

ANAL 2

Miroslav D.

August 30, 2021

Tento dokument shrnuje látku potřebnou ke zkoušce z MA2 v letech 20/21. Zkouška se skládá z 5-ti příkladů.

Příklad č.1.

Příklad na aplikaci derivací.

- Tečná rovina v bodě na nějakou plochu.
- Největší/nejmenší funkční hodnota na nějakém průsečíku ploch.
- Extrémy nějaké plochy.
- Někáká "slovní úloha" - největší oběm/plocha nějakého útvaru/tělesa.

Tečná rovina

Zadání: elipsoid:

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$$

rovina:

$$3x - y + 3z - 1 = 0$$

Najít body na elipsoidu rovnoběžné s rovinou

Ze zadané funkce potřebujeme zjistit gradient - ten nám určuje "spád" tečné roviny v libovolném bodě funkce - podobně jako derivace z analýzy 1. Ten se určuje derivací funkce podle x , y , z .

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 4y$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 6z$$

Dále ze zadané roviny zjistíme normálový vektor - to je jednoduché, rovnice roviny je pomocí normálového vektoru popsána.

$$\vec{n} = (3, -1, 3)$$

Teď zjistíme kdy se gradient a normálový vektor + lambda rovnají a dosadíme do rovnice plochy

$$\lambda(3, -1, 3) = (2x, 4y, 6z)$$

$$x = \frac{3}{2}\lambda$$

$$y = -\frac{1}{4}\lambda$$

$$z = \frac{1}{2}\lambda$$

Dosadíme do rovnice plochy

$$\left(\frac{3}{2}\lambda\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{4}\lambda\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\lambda\right)^2 = 1$$

Spočítáme

$$\lambda = \pm \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

dosadíme zpět a máme výsledek

$$A_1 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{5}, -\frac{\sqrt{2}}{10}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right), A_2 = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{10}, -\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$$

Extrémy plochy

Je to podobné jako extrémy v MA1, ale tady hledáme plochy rovnoběžné s plochou xy.

Lokální extrémy funkce $z = 4x - 3x^3 - 2xy^2$ Zderivujeme funkci

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= 4 - 9x^2 - 2y^2 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -4xy = 0\end{aligned}$$

Z druhé rovnice $x = 0$ a $y = 0$, dosadíme do první, vyjde nám $(0, \pm\sqrt{2})$ a $(\pm\frac{2}{3}, 0)$ Teď musíme zjistit, jestli se jedná o maximum/minimum, nebo jestli to je vůbec extrém, k tomu nám poslouží Hessova matice (asi ne podle toho nácka xd). Je to symetrická matice.

Tohle je pro 3 x 3 matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^2} & \frac{\partial F}{\partial x \partial y} & \frac{\partial F}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} & \frac{\partial F}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial z \partial x} & \frac{\partial F}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Tohle je pro 2 x 2 matici

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x^2} & \frac{\partial F}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

Po dosezení dostáváme

$$\begin{pmatrix} -18x & -4y \\ -4y & -4x \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -9x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$$

Teď se dosazují hodnoty těch extrémů co vyšly před tím a počítají se determinanty - nejdřív 1×1 matice (ta nahore vlevo), potom 2×2 (potom 3×3). D1 je determinant matice 1×1 , D2 je determinant matice 2×2 .

$$(0, -\sqrt{2}) \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} \rightarrow D_1 = 0, D_2 = -8$$

$$(0, \sqrt{2}) \rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} \rightarrow D_1 = 0, D_2 = -8$$

$$\left(-\frac{2}{3}, 0\right) \rightarrow \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{vmatrix} \rightarrow D_1 = -6, D_2 = 8$$

$$\left(\frac{2}{3}, 0\right) \rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{vmatrix} \rightarrow D_1 = 6, D_2 = 8$$

Teď jenom stačí rozlišit kdy je extrém - fancy se tomu říká sylvestrovo kritérium. Když jsou všechny determinanty kladné - jedná se o lokální minimum, když se znaménka determinantů střídají a první determinant je záporný, jedná se o lokální extrém. Když determinant není nulový a neplatí žádná s předchozích, jedná se o sedlový bod (není to minimum ani maximum). Když je nějaký diskriminant nula, tak sylvestrovo kritérium nemůže rozhodnout a musíme extrém určit jinak (např. po křivkách). Maximum je bod $(\frac{2}{3}, 0)$, minimum je bod $(-\frac{2}{3}, 0)$

Největší/nejmenší funkční hodnota

V zadání jsou dvě funkce, f ve tvaru $f(x_1, \dots, x_n)$ a $g(x_1, \dots, x_n) = a$. Sestaví se lagrangeova funkce $L = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n - a)$ a řeší se to dost podobně jako extrémy.

