Tecnicatura Universitaria en Programación

Seminario Universitario 2022

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL MAR DEL PLATA

1. Lógica

Lógica es la disciplina que trata de los métodos de razonamiento. En un nivel elemental, la lógica proporciona reglas y técnicas para determinar si es o no válido un argumento dado. El razonamiento lógico se emplea en matemáticas para demostrar teoremas; en ciencias de la computación, para verificar si son o no correctos los programas y para demostrar teoremas; en las ciencias físicas y naturales para sacar conclusiones de experimentos. El razonamiento lógico se usa en forma constante.

Proposiciones y operaciones lógicas

Una **proposición** o **enunciado** es una oración que declara que algo es verdadero o falso, pero no ambas cosas.

Ejemplo 1. ¿Cuáles de las siguientes son proposiciones?

a) La Tierra es redonda.
b) 3+4=7
c) ¿Habla usted inglés?
d) $4\text{-x} = 2$
e) Tome dos aspirinas.

Solución:

a) Es proposición, afirma algo verdadero.
b) Es proposición, afirma algo verdadero.
c) No es proposición, es una pregunta.
d) No es proposición, es una afirmación declarativa. Es verdadera o falsa dependiendo del valor de x.
e) No es proposición, es una orden.

Las proposiciones se simbolizan con letras minúsculas que suelen ser p, q,r,s,….estas letras denotan **variables propositivas**, es decir, variables que pueden ser reemplazadas por proposiciones. Por ejemplo, podemos escribir:

p: El sol está brillando hoy , q: Hace frío

Se dice que p y q son **proposiciones simples**, ya que no pueden reducirse a otras más sencillas. A los estados de verdadero o falso que puede tener una proposición se les llama **valor de verdad** o **valor lógico** de esa proposición.

Conectivos lógicos - proposiciones compuestas – tablas de verdad

Las proposiciones pueden combinarse por medio de conectivos lógicos para obtener **proposiciones compuestas**. Por ejemplo: “El sol está brillando y hace frío”. El valor de verdad de una proposición compuesta depende solamente de los valores de verdad de las proposiciones que se estén combinando y de los tipos de conectivos que se utilice. Veremos a continuación los conectivos más importantes:

- **Negación operador not**

Si p es una proposición, la negación de p es la proposición "no p", y se denota: $\neg p$ (no es el caso de p). De esta definición se desprende que si p es verdadera, entonces $\neg p$ es falsa, y si p es falsa, $\neg p$ es verdadera. El valor de verdad de $\neg p$ relativo a p se da en la tabla 1; a una tabla como ésta, que da los valores de verdad de una proposición compuesta en función de sus partes componentes, se la llama **tabla de verdad.**

Tabla 1

p	$\neg p$
1	0
0	1

Estrictamente hablando, este operador no es un conectivo, en vista de que no une dos proposiciones, y "no p" no es en realidad una proposición compuesta. Sin embargo "no" es una **operación unaria**, y $\neg p$ es una proposición si p lo es. Se puede indicar también: {`, −, ~}

- **Conjunción operador and**

Si p y q son proposiciones, la conjunción de p y q es la proposición compuesta denotada por $p \wedge q$. El conectivo "y" se denota por el símbolo $\wedge$. Sobre el conjunto de proposiciones "y" es una **operación binaria** (aquella operación matemática, que necesita el operador y dos operandos para que se pueda calcular un valor).
La proposición compuesta $p \wedge q$ es verdadera, cuando ambas proposiciones son verdaderas. Para confeccionar la tabla de verdad, debemos tener en cuenta cuatro casos posibles, esto se desprende del hecho de que cada una de las proposiciones p y q puede ser verdadera o falsa. Los términos gramaticales más usados para la conjunción son: "y", "pero" , "mas (sin tilde)", "sin embargo"; y los signos de puntuación: "coma"," punto y coma", y "punto".

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

- **Disyunción**

I. **Operador or**: si p y q son proposiciones la disyunción de p y q es la proposición compuesta, designada por: $p \vee q$ El conectivo "o" se denota por el símbolo $\vee$. La proposición compuesta $p \vee q$ es verdadera, si por lo menos una de las proposiciones p ó q es verdadera, será falsa cuando ambas proposiciones p y q sean falsas. Los valores de $\boldsymbol{p \vee q}$ son proporcionados en la tabla 3:

Tabla 3

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

II. **Operador xor**: El conectivo "o" es más complicado que el conectivo "y" porque se emplea de dos formas diferentes. Supongamos que alguien dice:

Voy en auto a mi trabajo o tomo el colectivo

En esta proposición compuesta se tiene la disyunción de las proposiciones:

p: Voy en auto a mi trabajo

q: Tomo el colectivo para ir a mi trabajo

Por supuesto ocurrió una de las dos posibilidades; no podrían haber ocurrido ambas, por lo cual el conectivo "o" se está usando en un sentido **excluyente**. Simbólicamente la disyunción exclusiva entre p y q se expresa:

$$p \underline{\vee} q$$

Los valores de verdad son proporcionados en la tabla 4:

Tabla 4

p	q	$p \underline{\vee} q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

¿Cómo interpretas la fila sombreada?

Observación: una tabla de verdad está formada por filas y columnas. El número de filas depende del número de proposiciones diferentes que conforman una proposición compuesta. El número de columnas depende del número de proposiciones que integran la proposición y del número de operadores lógicos contenidos en la misma: **N=nº de filas=2^n**

✓ *Ejercicios*

1. ¿Cuáles de las siguientes son proposiciones?

a) Vamos a la playa o vamos al cine.

b) Cierra la puerta!

c) $x \geq 4$

d) 2+4=9
e) La combinatoria es un tema que se estudia en la materia matemática de la tecnicatura en programación.
f) París es la capital de Francia.
g) Circule con precaución.
h) $\mathrm{x}+1>3$

2. Niega las siguientes proposiciones:
   a) El mantel es verde.
   b) No tenemos computadora.
   c) $3>1$
   d) $4\leq 7$
   e) Llueve y hace frío.
   f) No llueve pero hace frío.
   g) La mesa está puesta y la cena está lista.
   h) Compro caramelos o compro chocolates, pero no ambos.

3. Completa la siguiente tabla, compara los valores de verdad de todas las operaciones y extrae conclusiones:

p	q	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$	$\neg\boldsymbol{p}$	$\neg\boldsymbol{q}$	$\neg\boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q}$	$\neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$	$\mathrm{p}\wedge\mathrm{q}$	$\neg\boldsymbol{p} \vee \neg\boldsymbol{q}$	$\neg(\mathrm{p}\wedge\mathrm{q})$
1	1								
1	0								
0	1								
0	0								

4. Completa la siguiente tabla, compara los valores de verdad de las operaciones de las columnas seleccionadas y extrae conclusiones.

					a	b	
p	q	$p \underline{\vee} q$	$-p$	$-q$	$p \wedge -q$	$q \wedge -p$	$a \vee b$
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

5. Sean las proposiciones:
   P: 2 es un número primo, q: ½ es un número racional, r: 4 es un número par, traduce a lenguaje coloquial cada una de las siguientes proposiciones:

   a) $p \wedge r$ b) $(-p) \vee q$ c) $-p \underline{\vee} q$
   d) $-(-p)$ e) $-[(-p) \vee q]$ f) $r \wedge -q$

6. Dadas las proposiciones: P: “No está lloviendo” , q: “Alicia está caminando”, interpreta según los valores de verdad de cada proposición guiándote por el ejemplo:

p	q	Interpretación
1	1	Es cierto que no está lloviendo. Es cierto que Alicia está caminando.
1	0	
0	1	
0	0	

7. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es la negación de la proposición: "2 es par y -3 es negativo"

a) 2 es par y -3 es no negativo.
b) 2 es impar y -3 es no negativo.
c) 2 es par o -3 es no negativo.
d) 2 es impar o -3 es no negativo.
e) Ninguna de las anteriores.

8. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es la negación de la proposición: "2 es par ó -3 es negativo".

a) 2 es par o -3 es no negativo.
b) 2 es impar y -3 es no negativo.
c) 2 es impar o -3 es no negativo.
d) 2 es par y -3 es no negativo.
e) Ninguna de las anteriores.

9. Dadas las proposiciones: p: Voy al cine; q: compro palomitas de maíz; r: llevo el auto; escribe cada una de las siguientes proposiciones en términos de p,q,r y conectivos lógicos.

   a) Voy al cine pero llevo el auto.
   b) Voy al cine o compro palomitas de maíz.
   c) Voy al cine o compro palomitas de maíz, pero no ambas.
   d) Llevo el auto y voy al cine y compro palomitas de maíz.
   e) No llevo el auto pero voy al cine.
   f) No voy al cine y no compro palomitas de maíz.
   g) No es cierto que, voy al cine o llevo el auto

10. Dadas las proposiciones simples: *p:"El auto no tiene nafta"; q:"el motor arranca".* Expresa en forma verbal según las operaciones indicadas y los valores de verdad de las proposiciones simples p y q:

p	q	$p \vee q$	En lenguaje coloquial
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

11. Completa:

			1	2	3	4	5	6
p	q	r	$p \vee q \vee r$	$r \vee p \vee q$	$p \wedge q \wedge r$	$p \wedge r \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
1	1	1						
1	1	0						
1	0	1						
1	0	0						
0								
0								
0								
0								

Responde:

a) Compara los valores de verdad de las columnas 1 y 2. Y los de las 3 y la 4
b) Compara los valores de verdad de las columnas 5 y 6. Observa cómo están agrupadas las proposiciones.
c) Si tuvieras que resolver el siguiente cálculo: 2.3+3, qué operación efectuarías primero: 2.3 ó 3+3?
d) <u>Formula a tu docente la pregunta: ¿Cuál es el orden de prioridad de los operadores?</u>

12. En la siguiente tabla figura el orden de jerarquía de los operadores estudiados:

Jerarquía	1º	2º	3º	4º
Operador	( )	¬	∧	∨

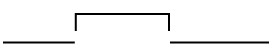
Con la ayuda de la tabla de la página 6 confecciona las tablas de verdad de las proposiciones:

a) $p \wedge (-q \vee -p)$
b) $p \wedge \neg q \vee -p$
c) Extrae conclusiones.

Circuitos lógicos o booleanas

La verdad de una proposición puede asociarse al pasaje de corriente en un circuito eléctrico con un interruptor. Así

Para representar a p, si es F, se tiene:  p

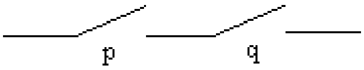
Y para p, si es V, se tiene:  p

Es decir, el interruptor se cierra si p es V y se abre si p es F.

Podemos, así, representar las operaciones proposicionales mediante circuitos con tantos interruptores como proposiciones componentes, combinados en serie o paralelamente. Veremos, a continuación, como representar en forma booleana las operaciones que surgen de operar con dos proposiciones mediante los conectivos lógicos que conocemos.

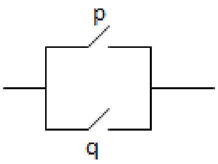
Conjunción

Este circuito admite el pasaje de corriente, es decir la verdad de p $\wedge$ q, sólo si ambas son V



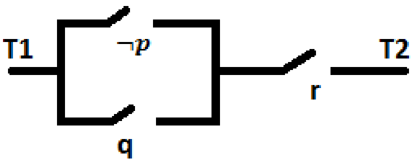
Disyunción

Está representada por un circuito en paralelo. Como vemos, admite el pasaje de corriente cuando al menos una de las dos es V (comprobar en la correspondiente tabla de verdad)

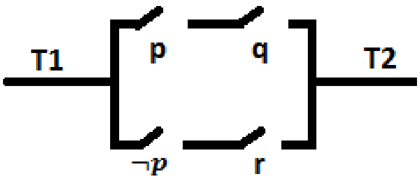


✓ *Ejercicios*

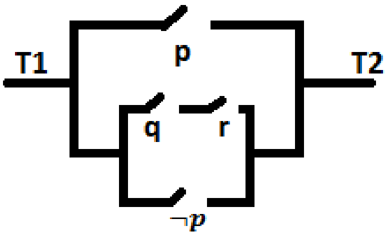
13. Escribe las expresiones simbólicas de:



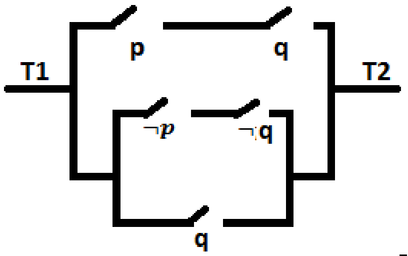
a)



b)



c)



d)

14. Confecciona los circuitos lógicos correspondientes:

a) $(p \wedge q) \vee \neg p$
b) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
c) $(p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)$
d) $[(p \wedge q) \vee \neg r] \wedge (\neg p \vee r)$

15. Confecciona los circuitos lógicos suponiendo que los valores de verdad de p y q son respectivamente 1 y 0.

a) $(p \wedge q) \vee \neg p \equiv p \wedge q \vee \neg p$
b) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge q$

Sugerencia: es muy importante que busques material informativo de los temas desarrollados en cada unidad. Para *Circuitos Lógicos* te proponemos: Sáenz. Fundamentos de la Matemática. Pág 16.

Trabajo Práctico Nº 1 de entrega obligatoria

1. Simboliza las siguientes proposiciones:

a) El mantel es blanco.
b) El sol sale de noche y los barcos navegan en el día.
c) Nunca he viajado en avión.
d) Juan estudia pero no entiende.
e) No está nublado o hace frío.
f) Ni visitamos el museo, ni fuimos al parque.

2. Dadas las proposiciones, p: Silvia estudia y q: Ana camina. Traduce en forma verbal los siguientes enunciados:

a) $p \wedge \neg q$ b) $\neg p \vee q$ c) $\neg(p \wedge q)$ d) $\neg p \vee \neg q$

3. Dadas las proposiciones: p:"Juan no está programando", q: "Alicia está estudiando", interpreta según los valores de verdad de cada proposición guiándote por el ejemplo:

p	q	Interpretación
1	1	
1	0	
0	1	No es cierto que Juan no está programando. Es cierto que Alicia está estudiando.
0	0	

4. Dadas las proposiciones, p: Luis es argentino y q: Pedro es extranjero. Escribe en forma simbólica:

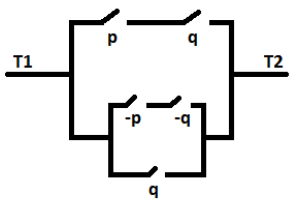
Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
a) Luis es argentino y Pedro es extranjero	a) …………….
b) Luis y Pedro son extranjeros…	b) …………….
c) Luis es argentino o Pedro es extranjero	c) …………….
d) Ni Luis ni Pedro son argentinos	d) …………….
e) Luis no es argentino pero Pedro es argentino	e) …………….
f) No es cierto que Luis y Pedro son argentinos	f) …………….

5. Sabiendo que los valores de verdad de las cuatro proposiciones (p,q,r y s) son: ¿Cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos?

p	q	r	s
1	1	0	0

a) $(p \wedge q) \vee (q \wedge s)$ b) $\neg(p \wedge q) \vee \neg(q \wedge s)$ c) $\neg[(r \wedge \neg s) \vee r] \vee s$

6. Escribe la expresión simbólica de:



2. Conjuntos y subconjuntos

Conjuntos

Un **conjunto** es un grupo o colección de objetos, a los que se conoce como **elementos** o **miembros** del mismo. Por ejemplo: la colección de todos los bancos de las aulas, la colección de todos los pájaros negros, o la colección de todos los números naturales comprendidos entre 10 y 100, son, cada uno, un conjunto.

