Mỗi tuần một bài toán

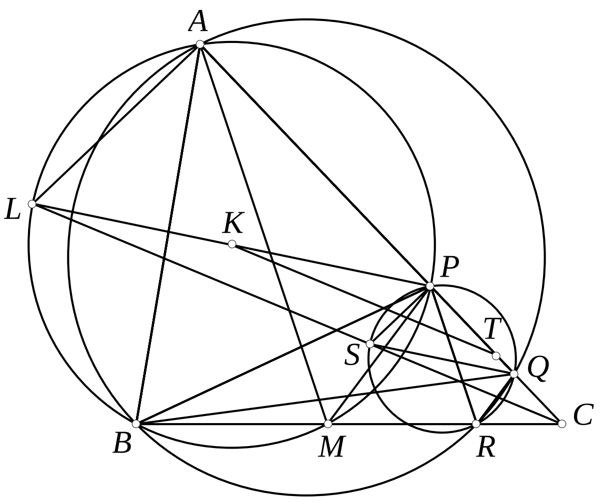
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\frac{PA}{PC} = \frac{QP}{QC}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABQ cắt BC tại R khác B. Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB. Dựng đường kính QS của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR. Gọi T là trung điểm PC. Chứng minh rằng đường thẳng KT chia đôi đoạn PS.

Lời giải



Từ $\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{QC}{QP}$ suy ra $\dfrac{PC}{PC+PA} = \dfrac{QC}{QC+QP}$ hay $\dfrac{PC}{AC} = \dfrac{QC}{PC}$ suy ra $PC^2 = CA.CQ = CR.CB$. Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác PBR tiếp xúc AC tại P. Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB cắt BC tại M khác B thì $\angle MAP = \angle MBP = \angle RPC$ nên $AM \parallel PR$. Vậy $\dfrac{CR}{MR} = \dfrac{CP}{PA} = \dfrac{QP}{QC}$ suy ra $QR \parallel MP$. Gọi PL, QS là đường kính của đường tròn ngoại tiếp các tam giác PAB và PQR. Thì $\angle ALP = \angle AMP = \angle PRQ = \angle PSQ$. Từ đó hai tam giác vuông PAL và QPS đồng dạng. Từ đây $\dfrac{LA}{SP} = \dfrac{AP}{PQ} = \dfrac{CP}{CQ} = \dfrac{AP+CP}{PQ+CQ} = \dfrac{CA}{CP}$ mà $LA \parallel SP$, ta suy ra L, S, C thẳng hàng. Theo tính chất đường trung bình thì KT chia đôi SP. Ta có điều phải chứng minh.

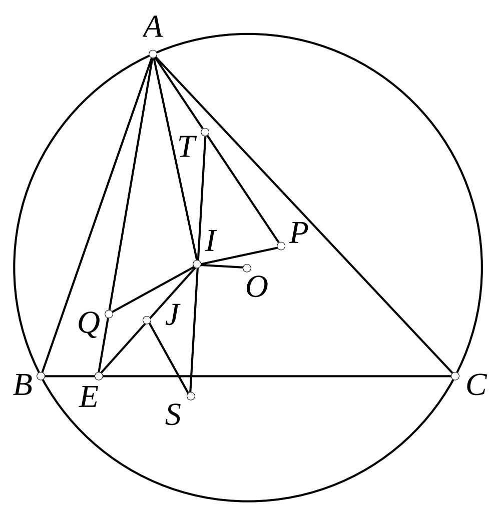
Nhật xét

Tác giả tạo ra bài toán này xuất phát từ đề thi Olympic chuyên KHTN năm 2014. Đây là một bài toán hay mang đậm tính chất của phép biến hình vị tự, cho nên để có một lời giải tự nhiên mà không dùng đến phép vị tự cũng không phải đơn giản. Bài toán được tham gia giải bằng phép vị tự bởi bạn **Nguyễn Ngọc Chi Lan** lớp 12A1 Toán trường THPT chuyên KHTN, bạn **Phạm Nguyễn Thiện Huy** lớp 12A2 trường chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng và bạn **Ninh Đức Cường** lớp 11 Toán THPT Chu Văn An, Hà Nội tại đây. Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** sinh viên K50 Đại học Ngoại thương cũng gửi tới tác giả lời giải dùng phép vị tự với ý tưởng giống đáp án. Liên quan tới cấu hình này vẫn còn nhiều điều thú vị. Tôi xin giới thiệu một bài toán hay khác từ cấu hình này để các bạn tham khảo.

Cho tam giác ABC. Trên đoạn thẳng AC lấy điểm P và trên đoạn thẳng PC lấy điểm Q sao cho $\frac{PA}{PC} = \frac{QP}{QC}$. BQ cắt đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác APB tại R khác Q. Đường đối trung qua P của tam giác APR cắt (K) tại L khác P. Chứng minh rằng giao điểm của BL và đường thẳng qua C song song BP luôn thuộc một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) với tâm nội tiếp I. P là điểm ở trong tam giác sao cho PI vuông góc với IA. Gọi Q đẳng giác P trong tam giác ABC. AQ cắt BC tại E. Gọi J là trung điểm IE. Đường thẳng qua I vuông góc OI cắt đường thẳng qua J vuông góc IQ tại S và cắt AP tại T. Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng ST.



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.