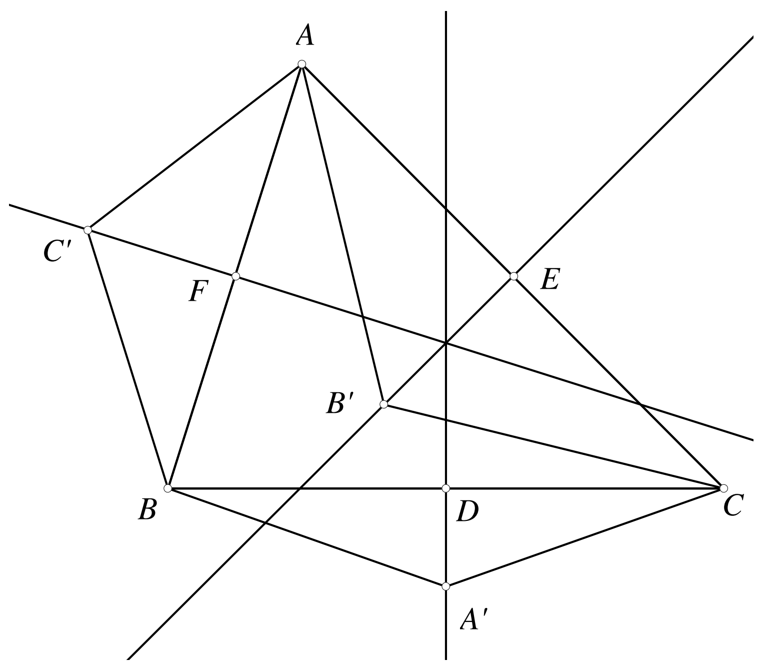
Định lý Menelaus và tâm đường tròn ngoại tiếp

Trần Quang Hùng - THPT chuyên KHTN

Trong bài giảng này, chúng ta sẽ đi sâu vào xem xét và ứng dụng một bài toán cơ bản trong tam giác là các trung trực của ba cạnh đồng quy tại tâm đường tròn ngoại tiếp và định lý Menelaus, đó là hai vấn đề rất cơ bản phù hợp với nội dung hình học lớp 9, tuy vậy khi kết hợp để ứng dụng chúng ta lại có được những bài toán hay.

Bài toán 1 (Tâm đường tròn ngoại tiếp)**.** *Cho tam giác ABC, gọi d_a, d_b, d_c là các đường trung trực của BC, CA, AB thì d_a, d_b, d_c đồng quy tại điểm O, điểm đồng quy tại và O cách đều ba cạnh của tam giác ABC, O được gọi là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

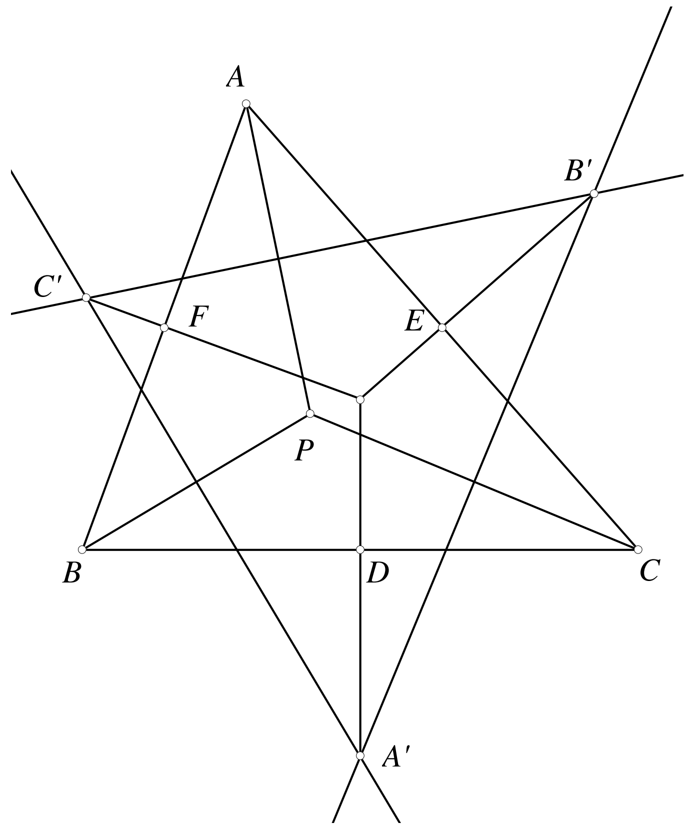
Bài toán 2. *Cho tam giác ABC, dựng các tam giác cân $A'BC, B'CA, C'AB$ cân tại đỉnh A', B', C' tương ứng, gọi D, E, F trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh rằng $A'D, B'E, C'F$ đồng quy.*



Hình 1.

Chứng minh. Theo tính chất tam giác cân dễ thấy $A'D, B'E, C'F$ là trung trực của BC, CA, AB vậy chúng đồng quy tại tâm ngoại tiếp tam giác ABC. □

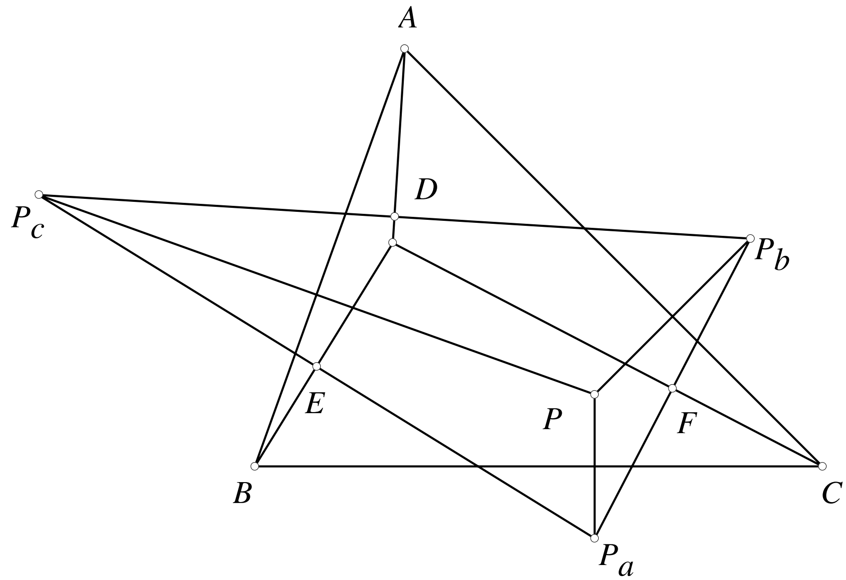
Bài toán 3. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, các trung trực của PA, PB, PC đôi một cắt nhau tương ứng tại A', B', C'. Gọi D, E, F là trung điểm BC, CA, AB. Chứng minh rằng$A'D, B'E, C'F$ đồng quy*



Hình 2.

