b)(b+c)$, nên ta chỉ cần chứng minh được

$$[(a-b)^2+(b-c)^2]\left[\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)}-1\right]\ge\frac{(a-b)^2(a+b)}{a+c}+\frac{(b-c)^2(b+c)}{a+c}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left[\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)}-1-\frac{a+b}{a+c}\right] + (b-c)^2\left[\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)}-1-\frac{b+c}{a+c}\right]\ge 0$$

Vì $\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)}-1-\frac{a+b}{a+c}$ là một hàm đồng biến theo a nên

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)}-1-\frac{a+b}{a+c} &\ge \frac{[(3b-2c)+b+c]^2}{[(3b-2c)+b](b+c)}-1-\frac{(3b-2c)+b}{(3b-2c)+c}\\ &= \frac{20b^3-42b^2c+31bc^2-7c^3}{2(2b-c)(3b-c)(b+c)}\ge 0\end{aligned}$$

Mặt khác, từ trường hợp ở trên, ta có $\frac{(a+b+c)^2}{(a+b)(b+c)}-1-\frac{b+c}{a+c}\ge 0$.
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=1$ hoặc $x=y=2, z=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ∎

Bài toán 2.80 *Cho a,b,c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{b^2+a^2}+\frac{c^2+a^2}{c^2+b^2}\ge\frac{a+b}{a+c}+\frac{b+c}{b+a}+\frac{c+a}{c+b}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$, chú ý rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2}{a^2 + c^2} - 3 = \frac{(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} + \frac{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}$$

$$\sum_{cyc} \frac{a + b}{a + c} - 3 = \frac{(a - b)^2}{(a + c)(b + c)} + \frac{(a - c)(b - c)}{(a + b)(a + c)}$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &\left[\frac{(a + b)^2}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} - \frac{1}{(a + c)(b + c)}\right] \\ &+ (a - c)(b - c)\left[\frac{(a + c)(b + c)}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} - \frac{1}{(a + b)(a + c)}\right] \ge 0\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\frac{(a + b)^2}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)} - \frac{1}{(a + c)(b + c)} &\ge \frac{(a + b)^2}{(a + c)^2(b + c)^2} - \frac{1}{(a + c)(b + c)} \\ &= \frac{(a + b)^2 - (a + c)(b + c)}{(a + c)^2(b + c)^2} \ge 0\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(a + c)(b + c)}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} \ge \frac{1}{(a + b)(a + c)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a + c)^2(b + c)(a + b)}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} \ge 1$$

Nếu $a \ge b \ge c$, thì

$$\frac{(a + c)^2(b + c)(a + b)}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} \ge \frac{(b + c)(a + b)}{a^2 + b^2} \ge \frac{a(a + b)}{a^2 + b^2} \ge 1$$

Nếu $b \ge a \ge c$, thì

$$\frac{(a + c)^2(b + c)(a + b)}{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} \ge \frac{(b + c)(a + b)}{a^2 + b^2} \ge \frac{b(a + b)}{a^2 + b^2} \ge 1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.81 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a(b + c)}{a^2 + bc} + \frac{b(c + a)}{b^2 + ca} + \frac{c(a + b)}{c^2 + ab} \le \frac{1}{2}\sqrt{(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + 27}.$$

(Phạm Hữu Đức)

Lời giải. Bình phương 2 vế và nhân cả 2 vế cho 4, ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau

$$4\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)^2}{(a^2+bc)^2}+8\sum_{cyc}\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\le 27+\left(\sum_{cyc}a\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)^2}{(a^2+bc)^2}+8\sum_{cyc}\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\le 24+\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2}{bc}$$

$$\Leftrightarrow \left[\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2}{bc}-4\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)^2}{(a^2+bc)^2}\right]+8\left[3-\sum_{cyc}\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(b+c)^2(a^2-bc)^2}{bc(a^2+bc)^2}+8\sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2(a+b)^2}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài toán 2.82 *Cho các số không âm a,b,c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2}+\frac{b^2(c+a)}{c^2+ca+a^2}+\frac{c^2(a+b)}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}.$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left[\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2}\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+bc+c^2)}{b+c}\right]\ge\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}a\right)\ge 2\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+bc+c^2)}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}a\right)\ge 2\sum_{cyc}a^2(b+c)-2abc\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a(a-b)(a-c)+abc\left(2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}-3\right)\ge 0$$

Sử dụng bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $\sum\limits_{cyc} a(a-b)(a-c) \ge 0$. Mặt khác, bất đẳng thức AM-GM cho ta

$$2\sum_{cyc}\frac{a}{b+c} - 3 \ge 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 22 *Chúng ta có một kết quả mạnh hơn là*

$$\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2} + \frac{b^2(c+a)}{c^2+ca+a^2} + \frac{c^2(a+b)}{a^2+ab+b^2} \ge 2\sqrt{\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}}$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Ta có thể chứng minh bằng cách tương tự như sau. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left[\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)}{b^2+bc+c^2}\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+bc+c^2)}{b+c}\right] \ge \left(\sum_{cyc}a^2\right)^2$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2 \ge 2\sqrt{\frac{\sum\limits_{cyc}a^3}{\sum\limits_{cyc}a}}\left[\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+bc+c^2)}{b+c}\right]$$

Lại theo bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} 2\sum_{cyc}\frac{a^2(b^2+bc+c^2)}{b+c} &= 2\sum_{cyc}a^2(b+c) - 2abc\sum_{cyc}\frac{a}{b+c} \\ &\le 2\sum_{cyc}a^2(b+c) - \frac{abc\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}{\sum\limits_{cyc}ab} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2 \ge \sqrt{\frac{\sum\limits_{cyc}a^3}{\sum\limits_{cyc}a}}\left[2\sum_{cyc}a^2(b+c) - \frac{abc\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}{\sum\limits_{cyc}ab}\right]$$

Do tính thuần nhất, ta có thể chuẩn hóa $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca, r=abc$, khi đó theo bất đẳng thức Schur bậc 3, ta có $r \geq \max\left\{\frac{4q-1}{9}, \frac{(4q-1)(1-q)}{6}, 0\right\}$. Bất đẳng thức trở thành

$$(1-2q)^2 \geq \sqrt{1-3q+3r}\left(2(q-3r)-\frac{r}{q}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(r)=q(1-2q)^2-\sqrt{1-3q+3r}[2q^2-(1+6q)r] \geq 0$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'(r) &= \frac{9(6q+1)r+2+6q-42q^2}{2\sqrt{1-3q+3r}} \geq \frac{(6q+1)(4q-1)+2+6q-42q^2}{2\sqrt{1-3q+3r}} \\ &= \frac{(1-9q^2)+4q(1-3q)+3q^2}{2\sqrt{1-3q+3r}} \geq 0 \end{aligned}$$

Nên $f(r)$ đồng biến, do đó
Nếu $1 \geq 4q$, ta có

$$\begin{aligned} f(r) &\geq f(0)=q\left[(1-2q)^2-2q\sqrt{1-3q}\right] \geq q\left[(1-2q)^2-\frac{1}{2}(1-3q+4q^2)\right] \\ &= \frac{1}{2}q(1-q)(1-4q) \geq 0 \end{aligned}$$

Nếu $4q \geq 1$, ta có $\frac{(4q-1)(1-q)}{6} \geq \frac{4q-1}{9} \geq 0$, nên

$$\begin{aligned} f(r) &\geq f\left(\frac{(4q-1)(1-q)}{6}\right)=q(1-2q)^2-\frac{(1+q-14q^2+24q^3)\sqrt{2-2q-8q^2}}{12} \\ &= q(1-2q)^2-\frac{(1+q-14q^2+24q^3)\sqrt{2-2q-8q^2}\cdot 2(1-2q)}{24(1-2q)} \\ &\geq q(1-2q)^2-\frac{(1+q-14q^2+24q^3)[2-2q-8q^2+4(1-2q)^2]}{48(1-2q)} \\ &= q(1-2q)^2-\frac{(1+q-14q^2+24q^3)(3-9q+4q^2)}{24(1-2q)} \\ &= \frac{(1-q)(1-3q)(4q-1)(3-6q-8q^2)}{24(1-2q)} \geq 0. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

■

Bài toán 2.83 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2(b+c)}{b^3+abc+c^3}+\frac{b^2(c+a)}{c^3+abc+a^3}+\frac{c^2(a+b)}{a^3+abc+b^3} \geq 2.$$

(Dương Đức Lâm)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left[\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)}{b^3+abc+c^3}\right]\left[\sum_{cyc}\frac{a^2(b^3+abc+c^3)}{b+c}\right]\ge\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2$$

Ta cần chứng minh

$$\left(\sum_{cyc}a^2\right)^2\ge 2\sum_{cyc}\frac{a^2(b^3+abc+c^3)}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^4+2\sum_{cyc}a^2b^2\ge 2\sum_{cyc}a^2(b^2-bc+c^2)+2abc\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^4+abc\sum_{cyc}a-2\sum_{cyc}a^2b^2\ge abc\left(2\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c}-\sum_{cyc}a\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^4+abc\sum_{cyc}a-2\sum_{cyc}a^2b^2\ge abc\sum_{cyc}\frac{(a+b+c)(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}$$

Do

$$\frac{(a+b+c)(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}\le\frac{(a-b)^2}{c}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc}a^4+abc\sum_{cyc}a-2\sum_{cyc}a^2b^2\ge abc\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{c}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^2(a-b)(a-c)\ge 0.$$

hiển nhiên đúng do nó chính là bất đẳng thức Schur bậc 4. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.84 *Cho m, n $(3n^2>m^2)$ là các hằng số cho trước và a, b, c là các số thực thỏa mãn $\begin{cases}a+b+c=m\\a^2+b^2+c^2=n^2\end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau*

$$P=a^2b+b^2c+c^2a.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Đặt $a = x + \frac{m}{3}, b = y + \frac{m}{3}, c = z + \frac{m}{3}$, khi đó từ giả thiết bài toán, ta có

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3n^2 - m^2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx = -\frac{3n^2 - m^2}{6}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} x^2y^2 = \left(\sum_{cyc} xy\right)^2 - 2xyz \sum_{cyc} x = \frac{(3n^2 - m^2)^2}{36}$$

và ta có thể viết lại P như sau

$$P = x^2y + y^2z + z^2x + \frac{m^3}{9}$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\sum_{cyc} \left(3x\sqrt{\frac{2}{3n^2 - m^2}} - \frac{18}{3n^2 - m^2}xy - 1\right)^2 \\ &= 3 + \frac{324}{(3n^2 - m^2)^2} \sum_{cyc} x^2y^2 - 54 \left(\frac{2}{3n^2 - m^2}\right)^{3/2} \sum_{cyc} x^2y \\ &= 12 - 54 \left(\frac{2}{3n^2 - m^2}\right)^{3/2} \sum_{cyc} x^2y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} x^2y \leq \frac{2}{9} \left(\frac{3n^2 - m^2}{2}\right)^{3/2}$$

$$\Rightarrow P \leq \frac{2}{9} \left(\frac{3n^2 - m^2}{2}\right)^{3/2} + \frac{m^3}{9}$$

Mặt khác, cho

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2(3n^2 - m^2)}}{3} \cos \frac{2\pi}{9} \\ y = \frac{\sqrt{2(3n^2 - m^2)}}{3} \cos \frac{4\pi}{9} \\ z = \frac{\sqrt{2(3n^2 - m^2)}}{3} \cos \frac{8\pi}{9} \end{cases}$$

ta được

$$P = \frac{2}{9} \left(\frac{3n^2 - m^2}{2}\right)^{3/2} + \frac{m^3}{9}$$

$$\Rightarrow \max P = \frac{2}{9} \left(\frac{3n^2 - m^2}{2}\right)^{3/2} + \frac{m^3}{9}.$$

Tương tự, chú ý rằng

$$\begin{cases} (-x)+(-y)+(-z)=0 \\ (-x)^2+(-y)^2+(-z)^2=\frac{3n^2-m^2}{3} \end{cases}$$

nên ta cũng có

$$\sum_{cyc}(-x)^2(-y) \le \frac{2}{9}\left(\frac{3n^2-m^2}{2}\right)^{3/2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} x^2y \ge -\frac{2}{9}\left(\frac{3n^2-m^2}{2}\right)^{3/2}$$

và do đó

$$P \ge -\frac{2}{9}\left(\frac{3n^2-m^2}{2}\right)^{3/2}+\frac{m^3}{9}$$

Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} x=-\frac{\sqrt{2(3n^2-m^2)}}{3}\cos\frac{2\pi}{9} \\ y=-\frac{\sqrt{2(3n^2-m^2)}}{3}\cos\frac{4\pi}{9} \\ z=-\frac{\sqrt{2(3n^2-m^2)}}{3}\cos\frac{8\pi}{9} \end{cases}$$

