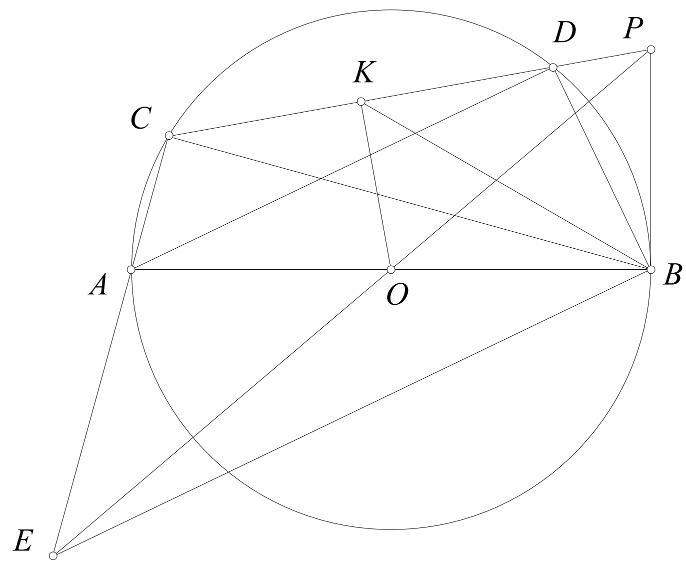
Một bài toán hay có nhiều ứng dụng

Tóm tắt nội dung

Một bài toán nhỏ rất đẹp với lời giải thuần túy hình học được áp dụng vào trong nhiều tình huống khác nhau tạo ra các bài toán thú vị xuất hiện trong nhiều cuộc thi học sinh giỏi.

Trong [1] có đề xuất một bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho C, D thuộc nửa đường tròn (O) đường kính AB. Tiếp tuyến tại B cắt CD tại P. CA cắt OP tại E thì BE song song AD.

