Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

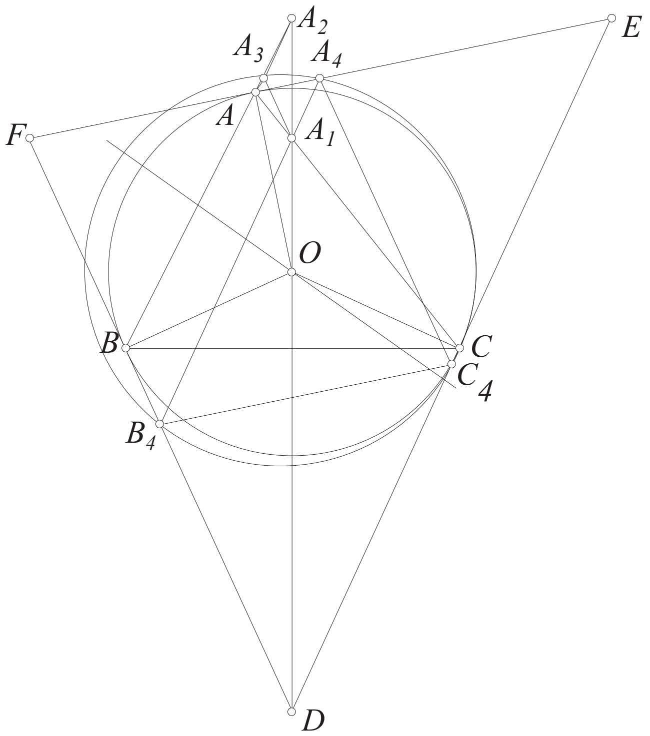
Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Trung trực BC cắt CA, AB tại A_1, A_2. Trên trung trực A_1A_2 lấy A_3 sao cho AA_3 vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC. Lấy A_4 đối xứng A_3 qua A_1A_2. Dựng tương tự các điểm B_4, C_4. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_4B_4C_4$ tiếp xúc (O).

Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O và tâm nội tiếp I. D là hình chiếu của I lên BC. M là trung điểm của BC. K là đối xứng của M qua AI. Khi đó KD vuông góc với OI.

Bổ đề là một đề toán đề nghị bởi **TS. Nguyễn Minh Hà** trên báo TTT2 và đã được tác giả phát triển tại đây.



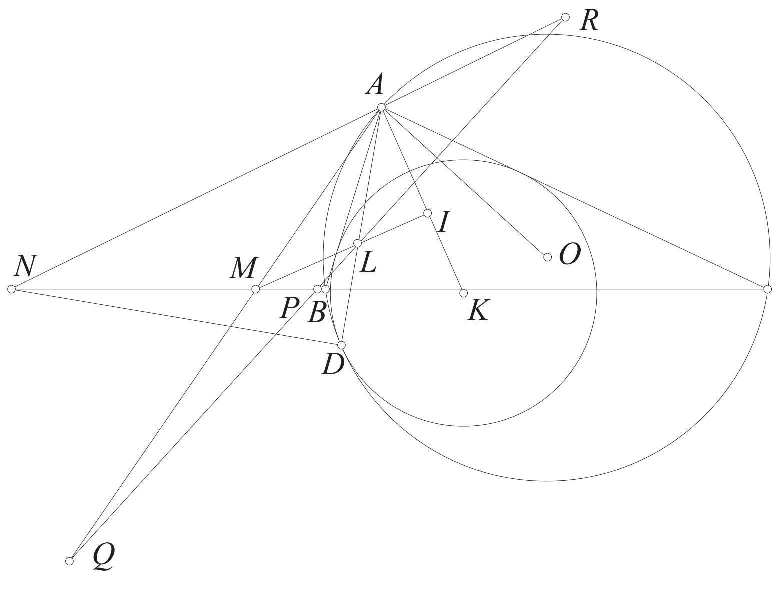
Giải bài toán. Gọi các tiếp tuyến qua A, B, C của (O) cắt nhau tạo thành tam giác DEF thì đường thẳng Euler của tam giác ABC chính là đường thẳng OI của tam giác DEF. Theo bổ đề thì đường thẳng AA_3 đi qua đối xứng của trung điểm EF qua OD. Ta dễ chứng minh được trung điểm EF cũng nằm trên trung trực A_1A_2. Do đó qua đối xứng trục OD thì trung điểm EF phải là đối xứng của giao điểm đường thẳng qua A vuông góc đường thẳng Euler và trung trực A_1A_2 với chú ý rằng trung trực A_1A_2 vuông góc OD nên bất biến qua đối xứng trục OD. Giao điểm đó chính là A_3 nên A_4 đối xứng A_3 qua OD chính là trung điểm EF. Chứng minh tương tự B_4, C_4 là trung điểm FD, DE. Từ đó theo định lý Feuerbach thì đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_4B_4C_4$ tiếp xúc (O).

Nhận xét

Tác giả tạo ra bài toán này là dựa trên bổ đề trên, bổ đề đó cũng có nhiều ứng dụng và phát triển khác. Các bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, bạn **Nguyễn Hồng Sơn** lớp 10 toán, **Trương Mạnh Tuấn** lớp 11 toán, trường THPT chuyên KHTN và **Phan Vũ Mỹ Quỳnh** lớp 10 toán, trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng đã cho các lời giải khác tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) tâm nội tiếp I. Đường tròn (K) tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc trong (O) tại D. M, N thuộc BC sao cho $IM \perp AI$ và $DN \perp AD$. IM cắt AD tại L. Đường thẳng qua L vuông góc với OA cắt BC, AM, AN lần lượt tại P, Q, R. Chứng minh rằng P là trung điểm QR.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

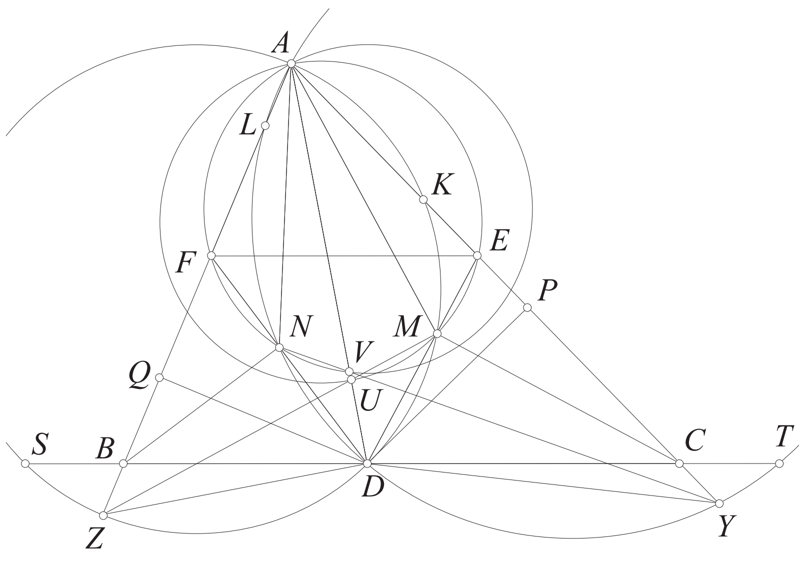
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có phân giác AD. E, F lần lượt thuộc CA, AB sao cho $EF \parallel BC$. Gọi M, N theo thứ tự là hình chiếu của C, B lên DE, DF. AD cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác AEM và AFN tại lần lượt tại U, V khác A. Gọi NV, MU lần lượt cắt CA, AB tại Y, Z. Chứng minh rằng $YC = ZB$.

Lời giải

Dựa theo lời giải của bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 12 Toán THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình ở đây.



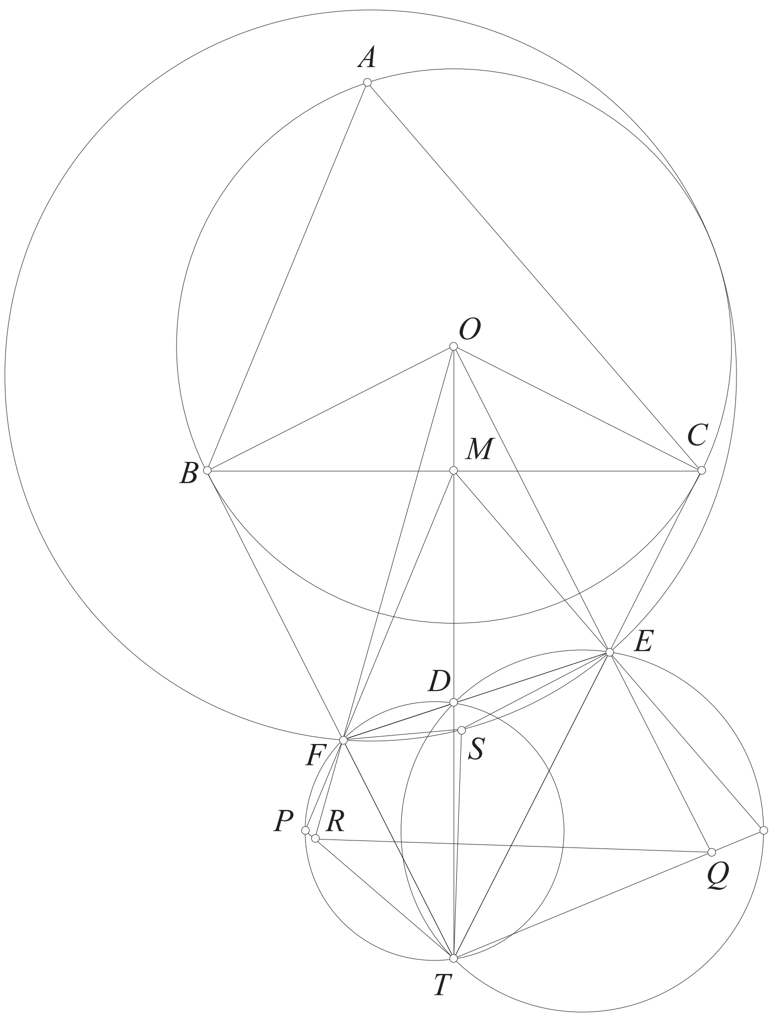
Ta có $\angle DNY = \angle FAV = \angle VAY$ nên tứ giác $ANDY$ nội tiếp. Tương tự tứ giác $AMDZ$ cũng nội tiếp. Gọi giao điểm thứ hai của BC với các đường tròn $(ANDY)$ và $(AMDZ)$ lần lượt là S, T. P, Q lần lượt là hình chiếu của D lên CA, AB. Gọi giao điểm thứ hai của AB, CA với các đường tròn $(ANDY)$ và $(AMDZ)$ lần lượt là L, K. Ta có $EK \cdot EA = EM \cdot ED = EP \cdot EC$. Suy ra $\frac{EA}{EC} = \frac{EP}{EK} = \frac{EA+EP}{EC+EK} = \frac{AP}{KC}$. Tương tự $\frac{AQ}{LB} = \frac{FA}{FB}$. Do đó $\frac{AP}{KC} = \frac{EA}{EC} = \frac{FA}{FB} = \frac{AQ}{LB}$ do $AP = AQ$ nên $KC = LB$. Từ đó $\frac{CS}{CK} = \frac{CD}{CA} = \frac{BD}{BA} = \frac{BT}{BL}$ suy ra $CS = BT$. Từ đó $\frac{BS}{BZ} = \frac{BA}{BD} = \frac{CA}{CD} = \frac{CT}{CY}$ suy ra $ZB = YC$. Ta hoàn thành chứng minh.

Nhận xét

Bài toán này thực chất là một bổ đề dẫn tới bài toán chọn đội tuyển KHTN năm 2015, tuy nhiên nếu tách riêng nó thì đó vẫn là một bài toán có ý nghĩa. Bạn **Nguyễn Hoàng Huy** lớp 12 Toán THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định cho lời giải khá thú vị bằng phép biến hình tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O). M là trung điểm BC. Tiếp tuyến qua B, C của (O) cắt nhau tại T. Trên TB, TC lấy các điểm F, E sao cho $MF \parallel AB$, $ME \parallel AC$. TM cắt EF tại D. ME, MF lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác TED, TFD tại N, P khác E, F. OE, OF lần lượt cắt TN, TP tại Q, R. S đối xứng T qua QR. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác SEF tiếp xúc (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

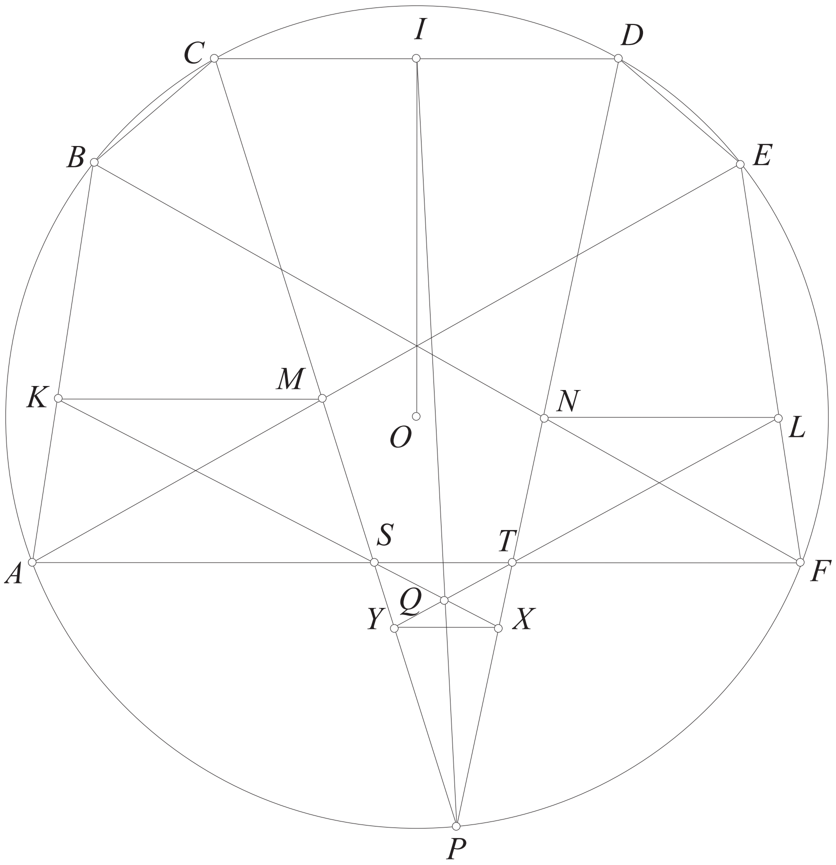
Bài toán từ bạn đọc

Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp có $AB = CD = EF$ và $BC = DE$. P là một điểm di chuyển trên cung nhỏ AF của đường tròn ngoại tiếp lục giác. PC, PD lần lượt cắt AE, FB tại M, N. K, L theo thứ tự thuộc các cạnh AB, EF sao cho $MK \parallel NL \parallel AF$. PC, PD lần lượt cắt AF tại S, T. KS cắt LT tại Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ chia đôi đoạn CD.

Tác giả: **Đỗ Xuân Long.**

Lời giải

Dựa theo lời giải của bạn **Nguyễn Tiến Dũng** ở đây.



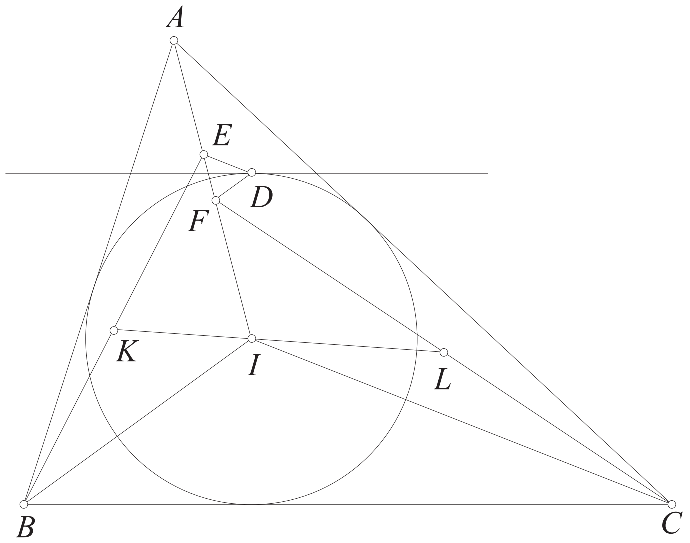
Gọi KS, LT lần lượt cắt PD, PC tại X, Y. Dễ thấy $\frac{XP}{XT} = \frac{[KSP]}{[KST]} = \frac{[KSP]}{[KSM]} \cdot \frac{[KSM]}{[KSP]} = \frac{SP}{SM} \cdot \frac{KM}{ST}$. Tương tự $\frac{YP}{YS} = \frac{TP}{TN} \cdot \frac{LN}{TS}$. Chú ý rằng hai tam giác $\triangle AMK \sim \triangle FNL$ và các tứ giác $AMTP$ và $FNSP$ nội tiếp, ta thu được $\frac{XP}{XT} : \frac{YP}{YS} = \frac{SP \cdot TN}{TP \cdot SM} \cdot \frac{MK}{NL} = \frac{ST}{TS} \cdot \frac{NF}{MA} \cdot \frac{MA}{NF} = 1$. Do đó $\frac{XP}{XT} = \frac{YP}{YS}$ nên $XY \parallel ST$ ta suy ra PQ chia đôi ST hay PQ chia đôi CD.

Nhận xét

Bài toán này được tác giả phát triển từ cấu hình về hình vuông và hình thang cân có ba cạnh bằng nhau.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I). Tiếp tuyến của (I) song song với BC tiếp xúc (I) tại D. Lấy các điểm E, F trên IA sao cho $DE \parallel IC$ và $DF \parallel IB$. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm các đoạn thẳng BE, CF đi qua I.



Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng**, Hà Nội.

