GÓC ĐỊNH HƯỚNG vào các bài toán ĐỒNG VIÊN, THẲNG HÀNG...

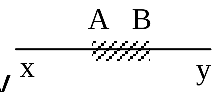
Sau đây ta chỉ nêu 1 vài ứng dụng của **GÓC ĐỊNH HƯỚNG vào các bài toán ĐỒNG VIÊN, THẲNG HÀNG...**

I) Mục đích việc sử dụng góc định hướng sẽ giúp lời giải ngắn gọn, trong khi dùng góc không có hướng phải phụ thuộc vào hình vẽ, phải xét nhiều vị trí tương đối của các hình.

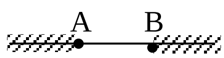
II) Các mệnh đề về góc định hướng có liên quan sự đồng viên và thẳng hàng:

1. Cho A $\neq$ B

a) $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) = 2k\pi, k \in Z \leftrightarrow$ M$\in$ tia Ax hoặc M$\in$ tia By



b) $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) = (2k+1)\pi,\ k \in Z \leftrightarrow$ M$\in$ đoạn AB

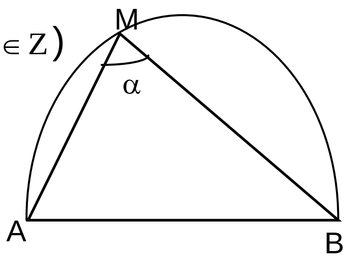


c) (MA, MB) = $k\pi,\ k \in Z \leftrightarrow M \in$ đtAB

d) M, A, B thẳng hàng $\leftrightarrow$ (MA, MB) $\equiv 0 \pmod{\pi}$

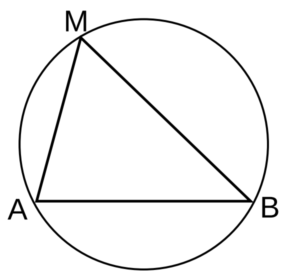
e) $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \leftrightarrow$ M thuộc 1 cung chứa góc α qua A, B

($\alpha \neq k\pi, k \in Z$)



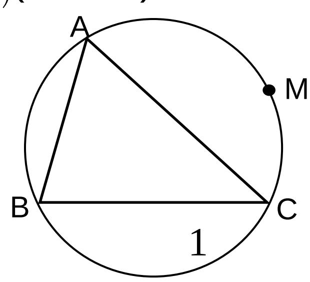
f) (MA, MB) $\equiv \alpha \pmod{\pi} \leftrightarrow$ M thuộc 1 đường tròn qua A, B

($\alpha \neq k\pi, k \in Z$)



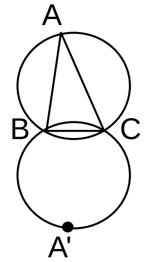
2. Cho tam giác ABC ta có:

a) $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \pmod{2\pi} \leftrightarrow M \in$ cung BAC của đường tròn (ABC)



b) (MB, MC) $\equiv$ (AB, AC) (modπ) $\leftrightarrow$ M $\in$ đường tròn (ABC).

c) (MB, MC) $\equiv$ (AC, AB) (modπ) $\leftrightarrow$ M $\in$ đường tròn (A'BC) đối xứng của



đường tròn (ABC) qua đt BC.

3.Cho đường tròn (O); A, B, M nằm trên (O) thì

a) 2(MA, MB) $\equiv$ $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ (mod 2π)

b) 2(MA, MB) $\equiv$ (OA, OB) (mod π)

4. Quan hệ giữa góc định hướng và phép biến hình

a) $Đ_{\Delta}$: a $\rightarrow$ b Khi và chỉ khi (a, Δ) $\equiv$ (Δ, b) (mod π)

b) $Đ_{\Delta}$: a $\rightarrow$ a'

b $\rightarrow$ b'

Thì (a, b) $\equiv$ (b', a') (mod π)

c) Phép biến hình f là tịnh tiến, đối xứng tâm, quay, vị tự

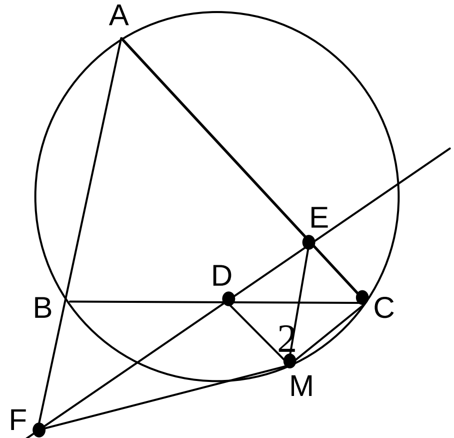
f: a $\rightarrow$ a'
b $\rightarrow$ b'
Thì (a, b) $\equiv$ (a', b') (mod π)

III) Bài tập vận dụng

<u>Bài 1:</u> Cho ΔABC, M $\in$ mp(ABC); D, E, F lần lượt thuộc các đường thẳng (BC), (AC), (AB) sao cho: (MD, BC) $\equiv$ (ME, CA) $\equiv$ (MF, AB) (mod π)

CMR: D, E, F thẳng hàng $\leftrightarrow$ M $\in$ đường tròn (ABC).

<u>HD</u>



+ Từ giả thiết $(MD, BC) \equiv (ME, CA) \pmod{\pi}$

$\rightarrow (MD, CD) \equiv (ME, CE) \pmod{\pi}$

$\rightarrow$ M, D, E, C đồng viên (1)

Tương tự, $(MD, BC) \equiv (MF, AB) \pmod{\pi}$

$\rightarrow (DM, DB) \equiv (FM, FB) \pmod{\pi}$

$\rightarrow$ D, M, F, B đồng viên (2)

Do đó: D, E, F thẳng hàng $\leftrightarrow (DE, DM) \equiv (DF, DM) \pmod{\pi}$

$\leftrightarrow (CE, CM) \equiv (BF, BM) \pmod{\pi}$

$\leftrightarrow (CA, CM) \equiv (BA, BM) \pmod{\pi}$

$\leftrightarrow$ A, B, M, C đồng viên

$\leftrightarrow M \in$ đường tròn (ABC)

Tóm lại, D, E, F thẳng hàng $\leftrightarrow M \in$ đường tròn (ABC)

(Đường thẳng (DEF) là đường thẳng Simson mở rộng.)