Chứng minh. Ta chú ý là các tam giác $A'BC, B'CA, C'AB$ cân vậy đường thẳng qua $A'D, B'E, C'F$ lần lượt là các trung trực của BC, CA, AB vậy chúng đồng quy tại tâm ngoại tiếp tam giác ABC. □

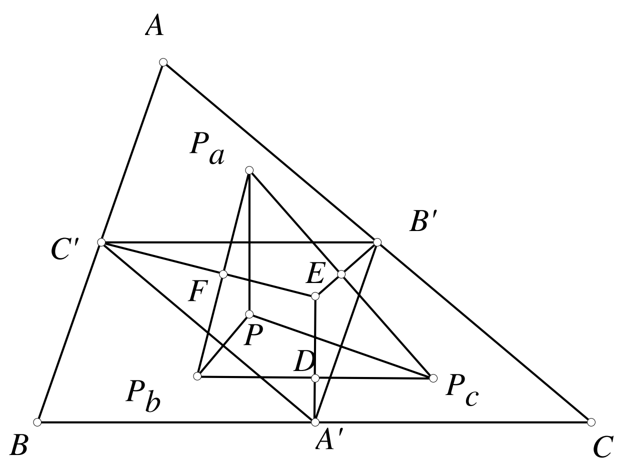
Bài toán 4. *Cho tam giác ABC điểm P bất kỳ, gọi P_a, P_b, P_c là đối xứng của P qua BC, CA, AB, gọi D, E, F là trung điểm của P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy tại tâm ngoại tiếp tam giác $P_aP_bP_c$.*



Hình 3.

Chứng minh. Ta cũng chú ý rằng các tam giác $AP_bP_c, BP_cP_a, CP_aP_b$ cân tại A, B, C tương ứng vậy các đường thẳng AD, BE, CF chính là các đường trung trực của tam giác $P_aP_bP_c$ vậy chúng đồng quy. □

Bài toán 5. *Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' là trung điểm của BC, CA, AB, gọi P_a, P_b, P_c là điểm đối xứng của P qua $B'C', C'A', A'B'$, gọi D, E, F là trung điểm P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b. Chứng minh rằng $A'D, B'E, C'F$ đồng quy.*

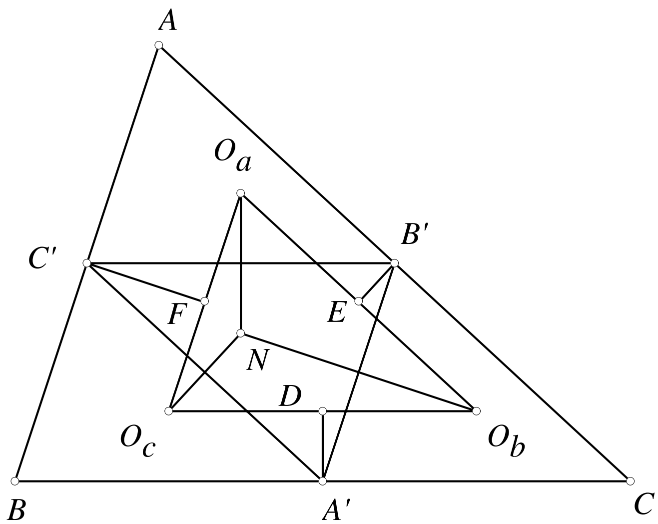


Hình 4.

Chứng minh. Sử dụng bài toán 3 cho tam giác $A'B'C'$ hoặc ta thấy ngay $A'D, B'E, C'F$ là các trung trực đoạn P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b ta thấy ngay điều phải chứng minh. □

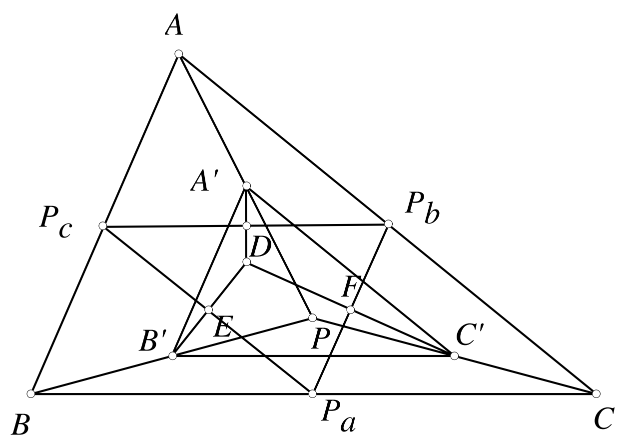
Bài toán 6. *Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' là trung điểm của BC, CA, AB, gọi O_a, O_b, O_c là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$, gọi D, E, F là trung điểm O_bO_c, O_cO_a, O_aO_b. Chứng minh rằng $A'D, B'E, C'F$ đồng quy.*

Chứng minh. Gọi N là tâm đường tròn chín điểm của tam giác ABC, ta chú ý rằng O_a, Ob, O_c chính là đối xứng của N qua $B'C', C'A', A'B'$ vậy áp dụng bài toán 4 dễ dàng suy ra điều phải chứng minh. □



Hình 5.

Bài toán 7. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi P_a, P_b, P_c là các hình chiếu của P lên BC, CA, AB, gọi A', B', C' là trung điểm PA, PB, PC, gọi D, E, F là trung điểm của P_bP_c, P_cP_a, P_aP_b. Chứng minh rằng $A'D, B'E, C'F$ đồng quy.*



Hình 6.

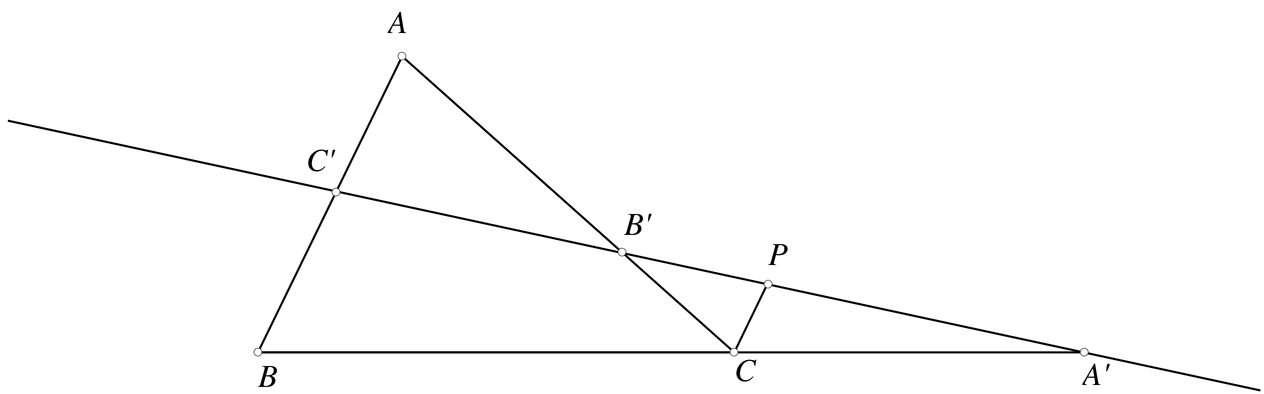
Chứng minh. Ta dễ thấy P_a, P_b, P_c chính là đối xứng của P qua $B'C', C'A', A'B'$, áp dụng bài toán 3 cho tam giác $A'B'C'$ ta suy ra điều phải chứng minh. □

Các bài toán trên có vẻ rất đơn giản song đằng sau chúng là những ứng dụng bất ngờ, chúng ta sẽ ứng dụng chúng thông qua một bổ đề cơ bản

Bổ đề 7.1 (Định lý Menelaus)**.** *Cho tam giác* ABC *và các điểm* A', B', C' *nằm trên các đường thẳng* BC, CA, AB *tương ứng khi đó nếu* A', B', C' *thẳng hàng thì*

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1$$

Nếu $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1$ *luôn có duy nhất một điểm nằm ngoài cạnh tam giác, hoặc cả ba điểm nằm ngoài ba cạnh tam giác thì* A', B', C' *thẳng hàng.*

