

Bài giảng Seminar

1 Nhận diện bài toán

Khi giải toán bất đẳng thức, một trong những yếu tố giúp ta giải quyết bài toán thành công là ở kỹ năng phân tích nhận xét đề bài. Nếu phân tích tốt, ta có thể chọn được những phương pháp thích hợp để giải quyết bài toán nhanh, gọn và hiệu quả. Mục đích của phần này, chúng tôi muốn được chia sẻ cùng các bạn một số kinh nghiệm phân tích đề bài của mình.

Chúng ta bắt đầu với ví dụ sau

Example 1 Cho các số thực $x, y, z \neq 1$ thỏa $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{y}{y-1}\right)^2 + \left(\frac{z}{z-1}\right)^2 \geq 1.$$

(IMO 2008)

Lời giải 1. Đặt $a = \frac{x}{x-1}, b = \frac{y}{y-1}, c = \frac{z}{z-1}$, khi đó ta có $x = \frac{a}{a-1}, y = \frac{b}{b-1}, z = \frac{c}{c-1}$. Do $xyz = 1$ nên $abc = (a-1)(b-1)(c-1)$, suy ra $a+b+c-ab-bc-ca = 1$. Bất đẳng thức cần chứng minh được đưa về $a^2+b^2+c^2 \geq 1$. Ta có $1 = 2 - 1 = 2(a+b+c-ab-bc-ca) - 1$ nên ta có thể viết lại bất đẳng thức trên dưới dạng $a^2+b^2+c^2 \geq 2(a+b+c-ab-bc-ca) - 1$. Không mấy khó khăn, ta có thể phân tích bất đẳng thức cuối thành $(a+b+c-1)^2 \geq 0$ là một bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Vì thế, phép chứng minh của ta được hoàn tất. ■

Lời giải 2. Do $x, y, z \neq 1$ và $xyz = 1$ nên tồn tại các số thực a, b, c sao cho $x = \frac{bc}{a^2}, y = \frac{ca}{b^2}, z = \frac{ab}{c^2}$ (chẳng hạn, ta có thể chọn $a = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, b = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}, c = \frac{1}{\sqrt[3]{z}}$). Khi đó, bất đẳng thức đã cho được viết lại dưới dạng thuần nhất là

$$\frac{a^4}{(a^2-bc)^2} + \frac{b^4}{(b^2-ca)^2} + \frac{c^4}{(c^2-ab)^2} \geq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy Schwarz, ta có

$$VT \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2-bc)^2 + (b^2-ca)^2 + (c^2-ab)^2}.$$

Lại có $(a^2+b^2+c^2)^2 - (a^2-bc)^2 - (b^2-ca)^2 - (c^2-ab)^2 = (ab+bc+ca)^2 \geq 0$, nên kết hợp với trên, ta dễ dàng suy ra được điều phải chứng minh. ■

Lời giải 3. Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$ (??), bất đẳng thức trở thành

$$\frac{a^2}{(a-b)^2} + \frac{b^2}{(b-c)^2} + \frac{c^2}{(c-a)^2} \geq 1.$$

Áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta có

$$VT \cdot [(a-b)^2(a-c)^2 + (b-c)^2(b-a)^2 + (c-a)^2(c-b)^2] \geq [a(a-c) + b(b-a) + c(c-b)]^2.$$

Đến đây, với chú ý ở đẳng thức $xy + yz + zx = 0$ trong đó $x = (a-b)(a-c), y = (b-c)(b-a), z = (c-a)(c-b)$, ta thấy

$$\begin{aligned} (a-b)^2(a-c)^2 + (b-c)^2(b-a)^2 + (c-a)^2(c-b)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + yz + zx) \\ &= (x + y + z)^2, \end{aligned}$$

mà $x + y + z = (a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) = a(a-c) + b(b-a) + c(c-b)$, nên từ trên ta có ngay điều phải chứng minh. ■

Nhận xét. 1) Bất đẳng thức đã cho có dạng phân thức nên khó đánh giá hơn dạng đa thức rất nhiều. Như vậy, ý tưởng của ta là làm mất phân thức. Có rất nhiều cách để thực hiện việc này, nhưng có lẽ, tư tưởng "cần gì có nấy" là tự nhiên nhất ở đây, ta chỉ việc đặt ẩn mới bằng mỗi phân thức rồi biến đổi theo giả thiết của đề bài là được. Ngoài ra, bất đẳng thức đã cho yêu cầu chứng minh cho các số thực nên việc tìm những đánh giá thích hợp là không dễ chút nào. Với những bất đẳng thức với số thực thì phân tích bình phương là một trong những phương pháp hiệu quả nhất để giải. Đó chính là ý tưởng của lời giải 1.

