# Mỗi tuần một bài toán

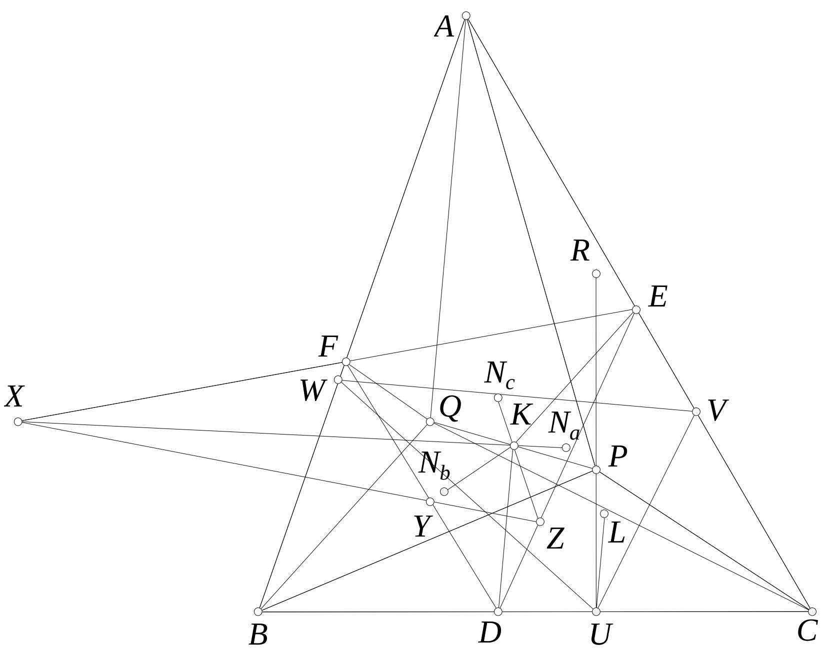
***Trần Quang Hùng,** Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

**Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.**

## Đề bài

Cho tam giác $ABC$ có $P$ và $Q$ là hai điểm đẳng giác trong tam giác. $K$ là trung điểm $PQ$. Các điểm $D$, $E$, $F$ lần lượt thuộc $BC$, $CA$, $AB$ sao cho $KD \parallel QA$, $KE \parallel QB$, $KF \parallel QC$. Gọi $N_a$, $N_b$, $N_c$ lần lượt là tâm đường tròn Euler của tam giác $PBC$, $PCA$, $PAB$. Chứng minh rằng $KN_a$, $KN_b$, $KN_c$ lần lượt cắt $EF$, $FD$, $DE$ theo ba điểm thẳng hàng.

## Lời giải



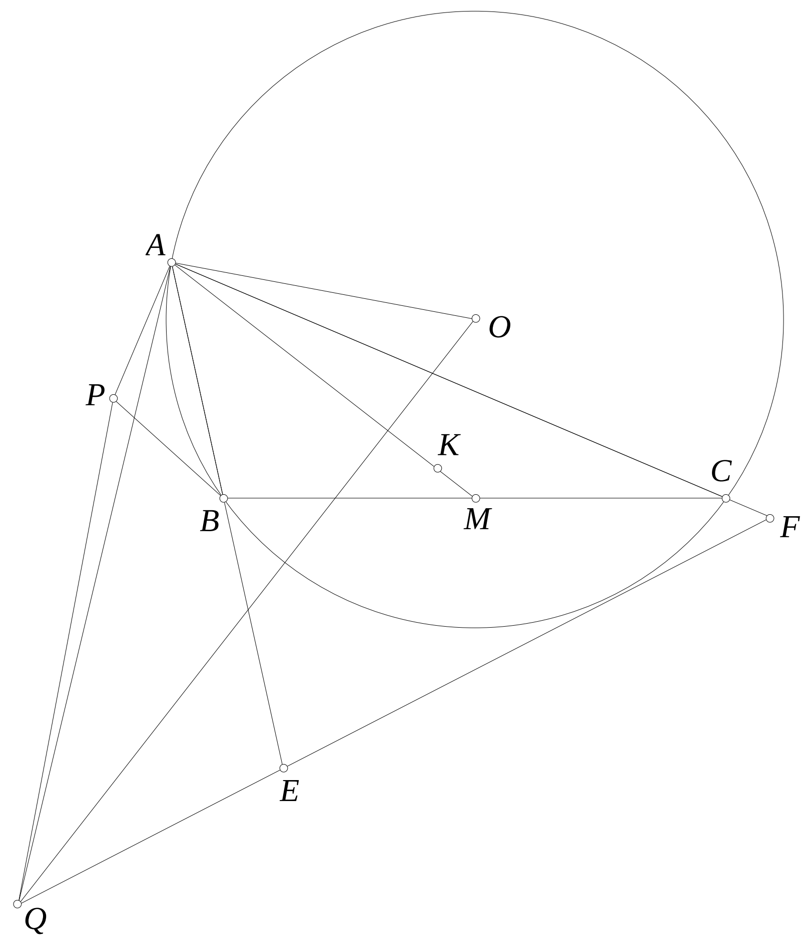

Gọi $U$, $V$, $W$ là hình chiếu của $P$ lên $BC$, $CA$, $AB$. Theo định lý Poncelet thì các đường tròn Euler $(N_a)$, $(N_b)$, $(N_c)$ và đường tròn $(UVW)$ có một điểm chung $R$. Ta chú ý $QA$, $QB$, $QC$ lần lượt vuông góc với $VW$, $WU$, $UV$. Lấy $X_1$ thuộc $EF$ sao cho $KX_1 \perp KD$. Tương tự có $Y_1$, $Z_1$ thì $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ thẳng hàng theo định lý về cát tuyến trực giao. Gọi $L$ là trực tâm tam giác $UVW$. Sử dụng tính chất tỷ số kép của chùm vuông góc, ta có biến đổi tỷ số kép $\frac{XE}{XF}/\frac{X_1E}{X_1F} = (EF, XX_1) = K(EF, XX_1) = U(WV, RL)$. Từ đó $\frac{XE}{XF} = \frac{X_1E}{X_1F} \cdot U(WV, RL)$. Tương tự với các tỷ số $\frac{YF}{YD}$ và $\frac{ZD}{ZE}$ ta thu được $\frac{XE}{XF} \cdot \frac{YF}{YD} \cdot \frac{ZD}{ZE} = \frac{X_1E}{X_1F} \cdot \frac{Y_1F}{Y_1D} \cdot \frac{Z_1D}{Z_1E} \cdot U(WV, RL) \cdot V(UW, RL) \cdot W(VU, RL) = 1$. Từ đó $X$, $Y$, $Z$ thẳng hàng theo định lý Menelaus.

## Nhận xét

Ý tưởng trong lời giải cũng là cách tác giả tạo ra bài toán này. Điểm mấu chốt của lời giải này là dùng định lý Poncelet và tính chất chùm vuông góc. Có bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán, THPT chuyên KHTN cho lời giải tương tự đáp án.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp trong đường tròn $(O)$ với trung tuyến $AM$. Lấy $P$ thuộc trung trực $AB$ sao cho $AP \perp AC$. Lấy $Q$ sao cho $PQ \perp AO$ và $QO \perp AM$. Trung trực $CA$ cắt $AB$ tại $E$. $QE$ cắt $AC$ tại $F$. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác $AEF$ nằm trên $AM$.




Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

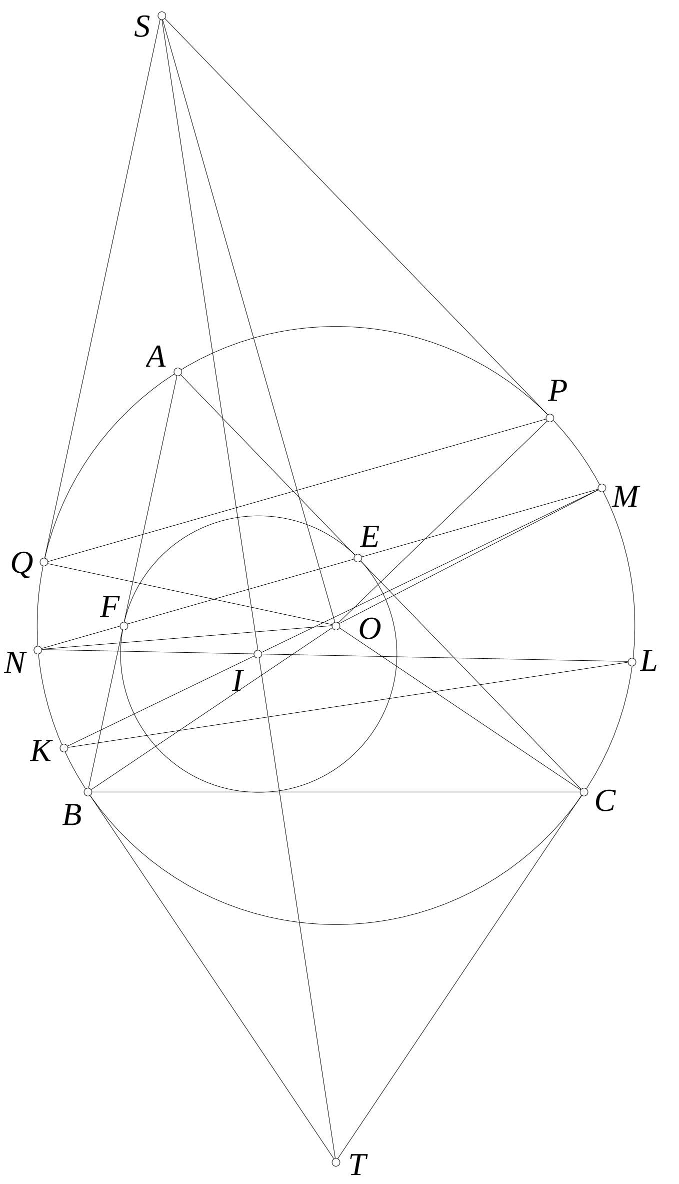
**Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.**

## Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác $ABC$, $(O)$, $(I)$ theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. $E$, $F$ theo thứ tự là tiếp điểm của $(I)$ và $AC$, $AB$. $M$, $N$ là các giao điểm của $EF$ và $(O)$. $P$, $Q$ theo thứ tự là giao điểm thứ hai của $BI$, $CI$ và $(O)$. $S$ là giao điểm của các tiếp tuyến với $(O)$ tại $P$ và $Q$. Chứng minh rằng $S$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $IMN$.

Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà**

## Lời giải




Gọi $IM$, $IN$ cắt lại $(O)$ tại $K$, $L$. Tiếp tuyến qua $B$, $C$ của $(O)$ cắt nhau tại $T$. Theo bài toán tuần 4 tháng 10 năm 2017 thì $IT \perp KL$. Tứ giác $MNKL$ nội tiếp dẫn tới tới $IT$ đi qua tâm ngoại tiếp tam giác $IMN$ do đó giao điểm của $IT$ và trung trực $MN$ sẽ là tâm ngoại tiếp tam giác $IMN$. Theo định lý Pascal thì $IT$ đi qua $S$, mặt khác $PQ \parallel MN$ do đó $S$ nằm trên trung trực $MN$. Vậy $S$ là giao của $IT$ và trung trực $MN$, nói cách khác $S$ là tâm ngoại tiếp tam giác $IMN$.

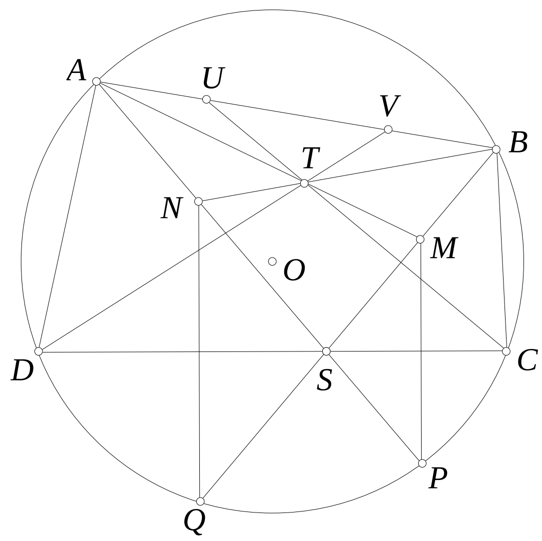
Biên tập: Trần Quang Hùng.

## Nhận xét

Đây là một bài toán là phát triển tiếp tục bài toán chọn đội tuyển SP năm 2017, đây là các kết quả đẹp và có ý nghĩa.

## Bài toán đề nghị

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Điểm $S$ thuộc đoạn $CD$ sao cho $\angle DSA = \angle CSB$. $M$, $N$ theo thứ tự là giao điểm thứ hai của $AS$, $BS$ và $(O)$. $P$, $Q$ theo thứ tự là điểm đối xứng của $M$, $N$ qua $CD$. $T$ là giao điểm của $AP$ và $BQ$. $U$, $V$ theo thứ tự là giao điểm của $CT$, $DT$ và $AB$. Chứng minh rằng $AU = BV$.




Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà,** THPT chuyên SP, Hà Nội.

# Mỗi tuần một bài toán

**Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN

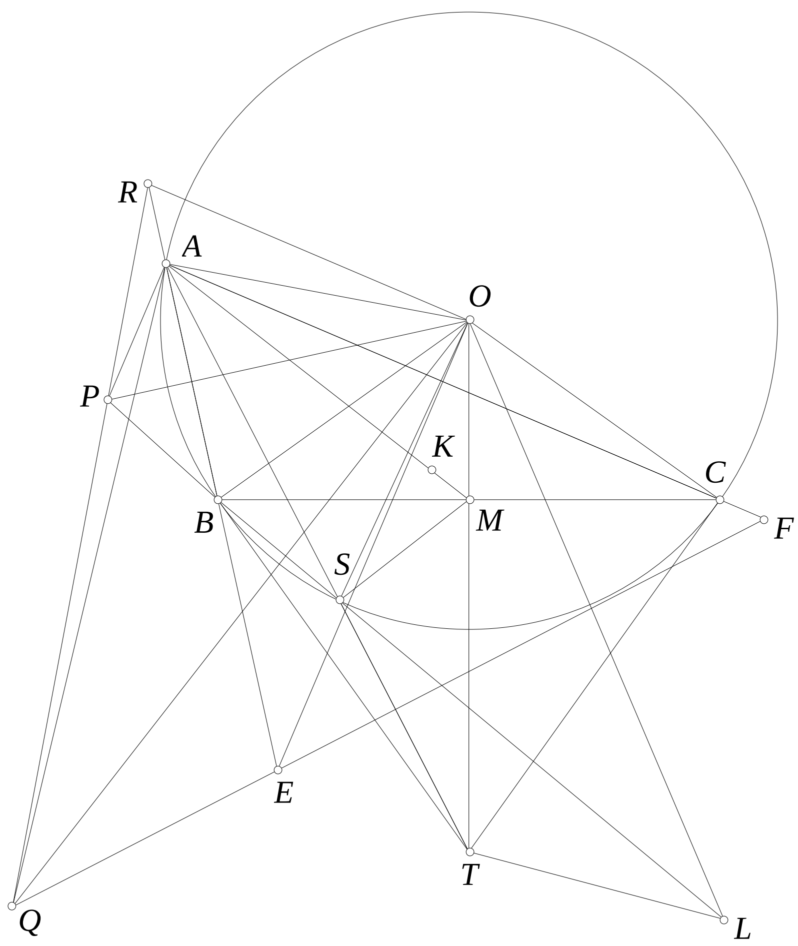
**Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.**

## Đề bài

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp trong đường tròn $(O)$ với trung tuyến $AM$. Lấy $P$ thuộc trung trực $AB$ sao cho $AP \perp AC$. Lấy $Q$ sao cho $PQ \perp AO$ và $QO \perp AM$. Trung trực $CA$ cắt $AB$ tại $E$. $QE$ cắt $AC$ tại $F$. Chứng minh rằng tâm ngoại tiếp tam giác $AEF$ nằm trên $AM$.

## Lời giải

Dựa theo lời giải của bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình.



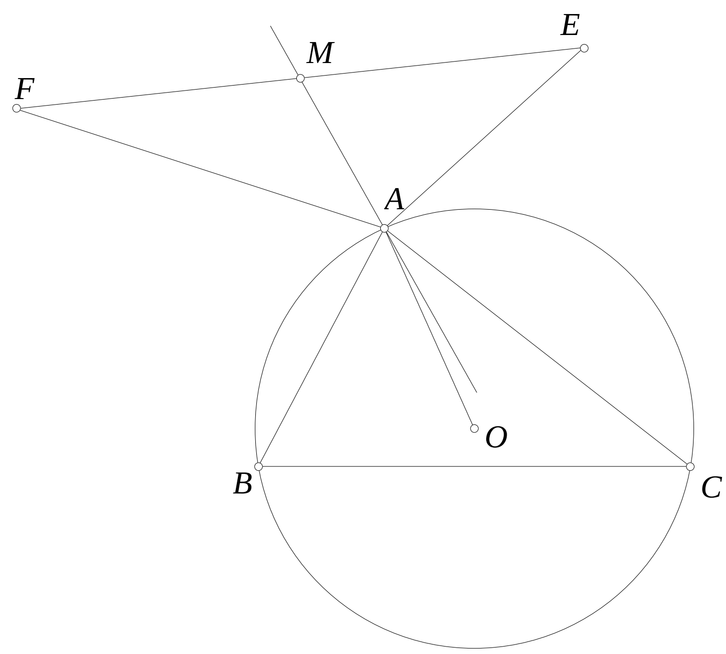

Gọi $T$ là giao các tiếp tuyến qua $B$, $C$ của $(O)$. $AT$ cắt $(O)$ tại $S$ khác $A$. $BS$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác $OBT$ tại $L$ khác $B$. $PQ$ cắt $AB$ tại $R$. Ta thấy góc có cạnh tương ứng vuông góc bằng nhau $\angle PBR = \angle BAO = \angle OBA$ do đó tứ giác $PBOR$ nội tiếp. Từ đó $\angle BRO = \angle BPO = 90^\circ - \angle PAB = \angle BAC$ do đó $OR \parallel AC$. Lại có $AC \perp OE$ nên tam giác $ROE$ vuông tại $O$. Vậy $\angle ORE = \angle BAC = \angle BOT$ nên hai tam giác vuông $ORE$ và $BOT$ đồng dạng. Lại có $\angle TOL = \angle TSL = \angle ACB = \angle POB = \angle PRB$ và $\angle TBL = \angle BAS = \angle MAC = \angle QOE$, ta suy ra $\triangle ORE \cup Q \sim \triangle BOT \cup L$. Chú ý $OA^2 = OS^2 = OM \cdot OT$ nên $OASM$ nội tiếp. Từ đây suy ra $\angle SAM = \angle SOM = \angle SLT = \angle OQE$ mà $OQ \perp AM$ nên $AS \perp QE$. Lại có $AM$, $AS$ đẳng giác trong $\angle EAF$ nên tâm ngoại tiếp tam giác $EAF$ nằm trên $AM$.