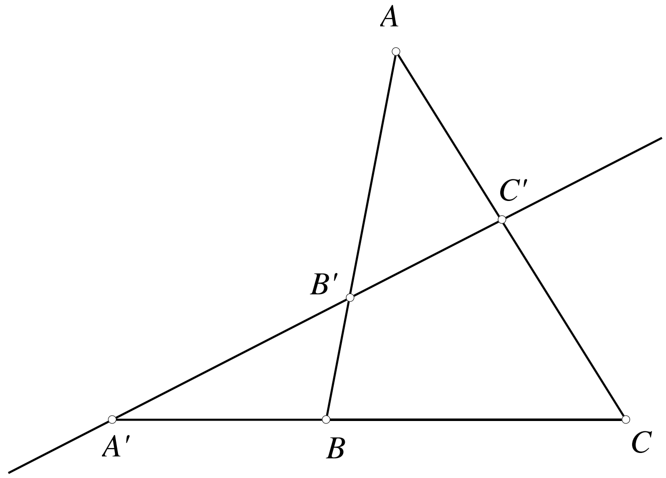


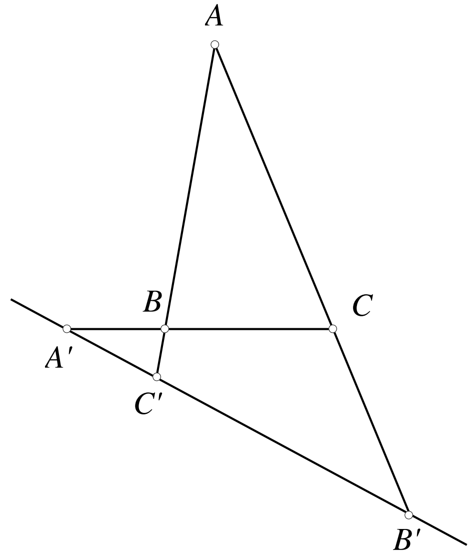
Hình 7.

Chứng minh. Trước hết ta sẽ chứng minh, nếu A', B', C' thẳng hàng thì $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1$, thật vậy, qua C ta kẻ đường thẳng song song với AB cắt $B'C'$ tại P, theo định lý Thales ta có $\frac{A'B}{A'C} = \frac{CP}{C'B}, \frac{B'C}{B'A} = \frac{PC}{C'A}$ vậy ta có

$$\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = \frac{CP}{C'B}.\frac{PC}{C'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1$$

Đảo lại nếu các $\frac{A'B}{A'C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B} = 1$, không mất tổng quát giả sử duy nhất A' nằm ngoài BC khi đó hoặc B', C' đều thuộc CA, AB hoặc B', C' đều không thuộc CA, AB khi đó ta gọi $B'C'$ giao đường thẳng BC tại A'', dễ thấy với vị trí như vậy của B', C' thì A'' cũng không thuộc BC



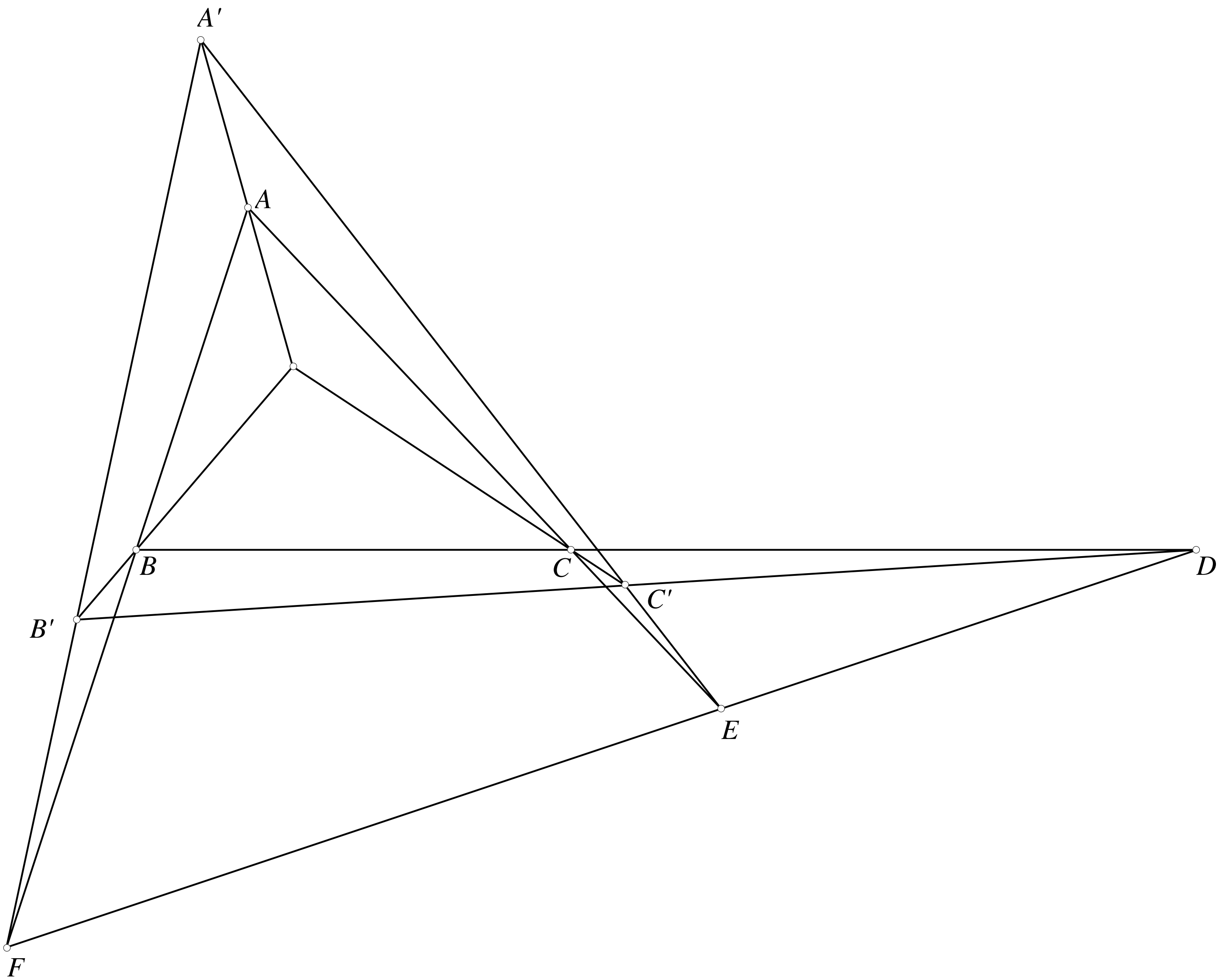


Hình 8.

$$\frac{A''B}{A''C}.\frac{B'C}{B'A}.\frac{C'A}{C'B}=\frac{CP}{C'B}.\frac{PC}{C'A}.\frac{C'A}{C'B}=1$$

Vậy suy ra $\dfrac{A''B}{A''C}=\dfrac{A'B}{A'C}$, do cả A' và A''nằm ngoài BC nên $A'\equiv A''$ hay A',B',C' thẳng hàng, đó là điều phải chứng minh. □

Bổ đề 7.2 (Định lý Desargues)**.** *Cho tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$ nếu gọi D,E,F tương ứng là giao của $B'C',C'A',A'B'$ với BC,CA,AB chứng minh rằng $AA',BB',C'C'$ đồng quy khi và chỉ khi D,E,F thẳng hàng.*

