Xung quanh bài hình học thi VMO năm 2014

Trần Quang Hùng - Trường THPT chuyên KHTN

Tóm tắt nội dung

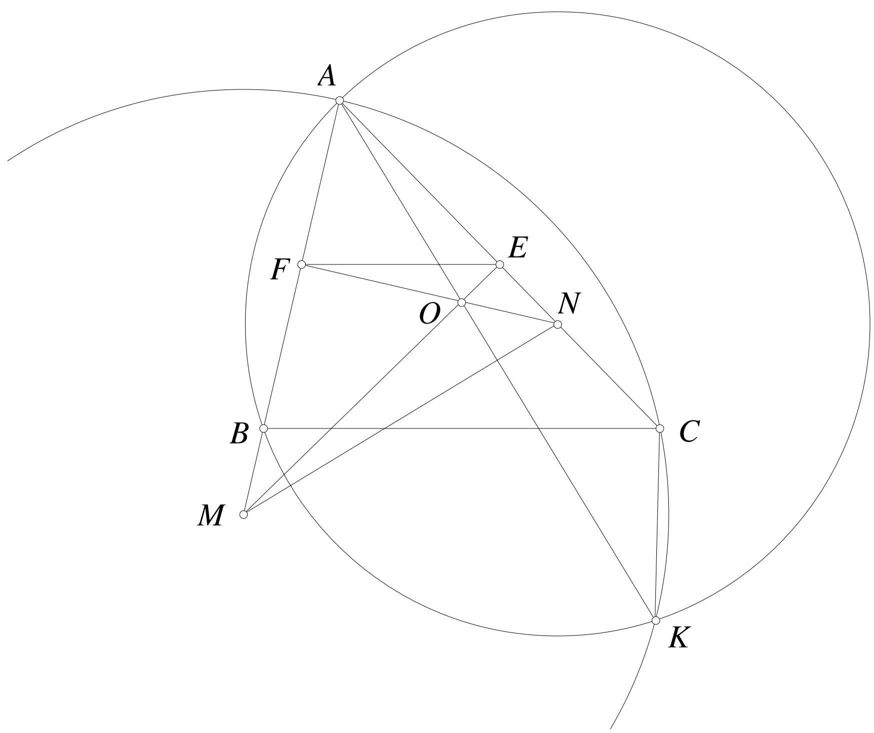
Bài viết này sẽ xoay quanh và khai thác bài hình học thi quốc gia Việt Nam năm 2014 ngày thứ hai.

Trong kỳ thi học sinh giỏi Việt Nam năm 2014 ngày thứ hai có một bài toàn hình học, đề bài được thu gọn cho phù hợp với bài viết như sau

Bài 1. *Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), trong đó BC cố định và A thay đổi trên (O). Trên các tia AB, AC lấy lần lượt các điểm M và N sao cho $MA = MC$ và $NA = NB$. Gọi D là trung điểm BC. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với AK cắt BC tại E. Đường tròn ngoại tiếp ADE cắt (O) tại F khác A. Chứng minh AF đi qua một điểm cố định.*

Bài toán trên thực chất là sự ghép nối của hai bài toán sau

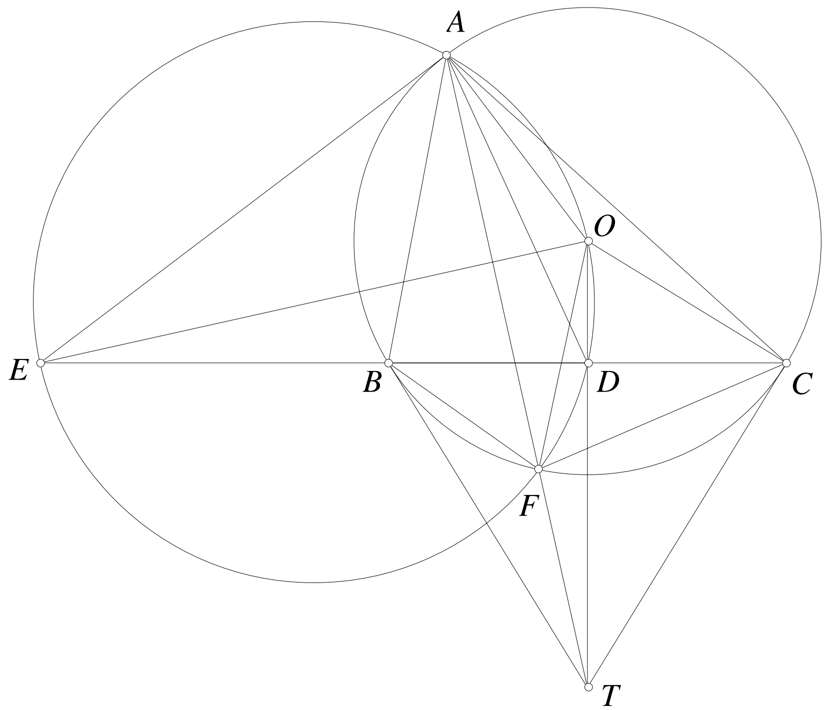
Bài 2. *Cho tam giác ABC trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Chứng minh rằng AK đi qua tâm ngoại tiếp tam giác ABC.*



