# Xung quanh hai bài toán hình thi IMO năm 2013

Trần Quang Hùng

**Tóm tắt nội dung**

Bài viết này sẽ mở rộng và khai thác hai bài toán hình trong kỳ thi IMO 2013

## 1 Mở đầu

Trong kỳ thi toán quốc tế năm 2013 có hai bài toán hình hay như sau

**Bài 1.** *Cho tam giác giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Đường tròn bàng tiếp góc $A, B, C$ lần lượt tiếp xúc $BC, CA, AB$ tại $D, E, F$. Chứng minh rằng tam giác $ABC$ vuông khi và chỉ khi tâm ngoại tiếp tam giác $DEF$ nằm trên $(O)$.*

Bài toán trên là bài toán 3 của ngày 1, theo sự sắp xếp đó là bài toán khó nhất trong ngày hôm đó.

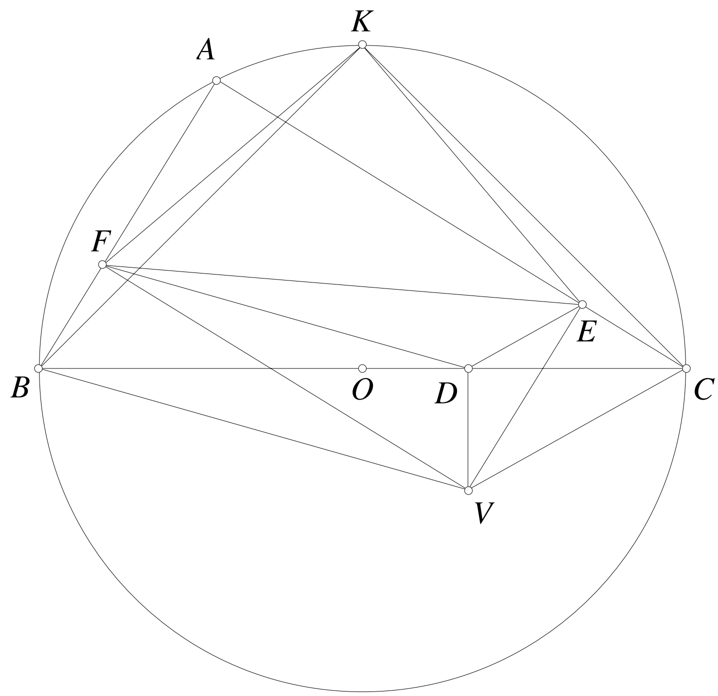
**Bài 2.** *Cho tam giác $ABC$, đường cao $BE, CF$ cắt nhau tại $H$. $P$ là một điểm trên $BC$. Gọi $PK, PL$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $PBF, PCE$. Chứng minh rằng $KL$ đi qua $H$.*

Bài toán trên là bài toán 4 của ngày 2, theo sự sắp xếp đó là bài toán dễ nhất trong ngày hôm đó.

Trong bài viết này chúng ta sẽ đi sâu tìm hiểu kỹ hơn hai bài toán trên cũng như tìm hiểu các mở rộng và ứng dụng của nó.

## 2 Lời giải hai bài toán và bình luận

*Lời giải bài 1.* Gọi phân giác ngoài góc $A$ cắt $(O)$ tại $K$. Ta dễ chứng minh $BF = CE$ nên trung trực $EF$ đi qua $K$. Nếu tâm ngoại tiếp tam giác $DEF$ thuộc $(O)$ sẽ nằm ngoài tam giác $DEF$ nên khi đó tam giác $DEF$ tù. Không mất tổng quát giả sử $\angle EDF$ tù. Do tâm ngoại tiếp tam giác $DEF$ cũng thuộc trung trực $EF$ vậy tâm ngoại tiếp tam giác $DEF$ phải là giao của trung trung trực $EF$ và $(O)$. Giao điểm này phải nằm trong góc $\angle EDF$ nên giao điểm này chính là $K$. Vậy $K$ cũng là tâm ngoại tiếp tam giác $DEF$.




Dễ thấy các đường thẳng qua tâm bàng tiếp $I_a, I_b, I_c$ lần lượt vuông góc với $BC, CA, AB$ đồng quy tại điểm $V$. Từ đó các tứ giác $DFBV, DECV$ nội tiếp. Ta suy ra $\angle BVC = \angle BVD + \angle CVD = \angle AFD + \angle AED = 360^\circ - \angle BAC - \angle EDF = 360^\circ - \angle EKF - (180^\circ - \dfrac{\angle EKF}{2}) = \angle EKF = \dfrac{360^\circ - \angle EKF}{2}$.

