Chuyên đề: ĐƯỜNG TRÒN VÀ HÌNH TRÒN

10.1 (CHDC Đức, 73) Cho tứ giác lồi ABCD, trong đó AB = AD và CD = CD.

Chứng minh rằng

a) Có thể vẽ được đường tròn nội tiếp tứ giác;
b) Có thể vẽ được đường tròn ngoại tiếp tứ giác khi và chỉ khi AB vuông góc với BC;
c) Nếu AB vuông góc với BC thì bình phương khoảng cách giữa tâm đường tròn nội tiếp (bán kính r) và tâm đường tròn ngoại tiếp (bán kính R) bằng: $R^2+r^2-r\sqrt{r^2+4R^2}$.

10.2 (Rumani, 78) Chứng minh rằng bốn đỉnh của một hình vuông không có thể sắp xếp tương ứng trên 4 đường tròn đồng tâm mà các bán kính của nó lập thành một cấp số cộng.

10.3 (Nam Tư, 83) Trên cung AB của đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật ABCD, người ta lấy điểm M khác A và B. Gọi P, Q, R và S là hình chiếu của điểm M trên các đường thẳng AD, AB, BC và CD. Chứng minh rằng đường thẳng PQ và RS vuông góc với nhau và giao điểm của chúng nằm trên một trong hai đường chéo hình chữ nhật

10.4 (Anh, 77) Cho tam giác ABC đường tròn nội tiếp tam giác tiếp xúc với BC tại D. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó nằm trên đường thẳng đi qua trung điểm của BC và AD.

10.5 (Áo, 72) Cho hai đường tròn tiếp xúc nhau. Ở đường tròn lớn vẽ tam giác đều nội tiếp. Từ các đỉnh của tam giác trên, kẻ các tiếp tuyến với đường tròn nhỏ. Chứng minh rằng độ dài một trong 3 tiếp tuyến bằng tổng độ dài hai tiếp tuyến còn lại.

10.6 (Mỹ, 79) Từ một điểm P trên cung BC của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, người ta kẻ các đường PK, PL, PM lần lượt vuông góc với các đường thẳng BC, AC và AB (K, I, M là chân các đường vuông góc). Chứng minh rằng: $\frac{BC}{PK}=\frac{AC}{PL}+\frac{AB}{PM}$.

10.7 (CHDC Đức, 70; Nam Tư, 72)

a) Giả sử O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, còn D là giao điểm của AO với đường tròn ngoại tiếp tam gaics ABC. Chứng minh rằng: DB = DC = DO.

b) Chứng minh rằng nếu ABCD là tứ giác nội tiếp thì tâm A_1, B_1, C_1, D_1 của các đường tròn nội tiếp các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC là các đỉnh của một hình chữ nhật.

10.8* (Ban Căng, 84) Chứng minh rằng tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp đường tròn bằng tứ giác $H_1H_2H_3H_4$ mà các đỉnh này lần lượt là giao điểm các đường cao của các tam giác:

$A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$.

10.9 a) (Mỹ, 82) Đường chéo của tứ giác nội tiếp đường tròn chia nó thành hai tam giác. Chứng minh rằng tổng các bán kính đường tròn nội tiếp hai tam giác không phụ thuộc vào cách chọn đường chéo.

b) (Bungari, 78) Chứng minh rằng đường cao lớn nhất của tam giác không tù không bé hơn tổng bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác. Khi nào đẳng thức được xác định.

10. 10 (Nam Tư, 77) Trên mặt phẳng có 100 điểm được sắp xếp . Chứng minh rằng tồn tai tập hợp hữu hạn các hình tròn thỏa mãn 3 điều kiện sau:

1) Bất kỳ điểm nào cho trước cũng năm trong một trong các hình tròn.

2) 2 điểm bất kỳ của những hình tròn khác nhau có khoảng cách lớn hơn 1;

3) Tổng những đường kính của tất cả các hình tròn bé hơn 100.

10.11 (Bắc Kinh, 63) Trên mặt phẳng có 2n + 3 điểm được sắp xếp, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng và không có 4 điểm nào nằm trên một đường tròn. Tồn tại hay không đường tròn đi qua 3 điểm trong số đó và chứa trong đó những điểm còn lại?