Mỗi tuần một bài toán

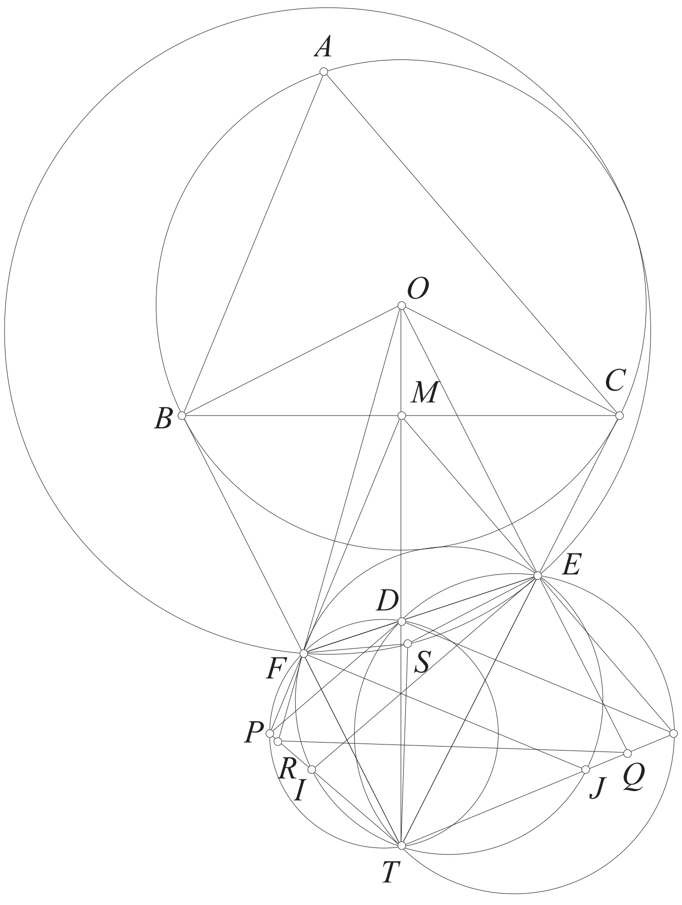
***Trần Quang Hùng,** Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). M là trung điểm BC. Tiếp tuyến qua B, C của (O) cắt nhau tại T. Trên TB, TC lấy các điểm F, E sao cho $MF \parallel AB$ và $ME \parallel AC$. TM cắt EF tại D. ME, MF lần lượt cắt các đường tròn ngoại tiếp tam giác TED, TFD tại N, P khác E, F. OE, OF lần lượt cắt TN, TP tại Q, R. S đối xứng T qua QR. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác SEF tiếp xúc (O).

Lời giải



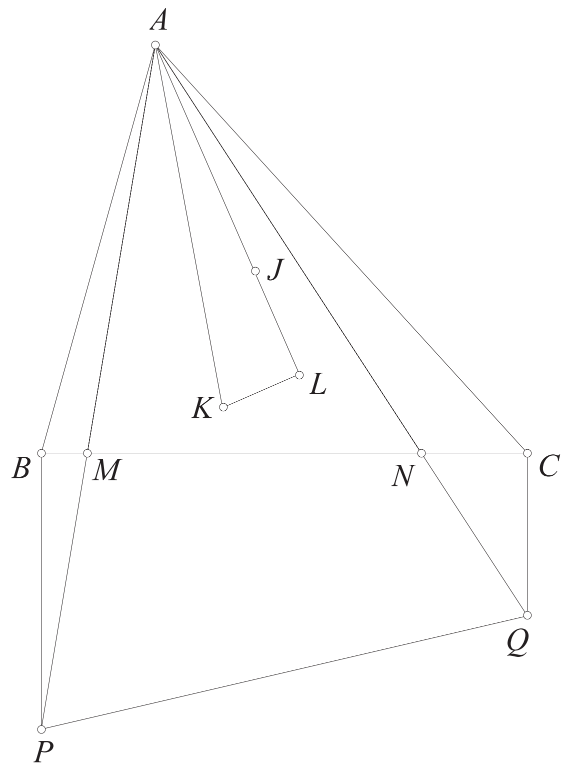
Ta dễ thấy M là tâm bàng tiếp góc T của tam giác TEF do đó (O) là đường tròn mixtilinear ngoại của tam giác TEF ứng với đỉnh T. Mặt khác TD là phân giác của tam giác TEF. Gọi TN cắt (TEF) tại J khác T thì $\angle ETN = \angle DTN - \angle DTE = \angle MEF - \angle DTE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle FET - \frac{1}{2}\angle ETF = \frac{1}{2}\angle EFT$. Do đó J là điểm chính giữa cung TE của đường tròn (TEF). Tương tự Gọi TP cắt (TEF) tại I khác T thì I là điểm chính giữa cung TF của đường tròn (TEF). Đến đây áp dụng bài toán **Tuần 4 tháng 11 năm 2016** cho tam giác TEF ta thu được đường tròn (SEF) tiếp xúc (O). Đó là điều phải chứng minh.

Nhận xét

Bài toán này thực chất là một cách viết khác của bài toán bài toán Tuần 4 tháng 11 năm 2016 và được tác giả dùng trong quá trình tập huấn đội tuyển Việt Nam dự thi IMO năm 2017. Bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có các điểm M, N thuộc cạnh BC sao cho M nằm giữa N và B. Trên đường thẳng AM, AN lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho BP và CQ cùng vuông góc với BC. K, J lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác APQ và AMN. L là hình chiếu của K lên AO. Chứng minh rằng $\frac{AJ}{AL} = \frac{MN}{BC}$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

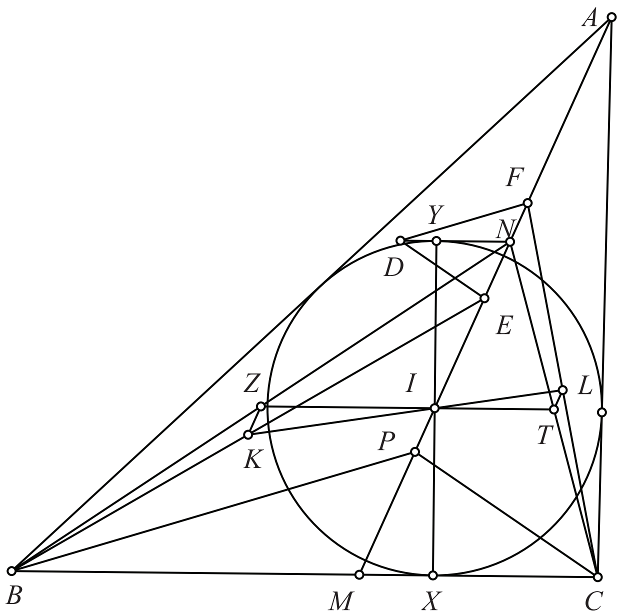
Bài toán từ bạn đọc

Tác giả bài toán đưa ra một bài toán tổng quát hơn bài toán tuần trước của chính mình như sau

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) và một điểm P nằm trên đường phân giác góc A. Gọi D là điểm bất kỳ trên tiếp tuyến song song với BC của (I). Lấy các điểm E, F trên AP sao cho $DE \parallel PC, DF \parallel PB$. Chứng minh rằng đường thẳng nối trung điểm các đoạn thẳng BE, CF đi qua I.

Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng.**

Lời giải



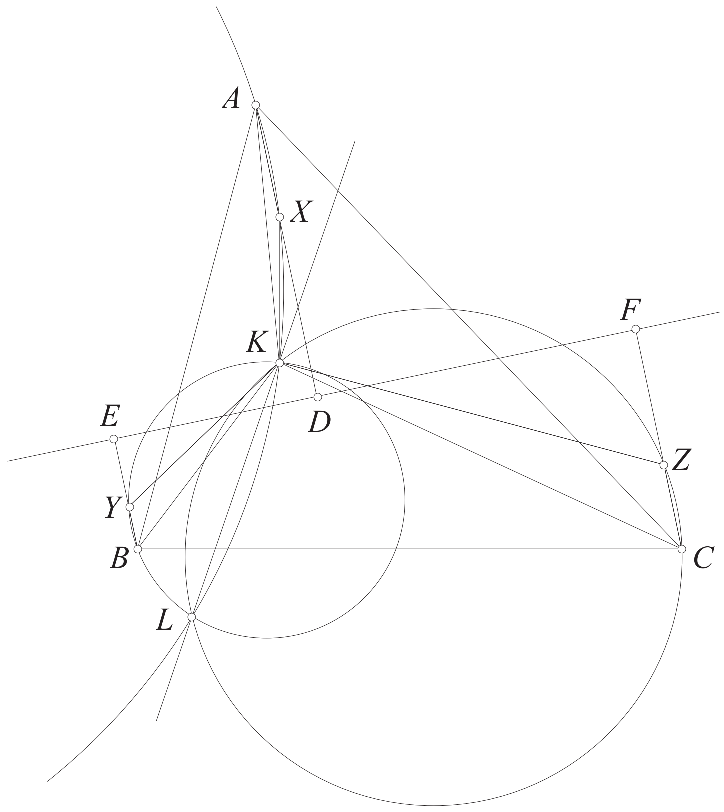
Gọi AP cắt BC và tiếp tuyến qua D song song với BC của (I) lần lượt tại M, N. Chú ý rằng $\triangle DNE \sim \triangle CMP(g.g), \triangle DNF \sim \triangle BMP(g.g)$, ta có $\frac{NE}{NF} = \frac{NE}{ND} \cdot \frac{ND}{NF} = \frac{MP}{MC} \cdot \frac{MB}{MP} = \frac{MB}{MC}$. Gọi X, Y lần lượt là tiếp điểm của (I) và BC, DN. Vì $\triangle IMX = \triangle INY\ (g.c.g)$ nên $IM = IM$. Gọi K, L, Z, T lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BE, CF, NB, NC. Ta thấy Z, I, T cùng thuộc đường trung bình của tam giác NBC. Vì $\frac{IK}{IL} = \frac{MB}{MC} = \frac{NE}{NF} = \frac{2ZK}{2TL} = \frac{ZK}{TL}$ nên $\triangle IKZ \sim \triangle ILT\,(c.g.c)$. Từ đó $\angle KIZ = \angle LIT$ nên KL đi qua I. Đó là điều phải chứng minh.

Nhận xét

Bài toán này là bài toán không quá khó nhưng thú vị vì có nhiều hướng phát triển hay. Các bạn **Nguyễn Hoàng Nam** lớp 12 Toán THPT chuyên Lê Hồng Phong TPHCM và **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC và đường thẳng ℓ bất kỳ. D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên ℓ. X, Y, Z chia AD, BE, CF theo cùng một tỉ số k. Các đường lần lượt thẳng qua X, Y, Z và vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại một điểm K. Chứng minh rằng các đường tròn (KAX), (KBY), (KCZ) đồng trục và trục đẳng phương của chúng luôn đi qua một điểm cố định khi tỷ số k thay đổi.



Tác giả: **Ngô Quang Dương** sinh viên khoa toán ĐHKHTN, ĐHQGHN.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

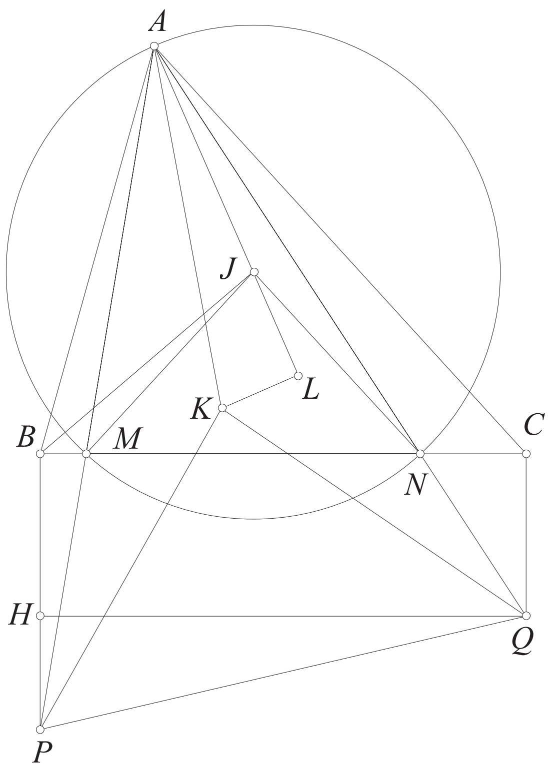
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có các điểm M, N thuộc cạnh BC sao cho M nằm giữa N và B. Trên đường thẳng AM, AN lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho BP và CQ cùng vuông góc với BC. K, J lần lượt là tâm ngoại tiếp các tam giác APQ và AMN. L là hình chiếu của K lên AJ. Chứng minh rằng $\frac{AJ}{AL} = \frac{MN}{BC}$.

Lời giải

Dựa theo ý tưởng của các bạn **Nguyễn Quang Trung**, **Nguyễn Tiến Dũng** ở đây.



Gọi H là hình chiếu của Q lên PB ta có biến đổi góc $\angle PQH = \angle PQA - \angle AQH = \angle PQA - \angle ANM = (90^\circ - \angle KAQ) - (90^\circ - \angle JAN) = \angle KAJ$. Từ đó hai tam giác PQH và KAL đồng dạng. Lại chú ý $\angle PKQ = 2\angle PAQ = \angle MJN$ do đó hai tam giác cân MJN và PKQ đồng dạng. Vậy $\frac{MN}{BC} = \frac{MN}{PQ} \cdot \frac{PQ}{BC} = \frac{JM}{KP} \cdot \frac{PQ}{QH} = \frac{AJ}{AK} \cdot \frac{AK}{AL} = \frac{AJ}{AL}$. Ta hoàn tất chứng minh.

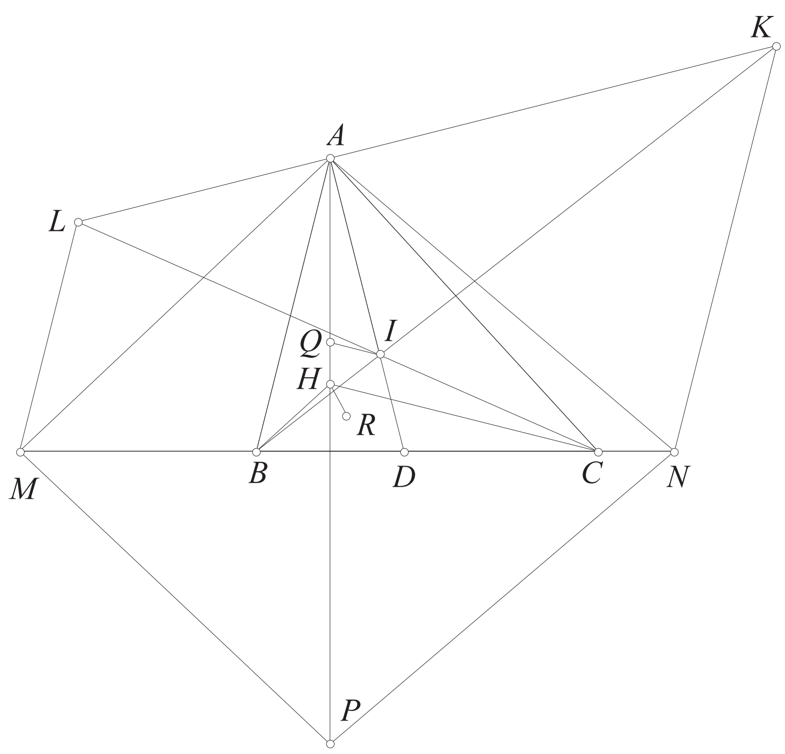
Nhận xét

Đây là một bài toán đơn giản không khó nhưng có ý nghĩa là mở rộng của bài toán trong cuộc thi Olympic hình học của Iran là IGO năm 2017. Nếu nhìn nhận theo cách tổng quát thì bài toán IGO đúng là đẹp và có phần đơn giản. Có thêm bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây. Nếu sử dụng ý tưởng bài toán IGO chúng ta có một trường hợp riêng như sau

Cho tam giác ABC có điểm M, N thuộc đường thẳng B, C sao cho B nằm giữa M, C và $MN = 2BC$. Trên AM, AN lần lượt lấy P, Q sao cho BP, CQ cùng vuông góc với BC. Gọi K là tâm ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh rằng trung trực AK đi qua tâm ngoại tiếp tam giác APQ.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ có tâm nội tiếp I và phân giác AD. H là trực tâm tam giác ABC. P đối xứng A qua BC. Trên AP lấy Q sao cho $\angle PQI = \angle ADB$. K, L là tâm bàng tiếp góc B, C của tam giác ABC. M, N thuộc BC sao cho KN, LM cùng vuông góc với QI. R là tâm ngoại tiếp tam giác PMN. Chứng minh rằng $\angle RHC = \angle PHB$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

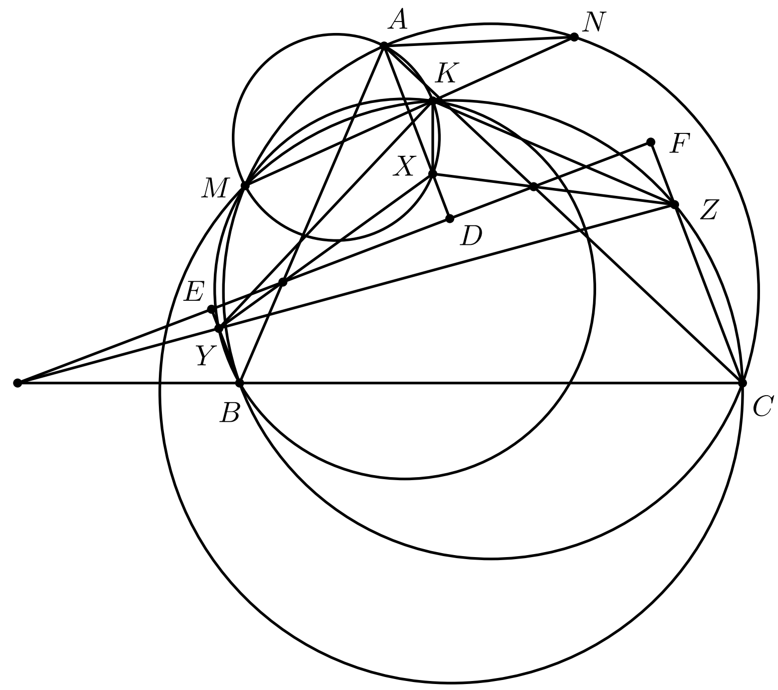
Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác ABC và đường thẳng ℓ bất kỳ. D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên ℓ. X, Y, Z chia AD, BE, CF theo cùng một tỉ số k. Các đường lần lượt thẳng qua X, Y, Z và vuông góc với BC, CA, AB đồng quy tại một điểm K. Chứng minh rằng các đường tròn (KAX), (KBY), (KCZ) đồng trục và trục đẳng phương của chúng luôn đi qua một điểm cố định khi tỷ số k thay đổi.

Tác giả: **Ngô Quang Dương**.

