Mỗi tuần một bài toán

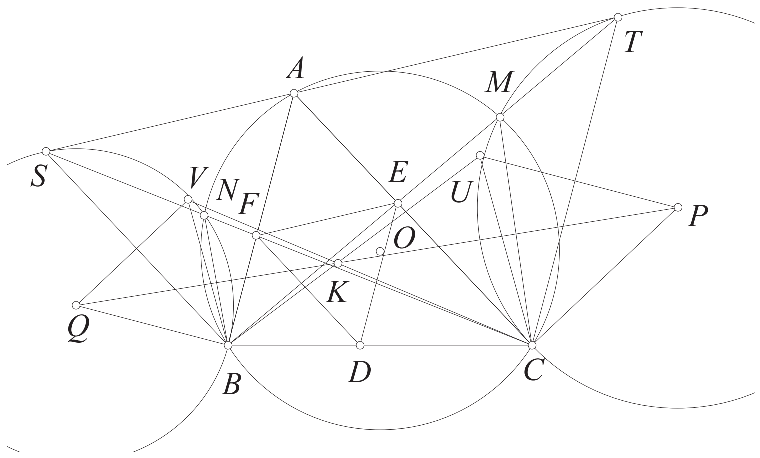
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D, E, F lần lượt thuộc đoạn BC, CA, AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. BE, CF lần lượt cắt (O) tại M, N khác B, C. Trên trung trực CM, BN lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $CP \perp CA, BQ \perp BA$. Chứng minh rằng PQ đi qua tâm ngoại tiếp tam giác DEF.

Lời giải



Gọi (P) là đường tròn đi qua C tiếp xúc AC. Gọi BM cắt (P) tại T khác M thì $EC^2 = EM.ET$ do đó $\frac{EC}{ET} = \frac{EM}{EC} = \frac{EA}{EB}$ suy ra $CT \parallel AB$. Từ đó $\frac{FB}{FA} = \frac{DB}{DC} = \frac{EB}{ET}$ nên $AT \parallel EF$. Từ đó hai tam giác DEF và CTA có cạnh tương ứng song song nên nếu U là tâm ngoại tiếp tam giác CTA thì B, K, U thẳng hàng và $CU \parallel DK$. Tương tự gọi CN cắt (Q) tại S khác N và V là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SAB thì C, K, V thẳng hàng và $BV \parallel DK$. Từ đó $CU \parallel BV$. Mặt khác dễ thấy $PU \perp CT \parallel AC \perp BQ$ nên $PU \parallel QB$. Tương tự $QV \parallel CV$. Vậy hai tam giác CUP và VBQ có cạnh tương ứng song song nên BU, CV, PQ đồng quy tại K.

Nhật xét

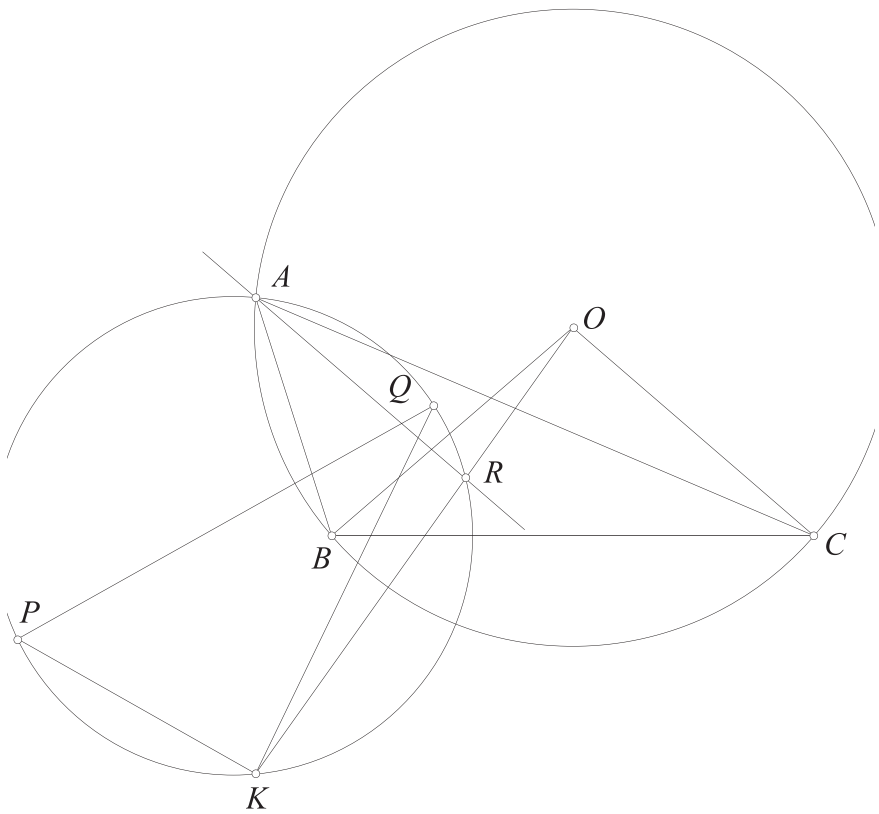
Bài toán là kết quả tổng quát đề thi trong Shortlist của kỳ thi ELMO năm 2013. Các bạn **Phạm Ngọc Khánh** lớp 11 Toán THPT chuyên SP và và **Nguyễn Đình Hoàng** lớp 10 toán, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An đã tham gia giải tại đây. Tác giả còn nhận được lời giải qua email bởi bạn **Đỗ Xuân Long** lớp 10 toán THPT chuyên KHTN và bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 đại học ngoại thương.

Chú ý rằng PC, QB cắt nhau trên (O) là đối xứng của A qua O. Từ đó bài toán có một biến thể khá thú vị như sau khi thay điểm đối tâm A bằng một điểm thuộc (O) nằm trên đường thẳng vuông góc với EF kẻ từ A.

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có D, E, F thuộc BC, A, AB sao cho $DE \parallel AB, DF \parallel AC$. BE, CF cắt (O) tại M, N khác B, C. Đường thẳng qua A vuông góc EF cắt (O) tại P. PC, PB lần lượt cắt trung trực CM, BN tại Q, R. Chứng minh rằng QR đi qua tâm ngoại tiếp tam giác DEF.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) cố định với B, C cố định và A di chuyển trên (O). Gọi P, Q là hai điểm Isodynamic của tam giác ABC. K đối xứng A qua BC. OK cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác KPQ tại R khác K. Chứng minh rằng đường thẳng AR luôn đi qua một điểm cố định khi A thay đổi.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