10.12 (Bungari, 78) Chứng minh rằng, ở bất kỳ đa giác lồi nào cũng tìm được bộ ba các đỉnh liên tiếp sao cho đường tròn đi qua chúng bị giới hạn bởi hình tròn bao phủ toàn bộ đa giác.

10.13 (Phần Lan, 80) Trong n > 1, cặp cạnh đối diện của 2n – giác nội tiếp đường tròn, người ta chọn được n – 1 cặp cạnh song song với nhau. Hãy tìm tất cả giá trị của n để các cạnh của cặp còn lại nhất thiết phải song song với nhau,

10.14 (Bungari, 82) Trên mặt phẳng có n đường tròn khác nhau đều có bán kính bằng 1 được sắp xếp khác nhau. Chứng minh rằng chỉ có một trong số đó chứa một cung, không cắt với một đường tròn trong số những đường tròn còn lại và có độ dài không nhỏ hơn 2P/n.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP ÁN

10.1

a) Theo giả thiết ta có: AB + CD = AD + BC.

Điều ấy chứng tỏ rằng có thể vẽ được đường tròn nội tiếp tứ giác.

b) Vì AB = CD, BC = AD, AC chung nên $\Delta ABC = \Delta ADC \Rightarrow \widehat{ADC} = 1v$

Do đó tứ giác ABCD nội tiếp.

c)Giả sử đường tròn nội tiếp tứ giác ABCD có tâm N, tiếp xúc với cạnh AB và BC tại N_1 và N_2 còn M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD và hình chiếu của nó trên cạnh AB và BC lần lượt là M_1 và M_2. Dễ dàng chứng minh được N, M nằm trên AC.

Ta ký hiệu AB = x, BC = y, khi đó từ tam giác AN, N đồng dạng với tam giác ABC ta có:

$$\frac{x}{y}=\frac{AB}{BC}=\frac{AN_1}{N_1N}=\frac{x-r}{r}$$

Nghĩa là: $xy=r\left(x=y\right)$.

Mặt khác: $x^2+y^2=AB^2+BC^2=AC^2=4R^2$

Nhưng $\left(x+y\right)^2=x^2+2xy+y^2=4R^2+2r\left(x+y\right)$

$$\Rightarrow \left(x+y\right)^2-2r\left(x+y\right)-4R^2=0$$

$$\Rightarrow x+y=r+\sqrt{r^2+4R^2}$$

Xét tam giác vuông MIN ta có: $MN^2=NI^2+MI^2$

Hay $MN^2=N_1M_1{}^2+N_2M_2{}^2$

$$=\left(BN_1-\frac{AB}{2}\right)^2+\left(BN_2-\frac{BC}{2}\right)^2=\left(r-\frac{x}{2}\right)^2+\left(r-\frac{y}{2}\right)^2$$

$$=\frac{x^2+y^2}{4}-r\left(x+y\right)+2x^2=\frac{4R^2}{4}-r\left(r+\sqrt{4R^2+r^2}\right)+2r^2$$

$$=R^2+r^2-r\sqrt{4R^2+r^2}\text{ (đpcm)}$$

10.2Nếu 4 đỉnh hình vuông được sắp xếp trên 4 đường tròn đồng tâm có bán kính theo thứ tự là $a,a+d,a+2d,a+3d$, thì theo định lý 79, có một trong các đẳng thức sau đây đúng:

$$a^2+\left(a+d\right)^2=\left(a+2d\right)^2+\left(a+3d\right)^2$$
$$a^2+\left(a+2d\right)^2=\left(a+d\right)^2+\left(a+3d\right)^2$$
$$(a+d)^2+\left(a+2d\right)^2=\left(a+3d\right)^2+a^2$$

Ta thấy các đẳng thức trên không đúng, vì rằng với bất kỳ a, d > 0 vế trái nhỏ hơn vế phải. Vậy không thể sắp xếp 4 đỉnh của hình vuông trên các vòng tròn đồng tâm đã cho.

10.3 Gọi L và M là giao điểm của OQ với đường tròn, khi đó:

$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{QL} - \overrightarrow{QB}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{MQ}$

Theo định lý 71 ta được:

$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{MS} - \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{QL} - \overrightarrow{QB}$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{QL} + \overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{QB} + \overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{QL} + \overrightarrow{AQ}.\overrightarrow{QB} = a.b - c.d = 0$

ở đây ký hiệu: MQ = a, QL = b, AQ = c, Qb = d.