Vậy

$$\min P=-\frac{2}{9}\left(\frac{3n^2-m^2}{2}\right)^{3/2}+\frac{m^3}{9}.$$

■

Bài toán 2.85 *Cho các số dương a,b,c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \ge 3+\frac{(a-c)^2}{ab+bc+ca}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge 3(ab+bc+ca)+(a-c)^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+\left(\frac{ab^2}{c}+\frac{bc^2}{a}+\frac{ca^2}{b}-ab-bc-ca\right) \ge (a-c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]+\frac{a(b-c)^2}{c}+\frac{b(c-a)^2}{a}+\frac{c(a-b)^2}{b} \ge (a-c)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(b+2c)}{b} + \frac{(b-c)^2(c+2a)}{c} \geq \frac{(a-c)^2(a-2b)}{b}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)^2(b+2c)}{b} + \frac{(b-c)^2(c+2a)}{c} &\geq \frac{[(a-b)+(b-c)]^2}{\frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a}} \\ &= \frac{(a-c)^2(b+2c)(c+2a)}{2ab+2bc+2c^2} \end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{(b+2c)(c+2a)}{2ab+2bc+2c^2} \geq \frac{a-2b}{a}$$

$$\Leftrightarrow 4(ab^2+bc^2+ca^2-3abc)+4b^2c+11abc \geq 0.$$

hiển nhiên đúng.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài toán 2.86 *Cho các số không âm a,b,c,d, không có 3 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^k \geq \min\left\{1, \frac{1}{2^{k-1}}, \frac{4}{3^k}\right\}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Nếu $k \leq 1$, khi đó ta có

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^k \geq \sum_{cyc}\frac{a}{a+b+c} \geq \sum_{cyc}\frac{a}{a+b+c+d} = 1$$

Nếu $2 \geq k \geq 1$, khi đó theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$\left[\sum_{cyc}\frac{a^k}{(a+b+c)^k}\right]\left[\sum_{cyc}a(a+b+c)\right]^k \geq \left(\sum_{cyc}a^{\frac{2k}{k+1}}\right)^{k+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{a^k}{(a+b+c)^k} \geq \frac{\left(\sum\limits_{cyc}a^{\frac{2k}{k+1}}\right)^{k+1}}{\left[\sum\limits_{cyc}a(a+b+c)\right]^k} = \frac{\left(a^{\frac{2k}{k+1}}+b^{\frac{2k}{k+1}}+c^{\frac{2k}{k+1}}+d^{\frac{2k}{k+1}}\right)^{k+1}}{[(a+c)^2+(b+d)^2+(a+c)(b+d)]^k}$$

Do $k \geq 1 \Rightarrow \frac{2k}{k+1} \geq 1$, nên

$$a^{\frac{2k}{k+1}} + c^{\frac{2k}{k+1}} \geq 2\left(\frac{a+c}{2}\right)^{\frac{2k}{k+1}}, \quad b^{\frac{2k}{k+1}} + d^{\frac{2k}{k+1}} \geq 2\left(\frac{b+d}{2}\right)^{\frac{2k}{k+1}}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^k}{(a+b+c)^k} &\geq \frac{\left[2\left(\frac{a+c}{2}\right)^{\frac{2k}{k+1}} + 2\left(\frac{b+d}{2}\right)^{\frac{2k}{k+1}}\right]^{k+1}}{[(a+c)^2+(b+d)^2+(a+c)(b+d)]^k} \\ &= \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{\left[(a+c)^{\frac{2k}{k+1}} + (b+d)^{\frac{2k}{k+1}}\right]^{k+1}}{[(a+c)^2+(b+d)^2+(a+c)(b+d)]^k}\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a+c \leq b+d$, đặt $t = \left(\frac{a+c}{b+d}\right)^{\frac{1}{k+1}} \leq 1$, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^k}{(a+b+c)^k} \geq \frac{1}{2^{k-1}} \cdot \frac{(t^{2k}+1)^{k+1}}{(t^{2k+2}+t^{k+1}+1)^k} = \frac{1}{2^{k-1}} f(t)$$

$$f'(t) = \frac{kt^k(k+1)(t^{2k}+1)^k(t^{2k}-2t^{k+1}+2t^{k-1}-1)}{(t^{2k+2}+t^{k+1}+1)^{k+1}}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ \begin{cases} t > 0 \\ t^{2k} - 2t^{k+1} + 2t^{k-1} - 1 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ \begin{cases} t > 0 \\ g(t) = \frac{t^{2k}+2t^{k-1}-1}{t^{k+1}} - 2 = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$g'(t) = \frac{(k-1)t^{2k} - 4t^{k-1} + k + 1}{t^{k+2}} = \frac{h(t)}{t^{k+2}}$$

$$h'^{k-2}(kt^{k+1} - 2) \leq 0$$

Do $h'(t) \leq 0$, ta suy ra $h(t)$ nghịch biến, do đó $g'(t)$ có tối đa một nghiệm thuộc $(0,1]$, và từ đây, ta suy ra $g(t)$ có tối đa 2 nghiệm thuộc $(0,1]$, trong đó ta đã biết trước một nghiệm luôn thỏa là 1. Từ đây, ta có thể dễ dàng kiểm tra được

$$f(t) \geq \min\{f(0), f(1)\} = \min\left\{1, \frac{2^{k+1}}{3^k}\right\}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^k}{(a+b+c)^k} \geq \min\left\{\frac{1}{2^{k-1}}, \frac{4}{3^k}\right\}$$

Và do đó

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{(a+b+c)^2} \geq \frac{4}{9}$$

Từ đây, trong trường hợp $k \geq 2$, sử dụng bất đẳng thức Holder, ta được

$$\frac{\sum\limits_{cyc} \frac{a^k}{(a+b+c)^k}}{4} \geq \left[\frac{\sum\limits_{cyc} \frac{a^2}{(a+b+c)^2}}{4} \right]^{\frac{k}{2}} \geq \frac{1}{3^k}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^k}{(a+b+c)^k} \geq \frac{4}{3^k}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. ■

Bài toán 2.87 *Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nhọn. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{b+c-a}{a}} + \sqrt{\frac{c+a-b}{b}} + \sqrt{\frac{a+b-c}{c}} \geq 3.$$

(Virgil Nicula)

Lời giải. Đặt

$$\begin{aligned} A &= a + \sqrt{a(b+c-a)} \\ B &= b + \sqrt{b(c+a-b)} \\ C &= c + \sqrt{c(a+b-c)} \end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned} x &= 1 - \frac{b+c-a}{\sqrt{b(a+c-b)} + \sqrt{c(a+b-c)}} \\ y &= 1 - \frac{c+a-b}{\sqrt{c(a+b-c)} + \sqrt{a(b+c-a)}} \\ z &= 1 - \frac{a+b-c}{\sqrt{a(b+c-a)} + \sqrt{b(c+a-b)}} \end{aligned}$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned} A - B &= (a-b) + \left[\sqrt{a(b+c-a)} - \sqrt{b(c+a-b)} \right] \\ &= (a-b) \left[1 - \frac{a+b-c}{\sqrt{a(b+c-a)} + \sqrt{b(c+a-b)}} \right] = z(a-b) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(\sqrt{\frac{b+c-a}{a}}-1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{b+c-2a}{A}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)(A-B)C\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}zC(a-b)^2\ge 0$$

Do tính đối xứng, ta có thể giả sử $a\ge b\ge c\Rightarrow b\ge\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\ge\frac{a}{\sqrt{2}}$ (vì theo giả thiết, tam giác đã cho là tam giác nhọn), khi đó ta có

$$\sqrt{c(a+b-c)}\ge\sqrt{b(a+c-b)}\ge\sqrt{a(b+c-a)}$$

Vì $\sqrt{b(a+c-b)}\ge\sqrt{bc}$, $\sqrt{c(a+b-c)}\ge\sqrt{bc}$, nên ta có

$$\begin{aligned} x &= 1-\frac{b+c-a}{\sqrt{b(a+c-b)}+\sqrt{c(a+b-c)}}\ge 1-\frac{b+c-a}{2\sqrt{bc}}\\ &= \frac{a-\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{2\sqrt{bc}}\ge 0\end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh rằng

$$y\ge 0,\quad by+cz\ge 0$$

Thật vậy, ta có

$$\sqrt{c(a+b-c)}\ge\sqrt{a(b+c-a)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{c(a+b-c)}+\sqrt{a(b+c-a)}\ge\sqrt{3a(b+c-a)+c(a+b-c)}$$

Do đó, để chứng minh $y\ge 0$, ta chỉ cần chỉ ra được

$$3a(b+c-a)+c(a+b-c)\ge(a+c-b)^2$$

$$\Leftrightarrow -2c^2+(3b+2a)c-(a-b)(4a-b)\ge 0$$

Đây là hàm tăng theo c và do $c\ge\sqrt{a^2-b^2}$, nên ta chỉ cần chứng minh

$$-2(a^2-b^2)+(2a+3b)\sqrt{a^2-b^2}-(a-b)(4a-b)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (2a+3b)\sqrt{a^2-b^2} \ge (a-b)(6a+b)$$
$$\Leftrightarrow (2a+3b)\sqrt{a+b} \ge \sqrt{a-b}(6a+b)$$

Do $b \ge \frac{a}{\sqrt{2}}$, ta có
$$\sqrt{a+b} \ge 2\sqrt{a-b}$$
và
$$2(2a+3b)-6a-b = 5b-2a \ge 0$$
Tiếp theo, ta sẽ chứng minh
$$by+cz \ge 0$$
$$\Leftrightarrow b+c \ge \frac{b(c+a-b)}{\sqrt{c(a+b-c)}+\sqrt{a(b+c-a)}} + \frac{c(a+b-c)}{\sqrt{a(b+c-a)}+\sqrt{b(c+a-b)}}$$
Vì
$$\sqrt{a(b+c-a)}+\sqrt{b(c+a-b)} \le \sqrt{c(a+b-c)}+\sqrt{a(b+c-a)}$$
và
$$\sqrt{a(b+c-a)}+\sqrt{b(c+a-b)} \ge \sqrt{b(c+a-b)+3a(b+c-a)}$$
Ta chỉ cần chứng minh
$$b+c \ge \frac{b(c+a-b)+c(a+b-c)}{\sqrt{b(c+a-b)+3a(b+c-a)}}$$
$$\Leftrightarrow f(a) = -4(b+c)^2a^2+(b+c)(6b^2+3bc+5c^2)a-(b-c)(2b^3-b^2c+4bc^2-c^3) \ge 0$$
Do $f(a)$ là hàm lõm, ta dễ thấy
$$f(a) \ge \min\left\{f(b), f\left(\sqrt{b^2+c^2}\right)\right\}$$
Ta có
$$f(b) = c(4b^3-b^2c+10bc^2-c^3) \ge 0$$
$$f\left(\sqrt{b^2+c^2}\right) = (b+c)(6b^2+3bc+5c^2)\sqrt{b^2+c^2}-6b^4-5b^3c-13b^2c^2-3bc^3-5c^4$$
và
$$f\left(\sqrt{b^2+c^2}\right) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (b+c)(6b^2+3bc+5c^2)\sqrt{b^2+c^2} \ge 6b^4+5b^3c+13b^2c^2+3bc^3+5c^4$$
Do
$$\begin{aligned}&\left(b^2+c^2+\frac{1}{2}bc\right)(6b^2+3bc+5c^2)-(6b^4+5b^3c+13b^2c^2+3bc^3+5c^4)\\ =\ &\frac{1}{2}bc(2b^2-bc+5c^2) \ge 0\end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh

$$(b+c)\sqrt{b^2+c^2} \ge b^2+c^2+\frac{1}{2}bc$$

hiển nhiên đúng vì

$$(b+c)^2(b^2+c^2) - \left(b^2+c^2+\frac{1}{2}bc\right)^2 = \frac{1}{4}bc(4b^2+4c^2-bc) \ge 0$$

