Xung quanh một bài toán hình học trong IMO Shortlist 2012

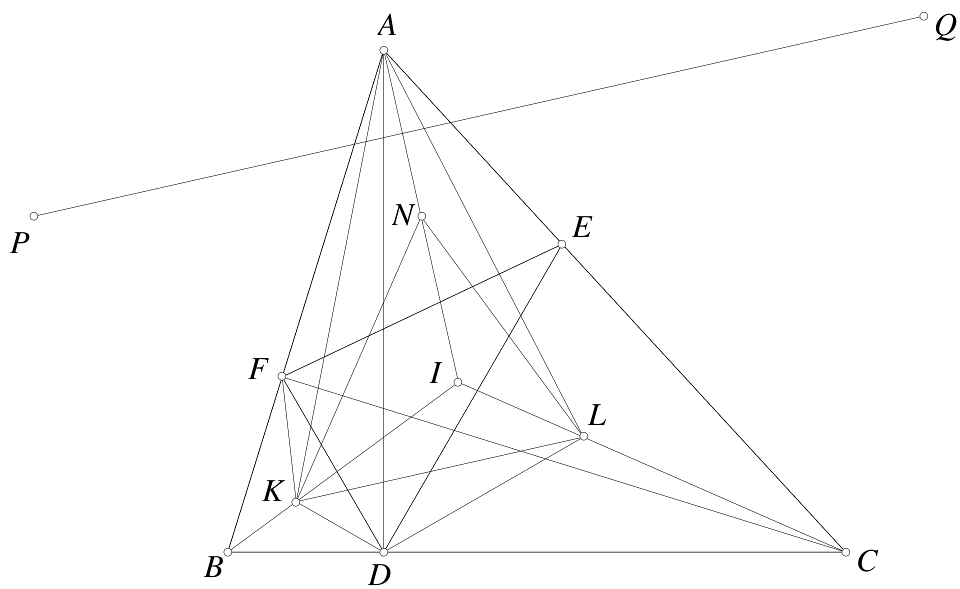
Trần Quang Hùng

Tóm tắt nội dung

Bài viết xoay quanh một bài toán hình học hay trong shortlist năm 2012 với các công cụ hình học thuần túy.

Trong shortlist năm 2012 có một bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm nội tiếp các tam giác BFD, CDE. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác ABK, ACL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

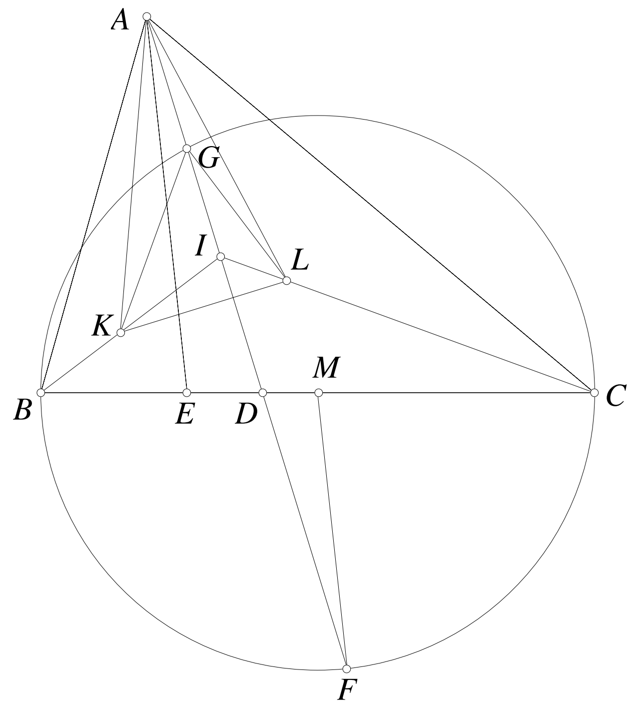


Hình 1.