Příklados: Zjistěte nejmenší a největší hodnotu funkce $f(x, y) = xy$ v bodech elipsy $x^2 + 2y^2 = 1$. Sestavíme lagreangovu funkci.

$$L = xy = \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y = 2\lambda x$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x = 4\lambda y$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

Vyřešíme - $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$, $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2})$, Nejvyšší a nejnižší hodnotu získáme dosazením.

maximum - $\pm(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$, minimum - $\pm(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2})$

Slovní úloha

Je to prakticky úloha na sestavení lagreangovy funkce, je víc přemýšlicí.

Příklad: $54\pi cm^3$ - objem plechovky, dno a víko je z materiálu za 0.25 Kč/ cm^3 , plášť z materiálu za 0.5 Kč/ cm^3 . Nalezněte rozměry, tak aby byla cena minimální.

Sestavíme lagreangovu funkci.

$$L = 0.25 \cdot 2\pi r^2 + 2\pi r h 0.5 - \lambda(\pi r^2 h - 54\pi)$$

$2\pi r^2$ je plocha víka a dna, $2\pi r$ je plocha pláště, oběm plechovky je $\pi r^2 h = 54\pi$
Zderivujeme

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x} &= r + h - 2\lambda r = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= r - \lambda r^2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= r^2 h = 54\end{aligned}$$

Spočítáme, výsledek je $h = r = \sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2}$

Příklad č.2.

Prohození pořadí integrace

Nejllepší je si nakreslit obrázek - funkce nejsou tak složité aby to nešlo, v nouzi se dá použít kalkulačka - náčrtek nemusí být tak přesný, čtyři funkční hodnoty pro složitější funkce by na to měly stačit.

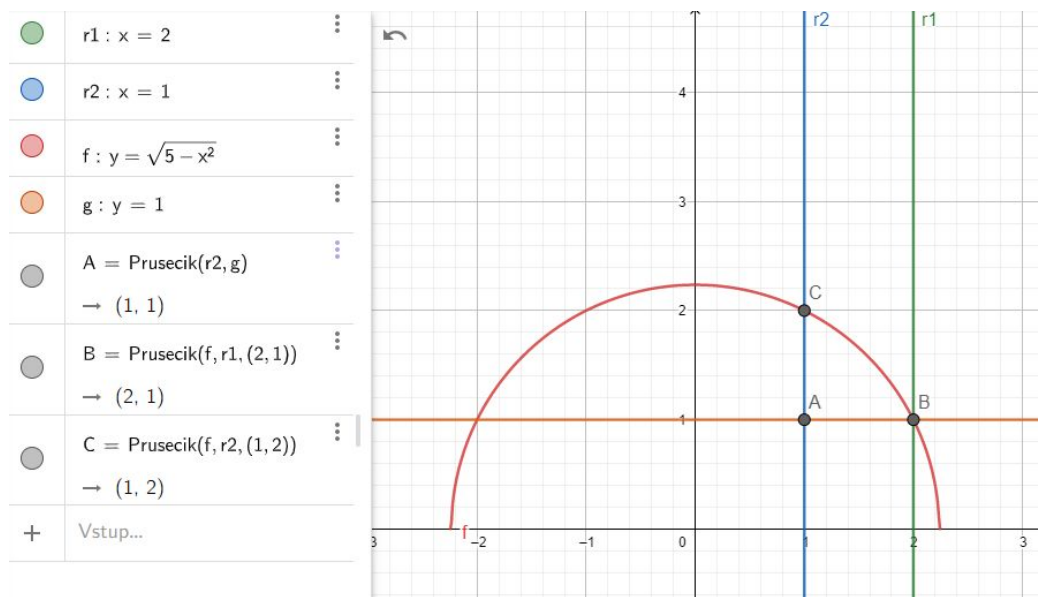
Příklad:

$$\int_1^2 \int_1^{\sqrt{5-x^2}} f dy dx$$

Přehození integrálu

integrál si můžeme představit jako

$$\int_{x=1}^{x=2} \int_{y=1}^{y=\sqrt{5-x^2}} f dy dx$$



Je vidět, že chtěná plocha je v útvaru mezi body A, B, C. Teď potřebujeme integraci přehodit tak, aby vnější integrál byl podle y a vnitřní podle x. Funkce je ohraničená podle y = 2 a y = 1 - vnější integrál bude vypadat stejně. X je tedy ohraničeno podle x = 1 a oblouku - vyjádříme ho pomocí x.

