Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

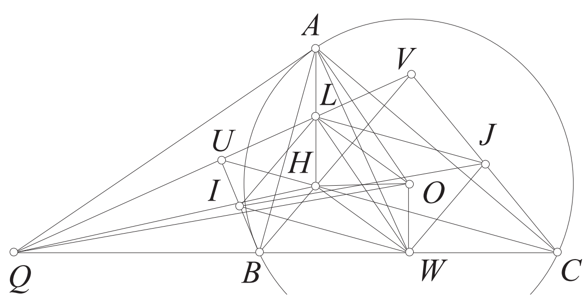
Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P nằm trên cạnh BC. Các đường tròn $(PCA), (PAB)$ lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A. K là tâm ngoại tiếp tam giác AEF. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại Q. Trên QK lấy S, T sao cho $ET \perp AC, FS \perp AB$. M, N là trung điểm CT, BS. Chứng minh rằng $MN \parallel OQ$.

Lời giải

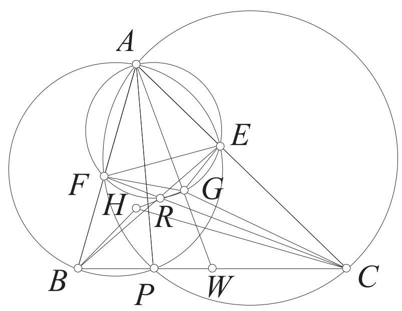
Bổ đề 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. L là trung điểm AH. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại Q. HB, HC cắt QL tại V, U. I, J là trung điểm của BU, CV. Chứng minh rằng $IJ \parallel OQ$.

Chứng minh. Gọi W là trung điểm BC. Theo tính chất quen thuộc thì HA song song và gấp đôi OW nên $AOWL$ là hình bình hành, do đó $WL \parallel OA \perp QA$. Từ đó L là trực tâm tam giác AQW nên $QL \perp AW$. Ta dễ suy ra các tam giác $\triangle HVL \sim \triangle CAW$ và $\triangle HUL \sim \triangle BAW$ g.g. Từ đó $VL.CW = AL.AW = UL.BW$, vậy L là trung điểm UV. Trong tứ giác $BCVU$ thì $LIWJ$ là hình bình hành. Mặt khác do HA song song và gấp đôi OW nên $HLOW$ là hình bình hành, do đó IJ đi qua trung điểm OH. Cũng từ tính chất đường thẳng Newton-Gauss thì IJ đi qua trung điểm HQ. Do đó $IJ \parallel OQ$.

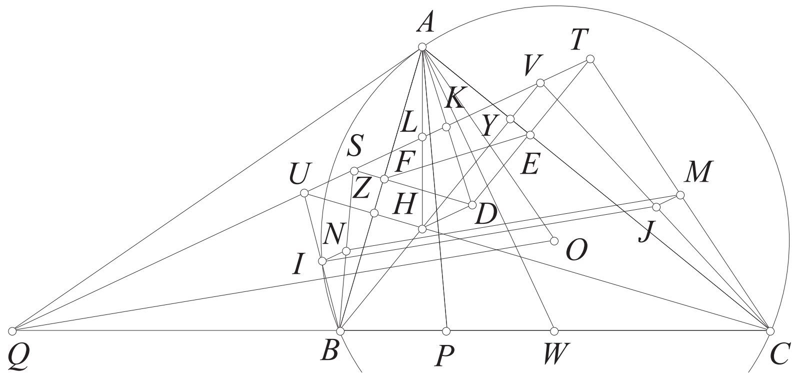


Bổ đề 2. Cho tam giác ABC với trực tâm H. P nằm trên cạnh BC. Các đường tròn $(PCA), (PAB)$ lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A. Khi đó đường tròn (AEF) luôn đi qua hình chiếu của H trên trung tuyến qua A.

Chứng minh. Ta thấy $\angle AEB + \angle AFC = \angle APB + \angle APC = 180^\circ$ nên BE, CF cắt nhau tại R nằm trên cả (AEF) và (BHC). Gọi (AEF) cắt (BHC) tại G khác Y. Gọi AY cắt BC tại W. Ta thấy $\angle GAC = \angle GRE = \angle GCB$. Do đó $WC^2 = WZ.WA$.



Tương tự $WB^2 = WZ.WA$ nên W là trung điểm BC. Dễ chứng minh G là hình chiếu của H trên AW.



Giải bài toán. Đường cao BY, CZ của tam giác ABC cắt nhau tại H. L, I, J, W là trung điểm AH, BU, CV, BC. BY, CZ cắt QL tại V, U. Theo bổ đề 1 ta đã có $IJ \parallel OQ$. Ta sẽ chứng minh $MN \parallel IJ$, thật vậy. Gọi TE cắt SF tại D thì AD là đường kính của (AEF). Do AEF đi qua hình chiếu của H trên AW nên $QL \parallel HD \perp AW$. Từ bổ đề 1 thì $AW \perp QL$, do đó QL đi qua K và đồng thời $HD \parallel VT \parallel US$. Ta suy ra $US = HD = VT$. Mặt khác dễ thấy US song song và gấp đôi IN còn VT song song và gấp đôi JM. Ta thu được $IJMN$ là hình bình hành.

Nhận xét

Bài toán là mở rộng bổ đề 1. Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 Toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cho lời giải tại đây. Tác giả nhận được lời giải và mở rộng của bạn **Trần Việt Hoàng** lớp 11 Toán trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn qua B, C tiếp xúc (I) tại P. K là hình chiếu của D lên EF. PK cắt (I) tại L khác P. Chứng minh rằng $DL \perp AI$.

Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.