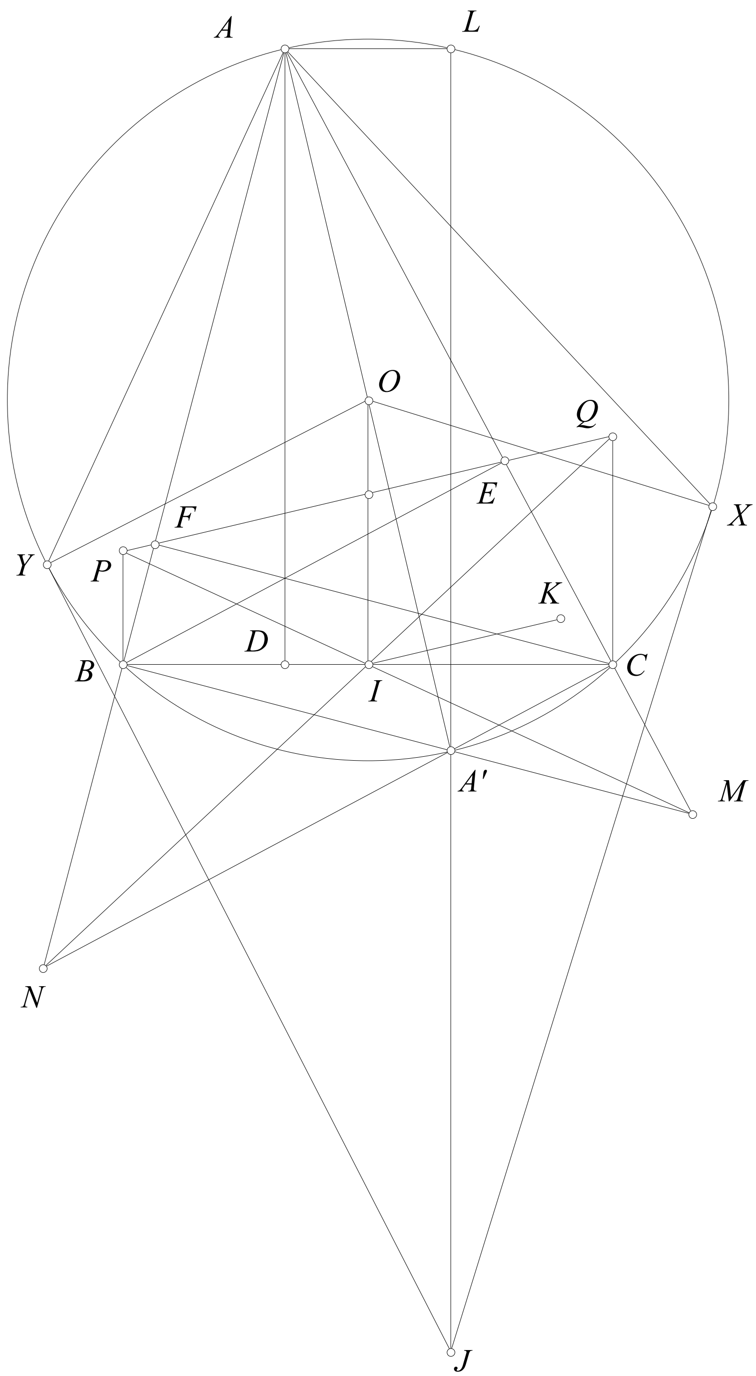


Hình 1.

Lời giải. Gọi K là trung điểm CD thì $OK \perp CD$ nên ta có $OBPK$ nội tiếp. Do đó $\angle BKD = \angle BOP = \angle AOE$, mặt khác $\angle EAO = \angle KDB$ vậy tam giác $\triangle EAO \sim \triangle BDK$ suy ra $\triangle EAB \sim \triangle BDC$. Từ đó $\angle DAB = \angle DCB = \angle ABE$ vậy $BE \parallel AD$. $\square$

Nhận xét. Bài toán tuy rất đơn giản, lời giải đẹp mộc mạc thuần túy hình học nhưng chứa đựng những ý nghĩa rất sâu sắc. Chúng ta hãy xét một số ứng dụng của nó qua các bài toán sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC nội tiếp (O) các đường cao AD, BE, CF. AA' là đường kính của (O). $A'B, A'C$ cắt AC, AB lần lượt tại M, N. P, Q thuộc EF sao cho PB, QC vuông góc với BC. Đường thẳng qua A vuông góc với QN, PM lần lượt cắt (O) tại X, Y. Tiếp tuyến của (O) tại X, Y cắt nhau tại J. Chứng minh rằng JA' vuông góc BC.



Hình 2.

Lời giải. Theo bài toán 1 thấy PM, QN đi qua trung điểm I của BC. Lấy L thuộc (O) sao cho $AL \parallel BC$. Dựng $IK \parallel PQ \equiv EF \perp AA'$ khi đó dễ thấy IO đi qua trung điểm PQ nên chùm $I(KOPQ) = -1$. Ta lại thấy AO, AL, AY, AX lần lượt vuông góc với IK, IO, IP, IQ do đó $(A'LYX) = A(OLYX) = -1$. Vậy tứ giác $LXA'Y$ điều hòa, vậy tiếp tuyến tại X, Y của (O) cắt nhau trên $A'L \perp BC$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

