Mỗi tuần một bài toán

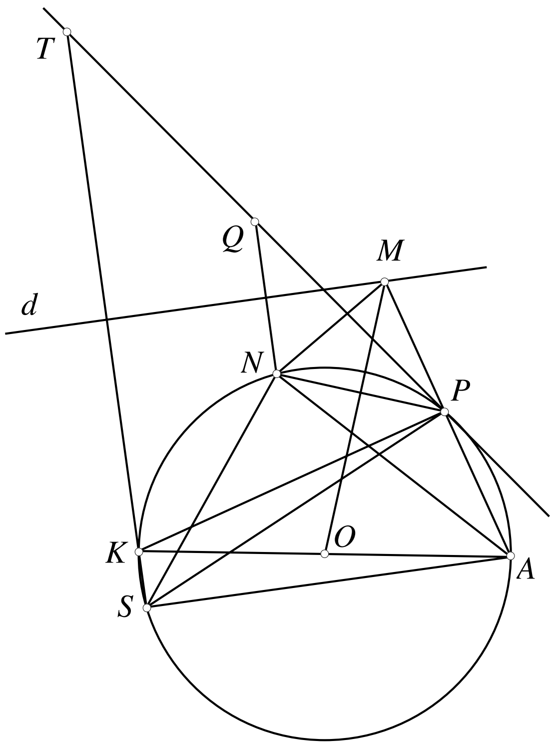
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho A là một điểm cố định trên đường tròn (O) và d là một đường thẳng bất kỳ cố định. P là một điểm di chuyển trên (O). AP cắt d tại M. N đối xứng P qua OM. Q đối xứng N qua d. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.

Lời giải



Gọi AK là đường kính của (O). Đường thẳng qua K vuông góc với d cắt (O) tại S khác K và cắt PQ tại T. Ta dễ thấy M là tâm ngoại tiếp tam giác PQN nên biến đổi góc định hướng modulo 180° ta có $(QT, QN) = (QP, QN) = (MP, MO) = (PK, PN) = (SB, SN) = (ST, SN)$. Từ đó ta thấy tứ giác $SNQT$ nội tiếp, mặt khác $SNQT$ là hình thang nên $SNQT$ là hình thang cân và nhận d là trục đối xứng. Vậy T đối xứng S qua d mà A, K, S đều cố định nên T cố định hay PQ đi qua T cố định.

Nhật xét

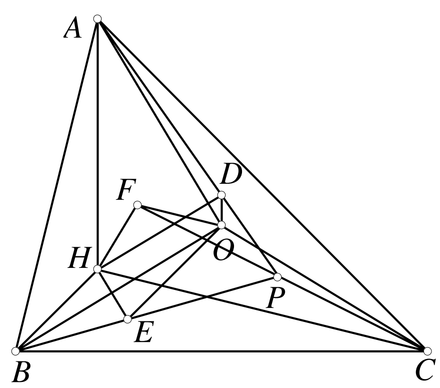
Bài toán này đặc trưng cho việc sử dụng góc định hướng của hai đường thẳng. Vì bài toán phát biểu tổng quát với cấu hình chỉ cần đường thẳng d và một điểm cố định trên đường tròn (O) nên bài toán có tầm ứng dụng rất lớn. Mặt khác bài toán cũng có thể được phát triển theo nhiều cách khác nhau, sau đây là một ví dụ phát triển bài toán này.

Cho A là một điểm cố định trên đường tròn (O) và d là một đường thẳng bất kỳ cố định. P di chuyển trên (O). PA cắt d tại M. Q đối xứng với A qua d. PQ cắt d tại S. Vẽ các tiếp tuyến SU, SV của (O) với U, V thuộc (O) và T là trung điểm UV. Lấy điểm R sao cho $RM \perp MA$ và $RT \perp TA$. Chứng minh rằng R luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Tác giả đã nhận được lời giải từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương. Các bạn **Nguyễn Minh Quang** lớp 11 toán, THPT Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình, bạn **Phạm Nguyễn Thiện Huy** lớp 12A2 và **Trần Nhân Trung** lớp 11A1 trường chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng, bạn **Nguyễn Cảnh Hoàng** lớp 11 Toán trường chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cho lời giải ở đây. Tác giả còn nhận được các lời giải đúng của các bạn **Bùi Văn Bình, Trương Văn Hoằng, Bùi Công Minh**, lớp 12 Toán, **Lê Sỹ Quan, Lê Phước Tùng**, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước. Ngoài ra bài toán cũng được tham gia giải ngay trên blog Hình học sơ cấp.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H và tâm ngoại tiếp O. Đường thẳng qua H lần lượt vuông góc với OA, OB, OC theo thứ tự cắt trung trực BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

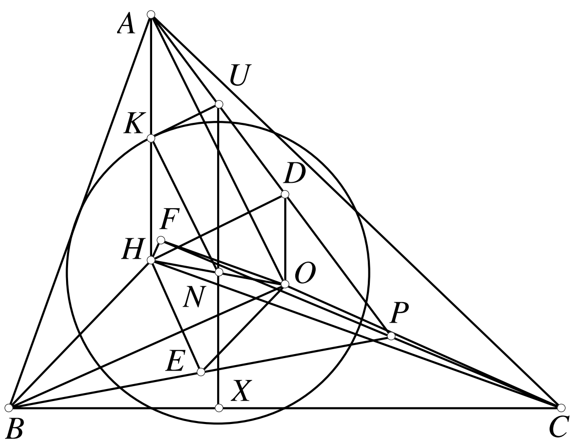
Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H và tâm ngoại tiếp O. Đường thẳng qua H lần lượt vuông góc với OA, OB, OC theo thứ tự cắt trung trực BC, CA, AB tại D, E, F. Chứng minh rằng AD, BE, CF đồng quy.

Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC và P là điểm bất kỳ. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Trên PD, PE, PF lấy các điểm X, Y, Z sao cho $\overline{PD}.\overline{PX} = \overline{PE}.\overline{PY} = \overline{PF}.\overline{PZ}$. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Chứng minh. Gọi YZ, ZX, XY lần lượt cắt BC, CA, AB tại U, V, W theo định lý Desargues ta chỉ cần chứng minh U, V, W thẳng hàng. Theo định lý Menelaus ta nhận thấy U, V, W thẳng hàng khi và chỉ khi trung điểm của AU, BV, CW thẳng hàng, điều này đúng do ta dễ nhận ra các đường tròn đường kính AU, BV, CW đồng trục vì có H, P cùng phương tích với các đường tròn này, trong đó H là trực tâm tam giác ABC. Vậy ta hoàn tất chứng minh.



Giải bài toán. Gọi (N) là đường tròn Euler của tam giác ABC. X là hình chiếu của N trên BC. K là trung điểm AH. Tiếp tuyến tại K của (N) cắt NX tại U. Nếu R là bán kính ngoại tiếp tam giác ABC thì bán kính (N) là $\dfrac{R}{2}$. Từ đó $\overline{NU}.\overline{NX} = -\dfrac{R^2}{4}$. Phép vị tự tâm A tỷ số 2 biến K thành H và NX thành trung trực BC. Ta chú ý kết quả quen thuộc là $NK \parallel OA$. Từ đó U là giao của đường thẳng qua K vuông góc với KN và NX biến thành giao điểm của đường thẳng qua H vuông góc với OA và trung trực BC chính là D hay AD đi qua U. Tương tự có các điểm V, W lần lượt nằm trên BE, CF và Y, Z là hình chiếu của N trên CA, AB thì $\overline{NU}.\overline{NX} = \overline{NV}.\overline{NY} = \overline{NW}.\overline{NZ} = -\dfrac{R^2}{4}$. Theo bổ đề dễ có AU, BV, CW đồng quy hay AD, BE, CF đồng quy.

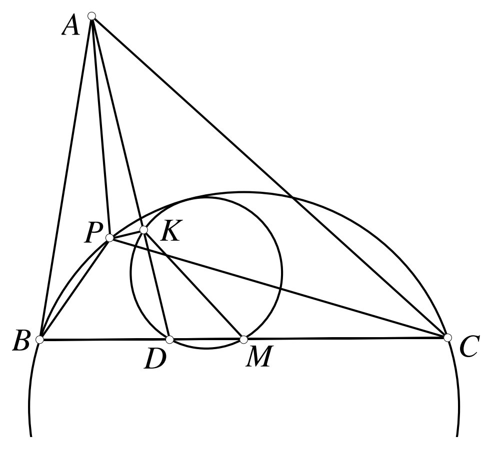
Nhật xét

Tác giả không nhận được lời giải nào cho bài toán này. Lời giải của bài toán cũng là quy trình tác giả tạo ra bài toán này. Thực sự là khi tạo ra bài toán này tác giả cũng không nghĩ là nó quá khó. Tuy vậy trong quá trình tập huấn đội tuyển THPT chuyên KHTN, tác giả cũng ra bài toán này trong 2 tuần nhưng chưa có phản hồi. Sử dụng phép chiếu song song ta dễ dàng đưa ra bài toán tổng quát như sau

Cho tam giác ABC và P bất kỳ. PA, PB, PC lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F. Đường thẳng qua P song song EF cắt đường thẳng qua trung điểm BC và song song PA tại X. Tương tự có Y, Z. Chứng minh rằng AX, BY, CZ đồng quy.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường đối trung AD và trung tuyến AM. P là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. K là hình chiếu của P lên AD. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

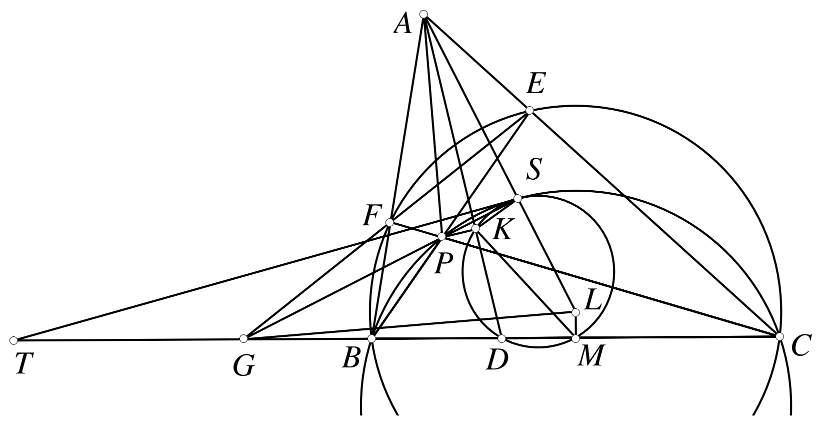
Đề bài

Cho tam giác ABC có đường đối trung AD và trung tuyến AM. P là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. K là hình chiếu của P lên AD. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC.

Lời giải

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC cắt BD tại E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EAB và ECD cắt nhau tại F khác E thì $OF \perp FE$.

Chứng minh. Theo tính chất trục đẳng phương EF, AB, CD đồng quy tại G. Cũng theo định lý Miquel dễ thấy F nằm trên các đường tròn ngoại tiếp tam giác GAC, GBD. Từ đó gọi R là bán kính của (O) thì $OE^2 - OG^2 = (OE^2 - R^2) - (OG^2 - R^2) = \overline{EA}.\overline{EC} - \overline{GB}.\overline{GB} = \overline{EF}.\overline{EG} - \overline{GE}.\overline{GF} = \overline{EG}.(\overline{EF} + \overline{GF}) = (\overline{EF} - \overline{GF})(\overline{EF} + \overline{GF}) = FE^2 - FG^2$. Từ đó $OF \perp FE$.



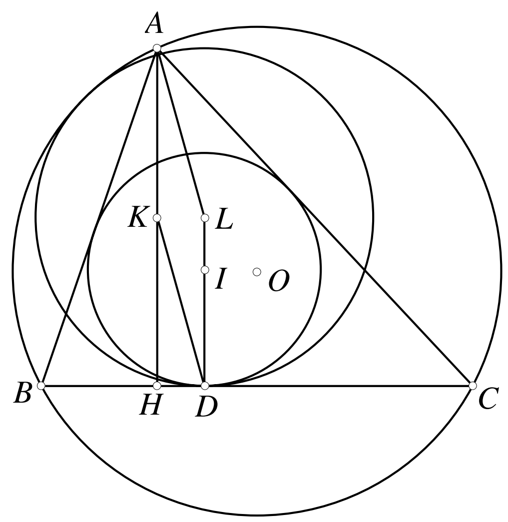
Giải bài toán. Gọi PB, PC theo thứ tự cắt CA, AB tại E, F. Gọi S là giao điểm khác P của đường tròn ngoại tiếp tam giác PEF và PBC. Do $\angle PBA = \angle PCA$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (L). Gọi EF cắt BC tại G. Theo định lý Brocard thì $PG \perp AL$, theo bổ đề thì $PS \perp SL$, mặt khác theo tính chất trục đẳng phương thì S, P, G thẳng hàng. Từ đó PG vuông góc AL tại S. Từ đó chú ý các tứ giác $GSLM$ và $ASKP$ nội tiếp và góc có cạnh tương ứng vuông góc ta có $\angle SDM = \angle SLG = \angle SPA = \angle SKA$. Suy ra S nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM. Kẻ tiếp tuyến tại S của đường tròn ngoại tiếp tam giác SPB cắt BC tại T. Ta chú ý $\triangle SBE \sim \triangle SCF$ và tính chất đường đối trung $\frac{TB}{TC} = \frac{SB^2}{SC^2} = \frac{BE^2}{CF^2} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{DB}{DC}$. Từ đó $(BC, DT) = -1$, ta suy ra $TS^2 = TB.TC = TD.TM$ hay TS tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác KDM và PBC tiếp xúc nhau tại S.

