2.2.2. ABORDAREA SINTACTICĂ A TEORIEI LOGICE

2.2.2.1. Sistemul formal - concept de bază a abordării sintactice a teoriei limbajelor.

Sistemul formal este un instrument de analiză, prelucrare şi generare a simbolurilor de bază (semnelor limbajului) şi care duce la structuri de simboluri, respectiv şiruri de simboluri (cuvinte, propoziţii, fraze) acceptate în limbaj.

Din cele de mai sus rezultă că un sistem formal se defineşte ca un cvadruplu*:*

$$S = \{ A, F, \Upsilon, \Re \}$$

unde:

A - alfabetul sistemului (mulţimea simbolurilor de bază)

F - mulţimea formulelor corecte (wff-urilor); $F \subseteq A^*$, adică F este o submulţime a şirurilor de caractere sau a şirurilor de simboluri din alfabetul A;

Υ este mulţimea axiomelor, adică $\Upsilon \subseteq A^*$; despre Υ se poate demonstra că este decidabilă, adică pentru orice element x al lui A^* se poate demonstra că face parte sau nu din mulţimea Υ a axiomelor;

$\Re$ - mulţimea regulilor de deducţie sau inferenţiale. O regulă de deducţie este o relaţie de aritate n+1 în mulţimea wff-urilo, - orice $R \in \Re$ este o submulţime a produsului cartezian de ordinul n+1 a lui F, adică $R \subseteq F^n x F$, astfel ca, pentru orice $Y=<y_1, y_2, \dots, y_n>$ corespunde prin R un $x \in F$, cu y_i, $i=1,2,\dots,n$. wff-urile y_i, $i=1,2,\dots,n$ se numesc antecedente, iar x se numeşte consecinţa lui R.

$\Gamma=\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, *mulţimea premizelor*. Se notează cu $E_0 = \Gamma \cup \Upsilon$ reuniunea dintre mulţimea premizelor şi cea a axiomelor. Se consideră:

$$E_1 = E_0 \cup \{x \mid \exists\ Y \in E_0, \text{ astfel încât } R{:}Y \to x, \text{ cu } R \in \Re\}$$

adică E_1 este format din E_0 şi imaginile elementelor din E_0 prin reguli de deducţie din $\Re$. Având construit E_1, putem construi - E_2, E_3, …

Dacă în mulţimea E_0, $\Gamma=\Phi$, adică E_0 este format numai din axiome, atunci elementele lui E_i , i=1,2,..., - teoreme ale sistemului formal → un rezultat cunoscut din matematică şi anume, *teoremele unui sistem formal* sunt acele formule care pot fi demonstrate utilizând numai axiome.

Fie x$\in$ E_i o teoremă - printr-o secvenţă de deducţii D={ E_0, E_1, …, E_{i-1}} - secvenţă de deducţii D formează o *demonstraţie a teoremei*.

Un sistem S de formule este decidibil, dacă există o procedură efectivă prin care se poate decide dacă o formulă din S este sau nu o teoremă.

Decidabilitatea - esenţială în teoria sistemelor formale - baza teoriei demonstrabilităţii teoremelor, deci a extinderii cunoştinţelor în cadrul sistemelor logice. Se poate demonstra:

- (PL) este decidabilă
- (FOPL) nu este.

2.2.2.2. ALGEBRA BOOLEANĂ

Algebra booleană - cel mai important sistem logic bivalent George Boole (1815-1864).

Semantica -Alfabetul şi cuvintele (wff)

1. **A** - simbolurile propoziţionale notate cu p,q,r,… sau P,Q,R,…, constante - A,B,... precum şi pe cei trei conectori: ~, ^ şi $\vee$.
2. **F** – wff
3. **ϒ - Axiomele de bază ale algebrei booleene sunt:**

   Υ_1 – comutativitatea:

   $$P \wedge Q = Q \wedge P, \text{ respectiv } P \vee Q = Q \vee P$$

   Υ_2 – asociativitatea:

   $$P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R, \text{ respectiv } P \vee (Q \vee R) = (P \vee Q) \vee R$$

   Υ_3 – proprietatea lui ^ şi $\vee$, adică:

   $$P \wedge T = P \text{ şi } P \wedge F = F, \text{ respectiv } P \vee T = T \text{ şi } P \vee F = P$$

   Υ_4 – proprietatea negaţiei, adică: $P \wedge \sim P = F$ respectiv $P \vee \sim P=T$

   Υ_5 – distributivitatea lui ^ faţă de $\vee$ şi a lui $\vee$ faţă de ^, adică:

   $$P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R),$$

   $$\text{respectiv } P \vee (Q \wedge R) =(P \vee Q) \wedge (P \vee R).$$

Axiomele - 5 legi de bază ale algebrei booleene.

