Protocoale de Securitate

Cuprins

- Scopul securitatii si metode de rezolvare
- Modele criptografice cu chei simetrice si publice
- Cifrarea prin substitutie si transpozitie
- DES si AES
- RSA
- Analiza algoritmilor criptografici

Scopul securitatii

- confidentialitatea
  - informaţia este disponibilă doar utilizatorilor autorizaţi
- integritatea
  - informaţia poate fi modificată doar de utilizatorii autorizaţi sau în modalitatea autorizată (mesajul primit nu a fost modificat în tranzit sau măsluit)
- disponibilitatea
  - accesul la informaţie al utilizatorilor autorizaţi nu este îngrădit (opusul este denial of service)

Probleme derivate

- autentificarea
  - determinarea identităţii persoanei cu care schimbi mesaje înainte de a dezvălui informaţii importante
- autorizarea (controlul accesului)
  - protectia impotriva accesului ne-autorizat
- non-repudierea
  - transmitatorul nu poate nega transmiterea unui mesaj pe care un receptor l-a primit

Metode de rezolvare

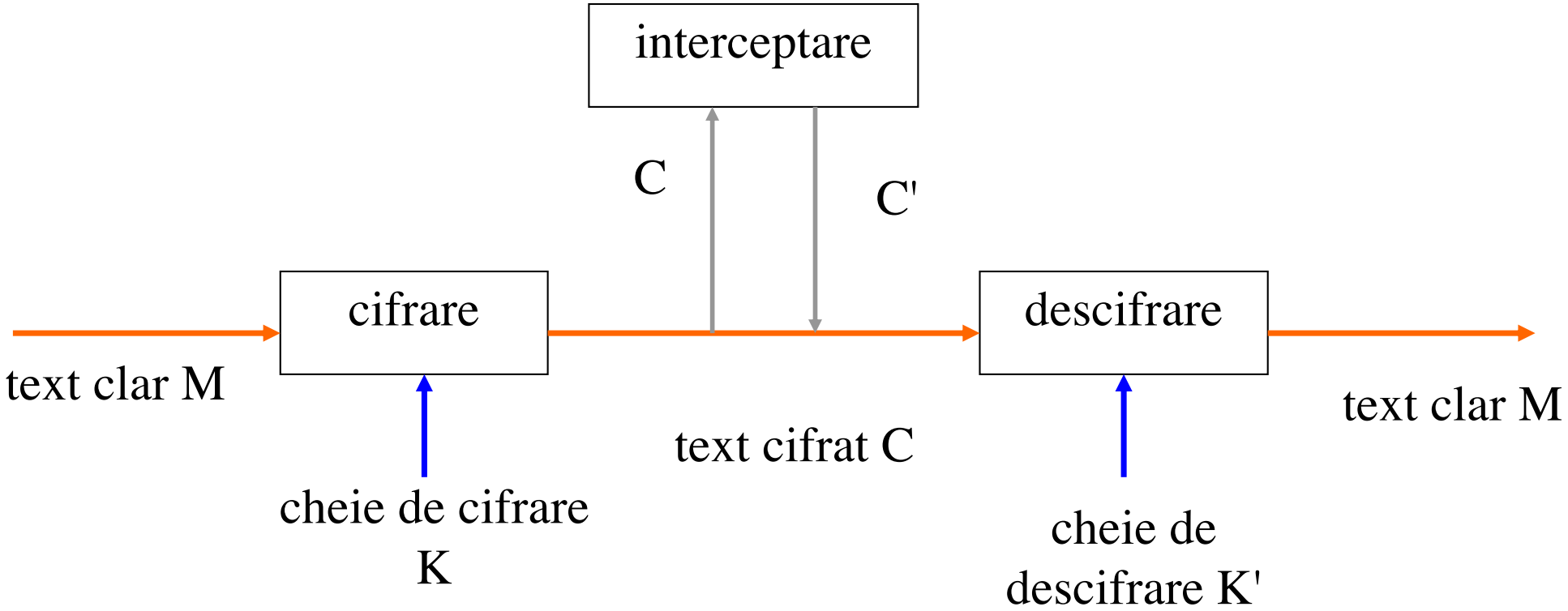
- Organizare
  - Algoritmi de criptare si hash
  - Mecanisme de securitate
    - **criptare, rezumare (hash), semnatura digitala**
  - Servicii si **protocoale** de securitate

- Securitatea in ierarhia de protocoale
  - considerata initial in nivelul prezentare al ISO OSI
  - este distribuita, in realitate, diverselor nivele
    - fizic – tuburi de securizare a liniilor de transmisie
    - legatura de date – legaturi criptate
    - retea – ziduri de protectie (firewalls), IPsec
    - transport – end-to-end security
    - aplicatie – autentificarea, non-repudierea

Alte aspecte

- Politici de securitate.
- Control software (antivirus).
- Control hardware:
  - Cartele inteligente;
  - Biometrie.
- Control fizic (protecţie).
- Educaţie.
- Măsuri legale.

Modelul de bază al criptării



confidentialitatea - intrusul să nu poată reconstitui M din C (să nu poată descoperi cheia de descifrare K‘).

integritatea - intrusul să nu poată introduce un text cifrat C', fără ca acest lucru să fie detectat (sa nu poată descoperi cheia de cifrare K).

Definiţii

- Spargerea cifrurilor = criptanaliză.
- Proiectarea cifrurilor = criptografie.
- Ambele sunt subdomenii ale criptologiei.
- Transformarea F realizată la cifrarea unui mesaj:

F : {M} x {K} -> {C}, unde:

  - {M} este mulţimea mesajelor;
  - {K} este mulţimea cheilor;
  - {C} este mulţimea criptogramelor.

- Operaţii:
  - Cifrarea (Encryption): $C = E_k(M)$.
  - Descifrarea (Decryption): $M = D_{k'}(C)$.
- Conotaţie de ordin practic!

Problema criptanalistului

- Criptanaliză cu **text cifrat cunoscut**; se cunosc:
  - Un text cifrat;
  - Metoda de criptare;
  - Limbajul textului clar;
  - Subiectul;
  - Anumite cuvinte din text.
- Criptanaliză cu **text clar cunoscut**; se cunosc:
  - Un text clar;
  - Textul cifrat corespunzător;
  - Anumite cuvinte cheie (login).
- Criptanaliză cu **text clar ales**; se cunosc:
  - Mod cifrare anumite porţiuni de text;
  - Exemplu pentru o bază de date - modificare / efect.

Caracteristicile sistemelor secrete

- sistem **neconditionat sigur**
  - rezistă la orice atac, indiferent de cantitatea de text cifrat interceptat
  - ex. one time pad
- **computational sigur** sau **tare**
  - nu poate fi spart printr-o analiză sistematică cu resursele de calcul disponibile.
- sistem **ideal**
  - indiferent de volumul textului cifrat care este interceptat, o criptogramă nu are o rezolvare unică, ci mai multe, cu probabilităti apropriate

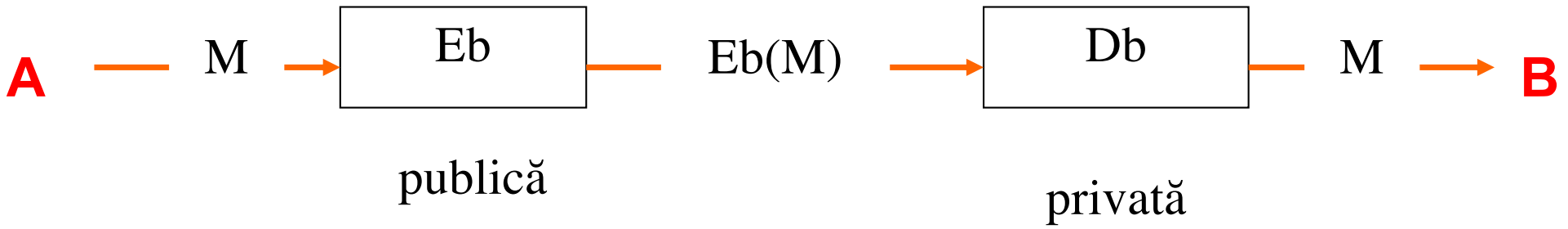
Cerinţe criptosisteme cu chei secrete

- Cerinţe generale:
  - Cifrare şi descifrare eficiente pentru toate cheile.
  - Sistem uşor de folosit (gasire chei de transformare).
  - Securitatea să depindă de chei, nu de algoritm.
- Cerinţe specifice pentru confidenţialitate: să fie imposibil computaţional ca un criptanalist să determine sistematic:
  - Transformarea D_k din C, chiar dacă ar cunoaşte M.
  - M din C (fără a cunoaste D_k).
- Cerinţe specifice pentru integritate: să fie imposibil computaţional ca un criptanalist să determine sistematic:
  - Transformarea E_k, din C, chiar dacă ar cunoaşte M.
  - Cifrul C' astfel ca $D_k(C')$ să fie un mesaj valid (fără a cunoaşte E_k).

Modelul criptografic cu chei publice

- Sistemele criptografice:
  - Simetrice.
  - Asimetrice:
    - Propuse de Diffie şi Hellman în 1976.
    - Chei diferite de cifrare E şi descifrare D cu proprietatea
      - D(E(M)) = M.
    - Nu se pot deduce (uşor) una din alta, mai precis:
      - Este extrem de greu să se deducă D din E;
      - D nu poate fi "spart" prin criptanaliză cu text clar ales.

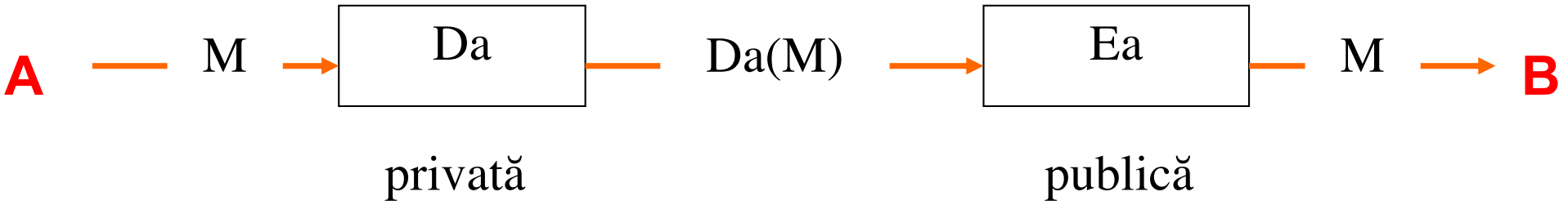
Schema de confidențialitate



- Într-un sistem asimetric, un utilizator B:
  - Face publică cheia (transformarea) E_b de cifrare.
  - Păstrează secretă cheia (transformarea) D_b de descifrare.