Từ đây, với chú ý rằng

$$b^3(a+c-b) - c^3(a+b-c) = (b-c)[b^2(a-b)+c^2(a-c)+abc] \ge 0$$

$$\Rightarrow b\sqrt{b(a+c-b)} \ge c\sqrt{c(a+b-c)}$$

$$\Rightarrow bB - cC = b^2 - c^2 + \left[b\sqrt{b(a+c-b)} - c\sqrt{c(a+b-c)}\right] \ge 0$$

và

$$(a-c)^2 \ge \frac{b^2}{c^2}(a-b)^2$$

Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} zC(a-b)^2 &\ge yB(a-c)^2 + zC(a-b)^2 \ge (a-b)^2\left(\frac{yBb^2}{c^2}+Cz\right) \\ &\ge (a-b)^2\left(\frac{ybcC}{c^2}+Cz\right) = \frac{C(a-b)^2(yb+cz)}{c} \ge 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài toán 2.88 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a^2+b^2+c^2 \ge 5\left(\frac{ab^3}{3a^2+2b^2}+\frac{bc^3}{3b^2+2c^2}+\frac{ca^3}{3c^2+2a^2}\right).$$

(Võ Quốc Bá Cẩn, Nguyễn Huỳnh Bảo Trung)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(11b^2-a^2-\frac{50ab^3}{3a^2+2b^2}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} z(a-b)^2 \ge 0$$

trong đó $x = \frac{22c^2-6bc-3b^2}{3b^2+2c^2}$ và y, z tương tự.
Trường hợp 1. Nếu $a \ge b \ge c$, khi đó ta có

$$y = \frac{22a^2 - 6ac - 3c^2}{2a^2 + 3c^2} \ge 0$$

Vì

$$22a^2 - 6ac - 3c^2 \ge 22b^2 - 6bc - 3c^2 \ge 0$$
$$\frac{a^2}{2a^2+3c^2} \ge \frac{b^2}{2b^2+3c^2} \ge \frac{b^2}{3b^2+2c^2}$$
$$\begin{aligned}
\Rightarrow a^2y + 2b^2x &= \frac{a^2(22a^2-6ac-3c^2)}{2a^2+3c^2} + \frac{2b^2(22c^2-6bc-3b^2)}{3b^2+2c^2} \\
&\ge \frac{b^2(22b^2-6bc-3c^2)}{3b^2+2c^2} + \frac{2b^2(22c^2-6bc-3b^2)}{3b^2+2c^2} \\
&= \frac{b^2(16b^2-18bc+41c^2)}{3b^2+2c^2} \ge 0
\end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$22a^2 - 6ac - 3c^2 \ge 22a^2 - 6ab - 3b^2 \ge 0$$
$$\frac{1}{2a^2+3c^2} \ge \frac{1}{2a^2+3b^2} \ge \frac{1}{3a^2+2b^2}$$
$$\begin{aligned}
\Rightarrow y + 2z &= \frac{22a^2-6ac-3c^2}{2a^2+3c^2} + \frac{2(22b^2-6ab-3a^2)}{3a^2+2b^2} \\
&\ge \frac{22a^2-6ab-3b^2}{3a^2+2b^2} + \frac{2(22b^2-6ab-3a^2)}{3a^2+2b^2} \\
&= \frac{16a^2-18ab+41b^2}{3a^2+2b^2} \ge 0
\end{aligned}$$

Khi đó, chú ý rằng $(a-c)^2 \ge \max\left\{\frac{a^2}{b^2}(b-c)^2, (a-b)^2\right\}$, ta có

$$\begin{aligned}
2\sum_{cyc} z(a-b)^2 &= [y(a-c)^2 + 2x(b-c)^2] + [y(a-c)^2 + 2z(a-b)^2] \\
&\ge \left[y \cdot \frac{a^2}{b^2}(b-c)^2 + 2x(b-c)^2\right] + [y(a-b)^2 + 2z(a-b)^2] \\
&= \frac{(b-c)^2}{b^2}(a^2y + 2b^2x) + (a-b)^2(y+2z) \ge 0
\end{aligned}$$

Trường hợp 2. Nếu $c \ge b \ge a$, ta có

$$x = \frac{22c^2 - 6bc - 3b^2}{3b^2 + 2c^2} \ge \frac{13c^2}{3b^2+2c^2} \ge \frac{13}{5}$$

$$z = \frac{22b^2 - 6ab - 3b^2}{3a^2 + 2b^2} \geq \frac{13b^2}{3a^2 + 2b^2} \geq \frac{13}{5}$$

Suy ra

$$x(b-c)^2 + z(a-b)^2 \geq \frac{13}{5}[(b-c)^2 + (a-b)^2] \geq \frac{13}{10}(a-c)^2$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{13}{10} + y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3c^2 + 82a^2 - 20ac \geq 0.$$

hiển nhiên đúng.
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Bài toán 2.89 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$4\left(\frac{a^2 + bc}{(b+c)^2} + \frac{b^2 + ca}{(c+a)^2} + \frac{c^2 + ab}{(a+b)^2}\right) \geq 3 + \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{ab + bc + ca}.$$

(Ji Chen)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$4\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{2\left(\sum_{cyc} a\right)^2}{\sum_{cyc} ab}$$

$$\Rightarrow 0 \geq \frac{2\left(\sum_{cyc} a\right)^2}{\sum_{cyc} ab} - 4\sum_{cyc} \frac{a}{b+c}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
4\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{(b+c)^2} &\ge 4\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{(b+c)^2}+\frac{2\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}{\sum\limits_{cyc}ab}-4\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\\
&= 4\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2}+\frac{2\left(\sum\limits_{cyc}a\right)^2}{\sum\limits_{cyc}ab}\\
&= 4\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{(b+c)^2}+\frac{\sum\limits_{cyc}ab-\sum\limits_{cyc}a^2}{\sum\limits_{cyc}ab}+3+\frac{3\sum\limits_{cyc}a^2}{\sum\limits_{cyc}ab}\\
&= \sum_{cyc}(a-b)(a-c)\left[\frac{4}{(b+c)^2}-\frac{1}{ab+bc+ca}\right]+3+\frac{3\sum\limits_{cyc}a^2}{\sum\limits_{cyc}ab}
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc}(a-b)(a-c)\left[\frac{4}{(b+c)^2}-\frac{1}{ab+bc+ca}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)(a-c)\left[\frac{4[bc+a(b+c)]}{(b+c)^2}-1\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}\frac{a(a-b)(a-c)}{b+c}\ge \sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)(b-c)^2}{(b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}\frac{a(a-b)(a-c)}{b+c}\ge \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\left(\sum\limits_{cyc}a^2+3\sum\limits_{cyc}ab\right)}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$$

Do tính đối xứng, ta có thể giả sử $a\ge b\ge c$, khi đó

$$\begin{aligned}
4\sum_{cyc}\frac{a(a-b)(a-c)}{b+c} &\ge 4(a-b)\left[\frac{a(a-c)}{b+c}-\frac{b(b-c)}{b+c}\right]\\
&= \frac{4(a-b)^2(a^2+b^2+ab-c^2)}{(a+c)(b+c)}\ge\frac{8ab(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}
\end{aligned}$$

và

$$\begin{cases} (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \le a^2b^2(a-b)^2 \\ \sum\limits_{cyc} a^2 + 3\sum\limits_{cyc} ab \le a^2 + 2b^2 + 3(2ab+b^2) = (a+b)(a+5b) \\ (a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2 \ge ab(a+c)(b+c)(a+b)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\left(\sum\limits_{cyc} a^2 + 3\sum\limits_{cyc} ab\right)}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} \le \frac{ab(a-b)^2(a+5b)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

Ta cần phải chứng minh

$$\frac{8ab(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \ge \frac{ab(a-b)^2(a+5b)}{(a+b)(a+c)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b) \ge a+5b$$

$$\Leftrightarrow 7a+3b \ge 0.$$

hiển nhiên đúng.
Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 23 *Ta có một kết quả tương tự là*

$$2\left(\frac{a^2+bc}{b^2+c^2} + \frac{b^2+ca}{c^2+a^2} + \frac{c^2+ab}{a^2+b^2}\right) + \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \ge 7$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Thật vậy, bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2-b^2-c^2-(b-c)^2}{b^2+c^2} + \frac{\sum\limits_{cyc} a^2 - \sum\limits_{cyc} ab}{\sum\limits_{cyc} ab} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a^2-b^2)\left(\frac{1}{b^2+c^2} - \frac{1}{a^2+c^2}\right) - \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} + \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{2(ab+bc+ca)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} z(a-b)^2 \ge 0$$

trong đó $x = \frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)} + \frac{1}{2(ab+bc+ca)} - \frac{1}{b^2+c^2}$ *và* y, z *tương tự.*
Do tính đối xứng, ta có thể giả sử $a \ge b \ge c$*, khi đó ta có*

$$\frac{(a+b)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \ge \frac{(a+c)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)} \ge \frac{(b+c)^2}{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$$

và

$$\frac{1}{a^2+b^2} \le \frac{1}{a^2+c^2} \le \frac{1}{b^2+c^2}$$

$$\Rightarrow z \ge y \ge x$$

Ta sẽ chứng minh

$$a^2y + b^2x \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{a^2(a+c)^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2(b+c)^2}{a^2+c^2}\right] + \frac{a^2+b^2}{2(ab+bc+ca)} \ge \frac{a^2}{a^2+c^2} + \frac{b^2}{b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{a^2(a^2+c^2)}{b^2+c^2} + \frac{b^2(b^2+c^2)}{a^2+c^2}\right] + \frac{2c}{a^2+b^2}\left(\frac{a^3}{b^2+c^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2}\right)$$

$$+ \frac{a^2+b^2}{2(ab+bc+ca)} + \frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{c^2}{b^2+c^2} \ge 2$$

Ta có

$$\frac{a^2(a^2+c^2)}{b^2+c^2} + \frac{b^2(b^2+c^2)}{a^2+c^2} - a^2 - b^2 = \frac{(a^2-b^2)^2(a^2+b^2+c^2)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{a^2(a^2+c^2)}{b^2+c^2} + \frac{b^2(b^2+c^2)}{a^2+c^2}\right] \ge 1$$

và

$$\frac{2a^3}{b^2+c^2} + \frac{2b^3}{b^2+c^2} \ge \frac{2(a^2+b^2)^2}{(a+b)(ab+c^2)} \ge \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{ab+c^2}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&\frac{2c}{a^2+b^2}\left(\frac{a^3}{b^2+c^2} + \frac{b^3}{b^2+c^2}\right) + \frac{a^2+b^2}{2(ab+bc+ca)}\\
&\ge \frac{c(a+b)}{ab+c^2} + \frac{a^2+b^2}{2(ab+bc+ca)}\\
&= 1 + \frac{c(a+b)}{ab+c^2} + \frac{(a-b)^2 - 2c(a+b)}{2(ab+bc+ca)}\\
&= 1 + \frac{(a-b)^2}{2(ab+bc+ca)} + \frac{c^2(a+b)(a+b-c)}{(ab+c^2)(ab+bc+ca)} \ge 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^2y + b^2x \ge 0$$

Khi đó từ $z \ge y \ge x$, ta được $z \ge y \ge 0$. Tiếp theo, với chú ý rằng

$$(a-c)^2 \ge \frac{a^2}{b^2}(b-c)^2$$

Ta có

$$\sum_{cyc} z(a-b)^2 \geq x(b-c)^2 + y \cdot \frac{a^2}{b^2}(b-c)^2 = \frac{(b-c)^2}{b^2}(a^2y + b^2x) \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh.

