Módulo III-III

Unidad Nº 6: Relaciones

Par ordenado. Producto cartesiano. Relaciones binarias. Dominio e imagen. Representaciones. Relaciones en un conjunto. Relación de equivalencia y orden. Teoría de grafos. Grafos dirigidos como representación de una relación. Camino. Matrices asociadas a una relación. Propiedades. Matriz de incidencia. Matriz de adyascencia. Arboles. Arboles binarios

Unidad Nº 7: Relación funcional. Función lineal

Ecuación de la recta. Pendiente y ordenada al origen. Rectas paralelas y perpendiculares. Cociente incremental. Razones y ritmos o velocidades de cambio. Intersección de rectas. Representación gráfica. Problemas de aplicación.

Unidad Nº 8: Inecuaciones en R – R^2

Desigualdades en R y en R^2. Sistemas de inecuaciones: soluciones gráficas. Regiones factibles. Puntos críticos. Funciones de optimización: máximos y mínimos. Problemas de aplicación. Nociones básicas de Programación Lineal

Par ordenado – Producto cartesiano

Un ***par* ordena*do*** es un conjunto con dos elementos en un orden específico. Usamos la notación (x, y) para denotar el par ordenado en la cual el primer elemento o componente o coordenada es "x" y el segundo elemento objeto es "y". De esta forma, dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si sus correspondientes componentes son iguales.

Es decir:

(a, b) = (c, d) si y solamente si a = c y b = d

Mientras que los conjuntos {a, b} y {b, a } son iguales, los pares ordenados (a, b) y (b, a) son diferentes.

Producto cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto de ***todos*** los pares ordenados (x, y) donde $x \in A$ e $y \in B$. En símbolos,

A x B = {$(x, y) / x \in A \wedge y \in B$ }

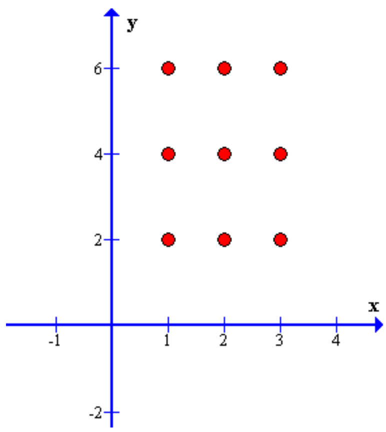
Ejemplo:

Sean los conjuntos A= {1,2,3} y B= {2,4,6} se tiene:

A x B= {(1,2), (1,4), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,2), (3,4), (3,6)}

El producto cartesiano ***A x B*** no es igual al producto cartesiano ***B x A*** (no es conmutativo)

Gráficamente



Ejercicio Nº 1: Escribir 5 pares ordenados cuyo primer componente sea múltiplo del segundo componente.

Ejercicio Nº 2: Verificar que no se cumple la propiedad conmutativa efectuando el producto cartesiano A X B y B X A siendo $A=\{x/x\in Z^{-}\wedge x+7>4\}$ y $B=\{x/x\in N\wedge 0<x<3\}$

Ejercicio Nº 3: Dados los conjuntos: $A=\{1,3\}$; $B=\{a,b,3\}$; $C=\{b\}$, hallar:

a) AXB

b) $(A\cup B)XC$

Ejercicio Nº 4: Dados los mismos conjuntos del ejercicio 3 hallar:

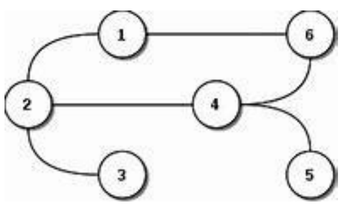
a) AX(BUC)

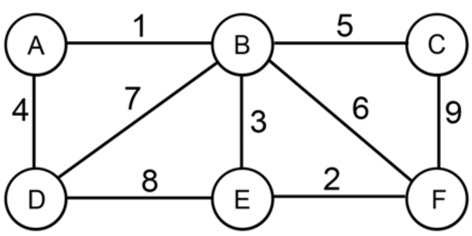
b) (BUC)XA

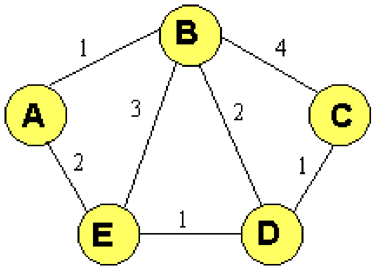
Teoria de Grafos

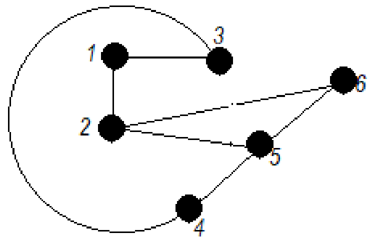
Un grafo (o bien grafo no dirigido) consiste en un conjunto V de vértices (o nodos) y un conjunto E de artistas (o ramas) tales que cada arista $e\in E$ está asociado a un par **no** ordenado de vértices. Si una arista e está asociada a un único par de vértices v y w, se escribe $e=(v;w)$ o bien $e=(w;v)$. En este contexto $(v;w)$ denota una arista de un grafo no dirigido y no un par ordenado de números.

Ejemplos:





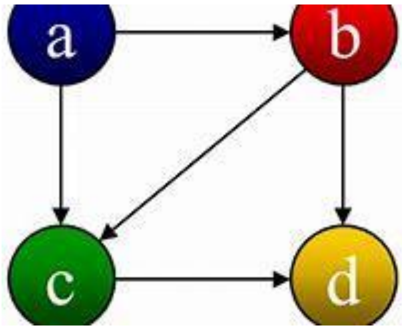


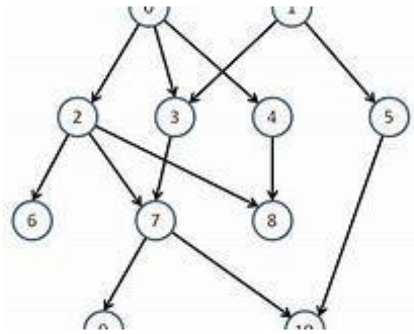


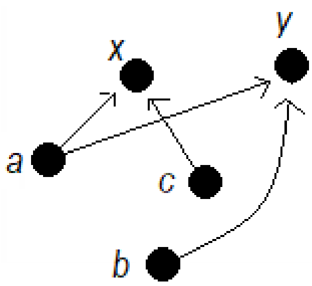
Red

Por otro lado, un grafo dirigido o dígrafo G consiste en un conjunto V de vértices (o nodos) y un conjunto E de aristas (o ramas) tales que cada arista $\boldsymbol{e} \in \boldsymbol{E}$ está asociada a un par ordenado de vértices

Ejemplos:

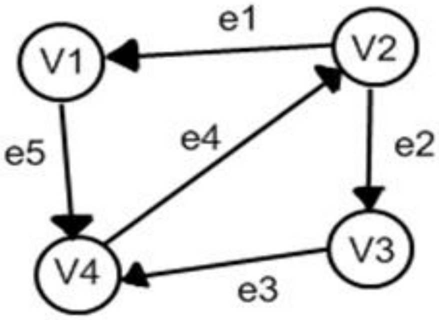






Si G es un grafo dirigido o no dirigido con un conjunto de vértices V y un conjunto de aristas E, se escribe $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{V}; \boldsymbol{E})$

Ejemplo:



G = (V,A) V = {V1,V2,V3,V4};
A = { e1= (V2,V1), e2 = (V2,V3)
e3 = (V3,V4), e4 = (V4,V2),
e5 = (V1,V4) }

Valencia o grado de un vértice: Es el número de aristas incidentes en v

Grado de un vértice en un grafo dirigido:

Grado de entrada de v: Será el número de aristas que llegan hacia v, es decir, en las que v es vértice **final**.

Grado de salida de v: Será el número de aristas en las que v es vértice **inicial.**

Ejercicio: Obtener los grados de los vértices de los grafos no dirigidos de los ejemplos anteriores.

Camino: Sea un grafo G y sean $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ vértices de G . Un camino de longitud l (l ∈ N) de v a w en G es una sucesión alternada de vértices y de aristas distintas.

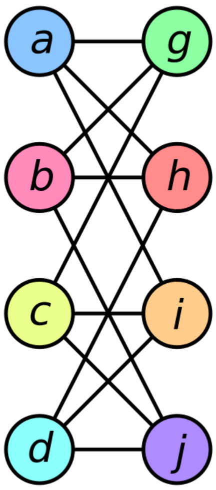
Camino trivial: Sea un grafo G y sea $\boldsymbol{v}$ vértice de G. Se llama camino trivial de v en G al camino de v a v SIN ARISTAS

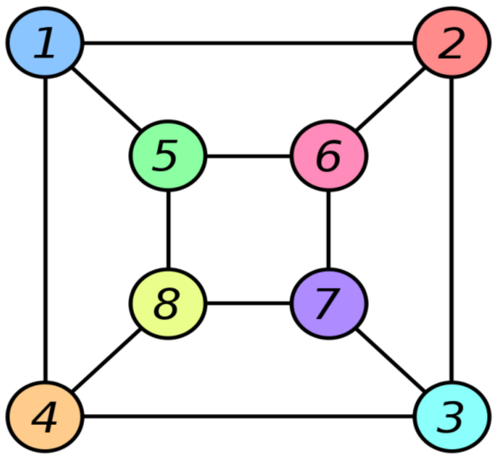
Camino cerrado: Un camino cerrado de longitud l (l E N) en G es un camino en el que coinciden los vértices inicial y final . **v** a1 v1 a2 v2 … al **v**

Camino cerrado simple: Un circuito simple es de la forma $(\boldsymbol{v_0}, \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \ldots., \boldsymbol{v_n})$, donde $\boldsymbol{v_0} = \boldsymbol{v_n}$ y $\boldsymbol{v_0}, \boldsymbol{v_1}, \ldots \boldsymbol{v_{n-1}}$ son distintos entre sí.

Grafos conexos: Un grafo es conexo si, para cualquier par de vértices $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{w}$ distintos entre si, existe un camino de $\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$.

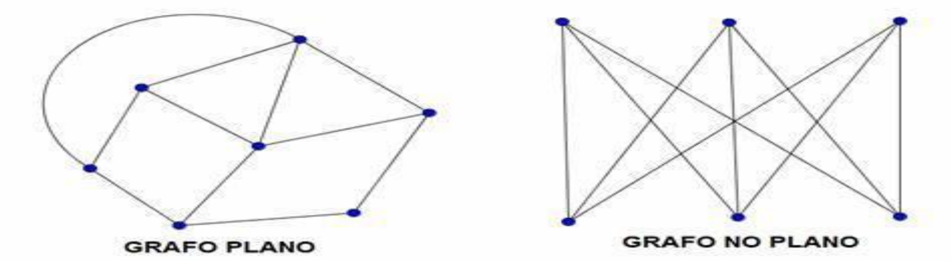
Isomorfismo de grafos: Dos grafos $\boldsymbol{G_1}$ y $\boldsymbol{G_2}$ son isomorfos si tienen el mismo número de aristas y el mismo número de vértices.





Grafos planos o planares: Un grafo es plano o planar si puede trazarse en un plano sin que se crucen sus aristas.

