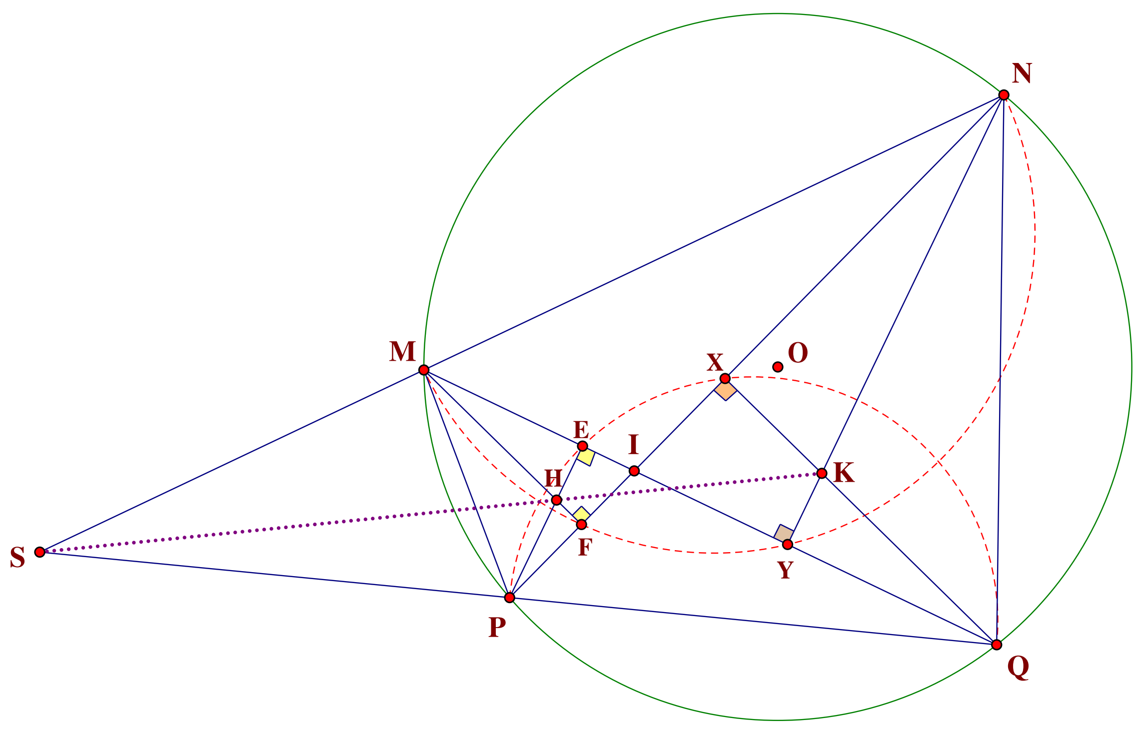
Đề bài
Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O). AC và BD cắt nhau ở I. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác AID và BIC. HK cắt (O) ở M và N. Gọi J là giao điểm của tiếp tuyến tại M, N của (O). S là giao điểm của AD và BC. Chứng minh rằng S, I, J thẳng hàng.
(Nguồn: http://forum.mathscope.org/showthread.php?t=15342)

