

TEORIA SISTEMELOR 2

Îndrumar de Laborator

Mircea ȘUȘCĂ, Vlad MIHALY, Dora MORAR

Ediția 0.0.1

PREFATĂ

Acest îndrumar de laborator este elaborat cu rol de anexă pentru cursul *Teoria Sistemelor II*, predat la secția *Automatică și Informatică Aplicată* din cadrul Facultății de Automatică și Calculatoare, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca. Suplimentar, lucrarea poate fi parcursă și cu rol de îndrumător aplicativ pentru inginerii din domeniul reglării și folosit pentru consolidarea cunoștințelor teoretice elementare în vederea realizării cercetării în domeniu.

TODO Îndrumarul este structurat în 5 părți. Partea I, intitulată “Preliminarii”, prezintă un sumar al conceptelor matematice și tehnice din cursul *Modelarea Proceselor* premergătoare înțelegerei conceptelor predate. Partea a II-a, intitulată “Modelarea sistemelor LTI”, prezintă conceptul de sistem liniar și invariant în timp, alaturi de metodele clasice de modelare ale acestora, cu precădere fiind realizarea de stare, pretabilă analizei în domeniul timp, și funcția de transfer, pretabilă domeniului frecvențial. Partea a III-a, intitulată “Analiza sistemelor LTI”, prezintă proprietățile esențiale ale sistemelor LTI, printre care se enumera stabilitatea, răspunsurile lor la semnale de intrare standard, definirea și estimarea performanțelor, respectiv interconectarea sistemelor. Partea a IV-a, intitulată “Metoda locului rădăcinilor”, prezintă metoda omonimă, cu accent într-o primă etapă pe trasarea locului geometric al polilor sistemului în buclă închisă în funcție de un parametru pozitiv, iar ulterior, pe interpretarea proprietăților sistemului închis pe baza graficului rezultat: stabilitatea, regimurile de funcționare, performanțe. Partea a V-a, intitulată “Recapitulare. Aplicații. Autoevaluare” prezintă modele de cerințe de evaluare pe baza materiei predate în cadrul laboratorului, cu posibilitatea de a aplica materia predată într-un mod organizat pe un sistem dinamic la alegere în scopul exersării.

Se lucrează în mediul MATLAB[®], respectiv vor fi necesare extensiile Simulink[®] și Control System ToolboxTM.

Autorii, Septembrie 2025.

CUPRINS

Prefață	3
Cuprins	5
Listă figuri	9
Listă tabele	13
I Răspunsul în frecvență al sistemelor LTI	15
1 Conceptul de răspuns în frecvență. Analiza tipului filtrului	17
1.1 Răspunsul sistemelor LTI la intrări armonice	18
1.2 Analiza tipului filtrului	19
1.3 Exemplu rezolvat	20
1.4 Analiza tipului filtrului în MATLAB	21
2 Trasarea și interpretarea diagramei Nyquist	23
2.1 Trasarea diagramei Nyquist	24
2.2 Probleme	24
2.3 Interpretarea diagramei Nyquist	26
2.4 Trasarea Diagramei Nyquist în MATLAB	27
2.5 Determinarea naturii filtrului	27
3 Trasarea și interpretarea diagramei Bode	29
3.1 Aproximarea diagramei Bode prin asimptote	30
3.2 Probleme	32
3.3 Interpretarea diagramei Bode	34
3.4 Trasarea diagramei Bode în MATLAB	35
4 Sisteme cu timp mort. Sisteme de fază neminimă	37
4.1 Breviar teoretic	38
4.2 Trasarea diagramei Nyquist	39
4.2.1 Problemă rezolvată	40
4.3 Trasarea diagramei Bode	40
4.3.1 Problemă rezolvată	42
4.4 Probleme propuse	43
5 Legături între diagramele Nyquist, Bode și Nichols ale sistemelor LTI	45
5.1 Studii de caz	46
5.1.1 Sistem cu două rezervoare inseriate	46

5.1.2 Axă CNC	47
5.1.3 Sistem de suspensie activă	48
5.2 Legătura dintre caracteristica de modul și cea de fază în diagrama Bode	51
5.3 Probleme propuse	54
6 Stabilitatea SRN. Criteriul Nyquist generalizat	57
6.1 Breviar teoretic	58
6.2 Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist	59
6.3 Probleme propuse	61
7 Stabilitatea SRN. Criteriul Nyquist simplificat	63
7.1 Breviar teoretic	64
7.2 Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist	65
7.3 Probleme rezolvate utilizând diagramele Bode și Nichols	67
7.4 Probleme propuse	71
8 Performanțele SRN pe baza răspunsului în frecvență	73
8.1 Cercurile de modul și fază constantă	74
8.2 Performanțele SRN deduse pe baza RF al sistemului deschis	75
8.3 Funcțiile de senzitivitate	77
8.4 Probleme rezolvate	78
8.5 Probleme propuse	80
II Sisteme numerice	83
9 Eșantionarea semnalelor și sistemelor continue	85
9.1 Eșantionarea semnalelor	86
9.1.1 Teorema lui Shannon	87
9.1.2 Ilustrarea fenomenului de suprapunere a spectrelor (<i>aliasing</i>)	87
9.2 Eșantionarea sistemelor descrise prin funcții de transfer	88
9.3 Fenomene specifice sistemelor numerice	89
9.3.1 Fenomenul de <i>aliasing</i> în cadrul eșantionării sistemelor	89
9.3.2 Sensibilitatea la numărul de zecimale considerate	90
9.3.3 Supraeșantionarea	90
9.3.4 Eșantionarea sistemelor cu timp mort	92
9.4 Probleme propuse	92
10 Discretizarea sistemelor continue	95
10.1 Maparea din planul s în planul z	96
10.2 Metode de discretizare	97
10.2.1 Metode care provin din integrarea numerică	97
10.2.2 Elementul de reținere de ordinul zero	98
10.3 Exemple rezolvate	99
10.4 Regimuri de funcționare și moduri de oscilație	100
10.5 Probleme propuse	100
11 Stabilitatea sistemelor numerice	103
11.1 Stabilitatea sistemelor numerice	104
11.2 Criteriul Schur-Cohn-Jury	105

11.3 Conexiunea cu reacție negativă a sistemelor numerice	106
11.4 Probleme propuse	109
12 Răspunsul în frecvență al sistemelor numerice	111
12.1 Răspunsul în frecvență al sistemelor numerice	112
12.2 Proiectarea filtrelor numerice	113
12.3 Probleme propuse	115
13 Implementarea sistemelor numerice	117
13.1 Deducerea ecuațiilor cu diferențe pe baza funcției de transfer	118
13.1.1 Conexiunea serie	118
13.1.2 Conexiunea paralel	119
13.1.3 Împărțirea infinită	121
13.2 Deducerea modelelor numerice în spațiul stărilor	122
13.3 Scalarea coeficienților în virgulă fixă	123
13.4 Implementarea ecuațiilor cu diferențe pe microcontroller	125
III Realizări de stare. Proprietăți algebrice ale sistemelor LTI	127
14 Realizări de stare. Forme canonice	129
14.1 Realizări de stare	130
14.2 Forme canonice	131
14.2.1 Forma canonică de control – FCC	131
14.2.2 Forma canonică de observare – FCO	132
14.2.3 Forma canonică controlabilă – FCCo	134
14.2.4 Forma canonică observabilă – FCOb	136
14.2.5 Forma canonică bloc diagonală (Jordan) – FCJ	138
14.3 Probleme propuse	139
15 Controlabilitatea și observabilitatea sistemelor LTI. Reacția de la stare și estimatorul de stare	141
15.1 Controlabilitatea sistemelor. Reacția de la stare	142
15.2 Observabilitatea sistemelor. Estimatorul de stare	144
15.3 Probleme propuse	145
15.4 Studiu de caz	147
16 Sisteme multivariabile	149
16.1 Forma minimală	150
16.1.1 Forma canonică Gilbert	150
16.1.2 Deducerea subspațiilor controlabili și observabili	151
16.2 Singularitățile sistemelor MIMO	153
16.2.1 Fascicule matriciale	153
16.2.2 Singularitățile sistemelor MIMO	154
16.2.3 Funcții MATLAB	155
16.3 Probleme propuse	155
16.4 Referințe propuse	156

IV Recapitulare. Aplicații. Autoevaluare	157
17 Teste de autoevaluare	159
18 Studiu de caz – Proiect de semestru	161
18.1 Cerințe	162
19 Întrebări de autocontrol	163
19.1 Listă de întrebări	164
Bibliografie	165

LISTĂ FIGURI

1.1	Răspunsul unui sistem LTI la o intrare sinusoidală.	18
1.2	Circuit RLC paralel	20
1.3	Simularea răspunsului la intrare sinusoidală pentru evidențierea tipului filtrului. Se remarcă suplimentar pragul de $\sqrt{2}/2 \approx 0.707$ afișat în culoarea roșie.	22
2.1	Diagrama Nyquist pentru sistemul 2.2.c), cu evidențierea citirilor de la pulsăriile $\omega = 0.707$ [rad/s] și $\omega = 1.06$ [rad/s].	26
2.2	Optiunea de dezactivare a afișării pulsăriilor negative.	27
2.3	Afișarea cercului unitate pe diagrama Nyquist.	28
2.4	Răspunsul în frecvență al unui circuit de tip filtru trece bandă.	28
3.1	Diagrama Bode a sistemului 3.2.c)	35
4.1	Timpul mort ilustrat în diagrama Nyquist	39
4.2	Diagrama Nyquist a sistemului de la problema rezolvată.	41
4.3	Diagrama Bode a unui sistem cu timp mort.	42
4.4	Diagrama Bode a sistemului de fază neminimă din secțiunea 4.3.1.	43
5.1	Sistem cu două rezervoare conectate în serie.	46
5.2	Diagramele Bode, Nyquist, Nichols pentru sistemul cu două rezervoare inseriate.	47
5.3	Sistem de poziționare cu axă CNC.	48
5.4	Diagramele Bode, Nyquist, Nichols pentru sistemul de tip axă CNC.	49
5.5	Suspensia activă a unui automobil.	50
5.6	Diagramele Bode, Nyquist, Nichols pentru sistemul de tip suspensie activă.	50
5.7	Diagrama Bode de modul a unui sistem de fază minimă.	51
5.8	Caracteristica de fază a sistemului din Exemplul 1.	52
5.9	Diagrama Bode de modul a unui sistem de fază minimă.	52
5.10	Caracteristica de fază a sistemului din Exemplul 2.	53
5.11	Diagrama Bode a unui sistem de fază neminimă.	54
5.12	Diagrama Nyquist a unui sistem necunoscut.	54
5.13	Diagrama Bode a unui sistem necunoscut.	55
5.14	Diagrama Nichols a unui sistem necunoscut.	55
6.1	Sistem de reglare cu reacție negativă unitară	58
6.2	Variatia argumentului pentru sistemul 6.2.a).	59
6.3	Variatia argumentului pentru sistemul 6.2.b)	60

7.1	Criteriul Nyquist simplificat figurat pentru sistemul 7.2.a)	66
7.2	Criteriul Nyquist simplificat figurat pentru sistemul 7.2.b).	67
7.3	Diagramele Bode și Nichols pentru problema 7.3.a)	69
7.4	Diagramele Bode și Nichols pentru problema 7.3.b)	70
8.1	Sistem de reglare cu reacție negativă unitară	74
8.2	Ilustrarea intersecției locului de transfer $H_{des}(j\omega)$ cu cercul de modul constant $M^{dB} = 5.28$	76
8.3	Structura clasică de reglare în buclă închisă cu un grad de libertate și reacție negativă unitară, cu semnalele r, e, u, d_1, d_2, y, n , respectiv funcțiile de transfer în buclă închisă S, T, KS, GS	77
8.4	Estimarea și validarea performanțelor sistemului de la Problema 8.4.a).	80
9.1	Eșantionarea semnalelor de diferite frecvențe	86
9.2	Schema Simulink pentru eșantionarea unui semnal sinusoidal de frecvență variabilă	88
9.3	a) Semnalul de tip <i>Chirp</i> ; b) semnalul eșantionat corect; c) semnalul cu <i>aliasing</i>	88
9.4	<i>Aliasing</i> în cazul eșantionării sistemelor	90
9.5	Efectele utilizării unui număr redus de zecimale în precizia sistemului	91
10.1	Maparea planului s în planul z	96
10.2	Regimurile de funcționare ale unui sistem discret (partea I).	101
10.3	Regimurile de funcționare ale unui sistem discret (partea a II-a).	102
11.1	Maparea planului s în planul z	104
11.2	Schema tipică de reglare a unui proces continuu cu regulator discret.	107
11.3	Locul rădăcinilor pentru sistemul în buclă închisă de la exemplul rezolvat 2 .	108
12.1	Răspunsul în frecvență al unui sistem numeric.	113
12.2	Diagrama Bode a unui filtru Butterworth de tip trece jos.	115
12.3	Maparea poli-zerourii a filtrului eliptic de tip oprește bandă de ordin 16. . . .	116
12.4	Diagrama Bode a filtrului eliptic de tip oprește bandă de ordin 16.	116
13.1	Structura corespunzătoare conexiunii serie a unui sistem de ordinul 2.	119
13.2	Structura corespunzătoare conexiunii paralel a unui sistem de ordinul 2. . . .	121
13.3	Structura corespunzătoare împărțirii infinite pentru $N = 5$	123
14.1	Schema bloc corespunzătoare FCC – Exemplu	133
14.2	Schema bloc corespunzătoare FCO – Exemplu	134
14.3	Schema bloc corespunzătoare FCCo – Exemplu	136
14.4	Schema bloc corespunzătoare FCOB – Exemplu	138
14.5	Modelul matematic al unei axe CNC	139
15.1	Schema de control cu reacție de la stare și prefiltrare	143
15.2	Schema de implementare a unui estimator de stare	145
15.3	Schema de implementare a unei reglari cu reacție de la stările estimate, cu referință nulă (sistem de stabilizare)	146

15.4 Circuitul echivalent al unui motor de curent continuu cu perii	147
16.1 Forma canonica Gilbert pentru exemplul rezolvat	151

LISTĂ TABELE

11.1 Tabelul Jury	105
11.2 Tabelul Jury pentru exemplul rezolvat 1	106
13.1 Conversia continuu-discret în spațiul stărilor	124
13.2 Conversia discret-continuu în spațiul stărilor	124
15.1 Parametrii motorului DC	148

Partea I

Răspunsul în frecvență al sistemelor LTI

Lucrarea 1

Conceptul de răspuns în frecvență. Analiza tipului filtrului

1.1	Răspunsul sistemelor LTI la intrări armonice	18
1.2	Analiza tipului filtrului	19
1.3	Exemplu rezolvat	20
1.4	Analiza tipului filtrului în MATLAB	21

În această lucrare se prezintă conceptul de răspuns în frecvență al sistemelor LTI SISO reprezentate prin model de tip funcție de transfer și se prezintă modalități elementare de deducere a naturii filtrului sistemului pe baza răspunsului la intrări sinusoidale.

1.1 Răspunsul sistemelor LTI la intrări armonice

Răspunsul unui sistem LTI descris prin funcția de transfer $H(s)$ la o intrare armonică de tipul $u(t) = \sin(\omega t)$, a cărei transformată Laplace este $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$, se calculează astfel:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} = y_\ell(t) + y_p(t), \quad (1.1)$$

unde $y_\ell(t)$ este componenta liberă sau tranzitorie, iar $y_p(t)$ este componenta permanentă sau răspunsul forțat. În componenta tranzitorie intervin modurile sistemului și aceasta determină regimul tranzitoriu. Componenta permanentă a unui sistem LTI este dată de:

$$y_p(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega)), \quad (1.2)$$

adică ieșirea este tot o sinusoidă având **aceeași pulsărie**, dar este amplificată și defazată.

- Se spune că ieșirea $y_p(t)$ corespunzătoare pulsăriei $\omega > 0$ este **amplificată** dacă $|H(j\omega)| > 1$, respectiv **atenuată** dacă $|H(j\omega)| < 1$.
- Se spune că ieșirea $y_p(t)$ corespunzătoare pulsăriei $\omega > 0$ este cu **avans de fază** dacă $\angle H(j\omega) > 0$, respectiv cu întârziere de fază dacă $\angle H(j\omega) < 0$.

În Figura 1.1 sunt prezentate atât semnalul de intrare (un semnal sinusoidal de amplitudine 1), cât și semnalul de ieșire. De asemenea, au fost evidențiate amplitudinea semnalului de ieșire și defazajul dintre semnalul de intrare și cel de ieșire, care coincid cu modulul, respectiv faza numarului complex $H(j\omega)$. De remarcat faptul că semnalul de intrare și cel de ieșire au aceeași pulsărie.

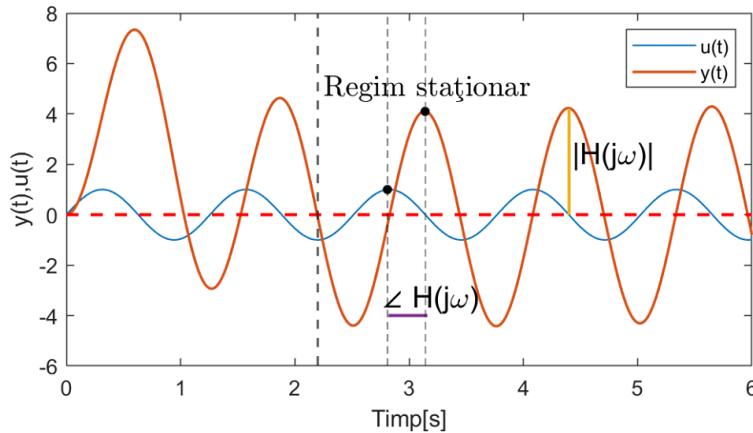


Figura 1.1: Răspunsul unui sistem LTI la o intrare sinusoidală.

Există două criterii pentru alegerea pragurilor semnalelor sinusoidale de intrare considerate tăiate sau trecute la ieșirea unui filtru:

- În electronică se consideră **pragul de -3 [dB]**, echivalent cu atenuarea amplitudinii semnalului de ieșire la valoarea de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ din valoarea amplitudinii semnalului de intrare;

- în ingineria de reglării automate, pentru utilizarea criteriilor de stabilitate în domeniul frecvențial, se consideră pragul de $0[dB]$, motivat de distanța locului de transfer față de punctul critic $-1 + 0j$.

În analiza și proiectarea sistemelor LTI sunt de dorit diagrame care pot cuprinde intervale întregi de frecvențe (sau pulsații). Pe baza reprezentării algebrice, respectiv trigonometrice a numerelor complexe, se disting trei diagrame des utilizate pentru a reprezenta răspunsul în frecvență al sistemelor LTI:

- **diagrama Nyquist** (locul de transfer):

- $H(j\omega) = \operatorname{Re}\{H(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{H(j\omega)\}$;
- $(\operatorname{Re}, \operatorname{Im})$, unde axa Ox reprezintă partea reală, iar axa Oy reprezintă partea imaginată a locului de transfer $H(j\omega)$. **Pulsăția este implicită**;

- **diagrama Bode**:

- $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$;
- $(\omega, |H(j\omega)|^{dB})$ – caracteristica de modul, unde axa Ox reprezintă pulsăția în radiani pe secundă, afișată în **scără logaritmică**, iar axa Oy reprezintă modulul funcției de transfer $H(j\omega)$ în decibeli;
- $(\omega, \angle H(j\omega)[rad])$ – caracteristica de fază, unde axa Ox este pulsăția în radiani pe secundă, afișată în **scără logaritmică**, iar axa Oy este faza funcției de transfer $H(j\omega)$ în radiani sau grade;

- **diagrama Nichols**:

- $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$;
- $(\angle H(j\omega)[rad], |H(j\omega)|^{dB})$, unde axa Ox este faza funcției de transfer $H(j\omega)$ în radiani sau grade, iar axa Oy este modulul funcției de transfer $H(j\omega)$ în decibeli. **Pulsăția este implicită**.

1.2 Analiza tipului filtrului

Se consideră sistemul descris prin funcția de transfer proprie $H(s)$:

$$H(s) = \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{CI=0} = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}, \quad (1.3)$$

având polinoamele $\beta(s)$ și $\alpha(s)$ de grad m și n , respectiv.

Pentru a analiza dacă o intrare armonică de pulsăție dată ω_0 este tăiată sau este lăsată să treacă, putem apela la modelul de tip funcție de transfer. Astfel, putem compara raportul dintre amplitudinea semnalului de intrare și amplitudinea semnalului de ieșire cu valoarea $\sqrt{2}/2$, valoare care corespunde celor $-3 [dB]$ din electronică, i.e. energia semnalului de ieșire este la jumătate din cea a intrării. Așadar:

- dacă $\left| \frac{Y(j\omega_0)}{U(j\omega_0)} \right| = |H(j\omega_0)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, atunci semnalul $u(t) = \sin(\omega_0 t)$ este considerat **trecut**;
- dacă $\left| \frac{Y(j\omega_0)}{U(j\omega_0)} \right| = |H(j\omega_0)| < \frac{\sqrt{2}}{2}$, atunci semnalul $u(t) = \sin(\omega_0 t)$ este considerat **tăiat**.

Pentru a determina tipul filtrului, putem studia comportamentul în zona frecvențelor joase, în zona frecvențelor înalte și, la nevoie, în zona frecvențelor medii. Astfel:

- în zona frecvențelor joase avem: $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|$, cantitate ce trebuie comparată cu $\sqrt{2}/2$;
- în zona frecvențelor înalte avem: $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)|$, cantitate ce trebuie comparată cu $\sqrt{2}/2$.

Dacă una dintre limite este peste valoarea de prag, iar cealalta sub valoarea de prag, atunci natura filtrului poate fi determinată doar pe baza acestora, fiind **filtru trece jos (FTJ)** sau **filtru trece sus (FTS)**. Suplimentar, dacă circuitul taie frecvențele foarte mici și foarte mari, dar trece frecvențe intermediare, acesta se numește **filtru trece bandă (FTB)**. Reciproc, dacă circuitul trece frecvențele foarte mici și foarte mari, dar anulează frecvențe intermediare, acesta se numește **filtru oprește bandă (FOB)**.

1.3 Exemplu rezolvat

Se consideră circuitul RLC paralel din Figura 1.2, având modelul descris prin funcția de transfer (deducerea se face pe baza legilor lui Kirchhoff):

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}. \quad (1.4)$$

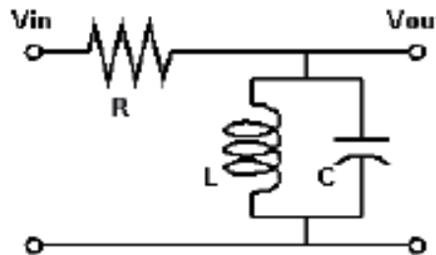


Figura 1.2: Circuit RLC paralel

În baza raționamentului prezentat în secțiunea anterioară avem:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)| = 0, \quad (1.5)$$

ceea ce înseamnă că filtrul ar putea trece doar frecvențe medii. Pentru a verifica dacă acest lucru este posibil, încercăm frecvențele deduse pe baza termenului liber. Astfel, dacă ne uităm la un semnal de pulsăție (i.e., pulsăția naturală a circuitului):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} |H(j\omega)| = 1 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (1.6)$$

ceea ce înseamnă că semnalele cu pulsații cuprinse în jurul acestei valori vor fi trecute, și putem concluziona că avem un filtru care trece bandă (FTB). Dar, analiza propusă este una succintă și incompletă. Tratarea adecvată a acestei probleme se poate realiza prin reprezentări grafice în frecvență.

1.4 Analiza tipului filtrului în MATLAB

Pentru a analiza tipul filtrului în MATLAB pornind de la relația intrare-iesire putem utiliza rutina `tf`, pentru a ne declara funcția de transfer în MATLAB, și putem utiliza rutina `lsim` pentru a simula răspunsul sistemului la o intrare dată. Aceste funcții se apelează astfel:

- `H=tf(num,den)`, unde `num` și `den` sunt numărătorul și, respectiv, numitorul funcției de transfer;
- `y=lsim(H,u,t)`, unde `H` este un obiect de tip funcție de transfer, `u` este semnalul de intrare și `t` este timpul de simulare.

În cazul sistemului din Figura 1.2 considerăm un rezistor având rezistență $R = 2.2[\Omega]$, o bobină având impedanță $L = 0.1[mH]$ și un condensator având capacitatea $C = 4.7[\mu F]$. Folosind fișierul sursă descris mai jos, putem obține răspunsul la intrare sinusoidală pentru trei pulsații relevante: pulsația medie ω_0 , împreună cu o decadă în stânga și una în dreapta acestei pulsații. Răspunsurile sistemului la intrările descrise sunt reprezentate pe 10 perioade în Figura 1.3.

```

1 R = 2.2;
2 L = 1e-4;
3 C = 4.7e-6;
4
5 % declararea functiei de transfer
6 H = tf([1/R/C 0],[1 1/R/C 1/L/C]);
7
8 % valoarea pulsatiei centrale
9 w0 = 1/sqrt(L*C);
10 % raspunsul sistemului la intrare sinusoidală de pulsatie w0/10,
      % w0, w0*10 (o decada in stanga si o decada in dreapta pulsatiei
      % centrale)
11
12 % simulare pe 10 perioade
13 T1 = 2*pi/(w0/10);
14 t1 = 0:T1/100:10*T1;
15 u1 = sin(w0/10*t1);
16 y1 = lsim(H,u1,t1);
17
18 T2 = 2*pi/w0;
19 t2 = 0:T2/100:10*T2;
20 u2 = sin(w0*t2);
```

```

21 y2 = lsim(H,u2,t2);
22
23 T3 = 2*pi/(10*w0);
24 t3 = 0:T3/100:10*T3;
25 u3 = sin(w0*10*t3);
26 y3 = lsim(H,u3,t3);
27
28 figure
29 subplot(311); plot(t1,y1,'LineWidth',1.5); hold on
30 yline(sqrt(2)/2,'r','LineWidth',1.5), ylim([-1,1])
31 title('Raspunsul la intrarea u(t)=sin(w_0/10*t)')
32 xlabel('Timp [s]'), ylabel('u_c [V]')
33
34 subplot(312); plot(t2,y2,'LineWidth',1.5); hold on
35 yline(sqrt(2)/2,'r','LineWidth',1.5), ylim([-1,1])
36 title('Raspunsul la intrarea u(t)=sin(w_0*t)')
37 xlabel('Timp [s]'), ylabel('u_c [V]')
38
39 subplot(313); plot(t3,y3,'LineWidth',1.5); hold on
40 yline(sqrt(2)/2,'r','LineWidth',1.5), ylim([-1,1])
41 title('Raspunsul la intrarea u(t)=sin(w_0*10*t)')
42 xlabel('Timp [s]'), ylabel('u_c [V]')

```

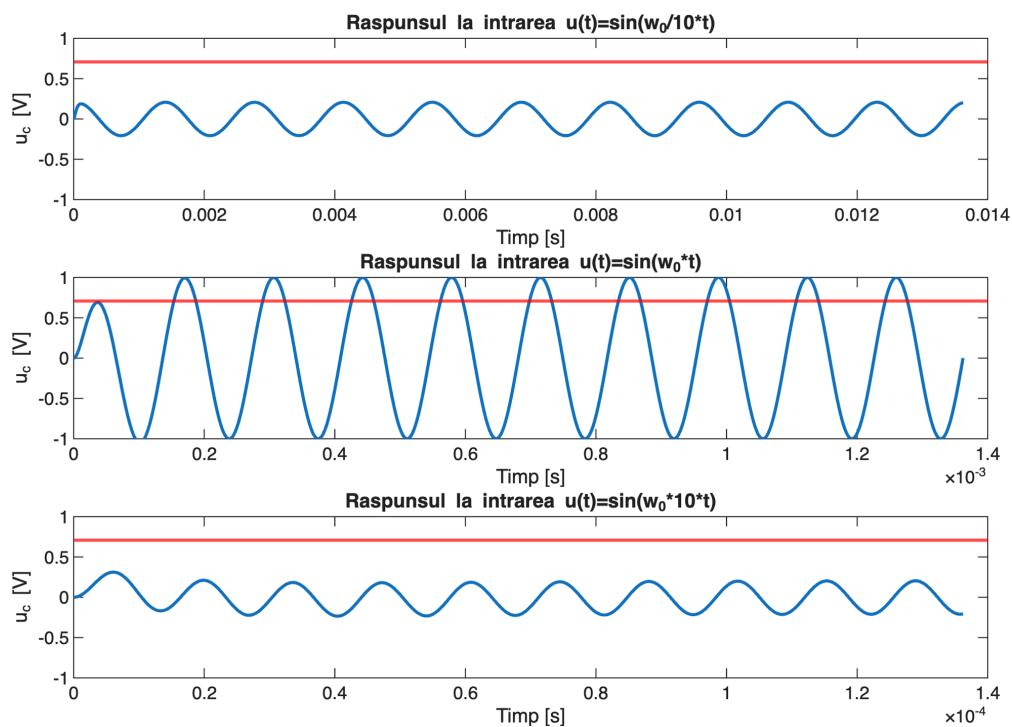


Figura 1.3: Simularea răspunsului la intrare sinusoidală pentru evidențierea tipului filtrului. Se remarcă suplimentar pragul de $\sqrt{2}/2 \approx 0.707$ afișat în culoarea roșie.

Lucrarea 2

Trasarea și interpretarea diagramei Nyquist

2.1	Trasarea diagramei Nyquist	24
2.2	Probleme	24
2.3	Interpretarea diagramei Nyquist	26
2.4	Trasarea Diagramei Nyquist în MATLAB	27
2.5	Determinarea naturii filtrului	27

În această lucrare se prezintă modalități de trasare a diagramei Nyquist pe foaie, respectiv utilizând mediul MATLAB pentru sisteme de tip LTI SISO descrise prin funcții de transfer. Suplimentar, se prezintă proprietăți ale diagramei Nyquist și interpretarea acesteia pentru a deduce componenta permanentă a ieșirii în cazul unei intrări sinusoidale, respectiv natura filtrului sistemului.

2.1 Trasarea diagramei Nyquist

Pentru trasarea diagramei Nyquist a unei funcții de transfer raționale $H(s)$ se recomandă următorii pași:

1. determinarea părților reale și imaginare în funcție de variabila $j\omega$:

$$H(j\omega) = \operatorname{Re}\{H(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{H(j\omega)\}. \quad (2.1)$$

2. determinarea capătului de frecvență joasă (CFJ) în planul complex:

$$\text{CFJ : } \lim_{\omega \rightarrow 0, \omega > 0} H(j\omega) = x_1 + jy_1, \quad x_1, y_1 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}. \quad (2.2)$$

3. determinarea capătului de frecvență înaltă (CFI) în planul complex:

$$\text{CFI : } \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = x_2 + jy_2, \quad x_2, y_2 \in \overline{\mathbb{R}}. \quad (2.3)$$

4. determinarea intersecțiilor cu axele de coordonate:

- (a) intersecția cu axa reală prin rezolvarea ecuației:

$$\operatorname{Im}\{H(j\omega)\} = 0, \quad \omega > 0, \omega \neq \infty. \quad (2.4)$$

În cazul în care ecuația anterioară prezintă soluții ω^* convenabile, atunci intersecțiile se vor găsi în punctele $(\operatorname{Re}\{H(j\omega^*)\}, 0)$ din planul complex.

- (b) intersecția cu axa imaginară prin rezolvarea ecuației:

$$\operatorname{Re}\{H(j\omega)\} = 0, \quad \omega > 0, \omega \neq \infty. \quad (2.5)$$

În cazul în care ecuația anterioară prezintă soluții ω^* convenabile, atunci intersecțiile se vor găsi în punctele $(0, \operatorname{Im}\{H(j\omega^*)\})$ din planul complex

5. trasarea diagramei pornind din CFJ, urmărind intersecțiile cu axele de coordonate, ajungând la CFI. De urmărit la pașii 2 și 3 dacă partea reală sau imaginară domină pentru a reprezenta corect direcțiile pe grafic.

2.2 Probleme

Să se traseze și să se interpreteze diagrama Nyquist pentru următoarele funcții de transfer:

$$2.2.a) \quad H(s) = \frac{8}{s+5}; \quad 2.2.c) \quad H(s) = \frac{s+0.5}{s(s^2+s+1)};$$

$$2.2.b) \quad H(s) = \frac{50}{s^2+5s+6}; \quad 2.2.d) \quad H(s) = \frac{40s+4}{6s^2+5s+1};$$

$$2.2.e) \ H(s) = \frac{s^2}{0.3s^2 + s + 1};$$

$$2.2.k) \ H(s) = \frac{s - 7}{s(s + 2)};$$

$$2.2.f) \ H(s) = \frac{K}{s^n}, \ K > 0, \ n \in \{0, 1, 2, \dots\};$$

$$2.2.l) \ H(s) = \frac{-s + 30}{s(-s + 4)};$$

$$2.2.g) \ H(s) = \frac{125}{s^2 + 2s + 25};$$

$$2.2.m) \ H(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 2};$$

$$2.2.h) \ H(s) = \frac{125(s + 1)}{s^2 + 5s + 25};$$

$$2.2.n) \ H(s) = \frac{-4(10s + 1)}{(3s + 1)(-2s + 1)};$$

$$2.2.i) \ H(s) = \frac{5s^2 + 2s + 1}{s(s + 1)^2};$$

$$2.2.o) \ H(s) = \frac{5(-4s + 1)}{s(s + 8)}.$$

$$2.2.j) \ H(s) = \frac{s + 1}{s(s + 20)}.$$

$$2.2.p) \ H(s) = \frac{s + 5}{s^2(s + 2)};$$

Rezolvare 2.2.c): Conform algoritmului prezentat în secțiunea anterioară rezultă:

1. determinarea părților reale și imaginare în funcție de variabila $j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 0.5}{j\omega(-\omega^2 + j\omega + 1)} = \frac{0.5 - \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} + j \cdot \frac{-0.5 - 0.5\omega^2}{\omega((1 - \omega^2)^2 + \omega^2)}. \quad (2.6)$$

2. determinarea capătului de frecvență joasă (CFJ) în planul complex:

$$\text{CFJ} : \lim_{\omega \rightarrow 0, \omega > 0} H(j\omega) = 0.5 - \infty j \quad (2.7)$$

3. determinarea capătului de frecvență înaltă (CFI) în planul complex:

$$\text{CFI} : \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = -0 - 0j, \quad (2.8)$$

unde partea reală se obține dintr-un raport de polinoame de gradele 2 și 4 (echivalent cu 3 și 5), iar partea imaginară se obține dintr-un raport de polinoame de gradele 2 și 5. Prin urmare, pentru $\omega \rightarrow \infty$ partea imaginară tinde la zero înaintea părții reale, ceea ce rezultă că locul de transfer tinde spre origine tangent la **axa reală** negativă.

4. determinarea intersecțiilor cu axele de coordonate:

- (a) intersecția cu axa reală prin rezolvarea ecuației:

$$\text{Im}\{H(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow -0.5 - 0.5\omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 1 = 0 \Rightarrow \nexists \omega > 0, \quad (2.9)$$

rezultând că nu există intersecții cu axa reală.

- (b) intersecția cu axa imaginară prin rezolvarea ecuației:

$$\text{Re}\{H(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = 0.5 \Rightarrow \omega = \sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2} [\text{rad/s}]. \quad (2.10)$$

Rezultă un punct de intersecție în $\left(0, \operatorname{Im} \left\{ H \left(j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} \right) = (0, -\sqrt{2})$, pentru $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} [\text{rad/s}]$.

5. trasarea diagramei pornind din CFJ, urmărind intersecțiile cu axele de coordonate, ajungând la CFÎ, rezultând graficul din Figura 2.1.

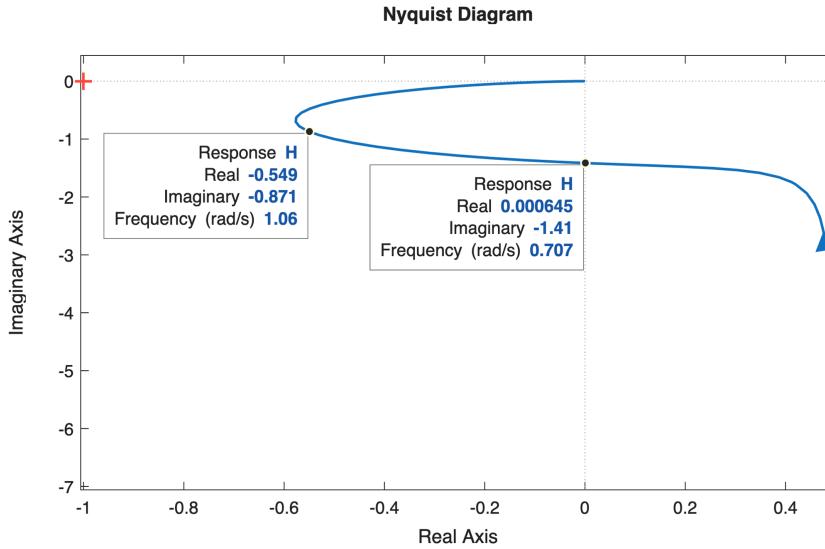


Figura 2.1: Diagrama Nyquist pentru sistemul 2.2.c), cu evidențierea citirilor de la pulsăriile $\omega = 0.707 [\text{rad/s}]$ și $\omega = 1.06 [\text{rad/s}]$.

2.3 Interpretarea diagramei Nyquist

Conform axelor de coordonate ale diagramei Nyquist, **pulsatia este implicită**.

Pentru a exemplifica interpretarea diagramei Nyquist se consideră două puncte arbitrară precum în Figura 2.1:

- Pentru pulsăria $\omega = 1.06$, se citesc părțile reală $\Re = -0.549$ și imaginară $\Im = -0.871$ corespunzătoare locului de transfer $H(j \cdot 1.06)$, ceea ce denotă că pentru semnalul de intrare $u(t) = \sin(1.06t)$, componenta permanentă a ieșirii devine:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \sqrt{(-0.549)^2 + (-0.871)^2} \cdot \sin(1.06t + \operatorname{atan2}(-0.871, -0.549)) \\ &= 1.0296 \cdot \sin(1.06t - 2.1332), \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că y_p este puțin amplificat, respectiv cu întârziere de fază (vizibil cadranul III).

- Pentru pulsăria $\omega = \sqrt{2}/2 \approx 0.707$, se citesc părțile reală $\Re = 0$ și imaginară $\Im = -\sqrt{2}$ corespunzătoare locului de transfer $H(j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})$, ceea ce denotă că pentru semnalul de intrare $u(t) = \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}t)$, componenta permanentă a ieșirii devine:

$$y_p(t) = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{2})^2} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t + \operatorname{atan2}(-\sqrt{2}, 0)\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\pi}{2}\right),$$

ceea ce înseamnă că y_p este amplificat, respectiv cu întârziere de fază. Acest caz este intersecția cu axa imaginară.

2.4 Trasarea Diagramei Nyquist în MATLAB

În MATLAB există funcția `nyquist`, care se poate apela astfel:

- `nyquist(SYS)`: apare graficul automat;
- `nyquist(SYS, WMIN, WMAX)`: apare graficul automat trasat pentru domeniul $\omega \in [WMIN, WMAX]$;
- `[RE, IM] = nyquist(SYS, W)`: se returnează vectorii părților reale și imaginare ale locului de transfer pentru pulsăriile din vectorul W specificat;
- `[RE, IM, W] = nyquist(SYS)`: se returnează vectorii părților reale și imaginare ale locului de transfer pentru pulsăriile din vectorul W dedus automat.

Observație: Calculele, respectiv trasarea diagramei se pot efectua și pentru pulsări negative, caz în care graficele pentru domeniul negativ și cel pozitiv devin simetrice față de axa reală. Funcția `nyquist` din MATLAB trasează graficul implicit și pentru domeniul negativ, respectiv poate fi înălțurat debifând opțiunea print-un *click* dreapta → **Show** → **Negative frequencies**, conform Figurii 2.2.

