I.Tên đề tài

VẬN DỤNG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG ĐƯỢC ĐỀ NGHỊ TRONG CÁC KÌ THI IMO TỪ 2003 ĐẾN 2007 VÀO VIỆC DẠY BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI

II. Đặt vấn đề:

Bài toán hình học phẳng là một nội dung luôn xuất hiện trong các kì thi chọn học sinh giỏi Tỉnh, chọn học sinh giỏi Quốc gia THPT và kì thi Olympic Toán học Quốc tế(gọi tắt là IMO). Để làm tài liệu dạy bồi dưỡng phần hình học phẳng cho học sinh giỏi của trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm và đội tuyển HSG Toán thi Quốc gia, tôi đã tạm dịch từ bản tiếng Anh sang tiếng Việt và vẽ hình minh họa , các bài toán hình học phẳng đề nghị của các nước trong các kì thi IMO từ năm 2003 đến 2007 . Nay xin được trao đổi cùng đồng nghiệp trong lĩnh vực này.

III. Cơ sở lí luận:

Để học sinh giỏi Toán được tiếp xúc với các bài toán hình học phẳng hay của các nước trong các kì thi IMO, nhưng trên mạng internet chỉ có nội dung bằng tiếng Anh , do đó học sinh ít có điều kiện đọc và hiểu được các bài toán đó. Nên việc giáo viên cung cấp đề bài cùng lời giải bằng tiếng Việt cho học sinh là điều kiện thuận lợi trong học tập cho học sinh. Trên cơ sở đó giúp học sinh được học tập, ôn luyện để tham dự kì thi chọn học sinh giỏi Tỉnh và Quốc gia đạt kết quả tốt hơn.

IV. Cơ sở thực tiễn

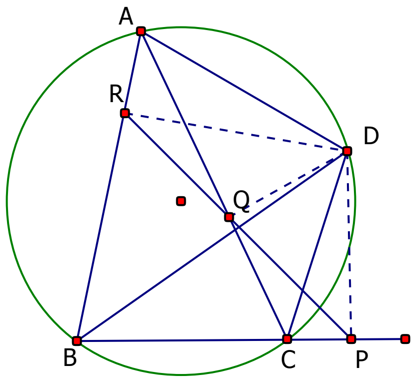
Bài tập về hình học phẳng phục vụ cho việc bồi dưỡng học sinh giỏi tham gia kì thi chọn học sinh giỏi Tỉnh và Quốc gia cấp THPT chủ yếu dựa vào nguồn: Báo Toán học và Tuổi trẻ; đề thi Olimpic của các nước và các đề dự tuyển trong các kì thi IMO. Do đó giúp học sinh tiếp cận với đề bài và lời giải bằng tiếng Việt các bài toán hình học phẳng đề nghị trong các kì thi IMO là cần thiết.

V. Nội dung nghiên cứu:

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC ĐƯỢC ĐỀ NGHỊ TRONG KÌ THI IMO LẦN THỨ 44 TỔ CHỨC TẠI NHẬT BẢN NĂM 2003

Bài 1) Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn. Gọi P, Q, R lần lượt là hình chiếu của D lên đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng PQ = QR khi và chỉ khi các phân giác của góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ đồng quy với AC.

Lời giải 1.



Ta đã biết P, Q, R thẳng hàng (đường thẳng Simson). Ta có $\widehat{DPC} = \widehat{DQC} = 90^0 \Rightarrow$ D, P, C, Q nằm trên một đường tròn, do đó $\widehat{DCA} = \widehat{DPQ} = \widehat{DPR}$. Tương tự D, Q, R, A nằm trên đường tròn, do đó $\widehat{DAC} = \widehat{DRP}$. Suy ra $\Delta DCA \backsim \Delta DPR$

Làm tương tự ta được $\Delta DAB \backsim \Delta DQP$ và $\Delta DBC \backsim \Delta DRQ$

Do đó $\frac{DA}{DQ} = \frac{DB}{DP} = \frac{AB}{QP}$ (1) , $\frac{DB}{DR} = \frac{DC}{DQ} = \frac{BC}{RQ}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{DA}{DC} = \frac{QR}{PQ}.\frac{BA}{BC}$.

Do đó PQ = QR nếu và chỉ nếu DA/DC = BA/BC

Các phân giác của góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ chia đoạn AC theo tỉ số BA/BC và DA/DC tương ứng . Do đó 3 đường đồng quy.

Lời giải 2.

Giả sử phân giác góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ cắt AC tại L và M tương ứng.

Khi đó $\frac{AL}{CL} = \frac{AB}{CB}$ và $\frac{AM}{CM} = \frac{AD}{CD}$. Ta có L$\equiv$M $\Leftrightarrow \frac{AB}{CB} = \frac{AD}{CD} \Leftrightarrow AB.CD = CB.AD$.

Ta chứng minh AB.CD = CB.AD $\Leftrightarrow$ PQ = QR.

Vì DP$\perp$BC, DQ$\perp$AC, DR$\perp$AC. Nên đường tròn đường kính DC qua P và Q ; đường tròn đường kính DA qua R và Q.

Đặt $\widehat{ACB} = \gamma$ thì $\widehat{PDQ} = \gamma$ hoặc $180^0 - \gamma$, đặt $\widehat{CAB} = \alpha$ thì $\widehat{QDR} = \alpha$ hoặc $180^0 - \alpha$.

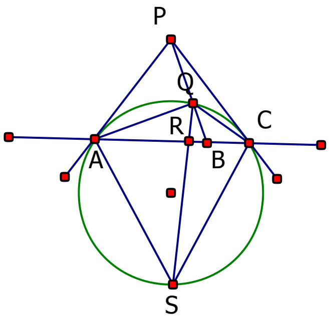
Ta có PQ = CD.sinγ ; QR = AD.sinα . Do đó PQ = QR $\Leftrightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

Định lí sin trong Δ ABC ta có : $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{CB}{AB}$.

Từ đó PQ = QR $\Leftrightarrow \frac{CD}{AD} = \frac{CB}{AB} \Leftrightarrow AB.CD = AD.CD$

Bài 2) Cho 3 điểm phân biệt A, B, C theo thứ tự đó nằm trên một đường thẳng. Gọi Γ là một đường tròn thay đổi qua A và C có tâm không nằm trên AC. Kí hiệu P là giao điểm của các tiếp tuyến với Γ tại A và C. Giả sử Γ cắt đoạn PB tại Q. Chứng minh rằng giao điểm của phân giác góc $\widehat{AQC}$ và đường thẳng AC không phụ thuộc vào cách chọn Γ.

Lời giải 1.

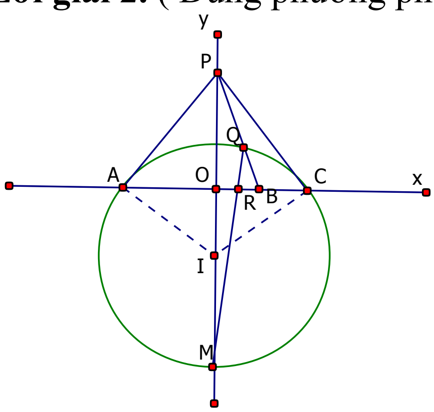


Giả sử phân giác góc $\widehat{AQC}$ cắt đường thẳng AC và đường tròn Γ tại R và S tương ứng, ở đây S $\neq$ Q. Vì ΔAPC cân ta có $\frac{AB}{BC}=\frac{AB}{PB}:\frac{BC}{PB}=\frac{\sin\widehat{APB}}{\sin\widehat{PAB}}:\frac{\sin\widehat{CPB}}{\sin\widehat{PCB}}=\frac{\sin\widehat{APB}}{\sin\widehat{CPB}}$. Tương tự ΔASC cân ta có $\frac{AR}{RC}=\frac{\sin\widehat{ASQ}}{\sin\widehat{CSQ}}$. Định lí Cê-va trong tam giác PAC và Q ta có $\frac{\sin\widehat{APB}}{\sin\widehat{CPB}}=\frac{\sin\widehat{PAQ}}{\sin\widehat{PCQ}}.\frac{\sin\widehat{QCA}}{\sin\widehat{QCA}}$

Theo tính chất tiếp tuyến ta có : $\widehat{PAQ}=\widehat{ASQ}=\widehat{QCA}$ và $\widehat{PCQ}=\widehat{CSQ}=\widehat{QAC}$.

Do đó $\frac{AB}{BC}=\frac{AR^2}{RC^2}\Rightarrow$R không phụ thuộc vào Γ.

Lời giải 2. (Dùng phương pháp tọa độ)



R là giao điểm phân giác góc $\widehat{AQC}$ với đường thẳng AC. Chọn hệ trục Oxy , ta có thể giả sử A(– 1, 0), B(b, 0), C(1,0) và $\Gamma: x^2+(y+p)^2=1+p^2$ thì P(0,1/p).

Gọi M là trung điểm cung lớn AC thì M$(0,-p-\sqrt{1+p^2})$.Các điểm Q, R, M thẳng hàng, khi đó $\widehat{AQR}=\widehat{CQR}$.

Vì PB: $y=-\frac{x}{pb}+\frac{1}{p}$ nên tọa độ

Q$\left(\frac{(1+p^2)b-pb\sqrt{(1+p^2)(1-b^2)}}{1+p^2b^2},\frac{(1-p)(b^2+)\sqrt{\;+p^2-b^2}}{1+p^2b^2}\right)$,

do đó ta có $\frac{QP}{BQ}=\frac{\sqrt{1+p^2}}{p\sqrt{1-b^2}}$. Khi đó $\frac{MO}{PM}=\frac{p+\sqrt{1+p^2}}{(1/p)+p+\sqrt{1+p^2}}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$, ta có

$\frac{OR}{RB}=\frac{MO}{PM}.\frac{QP}{BQ}=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}.\frac{\sqrt{1+p^2}}{p\sqrt{1-b^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$

Do đó R không phụ thuộc vào p tức không phụ thuộc vào Γ.

Bài 3) Cho tam giác ABC và điểm P nằm trong miền trong của nó. Gọi D, E, F lần lượt hình chiếu vuông góc của P lên đường thẳng BC, CA, AB tương ứng. Giả sử $AP^2+PD^2=BP^2+PE^2=CP^2+PF^2$. Kí hiệu I_A, I_B, I_C là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_AI_BI_C$.

Lời giải.

Từ điều kiện đã cho ta có

$$0 = (BP^2 + PE^2) - (CP^2 + PF^2) = (BP^2 - PF^2) - (CP^2 - PE^2) = BF^2 - CE^2$$

Ta có thể đặt x = BF = CE, tương tự đặt y = CD = AF và z = AE = BD.

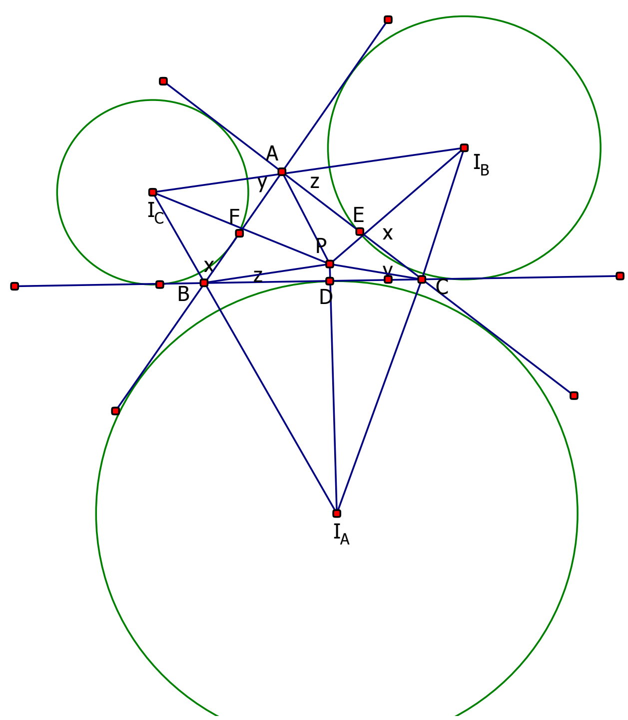
+ Nếu một trong ba điểm D, E, F không nằm trên cạnh của tam giác ABC thì mâu thuẫn với bất đẳng thức trong tam giác. Thật vậy nếu B,C, D nằm theo thứ tự đó. Ta có AB + BC = x + z = AC vô lí. Do đó tất cả các điểm D, E, F nằm trên các cạnh tam giác ABC.

Đặt a = BC; b = CA; c = AB và p = $\frac{1}{2}(a+b+c)$ thì x – p – a; y = p – b; z = p – c .

Khi đó BD = p – c; CD = p – b . Ta thấy rằng D là tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với BC.Tương tự E, F tương ứng là tiếp điểm đường tròn bàng tiếp góc B, C với đường hẳng CA và AB. Do PD $\perp$ BC, $I_AP \perp BC \Rightarrow$ P, D, I_A thẳng hàng. Tương tự P, E , I_B thẳng hàng và P, F, I_C thẳng hàng .

Do đó ba điểm I_A, C, I_B thẳng hàng và tam giác PI_AI_B cân và $\widehat{PI_AC} = \widehat{PI_BC} = \frac{1}{2}\widehat{C}$.

Làm tương tự ta có $PI_A = PI_C$ do đó $PI_A = PI_B = PI_C$. Suy ra P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_AI_BI_C$.



Chú thích 1: Bài toán không đúng nếu P nằm ngoài tam giác ABC.
Chú thích 2: Trong phần này giá trị $AP^2+PD^2; BP^2+PE^2, CP^2+PF^2 = 8R^2 - p^2$, với R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và $p = \frac{1}{2}(AB+BC+CA)$.

Ta có thể chứng minh bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $I_AI_BI_C$ bằng 2R.
Ta có $PD = PI_A - DI_A = 2R - r_A$; ở đây r_A là bán kính đường tròn bàng tiếp góc A. r_B, r_C tương ứng. $PE = 2R - r_B$, $PF = 2R - r_C$. Ta có

$$AP^2+PD^2 = AE^2+PE^2+PD^2 = (p-c)^2+(2R-r_B)^2+(2R-r_A)^2.$$

Vì $(2R-r_A)^2 = 4R^2 - 4Rr_A + r_A^2 = 4R^2 - 4\frac{abc}{4S_{ABC}}\cdot\frac{S_{ABC}}{p-a}+\left(\frac{S_{ABC}}{p-a}\right)^2$

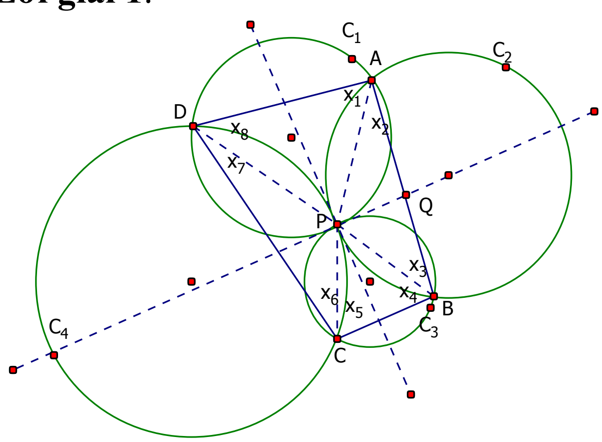
$$= 4R^2 + \frac{p(p-b)(p-c)-abc}{p-a} = 4R^2+bc-p^2$$

Và ta có thể nhận được : $(2R-r_B)^2 = 4R^2+ca-p^2$.
Ta có $AP^2+PD^2 = (p-c)^2 + (4R^2+ca-p^2) + (4R^2+bc-p^2) = 8R^2-p^2$.

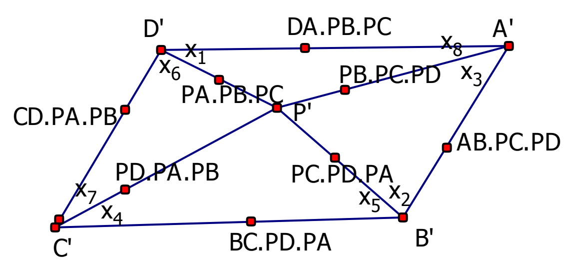
Bài 4) Cho C_1, C_2, C_3, C_4 là các đường tròn phân biệt sao cho C_1 và C_3 tiếp xúc ngoài tại P ; C_2 và C_4 tiếp xúc ngoài tại P. Giả sử C_1 và C_2, C_2 và C_3, C_3 và C_4, C_4 và C_1 cắt nhau tương ứng tại A, B, C, D khác P. Chứng minh rằng :

$$\frac{AB.BC}{AD.DC} = \frac{PB^2}{PD^2}$$

Lời giải 1.



Hình 1



Hình 2

Gọi Q là giao điểm của đường thẳng AB với tiếp tuyến chung của Γ_1 và Γ_3. Thì

$$\widehat{APB} = \widehat{APQ}+\widehat{BPQ} = \widehat{PDA}+\widehat{PCB}$$

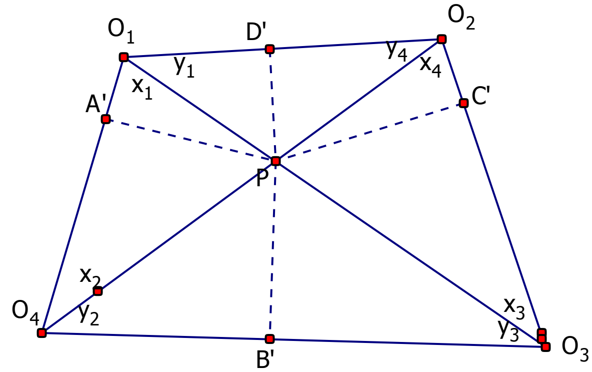
Kí hiệu : $x_1, x_2, \ldots, x_8$ các góc như trong hình 1. Thì

$$x_1+x_2+\widehat{APB} = x_2+x_3+x_5+x_8 = 180^0 \ (1)$$

Tương tự $\angle BPC = \angle PAB + \angle PDC$ và $x_4 + x_5 + x_2 + x_7 = 180^0$ (2)
Nhân độ dài các cạnh của các tam giác PAB, PBC, PCD, PAD với PC.PD ; PD.PA ; PA.PB ; PB.PC tương ứng, cho ta một tứ giác mới như hình 2.
Từ (1) và (2) chỉ ra rằng A'D'//B'C' và A'B'//C'D'. Do đó tứ giác A'B'C'D' là một hình bình hành. Suy ra A'B' = C'D' và A'D' = B'C' . Từ đó
AB.PC.PD = CD.PA.PB và AD.PB.PC = BC.PA.PD . Suy ra $\dfrac{AB.BC}{AD.DC} = \dfrac{PB^2}{PD^2}$

Lời giải 2.

Gọi O_1, O_2, O_3, O_4 lần lượt là tâm các đường tròn C_1, C_2, C_3, C_4 và gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm đoạn PA, PB, PC, PD. Vì C_1, C_3 tiếp xúc ngoài tại P nên P, O_1, O_3 thẳng hàng. Tương tự O_2, O_4 , P thẳng hàng.