Bài 2: Cho tứ giác lồi ABCD. Xét 1 điểm M di động trên đường thẳng AB

sao cho: $M \neq A$ và $M \neq B$.Gọi N là giao điểm thứ hai của đường tròn (MAC)

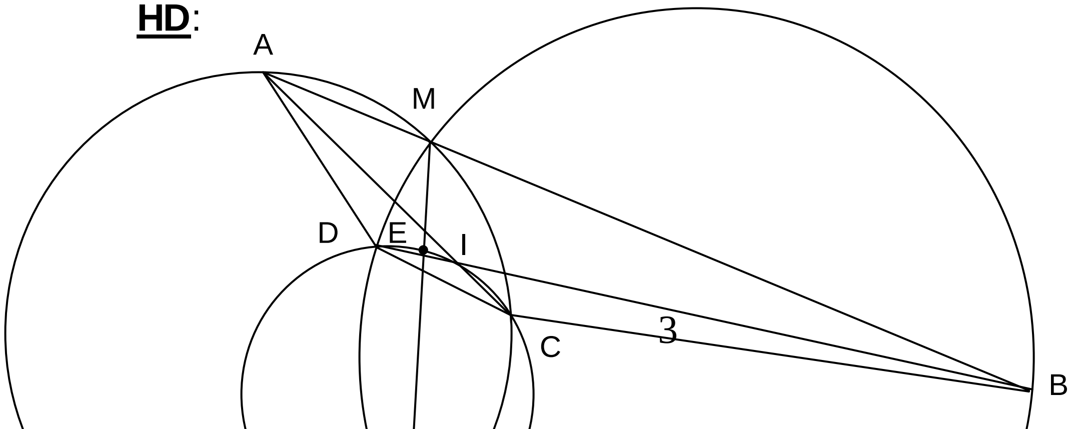
và đường tròn (MBD) $(M \neq N)$. Chứng minh rằng:

a) N di động trên 1 đường tròn cố định.

b) Đường thẳng MN luôn đi qua 1 điểm cố định

(HSGQG bảng A 05 - 06)

HD:



a) Gọi I = AC $\cap$ BD

+ Từ N, D, M, B đồng viên

$\to$ (ND, NM) $\equiv$ (BD, BM) (mod π)

$\to$ (ND, NM) $\equiv$ (BD, BA) (mod π) (1)

+ Từ N, C, M, A đồng viên

$\to$ (NM, NC) $\equiv$ (AM, AC) (mod π)

$\to$ (NM, NC) $\equiv$ (AB, AC) (mod π) (2)

(1) + (2) rồi dùng hệ thức Chasles ta có

(ND, NC) $\equiv$ (BD, AC) (mod π)

$\to$ (ND, NC) $\equiv$ (ID, IC) (mod π)

$\to$ N $\in$ đường tròn (IDC) cố định.

b) Gọi E là giao điểm của MN và cung DIC (E $\neq$ N)

+ Từ N, C, M, A đồng viên

$\to$ (NC, NM) $\equiv$ (AC, AM) (mod π)

$\to$ (NC, NE) $\equiv$ (AC, AB) (mod π)

$$\to \left[\begin{array}{ll} \left(\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) & (\text{mod } 2\pi) \\ \left(\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) + \pi & (\text{mod } 2\pi) \end{array}\right.$$

$\to \sin\angle ENC = \left|\sin\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)\right| = \sin\angle CAB = \sin\alpha$ (Đặt $\alpha = \angle CAB$)

$\to$ EC = 2r$\sin\angle$ENC = 2r$\sin\alpha$ = const (r là bán kính đường tròn (ICD))

$\to$ E cố định

Kết luận: MN luôn đi qua E cố định.

Bài 3: Cho hình thang cân ABCD có CD là đáy lớn. Xét 1 điểm M di động trên đt CD sao cho M không trùng với C và với D. Gọi N là giao điểm thứ 2 khác M của đường tròn (BCM) và đường tròn (DAM)

a) CMR: N di động trên một đường tròn cố định.

b) CMR: đt MN luôn đi qua 1 điểm cố định.

(HSGQG bảng B 05 - 06)

HD:

a) D, M, N, A đồng viên $\to$ (NA, NM) $\equiv$ (DA, DM) (mod π) (1)

C, M, N, B đồng viên $\to$ (NM, NB) $\equiv$ (CM, CB) (mod π) (2)

(1) + (2): (NA, NB) $\equiv$ (DA, CB) (mod π) $\to$ N di động trên 1 đường tròn

(C) cố định.

b)

Cách 1

Giả sử MN cắt (C) tại E (E $\neq$ N), ta có:

. A, D, N, M đồng viên

$\to$ (NA, NM) $\equiv$ (DA, DM) (mod π) (3)

. ΔFDC cân

$\to$ (DF, DC) $\equiv$ (CD, CF) (mod π)

$\to$ (DA, DM) $\equiv$ (CM,CB) (mod π)

$\to$ (DA, DM) $\equiv$ (NM, NB) (mod π) (4)

(3), (4) $\to$ (NA, NM) $\equiv$ (NM, NB) (mod π)

$\to$ (NA, NE) $\equiv$ (NE, NB) (mod π)

$\to$ 2(NA, NE) $\equiv$ 2(NE, NB) (mod 2π)

$\to$ $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OE}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OB}\right)$ (mod 2π) $\to$ E là điểm giữa cung AEB

Kết luận: MN luôn đi qua E cố định.

Cách 2: Gọi F là giao điểm của DA và CB.

Ta có: $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FB}.\overrightarrow{FC}$

$\rightarrow$ P(F) / (MAD) = P(F) / (MBC)

Mà MN là trục đẳng phương của (MAD) và (MBC)

Nên MN đi qua F cố định.

