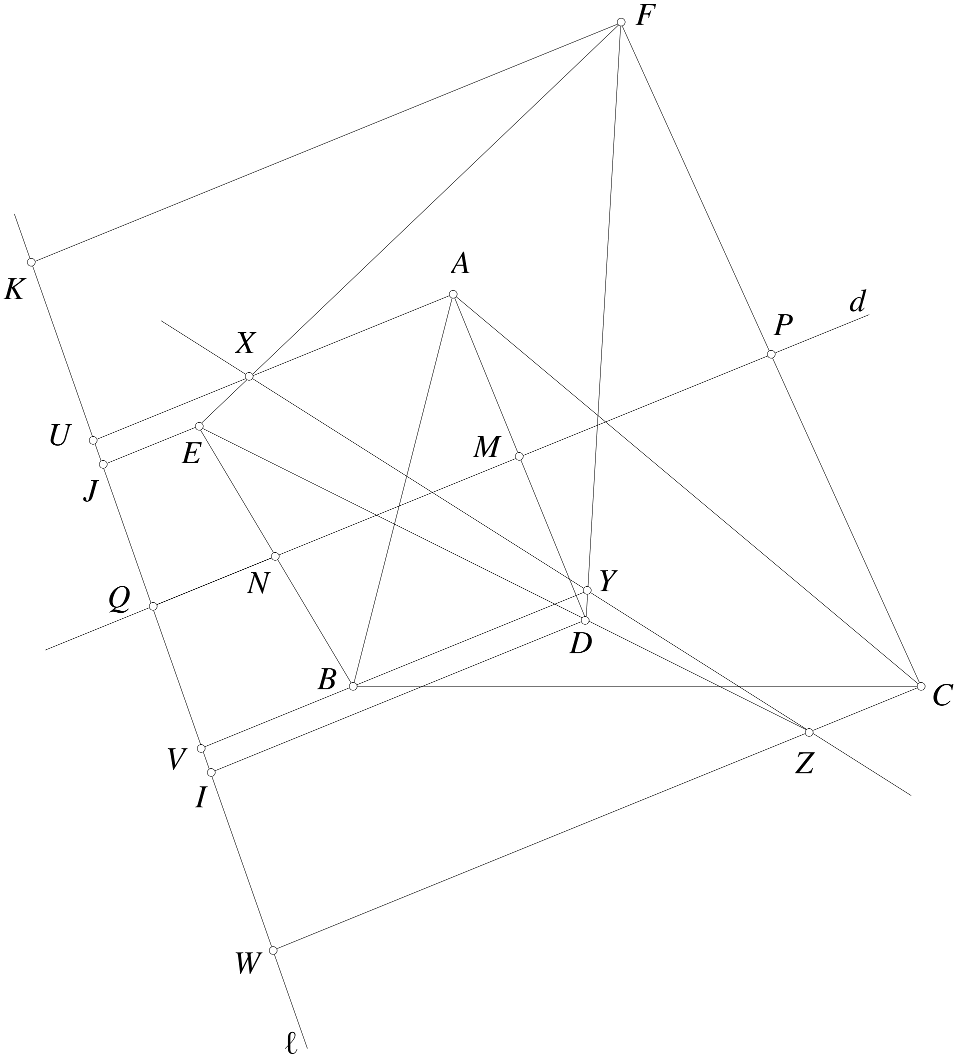
Hình học mathley 1

Bài 1 (Trần Quang Hùng). *Cho các đoạn AD, BE, CF có trung điểm thẳng hàng trên đường thẳng d. Các điểm X, Y, Z lần lượt thuộc EF, FD, DE sao cho $AX \parallel BY \parallel CZ \parallel d$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng.*



Lời giải. Gọi ℓ là một đường thẳng không song song với d. Gọi AX, BY, CZ, d lần lượt cắt ℓ tại U, V, W, Q. Gọi I, J, K là hình chiếu song song phương d của D, E, F lên ℓ. Ta chú ý Q là trung điểm của UI, VJ, WK. Từ đó ta dễ thấy

$$\frac{\overline{XE}}{\overline{XF}} = \frac{\overline{UJ}}{\overline{UK}} = \frac{\overline{QJ} - \overline{QU}}{\overline{QK} - \overline{QU}} = \frac{-\overline{QV} - \overline{QU}}{-\overline{QW} - \overline{QU}} = \frac{\overline{QU} + \overline{QV}}{\overline{QU} + \overline{QW}}$$