Hình 1.

Chứng minh. Gọi E, F là trung điểm CA, AB thì ME, NF là trung trực CA, AB cắt nhau tại tâm ngoại tiếp O của tam giác ABC. Ta dễ thấy O là trực tâm tam giác ANM nên $AO \perp MN$. Mặt khác đường tròn các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A nên $AK \perp MN$. Từ đó dễ suy ra AK đi qua O. $\square$

Bài 3. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) cố định, B, C cố định và A di chuyển trên (O). D là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại F khác A. Chứng minh rằng AF luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.*

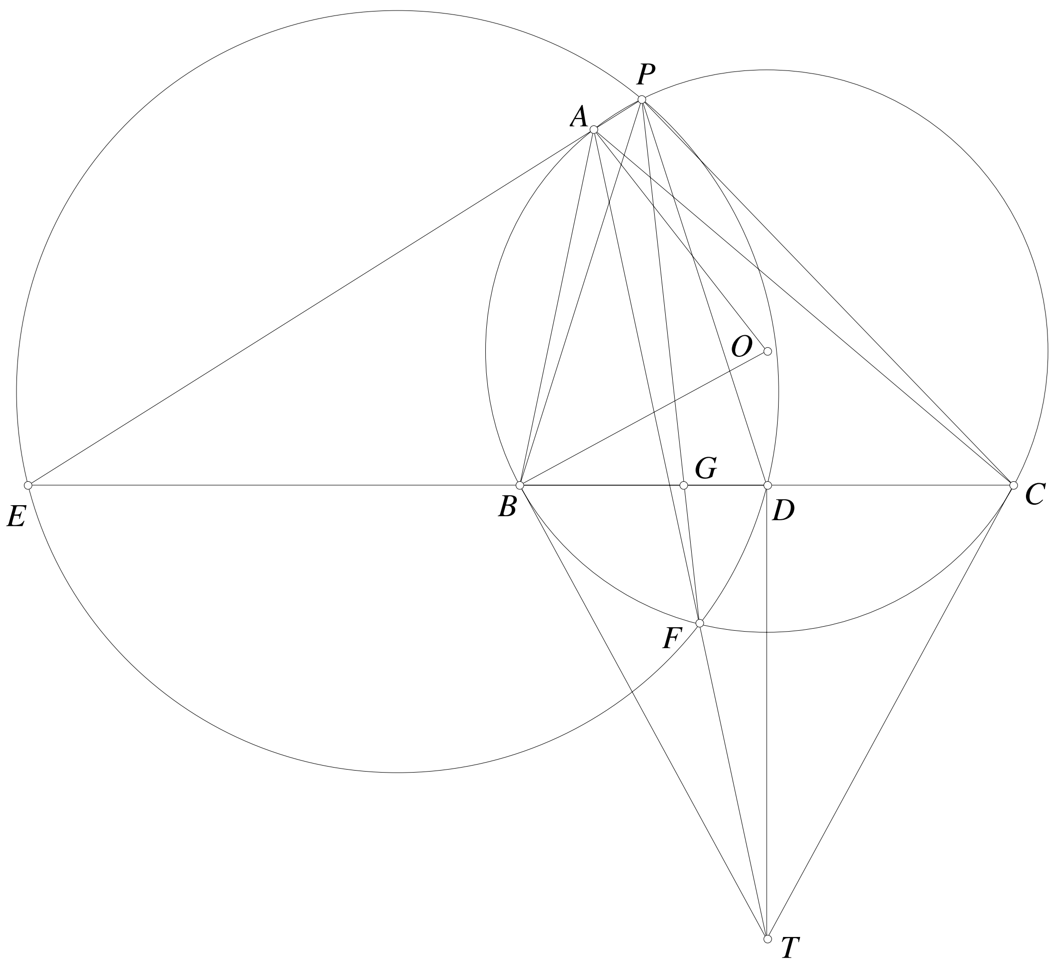


Hình 2.