Đặt $x_1 = \angle O_4O_1O_2$, $x_2 = \angle O_1O_2O_3$, $x_3 = \angle O_2O_3O_4$, $x_4 = \angle O_3O_4O_1$ và $y_1 = \angle PO_1O_4$, $y_2 = \angle PO_2O_3$, $y_3 = \angle PO_3O_2$, $y_4 = \angle PO_4O_1$.
Theo định lí sin ta có
$\dfrac{O_1O_2}{O_1O_3} = \dfrac{\sin y_3}{\sin x_2}$, $\dfrac{O_3O_4}{O_2O_4} = \dfrac{\sin y_2}{\sin x_3}$
$\dfrac{O_3O_4}{O_1O_3} = \dfrac{\sin y_1}{\sin x_4}$, $\dfrac{O_1O_2}{O_2O_4} = \dfrac{\sin y_4}{\sin x_1}$.

Khi đó đoạn PA là dây cung chung của C_1 và C_2 , đoạn PA' là đường cao từ P đến O_1O_2 . Tương tự PB', PC', PD' là đường cao từ P đến O_2O_3, O_3O_4, O_4O_1 tương ứng. Thì O_1, A', P, D' nằm trên một đường tròn. Một lần nữa theo định lí sin ta có:

$$\frac{D'A'}{PD'} = \frac{\sin x_1}{\sin y_1}, \quad \frac{A'B'}{PB'} = \frac{\sin x_2}{\sin y_2}, \quad \frac{B'C'}{PB'} = \frac{\sin x_3}{\sin y_3}, \quad \frac{C'D'}{PD'} = \frac{\sin x_4}{\sin y_4}$$

Vì A'B' = AB/2, B'C' = BC/2, C'D' = CD/2, D'A' = DA/2, PB = PB'/2, PD' = PD/2, ta có

$$\frac{AB}{AD}.\frac{BC}{DC}.\frac{PD^2}{PB^2} = \frac{A'B'}{A'D'}.\frac{B'C'}{D'C'}.\frac{PD'^2}{PB'^2} = \frac{\sin x_2 \sin x_3 \sin y_4 \sin y_1}{\sin y_2 \sin y_3 \sin x_4 \sin x_1} = \frac{O_1O_3}{O_1O_2}.\frac{O_2O_4}{O_3O_4}.\frac{O_1O_2}{O_2O_4}.\frac{O_3O_4}{O_1O_3} = 1$$

hay $\dfrac{AB.BC}{AD.DC} = \dfrac{PB^2}{PD^2}$

Chú thích : Ở đây không cần giả thiết C_1, C_3 và C_2, C_4 tiếp xúc ngoài nhau. Chúng ta có thể thay đổi câu đầu tiên trong bài toán đã được đề cập:

Gọi C_1, C_2, C_3, C_4 là các đường tròn phân biệt sao cho C_1 và C_3 tiếp xúc nhau tại P , C_2 và C_4 tiếp xúc nhau tại P.Giả sử C_1 và C_2 , C_2 và C_3 , C_3 và C_4, C_4 và C_1 cắt nhau tương ứng tại A, B, C, D khác P. Chứng minh rằng :

$$\frac{AB.BC}{AD.DC}=\frac{PB^2}{PD^2}$$

Tiếp theo đây là hai lời giải phù hợp với việc thay đổi đầu bài

Lời giải 3.

Gọi O_i và r_i là tâm và bán kính đại số của C_i , i = 1,2,3,4. Chúng ta có thể giả sử rằng $r_1 > 0$. Nếu O_1 , O_3 nằm một bên của tiếp tuyến chung thì ta có $r_3 > 0$; trái lại ta có $r_3 < 0$.

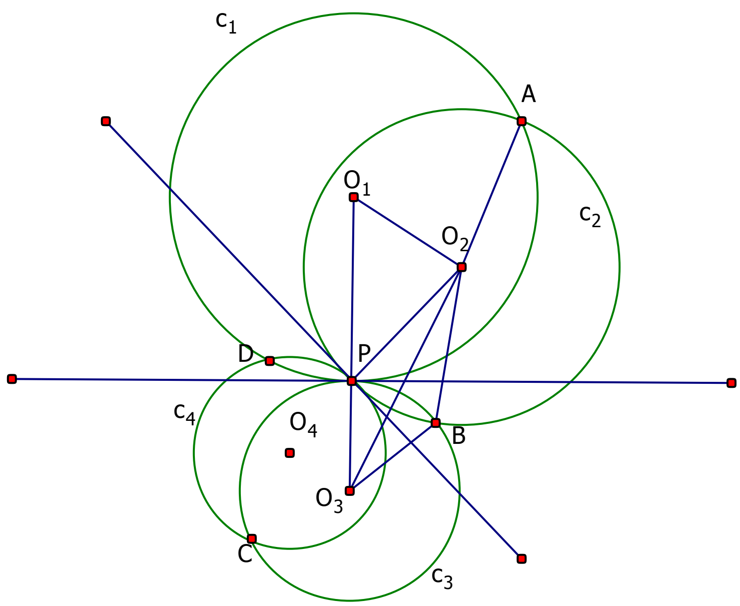
Đặt $\theta=\widehat{O_1PO_2}$. Ta có $\widehat{O_iPO_{i+1}}=\theta$ hay $180^0-\theta$ suy ra $\sin\widehat{O_iPO_{i+1}}=\sin\theta$ (1)

Từ $PB\perp O_2O_3$ và $\Delta PO_2O_3=\Delta BO_2O_3$, ta có

$\frac{1}{2}.\frac{1}{2}O_2O_3.PB=S_{PO_2O_3}=\frac{1}{2}.PO_2.PO_3.\sin\theta=\frac{1}{2}|r_2||r_3|\sin\theta$ .Từ đó PB = $\frac{2|r_2||r_3|\sin\theta}{O_2O_3}$ (2)

Bởi vì tam giác O_2AB cân ta có $AB=2|r_2|\sin\frac{\widehat{AO_2B}}{2}$ (3)

Từ $\widehat{O_1O_2P}=\widehat{O_1O_2A}$ và $\widehat{O_3O_2P}=\widehat{O_3O_2P}$, ta có $\sin\frac{\widehat{AO_2B}}{2}=\sin\widehat{O_1O_2O_3}$



Do đó $\frac{1}{2}O_1O_2.O_2O_3.\sin\widehat{O_1O_2O_3}=S_{O_1O_2O_3}=\frac{1}{2}O_1O_3.PO_2.\sin\theta=\frac{1}{2}|r_1-r_3||r_2|\sin\theta$

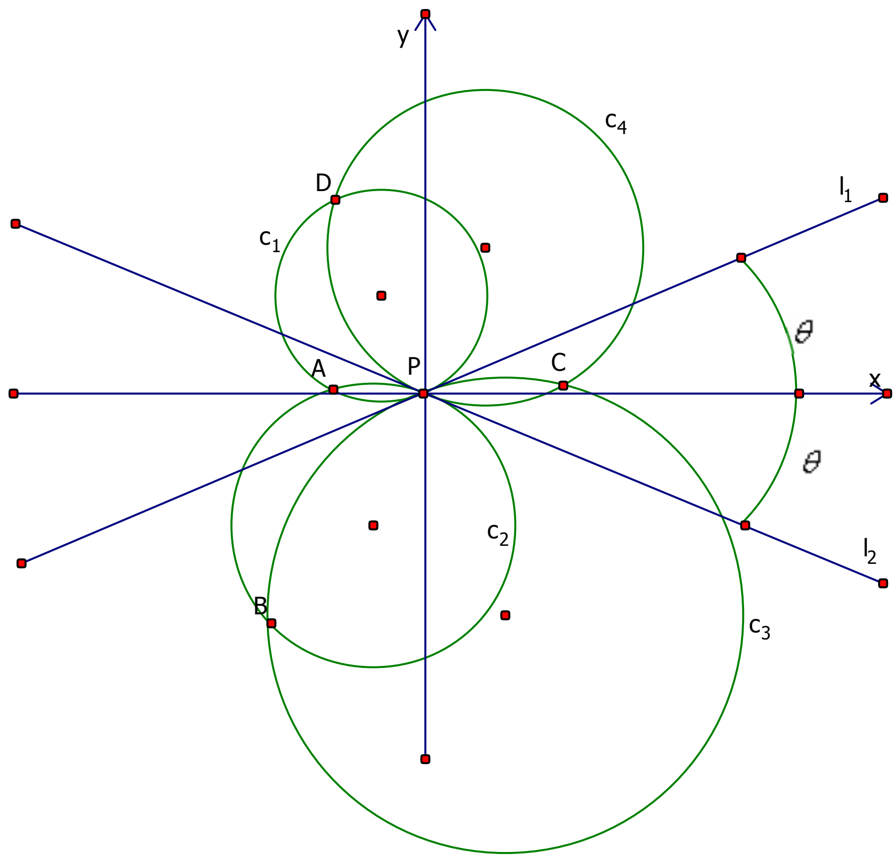
Từ (3) ta có AB = $2|r_2|\frac{|r_1-r_3||r_2|\sin\theta}{O_1O_2.O_2O_3}$

Làm tương tự như (1), (2), (3) chúng ta có thể nhận được độ dài của PD, BC, CD, DA và tính toán như sau :

$$\frac{AB.BC}{CD.DA}=\frac{2|r_1-r_3|r_2^2\sin\theta}{O_1O_2.O_2O_3}.\frac{2|r_2-r_4|r_3^2\sin\theta}{O_2O_3.O_3O_4}.\frac{O_3O_4.O_4O_1}{2|r_1-r_3|r_4^2\sin\theta}.\frac{O_4O_1.O_1O_2}{2|r_2-r_4|r_1^2\sin\theta}$$

$$= \left(\frac{2|r_2||r_3|\sin\theta}{O_2O_3} \right)^2 \left(\frac{O_4O_1}{2|r_4||r_1|\sin\theta} \right)^2 = \frac{PB^2}{PD^2}$$

Lời giải 4. Gọi l_1 là tiếp tuyến chung của đường tròn C_1 và C_3 và gọi l_2 là tiếp tuyến chung của C_2 và C_4 . Chọn hệ trục như hình vẽ.



Chúng ta có thể giả sử rằng :

C_1 : $x^2 + y^2 + 2ax\sin\theta - 2ay\cos\theta = 0$, C_2 : $x^2 + y^2 + 2bx\sin\theta + 2by\cos\theta = 0$,

C_3 : $x^2 + y^2 - 2cx\sin\theta + 2cy\cos\theta = 0$, C_4 : $x^2 + y^2 - 2dx\sin\theta - 2dy\cos\theta = 0$

Tính toán rút gọn đi đến các giao điểm

$$A\left(-\frac{4ab(a+b)\sin\theta\cos^2\theta}{a^2+b^2+2ab\cos 2\theta} ; -\frac{4ab(a-b)\sin^2\theta\cos\theta}{a^2+b^2+2ab\cos 2\theta} \right),$$

$$B\left(\frac{4bc(b-c)\sin\theta\cos^2\theta}{b^2+c^2-2bc\cos 2\theta} ; -\frac{4bc(b+c)\sin^2\theta\cos\theta}{b^2+c^2-2bc\cos 2\theta} \right),$$

$$C\left(\frac{4cd(c+d)\sin\theta\cos^2\theta}{c^2+d^2+2cd\cos 2\theta} ; \frac{4cd(c-d)\sin^2\theta\cos\theta}{c^2+d^2+2cd\cos 2\theta} \right),$$

$$D\left(-\frac{4da(d-a)\sin\theta\cos^2\theta}{d^2+a^2-2da\cos 2\theta} ; \frac{4da(d+a)\sin^2\theta\cos\theta}{d^2+a^2-2da\cos 2\theta} \right)$$

Tính toán độ dài đi đến

$$AB = \frac{4b^2\left|a+c\right|\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(a^2+d^2-2ad\cos 2\theta)(b^2+c^2-2bc\cos 2\theta)}},$$

$$BC = \frac{4c^2\left|b+d\right|\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(b^2+c^2-2bc\cos 2\theta)(c^2+d^2+2cd\cos 2\theta)}},$$

$$CD = \frac{4d^2\left|c+a\right|\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(c^2+a^2-2ca\cos 2\theta)(d^2+a^2-2da\cos 2\theta)}},$$

$$DA = \frac{4a^2\left|b+d\right|\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{(d^2+a^2-2da\cos 2\theta)(a^2+b^2+2ab\cos 2\theta)}},$$

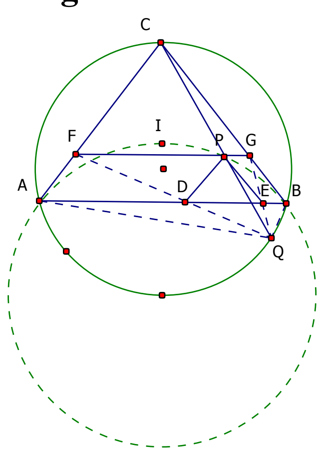
Suy ra $\dfrac{AB.BC}{AD.DC} = \dfrac{b^2c^2(d^2+a^2-2da\cos 2\theta)}{d^2a^2(b^2+c^2-2bc\cos 2\theta)}$

Còn vế phải ta có PB = $\dfrac{4\left|b\right|\left|c\right|\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos 2\theta}}$ và PD = $\dfrac{4\left|d\right|\left|a\right|\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{d^2+a^2-2da\cos 2\theta}}$

Suy ra $\dfrac{PB^2}{PD^2} = \dfrac{b^2c^2(d^2+a^2-2da\cos 2\theta)}{d^2a^2(b^2+c^2-2bc\cos 2\theta)}$. Do đó ta nhận được $\dfrac{AB.BC}{AD.DC} = \dfrac{PB^2}{PD^2}$

Bài 5) Cho ABC là một tam giác cân với CA = CB, có I là tâm đường tròn nội tiếp. Gọi P là điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB và nằm bên trong tam giác ABC. Đường thẳng qua P song song với CA và CB cắt AB tương ứng tại D và E. Đường thẳng qua P song song với AB cắt CA và CB tương ứng tại F và G. Chứng minh rằng đường thẳng DF và đường thẳng EG có giao điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải 1.



Nhận xét : các cạnh của tam giác PDE và CFG song song với nhau. Do đó nếu DF và GE không song song với nhau thì có một phép vị tự và DF, GE và CP đồng quy tại tâm của phép vị tự đó.

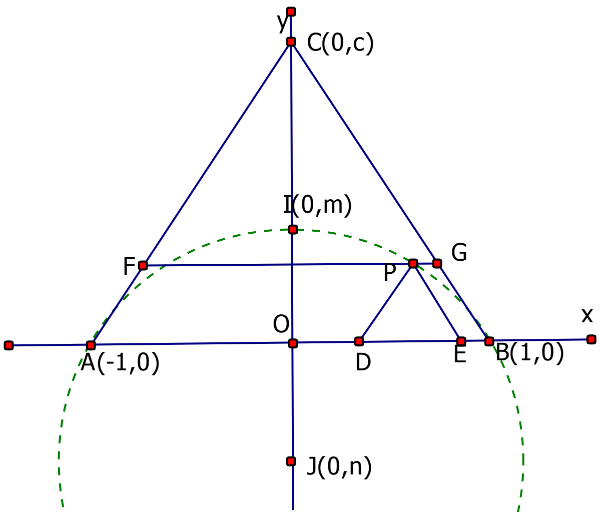
Ta chứng minh : Nếu CP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại Q khác C, thì Q là giao điểm của FD và GE .

+ Vì $\angle AQP = \angle ABC = \angle BAC = \angle PFC \Rightarrow$ AQPF nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \angle FQP = \angle PAF$. Vì $\angle IBA = \frac{1}{2}\angle CBA = \frac{1}{2}\angle CAB = \angle IAC$ nên đường tròn ngoại tiếp tam giác AIB tiếp xúc CA tại A$\Rightarrow \angle PAF = \angle DBP$

+ Vì $\angle QBD = \angle QCA = \angle QPD \Rightarrow$ tứ giác DQBP nội tiếp đường tròn$\Rightarrow \angle DBP = \angle DQP$.

Từ $\widehat{FQP} = \widehat{PAF} = \widehat{DBP} = \widehat{DQP} \Rightarrow$ F, D, Q thẳng hàng. Tương tự ta nhận được G, E, Q thẳng hàng. Do đó DF, EG, CP đồng quy tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải 2. (Dùng phương pháp tọa độ)



Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho A(– 1, 0), B(1, 0), C(0, c). Giả sử I(0, m) khi đó

$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + CA)m \Rightarrow$

m $= \dfrac{c}{1+\sqrt{1+c^2}}$

Giả sử J(0,n) là tâm đường tròn C_1 ngoại tiếp tam giác AIB. Khi đó $(n-m)^2 = JI^2 = JA^2 = 1 + n^2$,

ta có n = – 1/c và

C_1: $x^2 + (y + 1/c)^2 = 1 + (1/c)^2$

Gọi P(p,q). Khi đó D(p – q/c, 0), E(p + q/c, 0), F(q/c – 1, q), G(– q/c + 1, q), từ đó phương trình đường thẳng DF và EG tương ứng là

$$y = \frac{q}{\frac{2q}{c} - p - 1}\left(x - \left(p - \frac{q}{c}\right)\right) \text{ và } y = \frac{q}{-\frac{2q}{c} - p + 1}\left(x - \left(p + \frac{q}{c}\right)\right).$$

Do đó giao điểm Q của hai đường thẳng là Q((q – c)p/(2q – c), q^2/(2q – c)).

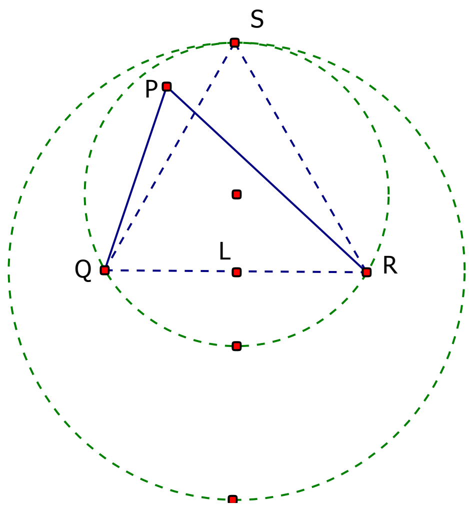
Gọi O_1(0, u) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

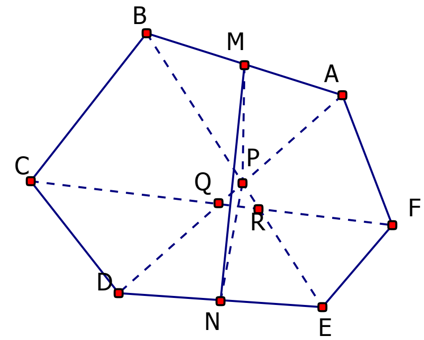
Vì $1 + u^2 = O_1A^2 = O_1C^2 = (u - c)^2 \Rightarrow u = (c^2 - 1)/2c$. Vì P(p, q) nằm trên đường tròn C_1 ta có $p^2 + (q + 1/c)^2 = 1 + (1/c)^2$

$O_1Q^2 = \left(\dfrac{q-c}{2q-c}\right)^2 p^2 + \left(\dfrac{q^2}{2q-c} - \dfrac{c^2-1}{2c}\right)^2 = \left(\dfrac{c^2+1}{2c}\right)^2 = O_1C^2 \Rightarrow$ Q nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 6) Mỗi cặp cạnh đối của lục giác lồi có tính chất: khoảng cách giữa hai trung điểm của chúng bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ lần tổng độ dài của chúng. Chứng minh rằng tất cả các góc của lục giác lồi bằng nhau.