■

Bài toán 2.90 *Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn $a+b+c+d = abc+bcd+cda+dab$. Chứng minh rằng*

$$a+b+c+d+\frac{2a}{a+1}+\frac{2b}{b+1}+\frac{2c}{c+1}+\frac{2d}{d+1} \geq 8.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Đặt $x = a+b+c+d = abc+bcd+cda+dab$, khi đó từ bất đẳng thức AM-GM, ta có $x \geq 4$. Chú ý rằng

$$2\sum_{sym} ab \geq 3\sqrt{\left(\sum_{cyc} a\right)\left(\sum_{cyc} abc\right)} = 3x$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{2a}{a+1} \geq \frac{2x^2}{x+\sum_{cyc} a^2} = \frac{2x^2}{x+x^2-2\sum_{sym} ab} \geq \frac{2x^2}{x^2+x-3x} = \frac{2x}{x-2}$$

Ta cần chứng minh

$$x + \frac{2x}{x-2} \geq 8$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 \geq 0.$$

hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$. ■

Bài toán 2.91 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c = 3$. Chứng minh rằng*

$$8\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + 9 \geq 10(a^2+b^2+c^2).$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c \Rightarrow a \geq 1, \frac{3}{2} \geq b, 1 \geq c$. Ta có

$$\frac{16}{b} - 20b^2 - 69 + 84b = \left(\frac{16}{b} - 5\right)(2b-1)^2$$

$$\frac{16}{c} - 20c^2 - 69 + 84c = \left(\frac{16}{c} - 5\right)(2c-1)^2$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow & 16\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 20(b^2+c^2) \\ = \;& 138 - 84(b+c) + \left(\frac{16}{b} - 5\right)(2b-1)^2 + \left(\frac{16}{c} - 5\right)(2c-1)^2\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}& \frac{16}{a} - 20a^2 + 18 + 138 - 84(b+c) \\ &= \left(\frac{1}{a} - 5\right)(2a-2)^2 = \left(\frac{1}{a} - 5\right)[(2b-1)+(2c-1)]^2 \\ &= \left(\frac{1}{a} - 5\right)[(2b-1)^2 + (2c-1)^2 + 2(2b-1)(2c-1)]\end{aligned}$$

Khi đó, ta có thể viết lại bất đẳng thức như sau

$$\left(\frac{16}{b} + \frac{1}{a} - 10\right)(2b-1)^2 + \left(\frac{16}{c} + \frac{1}{a} - 10\right)(2c-1)^2 \geq 2\left(5 - \frac{1}{a}\right)(2b-1)(2c-1)$$

Do $a \geq b \geq c > 0$, ta có $a = 3 - b - c \leq 3 - b$ và

$$\frac{16}{c} + \frac{1}{a} - 10 \geq \frac{16}{b} + \frac{1}{a} - 10$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{16}{b} + \frac{1}{a} - 10 \geq \frac{16}{b} + \frac{1}{3-b} - 10 = \frac{5(3-2b)(3-b)+3}{b(3-b)} > 0$$

Suy ra, nếu $(2b-1)(2c-1) \leq 0$, thì bất đẳng thức là hiển nhiên.
Nếu $(2b-1)(2c-1) \geq 0$ và $b \leq 1$, ta có

$$\frac{16}{b} + \frac{1}{a} - 10 - \left(5 - \frac{1}{a}\right) = \frac{16}{b} + \frac{2}{a} - 15 > \frac{16}{b} - 15 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{16}{c} + \frac{1}{a} - 10 \geq \frac{16}{b} + \frac{1}{a} - 10 \geq 5 - \frac{1}{a} > 0$$

Do đó

$$\left(\frac{16}{b}+\frac{1}{a}-10\right)(2b-1)^2+\left(\frac{16}{c}+\frac{1}{a}-10\right)(2c-1)^2$$
$$\geq\left(5-\frac{1}{a}\right)\left[(2b-1)^2+(2c-1)^2\right]\geq 2\left(5-\frac{1}{a}\right)(2b-1)(2c-1)$$

Nếu $(2b-1)(2c-1)\geq 0$ và $b\geq 1$, ta có $c\geq \frac{1}{2}\Rightarrow a\leq \frac{5}{2}-b, b\leq \frac{5}{4}$. Ta có

$$\begin{aligned}\frac{16}{b}+\frac{1}{a}-10-\frac{6}{7}\left(5-\frac{1}{a}\right) &= \frac{16}{b}+\frac{13}{7a}-\frac{100}{7}\geq\frac{16}{b}+\frac{13}{7\left(\frac{5}{2}-b\right)}-\frac{100}{7}\\ &= \frac{2(5-4b)(56-25b)}{7b(5-2b)}\geq 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{b}+\frac{1}{a}-10\geq\frac{6}{7}\left(5-\frac{1}{a}\right)$$

Do $b\geq 1$, ta có$a=3-b-c\leq 2-c$, suy ra

$$\begin{aligned}\frac{16}{c}+\frac{1}{a}-10-\frac{7}{6}\left(5-\frac{1}{a}\right) &= \frac{16}{c}+\frac{13}{6a}-\frac{95}{7}\geq\frac{16}{c}+\frac{13}{6(2-c)}-\frac{96}{6}\\ &= \frac{(1-c)(178-95c)+14}{6c(2-c)}>0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{16}{c}+\frac{1}{a}-10\geq\frac{7}{6}\left(5-\frac{1}{a}\right)$$

Do đó

$$\left(\frac{16}{b}+\frac{1}{a}-10\right)(2b-1)^2+\left(\frac{16}{c}+\frac{1}{a}-10\right)(2c-1)^2$$
$$\geq\left(5-\frac{1}{a}\right)\left[\frac{6}{7}(2b-1)^2+\frac{7}{6}(2c-1)^2\right]\geq 2\left(5-\frac{1}{a}\right)(2b-1)(2c-1).$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2, b=c=\frac{1}{2}$ hoặc các hoán vị tương ứng. ∎

Bài toán 2.92 *Cho* $a,b,c\in\left[0,\sqrt{3}-1\right]$ *thỏa mãn* $a^2+b^2+c^2+2abc=1$. *Chứng minh rằng*

$$3(a+b+c)\geq 4(1+abc).$$

(Jack Garfunkel)

Lời giải. Do tính đối xứng, giả sử $a \ge b \ge c \Rightarrow \sqrt{3}-1 \ge a \ge \frac{1}{2}$. Đặt $f(a,b,c) = 3(a+b+c) - 4(1+abc)$, ta sẽ chứng minh

$$f(a,b,c) \ge f\left(a, \sqrt{\frac{1-a}{2}}, \sqrt{\frac{1-a}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 3\left[b+c-\sqrt{2(1-a)}\right] + 2a(1-a-2bc) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3[(b+c)^2+2a-2]}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} + 2a(1-a-2bc) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3[(b-c)^2+2(2bc+a-1)]}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} + 2a(1-a-2bc) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(b-c)^2}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} + 2(1-a-2bc)\left[a - \frac{3}{b+c+\sqrt{2(1-a)}}\right] \ge 0$$

Chú ý rằng $(1+a)(1-a-2bc) = (b-c)^2$, bất đẳng thức tương đương

$$\Leftrightarrow \frac{3(b-c)^2}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} + \frac{2(b-c)^2}{1+a}\left[a - \frac{3}{b+c+\sqrt{2(1-a)}}\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(a+1)}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} + 2a - \frac{6}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2a \ge \frac{3(1-a)}{b+c+\sqrt{2(1-a)}}$$

Do $a \le 1$ nên

$$a^2 + (b+c)^2 \ge a^2+b^2+c^2+2abc = 1$$

$$\Rightarrow b+c \ge \sqrt{1-a^2} \ge \sqrt{1-a}$$

Suy ra

$$2a - \frac{3(1-a)}{b+c+\sqrt{2(1-a)}} \ \ge \ 2a - \frac{3(1-a)}{\sqrt{1-a}+\sqrt{2(1-a)}} = 2a - \frac{3}{\sqrt{2}+1}\sqrt{1-a} > 0$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng

$$f\left(a, \sqrt{\frac{1-a}{2}}, \sqrt{\frac{1-a}{2}}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3\left[a+\sqrt{2(1-a)}\right] - 2a(1-a) - 4 \ge 0$$

Đặt $t^2 = 2(1-a)$ $(t \geq 0) \Rightarrow 1 \geq t \geq \sqrt{3}-1, a = \frac{2-t^2}{2}$, bất đẳng thức trở thành

$$3\left(\frac{2-t^2}{2}+t\right) - t^2 \cdot \frac{2-t^2}{2} - 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(t-1)^2(t^2+2t-2) \geq 0.$$

hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$ hoặc $b = c = \frac{\sqrt{3}-1}{2}, a = \sqrt{3}-1$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 24 *Đặt $a = \sin\frac{A}{2}, b = \sin\frac{B}{2}, c = \sin\frac{C}{2}$ thì A, B, C là 3 góc của một tam giác và $A, B, C \leq 2\arcsin\left(\sqrt{3}-1\right)$, ta được bất đẳng thức Jack Garfunkel với một giả thiết "lỏng" hơn là*

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \geq \frac{4}{3}\left(1 + \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

■

Bài toán 2.93 *Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc \geq 1$. Chứng minh rằng với mọi $k \geq 1$, ta có*

$$a+b+c \geq \frac{a+k}{b+k} + \frac{b+k}{c+k} + \frac{c+k}{a+k}.$$

(Phạm Kim Hùng)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a+k)\left(1 - \frac{k}{b+k}\right) + (k-1)\sum_{cyc} a \geq 3k$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{b(a+k)}{b+k} + (k-1)\sum_{cyc} a \geq 3k$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{b(a+k)}{b+k} \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 3$$

$$\sum_{cyc} a \geq 3\sqrt[3]{abc} \geq 3$$

Do đó

$$\sum_{cyc}\frac{b(a+k)}{b+k} + (k-1)\sum_{cyc} a \geq 3 + 3(k-1) = 3k.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$. ■

Bài toán 2.94 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$a\sqrt{a^2+bc}+b\sqrt{b^2+ca}+c\sqrt{c^2+ab} \ge \frac{\sqrt{2}}{3}(a+b+c)^2.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} a\sqrt{2(a^2+bc)} \ge \sum_{cyc} a\sqrt{(a+b)(a+c)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a\left[\sqrt{2(a^2+bc)}-\sqrt{(a+b)(a+c)}\right] \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{\sqrt{2(a^2+bc)}+\sqrt{(a+b)(a+c)}} \ge 0$$

Do tính đối xứng, ta có thể giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó ta có

$$a\sqrt{(b+c)(b+a)} \ge b\sqrt{(a+b)(a+c)}, \quad a\sqrt{2(b^2+ca)} \ge b\sqrt{2(a^2+bc)}$$

Từ đó

$$\frac{a}{\sqrt{2(a^2+bc)}+\sqrt{(a+b)(a+c)}} \ge \frac{b}{\sqrt{2(b^2+ca)}+\sqrt{(b+c)(b+a)}}$$

Nên

$$\begin{aligned}&\sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{\sqrt{2(a^2+bc)}+\sqrt{(a+b)(a+c)}}\\ \ge\ & (a-b)\left[\frac{a}{\sqrt{2(a^2+bc)}+\sqrt{(a+b)(a+c)}}-\frac{b}{\sqrt{2(b^2+ca)}+\sqrt{(b+c)(b+a)}}\right] \ge 0\end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} a\sqrt{(a+b)(a+c)} \ge \frac{2}{3}\left(\sum_{cyc} a\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2(a+b)(a+c) + 2\sum_{cyc} ab\sqrt{(a+b)^2(a+c)(b+c)} \ge \frac{4}{9}\left(\sum_{cyc} a\right)^4$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$(a+b)^2(a+c)(b+c) = (a^2+ab+bc+ca)(b^2+ab+bc+ca) \ge (ab+ab+bc+ca)^2$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc} a^2(a+b)(a+c) + 2\sum_{cyc} ab(2ab+ac+bc) \ge \frac{4}{9}\left(\sum_{cyc} a\right)^4$$

Do tính thuần nhất, ta chuẩn hóa cho $a+b+c=1$. Đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$, khi đó ta có

$$\sum_{cyc} a^2(a+b)(a+c) = \sum_{cyc} a^2(a+bc) = 1-3q+4r$$

$$\sum_{cyc} ab(2ab+ac+bc) = 2\left(\sum_{cyc} ab\right)^2 - 2\sum_{cyc} a^2bc = 2q^2-2r$$

Bất đẳng thức trở thành

$$1-3q+4r+2(2q^2-2r) \ge \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}(1-3q)(5-12q) \ge 0.$$

hiển nhiên đúng do $q \le \frac{1}{3}$.
Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Bài toán 2.95 *Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} + \frac{b+3}{(b+1)^2} + \frac{c+3}{(c+1)^2} \ge 3.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Ta có một chú ý rằng luôn có ít nhất 2 trong 3 số a,b,c, chẳng hạn a,b sao cho $(a-1)(b-1) \ge 0 \Rightarrow 1+ab \ge a+b$. Ta có

$$\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} - \frac{1}{1+ab} = \frac{ab(a-b)^2+(ab-1)^2}{(1+ab)(1+a)^2(1+b)^2} \ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^2} \ge \frac{1}{1+ab} = \frac{c}{c+1}$$

và

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} \ge \frac{4}{a+b+2} \ge \frac{4}{ab+3} = \frac{4c}{1+3c}$$