Solution

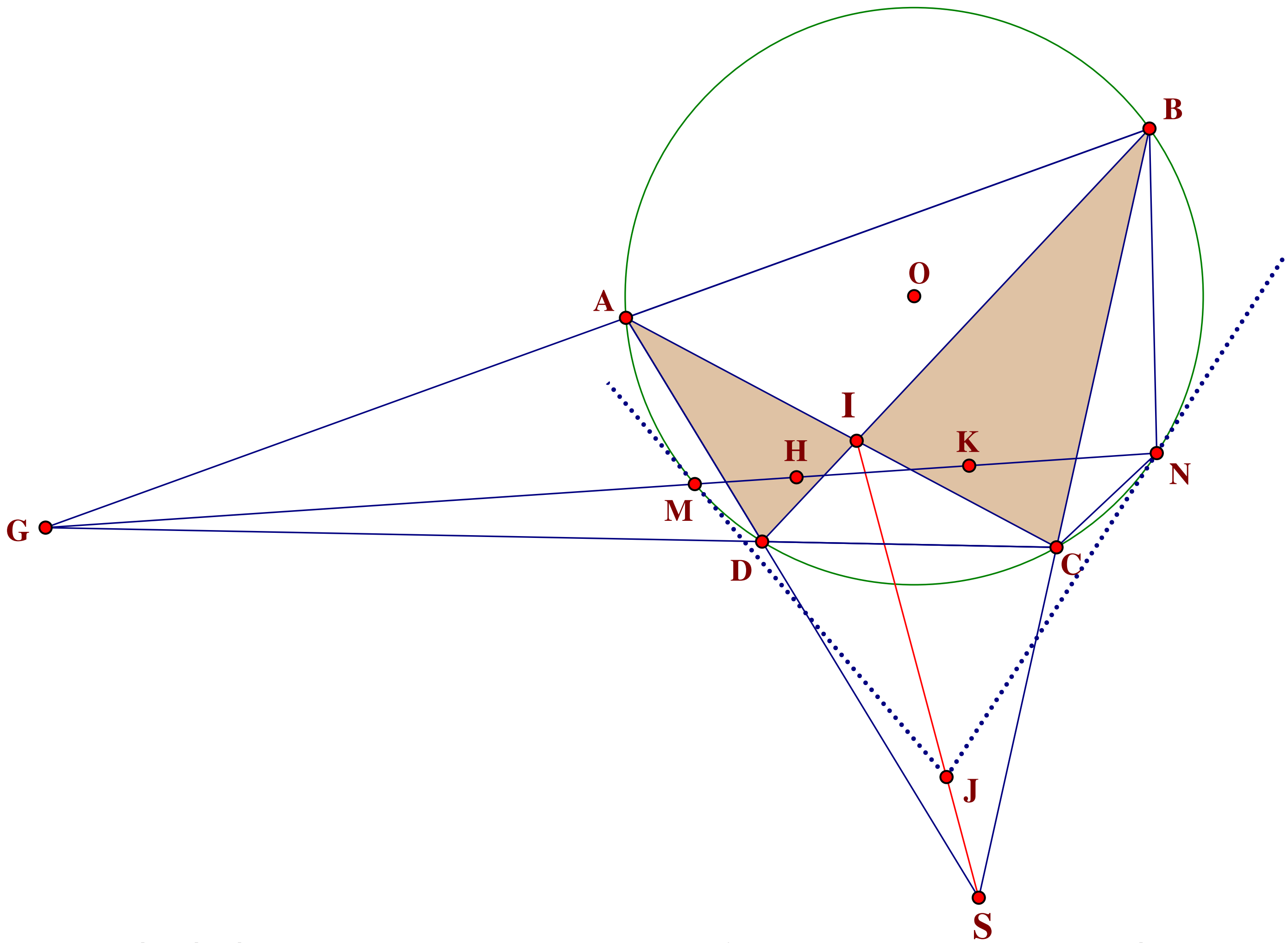
Bổ đề Cho MN, PQ là hai dây cung của đường tròn (O), gọi S là giao điểm của MN với PQ sao cho S ở ngoài đường tròn, gọi I là giao điểm của MQ với NP sao cho I ở trong đường tròn. Khi đó điểm S cùng với trực tâm của các tam giác IMP và INP là ba điểm thẳng hàng.

Chứng minh bổ đề
+) Gọi H là trực tâm của tam giác IMP và E, F lần lượt là chân các đường cao kẻ từ P, M của tam giác IMP. Gọi K là trực tâm của tam giác INQ và X, Y lần lượt là chân các đường cao kẻ từ Q, N của tam giác INQ.
+) Ta có tứ giác MFYN nội tiếp đường tròn đường kính MN, tứ giác PEXQ nội tiếp đường tròn đường kính PQ.
+) Dễ thấy SM.SN = SP.SQ, HM.HF = HP.HE, KN.KY = KX.KQ. Do đó các điểm S, H, K có cùng phương tích với hai đường tròn (MN) và (PQ) suy ra S, H, K cùng nằm trên một đường thẳng đó chính là trục đẳng phương của hai đường tròn (MN) và (PQ).
Vậy bổ đề được chứng minh.



Quay lại bài toán ban đầu:

+) Gọi G là giao điểm của AB với CD. Áp dụng bổ đề trên ta có 3 điểm G, H, K thẳng hàng.
+) Vì G là giao của AB với CD, S là giao của AD với BC và S là giao của AD với BC nên ta có IS chính là đường đối cực của điểm G đối với đường tròn (O), (*).
Do đó để chứng minh 3 điểm I, J, S thẳng hàng ta chỉ cần chứng minh J cũng nằm trên đường đối cực của điểm G đối với đường tròn (O).
Thật vậy do JM, JN là hai tiếp tuyến của (O) kẻ từ J nên MN chính là đường đối cực của điểm J đối với đường tròn (O) mà theo trên ta có G cũng nằm trên đường thẳng MN suy ra G nằm trên đường đối cực của J suy ra J cũng nằm trên đường đối cực của G, (**).
Từ (*) và (**) suy ra 3 điểm I, J, S thẳng hàng.



Note: Có nhiều yếu tố giúp bạn làm được các bài toán hình phẳng một cách dễ dàng, một trong số đó chính là ta tìm ra được mối liên hệ của nó với các bài toán khác, đa số các bài toán khác kia lại rất đơn giản và ta hay gọi chúng là bổ đề. Bài toán này cũng là một trường hợp như vậy.

alibaba_cqt

[IMG]http://ca9.upanh.com/17.989.22385977.tE20/bodevecucvadoicuc.png[/IMG]
[IMG]http://ca7.upanh.com/17.989.22386103.C320/baitoanhayvecucvadoicuc.png[/IMG]