- Se asigură confidentialitatea
  - doar B, care are cheia privată Db poate intelege mesajul M

Schema de integritate



- Pentru integritate / autentificare:
  - condiţia necesară este ca transformările E_a şi D_a să comute, adică

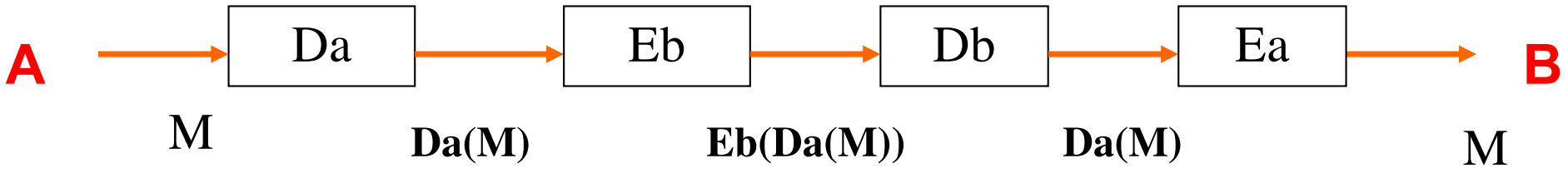
$$E_a(D_a(M)) = D_a(E_a(M)) = M.$$

Cheia Da se foloseste pentru criptarea mesajului M

Se asigură integritatea

- Oricine poate folosi cheia publica Ea pentru a decripta mesajul
- Nimeni nu poate modifica mesajul M deoarece nu cunoaste cheia privata Da

Schema de autentificare



autentificare M este criptat mai intai cu cheia privata a lui A

- Da(M) este un fel de “semnatura” a mesajului

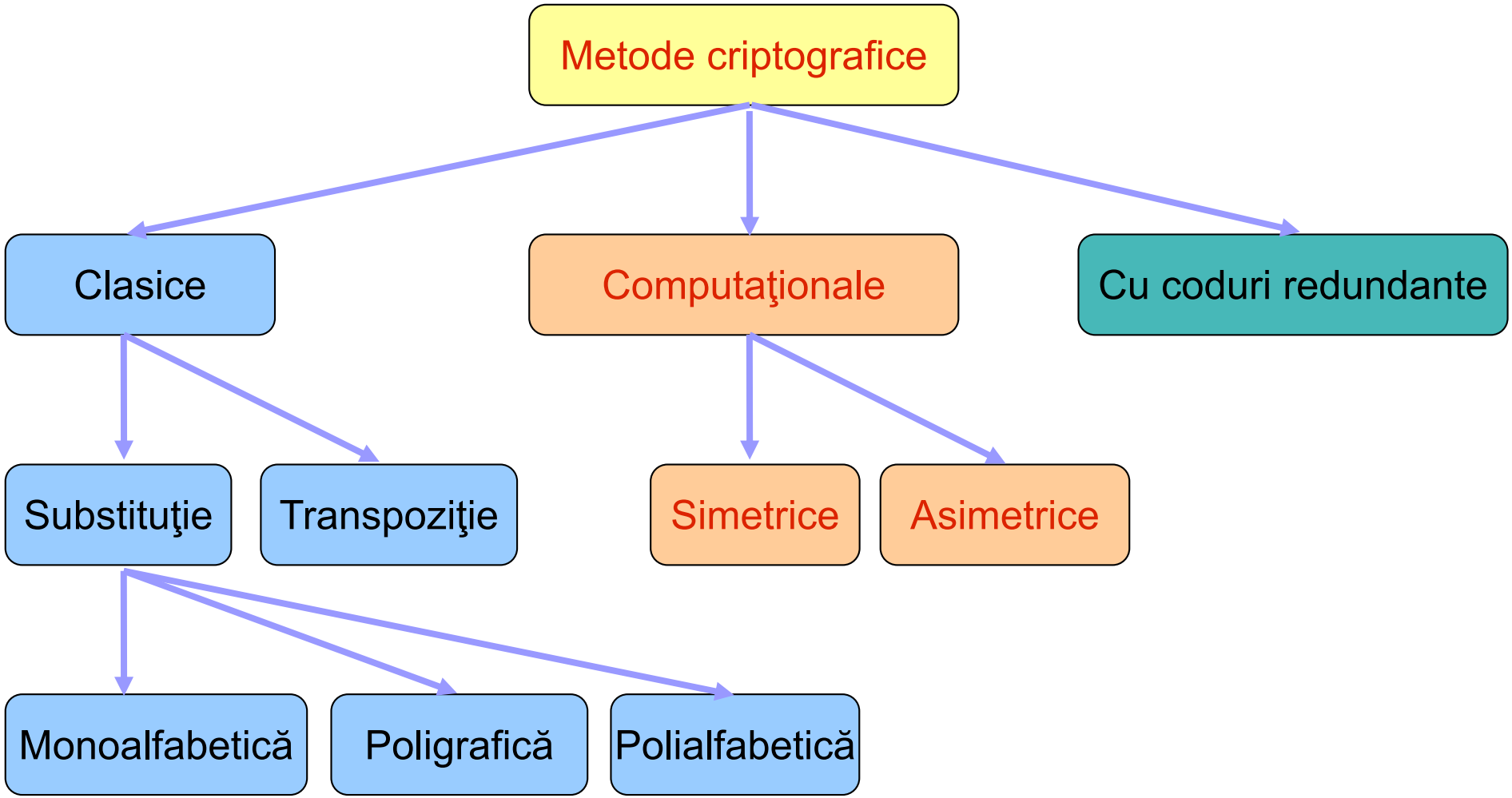
rezultatul este apoi criptat cu cheia publica a lui B

Se asigura că A este sursa mesajului

și că mesajul este confidențial

ne-repudiere folosind perechea Da(M) si M, B poate demonstra ca a primit mesajul de la A

Clasificare generală



Cifrarea prin substitutie

Cifrul lui Cezar (substitutie monoalfabetică)

```
A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C
```

textul clar: **CRIPTOGRAFIE**

text cifrat: **FULSWRJUDILH**

fiecare litera este inlocuita de litera aflata la distanta 3 de ea

Relatia de calcul

$c[i] = (m[i] + 3) \bmod 26$

In general

$c[i] = (a.m[i] + b) \bmod n.$

Substitutia polialfabetică (Vigenere)

foloseste 36 de cifruri Cezar si o cheie de cifrare de lungime l

fiecare litera din cheie = substitutul literei A din textul clar

Exemplu: cheia POLIGRAF

POLIGRAFPOLIGRAGPOLIGRAFPOLIGRAFPOLI	*cheie*
AFOSTODATACANPOVESTIAFOSTCANICIODATA	*clar*
PTZAZFDFIONITGOATGEQGWOXIQLVOTITSOEI	*cifrat*

Litera O din cheie substituie A din textul clar;
Litera F (situata la 5 pozitii de A) este inlocuita de T (aflata la 5 pozitii de O)

Cifrarea prin transpozitie

Modifică ordinea caracterelor. Uzual:

- textul clar este dispus în liniile succesive ale unei matrice si
- parcurgerea acesteia după o anumită regulă pentru stabilirea noii succesiuni de caractere.

Exemplu

- caracterele dispuse pe linii sunt citite pe coloane,
- ordinea coloanelor este dată de ordinea alfabetică a literelor unei chei.

