Tecnicatura Universitaria en Programación

Matemática 2022

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL MAR DEL PLATA

Módulo I / III

Unidad Nº 1: Lógica proposicional

Proposiciones. Conectivos: Negación-conjunción-disyunción inclusiva y exclusiva-condicional-bicondicional. Tablas de verdad de los conectivos. Tautologías y contradicciones. Implicación y equivalencia lógicas. Propiedades del álgebra de proposiciones. Funciones proposicionales. Cuantificadores

Unidad Nº 2: Teoría de Conjuntos

Conceptos básicos. Conjunto Universal. Técnicas de conteo y diagramas de Venn o círculos de Euler. Determinación de un conjunto. Subconjuntos: Inclusión de conjuntos. Partes de un conjunto. Operaciones con conjuntos. Propiedades comunes a la unión e intersección de conjuntos. Complementario de un conjunto. Diferencia de dos conjuntos. Propiedades del álgebra de conjuntos. Conjuntos finitos.

Unidad Nº 3: Cálculo combinatorio

Principio de la multiplicación. Factorial de un número. Número combinatorio. Propiedades. Permutaciones, variaciones y combinaciones simples y con repetición. Problemas de aplicación.

Lógica Proposicional

Introducción

Como se trabajó en el curso inicial donde se introdujeron los conceptos básicos de la lógica de proposiciones y conectivos, en este módulo se profundizarán dichos conceptos. En el álgebra de proposiciones, es decir en las operaciones que se realizan con proposiciones simples, se analizó la Negación, la conjunción o producto lógico, la disyunción inclusiva o suma lógica y la disyunción con sentido excluyente. Ahora se agregan y analizan dos operaciones lógicas más: el condicional y el bicondicional.

Condicional

antecedente consecuente

Se representa por $p \rightarrow q$ y se lee: "si p, entonces q"

Es una relación de consecuencia entre dos proposiciones: la primera es la condición (**antecedente**) y la segunda es el resultado (**consecuente**). *Debemos tener cuidado al simbolizar estas proposiciones, ya que en el lenguaje habitual es común encontrarlas expresadas en orden inverso. Por ejemplo: "Sería extremadamente feliz si lavaras el auto" [$p \rightarrow q$] [siendo p: "lavaras el auto" y q: "Sería extremadamente feliz"].*

Por este motivo recuerda que en forma alternativa podemos decir:

- "Si …, entonces…"
- "…, luego…"
- "…en consecuencia…"
- "q cuando p",
- "p es suficiente para q"
- "p es una condición suficiente para q"
- "p sólo si q"
- "q es una condición necesaria para p"
- "q siempre que p"
- "q si p"

Ejemplos

p= q=

- ✓ "Si hubiera venido caminando, no estaría perdiendo tiempo tratando de estacionar el auto"
- ✓ "Cuando hagas las compras prepararé la cena"
- ✓ "Si no cambias de hábitos, se cansará de vivir contigo"
- ✓ **"**Para ir al campo es necesario que haga buen tiempo"
- ✓ "Si los libros cantan, entonces los árboles lloran"

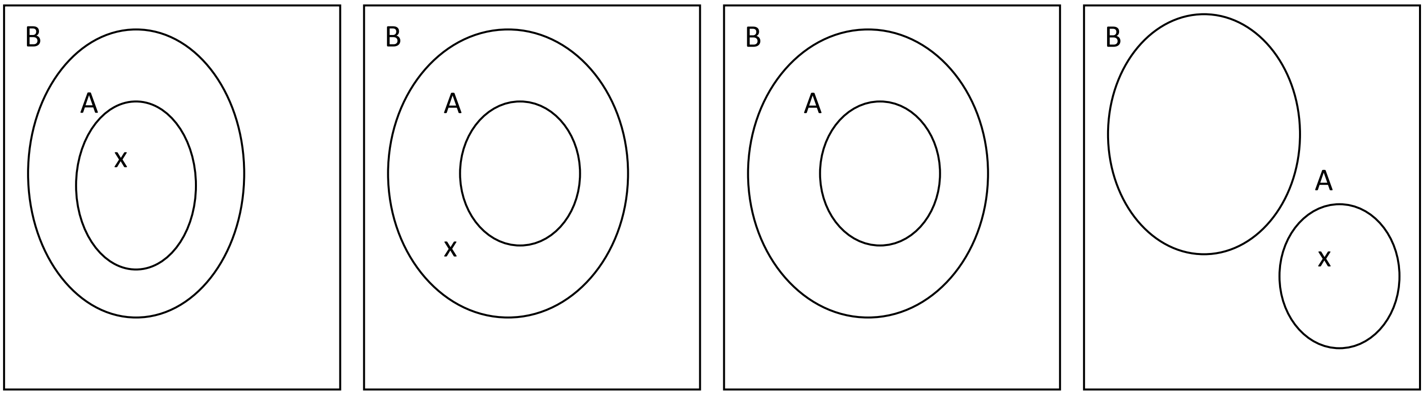
El carácter absurdo de la última proposición está relacionado con el hecho de que lo importante no es el contenido de la proposición, sino la estructura formal de la misma.

Su tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Para comprender la tabla de valores de verdad utilizamos la definición de inclusión de conjuntos donde $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$. (También puedes leer el ejemplo 2.2 del Grimaldi).

En forma gráfica



$$\boldsymbol{x \in A \rightarrow x \in B}$$

$\mathbf{1 \rightarrow 1 \equiv 1}$ $\mathbf{0 \rightarrow 1 \equiv 1}$ $\mathbf{0 \rightarrow 0 \equiv 1}$ $\mathbf{1 \rightarrow 0 \equiv 0}$

Implicaciones asociadas a una dada

A partir de una proposición que tenga forma de implicación, se pueden formar otras tres proposiciones distintas. Dada $p \rightarrow q$, llamada directa, se pueden formar:

1) $q \rightarrow p$ Recíproca
2) $-p \rightarrow -q$ Contraria
3) $-q \rightarrow -p$ Contrarrecíproca

Construimos la tabla de verdad y comparamos:

P	q	$p \rightarrow q$	$-p \rightarrow -q$	$q \rightarrow p$	$-q \rightarrow -p$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	1

Las cuatro proposiciones se llaman variantes del condicional o implicaciones conjugadas.

Clases de proposiciones: Tautología, contradicción y contingencia

Si al evaluar una fórmula lógica o forma proposicional resulta que todos los valores de verdad resultantes son siempre V para cualquier combinación de sus valores veritativos, decimos que dicha fórmula es una **Tautología** o **Ley lógica**.

- Si analizamos la proposición : p $\vee$ ~ p realizando su tabla de verdad:

P	$\neg p$	$p \vee \neg p$
1	0	1
0	1	1

Vemos que para cualquier combinación de las proposiciones p y su negación ~ p, la proposición t: p $\vee$ ~ p es siempre verdadera. Entonces, la proposición t es una **tautología o ley lógica**. Si al estudiar una fórmula lógica, a diferencia de los ejemplos anteriores resulta que para cualquier valor de verdad de las proposiciones intervinientes el resultado de dicha fórmula es siempre falso, decimos que dicha fórmula es una **Contradicción**.

- Analicemos la fórmula lógica p $\wedge$ ~ p

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
1	0	0
0	1	0

Encontramos que la fórmula es siempre falsa, es entonces una Contradicción. Si una proposición no es una tautología ni una contradicción (es decir que contiene al menos un valor V y otro F) es una **contingencia** o **indeterminada**.

Confección de las tablas de verdad para una forma proposicional dada

Primero se pasa a forma simbólica la forma proposicional dada, luego se prepara una tabla con 2^n filas, (siendo n el número de proposiciones simples con las que se cuenta), por último se determinan, utilizando las columnas que se precisen en cada caso los valores de verdad o falsedad de las distintas agrupaciones de proposiciones simples, siguiendo un orden de prioridad:

a) Se comienza por los conectores proposicionales incluidos dentro de los paréntesis.
b) Se determinan los valores de verdad o falsedad determinados por los conectores que enlazan paréntesis, luego los que enlazan corchetes y así sucesivamente.

Si no hubieran paréntesis o corchetes el orden de jerarquía es: $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Recordemos que el valor de verdad se representa indistintamente mediante V o 1 y el de falsedad mediante F o 0.
A título de ejemplo confeccionaremos la tabla de verdad de la proposición compuesta:

$$(r \wedge s) \vee p \to \neg q$$

r	s	p	q	$(r \wedge s)$	$(r \wedge s) \vee p$	$-q$	$(r \wedge s) \vee p \to -q$
1	1	1	1	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	1

r	s	p	q	$(r \wedge s)$	$(r \wedge s) \vee p$	$-q$	$(r \wedge s) \vee p \rightarrow -q$
0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	1

Bicondicional

Se forma a partir de dos conectores condicionales pero de sentidos contrarios.

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ en donde $\leftrightarrow$ significa bicondicional y $\equiv$ " equivale a"

Se reconoce su presencia en el contexto de una proposición por la presencia de las partículas gramaticales "si y sólo si" que pueden estar en forma implícita. Se representa por: p$\leftrightarrow$q y se lee " p si y solo si q". La proposición bicondicional de dos proposiciones p y q es equivalente a la proposición compuesta: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. No se debe tener en cuenta el contenido de la proposición ni, en consecuencia, las posibles relaciones efecto-causa existente entre las proposiciones componentes, sino la estructura formal de la proposición. Norma que es válida para toda la lógica proposicional. Si lo esencial de una proposición es el carácter de verdad o falsedad que puede adoptar, y lo normal es encontrar proposiciones enlazadas con otras mediante conectores proposicionales, el problema consiste en determinar la verdad o falsedad de una proposición a partir de la verdad o falsedad de las proposiciones elementales que la forman; lo cual se logra con las tablas de verdad.

p	q	$p \leftrightarrow q$	
F	F	V	1
F	V	F	0
V	F	F	0
V	V	V	1

El bicondicional sólo es verdadero si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad Hace referencia a la **condición necesaria y suficiente,** es decir $p \leftrightarrow q$ es equivalente a decir **"p es condición necesaria y suficiente para q"** y viceversa.