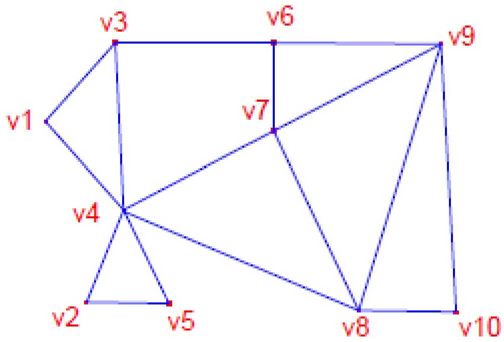
Si se representa en un plano un grafo plano y conexo, queda dividido en regiones llamadas caras. Una cara se caracteriza por el circuito que forma su frontera



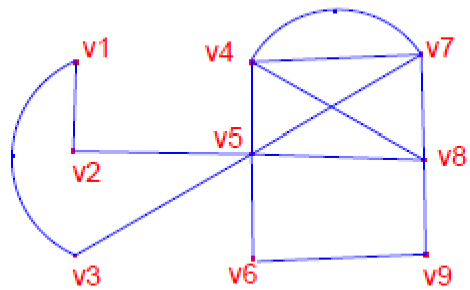
Ejercicios:

1) Encontrar el grado de cada vértice en los siguientes grafos:

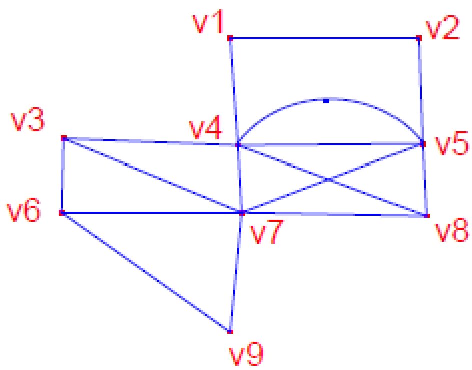
A



B



C

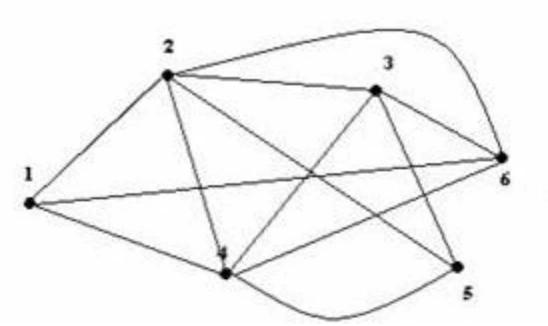


Representaciones de grafos:

Existen dos formas matriciales de representar grafos, una es mediante la matriz de adyacencia y otra mediante la matriz de incidencia.

Para obtener la matriz de adyacencia se selecciona un orden arbitrario para los vértices. A continuación, se le asigna a las filas y a las columnas de una matriz el mismo orden dado a los vértices. Un elemento de la matriz es 1 si los vértices correspondientes a la fila y a la columna de dicho elemento están unidos, por un lado, y 0 en caso contrario.

Ejemplo: Suponemos para el siguiente grafo el orden para los vértices: 1-2-3-4-5-6



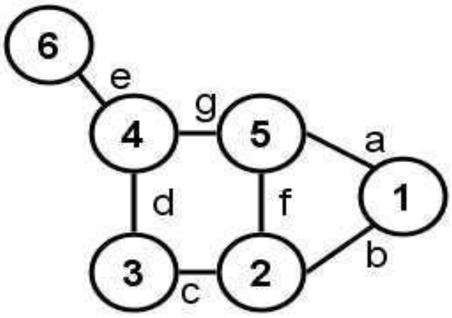
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matriz de incidencia:

Para determinar la matriz de incidencia se asignan a las filas las marcas correspondientes a los vértices, y a las columnas las correspondientes a las aristas . El elemento que corresponde a la fila v y a la columna e es 1 si e es incidente en v y es 0 en cualquier otro caso.

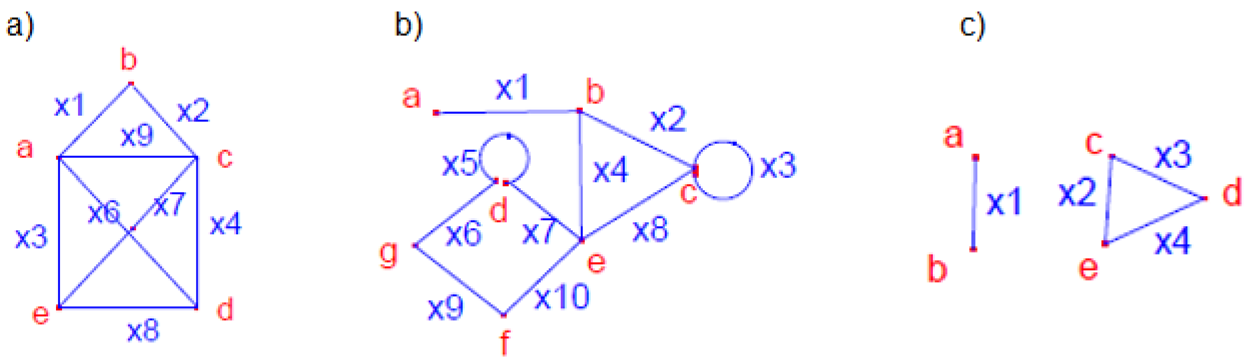
Ejemplo:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} a & b & c & d & e & f & g \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$



Ejercicios:

1) Efectuar la matriz de adyacencia e incidencia para los siguientes grafos:



2) Esquematizar los grafos dados por la matriz de incidencia que se dan en cada caso:

a)

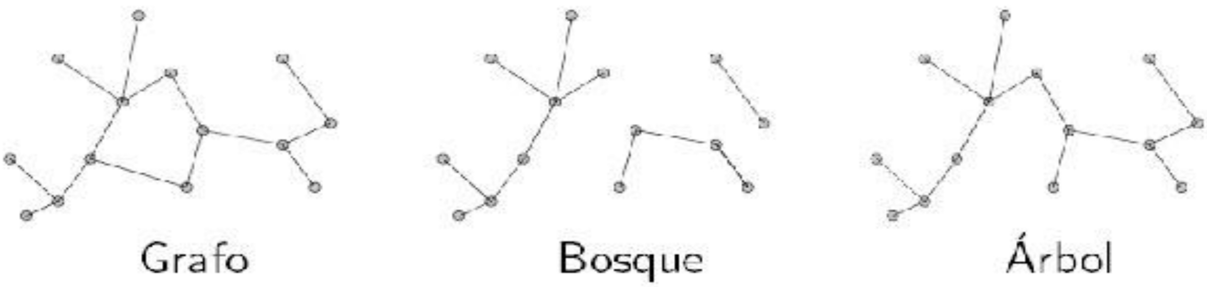
	a	b	c	d	e
a	1	0	0	1	0
b	0	0	1	0	1
c	0	1	1	1	1
d	1	0	1	0	0
e	0	1	1	0	0

b)

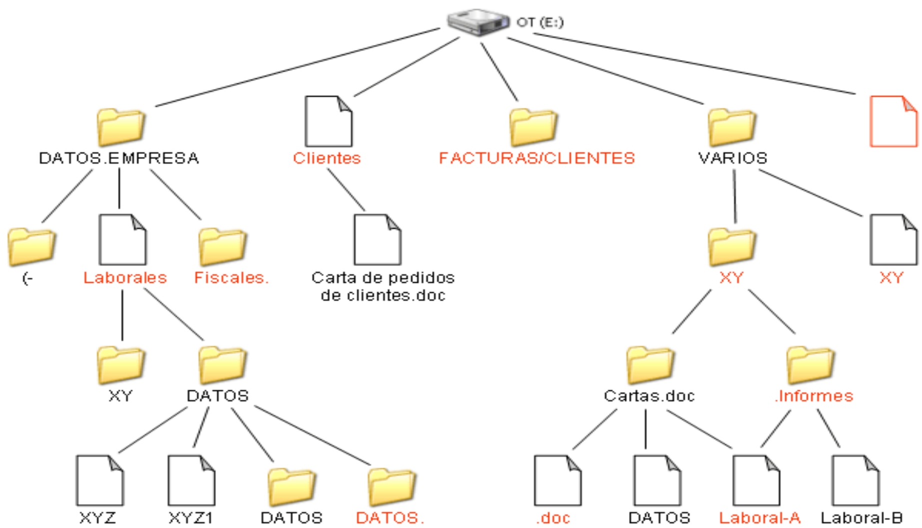
	a	b	c	d	e
a	0	1	0	0	0
b	1	0	0	0	0
c	0	0	0	1	1
d	0	0	1	0	1
e	0	0	1	1	1

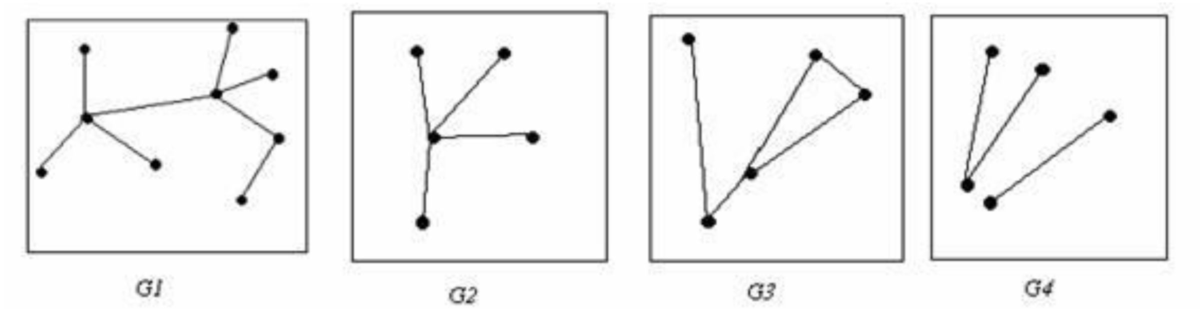
Árboles

Definición: Un árbol es un grafo no dirigido, conexo y SIN caminos cerrados. Un árbol trivial es un grafo que consta de un sólo vértice. Un grafo se llama bosque si y sólo si, está libre de caminos cerrados y no es conexo.



Los árboles poseen un **camino único** para cada valor, los vamos a encontrar en la construcción de los compiladores de lenguajes de programación de alto nivel, en la organización de ficheros, en la búsqueda e inserción de información en una base de datos, y en muchos casos más.





Elementos de los árboles: Sea T un árbol. Si T tiene sólo uno o dos vértices, cada uno se llama vértice terminal o Hoja. Si tiene al menos tres vértices, entonces un vértice de grado 1 en T se denomina vértice terminal y un vértice de grado superior a 1 en T se denomina vértice interno (o rama)

Árboles orientados

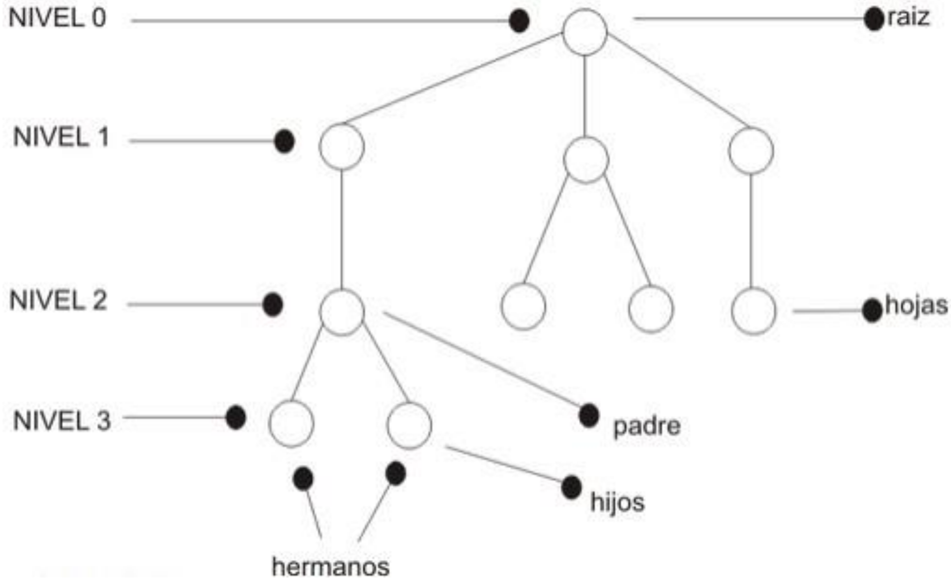
Definición: Un árbol con raíz es un árbol dirigido en el que uno de sus vértices ha sido designado como raíz y todas las aristas están orientadas de modo que se alejan de la raíz.