`cheie:` `POLIGRAF`

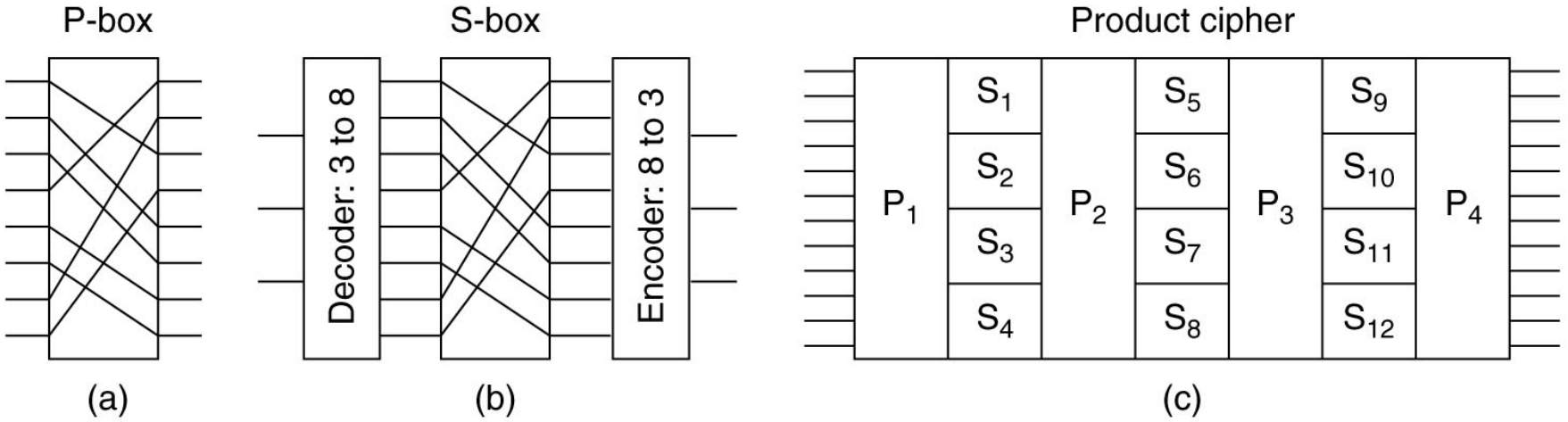
`ordine:` `76543812`

text clar: **AFOSTODATACANPOVESTIAFOSTCANICIO**

```
POLIGRAF
AFOSTODA
TACANPOV
ESTIAFOS
TCANICIO
```

text cifrat: **DOOIAVSOTNAISAINOCTAFASCATETOPFC**

Cifruri produs

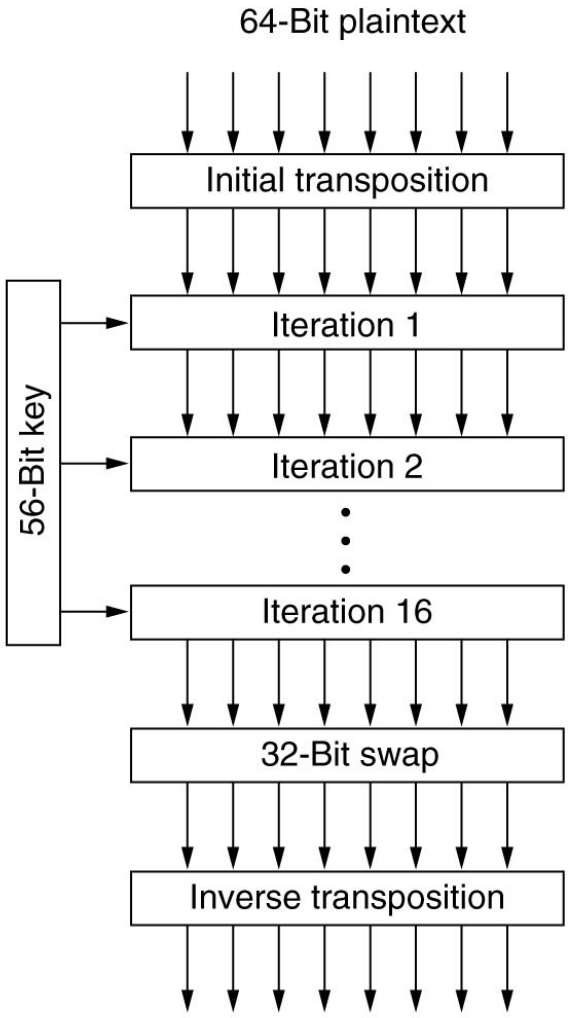


Principii pentru a obţine o securitate mai mare:

- compune două cifruri "slabe", complementare
  - P-box – permutare (transpozitie) - asigură difuzia
  - S-box – substitutie - asigură confuzia
- repetă aplicarea permutării şi substituţiei

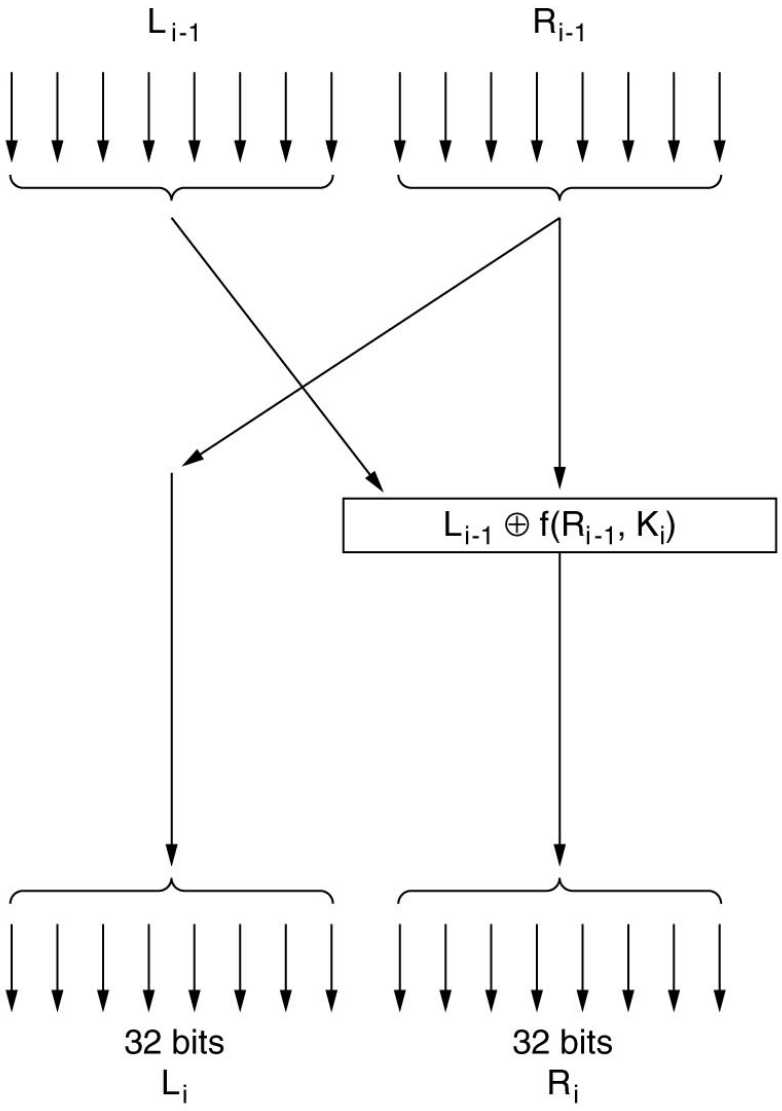
DES (Data Encryption Standard)

Schema generală



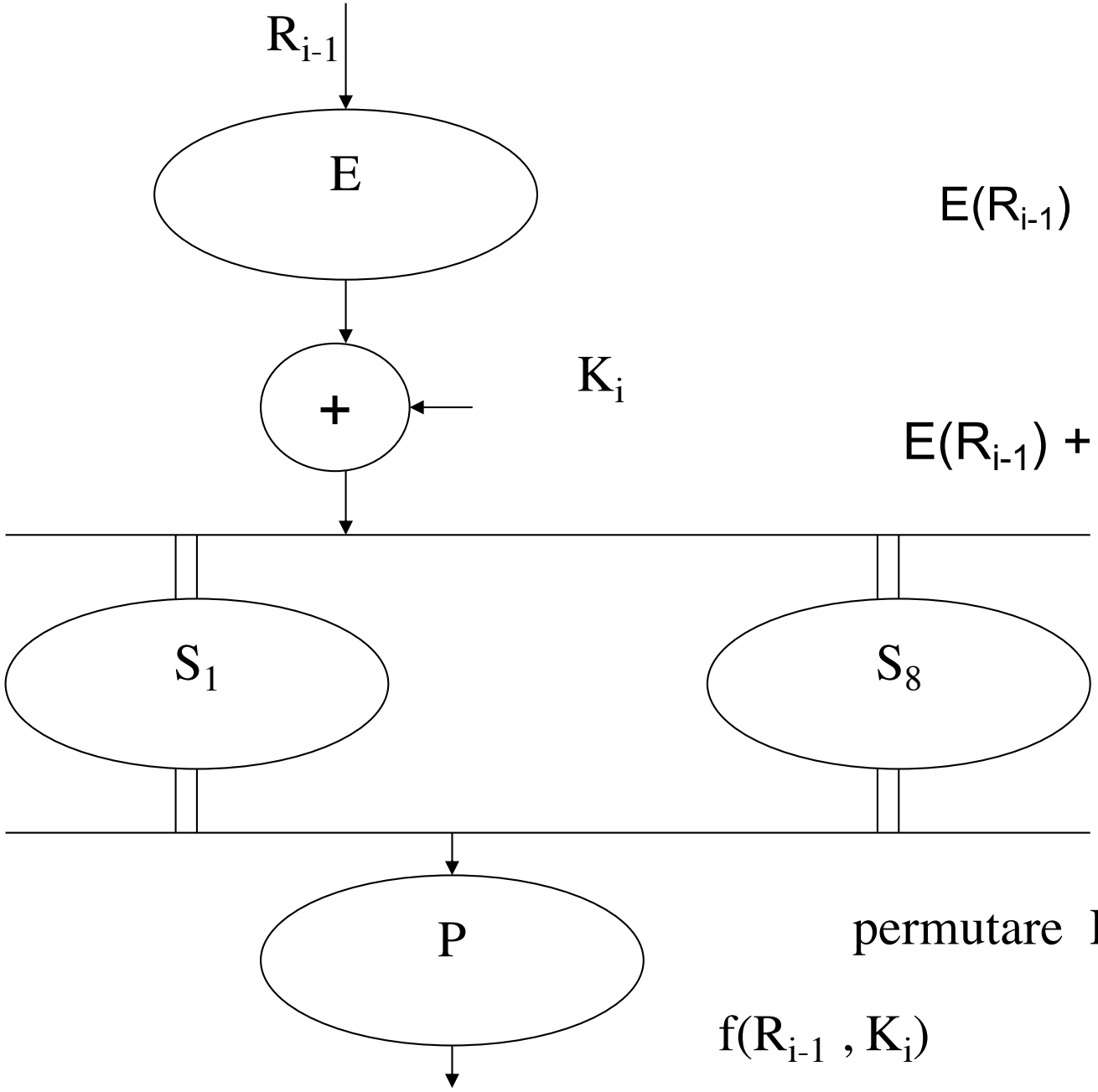
(a)

O iteraţie



(b)

