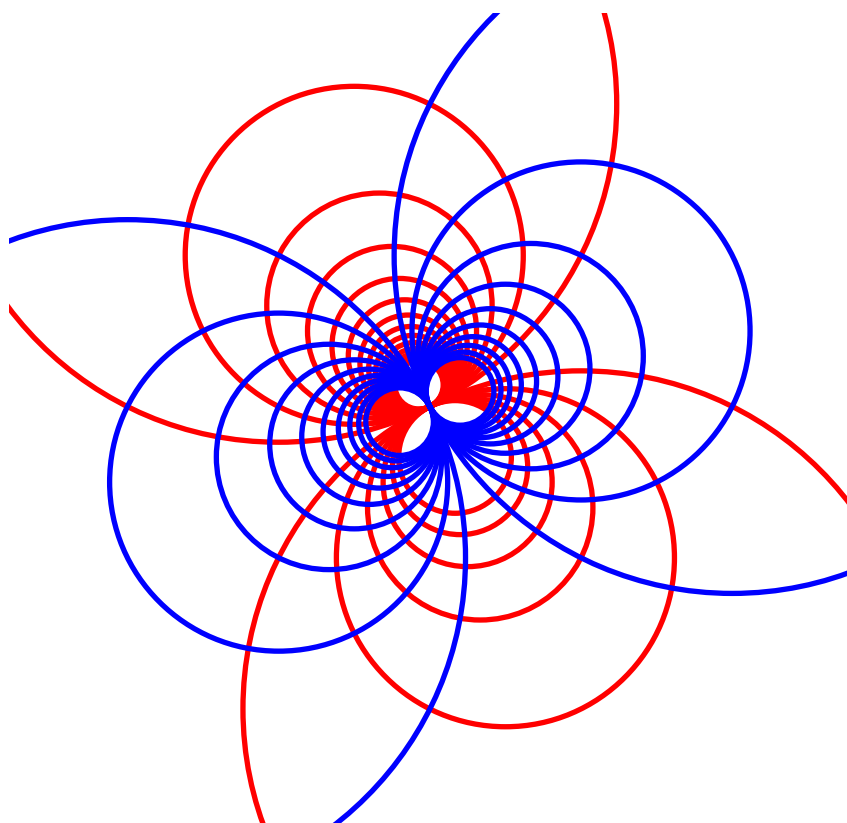


Skupinový anal

Miroslav D.

01.12.2021



Obsah

1	týden	3
1.1	Určení argumentu a absolutní hodnoty komplexního čísla	3
1.2	Jednoduché důkazy	3
1.3	Moivreova věta	3
1.4	Geometrické znázornění komplexních množin	3
1.5	Konvergence řad	4
2	týden	4
2.1	Mocninné řady	4
3	týden	6
3.1	Součet řad na kruhu konvergence 2	6
3.2	Rozvinutí funkcí na mocninou řadu	6
4	týden	7
4.1	Möbiova transformace	7
5	týden	7
5.1	Křivkový integrál	7
5.1.1	Z definice	8
5.1.2	Newton-Leibnitz	8
6	týden	9
6.1	Křivkový integrál 2	9
6.1.1	Cauchyho vzorec	9
7	týden	9
7.1	Laurentovy řady	9
8	týden	10
8.1	Singularity	10
8.2	Reziduum	10
9	týden	12
9.1	Reziduová věta	12
9.2	Integrovaní reálných funkcí pomocí reziduové věty	12
10	týden	12
10.1	Fourierova transformace	12

1 týden

1.1 Určení argumentu a absolutní hodnoty komplexního čísla

Absolutní hodnota

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$
$$z = -3 + 3i, \quad |z| = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = 3$$

Argument

$$\arg z = \arctan \left(\frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} \right)$$
$$\arg \left(\frac{\sqrt{3} + i}{1 + i} \right) = \frac{\arg(\sqrt{3} + i)}{\arg(1 + i)} = \arg(\sqrt{3} + i) - \arg(1 + i) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$$

1.2 Jednoduché důkazy

Dokažte, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $|z|^2 = z\bar{z}$

$$|a + b|^2 = (a + bi)(a - bi)$$
$$\sqrt{a^2 + b^2}^2 = a^2 + b^2$$

1.3 Moivreova věta

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

Příklad:

Nalezněte všechny hodnoty $\sqrt{3 + 4i}$

$$\sqrt{3 + 4i} = \sqrt{5e^{\arctan \frac{4}{3}}} = (5(\cos(\arctan(\frac{4}{3}) + 2k\pi) + i \sin(\arctan(\frac{4}{3}) + 2k\pi)))^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{5}(\cos(\frac{\arctan(\frac{4}{3})}{2} + k\pi) + i \sin(\frac{\arctan(\frac{4}{3})}{2} + k\pi)), \quad k = 0, 1$$

1.4 Geometrické znázornění komplexních množin

Poloroviny

$$\operatorname{Re} z < 2, \operatorname{Im} z \geq 5$$
$$|z + i| > |z - 3 - 2i|$$

Kružnice, mezikruží

$$|z + 2| < 4$$
$$2 < |z + 2| < 4$$

Úhly

$$\frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

1.5 Konvergence řad

Nutná podmínka konvergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \text{ konverguje} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$$

Podílové kritérium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \text{ konverguje}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \text{ diverguje}$$

Odmocninové kritérium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \text{ konverguje}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \text{ diverguje}$$

Příklad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2+i)^{-n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|2+i|^{-n}} = |2+i|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1 \Rightarrow \text{Konverguje}$$

Apolliniova kružnice

$$\lambda = \frac{|z - z_1|}{|z - z_2|}$$

2 týden

2.1 Mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

z je proměnná

z_0 je střed

$a_n \in \mathbb{C}$ je n -tý koeficient

Určení koeficientu příslušící každé k-té mocnině

Příklad:

$$\sum_{n=5}^{\infty} n^2(z-1+i)^{2n+1} = 5^2(z-1+i)^{11} + 6^2(z-1+i)^{13} + 7^2(z-1+i)^{15} + \dots$$

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{10} = 0$$

$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 : k = 2n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$a_k = \left(\frac{k-1}{2}\right)^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 : k = 2n+1, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$a_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$a_{2n+1} = \begin{cases} n^2 & \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 5 \\ 0, & \text{pokud } n \in 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Určení poloměru konvergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{Konverguje absolutně pokud } |z-z_0| < R$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{Diverguje pokud } |z-z_0| > R$$

Příklad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(z-i)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n|z-i|^n} = 2|z-i|$$

Řada konverguje absolutně pro $z \in \mathbb{C} : |z-i| < \frac{1}{2}$

Řada diverhuje pro $z \in \mathbb{C} : |z-i| > \frac{1}{2}$

Poloměr konvergence $R = \frac{1}{2}$

Součet řad na kruhu konvergence

Záměna derivace a sumy

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$$

Záměna integrace a sumy

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1} + c$$

Základní součet geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Příklad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

3 týden

3.1 Součet řad na kruhu konvergence 2

Obecný taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Důležité funkce

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}, & \ln(1-z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1 \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}, & \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C} \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}, & \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

Příklad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{n!} = e^{z^2}$$

3.2 Rozvinutí funkcí na mocninou řadu

Příklad:

$$\begin{aligned} \frac{1}{9+z^2} &= \frac{1}{9} \frac{1}{1+\frac{z^2}{9}} = \frac{1}{9} \frac{1}{1+\left(\frac{z}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \frac{1}{1-\left(\frac{zi}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{zi}{3}\right)^{2n} = \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z^2}{9}\right)^n \end{aligned}$$

4 týden

4.1 Möbiova transformace

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

Kruhová inverze

$$\text{inv}_k : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\text{inv}_k(z) = s + \frac{z^2}{z - s}, \quad z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Inverze vůči přímce

V pásech budou jenom přímky rovnoběžné s Imaginární nebo Reálnou osou, ty jdou jednoduše spočítat přes osovou souměrnost, když tomu tak není tak musíme použít tyto vzorečky.

$$x_p = \frac{b^2 x_1 - a(by_1 + c)}{a^2 + b^2}, \quad y_p = \frac{a^2 y_1 - b(ax_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\text{inv}(x + iy) = 2x_p - x_1 + i(2y_p - y_1)$$