Lời giải. Ta dễ có các tam giác $\triangle DFB \sim \triangle DCE$ mà K, L là tâm nội tiếp các tam giác này suy ra $\triangle DKF \sim \triangle DLC$. Từ cặp đồng dạng này suy ra $\triangle DKL \sim \triangle DFC$. Suy ra $\angle DKL = \angle DFC = \angle DAC$. Từ đó có $\angle BKL = \angle BKD + \angle DKL = 90^\circ + \dfrac{\angle BFD}{2} + \angle DFC = 90^\circ + \dfrac{\angle ACB}{2} + 90^\circ - \angle ACB = 180^\circ - \dfrac{\angle ACB}{2} = 180^\circ - \angle LCB$ suy ra tứ giác $BKLC$ nội tiếp. Tương tự nếu gọi N là tâm nội tiếp tam giác AEF thì các tứ giác $ANKB$ và $ANLC$ nội tiếp. Vậy AN là dây cung chung của đường tròn (P) ngoại tiếp ABK và đường tròn (Q) ngoại tiếp ACL suy ra $PQ \perp AN$. Dễ thấy BK, CL, AN đồng quy tại I là tâm nội tiếp tam giác ABC. Từ đó có các góc ngoài $\angle ILN = \angle NAC = \angle NAC = \angle IKN$. Tương tự $\angle INK = \angle ILK, \angle INL = \angle IKL$ suy ra I là trực tâm tam giác KLN. Vậy $PQ \perp AN \equiv AI \perp KL$ suy ra $PQ \parallel KL$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Việc chứng minh tứ giác $KBCL$ nội tiếp đóng vài trò quan trọng trong lời giải bài toán. Cách trên dùng các tam giác đồng dạng chung đỉnh thật sự hiệu quả và dễ hiểu không phải vẽ thêm một hình phụ nào, cách làm đó dựa vào ý tưởng của bạn Trần Đăng Phúc một học trò cũ của tôi. Ngoài ra trong [1] và trong shortlist gốc cũng đưa ra thêm một số cách khác nhau chứng minh tứ giác $KBCL$ nội tiếp. Bài toán sẽ được khai thác xung quanh vấn đề này, ta đi đến một bài khai thác sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC với $AC > AB$. Phân giác góc $\angle BAC$ cắt BC tại D. E là điểm nằm giữa B, D sao cho $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EAB, EAC. Chứng minh rằng tứ giác $KBCL$ nội tiếp.



Hình 2.

Lời giải. Gọi M là trung điểm BC. Lấy F nằm trên đường tròn đường kính BC và nằm ngoài tam giác ABC sao cho $MF \parallel AE$. Ta dễ $DM = MB - DB = \dfrac{BC}{2} - \dfrac{AB.BC}{AB + AC} = \dfrac{BC(AC - AB)}{2(AB + AC)} = \dfrac{MF(AC - AB)}{AB + AC}$. Do đó ta thấy $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{MD}{MF}$. Từ đó dễ chỉ ra $\triangle AED \sim \triangle MFD$. Từ đây dễ có A, D, F thẳng hàng. Gọi AF cắt đường tròn đường kính BC tại G khác F dễ có $\angle EAD = \angle DFM = \angle DGM$.

