Bài hình học thi IMO năm 2014 ngày 2

Trần Quang Hùng

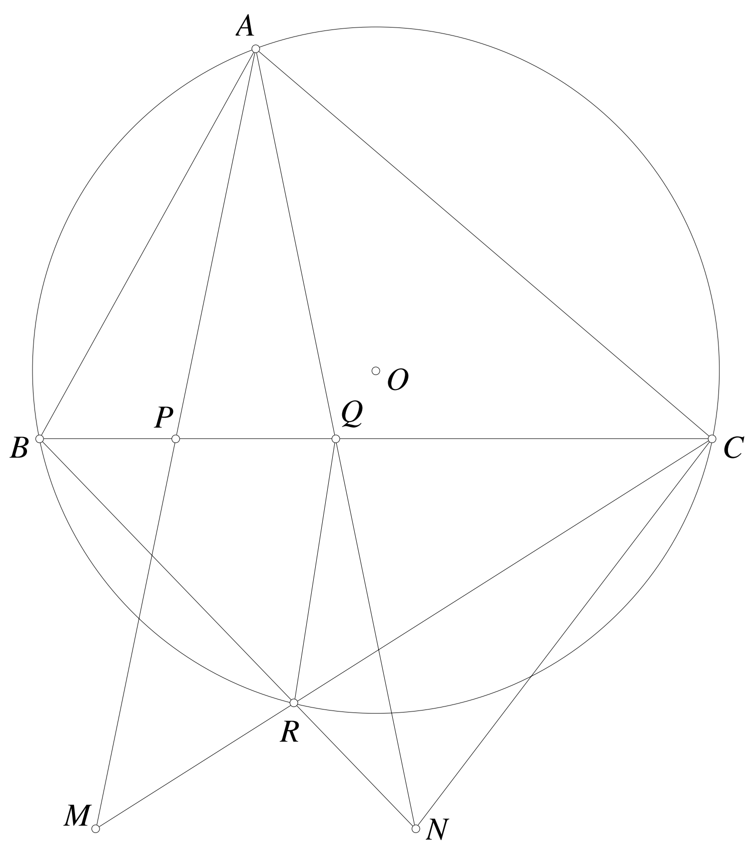
Tóm tắt nội dung

Bài viết này sẽ xoay quanh và mở rộng bài hình học thi IMO năm 2014 ngày 2 bằng các công cụ hình học thuần túy.

Năm 2014 kỳ thi IMO năm 2014 ngày thứ 2 [1] có bài toán hay như sau

Bài toán 1. Cho tam giác ABC có $\angle A$ là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $\angle QAB = \angle BCA$ và $\angle CAP = \angle ABC$. Gọi M, N là đối xứng của A qua P, Q. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải sau do tác giả tìm ra nhưng sau khi tham khảo [1] thì thấy ý tưởng đó trùng với ý tưởng trong lời giải của nick name nima1376 trong [1]. Tôi xin trình bày lại lời giải