Nhật xét

Bài toán này xuất phát từ bài toán chọn đội tuyển KHTN năm 2014 và được phát biểu theo cách khác. Đây là một bài toán tiếp xúc thú vị, điểm S thực chất là một trong các điểm Miquel của tứ giác $BCEF$. Tác giả nhận được lời giải sớm nhất từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương, bạn **Dũng** đã gửi tới tác giả một lời giải thuần túy hình học chỉ dùng kiến thức THCS. Tác giả còn nhận được lời giải đúng từ các bạn **Nguyễn Ngọc Hiếu** lớp 12A2 THPT chuyên KHTN, **Phạm Ngọc Huy, Bùi Công Minh, Bùi Văn Bình** lớp 12 toán và **Lê Sỹ Quan** lớp 11 toán THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước. Bạn **Nguyễn Minh Quang** lớp 11 toán, THPT Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình cho lời giải đúng tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AH. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D. K là trung điểm AH. L đối xứng K qua trung điểm AD. Chứng minh rằng đường tròn (L, LD) tiếp xúc (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

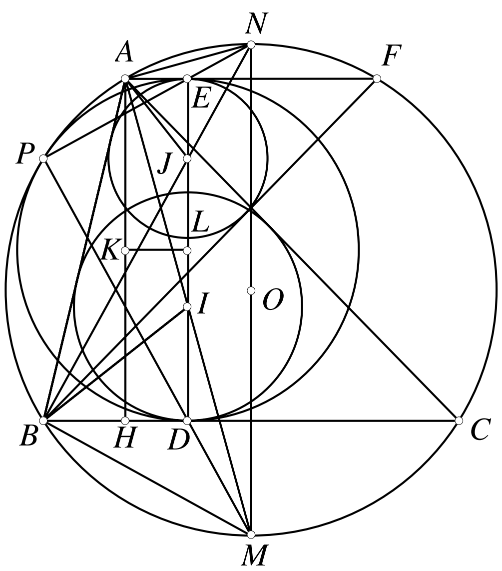
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với đường cao AH. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D. K là trung điểm AH. L đối xứng K qua trung điểm AD. Chứng minh rằng đường tròn (L, LD) tiếp xúc (O).

Lời giải



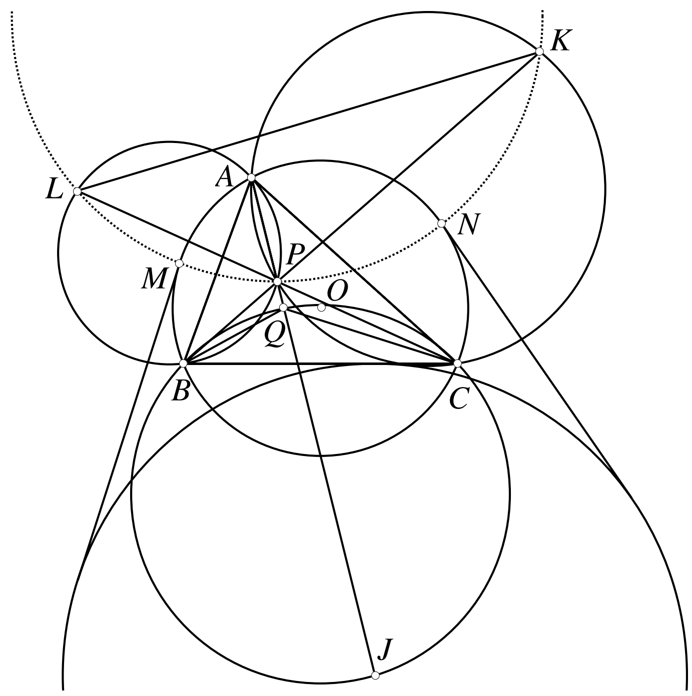
Gọi DE là đường kính của (L) dễ thấy $AE \parallel BC$. Gọi AE cắt (O) tại F khác E. Gọi (J) là đường tròn nội tiếp tam giác FAB. Ta thấy $\angle AIB = 90^\circ + \frac{\angle C}{2} = 90^\circ + \frac{\angle AFB}{2} = \angle AJB$, suy ra tứ giác $AJIB$ nội tiếp. Từ đó chú ý $AF \parallel BC$ nên $\angle BID = 90^\circ - \angle IBD = \angle BAJ$ ta suy ra J, I, D thẳng hàng. Từ đó dễ thấy (J) tiếp xúc AF tại E. Gọi AI, BJ lần lượt cắt (O) tại M, N khác A, B. Ta dễ thấy MN là đường kính của (O). Mặt khác lại có $\angle ANJ = \angle BMI$ nên có hai tam giác cân đồng dạng $\triangle ANJ \sim \triangle BMI$. Lại có hai tam giác vuông đồng dạng $\triangle AEJ \sim \triangle IDB$. Từ đây ta suy ra $\triangle ANE \sim \triangle IMD$. Vậy $\angle ANE = \angle IMD$ hay NE và MD cắt nhau tại P thuộc (O). Do MN là đường kính của (O) nên $\angle MPN = 90^\circ$ suy ra P nằm trên (L) là đường tròn đường kính DE. Từ $DE \parallel MN$ suy ra (L) tiếp xúc (O).

Nhật xét

Bài toán này có thể coi là một hệ quả của định lý Sawayama và Thebault nhưng cách giải trên hoàn toàn không sử dụng đến định lý này mặc dù ý tưởng lời giải mô phỏng lại một phần cách chứng minh định lý. Mặt khác các bạn cũng có thể thấy một mở rộng của bài toán này từ hình thang cân nội tiếp sang tứ giác nội tiếp trong đề thi olympic chuyên KHTN ngày 2 năm 2015. Tác giả nhận được lời giải sớm nhất từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương. Tác giả còn nhận được lời giải đúng từ các bạn **Phạm Ngọc Huy, Bùi Công Minh, Bùi Văn Bình** lớp 12 toán và **Lê Sỹ Quan** lớp 11 toán THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước. Bạn **Nguyễn Minh Quang** lớp 11 toán, THPT Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình cho lời giải đúng tại đây. Bạn **Ngô Quang Dương** lớp 12A2 Toán THPT chuyên KHTN gửi tới lời giải có sử dụng Parabol.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có P, Q là hai điểm đẳng giác nằm trên phân giác góc $\angle BAC$. PB, PC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác PCA, PAB tại K, L khác P. QA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác QBC tại J khác Q. Đường tròn (J) tiếp xúc BC. Tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (J) tiếp xúc (O) tại M, N. Chứng minh rằng năm điểm P, K, L, M, N cùng thuộc một đường tròn.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

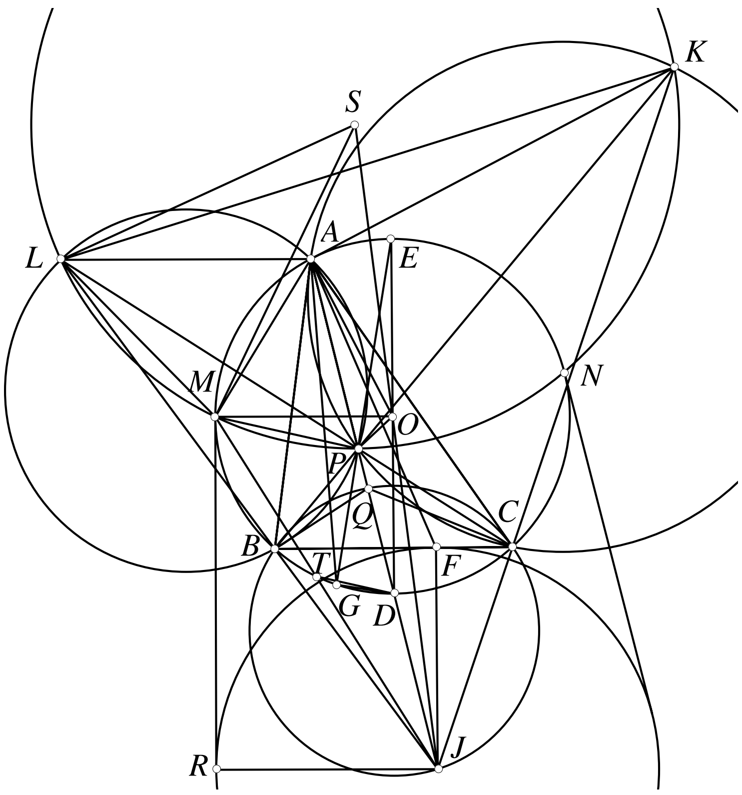
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có P, Q là hai điểm đẳng giác nằm trên phân giác góc $\angle BAC$. PB, PC lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác PCA, PAB tại K, L khác P. QA cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác QBC tại J khác Q. Đường tròn (J) tiếp xúc BC. Tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (J) tiếp xúc (O) tại M, N. Chứng minh rằng năm điểm P, K, L, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải



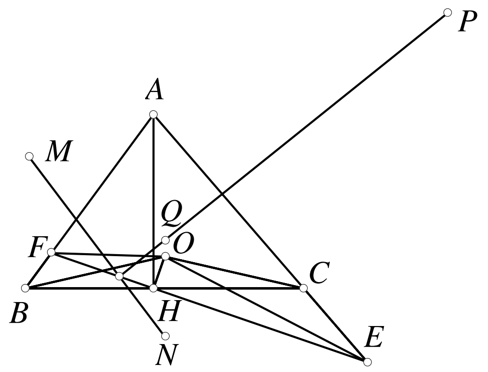
Ta có $\angle LBA + \angle JBC = \angle LPA + \angle JQC = \angle PAC + \angle PCA + \angle QAC + \angle QCA = \angle BAC + \angle ACB = 180^\circ - \angle ABC$. Từ đó L, B, J thẳng hàng. Tương tự K, C, J thẳng hàng. Từ đó $JB.JL = JP.JA = JC.JK$. Vậy phép nghịch đảo cực J biến đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC thành đường tròn (S) ngoại tiếp tam giác PKL nói cách khác J là tâm vị tự ngoài của (O) và (S). Gọi JM cắt (O) tại T khác M và JA cắt (O) tại D khác A, ta sẽ chứng minh $\frac{JM}{JT} = \frac{JP}{JD}$ từ đó sử dụng phép vị tự ta suy ra M thuộc (S), tương tự N thuộc (S), thật vậy. Ta có $\angle ABP = \angle QBC = \angle QJC$ nên $\triangle APB \sim \triangle ACJ$. Lấy G thuộc (O) sao cho $\angle BAG = \angle CAF$ ta dễ thấy $\triangle ABG \sim \triangle AFC$. Từ đó $AG.AF = AB.AC = AP.AJ$ nên $\triangle AGP \sim \triangle AJF$ suy ra $\angle AGP = \angle AJF = \angle ADO$ do đó GP và DO cắt nhau tại E trên (O). Từ đó $\triangle EPD \sim \triangle APG \sim \triangle AFJ$, suy ra $PD.AJ = DE.FJ = 2R.R_J$. Gọi tiếp tuyến chung qua M tiếp xúc (J) tại R và bán kính của (O) và (J) lần lượt là R và R_J ta có $JM^2 = R_J^2 + RM^2 = R_J^2 + (OJ^2 - (R_J - R)^2) = OJ^2 - R^2 + 2R_J.R = JD.JA + JA.PD = JA.JP$ suy ra $\frac{JM}{JT} = \frac{JM^2}{JM.JT} = \frac{JA.JP}{JA.JD} = \frac{JP}{JD}$. Kết hợp các nhận xét ban đầu ta thu được điều phải chứng minh.

Nhật xét

Bài toán giải theo hướng này khá ngắn gọn khi ta lấy đường tròn ngoại tiếp tam giác PKL làm trung gian và chỉ ra M, N lần lượt thuộc đường tròn này bằng phép vị tự, đó cũng là một cách hay gặp khi ta muốn chứng minh nhiều điểm thuộc một đường tròn. Tác giả nhận được lời giải từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương, **Bùi Công Minh, Bùi Văn Bình** lớp 12 toán THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước. Bạn **Nguyễn Minh Quang** lớp 11 toán, THPT Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình cho một lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn với đường cao AH và tâm ngoại tiếp O. Đường thẳng qua H vuông góc với OH lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Gọi M, N theo thứ tự là trực tâm các tam giác OFB và OHB và P, Q theo thứ tự là trực tâm các tam giác OEC, OHC. Chứng minh rằng MN, PQ, EF đồng quy.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

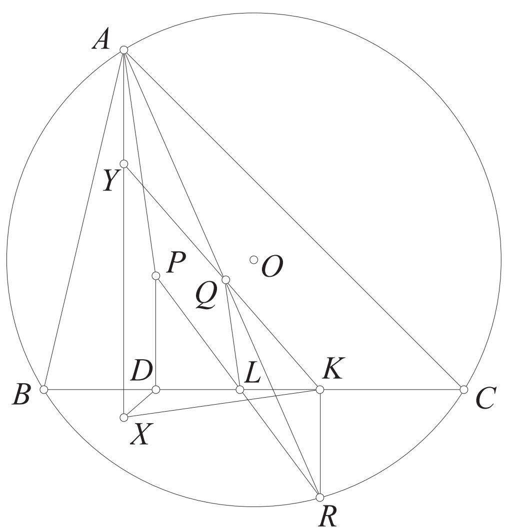
Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với P, Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác đó. AQ cắt (O) tại R khác A. D, K là hình chiếu của P, R lên BC. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A, D, K lần lượt vuông góc với BC, QK, AP đồng quy.

Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q là hai điểm đẳng giác. AP cắt (O) tại M khác A. QM cắt BC tại E thì $PE \parallel AQ$.

Chứng minh của Phan Anh Quân. Gọi AQ cắt (O) tại N khác A và cắt BC tại H. Vì P, Q đẳng giác nên $\triangle CHN \sim \triangle ACM$ và $\triangle CPM \sim \triangle QCN$ (g.g). Ta suy ra $HN.AM = CM.CN = QN.PM$ vì thế nên $\frac{MP}{MA} = \frac{NH}{NQ} = \frac{ME}{MQ}$ hay $PE \parallel AQ$.



Giải bài toán. Gọi đường thẳng qua A vuông góc BC cắt đường thẳng qua K vuông góc AP tại X. Ta sẽ chứng minh $XD \perp QK$, thật vậy. Gọi QK cắt AX tại Y và PR cắt BC tại R, theo bổ đề thì $QL \parallel AP$. Theo định lý Thales ta có $\frac{QK}{QY} = \frac{QR}{QA} = \frac{LR}{LP} = \frac{LK}{LD}$, từ đó ta suy ra $YD \parallel QL \parallel AP \perp XK$. Từ đó trong tam giác XYK thì D là trực tâm nên $XD \perp QK$. Ta hoàn thành chứng minh.

Nhật xét

Bài toán là mở rộng của đề thi vô địch Serbia năm 2016 bài toán 4 ngày 2. Chứng minh có sử dụng kết quả quen thuộc về điểm đẳng giác và cũng bao hàm kết quả $YA = PD$, đó cũng là mở rộng một kết quả quen thuộc trên đường tròn nội tiếp. Bài toán này còn có cách phát biểu khác và có hệ quả như sau

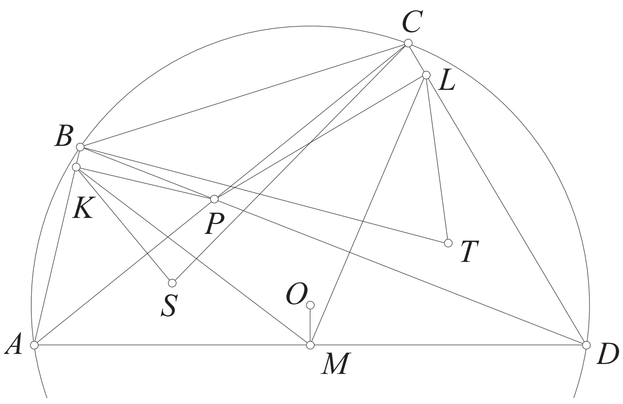
Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt BC tại M khác D. DP cắt EF tại L. AL cắt BC tại K. Các đường thẳng qua A, M lần lượt vuông góc với BC, QK cắt nhau tại X. Chứng minh rằng $KX \parallel EF$.

Cho tam giác ABC và điểm P bất kỳ. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF cắt BC tại M khác D. DP cắt EF tại L. AL cắt BC tại K. Chứng minh rằng các đường thẳng qua A, M, K lần lượt vuông góc với BC, AK, AD đồng quy.

Tác giả nhận được lời giải sớm nhất từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương. Các bạn **Nguyễn Đức Bảo** và **Nguyễn Đình Hoàng** lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cho các lời giải khác ở đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải qua email từ các bạn **Trương Mạnh Tuấn, Trần Anh Tài** lớp 10 Toán, **Trần Quang Huy** lớp 12 Toán, THPT chuyên KHTN, Hà Nội, **Lê Phước Tùng**, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước, **Nguyễn Tiến Long** lớp 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ.

Bài toán đề nghị

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với AC cắt BD tại P. M là trung điểm AD. K, L lần lượt là hình chiếu của P lên AB, CD. Gọi S, T lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác KMA và LMD. Chứng minh rằng $KS.BT = CS.LT$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

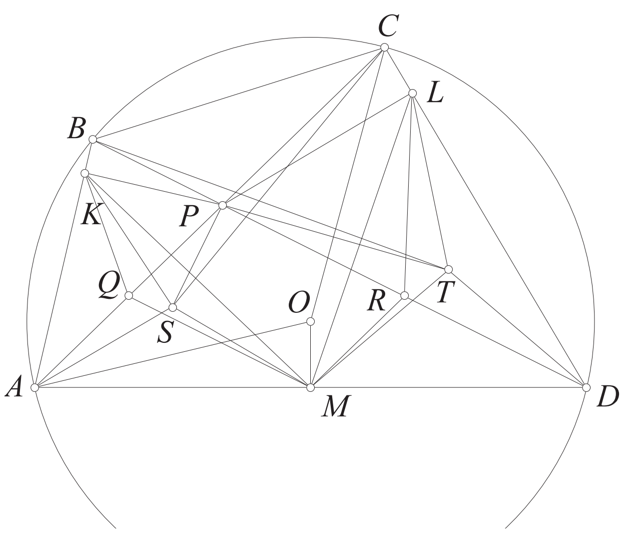
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với AC cắt BD tại P. M là trung điểm AD. K, L lần lượt là hình chiếu của P lên AB, CD. Gọi S, T lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác KMA và LMD. Chứng minh rằng $KS.BT = CS.LT$.

Lời giải



Gọi Q, R là trung điểm của PA, PD. Ta dễ thấy $QM = \frac{1}{2}PD = LR$ và $RM = \frac{1}{2}PA = KQ$ và $\angle KQM = \angle KQP + \angle PQM = 2\angle KAP + \angle PQM = 2\angle LDP + \angle PRM = \angle LRP + \angle PRM = \angle LRM$. Từ đó hai tam giác QKM và RLM bằng nhau c.g.c. Nên $\angle KML = \angle QMR - \angle QMK - \angle RML = 180° - \angle PRM - \angle RLM - \angle RML = \angle PRL = 2\angle PDL$. Từ đó $\angle CAS = \angle KAS - \angle KAC = 90° - \angle KMA - \angle PDL = \angle KMO - \angle PDL = \angle KML - \angle OML - \angle PDL = 2\angle PDL - (90° - \angle LMD) - \angle PDL = \angle PDL - \angle TDL = \angle TDB$. Ta lại có $\angle AOC = 2\angle ADC = \angle MTL$ nên hai tam giác cân OAC và TML đồng dạng. Tương tự hai tam giác cân OBD và SMK đồng dạng. Chú ý $MK = ML$ do hai tam giác QKM và RLM bằng nhau. Từ đó ta có $TD.AC = TL.AC = ML.OC = MK.OB = KS.BD = SA.BD$. Từ đó hai tam giác SAC và TDB đồng dạng. Vậy $BT.KS = BT.AS = CS.TD = CS.LT$. Ta thu được điều phải chứng minh.

Nhật xét

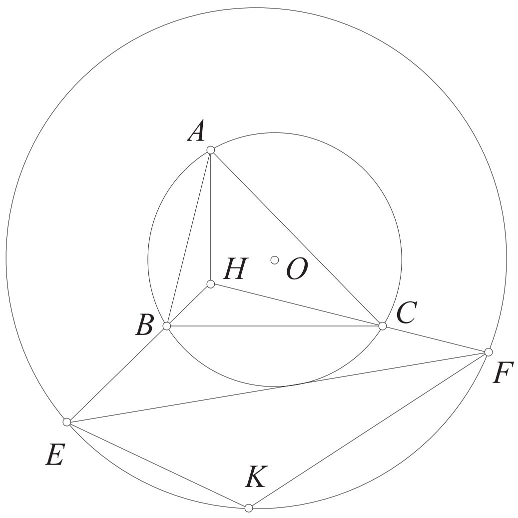
Bài toán là mở rộng của đề thi vô địch miền Tây Trung Quốc năm 2014. Trong chứng minh chúng ta dựng ra hai trung điểm đề chỉ ra hai tam giác bằng nhau, thực chất cấu hình này là một bài toán quen thuộc và nổi tiếng. Bài toán có một hệ quả trực tiếp và chứng minh bằng bổ đề E.R.I.Q rất thú vị như sau

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) với AC cắt BD tại P. M là trung AD. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu của P lên AB, CD. Gọi S, T lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác KMA và LMD. Gọi SU, TV lần lượt là phân giác các tam giác SCK và TBL. Chứng minh rằng trung trực KL chia đôi UV.

Ngoài ra trên cấu hình đặc biệt này có rất nhiều điểm để khai thác. Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cho lời giải sớm nhất ở đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải qua email từ các bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương, **Nguyễn Đình Hoàng** lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, **Trương Mạnh Tuấn, Trần Anh Tài** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN, Hà Nội, **Lê Phước Tùng**, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H, nội tiếp đường tròn (O). HB, HC lần lượt cắt một tiếp tuyến thay đổi của (O) tại E, F. K đối xứng với H qua EF. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KEF luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi tiếp tuyến thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

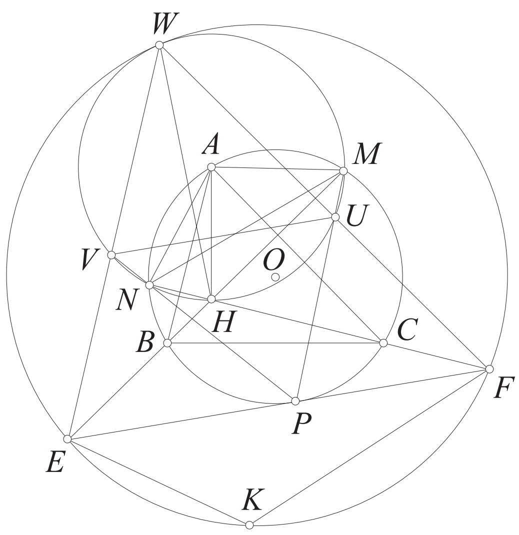
***Trần Quang Hùng,** Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn trực tâm H, nội tiếp đường tròn (O). HB, HC lần lượt cắt một tiếp tuyến thay đổi của (O) tại E, F. K đối xứng với H qua EF. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác KEF luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi tiếp tuyến thay đổi.

Lời giải



Gọi (A) là đường tròn tâm A đi qua H. Gọi EF tiếp xúc (O) tại P. HB, HC cắt (O) tại M, N khác B, C. PM, PN cắt (A) tại U, V khác M, N. Do P, E, F thẳng hàng nên theo định lý Pascal đảo thì EV và FU cắt nhau tại W thuộc (A). Ta lại có $\angle NPE = \angle NMP = \angle NVU$ nên $UV \parallel EF$. Ta sẽ chứng minh W thuộc (KEF) từ đó (WEF) sẽ tiếp xúc (A) cố định, thật vậy. Ta có $\angle EWF = 180^\circ - \angle WVU - \angle WUV = 180^\circ - (\angle WVP - \angle UVP) - (\angle WUP - \angle VUP) = 180^\circ - (180^\circ - \angle WHN) + \angle UVP - (180^\circ - \angle WHM) + \angle VUP = \angle MHN - (180^\circ - \angle UVP - \angle VUP) = \angle MHN - \angle MPN = \angle MHN - (180^\circ - \angle MAN) = 180^\circ - \angle MHN = 180^\circ - \angle BHC = 180^\circ - \angle EKF$. Từ đây suy ra tứ giác $WEKF$ nội tiếp. Vậy đó là điều phải chứng minh.

Nhật xét

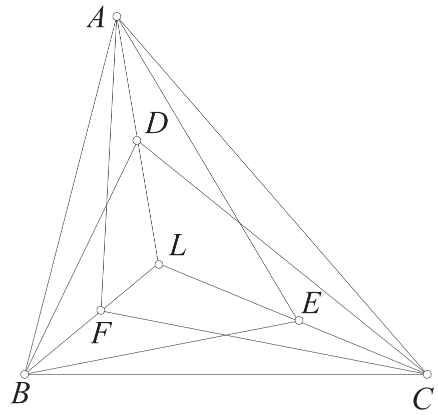
Bài toán là áp dụng kết quả bài toán 3 thi vô địch Serbia năm 2016 vào tam giác (HMN) có tâm ngoại tiếp là A. Việc chứng minh đường tròn (KEF) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định là một kết quả có ý nghĩa, vì những dạng bài đường tròn tiếp xúc đường tròn cố định không nhiều. Bài toán Serbia là một bài toán có ý nhiều ý nghĩa về đường tròn tiếp xúc cũng như có nhiều góc nhìn khá thú vị. Tôi xin giới thiệu một bài toán mở rộng cho bài toán Serbia do tôi tìm ra

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P là điểm nằm trong tam giác. Tiếp tuyến tại P của đường tròn (PBC) cắt CA, AB tại E, F. Q là điểm bất kỳ trên (PBC). Đường tròn (QBF) và (QCE) cắt nhau tại R khác Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác REF tiếp xúc (O).

Ngoài ra trên cấu hình đặc biệt này có rất nhiều điểm để khai thác qua phép nghịch đảo. Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương gửi đến tác giả lời giải sớm nhất và điểm thú vị của lời giải này là không dùng Pascal đảo. Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và **Nguyễn Tiến Long**, lớp 10 toán, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, cho lời giải tại đây. Tác giả còn nhận được lời giải qua email từ các bạn **Trương Mạnh Tuấn, Trần Anh Tài** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN, Hà Nội.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có điểm Lemoine là L. Lấy D, E, F lần lượt thuộc đoạn LA, LB, LC sao cho $\angle EAC = \angle DCA$ và $\angle FAB = \angle DBA$. Chứng minh rằng $\angle EBC = \angle FCB$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng,** Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có điểm Lemoine là L. Lấy D, E, F lần lượt thuộc các đoạn LA, LB, LC sao cho $\angle FAC = \angle DCA$ và $\angle EAB = \angle DBA$. Chứng minh rằng $\angle FBC = \angle ECB$.