Órdenes de precedencia

Prioridad de precedencia	Operador lógico	Nombre
Recuerda resolver primero las operaciones entre ( )		
1	¬	Negación
2	∧	Conjunción (and)
3	∨	Disyunción inclusiva (or)
4	$\underline{\vee}$	Disyunción exclusiva (xor)
5	→	Condicional
6	↔	Bicondicional

Ejercicios

1. Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1 0

a) Si París es capital de Francia entonces 3+6=7 0

b) Si París es capital de Inglaterra entonces 3+6=9 1

0 1

c) Si París es capital de Francia entonces 3+6=9 1

d) Si París es capital e Inglaterra entonces 3+6=7 1

2. Sean p, q proposiciones primitivas para las que $p \to q$ es falsa. Determina los valores de verdad de:

a) $p \wedge q$ 0 b) $-p \vee q$ 0 c) $q \to p$ 1 d) $\neg q \to \neg p$ 0

3. Sean p,q,r,s, las siguientes proposiciones:

✓ p:"Termino de escribir mi programa de computación antes de la comida"

✓ q:"Jugaré tenis en la tarde"

✓ r:"El sol está brillando"

✓ s:"La humedad es baja"

Escribe lo siguiente en forma simbólica:

a) Si el sol está brillando, jugaré tenis esta tarde. $r \to q$

b) Terminar de escribir mi programa antes de la comida es necesario para que juegue tenis esta tarde. $? \to q$

c) La humedad baja y el sol brillante son suficientes para que juegue tenis esta tarde. $(s \wedge r) \to q$

4. Vuelve a escribir cada una de las siguientes proposiciones utilizando la forma: "si..., entonces..."

a) La práctica diaria de su servicio es una condición suficiente para que Daniela tenga una buena posibilidad de ganar el torneo de tenis. Si practica en su servicio contidianamente entonces daniela tiene una buena posibilidad de ganar el torneo

b) Arregle la calefacción o no pagaré el alquiler. Si arreglo la calefacción entonces no pago el alquiler Si pago el alquiler entonces no arreglo la calefacción

c) Te prestaré el auto cuando obtengas buenas calificaciones en tus estudios. si te presto auto entonces obtener buenas calis

d) Si hoy no es 24 de Diciembre, entonces mañana no es Navidad. si mañana no es navidad hoy no es 24 dic.

e) Te presto el auto cuando ordenes tu cuarto. Si ordenas tu habitación entonces te presto el auto

f) Bebes alcohol o llevas el auto. si bebes alcohol entonces no llevas el auto si llevas el auto entonces no bebes alcohol

5. Construye las tablas de verdad y determina cuáles son contingencias, cuáles contradicciones y cuáles tautologías:

a) $p \wedge -p$ b) $p \vee -p$ c) $p \to q$

d) $q \to p$ e) $(p \to q) \wedge (q \to p)$ f) $-(p \underline{\vee} q)$

g) $p \wedge r \to r$ h) $s \vee t \leftrightarrow s$ i) $-(p \to q) \leftrightarrow (-q \wedge p)$

6. Sean p y q las siguientes proposiciones:

p: hace frío ; q: llueve

Expresa cada proposición en lenguaje coloquial:

Lenguaje simbólico	Lenguaje coloquial
$-p$	no hace frio
$p \wedge q$	hace frio y llueve
$p \vee q$	hace frio o llueve

Lenguaje simbólico	**Lenguaje coloquial**
$q \vee -p$	llueve o no hace frio
$-p \wedge -q$	no hace frio y no llueve
$-(-q)$	No es cierto que no llueve
$p \rightarrow q$	si hace frio entonces llueve

7. Sean las proposiciones:

p: "Has obtenido un 10 en el examen final"
q: "Has hecho todos los ejercicios del módulo"
r: "Has obtenido un 10 en esta asignatura"

Escribe en forma simbólica las siguientes proposiciones utilizando p, q y r, y los conectivos lógicos.

a) Has obtenido un 10 en esta asignatura, pero no has hecho todos los ejercicios del módulo. $-q$ R
b) Has hecho todos los ejercicios del módulo, has obtenido un 10 en esta asignatura y también en el examen final. $q \rightarrow (R \wedge P)$
c) Conseguir un 10 en el examen final y realizar todos los ejercicios del módulo es suficiente para obtener un 10 en esta asignatura. $(p \wedge q) \rightarrow R$
d) Puedes conseguir un 10 en esta asignatura si, y sólo si, haces todos los ejercicios del módulo o tu calificación en el examen final es 10. $R \leftrightarrow (q \vee p)$

8. Determina cuáles de las siguientes frases no se correspondería con la estructura: $p \rightarrow -q$

p: bebes/beber y q: conduces/conducir si bebes entonces no conduces

a) Si bebes entonces no conduces. ✓
b) Bebe sólo si no conduces. ✓
c) No conducir es necesario para beber. ✓
d) No bebes y no conduces. ✗
e) Beber es suficiente para no conducir. ✓

9. Asocia a cada proposición escrita en lenguaje verbal su expresión simbólica:

I. $p \rightarrow q \vee r$	II	a.	Si no fumas en el patio ni en el garaje, no fumas cigarrillos
II. $(-q \wedge -r) \rightarrow -p$	III	b.	Si juan no consigue un billete de avión, la condición necesaria y suficiente Para que llegue a tiempo es que viaje en coche hoy mismo
III. $-p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$	IV	c.	Viajas en auto o viajas en tren pero no en ambos
IV. $(p \vee q) \wedge -(p \wedge q)$	I	d.	Si fumas cigarrillos, fumas en el patio o fumas en el garaje

Equivalencias lógicas

Dos proposiciones s_1, s_2 son lógicamente equivalentes (escribimos: $s_1 \iff s_2$), cuando la proposición s_1 es verdadera (respectivamente, falsa) si y sólo si la proposición s_2 es verdadera (respectivamente, falsa). Por ejemplo:

			(S1)	(S2)	(S1) ↔ (S2)
p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Presta atención

Para demostrar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes la tabla de verdad del bicondicional entre ambas debe ser una tautología.

Podemos expresar la conectiva para el condicional (de proposiciones primitivas) en términos de la negación y la disyunción, es decir:

$$p \to q \equiv -p \lor q$$

condicional como disyunción

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \land (q \to p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

También para el bicondicional:

$$\boldsymbol{p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \land (q \to p)}$$

Además**:**

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \leftrightarrow q}$	$\boldsymbol{\neg p}$	$\boldsymbol{\neg q}$	$\boldsymbol{\neg p \lor q}$	$\boldsymbol{\neg q \lor p}$	$\boldsymbol{(\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)}$
1	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1	1

$\equiv$

$$\boldsymbol{p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \lor q) \land (\neg q \lor p)}$$

Ahora usaremos la idea de equivalencia lógica para examinar algunas de las propiedades importantes que se cumplen en el álgebra de las proposiciones.

Sabemos que para todo par de números reales a, b se cumple: $-(a+b) = (-a) + (-b)$. Existe algún resultado similar para las proposiciones primitivas p, q?

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \land q}$	$\boldsymbol{\neg(p \land q)}$	$\boldsymbol{\neg p}$	$\boldsymbol{\neg q}$	$\boldsymbol{\neg p \lor \neg q}$	$\boldsymbol{p \lor q}$	$\boldsymbol{\neg(p \lor q)}$	$\boldsymbol{\neg p \land \neg q}$
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1

Negación del condicional

La negación de una proposición si…entonces… no comienza con *si* porque no es un condicional.

Por ejemplo la negación de la proposición:

"Si Juan va a la laguna, entonces María pagará las cuentas de Juan" $p \to q$ Es:

"Juan va a la laguna, pero María no paga las compras de Juan" $\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \lor \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{p \land \neg q}$

Leyes de De Morgan

$$\boldsymbol{\neg(p \land q) \equiv \neg p \lor \neg q \quad y \quad \neg(p \lor q) \equiv \neg p \land \neg q}$$

Ley de Morgan, niega todo y invierte el conector.

Estas leyes son válidas para cualquier par de proposiciones.

Asociaciones importantes

En la aritmética de los números reales, las operaciones de suma y multiplicación están relacionadas por la llamada propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma; si a, b, c son números reales: $\boldsymbol{a.(b+c) = a.b + a.c}$ El siguiente ejemplo muestra una propiedad similar para las proposiciones primitivas. También existe otra ley relacionada con esto que no tiene su contrapartida en la aritmética de los números reales.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{q \vee r}$	$\boldsymbol{p \wedge (q \vee r)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$
1	1	1	1	1	$1 \vee 1 \equiv 1$
1	1	0	1	1	$1 \vee 1 \equiv 1$
1	0	1	1	1	$1 \vee 1 \equiv 1$
1	0	0	0	0	$0 \vee 0 \equiv 0$
0	1	1	1	0	$0 \vee 0 \equiv 0$
0	1	0	1	0	$0 \vee 0 \equiv 0$
0	0	1	1	0	$0 \vee 0 \equiv 0$
0	0	0	0	0	$0 \vee 0 \equiv 0$

Conclusión

$$\boldsymbol{I)\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)\ \ propiedad\ distributiva\ de\ \wedge sobre\ \vee}$$

Puedes confeccionar otra tabla para demostrar que:

$$\boldsymbol{II)\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)\ propiedad\ distributiva\ de\ \vee sobre\ \wedge}$$

La primera de estas leyes tiene su contrapartida en la aritmética de los números reales:

$$\boldsymbol{p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad a.(b+c) = a.b + a.c}$$

Pero la segunda no, ya que: $\boldsymbol{a + (b.c) \neq (a+b).(a+c)}$

Buscamos un contraejemplo: si $a = 2, b = 3\ y\ c = 5$

$$2 + (3.5) = 2 + 15 = 17$$

$$(2+3).(2+5) = 5.7 = 35 \neq 17$$

Álgebra de Boole. Leyes del álgebra proposicional

Como bien dijimos arriba, aquellas fórmulas lógicas que resultan ser siempre verdaderas no importa la combinación de los valores veritativos de sus componentes, son tautologías o leyes lógicas. En el cálculo proposicional existen algunas tautologías especialmente útiles cuya demostración se reduce a la confección de su correspondiente tabla de verdad, a saber:

Involución	$\neg(\neg p) \equiv p$	
Idempotencia	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
Conmutatividad	$p \vee q \equiv q \vee p$	$p \wedge q \equiv q \wedge p$
Asociatividad	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
Distributividad	De la conjunción respecto de la disyunción: $r \wedge (p \vee q) \equiv (r \wedge p) \vee (r \wedge q)$ $(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	De la disyunción respecto de la conjunción: $r \vee (p \wedge q) \equiv (r \vee p) \wedge (r \vee q)$ $(p \wedge q) \vee r \equiv (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
Absorción	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$
De Morgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

A continuación veremos algunas de las proposiciones tautológicas más importantes

$p \to q \equiv \neg p \vee q$	**Condicional**
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$	**Bicondicional**
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$	**Contrarrecíproca del condicional**
$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow q \leftrightarrow p$	**Conmutativa del bicondicional**
$p \leftrightarrow q \equiv \neg(p \veebar q)$	**Bicondicional**

Ejemplos de equivalencia entre proposiciones

Si llueve entonces hace calor	Hace calor o no llueve
No llueve y no hace calor	No es cierto que llueve o hace calor
No hace calor y no hace frío	No es cierto que hace calor o frío
Llueve y truena	Truene y llueve
Hace calor o frío	Hace frío o calor
Si hay viento y llueve entonces hace frío	Si hay viento entonces si llueve, hace frío
Si llueve entonces hace calor	Si no hace calor entonces no llueve
No es cierto que no hace calor	Hace calor
No llueve o hace calor	No es cierto que, llueve y no hace calor
Si no es cierto que, llueve o hace calor entonces no llueve	Llueve o hace calor o no llueve

Razonamientos

Un razonamiento es un proceso consistente en partir de una serie de hipótesis llamadas **premisas**, que se suponen verdaderas, y obtener finalmente una proposición denominada **conclusión**. Cuando el razonamiento se compone de tres proposiciones, que pueden llamarse premisa mayor, premisa menor y conclusión, y ésta se deduce de la mayor por medio de la menor, dicho razonamiento se denomina **silogismo**. Para demostrar la validez o invalidez de un razonamiento, se puede proceder de dos formas: aplicando las propiedades dadas anteriormente o usando las tablas de verdad.
Estudio de la validez de los razonamientos mediante tabla de verdad

1) Se asocia al razonamiento un condicional tal que el antecedente es la conjunción de las premisas, el consecuente la conclusión.