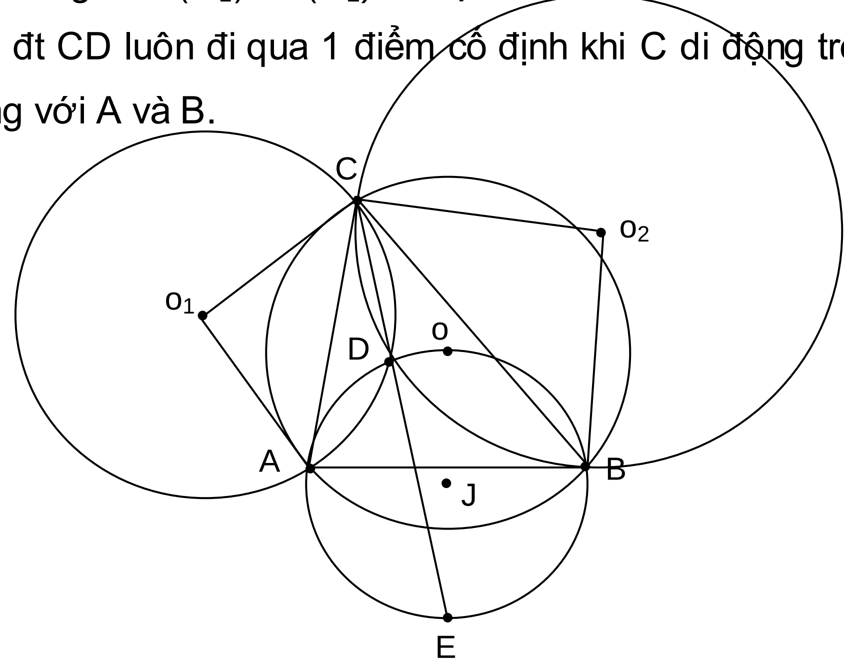
Bài 4: Trong mặt phẳng cho đường tròn (O) tâm O, bán kính R và 2 điểm A, B cố định trên đường tròn đó sao cho A, B, O không thẳng hàng. Xét 1 điểm C trên (O), C không trùng với A và B. Dựng các đường tròn sau:

(O_1) đi qua A và tiếp xúc với BC tại C; (O_2) đi qua B và tiếp xúc AC tại C.

Hai đường tròn (O_1) và (O_2) cắt lại nhau ở điểm D khác C.

CMR: đt CD luôn đi qua 1 điểm cố định khi C di động trên (O) và C không trùng với A và B.

HD:



. Chứng minh : D thuộc đường tròn (OAB)

. (DA,DB) $\equiv$ (DA, DC) + (DC, DB) (mod π) (1)

. (DA, DC) $\equiv$ (AD, AC) + (CA, CD) (mod π)

$\equiv$ (CD, CB) + (CA, CD) (mod π)

$\to$ (DA, DC) $\equiv$ (CA, CB) (mod π) (2)

Tương tự, (DB, DC) $\equiv$ (CB, CA) (mod π)

$\to$ (DC, DB) $\equiv$ (CA, CB) (mod (π) (3)

(2) + (3): (DA, DB) $\equiv$ 2(CA, CB) (mod π)

$\equiv$ (OA, OB) (mod π)

$\to$ (DA, DB) $\equiv$ (OA, OB) (mod π) $\to$ D thuộc đường tròn (OAB)

. CD kéo dài cắt đường tròn (OAB) tại điểm thứ 2 là E, ta có:

$\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$ (mod 2π) (góc ngoài)

$\equiv\left(\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB}\right)+\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$ (mod 2π)(vì CB tiếp xúc (O_1) tại C)

$\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ (mod 2π)

Vậy $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ (mod 2π) (4)

Tương tự $\left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$ (mod 2π)

$\to$ $\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ (mod 2π) (5)

Từ (4), (5) $\to$ $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{DE},\overrightarrow{DB}\right)$ (mod 2π)

$\to$ (DA, DE) $\equiv$ (DE, DB) (mod π)

$\to$ 2(DA, DE) $\equiv$ 2(DE, DB) (mod 2π)

$\to$ $\left(\overrightarrow{JA},\overrightarrow{JE}\right)\equiv\left(\overrightarrow{JE},\overrightarrow{JB}\right)$ (mod 2π) $\to$ E là điểm chính giữa cung AEB của đường tròn (J) $\to$ E cố định.

Bài 5: Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). MN là đường kính của (O). Chứng minh rằng: các đường thẳng Simson của ΔABC ứng với 2 điểm M, N thì vuông góc nhau.

HD:

Ta có: (XY, ZT) $\equiv$ (XY, MY) + (MY, NT) + (NT, ZT) (mod π)

$\equiv$ (BX, BM) + O + (BN, BZ) (mod π)

$\equiv$ (BZ, BM) + (BN, BZ) (mod π)

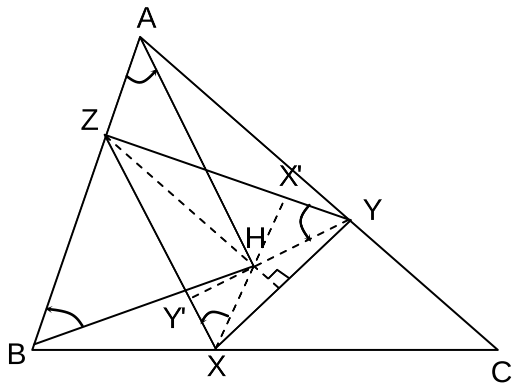
$\equiv$ (BN, BM) (mod π)

$\equiv \frac{\pi}{2}$ (modπ) (MN là một đường kính)

Kết luận: XY $\perp$ ZT

Bài 6: Cho ΔABC. Các điểm X, Y, Z lần lượt thuộc các đt BC, CA, AB sao cho ΔXYZ đồng dạng ΔABC. CMR: Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC là trực tâm ΔXYZ

HD:



. Gọi H là trực tâm ΔXYZ

a) Chứng minh: HA = HB (1)

Để chứng minh (1) ta chứng minh (AB, AH) $\equiv$ (BH, BA) (mod π)