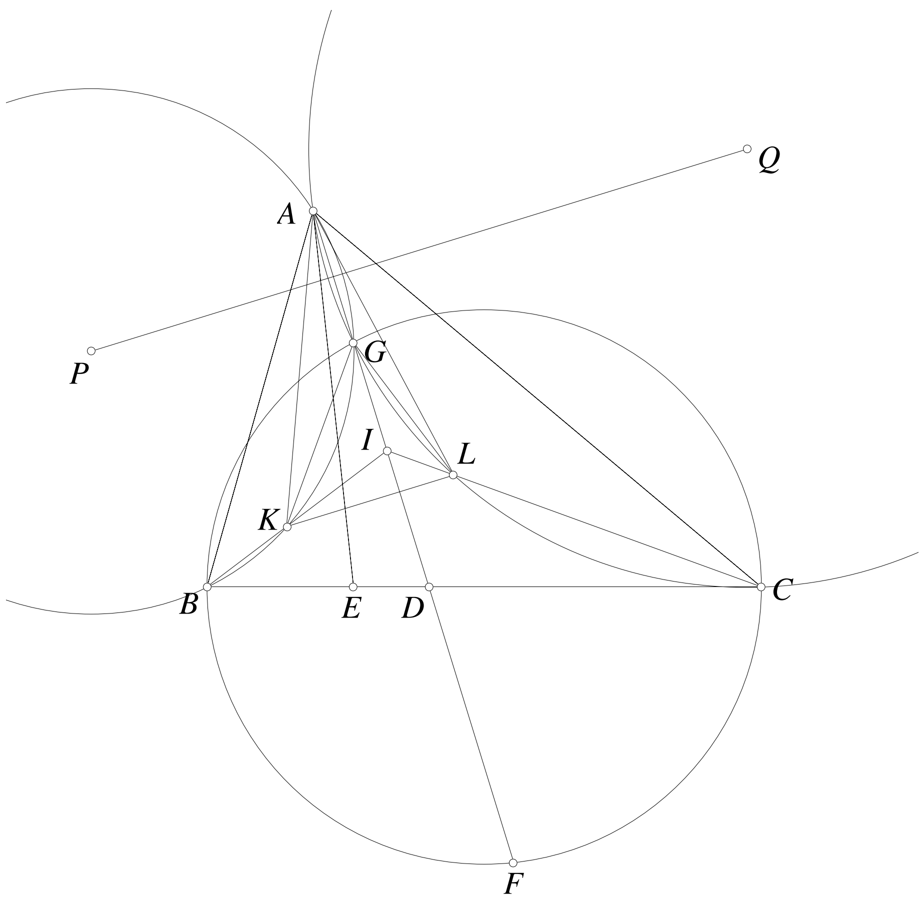
Tổng các góc trong cả hai tam giác EAD và GMD là 360° mặt khác $\angle EDG + \angle GDM = 180^\circ$ nên ta suy ra $\angle AED + \angle DMG + 2\angle DGM = 180^\circ$. Chú ý $\angle DMG = 2\angle MGC$ do đó $2(\angle DGM + \angle MGC) = 180^\circ - \angle AED$ hay $\angle DGC = 90^\circ - \dfrac{AED}{2}$. Vậy chú ý L là tâm nội tiếp tam giác AEC nên $\angle AGC = 180^\circ - \angle DGC = 90^\circ + \dfrac{\angle AED}{2} = \angle ALC$ suy ra tứ giác $AGLC$ nội tiếp. Vậy tương tự tứ giác $AGKB$ nội tiếp.

Chú ý các phân giác trong AD, BK, CL đồng quy tại tâm nội tiếp I. Cũng từ hai tứ giác $AGCL$ và $AGKB$ nội tiếp ta có $IK.IB = IG.IA = IL.IC$ nên tứ giác $BKLC$ nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Nhận xét. Điều kiện điểm E thỏa mãn $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$ là điều thú vị nhất của bài toán này. Ta thấy rằng điều kiện được xử lý rất khéo léo qua việc dựng điểm F trên đường tròn đường kính BC. Dựa vào ý tưởng bài toán shortlist ta đưa ra ngay được bài toán sau đây, chính là đề thi chọn đội tuyển KHTN năm 2013 vòng 1 ngày thứ 2 [2]

Bài toán 3. Cho tam giác ABC với $AC > AB$. Phân giác góc $\angle BAC$ cắt BC tại D. E là điểm nằm giữa B, D sao cho $\dfrac{ED}{EA} = \dfrac{AC - AB}{AC + AB}$. Gọi K, L lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác EAB, EAC. Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác KAB, LAC. Chứng minh rằng PQ song song KL.

Lời giải đầu tiên ta có thể sử dụng bài toán 2 như sau



Hình 3.

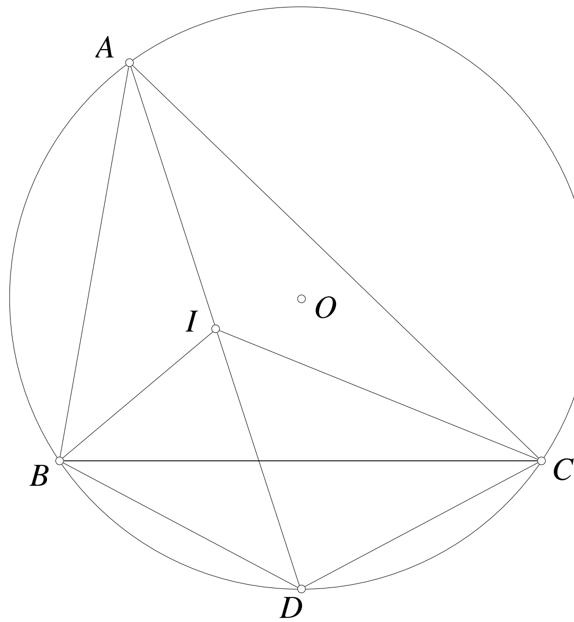
Lời giải 1. Từ các dựng điểm G như lời giải bài toán 2 ta thấy các tứ giác nội tiếp $AGKB, AGLC, BKLC$ ta được