Lời giải 1.





Trước tiên ta chứng minh bổ đề: Cho tam giác PQR với $\angle QPR \geq 60^0$. Gọi L là trung điểm của QR thì PL$\leq \frac{\sqrt{3}}{2}QR$, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác PQR đều.

Chứng minh: Gọi S là điểm sao cho tam giác QRS đều. Ở đây S và P nằm trên nữa mặt phẳng bờ QR. Thì P nằm trong đường tròn ngoại tiếp tam giác QRS và nằm trong đường tròn tâm L trung điểm QR, bán kính $\frac{\sqrt{3}}{2}QR$. Bổ đề được chứng minh.

Những đường chéo chính của lục giác lồi cắt nhau tạo thành một tam giác , tam giác này có thể suy biến. Ta có thể chọn hai trong ba đường chéo ứng với góc lớn hơn hoặc bằng 60^0 . Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử đó là đường chéo AD và BE của lục giác ABCDEF thỏa mãn $\angle APB \geq 60^0$, ở đây P là giao điểm hai đường chéo AD và BE. Gọi M, N lần lượt trung điểm của AB và DE .

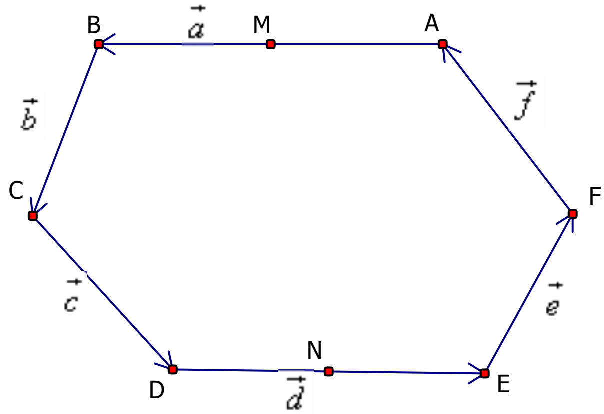
Áp dụng bổ đề, ta có MN = $\frac{\sqrt{3}}{2}$(AB + DE)$\geq$ PM + PN $\geq$MN.

Dấu đẳng thức phải xảy ra tức các tam giác ABP và DEP đều.

Do đó đường chéo CF tạo một góc lớn hơn hoặc bằng 60^0 với một đường chéo AD và BE. Không mất tính tổng quát giả sử $\angle AQF \geq 60^0$, với Q là giao điểm của AD và CF. Giống như cách chứng minh trên thì tam giác AQF và CQD đều. Gọi R là giao điểm của BE và CF, thì $\angle BRC = 60^0$. Làm lại như trên lần thứ ba ta được các tam giác BCR và EFR đều. Vậy tất cả các góc của lục giác bằng nhau.

Lời giải 2.

Gọi ABCDEF là lục giác lồi đã cho và đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{d} = \overrightarrow{DE}$, $\vec{e} = \overrightarrow{EF}$, $\vec{f} = \overrightarrow{FA}$. Gọi M, N lần lượt trung điểm cạnh AB và DE. Ta có:



$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{d}$ và $\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{f}-\vec{e}-\frac{1}{2}\vec{d} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{f}-\vec{e})(1)$

Từ giả thiết đã cho , ta có MN = $\frac{\sqrt{3}}{2}(|\vec{a}|+|\vec{d}|) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}|\vec{a}-\vec{d}|$ (2)

Đặt $\vec{x}=\vec{a}-\vec{d}, \vec{y}=\vec{c}-\vec{f}, \vec{z}=\vec{e}-\vec{b}$. Từ (1) và (2) ta có $|\vec{y}-\vec{z}| \geq \sqrt{3}|\vec{x}|$ (3)

Tương tự ta có : $|\vec{z}-\vec{x}| \geq \sqrt{3}|\vec{y}|$ (4) và $|\vec{x}-\vec{y}| \geq \sqrt{3}|\vec{z}|$ (5)

Chú ý rằng: $(3) \Leftrightarrow |\vec{y}|^2 - 2\vec{y}.\vec{z} + |\vec{z}|^2 \geq 3|\vec{x}|^2$, $(4) \Leftrightarrow |\vec{z}|^2 - 2\vec{z}.\vec{x} + |\vec{x}|^2 \geq 3|\vec{y}|^2$,

$(5) \Leftrightarrow |\vec{x}|^2 - 2\vec{x}.\vec{y} + |\vec{y}|^2 \geq 3|\vec{z}|^2$

Cộng ba BĐT trên ta được $-|\vec{x}|^2 - |\vec{y}|^2 - |\vec{z}|^2 - 2\vec{y}.\vec{z} - 2\vec{z}.\vec{x} - 2\vec{x}.\vec{y} \geq 0 \Leftrightarrow -|\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}|^2 \geq 0$.

Vậy $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=\vec{0}$ và dấu đẳng thức xảy ra trong tất cả các BĐT trên.

Tức $\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}=\vec{0}$ và $|\vec{y}-\vec{z}| = \sqrt{3}|\vec{x}|$, $|\vec{z}-\vec{x}| = \sqrt{3}|\vec{y}|$, $|\vec{x}-\vec{y}| = \sqrt{3}|\vec{z}|$.

Suy ra $\vec{a}$, $\vec{d}$, $\vec{x}$ cùng phương ; $\vec{c}, \vec{f}, \vec{y}$ cùng phương; $\vec{e}, \vec{b}, \vec{z}$ cùng phương.

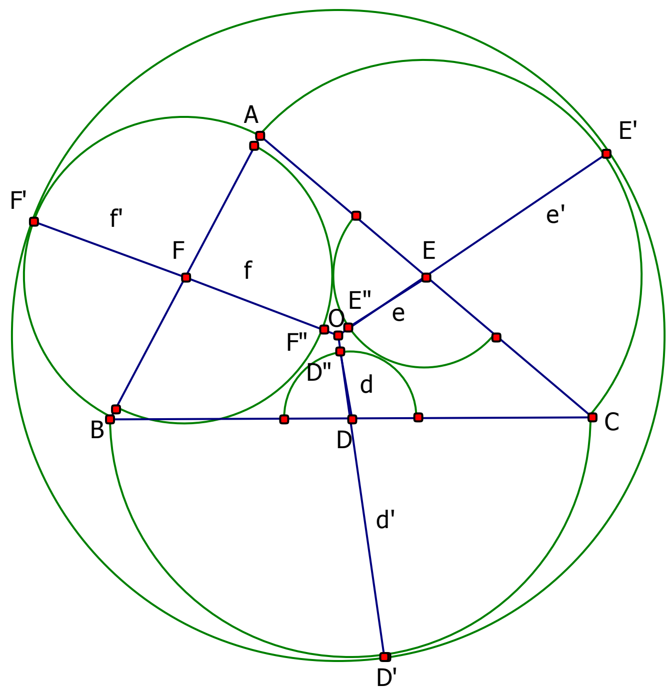
Giả sử tam giác PQR sao cho $\overrightarrow{PQ}=\vec{x}$, $\overrightarrow{QR}=\vec{y}$, $\overrightarrow{RP}=\vec{z}$. Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $\widehat{QPR} \geq 60^0$. Gọi L là trung điểm của QR, thì

PL = $\frac{1}{2}|\vec{z}-\vec{x}| = \frac{\sqrt{3}|\vec{y}|}{2} = \frac{\sqrt{3}QR}{2}$. Dựa vào bổ đề trong cách giải 1 thì tam giác PQR đều. Từ đó ta có $\angle ABC = \angle BCD = ... = \angle FAB = 120^0$.

Bài 7) Cho tam giác ABC với nửa chu vi là s và bán kính đường tròn nội tiếp r. Các nửa đường tròn với đường kính BC, CA, AB vẽ bên ngoài ΔABC. Đường tròn tiếp xúc tất cả ba nửa đường tròn trên có bán kính t. Chứng minh rằng :

$$\frac{s}{2} < t \leq \frac{s}{2} + \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r$$

Lời giải 1.



Gọi O là tâm đường tròn và D, E, F là trung điểm cạnh BC, CA, AB tương ứng. Kí hiệu D’, E’, F’ là các điểm tiếp xúc của đường tròn với các nửa đường tròn đường kính BC, CA, AB tương ứng. Gọi d’, e’, f’ là bán kính của các nửa đường tròn đó. Thì các đường DD’, EE’, FF’ qua O và s = d’ + e’ + f’. Đặt

$$d=\frac{s}{2}-d'=\frac{-d'+e'+f'}{2},\quad e=\frac{s}{2}-e'=\frac{d'-e'+f'}{2},\quad f=\frac{s}{2}-f'=\frac{d'+e'-f'}{2}$$

Chú ý rằng $d+e+f=\frac{s}{2}$. Dựng các nửa đường tròn nhỏ bên trong tam giác ABC với bán kính d, e, f và tâm D, E, F tương ứng. Thì các nửa đường tròn nhỏ tiếp xúc nhau từng đôi một, khi đó d + e = f’ = DE , e + f = d’ = EF , f + d = e’ = FD. Trong phần này các tiếp điểm của chúng là điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp tam giác DEF với các cạnh của nó.

Giả sử các nửa đường tròn nhỏ cắt DD’, EE’, FF’ tại D”, E”, F” tương ứng. Khi đó các nửa đường tròn không che lấp hết , điểm O nằm ngoài các nửa đường tròn. Do đó D’O > D’D” và t>s/2. Đặt g = t – s/2.

Rõ ràng OD” = OE” = OF” = g. Do đó đường tròn tâm O bán kính g tiếp xúc cả ba nửa đường tròn đôi một tiếp xúc nhau.

Ta chứng minh: $\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)^2$ (1)

Xét tam giác PQR và đặt p = QR, q = RP, r = PQ. Thì

$$\cos\widehat{QPR}=\frac{-p^2+q^2+r^2}{2qr} \text{ và } \sin\widehat{QPR}=\frac{\sqrt{(p+q+r)(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)}}{2qr}$$

Khi đó $\cos\widehat{EDF}=\cos(\widehat{ODE}+\widehat{ODF})=\cos\widehat{ODE}\cos\widehat{ODF}-\sin\widehat{ODE}\sin\widehat{ODF}$. Ta có

$$\frac{d^2+de+df-ef}{(d+e)(d+f)}=\frac{(d^2+de+dg-eg)(d^2+df+dg-fg)}{(d+g)^2(d+e)(d+f)}-\frac{4dg\sqrt{(d+e+g)(d+f+g)}}{(d+g)^2(d+e)(d+f)}$$

Đơn giản và rút gọn đi đến

$$(d+g)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}-\frac{1}{g}\right)-2\left(\frac{d}{g}+\frac{g}{d}\right)=-2\sqrt{\frac{(d+e+g)(d+f+g)}{ef}}$$

Bình phương và rút gọn ta được

$$\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)^2=4\left(\frac{1}{de}+\frac{1}{df}+\frac{1}{dg}+\frac{1}{ef}+\frac{1}{eg}+\frac{1}{fg}\right)$$

$$=2\left(\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)^2-\left(\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}+\frac{1}{g^2}\right)\right)$$

Từ đó ta có điều cần chứng minh (1)

Với g càng nhỏ thì 1/g càng lớn, ta có

$$\frac{1}{g}=\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+\sqrt{2\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}\right)^2-2\left(\frac{1}{d^2}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{f^2}\right)}=\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+2\sqrt{\frac{d+e+f}{def}}$$

So sánh diện tích : $S_{DEF}=\frac{1}{4}S_{ABC}=\frac{rs}{4}$ và $S_{DEF}=\sqrt{(d+e+f)def}$,

ta có $\frac{r}{2}=\frac{2}{s}\sqrt{(d+e+f)def}=\sqrt{\frac{def}{d+e+f}}$.

Chúng ta cần chứng minh $\frac{r}{2g}\ge\frac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$.

Vì $\frac{r}{2g}=\sqrt{\frac{def}{d+e+f}}\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{e}+\frac{1}{f}+2\sqrt{\frac{d+e+f}{def}}\right)=\frac{x+y+z}{\sqrt{xy+yz+zx}}+2$,

ở đây x = $\frac{1}{d}$, $y=\frac{1}{e}$, $z=\frac{1}{f}$

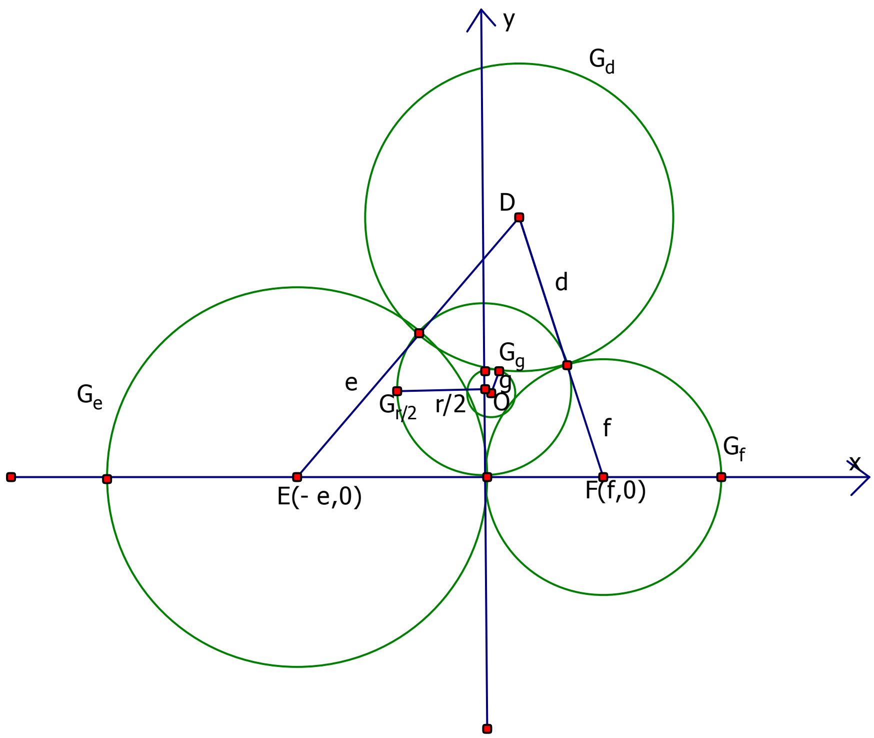
Quy về chứng minh $\frac{(x+y+z)^2}{xy+yz+zx}\ge 3$. Đây là bất đẳng thức đúng vì

$$(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right]\ge 0$$

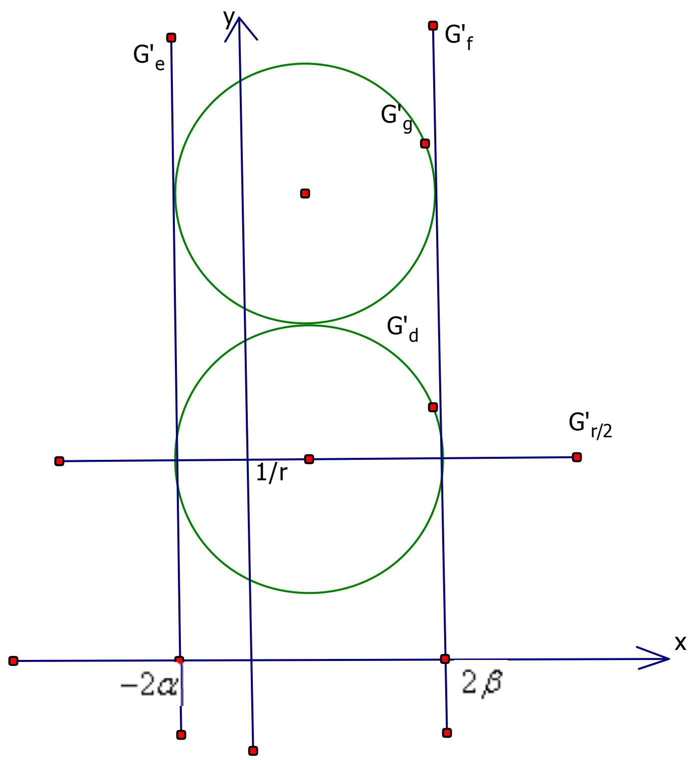
Lời giải 2.

Chúng ta chứng minh t > s/2 như cách giải 1. Đặt g = t – s/2.

Bây giờ chọn hệ trục tọa độ sao cho E(– e; 0), F(f; 0), và tung độ y của D là số dương. Gọi G_d, G_e, G_f, G_g là đường tròn bán kính d, e, f, g với các tâm D, E, F, O tương ứng. Gọi $\Gamma_{r/2}$ là đường tròn nội tiếp tam giác DEF. Chú ý bán kính của $\Gamma_{r/2}$ là r/2 .



Bây giờ, xét phép nghịch đảo với đường tròn nghịch đảo tâm (0; 0) bán kính bằng 1.



Gọi G'_d, G'_e, G'_f, G'_g $G'_{r/2}$ tương ứng là ảnh của G_d, G_e, G_f, G_g, $G_{r/2}$ qua phép nghịch đảo đó. Đặt $\alpha = 1/4e$, $\beta = 1/4f$ và $R = \alpha + \beta$. Thì phương trình của đường thẳng G'_e, G'_f và $G'_{r/2}$ tương ứng là x = – 2α, x = 2β và y = 1/r. Hai bán kính của đường tròn G'_d và G'_g là R và có tâm tương ứng là điểm $(,1\alpha+)\beta \quad r$ và $(,1\alpha+\beta 2 \quad)r + \quad R$.

Gọi D là khoảng cách giữa (0; 0) và tâm của đương tròn G'_g thì ta có

$$2g = \frac{1}{D-R} - \frac{1}{D+R} = \frac{2R}{D^2-R^2} \text{ hay } g = \frac{R}{D^2-R^2}$$

Ở đây ta có thể chỉ ra g $\le (1-\sqrt{3}/2)r$ hay $(4+2\sqrt{3})g \le r$. Kiểm chứng điều này dựa vào

$$r-(4+2\sqrt{3})g = 2-3)()(4\sqrt{2}\ 3)\frac{R}{D^2-R^2} = \frac{r}{D^2-R^2}\left(D^2-R^2 - \quad + \sqrt{\ } \frac{1}{r}R\right)$$

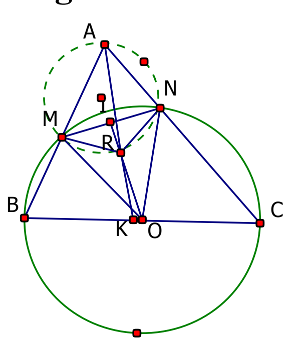
$$= \frac{r}{D^2-R^2}\left(\left(\frac{1}{r}+2R\right)^2 + ()(4-\beta 2^2\ 3)R^2 - \quad + \sqrt{\ }\frac{1}{r}R\right)$$

$$= \frac{r}{D^2-R^2}\left(3\left(R-\frac{1}{\sqrt{3}r}\right)^2 + ()0-\beta^2\right) \ge$$

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC ĐƯỢC ĐỀ NGHỊ TRONG KÌ THI IMO LẦN THỨ 45 TỔ CHỨC TẠI HY LẠP NĂM 2004

Bài 1) (IMO 2004, ROM) Cho tam giác ABC nhọn với AB $\ne$ AC, đường tròn đường kính BC cắt cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. O là trung điểm BC. Các đường phân giác các góc $\widehat{BAC}$ và $\widehat{MON}$ cắt nhau tại R. Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp ΔBMR và ΔCNR cắt nhau tại một điểm thứ hai nằm trên BC.

