Probabilidad Total

El Teorema de la probabilidad total nos permite calcular la probabilidad de un suceso a partir de probabilidades condicionadas.

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos tales que la probabilidad de cada uno de ellos es distinta de cero $P(A_i) \neq 0$, y sea ***B*** un suceso cualquiera, del que se conocen las probabilidades condicionales ***P(B/Aᵢ)***, entonces la probabilidad del suceso ***B*** viene dada por la expresión:

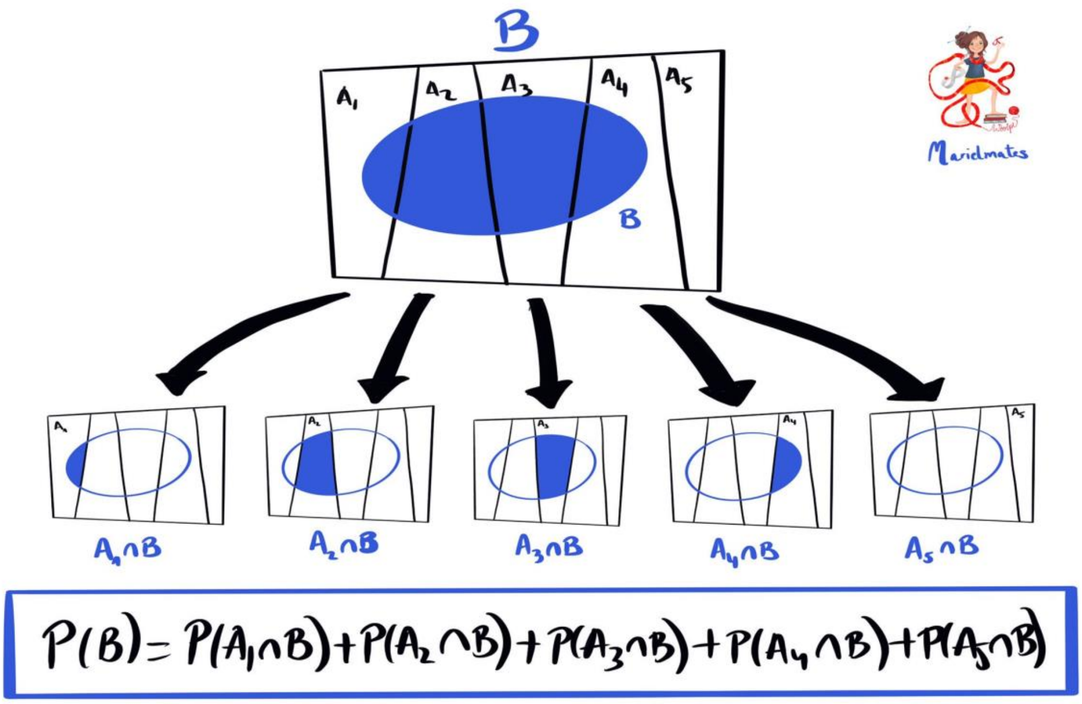
$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B/An)$$

Es decir, la probabilidad de que ocurra el suceso ***B*** es igual a la suma de multiplicar cada una de las probabilidades condicionadas de este suceso con los diferentes sucesos A_i por la probabilidad de cada suceso A_i.

Para que este teorema se pueda aplicar hace falta se cumpla el siguiente requisito: Los sucesos A_i deben ser una partición del espacio muestral ***E***.

Partición: si tenemos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos de un espacio muestral ***E***, estos formarán una partición de ***E***, si los A_i son mutuamente exclusivos y su unión es ***E***.

Probabilidad total visualmente:



Ejemplo:

Se sabe que la probabilidad de que un autobús entre Madrid y Burgos sufra un accidente en un día nublado es 0,09 y en un día seco 0,005.

Durante un periodo de 10 días ha habido 7 días secos y 3 nublados. ¿Cuál será la probabilidad de que se produzca un accidente?