Chứng minh. Do $\angle EAO = \angle EDO = 90°$ nên dễ thấy O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE. Gọi AF cắt OD tại T. Ta có $\overline{TD}.\overline{TO} = \overline{TF}.\overline{TA} = \mathscr{P}_{T/(O)} = OT^2 - OC^2$ suy ra $OC^2 = TO^2 - \overline{TD}.\overline{TO} = \overline{TO}.\overline{DO}$. Từ đó dễ suy ra $OC \perp TC$ vậy T cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Về cơ bản hai bài toán trên là hai bài toán dễ và rất phổ biến. Lời giải được trình bày trong bài toán 3 có lẽ là lời giải đơn giản nhất cho bài toán này mà không phải thông qua các công cụ như hàng điều hòa hay tứ giác điều hòa. Nếu để ý kỹ ta cũng có một vài nhận xét và mở rộng thú vị. Ta bắt đầu từ việc phát triển bài toán 3

Bài 4. *Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) cố định, B, C cố định và A di chuyển trên (O). D là trung điểm BC. Một đường thẳng bất kỳ đi qua A cắt BC tại E và cắt (O) tại P khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác EPD cắt (O) tại F khác P. Chứng minh rằng AF luôn đi qua điểm cố định khi A di chuyển.*



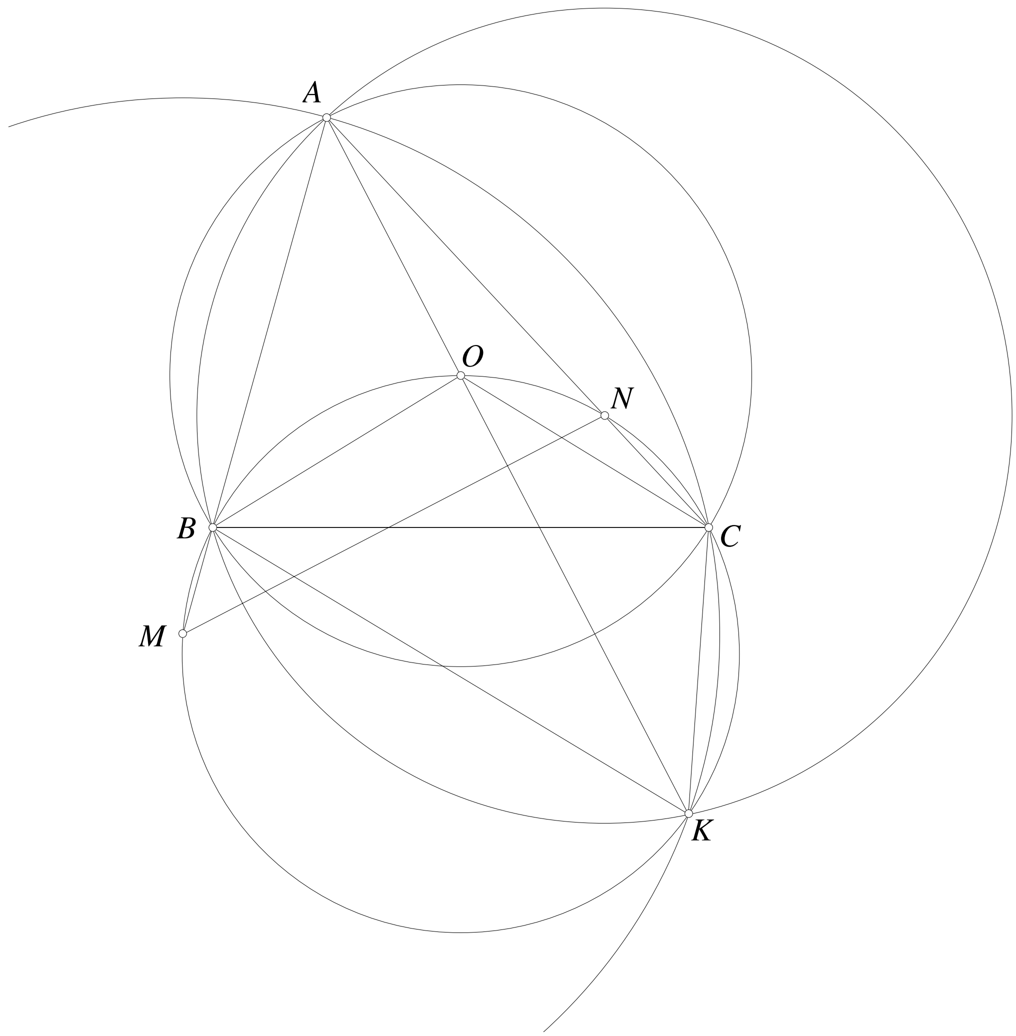
Hình 3.