## Nhận xét

Bài toán được tác giả tạo ra nhờ sử dụng phép nghịch đảo. Có bạn **Phan Quang Trí** khoa toán đại học Sài Gòn cũng cho lời giải nghịch đảo tương tự.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp trong đường tròn $(O)$ cố định với $B$, $C$ cố định và $A$ di chuyển trên $(O)$. $E$, $F$ lần lượt đối xứng $B$, $C$ qua $CA$, $AB$. $M$ là trung điểm $EF$. Chứng minh rằng đường thẳng $AM$ luôn đi qua một điểm cố định khi $A$ di chuyển.




Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

**Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.**

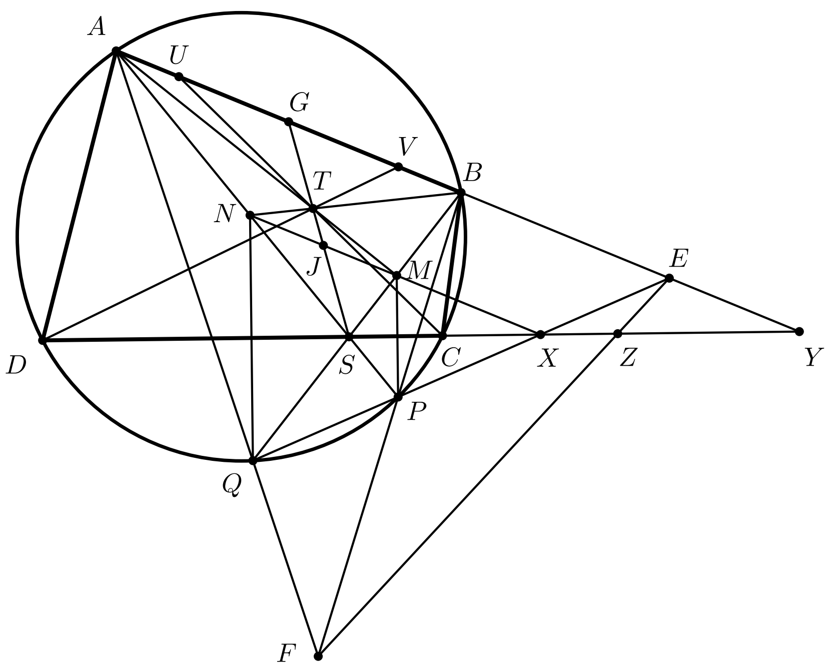
## Bài toán từ bạn đọc

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$. Điểm $S$ thuộc đoạn $CD$ sao cho $\angle DSA = \angle CSB$. $P, Q$ theo thứ tự là giao điểm thứ hai của $AS, BS$ và $(O)$. $M, N$ theo thứ tự là điểm đối xứng của $P, Q$ qua $CD$. $T$ là giao điểm của $AM$ và $BN$. $U, V$ theo thứ tự là giao điểm của $CT, DT$ và $AB$. Chứng minh rằng $AU = BV$.

Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà**

## Lời giải

Dựa theo lời giải của bạn **Nguyễn Quang Trung** lớp 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình.




Do tính đối xứng và tứ giác nội tiếp $ABPQ$, nên $SN \cdot SB = SQ \cdot SB = SP \cdot SA = SM \cdot SA$ hay $\frac{SN}{SA} = \frac{SM}{SB}$, suy ra $MN$ song song $BA$. Vì vậy nên $ST$ đi qua trung điểm $G$ của $AB$. Gọi $PQ, PB$ cắt $AB, AQ$ tương ứng tại $E, F$. $DC$ cắt $PQ, AB, EF$ lần lượt tại $X, Y, Z$. Đặt $ST$ cắt $MN$ tại $J$. Từ đó ta có $(SZ, XY) = E(SF, PB) = -1 = (ST, JG)$ suy ra $TZ \parallel JX \parallel AB$. Mặt khác, ta lại có $EF$ là đối cực của $S$ qua $(O)$ nên $(DC, SZ) = -1$. Do đó, $T(UV, SZ) = (CD, SZ) = -1$. Như vậy, $TS$ cũng đi qua trung điểm $VU$. Điều này dẫn tới hai đoạn thẳng $AB$ và $UV$ có trung điểm trùng nhau. Do đó, $AU = BV$.

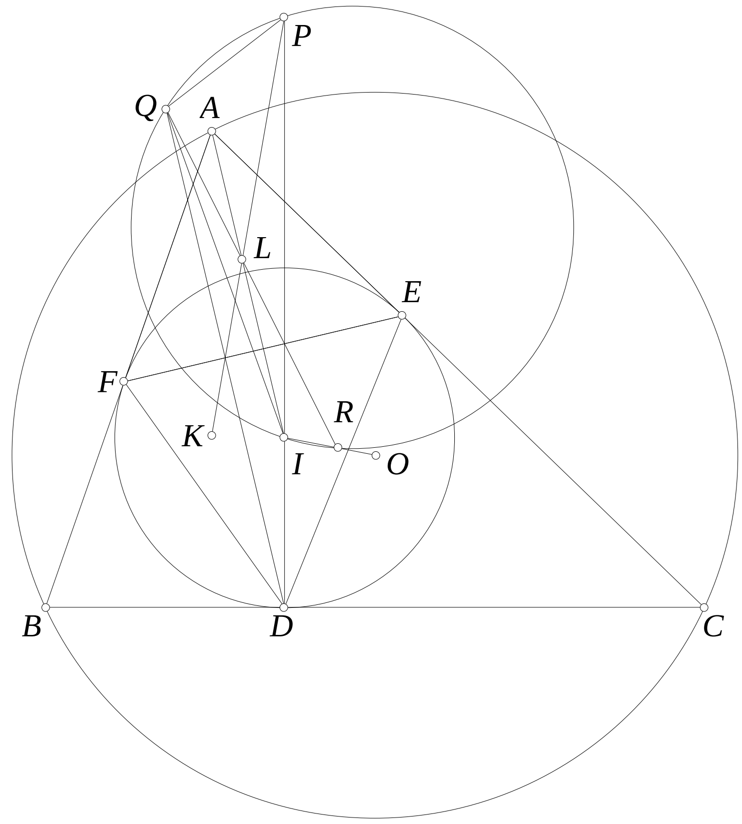
Biên tập. **Trịnh Huy Vũ** sinh viên khoa toán ĐHKHTN, ĐHQGHN.

## Nhận xét

Đây là lời giải rất hay và thú vị. Bài toán có nhiều phát triển hay khác.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ có đường tròn nội tiếp $(I)$ tiếp xúc $BC$, $CA$, $AB$ lần lượt tại $D$, $E$, $F$. $O$ là tâm ngoại tiếp của tam giác $ABC$. $K$ là trực tâm tam giác $ABC$. $Q$, $L$ lần lượt đối xứng với $D$, $I$ qua $EF$. $DI$ cắt $KL$ tại $P$. $QL$ cắt $OI$ tại $R$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $PQR$ đi qua $I$.




Tác giả: **Phạm Thị Hồng Nhung** sinh viên ĐH Bách Khoa TPHCM.

# Mỗi tuần một bài toán

***Trần Quang Hùng,*** *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

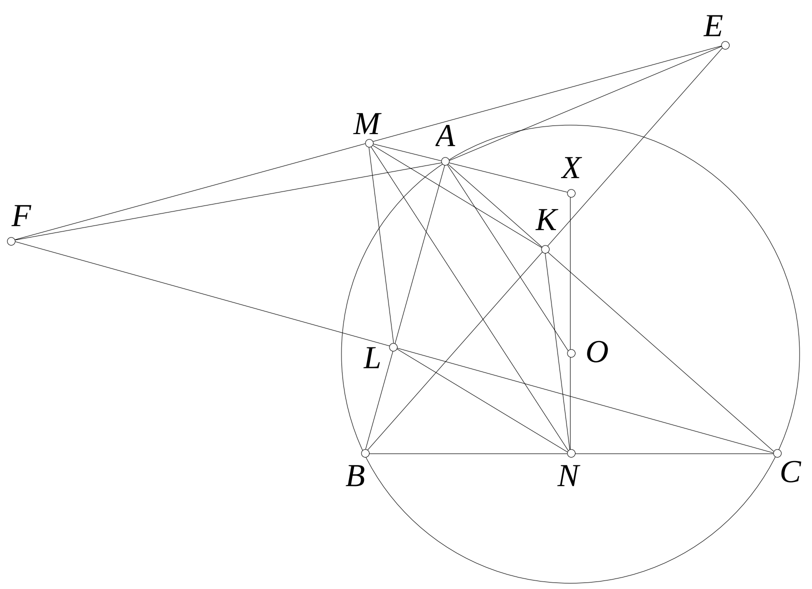
**Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.**

## Đề bài

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp trong đường tròn $(O)$ cố định với $B$, $C$ cố định và $A$ di chuyển trên $(O)$. $E$, $F$ lần lượt đối xứng $B$, $C$ qua $CA$, $AB$. $M$ là trung điểm $EF$. Chứng minh rằng đường thẳng $AM$ luôn đi qua một điểm cố định khi $A$ di chuyển.

## Lời giải

Dựa theo lời giải của bạn **Huỳnh Bách Khoa** lớp 12 Toán, THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận.




Gọi $BK$, $BL$ là đường cao của tam giác $ABC$. $N$ là trung điểm $BC$. Dễ thấy tứ giác $NKML$ có các cạnh bằng $\frac{BC}{2}$ nên $NKML$ là hình thoi. Mặt khác $\angle KNL = 180° - 2\angle BAC$ không đổi và cạnh hình thoi không đổi nên $MN$ có độ dài cố định. Cũng từ $NKML$ là hình thoi thì $MN \parallel OA$. Gọi $AM$ cắt trung trực $BC$ tại $X$ thì $\frac{XO}{XN} = \frac{AO}{MN}$ không đổi do đó $X$ cố định.

## Nhận xét

Bài toán được tác giả tạo ra nhờ sử dụng bài toán tương tự viết cho tâm nội tiếp. Các bạn có thể kiểm chứng bài toán đó như sau

**Bài toán.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và có tâm nội tiếp $I$. $E$, $F$ lần lượt đối xứng với $B$, $C$ theo thứ tự qua $IC$, $IB$. $M$ là trung điểm của $EF$. Chứng minh rằng $IM$ đi qua giao điểm của hai tiếp tuyến qua $B$, $C$ của $(O)$.

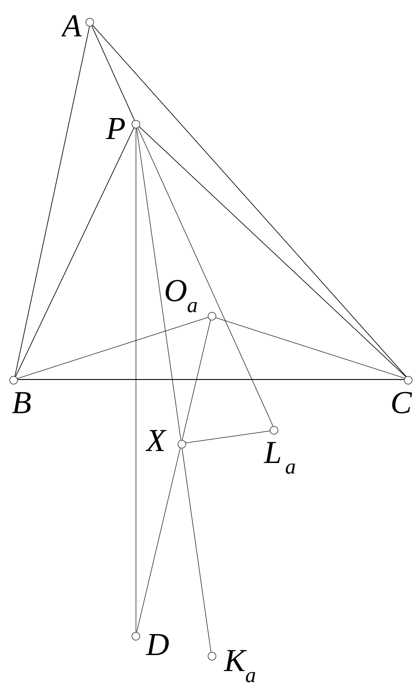
Bài toán trên cũng được bạn **Đỗ Trung Phương** lớp 12 Toán, THPT chuyên Vĩnh Phúc tổng quát trên diễn đàn AoPS bằng cách thay $I$ bởi điểm bất kỳ trên phân giác. Ngoài ra cũng xuất hiện một tổng quát hơn nữa khi thay $I$ bởi điểm bất kỳ trong mặt phẳng như sau

**Bài toán.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp $(O)$ và $P$ là điểm bất kỳ trong mặt phẳng. Tiếp tuyến qua $B$, $C$ của $(O)$ cắt nhau tại $T$. $PA$ cắt $(O)$ tại $D$ khác $A$. Các đường tròn $(PAB)$, $(PAC)$ cắt lại $CA$, $AB$ tại $E$, $F$. $PT$ cắt $EF$ tại $S$. $TD$ cắt $BC$ tại $M$. Chứng minh rằng $\frac{SE}{SF} = \frac{MC}{MB}$.

Có bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán, THPT chuyên KHTN cũng cho một lời giải khác.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ và $P$ bất kỳ. $D$ đối xứng $P$ qua $BC$. $O_a$ là tâm ngoại tiếp tam giác $PBC$. $K_a$ là tâm ngoại tiếp tam giác $O_aBC$. $DO_a$ cắt $PK_a$ tại $X$. $L_a$ thuộc $PA$ sao cho $XL_a \perp XK_a$. Tương tự có $L_b$, $L_c$. Chứng minh rằng $L_a$, $L_b$ và $L_c$ thẳng hàng.




Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

**Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.**

## Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác $ABC$ có đường tròn nội tiếp $(I)$ tiếp xúc $BC, CA, AB$ lần lượt tại $D, E, F$. $O$ là tâm ngoại tiếp của tam giác $ABC$. $K$ là trực tâm của tam giác $ABC$. $Q, L$ lần lượt đối xứng với $D, I$ qua $EF$. $DI$ cắt $KL$ tại $P$. $QL$ cắt $OI$ tại $R$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $PQR$ đi qua $I$.

Tác giả: **Phạm Thị Hồng Nhung**

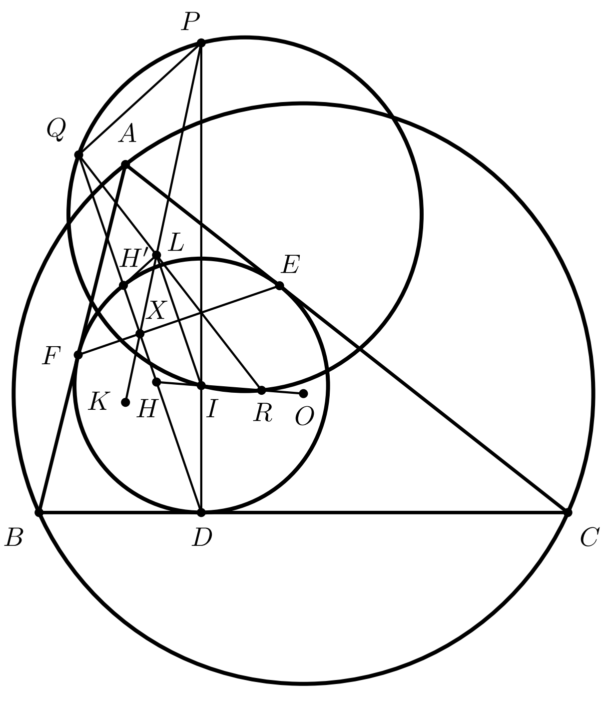
## Lời giải

Dựa theo lời giải của bạn **Trương Mạnh Tuấn**, lớp 12 Toán trường THPT chuyên KHTN.

Ta phát biểu không chứng minh một số bổ đề quen thuộc:

**Bổ đề 1.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp $(O)$. Đường tròn nội tiếp $(I)$ tiếp xúc $BC, CA, AB$ lần lượt tại $D, E, F$. Khi đó, $OI$ là đường thẳng Euler của tam giác $DEF$.

**Bổ đề 2.** Cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$. Đường tròn nội tiếp $(I)$ tiếp xúc $BC, CA, AB$ lần lượt tại $D, E, F$. $X$ là hình chiếu của $D$ lên $EF$. Khi đó, $XD$ là phân giác của góc $\angle HXI$.




**Giải bài toán.** Đặt $X$ là hình chiếu của $D$ lên $EF$. Theo bổ đề 2 thì $XD$ là phân giác của $\angle KXI$. Từ đó suy ra $K, X, L$ thẳng hàng. Gọi $H$ là trực tâm $DEF$ và $DH$ cắt $(I)$ lần thứ hai tại $H'$. Theo bổ đề 1 ta được $H, I, R, O$ thẳng hàng. Hơn nữa, ta lại có $\frac{PL}{PX} = \frac{LI}{DX} = \frac{DH}{DX} = \frac{QH'}{QX}$, suy ra $QP \parallel LH'$. Do đó, $\angle RQP = \angle QLH' = 180° - \angle RLH' = 180° - \angle PIH = \angle RIP$. Từ đó suy ra bốn điểm $Q, R, P, I$ cùng nằm trên một đường tròn.