Lời giải.

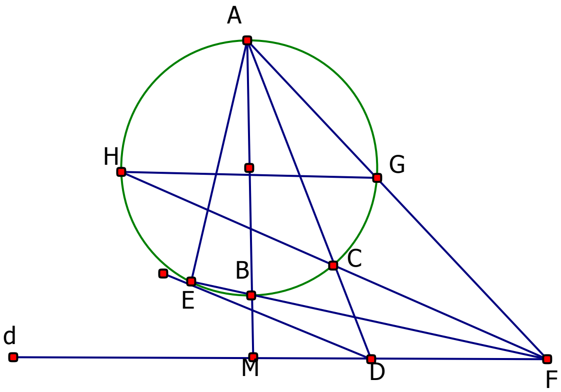


ΔANM $\sim$ ΔABC. Từ GT suy ra AM $\ne$ AN. Ta có OM = ON, RO $\perp$ MN , R là giao điểm của đường trung trực đoạn MN và phân giác góc $\widehat{MAN}$ suy ra R nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔAMN.

Gọi K = RA $\cap$ BC, ta có $\widehat{MRA} = \widehat{MNA} = \widehat{ABK}$
$\Rightarrow$ BMRK nội tiếp
$\widehat{NRA} = \widehat{NMA} = \widehat{ACK} \Rightarrow$ CNRK nội tiếp. K là giao điểm thứ hai của hai đường tròn ngoại tiếp ΔBMR và ΔCNR nằm trên đường thẳng BC

Bài 2) (KAZ): Cho đường tròn (Γ) và đường thẳng d không cắt nhau. Đường kính AB của (Γ) vuông góc với d, trong đó B gần d hơn A. Một điểm C thay đổi khác A, B trên (Γ). Đường thẳng AC cắt d tại D, đường thẳng DE là tiếp tuyến của (Γ) với tiếp điểm E, B và E nằm cùng một bên đường thẳng AC. Đường thẳng BE cắt d tại F và AF cắt (Γ) tại G$\neq$A. Gọi H là điểm đối xứng của G qua đường thẳng AB. Chứng minh rằng H nằm trên đường thẳng CF.

Lời giải.



Ta có GH//d. Gọi M = AB$\cap$d, $\widehat{FEA}=\widehat{FMA}=90^0$ suy ra AEMF nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DFE}=\widehat{BAE}=\widehat{DEF}$

Suy ra tam giác DEF cân

Vì DE là tiếp tuyến của (Γ) ta có

$DF^2 = DE^2 = DC.DA \Rightarrow \dfrac{DF}{DC}=\dfrac{DA}{DF}$

Suy ra ΔDFC đồng dạng

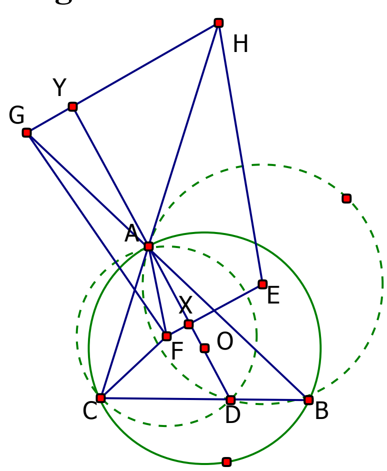
$\Delta DAF \Rightarrow \widehat{DCF}=\widehat{DFA}=\widehat{HGA}=\widehat{HCA}$

suy ra H, C, F thẳng hàng.

Bài 3) (KOR 2004) O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC với $\widehat{B}<\widehat{C}$. Đường thẳng AO cắt cạnh BC tại D. Tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABD và ΔACD tương ứng là E, F. Trên tia đối của AB, AC lấy lần lượt G và H sao cho AG = AC, AH = AB. Chứng minh rằng EFGH là hình chữ nhật khi và chỉ khi

$$\widehat{ACB}-\widehat{ABC}=60^0$$

Lời giải .



Kí hiệu $\widehat{A}=\alpha, \widehat{B}=\beta, \widehat{C}=\gamma$, $\beta<\gamma$

Ta có $\widehat{ADC}=\beta+\widehat{DAB}=\beta+90^0-\gamma$ là góc nhọn, suy ra $\widehat{CAO}=90^0-\beta$. Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của đường thẳng AD với FE và GH. Do AD là trục đẳng phương của (E) và (F) nên AD$\perp$FE.

Ta có $\Delta AGH \backsim \Delta ACB$ từ đó

$\widehat{GAY}=\widehat{OAB}=90^0-\gamma=90^0-\widehat{AGY} \Rightarrow \widehat{GAY}+\widehat{AGY}=90^0$

Suy ra GH$\perp$AD do đó GH//FE

EFGH là hình chữ nhật $\Leftrightarrow$ FX = GY và XE = YH

Ta có GY = AGsinγ = ACsinγ, FX = AFsinγ nên

GY = FX$\Leftrightarrow$ A F = AC$\Leftrightarrow$ $\widehat{AFC}=60^0 \Leftrightarrow \widehat{ADC}=30^0$

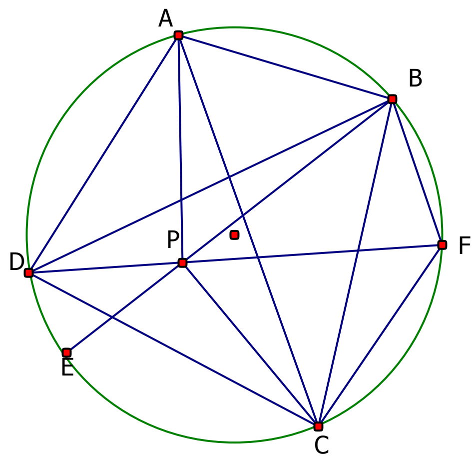
$\widehat{ADC}=180^0-\widehat{ACD}-\widehat{CAD}=180^0-\gamma-(90^0-\beta)=90^0-(\gamma-\beta)$.

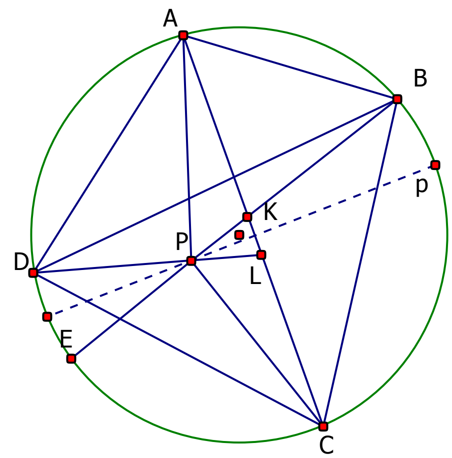
Suy ra FX = GY $\Leftrightarrow \gamma-\beta=60^0$. Tương tự XE = YH$\Leftrightarrow \gamma-\beta=60^0$

Vậy EFGH là hình chữ nhật khi và chỉ khi $\widehat{ACB}-\widehat{ABC}=60^0$.

Bài 4) (IMO 2004- POL) Trong một tứ giác lồi ABCD, đường chéo BD không phải phân giác giác của góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{CDA}$. Điểm P nằm miền trong tứ giác ABCD và thỏa mãn $\widehat{PBC} = \widehat{DBA}$ và $\widehat{PDC} = \widehat{BDA}$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn khi và chỉ khi AP = CP.

Lời giải .





Hình 1 Hình 2

i) Giả sử A, B, C, D nằm trên một đường tròn (Hình 1). BP và DP cắt đường tròn tại E và F. Từ giả thiết suy ra $\overset{\frown}{CE} = \overset{\frown}{AD}, \overset{\frown}{FC} = \overset{\frown}{AB}$. Suy ra BF//AC và DE//AC $\Rightarrow$BFED và BFCA là hình thang cân và P = BE$\cap DF$ nằm trên các đường trung trực cạnh BF, DE, AC$\Rightarrow$PA = PC.

ii) Giả sử PA = PC. Không mất tính tổng quát , ta giả sử P nằm trong miền tam giác ACD và BCD (Hình 2). PB và PD cắt AC tương ứng tại K và L. Ta có $\widehat{AKP} = \widehat{BKC} = \widehat{BAD} = \widehat{CLP}$. Vì PA = PC suy ra $\widehat{APK} = \widehat{CPL}$ $\Rightarrow$K và L đối xứng nhau qua đường trung trực p của AC. Gọi E là điểm đối xứng của D qua p thì E nằm trên BP và ΔAPD đối xứng với ΔCPE qua đường thẳng p $\Rightarrow \widehat{BDC} = \widehat{ADP} = \widehat{BEC}$ nghĩa là B,C, E, D thuộc một đường tròn .Mặt khác A, C, E, D cũng thuộc một đường tròn $\Rightarrow$ABCD nội tiếp trong đường tròn.

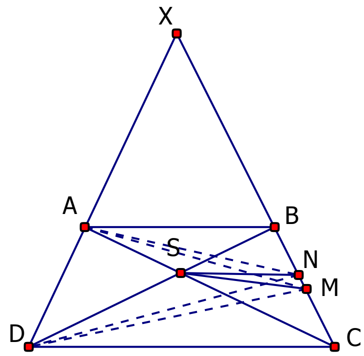
Bài 5)(SMN 2004) Cho đa giác đều n đỉnh $A_1A_2A_3...A_n$. Các đỉnh $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ được xác định như sau:

i) Nếu i = 1 hay i = n – 1 thì B_i là trung điểm cạnh A_iA_{i+1}

ii) Nếu i$\neq$1,i$\neq$n – 1 và S là giao điểm của A_1A_{i+1} với A_nA_i thì B_i là giao điểm của đường phân giác góc $\widehat{A_iSA_{i+1}}$ với A_iA_{i+1}

Chứng minh rằng : $\widehat{A_1B_1A_n} + \widehat{A_1B_2A_n} + ... + \widehat{A_1B_{n-1}A_n} = 180^0$

Lời giải .



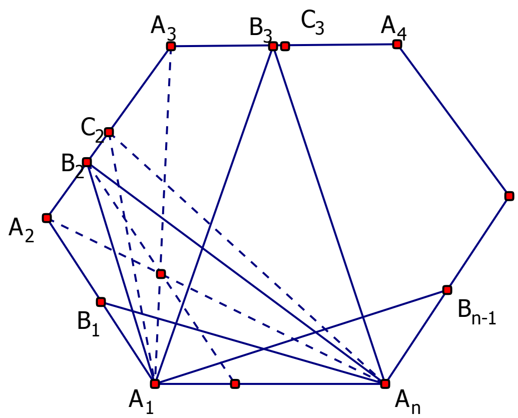
Bổ đề: Cho hình thang cân ABCD với cạnh đáy AB và CD. Đường chéo AC và BD cắt nhau tại S. M là trung điểm cạnh BC, phân giác góc $\widehat{BSC}$ cắt BC tại N thì $\widehat{AMD} = \widehat{AND}$

Chứng minh: Ta chứng minh A,D,N và M nằm trên một đường tròn

Gọi X=AD$\cap$BC. Đặt XA = XB = a, XC =XD= b. SN là phân giác góc $\widehat{BSC}$ ta có

$\frac{XN-a}{b-XN} = \frac{BN}{NC} = \frac{SB}{SC} = \frac{AB}{CD} = \frac{a}{b}$. Suy ra b(XN – a) = a(b – XN)$\Leftrightarrow XN = \frac{2ab}{a+b}$

Ta có XM = $\frac{a+b}{2}$, do đó XM.XN = XA.XD$\Rightarrow$A, D, M, N nằm trên một đường tròn.



Gọi C_i là trung điểm cạnh A_iA_{i+1} , i = 1,2..,n – 1

Theo định nghĩa $C_1 \equiv B_1$ và $C_{n-1} \equiv B_{n-1}$.

Khi đó $A_1A_iA_{i+1}A_n$ là hình thang cân với $A_1A_i // A_{i+1}A_n$, i = 2,…, n – 2 . Theo bổ đề trên $\widehat{A_1B_iA_n} = \widehat{A_1C_iA_n}$ với mọi i.

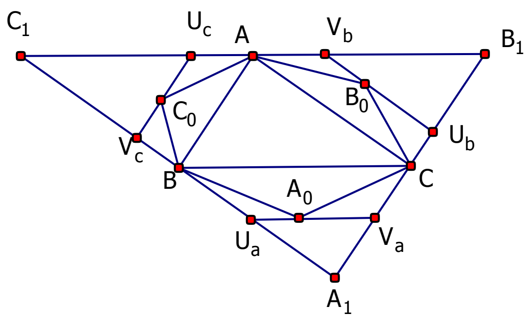
Tổng $\sum_{i=1}^{n-1} \widehat{A_1B_iA_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \widehat{A_1C_iA_n}$.

Trong các tam giác $A_1C_iA_n$ và $A_{n+2-i}C_1A_{n+1-i}$ ta có $\widehat{A_1C_iA_n} = \widehat{A_{n+2-i}C_iA_{n+1-i}}$, $\forall$ i =1,2,..,n–1

Do đó $\sum_{i=1}^{n-1} \widehat{A_1C_iA_n} = \widehat{A_1C_1A_n} + \widehat{A_nC_1A_{n-1}} + \ldots + \widehat{A_3C_1A_2} = \widehat{A_1C_1A_2} = 180^0$

Bài 6) (GBR 2004)Cho P là một đa giác lồi. Chứng minh rằng có một lục giác lồi chứa trong P và chiếm ít nhất 75% diện tích của P.

Lời giải .



Gọi ABC là tam giác có diện tích lớn nhất là S chứa trong P. Vẽ các đường thẳng qua A, B, C lần lượt song song với BC, CA, AB , chúng cắt nhau tạo ra tam giác $A_1B_1C_1$ ($A \in B_1C_1$, $B \in A_1C_1$, $C \in B_1A_1$).

Khi đó mỗi tam giác có đỉnh nằm trong P có diện tích không vượt quá S, toàn thể đa giác lồi P chứa trong $A_1B_1C_1$.

Tiếp theo dựng các đường thẳng bao đóng của P song song với BC, CA, AB và không cắt tam giác ABC. Chúng tạo ra một lục giác $U_aV_aU_bV_bU_cV_c$ chứa trong P với $V_b, U_c \in B_1C_1$, $V_c, U_a \in C_1A_1$, $V_a, U_b \in A_1B_1$. Mỗi đoạn thẳng U_aV_a, U_bV_b, U_cV_c chứa những điểm của P. Chọn các điểm A_0 , B_0 , C_0 trên U_aV_a, U_bV_b, U_cV_c tương ứng. Lục giác lồi $AC_0BA_0CB_0$ chứa trong P, bởi vì P lồi. Ta chứng minh rằng $AC_0BA_0CB_0$ có diện tích ít nhất 3/4 diện tích của P.

Gọi x, y, z là diện tích của tam giác U_aBC, U_bCA, U_cAB tương ứng. Thì $S_1 = S_{AC_0BA_0CB_0}$ = S + x + y + z. Ta lại có $\Delta A_1U_aV_a$ đồng dạng với ΔA_1BC với tỉ đồng dạng $\tau = \frac{S-x}{S}$ $\Rightarrow$ Diện tích $\Delta A_1U_aV_a$ là $\tau^2 S = \frac{(S-x)^2}{S}$. Do đó diện tích tứ giác U_aV_aCB là : $S - \frac{(S-x)^2}{S} = 2x - \frac{x^2}{S}$. Tương tự cho diện tích tứ giác U_bV_bAC và U_cV_cBA. Do đó $S_P \leq S_{U_aV_aU_bV_bU_cV_c} = S + S_{U_aV_aCB} + S_{U_bV_bAC} + S_{U_cV_cBA}$

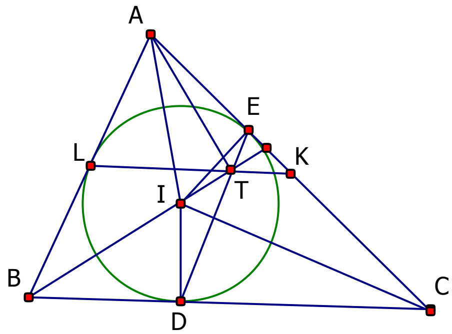
$$= S + 2(x+y+z) - \frac{x^2+y^2+z^2}{S} \leq S + 2(x+y+z) - \frac{(x+y+z)^2}{3S}.$$

Bây giờ $4S_1 - 3S_P \geq S - 2(x+y+z) + \frac{(x+y+z)^2}{S} = \frac{\left(S-(x+y+z)\right)^2}{S} \geq \quad \Rightarrow S_1 \geq \frac{3}{4}S_P$ đpcm

Bài 7) (RUS 2004) Cho tam giác ABC, điểm X thay đổi trên đường thẳng BC sao cho C nằm giữa B và X. Các đường tròn nội tiếp các tam giác ABX và ACX cắt nhau tại P và Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ đi qua một điểm cố định.

Lời giải .

Trước hết ta chứng minh bổ đề: Trong tam giác ABC, K và L là trung điểm cạnh AC, AB tương ứng. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc BC, CA lần lượt tại D và E thì giao điểm của KL và ED nằm trên đường phân giác góc $\widehat{ABC}$



Chứng minh: Đường phân giác l_b của góc $\widehat{ABC}$ cắt DE tại T. Nếu BC = BA thì T$\equiv$K. Giả sử BC$\neq$BA thì tâm I đường tròn nội tiếp tam giác ABC ở giữa B và T và T$\neq$E. Từ ΔBDT và ΔDEC ta có

$\widehat{TIC}=\frac{1}{2}(\widehat{B}+\widehat{C})=\frac{1}{2}\ \beta+\gamma$ suy ra

$\widehat{ITD}=90^0-\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\alpha}{2}=\widehat{IAE}\Rightarrow\widehat{IAE}+\widehat{ITE}=180^0$

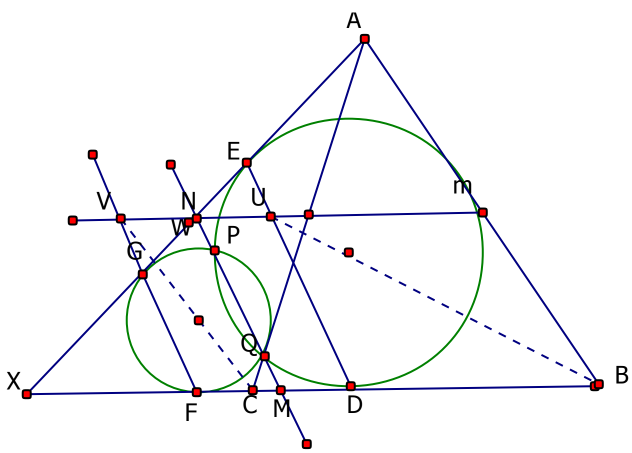
suy ra A, I, T, E nằm trên 1 đường tròn

$\Rightarrow\widehat{ATB}=\widehat{AEI}=90^0$.