$$\angle IKL + \angle GLK = \angle ICB + (\angle IBC + \angle GAC) = \frac{\angle ABC + \angle BAC + \angle BCA}{2} = 90^\circ.$$

Hay $IK \perp GL$, tương tự $IL \perp GK$. Từ đây suy ra $AG \equiv IG \perp KL$. Chú ý hai đường tròn $(P), (Q)$ cắt nhau tại A, G do đó $AG \perp PQ$. Vậy từ hai tính chất trên dễ suy ra $PQ \parallel KL$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

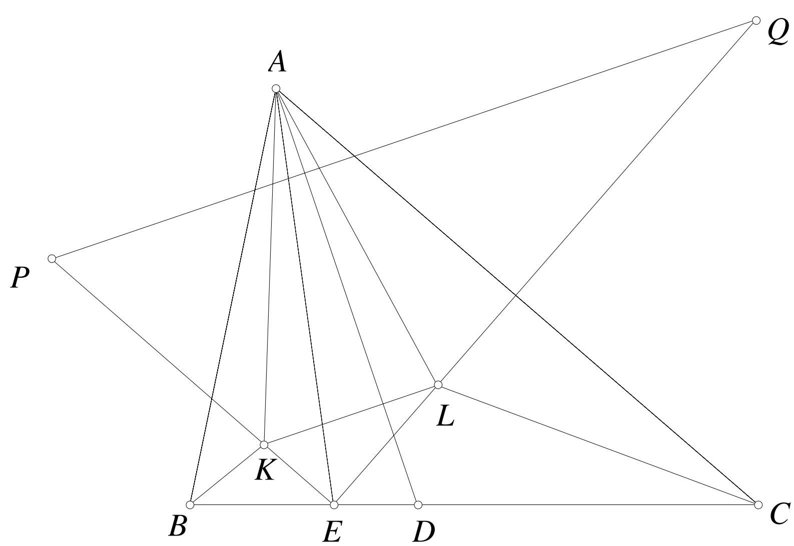
Tuy nhiên lời giải hai sau đây khá ngắn gọn suy ra trực tiếp bài toán, ta cần một bổ đề

Bổ đề 3.1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), tâm nội tiếp I. AI cắt (O) tại D khác A thì D là tâm ngoại tiếp tam giác IBC và $\frac{DI}{DA} = \frac{BC}{AB + AC}$.



Hình 4.

Chứng minh. Ta có $\angle BID = \angle IBA + \angle IAB = \angle IAC + \angle IBC = \angle CBD + \angle IBC = \angle IBD$. Do đó tam giác BID cân tại D. Tương tự tam giác CID cân tại D. Vậy $DI = DB = DC$. Áp dụng định lý Ptolemy cho tứ giác $ABDC$ ta có $DB.CA + DC.AB = DA.AB$ hay $DI(AB + AC) = DA.BC$ suy ra $\frac{DI}{DA} = \frac{BC}{AB + AC}$. $\square$



Hình 5.