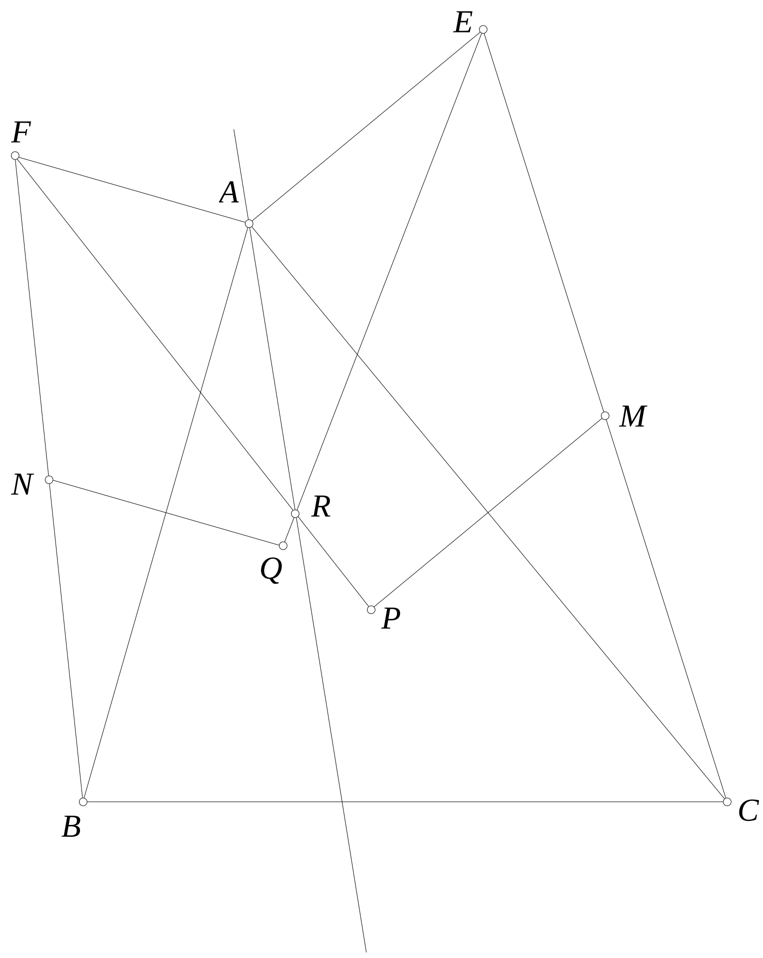
Biên tập. **Trịnh Huy Vũ** sinh viên khoa toán ĐHKHTN, ĐHQGHN.

## Nhận xét

Đây là bài toán hay có nhiều ứng dụng và phát triển trong các mô hình khác nhau.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ có $B$, $C$ cố định và $A$ thay đổi. Dựng ra ngoài các tam giác vuông tại $A$ là $AEC$ và $AFB$ đồng dạng và có góc không đổi. $M$, $N$ là trung điểm $CE$, $BF$. $P$, $Q$ đối xứng với $M$, $N$ qua $CA$, $AB$. $FP$ cắt $EQ$ tại $R$. Chứng minh rằng đường thẳng $AR$ đi qua điểm cố định khi $A$ thay đổi.




Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng, Trần Quang Hùng,** Hà Nội

# Các bài toán hình học hàng tuần

*Trần Quang Hùng*

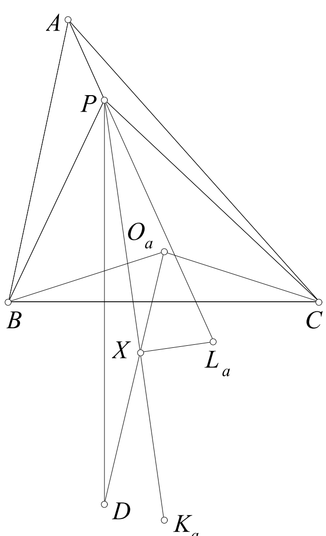
**Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên những lời giải hay cho ít nhất một bài toán được đề nghị ở trong các tuần trước và đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một số bài toán cho tuần sau. Các bài toán hình học được đề nghị có thể do tôi sáng tác, từ các bạn đọc sáng tác gửi tới hoặc được chọn lọc từ các cuộc thi Olympic trên toàn thế giới, tất cả đề bài và lời giải sẽ đều được ghi rõ nguồn gốc. Lời giải cho bài toán đề nghị, các phát triển cũng như mọi thảo luận và trao đổi xin gửi về địa chỉ email analgeomatica@gmail.com.**

## Các bài toán tuần trước

**Bài toán: Trần Quang Hùng**

Cho tam giác $ABC$ và $P$ bất kỳ. $D$ đối xứng $P$ qua $BC$. $O_a$ là tâm ngoại tiếp tam giác $PBC$. $K_a$ là tâm ngoại tiếp tam giác $O_aBC$. $DO_a$ cắt $PK_a$ tại $X$. $L_a$ thuộc $PA$ sao cho $XL_a \perp XK_a$. Tương tự có $L_b$, $L_c$. Chứng minh rằng $L_a$, $L_b$ và $L_c$ thẳng hàng.

Lời giải sau của tác giả bài toán và được biên tập bởi tác giả.



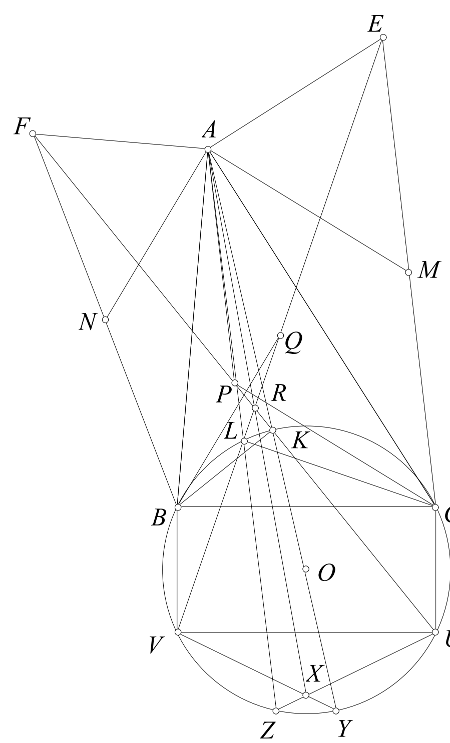

***Lời giải.*** Ta xét đường tròn $(L'_a)$ đi qua $P$, $X$ có tâm thuộc $PA$ dễ thấy $L'_a$ là trung điểm $PL_a$. Khi đó tương tự có các đường tròn $(L'_b)$ và $(L'_c)$. Ta sẽ chứng minh các đường tròn $(L'_a)$, $(L'_b)$ và $(L'_c)$ đồng trục để suy ra $L'_a$, $L'_b$, $L'_c$ thẳng hàng, vị tự tâm $P$ tỷ số 2 suy ra $L_a$, $L_b$, $L_c$ thẳng hàng, thật vậy. Nghịch đảo cực $P$ phương tích bất kỳ thì $X$ biến thành tâm đường tròn Euler của tam giác $PBC$. Khi đó ta thu đường bài toán chứng minh các đường thẳng đi qua tâm Euler của tam giác $PBC$, $PCA$ và $PAB$ lần lượt vuông góc với $PA$, $PB$ và $PC$ đồng quy là bài toán quen thuộc. □

**Nhận xét.** Đây là bài toán hay được tạo ra nhờ phép nghịch đảo, bản thân bài toán gốc cũng là bài toán mà tác giả tạo ra trong quá trình đi dạy và được dùng làm đề kiểm tra đội tuyển toán ở trường THPT chuyên KHTN năm 2015.

**Bài toán: Nguyễn Tiến Dũng, Trần Quang Hùng**

Cho tam giác $ABC$ có $B$, $C$ cố định và $A$ thay đổi. Dựng ra ngoài các tam giác vuông tại $A$ là $AEC$ và $AFB$ đồng dạng và có góc không đổi. $M$, $N$ là trung điểm $CE$, $BF$. $P$, $Q$ đối xứng với $M$, $N$ qua $CA$, $AB$. $FP$ cắt $EQ$ tại $R$. Chứng minh rằng đường thẳng $AR$ đi qua điểm cố định khi $A$ thay đổi.

Lời giải sau của **Telv Cohl** trên diễn đàn AoPS được biên tập bởi **Trần Quang Hùng.**



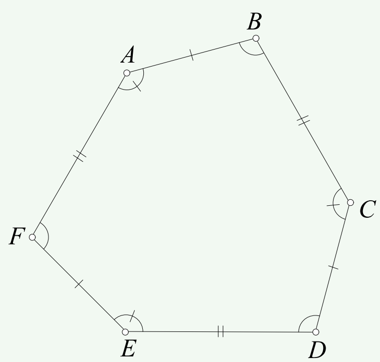

***Lời giải.*** Dựng hình chữ nhận $BCUV$ ra ngoài tam giác $ABC$ sao cho $\angle UBC = \angle ACE$ không đổi khi đó $BCUV$ cố định. Theo bài toán quen thuộc về các tam giác vuông đồng dạng dựng ra ngoài tam giác thì $FP$ đi qua $U$ và $EQ$ đi qua $V$. Dễ thấy hình chiếu $K$, $L$ của $B$, $C$ lần lượt trên $FU$, $EV$ nằm trên đường tròn $(O)$ ngoại tiếp hình chữ nhật. $AK$, $AL$ cắt $(O)$ tại $U$, $V$ khác $K$, $L$ theo định lý Pascal dễ thấy $AR$ đi qua $X$. Ta dễ thấy $\angle YVU = \angle YKU = \angle AKF = \angle ABF$ không đổi. Tương tự $\angle XUV$ không đổi nên $X$ cố định. □

**Nhận xét.** Đây là bài toán đi qua điểm cố định hay với điểm cố định không dễ đoán nhận và có sử dụng một kết quả về các tam giác cân đồng dạng dựng ra ngoài một tam giác bất kỳ.

## Các bài toán tuần này

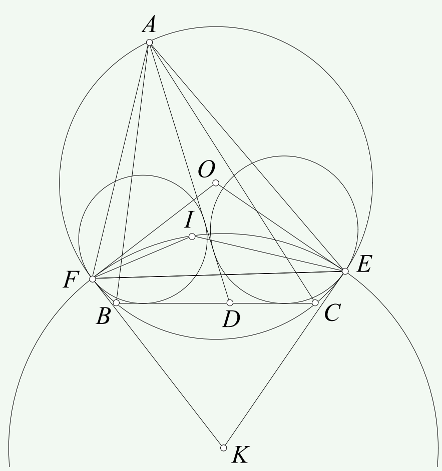
**Bài toán: Trần Quang Hùng**

Cho $ABCDEF$ là lục giác lồi thỏa mãn $AB = CD = EF$ và $BC = DE = FA$ đồng thời $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \angle E + \angle F$. Chứng minh rằng $\angle B = \angle D = \angle F$.



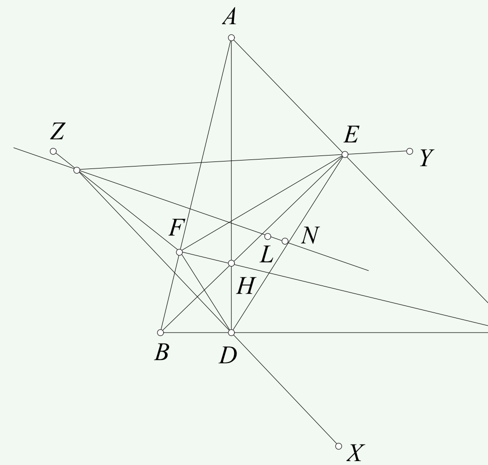

**Bài toán: Ngô Quang Dương**

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $D$ là một điểm nằm trên cạnh $BC$. Một đường tròn tiếp xúc các đoạn thẳng $DA$, $DB$ và tiếp xúc trong $(O)$ tại $F$. Một đường tròn tiếp xúc các đoạn thẳng $DA$, $DC$ và tiếp xúc trong $(O)$ tại $E$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $IEF$ luôn trực giao với $(O)$ và đi qua một điểm cố định khác $I$.



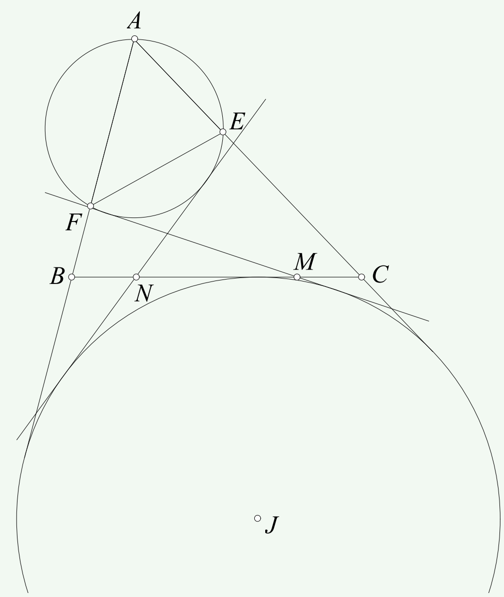

**Bài toán: Nguyễn Minh Hà, trường xuân 2015**

Cho tam giác $ABC$, trực tâm $H$, tâm đường tròn Euler $N$, điểm Lemoine $L$. $AH$, $BH$, $CH$ theo thứ tự cắt $BC$, $CA$, $AB$ tại $D$, $E$, $F$. $X$, $Y$, $Z$ theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $HBC$, $HCA$, $HAB$. Chứng minh rằng $DX$, $EY$, $FZ$ đồng quy tại một điểm thuộc $NL$.




**Bài toán: I.Frolov, Sharygin Olympiad 2017 Final Round**

Cho tam giác $ABC$ có đường cao $BE$, $CF$ và đường tròn bàng tiếp góc $A$ là $(J)$. Hai tiếp tuyến chung trong của các đường tròn $(AEF)$ và $(J)$ cắt $BC$ tại $M$, $N$. Chứng minh rằng $BM = CN$.



# Các bài toán hình học hàng tuần

*Trần Quang Hùng*

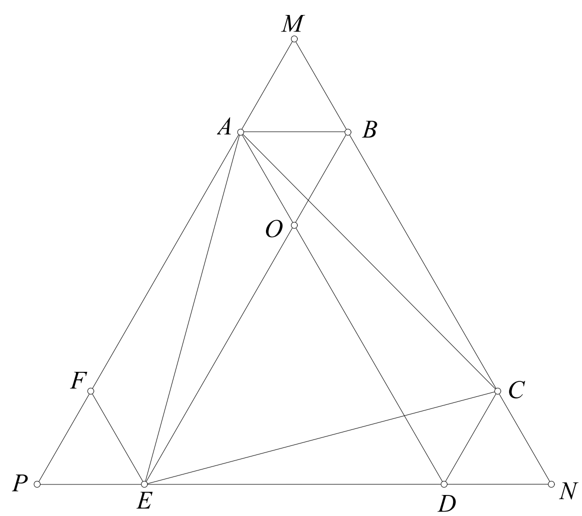
**Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên những lời giải hay cho ít nhất một bài toán được đề nghị ở trong các tuần trước và đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một số bài toán cho tuần sau. Các bài toán hình học được đề nghị có thể do tôi sáng tác, từ các bạn đọc sáng tác gửi tới hoặc được chọn lọc từ các cuộc thi Olympic trên toàn thế giới, tất cả đề bài và lời giải sẽ đều được ghi rõ nguồn gốc. Lời giải cho bài toán đề nghị, các phát triển cũng như mọi thảo luận và trao đổi xin gửi về địa chỉ email analgeomatica@gmail.com.**

## Các bài toán tuần trước

**Bài toán: (Trần Quang Hùng)**

Cho $ABCDEF$ là lục giác lồi thỏa mãn $AB = CD = EF$ và $BC = DE = FA$ đồng thời $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \angle E + \angle F$. Chứng minh rằng $\angle B = \angle D = \angle F$.

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải sau của tác giả bài toán được biên tập bởi **Trần Quang Hùng.**



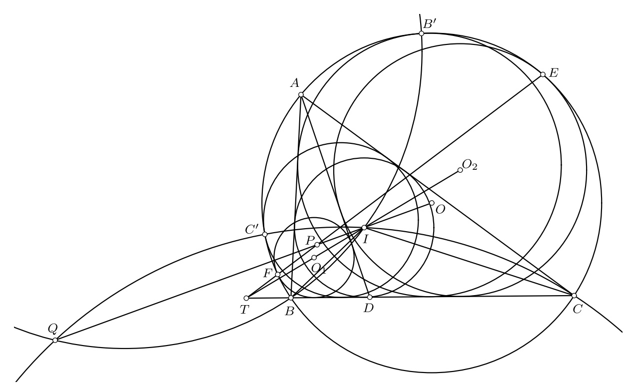

***Lời giải.*** Gọi $BC, DE, AF$ cắt quanh tam giác $MNP$. Vì tổng các góc của lục giác là $720°$ nên $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = \angle E + \angle F = 240°$. Vì vậy, ta dễ thấy tam giác $MNP$ đều. Dựng tam giác đều $DEO$ với $O$ nằm trong lục giác. Ta thấy $EOAF$ và $DOBC$ đều là hình bình hành, nên $AB = EF = OA = CD = OB$, vậy $OAB$ là tam giác đều. Do đó, $\angle AFE + \angle BCD = \angle AOE + \angle BOD = 360° - 60° - 60° = 240°$. Từ $\angle EDC + \angle BCD = 240°$. Từ đó suy ra $\angle AFE = \angle EDC$. Tương tự, $\angle EDC = \angle CBA$. Từ đó $\angle B = \angle D = \angle F$. Ta có điều phải chứng minh. □

**Nhận xét.** Bài toán là mở rộng bài P1 đề thi IMO năm 2005. Có thể giải theo hướng sử dụng vector và định lý con nhím.

**Bài toán: (Ngô Quang Dương)**

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $D$ là một điểm nằm trên cạnh $BC$. Một đường tròn tiếp xúc các đoạn thẳng $DA$, $DB$ và tiếp xúc trong $(O)$ tại $F$. Một đường tròn tiếp xúc các đoạn thẳng $DA$, $DC$ và tiếp xúc trong $(O)$ tại $E$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $IEF$ luôn trực giao với $(O)$ và đi qua một điểm cố định khác $I$.