Calculul lui $f(R_{i-1},k_i)$



32 biti

$E(R_{i-1})$ expandare la 48 de biti prin repetarea unora

$E(R_{i-1}) + Ki => B_1B_2...B_8$

8 blocuri a 6 biti sunt intrari in S-boxes

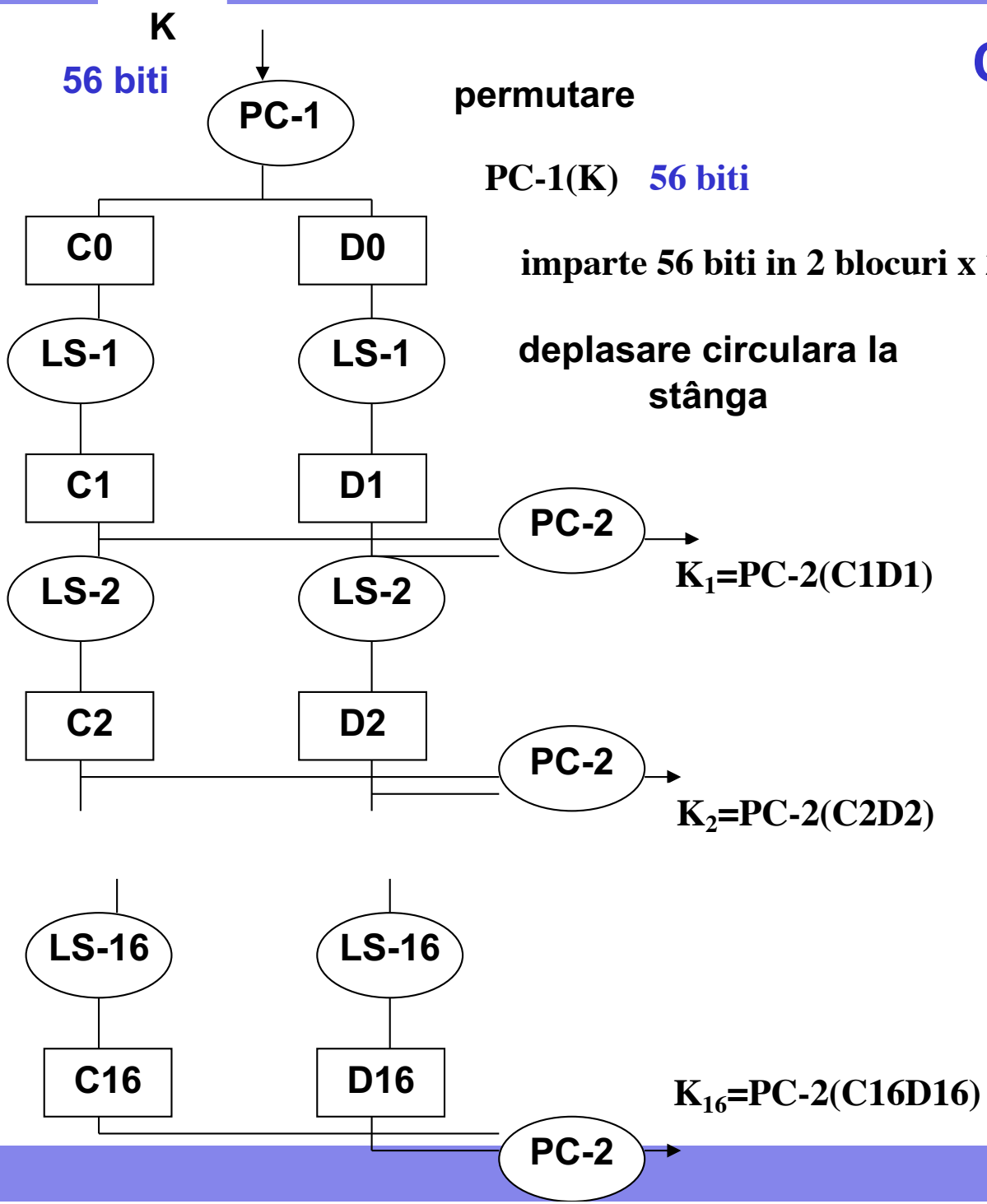
$S_j(B_j)$

Fiecare Sj produce un cod de 4 biti

permutare $P(S_1(B_1), ... S_8(B_8))$

32 biti

Calculul cheilor



permutare

PC-1(K) 56 biti

imparte 56 biti in 2 blocuri x 28 biti

deplasare circulara la stânga

(cu 1 sau 2 biti,
in functie de numarul ciclului)

K_1=PC-2(C1D1)

extrage si permuta 48 biti
din cei 56 ai C1D1

K_2=PC-2(C2D2)

K_{16}=PC-2(C16D16)

Comentarii

- Transpoziţiile, expandările, substituţiile sunt defininte în DES
- Acelaşi algoritm folosit la criptare si decriptare

La criptare: $L_j = R_{j-1}$

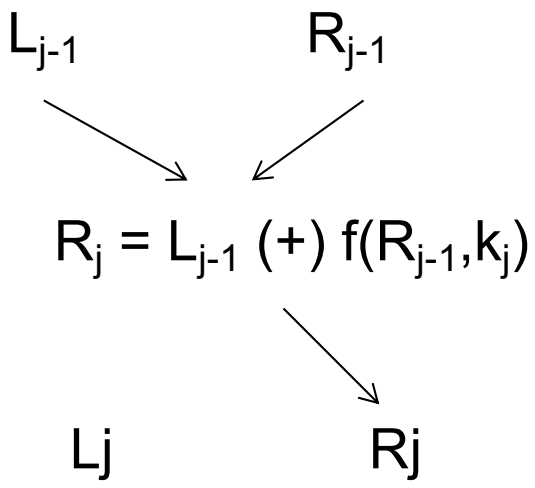
$R_j = L_{j-1}$ (+) $f(R_{j-1},k_j)$

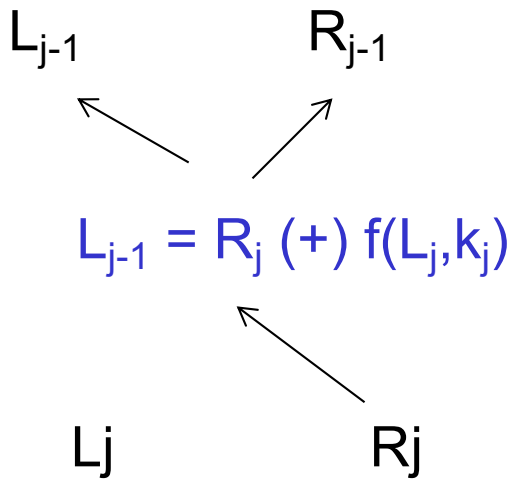
De unde: $R_{j-1} = L_j$

$L_{j-1} = R_j$ (+) $f(R_{j-1},k_j)$

şi $L_{j-1} = R_j$ (+) $f(L_j,k_j)$

Decriptare = ordine inversă criptarii (cu cheile în ordinea $k_{16} – k_1$)





Comentarii (2)

- Elementele cheie ale algoritmului nu au fost făcute publice
  - Controverse
    - Există trape (capcane) care să uşureze decriptarea de către NSA?

      NSA declară că NU.

    - Descoperirea şi folosirea unei astfel de trape de un criptanalist răuvoitor

      → unele detalii despre S-box au fost dezvăluite de NSA

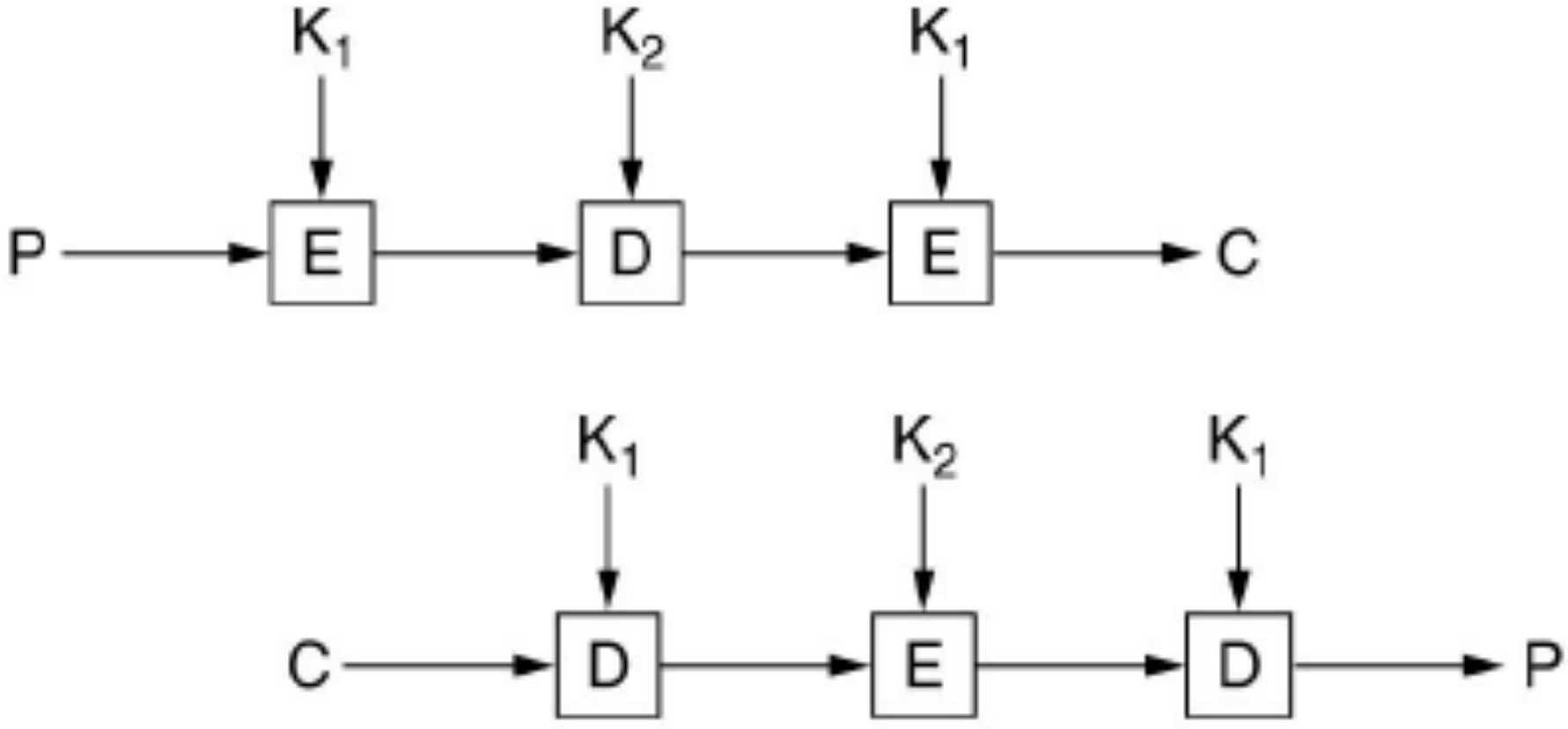
Comentarii (3)