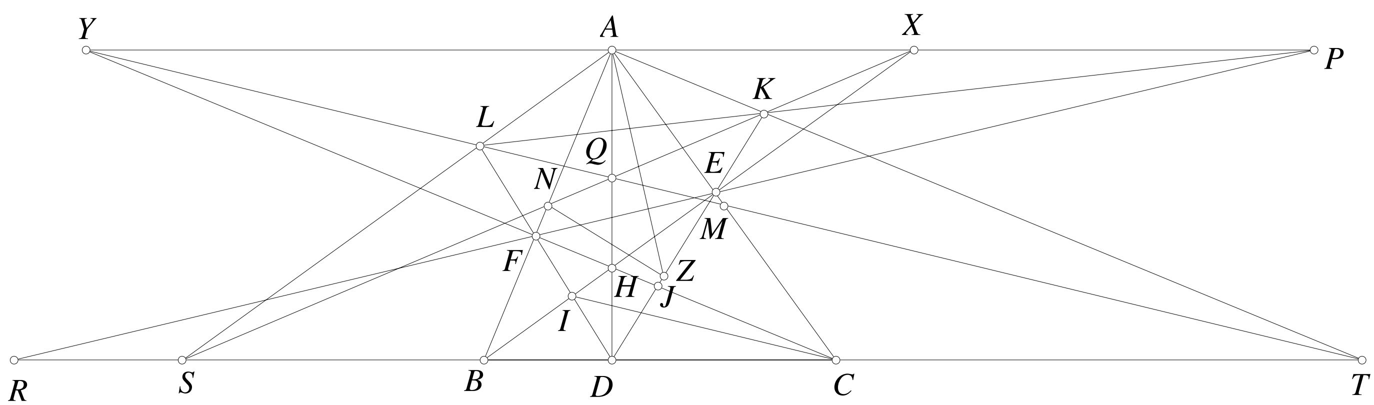
Nhận xét. Bài toán trên được tác giả dùng trong quá trình tập huấn đội tuyển KHTN năm 2009 và là đề ra trên THTT năm 2011.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC nhọn, không cân, các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H, các điểm D, E, F lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CA, AB. Gọi DE cắt đường thẳng qua A vuông góc AB tại K. Gọi KN giao BC tại S

a) Chứng minh rằng $AS \perp AC$.

b) Gọi DF cắt đường thẳng qua A vuông góc AC tại L. Chứng minh rằng LM, NK, AD đồng quy.

c) Gọi KL cắt EF tại P. Chứng minh rằng $AP \parallel BC$.



Hình 3.

Lời giải. a) Gọi Z là trung điểm của DE. Dễ thấy $NZ \perp DE$ vậy tứ giác $AKNZ$ nội tiếp. Suy ra $\angle AZE = \angle ANK = \angle SNB$. Mặt khác tứ giác $AEDB$ nội tiếp nên $\angle AEZ = \angle SBN$. Từ đó ta có $\triangle AEZ \sim \triangle SBN$. Mà E, N là trung điểm của DE, AB do đó $\triangle AED \sim \triangle SBA$. Từ đó $\angle SAB = \angle ADE = \angle ABE$ nên $AS \parallel BE \perp AC$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Gọi ML cắt BC tại T. Tương tự câu a) có $AT \perp AB$ do đó A, L, S và A, K, T thẳng hàng. Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ASC với L, M, T thẳng hàng ta có $\frac{LA}{LS}.\frac{TS}{TC}.\frac{MC}{MA} = 1$ suy ra $\frac{LA}{LS} = \frac{TC}{TS}$. Tương tự $\frac{KT}{KA} = \frac{ST}{SB}$. Từ đó chú ý $CH \parallel AT, BH \parallel AS$ ta có $\frac{LA}{LS}.\frac{DS}{DT}.\frac{KT}{KA} = \frac{TC}{TS}.\frac{DS}{DT}.\frac{ST}{SB} = \frac{TC}{TD}.\frac{DS}{SB} = \frac{AH}{AD}.\frac{AD}{AH} = 1$. Do đó SK, LT, AD đồng quy tại Q. Ta có điều phải chứng minh.