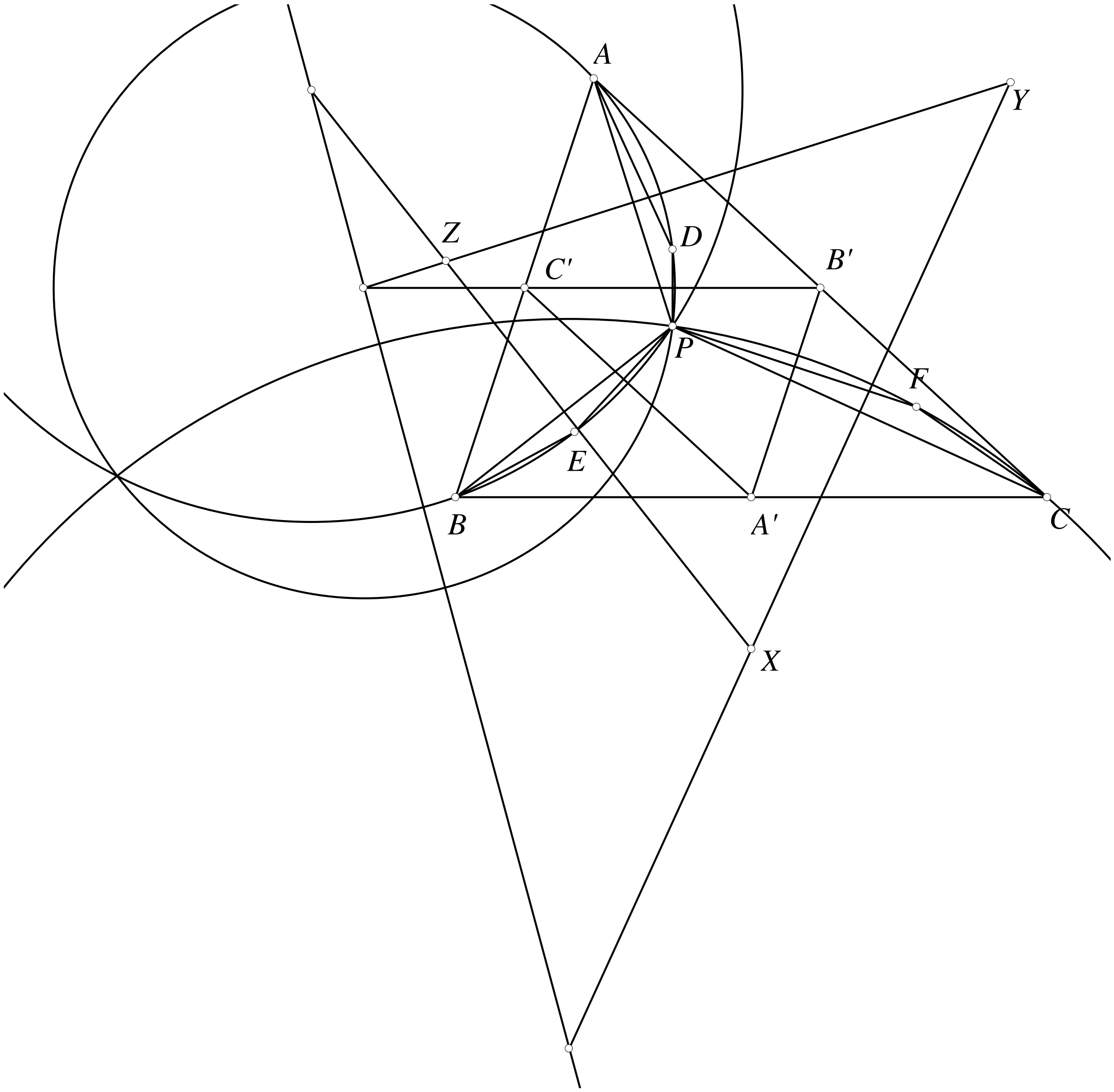


Hình 9.

Lời giải bổ đề. Phần thuận, giả sử AA', BB', CC' giao nhau tại P, ta lần lượt áp dụng định lý Menelaus như sau Tam giác PBC với B', C', D thẳng hàng ta có $\frac{DB}{DC}.\frac{C'C}{C'P}.\frac{B'P}{C'B} = 1$. Tam giác PCA với C', A', E thẳng hàng ta có $\frac{EC}{EA}.\frac{B'A}{B'P}.\frac{C'P}{A'C} = 1$. Tam giác PAB với A', B', F thẳng hàng ta có $\frac{FA}{FB}.\frac{A'B}{A'P}.\frac{A'P}{B'A} = 1$. Vậy ta nhân các tỷ số trên với nhau ta được $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = 1$ xét tam giác ABC với D, E, F thuộc ba cạnh BC, CA, AB theo định lý Menelaus suy ra D, E, F thẳng hàng. Phần đảo, ta sẽ sử dụng phần thuận, giả sử D, E, F thẳng hàng, ta gọi BB' giao CC' tại P, ta sẽ chứng minh AA', BB', CC' đồng quy bằng cách chỉ ra A', A, P thẳng hàng, thật vậy, xét hai tam giác FBB' và ECC' có $EF, BC, B'C'$ đồng quy tại D, vậy theo phần thuận giao điểm tương ứng $FB \cap EC = \{A\}, BB' \cap CC' = \{P\}, B'F \cap C'E = \{A'\}$ thẳng hàng, đó là điều phải chứng minh. □

Sau đây ta lại đưa ra những ứng dụng hay của bổ đề trên vào các bài toán ta đang xét

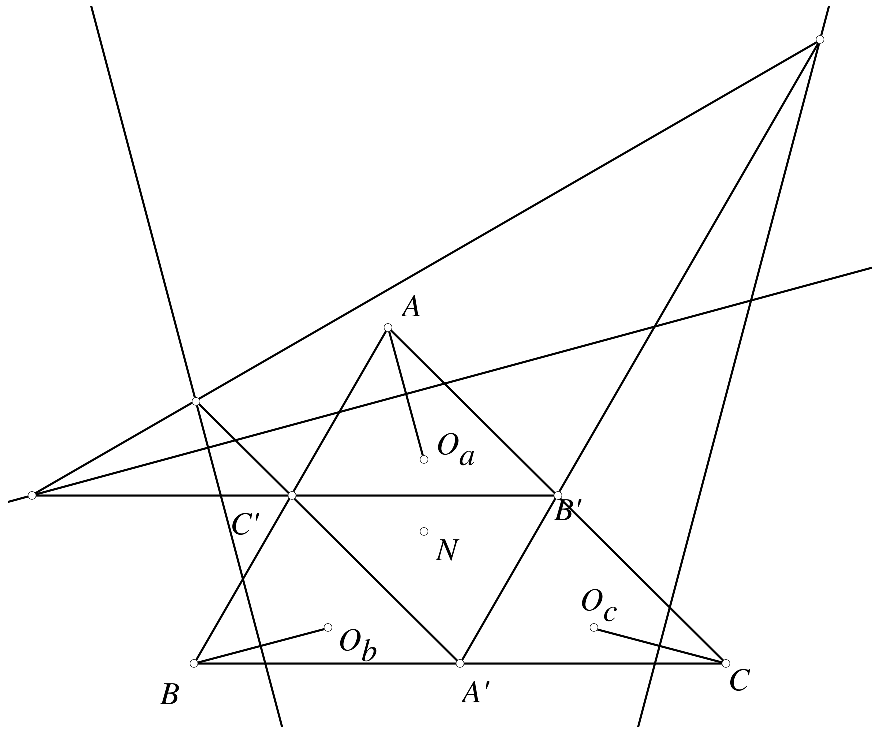
Bài toán 8. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi A', B', C' là trung điểm các cạnh BC, CA, AB , gọi D, E, F là đối xứng của P qua $B'C', C'A', A'B'$. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD, BPE, CPF có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 10.