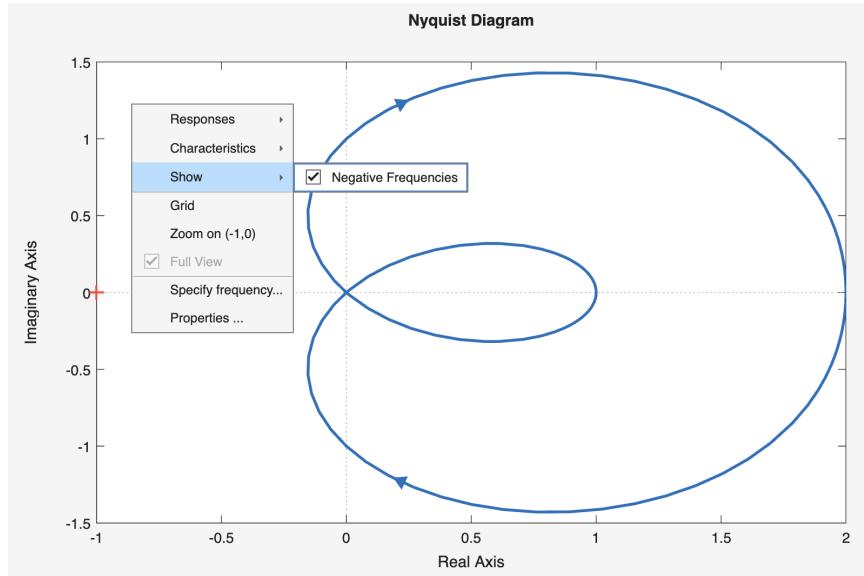


Figura 2.2: Opțiunea de dezactivare a afișării pulsărilor negative.

2.5 Determinarea naturii filtrului

Pentru a determina natura filtrului folosind diagrama Nyquist ne orientăm după cercul unitate (cea ce implică pragul de valoarea 1). Dacă punctul corespunzător pulsării ω este

în interiorul cercului unitate, semnalul este considerat tăiat, altfel este considerat trecut. Tot cu ajutorul intersecțiilor cu cercul unitate se poate deduce și banda de trecere. În MATLAB acest lucru se poate face folosind **Characteristics** → **Minimum Stability Margins**, precum în Figura 2.3.

Pentru circuitul cu locul de transfer din Figura 2.3 reiese faptul că este un filtru trece jos cu **banda de trecere** $\omega \in (0, 1.41]$ [rad/s], deoarece vectorii din origine la locul de transfer $H(j\omega)$ se găsesc în afara cercului unitate (i.e., amplitudinea sinusului de la intrare este amplificată la ieșire) pentru acele valori ale pulsărilor.

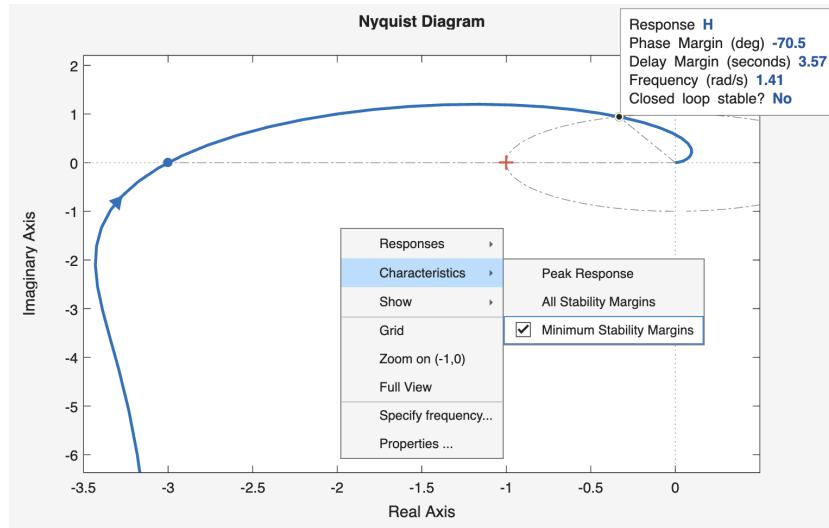


Figura 2.3: Afisarea cercului unitate pe diagrama Nyquist.

Pentru circuitul cu locul de transfer din Figura 2.4 reiese faptul că este un filtru trece bandă cu **banda de trecere** $\omega \in [0.457, 2.2]$ [rad/s].

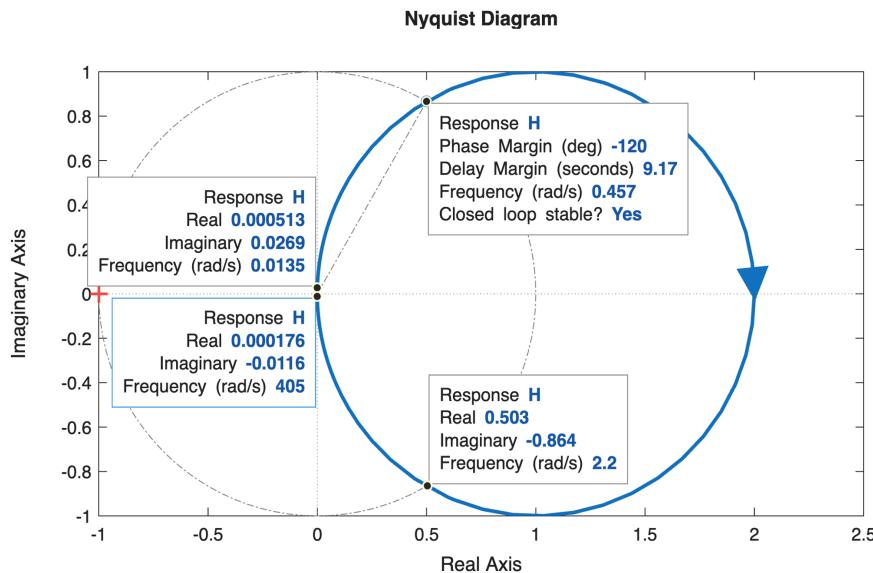


Figura 2.4: Răspunsul în frecvență al unui circuit de tip filtru trece bandă.

Lucrarea 3

Trasarea și interpretarea diagramei Bode

3.1 Aproximarea diagramei Bode prin asymptote	30
3.2 Probleme	32
3.3 Interpretarea diagramei Bode	34
3.4 Trasarea diagramei Bode în MATLAB	35

În această lucrare se prezintă modalități de trasare a diagramei Bode pe foaie, respectiv utilizând mediul MATLAB pentru sisteme de tip LTI SISO descrise prin funcții de transfer. Suplimentar, se prezintă proprietăți ale diagramei Bode și interpretarea acesteia pentru a deduce componenta permanentă a ieșirii în cazul unei intrări sinusoidale.

3.1 Aproximarea diagramei Bode prin asimptote

O funcție de transfer poate fi scrisă ca raport de polinoame date sub formă de produse de termeni de gradul I sau II. Se evidențiază astfel singularitățile reale, respectiv complex conjugate:

$$H(s) = \frac{K}{s^p} \cdot \frac{\prod \left(\overset{\circ}{T}_i s + 1 \right) \prod \left(\left(\frac{s}{\overset{\circ}{\omega}_{n,i}} \right)^2 + \frac{2\zeta_i}{\overset{\circ}{\omega}_{n,i}} s + 1 \right)}{\prod \left(\hat{T}_j s + 1 \right) \prod \left(\left(\frac{s}{\hat{\omega}_{n,j}} \right)^2 + \frac{2\hat{\zeta}_j}{\hat{\omega}_{n,j}} s + 1 \right)}. \quad (3.1)$$

Prin utilizarea de aproximări ale modului și fazei pentru termenii de ordinul I și II se pot obține aproximări ale modului și fazei pentru orice funcție de transfer. Aceste aproximări introduc pe modul erori între ± 3 [dB], respectiv ± 6 [dB] în jurul pulsărilor de frângere.

Caracteristica de modul a funcției de transfer se trasează în decibeli, ceea ce oferă fiecărui termen de tip pol, zero sau factor de proporționalitate un efect aditiv. O cantitate $X > 0$ se transformă în decibeli prin următoarea formulă de legătură:

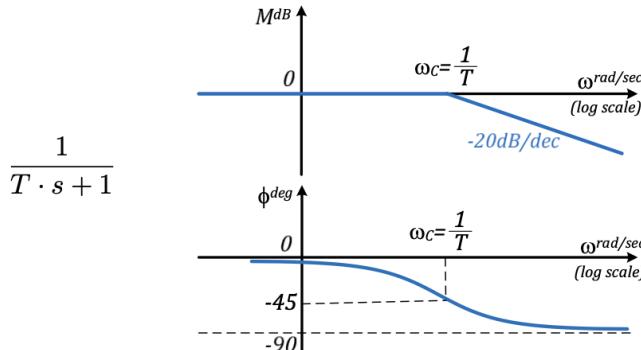
$$X^{dB} = 20 \lg X \quad \Leftrightarrow \quad X = 10^{\frac{X^{dB}}{20}}. \quad (3.2)$$

Pentru componente din structura generală (3.1), caracteristica de modul se calculează prin formula:

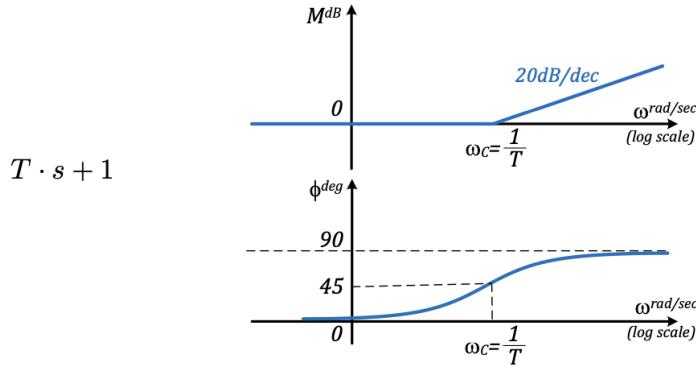
$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^{dB} &= |K|^{dB} + \sum 20 \lg \left| \overset{\circ}{T}_i \omega j + 1 \right| + \sum 20 \lg \left| \left(\frac{j\omega}{\overset{\circ}{\omega}_{n,i}} \right)^2 + \frac{2\zeta_i}{\overset{\circ}{\omega}_{n,i}} j\omega + 1 \right| \\ &\quad - 20p \lg \omega - \sum 20 \lg \left| \hat{T}_j \omega j + 1 \right| - \sum 20 \lg \left| \left(\frac{j\omega}{\hat{\omega}_{n,j}} \right)^2 + \frac{2\hat{\zeta}_j}{\hat{\omega}_{n,j}} j\omega + 1 \right|, \end{aligned}$$

fiind ușor trasată pe foaie pe baza următoarelor aproximări:

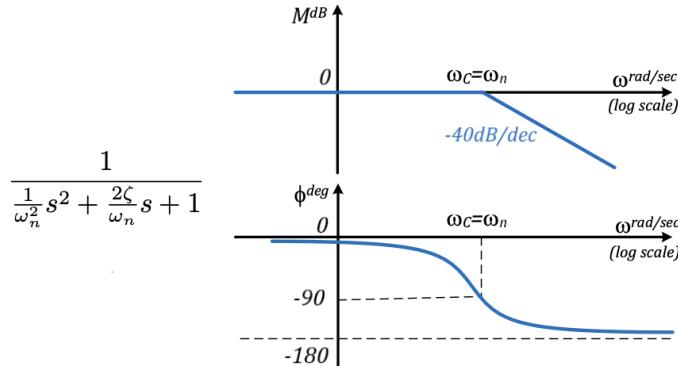
- pol real și negativ, $\frac{1}{Ts+1}$, cu modulul o dreaptă cu panta de 0 [dB] până la pulsărea de frângere $\omega_f = \frac{1}{T}$, urmată de o pantă de -20 [dB/dec]; introduce un defazaj în domeniul $(0^\circ, -90^\circ)$;



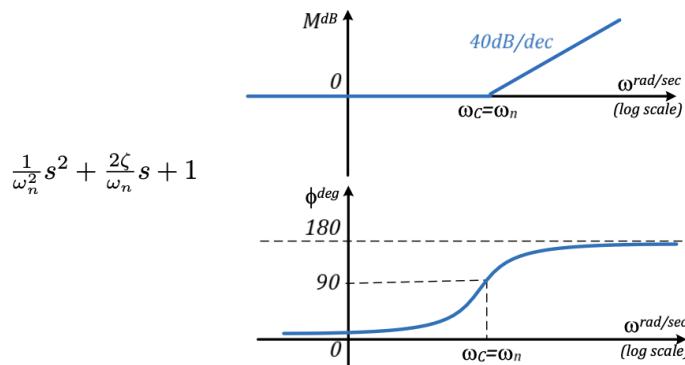
- zerou real și negativ, $Ts + 1$, cu modulul o dreaptă cu panta de 0 [dB] până la pulsăția de frângere $\omega_f = \frac{1}{T}$, urmată de o pantă de $+20$ [dB/dec]; introduce un defazaj în domeniul $(0^\circ, +90^\circ)$.



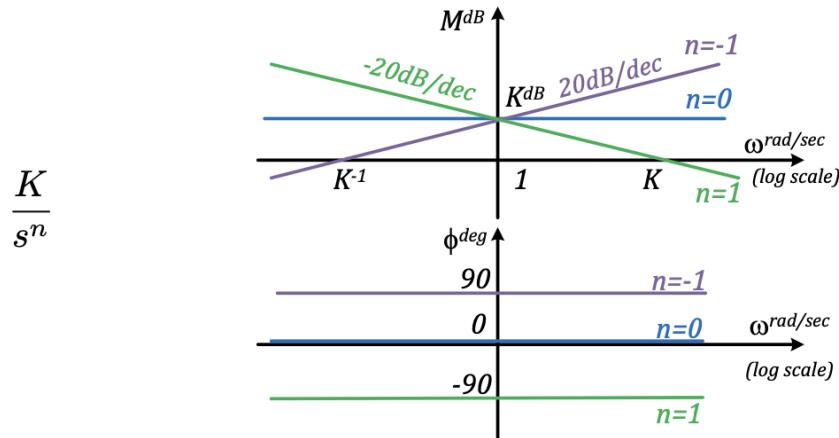
- pereche de poli complex conjugăți cu partea reală negativă, $\frac{1}{(\frac{s}{\omega_n})^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$, cu modulul o dreaptă cu panta de 0 [dB] până la pulsăția de frângere $\omega_f = \omega_n$, urmată de o pantă de -40 [dB/dec]; introduce un defazaj în domeniul $(0^\circ, -180^\circ)$.



- pereche de zerouri complex conjugate cu partea reală negativă, $\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1$, cu modulul o dreaptă cu panta de 0 [dB] până la pulsăția de frângere $\omega_f = \omega_n$, urmată de o pantă de $+40$ [dB/dec]; introduce un defazaj în domeniul $(0^\circ, +180^\circ)$.



- pol în origine, $\frac{1}{s}$, cu modulul o dreaptă cu panta de $-20 [dB/dec]$ și care intersectează axa pulsațiilor în pulsăția “de frângere” $\omega_f = 1 [rad/s]$; introduce un defazaj constant de -90° ;
- zerou în origine, s , cu modulul o dreaptă cu panta de $+20 [dB/dec]$ și care intersectează axa pulsațiilor în pulsăția “de frângere” $\omega_f = 1 [rad/s]$; introduce un defazaj constant de $+90^\circ$.



Pentru **caracteristica de fază** se recomandă calculul defazajelor funcției de transfer pentru o serie de pulsății reprezentative, pornind de la formula (3):

$$\angle H(j\omega) = \angle K + \sum \angle \left(\hat{T}_i \omega j + 1 \right) + \sum \angle \left(\left(\frac{j\omega}{\hat{\omega}_{n,i}} \right)^2 + \frac{2\zeta_i}{\hat{\omega}_{n,i}} j\omega + 1 \right) \\ - p \cdot \frac{\pi}{2} - \sum \angle \left(\hat{T}_j \omega j + 1 \right) - \sum \angle \left(\left(\frac{j\omega}{\hat{\omega}_{n,j}} \right)^2 + \frac{2\hat{\zeta}_j}{\hat{\omega}_{n,j}} j\omega + 1 \right).$$

Pentru calculul corect al argumentului unui număr complex $z = x + jy$, se recomandă funcția `atan2(y,x)` (atenție la ordinea argumentelor!), care se definește pe baza cercului trigonometric în felul următor:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \text{atan}(\frac{y}{x}), & \text{if } x > 0 \text{ and } y \geq 0 \text{ (QI)}, \\ \pi - \text{atan}(|\frac{y}{x}|), & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0 \text{ (QII)}, \\ \pi + \text{atan}(|\frac{y}{x}|), & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0 \text{ (QIII)}, \\ 2\pi - \text{atan}(|\frac{y}{x}|), & \text{if } x > 0 \text{ and } y < 0 \text{ (QIV)}, \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0, \\ \text{undefined}, & \text{if } x = y = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2 Probleme

Să se traseze și să se interpreze diagrama Bode pentru următoarele funcții de transfer:

$$3.2.a) \ H(s) = \frac{10}{s+5};$$

$$3.2.h) \ H(s) = \frac{125}{s^2 + 2s + 25};$$

$$3.2.b) \ H(s) = \frac{10}{(s+5)(s+60)};$$

$$3.2.i) \ H(s) = \frac{125(s+1)}{s^2 + 5s + 25};$$

$$3.2.c) \ H(s) = 2 \frac{s+20}{s+70};$$

$$3.2.j) \ H(s) = \frac{5s^2 + 2s + 1}{s(s+1)^2};$$

$$3.2.d) \ H(s) = \frac{s+0.5}{s(s^2+s+1)};$$

$$3.2.k) \ H(s) = \frac{s+5}{s^2+2}.$$

$$3.2.e) \ H(s) = \frac{40s+4}{6s^2+5s+1};$$

$$3.2.l) \ H(s) = \frac{s+1}{s(s+20)};$$

$$3.2.f) \ H(s) = \frac{s^2}{0.3s^2+s+1};$$

$$3.2.m) \ H(s) = \frac{s^2}{0.3s^2+s+1};$$

$$3.2.g) \ H(s) = \frac{K}{s^n}, \ K > 0, n \in \{0, 1, 2, \dots\};$$

$$3.2.n) \ H(s) = \frac{100}{s(s+5)(s+30)};$$

Rezolvare 3.2.c):

1. se aduce funcția de transfer la **forma standard (normalizată)** pentru termeni de ordinul I și II:

$$H(s) = \frac{4}{7} \frac{\frac{1}{20}s+1}{\frac{1}{70}s+1} \quad (3.4)$$

și se evidențiază trei componente: (I) factorul de proporționalitate $K = 4/7$, (II) polinomul zeroului $(\frac{1}{20}s + 1)$, (III) polinomul polului $(\frac{1}{70}s + 1)$;

2. se ordonează crescător pulsăriile de interes, menționându-se după fiecare pulsărie panta dreptei cu care va fi modificat modulul: $\omega_1 = 20[\text{rad/s}] (+20 \text{ dB/dec})$, $\omega_2 = 70 [\text{rad/s}] (-20 \text{ dB/dec})$;
3. se stabilește domeniul de reprezentare al diagramei, prin stabilirea unei decade la stânga și a unei decade la dreapta față de cea mai mică, respectiv cea mai mare dintre pulsăriile de interes (cele provenite din integratoare/derivatoare pot fi ignorate, deoarece nu se schimbă panta în acele cazuri): $\omega \in [10^0, 10^3]$;
4. se plasează pulsăriile de interes pe axele Ox ale celor două caracteristici, în **scără logaritmică**. Pentru a deduce cu ușurință rapoartele pentru plasarea pulsărilor într-o anumită decadă se poate folosi următorul tabel:

De exemplu, pulsăria de $20 [\text{rad/s}]$ se plasează la 30% din decada $[10, 100]$, iar $700 [\text{rad/s}]$ se plasează la 85% din decada $[10^2, 10^3]$.

5. se calculează aproximări ale modulului conform termenilor din structura funcției de transfer:

ω	$\lg \omega$	$\approx \lg \omega$
1	0	0
2	0.3010	0.30
3	0.4771	0.50
4	0.6021	0.60
5	0.6990	0.70
6	0.7782	0.80
7	0.8451	0.85
8	0.9031	0.90
9	0.9542	0.95

- de la $\omega = 1$ la $\omega = 20$ [rad/s], modulul este determinat doar de factorul de proporționalitate transformat în decibeli: $20 \lg \frac{4}{7} \approx 20(0.6 - 0.85) = -5$ dB;
- de la $\omega = 20$ la $\omega = 70$ [rad/s] apare o dreaptă cu panta de $+20$ dB/dec (contribuția zeroului real și negativ), care în 70 [rad/s] ajunge la o amplificare de $-5dB + 20dB \cdot (0.85 - 0.3) = -5dB + 20dB \cdot 0.55 = 6$ dB;
- după $\omega = 70$ [rad/s], panta se modifică de la $+20$ dB la $+20 - 20 = 0$ dB, iar modulul “rămâne” în $+6$ dB pentru întreg domeniul de pulsații pozitive mai mari decât 70 [rad/s];

6. se calculează defazajul funcției de transfer:

$$\angle H(j\omega) = \angle \frac{4}{7} + \angle \left(\frac{1}{20} \omega j + 1 \right) - \angle \left(\frac{1}{70} \omega j + 1 \right) = 0 + \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{20} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{70} \right), \quad (3.5)$$

pentru $\omega \in \{1, 2, 7, 20, 70, 200, 700, 1000\}$, de exemplu.

Diagrama finală rezultată din MATLAB, respectiv pe baza calculelor menționate în acești pași se observă în Figura 3.1.

3.3 Interpretarea diagramei Bode

Dintre cele trei diagrame studiate pentru reprezentări frecvențiale ale sistemelor LTI, diagrama Bode este cea mai explicită și ligibilă din punct de vedere a reprezentării componentei permanente a ieșirii pentru intrări sinusoidale. Pentru o pulsație $\omega > 0$ reprezentată pe diagramă, răspunsul $y_p(t)$ al sistemului $H(s)$ la intrarea $u(t) = \sin(\omega t)$ poate fi dedus printr-o citire la verticala corespunzătoare.

Spre exemplificare, pentru sistemul de la subpunctul 3.2.c), conform Figurii 3.1:

- Pentru intrarea $u(t) = 0.01 \cdot \sin(t)$ se pot deduce $\omega = 1 = 10^0$ [rad/s], $M^{dB} = -5$, $\varphi \approx 2^\circ = 0.0349$ [rad], deci:

$$y_p(t) = 0.01 \cdot 10^{\frac{-5}{20}} \cdot \sin(t + 0.0349) = 0.0056 \cdot \sin(t + 0.0349),$$

ceea ce denotă că semnalul de ieșire este atenuat și cu (un nesemnificativ) avans de fază.

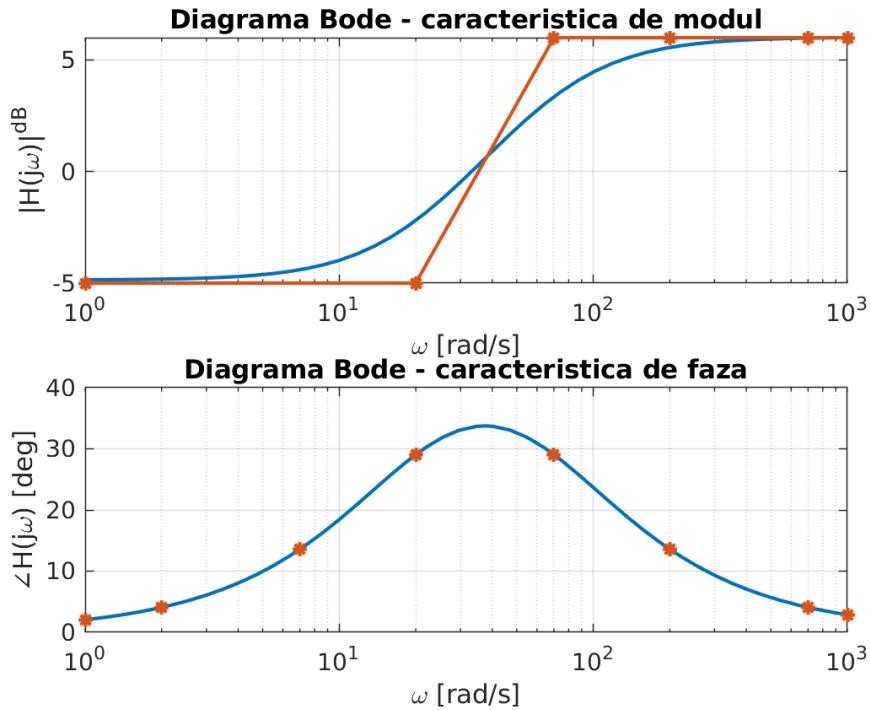


Figura 3.1: Diagrama Bode a sistemului 3.2.c)

- Pentru intrarea $u(t) = 3 \cdot \sin(20t)$ se pot deduce $\omega = 20$ [rad/s], $M^{dB} = -5$ (în trasarea cu asimptote, având abatere de 3 [dB] față de caracteristica reală la pulsăția de frângere), $\varphi \approx 30^\circ = 0.5236$ [rad], prin urmare:

$$y_p(t) = 3 \cdot 10^{-\frac{5}{20}} \cdot \sin(20t + 0.5236) = 1.6870 \cdot \sin(20t + 0.5236),$$

ceea ce denotă că semnalul de ieșire este atenuat și cu avans de fază.

- Pentru intrarea $u(t) = \sin(300t)$ se pot deduce $\omega = 300$ [rad/s], $M^{dB} = 5$, $\varphi \approx 10^\circ = 0.1745$ [rad], de unde rezultă:

$$y_p(t) = 10^{\frac{5}{20}} \cdot \sin(300t + 0.1745) = 1.7783 \cdot \sin(300t + 0.1745),$$

ceea ce denotă că semnalul de ieșire este amplificat și cu avans de fază.

- Sistemul atenuează sinusoidele de pulsății $\omega \in [0, \approx 35]$ [rad/s] ($M^{dB} < 0$), respectiv amplifică sinusoidele de pulsății $\omega \in [\approx 35, \infty]$ [rad/s] ($M^{dB} \geq 0$)).
- Sistemul este cu avans de fază pe întreg domeniul $\omega \in [0, \infty)$, deoarece $\varphi > 0$ indiferent de pulsăție.

3.4 Trasarea diagramei Bode în MATLAB

În MATLAB există funcția `bode`, care se poate apela astfel:

- `bode(SYS)`: apare graficul automat;
- `bode(SYS,WMIN,WMAX)`: apare graficul automat trasat pentru domeniul $\omega \in [WMIN, WMAX]$;
- `[MAG,PH] = bode(SYS,W)`: se returneaza vectorii modulelor și ai fazelor funcției de transfer pentru pulsațiile din vectorul W specificat;
- `[MAG,PH,W] = bode(SYS)`: se returneaza vectorii modulelor și ai fazelor funcției de transfer pentru pulsațiile din vectorul W dedus automat.

Pentru generarea vectorului de pulsații există două funcții utile predefinite în MATLAB:

- `X = linspace(X1, X2, N)`: generează un vector X cu N puncte echidistante între $X1$ și $X2$; de exemplu, `linspace(1,10,10)` generează mulțimea $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;
- `X = logspace(X1, X2, N)`: generează un vector X cu N puncte logaritmic echidistante între 10^{X1} și 10^{X2} ; de exemplu `logspace(0,1,10)` generează mulțimea $\{1, 1.29, 1.66, 2.15, 2.78, 3.59, 4.64, 5.99, 7.74, 10.00\}$.

Pentru afișarea graficelor arbitrarie în scală logaritmică, există în MATLAB următoarele alternative la funcția `plot(x,y)`:

- `semilogx(x,y)`: afișează coordonatele pe axele Ox și Oy utilizând scala logaritmică în baza 10 pentru axa Ox , respectiv scala liniară pentru axa Oy .
- `semilogy(x,y)`: afișează coordonatele pe axele Ox și Oy utilizând scala liniară pentru axa Ox , respectiv scala logaritmică în baza 10 pentru axa Oy .
- `loglog(x,y)`: afișează coordonatele pe axele Ox și Oy utilizând scala logaritmică în baza 10 pentru ambele seturi de coordonate.

Lucrarea 4

Sisteme cu timp mort. Sisteme de fază neminimă

4.1 Breviar teoretic	38
4.2 Trasarea diagramei Nyquist .	39
4.3 Trasarea diagramei Bode . .	40
4.4 Probleme propuse	43

În această lucrare se definesc sistemele cu timp mort și de fază neminimă și se prezintă caracteristicile acestora din perspectiva răspunsului în frecvență al sistemelor LTI. Se vor ilustra aspectele suplimentare care apar în trasarea diagramei Nyquist și Bode.

4.1 Breviar teoretic

Definiția 4.1.1: Sistem cu timp mort

Un sistem cu timp mort este descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = H'(s) \cdot e^{-\tau_m s},$$

având întârzierea de valoare $\tau_m > 0$ secunde, unde $H'(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$ este partea rațională.

Spre deosebire de partea rațională $H'(s)$, având ordinul finit $n = \deg \alpha(s)$, timpul mort este un sistem de ordin infinit. El poate fi aproimat printr-un ordin finit prin așa-numita familie de aproximății Padé [Skogestad și Postlethwaite 2005]. În mediul MATLAB există funcția `[num,den] = pade(T,N)`, care returnează funcția de transfer $H = tf(num,den)$ care aproximează timpul mort de valoarea T secunde cu ordinul N. Formula analitică cea mai des întâlnită este cea a aproximăției de ordinul I:

$$e^{-\tau_m s} = \frac{e^{-\frac{\tau_m}{2}s}}{e^{\frac{\tau_m}{2}s}} = \frac{1 - \frac{\tau_m}{2}s + \frac{(\tau_m/2)^2}{2!}s^2 - \dots}{1 + \frac{\tau_m}{2}s + \frac{(\tau_m/2)^2}{2!}s^2 + \dots} \approx \frac{1 - \frac{\tau_m}{2}s}{1 + \frac{\tau_m}{2}s}. \quad (4.1)$$

Pentru a studia răspunsul în frecvență al timpului mort, se pune în evidență forma sa trigonometrică:

$$e^{-\tau_m j\omega} = e^{j(-\tau_m \omega)} = \cos(\tau_m \omega) - j \sin(\tau_m \omega), \quad \omega \geq 0, \quad (4.2)$$

de unde rezultă faptul că:

- $|e^{-j\tau_m \omega}| = 1, \quad \forall \omega \geq 0;$
- $\angle(e^{-j\tau_m \omega}) = -\arctan\left(\frac{\cos(\tau_m \omega)}{\sin(\tau_m \omega)}\right) = -\tau_m \omega, \quad \forall \omega \geq 0.$

În MATLAB, o funcție de transfer cu timp mort $tm > 0$ se declară utilizând sintaxa:

```
H = tf(num,den,'iodelay',tm)
```

Definiția 4.1.2: Sistem de fază neminimă

Un sistem este de fază neminimă dacă există cel puțin o singularitate în semiplanul drept sau are factorul de proporționalitate negativ.

Conform denumirii, aceste componente îndeplinesc o anumită caracteristică de modul (cea a sistemului echivalent de fază minimă), dar inducând o caracteristică de fază mai largă decât cea minim posibilă.

În practică, atât timpul mort, cât și fază neminimă, sunt proprietăți indezirabile, deoarece acestea impun limitări stricte asupra performanțelor care pot fi obținute prin reglare, respectiv pot duce ușor la destabilizarea sistemului în urma închiderii buclei.

4.2 Trasarea diagramei Nyquist

Particularități în cazul sistemelor cu timp mort: Pentru trasarea diagramei Nyquist a unui astfel de sistem se recomandă următorii pași, adaptați față de Lucrarea 2:

1. determinarea părților reale și imaginare în funcție de variabila $j\omega$ a funcției raționale:

$$H'(j\omega) = \operatorname{Re}\{H'(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{H'(j\omega)\}. \quad (4.3)$$

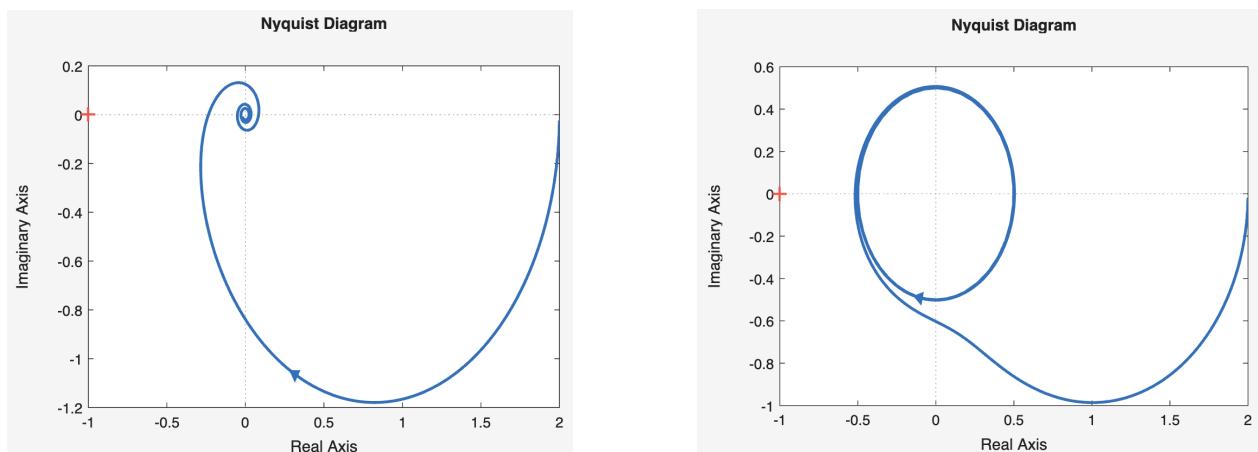
2. determinarea capătului de frecvență joasă (CFJ) în planul complex:

$$(\text{CFJ}) : \lim_{\omega \rightarrow 0, \omega > 0} H(j\omega) = x_1 + jy_1, \quad x_1, y_1 \in \overline{\mathbb{R}}. \quad (4.4)$$

Remarcă: Dacă sistemul are cel puțin un integrator, atunci CFJ al sistemului cu timp mort va fi diferit de CFJ al părții raționale, deoarece apar nedeterminări de tipul $\infty \cdot 0$.

3. determinarea capătului de frecvență înaltă (CFI) în planul complex. Se disting cazurile:

- dacă $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H'(j\omega) = 0$, atunci (CFI) este situat în origine;
 - dacă $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H'(j\omega) = r \neq 0$, atunci (CFI) descrie un cerc de rază $|r|$ centrat în origine (va tinde asymptotic spre el);
4. determinarea intersecțiilor cu axele de coordonate: datorită faptul că ecuațiile $\sin(\tau_m \omega) = 0$ și $\cos(\tau_m \omega) = 0$ au o infinitate de soluții, vor exista o infinitate de intersecții cu axele.
 5. trasarea diagramei pornind din CFJ, ajungând în CFI și surprinzând **fenomenul de încovoiere** în jurul originii sau de tindere spre cercul de rază $|r|$, după caz. Încercuirile se fac în sens invers trigonometric, echivalent cu a adăuga o infinitate de poli la trasarea locului de transfer. Acum acest fenomen este ilustrat în Figura 4.1.



(a) CFI al părții raționale este în origine, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H'(j\omega) = 0$.

(b) CFI al părții raționale este pe axa reală, $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H'(j\omega) = r \neq 0$.

Figura 4.1: Timpul mort ilustrat în diagrama Nyquist

Particularități în cazul sistemelor de fază neminimă: nu există. Pentru un sistem de fază neminimă, pașii necesari pentru trasarea diagramei Nyquist sunt aceiași cu cei prezentați în Lucrarea 2.

4.2.1 Problemă rezolvată

Să se traseze diagrama Nyquist a sistemului modelat prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{s+1}{s(s+20)} e^{-0.5s}.$$

Rezolvare: Conform algoritmului prezentat anterior rezultă:

1. determinarea părților reale și imaginare ale funcției raționale în funcție de variabila $j\omega$:

$$H'(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega(j\omega + 20)} = \frac{19}{\omega^2 + 400} + j \cdot \frac{-\omega^2 - 20}{\omega(\omega^2 + 400)}. \quad (4.5)$$

2. determinarea capătului de frecvență joasă (CFJ) în planul complex:

$$\begin{aligned} (\text{CFJ}) : \lim_{\omega \rightarrow 0, \omega > 0} H(j\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow 0, \omega > 0} \left(\frac{19}{\omega^2 + 400} + j \frac{-\omega^2 - 20}{\omega(\omega^2 + 400)} \right) (\cos(0.5\omega) - j \sin(0.5\omega)) = \\ &= \frac{19}{400} - 0.5 \frac{20}{400} - \infty j = \frac{9}{400} - \infty j. \end{aligned} \quad (4.6)$$

3. determinarea capătului de frecvență înaltă (CFI) în planul complex:

$$(\text{CFI}) : \lim_{\omega \rightarrow \infty} H'(j\omega) = 0 - 0 \cdot j, \quad (4.7)$$

iar (CFI) este în origine (aici nu putem discuta despre apartenența la un cadran).

4. determinarea intersecțiilor cu axele de coordonate: sunt o infinitate de astfel de intersecții.
5. trasarea diagramei pornind din CFJ, urmărind intersecțiile cu axele de coordonate, ajungând la CFI, rezultând graficul din Figura 4.2.

4.3 Trasarea diagramei Bode

Particularități în cazul sistemelor cu timp mort: Pentru trasarea diagramei Bode de modul a unei funcții de transfer $H(s)$ se utilizează pașii pentru trasarea diagramei Bode de modul a părții raționale $H'(s)$, deoarece:

$$|H(s)| = |H'(s)| \cdot |e^{-\tau_m s}| = |H'(s)|,$$

ceea ce înseamnă că **în caracteristica de modul nu apare nicio diferență față de sistemul echivalent fără timp mort**.

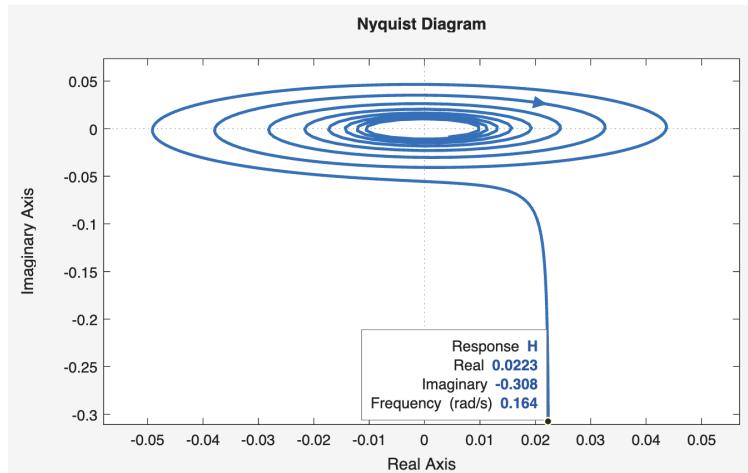


Figura 4.2: Diagrama Nyquist a sistemului de la problema rezolvată.

