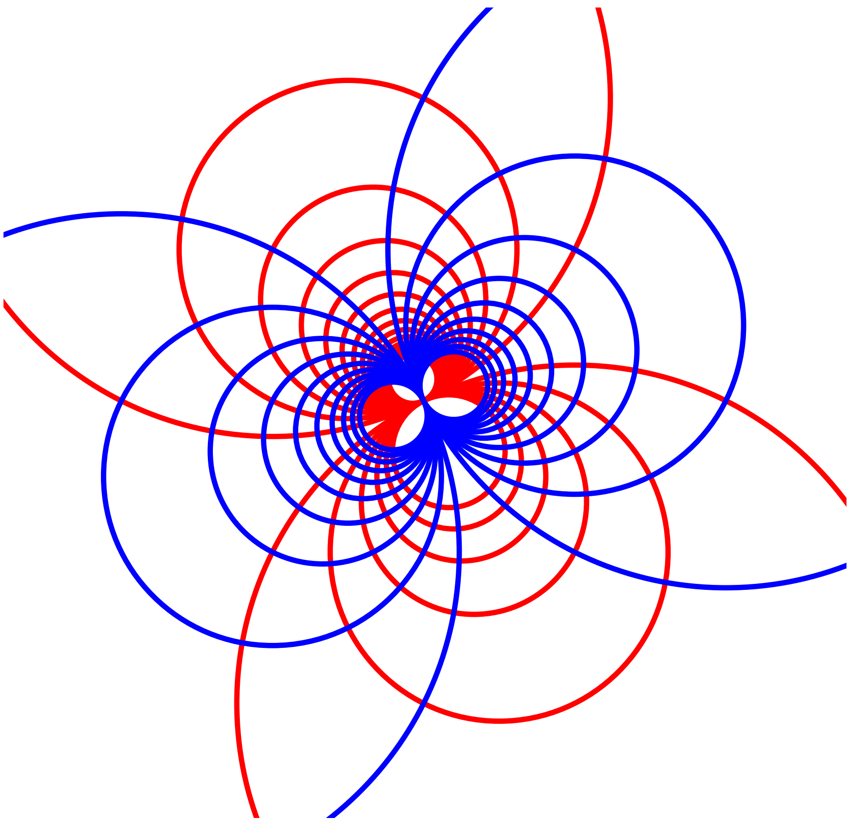
Skupinový anal

Miroslav D.

03.12.2021



Obsah

1 týden

1.1 Určení argumentu a absolutní hodnoty komplexního čísla

Absolutní hodnota

$$|z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, z)^2 + (\mathrm{Im}\, z)^2}$$

$$z = -3 + 3i, \quad |z| = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = 3$$

Argument

$$\arg z = \arctan\left(\frac{\mathrm{Re}\ z}{\mathrm{Im}\ z}\right)$$

$$\arg\left(\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right) = \frac{\arg(\sqrt{3}+\mathrm{i})}{\arg(1+\mathrm{i})} = \arg(\sqrt{3}+\mathrm{i}) - \arg(1+\mathrm{i}) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$$

1.2 Jednoduché důkazy

Dokažte, že pro každé $z \in \mathbb{C}$ platí $|z|^2 = z\overline{z}$

$$|a+b|^2 = (a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i})$$

$$\sqrt{a^2+b^2}^2 = a^2 + b^2$$

1.3 Moivreova věta

$$(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$$

Příklad:
Nalezněte všechny hodnoty $\sqrt{3+4\mathrm{i}}$

$$\sqrt{3+4\mathrm{i}} = \sqrt{5e^{\arctan\frac{4}{3}}} = (5(\cos(\arctan\left(\frac{4}{3}\right)+2k\pi)+\mathrm{i}\sin(\arctan\left(\frac{4}{3}\right)+2k\pi)))^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{5}(\cos\left(\frac{\arctan\left(\frac{4}{3}\right)}{2} + k\pi\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\arctan\left(\frac{4}{3}\right)}{2} + k\pi\right)), \qquad k = 0, 1$$