Điều ấy chứng tỏ rằng: $PQ \perp RS$

Giả sử đường thẳng RS cắt đường thẳng PQ và BD ở các điểm tương ứng là T và E, còn F là giao điểm của đường thẳng BD và QR. Khi đó từ các cặp tam giác đồng dạng phân biệt ta có:

$$QF = \frac{BQ.AD}{BA} = \frac{d(b-a)}{c+d}$$

(do tam giác BQF đồng dạng với tam giác BAD)

$$FS = QS - QF = (b-a) - \frac{d(b-a)}{c+d} = \frac{c(b-a)}{c+d}$$

$$\Delta RBE \sim \Delta SEF \Rightarrow \frac{RE}{ES} = \frac{RB}{FS} = \frac{a(c+d)}{c(b-a)}$$

$$\Delta RPT \sim \Delta RSM \Rightarrow RT.RS = RM.RP$$

$$\Delta RSM \sim \Delta QST \Rightarrow TS.RS = QS.MS$$

$$\Rightarrow \frac{RS}{TS} = \frac{RM.RP}{QS.MS} = \frac{d(c+d)}{b(b-a)} = \frac{a(c+d)}{c(b-a)} = \frac{RE}{ES} \text{ (vì } \frac{b}{d} = \frac{a}{c}\text{)}$$

Chứng tỏ rằng: $T \equiv E$. Vậy PQ.RS BD cắt nhau tại 1 điểm.

10. 4 Giả sử đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh AB và AC ở điểm E và F, còn đường tròn bàng tiếp tiếp xúc với cạnh CB ở điểm L và phần kéo dài của AB và AC tại M và N. Khi đó ta có:

$$2DB = DB + BE = CB - CD + AB - AE = CB + AB - CF - AF = CB + AB - AC$$

$$2CL = CL + CN = CB - LB + AN - AC = CB - BM + AM - AC = CB + AB - AC$$

Suy ra $DB = \dfrac{CB + AB - AC}{2} = CL$ nghĩa là trung điểm đoạn BC trùng với trung điểm của đoạn LD.

Giả sử D' là điểm xuyên tâm của điểm D trên đường tròn nội tiếp tam giác ABC, còn đường thẳng C'B' tiếp xúc với đường tròn này tại D'.

Để ý rằng ở phép vị tự tâm A, biến đường tròn bàng tiếp thành đường tròn nội tiếp. Nhờ phép vị tự này điểm L đã biến thành D'. Suy ra các điểm L, D', A nằm trên cùng một đường thẳng, bởi vậy trung điểm của các đoạn thẳng LD, D'D và AD cùng nằm trên một đường thẳng là đường trung bình của tam giác ADL (song song với BL). Nghĩa là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nằm trên đoạn thẳng nối trung điểm của BC và AD.

10.5 Giả sử D là điểm tiếp xúc của hai đường tròn, còn ABC là tam giác đều nội tiếp đường tròn lớn. Không mất tính tổng quát thử rằng điểm D nằm trên cung AB (hình 32). Ta chứng minh rằng DC = DA + DB.

Trên CD ta lấy điểm M sao cho AD = DM (để ý rằng $DC \geq BC = AB \geq AD$). khi đó tam giác ADM đều vì nó là tam giác cân có : $ADM = ABC = 60^\circ$. Dẫn đến khi quay xung quanh điểm A góc 60° , thì điểm D chuyển đến điểm M, còn điểm B chuyển đến điểm C, bởi vậy BD = MC và DC = DM + MC = AD + DB.

Giả sử R và r là bán kính đường tròn lớn và đường tròn nhỏ I_A, I_B, I_C là độ dài ba tiếp tuyến kẻ tới đường tròn nhỏ từ các đỉnh A, B, C còn A' là điểm khác D . (Nếu A khác D, trường hợp ngược lại A' = D) là giao điểm của đường thẳng AD với đường tròn nhỏ. Điểm A' nhận được từ điểm A qua phép vị tự tâm D và tỉ số $\pm\frac{r}{R}$(nếu hai đường tròn tiếp xúc ngoài thì tỉ số lấy dấu - , còn nếu hai đường tròn tiếp xúc trong thì tỉ số lấy dấu +). Bởi vậy: $AA' = AD \pm AD' = AD\left(1 \pm \frac{r}{R}\right)$

Và theo định lý về tiếp tuyến và cát tuyến ta có: $I_A = \sqrt{AD.AA'} = AD\sqrt{1 \pm \frac{r}{R}}$

Chứng minh tương tự: $I_B = BD\sqrt{1 \pm \frac{r}{R}}$; $I_C = CD\sqrt{1 \pm \frac{r}{R}}$;

Vậy: $I_A = I_B + I_C$.