Ecuatia de fază este:

$$\angle H(j\omega) = \angle H'(j\omega) + \angle(e^{-\tau_m j\omega}) = \angle H'(j\omega) - \tau_m \omega,$$

ceea ce înseamnă că peste faza părții raționale se adaugă faza timpului mort. [Cantitatea \$\tau_m \omega\$ este în radiani](#). Pulsația de frângere corespunzătoare timpului mort este:

$$\omega_f = \frac{1}{\tau_m}.$$

Problemă rezolvată: În cazul trasării diagramei Bode pentru sistemul de la secțiunea 4.2.1, pornim prin trasarea caracteristicii de modul pentru partea rațională:

$$H'(s) = \frac{s+1}{s(s+20)} = \frac{1}{20} \cdot \frac{s+1}{s(\frac{1}{20}s+1)},$$

conform algoritmului prezentat în Lucrarea 3. Ecuatia de fază este:

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= \angle(j\omega + 1) - \angle(j\omega) - \angle(j\omega + 20) + \angle(e^{-0.5j\omega}) \\ &= \text{atan} \omega - 90^\circ - \text{atan} \frac{\omega}{20} - \text{rad2deg}(0.5\omega). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Rezultatul este prezentat în Figura 4.3. Implicit în MATLAB, afişarea pentru caracteristica de fază se face pe un interval foarte extins, deci pentru vizualizarea în intervale rezonabile se recomandă funcționalitatea de **Zoom in**.

Particularități în cazul sistemelor de fază neminimă: Diagrama Bode de modul a sistemelor de fază neminimă se trasează după aceleași reguli precum în cazurile de fază minimă, singura diferență fiind la caracteristica de fază:

- faza oricărui zero instabil are comportamentul fazei unui pol stabil;
- faza oricărui pol instabil are comportamentul fazei unui zero stabil;
- în cazul în care *gain*-ul este $k < 0$, faza acestuia este -180° , prin convenție.

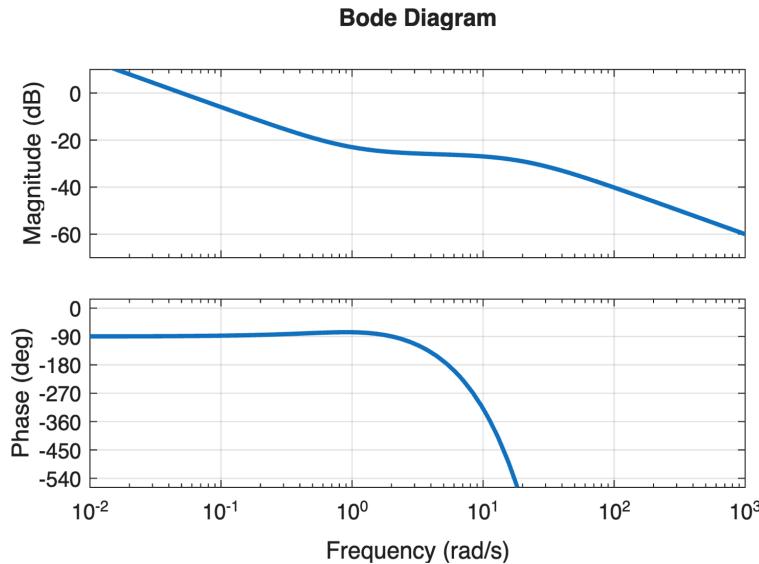


Figura 4.3: Diagrama Bode a unui sistem cu timp mort.

4.3.1 Problemă rezolvată

Să se traseze diagrama Bode a sistemului modelat prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{s - 7}{s(s + 2)}.$$

Rezolvare: Trebuie să trasăm caracteristica de modul pentru $H(s)$, fără a exista particularități de trasare, fiind echivalentă cu cea a funcției de transfer $G(s) = \frac{s+7}{s(s+2)}$. Totuși, trebuie atenție sporită asupra evidențierii funcției de transfer în forma standard:

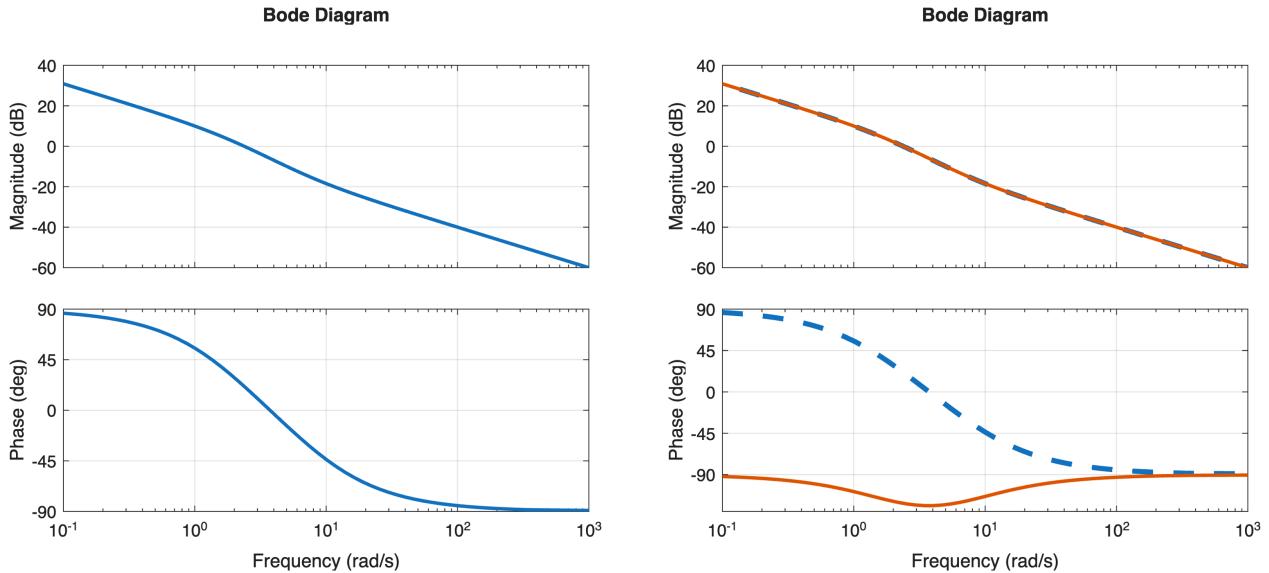
$$H(s) = \frac{-7}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{7}s+1}{s(\frac{1}{2}s+1)}.$$

Ecuția de fază este:

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= \angle\left(\frac{-7}{2}\right) + \angle\left(-\frac{1}{7}j\omega + 1\right) - \angle(j\omega) - \angle\left(\frac{1}{2}j\omega + 1\right) \\ &= -180^\circ - \text{atan} \frac{\omega}{7} - 90^\circ - \text{atan} \frac{\omega}{2}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

și putem observa atât factorul de proporționalitate negativ, cât și comportamentul în fază a zeroului instabil precum a unui pol stabil. Rezultatul trasării este prezentat în Figura 4.4. Se constată că faza (4.9) a sistemului variază în domeniul $-270^\circ \rightarrow -450^\circ$, spre deosebire de faza sistemului echivalent de fază minimă, ale cărei capete de frecvență sunt ambele la valoarea de -90° .

Observație: În MATLAB, în cazul sistemelor de fază neminimă, caracteristica de fază poate fi deplasată cu $\pm 360^\circ$ din cauza implementării diferite utilizate în trasarea diagramei Bode.



(a) Caracteristicile de modul și fază ale sistemului de fază neminimă.

(b) Comparatie cu sistemul echivalent de fază minimă (roșu).

Figura 4.4: Diagrama Bode a sistemului de fază neminimă din secțiunea 4.3.1.

4.4 Probleme propuse

Să se traseze și să se interpreteze diagramele Nyquist și Bode pentru următoarele funcții de transfer. Să se anticipeze, pe baza trasărilor obținute, componenta permanentă a ieșirii sistemelor pentru următoarele semnale de intrare: $u_1(t) = 3$, $u_2(t) = \sin(10^{-3}t)$, $u_3(t) = 4 \sin(0.2t + \frac{\pi}{4})$, $u_4(t) = -\sin(80t - \frac{\pi}{6})$, $u_5(t) = 0.1 \sin(10^4t)$. Să se deducă natura filtrului considerând pragul de 0 [dB], respectiv banda de trecere (dacă este posibil).

$$4.4.a) H(s) = \frac{2}{s} e^{-0.5s};$$

$$4.4.e) H(s) = \frac{-s+30}{s(-s+4)};$$

$$4.4.b) H(s) = \frac{s+1}{s(s+20)} e^{-0.5s};$$

$$4.4.f) H(s) = \frac{100}{s(s+5)(s+30)} e^{-0.2s},$$

$$4.4.c) H(s) = \frac{s-7}{s(s+2)};$$

$$4.4.g) H(s) = \frac{-4(10s+1)}{(3s+1)(-2s+1)};$$

$$4.4.d) H(s) = \frac{s^2}{0.3s^2+s+1} e^{-2s};$$

$$4.4.h) H(s) = \frac{5(-4s+1)}{s(s+8)}.$$

Lucrarea 5

Legături între diagramele Nyquist, Bode și Nichols ale sistemelor LTI

5.1 Studii de caz	46
5.2 Legătura dintre caracteristica de modul și cea de fază în diagrama Bode	51
5.3 Probleme propuse	54

În această lucrare se prezintă legături între cele trei diagrame des întâlnite în practică pentru reprezentarea răspunsului în frecvență a sistemelor LTI: diagramele Nyquist, Bode, Nichols. Se vor pune în evidență moduri de a identifica principial funcțiile de transfer pe baza răspunsului în frecvență dedus experimental. Suplimentar, se prezintă metode de identificare a funcțiilor de transfer pe baza diagramei Bode, atât în cazuri de fază minimă, cât și în cazul în care sistemele sunt de fază neminimă.

Analogia dintre cele trei tipuri de diagrame utilizate pentru reprezentarea răspunsului în frecvență al sistemelor LTI se poate realiza principal (în general, fără detalii exacte), pornind de la legătura dintre formele algebrică și trigonometrică a unui număr complex, urmărind câteva aspecte structurale. Printre acestea, se pot enumera:

- capătul de frecvență joasă, CFJ, $\omega \rightarrow 0$;
- capătul de frecvență înaltă, CFÎ, $\omega \rightarrow \infty$;
- intersecțiile cu axele de coordonate în cazul diagramei Nyquist, care se echivalează cu intersecțiile cu fazele de $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \pm 2\ell\pi$, $\ell \in \mathbb{N}$, în diagramele Bode și Nichols;
- intersecțiile cu axele de coordonate în cazul caracteristicii de modul a diagramele Bode și Nichols, care se echivalează cu intersecția cu cercul unitate în diagrama Nyquist;
- panta din gama frecvențelor înalte a diagramei Bode, ceea ce denotă excesul poli-zerouri al sistemului, echivalent cu numărul de cadrane încercuite în diagrama Nyquist etc.

5.1 Studii de caz

5.1.1 Sistem cu două rezervoare înseriate

Se consideră sistemul format din două rezervoare înseriate din Figura 5.1, având curgere laminară, iar la intrare există o pompă de apă cu debit volumic variabil.

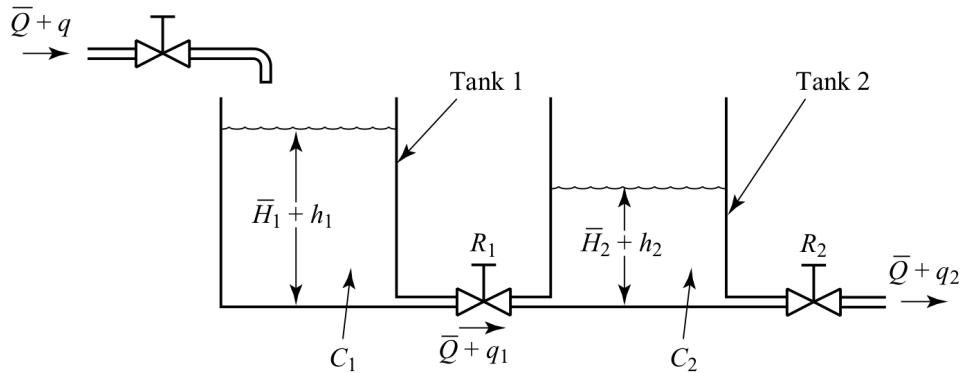


Figura 5.1: Sistem cu două rezervoare conectate în serie.

Modelul matematic se deduce prin liniarizare în jurul punctului de echilibru $(\bar{Q}, \bar{H}_1, \bar{H}_2)$, astfel:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Q_2(s) [m^3/s]}{Q(s) [m^3/s]} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1}, \quad (5.1)$$

pentru:

- rezistență pneumatică a conductei 1: $R_1 = 5.5 [s \cdot m^{-2}]$;
- rezistență pneumatică a conductei 2: $R_2 = 5.5 [s \cdot m^{-2}]$;
- capacitanță pneumatică a rezervorului 1: $C_1 = 10 [m^2]$;
- capacitanță pneumatică a rezervorului 2: $C_2 = 10 [m^2]$.

Problemă: Să se traseze diagrama Nyquist și să se realizeze analogia acesteia cu diagramele Bode, respectiv Nichols și să se interpreteze comportamentul sistemului.

Discuție: În Figura 5.2 sunt prezentate cele trei diagrame ale sistemului cu două rezervoare inseriate. Existența unei dinamici de ordinul doi se poate deduce din (i) panta finală de $-40 a caracteristicii de modul din diagrama Bode; (ii) variația fazei de la $0^\circ \rightarrow -180^\circ$, i.e., două arctangente negative, fără nicio creștere care să sugereze prezența zeroilor; (iii) variația diagramei Nyquist în două cadrane în sens anti-trigonometric.$

Panta de $0 în diagrama Bode la frecvențe mici denotă lipsa integratoarelor și a derivatoarelor în dinamica sistemului. Capătul de frecvență joasă este algebric $1 + 0j$, echivalent cu modulul de $0 și faza de 0° , fapt regăsit atât în diagrama Bode, cât și Nichols.$$

Faptul că faza în diagramele Bode și Nichols tinde descrescător spre -180° se reflectă în diagrama Nyquist prin CFÎ tangent la axa reală negativă prin cadranul III.

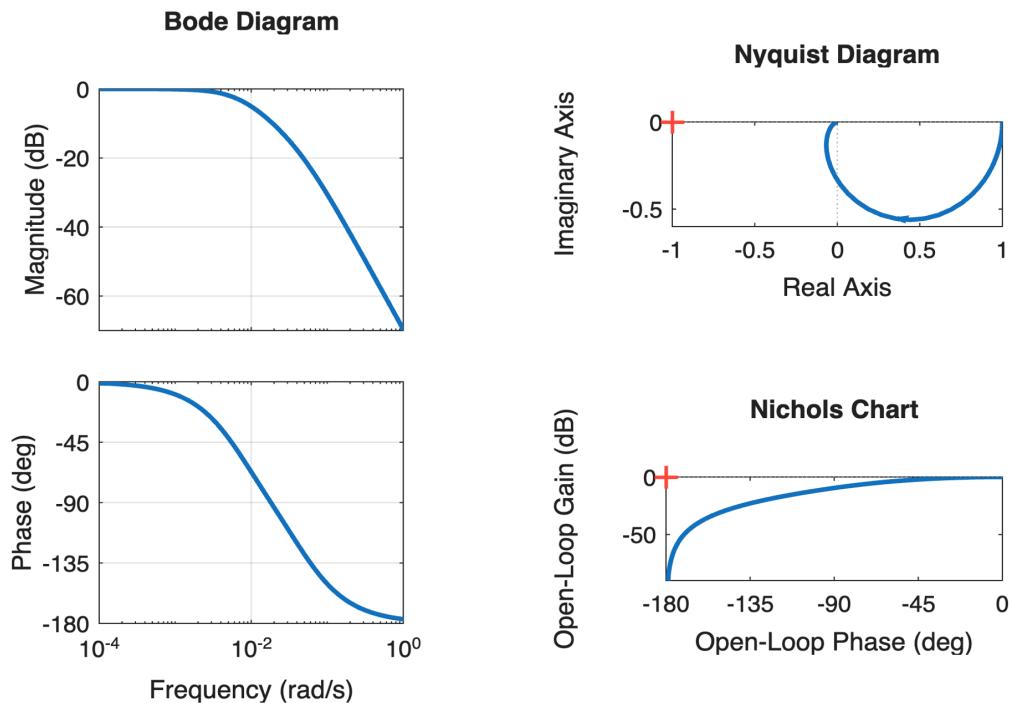


Figura 5.2: Diagramele Bode, Nyquist, Nichols pentru sistemul cu două rezervoare inseriate.

5.1.2 Axă CNC

Se consideră un sistem de poziționare pe o axă CNC (engl. *Computer Numerical Control*) având structura din Figura 5.3. Modelul matematic poate fi descompus în două subsisteme: subsistemul intrare (factor de umplere PWM) – viteza unghiulară, respectiv subsistemul viteza unghiulară – poziție. Modelul intrare-poziție în urma identificării este:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega(s)}{F_u(s)} \cdot \frac{\theta(s)}{\omega(s)} = \frac{\theta(s)}{F_u(s)} \frac{[\text{impulsuri}]}{[\cdot 100\%]} = \frac{K_m}{(T_e s + 1)(T_m s + 1)} \cdot \frac{K_i}{s}, \quad (5.2)$$

unde:

- constanta subsistemului tensiune-viteză $K_m = 334.89$;
- constanta integratorului $K_i = 3.869$;
- constanta de timp mecanică $T_m = 0.1198[s]$;
- constanta de timp electrică $T_e = 0.0025[s]$.

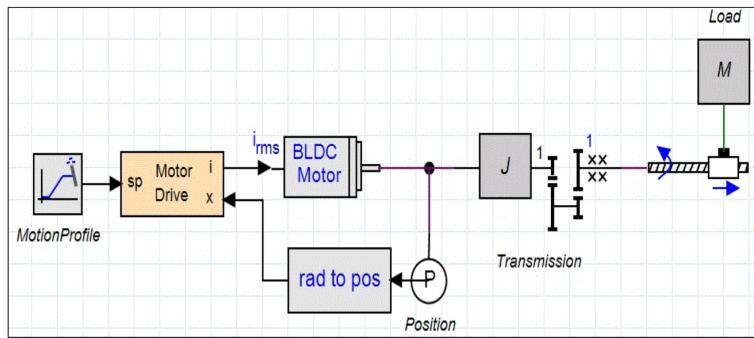


Figura 5.3: Sistem de poziționare cu axă CNC.

Problemă: Să se traseze diagrama **Nichols** și să se realizeze analogia acesteia cu diagramele Bode, respectiv Nyquist și să se interpreteze comportamentul sistemului.

Discuție: În Figura 5.4 sunt prezentate cele trei diagrame ale sistemului cu axă CNC. Pornind de la diagrama Nichols, se constată o fază descrescătoare pe domeniul $-90^\circ \rightarrow -270^\circ$, ceea ce denotă (i) prezența unui integrator (faza începe din -90°), respectiv (ii) doi poli suplimentari, fără zerouri (deoarece faza este strict descrescătoare). Același comportament se regăsește direct și în caracteristica de fază a diagramei Bode.

Din faptul că avem caracteristica de modul strict descrescătoare (cu pante progresive de $-20, -40, -60 [dB/dec]$ reies trei poli. Excesul poli-zerouri $e = n - m = 3$ se constată prin încercuirea originii cu trei cadrane în sens anti-trigonometric față de cadranul de pornire al CFJ. Capătul de frecvență joasă trebuie să se afle în cadranul III, deoarece faza pornește de la -90° , fiind strict inferioară acestei valori.

Deoarece în diagrama Nichols, locul de transfer se regăsește deasupra punctului critic $-1 + 0j \Leftrightarrow (-180^\circ, 0 [dB])$, reiese faptul că în diagrama Bode, mai întâi există intersecția cu faza de $-\pi$ și doar apoi intersecția cu axa de 0 [dB]. În diagrama Nyquist, acest fapt se traduce prin existența intersecției cu axa reală negativă înainte de intersecția cu cercul unitate.

5.1.3 Sistem de suspensie activă

Se consideră sistemul de suspensie activă ilustrat în Figura 5.5. Sistemul poate fi considerat de tip MIMO, având două intrări: forța elementului de acționare hidraulic în [kN] și denivelarea drumului în [m], respectiv două ieșiri: poziția caroseriei în [m] și poziția roții în [m].

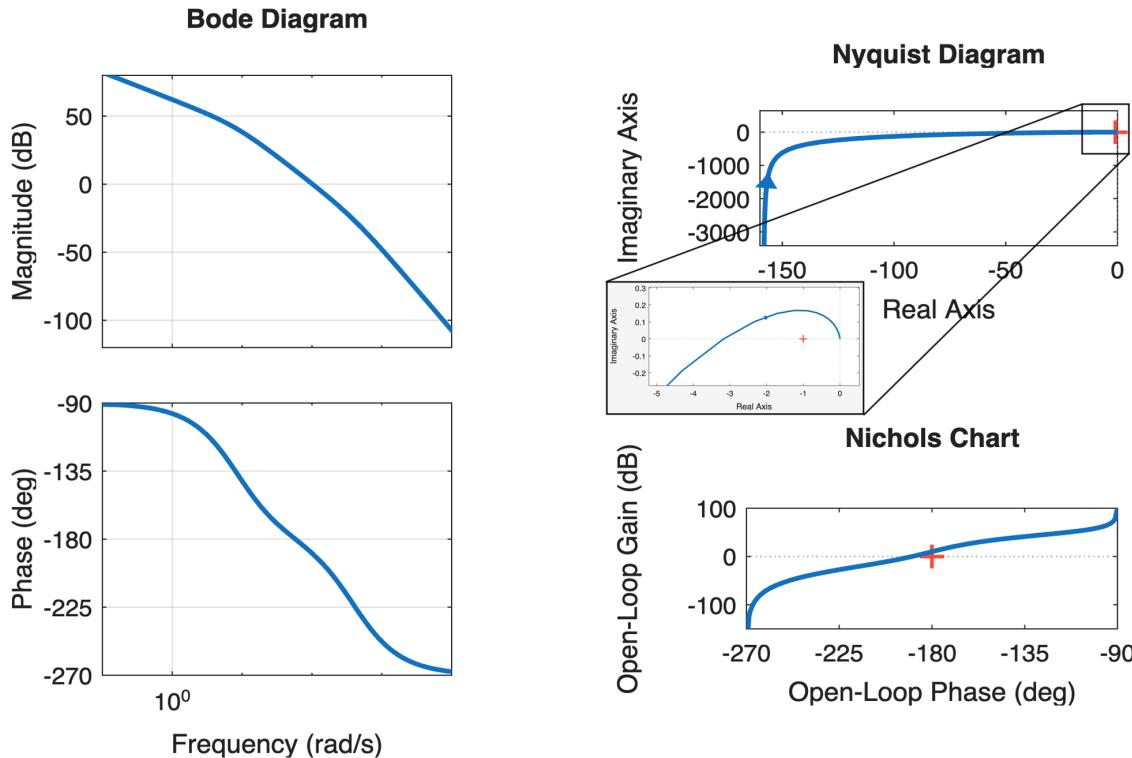


Figura 5.4: Diagramele Bode, Nyquist, Nichols pentru sistemul de tip axă CNC.

Un exemplu de funcție de transfer de la actuator la poziția caroseriei poate fi obținută experimental sau prin modelare matematică pe baza legilor lui Newton, sub forma:

$$H(s) = \frac{Y(S)}{U(s)} = \frac{X_b(s)}{F_s(s)} \frac{[m]}{[kN]} = \frac{3.333(s^2 + 3167)}{(s^2 + 2.864s + 49.85)(s^2 + 17.14s + 3388)}. \quad (5.3)$$

Problemă: Să se traseze diagrama **Bode** și să se realizeze analogia acesteia cu diagramele Nyquist, respectiv Nichols și să se interpreteze comportamentul sistemului.

Discuție: În Figura 5.6 sunt prezentate cele trei diagrame ale sistemului de suspensie activă a unui automobil. Din caracteristica de modul a diagramei Bode reiese, în primul rând, perechea de poli complex conjugăți cu un factor de amortizare mic (pe baza rezonanței existente). Urmează o pereche de zerouri complex conjugate cu factorul de amortizare nul, ceea ce prezintă o crestătură la pulsăția de antirezonanță (modulul este anulat complet pentru pulsăția respectivă), fapt ce se constată și prin saltul existent în caracteristica de fază. Existența unei perechi suplimentare de poli complex conjugăți imediat după perechea de zerouri se constată prin faptul că panta în caracteristica de modul are o valoare constantă de $-40 [dB/dec]$ după apariția valorii de rezonanță.

Fenomenul de antirezonanță se constată ușor în diagrama Nichols, prin tranziția (**discontinuă**) de la modulul de $-\infty [dB]$, tangent la faza de -270° , la urcarea spre modulele finite prin tangența la faza de -90° . În diagrama Nyquist se constată anularea modulului la antirezonanță prin tranziția prin origine (printr-o pulsăție intermediară, nu CFÎ!). Din fap-

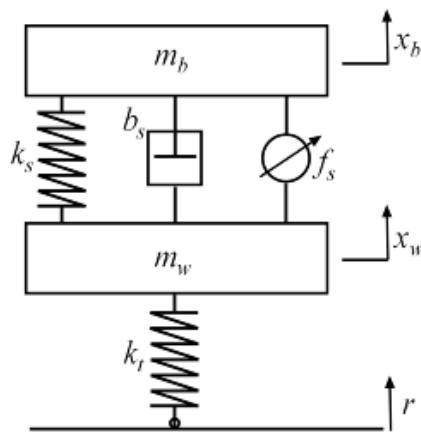


Figura 5.5: Suspensia activă a unui automobil.

tul că diagrama Nyquist are CFÎ în origine tangent la axa reală negativă prin cadranul III denotă excesul poli-zerouri $e = n - m = 2$.

Diagrama Bode este cea mai concludentă pe un astfel de exemplu, fiind precisă în reprezentarea caracteristicilor de modul și de fază în funcție de pulsărie, spre deosebire de celelalte două diagrame care devin ambiguie în acest sens. Acest lucru ne permite o identificare relativ ușoară a modelului unui sistem descris prin funcție de transfer din diagrama Bode a acestuia,

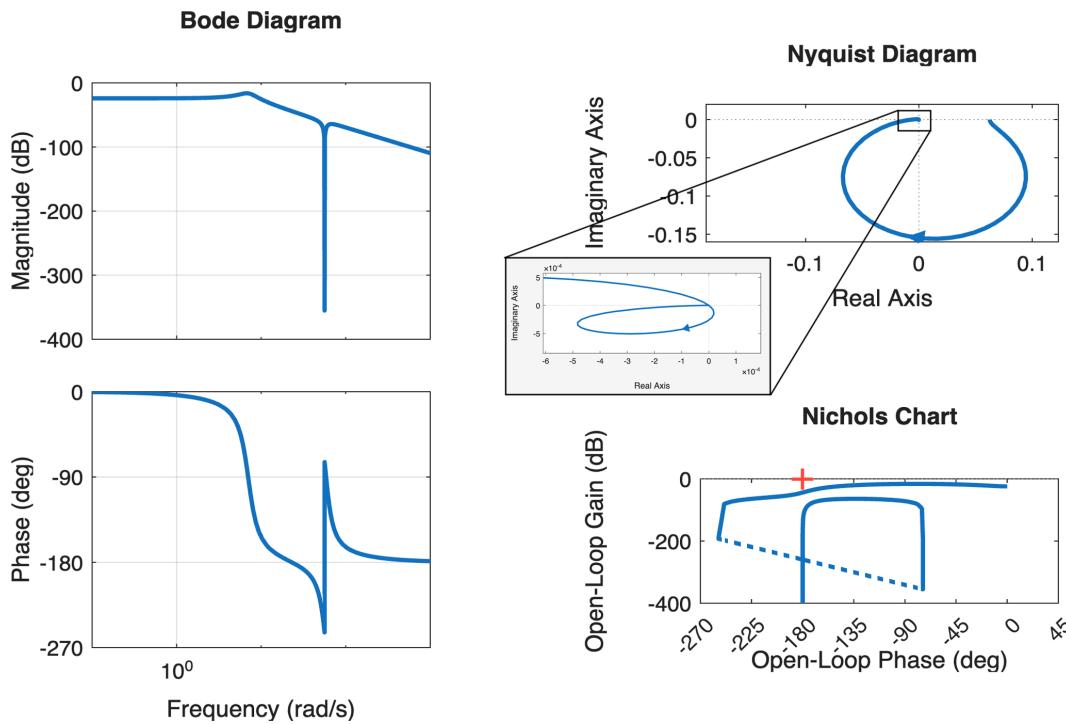


Figura 5.6: Diagramele Bode, Nyquist, Nichols pentru sistemul de tip suspensie activă.

fapt care constituie subiectul următoarei secțiuni.

5.2 Legătura dintre caracteristica de modul și cea de fază în diagrama Bode

Se pornește de la reprezentarea generală a unei funcții de transfer, precum în Lucrarea 3. O funcție de transfer poate fi scrisă ca raport de polinoame date sub formă de produse de termeni de gradul I sau II. Se evidențiază astfel singularitățile reale, respectiv complex conjugate:

$$H(s) = \frac{K}{s^p} \cdot \frac{\prod \left(\hat{T}_i s + 1 \right)}{\prod \left(\hat{T}_j s + 1 \right)} \prod \left(\left(\frac{s}{\hat{\omega}_{n,i}} \right)^2 + \frac{2\zeta_i}{\hat{\omega}_{n,i}} s + 1 \right) \prod \left(\left(\frac{s}{\hat{\omega}_{n,j}} \right)^2 + \frac{2\hat{\zeta}_j}{\hat{\omega}_{n,j}} s + 1 \right). \quad (5.4)$$

Din diagrama Bode de modul putem deduce valorile constantelor de timp sau ale pulsăriilor naturale (prin intermediul pulsăriilor de frângere) și putem stabili dacă acestea corespund unor zerouri sau unor poli. De asemenea, folosind panta inițială a graficului, putem deduce numărul integratoarelor/derivatoarelor (p). După ce am stabilit numărul acestora, putem deduce și valoarea factorului de proporționalitate (K^{dB}): diferența dintre valoarea citită de pe diagrama de modul în CFJ și valoarea componentei $\frac{1}{s^p}$ în CFJ.

Exemplul 1: Se consideră diagrama Bode de modul a unui sistem de fază **minimă** din Figura 5.7. Să se identifice structura și valorile parametrilor funcției de transfer $H(s)$ care are acest răspuns în frecvență.

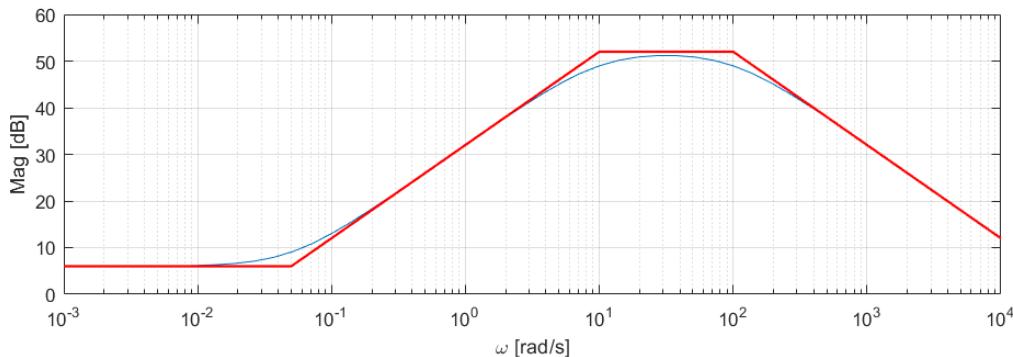


Figura 5.7: Diagrama Bode de modul a unui sistem de fază minimă.

Din această diagramă putem deduce că nu avem integrator/derivator ($p = 0$), iar pulsăriile de frângere sunt: $\hat{\omega}_f = 5 \cdot 10^{-2} [\text{rad/s}]$ (panta crește de la 0 [dB/dec] la 20 [dB/dec]), $\hat{\omega}_{f_1} = 10 [\text{rad/s}]$ (panta scade de la 20 [dB/dec] la 0 [dB/dec]), respectiv $\hat{\omega}_{f_2} = 100 [\text{rad/s}]$ (panta scade de la 0 [dB/dec] la -20 [dB/dec]). De asemenea, deoarece nu avem integrator/derivator, în CFJ putem citi direct $K^{dB} = 6 [\text{dB}]$.

Acum, folosind informația *a priori* că sistemul este de fază minimă, putem trasa direct diagrama Bode de fază, deoarece între cele două diagrame Bode există o relație de echivalență în cazul sistemelor de fază minimă [Ionescu 1985]. Astfel, ecuația de fază este:

$$\angle H(j\omega) = \angle \left(j \frac{\omega}{\dot{\omega}_f} + 1 \right) - \angle \left(j \frac{\omega}{\hat{\omega}_{f_1}} + 1 \right) - \angle \left(j \frac{\omega}{\hat{\omega}_{f_2}} + 1 \right),$$

de unde rezultă modelul:

$$H(s) = 2 \cdot \frac{20s + 1}{(0.1s + 1)(0.01s + 1)}, \quad (5.5)$$

iar diagrama de fază este conform Figurii 5.8.

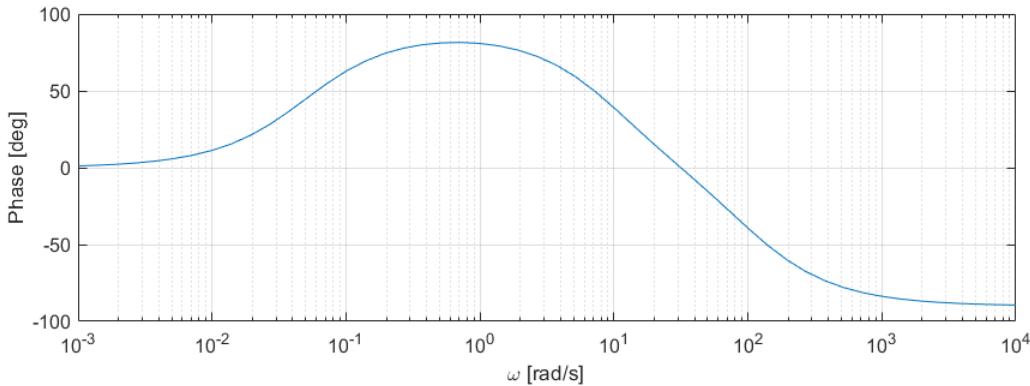


Figura 5.8: Caracteristica de fază a sistemului din Exemplul 1.

Exemplul 2. Se consideră diagrama Bode de modul a sistemului de fază **minimă** din Figura 5.9. Să se identifice structura și valorile parametrilor funcției de transfer $H(s)$ care are acest răspuns în frecvență.

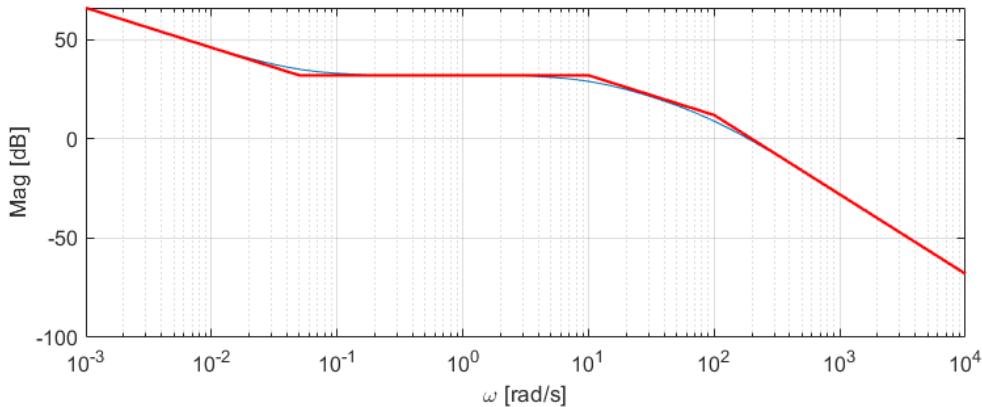


Figura 5.9: Diagrama Bode de modul a unui sistem de fază minimă.

Din această diagramă putem deduce că avem un integrator ($p = 1$) pe baza pantei inițiale de -20 [dB/dec], iar pulsăriile de frângere sunt: $\dot{\omega}_f = 5 \cdot 10^{-2}$ [rad/s] (panta crește de la -20 [dB/dec] la 0 [dB/dec]), $\hat{\omega}_{f_1} = 10$ [rad/s] (panta scade de la 0 [dB/dec] la -20 [dB/dec]),

respectiv $\hat{\omega}_{f_2} = 100 \text{ [rad/s]}$ (panta scade de la -20 [dB/dec] la -40 [dB/dec]). De asemenea, deoarece avem un integrator, din CFJ putem deduce:

$$K^{dB} = 66 - (-20 \cdot \lg 10^{-3}) = 6 \text{ dB}.$$

Acum, folosind informația *a priori* că sistemul este de fază minimă, ecuația de fază este:

$$\angle H(j\omega) = \angle \left(j \frac{\omega}{\hat{\omega}_f} + 1 \right) - \angle(j\omega) - \angle \left(j \frac{\omega}{\hat{\omega}_{f_1}} + 1 \right) - \angle \left(j \frac{\omega}{\hat{\omega}_{f_2}} + 1 \right),$$

de unde rezultă modelul:

$$H(s) = 2 \cdot \frac{20s + 1}{s(0.1s + 1)(0.01s + 1)}. \quad (5.6)$$

iar diagrama de fază este:

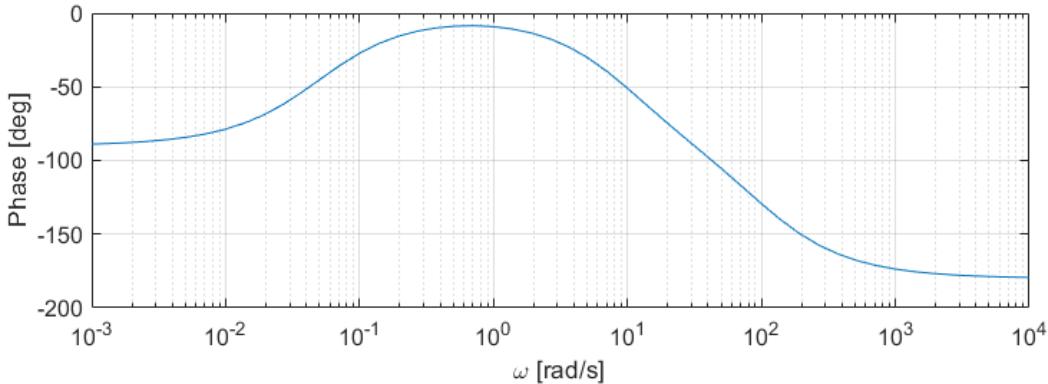


Figura 5.10: Caracteristica de fază a sistemului din Exemplul 2.

Exemplul 3. Se consideră diagrama Bode din Figura 5.11. Să se identifice structura și valorile parametrilor funcției de transfer $H(s)$ care are acest răspuns în frecvență.