Do đó

$$\begin{aligned}\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2} &= 2\left[\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(b+1)^2}\right]+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}\\ &\geq \frac{2c}{c+1}+\frac{4c}{1+3c}\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{2c}{c+1}+\frac{4c}{1+3c}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\geq 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{4c}{1+3c}\geq \frac{c(c+3)}{(c+1)^2}$$

$$\Leftrightarrow 4(c+1)^2\geq (c+3)(3c+1)$$

$$\Leftrightarrow (c-1)^2\geq 0.$$

hiển nhiên đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$ hoặc $a\to+\infty, b\to+\infty, c\to 0$ hoặc các hoán vị tương ứng. ■

Bài toán 2.96 *Cho các số không âm a,b,c,d,k. Chứng minh rằng*

$$\left(1+\frac{ka}{b+c}\right)\left(1+\frac{kb}{c+d}\right)\left(1+\frac{kc}{d+a}\right)\left(1+\frac{kd}{a+b}\right)\geq (1+k)^2.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $(a-c)(d-b)\geq 0$. Thật vậy, nếu $(a-c)(d-b)\leq 0$, ta lấy $(a',b',c',d')=(b,c,d,a)$ khi đó

$$\begin{aligned}P(a',b',c',d') &= \left(1+\frac{ka}{b+c}\right)\left(1+\frac{kb}{c+d}\right)\left(1+\frac{kc}{d+a}\right)\left(1+\frac{kd}{a+b}\right)\\ &= P(a,b,c,d)\end{aligned}$$

và

$$(a'-c')(d'-b')=(b-d)(a-c)\geq 0$$

Từ đây, ta có

$$\left(1+\frac{ka}{b+c}\right)\left(1+\frac{kb}{c+d}\right)\geq 1+k\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}\right)\geq 1+\frac{k(a+b)^2}{ab+bc+ac+bd}$$

$$\left(1+\frac{kc}{d+a}\right)\left(1+\frac{kd}{a+b}\right)\geq 1+k\left(\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\right)\geq 1+\frac{k(c+d)^2}{cd+da+ac+bd}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} P(a,b,c,d) &\geq \left(1+\frac{k(a+b)^2}{ab+bc+ac+bd}\right)\left(1+\frac{k(c+d)^2}{cd+da+ac+bd}\right) \\ &\geq \left[1+\frac{k(a+b)(c+d)}{\sqrt{(ab+bc+ac+bd)(cd+da+ac+bd)}}\right]^2 \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có

$$\frac{(a+b)(c+d)}{\sqrt{(ab+bc+ac+bd)(cd+da+ac+bd)}} \geq \frac{2(a+b)(c+d)}{ab+bc+cd+da+2ac+2bd}$$

và

$$2(a+b)(c+d)-(ab+bc+cd+da+2ac+2bd)=(a-c)(d-b)\geq 0.$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = c, b = d = 0$ hoặc $a = c = 0, b = d$. ■

Bài toán 2.97 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c}\right)^2+\left(\frac{c}{c+a}\right)^2 \leq \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}.$$

(Nguyễn Văn Thạch)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$4\sum_{cyc}\frac{a^2[c(a+b)+ab]}{(a+b)^2} \leq 3\sum_{cyc}a^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}\frac{ca^2}{a+b}+4\sum_{cyc}\frac{a^3b}{(a+b)^2} \leq 3\sum_{cyc}a^2$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$4\sum_{cyc}\frac{a^3b}{(a+b)^2} \leq \sum_{cyc}a^2$$

Ta cần chứng minh

$$2\sum_{cyc}\frac{ca^2}{a+b} \leq \sum_{cyc}a^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2 - 2\sum_{cyc} ab + 2abc\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \ge 0$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$2abc\sum_{cyc} \frac{1}{a+b} \ge \frac{9abc}{\sum\limits_{cyc} a}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc} a^2 - 2\sum_{cyc} ab + \frac{9abc}{\sum\limits_{cyc} a} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 + 3abc \ge \sum_{cyc} ab(a+b).$$

Đây chính là bất đẳng thức Schur bậc 3. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Bài toán 2.98 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3abc}{2(a^2b+b^2c+c^2a)} \ge 2.$$

(Bách Ngọc Thành Công)

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh kết quả sau

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{(a+b+c)^2} + \frac{abc}{a^2b+b^2c+c^2a} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{abc}{a^2b+b^2c+c^2a} \ge \frac{2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2}{(a+b+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow abc(a+b+c)^2 \ge [2(ab+bc+ca)-a^2-b^2-c^2](a^2b+b^2c+c^2a)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2b(a-b)^2 \ge abc\left(\sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} ab\right)$$

Từ đây, giả sử $c = \min\{a, b, c\}$ và đặt $a = c + x, b = c + y$ $(x, y \ge 0)$, ta có thể dễ dàng biến đổi bất đẳng thức về dạng sau

$$(x^2-xy+y^2)c^3 + (2x^3-3x^2y+2y^3)c^2 + (x^2-y^2)(x^2-xy-y^2)c + x^2y(x-y)^2 \ge 0$$

Nếu $y \geq x$ hoặc $x \geq 3y$ thì bất đẳng thức trên là hiển nhiên. Nếu $3y \geq x \geq y$, ta sẽ chứng minh

$$f(c) = (2x^3 - 3x^2y + 2y^3)c^2 + (x^2 - y^2)(x^2 - xy - y^2)c + x^2y(x-y)^2 \geq 0$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\Delta_f &= (x^2-y^2)^2(x^2-xy-y^2)^2 - 4x^2y(x-y)^2(2x^3-3x^2y+2y^3) \\
&= (x-y)^2[(x+y)^2(x^2-xy-y^2)^2 - 4x^2y(2x^3-3x^2y+2y^3)] \\
&\leq (x-y)^2[(x+x)^2(x^2-xy-y^2)^2 - 4x^2y(2x^3-3x^2y+2y^3)] \\
&= 4x^2(x-y)^2[(x^2-xy-y^2)^2 - y(2x^3-3x^2y+2y^3)] \\
&= 4x^2(x-y)^3[x^2(x-3y) + y^2(y-x)] \leq 0
\end{aligned}$$

Vậy nên bất đẳng thức trên đúng.
Trở lại bài toán của ta, sử dụng bất đẳng thức trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} - \frac{3\sum\limits_{cyc} a^2}{\left(\sum\limits_{cyc} a\right)^2} \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} - \frac{\sum\limits_{cyc}(a-b)^2}{(a+b+c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)(a^2-b^2)[(a+b+c)^2 - 2(a+c)(b+c)] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$, khi đó ta có

$$a^2+b^2-c^2 \geq a^2+c^2-b^2 \geq 0, \quad (a-c)(a^2-c^2) \geq (b-c)(b^2-c^2) \geq 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & \sum_{cyc}(a-b)(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2) \\
&\geq (a-c)(a^2-c^2)(a^2+c^2-b^2) + (b-c)(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2) \\
&\geq (b-c)(b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2) + (b-c)(b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2) \\
&= 2c^2(b-c)(b^2-c^2) \geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ hoặc các hoán vị. ■

Bài toán 2.99 *Cho các số dương x, y, z thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{2}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 1.$$

(Phạm Văn Thuận)

Lời giải. Do $x, y, z > 0, xyz = 1$ nên tồn tại các số dương a, b, c sao cho $x = \frac{b}{a}, y = \frac{c}{b}, z = \frac{a}{c}$. Khi đó bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{(a+b)^2} + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 1$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\left[\sum_{cyc} \frac{a^2}{(a+b)^2}\right]\left[\sum_{cyc}(a+b)^2(a+c)^2\right] \geq \left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab\right)^2$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{\left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab\right)^2}{\sum_{cyc}(a+b)^2(a+c)^2} + \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 1 - \frac{\left(\sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} ab\right)^2}{\sum_{cyc}(a+b)^2(a+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{4abc\sum_{cyc} a}{\sum_{cyc}(a+b)^2(a+c)^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a+b)^2(a+c)^2 \geq 2(a+b)(b+c)(c+a)\sum_{cyc} a$$

Đặt $m = a+b, n = b+c, p = c+a$ thì bất đẳng thức trở thành

$$m^2 + n^2 + n^2p^2 + p^2m^2 \geq mnp(m+n+p).$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hoặc $x \to 0, y \to +\infty, z \to +\infty$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 25 *Chúng ta cũng có 2 lời giải khác cho bài toán này, xem ở [2]. Cả 2 lời giải đó, chúng đều sử dụng những công cụ đặc biệt và khá đặc sắc nhưng theo quan niệm bản thân, chúng tôi thấy rằng những lời giải sử dụng bất đẳng thức kinh điển để giải bất đẳng thức luôn là những lời giải đặc sắc và hấp dẫn nhất, chúng luôn dễ hiểu và không đòi hỏi chúng ta phải có một kiến thức gì cao xa cả.*
Chúng ta cũng có một kết quả tương tự là

$$\frac{a^2}{(a+b)^2}+\frac{b^2}{(b+c)^2}+\frac{c^2}{(c+a)^2}+\frac{ab+bc+ca}{4(a^2+b^2+c^2)}\geq 1$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Để chứng minh kết quả này, chúng ta cần có bổ đề sau

$$a^4b^2+b^4c^2+c^4a^2+6a^2b^2c^2\geq\frac{3}{2}abc(a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2)$$

Đặt $x=a^2b, y=b^2c, z=c^2a$ *thì bất đăng thức trên trở thành*

$$x^2+y^2+z^2+6\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\geq\frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{xyz}\,(x+y+z)+xy+yz+zx\right]$$

Chuẩn hóa cho $xyz=1$ *thì bất đẳng thức trở thành*

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+6-\frac{3}{2}\left(x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 0$$

Giả sử $x=\min\{x,y,z\}\Rightarrow t=\sqrt{yz}\geq 1,$ *ta có*

$$\begin{aligned} f(x,y,z)-f(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz}) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\left[2\left(\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2-3-\frac{3}{yz}\right] \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2\left(8\sqrt{yz}-3-\frac{3}{yz}\right) \\ &\geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2(8-3-3)\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x,y,z) &\geq f(x,\sqrt{yz},\sqrt{yz})=f\left(\frac{1}{t^2},t,t\right) \\ &= \frac{(t-1)^2[(t^2-2t-1)^2+t^2+1]}{2t^4}\geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức vừa phát biểu ở trên được chứng minh. Trở lại với bất đẳng thức ban đầu, bằng biến đổi tương đương, ta thấy bất đẳng thức tương đương với

$$\frac{\sum\limits_{cyc}ab}{4\sum\limits_{cyc}a^2}+\frac{\sum\limits_{cyc}a^4b^2-2abc\sum\limits_{cyc}ab(a+b)-7a^2b^2c^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}\geq 0$$

Theo kết trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{\sum\limits_{cyc} ab}{4\sum\limits_{cyc} a^2} - \frac{abc\sum\limits_{cyc} ab(a+b) + 26a^2b^2c^2}{2(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2} \ge 0$$

Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$, đặt $q = ab+bc+ca, r = abc$, khi đó bất đẳng thức tương đương

$$\frac{q}{2(1-2q)} \ge \frac{r(q-3r)+26r^2}{(q-r)^2}$$

$$\Leftrightarrow q(q-r)^2 \ge 2r(q+23r)(1-2q)$$

$$\Leftrightarrow (93q-46)r^2 + 2q(q-1)r + q^3 \ge 0$$

Đây là một hàm lõm theo r, lại có

$$f(0) = q^3 \ge 0$$

và khi $b = c = 1$ thì bất đẳng thức trở thành

$$\frac{2a+1}{a^2+2} \ge \frac{2a(2a^2+2a+2+26a)}{4(a+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2a+1}{a^2+2} \ge \frac{a(a^2+14a+1)}{(a+1)^4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^3-3a+6a+1)(a-1)^2}{(a^2+2)(a+1)^4} \ge 0.$$

Bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng nên ta có đpcm.