En un árbol con raíz, el **nivel** de un vértice v es el número de aristas a lo largo del único camino entre éste y la raíz.

La **altura** h de un árbol con raíz es el nivel máximo de cualquier vértice del árbol.

Dada la raíz o cualquier vértice interno de un árbol, los hijos de v son todos los vértices adyacentes desde v(los hijos de la raíz están en el nivel 1). Si w es un hijo de v entonces v se llama **padre** de w y dos vértices diferentes que son ambos hijos del mismo padre se llaman **hermanos**.

Para determinar el **grado** de uno de los vértices, tenemos que considerar que estamos trabajando con un grafo dirigido, por lo tanto se tendrá en cuenta el <u>grado de salida</u> desde ese vértice.



¿Cuál es la altura del árbol?, ¿Cuántos vértices internos posee?, ¿y terminales?, ¿cuántos vértices posee en total?

Árbol binario

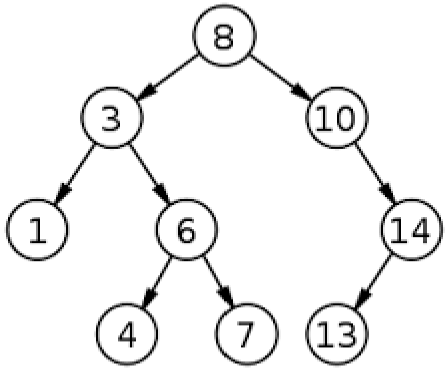
Definición: Un árbol binario es un árbol ordenado dónde cada vértice interno posee como máximo 2 hijos, cada hijo se designa como un hijo izquierdo o como un hijo derecho (pero no ambos). Dado cualquier padre w en un arbol binario T, si w tiene un hijo izquierdo, el subárbol izquierdo de w es árbol binario cuya raíz es el hijo izquierdo de w. Análogamente para el subárbol derecho.

Arboles binarios de búsqueda

Los algoritmos que aplican árboles binarios de búsqueda resultan útiles para la localización de datos. A partir de un dato D, es fácil determinar si D está en un árbol de búsqueda binaria, yendo por el lado izquierdo o derecho del árbol según el valor insertado.

Definición: Un árbol binario de búsqueda es un árbol binario ordenado de manera tal que cada vértice posee una clave de modo que la clave de un vértice es mayor que la de todos los vértices de su subárbol izquierdo y menor que la de todos los vértices de su subárbol derecho.

Si necesitamos buscar el dato "4", partiendo desde la raíz, vemos que 8 es mayor, por lo tanto, desviaremos nuestra búsqueda hacia el subárbol izquierdo, luego, vemos que el vértice con el valor "3", es menor a nuestro dato, por lo tanto nos desviamos hacia el subárbol derecho de 3, luego, hacia el subárbol izquierdo de 6, hasta que finalmente encontramos el dato buscado.



La inserción de un dato en un árbol ordenado se da con la misma lógica utilizada en la búsqueda.

Relaciones

Definición

Una **relación** (binaria) de un conjunto X a un conjunto Y es un subconjunto del producto cartesiano X x Y. Si el par $(x, y) \in R$, se escribe x R[1] y, se dice que x está relacionada con y. Si X=Y, se llama **relación** (binaria) sobre X.

El conjunto $\{x \in X/(x, y) \in R \; para\; alguna\; y \in Y\}$ se llama **dominio** de R.

El conjunto $\{y \in Y/(x, y) \in R \; para\; alguna\; x \in X\}$ se llama **rango** de R.

Ejercicio de resolución en clase

Sean los conjuntos:

$$X = \{2,4,5,6,7,11\} \;\; y \;\; Y = \{y/(y \in Z,\ 1 \leq y \leq 10)\}$$

Considérese que xRy si y sólo si y es divisible entre x (es decir: x es divisor de y).

a) Calcula XxY
b) Dom (R) y Rango (R)

[1] R: relación

Matriz de una relación

Si A y B son dos conjuntos finitos con m y n elementos, respectivamente, y R es una relación de A en B, entonces es posible representar a R como una matriz cuyos elementos se definen:

$$m_{ij} = \{1\ si\ (a,b) \in R\ \ 0\ si\ (a,b) \notin R$$

Ejercicio de resolución en clase

Sean los conjuntos:

$A = \{1,2,3,4,5\}\ y\ B = \{1,2,3,4,5,6,7\}\ y\ R: A \to B\ tal\ que$:

$$R = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,5),(3,2),(3,7),(4,2),(4,5),(5,6)\}$$

Se puede representar esta relación en forma de matriz como sigue:

$$M_R = \begin{array}{cccccccc} A/B & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

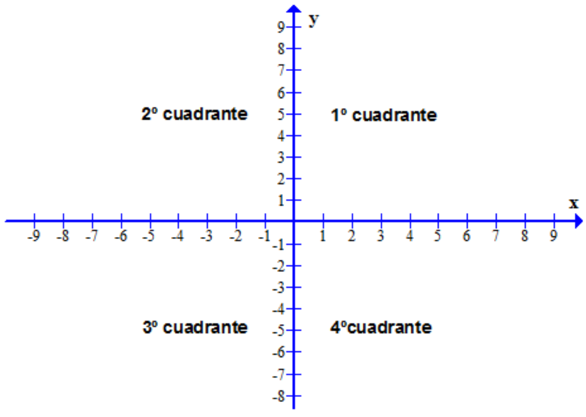
Los elementos del conjunto A se representan como filas y los del B como columnas.

Relación funcional

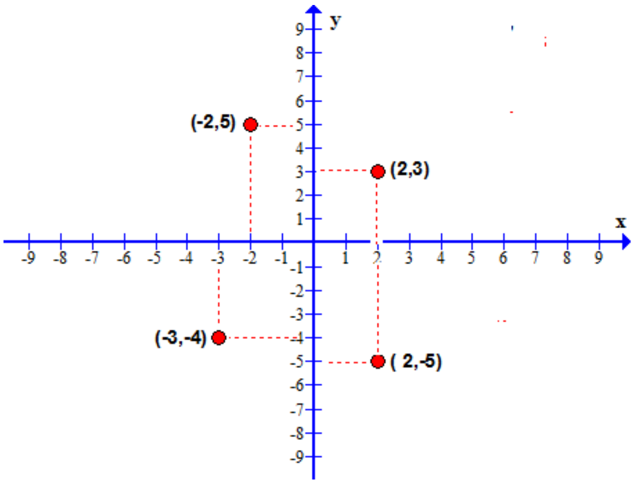
El plano cartesiano

El plano cartesiano o sistema de ejes coordenados es utilizado en Geometría Analítica (rama de matemática que estudia la geometría desde un punto de vista algebraico). Debe su nombre al matemático francés Rene Descartes.

Este plano consta de dos rectas numéricas que se cortan perpendicularmente en el cero de ambas, punto que se conocen como ***origen*.** La recta horizontal se conoce como **eje de *las* abscisas** o **eje de las x** y a la recta vertical como ***eje de* las *ordenadas*** o ***eje de las* y.** se divide en cuatro cuadrantes, los cuales son:



El plano cartesiano y sus cuatro cuadrantes



Determinación de un punto por sus coordenadas
Los ejes coordenados nos sirven para determinar cada punto del plano. El nombre que le es asignado a cada punto viene dado por sus proyecciones sobre los ejes, ambas llamadas coordenadas.

Las proyecciones son la imagen del punto sobre los ejes, que se encuentran trazando una línea perpendicular al eje y que atraviese al punto en cuestión, el lugar donde la recta se interseca con el eje será la coordenada del punto respecto al eje que se proyectó.

Relación Funcional

BÁSICAMENTE, LAS FUNCIONES ESTABLECEN RELACIONES ENTRE VARIABLES BAJO CIERTAS CONDICIONES. SU CAMPO DE APLICACIÓN SE REFELEJA EN DIFERENTES CIENCIAS, POR EJEMPLO:

a) En la Física: Sabemos que, al suspender un peso de un resorte, éste se alarga, ¿podríamos determinar la ley que rige este alargamiento, al menos para un determinado intervalo? Sería como tratar de expresar el alargamiento del resorte en **función** del tiempo.

b) En Química: En el laboratorio de Química, ¿podemos estudiar la temperatura de una masa de agua con respecto al tiempo en que es sometida al calor? Se trata de relacionar la temperatura en **función** del tiempo.

c) En Economía: Un investigador suele expresar: el consumo en **función** del ingreso, también la oferta en **función** del precio, o el costo total de una empresa en **función** de los cambios de producción, entre otros muchos ejemplos donde se analiza cómo se comporta una variable en respuesta a los cambios que se producen en otras variables

d) En Biología: Cuando se trata se precisar: el crecimiento de una población animal o vegetal en **función** del tiempo, el peso de un bulbo en **función** del diámetro del mismo, el consumo de oxígeno en **función** del trabajo realizado, etc.

Concepto de función

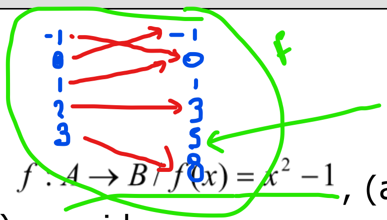
Matemáticamente podemos definir el concepto de función como un caso especial de las relaciones.

> Se llama función entre los conjuntos A y B a la relación f de A en B (f **:** A → B) tal que:
> ***Todos*** y ***cada uno*** de los elementos ***de* A** son elementos del dominio de f y la imagen de cada elemento de **A** es única.

El conjunto A (primer conjunto) es el conjunto de partida o "dominio de definición de la función". El conjunto B se denomina conjunto de llegada o codominio. El conjunto formado por los elementos de B (segundo conjunto) que son imagen de algún elemento del dominio, se denomina "conjunto imagen".