Din această diagramă putem deduce că avem un integrator ($p = 1$), pe baza pantei inițiale de -20 [dB/dec] , iar pulsăriile de frângere sunt: $\hat{\omega}_f = 5 \cdot 10^{-2} \text{ [rad/s]}$ (panta crește de la -20 [dB/dec] la 0 [dB/dec]), $\hat{\omega}_{f_1} = 10 \text{ [rad/s]}$ (panta scade de la 0 [dB/dec] la -20 [dB/dec]), respectiv $\hat{\omega}_{f_2} = 100 \text{ [rad/s]}$ (panta scade de la -20 [dB/dec] la -40 [dB/dec]). De asemenea, deoarece avem un integrator, din CFJ putem deduce:

$$K^{dB} = 66 - (-20 \cdot \lg 10^{-3}) = 6 \text{ dB}.$$

Dar, observăm că în jurul pulsării de frângere a zeroului faza scade, ceea ce reprezintă o neconcordanță cu diagrama Bode de modul și marchează faptul că zeroul este de fază neminimă. Caracteristica de fază corectă este:

$$\angle H(j\omega) = -\angle \left(j \frac{\omega}{\hat{\omega}_f} + 1 \right) - \angle(j\omega) - \angle \left(j \frac{\omega}{\hat{\omega}_{f_1}} + 1 \right) - \angle \left(j \frac{\omega}{\hat{\omega}_{f_2}} + 1 \right),$$

de unde rezultă modelul matematic:

$$H(s) = 2 \cdot \frac{-20s + 1}{s(0.1s + 1)(0.01s + 1)}. \quad (5.7)$$

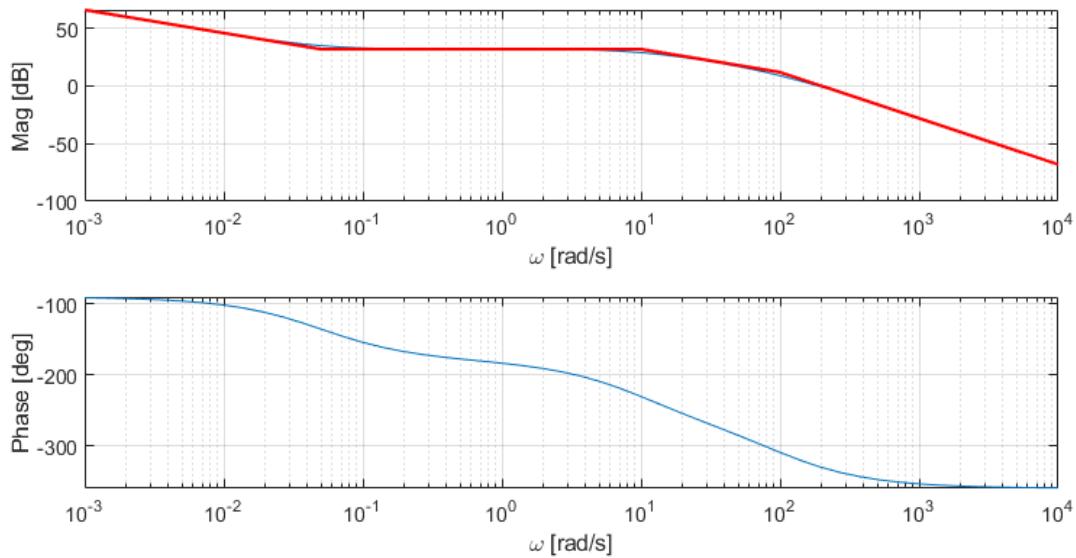


Figura 5.11: Diagrama Bode a unui sistem de fază neminimă.

5.3 Probleme propuse

Se consideră sistemele descrise prin următoarele răspunsuri în frecvență. Pentru fiecare sistem, să se deducă aproximativ celelalte diagrame și să se justifice raționamentul. Precizați dacă sistemele au integratoare/derivatoare, poli și zerouri, respectiv pozițiile lor, intersecții cu axele de coordonate, cadranele în care se află punctele esențiale.

5.3.a) Se dă **diagrama Nyquist** în Figura 5.12 și cere deducerea diagramelor Bode și Nichols;

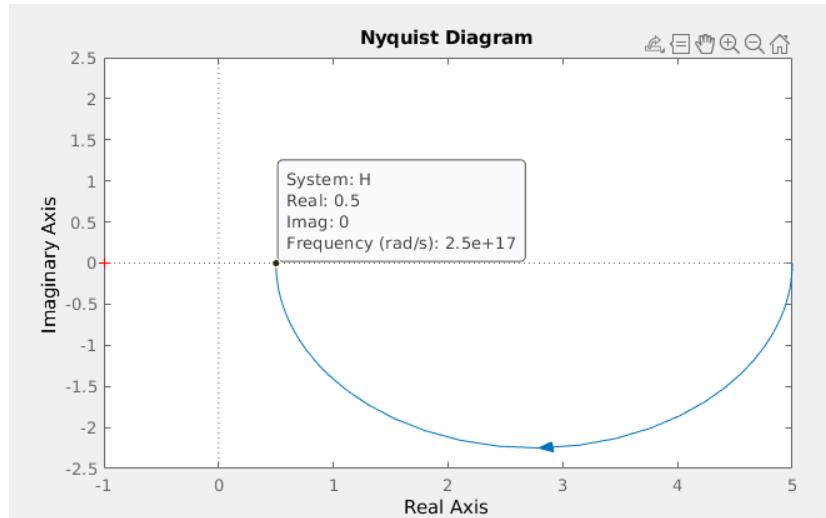


Figura 5.12: Diagrama Nyquist a unui sistem necunoscut.

5.3.b) Se dă **diagrama Bode** în Figura 5.13 și cere deducerea diagramelor Nyquist și Nichols;

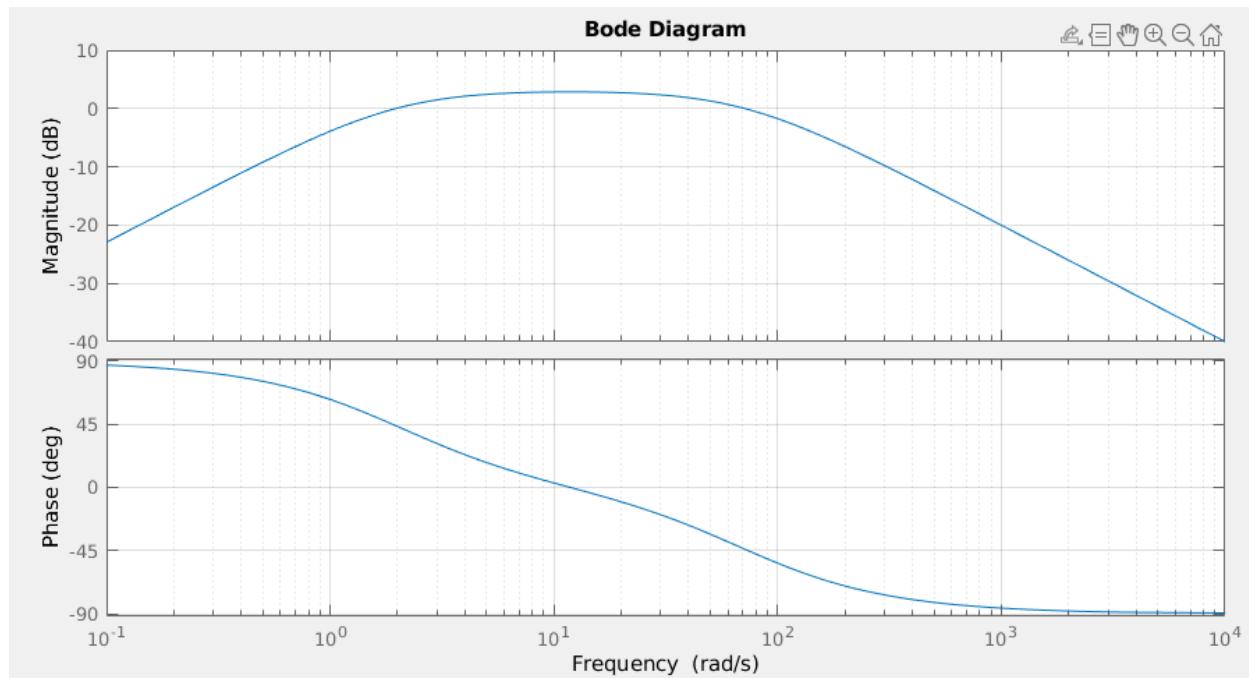


Figura 5.13: Diagrama Bode a unui sistem necunoscut.

5.3.c) Se dă **diagrama Nichols** în Figura 5.14 și cere deducerea diagramelor Bode și Nyquist.

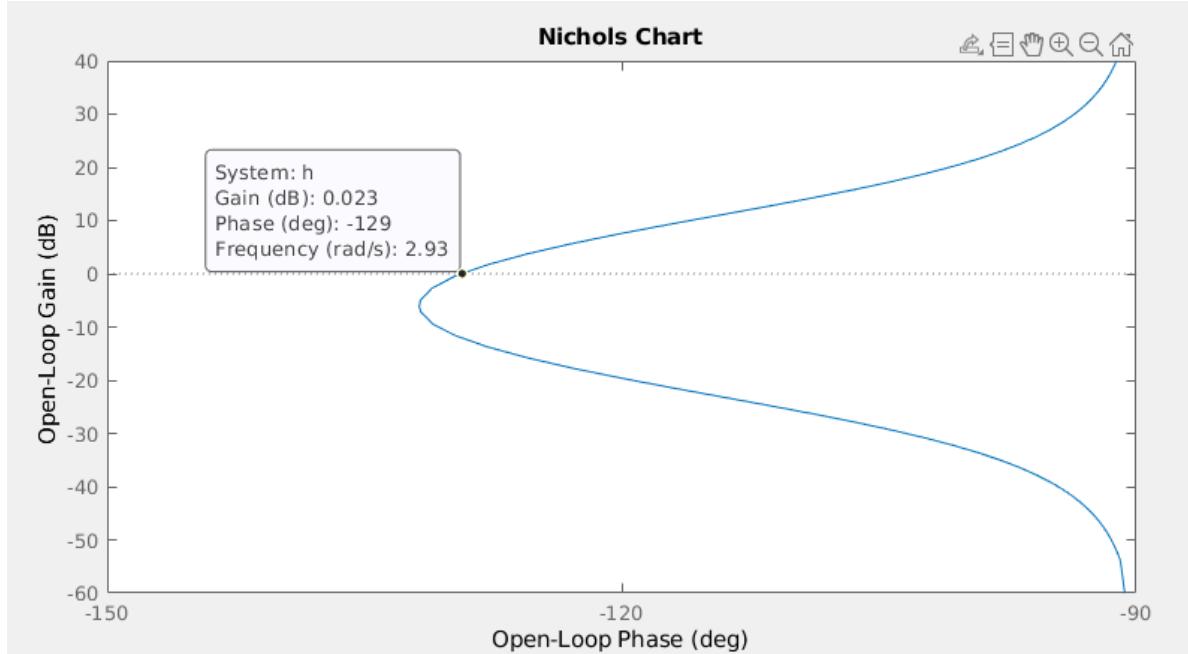


Figura 5.14: Diagrama Nichols a unui sistem necunoscut.

Lucrarea 6

Stabilitatea SRN. Criteriul Nyquist generalizat

6.1	Breviar teoretic	58
6.2	Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist	59
6.3	Probleme propuse	61

În această lucrare este prezentat criteriul Nyquist generalizat pentru studiul stabilității interne a sistemelor în buclă închisă, alături de modul acestora de aplicare utilizând diagrama Nyquist a sistemului în buclă deschisă.

6.1 Breviar teoretic

Se consideră sistemul de reglare în buclă închisă cu **reacție negativă unitară** (SRNU) din Figura 6.1, având procesul descris prin funcția de transfer $H(s)$ și regulatorul proporțional variabil $K > 0$. Funcția de transfer echivalentă se calculează conform formulei:

$$H_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s) \cdot H_r(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_{des}(s)} = \frac{K \cdot H(s)}{1 + K \cdot H(s)}, \quad (6.1)$$

unde $H_d(s)$ este f.d.t. pe calea directă, $H_r(s)$ este f.d.t. pe calea de reacție, $H_{des}(s)$ este f.d.t. în buclă deschisă, $H_0(s)$ este f.d.t. echivalentă în buclă închisă.

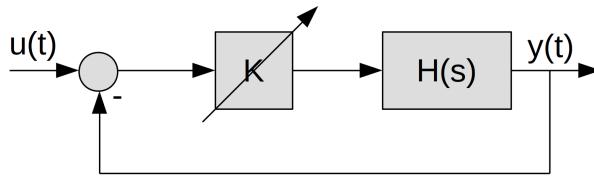


Figura 6.1: Sistem de reglare cu reacție negativă unitară.

Stabilitatea sistemului în buclă închisă este dată de polii lui $H_0(s)$, adică rădăcinile polinomului caracteristic:

$$P_c(s) \equiv 1 + H_{des}(s) = 0. \quad (6.2)$$

Pe baza principiului argumentului (teorema lui Cauchy) din analiza complexă se deduce unul dintre cele mai importante și utile rezultate din teoria sistemelor de control.

Teorema 6.1.1: Criteriul Nyquist generalizat (CNG)

1. Pentru un sistem LTI descris printr-o funcție de transfer **în buclă deschisă** $H_{des}(s)$ se definesc:

- N_- : numărul de poli din semiplanul stâng (poli stabili);
- N_+ : numărul de poli din semiplanul drept (poli instabili);
- N_0 : numărul de poli aflați pe axa imaginară (la limita de stabilitate).

2. Se trasează diagrama Nyquist (locul de transfer) pentru $H_{des}(j\omega)$. Se pune în evidență punctul **$-1 + 0j$** .

3. Se calculează variația argumentului Δ_{arg} când pulsăția variază de la 0 la infinit.

4. Se verifică dacă este satisfăcută **condiția de stabilitate asimptotică a sistemului în buclă închisă** prin compararea variației argumentului citită de pe diagramă Δ_{arg} cu cea teoretică datorată structurii lui $H_{des}(s)$, Δ :

$$\Delta = \Delta_{arg} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} (N_0 + 2N_+) = \Delta_{arg}. \quad (6.3)$$

5. Se poate generaliza în funcție de $K > 0$ dacă în loc de punctul critic $-1 + 0j$ se consideră punctul $-1/K + 0j$.

6.2 Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist

Să se traseze diagrama Nyquist și să se studieze stabilitatea în buclă închisă pentru următoarele funcții de transfer în buclă deschisă:

$$6.2.a) \quad H_{des}(s) = 5 \cdot \frac{-s+2}{s(s+2)^2};$$

$$6.2.a) \quad H_{des}(s) = \frac{-s+2}{s(s+2)^2}.$$

Rezolvare 6.2.a): Pe baza structurii sistemului rezultă:

- $\hat{s}_1 = 0 \Rightarrow N_0 = 1;$
- $\hat{s}_{2,3} = -2 \Rightarrow N_- = 2;$
- $N_+ = 0$, deoarece nu există poli cu partea reală pozitivă.

Pentru aplicarea criteriului Nyquist generalizat se consideră variația teoretică a argumentului:

$$\Delta = \frac{\pi}{2}(N_0 + 2N_+) = \frac{\pi}{2}(1 + 2 \cdot 0) = \frac{\pi}{2}. \quad (6.4)$$

Variația argumentului pentru pulsării de la 0 la ∞ în urma trasării locului de transfer se poate deduce considerând vectori cu originea în punctul critic $-1 + 0j$ și cu vârful pe locul de transfer, precum în Figura 6.2. Se poate observa că argumentul pornește la limita inferioară (CFJ) din valoarea $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$, ajungând la limita superioară a pulsărilor (CFI) la valoarea $-2\pi = -360^\circ$. Astfel, rezultă o variație a argumentului de:

$$\Delta_{arg} = (-360^\circ) - (-90^\circ) = -270^\circ = -\frac{3\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} = \Delta. \quad (6.5)$$

În concluzie, sistemul în buclă închisă **NU este** intern asymptotic stabil.

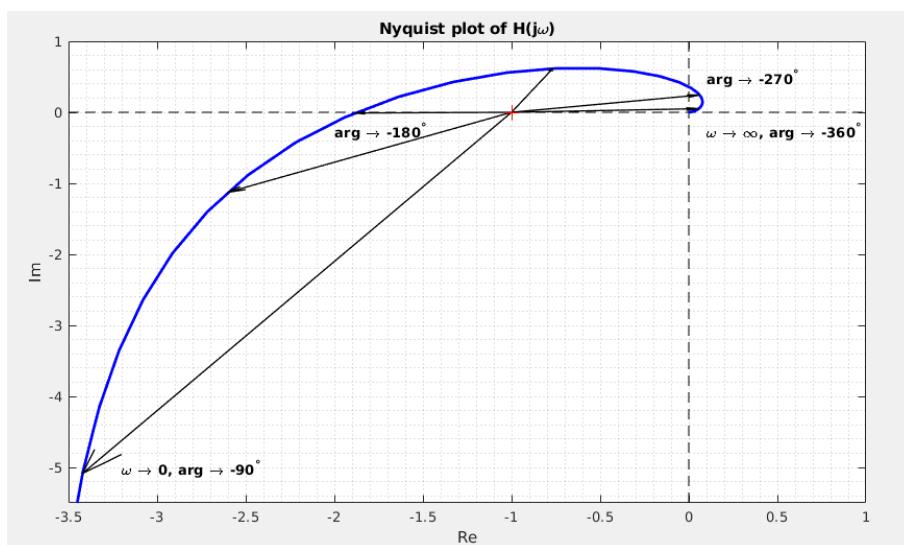


Figura 6.2: Variația argumentului pentru sistemul 6.2.a).

Rezolvare 6.2.b): Din analiza structurii sistemului:

$$H_{des}(s) = \frac{-s + 2}{s(s + 2)^2}, \quad (6.6)$$

care este identic celui de la punctul a) cu excepția factorului de proporționalitate, rezultă:

- $\hat{s}_1 = 0 \Rightarrow N_0 = 1$;
- $\hat{s}_{2,3} = -2 \Rightarrow N_- = 2$;
- $N_+ = 0$, deoarece nu există poli cu partea reală pozitivă.

Pentru aplicarea criteriului Nyquist generalizat se consideră variația teoretică a argumentului:

$$\Delta = \frac{\pi}{2}(N_0 + 2N_+) = \frac{\pi}{2}(1 + 2 \cdot 0) = \frac{\pi}{2}. \quad (6.7)$$

Variația argumentului pentru pulsării de la 0 la ∞ în urma trasării locului de transfer se poate deduce considerând vectori cu originea în punctul critic $-1 + 0j$ și cu vârful pe locul de transfer, precum în Figura 6.3. Se poate observa că argumentul pornește la limita inferioară (CFJ) din valoarea $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$, ajungând la un moment dat la valoarea 0° , urcând la o anumită valoare maximă ϕ , iar pentru limita superioară a pulsărilor (CFI) revenind la valoarea 0° . Astfel, rezultă o variație a argumentului de:

$$\Delta_{arg} = (0^\circ) - (-90^\circ) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} = \Delta. \quad (6.8)$$

În concluzie, sistemul în buclă închisă este intern asimptotic stabil.

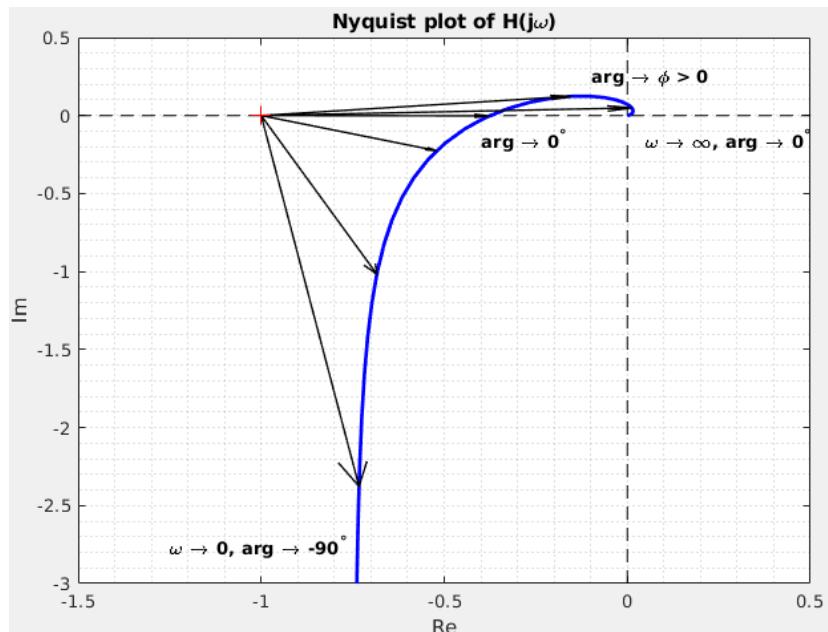


Figura 6.3: Variația argumentului pentru sistemul 6.2.b)

Observație: În MATLAB, stabilitatea sistemului închis pe baza sistemului deschis $H_{des}(s)$ trasat, respectiv marginile de stabilitate, se pot citi din opțiunile **Characteristics** → **Minimum Stability Margins** sau **Characteristics** → **All Stability Margins**.

6.3 Probleme propuse

Să se traseze diagrama Nyquist și să se studieze stabilitatea în buclă închisă pentru următoarele funcții de transfer în buclă deschisă:

$$6.3.a) \ H_{des}(s) = \frac{s+9}{s+5};$$

$$6.3.b) \ H_{des}(s) = \frac{s-9}{s+5};$$

$$6.3.c) \ H_{des}(s) = \frac{s-9}{s-5};$$

$$6.3.d) \ H_{des}(s) = \frac{s+9}{s-5};$$

$$6.3.e) \ H_{des}(s) = \frac{-s+9}{s+5};$$

$$6.3.f) \ H_{des}(s) = -\frac{s-9}{s-5};$$

$$6.3.g) \ H_{des}(s) = -\frac{s+9}{-s+5};$$

$$6.3.h) \ H_{des}(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s+9}{s+5} \cdot e^{-0.1s};$$

$$6.3.i) \ H_{des}(s) = \frac{5s^2 + 2s + 1}{s(s-1)^2};$$

$$6.3.j) \ H_{des}(s) = \frac{s(s+6)}{(s+4)(s-1)};$$

$$6.3.k) \ H_{des}(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+4)};$$

$$6.3.l) \ H_{des}(s) = \frac{10}{s^2 + 0.2s + 1};$$

$$6.3.m) \ H_{des}(s) = \frac{10(-s+1)}{(s^2 + 0.2s + 1)};$$

$$6.3.n) \ H_{des}(s) = \frac{1}{(s+1)^n}, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 8\};$$

$$6.3.o) \ H_{des}(s) = \frac{1}{s(s+1)^n}, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 8\};$$

$$6.3.p) \ H_{des}(s) = \frac{1}{(s+1)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)}, \\ \alpha \in \{0.1, 0.2, 1\};$$

$$6.3.q) \ H_{des}(s) = \frac{100}{(s+10)^2} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{0.5}{s+0.05} \right);$$

$$6.3.r) \ H_{des}(s) = \frac{(s+6)^2}{s(s+1)^2(s+36)};$$

$$6.3.s) \ H_{des}(s) = \frac{1-\alpha s}{(s+1)^3}, \\ \alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\};$$

$$6.3.t) \ H_{des}(s) = \frac{1-\alpha s}{s(s+1)^3}, \\ \alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\}.$$

(*) Studiați stabilitatea în buclă închisă în funcție de parametrul $K > 0$ pentru bucla deschisă descrisă de $H_{des}(s) = K \cdot H'_{des}(s)$, cu $H'_{des}(s)$ fixat definit la subpunctele de mai sus.

Lucrarea 7

Stabilitatea SRN. Criteriul Nyquist simplificat

7.1	Breviar teoretic	64
7.2	Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist	65
7.3	Probleme rezolvate utilizând diagramele Bode și Nichols . .	67
7.4	Probleme propuse	71

În această lucrare se prezintă criteriul Nyquist simplificat (practic) pentru studiul stabilității interne a sistemelor în buclă închisă, utilizat cel mai adesea în practică. Suplimentar, se prezintă modul de aplicare al criteriului utilizând diagramele Nyquist, Bode, și Nichols ale sistemului în buclă deschisă.

7.1 Breviar teoretic

Se pornește de la contextul sistemelor cu reacție negativă unitară expus în Lucrarea 6.

În practică, majoritatea proceselor nu prezintă poli instabili sau mai mult de doi poli pe axa imaginară (în general integratoare). Un factor suplimentar care ne conduce la criteriul Nyquist practic (simplificat) este necesitatea de a avea un criteriu care, pe lângă afirmația calitativă ca un sistem este stabil sau instabil, să prezinte o *metrică* asupra gradului de apropiere a sistemului de instabilitate.

Astfel, precondiția de aplicare a criteriului simplificat este:

$$N_+ = 0 \text{ și } N_0 \in \{0, 1, 2\}. \quad (7.1)$$

Teorema 7.1.1: Criteriul Nyquist simplificat (CNS)

1. Pentru un sistem LTI descris printr-o funcție de transfer în buclă deschisă $H_{des}(s)$ care îndeplinește **precondiția de mai sus**, se definesc:

- **pulsăția de tăiere**, ω_t : $|H_{des}(j\omega_t)| = 1$;
- **pulsăția la faza de $-\pi$** , $\omega_{-\pi}$: $\angle H_{des}(j\omega_{-\pi}) = -\pi$;
- **marginea de fază**, γ_k , definită ca distanța dintre faza de $-\pi$ și faza locului de transfer la pulsăția ω_t :

$$\gamma_k = \angle H_{des}(j\omega_t) - (-\pi) = \pi + \angle H_{des}(j\omega_t); \quad (7.2)$$

- **marginea de câștig**, m_k , definită ca modulul locului de transfer la pulsăția $\omega_{-\pi}$:

$$m_k = |H_{des}(j\omega_{-\pi})|. \quad (7.3)$$

2. Se trasează diagrama Nyquist (locul de transfer) pentru $H_{des}(j\omega)$. Se pune în evidență punctul $-1 + 0j$.

3. Se verifică dacă este satisfăcută **condiția de stabilitate asimptotică a sistemului în buclă închisă**, care poate fi formulată în mai multe moduri echivalente:

- condiția utilizând marginile de fază și de câștig:

$$\gamma_k > 0 \text{ și } m_k < 1 \Leftrightarrow m_k^{dB} < 0.$$

- condiția utilizând pulsățiile de tăiere, respectiv la faza de $-\pi$:

$$\omega_t < \omega_{-\pi}.$$

- Punctul critic $-1 + 0j$ trebuie să rămână în stânga locului de transfer când ω parcurge domeniul $(0, \infty)$.

Observație: În MATLAB, stabilitatea sistemului închis pe baza sistemului deschis $H_{des}(s)$ trasat, respectiv marginile de stabilitate, se pot citi din opțiunile **Characteristics** → **Minimum Stability Margins** sau **Characteristics** → **All Stability Margins**. Cea din urmă consideră toate pulsăriile posibile la faza de $-\pi$, i.e. $-\pi \pm 2\ell\pi$, $\ell \in \mathbb{Z}$.

Observație: În MATLAB, marginea de câștig se definește ca fiind inversul echivalentului din lucrare, i.e. $m_k^{\text{lucrare}} = \frac{1}{m_k^{\text{MATLAB}}}$. În acest sens, echivalentul în decibeli va avea semn inversat față de ceea ce rezultă din calculul conform formulei (7.3): $m_k^{\text{dB,lucrare}} = -m_k^{\text{dB,MATLAB}}$.

Observație: Pot exista ambele margini de stabilitate, una dintre ele sau niciuna. Calitatea unui sistem de a fi stabil sau instabil nu este condiționată de existența marginilor de stabilitate. În caz de ambiguitate, se recomandă utilizarea **Criteriului Nyquist generalizat**.

7.2 Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist

Problemă: Să se traseze diagrama Nyquist și să se studieze stabilitatea în buclă închisă pentru următoarele funcții de transfer în buclă deschisă:

$$7.2.a) \ H_{des}(s) = 5 \frac{-s+2}{s(s+2)^2}; \quad 7.2.a) \ H_{des}(s) = \frac{-s+2}{s(s+2)^2}.$$

Rezolvare 7.2.a): Pe baza structurii sistemului rezultă:

- $\hat{s}_1 = 0 \Rightarrow N_0 = 1 \checkmark$;
- $\hat{s}_{2,3} = -2 \Rightarrow N_- = 2$;
- $N_+ = 0 \checkmark$, deoarece nu există poli cu partea reală pozitivă.

Din $N_0 = 1$ și $N_+ = 0$ rezultă că se poate aplica și criteriul Nyquist simplificat.

Prin aplicarea criteriului Nyquist practic, rezultă următoarele valori:

$$\omega_t : \left| 5 \frac{-j\omega + 2}{j\omega(j\omega + 2)^2} \right| = 1 \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 + 4}}{\omega(\sqrt{\omega^2 + 4})^2} = 1 \Leftrightarrow \omega^4 + 4\omega^2 - 25 = 0 \Rightarrow \omega_t \approx 1.84 \text{ [rad/s].}$$

Scriind funcția de transfer în formă normalizată:

$$H_{des}(s) = \frac{5}{2} \cdot \frac{-\frac{s}{2} + 1}{s \left(\frac{s}{2} + 1 \right)^2},$$

rezultă marginea de fază:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \pi + \angle \frac{5}{2} + \angle \left(-j \frac{\omega_t}{2} + 1 \right) - \angle(j\omega_t) - 2 \cdot \angle \left(j \frac{\omega_t}{2} + 1 \right) \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} - 3 \arctan \left(\frac{\omega_t}{2} \right) = -0.6605 \text{ [rad]} = -37.8^\circ < 0, \end{aligned}$$

Suplimentar, pulsația la faza de $-\pi$ se poate calcula rezolvând ecuația:

$$\omega_{-\pi} : -\frac{\pi}{2} - 3 \arctan \left(\frac{\omega}{2} \right) = -\pi \Leftrightarrow \omega_{-\pi} = 2 \cdot \tan \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.15 \text{ [rad/s].}$$

Marginea de câstig devine:

$$m_k = \left| \frac{5}{\omega_{-\pi} \sqrt{\omega_{-\pi}^2 + 4}} \right| = 1.875 > 1.$$

Deoarece (i) $\gamma_k < 0$ și $m_k > 1$ rezultă faptul că sistemul în buclă închisă **NU este intern asimptotic stabil**. Concluzia se putea obține și pe baza uneia dintre cantități doar, cealaltă fiind redundantă în contextul precondiției (7.1). Marginile de stabilitate sunt ilustrate în Figura 7.1. În mod echivalent, (ii) se deduce aceeași concluzie asupra stabilității prin faptul că $\omega_t > \omega_{-\pi}$. În mod echivalent, (iii) se deduce aceeași concluzie asupra stabilității prin faptul că punctul critic $-1 + 0j$ **NU rămâne în stânga** locului de transfer când pulsația parcurge intervalul $\omega \in (0, \infty)$.

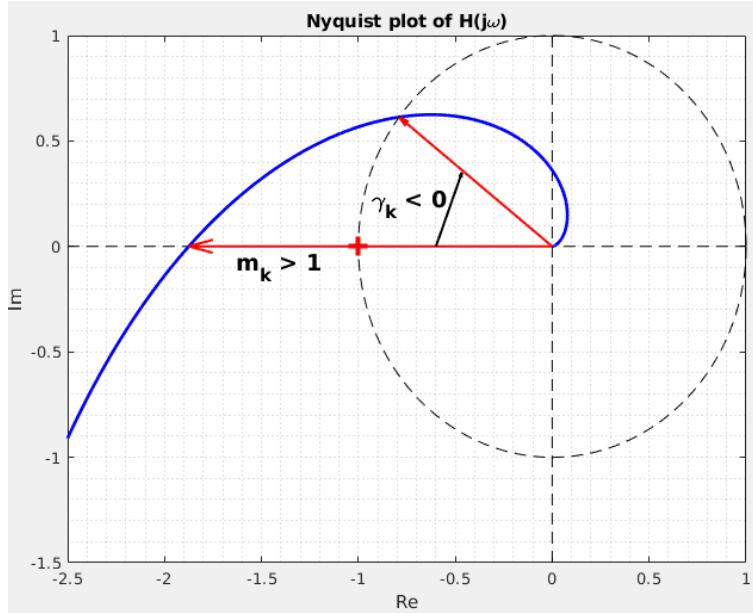


Figura 7.1: Criteriul Nyquist simplificat figurat pentru sistemul 7.2.a)

Rezolvare 7.2.b): Din analiza structurii sistemului:

$$H_{des}(s) = \frac{-s + 2}{s(s + 2)^2}, \quad (7.4)$$

care este identic celui de la punctul a) cu excepția factorului de proporționalitate, rezultă:

- $\hat{s}_1 = 0 \Rightarrow N_0 = 1$;
- $\hat{s}_{2,3} = -2 \Rightarrow N_- = 2$;

- $N_+ = 0$, deoarece nu există poli cu partea reală pozitivă.

Din $N_0 = 1$ și $N_+ = 0$ rezultă că se poate aplica și criteriul Nyquist simplificat.

Prin aplicarea criteriului Nyquist practic, reies prin calcule sau prin citire directă din MATLAB, următoarele valori, ilustrate în Figura 7.2:

$$\omega_t = 0.48, \quad \omega_{-\pi} = 1.15, \quad \gamma_k = +49^\circ, \quad m_k = 0.375. \quad (7.5)$$

Deoarece $(i) \gamma_k > 0$ și $m_k < 1$ rezultă faptul că sistemul în buclă închisă este intern asimptotic stabil. Concluzia se putea obține și pe baza uneia dintre cantități doar, cealaltă fiind redundantă în contextul precondiției (7.1). Marginile de stabilitate sunt ilustrate în Figura 7.2. În mod echivalent, (ii) se deduce aceeași concluzie asupra stabilității prin faptul că $\omega_t < \omega_{-\pi}$. În mod echivalent, (iii) se deduce aceeași concluzie asupra stabilității prin faptul că punctul critic $-1 + 0j$ rămâne în **stânga** locului de transfer când pulsăția parcurge intervalul $\omega \in (0, \infty)$.

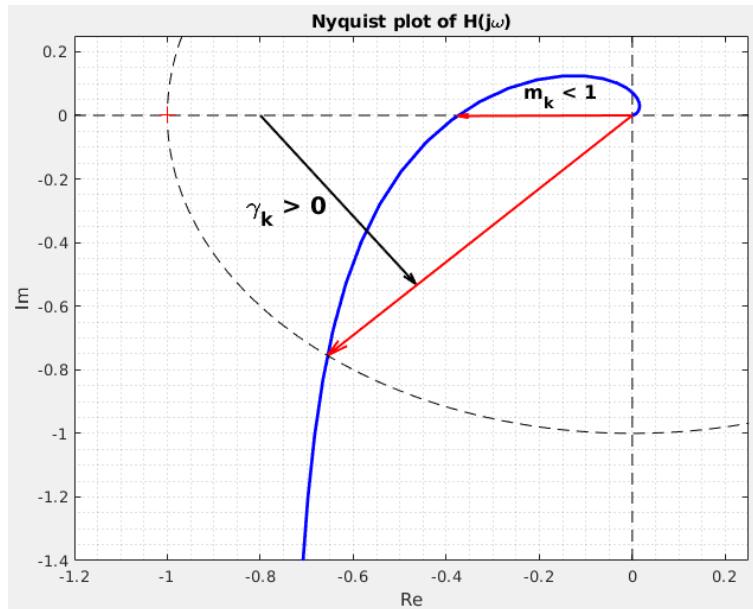


Figura 7.2: Criteriul Nyquist simplificat figurat pentru sistemul 7.2.b).

7.3 Probleme rezolvate utilizând diagramele Bode și Nichols

Problemă: Să se traseze diagramele Bode, respectiv Nichols și să se studieze stabilitatea în buclă închisă pentru următoarele funcții de transfer în buclă deschisă:

$$a) \quad H_{des}(s) = -2 \frac{s-2}{s(s+6)}; \quad b) \quad H_{des}(s) = \frac{8(s+9)}{s(s+50)} e^{-2s}.$$

Rezolvare 7.3.a): Primul sistem are pe bucla deschisă:

$$H_{des}(s) = -2 \frac{s-2}{s(s+6)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{2}s+1}{s(\frac{1}{6}s+1)}, \quad (7.6)$$

se deduc $N_0 = 1$, $N_+ = 0$, de unde rezultă că poate fi aplicat criteriul Nyquist simplificat.

Diagramele Bode și Nichols pentru acest exemplu, cu figurarea marginilor de fază și de câstig, sunt ilustrate în Figura 7.3. **Pornind de la trasarea diagramei Bode prin asimptote reiese că pulsația de tăiere este subunitară.** Acest aspect poate fi exploatat pentru aproximarea analitică a pulsației de tăiere astfel:

$$\omega_t : \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1}}{\omega \sqrt{\left(\frac{\omega}{6}\right)^2 + 1}} = 1 \stackrel{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2, \left(\frac{\omega}{6}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1}}{\omega \sqrt{\left(\frac{\omega}{6}\right)^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \omega_t \approx \frac{2}{3},$$

ceea ce este aproape de valoarea reală $\omega_t = 0.702$ [rad/s]. Ulterior, marginea de fază devine, utilizând forma normalizată a funcției de transfer:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \pi + \angle\left(\frac{2}{3}\right) + \angle\left(-j\frac{\omega_t}{2} + 1\right) - \angle(j\omega_t) - \angle\left(j\frac{\omega_t}{6} + 1\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_t}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_t}{6}\right) = 1.1425 \text{ [rad]} = 65.4^\circ > 0. \end{aligned}$$

Pulsația la faza de $-\pi$ se obține pe baza ecuației:

$$\omega_{-\pi} : -\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{6}\right) = -\pi \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{6}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (7.7)$$

O astfel de ecuație se poate rezolva aplicând funcția tangentă și ținând cont de identitățile trigonometrice:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \Leftrightarrow \arctan \alpha \pm \arctan \beta = \arctan\left(\frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha \beta}\right). \quad (7.8)$$

Astfel, ecuația (7.7) devine:

$$\frac{\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{6}}{1 - \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\omega}{6}} = \tan \frac{\pi}{2} = \text{nedefinit} \Rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{12} = 0 \Rightarrow \omega_{-\pi} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46 \text{ [rad/s]}.$$

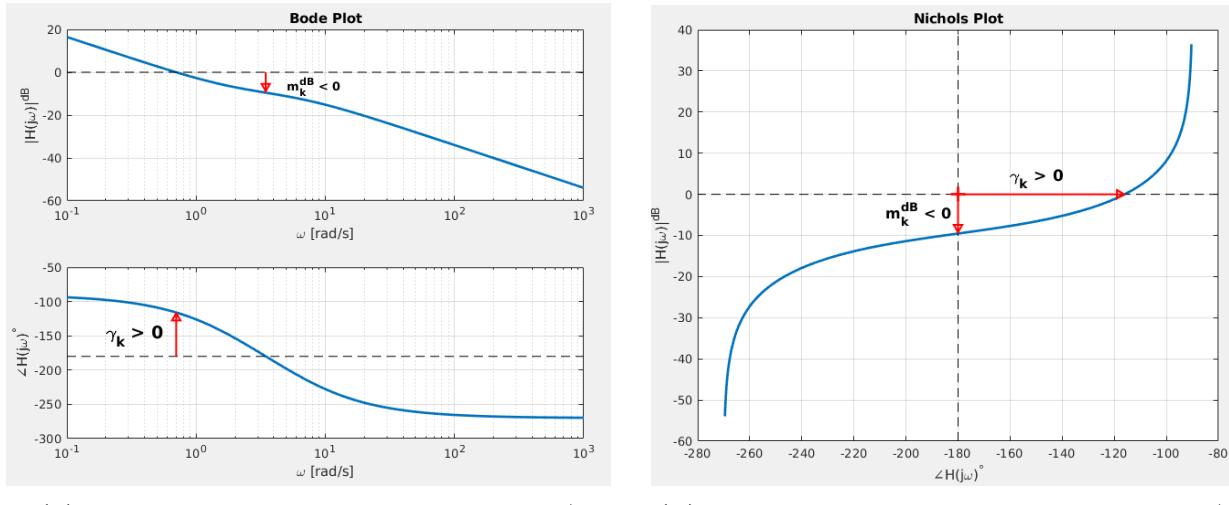
Marginea de câstig se poate determina ca fiind:

$$m_k = 2 \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 + 4}}{\omega \sqrt{\omega^2 + 36}} \Big|_{\omega=\omega_{-\pi}} = 0.333 \Rightarrow m_k^{\text{dB}} = -9.54 \text{ [dB]}.$$

Pe baza criteriului Nyquist simplificat rezultă că sistemul **este intern asimptotic stabil**, atât pe baza formulării cu marginile de stabilitate ($\gamma_k > 0$ și $m_k^{\text{dB}} < 0$), cât și din cea bazată pe pulsațiile corespunzătoare ($\omega_t < \omega_{-\pi}$).