■

Bài toán 2.100 *Cho các số không âm x, y, z, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{8x^2+yz}{y^2+z^2}} + \sqrt{\frac{8y^2+zx}{z^2+x^2}} + \sqrt{\frac{8z^2+xy}{x^2+y^2}} \ge \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức GM-HM, ta có

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{8x^2+yz}{y^2+z^2}} \ge \sum_{cyc}\sqrt{\frac{8x^2+\frac{2y^2z^2}{y^2+z^2}}{y^2+z^2}} = \sqrt{2}\sum_{cyc}\frac{\sqrt{4x^2(y^2+z^2)+y^2z^2}}{y^2+z^2}$$

Đặt $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ thì ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{\sqrt{bc + 4ab + 4ac}}{b + c} \geq \frac{9}{2}$$

Bình phương 2 vế, ta được bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc} \frac{ab + bc + ca}{(b + c)^2} + 3\sum_{cyc} \frac{a}{b + c} + 2\sum_{cyc} \frac{\sqrt{[4ab + c(4a + b)][4ab + c(a + 4b)]}}{(a + c)(b + c)} \geq \frac{81}{4}$$

Với mọi $x, y \geq 0$, ta có

$$(4x + y)(x + 4y) - \frac{4(x^2 + 3xy + y^2)^2}{(x + y)^2} = \frac{xy(x - y)^2}{(x + y)^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{(4x + y)(x + 4y)} \geq \frac{2(x^2 + 3xy + y^2)}{x + y}$$

Từ đây, sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} \frac{\sqrt{[4ab + c(4a + b)][4ab + c(a + 4b)]}}{(a + c)(b + c)} &\geq \sum_{cyc} \frac{4ab + c\sqrt{(4a + b)(a + 4b)}}{(a + c)(b + c)} \\
&\geq \sum_{cyc} \frac{4ab + \frac{2c(a^2 + 3ab + b^2)}{a + b}}{(a + c)(b + c)} \\
&= 2\sum_{cyc} \frac{2ab(a + b) + c(a^2 + 3ab + b^2)}{(a + b)(b + c)(c + a)} \\
&= \frac{6\left(\sum\limits_{cyc} a\right)\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)}{(a + b)(b + c)(c + a)}
\end{aligned}$$

Ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{ab + bc + ca}{(b + c)^2} + 3\sum_{cyc} \frac{a}{b + c} + \frac{12\left(\sum\limits_{cyc} a\right)\left(\sum\limits_{cyc} ab\right)}{(a + b)(b + c)(c + a)} \geq \frac{81}{4}$$

Trong bài viết "CYH technique", chúng ta đã chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{ab + bc + ca}{(b + c)^2} \geq \frac{9}{4}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$3\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+\frac{12\left(\sum\limits_{cyc}a\right)\left(\sum\limits_{cyc}ab\right)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 18$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a^3+3abc\ge\sum_{cyc}ab(a+b).$$

Bất đẳng thức cuối chính là bất đẳng thức Schur bậc 3. Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$ hoặc $x=y,c=0$ và các hoán vị tương ứng.

Nhận xét 26 *Ngoài ra, chúng ta còn có một kết quả khá kinh ngạc là*

$$\sqrt{\frac{2(8x^2+yz)}{y^2+z^2}}\ge\frac{47x^2-y^2-y^2+2xy+2xz+14yz}{5(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)}$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Với đẳng thức xảy ra khi $(x,y,z)\sim(1,1,1),(0,1,1),(1,1,0)$.
Chúng ta có thể dễ dàng kiểm tra được

$$\sum_{cyc}\frac{47x^2-y^2-y^2+2xy+2xz+14yz}{5(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)}=9$$

Nên bất đẳng thức này chặt hơn bất đẳng thức ở bài toán ban đầu rất nhiều. Hiện nay vẫn chưa có một lời giải đơn giản nào cho bất đẳng thức trên.

■

Bài toán 2.101 *Cho các số không âm a,b,c,d, không có 3 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{a(2a+b)}{a+b+c}+\frac{b(2b+c)}{b+c+d}+\frac{c(2c+d)}{c+d+a}+\frac{d(2d+a)}{d+a+b}\ge a+b+c+d.$$

(Park Doo Sung)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{a(2a+b)}{a+b+c}\ge\sum_{cyc}a$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a(a-c)}{a+b+c}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-c)\left[\frac{a}{a+b+c}-\frac{c}{a+c+d}\right]+(b-d)\left[\frac{b}{b+c+d}-\frac{d}{a+b+d}\right]\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-c)^2(a+c)+(a-c)(ad-bc)}{(a+b+c)(a+c+d)}+\frac{(b-d)^2(b+d)+(b-d)(ab-cd)}{(a+b+d)(b+c+d)}\ge 0$$

Chú ý là

$$\begin{cases} 2(ad-bc)=(a-c)(b+d)-(b-d)(a+c) \\ 2(ab-cd)=(b-d)(a+c)-(a-c)(b+d) \end{cases}$$

Từ đây, ta có thể biến đổi bất đẳng thức về

$$\frac{(a-c)^2(2a+2c+b+d)-(a^2-c^2)(b-d)}{(a+b+c)(a+c+d)} \\ +\frac{(b-d)^2(2b+2d+a+c)-(a-c)(b^2-d^2)}{(a+b+d)(b+c+d)}\ge 0$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad & \frac{(a-c)^2(2a+2c+b+d)}{(a+b+c)(a+c+d)}+\frac{(b-d)^2(2b+2d+a+c)}{(a+b+d)(b+c+d)} \\ \ge \quad & (a-c)(b-d)\left[\frac{a+c}{(a+b+c)(a+c+d)}+\frac{b+d}{(a+b+d)(b+c+d)}\right]\end{aligned}$$

Nếu $(a-c)(b-d)\le 0$ thì bất đẳng thức hiển nhiên. Nếu $(a-c)(b-d)\ge 0$, sử dụng bất đẳng thức AM-GM

$$\begin{aligned}& \frac{(a-c)^2(2a+2c+b+d)}{(a+b+c)(a+c+d)}+\frac{(b-d)^2(2b+2d+a+c)}{(a+b+d)(b+c+d)} \\ \ge \quad & 2(a-c)(b-d)\sqrt{\frac{(2a+2c+b+d)(2b+2d+a+c)}{(a+b+c)(a+c+d)(a+b+d)(b+c+d)}}\end{aligned}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh được 2 bất đẳng thức sau

$$\sqrt{\frac{(2a+2c+b+d)(2b+2d+a+c)}{(a+b+c)(a+c+d)(a+b+d)(b+c+d)}}\ge\frac{a+c}{(a+b+c)(a+c+d)}$$

$$\sqrt{\frac{(2a+2c+b+d)(2b+2d+a+c)}{(a+b+c)(a+c+d)(a+b+d)(b+c+d)}}\ge\frac{b+d}{(a+b+d)(b+c+d)}$$

Chẳng hạn, ta sẽ chứng minh bất đẳng thức thứ nhất, bất đẳng thức tương đương

$$\frac{(2a+2c+b+d)(2b+2d+a+c)}{(a+b+d)(b+c+d)}\ge\frac{(a+c)^2}{(a+b+c)(a+c+d)}$$

Đặt $x = a + c, y = b + d$, ta có

$$\begin{aligned}\frac{(2a+2c+b+d)(2b+2d+a+c)}{(a+b+d)(b+c+d)} &\geq \frac{4(2a+2c+b+d)(2b+2d+a+c)}{(a+c+2b+2d)^2}\\ &= \frac{4(2x+y)}{x+2y}\end{aligned}$$

$$\frac{(a+c)^2}{(a+b+c)(a+c+d)} \leq \frac{(a+c)^2}{(a+c)(a+c+b+d)} = \frac{x}{x+y}$$

Và

$$\frac{4(2x+y)}{x+2y} - \frac{x}{x+y} = \frac{7x^2+10xy+4y^2}{(x+y)(x+2y)} > 0$$

nên bất đẳng thức đúng. Tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{\frac{(2a+2c+b+d)(2b+2d+a+c)}{(a+b+c)(a+c+d)(a+b+d)(b+c+d)}} \geq \frac{b+d}{(a+b+d)(b+c+d)}.$$

Vậy ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi $a = c, b = d$. ■

Bài toán 2.102 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \leq \sqrt{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{c}}\right)}.$$

(Phạm Hữu Đức)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 2\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}} \leq \left(\sum_{cyc}\sqrt{a}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

Chú ý là

$$(a^2+bc)(b^2+ca) - ab(a+c)(b+c) = c(a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}} \leq 3$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + 6 \leq \left(\sum_{cyc}\sqrt{a}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b+c}{\sqrt{bc}} - \sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(\frac{b+c}{\sqrt{bc}} - \frac{a(b+c)}{a^2+bc} - 1 \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left[\frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{2\sqrt{bc}} + \frac{(b+c)\left(a-\sqrt{bc}\right)^2}{2\sqrt{bc}(a^2+bc)} \right] \geq 0.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$. ■

Bài toán 2.103 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$a \cdot \sqrt{\frac{b}{c+a}} + b \cdot \sqrt{\frac{c}{a+b}} + c \cdot \sqrt{\frac{a}{b+c}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{a+b+c}}.$$

(Mathnfriends contest)

LỜI GIẢI. Đặt $x = bc, y = ca, z = ab$, biến đổi, ta được bất đẳng thức tương đương

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}} + \frac{y}{\sqrt{y+z}} + \frac{z}{\sqrt{z+x}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xy+yz+zx}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x+y)(y+z)}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4\sqrt{xy+yz+zx}}$$

Sử dụng bất đẳng thức sắp xếp lại (với giả thiết y là số hạng nằm giữa), ta thấy

$$\begin{aligned} VT &\leq \frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(y+z)(z+x)}} + \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} \\ &\quad + \frac{z}{\sqrt{(z+x)(z+y)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(z+x)(x+y)}} = \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{1}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{xy+yz+zx}} \cdot \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{(y+z)(y+x)}} \cdot \left[1 + \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}\right] \end{aligned}$$

Đặt $u = \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}} \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{(y+z)(y+x)}} = \sqrt{1-u^2}$. Theo bất đẳng thức AM-GM,

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{xy+yz+zx}{(y+z)(y+x)}} \cdot \left(1 + \frac{y}{\sqrt{(y+z)(y+x)}}\right) &= (1+u)\sqrt{1-u^2} = \sqrt{(1+u)^3(1-u)} \\ &= \sqrt{\frac{(1+u)\cdot(1+u)\cdot(1+u)\cdot 3(1-u)}{3}} \\ &\leq \sqrt{\frac{(3/2)^4}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■

Bài toán 2.104 *Cho các số không âm* $a_1, a_2, ..., a_n$ $(n \geq 3)$ *thỏa mãn* $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) \geq a_1a_2 + a_2a_3 + \cdots + a_na_1.$$

Lời giải. Đặt

$$f_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) - a_1a_2 - a_2a_3 - \cdots - a_na_1$$

Không mát tính tổng quát, giả sử $a_1 = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.
Nếu $a_n \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ thì

$$f_n(a_1, a_2, ..., a_n) - f_{n-1}\left(a_1, a_2, ..., a_{n-2}, \sqrt{a_{n-1}^2 + a_n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a_{n-1} + a_n - \sqrt{a_{n-1}^2 + a_n^2}\right) + (a_{n-2} + a_1)\sqrt{a_{n-1}^2 + a_n^2}$$
$$-a_{n-1}(a_{n-2} + a_n) - a_na_1 \geq \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - a_n\right)\left(a_{n-1} + a_n - \sqrt{a_{n-1}^2 + a_n^2}\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow f_n(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f_{n-1}\left(a_1, a_2, ..., a_{n-2}, \sqrt{a_{n-1}^2 + a_n^2}\right)$$

Nếu $a_n \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a_1 \geq \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a_{n-1} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Ta có

$$f_n(a_1, a_2, ..., a_n) - f_{n-1}\left(a_1, a_2, ..., a_{n-3}, \sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2}, a_n\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a_{n-2} + a_{n-1} - \sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2}\right) + a_{n-1}\left(\sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2} - a_{n-2}\right)$$
$$+a_n\left(\sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2} - a_{n-1}\right) - a_{n-2}a_{n-1}$$
$$\geq \frac{1}{\sqrt{3}}\left(a_{n-2} + a_{n-1} - \sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2} - a_{n-1}\right)$$
$$-a_{n-2}a_{n-1} = a_{n-2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - a_{n-1}\right) \geq 0$$
$$\Rightarrow f_n(a_1, a_2, ..., a_n) \geq f_{n-1}\left(a_1, a_2, ..., a_{n-3}, \sqrt{a_{n-2}^2 + a_{n-1}^2}, a_n\right).$$