Lời giải



Gọi M là giao điểm khác K của (KAX) và (KBY).

$$\begin{aligned}(MA, MB) &\equiv (MA, MK) + (MK, MB) \pmod \pi\\ &\equiv (XA, XK) + (YK, YB) \pmod \pi\\ &\equiv (XA, YB) + (KY, KX) \pmod \pi\\ &\equiv (CA, CB) \pmod \pi\end{aligned}$$

Suy ra M nằm trên (ABC). Tiếp theo ta chỉ ra M cũng nằm trên (KCZ).

$$\begin{aligned}(MC, MK) &\equiv (MC, MA) + (MA, MK) \pmod \pi\\ &\equiv (BC, BA) + (XA, XK) \pmod \pi\\ &\equiv (XK, ZK) + (XA, XK) \pmod \pi\\ &\equiv (XA, KZ) \pmod \pi\\ &\equiv (ZC, ZK) \pmod \pi\end{aligned}$$

Do đó, (KAX), (KBY), (KCZ) đồng trục.
Gọi N là giao điểm của MK với (ABC).

$$\begin{aligned}(AN, AC) &= (MN, MC) \pmod \pi\\ &= (MK, MC) \pmod \pi\\ &= (ZK, ZC) \pmod \pi\\ &= (AB, \ell) \pmod \pi\end{aligned}$$

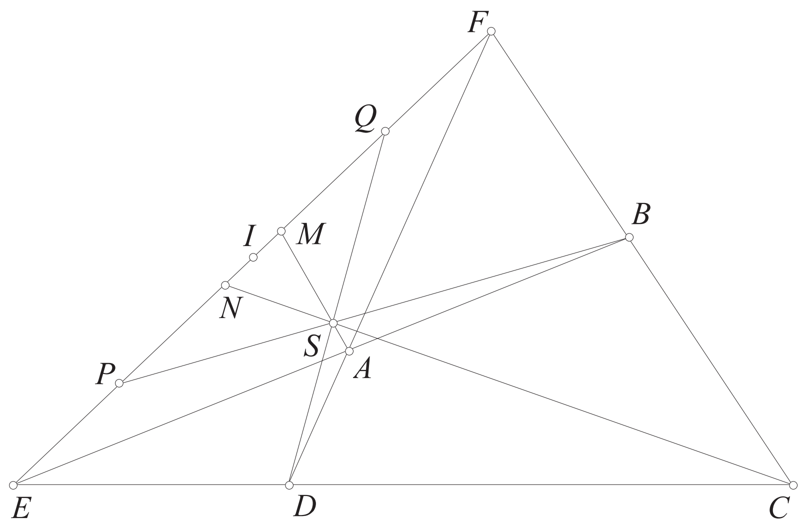
Đẳng thức cuối chứng minh rằng góc giữa AN và AC không đổi, tức là N cố định. Vậy MK luôn đi qua điểm N cố định trên (ABC).

Nhận xét

Bài toán này chia ra ba phần rõ rệt là kết quả hay. Phần chứng minh đồng quy đầu tiên là mở rộng kết quả về cực trực giao nổi tiếng. Các phần sau là các ý phát triển thú vị của tác giả. Có bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tứ giác $ABCD$. Các cạnh đối AB và CD cắt nhau tại E còn AD và BC cắt nhau tại F. M, N là hai điểm thuộc EF và đối xứng với nhau qua trung điểm của EF. S là giao điểm của AM và CN. P, Q theo thứ tự là giao điểm của SB, SD và EF. Chứng minh rằng hai điểm P, Q đối xứng với nhau qua trung điểm của EF.



Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà** trường THPT chuyên SP, ĐHSPHN.

Mỗi tuần một bài toán

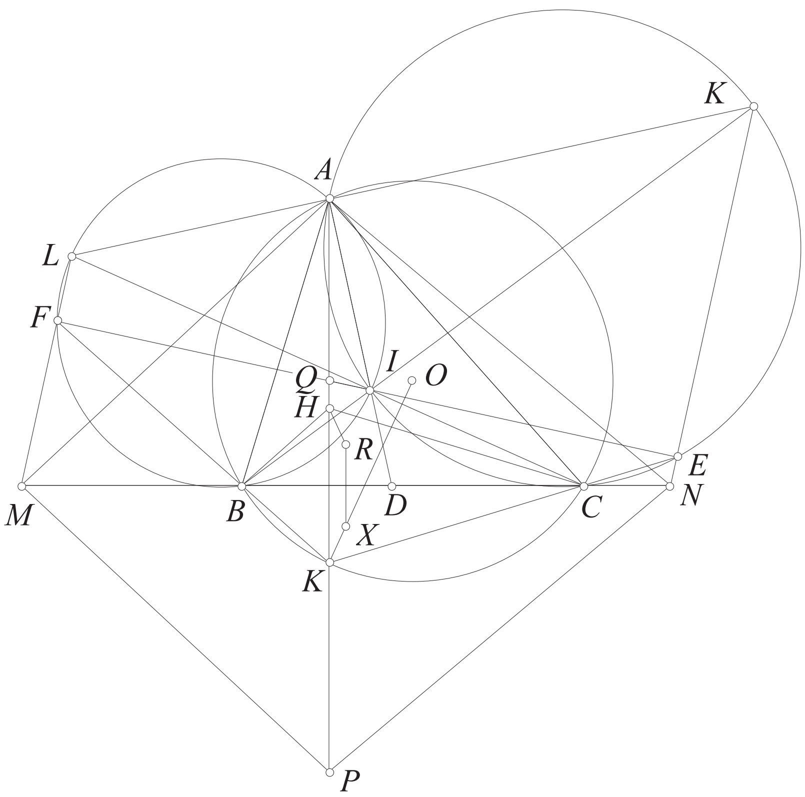
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ có tâm nội tiếp I và phân giác AD. H là trực tâm tam giác ABC. P đối xứng A qua BC. Trên AP lấy Q sao cho $\angle PQI = \angle ADB$. K, L là tâm bàng tiếp góc B, C của tam giác ABC. M, N thuộc BC sao cho KN, LM cùng vuông góc với QI. R là tâm ngoại tiếp tam giác PMN. Chứng minh rằng $\angle RHC = \angle PHB$.

Lời giải



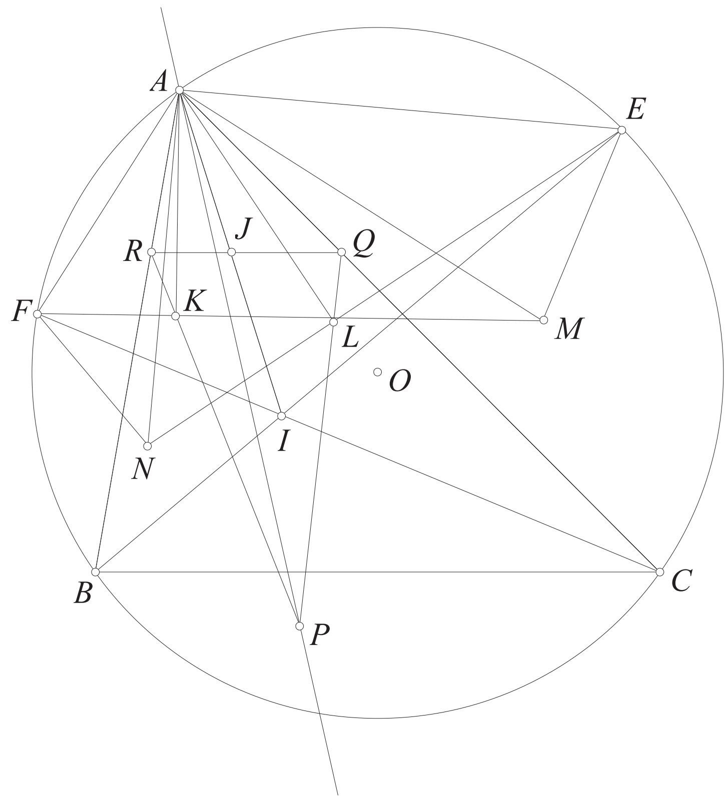
Gọi QI cắt NK, ML tại E, F. AH cắt (O) tại K khác A. Ta thấy $\angle BKQ + \angle BFQ = \angle BCA + \angle BAI = \angle BCA + \angle CAI = \angle ADC = \angle IQK = 180° - \angle FQK$. Suy ra F, B, K. Chứng minh tương tự thì E, C, K thẳng hàng. Từ đó áp dụng bài toán mở rộng từ THTT thì tâm ngoại tiếp X của tam giác KMN nằm trên KO. Qua đối xứng trục BC thì KR đi qua đối xứng của O qua BC hay KR đi qua tâm ngoại tiếp tam giác BHC. Nói cách khác $\angle RHC = \angle PHB$.

Nhận xét

Đây là một bài toán ứng dụng của bài toán mở rộng từ tạp chí THTT kết hợp với việc sử dụng phép đối xứng trục. Bài toán có thể viết dưới dạng chứng minh đường thẳng đi qua một điểm cố định. Bài toán này cũng thể hiện rõ ý tưởng của việc sử dụng phép biến hình trong thực hành giải toán. Bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán trường THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A thay đổi trên (O). I là tâm nội tiếp. IB, IC cắt (O) tại E, F khác B, C. Lấy M, N sao cho $AM \perp AF$, $EM \perp CF$, $AN \perp AE$, $FN \perp BE$. K, L là hình chiếu của A lên FM, EN. Đường thẳng qua trung điểm IA song song BC cắt CA, AB tại Q, R. QL cắt RK tại P. Chứng minh rằng đường thẳng AP luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

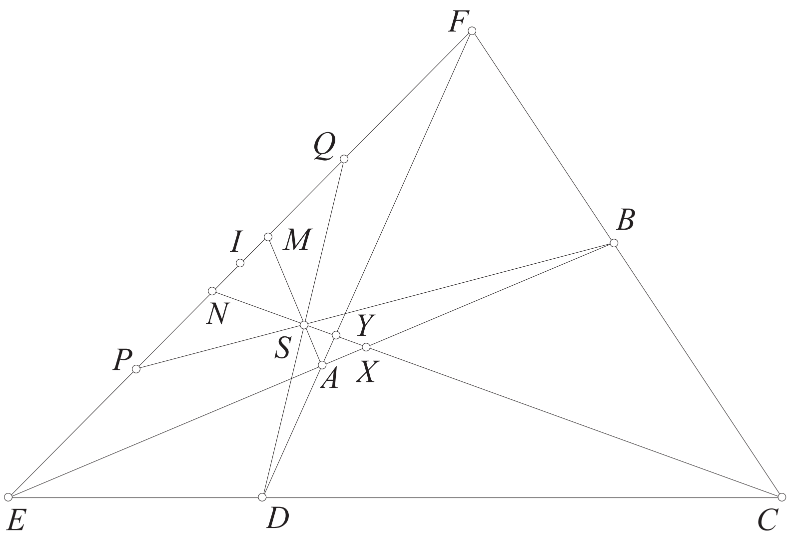
Bài toán từ bạn đọc

Cho tứ giác $ABCD$. Các cạnh đối AB và CD cắt nhau tại E còn AD và BC cắt nhau tại F. M, N là hai điểm thuộc EF và đối xứng với nhau qua trung điểm của EF. S là giao điểm của AM và CN. P, Q theo thứ tự là giao điểm của SB, SD và EF. Chứng minh rằng hai điểm P, Q đối xứng với nhau qua trung điểm của EF.

Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà.**

Lời giải

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của bạn **Nguyễn Minh Hiếu** THPT chuyên SP, ĐHSPHN được tác giả bài toán thầy **Nguyễn Minh Hà** căn chỉnh đẹp hơn.



Gọi X, Y theo thứ tự là giao điểm của CS và AB, AD. Dễ thấy các điều kiện sau tương đương.

1) P, Q đối xứng với nhau qua trung điểm của EF.

2) $\overline{EP} = -\overline{FQ}$.

3) $(PEMN) = (QFNM)$.

4) $S(PEMN) = S(QFNM)$.

5) $S(BEAX) = S(DFYA)$.

6) $(BEAX) = (DFYA)$.

7) $(EBXA) = (DFYA)$.

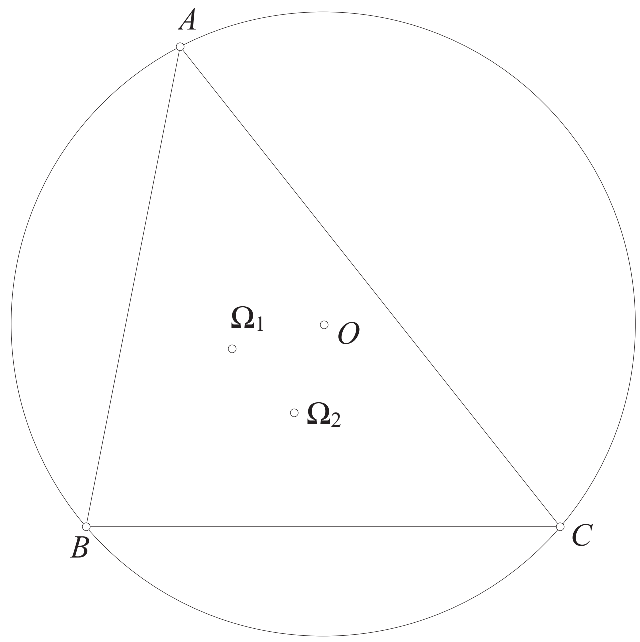
8) ED, BF, XY đồng quy (luôn đúng).

Nhận xét

Có bạn **Trương Đình Nghĩa** lớp Toán, THPT chuyên SP, ĐHSPHN cũng cho lời giải ngắn gọn chỉ dùng định lý Menelaus tại đây. Bạn **Trần Quang Huy** sinh viên đại học Bách Khoa Hà Nội cũng cho lời giải bằng conic và tỷ số kép.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có hai điểm Brocard là Ω_1 và Ω_2. Chứng minh rằng nếu một trong sáu góc $A\Omega_1O$, $B\Omega_1O$, $C\Omega_1O$, $A\Omega_2O$, $B\Omega_2O$, $C\Omega_2O$ vuông thì có đúng hai trong sáu góc này vuông.



Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng**, Hà Nội.

Mỗi tuần một bài toán

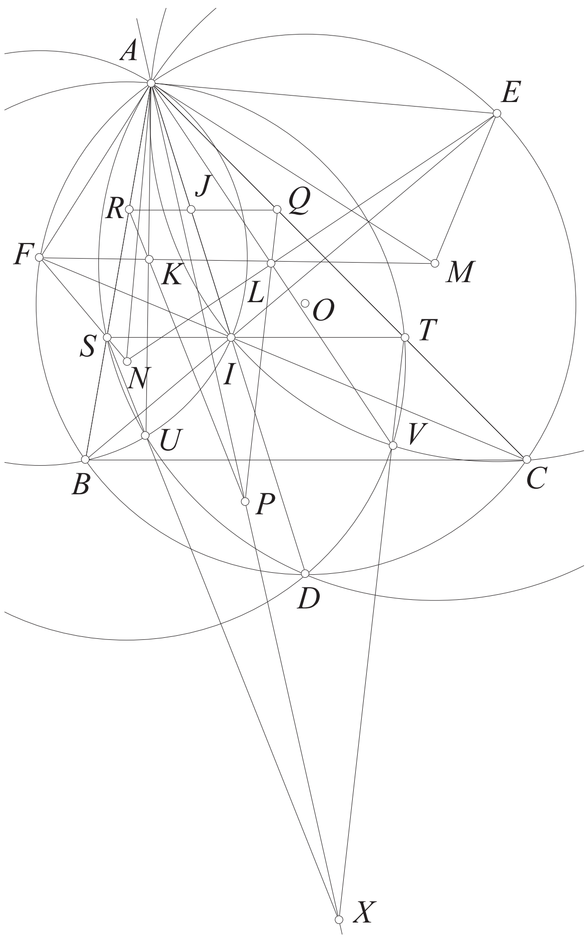
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

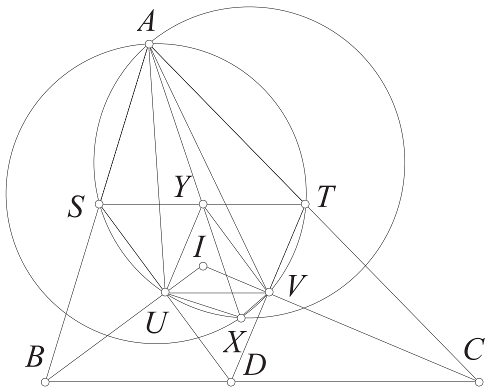
Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A thay đổi trên (O). I là tâm nội tiếp. IB, IC cắt (O) tại E, F khác B, C. Lấy M, N sao cho $AM \perp AF$, $EM \perp CF$, $AN \perp AE$, $FN \perp BE$. K, L là hình chiếu của A lên FM, EN. Đường thẳng qua trung điểm IA song song với BC cắt CA, AB tại Q, R. QL cắt RK tại P. Chứng minh rằng đường thẳng AP luôn đi qua điểm cố định khi A thay đổi.

Lời giải



Gọi U, V đối xứng với A qua K, L. AI cắt (O) tại D khác A. (M) là đường tròn đi qua A, D và trực giao với đường tròn (F) ngoại tiếp tam giác AIB. (M) cắt (F) tại U khác A. Tương tự với đường tròn (N) và V. Gọi (M) cắt AB tại S khác A. (N) cắt AC tại T khác A. Dễ thấy $ST \parallel BC$ và khi đó dùng phép vị tự tâm A tỷ số 2. Đường thẳng RK, QL tương ứng biến thành các đường thẳng SU, TV. Vậy AP sẽ đi qua giao điểm X của SU, TV. Ta sẽ chứng minh rằng AX chính là đường đối trung của tam giác ABC bằng cách xét phép nghịch đảo cực A. Khi đó ta thu được bài toán sau.

Bài toán. Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I. AI cắt BC tại D. Đường thẳng m qua D vuông góc với IB cắt IB tại U và cắt AB tại S. Đường thẳng n qua D vuông góc với IC cắt IC tại V và cắt AC tại T. Đường tròn ATV và ASU cắt nhau tại X. Chứng minh rằng AX chia đôi BC.



Lời giải. Trước hết ta dễ thấy các tam giác CDT, BDS cân tại C, B do đó $\frac{TC}{CA} = \frac{DC}{CA} = \frac{DB}{AB} = \frac{BS}{BA}$ suy ra $ST \parallel BC$. Gọi Y là trung điểm ST. Ta thấy $\angle UXV = \angle UXA + \angle AXV = \angle USB + \angle VTC = \angle UDB + \angle VDC = 180^\circ - \angle SDT = 180^\circ - \angle UYV$. Từ đó tứ giác $YVXU$ nội tiếp. Ta suy ra $\angle VXY = \angle VUY = \angle VTY = \angle VTC = \angle VXA$. Từ đó A, Y, X thẳng hàng.