c) Gọi DF giao BE tại I. Ta chú ý trong tam giác AFD có B, I, H thẳng hàng nên áp dụng định lý Menelaus $\frac{HA}{HD}.\frac{ID}{IF}.\frac{BF}{BA} = 1$. Từ đó chú ý $IB \parallel AL$ ta có $\frac{CT}{CD} = \frac{HA}{HD} = \frac{IF}{ID}.\frac{BA}{BF} = \frac{IF}{ID}.\frac{IL}{IF} = \frac{IL}{ID}$. Do đó ta chứng minh được $CI \parallel LT$. Gọi đường thẳng qua A song song BC cắt LT tại Y. Ta thấy các tam giác ALY và BIC có các cạnh tương ứng song song nên IL, CY và BA đồng quy tại F. Tương tự SK giao AY tại X thì DK, BX, CA đồng quy tại E. Gọi EF giao BC tại R. XY là đường thẳng qua A song song BC. Gọi XY cắt EF tại P, ta sẽ chứng minh P, L, K thẳng hàng, thật vậy ta có biến đổi tỷ số

$\frac{PX}{PY}.\frac{LY}{LQ}.\frac{KQ}{KX}$

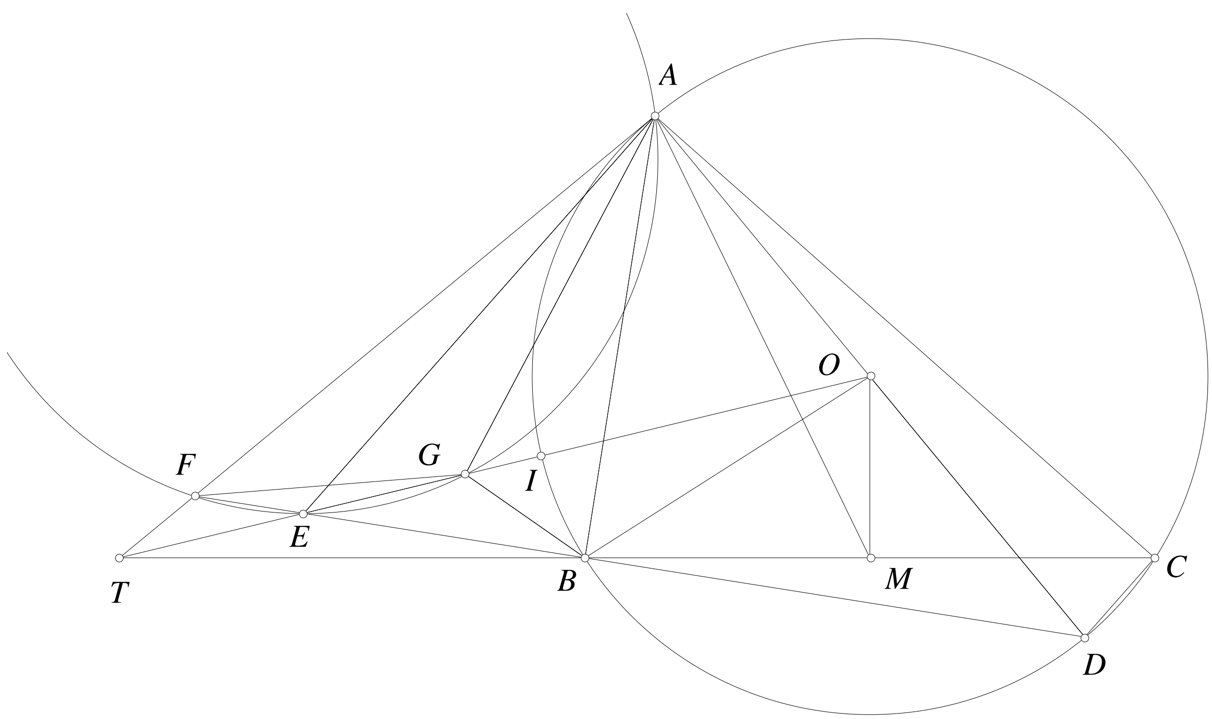
$= \frac{PX}{PA} \cdot \frac{PA}{PY} \cdot \frac{LY}{LT} \cdot \frac{LT}{LQ} \cdot \frac{KQ}{KS} \cdot \frac{KS}{KX}$
$= \frac{RB}{RC} \cdot \frac{RB}{RC} \cdot \frac{AY}{ST} \cdot \frac{LT}{LQ} \cdot \frac{KQ}{KS} \cdot \frac{ST}{AX}$
$= \frac{RB^2}{RC^2} \cdot \frac{AY}{AX} \cdot \frac{DT}{DS}$ (Chú ý áp dụng Ceva cho tam giác SQT với QD, SL, TK đồng quy)
$= \frac{DB^2}{DC^2} \cdot \frac{AY}{AX} \cdot \frac{AY}{AX}$ (Chú ý áp dụng Ceva và Menelaus cho tam giác ABC ta có $\frac{RB}{RC} = \frac{DB}{DC}$)
$= \frac{DB^2}{DC^2} \cdot \frac{DC^2}{DB^2} = 1.$
Vậy P, L, K thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Các bạn để ý kỹ thì nội dung câu a) chính là bài toán 1. Các bước trong lời giải câu a) là mô phỏng lại cách chứng minh bài toán 1. Nếu các bạn biết về phép chiếu song song hoàn toàn có thể mở rộng bài toán bằng cách thay trực tâm H bởi điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Cách chứng minh gần như tương tự. Bài toán trên đã được tác giả dùng trong kỳ thi HSG lớp 10 ở trường THPT chuyên KHTN năm 2013.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại T. D là điểm đối xứng của A qua O. OT cắt DB tại E.