Từ đây, bằng phép quy nạp theo n, ta dễ dàng chứng minh được bất đẳng thức đã cho. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $n = 3$ và $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$. ■

Bài toán 2.105 *Cho các số $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng với mọi $p > 0$, ta có*

$$\frac{a^2 - bc}{2pa^2 + p^2b^2 + c^2} + \frac{b^2 - ca}{2pb^2 + p^2c^2 + a^2} + \frac{c^2 - ab}{2pc^2 + p^2a^2 + b^2} \geq 0.$$

(Vasile Cirtoaje)

Lời giải. Bất đẳng thức tương đương

$$\sum_{cyc} \frac{2p(a^2 - bc)}{2pa^2 + p^2b^2 + c^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq \sum_{cyc} \left[1 - \frac{2p(a^2 - bc)}{2pa^2 + p^2b^2 + c^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq \sum_{cyc} \frac{(pb + c)^2}{2pa^2 + p^2b^2 + c^2}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned} 3 &= \sum_{cyc} \left(\frac{pb^2}{a^2 + pb^2} + \frac{c^2}{c^2 + pa^2} \right) \geq \sum_{cyc} \frac{(pb + c)^2}{p(a^2 + pb^2) + c^2 + pa^2} \\ &= \sum_{cyc} \frac{(pb + c)^2}{2pa^2 + p^2b^2 + c^2}. \end{aligned}$$

Nên ta có đpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a(b^2+pc^2) = b(c^2+pa^2) = c(a^2+pb^2)$.
■

Bài toán 2.106 *Cho các số không âm $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Chứng minh rằng*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{1 + x_j}}\right) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}.$$

(China TST 2006)

Lời giải. Đặt $y_1 = x_1 + 1 \Rightarrow \begin{cases} y_i \geq 1 \ \ (i = 1, 2, ..., n) \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_1 = n + 1 \end{cases}$. Bất đẳng thức tương đương với

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{y_i - 1}\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{y_i}}\right) \leq \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{y_j - 1}}{\sqrt{y_i}} \le \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{y_i - 1}}{\sqrt{y_1}} &= \frac{\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{y_1 - 1} + \sqrt{y_2 - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots + \sqrt{y_n - 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{y_1}} \\
&\le \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt{\left[\frac{1}{n} + (y_2 - 1) + \cdots + (y_n - 1)\right]\left[(y_1 - 1) + \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\right]}}{\sqrt{y_1}} \\
&= \sqrt{-ny_1 + 2(n+1) - \frac{2n+1}{ny_1}}
\end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{y_j - 1}}{\sqrt{y_i}} \le \sqrt{-ny_i + 2(n+1) - \frac{2n+1}{ny_i}} \quad \forall i = 1, 2, ..., n$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \sqrt{y_j - 1}}{\sqrt{y_i}} &\le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{-ny_i + 2(n+1) - \frac{2n+1}{ny_i}} \\
&\le \sqrt{n \sum_{i=1}^{n} \left(-ny_i + 2(n+1) - \frac{2n+1}{ny_i}\right)} \\
&= \sqrt{n\left(n(n+1) - \frac{2n+1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i}\right)} \\
&\le \sqrt{n\left(n(n+1) - \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}\right)} \\
&= \sqrt{n\left(n(n+1) - \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{n^2}{n+1}\right)} = \frac{n^2}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{1}{n}$. ■

Bài toán 2.107 *Cho các số dương a, b, c. Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2}{2a+b+c}+\frac{b^2}{2b+c+a}+\frac{c^2}{2c+a+b}\ge\frac{3}{4}\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

(Michael Rozenberg)

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\le\frac{a+b+c}{3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{2a+b+c}\ge\frac{3}{8}\left(\frac{a+b+c}{3}+\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)$$

Chuẩn hóa cho $a+b+c=1$ thì bất đẳng thức trở thành

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{a+1}-\frac{3}{8}a^2-\frac{1}{24}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{a+1}-\frac{3}{8}a^2-\frac{3}{16}a+\frac{1}{48}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}x(3a-1)^2\ge 0$$

với $x=\frac{1-2a}{1+a}$ và y, z tương tự. Ta có

$$\sum_{cyc}x(3a-1)^2=\sum_{cyc}(4x+y+z)(a-b)(a-c)$$

và

$$\begin{aligned}4x+y+z &= \frac{4(1-2a)}{1+a}+\frac{1-2b}{1+b}+\frac{1-2c}{1+c}\\ &= \frac{4(1-2a)}{1+a}+3\left(\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)-4\\ &\ge \frac{4(1-2a)}{1+a}+\frac{12}{3-a}-4=\frac{12(1-a)^2}{(1+a)(3-a)}\ge 0\end{aligned}$$

Ngoài ra, do hàm $f(t)=\frac{1-2t}{1+t}$ nghịch biến nên nếu ta giả sử $a\ge b\ge c$ thì $x\le y\le z$. Từ đó, ta có

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc}(4x+y+z)(a-b)(a-c)\\
&\ge\ (4y+z+x)(b-c)(b-a)+(4z+x+y)(a-c)(b-c)\\
&\ge\ (4y+z+x)(b-c)(b-a)+(4z+x+y)(a-b)(b-c)\\
&=\ (z-y)(a-b)(b-c)\ge 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. ■

Ví dụ 2.1 *Cho các số không âm $x_1,x_2,...,x_n$ $(n\ge 3)$ thỏa mãn $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^3x_2^2+x_2^3x_3^2+\cdots+x_n^3x_1^2+n^{2(n-1)}x_1^3x_2^3\cdots x_n^3.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Giả sử $x_1=\max\{x_1,x_2,...,x_n\}$. Ta chứng minh

$$P(x_1,x_2,...,x_n)\le P(x_1,x_2+x_3+\cdots+x_n,0,...,0)$$

Thật vậy,

$$\begin{aligned}
&P(x_1,x_2+x_3+\cdots+x_n,0,...,0)\\
&=\ x_1^3(x_2+x_3+\cdots+x_n)^2\\
&\ge\ 2(x_1^3x_2x_3+x_1^3x_3x_4+\cdots+x_1^3x_{n-1}x_n)+x_1^3x_2^2+x_1^3x_n^2\\
&\ge\ (x_1^3x_2x_3+x_1^3x_3x_4+\cdots+x_1^3x_{n-1}x_n)+(x_2^3x_3^2+x_3^3x_4^2\\
&+\cdots+x_{n-1}^3x_n^2)+x_1^3x_2^2+x_1^3x_n^2\\
&\ge\ x_1^3x_2^2+x_2^3x_3^2+\cdots+x_n^3x_1^2+x_1^3x_2x_3
\end{aligned}$$

Ta chứng minh

$$x_1^3x_2x_3\ge n^{2(n-1)}x_1^3x_2^3\cdots x_n^3$$

$$\Leftrightarrow x_2^2x_3^2x_4^3\cdots x_n^3\le\frac{1}{n^{2(n-1)}}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
x_2^2x_3^2x_4^3\cdots x_n^3\ &\le\ (x_2x_3\cdots x_n)^2\le\left(\frac{x_2+x_3+\cdots+x_n}{n-1}\right)^{2(n-1)}\\
&\le\ \left(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}{n}\right)^{2(n-1)}=\frac{1}{n^{2(n-1)}}
\end{aligned}$$

Do đó
$$P(x_1, x_2, ..., x_n) \le P(x_1, x_2 + x_3 + \cdots + x_n, 0, ..., 0)$$
Lại có
$$\begin{aligned} P(x_1, x_2 + x_3 + \cdots + x_n, 0, ..., 0) &= x_1^3(x_2 + x_3 + \cdots + x_n)^2 = x_1^3(1 - x_1)^2 \\ &= 108\left(\frac{x_1}{3}\right)^3\left(\frac{1 - x_1}{2}\right)^2 \le 108\left(\frac{x_1 + 1 - x_1}{5}\right)^5 \\ &= \frac{108}{3125}. \end{aligned}$$
Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x_1 = \frac{3}{5}, x_2 = \frac{2}{5}, x_3 = \cdots = x_n = 0$. Vậy nên $\max P = \frac{108}{3125}$. ■

Bài toán 2.108 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*
$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} + 3\sqrt{\frac{3(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}} \ge \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$
(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải. Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Ta chứng minh
$$\sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \sqrt{\frac{b+c}{a}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + 2\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} \ge \frac{b+c}{a}$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{\frac{bc}{(a+b)(a+c)}} \ge \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{bc}{a(a+c)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{bc}} \ge \frac{2a+b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2a-b-c}{\sqrt{bc}} + \frac{\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2}{\sqrt{bc}} \ge \frac{(b-c)^2}{\sqrt{(a+b)(a+c)}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}\right)^2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2a-b-c}{\sqrt{bc}} + (b-c)^2\left[\frac{1}{\sqrt{bc}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2} - \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}\right)^2}\right] \ge 0$$

Ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{bc}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}\left(\sqrt{a+b}+\sqrt{a+c}\right)^2}\\
\geq\ &\frac{1}{\sqrt{bc}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}-\frac{1}{\sqrt{(b+b)(c+c)}\left(\sqrt{b+b}+\sqrt{c+c}\right)^2}\\
=\ &\frac{3}{4\sqrt{bc}\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}>0
\end{aligned}$$

Lại có

$$\begin{cases} ab+bc+ca\geq a(b+c)\\ a^2+b^2+c^2\leq a^2+(b+c)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\geq\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}$$

Suy ra

$$VT\geq\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}+3\sqrt{\frac{3a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}}=x+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-2}}$$

với $x=\sqrt{\frac{a}{b+c}}+\sqrt{\frac{b+c}{a}}\geq 2$.Mặt khác ta dễ thấy $x+\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-2}}\geq\frac{7\sqrt{2}}{2}\ \forall x\geq 2$ nên bất đẳng thức đã cho đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)\sim\left(3+2\sqrt{2},1,0\right)$. ■

Bài toán 2.109 *Cho các số dương a,b,c,d thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{2}(a+b+c+d)\leq\sqrt[3]{(abcd+1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}.$$

(Phạm Hữu Đức)

Lời giải. Trước hết, ta sẽ chứng minh rằng

$$9(a+b+c+d)\leq 4abcd+32$$

Thật vậy, giả sử $d=\min\{a,b,c,d\}\Rightarrow 1\geq d>0$, đặt

$$P(a,b,c,d)=9(a+b+c+d)-4abcd-32$$

và

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}},\quad p=a+b+c$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3}\geq 3x\geq p\geq x\sqrt{3},\ \ x\geq 1$$

Ta chứng minh

$$P(a,b,c,d) \le P(x,x,x,d)$$

$$\Leftrightarrow 9(3x-p) \ge 4d(x^3 - abc)$$

Từ bất đẳng thức Schur bậc 4

$$\sum_{cyc} a^2(a-b)(a-c) \ge 0$$

$$\Rightarrow abc \ge \frac{(p^2-6x^2)(p^2+3x^2)}{12p}$$

Ta cần chứng minh

$$p(3x-p) \ge 4d\left[x^3 - \frac{(p^2-6x^2)(p^2+3x^2)}{12p}\right]$$

$$\Leftrightarrow (3x-p)\left[27 - \frac{d(p^3+3p^2x+6px^2+6x^3)}{p}\right] \ge 0$$

Do $3x \ge p \ge x\sqrt{3}$ nên

$$\begin{aligned} 81 - \frac{3d(p^3+3p^2x+6px^2+6x^3)}{p} &\ge 81 - 78x^2d = 81 - 26d(4-d^2) \\ &= 3 + 26(1-d)(3-d-d^2) \ge 0 \end{aligned}$$

Ta còn phải chứng minh

$$P(x,x,x,d) \le 0$$

$$\Leftrightarrow 9(3x+d) - 4x^3d \le 32$$

$$\Leftrightarrow (9-4x^3)d \le 32 - 27x$$

$$\Leftrightarrow (9-4x^3)\sqrt{4-3x^2} \le 32 - 27x$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{32-27x}{(9-4x^3)\sqrt{4-3x^2}} \ge 1$$

$$f'(x) = \frac{12(x-1)(81x^4-47x^3-119x^2+9x+81)}{(9-4x^3)^2(4-3x^2)^{3/2}} \ge 0$$

$$\Rightarrow f(x) \ge f(1) = 1$$

Trở lại bài toán, sử dung bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x^4 = abcd \le 1, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \ge \frac{4}{\sqrt[4]{abcd}} = \frac{4}{x}$$