2) Si al concluir la tabla de verdad resulta tautológica, el razonamiento es válido, caso contrario, inválido.

Ejemplo

Estudia la validez del siguiente razonamiento: $\left\{\begin{array}{c}(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r} \\ \neg \boldsymbol{r} \\ \neg \boldsymbol{q}\end{array}\right.$ $\overline{}$ $\boldsymbol{Conclusi\acute{o}n}: \neg p$	Donde: La premisa 1 es: $(p \rightarrow q) \vee r$ La premisa 2 es: $\neg r$ La premisa 3 es: $\neg q$ La conclusión es: $\neg p$

				p_1	p_2	p_3		**Razonamiento válido**
p	$\neg p$	q	r	$(p \rightarrow q) \vee r$	$\neg r$	$\neg q$	$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$	$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \Rightarrow \neg p$
1	0	1	1	$1 \vee 1 \equiv 1$	0	0	$1 \wedge 0 \wedge 0 \equiv 0$	1
1	0	1	0	$1 \vee 0 \equiv 1$	1	0	0	1
1	0	0	1	$0 \vee 1 \equiv 1$	0	1	0	1
1	0	0	0	$0 \vee 0 \equiv 0$	1	1	0	1
0	1	1	1	$1 \vee 1 \equiv 1$	0	0	0	1
0	1	1	0	$1 \vee 0 \equiv 1$	1	0	0	1
0	1	0	1	$1 \vee 1 \equiv 1$	0	1	0	1
0	1	0	0	$1 \vee 0 \equiv 1$	1	1	1	1

Otra manera de confeccionar la tabla:

[(P	$\rightarrow$	q)	$\vee$	r]	$\wedge$	$\bar{r}$	$\wedge$	$\bar{q}$	$\Rightarrow$	$\bar{p}$
1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1

Presta atención

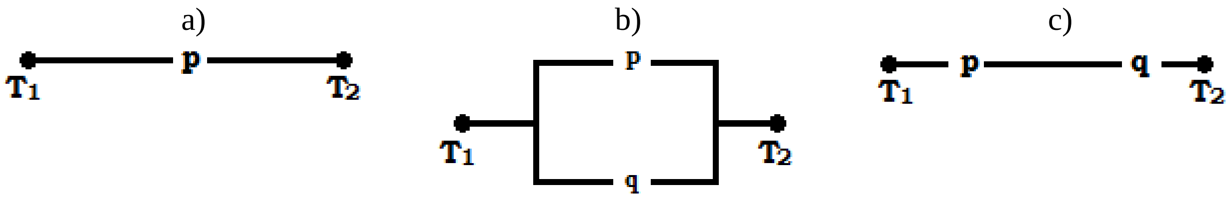
Cuando un condicional es una tautología se dice que es una **implicación lógica** y el símbolo que se usa es:$\Longrightarrow$. Cuando un bicondicional es una tautología se dice que es una **equivalencia lógica.** Dicho de otra forma, una proposición P es equivalente a otra Q $(P \Leftrightarrow Q)$ cuando las tablas de verdad de $P \ y \ Q$ son iguales.

Otra forma de estudiar el razonamiento es asignar valores de verdad a las proposiciones de modo de obtener premisas verdaderas; si se llega a conclusión verdadera el razonamiento es válido. Cada proposición debe tener una tenga una única posibilidad con conclusión verdadera, sino resulta inválido. (Ejemplificación en clase).

Circuitos lógicos

Una red de conmutación está formada por cables e interruptores que conectan dos terminales T_1 y T_2 . En dicha red, cualquiera de los interruptores puede estar abierto (0), de modo que no pasa corriente por él. En la figura tenemos, en la parte a), una red con un interruptor. Cada una de las partes b) y c) contiene dos interruptores independientes entre sí.

Para la red de la parte b), la corriente fluye de T_1 a T_2 si cualquiera de los interruptores p, q está cerrado. Llamamos a esto una **red en paralelo** y la representamos como $p \vee q$. La red de la parte c) necesita que cada uno de los interruptores p, q estén cerrados para que la corriente fluya de T_1 a T_2. En este caso, los interruptores están en **serie** y esta red se representa como $p \wedge q$.



Ejercicios

10. De los cuatro enunciados siguientes hay dos que son equivalentes (igual significado). Verificarlos con tabla de verdad.

a) Si hoy llueve o tengo frío, entonces hoy es martes.
b) Es martes o no llueve y por ello no tengo frío.
c) Si no es martes, no llueve y no tengo frío.
d) Es martes y no tengo frío, o no es cierto que no llueve y tengo frío.

11. Simplifica las siguientes proposiciones compuestas aplicando las leyes estudiadas. Verifica la equivalencia mediante tabla de verdad:

a) $\neg[\neg p \vee \neg(\neg q)] \wedge \neg(\neg p)$
b) $\neg[(p \to q) \wedge \neg q]$
c) $q \wedge (\neg p \to \neg q)$
d) $\neg[(p \to \neg q) \vee q]$
e) $(\neg p \to q) \wedge (p \vee \neg q)$
f) $\neg(p \wedge q) \wedge (p \to q)$
g) $[(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)] \to (\neg p \wedge \neg q)$
h) $[q \wedge (q \to \neg p)] \to \neg(p \wedge q)$
i) $(p \underline{\vee} q) \vee (p \vee q)$
j) $(p \underline{\vee} q) \vee (\neg q \vee \neg p)$

12. Niega y simplifica las proposiciones expresadas en lenguaje simbólico. Niega en forma verbal las expresadas en lenguaje verbal:

a) $p \vee q \longrightarrow r$
b) $\neg(p \leftrightarrow q)$
c) Si María va al centro, Juan va al gimnasio
d) No conducir es necesario para beber
e) Si no vienes ya, nos vamos a desayunar
f) No es cierto que vamos a desayunar si y sólo si ordenas tu cuarto

13. Analiza si los siguientes razonamientos son válidos o inválidos:

a)	Premisa 1	Si estudio entonces aprobaré
	Premisa 2	No he estudiado
	Conclusión	No aprobaré
b)	Premisa 1	Si Juan llega tarde a casa, será castigado
	Premisa 2	Juan ha llegado tarde a casa
	Conclusión	Juan será castigado
c)	Premisa 1	Si Rogelio estudia, entonces aprobará matemática
	Premisa 2	Si Rogelio no juega tenis, entonces estudiará
	Premisa 3	Rogelio desaprobó matemática
	Conclusión	Rogelio juega tenis
d)	Premisa 1	Rita está horneando un pastel
	Premisa 2	Si Rita está horneando un pastel, entonces no está practicando la flauta
	Premisa 3	Si Rita no está practicando la flauta, entonces su padre no pagará el seguro de su auto
	Conclusión	Por lo tanto, el padre de Rita no pagará el seguro del auto
e)	Premisa 1	Si Alejandro recibe un aguinaldo, entonces viajará a Buenos Aires.
	Premisa 2	Si Alejandro viaja a Buenos Aires, entonces visitará El Tigre
	Conclusión	Por lo tanto, si Alejandro recibe un aguinaldo, entonces visitará El Tigre

14. Estudia la validez del siguiente razonamiento utilizando una de las técnicas estudiadas.

Juan está cansado o enfermo.
Si Juan está cansado, entonces se queda en casa.
No se queda en casa.
Luego: está enfermo.

15. Averigua quiénes están viendo televisión sabiendo que:

Si Alberto ve la TV, Carlos también.
Pueden estar viendo TV Belén o Carlos.
O Alberto o Carlos ven TV, pero no ambos.
Carlos ve TV si y sólo si la ve Belén.

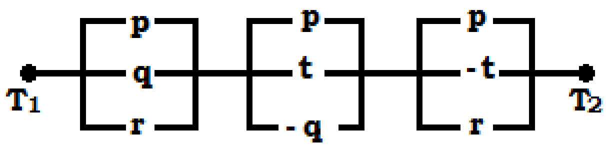
16. Para genios.

En el fondo de un viejo armario descubres una nota escrita por un pirata famoso por su sentido del humor y su afición a los acertijos lógicos. En la nota dice que ha escondido un tesoro en algún lugar de una propiedad. El pirata enumera cinco enunciados todos ellos verdaderos y te reta a que descubras dónde está el tesoro. He aquí los enunciados:

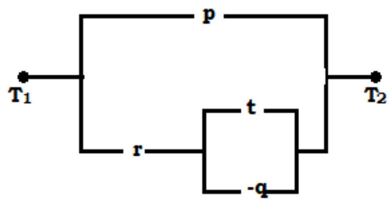
- Si la casa está cerca de un lago, el tesoro no está en la cocina.
- Si el árbol de la entrada es un olmo, el tesoro está en la cocina.
- La casa está cerca de un lago.
- El árbol de la entrada es un olmo o el tesoro está enterrado debajo del mástil.
- Si el árbol de la entrada es un roble, el tesoro está en el garaje.

17. Representa las siguientes redes mediantes proposiciones, luego simplifícalas y confecciona el circuito. Comprueba confeccionando ambas tablas de verdad que la simplificación es correcta o emplea otro tipo de razonamiento.

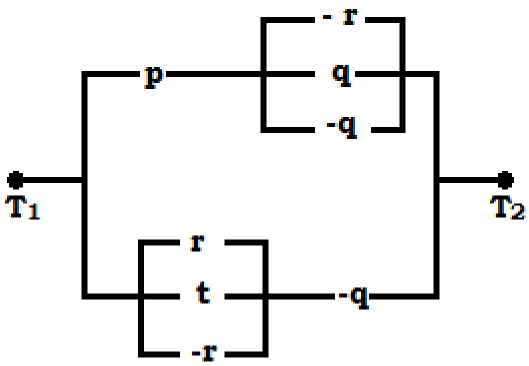
a)



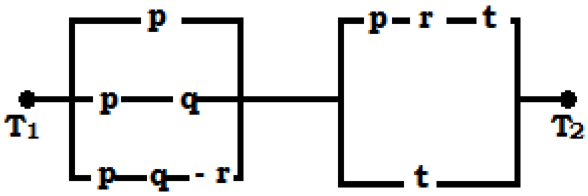
b)



c)



d)



18. Confecciona los circuitos lógicos de las expresiones simplificadas de las proposiciones del ejercicio 11 (en caso de ser posible).