Lời giải

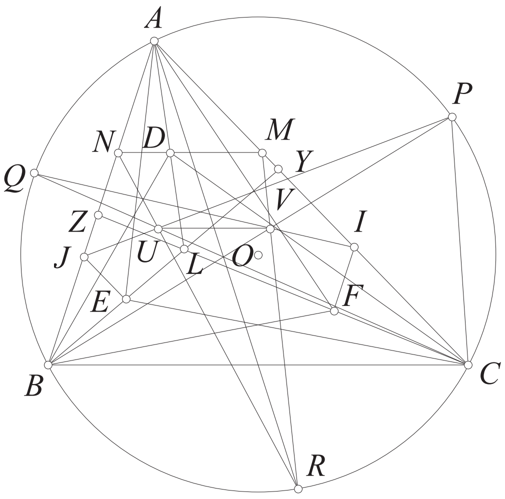
Bổ đề 1. Cho tam giác ABC với E, F thuộc CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. P là điểm bất kỳ. M, N thuộc PC, PB. Chứng minh rằng $MN \parallel BC$ khi và chỉ khi FN, EM và AP đồng quy.

Chứng minh. Gọi FN cắt AP tại Q. Theo định lý Menelaus thì $\frac{QP}{QA} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{NB}{BP} = 1$, lại có $EF \parallel BC$ nên $\frac{EA}{EC} = \frac{FA}{FB}$ nên $\frac{QP}{QA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{NB}{BP} = 1$. Từ đó theo Menelaus thì E, M, Q thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{QP}{QA} \cdot \frac{EA}{EC} \cdot \frac{MC}{CP} = 1$ kết hợp đẳng thức trên thì E, M, Q thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{NB}{BP} = \frac{MC}{CP}$ hay tương đương $MN \parallel BC$.

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có đường đối trung là BE, CF. M, N nằm trên BE, CF sao cho $\angle MBC = \angle NCB$. Lấy K, L thuộc BC sao cho $MK \parallel AB$ và $NL \parallel AC$. Các trung tuyến ứng với B, C của tam giác ABC cắt (O) tại P, Q khác B, C. Chứng minh rằng QK, LP và trung tuyến qua A đồng quy.

Chứng minh. Gọi KM, LN cắt CA, AB tại I, J. Ta thấy $\frac{NB}{NE} = \frac{JB}{JA}$ mà hai tam giác BAP và BEC đồng dạng. Từ đó $\angle JPB = \angle NCB$. Tương tự $\angle IQC = \angle MBC$ mà $\angle MBC = \angle NCB$ nên $\angle JPB = \angle IQC$. Từ đó gọi PJ cắt CQ tại U và QI cắt BP tại V thì tứ giác $PQUV$ nội tiếp, dễ suy ra $UV \parallel BC$. Từ đó có điểm W nằm trên trung tuyến ứng với A sao cho $UW \parallel AC$ và $VW \parallel AB$. Theo bổ đề 1 dễ thấy LP và KQ đều đi qua W.

Giải bài toán. Gọi các đường trung tuyến ứng với A, B, C của tam giác ABC cắt (O) tại R, P, Q. Đường thẳng qua D song song BC cắt CA, AB tại M, N. Trên CA, AB lấy I, J sao cho $FI \parallel AB$ và $EJ \parallel AC$. Theo bổ đề 2 thì PJ, RN và CQ đồng quy tại U và QI, RM và BP đồng quy tại V. Lại có NU, MV đồng quy với trung tuyến ứng với A tại R nên theo bổ đề 1 thì $UV \parallel BC$, từ đó dễ suy ra tứ giác $PQUV$ nội tiếp. Gọi BL, CL cắt CA, AB tại Y, Z thì hai tam giác QAC và BZC đồng dạng và $\frac{IA}{IC} = \frac{FZ}{FC}$ nên $\angle FBC = \angle CQI$. Tương tự $\angle ECB = \angle BPJ$. Lại từ tứ giác $PQUV$ nội tiếp nên $\angle CQI = \angle BPJ$ ta suy ra $\angle FBC = \angle ECB$.

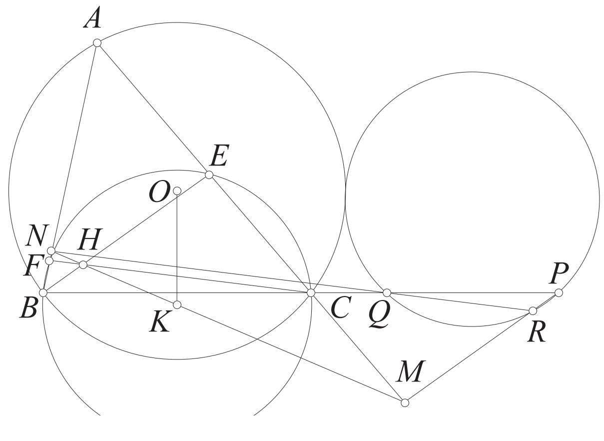


Nhật xét

Bài toán là một cách mở rộng trực tiếp khác của bài toán G5 trong Shortlist 2000. Các bạn **Nguyễn Đức Bảo, Nguyễn Đình Hoàng** trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đưa ra các lời giải khác nhau cho bài toán ở đây, ngoài ra trong đó bạn **Bảo** cũng đề xuất tổng quát rất hay cho bài toán.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F khác C, B. BE cắt CF tại H. HK cắt CA, AB lần lượt tại M, N. Trên BC lấy P, Q sao cho $MP \parallel BE$ và $NQ \parallel CF$. MP cắt NQ tại R. Chứng minh rằng đường tròn (PQR) tiếp xúc (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

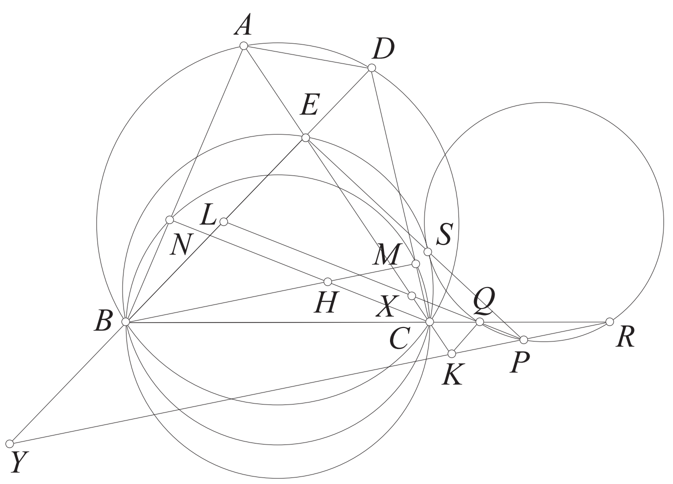
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F khác C, B. BE cắt CF tại H. HK cắt CA, AB lần lượt tại M, N. Trên BC lấy P, Q sao cho $MP \parallel BE$ và $NQ \parallel CF$. MP cắt NQ tại R. Chứng minh rằng đường tròn (PQR) tiếp xúc (O).

Bài toán trên là trường hợp riêng của bài toán sau

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp có AC cắt BD tại E. Một đường tròn qua B, C cắt CD, AB lần lượt tại M, N. BM cắt CN tại H. Một đường thẳng qua H cắt AC, BD lần lượt tại K, L. Trên BC lấy Q, R sao cho $KR \parallel BM, LQ \parallel CN$. KR cắt LQ tại P. Chứng minh rằng đường tròn (PQR) tiếp xúc với đường tròn(EBC).

Lời giải

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương.



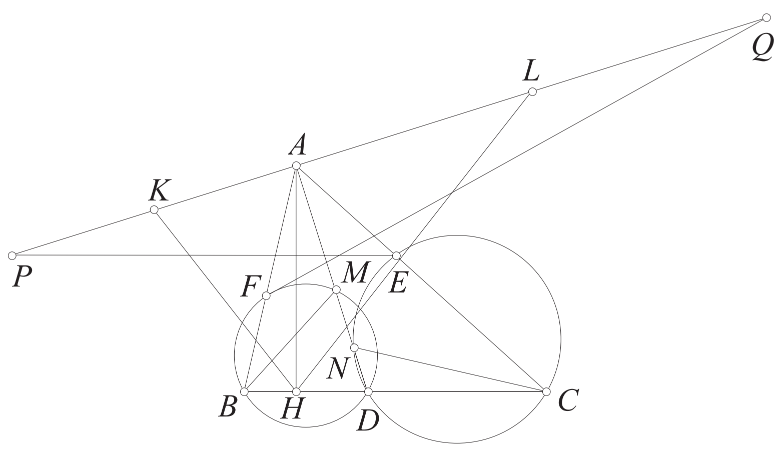
Gọi PQ cắt AC tại X, PR cắt BD tại Y. Chú ý rằng các tứ giác $ABCD, BCMN$ nội tiếp và $KR \parallel BM, LQ \parallel CN$, ta có$\angle EXL = \angle ECN = \angle EBM = \angle EYK$ nên tứ giác $XKYL$ nội tiếp. Do đó điểm Miquel S của tứ giác toàn phần $XKYLEP$ thuộc EP. Dễ thấy hai tam giác SXK, SLY đồng dạng và theo định lý Thales thì $\frac{BL}{BY} = \frac{HL}{HK} = \frac{CX}{CK}$ nên hai tam giác SCK, SBL đồng dạng. Do đó các tam giác SCB, SKY đồng dạng. Vì thế $\angle BSC = \angle BEC, \angle CSK = \angle CRK$ nên các tứ giác $BCSE, SCKR$ nội tiếp. Chứng minh tương tự tứ giác $SXCQ$ nội tiếp. Ta có $\angle XQS = \angle XCS = \angle PRS$ nên tứ giác $PQSR$ nội tiếp. Vì $\angle CSQ = \angle CXQ = \angle SEC + \angle SPQ$ nên ta thấy ngay các đường tròn $(PQR), (EBC)$ tiếp xúc với nhau tại S.

Nhật xét

Bài toán gốc được tác giả lấy ý tưởng từ đề thi vô địch Nga năm 2016. Tuy nhiên trong quá trình tìm tòi lời giải thì tác giả thu được bài toán tổng quát trên và lời giải của bạn **Dũng** gần như là tối ưu nhất cho bài toán tổng quát đó. Trong bài tổng quát nếu ba điểm A, D, E trùng nhau ta sẽ thu được bài toán gốc. Các bạn **Nguyễn Đức Bảo, Nguyễn Đình Hoàng** trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, **Ngô Quang Dương** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN và **Phạm Ngọc Khánh** lớp 11 Toán THPT chuyên sư phạm, đã đưa ra các lời giải khác nhau cho bài toán ở đây. Ngoài ra tác giả còn nhận được lời giải qua email từ các bạn **Lê Sỹ Quan** lớp 11 Toán THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước, **Trương Mạnh Tuấn, Trần Anh Tài** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC với phân giác AD và đường cao AH. Các điểm M, N thuộc AD sao cho $BM \perp CA, CN \perp AB$. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác CND, BMD theo thứ tự cắt CA, AB tại E, F khác C, B. Phân giác các góc $\angle AEB, \angle AFC$ lần lượt cắt đường thẳng qua A vuông góc AD tại P, Q. Gọi K, L là trung điểm AP, AQ. Chứng minh rằng HA là phân giác góc $\angle KHL$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

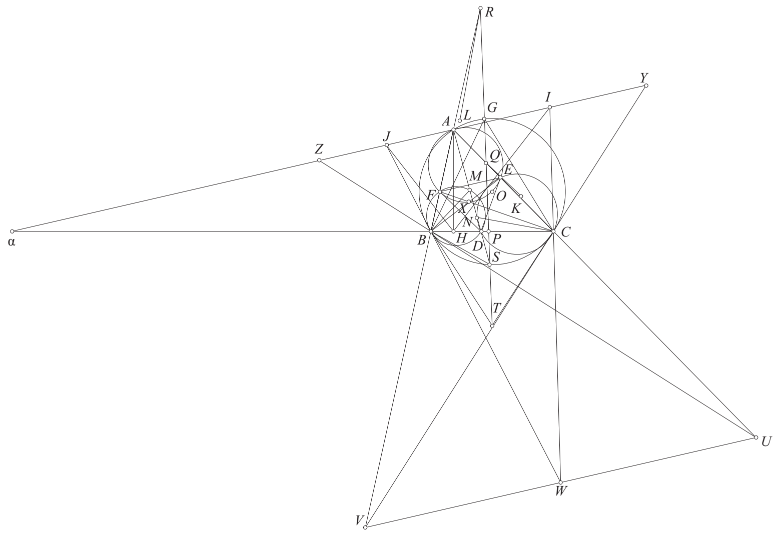
Cho tam giác ABC với phân giác AD và đường cao AH. Các điểm M, N thuộc AD sao cho $BM \perp CA, CN \perp AB$. Đường tròn ngoại tiếp các tam giác CND, BMD theo thứ tự cắt CA, AB tại E, F khác C, B. Phân giác các góc $\angle AEB, \angle AFC$ lần lượt cắt đường thẳng qua A vuông góc AD tại P, Q. Gọi K, L là trung điểm AP, AQ. Chứng minh rằng HA là phân giác góc $\angle KHL$.