Rezolvare 7.3.b): Al doilea sistem are pe bucla deschisă:

$$H_{des}(s) = \frac{8(s+9)}{s(s+50)} e^{-2s} = \frac{36}{25} \cdot \frac{\frac{1}{9}s+1}{s\left(\frac{1}{50}s+1\right)}, \quad (7.9)$$



(a) CN pentru D. Bode a sistemului 7.3.a)

(b) CN pentru D. Nichols a sistemului 7.3.a)

Figura 7.3: Diagramele Bode și Nichols pentru problema 7.3.a)

se deduc $N_0 = 1$, $N_+ = 0$, de unde rezultă că poate fi aplicat criteriul Nyquist simplificat.

Pornind de la trasarea diagramei Bode prin asimptote reiese că pulsărea de tăiere $\omega_t \in (1, 2)$. Această aspect poate fi exploarat pentru aproximarea analitică a pulsării de tăiere, prin faptul că $(\frac{\omega}{9})^2 \ll 1$ și $(\frac{\omega}{50})^2 \ll 1$:

$$\frac{36}{25} \cdot \frac{\sqrt{(\frac{\omega}{9})^2 + 1}}{\omega \sqrt{(\frac{\omega}{50})^2 + 1}} = 1 \approx \frac{36}{25} \cdot \frac{\sqrt{(\frac{\omega}{9})^2 + 1}}{\omega \sqrt{(\frac{\omega}{50})^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \omega_t \approx \frac{36}{25} = 1.44 \text{ [rad/s]},$$

ceea ce ne duce la un rezultat apropiat de realitate, valoarea exactă fiind $\omega_t = 1.46 \text{ [rad/s]}$.

Marginea de fază rezultă în continuare:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \pi + \angle\left(\frac{36}{25}\right) + \angle\left(j\frac{\omega_t}{9} + 1\right) - \angle(j\omega_t) - \angle\left(j\frac{\omega_t}{50} + 1\right) + \angle e^{-2\omega_t j} \\ &= \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega_t}{9}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_t}{50}\right) - 2\omega_t = -1.1793 \text{ [rad]} = -67.5^\circ < 0. \end{aligned}$$

Pentru deducerea pulsării la faza de $-\pi$ avem ecuația:

$$\omega_{-\pi} : \arctan\left(\frac{\omega_t}{9}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_t}{50}\right) - 2\omega_t = -\pi.$$

În ecuația de mai sus se regăsește variabila necunoscută ω atât în funcții trigonometrice, cât și într-o expresie polinomială, prin urmare, este o **ecuație transcendentă**. Aceste tipuri de ecuații nu se pot rezolva analitic, ci doar prin aproximări până la o toleranță impusă. Definim funcția:

$$f(\omega) := \arctan\left(\frac{\omega_t}{9}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_t}{50}\right) - 2\omega_t + \pi = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega_t}{9}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_t}{50}\right) - 2\omega_t.$$

Funcția $f(\omega)$ este continuă și se constată pe baza caracteristicii de fază din diagrama Bode că soluția ei este în intervalul $\omega \in (0.5, 1)$.

Pe baza continuității, se poate aproxima soluția $\omega_{-\pi}$ prin bisecții ale intervalului de căutare, deoarece pentru un interval arbitrar (ω_1, ω_2) , dacă $f(\omega_1) \cdot f(\omega_2) < 0$, atunci ω^* pentru care $f(\omega^*) = 0$ se găsește în intervalul deschis (ω_1, ω_2) . În cazul nostru se constată:

$$\begin{aligned} f(0.5) &= 0.6163 > 0, \quad f(1) = -0.3385 < 0, \quad f(0.5) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \omega_{-\pi} \in (0.5, 1); \\ f(0.75) &= 0.1389 > 0, \quad f(0.75) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \omega_{-\pi} \in (0.75, 1); \\ f(0.85) &= -0.0520 < 0, \quad f(0.75) \cdot f(0.85) < 0 \Rightarrow \omega_{-\pi} \in (0.75, 0.85); \\ &\vdots \\ \omega_{-\pi} &\approx 0.825 \text{ [rad/s].} \end{aligned}$$

Marginea de câstig se calculează apoi ca:

$$m_k = \frac{36}{25} \cdot \left. \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{9}\right)^2 + 1}}{\omega \sqrt{\left(\frac{\omega}{50}\right)^2 + 1}} \right|_{\omega_{-\pi}=0.825} = 1.7525 > 1 \Leftrightarrow m_k^{dB} = 4.8733 > 0.$$

Pe baza criteriului Nyquist simplificat rezultă că sistemul **NU este intern asimptotic stabil**, atât pe baza formulării cu marginile de stabilitate ($\gamma_k < 0$ și $m_k^{dB} > 0$), cât și din cea bazată pe pulsăriile corespunzătoare ($\omega_t > \omega_{-\pi}$).

Diagramele Bode și Nichols pentru acest exemplu, cu figurarea marginilor de fază și de câstig, sunt ilustrate în Figura 7.4

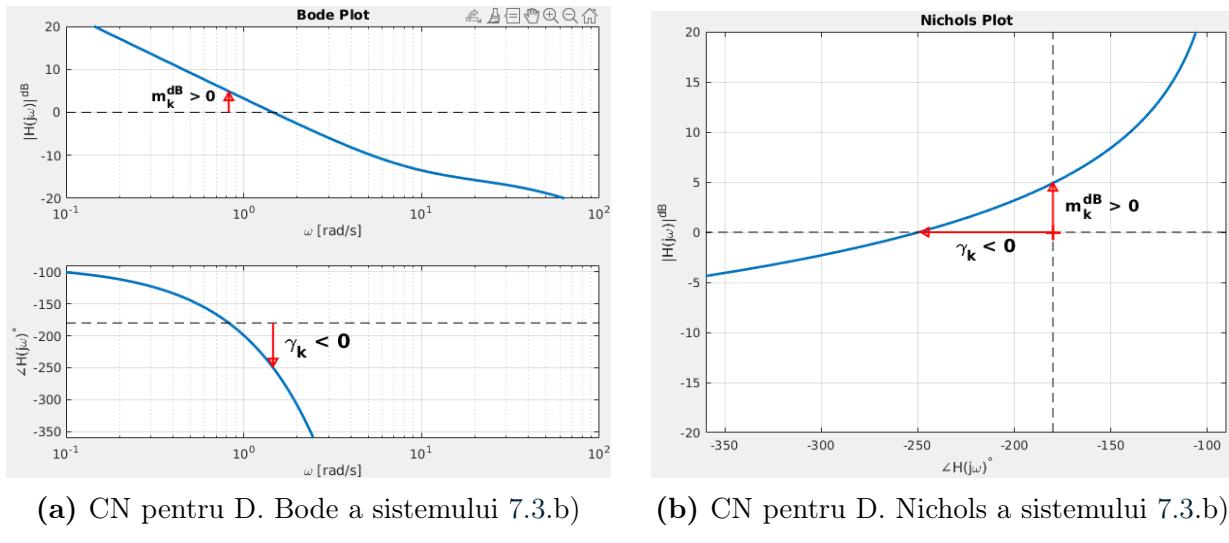


Figura 7.4: Diagramale Bode și Nichols pentru problema 7.3.b)

Discuție: ce se întâmplă dacă variază factorul de proporționalitate K ? Dar dacă variază timpul mort τ_m ? Studiați impactul lor asupra marginilor de stabilitate și a pulsărilor acestora.

7.4 Probleme propuse

Să se traseze diagramele Nyquist, Bode și Nichols pentru următoarele funcții de transfer în buclă deschisă și să se studieze stabilitatea în buclă închisă pe baza criteriului Nyquist simplificat. Figurați marginile de stabilitate. Verificați condițiile de aplicabilitate a criteriului simplificat, iar, în caz contrar, folosiți criteriul Nyquist generalizat.

$$7.4.a) \quad H_{des}(s) = \frac{s+9}{s+5};$$

$$7.4.h) \quad H_{des}(s) = \frac{10(-s+1)}{(s^2+0.2s+1)};$$

$$7.4.b) \quad H_{des}(s) = \frac{s-9}{s+5};$$

$$7.4.i) \quad H_{des}(s) = \frac{1}{(s+1)^n}, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 8\};$$

$$7.4.c) \quad H_{des}(s) = \frac{-s+9}{s+5};$$

$$7.4.j) \quad H_{des}(s) = \frac{1}{s(s+1)^n}, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 8\};$$

$$7.4.d) \quad H_{des}(s) = -\frac{s-9}{s-5};$$

$$7.4.k) \quad H_{des}(s) = \frac{100}{(s+10)^2} \left(\frac{1}{s+1} + \frac{0.5}{s+0.05} \right);$$

$$7.4.e) \quad H_{des}(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s+9}{s+5} \cdot e^{-0.1s};$$

$$7.4.l) \quad H_{des}(s) = \frac{1-\alpha s}{(s+1)^3}, \quad \alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\};$$

$$7.4.f) \quad H_{des}(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+4)};$$

$$7.4.m) \quad H_{des}(s) = \frac{1-\alpha s}{s(s+1)^3}, \quad \alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\}.$$

(*) Se consideră structura extinsă în ipoteza existenței unui regulator proporțional variabil $K > 0$, respectiv a unui timp mort variabil $\tau_m > 0$, $H_{des}(s) = K \cdot H'_{des}(s) \cdot e^{-\tau_m s}$, cu $H'_{des}(s)$ fixat definit la subpunctele de mai sus. Discutați stabilitatea în buclă închisă în funcție de parametrii K și τ_m (i) în ipoteza în care unul dintre ei este fixat și variază celălalt; (ii) în ipoteza în care cei doi variază simultan.

Lucrarea 8

Performanțele SRN pe baza răspunsului în frecvență

8.1 Cercurile de modul și fază constantă	74
8.2 Performanțele SRN deduse pe baza RF al sistemului deschis	75
8.3 Funcțiile de senzitivitate	77
8.4 Probleme rezolvate	78
8.5 Probleme propuse	80

În această lucrare se prezintă cercurile de modul constant și de fază constantă pentru sistemul în buclă închisă, utilizate pentru a deduce performanțele relevante pentru regimurile staționar și tranzitoriu. Toate aceste citiri se efectuează pe baza răspunsului în frecvență (RF) a sistemului în buclă deschisă. Se vor ilustra modurile de citire, respectiv validare a acestor performanțe.

8.1 Cercurile de modul și fază constantă

Se pornește de la contextul sistemelor cu reacție negativă unitară (**SRNU**) expus în Lucrarea 6, precum în Figura 6.1. Se poate stabili legătura matematică între expresia lui $H_0(s)$ și $H_d(s) = K \cdot H(s)$:

$$H_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s) \cdot H_r(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s)} = \frac{P(\omega) + jQ(\omega)}{1 + P(\omega) + jQ(\omega)}, \quad (8.1)$$

unde $H_d(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$.

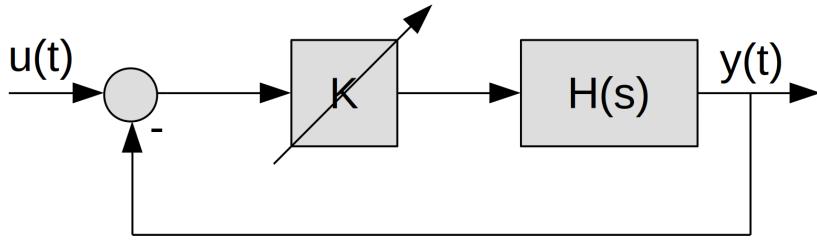


Figura 8.1: Sistem de reglare cu reacție negativă **unitară**.

Impunând **modulul lui $H_0(j\omega)$ la o anumită valoare pozitivă**: $M(\omega) = |H_0(j\omega)|$ se deduce locul geometric descris prin ecuația următorului cerc de centru (X_0, Y_0) și rază R :

$$X_0 = \frac{-M^2}{M^2 - 1}, \quad Y_0 = 0, \quad R = \left| \frac{M}{M^2 - 1} \right|. \quad (8.2)$$

Exemplu de interpretare: pulsația pentru care $|H_0(j\omega)| = 0.8$ trebuie citită de pe diagrama Nyquist la intersecția locului de transfer $H_d(j\omega)$ cu cercul corespunzător lui $M = 0.8$.

Impunând **faza lui $H_0(j\omega)$ la o anumită valoare**: $N(\omega) = \tan \angle H_0(j\omega)$ se deduce locul geometric descris prin ecuația următorului cerc de centru (X_0, Y_0) și rază R :

$$X_0 = -\frac{1}{2}, \quad Y_0 = \frac{1}{2N}, \quad R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{(2N)^2}}. \quad (8.3)$$

Exemplu de interpretare: pulsația pentru care $\angle H_0(j\omega) = 30^\circ$ trebuie citită de pe diagrama Nyquist la intersecția locului de transfer $H_d(j\omega)$ cu cercul corespunzător lui $N = \tan 30^\circ = 0.577$.

În MATLAB, apelând opțiunea `grid` se afișează cercurile importante de modul constant pentru diagrama Nyquist, respectiv echivalentul lor pentru diagrama Nichols, precum este ilustrat în Figurile 8.2.a) și 8.2.b).

Pentru a trasa cercuri suplimentare, se propune următoarea secvență de program:

```

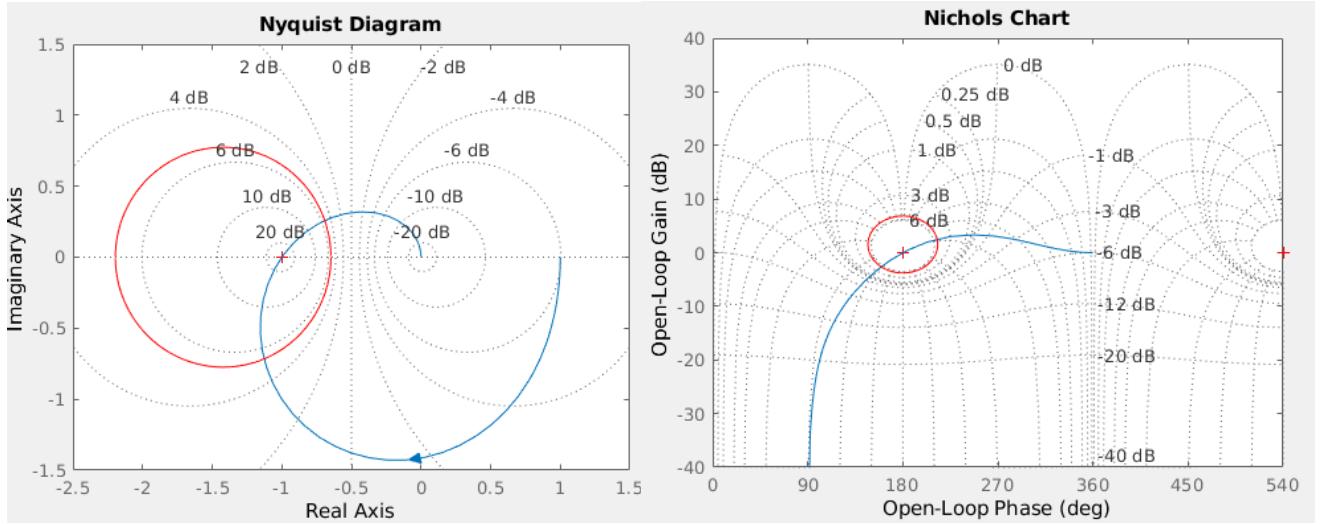
1 clf , nichols(Hdes) , grid , hold on
2 Mdb = 5.28; % modulul evidentiat
3 M = 10^(Mdb/20);
4 Ts = 0.01;
5
6 % jumatarea din dreapta de cerc
7 t = ( pi+Ts):Ts:(2*pi);
8 X = -M^2/(M^2-1);
9 Y = 0;
10 R = abs(M/(M^2-1));
11 % cercurile din diagrama Nyquist
12 x = X+R*cos(t); y = Y+R*sin(t);
13 % echivalentul lor in diagrama Nichols
14 mag = db(sqrt(x.^2+y.^2));
15 ph = atan2(y,x);
16 plot(rad2deg(ph),mag,'r') % poate trebuie adaugate/scazute
    cercuri!
17
18 % jumatarea din stanga de cerc
19 t = Ts:Ts:( pi);
20 X = -M^2/(M^2-1);
21 Y = 0;
22 R = abs(M/(M^2-1));
23 % cercurile din diagrama Nyquist
24 x = X+R*cos(t); y = Y+R*sin(t);
25 % echivalentul cercurilor din diagrama Nichols
26 mag = db(sqrt(x.^2+y.^2));
27 ph = atan2(y,x);
28 plot(-360+rad2deg(ph),mag,'r') % poate trebuie adaugate/scazute
    cercuri!
29 shg

```

8.2 Performanțele SRN deduse pe baza RF al sistemului deschis

În funcție de gama de frecvențe vizată, se pot distinge următoarele seturi de performanțe, în care se va prezenta inițial modalitatea de a le deduce pe baza lui $H_{des}(s)$ utilizând diagramele Nyquist sau Nichols, iar apoi cum pot fi verificate explicit pentru $H_0(s)$, în general pe diagrama Bode:

- stabilitatea sistemului închis:** se poate deduce aplicând criteriul Nyquist (generalizat sau practic) pentru sistemul în buclă deschisă $H_{des}(j\omega)$. Pe lângă aspectul calitativ al stabilității, se pot calcula sau citi **marginile de stabilitate** γ_k și m_k pentru pulsăriile ω_t , respectiv $\omega_{-\pi}$. Verificarea stabilității lui $H_0(s)$ se poate face studiind concret polii.

(a) D. Nyquist pentru $H_{des}(j\omega)$, $M^{dB} = 5.28$ (b) D. Nichols pentru $H_{des}(j\omega)$, $M^{dB} = 5.28$ **Figura 8.2:** Ilustrarea intersecției locului de transfer $H_{des}(j\omega)$ cu cercul de modul constant $M^{dB} = 5.28$.

2. **performanțele regimului staționar** (frecvențe joase, $\omega \ll \omega_t, \omega_{-\pi}$): din diagrama Nichols se deduce cu ușurință capătul de frecvență joasă al funcției de transfer, de unde rezultă:

$$H_0(j \cdot 0) = \frac{H_d(j \cdot 0)}{1 + H_d(j \cdot 0)}. \quad (8.4)$$

Astfel, se poate calcula **eroarea staționară la poziție** a sistemului închis pentru o intrare de tip treaptă **unitară**, pe baza teoremei valorii finale:

$$\varepsilon_{ssp} := \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - y(t)) = 1 - H_0(0). \quad (8.5)$$

Verificarea erorii staționare la poziție se poate face cu ajutorul apelului `step(H0)`. Sistemul de reglare trebuie să fie extern stabil.

3. **performanțele regimului tranzitoriu** (frecvențe medii, în jurul lui $\omega_t, \omega_{-\pi}$)

- (a) **amplitudinea maximă a sistemului închis**, M_p (engl. *peak amplitude*): se citește la cercul tangent locului de transfer $H_{des}(j\omega)$, dată de valoarea corespunzătoare a lui M . Dacă locul de transfer intersectează un cerc de modul M de două ori atunci, pe baza continuității, acea valoare nu este maximă, iar dacă nu intersectează deloc, atunci funcția de transfer nu atinge valoarea respectivă. Se verifică în diagrama Bode a sistemului $H_0(s)$ la modulul maxim: $|H_0(j\omega_p)|$.
- (b) **lățimea de bandă a sistemului închis** (engl. *bandwidth*): se consideră că sistemul închis reușește să urmărească semnale de referință dacă modulul este peste valoarea de prag $\sqrt{2}/2$ pentru pulsăriile cuprinse în acel semnal:

$$\omega_B : |H_0(j\omega_B)| = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (8.6)$$

Cu cât sistemul are o lățime de bandă mai mare, cu atât este mai rapid, reușind să urmărească semnale de referință mai rapide, având spectrul în intervalul $[0, \omega_B]$. Citirea lățimii de bandă se poate face din intersecția locului de transfer H_{des} cu cercul de $M^{dB} = -3$, iar verificarea se poate face din diagrama Bode a sistemului $H_0(s)$ la modulul de -3 dB. În fișe tehnice pentru diverse circuite electrice, lățimea de bandă este corelată cu timpul de urcare: $\omega_B \approx 1/t_u$, $t_u := t_{90\%} - t_{10\%}$.

4. **capacitatea de rejetie a zgomotelor** (engl. *roll-off*, frecvențe înalte, $\omega \gg \omega_t$): după proiectarea sistemului de reglare cu lățimea de bandă dorită, semnalele de frecvențe mai mari trebuie atenuate, fiind considerate perturbații. Printre acestea se află și zgomotul de măsură al senzorului sau traductorului. Rejetia zgomotelor este dată de panta finală de atenuare (panta totală după activarea tuturor pulsărilor de frângere ale sistemului) a funcției de transfer în buclă deschisă, care coincide cu panta finală de atenuare a funcției de transfer în buclă închisă. Este dată de excesul polilor față de zerouri:

$$e = n - m \Rightarrow \text{Panta finală} = -20 \cdot (n - m) \text{ dB/dec.} \quad (8.7)$$

Se citește din diagrama Bode a lui $H_{des}(s)$ și se poate verifica din diagrama Bode a lui $H_0(s)$.

8.3 Funcțiile de sensibilitate

În Figura 8.3 se prezintă structura clasică de reglare în buclă închisă cu un grad de libertate și reacție negativă unitară. Procesul este descris prin modelul $G(s)$, iar regulatorul este descris prin $K(s)$.

Se consideră **funcția de transfer în buclă deschisă**, L , definită de la semnalul de eroare e la ieșirea y :

$$L = H_{des} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{Y}{E} = KG = GK. \quad (8.8)$$

Se definesc următoarele funcții de transfer specifice buclei din Figura 8.3, cu notările consacrate în literatură:

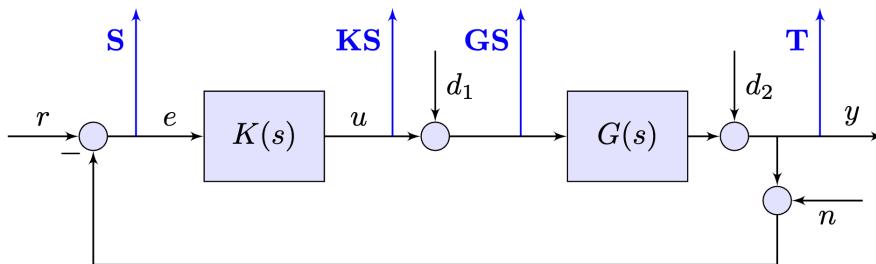


Figura 8.3: Structura clasică de reglare în buclă închisă cu un grad de libertate și reacție negativă unitară, cu semnalele r , e , u , d_1 , d_2 , y , n , respectiv funcțiile de transfer în buclă închisă S , T , KS , GS .

1. **funcția de senzitivitate în buclă închisă**, S , definită de la referința r la semnalul de eroare e :

$$S \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{E}{R} = \frac{1}{1+L}; \quad (8.9)$$

2. **complementara funcției de senzitivitate în buclă închisă**, T , de la referința r la ieșire y :

$$T \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{Y}{R} = \frac{L}{1+L}; \quad (8.10)$$

3. **efortul comenzi**, definit de la referința r la semnalul de comandă al procesului u :

$$KS \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{U}{R} = \frac{K}{1+L}; \quad (8.11)$$

4. **funcția de cuantificare a efectului perturbației**, definită de la perturbația de intrare d_1 la semnalul de ieșire al procesului y :

$$GS \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{Y}{D_1} = \frac{G}{1+L}. \quad (8.12)$$

Conform definițiilor, se poate constata legătura esențială dintre funcția de senzitivitate a erorii S și complementara funcției de senzitivitate T :

$$S(s) + T(s) = 1, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad 1+L(s) \neq 0.$$

Funcțiile de senzitivitate în buclă închisă de la intrările $(r, d_1, d_2, n)^\top$ la ieșirile $(e, u, y)^\top$ se pot deduce ca fiind bazate pe variațiuni ale celor patru funcții de transfer în buclă închisă de mai sus:

$$\begin{pmatrix} e \\ u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+GK} & -\frac{G}{1+GK} & -\frac{1}{1+GK} & -\frac{1}{1+GK} \\ \frac{K}{1+GK} & -\frac{KG}{1+GK} & -\frac{K}{1+GK} & -\frac{K}{1+GK} \\ \frac{1+KG}{GK} & \frac{G}{1+GK} & \frac{1}{1+GK} & -\frac{GK}{1+GK} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \\ n \end{pmatrix}, \quad (8.13)$$

și, prin ponderarea răspunsurilor în frecvență de la fiecare intrare la fiecare ieșire, se poate formula o singură problemă de proiectare care să impună răspunsurile dorite, în funcție de aplicație [Skogestad și Postlethwaite 2005]. Avantajul, chiar dacă răspunsurile în frecvență ale celor 4 funcții sunt uneori contradictorii (creșterea amplitudinii pentru una dintre funcții poate duce implicit la scăderea amplitudinii în alta ș.a.m.d.), domeniile de frecvență în care se dorește o amplitudine mare este adesea compensată de necesitatea unei funcții complementare de a avea amplificare mică.

8.4 Probleme rezolvate

Să se deducă performanțele sistemului în buclă închisă $H_0(s)$ pe baza diagramei Nichols a sistemului în buclă deschisă $H_{des}(s)$ în ipoteza structurii din Figura 8.1. Validați rezultatele obținute pe baza sistemului închis.

Problema 8.4.a) Se consideră funcția de transfer identificată a unei axe CNC acționată cu un motor BLDC:

$$H_{des}(s) = \frac{1295.68}{s(0.1198s + 1)}. \quad (8.14)$$

Trasând diagrama Nichols pentru $H_{des}(s)$ se pot deduce:

- $N_+ = 0$ și $N_0 = 1$, deci poate fi aplicat criteriul Nyquist practic. Astfel, $\omega_t = 104$ [rad/s], $\gamma_k = 4.6^\circ$, $\omega_{-\pi} = +\infty$, $m_k^{dB} = -\infty$, de unde rezultă că sistemul închis este stabil;
- $H_{des}(0) = \infty$, rezultă că $H_0(0) = \frac{H_{des}(0)}{1+H_{des}(0)} = \frac{\infty}{1+\infty} = 1$, deci $\frac{Y(s)}{U(s)} = 1$, $s = j\omega \leftarrow j0 \Leftrightarrow \varepsilon_{ssp} = 1 - 1 = 0$;
- $M_p^{dB} = 21.9$, $\omega_p = 104$ [rad/s]; în practică se doresc valori sub ≈ 6 [dB], iar în cazul curent se anticipatează un caracter puternic oscilant al sistemului;
- $\omega_B = 161$ [rad/s], având deci un timp de urcare de aproximativ $t_u \approx 1/161 = 6.2$ [ms];
- $e = n - m = 2 - 0 = 2$, rezultă că sistemul închis atenuază zgomotele cu o pantă de -40 [dB/dec].

Toate aceste performanțe sunt ilustrate în Figura 8.4.

Problema 8.4.b) Se consideră un proces termic modelat prin:

$$H_{des}(s) = \frac{2}{(s + 1)(10s + 1)} e^{-0.15s}. \quad (8.15)$$

Trasând diagrama Nichols pentru $H_{des}(s)$ se pot deduce:

- $N_+ = 0$ și $N_0 = 0$, deci poate fi aplicat criteriul Nyquist practic. Astfel, $\omega_t = 0.17$ [rad/s], $\gamma_k = 109^\circ$, $\omega_{-\pi} = 2.65$ [rad/s], $m_k^{dB} = -31.5$, de unde rezultă că sistemul închis este intern asimptotic stabil;
- $|H_{des}(0)|^{dB} \approx 6 \Leftrightarrow |H_{des}(0)| = 2$, rezultă că $H_0(0) = \frac{H_{des}(0)}{1+H_{des}(0)} = \frac{2}{1+2} = 0.66$, deci $\frac{Y(s)}{U(s)} = 0.66$, $s = j\omega \leftarrow j0 \Leftrightarrow \varepsilon_{ssp} = 1 - 0.66 = 0.33$;
- $M_p^{dB} \rightarrow -3.52 < 0$, $\omega_p \rightarrow 0$ [rad/s]; cum $\omega_p \rightarrow 0$ rezultă că nu există rezonanță în acest sistem (valoarea maximă este la capătul de frecvențe joase);
- $\nexists \omega_B$, deoarece $H_0(j\omega)$ are permanent modulul mai mic decât -3 [dB], deci, privit ca un sistem de control, nu este capabil să urmărească semnalele de referință. Trebuie să mărit modulul în zona frecvențelor joase;
- $e = n - m = 2 - 0 = 2$, rezultă că sistemul închis atenuază zgomotele cu o pantă de -40 [dB/dec].

Ilustrarea performanțelor pe diagramele corespunzătoare este lăsată ca temă cititorului.

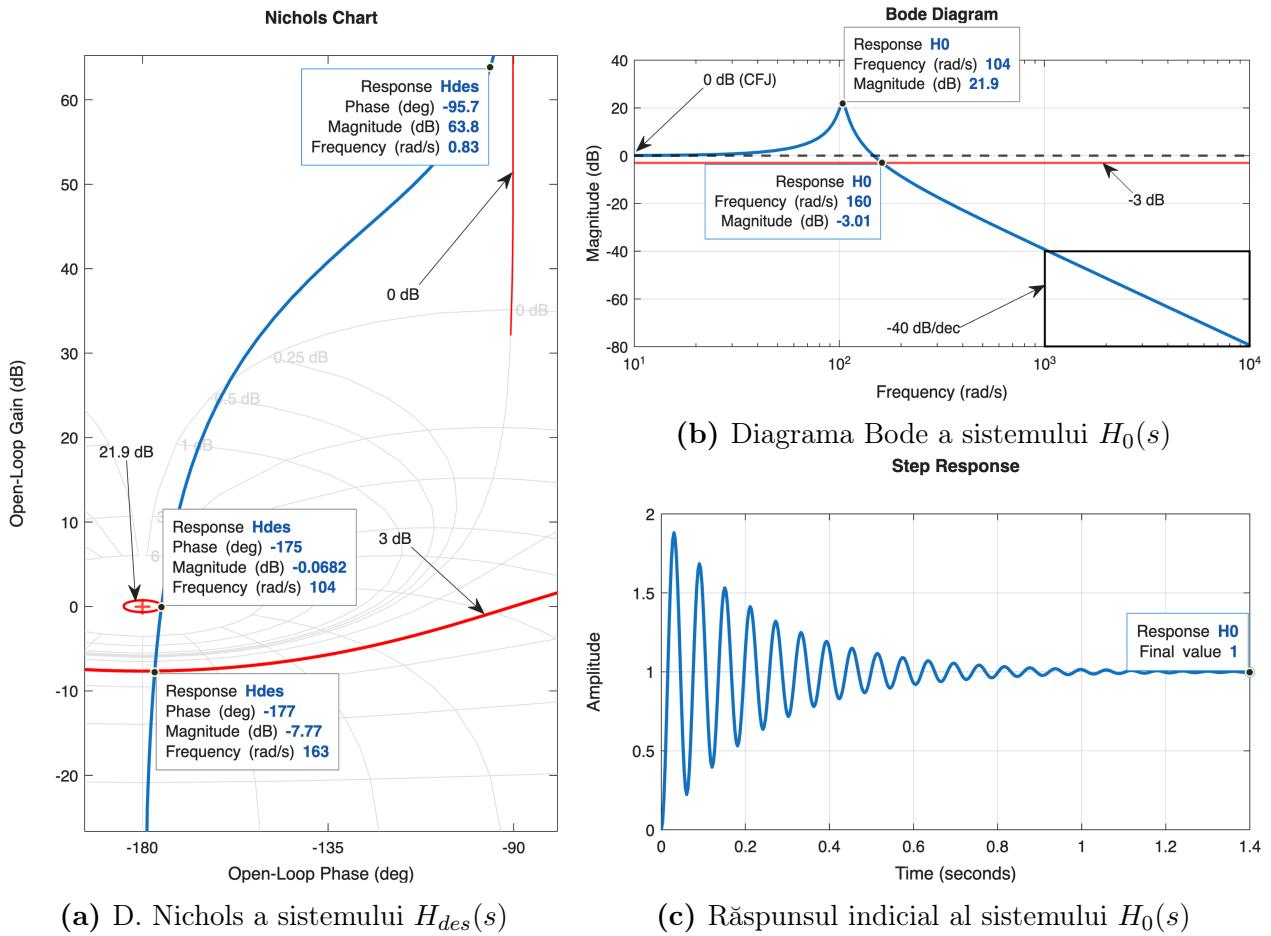


Figura 8.4: Estimarea și validarea performanțelor sistemului de la Problema 8.4.a).

8.5 Probleme propuse

Problema 1: Să se deducă performanțele sistemului în buclă închisă (margini de stabilitate, amplitudinea maximă a RF și pulsăția la care se găsește, lățimea de bandă, eroarea staționară la poziție, capacitatea de rejecție zgomote) folosind diagrama Nichols sau Nyquist trasată pentru $H_{des}(s)$, format din conexiunea serie dintre regulator și proces. Să se valideze performanțele obținute pe baza diagramei Bode a lui $H_0(s)$, pentru următoarele exemple:

$$8.5.a) \quad H_{des}(s) = H_R(s) \cdot H_f(s) = \frac{41.7(s + 4.41)}{s + 18.4} \cdot \frac{4}{s(s + 2)};$$

$$8.5.b) \quad H_{des}(s) = H_R(s) \cdot H_f(s) = \frac{10s + 1}{100s + 1} \cdot \frac{5}{s(s + 1)(0.5s + 1)};$$

$$8.5.c) \quad H_f(s) = \frac{(s + 6)^2}{s(s + 1)^2(s + 36)}. \text{ Proiectați un regulator proporțional } H_R(s) = K > 0 \text{ și analizați comportamentul sistemului rezultat;}$$

8.5.d) $H_f(s) = \frac{1}{(s+1)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)}$, $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1\}$. Proiectați un regulator cu avans/întârziere de fază $H_R(s) = K \frac{s+z}{s+p}$, $K, z, p > 0$ și verificați performanțele sistemului rezultat.

Problema 2: Să se traseze funcțiile de senzitivitate S , T , KS , GS pentru sistemele $H_R(s) \cdot H_f(s)$ de la **Problema 1**. Comparați graficele și performanțele cu cele ale proceselor $H_R(s)$ fără regulator. Ce constatați?

Partea II

Sisteme numerice

Lucrarea 9

Eșantionarea semnalelor și sistemelor continue

9.1	Eșantionarea semnalelor	86
9.2	Eșantionarea sistemelor descrise prin funcții de transfer	88
9.3	Fenomene specifice sistemelor numerice	89
9.4	Probleme propuse	92

Lucrarea de față prezintă o introducere în domeniul sistemelor numerice și vizează metode de eșantionare a semnalelor și a sistemelor continue având la bază teorema Shannon-Nyquist, respectiv fenomenele relevante care apar în cadrul sistemelor discretizate. Printre aceste fenomene se enumera cel de suprapunere a spectrelor, sensibilitatea la precizia numerică și supraeșantionarea în contextul proiectării regulatoarelor.

9.1 Eșantionarea semnalelor

Fie trei semnale de tip cosinus de trei frecvențe diferite:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \cos(2\pi f_1 t), \quad f_1 = 1 \text{ [Hz]}; \\x_2(t) &= \cos(2\pi f_2 t), \quad f_2 = 9 \text{ [Hz]}; \\x_3(t) &= \cos(2\pi f_3 t), \quad f_3 = 11 \text{ [Hz]}.\end{aligned}$$

Se propune următorul *script* MATLAB pentru a ilustra efectul alegerii perioadei de eșantionare pentru cele trei semnale:

```

1 % fie trei semnale de frecvență diferită
2 f1=1;f2=9;f3=11;
3 Te=0.01; % perioada de eșantionare configurabilă
4 t=0:Te:1;
5 x1=cos(2*pi*f1*t);
6 x2=cos(2*pi*f2*t);
7 x3=cos(2*pi*f3*t);
8 % se reprezintă grafic semnalele
9 plot(t,x1,'-o',t,x2,'-o',t,x3,'-o','linewidth',1.5,'markersize',5)
    ;shg;
10 legend(['T_{1,max}/T_e',num2str(1/f1/Te)],...
11         ['T_{2,max}/T_e',num2str(1/f2/Te)],...
12         ['T_{3,max}/T_e',num2str(1/f3/Te)])
13 xlabel('Timp [s]')
14 ylabel('x(t) = cos(2 \pi f t)'), grid minor

```

Rezultatul execuției programului pentru perioada de eșantionare $T_e = 0.01[s]$ este ilustrat în Figura 9.1.

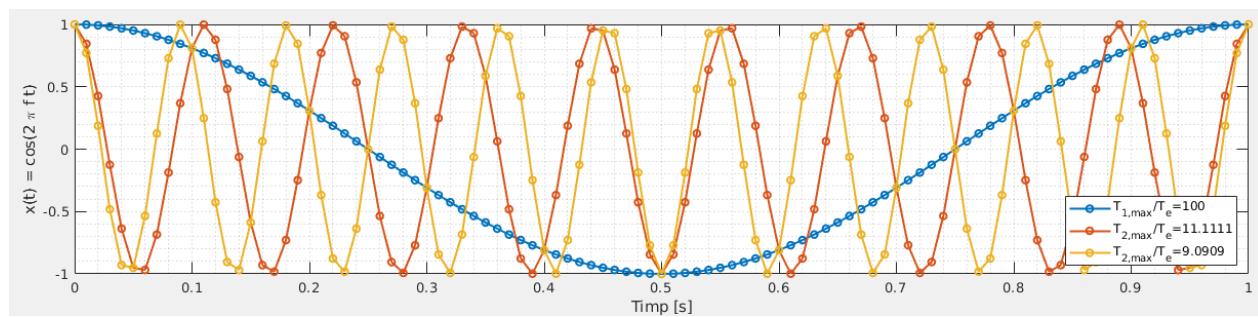


Figura 9.1: Eșantionarea semnalelor de diferite frecvențe

Discuție: Ce se întâmplă dacă se modifică perioada de eșantionare? Execuați scriptul pentru $T \in \{0.01, 0.025, 0.05, 0.1\}$ și comentați rezultatele obținute. Care este valoarea maximă a perioadei de eșantionare T pentru care toate cele trei semnale sunt corect eșantionate?

9.1.1 Teorema lui Shannon

Se consideră un sistem de achiziție de date ideal care măsoară un semnal $x(t), t \geq 0$ cu o frecvență constantă f_e . Acest sistem realizează astfel un tren de impulsuri Dirac ideale, egal distanțate în timpul $T_e = 1/f_e$:

$$\psi_{T_e}(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e). \quad (9.1)$$

Semnalul discretizat rezultat are următoarea formă, pe baza convoluçãoi dintre semnalul continuu $x(t)$ și trenul de impulsuri $\psi_{T_e}(t)$:

$$x^*[n] = (x(t) \star \psi_{T_e}(t)) [n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \Big|_{t=nT_e}. \quad (9.2)$$

Prin convenție, în loc de $x^*(nT_e)$ pentru a ilustra eșantionul la momentul $t = nT_e$, se preferă notația $x^*[n]$.