Mặt khác $KB = KC$. Từ đó dễ suy ra $K$ là tâm ngoại tiếp tam giác $BVC$. Từ đó theo tính chất đối xứng dễ suy ra $VF = BD = AE, VE = CD = AF$. Vậy tứ giác $AEVF$ là hình bình hành mà $\angle AEV = \angle AFV = 90^\circ$ vậy đó là hình chữ nhật suy ra $\angle BAC = 90^\circ$. Ta có điều phải chứng minh. □

**Nhận xét.** Đây là một trong những cách ngắn gọn nhất cho bài toán này mà không phải vẽ thêm một hình phụ nào. Việc làm xuất hiện các tứ giác nội tiếp $DFBV, DECV$ rồi sau đó trở thành hình thang cân là điều rất thú vị. Qua đó ta có thể khai thác được nhiều tính chất khác nữa.

# 3 Tìm hiểu và khai thác

Nếu chỉ xét phần thuận của bài toán 1, ta có thể phát biểu như sau

**Bài 3.** *Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Đường tròn bàng tiếp góc $A, B, C$ lần lượt tiếp xúc $BC, CA, AB$ tại $D, E, F$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $DEF$ nằm trên $(O)$.*

Nếu coi tam giác vuông là tam giác có trực tâm trùng với đỉnh, ta có thể mở rộng bài toán này cho tam giác bất kỳ như sau

**Bài 4.** *Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$, tâm nội tiếp $I$, $M$ là trung điểm của $BC$. $N$ đối xứng $I$ qua $M$. Gọi $H$ là trực tâm tam giác $ABC$. Gọi $X, Y, Z$ là hình chiếu của $N$ lên $BC, CH, HB$. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác $XYZ$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $HBC$.*

Nếu mở rộng hơn một chút cho bài toán này ta có bài toán thú vị sau

**Bài 5.** *Cho tam giác $ABC$, trực tâm $H$, tâm nội tiếp $I$, $M$ là trung điểm của $BC$, $N$ đối xứng $I$ qua $M$. $P$ là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $HBC$. Gọi $X, Y, Z$ là hình chiếu của $N$ lên $BC, CP, PB$. Gọi $K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $XYZ$. Chứng minh rằng $K$ luôn thuộc một đường tròn cố định khi $P$ di chuyển.*

Ta có thể tiếp tục khai thác bài toán như sau, bằng cách làm khó hơn một chút

**Bài 6.** *Cho tam giác $ABC$, đường tròn nội tiếp tiếp xúc $BC$ tại $D$. Đường tròn bàng tiếp góc $A, B, C$ lần lượt tiếp xúc $BC, CA, AB$ tại $K, L, N$. Chứng minh rằng $D, K, L, N$ cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $\angle A = 90°$.*

Ta lại có một phát triển khác cho bài toán này

**Bài 7.** *Cho tam giác $ABC$. Đường tròn bàng tiếp góc $A, B, C$ lần lượt tiếp xúc $BC, CA, AB$ tại $D, E, F$. Giả sử $\angle EDF = 135°$. Chứng minh rằng $\angle BAC = 90°$.*

Nếu coi tâm nội tiếp $I$ là trực tâm tam giác tạo bởi ba tâm bàng tiếp và $A, B, C$ là chân các đường cao, phát biểu lại bài toán gốc như sau ta sẽ lại có những cái nhìn thú vị khác

**Bài 8.** *Cho tam giác $ABC$, đường cao $AD, BE, CF$ và tâm ngoại tiếp $O$. Gọi $OA, OB, OC$ lần lượt cắt $EF, FD, DE$ tại $X, Y, Z$ Giả sử tâm ngoại tiếp tam giác $XYZ$ nằm trên đường tròn Euler của tam giác $ABC$. Chứng minh rằng tam giác $ABC$ có một góc là $45°$.*

Nghịch đảo bài toán gốc trên ta có bài toán sau

**Bài 9.** *Cho tam giác $ABC$, đường cao $AD, BE, CF$ đồng quy tại $H$. Đường tròn qua $D, H$ và trực giao với đường tròn $(HBC)$ cắt $(HBC)$ tại $X$ khác $H$. Tương tự có $Y, Z$. Gọi $(K)$ đường tròn ngoại tiếp tam giác $XYZ$. Đường thẳng qua $H$ vuông góc với $HK$ cắt $(XYZ)$ tại $M, N$. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại $M, N$ cắt nhau trên $(O)$ khi và chỉ khi tam giác $ABC$ có một góc là $45°$.*