1.4 Geometrické znázornění komplexních množin

Poloroviny

$$\mathrm{Re} z < 2, \mathrm{Im} z \geq 5$$

$$|z+\mathrm{i}| > |z - 3 - 2\mathrm{i}|$$

Kružnice, mezikruží

$$|z+2| < 4$$

$$2 < |z+2| < 4$$

Úhly

$$\frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

1.5 Konvergence řad

Nutná podmínka konvergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \text{ konverguje} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} C_n = 0$$

Podílové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|C_n+1|}{|C_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \text{konverguje}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|C_n+1|}{|C_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \text{diverguje}$$

Odmocninové kritérium

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{|C_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \text{konverguje}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{|C_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \text{diverguje}$$

Příklad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2+i)^{-n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2+i|^{-n}} = |2+i|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1 \Rightarrow \text{Konverguje}$$

Apolliniova kružnice

$$\lambda = \frac{|z-z_1|}{|z-z_2|}$$

2 týden

2.1 Mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

z je proměnná
z_0 je střed
$a_n \in \mathbb{C}$ je n-tý koeficient

Určení koeficientu příslušící každé k-té mocnině

Příklad:

$$\sum_{n=5}^{\infty} n^2(z-1+i)^{2n+1} = 5^2(z-1+i)^{11} + 6^2(z-1+i)^{13} + 7^2(z-1+i)^{15} + \dots$$

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{10} = 0$$

$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 : \ k = 2n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$a_k = \left(\frac{k-1}{2}\right)^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 : \ k = 2n+1, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$a_{2n} = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$a_{2n+1} = \begin{cases} n^2 & \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 5 \\ 0, & \text{pokud } n \in 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

Určení poloměru konvergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{Konverguje absolutně pokud } |z-z_0| < R$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{Diverguje pokud } |z-z_0| > R$$

Příklad:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(z-\mathrm{i})^n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n|z-\mathrm{i}|^n} = 2|z-1|$$

Řada konverguje absolutně pro $z \in \mathbb{C} : |z-\mathrm{i}| < \frac{1}{2}$
Řada diverhuje pro $z \in \mathbb{C} : |z-\mathrm{i}| > \frac{1}{2}$
Poloměr konvergence $R = \frac{1}{2}$

Součet řad na kruhu konvergence

Záměna derivace a sumy

$$\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$$

Záměna integrace a sumy

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1} + c$$

Základní součet geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

Příklad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

3 týden

3.1 Součet řad na kruhu konvergence 2

Obecný taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

Důležité funkce

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},\ z \in \mathbb{C}, \qquad \ln(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},\ |z| < 1$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z \in \mathbb{C}, \qquad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\ z \in \mathbb{C}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!},\ z \in \mathbb{C}, \qquad \cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!},\ z \in \mathbb{C}$$

Příklad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{n!} = e^{z^2}$$

3.2 Rozvinutí funkcí na mocninou řadu

Příklad:

$$\frac{1}{9+z^2} = \frac{1}{9}\frac{1}{1+\frac{z^2}{9}} = \frac{1}{9}\frac{1}{1+\left(\frac{z}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\frac{1}{1-\left(\frac{zi}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{zi}{3}\right)^{2n} =$$

$$\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^2}{9}\right)^n$$

4 týden

4.1 Möbiova transformace

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

Kruhová inverze

$$\mathrm{inv}_k : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\mathrm{inv}_k(z) = s + \frac{z^2}{\overline{z-s}},\ z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Inverze vůči přímce
V písemce budou jenom přímky rovnoběžné s Imaginární nebo Reálnou osou, ty jdou jednoduše spočítat přes osovou souměrnost, když tomu tak není tak musíme použít tyhle vzorečky.