Teorema 9.1.1: Teorema Shannon-Nyquist

Un semnal în timp continuu $x(t), t \geq 0$ cu un spectru mărginit de valoarea f_{max} [Hz], poate fi reconstituit complet din eșantioanele sale dacă se respectă:

$$f_e > 2f_{max} \Leftrightarrow T_e < \frac{T_{min}}{2}, \text{ unde } f_{max} = \frac{1}{T_{min}}. \quad (9.3)$$

9.1.2 Ilustrarea fenomenului de suprapunere a spectrelor (*aliasing*)

Pentru a ilustra fenomenul de suprapunere a spectrelor, se propune următoarea schemă Simulink, bazată pe eșantionarea unui semnal sinusoidal cu frecvență variabilă (de tip *Chirp*), timp de 4 secunde, cu frecvență inițială $f_{min} = 0.1$ [Hz] și frecvență finală $f_{max} = 100$ [Hz]. Eșantionarea se realizează cu un bloc de tip *Rate Transition*, setat inițial la frecvența $f_e = 200$ [Hz], ceea ce, conform teoremei lui Shannon, permite eșantionarea corectă a semnalelor cu frecvențe de până la 100 [Hz]. Această schemă Simulink se prezintă în Figura 9.2, unde trebuie setată și metoda de integrare cu pas fix $Ts = 1e-4$ [s] din panoul **Model Configuration Parameters**.

Dacă frecvența de eșantionare este setată la valoarea $f_e = 100$ [Hz], ceea ce permite eșantionarea corectă până la $f_e/2 = 50$ [Hz], atunci se poate observa că, până în 50 [Hz] intrarea este eșantionată corect, iar după 50 [Hz] frecvențele de la ieșire se comportă la fel cu cele de până la 50 [Hz], deci apare fenomenul de ***aliasing***. În Figura 9.3 se prezintă semnalul de intrare, semnalul eșantionat corect, respectiv semnalul cu suprapunerea spectrelor.

Combaterea fenomenului de *aliasing* se face utilizând un filtru trece jos bine calibrat pentru a atenua frecvențele peste valoarea f_{max} impusă.

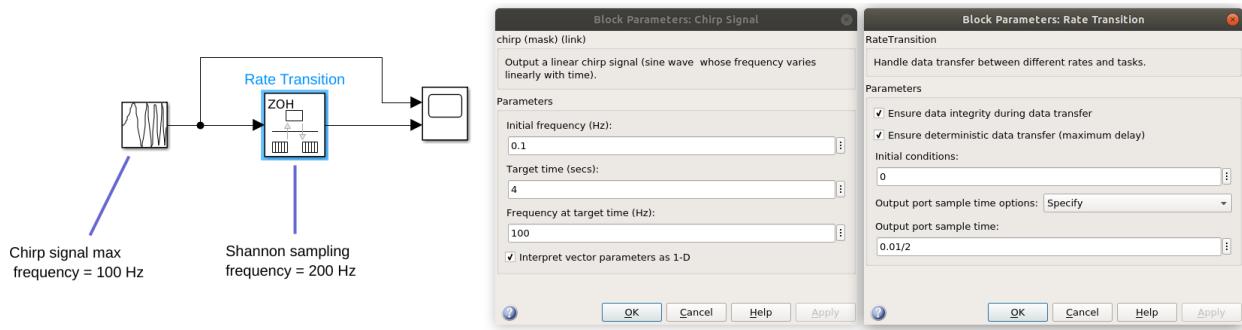


Figura 9.2: Schema Simulink pentru eșantionarea unui semnal sinusoidal de frecvență variabilă

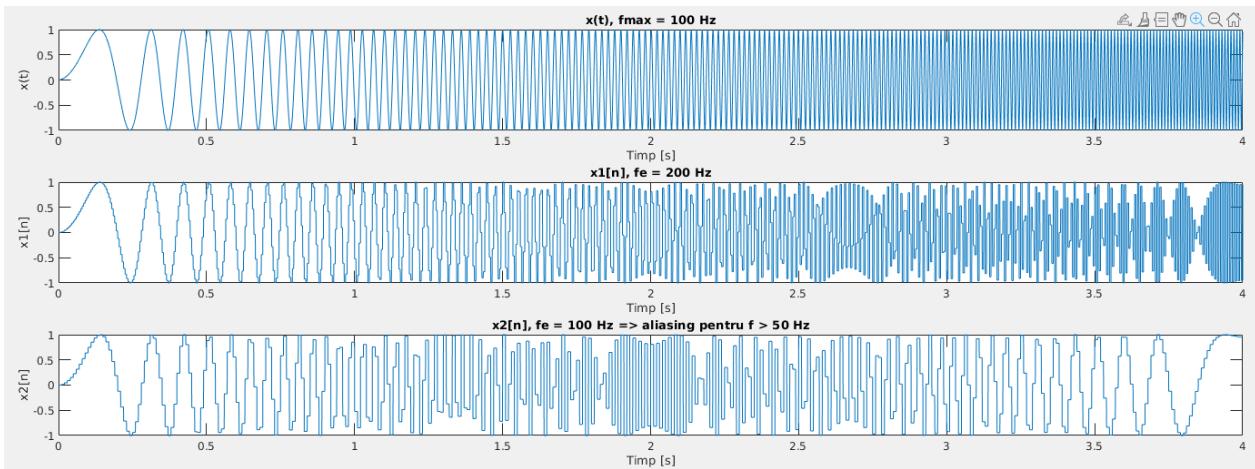


Figura 9.3: a) Semnalul de tip *Chirp*; b) semnalul eșantionat corect; c) semnalul cu *aliasing*

9.2 Eșantionarea sistemelor descrise prin funcții de transfer

Se consideră structura generală a unei funcții de transfer fără timp mort:

$$H(s) = \frac{1}{s^p} \cdot \frac{\beta(s)}{\prod (T_i s + 1) \prod \left(s^2 + 2\zeta_j \omega_{n_j} s + \omega_{n_j}^2 \right)}. \quad (9.4)$$

Pentru a eșantiona sistemele descrise prin funcții de transfer, dinamica acestora se determină în funcție de **timpii de răspuns ai modurilor de oscilație**. Astfel, aplicând teorema lui Shannon pentru structura generală (9.4) rezultă următoarea formulă de eșantionare:

$$T_e < \frac{\min \left\{ T_i, \frac{1}{\zeta_j \omega_{n_j}} \right\}}{2} \Leftrightarrow T_e < \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{t_r}{4} \right\}. \quad (9.5)$$

Pe baza formulei (9.5) se constată următoarele observații:

- NU se iau în considerare zerourile pentru eşantionare; doar modurile sunt relevante;
- NU se iau în considerare integratoarele și derivatoarele;
- Pentru rigurozitate, în contexte practice se preferă suplimentar și considerarea pulsărilor părților imaginare ale polilor complex conjugați, i.e., pulsăriile de oscilație $\omega_{osc} = \text{Im}(\hat{s}_i)$ [rad/s], ceea ce implică extensia condiției (9.5) și cu perioadele $T_i = T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_{osc}}$ [s].

În practică, pentru a nu utiliza filtre trece-jos foarte performante (cu *roll-off* mare), se alege perioada de eşantionare cu o margine considerabilă peste minimul teoretic $2f_{max}$ conform teoremei Shannon. Astfel, minimul recomandat în practică pentru f_e este de 4-5 ori mai mult, respectiv **de preferat ca f_e să fie de 10 ori mai mare decât f_{max}** .

Pentru conversia din domeniul continuu în discret și reciproc (pentru obiecte de tip **tf**, **ss**, **zpk**), respectiv declararea sistemelor discretizate, MATLAB pune la dispoziție următoarele funcții:

- **c2d**: `sysd=c2d(sysc,Te,'metoda');`
- **c2dm**: `[nd,dd]=c2dm(nc,dc,Te,'metoda')` (se pot folosi și matricele A,B,C,D în loc de `num,den`);
- **tf**: `Hd=tf(nd,dd,Te);`
- **ss**: `sysd=ss(A,B,C,D,Te);`
- **d2c**: `sysc=d2c(sysd,'metoda');`
- **d2cm**: `[nc,dc]=d2cm(nd,dd,Te,'metoda')` (se pot folosi și matricele A,B,C,D în loc de `num,den`).

Există multiple metode de discretizare prevăzute în MATLAB. O parte dintre acestea sunt:

- **zoh**: (engl. *Zero-order hold*) metoda elementului de reținere de ordin zero;
- **foh**: (engl. *First-order hold*), metoda elementului de reținere de ordin unu;
- **tustin** (alături de **prewarp**): metoda Tustin/trapezelor (cu preîncovoiere);
- **matched**: metoda potrivirii polilor/zerourilor din planul "s" în "z";
- **imp**: metoda invariantă răspunsului la impuls.

9.3 Fenomene specifice sistemelor numerice

9.3.1 Fenomenul de *aliasing* în cadrul eşantionării sistemelor

Se consideră sistemele:

$$H_1(s) = \frac{\left(\frac{10}{\sqrt{24}}\pi\right)^2}{s^2 + \frac{4\pi}{\sqrt{24}}s + \left(\frac{10}{\sqrt{24}}\pi\right)^2}, \quad H_2(s) = \frac{1}{0.8s + 1}. \quad (9.6)$$

Dacă cele două sisteme se eşantionează cu perioada $T_e = 1$ [s] și cu metoda *Zero-order hold* atunci răspunsurile la treaptă unitară arată precum în Figura 9.4. Se observă că răspunsurile sistemelor discrete sunt aproape identice, deși răspunsurile sistemelor continue sunt esențial diferite, având regimuri diferite. De aceea, **pentru a evita fenomenul de *aliasing* în implementarea sistemelor numerice, trebuie utilizată teorema lui Shannon**.

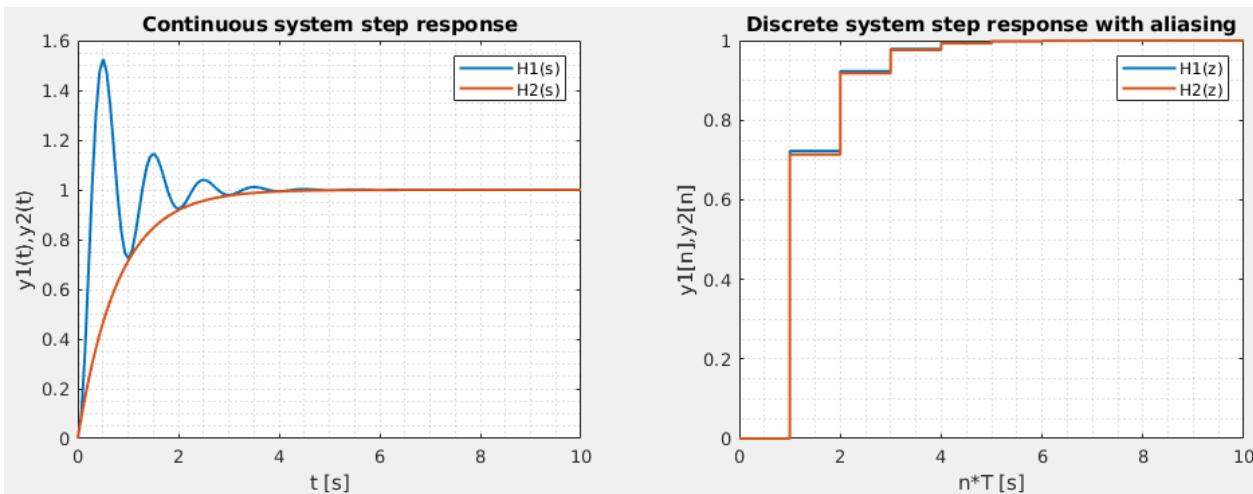


Figura 9.4: *Aliasing* în cazul eșantionării sistemelor

9.3.2 Sensibilitatea la numărul de zecimale considerate

Spre deosebire de un proces sau sistem de reglare analogic care există sub formă de sistem mecanic, electric, hidraulic, pneumatic, sistemele numerice se implementează pe calculatoare, microprocesoare, iar precizia lor este limitată de lungimile numerelor utilizate în implementare (pe 8/16/32/64 biți, cu semn sau fără semn etc.). Astfel, se poate studia sensibilitatea sistemelor numerice la numărul de zecimale considerate. În acest sens, se propune următorul *script* MATLAB pentru o funcție de transfer:

```

1 Hc = tf(500*[1,410],conv([1,210],[1,320]));
2 Te = min([1/210,1/320])/10;
3 format long
4 Hd = c2d(Hc,Te,'zoh');
5 [num,den]=tfdata(Hd,'v');
6 Hd5=tf([0.15331,-0.13487],[1,-1.84131,0.84736],Te);
7 Hd4=tf([0.1533,-0.1348],[1,-1.8413,0.8473],Te);
8 Hd3=tf([0.153,-0.134],[1,-1.841,0.847],Te);
9 step(Hd,Hd5,Hd4,Hd3,0.04),shg % timpul de simulare de 0.04[s]
10 legend('15z','5z','4z','3z');
```

Conform Figurii 9.5, se observă că se schimbă factorul de proporționalitate al sistemului în funcție de numărul de zecimale considerate. Dacă s-ar utiliza două zecimale se pierde și stabilitatea sistemului numeric. În general, **se recomandă lucrul cu minim 4-5 zecimale utile ale coeficientilor.**

9.3.3 Supraeșantionarea

Din punct de vedere a corectitudinii eșantionării, trebuie respectată teorema lui Shannon. Deoarece în domeniul ingineriei reglării se dorește, în primul rând, obținerea unui model aproximativ, de ordin cât mai redus, al sistemului real, care să cuprindă comportamentul esențial al acestuia, respectiv de a implementa regulatorul utilizând o perioadă mai mare

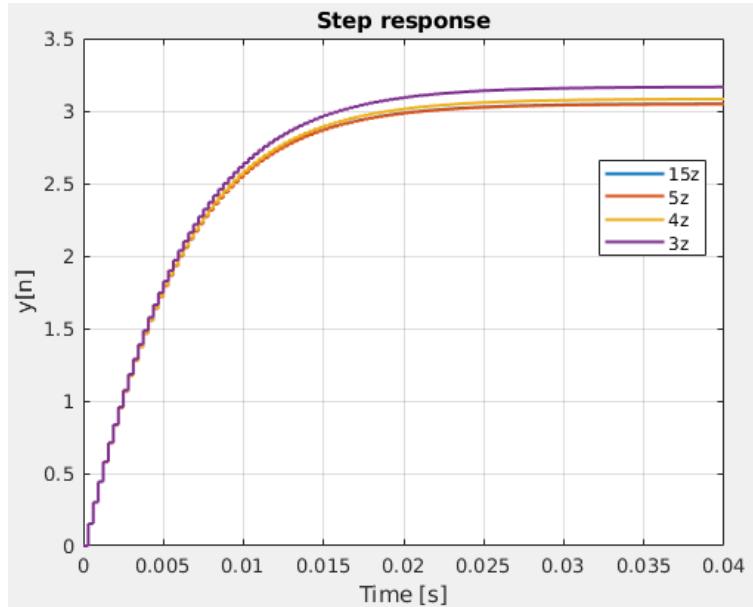


Figura 9.5: Efectele utilizării unui număr redus de zecimale în precizia sistemului

pentru sistemul de îintreruperi și al modulului *Timer*, se preferă uneori alegerea perioadei de eşantionare ținând cont doar de timpul de răspuns al modului dominant.

De exemplu, pentru sistemul:

$$H(s) = \frac{1}{(2s+1)(100s+1)}, \quad (9.7)$$

există două constante de timp aferente polilor: $T_1 = 2 \text{ [s]} \Rightarrow t_{r,1} = 4T_1 = 8 \text{ [s]}$ și $T_2 = 100 \text{ [s]} \Rightarrow t_{r,2} = 4T_2 = 400 \text{ [s]} \gg 8 \text{ [s]} = t_{r,1}$. În acest caz, deoarece timpul de răspuns al sistemului se poate considera că este dat aproape în totalitate de polul dominant ($t_r = (t_{r,1} + t_{r,2}) \approx t_{r,2}$), se preferă alegerea perioadei de eşantionare doar în funcție de acesta, conform teoremei lui Shannon practice:

$$T_e = \frac{1}{10} \frac{t_{r,2}}{4} = \frac{T_2}{10} = 10 \text{ [s]}. \quad (9.8)$$

Se consideră în acest caz că apare fenomenul de **supraeşantionare**, ceea ce duce la creșterea nejustificată (relativ la avantajele obținute) a frecvenței de eşantionare.

Se propune ca temă ilustrarea comparativă a răspunsurilor la treaptă unitară pentru sistemele:

- a) continuu $H(s)$ din (9.7);
- b) discretizat $H_1(z)$ utilizând perioada de eşantionare $T_e = 10 \text{ [s]}$ din (9.8);
- c) discretizat $H_2(z)$ utilizând perioada de eşantionare $T_e = 0.2 \text{ [s]}$.

9.3.4 Eșantionarea sistemelor cu timp mort

Se consideră un sistem cu timp mort de forma:

$$H(s) = H'(s)e^{-\tau_m s}. \quad (9.9)$$

Pentru a evita utilizarea transformantei \mathcal{Z} modificate se recomandă suplimentar ca perioada de eșantionare T_e , pe lângă respectarea teoremei lui Shannon pentru subsistemul $H'(s)$, să fie aleasă un submultiplu întreg al timpului mort τ_m :

$$\frac{\tau_m}{T_e} \in \mathbb{N}^*. \quad (9.10)$$

Pe de altă parte, cu cât raportul $\tau_m/T_e = N$ devine mai mare, cu atât crește gradul funcției de transfer discretizate, ceea ce duce la un efort computațional mai ridicat:

$$H(z) = H'(z)e^{-\tau_m s} = H'(z)e^{-N \cdot (T_e s)} = H'(z) \cdot z^{-N}. \quad (9.11)$$

Prin urmare, se dorește alegerea perioadei de eșantionare încat valoarea N să fie cât mai mică. De exemplu, pentru sistemul:

$$H(s) = \frac{4}{4s+1} e^{-0.1s}, \quad (9.12)$$

există constanta de timp $T = 4$ [s] și constanta timpului mort $\tau_m = 0.1$ [s]. Pentru partea ratională $H'(s)$, conform teoremei lui Shannon $T_e < \frac{4}{2} = 2$ [s]. Dacă se alege $T_e = \frac{4}{10} = 0.4$ [s] (conform teoremei lui Shannon practice), $N = \frac{\tau_m}{T_e} = 4$. Se preferă alegerea $T_e = 0.1$ [s], astfel încât N să fie minimul posibil ($N = 1$, în acest caz). $T_e = 0.1$ [s] respectă în continuare teorema lui Shannon!

9.4 Probleme propuse

Problema 9.4.1 Alegeti perioada de eșantionare pentru următoarele sisteme și verificați corectitudinea lor utilizând mediul MATLAB. Justificați alegerea făcută:

a) $H(s) = \frac{10}{8s+1};$

e) $H(s) = \frac{200}{(s+5)(s+P)},$

b) $H(s) = \frac{5}{(s+4)(s+16)};$

$P \in \{1, 2.5, 5, 10, 25, 50, 100\}$; afișați simultan toate răspunsurile la treaptă pe aceeași figură; corelați timpii de răspuns cu valorile constantelor de timp;

c) $H(s) = \frac{s+5}{s^2 + 8s + 64};$

d) $H(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+100)};$

f) $H(s) = \frac{s+7}{s+9} \cdot e^{-0.5s}.$

Problema 9.4.2 Discretizați următoarele sisteme continue bazate pe structuri clasice din mediul industrial [Åström și Hägglund 2000]. Studiați, utilizând mai multe perioade de eșantionare (care respectă teorema lui Shannon, respectiv care nu) și metode de discretizare suportate în MATLAB, polii, zerourile, factorul de proporționalitate și influența numărului de zecimale considerate asupra răspunsurilor sistemelor la treaptă și impuls.

- a) $H(s) = \frac{K}{s^n}$, $K \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$;
- b) $H(s) = \frac{1}{(s+1)^n}$, $n \in \{1, 2, 3, 4, 8\}$;
- c) $H(s) = \frac{1}{(s+1)(\alpha s+1)(\alpha^2 s+1)}$,
 $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1\}$;
- d) $H(s) = \frac{-\alpha s + 1}{(s+1)^3}$,
 $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\}$;

- e) $H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+1)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$,
 $\zeta \in \{0.1, 0.5, 0.8\}$, $\omega_n \in \{1, 2, 5, 10\}$;
- f) $H(s) = \frac{1}{(Ts+1)^k} \cdot e^{-s}$,
 $k \in \{1, 2\}$, $T \in \{0.1, 0.2, 0.5, 2, 5, 10\}$;
- g) $H(s) = \frac{(s+6)^2}{s(s+1)^2(s+36)}$;
- h) $H(s) = \frac{1}{(s-1)(Ts+1)}$,
 $T \in \{0.01, 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 100\}$.

Lucrarea 10

Discretizarea sistemelor continue

10.1 Maparea din planul s în planul z	96
10.2 Metode de discretizare	97
10.3 Exemple rezolvate	99
10.4 Regimuri de funcționare și moduri de oscilație	100
10.5 Probleme propuse	100

În această lucrare este prezentată maparea din planul s în planul z și principalele metode de discretizare a sistemelor LTI continue. De asemenea, sunt prezentate principalele avantaje și dezavantaje ale fiecărei metode, împreună cu singularitățile sistemului discret, respectiv modurile de oscilație și regimurile de funcționare ale acestuia.

10.1 Maparea din planul s în planul z

Pornind de la un semnal continuu în timp și amplitudine $y(t)$ și eșantionând cu perioada T_e , obținem semnalul eșantionat $y^*(t)$ care poate fi descris prin relația:

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT_e) \delta(t - kT_e), \quad (10.1)$$

unde δ este impulsul Dirac. Prin evaluarea transformatelor Laplace și \mathcal{Z} corespunzătoare semnalului eșantionat $y^*(t)$, obținem:

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= \mathcal{L}\{y^*(t)\}(s) = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} y(kT_e) \delta(t - kT_e) e^{-st} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y[k] \int_0^{\infty} \delta(t - kT_e) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] e^{-skT_e}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y^*(t)\}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] z^{-k}, \quad (10.3)$$

de unde putem deduce relația de mapare între planul s și planul z , precum în Figura 10.1:

$$z = e^{sT_e}. \quad (10.4)$$

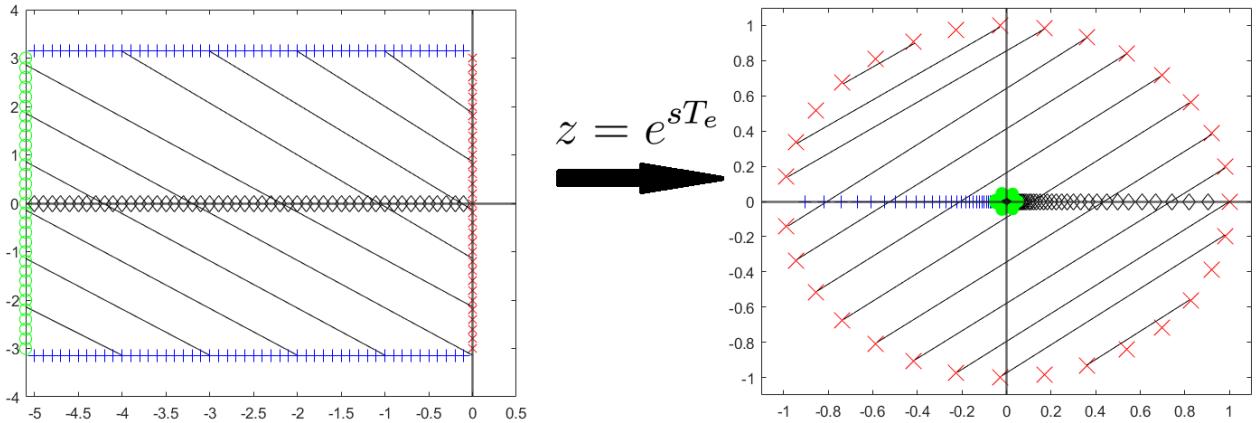


Figura 10.1: Maparea planului s în planul z .

Pentru a studia răspunsul în frecvență, din variabila complexă $s = \sigma + j\omega$ se reține doar partea imaginară, unde $\omega \in (-\infty, \infty)$ semnifică pulsația. Dar, folosind transformarea $z = e^{sT_e}$, răspunsul în frecvență al sistemelor discrete devine:

$$H_c(j\omega) \rightarrow H_d(e^{j\omega T_e}) = H_d(e^{j\Omega}), \quad (10.5)$$

unde $\Omega = \omega T_e$ este pulsația numerică. Din periodicitatea funcțiilor trigonometrice sin și cos, obținem că $\Omega = \omega T_e \in [-\pi, \pi]$. De aici, obținem fâșia principală din semiplanul stâng (partea

hașurată din Figura 10.1, semiplanul stâng) care este delimitată simetric pe axa imaginară de pulsația:

$$\omega_N = \frac{\omega_e}{2} = \frac{2\pi f_e}{2} = \frac{\pi}{T_e}, \quad (10.6)$$

numită **pulsăția Nyquist**. Pentru pulsățiile $|\omega| > \omega_N$ apare fenomenul de *aliasing*, i.e., suprapunere a spectrelor.

Fâșia principală se mapează în planul z în discul unitate astfel:

- pentru punctele de pe axa imaginară $s = j\omega$, $\omega \in [-\omega_N, \omega_N]$ (simbolizate cu $\textcolor{red}{x}$) avem $z = e^{j\omega T_e}$ și obținem cercul unitate;
- pentru marginile fâșiei principale $s = -\sigma \pm j\frac{\pi}{T_e}$ (simbolizate cu $\textcolor{blue}{+}$) avem $z = e^{-\sigma T_e}$ și obținem axa reală negativă din interior cercului unitate – puncte de forma $-e^{-\sigma T_e} \pm 0j$, cu $\sigma \in (0, \infty)$;
- pentru punctele de la infinit $s = -\infty + j\omega$, $\omega \in [-\omega_N, \omega_N]$ (simbolizate cu $\textcolor{green}{o}$) obținem un cerc de rază $\varepsilon \rightarrow 0$ în jurul originii;
- punctele de pe axa reală negativă (marcate cu $\textcolor{brown}{\diamond}$) se mapează în punctele de pe axa reală pozitivă din interiorul discului unitate ($e^{-\infty T_e}$, $e^{0 T_e}$);
- **restul punctelor din fâșia principală se vor măpa în interiorul discului unitate** (zonele hașurate).

Punctele din semiplanul drept se vor măpa în exteriorul cercului unitate. Punctele din semiplanul stâng care sunt în afara fâșiei principale vor avea un corespondent în fâșia principală (prin reducerea pulsăției numerice $\Omega = \omega T_e$ la intervalul $[-\pi, \pi]$) și se vor măpa tot în discul unitate (fenomenul de *aliasing*).

10.2 Metode de discretizare

10.2.1 Metode care provin din integrarea numerică

Pornind de la un sistem de ordinul I descris prin ecuația diferențială:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t) + bu(t), \quad (10.7)$$

prin integrare pe $[0, t]$ din condiții inițiale nule obținem:

$$y(t) = \int_0^t (-ay(\tau) + bu(\tau)) d\tau, \quad (10.8)$$

iar prin eșantionare cu perioada T_e avem:

$$y(kT_e) = y((k-1)T_e) + \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} (-ay(\tau) + bu(\tau)) d\tau. \quad (10.9)$$

Pornind de la posibilitățile de a evalua numeric integrala care apare în ecuația anterioară, vom prezenta în continuare trei metode de discretizare.

1. Metoda dreptunghiurilor înainte (Euler înainte)

Se utilizează pentru simulări de tip *Hardware-in-the-Loop* și se obține folosind substituția:

$$s = \frac{z - 1}{T_e} = \frac{1 - z^{-1}}{T_e \cdot z^{-1}}. \quad (10.10)$$

2. Metoda dreptunghiurilor înapoi (Euler înapoi)

Este o metodă de integrare implicită și se obține prin substituția:

$$s = \frac{z - 1}{T_e \cdot z} = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}. \quad (10.11)$$

3. Metoda trapezelor (Tustin)

Este o transformare biliniară care menține stabilitatea și faza minimă la trecerea din continuu în discret. Această metodă este utilizată pentru răspunsul în frecvență și se obține folosind substituția:

$$s = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (10.12)$$

10.2.2 Elementul de reținere de ordinul zero

Pentru a descrie funcționarea unui proces comandat cu un sistem numeric trebuie utilizat un element de reținere de ordinul zero (engl. *zero order hold – zoh*) având modelul matematic:

$$H_{zoh}(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s}, \quad (10.13)$$

iar sistemul discret se obține folosind:

$$H(z) = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \{ H_{zoh}(s)H(s) \} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\} \right\}. \quad (10.14)$$

Această metodă de discretizare este inherentă proceselor continue comandate de un regulator numeric. Din punct de vedere a fidelității reprezentării din domeniile continuu și discret, metoda **zoh** introduce un tact de întârziere și **NU** se recomandă pentru aproximarea unui regulator sau filtru. În astfel de cazuri, se recomandă metoda Tustin, pentru fidelitatea răspunsului în frecvență.

10.3 Exemple rezolvate

Exemplul 1. Să se determine o perioadă de eşantionare convenabilă și să se discretizeze folosind cele trei metode care provin din integrarea numerică sistemul descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{5}{4s+1} e^{-0.5s}.$$

Rezolvare: Avem constanta de timp $T = 4 [s]$, de unde rezultă că perioada de eşantionare ar trebui să verifice relația $T_e \leq 0.4$. Dar, pentru a evita folosirea transformatei \mathcal{Z} modificată, impunem $\frac{T_m}{T_e} \in \mathbb{N}^*$ și rezultă că o perioadă de eşantionare adecvată este $T_e = 0.25 [s]$.

Folosind **metoda dreptunghiurilor înainte**, obținem:

$$H_{d,1}(z) = H(s)|_{s=\frac{z-1}{T_e}} = \frac{5}{4\frac{z-1}{0.25} + 1} z^{-2} = \frac{5}{z^2(16z - 15)},$$

cu singularitățile: $\hat{z}_{1,2} = 0$, $\hat{z}_3 = \frac{15}{16}$.

Folosind **metoda dreptunghiurilor înapoi**, obținem:

$$H_{d,2}(z) = H(s)|_{s=\frac{z-1}{zT_e}} = \frac{5}{4\frac{z-1}{z \cdot 0.25} + 1} z^{-2} = \frac{5}{z(17z - 16)},$$

cu singularitățile: $\hat{z}_1 = 0$, $\hat{z}_2 = \frac{16}{17}$.

Folosind **metoda Tustin**, obținem:

$$H_{d,3}(z) = H(s)|_{s=\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}} = \frac{5}{4\frac{2}{0.25} \frac{z-1}{z+1} + 1} z^{-2} = \frac{5(z+1)}{z^2(33z - 31)},$$

cu singularitățile: $\hat{z}_{1,2} = 0$, $\hat{z}_3 = \frac{31}{33}$, $\hat{z}_4 = -1$.

Remarcă: În cadrul metodei Tustin apar zerouri în -1 astfel încât partea rațională are excesul polilor față de zerouri egal cu 0, chiar dacă acest lucru nu era impus de structura sistemului continuu. Același lucru este valabil și la metoda dreptunghiurilor înapoi, zerourile introduse suplimentar fiind toate egale cu 0.

Exemplul 2. Să se determine o perioadă de eşantionare convenabilă și să se discretizeze folosind metoda zoh sistemul descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{s+2}{(4s+1)(s-1)}.$$

Rezolvare: Avem două constante de timp la numitor ($T_1 = 4 [s]$ și $T_2 = 1 [s]$), de unde rezultă că perioada de eşantionare ar trebui să verifice relația $T_e \leq 0.1$. Alegem perioada de eşantionare $T_e = 0.1 [s]$. Pentru a determina funcția de transfer discretă trebuie să calculăm:

$$H_d(z) = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \{ H_{zoh}(s)H(s) \} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{s+2}{(4s+1)(s-1)} \right\} \right\}.$$

Mai întâi desfacem în fracții simple:

$$\frac{s+2}{(4s+1)(s-1)} = \frac{-\frac{7}{5}}{4s+1} + \frac{\frac{3}{5}}{s-1},$$

și, folosind formula de transformare:

$$\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s(s+a)}\right\}\right\} = \frac{(1-e^{-aT_e})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT_e}z^{-1})},$$

obținem:

$$\begin{aligned} H_d(z) &= (1-z^{-1}) \left(\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-7/20}{s(s+\frac{1}{4})}\right\}\right\} + \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3/5}{s(s-1)}\right\}\right\} \right) \\ &= (1-z^{-1}) \left(-\frac{7}{5} \frac{(1-e^{-\frac{0.1}{4}})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-\frac{0.1}{4}}z^{-1})} + -\frac{3}{5} \frac{(1-e^{0.1})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{0.1}z^{-1})} \right) = \\ &= \frac{(0.0285 - 0.0233z^{-1})z^{-1}}{(1-0.9753z^{-1})(1-1.1052z^{-1})}, \end{aligned}$$

cu singularitățile: $\hat{z}_1 = 0.9753$, $\hat{z}_2 = 1.1052 = e^{T_e}$ și $\hat{z}_1 = 0.818 = e^{-\frac{1}{4}T_e}$. Se remarcă un tact de întârziere z^{-1} în componenta sistemului, respectiv faptul că sistemul rămâne instabil și în cazul discret, deoarece polii corespund celor din cazul continuu prin formula (10.4), unde $T_e = 0.1$ [s].

10.4 Regimuri de funcționare și moduri de oscilație

Regimul de funcționare prezintă caracterul general al regimului tranzitoriu al unui sistem LTI. Acesta este determinat de modurile de oscilație dominante ale componentei tranzistorii. **În cazul sistemelor discrete, polii dominanti sunt cei care au modulul cel mai mare (cei mai departe de origine).** În cazul polilor stabili, polii dominanti sunt cei mai aproape de conturul discului unitate.

Modurile de oscilație sunt funcțiile care se obțin în răspunsul sistemului discret la o intrare arbitrară cauzată de polii acestuia. Acestea pot fi de următoarele tipuri:

- în cazul polilor reali de multiplicitate n : $\frac{k^{n-1}}{(n-1)!} \cdot |\hat{z}|^k$;
- în cazul perechilor de poli complex conjugați de multiplicitate n : $\frac{k^{n-1}}{(n-1)!} \cdot |\hat{z}|^k \sin(k\angle\hat{z})$.

În Figurile 10.2 și 10.3 sunt ilustrate grafic răspunsurile la intrare treaptă corespunzătoare fiecărui regim de funcționare pentru un sistem de ordin II.

10.5 Probleme propuse

Problema 10.5.1 Să se determine o perioadă de eșantionare convenabilă și să se discrețizeze sistemele continue de mai jos folosind metoda indicată. Studiați influența perioadei de eșantionare asupra singularităților și asupra factorului de proporționalitate. Determinați modurile și regimul fiecărui sistem.

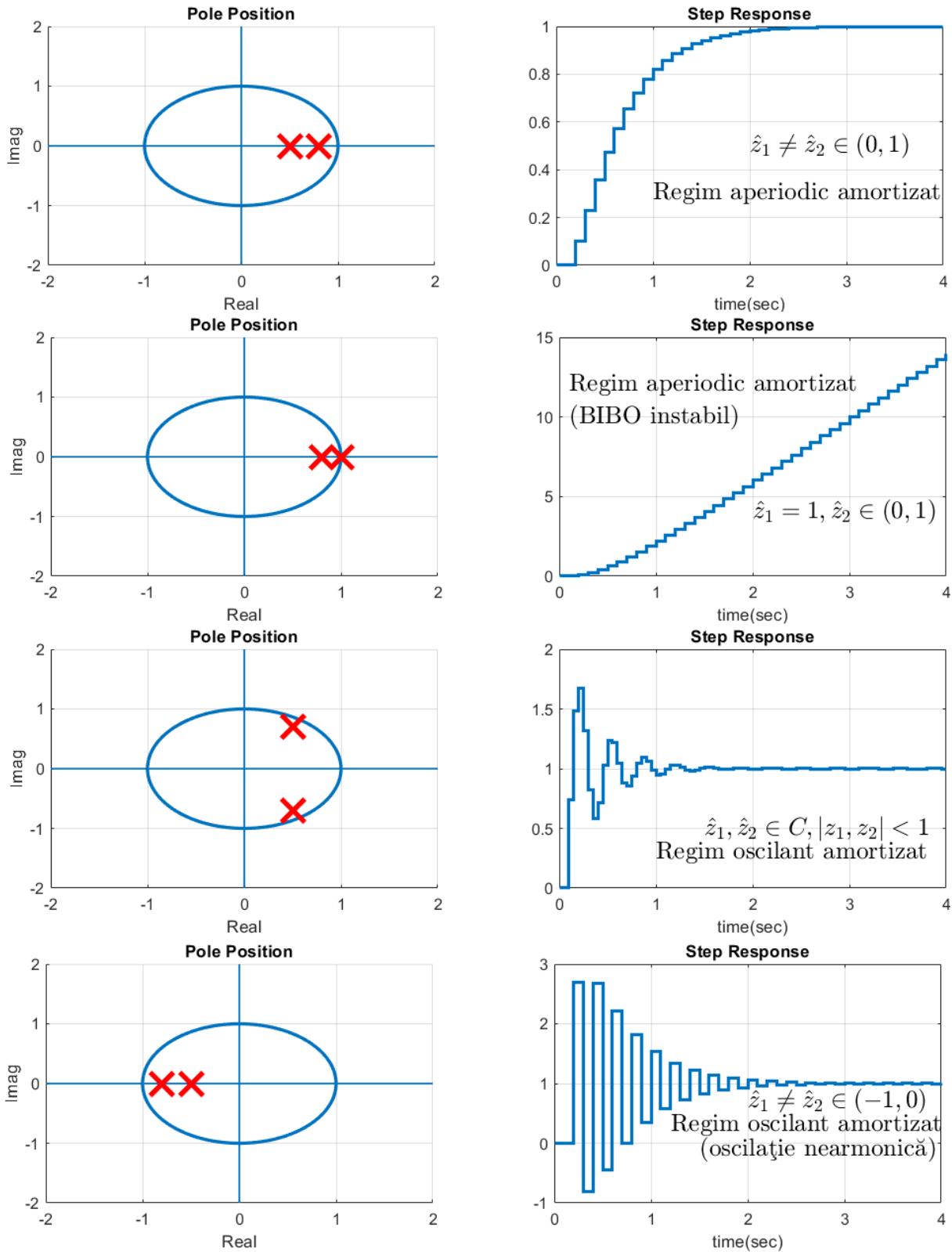


Figura 10.2: Regimurile de funcționare ale unui sistem discret (partea I).

