# Mỗi tuần một bài toán

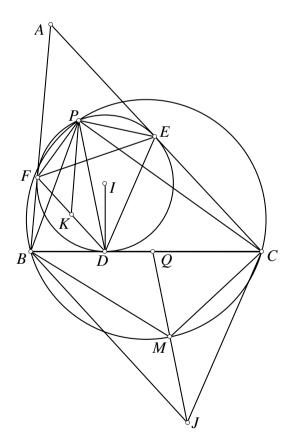
Trần Quang Hùng, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

"Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.

#### Đề bài

Cho tam giác ABC có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC tại D. Tâm đường tròn bàng tiếp góc A là J. P là một điểm bất kỳ trên (I) không trùng D. Q thuộc BC sao cho  $JQ \parallel PD$ . Chúng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC chia đôi QJ.

#### Lời giải



Gọi K, M lần lượt là trung điểm FD, QJ. Ta thấy  $BJ \parallel FD$  và  $PD \parallel QJ$  nên  $\angle PDF = \angle BJQ$  và  $\angle PFD = \angle PDC = \angle BQJ$ . Từ đó hai tam giác PFD và BQJ đồng dạng mà K, M lần lượt là trung điểm DF, JQ nên hai tam giác FPK và QBM đồng dạng. Từ đó ta chú ý PB là đường đối trung của tam giác PFDnên  $\angle BPD = \angle FPK = \angle QBM$ . Tương tự  $\angle CPD = \angle QCM$ .  $\mbox{Vậy} \ \angle BPC = \angle BPD + \angle CPD = \angle QBM + \angle QCM = 180^{\circ} - \mbox{Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com}.$ 

ây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog  $\angle BMC$ , suy ra tứ giác BPCM nội tiếp. Ta có điều phải chứng minh.

### Nhật xét

Nếu gọi R là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác PBC và (I) ta cũng dễ chứng minh đường R, D, M thẳng hàng bằng cộng góc. Bài toán này là một trong những ứng dụng đẹp của bổ đề "đồng dạng trung tuyến" và tính chất đường đối trung. Khi bài toán được giải như trên trông có vẻ khá đơn giản nhưng thực tế nó là tổng quát của hai bài toán thú vị là các bài toán Đài Loan TST 2015 và IMO SL 2002, G7. Bài toán cũng được quan tâm và đưa ra lời giải khác rất thú vi bằng hàng điểm điều hòa bởi bạn Nguyễn Cảnh Hoàng lớp 11A1 Toán, trường THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An. Các bạn có thể xem lời giải đó và trao đổi ở đây.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và D là một điểm thuộc cung BC không chứa A. M là trung điểm BC. P là một điểm nằm trên đường thẳng DM. E, F thuộc CA, AB sao cho  $PE \parallel DC$  và  $PF \parallel DB$ . Gọi tiếp tuyến tại E, F của đường tròn (K) ngoại tiếp tam giác AEF cắt nhau tại T. Gọi tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại S. Q thuộc (O) sao cho  $DQ \parallel BC$ . Chứng minh rằng  $AQ \parallel ST$ .