2) Với những bất đẳng thức chứa điều kiện thì một trong những điều mà ta thường nghĩ tới nhất đó là thuần nhất hóa chúng rồi đánh giá. Tại sao ta không thử dùng phép thuần nhất hóa với bài này? Giả thiết bài toán cho ta $xyz = 1$, có hai phép thuần nhất hóa thông dụng liên quan đến giả thiết này là đặt $x = \frac{a^2}{bc}, y = \frac{b^2}{ca}, z = \frac{c^2}{ab}$ hoặc $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$ (lời giải 2 và 3). Ngoài ra, sau khi thuần nhất hóa, ta thấy rằng bất đẳng thức có dạng tổng bình phương, một dạng quen thuộc của bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, và từ đó, ta có các lời giải 2 và 3.

3) Một điều dễ thấy là bài toán đã cho có vô số điểm mà tại đó xảy ra đẳng thức, do đó các phương pháp dồn biến và SOS là không thể áp dụng cho bài này.

Bài tập tương tự. Chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c thỏa mãn $abc = 1$, ta luôn có

$$\frac{a+3}{(a-1)^2} + \frac{b+3}{(b-1)^2} + \frac{c+3}{(c-1)^2} \geq \frac{47}{16}.$$

(Nguyễn Đình Thi)

Example 2 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{a^3 + a} + \sqrt{b^3 + b} + \sqrt{c^3 + c} \geq 2\sqrt{a + b + c}.$$

(Iran 2008)

Lời giải 1. Ta có $a^3 + a = a^3 + a(ab + bc + ca) = a^2(a + b + c) + abc$ nên áp dụng bất đẳng thức *Minkowski*, ta được

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} \sqrt{a^3 + a} &= \sum_{cyc} \sqrt{(a\sqrt{a+b+c})^2 + (\sqrt{abc})^2} \\ &\geq \sqrt{\left(\sum_{cyc} a\sqrt{a+b+c}\right)^2 + (\sqrt{abc} + \sqrt{abc} + \sqrt{abc})^2} \\ &= \sqrt{(a+b+c)^3 + 9abc},\end{aligned}$$

do đó, ta chỉ cần chứng minh được $(a+b+c)^3 + 9abc \geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$. Khai triển ra, ta thu được bất đẳng thức *Schur* bậc 3, vì thế bất đẳng thức cuối hiển nhiên đúng. Bài toán được giải quyết xong. ■

Lời giải 2. Áp dụng bất đẳng thức *Holder*, ta có

$$VT^2 \cdot \left(\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \right) \geq (a+b+c)^3,$$

từ đó suy ra ta chỉ cần chứng minh được

$$(a+b+c)^2 \geq 4 \left(\frac{a^2}{a^2+1} + \frac{b^2}{b^2+1} + \frac{c^2}{c^2+1} \right).$$

Ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{a^2+1} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{(a+b)(a+c)} = 1 - \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq 4 - \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

tương đương

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2.$$

Đây là một bất đẳng thức quen thuộc với nhiều cách giải. ■

Nhận xét. Bất đẳng thức đã cho có dạng căn thức, vì thế các phương pháp dồn biến và SOS rất khó đánh giá nên ta loại trừ chúng đi. Như vậy, mục đích của ta sẽ là khử căn đi. Để khử căn thức thì đơn giản nhất là dùng các bất đẳng thức kinh điển. Ta sẽ dùng những bất đẳng thức nào đây? Bây giờ, để ý rằng bất đẳng thức nêu ở đề bài có dạng tổng căn thức, một dạng áp dụng quen thuộc của các bất đẳng thức như *Minkowski* và *Holder*. Vì vậy, ta sẽ thử dùng hai bất đẳng thức này để đánh

giá. Nhưng một điều chú ý là khi áp dụng phải đảm bảo dấu đẳng thức của đề bài ($a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $a = b = 1, c = 0$ cùng các hoán vị).