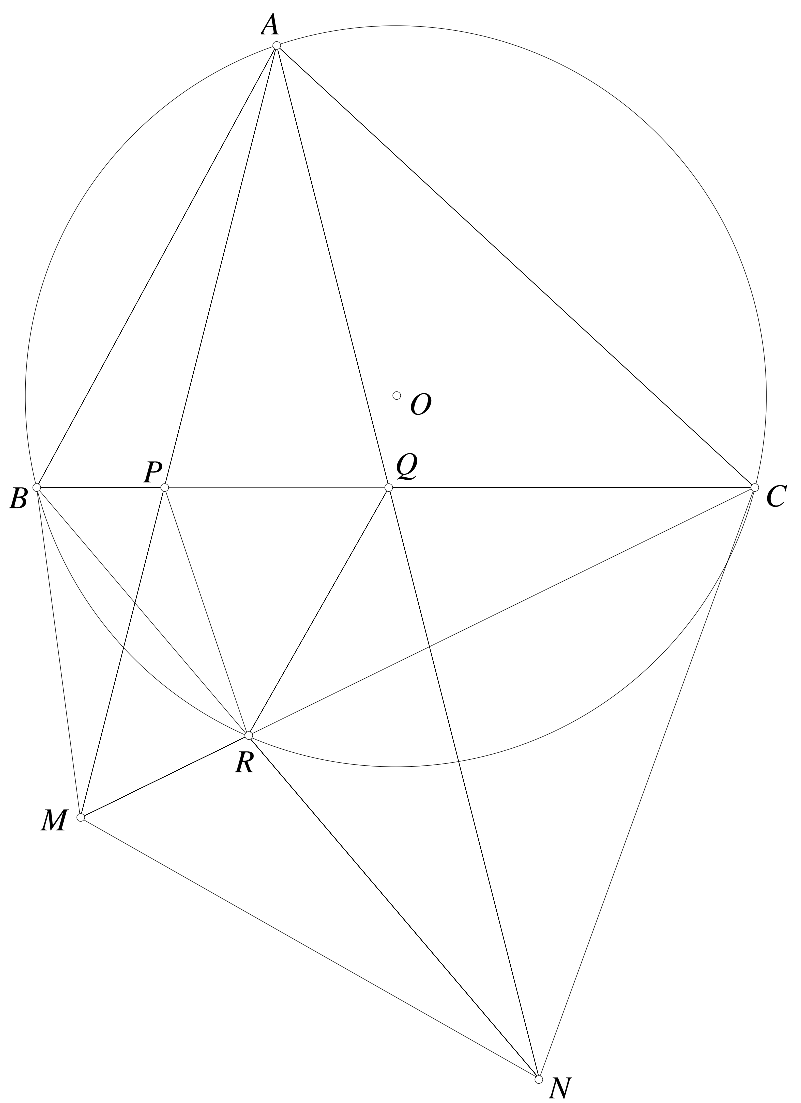
Hình 1.

Lời giải. Dễ thấy các tam giác đồng dạng $\triangle ABC \sim \triangle PAC \sim \triangle QBA$ do đó $\dfrac{BQ}{QA} = \dfrac{PA}{PC}$ hay $\dfrac{QB}{QN} = \dfrac{PC}{PC}$ dễ thấy $\angle MPC = \angle NQB$ nên $\triangle MPC \sim \triangle BQN$ suy ra $\angle BNQ = \angle PCM$. Vậy tứ giác $QCNR$ nội tiếp suy ra $\angle CRN = \angle CQN = \angle BAC$. Vậy tứ giác $ABRC$ nội tiếp. $\square$

Nhận xét. Đây là bài toán thứ 4 của ngày 2 là một bài toán dễ và có rất nhiều lời giải được đề xuất trong [1]. Cách giải trên có thể coi là cách ngắn gọn nhất tiếp cận bài toán này không những thế nó còn mở ra rất nhiều hướng tổng quát khác nhau. Trong bài viết này tôi xin giới thiệu một vài hướng tổng quát khác nhau cho bài toán ý nghĩa trên cùng lời giải.

Trong bài toán ta dễ thấy tam giác APQ cân. Việc lấy đối xứng A qua P, Q được M, N thực chất có thể hiểu $PM.QN = AP.AQ = AP^2 = AQ^2$. Đây là điểm mấu chốt của toàn bộ bài toán. Chúng ta tìm hiểu mở rộng đầu tiên như sau

Bài toán 2. Cho tam giác ABC có $\angle BAC$ là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $\angle QAB = \angle BCA$ và $\angle CAP = \angle ABC$. Gọi M, N là các điểm thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = AP.AQ$. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