Khai thác tiếp mô hình tam giác vuông ta có bài toán

**Bài 10.** *Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$. Tâm bàng tiếp góc $A$ là $I_a$. $V$ đối xứng với $I_a$ qua trung điểm $BC$. Gọi $D, E, F$ là hình chiếu của $V$ lên $BC, CA, AB$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giac $DEF$ nằm trên $(O)$.*

**Bài 11.** *Cho tam giác $ABC$ vuông tại $A$, tâm nội tiếp $I$. $P$ là một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác $BIC$. Gọi $D, E, F$ là hình chiếu của $P$ lên $BC, CA, AB$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $DEF$ luông thuộc một đường thẳng cố định khi $P$ di chuyển.*

Khi phát biểu bài toán như vậy ta sẽ có một khai thác bài toán trên như sau

**Bài 12.** *Cho tam giác $ABC$ với đường cao $AD, BE, CF$ và tâm ngoại tiếp $O$. $OA, OB, OC$ lần lượt cắt $EF, FD, DE$ tại $X, Y, Z$. Gọi $K$ là tâm ngoại tiếp tam giác $XYZ$. $M, N$ là trung điểm $CA, AB$. $P$ là điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $KMN$ sao cho $KP \parallel BC$.*

*a) Chứng minh rằng $D, P, O$ thẳng hàng.*

*b) Gọi $L$ là trung điểm $BC$. Chứng minh rằng $KL = DP$.*

Chúng ta lại có thể mở rộng hơn nữa bài toán trên như sau

**Bài 13.** *Cho tam giác $ABC$ và $P$ là điểm sao cho $AP \perp BC$. $PA, PB, PC$ lần lượt cắt $BC, CA, AB$ tại $D, E, F$. $Q$ là điểm đẳng giác của $P$ trong tam giác $ABC$. $X, Y, Z$ là hình chiếu của $Q$ lên $EF, FD, DE$. $K$ là tâm ngoại tiếp tam giác $DEF$. $M, N, L$ là hình chiếu của $Q$ lên $BC, CA, AB$. $R$ là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $KMN$ sao cho $PR \parallel BC$.*

*a) Chứng minh rằng $D, R, Q$ thẳng hàng.*

*b) Chứng minh rằng $KL = DR$.*

Chúng ta hoàn toàn có thể khai thác bài toán này trong nhiều trường hợp khác nữa. Trở lại bài toán của ngày 2. Nếu ta cũng coi tâm nội tiếp $I$ là trực tâm tam giác tạo bởi ba tâm bàng tiếp và $A, B, C$ là chân các đường cao, phát biểu lại bài toán gốc một cách thú vị hơn như sau

**Bài 14.** *Cho tam giác $ABC$, đường tròn bàng tiếp góc $B, C$ là $I_b, I_c$. $P$ là một điểm di chuyển trên $I_bI_c$. Gọi $PK, PL$ là đường kính của các đường tròn ngoại tiếp tam giác $PBI_c$ và $PCI_b$. Chứng minh rằng $KL$ luôn đi qua một điểm cố định khi $P$ di chuyển.*

Theo bài toán thi ta thấy ngay điểm cố định chính là tâm nội tiếp $I$. Tuy nhiên cùng với cách phát biểu này ta có thể nhận thấy các điểm $I_b, I_c$ với vài trò là tâm bàng tiếp thực sự không quan trọng. Ta có thể tổng quát hóa lên như sau

Hoặc khi chúng ta xét tới vị trí tương đối của trực tâm ta lại có một bài toán khá đặc sắc như sau

**Bài 15.** *Cho tam giác $ABC$ tâm đường tròn bàng tiếp góc $B, C$ là $I_b, I_c$. Gọi $P$ là một điểm di chuyển trên $I_bI_c$. Gọi $PK, PL$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác $PBI_b$ và $PCI_c$. Chứng minh rằng $KL$ luôn đi qua một điểm cố định khi $P$ di chuyển.*

**Bài 16.** *Cho tam giác $ABC$. Với $E, F$ là hai điểm cố định sao cho $A$ nằm giữa $E, F$. $P$ di chuyển trên đường thẳng $EF$. Gọi $PK, PL$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $PBF, PCE$. Chứng minh rằng $KL$ luôn đi qua điểm cố định khi $P$ di chuyển.*

Bài toán trên là bài toán thú vị và có khá nhiều cách khai thác khác nhau trong các trường hợp riêng, các bạn hãy cùng suy nghĩ. Ngoài ra từ bài toán gốc chúng ta lại có thêm hai cách mở rộng như sau, ta thay đường tròn đường kính $BC$ thành đường tròn $(K)$ bất kỳ qua $B, C$.

