Mỗi tuần một bài toán

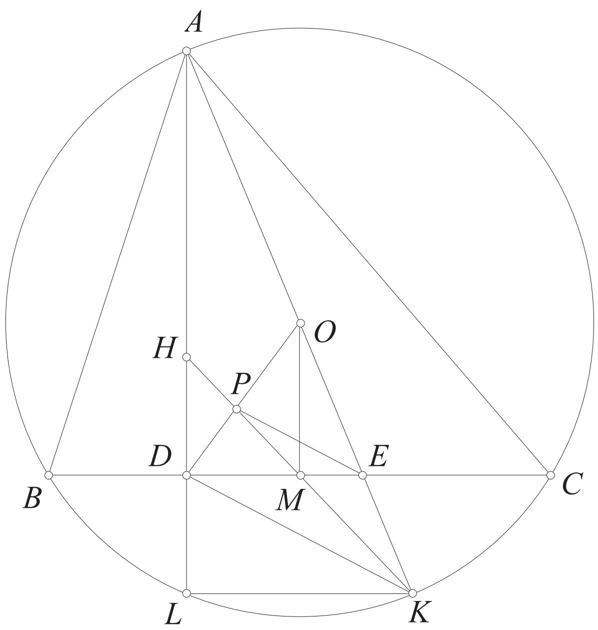
Trần Quang Hùng, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

Đề bài

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và có trực tâm H. AH, AO lần lượt cắt BC tại D, E. M là trung điểm BC. MH cắt DO tại P. Chứng minh rằng MH và đường thẳng qua D song song EP cắt nhau trên đường tròn (O).

Lời giải



Gọi giao điểm khác A của AD, AE với (O) lần lượt là L, K. Dễ thấy H, M, K thẳng hàng và $KL \parallel BC$. Ta có biến đổi tỷ số

$$\frac{EO}{EK} = \frac{OK}{EK} - 1 = \frac{AK}{2EK} - 1 = \frac{AL}{2LD} - 1$$

$$= \frac{AL}{LH} - 1 = \frac{HA}{2HD} = \frac{OM}{HD} = \frac{PO}{PD}.$$

Từ đó suy ra $DK \parallel PE$, do đó MH và đường thẳng qua D song song EP cắt nhau tại K trên đường tròn (O). Ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét

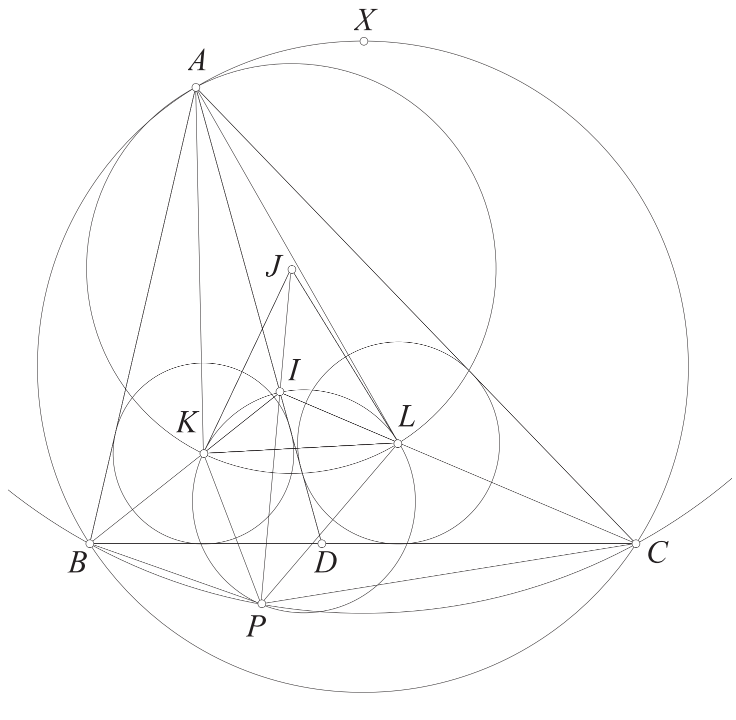
Bài toán này là bài toán đơn giản nhưng có ý nghĩa là hai đường thẳng cắt nhau trên đường tròn và không xuất phát từ hai điểm thuộc đường tròn. Mặt khác bài toán có lời giải đơn giản chỉ dùng định lý Thales và dựa vào bổ đề quan trọng của định nghĩa đường tròn $HA = 2OM$. Bài toán có thể có nhiều cách phát biểu thú vị, sau đây là một phát biểu khác của bài toán