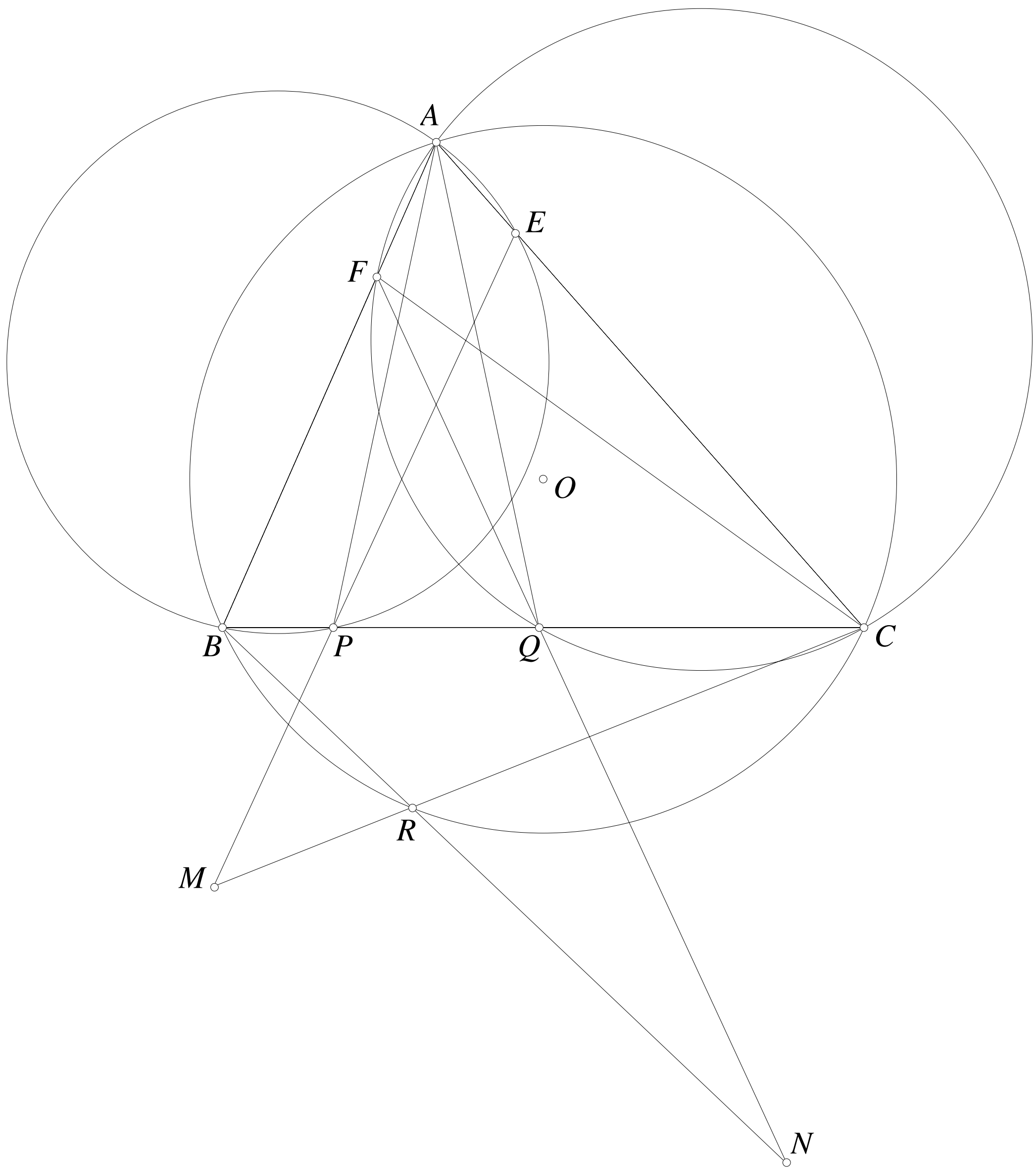


Hình 2.