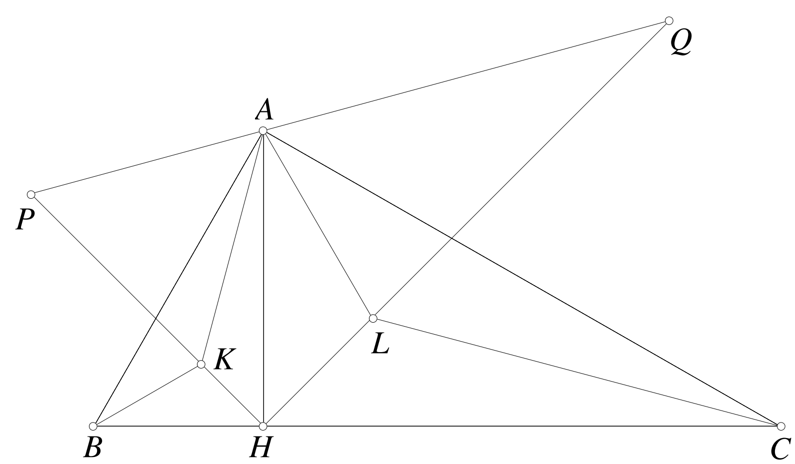
Lời giải 2. Theo bổ đề dễ có $\dfrac{PK}{PE} = \dfrac{AB}{EA+EB}$ và $\dfrac{QL}{QE} = \dfrac{AC}{EA+EC}$. Vậy ta cần chứng minh

$$\frac{AB}{EA+EB} = \frac{AC}{EA+EC}$$
$$\Leftrightarrow \frac{AB}{EA+DB-ED} = \frac{AC}{EA+DC+ED}$$
$$\Leftrightarrow AB(EA+DC+ED) = AC(EA+DB-ED)$$
$$\Leftrightarrow AB(EA+ED) = AC(EA-ED)$$
$$\Leftrightarrow AB(1+\frac{ED}{EA}) = AC(1-\frac{ED}{EA})$$
$$\Leftrightarrow AB(1+\frac{AC-AB}{AB+AC}) = AC(1-\frac{AC-AB}{AC+AB})$$
$$\Leftrightarrow AB.\frac{2AC}{AB+AC} = AC.\frac{2AB}{AB+AC} \text{ (luôn đúng).}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Đặc biệt hóa bài toán 1 và bài toán 3 cho ta một trường hợp riêng rất có ý nghĩa sau

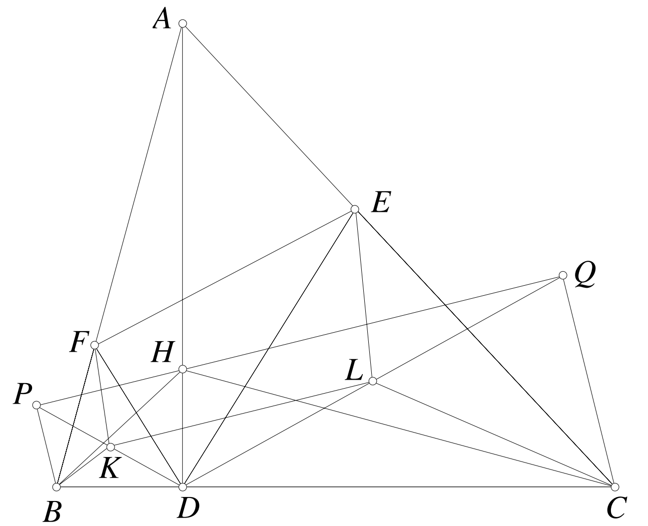
Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông ở A với AH là đường cao. Gọi K, L là tâm nội tiếp tam giác AHB, AHC. P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác KAB, LAC. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.



Hình 6.

Nhận xét. Điều thú vị của bài toán trên là nó có thể coi là trường hợp riêng của cả hai bài toán 1 và bài toán 3 do đó cả hai cách giải cho bài toán 1 và bài toán 3 có thể áp dụng tương tự giải bài toán này. Và như vậy hai bài toán trên có thể coi là hai hướng tổng quát cho bài toán trên tam giác vuông này, tuy nhiên điều thú vị hơn là việc phát biểu bài toán cho tam giác vuông có thể giúp cho chúng ta có thêm một hướng mở rộng thứ ba cho bài toán này như sau

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm nội tiếp các tam giác BFD, CDE. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác FBK, ECL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