Din cele de mai sus se pot deduce o serie de alte legi. Dintre legile cele mai importante deductibile amintim:

- legea dublei negaţii sau a complementului $\sim\sim P=P$;
- idempotenţa: $P \wedge P=P$, respectiv $P \vee P=P$;

- legea absorbţiei, $P \wedge (P \vee Q)=P$.

Pentru ilustrarea celor de mai sus vom demonstra legea absorbţiei [Gray85];

$P\wedge(P\vee Q)$ $=(P\vee F) \wedge (P\vee Q)$ {proprietatea operatorului $\vee$}
$=P\vee(F\wedge Q))$ {distributivitatea lui $\vee$ faţă de $\wedge$}
$=P\vee(Q\wedge F)$ {comutativitatea}
$=P\vee F$ {proprietatea operatorului $\wedge$}
$=P$ {proprietatea operatorului $\vee$}

Celelalte legi se demonstrează analog.

Legile booleene - caracter dual: *în orice teoremă din algebra booleană dacă se înlocuieşte $\vee$ cu ^ şi invers, teorema rămâne adevărată*.

Legile deductibile: ***legile lui DeMorgan:***

$\sim(P \wedge Q) = \sim P \vee \sim Q$, respective dualul, $\sim(P \vee Q) = \sim P \wedge \sim Q$

Prin inducţie completă -> generalizarea legilor lui DeMorgan la n propoziţii:

$\sim (P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n) = \sim P_1 \vee \sim P_2 \vee \dots \vee \sim P_n$, respectiv

$\sim (P_1 \vee P_2 \vee \dots \vee P_n) = \sim P_1 \wedge \sim P_2 \wedge \dots \wedge \sim P_n$

-> ”***Pentru a nega o formulă, schimbă semnul şi operatorul cu complementarul***”. De exemplu:

$\sim(P\vee\sim Q)=\sim P \wedge\sim(\sim Q)= \sim P\wedge Q$.

Observaţie. Proprietăţile lui $\vee$ se aseamănă cu +, iar ale lui ^ cu ale operatorului de înmulţire *****. Proprietatea care le diferenţiază este însă distributivitatea; distributivităţii lui ^ faţă de $\vee$ îi corespunde distributivitatea înmulţirii faţă de adunare $A * (B + C) = A * B + A * C$, invers nu este adevărat; adunarea nu este distributivă faţă de înmulţire, adică

$$(A * B) + C \neq (A + C) * (B + C)$$

în timp ce distributivitatea disjuncţiei $\vee$ faţă de conjuncţie ^ are loc.

→ 5 legi + legile lui DeMorgan, permit aducerea oricărei expresii din algebra booleană la una din următoarele forme:

- **forma normală conjunctivă** - forma $(C_1\wedge C_2 \wedge C_3 \wedge\dots)$ unde C_i se numeşte clauză; fiecare clauză - din propoziţii simple sau disjuncţii de propoziţii şi eventual negaţii ale acestora. Forma normală conjunctivă - teoria demonstraţiei, deoarece propoziţia scrisă sub formă clauzală este adevărată dacă şi numai dacă toate propoziţiile componente sunt adevărate şi invers.

- **forma normală disjunctivă** – expresia sub forma unor disjuncţii de expresii, expresiile din propoziţii simple sau conjuncţii de propoziţii şi eventual negaţii ale acestora. Această formă este utilă în teoria circuitelor.

Observaţii.

(i) Orice propoziţie logică poate fi adusă la una dintre formele normale, în următorii paşi:

1. se reduc funcţiile logice din expresie la cei trei conectori de bază, la implicaţii şi echivalenţe;
2. se înlocuiesc echivalenţele cu implicaţii duble;
3. se înlocuiesc implicaţiile cu forma lor disjunctivă;
4. se aplică legile lui De Morgan şi cele cinci legi fundamentale ale algebrei booleene.

(ii) Orice formulă se poate demonstra fie cu ajutorul tablei de adevăr, fie utilizând cele cinci legi fundamentale ale algebrei booleene. Utilizarea tablei de adevăr este mai sigură dar mai lungă, în timp ce utilizarea celor cinci legi are un caracter euristic mai pronunţat.

2.2.2.3. Regulile inferenţiale în logica propoziţiilor

Implicaţia - în ***deducţiile logice*** - din propoziţii adevărate → propoziţii adevărate. Acest mod de utilizare a mecanismului logicii diferă de cel al algebrei booleene, deoarece aceasta, ca orice algebră, permite determinarea valorii de adevăr a unor formule pe baza valorii de adevăr a componentelor, dar nu şi manipularea acestora indiferent de valoarea de adevăr a componentelor.