Ta có: . H, Z', X, Y' đồng viên

$\rightarrow$ (HZ', HY') $\equiv$ (XZ', XY') (mod π)

$\rightarrow$ (HZ, HY) $\equiv$ (XY, XZ) (mod π)

$\rightarrow$ (HZ, HY) $\equiv$ (AB, AC) (mod π) (Vì ΔABC ~ ΔXYZ)

$\rightarrow$ (HZ, HY) $\equiv$ (AZ, AY) (mod π)

$\rightarrow$ H, Z, Y, A đồng viên

$\rightarrow$ (AZ, AH) $\equiv$ (YZ, YH) (modπ)

$\rightarrow$ (AB, AH) $\equiv$ (YX', YY' (mod π) (1)

Tương tự H, Z, X, B đồng viên

$\rightarrow$ (BH, BZ) $\equiv$ (XH, XZ) (mod π)

$\rightarrow$ (BH, BA) $\equiv$ (XX', XY') (mod π) (2)

Ta cũng có: X, X', Y, Y' đồng viên

$\rightarrow$ (YX', YY') $\equiv$ (XX', XY') (mod π) (3)

Từ (1), (2), (3) $\rightarrow$ (AB, AH) $\equiv$ (BH, BA) (mod π)

$\rightarrow$ ΔAHB cân tại H $\rightarrow$ HA = HB (*)

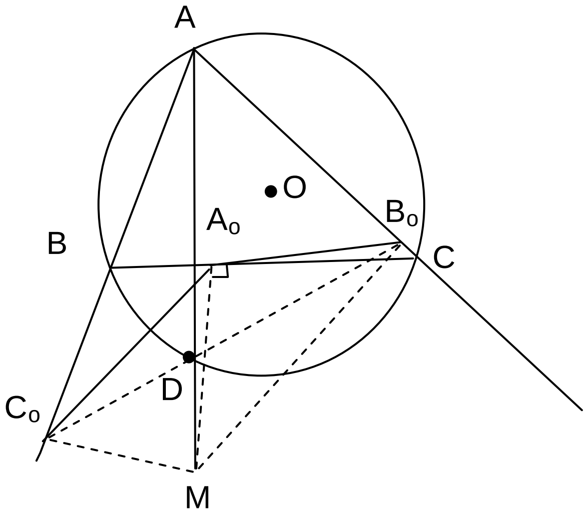
Tương tự HB = HC (**)

Từ (*), (**) $\rightarrow$ H là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

<u>Bài 7</u>: (Công thức Euler về diện tích tam giác bàn đạp)

Cho ΔABC, M là một điểm tuỳ ý thuộc mặt phẳng chứa ΔABC. Gọi A_o, B_o, C_o lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên các đường thẳng BC, CA, AB.

Chứng minh rằng: $S_{A_oB_oC_o} = \frac{1}{4}\left|1 - \frac{OM^2}{R^2}\right| .S_{ABC}$



- Chứng minh lại định lý Simson như sau:

  Ta có A_o, B_o, C_o thẳng hàng

$\leftrightarrow$ $(A_oB_o, A_oM) \equiv (A_oC_o, A_oM)$ (mod π)

$\leftrightarrow$ $(CB_o, CM) \equiv (BC_o, BM)$ (mod π)(vì M, A_0, B_0, C đồng viên và M, A_0, C_0,

B đồng viên)

$\leftrightarrow$ (CA, CM) $\equiv$ (BA, BM) (mod π)

$\leftrightarrow$ M $\in$ đường tròn (ABC)

Do đó ta xét 2 trường hợp sau:

<u>TH1</u>: M $\in$ đường tròn (ABC) $\rightarrow$ A_o, B_o, C_o thẳng hàng

(1) $\leftrightarrow$ O = O (đúng).

TH2: M không thuộc đường tròn (ABC) $\rightarrow$ A_o, B_o, C_o không thẳng hàng.

$$S_{A_oB_oC_o} = \frac{1}{2} C_oA_oC_oB_o \sin\angle A_oC_oB_o \qquad \text{(I)}$$

+ Gọi D là giao điểm thứ 2 của AM và đường tròn (ABC) (D $\neq$ A)

+ C_oA_o = MBsinB , C_oB_o = MAsinA ; cần chứng minh $\sin A_oC_oB_o$ = sinMBD

Ta có: A, C_o, M, B_o đồng viên $\rightarrow$ $(C_oM, C_oB_o) \equiv (AM, AB_o) (\text{mod } \pi)$
B, C_o, M, A_o đồng viên $\rightarrow$ $(AM, AB_o) \equiv (BM, BA_o) \ (\text{mod } \pi)$

Do đó: $(C_oA_o, C_oB_o) \equiv (C_oM, C_oB_o) - (C_oM, C_oA_0) \quad (\text{mod } \pi)$
$\equiv (AM, AB_o) - (BM, BA_o) \quad (\text{mod } \pi)$
$\equiv (AD, AC) - (BM, BC) \quad (\text{mod } \pi)$
$\equiv (BD, BC) + (BC, BM) \quad (\text{mod } \pi)$
$\equiv (BD, BM) \ (\text{mod } \pi)$

Suy ra $(C_oA_o, C_oB_o) \equiv (BD, BM) \ (\text{mod } \pi)$

$\rightarrow \sin\angle A_oC_oB_o = \sin\angle MBD$

Từ (I) $\rightarrow$ $S_{A_oB_oC_o} = \frac{1}{2}(MB\sin B)(MA\sin A)\sin\angle MBD \qquad$ (II)

Định lý hàm số sin trong ΔMBD

$$\frac{MD}{\sin\angle MBD} = \frac{MB}{\sin\angle BDM} = \frac{MB}{\sin\angle BDA} = \frac{MB}{\sin\angle BCA} = \frac{MB}{\sin C}$$

$\rightarrow$ MBsin$\angle$MBD = MDsinC (III)

Thay (III) vào (II) ta được:

$$S_{A_oB_oC_o} = \frac{1}{2} MAMD\sin A\sin B\sin C = \frac{1}{2}\left|R^2 - OM^2\right| \frac{a}{2R}.\frac{b}{2R}.\frac{c}{2R}$$

Vậy, $S_{A_oB_oC_o} = \frac{1}{4}\left|1 - \frac{OM^2}{R^2}\right| .S_{ABC}$

Bài 8: Tam giác ABC có trực tâm H, M là điểm tuỳ ý thuộc đường tròn (ABC) ngoại tiếp ΔABC. Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là các điểm đối xứng của M qua các đường thẳng BC, CA, AB. CMR: H, M_1, M_2, M_3

thẳng hàng (đt Steiner).