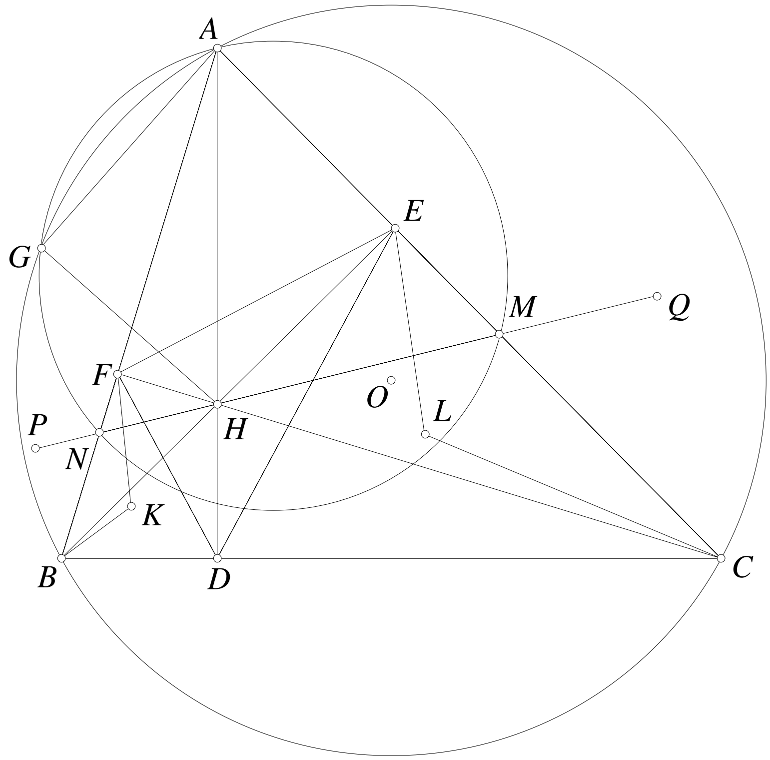


Hình 7.

Lời giải. Tương tự như lời giải thứ 2 của bài toán 3 ta có $KL \parallel PQ$ tương đương với $\dfrac{PK}{PD} = \dfrac{QL}{QD} \Leftrightarrow \dfrac{BF}{DB+DF} = \dfrac{CE}{DC+DE}$. Đẳng thức sau cùng đúng do tam giác DBF và DEC đồng dạng. Vậy bài toán được chứng minh. $\square$

Nhận xét. Bài toán được chứng minh rất ngắn gọn nhờ ý tưởng của lời giải thứ 2 cho bài toán 3. Một số hệ quả đơn giản được rút ra là PQ đi qua H và là phân giác ngoài của tam giác HBC và như vậy dễ thấy PQ vuông góc với phân giác trong góc $\angle BAC$. Nhờ nhận xét đó bài toán 5 được khai thác như sau

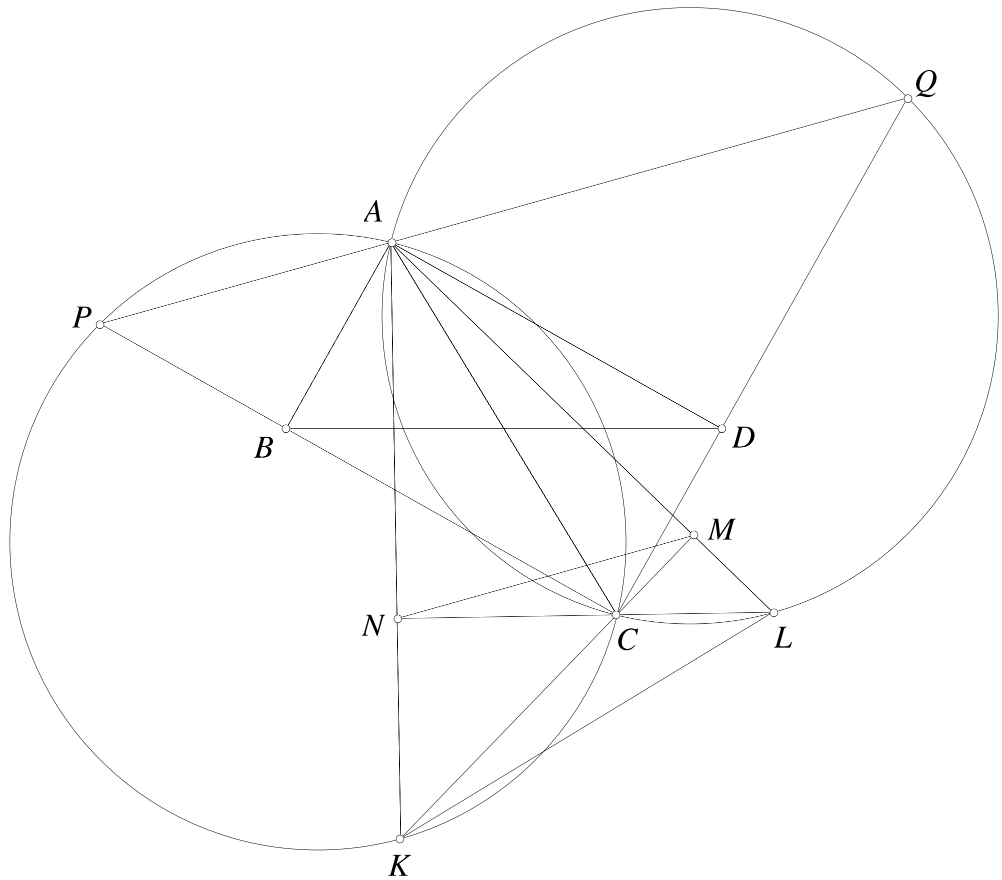
Bài toán 6. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm nội tiếp các tam giác BFD, CDE. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác FBK, ECL. Gọi PQ cắt CA, AB lần lượt tại M, N. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt (O) tại G khác A. Chứng minh rằng $GA \perp GH$.