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải sau của tác giả bài toán được biên tập bởi **Ngô Quang Dương.**




***Lời giải.*** $(O_1)$ là đường tròn tiếp xúc với $DA$, $DB$ và tiếp xúc trong với $(O)$ tại $F$; $(O_2)$ là đường tròn tiếp xúc với $DA$, $DC$ và tiếp xúc trong với $(O)$ tại $E$.
$(O_b)$ là đường tròn tiếp xúc với $BC$, $BA$ và tiếp xúc trong với $(O)$ tại $B'$; $(O_c)$ là đường tròn tiếp xúc với $CA$, $CB$ và tiếp xúc trong với $(O)$ tại $C'$. Gọi $T$ là tâm vị tự ngoài của $(O_1)$ và $(O_2)$. $P$ là tâm vị tự ngoài của $(O)$ và đường tròn nội tiếp.
Theo định lý Thébault, $I$, $O_1$, $O_2$ thẳng hàng nên $T$ cũng là tâm vị tự ngoài của $(O_1)$ và đường tròn nội tiếp, $(O_2)$ và đường tròn nội tiếp.
Áp dụng định lý Monge - d'Alembert cho:

- $(O)$, $(I)$, $(O_b)$, suy ra $B$, $P$, $B'$ thẳng hàng.
- $(O)$, $(I)$, $(O_c)$, suy ra $C$, $P$, $C'$ thẳng hàng.
- $(O_1)$, $(I)$, $(O)$, suy ra $T$, $P$, $F$ thẳng hàng, kéo theo $T$, $P$, $E$, $F$ thẳng hàng.

Lấy điểm $Q$ trên $IP$ sao cho $\overline{PI}\cdot\overline{PQ}=\overline{PB}\cdot\overline{PE}=\overline{PC}\cdot\overline{PF}$, ta được $(IBB')$, $(ICC')$, $(IEF)$ đi qua $Q$.
Mà $BI$ đi qua điểm chính giữa cung $CA$ không chứa $B$, còn $B'I$ đi qua điểm chính giữa cung $CA$ chứa $B$ nên qua phép nghịch đảo cực $I$, ta được $(IBB')$ trực giao với $(O)$. Hoàn toàn tương tự, $(ICC')$ trực giao với $(O)$.
Từ những điều trên, ta suy ra $(IEF)$ trực giao với $(O)$ và luôn đi qua điểm $Q$ cố định. $\square$

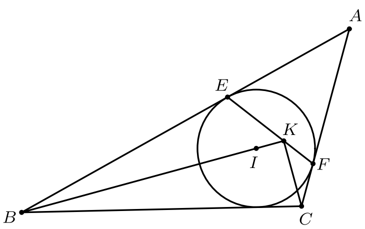
**Nhận xét.** Đây là bài toán thú vị từ cấu hình các đường tròn Thebault. Cấu hình này đã trở thành rất kinh điển cho các đường tròn tiếp xúc nhưng trên đó vẫn còn nhiều bài toán mới có thể khai thác. Như bài toán trên là một ví dụ cho thấy điều này.

**Bài toán: (Nguyễn Minh Hà, trường xuân 2015)**

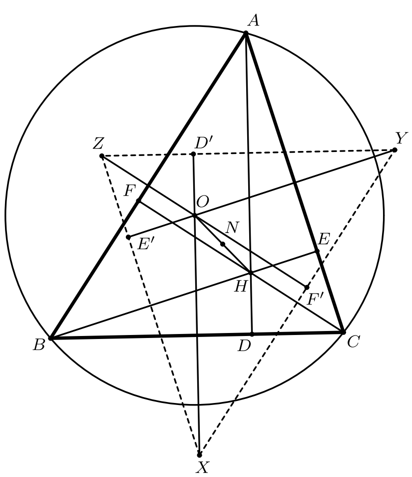
Cho tam giác $ABC$, trực tâm $H$, tâm đường tròn Euler $N$, điểm Lemoine $L$. $AH$, $BH$, $CH$ theo thứ tự cắt $BC$, $CA$, $AB$ tại $D$, $E$, $F$. $X$, $Y$, $Z$ theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $HBC$, $HCA$, $HAB$. Chứng minh rằng $DX$, $EY$, $FZ$ đồng quy tại một điểm thuộc $NL$.

Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của thầy **Nguyễn Minh Hà** được biên tập bởi bạn **Trần Quang Huy.**

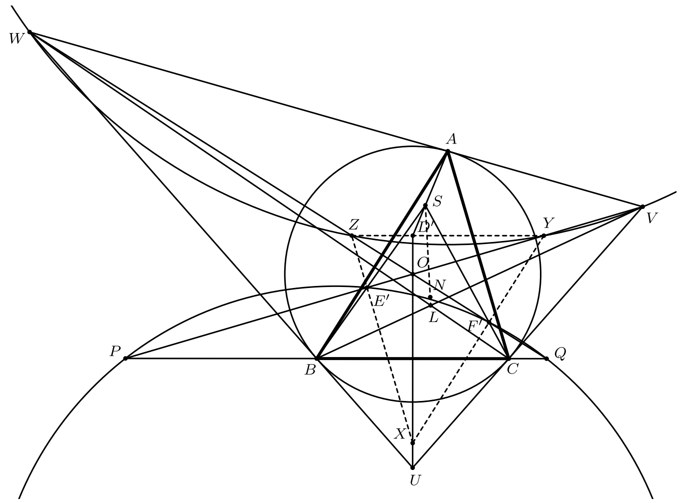
**Bổ đề.** Nếu đường tròn nội tiếp $(I)$ của $\triangle ABC$ theo thứ tự tiếp xúc với $AB, AC$ tại $E, F$ và $K$ là giao điểm của $BI$ và $EF$ thì $\angle BKC = 90°$.




***Lời giải.*** Gọi $N$ là tâm đường tròn Euler của $\triangle ABC$; $D', E', F'$ theo thứ tự là giao điểm của $OX, OY, OZ$ và $YZ, ZX, XY$.




Dễ thấy, $O, X, Y, Z$ theo thứ tự là ảnh của $H, A, B, C$ qua phép đối xứng $\mathcal{S}_N$.
Từ đó, chú ý rằng $BC, CA, AB, YZ, ZX, XY$ theo thứ tự là trung trực của $OX, OY, OZ, HA, HB, HC$, suy ra:
$\mathcal{S}_N(D)=\mathcal{S}_N(AH\cap BC)=\mathcal{S}_N(AH)\cap\mathcal{S}_N(BC)=XO\cap YZ=D'$
$\mathcal{S}_N(E)=\mathcal{S}_N(BH\cap CA)=\mathcal{S}_N(BH)\cap\mathcal{S}_N(CA)=YO\cap ZX=E'$
$\mathcal{S}_N(F)=\mathcal{S}_N(CH\cap AB)=\mathcal{S}_N(CH)\cap\mathcal{S}_N(AB)=ZO\cap XY=F'$
Vậy $AD', BE', CF'$ theo thứ tự là ảnh của $DX, EY, FZ$ qua $\mathcal{S}_N$. (1)



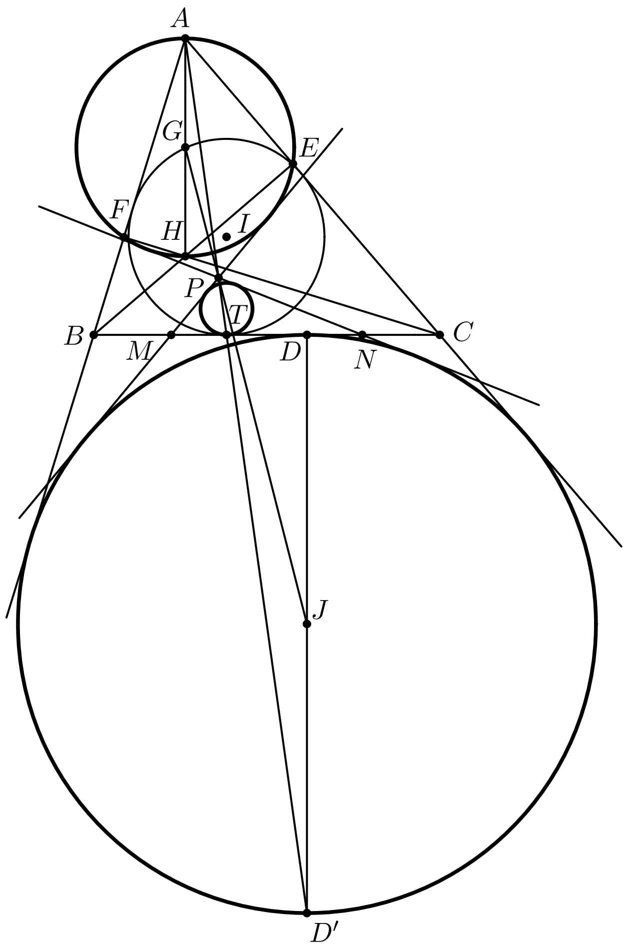

Dựng $\triangle UVW$ ngoại tiếp $(O)$ sao cho $VW, WU, UV$ theo thứ tự tiếp xúc với $(O)$ tại $A, B, C$; $S=BE'\cap CF'$; $P=YO\cap BC$; $Q=ZO\cap CB$; $K=OU\cap BC$.
Dễ thấy $N=AX\cap BY\cap CZ$; $L=AU\cap BV\cap CW$.
Dễ thấy $\overline{OP}\cdot\overline{OE'}=\overline{OK}\cdot\overline{OX}=\overline{OQ}\cdot\overline{OF'}$.
Do đó, $P, Q, E', F'$ cùng thuộc một đường tròn. (2)
Dễ thấy: $(WZ,WV)\equiv(AB,AO)\equiv(AH,AC)\equiv(BC,OV)\equiv(YZ,YV)\pmod{\pi}$.
Do đó, $Y, Z, V, W$ cùng thuộc một đường tròn. (3)
Từ (2), (3), chú ý rằng $E'P\equiv YV$, $PQ\parallel YZ$, suy ra:
$(E'F',WV)\equiv(E'F',E'P)+(YV,WV)\equiv(QF',QP)+(YZ,WZ)\equiv 0\pmod{\pi}$
Điều này có nghĩa là $E'F'\parallel VW$.
Theo bổ đề trên, $WP\perp VO$, $VQ\perp WO$. Kết hợp với $ZE'\perp VO$, $YF'\perp WO$, suy ra: $WP\parallel ZE'$, $VQ\parallel YF'$. Vậy các điều kiện sau là tương đương:

$$
\begin{aligned}
& N, L, S \text{ thẳng hàng}\\
\Longleftrightarrow\ & B(CNLS)=C(BNLS)\\
\Longleftrightarrow\ & B(PYVE')=C(QZWF')\\
\Longleftrightarrow\ & B(VPE'Y)=C(WQF'Z)\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\overline{E'V}}{\overline{E'P}}:\frac{\overline{YV}}{\overline{YP}}=\frac{\overline{F'W}}{\overline{F'Q}}:\frac{\overline{ZW}}{\overline{ZQ}}\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\overline{E'V}}{\overline{F'W}}\cdot\frac{\overline{ZW}}{\overline{YV}}=\frac{\overline{E'P}}{\overline{F'Q}}\cdot\frac{\overline{ZQ}}{\overline{YP}}\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\overline{E'O}}{\overline{F'O}}\cdot\frac{\overline{ZW}}{\overline{YV}}=\frac{\overline{E'P}}{\overline{F'Q}}\cdot\frac{\overline{ZO}}{\overline{YO}}\quad (\text{vì } E'F'\parallel VW,\ PQ\parallel YZ)\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\overline{E'O}\cdot\overline{YO}}{\overline{F'O}\cdot\overline{ZO}}\cdot\frac{\overline{ZW}}{\overline{YV}}=\frac{\overline{E'P}}{\overline{F'Q}}\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\overline{ZW}}{\overline{E'P}}=\frac{\overline{YV}}{\overline{F'Q}}\quad (\text{vì } Y, Z, E', F' \text{ cùng thuộc một đường tròn})\\
\Longleftrightarrow\ & \frac{\overline{ZO}}{\overline{E'O}}=\frac{\overline{YO}}{\overline{F'O}}\quad (\text{vì } ZE'\parallel WP)\\
\Longleftrightarrow\ & \overline{ZO}\cdot\overline{F'O}=\overline{YO}\cdot\overline{E'O}\quad (\text{đúng vì } Y, Z, E', F' \text{ cùng thuộc một đường}
\end{aligned}
$$

Vậy, $BE', CF'$ và $NL$ đồng quy.
Tương tự, $BE', AD'$ và $NL$ đồng quy.
Tóm lại, $AD', BE', CF'$ đồng quy tại một điểm thuộc $NL$. (4)
Từ (1), (4) suy ra điều phải chứng minh. $\square$

**Bài toán: (I.Frolov, Sharygin Olympiad 2017 Final Round)**

Cho tam giác $ABC$ có đường cao $BE$, $CF$ và đường tròn bàng tiếp góc $A$ là $(J)$. Hai tiếp tuyến chung trong của các đường tròn $(AEF)$ và $(J)$ cắt $BC$ tại $M$, $N$. Chứng minh rằng $BM = CN$.




Chúng tôi xin giới thiệu lời giải của tác giả bài toán được biên tập bởi bạn **Trịnh Huy Vũ.**

***Lời giải.*** $P$ là tâm vị tự trong của hai đường tròn $(AEF)$ và $(J)$. Gọi $H$ là trực tâm của tam giác $ABC$ và $G$ là trung điểm của $AH$. Ta có $G$ đồng thời cũng là tâm của đường tròn $(AEF)$. Đặt $T$ là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $(I)$ của tam giác $ABC$ với $BC$, $T'$ là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác $MNP$ với $MN$, $D$ là tiếp điểm của đường tròn $(J)$ với $BC$. Dựng đường kính $DD'$ của đường tròn $(J)$.

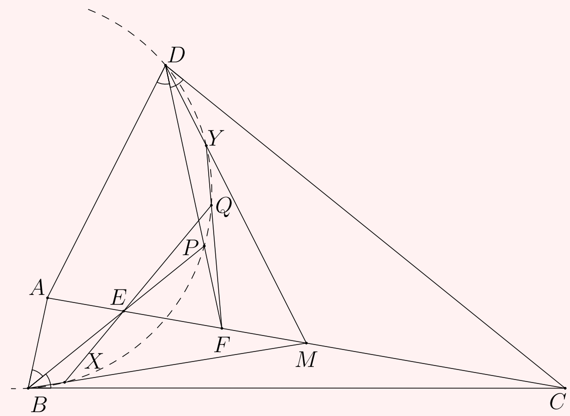
Do $AG \parallel DD'$ và $P$ là tâm vi tự trong của $(AEF)$ và $(J)$ nên $A, P, D'$ thẳng hàng. Hơn nữa ta cũng có $A$ là tâm vị tự ngoài của đường tròn $(I)$ và $(J)$, vì vậy $A, T, D'$ thẳng hàng. Như vậy, bốn điểm $A, P, T, D'$ cùng nằm trên một đường thẳng. Mặt khác, $(J)$ cũng là đường tròn bàng tiếp góc $P$ của tam giác $MNP$, do đó đường thẳng $PD'$ đi qua tiếp điểm $T'$ của đường tròn nội tiếp tam giác $MNP$ với $BC$. Từ đó suy ra $T \equiv T'$.

Như vậy, $T, D$ tương ứng là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp và bàng tiếp của các tam giác $ABC, MNP$ với đường thẳng $BC$. Do đó, ba đoạn thẳng $BC$, $DT$, $MN$ có trung điểm trùng nhau. Vì vậy, $BM = CN$. $\square$

## Các bài toán tuần này

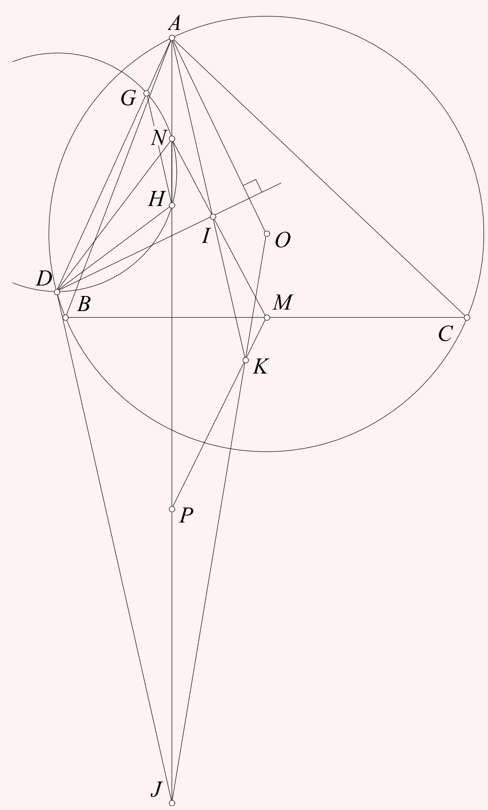
**Bài toán: (IMO Shortlist 2016 G6)**

Cho tứ giác $ABCD$ lồi với $\angle ABC = \angle ADC < 90°$. Phân giác các góc $\angle ABC$ và $\angle ADC$ lần lượt cắt $AC$ tại $E$ và $F$ đồng thời cắt nhau tại $P$. $M$ là trung điểm $AC$ và $\omega$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác $BPD$. $BM$ và $DM$ cắt lại $\omega$ tại $X$ và $Y$. Gọi $Q$ là giao điểm của $XE$ và $YF$. Chứng minh rằng $PQ \perp AC$.