**Bài 17.** *Cho tam giác $ABC$, đường tròn $(K)$ qua $B, C$ cắt $CA, AB$ tại $E, F$ khác $B, C$. $BE$ giao $CF$ tại $H$. $d$ là đường thẳng qua $K$ vuông góc với $AH$. $P$ là một điểm bất kỳ trên $d$. $PM, PN$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $PBF, PCE$. Chứng minh rằng $MN$ đi qua $H$.*

**Bài 18.** *Cho tam giác $ABC$, đường tròn $(K)$ qua $B, C$ cắt $CA, AB$ tại $E, F$ khác $B, C$. $BE$ giao $CF$ tại $H$. Gọi $KL$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $KBC$. $P$ là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $KBC$. Gọi $LB, LC$ lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác $PBF, PCE$ tại $M, N$. Chứng minh rằng $MN$ đi qua $H$.*

Nếu ta nhìn lại bài toán 9 theo cách khác như sau

**Bài 19.** *Cho tam giác $ABC$. $E, F$ cố định thuộc $CA, AB$. $P$ di chuyển trên $BC$. Gọi $PK, PL$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác $PBF, PCE$. Chứng minh rằng $KL$ luôn đi qua một điểm cố định khi $P$ di chuyển.*

Trong hai bài toán này nếu cho $(K)$ trùng vào một số đường tròn đặc biệt ta lại có một số bài toán có ý nghĩa khác. Xin cùng với các bạn khác thác điều này.

Ta sẽ lại có một cách phát triển khác cho bài toán này như sau

**Bài 20.** *Cho tam giác $ABC$. $E, F$ cố định thuộc $CA, AB$. $P$ di chuyển trên một đường tròn $(K)$ cố định đi qua $B, C$. Gọi $Q$ là một điểm cố định thuộc $(K)$. $QB, QC$ lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác $PBF, PCE$ tại $M, N$. Chứng minh rằng $MN$ luôn đi qua một điểm cố định khi $P$ di chuyển.*

Rõ ràng bài toán trên là một tổng quát hóa nhưng lời giải của nó lại chỉ dùng bài toán góc không đổi rất đơn giản.

Ngoài ra trên mô hình của bài toán IMO ta còn có thể khai thác được rất nhiều kết quả khác từ đó. Các bạn hãy làm một số bài toán sau để luyện tập

**Bài 21.** *Cho tam giác $ABC$, đường cao $AD, BE, CF$ đồng quy tại $H$. Gọi phân giác $\angle HDB, \angle HCD$ lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác $DBF, DCE$ tại $K, L$ khác $D$.*

*a) Chứng minh rằng $KL$ đi qua $H$.*

*b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $DKL$ đi qua trung điểm của $BC$.*

Mở rộng tiếp bài toán trên ta lại có

**Bài 22.** *Cho tam giác $ABC$. Một đường tròn $(K)$ đi qua $B, C$ cắt $CA, AB$ tại $E, F$. $BE$ giao $CF$ tại $H$. $D$ là hình chiếu của $K$ lên $AH$. Gọi phân giác các góc $\angle BDF, CDE$ cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác $BDF, BCE$ tại $M, N$.*

*a) Chứng minh rằng $MN$ đi qua $H$.*

*b) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $DMN$ đi qua $K$.*

**Bài 23.** *Cho tam giác $ABC$. $P$ là một điểm di chuyển trên cạnh $BC$. Phân giác $\angle APB, \angle APC$ cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác $APB, APC$ tại các điểm $K, L$ khác $P$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $PKL$ luôn đi qua điểm cố định khi $P$ di chuyển.*

**Bài 24.** *Cho tam giác $ABC$. $P$ là một điểm di chuyển trên một đường tròn $(K)$ cố định qua $B, C$. Phân giác $\angle APB, \angle APC$ cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác $APB, APC$ tại các điểm $K, L$ khác $P$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $PKL$ luôn đi qua điểm cố định khi $P$ di chuyển.*

Khi nghịch đảo các bài toán gốc ta cũng thu được nhiều điều thú vị.

# Tài liệu

[1] IMO 2013 problem 3 from AoPS

Trần Quang Hùng Trường THPT chuyên KHTN-ĐHKHTN-ĐQGHN
Email:analgeoamtica@gmail.com