$$x = \sqrt{5 - y^2}$$

Tady pozor na + nebo -, z obrázku se to dá poznat jednoduše, podle toho v jakém kvadrantu je útvar. Napíšeme výsledek

$$\int_1^2 \int_1^{\sqrt{5-y^2}} f dy dx$$

Polární souřadnice

Zase nám pomůže obrázek. φ je úhel odkud kam budeme integrovat - z obrázku vidíme, že to jsou body C a B - spočítáme si úhel. $\tan \varphi_1 = 2$, $\tan \varphi_2 = \frac{1}{2}$. Je tady ale malej prank, když přecházíme přes bod A, tak se nám změní dolní hranice pro ρ , proto musíme integrál rozdělit na dva. Funkce si vyjádříme pomocí polárních souřadnic.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg 2} \int_{\frac{1}{\cos \varphi}}^{\sqrt{5}} f d\rho d\varphi + \int_{\arctg \frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\frac{1}{\sin \varphi}}^{\sqrt{5}} f d\rho d\varphi$$

Příklad č.3.

Aplikace různých typů integrálů

- Gaussova věta
- Greenova věta
- Stokesova věta
- Těžiště tělesa
- Moment hybnosti tělesa

Gaussova věta

Pomocí Gaussovy věty se počítá tok pole nějakým tělesem. Potřebujeme zjistit divergenci vektorového pole (vynásobit skálárně nabla operátorem), potom "jenom" spočítat objemový integrál toho pole. Nezapomenout na jakobiány při převádění na jiné souřadnicové systémy. Pro cylindrickou a polární je jakobián ρ . Pro sférickou $\rho^2 \sin \theta$

Příklad: pomocí Gaussovy věty spočítejte tok pole \vec{F} orientovanou plochou M. $\vec{F} = (0, 0, \frac{1}{3}z^3)$, M je sféra $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

$$\nabla \vec{F} = \frac{\partial \vec{F}_1}{\partial x} + \frac{\partial \vec{F}_2}{\partial y} + \frac{\partial \vec{F}_3}{\partial z} = z^2$$

Protože se jedná o sféru, převedeme si souřadnice na sférické.

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \theta$$

$$z^2 = \rho^2 \cos^2 \theta$$

Nakonec sestavíme trojný integrál. Dobré je si představit jak se ty meze vytváří. Nejdříve opíšeme kružnici pomocí θ , to je od 0 do 2π . Dál vyplníme celou tuto kružnici od počátku do poloměru, ρ je od 0 do r . A nakonec tu kružnici rotujeme - stačí nám ale jen 180° na vyplnění celé koule, takže θ je od 0 do π . Nezapomenout vynásobit jakobiánem. Spočítáme.

$$\int_0^\pi \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho^4 \cos^2 \theta \sin \theta d\varphi d\rho d\varphi = \frac{4\pi}{15} r^5$$

Greenova věta

Greenova věta je Stokesova věta ve 2D. Greenova věta nám převádí křivkový integrál 2. druhu po uzavřené křivce na dvojný integrál.

$$\oint_c (Ldx + Mdy) = \iint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) dx dy$$

Příklad: Pomocí Greenovy věty spočítejte jaká práce se vykoná při pohybu bodu o hmotnosti $m = 1$ po obvodu trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(3,0)$ a $(3,3)$. Pohyb se děje v kladném smyslu v poli $\vec{F} = (y^2 - x^3, x^2 - y^3)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ y^2 - x^3 & x^2 - y^3 \end{pmatrix} = 2x - 2y$$

Sestavíme integrál a spočítáme.

$$\int_0^3 \int_0^x 2x - 2y dy dx = 9$$

Stokesova věta

Stokesova věta je Greenova věta ve 3D.

Těžiště tělesa

Těžiště se určuje pomocí vzorců

$$x_t = \frac{\iiint_M x_\rho}{\iiint_M \rho}, \quad y_t = \frac{\iiint_M y_\rho}{\iiint_M \rho}$$

Příklad: Najděte těžiště kužele $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h\}$ je-li hustota v bodě (x, y, z) rovna jeho vzdálenosti od roviny xy .

Protože kužel symetrické těleso, můžeme z -tovou složku zanedbat. Potřebujeme spočítat tři dvojné integrály.

Moment hybnosti tělesa

Příklad č.4.

Vyšetřování potenciálních polí

Prvním krokem, je vždy zjistit, jestli (nebo kdy) je pole potenciální - zrotujeme pole (vektorově ho vynásobíme s nabla operátorem), když nám vyjde 0, tak je pole potenciální (případně zvolíme hodnotu tak aby potenciální bylo).