Nhận xét

Bài toán sau khi nghịch đảo là đề thi vào lớp 10 THPT chuyên KHTN năm 2016. Bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán trường THPT chuyên KHTN và bạn **Vương Đình Ân** lớp 12 Toán trường THPT Chuyên Bắc Giang đã cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và có trực tâm H. AH, AO lần lượt cắt BC tại D, E. M là trung điểm BC. MH cắt DO tại P. Chứng minh rằng MH và đường thẳng qua D song song EP cắt nhau trên đường tròn (O).
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

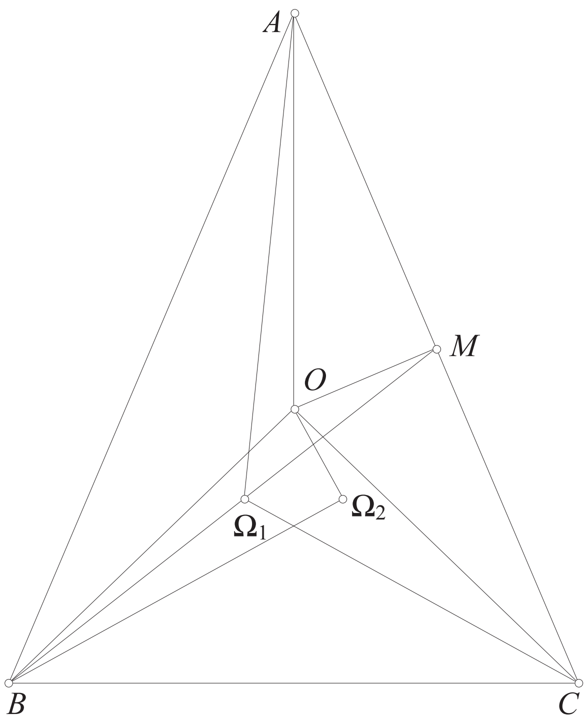
Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có hai điểm Brocard là Ω_1 và Ω_2. Chứng minh rằng nếu một trong sáu góc $A\Omega_1O$, $B\Omega_1O$, $C\Omega_1O$, $A\Omega_2O$, $B\Omega_2O$, $C\Omega_2O$ vuông thì có đúng hai trong sáu góc này vuông.

Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng.**

Lời giải

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của tác giả bài toán.



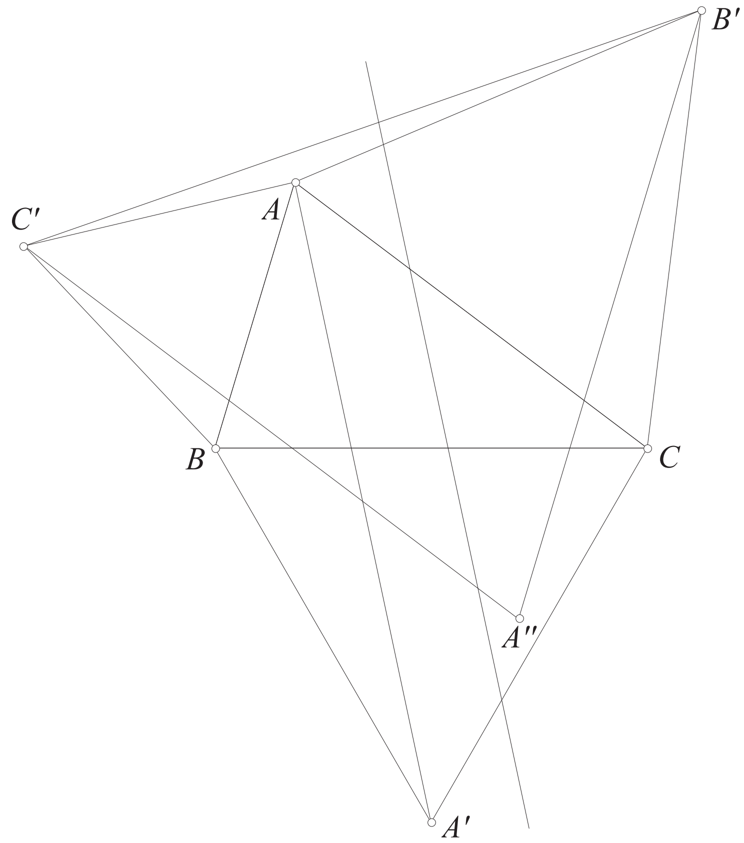
Nhận xét rằng với mỗi i, trong ba góc $A\Omega_iO, B\Omega_iO, C\Omega_iO$ có không quá một góc vuông. Thật vậy, nếu có hai trong ba góc này vuông, chẳng hạn $\angle A\Omega_iO = \angle B\Omega_iO = 90^\circ$ thì điểm Brocard Ω_i thuộc cạnh AB của tam giác ABC. Điều này không thể xảy ra. Như vậy trong sáu góc $A\Omega_iO, B\Omega_iO, C\Omega_iO$ với $i = 1, 2$, có nhiều nhất hai góc vuông. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $\angle AB\Omega_1 = \angle BC\Omega_1 = \angle CA\Omega_1$ và $\angle C\Omega_1O = 90^\circ$. Gọi M là trung điểm của CA. Vì $\angle CMO = \angle C\Omega_1O = 90^\circ$ nên Ω_1, O, C, M cùng thuộc một đường tròn. Ta thấy $\angle B\Omega_1C = 180^\circ - (\angle\Omega_1BC + \angle\Omega_1CB) = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - \angle MOC = 180^\circ - \angle M\Omega_1C$ nên B, Ω_1, M thẳng hàng. Vì $\angle AB\Omega_1 = \angle CA\Omega_1$ nên $MC^2 = MA^2 = MB \cdot M\Omega_1$, và do vậy $\angle AC\Omega_1 = \angle CB\Omega_1$. Từ đó, $\angle ABC = \angle ACB$ nên tam giác ABC cân tại A. Qua phép đối xứng trục OA thì $\angle C\Omega_1O = \angle B\Omega_2O = 90^\circ$. Từ đó, ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét

Đây là một bài toán thú vị có phát biểu lạ mắt và lời giải có đoạn dùng phản chứng là một phương pháp ít thấy trong các bài hình học thuần túy. Có bạn **Nguyễn Hoàng Nam** lớp 12 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong TPHCM cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác đều BCA', CAB', ABC'. Gọi A'' là giao điểm của đường thẳng qua B' song song với AB và đường thẳng qua C' song song với AC. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác $A''B'C'$ song song với AA'.



Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà** trường THPT chuyên SP, ĐHSP Hà Nội.

Mỗi tuần một bài toán

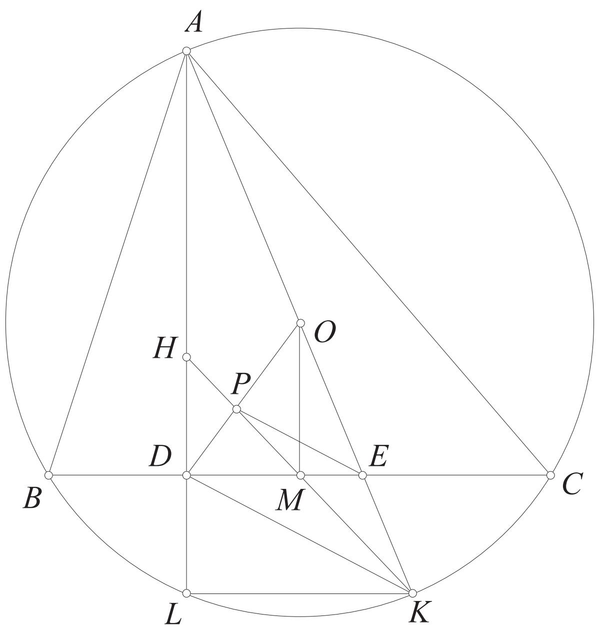
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và có trực tâm H. AH, AO lần lượt cắt BC tại D, E. M là trung điểm BC. MH cắt DO tại P. Chứng minh rằng MH và đường thẳng qua D song song EP cắt nhau trên đường tròn (O).

Lời giải



Gọi giao điểm khác A của AD, AE với (O) lần lượt là L, K. Dễ thấy H, M, K thẳng hàng và $KL \parallel BC$. Ta có biến đổi tỷ số

$$\frac{EO}{EK} = \frac{OK}{EK} - 1 = \frac{AK}{2EK} - 1 = \frac{AL}{2LD} - 1$$

$$= \frac{AL}{LH} - 1 = \frac{HA}{2HD} = \frac{OM}{HD} = \frac{PO}{PD}.$$

Từ đó suy ra $DK \parallel PE$, do đó MH và đường thẳng qua D song song EP cắt nhau tại K trên đường tròn (O). Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét

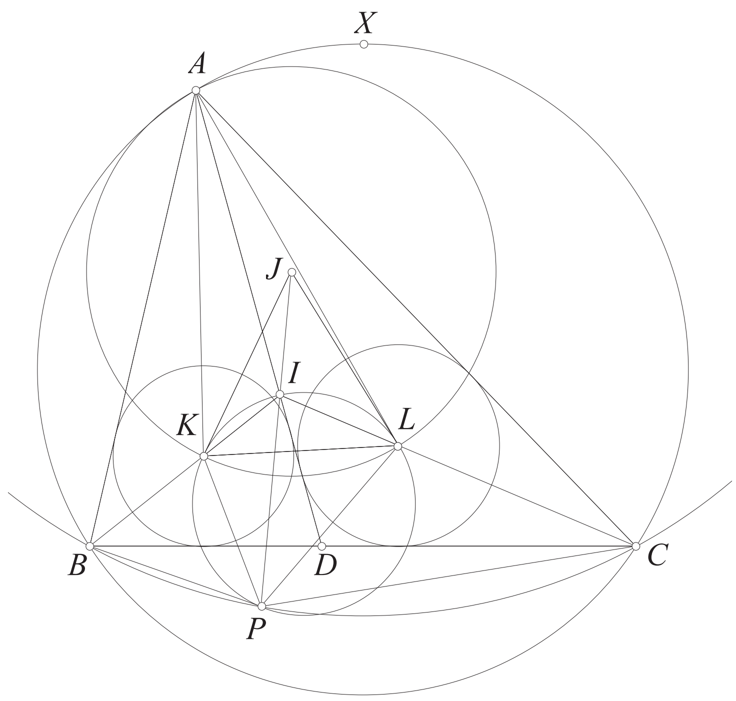
Bài toán này là bài toán đơn giản nhưng có ý nghĩa là hai đường thẳng cắt nhau trên đường tròn và không xuất phát từ hai điểm thuộc đường tròn. Mặt khác bài toán có lời giải đơn giản chỉ dùng định lý Thales và dựa vào bổ đề quan trọng của định nghĩa đường tròn $HA = 2OM$. Bài toán có thể có nhiều cách phát biểu thú vị, sau đây là một phát biểu khác của bài toán

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có đường kính AK và đường cao AD. Tiếp tuyến tại A, K của (O) cắt BC lần lượt tại S, T. Trung trực AD cắt SO tại P. Trung trực AK cắt BC tại Q. PQ cắt AT tại R. Chứng minh rằng $OR \parallel BC$.

Có bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 12 Toán trường THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình cho lời giải tại đây. Ngoài ra bạn **Nguyễn Tiến Dũng** gửi tới tác giả lời giải tương tự đáp án qua email.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I và phân giác AD. K, L là tâm nội tiếp các tam giác ABD, ACD. J là tâm ngoại tiếp tam giác AKL. IJ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IKL tại P khác I. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PBC nằm trên (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

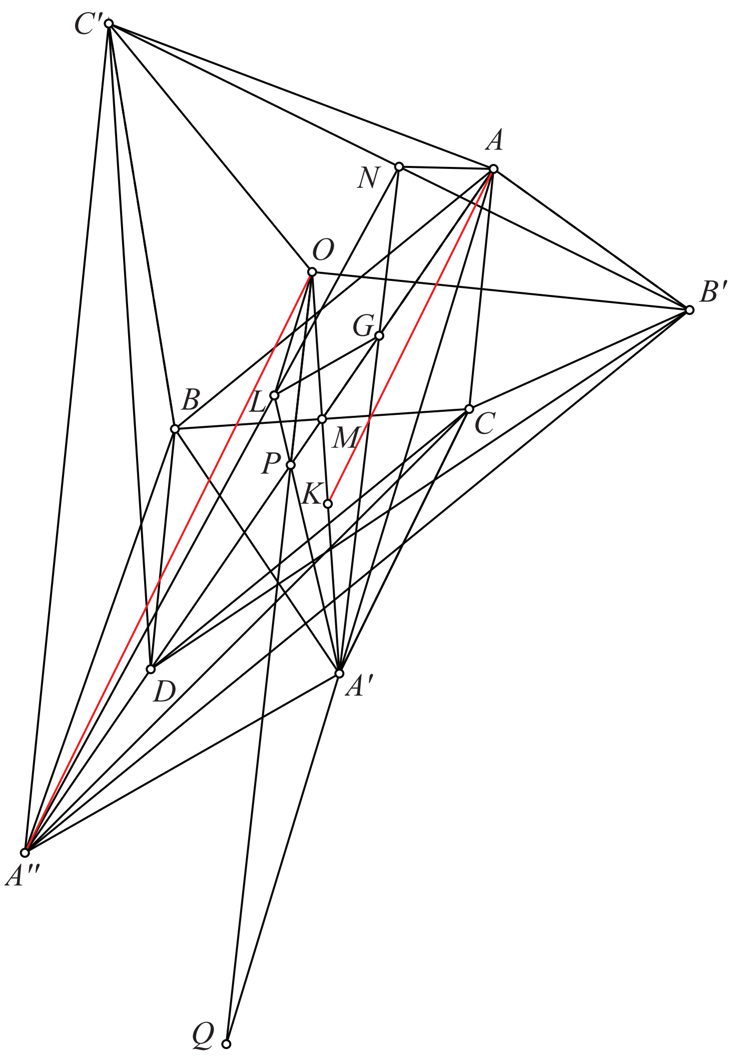
Bài toán từ bạn đọc

Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác đều BCA', CAB', ABC'. Gọi A'' là giao điểm của đường thẳng qua B' song song với AB và đường thẳng qua C' song song với AC. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác $A''B'C'$ song song với AA'.

Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà.**

Lời giải

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của tác giả **Nguyễn Tiến Dũng.**



Ta có một số nhận xét sau

1. Tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC là trực tâm của tam giác $A''B'C'$.

2. Hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có chung trọng tâm G.

3. Nếu K là trọng tâm tam giác $A'BC$ thì $AK \parallel A''O \perp B'C'$ (Kết quả quen thuộc)

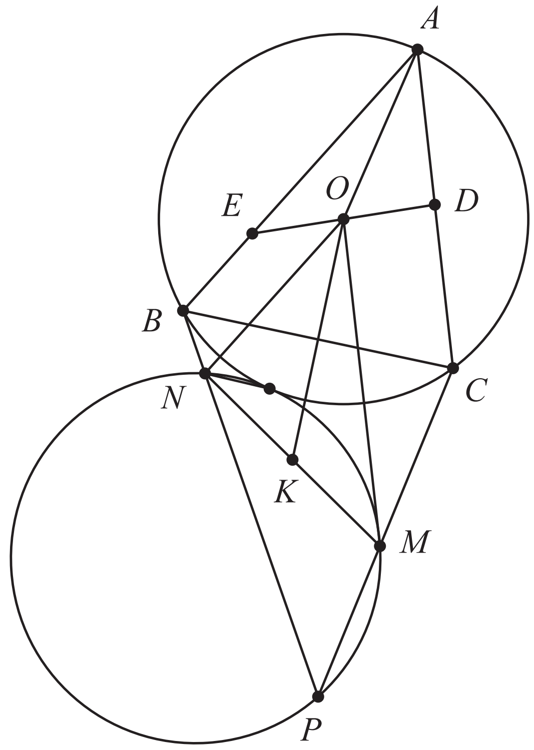
4. Ba điểm A'', A, G thẳng hàng. Thật vậy, dựng hình bình hành $ABDC$. Chú ý rằng $DB \parallel A''C', DC \parallel A''B'$ và hai tam giác $BC'D, CDB'$ bằng nhau ta thu được $[A''DB] = [BC'D] = [CDB'] = [A''DC]$ nên DA'' là trung tuyến tam giác DBC.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm $BC, B'C'$ và L là trọng tâm tam giác $A''B'C'$. $A'L$ cắt AA'' tại P và lấy Q trên PO sao cho $A'Q \parallel OL$. Ta thấy $AP = AG + GP = AG + \frac{1}{4}GA'' = AG + \frac{1}{4}(GM + MA'') = \frac{3}{4}MA + \frac{1}{4}MA''$ nên $\frac{AP}{AM} = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{MA''}{3MA}\right) = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{MO}{3MK}\right) = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{MO}{MA'}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{A'O}{A'M}$. Chú ý rằng $\frac{QO}{QP} = \frac{A'L}{A'P} = \frac{4}{3}$, dễ thấy $\frac{QO}{QP} \cdot \frac{AP}{AM} \cdot \frac{A'M}{A'O} = 1$ nên theo định lý Menelaus đảo áp dụng cho tam giác OPM, ta có Q, A, A' thẳng hàng. Vậy đường thẳng Euler OL của tam giác $A''B'C'$ song song với AA', đó là điều phải chứng minh.

Nhận xét

Đây là một bài toán hay và có phát biểu đẹp mắt. Có bạn **Nguyễn Hoàng Nam** lớp 12 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong TPHCM cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các điểm D, E lần lượt thuộc cạnh CA, AB sao cho O là trung điểm DE và $DE = OA$. K đối xứng với O qua BC. Lấy các điểm M, N sao cho $OM \parallel CA$ và $ON \parallel AB$. K là trung điểm của MN. BN cắt CM tại P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN tiếp xúc (O).



Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng**, Hà Nội.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

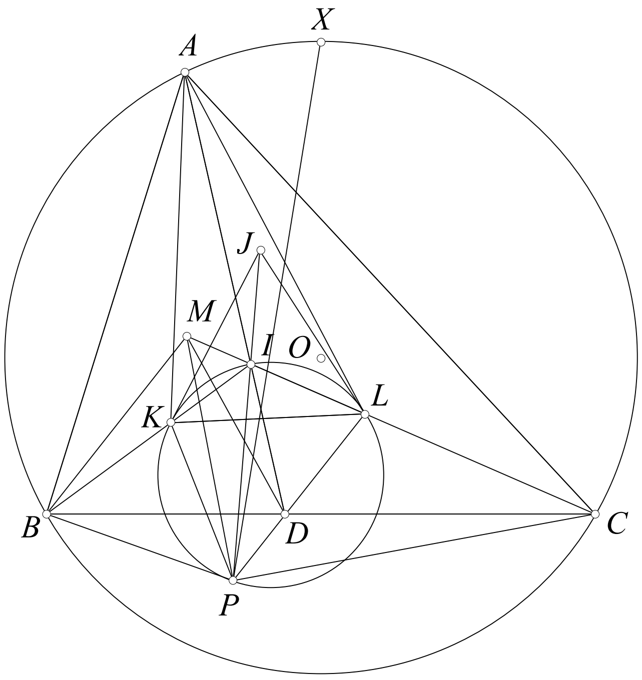
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có tâm nội tiếp I và phân giác AD. Gọi K, L lần lượt là tâm nội tiếp tam giác ABD, ACD. J là tâm ngoại tiếp tam giác AKL. IJ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IKL tại P khác I. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PBC nằm trên (O).

Lời giải

Lời giải sau của bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 12 Toán trường THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình.



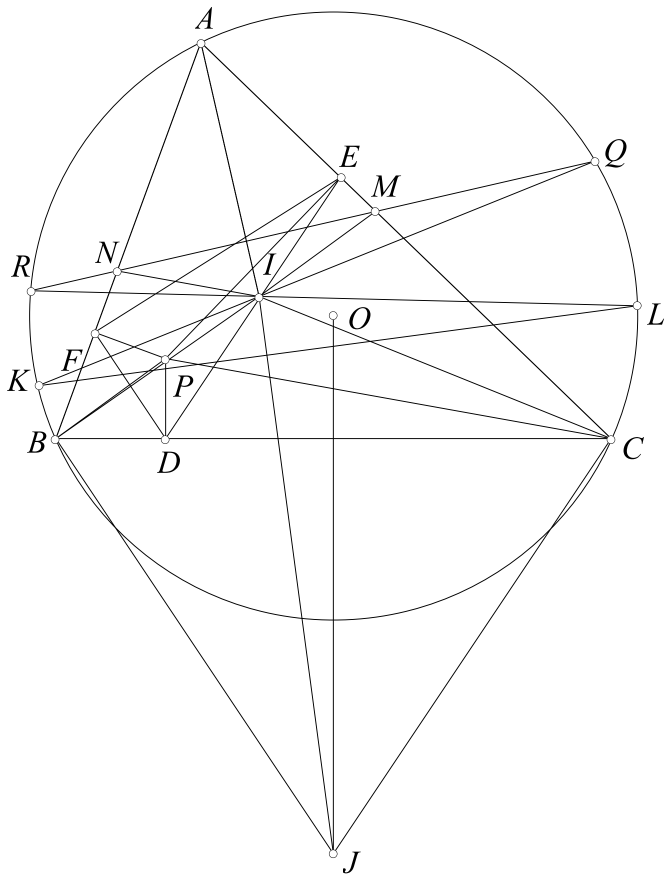
Ta thấy $\angle JKL = 90° - \angle KAL = 90° - \frac{\angle BAC}{2} = 180° - \angle BIC = \angle KPL$ do đó KJ tiếp xúc (PKL). Tương tự LJ cũng tiếp xúc (PKL) nên tứ giác $PKIL$ điều hòa. Lấy M thuộc IC sao cho $BM \parallel PL$. Từ đó ta có biến đổi tỷ số $\frac{PK}{PL} = \frac{IK}{IL} = \frac{IK}{ID} \cdot \frac{ID}{IL} = \frac{BK}{BD} \cdot \frac{CD}{CL} = \frac{DC}{DB} \cdot \frac{BK}{CL} = \frac{LC}{LM} \cdot \frac{BK}{CL} = \frac{BK}{LM}$. Lại dễ thấy $\angle PKB = \angle PLM$ nên hai tam giác PKB và PLM đồng dạng. Từ đó suy hai tam giác PKL và PBI đồng dạng. Vậy $\angle PBI = \angle KPL = 180° - \angle KIL = 90° - \frac{\angle BAC}{2}$. Tương tự $\angle PCI = 90° - \frac{\angle BAC}{2}$, ta suy ra $\angle BPC = 360° - \angle BAC$ hay tâm ngoại tiếp X của PBC nằm trên (O).

Nhận xét

Bài toán này được tác giả phát triển từ một bài toán vô địch Ba Lan năm 2016. Bạn **Nguyễn Quang Trung** cho lời giải đẹp khác đáp án như trên. Ngoài ra bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có tâm nội tiếp I. P là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Trên CA, AB lấy M, N sao cho $IM \parallel PB$, $IN \parallel PC$. MN cắt (O) tại Q, R. QI, RI cắt lại (O) tại K, L. Các đường thẳng qua B, C lần lượt song song với DF, DE cắt nhau tại J. Chứng minh rằng $IJ \perp KL$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

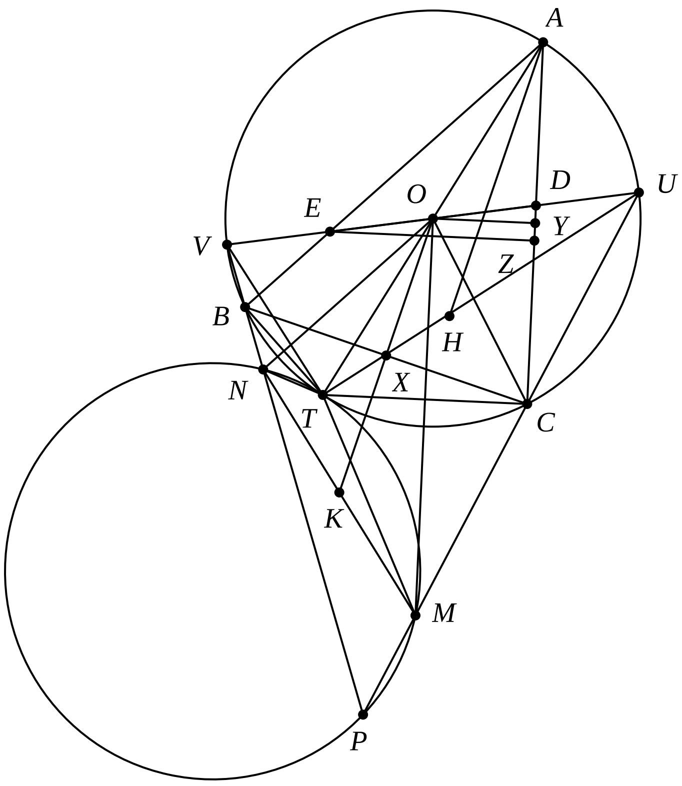
Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và các điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh CA, AB sao cho O là trung điểm DE và $DE = OA$. K đối xứng O qua BC. M, N là các điểm sao cho $OM \parallel CA$, $ON \parallel AB$ và K là trung điểm MN. BN cắt CM tại P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP tiếp xúc với đường tròn (O).

Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng.**

Lời giải



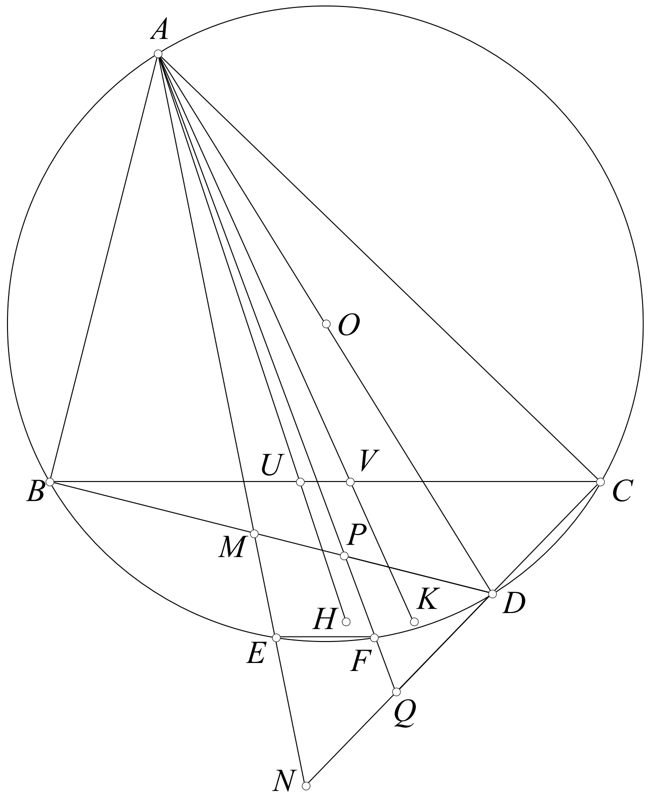
Gọi H là trực tâm tam giác ABC thì $\angle MOK = \angle HAC = \angle EAO$, $\angle NOK = \angle HAB = \angle DAO$. Chú ý rằng AO, OK lần lượt là trung tuyến của các tam giác ADE và ONM, ta thấy hai tam giác này đồng dạng. Gọi X, Y là trung điểm của BC, CA và Z là hình chiếu của E lên CA thì $AZ = DC$. Chú ý rằng hai tam giác vuông AEZ và OCX đồng dạng, ta có $\frac{DC}{OM} = \frac{AZ}{AE} \cdot \frac{AE}{OM} = \frac{OX}{OC} \cdot \frac{OA}{OK} = \frac{1}{2}$ hay $OM = 2CD$. Tương tự thì $ON = 2BE$. Gọi DE cắt PN, PM lần lượt tại U, V thì $OU = OV = DE = OA$ nên U, V nằm trên (O). Gọi AT là đường kính của (O) thì $\angle NVT = \angle BAT = \angle NOT$ nên T nằm trên đường tròn (ONV). Tương tự T nằm trên đường tròn (OMU). Áp dụng định lý Miquel cho tam giác PUV và ba điểm O, M, N thì T nằm trên đường tròn (MNP). Vì $\angle MTU = \angle MOU = \angle ONM = \angle TVU + \angle TNM$ nên đường tròn (MNP) tiếp xúc (O) tại T.

Nhận xét

Đây là một bài toán chứng minh tiếp xúc đẹp rất nhiều ý nghĩa và phát triển. Bạn **Nguyễn Hoàng Nam** lớp 12 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TPHCM và **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. E, F thuộc (O) sao cho $EF \parallel BC$. AE cắt DB, DC tại M, N. AF cắt DB, DC tại P, Q. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác DMN và DPQ. AH, AK cắt BC tại U, V. Chứng minh rằng $BU = CV$.



Tác giả: **Trần Minh Ngọc,** TPHCM.

Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng,** Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

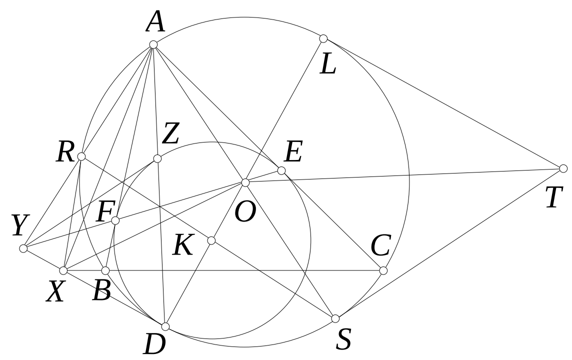
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính AS. Đường tròn (K) tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc trong (O) tại D. Trung trực AD cắt tiếp tuyến tại qua S của (O) tại T. P đối xứng với D qua TK. Trung trực AP cắt PK tại R. AK cắt (O) tại X khác A. DX cắt BC tại G. Lấy Q trên trung trực AX sao cho $AQ \perp BC$. Chứng minh rằng $QR \perp AG$.

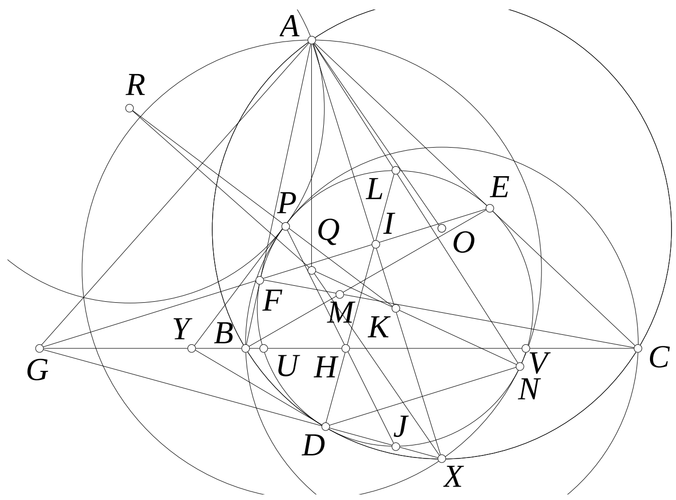
Lời giải

Lời giải sau là của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đưa ra tại đây.
Bổ đề. Đường tròn (PBC) tiếp xúc (K) tại P.



Chứng minh bổ đề. Tiếp tuyến tại D của (K) cắt BC tại X. SK cắt (O) tại R. (K) tiếp xúc CA, AB tại E và F. Z là giao điểm của AD với (K). Do DZ, EA, FA đồng quy nên tứ giác $DFZE$ điều hòa, suy ra các tiếp tuyến tại Z, D của (K) cắt nhau tại Y trên EF. Do đó $\mathcal{P}_{Y/(O)} = YD^2 = \overline{YF} \cdot \overline{YE} = \mathcal{P}_{Y/(AEF)}$ nên Y thuộc trục đẳng phương của (AEF) và (O). Vì $\angle ARK = 90^\circ$ nên R thuộc (AEF) nên A, R, Y thẳng hàng. Từ đó $A(RD, FE) = -1$ nên tứ giác $RBDC$ điều hòa, suy ra các tiếp tuyến tại R, D của (O) cắt nhau trên BC hay XR tiếp xúc (O). L là giao điểm khác D của DO với (O) thì TL tiếp xúc (O). Theo định lý Newton, DL, RS, XT đồng quy hay XL đi qua K. Do đó P đối xứng với D qua XK hay (BPC) tiếp xúc (K).

Giải bài toán. AQ, AO đẳng giác nên Q đối xứng với O qua AX. Vậy (Q, QA) đối xứng với (O) qua AX. N là đối xứng của D qua AX, BE cắt CF tại M, GD cắt (K) tại J khác D. (K) cắt BC tại U, V. L là giao điểm của AN với (K). Do tứ giác $PUDV$ điều hòa nên $J(DP, UV) = -1$. Gọi H là giao điểm của JP với BC thì $(GH, UV) = -1$.



Do đó DH đi qua I là trung điểm EF. Do DA là đường đối trung của $\triangle EDF$ nên DA, DI đẳng giác với $\angle EDF$. Mặt khác, AD, AN đối xứng qua AX nên DH đi qua L. Áp dụng định lý Pascal cho hệ điểm $\begin{pmatrix} L & P & D \\ J & D & P \end{pmatrix}$ suy ra PL, DJ, BC đồng quy hay PL đi qua G. Vì tứ giác $LENF$ điều hòa nên $P(LN, EF) = -1$ suy ra $P(GN, EF) = -1$ nên PN, EF, AM đồng quy. Y là giao điểm của hai tiếp tuyến tại P và D của (K). Xét cực đối cực đối với (K), AM, EF, PN lần lượt là đường đối cực của G, A, N đối với (K) nên với PN, EF, AM đồng quy, do đó N, A, G thẳng hàng. Mặt khác theo định lý về tâm đẳng phương thì tiếp tuyến tại P, N của (K) và trục đẳng phương của (Q) và (R, RA) đồng quy. Vậy AG là trục đẳng phương của (Q) và (R) nên $AG \perp QR$.

Nhận xét

Bài toán là nghịch đảo kết quả của đề thi chọn đội tuyển THPT chuyên KHTN năm 2016 vòng 2 và tác giả cũng nhận được lời giải duy nhất của bạn **Bảo**.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm thuộc cung BC không chứa A. PB, PC cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE, ACF cắt nhau tại G khác A. AG cắt (O) tại D khác A. Q thuộc (O) sao cho $\angle QAB = \angle PAC$. QD cắt BC tại R. Chứng minh rằng $OR \perp AQ$.
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

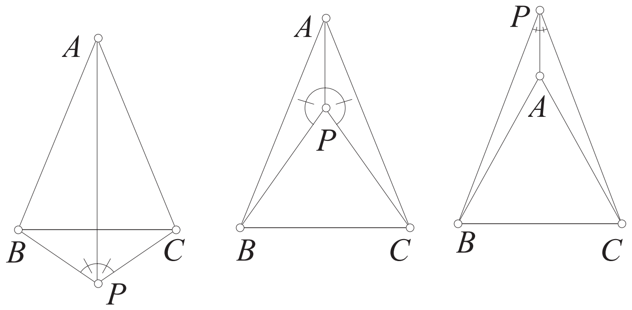
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

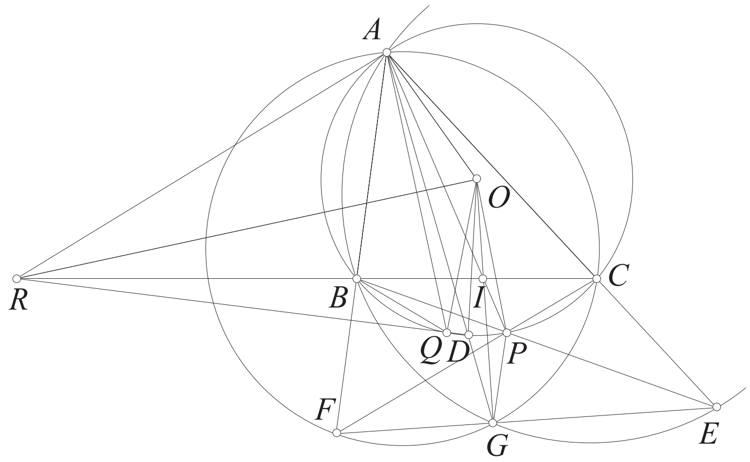
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và P là điểm thuộc cung BC không chứa A. PB, PC cắt CA, AB lần lượt tại E, F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE, ACF cắt nhau tại G khác A. AG cắt (O) tại D khác A. Q thuộc (O) sao cho $\angle QAB = \angle PAC$. QD cắt BC tại R. Chứng minh rằng $OR \perp AQ$.