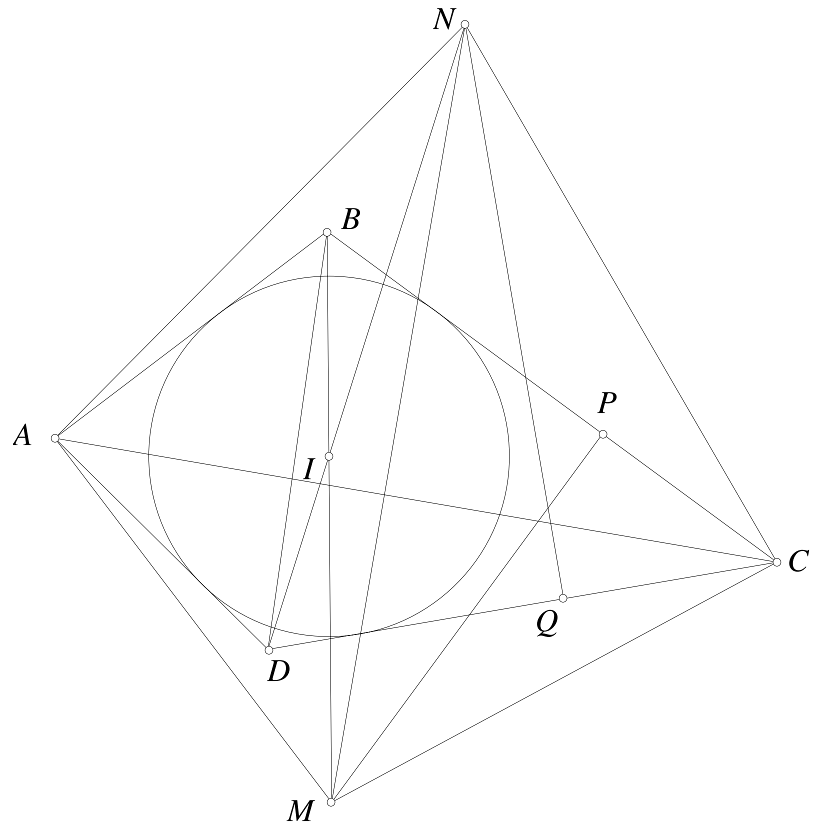
Tương tự $\frac{\overline{YF}}{\overline{YD}} = \frac{\overline{QV} + \overline{QW}}{\overline{QV} + \overline{QU}}, \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZE}} = \frac{\overline{QW} + \overline{QU}}{\overline{QW} + \overline{QV}}$.

Từ đó ta có $\frac{\overline{XE}}{\overline{XF}} . \frac{\overline{YF}}{\overline{YD}} . \frac{\overline{ZD}}{\overline{ZE}} = 1$, áp dụng định lý Menelaus cho tam giác DEF ta suy ra X, Y, Z thẳng hàng. □

Bài 2 (Trần Quang Hùng). *Cho tam giác ABC, đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc CA, AB tại E, F. P di chuyển trên EF. PB cắt CA tại M. MI cắt đường thẳng qua C vuông góc AC tại N. Chứng minh rằng đường thẳng qua N vuông góc PC luôn đi qua một điểm cố định khi P di chuyển.*

Ta có bổ đề sau

Bổ đề 2.1. *Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Các điểm M, N lần lượt thuộc IB, ID sao cho $AM \perp AB, AN \perp AC$ thì $MN \perp BD$.*



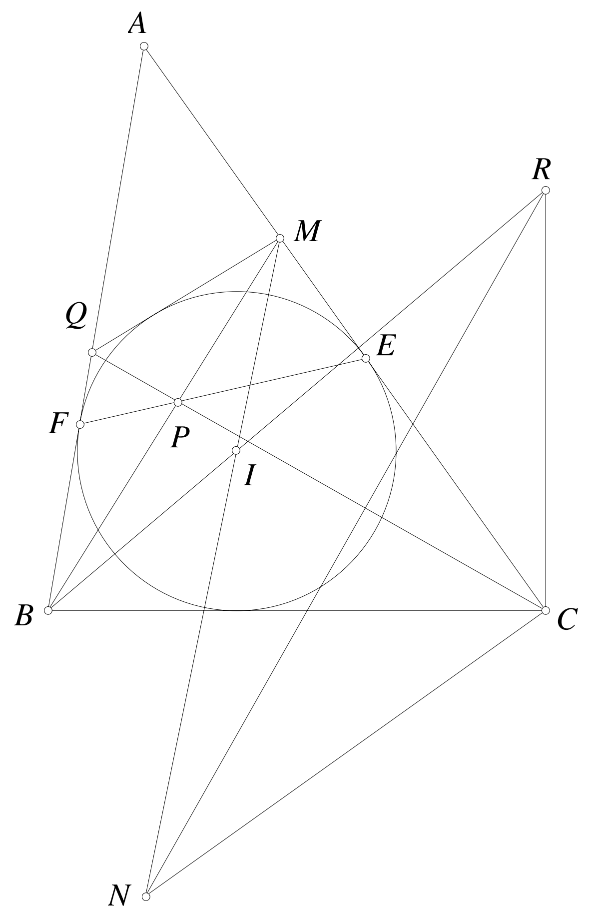
Chứng minh. Gọi P, Q là hình chiếu của M, N lên BC, CD. Từ tính chất phân giác ta dễ thấy $MA = MP, NQ = NQ$ và $BA = BP, DA = DQ$. Từ đó ta có

$MC^2 - MA^2 = MC^2 - MP^2 = PC^2 = (BC - AB)^2 \quad (1)$.