HD:

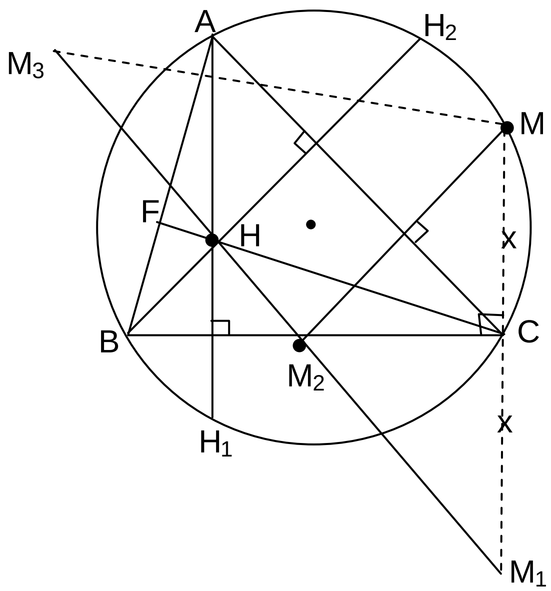
. A, F, E, C đồng viên

$\to$ (AF, AE) $\equiv$ (CF, CE) (mod π)

$\to$ (AB, AH_1) $\equiv$ (CH, CB) (mod π)   (với H_1 = $Đ_{BC}$(H))

$\to$ (AB, AH_1) $\equiv$ (CB, CH_1) (mod π)

$\to$ $H_1 \in$ (ABC).



$Đ_{BC}$: H α H_1
M_1 α M
C α C
(CH) $\to$ (CH_1)
(HM_1) $\to$ (H_1M)

Suy ra (CH, HM_1) $\equiv$ (H_1M, CH_1) (mod π)   (1)

Tương tự $Đ_{CA}$

Suy ra (CH, HM_2) $\equiv$ (H_2M, CH_2) (mod π)   (2)

Mà H_1, M, C, H_2 đồng viên

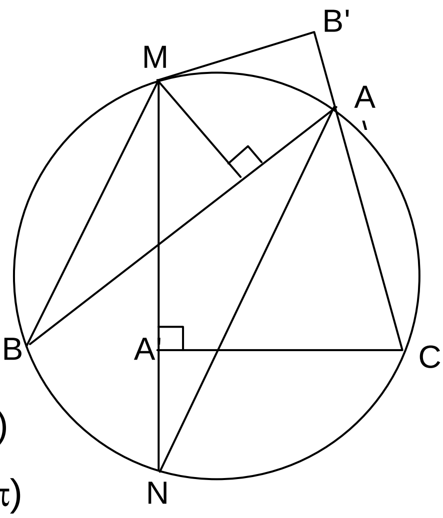
Nên (H_1M, H_1C) $\equiv$ (H_2M, H_2C) (mod π)   (3)

(1), (2), (3) $\to$ (CH, HM_1) $\equiv$ (CH, HM_2) $\to$ H, M_1, M_2 thẳng hàng.

Tương tự H, M_1, M_3 thẳng hàng $\to$ đpcm.

- **Phương của đường thẳng Simson:**

<u>Bài 9</u>: Từ 1 điểm M trên vòng tròn ngoại tiếp ΔABC, vẽ 1 đường thẳng vuông góc với BC gặp đường tròn (ABC) tại N.Ta luôn có AN song song với đt Simson ứng với M.



Chứng minh:

. M, C', A', B đồng viên

→ (BM, BC') ≡ (A'M, A'C') (mod π)

→ (BM, BA) ≡ (NM, A'C') (mod π) (1)

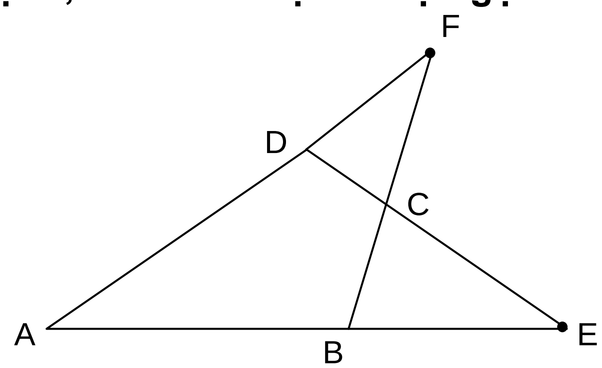
. M, B, N, A đồng viên

→ (BM, BA) ≡ (NM, NA) (mod π) (2)

(1), (2) → (NM, A'C') ≡ (NM, NA) (mod π)

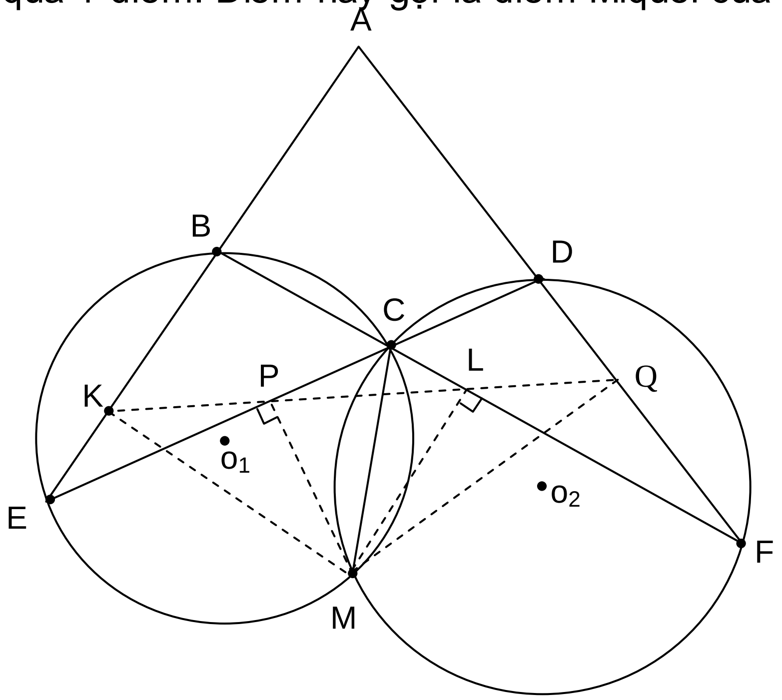
→ A'C' // NA.