- Număr de iteraţii (16) sunt suficiente pentru difuzie?
  - Experimental, după 8 iteraţii nu se mai văd dependenţe ale biţilor de ieşire de grupuri de biţi din intrare
- Lungimea cheii
  - Cheie DES de 56 biţi spartă prin forţă brută (4 luni * 3500 maşini) în 1997
  - Dar, nu au fost raportate deficienţe în algoritm
  - Triple DES “măreşte” lungimea cheii

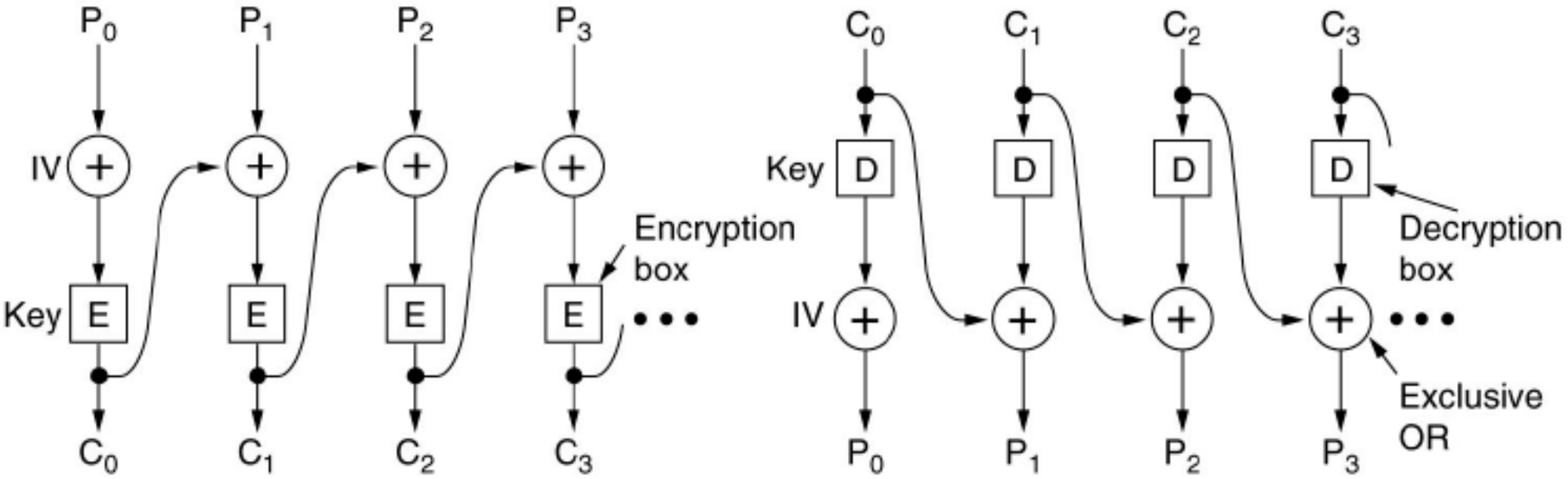
Triplu DES

"Creste" lungimea cheii folosind

- 2 chei
- 3 runde de criptare / decriptare



Inlantuirea blocurilor cifrate: CBC - Cipher Block Chaining



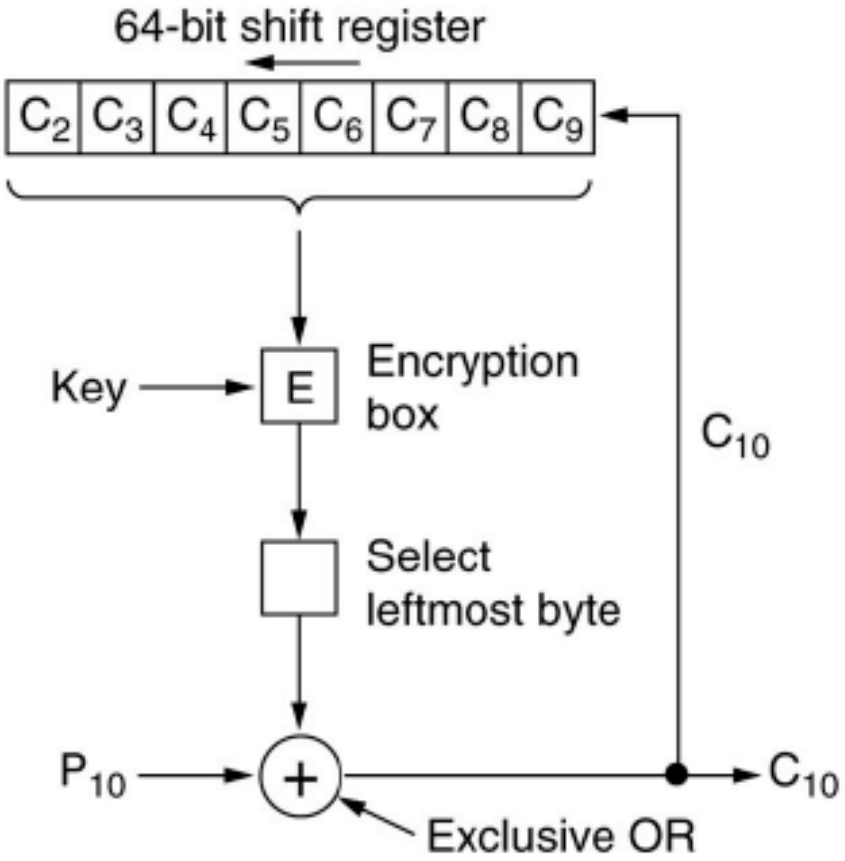
Key – cheie secreta

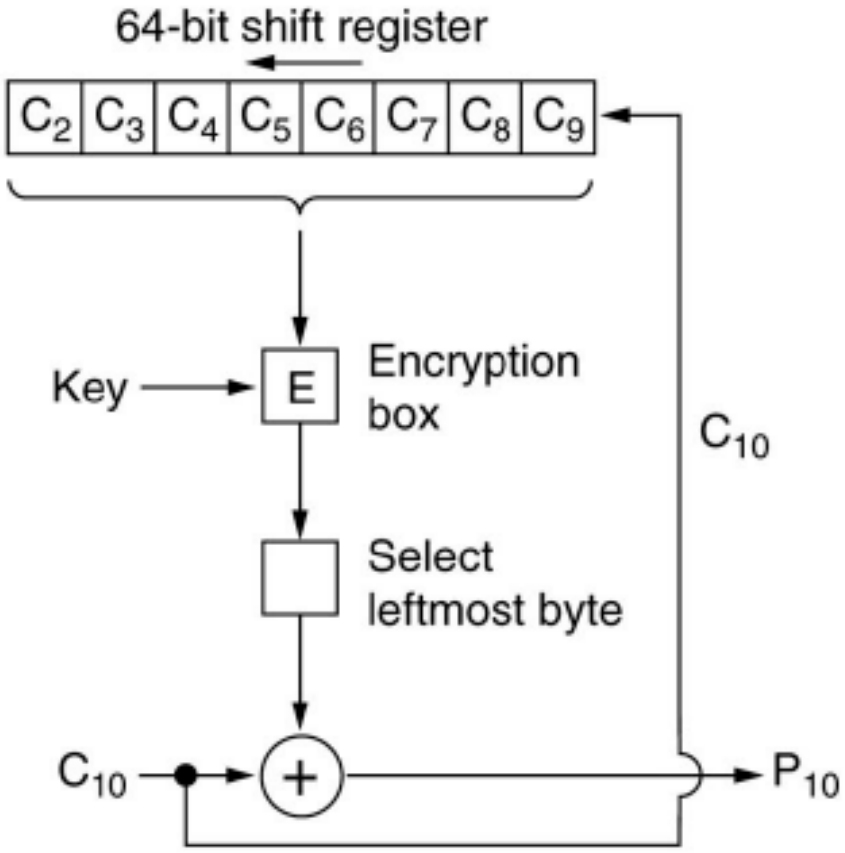
IV – Initialization Vector

- ales aleator, acelasi pentru criptare si decriptare
- folosit pentru combinarea cu primul bloc de text clar

Urmarea: un acelasi text clar repetat in mesaj va fi criptat diferit

Reactie cifrata: CFB - Cipher-Feed Back



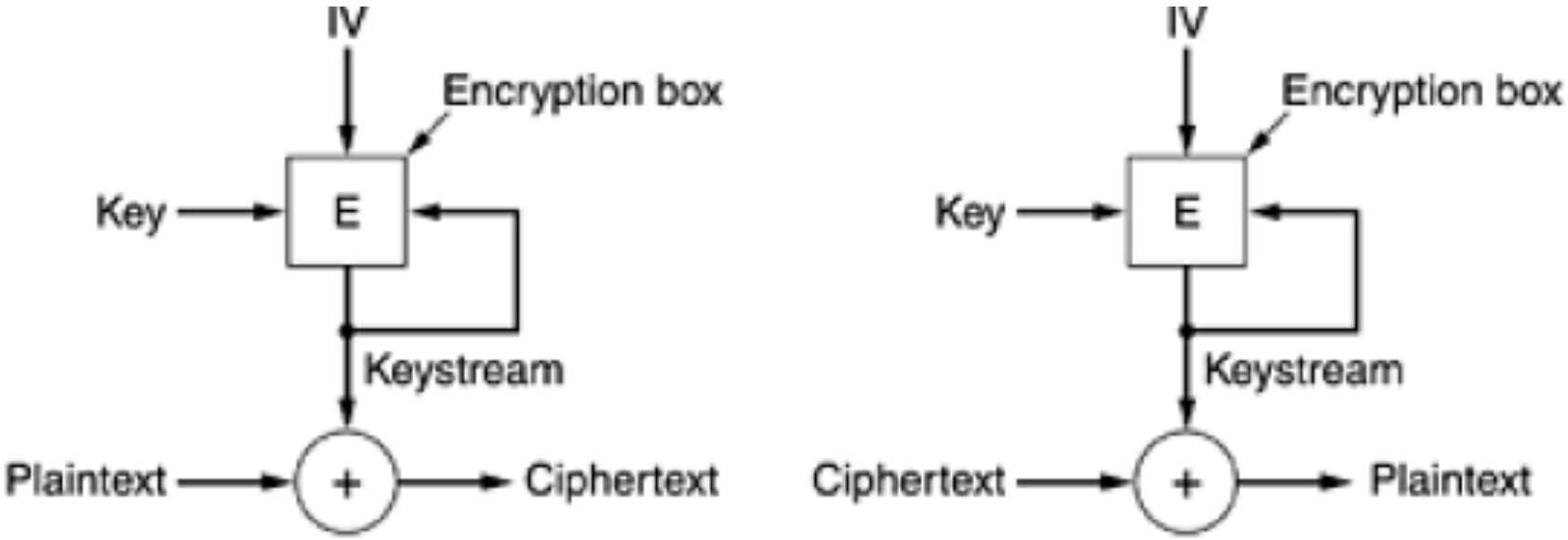


Foloseste un Initialization Vector ca prima valoare in Registrul de deplasare

O eroare de un bit in criptograma conduce la decriptarea eronata a 8 octeti

- generati in pasii in care bitul se afla in registrul de deplasare

Cifrarea secvențială (Stream Cipher)