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) có đường kính AK và đường cao AD. Tiếp tuyến tại A, K của (O) cắt BC lần lượt tại S, T. Trung trực AD cắt SO tại P. Trung trực AK cắt BC tại Q. PQ cắt AT tại R. Chứng minh rằng $OR \parallel BC$.

Có bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 12 Toán trường THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình cho lời giải tại đây. Ngoài ra bạn **Nguyễn Tiến Dũng** gửi tới tác giả lời giải tương tự đáp án qua email.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC có tâm nội tiếp I và phân giác AD. K, L là tâm nội tiếp các tam giác ABD, ACD. J là tâm ngoại tiếp tam giác AKL. IJ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác IKL tại P khác I. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác PBC nằm trên (O).



Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

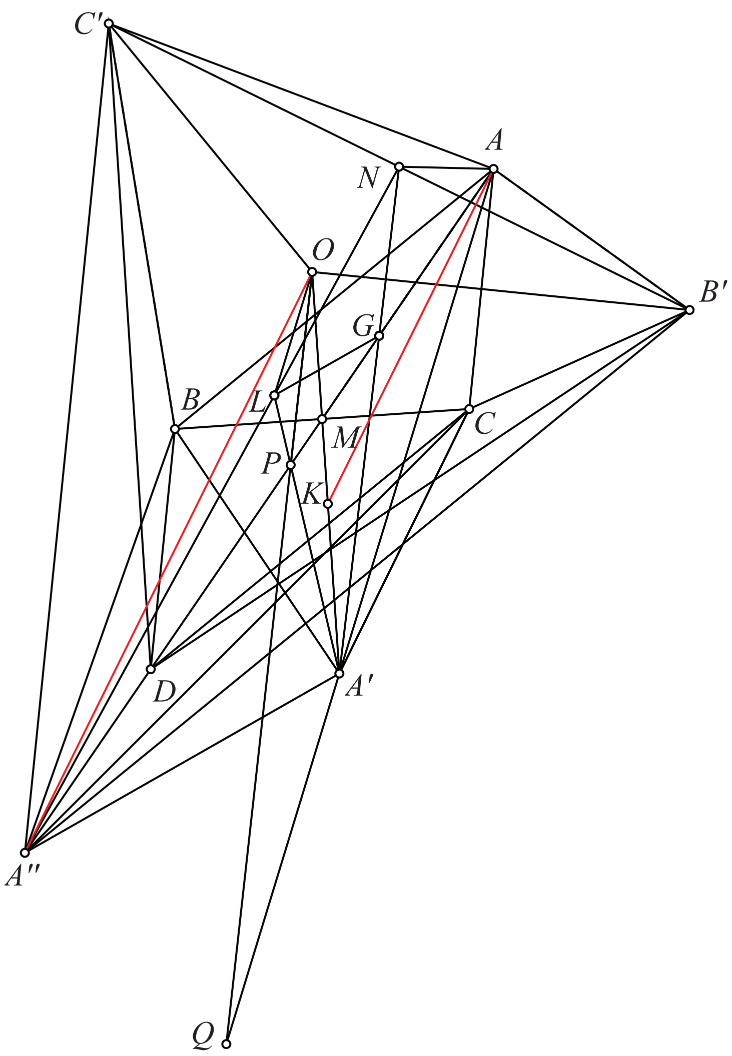
Bài toán từ bạn đọc

Về phía ngoài tam giác ABC dựng các tam giác đều BCA', CAB', ABC'. Gọi A'' là giao điểm của đường thẳng qua B' song song với AB và đường thẳng qua C' song song với AC. Chứng minh rằng đường thẳng Euler của tam giác $A''B'C'$ song song với AA'.

Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà.**

Lời giải

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của tác giả **Nguyễn Tiến Dũng.**



Ta có một số nhận xét sau

1. Tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC là trực tâm của tam giác $A''B'C'$.

2. Hai tam giác $ABC, A'B'C'$ có chung trọng tâm G.

3. Nếu K là trọng tâm tam giác $A'BC$ thì $AK \parallel A''O \perp B'C'$ (Kết quả quen thuộc)

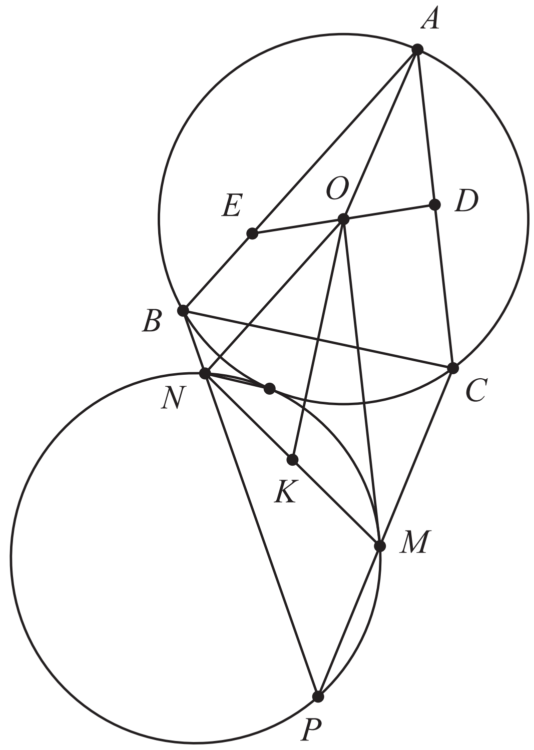
4. Ba điểm A'', A, G thẳng hàng. Thật vậy, dựng hình bình hành $ABDC$. Chú ý rằng $DB \parallel A''C', DC \parallel A''B'$ và hai tam giác $BC'D, CDB'$ bằng nhau ta thu được $[A''DB] = [BC'D] = [CDB'] = [A''DC]$ nên DA'' là trung tuyến tam giác DBC.
Gọi M, N lần lượt là trung điểm $BC, B'C'$ và L là trọng tâm tam giác $A''B'C'$. $A'L$ cắt AA'' tại P và lấy Q trên PO sao cho $A'Q \parallel OL$. Ta thấy $AP = AG + GP = AG + \frac{1}{4}GA'' = AG + \frac{1}{4}(GM + MA'') = \frac{3}{4}MA + \frac{1}{4}MA''$ nên $\frac{AP}{AM} = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{MA''}{3MA}\right) = \frac{3}{4}(1 + \frac{MO}{3MK}) = \frac{3}{4}(1 + \frac{MO}{MA'}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{A'O}{A'M}$. Chú ý rằng $\frac{QO}{QP} = \frac{A'L}{A'P} = \frac{4}{3}$, dễ thấy $\frac{QO}{QP} \cdot \frac{AP}{AM} \cdot \frac{A'M}{A'O} = 1$ nên theo định lý Menelaus đảo áp dụng cho tam giác OPM, ta có Q, A, A' thẳng hàng. Vậy đường thẳng Euler OL của tam giác $A''B'C'$ song song với AA', đó là điều phải chứng minh.

Nhận xét

Đây là một bài toán hay và có phát biểu đẹp mắt. Có bạn **Nguyễn Hoàng Nam** lớp 12 Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong TPHCM cho lời giải tại đây.

Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Các điểm D, E lần lượt thuộc cạnh CA, AB sao cho O là trung điểm DE và $DE = OA$. K đối xứng với O qua BC. Lấy các điểm M, N sao cho $OM \parallel CA$ và $ON \parallel AB$. K là trung điểm của MN. BN cắt CM tại P. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN tiếp xúc (O).



Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng**, Hà Nội.