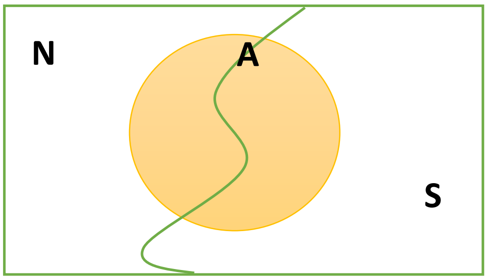
Definimos los sucesos

A: "tener un accidente";

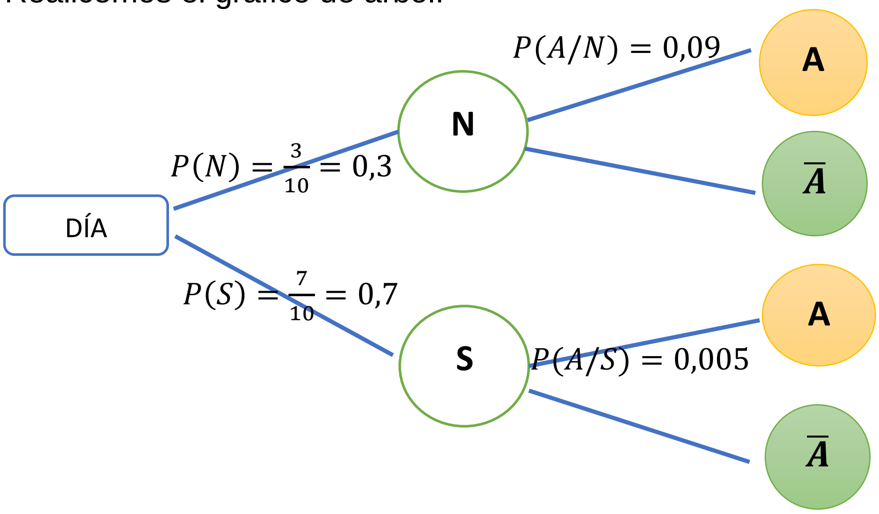
N: "hace día nublado";

S: "hace día seco"

Podemos observar que:



Realicemos el gráfico de árbol:



Entonces, por el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(N)\,.\,P(A/N) + P(S)\,.\,P(A/S) \\ &= 0,3\,.\,0,09 + 0,7\,.\,0,005 \\ &= 0,0305 \end{aligned}$$

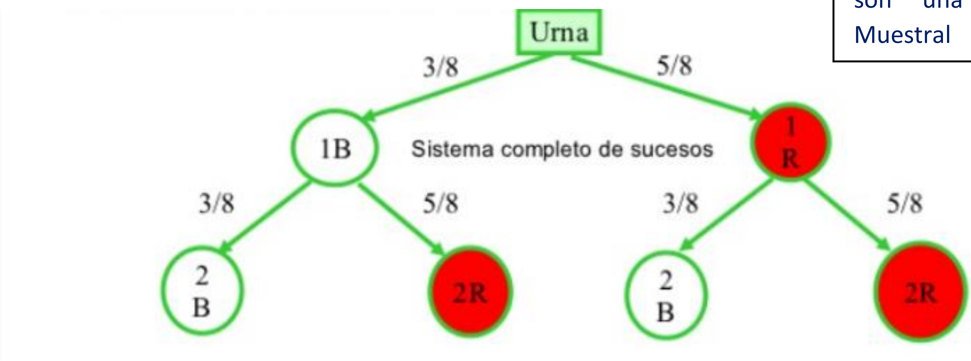
Respuesta: La probabilidad de que se produzca un accidente es de 0,0305, o lo que es lo mismo, hay 3,05% de probabilidad de que se produzca un accidente.

Ejemplo:

En una urna hay 3 bolitas blancas y 5 rojas. Se extrae una bolita, se devuelve a la urna y se extrae otra nuevamente. Calcular la probabilidad de que las dos bolitas sean del mismo color.