Chứng minh. Ta chú ý rằng các đường tròn này đã có một điểm chung là P vậy nên để chứng minh chúng có một điểm chung nữa khác P ta chỉ cần chứng minh tâm của chúng thẳng hàng. Gọi trung trực của PA, PB, PC cắt nhau tương ứng tạo thành tam giác X, Y, Z, ta thấy rằng giao điểm của YZ, ZX, XY với $B'C', C'A', A'B'$ tương ứng chính là các tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD, BPE, CPF vậy nên theo Bổ đề 2 các giao điểm này thẳng hàng khi và chỉ khi $A'X, B'Y, C'Z$ đồng quy, áp dụng bài toán 2 cho tam giác ABC với các trung trực YZ, ZX, XY thì $A'X, B'Y, C'Z$ đồng quy, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 9. *Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB, gọi O_a, O_b, O_c là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C, BC'A', CA'B'$. Chứng minh rằng giao điểm của trung trực của các đoạn O_aA, O_bB, O_cC với $B'C', C'A', A'B'$ tương ứng nằm trên một đường thẳng.*



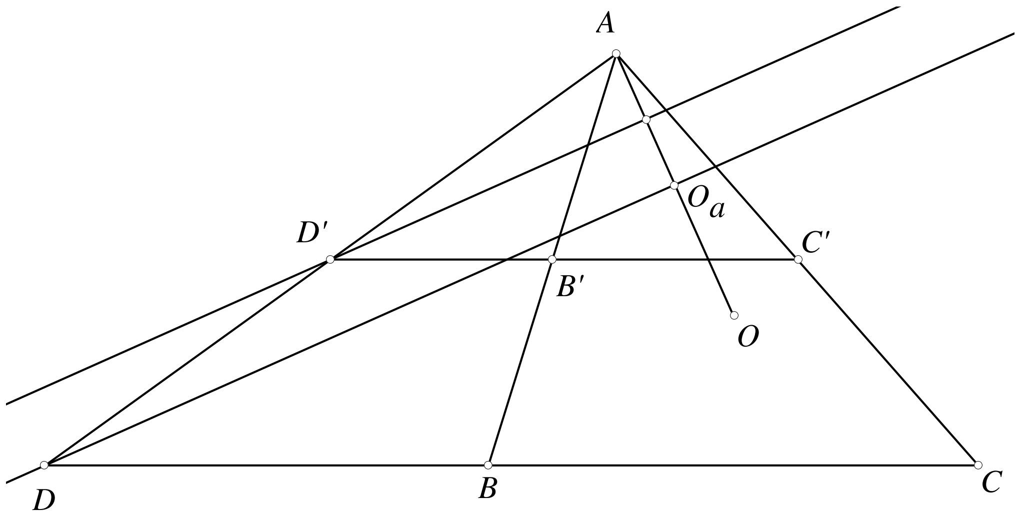
Hình 11.

Chứng minh. Ta chú ý rằng O_a, O_b, O_c chính là đối xứng của tâm đường tròn chín điểm N của tam giác ABC qua $B'C', C'A', A'B'$ giao điểm của trung trực O_aA, O_bB, O_cC với $B'C', C'A', A'B'$ chính là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ANO_a, BNO_b, CNO_c, theo chứng minh bài toán 7 thì chúng thẳng hàng. □

Ta hoàn toàn có thể tổng quát bài toán trên như sau và cách giải hoàn toàn tương tự

Bài toán 10. *Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB, gọi P_a, P_b, P_c là đối xứng của P qua $B'C', C'A', A'B'$. Chứng minh rằng giao điểm của trung trực của các đoạn P_aA, P_bB, P_cC với $B'C', C'A', A'B'$ tương ứng nằm trên một đường thẳng.*

Bài toán 11. *Cho tam giác ABC, gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp, gọi trung trực của OA, OB, OC giao BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng D, E, F thẳng hàng.*



Hình 12.

Chứng minh. Ta gọi A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB và O_a, O_b, O_c là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C, BC'A', CA'B'$ ta dễ thấy O_a là trung điểm OA, hay trung trực của OA đi qua O_a và vuông góc với OA. Gọi trung trực của O_aA giao AD tại D', bằng tính chất đường trung bình dễ thấy D' là trung điểm AD mặt khác cũng do tính chất đường trung bình trong tam giác ABC thì $B'C'$ cũng đi qua trung điểm AD hay đi qua D', vậy theo định lý Thales ta dễ thấy $\frac{D'B'}{D'C'} = \frac{DB}{DC}$. Nếu xác định tương tự ta được E', F' và $\frac{E'C'}{E'A'} = \frac{EC}{EA}, \frac{F'A'}{F'B'} = \frac{FA}{FB}$ ta chú ý rằng theo chứng minh bài toán 8 thì D', E', F' thẳng hàng vậy theo định lý Menelaus ta suy ra $\frac{D'B'}{D'C'}.\frac{E'C'}{E'A'}.\frac{F'A'}{F'B'} = 1$ vậy suy ra $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = \frac{D'B'}{D'C'}.\frac{E'C'}{E'A'}.\frac{F'A'}{F'B'} = 1$ hay D, E, F thẳng hàng, cũng theo định lý Menelaus. □

Ta có ngay một số hệ quả của bài toán 10 như sau

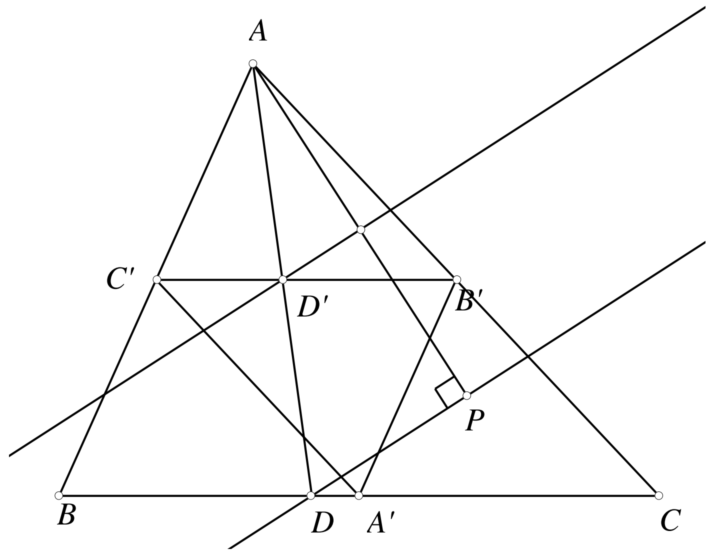
Bài toán 12. *Cho tam giác ABC tâm đường tròn ngoại tiếp O, gọi A', B', C' là đối xứng của A, B, C qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AOA', BOB', COC' có một điểm chung nữa khác O.*

Bài toán 13. *Cho tam giác ABC tâm đường tròn ngoại tiếp O, gọi O_a, O_b, O_c là đối xứng của A, B, C qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AOO_a, BOO_b, COO_c có một điểm chung nữa khác O.*

Sử dụng bài toán 12 ta lại chứng minh được một bài toán giống bài toán 8

Bài toán 14. *Cho tam giác ABC, gọi A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB, gọi O_a, O_b, O_c là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác $AB'C', BC'A', CA'B'$, gọi N là tâm đường tròn chín điểm của tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác $A'NO_a, B'NO_b, C'NO_c$ có một điểm chung nữa khác N.*