10.6 Trên đoạn BC tồn tại điểm N , sao cho: $\widehat{PNB} = \widehat{PCA}$ (vì $\widehat{PCB} < \widehat{PCA} = 180^\circ - \widehat{PBA} < 180^\circ - \widehat{PBC}$)

Khi đó có $\Delta BPN \sim \Delta APC$ và $\Delta CPN \sim \Delta APB$.

Bởi vì: $\widehat{PBC} = \widehat{PAC}$ và $\widehat{PBC} = \widehat{PAB}; \widehat{PNC} = 180^\circ - \widehat{PNB} = \widehat{PBA}$.

Với PK là đường cao của các tam giác BPN, và CPN, còn PL và PM là hai đường cao của hai tam giác đồng dạng PC và APB ta được: $\frac{AC}{PL} = \frac{BN}{PK}$; $\frac{AN}{PM} = \frac{CN}{PK}$;

Suy ra: $\dfrac{AC}{PL}+\dfrac{AB}{PM}=\dfrac{BN+CN}{PK}=\dfrac{BC}{PK}$ (đpcm).

10.7a) Ta ký hiệu $\widehat{BAC}=\alpha;\widehat{ABC}=\beta;\widehat{BAC}=\gamma$

khi đó có: $\widehat{DAB}=\widehat{DAC}=\dfrac{\alpha}{2}$ suy ra BD = DC (1)

Do: $\widehat{OCD}=\widehat{OCB}+\widehat{BCD}=\dfrac{1}{2}\widehat{ACB}+\widehat{BAD}=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$

Nên $\widehat{OCD}=180^\circ-\beta-\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\alpha+\gamma-\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\widehat{COD}$ $\Rightarrow DO=DC$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: BD = DO = DC.

b)Ta ký hiệu $\overset{\frown}{AD}=2\alpha;\overset{\frown}{AB}=2\beta;\overset{\frown}{BC}=2\gamma;\overset{\frown}{CD}=2\delta$

Còn các trung điểm của cung BC và CD là hai điểm tương ứng M và N. Khi đó các điểm D_1 và B_1 nằm trên các đoạn tương ứng là AM và AN_1, còn A_1 là giao điểm của 2 đoạn thẳng BN và DM.

Dễ dàng chứng minh được: $MD_1=MB=MC=MA_1$

Bởi vậy tam giác D_1MA_1 cân, suy ra:

Chứng minh tương tự ta được: $\widehat{D_1A_1M}=\dfrac{1}{2}\left(180^\circ-\widehat{AMD}\right)=90^\circ-\dfrac{\alpha}{2}$

$\widehat{B_1A_1N}=90^\circ-\dfrac{\beta}{2}$

Do $\widehat{DA_1N}=\widehat{BA_1M}=\dfrac{\alpha+\delta}{2}$ nên $\widehat{D_1A_1B_1}=180^\circ-\widehat{DA_1M}-\left(\widehat{B_1A_1N}-\widehat{DA_1N}\right)$

$$=180^\circ-\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-\left(90^\circ-\frac{\beta}{2}\right)+\frac{\alpha+\delta}{2}=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=90^\circ$$

Chứng minh tương tự ta được ba góc của tứ giác $A_1B_1C_1D_1$ đều vuông.

10.8 Trước hết ta chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng A_1H_1 và A_2H_2 trùng nhau. Thật vạy, qua điểm A_3 ta vẽ đường thẳng vuông góc với cạnh A_3A_4 và ký hiệu K $\left(K\neq A_3\right)$ là giao điểm của đường thẳng với đường tròn ngoại tiếp tứ giác $A_1A_2A_3A_4$. Khi đó: A_2H_1 song song KA_3 (vì $A_2H_1 \perp A_3A_4$) và A_3H_1 song song với KA_2 vì $A_3H_1 \perp A_2A_4$ và $KA_2A_4 = 90^\circ$ vì KA_4 là đường kính.