- **Tứ giác toàn phần: là hình gồm tứ giác ABCD có AB cắt CD tại E, AB cắt BC tại F được gọi là tứ giác toàn phần.**



<u>Bài 10</u>: Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCE, CDF, ADE, ABF cùng đi qua 1 điểm. Điểm này gọi là điểm Miquel của tứ giác toàn phần.

CM:



- Gọi M là giao điểm thứ 2 của 2 đường tròn (EBC) và (FDC)

- Gọi K, L, P, Q lần lượt là hình chiếu của M lên các đường thẳng chứa

các cạnh AB, BC, CD, DA.

Dể chứng minh K, P, L, Q thẳng hàng (đường thẳng Simson)

+ K, P, Q ⊢⊢ nên M thuộc đường tròn (EAD)

+ K, L, Q ⊢⊢ nên M thuộc đường tròn (ABF) $\rightarrow$ đpcm.

Bài 11: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Với E là một điểm bất kỳ nằm trên (O), ta gọi K, L, M, N lần lượt là hình chiếu của E lên DA, AB, BC, CD. CMR:

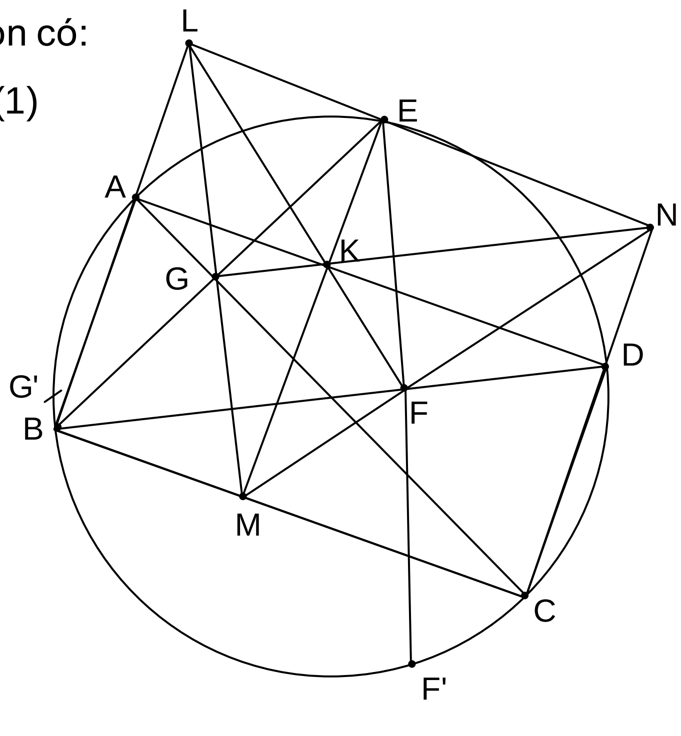
N là trực tâm của ΔKLM $\leftrightarrow$ ABCD là hình chữ nhật.

(Đề chọn đội tuyển dự JBMO của Rumani, 2001)

Cách1:

Gọi G và F lần lượt là hình chiếu của E lên AC và BD

Theo đl đường thẳng Simson có:



L, K, F ⊢⊢⊣ (ΔABD) (1)

M, N, F ⊢⊢⊣ (ΔBCD) (2)

K, G, N ⊢⊢⊣ (ΔACD) (3)

M, L, G ⊢⊢⊣ (ΔABC) (4)

EG kéo dài cắt (O) tại G'

EF kéo dài cắt (O) tại F'

(1) $\rightarrow$ AF' // (LKF)

(2) $\rightarrow$ CF' // (MNF)

(3) $\rightarrow$ DG' // (GKN)

(4) $\rightarrow$ BG' // (LGM)

<u>Điều kiện cần</u>: Giả sử N là trực tâm ΔKLM, ta có:

. (GKN) $\perp$ (LGM) $\rightarrow$ DG' $\perp$ BG'

$\rightarrow \angle$DG'B = 1v $\rightarrow$ O $\in$ BD (5)

. (LKF) ⊥ (MNF) → AF' ⊥ CF'

→ ∠AF'C = 1v → O ∈ AC (6)

Từ (5), (6) → ABCD là hình chữ nhật

<u>Điều kiện đủ</u>: giả sử ABCD là hình chữ nhật

Ta có: LN ⊥ KM (1')

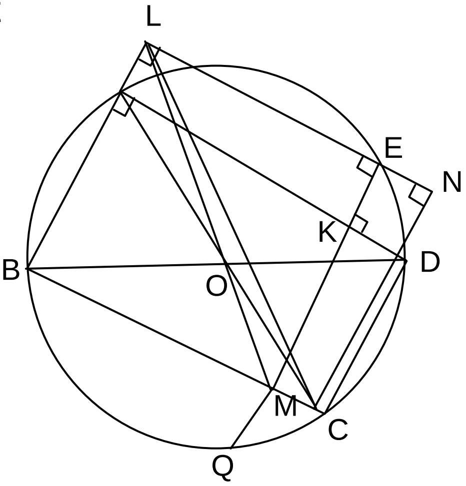
$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{KL} = \left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{ME}\right)\left(\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{KA}\right)$$

$$= \overrightarrow{KD}.\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{KE}$$