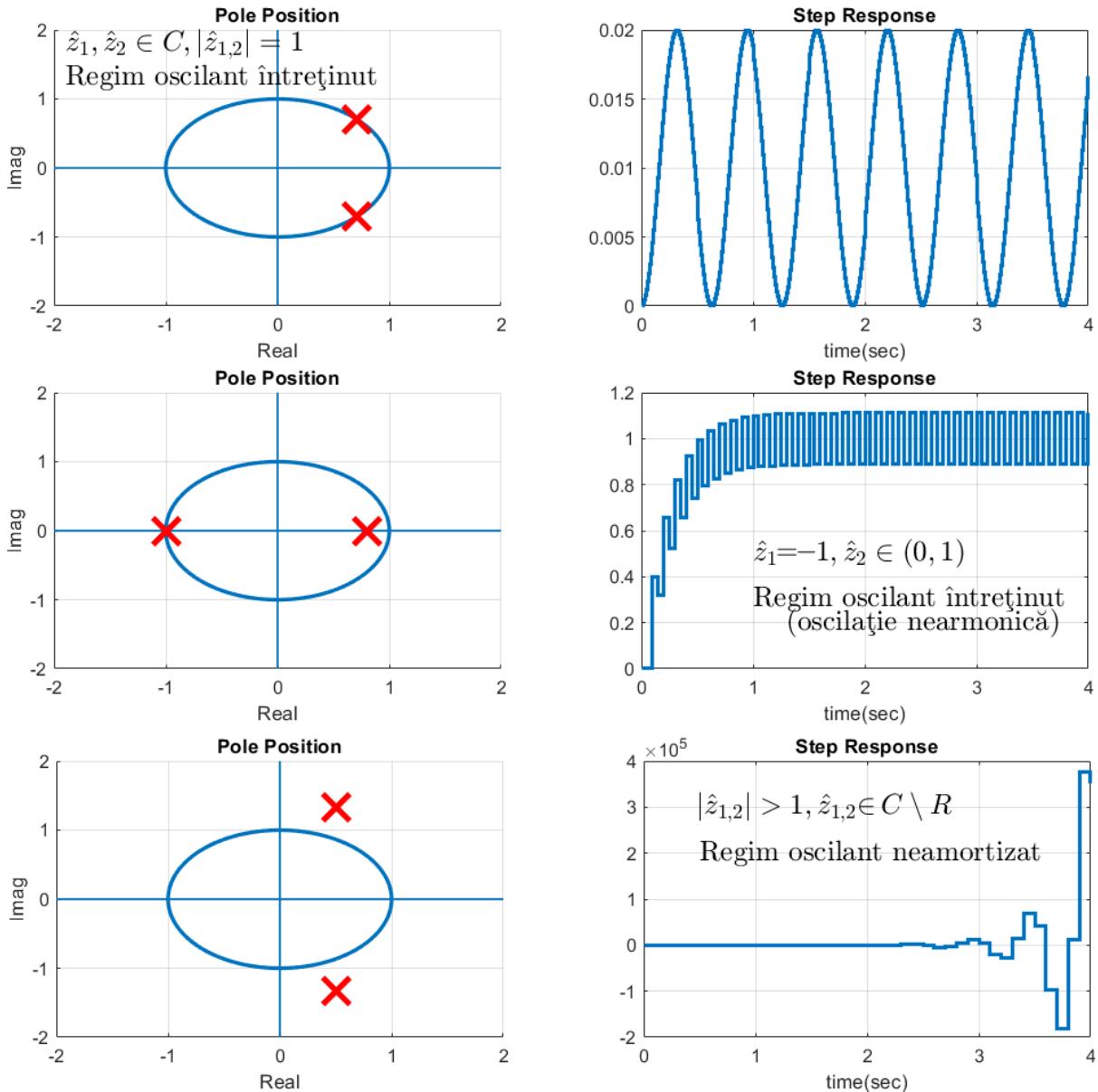


Figura 10.3: Regimurile de funcționare ale unui sistem discret (partea a II-a).

a) $H(s) = \frac{s + 200}{(s + 5)(s + 10)}$, Tustin;

b) $H(s) = \frac{s + 2}{s(s + 1)(s + 100)}$, Euler înainte – analizați fenomenul de **supraesantionare**;

c) $H(s) = \frac{s + 7}{s + 9} \cdot e^{-0.2s}$, zoh;

d) $H(s) = \frac{72}{s^2 + 6s + 36}$, Euler înapoi;

e) $H(s) = \frac{200}{(s + 5)(s + P)}$,
 $P \in \{1, 2.5, 5, 10, 25, 50, 100\}$, zoh – analizați fenomenul de **supraesantionare**, dacă este cazul;

f) $H(s) = \frac{-s + 3}{s^2 + 2s + 4} \cdot e^{-0.2s}$, Euler înainte.

Lucrarea 11

Stabilitatea sistemelor numerice

11.1 Stabilitatea sistemelor numerice	104
11.2 Criteriul Schur-Cohn-Jury . . .	105
11.3 Conexiunea cu reacție negativă a sistemelor numerice . . .	106
11.4 Probleme propuse	109

În această lucrare se prezintă modalități de studiu a stabilității sistemelor numerice, pornind de la condiția generală de stabilitate, alături de utilizarea criteriului Schur-Cohn-Jury pentru a deduce localizarea polilor în raport cu cercul unitate fără a fi calculați explicit. De asemenea, se prezintă tehnici de analiză a stabilității sistemelor în conexiunea cu reacție negativă pe baza criteriului Jury și a metodei locului rădăcinilor.

11.1 Stabilitatea sistemelor numerice

Se pornește de la legătura analitică dintre variabila s a transformatei Laplace și variabila z a transformatei \mathcal{Z} din lucrarea anterioară. Această mapare este ilustrată în Figura 11.1, fiind dată de formula:

$$z = e^{sT_e}, \quad T_e > 0. \quad (11.1)$$

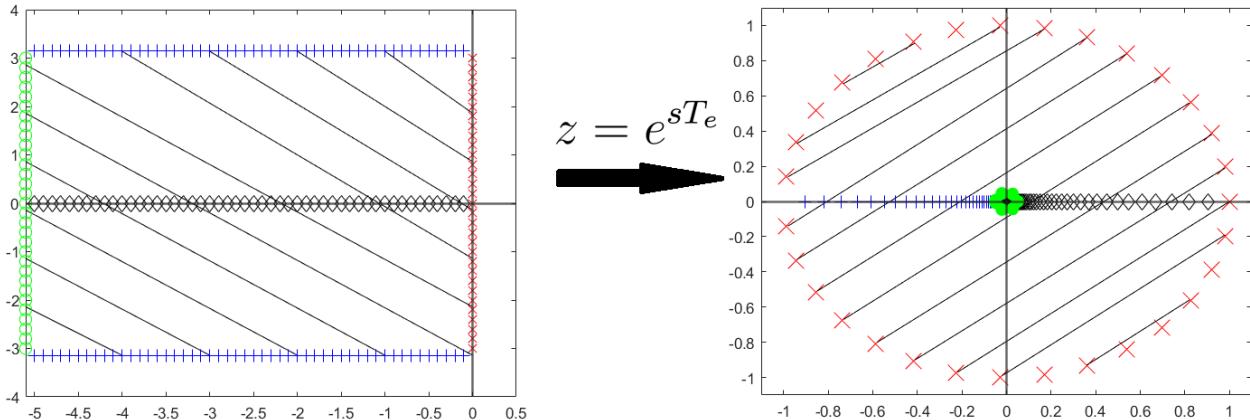


Figura 11.1: Maparea planului s în planul z .

Se consideră sistemul LTI numeric cu n stări, m intrări și p ieșiri, descris prin modelul de tip spațiul stărilor:

$$\begin{cases} x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k]; \\ y[k] = C_d x[k] + D_d u[k], \end{cases} \quad (11.2)$$

unde $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_d \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_d \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D_d \in \mathbb{R}^{p \times m}$. Condiția de **stabilitate internă** a sistemelor continue, conform căreia valorile proprii ale matricei de stare trebuie să se afle în semiplanul complex stâng se transformă în **condiția ca valorile proprii ale matricei de stare a sistemului discret să aibă modulul subunitar**:

$$|\lambda_i| < 1, \quad \forall \lambda_i \in \Lambda(A_d). \quad (11.3)$$

Funcția de transfer echivalentă a sistemului (11.2) este determinată prin formula:

$$H_d(z) = C_d (zI - A_d)^{-1} B_d + D_d. \quad (11.4)$$

În mod similar, condiția de **stabilitate externă** a sistemelor continue, conform căreia polii trebuie să se afle în semiplanul stâng se transformă în **condiția ca polii sistemului discret să aibă modulul subunitar**:

$$|\hat{z}_i| < 1, \quad \forall \hat{z}_i \in \mathcal{P}(H_d), \quad (11.5)$$

unde $\mathcal{P}(H_d)$ este multimea polilor funcției de transfer $H_d(z)$ **în formă minimală**.

11.2 Criteriul Schur-Cohn-Jury

Criteriul **Routh-Hurwitz** prezintă un algoritm care verifică dacă rădăcinile unui polinom se află în semiplanul stâng, respectiv câte rădăcini există în semiplanul drept. În mod similar, criteriul **Schur-Cohn-Jury** verifică dacă rădăcinile unui polinom $P_c(z)$ de ordin n se află în interiorul discului unitate, respectiv câte rădăcini există în exteriorul acestuia. Aceasta poate fi folosit pentru a determina stabilitatea unui sistem numeric, pe baza polinomului său caracteristic, fără a fi nevoie de calculul efectiv al polilor săi.

(Criteriul Schur-Cohn-Jury) Se consideră polinomul caracteristic $P_c(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_{n-1}z + a_n$, $z \in \mathbb{C}$. Se completează tabelul Jury după următoarele reguli:

- se scriu coeficienții lui P_c în ordine descrescătoare a puterilor și apoi în ordine crescătoare;
- se calculează recursiv:

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad (11.6)$$

- completarea tabelului se oprește când obținem o pereche de linii cu trei termeni.

Pe baza acestui mod de completare, rezultă un tabel precum în continuare:

Tabelul 11.1: Tabelul Jury

z^n	z^{n-1}	z^{n-2}	\dots	z^1	z^0
a_0	a_1	a_2	\dots	a_{n-1}	a_n
a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	\dots	a_1	a_0
b_0	b_1	b_2	\dots	b_{n-1}	/
b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	\dots	b_0	/
...					
m_0	m_1	m_2	/	\dots	/
m_2	m_1	m_0	/	\dots	/

Condițiile criteriului Jury:

a) $P_c(1) > 0$;

b) $(-1)^n P_c(-1) > 0$;

c) $|a_0| > |a_n|$;

d) $|b_0| > |b_{n-1}|$;

:

m) $|m_0| > |m_2|$;

Dacă se îndeplinesc simultan condițiile $a) - m)$, atunci toate cele n rădăcini ale polinomului $P_c(z)$ se află în interiorul discului unitate. În caz contrar, există cel puțin o rădăcină în afara discului unitate. Dacă cel puțin una din condițiile $a) - m)$ se îndeplinește cu egalitate, iar celelalte rămân inegalități stricte, atunci cel puțin o rădăcină se află pe cercul unitate.

Observație: Pentru a aplica în cazul sistemelor de ordinul I, se utilizează doar primele două condiții. De preferat ar fi să se calculeze direct polul sistemului și să se concluzioneze de acolo stabilitatea.

Exemplu rezolvat 1: Se consideră polinomul $P_c(z) = z^3 - 1.9z^2 + 1.06z - 0.144$, având: $a_0 = 1$, $a_1 = -1.9$, $a_2 = 1.06$, $a_3 = -0.144$.

Din efectuarea calculelor rezultă o pereche suplimentară de linii având valorile $b_0 = 0.9793$, $b_1 = -1.7474$, $b_2 = 0.7864$, iar în tabelul 11.2 este prezentat tabloul Jury corespunzător.

Pentru verificarea condițiilor criteriului avem:

- $P(1) = 1 - 1.9 + 1.06 - 0.144 = 0.016 > 0 \checkmark$
- $(-1)^3 P(-1) = (-1)(-1 - 1.9 - 1.06 - 0.144) = 4.104 > 0 \checkmark$
- $|a_0| > |a_3| \Leftrightarrow 1 > 0.144 \checkmark$
- $|b_0| > |b_2| \Leftrightarrow 0.9793 > 0.7864 \checkmark$

Astfel, rezultă că polinomul caracteristic $P_c(z)$ are toate rădăcinile în interiorul discului unitate. Ca validare, prin calcul direct rezultă rădăcinile: $z_1 = 0.2$, $z_2 = 0.8$, $z_3 = 0.9$.

Tabelul 11.2: Tabelul Jury pentru exemplul rezolvat 1

z^3	z^2	z^1	z^0
1	-1.9	1.06	-0.144
-0.144	1.06	-1.9	1
0.9793	-1.7474	0.7864	/
0.7864	-1.7474	0.9793	/

11.3 Conexiunea cu reacție negativă a sistemelor numerice

Există aceleași tipuri de conexiuni elementare în cazul sistemelor numerice precum în cazul sistemelor continue: [conexiunea serie, paralel și cu reacție \(pozitivă sau negativă\)](#). În aplicarea formulelor deja cunoscute, se adaugă următoarea particularitate suplimentară: se discretizează fiecare conexiune de sisteme continue încadrate între două puncte de eșantionare și apoi se lucrează cu echivalentele numerice.

Cea mai des întâlnită conexiune cu reacție negativă formată din proces continuu și regulator discret este cea din Figura 11.2.

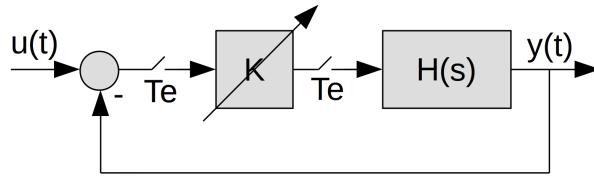


Figura 11.2: Schema tipică de reglare a unui proces continuu cu regulator discret.

Astfel, rezultă următoarea expresie a sistemului numeric în buclă închisă:

$$H_0(z) = \frac{\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}\} \cdot \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}\}}{1 + \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}\} \cdot \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}\}} = \frac{K(z) \cdot H(z)}{1 + K(z) \cdot H(z)}. \quad (11.7)$$

Pentru un regulator proporțional, i.e. $K(s) \equiv K > 0$, rezultă următoarea expresie a sistemului închis:

$$H_0(z) = \frac{K \cdot H(z)}{1 + K \cdot H(z)} = \frac{K \cdot \beta(z)}{P_c(z, K)} \quad (11.8)$$

$$= \frac{K \cdot \beta(z)}{a_0(K)z^n + a_1(K)z^{n-1} + a_2(K)z^{n-2} + \dots + a_{n-1}(K)z + a_n(K)}. \quad (11.9)$$

Pentru studiul stabilității sistemului în funcție de un parametru $K > 0$, se impun toate condițiile criteriului Jury. Dacă se adeveresc toate pentru o anumită valoare a lui K atunci sistemul este stabil în acel caz. **Prima condiție care nu se mai adeverește relativ la parcurgerea lui $K \in (0, +\infty)$ reprezintă condiția de aducere a sistemului la limita de stabilitate. Pot exista mai multe astfel de valori.**

Acest rezultat bazat pe aplicarea criteriului lui Jury pentru sistemul în buclă închisă este inclus în algoritmul metodei locului rădăcinilor pentru sisteme numerice. Trasarea are loc în mod analog sistemelor continue, iar interpretarea se realizează pe baza regimurilor de funcționare induse de poziția polilor față de cercul unitate.

Exemplu rezolvat 2: Se consideră un sistem cu RNU conform Figurii 11.2, cu procesul descris prin:

$$H(s) = \frac{2}{(s+2)(s+100)}. \quad (11.10)$$

Deoarece structura descrie un proces continuu controlat printr-un regulator numeric (utilizând un convertor numeric-analogic pentru transmiterea semnalului de comandă), metoda de discretizare fizic existentă în acel proces este cea a elementului de reținere de ordinul zero (engl. *zero-order hold*). Pentru a evita supraesantionarea, constanta de timp dominantă fiind $T_1 = \frac{1}{2} \gg T_2 = \frac{1}{100}$, se consideră perioada de eşantionare de $T_e = \frac{1}{20} [s]$.

În urma discretizării rezultă:

$$H_{zoh}(z) = \frac{0.0007683z + 0.0001769}{z^2 - 0.9916z + 0.006097}. \quad (11.11)$$

De aici, sistemul închis capătă expresia:

$$H_0(z) = \frac{K \cdot H_{zoh}(z)}{1 + K \cdot H_{zoh}(z)} = \frac{K(0.0007683z + 0.0001769)}{z^2 + (0.0007683K - 0.9916)z + (0.0001769K + 0.006097)}. \quad (11.12)$$

Pentru verificarea stabilității pe baza criteriului Jury avem:

- $P_c(1) = 1 + 0.007683K - 0.9916 + 0.0001769K + 0.006097 > 0, \forall K > 0 \checkmark$
- $(-1)^2 P_c(-1) = 1 + 0.9916 + 0.006097 + K(0.0001769 - 0.0007683) > 0 \Leftrightarrow K < 3.24 \cdot 10^3;$
- $|a_0| > |a_2| \Leftrightarrow 1 > 0.0001769K + 0.006097 \Rightarrow K < 5.61 \cdot 10^3.$

Din cele trei condiții rezultă că domeniul de stabilitate pentru sistemul $H_0(z)$ este $K \in (0, 3.24 \times 10^3)$, având un singur K_{critic} .

De asemenea, analiza stabilității se poate face folosind **metoda locului rădăcinilor**. Trasarea acestuia utilizând mediul MATLAB se prezintă în Figura 11.3. Se observă:

- $K_{critic} \approx 3.2 \times 10^3$, la intersecția cu cercul unitate;
- $K_{despr} \approx 436$ și $K_{apr} \approx 3.14 \times 10^3$.

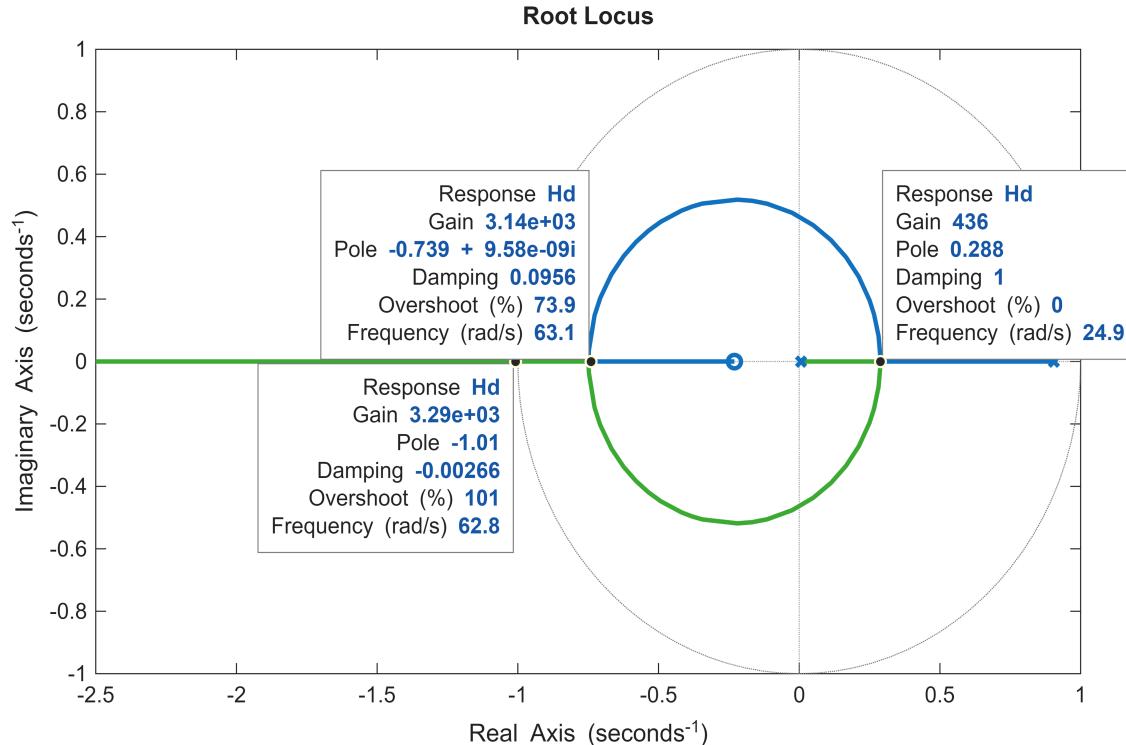


Figura 11.3: Locul rădăcinilor pentru sistemul în buclă închisă de la exemplul rezolvat 2

Se observă că sistemul închis este stabil pentru orice $K \in (0, 3.2 \times 10^3)$. În funcție de valorile lui K se disting următoarele regimuri de funcționare:

- $K \in (0, 436)$: regim aperiodic amortizat, cu modurile $|\hat{z}_{o1}|^k, |\hat{z}_{o2}|^k$;
- $K = 436$: regim aperiodic critic amortizat, cu modurile $|\hat{z}_{o1}|^k, k|\hat{z}_{o2}|^k$ ($\hat{z}_{o1} = \hat{z}_{o2}$);
- $K \in (436, 3.14 \times 10^3)$: regim oscilant amortizat, cu modurile $|\hat{z}_{o1,o2}|^k \cdot \sin(k\angle\hat{z}_{o1,o2})$;

- $K = 3.14 \times 10^3$: regim oscilant critic amortizat (oscilație nearmonică), cu modurile $|\hat{z}_{o1}|^k, k|\hat{z}_{o2}|^k$ ($\hat{z}_{o1} = \hat{z}_{o2}$);
- $K \in (3.14 \times 10^3, 3.2 \times 10^3)$: regim oscilant amortizat (oscilație nearmonică), cu modurile $|\hat{z}_{o1}|^k, |\hat{z}_{o2}|^k$;
- $K = 3.2 \times 10^3$: regim oscilant întreținut (oscilație nearmonică), cu modurile $|\hat{z}_{o1}|^k, |\hat{z}_{o2}|^k$ ($\hat{z}_{o1} = -1$);
- $K \in (3.2 \times 10^3, \infty)$: regim oscilant neamortizat (oscilație nearmonică), cu modurile $|\hat{z}_{o1}|^k, |\hat{z}_{o2}|^k$;

Sensibilitatea sistemului este relativ mare, deoarece sistemul își pierde stabilitatea pentru $K > 3.2 \times 10^3$, regimurile de funcționare variază, iar ramura dominantă tinde asimptotic spre infinit.

Discuție: Se poate relua același studiu în cazul în care s-ar fi efectuat supræșantionarea, respectând teorema lui Shannon pentru întreaga dinamică a sistemului, deci $T_e = \frac{1}{1000}$. Ce schimbări apar?

Discuție: Dar dacă pentru studiul stabilității utilizând cele două perioade de eșantionare, $T_{e,1} = \frac{1}{20}$ [s] și $T_{e,2} = \frac{1}{1000}$ [s], s-ar efectua discretizarea procesului cu metoda Tustin, ce schimbări intervin?

11.4 Probleme propuse

Problema 11.4.1 Se consideră următoarele sisteme continue $H(s)$ aflate în structura din Figura 11.2, $K > 0$, alături de o metodă de discretizare propusă:

- | | |
|--|---|
| 1) $H(s) = \frac{2}{(5s+1)(s+1)}$, Tustin; | 6) $H(s) = \frac{4}{2s+1}e^{-0.3s}$, zoh, $T_e=0.15$ [s]; |
| 2) $H(s) = \frac{2}{(5s+1)(s+1)}$, zoh; | 7) $H(s) = \frac{s+4.41}{s+18.4} \cdot \frac{4}{s(s+2)}$, Euler înainte; |
| 3) $H(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+100)}$, Euler înainte; | 8) $H(s) = \frac{s+4.41}{s+18.4} \cdot \frac{4}{s(s+2)}$, zoh; |
| 4) $H(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+100)}$, Euler înapoi; | 9) $H(s) = \frac{s-1}{s(s+2)}$, zoh; |
| 5) $H(s) = \frac{4}{2s+1}e^{-0.3s}$, zoh, $T_e=0.30$ [s]; | 10) $H(s) = \frac{14}{s^2+7s+49}$, Tustin. |

Se cer:

- Alegeți o perioadă de eșantionare adecvată și discretizați sistemul;

- b) Studiați stabilitatea lui $H_0(z)$ pentru $K = 1$;
- c) Studiați stabilitatea lui $H_0(z)$ pentru $K \in (0, +\infty)$ utilizând criteriul lui Jury;
- d) Studiați stabilitatea lui $H_0(z)$ pentru $K \in (0, +\infty)$ utilizând metoda locului rădăcinilor. Discutați regimurile de funcționare, modurile și senzitivitatea sistemului în funcție de parametrul K .
- e)* Studiați stabilitatea lui $H_0(s)$ în funcție de parametrii $K > 0$ și $T_e > 0$.

Problema 11.4.2

- a) Implementați în MATLAB criteriul Schur-Cohn-Jury pentru un polinom arbitrar $P_c(z)$ cu coeficienți constanti precum în Secțiunea 11.2.
- b*) Implementați în MATLAB criteriul Schur-Cohn-Jury pentru un polinom arbitrar de forma $P_c(z) = \alpha(z) + k\beta(z)$, cu $\alpha(z)$ și $\beta(z)$ două polinoame cu coeficienți constanti, astfel încât să se determine valorile lui $k > 0$ pentru care toate rădăcinile lui $P_c(z)$ sunt în interiorul discului unitate.

Problema 11.4.3 Structura unui sistem cu eșantionare se prezintă în Figura 11.2.

Se consideră procesul descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{2}{0.2s + 1} e^{-\tau_m s} \text{ și } K > 0.$$

Să se rezolve cerințele:

- a) Pentru $\tau_m = 0$ și $T_e = 0.1$ [s] să se analizeze stabilitatea sistemului cu eșantionare din figură utilizând metoda Tustin pentru discretizarea funcției de transfer $H(s)$.
- b) Pentru $\tau_m = 0.1$ [s] și $T_e = 0.1$ [s] să se analizeze stabilitatea sistemului cu eșantionare din figură utilizând metoda Tustin pentru discretizarea funcției de transfer $H(s)$.

Lucrarea 12

Răspunsul în frecvență al sistemelor numerice

12.1 Răspunsul în frecvență al sistemelor numerice	112
12.2 Proiectarea filtrelor numerice	113
12.3 Probleme propuse	115

În această lucrare este prezentat răspunsul în frecvență al sistemelor numerice, utilizând metoda zoh , metoda Tustin și metoda Tustin cu preîncovoiere (engl. *prewarping*). Alegerea metodei de discretizare este utilă în cazul în care se pornește de la un sistem continuu în timp. Suplimentar, se prezintă mecanismele puse la dispoziție în MATLAB pentru proiectarea filtrelor numerice, fiind necesare și regăsite în multiple clase de aplicații practice, atât în domeniul ingineriei reglării automate, cât și în contextul mai larg al procesării semnalelor.

12.1 Răspunsul în frecvență al sistemelor numerice

Conform teoremei de eşantionare a lui Shannon, frecvența de eşantionare trebuie să fie de două ori mai mare decât cea mai mare frecvență prezentă în sistem. Astfel, corespunzător unei frecvențe de eşantionare f_e putem defini limita superioară a frecvențelor ce pot fi reprezentate corect folosind eşantionarea de frecvență f_e , numită **frecvență Nyquist** f_N :

$$f_N = \frac{f_e}{2} \Rightarrow \omega_N = \frac{\pi}{T_e}. \quad (12.1)$$

Peste această valoare a pulsației apare fenomenul de **aliasing**. Astfel, pentru **pulsăția analogică** $\omega \in (-\infty, \infty)$, folosind perioada de eşantionare T_e , obținem **pulsăția numerică** $\Omega = \omega T_e \in [-\pi, \pi]$, conform formulei de transformare $z = e^{sT_e}$.

Astfel, răspunsul în frecvență al sistemelor numerice se trasează doar pentru pulsații până la pulsăția Nyquist. Așa cum am văzut în Lucrarea 10, fiecare metodă de discretizare vine cu avantaje și dezavantajele ei. **Dacă metoda zoh este implicită la interfațarea unui proces continuu cu un controller numeric, această metodă nu este recomandată pentru implementarea filtrelor numerice și a regulatoarelor, metoda Tustin fiind mai potrivită.** Dar, dacă se dorește ca sistemul numeric să aibă un comportament identic în jurul unei pulsații ω_0 (de exemplu, pentru a surprinde fenomenul de antirezonanță al unui filtru *Notch*), se folosește metoda Tustin cu **prewarping**, i.e. *prewarping*:

$$s = \frac{\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T_e}{2}\right)} \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (12.2)$$

Se constată faptul că formula anterioară este mai generală decât transformarea Tustin obișnuită, aceasta regăsindu-se în cazul $\omega_0 \rightarrow 0$.

Exemplu: Se consideră filtrul *Notch* descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (12.3)$$

unde $\omega_n = 10^3$ [rad/s], $\zeta_1 = 10^{-3}$ și $\zeta_2 = 0.5$. Conform teoremei lui Shannon, perioada de eşantionare trebuie să respecte:

$$T_e < \frac{\frac{1}{\zeta_2\omega_n}}{2} \Rightarrow T_e < 1 \text{ [ms]}, \quad (12.4)$$

și putem alege $T_e = 500[\mu\text{s}]$. În Figura 12.1 sunt prezentate diagramele Bode obținute folosind metodele **zoh**, Tustin, respectiv Tustin cu frecvență de *prewarping* $\omega_0 = \omega_n$. Se poate observa că metoda **zoh** introduce atenuarea mult mai mică și la o frecvență sensibil diferită de frecvența de tăiere a filtrului *Notch* analogic, în timp ce metoda Tustin are o foarte mică deviație față de pulsăția din continuu, iar metoda Tustin cu *prewarping* reușește să urmărească întocmai antirezonanța la care a fost proiectat filtrul în planul s .

Prezentăm mai jos o modalitate de a obține răspunsul în frecvență comparativ al sistemului numeric în mediul MATLAB.

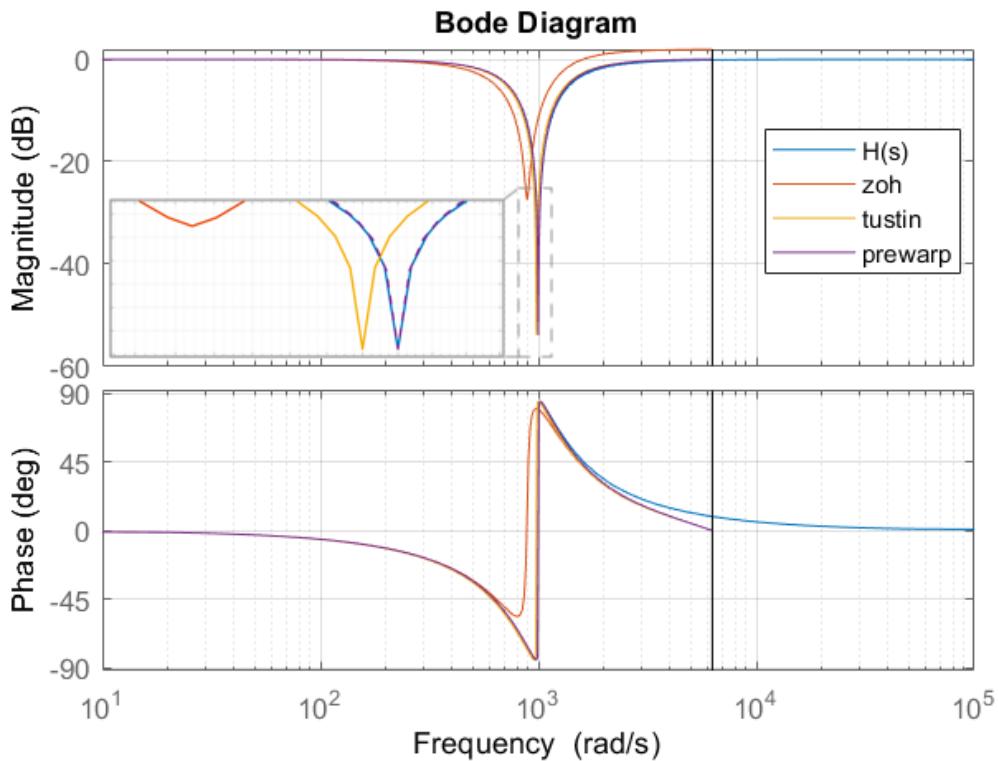


Figura 12.1: Răspunsul în frecvență al unui sistem numeric.

```

1 wn=1e3; zeta1=1e-3; zeta2=0.5;
2 Hc=tf([1,2*zeta1*wn,wn^2],[1,2*zeta2*wn,wn^2]);
3 Te=500e-6;
4 Hd1=c2d(Hc,Te,'zoh');
5 Hd2=c2d(Hc,Te,'tustin');
6 % utilizarea metodei Tustin cu prewarping
7 opt = c2dOptions('Method','tustin','prewarpfrequency',wn);
8 Hd3=c2d(Hc,Te,opt);
9 figure
10 bode(Hc,Hd1,Hd2,Hd3);
11 legend('H(s)', 'zoh', 'tustin', 'prewarp');

```

12.2 Proiectarea filtrelor numerice

În MATLAB, proiectarea filtrelor este un proces relativ simplu, datorită funcțiilor dedicate ce permit configurarea detaliată a caracteristicilor filtrului.

În proiectarea filtrelor digitale, MATLAB oferă o suiată robustă de funcții care facilitează configuraarea și analiza diverselor tipuri de filtre, fiecare având caracteristici distincte care le fac potrivite pentru diferite aplicații. Printre aceste funcții de proiectare, se enumeră:

- butter: filtre de tip Butterworth;

- **cheby1**: filtre Chebyshev (Cebîșev) de tip I;
- **cheby2**: filtre Chebyshev (Cebîșev) de tip II;
- **ellip**: filtre eliptice;
- **fir1**: filtre cu răspuns finit la impuls pe baza unei ferestre spectrale etc.

Filtrul **Butterworth** se remarcă prin răspunsul în frecvență extrem de neted și plat în banda de trecere, fără ondulații (riplu), fiind ideal pentru aplicații unde uniformitatea răspunsului este priorită, însă are o tranzitie relativ lentă către banda de oprire. În schimb, filtrele **Chebyshev de tip I** permit o tranzitie mai rapidă, datorită ondulației acceptate în banda de trecere, fiind utile când se preferă o tranzitie abruptă, dar cu o ondulație controlată. Filtrele **Chebyshev de tip II**, pe de altă parte, prezintă ondulații doar în banda de oprire, menținând banda de trecere netedă și fiind preferate în situațiile în care ondulațiile în banda de trecere sunt inacceptabile. Filtrul **eliptic** face excepție prin oferirea celei mai rapide tranzitii între banda de trecere și cea de oprire, având ondulații atât în banda de trecere, cât și în cea de oprire, fiind cel mai eficient pentru proiectele unde cerințele de selectivitate sunt extrem de restrictive. În cele din urmă, filtrul **FIR fir1** se diferențiază prin răspunsul în fază liniară și este preferat în aplicații unde această caracteristică este critică, precum în procesarea audio sau în reglarea sistemelor neliniare, însă necesită un ordin mai mare pentru a realiza o tranzitie similară cu cel al filtrelor Chebyshev sau eliptic.

Cu oricare dintre aceste topologii de filtre se pot alege: tipul filtrului (**trece jos**, **trece sus**, **trece bandă**, **oprește bandă**), ordinul filtrului, banda de trecere (normalizată în domeniul $[0, 1]$), ceea ce corespunde domeniului de pulsații analogice $[0, f_N]$ [Hz] și alte specificații suplimentare. Toate aceste funcții pot returna atât filtre continue, cât și numerice.

Interpretarea și ajustarea acestor filtre pot fi facilitate cu ajutorul funcțiilor de vizualizare, cum ar fi **freqz**, care oferă o reprezentare grafică a răspunsului în frecvență al filtrului proiectat.

Exemplul 1, proiectarea unui filtru trece jos numeric: În secțiunea următoare de cod se prezintă proiectarea unui filtru trece jos de tip Butterworth de ordinul 4.

```

1 Fe = 1000;    % frecventa de esantionare [Hz]
2 FN = Fe/2;    % frecventa Nyquist
3 N = 4;        % N = ordinul filtrului (in cazurile FTJ si FTS)
4 Fc = 150/FN;  % frecventa de taiere normalizata (150 Hz)
5 [B, A] = butter(N, Fc, 'low');
6 % vizualizarea raspunsului
7 freqz(B, A, 1024, Fe);
8 title('Diagrama Bode, FTJ Butterworth');

```

Rezultatul execuției secțiunii de cod de mai sus este proiectarea filtrului caracterizat prin funcția de transfer $H = \text{tf}(B, A, 1/Fs)$, descrisă prin:

$$H(z) = \frac{0.01856z^4 + 0.07425z^3 + 0.1114z^2 + 0.07425z + 0.01856}{z^4 - 1.57z^3 + 1.276z^2 - 0.4844z + 0.0762}, \quad (12.5)$$

având răspunsul în frecvență ilustrat în Figura 12.2. Se constată că la frecvența de tăiere cerută de $F_c = 150$ [Hz], filtrul prezintă atenuarea de -3 [dB].

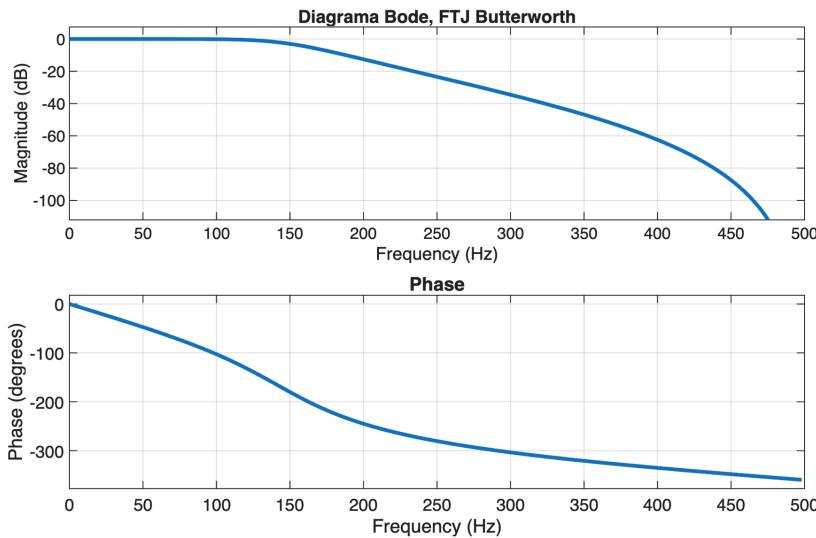


Figura 12.2: Diagrama Bode a unui filtru Butterworth de tip trece jos.

Exemplul 2, proiectarea unui filtru oprește bandă numeric: În secțiunea următoare de cod se prezintă proiectarea unui filtru oprește bandă eliptic de ordinul 16.

```

1 Fe = 2000;           % frecventa de esantionare [Hz]
2 FN = Fe/2;           % frecventa Nyquist
3 N = 8;   % N = ordinul filtrului / 2 (in cazurile FTB si FOB)
4 Wp = [300 700]/FN; % banda de trecere (bandpass)
5 Ws = [250 750]/FN; % benzi de oprire (bandstop)
6 rp = 1;             % ondulatie maxima un banda de trecere [dB]
7 rs = 60;            % atenuare minima [dB] in banda de oprire
8 [B, A] = ellip(N, rp, rs, Ws, 'stop');
9 freqz(B, A, 1024, Fe);
10 title('Diagrama Bode, FOB eliptic');
```

Execuția secțiunii de cod de mai sus duce la proiectarea filtrului descris prin funcția de transfer $H = \text{tf}(B, A, 1/Fs)$, descrisă prin configurația poli-zerouri (funcția `pzmap` din MATLAB) din Figura 12.3, având răspunsul în frecvență ilustrat în Figura 12.4. Se constată că, datorită ordinului ridicat și a topologiei eliptice, tranziția între banda de trecere și banda de oprire este foarte abruptă, dezavantajul fiind prezența ondulațiilor pe întreg spectrul. Filtrul îndeplinește specificațiile cerute (în caz contrar, este necesar un ordin mai mare).

12.3 Probleme propuse

Problema 12.3.1: Proiectați un filtru numeric descris prin funcția de transfer $H(z)$ utilizând rutinile corespunzătoare din MATLAB. Utilizați documentația `help` și `doc` pentru apelul complet al funcțiilor. Se cer următoarele specificații:

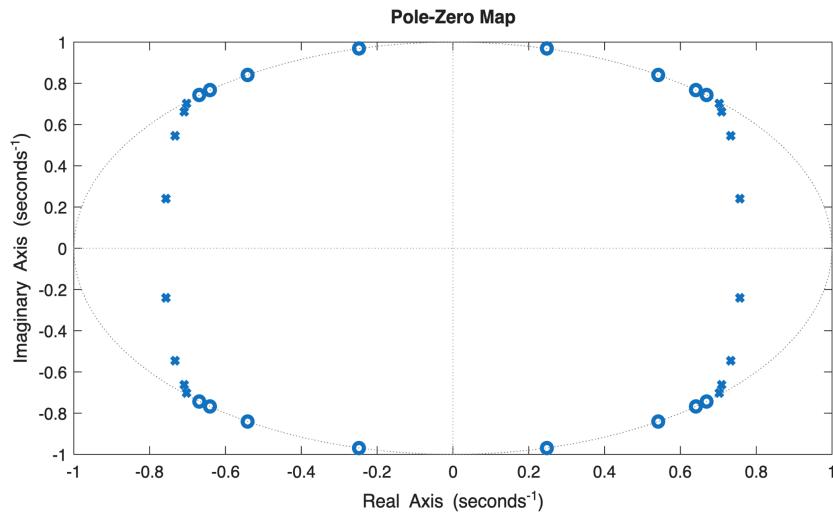


Figura 12.3: Maparea poli-zerourii a filtrului eliptic de tip oprește bandă de ordin 16.