Que un conjunto esté bien definido significa que es posible decidir si un objeto dado pertenece o no a la colección. Casi todos los objetos matemáticos, antes que todo, son conjuntos, independientemente de otras propiedades adicionales que puedan poseer. Así, en cierto sentido, la teoría de conjuntos es el cimiento sobre el que se construyen todas las matemáticas. Es una teoría fácil de aprender y de usar.

Una forma de escribir un conjunto con un número finito de elementos, es hacer una lista de los elementos del conjunto y encerrarla entre llaves. Así, el conjunto de todos los números naturales menores que cuatro es:

$$\{1,2,3\}$$

No importa el orden en que se escriban los elementos del conjunto. Es decir:

$$\{1,3,2\}=\{2,1,3\} = \{3,2,1\}$$

Son representaciones del mismo conjunto.

También puede hacerse caso omiso de los elementos repetidos en la **lista** de elementos de un conjunto. Así $\{1,2,1,3,2\}$ es otra representación del conjunto $\{1,2,3\}$.

Para designar los conjuntos se emplean letras mayúsculas, como: A, B, C, y para designar los miembros (o elementos) de los conjuntos, letras minúsculas, como: a,b,c,x,y .Para indicar que x es un elemento del conjunto A, se escribe: $x \in A$; también se indica el hecho de que x no es un elemento de A, escribiendo:$x \notin B$

Ejemplo 1. Sea $A = \{a, e, i, o, u\}$. Entonces: $a \in A$, $i \in A$, $c \notin A$

En ocasiones no es conveniente o es imposible describir un conjunto por medio de una lista de todos sus elementos. Otra manera útil de definir un conjunto, es especificando una propiedad que los elementos del conjunto tengan en común. Se utiliza la notación $P(x)$ para denotar una oración o enunciado P relativo al objeto variable x. El objeto definido por $P(x)$ escrito en la forma $\{x/P(x)\}$, es simplemente la colección de todos los objetos x para los cuales se cumple P. Por ejemplo, $\{x/x \text{ es un número natural menor que } 4\}=\{x/x \in N \ \wedge x < 4\}$ es el conjunto $\{1,2,3\}$.

Los Elementos (X) tal que (X) (esta frase significa X/X)

Determinación de un conjunto

Por extensión: Se define nombrando a cada elemento del conjunto.
Por comprensión: Se define mediante un enunciado o atributo que representa al conjunto.

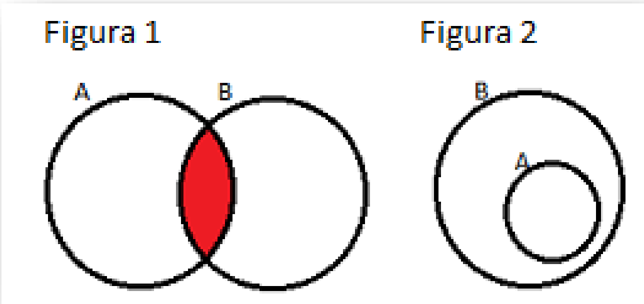
Ejemplo 2.

Por extensión	Por comprensión
$A = \{a, e, i, o, u\}$	$A = \{x/x \text{ es vocal del abc}\}$
$B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$	$B = \{x/x \text{ es un dígito del sistema de numeración decimal}\}$
$C = \{15,20,25,30\}$	$C = \{x/x \text{ es múltiplo de } 5 \text{ comprendido entre } 12 \text{ y } 32\}$

Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn tienen el nombre de su creador, John Venn, matemático y filósofo británico. Venn introdujo el sistema de representación que hoy conocemos en julio de 1880 con la publicación de su trabajo titulado «*De la representación mecánica y diagramática de proposiciones y razonamientos*».

Se usan para mostrar gráficamente la agrupación de cosas *elementos* en conjuntos, representando cada conjunto mediante un círculo o un óvalo. La posición relativa en el plano de tales círculos muestra la relación entre los conjuntos. Por ejemplo, si los círculos de los conjuntos A y B se solapan, se muestra un área común a ambos conjuntos que contiene todos los elementos contenidos a la vez en A y en B. Si el círculo del conjunto A aparece dentro del círculo de otro B, es que todos los elementos de A también están contenidos en B (figura 1 – figura 2).



Clasificación de conjuntos

Universal: Conjunto que contiene todos los elementos posibles para un problema particular en consideración. Se lo simboliza con la letra U (ver página 10).	
Infinito: Conjunto que tiene una cantidad ilimitada de elementos.	
Finito: Conjunto que tiene una cantidad limitada de elementos.	
Vacío: Es aquel conjunto que no tiene elementos, se le representa por: $\emptyset$ o { }	
Unitario: es aquel conjunto que tiene un solo elemento.	
Iguales: Son aquellos conjuntos que tienen los mismos elementos. → A={1,2,3} B={1,2,3}	
Diferentes: Dos conjuntos son diferentes si sus elementos no son iguales	
Disjuntos: Dos conjuntos son disjuntos si no tienen ningún elemento en común: es decir, todos los elementos de un conjunto son diferentes a los elementos de otro conjunto.	

Equivalentes: tener la misma cantidad de Elementos.

También pueden ser posible ser DISJUNTOS Y EQUIVALENTES! A={3,4,5} B={1,2,3}

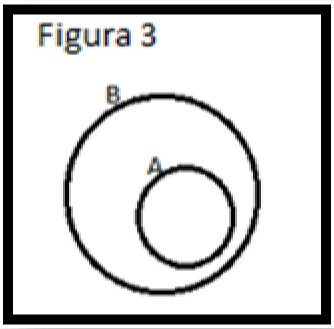
#A=3 #B=3

Cardinalidad del conjunto A

Es el número de elementos que tiene un conjunto, se representa con el símbolo # o $|A|$. Si $A = \{1,2,3\}$, entonces $nA = 3$

Subconjuntos

Si cada elemento de A es también un elemento de B, es decir, si siempre que $x \in A$ ocurre que $x \in B$, se dice que A es un **subconjunto** de B, o que A está **contenido** en B, y se escribe: $A \subseteq B$ (figura 3).



$$A \subseteq B$$

Si A es un conjunto cualquiera, $A \subseteq A$.Es decir, todo conjunto es un subconjunto de sí mismo. Para un conjunto cualquiera A, como no hay elementos de $\emptyset$ que no estén en A, se tiene que $\emptyset \subseteq A$

Es fácil ver que: $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

Ejemplo 3. Dado el conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$, entonces $A \subset N$.

Ejemplo 4. Se tiene que $Z^+ \subseteq Z$. Por otra parte, si Q denota el conjunto de todos los números racionales, entonces $Z \subseteq Q$. Por lo tanto: $Z^+ \subseteq Z \subseteq Q$.

Conjunto Universal

El universo de discurso, conjunto universal o referencial, que normalmente se denota por las letras U, V ó E , es un conjunto cuyo objeto de estudio son los subconjuntos del mismo. Actualmente se debe dejar en claro sobre cuál conjunto se está tratando. Por ejemplo, si estamos tratando conjuntos cuyos elementos son letras, el conjunto referencial sería el conjunto formado por todas las letras del alfabeto.

En los diagramas de Venn, el conjunto universal U se denotará por un rectángulo, mientras que los conjuntos dentro de U serán denotados por círculos.

Conjunto vacío

En teoría de conjuntos, el **conjunto vacío** es el conjunto que no contiene ningún elemento. Puesto que lo único que define a un conjunto son sus elementos, el conjunto vacío es único. Es denotado por el símbolo: $\emptyset$ Esta notación fue introducida por André Weil en 1939. Otra notación común para el conjunto vacío es la notación extensiva, especificando sus elementos (ninguno) entre llaves: $\{\}$. Simbólicamente se define como: $\{x/x \neq x\}$

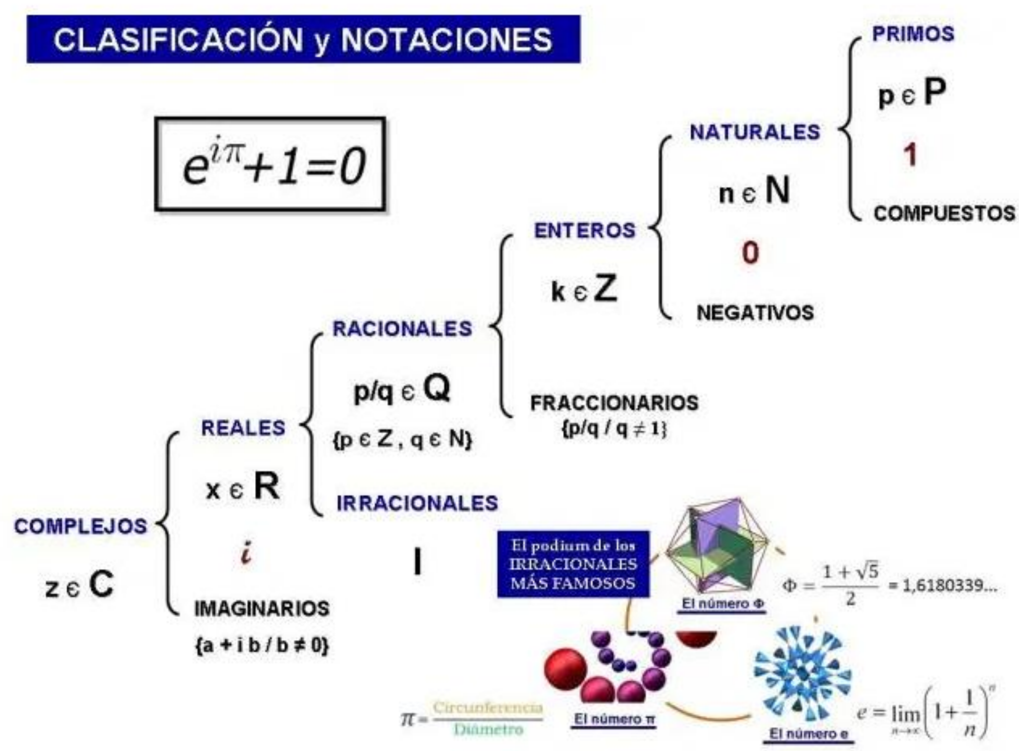
Propiedades

El conjunto vacío tiene las siguientes propiedades generales:

- El conjunto vacío es único: dado dos conjuntos sin elementos, ambos son iguales. (Esto justifica hablar de "el conjunto vacío" y no de "un conjunto vacío")

   - El único subconjunto del conjunto vacío es él mismo: $A \subseteq \emptyset\ sólo\ si\ A = \emptyset$l número de elementos del conjunto vacío (es decir, su número cardinal) es cero; en particular, el conjunto vacío es un conjunto finito :$n\emptyset = 0$
- Además, el conjunto vacío actúa como el cero en las operaciones del álgebra de conjuntos:
- Para todo conjunto *A*, el conjunto vacío es subconjunto de *A*: $\emptyset \subseteq \mathrm{A}$
- El conjunto potencia del conjunto vacío es el mismo Ø. Por lo tanto, el número cardinal de P(Ø)=1, considerando que el cardinal del conjunto vacío es cero.
- El conjunto vacío, a pesar de contener *nada*, sigue siendo *algo* en sí mismo: un conjunto. Esta distinción es importante si situamos a los conjuntos en un contexto. Por ejemplo, si imaginamos a los conjuntos como bolsas, capaces de contener distintos elementos, el conjunto vacío sería aquella bolsa sin elementos dentro; pero aun así seguiría siendo una bolsa. Es por esto que el conjunto potencia siempre contiene al conjunto vacío. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Recuerda que:



✓ *Ejercicios*

1. Marca con una cruz según corresponda:

	N	Z	Q	I	R	Im
-1						
3						
$\boldsymbol{\pi}$						
$\sqrt{2}$						
3i						

$\mathbf{4/5}$						
$\mathbf{10/2}$						
$\mathbf{1-\sqrt{3}}$						

2. Sea $A = \{1,2,4,a,b,c\}$. Identifica cada uno de los siguientes casos como verdadero o falso.

a) $2 \in A$		b) $3 \in A$		c) $c \notin A$		d) $\emptyset \subset A$		e) $A \subset A$	
V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

3. En cada parte, haz un conjunto con las letras de cada palabra haciendo una lista de los elementos del conjunto:
   a) aardvark
   b) book
   c) mississppi

4. Define según la cantidad de elementos que tenga cada conjunto (unitario, finito, infinito, vacío):

   a) Vocales del abc.
   b) Día de la semana que comiencen con la letra j.
   c) Conjunto de números enteros.
   d) Días de la semana.
   e) Meses del año que comiencen con la letra f.

5. En cada parte, forma un conjunto haciendo una lista de sus elementos.
   a) El conjunto de todos los números naturales que son menores que 10.
   b) $\{x/x \in N \ \wedge x^2 < 36\}$
   c) El conjunto de todos los números enteros cuyo cubo está comprendido entre -2 y 10.

6. En cada parte escribe el conjunto en la forma $\{x/P(x)\}$, en donde $P(x)$ es una propiedad que describe los elementos del conjunto.
   a) $A = \{2,4,6,8,10\}$
   b) $B = \{a, e, i, o, u\}$
   c) $C = \{1,8,27,64,125\}$
   d) $D = \{-2,-1,0,1,2\}$

7. Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales al conjunto A?
   a) $\{4,1,2,3,5\}$=A
   b) $\{2,3,4\}$
   c) $\{1,2,3,4,5,6\}$
   d) $\{x/x \in Z \ \wedge \ x^2 \leq 25\}$
   e) $\{x/x \in Z^+ \ \wedge \ x \leq 5\}$=A
   f) $\{x/x \ \in Q^+ \wedge x \leq 5\}$

g) $\{x/x \in Q \wedge x \leq 5\}$

8. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son conjuntos vacíos?
   a) $\{x/x \in R \wedge x^2 - 1 = 0\}$
   b) $\{x/x \in R \wedge x^2 + 1 = 0\}$
   c) $\{x/x \in R \wedge x^2 = -9\}$
   d) $\{x/x \in R \wedge x = 2x + 1\}$
   e) $\{x/x \in R \wedge x = x + 1\}$

9. Observa las siguientes proposiciones y di si son verdaderas o falsas, fundamentando tu respuesta:

a) $\emptyset \subset A$
b) $\{2,3,4\} \in \{1,2,3,4,5\}$
c) $3 = \{3\}$
d) $\{2,3,4\}=\{2,3,4,4,2,3\}$
e) $\emptyset = 0$
f) $2 \in \{2,3,4\}$
g) $0 \in \emptyset$

10. Haz una lista de todos los subconjuntos del conjunto $A = \{a, b\}$, es decir, halla $P(A)$

11. Haz una lista de todos los subconjuntos del conjunto $B = \{google, yahoo, gmail\}$

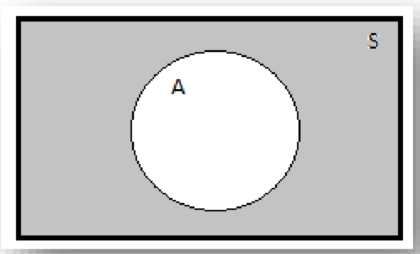
12. Sean $A = \{1\}$, $B = \{1, a, 2, b, c\}$, $C = \{b, c\}$, $D = \{a, b\}$ y $E = \{1, a, 2, b, c, d\}$, para cada parte, sustituye los puntos suspensivos por $\subseteq$ ó $\nsubseteq$ para dar un enunciado verdadero.