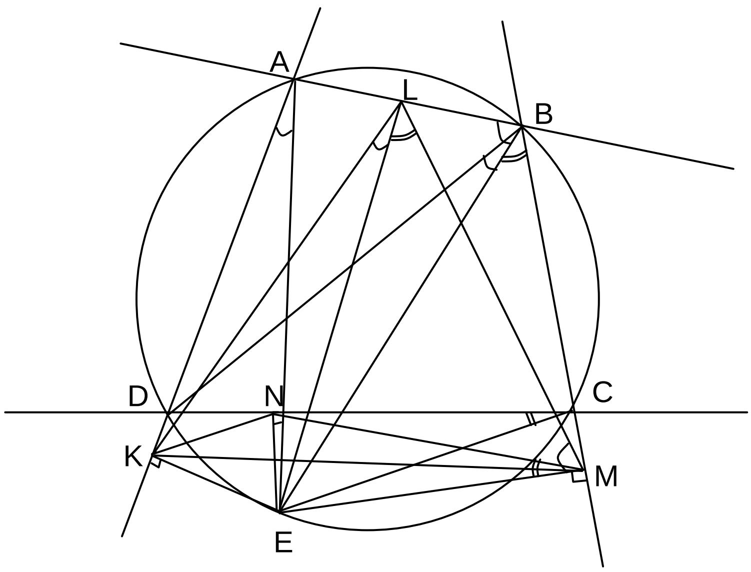
$$= \overrightarrow{KD}.\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{ME}.(-\overrightarrow{MQ}) = 0$$

→ MN ⊥ KL (2')

Từ (1'), (2') → N là trực tâm ΔKLM



<u>Cách2:</u>



Từ giả thiết ta có được các tứ giác sau nội tiếp

KALE, KEND, BLEM, MCNE

Do đó:

. (KL, ML) ≡ (KL, EL) + (EL, ML) ≡ (KA, EA) + (EB, MB)

≡ (DA, EA) + (EB, CB) (mod π)

≡ (DB, EB) + (EB, CB) ≡ (DB, CB) (mod π)

. (ML, MN) ≡ (ML, ME) + (ME, MN) ≡ (BL, BE) + (CE, CN)

≡ (BA, BE) + (CE, CD) (mod π)

≡ (BA, BE) + (BE, BD) ≡ (BA, BD) (mod π)

Vậy ta có:

(KL, ML) + (ML, MN) ≡ (DB, CB) + (BA, BD) ≡ (BA, BC) (mod π)

Tức là: (KL, MN) ≡ (BA, BC) (mod π)

Hoàn toàn tương tự ta cũng có: (KN, ML) ≡ (CD, CB) (mod π)

Do đó: N là trực tâm ΔKLM :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} KL \perp MN \\ KN \perp ML \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (KL, MN) \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ (KN, ML) \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (BA, BC) \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi} \\ (CD, CB) \equiv \dfrac{\pi}{2} \pmod{\pi} \end{cases}$$

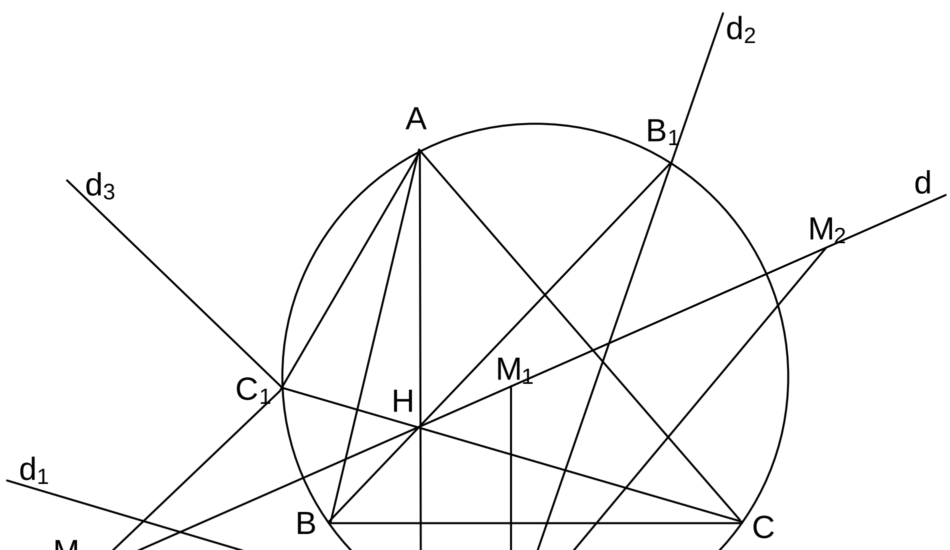
$\Leftrightarrow$ AC là đường kính (O); BD là đường kính (O) $\Leftrightarrow$ ABCD là hình chữ nhật, đpcm.

<u>Bài 12</u>:

1/ **Định lý Steiner thuận**

Cho ΔABC nội tiếp (O). Một điểm M bất kì nằm trên (O) (M ≡ A, B, C). Gọi M_1, M_2, M_3 tương ứng là điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB. Chứng minh rằng M_1, M_2, M_3 , H thẳng hàng, trong đó H là trực tâm ΔABC.

<u>Lời giải</u>



Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm thứ hai của AH, BH. CH với (O)

Ta đã biết A_1 = $Đ_{BC}$ (H), B_1 = $Đ_{CA}$ (H): C_1 = $Đ_{AB}$ (H)

Vậy ta có: $Đ_{BC}$: $H \ \alpha \ A_1$. Suy ra $(M_1H, BC) \equiv (BC, MA_1) \pmod{\pi}$

$$M_1 \ \alpha \ M$$

$$\Rightarrow M_1H \rightarrow MA_1$$

Tương tự ta có: $Đ_{AB}$: $M_3H \rightarrow MC_1$. Suy ra $(M_3H, AB) \equiv (AB, MC_1) \pmod{\pi}$

Vậy: $(M_1H, M_3H) \equiv (M_1H, BC) + (BC, AB) + (AB, M_3H)$

$$\equiv (BC, MA_1) + (BC, AB) + (MC_1, AB) \pmod{\pi}$$

$$\equiv (BC, MC_1) + (MC_1, MA_1) + (BC, AB) + (MC_1, AB) \pmod{\pi}$$

$$\equiv 2(BC, AB) + (MC_1, MA_1) \equiv 2(BC, AB) + (AC_1, AA_1) \pmod{\pi}$$

$$\equiv 2(BC, AB) + 2(AB, AH) \equiv 2(BC, AH) \equiv 0 \pmod{\pi}$$

(vì C_1 = $Đ_{AB}$ (H) $\Rightarrow (AC_1, AA_1) \equiv (AC_1, AH) \equiv 2(AB, AH) \pmod{\pi}$ và $BC \perp AH$)

Do đó M_1, M_3, H thẳng hàng. Tương tự, M_1, M_2, H thẳng hàng

Tóm lại ta có: M_1, M_2, M_3, H thẳng hàng.