Bài toán 15. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của các đường thẳng qua P vuông góc với PA, PB, PC và BC, CA, AB thì D, E, F thẳng hàng.*

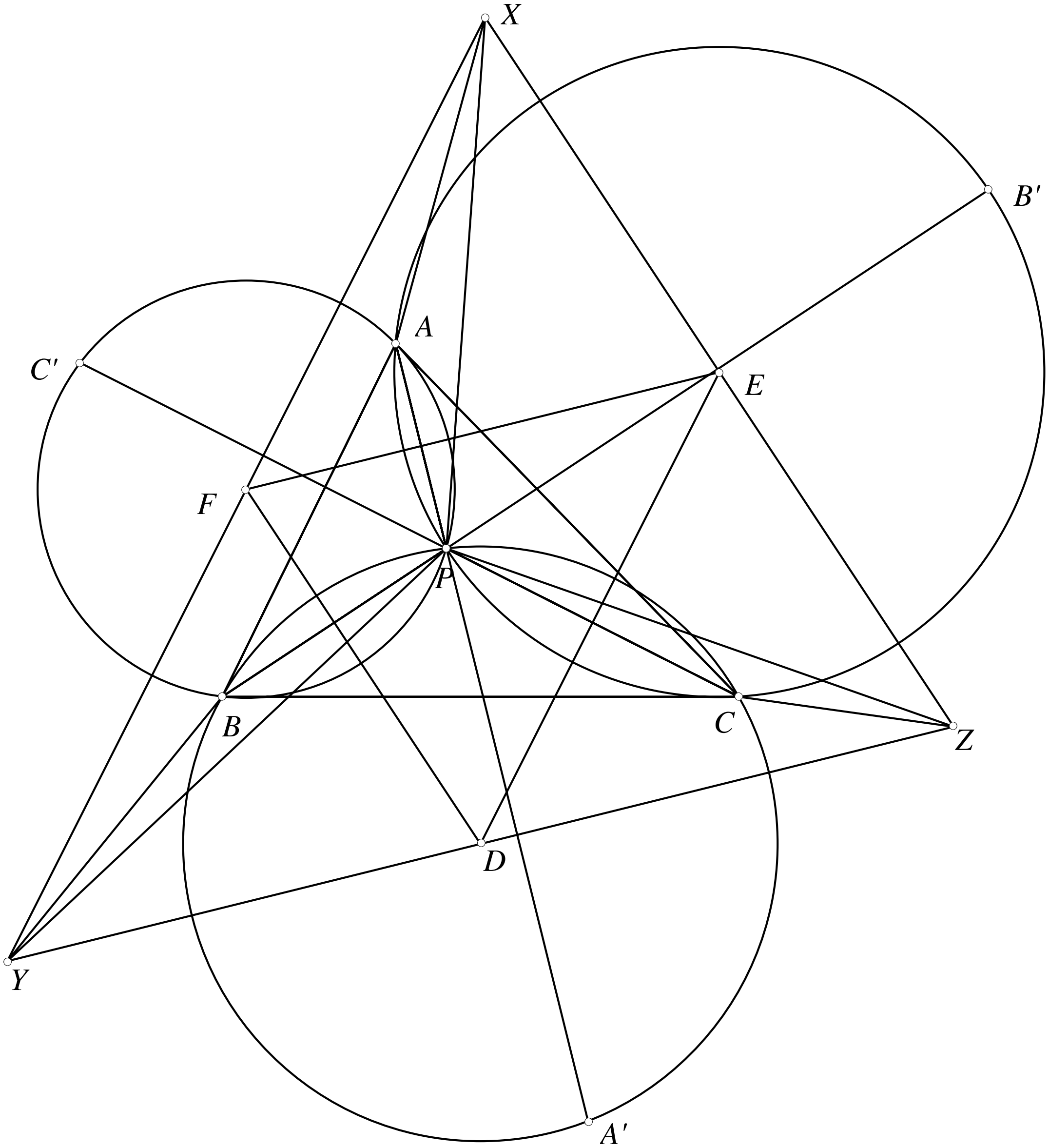


Hình 13.

Chứng minh. Ta gọi A', B', C' là trung điểm BC, CA, AB, ta gọi D' là giao của trung trực của PA và AD bằng tính chất đường trung bình dễ thấy D' là trung điểm AD mặt khác cũng do tính chất đường trung bình trong tam giác ABC thì $B'C'$ cũng đi qua trung điểm AD hay đi qua D', vậy theo định lý Thales ta dễ thấy $\frac{D'B'}{D'C'} = \frac{DB}{DC}$. Nếu xác định tương tự ta được E', F' và $\frac{E'C'}{E'A'} = \frac{EC}{EA}, \frac{F'A'}{F'B'} = \frac{FA}{FB}$ ta chú ý rằng theo chứng minh bài toán 7 thì D', E', F' thẳng hàng vậy theo định lý Menelaus ta suy ra $\frac{D'B'}{D'C'}.\frac{E'C'}{E'A'}.\frac{F'A'}{F'B'} = 1$ vậy suy ra $\frac{DB}{DC}.\frac{EC}{EA}.\frac{FA}{FB} = \frac{D'B'}{D'C'}.\frac{E'C'}{E'A'}.\frac{F'A'}{F'B'} = 1$ hay D, E, F thẳng hàng, cũng theo định lý Menelaus. □

Nhận xét. Đường thẳng nối D, E, F gọi là cát tuyến trực giao của P ứng với tam giác ABC, ta sẽ còn ứng dụng nó trong những bài toán khác.

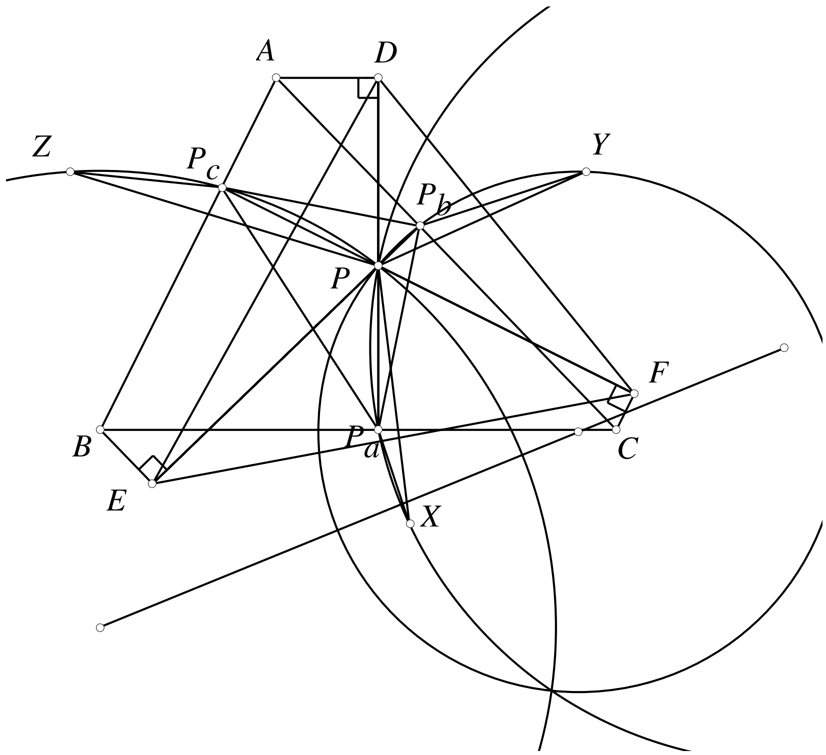
Bài toán 16. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi PA giao đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC là A' tương tự ta có B', C' gọi X, Y, Z là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $PB'C', PC'A', PA'B'$ thì các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAX, PBY, PCZ có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 14.