Bài toán trên là trường hợp riêng của bài toán sau

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. S là một điểm trên cung BC không chứa A. ST cắt BC, CA, AB lần lượt tại P, Q, R. Gọi K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác QPC, RPB. Lấy M, N trên AS sao cho $BM \perp QK, CN \perp RL$. AS cắt BC tại D. Đường tròn $(DCN), (DBM)$ lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác C, B. Đường thẳng qua A song song EF lần lượt cắt phân giác ngoài các góc $\angle ACF, \angle ABE$ tại Y, Z. I, J là trung điểm AY, AZ. H là hình chiếu của A lên BC. Chứng minh rằng HA là phân giác $\angle IHJ$.

Lời giải

Bài toán tổng quát được tôi phát triển từ lời giải của bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương, sau đây là lời giải bài tổng quát dựa trên ý tưởng của bạn **Dũng**.



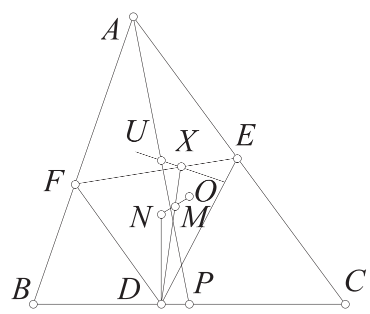
Gọi ST cắt (O) tại G khác S. Ta có biến đổi góc $(ED, EA) = (ED, EC) = (ND, NC) = (ND, AB) + (AB, RL) + (RL, NC) = (AS, AB) + 90^\circ + (BC, PR) + 90^\circ = (BS, BT) + (BC, BS) + (BS, SP) = (BC, BT) + (BT, BG) = (BC, BG) = (CT, CG) \pmod{180^\circ}$ và $(AD, AE) = (AS, AC) = (GS, GC) = (GT, GC) \pmod{180^\circ}$. Từ đó tam giác $AED \sim \triangle GCT$. Tương tự tam giác $AFD \sim \triangle GBT$. Vậy $\triangle AEF \cup D \sim \triangle GBC \cup T$ nên dễ thấy ED, FD là tiếp tuyến của (AEF). Từ đó theo định lý Pascal đảo BE, CF cắt nhau tại X trên (AEF). Gọi BZ, CY cắt CA, AB tại U, V. Ta có $\frac{UE}{UA} = \frac{BE}{BA} = \frac{EF}{AX} = \frac{CF}{CA} = \frac{VF}{VA}$. Từ đó $YZ \parallel EF \parallel UV$, theo tính chất hình thang thì CI, BJ đi qua trung điểm W của UV. Gọi YZ cắt BC tại α. Từ đây chùm $A(UV, W\alpha) = -1$ chiếu lên BC thì $A(BC, W\alpha) = -1$ chiếu qua tâm W thì $W(BC, A\alpha) = -1$ hay hàng $(IJ, A\alpha) = -1$. Từ đây chùm $H(IJ, A\alpha)$ điều hòa nên HA là phân giác $\angle IHJ$.

Nhật xét

Bài toán được tác giả tạo ra bằng việc sử dụng phép nghịch đảo trên một bài toán khác đã biết. Tuy nhiên bạn **Dũng** đã đưa ra lời giải khác dựa trên hàng điều hòa và dựa vào đó bài toán được phát triển hơn. Bạn **Đỗ Trung Phương** lớp 10 Toán, trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc và **Nguyễn Tiến Long** lớp 10 toán, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ, đã đưa ra lời giải khác độc lập cho bài toán ở đây. Ngoài ra tác giả còn nhận được lời giải qua email từ bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 10 Toán, THPT chuyên KHTN và bạn **Lê Phước Tùng** lớp 11 Toán THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O và tâm đường tròn Euler là N. D, E, F là hình chiếu của N lên BC, CA, AB. M là trung điểm ON. MD, ME, MF cắt EF, FD, DE lần lượt tại X, Y, Z. Gọi P, Q, R là trung điểm BC, CA, AB. U, V, W là trung điểm AP, BQ, CR. Chứng minh rằng XU, YV, ZW đồng quy.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

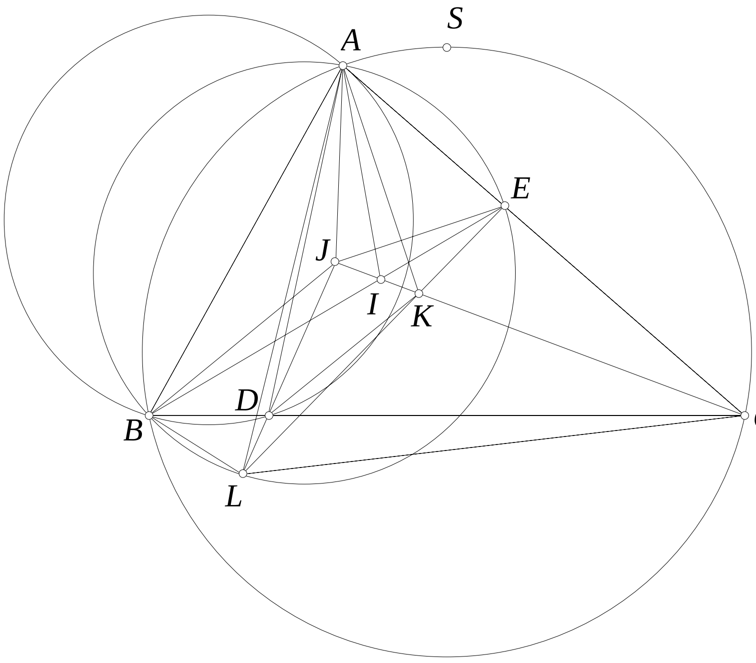
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có phân giác trong BE. D là điểm thuộc BC sao cho $\angle DAC = \angle B$. K là tâm nội tiếp tam giác ADC. EK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE tại L khác E. Chứng minh rằng tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác LBC nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải



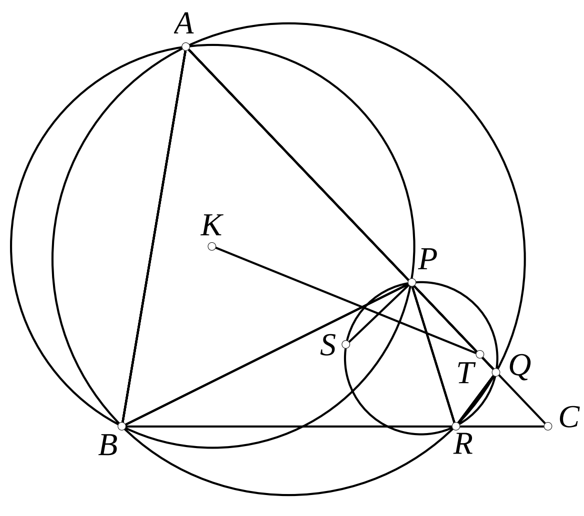
Gọi I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AIE cắt AI tại J khác I. Ta thấy $CI.CJ = CE.CA$. Lại dễ có $\triangle CKA \sim \triangle CIB$ nên $\frac{CK}{CI} = \frac{CA}{CB} = \frac{CD}{AC}$. Từ đó $CK.CJ = \frac{CK}{CI}.(CI.CJ) = CE.CD$ nên $\triangle CEK \sim \triangle CJD$ suy ra $\angle CEK = \angle AJD$. Ta định nghĩa lại điểm L là giao của DJ và KE vậy tứ giác $CEJL$ nội tiếp. Suy ra $\angle DLK = \angle KCE = \angle KCD$ suy ra tứ giác $DKCL$ nội tiếp. Cũng từ $\triangle CKA \sim \triangle CIB$ nên $\angle AKJ = \angle CIE = \angle CAJ$. Từ đó $JA^2 = JK.JC = JD.JL$ suy ra $\triangle JAD \sim \triangle JLA$ suy ra $\angle ALD = \angle JAD = \angle DAC - \angle JAC = \angle ABC - \angle AKJ = \angle ABC - \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle ACB) = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB)$. Suy ra $\angle ALE = \angle ALD + \angle DLE = \frac{1}{2}(\angle ABC - \angle ACB) + \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle ABC = \angle ABE$. Từ đó tứ giác $ABLE$ nội tiếp. Từ đó dễ chứng minh $\angle BLC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC$ nên tâm ngoại tiếp S của tam giác BLC là trung điểm $\overset{\frown}{BC}$ chứa A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta có điều phải chứng minh.

Nhật xét

Tác giả tạo ra bài toán này xuất phát từ bài toán số 4 của đề thi IMO 2009. Bài toán đó là một bài toán tính góc không khó nhưng nếu phân tích một cách sâu sắc thì bài toán này là một mở rộng của bài toán thi IMO đó. Bài toán được tham gia giải bởi **Nguyễn Ngọc Chi Lan** học sinh lớp 12A1 Toán trường THPT chuyên KHTN tại đây. Trong đó bạn **Nguyễn Thành Phát** lớp 11CT trường THPT chuyên Nguyễn Du cũng đưa ra lời giải thuần túy hình học và được hoàn thiện bởi bạn **Chi Lan**. Ngoài ra bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương cũng gửi tới tác giả hai lời giải rất thú vị. Bài toán trên còn có một hướng giải khác khá ngắn gọn dùng định lý Pascal, chúng tôi sẽ giới thiệu tới bạn đọc trong một bài viết sau.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\frac{PA}{PC} = \frac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại R khác B. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB. Dựng đường kính QS của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR. Gọi T là trung điểm PC. Chứng minh rằng đường thẳng KT chia đôi đoạn PS.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

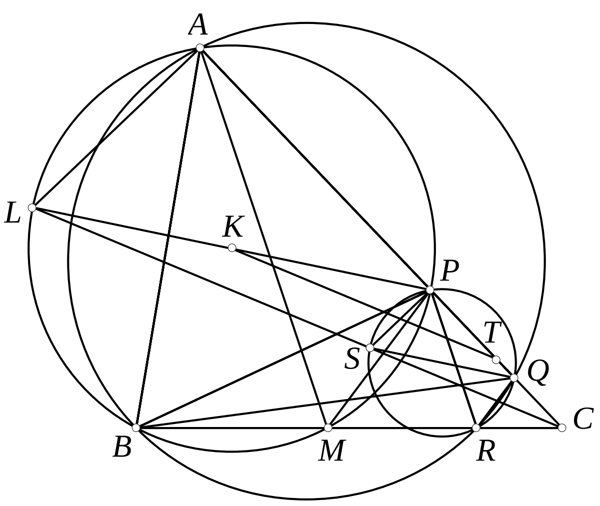
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\frac{PA}{PC}=\frac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại R khác B. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB. Dựng đường kính QS của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR. Gọi T là trung điểm PC. Chứng minh rằng đường thẳng KT chia đôi đoạn PS.

Lời giải



Từ $\dfrac{PC}{PA}=\dfrac{QC}{QP}$ suy ra $\dfrac{PC}{PC+PA}=\dfrac{QC}{QC+QP}$ hay $\dfrac{PC}{AC}=\dfrac{QC}{PC}$ suy ra $PC^2=CA.CQ=CR.CB$. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác PBR tiếp xúc AC tại P. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB cắt BC tại M khác B thì $\angle MAP=\angle MBP=\angle RPC$ nên $AM\parallel PR$. Vậy $\dfrac{CR}{MR}=\dfrac{CP}{PA}=\dfrac{QP}{QC}$ suy ra $QR\parallel MP$. Gọi PL,QS là đường kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAB và PQR. Thì $\angle ALP=\angle AMP=\angle PRQ=\angle PSQ$. Từ đó hai tam giác vuông PAL và QPS đồng dạng. Từ đây $\dfrac{LA}{SP}=\dfrac{AP}{PQ}=\dfrac{CP}{CQ}=\dfrac{AP+CP}{PQ+CQ}=\dfrac{CA}{CP}$ mà $LA\parallel SP$, ta suy ra L,S,C thẳng hàng. Theo tính chất đường trung bình thì KT chia đôi SP. Ta có điều phải chứng minh.

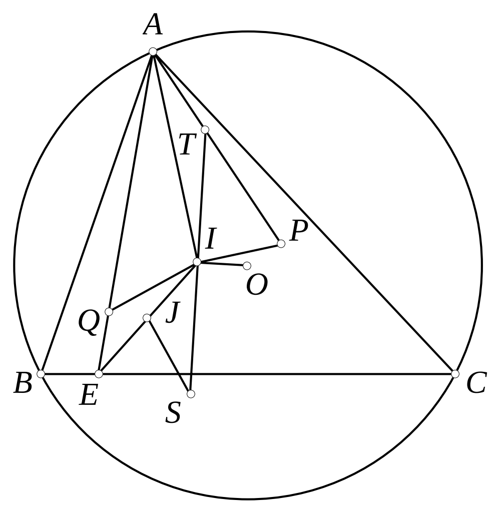
Nhật xét

Tác giả tạo ra bài toán này xuất phát từ đề thi Olympic chuyên KHTN năm 2014. Đây là một bài toán hay mang đậm tính chất của phép biến hình vị tự, cho nên để có một lời giải tự nhiên mà không dùng đến phép vị tự cũng không phải đơn giản. Bài toán được tham gia giải bằng phép vị tự bởi bạn **Nguyễn Ngọc Chi Lan** lớp 12A1 Toán trường THPT chuyên KHTN, bạn **Phạm Nguyễn Thiện Huy** lớp 12A2 trường chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng và bạn **Ninh Đức Cường** lớp 11 Toán THPT Chu Văn An, Hà Nội tại đây. Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương cũng gửi tới tác giả lời giải dùng phép vị tự với ý tưởng giống đáp án. Liên quan tới cấu hình này vẫn còn nhiều điều thú vị. Tôi xin giới thiệu một bài toán hay khác từ cấu hình này để các bạn tham khảo.

Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\frac{PA}{PC}=\frac{QP}{QC}$. BQ cắt đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác APB tại R khác Q. Đường đối trung qua P của tam giác APR cắt (K) tại L khác P. Chứng minh rằng giao điểm của BL và đường thẳng qua C song song BP luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với tâm nội tiếp I. P là điểm ở trong tam giác sao cho PI vuông góc với IA. Gọi Q đẳng giác P trong tam giác ABC. AQ cắt BC tại E. Gọi J là trung điểm IE. Đường thẳng qua I vuông góc OI cắt đường thẳng qua J vuông góc IQ tại S và cắt AP tại T. Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn ST.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

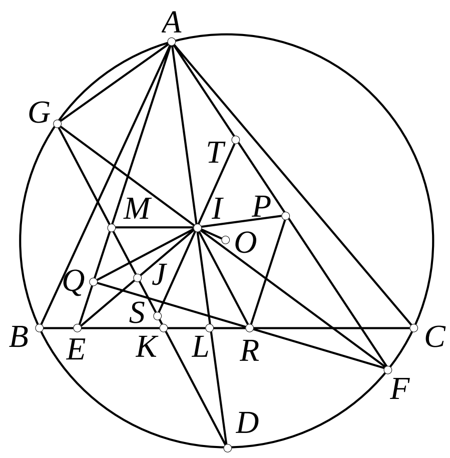
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với tâm nội tiếp I. P là điểm ở trong tam giác sao cho PI vuông góc với IA. Gọi Q đẳng giác P trong tam giác ABC. AQ cắt BC tại E. Gọi J là trung điểm IE. Đường thẳng qua I vuông góc OI cắt đường thẳng qua J vuông góc IQ tại S và cắt AP tại T. Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng ST.

Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P,Q là hai điểm đẳng giác. AP cắt (O) tại M khác A. QM cắt BC tại E thì $PE \parallel AQ$.

Chứng minh của Phan Anh Quân. Gọi AQ cắt (O) tại N khác A và cắt BC tại H. Vì P,Q đẳng giác nên $\triangle CHN \sim \triangle ACM$ và $\triangle CPM \sim \triangle QCN$ (g.g). Ta suy ra $HN.AM = CM.CN = QN.PM$ vì thế nên $\frac{MP}{MA} = \frac{NH}{NQ} = \frac{ME}{MQ}$ hay $PE \parallel AQ$.

Quay lại bài toán. Gọi AI cắt (O) tại D khác A. Gọi IF cắt (O) tại G khác F, theo kết quả bài toán IMO 2010 quen thuộc thì GD chia đôi IE, ta sẽ chứng minh rằng $GD \perp IQ$, từ đó suy ra S thuộc GD, theo bài toán con bướm thì I là trung điểm ST, thật vậy. Gọi đường thẳng qua I song song GD cắt BC tại R. Gọi DG cắt BC, AE tại K, M. AD cắt BC tại L. Ta có $\angle IAE = \angle IAF = \angle IGD$. Từ đó tứ giác $AIMG$ nội tiếp, suy ra $IM \parallel BC$ nên tứ giác $IMKR$ là hình bình hành. Từ đó ta có $IR.DG = \frac{IR}{DM}.DM.DG = \frac{MK}{MD}.DI.DA = \frac{IL}{ID}.DI.DA = IL.AD = IA.ID$. Đẳng thức cuối có do $\frac{IL}{IA} = \frac{BC}{AB+AC} = \frac{DI}{DA}$. Từ đó $IR.DG = IA.ID = IG.IF$, lại có $\angle FIR = \angle IGD$ nên ta có $\triangle FIR \sim \triangle DGI \sim \triangle FAI$. Từ đó FI là phân giác $\angle AFR$ và $\angle PIR = \angle AIF + \angle FIR - 90^\circ = \angle IRF + \angle FIR - 90^\circ = 90^\circ - \angle IFR = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle PFR$, suy ra I là tâm bàng tiếp góc F của tam giác PFR. Từ đó $\angle FPR = 180^\circ - 2\angle API = 2(90^\circ - \angle API) = 2\angle PAI = \angle PAE$ nên $PR \parallel AQ$. Vậy theo bổ đề thì QF đi qua R. Ta dễ thấy I là tâm nội tiếp tam giác AFQ. Từ đó $\angle RIQ = \angle QIF - \angle RIF = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle QAF - \angle IAF = 90^\circ$. Suy ra $IQ \perp IR \parallel GD$ hay $IQ \perp GD$.

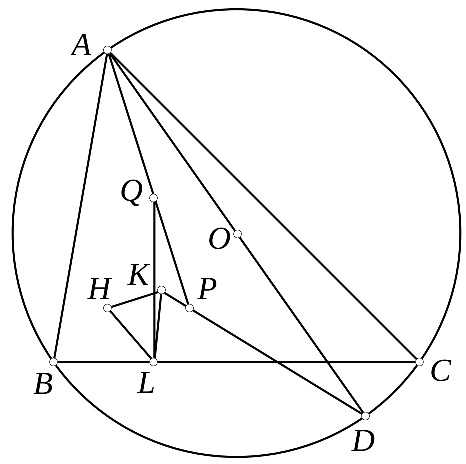


Nhật xét

Phần quan trọng nhất trong lời giải này là chỉ ra được I là tâm nội tiếp tam giác AQF. Bạn **Nguyễn Ngọc Chi Lan** lớp 12A1 Toán trường THPT chuyên KHTN cho một lời giải rất thú vị ở đây. Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương cũng gửi tới tác giả một lời giải hay dùng định lý Pascal. Bài toán này nằm trong một cấu hình rất thú vị của các đường tròn Thébault, xin giới thiệu với các bạn sau.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD, trực tâm H. P,Q là hai điểm đẳng giác nằm trên phân giác góc A và ở trong tam giác ABC. K thuộc PD sao cho $HK \perp AP$. Chứng minh rằng trung trực HK đi qua hình chiếu của Q trên BC.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

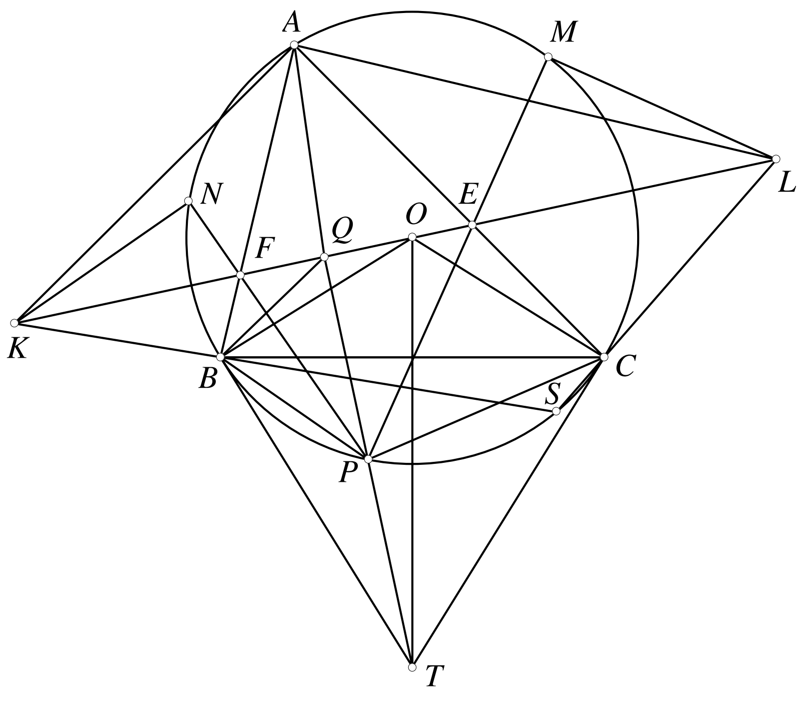
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và P là một điểm nằm trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. Đường thẳng qua O vuông góc PT cắt CA, AB tại E, F. PE, PF lần lượt cắt (O) tại M, N khác P. Lấy các điểm K, L sao cho $KA \perp AC, KN \perp NP, LA \perp AB, LM \perp MP$. Chứng minh rằng KB và LC cắt nhau trên (O).

Lời giải



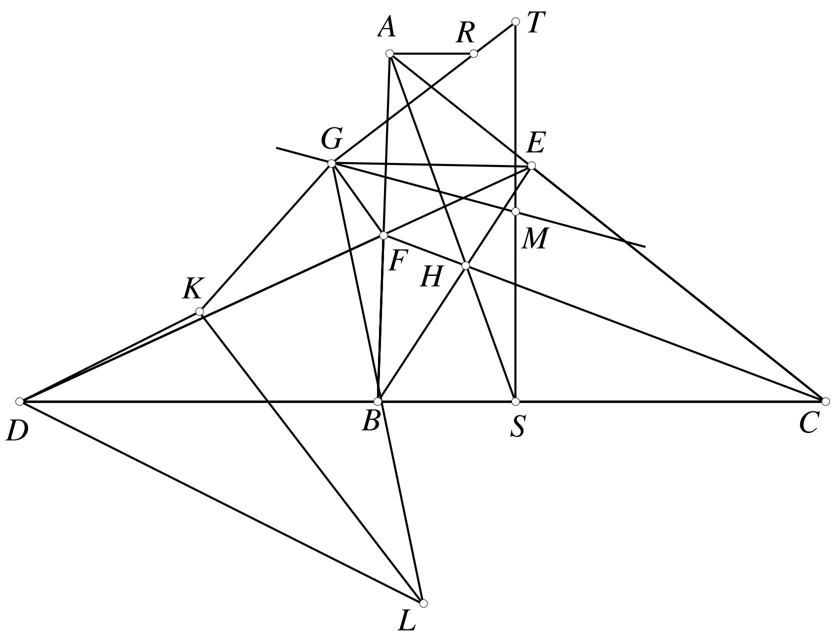
Gọi Q là hình chiếu của P trên EF. Ta thấy $\angle BQF = 90^\circ - \angle BQT = 90^\circ - \angle BCT = 90^\circ - \angle BAC = \angle KAB$. Từ đó AK và FQ cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác QAB. Lại có $\angle FQP = 90^\circ = \angle KNP$ nên NK và QF cũng cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác QNF. Mặt khác $FA.FB = FN.FP$ nên QF là trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp các tam giác QNP và QAB. Từ các nhận xét trên dễ suy ra đường tròn ngoại tiếp các tam giác QNP và QAB cắt nhau tại K khác Q. Tương tự đường tròn ngoại tiếp các tam giác QMP và QAC cũng cắt nhau tại L khác Q. Vậy gọi BK cắt CL tại S thì $\angle ABS + \angle ACS = 180^\circ - \angle ABK + 180^\circ - \angle ACL = 180^\circ - \angle AQK + 180^\circ - \angle AQL = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$ nên S nằm trên (O).

Nhật xét

Bài toán này là một ứng dụng hay của một tính chất về phương tích, tính chất đó dựa trên một nhật xét rất đơn giản là nếu tứ giác $ABCD$ nội tiếp và AC giao BD tại E và P là một điểm bất kỳ thì PE là trục đẳng phương của đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAC và PBD. Việc trình bày lời giải như trên là để tránh việc dựng thêm nhiều hình và các điểm trùng nhau. Có bạn **Phạm Nguyễn Thiện Huy** lớp 12A2 trường chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng cho lời giải khác bằng định lý Pascal và bạn **Trần Nhân Trung** lớp 11A2 trường chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng làm giống ý tưởng đáp án. Các lời giải đó đều có ở đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC với E, F là hai điểm lần lượt nằm trên cạnh CA, AB sao cho $AE = AF$. EF cắt BC tại D. K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác DBF, DCE. G là đối xứng của D qua KL. R nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF sao cho $AR \parallel BC$. Gọi BE cắt CF tại H. AH cắt BC tại S. Lấy T thuộc GR sao cho $ST \perp BC$. M là trung điểm ST. Chứng minh rằng GM luôn đi qua một điểm cố định khi E, F thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

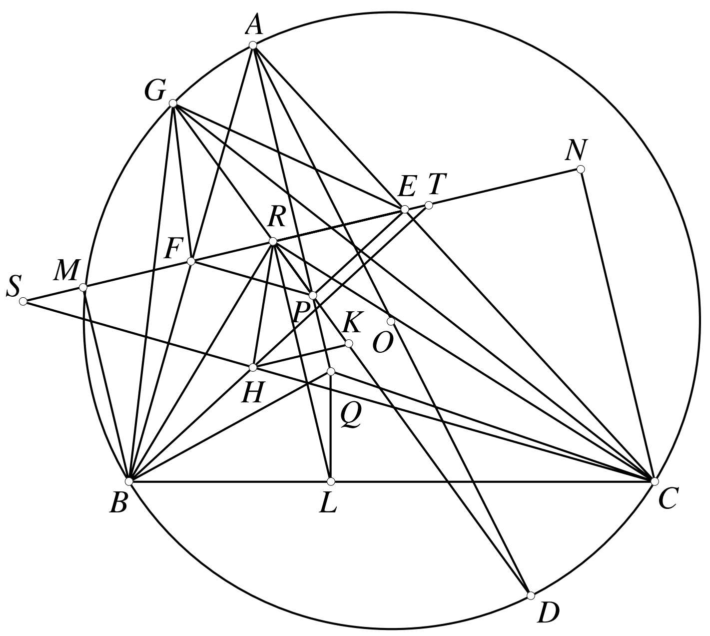
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD, trực tâm H. P, Q là hai điểm đẳng giác nằm trên phân giác góc A và ở trong tam giác ABC. K thuộc PD sao cho $HK \perp AP$. Chứng minh rằng trung trực HK đi qua hình chiếu của Q trên BC.