Uvažujeme Möbiovu transformaci

$$f(z) := \frac{z + i}{z - i}$$

Na jaké množině v $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zobrazí f následující množina M ?

$$(a)M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

$$i \in k \Rightarrow \infty \in f(k) \text{ je přímka}$$

5 týden

5.1 Křivkový integrál

Dá se spočítat třemi způsoby

1. Z definice, +funguje vždy -hodně práce
2. Newton-Leibnitz +jednoduché spočítat -nefunguje vždy
3. Cauchyho vzorec, reziduová věta - bude později

5.1.1 Z definice

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_C (u, -v) d\vec{S} + i \int_C (v, u) d\vec{S}$$

Jak parametrizovat?

Příklad:

$$\int_C 3z^2 - 2z \, dz$$

kde křivka C má parametrizaci $\varphi(t) = t + it^2, t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3(t+it^2) - 2(t-it^2))(2ti+1) dt &= \int_0^1 (3(t^2+it^3+it^3-t^4) - 2t-2it^2)(1+2it) dt = \\ &= \int_0^1 (-2t + 3t^2 - it^2 + 6it^3 - 3t^4)(1+2it) dt = \\ &= \int_0^1 (-2t + 3t^2 - 2it^2 + 6it^3 - 3t^4 - 4it^2 + 6it^3 + 4t^3 - 12t^4 - 6it^5) dt = \\ &= \int_0^1 (-2t + 3t^2 - 6it^2 + 12it^3 + 4t^3 - 15t^4 - 6it^5) dt = \\ &= [-t^2 + t^3 - 2it^3 + 3it^4 + t^4 - 3t^5 - it^6]_0^1 = (-1 + 1 - 2i + 3i + 1 - 3 - i) = -2 \end{aligned}$$

5.1.2 Newton-Leibnitz

$$\int_C f(z) dz = \underbrace{F(z_2)}_{\text{konec}} - \underbrace{F(z_1)}_{\text{začátek}} \quad (\text{F je primitivní funkce k } f)$$

Příklad:

$$\int_C \frac{z+1}{z} dz$$

Kde křivka C je úsečka $[0, 2-i]$. Počáteční bod C je 0 a koncový $2-i$
Najdeme primitivní funkci k f

$$\int \frac{z+1}{z} dz = \int 1 + \frac{1}{z} dz = z + \ln z$$

Dosadíme do Newton-Leibnitze

$$i + \frac{\pi}{2} + i + \frac{\pi}{2} = 2i + \pi$$

6 týden

6.1 Křivkový integrál 2

6.1.1 Cauchyho vzorec

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$$

zobecněný Cauchyho vzorec

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0)$$

Příklad:

$$\int_C \frac{1}{z(z^2 - 1)} dz$$

C je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu 1. Singularity jsou 0, 1 a -1, v kružnici leží jenom bod 1.

$$\frac{f(z)}{z - 1} = \frac{1}{z(z^2 - 1)} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z(z + 1)}$$

$$\int_C \frac{f(z)}{z - 1} = 2\pi i f(0) = \pi i$$

Příklad:

$$\int_C \frac{z}{z^4 - 1} dz$$

Kde křivka C má parametrizaci $\varphi(t) = a + ae^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, $a > \frac{1}{2}$. Singularity jsou v bodech 1, -1, i , $-i$. Parametrizovaná křivka je půlkružnice se středem na reálné ose a koncovým bodem v počátku. Nejjedoduší bude použít $a = 1 \Rightarrow |z - 1| = 1$. Uvnitř se nachází pouze singularita 1.

$$\frac{f(z)}{z - 1} = \frac{1}{(z^4) - 1} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)}$$

$$\int_C \frac{\frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)}}{z - 1} = 2\pi i f(1) = \frac{\pi i}{2}$$

7 týden

7.1 Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-1}^{n=-\infty} a_n(z - z_0)^n}_{\text{Hlavní část}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n}_{\text{Regulární část}}$$