Foloseste un Initialization Vector ca intrare DES pentru a genera prima cheie de criptare/decritare, care este folosita ca intrare DES pentru a genera a doua cheie etc.

Sirul de chei generat este combinat XOR cu textul clar pentru a produce criptograma

Sirul de chei depinde doar de cheia principala Key si de vectorul de initializare IV

→ Nu trebuie refolosita repetat aceeasi pereche (Key, IV)

AES – Advanced Encryption Standard

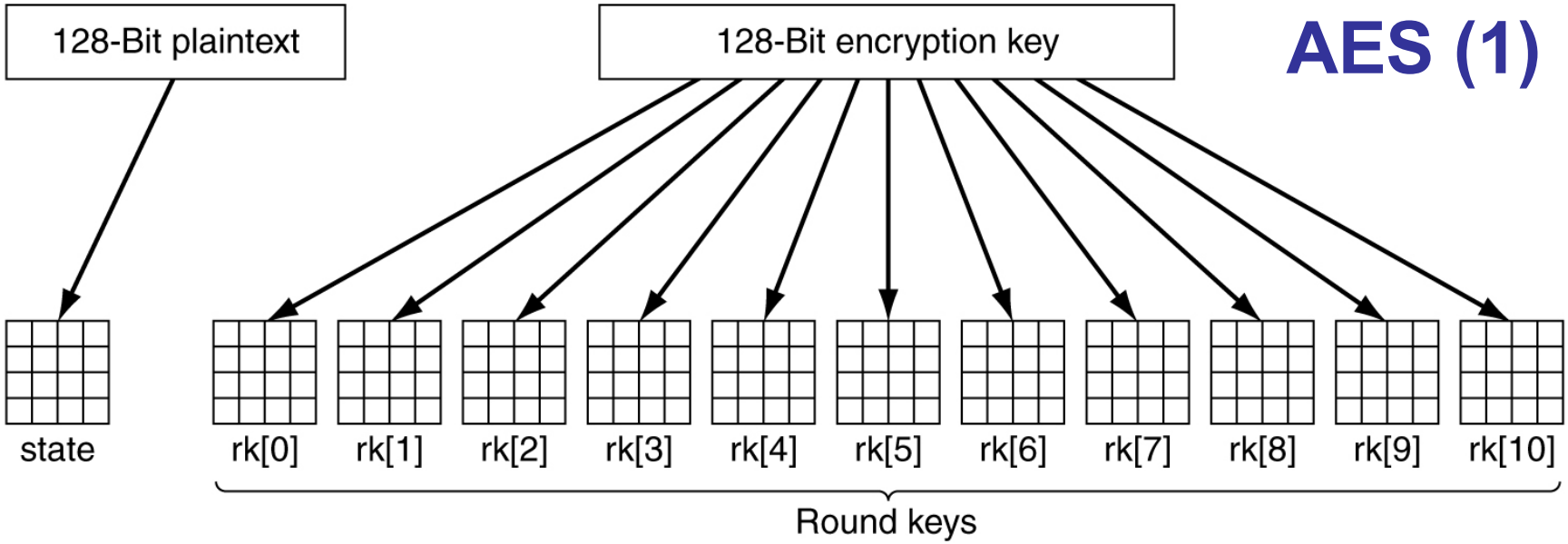
Regulile concursului organizat de NIST (ianuarie 1997) erau:

1. Algoritmul trebuie să fie un cifru bloc simetric.
2. Tot proiectul trebuie sa fie public
3. Trebuie să fie suportate chei de 128, 192, şi de 256 biţi
4. Trebuie să fie posibile atât implementări hardware cât şi software
5. Algoritmul trebuie să fie public sau oferit cu licenţă nediscriminatorie.

Finaliştii şi scorurile lor au fost următoarele:

1. Rijndael (din partea lui Joan Daemen şi Vincent Rijmen, 86 voturi)
2. Serpent (din partea lui Ross Anderson, Eli Biham şi Lars Knudsen, 59 voturi)
3. Twofish (din partea unei echipe condusă de Bruce Schneier, 31 voturi)
4. RC6 (din partea RSA Laboratories, 23 voturi)
5. MARS (din partea IBM, 13 voturi)

AES (1)



Foloseste o matrice de stare de 4*4 octeţi (bloc de 128 biţi)

si mai multe chei de runda fabricate din cheia de baza

Numarul de runde **n** depinde de lungimea cheii

n=10 pentru cheie de lungime 128; 12/ 192, 14/ 256

Initial

- se copiaza un bloc de 128 biti text clar in state
- se face XOR intre state si cheia rk[0]

AES (2)

In fiecare runda se fac patru operatii

substitutie – la nivel octet, foloseşte tabel substituţie

rotate_rows – prin deplasare circulară la stânga la nivel octet

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

1	5	9	13
6	10	14	2
11	15	3	7
16	4	8	12

mix_columns – elementele unei coloane sunt înmulţite cu o matrice

$$\begin{vmatrix} s'0i \\ s'1i \\ s'2i \\ s'3i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s0i \\ s1i \\ s2i \\ s3i \end{vmatrix}$$

xor_roundkey_into_state – combinare cu o cheie de rundă rk[i]

Rijndael definit în câmp Galois $G(2^8)$ prin polinomul $P = x^8+x^4+x^3+x+1$

număr = coeficienţii unui polinom

Ex. $23_{(10)} = 10111_{(2)}$ este polinomul $1*x^4+0*x^3+1*x^2+1*x+1$

$x^4+ x^2+ x+1$

adunarea coeficienţilor făcută modulo 2

înmulţirea făcută ca la polinoame, dar modulo P

Ex. $(x^3+1)*(x^4+x) = x^7+x^4+x^4+x = x^7+x$

Algoritmul AES (3)

```
#define LENGTH 16                          /* # bytes in data block or key */
#define NROWS 4                            /* number of rows in state */
#define NCOLS 4                            /* number of columns in state */
#define ROUNDS 10                          /* number of iterations */
typedef unsigned char byte;                /* unsigned 8-bit integer */

rijndael(byte plaintext[LENGTH], byte ciphertext[LENGTH], byte key[LENGTH])
{
  int r;                                   /* loop index */
  byte state[NROWS][NCOLS];                /* current state */
  struct {byte k[NROWS][NCOLS];} rk[ROUNDS + 1];     /* round keys */

  expand_key(key, rk);                     /* construct the round keys */
  copy_plaintext_to_state(state, plaintext);   /* init current state */
  xor_roundkey_into_state(state, rk[0]);   /* XOR key into state */

  for (r = 1; r <= ROUNDS; r++) {
        substitute(state);                 /* apply S-box to each byte */
        rotate_rows(state);                /* rotate row i by i bytes */
        if (r < ROUNDS) mix_columns(state);   /* mix function */
        xor_roundkey_into_state(state, rk[r]);   /* XOR key into state */
  }
  copy_state_to_ciphertext(ciphertext, state);   /* return result */
}
```

Comentarii

- Nu au fost probleme la utilizare
- Experimental – difuzie bună
- Metodă bazată pe algebră (câmpuri Galois)
  - substituţii şi mixare coloane folosesc operaţii cu sens în teoria algebrică (nu simple tabele greu de explicat)
- autorii nu au oferit argumente matematice
- nu sunt suspectate trape (sau “scurtături” ascunse)

Cifrarea prin functii greu inversabile

- functii greu inversabile
  - cunoscînd x este usor de calculat f(x)
  - calculul lui x din f(x) este foarte dificil.
- adaptare:
  - calculul lui x din f(x) trebuie să fie o problemă intratabilă doar pentru criptanalist
    - problemă intratabilă - nu există un algoritm de rezolvare în timp polinomial.
  - destinatarul autorizat
    - **are cheia sau**
    - **dispune de o trapă ce face problema usor de rezolvat.**
- Metode
  - algoritmi exponentiali
  - problema rucsacului.

Algoritmi exponentiali – RSA

In RSA (Rivest, Shamir si Adleman):

Criptarea si decriptarea se fac prin functii exponentiale

Criptarea se face prin calculul

$$C = (M^e) \bmod n$$

unde **(e, n)** reprezintă cheia de criptare.

M este un bloc de mesaj (valoare întreagă între 0 si n-1)

C este criptograma.