**Bài toán: (Từ AoPS)**

Cho tam giác $ABC$ nhọn nội tiếp đường tròn $(O)$, trực tâm $H$ và tâm nội tiếp $I$. Đường thẳng qua $I$ vuông góc $OA$ cắt cung nhỏ $AB$ tại $D$. $M$ là trung điểm $BC$. $MI$ cắt $AH$ tại $N$. Đường tròn $(DNH)$ cắt $AD$ lần nữa tại $G$. Đường thẳng qua $D$ song song $GH$ cắt $AH$ tại $J$. $AI$ cắt $OJ$ tại $K$. $MK$ cắt $AJ$ tại $P$. Chứng minh rằng $PA = HB + HC$.

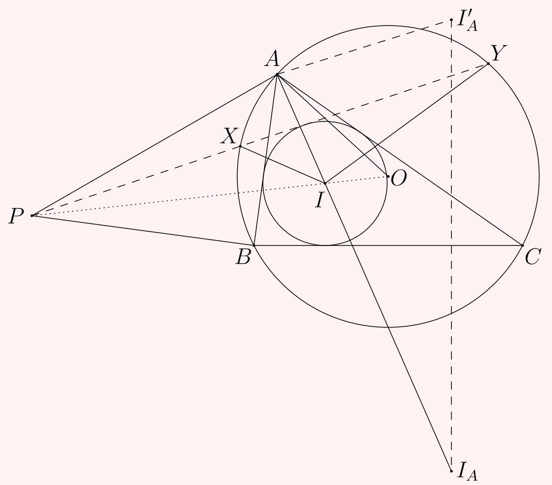


### Bài toán: (IMO Shortlist 2016 G7)

Gọi $I$ là tâm nội tiếp tam giác $ABC$ và $I_A$ là tâm bàng tiếp góc $A$ của tam giác. $I'_A$ đối xứng với $I_A$ qua $BC$ và $l_A$ là đối xứng của đường thẳng $AI'_A$ qua $AI$. Đính nghĩa tương tự các điểm $I_B$, $I'_B$ và đường thẳng $l_B$. $l_A$ cắt $l_B$ tại $P$.

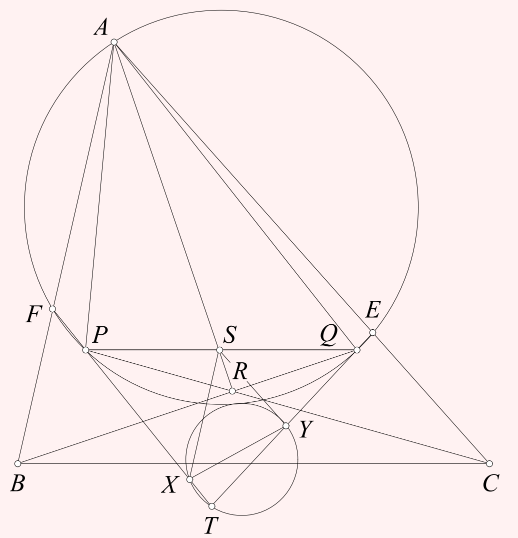
a) Chứng minh rằng $P$ nằm trên $OI$ với $O$ là tâm ngoại tiếp tam giác $ABC$.

b) Gọi một tiếp tuyến qua $P$ của đường tròn nội tiếp $(I)$ cắt $(O)$ tại $X$ và $Y$. Chứng minh rằng $\angle XIY = 120°$.



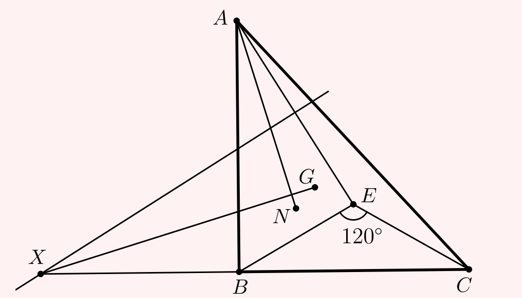

### Bài toán: (Trần Quang Hùng, mở rộng Iran TST 2017)

Cho tam giác $ABC$ và $P, Q$ nằm trong tam giác sao cho $PQ \parallel BC$. $BQ$ cắt $CP$ tại $R$. $AR$ cắt $PQ$ tại $S$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $APQ$ cắt $CA, AB$ tại $E, F$ khác $A$. $FP$ cắt $EQ$ tại $T$. Các đường thẳng qua $S$ lần lượt song song với $AB, AC$ theo thứ tự cắt $FP, EQ$ tại $X, Y$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $TXY$ tiếp xúc $(O)$.



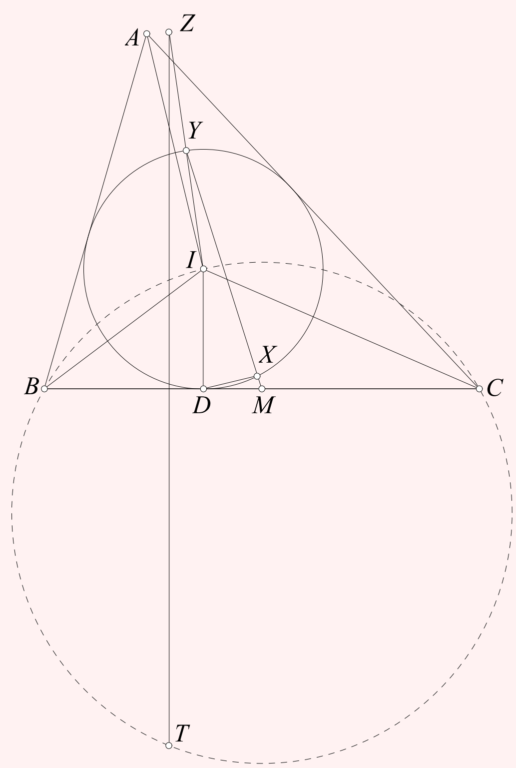

### Bài toán: (Trịnh Huy Vũ)

Cho tam giác $ABC$ nhọn, không cân và $\angle A \neq 60°$. $G, N$ lần lượt là trọng tâm và tâm đường tròn chín điểm của tam giác $ABC$. Dựng một tam giác $EBC$ cân tại $E$ thỏa mãn $A, E$ cùng phía với $BC$ và $\angle BEC = 120°$. Trung trực của $AE$ cắt $BC$ tại $X$. Chứng minh rằng $GX \perp AN$.



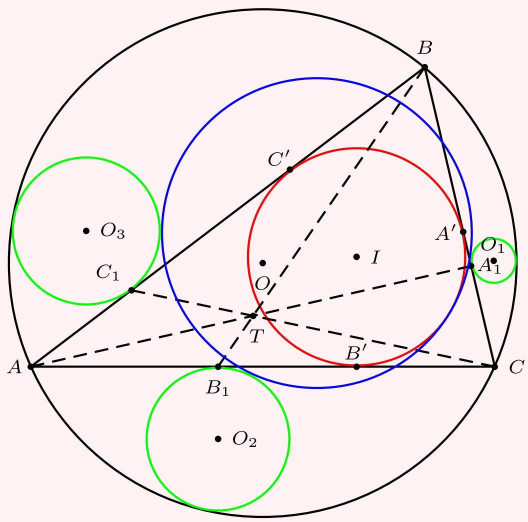

### Bài toán: (Nguyễn Minh Hà, trường Xuân năm 2015)

Cho tam giác $ABC$, $M$ là trung điểm của $BC$, đường tròn nội tiếp $(I)$ tiếp xúc với $BC$ tại $D$. $X$ là điểm đối xứng của $D$ qua $AI$. $MX$ lại cắt $(I)$ tại $Y$. $Z$ là điểm đối xứng của $I$ qua $Y$. $T$ là điểm đối xứng của $Z$ qua $BC$. Chứng minh rằng bốn điểm $I$, $B$, $C$ và $T$ cùng thuộc một đường tròn.



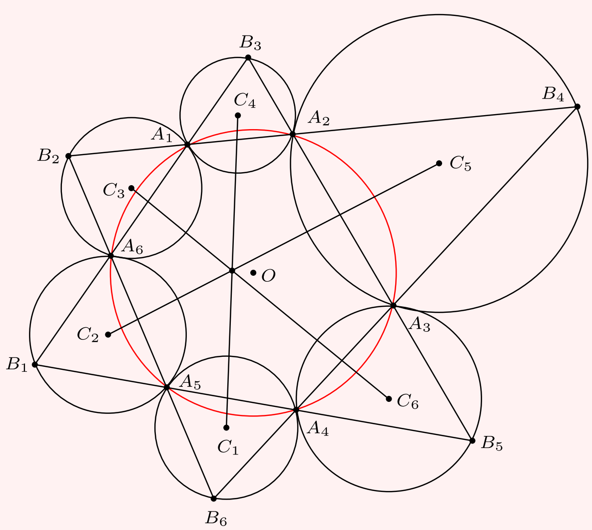
### Bài toán: (Lev Emelyanov, từ Forum Geometricorum năm 2001)

Cho các điểm $A_1$, $B_1$ và $C_1$ lần lượt nằm trên các cạnh $BC$, $CA$ và $AB$ của tam giác $ABC$. Dựng các đường tròn $(O_1)$, $(O_2)$ và $(O_3)$ ở ngoài tam giác và tiếp xúc với các cạnh của tam giác $ABC$ theo thứ tự tại $A_1$, $B_1$ và $C_1$ và cũng tiếp xúc với đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$. Chứng minh rằng nếu $AA_1$, $BB_1$ và $CC_1$ đồng quy thì đường tròn tiếp xúc ngoài với ba đường tròn $(O_1)$, $(O_2)$ và $(O_3)$ cũng sẽ tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác $ABC$.




### Bài toán: (Đào Thanh Oai, từ Advance Geometry Yahoo Group)

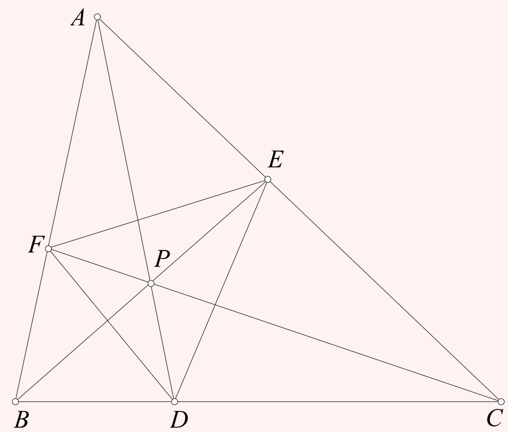
Cho $A_i$, $i = 1, 2..., 6$, là sáu điểm trên một đường tròn. Sử dụng chỉ số lấy theo module 6, ký hiệu giao điểm của các đường $A_iA_{i+1}$ và $A_{i+2}A_{i+3}$ lần lượt là $B_{i+3}$ và tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_iA_{i+1}B_{i+2}$ là $C_{i+3}$. Chứng minh rằng các đường thẳng $C_1C_4$, $C_2C_5$ và $C_3C_6$ đồng quy.




### Bài toán: (Đỗ Thanh Sơn, bài giảng cho đội tuyển chuyên KHTN)

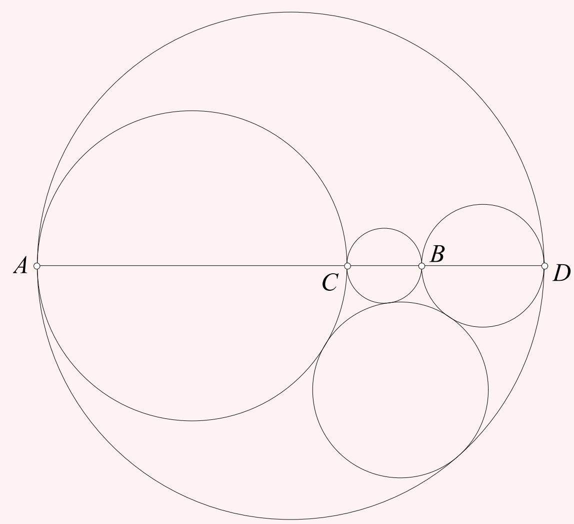
Cho tam giác $ABC$. Giả sử có điểm $P$ nằm trong tam giác và nhìn ba cạnh của tam giác dưới ba góc bằng nhau. $PA$, $PB$, $PC$ lần lượt cắt $BC$, $CA$, $AB$ tại $D$, $E$, $F$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{PD} + \frac{1}{PE} + \frac{1}{PF} = 2\left(\frac{1}{PA} + \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}\right).$$




### Bài toán: (Nguyễn Đăng Phát, tập huấn đội tuyển Việt Nam thi IMO năm 2009)

Cho hàng điểm điều hòa $(AB, CD) = -1$. Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với các đường tròn đường kính $AC$, $CB$, $BD$ và $DA$.



# Một số bài toán cho đội tuyển

*Dành cho đội tuyển THPT chuyên KHTN năm 2017*

**Bài toán 1**

Cho tam giác $ABC$. Đường thẳng qua $B$ vuông góc $CA$ cắt đường tròn đường kính $CA$ tại $K, L$ sao cho $K$ nằm giữa $B, L$. Đường thẳng qua $C$ vuông góc $AB$ cắt đường tròn đường kính $AB$ tại $M, N$ sao cho $M$ nằm giữa $C, N$. Chứng minh rằng $MK, NL$ và $BC$ đồng quy.

**Bài toán 2**

Cho tam giác $ABC$ trực tâm $H$. Đường tròn đường kính $AB$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác $AHC$ tại $E$ khác $A$. Đường tròn đường kính $AC$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác $AHB$ tại $F$ khác $A$. Gọi $K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $AEF$. Chứng minh rằng $AK$ đi qua tâm đường tròn Euler của tam giác $ABC$.

**Bài toán 3**

Cho tam giác $ABC$ tâm nội tiếp $I$. $AI$ cắt $BC$ tại $D$. $E$ đối xứng $D$ qua $IC$. $DE$ cắt $IB$ tại $F$. $EI$ cắt $AB$ tại $G$. Chứng minh rằng $AF, DG$ và $IC$ đồng quy.

**Bài toán 4**

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ cố định, $B, C$ cố định, $A$ di chuyển trên $(O)$. Đường tròn nội tiếp $(I)$ của tam giác $ABC$ tiếp xúc $CA, AB$ tại $E, F$. $M, N$ là điểm đối xứng của $I$ qua $CA, AB$. Chứng minh rằng đường thẳng $MN$ luôn tiếp xúc một đường tròn cố định khi $A$ di chuyển.

**Bài toán 5**

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$, đường cao $AD$. $AE$ là đường kính của $(O)$. $ED$ cắt đường tròn $(A, AD)$ tại $F$ khác $D$. Chứng minh rằng $FD$ là phân giác $\angle BFC$.

**Bài toán 6**

Cho tam giác $ABC$ tâm ngoại tiếp $O$, phân giác $AD$. $P$ di chuyển trên $AD$. $PB, PC$ cắt $CA, AB$ tại $E, F$. $M$ là hình chiếu của $P$ lên $BC$. $PM$ cắt $EF$ tại $K$. $AK$ cắt $OP$ tại $L$. Chứng minh rằng $ML$ luôn đi qua một điểm cố định khi $P$ di chuyển.

**Bài toán 7**

Cho tam giác $ABC$ đường cao $AD$. $M$ là trung điểm của $BC$. Chứng minh rằng đường thẳng qua $M$ vuông góc với phân giác góc $A$ và trung trực $MD$ cắt nhau trên đường tròn Euler của tam giác $ABC$.

**Bài toán 8**

Cho hình thang $ABCD$ với $\angle A = \angle D = 90°$. $M$ là trung điểm $AD$. $N$ là giao của đường thẳng qua $D$ vuông góc $CM$ và đường thẳng qua $A$ vuông góc $BM$. Chứng minh rằng $MN$ vuông góc với $BC$.

**Bài toán 9**

Cho hình chữ nhật $ABCD$. Đường tròn $(O)$ tiếp xúc ngoài đường tròn $(K)$ ngoại tiếp hình chữ nhật $ABCD$ tại $T$. Lấy $P, Q$ thuộc $(O)$ sao cho $PQ \parallel AD$ và $PQ = AD$. $AP$ giao $DQ$ tại $N$. $BP$ cắt $CQ$ tại $H$. Chứng minh rằng $K, H, T, N$ thuộc một đường tròn.

**Bài toán 10**

Cho tam giác $ABC$ với $P$ là một điểm trên $BC$. Gọi $K, L$ là tâm nội tiếp của tam giác $PAB, PAC$. Gọi $M, N$ là tâm bàng tiếp góc $B, C$ của tam giác $PAB, PAC$. $PA$ cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác $PKL, PMN$ lần lượt tại $R, Q$. Chứng minh rằng $A$ là trung điểm của $R, Q$.

**Bài toán 11**

Cho hình bình hành $ABCD$ và $P$ là một điểm trên đoạn $BD$. Đường tròn tâm $(P)$ đi qua $A$ cắt $AD$ tại $Y$ khác $A$ và cắt $AB$ tại $X$ khác $A$. $AP$ cắt $BC$ tại $Q$ và cắt $CD$ tại $R$. Chứng minh rằng $\angle XPY = \angle XQY + \angle XRY$.

**Bài toán 12**

Cho tam giác $ABC$, trực tâm $H$, trung tuyến $AM$. $Y$ thuộc $CA$ sao cho $YH \perp MH$. $Q$ thuộc $BH$ sao cho $QA \perp MA$. Chứng minh rằng đường tròn đường kính $MY$ và $MQ$ cắt nhau trên $AH$.