Příklad: Určit oblast konvergence Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} z^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|3^n z^{2n}|} = 3|z|^2 \Rightarrow |z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{4^n} z^n\right|} = \left|\frac{z}{4}\right| \Rightarrow |z| < 4$$

$$P\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}; 4\right)$$

8 týden

8.1 Singularity

Typ	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
odstranitelná singularita	$\in \mathbb{C}$
pól	∞
podstatná singularita	neexistuje

Příklad: Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

singularity: $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, ∞ není izolovaná singularita

8.2 Reziduum

a. v $z_0 \in \mathbb{C}$

b. v ∞

Výpočet rezidua

1. Nalezení celé LŘ (zbytečně složité)

2. Tvrzení (6.14, 6.17)

a. $z_0 \in \mathbb{C}$, pól f násobnosti $k \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]$$

b. ∞ odstranitelná singularita:

$$\operatorname{res}_{\infty} f = \lim_{z \rightarrow \infty} z(f(\infty) - f(z)) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 f'(z)$$

c. ∞ pól násobnosti $k \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{res} f = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} \left[z^{k+2} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} f(z) \right]$$

3. Tvzení (6.15) f,g holomorfní v $z_0 \in \mathbb{C}$, z_0 je jednoduchý kořen g , pak

$$\operatorname{res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'/z_0}$$

4. Trvzení (6.16) f holomorfní v $z_0 \in \mathbb{C}$, g má v z_0 jednonásobný pól pak

$$\operatorname{res}_{z_0}(fg) = f(z_0)\operatorname{res}_{z_0} g$$

Příklad: Nalezněte rezidua funkce

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2}$$

Ve všech izolovaných singularitách včetně bodu ∞ .

Singularity jsou $\pm i$, ∞ , $\pm i$ jsou dvojnásobné singularity

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2}{(z^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow \infty \text{ je odstranitelná singularita}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_i f &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2} \right] = \\ \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z(z+i)^2 - 2(z+i)z^2}{(z+i)^4} &= \frac{2i(i+i)^2 - 2(i+i)i^2}{(i+i)^4} = -\frac{i}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{-i} f &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left[(z+i)^2 \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z^2-1)^2} \right] = \\ \lim_{z \rightarrow -i} \frac{2z(z-i)^2 - 2(z-i)z^2}{(z-i)^4} &= \frac{2(-i)(-i-i)^2 - 2(-i-i)(-i)^2}{(-i-i)^4} = \frac{i}{4} \end{aligned}$$

$$\operatorname{res}_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} z^2 f'(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \frac{2z(z^2+1)^2 - 2(z^2+1)zz^2}{(z^2+1)^4} = 0$$

9 týden

9.1 Reziduová věta

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{z_j} f$$

1. res

9.2 Integrovaní reálných funkcí pomocí reziduové věty

1. Racionální funkce $\frac{P}{Q}$, $\deg Q \geq \deg P + 2$, na reálné ose póly nejvýše násobnosti 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\substack{w \in \mathbb{C}, \\ Q(w)=0, \\ \operatorname{Im} w > 0}} \operatorname{res}_{z=w} \frac{P(z)}{Q(z)} + \pi i \sum_{\substack{w \in \mathbb{R} \\ Q(w)=0}} \operatorname{res}_{z=w} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

2. Funkce $R(x)e^{ix}$, R racionální funkce s reálnými koeficienty, $\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = 0$, na reálné ose nejvýše póly násobnosti 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{\substack{w \in \mathbb{C} \\ w \text{ pól } R \\ \operatorname{Im} w > 0}} \operatorname{res}_{z=w} R(z)e^{iz} + \pi i \sum_{\substack{w \text{ pól } R \\ w \in \mathbb{R}}} R(z)e^{iz}$$

10 týden

10.1 Fourierova transformace

Základní gramatika

posun ve vzoru	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-i\omega a} \hat{f}(\omega), \quad a \in \mathbb{R}$
posun v obraze	$\mathcal{F}\{e^{iat} f(t)\} = \hat{f}(\omega - a), \quad a \in \mathbb{R}$
škálování	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{ a } \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
konjugace	$\mathcal{F}\{f(-t)\} = \overline{\hat{f}(\omega)}$

Za předpokladu že:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

tak potom:

$$\frac{1}{e} < 1^\infty < e$$