$$x_p = \frac{b^2x_1 - a(by_1 + c)}{a^2 + b^2}, \qquad y_p = \frac{a^2y_1 - b(ax_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\mathrm{inv}(x+iy) = 2x_p - x_1 + i(2y_p - y_1)$$

Uvažujeme Möbiovu transformace

$$f(z) := \frac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$$

Na jaké množině v $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ zobrazí f následující množina M?

$$(a) M = \{z \in \mathbb{C} | |z| \leq 1\}$$

$$\mathrm{i} \in k \Rightarrow \infty \in f(k) \text{ je přímka}$$

5 týden

5.1 Křivkový integrál

Dá se spočítat třema způsobama

1. Z definice, +funguje vždy -hodně práce
2. Newton-Leibnitz +jednoduché spočítat -nefunguje vždy
3. Cauchyho vzorec, reziduová věta - bude později

5.1.1 Z definice

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_C (u,-v)d\vec{S} + \mathrm{i}\int_C (v,u)d\vec{S}$$

Jak parametrizovat?
Příklad:

$$\int_C 3z^2 - 2z\, dz$$

kde křivka C má parametrizaci $\varphi(t) = t + \mathrm{i}t^2, t \in [0,1]$

$$\int_0^1 (3(t+\mathrm{i}t^2)-2(t-\mathrm{i}t^2))(2t\mathrm{i}+1) = \int_0^1 (3(t^2+it^3+it^3-t^4)-2t-2\mathrm{i}t^2)(1+2\mathrm{i}t)dt =$$

$$= \int_0^1 (-2t + 3t^2 - \mathrm{i}t^2 + 6\mathrm{i}t^3 - 3t^4)(1+2\mathrm{i}t)dt =$$

$$= \int_0^1 (-2t + 3t^2 - 2\mathrm{i}t^2 + 6\mathrm{i}t^3 - 3t^4 - 4\mathrm{i}t^2 + 6\mathrm{i}t^3 + 4t^3 - 12t^4 - 6it^5)dt$$

$$= \int_0^1 (-2t + 3t^2 - 6\mathrm{i}t^2 + 12\mathrm{i}t^3 + 4t^3 - 15t^4 - 6\mathrm{i}t^5)dt =$$

$$= \left[-t^2 + t^3 - 2\mathrm{i}t^3 + 3\mathrm{i}t^4 + t^4 - 3t^5 - \mathrm{i}t^6\right]_0^1 = (-1+1-2\mathrm{i}+3\mathrm{i}+1-3-\mathrm{i}) = -2$$

5.1.2 Newton-Leibnitz

$$\int_C f(z)dz = \underbrace{F(z_2)}_{\text{konec}} - \underbrace{F(z_1)}_{\text{začátek}} \qquad \text{(F je primitivní funkce k } f\text{)}$$

Příklad:

$$\int_C \frac{z+1}{z}dz$$

Kde křivka C je úsečka [0, 2-i]. Počáteční bod C je 0 a koncový 2-i
Najdeme primitivní funkci k f

$$\int \frac{z+1}{z}\, dz = \int 1 + \frac{1}{z}\, dz = z + \ln z$$

Dosadíme do Newton-Leibnitze

$$\mathrm{i} + \frac{\pi}{2} + \mathrm{i} + \frac{\pi}{2} = 2\mathrm{i} + \pi$$

6 týden

6.1 Křivkový integrál 2

6.1.1 Cauchyho vzorec

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$$

zobecněný Cauchyho vzorec

$$\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n-1}} dz = f^{(n)}(z_0)$$

Příklad:

$$\int_C \frac{1}{z(z^2 - 1)dz}$$

C je kladně orientovaná kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ a středu 1. Singularity jsou 0,1 a -1, v kružnici leží jenom bod 1.