Lời giải

Ta phát biểu không chứng minh lại bổ đề sau.



Bổ đề. Cho tam giác ABC cân tại A nếu có điểm P sao cho $\angle APB = \angle APC$ thì B, C đối xứng qua AP.



Giải bài toán. Trước hết ta thấy E, G, F thẳng hàng. Gọi AP cắt BC tại I, theo định lý Miquel thì O, I, G thẳng hàng. Lại có $IO.IG = IB.IC = IA.IP$. Từ đó tứ giác $AOPG$ nội tiếp. Lại có $OA = OP$ nên GO là phân giác $\angle PGA$. Mặt khác $OD = OP$. Từ đó P, D đối xứng nhau qua OG nên $\angle DOG = \angle POG = \angle DAI$. Từ đó tứ giác $AOID$ nội tiếp. Lại có $\angle QBR = \angle QBC - \angle BQR = \angle QAC - \angle BAD = \angle PAB - \angle BAD = \angle PAD$. Từ đó tứ giác $RAID$ nội tiếp. Vậy năm điểm R, A, O, I, D cũng thuộc một đường tròn. Lại có $OA = OD$ nên RO là phân giác $\angle RAD$ kết hợp $OA = OQ$ ta suy ra A, Q đối xứng OR nên $AQ \perp OR$.

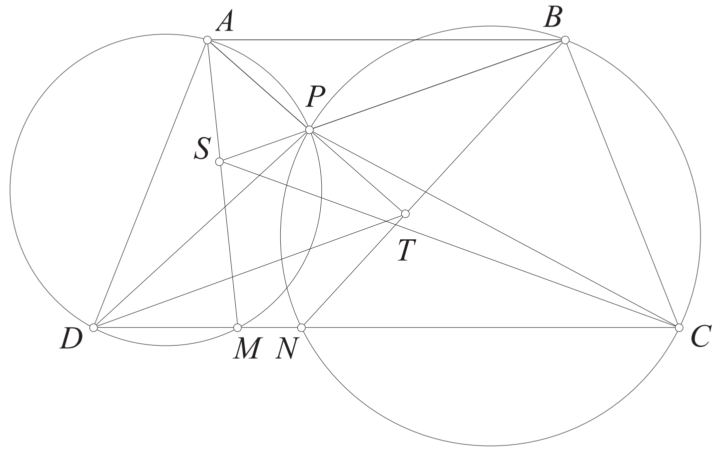
Nhận xét

Bạn **Nguyễn Hải Huy** lớp 12 Toán THPT chuyên Thái Nguyên, bạn **Nguyễn Tiến Hoàng** lớp 10 Toán, trường PTNK, ĐHQG TPHCM và bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình, đã cho lời giải tại đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải khác qua email từ bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 11 Toán THPT chuyên KHTN. Bài toán này được tác giả phát triển từ đề chọn đội tuyển TP Hà Nội năm 2016. Khi nghịch đảo bài toán này cực A, ta thu được bài toán thú vị sau

Cho tam giác ABC và D là một điểm trên cạnh BC. Các đường tròn $(DAB), (DCA)$ cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác A. BE cắt CF tại P. AP cắt BC tại Q. R thuộc BC sao cho $\angle RAB = \angle DAC$. Đường tròn (AQR) cắt (ABC) tại G khác A. Chứng minh rằng $RA = RG$.

Bài toán đề nghị

Cho hình thang cân $ABCD$ với $AB \parallel CD$. P là một điểm nằm trong hình thang. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAD, PBC cắt CD tại M, N khác C, D. PB, PA lần lượt cắt AM, BN tại S, T. Chứng minh rằng $\angle SCD = \angle TDC$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

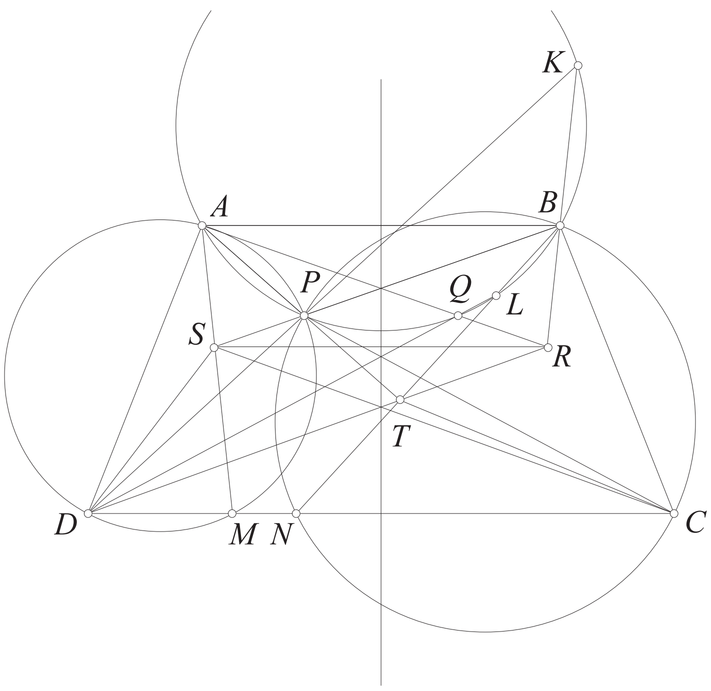
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho hình thang cân $ABCD$ với $AB \parallel CD$. P là một điểm nằm trong hình thang. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAD, PBC cắt CD tại M, N khác C, D. PB, PA lần lượt cắt AM, BN tại S, T. Chứng minh rằng $\angle SCD = \angle TDC$.

Lời giải



Gọi Q, R đối xứng P, S qua trung trực CD, dễ thấy A, Q, R thẳng hàng. DP cắt BR tại K. DQ cắt BN tại L. Dễ thấy $ABQP$ là hình thang cân nên nội tiếp. Theo tính đối xứng ta thấy $\angle AQD = \angle BPC = \angle BNC = \angle ABL$ nên tứ giác $ABLQ$ nội tiếp. Vẫn từ tính đối xứng ta có $\angle ABR = \angle BAS = \angle DMA = \angle DPA$, ta suy ra $APBK$ nội tiếp. Từ đó sáu điểm A, P, Q, L, B, K thuộc một đường tròn. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} P & Q & B \\ L & K & A \end{pmatrix}$ ta suy ra D, T, R thẳng hàng. Từ đó theo tính đối xứng thì $\angle SCD = \angle TDC$.

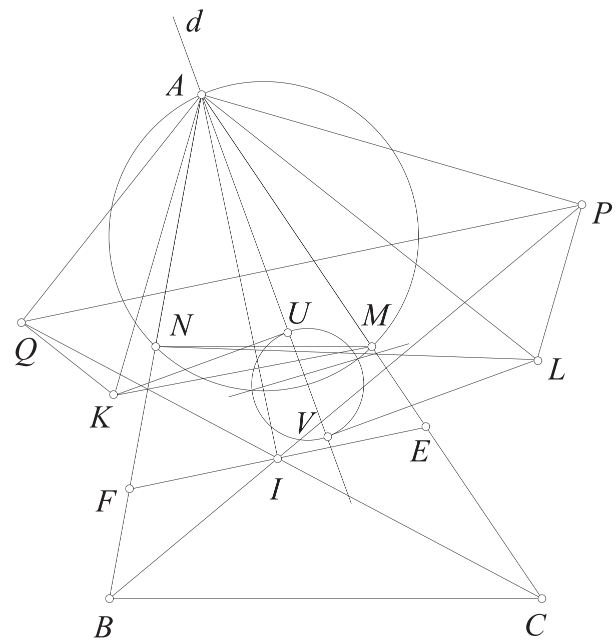
Nhận xét

Bạn **Nguyễn Giang Châu** lớp 11 Toán THPT chuyên KHTN và bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình, đã cho lời giải tại đây. Ngoài ra tác giả nhận được lời giải khác qua email từ bạn **Phan Văn Tín** sinh viên ĐHSP. Cũng trong topic trên bạn **Ngô Quang Dương** sinh viên ĐHKHTN đã đề xuất bài toán tổng quát khi thay hình thang cân thành hình thang bất kỳ

Cho hình thang $ABCD$ với hai đáy $AB \parallel CD$. AD cắt BC tại P, AC cắt BD tại K. O, M, N thuộc CD sao cho $\frac{\overline{OM}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OD}}$. H là điểm bất kì trên PO, BH và AH lần lượt cắt AM, BN tại E, F. DF cắt CE tại Q. Chứng minh rằng P, K, Q thẳng hàng.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I. M, N là trung điểm CA, AB. BI, CI cắt trung trực IA tại P, Q. Đường thẳng qua I vuông góc IA lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Lấy K, L lần lượt thuộc trung trực AE, AF sao cho $KQ \perp AQ$ và $LP \perp AP$. d là một đường thẳng thay đổi đi qua A. U, V là hình chiếu của K, L lên d. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn đường kính UV và (AMN) luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi đường thẳng d thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

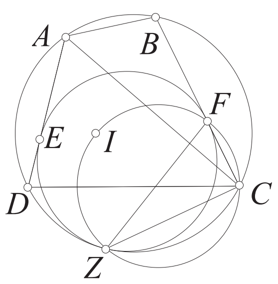
Đề bài

Cho tam giác ABC với tâm nội tiếp I. M, N là trung điểm CA, AB. BI, CI cắt trung trực IA tại P, Q. Đường thẳng qua I vuông góc IA lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Lấy K, L lần lượt thuộc trung trực AE, AF sao cho $KQ \perp AQ$ và $LP \perp AP$. d là một đường thẳng thay đổi đi qua A. U, V là hình chiếu của K, L lên d. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn đường kính UV và (AMN) luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi đường thẳng d thay đổi.

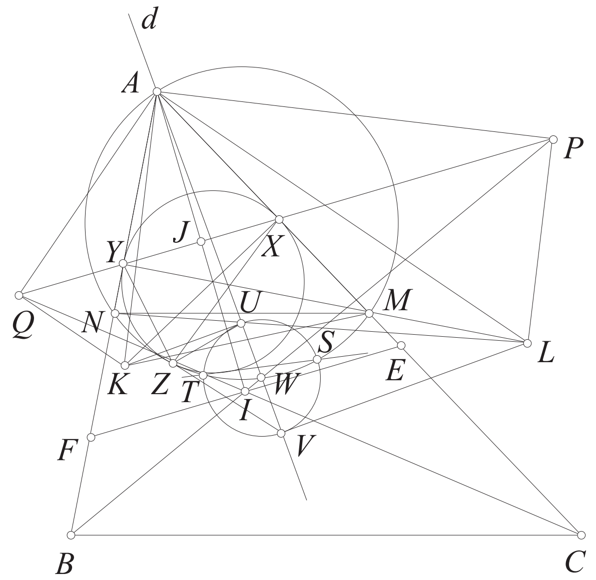
Lời giải

Chứng minh sau của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đưa ra ở đây. Bổ đề sau là hệ quả từ phép chứng minh định lý Thebault, chúng tôi không nêu lại chứng minh.

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn tiếp xúc với AD, BC tại E, F và tiếp xúc với (O) tại G. Khi đó đường tròn ngoại tiếp tam giác GFC đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADC.



Giải bài toán. Gọi X,Y lần lượt là trung điểm AE,AF. Do K,L lần lượt thuộc trung trực AE,AF nên $KX \perp AC$,$LY \perp AB$. Từ đó các ngũ giác $AXUKQ$ và $AYVLP$ nội tiếp. Xét phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$ biến $E \mapsto X, F \mapsto Y, C \mapsto M, B \mapsto N$ nên X, Y lần là tiếp điểm của đường tròn Mixilinear của tam giác AMN với AM, AN. Gọi Z là tiếp điểm của đường tròn mixilinear ứng với đỉnh A của $\triangle AMN$ với đường tròn (AMN). J là trung điểm XY. Theo tính đối xứng $(QA, QX) = (QX, QI) = (QX, IA) + (IA, IC) = \frac{\pi}{2} + (IA, IC) = (BA, BI) = (NA, NJ) \equiv (ZA, ZX) \pmod{\pi}$ nên tứ giác $AQZX$ nội tiếp.



Tương tự thì tứ giác $APZY$ nội tiếp. Vậy U, V theo thứ tự là giao điểm của d với (AXZ) và (AYZ). Gọi W là trung điểm UV thì $(XY, XZ) = (YN, YZ) = (VA, VZ) \pmod{\pi}$. Tương tự thì $(YX, YZ) = (UA, UZ) \pmod{\pi}$ nên $\triangle UZV \sim \triangle YZX$ suy ra $(WZ, WA) = (JZ, JX) = (MZ, MA) \pmod{\pi}$ suy ra W thuộc (AMN). Gọi S, T lần lượt là giao điểm của (UV) với (AMN). Do $WU = WS = WT$ nên U là tâm nội tiếp tam giác AST. Từ đó theo bổ đề trên ST tiếp xúc với đường tròn qua Z tiếp xúc với AM chính là đường tròn mixilinear tam giác AMN. Vậy trục ST luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Nhận xét

Bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 Toán THPT chuyên SP, bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 11 toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình và bạn **Nguyễn Tiến Long** lớp 11 toán, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ đã cho lời giải tại đây. Bài toán là một kết quả cũ được viết lại bằng phép nghịch đảo, lời giải trên của bạn **Bảo** không dùng nghịch đảo có phần thú vị hơn.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). P di chuyển trên cung nhỏ BC. Dựng ra ngoài tam giác PBC các điểm E, F sao cho $\triangle PCE \sim \triangle AOB$ và $\triangle PBF \sim \triangle AOC$. Tiếp tuyến tại P của (O) cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác PCE, PBF tại M, N khác P. EM cắt FN tại Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi P thay đổi.
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

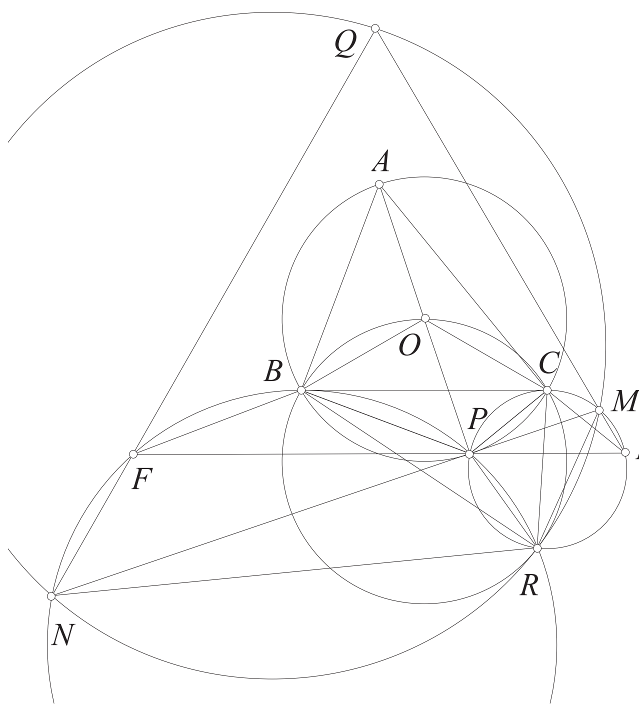
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). P di chuyển trên cung nhỏ BC. Dựng ra ngoài tam giác PBC các điểm E, F sao cho $\triangle PCE \sim \triangle AOB$ và $\triangle PBF \sim \triangle AOC$. Tiếp tuyến tại P của (O) cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác PCE, PBF tại M, N khác P. EM cắt FN tại Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi P thay đổi.

Lời giải



Gọi PCE, PBF cắt nhau tại R khác P. Ta thấy $180° - \angle BPC = \angle BAC = \angle CAO + \angle BAO = \angle CPE + \angle BPF$ nên P, E, F thẳng hàng, suy ra $\angle RME = \angle RPE = \angle RNQ$ nên R nằm trên (QMN). Từ đó $\angle BRC = \angle BRP + \angle CRP = \angle BFP + \angle CEP = \angle OAC + \angle OAB = \angle BAC$. Vậy đường tròn (RBC) đối xứng với đường tròn (O) qua BC nên cố định. Ta lại có $\angle CRM = \angle CPM = \angle CBP = \angle CBR - \angle PBR = \angle CBR - \angle PNR$ suy ra (RMN) tiếp xúc (RBC) hay (QMN) luôn tiếp xúc đường tròn đối xứng (O) qua BC cố định.

Nhận xét

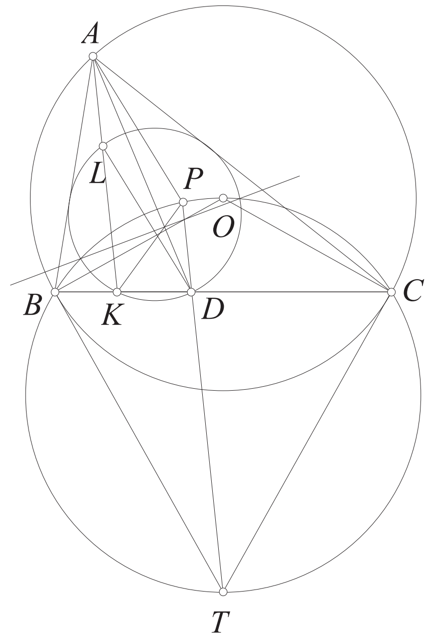
Bài toán được tác giả tạo ra từ cấu hình bài toán IMO 2011 bằng đối xứng trục nhưng được giải gọn hơn như trên. Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 Toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, trong quá trình giải đã đề xuất một bài toán khác trên cấu hình này và cho lời giải tại đây.

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). P di chuyển trên cung nhỏ BC. Dựng ra ngoài tam giác PBC các điểm E, F sao cho $\triangle PCE \sim \triangle BAO$ và $\triangle PBF \sim \triangle CAO$. Tiếp tuyến tại P của (O) cắt đường tròn ngoại tiếp các tam giác PCE, PBF tại M, N khác P. EM cắt FN tại Q. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QMN luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi P thay đổi.