Lời giải



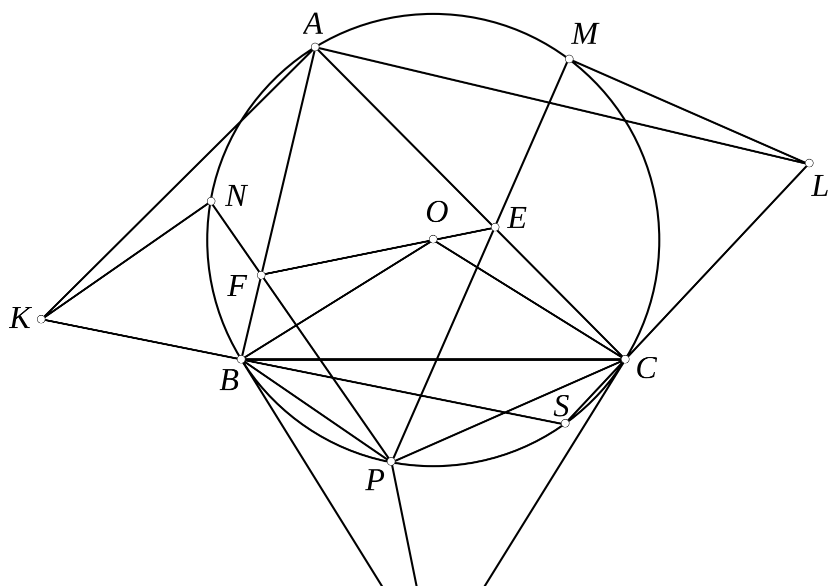
Gọi E, F là hình chiếu của P lên CA, AB. Gọi L là hình chiếu của Q lên BC, R là hình chiếu của L lên EF và M, N là hình chiếu của B, C lên EF. Trước hết do tính đẳng giác của P, Q dễ thấy các tam giác đồng dạng $\triangle PBF \sim \triangle QBL$ và $\triangle PCE \sim \triangle QCL$ nên $\frac{LB}{LF} = \frac{QL}{PF} = \frac{QL}{PE} = \frac{LC}{LE}$. Cũng dễ thấy $\triangle BMF \sim \triangle CNE$ nên $\frac{BM}{CN} = \frac{BF}{CE} = \frac{LB}{LC} = \frac{RM}{RN}$. Từ đó $\triangle RMB \sim \triangle RNC$ suy ra $\angle NRC = \angle MRB$ kéo theo $\triangle RFB \sim \triangle REC$. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A thì $\triangle GFB \sim \triangle GEC$ nên $\frac{GE}{GF} = \frac{BF}{CE} = \frac{RF}{RE}$ hay GR là phân giác $\angle EGF$ suy ra GR đi qua P. Mặt khác dễ thấy $\angle AGP = 90^\circ$ nên GP đi qua D như vậy K thuộc RD. Gọi HC, HB cắt EF tại S, T. Dễ thấy $\angle RCS = \angle RBT$ và $\angle SRC = \angle TRB$ nên hai tam giác $\triangle RSC \sim \triangle RTB$, ta suy ra $\frac{RS}{RT} = \frac{RC}{RB} = \frac{RE}{RF}$. Mặt khác lại dễ có $\triangle PFE \sim \triangle HST$ nên suy ra $\triangle PRE \sim \triangle HRS$ hay $\angle PRL = \angle HRL$ mà $HK \perp RL$, vậy L thuộc trung trực HK.

Nhật xét

Bài toán này nếu nhìn theo hướng của đáp án thì có thể coi nó là sự kết hợp của hai bài toán hay đó là chứng minh RL là phân giác của $\angle HRP$ và chứng minh GR là phân giác $\angle EGF$. Cách chứng minh RL là phân giác của $\angle HRP$ như trong đáp án là một cách làm hoàn toàn mới và chỉ dùng kiến thức lớp 8. Tuy nhiên nếu muốn chứng minh trực tiếp mà không phải vẽ thêm hình chiếu của P lên CA, AB thì đó là công việc rất thú vị. Làm theo cách này có bạn **Phạm Nguyễn Thiện Huy** lớp 12A2, trường Lê Quý Đôn, Đà Nẵng và bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương, các lời giải đó đã có ở đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) và P là một điểm nằm trên cung nhỏ BC. Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. Đường thẳng qua O vuông góc PT cắt CA, AB tại E, F. PE, PF lần lượt cắt (O) tại M, N khác P. Lấy các điểm K, L sao cho $KA \perp AC, KN \perp NP, LA \perp AB, LM \perp MP$. Chứng minh rằng KB và LC cắt nhau trên (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

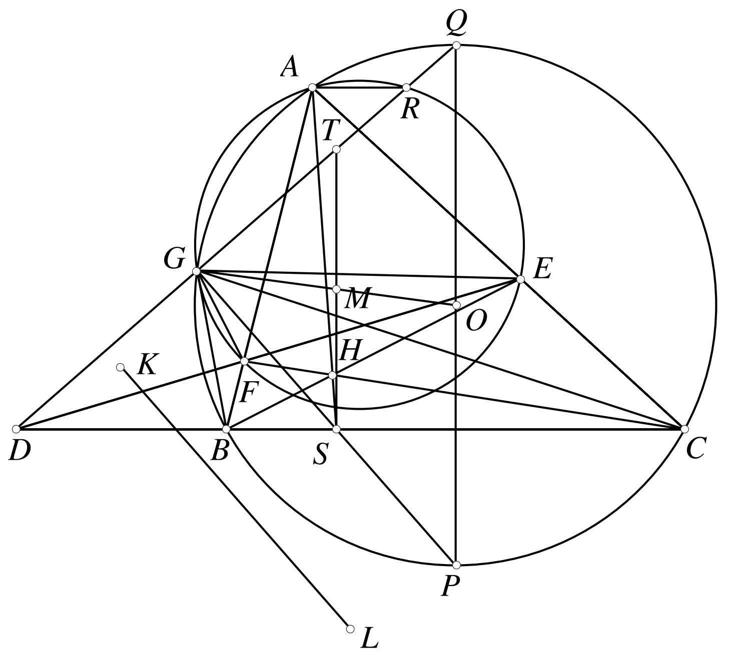
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC với E, F là hai điểm lần lượt nằm trên cạnh CA, AB sao cho $AE = AF$. EF cắt BC tại D. K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác DBF, DCE. G là đối xứng của D qua KL. R nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF sao cho $AR \parallel BC$. Gọi BE cắt CF tại H. AH cắt BC tại S. Lấy T thuộc GR sao cho $ST \perp BC$. M là trung điểm ST. Chứng minh rằng GM luôn đi qua một điểm cố định khi E, F thay đổi.

Lời giải



Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Dễ thấy G là giao điểm khác D của đường tròn ngoại tiếp tam giác DBF và DCE nên theo định lý Miquel G cũng nằm trên (O) và đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Từ đây ta suy ra hai tam giác GFB và GEC đồng dạng. Lại theo định lý Ceva cho tam giác ABC với các đường AS, BE, CF đồng quy tại H và chú ý $AE = AF$ ta có $\frac{SB}{SC} = \frac{BF}{CE} = \frac{GB}{GC}$. Vậy GS là phân giác $\angle BGC$ nên GS đi qua trung điểm P của cung BC không chứa G. Ta lại có $\angle ARG = \angle AFG = \angle GDB$ mà $AR \parallel BC$ nên D, G, R thẳng hàng. Lại theo định lý Menelaus cho tam giác ABC với D, E, F thẳng hàng và chú ý $AE = AF$ ta có $\frac{DB}{DC} = \frac{BF}{CE} = \frac{GB}{GC}$ nên GD là phân giác ngoài tam giác GBC. Từ đó GD đi qua trung điểm Q của cung BC chứa G. Như vậy O là trung điểm PQ, mà trong tam giác GPQ có $ST \parallel PQ$ nên G, M, O thẳng hàng hay GM đi qua O cố định.

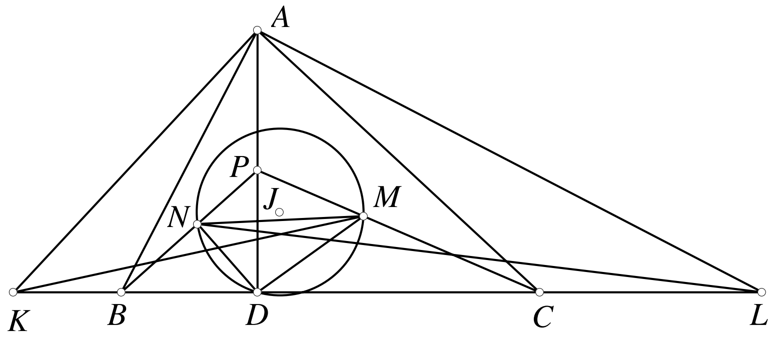
Nhật xét

Bài toán này đã giấu đi sự xuất hiện của điểm cố định là tâm ngoại tiếp O bằng việc sử dụng định lý Miquel quen thuộc. Đá số các lời giải được gửi tới các bạn đều dùng hàng điểm điều hòa tuy nhiên chúng ta hoàn toàn có thể tránh việc nhắc đến hàng điểm điều hòa như cách làm trong đáp án. Chúng ta luôn cố gắng hướng tới những lời giải thuần túy hình học mà sử dụng ít công cụ nhất có thể.

Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương cũng cho lời giải giống đáp án. Bạn **Nguyễn Cảnh Hoàng** lớp 11A1 trường chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và bạn **Trần Nhân Trung**, lớp 11A2, trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng cho lời giải tương tự ở đây. Bạn **Ngô Quang Dương** lớp 12A2 Toán THPT chuyên KHTN cũng gửi tới lời giải bằng tiếng Anh. Các bạn **Bùi Công Minh, Bùi Văn Bình, Phạm Ngọc Huy, Trương Văn Hoằng** lớp 12 toán và các bạn **Lê Sỹ Quan, Lê Phước Tùng, Trần Đình Phát** lớp 11 toán, THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước đều cho lời giải đúng và theo ý tưởng của đáp án.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD. P là một điểm bất kỳ di chuyển trên đoạn thẳng AD. Các điểm K, L thuộc đường thẳng BC sao cho $AK \perp AC, AL \perp AB$. Trên đoạn thẳng PC, PB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $KM = KA, LN = LA$. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác DMN luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P di chuyển.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

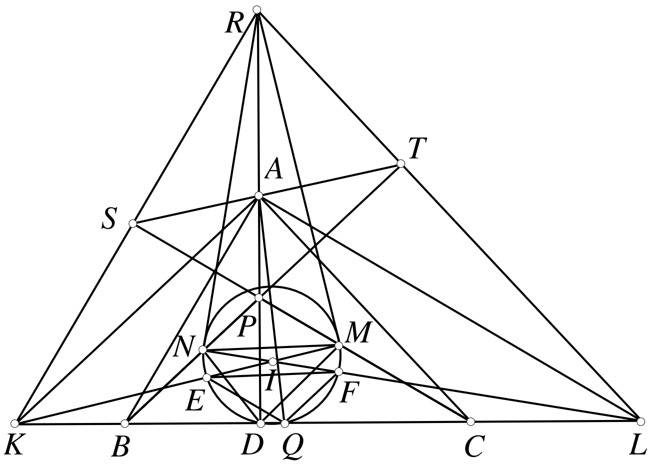
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD. P là một điểm bất kỳ di chuyển trên đoạn thẳng AD. Các điểm K, L thuộc đường thẳng BC sao cho $AK \perp AC, AL \perp AB$. Trên đoạn thẳng PC, PB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $KM = KA, LN = LA$. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác DMN luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P di chuyển.

Lời giải



Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN cắt BC tại Q khác D, ta sẽ chứng minh Q cố định khi đó tâm ngoại tiếp tam giác DMN thuộc trung trực của DQ cố định, thật vậy. Lấy điểm R trên tia đối tia PD sao cho $DP.DR = DA^2 = DB.DL = DC.DK$. Từ đó ta dễ thấy P là trực tâm của tam giác RBL và RCK. Vậy PC, PB lần lượt vuông góc với RK, RL tại S, T. Ta chú ý tứ giác $RSDC$ nội tiếp đường tròn đường kính RC nên $KM^2 = KA^2 = KD.KC = KS.KR$ suy ra $\angle KMR = 90°$. Tương tự $\angle LNR = 90°$. Vậy ta có $RM^2 = RS.RK = RP.RD = RT.RL = RN^2$. Từ đó nếu KM cắt LN tại I thì hai tam giác vuông RIM và RIN bằng nhau suy ra $IM = IN$. Gọi IM, IN cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN tại E, F khác M, N thì $EM = FN$. Ta chú ý $KM^2 = KA^2 = KD.KC$. Từ đó $\angle MCK = \angle KMD = \angle EQD$ suy ra $EQ \parallel PC$. Tương tự $FQ \parallel PB$. Ta lại có $\frac{QK}{QL} = \frac{QK}{QC} \cdot \frac{QC}{QB} \cdot \frac{QB}{QL} = \frac{KE}{EM} \cdot \frac{QC}{QB} \cdot \frac{FN}{FL} = \frac{EK}{FL} \cdot \frac{QC}{QB} = \frac{KE.KM}{KA} \cdot \frac{LA}{LF.LN} \cdot \frac{QC}{QB} = \frac{LA}{KA} \cdot \frac{KD.KQ}{LD.LQ} \cdot \frac{QC}{QB}$.