Suy ra L là tâm đường tròn nội tiếp ΔATB

Ta có $\widehat{LTB}=\widehat{LBT}=\widehat{TBC}\Rightarrow LT//BC\Rightarrow T\in KL$

Đường tròn nội tiếp ΔABX và ΔACX tiếp xúc BX tại D và F; tiếp xúc với AX tại E và G, do đó ED//GF. Nếu PQ cắt BX và AX lần lượt tại M và N thì do PQ là trục đẳng phương của hai đường tròn suy ra $MD^2=MF^2=MP.MQ\Rightarrow MD=MF$

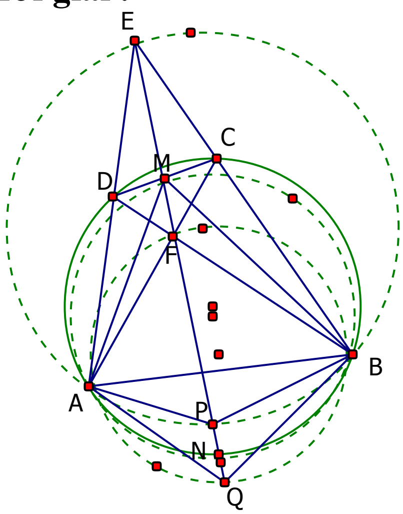


Tương tự NE = NG, suy ra MN//ED//GF và PQ cách đều ED và GF. Trung điểm của AB, AC và AX nằm trên đường thẳng m //BC. Áp dụng bổ đề trên vào ΔABX, đường thẳng DE cắt đường thẳng m tại U thì BU là phân giác Góc $\widehat{ABX}$ suy ra U cố định. .

Tương tự GF cắt đường thẳng m tại V thì CV là phân giác góc $\widehat{ACX}$ suy ra V cố định. Do đó PQ qua trung điểm W của UV nên W cố định.

Bài 8) (SMN 2004) Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong một đường tròn. Đường thẳng AD và BC cắt nhau tại E, với C nằm giữa B và E, đường chéo AC và BD cắt nhau tại F. Điểm M là trung điểm cạnh CD và N$\neq$M là một điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM sao cho $\frac{AN}{BN} = \frac{AM}{BM}$ .Chứng minh E, F và N thẳng hàng.

Lời giải .



P, Q là giao điểm của đường thẳng EF với đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ABF. Ta chứng minh N $\in$ PQ, ở đây ta chứng minh N trùng trung điểm N' của PQ. Từ các đường tròn ngoại tiếp các tứ giác APBE, AQBF và ABCD ta có

$\angle APQ = 180^0 - \angle APE = 180^0 - \angle ABE = \angle ADC$ và

$\angle AQP = \angle AQF = \angle ABF = \angle ACD$ suy ra ΔAPQ $\sim$ ΔADC và ΔAN'P $\sim$ ΔAMD. Chứng minh tương tự ΔBN'P $\sim$ ΔBMC

Suy ra $\frac{AN'}{AM} = \frac{PQ}{DC} = \frac{BN'}{BM}$ tức $\frac{AN'}{BN'} = \frac{AM}{BM}$. Mặt khác

$\angle AN'B = \angle AN'P + \angle PN'B = \angle AMD + \angle BMC = 180^0 - \angle AMB$

$\Rightarrow$ N' nằm trên đường tròn ngoại tiếp ΔAMB.

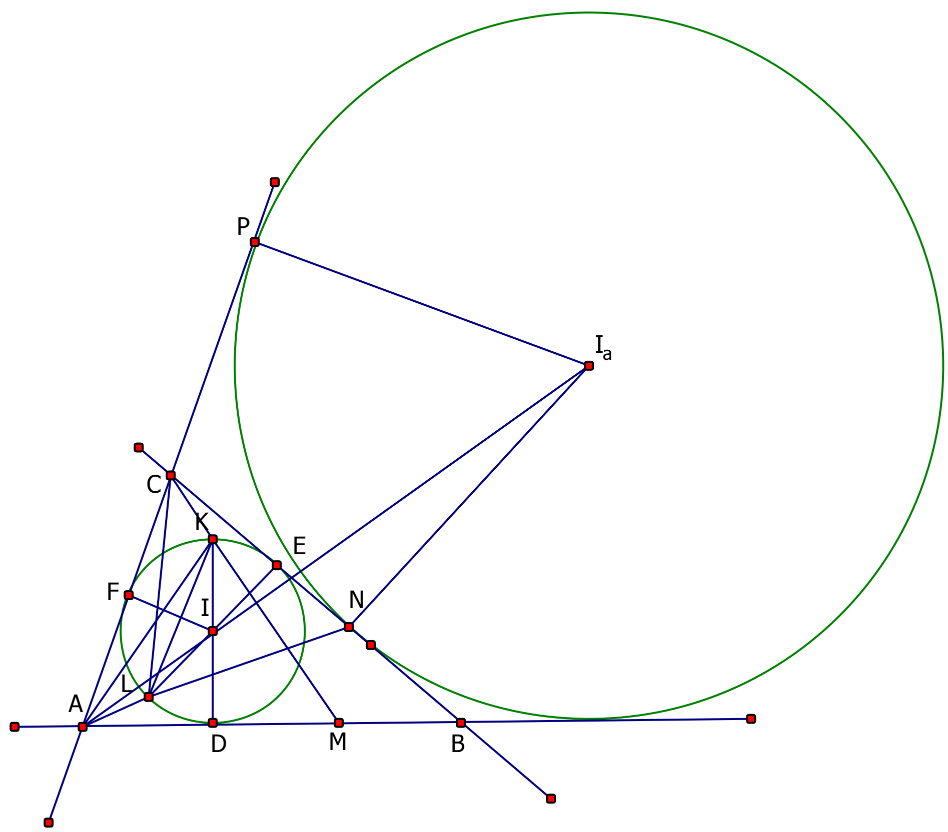
Suy ra N' $\equiv$ N

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC ĐƯỢC ĐỀ NGHỊ TRONG KÌ THI IMO LẦN THỨ 46 TỔ CHỨC TẠI MEXICO NĂM 2005

Bài 1) Trong tam giác ABC thỏa mãn điều kiện AB + BC = 3AC và đường tròn nội tiếp tâm I tiếp xúc cạnh AB và BC lần lượt tại D và E. Gọi K và L tương ứng là điểm đối xứng của D và E qua I. Chứng minh rằng tứ giác ACKL nội tiếp.

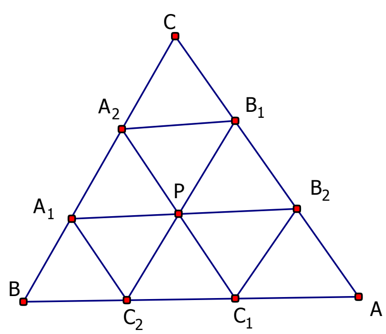
Lời giải .

Gọi F là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với AC và gọi M, N tương ứng là tiếp điểm của các đường tròn bàng tiếp với các cạnh AB và BC. Gọi I_a là tâm đường tròn bàng tiếp góc A và P là tiếp điểm với đường thẳng AC. Ta có $\frac{AI}{IL} = \frac{AI}{IF} = \frac{AI_a}{I_aP} = \frac{AI_a}{I_aN}$ do đó $\Delta AIL \sim \Delta AI_aN$, ở đây L nằm trên AN , tương tự K nằm trên CM. Đặt x = AF , y = CF. Khi đó BD = BE, AD = BM = x và CE = BN = y, từ điều kiện AB + BC = 3 AC cho ta DM = y, EN = x. Bây giờ các tam giác CLN và MKA đồng dạng với đường cao LE và KD thỏa điều kiện DK = LE, DM = CE và AD = EN . Suy ra $\angle AKM = \angle CLN$. Do đó ACKL nội tiếp.



Bài 2) (IMO 2005 - ROM) Chọn sáu điểm trên các cạnh tam giác đều ABC; A_1, A_2 trên BC; B_1, B_2 trên AC; C_1, C_2 trên AB sao cho các điểm đó là đỉnh của một lục giác lồi $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ với cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1B_2, B_1C_2 và C_1A_2 đồng qui.

Lời giải .



P là đỉnh thứ tư của hình thoi $C_2A_1A_2P$. Khi đó ΔC_2PC_1 đều. Ta chứng minh $B_1B_2C_1P$ là hình thoi. Thật vậy ΔPB_1A_2 đều và

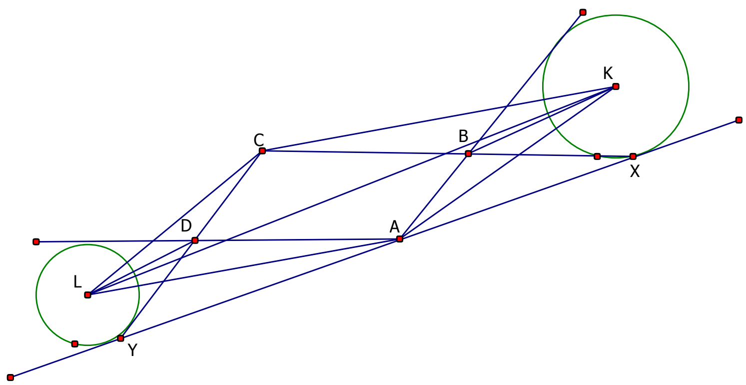
$$(\widehat{C_2A_1, C_1B_2}) = \widehat{A_2PB_1} = 60^0$$

$\Delta AC_1B_2 = \Delta BA_1C_2 \Rightarrow AC_1 = BA_1$. Tương tự $BA_1 = CB_1$. Do đó tam giác $A_1B_1C_1$ đều. Bây giờ từ $B_1B_2 = B_2C_1$ suy ra A_1B_2 là phân giác góc $\widehat{C_1A_1B_1}$.

Tương tự B_1C_2 và C_1A_2 phân các góc $\widehat{A_1B_1C_1}$ và $\widehat{B_1C_1A_1}$; do đó A_1B_2, B_1C_2 và C_1A_2 đồng qui tại tâm đường tròn nội tiếp $\Delta A_1B_1C_1$, tức đồng qui tại tâm của tam giác đều ABC.

Bài 3)(UKR 2005) Cho hình bình hành ABCD. Một đường thẳng d thay đổi qua đỉnh A và cắt đường thẳng BC, DC tương ứng tại X và Y. Gọi K và L là tâm đường tròn bàng tiếp ΔABX và ΔADY tiếp xúc với cạnh BX và DY tương ứng. Chứng minh rằng giá trị góc $\widehat{KCL}$ không phụ thuộc vào vị trí đường thẳng d.

Lời giải .



$\widehat{ADL} = \widehat{KBA} = 180^0 - \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ và $\widehat{ALD} = \frac{1}{2}\widehat{AYD} = \widehat{KAB}$ suy ra $\Delta ABK \sim \Delta LDA$

suy ra $\frac{BK}{BC} = \frac{BK}{AD} = \frac{AB}{DL} = \frac{DC}{DL}$

mà

$\widehat{LDC} = \widehat{CBK} \Rightarrow \Delta LDC \sim \Delta CBK$

Do đó $\widehat{KCL} = 360^0 - \widehat{BCD} - (\widehat{LDC} + \widehat{KCB}$ $= 360^0 - \widehat{BCD} - (\widehat{CKB} + \widehat{KCB}$

$= 180^0 - \widehat{CBK}$ hằng số

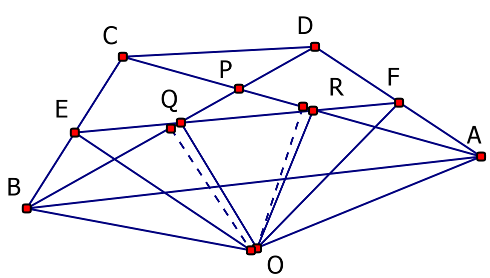
Bài 4) (IMO 2005- POL) Cho ABCD là tứ giác lồi với BC = AD và BC không song song AD. Lấy E, F bất kì tương ứng trên cạnh BC và AD sao cho BE = DF. Gọi $AC \cap BD$ = P, $BD \cap EF$ = Q, $EF \cap AC$ = R. Xét các tam giác PQR khi E, F thay đổi. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR qua một điểm cố định khác P.

Lời giải .

Gọi O là giao điểm các đường trung trực cạnh AC và BD. Phép quay tâm O với góc quay $\varphi = \widehat{DOB}$ biến D, F, A thành các điểm B, E ,C tương ứng. Ta có

OE = OF và $\widehat{OFE} = \widehat{OAC} = 90^0 - \frac{\varphi}{2}$ suy ra A, F, R, O nằm trên một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{ORP} = 180^0 - \widehat{OFA}$

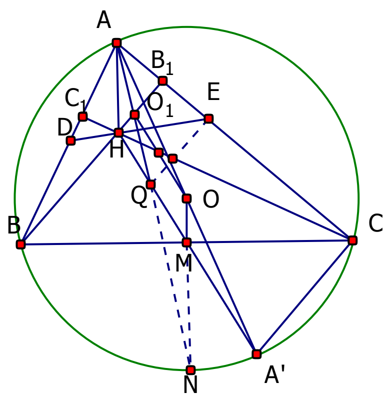


Tương tự B, E, Q, O nằm trên một đường tròn và $\widehat{OQP} = 180^0 - \widehat{OEB} = \widehat{OEC} = \widehat{OFA}$. Từ đó $\widehat{ORP} = 180^0 - \widehat{OQP}$ tức là điểm O nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR. Suy ra điểm O là điểm cần tìm.

Bài 5) (ROM 2005) Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn và AB $\neq$ AC. H là trực tâm và M là trung điểm của BC. Điểm D trên AB và E trên AC sao cho

AE = AD và D, H, E thẳng hàng. Chứng minh rằng HM song song với đường thẳng nối hai tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ADE.

Lời giải 1.



Gọi O, O_1 lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và ΔADE tương ứng. Ta chứng minh $HM // OO_1$. Gọi AA' là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Gọi B_1 là chân đường cao kẻ từ B thì HE là phân giác góc $\widehat{CHB_1}$.

$\Delta COM \sim \Delta CHB_1 (\widehat{CHB} = \widehat{COM} = \widehat{A})$. Ta có $\frac{CE}{EB_1} = \frac{CH}{HB_1} = \frac{CO}{OM} = \frac{2CO}{AH} = \frac{AA'}{AH}$. Nếu Q là giao điểm phân giác góc $\widehat{A'AH}$ với HA' ta có $\frac{CE}{EB_1} = \frac{A'Q}{QH} = \frac{AA'}{AH}$

Vì A'C $\perp$ AC và $HB_1 \perp AC \Rightarrow$ QE $\perp$ AC. Tương tự QD $\perp$ AB, do đó AQ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp ΔADE và O_1 là trung điểm của AQ. Do đó OO_1 là đường trung bình của $\Delta AQA' \Rightarrow OO_1 // HM$.

Lời giải 2.

Ta có AA' = 2AO. Ta chứng minh AQ = $2AO_1$.

Từ giả thiết đã cho suy ra $\widehat{ADE} = \widehat{AED} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$

Định lí sin trong ΔDAH và ΔEAH có DE = DH + HE = $\frac{AH.\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}} + \frac{AH.\cos\lambda}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

Từ AH = 2OM = 2R$\cos\alpha$ ta có $AO_1 = \frac{DE}{2\sin\alpha} = \frac{AH(\cos\beta + \cos\gamma)}{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}$

$$= \frac{2R\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}{\sin\alpha.\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Gọi N là giao điểm của AQ với đương tròn ngoại tiếp khi đó

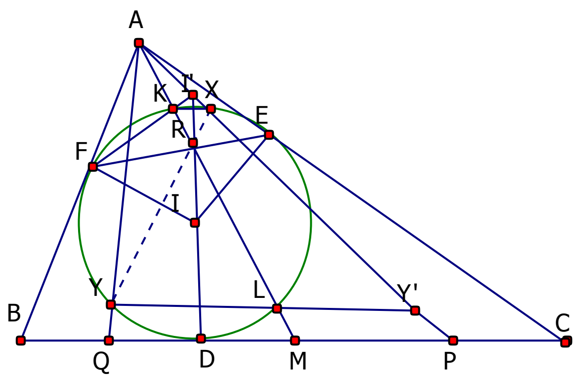
$\widehat{NAO} = \left|\frac{\beta-\gamma}{2}\right| \Rightarrow AN = 2R\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$. Ta có $\Delta QAH \sim \Delta QNM$

(NM = R – OM) suy ra $\frac{QA}{QN} = \frac{AH}{NM} \Rightarrow \frac{QA}{QN+QA} = \frac{QH}{NM+AH} \Rightarrow QA = \frac{AH.NA}{NM+AH}$

QA = $\frac{2R\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)2\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2R\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ = $2AO_1$

Bài 6)(RUS 2005) Đường trung tuyến AM của tam giác ABC cắt đường tròn nội tiếp tâm I của tam giác ABC tại K và L. Các đường thẳng qua K và L song song với BC cắt đường tròn (I) lần nửa tại X và Y. Đường thẳng AX và AY cắt BC tại P và Q. Chứng minh BP = CQ.

Lời giải .



Gọi D, E, F là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh BC, CA, AB tương ứng.. Gọi Y'=AX$\cap$LY, R = FE$\cap$AL thì (A,R,K,L) = – 1

Suy ra $\frac{LA}{LR} = \frac{KA}{KR}$

do đó $\frac{KX}{LY'} = \frac{KA}{AL} = \frac{KR}{LR} = \frac{KX}{LY_1} \Rightarrow LY = LY_1$,

với Y_1=XR$\cap$LY. Ta chứng minh LY' = LY (từ đó PM = MQ tức là CP = QB) tương đương với chỉ ra XY qua R. Ta có XKYL là hình thang cân

Ta chứng minh R nằm trên ID.

Khi AM là trung tuyến thì ΔARB và ΔARC có diện tích bằng nhau và khi $\angle(RF, AB) = \angle(RE, AC)$ chúng ta có 1 = $\frac{S_{ABR}}{S_{ACR}} = \frac{AB.FR}{AC.ER}$ do đó $\frac{AB}{AC} = \frac{ER}{FR}$. Gọi I' là đường thẳng qua F song song với IE cắt IR thì $\frac{FI'}{EI} = \frac{RF}{RE} = \frac{AC}{AB}$ và $\angle I'FI = \angle BAC$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) suy ra ΔABC$\sim$ ΔFII'

$\Rightarrow \angle FII' = \angle ABC \Rightarrow \angle FID = 180^0 - \angle ABC$ suy ra R, I, D thẳng hàng.