1) Dùng *Minkowski*. Ở đây, có lẽ sẽ có nhiều bạn nghĩ đến áp dụng bất đẳng thức *Minkowski* kiểu

$$\sqrt{a^3 + a} + \sqrt{b^3 + b} + \sqrt{c^3 + c} \geq \sqrt{\left(\sqrt{a^3} + \sqrt{b^3} + \sqrt{c^3}\right)^2 + \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2}$$

nhưng bạn nên nhớ rằng, mục đích của ta là khử căn, nếu áp dụng như thế này có lẽ vẫn đi đến kết quả nhưng chắc chắn sẽ khá dài và phức tạp. Vì vậy, ta loại cách áp dụng này. Nếu bạn nào tinh ý, để ý rằng $a^3 + a = a^2(a + b + c) + abc$ thì có thể áp dụng *Minkowski* kiểu như trong lời giải 1 để mất căn rồi thực hiện những đánh giá như bình thường.

2) Dùng *Holder*. Thứ nhất, ta cần xác định rõ mục tiêu của mình khi áp dụng bất đẳng thức này, đó là mất căn và bất đẳng thức thu được sau áp dụng phải có bậc thấp (để có lời giải đơn giản). Vì vậy, ý tưởng của ta là áp dụng làm sao để cho ra một biểu thức giống với vế phải, tức là $a + b + c$. Để làm như vậy, ta chỉ cần để ý rằng $a = \sqrt{(a^3 + a) \cdot \frac{a^2}{a^2 + 1}}$ và như thế, lời giải chính là xuất phát từ ý tưởng này.

Bài tập tương tự. Cho a, b, c là các số không âm, thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

a)

$$\sqrt{\frac{a^2}{b^2 + bc + c^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{c^2 + ca + a^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2 + ab + b^2}} \geq \frac{a + b + c}{\sqrt{ab + bc + ca}};$$

(Vasile Cirtoaje)

b)

$$\sqrt{\frac{a^2}{4b^2 + bc + 4c^2}} + \sqrt{\frac{b^2}{4c^2 + ca + 4a^2}} + \sqrt{\frac{c^2}{4a^2 + ab + 4b^2}} \geq 1.$$

(Phạm Kim Hùng, Võ Quốc Bá Cẩn)

Example 3 Cho các số thực không âm a, b, c , không có hai số nào đồng thời bằng 0. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)}.$$

(Iran 1996)

Lời giải 1. Đây là một bài khó và cách giải bằng phương pháp biến đổi tương đương có lẽ là tự nhiên nhất cho nó. Nhưng biến đổi như thế nào để các tính toán của ta đơn giản và nhẹ nhàng là một điều mà không phải ai cũng làm được. Khá nhiều người dùng những con tính khủng khiếp để giải bài này. Chúng ta sẽ không làm như vậy mà chọn cách khéo léo hơn. Nguyên nhân khiến nhiều người đưa đến những lời giải không đẹp là họ đã dùng phép quy đồng cho tất cả các phân thức rồi thu gọn, vì thế mà bất đẳng thức thu được sẽ có bậc cao và các hệ số rất lớn. Để tránh điều này, ta có thể dùng một phép biến đổi đơn giản hơn là quy đồng từng phần, cụ thể ta sẽ làm như sau

Nhân cả hai vế của bất đẳng thức với $(a+b)(b+c)(c+a)$, ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh như sau

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} + \frac{(b+c)(b+a)}{c+a} + \frac{(c+a)(c+b)}{a+b} \geq \frac{9(a+b)(b+c)(c+a)}{4(ab+bc+ca)}.$$

Bây giờ, để ý rằng $\frac{(a+b)(a+c)}{b+c} = \frac{a^2+bc}{b+c} + a$ và $(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$, ta có thể thu gọn bất đẳng thức trên thành

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} + \frac{9abc}{4(ab+bc+ca)} \geq \frac{5}{4}(a+b+c).$$

áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta có $ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$ nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} + \frac{27abc}{4(a+b+c)^2} \geq \frac{5}{4}(a+b+c),$$

tương đương

$$(a+b+c) \left(\frac{a^2+bc}{b+c} + \frac{b^2+ca}{c+a} + \frac{c^2+ab}{a+b} \right) + \frac{27abc}{4(a+b+c)} \geq \frac{5}{4}(a+b+c)^2.$$