Chứng minh. Gọi PF giao BC tại G. Từ hệ thức lượng trong đường tròn ta dễ thấy $\overline{GB}.\overline{GC} = \overline{GP}.\overline{GF} = \overline{GD}.\overline{GE}$. Từ đó do D là trung điểm BC nên theo hệ thức Maclaurin thì hàng $(BC, GE) = -1$. Chiếu bằng tâm P lên đường tròn (O) ta có $(BC, FA) = K(BC, FA) = (BC, GE) = -1$. Do đó tứ giác $ABFC$ điều hòa. Vậy AF đi qua giao điểm của tiếp tuyến tại B, C của (O) cố định. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Nếu $P \equiv A$ thì ta thu được bài toán 3. Khác với cách giải đơn giản trong bài 3 ta phải dùng thông qua công cụ tứ giác điều hòa.

Quay trở về bài toán 2, bài toán 2 có lẽ là kết quả quá đơn giản xong trên mô hình của bài toán đó ta lại có thể khai thác được một số điều thú vị

Bài 5. *Cho tam giác ABC có tâm ngoại tiếp O. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh rằng các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A và đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC có một điểm chung.*

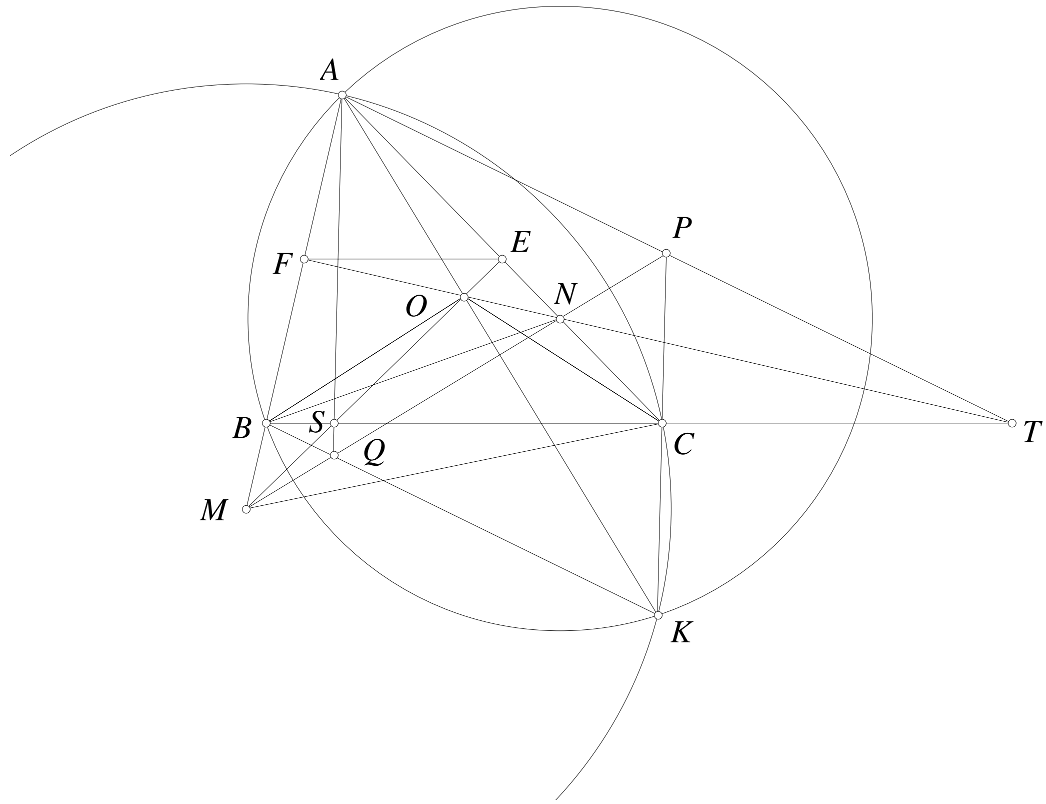