Nhận xét. Bài toán này là một mở rộng đầu tiên đơn giản và có lời giải hoàn toàn tương tự. Để mở rộng tiếp ta để ý các giả thiết góc $\angle PAB = \angle BCA$ và $\angle CAQ = \angle ABC$. Thực chất các giả thiết này cho thấy là các đường tròn (APB) tiếp xúc AC và đường tròn (AQC) tiếp xúc AB. Tiếp điểm có thể thay thế bằng giao điểm. Sau đây là một khai thác cho ý tưởng này.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PE, QF sao cho $PM.QN = PE.QF$. Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải có ý tưởng hoàn toàn tương tự

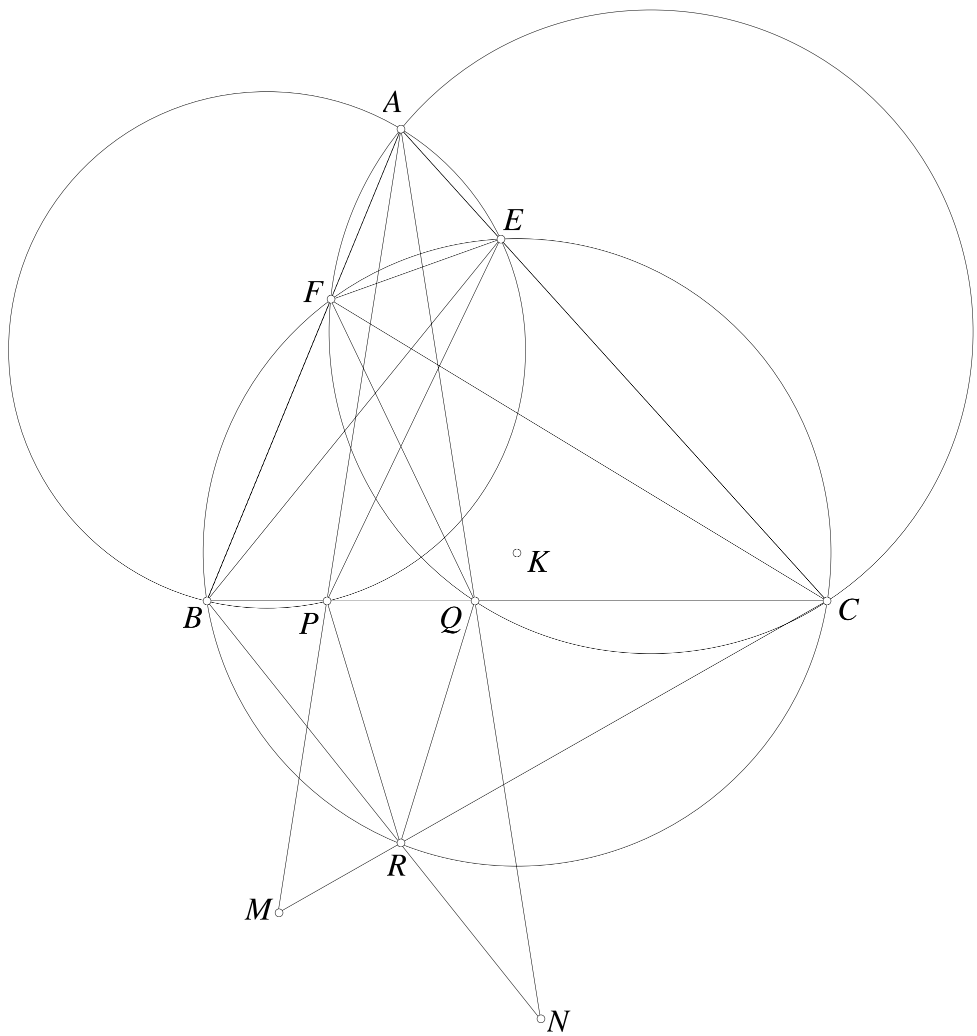


Hình 3.

Lời giải. Ta dễ thấy $\triangle ABC \sim \triangle PEC \sim \triangle QBF$ do đó kết hợp giả thiết $PM.QN = PE.QF = QB.PC$. Dễ thấy $\angle MPC = \angle NQB$. Nên $\triangle MPC \sim \triangle BQN$. Suy ra $\angle BNQ = \angle PCM$. Vậy tứ giác $QCNR$ nội tiếp suy ra $\angle CRN = \angle CQN = \angle BAC$. Vậy tứ giác $ABRC$ nội tiếp. $\square$

Nhận xét. Khi góc đáy tam giác APQ bằng $\angle BAC$ ta có bài toán số 2. Đoạn sau lời giải hoàn toàn tương tự. Ta sẽ có một mở rộng ý nghĩa hơn như sau.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = PE.QF$. Chứng minh rằng BN và CM luôn cắt nhau trên một đường tròn cố định khi M, N di chuyển.



