PHÉP NGHỊCH ĐẢO TRONG MẶT PHẲNG

Nguyễn Kim Chi, Nguyễn Thái Hùng, Trần Lê Quang Ngọc, 11T
THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long
E-mail: lazymonkey6992@yahoo.com.vn

1. Sơ lược về phép nghịch đảo

1.1 Định nghĩa

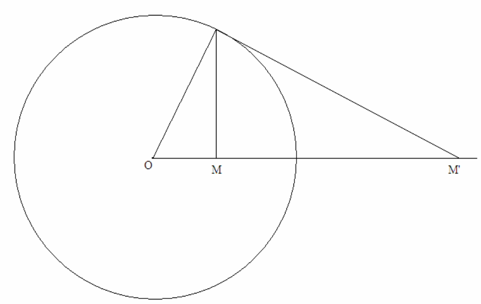
Cho điểm O cố định và một số thực $k \neq 0$. Ứng với mỗi điểm $M \neq O$ ta luôn tìm được điểm M' sao cho $\overline{OM}.\overline{OM'} = k$. M' được gọi là điểm nghịch đảo của M trong phép nghịch đảo cực O với tỉ số k.

Kí hiệu $N_O^K : M \mapsto M'$.

1.2 Một số tính chất của phép nghịch đảo

1.2.1 Phép nghịch đảo có tính chất đối hợp, tức là nếu $M' = N_O^k(M)$ thì ta cũng có $M = N_O^k(M')$.

1.2.2 Xét phép nghịch đảo $N_O^k : M \mapsto M'$.



Nếu tỉ số $k > 0$ thì M và M' nằm cùng một phía đối với O. Khi đó tập hợp những điểm bất động của phép nghịch đảo là đường tròn tâm O, bán kính $\sqrt{k}$, đường tròn này được gọi là đường tròn nghịch đảo, khi đó nếu điểm M nằm ở miền trong của đường tròn thì M' nằm ở miền ngoài của đường tròn nghịch đảo và ngược lại.

Nếu tỉ số $k < 0$ thì hai điểm M và M' nằm về hai phía đối với O. Khi đó không có điểm kép cũng không có đường tròn nghịch đảo.

1.2.3 Nếu phép nghịch đảo $N_O^k : M \mapsto M'$ có tỉ số $k > 0$ thì mọi đường tròn đi qua hai điểm tương ứng M và M' đều trực giao với đường tròn nghịch đảo của phép nghịch đảo đó.

1.2.4 Hai điểm A, B không thẳng hàng với cực nghịch đảo O của N_O^k, biến thành hai điểm A', B' qua phép nghịch đảo đó thì các điểm A, B, A', B' cùng thuộc một đường tròn.

1.2.5 Nếu N_O^k: $A \mapsto A'$, $B \mapsto B'$, ta có $A'B' = \dfrac{|k|}{OA.OB} AB$.

1.2.6 Phép nghịch đảo bảo toàn độ lớn góc giữa hai đường cong tại giao điểm nhưng đảo ngược hướng của góc đó. (Góc giữa hai đường cong tại giao điểm là góc giữa hai tiếp tuyến của chúng tại giao điểm đó, nếu góc của hai đường cong bằng 90^0 thì hai đường cong đó gọi là hai đường cong trực giao).

1.2.7 Tích của hai phép nghịch đảo $N_O^k : M \mapsto M'$ và $N_O^{k'} : M' \mapsto M''$ là một phép vị tự tâm O tỉ số $\dfrac{k'}{k}$.

1.2.8 Qua phép nghịch đảo N_O^k đường thẳng qua cực biến thành chính nó, đường thẳng không qua cực biến thành đường tròn qua cực[1].

1.2.9 Qua phép nghịch đảo N_O^k, đường tròn qua cực biến thành đường thẳng không qua cực, đường tròn không qua cực biến thành đường tròn không qua cực.

---

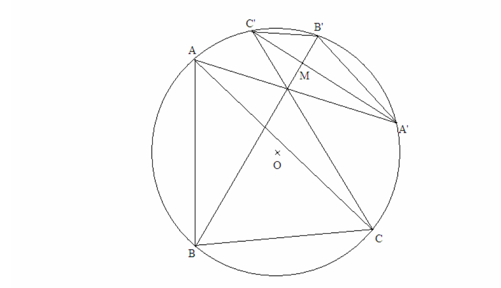
[1] Cách dựng. Xét ảnh của đường thẳng d qua N_O^k, d không qua O, kẻ OH vuông góc với d, N_O^k: $H \mapsto H'$, ảnh của d là đường tròn đường kính OH'.

