Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

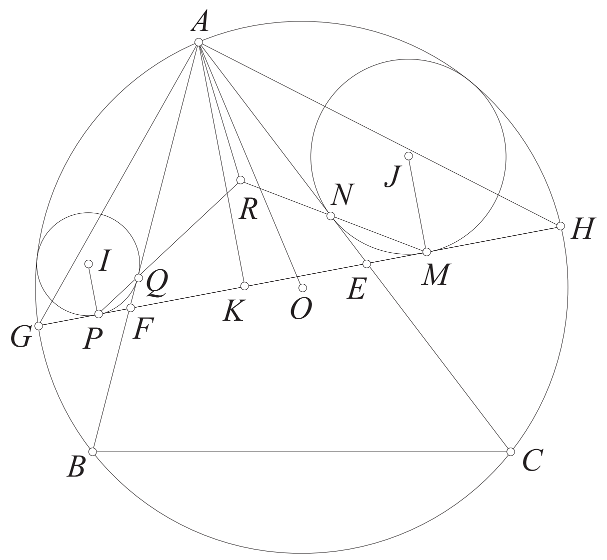
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). E, F là các điểm bất kỳ lần lượt nằm trên các đoạn thẳng CA, AB. Các tia EF, FE lần lượt cắt (O) tại các điểm G, H. Đường tròn (I) tiếp xúc với các đoạn thẳng FG, FA tại P, Q và tiếp xúc trong (O). Đường tròn (J) tiếp xúc với các đoạn thẳng EH, EA tại M, N và tiếp xúc trong (O). MN cắt PQ tại R. AK là đường cao của tam giác AEF. Chứng minh rằng AR là phân giác góc $\angle OAK$.

Lời giải

Nội dung của lời giải này đã có ở đây bởi bạn **Huỳnh Bách Khoa**, trường THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận



Theo định lý định lý Sawayama và Thébault thì MN, PQ cùng đi qua tâm nội tiếp của tam giác AGH nên R là tâm nội tiếp của tam giác AGH. Từ đó AR là phân giác $\angle GAH$ hay cũng là phân giác $\angle OAK$ do AO, AK đẳng giác trong $\angle GAH$.

Nhật xét

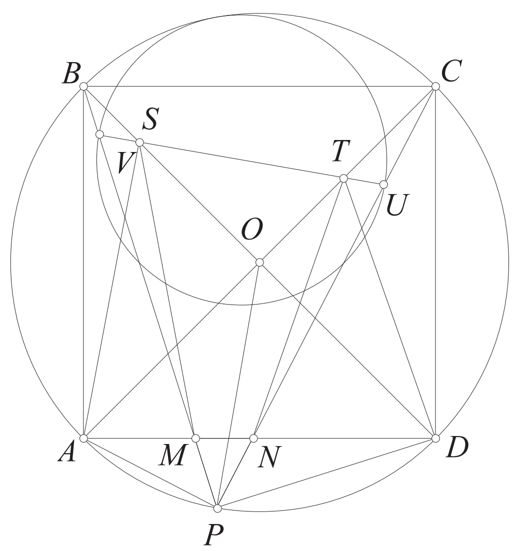
Tác giả cũng nhận được lời giải qua email bởi bạn **Lê Phước Tùng**, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Quang Trung, Bình Phước. Bài toán được tác giả mở rộng một bài toán thi vô địch Nga, trong trường hợp $EF \parallel BC$ thì MN, PQ và phân giác $\angle BAC$ đồng quy. Mặc dù định lý Sawayama và Thébault là một định lý lớn, tuy nhiên khi áp dụng vào bài toán này thì bài toán trở nên rất đơn giản. Do đó bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học Ngoại thương đã đề xuất một cách phát biểu khác đồng thời ứng dụng thú vị của bài toán này như sau, các mở rộng cũng được giải bởi bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An tại đây.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) tiếp xúc với cung nhỏ AB và tiếp xúc với đoạn AB tại Q. Đường tròn (J) tiếp xúc với cung nhỏ AC và tiếp xúc với đoạn AC tại N. Tiếp tuyến chung ngoài không cắt đoạn AQ, AN của (I) và (J) tiếp xúc $(I), (J)$ lần lượt tại M, P. Chứng minh rằng MN, PQ cắt nhau trên phân giác $\angle BAC$ khi và chỉ khi $MP \parallel BC$.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường tròn (I) tiếp xúc với cung nhỏ AB và tiếp xúc với đoạn AB tại Q. Đường tròn (J) tiếp xúc với cung nhỏ AC và tiếp xúc với đoạn AC tại N. Tiếp tuyến chung ngoài không cắt đoạn AQ, AN của (I) và (J) tiếp xúc $(I), (J)$ lần lượt tại M, P. SM cắt AC tại U. TP cắt AB tại V. Chứng minh rằng MP, NQ, UV đồng quy.

Bài toán đề nghị

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). P là một điểm thuộc cung nhỏ AD của (O). PB, PC lần lượt cắt đoạn AD tại M, N. Trung trực của AM, DN lần lượt cắt BD, AC tại S, T. ST cắt PC, PB lần lượt tại U, V. Chứng minh rằng đường tròn đường kính UV tiếp xúc (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