Zjistěte, které z polí $\vec{F} = (y+z, x+z, x+y)$ a $\vec{G} = (x, yz^2, 3)$ je potenciální a nalezněte jeho potenciál.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ y+z & x+z & x+y \end{vmatrix} = (1-1)e_1 + (1-1)e_2 + (1-1)e_3 = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{G} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ y & yz^2 & 3 \end{vmatrix} = (0-2z)e_1 + (0-0)e_2 + (0-1)e_3 = (-2z, 0, -1)$$

Potenciální je jen pole F .

Spočítání potenciálu. Složky pole se rovnají parciální derivaci.

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = y + z$$

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x + z$$

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial z} = x + y$$

Je to celkem jednoduchý algoritmus, je vypsáný pod textem, pokusím se ho nějak popsat, nejlepší je na to asi video od Doc. Bohaty. Vezmeme

první řádek, který zintegrujem, tím zjistíme kolik se rovná první řádek. Potřebujeme zjistit kolik je C_1 , tak zderivujeme první řádek podle y - všechny proměnné z pravé strany by se měli vykrátit - nenarazil jsem ještě na příklad kde by to tak nebylo, je možný, že je to tím, že je to pole potenciální. Zjistíme integrací kolik je C_1 a dosadíme to do prvního řádku, takhle to vlastně opakujeme až do konce.

1. $F(x, y, z) = xy + xz + c_1(yz)$
2. $x + \frac{\partial c_1}{\partial y} = x + y$
3. $\frac{\partial c_1}{\partial y} = z$
4. $c_1 = yz + c_2(z)$
5. $F(x, y, z) = xy + xz + yz + c_2(z)$
6. $x + y \frac{\partial c_2}{\partial z} = x + y$
7. $c_2 = 0 + c$
8. $F(x, y, z) = xy + xz + yz + c$

Toto je výsledný potenciál

Příklad č.5

Fourierova nebo Taylorova řada

Taylorova řada

Taylorova řada převádí funkce na nějaký nekonečný součet. Důležité vzorce - bývají tam napsány a dají se odvodit, přesto bych si je radši zapamatoval.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle \\
e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R} \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x \in \langle -1, 1 \rangle, \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

V zádání je nějaká funkce, kterou pomocí těchto vzorečků, upravíme na nekonečnou řadu, hledá se potom poloměr konvergence R .

$$R = \frac{1}{q}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x(n+1))}{f(x(n))}$$

Prostě je to něco jako podílové a odmocninové kritérium v MA1

Fourierova řada

Tady se "jenom" dosazuje do vzorečků

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) dx \\
a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx \\
b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x\right) dx
\end{aligned}$$

To se potom celý dosadí sem

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Tady je nějaký seznam vztahů - není to tak těžký, jdou vymyslet na místě

$\cos(\pi k) = \cos(-\pi k) = (-1)^n$ - nejlepší je si to představit na jednotkové kružnici, v celých násobcích π se střídá hodnota -1 a 1 - toho docílíme právě pomocí $(-1)^n$

$\sin(\pi k) = \sin(-\pi k) = 0$, sinus v celých násobcích π nabývá nuly

$(-1)^n \cdot (-1)^{n+1} = -1$, pro sudá n je $(-1)^n$ kladné a $(-1)^{n+1}$ záporné a pro lichá n je to právě naopak - výsledek je -1

$$-(-1)^n = (-1)^{n+1}$$

Další příklady s postupem

Zjistěte, zda je pole $\vec{F} = (\ln(1+z), 2yz, \frac{x}{1+z} + y^2)$ potenciální a v kladném případě nalezněte jeho potenciál.

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \ln(1+z) & 2yz & \frac{x}{1+z} + y^2 \end{vmatrix} = (2y-2y)e_1 + \left(\frac{1}{1+z} - \frac{1}{1+z} \right) e_2 + (0-0)e_3 = 0$$

Pole je potencionální

$$(1) \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \ln(1+z)$$

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2yz$$

$$(3) \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{x}{1+z} + y^2$$

1. $F(x, y, z) = x \ln(1 + z) + c_1(y, z)$
2. $\frac{\partial c_1}{\partial y} = 2yz$
3. $c_1(y, z) = y^2 z + c_2(z)$
4. $F(x, y, z) = x \ln(1 + z) + y^2 z + c_2(z)$
5. $\frac{x}{1 + z} + y^2 \frac{\partial c_2}{\partial z} = \frac{x}{1 + z} + y^2$
6. $c_2 = 0 + c$
7. $F(x, y, z) = x \ln(1 + z) + y^2 z + c$

Toto je výsledný potenciál

Přepište následující integrál

$$\int_1^2 \int_0^{2-x} f dy dx$$

nejprve v opačném pořadí integrace a pak v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $d\rho d\varphi$

