Đề hình chọn đội tuyển Việt Nam và các mở rộng

Trần Quang Hùng

Bài 1 (VNTST-Ngày 1)**.** *Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh không song song nội tiếp (O,R). Gọi E là giao điểm hai đường chéo và đường phân giác góc AEB cắt các đường thẳng AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q.*

a) Chứng minh rằng các đường tròn $(AQM), (BMN), (CNP), (DPQ)$ cùng đi qua một điểm. Gọi điểm đó là K.

b) Đặt $\min\{AC, BD\} = m$. Chứng minh rằng $OK \le \dfrac{2R^2}{\sqrt{4R^2 - m^2}}$.

Bài 2 (Mở rộng bài 1)**.** *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC giao BD tại E. Một đường thẳng d bất kỳ đi qua E cắt AB, BC, CD, DA lần lượt tại M, N, P, Q. Gọi các giao điểm của các đường tròn $(AQM) \cap (BMN) = \{M, X\}$, $(BMN) \cap (CNP) = \{N, Y\}$, $(CNP) \cap (DPQ) = \{P, Z\}$, $(DPQ) \cap (AQM) = \{Q, T\}$.*

a) Chứng minh rằng X, Y, Z, T cùng thuộc một đường tròn (K).

b) Chứng minh rằng (K) luôn đi qua một điểm cố định khi d di quay quanh E.

Bài 3 (VNTST-Ngày 2)**.** *Cho tam giác ABC nhọn không cân có góc $\angle BAC = 45°$. Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại trực tâm H. Đường thẳng EF cắt đường thẳng BC tại P. I là trung điểm của BC, IF cắt PH tại Q.*

a) Chứng minh rằng góc $\angle IQH = \angle AIE$.

b) Gọi K là trực tâm của tam giác AEF, (J) là đường tròn ngoại tiếp tam giác KPD. CK cắt đường tròn (J) tại G, IG cắt (J) tại M, JC cắt đường tròn đường kính BC tại N. Chứng minh rằng G, N, M, C cùng thuộc một đường tròn.

Thực sự góc $45°$ là không cần thiết trong bài toán.

Bài 4 (Mở rộng bài 3)**.** *Cho tam giác ABC đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H, EF giao BC tại G. Gọi (K) là đường tròn đường kính BC. Trung trực BC cắt (K) tại điểm L sao cho A, L cùng phía BC. Gọi (N) là đường tròn ngoại tiếp tam giác GDL. CL cắt (N) tại M khác L. MK cắt (N) tại P khác M. CN cắt (K) tại Q khác C. Chứng minh rằng M, Q, P, C cùng thuộc một đường tròn.*

Từ bài mở rộng trên nếu $\angle A = 45°$ thì ta có bài toán TST. Nếu thay thế đường tròn đường kính BC trong bài toán trên ta có thể mở rộng hơn như sau

Bài 5. *Cho tứ giác lồi $BFEC$ nội tiếp đường tròn (K). BE giao CF tại H. D là hình chiếu của H lên BC. Trung trực BC cắt (K) tại L sao cho H, L cùng phía BC. (N) là đường tròn qua D, L và tiếp xúc KL tại L. CL cắt (N) tại M khác L. CN cắt (K) tại Q khác C. Gọi CX là đường kính của (K). XQ cắt BC tại Y. Gọi Z là trung điểm của CY. MZ cắt (N) tại P khác M. Chứng minh rằng M, Q, P, C cùng thuộc một đường tròn.*

Nếu K là trung điểm BC thì Y trùng B, Z trùng K ta thu được bài toán trên.

Thực ra ta có thể thấy vai trò của hàng điểm điều hòa (BC, DG) và đường tròn (K) không nhất thiết phải gắn liền với nhau hơn nữa yếu tố đường trung trực cắt nửa đường tròn tại điểm L cũng không cần thiết ta có thể mở rộng bài toán hơn nữa như sau

Bài 6. *Cho tam giác ABC với D, G thuộc BC sao cho $(BC, DG) = -1$. (K) là một đường tròn bất kỳ đi qua B, C. L là một điểm bất kỳ thuộc (K). CL cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác LGD tại điểm M khác L. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC, GD. MI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác LGD tại P khác M. MJ cắt đường thẳng qua L song song BC tại N. CN cắt (K) tại Q khác C. Chứng minh rằng M, Q, P, C cùng thuộc một đường tròn.*