Bởi vậy tứ giác $KA_2H_1A_3$ là hình bình hành, suy ra: $\overrightarrow{A_2H_1} = \overrightarrow{A_1H_2}$ và $A_1H_1; A_2H_2$ là 2 đường chéo của hình bình hành $A_1H_2H_1A_2$, nghĩa là trung điểm của hai đoạn thẳng $A_1H_1; A_2H_2$ trùng nhau.

Bằng cách chứng minh tương tự, ta chứng minh cho trung điểm của đoạn thẳng A_2H_2 trùng với trung điểm của đoạn A_3H_6 của A_3H_3 trùng với trung điểm của đoạn A_4H_4. Từ đó dẫn đến tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ có các điểm đối xứng là trung điểm của các đoạn thẳng $A_1H_1; A_2H_2; A_3H_3; A_4H_4$. Đến đây bài toán đã được chứng minh xong.

10.9a) Giả sử tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R, còn hình chiếu của điểm O trên các dây cung $A_1A_3, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1$ lần lượt là H_o, H_2, H_3, H_4 chính là trung điểm của các dây cung đó.

Kí hiệu $h_1 = OH_1\left(i = 0, ..., 4\right)$

Giả sử s_1, s_2 và p_1, p_2 là diện tích và nửa chu vi của các tam giác $A_1A_2A_3$ và $A_3A_4A_1$, còn r_1, r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp chúng.

Ta xét tam giác có chứa điểm O (nếu tồn tại như vậy có nghĩa là điểm O nằm ở trong tứ giác ban đầu). Giả sử điểm O được xác định nằm trong tam giác $A_1A_2A_3$. Sử dụng định lý Ptoleme (định lý 69) đối với các tứ giác nội tiếp $A_3H_oOH_2, A_1H_1OH_o, A_2H_2OH_1$ và từ yếu tố H_oH_2, H_oH_1, H_1H_2 là đường trung bình của tam giác $A_1A_2A_3$ ta có:

Suy ra $(R + r_1)p_1 = RH_oH_2 + RH_oH_1 + RH_1H_2 + s_1$

$$= \left(h_oH_2A_3 + h_2H_oA_3\right) + \left(h_oH_1A_1 + h_1H_oA_1\right) + \left(h_2H_1A_2 + h_1H_2A_2\right) + \frac{1}{2}\left(h_1A_1A_3 + h_oA_3A_1\right)$$

$$= \left(h_1 + h_2 + h_3\right)p_1.$$

Suy ra $R + r_1 = h_1 + h_2 + h_3$

Bây giờ ta xét trường hớp khi tâm đường tròn ngoại tiếp nằm ngoài tam giác. Trong trường hợp này có đúng một trong số các đỉnh của nó cùng với điểm O nằm ở những nửa mặt phẳng khác nhau có bờ là các cạnh đối. Giả sử đỉnh đó là A_4 của tam giác $A_3A_4A_1$. Khi đó các tứ giác $A_1H_4H_oO, A_3H_3H_oO, A_4H_4OH_3$ nội tiếp,

bởi vậy ta có: $\left(R + r_2\right)p_2 = R.H_oH_4 + RH_oH_3 + R.H_3H_4 + S_2$

$$=\left(h_4.H_oA_1-h_o.H_4A_1\right)+(h_3.H_oA_3-h_o.H_3A_3)+\left(h_4.H_3A_4-h_o.H_4A_4\right)+\frac{1}{2}\left(h_3.A_3A_4-h_o.A_4A_1-h_o.A_1A_3\right)$$

$$=\left(h_3+h_4-h_o\right)p_2\Rightarrow R+r_2=h_3+h_4-h_o \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có: $r_1+r_2=h_1+h_2+h_3+h_4-2R$.