$$\frac{f(z)}{z-1} = \frac{1}{z(z^2-1)} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$$

$$\int_c \frac{f(z)}{z-1} = 2\pi \mathrm{i} f(0) = \pi \mathrm{i}$$

Příklad:

$$\int_C \frac{z}{z^4 - 1} dz$$

Kde křivka C má parametrizaci $\varphi(t) = a + ae^{\mathrm{i}t}, t \in [0, 2\pi], a > \frac{1}{2}$
Singularity jsou v bodech $1, -1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$. Parametrizavoná křivka je půlkružnice se středem na reálné ose a koncovým bodem v počátku. Nejjedoduší bude použít $a = 1 \Rightarrow |z - 1| = 1$. Uvnitř se nachází pouze singularita 1.

$$\frac{f(z)}{z-1} = \frac{1}{(z^4) - 1} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z+1)}$$

$$\int_C \frac{\frac{1}{(z^2)(z+1)}}{z-1} = 2\pi \mathrm{i} f(1) = \frac{\pi \mathrm{i}}{2}$$

7 týden

7.1 Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{-1}^{n=-\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Hlavní část}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n}_{\text{Regulární část}}$$

Příklad: Určit oblast konvergence Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} z^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|3^n z^{2n}|} = 3|z^2| \Rightarrow |z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{4^n} z^n\right|} = \left|\frac{z}{4}\right| \Rightarrow |z| < 4$$

$$P\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}; 4\right)$$

8 týden

8.1 Singularity

Typ	$\lim_{z\to z_0} f(z)$
odstranitelná singularita	$\in \mathbb{C}$
pól	∞
podstatná singularita	neexistuje

Příklad: Klasifikujte všechny izolované singularity funkce

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

singularity: $\{k\pi, k \in z\}$, ∞ není izolovaná singularita

8.2 Reziduum

a. v $z_0 \in \mathbb{C}$

b. v ∞

Výpočet rezidua

1. Nalezení celé LŘ (zbytečně složité)
2. Tvrzení (6.14, 6.17)

   a. $z_0 \in \mathbb{C}$, pól f násobnosti $k \in \mathbb{N}$:

$$\operatorname{res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z)\right]$$

b. ∞ odstranitelná singularita:

$$\text{res}_\infty f = \lim_{z\to\infty} z(f(\infty) - f(z)) = \lim_{z\to\infty} z^2 f'(z)$$

c. ∞ pól násobnosti $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{res} f = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z\to\infty} \left[z^{k+2} \frac{d^{k+1}}{dz^{k+1}} f(z) \right]$$

3. Tvrzení (6.15) f,g holomorfní v $z_0 \in \mathbb{C}$, z_0 je jednoduchý kořen g, pak

$$\text{res}_{z_0} \frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'/z_0}$$

4. Trvzení (6.16) f holomorfní v $z_0 \in \mathbb{C}, g$ má v z_0 jednonásobný pól pak

$$\text{res}_{z_0}(fg) = f(z_0)\text{res}_{z_0} g$$

Příklad: Nalezněte rezidua funkce

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$$

Ve všech izolovaných singularitách včetně bodu ∞.
Singularity jsou $\pm$i, ∞, $\pm$i jsou dvojnásobné singularity

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z^2}{(z^2+1)^2} = 0 \Rightarrow \infty \text{ je odstranitelná singularita}$$

$$\underset{\mathrm{i}}{\text{res}} f = \frac{1}{1!} \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{d}{dz} \left[(z-\mathrm{i})^2 \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \right] = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z^2+1)^2} \right] =$$
$$\lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{2z(z+\mathrm{i})^2 - 2(z+\mathrm{i})z^2}{(z+\mathrm{i})^4} = \frac{2\mathrm{i}(\mathrm{i}+\mathrm{i})^2 - 2(\mathrm{i}+\mathrm{i})\mathrm{i}^2}{(\mathrm{i}+\mathrm{i})^4} = -\frac{\mathrm{i}}{4}$$