Hình 4.

Chứng minh. Gọi đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Ta để ý rằng $\angle AKC = \frac{1}{2}\angle AMC$ do góc nội tiếp bằng nửa số đo góc ở tâm. Tương tự $\angle AKB = \frac{1}{2}\angle ANB$. Ta chú các tam giác MAC và NAB cân tại M, N và có chung góc đáy nên $\angle AMC = \angle ANB$. Từ đó ta có KA là phân giác $\angle BKC$. Mặt khác ta tại có O là giao của trung trực BC và KA. Vậy tứ giác $BOCK$ nội tiếp. Các đường tròn tâm M, N cùng đi qua A và đường tròn ngoại tiếp tam giác BOC có một điểm chung là K. Ta có điều phải chứng minh. □

Nhận xét. Từ $\angle AKC = \frac{1}{2}\angle AMC = \angle COB$ ta dễ chứng minh được tứ giác $MOCK$ nội tiếp vậy tương tự ta có 6 điểm B, C, O, M, N, K cùng thuộc một đường tròn. Nhận xét này giúp ta tìm ra được nhiều bài toán thú vị

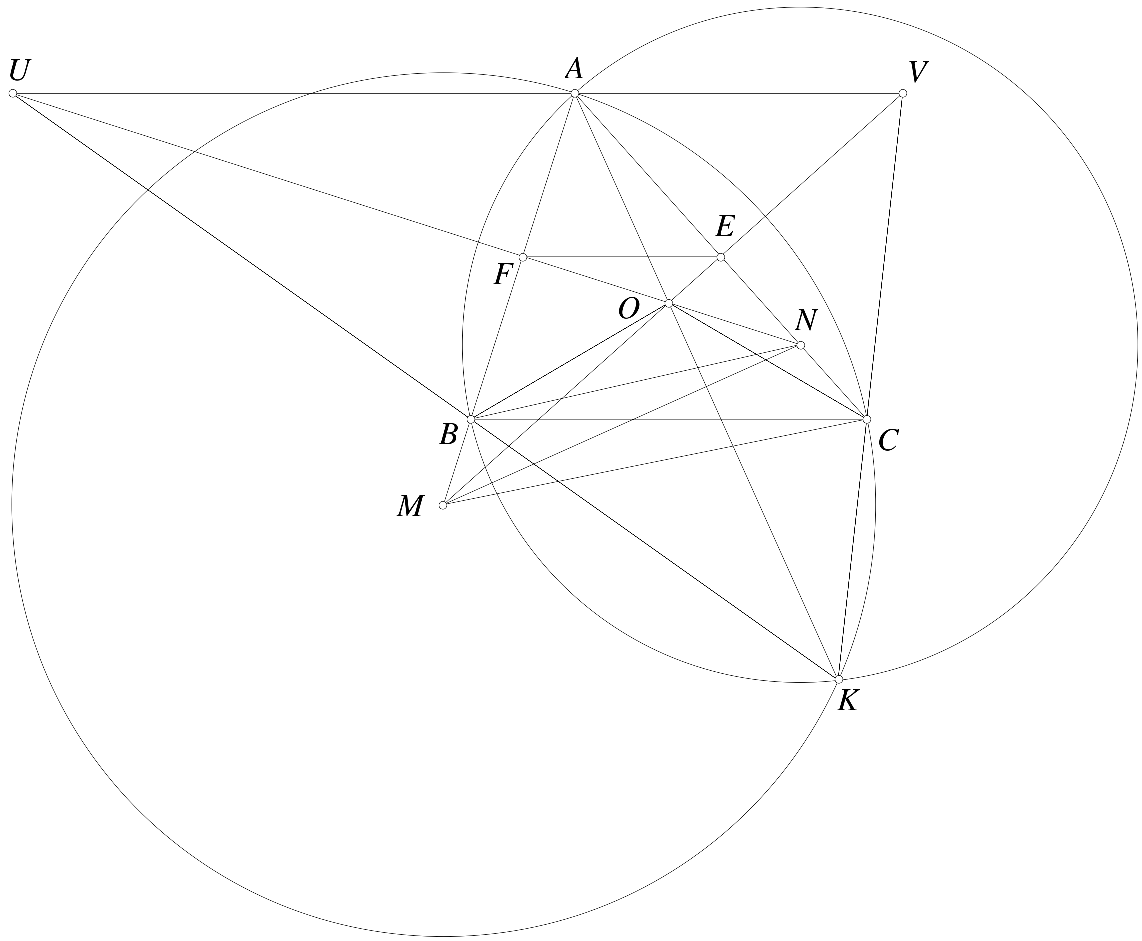
Bài 6. *Cho tam giác ABC. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. MN lần lượt cắt KC, KB tại P, Q. Chứng minh rằng* $\dfrac{NQ}{MP} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.