Trabajo Práctico Nº1 (de entrega obligatoria)

I. Estudia la validez del siguiente razonamiento: “Si descubro las ruinas de la Atlántida, seré un arqueólogo famoso. Si encuentro las minas del rey Salomón, me haré rico. O bien encuentro las minas del rey Salomón o bien encuentro las ruinas de la Atlántida. *Luego*, me haré rico o seré un arqueólogo famoso”

II. Cuáles de las siguientes expresiones son lógicamente equivalentes a $(\neg p \vee \neg q) \wedge r$

a) $p \rightarrow (\neg q \wedge r)$

b) $(p \rightarrow q) \wedge r$

c) $(p \rightarrow \neg q) \wedge r$

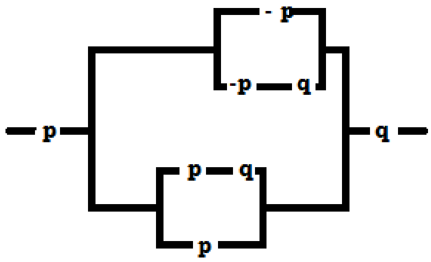
d) $p \rightarrow (q \vee r)$

III. Simplifica:

i. $(\sim q \leftrightarrow r) \vee \sim r$

ii. $p \wedge [(q \wedge \sim p) \rightarrow (p \vee \sim q)]$

IV. Traduce a lenguaje simbólico, simplifica y confecciona el nuevo circuito. Verifica que la simplificación sea correcta.



Teoría de conjuntos

En el curso de ingreso se introdujo el concepto de conjunto como una colección de elementos diferentes. Se vio que los elementos se representan con letras minúsculas y los conjuntos con mayúsculas. Se definiceron las operaciones de complemento, intersección, unión, diferencia y diferencia simétrica entre dos conjuntos. Ahora se amplía el análisis a 3 conjuntos y la aplicación de las leyes lógicas a la teoría de conjuntos.

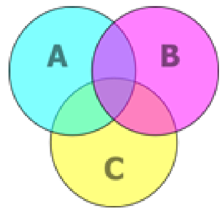
Operaciones con tres conjuntos

Unión

Dados los conjuntos $A, B\ y\ C$, la unión entre ellos:

$$A \cup B \cup C = \{x/x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$$

es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al menos a alguno de los tres conjuntos.



$A \cup B \cup C$

Intersección

Dados los conjuntos $A, B\ y\ C$, la intersección entre ellos:

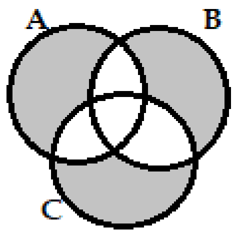
$$A \cap B \cap C = \{ x/x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C \}$$

es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a la vez a ambos conjuntos.

$A \cap B \cap C$

Diferencia simétrica

$$A \Delta B \Delta C \equiv \left(A \cap \overline{B \cup C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A \cup C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A \cup\cup B}\right)$$



Numeral de la unión de conjuntos

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

$$\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

Propiedades comunes a la unión e intersección de conjuntos

	Unión	**Intersección**
Idempotencia	$A \cup A$	$A \cap A$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$

Asociativa	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
Absorción	$A\cup(A\cap B)=A$	$A\cap(A\cup B)=A$
Distributiva	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Además, si $B\subset A$, $A\cup B=A$ y $A\cap B=B$

Propiedades del complemento de un conjunto

Complementación	$A\cup\overline{A}=U$ y $A\cap\overline{A}=\phi$
Doble complementación	$\overline{\overline{A}}=A$
Leyes de De Morgan	$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ y $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$
Complementación de U y ϕ	$\overline{U}=\phi$ y $\overline{\phi}=U$

Propiedades del Álgebra de Conjuntos

Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C incluidos en un conjunto referencial U, se cumplen las siguientes propiedades:

Unión		**Intersección**
$A\cup A=A$	**Idempotencia**	$A\cap A=A$
$A\cup B=B\cup A$	**Conmutativa**	$A\cap B=B\cap A$
$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$	**Asociativa**	$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$
$A\cup(A\cap B)=A$	**Absorción**	$A\cap(A\cup B)=A$
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ Unión respecto intersección	**Distributiva**	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ Intersección respecto unión
$A\cup\overline{A}=U$	**Complementación**	$A\cap\overline{A}=\phi$
$A\cup\phi=A$ ϕ es elemento neutro de la unión	**Identidad**	$A\cap U=A$ U es elemento neutro de la intersección
$A\cup U=U$	**Identidad de Universal y vacío**	$A\cap\phi=\phi$

Por cumplir las propiedades anteriores, el conjunto P(U), con las operaciones unión e intersección y las propiedades de la complementación , tiene una estructura de álgebra de Boole.

Relación entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional

Existe una relación muy estrecha entre la Teoría de Conjuntos y la Lógica Proposicional. Para mostrar dicha relación, denotemos por letras mayúsculas A,B ... los conjuntos y por las correspondientes minúsculas a,b ... sus propiedades características (es decir, la proposición lógica que caracteriza a los elementos de cada conjunto); entonces se tiene la siguiente correspondencia:

Conjuntos	$A\subseteq B$	$A=B$	$A\cup B$	$A\cap B$	$\overline{A}$	$A-B$	$A\,\Delta\,B$
Proposiciones	$a\to b$	$a\leftrightarrow b$	$a\vee b$	$a\wedge b$	$\neg a$	$a\wedge\neg b$	$a\,\underline{\vee}\,b$

Además, el conjunto vacío se corresponde con una **contradicción** y el conjunto universal con una **tautología.** Mediante esta correspondencia, todos los resultados sobre conjuntos se pueden reescribir en términos de lógica proposicional y viceversa; a modo de ejemplo:

$A \cup (A \cap B) = A$	$a \vee (a \wedge b) \leftrightarrow a$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}$	$\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg$

Ejercicios

1. Demuestra utilizando diagramas de Venn las siguientes propiedades: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2. Dados los conjuntos: A ={1, 2 , 3 , 4 } ; B = { 2,4,5 } ; C = { 3,5,7 } Señala qué operación deberá efectuarse para que el resultado sea el conjunto { 3, 5 } .

3. Sean los conjuntos: P = { x $\in$ N / x es divisor de 12 } y Q = { x $\in$ N / x es divisor de 24 } ¿Cuál de las siguientes alternativas es incorrecta ?

   a) P $\cup$ Q = { 1, 2, 3, 4, 6, 8,12, 24 }
   b) P ∩ Q = { 1, 2, 3, 4, 6, 12 }
   c) P $\subseteq$ Q
   d) P - Q = { 8, 24 }
   e) (Q - P) $\cup$ (P - Q) = { 8, 24 }

4. Si el conjunto A está dado por: A = {p$\in$ N / p es número primo y 1< p < 10} si U = N, entonces, $\overline{A}$ =?

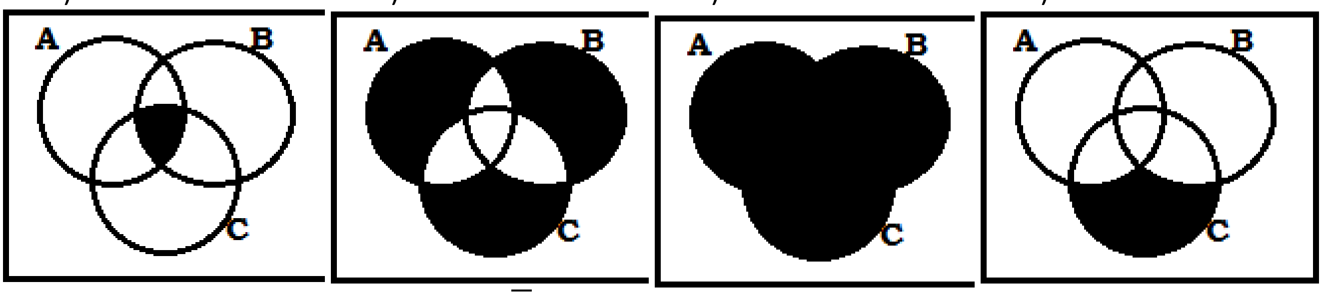
5. Dados los conjuntos: A = { x $\in$ N / x es múltiplo de 2 } y B = { x $\in$ N / x es múltiplo de 3 } entonces, se puede afirmar que :

   a) A $\cup$ B = {múltiplos de 5 }
   b) A ∩ B = {múltiplos de 5 }
   c) A $\cup$ B = {múltiplos de 6 }
   d) A ∩ B = { 6, 12, 18, 24,… }
   e) A - B = { −1 }

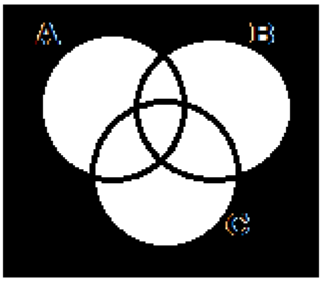
6. Asocia cada operación con la gráfica correspondiente:

$$A \Delta B \Delta C \ ; \ B \cup (A \cap C) \ ; \ A \cap B \cap C \ ; \ \overline{A \cup B \cup C} \ ; \ A \cup B \cup C \ ; \ \overline{A \cup B} \cap C \ ; \ faltan\ dos, cuáles\ son?$$

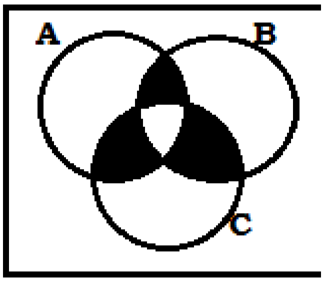
a) b) c) d)



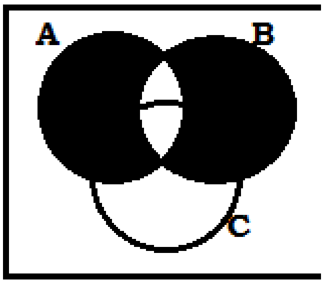
e)



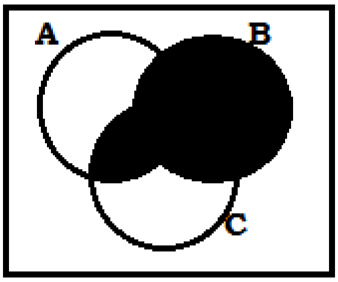
f)



g)



h)



7. Se hizo una evaluación de control de calidad a un lote de 50 equipos de cómputo en malas condiciones de fabricación. Los criterios analizados fueron: H: defecto en el disco duro. B: defecto en la placa base (board) Se observó que los equipos con mal funcionamiento en ambos dispositivos, disco duro y board, son el doble de los que sólo tienen disco duro dañado; mientras que los que sólo tienen desperfecto en board son 23 equipos.

a) Vuelca la información en diagramas de Venn (recuerda: si te falta algún dato usa una letra que lo represente).

b) Encuentra el número de equipos con desperfecto en disco duro y el número de equipos con daño en ambos dispositivos.