Trong trường hợp tổng quát các bán kính các đường tròn nối tiếp phải tìm bằng tổng các giá trị $h_1,h_2,h_3,h_4,2R$, chỉ phụ thuộc vào cách xác định điểm O trong tứ giác $A_1A_2A_3A_4$ dẫn đến tổng này không phụ thuộc vào cách dựng đường chéo.

b) Giả sử tam giác $A_1A_2A_3$ không tù, còn k_1,k_2,k_3 là độ dài đường cao hạ từ các đỉnh A_1,A_2,A_3 xuống các cạnh đối diện. tất cả các kí hiệu đối với các yếu tố còn lại và các tham số của các tam giác A_1,A_2,A_3 được bảo toàn. Không giảm tính tổng quát, giả thử $k_1\le k_2\le k_3$ thì: $k_1.A_2A_3=k_2.A_1A_2=2S_1$.

Nên $A_2A_3\ge A_1A_3\ge A_1A_2$

Như vậy có:

$$k_3=\frac{2S_1}{A_1A_2}=\frac{h_2A_2A_3+h_o.A_1A_2}{A_1A_2}\ge\frac{h_2.A_1A_2+h_o.A_1A_2+h_1.A_1A_2}{A_1A_2}=h_1+h_2+h_o=R+r_1$$

(Đẳng thức cuối cùng đã được xác lập ở phần a)

Như vậy ta đã chứng minh được bất đẳng thức cần thiết. Với trường hợp tam giác $A_1A_2A_3$ nhọn, thì điểm O nằm trong O nằm trong nó, suy ra $h_2>0$, và đẳng thức xảy ra khi $k_1=k_3$ nghĩa là đối với tam giác đều. Nếu tam giác $A_1A_2A_3$ mà vuông, thì $\widehat{A_1}=90^\circ; h_2=0, h_1>0$ và đẳng thức xảy ra khi $k_2=k_3$, nghĩa là đối với tam giác vuông cân.

10.10 Ta xét một quy trình sau đây, kết thúc được thực hiện bằng một số bước nào đó. Ở bước thứ nhất mỗi một trong số các điểm cho trước được phủ bởi hình tròn đường kính $\frac{1}{1200}$. Giả sử sau k bước $\left(k\in N\right)$ cách nhau một khoảng không lớn hơn 1, ta ký hiệu O_1,O_2 là tâm nhưng đường tròn này và A_1,A_2,A_3,A_4 là giao điểm của đường thẳng O_1O_2 với các đường tròn bị giới hạn bởi một hình tròn (điểm A_2 và A_3 nằm giữa hai điểm A_1 và A_4, $A_2A_3\le 1$. Khi đó bước k + 1 kết thúc khi hai hình tròn được nêu thay bởi hình tròn dựng trên đoạn A_1A_4 như đường kính. Quy trình mô tả được tiếp tục chừng nào có thể, nghĩa là đến khi không thỏa mãn điều kiện 2)

Bởi vì sau bước thứ nhất số hình tròn có bằng 100, còn mỗi bước tiếp theo số hình tròn giảm đi 1 nên số bước không thay vược quá 100. Bởi vậy quy trình thứ nhất thiết kết thúc, còn điều kiện 1). Thực hiện được ở mỗi bước sẽ thực hiện được ở cả cuối quy trình. Vì sau bước thứ nhất tổng cách đường kính bằng $\frac{100}{200} = 0,5$, còn mỗi bước tiếp theo nó có thể tăng them không lớn hơn 1, nên kết quả tổng các đường kính không vượt quá số 0,5 + 99 < 100 nghĩa là điều kiện 3) cũng sẽ được thỏa mãn.

10.11 Lấy đường thẳng sao cho tất cả các điểm đều nằm trên ở một nửa mặt phẳng và dịch chuyển song song nó cho đến khi gặp điểm thứ nhất A_1. Sau đó sẽ quay đường thẳng nhận được quanh điểm A_1 chừng nào nó gặp điểm thứ hai khác là A_2. Khi đó tất cả các điểm còn lại nằm ở một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng A_1A_2. Ta đánh số các điểm $A_3 ... A_{2n+3}$ sao cho các bất đẳng thức sau thỏa mãn:

$\widehat{A_1A_2A_3} \le \widehat{A_1A_{i+1}A_2}$ với I = 3,…,2n+2

Đẳng thức $\widehat{A_1A_2A_3} = \widehat{A_1A_{i+1}A_2}$ không thể xảy ra với giá trị nào của I (vì các điểm A_1, A_i, A_{i+1}, A_2 không nằm trên một đường tròn.) Bởi vậy bất đẳng thức $\widehat{A_1A_2A_3} \le \widehat{A_1A_{i+1}A_2}$ xảy ra với đúng n điểm $A_i = A_{n+4} ... A_{2n+3}$ mà các điểm này (và chỉ chúng) nằm trong hình tròn bị giới hạn bởi các đường tròn đi qua các điểm A_1, A_{n+3}, A_3.