Hình 4.

Lời giải. Ta dễ thấy $\angle AEB = \angle APB = \angle AQC = \angle AFC$ suy ra $\angle BEC = \angle BFC$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp đường tròn (K) cố định. Ta sẽ chứng minh BM và CN cắt nhau trên (K), thật vậy. Ta dễ thấy $\triangle ABC \sim \triangle PEC \sim \triangle QBF$ do đó kết hợp giả thiết $PM.QN = PE.QF = QB.PC$. Do tam giác APQ cân nên dễ suy ra $\angle MPC = \angle NQB$. Từ đó $\triangle MPC \sim \triangle BQN$. Suy ra $\angle BNQ = \angle PCM$. Vậy tứ giác $QCNR$ nội tiếp suy ra $\angle CRN = \angle CQN = 180^\circ - \angle CQA = 180^\circ - \angle CFA = \angle BFC$. Từ đó tứ giác $BFCR$ nội tiếp nên R thuộc (K). □

Nhận xét. Khi góc đáy tam giác APQ bằng $\angle BAC$ ta cũng thu lại được bài toán số 2. Đoạn sau của lời giải có khác bài toán 3 một chút song ý nghĩa vẫn không đổi. Trên mô hình của bài toán gốc và các bài toán mở rộng còn có nhiều khai thác đáng chú ý, các bạn hãy làm như các bài luyện tập

Bài toán 5. Cho tam giác ABC có $\angle A$ là góc lớn nhất. Các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $\angle QAB = \angle BCA$ và $\angle CAP = \angle ABC$. Gọi M, N là các điểm thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = AP.AQ$.

a) Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại điểm R trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN cắt (O) tại X khác R. Chứng minh RX luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RBP và RCQ cắt nhau tại Y khác R. Chứng minh rằng RY luôn đi qua một điểm cố định khi R di chuyển.

d) Gọi BM giao CN tại Z. Chứng minh rằng XZ luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PE, QF sao cho $PM.QN = PE.QF$.

a) Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại điểm R trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN. Chứng minh rằng AK vuông góc với BC.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PE, QF sao cho $PM.QN = PE.QF$.

a) Chứng minh rằng BN và CM cắt nhau tại điểm R trên đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN cắt (O) tại X khác R. Chứng minh RX luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RBP và RCQ cắt nhau tại Y khác R. Chứng minh rằng RY luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = PE.QF$.

a) Chứng minh rằng BN và CM luôn cắt nhau tại một điểm R trên một đường tròn (K) cố định khi M, N di chuyển.

b) Gọi L là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN. Chứng minh rằng AL vuông góc với BC.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC có các điểm P, Q thuộc cạnh BC sao cho $AP = AQ$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác APB cắt CA tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AQC cắt AB tại F khác A. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PA, QA sao cho $PM.QN = PE.QF$.