Bài 7) (KOR 2005) Cho tam giác ABC các góc nhọn. Gọi D, E, F là chân đường cao từ A, B, C tương ứng đến BC, AC, AB. Gọi P, Q, R là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên EF, FD, DE tương ứng. Chứng minh rằng: p(ABC).p(PQR) ≥ $(p(DEF))^2$, trong đó p(T) là chu vi tam giác T.

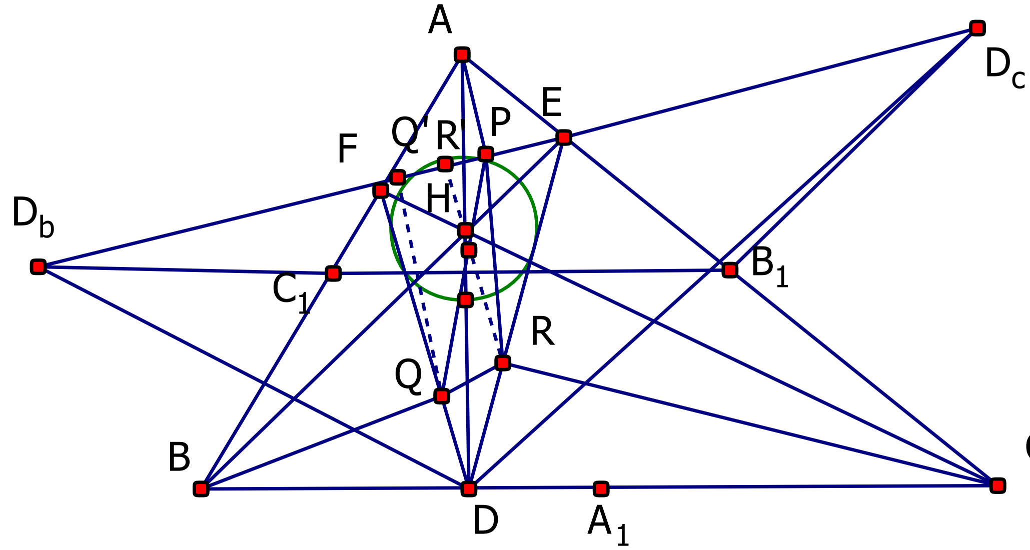
Lời giải .

Ta chứng minh p(ABC)$\geq$2p(DEF) và p(PQR)$\geq \frac{1}{2}$p(DEF).

Gọi D_b, D_c lần lượt là điểm đối xứng của D qua đường thẳng AB, AC và A_1, B_1, C_1 là trung điểm của BC, CA, AB tương ứng.

p(DEF) = $D_bF + FE + ED_c = D_bD_c \leq D_bC_1 + C_1B_1 + B_1D_c = \frac{1}{2}$(AB+BC+CA)

$= \frac{1}{2}$p(ABC)



Vậy p(ABC)$\geq$2p(DEF) (1). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P, Q, R là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác DEF với các cạnh của nó.

Đặt FQ = ER = x, DR = FP = y, DQ = EP = z, $\delta, \varepsilon, \varphi$ và các góc của tam giác DEF với đỉnh D, E, F. Gọi Q', R' là hình chiếu của Q, R lên EF thì ta có:

QR$\geq$Q'R' = E F – FQ' – R'E = E F – x($\cos\varphi + \cos\varepsilon$) .

Tương tự PQ $\geq DE - z(\cos\delta + \cos\varepsilon)$ và PR$\geq FD - y(\cos\delta + \cos\varphi)$

Suy ra p(PQR)$\geq$p(DEF) –x($\cos\varphi + \cos\varepsilon$) $-y(\cos\delta + \cos\varphi)$ $-z(\cos\delta + \cos\varepsilon)$

Không mất tính tổng quát giả sử $x \leq y \leq z$ ta có DE$\leq FD \leq FE$ tương ứng $\cos\varphi + \cos\varepsilon \geq \cos\delta + \cos\varphi \geq \cos\delta + \cos\varepsilon$. Theo BĐT Chebychevs ta có

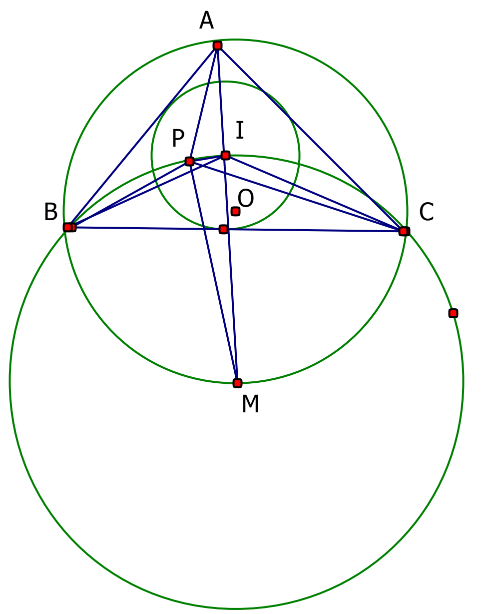
$$p(PQR) \geq p(DEF) - \frac{2}{3}(x+y+z)(\cos\varepsilon + \cos\varphi + \cos\delta) \geq p(DEF) - (x+y+z) = \frac{1}{2}p(DEF)$$

Vì x + y + z = $\frac{1}{2}$p(DE F) và $\cos\varepsilon + \cos\varphi + \cos\delta \leq \frac{3}{2}$

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC ĐƯỢC ĐỀ NGHỊ TRONG KÌ THI IMO LẦN THỨ 47 TỔ CHỨC TẠI SLOVENIA NĂM 2006

Bài 1) (IMO 2006, KOR) ABC là tam giác ngoại tiếp đường tròn tâm I. Một điểm P nằm trong tam giác thỏa mãn $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$. Chứng minh rằng AP$\geq$AI và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P$\equiv$I .

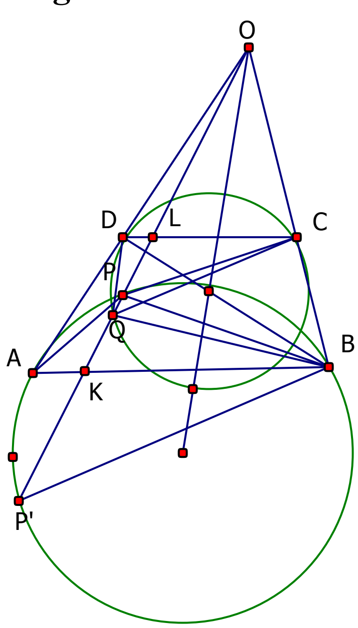
Lời giải .



Kí hiệu : $\angle A = \alpha, \angle B = \beta, \angle C = \gamma$
Từ điều kiện bài toán suy ra:
$\angle PBC + \angle PCB = 90^0 - \dfrac{\alpha}{2}$
tức là $\angle BPC = 90^0 + \dfrac{\alpha}{2} = \angle BIC$. Do đó điểm P nằm trên đường tròn ω ngoại tiếp tam giác IBC. Ta biết tâm M của đường tròn ω là giao điểm của AI với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do đó :
AP $\geq$ AM – MP = AM – MI = AI
Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi P $\equiv$ I

Bài 2) (UKR 2006) ABCD là hình thang với hai cạnh song song AB>CD. Hai điểm K và L nằm trên các đoạn thẳng AB và CD theo thứ tự thỏa mãn $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{DL}{LC}$. Giả sử rằng có các điểm P và Q nằm trên đoạn thẳng KL thỏa mãn $\angle APB = \angle BCD$ và $\angle CQD = \angle ABC$. Chứng minh rằng các điểm P, Q, B, C nằm trên một đường tròn.

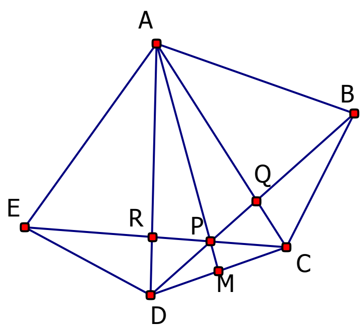
Lời giải.



Từ hệ thức $\dfrac{AK}{KB} = \dfrac{DL}{LC} \Rightarrow$ AD, BC, KL đồng quy tại O.
Do đó $\angle APB = 180^0 - \angle ABC$ và $\angle DQC = 180^0 - \angle BCD$
Đường thẳng BC tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp các tam giác APB và DQC. Hai đường tròn (APB) và (DQC) vị tự với nhau qua phép vị tự tâm O. Đường thẳng OP cắt đường tròn (APB) tại điểm P' khác P, ta có $\angle PQC = \angle PP'B = \angle PBC$
Suy ra P, Q, B, C nằm trên một đường tròn.

Bài 3)(USA 2006) ABCDE là một ngũ giác lồi thỏa mãn $\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE$ và $\angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$. Các đường chéo BD và CE cắt nhau tại P. Chứng minh rằng đường thẳng AP đi qua trung điểm của CD.

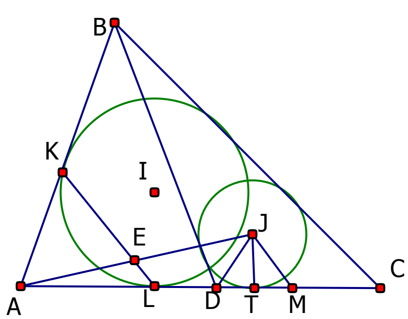
Lời giải.



Đường chéo AC và BD cắt nhau tại Q và AD cắt EC tại R. Tứ giác ABCD và ACDE đồng dạng.
Do đó $\frac{AQ}{QC} = \frac{AR}{RD}$.
Nếu AP cắt CD tại M thì theo định lí Ceva cho ta $\frac{CM}{MD} = \frac{CQ}{QA}.\frac{AR}{RD} = 1$ suy ra M là trung điểm CD

Bài 4) (RUS 2006) Một điểm D được chọn trên cạnh AC của tam giác ABC thỏa mãn $\widehat{C} < \widehat{A} < 90^0$ sao cho BD = BA. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc các cạnh AB, AC tại các điểm K, L tương ứng. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác BCD. Chứng minh rằng đường thẳng KL cắt đoạn thẳng AJ tại trung điểm của nó.

Lời giải .



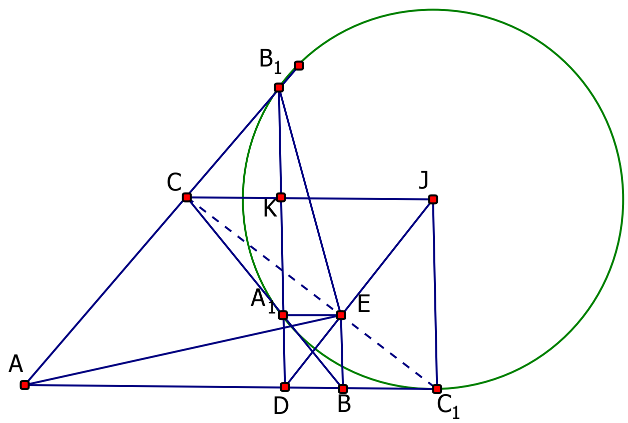
M là điểm trên cạnh AC sao cho JM//KL.
Ta chứng minh AM = 2AL.
Đặt $\widehat{BDA} = \alpha$, ta có $\widehat{JDM} = 90^0 - \frac{\alpha}{2} = \widehat{KLA} = \widehat{JMD}$.
Do đó JM = JD và điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp của tam giác BCD với CD là trung điểm T của MD. Từ đó
DM = 2DT = BD + CD – BC = AB – BC + CD
Suy ra AM = AD + DM = AC + AB – BC = 2AL

Bài 5) (GRE 2006) Cho tam giác ABC. Đường tròn bàng tiếp góc A có tâm J tiếp xúc các đường thẳng BC, CA và AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Giả sử các đường thẳng A_1B_1 và AB vuông góc với nhau và cắt nhau tại D. Gọi E là hình chiếu vuông góc của C_1 lên DJ. Tính các góc $\widehat{BEA_1}$ và $\widehat{AEB_1}$.

Lời giải 1.

A_1B_1 cắt CJ tại K thì JK//C_1D và JK = C_1D , ta có $\frac{DC_1}{C_1J} = \frac{JK}{JB_1} = \frac{JB_1}{JC} = \frac{C_1J}{JC}$

do đó các tam giác vuông DC_1J và C_1JC đồng dạng , suy ra $CC_1 \perp DJ \Rightarrow E \in CC_1$.
Các điểm A_1, B_1 và E nằm trên đường tròn đường kính CJ, do đó
$\widehat{DBA_1} = \widehat{A_1CJ} = \widehat{A_1ED}$ $\Rightarrow$ BEA_1D nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{A_1EB} = 90^0$.
Từ đó $ADEB_1$ nội tiếp đường tròn vì $\widehat{EB_1A} = \widehat{EJC} = \widehat{EDC_1} \Rightarrow \widehat{AEB_1} = 90^0$

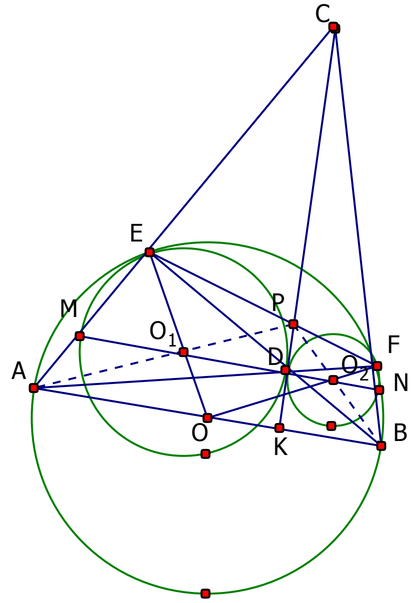


Lời giải 2.

Các đường thẳng JA_1, JB_1, JC_1 là tiếp tuyến các đường tròn đường kính A_1B, AB_1, C_1D . Do đó $JA_1^2 = JB_1^2 = JC_1^2 = JD.JE$ suy ra E nằm trên hai đường tròn đường kính A_1B và $AB_1 \Rightarrow \angle AEB_1 = 90^0$ và $\angle A_1EB = 90^0$.

Bài 6) (BRA 2006) Hai đường tròn (W_1) và (W_2) có các tâm O_1 và O_2 và tiếp xúc ngoài với nhau tại D, đồng thời đều tiếp xúc trong với một đường tròn (W) tại các điểm E và F theo thứ tự đó. Gọi t là tiếp tuyến chung của (W_1)và (W_2) tại D. Gọi AB là đường kính của (W) vuông góc với t, sao cho A, E và O_1 nằm về cùng một phía với t. Chứng minh rằng các đường thẳng AO_1, BO_2 , FE và t đồng quy.

Lời giải .



Phép vị tự tâm E biến đường tròn (W_1) thành đường tròn (W), biến D thành B nên $D \in EB$, tương tự $D \in FA$. Gọi C = AE $\cap$ BF. Đường thẳng BE và CF là đường cao của tam giác ABC do đó D là trực tâm của ΔABC và C nằm trên đường thẳng t . Đường thẳng qua D song song với AB cắt AC và BC tại M và N thì O_1 và O_2 là trung điểm của DM và DN tương ứng.

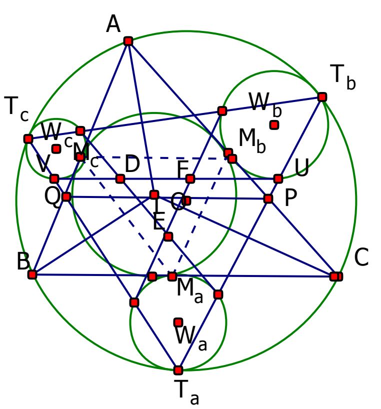
Nếu CD và FE cắt nhau tại P thì ta chứng minh A, O_1, P thẳng hàng (tương tự B, O_2, P thẳng hàng). Theo định lí Mênêlauyt đảo trong tam giác CDM ta cần chứng minh

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}}.\frac{\overline{O_1M}}{\overline{O_1D}}.\frac{\overline{PD}}{\overline{PC}} = 1 \text{ hay } \frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = -\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}} \quad (1)$$

+ Vì DM//AB nên $\frac{\overline{AC}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{KC}}{\overline{KD}}$(2). Từ (1) và (2) ta cần chứng minh $\frac{\overline{KC}}{\overline{KD}} = -\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}$ hay C, D, P, K là hàng điểm điều hòa. Theo tính chất tứ giác toàn phần thì (CDPK) = -1

Bài 7)(SVK 2006) Trong tam giác ABC, gọi M_a, M_b, M_c lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và T_a, T_b, T_c là điểm chính giữa các cung BC, CA và AB không chứa các đỉnh A, B, C của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Với $i \in \{a, b, c\}$ gọi W_i là tâm đường tròn đường kính M_iT_i . Gọi p_i là tiếp tuyến chung ngoài của W_i và W_k ($\{i, j, k\} = \{a, b, c\}$) sao cho W_i nằm khác phía với W_j và W_k so với đường thẳng p_i . Chứng minh rằng các đường thẳng p_a, p_b, p_c tạo thành một tam giác đồng dạng với tam giác ABC và tính tỉ số đồng dạng đó.

Lời giải .



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.Ta biết T_aT_b, T_aT_c lần lượt là đường trung trực đoạn IC và IB. T_aT_b cắt AC tại P và cắt đường tròn (W_b) tại U, T_aT_c cắt AB tại Q và cắt đường tròn (W_c) tại V. Ta có $\widehat{BIQ} = \widehat{IBQ} = \widehat{IBC}$ do đó IQ//BC tương tự IP//BC . Do đó PQ là đường thẳng qua I song song BC .

Phép vị tự tâm T_b biến đường tròn (W_b) thành đường tròn (W) ngoại tiếp tam giác ABC nên biến tiếp tuyến t của (W_b) tại U thành tiếp tuyến của (W) tại T_a song song với BC , suy ra t//BC.