Chứng minh. Trước hết ta dễ thấy trung trực các đoạn PA', PB', PC' cắt nhau tương ứng tại X, Y, Z, gọi D, E, F lần lượt là tâm các đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC, PCA, PAB, tương ứng thì ta dễ thấy D, E, F lần lượt thuộc YZ, ZX, XY, mặt khác ta cũng dễ thấy DE, EF, FD cũng tương ứng song song với XY, YZ, ZX (do chúng cùng vuông góc PA, PB, PC). Khi đó ta cũng dễ thấy A, B, C là đối xứng của P qua EF, FD, DE, áp dụng bài toán 7 cho tam giác XYZ, D, E, F là trung điểm YZ, ZX, XY, với A, B, C lần lượt là đối xứng của P qua EF, FE, ED thì các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAD, PBE, PCF có một điểm chung nữa khác P, ta có điều phải chứng minh. ☐

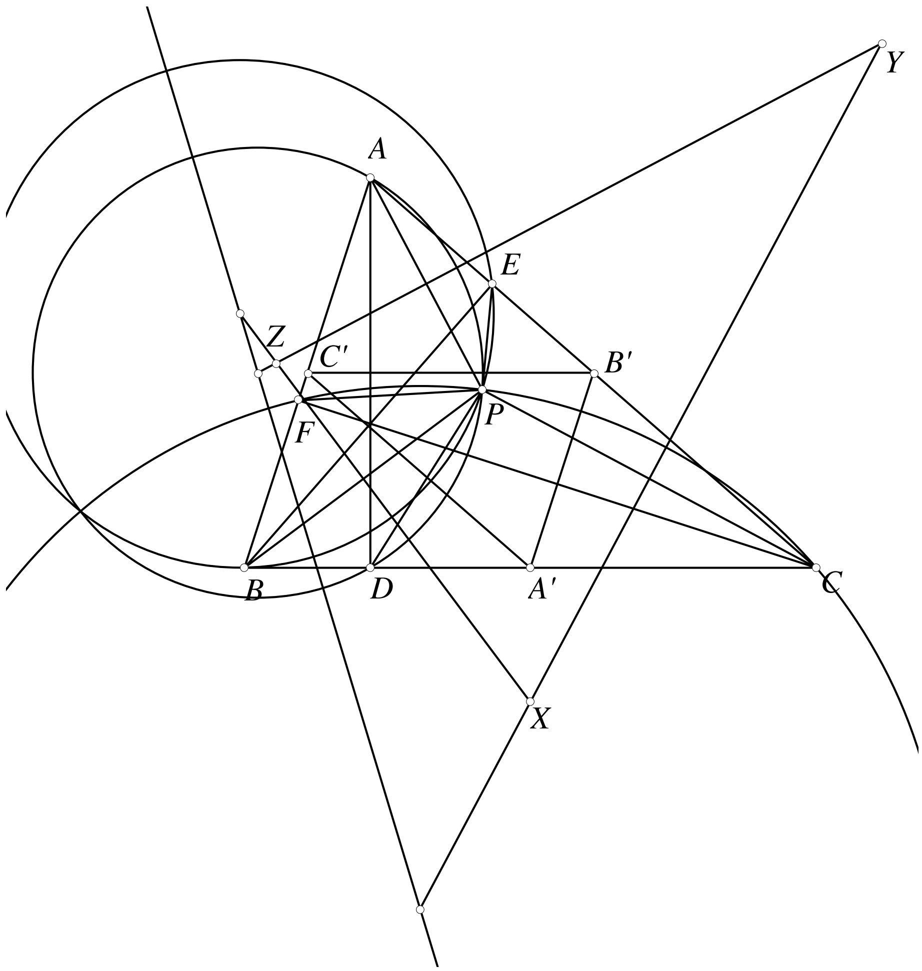
Bài toán 17. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi P_a, P_b, P_c là hình chiếu của P lên ba cạnh BC, CA, AB, gọi D, E, F là hình chiếu của A, B, C lên PP_a, PP_b, PP_c, gọi X, Y, Z là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác PEF, PFD, PDE khi đó các đường tròn ngoại tiếp tam giác PP_aX, PP_bY, PP_cZ có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 15.

Chứng minh. Ta dễ thấy $\angle PDA = 90^\circ$ nên D nằm trên đường tròn đường kính PA, mặt khác do P_b, P_c là hình chiếu của P lên AC, AB tương ứng nên P_b, P_c cũng nằm trên đường tròn đường kính PA, nói cách khác D là giao điểm của PP_a và đường tròn ngoại tiếp tam giác PP_bP_c, vậy áp dụng bài toán 15 cho tam giác $P_aP_bP_c$ kiểm tra lại các giả thiết tương ứng, ta có ngay điều phải chứng minh. □

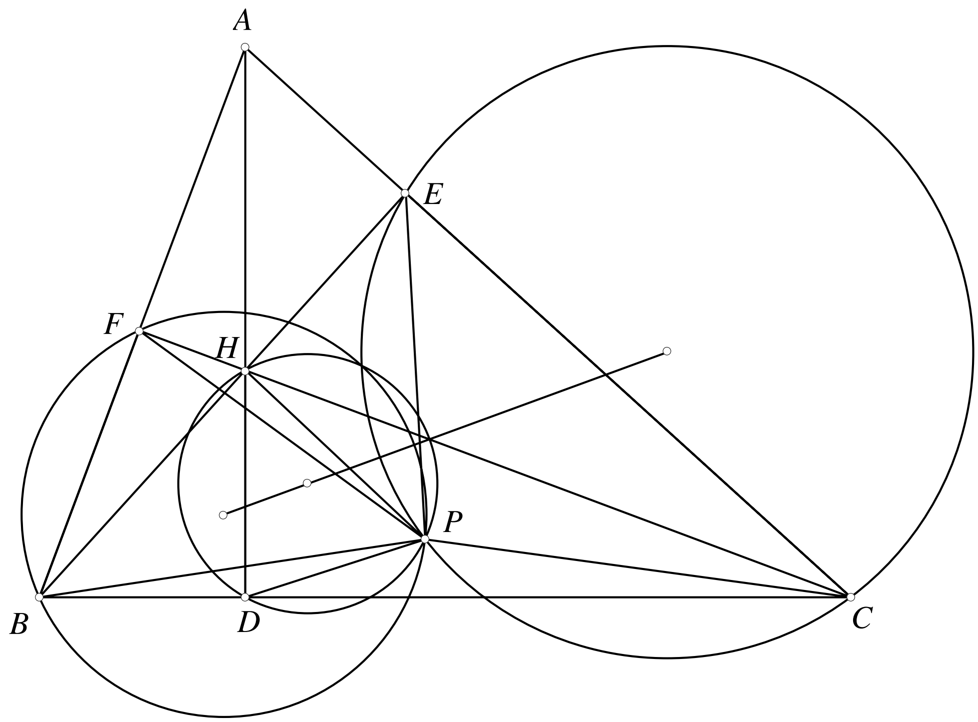
Bài toán 18. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác APD, BPE, CPF có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 16.