a) $A \ldots B$	b) $\emptyset \ldots A$	c) $B \ldots C$
d) $C \ldots E$	e) $D \ldots C$	f) $B \ldots E$

13. Si $A = \{2,3,7\}$, encuentra $P(A)$, , #A , y $\#P(A)$

Complemento de un conjunto A

El complemento de todo conjunto *A,* con respecto a un determinado conjunto de referencia, es el conjunto de los elementos de dicho conjunto universal que no pertenecen al conjunto *A* lo designaremos por A', C_A ó $\overline{A}$



Ejemplos

a) Si $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}\ y\ A = \{2,4,6,8,10\}$ el complemento de A con respecto a S es el conjunto $\overline{\mathrm{A}}$=$\{1,3,5,7,9\}$

b) Una empresa X fabrica camisas de manga larga y camisas de manga corta. Sean:

$$S = \{x/x\ es\ una\ camisa\ que\ fabrica\ la\ empresa\ X\}$$

$$A = \{x/x\ es\ una\ camisa\ de\ manga\ larga\ que\ fabrica\ la\ empresa\ X\}$$

El complemento de A con respecto a S es el conjunto:

$$\overline{A} = \{x/x\ es\ una\ camisa\ de\ manga\ corta\ que\ fabrica\ la\ empresa\ X\}$$

c) Si $\mathrm{A} = \{1,2,3\}$ el complemento de A con respecto a los siguientes conjuntos universales es:

Conjunto universal	**Complemento** $\overline{A}$
$S_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$	$\overline{A} = \{4,5,6,7,8,9,10\}$
$S_2 = \{1,2,3,4\}$	$\overline{A} = \{4\}$
$S_3 = \{-2,-1,0,1,2,3\}$	$\overline{A} = \{-2,-1,0\}$

Propiedades

- No existe un complemento de A, sino varios, según el conjunto de referencia.
- Un elemento del conjunto universal pertenece a un conjunto A o a su complemento $\overline{\mathrm{A}}$, pero no puede pertenecer a los dos al mismo tiempo (se dice que A y $\overline{\mathrm{A}}$ son mutuamente excluyentes o disjuntos).
- El complemento del conjunto universal con respecto a sí mismo es el conjunto vacío.
- Si $\overline{\mathrm{A}}$ es el complemento de A con respecto a un conjunto de referencia S , entonces A es el complemento de $\overline{\mathrm{A}}$ con respecto a S.

Ejemplo

Si $\mathrm{S} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$, enumera todos los subconjuntos de S y el complemento de cada subconjunto con respecto a S.

Subconjuntos de *S*	Complemento de cada subconjunto con respecto a *S*
$\emptyset$	$\{a,b,c\}$
$\{a\}$	$\{b,c\}$
$\{b\}$	$\{a,c\}$
$\{c\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{c\}$
$\{a,c\}$	$\{b\}$
$\{b,c\}$	$\{a\}$
$\{a,b,c\}$	$\emptyset$

Intersección y unión de conjuntos

Las operaciones de intersección y unión de dos o varios conjuntos permiten combinar conjuntos entre sí para formar nuevos conjuntos.

Estudiaremos primero la operación de intersección porque su concepto se entiende fácilmente por intuición y porque es necesaria para la comprensión del concepto de unión.

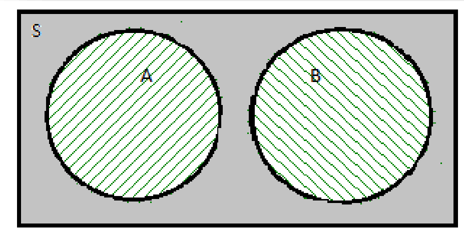
Intersección de conjuntos

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen tanto a A como a B. En otros términos, la intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos comunes a A y B. El símbolo de la intersección es: $\cap$

$$A \cap B: léase\ A\ intersección\ B = \{x / x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

Representación por los diagramas de Venn

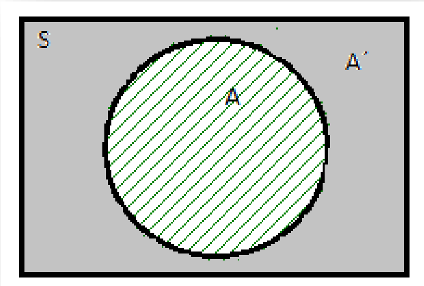
Los diagramas de Venn permiten visualizar el concepto de intersección de los conjuntos. Se raya cada uno de los conjuntos con líneas en sentidos opuestos; la intersección es representada por el área en la cual se intersecan éstas.



Se presentan tres casos:

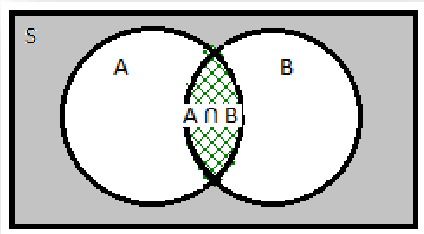
1. Los dos conjuntos son disjuntos, figura 5, es decir: los dos conjuntos no tienen ningún elemento en común.
   $$A \cap B = \emptyset$$
   Podemos definir el conjunto vacío como la intersección de dos conjuntos disjuntos.

Nota: distingue claramente entre $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ y $\mathrm{n}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.



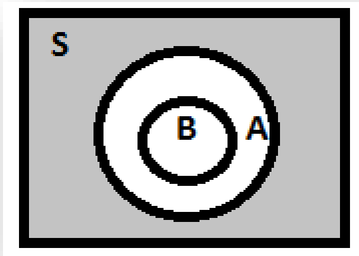
Caso particular: **los dos conjuntos son complementarios** uno de otro con respecto al conjunto S, figura 6.

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \qquad n\left(A \cap \overline{A}\right) = 0$$



Los dos conjuntos se traslapan parcialmente (figura 7). Si A y B tienen 3 elementos en común:

$$n(A \cap B) = 3$$



Uno de los dos conjuntos es subconjunto del otro

Si B es subconjunto de A, todos los elementos de B pertenecen a A y los elementos comunes de A y B son los elementos de B, entonces:

$$A \cap B = B \qquad n(A \cap B) = n(B)$$

Unión de dos conjuntos

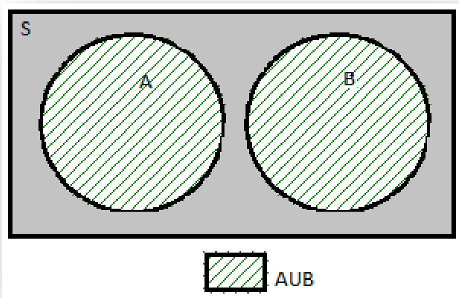
La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen *por lo menos* a uno de los dos conjuntos A y B. el símbolo de la unión es: **U**

$$A \cup B = léase\ A\ unión\ B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

A ∪ B es un nuevo conjunto, cuyos elementos pertenecen a A o a B (o a los dos).

Casos que se presentan

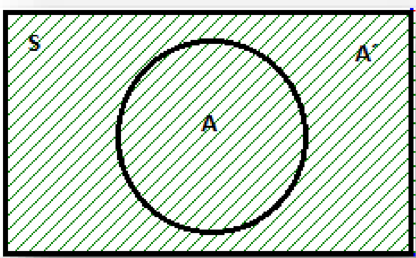
1. Los dos conjuntos A y B son disjuntos (figura 9). A y B no tienen ningún elemento en común.



En este caso:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Ejemplo: Si 10 personas leen exclusivamente La Capital y 5 exclusivamente El Atlántico, ¿cuántas personas leen La Capital o El Atlántico?

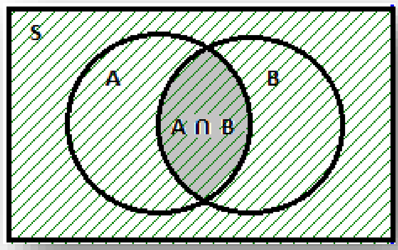


Caso particular: los dos conjuntos son complementarios uno de otro con respecto a un conjunto de referencia (figura 10)

$$A \cup \overline{A} = S \qquad n(A \cup \overline{A}) = n(S)$$

Los dos conjuntos A y B se traslapan parcialmente.
Los dos conjuntos tienen algunos elementos en común. En este caso:

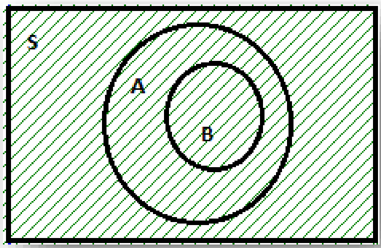
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



Ejemplo: Si 10 personas leen por lo menos La Capital y 5 leen por lo menos El Atlántico, y de ellas 3 leen La Capital y El Atlántico, ¿cuál es el número de personas que leen por lo menos uno de los dos periódicos?

Uno de los dos conjuntos es subconjunto de otro).
Por ejemplo: $B \subset A$

$$B \subset A \ \rightarrow A \cup B = A \ por\ lo\ tanto\ n(A \cup B) = n(A)$$



Diferencia entre conjuntos

Si A y B son los conjuntos de la figura 13, entonces A-B y B-A están representados por las regiones sombreadas de las figuras 14 a y 14 b.

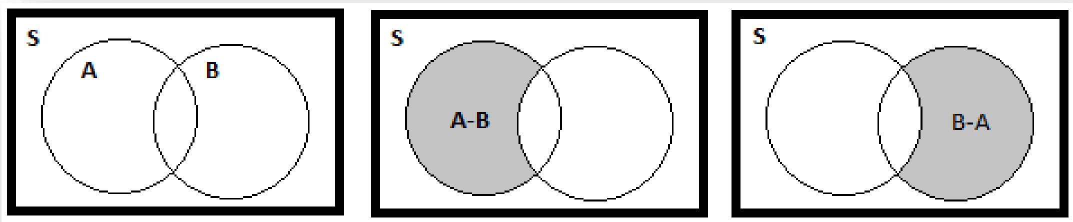
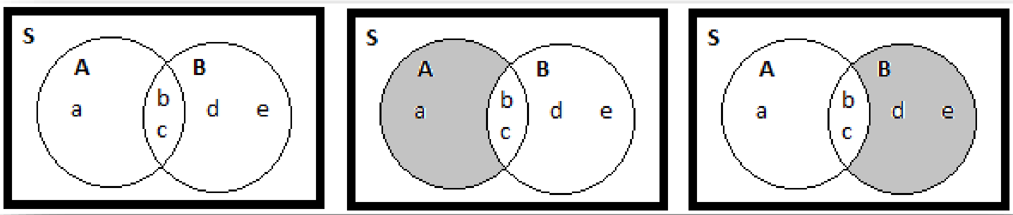


figura 13 figura 14 a figura 14 b

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\} \qquad B - A = \{x / x \in B \ \wedge x \notin A\}$$

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{b, c, d, e\}$. Define por extensión: A-B y B-A

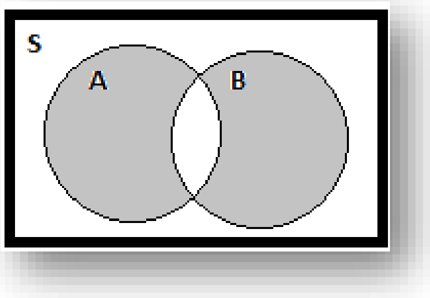


$$A - B = \{a\} \ \ , \ \ B - A = \{d, e\}$$

Diferencia simétrica

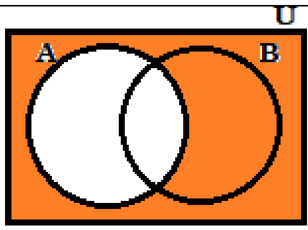
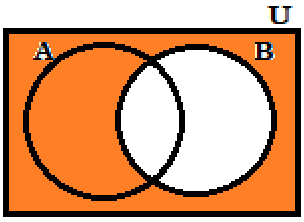
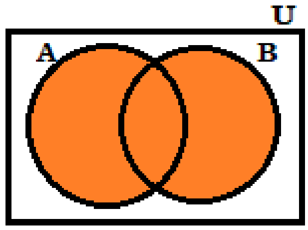
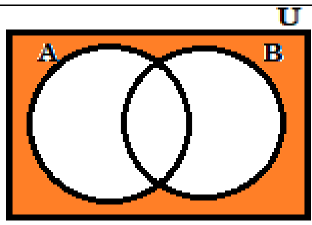
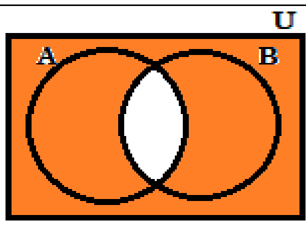
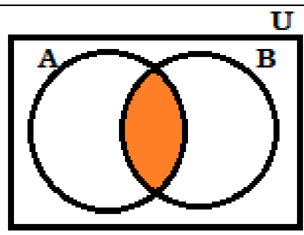
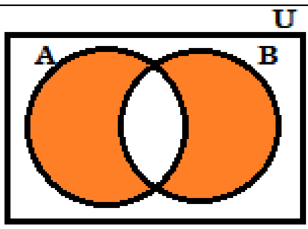
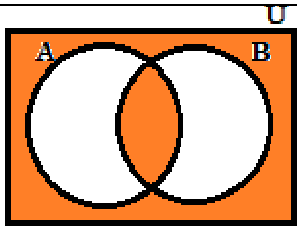
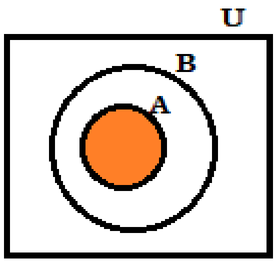
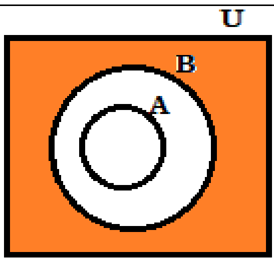
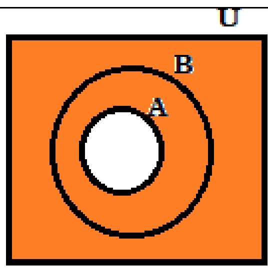
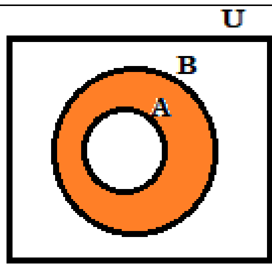
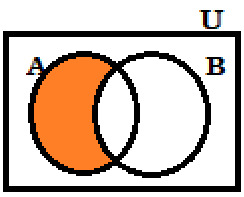
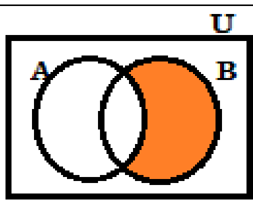
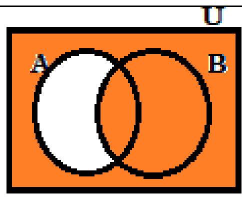
Si A y B son los conjuntos de la figura 13, su diferencia simétrica es la región