2/ Định lý Steiner đảo

Cho ΔABC với trực tâm H. Lấy d là một đường thẳng bất kì qua H. Gọi d_1, d_2, d_3 tương ứng là các đường thẳng đối xứng qua BC, CA, AB của d. Chứng minh rằng d_1, d_2, d_3 đồng quy tại 1 điểm M nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

<u>**Lời giải**</u>

Giữ các kí hiệu A_1, B_1, C_1 như bài trên

Gọi M = $d_1 \cap (O) \neq A_1$. Khi đó lấy M_1, M_2, M_3 tương ứng là các điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB khi đó theo định lý Steiner thuận ta có: M_1, M_2, M_3, H thẳng hàng.

Mà $M_1 = Đ_{BC}(M)$ và $A_1 = Đ_{BC}(H)$; $d_1 = Đ_{BC}(d) \Rightarrow M_1H$ trùng d.

Vậy M_3, M_2 thuộc d. Ta có (cũng theo định lý thuận Steiner)

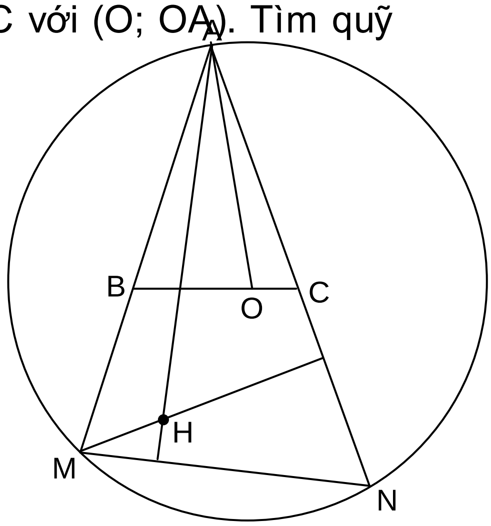
$(M_3H, AB) \equiv (AB, MC_1) \pmod{\pi} \Rightarrow Đ_{AB}(d) = (MC_1) \Rightarrow (MC_1)$ trùng d_3.

Tương tự: $Đ_{AC}(d) = (MB_1) \Rightarrow (MB_1)$ trùng d_2.

Tức là ta có: d_1, d_2, d_3 đồng quy tại $M \in (O)$.

<u>Bài 13</u>:

Cho ΔABC cân tại A. Một điểm O di động trên đường thẳng BC. Gọi M, N tương ứng là giao điểm thứ hai của AB, AC với (O; OA). Tìm quỹ tích trực tâm ΔAMN.



Lời giải:

TH1: ΔABC vuông cân tại A

Khi đó rõ ràng, quỹ tích trực tâm ΔAMN là A.

TH2: ΔABC không vuông tại A ($A \neq 90^o$)

Gọi H là trực tâm ΔAMN.

Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau

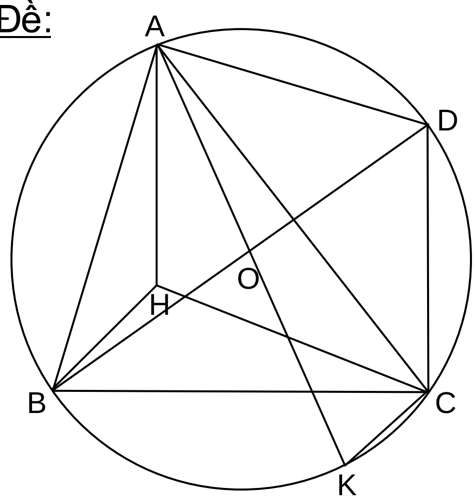
Bổ đề: Cho ΔABC với H, O là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp..

Khi đó ta có: $AH = Đ_d(AO)$

$$AH = 2R\left|\cos A\right|$$

trong đó d là phân giác BÂC.

<u>Chứng minh Bổ Đề:</u>



Kẻ đường kính AK, BD. Ta có: (AK, CK) $\equiv$ (AB, CB) (mod π)

và (AB, CB) + (AH, AB) $\equiv \frac{\pi}{2} \equiv$ (AK, CK) + (AC, AK) (mod π)

$\Rightarrow$ (AH, AB) $\equiv$ (AC, AK) (mod π)

$\Rightarrow$ AH = $Đ_d$(AO)

Lại có: AH $\perp$ BC, CD $\perp$ BC $\Rightarrow$ AH // CD

CH $\perp$ AB, AD $\perp$ AB $\Rightarrow$ CH // AD

Vậy ADCH là hình bình hành (có thể suy biến)

$\Rightarrow$ AH = CD $\Rightarrow$ AH = 2R$|$cos(BD, CD)$|$ = 2R$|$cosA$|$

Tức là bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán:

Gọi d là phân giác BÂC

Theo bổ đề ta có: $\frac{AH}{AO}|\cos A|$ và AH = $Đ_d$(AO)

Do đó: $V_{A.2|\cos A|}$. $Đ_d$(O) = H

Mà quỹ tích O là đường thẳng B, C loại đi 2 điểm H_1, H_2 với H_1, H_2 tương

ứng là giao điểm của đường thẳng vuông góc AB, AC tại A với BC (vì khi đó (H_1, H_1A) tiếp xúc AC (H_2; H_2A) tiếp xúc AB nên không tồn tại ΔAMN).

Từ đó ta có quỹ tích H.