Decriptarea se face prin calculul

$$M = (C^d) \bmod n$$

unde **(d, n)** este cheia de decriptare

Algoritmi exponentiali – RSA

Conditia: functiile de criptare si decriptare trebuie sa fie inverse una alteia:

$$(M^e \bmod n)^d \bmod n = M$$

Conditia poate fi indeplinita daca

- e este un intreg relativ prim cu $\Phi(n)$

  $\Phi(n)$ este Functia lui Euler

  adica nr de întregi pozitivi <n relativ primi cu n

- d este inversul multiplicativ al lui e modulo $\Phi(n)$

  $$e*d \bmod \Phi(n) = 1$$

- n este produsul a doua numere prime, $n = p * q$

  caz in care $\Phi(n) = (p-1)(q-1)$

Motivatie

Functia lui Euler $\Phi(n)$ = nr de întregi pozitivi <n relativ primi cu n

daca p prim => $\Phi(p) = p-1$.

daca $n = p*q$ cu p, q prime atunci

$$\Phi(n) = \Phi(p) * \Phi(q) = (p-1)\,(q-1)$$

Teorema (Euler). Pentru orice a si n cu $(a,n) = 1$ avem

$$a^{\Phi(n)} \bmod n = 1$$

Aceasta proprietate este folosita in demonstrarea urmatoarei

Teorema (cifrare). Date fiind e si d care satisfac

$$ed \bmod \Phi(n) = 1$$

si un mesaj $M \in [0, n-1]$, avem

$$(M^e \bmod n)^d \bmod n = M$$

Metoda RSA

1. Se aleg două numere prime *p* şi *q*,

   (de ex. de 1024 biţi).

2. Se calculează $n = p \times q$

   şi $z = (p - 1) \times (q - 1)$.

3. Se alege *d* un număr relativ prim cu *z*

   d poate fi un numar prim care satisface

   d > (p-1) si d > (q-1)

4. Se găseşte *e* astfel încât $e \times d = 1 \bmod z$.

5. (e, n) este cheia de criptare.

   (d, n) este cheia de decriptare.

Comentarii

Cheia de criptare (e,n) se face publica

Problema:

- cunoasterea lui (e,n) sa nu permita deducerea lui d

Securitate pastrata deoarece:

- p si q sunt numere prime foarte mari
- p si q sunt pastrate secrete

Cifrarea si descrifrarea sunt comutative si mutual inverse

$$(M^d \bmod n)^e \bmod n = M$$

→ RSA utilizată ptr confidentialitate si autentificare.

Nu au fost identificate atacuri reusite cu RSA

Metoda MH (Merkle si Hellman) - optional

Problema rucsacului

Se dau C si ponderile A = (a[1], a[2], …, a[m])

Se cere determinarea lui X = (x[1],x[2],...x[m]) cu elemente binare, a.i.

$$C = \sum_{i=1,m} x[i] * a[i]$$

Găsirea unei solutii = backtracking

=> număr operatii care creste exponential cu m.

O solutie **x** poate fi verificată prin cel mult m operatii de adunare

Varianta rucsac simplu a problemei (trapa):

dacă A satisface proprietatea de dominanță (este o secventa super-crescatoare), adică

$$a[i] > \Sigma_{j=1,i-1} a[j]$$

atunci problema poate fi rezolvată în timp liniar.

Ex.

text clar	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**
rucsac	**1**	**2**	**5**	**9**	**20**	**43**
text cifrat	**1**		**5**			**43**

suma = 49 reprezinta criptograma

decriptarea ?

Cheie publica: secventa (oarecare) de intregi

Cheie secreta: secventa super-crescatoare

Contributia Merkle si Hellman

conversie secventa oarecare ⇔ secventa super-crescatoare

Solutia: aritmetica modulara

rucsac simplu A = [a1, a2, …, am]

rucsac greu G = [g1, g2, …,gm]

se obtine prin calcule gi = w * ai mod n

Ex.

rucsac simplu A = [1, 2, 4, 9], w = 15, n = 17

1*15 mod 17 = 15 mod 17 = 15

2*15 mod 17 = 30 mod 17 = 13

4*15 mod 17 = 60 mod 17 = 9

9*15 mod 17 = 135 mod 17 = 16

rucsac greu G = [15, 13, 9, 16]

Obs. inmultirea mod n strica proprietatea de dominanta

Conditii:

Toate numerele din G trebuie sa fie distincte intre ele

Conversia inversa de la G la A trebuie sa produca o solutie unica

Impun restrictii asupra lui n si w; ex.:

w = 3; n = 6

x	**3*x**	**3*x mod 6**
1	3	3
2	6	0
3	9	3
4	12	0
5	15	3
6	18	0

w = 3; n = 5

x	**3*x**	**3*x mod 5**
1	3	3
2	6	1
3	9	4
4	12	2
5	15	0
6	18	3

Cerinte:

1. n trebuie sa fie mai mare decat suma tuturor ai

2. w si n trebuie sa fie prime intre ele (se alege n prim)

=> w are un invers multiplicativ w^{-1} ($w * w^{-1} = 1 \bmod n$)

Criptare

Obtine criptograma C din textul clar P prin $C = G * P$

unde G este rucsacul greu, $G = w * A \bmod n$ (adica $g_i = w * a_i \bmod n$)

Ex: P = [1,0,1,0], G = [15,13,9,16] ➔ C = 15+9 = **24**

Decriptare

Receptorul cunoaste A,w, n si, bineinteles, G

Deoarece $C = G * P = w * A * P \bmod n$, rezulta

$$w^{-1} * C = w^{-1} * G * P = w^{-1} * w * A * P \bmod n = A * P \bmod n$$

din care P se afla prin rucsac simplu

Ex. A = [1, 2, 4, 9], w = 15, n = 17, C = **24**

$w^{-1} = 15^{-1} = 8 \bmod 17$ ➔ $w^{-1} * C = 8 * 24 = 192 \bmod 17 =$ **5**

A = [1, 2, 4, 9] => P = [1, 0, 1, 0]

Comentarii ← opțional

Metoda pare sigura

S-au gasit metode de atac prin ocolire rucsac greu in anumite cazuri

Oricum, algoritmul MH este greu de utilizat

Analiza algoritmilor criptografici

Problema:

Pot criptogramele interceptate de un intrus sa faciliteze spargerea confidentialitatii criptografice ?

O solutie este **Teoria Informatiei**

- care masoara cantitatea medie de informatie transmisa de o sursa
- si, echivalent, cantitatea de incertitudine inlaturata (in medie) de un mesaj

Bazata pe notiunile de entropie si entropie conditionata

Entropia

Entropia este cantitatea medie de informatie transmisa de o sursa

Fie S o sursa de informatii

- care transmite mesajele $X_1,..., X_n$
- cu probabilitatile $p(X_1), ..., p(X_n)$, ptr. care $\Sigma_{i=1,n}\ p(X_i) = 1$.

Entropia H(X) este:

$$\mathbf{H(X) = \Sigma_{i=1,n}\ p(X_i)*log\ (1/p(X_i))} = -\Sigma_{i=1,n}\ p(X_i)*\log\ (p(X_i))$$

- $\log(1/p(X_i))$ = cantitatea de informatie primita la receptia lui X_i.
- baza logaritm = 2 → cantitatea masurata in numar de biti

Exemplu

- aruncarea monedei – cap sau pajura
- probabilitati egale, 1/2
- informatie 1 bit: $H(X) = \Sigma_{i=1,2}\ (1/2)*\log\ (1/(1/2)) = 1$

Incertitudinea

Entropia = cantitatea de incertitudine inlaturata (in medie) de un mesaj

Exemplu:

o sursa poate trimite n = 4 mesaje, cu probabilitati egale p(X) = 1/4

$$H(X) = \Sigma_{i=1,4} (1/4)*\log (4) = 2$$

fiecare mesaj inlatura o incertitudine de 2 biti

(inainte nu se stia care din cele 4 mesaje va fi primit)

Entropia depinde de distributia probabilitatior mesajelor

- H(X) maxim — când $p(X_1) = p(X_2) = ... = p(X_n) = 1/n$.

$$H(X) = \Sigma_{i=1,n} (1/n)*\log (n) = \log (n)$$

- H(X) descreşte — când distribuţia mesajelor se restrânge.
- H(X) = 0 — când $p(X_i) = 1$ pentru un mesaj i.

Entropie conditionata - Echivocitatea

Exemplu:

- mesajele X sunt conditionate de mesaje Y

  Fie m=4 şi p(Y) = 1/4 pentru fiecare Y.

  Presupunem ca fiecare mesaj Y restrânge X astfel:

  dupa Y1: urmeaza X1 sau X2, fiecare cu prob. 1/2

  dupa Y2: urmeaza X3 sau X4,

  dupa Y3: urmeaza X2 sau X3,

  dupa Y4: urmeaza X4 sau X1.

Problema:

- cum se calculeaza entropia lui X ?

Entropie conditionata – Echivocitatea (2)

Dat fiind Y din mulţimea mesajelor $Y_1,..., Y_n$ cu $\Sigma_{i=1,n}\ p(Y_i) = 1$,

- fie: $p_Y(X)$ probabilitatea mesajului X condiţionat de Y.

  p(X,Y) probabilitatea mesajelor X şi Y luate împreună:

  $$p(X,Y) = p_Y(X)*p(Y).$$

- Echivocitatea este entropia lui X condiţionat de Y:

  $$H_Y(X) = \Sigma_{X,Y}\ p(X,Y)*\log\ (1/p_Y(X))$$

  $$H_Y(X) = \Sigma_{X,Y}\ p_Y(X)*p(Y)\ \log\ (1/p_Y(X))$$

  $$= \mathbf{\Sigma_Y\ p(Y)\ \Sigma_X\ p_Y(X)*\log\ (1/p_Y(X))}.$$

Pentru exemplu:

$p(Y) = 1/4$ $\quad p_Y(X) = 1/2$

Echivocitatea este:

$$H_Y(X) = \Sigma_Y\, p(Y)\, \Sigma_X\, p_Y(X) * \log\,(1/p_Y(X)).$$

$$H_Y(X) = \Sigma_{i=1,4}\,(1/4) * \Sigma_{j=1,2}\,(1/2) * \log\,(1/\,(1/2))$$

$$H_Y(X) = 4*(1/4) * 2\,(1/2) * (\log 2) = \log 2 = 1.$$

$H(X) = 2$ pentru mesaje X neconditionate

$H_Y(X) = 1$ pentru mesaje X conditionate

➔ cunoaşterea lui Y reduce incertitudinea lui X la un bit.