Sombreada: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$

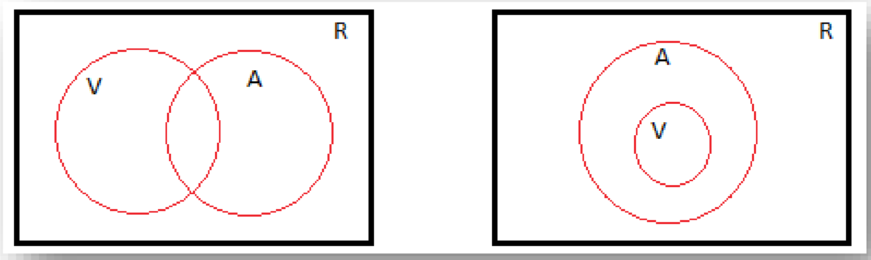


✓ *Ejercicios*

1. Indica la operación correspondiente en cada caso:

2. Para cada uno de los siguientes apartados dibuja los siguientes diagramas y sombrea la operación indicada:



a) $V \cup A$ b) $V \cap A$ c) $A - V$ d) $(A\text{-}V) \cap A$
e) $\overline{V}$ f) $\overline{A}$ g) $\overline{A \cap V}$ h) $\overline{V} \cap A$

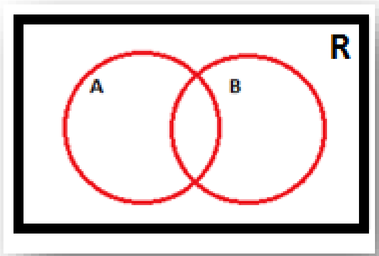
3. Sean los conjuntos: $A = \{a, b, c, g\}$, $B = \{d, e, f, g\}$, $C = \{a, c, f\}$, $D = \{f, h, k\}$ y el referencial $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$ define por extensión y halla el valor del numeral en cada caso.

a) $A \cup B$ b) $B \cup C$ c) $A \cap C$ d) $B \cap C \cap D$
e) $A\text{-}B$ f) $\overline{A}$ g) $A \Delta B$ h) $A \Delta C$

4. Si A y B son conjuntos disjuntos tales que $n(A \cup B) = n(A)$, qué deberá ser verdadero acerca de B?

5. Dados los conjuntos:
$R = \{x/x \text{ es una persona}\}$, $A = \{x/x \text{ consume pescado}\}$, $B = \{x/x \text{ consume pollo}\}$

Ubica en el siguiente diagrama a cada persona según sus preferencias de consumo.



a) Soledad sólo consume pollo.
b) Joaquín no consume ni pescado ni pollo.
c) Juan consume ambos.
d) Mario sólo consume pescado.

6. De 400 alumnos que estudian en una escuela de idiomas
120 estudian únicamente francés, 200 estudian francés e inglés y 50 estudian otros idiomas diferentes. Responde:

a) ¿Cuántos estudian sólo inglés?
b) ¿Cuántos estudian inglés?
c) ¿Cuántos no estudian francés?
d) ¿Cuántos estudian por lo menos un idioma?

7. A un campeonato concurren 52 alumnos, 23 saben cocinar, 18 saben armar carpas y 25 no saben cocinar ni armar carpas. Utilizando diagramas conjuntistas hallar:

a) ¿Cuántos alumnos saben armar carpas y cocinar?

b) ¿Cuántos saben cocinar y no saben armar carpas?

Trabajo Práctico Nº 2 de entrega obligatoria

1. Define según la cantidad de elementos que tenga cada conjunto (unitario, finito, infinito):

a) $A = \{x/x \text{ } es \text{ } día \text{ } de \text{ } la \text{ } semana \text{ } que \text{ } empieza \text{ } con \text{ } la \text{ } letra \text{ } m\}$

b) $B = \{x/x \in N \ \wedge 4 \leq x \leq 30\}$

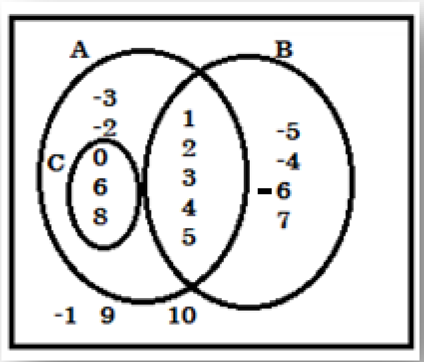
c) $C = \{2\}$

d) $D = \emptyset$

e) $E = \{\ldots - 4, -3, -2, -1,0,1,2,3,4, \ldots\}$

f) $F = \{x/x \text{ } es \text{ } vocal \text{ } de \text{ } la \text{ } palabra \text{ } \mathbf{computadora}\}$

2. Observa el diagrama:Califica como verdadero o falso en cada caso. Justifica tu respuesta.



   a) $-3 \in A$
   b) $0 \notin A$
   c) $C \in A$
   d) $C \subset A$
   e) $A \subset C$
   f) $A \cap B = \{1,2,3,4,5\}$
   g) $A \cap C = C$
   h) $\overline{A \cup B} = \{9,10\}$
   i) $\overline{A \cup B} = \{-1,9,10\}$
   j) $\bar{C} = B \cup \{-3, -2, -1,9,10\}$
   k) $A \Delta B = \{-5, -4, -3, -2,6,7\}$
   l) $B \cap C = \emptyset$

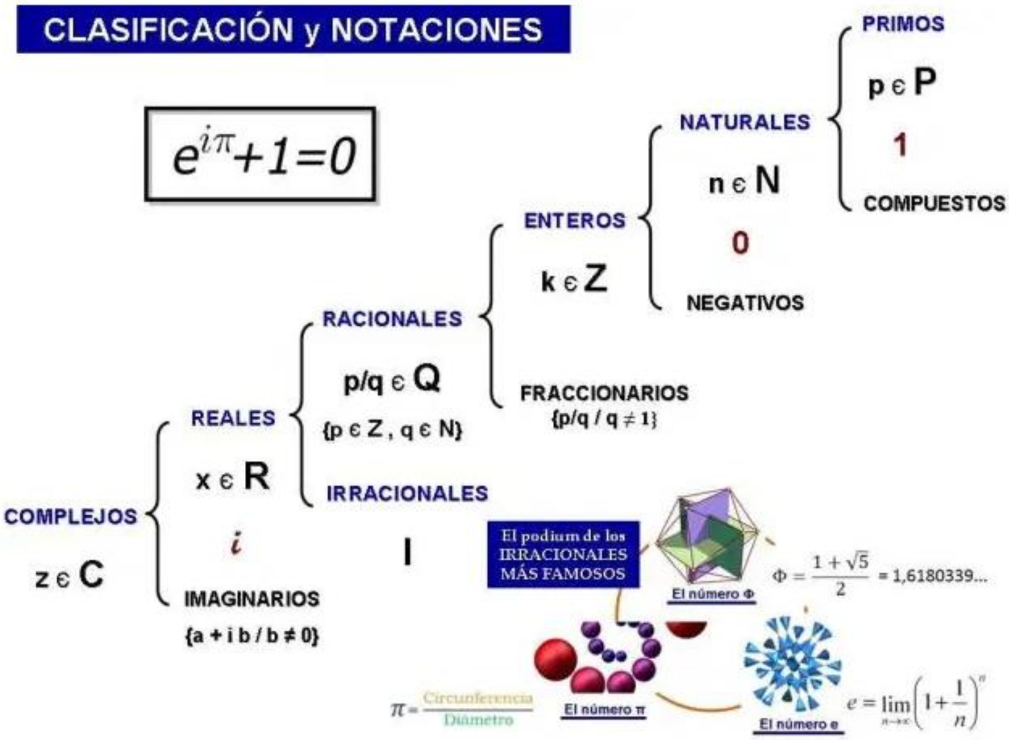
3. Dados los conjuntos: $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \left\{ x/_{x} \text{ } es \text{ } número \text{ } natural \text{ } par \text{ } menor \text{ } que \text{ } doce \right\}$ y $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14\}$:

a) Vuelca la información en un diagrama.

b) Define por extensión en cada caso: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$.

4. En una cena se preguntó a los comensales si preferían pescado o carne de ternera. Siete personas dijeron que preferían solamente pescado, seis carnes de ternera solamente y a ocho les gustaba por igual pescado o la carne de ternera, y a nueve no les gustaba ni el pescado ni la carne de ternera. Utilizando diagramas de Venn y conteo simple, hallar la cantidad de invitados que asistieron a la cena y a cuantos les gustaba el pescado.

3. Campos numéricos



Edición: Alfonso González

Principales símbolos matemáticos

	SÍMBOLO	SIGNIFICADO
1	∀	Para todo
2	∃	Existe al menos uno
3	∃!	Existe un único
4	∄	No existe
5	/	Tal que
6	:	Tal que
7	$<$	Menor que
8	=	Igual que
9	$>$	Mayor que
10	≤	Menor o igual que
11	≥	Mayor o igual que
12	∞	Infinito
13	∘	Composición de funciones
14	∝	Proporcional a
15	⊥	Perpendicular a
16	≠	Distinto de
17	≈ ≡ ≃	Aproximadamente igual a
18	■	Idéntico a
19	∪	Unión de conjuntos
20	∩	Intersección de conjuntos
21	⊂	Contenido en
22	⊃	Contiene a
23	∈	Perteneciente a
24	∉	No perteneciente a
25	∅	Conjunto vacío
26	⇒	Implica
27	⇔	Si y sólo si
28	Σ	Sumatorio
29	Π	Productorio
30	N	Números naturales
31	Z	Números enteros
32	Q	Números racionales
33	I	Números irracionales[1]
34	R	Números reales
35	C	Números complejos

Números Naturales N

Se denominan números Naturales a los números: 1,2,3,4,………… Este conjunto tiene primer elemento pero no último. Dado cualquier número natural se puede hallar el siguiente, sumando uno al elegido, es decir si $x \in N \Rightarrow x+1 \in N$.

Números Enteros Z

Encontraste algún número natural que al sumarle 5 se obtenga 2?. Entonces, para poder definir la diferencia o resta de dos números en forma general necesitamos ampliar el campo de los naturales. Este nuevo conjunto es el conjunto de los **números Enteros,** formado por los números Naturales, el cero y los opuestos de los Naturales.

$$\boldsymbol{Z} \equiv -\boldsymbol{N} \cup \{\boldsymbol{0}\} \cup \boldsymbol{N}$$

Observemos que N está incluido en Z: $N \subset Z$

Los números Racionales Q

Vimos que no existe ningún número entero que multiplicado por 5 nos de 8. Nos vemos en la necesidad de estudiar otro conjunto numérico para poder resolver esta ecuación.

Los números racionales son los que se pueden expresar como cociente de dos números enteros (como una razón a/b). Ejemplos: 2/5, 1/3, 5/4, 0.25= 25/100= ¼, 0=0/1.

Al número "a" se lo llama numerador y al número "b" denominador (recordar que "b" indica la cantidad de partes que debo dividir a la unidad y "a" las partes que tomo). Por ejemplo: $\frac{3}{5}$ indica que divido a la unidad en 5 partes y que tomo 3 de ellas.

Propiedades de los números racionales

- No tienen ni primer ni último elemento.
- Es un conjunto infinito.
- Los números racionales se pueden expresar como racionales finitos o periódicos.
- Entre dos números racionales existen infinitos racionales, por eso decimos que es un conjunto **denso**.
- Observemos que : $N \subset Z \subset Q$.

Números irracionales I

Un **número irracional** es un número que **no se puede** expresar como decimal con un número finito de cifras.

Ejemplo: **Pi** es un número irracional. El valor de Pi es **3,1415926535897932384626433832795 (y más...)**

Ejemplo: ¿La raíz cuadrada de 2 es un número irracional?

Mi calculadora dice que la raíz de 2 es 1,4142135623730950488016887242097, ¡pero eso no es todo! De hecho sigue indefinidamente, sin que los números se repitan.

No se puede escribir una fracción que sea igual a la raíz de 2. Así que la raíz de 2 es un **número irracional**

Números irracionales famosos

- Pi es un número irracional famoso. Se han calculado más de un millón de cifras decimales y sigue sin repetirse. Los primeros son estos: 3,1415926535897932384626433832795 ……π
- El número ***e*** (el número de Euler) es otro número irracional famoso. Se han calculado muchas cifras decimales de ***e*** sin encontrar ningún patrón. Los primeros decimales son: 2,7182818284590452353602874713527 ………….
- La razón de oro es un número irracional. Sus primeros dígitos son: 1,61803398874989484820……………..φ

Muchas raíces cuadradas, cúbicas, etc. también son irracionales. Ejemplos:

$\sqrt{3}$	1,7320508075688772935274463415059…..
$\sqrt{99}$	9,9498743710661995473447982100121 …..

Pero $\sqrt{4} = 2$, y $\sqrt{9} = 3$, así que **no todas** las raíces son irracionales.
Por último, llamamos al conjunto que reúne a todos los conjuntos numéricos anteriores: **Conjunto de Números Reales**.

Propiedades de las operaciones en R

Suma

Propiedad Conmutativa: cualesquiera sean los números reales a y b, vale: $a + b = b + a$

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{1.2+3}{4}=\frac{5}{4}$$

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3+1.2}{4}=\frac{5}{4}$$

Propiedad Asociativa: cualesquiera sean los números reales a, b y c, vale:

$$\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{c}$$

Propiedad de existencia del elemento neutro: existe un número real llamado "cero", que indicamos "0", tal que para todo número real se cumple: $\boldsymbol{a+0=0+a}$

Propiedad de existencia del inverso aditivo o simétrico: Dado un número real "a" existe un número real que llamamos "inverso aditivo de a o simétrico", e indicamos "-a", tal que:

$$\boldsymbol{a+(-a)=(-a)+a=0}$$

Producto

Las propiedades básicas del producto son también cuatro y se corresponden con las de la suma:

Propiedad Conmutativa: $\forall a, b$ se verifica: $a.b=b.a$

Propiedad Asociativa: $\forall a, b, c \in R$ se verifica: $\boldsymbol{a.(b.c)=(a.b).c}$

Propiedad de existencia del elemento neutro: existe un número real distinto de cero que llamamos "uno" e indicamos "1", tal que, para todo número real se cumple: $\boldsymbol{a.1=a}$

Propiedad de existencia del inverso multiplicativo: dado un número real "a", distinto de cero, existe un número real que llamamos "inverso multiplicativo de a" o "recíproco", e indicamos "a^{-1}", tal que:$\boldsymbol{a.a^{-1}=1}$

Propiedad distributiva (vincula la suma con el producto): cualesquiera sean los números reales a,b y c, vale:

$$\boldsymbol{a.(b+c)=a.b+a.c} \quad , \quad \boldsymbol{(b+c).a=b.a+c.a} \quad ,$$
$$\boldsymbol{(a+b).(c+d)=.ac+a.d+b.c+b.d}$$

✓ *Ejercicios*

1. Discute la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) Todo número natural tiene un antecesor.
b) La suma en Z no es una operación cerrada.
c) Todo número natural es mayor o igual que 1.
d) La división de dos números naturales siempre da un número natural.
e) Si a es un número natural par, su consecutivo es impar.
f) La suma de dos números naturales consecutivos es divisible por 2.
g) Si a+b es impar entonces su duplo es par.
h) Un número natural a puede ser par o impar, pero 2a es siempre par y 2a + 1 es siempre impar.