10.12 Trong số tất cả các đường tròn đi qua 3 đỉnh của đa giác cho trước, trong đó có hai đỉnh kề nhau,còn cạnh nối hai đỉnh này được nhìn từ đỉnh thứ ba dưới một góc không quá 90° (tập hợp các bộ ba đỉnh như vậy khác rỗng, vì nó chứa bộ ba đỉnh liên tiếp bất kì của đa giác, đồng thời $\widehat{\mathrm{A}A_1A_2} \le 90^\circ$. Giả sử có một đỉnh B của đa giác cho trước nằm ngoài đường tròn giới hạn bởi đường tròn G. Vì đỉnh B và đỉnh A cùng nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng A_1A_2 nên $\widehat{A_1BA_2} \le \widehat{\mathrm{A}A_1A_2} \le 90^\circ$ và (theo định lý hàm số sin) bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác A_1A_2B lớn hơn R, điều này trái một việc chọn đường tròn G. Như vậy đường tròn được chọn giới hạn một hình tròn phủ toàn bộ đa giác. Ta sẽ chứng minh rằng đỉnh A, kế với đỉnh A_2 và khác A_1 cũng nằm trên đường tròn được chọn. Giả sử không như vậy, nghĩa là điểm $A_3 \ne A$ nằm trong hình viên phấn của hình tròn ứng với dây cung A_2A. Khi đó $\widehat{A_2A_3A} > 180^\circ - \widehat{A_2A_1A} \ge 90^\circ$ và (theo định lý hàm số sin) lại có bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác A_2A_3A lớn hơn R, trái với việc chọn đường tròn G. Như vậy ba đỉnh A_1, A_2, A_3 thỏa mãn điều kiện bài toán.

10.13 Ta sẽ chứng minh rằng các giá trị n tìm được là tất cả các số lẻ n > 1. Giả sử n lẻ và trong 2n – giác $A_1...A_{2n}$, tất cả các cặp cạnh đối diện song song với nhau, trừ nhiều nhất là một cặp, chẳng hạn là cặp A_1A_{2n}, A_nA_{n+1}. Nếu $\overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}} = 180^\circ + \alpha$

Thì $\overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}} = \overset{\frown}{A_2A_nA_{n+1}} + \overset{\frown}{A_{n+1}A_{n+2}}$

$= \overset{\frown}{A_1A_{2n}A_{n+2}} + \overset{\frown}{A_{n+2}A_{n+1}} = 360^\circ - \overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}} = 180^\circ - \alpha$ (vì A_1A_2 song song $A_{n+1}A_{n+2}$)

Chứng minh tương tự ta được: $\overset{\frown}{A_3A_{n+2}A_{n+3}} = 180^\circ + \alpha + ... + \overset{\frown}{A_nA_{n+1}A_{2n}}$

$= 180^\circ + (-1)^{n+1}\alpha = 180^\circ - \alpha$

Bởi vậy: $\overset{\frown}{A_1A_2A_n} = 180^\circ + \alpha - \overset{\frown}{A_nA_{n+1}} = \overset{\frown}{A_{n+1}A_{n+2}A_{2n}}$

Suy ra: A_nA_{n+1} song song A_1A_{2n}

Bây giờ ta chứng minh rằng cũng giá trị n (lẻ) này tồn tại 2(n – 1) – giác, sao cho điều kiện trong bài toán không thỏa mãn. Lấy 2n – giác $A_1...A_2$ bât kỳ sao cho các cạnh đối song song với nhau nhưng $A_1A_2A_{n+1} \neq 180^\circ$. Để làm điều này, chỉ cần $\overset{\frown}{A_1A_{n+1}} < 180^\circ$ được chia thành n cung bằng nhau bởi các điểm $A_2...A_n$ và vẽ các dây cung liên tiếp $A_{n+1}A_{n+2}$ song song A_1A_2, $A_{2n-1}A_{2n}$ song song $A_{n-1}A_n$ sau đó heo chứng minh ở trên ta sẽ có $A_{2n}A_1$ song song A_nA_{n+1} thêm nữa $\overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}} = \overset{\frown}{A_1A_2A_{n+1}} = \overset{\frown}{A_{2n}A_1A_n} \neq 180^\circ$.