2. Một số ứng dụng của phép nghịch đảo

Bài toán 1. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Giả sử M là một điểm không thuộc (O), các đường thẳng MA, MB cắt lại đường tròn (O) lần lượt tại các điểm A', B', C'.

a) Chứng minh rằng với M ở trong (O) ta có

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{MA'.MB'.MC'}{MA.MB.MC}.$$



b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho tam giác $A'B'C'$ vuông.

Lời giải.

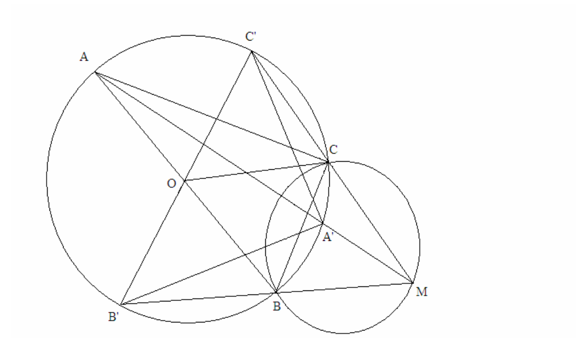
a) Ta có: $S_{ABC} = \dfrac{AB.BC.CA}{4R}$, và $S_{A'B'C'} = \dfrac{A'B'.B'C'.C'A'}{4R}$.

Do đó $\dfrac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \dfrac{A'B'.B'C'.C'A'}{AB.BC.CA}$. (1)

Vì $\overline{MA}.\overline{MA'} = \overline{MB}.\overline{MB'} = k$ (không đổi) nên ta xét $N_M^k : (O) \to (O)$, $A \mapsto A', B \mapsto B', C \mapsto C'$.

Theo tính chất của phép nghịch đảo ta có

$$A'B' = \frac{|k|AB}{MA.MB}; B'C' = \frac{|k|BC}{MB.MC}; C'A' = \frac{|k|CA}{MA.MC}.$$



Thay vào (1) ta được điều phải chứng minh.

b) Giả sử tam giác $A'B'C'$ vuông ở A' thì $B'C'$ đi qua O, khi đó $B'C'$ trực giao với O.

Xét N_M^k như trên, qua cực M thì (O) biến thành (O) và đường thẳng $B'C'$ biến thành đường tròn (MBC) trực giao với (O). (theo tính chất 1.2.6 và 1.2.8)

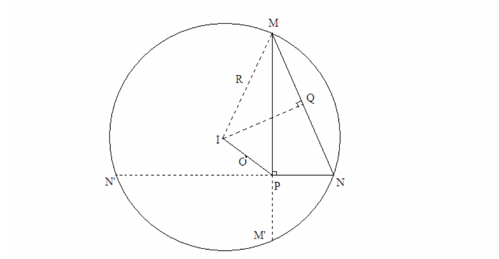
Vậy quỹ tích M là đường tròn trực giao với (O), đồng thời đi qua B, C.

Chứng minh tương tự đối với trường hợp tam giác $A'B'C'$ vuông tại B' và C'.

Bài toán 2. Cho đường tròn (T) tâm O bán kính R. Điểm I trong hình tròn đó. Một góc vuông thay đổi tại đỉnh I, hai cạnh cắt (T) tại A và B. Hai đường tròn (T_1), (T_2) cùng qua I và tiếp xúc với (O) theo thứ tự tại A và B. Tìm quỹ tích M là giao điểm thứ hai của (T_1), (T_2).

Lời giải.

Bổ đề 1. Cho đường tròn (C) tâm I, điểm P ở trong đường tròn, góc vuông $\widehat{MPN}$ xoay quanh điểm P, trong đó M và N trên (C). Khi đó quỹ tích trung điểm Q của MN là một đường tròn.