În deducţia logică - două ***reguli inferenţiale*** clasice, cunoscute de mult timp.

1. „***modus-ponens***” sau „***mod-pons***”, care se enunţă astfel:

Fiind dat P adevărat		P
din P→Q .	notat şi cu	P→Q
rezultă Q adevărat		Q

2. ***regula de înlănţuire a inferenţelor*** sau ***închiderea tranzitivă a inferenţelor***. Ea permite ca pe baza a două implicaţii să se deducă o a treia. Astfel, această regulă se poate scrie:

dacă P→Q şi Q→R atunci P→R

Exemplu. Considerăm următoarele formule:

(1) $(P\rightarrow Q) \rightarrow((P\vee Q) \rightarrow(R\vee Q))$

(2) $(R\vee Q) \rightarrow (R\vee S)$

(3) $P\rightarrow Q$

modus ponens la (3) şi (1), rezultă

(4) $(P\vee Q) \rightarrow(R\vee Q)$

înlănţuirea inferenţelor (4) şi (2) rezultă

(5) $(P\vee Q) \rightarrow(R\vee S)$.

2.2.2.4. Strategii de demonstrare automată

Constituie o ramură importantă a inteligenţei artificiale. In demonstraţie, în general, trebuie arătat că o formulă B este „T" folosind pentru aceasta mecanismul modus-ponens, adică presupunând că A est "T" şi are loc implicaţia A→B, adică

$$\left(\frac{A, A-B}{B}\right).$$

Această regulă este dificil de aplicat direct şi din această cauză se utilizează diferite strategii de demonstraţie pe care se bazează demonstrarea automată.

A. Strategia demonstrării prin adoptarea unei premise/ipoteze/aserţiuni auxiliare sau suplimentare. Această strategie se bazează pe cele 2 teoreme ale lui Stoll (1961) :

1. Demonstrarea concluziei B din premisa A este echivalentă cu demonstrarea lui B fără a presupune premise speciale asupra lui A. Adică $A \vdash B \leftrightarrow A\rightarrow B$ (dacă A atunci $B \leftrightarrow A\rightarrow B$)
2. Dacă propoziţia B depinde individual de $A_1,A_2 \ldots A_n$ ea depinde şi de conjuncţia acestor premise şi invers.
   $A_1,A2\ldots An \vdash B \leftrightarrow A_1 \wedge A_2 \wedge\ldots \wedge A_n\rightarrow B$

La cele două teoreme ale lui Stoll se mai pot adăuga o serie de tautologii auxiliare, mai importante:

$$(X\rightarrow(Y\rightarrow Z)) \leftrightarrow ((X \wedge Y) \rightarrow Z)$$

Demonstraţie. Prin transcrierea implicaţiei şi aplicarea asociativităţii şi a legii lui deMorgan

$$\sim X\vee (\sim Y\vee Z) \leftrightarrow (\sim X\vee\sim Y) \vee Z \leftrightarrow \sim (X\wedge Y) \vee Z$$

Demonstrarea prin adăugarea unei premise suplimentare constă în următoarele: *dacă prin adăugarea la ipotezele $A_1 \ldots A_n$ a unei premise auxiliare P, are loc concluzia Q, adică $(A_1 \ldots A_n, P \rightarrow Q)$ atunci $A_1, A_2 \ldots A_n \rightarrow (P \rightarrow Q)$*

Demonstraţie : aplicăm T_2 a lui Stoll → $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge P \rightarrow Q$

Aplicăm T_1 a lui Stoll → $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow (P \rightarrow Q)$

Aplicăm T_2 a lui Stoll → $\vdash A_1, \ldots A_n \rightarrow (P \rightarrow Q)$

Această metodă este foarte lungă şi este dificilă de aplicat → se pot folosi rar în cadrul demonstraţiei (exemplu : laturile egale ale triunghiului isoscel) – importanţa istorică.