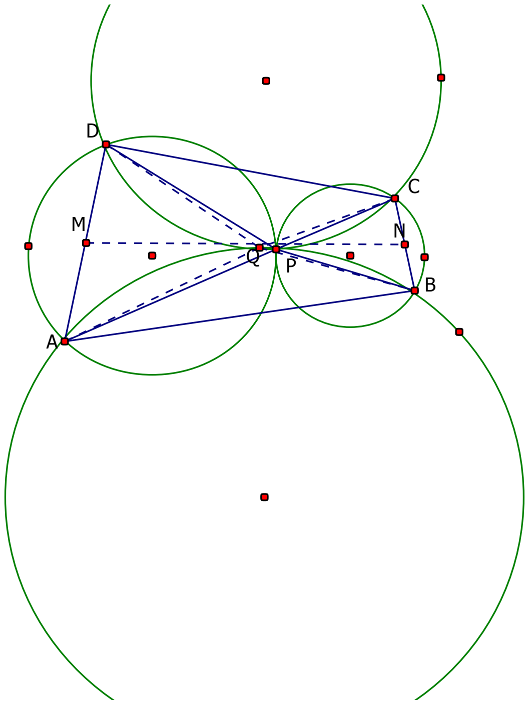
Đường thẳng t cắt AC tại X, khi đó XU = XM_b và $\widehat{PUM_b} = 90^0$, X là trung điểm của PM_b. Tương tự tiếp tuyến của (W_c) tại V cắt QM_c tại trung điểm Y của QM_c .Nhưng khi đó XY//PQ//M_bM_c , 4 điểm U, X, Y, V thẳng hàng. Do đó t trùng với tiếp tuyến p_a. Ở đây p_a là đường thẳng nằm giữa I và M_bM_c và song song cách đều I và M_bM_c .Tương tự cho p_b và p_c

Do đó 3 đường thẳng này cắt nhau tạo thành tam giác đồng dạng vị tự với tam giác $M_aM_bM_c$ với tâm I tỉ số 1/2 do đó đồng dạng với tam giác ABC với tỉ số 1/4

Bài 8)(POL 2006) Cho tứ giác lồi ABCD. Một đường tròn đi qua hai điểm A và D và một đường tròn đi qua 2 điểm B và C, tiếp xúc ngoài với nhau tại một điểm P nằm trong tứ giác . Giả sử rằng $\widehat{PAB} + \widehat{PDC} \le 90^0$ và $\widehat{PBA} + \widehat{PCD} \le 90^0$.

Chứng minh rằng : AB + CD $\ge$ BC + AD

Lời giải .



Bổ đề: X là một điểm bất kì trong một tứ giác lồi. Đường tròn (ADX) và (BCX) tiếp xúc nhau tại X nếu và chỉ nếu $\widehat{ADX}+\widehat{BCX}=\widehat{AXB}$

Chứng minh:

+Nếu (ADX) tiếp xúc (BCX): Qua X vẽ tiếp tuyến chung cắt AB tại I , ta có

$\widehat{AXB}=\widehat{AXI}+\widehat{IXB}=\widehat{ADX}+\widehat{BCX}$

+Ngược lại: Nếu $\widehat{ADX}+\widehat{BCX}=\widehat{AXB}$. Vẽ tiếp tuyến t tại X với đường tròn (ADX) cắt AB tại I. Ta có $\widehat{ADX}=\widehat{AXI}$, nên từ giả thiết suy ra $\widehat{IXB}=\widehat{BCX}$ $\Rightarrow$ IX là tiếp tuyến của đường tròn (BCX). Vậy hai đường tròn tiếp xúc nhau tại X

Gọi Q là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (ABP) và (CDP) (Giả sử $Q\neq P$). Từ điều kiện bài toán thì Q nằm bên trong tứ giác ABCD (khi $\widehat{BCP}+\widehat{BAP}<180^0$, C nằm ngoài đường tròn ngoại tiếp của ΔAPB, giống như trường hợp của D)

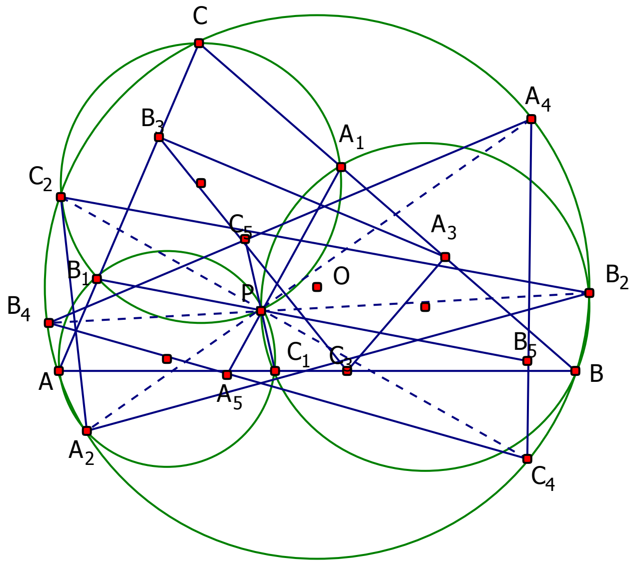
+ Nếu Q nằm trong tam giác APD (trường hợp khác tương tự):

$\widehat{BQC}=\widehat{BQP}+\widehat{PQC}=\widehat{BAP}+\widehat{CDP}\le 90^0$, tương tự $\widehat{AQD}\le 90^0$. Do đó $\widehat{ADQ}+\widehat{BCQ}=\widehat{ADP}+\widehat{BCP}=\widehat{APB}=\widehat{AQB}$. Từ đó đường tròn (ADQ) và (BCQ) tiếp xúc nhau tại Q. Do đó bên trong của nữa đường tròn đường kính AD và BC là rời nhau. Và nếu M, N là trung điểm của AD và BC tương ứng, ta có $2MN\ge AD+BC$. Ta lại có $2MN\le AB+CD$ vì $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{NM}$.

Suy ra AB + CD $\ge$BC + AD.

Bài 9)(RUS 2006) Các điểm A_1, B_1 và C_1 được chọn trên các cạnh BC, CA và AB của tam giác ABC, theo thứ tự. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AB_1C_1 , BC_1A_1 và CA_1B_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC một lần nữa tại các điểm A_2, B_2 và C_2 , theo thứ tự($A_2\neq A$, $B_2\neq B$, $C_2\neq C$). Các điểm A_3, B_3 và C_3 là các điểm đối xứng với các điểm A_1, B_1 và C_1 qua trung điểm các cạnh BC, CA và AB , theo thứ tự. Chứng minh rằng các tam giác $A_2B_2C_2$ và $A_3B_3C_3$ đồng dạng với nhau

Lời giải .



Ta dùng góc định hướng modulo 180^0 . Góc định hướng giữa hai đường thẳng a, b kí hiệu (a,b) là góc quay ngược chiều kim đồng hồ từ a đến b, chẳng hạn $\angle ABC$ ta viết (BA,BC) . Ta biết rằng các đường tròn AB_1C_1 , BC_1A_1 và CA_1B_1 có một điểm chung ta gọi là P. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chú ý $\angle PB_1C = \angle PC_1A = \angle PA_1B = \varphi$. Các đường thẳng A_2P, B_2P, C_2P cắt đường tròn ABC lần nữa tại A_4, B_4, C_4 tương ứng. Khi đó $\angle A_4A_2A = \angle PA_2A = \angle PC_1A = \varphi$ và ta được $\angle A_4OA = 2\varphi$; ΔABC là ảnh của Δ $A_4B_4C_4$ qua phép quay $\Re$ tâm O , góc quay 2φ .

Do đó $(AB_4, PC_1) = \angle B_4AB + \angle AC_1P = \varphi - \varphi = 0$ suy ra $AB_4 // PC_1$. Gọi C_5 là giao điểm của PC_1 với A_4B_4 , định nghĩa A_5, B_5 tương tự. Do $\angle B_4C_5P = \angle A_4B_4A = \varphi \Rightarrow AB_4C_5C_1$ là hình thang cân với $BC_3 = AC_1 = B_4C_5$. Tương tự $AC_3 = A_4C_5$ suy ra C_3 là ảnh của C_5 qua phép quay $\Re$. Tương tự ta được B_3 là ảnh của B_5 và A_3 là ảnh của A_5 qua phép quay $\Re$. Do đó $\Delta A_3B_3C_3 \cong \Delta A_5B_5C_5$. Ở đây ta chứng minh rằng $\Delta A_5B_5C_5 \sim \Delta A_2B_2C_2$. Ta có $\angle A_4B_5P = \angle B_4C_5P$ dẫn đến P nằm trên đường tròn $A_4B_5C_5$. Một cách tương tự, P nằm trên đường tròn $C_4A_5B_5$. Do đó

$$\angle A_2B_2C_2 = \angle A_2B_2B_4 + \angle B_4B_2C_2 = \angle A_2A_4B_4 + \angle B_4C_4C_2 = \angle PA_4C_5 + \angle A_4C_4P = \angle PB_5C_5 + \angle A_5B_5P = \angle A_5B_5C_5$$

Và tương tự cho các góc còn lại . ta được điều cần chứng minh.

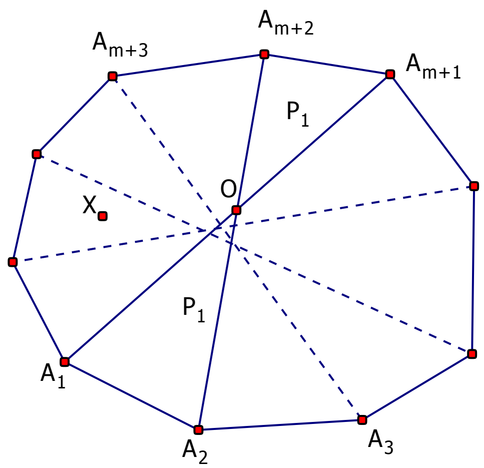
Bài 10) (SER 2006, IMO) Gán cho mỗi cạnh b của đa giác lồi P giá trị diện tích lớn nhất của một tam giác có b là một cạnh và nằm trong P. Chứng minh rằng tổng tất cả các số được gán cho các cạnh của P ít nhất là lớn hơn hai lần diện tích của P.

Lời giải.

Gọi S_i là diện tích gán cho cạnh A_iA_{i+1} của đa giác lồi $P = A_1\ldots.A_n$ có diện tích S. Chúng ta bắt đầu bằng cách chứng minh mệnh đề.

Bổ đề: Ít nhất một trong các diện tích S_1, S_2, …., S_n không nhỏ hơn 2S/n.

Chứng minh: Ta chỉ ra rằng mệnh đề đúng với n chẵn. Trường hợp n lẻ sẽ xem như trường hợp suy biến của 2n- giác $A_1A'_1\ldots A_nA'_n$, ở đây A'_i là trung điểm của A_iA_{i+1} .



Với n = 2m. Ở đây i = 1, 2, …, m, kí hiệu T_i là diện tích của miền P_i chứa cạnh đa giác lồi giới hạn bởi các đường chéo A_iA_{m+i} , $A_{i+1}A_{m+i+1}$ và cạnh $A_iA_{i+1}, A_{m+i}A_{m+i+1}$. Chúng ta chú ý miền P_i bị chứa trong toàn thể đa giác lồi. Nếu X là một điểm bất kì bên trong đa giác lồi. Không mất tính tổng quát, giả sử X nằm bên trái tia A_1A_{m+1} thì X nằm bên phải tia $A_{m+1}A_1$, do đó tồn tại k để X nằm bên trái tia A_kA_{k+m} và nằm bên phải tia $A_{k+1}A_{k+m+1}$, tức là $X \in P_k$ .Vì $T_1 + T_2 + \ldots + T_m \geq S$ nên có ít nhất một t_i không nhỏ hơn $\frac{2S}{n}$, giả sử $T_1 \geq \frac{2S}{n}$.

Gọi O là giao điểm của A_1A_{m+1} và A_2A_{m+2} và không mất tính tổng quát ta giả sử $S_{AA_2O} \geq S_{A_{m+1}A_{m+2}O}$ và $A_1O \geq OA_{m+1}$ thì ta có:

$S_1 \geq S_{A_1A_2A_{m+2}} = S_{A_1A_2O} + S_{A_1A_{m+2}O} \geq S_{A_1A_2O} + S_{A_{m+1}A_{m+2}O} = T_1 \geq \frac{2S}{n}$. Bổ đề được chứng minh.

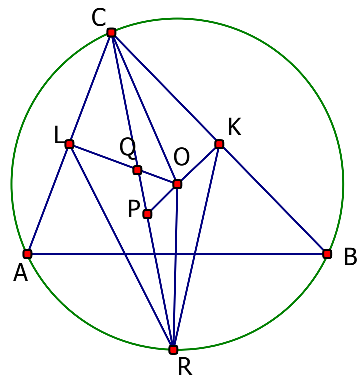
Dùng phản chứng. Nếu ngược lại tức $\sum \frac{S_i}{S} < 2$ ta có thể chọn số hữu tỉ $q_i = \frac{2m_i}{N}$ với N = $m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ sao cho $q_i > \frac{S_i}{S}$. Ở đây chú ý đến đa giác lồi suy biến thành N-giác lồi chia cạnh A_iA_{i+1} thành m_i đoạn bằng nhau với mỗi i.

Ứng dụng bổ đề ta có $\frac{S_i}{m_i} \geq \frac{2S}{N}$ tức là $\frac{S_i}{S} \geq q_i$ với mọi i, mâu thuẫn. Vậy $\sum_{i=1}^{n} S_i \geq 2S$, dấu đẳng thức xảy ra nếu và chỉ nếu đa giác lồi P có tâm đối xứng.

CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC ĐƯỢC ĐỀ NGHỊ TRONG KÌ THI IMO LẦN 48 TỔ CHỨC TẠI VIỆT NAM NĂM 2007

Bài 1) (IMO 2007,CZE) Trong một tam giác ABC, đường phân giác của góc $\widehat{BCA}$ cắt đường tròn ngoại tiếp lần nữa tại R, cắt đường trung trực cạnh BC tại P, cắt đường trung trực cạnh AC tại Q.Ở đây trung điểm của cạnh BC là K, trung điểm cạnh AC là L. Chứng minh rằng các tam giác RPK và RQL có diện tích bằng nhau.

Lời giải.



O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Ta có $\widehat{CPK} = \widehat{CQL}$.

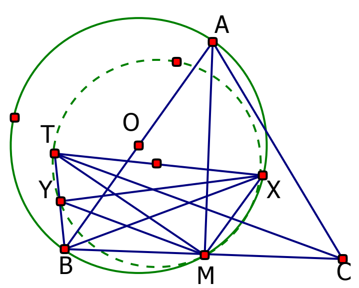
Do đó $\dfrac{S_{RPK}}{S_{RQL}} = \dfrac{RP.PK}{RQ.QL} \Rightarrow \Delta PKC \sim \Delta QLC \Rightarrow \dfrac{PK}{QL} = \dfrac{PC}{QC}$.

Khi đó ΔROC cân và $\widehat{OPR} = \widehat{OQC} \Rightarrow \Delta ROQ \sim \Delta COP$

và RQ = PC . Do đó $\dfrac{S_{RPK}}{S_{RQL}} = 1$

Bài 2)(CAN 2007) Cho tam giác cân ABC, AB = AC. Gọi M là trung điểm cạnh BC. X là điểm bất kì trên cung nhỏ MA của đường tròn ngoại tiếp ΔABM. Gọi T là điểm trong miền góc $\widehat{BMA}$ sao cho $\widehat{TMX} = 90^0$ và TX = BX. Chứng minh rằng $\widehat{MTB} - \widehat{CTM}$ không phụ thuộc vào X.

Lời giải.



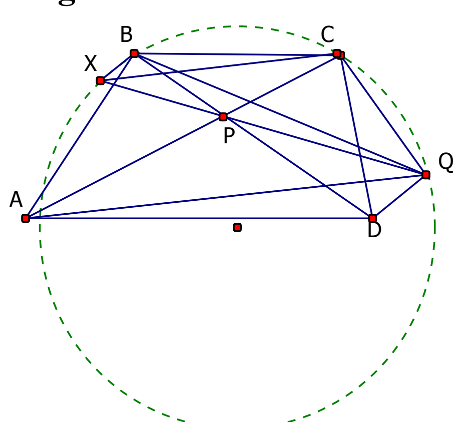
Gọi Y là trung điểm BT thì MY//CT và TY$\perp$XY.
Do đó T,Y, M, X nằm trên một đường tròn.

Vậy $\widehat{MTB} - \widehat{CTM} = \widehat{MXY} - \widehat{YMT} = \widehat{MXY} - \widehat{TXY}$

$= \widehat{MXY} - \widehat{YXB} = \widehat{MXB} = \widehat{MAB}$

Bài 3)(UKR 2007) Hai đường chéo hình thang ABCD cắt nhau tại P. Điểm Q nằm giữa hai đường thẳng song song BC và AD sao cho $\widehat{AQD} = \widehat{CQB}$ và điểm P, Q nằm hai bên đường thẳng CD. Chứng minh rằng $\widehat{BQP} = \widehat{DAQ}$.

Lời giải .



X là điểm trên đường thẳng PQ sao cho XC//AQ thì

$\dfrac{XC}{AQ} = \dfrac{CP}{PA} = \dfrac{BC}{AD} \Rightarrow \Delta BCX \sim \Delta DAQ$. Do đó

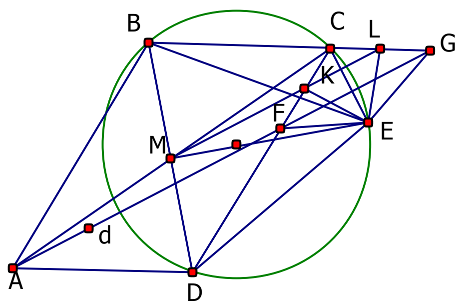
$\widehat{DAQ} = \widehat{BCX}$ và $\widehat{BXC} = \widehat{DQA} = \widehat{BQC}$ suy ra B, C, Q, X nằm trên một đường tròn. Suy ra

$\widehat{BCX} = \widehat{BQX} = \widehat{BQP}$

Vậy $\widehat{BQP} = \widehat{DAQ}$

Bài 4)(IMO 2007 LUX) Cho 5 điểm A, B, C, D và E sao cho ABCD là hình bình hành và BCED là một tứ giác nội tiếp . Đường thẳng d qua A và cắt phần trong đoạn DC tại F và cắt đường thẳng BC tại G. Giả sử rằng EF = EG = EC . Chứng minh rằng d là phân giác của góc $\widehat{DAB}$.

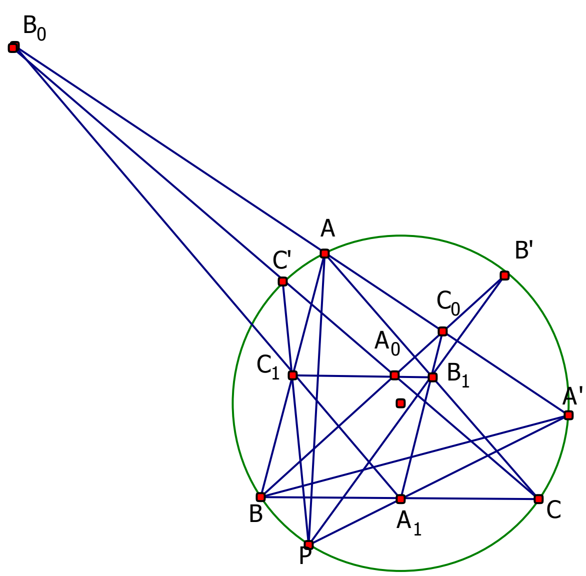
Lời giải .