8. De un total de 135 alumnos que se presentaron a rendir examen de matemática (M); física (F) y química (Q) se obtuvo el siguiente cuadro de aprobados:

38 F	12 M y F	4 M, F y Q
52 M	10 Q y F	
35 Q	14 M y Q	

a) ¿Cuántos alumnos no aprobaron ningún examen?
b) ¿Cuántos alumnos aprobaron solamente física?
c) ¿Cuántos alumnos aprobaron matemática y química exclusivamente?

9. Una academia enseña francés, inglés y alemán. Tiene 90 alumnos. Algunos estudian un solo idioma y otros dos. Hay 13 alumnos que estudian inglés y francés, 5 que estudian inglés y alemán, 4 que estudian francés y alemán, 28 que solamente estudian francés. La lista del curso de inglés tiene 52 alumnos. Responder:

a) ¿Cuántos estudian sólo inglés?
b) ¿Cuántos estudian sólo alemán?

10. En cuanto al consumo de semillas de lino, sésamo y chía, se sabe que: 10 personas sólo consumen las de lino; 15 personas sólo consumen las de sésamo; 25 personas sólo consumen las de chía; 7 consumen lino y chía pero no sésamo; 9 sésamo y chía pero no lino. Además $L \cap S \cap \bar{C} = \emptyset \ y \ \overline{L \cup S \cup C} = 2$. Si el total de encuestados fue de 75 personas, ¿cuántas personas consumen las tres semillas?

11. Una encuesta sobre 200 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo de tres productos A , B y C : 5 personas consumían sólo A ; 25 personas consumían sólo B; 10 personas consumían sólo C ; 15 personas consumían A y B, pero no C; 80 personas consumían B y C,

pero no A; 8 personas consumían C y A, pero no B; 17 personas no consumían ninguno de los tres productos. Responder:

a) ¿Cuántas personas consumían A?
b) ¿Cuántas personas consumían B?
c) ¿Cuántas personas consumían C?
d) ¿Cuántas personas consumían A, B y C?
e) ¿Cuántas personas consumían por lo menos uno de los tres productos?
f) ¿Cuántas personas consumían A o B?
g) ¿Cuántas personas no consumían C?
h) ¿Cuántas personas no consumían ni C ni A?

12. Un profesor tiene dos docenas de libros de introducción a las ciencias de la computación y está interesado en la forma en que tratan los temas (A) compiladores, (B) estructuras de datos y (C) intérpretes. Los siguientes datos representan la cantidad de libros que contienen material relativo a estos temas:
$n(A) = 8\,; n(B) = 13\,; n(C) = 13\,; n(A \cap B) = 5\,; n(A \cap C) = 3\,; n(B \cap C) = 6$ y $A \cap B \cap C = 2$

a) ¿Cuántos libros incluyen el material de exactamente uno de estos temas?
b) ¿Cuántos no tratan ninguno de estos temas?
c) ¿Cuántos no tienen material sobre compiladores?

13. En un aula hay un cierto número de alumnos que hemos de determinar. Se sabe que cada uno de los alumnos presentes en el aula estudia, al menos, una de las tres asignaturas siguientes: Matemática, Física, Química. Pues bien, en sucesivas veces se pide que levanten la mano los que estudian:

- ✓ Matemática, y lo hacen 48.
- ✓ Física, y lo hacen 45.
- ✓ Química, y lo hacen 49.
- ✓ Matemática y Física, y lo hacen 28.
- ✓ Matemática y Química, y lo hacen 26.
- ✓ Física y Química, y lo hacen 28.
- ✓ Las tres asignaturas, y lo hacen 18.

Se pregunta:

a) ¿Cuántos alumnos hay en el aula?
b) Cuántos estudian $(M \cap F) \cap \bar{Q}$?
c) ¿Cuántos estudian nada más que Química?

14. Una empresa de servicios medioambientales va a ampliar su red comercial, y por ello necesita incorporar a 25 comerciales. La empresa requiere fundamentalmente personas que posean, al menos, una de las siguientes características: Alguna experiencia en el área de ventas (A); Formación técnica (F); Conocimientos de inglés (I). En concreto, la empresa ofrece:

- ✓ 12 puestos para los de la característica (A).
- ✓ 14 para los de la (F)
- ✓ 11 para los de la (I)

- ✓ la empresa quiere que 5 comerciales posean las características (A) y (F)
- ✓ que 3 comerciales posean (A) e (I)
- ✓ que 6 comerciales posean (F) e (I)

Se pregunta:

a) ¿Cuántos de esos 25 comerciales quiere la empresa que posean las tres características citadas?

b) A cuántos comerciales se les exige nada más que la característica: ¿tener conocimientos de inglés?

c) Cuántos $(A \cap I) \cap \bar{F}$?

d) ¿Cuántos comerciales tienen nada más que una de las características pedidas?

15. De 1000 televidentes encuestados se obtiene la siguiente información:

- ✓ 391 ven programas deportivos.
- ✓ 230 ven programas cómicos.
- ✓ 545 ven programas sobre el mundo animal.
- ✓ 98 ven programas cómicos y deportivos.
- ✓ 152 ven programas cómicos y mundo animal.
- ✓ 88 ven programas deportivos y mundo animal.
- ✓ 90 no ven ninguno de esos tres programas.

Se pregunta:

a) ¿Cuántos entrevistados ven los tres tipos de programas?

b) ¿Cuántos ven sólo uno de los tres tipos?

c) ¿Cuántos ven al menos un programa?

d) ¿Cuántos ven a lo sumo 2 programas?

e) ¿Cuántos ven sólo 2 programas?

Trabajo práctico Nº2: Conjuntos (de entrega obligatoria)

I. Demuestra que $a \vee (a \wedge b) \leftrightarrow a$ relacionando las leyes de la lógica proposicional con las de la teoría de conjuntos.

II. Una encuesta realizada a un grupo de empleados reveló que

- ✓ 277 tenían casa propia.
- ✓ 233 poseían auto.
- ✓ 405 tenían TV.
- ✓ 165 auto y TV.
- ✓ 120 auto y casa.
- ✓ 190 casa y TV.
- ✓ 105 casa, auto y TV.

a) ¿Cuántas personas fueron encuestadas?
b) ¿Cuántas tienen sólo casa propia?
c) ¿Cuántas tienen sólo casa y TV?

III. De una muestra de 42 estudiantes de la carrera de Informática se obtuvo el siguiente número de desaprobados por materia: Matemática para Computación 28; Fundamentos de Programación 26; Administración 17; Matemática para Computación y Fundamentos de programación 16; Fundamentos de Programación y Administración 12; Matemática para Computación y Administración 8; desaprobaron las tres materias 4. Vuelca la información en un diagrama de Venn y responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántos estudiantes no desaprobaron ninguna de las materias mencionadas?
b) ¿Cuántos estudiantes desaprobaron solamente Fundamentos de Programación?
c) ¿Cuántos estudiantes desaprobaron solamente alguna de las tres materias?
d) ¿Cuántos estudiantes desaprobaron Matemática para Computación y Fundamentos de P, pero no Administración?

Cálculo Combinatorio

Introducción

La combinatoria o cálculo combinatorio brinda técnicas para contar la cantidad de ordenaciones o selecciones que se pueden efectuar con los elementos de un conjunto.

Se utilizan para encontrar por ejemplo la cantidad de grupos de 5 personas que se pueden formar con un total de 20, la cantidad de contraseñas de diferentes caracteres que se pueden formar con un total de letras o números, etc

La herramienta a utilizar depende de las características del problema, depende de si estamos ordenando los elementos o si simplemente los estamos agrupando, si tenemos en cuenta todos los elementos en las ubicaciones o si solo algunos, entre otras cosas.

Este tema tiene aplicaciones en áreas como la teoría de códigos, la probabilidad y estadística y el análisis de algoritmos. Es importante que le prestes la atención que merece porque lo aplicarás en otras materias dela Tecnicatura.

Antes de entrar de completamente en el tema y la resolución de problemas, definimos algunos conceptos fundamentales:

Notación de suma ∑ (sumatoria)

Indica que vamos a sumar una determinada cantidad de términos que siguen una regla.

Ejemplo1: $\sum_{n=1}^{4} n$ = 1+2+3+4= 10, indica que sumamos 4 términos donde la expresión es "n" y varía su valor desde 1 hasta 4. Se lee: "sumatoria de "n" variando desde 1 hasta 4"

Ejemplo 2: Calcula $\sum_{n=1}^{5} 2n+1 = (2.1+1)+(2.2+1)+(2.3+1)+(2.4+1)+(2.5+1) = 3+5+7+9 = 24$

Factorial de un número: n!

Proviene de la palabra "factor = multiplicación", y consiste en calcular el producto decreciente de un número.

Por ejemplo: el factorial de 3 se calcula efectuando 3.2.1 = 6 y se simboliza 3!

En general: $n! = n.(n-1).(n-2).(n-3)....3.2.1$

Se define el factorial de 0 (cero) igual a 1, es decir, $0! = 1$

Si Efectuamos por ejemplo $5! = 5.4.3.2.1$, observamos que $5! = 5.4!$ entonces definimos $n! = n.(n-1)!$, propiedad muy importante en la simplificación de expresiones que contienen factoriales.

Número combinatorio: $\binom{m}{n}$

Número combinatorio se define al resultado del siguiente cálculo: $\binom{m}{n}=\frac{m!}{n!(m-n)!}$ y representa la herramienta principal para calcular las diferentes agrupaciones que se pueden hacer con los elementos de un conjunto, entre otras cosas.

Propiedades

1) $\binom{m}{0}=1$, se demuestra aplicando la fórmula: $\binom{m}{0}=\frac{m!}{0!.(m-0)!}\frac{m!}{1.m!}=1$

2) $\binom{m}{m}=1$, aplicando la fórmula por definición: $\binom{m}{m}=\frac{m!}{m!.(m-m)!}=\frac{m!}{m!.0!}=\frac{m!}{m!}=1$

3) $\binom{m}{1}=m$, por la definición: $\binom{m}{1}=\frac{m!}{1!.(m-1)!}=\frac{m.(m-1)!}{1!.(m-1)!}=m$

4) $\binom{m}{n}=\binom{m}{m-n}$, por la definición:

$$\binom{m}{m-n}=\frac{m!}{(m-n)!.(m-(m-m))!}=\frac{m!}{(m-n)!.(m-m+n)!}=\frac{m!}{(m-n)!n!}=\binom{m}{n}$$

Ejercicios

1. Determina el resultado de las siguientes sumas:

   a) $\sum_{i=0}^{5}\left(\frac{i}{i+1}\right)$ b) $\sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ c) $\sum_{h=0}^{5}\frac{h+1}{2h-1}$

2. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

   a) $\frac{12!}{11!}=$ b) $\frac{12!}{10!}=$ c) $\frac{9!.12!}{10!.8!}=$ d) $\frac{4!.6!}{(2^3)!}=$

   e) $\frac{3!}{3!-3}=$ f) $\frac{3!.5-6!}{2!}=$ g) $\frac{4.5!-3.5!}{5!}=$ h) $\frac{4.5!-3!}{3!}=$

