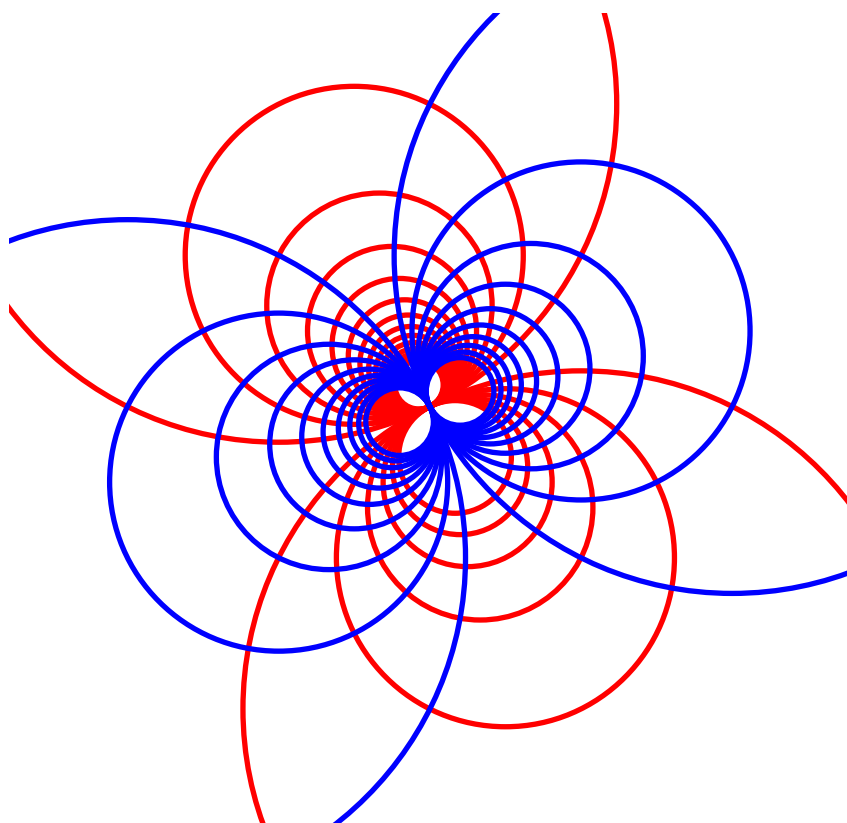


# Skupinový anal

Miroslav D.

21.11.2021



# Obsah

<b>1</b>	<b>týden</b>	<b>3</b>
1.1	Určení argumentu a absolutní hodnoty komplexního čísla . . . . .	3
1.2	Jednoduché důkazy . . . . .	3
1.3	Moivreova věta . . . . .	3
1.4	Geometrické znázornění komplexních množin . . . . .	3
1.5	Konvergence řad . . . . .	4
<b>2</b>	<b>týden</b>	<b>4</b>
2.1	Mocninné řady . . . . .	4
<b>3</b>	<b>týden</b>	<b>6</b>
3.1	Součet řad na kruhu konvergence 2 . . . . .	6
3.2	Rozvinutí funkcí na mocninou řadu . . . . .	6
<b>4</b>	<b>týden</b>	<b>7</b>
4.1	Möbiova transformace . . . . .	7
<b>5</b>	<b>týden</b>	<b>7</b>
5.1	Křivkový integrál . . . . .	7
5.1.1	Z definice . . . . .	8
5.1.2	Newton-Leibnitz . . . . .	8
<b>6</b>	<b>týden</b>	<b>9</b>
6.1	Křivkový integrál 2 . . . . .	9
6.1.1	Cauchyho vzorec . . . . .	9
<b>7</b>	<b>týden</b>	<b>9</b>
7.1	Laurentovy řady . . . . .	9
<b>8</b>	<b>týden</b>	<b>10</b>
8.1	Singularity . . . . .	10
8.2	Residuum . . . . .	10
<b>9</b>	<b>týden</b>	<b>10</b>
9.1	Reziduová věta . . . . .	10

# Základy

$$a + bi = \sqrt{a^2 + b^2} e^{\arctan \frac{b}{a}}$$

$$\ln(z) = \ln |z| + \arg z$$

# 1 týden

## 1.1 Určení argumentu a absolutní hodnoty komplexního čísla

Absolutní hodnota

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$$
$$z = -3 + 3i, \quad |z| = \sqrt{(-3)^2 + (3)^2} = 3$$

Argument

$$\arg z = \arctan \left( \frac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z} \right)$$
$$\arg \left( \frac{\sqrt{3} + i}{1 + i} \right) = \frac{\arg(\sqrt{3} + i)}{\arg(1 + i)} = \arg(\sqrt{3} + i) - \arg(1 + i) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{12}$$