Bởi vậy $\overset{\frown}{A_2A_3A_n} - \overset{\frown}{A_{2n}A_{2n-1}A_{n+2}} = \overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}} - \overset{\frown}{A_{2n}A_{n+1}A_n}$

$= \overset{\frown}{A_2A_{n+1}A_{n+2}} - \left(360^\circ - \overset{\frown}{A_{2n}A_1A_n}\right) \neq 0$

Nghĩa là các đoạn thẳng A_2A_{2n} và A_nA_{n+2} không song song và 2 (n – 1) – giác có đúng n – 2 cặp cạnh đối diện song song.

10.14Với n = 1 độ dài đường tròn đơn vị là cung có độ dài $2\pi = \frac{2\pi}{n}$ nghĩa là khẳng định của bài toán đúng. Giả thứ $n \geq 2$. Trước hết giả định rằng tâm tất cả n đường tròn nằm trên một đường thẳng. Chọn một trong số các tâm sao cho các tâm còn lại nằm trên nửa đường thẳng. Khi đó đường thẳng vuông góc với đưởng thẳng trên, đi qua tâm đã chọn, cắt đường tròn một cung có độ dài $2\pi = \frac{2\pi}{n}$ và cung đó không cắt các đường tròn còn lại. Bây giờ xét trường hợp khi tâm các đường tròn còn lại. Bây giờ xét trường hợp khi tâm các đường tròn không nằm trên một đường thẳng. Từ tất cả các đa giác lồi với đỉnh là các tâm (tập hợp các đa giác như thể không rỗng) vì nó chứa ít nhất một tam giác. Ta chọn đa giác mà bên ngoài nó có số tâm bé nhất. Ta chứng minh rằng ở ngoài đa giác được chọn không còn một tâm trong số các tâm.

Thật vậy, nếu có một tâm O nào đó nằm ngoài đa giác được chọn, thì vẽ được qua nó đường thẳng không cắt đa giác và sẽ quay đường thẳng quanh điểm O cho đến khi nó gặp đỉnh thứ nhất A và sau đó gặp đỉnh cuối cùng B của đa giác (nếu có vài điểm như vậy thì chọn điểm cách xa O nhất). Cuối cùng tất cả các đỉnh của đa giác nằm trong tam giác AOB thay bởi ba đỉnh A, O, B lúc này bên ngoài đa giác nhận được sẽ có số điểm ở ngoài đa giác được chọn.

Mâu thuẫn này có nghĩa là tồn tại k – giác lồi $k \le n$ với các đỉnh là các tâm, mà trong đó chứa tất cả các tâm. Bởi vì tổng các góc ngoài của k – giác bằng 360° , nên tìm được góc ngoài không bé hơn $\frac{360^\circ}{k} \ge \frac{360^\circ}{n}$. Giả sử đó là góc ngoài B_1OA của góc O của k – giác. Khi đó các đường thẳng OL và OM vuông góc với các cạnh tương ứng OB và OA cắt đường tròn tâm O thành cung LM có độ dài không bé hơn $\frac{2\pi}{n}$. Bởi vì $\widehat{LOM} = \widehat{B_1OA}$. Ta chứng minh rằng cung này không cắt các đường tròn khác. Thật vậy giả sử N là điểm tùy ý trên cung LM, vì $\widehat{NOA} > 90^\circ$ và $\widehat{NOB} > 90^\circ$.

Nên đường tròn với tâm N và bán kính I có với k – giác duy nhất một điểm chung O. Điều này nghĩa là tâm bất kỳ của các đường tròn đi qua điểm N phải trùng với tâm O, khẳng định đã được chứng minh.

Trích từ " CÁC ĐỀ THI VÔ ĐỊCH TOÁN 19 NƯỚC TRONG ĐÓ CÓ VIỆT NAM"- NXB Trẻ

Tài liệu tham khảo cho học sinh giỏi Toán thi vô địch Toán quốc gia & quốc tế (Tập 1)

Người dịch: Nguyễn Đễ - Nguyễn Khánh Nguyên