a) Chứng minh rằng AE song song CD.

b) Gọi BE cắt AT tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt EO tại G khác E. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp tam giác AGB nằm trên (O).



Hình 4.

Chứng minh. a) Gọi M là trung điểm BC. Dễ có $OM \perp BC$. Chú ý $OA \perp AT$. Vậy tứ giác $AOMT$ nội tiếp, suy ra $\angle AOT = \angle AMT$ suy ra $\angle EOD = \angle AMC$. Kết hợp góc nội tiếp $\angle BDA = \angle ACM$

suy ra hai tam giác đồng dạng $\triangle AMC \sim \triangle EOD$. Chú ý M là trung điểm BC, O là trung điểm AD ta suy ra hai tam giác đồng dạng tương ứng $\triangle EAD \sim \triangle ABC$. Vậy từ đó $\angle EAD = \angle ABC$. Do tam giác ABC nhọn, dễ có $\angle ABC + \angle OAC = 90^\circ$ suy ra $\angle EAC = \angle EAD + \angle OAC = \angle ABC + \angle OAC = 90^\circ$. Ta có $AE \perp AC \perp CD$ nên AE song song CD. Ta có điều phải chứng minh.

b) Từ a) dễ có $\angle FAE = \angle TAC - 90^\circ = \angle DAC$. Do đó ta có $\angle FGT = \angle FAE = \angle DAC = \angle DBC = \angle FBT$ suy ra tứ giác $FGBE$ nội tiếp. Từ đó dễ có $\angle TGE = \angle TFB = \angle EGA$. Từ đó ta dễ có GO là phân giác $\angle AGB$ mà $OA = OB$ nên tứ giác $AGOB$ nội tiếp. Gọi đoạn GO cắt (O) tại I. Ta dễ có $OI = OA = OB$ mà I thuộc phân giác GO nên I là tâm nội tiếp tam giác AGB. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Các bạn để ý kỹ thì nội dung câu a) cũng chính là bài toán 1. Các bước trong lời giải câu a) là mô phỏng lại cách chứng minh bài toán 1. Bài toán trên được tác giả đề nghị trong kỳ thi HSG Vĩnh Phúc năm 2013.

Với bài toán tưởng chừng rất đơn sơ như bài toán 1 nếu biết ứng dụng vào trong nhiều tính huống khác nhau sẽ tạo ra được nhiều bài toán thú vị nữa. Các khám phá đó đang đợi các bạn.

Tài liệu

[1] Trần Quang Hùng, Tuyển tập các bài toán hình học chọn đội tuyển KHTN, năm 2013.

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN. E-mail: analgeomatica@gmail.com