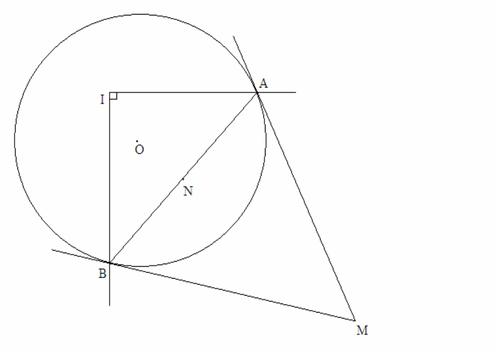


Chứng minh. Thật vậy

$$QI^2 + QP^2 = QI^2 + QM^2 = R^2.$$

Suy ra Q thuộc đường tròn tâm O là trung điểm của PI và bán kính $OQ = \dfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 - IP^2}$.

Bổ đề 2. Cho đường tròn (K) tâm O, bán kính R, điểm I trong hình tròn đó. Một góc vuông quay xung quanh đỉnh I, hai cạnh của góc cắt đường tròn (K) tại A, B. Quỹ tích giao điểm hai tiếp tuyến với (K) tại A và B là một đường tròn.



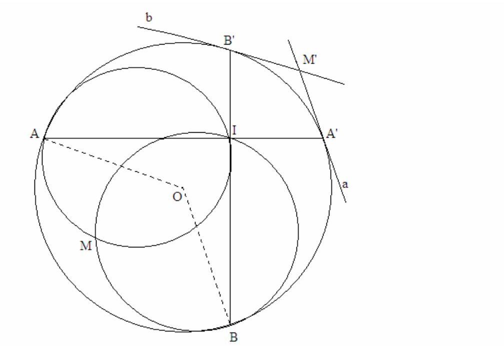
Chứng minh. Gọi N là trung điểm của AB. Theo phần chứng minh bổ đề 1, quỹ tích N là đường tròn (C') tâm T là trung điểm của OI và bán kính $TN = \frac{1}{2}\sqrt{2R^2 - OI^2}$.

Gọi M là giao điểm hai tiếp tuyến của (K) tại A, B. Ta có ba điểm O, M, N thẳng hàng. Tam giác OAM vuông tại A và có đường cao AN, nên $R^2 = OA^2 = ON.OM$.

Do đó, tồn tại phép nghịch đảo $N_O^{R^2} : N \mapsto M$. Vậy quỹ tích M là đường tròn (C''). Ảnh của đường tròn (C') qua phép nghịch đảo $N_O^{R^2}$.

Ta sử dụng hai bổ đề trên để tìm quỹ tích của bài toán.

Gọi A' và B' lần lượt là giao điểm thứ hai của IA, IB với (T). Tiếp tuyến a, b tại A', B' tương ứng của (T) giao nhau tại M'. Quỹ tích M' là đường tròn (C'') theo bổ đề 2.



Phép nghịch đảo $N_I^k, k = IA.IA' = IB.IB'$, ta có

$$A \mapsto A', B \mapsto B', (T_1) \mapsto a, (T_2) \mapsto b.$$

Do đó M, M' là ảnh của nhau qua phép nghịch đảo.

Vậy quỹ tích M là (C'''), là đường tròn ảnh của đường tròn (C'') qua phép nghịch đảo N_O^K.

Một số bài toán

1. Cho hai đường tròn (O_1) và (O_2) trực giao với nhau và cắt nhau ở A và B. Lấy các điểm C và D trên hai đường tròn đó sao cho đường thẳng CD không đi qua A và B. Chứng minh rằng các đường tròn (ACD) và (BCD) lúc đó trực giao với nhau.

2. Cho tam giác ABC và các đường cao BH, CK. Chứng minh rằng đường thẳng HK song song với tuyếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

3. Cho một đường tròn cố định tâm O và một dây cung cố định AB của đường tròn đó. Một điểm M di động trên đường tròn (O). Gọi M' là giao điểm thứ hai của đường tròn qua M, lần lượt tiếp xúc với đường thẳng AB tại A và B. Hãy tìm tập hợp các điểm M'.

4. Dựng đường tròn tiếp xúc với đường tròn (O, R) cho trước đồng thời tiếp xúc với đường thẳng Δ tại một điểm M cho trước.

5. Chứng minh rằng phép nghịch đảo bảo tồn hàng điểm điều hòa với cực nghịch đảo trên đường thẳng mang hàng điểm đó.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Mộng Hy, "*Các phép biến hình trong mặt phẳng*", NXBGD, 2000.

[2] Trần văn Tấn, "*Bài tập nâng cao một số chuyên đề hình học 11*", 2001.

[3] Trần Ngọc Ẩn, Đoàn Văn Phi Long, "*Phương pháp giải toán hình học và giải tích*", 1973.