2. Resuelve aplicando la propiedad distributiva:

a) $a.(a+b)=$	e) $(a+b).(a+b)=$
b) $(b+c).a=$	f) $(x+2).(x+2)=$
c) $(a+b):c=$	g) $(a-b).(a-b)=$
d) $(8+4):2=$	h) $(x-2).(x-2)=$

3. Encuentra el número decimal que es equivalente al número dado:

a) 7/8	b) 3/500	c) $5\frac{2}{3}$	d) 1/9
e) 0.7%	f) 7/11	g) 0.04%	h) 103%

$$a\frac{b}{c} = \text{número mixto} \equiv a + \frac{b}{c}$$

4. Encierra en un círculo a todos los múltiplos de 2 y de 3 que encuentres en la siguiente tabla:

6	7	9	10	12	14	18	21	23	25
30	32	36	40	42	44	48	55	57	60

5. Encierra en un círculo a todos los divisores de 36 que encuentres en la siguiente tabla.

2	3	4	5	6	7	10	12	15
18	19	20	22	28	30	32	33	36

6. Dados los siguientes criterios de divisibilidad[1]:

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

NÚMERO	REGLA DE DIVISIBILIDAD	EJEMPLOS
Son divisibles por 1	Todos los números	
Son divisibles por 2	Los números que terminan en cero o cifra par	20, 202, 354, 3356, 2468,...
Son divisibles por 3	Los números cuyas cifras suman 3 o múltiplo de 3 (al sumar pueden descartarse las cifras 0, 3, 6 y 9)	111, 213, 1233, 3321,...
Son divisibles por 4	Los números cuyas dos últimas cifras son 00 o múltiplo de cuatro (12, 16, 20, 24,...)	12312, 987624,...
Son divisibles por 5	Los números terminados en 0 ó 5	10, 15, 60, 75, 90, 105,...
Son divisibles por 6	Los números divisibles por 2 y por 3	132, 654,...
Son divisibles por 8	Los números cuyas tres últimas cifras son 000 o múltiplo de ocho	12000, 12520,...
Son divisibles por 9	Los números cuyas cifras suman 9 o múltiplo de 9 (al sumar pueden descartarse las cifras 0 y 9)	32090310, 6073002,...
Son divisibles por 10	Los números terminados en cero	10, 20, 100, 210, 3450,...
Son divisibles por 11	Los números en los que la suma de las cifras de lugar par, menos la suma de las cifras de lugar impar (o viceversa) da 0 ó múltiplo de 11 (11, 22, 33,...)	4356781 (la suma de las cifras de lugar par da 17, la suma de las cifras de lugar impar da 17, la diferencia es 0)
Son divisibles por 12	Los números divisibles por 3 y por 4	132, 624,...
Son divisibles por 14	Los números divisibles por 2 y por 7	910, 1372,...
Son divisibles por 15	Los números divisibles por 3 y por 5	90, 540,...
Son divisibles por 18	Los números divisibles por 2 y por 9	53514, 3264120
Son divisibles por 25	Los números terminados en 00 o múltiplos de 25 (25, 50 y 75)	100, 125, 250, 375,...
Son divisibles por 100	Los números terminados en 00	100, 200, 34500,...

Responde:

a) ¿Es cierto que 52500 y 934632 son divisibles por 2, por 3 y por 4? (aplica los criterios, prohibido usar la calculadora)

[1] https://www.google.com/search?q=reglas+de+divisibilidad

b) ¿Es cierto que 1234563 es divisible por 11?

7. Resuelve sin calculadora:

I. Expresa los siguientes números decimales como fracciones:

a) $0.1 =$	b) $0.01 =$	c) $0.001 =$	d) $2.4 =$
e) $-2.44 =$	f) $-3.405 =$	g) $34.6789 =$	h) 0.23455=
i) $0.1111\ldots =$	j) $3.999\ldots =$	k) $1.121212\ldots =$	l) $-1.145145\ldots =$

II. Resuelve las siguientes sumas y restas en Q (sin calculadora)

a) $\left[\left(2-\frac{4}{5}\right)-\frac{5}{3}-\left(\frac{1}{2}+2\right)\right]=$

b) $\left\{-\frac{1}{2}+2\left[-\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\right)\right]\right\}=$

c) $-1+\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\right)\right]-\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)=$

d) $\left[-1+\left(2-\frac{1}{4}\right)\right]-\left[\frac{1}{2}-\left(2-\frac{2}{3}\right)\right]=$

III. Resuelve las siguientes multiplicaciones y divisiones en Q

a) $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}:\frac{8}{6}=$

b) $\frac{4}{3}.\left(-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3}{4}.\frac{6}{10}\right)=$

c) $-\frac{2}{3}:\left[\frac{1}{2}:\left(\frac{3}{4}:\frac{1}{8}\right)\right]=$

d) $\left(\frac{1}{2}:\frac{3}{4}\right).\left[\frac{2}{5}:\left(-\frac{2.5}{6}\right)\right]=$

e) $\left(1+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right).\left(1-\frac{1}{2}+3/4\right).\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right).\left(\frac{4}{5}-2\right).3\frac{5}{9}=$

8. Clasifica los siguientes números:

Número	**N**	**Z**	**Q**	**I**	**R**
2,3333…					
-4,12					
5/3					
$\sqrt{4}$					
$\sqrt[3]{-1}$					
π					

9. Opuestos y recíprocos. Completa la tabla:

Número	x	3				$\sqrt{2}$			
Opuesto	-x $(x \neq 0)$			4			3/5		-9
Recíproco	$\frac{1}{x}$; $x \neq 0$		3		1/4			5/4	
Número		3/2			-2.33		e		0
Recíproco	-2/3		-4					π	
Opuesto				5.1		1/2			

Potenciación de números racionales

Se llama potencia n-ésima (con n Natural) del número racional α, al número racional α^n que se obtiene multiplicando n veces el número α.

$$\boldsymbol{\alpha^n = \alpha.\alpha.\alpha \dots \dots \alpha} \text{ (n factores)}$$

α es la **base** de la potencia y n es el **exponente**

Para tener en cuenta:

Potencia con exponente nulo: $\boldsymbol{a^0 = a^{1-1} = a^1 : a^1 = 1}$

Potencia con exponente uno: $\boldsymbol{a^1 = a}$

Potencia con exponente negativo: $\boldsymbol{a^{-n} = a^{0-n} = a^0 : a^n = \frac{1}{a^n}}$

Toda potencia de base positiva es positiva.

Toda potencia de exponente par es positiva

Toda potencia de exponente impar y base negativa es negativa.

Operaciones con potencias

Multiplicación de potencias de igual base

El producto de dos o más potencias de igual base es igual a la base elevada a la suma de los correspondientes exponentes (la misma base y se suman los exponentes):

$$\boldsymbol{a^m . a^n = a^{m+n}} \quad , \qquad 3^4 . 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$$

División de potencias de igual base

La división de dos potencias de igual base es igual a la base elevada a la resta de los exponentes respectivos:

$$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}} \quad , \qquad 3^4 : 3^2 = 3^{4-2} = 3^2$$

Potencia de una potencia

La potencia de una potencia de base *a* es igual a la potencia de base *a* y cuyo exponente es el producto de ambos exponentes (la misma base y se multiplican los exponentes):

$$\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m.n}}$$

Observación: $\boldsymbol{a^{m^n} \neq (a^m)^n}$

Propiedad distributiva

La potenciación es distributiva con respecto a la multiplicación y a la división:

$$\boldsymbol{(a.b)^n = a^n . b^n} \quad ; \ \boldsymbol{(a:b)^n = a^n : b^n}$$

Propiedades que no cumple la potenciación

No es distributiva con respecto a la adición y sustracción:

$$(\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} \neq \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} \pm \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}$$

No cumple la propiedad conmutativa, exceptuando aquellos casos en que base y exponente tienen el mismo valor o son equivalentes. En general:

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}} \neq \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{a}}$$

Tampoco cumple la propiedad asociativa:

$$\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{c}}} = \boldsymbol{a}^{(\boldsymbol{b}^{\boldsymbol{c}})} \neq \left(\boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}}\right)^{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{a}^{(\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c})} = \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}}$$

Potencia de base 10

Al multiplicar un número por la potencia **10*ⁿ*** (con **n>0**) se desplaza la coma hacia la **derecha** tantas posiciones como indica el exponente, si no hubiera suficientes cifras para desplazar a la derecha se agregan ceros a la derecha. Al multiplicar un número por la potencia $\mathbf{10^{-n}}$ (con **–n<0**) se desplaza la coma hacia la **izquierda** tantas posiciones como indica el exponente, Si no hubiera suficientes cifras para desplazar la coma, se añaden ceros a la izquierda.

Ejemplos:

$14{,}45 * 10^2 = 1445$	$14{,}1 * 10^3 = 14100$	$14{,}45 * 10^{-2} = 0{,}1445$	$1{,}1 * 10^{-3} = 0{,}0011$

Descomposición de números en potencias de base 10

Ejemplo: descomponer el número 23546 en potencias de 10:

$$23546 = 20000 + 3000 + 500 + 40 + 6$$

$$2.10000 + 3.1000 + 5.100 + 4.10 + 6 = \mathbf{2}.10^4 + \mathbf{3}.10^3 + \mathbf{5}.10^2 + \mathbf{4}.10^1 + \mathbf{6}.10^0 = \mathbf{23546}$$

Más ejemplos:

i) $305423 = 3.100000 + 0.10000 + 5.1000 + 4.100 + 2.10 + 3$

$$= 3.10^5 + 0.10^4 + 5.10^3 + 4.10^2 + 2.10^1 + 3.10^0$$

ii) $2.10^4 + 4.10^2 + 10^1 + 3 = 20000 + 400 + 10 + 3 = 20413$

iii) $3214.34 = 3000 + 200 + 10 + 4 + 0.30 + 0.04$

$$= 3.10^3 + 2.10^2 + 1.10^1 + 4 + 3.10^{-1} + 4.10^{-2}$$

Se puede descomponer cualquier número en potencias de 10 o en otras potencias. Por $e$jemplo:

$100 = 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 = 1100100_2$

$101011_2 = 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 32 + 8 + 2 + 1 = 43$

✓ Ejercicios

10. Resuelve los siguientes ejercicios:

a) $a^4 + a^4 + a^4 =$

b) $a^4 . a^4 . a^4 =$

c) $a^4 : a =$

d) $a^2 : a^{-2} =$

e) $3.a^3.2a^2.a =$

f) $2^{-1} + 3^{-3} + 2^2 =$

11. Aplica la/s propiedad/es conveniente/s para reducir las siguientes potencias a una:

a) $3^3 \cdot 3^4 \cdot 3 =$

b) $5^7 : 5^3 =$

c) $2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^4 =$

d) $2^2 : 2^3 =$

e) $2^{-2} : 2^3 =$

f) $2^2 : 2^{-3} =$

g) $2^{-2} : 2^{-3} =$

h) $3^{-2} \cdot 3^{-4} \cdot 3^4$

i) $(-3)^1 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^4 =$

j) $5^2 : 5^3 =$

k) $5^{-2} : 5^3 =$

l) $5^{2} : 5^{-3} =$

m) $(-8) \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^0 (-2) =$

n) $[(-2)^{-2}]^3 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 =$

o) $[(-2)^6 : (-2)^3]^3 \cdot (-2) \cdot (-2)^{-4} =$

p) $(-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot (-3)^{-4} =$

12. Lleva a la forma a^x siendo "a" un número primo.

a) $[(5^3)^4]^2 =$

b) $(2^5)^4 =$

c) $(8^2)^3 =$

d) $[(2^3)^4]^0 =$

e) $(9^3)^2 =$

f) $(27^2)^5 =$

g) $(4^3)^2 =$

h) $(49^3)^2 =$

13. Desarrolla en potencias de 2 o de 10 según se indique:

En potencias de 10	**Es potencias de 2**
2344=	50=
10560=	41=
214097=	23=
1000304=	18=
2002001=	17=

Radicación

Recordemos que dado un número racional α se llama raíz n-ésima de α, a un número racional β, tal que β elevado a la n da como resultado α. Es decir:

$$\sqrt[n]{\alpha} = \beta, \text{ si } \beta^n = \alpha$$

Ejemplos:

i) $\sqrt[3]{-8} = -2 \; ya \; que \; (-2)^3 = -8$

ii) $\sqrt{-4} = no \; existe \; en \; en \; el \; campo \; de \; los \; Reales, \nexists x \in R / x^2 = -4$

Propiedades de la radicación

Es una de las operaciones inversas de la potenciación.

La radicación no es cerrada en Q.

No es uniforme.

No es conmutativa.

Propiedad distributiva de la radicación: sólo distribuye con respecto al producto y al cociente de las bases siempre que las operaciones sean posibles, y no distribuye a la suma ni a la resta de las bases.

$$\sqrt[n]{\alpha.\beta} = \sqrt[n]{\alpha}.\sqrt[n]{\beta} \qquad\qquad \sqrt[n]{\alpha:\beta} = \sqrt[n]{\alpha}:\sqrt[n]{\beta}$$

Ejemplos:

$\sqrt[3]{8.27} = \sqrt[3]{8}.\sqrt[3]{27} = 2.3 = 6$; $\sqrt{(-4).(-9)} \neq \sqrt{-4}.\sqrt{-9}$

No podemos resolver $\sqrt{-4}$ y $\sqrt{-9}$ en los conjuntos numéricos que hemos estudiado.

Consideraciones a tener en cuenta:

Toda raíz de índice impar y radicando positivo es un número positivo, por ejemplo: $\sqrt[3]{27} = 3$

Toda raíz de índice impar y radicando negativo es un número negativo, por ejemplo: $\sqrt[3]{-27} = -3$

14. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones, justificando en cada caso la respuesta.

a) $3x^4 + 3x^4 = 6x^8$

b) $\sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$

c) $(x^3)^2 = x^6$

d) $\frac{a-b}{4} = \frac{a}{4} - b$

e) $a^n : a^m = a^{n-m}$

f) $\sqrt[n]{\alpha+\beta} = \sqrt[n]{\alpha} + \sqrt[n]{\beta}$

g) $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

h) $x.x^{-2}.x^4 = x^2$

15. Resuelve los siguientes ejercicios combinados.

a) $\mathbf{\left(1 - \sqrt[3]{-8}\right)^{-1} - 0.333\ldots - \left(10^{-1} + \frac{1}{10}\right) =}$

b) $\sqrt{1 - \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}} + 5^{-1} - 0.999\ldots =$

c) $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} : \left(-\frac{2}{3}\right)^{4}\right] : 2.3444\ldots =$

16. Indica qué operaciones pueden efectuarse entre los siguientes pares de números de manera tal que el resultado sea un número racional:

a) $5 - \sqrt{2}\ y\ 6 + \sqrt{2}$

b) $6+\left(\frac{-5+\sqrt{2}}{3}\right)$ y $7-\left(\frac{5-\sqrt{2}}{3}\right)$
c) $1.5-\frac{(-3+\sqrt{2})}{10}$ y $1.5+\frac{\sqrt{2}-3}{10}$
d) $\frac{6}{6-\sqrt{5}}$ y $\frac{-6}{6+\sqrt{5}}$

17. Resuelve las siguientes operaciones:

a) $5\sqrt{125}+6\sqrt{45}-7\sqrt{20}=$

b) $\sqrt{27}-\sqrt{50}+\sqrt{12}+\sqrt{8}=$

d) $\sqrt{125}+\sqrt{54}-\sqrt{45}-\sqrt{24}=$

e) $3\sqrt[3]{16}-2\sqrt[3]{250}+5\sqrt[3]{54}-4\sqrt[3]{2}=$

Hay muchas consideraciones especiales que debemos tener en cuenta para realizar operaciones con radicales, sólo recordaremos las siguientes:

$$\sqrt[n]{\alpha^n}=\alpha \quad \textbf{si n es impar}$$

$$\sqrt[n]{\alpha^n}=|\alpha| \quad \textbf{si n es par}$$

$$\alpha^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{\alpha^n}$$

18. Resuelve aplicando propiedades:

m) $2^{1/2}.2^{2/3}.2^{-1/3}=$

n) $\sqrt[3]{2^3}=$

o) $\sqrt[6]{2^6}=$

p) $\sqrt{(-3)^2}=$

q) $\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}=$

r) $\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}=$

Notación científica

La **notación científica** es una manera rápida de representar un número utilizando potencias de base diez. Esta notación se utiliza para poder expresar fácilmente números muy grandes o muy pequeños. Los números se escriben como un producto: $a.10^n$

Siendo: "a" un número entero o decimal mayor o igual que 1 y menor que 10, que recibe el nombre de **mantisa y "n"** un número entero, que recibe el nombre de **exponente u orden de magnitud.**

Para expresar un valor utilizando notación científica se cuenta el número de lugares que se necesita mover la coma para poder obtener el número "a". Si la coma se mueve hacia la izquierda, entonces "a" es un entero positivo, por ejemplo para el número 72000, se corre la coma cuatro lugares hacia la izquierda, y se obtiene a= 7,2, por lo tanto el número 72000 expresado en notación científica será: $7{,}2.10^4$. Pero si se mueve hacia la derecha "a" será un entero negativo, por ejemplo: 0,00000045 expresado en notación científica será: $4{,}5.10^{-7}$.