Hình 5.

Chứng minh. Gọi O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC. Theo nhận xét trên 6 điểm B, C, O, M, N, K cùng thuộc một đường tròn. Nếu gọi ON giao BC tại T, áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} O & M & C \\ B & K & N \end{pmatrix}$ ta suy ra A, P, T thẳng hàng. Ta chú ý ON là trung trực AB nên dễ suy ra $\angle PAB = \angle ABC$. Mặt khác cũng do tứ giác $MBNC$ nội tiếp nên $\angle AMN = \angle ACB$. Từ đó dễ suy ra $\triangle PAM \sim \triangle ABC$. Tương tự $\triangle QNA \sim \triangle ABC$. Từ đó $\triangle PAM \sim \triangle QNA \sim \triangle ABC$. Ta dễ suy ra $\triangle AQN \sim \triangle MNA$ suy ra $AN^2 = MN.NQ$. Tương tự $AM^2 = MP.MN$. Suy ra $\dfrac{AB^2}{AC^2} = \dfrac{AN^2}{AM^2} = \dfrac{NQ}{MP}$. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bài 7. *Cho tam giác ABC. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Trung trực AB cắt KB tại U. Trung trực AC cắt KC tại V. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và đường tròn nội tiếp tam giác KUV đồng tâm.*



Hình 6.

Chứng minh. Gọi O là tâm ngoại tiếp tam giác ABC ta sẽ chứng minh rằng O là tâm nội tiếp tam giác KUV. Theo nhận xét trên 6 điểm B, C, O, M, N, K cùng thuộc một đường tròn. Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} M & N & K \\ C & B & O \end{pmatrix}$ ta suy ra A, U, V thẳng hàng. Mặt khác do V thuộc OM là trung trực AC nên VO là phân giác $\angle AVK$. Tương tự UO là phân giác $\angle AUK$. Vậy O là tâm nội tiếp tam giác KUV. $\square$

Nhận xét. Từ kết quả hai bài toán trên ta cũng có thể dễ suy ra $UV \parallel BC$ hoặc suy ra các hệ thức cơ bản như $KB + KC + UV = KU + KV$ hoặc một số kết quả thú vị khác. Các bạn hãy làm bài tập dưới đây để luyện tập

Bài 8. *Cho tam giác ABC. Trung trực CA, AB lần lượt cắt AB, AC tại M, N. Các đường tròn có tâm M, N cùng đi qua A cắt nhau tại K khác A. Trung trực AB cắt KB tại U. Trung trực AC cắt KC tại V. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp tam giác BOU, COV và ABC có một điểm chung.*

Như vậy chỉ từ các bài toán gần gũi và quen thuộc nếu ta nhìn dưới con mắt tổng quát hoặc tìm cách khai thác sâu thì ta cũng sẽ thu được nhiều bài toán thú vị và có ý nghĩa. Xin chúc các bạn thành công.

Tài liệu

[1] Đề thi VMO 2014 http://diendantoanhoc.net/forum

Trần Quang Hùng, trường THPT chuyên KHTN, ĐHKHTN, ĐHQGHN. E-mail: analgeomatica@gmail.com