Es decir que podemos afirmar lo siguiente:

> "Para que una relación sea función, a cada elemento del dominio le debe corresponder uno y solo un elemento del codominio, pudiendo en el codominio quedar elementos sin ser imagen de elementos del dominio"



Ejemplo

codominio

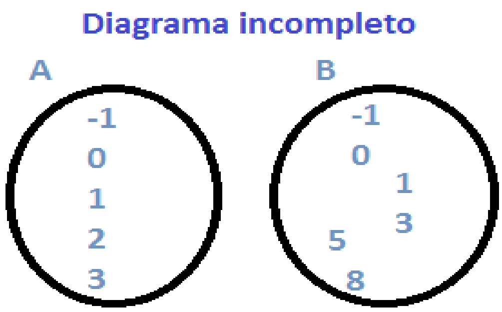
Dados los conjuntos $A=\{-1,0,1,2,3\}$; $B=\{-1,0,1,3,5,8\}$ y la relación $f: A \to B \,/\, f(x)=x^2-1$, (a cada elemento de A se le asigna su cuadrado disminuido en 1), se pide:

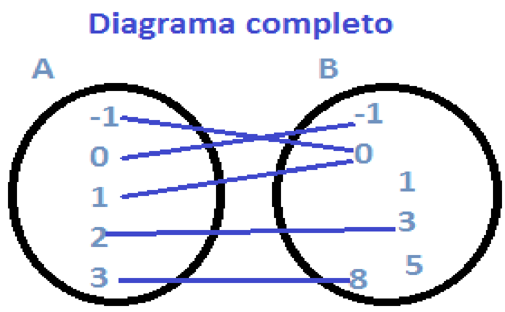
a) Completa el diagrama.
b) Determina el dominio
c) Determina el codominio
d) Determina el conjunto imagen

$F(x)=\{-1,0,1,2,3\}$

Dominio

Solución





b) $dom = \{-1,0,1,2,3\}$

La relación está formada por los pares:

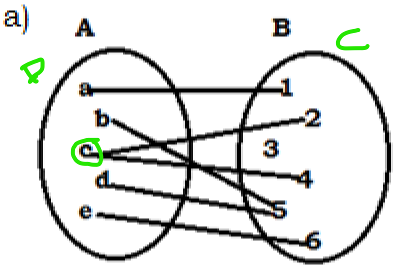
$$R = \{(-1,0),(0,-1),(1,0),(2,3),(3,8)\}$$

c) $cod = \{-1,0.1.3.5.8\}$

d) $im\,R = \{-1,0,3,8\}$

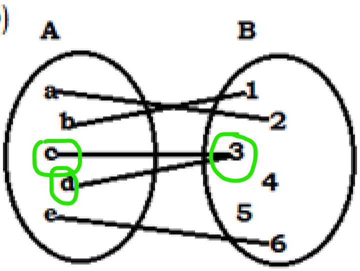
Ejercicio Nº 6: Determina si las siguientes relaciones son funciones. Establece dominio, codominio e imagen.

a)



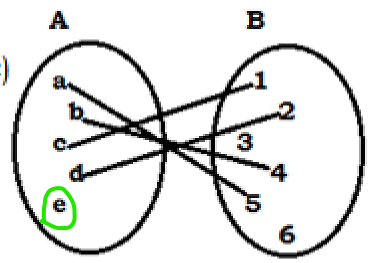
No es Función porque para C
le están perteneciendo 2 valores

b)



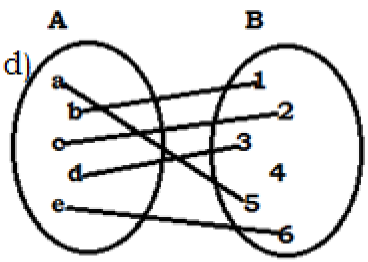
Es Funcion

c)



No es Función porque para E no
tiene asignado ningún valor

d)



Es Funcion

Ejercicio Nº *7:* Halla el dominio de las siguientes funciones.

Función	Dominio
1) $y = 2x + 3$	Todos los Reales
2) $y = \sqrt{x}$	[0 hasta infinito)
3) $y = \dfrac{1}{x}$	Todos los Reales menos el 0
4) $y = \sqrt{x+1}$	[-1 hasta infinito)
5) $y = \dfrac{3x}{x+3}$	Todos los reales menos el -3

Función Lineal y función afín

Comenzaremos resolviendo la siguiente situación en la cual se encuentra involucrado el modelo lineal.

Una represa cuya capacidad es de 1200 millones de litros de agua, tiene una filtración. Desde el primer día que se construyó pierde agua de manera uniforme, a razón de 16 millones de litros diarios, aproximadamente.

Se desea hallar una función que nos permita describir la cantidad de agua que permanece en la represa cada día.
Sabemos que la pérdida de agua es uniforme, calculemos la cantidad de agua que va quedando día a día:

Tiempo t (en días)	Cantidad de agua C(t) (en millones de litros)
0	1200
1	1200-16
2	1200-16-16= 1200-2.16=1200-16.2
3	1200-2.16-16= 1200-3.16=1200-16.3
…	…
T	1200-3.16= 1200-16.t

La función que describe la cantidad de agua que queda en la represa después de t días es:

C (t)= 1200-16t

A este tipo de funciones las llamamos **funciones lineales.** Su gráfica es una recta.

Una función es lineal si se puede expresar como: **f(x) = m x + b**, siendo los parámetros m y b números reales.

Ejercicio Nº 8

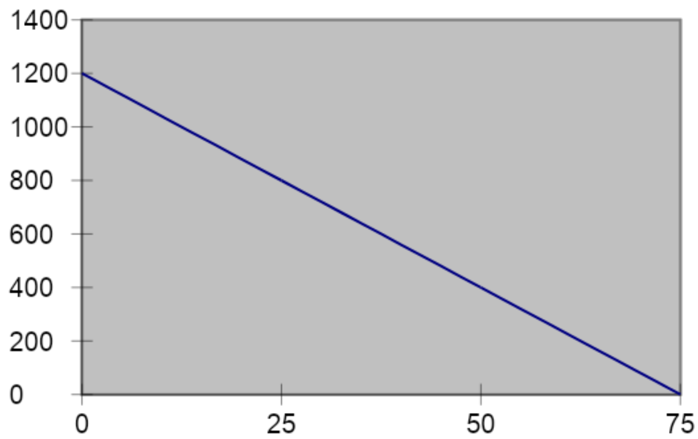
a) ¿En la función C (t) qué valores toman los parámetros m y b?
b) En el contexto del problema, ¿cuál es el dominio de la función? ¿Cuál es su imagen? ¿Y fuera del contexto del problema?
c) ¿Qué cantidad de agua queda en la represa a los 20 días?
d) ¿Cuánta agua se perdió al cabo de 40 días?
e) ¿Es cierto que a los 25 días quedan en la represa 400 millones de litros de agua?
f) ¿Cuántos días deben transcurrir para que queden en la represa 250 millones de litros de agua?
g) ¿Es cierto que a los 70 días no hay más agua?

Gráficos

Un punto $P = (x_0, y_0)$ pertenece a la recta $f(x) = m\,x + b$, si y sólo si sus coordenadas verifican:

$$y_0 = m\,x_0 + b\ .$$

El punto P = (25,800) satisface a la ecuación y = 1200 – 16t porque sus coordenadas verifican: 1200 – 16.25 = 800, es decir, a los 25 días en la represa quedan 800 millones de litros de agua, por lo tanto, se han perdido 400 millones de litros.
La representación gráfica de una función lineal es una recta y es suficiente conocer dos puntos pertenecientes a la misma para poder trazarla, por ejemplo (0,1200) y (75,0) pertenecen a la función:



Ejercicio Nº 9

Marca con una cruz todos aquellos puntos que pertenezcan a las rectas dadas:

Punto / función	$y = -x + 2$	$x + 2y = 5$	$-3x + y = 7$	$\frac{1}{2}x - 6y = 1$	$-\frac{3}{5}x - 5y = 6$
(0,3)					

$(-2,4)$	✓	✗	✗	✗	✗
$(3,1)$	✗	✓	✗	✗	✗
$(1,10)$					
$\left(0,-\frac{6}{5}\right)$					
$(0,7)$					
$(-1,3)$					
$(5,0)$					

Obtención de la ecuación de la recta dados dos puntos

Dados dos puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ es posible calcular la pendiente de la única recta que contiene a éstos mediante la relación $m = tg\alpha = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, luego tomando uno de ellos y la ecuación general $y = mx + b$ se obtiene el valor de la ordenada al origen.

Ejercicio Nº 10: Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P_1(\overset{x_1}{-4};\overset{y_1}{2})$ y $P_2(\overset{x_2}{3};\overset{y_2}{-2})$

$m = \frac{-2-2}{3-(-4)} = -4/7 \qquad 2 = \underbrace{-4/7 \cdot (-4)}_{16/7} + b \Rightarrow \boxed{2/7 = b}$

Interpretación y aplicación del término "PENDIENTE" de una recta

La pendiente de una recta puede interpretarse ya sea como una **razón** o como una **proporción,** o bien como una **tasa, ritmo** o **velocidad de cambio**. Si los ejes x e y tienen la misma unidad de medida, la pendiente no tiene unidades y es una **razón** o **proporción**. Si los ejes x e y tienen distintas unidades de medida, la pendiente es una **tasa, ritmo** o **velocidad de cambio**.

Ejemplos: crecimiento de poblaciones y diseño técnico

a) La población de una ciudad A era de 3 687 000 habitantes en 2000 y de 4 042 000 en 2010. Durante este período de 10 años, el ritmo o velocidad de cambio promedio de la población fue:

$$Ritmo\ o\ velocidad\ de\ cambio\ medio = \frac{cambio\ en\ población}{cambio\ en\ años} = \frac{4\,042\,000 - 3\,687\,000}{2010 - 2000}$$

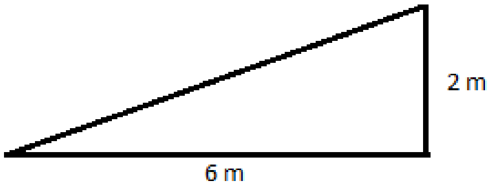
$=$ 35 500 *personas por año*

Un **ritmo** o velocidad de **cambio medio** siempre se calcula con respecto a un intervalo que en este caso es $[2000,2010]$.
¿Si la población de esta ciudad continúa creciendo a este ritmo, qué cantidad de habitantes alcanzará a tener en 2020?

b) En un torneo de saltos de esquí acuático, la rampa se eleva hasta una altura de 2 m sobre una balsa de 6 m de largo. La pendiente de la rampa de esquí es el cociente entre su altura (ascenso) y la longitud de su base (avance).

$$pendiente\ de\ la\ rampa = \frac{ascenso}{avance} = \frac{2\ m}{6\ m} = \frac{1}{3}$$

En este caso la pendiente es una **proporción** y se expresa sin unidades.

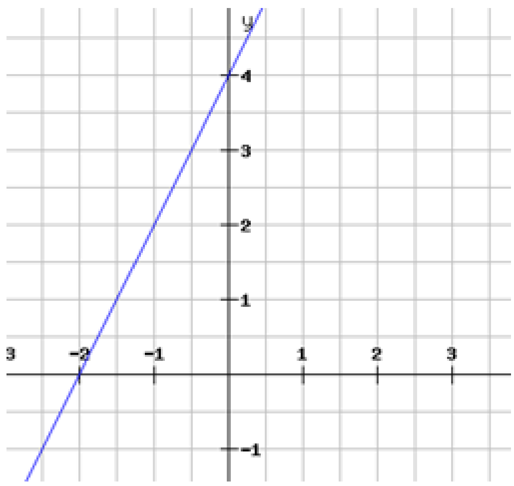


Ejercicio Nº 11: D*iseño de una cinta.* Se está construyendo una cinta transportadora de manera que se eleve 1 metro por cada tres metros de avance horizontal.

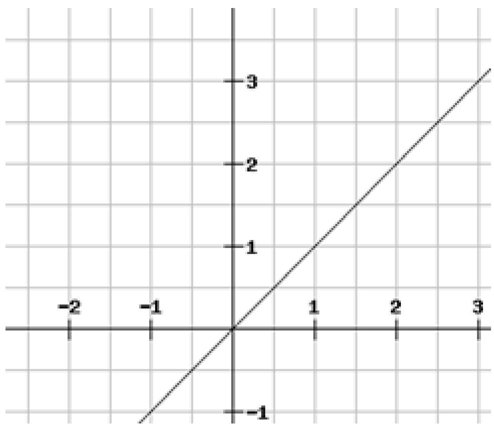
a) Calcula la pendiente de la cinta.
b) Supón que la cinta corre entre dos pisos de una fábrica. Calcula la longitud de la cinta si la distancia vertical entre ambos pisos es de 10 pies.