3. Desarrolla y simplifica las siguientes expresiones:

   a) $\frac{n!}{(n-1)!}=$ b) $\frac{(n+1)!}{n!}=$ c) $\frac{(n+2)!}{(n+1)!}=$

   d) $\frac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}=$ e) $\frac{n!(n-2)!}{(n-4)!(n-1)!}=$ f) $\frac{(2n)!}{(2n-1)!}=$

4. Verifica las propiedades resolviendo los siguientes números combinatorios:

   a) $\binom{5}{0}=$ b) $\binom{3}{1}=$ c) $\binom{5}{4}=$ d) $\binom{4}{4}=$

5. Aplica las propiedades de los números combinatorios para hallar el valor de la incógnita en cada caso. Presta mucha atención, en algunos casos puede haber dos valores de x que satisfagan la igualdad.

a) $\binom{7}{0}=\binom{7}{x}$ b) $\binom{7}{2}=\binom{x}{5}$ c) $\binom{7}{x}=\binom{7}{5}$ d) $\binom{7}{x}=1$

e) $\binom{x}{6}=\binom{x}{1}$ f) $\binom{7}{5}=\binom{7}{x}$ g) $\binom{7}{0}=x$ h) $\binom{7}{7}=x$

i) $\dfrac{\binom{5}{3}.\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=x$ j) $\dfrac{\binom{5}{1}.\binom{5}{x}}{\binom{5}{4}}=\binom{5}{3}$ k) $\dfrac{\binom{6}{2}.\binom{x}{4}}{\binom{x}{2}}=\binom{6}{4}$ l) $\binom{7}{x^2}=\binom{7}{x+1}$

Principios de conteo

Reglas de la suma y del producto

Para comprender estas reglas comenzaremos citando un par de problemas:

I. La biblioteca de la Universidad tiene 40 libros de Matemáticas y 55 de Programación. Un estudiante puede elegir entre 40+55=95 libros de texto para aprender acerca de alguno de estos temas (hemos aplicado la regla de la suma).

II. Un instructor de ciencias de la computación que tiene, digamos, cinco libros de nivel introductorio acerca de APL, BASIC, FORTRAN y PASCAL puede recomendar cualquiera de estos 20 libros a un estudiante interesado en aprender un primer lenguaje de programación (la regla de la suma puede ampliarse a más de dos tareas, *siempre que ninguna pareja de tareas pueda ocurrir en forma simultánea*).

III. Digamos que el instructor del ejemplo anterior tiene dos colegas. Uno de ellos tiene tres libros de texto acerca del análisis de algoritmos y el otro cuenta con cinco libros. si $\boldsymbol{n}$ denota el número máximo de libros diferentes sobre el tema que el instructor puede pedirles prestados, entonces: $5 \leq n \leq 8$

¿Por qué entre 5 y 8? Porque ambos profesores podrían tener copias del mismo libro o libros (regla de la suma).

IV. El instructor de deportes ha seleccionado a 3 mujeres y a 4 varones para participar en los próximos torneos de tenis. ¿De cuántas formas el instructor puede elegir a la pareja principal que será integrada por un chico y una chica?

Solución:

Recordemos lo que sugiere R. Grimaldi y tratemos de resolver este problema. Llamemos M1, M2 y M3 a las 3 mujeres y V1, V2, V3 y V4 a los 4 varones. Las opciones serán:

$$V1\begin{cases}M1\\M2\\M3\end{cases} \quad V2\begin{cases}M1\\M2\\M3\end{cases} \quad V3\begin{cases}M1\\M2\\M3\end{cases} \quad V4\begin{cases}M1\\M2\\M3\end{cases} \quad suman\ \ 12\ opciones, 3.4 = 12$$

Aplicamos la regla del producto.

V. Al tratar de tomar una decisión acerca de la ampliación de una planta, un administrador organiza a 12 de sus empleados en dos grupos. El grupo A está formado por cinco miembros y está encargado de investigar los resultados favorables posibles de dicha ampliación. El resto de los empleados, grupo B, revisarán todas las posibles repercusiones desfavorables. Si el administrador decide hablar sólo con un grupo antes de tomar su decisión, entonces, por la regla de la suma, existirán 12 empleados a los que puede llamar. Pero, para quedarse más tranquilo, antes de tomar una decisión, decide hablar con un miembro del grupo A el lunes y el martes con uno del grupo B. ¿De cuántas formas podrá dialogar con ellos?

Solución: Aplicando la regla del producto: $5.7 = 35$ formas.

En algunas de las primeras versiones del lenguaje de programación BASIC, el nombre de una variable consta de una sola letra (A,B,C,…) o una sola letra seguida de un solo dígito. Como la computadora no distingue entre las letras mayúsculas y las minúsculas, a y A se consideran como el mismo nombre de variable, así como también E7 y e7. Por la regla del producto, existen 26.10=260 (26 letras del abc por los 10 dígitos del sistema decimal) nombras de variables que constan de una letra seguida por un dígito; y como hay 26 nombres de variables que constan de una sola letra, por la regla de la suma existen 260+26=286 nombres de variables en este lenguaje de programación (A veces es necesario combinar varios tipos diferentes de conteo en la solución de un problema).

Permutaciones simples y con repetición

Para seguir aplicando la regla del producto, contaremos ahora disposiciones lineales de objetos, conocidas como **permutaciones**, cuando los objetos son distintos. Las permutaciones se utilizan para ordenar todos los elementos de un conjunto. Por ejemplo para formar con cinco dígitos números de cinco cifras. La forma de calcular una cantidad de ordenaciones depende de si los elementos se pueden utilizar más de una vez o no.

I. Cuatro amigos van al teatro. Deciden buscar 4 butacas libres (que estén alineadas) para sentarse juntos (uno por butaca). ¿De cuántas maneras lo podrán hacer?

Solución:

Amigo que elige primero su butaca	Cantidad de opciones para cada amigo
A1	4
A2	3
A3	2
A4	1
	Total: 4.3.2.1=24=4!

II. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1,2,3?

Solución: Vemos que “permutando”, es decir, cambiando el orden de las cifras obtenemos 6 números diferentes de 3 cifras en los que aparecen solo los dígitos 1, 2,3.

123 132 213 231 321 312

La permutación simple, es decir sin repetición se calcula con el factorial de la cantidad de elementos, para este caso tenemos 3 elementos para permutar por lo tanto es el factorial de 3, es decir $3! = 6$

III. ¿Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3,4, 5,6?

Solución:

Supongamos que queremos hallar todos los números de tres cifras que comiencen con 1, como las cifras deben ser distintas ya que así lo pide la consigna, el segundo dígito no puede ser el 1. Para el tercer dígito quedan cuatro opciones: 3,4,5,6. Entonces todos los números de tres cifras que comiencen con 1 son:

$$1\left\{\begin{array}{l} 2\begin{cases}3\\4\\5\\6\end{cases}\\ 3\begin{cases}2\\4\\5\\6\end{cases}\\ 4\begin{cases}2\\3\\5\\6\end{cases}\\ 5\begin{cases}2\\3\\4\\6\end{cases}\\ 6\begin{cases}2\\3\\4\\5\end{cases}\end{array}\right.$$

123	132	142	152	162
124	134	143	153	163
125	135	145	154	164
126	136	146	156	165

$$2\left\{\begin{array}{l} 1\begin{cases}3\\4\\5\\6\end{cases}\\ 3\begin{cases}1\\4\\5\\6\end{cases}\\ 4\begin{cases}1\\3\\5\\6\end{cases}\\ 5\begin{cases}1\\3\\4\\6\end{cases}\\ 6\begin{cases}1\\3\\4\\5\end{cases}\end{array}\right.
\quad 3\left\{\begin{array}{l} 1\begin{cases}2\\4\\5\\6\end{cases}\\ 2\begin{cases}1\\4\\5\\6\end{cases}\\ 4\begin{cases}1\\2\\5\\6\end{cases}\\ 5\begin{cases}1\\2\\4\\6\end{cases}\\ 6\begin{cases}1\\2\\4\\5\end{cases}\end{array}\right.
\quad 4\left\{\begin{array}{l} 1\begin{cases}2\\3\\5\\6\end{cases}\\ 2\begin{cases}1\\3\\5\\6\end{cases}\\ 3\begin{cases}1\\2\\5\\6\end{cases}\\ 5\begin{cases}1\\2\\3\\6\end{cases}\\ 6\begin{cases}1\\2\\3\\5\end{cases}\end{array}\right.
\quad 5\left\{\begin{array}{l} 1\begin{cases}2\\3\\4\\6\end{cases}\\ 2\begin{cases}1\\3\\4\\6\end{cases}\\ 3\begin{cases}1\\2\\4\\6\end{cases}\\ 4\begin{cases}1\\2\\3\\6\end{cases}\\ 6\begin{cases}1\\2\\3\\4\end{cases}\end{array}\right.
\quad 6\left\{\begin{array}{l} 1\begin{cases}2\\3\\4\\5\end{cases}\\ 2\begin{cases}1\\3\\4\\5\end{cases}\\ 3\begin{cases}1\\2\\4\\5\end{cases}\\ 4\begin{cases}1\\2\\3\\5\end{cases}\\ 5\begin{cases}1\\2\\3\\4\end{cases}\end{array}\right.$$

Observa que en cada uno de estos grupos hay 20 números de tres cifras (sin repetir), da un total de: 20.6=120.

Ahora que comprendemos cómo se trabaja con las permutaciones de n elementos sin utilizar todos ellos, podemos pensar en resolver el problema de otra manera más breve. Para elegir el primer dígito tenemos 6 opciones, para el segundo 5 y para el tercero 4 (ya que no se permiten repeticiones):

$$6.5.4 = 120\ disposiciones$$

$$\boldsymbol{P_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!} = V_{n,r}\ \ (n \geq r)}$$

Llamadas ***variaciones*** de n elementos tomados de a r. Recuerda que 0!=1.

Volviendo al ejemplo:

$$P_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.3!}{3!} = 120$$

Si trabajamos con todos los elementos:

$$\boldsymbol{P_n = n!\quad permutaciones\ sin\ repetici\acute{o}n}$$

IV. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4,5,6?