**Bài toán 13**

Cho tam giác $ABC$, đường cao $AD, BE, CF$ đồng quy tại $H$. Đường thẳng song song với $EF$ qua $B, C$ lần lượt cắt $DE, DF, DF, DE$ tại $P, Q, R, S$. Chứng minh rằng $PR, QS, EF$ đồng quy.

**Bài toán 14**

Cho tam giác $ABC$ tâm ngoại tiếp $O$. $J$ là một điểm nằm trên phân giác trong góc $A$. $X, Y, Z$ là hình chiếu của $J$ trên $BC, CA, AB$. $JO$ cắt $BC$ tại $D$. $E$ thuộc $AD$ sao cho $AJ \parallel EX$. $EX$ cắt $YZ$ tại $V$. Chứng minh rằng $V$ là trung điểm $EX$.

**Bài toán 15**

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp $AD$ giao $BC$ tại $P$. $AC$ cắt $BD$ tại $R$. $X, Y, Z$ là hình chiếu của $D$ lên $AC, BC, PR$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $XYZ$ đi qua trung điểm $CD$.

**Bài toán 16**

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và đường tròn bàng tiếp góc $A$ là $(I_a)$. Tiếp tuyến chung ngoài của $(O)$ và $(I_a)$ tiếp xúc $(O)$ tại $M, N$. Gọi $I_b, I_c$ là tâm bàng tiếp góc $B, C$ của tam giác $ABC$. Chứng minh rằng $M, N, I_b, I_c$ cùng thuộc một đường tròn.

**Bài toán 17**

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ tâm nội tiếp $I$. $K$ đối xứng $I$ qua $O$. $D, E, F$ là hình chiếu của $K$ lên $BC, CA, AB$. Phân giác ngoài tại các đỉnh $A, B, C$ cắt $(O)$ tại $X, Y, Z$ khác $A, B, C$. Gọi $L$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $DEF$. Chứng minh rằng các đường thẳng qua $A, B, C$ lần lượt song song với $XL, YL, ZL$ đồng quy.

**Bài toán 18**

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và tâm nội tiếp $I$. Trên tia $AB, AC$ lấy các điểm $D, E$ sao cho $AD = AE = BC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác $ADE$ cắt $(O)$ tại $K$ khác $A$. $AI$ cắt $(O)$ tại $P$ khác $A$. Chứng minh rằng các tam giác $KBD, KCE, POI$ đồng dạng với nhau.

# Mỗi tuần một bài toán

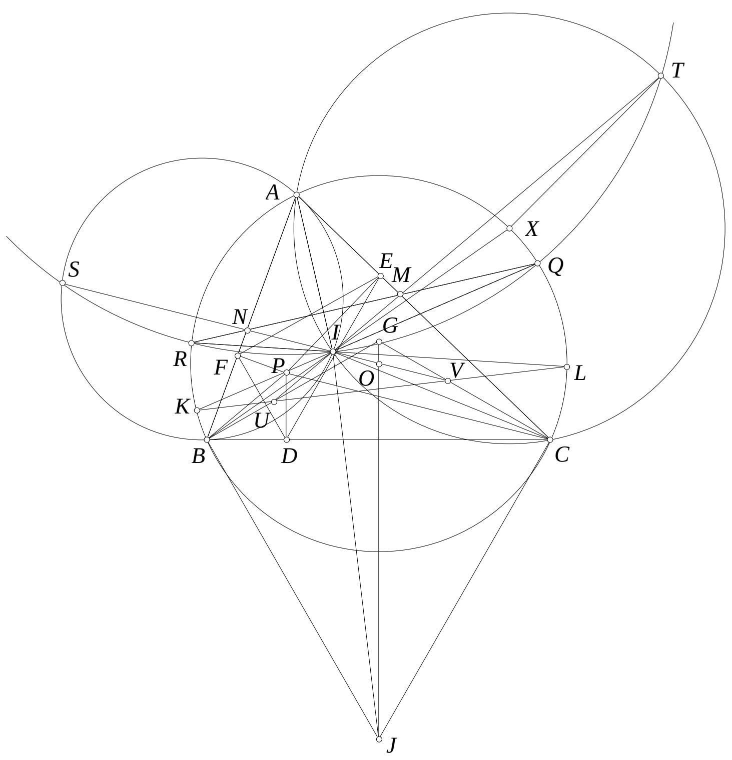
***Trần Quang Hùng**, Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

**Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.**

## Đề bài

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ và có tâm nội tiếp $I$. $P$ là một điểm nằm trong tam giác sao cho $\angle PBA = \angle PCA$. $D$, $E$, $F$ là hình chiếu của $P$ lên $BC$, $CA$, $AB$. Trên $CA$, $AB$ lấy $M$, $N$ sao cho $IM \parallel PB$, $IN \parallel PC$. $MN$ cắt $(O)$ tại $Q$, $R$. $QI$, $RI$ cắt lại $(O)$ tại $K$, $L$. Các đường thẳng qua $B$, $C$ lần lượt song song với $DF$, $DE$ cắt nhau tại $J$. Chứng minh rằng $IJ \perp KL$.

## Lời giải



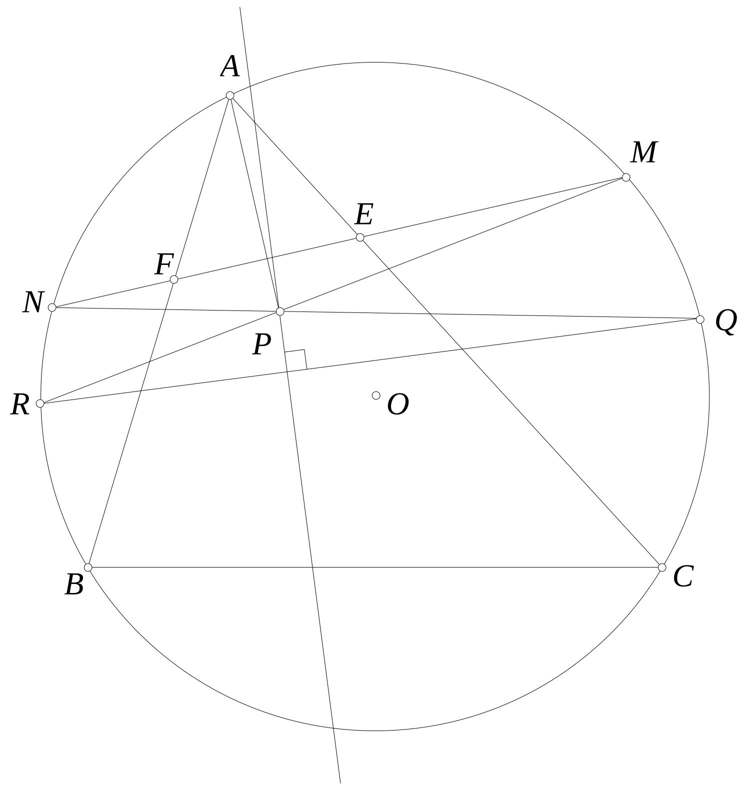

Gọi $IM$, $IN$ lần lượt cắt các đường tròn $(IAC)$, $(IAB)$ tại $T$, $S$ khác $I$. Ta thấy $MI \cdot MT = MA \cdot MC = MR \cdot MQ$ nên $T$ nằm trên đường tròn $(IQR)$. Tương tự $S$ nằm trên đường tròn $(IQR)$. Gọi $IM$, $IN$ lần lượt cắt $KL$ tại $U$, $V$. Ta có $\angle UKI = \angle IRQ = \angle ITQ$ nên tứ giác $KUQT$ nội tiếp. Gọi $BI$ cắt $(O)$ tại $X$ khác $B$. Ta suy ra $IU \cdot IT = IK \cdot IQ = IB \cdot IX$ do đó tứ giác $BUXT$ nội tiếp mà tam giác $XIT$ cân tại $X$ do đó tam giác $UBI$ cân tại $U$. Gọi $G$ đẳng giác $P$ trong tam giác $ABC$. Do $IU \parallel PB$ nên $U$ nằm trên $BG$. Cũng dễ thấy $GB \perp DE \parallel BJ \parallel BJ$. Tương tự $GC \perp CJ$. Từ đó $JB$ tiếp xúc đường tròn $(U, UB)$. Vậy $\mathcal{P}_{U/(J)} = UB^2 = UI^2 = \mathcal{P}_{U/(I,0)}$ do đó $U$ nằm trên trục đẳng phương của đường tròn $(J)$ và đường tròn điểm $I$. Tương tự với $V$ nên $UV$ hay $KL$ là trục đẳng phương của đường tròn $(J)$ và đường tròn điểm $I$ do đó $IJ \perp KL$.

## Nhận xét

Bài toán này được tác giả phát triển từ bài toán chọn đội tuyển THPT chuyên ĐHSP năm 2017. Bạn **Nguyễn Minh Hiếu** gửi tới tác giả lời giải tương tự đáp án, bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải dùng định lý Pascal rất thú vị.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp trong đường tròn $(O)$. $P$ di chuyển trên phân giác trong góc $\angle BAC$. $E$, $F$ là hình chiếu của $P$ lên $CA$, $AB$. $EF$ cắt $(O)$ tại $M$, $N$. $MP$, $NP$ cắt lại $(O)$ tại $Q$, $R$. Chứng minh rằng đường thẳng qua $P$ vuông góc $QR$ luôn đi qua một điểm cố định khi $P$ di chuyển.




Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

**Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.**

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

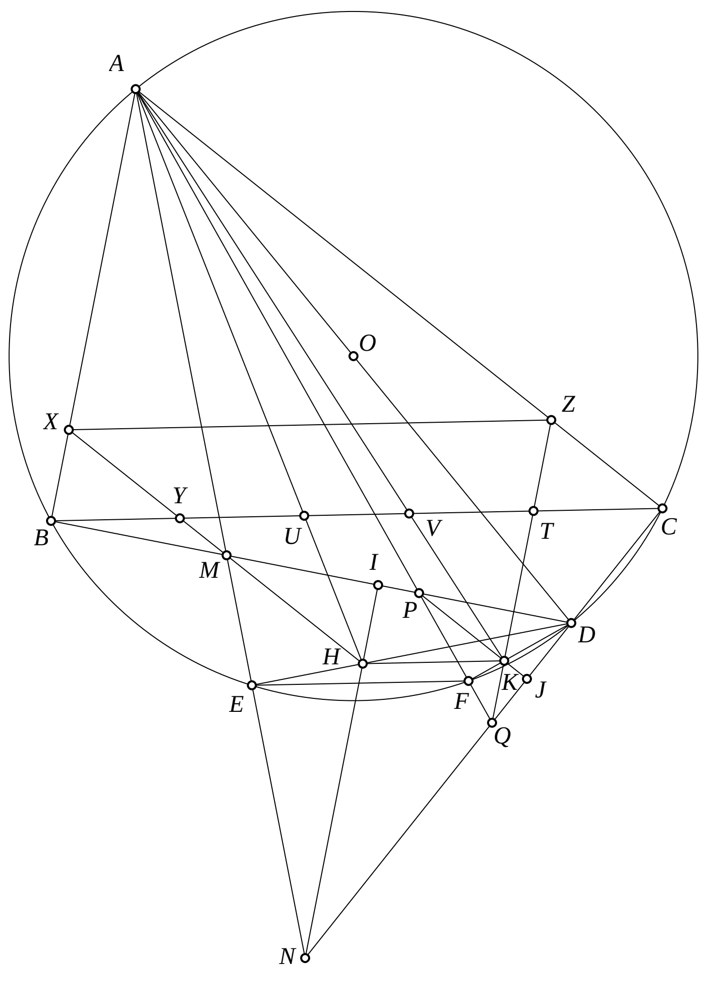
## Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ đường kính $AD$. $E$, $F$ thuộc $(O)$ sao cho $EF \parallel BC$. $AE$ cắt $DB$, $DC$ tại $M$, $N$. $AF$ cắt $DB$, $DC$ tại $P$, $Q$. Gọi $H$, $K$ lần lượt là trực tâm các tam giac $DMN$ và $DPQ$. $AH$, $AK$ cắt $BC$ tại $U$, $V$. Chứng minh rằng $BU = CV$.

Tác giả: **Trần Minh Ngọc**

## Lời giải

Lời giải sau kết hợp ý tưởng của bạn **Nguyễn Minh Hiếu** lớp 12 Toán THPT chuyên SP và **Nguyễn Tiến Dũng,** Hà Nội



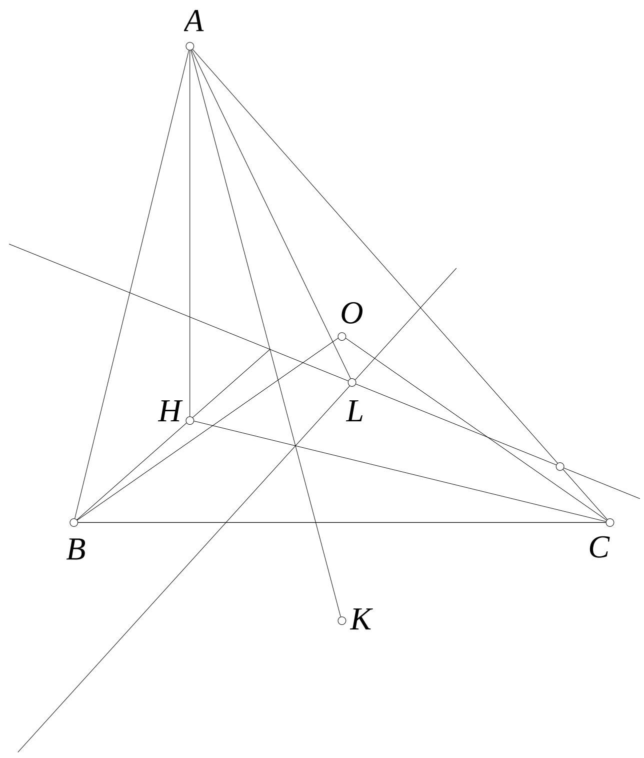

Gọi $NH$ cắt $DM$ tại $I$. $PK$ cắt $DQ$ tại $J$. $MH$ cắt $BA$, $BC$ lần lượt tại $X$, $Y$. $QK$ cắt $CA$, $CB$ lần lượt tại $Z$, $T$. Hai tam giác $DMN$ và $DPQ$ đồng dạng g.g nên $\frac{\overline{DH}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{DK}}{\overline{DF}}$ và $\frac{\overline{NH}}{\overline{NI}} = \frac{\overline{PK}}{\overline{PJ}}$. Từ đó, dễ thấy $HK \parallel EF$. Do $TH \parallel NH \parallel AB$ và $XY \parallel PK \parallel AC$ nên $\frac{\overline{CY}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AX}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{NH}}{\overline{NI}} = \frac{\overline{PK}}{\overline{PJ}} = \frac{\overline{AZ}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{BC}}$. Vì thế $XZ \parallel BC$ và $BT = -CY$. Chú ý rằng các tứ giác $BXZT$ và $CZXY$ là các hình bình hành và $XZ \parallel YT \parallel HK$, ta có $\frac{\overline{UC}}{\overline{UY}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{YH}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CZ}} \cdot \frac{\overline{YX}}{\overline{YH}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{BX}} \cdot \frac{\overline{TZ}}{\overline{TK}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{TK}} = \frac{\overline{VB}}{\overline{VT}}$. Kết hợp $\overline{BT} = -\overline{CY}$, ta thấy $\overline{BU} = -\overline{CV}$, đó là điều phải chứng minh.

## Nhận xét

Đây là một bài toán chứng minh từ đẳng giác tới đẳng cự rất thú vị. Bạn **Nguyễn Tiến Dũng** đã cho một lời giải khác nữa tại đây.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$ và tâm ngoại tiếp $O$. $K$ là tâm của đường tròn $(BOC)$. Đối xứng của $AK$ qua $BH$, $CH$ cắt nhau tại $L$. Chứng minh rằng $AH = AL$.




Tác giả: **Trịnh Huy Vũ** sinh viên khoa Toán, ĐHKTN, ĐHQGHN.

# Mỗi tuần một bài toán

**Trần Quang Hùng**, *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

**Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.**

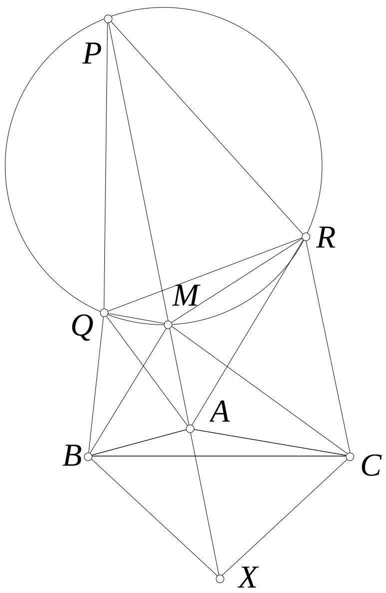
## Đề bài

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp trong đường tròn $(O)$. $P$ di chuyển trên phân giác trong góc $\angle BAC$. $E$, $F$ là hình chiếu của $P$ lên $CA$, $AB$. $EF$ cắt $(O)$ tại $M$, $N$. $MP$, $NP$ cắt lại $(O)$ tại $Q$, $R$. Chứng minh rằng đường thẳng qua $P$ vuông góc $QR$ luôn đi qua một điểm cố định khi $P$ di chuyển.