19. Expresa en notación científica o en número decimal según corresponda:

	En notación científica		En número decimal
0,0000000456		$2,1*10^4$	
20000000000		$3,19*10^{-4}$	
-0,00004		$8,134*10^3$	
-0,00000000034		$-9,56*10^{-6}$	
2340000000000		$-6,77*10^5$	

20. Resuelve las siguientes operaciones expresando los resultados en notación científica

a) $1{,}25.10^4.3.10^{-2} =$ c) $0{,}00012 - 0{,}0023 =$

b) $\dfrac{2.10^{-6}.4{,}2.10^{-4}}{2{,}1.10^3.4.10^3} =$ d) $\dfrac{2000000.43000000}{0{,}00000003.0{,}000004.2000000000} =$

Razones y Proporciones

Llamamos **razón** al cociente indicado de dos números. Por ejemplo:

$$\frac{4}{5}, \frac{a}{b}, \frac{7}{3} \ldots..$$

Observa que sólo se trata de divisiones que están indicadas, sin calcular su resultado.

Llamamos **proporción** a la igualdad de dos razones:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$$

Regla de tres simple directa-magnitudes directamente proporcionales

Problema resuelto: Un vehículo recorre 300 kilómetros con 25 litros de gasolina. ¿Cuántos kilómetros podría recorrer con 200 litros?

Solución: por regla de tres simple sabemos que

25 litros ———— 300 km
200 litros ———— x km

de donde x= $\dfrac{\textbf{200 litros . 300 km}}{\textbf{25 litros}}$ **= 2400 km**

Se trata de un problema de regla de tres directa: a mayor cantidad de combustible, mayor distancia recorrida. Cada pareja de datos, debidamente ordenados, los podemos escribir en forma de dos razones:

$$\boldsymbol{\frac{25}{200} = \frac{300}{x}}$$

$$x = \frac{\mathbf{200.300}}{\mathbf{25}} = \mathbf{2400}$$

Regla de tres simple inversa-magnitudes inversamente proporcionales

A más……………..menos

A menos…………………..más

Problema resuelto

Un grifo que mana 18 litros de agua por minuto tarda 14 horas en llenar un depósito. ¿Cuánto tardaría si su caudal fuera de 7 litros por minuto?

18 litros/min————————14 hs
7 litros /min ———————— x hs **de donde x=** $\frac{\textbf{18 litros/min . 14 hs}}{\textbf{7 litros/min}}$**=36 hs**

Solución: Son magnitudes **inversamente proporcionales**, ya que **a menos** litros por minuto tardará **más** en llenar el depósito.

Utilizando razones:

$$\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{18}} = \frac{\mathbf{14}}{\boldsymbol{x}}$$

$$\mathbf{7}.\boldsymbol{x} = \mathbf{14.18} \;\; ; \quad \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{14.18}}{\mathbf{7}} = \mathbf{36}$$

✓ *Ejercicios*

21. Sabiendo que en toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos, halla en cada caso el valor de x:

a) $\frac{2}{5} = \frac{x}{10}$ b) $\frac{x}{4} = \frac{35}{20}$ c) $\frac{3}{x} = \frac{1}{6}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x}}$

22. Una rueda da 1000 vueltas en 4 minutos ¿Cuántas vueltas dará en 1 hora? Resuelve utilizando las proporciones.

23. Con $1850 puedo comprar 2 camisas ¿cuántas podré comprar con $4500? Resolverlo haciendo uso de las proporciones.

24. Para construir 5 casas se han utilizado 22000 kilos de cemento. ¿Cuántas casas podremos hacer con 132000 kilos?

25. Tres obreros construyen un muro en 12 horas, ¿cuánto tardarán en construirlo 6 obreros?

26. Para sacar el agua de una piscina de plástico se necesita realizar 210 extracciones con un cubo de 12 litros de capacidad. Si el cubo es de 20 litros, ¿cuántas extracciones necesitaremos para sacar toda el agua de la piscina? (respuesta: 126 extracciones)

27. Si con 70 Kg tenemos para alimentar a 25 gallinas durante 30 días. Si se mueren 15 gallinas ¿para cuántos días habrá comida suficiente? (respuesta: 75 días)

Calcular porcentaje (%) o tanto por ciento

http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Proporcionalidad.htm

*El **porcentaje** o **tanto por ciento (%),** es una de las aplicaciones más usadas de las **proporciones o razones**.*

*El porcentaje es una forma de **comparar** cantidades, es una unidad de referencia que relaciona una **magnitud (una cifra o cantidad)** con el **todo que le corresponde (el todo es siempre el 100)**, considerando como unidad la centésima parte del todo.*

Ejemplos:

1 centésimo = 1/100 5 centésimos= 5/100 50 centésimos=50/100 70 centésimos=70/100

¿Qué significa 50 %?: Significa que de una cantidad que se ha dividido en cien partes se han tomado 50 de ellas, o sea, la mitad.

¿Qué significa 25 %?: Significa que de un total de 100 partes se han tomado 25, o sea ¼ (25/100 al simplificar por 5, se reduce a ¼).

***Nota importante.** No olvidar que las fracciones deben expresarse siempre lo más pequeñas posible, deben ser fracciones irreducibles.*

*El Porcentaje o Tanto por ciento se calcula a partir de variables **directamente proporcionales** (significa que si una variable aumenta la otra también aumenta y viceversa).*

En el cálculo intervienen cuatro componentes:

Cantidad Total ---- 100 %
Cantidad Parcial ---- Porcentaje Parcial

Ejemplo

(Cantidad total) $ 1.000 - equivale al - 100 % (porcentaje total)
(Cantidad parcial) $ 500 - equivale al - 50 % (porcentaje parcial)

Existen tres situaciones o tipos de problemas que pueden plantearse

1.- Dada una cantidad total, calcular el número que corresponde a ese porcentaje (%) parcial:

Ejemplo: *¿Cuál (cuánto) es el 20% de 80?*

Para resolverlo, se hace: $\frac{80}{x} = \frac{100}{20}$

	Cantidad	Porcentaje
Total	80	100
Parcial	x	20

Resolvemos la incógnita (x):

$$x = \frac{80.20}{100} = \frac{1600}{100} = 16$$

Respuesta: el 20 % de 80 es 16.

2.- *Calcular el total, dada una cantidad que corresponde a un porcentaje de él.*

Ejemplo: Si el 20 % de una cierta cantidad total es 120 ¿Cuál es el total?

Para resolverlo, se hace: $\frac{x}{120} = \frac{100}{20}$

Cantidad	Porcentaje
x	100
120	20

$$x = \frac{100.120}{20} = 600$$

Respuesta: 120 es el 20 % de un total de 600.

3.- ***Dado el total y una parte de él calcular qué % es esa parte del total.***

Ejemplo: ¿*Qué porcentaje es 40 de 120?*

Cantidad	Porcentaje
120	100
40	x

Para resolverlo, se hace: $\frac{120}{40} = \frac{100}{x}$
Resolvemos la incógnita $x = \frac{100.40}{120} = 33.33$
Respuesta: 40 es el 33,33 % de 120.

Pregunta *: En un supermercado trabajan reponedores, cajeros y supervisores. El 60% corresponde a reponedores, los supervisores son 18 y éstos son un tercio de los cajeros. ¿Cuántos trabajadores tiene el supermercado?*

A) 54	B) 72	C) 108	D) 120	E) 180

Este problema contextualizado apunta al contenido de ***porcentajes****. El alumno para resolverlo debe comprender el enunciado e interpretar los datos entregados para realizar relaciones entre ellos. Es así como en el enunciado se mencionan tres tipos de trabajadores en el supermercado, de los cuales 18 son supervisores y éstos corresponden a un tercio de los cajeros (C), es decir,* $18 = \frac{1}{3}.c$ *obteniéndose que existen 54 cajeros.*

Ahora, como se tienen 18 supervisores y 54 cajeros, entre ellos hay 72 trabajadores que equivalen al 40% del total de trabajadores, ya que el 60% son reponedores. Entonces, para responder la pregunta se debe plantear la siguiente proporción, en donde ***x*** *representa al total de trabajadores:*

$$\frac{72}{40\%} = \frac{x}{100\%} \; de\ donde\ x = \frac{72.100\%}{40\%} = 180$$

Por lo tanto, la ***respuesta correcta está en la opción E).***

La opción C) fue el distractor más marcado, y el error que se comete en este caso va en la comprensión de la pregunta del problema, los alumnos no responden lo que les piden, sino que calculan el 60% del total, que corresponde a 108 reponedores y no al total de trabajadores.

✓ *Ejercicios*

28. Completa la tabla según lo que terminas de aprender:

Qué significa x%?	Significa que:…….	O sea
30%		
	De un total de 100 partes se han tomado 30	
		10/100
2%		
	De un total de 100 partes se han tomado 4	
		3/100

29. Cuál es el:

a) 25% de 80	b) 30% de 90	c) 20% de 1000	d) 5% de 10
d) 7% de 20	e) 12% de 15	f) 65% de 300	g) 90% de 100

30. Si el 10% de una cantidad total es 100, cuál es el total?

31. Si el 15% de una cantidad total es 150, cuál es el total?

32. Si el 25% de una cantidad total es 500, cuál es el total?

33. Qué porcentaje es:

a) 30 de 120?	b) 40 de 120?	c) 60 de 120?	d) 90 de 120?
d) 120 de 120?	e) 50 de 100?	f) 25 de 1000	g) 250 de 10000?

34. Al comprar un monitor que cuesta $9800 nos hacen un descuento del 6%, cuánto debemos pagar?

Logaritmación[2]

✓ *Ejercicios*

35. Traduce a lenguaje simbólico:
   a) El logaritmo en base 10 de 100 es igual a dos.
   b) El logaritmo natural del número e es igual a 1.
   c) El logaritmo en base 3 de 9 vale 2.
   d) El logaritmo en base ½ de 4 vale -2.
   e) El logaritmo en base 100 de 1 es cero.
   f) El logaritmo en base 3 de, 9 por 27 es igual a 5.

36. Calcula el valor de los siguientes logaritmos:

a) $\log_3 9 =$ b) $\log_2 \frac{1}{2} =$ c) $\log_{56} 1 =$ d) $\log_5 \frac{1}{25} =$ e) $\log 1000 =$

f) $\log 0.00001 =$ g) $\log_{\frac{4}{3}} \frac{3}{4} =$ h) $\log_4 64 =$ i) $\ln e^2 =$ j) $\ln e^{-9} =$

Cómo resolver logaritmos que no resultan inmediatos

A veces no resulta tan sencillo calcular logaritmos, como por ejemplo cuando queremos calcular el $\log_{81} 27$. Nos valemos de la definición de logaritmos, aplicamos propiedades de la potenciación y las dificultades desaparecen.

Lee atentamente y pregunta si no comprendes:

$$\log_{81} 27 = x \leftrightarrow 81^x = 27 \leftrightarrow (3^4)^x = 3^3 \leftrightarrow 3^{4x} = 3^3$$

Presta atención a la última igualdad: $\mathbf{3^{4x} = 3^3}$ Podemos afirmar que para que se mantenga la igualdad, si las bases de las potencias son iguales, entonces sus exponentes también lo son, de donde: $\mathbf{4x = 3}$. Por lo tanto **x=3/4**

Propiedades de los logaritmos

1. ***El logaritmo de un producto*** *es igual a la suma de los logaritmos de los factores:* $\boldsymbol{log_a x.y = log_a x + log_a y}$	$\log_4 2.16 = \log_4 2 + \log_4 16 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$
2. ***El logaritmo de un cociente*** *es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor:* $\boldsymbol{log_a x : y = log_a x - log_a y}$	$\log_4 2 : 16 = \log_4 2 - \log_4 16 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$
3. ***El logaritmo de una potencia*** *es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base:* $\boldsymbol{log_a x^n = n\, log_a x}$	$\log_3 9^5 = 5.\log_3 9 = 5.2 = 10$

[2] *Exposición en clase de conceptos teóricos.*

4. ***El logaritmo de una raíz*** *es igual al cociente entre el logaritmo del radicando y el índice de la raíz:* $$\boldsymbol{log_a \sqrt[n]{x^m} = log_a x^{m/n} = \frac{m}{n}.log_a x}$$	$\log_2 \sqrt[5]{4^{10}} = \log_2 4^{\frac{10}{5}} = \log_2 4^2 = 2.\log_2 4 = 2.2 = 4$
5. ***Cambio de base***: $$log_b x = \frac{log_c x}{log_c b}$$	$\log_4 128 = \dfrac{\log_2 128}{\log_2 4} = \dfrac{7}{2}$

<u>No existen propiedades para la suma y para la resta de logaritmos, es decir:</u>

$$\mathbf{log}(\boldsymbol{x+y}) = \boldsymbol{no\ hay\ propiedad} \qquad \mathbf{log}(\boldsymbol{x-y}) = \boldsymbol{no\ hay\ propiedad}$$

37. Resuelve aplicando propiedades convenientemente:

a) $\log_{64} 2 =$ b) $\log_{243} 81 =$ c) $\log_{0.000001} 100 =$ d) $\log_{\frac{2}{5}} \frac{125}{8} =$

e) $\log_{125} 1/5 =$ f) $\log_{128} \sqrt{2} =$ g) $\log_{1/3} 243^5 =$ h) $\ln e^{20} =$

38. Calcula los siguientes logaritmos aplicando la definición:

a) $\log_2 128 =$ b) $\log_4 1 =$ c) $\log_5 0.2 =$

d) $\ln e^3 =$ e) $\log_2 1/8 =$ f) $\log_{-4} 1/16 =$

39. Realiza las siguientes operaciones:

a) $\log(4-\sqrt{6}) + \log(4+\sqrt{6}) =$

b) $\frac{1}{2}\log(12-2\sqrt{11}) + \frac{1}{2}\log(12+2\sqrt{11}) =$

40. Toma logaritmos en las siguientes expresiones y desarrolla:

a) $a = \frac{x^2}{d\sqrt{a}}$ b) $x = \frac{m}{n}\sqrt{p}.\sqrt[3]{q}$

41. Encuentra el valor de x en cada caso aplicando las propiedades estudiadas:

a) $2^x = 8$ b) $2^{-x} = 8$

c) $3^x = 6$ d) $3^{-x} = 6$

e) $10^x = 0.00001$ f) $e^{-x} = 0.25$

Trabajo Práctico Nº 3 de entrega obligatoria

1. ¿Es cierto que?:
a) $234.(123+432)=234.123+432$
b) $234.(123+432)=234.123+234.432$
c) $a.(b+c)=a.b+a.c$
d) $a.b:a=\frac{b}{a}$
e) $(n+2)^2=n^2+2^4$
f) $\frac{1}{1/4}=\frac{1}{4}$
g) $\sqrt{(-36).(-16)} \nexists\ en\ R$
h) $\sqrt{(-36).(-16)}=\sqrt{-36}.\sqrt{-16}$

2. Completa la tabla:

Número	-5			e		
Opuesto		-5				
Recíproco			-5			$\sqrt{2}$

3. Escribe como decimal o como fracción según corresponda: (. ó ,)

0.0003		-1.234			0.00012	0.003
	$\frac{120}{1000}$		$\frac{134}{10000}$	$\frac{10000}{10000}$		

4. Resuelve sin utilizar la calculadora:
a) $2.\sqrt{9}-8.\left(-\frac{3^2}{2}\right)^2$
b) $2.\frac{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}{\sqrt{2^2.3^6}}=$

5. Escribe en potencias de 10:
a) 12305 b) 100345

6. Una notebook cuesta $52500, me ofrecen un 12% de descuento por pagarla al contado:
a) ¿Cuánto me han descontado?
b) ¿Cuánto he pagado?