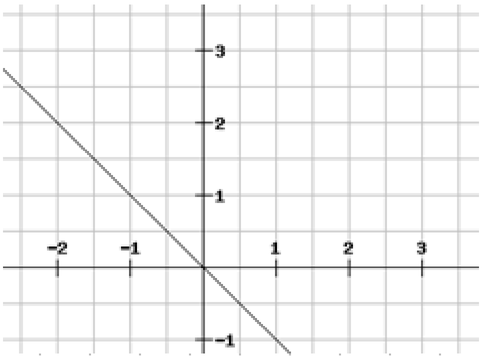
Ejercicio Nº 12: halla para cada una de las rectas que se dibujan a continuación: el valor de la pendiente, de la ordenada al origen y los puntos de corte con los ejes coordenados de las siguientes rectas. También escribe la ecuación de cada una de ellas en forma explícita.

a)

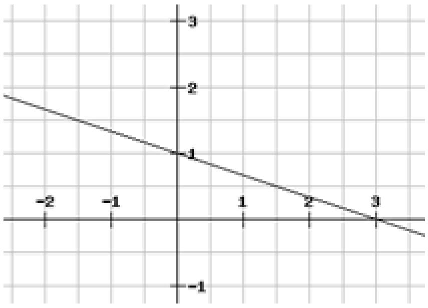


b)

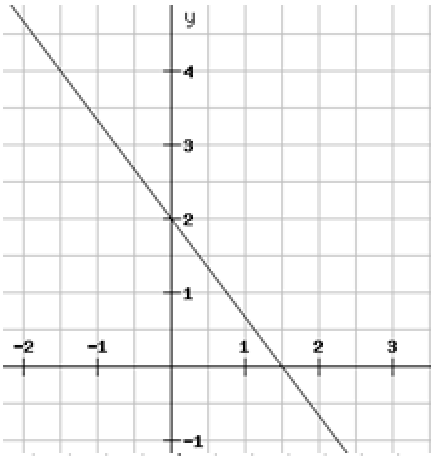



3
2
1
-2 -1 1 2 3
-1

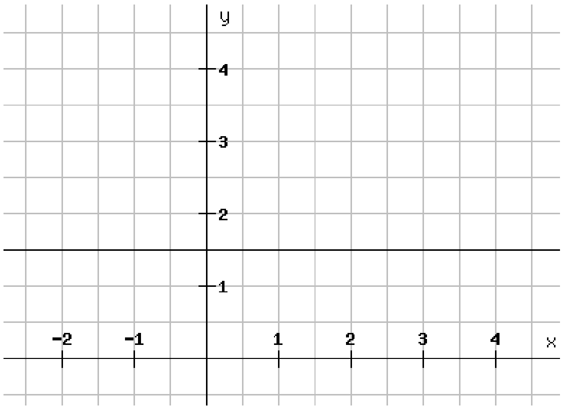
c)


3
2
1
-2 -1 1 2 3
-1

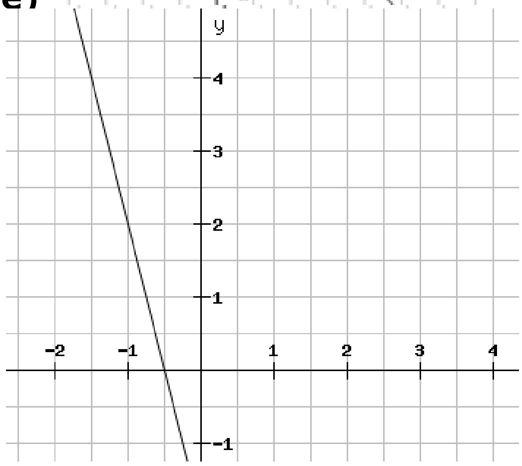
d)


y
4
3
2
1
-2 -1 1 2 3
-1

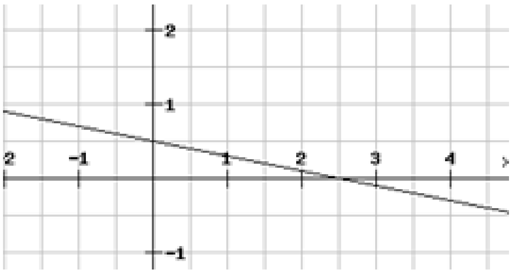
e)


y
4
3
2
1
-2 -1 1 2 3 4 x

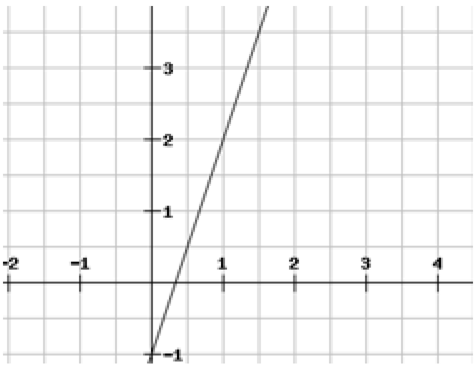
f)


y
4
3
2
1
-2 -1 1 2 3 4
-1

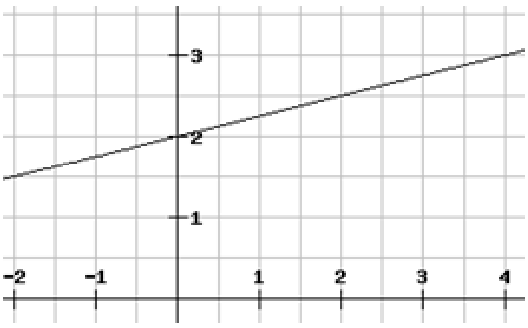
g)


2
1
2 -1 1 2 3 4
-1

h)


3
2
1
-2 -1 1 2 3 4
-1

i)


3
2
1
-2 -1 1 2 3 4

j)

Intersecciones de rectas

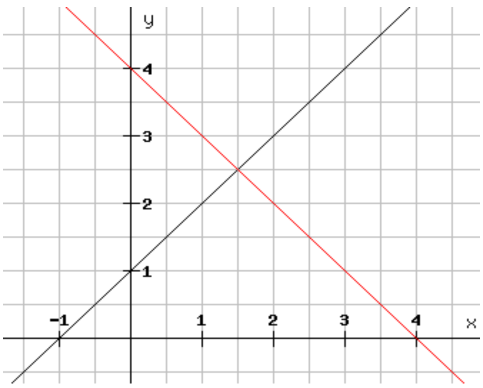
Es posible que dos o más rectas se corten en un único punto $P_0(x_0;y_0)$ o bien que no se corten en ningún punto (resulten paralelas).
Si se cortan en un punto ambas rectas comparten las coordenadas x e y en sus ecuaciones por lo tanto igualando dichas variables y resolviendo algebraicamente es posible encontrar, si existe el punto de intersección. En las aplicaciones, este punto de encuentro suele llamarse punto de equilibrio o punto de cobertura, según el caso.

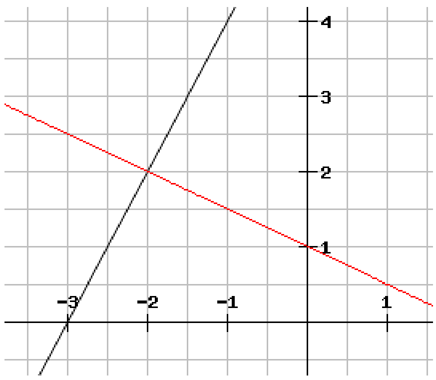
Analiza la Cuestión: ¿Cómo se comportan las ecuaciones de dos rectas si no tienen punto de intersección?

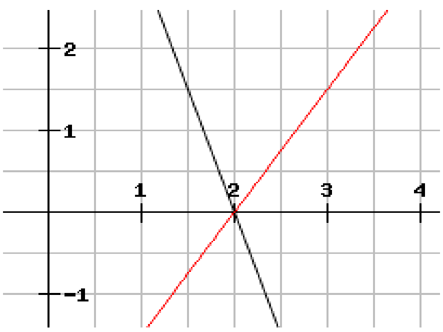
Ejemplo: Encuentra el punto de intersección, si existe para los siguientes pares de rectas:

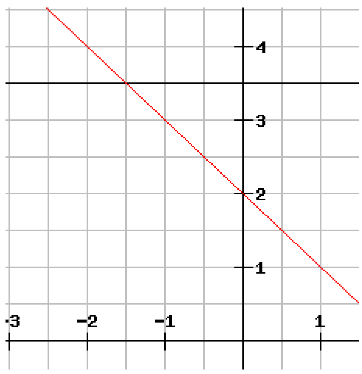
$\begin{cases} x-y=3 \\ x+4y=-8 \end{cases}$; $\begin{cases} x-y=-1 \\ 2x-2y=-2 \end{cases}$

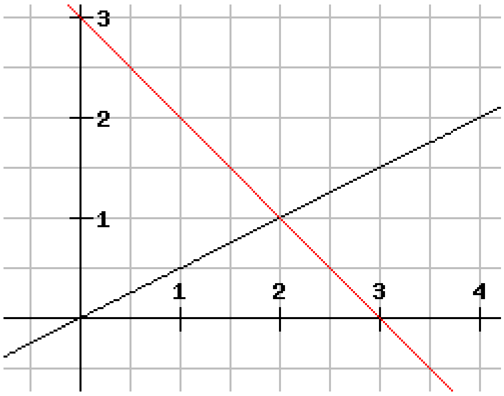
Ejercicio Nº 13: En qué puntos se cortan los siguientes pares de rectas?

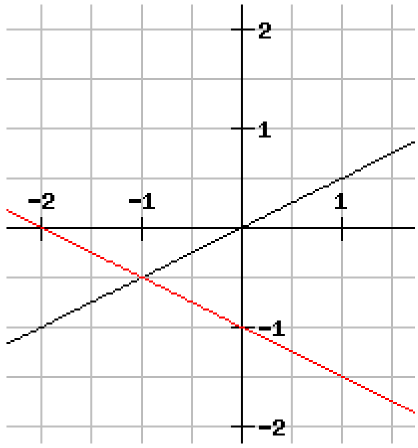












Ejercicio Nº 14: Encuentra analíticamente los puntos de intersección, si existen, para los siguientes pares de rectas:

a) $\begin{cases} x - y = -2 \\ x + 4y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 3 \\ 4x - 5y = 10 \end{cases}$ c) $\{x + 2y = 1\ 2x - y = 4$

d) $\{3x - y = 3\ -x + 1 = y$ f) $\{4x - 2y = 1\ 4x + 2y = 5$

Rectas Paralelas y perpendiculares

Como se habló anteriormente, un conjunto de rectas son **paralelas** cuando no se cortan en ningún punto. Si lo imaginamos geométricamente, podemos razonar que tienen la misma inclinación, por lo tanto, en su ecuación todas mantienen la **misma pendiente**, variando solo la ordenada al origen.

Ejemplo: $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ y = -2x - 1 \end{cases}$. Verifica gráficamente

Si las rectas se cortan formando ángulos de 90º, las rectas se dicen **perpendiculares** y sus pendientes cumplen la relación $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$, es decir que sus pendientes son recíprocas y opuestas.

Ejemplo

Verifica analítica y gráficamente que las rectas $r_1: -2x + y = 4$ y $r_1: 2x + 4y = 4$ son perpendiculares

Ejercicio Nº 15: Marca con una cruz todas las rectas que sean paralelas a la recta $R_1: 2x + 3y = 5$ y con un asterisco a las que sean perpendiculares a $R_2: 2y - x = 1$:

a) $y = -\frac{2}{3}x$ b) $2x + 3y = 6$ c) $y = -2x + 4$ d) $y = -\frac{2}{3}x + 1$

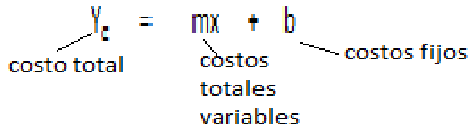
e) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$ f) $2y + 4x = 5$ g) $2x + 3y = 9$ h) $3y + 2x = -6$

Ejercicio Nº 16:

a) Escribe, en forma explícita, la ecuación de la recta paralela a $y = \frac{1}{3}x + 1$ que pasa por el punto (-1,2). Grafica
b) Escribe la ecuación de la recta que pasa por el punto (-3, 1) y es perpendicular a la recta definida por: 3x-4y+11 = 0. Grafica
c) Encuentra el valor de k, de manera que el punto (-3 , k) pertenezca a la recta de pendiente -1 y que pasa por el punto (2 , 1)
d) Escribe la ecuación de la recta en forma segmentaria que pasa por los puntos (0,3) y (-3,0).
e) Escribe la ecuación de la recta $y = \frac{1}{3}x + 1$ en las formas implícita y segmentaria.