Confidenţialitatea perfectă

Cunoasterea unor criptograme nu reduce confidentialitatea

Fie:

- M - multime texte clare cu probabilitatea p(M), Σ_M p(M) = 1.
- C - criptograme, cu probabilitatea p(C), Σ_C p(C) = 1.
- K - chei cu probabilitatea p(K), Σ_K p(K) = 1.
- $p_C(M)$ probabiltiatea să se fi transmis M când se recepţionează C.

Confidenţialitatea perfectă <=> $p_C(M) = p(M)$.

Fie $p_M(C)$ probabilitatea să se recepţioneze C când s-a transmis M:

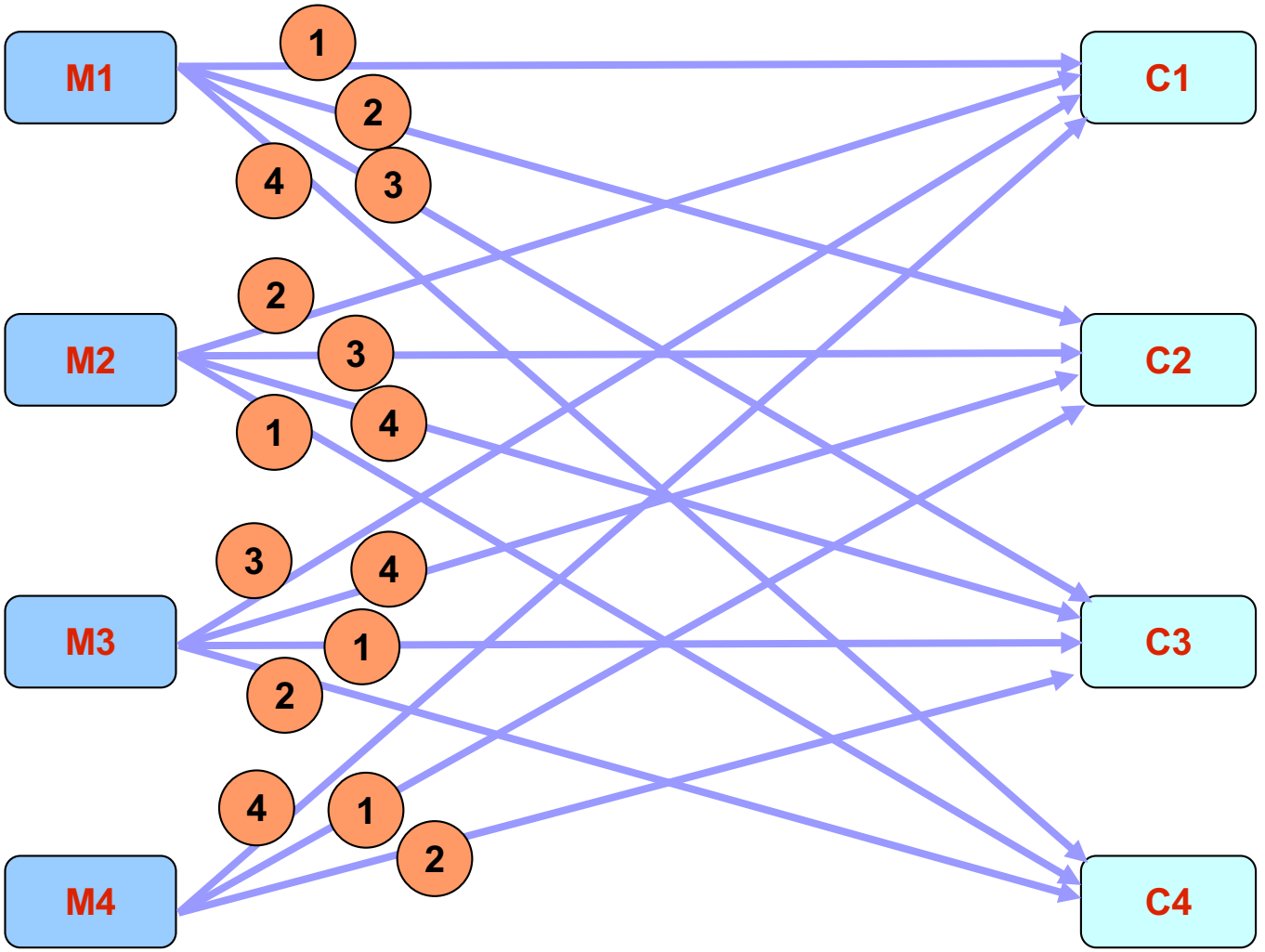
$p_M(C) = \Sigma_{k,\ Ek(M)=C}\ p(k)$.

•Confidenţialitatea perfectă:

$p_M(C) = p(C)$, pentru toate M şi orice C.

Confidenţialitatea perfectă

- Confidenţialitatea perfectă este posibilă dacă se folosesc chei la fel de lungi ca mesajele codificate.



Distanţa de unicitate

- "Spargerea" confidenţialităţii depinde de cantitatea de criptograme de care intrusul dispune
  - cantitatea de incertitudine în K cunoscand C, este exprimată ca entropia (echivocitatea) cheii conditionata de criptograme:

$$H_C(K) = \Sigma_C\, p(C) \Sigma_K\, p_C(K) \log\,(1/p_C\,(K))$$

- Dacă echivocitatea $H_C(K)=0$ nu există incertitudine şi cifrul se poate sparge.
- Când creşte lungimea N a textelor cifrate echivocitatea scade.
- Distanţa de unicitate:
  - **Cel mai mic N pentru care $H_C(K)$ este foarte apropiat de 0**.
- Cifru neconditionat sigur:
  - $H_C(K)$ nu se apropie niciodată de 0.

Redundanta limbajului (1)

Pentru un limbaj, consideram mulţimea mesajelor X de lungime N

- cu entropia H(X)
- fiecare mesaj este o secventa de N simboluri dintr-un alfabet A care are L simboluri

Nu toate combinatiile de N simboluri au sens

- ex. anumite succesiuni de consoane, digrame, trigrame, etc.
- Redundanţa limbajului, D este

$$D = R - r$$

  - R este rata absolută a limbajului
  - r este rata limbajului
- D = 3.2 ... 3.7 pentru limba engleză.

Rata limbajului

Rata limbajului este entropia pe simbol daca nu toate combinatiile de N simboluri au sens

este raportul entropia mesaj / numar simboluri din mesaj:

$$r = H(X) / N$$

– r = numar de biti pentru un simbol

cu care se pot reprezenta (un numar de) 2^r simboluri

– pentru limba engleză r = 1 ... 1.5 biti pe litera

- Numarul total al mesajelor de lungime N cu sens este 2^{rN}

Rata absoluta a limbajului

Rata absoluta a limbajului este entropia pe simbol daca toate combinatiile de N simboluri ar avea sens

Se considera ca cele L simboluri au aceeasi probabilitate = 1/L

Rezulta:

$$R = \Sigma_{i=1,L} (1/L) \log (L) = \log L$$

– pentru limba engleză R = log 26 = 4.7 biţi pe literă

- Numarul de simboluri L se poate rescrie $L = 2^R$
- Numarul de mesaje de lungime N (cu sau fara sens) este 2^{RN}

Calcul aproximativ distanţă unicitate (1)

Distanta de unicitate N este:

$$N = H(K) / D$$

Justificare

- Ipoteze:
  - Sunt 2^{RN} mesaje posibile, din care 2^{rN} au sens.
  - Toate mesajele cu sens au aceeaşi probabilitate, $1/2^{rN}$.
  - Toate mesajele fără sens au probabilitate 0.
  - Sunt $2^{H(K)}$ chei cu probabilităţi egale.
  - Cifrul este aleator:
    - Pentru fiecare k şi C, descifrarea $D_K(C)$ este variabilă aleatoare independentă uniform distribuită pe toate mesajele, cu sau fără sens.

Calcul aproximativ distanţă unicitate (2)

Fie criptograma $C = E_K(M)$.

- Criptanalistul are de ales între $2^{H(K)}$ chei, doar una este corectă.

- Rămân $2^{H(K)}-1$ chei care pot da o soluţie falsă (adica C se obţine criptând un alt mesaj M' cu înţeles)

  cu aceeaşi probabilitate (= mesaje cu sens / total mesaje)

$$q = 2^{rN} / 2^{RN} = 2^{(r-R)N} = 2^{-DN}$$

- Numărul de soluţii false F (= nr chei incorecte * probabilitatea unei chei de a da solutie falsa):

$$F = (2^{H(K)} - 1)q = (2^{H(K)} - 1)\, 2^{-DN} \approx 2^{H(K)-DN}$$

conditia de unicitate → $\log F = H(K)-DN = 0$

→ $N = H(K) / D$

Analiza cifrării prin substituţie

- Substituţie monoalfabetică:
  - N = H(K) / D = log n! / D sunt n! chei posibile
  - Pentru limba engleză:
    - N = log 26! / 3.2 = 27.6
- Substituţie periodică cu perioada d si s simboluri in alfabet:
  - Sunt s^d chei posibile pentru fiecare substiţutie simplă:
    - N = H(K) / D = log s^d / D = (d*log s) / D
  - Pentru cifrul Vigenere s = 26:
    - N = d * 4.7 / 3.2 = 1.5 d

Analiza cifrării prin transpoziţie

- Caracteristici:
  - Cifrul permută caracterele cu o perioadă fixă d.
  - Sunt d! permutări posibile.
  - Toate sunt echiprobabile.
- H(K) = log d!
  - N = H(K) / D = log d! / D
  - N = d log (d/e) / D
- Pentru d = 27 şi D = 3.2 rezultă:
  - N = 27.9

Studiu individual

A. S. Tanenbaum Reţele de calculatoare, ed 4-a, BYBLOS 2003

8.1 CRIPTOGRAFIA

8.2 ALGORITMI CU CHEIE SECRETĂ

8.3 ALGORITMI CU CHEIE PUBLICĂ

A. S. Tanenbaum Computer networks, 5-th ed. PEARSON 2011

8.1 CRYPTOGRAPHY

8.2 SYMMETRIC-KEY ALGORITHMS

8.3 PUBLIC-KEY ALGORITHMS