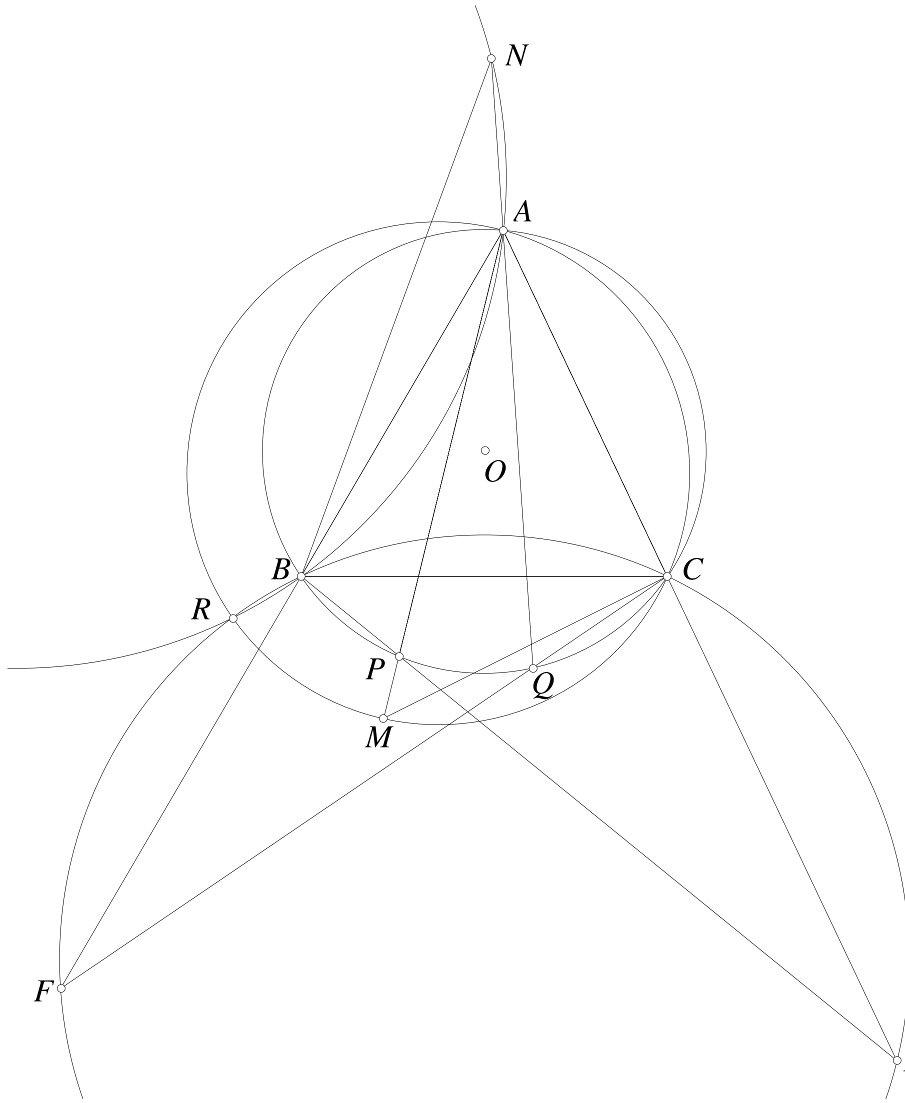
a) Chứng minh rằng BN và CM luôn cắt nhau trên một đường tròn (K) cố định khi M, N di chuyển.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RMN cắt (K) tại X khác R. Chứng minh RX luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác RBP và RCQ cắt nhau tại Y khác R. Chứng minh rằng RY luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di chuyển.

Bạn nào quen với phép nghịch đảo có thể giải thêm bài toán sau

Bài toán 10. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các điểm P, Q thuộc cung $\overset{\frown}{BC}$ không chứa A sao cho $AP = AQ$. PB, QC lần lượt cắt CA, AB tại E, F. Lấy các điểm M, N thuộc tia đối tia PA, AQ sao cho $\frac{PM}{PE}.\frac{QN}{QF} = \frac{AM}{AE}.\frac{AN}{AF}$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACM và ABN cắt nhau tại R khác A. Chứng minh rằng R luôn thuộc một đường tròn cố định khi M, N di chuyển.



Hình 5.

Lời kết. Bài toán IMO này tuy là một bài toán dễ xong vẻ đẹp và tính gợi mở của nó là không thể phủ nhận. Nó hoàn toàn xứng đáng là một bài thi IMO. Bên cạnh bài toán gốc bài toán mở rộng còn rất nhiều ý để khai thác mô hình và phát triển thêm mà trong một bài viết không thể liệt kê hết. Xin dành cho bạn đọc.

Tài liệu

[1] Đề thi IMO ngày 2 tại

http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?f=1098&t=597090

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN.
E-mail: analgeomatica@gmail.com