Aplicaciones de la ecuación de la recta a la Administración y a la Economía

Cuando un empresa produce cualquier bien, debe hacerse cargo de dos tipos de costos que son: costos fijos (no dependen del nivel de producción, son ejemplos de ellos los alquileres, intereses sobre préstamos,…) y costos variables (dependen del nivel de producción, por ejemplo: costos de materiales, de mano de obra,…). Consideremos el caso en que el costo variable por unidad de artículos producidos es constante. En esta situación los costos variables totales son proporcionales a la cantidad de artículos producidos.
Si "m" simboliza el costo variable por unidad, resulta que los costos variables totales al producir "x" unidades de artículos son "mx" pesos. Si los costos fijos son "b" pesos entonces el costo total "y_c" está dado por:



La representación gráfica es una recta.

Ejemplo

El costo variable de procesar un litro de jugo de naranja es de \$0.2 y los costos fijos por día son de \$ 150, se pide:

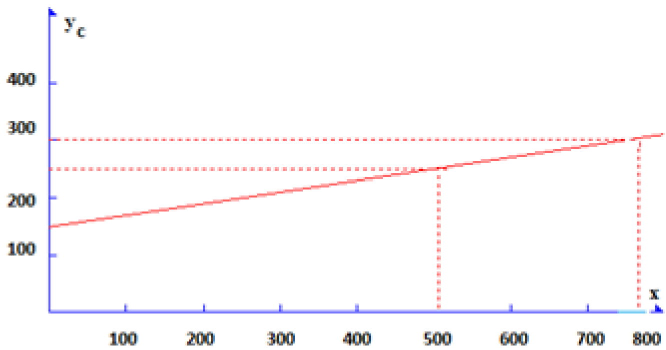
a) La ecuación del costo total y su gráfica.
b) El costo total de procesar 500 litros en un día.
c) La cantidad de litros de naranja a procesar para que el costo total sea de \$ 300.

Solución:

a) Sabemos que $yc = mx + b = \ 0.2x + 150$

b) si x=500, entonces: $yc \ = \ 0.2.500 \ + \ 150 \ = \ \$ \, 250$

c) si y_c = \$ 300 , resulta: $300 \ = \ 0.2.x \ + \ 150 \ \equiv \ \frac{300-150}{0.2} = x = 750 \; litros$

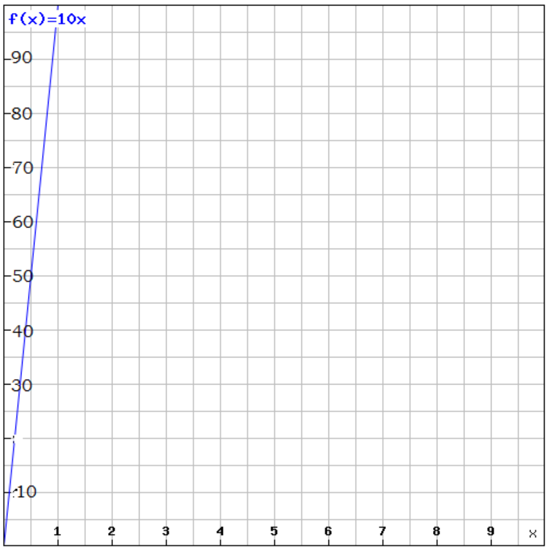


Función ingreso

Si el precio de venta de un artículo es $p = 10$ y suponiendo que este precio es constante para cualquier cantidad vendida, es válida la siguiente tabla en la que se refleja el ingreso y_I que obtiene el fabricante o productor:

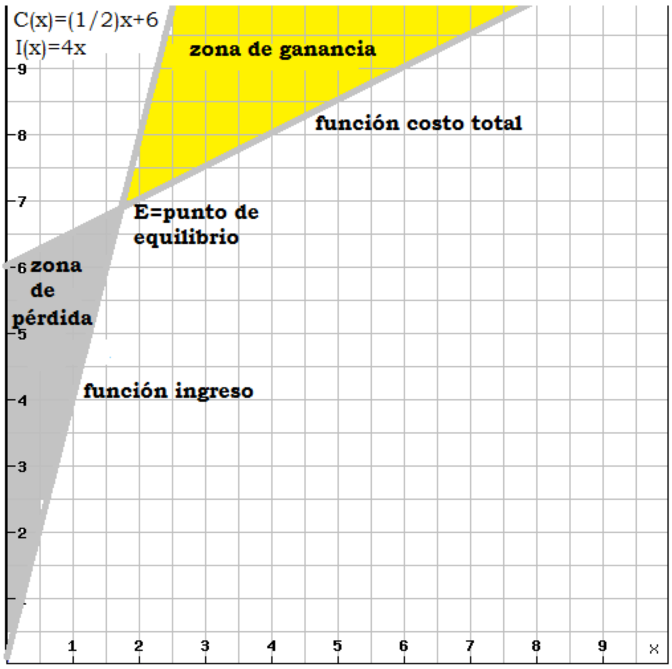
Cantidad	0	1	2	3	...	x
Ingreso y_I	0	10	20	30	...	$10x = px$

La gráfica de la función ingreso $\mathbf{y_I = px}$ es una recta (en el primer cuadrante) con ordenada al origen nula y su pendiente **p** es el precio por unidad.



Punto de cobertura

Si el costo total y_c de producción es mayor que los ingresos y_I , la empresa sufre pérdida. Si los ingresos superan a los costos, existe una ganancia. Si el costo de producción es igual a los ingresos obtenidos por las ventas, no hay pérdidas ni ganancias. El punto de cobertura E, es el punto en que se intersecan las rectas de las funciones ingreso y costo total.



Ejemplo

Para un fabricante de juguetes, el costo de los materiales y de mano de obra por cierto auto es de $ 200 y los costos fijos son de $ 16000 por día. ¿Si vende cada auto a $ 250, cuántos autos tendrá que producir y vender cada día como mínimo para no tener pérdida?

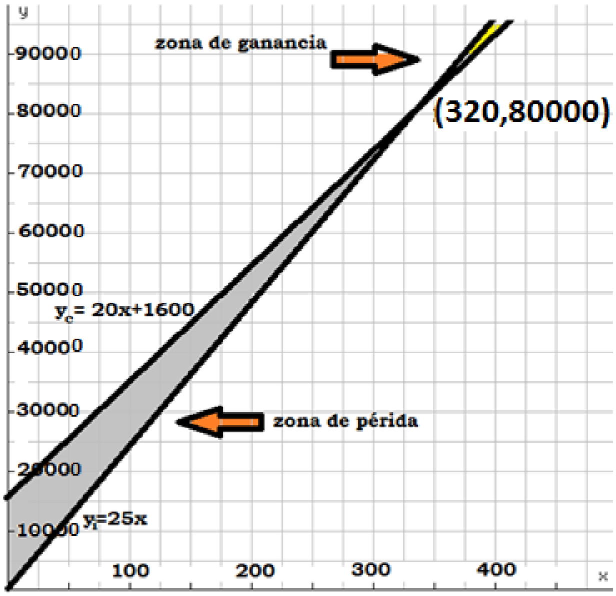
Solución: Sabemos que y_c = mx+b =20x+1600. El ingreso por x autos es de y_I=25x, entonces al igualar los costos con este ingreso resulta:

$$200x + 16000 = 250x \ ; \quad 16000 = 50x \ ; \quad 320 = x$$

Deberá producir y vender como mínimo 320 autos para no tener pérdida y su costo será de:

$$yc = 200.320 + 16000 = \$\,80000\,;$$

$$E = (320{,}80000)$$



Ejercicio Nº 17: problemas

a) El director de una escuela analiza la matrícula de sus estudiantes. El año que se fundó la escuela, inició con 400 estudiantes. A partir de entonces la matrícula de estudiantes fue aumentando en 50 cada año.

i. Modela una función que reciba de entrada el número de años transcurridos desde la fundación de la escuela y devuelva la cantidad de estudiantes.

ii. Usa la función para determinar cuántos estudiantes habrá después de 15 años de su fundación.

b) Una piscina es llenada por una manguera en forma constante de modo que la altura alcanzada por el agua aumenta 20 cm por cada hora que transcurre. Si inicialmente el agua que había en la piscina llegaba a una altura de 1,2 m, ¿cuál es la ecuación de la función que determina la altura (h) del agua después de transcurridas t horas?

c) En las 10 primeras semanas de cultivo de una planta, que medía 2 cm, se ha observado que su crecimiento es directamente proporcional al tiempo, viendo que en la primera semana ha pasado a medir 2.5 cm. Establecer una función a fin que dé la altura de la planta en función del tiempo y representar gráficamente.

d) Por el alquiler de un coche cobran 100 € diarios más 0.30 € por kilómetro. Encuentra la ecuación de la recta que relaciona el coste diario con el número de kilómetros y represéntala. Si en un día se ha hecho un total de 300 km, ¿qué importe debemos abonar?

e) Un mapa coordenado de un campus universitario da las coordenadas (x,y) de tres edificios principales como sigue: centro de cómputo, (3.5,-1); laboratorio de Ingeniería, (0.5,0); biblioteca, (-1,-4.5). determina las ecuaciones (en la forma pendiente-ordenada al origen) de las trayectorias en línea recta que conectan:

   i. El laboratorio de Ingeniería con el centro de cómputo.
   ii. El laboratorio de Ingeniería con la biblioteca.
   iii. Demuestra que las dos trayectorias son perpendiculares.

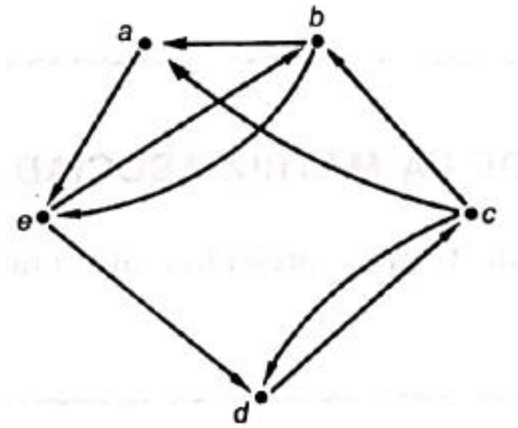
f) Un pequeño negocio pronostica que su ingreso crecerá de acuerdo con el método de la línea recta con una pendiente de $50000 por año. En su quinto año, el negocio tuvo ingresos por $330000. Determina una ecuación que describa la relación entre los ingresos, R, y el número de años, T, desde la apertura del negocio.

g) **Ingreso**: El ingreso mensual total de una guardería obtenido del cuidado de x niños está dado por $r = 450x$ (en miles de pesos) y sus costos mensuales totales están dados por $c = 380x + 3500$ (en miles de pesos). ¿Cuántos niños se necesitan inscribir mensualmente para llegar al punto de equilibrio?, en otras palabras, ¿cuándo los ingresos igualan a los costos?

h) **Expansión lineal**: cuando los objetos sólidos son calentados se expanden en longitud (es la razón por la que en el pavimento y en los puentes se colocan juntas de expansión). Por lo general, cuando la temperatura de un cuerpo sólido de longitud L_0 se incremente desde $T_0\ hasta\ T$, la longitud, L, del cuerpo está dada por $L = L_0[1 + \propto (T - T_0)]$, donde $\propto$ se denomina *coeficiente de expansión lineal.* Supón que una varilla de metal de 1 m de longitud a a $0°C$ se expande 0.001 m cuando se calienta desde $0°C\ hasta\ 100°C$. Encuentra el coeficiente de expansión lineal.