Trong topic đó bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 Toán THPT chuyên SP cũng đưa ra lời giải bằng cộng góc. Tác giả cũng nhận được lời giải đúng qua email từ bạn **Phạm Hoàng Minh**, lớp 11 toán, trường PTNK.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. D là một điểm trên cạnh BC. TD cắt (TBC) tại P khác T. K thuộc BC sao cho $AK \parallel PD$. L thuộc AK sao cho $DL \parallel AP$. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn (DKL) và (TBC) đi qua giao điểm của KP và AD.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

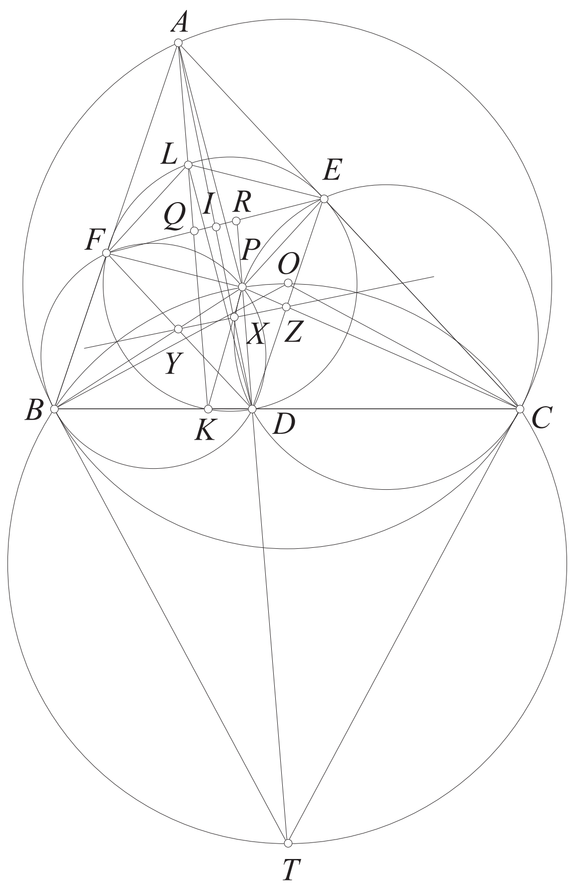
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại T. D là một điểm trên cạnh BC. TD cắt (TBC) tại P khác T. K thuộc BC sao cho $AK \parallel PD$. L thuộc AK sao cho $DL \parallel AP$. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn (DKL) và (TBC) đi qua giao điểm của KP và AD.

Lời giải



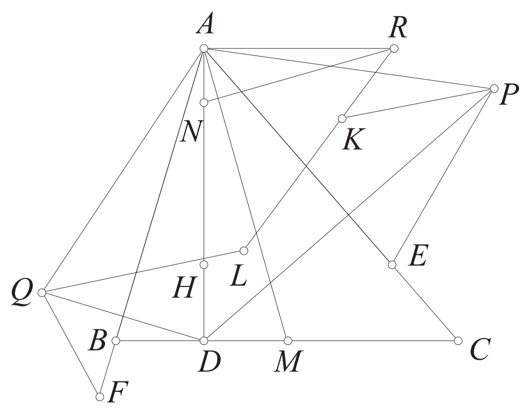
Gọi giao điểm của các đường tròn $(CDP), (BDP)$ với CA, AB lần lượt là E, F. Ta thấy $\angle DEC = \angle DPC = \angle TBC = \angle TCB$ do đó CT tiếp xúc CDE hay $DE \parallel AB$. Tương tự $DF \parallel AC$. Từ đó các tứ giác $AEFD, ALDP$ là hình bình hành nên trung điểm I của EF là trung điểm AD, PL. Từ đó L đối xứng P qua I, chú ý P nằm trên (AEF) nên L nằm trên (DEF). Ta có $\angle LKD = \angle PDC = \angle PFB = \angle PFD + \angle DFB = \angle PFD + \angle BAC = \angle PFD + \angle LFP = \angle LFD$. Từ đó K nằm trên (DEF). Từ đó gọi DF, DE lần lượt cắt PB, PC tại Y, Z và PK cắt AD tại X. Ta thấy $ZD.ZE = ZP.ZC$ và $YD.YF = YP.YB$ nên YZ là trục đẳng phương của (DEF) và (PBC). Ta sẽ chứng minh X, Y, Z thẳng hàng, thật vậy. Ta có biến đổi tỷ số kép $P(DX, YZ) = P(DK, BC) = (DK, BC) = A(DK, BC) = A(IQ, FE) = (IQ, FE)$. Trong đó gọi AK, DP lần lượt cắt EF tại Q, R. Ta chú ý rằng phép đối xứng tâm trên đường thẳng bảo toàn tỷ số kép nên $(IQ, FE) = (IR, EF)$. Từ đó $(IQ, FE) = (IR, EF) = D(IR, EF) = D(XP, ZY) = D(PX, YZ)$. Vậy $P(DX, YZ) = D(PX, YZ)$, ta suy ra X, Y, Z thẳng hàng.

Nhận xét

Cách làm trên tuy dài nhưng là cách tác giả tạo ra bài toán này. Cách làm trên là dựa trên lời giải của bạn **Đỗ Xuân Long** lớp 11 toán, THPT chuyên KHTN trên AoPS. Các lời giải bằng cộng góc ngắn gọn hơn được đưa ra tại đây bởi các bạn **Nguyễn Giang Châu** lớp 11 toán, THPT chuyên KHTN, **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 toán, THPT chuyên SP. Ta giả nhận được lời giải qua email từ bạn **Phạm Hoàng Minh**, lớp 11 toán, trường PTNK và bạn **Nguyễn Hưng Quang Khải** lớp 11 toán THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, trực tâm H. P, Q đối xứng D qua CA, AB. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, CA tại F, E. K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác APE, AQF. KL cắt đường thẳng qua A song song BC tại R. Gọi M là trung điểm BC. Lấy N thuộc AH sao cho $RN \perp AM$. Chứng minh rằng $AH = 4AN$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

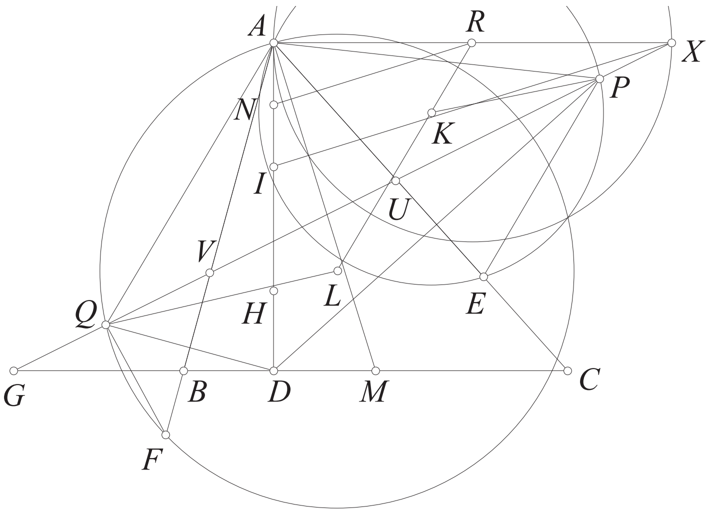
***Trần Quang Hùng,** Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

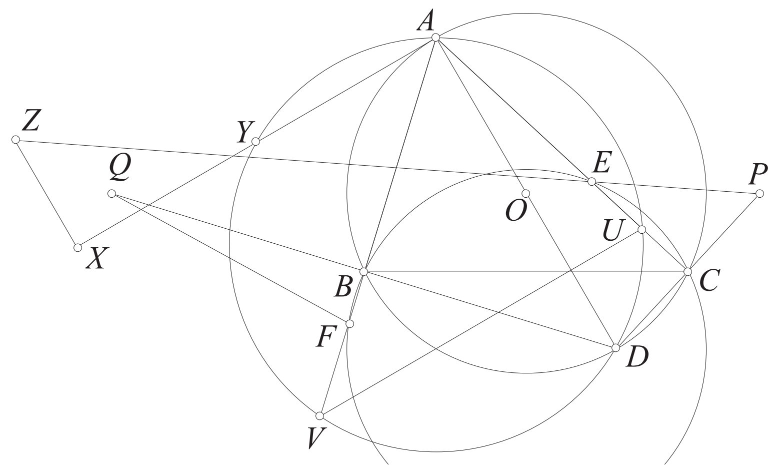
Cho tam giác ABC nhọn có đường cao AD, trực tâm H. P, Q đối xứng D qua CA, AB. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, CA tại F, E. K, L lần lượt là tâm ngoại tiếp tam giác APE, AQF. KL cắt đường thẳng qua A song song BC tại R. Gọi M là trung điểm BC. Lấy N thuộc AH sao cho $RN \perp AM$. Chứng minh rằng $AH = 4AN$.

Lời giải



Gọi BU, CV là đường cao của tam giác ABC dễ thấy PQ đi qua U, V. Gọi UV cắt BC tại G. Ta thấy chùm $G(HA, VD) = -1$ nên nếu GV cắt đường thẳng qua A song song GD tại X thì GH đi qua điểm đối xứng của A qua X. Mặt khác theo định lý Brocard thì $GH \perp AM$ do đó nếu I là trung điểm AH thì $IX \parallel GH \perp AM$. Từ đó ta chỉ cần chứng minh R là trung điểm AX thì hiển hiên $AN = \frac{1}{2}AI = \frac{1}{4}AH$. Dễ thấy điều này tương đương với việc phải chứng minh đường tròn đường kính AX và các đường tròn $(K), (L)$ ngoại tiếp các tam giác APE, AQF đồng trục. Sử dụng nghịch đảo tâm A phương tích bất kỳ ta chuyển về bài toán sau. Chú ý để cho tiện theo dõi và cho dễ hiểu hơn chúng tôi giữ nguyên ký hiệu các nhãn điểm trong bài toán gốc và bài toán sau khi nghịch đảo

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với đường kính AD. P, Q đối xứng D qua CA, AB. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại V, U. Đường tròn đối xứng đường tròn ABC qua BC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Đường tròn (AUV) cắt tiếp tuyến qua A của (O) tại Y. X đối xứng A qua Y. Chứng minh rằng đường thẳng PE, QF và đường thẳng qua X vuông góc với AX đồng quy.



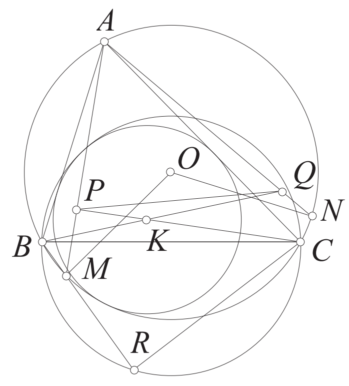
Sử dụng phép vị tự tâm A tỷ số 2 dễ thấy đây chính là bài toán Tuần 2 tháng 6 năm 2016. Đến đây ta kết thúc chứng minh

Nhận xét

Có duy nhất bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cho lời giải khác nghịch đảo tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường tròn (K) tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc trong (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cung CA, AB chứa B, C của (O). AM, AN lần lượt cắt KC, KB tại P, Q. R đối xứng A qua PQ. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác RBC tiếp xúc (K).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

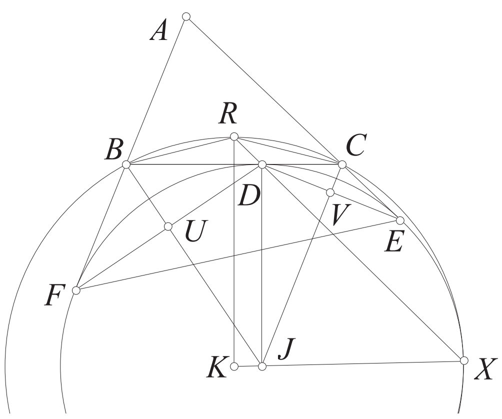
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Đường tròn (K) tiếp xúc CA, AB và tiếp xúc trong (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cung CA, AB chứa B, C của (O). AM, AN lần lượt cắt KC, KB tại P, Q. R đối xứng A qua PQ. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác RBC tiếp xúc (K).

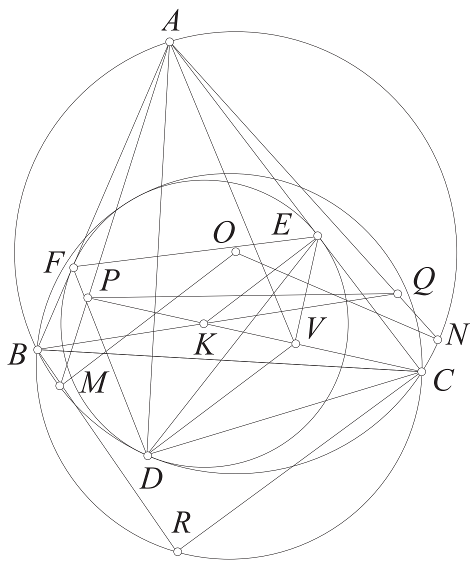
Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC đường tròn bàng tiếp góc A là (J) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. JB, JC cắt DF, DE tại U, V. Trung trực BU, CV cắt nhau tại R. Thì đường tròn (RBC) tiếp xúc (J).



Dễ thấy trung trực BU đi qua trung điểm BD, BF nên là trục đẳng phương của đường tròn điểm B và (J). Tương tự trung trực CV là trục đẳng phương của đường tròn điểm C và (J). Do đó nếu PD cắt (J) tại X thì $RC^2 = RD.RX = RB^2$. Do đó $RB = RC$ và $\angle RCD = \angle CXR, \angle RBD = \angle RXB$ nên tứ giác $RCXB$ nội tiếp. Từ đó X thuộc (K) ngoại tiếp tam giác RBC. Từ các tam giác JDX và KDX cân và $DJ \parallel KP$, ta suy ra K, J, X thẳng hàng. Do đó (K) và (J) tiếp xúc tại X.

Giải bài toán. Gọi (K) tiếp xúc (O) tại D và tiếp xúc CA, AB tại E, F. Xét phép biến hình f là phép nghịch đảo cực A phương tích bất kỳ thì $f(B), f(C)$ là ảnh của B, C và đường tròn (K) biến thành (J) bàng tiếp góc A của tam giác $Af(B)f(C)$ tiếp xúc với $f(B)f(C), f(C)A, Af(B)$ tại $f(D), f(E), f(F)$. Gọi V là nghịch đảo của C qua (K), qua nghịch đảo thì $f(V)$ là nghịch đảo của C qua (J) là trung điểm của $f(D), f(E)$. Do đó bốn điểm A, E, V, D cũng thuộc một đường tròn.



Ta dễ thấy DE là phân giác $\angle ADC$ nên $\angle AVE = \angle ADE = \frac{1}{2}\angle AMC = 90^\circ - \angle MAC$. Từ đó $\angle MAC = 90^\circ - \angle AVE = \angle AVP$, ta suy ra PA tiếp xúc (AVC) nói cách khác (P, PA) chính là đường tròn A-Apollonius của tam giác AVC. Tương tự (Q, QA) là A-Apollonius của tam giác AUC trong đó U là nghịch đảo của B qua (K). Dễ thấy R là giao điểm khác A của $(P), (Q)$. Qua nghịch đảo f thì hai đường tròn $(P), (Q)$ biến thành trung trực của $f(C)f(V)$ và $f(B)f(U)$ nên ảnh $f(R)$ của R cũng là giao hai trung trực này. Áp dụng bổ đề vào tam giác $Af(B)f(C)$ thì $f(R)f(B)f(C)$ tiếp xúc (J) nên các tạo ảnh là (RBC) tiếp xúc (K). Ta hoàn tất chứng minh.

Nhận xét

Không có bạn nào tham gia giải bài toán này. Bổ đề xuất phát từ một bài toán trên diễn đàn AoPS được tác giả viết và giải lại cho đường tròn bàng tiếp.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) với trực tâm H và trung tuyến AM. Dựng L sao cho A là trọng tâm tam giác LBC. Trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính LH và (O) lấy P sao cho $HP \parallel BC$. K là hình chiếu của P trên OH. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn đường kính OK và đường tròn Euler của tam giác ABC đi qua H.
Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

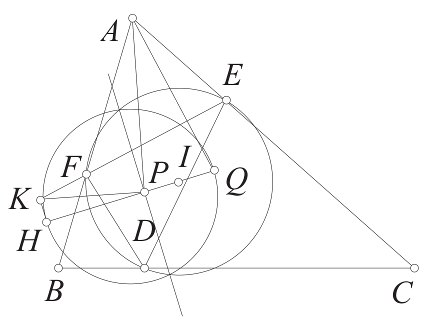
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp trong đường tròn (O) với trực tâm H và trung tuyến AM. Dựng L sao cho A là trọng tâm tam giác LBC. Trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính LH và (O) lấy P sao cho $HP \parallel BC$. K là hình chiếu của P trên OH. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn đường kính OK và đường tròn Euler của tam giác ABC đi qua H.

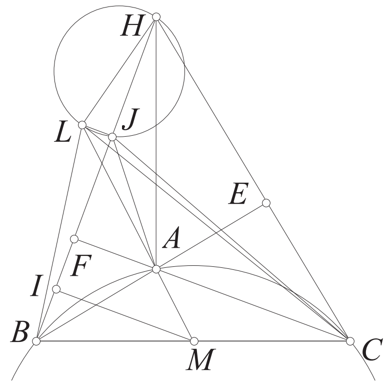
Lời giải

Bổ đề. Cho tam giác ABC với P, Q là hai điểm đẳng giác trong tam giác. D, E, F là hình chiếu của P lên BC, CA, AB. Lấy K thuộc EF sao cho $PK \perp PA$. H là hình chiếu của K trên PQ. Chứng minh rằng trục đẳng phương của đường tròn đường kính QH và (DEF) đi qua P.



Chứng minh. Ta đã biết tâm I ngoại tiếp tam giác DEF là trung điểm của PQ. Ta có biến đổi tích đoạn thẳng, chú ý KP tiếp xúc đường tròn $(AEPF)$ nên $KP^2 = \overline{KE}.\overline{KF} = \mathcal{P}_{K/(DEF)} = KI^2 - IE^2$ do đó $\mathcal{P}_{P/(QH)} = \overline{PH}.\overline{PQ} = 2\overline{PH}.\overline{PI} = 2(\overline{PI} + \overline{IH}).\overline{PI} = PI^2 + 2\overline{PI}.\overline{IH} + IH^2 + PI^2 - IH^2 = PH^2 - IH^2 + PI^2 = KP^2 - KI^2 + PI^2 = PI^2 - IE^2 = \mathcal{P}_{P/(DEF)}$.