7. Al subir el precio de una bicicleta un 20%, el precio final es ahora de $26000. ¿Cuál era el precio inicial?
8. Encuentra el valor de la variable aplicando la propiedad correspondiente de los logaritmos:
a) $3^x=8$
b) $e^{-y}=0.756$

4. Expresiones algebraicas-Ecuaciones e inecuaciones

Expresiones algebraicas[3]

Una expresión algebraica contiene letras, números y signos. La manipulación de expresiones algebraicas tiene las mismas propiedades que la manipulación de expresiones numéricas, ya que las letras se comportan como si fuesen números. Las expresiones algebraicas que se tratarán en este curso tendrán, por lo general, una o dos letras. Un ejemplo de expresión con una única letra es:

$$3x^2 + 4x - 2 - x^2 + 7x =$$

Ante cualquier expresión, lo primero que debe hacerse es simplificarla, utilizando las propiedades de las expresiones, que son equivalentes a las propiedades de los números. En el caso del ejemplo, deben agruparse los términos con las mismas letras. Por un lado, debemos sumar $3x^2$ y $-x^2$, mientras que, por otro lado, se debe sumar $4x\ y\ 7x$:

$$3x^2 + 4x - 2 - x^2 + 7x = 3x^2 - x^2 + 4x + 7x - 2 = 2x^2 + 11x - 2$$

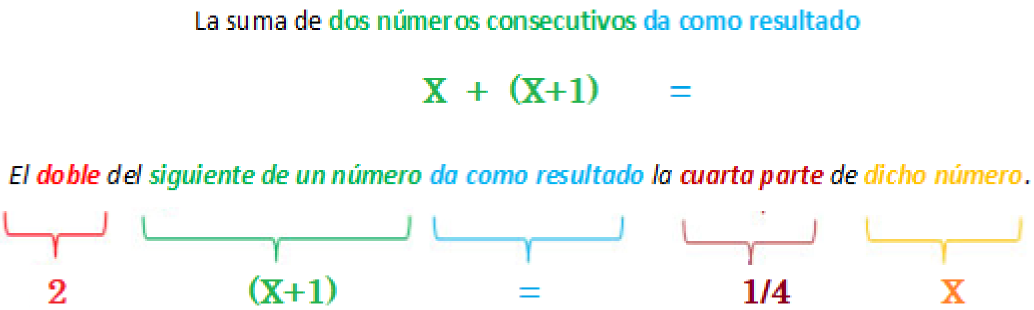
<u>No te sientas tentado/a en aplicar la fórmula de la resolvente para resolver ecuaciones de segundo grado ya que no es una ecuación, es una expresión algebraica de grado 2.</u>

El grado de una expresión algebraica con una única letra es el exponente máximo de esta letra en la expresión. Por ejemplo, el grado de $2x^2 + 11x - 2$ es 2.

Del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa[4]

El **lenguaje coloquial** es aquel que nos permite expresar ideas utilizando nuestro idioma, de manera oral o escrita.

El **lenguaje simbólico** nos permite “traducir” a símbolos al lenguaje coloquial. Por ello, para resolver problemas, es necesario conocer cómo expresar de esta forma lo descrito en un enunciado escrito. De este modo se obtienen letras, símbolos matemáticos y números; expuestos de tal forma que nos permiten hallar los resultados deseados.



[3] *http://cimanet.uoc.edu/cursMates0/IniciacionMatematicas/s2/1_2_1.html*
[4] *http://elbibliote.com/resources/Temas/html/1214.php*

$$\mathbf{2(x+1)=\frac{1}{4}x}$$

Ejemplos de resolución en clase

Lenguaje coloquial	Lenguaje simbólico
El doble del consecutivo de un número	
La mitad del cuadrado de un número	
	$\frac{1}{3}(x-1)+2x+3(x+1)$
	$2(x-1)$
	x^2+x
La cuarta parte de la diferencia entre el doble de un número y 4	
	$\sqrt[3]{x/2}$
La mitad de la raíz cúbica de un número.	
La suma entre tres números naturales consecutivos	
	$\frac{1}{4}x-1$
La cuarta parte del sucesor de un número	

El signo igual es el símbolo: =

El símbolo = se usa entre conjuntos para indicar que ambos tienen los mismos elementos. También se escribe a=b para indicar que a y b representan el mismo elemento de algún conjunto. Se requieren ciertas suposiciones acerca de la relación de igualdad respecto al conjunto de los números reales[5].

Propiedades

Postulado[6] 1: La propiedad reflexiva de la igualdad: $\forall a \in R: a=a$

Postulado 2: La propiedad de simetría de la igualdad: $si\ a \wedge b\ \in R\ \wedge\ \ si\ a=b\ \rightarrow b=a$

Postulado 3: La propiedad transitiva de la igualdad: $si\ a,b \wedge c\ \in R\ \wedge si\ a=b\ \wedge\ b=c\ \rightarrow a=c$

Postulado 4: La propiedad de sustitución de la igualdad: $si\ a \wedge b \in R \wedge\ a=b$, entonces a puede ser sustituida por b en cualquier expresión, enunciado específico o proposición abierta. Tal sustitución no cambia el valor de la expresión ni altera la veracidad del enunciado específico ni el conjunto de verdad de la proposición abierta.

Igualdades – identidades – ecuaciones[7]

[5] *Fundamentos de Álgebra. Diez de U. Claramartha-Valle Víctor-Alquicira Andrés y otros.*

[6] *Principio que se admite como cierto sin necesidad de ser demostrado y que sirve como base para otros razonamientos.*

[7] *https://carmesimatematic.webcindario.com/ecuacionesterceraparte.htm*

Una *igualdad, (=),* es una relación de equivalencia entre dos expresiones, numéricas o literales, que se cumple para algún, alguno o todos los valores. Cada una de las expresiones recibe el nombre de **miembro.**

- Si la igualdad se cumple entre números se denomina **identidad numérica**.
- Una identidad literal es una igualdad que se cumple para todos los valores. Por ejemplo:

Identidades notables	
Cuadrado de una suma	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Cuadrado de una diferencia	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Diferencia de cuadrados	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

- Cuando la igualdad se convierte en identidad numérica sólo para determinados valores se la llama **ecuación.** A las letras se les llama indeterminadas o ***incógnitas.***

Por ejemplo: a) **3x+2 =0** es una ecuación con una incógnita.; b)**3x +2y =1** es una ecuación con dos incógnitas.

Al valor, o valores, que convierten la ecuación en identidad numérica se les llama **solución** (o raíz) de la misma.

Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones son equivalentes cuando admiten las mismas soluciones. Se cumple:

- Si se suma o resta un mismo número a los dos miembros de una ecuación, se obtiene una ecuación equivalente a la primera.
- Si se multiplican o dividen los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero se obtiene una ecuación equivalente a la primera.

Ejemplos con ecuaciones de primer y segundo grado:

Ecuación	Ecuación equivalente	Ecuación equivalente	Ecuación equivalente
3x+4=16	3x=12	30x=120	3x+6=12+6
2+x=-2x+4	2+3x=4	3x=2	3x+5=7
4x+8=16x+4	4=12x	x+2=4x+1	1=3x
$2x^2 - 4 = -2$	$2x^2 = 2$	$2x^2 - 2 = 0$	$x^2 = 1$
$x^2 + x = 20$	$x^2 + x - 20 = 0$	$2x^2 + 2x = 40$	$x^2 + x - 18 = 2$

Ecuaciones de primer grado[8]

Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones algebraicas. Por ejemplo: x+1=6. La letra x es la **incógnita** de la ecuación y representa al número desconocido que hace que la igualdad sea verdadera. Resolver la ecuación consiste en encontrar este número, llamado **solución** de la ecuación.

La solución de la ecuación anterior es 5 porque al escribir 5 en el lugar de x se obtiene una igualdad cierta: 5+1=6

Una ecuación es de primer grado cuando:

- Sólo hay una incógnita (normalmente es x
- La incógnita no tiene exponente. Es decir, siempre aparece como x

La incógnita sí puede ir precedida de un número, por ejemplo, 2x, pero este número sólo multiplica a la incógnita: 2x significa 2·x

✓ *Ejercicios*

1. Busca la definición de expresión algebraica, identifica cada componente (coeficiente-parte literal) cita ejemplos. Expresa en lenguaje algebraico:

a) Un número aumentado en 5 unidades
b) Un número disminuido en 8 unidades
c) El cuadrado del sucesor de un número
d) La tercera parte de un número
e) El triple de, un número disminuido en 7 unidades
f) El 12% de un número
g) Dos números pares consecutivos
h) La suma de tres números consecutivos
i) Un joven tiene 15 años de edad. Representa su edad hace x años y dentro de x años
j) Un joven tiene x años. Representa su edad dentro de dos años y dentro de m años.
k) La suma de 2 números pares consecutivos
l) Representa el número total de pesos que hay en “x” billetes de 50 pesos, “y” billetes de 100 pesos y “z” billetes de 200 pesos.
m) Tu edad dentro de x años
n) El doble del anterior de un número
o) El cuadrado del consecutivo de un número
p) El cubo de la suma entre 2 y x

[8] *https://www.ecuacionesresueltas.com/primer-grado/nivel-1/ecuaciones-primer-grado-basicas-resueltas-explicadas.html*

2. En la siguiente tabla figuran expresiones algebraicas y ecuaciones. Marca con una cruz todas las que sean ecuaciones de primer grado:

a) $2x + 1 + x - 4 =$	d) $1 - x + 9 =$	g) $7x + 5 = 9x - \frac{3}{8}$
b) $2x + 1 + x - 4 = 5$	e) $\frac{3}{2}x - 5 + 8x = 2x - 5$	h) $\pi x + 2\pi x =$
c) $\frac{3}{2}x + 2x - 9 = 9 - 2x$	f) $\frac{3}{2}x - 5 + 8x =$	i) $\pi x + 2\pi x = \pi/2$

3. Encuentra el valor de la incógnita aplicando las propiedades de las igualdades:

a) $2x - 3 = 4x + 5$	b) $2(x + 4) = 8$	c) $(3x - 9) : 3 = 6$
d) $\frac{4}{3}(x - 3) = \frac{4}{3}$	e) $\frac{1}{2}(x + 2) + \frac{3}{4}(x + 2) = 2x$	f) $\frac{4}{5}(1 - x) : 2 = 6x$
g) $-x + \frac{1}{5}x = -1 - 2x$	h) $-\frac{1}{3}x + 3x = 0$	i) $-\frac{4}{5}x + \frac{1}{2}x = 6$

Sistemas de ecuaciones de primer grado

Problema: se sabe que el triplo de un número menos el cuádruplo de otro número da por resultado -6 y que el doble del primero de ellos más el cuádruplo del segundo da 16. Encuentra dichos números.

Reducción

I. Expresamos en lenguaje simbólico:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

II. Ya que en ambas ecuaciones aparece el cuádruplo de y ($4y$), sumando ambas eliminamos una de las incógnitas:

$$3x - 4y = -6$$
$$\underline{2x + 4y = 16}$$
$$3x - 4y + (2x + 4y) = -6 + 16$$
$$3x + 2x - 4y + 4y = 10$$
$$5x = 10$$
$$x = 2$$

III. Podemos ahora sustituir este valor de x en una de las dos ecuaciones para hallar el valor de y, y luego verificar que este par de valores hallados es solución de ambas ecuaciones. También podemos multiplicar la primera ecuación por 2 y la segunda por 3 para que los coeficientes que acompañen a las x sean iguales y después restar ambas para obtener una ecuación con una sola incógnita, la y.

$$2.(3x - 4y = -6) \leftrightarrow 6x - 8y = -12$$
$$3.(2x + 4y = 16) \leftrightarrow 6x + 12y = 48$$
$$6x - 8y = -12$$
$$\underline{6x + 12y = 48}$$
$$6x - 8y - (6x + 12y) = -12 - 48$$
$$6x - 8y - 6x - 12y = -60$$

$$-20y = -60$$
$$y = 3$$

Verifica en ambas ecuaciones que el par $\{(2{,}3)\}$ es la solución del sistema.

Sustitución

I. Expresamos en lenguaje simbólico:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

I. De una de las ecuaciones despejamos una de las incógnitas, por ejemplo de la ecuación $2x + 4y = 16$ despejo x (primero divido por 2 ambos términos):

$$(2x + 4y): 2 = 16: 2 \quad \leftrightarrow x + 2y = 8 \quad \leftrightarrow x = 8 - 2y$$

II. Sustituyo x en la primera ecuación:

$$3(8 - 2y) - 4y = -6 \ \leftrightarrow 24 - 6y - 4y = -6 \ \leftrightarrow 24 - 10y = -6$$

$$24 + 6 = 10y \quad \leftrightarrow \quad 30 = 10y \quad \leftrightarrow \quad 3 = y$$

III. Hallo el valor de x como en el caso anterior, o comienzo de nuevo y despejo y.

✓ *Ejercicios*

Problemas

4. Si la suma entre el doble de un número y 4 da por resultado 100, ¿cuál es dicho número?

5. Si el resultado de restarle al triple de x el doble del antecesor de x es 0, ¿cuál es el valor de x?

6. La suma entre dos números consecutivos da -21, calcula el valor del menor de dichos números.

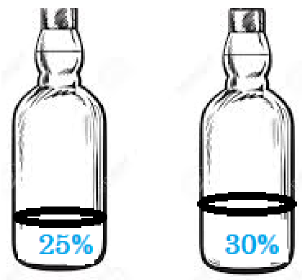
7. La suma entre tres números pares consecutivos da 72, calcula el valor del mayor de dichos números.