Gọi K và L là trung điểm của CF và CG tương ứng thì EK $\perp$ CF và EL $\perp$ CB. Khi đó KL là đường thẳng Simson của tam giác BCD và cắt BD tại M thì EM $\perp$ BD.
Ta có KL//d và KL qua trung điểm cạnh CA của ΔACG nên KL qua giao điểm hai đường chéo của hình bình hành ABCD $\Rightarrow$ MB = MD và ΔBED cân . Từ $\Delta DEB \sim \Delta KEL$ ta có EK = EL suy ra CF = CG. Do đó
$\widehat{DAF} = \widehat{FGC} = \widehat{GFC} = \widehat{FAB}$

Bài 5)(GBR 2007) Cho ABC là tam giác cố định và gọi A_1, B_1, C_1 là trung điểm cạnh BC, CA, AB tương ứng. P là điểm bất kì trên đường tròn ngoại tiếp. Đường thẳng PA_1, PB_1, PC_1 cắt đường tròn ngoại tiếp lần nữa tại A', B', C' tương ứng. Giả sử các điểm A, B, C, A', B', C' là phân biệt và các đường thẳng AA', BB', CC' cắt nhau tạo thành một tam giác. Chứng minh rằng diện tích tam giác đó không phụ thuộc vào điểm P.

Lời giải .



Gọi A_0, B_0,C_0 là các giao điểm với $C_0 = AA'\cap BB', B_0 = AA'\cap CC'$
$A_0 = BB'\cap CC'$
Áp dụng định lí Pascal từ các điểm APCC'BA' đã cho thì $B_0 \in A_1C_1$, tương tự $C_0 \in A_1B_1, A_0 \in B_1C_1$.

Từ B_0A_1//AB_1 ta có $\frac{C_0B_0}{C_0A} = \frac{C_0A_1}{C_0B_1}$ (1).

Từ BA_1//B_1A_0 ta có $\frac{C_0A_1}{C_0B_1} = \frac{C_0B}{C_0A_0}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{C_0B_0}{C_0A} = \frac{C_0B}{C_0A_0}$ hay

$C_0B_0.C_0A_0 = C_0A.C_0B \Rightarrow S_{A_0B_0C_0} = S_{ABC_0}$

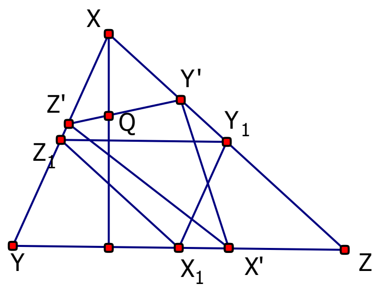
Mặt khác $S_{ABC_0} = S_{ABB_1}$ (vì A_1B_1//AB) . Do đó $S_{A_0B_0C_0} = S_{ABB_1} = \frac{1}{2}S_{ABC}$

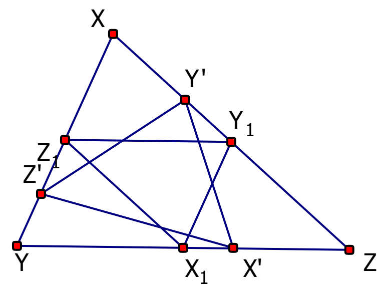
Bài 6)(USA 2007) Cho ABCD là một tứ giác lồi và các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 trên các cạnh AB, BC, CD và DA tương ứng. Xét diện tích các tam giác AA_1D_1, BB_1A_1, CC_1B_1 và DD_1C_1; gọi S là tổng của hai diện tích nhỏ nhất và S_1 là diện tích tứ giác $A_1B_1C_1D_1$. Tìm số thực dương k nhỏ nhất thỏa mãn bất đẳng thức $kS_1 \geq S$ với mọi tứ giác lồi ABCD.

Lời giải.

Ta chứng minh rằng $S_1 \geq S$ tức $k \leq 1$

Bổ đề: Nếu X', Y' Z' là điểm trên cạnh YZ, ZX, XY của tam giác XYZ thì $S_{X'Y'Z'} \geq \min\{S_{XY'Z'}, S_{YZ'X'}, S_{ZX'Y'}\}$



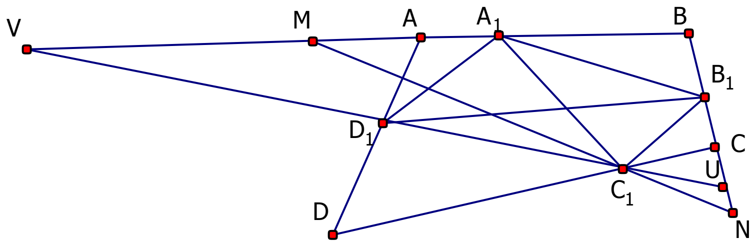


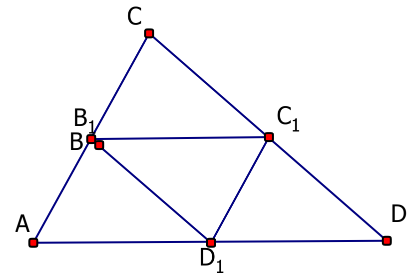
Chứng minh: Kí hiệu X_1, Y_1, Z_1 là trung điểm của YZ, ZX, XY. Nếu hai trong các điểm X', Y', Z' thuộc về một trong các tam giác XY_1Z_1, YZ_1X_1, ZX_1Y_1 thì mệnh đề được chứng minh

Ta cần chứng minh, nếu Y', Z' $\in \Delta XY_1Z_1$ thì Y'Z' cắt đường cao từ X đến YZ tại Q trong tam giác ΔXY_1Z_1. Do đó $d(X, Y'Z') \leq d(X, Y_1Z_1) = \frac{1}{2} d(X, YZ)$ $\leq d(X', Y'Z')$ suy ra $S_{XY'Z'} \leq S_{X'Y'Z'}$

Bây giờ không mất tính tổng quát giả sử rằng X' $\in (X_1Z)$, Y' $\in (Y_1X)$, Z' $\in (Z_1Y)$ thì $d(Z', X'Y') > d(Z_1, X'Y')$ do đó $S_{Z'X'Y'} > S_{Z_1X'Y'}$. Tương tự $S_{X'Y'Z_1} > S_{X'Y_1Z_1}$. Do $S_{X'Y_1Z_1} = S_{X_1Y_1Z_1}$ ta có $S_{X'Y'Z'} > S_{X_1Y_1Z_1} = \frac{1}{4} S_{XYZ}$ suy ra $S_{X'Y'Z'} > \min\{S_{XY'Z'}, S_{YZ'X'}, S_{ZX'Y'}\}$.

Bây giờ trở lại bài toán nếu $S_{A_1B_1C_1} \geq \min\{S_{A_1BB_1}, S_{B_1CC_1}\}$ và $S_{A_1C_1D_1} \geq \min\{S_{C_1DD_1}, S_{D_1AA_1}\}$. Xem như cố định $S_{A_1B_1D_1}$ và $S_{B_1C_1D_1}$. Không mất tính tổng quát giả sử rằng $S_{A_1B_1C_1} < \min\{S_{A_1BB_1}, S_{B_1CC_1}\}$ và $S_{A_1C_1D_1} < \min\{S_{C_1DD_1}, S_{D_1AA_1}\}$. Giả sử $S_{A_1B_1C_1} \leq S_{A_1B_1D_1}$ thì đường thẳng C_1D_1 cắt tia BC tại U. Các đường thẳng AB và CD có thể không cắt nhau tại một điểm.





Một đường thẳng qua C_1 cắt tia BA và BC tại M và N sẽ có $S_{C_1B_1N} > S_{A_1B_1C_1}$ và $S_{A_1BB_1>S_{A_1B_1C_1}}$. Theo bổ đề thì $S_{MA_1C_1} \le S_{A_1B_1C_1}$. Đây là không thể được vì chúng ta có thể cho $S_{MA_1C_1}$ lớn tùy ý. Do đó C_1D_1 cắt tia BA tại V. Áp dụng bổ đề vào ΔVBU cho ta $S_{A_1B_1C_1} \ge S_{VA_1C_1} > S_{A_1C_1D_1}$ vô lí.

Ta chỉ ra rằng k = 1 là hằng số dương tốt nhất khi xét trường hợp suy biến thành một tam giác ACD , D_1, C_1 là trung điểm của AD và CD, và B = A_1 = B_1 là trung điểm AC .

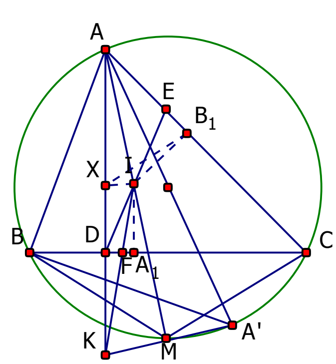
Bài 7)(IRN 2007) Cho tam giác nhọn ABC với góc α, β và γ ứng với đỉnh A, B, C tương ứng sao cho $\beta > \alpha$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp. Điểm D là chân đường cao từ đỉnh A. Điểm K nằm trên đường thẳng AD sao cho AK = 2R và D nằm giữa A và K. Đường thẳng DI và KI cắt cạnh AC và BC tại E và F tương ứng.

Chứng minh rằng nếu IE = IF thì $\beta < 3\gamma$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh $\widehat{KID} = \dfrac{\beta - \gamma}{2}$

Gọi AA' là đường kính của đường tròn ngoại tiếp (k) của tam giác ABC. Gọi M là giao điểm của AI với (k). Khi đó A'M $\perp$ MA, ta có K, M A' thẳng hàng. Gọi A_1, B_1 và X là chân đường vuông góc kẻ từ I đến BC, CA và AD. Ở đây $\Delta XIB_1 \sim \Delta A'MB$ (theo trường hợp các góc bằng nhau).

Vì MB = MC = MI ta có $\dfrac{IM}{KM} = \dfrac{BM}{MA'} = \dfrac{IB_1}{IX} = \dfrac{XD}{IX}$ (vì IA_1 =XD)



Do đó $\Delta KIM \sim \Delta IDX$ suy ra

$\widehat{KID} = \widehat{XIM} - (\widehat{XID} + \widehat{KIM})$

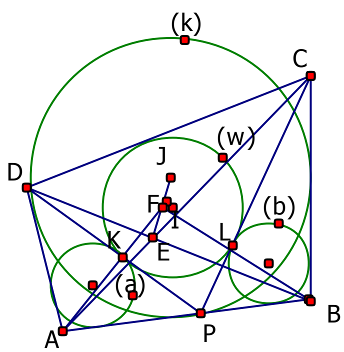
$= \widehat{XIM} - 90^0 = 180^0 - \widehat{AA'M} - 90^0 = \widehat{MAA'} = \dfrac{\beta - \gamma}{2}$

Bây giờ giả sử IE = IF, khi $\beta > \alpha$ thì A_1 nằm trong đoạn FC và $\widehat{C} = \widehat{DIA_1} + \widehat{EIB_1} = \widehat{DIF} + 2\widehat{FIA_1}$. Từ đây có phương trình $2\widehat{FIA_1} = \gamma - \dfrac{\beta - \gamma}{2} = \dfrac{3\gamma - \beta}{2}$ suy ra $\beta < 3\gamma$

Bài 8) (POL 2007) Một điểm P nằm trên cạnh AB của tứ giác lồi ABCD. Gọi (w) là đường tròn nội tiếp tam giác CPD và gọi I là tâm đường tròn nội tiếp. Giả sử (w) tiếp xúc với các đường tròn nội tiếp của tam giác APD và BPD tại K và L tương ứng. Đường thẳng AC và BD cắt nhau tại E và đường thẳng AK, BL cắt nhau tại F. Chứng minh các điểm E, I và F thẳng hàng.

Lời giải .

Gọi J là tâm đường tròn (k) tiếp xúc với đường thẳng AB, DA và BC. Gọi (a), (b) là đường tròn nội tiếp ΔADP và ΔBCP. Trước tiên ta chứng minh $F \in IJ$ .A là tâm vị tự biến đường tròn (a) thành đường tròn (k), K là tâm vị tự trong biến đường tròn (a) thành (w) và F* là tâm vị tự trong biến (w) thành (k).



Theo định lí Đề-Sac ta có A, K, F* thẳng hàng. Tương tự chứng minh $F^* \in BL$. Do đó $F \equiv F^*$ và $F \in IJ$. Bây giờ ta sẽ chứng minh $E \in IJ$. Kí hiệu X, Y là tâm vị tự ngoài biến (a), (b) thành (w). Dựa vào tính chất tiếp tuyến từ A, B, C, D đối với đường tròn (k) và (a) ta có AP + DC = AD + PC. Do đó tồn tại một đường tròn(d) nội tiếp APCD. X là tâm vị tự biến (a) thành (w).

Áp dụng định lí Đề-Sac ta có A, C và X thẳng hàng. Xét các đường tròn (a), (w) và (k) lần nữa A là tâm vị tự biến (a) thành (k) và X là tâm vị tự biến (a) thành (w). Do đó XA chứa tâm E*của phép vị tự biến (w) thành (k). Tương tự $E^* \in BX$. Do đó $E^* \equiv E$. Vậy $E \in IJ$.

VI. Kết quả nghiên cứu:

Đề tài gồm 40 bài toán hình học phẳng do tôi dịch từ bản tiếng Anh. Các bài toán hình học được các nước đề nghị trong các kì thi IMO từ 2003 đến 2007, đã được làm tài liệu dạy bồi dưỡng cho học sinh giỏi Toán nhiều năm nay , phục vụ tốt cho việc bồi dưỡng học sinh giỏi Toán trong các kì thi Olympic , kì thi chọn học sinh giỏi Tỉnh và Quốc gia. Qua nhiều năm dạy bồi dưỡng cho học sinh giỏi tôi thấy thu được kết quả tốt, các em đã biết vận dụng và tự tin trong việc giải bài toán hình học phẳng. Góp phần đưa đội tuyển môn Toán tỉnh thi đạt giải Quốc gia năm học 2010-2011: 01 giải nhì và 01 giải ba; năm học 2011-2012: 01 giải ba và 02 giải khuyến khích; năm học 2012-2013: 01 giải ba và 02 giải khuyến khích.

VII. Kết luận:

Chuyên đề: Vận dụng các bài toán hình học phẳng được đề nghị trong các kì thi IMO từ 2003 đến 2007vào việc dạy bồi dưỡng học sinh giỏi . Có tác dụng tích cực trong việc bồi dưỡng học sinh giỏi về lĩnh vực giải toán hình học phẳng.

Do nhu cầu về tài liệu dạy bồi dưỡng cho học sinh giỏi nên tôi mạnh dạn dịch từ bản tiếng Anh ra tiếng Việt, vì trình độ ngoại ngữ có hạn chế nên không thể thiếu sót , mong Hội đồng khoa học và các thầy cô giáo góp ý để đề tài ngày một hoàn thiện hơn.

VIII. Kiến nghị:

Đối với tổ chuyên môn: Triển khai việc áp dụng đề tài trong khi dạy bồi dưỡng học sinh khối 10, 11 và 12.

IX. Tài liệu tham khảo:

+ Nguồn bản tiếng Anh từ Internet.

Tam Kỳ, ngày 02 tháng 5 năm 2013

Người viết

Phạm Hữu Hùng

MỤC LỤC

I. Tên đề tài ……………………………………………………..1
II. Đặt vấn đề………………………………………………...1
III. Cơ sở lí luận………………………………………………1
IV. Cơ sở thực tiễn……………………………………………1
V. Nội dung nghiên cứu……………………………………...1
+ Các bài toán hình học được đề nghị trong kì thi IMO lần thứ 45 tổ chức tại Nhật Bản năm 2003……………..1-16
+ Các bài toán hình học được đề nghị trong kì thi IMO lần thứ 46 tổ chức tại Hy Lạp năm 2004……..................16-22
+ Các bài toán hình học được đề nghị trong kì thi IMO lần thứ 47 tổ chức tại Mexico năm 2005……..................22-27
+ Các bài toán hình học được đề nghị trong kì thi IMO lần thứ 48 tổ chức tại Slovenia năm 2006………………27-34
+ Các bài toán hình học được đề nghị trong kì thi IMO lần thứ 48 tổ chức tại Việt Nam năm 2007………………34-39
VI. Kết quả nghiên cứu……………………………………39
VII. Kết luận …………………………………………………39
VIII. Kiến nghị ……………………………………………… 39
IX. Tài liệu tham khảo……………………………………… 39

CỘNG HOÀ XÃ HỘI CHỦ NGHĨA VIỆT NAM

Độc lập - Tự do - Hạnh phúc

PHIẾU ĐÁNH GIÁ, XẾP LOẠI SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

Năm học 2012 – 2013

I.Đánh giá, xếp loại của HĐKH Trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm

1.Tên đề tài: **VẬN DỤNG CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG ĐƯỢC ĐỀ NGHỊ TRONG CÁC KÌ THI IMO TỪ 2003 ĐẾN 2007 VÀO VIỆC DẠY BỒI DƯỠNG HỌC SINH GIỎI**

2.Họ và tên tác giả : Phạm Hữu Hùng

3.Chức vụ : Tổ trưởng Tổ : Toán

4.Nhận xét của chủ tịch HĐKH về đề tài.

a) Ưu điểm : …………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………..………………………

………………………………………………………..…………………………

…………………………………………..………………………………………

b) Hạnchế:…………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

5.Đánh giá xếp loại:

Sau khi thẩm định, đánh giá xếp loại đề tài trên, HĐKH Trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, thống nhất xếp loại: ……………………………

Những người thẩm định: **Chủ tịch HĐKH**

(ký, ghi rõ họ tên) (Ký, đóng dấu, ghi rõ họ tên)

……………………………

……………………………

…………………………..

II. Đánh giá, xếp loại của HĐKH Sở GD&ĐT Quảng Nam

Sau khi thẩm định, đánh giá đề tài trên, HĐKH Sở GD&ĐT Quảng Nam thống nhất xếp loại: ……………………..

Những người thẩm định: **Chủ tịch HĐKH**

(ký, ghi rõ họ tên) (Ký, đóng dấu, ghi rõ họ tên)

……………………………

……………………………

…………………………..

PHIẾU CHẤM ĐIỂM, XẾP LOẠI SÁNG KIẾN KINH NGHIỆM

Năm học : 2012 – 2013

(Dành cho người tham gia đánh giá, xếp loại SKKN)

HỘI ĐỒNG KHOA HỌC

Trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm

- Đề tài: “Vận dụng các bài toán hình học phẳng được đề nghị trong các kì thi IMO từ 2003 đến 2007 vào việc dạy bồi dưỡng học sinh giỏi”
- Họ và tên tác giả: **Phạm Hữu Hùng**
- Đơn vị: Tổ Toán , Trường THPT chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm
- Điểm cụ thể:

Phần	**Nhận xét của người đánh giá, xếp loại đề tài**	**Điểm tối đa**	**Điểm đạt được**
1.Tên đề tài 2.Đặt vấn đề		1	
3.Cơ sở lý luận		1	
4.Cơ sở thực tiễn		2	
5.Nội dung nghiên cứu		9	
6.Kết quả nghiên cứu		3	
7.Kết luận		1	
8.Đề nghị 9.Phụ lục		1	
10.Tài liệu tham khảo 11.Mục lục 12.Phiếu đánh giá,xếp loại		1	
Thể thức văn bản, chính tả		1	
Tổng cộng		20 đ	

Căn cứ số điểm đạt được, đề tài trên được xếp loại :

Người đánh giá xếp loại đề tài:

(ký, ghi rõ họ tên)