Từ đó $\frac{QB}{QC} = \frac{KD.LA}{KA.LD}$ hay $\frac{QB^2}{QC^2} = \frac{KD^2}{KA^2} \cdot \frac{LA^2}{LD^2} = \frac{KD}{KC} \cdot \frac{LB}{LD}$ (1)

Ta lại chú ý AK, AL đẳng giác trong $\angle BAC$ nên $\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{KB.LB}{KC.LC}$ (2)

Ta lại có $DB.DL = DP.DR = DC.DK$ hay $\frac{DK}{DL} = \frac{DB}{DC} = \frac{DK-DB}{DC-DL} = \frac{BK}{LC}$ (3).

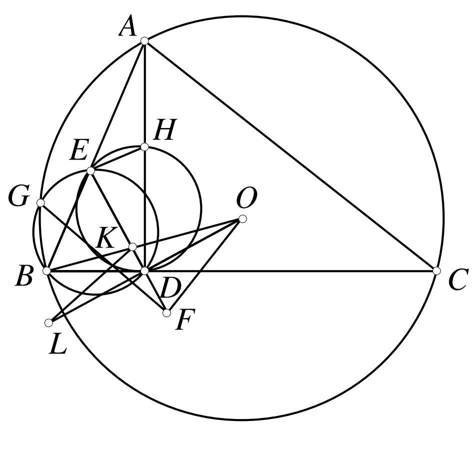
Từ (1),(2),(3) ta suy ra $\frac{QB^2}{QC^2} = \frac{AB^2}{AC^2}$ hay $\frac{QB}{QC} = \frac{AB}{AC}$. Vậy AQ là phân giác $\angle BAC$ nên Q cố định.

Nhật xét

Bài toán là một phát triển từ mô hình bài toán IMO năm 2012. Nội dung chính là chúng ta phải chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN đi qua chân phân giác góc A, kết quả này đã bao hàm kết quả của mở rộng bài IMO 2012. Cách làm như trong đáp án chỉ sử dụng biến đổi tỷ số phù hợp với kiến thức THCS. Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương và bạn **Ngô Quang Dương** lớp 12A2 Toán THPT chuyên KHTN gửi lời giải tới tác giả sớm nhất. Bạn **Phạm Nguyễn Thiện Huy** lớp 12A2 trường chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng cho lời giải ở đây. Các bạn **Bùi Công Minh, Bùi Văn Bình** lớp 12 toán và các bạn **Lê Sỹ Quan, Lê Phước Tùng** lớp 11 toán, THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước đều cho lời giải đúng. Các lời giải trên đều có sử dụng kiến thức về hàng điểm điều hòa.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD. Đường thẳng qua D vuông góc với OD cắt AB tại E. Trung trực AC cắt DE tại F. Gọi OB cắt DE tại K. L là đối xứng của O qua EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE cắt (O) tại G khác B. Chứng minh rằng GF và KL cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DEH.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

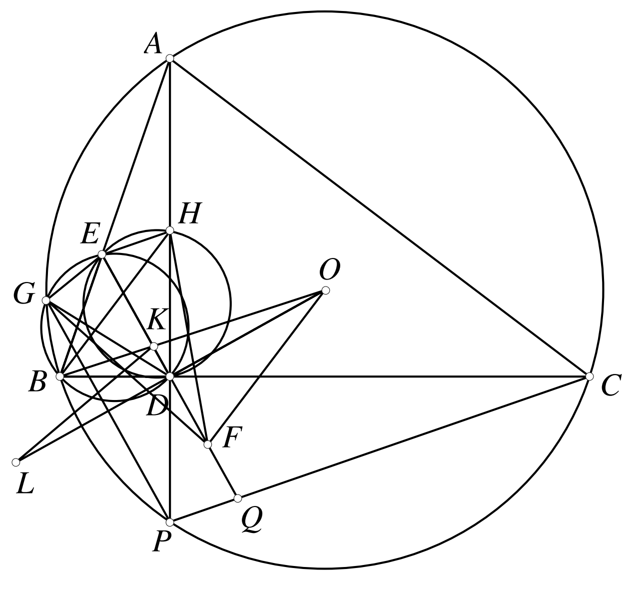
Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H và đường cao AD. Đường thẳng qua D vuông góc với OD cắt AB tại E. Trung trực AC cắt DE tại F. Gọi OB cắt DE tại K. L là đối xứng của O qua EF. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE cắt (O) tại G khác B. Chứng minh rằng GF và KL cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác DEH.

Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q là hai điểm đẳng giác. AP cắt (O) tại M khác A. QM cắt BC tại E thì $PE \parallel AQ$.

Chứng minh của Phan Anh Quân. Gọi AQ cắt (O) tại N khác A và cắt BC tại H. Vì P, Q đẳng giác nên $\triangle CHN \sim \triangle ACM$ và $\triangle CPM \sim \triangle QCN$ (g.g). Ta suy ra $HN.AM = CM.CN = QN.PM$ vì thế nên $\frac{MP}{MA} = \frac{NH}{NQ} = \frac{ME}{MQ}$ hay $PE \parallel AQ$.

Hệ quả. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P, Q là hai điểm đẳng giác. E thuộc BC sao cho $PE \parallel AQ$ thì QE và AP cắt nhau trên đường tròn (O).



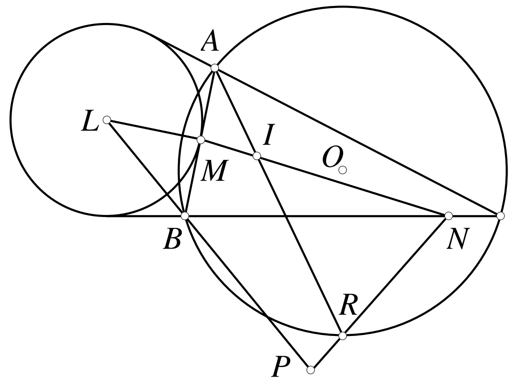
Giải bài toán. Gọi AD cắt (O) tại P khác A, dễ thấy D là trung điểm HP. Gọi DE cắt PC tại Q thì theo bài toán con bướm D là trung điểm EQ nên OD là trung trực EQ. Vì G là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác BED và BAC nên $\triangle GED \sim \triangle GAC$. Từ đó $\angle GED = \angle GAC = 180^\circ - \angle GPC$. Từ đó tứ giác $GEQP$ nội tiếp và như vậy tâm ngoại tiếp tứ giác nằm trên OD. Lại có $\angle GDE = \angle GCA = \angle GPA$ nên đường tròn (GDP) tiếp xúc DE nói cách khác tâm ngoại tiếp tam giác GDP nằm trên OD. Như vậy OD đi qua tâm ngoại tiếp tứ giác $GEQP$ và tam giác GDP nên $OD \perp GP$. Từ đó $GEQP$ là hình thang cân. Ta dễ chứng minh $\triangle DGE = \triangle DHE$. Vậy QE là trung trực GH. Ta xét phép đối xứng trục EQ thì GF và KL cắt nhau trên (DEH) khi và chỉ khi đối xứng của GF, KL qua QE cắt nhau trên đối xứng của (DEH) qua EQ. Nói cách khác ta chỉ cần chứng minh FH, OK cắt nhau trên đường tròn (BDE). Ta để ý $\angle HBE = \angle OBD$ và $\angle EDH = \angle ODC$ nên O và H là hai điểm đẳng giác trong tam giác BDE. Áp dụng hệ quả trên ta thấy ngay FH, OK cắt nhau trên đường tròn (BDE).

Nhật xét

Bài toán là một sự kết hợp đẹp của bài toán G3 trong IMO shortlist 1996 và hệ quả của bổ đề điểm đẳng giác. Phần đầu của chứng minh chúng ta đã lặp lại một số bước trong chứng minh của bài toán G3. Mặt khác bổ đề điểm đẳng giác trên sự thực là một bài toán lớn của điểm đẳng giác, nhiều bài toán khó của điểm đẳng giác cần được giải thông qua bổ đề này. Sự kiện H và O đẳng giác trong tam giác BED cũng là một sự kiện thú vị đáng chú ý. Tôi không nhận được lời giải nào cho bài toán này.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp I. Đường tròn bàng tiếp (L) tại đỉnh C của tam giác ABC tiếp xúc với AB tại M. MI cắt BC tại N. P là hình chiếu của C lên LB. Chứng minh rằng AI và PN cắt nhau trên đường tròn (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

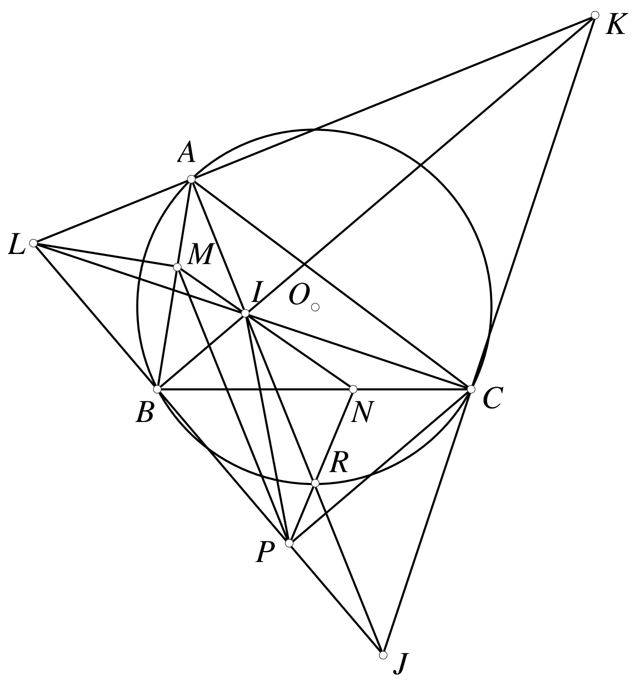
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp I. Đường tròn bàng tiếp (L) tại đỉnh C của tam giác ABC tiếp xúc với AB tại M. MI cắt BC tại N. P là hình chiếu của C lên LB. Chứng minh rằng AI và PN cắt nhau trên đường tròn (O).

Lời giải



Gọi J, K là tâm bàng tiếp góc A, B của tam giác ABC. Do M, I, N thẳng hàng nên nên $P(BI, MN) = B(PI, MN) = B(JK, AC) = -1$. Ta lại dễ thấy tam giác BAL và BJC đồng dạng, có đường cao tương ứng là là LM và CP nên $\frac{BM}{MA} = \frac{BP}{PJ}$, từ đó $PM \parallel AJ$. Kết hợp chùm $P(BI, MN) = -1$ ta suy ra PN chia đôi IJ. Mặt khác theo kết quả quen thuộc trung điểm IJ thuộc (O). Từ đó ta có điều phải chứng minh.

Nhật xét

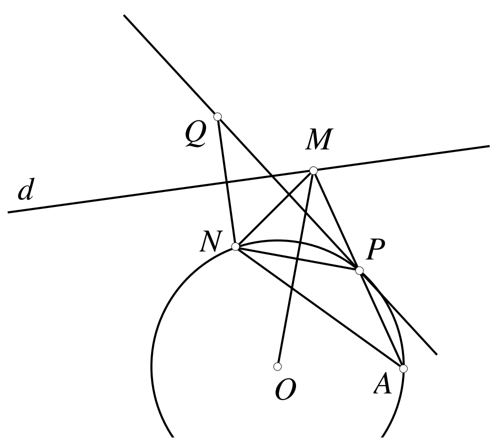
Ý tưởng tác giả tạo ra bài toán này là dùng hàng điểm điều hòa như trong lời giải trên, trong cách làm cần dựng thêm các tâm bàng tiếp, ý tưởng dựng ra thêm các tâm bàng tiếp khác cũng đã rất quen thuộc. Như vậy với cách làm này chúng ta thấy rằng chân đường cao không quan trọng. Vậy tôi đề xuất bài toán tổng quát sau

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và tâm nội tiếp I. M là một điểm thuộc AB. MI cắt BC tại N. P nằm trên phân giác ngoài góc B sao cho $MP \parallel AI$. Chứng minh rằng AI và PN cắt nhau trên đường tròn (O).

Tác giả nhận được lời giải sớm nhất từ bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương, bạn **Dũng** đã gửi tới tác giả hai lời giải trong đó có một lời giải thuần túy hình học rất đẹp mắt. Bài toán cũng được giải thuần túy hình học bởi bạn **Phạm Quang Toàn** và các bạn **Trần Nhân Trung**, lớp 11A2, trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, **Nguyễn Minh Quang** lớp 11 toán, THPT Chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình tại đây. Tác giả còn nhận được các lời giải đúng của các bạn **Bùi Văn Bình, Trương Văn Hoằng, Bùi Công Minh**, lớp 12 Toán, **Lê Sỹ Quan**, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước. Ngoài ra bài toán cũng được tham gia giải ngay trên blog bởi bạn **Đình Lương** lớp 11T Lam Sơn.

Bài toán đề nghị

Cho A là một điểm cố định trên đường tròn (O) và d là một đường thẳng bất kỳ cố định. P là một điểm di chuyển trên (O). AP cắt d tại M. N đối xứng P qua OM. Q đối xứng N qua d. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi P thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