## 1.2 Jednoduché důkazy

Dokažte, že pro každé  $z \in \mathbb{C}$  platí  $|z|^2 = z\bar{z}$

$$|a + b|^2 = (a + bi)(a - bi)$$
$$\sqrt{a^2 + b^2}^2 = a^2 + b^2$$

## 1.3 Moivreova věta

$$(\cos(x) + i \sin(x))^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

**Příklad:**

Nalezněte všechny hodnoty  $\sqrt{3 + 4i}$

$$\sqrt{3 + 4i} = \sqrt{5e^{\arctan \frac{4}{3}}} = (5(\cos(\arctan(\frac{4}{3}) + 2k\pi) + i \sin(\arctan(\frac{4}{3}) + 2k\pi)))^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{5}(\cos(\frac{\arctan(\frac{4}{3})}{2} + k\pi) + i \sin(\frac{\arctan(\frac{4}{3})}{2} + k\pi)), \quad k = 0, 1$$

## 1.4 Geometrické znázornění komplexních množin

Poloroviny

$$\operatorname{Re} z < 2, \operatorname{Im} z \geq 5$$
$$|z + i| > |z - 3 - 2i|$$

Kružnice, mezikruží

$$|z + 2| < 4$$
$$2 < |z + 2| < 4$$

Úhly

$$\frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}$$

## 1.5 Konvergence řad

### Nutná podmínka konvergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \text{ konverguje} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = 0$$

### Podílové kritérium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \text{ konverguje}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|C_{n+1}|}{|C_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \text{ diverguje}$$

### Odmocninové kritérium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \text{ konverguje}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|C_n|} > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |C_n| \text{ diverguje}$$

### Příklad:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2+i)^{-n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|2+i|^{-n}} = |2+i|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} < 1 \Rightarrow \text{Konverguje}$$

### Apolliniova kružnice

$$\lambda = \frac{|z - z_1|}{|z - z_2|}$$

## 2 týden

### 2.1 Mocninné řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$z$  je proměnná

$z_0$  je střed

$a_n \in \mathbb{C}$  je  $n$ -tý koeficient

### Určení koeficientu příslušící každé k-té mocnině

**Příklad:**

$$\sum_{n=5}^{\infty} n^2(z-1+i)^{2n+1} = 5^2(z-1+i)^{11} + 6^2(z-1+i)^{13} + 7^2(z-1+i)^{15} + \dots$$

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{10} = 0$$

$$a_k = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 : k = 2n, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$a_k = \left(\frac{k-1}{2}\right)^2, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 : k = 2n+1, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$a_{2n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$a_{2n+1} = \begin{cases} n^2 & \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 5 \\ 0, & \text{pokud } n \in 0, 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

### Určení poloměru konvergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{Konverguje absolutně pokud } |z-z_0| < R$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{Diverguje pokud } |z-z_0| > R$$

**Příklad:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n(z-i)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n|z-i|^n} = 2|z-i|$$

Řada konverguje absolutně pro  $z \in \mathbb{C} : |z-i| < \frac{1}{2}$

Řada diverhuje pro  $z \in \mathbb{C} : |z-i| > \frac{1}{2}$

Poloměr konvergence  $R = \frac{1}{2}$

### Součet řad na kruhu konvergence

Záměna derivace a sumy

$$\frac{d}{dz} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(z-z_0)^{n-1}$$

Záměna integrace a sumy

$$\int \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-z_0)^{n+1} + c$$

Základní součet geometrické řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

**Příklad:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} = \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) = \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

### 3 týden

#### 3.1 Součet řad na kruhu konvergence 2

Obecný taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

Důležité funkce

$$\begin{aligned} e^z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}, & \ln(1-z) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad |z| < 1 \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}, & \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C} \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}, & \cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

**Příklad:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{n!} = e^{z^2}$$

#### 3.2 Rozvinutí funkcí na mocninou řadu

**Příklad:**

$$\begin{aligned} \frac{1}{9+z^2} &= \frac{1}{9} \frac{1}{1+\frac{z^2}{9}} = \frac{1}{9} \frac{1}{1+\left(\frac{z}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \frac{1}{1-\left(\frac{zi}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{zi}{3}\right)^{2n} = \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z^2}{9}\right)^n \end{aligned}$$

## 4 týden

### 4.1 Möbiova transformace

$$f(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

Kruhová inverze

$$\text{inv}_k : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$\text{inv}_k(z) = s + \frac{z^2}{z - s}, \quad z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Inverze vůči přímce

V pásech budou jenom přímky rovnoběžné s Imaginární nebo Reálnou osou, ty jdou jednoduše spočítat přes osovou souměrnost, když tomu tak není tak musíme použít tyhle vzorečky.

$$x_p = \frac{b^2 x_1 - a(by_1 + c)}{a^2 + b^2}, \quad y_p = \frac{a^2 y_1 - b(ax_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\text{inv}(x + iy) = 2x_p - x_1 + i(2y_p - y_1)$$

Uvažujeme Möbiovu transformaci

$$f(z) := \frac{z + i}{z - i}$$

Na jaké množině v  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  zobrazí  $f$  následující množina  $M$ ?

$$(a)M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$$

$$i \in k \Rightarrow \infty \in f(k) \text{ je přímka}$$

## 5 týden

### 5.1 Křivkový integrál

Dá se spočítat třema způsoby

1. Z definice, +funguje vždy -hodně práce
2. Newton-Leibnitz +jednoduché spočítat -nefunguje vždy
3. Cauchyho vzorec, reziduová věta - bude později

### 5.1.1 Z definice

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_C (u, -v) d\vec{S} + i \int_C (v, u) d\vec{S}$$

Jak parametrizovat?