Hình 8.

Bài toán là việc kết hợp bài toán 5 với bài toán chọn đội tuyển Thụy Sĩ năm 2006 [3] rất nổi tiếng. Lời giải chi tiết các bạn có thể tham khảo [3]. Bài toán 4 được khai thác một cách khác như sau

Bài toán 7. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có K, L là tâm bàng tiếp đỉnh A của các tam giác ABC, ACD. CB, CD lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác ACK, ACL tại P, Q khác C. Gọi CK, CL lần lượt cắt AL, AK tại M, N. Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.



Hình 9.

Việc khai thác các tính chất khác nhau của tức giác $KBCL$ nội tiếp trong bài toán 1 sẽ cũng sẽ đưa ra nhiều được bài toán khác thú vị, tiêu biểu là bài toán sau

Bài toán 8. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao AD, BE, CF. Gọi $(X), (Y), (Z)$ là các đường tròn nội tiếp tam giác AEF, BFD, CDE. Gọi d_a là tiếp tuyến chung ngoài khác BC của $(Y), (Z)$. Tương tự có d_b, d_c. Chứng minh rằng d_a, d_b, d_c đồng quy.

Hoặc một hướng mở rộng nhờ vị trí tương đối của trực tâm

Bài toán 9. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm nội tiếp của các tam giác của các tam giác DBE, DCF. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác HBK, HCL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

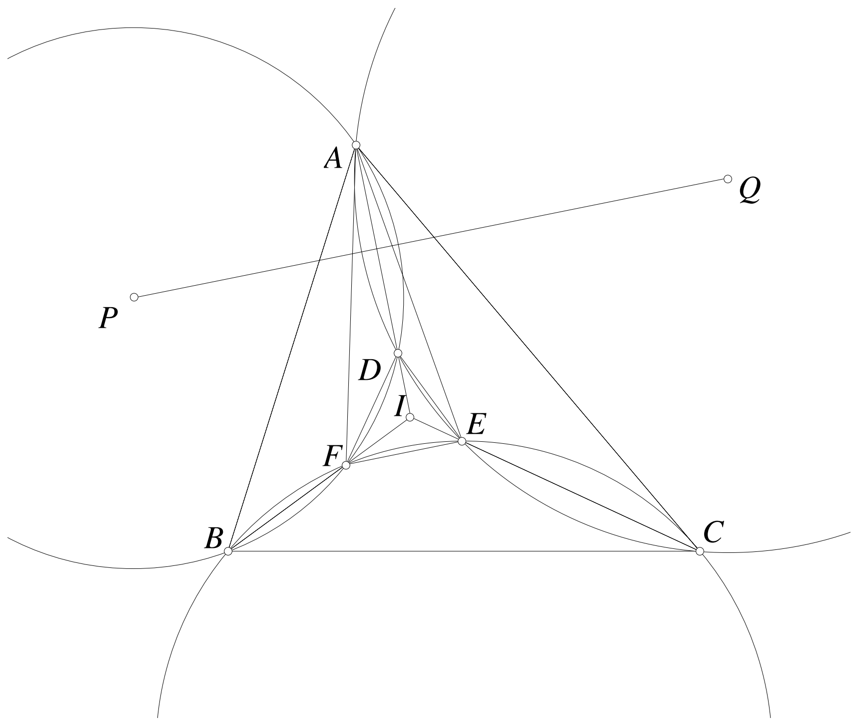
Hoặc một hướng mở rộng cho các tâm bàng tiếp như sau