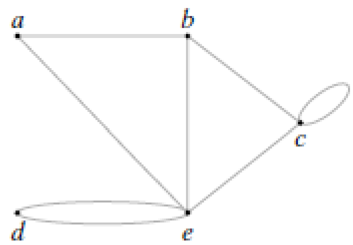
Trabajo Práctico Nº 7: Par ordenado. Relaciones-Función Lineal (de entrega obligatoria)

1) Dado el siguiente grafo:



a) ¿Es cierto que un camino simple puede ser a,e,d,c?
b) El camino e,b,a,e,d, ¿es elemental o simple? Justifica tu respuesta
c) ¿Encuentras en este gráfico algún circuito Hamiltoniano?

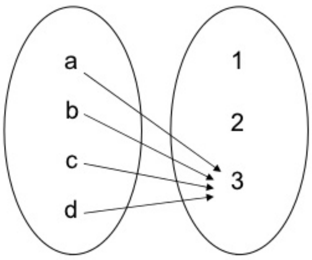
2) ¿Cuál es la matriz de adyacencia para la siguiente gráfica?

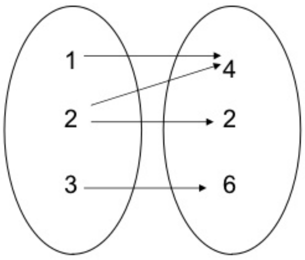


3) Halla el producto cartesiano BxA siendo $A = \{x / x \in Z^- \wedge x + 7 > 4\}$ y $B = \{x / x \in N \wedge 0 < x < 3\}$.

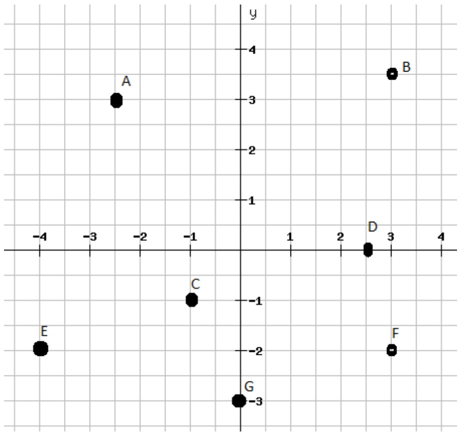
4) Analiza si las siguientes relaciones son funciones. Justifica

a) b)





5) Halla las coordenadas de los puntos que se grafican a continuación:



6) Grafica las siguientes funciones lineales, identificando previamente pendiente y ordenada al origen:

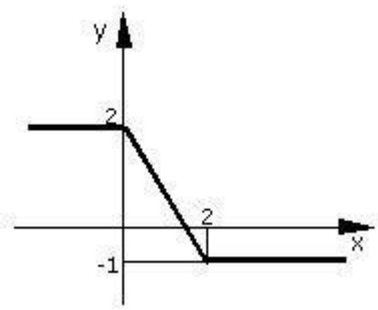
a) $-x+2y=4$ b) $4x+2y-7=0$ c) $-y+3x=0$

7) Determina y grafica la ecuación de la recta que:
   a) Tiene pendiente 2 y ordenada al origen -1
   b) Tiene pendiente -2 y f (0) =3.
   c) Corta al eje de abscisas en 4 y al eje de ordenadas en -2
   d) Pasa por los puntos (0,0) y (1, -1)

8) Encuentra el valor de k, de manera que el punto (5, k) pertenezca a la recta que pasa por los puntos (2, 3) y (-3, 5). Graficar.

9) Dada la gráfica de la función mostrada en

10) la figura, halla el valor de f (-2) + f(2) + f(3):



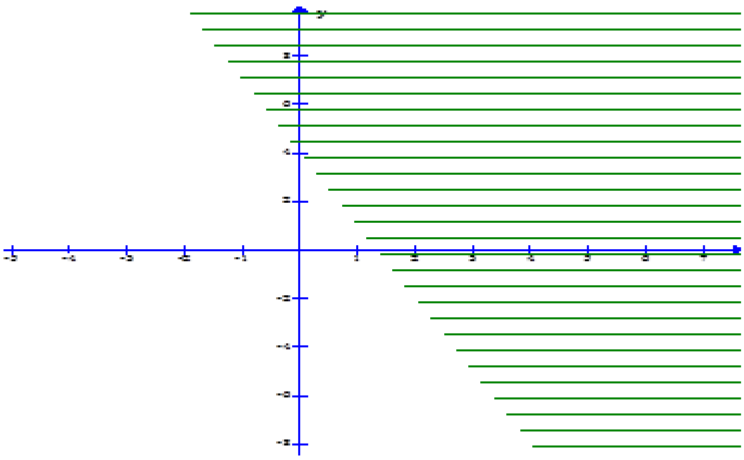
Inecuaciones lineales en dos variables

Como se estudió anteriormente, una desigualdad o inecuación es una expresión algebraica que consta de dos miembros separados por algunos de los símbolos <, >, ≤, ≥.

Cuando las expresiones constan de dos variables x, y, lineales, la expresión corresponde a la ecuación de una recta, pero a diferencia de una recta, en lugar de estar el signo =, aparece una desigualdad. ¿Cuáles son los puntos x e y que son soluciones de la desigualdad?

Son ejemplos de desigualdades lineales en dos variables: $y \leq -2x+4$; $y \geq -x-2$; $y < -\frac{1}{2}x-8$;

Volviendo a la pregunta: ¿Cuáles son los puntos del plano x,y que satisfacen la desigualdad?. Evidentemente es un conjunto infinito de puntos, observémoslo gráficamente en la gráfica de la desigualdad $y > -3x+4$:



Ejercicio Nº 1: Representa gráficamente el conjunto solución de las siguientes inecuaciones**:**

a) $y \leq 3x + 2$

b) $y < 3x + 2$

c) $\frac{1}{2} y + 3 < x$

d) $2x - 2/3y > 0$

e) $3/2 - 5/2\, y \leq 2x$

f) $y > 3x + 2$

g) $y \geq -5x + 2$

h) $2x + 3y > 1$

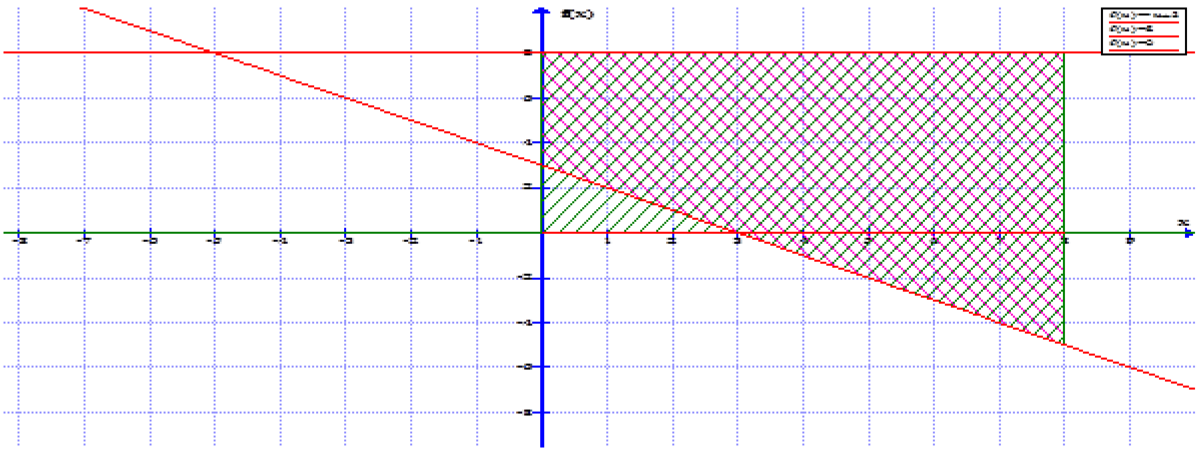
i) $\frac{1}{2} y + 3 \geq x$

Sistema de inecuaciones lineales en dos variables

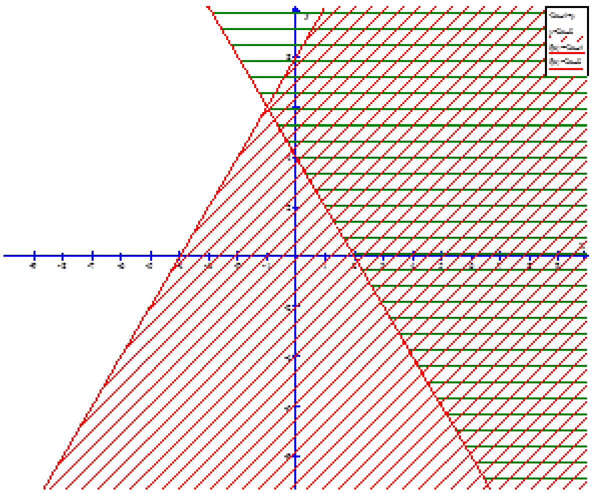
Cuando se dispone de un conjunto de desigualdades con estas características, estamos en presencia de un "sistema de inecuaciones lineales con dos variables".

El conjunto solución serán los puntos P(x,y) del plano que verifican simultáneamente las desigualdades, es por esto que se busca la intersección de las soluciones de todas las desigualdades.

Ejemplo



Para el caso del ejemplo la región obtenida es cerrada, pero como vemos más abajo las regiones solución pueden ser también abiertas y semicerradas



Ejercicio Nº 2: Representa gráficamente el conjunto solución de los siguientes sistemas, enuncia la región que se obtiene:

$$a)\begin{cases} y \le 2x+3 \\ y \le 5-3x \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \quad b)\begin{cases} y \ge -3x-2 \\ y \ge -3x+3 \end{cases} \quad c)\begin{cases} 2x+3y > 2 \\ 6y > -4x+4 \end{cases} \quad d)\begin{cases} y \le 4x-1 \\ y \le 4x+5 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \quad e)\begin{cases} y < 2x+3 \\ y \ge 2x-1 \end{cases} \quad f)\begin{cases} 2y < 5x \\ y - \frac{5}{2}x > 0 \end{cases}$$

$$g)\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 2 \\ y \geq 0 \\ y < 3 \end{cases} \quad h)\begin{cases} y \geq \frac{1}{2}x \\ y \leq \frac{1}{2}x + 2 \\ y \geq 0 \\ y \leq 4 - x \end{cases} \quad i)\begin{cases} y \leq 5 - x \\ y \leq x + 3 \\ y \geq 1 \end{cases} \quad j)\begin{cases} y \leq \frac{1}{2}x + 1 \\ y + x > 1 \\ -2y < x + 1 \end{cases} \quad k)\begin{cases} y - 2x \leq 3.(1 - x) \\ y + 1 > x \end{cases}$$

Ejercicio Nº3: traduce a lenguaje simbólico.

La cantidad de cervezas que puedes comprar no debe ser mayor que 10.	
Puedes traer más de 4 gaseosas.	
A lo sumo prepara 5 tazas de leche.	
Como mínimo prepara 5 tazas de leche.	
Se presentarán como mucho 50 alumnos.	
En la reunión se contaron un mínimo de 45 personas.	
Se comprarán a lo sumo 10 computadoras.	
La cantidad de tazas blancas es menor que la cantidad de tazas negras.	
La cantidad de alumnos que aprobaron matemática fue mayor que la cantidad que aprobaron física.	