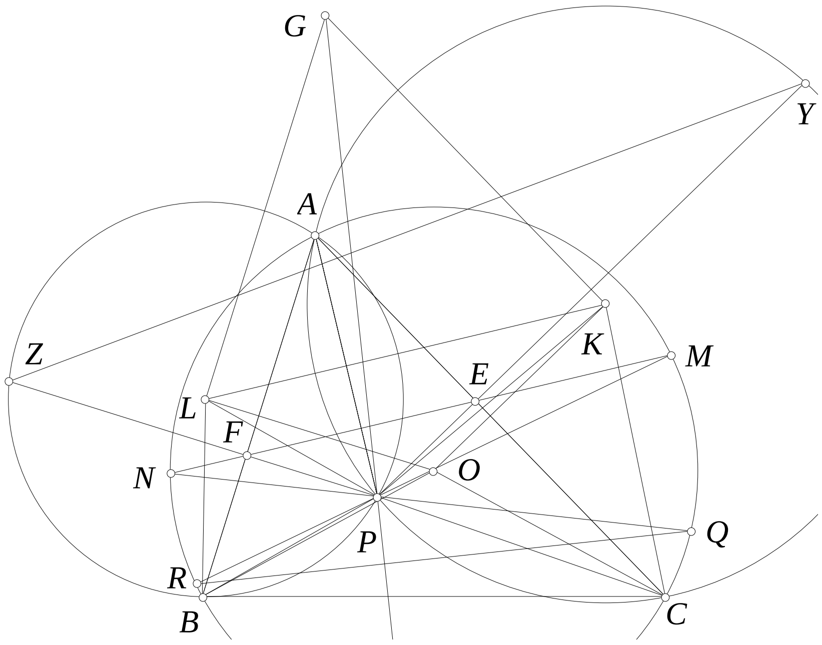
## Lời giải

Lời giải kết hợp ý tưởng lời giải gốc của tác giả và của bạn **Trương Tuấn Nghĩa** lớp 9 Toán trường Hà Nội Amsterdam.

**Bổ đề.** Cho tam giác $ABC$ có $B, C$ cố định và $A$ di chuyển. Dựng ra ngoài các tam giác cân $CAQ$, $ABR$ cân tại $Q$, $R$ có các góc $\angle Q = \angle R = \alpha$ không đổi. Dựng ra ngoài tứ giác $BCRQ$ tam giác $PQR$ cân tại $P$ có $\angle P = \alpha$. Khi đó đường thẳng $AP$ luôn đi qua một điểm cố định khi $A$ di chuyển.




**Chứng minh.** Gọi $PA$ cắt trung trực $BC$ tại $X$. Gọi giao điểm khác $P$ của $AP$ và $(PQR)$ là $M$. Khi đó $\angle QMP = \angle QRP = \angle QBA$ suy ra tứ giác $BAMQ$ nội tiếp. Tương tự $CAMR$ nội tiếp. Ta suy ra $\angle AMB = \angle AQB = \angle ARC = \angle AMC$ do đó $MX$ là phân giác $\angle BMC$ vậy tứ giác $MBXC$ nội tiếp. Từ đó $\angle XBC = \angle XMC = \angle ARC = \alpha$ không đổi do đó $X$ cố định.




**Giải bài toán.** Gọi $(K)$, $(L)$ là đường tròn ngoại tiếp các tam giác $PCA$, $PAB$. $PE$, $PF$ lần lượt cắt $(K)$, $(L)$ tại $Y$, $Z$ khác $P$. Ta thấy $EM \cdot EN = EA \cdot EC = EP \cdot EY$ suy ra $Y$ nằm trên đường tròn $(PMN)$. Tương tự $Z$ nằm trên $(PMN)$. Gọi $G$ là tâm đường tròn $(PMN)$ ta suy ra $GK \perp GY \perp AC$ suy ra $GK \parallel AC$. Tương tự $GL \parallel AB$. Từ đó ta dễ suy ra $\angle KGL = \angle BAC = 2\angle PAB = \angle PLB = \angle PKC$. Từ đó ta có các tam giác cân $GKL$, $LPB$ và $KPC$ lần lượt cân tại $G$, $L$ và $K$ đồng thời các góc ở đỉnh bằng $\angle BAC$ không đổi. Từ đó theo bổ đề $PG$ đi qua điểm cố định. Do $MNRQ$ nội tiếp nên $PG \perp QR$. Ta có điều phải chứng minh.

## Nhận xét

Bài toán này được tác giả phát triển từ bài toán chọn đội tuyển SP năm 2017. Ban đầu tác giả có ý tưởng dựng ra các điểm $Y$, $Z$ và dùng trục đẳng phương nhưng bạn **Nghĩa** đưa ra bổ đề làm lời giải gọn hơn. Bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây. Bạn **Nguyễn Việt Dũng** lớp 12 Toán, THPT chuyên Hạ Long gửi lời giải qua email.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp $(O)$ với trực tâm $H$. $AH$ cắt $(O)$ tại $P$ khác $A$. $PB$, $PC$ lần lượt cắt $OC$, $OB$ tại $Q$, $R$. $K$ đối xứng với trực tâm tam giác $PQR$ qua $BC$. $LA$ cắt $HB$, $HC$ tại $S$, $T$. Chứng minh rằng $CS$ và $BT$ cắt nhau trên đường tròn $(BHC)$. Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

**Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.**

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

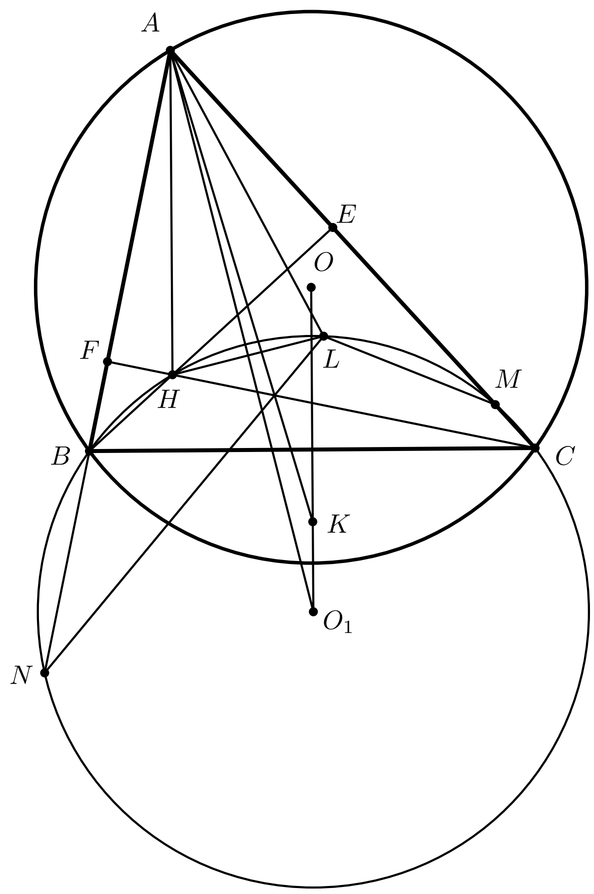
## Bài toán từ bạn đọc

Cho tam giác $ABC$ có trực tâm $H$ và tâm ngoại tiếp $O$. $K$ là tâm của đường tròn $(BOC)$. Đối xứng của $AK$ qua $BH$, $CH$ cắt nhau tại $L$. Chứng minh rằng $AH = AL$.

Tác giả: **Trịnh Huy Vũ**

## Lời giải

Gọi $M, N$ lần lượt đối xứng của $A$ qua $BH, CH$. Khi đó, ta được $ML, NL$ lần lượt là đối xứng của đường thẳng $AK$ qua $BH, CH$. Gọi $O_1$ đối xứng của $O$ qua đường thẳng $BC$.




Do $\angle HMA = \angle HAM = \angle HBC$ nên điểm $M$ nằm trên đường tròn $(HBC)$. Chứng minh tương tự ta được $N$ cũng nằm trên đường tròn $(HBC)$. Hơn nữa, vì $ML, NL$ lần lượt là đối xứng của đường thẳng $AK$ qua $BH, CH$ nên $\angle LMA = \angle KAC$ và $\angle LNA = \angle KAB$. Từ đó ta được

$$\begin{aligned}\angle MLN &= \angle BAC + \angle LMA + \angle LNA\\ &= \angle BAC + \angle KAC + \angle KAB\\ &= 2\angle BAC\end{aligned}$$

Mặt khác, ta cũng có $H$ là tâm ngoại tiếp của tam giác $AMN$, vì vậy $\angle MHN = 2\angle BAC$. Vậy $\angle MLN = \angle MHN$. Do đó, $L$ nằm trên đường tròn $(HMN) \equiv (HBC)$. Suy ra $O_1H = O_1L$.

Trong khi đó, ta cũng có một kết quả nổi tiếng: $AK$ và $AO_1$ là hai đường đẳng giác trong góc $\angle BAC$. Từ đó ta có $\angle EHL = \angle BML = \angle BMA - \angle LMA = \angle BAC - \angle KAC = \angle KAB = \angle O_1AC$. Suy ra

$$\begin{aligned}\angle O_1AH + \angle AHL &= \angle O_1AH + \angle EHL + \angle AHE\\ &= \angle O_1AH + \angle O_1AC + \angle AHE\\ &= \angle HAC + \angle AHE\\ &= 90^\circ\end{aligned}$$

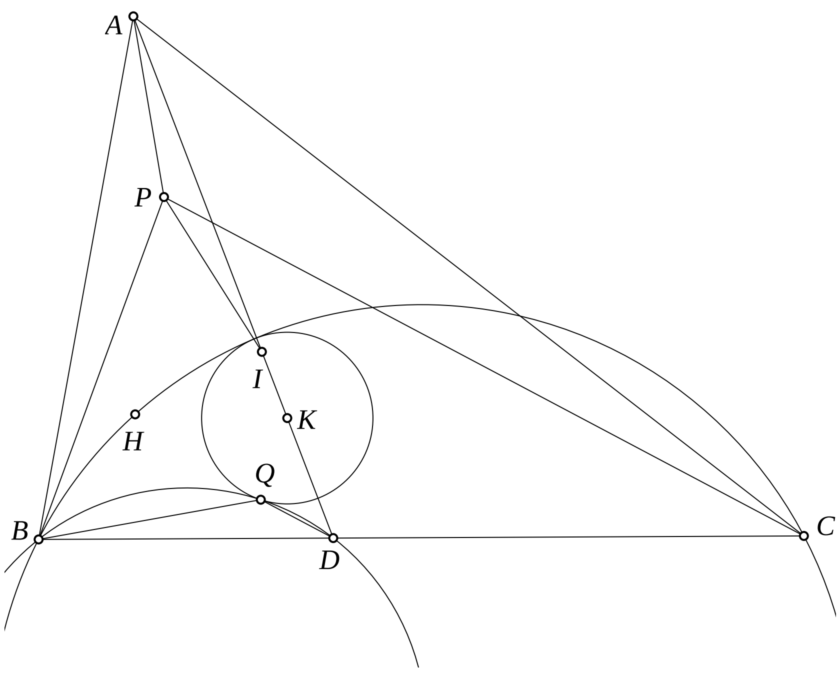
Do đó, $AO_1 \perp HL$. Mà $O_1H = O_1L$ nên $AO_1$ là trung trực của $HL$. Từ đó suy ra $AH = AL$.

## Nhận xét

Bài toán là một mở rộng của bài toán số 5 trong đề thi ITOT mùa xuân 2017 ( Senior A level). Bạn **Trương Mạnh Tuấn** lớp 12 Toán THPT chuyên KHTN cho lời giải tại đây, bạn **Trương Tuấn Nghĩa** lớp 9 Toán trường Hà Nội Amsterdam gửi lời giải qua email.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ có phân giác $AD$. $P$, $Q$ là các điểm nằm trong tam giác sao cho $PA = PI$, $\angle PBA = \angle PCA = \angle QBC$ và $DQ \parallel CP$. $(K)$ là đường tròn có tâm thuộc $AD$ và tiếp xúc với đường tròn $(BDQ)$ tại $Q$. Gọi $H$ là trực tâm tam giác $ABC$. Chứng minh rằng đường tròn $(K)$ tiếp xúc với đường tròn $(BHC)$.




Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng,** Hà Nội.

# Mỗi tuần một bài toán

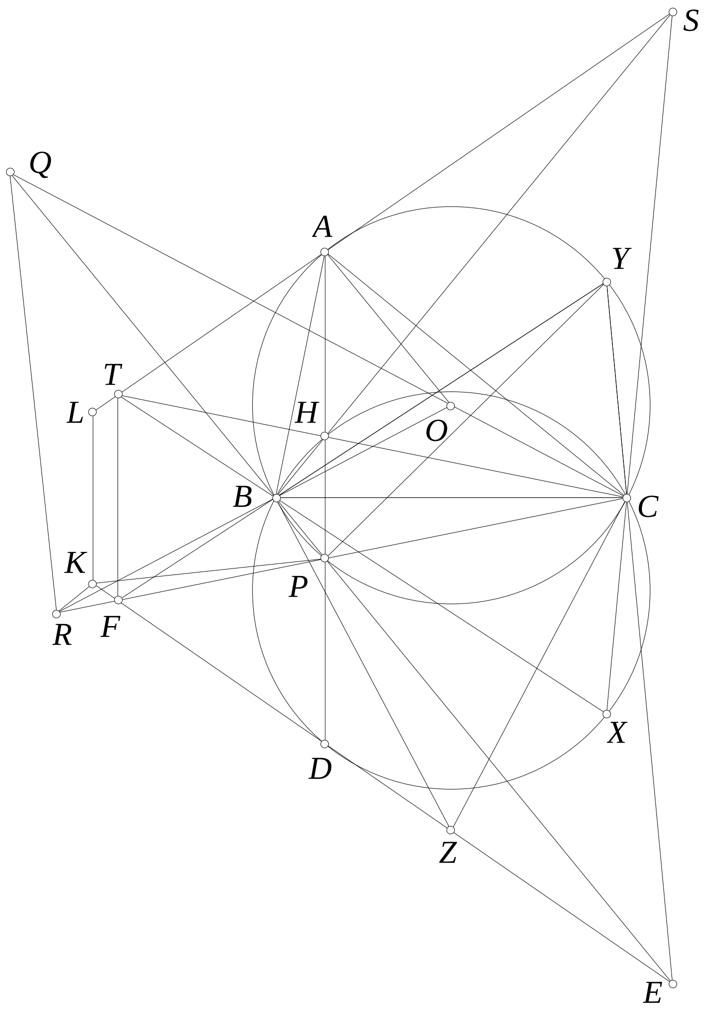
***Trần Quang Hùng,*** *Trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN*

**Đây sẽ là một chuyên mục hàng tuần trên blog "Hình học sơ cấp". Mỗi tuần tôi sẽ đưa lên một bài toán hình học do tôi sáng tác và những lời giải mà tôi thấy tâm đắc, đồng thời tôi cũng sẽ đề nghị một bài toán cho tuần sau.**

## Đề bài

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp $(O)$ với trực tâm $H$. $AH$ cắt $(O)$ tại $P$ khác $A$. $PB$, $PC$ lần lượt cắt $OC$, $OB$ tại $Q$, $R$. $L$ đối xứng với trực tâm tam giác $PQR$ qua $BC$. $LA$ cắt $HB$, $HC$ tại $S$, $T$. Chứng minh rằng $CS$ và $BT$ cắt nhau trên đường tròn $(BHC)$.

## Lời giải



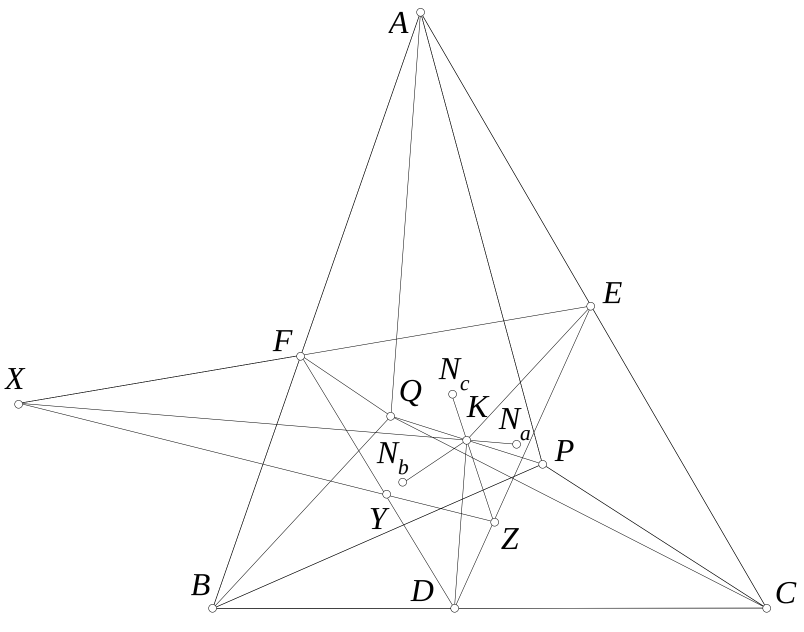

Gọi $K$ là trực tâm tam giác $PQR$ thì $K$, $L$ đối xứng qua $BC$. Gọi $D$ là đối xứng của $A$ qua $BC$. Gọi $DK$ cắt $PB$, $PC$ lần lượt tại $E$, $F$. Như vậy sử dụng đối xứng trục $BC$ thì $T$ và $F$ đối xứng nhau qua $BC$, tương tự $S$ và $E$ đối xứng qua $BC$. Ta sẽ chứng minh $FB$, $EC$ cắt nhau tại $Y$ thuộc $(O)$, khi đó sử dụng đối xứng trục $BC$ thì $TB$ và $SC$ cùng đi qua $X$ là đối xứng của $Y$ qua $BC$, hiển nhiên $X$ nằm trên $(HBC)$. Do $K$ là trực tâm tam giác $PQR$ và $D$ là trực tâm tam giác $PBC$ nên $D$, $K$ đều nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính $BQ$ và $CR$. Khi đó tiếp tuyến qua $B$, $C$ của $(O)$ cắt nhau tại $Z$ thì dễ thấy $Z$ cũng nằm trên trục đẳng phương của đường tròn đường kính $BQ$ và $CR$, do đó $DK$ đi qua $Z$. Áp dụng định lý Pascal đảo dễ suy ra $FB$, $EC$ cắt nhau tại $Y$ thuộc $(O)$.