Do đó, kết hợp với bất đẳng thức ở trên, ta chỉ cần chứng minh được

$$2(x^4+8) \le 9\sqrt[3]{\frac{4(x^4+1)}{x}}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{x(x^4+8)^3}{x^4+1} \le \frac{729}{2}$$

Ta có

$$g'(x) = \frac{(x^4+8)^2(9x^8-11x^4+8)}{(x^4+1)^2} > 0$$

$$\Rightarrow g(x) \le g(1) = \frac{729}{2}.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d = 1$. ■

Bài toán 2.110 *Cho các số không âm a, b, c, không có 2 số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{(a+2b)^2} + \frac{1}{(b+2c)^2} + \frac{1}{(c+2a)^2} \ge \frac{1}{ab+bc+ca}.$$

(Phạm Kim Hùng)

LỜI GIẢI 1. Không mất tính tổng quát giả sử $a = \max\{a, b, c\}$. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{(a+2b)^2} + \frac{1}{(c+2a)^2} \ge \frac{2}{(a+2b)(c+2a)}$$

$$\frac{1}{(a+2b)^2} + \frac{1}{(b+2c)^2} \ge \frac{2}{(a+2b)(b+2c)}$$

Nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{1}{(b+2c)^2} + \frac{2}{(a+2b)(c+2a)} \ge \frac{1}{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow f(a) = 2(b+c)a^3 + (2b^2 - bc - 7c^2)a^2 + (4c^3 - b^2c - bc^2 - 2b^3)a + 2b^2c^2 \ge 0$$

hoặc

$$\frac{1}{(c+2a)^2} + \frac{2}{(a+2b)(b+2c)} \ge \frac{1}{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow g(a) = 4a^3b + (2c^2 - bc - 7b^2)a^2 + (2b^3 - b^2c - bc^2)a + 2b^3c + 2b^2c^2 - 2bc^3 \ge 0$$

Ta sẽ chứng minh rằng trong 2 bất đẳng thức trên, có ít nhất 1 bất đẳng thức đúng. Để làm được điều này, ta chỉ cần chứng minh được

$$f(a) + g(a) \ge 0$$

$\Leftrightarrow h(a) = 2(3b+c)a^3 - (5b^2+2bc+5c^2)a^2 + 2(2c^3 - b^2c - bc^2)a + 2b^3c + 4b^2c^2 - 2bc^3 \geq 0$

Ta có

$$\begin{aligned} h'(a) &= 6(3b+c)a^2 - 2(5b^2+2bc+5c^2)a + 4c^3 - 2b^2c - 2bc^2 \\ &= 10ab(a-b) + 4ab(a-c) + 2c(a-c)(3a-2c) + 2b(a^2-bc) + 2b(a^2-c^2) \\ &= 10ab(a-b) + 2b(a^2-bc) + 2(a-c)(3ab+3ac+bc-2c^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Nên $h(a)$ đồng biến. Do đó
Nếu $b \geq c$ thì
$$h(a) \geq h(b) = b(b+2c)(b-c)^2 \geq 0$$
Nếu $c \geq b$ thì
$$h(a) \geq h(c) = c(2b+c)(b-c)^2 \geq 0.$$
Bất đẳng thức được chứng minh xong. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$. ■
Lời giải 2. Giả sử $a = \max\{a, b, c\}$ và xét 2 trường hợp
Trường hợp 1. Nếu $a \leq 3b + c$. Đặt $a + 2b = x + y, b + 2c = y + z, c + 2a = z + x$, ta được
$$x = \frac{3a+b-c}{2} \geq 0, \quad y = \frac{3b+c-a}{2} \geq 0, \quad z = \frac{3c+a-b}{2} \geq 0$$
và
$$a = \frac{5x-y+2z}{9}, \quad b = \frac{5y-z+2x}{9}, \quad c = \frac{5z-x+2y}{9}$$
Khi đó, bất đẳng thức được viết lại là
$$\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \geq \frac{27}{x^2+y^2+z^2+11(xy+yz+zx)}$$
Sử dụng bất đẳng thức Iran 1996, ta có
$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} &\geq \frac{9}{4(xy+yz+zx)} \\ &\geq \frac{27}{x^2+y^2+z^2+11(xy+yz+zx)} \end{aligned}$$
Trường hợp 2. Nếu $a \geq 3b + c$, do $c + 2a \leq 3a \leq 3(a + 2b)$ nên
$$\frac{1}{(c+2a)^2} \geq \frac{1}{9(a+2b)^2}$$
Do đó, ta chỉ cần chứng minh được
$$\frac{1}{(b+2c)^2} + \frac{10}{9(a+2b)^2} \geq \frac{1}{ab+bc+ca}$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{(b+2c)^2}+\frac{10}{9(a+2b)^2}\geq\frac{2\sqrt{10}}{3(a+2b)(b+2c)}>\frac{2.1}{(a+2b)(b+2c)}$$

Ta cần chứng minh

$$\frac{2.1}{(a+2b)(b+2c)}\geq\frac{1}{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow 2.1(ab+bc+ca)\geq(a+2b)(b+2c)$$

$$\Leftrightarrow a(1.1b+0.1c)-2b^2-1.9bc\geq 0$$

Ta có

$$\begin{aligned}a(1.1b+0.1c)-2b^2-1.9bc &\geq a(1.1b+0.1c)-2b^2-2bc\\ &\geq (3b+c)(1.1b+0.1c)-2b^2-2bc\\ &= \frac{1}{10}[(3b-c)^2+4b^2]\geq 0.\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh. ■

Phụ lục A

Một số bất đẳng thức thông dụng

A.1 Bất đẳng thức trung bình cộng-trung bình nhân-trung bình điều hòa (AM-GM-HM)

Với mọi số dương $a_1, a_2, ..., a_n$, ta có

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

A.2 Bất đẳng thức AM-GM suy rộng

Cho các số dương $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ thỏa mãn $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Khi đó với mọi số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$, ta có

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n \geq a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

A.3 Bất đẳng thức trung bình lũy thừa

Cho các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$. Với mọi số thực r, đặt

$$M_r = \begin{cases} \left(\frac{a_1^r + a_2^r + \cdots + a_n^r}{n}\right)^{\frac{1}{r}} & , r \neq 0 \\ \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} & , r = 0 \end{cases}$$

Khi đó M_r là hàm tăng theo r với mọi r. Chẳng hạn $M_2 \geq M_1 \geq M_0$, tức là

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

A.4 Bất đẳng thức trung bình lũy thừa suy rộng

Cho các số dương $p_1, p_2, ..., p_n$ thỏa mãn $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ và các số dương $a_1, a_2, ..., a_n$. Với mọi số thực r, đặt

$$M_r = \begin{cases} (p_1 a_1^r + p_2 a_2^r + \cdots + p_n a_n^r)^{\frac{1}{r}} & , r \neq 0 \\ a_1^{p_1} a_2^{p_2} \cdots a_n^{p_n} & , r = 0 \end{cases}$$

Khi đó M_r là hàm tăng theo r với mọi r.

A.5 Bất đẳng thức Bernoulli

Với mọi số thực $x \geq -1$, ta có

$$\begin{array}{lcll} (1+x)^r & \geq & 1 + rx & , r \geq 1 \vee r \leq 0 \\ (1+x)^r & \leq & 1 + rx & , 0 \leq r \leq 1 \end{array}$$

Ngoài ra, với mọi số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ thỏa mãn $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ hoặc $-1 \leq a_1, a_2, ..., a_n \leq 0$ thì ta có

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

A.6 Bất đẳng thức Cauchy Schwarz

Với mọi số thực $(a_1, a_2, ..., a_n)$ và $(b_1, b_2, ..., b_n)$, ta có

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_i : a_j = b_i : b_j \;\; \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

A.7 Bất đẳng thức Holder

Cho các số dương x_{ij} $(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$. Khi đó với mọi $\omega_1, ..., \omega_n \geq 0$ thỏa $\omega_1 + \cdots + \omega_n = 1$, ta có

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \right)^{\omega_j} \geq \sum_{j=1}^{m} \left(\prod_{i=1}^{n} x_{ij}^{\omega_j} \right).$$

A.8 Bất đẳng thức Minkowski

Với mọi số thực $r \geq 1$ và với mọi số dương $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$, ta có

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}.$$

A.9 Bất đẳng thức Chebyshev

Cho các số thực $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Khi đó
i) Nếu $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$ thì

$$n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right).$$

ii) Nếu $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ thì

$$n\sum_{i=1}^{n}a_ib_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i\right).$$

A.10 Khai triển Abel

Giả sử $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ là các số thực tùy ý. Đặt

$$c_k = y_1 + y_2 + \cdots + y_k \quad \forall k = 1, 2, ..., n$$

Khi đó, ta có

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1})c_i + x_nc_n.$$

A.11 Bất đẳng thức Maclaurin

Với mọi số không âm $a_1, a_2, ..., a_n$, ta có

$$S_1 \geq S_2 \geq \cdots S_n$$

trong đó

$$S_k = \sqrt[k]{\frac{\sum a_1a_2\cdots a_k}{\binom{n}{k}}}.$$

A.12 Bất đẳng thức Schur

Cho các số không âm a, b, c. Khi đó, với mọi $r > 0$, ta có bất đẳng thức sau

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

A.13 Hàm lồi, hàm lõm

i) Một hàm số f được gọi là lồi trên khoảng I nếu và chỉ với mọi $x, y \in I$ và với mọi số không âm α, β thỏa mãn $\alpha + \beta = 1$, ta có

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

ii) Một hàm số f được gọi là lõm trên khoảng I nếu và chỉ với mọi $x, y \in I$ và với mọi số không âm α, β thỏa mãn $\alpha + \beta = 1$, ta có

$$f(\alpha x + \beta y) \geq \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Trong trường hợp $f(x)$ khả vi cấp 2 trên $[a, b]$ thì $f(x)$ lồi trên $[a, b]$ nếu và chỉ nếu $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$ và $f(x)$ lõm trên $[a, b]$ nếu và chỉ nếu $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in [a, b]$.

A.14 Bất đẳng thức Jensen

Cho $p_1, p_2, ..., p_n$ là các số dương.
i) Nếu f là một hàm lồi trên khoảng I, khi đó với mọi $a_1, a_2, ..., a_n \in I$, ta có

$$\frac{p_1 f(a_1) + p_2 f(a_2) + \cdots + p_n f(a_n)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \geq f\left(\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right).$$

ii) Nếu f là một hàm lõm trên khoảng I, khi đó với mọi $a_1, a_2, ..., a_n \in I$, ta có

$$\frac{p_1 f(a_1) + p_2 f(a_2) + \cdots + p_n f(a_n)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \leq f\left(\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right).$$

A.15 Tổng, tích hoán vị-đối xứng

Ta kí hiệu
$\sum\limits_{cyc}$ - Tổng hoán vị. Chẳng hạn

$$\sum_{cyc} a^2 b = a^2 b + b^2 c + c^2 a$$

$$\sum_{cyc}^{a,b,c,d} a^2bc = a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab$$

$\sum\limits_{sym}$ - Tổng đối xứng. Chẳng hạn

$$\sum_{cyc} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$$

$$\sum_{sym}^{a,b,c,d} ab = ab + ac + ad + bc + bd + cd$$

$\prod\limits_{cyc}$ - Tích hoán vị. Chẳng hạn

$$\prod_{cyc}(a-b) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$\prod_{cyc}^{a,b,c,d}(a-b) = (a-b)(b-c)(c-d)(d-a)$$

$\prod\limits_{cyc}$ - Tích đối xứng (dành cho 4 biến). Chẳng hạn

$$\prod_{cyc}^{a,b,c,d}(a-b)^2 = (a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Andreescu T., Cirtoaje V., Dospinescu G., Lascu M., *Old and New Inequalities*, GIL Publishing House, 2004

[2] Cirtoaje V., *Algebraic Inequalities*, GIL Publishing House, 2006

[3] Phạm Kim Hùng, *Secret in Inequality*, nhà xuất bản Tri Thức, 2006

[4] Hojoo Lee, *Topic in Inequalities,* online electronic book, 2006

[5] Kim-Yin Li, *Using tangent lines to prove inequalities*, Mathematical Excalibur, volume 10, number 5, 2005