Solución:
Observa que en este caso no se pide que las cifras sean distintas, por lo tanto se pueden repetir. Analicemos las disposiciones de estos números que comiencen con 1, 2 ó 3:

$$1\begin{cases}1\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\2\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\3\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\4\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\5\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\6\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\end{cases}\qquad 2\begin{cases}1\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\2\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\3\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\4\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\5\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\6\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\end{cases}\qquad 3\begin{cases}1\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\2\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\3\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\4\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\5\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\\6\begin{cases}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{cases}\end{cases}$$

Observa que en cada árbol hay 36 números, quiere decir que el total de los números buscados es:

$$\mathbf{36.6 = 6^3 = 216}$$

$$\boldsymbol{P'_{n,r} = n^r}$$

$$en\ este\ ejemplo: n = 6\ y\ r = 3$$

V. ¿Cuántos anagramas con o sin sentido podemos formar con las letras de la palabra BALL? 12 o 24?

Solución:
En este caso, no estamos trabajando con cuatro letras distintas, ya que hay dos letras L. entonces, cuando cambiemos las L ,por ejemplo, de la opción: ABLL, no se producirá cambio alguno. Analicemos:

ABLL	BALL	LABL	LALB
ALBL	BLAL	LBAL	LLAB
ALLB	BLLA	LBLA	LLBA

Si nos encontramos en la situación de querer ordenar una determinada cantidad de elementos pero en ellos se encuentran alguno más de una vez, es decir se encuentra repetido, la **permutación se llama con repetición** y se utiliza la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{P'_{n_1,n_2,\dots} = \frac{(n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k)!}{n_1!.\,n_2!.\,n_3!\,\dots n_k!}}$$

Donde $n_1!, n_2!, n_3! \dots n_k!$ representan la cantidad de veces que aparece repetido el elemento. En nuestro ejemplo, sólo se repite la letra L dos veces, entonces, aplicando esta fórmula:

$$P'_{1,1,2} = \frac{(1+1+2)!}{1!\,.1!\,.2!} = \frac{4!}{2!} = 12$$

Otro tipo de permutación que se utiliza es la llamada **Permutación Circular** que consiste en permutar (ordenar) elementos los cuales se ubican en forma de círculo.

$$\boldsymbol{P'_{n-1} = (n-1)!}$$

VI. Se deben colocar en un instante 4 libros de Matemática de diferentes autores y 3 de Física, también de diferentes autores. De cuántas maneras los podrás colocar si:

a) ¿Puedes ubicarlos como quieras?
b) ¿Los de Física han de estar juntos?
c) ¿Los de cada materia deben estar juntos?

Solución:

a) La cantidad total de libros es 7, por lo tanto las posibles ordenaciones serán: $P_7 = 7!$
b) Los 3 de Física deben estar juntos, pienso en ellos como si fueran los 3 un solo libro; de esta manera tendremos 1+4=5 unidades para permutar. Como los 3 que están juntos pueden ordenarse de 6 maneras (3!), el total de ordenaciones será:

$$P = 5!.3! = 720$$

c) $P = 2!.4!.3! = 288$

VII. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 3 personas alrededor de una mesa redonda?

Solución: A este problema lo resolveremos en clase.

$$Permutación\ circular\ P_{C,n} = (n-1)!$$

Ejercicios

Permutaciones: Resuelve los siguientes problemas.

i. ¿Cuántos códigos de 5 dígitos se pueden formar utilizando los dígitos del 0 al 4 sin repetir?

ii. ¿De cuántas maneras se pueden alinear 6 cuadros en una pared?

iii. ¿De cuantas maneras diferentes se pueden instalar 4 computadoras en línea en una sala?

iv. Martín tiene 5 libros desea leerlos (de a uno a la vez). ¿Cuántas opciones tiene, en cuanto al orden de lectura?

v. ¿Cuántos números de tres cifras distintas pueden formarse con los dígitos 3, 5 y 8?
   a) ¿Cuántos de ellos son pares?
   b) ¿Cuántos son menores que 500?
   c) ¿Cuántos son menores que 800?

vi. El empleado de una librería desea ubicar en fila, en uno de los estantes de una vitrina, 11 libros diferentes sobre un mismo tema. a) ¿De cuántas maneras diferentes puede el empleado ubicar los libros? b) ¿De cuántas formas puede el empleado acomodar los libros si decide que los 5 libros del mismo autor deben estar juntos?

vii. En un recital a beneficio en una escuela, van a cantar 9 bandas de rock y aún no se ha determinado en qué orden los harán. a) ¿De cuántas maneras se puede ordenar la aparición de las bandas? b) ¿Si la banda oficial de la escuela debe cantar en último lugar, cuántas formas hay de ordenar la aparición de las bandas?

viii. ¿Cuántos números de seis cifras distintas se pueden formar con los dígitos 2, 3, 4, 5, 8 y 9?
   a) ¿Qué cantidad de esos números comienzan con dos?
   b) ¿Cuántos de los números correspondientes al ítem a) tienen como última cifra al 9?

ix. ¿De cuántas maneras se pueden poner en fila 5 fichas de colores distintos?

x. Cuatro libros diferentes de matemáticas, 6 de física y 2 de química han de ser colocados en una estantería. ¿Cuántas colocaciones distintas admiten si:
   a) los libros de cada materia han de estar juntos
   b) sólo los de matemáticas han de estar juntos?

xi. Juan decide organizar su semana: dedicará 3 días a trabajar, 2 a estudiar y 2 a descansar. ¿Cuántas opciones tiene?

xii. ¿De cuántas formas se pueden sentar 7 personas en una mesa redonda si: a) son libres de elegir el asiento que deseen y b) 2 personas particulares no pueden sentarse juntas?

xiii. ¿Cuántas palabras con o sin sentido se pueden formar con la palabra ODONTOLOGO? ¿Y con MASSASAUGA?

Variaciones

xiv. ¿De cuántas maneras se pueden sentar 10 personas en un banco si hay 4 sitios disponibles?

xv. ¿Cuántas contraseñas diferentes de 3 letras se pueden formar con las 26 del abecedario sin repetir letras? ¿Y si se puede repetir?

xvi. ¿Cuántos números de cinco cifras distintas pueden formarse con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 6 y 8?

xvii. Diez corredores participan en una competencia de atletismo. Si se dan premios para los tres primeros puestos, ¿de cuántas maneras distintas puede ocuparse el podio?

xviii. Con el sistema de patentamiento automotor utilizado en la Argentina a partir de 1995, ¿cuántas son las posibles patentes diferentes si no se utiliza la ñ? Datos: en total serían 26 letras del abecedario y tres números del 0 al 9

xix. Un barco dispone de 8 banderas. ¿Cuántas señales diferentes de 3 banderas puede mostrar si cada señal se coloca verticalmente en un mástil?

xx. El código de una alarma está formado por cuatro dígitos. Si se sabe que uno de esos números es el 8, ¿cuántos códigos diferentes pueden armarse si los dígitos no se repiten? ¿Y si se repiten?

xxi. ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con las cifras 2,3,4 y 5 usando cada cifra una sola vez? ¿Y si se pueden repetir las cifras?

xxii. ¿Si en una carrera participan 8 corredores, de cuántas maneras pueden distribuirse el primero, segundo y tercer puesto?

xxiii. María tiene 5 calcomanías, y desea pegar una en el vidrio de delante de su auto, y otra en el vidrio de atrás. ¿Cuántas decisiones distintas puede tomar?

xxiv. Juan está loco. A veces cree que es Napoleón, a veces cree que es astronauta, y a veces cree que un día lo secuestraron los marcianos. Si le hacen peritajes psicológicos y le cuenta un delirio al doctor A y un delirio al doctor B (puede contarles a los dos el mismo delirio), ¿de cuántas formas posibles pudo delirar en los peritajes psicológicos?

xxv. Dada la palabra COMPUTER, cuántas ordenaciones podemos hallar si:

a) No se imponen condiciones
b) ¿Si deben comenzar con la letra C?
c) ¿Si sólo se utilizan cuatro de sus letras y no se pueden repetir?
d) ¿Si sólo se utilizan cuatro letras y se pueden repetir?
e) ¿Si se utilizan todas las letras y se pueden repetir?

Combinaciones Simples

Para el caso de las combinaciones, lo que se hace básicamente es formar grupos con los elementos de un conjunto, es decir, seleccionarlos, agruparlos, ***no ordenarlos***, es por esto ***que no interesa la posición o ubicación que ocupa dentro del conjunto***. ***Interesa la cantidad de agrupaciones, no la cantidad de ordenaciones***.

Ejemplos

I. ¿Cuántos grupos de 3 personas se pueden formar con un total de 5?

Solución:

Sea el conjunto de las personas definido de la siguiente manera: $P = \{P1, P2, P3, P4, P5\}$. Todos los subconjuntos de 3 elementos y sus complementos son:

$\boldsymbol{S}$	$\overline{\boldsymbol{S}}$
$S_1 = \{P1, P2, P3\}$	$\overline{S_1} = \{P4, P5\}$
$S_2 = \{P1, P2, P4\}$	$\overline{S_2} = \{P3, P5\}$
$S_3 = \{P1, P2, P5\}$	$\overline{S_3} = \{P3, P4\}$
$S_4 = \{P1, P3, P4\}$	$\overline{S_4} = \{P2, P5\}$
$S_5 = \{P1, P3, P5\}$	$\overline{S_5} = \{P2, P4\}$
$S_6 = \{P1, P4, P5\}$	$\overline{S_6} = \{P2, P3\}$
$S_7 = \{P2, P3, P4\}$	$\overline{S_7} = \{P1, P5\}$
$S_8 = \{P2, P3, P5\}$	$\overline{S_8} = \{P1, P4\}$
$S_9 = \{P2, P4, P5\}$	$\overline{S_9} = \{P1, P3\}$
$S_{10} = \{P3, P4, P5\}$	$\overline{S_{10}} = \{P1, P2\}$
10 opciones	10 opciones

No tenemos más opciones que las mencionadas ya que estamos eligiendo personas, por lo tanto no nos interesa el orden de elección.

Podemos llegar a este resultado hallando $\boldsymbol{C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!.(5-3)!} = \frac{5.4}{2} = 10}$

II. ¿De un total de 10 mujeres y 12 hombres, cuantos grupos de 5 personas podemos formar con la condición de que en cada grupo de 5 haya 3 mujeres y dos hombres?

Solución:
Para este caso debemos usar la lógica de la conjunción, ya que en el grupo de 5 debe haber 3 "y" 2 de cada clase respectivamente, entonces lo que se efectúa es la multiplicación entre $C_{10,3}.C_{12,2} = \binom{10}{3}.\binom{12}{2} = 120.66 = 7920$

III. Un estudiante que realiza un examen de historia recibe la instrucción de responder siete de diez preguntas. Aquí no importa el orden, por lo que el estudiante puede responder el examen de:

Solución:

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{7!.(10-7)!} = \frac{10.9.8.7!}{7!.3!} = \frac{10.9.8}{6} = 120\ formas$$

IV. ¿Si el estudiante del ejemplo anterior debe responder tres preguntas de las primeras cinco y cuatro de las últimas cinco, de cuántas formas puede hacerlo?

Solución:

Puede elegir tres preguntas de las primeras cinco de $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!.2!} = 10$ formas, y elegir las otras cuatro preguntas de $\binom{5}{4} = 5$ formas. De modo que, por la regla del producto, el estudiante puede realizar el examen de $\binom{5}{3}.\binom{5}{4} = 50$ formas.