Tương tự $NC^2 - NA^2 = NC^2 - NQ^2 = QC^2 = (DC - DA)^2 \quad (2)$.

Do tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nên $AB + CD = AD + BC$ hay $BC - AB = CD - AD \quad (3)$.

Từ (1),(2),(3) suy ra $MC^2 - MA^2 = NC^2 - ND^2$ hay $MN \perp BD$. $\square$



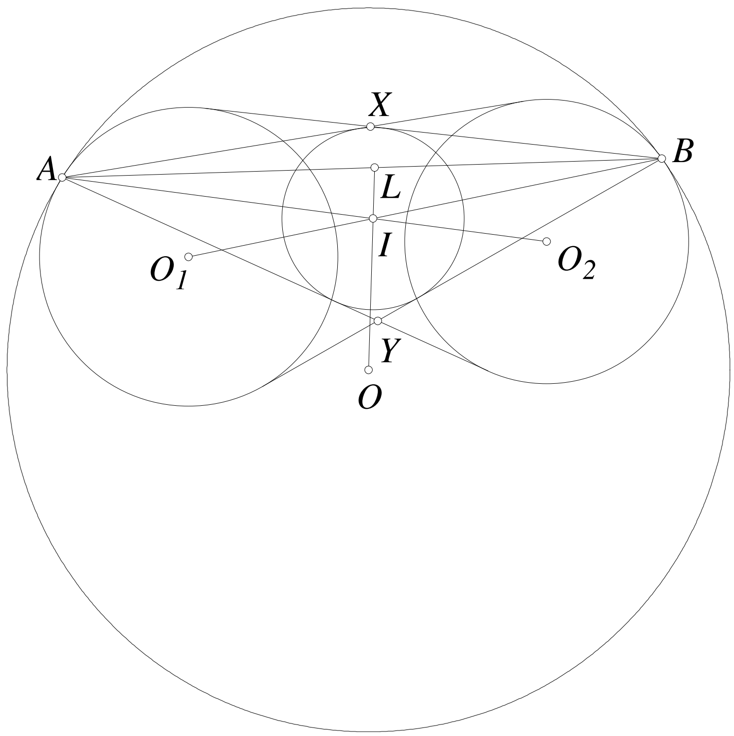
Lời giải. Gọi Q thuộc AB sao cho MQ tiếp xúc (I). Tứ giác $BQMC$ ngoại tiếp theo tính chất quen thuộc thì CQ, BM, EF đồng quy tại P. Gọi BI cắt đường thẳng qua C vuông góc BC tại R. Áp dụng bổ đề trên cho tứ giác $BQMC$ ngoại tiếp suy ra NR vuông góc $CQ \equiv CP$. Vậy đường thẳng qua N vuông góc CP đi qua R. Dễ thấy theo cách dựng R cố định. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 3. *Hai đường tròn γ và δ cùng tiếp xúc trong với đường tròn ω tại A và B. Từ A kẻ tiếp tuyến ℓ_1, ℓ_2 tới δ, từ B kẻ hai tiếp tuyến t_1, t_2 tới γ. Biết rằng ℓ_1 cắt t_1tại X, ℓ_2 cắt t_2 tại Y, hãy chứng minh rằng tứ giác $AXBY$ là tứ giác ngoại tiếp.*

Lời giải của bạn **Lê Thị Hải Linh** học sinh lớp 11 chuyên toán Bắc Ninh. Ta có bổ đề quen thuộc sau

Bổ đề 3.1 (Định lý Monge-D'Alembert)**.** *Cho ba đường tròn $C_1(O_1, R_1), C_2(O_2, R_2), C_3(O_3, R_3)$ phân biệt trên mặt phẳng. Khi đó tâm vị tự ngoài của các cặp đường tròn (C_1, C_2), (C_2, C_3), (C_3, C_1) cùng thuộc một đường thẳng. Hai tâm vị tự trong của hai trong ba cặp đường tròn trên và tâm vị tự ngoài của cặp đường tròn còn lại cùng thuộc một đường thẳng.*

Trở lại bài toán.



Lời giải. Gọi O_1, O_2, O lần lượt là tâm của γ, δ, ω. AO_2 giao BO_1 tại I. Gọi α_1 là đường tròn tâm I và tiếp xúc với AX, AY; α_2 là đường tròn tâm I và tiếp xúc với BX, BY. OI giao AB tại L.

Áp dụng bổ đề trên cho 3 đường tròn δ, ω, α_1 ta có A là tâm vị tự ngoài của α_1 và δ, B là tâm vị tự ngoài của δ và ω, suy ra tâm vị tự ngoài của α_1 và ω nằm trên AB hay L là tâm vị tự ngoài của α_1 và ω.

Chứng minh tương tự L cũng là tâm vị tự ngoài của α_2 và ω. Từ đó $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ hay tứ giác $AXBY$ ngoại tiếp. $\square$