Một số bài toán cho đội tuyển

Dành cho đội tuyển THPT chuyên KHTN năm 2017

Bài toán 1

Cho hai đường tròn $(K),(L)$ bán kính bằng nhau. P là điểm bất kỳ. Q,R đối xứng P qua K,L. QA,QB tiếp xúc (K). RC,RD tiếp xúc (L). AB giao CD tại E. Chứng minh rằng $EQ=ER$.

Bài toán 2

Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC,CA,AB tại D,E,F. K là hình chiếu của D lên EF. L là hình chiếu của I lên đường cao từ A. Chứng minh rằng IK và DL cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC.

Bài toán 3

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. AB giao CD tại F, AD giao BC tại G. OE cắt FG tại K. Tiếp tuyến tại C và D của (O) cắt nhau tại L. Tiếp tuyến tại A và B của (O) cắt nhau tại M. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KLM và KFO tiếp xúc nhau.

Bài toán 4

Cho tam giác ABC, đường cao BE,CF cắt nhau tại H. S là trung điểm BC. Đường thẳng qua H vuông góc SH cắt AB,AC tại M,N. Đường thẳng qua A vuông góc SA cắt BE,CF tại P,Q. Chứng minh rằng $MQ=NP$.

Bài toán 5

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. AD giao BC tại F. Đường tròn đường kính EF cắt (O) tại X,Y. M,N là trung điểm của AB,CD. Chứng minh rằng phân giác của các góc $\angle MXN$, $\angle MYN$ và MN đồng quy.

Bài toán 6

Cho đường tròn (K) và (L) cắt nhau tại A,B. Đường tròn (N) đi qua B cắt $(K),(L)$ tại C,D khác B sao cho AC,AD tiếp xúc (N). AC,AD lần lượt cắt $(L),(K)$ tại E,F. Gọi P,Q là tâm ngoại tiếp tam giác BEC,BFD. PQ cắt BC,BD tại M,N. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN nằm trên AB.

Bài toán 7

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I. IA,IB,IC lần lượt cắt (O) tại D,E,F khác A,B,C. X,Y,Z thuộc BC,CA,AB sao cho $IX\perp IA, IY\perp IB, IZ\perp IC$. Chứng minh rằng các đường thẳng qua D,E,F lần lượt vuông góc với DX,EY,FZ đồng quy.

Bài toán 8

Cho tam giác ABC, tâm ngoại tiếp O, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC,CA,AB tại D,E,F. AD,BE,CF đồng quy tại Ge. Gọi X,Y,Z là đối xứng của Ge qua EF,FD,DE. Chứng minh rằng AX,BY,CZ đồng quy tại một điểm thuộc OI.

Bài toán 9

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AB giao CD tại E. AD giao BC tại F. Đường tròn đường kính EF cắt (O) tại X,Y. M,N là trung điểm của AC,BD. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác XMN,YMN tiếp xúc với (O).

Bài toán 10

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. F nằm trong tứ giác sao cho $\angle FAB+\angle FCB=\angle FBA+\angle FDA=90^\circ$. Chứng minh rằng E,F,O thẳng hàng.

Bài toán 11

Cho tứ giác $ABCD$ có $AC=BD$ và AC cắt BD tại P. $(K),(L)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB,PCD. BC cắt $(K),(L)$ tại S,T khác B,C. M là trung điểm $\overset{\frown}{PS}$ không chứa A của (K). N là trung điểm $\overset{\frown}{PT}$ không chứa D của (L). Chứng minh rằng $MN\parallel KL$.

Bài toán 12

Cho tam giác ABC với M là trung điểm của AB. AP,BQ là đường cao. Chứng minh rằng AC tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác BMP khi và chỉ khi BC tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMQ.

Bài toán 13

Cho đường tròn (O) đường kính AB. Một đường thẳng song song với AB cắt (O) tại C,D sao cho B,C khác phía AD. Đường thẳng song song với AD qua C cắt (O) tại E khác C. BE giao CD tại F. Đường thẳng qua F song song AD cắt AB tại P. Chứng minh rằng PC tiếp xúc (O).

Bài toán 14

Cho tam giác ABC các điểm D,E thuộc đoạn BC, F,G thuộc đoạn CA, H,I thuộc đoạn AB sao cho $BD=CE, CF=AG, AH=BI$. Gọi M,N,P là trung điểm của GH,DI,EF. Chứng minh rằng AM,BN,CP đồng quy.

Bài toán 15

Cho tam giác ABC trực tâm H và M là trung điểm BC. K là hình chiếu của H lên AM. L là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC sao cho AL là đường đối trung của tam giác ABC. Chứng minh rằng $MK=ML$.

Bài toán 16

Cho tam giác ABC, trực tâm H, trung tuyến AM. K là hình chiếu của H lên AM. Chứng minh rằng phân giác $\angle BKC$ và $\angle BAC$ cắt nhau trên BC.

Bài toán 17

Cho $(K),(L)$ cắt nhau tại P,Q. B thuộc (K) và C thuộc (L) sao cho PQ là phân giác $\angle BPC$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC luôn đi qua một điểm cố định khác P khi B,C di chuyển.

Bài toán 18

Cho tứ giác $ABCD$ có AC giao BD tại E. EX,EY,EZ,ET lần lượt là phân giác của các tam giác EAB,EBC,ECD,EDA. Gọi M,N,P,Q là trung điểm của TX,XY,YZ,ZT. Chứng minh rằng AM,BN,CP,DQ đồng quy.