Veamos un diagrama:

Observar que los dos sucesos, 1B y 1R, son una partición del Espacio Muestral



p(bolas de igual color) = p(las dos sean blancas **o** las dos rojas) =

$$p((1B y 2B) \text{ o } (1R \text{ y } 2R)) = p((1B \cap 2B) \cup (1R \cap 2R)) =$$

$$= p(1B \cap 2B) + p(1R \cap 2R) = p(1B) \cdot p(2B) + p(1R) \cdot p(2R) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{34}{64}$$

Ejemplo:

En una urna hay 3 bolitas blancas y 5 rojas. Se extraen sucesivamente dos bolitas, no devolviendo la primera a la urna. Calcular la probabilidad de que las dos bolitas sean del mismo color.

Veamos un diagrama:

Observar que los dos sucesos, 1B y 1R, son una partición del Espacio Muestral

p(bolas de igual color) = p(las dos sean blancas **o** las dos rojas) =

$$p((1B y 2B) \text{ o } (1R \text{ y } 2R)) = p((1B \cap 2B) \cup (1R \cap 2R)) =$$

$$= p(1B \cap 2B) + p(1R \cap 2R) = p(1B) \cdot p(2B/1B) + p(1R) \cdot p(2R/1R) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{26}{56}$$

Teorema de Bayes.

El teorema de Bayes es una extensión de lo que ha aprendido hasta ahora acerca de la probabilidad condicional.

Comúnmente se inicia un análisis de probabilidades con una asignación inicial, probabilidad a priori. Cuando se tiene alguna información adicional se procede a calcular las probabilidades revisadas o a posteriori. El teorema de Bayes permite calcular las probabilidades a posteriori y es:

$$P(B_k/A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A/B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A/B_i)}, \quad i = 1,2,\ldots,n \;,$$

• Las probabilidades ***P(Bi)*** se llaman probabilidades a priori.

• Las probabilidades ***P(A/Bi)*** se llaman verosimilitudes.

• Las probabilidades ***P(Bi/A)*** se llaman probabilidades a posteriori.

Ejemplo:

Una máquina fabrica piezas mecánicas de las cuales el 10% son defectuosas. Otra saca un 15% de defectuosas. De las piezas fabricadas el 80% proceden de la 1ª y el 20% de la 2ª máquina. Extraemos una pieza al azar y resulta ser defectuosa. ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la 2ª máquina?

Definimos los sucesos:

B1: la pieza extraída procede la primera máquina.

B2: la pieza extraída procede de la segunda máquina.

A: la pieza extraída es defectuosa.

Se tiene, según el enunciado que:

- $\boldsymbol{P(B1) = 0,8}$
- $\boldsymbol{P(B2) = 0,2}$
- $\boldsymbol{P(A/B1) = 0,1}$
- $\boldsymbol{P(A/B2) = 0,15}$

Observar que los dos sucesos, B1 y B2, son una partición del Espacio Muestral. Todas las piezas fabricadas proceden de esas dos máquinas.

Entonces, aplicando el Teorema de Bayes podemos calcular:

$$P(B_2/A) = \frac{P(B_2).P(A/B_2)}{\sum_{i}^{n} P(B_i).P(A/B_i)} = \frac{0,2 \;.\; 0,15}{0,8 \;.\; 0,1 + 0,2 \;.\; 0,15} = \frac{0,03}{0,11} = 0,27$$

Respuesta: La probabilidad de que la pieza proceda de la 2° máquina sabiendo que es defectuosa es de 0,27.

Ejercicio: (Teorema de la Probabilidad total)

Una determinada marca de coches realiza el 35% de su producción en su fábrica de España, el 40% en su fábrica de Italia y el 25% en su fábrica de Portugal. La probabilidad de que un coche de esa marca fabricado en España tenga una avería en el primer año es del 4%; para los coches fabricados en Italia es del 3% y para los de Portugal es del 5%. ¿Cuál es la probabilidad de que un coche cualquiera de esa marca tenga una avería en el primer año?

