

Mỗi tuần một bài toán

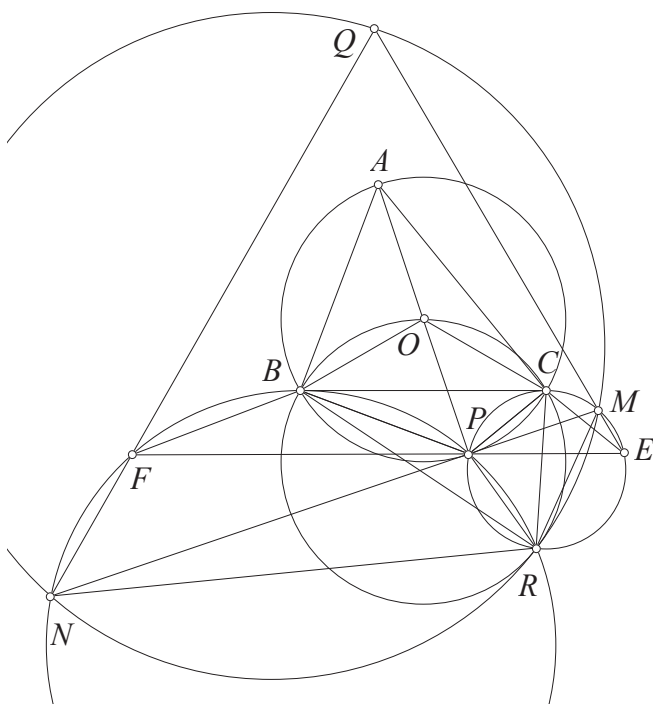
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Dây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . P di chuyển trên cung nhỏ BC . Dựng ra ngoài tam giác PBC các điểm E, F sao cho $\triangle PCE \sim \triangle AOB$ và $\triangle PBF \sim \triangle AOC$. Tiếp tuyến tại P của (O) cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác PCE, PBF tại M, N khác P . EM cắt FN tại Q . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi P thay đổi.

Lời giải



Gọi PCE, PBF cắt nhau tại R khác P . Ta thấy $180^\circ - \angle BPC = \angle BAC = \angle CAO + \angle BAO = \angle CPE + \angle BPF$ nên P, E, F thẳng hàng, suy ra $\angle RME = \angle RPE = \angle RNQ$ nên R nằm trên (QMN) . Từ đó $\angle BRC = \angle BRP + \angle CRP = \angle BFP + \angle CEP = \angle OAC + \angle OAB = \angle BAC$. Vậy đường tròn (RBC) đối xứng với đường tròn (O) qua BC nên cố định. Ta lại có $\angle CRM = \angle CPM = \angle CBP = \angle CBR - \angle PBR = \angle CBR - \angle PNR$ suy ra (RMN) tiếp xúc (RBC) hay (QMN) luôn tiếp xúc đường tròn đối xứng (O) qua BC cố định.

Nhận xét

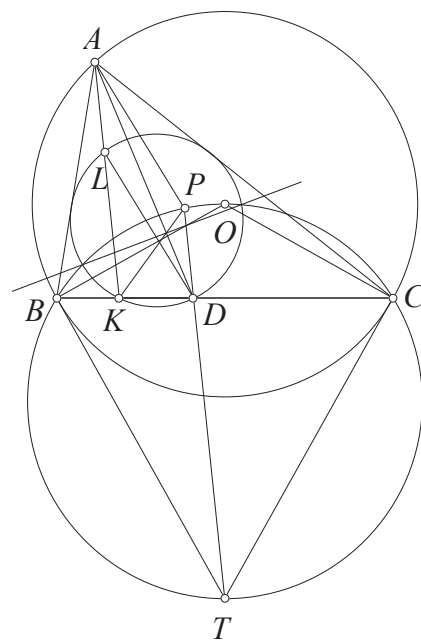
Bài toán được tác giả tạo ra từ cấu hình bài toán IMO 2011 bằng đối xứng trục nhưng được giải gọn hơn như trên. Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 Toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, trong quá trình giải đã đề xuất một bài toán khác trên cấu hình này và cho lời giải tại [đây](#).

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . P di chuyển trên cung nhỏ BC . Dựng ra ngoài tam giác PBC các điểm E, F sao cho $\triangle PCE \sim \triangle AOB$ và $\triangle PBF \sim \triangle AOC$. Tiếp tuyến tại P của (O) cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác PCE, PBF tại M, N khác P . EM cắt FN tại Q . Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi P thay đổi.

Trong topic đó bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 Toán THPT chuyên SP cũng đưa ra lời giải bằng cộng góc. Tác giả cũng nhận được lời giải đúng qua email từ bạn **Phạm Hoàng Minh**, lớp 11 toán, trường PTNK.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T . D là một điểm trên cạnh BC . TD cắt (TBC) tại P khác T . K thuộc BC sao cho $AK \parallel PD$. L thuộc AK sao cho $DL \parallel AP$. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn (DKL) và (TBC) đi qua giao điểm của KP và AD .



Mọi trao đổi xin gửi về email anageomantica@gmail.com.