Lời giải. Ta vẫn chú ý rằng các đường tròn này đã có một điểm chung là P vậy nên để chứng minh chúng có một điểm chung nữa khác P ta chỉ cần chứng minh tâm của chúng thẳng hàng. Gọi A', B', C' là trung điểm của BC, CA, AB ta dễ thấy $B'C', C'A', A'B'$ lần lượt là trung trực của AD, BE, CF, gọi trung trực của PA, PB, PC cắt nhau tương ứng tạo thành tam giác X, Y, Z, ta thấy rằng giao điểm của YZ, ZX, XY với $B'C', C'A', A'B'$ tương ứng chính là các tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác APD, BPE, CPF vvậy nên theo Bổ đề 2 các giao điểm này thẳng hàng khi và chỉ khi $A'X, B'Y, C'Z$ đồng quy, nhưng theo bài toán 2 thì $A'X, B'Y, C'Z$ đồng quy, ta có điều phải chứng minh. □

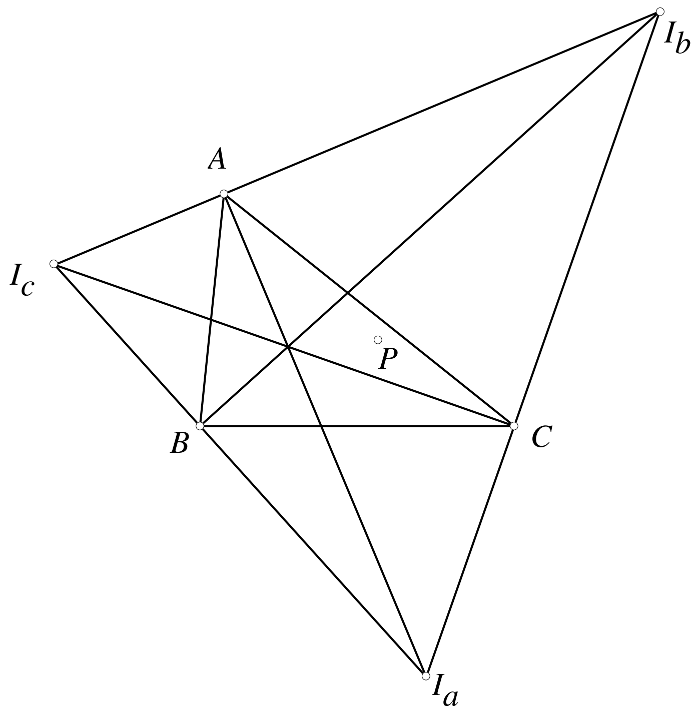
Bài toán 19. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC đồng quy tại H. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác HPD, BPF, CPE có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 17.

Chứng minh. Sử dụng bài toán 17 cho tam giác HBC có các đường cao là HD, BF, CE và điểm P bất kỳ ta có điều phải chứng minh. □

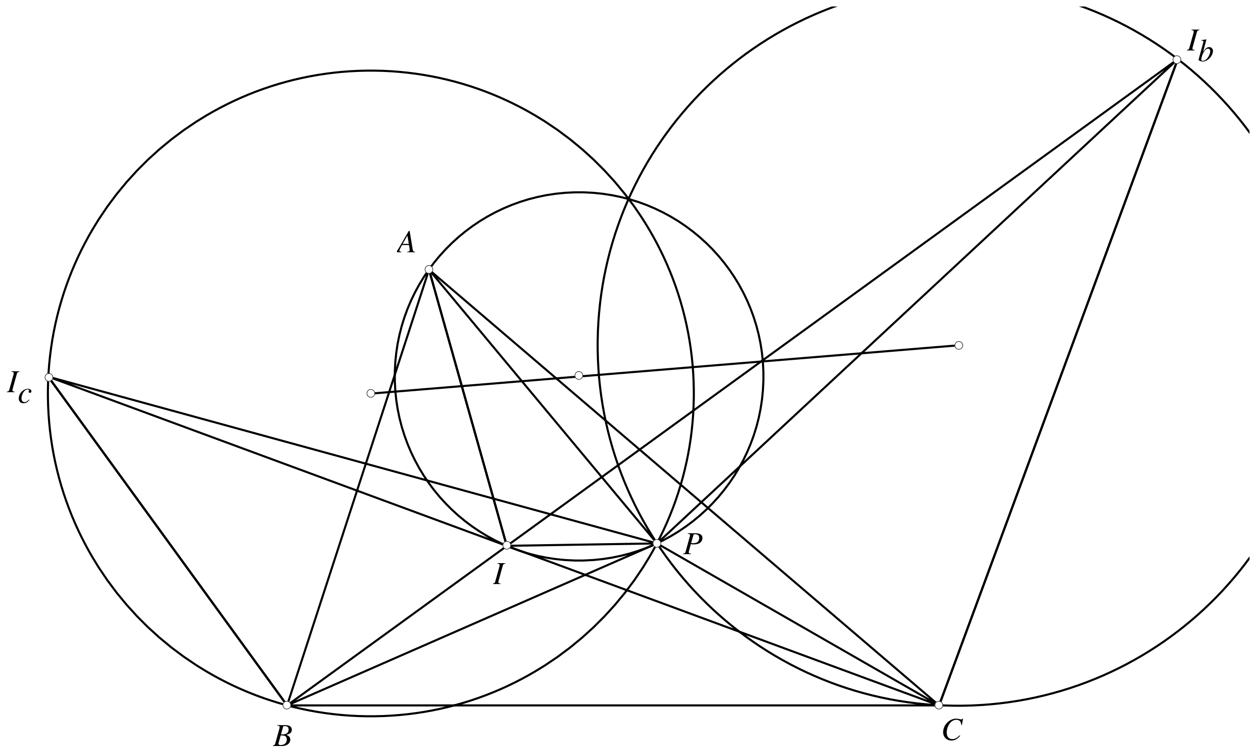
Bài toán 20. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi I_a, I_b, I_c là các tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC tương ứng. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAI_a, PBI_b, PCI_c có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 18.

Chứng minh. Ta dễ thấy I_aA, I_bB, I_cC là các chân đường cao của tam giác $I_aI_bI_c$, áp dụng bài toán 17 cho tam giác $I_aI_bI_c$ và điểm P bất kỳ, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 21. *Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ, gọi I_b, I_c là các tâm đường tròn bàng tiếp tam giác ABC góc B, C tương ứng, gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAI, PCI_b, PBI_c có một điểm chung nữa khác P.*



Hình 19.

Chứng minh. Ta gọi I_a là tâm bàng tiếp góc A, dễ thấy I chính là trực tâm tam giác $I_aI_bI_c$, áp dụng bài toán 19 vào tam giác $I_aI_bI_c$ trực tâm I và điểm P bất kỳ, ta có điều phải chứng minh. □

Lời kết. Chúng ta đã trải qua một chặng đường nhỏ gồm nhiều bài toán thú vị, ai yêu thích môn hình học thì có thể cảm nhận sâu sắc vẻ đẹp của những bài toán về sau, nếu đọc qua thì các bài toán ban đầu chúng ta thấy chúng hầu như rất dễ nhưng về sau có những bài toán thuộc loại khó, tuy vậy chúng ta đã giải chúng vô cùng đơn giản do chúng được sắp xếp thành một chuỗi liên tiếp và khoa học, vẻ đẹp dường như nằm trong những điều đơn giản nhất đó là lời tác giải muốn nói trong toàn bộ bài viết, do hạn chế trong chương trình hình học THCS nên toàn bộ những ứng dụng của các bài toán về ba đường tròn có hai điểm chung không được nhắc tới, nếu độc giả nào biết qua về phép nghịch đảo thì còn có thể thấy được những ứng dụng không ngờ đến của các bài toán đó. Thay cho lời kết xin chúc các bạn thành công trên con đường khám phá hình học.