Ta có

$$\frac{(a+b+c)(a^2+bc)}{b+c} = a^2+bc + \frac{a(a^2+bc)}{b+c} = 2a^2+bc + \frac{a(a-b)(a-c)}{b+c},$$

nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{b+c} + 2 \sum_{cyc} a^2 + \sum_{cyc} bc + \frac{27abc}{4(a+b+c)} \geq \frac{5}{4}(a+b+c)^2,$$

hay là

$$\sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{b+c} + \frac{3}{4} \left(a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} - 2ab - 2bc - 2ca \right) \geq 0.$$

Mặt khác, dễ thấy $\sum_{cyc} \frac{a(a-b)(a-c)}{b+c} \geq 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{9abc}{a+b+c} - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$ (theo *Schur*) nên bất đẳng thức được chứng minh xong. ■

Lời giải 2. Để ý rằng bất đẳng thức đã cho có đẳng thức xảy ra tại $a=b=c$ và $a=b, c=0$ (cùng các hoán vị), điều này gợi cho ta nghĩ đến việc sử dụng phương pháp dồn biến để giải quyết bài toán. Và hiển nhiên, với đẳng thức xảy ra như trên thì ta phải dồn về $a=b$ (vì việc dồn về $c=0$ sẽ ảnh hưởng đến đẳng thức thứ nhất là $a=b=c$).

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Đặt $t = \frac{a+b}{2}$, ta sẽ chứng minh

$$\frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} - \frac{9}{4(ab+bc+ca)} \geq \frac{2}{(t+c)^2} - \frac{9}{4(t^2+2tc)},$$

hay là

$$\frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} - \frac{2}{(t+c)^2} \geq \frac{9}{4(ab+bc+ca)} - \frac{9}{4(t^2+2tc)}.$$

Rõ ràng việc tách bình phương từ $t^2 + 2tc - (ab + bc + ca)$ là khá dễ (và nó bằng $\frac{(a-b)^2}{4}$), nhưng việc tách trực tiếp từ $\frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} - \frac{2}{(t+c)^2}$ là không đơn giản chút nào. Vì thế, ta cần có một bước tách trung gian như sau

$$\begin{aligned} \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} - \frac{2}{(t+c)^2} &= \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(a+c)^2} - \frac{2}{(b+c)(a+c)} + \frac{2}{(a+c)(b+c)} - \frac{2}{(t+c)^2} \\ &= \left(\frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c} \right)^2 + \frac{2(t^2 - ab)}{(a+c)(b+c)(t+c)^2} \\ &= \frac{(a-b)^2}{(a+c)^2(b+c)^2} + \frac{(a-b)^2}{2(a+c)(b+c)(t+c)^2}, \end{aligned}$$

như vậy, ta phải chứng minh

$$\frac{1}{(a+c)^2(b+c)^2} + \frac{1}{2(a+c)(b+c)(t+c)^2} \geq \frac{9}{16(t^2+2tc)(ab+bc+ca)}.$$

Việc chứng minh khá dễ dàng, ta chỉ cần để ý rằng $\frac{9}{16(t^2+2tc)(ab+bc+ca)} \leq \frac{9}{16(ab+bc+ca)^2}$ và

$$4(ab+bc+ca) - 3(a+c)(b+c) = ab+bc+ca - 3c^2 \geq 0.$$

Bước dồn biến được hoàn tất. Và cuối cùng ta chỉ còn phải chứng minh

$$\frac{1}{4t^2} + \frac{2}{(t+c)^2} - \frac{9}{4(t^2+2tc)} \geq 0, \quad \text{tương đương} \quad \frac{c(t-c)^2}{2t^2(t+2c)(t+c)^2} \geq 0$$

là một bất đẳng thức đúng. ■

Bài tập tương tự. Chứng minh rằng với mọi a, b, c không âm thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0, ta đều có

a)

$$\left(\frac{a}{b+c} \right)^2 + \left(\frac{b}{c+a} \right)^2 + \left(\frac{c}{a+b} \right)^2 + \frac{10abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2;$$

(Dương Đức Lâm)

b)

$$\left(\frac{a}{b+c} \right)^3 + \left(\frac{b}{c+a} \right)^3 + \left(\frac{c}{a+b} \right)^3 + \frac{9abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quốc Anh)