## Nhận xét

Bài toán này tác giả tạo ra nó nhờ định lý Pascal và đối xứng trục như trong đáp án trên nhưng có một bạn gửi tới lời giải thuần túy hình học rất thú vị cho tác giả và yêu cầu không ghi tên.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$ có $P$ và $Q$ là hai điểm đẳng giác trong tam giác. $K$ là trung điểm $PQ$. Các điểm $D$, $E$, $F$ lần lượt thuộc $BC$, $CA$, $AB$ sao cho $KD \parallel QA$, $KE \parallel QB$, $KF \parallel QC$. Gọi $N_a$, $N_b$, $N_c$ lần lượt là tâm đường tròn Euler của tam giác $PBC$, $PCA$, $PAB$. Chứng minh rằng $KN_a$, $KN_b$, $KN_c$ lần lượt cắt $EF$, $FD$, $DE$ theo ba điểm thẳng hàng.




Mọi trao đổi xin gửi về email analgeomatica@gmail.com.

**Chúng tôi xin nhận và đăng các đề toán hay về hình học từ tất cả các bạn đọc mỗi tuần một bài toán. Các đề toán đề nghị và lời giải xin gửi đến email teamhinhhochsgs@gmail.com. Các lời giải có thể thảo luận trực tiếp trên "Chuyên mục mỗi tuần một bài toán" từ box riêng của chuyên mục trên http://dientoantoanhoc.net.**

Biên tập: Ngô Quang Dương, Trần Quang Huy, Trịnh Huy Vũ.

## Bài toán từ bạn đọc

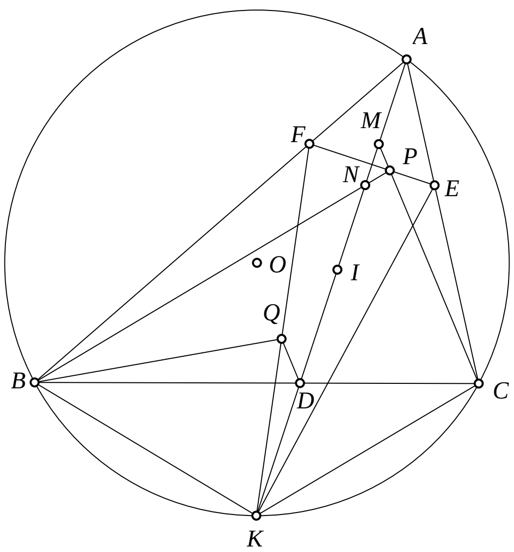
Cho tam giác $ABC$ có phân giác $AD$ có tâm nội tiếp $I$ và trực tâm $H$. $P$, $Q$ là các điểm nằm trong tam giác sao cho $PA = PI$, $\angle PBA = \angle PCA = \angle QBC$ và $DQ \parallel CP$. $(K)$ là đường tròn có tâm thuộc $AD$ và tiếp xúc với đường tròn $(BDQ)$ tại $Q$. Chứng minh rằng đường tròn $(K)$ tiếp xúc với đường tròn $(BHC)$.

Tác giả: **Nguyễn Tiến Dũng**

## Lời giải

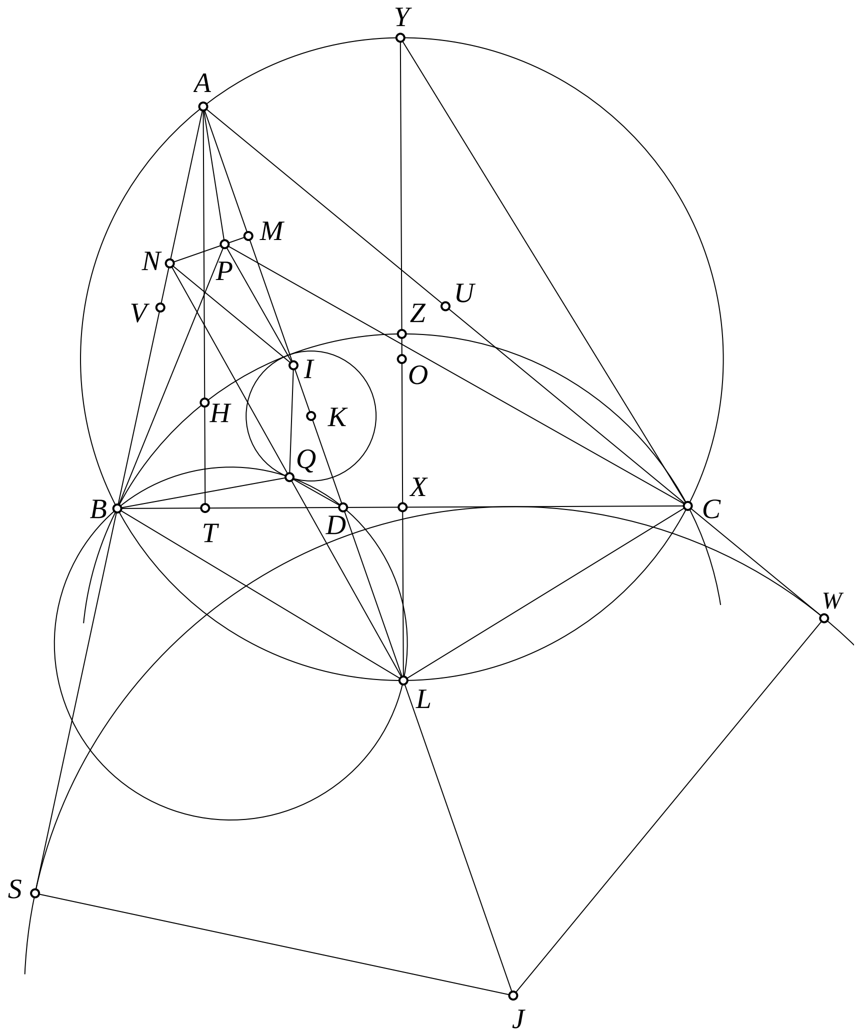
Chúng tôi giới thiệu lời giải của tác giả bài toán. Ta phát biểu không chứng minh một bổ đề đơn giản và hệ quả của nó.

**Bổ đề.** Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$ có tâm nội tiếp $I$ và phân giác $AD$. Trung trực $AI$ cắt $CA, AB$ lần lượt tại $E, F$. $AD$ lại cắt $(O)$ tại $K$. Các đường tròn $(KCE), (KBF)$ lại cắt $AI$ lần lượt tại $M, N$. Khi đó, $EF, BN, CM$ đồng quy tại một điểm $P$.




**Chứng minh.** Nếu gọi $(KBD)$ cắt $KF$ tại $Q$ khác $K$ thì $DQ \parallel CP$. Từ đó, ta có hệ quả sau

**Hệ quả.** Cho tam giác nội tiếp đường tròn $(O)$ có tâm nội tiếp $I$ và phân giác $AD$. Trung trực $AI$ cắt $AB$ tại $F$. $AD$ lại cắt $(O)$ tại $K$. $P, Q$ là các điểm nằm trong tam giác $ABC$ sao cho $PA = PI$, $\angle PBA = \angle PCA = \angle QBC$, $DQ \parallel CP$. Khi đó, $K, Q, F$ thẳng hàng, tứ giác $BKDQ$ nội tiếp và $KB^2 = KC^2 = KQ \cdot KF$.




**Giải bài toán.** Gọi trung trực $AI$ cắt $AI, AB$ lần lượt tại $M, N$ và $AD$ lại cắt $(O)$ tại $L$. Theo hệ quả của bổ đề trên, $L, Q, N$ thẳng hàng, tứ giác $BLDQ$ nội tiếp và $LB^2 = LC^2 = LQ \cdot LN$. Gọi trung trực $BC$ cắt $BC, (O)$ lần lượt tại $X, Y$ ($Y$ khác $L$), $Z$ đối xứng với $L$ qua $BC$. Khi đó, $Z$ thuộc $(BHC)$ và $LA \cdot LD = LB^2 = LC^2 = LX \cdot LY = LO \cdot LZ$. Gọi $U, V$ lần lượt là trung điểm $CA, AB$; $AH$ cắt $BC$ tại $T$; đường tròn $(J)$ bàng tiếp góc $A$ của tam giác $ABC$ tiếp xúc với $CA$, $AB$ lần lượt tại $W$, $S$. Ta có $AN \cdot AW = AN \cdot AS = AM \cdot AJ = \frac{1}{2}AI \cdot AJ = \frac{1}{2}AB \cdot AC = AB \cdot AU = AC \cdot AV = AO \cdot AT$. Qua phép biến hình $f = \mathcal{R}_{AL} \circ I_A^{\frac{1}{2}AB \cdot AC} \circ I_L^{LB^2} : (BDQ) \mapsto AC, (K) \mapsto (J), (BHC) \mapsto (UVT)$. Theo định lý Feuerbach áp dụng cho tam giác $ABC$, đường tròn Euler $(UVT)$ tiếp xúc với đường tròn $(J)$ bàng tiếp góc $A$. Do đó, tạo ảnh của của chúng qua $f$ cũng tiếp xúc với nhau hay $(K)$ tiếp xúc với $(BHC)$. Ta có điều phải chứng minh.

## Nhận xét

Đây là một bài toán chứng minh tiếp xúc thú vị ứng dụng của định lý Feuerbach và phép nghịch đảo. Chúng tôi không nhận được lời giải nào từ độc giả.

## Bài toán đề nghị

Cho tam giác $ABC$, $(O)$, $(I)$ theo thứ tự là đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp. $E$, $F$ theo thứ tự là tiếp điểm của $(I)$ và $AC$, $AB$. $M$, $N$ là các giao điểm của $EF$ và $(O)$. $P$, $Q$ theo thứ tự là giao điểm thứ hai của $BI$, $CI$ và $(O)$. $S$ là giao điểm của các tiếp tuyến với $(O)$ tại $P$ và $Q$. Chứng minh rằng $S$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $IMN$.

Tác giả: Thầy **Nguyễn Minh Hà,** THPT chuyên SP, Hà Nội.

# Một số bài toán cho đội tuyển

*Dành cho đội tuyển THPT chuyên KHTN năm 2017*

**Bài toán 1**

Cho hai đường tròn $(K), (L)$ bán kính bằng nhau. $P$ là điểm bất kỳ. $Q, R$ đối xứng $P$ qua $K, L$. $QA, QB$ tiếp xúc $(K)$. $RC, RD$ tiếp xúc $(L)$. $AB$ giao $CD$ tại $E$. Chứng minh rằng $EQ = ER$.

**Bài toán 2**

Cho tam giác $ABC$, đường tròn nội tiếp $(I)$ tiếp xúc $BC, CA, AB$ tại $D, E, F$. $K$ là hình chiếu của $D$ lên $EF$. $L$ là hình chiếu của $I$ lên đường cao từ $A$. Chứng minh rằng $IK$ và $DL$ cắt nhau trên đường tròn ngoại tiếp của tam giác $ABC$.

**Bài toán 3**

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $AC$ giao $BD$ tại $E$. $AB$ giao $CD$ tại $F$, $AD$ giao $BC$ tại $G$. $OE$ cắt $FG$ tại $K$. Tiếp tuyến tại $C$ và $D$ của $(O)$ cắt nhau tại $L$. Tiếp tuyến tại $A$ và $B$ của $(O)$ cắt nhau tại $M$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $KLM$ và $KFO$ tiếp xúc nhau.

**Bài toán 4**

Cho tam giác $ABC$, đường cao $BE, CF$ cắt nhau tại $H$. $S$ là trung điểm $BC$. Đường thẳng qua $H$ vuông góc $SH$ cắt $AB, AC$ tại $M, N$. Đường thẳng qua $A$ vuông góc $SA$ cắt $BE, CF$ tại $P, Q$. Chứng minh rằng $MQ = NP$.

**Bài toán 5**

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $AC$ giao $BD$ tại $E$. $AD$ giao $BC$ tại $F$. Đường tròn đường kính $EF$ cắt $(O)$ tại $X, Y$. $M, N$ là trung điểm của $AB, CD$. Chứng minh rằng phân giác của các góc $\angle MXN$, $\angle MYN$ và $MN$ đồng quy.

**Bài toán 6**

Cho đường tròn $(K)$ và $(L)$ cắt nhau tại $A, B$. Đường tròn $(N)$ đi qua $B$ cắt $(K), (L)$ tại $C, D$ khác $B$ sao cho $AC, AD$ tiếp xúc $(N)$. $AC, AD$ lần lượt cắt $(L), (K)$ tại $E, F$. Gọi $P, Q$ là tâm ngoại tiếp tam giác $BEC, BFD$. $PQ$ cắt $BC, BD$ tại $M, N$. Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $BMN$ nằm trên $AB$.

**Bài toán 7**

Cho tam giác $ABC$ nội tiếp đường tròn $(O)$, tâm nội tiếp $I$. $IA, IB, IC$ lần lượt cắt $(O)$ tại $D, E, F$ khác $A, B, C$. $X, Y, Z$ thuộc $BC, CA, AB$ sao cho $IX \perp IA, IY \perp IB, IZ \perp IC$. Chứng minh rằng các đường thẳng qua $D, E, F$ lần lượt vuông góc với $DX, EY, FZ$ đồng quy.

**Bài toán 8**

Cho tam giác $ABC$, tâm ngoại tiếp $O$, đường tròn nội tiếp $(I)$ tiếp xúc $BC, CA, AB$ tại $D, E, F$. $AD, BE, CF$ đồng quy tại $Ge$. Gọi $X, Y, Z$ là đối xứng của $Ge$ qua $EF, FD, DE$. Chứng minh rằng $AX, BY, CZ$ đồng quy tại một điểm thuộc $OI$.

**Bài toán 9**

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $AB$ giao $CD$ tại $E$. $AD$ giao $BC$ tại $F$. Đường tròn đường kính $EF$ cắt $(O)$ tại $X, Y$. $M, N$ là trung điểm của $AC, BD$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $XMN, YMN$ tiếp xúc với $(O)$.

**Bài toán 10**

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)$. $AC$ giao $BD$ tại $E$. $F$ nằm trong tứ giác sao cho $\angle FAB + \angle FCB = \angle FBA + \angle FDA = 90°$. Chứng minh rằng $E, F, O$ thẳng hàng.

**Bài toán 11**

Cho tứ giác $ABCD$ có $AC = BD$ và $AC$ cắt $BD$ tại $P$. $(K), (L)$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác $PAB, PCD$. $BC$ cắt $(K), (L)$ tại $S, T$ khác $B, C$. $M$ là trung điểm $\overset{\frown}{PS}$ không chứa $A$ của $(K)$. $N$ là trung điểm $\overset{\frown}{PT}$ không chứa $D$ của $(L)$. Chứng minh rằng $MN \parallel KL$.

**Bài toán 12**

Cho tam giác $ABC$ với $M$ là trung điểm của $AB$. $AP, BQ$ là đường cao. Chứng minh rằng $AC$ tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác $BMP$ khi và chỉ khi $BC$ tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp tam giác $AMQ$.

**Bài toán 13**

Cho đường tròn $(O)$ đường kính $AB$. Một đường thẳng song song với $AB$ cắt $(O)$ tại $C, D$ sao cho $B, C$ khác phía $AD$. Đường thẳng song song với $AD$ qua $C$ cắt $(O)$ tại $E$ khác $C$. $BE$ giao $CD$ tại $F$. Đường thẳng qua $F$ song song $AD$ cắt $AB$ tại $P$. Chứng minh rằng $PC$ tiếp xúc $(O)$.

**Bài toán 14**

Cho tam giác $ABC$ các điểm $D, E$ thuộc đoạn $BC$, $F, G$ thuộc đoạn $CA$, $H, I$ thuộc đoạn $AB$ sao cho $BD = CE, CF = AG, AH = BI$. Gọi $M, N, P$ là trung điểm của $GH, DI, EF$. Chứng minh rằng $AM, BN, CP$ đồng quy.

**Bài toán 15**

Cho tam giác $ABC$ trực tâm $H$ và $M$ là trung điểm $BC$. $K$ là hình chiếu của $H$ lên $AM$. $L$ là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác $ABC$ sao cho $AL$ là đường đối trung của tam giác $ABC$. Chứng minh rằng $MK = ML$.

**Bài toán 16**

Cho tam giác $ABC$, trực tâm $H$, trung tuyến $AM$. $K$ là hình chiếu của $H$ lên $AM$. Chứng minh rằng phân giác $\angle BKC$ và $\angle BAC$ cắt nhau trên $BC$.

**Bài toán 17**

Cho $(K), (L)$ cắt nhau tại $P, Q$. $B$ thuộc $(K)$ và $C$ thuộc $(L)$ sao cho $PQ$ là phân giác $\angle BPC$. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác $PBC$ luôn đi qua một điểm cố định khác $P$ khi $B, C$ di chuyển.

**Bài toán 18**

Cho tứ giác $ABCD$ có $AC$ giao $BD$ tại $E$. $EX, EY, EZ, ET$ lần lượt là phân giác của các tam giác $EAB, EBC, ECD, EDA$. Gọi $M, N, P, Q$ là trung điểm của $TX, XY, YZ, ZT$. Chứng minh rằng $AM, BN, CP, DQ$ đồng quy.