V. Ahora se presenta el siguiente caso, el estudiante debe responder siete de las diez preguntas, de las cuales, al menos tres deberán ser de las primeras cinco (significa que de las primeras cinco deben ser: 3, 4 ó 5 las que responda, de un total de 7; quiere decir que el resto a responder será de las últimas cinco preguntas):

Solución:

$$\binom{5}{3}.\binom{5}{4} + \binom{5}{4}.\binom{5}{3} + \binom{5}{5}.\binom{5}{2} = 110\ selecciones\ de\ 7\ de\ 10\ preguntas$$

Ejercicios

Combinaciones

i. De un conjunto de 20 personas se quiere nombrar una comisión de 4 miembros. ¿De cuántas formas se pueden hacer?
ii. De un grupo de 6 varones y 4 mujeres; ¿cuántos grupos distintos de 3 integrantes de cada sexo se pueden formar?
iii. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar un grupo de 4 representantes entre 9 miembros de un equipo si uno de ellos siempre debe ser incluido?
iv. En una fábrica se forma una comisión de 5 personas elegidas entre 10 ingenieros y 6 técnicos. SI en la comisión debe haber 3 ingenieros y 2 técnicos; ¿cuántas posibilidades diferentes existen de formar la comisión?
v. ¿Cuántos partidos simples de tenis se pueden organizar en un campeonato en el que intervienen 6 jugadores?
vi. Me gané un viaje al Caribe para mí y 2 amigos. Pero tengo 5 amigos así que voy a tener que elegir a 2. ¿Cuántas decisiones posibles puedo tomar?

vii. De un grupo de 10 atletas hay que seleccionar 3 para representar al grupo; ¿de cuántas maneras diferentes se puede elegir?

viii. ¿De cuántas maneras se puede formar con 9 personas una comisión de 5 miembros?

Problemas Varios

i. Halla el valor de x en cada ecuación:

a) $2.x + P_3 = V_{5,2}$ b) $V_{x,1} + C_{x,2} = V_{3,1}$ c) $\frac{P_{x-1}}{P_{x-2}} + \frac{P_x}{P_{x-2}} = \frac{2P_x}{(x-1)!} + P_2$

ii. ¿Cuántos números de 5 cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4,5?

iii. ¿Cuantos números de 4 cifras se pueden formar con los dígitos 0,1,2,3?

iv. ¿Cuántos números de 6 cifras se pueden formar si en ellos siempre está una vez el uno, dos veces el dos y tres veces el tres?

v. **¿**Cuántos números de tres cifras distintas se pueden formar con los dígitos 1,2,3,….,9?

vi. Con las letras del alfabeto español (25 letras) ¿Cuántas palabras (con o sin sentido) de 6 letras distintas pueden formarse? - ¿Cuántas empiezan por vocal?

vii. Como respuesta a un anuncio de trabajo se presentan 12 personas para cubrir tres puestos administrativos ¿Cuántos grupos diferentes de personas se pueden seleccionar?

viii. ¿Cuántos triángulos distintos se pueden formar con 8 puntos en el plano si tres de ellos nunca están alineados?

ix. Lanzamos Dos dados indistinguibles ¿Cuántos resultados diferentes se pueden observar? ¿Y si los dados son distinguibles?

x. ¿De cuantas maneras se pueden colocar en una fila 4 chicos y 4 chicas de manera que alternen personas de sexo diferente? ¿Y si todas las chicas tienen que estar juntas?

xi. ¿De cuántas formas se puede elegir un comité de 3 personas de un grupo de 20? ¿Y de cuántas si uno debe ser el presidente, otro el vicepresidente y otro el secretario?

xii. Entre 20000 y 70000 ¿Cuántos números hay que no tengan ningún dígito repetido?

xiii. **¿**Cuántos números distintos de 5 cifras se pueden formar con las cifras 1,2,3,5,7,8,9?

xiv. Con las letras de la palabra ALELUYA se forman todas las palabras posibles. ¿Cuántas hay? ¿Cuántas empiezan por consonante?

xv. En una reunión hay tres chicas y siete chicos ¿Cuántos grupos de 5 personas pueden formarse? ¿Cuántos si en cada grupo debe haber 2 y solo dos chicas?

xvi. A un congreso médico asisten 100 profesionales de los cuales 80 saben inglés y 40 francés ¿Cuántos diálogos entre dos personas pueden hacerse sin intérprete?

xvii. En una carrera de caballos participan 9 caballos. ¿De cuántas formas diferentes se podrían repartir las medallas de oro, plata y bronce?

xviii. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse 6 amigos en una fila de butacas de un cine?

xix. ¿Cuántas palabras de 6 letras se pueden formar con las letras ADSASS?

xx. ¿Cuántas palabras podemos formar con las letras de la palabra MATEMATICAS?

Un buen consejo

Cuando se trata de un problema de conteo, debemos preguntarnos acerca de la importancia del orden en el problema. Cuando el orden es necesario, pensamos en términos de permutaciones y en disposiciones y en la regla del producto. Cuando el orden no sea necesario, las combinaciones podrían tener un papel importante en la solución del problema.

Análisis Combinatorio: Pautas a tener en cuenta para el cálculo

- ✓ **Las cantidades:** Se debe determinar cuántos elementos hay en total y cuántos vamos a tomar.
- ✓ **La naturaleza**: Se debe determinar si estamos tomando todos los elementos disponibles o solo algunos.
- ✓ **El orden**: Se debe determinar si nos interesa o no el orden en que tomamos los elementos.
- ✓ **La repetición**: Se debe tener en cuenta si se puede elegir más de una vez el mismo elemento.

Resumen de fórmulas

	Interesa	Fórmula	Ejemplo
Permutación Simple	**Orden**	$P_n = n!$	**Formas de ordenar {a,b,c}: abc;acb;bac;bca;cab;cba** $P_3 = 3! = 6$
Permutación con Repetición	**Orden**	$P'_n = \frac{(n_1+n_2+\ldots n_h)!}{n_1!.n_2!\ldots n_h!}$	**Formas de ordenar {a,a,b,c}:** $P_{2,1,1} = \frac{4!}{2!.1!.1!} = 12$
Variación Simple	**Naturaleza y el orden**	$V_{m,n} = \frac{m!}{(m-n)!}$	**Formas de tomar 2 elementos de {a,b,c}, teniendo en cuenta el orden:** $V_{3,2} = 6$
Variación con Repetición	**Naturaleza y el orden**	$V'_{m,n} = m^n$	**Formas de tomar 3 elementos de {a,b} (pudiendo repetir) y teniendo en cuenta el orden:** $V'_{2,3} = 2^3 = 8$
Combinación Simple	**Cuáles**	$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$	**Formas de tomar 2 elementos de {a,b,c} sin tener en cuenta el orden:** $C_{3,2} = \frac{3!}{2!.1!} = 3$

Trabajo Práctico Nº 3: Análisis Combinatorio (de entrega obligatoria)

Ejercicio Nº 1: Desarrolla $\sum_{i=0}^{3} i^2 + 1 =$

Ejercicio Nº 2: Halla el valor de x en la siguiente expresión: $\frac{P_x}{P_{x-2}} - C_{x,2} + V_{x,1} = V_{6,2} - C_{6,3}$

Ejercicio Nº 3: ¿Cuántas palabras con o sin sentido pueden formarse con las letras de la palabra INFORMATICA? ¿Cuántas empiezan con vocal?

Ejercicio Nº 4: De un total de 15 ingenieros y 8 técnicos se desea formar grupos de 5 profesionales en los cuales haya 2 ingenieros y 3 técnicos. ¿Cuántas posibilidades hay? ¿Si un ingeniero en particular debe estar en el grupo, cuántos grupos son posibles formar?

Ejercicio Nº 5: ¿Cuántas contraseñas de 8 caracteres pueden formarse con los 10 dígitos y las 5 vocales:
a) Sin repetición?
b) Con repetición?

Ejercicio Nº 6: Si hay 36 maneras diferentes de seleccionar dos personas de un determinado grupo, ¿cuántas personas forman ese grupo?

Respuestas Unidad 1

Lógica Proposicional

1) a. F b. V c. V d. V
2) a. F b. F c. V d. F
3) a. r → q b. p → q c. (r∧s) → q
5) a. Contradicción b. Tautologia c. Contingencia d. Contingencia
   e. Contingencia f. Contingencia g. Tautologia h. Tautologia
   i. Contingencia
7) a. p∧-q b. q∧(r∧p) c. (p∧q) → r d. r ↔ (p∨r)

11) a. p^-q b. $p \vee q$ c. q^p d. F e. p f. –p

g. –p h. V i. $p \vee q$ j. $-p \vee -q$

13) a. ~~V~~ Es F b. V c. V d. ~~F~~ Es V e. V

15) Carlos y Belen

17) a. $p \vee [r \wedge (t \vee -q)]$ b. $p \vee [r \wedge (t \vee -q)]$ c. $p \vee -q$ d. p ∧ t

Teoría de Conjuntos

3) d.

5) a. F b. F c. F d. V e. F

7) Según orden de aparición b) h) a) e) c) d);

9) a. 42 b. 20 c. 10

10) a. 34 b. 6

11) 7

12) a. 68 b. 160 c. 138 d. 40 e. 183 f. 173 g. 62 h. 42

13) a. 12 b. 2 c. 14

14) a. 78 b. 10 c. 13

15) a. 2 b. 4 c. 1 d. 15

16) a. 82 b. 736 c. 910 d. 918 e. 92

Cálculo Combinatorio

1) a. 71/20 b. 31/16 c. 439/105

2) a. 12 b. 132 c. 1188 d. 3/7 e. 2 f. -345
   g. 1 h. 79

3) a. n	b. n+1	c. n+2	d. n/n+2	e. n.(n-2)(n-3)	f. 2n
5) a. x_1= 0; x_2 =7	b. x=7	c. x=5 x=2	d. x_1= 0; x_2 =7	e. x=7	f. x_1= 2; x_2 =5
g. x=1	h. x=1	i. x=2	j. x_1= 2; x_2 =3	k. x=6	l. x=2

Permutaciones

i.	120		
ii.	720		
iii.	24		
iv.	120		
v.	6 a. 2	b. 2	c. 4
vi.	a. 39916800		b. 604800
vii.	a. 362880		b. 40320
viii.	720	a. 120	b. 24
ix.	120		
x.	a. 207360	b. 8709120	
xi.	210		
xii.	a. 720	b. 480	
xiii.	a. 3024	b. 25200	

Combinaciones

i.	4845
ii.	80
iii.	56
iv.	1800
v.	15
vi.	10

Variaciones

xiv.	5040		
xv.	a. 15600	b. 17576	
xvi.	2160		
xvii.	720		
xviii.	17576000		
xix.	336		
xx.	a. 2016	b. 4000	
xxi.	a. 24	b. 64	
xxii.	336		
xxiii.	20		
xxiv.	9		
xxv.	a. 40320	b. 5040	c. 1680
	d. 4096		e. 16777216

Problemas Varios

i.	a. x=7; b. $x = 2$; c. x_2 =3	
ii.	120	
iii.	18	
iv.	60	
v.	504	
vi.	a. 127512000	b. 25502400
vii.	220	
viii.	56	
ix.	a. 36	
x.	a. 1152	b. 2880
xi.	a. 1140	b. 6840
xii.	15120	
xiii.	2520	
xiv.	a. 1260	b. 540
xv.	a. 252	b. 105
xvi.	3750	
xvii.	504	
xviii.	720	
xix.	60	
xx.	1663200	

Contenido