Example 4 Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}.$$

(Germany 2006)

Lời giải 1. Để thấy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2}.$$

Mà $\frac{a}{b} - \frac{a}{b+c} = \frac{ca}{b(b+c)}$ nên ta có thể viết lại bất đẳng thức này như sau

$$\frac{ca}{b(b+c)} + \frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

Đến đây, áp dụng bất đẳng thức *Cauchy Schwarz*, ta được

$$VT \geq \frac{(ca + ab + bc)^2}{cab(b+c) + abc(c+a) + bca(a+b)} = \frac{(ab + bc + ca)^2}{2abc(a+b+c)}.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức *AM – GM* thì $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$ nên kết hợp với trên, ta dễ dàng suy ra được bất đẳng thức cần phải chứng minh. Để thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$. ■

Lời giải 2. Tương tự như lời giải 1, ta cũng phải chứng minh

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2}.$$

Đây là một bất đẳng thức hoán vị theo a, b, c nên một trong những ý tưởng tự nhiên nhất khi gặp dạng này sẽ là dùng những đánh giá thích hợp để đưa về dạng đối xứng. Điều này có nghĩa là ta sẽ tìm những đánh giá liên quan đến $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ để đưa bài toán về dạng đối xứng. Có rất nhiều đánh giá liên quan đến đại lượng này, chẳng hạn như

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}, \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(ab+bc+ca)^2}{abc(a+b+c)}, \quad \dots$$

Vậy ta phải chọn đánh giá nào mới thích hợp? Để làm được điều này, bạn chỉ cần một chút để ý tinh tế sau: Hãy để ý rằng bậc cao nhất của biểu thức $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2}$ theo a là bậc 1, vì vậy nên đánh giá của ta cho $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ cũng phải có bậc tối thiểu theo a là bậc 1, nếu không thì không thể giải quyết được bài toán (bạn hãy giải thích vì sao?). Đây là một phân tích nhỏ và thường đạt được hiệu quả cao trong giải toán (tất nhiên là cũng có những trường hợp ngoại lệ), và với những phân tích này thì, ta thấy chỉ có đánh giá

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca}$$

là thích hợp. Như vậy, ta sẽ thử sử dụng nó để chứng minh bài toán đã cho, tức là chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{ab+bc+ca} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{3}{2}.$$

Việc chứng minh khá đơn giản, các bạn chỉ cần nhân cả hai vế cho $ab+bc+ca > 0$ và chú ý rằng

$$\frac{a(ab+bc+ca)}{b+c} = a^2 + \frac{abc}{b+c} \leq a^2 + \frac{a(b+c)}{4}$$

là có thể chứng minh ngay được bài toán. ■

2 Một số kinh nghiệm trong việc xử lý các bất đẳng thức không thuần nhất, các bất đẳng thức với điều kiện lạ

Đối với những bất đẳng thức nằm một trong hai dạng này thì việc giải chúng bằng toán sơ cấp, có lẽ ba phương pháp sau đây là hiệu quả nhất: dồn biến, thuần nhất hóa và phản chứng (với một số bất đẳng thức điều kiện lạ). Chúng ta hãy cùng xét một số ví dụ sau

Example 5 Chứng minh rằng với mọi a, b, c dương, ta đều có

$$abc + 2(a^2 + b^2 + c^2) + 8 \geq 5(a + b + c).$$

(Trần Nam Dũng, Hello IMO 2007)

Lời giải 1. Đây là một bất đẳng thức không đồng bậc và đó cũng chính là nguyên nhân khiến nó trở nên khó đánh giá. Vì vậy, ta hãy thử đưa nó về dạng thuần nhất xem sao. Muốn thực hiện điều này, ta hãy để ý rằng đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 1$ và bất đẳng thức đã cho có chứa các biểu thức bậc 1, 2, 3 nên tốt nhất là ta sẽ đưa về dạng thuần nhất với bậc là trung bình cộng của 3 bậc trên, tức là bậc 2. Ta làm như sau

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có $abc + \frac{1}{2} = \frac{abc+abc+1}{2} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, và

$$5(a+b+c) = \frac{5}{6} \cdot 2 \cdot 3 \cdot (a+b+c) \leq \frac{5}{6}[3^2 + (a+b+c)^2] = \frac{15}{2} + \frac{5}{6}(a+b+c)^2.$$