$$\underset{-\mathrm{i}}{\text{res}} f = \frac{1}{1!} \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{d}{dz} \left[(z+\mathrm{i})^2 \frac{z^2}{(z^2+1)^2} \right] = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^2}{(z^2-1)^2} \right] =$$
$$\lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{2z(z-\mathrm{i})^2 - 2(z-\mathrm{i})z^2}{(z-\mathrm{i})^4} = \frac{2(-\mathrm{i})(-\mathrm{i}-\mathrm{i})^2 - 2(-\mathrm{i}-\mathrm{i})(-\mathrm{i})^2}{(-\mathrm{i}-\mathrm{i})^4} = \frac{\mathrm{i}}{4}$$

$$\underset{\infty}{\text{res}} = \lim_{t\to\infty} z^2 f'(z) = \lim_{z\to\infty} z^2 \frac{2z(z^2+1)^2 - 2(z^2+1)zz^2}{(z^2+1)^4} = 0$$

9 týden

9.1 Reziduová věta

$$\int_C f(z)dz = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{k} \operatorname*{res}_{z_j} f$$

1. res

9.2 Integrování reálných funkcí pomocí reziduové věty

1. Racionální funkce $\frac{P}{Q}$, $\deg Q \geq \deg P + 2$, na reálné ose póly nejvýše násobnosti 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{w\in\mathbb{C},\\ Q(w)=0,\\ \operatorname{Im} w>0}} \operatorname*{res}_{z=w} \frac{P(z)}{Q(z)} + \pi\mathrm{i} \sum_{\substack{w\in\mathbb{R}\\ Q(w)=0}} \operatorname*{res}_{z=w} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

2. Funkce $R(x)e^{ix}$, R racionální funkce s reálnými koeficienty, $\lim_{z\to\infty} R(z) = 0$, na reálné ose nejvýše póly násobnosti 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{ix}dx = 2\pi\mathrm{i} \sum_{\substack{w\in\mathbb{C}\\ w \text{ pól } R\\ \operatorname{Im} w>0}} \operatorname*{res}_{z=w} R(z)e^{\mathrm{i}z} + \pi\mathrm{i} \sum_{\substack{w \text{ pól } R\\ w\in\mathbb{R}}} R(z)e^{\mathrm{i}z}$$

Příklad

Vypočtěte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}dx$$

$$f(z) = \frac{1}{z^4+5z^2+4}dz = \frac{1}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})}$$

Singularity, které nás zajímají jsou i a 2i

$$\operatorname*{res}_{z\to\mathrm{i}} f = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{(z-\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})} = \frac{1}{(2\mathrm{i})(3\mathrm{i})(-\mathrm{i})} = -\frac{1}{6}\mathrm{i}$$

$$\operatorname*{res}_{z\to 2\mathrm{i}} f = \lim_{z\to 2\mathrm{i}} \frac{(z-2\mathrm{i})}{(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})(z+2\mathrm{i})(z-2\mathrm{i})} = \frac{1}{(3\mathrm{i})(\mathrm{i})(4\mathrm{i})} = \frac{1}{12}\mathrm{i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+5x^2+4}dx = 2\pi\mathrm{i}\sum \operatorname{res} f = \frac{\pi}{6}$$

10 týden

10.1 Fourierova transformace

Základní gramatika

posun ve vzoru	$\mathcal{F}\{f(t-a)\} = e^{-\mathrm{i}\omega a}\hat{f}(\omega), \quad a \in \mathbb{R})$
posun v obraze	$\mathcal{F}\{e^{\mathrm{i}at}f(t)\} = \hat{f}(\omega - a), \quad a \in \mathbb{R}$
škálování	$\mathcal{F}\{f(at)\} = \frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right), \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
konjungace	$\mathcal{F}\{\overline{f(-t)}\} = \overline{f(\omega)}$

Za předpokladu že:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

a

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

tak potom:

$$\frac{1}{e} < 1^\infty < e$$