Definimos los sucesos: {España}, {Italia} y {Portugal}

Observaos que son sucesos incompatibles y además su unión es el Espacio Muestral: {España} U {Italia} U {Portugal} = E .

Es decir, constituyen un sistema completo de sucesos, una partición de E, entonces se puede aplicar el Teorema de la Probabilidad Total:

$$P(avería) = P(Esp) \cdot P(av/\ Esp) + P(It) \cdot P(av/\ It) + P(Port)\ \cdot P(av/\ Port)$$

$$= 0{,}35 \cdot 0{,}04\ +\ 0{,}4 \cdot 0{,}03\ +\ 0{,}25 \cdot 0{,}05 =$$

$$=\ 0{,}014\ +\ 0{,}012\ +\ 0{,}0125\ =\ 0{,}0385\ =\ 3{,}85\%$$

Respuesta: la probabilidad de que un auto tenga una falla o avería en el primer año es del 3,85%

Ejercicio: Teorema de Bayes

En el problema anterior, supongamos que un coche de esa marca se avería en el primer año. Nos preguntamos: ¿cuál es la probabilidad de que ese coche haya sido fabricado en Portugal?

Aplicando el Teorema de Bayes:

$$P\ (Portugal\ |\ avería)\ =\ P\ (Portugal)\ \cdot\ P\ (avería\ |\ Portugal)\ /\ P\ (avería)$$

Habíamos calculado por el teorema de la Probabilidad Total, que:

$$P\ (avería)\ =\ 0{,}0385$$

Luego:

$$P\ (Portugal\ |\ avería)\ =\ 0{,}25\ \cdot\ 0{,}05\ /\ 0{,}0385\ =\ 0{,}32$$

En este ejemplo se ve bien por qué se llama a este tipo de probabilidad "probabilidad a posteriori": se refiere a un suceso del pasado (país de fabricación) conociendo otro suceso posterior (avería), es un razonamiento "hacia atrás", inverso al que era habitual.

Observemos que: $P\ (Portugal\ |\ avería)\ =\ 0{,}32 \quad > \quad P\ (Portugal)\ =\ 0{,}25$

Luego, es una probabilidad condicionada de sucesos dependientes. **¿por qué?**

Aplicaciones del Teorema de Bayes

Gracias al Teorema de Bayes, grupos de investigación y algunas corporaciones han logrado mejorar los sistemas que están basados en conocimientos.

Por ejemplo, en el estudio de enfermedades, el teorema de Bayes puede ayudar a discernir la probabilidad de que una enfermedad sea encontrada en un grupo de personas con una característica dada, tomando como datos las tasas globales de la enfermedad y el predominio de dicha característica en personas tanto sanas como enfermas.

Por otro lado, en el mundo de las altas tecnologías, ha influenciado a grandes compañías que han desarrollado software "Basados en el Conocimiento", gracias a este resultado

Como ejemplo cotidiano tenemos el ***asistente*** de Microsoft Office. El teorema de Bayes ayuda al software a evaluar los problemas que presenta el usuario y determinar qué consejo proporcionarle y así poder ofrecer un mejor servicio según los hábitos del usuario.

Cabe destacar que esta fórmula fue ignorada hasta tiempos recientes, esto se debe principalmente a que cuando se desarrolló este resultado hace 200 años, había poco uso práctico para ellos.

Ejercicio

Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C.

La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es 1/3, que la produzca el virus B es 2/3 y que la produzca el C es 1/7.

a) Definir los sucesos.
b) Armar un diagrama de árbol.
c) Si se inocula algún virus a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que éste contraiga la enfermedad?
d) Si se inocula un virus a un animal y contrae la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que el virus que se ha inyectado fuera C?
e) Si usaste el Teorema de la Probabilidad Total en alguno de los ítems, explica por qué pudiste utilizarlo.

Respuestas: 0.305; 0.234.