Vì vậy, ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2} - \frac{1}{2} + 2(a^2 + b^2 + c^2) + 8 \geq \frac{15}{2} + \frac{5}{6}(a+b+c)^2,$$

hay là

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3}{2}\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq \frac{5}{6}(a+b+c)^2,$$

tương đương

$$9\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \geq 10(ab+bc+ca) - 7(a^2 + b^2 + c^2).$$

Lại áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta được $9\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = \frac{9abc}{\sqrt[3]{abc}} \geq \frac{27abc}{a+b+c}$, nên ta chỉ cần chứng minh được

$$\frac{27abc}{a+b+c} \geq 10(ab+bc+ca) - 7(a^2+b^2+c^2).$$

Theo bất đẳng thức *Schur* bậc 3, bất đẳng thức này hiển nhiên đúng. Phép chứng minh được hoàn tất. ■

Lời giải 2. Mặc dù là một bất đẳng thức không thuần nhất, nhưng do bậc thấp nên ta nghĩ rằng phép dồn biến có thể được áp dụng trong bài toán này. Tuy nhiên, do không có điều kiện ràng buộc và ở dạng "không giống ai" nên ta không thể dồn biến trực tiếp mà dùng phép dồn hai lần như sau. Đặt $2t = a + b$, ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$abc + 8t^2 - 4ab + 2c^2 + 8 \geq 10t + 5c,$$

hay là

$$ab(c-4) + 8t^2 + 2c^2 - 10t - 5c + 8 \geq 0.$$

Nếu $c - 4 \geq 0$ thì $ab(c-4) \geq 0$ nên ta chỉ cần chứng minh được $8t^2 + 2c^2 - 10t - 5c + 8 \geq 0$. Ta có $8t^2 - 10t + \frac{25}{8} \geq 0$ và $2c^2 - 5c \geq 0$ (do $c \geq 4$) nên bất đẳng thức này hiển nhiên đúng.

Nếu $c - 4 \leq 0$, áp dụng bất đẳng thức $AM - GM$, ta chỉ cần chứng minh được $t^2(c-4) + 8t^2 + 2c^2 - 10t - 5c + 8 \geq 0$, tương đương $(c+4)t^2 - 10t + 2c^2 - 5c + 8 \geq 0$. Xem đây là một tam thức bậc 2 của t , ta thấy biệt thức của nó là $\Delta' = 25 - (c+4)(2c^2 - 5c + 8) = -(2c+7)(c-1)^2 \leq 0$, mà hệ số cao nhất của nó dương nên hiển nhiên nó không âm. Bài toán được chứng minh. ■

Bài tập tương tự. Giả sử a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a)

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 3 \geq (a+1)(b+1)(c+1);$$

(Gabriel Dospinescu, Marian Titive, Mircea Lascu)

b)

$$a^3 + b^3 + c^3 + 9abc + 4(a+b+c) \geq 8(ab+bc+ca).$$

(Lê Trung Kiên)

Example 6 Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $2(a^2 + b^2 + c^2) + 3abc = 9$. Chứng minh rằng

$$a + b + c \leq 3.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

Lời giải 1. Đây là một bất đẳng thức với điều kiện khá lạ lùng, và đẳng thức xảy ra tại hai điểm là $a = b = c = 1$ và $a = b = \frac{3}{2}, c = 0$ (cùng các hoán vị). Điều đó gây trở ngại cho các đánh giá của ta, và có vẻ như mọi đánh giá với giả thiết này đều vô hiệu, vì vậy, một cách tự nhiên, ta nghĩ ngay đến phương pháp dồn biến để giải bài toán này.

Giả sử $a \geq b \geq c$. Dễ thấy tồn tại $t \geq 1$ sao cho $2(2t^2 + c^2) + 3t^2c = 9$. Khi đó, để thực hiện dồn biến, ta sẽ chứng minh $a + b \leq 2t$. Tuy nhiên, việc tách bình phương từ $a + b - 2t$ là rất khó, nên ta cần một tí tính tế như sau