Ejercicio Nº4: problemas

a) Ahorros: cada mes del año pasado Carlos ahorró más de \$1000 pero menos de \$1500. Si S representa sus ahorros totales del año, describe S con el uso de desigualdades.

b) Con el uso de desigualdades, simboliza el enunciado siguiente: "El número de horas de trabajo x necesarias para fabricar un producto no es menor que 5/2 ni mayor que 5"

c) En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos x es menor que tres veces el otro ángulo agudo más 10 grados. Resuelve para x.

d) Un estudiante tiene \$25000 para gastar en un equipo de audio y algunos discos compactos. Si compra un equipo que cuesta \$16900 y el costo de los discos es \$52 cada uno, determina el mayor número de discos que puede comprar.

e) La compañía Davis fabrica un producto que tiene un precio unitario de venta de \$ 20 y un costo unitario de \$ 15. Si los costos fijos son de \$ 600 000, determine el número mínimo de unidades que deben ser vendidos para que la compañía tenga utilidades.

f) Un constructor debe decidir entre rentar o comprar una máquina excavadora. Si fuese a rentar la máquina, el costo de la renta sería $30000 mensuales (sobre la base de un año) y el costo diario (gas, aceite y operador) sería de $1800 por cada día que la máquina se utilice. Si fuese a comprarla, sus costos fijos anuales serían de $200000 y los costos diarios de operación y mantenimiento serían de $2300 por cada día que la máquina se utilizara. ¿Cuál es el número mínimo de días al año que tendría que utilizar el constructor la máquina para justificar la renta en lugar de la compra?

Aplicación de sistemas de inecuaciones: Programación Lineal

La programación lineal estudia las situaciones en las que se exige **maximizar o minimizar funciones lineales** que se encuentran sujetas a determinadas limitaciones, llamadas **restricciones**.

Esas funciones lineales que la programación lineal optimiza se llaman **función objetivo: f(x,y) = ax + by**

Matemáticamente, las restricciones están formadas por un sistema de inecuaciones que representan las limitaciones con las que se cuenta:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y \leq c_1 \\ a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx + b_ny \leq c_n \end{cases}$$

Solución o región factible El conjunto intersección, de todos los semiplanos formados por las restricciones, determina un recinto, acotado o no, que recibe el nombre de **región de validez** o zona de **soluciones factibles**.

Solución óptima El conjunto de los vértices del recinto se denomina conjunto de **soluciones factibles básicas** y el vértice donde se presenta la **solución óptima** se llama **solución máxima** (**o mínima** según el caso).

Valor del programa lineal El **valor** que toma la **función objetivo** en el **vértice de solución óptima** se llama **valor del programa lineal.**

Pasos para resolver un problema de programación lineal

1) Elegir las **incógnitas**.

2) Escribir la **función objetivo** en función de los datos del problema.

3) Escribir las **restricciones** en forma de sistema de inecuaciones.

4) Averiguar el conjunto de **soluciones factibles** representando gráficamente las restricciones.

5) Calcular las coordenadas de los vértices del recinto de soluciones factibles (si son pocos).

6) Calcular el **valor de la función objetivo** en cada uno de los vértices para ver en cuál de ellos presenta el **valor máximo o mínimo** según nos pida el problema (hay que tener en cuenta aquí la posible no existencia de solución si el recinto no está acotado)

Ejemplo de programación lineal

Unos grandes almacenes encargan a un fabricante pantalones y chaquetas deportivas. El fabricante dispone para la confección de 750 m de tejido de algodón y 1000 m de tejido de poliéster. Cada pantalón precisa 1 m de algodón y 2 m de poliéster. Para cada chaqueta se necesitan 1.5 m de algodón y 1 m de poliéster. El precio del pantalón se fija en $850 y el de la chaqueta en $540 . ¿Qué número de pantalones y chaquetas debe suministrar el fabricante a los almacenes para que éstos consigan una venta máxima?

1. Elección de las **incógnitas**. **x = Nº de pantalones y = Nº de chaquetas**

2. **Función objetivo** **f(x,y)= 850x + 540y**

3. **Restricciones:** Para ello vamos a ayudarnos disponiendo la información en una tabla:

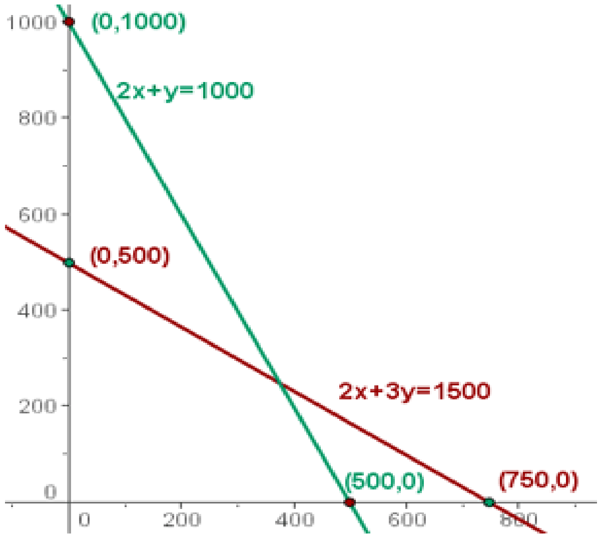
	pantalones	Chaquetas	disponible
Algodón	1	1,5	750
poliéster	2	1	1000

El sistema de inecuaciones queda formado de la siguiente manera:

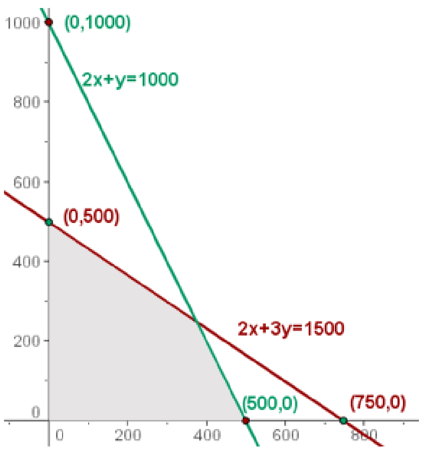
$$\begin{cases} x + 1{,}5y \leq 750 \\ 2x + y \leq 1000 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Se toman las desigualdades $x \geq 0$ e $y \geq 0$ ya que el número de pantalones y chaquetas son números naturales.

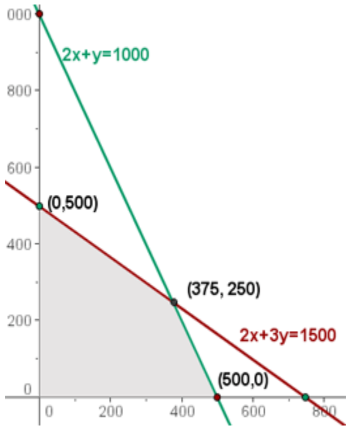
4. Hallar el conjunto de **soluciones factibles.** Tenemos que representar gráficamente las restricciones.



5. La zona de intersección de las soluciones de las inecuaciones sería la solución al sistema de inecuaciones, que constituye el conjunto de las soluciones factibles.



6. Calcular las coordenadas de los vértices del recinto de las soluciones factibles.



La **solución óptima**, si es única, se encuentra en un vértice del recinto. Éstos son las soluciones: Vértice 1: (0, 500). Vértice 2: (500, 0). Vértice 3: (375, 250).

7. Calcular el **valor de la función objetivo.** En la función objetivo sustituimos cada uno de los vértices.

Vértice 1: (0, 500). F(0 ; 500) = 270000

Vértice 2: (500, 0). F(500 ; 0)= 425000

Vértice 3: (375, 250). F(375 ; 250)= **453750 (Valor Máximo)**

La solución óptima es fabricar **375 pantalones** y **250 chaquetas** para obtener un **beneficio de $453750**.

Ejercicios de resolución en clase:

a) Las restricciones pesqueras impuestas, obligan a una empresa a pescar como máximo 2000 toneladas de merluza y 2000 toneladas de langostinos. Además, en total las capturas de las dos especies no pueden superar las 3000 toneladas. Si el precio de la merluza es de $1.25 por kg. y el de langostino $4.5 por kg. , ¿qué cantidades debe pescar para obtener el máximo beneficio?

b) Un estudiante dedica parte de su tiempo al reparto de propaganda publicitaria. La empresa A le paga $5 por cada impreso repartido y la empresa B, con folletos mas grandes, le paga $7 por impreso. El estudiante lleva dos bolsas: una para los impresos A, en la que caben 120, y otra para los impresos B, en la que caben 100. Ha calculado que cada día es capaz de repartir 150 impresos como máximo. Lo que se pregunta el estudiante es: ¿cuántos impresos habrá de repartir de cada clase para que su beneficio diario sea máximo?

c) Una compañía aérea tiene dos aviones A y B para cubrir un determinado trayecto. El avión A debe hacer más veces el trayecto que el avión B pero no puede sobrepasar 120 viajes. Entre los dos aviones deben hacer mas de 60 pero no mas de 200 vuelos. En cada vuelo A consume 900 litros de combustible y B 700 litros. En cada viaje del avión A la empresa gana \$30000 y \$20000 por cada viaje de B. ¿cuántos viajes debe hacer cada avión para obtener el máximo de ganancias? ¿cuántos vuelos debe hacer cada avión para que el consumo de combustible sea mínimo?

d) En una granja de pollos se da una dieta “para engordar” con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y cinco de B, y el tipo Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de \$3 y el del tipo Y es de \$9. Se pregunta: ¿qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un costo mínimo?

Trabajo Práctico Nº 7: Sistemas de inecuaciones – Programación Lineal

Ejercicio Nº 1: Resolver el sistema de inecuaciones. Clasificar la región solución.

$$\begin{cases} -2x + y \leq 1 \\ x + y \leq 4 \\ 0 \leq x \leq 3 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ejercicio Nº 2: Resolver los siguientes problemas aplicando técnicas de programación lineal:

a) En un almacén se guarda aceite de girasol y de oliva. Para atender a los clientes se han de tener almacenados un mínimo de 20 bidones de aceite de girasol y 40 de aceite de oliva y, además, el número de bidones de aceite de oliva no debe ser inferior a la mitad del número de bidones de aceite de girasol. La capacidad total del almacén es de 150 bidones. Sabiendo que el gasto de almacenaje es el mismo para los dos tipos de aceite (1 unidad monetaria). ¿Cuántos bidones de cada tipo habrá que almacenar para que el gasto sea máximo y para que sea mínimo?

b) Se va a organizar la planta de un taller de automóviles donde van a trabajar electricistas y mecánicos; por necesidades de mercado, es necesario que haya mayor o igual número de mecánicos que de electricistas y que el número de mecánicos no supere al doble de electricistas. En total hay disponibles 20 electricistas y 30 mecánicos. El beneficio de la empresa por jornada es $250 por electricista y $200 por mecánico. ¿Cuántos trabajadores de cada clase deben elegirse para obtener el máximo beneficio?.

c) La fábrica Gepetto S.A., construye soldados y trenes de madera. El precio de venta al público de un soldado es de $270 y el de un tren $210 pesos. Gepetto estima que fabricar un soldado supone un gasto de $100 de materias primas y de $140 pesos de costos laborales. Fabricar un tren exige $90 de materias primas y $100 pesos de costos laborales. La construcción de ambos tipos de juguetes requiere un trabajo previo de carpintería y un proceso final de acabado (pintura, revisión de las piezas fabricadas, empaquetado, etc.). Para fabricar un soldado se necesita 1 hora de carpintería y 2 horas de proceso final de acabado. Un tren necesita 1 hora de carpintería y 1 hora para el proceso de acabado. Gepetto no tiene problemas de abastecimiento de materias primas, pero sólo puede contar semanalmente con un máximo de 80 horas de carpintería y un máximo de 100 horas para los trabajos de acabado. Por exigencias del marcado, Gepetto fabrica, como máximo, 40 soldados a la semana. No ocurre así con los trenes, para los que no hay ningún tipo de restricción en cuanto al número de unidades fabricadas. Obtener el número de soldados y de trenes que semanalmente deberá fabricar la empresa para maximizar sus beneficios.