Giải bài toán. Gọi M là trung điểm BC. BH cắt đường tròn đường kính LH tại J khác H. BE, CF là đường cao của tam giác ABC. I là hình chiếu của M lên BF dễ thấy I là trung điểm BF. Vậy I, F, J là hình chiếu của M, A, L lên BH mà $LA = 2LM$ nên $JF = 2FI = FB$. Từ đó tam giác BJC cân. Ta có $(JH, JC) = (JB, JC) = (BC, BJ) = (AH, AC) \pmod{\pi}$, vậy bốn điểm H, J, A, C thuộc một đường tròn nên $\overline{FH}.\overline{FJ} = \overline{FA}.\overline{FC}$ nên F thuộc trục đẳng phương của (LH) và (ABC). Tương tự, ta thu được EF là trục đẳng phương của (LH) và (ABC). Áp dụng bổ đề cho cặp đẳng giác H, O trong tam giác ABC. Ta thu được điều phải chứng minh.

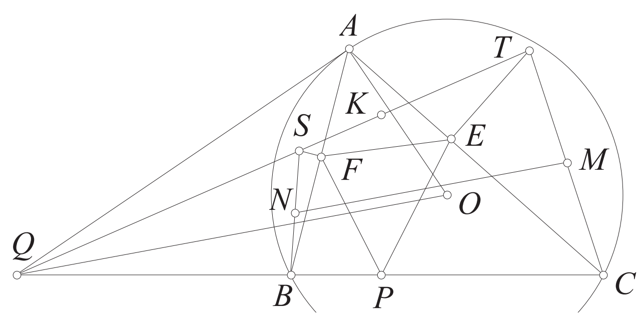


Nhận xét

Bổ đề là mở rộng trực tiếp cho phần sau của bài toán. Ta thấy rằng thực chất yếu tố đẳng giác không quan trọng bằng yếu tố I là trung điểm PQ nên có một cách mở rộng tiếp bổ đề này cho Q bất kỳ sao cho hai tia AP, AQ đẳng giác trong góc A. Khi đó đường tròn (DEF) sẽ được thay thế bằng đường tròn đi qua chân các hình chiếu của P, Q lên hai cạnh bên, các yếu tố B, C cũng không cần thiết. Bài toán được giải ở đây bởi các bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 toán, THPT chuyên SP và **Vương Đình Ân**, lớp 11 toán, trường THPT chuyên Bắc Giang. Tác giả cũng nhận được lời giải qua email từ bạn **Trần Hoàng Việt** lớp 10 toán, THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P nằm trên cạnh BC. Các đường tròn $(PAB), (PCA)$ lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A. K là tâm ngoại tiếp tam giác AEF. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại Q. Trên QK lấy S, T sao cho $ET \perp AC, FS \perp AB$. M, N là trung điểm của CT, BS. Chứng minh rằng $MN \parallel OQ$.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

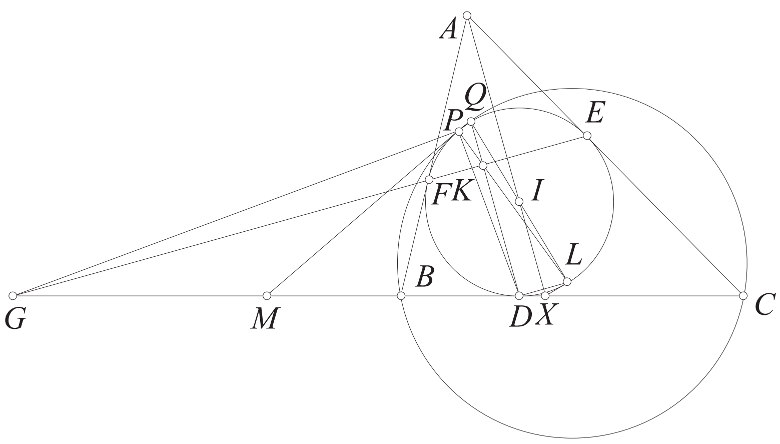
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn qua B, C tiếp xúc (I) tại P. K là hình chiếu của D lên EF. PK cắt (I) tại L khác P. Chứng minh rằng $DL \perp AI$.

Lời giải



Gọi DK cắt (I) tại Q khác D. Gọi EF cắt BC tại G. Tiếp tuyến chung tại P cắt BC tại M thì $MD^2 = MP^2 = MB.MC$ mà $(BC, DG) = -1$ nên M là trung điểm DG. Do đó tam giác GPD vuông tại P nên tứ giác $GPKD$ nội tiếp. Từ đó chú ý BC tiếp xúc (I) tại D nên $\angle PKQ = \angle PGD = 90° - \angle PDG = 90° - \angle PQD$ do đó $\angle KPQ = 90°$. Từ đó PK cắt (I) tại L khác P thì QL là đường kính của (I) nên $DL \perp DQ \parallel AI$.

Nhận xét

Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 Toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 Toán THPT chuyên SP cho lời giải tại đây. Tác giả nhận được lời giải của các bạn **Lê Bá Thành** lớp 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định, **Nguyễn Tiến Hoàng** lớp 10 Toán, **Phạm Hoàng Minh** lớp 11 Toán trường PTNK, ĐHQG TPHCM, bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 11 Toán, THPT chuyên KHTN. Bài toán này được tác giả phát triển từ bài toán số 6 chọn đội tuyển Trung Quốc ngày 2. Bài toán lần đầu tiên được mở rộng bởi bạn **Phạm Ngọc Khánh** ở đây và được tác giả mở rộng hơn nữa như sau

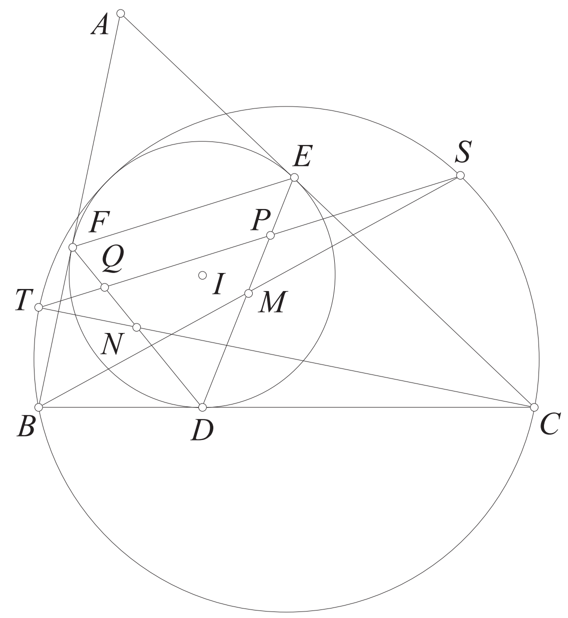
Cho tam giác ABC với P, Q là hai điểm đẳng giác. P_a, P_b, P_c là hình chiếu của P trên BC, CA, AB. Q_a, Q_b, Q_c là hình chiếu của Q trên BC, CA, AB. Khi đó sáu điểm $P_a, P_b, P_c, Q_a, Q_b, Q_c$ nằm trên đường tròn (K). Q_k là hình chiếu của P_a trên Q_bQ_c. P_k là hình chiếu của Q_a trên P_bP_c. P_l là đối xứng của P_a qua trung trực P_bP_c. Q_l là đối xứng của Q_a qua trung trực Q_bQ_c. P_kP_l cắt (K) tại P^*. Q_kQ_l cắt (K) tại Q^*. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, P^*, Q^* cùng thuộc một đường tròn.

Ngoài ra bạn **Nguyễn Đức Bảo** đã chỉ ra mối liên hệ giữa bài toán này và bài toán G4 trong Shortlist 2011. Kết hợp hai bài toán tôi xin đề xuất một bài toán tiếp xúc khá thú vị như sau

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và đường cao AH. P đối xứng A qua trung trực BC. PH cắt (O) tại Q khác P. Tiếp tuyến qua A của (O) cắt các tiếp tuyến qua B, C của (O) tại S, T. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác QST tiếp xúc (O).

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của DE, DF, EM, FN. BM, CN theo thứ tự cắt PQ tại S, T. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, S, T cùng nằm trên một đường tròn tiếp xúc (I).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

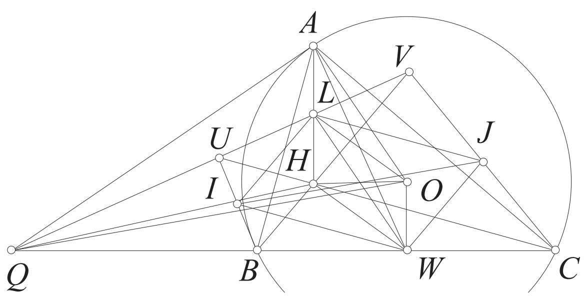
Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). P nằm trên cạnh BC. Các đường tròn $(PCA), (PAB)$ lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A. K là tâm ngoại tiếp tam giác AEF. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại Q. Trên QK lấy S, T sao cho $ET \perp AC, FS \perp AB$. M, N là trung điểm CT, BS. Chứng minh rằng $MN \parallel OQ$.

Lời giải

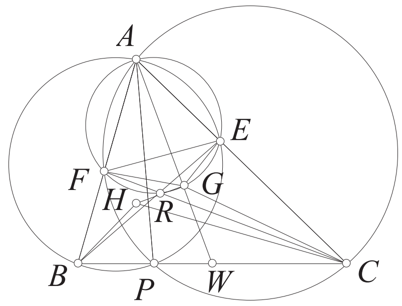
Bổ đề 1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với trực tâm H. L là trung điểm AH. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại Q. HB, HC cắt QL tại V, U. I, J là trung điểm của BU, CV. Chứng minh rằng $IJ \parallel OQ$.

Chứng minh. Gọi W là trung điểm BC. Theo tính chất quen thuộc thì HA song song và gấp đôi OW nên $AOWL$ là hình bình hành, do đó $WL \parallel OA \perp QA$. Từ đó L là trực tâm tam giác AQW nên $QL \perp AW$. Ta dễ suy ra các tam giác $\triangle HVL \sim \triangle CAW$ và $\triangle HUL \sim \triangle BAW$ g.g. Từ đó $VL.CW = AL.AW = UL.BW$, vậy L là trung điểm UV. Trong tứ giác $BCVU$ thì $LIWJ$ là hình bình hành. Mặt khác do HA song song và gấp đôi OW nên $HLOW$ là hình bình hành, do đó IJ đi qua trung điểm OH. Cũng từ tính chất đường thẳng Newton-Gauss thì IJ đi qua trung điểm HQ. Do đó $IJ \parallel OQ$.

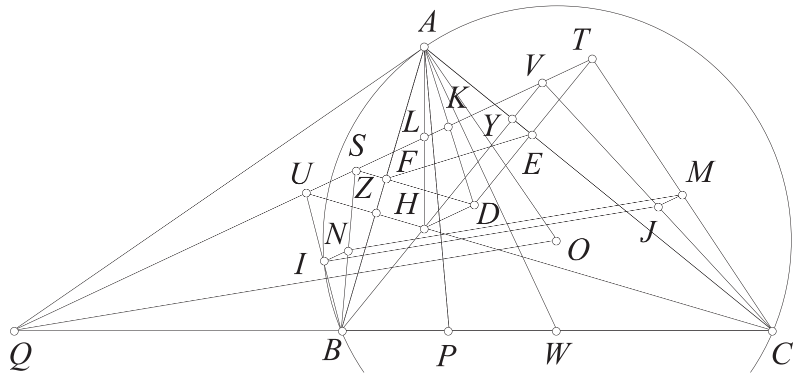


Bổ đề 2. Cho tam giác ABC với trực tâm H. P nằm trên cạnh BC. Các đường tròn $(PCA), (PAB)$ lần lượt cắt CA, AB tại E, F khác A. Khi đó đường tròn (AEF) luôn đi qua hình chiếu của H trên trung tuyến qua A.

Chứng minh. Ta thấy $\angle AEB + \angle AFC = \angle APB + \angle APC = 180°$ nên BE, CF cắt nhau tại R nằm trên cả (AEF) và (BHC). Gọi (AEF) cắt (BHC) tại G khác Y. Gọi AY cắt BC tại W. Ta thấy $\angle GAC = \angle GRE = \angle GCB$. Do đó $WC^2 = WZ.WA$.



Tương tự $WB^2 = WZ.WA$ nên W là trung điểm BC. Dễ chứng minh G là hình chiếu của H trên AW.



Giải bài toán. Đường cao BY, CZ của tam giác ABC cắt nhau tại H. L, I, J, W là trung điểm AH, BU, CV, BC. BY, CZ cắt QL tại V, U. Theo bổ đề 1 ta đã có $IJ \parallel OQ$. Ta sẽ chứng minh $MN \parallel IJ$, thật vậy. Gọi TE cắt SF tại D thì AD là đường kính của (AEF). Do AEF đi qua hình chiếu của H trên AW nên $QL \parallel HD \perp AW$. Từ bổ đề 1 thì $AW \perp QL$, do đó QL đi qua K và đồng thời $HD \parallel VT \parallel US$. Ta suy ra $US = HD = VT$. Mặt khác dễ thấy US song song và gấp đôi IN còn VT song song và gấp đôi JM. Ta thu được $IJMN$ là hình bình hành.

Nhận xét

Bài toán là mở rộng bổ đề 1. Bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 Toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An cho lời giải tại đây. Tác giả nhận được lời giải và mở rộng của bạn **Trần Việt Hoàng** lớp 11 Toán trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn qua B, C tiếp xúc (I) tại P. K là hình chiếu của D lên EF. PK cắt (I) tại L khác P. Chứng minh rằng $DL \perp AI$.

Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Mỗi tuần một bài toán

Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

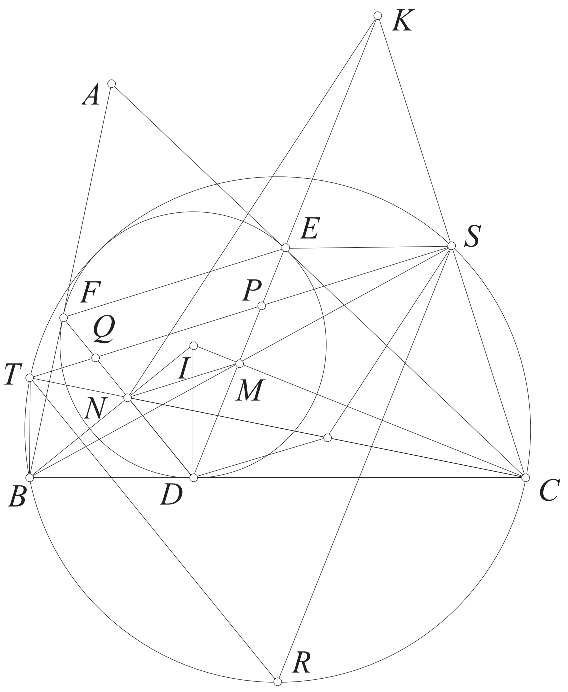
Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của DE, DF, EM, FN. BM, CN theo thứ tự cắt PQ tại S, T. Chứng minh rằng bốn điểm B, C, S, T cùng nằm trên một đường tròn tiếp xúc (I).

Lời giải

Phần đầu của lời giải này dựa trên lời giải của bạn **Nguyễn Đức Bảo** lớp 11 Toán THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An tại đây, còn phần sau là từ đáp án gốc của tác giả.



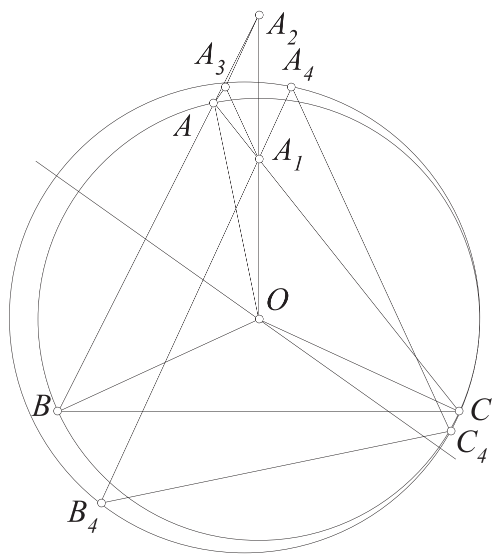
Ta thấy $IB.IN = ID^2 = IC.IM$ nên tứ giác $BCMN$ nội tiếp. Lại dễ thấy $PQ \parallel MN$ nên $\angle TSB = \angle NMB = \angle TCB$. Từ đó tứ giác $BCST$ nội tiếp. Ta thấy $\angle SMK = \angle BMD = \angle BMC - 90^\circ = \angle BNC - 90^\circ = \angle DNC = \angle DKC$ mặt khác do tam giác MSK vuông tại M nên MS đi qua trung điểm KC. Gọi DE cắt đường tròn (DNC) tại K khác D. Dễ thấy tam giác MNK và MPS cũng đồng dạng g.g. Từ đó $\frac{NK}{MS} = \frac{MN}{MP} = \frac{2MN}{MD}$. Ta cũng dễ thấy hai tam giác NMK và NDC đồng dạng g.g suy ra hai tam giác NMD và NCK đồng dạng c.g.c. Từ đó $\frac{MN}{MD} = \frac{KN}{KC}$. Vậy $\frac{NK}{MS} = \frac{2MN}{MD} = \frac{KN}{KC}$ nên $KC = 2MS$. Kết hợp với MS đi qua trung điểm KC nên S là trung điểm KC hay $SM = SC$. Chứng minh tương tự $TN = TB$. Mặt khác dễ thấy hai tam giác cân SMC và TNB đồng dạng g.g nên các đường cao kẻ từ S, T của hai tam giác này cắt nhau tại R trên đường tròn $BCST$. Chú ý rằng các đường cao này cũng là trung trực MC và NB do đó. Áp dụng bổ đề ở Tuần 4 tháng 11 năm 2016 cho tâm nội tiếp, ta thu được $(BCST)$ tiếp xúc (I).

Nhận xét

Tác giả tạo ra bài toán này là dựa trên bổ đề ở bài toán Tuần 4 tháng 11 năm 2016 và sự kiện các tam giác SMC, TNB cân. Cách chứng minh hai tam giác cân của bạn **Bảo** có phần mới và sáng tạo. Ngoài ra cũng ở đây có các bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 12 toán THPT chuyên SP và **Nguyễn Hồng Sơn** lớp 10 toán THPT chuyên KHTN cho các lời giải khác. Tác giả cũng nhận được các lời giải khá thú vị khác từ các bạn **Đỗ Xuân Long, Trần Anh Tài** lớp 11 Toán, THPT chuyên KHTN.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Trung trực BC cắt CA, AB tại A_1, A_2. Trên trung trực A_1A_2 lấy A_3 sao cho AA_3 vuông góc với đường thẳng Euler của tam giác ABC. Lấy A_4 đối xứng A_3 qua A_1A_2. Dựng tương tự các điểm B_4, C_4. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_4B_4C_4$ tiếp xúc (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