**Příklad:**

$$\int_C 3z^2 - 2z \, dz$$

kde křivka  $C$  má parametrizaci  $\varphi(t) = t + it^2, t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \int_0^1 (3(t+it^2) - 2(t-it^2))(2ti+1) dt &= \int_0^1 (3(t^2+it^3+it^3-t^4) - 2t-2it^2)(1+2it) dt = \\ &= \int_0^1 (-2t + 3t^2 - it^2 + 6it^3 - 3t^4)(1+2it) dt = \\ &= \int_0^1 (-2t + 3t^2 - 2it^2 + 6it^3 - 3t^4 - 4it^2 + 6it^3 + 4t^3 - 12t^4 - 6it^5) dt = \\ &= \int_0^1 (-2t + 3t^2 - 6it^2 + 12it^3 + 4t^3 - 15t^4 - 6it^5) dt = \\ &= [-t^2 + t^3 - 2it^3 + 3it^4 + t^4 - 3t^5 - it^6]_0^1 = (-1 + 1 - 2i + 3i + 1 - 3 - i) = -2 \end{aligned}$$

### 5.1.2 Newton-Leibnitz

$$\int_C f(z) dz = \underbrace{F(z_2)}_{\text{konec}} - \underbrace{F(z_1)}_{\text{začátek}} \quad (\text{F je primitivní funkce k } f)$$

**Příklad:**

$$\int_C \frac{z+1}{z} dz$$

Kde křivka  $C$  je úsečka  $[0, 2-i]$ . Počáteční bod  $C$  je 0 a koncový  $2-i$   
Najdeme primitivní funkci k  $f$

$$\int \frac{z+1}{z} dz = \int 1 + \frac{1}{z} dz = z + \ln z$$

Dosadíme do Newton-Leibnitze

$$i + \frac{\pi}{2} + i + \frac{\pi}{2} = 2i + \pi$$



## 6 týden

### 6.1 Křivkový integrál 2

#### 6.1.1 Cauchyho vzorec

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$$

zobecněný Cauchyho vzorec

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = f^{(n)}(z_0)$$

**Příklad:**

$$\int_C \frac{1}{z(z^2 - 1)} dz$$

$C$  je kladně orientovaná kružnice o poloměru  $\frac{1}{2}$  a středu 1. Singularity jsou 0, 1 a -1, v kružnici leží jenom bod 1.

$$\frac{f(z)}{z - 1} = \frac{1}{z(z^2 - 1)} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{z(z + 1)}$$

$$\int_C \frac{f(z)}{z - 1} = 2\pi i f(0) = \pi i$$

**Příklad:**

$$\int_C \frac{z}{z^4 - 1} dz$$

Kde křivka  $C$  má parametrizaci  $\varphi(t) = a + ae^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ ,  $a > \frac{1}{2}$ . Singularity jsou v bodech 1, -1,  $i$ ,  $-i$ . Parametrizovaná křivka je půlkružnice se středem na reálné ose a koncovým bodem v počátku. Nejjedoduší bude použít  $a = 1 \Rightarrow |z - 1| = 1$ . Uvnitř se nachází pouze singularita 1.

$$\frac{f(z)}{z - 1} = \frac{1}{(z^4) - 1} \Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)}$$

$$\int_C \frac{\frac{1}{(z^2 + 1)(z + 1)}}{z - 1} = 2\pi i f(1) = \frac{\pi i}{2}$$

## 7 týden

### 7.1 Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=-1}^{n=-\infty} a_n(z - z_0)^n}_{\text{Hlavní část}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n}_{\text{Regulární část}}$$

**Příklad:** Určit oblast konvergence Laurentovy řady

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} 3^n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} z^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|3^n z^{2n}|} = 3|z|^2 \Rightarrow |z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{4^n} z^n\right|} = \left|\frac{z}{4}\right| \Rightarrow |z| < 4$$

$$P\left(0; \frac{1}{\sqrt{3}}; 4\right)$$

## 8 týden

### 8.1 Singularity

Typ	$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$
odstranitelná singularita	$\in \mathbb{C}$
pól	$\infty$
podstatná singularita	neexistuje

### 8.2 Residuum

A v  $z_0 \in \mathbb{C}$

B v  $\infty$

## 9 týden

### 9.1 Reziduová věta

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \operatorname{res}_{z_j} f$$

1. res