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm bàng tiếp đỉnh D của các tam giác BFD, CDE. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác ABK, ACL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

Bài toán 11. Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, BE, CF. Gọi K, L là tâm bàng tiếp đỉnh D của các tam giác DBE, DCF. Gọi P, Q là tâm ngoại tiếp các tam giác HBK, HCL. Chứng minh rằng $PQ \parallel KL$.

Hoặc ta hoàn toàn có thể mở rộng bài toán từ sự kiện tứ giác $BKLC$ nội tiếp như sau

Bài toán 12. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. Một đường tròn đi qua B, C cắt IC, IB lần lượt tại E, F. Gọi P, Q lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác ABF, ACE. Chứng minh rằng $PQ \parallel EF$.

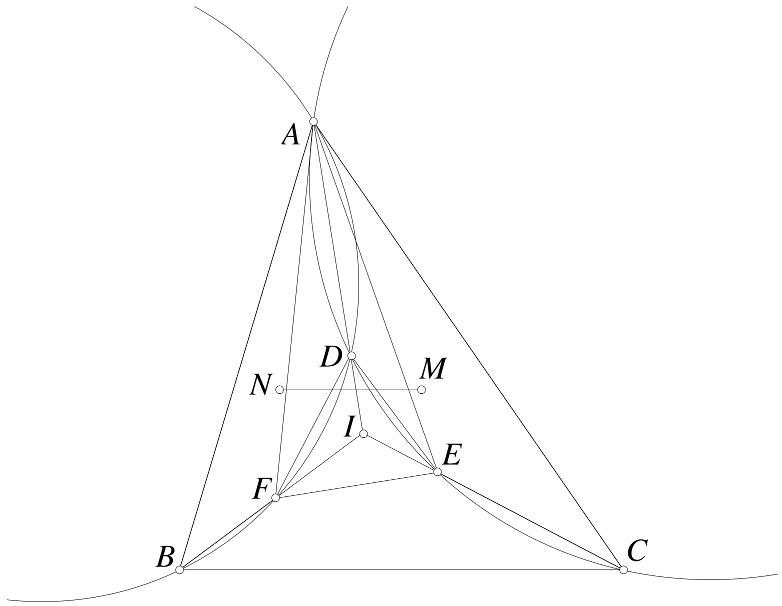


Hình 10.

Lời giải. Gọi đường tròn (P) ngoại tiếp tam giác ABF và đường tròn (Q) ngoại tiếp tam giác ACE cắt nhau tại D khác A. Theo tính chất tâm đẳng phương dễ thấy AD, BF, CE đồng quy. Nên AD đi qua I. Ta biết rằng AI đi qua tâm ngoại tiếp tam giác IBC mà tứ giác $CBEF$ nội tiếp nên $AI \perp EF$. Từ việc AI đi qua D thì $AI \perp PQ$. Từ đó $EF \parallel PQ$. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Bài toán này là một mở rộng cho bài toán 1. Xung quanh nó vẫn có thể khai thác được thêm nhiều ý thú vị, chẳng hạn như bài toán sau

Bài toán 13. Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I. D là một điểm trên IA. Đường tròn ngoại tiếp tam giác DAB, DAC lần lượt cắt IB, IC tại F, E khác B, C. M, N đối xứng I qua DE, DF. Chứng minh rằng $MN \parallel BC$.



Hình 11.

Các bài toán trên đều được chứng minh không khó dựa vào các ý chứng minh trong bài viết, xin dành điều đó cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] IMO Shortlist 2012, Geometry 3
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=3160579

[2] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013

[3] Topic Hard to approch it ở diễn đàn AoPS
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=49p=89098

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com