Để ý rằng $4t^2 + 3t^2c = 2(a^2 + b^2) + 3abc$, suy ra $2(2t^2 - a^2 - b^2) = 3c(ab - t^2)$. Nếu $ab > t^2$ thì ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab > 2t^2$, suy ra $2(2t^2 - a^2 - b^2) < 0 \leq 3c(ab - t^2)$, vô lí. Vì vậy, ta phải có $ab \leq t^2$, suy ra $a^2 + b^2 \leq 2t^2$. Đến đây, ta tính được

$$\begin{aligned} a + b - 2t &= \frac{(a+b)^2 - 4t^2}{a+b+2t} = \frac{a^2 + b^2 - 2t^2 + 2(ab - t^2)}{a+b+2t} \\ &= \frac{-\frac{3}{2}c(ab - t^2) + 2(ab - t^2)}{a+b+2t} = \frac{(4-3c)(ab - t^2)}{2(a+b+2t)} \leq 0, \end{aligned}$$

vì $c \leq 1$ và $ab \leq t^2$.

Bước dồn biến được hoàn tất, và ta chỉ còn phải chứng minh $2t + c \leq 3$ với $4t^2 + 2c^2 + 3t^2c = 9$. Có rất nhiều cách chứng minh bất đẳng thức này, xin được một cách thú vị sau (dù tính toán hơi nhiều) mà lí do vì sao tìm được nó, xin được dành cho bạn đọc

Viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng

$$(c-7)(9-4t^2-3t^2c-2c^2) + 42(3-2t-c) \geq 0.$$

Bằng phép nhóm cặp theo t , ta dễ dàng viết được nó dưới dạng sau

$$(28+17c-3c^2)t^2 - 84t + 63 - 33c + 14c^2 - 2c^3 \geq 0.$$

Rõ ràng đây là một tam thức bậc hai của t với hệ số cao nhất dương (do $c \leq 1$), và biệt thức của nó là

$$\begin{aligned} \Delta' &= 42^2 - (28+17c-3c^2)(63-33c+14c^2-2c^3) \\ &= -c(c-1)^2(6c^2-64c+147) \leq 0, \end{aligned}$$

nên bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng. Phép chứng minh của ta được hoàn tất. ■

Lời giải 2. Giả sử $a + b + c > 3$. Khi đó, ta có

$$9 = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3abc = \frac{18(a^2 + b^2 + c^2)}{9} + \frac{81abc}{27} > \frac{18(a^2 + b^2 + c^2)}{(a+b+c)^2} + \frac{81abc}{(a+b+c)^3},$$

từ đó suy ra

$$2(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c) + 9abc < (a+b+c)^3,$$

tương đương

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc < ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Đây là một điều vô lí, bởi vì theo bất đẳng thức *Schur*, ta thấy bất đẳng thức có chiều ngược lại đúng. Do vậy, không thể xảy ra khả năng $a + b + c > 3$. Điều này nói lên rằng, với mọi a, b, c thỏa mãn giả thiết của đề bài thì $a + b + c \leq 3$. ■

Bài tập tương tự. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc = 1$. Chứng minh rằng

a)

$$ab + bc + ca \leq 2abc + \frac{1}{2};$$

(Marian Tetiva)

b)

$$a + b + c \leq 4(\sqrt{2} - 1)^2 abc + \sqrt{2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

3 Bài tập đề nghị

1. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn không có hai số nào đồng thời bằng 0 và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \sqrt{2}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

2. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = a^3 + b^3 + c^3$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a}{a^2 + 1} \cdot \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \frac{b}{b^2 + 1} \cdot \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \frac{c}{c^2 + 1} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 \geq \frac{a + b + c}{2}.$$

(Gabriel Dospinescu)

3. Giả sử a, b, c là các số dương có tổng bằng 3. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + b^2 + 2} + \frac{1}{b^2 + c^2 + 2} + \frac{1}{c^2 + a^2 + 2} \leq \frac{3}{4}.$$

(Iran 2009)

4. Tìm tất cả các số thực k để bất đẳng thức sau đúng với mọi a, b, c dương

$$\left(k + \frac{a}{b+c}\right) \left(k + \frac{b}{c+a}\right) \left(k + \frac{c}{a+b}\right) \geq \left(k + \frac{1}{2}\right)^3.$$

(Chọn đội tuyển Việt Nam 2009)

5. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + ca + a^2}} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(Võ Quốc Bá Cẩn)

6. Cho các số không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + ab + b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2 + bc + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + ca + a^2}} \geq 4 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

(Xtar)

Võ Quốc Bá Cẩn