8. Calcula un número x de modo que sumar 5 al doble de x tiene el mismo resultado que restar 1 al triple de x.

9. La resta de las edades de dos hermanos es 5 y la suma es 49. ¿Qué edades tienen?

10. La edad de Javier es el triple que la de su hijo y dentro de 10 años será el doble. ¿Qué edad tiene el hijo de Javier?11. La mitad de un número x más la tercera parte del consecutivo de x es igual 2. Calcula x.

12. Tenemos dos botellas de agua de la misma capacidad, pero una de ellas se encuentra al 25% y la otra al 30%. Calcula la capacidad de las botellas si tenemos un total de 0.825 litros de agua.



13. La suma de los ahorros de dos hermanos es de \$2500, el 20% del dinero que ahorró el menor de ellos sumado al 10% de lo que ahorró el mayor equivale a \$350. ¿Cuál de los hermanos ahorró más, el menor o el mayor?

14. Un estudiante compró una notebook y un monitor. Inicialmente el precio de la notebook era equivalente a la suma entre el triplo del precio del monitor y \$8100. El vendedor le ofreció una bonificación por pago en efectivo del 5% del valor de la notebook y del 1.5% del valor del monitor, siendo la suma a descontar de \$2269.5. ¿Cuál es el valor inicial de la notebook?

15. Sonia ha comprado unos pantalones y unos zapatos en las rebajas. Inicialmente, el precio de los zapatos era el doble que el de los pantalones, pero se ha aplicado un descuento del 10% en los pantalones y un 20% en los zapatos. En total, Sonia ha pagado 37.5 dólares. ¿Cuál era el precio inicial de los zapatos? ¿Y el precio final?

Ecuaciones de segundo grado

Recuerda las ecuaciones de segundo grado son de la forma:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \; con \; a \neq 0}$$

Debes tener en cuenta que no siempre es necesario usar la fórmula: $\boldsymbol{x_{1,2}} = \frac{\boldsymbol{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}}{\boldsymbol{2a}}$

Ejemplos:

I) $b = 0$ $2x^2 - 4 = 0$	a) $2x^2 = 4$ por lo tanto $x^2 = 2$ de donde: $\sqrt{x^2} = \sqrt{2}$ $\lvert x \rvert = \sqrt{2}$ $x = \pm\sqrt{2}$
	b) $2(x^2 - 2) = 0$ por lo tanto: $x^2 - 2 = 0$ es decir: $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$ $x = \pm\sqrt{2}$
II) $b = 0$ $3x^2 + 9 = 0$ $\nexists x \in R: 3x^2 + 9 = 0$ Sí hay solución en el campo de los números Imaginarios, recuerda que: $i^2 = -1$	$3x^2 + 9 = 0$ $3x^2 = -9$ $x^2 = -3$ $\sqrt{x^2} = \sqrt{-3}$ $\lvert x \rvert = \sqrt{-3}$ $x = \pm\sqrt{-3}$
III) $c = 0$ $-2x^2 + 2x = -2x$	Llevamos a la forma: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ $-2x^2 + 4x = 0$ Extraemos factor común $-2x$ $-2x(x - 2) = 0$ Es decir: $x(x - 2) = 0$ De donde: $\begin{cases} x = 0 \\ \vee \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$

IV) $b \neq 0 \ \wedge c \neq 0$ $-3x^2 + 9x - 6 = 0$	Observa que $a, b\ y\ c$ son divisibles por 3, de modo que: $-3x^2 + 9x - 6 = 0$ $-3(x^2 - 3x + 2) = 0$ $x_{1,2} = \dfrac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4.1.2}}{2.1}$ $= \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$ $x_1 = \dfrac{3-1}{2} = 1 \ , \qquad x_2 = \dfrac{3+1}{2} = 2$

✓ *Ejercicios*

16. Resuelve las siguientes ecuaciones según las indicaciones dadas:

a) $x^2 - 4 = 0$ b) $x^2 = 9$ c) $4.x^2 - 16 = 0$ d) $\frac{7}{36}.x^2 - 1 = 0$

e) $2x^2 = 8$ f) $7x^2 - 14 = 0$ g) $-3x^2 + 9 = 0$ h) $x^2 + 2 = 0$

i) $x.(x - 1) = 0$ j) $x.(2 - x) = 0$ k) $\sqrt{2}.x\left(x - \sqrt{2}\right) = 0$ l) $(x + 1)x = 0$

m) $\sqrt{2}\left(x - \sqrt{3}\right)\left(x + \sqrt{2}\right) = 0$ n) $2x - 3 = 1 - 2x + x^2$

o) $6x^2 - 5x + 1 = 0$ p) $x^2 - \frac{7}{6}x + \frac{1}{3} = 0$

q) $-3\left(x - \frac{1}{3}\right) + x - 2 = \frac{1}{x} - 4$ r) $-x + 2\left(x - \frac{3}{2}\right) - 2 = \frac{1}{2}(x - 4)$

Problemas

17. Halla el valor de un número entero sabiendo que la suma con su inverso multiplicativo es 26/5.

18. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas en centímetros tres números pares consecutivos. Halla los valores de dichos lados.

19. Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años.
    a) Traduce a lenguaje simbólico.
    b) Calcula la edad de Pedro.

20. Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm³ cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Halla las dimensiones de la caja.

Inecuaciones

Una condición sobre una o más variables que se expresa mediante una desigualdad recibe el nombre de **inecuación**. Los signos de desigualdad son:

$\neq$	$<$	$<$	$\leq$	$\geq$
Distinto	Menor que	Mayor que	Menor o igual que	Mayor o igual que

Una desigualdad que tiene variable se llama **inecuación**. **Por ejemplo**: $x + 3 < 7$ (La punta del signo $<$ siempre señala el menor)

Criterios de equivalencia[9]

- ✓ Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o se les resta un mismo número, la inecuación resultante es equivalente a la dada.

$$3x + 4 < 5$$
$$3x + 4 - 4 < 5 - 4$$
$$3x < 1$$

- ✓ Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o divide por un mismo número positivo, la inecuación resultante es equivalente a la dada.

$$2x < 6$$
$$2x : 2 < 6 : 2$$
$$x < 3$$

- ✓ Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o divide por un mismo número negativo, la inecuación resultante cambia de sentido y es equivalente a la dada.

$$-x < 5$$
$$(-x) \cdot (-1) > 5 \cdot (-1)$$
$$x > -5$$

Intervalos

Llamaremos **intervalo abierto** al conjunto de valores reales tales que, si $a < b$:

$$(a, b) = \{x/x \in R: a < x < b\}$$

Llamaremos **intervalo cerrado** al conjunto de valores reales tales que, si $a < b$:

$$[a, b] = \{x/x \in R: a \leq x \leq b\}$$

Llamaremos intervalo semiabierto o semicerrado a aquellos de la forma $[a, b)$ ó $(a, b]$

[9] *https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra/inecuaciones/propiedades-de-laa-inecuaciones.html*

Del lenguaje coloquial al simbólico y viceversa

Para resolver problemas primero debes escribir la información dada en lenguaje simbólico y luego operar algebraicamente para poder llegar al resultado. A la mayoría de los estudiantes se les complica el proceso cuando se trata de problemas en los que intervienen inecuaciones.

Ejemplos

Si nos dicen:	**Escribimos:**
Al menos 25 estudiantes aprobaron el primer parcial de matemática.	$a \geq 25$
Como mucho aprobaron 25 estudiantes.	$a \leq 25$
A lo sumo aprobaron 25 estudiantes.	$a \leq 25$
Aprobaron un mínimo de 25 estudiantes.	$a \geq 25$
La calificación de Programación no alcanza a un 7.	$p < 7$
La calificación de Laboratorio supera el 8.	$l > 8$

Lenguaje simbólico	**Lenguaje coloquial**
$3(x+1) > 9$	El triplo del consecutivo de un número es mayor que 9
$3x+1 \leq 3$	La suma entre el triplo de un número y 1 es a lo sumo 3
$x+3 \leq 5$	La suma entre un número y 3 no supera a 5
$\frac{1}{2}(x-1) \geq -2$	La mitad del antecesor de un número es como mínimo -2
$\frac{1}{2}x - 1 > 4$	La diferencia entre la mitad de un número y 1 es superior a 4

✓ *Ejercicios*

21. Escribe con desigualdades los siguientes enunciados:

a) x es un número positivo
b) x es un número negativo
c) x es un número no negativo
d) x es un número no positivo
e) El opuesto de x es positivo
f) El opuesto de x es negativo
g) El consecutivo de un número es mayor que 4
h) El siguiente de un número supera a 9
i) El siguiente de un número no supera a 9
j) El siguiente de un número es a lo sumo 9

22. Resuelve las siguientes inecuaciones aplicando propiedades, representa en la recta y escribe el conjunto solución.

Por ejemplo: $-2x+4 \geq 5$, como el término que contiene x es menor que 0, trabajo con los opuestos:

$$-(-2x+4) \leq -5$$
$$2x-4 \leq -5$$
$$2x-4+4 \leq -5+4$$
$$2x \leq -1$$
$$x \leq -1/2$$

$(-\infty, -\mathbf{1/2}]$

a) $2x - 4 < -3x + 5$

b) $-7x + \frac{1}{2}\ x - 2 \geq 0$

c) $-2.(1 - 2x) \geq -4$

d) $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}x - 1 < 4 - \frac{1}{4}x$

e) $2.(1 - 2x) \geq -4$

f) $\frac{2x+4}{-2} \geq -2$

g) $\frac{4}{3} - 2x < -x + \frac{4}{3}$

h) $-\frac{4}{3} - 2x < -x + \frac{4}{3}$

Problemas

23. Con 11,2 litros de agua alcanza y sobra para llenar 7 botellas iguales pero no para llenar 8 de esas botellas. Mediante inecuaciones indica entre qué valores se halla la capacidad de las botellas.

24. Juan tiene 2 kg de miel y frascos vacíos que pueden contener hasta 384g. Calcula qué cantidad de frascos Juan puede llenar totalmente. Recordar que 1 kg = 1000g.

25. El peso máximo que soporta un ascensor es de 225 kg. Un hombre de 72 kg, transporta consigo baúles los cuales pesan cada uno 21,75 kg. ¿Cuántos baúles puede transportar?

26. Expresa en lenguaje matemático el siguiente enunciado: “el cuadrado de un número entero más el triple de su siguiente debe ser menor que el cubo de su siguiente”.

27. En un ascensor se cargan 3 cajas de igual peso más un bulto de 25 Kg. Se sabe que la carga máxima que soporta el ascensor es de 100 Kg. Utilizando una inecuación encuentra el conjunto de valores en Kg que pueden tener las cajas.

28. En una camioneta se cargan 3 cajas de igual peso y otro bulto de 4 Kg. Plantea una inecuación y halla entre qué valores puede oscilar el peso de cada caja sabiendo que la carga máxima de la camioneta no supera los 19 kg.

Valor absoluto de un número entero

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ \ x < 0 \end{cases}$$

Interpretación en la recta real

El valor absoluto de un número es la distancia de dicho número al cero.

Recuerda que:

$$\boldsymbol{|x| = dist(x,0) = \sqrt{x^2}\ , luego\ |x| \geq 0}$$

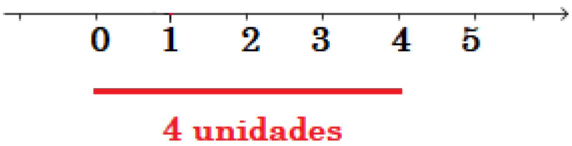
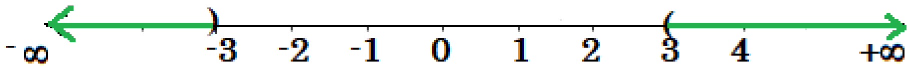
$$\boldsymbol{dist(x,y) = |y - x| = |x - y|}$$

Del lenguaje coloquial al simbólico

La distancia del 4 al 0	$dist(4,0) = \|4\|$
La distancia del -4 al 0	$dist(-4,0) = \|-4\|$
La distancia del 5 al 10 es de 5 unidades	$dist(5,10) = \|10 - 5\| = 5$
La distancia de un número desconocido al 0 es mayor que 3	$dist(x,0) = \|x\| > 3$
La distancia de un número desconocido al -1 es menor o igual que 2	$dist(x,-1) = \|x - (-1)\| \leq 2$
La distancia de un número desconocido al -3 es mayor o igual que 2	$dist(x,-3) = \|x + 3\| \geq 2$

Gráficamente

Completa

$dist(4,0) = \|4\|$	
$dist(-4,0) = \|-4\|$	
$dist(5,10) = \|10 - 5\| = 5$	
$dist(x,0) = \|x\| > 3$	
$dist(x,-1) \leq 2$	
$dist(x,-3) \geq 2$	

✓ ***Ejercicios***

29. Traduce a lenguaje algebraico o a coloquial según corresponda.

Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico
La distancia de un número desconocido al 3 es menor que 2	
	$dist(x,2) < 3$
La distancia de un número desconocido al -1	
	$\|x - 3\| \geq 3$
La distancia de un número desconocido al ½ es mayor o igual que 4	
	$dist(x,3) < 4$
	$dist(x,-4) > 3$
La distancia de un número desconocido al -2 es mayor o igual que 2	
	$dist(x,3) \leq 2$

Recuerda que puedes concurrir a los espacios de tutorías para resolver ejercicios o hacer consultas de aquellos temas que te ofrecen dificultades. También puedes enviar mensajes al mail de tutorías:

Unirse a la reunión Zoom
https://utn.zoom.us/j/3124452921?pwd=WlhicTlnM3Q3bmZQRU5zQ2psYS84QT09

ID de reunión: 312 445 2921
Código de acceso: Tutorias

Trabajo Práctico Nº 4 de entrega obligatoria

1. Expresa en el lenguaje que corresponda:

Lenguaje coloquial	Lenguaje algebraico
a) Un número aumentado en dos unidades	
b) El duplo de un número más la tercera parte de 4	
c) El cuadrado del triplo de un número	
d) El cubo del antecesor de un número	
e) La diferencia entre 9 y un número	
f) La quinta parte de un número aumentado dos un.	
g) La suma de dos números pares consecutivos	
	h) $x + (x+1) < 3$
	i) $x + (x+1) \leq 3$
	j) $x + (x+1) \geq 3$
	k) $2(x-1) \leq \frac{1}{4}x$
	l) $x.(x-1) > 0$
	m) $x.(x+1) < 0$
	n) $\lvert x-1 \rvert < 1$
	o) $\lvert x+1 \rvert > 3$
	p) $dist(x, -2) > 5$
q) Debes gastar a lo sumo 1000 pesos	
r) No gastes más de 1000 pesos	
s) Ni se te ocurra gastar más de 1000 pesos	

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2}{3}x + 9 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)$

b) $x + \frac{2}{5}x - 4 = 2x + 7$

c) $(x-3)^2 + 6x = 18$

d) $x^2 + 3x = 4$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2(x+1) - 3(x-2) < x + 6$

b) $\frac{3x+1}{7} - \frac{2-4x}{3} \geq \frac{-5x-4}{14} + \frac{7x}{6}$

4. El número de monedas de 1 peso que hay en una caja es tal que su duplo disminuido en 86 es mayor que 200.Si de la caja se sacan 17 monedas, quedan menos que la diferencia entre 200 y la mitad de las monedas que había, primeramente. ¿Cuántas monedas había en la caja?