B. Strategia reducerii la absurd – se bazează pe faptul că se adoptă ipotezele B şi ~C şi trebuie să ajungem la ~(B→C)

$$\sim(B \rightarrow C) = \sim(C \vee \sim B) = B \wedge \sim C$$

3 metode de bază în strategia reducerii la absurd :

i) se porneşte de la B şi se ajunge la C
ii) se porneşte de la ~C şi se demonstrează că are loc ~B ; B-premisă → contradicţie ;
iii) se porneşte de la B^ ~C şi se aplică regulile şi axiomele SF până se ajunge la o propoziţie p ^ ~p (se contrazic)

Observaţie. Această metodă se poate utiliza doar în cazurile în care implicaţia B→C este 'T'. Dacă B→C este 'F', metoda reducerii la absurd poate să ducă la raţionamente infinite. Exemplul tipic de astfel de raţionament - a 5-a axiomă a lui Euclid : printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la acea dreaptă. Această afirmaţie este adevărată doar în cadrul unui plan, într-un spaţiu multidimensional nu este adevărat şi deci demonstrarea pe baza axiomelor lui Euclid a dus la un raţionament infinit ce a generat geometriile neeuclidiene de tip Lobacevski-Bolyai sau Hilbert.

C. Strategia bazată pe rezoluţie/rezolvare – regula de rezoluţie – fundamentală în demonstrarea automată, regula de bază alături de modus-ponens şi înlănţuirea inferenţelor (le include pe ambele)

Legea rezoluţiei	Înlănţuirea inferenţelor	Modus-ponens
din $X \vee A$ şi $Y \vee \sim A$	din $\sim X \rightarrow A$ şi $A \rightarrow Y$	din A şi $A \rightarrow Y$

rezultă $X \vee Y$	rezultă $\sim X \rightarrow Y$	Rezultă Y

Regula rezolvării permite să combinăm 2 formule disjuncte în care apare atomul A şi negatul lui, eliminând atomul respectiv.
Modus-ponens – caz particular al regulii rezoluţiei pentru că de considerăm $X \in \Phi$ sau X = propoziţie falsă în ipoteza că are loc premiza A=.T. rezultă Y.

Demonstraţia legii rezoluţiei:

$$(X \vee A), (Y \vee \sim A) \vdash (X \vee Y)$$

T_2 Stoll & definiţia implicaţiei $\rightarrow$ $\sim((X \vee A) \wedge (Y \vee \sim A)) \vee (X \vee Y)$

Din regula lui DeMorgan şi dubla negaţie $(\sim X \wedge \sim A) \vee (\sim Y \wedge A)) \vee (X \vee Y)$
din asociativitatea lui $\vee$: $(X \vee (\sim X \wedge \sim A)) \vee (Y \vee (\sim Y \wedge A))$
din distributiv lui $\wedge$:

$$((X \vee \sim X) \wedge (X \vee A)) \vee (Y \vee \sim Y) \wedge (Y \vee A) =$$
$$(X \vee \sim A) \vee (Y \vee A) = (X \vee Y) \vee (A \vee \sim A) = T$$

Argumente pentru generalizarea demonstraţiei pe baza regulii rezoluţiei – automatismul şi simplitatea.
Paşi utilizaţi în demonstrarea prin metoda rezoluţiei:

- P_1 : se presupune prin absurd că avem concluzia falsă ; se transformă echivalenţele în implicaţii duble şi se transcriu implicaţiile prin disjuncţii;
- P_2 : pentru negarea din faţa parantezelor se aplică regula lui De Morgan;
- P_3 : se aplică distributivitatea $\vee$ faţă de $\wedge$ şi invers.
- P_4 : fiecare premisă se aduce la forma clauzală, adică la atomi, negaţi de atomi şi de clauze, adică atomi negaţi de atomi, legaţi prin disjuncţie.
- P5: Se aplică principiul rezoluţiei până se ajunge la o propoziţie şi negatul acesteia, adică la o contradicţie.

Exemplu. Să se demonstreze $[(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \vdash R \vee S]$
Aceasta este echivalentă cu: $P \vee Q$, $P \rightarrow R$, $Q \rightarrow S$ $\vdash$ $R \vee S$ – foloseşte metode bazate pe rezoluţie pentru demonstraţie:
P1. Se consideră ipotezele, negatul concluziei şi definiţia implicaţiei se obţine:

(1) $P \vee Q$
(2) $\sim P \vee R$
(3) $\sim Q \vee S$

din $\sim(R\vee S)= \sim R \wedge \sim S \rightarrow (4) \sim R$, şi $(5) \sim S$ – sunt .T.

din (4), (2) & perinc. rezoluţiei $\rightarrow (6)\ (\sim P\vee R)\ ,\ (\sim R) \rightarrow \sim P$

din (6), (1) $\rightarrow (7)\ (P \vee Q)\ ,\ (\sim P) =$ .... $\rightarrow Q$

Contradiţie

(3),(5) $\rightarrow (8)\ (\sim Q\vee S)\ ,\ (\sim S) =$ .... $\rightarrow \sim Q$

$\rightarrow$ cond.de la care am plecat e falsă, rezultă formula iniţială este „T”.