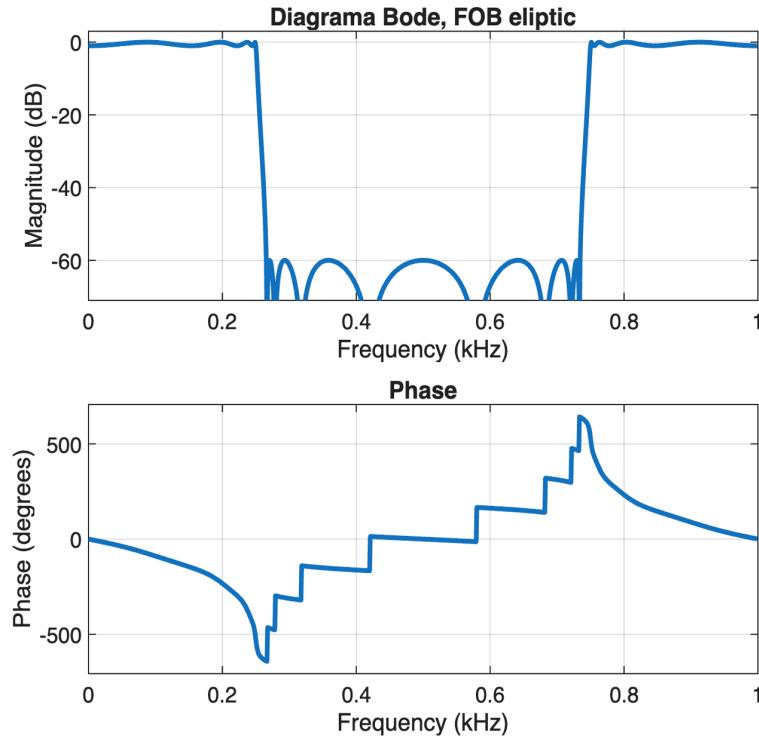


Figura 12.4: Diagrama Bode a filtrului eliptic de tip oprește bandă de ordin 16.

- a) filtru de tip trece sus, topologia Butterworth, ordin 6, frecvența de eșantionare $F_e = 10$ [kHz], frecvența de tăiere 3500 [Hz];
- b) filtru trece bandă Chebyshev de tip II, ordin 4, perioada de eșantionare $T_e = 100$ [μ s], banda de frecvențe de tăiere [500, 1000] [Hz], ondulația din banda de oprire de 3 [dB].

Determinați funcțiile de transfer corespunzătoare, studiați singularitățile, respectiv trasați diagramele lor Bode și Nyquist. Câte filtre pot fi realizate cu specificațiile de mai sus?

Lucrarea 13

Implementarea sistemelor numerice

13.1 Deducerea ecuațiilor cu diferențe pe baza funcției de transfer	118
13.2 Deducerea modelelor numerice în spațiul stărilor	122
13.3 Scalarea coeficienților în virgulă fixă	123
13.4 Implementarea ecuațiilor cu diferențe pe microcontroller	125

În această lucrare sunt prezentate trei metode de implementare a sistemelor numerice pornind de la funcția de transfer: conexiunea serie, conexiunea paralel și împărțirea infinită, respectiv definirea și obținerea modelelor numerice în spațiul stărilor. Suplimentar, sunt prezentate aspecte de scalare a coeficienților în virgulă fixă și pașii necesari pentru implementarea pe *microcontroller* a dinamicii modelată prin funcție de transfer.

13.1 Deducerea ecuațiilor cu diferențe pe baza funcției de transfer

Procesul de proiectare a regulatoarelor sau a filtrelor numerice în planul s este cel mai des folosit. Dar, datorită creșterii puterii de calcul a unui sistem numeric, împreună cu dezavantajele care provin din implementarea analogică, sistemele proiectate în continuu sunt convertite în sisteme numerice, având ca scop implementarea pe un sistem numeric de calcul (*microcontroller*). În această secțiune vom prezenta trei metode (topologii) distințe de implementare a sistemelor numerice. Pentru reprezentarea grafică a semnalelor numerice în MATLAB, se pot utiliza funcțiile `stairs` și `stem`. În schema bloc a fiecărei topologii este utilizat blocul z^{-1} , corespunzător operatorului de întârziere cu un tact.

13.1.1 Conexiunea serie

Numită și programarea directă, **conexiunea serie** este o implementare recursivă, pe baza ecuației cu diferențe. Astfel, pornind de la funcția de transfer:

$$H_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-n_d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-n_d} + b_2 z^{-n_d-1} + \cdots + b_{n_B} z^{-n_d-n_B+1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A}}, \quad (13.1)$$

de unde obținem:

$$Y(z) (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A}) = U(z) (z^{-n_d} + z^{-n_d-1} + \cdots + z^{-n_d-n_B+1}), \quad (13.2)$$

ceea ce, prin aplicarea transformatei \mathcal{Z}^{-1} , devine:

$$y[n] = -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \cdots - a_{n_A} y[n-n_A] + b_1 u[n-n_d] + b_2 u[n-n_d-1] + \cdots + b_{n_B} u[n-n_d-n_B+1], \quad (13.3)$$

și se numește **ecuația cu diferențe** a sistemului discret $H_d(z)$.

Exemplu: Pentru exemplificare vom considera un sistem continuu descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}, \quad (13.4)$$

discretizat folosind metoda `zoh` și o perioadă de eşantionare $T_e = 0.2 [s]$. O posibilă implementare a conexiunii serie în MATLAB este prezentată mai jos, iar schema bloc a sistemului este cea din Figura 2.

```

1 % perioada de esantionare
2 Te=0.2;
3 % functia de transfer cu zoh
4 Hd=c2d(tf(1,[1 3 2]),Te,'zoh');
5 % extragere numator si numitor
6 [num,den]=tfdata(Hd,'v');
7 % extragerea parametrilor pentru implementare
8 a2=den(3); a1=den(2);

```

```

9 b2=num(3); b1=num(2);
10 % conditii initiale
11 y(1)=0;
12 y(2)=b1;
13 % numar de esantioane
14 n=30;
15 % semnalul de intrare
16 u=ones(1,n);
17 % implementarea sistemului numeric
18 for k=3:n
19     y(k)=b2*u(k-2)+b1*u(k-1)-a2*y(k-2)-a1*y(k-1);
20 end
21 % timp de simulare
22 te=0:Te:(n-1)*Te;
23 % comparatie intre ce s-a calculat si ce returneaza MATLAB
24 stairs(te,y,'r*'); hold; step(Hd)

```

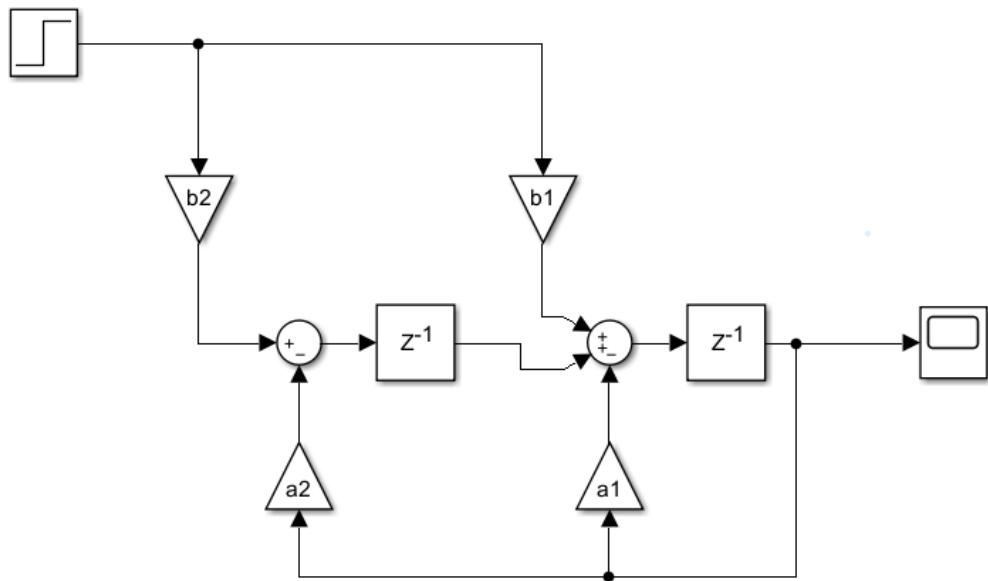


Figura 13.1: Structura corespunzătoare conexiunii serie a unui sistem de ordinul 2.

13.1.2 Conexiunea paralel

Cunoscută și sub denumirea de descompunere în fracții simple, **conexiunea paralel** are la bază punerea în evidență a funcției de transfer în funcție de transferul instantaneu, polii sistemului discret și reziduurile corespunzătoare acestora:

$$H_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = D + \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{z - \hat{z}_i} = D + \sum_{i=1}^n \frac{r_i z^{-1}}{1 - \hat{z}_i z^{-1}}, \quad (13.5)$$

iar fiecare subsistem de ordin 1 va fi implementat folosind conexiunea serie:

$$y_i[n] = \hat{z}_i y_i[n-1] + r_i u[n-1], \quad (13.6)$$

iar ieșirea finală a sistemului va fi:

$$y[n] = D \cdot u[n] + \sum_{i=1}^n y_i[n]. \quad (13.7)$$

Pentru a obține coeficeinții r_i , \hat{z}_i și D corespunzători acestei implementări, se poate utiliza funcția `residue`, care primește două polinoame (numărătorul și numitorul funcție de transfer) și returnează vectorul reziduurilor, vectorul polilor și transferul instantaneu.

Remarcă: În relația (9) este prezentată structura pur algebrică. Dar, polii și reziduurile pot fi numere complexe. De aceea, pentru implementarea unui asemenea sistem numeric, polii complex-conjugați vor forma subsisteme de ordinul 2 de forma:

$$H_{d,i}(z) = \frac{r_{i,1}z^{-1} + r_{i,2}z^{-2}}{1 - 2\operatorname{Re}\{\hat{z}_i\}z^{-1} + |\hat{z}_i|^2 z^{-2}}. \quad (13.8)$$

Exemplu: Pentru exemplificare, vom considera același sistem continuu (13.4) discretizat folosind metoda `zoh` și o perioadă de eșantionare $T_e = 0.2$ [s]. O posibilă implementare a conexiunii paralel în MATLAB este prezentată mai jos, iar schema bloc a sistemului este cea din Figura 3.

```

1 % perioada de esantionare
2 Te=0.2;
3 % functia de transfer cu zoh
4 Hd=c2d(tf(1,[1 3 2]),Te,'zoh');
5 % extragere numarator si numitor
6 [num,den]=tfdata(Hd,'v');
7 % extragerea parametrilor pentru implementare
8 [Res,Pole,Dir]=residue(num,den);
9 r1=Res(1); r2=Res(2);
10 z1=Pole(1); z2=Pole(2);
11 % conditii initiale
12 y1(1)=0;
13 y2(1)=0;
14 y(1)=y1(1)+y2(1);
15 % numar de esantioane
16 n=30;
17 % semnalul de intrare
18 u=ones(1,n);
19 % implementarea sistemului numeric
20 for k=2:n
    y1(k)=z1*y1(k-1)+r1*u(k-1);

```

```

22 y2(k)=z2*y2(k-1)+r2*u(k-1);
23 y(k)=y1(k)+y2(k);
24 end
25 % timpul de simulare
26 te=0:Te:(n-1)*Te;
27 % comparatie intre ce s-a calculat si ce returneaza MATLAB
28 stairs(te,y,'r*');hold;step(Hd)

```

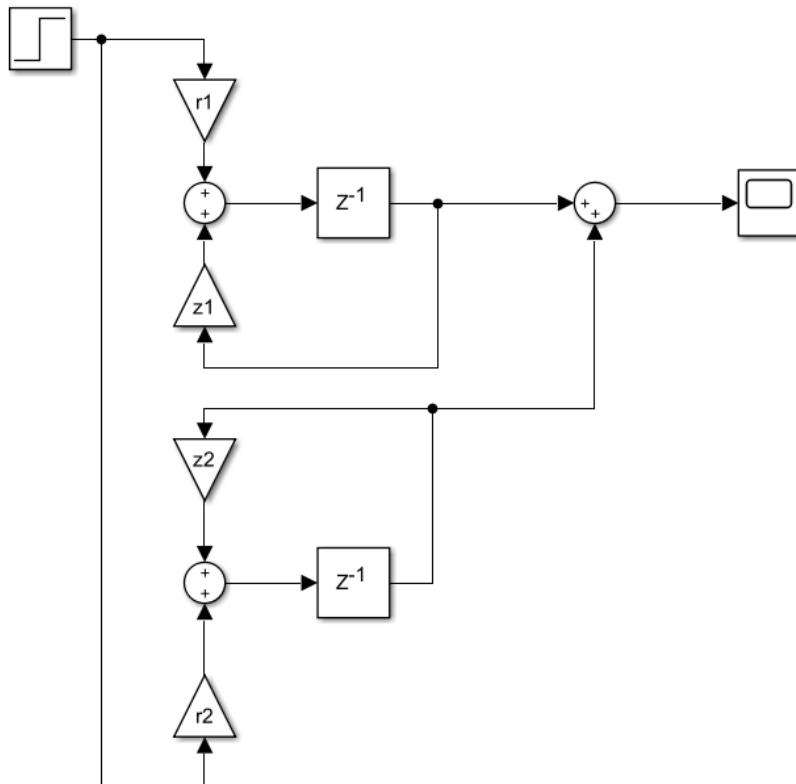


Figura 13.2: Structura corespunzătoare conexiunii paralel a unui sistem de ordinul 2.

13.1.3 Împărțirea infinită

Dacă cele două metode anterioare de implementare erau corespunzătoare unor filtre **IIR** (engl. *Infinite Impulse Response*), această metodă este caracteristică unui filtru **FIR** (engl. *Finite Impulse Response*). Un sistem discret descris prin funcția de transfer se poate scrie sub forma unei serii infinite, serie care se poate approxima folosind primii N termeni:

$$H_d(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]z^{-k} \approx \sum_{k=0}^{N-1} h[k]z^{-k}, \quad (13.9)$$

unde $h[k]$ sunt eșantionale corespunzătoare răspunsului la impuls (parametrii Markov), care se pot calcula prin împărțirea polinomului de la numărător la polinomul de la numitor.

În MATLAB, acest lucru este posibil prin intermediul funcției `deconv`. Ieșirea sistemului se obține prin conoluția dintre primii N termeni ai răspunsului la impuls și intrarea sistemului:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]u[n-k]. \quad (13.10)$$

Remarcă: Față de experimentele anterioare, în acest caz, sistemul numeric va fi capabil să urmărească doar primele N eșantioane ale răspunsului la treaptă al sistemului numeric.

Exemplu: Pentru exemplificare, vom considera același sistem continuu (13.4) discretizat folosind metoda `zoh` și o perioadă de eșantionare $T_e = 0.2$ [s]. O posibilă implementare a împărțirii infinite în MATLAB este prezentată mai jos, iar schema bloc a sistemului este cea din Figura 4.

```

1 % perioada de esantionare
2 Te=0.2;
3 % functia de transfer cu ZOH
4 Hd=c2d(tf(1,[1 3 2]),Te,'zoh');
5 % extragere numarator si numitor
6 [num,den]=tfdata(Hd,'v');
7 % numarul termenilor pentru aproximare
8 N = 10;
9 % extragerea parametrilor
10 [h,~] = deconv([num zeros(1,N)],den);
11 % numar de eșantioane
12 n=30;
13 % initializarea iesirii
14 y = zeros(1,n);
15 % semnalul de intrare
16 u=[zeros(1,N) ones(1,n-N)];
17 for k=N+1:n
18     for j=1:N
19         y(k)=y(k)+h(j)*u(k-j);
20     end
21 end
22 % timpul de simulare
23 t=0:Te:(n-N-2)*Te;
24 % comparatie intre ce s-a calculat si ce returneaza MATLAB
25 stairs(t,y(N+2:n),'r*');hold;step(Hd)

```

13.2 Deducerea modelelor numerice în spațiul stăriilor

În prezent, multiple tehnici de proiectare a regulatoarelor oferă modelele acestora sub formă de realizare de stare. Astfel, de interes devine obținerea ecuației cu diferențe corespunzătoare

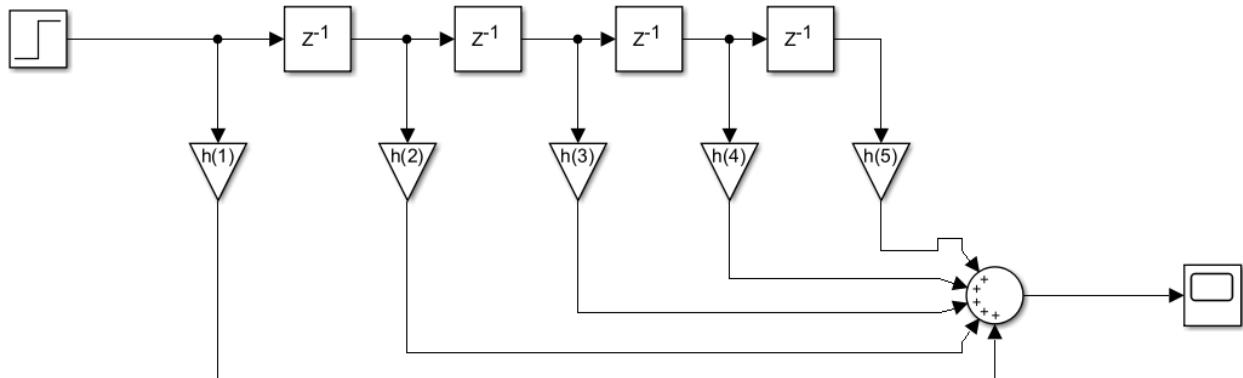


Figura 13.3: Structura corespunzătoare împărțirii infinite pentru $N = 5$.

pentru modelele în spațiul stărilor.

Pornind de la reprezentarea unui model în timp continuu:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t); \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t), \end{cases} \quad (13.11)$$

echivalentul său numeric, cu perioada de eşantionare $T > 0$, va avea reprezentarea:

$$\begin{cases} x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k]; \\ y[k] &= C_d x[k] + D_d u[k]. \end{cases} \quad (13.12)$$

Funcțiile de transfer în s și z se calculează pe baza formulei de legătură:

$$H(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c + D_c, \quad H(z) = C_d (zI - A_d)^{-1} B_d + D_d. \quad (13.13)$$

Legăturile între modelele (A_c, B_c, C_c, D_c) și (A_d, B_d, C_d, D_d) se obțin din diversele metode discretizare, cu o parte dintre ele menționate în continuare. Spre exemplu, metoda *zero-order hold* implică faptul că vectorul de intrare $u(t)$ este constant pe fiecare interval de timp $[kT, (k+1)T]$, ceea ce duce la o reprezentare:

$$\Sigma_{zoh}(z) : \begin{cases} x[k+1] &= (e^{A_c T}) x[k] + \left(\int_0^T e^{A_c(T-\tau)} B_c u[k] d\tau \right) = A_d x[k] + B_d u[k]; \\ y[k] &= C_c x[k] + D_c u[k]. \end{cases} \quad (13.14)$$

În Tabelul 13.1 se redau în mod sintetic relațiile prin care se obține descrierea sistemului numeric în spațiul stărilor (A_d, B_d, C_d, D_d) plecând de la sistemul continuu (A_c, B_c, C_c, D_c) , pentru cele trei metode de discretizare prin aproximarea numerică a integralei. Conversia inversă, pornind de la sistemul discret către cel continuu, se prezintă în Tabelul 13.2.

13.3 Scalarea coeficienților în virgulă fixă

Se consideră următoarea funcție de transfer în z :

$$H_d(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (13.15)$$

	Metoda dreptunghiurilor înainte	Metoda dreptunghiurilor înapoi	Metoda Tustin
A_d	$I + TA_c$	$(I - TA_c)^{-1}$	$(I - \frac{T}{2}A_c)^{-1}(I + \frac{T}{2}A_c)$
B_d	TB_c	$(I - TA_c)^{-1}TB_c$	$(I - \frac{T}{2}A_c)^{-1}\frac{T}{2}B_c$
C_d	C_c	$C_c(I - TA_c)^{-1}$	$2C_c(I - \frac{T}{2}A_c)^{-1}$
D_d	D_c	$D_c + C_c(I - TA_c)^{-1}TB_c$	$D_c + C_c(I - \frac{T}{2}A_c)^{-1}\frac{T}{2}B_c$

Tabelul 13.1: Conversia continuu-discret în spațiul stărilor

	Metoda dreptunghiurilor înainte	Metoda dreptunghiurilor înapoi	Metoda Tustin
A_c	$\frac{1}{T}(A_d - I)$	$\frac{1}{T}(I - A_d^{-1})$	$\frac{2}{T}(A_d - I)(I + A_d)^{-1}$
B_c	$\frac{1}{T}B_d$	$\frac{1}{T}A_d^{-1}B_d$	$\frac{4}{T}(I + A_d)^{-1}B_d$
C_c	C_d	$C_dA_d^{-1}$	$C_d(I + A_d)^{-1}$
D_c	D_d	$D_d - C_dA_d^{-1}B_d$	$D_d - C_d(I + A_d)^{-1}B_d$

Tabelul 13.2: Conversia discret-continuu în spațiul stărilor

cu coeficienții $\{a_i, b_j\} \in \mathbb{R}$. Prin aplicarea transformatei \mathcal{Z} inverse și utilizând conexiunea serie rezultă următoarea ecuație cu diferențe finite:

$$y[n] = -a_1y[n-1] - a_2y[n-2] + b_0u[n] + b_1u[n-1] + b_2u[n-2]. \quad (13.16)$$

Inițial, coeficienții se obțin în virgulă flotantă, pe 64 de biți (*double*). Majoritatea microcontrollerelor nu suportă operațiile de adunare și înmulțire cu numere în virgulă flotantă implicit în structura lor hardware. Astfel, se propune **scalarea coeficienților în formatul de virgulă fixă, utilizând numere întregi în codificarea complement față de doi** pentru sporirea vitezei de efectuare a calculelor.

Se constată următoarea încadrare a modulelor coeficienților:

$$\max \{|a_i|, |b_j|\} \leq 2^m, m \geq 0. \quad (13.17)$$

Dacă se utilizată un microcontroller cu lungimea implicită a numerelor întregi pe L biți, atunci scalarea care profită optim de această lungime se efectuează prin următoarele deplasări pe biți:

$$\tilde{a}_i \leftarrow (a_i \ll (L - m - 1)), \quad \tilde{b}_j \leftarrow (b_j \ll (L - m - 1)), \quad (13.18)$$

unde scăderea suplimentară cu 1 se datorează locului alocat bitului de semn.

Astfel, ecuația cu diferențe devine:

$$\tilde{y}[n] = -\tilde{a}_1\tilde{y}[n-1] - \tilde{a}_2\tilde{y}[n-2] + \tilde{b}_0u[n] + \tilde{b}_1u[n-1] + \tilde{b}_2u[n-2]. \quad (13.19)$$

Deoarece se pot memora intrările și ieșirile precedente în unitățile convertoarelor analog-numerice și numeric-analogice pe L biți, iar coeficienții \tilde{a}_i și \tilde{b}_j sunt memorati tot pe L biți, rezultatul obținut este pe $2L$ biți, iar valoarea care trebuie transmisă la ieșirea microcontrollerului trebuie rescalată prin următoarea deplasare:

$$y[n] \leftarrow (\tilde{y}[n] \gg (L - m - 1)). \quad (13.20)$$

Înainte de trecerea la implementarea pe microcontroller utilizând limbajul C, se recomandă simularea și validarea filtrului proiectat și scalat la coeficienți întregi în mediul MATLAB.

Exemplu numeric: Pentru funcția de transfer a unui filtru *Notch* precum în Lucrarea 12, ecuația (12.3), se consideră funcția de transfer numerică (cu perioada de eşantionare $T_e = 31.25 \mu s$):

$$H_d(z^{-1}) = \frac{0.9136 - 1.81916z^{-1} + 0.9136z^{-2}}{1 - 1.8191z^{-1} + 0.82734z^{-2}}. \quad (13.21)$$

Considerând notația (13.15), se constată că:

$$\max \{|a_i|, |b_j|\} \leq 2^1. \quad (13.22)$$

Pentru o reprezentare numerică pe $L = 16$ biți, ținând cont suplimentar de bitul de semn, rezultă că reprezentarea părții fractionale a coeficienților poate fi stocată pe $L - m - 1 = 14$ biți, profitând de precizia maximă a codificării, cu o rezoluție $\varepsilon = 2^{-14}$. Astfel, coeficienții stocați aparțin domeniului $[-2, 2 - \varepsilon]$. Aplicând scalarea (13.18), rezultă funcția de transfer cu coeficienți în virgulă fixă:

$$\tilde{H}_d(z^{-1}) = \frac{14970 - 29805z^{-1} + 14970z^{-2}}{16384 - 29805z^{-1} + 13555z^{-2}}, \quad (13.23)$$

pe baza căreia rezultă ecuația cu diferențe scalată (13.19). Pentru a reveni la domeniul propus al semnalelor, rezultatul formulei, $\tilde{y}[n]$, trebuie re-scalat conform (13.20).

13.4 Implementarea ecuațiilor cu diferențe pe microcontroller

Pentru implementarea pe microcontroller a regulatorului/filtrului numeric trebuie efectuatii următorii pași:

- deducerea ecuației cu diferențe conform unei anumite topologii (serie, paralel etc.);
- selectarea și setarea unui convertor analog-numeric pentru citirea intrărilor $u[n]$;
- selectarea și setarea unui modul de ieșire pentru transmiterea valorii calculate $y[n]$: convertor numeric-analogic, modul PWM, modul de comunicație CAN, I2C etc.;
- setarea unui modul *Timer* la perioada de eşantionare dorită și atașarea acestuia la sistemul de intreruperi al microcontrollerului;
- în rutina de intrerupere atașată se implementează operațiile din (13.19) și (13.20), alături de decalarea intrărilor (la începutul rutinei) și ieșirilor (la finalul rutinei): $u[n - 1], u[n - 2], y[n - 1], y[n - 2]$;
- testarea și validarea ansamblului utilizând un generator de semnale și osciloscop.

Pentru mai multe detalii, probleme aferente și exemple de implementări, se recomandă parcurgerea referințelor [Franklin, Powell și Workman 1998], [Rossi, Toscani și Mauri 2022], [Petkov, Slavov și Kralev 2018].

Partea III

Realizări de stare. Proprietăți algebrice
ale sistemelor LTI

Lucrarea 14

Realizări de stare. Forme canonice

14.1 Realizări de stare	130
14.2 Forme canonice	131
14.3 Probleme propuse	139

Lucrarea de față cuprinde metode de a obține realizări de stare pornind de la funcția de transfer a sistemelor LTI. În aceste cazuri, stările nu au obligatoriu semnificație fizică. Se descriu următoarele forme canonice:

- Forma canonică de control – **FCC**;
- Forma canonică de observare – **FCO**
- Forma canonică controlabilă – **FCCo**;
- Forma canonică observabilă – **FCOb**;
- Forma canonică bloc diagonală (Jordan).

14.1 Realizări de stare

Un sistem LTI are următoarea descriere în spațiul stărilor:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{cases}, \quad (14.1)$$

având numărul de **stări** $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ (**ordinul sistemului**), numărul de **intrări** $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, respectiv numărul de **ieșiri** $p \in \mathbb{N}$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$. Pentru un asemenea sistem avem reprezentarea compactă folosind matricea cu blocuri:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+m)}. \quad (14.2)$$

În funcție de numărul de intrări și ieșiri, sistemele se clasifică în:

- **SISO** (engl. *Single Input, Single Output*): $m = p = 1$;
- **MISO** (engl. *Multi-Input, Single Output*): $m > 1, p = 1$;
- **SIMO** (engl. *Single Input, Multi-Output*): $m = 1, p > 1$;
- **MIMO** (engl. *Multi-Input, Multi-Output*): $m > 1, p > 1$.

Pentru un sistem LTI, indiferent de numărul de intrări sau de ieșiri, trecerea din spațiul stărilor la funcția/matricea de transfer echivalentă se face prin aplicarea transformatei Laplace în condiții initiale nule:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) |_{\mathcal{L}}, \mathbf{CI} = 0 \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) |_{\mathcal{L}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s\mathbf{X}(s) = A\mathbf{X}(s) + B\mathbf{U}(s); \\ \mathbf{Y}(s) = C\mathbf{X}(s) + D\mathbf{U}(s). \end{cases} \quad (14.3)$$

Prin eliminarea termenului $\mathbf{X}(s)$ se obține relația de legătură între $\mathbf{U}(s)$ și $\mathbf{Y}(s)$ astfel:

$$\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1} B\mathbf{U}(s) \Rightarrow \mathbf{Y}(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D] \mathbf{U}(s) \Rightarrow \quad (14.4)$$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = C(sI - A)^{-1} B + D, \quad (14.5)$$

unde $\mathbf{H}(s)$ reprezintă matricea de transfer a sistemului, cu elementele individuale de tip funcție de transfer, având m coloane corespunzătoare semnalelor de intrare, respectiv p linii corespunzătoare semnalelor de ieșire. Doar în cazul particular al sistemelor SISO, discutăm despre funcția de transfer a sistemului.

14.2 Forme canonice

14.2.1 Forma canonica de control – FCC

Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI SISO descris prin funcția de transfer $H(s)$. Pentru a putea evidenția realizarea de stare corespunzătoare formei canonice de control (FCC), trebuie să punem în evidență funcția de transfer în forma următoare:

$$H(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (14.6)$$

Realizarea de stare corespunzătoare FCC este dată de matricea cu blocuri:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{FCC} & B_{FCC} \\ \hline C_{FCC} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 & d \end{array} \right).$$

Exemplu

Se consideră sistemul SISO descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{6s^3 + 21s^2 + 23s + 20}{2s^3 + 7s^2 + 7s + 2}.$$

În primul rând punem în evidență transferul instantaneu:

$$d = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 3 \implies H(s) = 3 + \frac{2s + 14}{2s^3 + 7s^2 + 7s + 2}.$$

Deoarece polinomul de la numitor nu este monic (i.e., nu are coeficientul dominant 1), re scriem funcția de transfer astfel:

$$H(s) = 3 + \frac{s + 7}{s^3 + \frac{7}{2}s^2 + \frac{7}{2}s + 1}.$$

După ce avem evidențiată funcția de transfer ca în relația (14.6), realizarea de stare corespunzătoare formei canonice de control este descrisă compact de următoarea matrice cu blocuri:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{FCC} & B_{FCC} \\ \hline C_{FCC} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 7 & 3 \end{array} \right),$$

având setul de ecuații diferențiale de stare și ecuația de ieșire:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{7}{2}x_1 - \frac{7}{2}x_2 - x_3 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 \\ \dot{x}_3 = x_2 \\ y = x_2 + 7x_3 + 3u \end{cases}.$$

Implementare în MATLAB

Pentru a ajunge de la funcția de transfer la modelul în spațiul stărilor, în MATLAB se poate utiliza funcția `tf2ss`. Aceasta ne va returna realizarea de stare corespunzătoare formei canonice de control.

Determinarea formei canonice de control utilizând mediul MATLAB pentru exemplul prezentat se poate face astfel:

```

1 num=[6, 21, 23, 20]; den=[2, 7, 7, 2];
2 % determinarea matricelor corespunzătoare FCC
3 [A_FCC,B_FCC,C_FCC,D]=tf2ss (num,den);
4 % crearea obiectului de tip spatiul starilor
5 sys=ss (A_FCC,B_FCC,C_FCC,D);
```

Implementarea în Simulink

Schema bloc (Simulink) corespunzătoare formei canonice de control este prezentată în Figura 14.1. Caracteristic unei forme de tip control este calea liberă de la intrare spre integratoare. Mai precis, se poate observa că pe firul dintre intrare și cele trei integratoare nu există niciun bloc de înmulțire care ar putea fi zero (ceea ce nu se întâmplă în cazul ieșirii, unde starea x_1 este ponderată cu 0).

14.2.2 Forma canonnică de observare – FCO

Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI SISO descris prin funcția de transfer $H(s)$. Pentru a putea evidenția realizarea de stare corespunzătoare formei canonice de observare (FCO), trebuie să punem în evidență funcția de transfer în forma următoare:

$$H(s) = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}.$$

Realizarea de stare corespunzătoare FCO este dată de matricea cu blocuri:

$$\left(\begin{array}{c|ccccc} A_{FCO} & B_{FCO} & & & & \\ \hline C_{FCO} & D & & & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} -a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 & b_{n-1} \\ -a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_1 \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & d \end{array} \right).$$

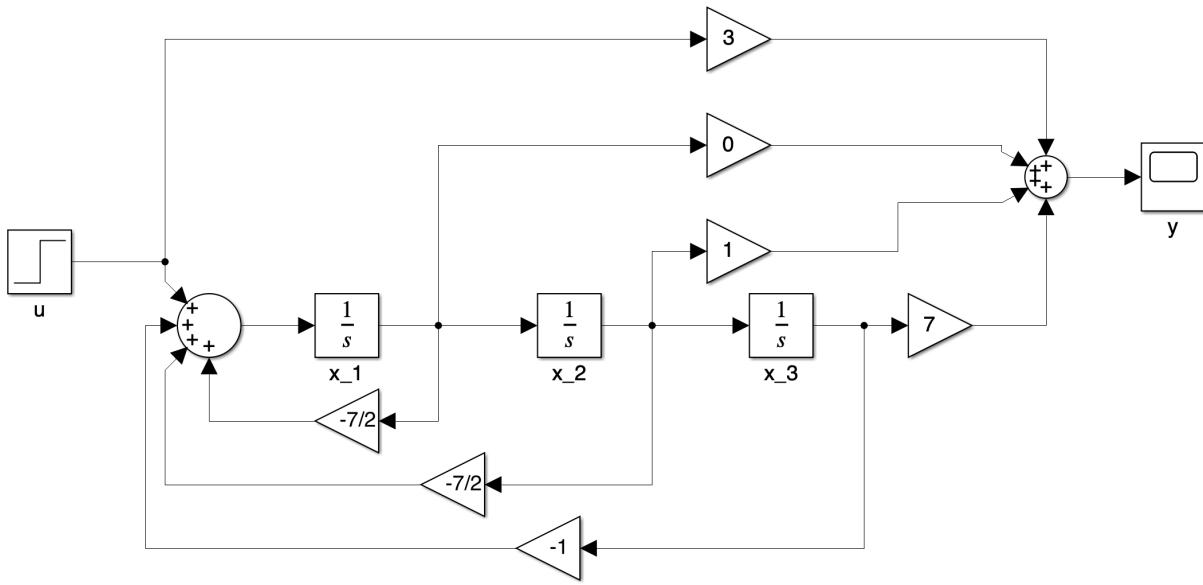


Figura 14.1: Schema bloc corespunzătoare FCC – Exemplu

Se poate observa că între FCC și FCO există o relație de **dualitate algebraică**:

$$A_{FCO} = A_{FCC}^\top, \quad B_{FCO} = C_{FCC}^\top, \quad C_{FCO} = B_{FCC}^\top. \quad (14.7)$$

Trebuie remarcat că transferul instantaneu nu este caracteristic unei realizări de stare, el reprezentând relația directă intrare-iesire.

Exemplu

Se consideră sistemul SISO descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{6s^3 + 21s^2 + 23s + 20}{2s^3 + 7s^2 + 7s + 2}.$$

Urmând pașii din cadrul secțiunii anterioare, funcția de transfer $H(s)$ se scrie astfel:

$$H(s) = 3 + \frac{s + 7}{s^3 + \frac{7}{2}s^2 + \frac{7}{2}s + 1}.$$

După ce avem evidențiată funcția de transfer în forma convenabilă, realizarea de stare corespunzătoare formei canonice de observare este descrisă compact de următoarea matrice cu blocuri:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{FCO} & B_{FCO} \\ \hline C_{FCO} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{7}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right),$$

având setul de ecuații diferențiale de stare și ecuația de ieșire:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -\frac{7}{2}x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{7}{2}x_1 + x_3 + u \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + 7u \\ y &= x_1 + 3u \end{cases}.$$

Implementare în MATLAB

Pentru a obține realizarea de stare corespunzătoare formei canonice de observare, se realizează conversia din funcția de transfer în forma canonică de control prin rutina `tf2ss` și apoi se folosește proprietatea de dualitate algebrică din (14.7) a celor două forme canonice.

Implementarea în Simulink

Schema bloc (Simulink) corespunzătoare formei canonice de observare este prezentată în Figura 14.2. Caracteristic unei forme de tip observare este calea liberă de la integratoare spre ieșire. Mai precis, se poate observa că pe firul dintre cele trei integratoare și ieșire nu există niciun bloc de înmulțire care ar putea fi zero (ceea ce nu se întâmplă în cazul intrării, unde intrarea în ecuația diferențială corespunzătoare stării x_1 este ponderată cu 0).

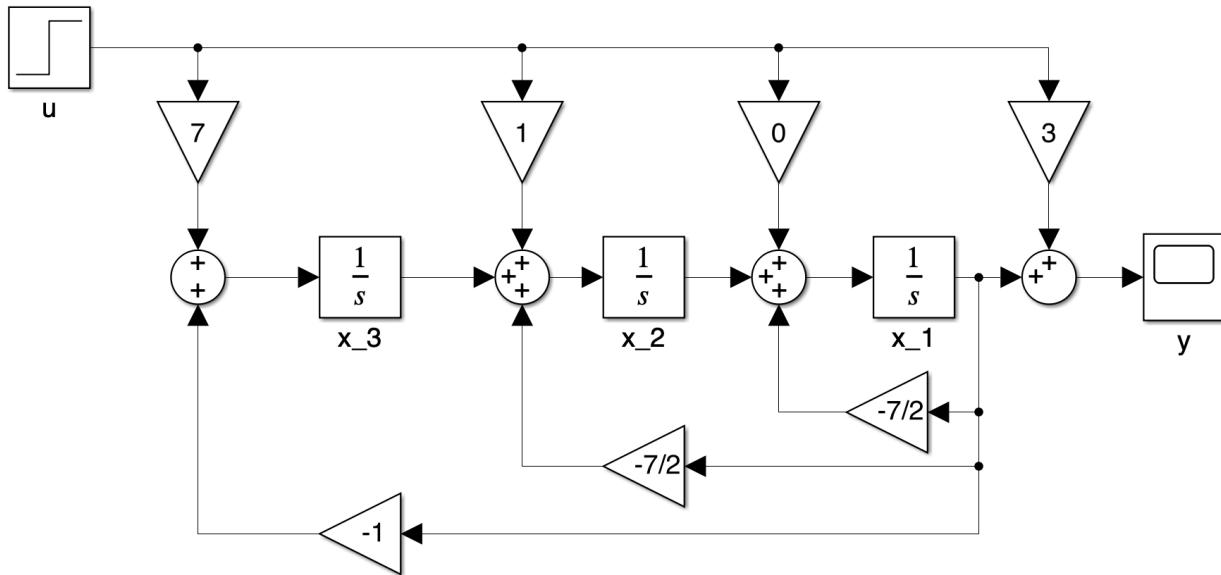


Figura 14.2: Schema bloc corespunzătoare FCO – Exemplu

14.2.3 Forma canonnică controlabilă – FCCo

Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI SISO descris prin funcția de transfer $H(s)$. Pentru a putea evidenția realizarea de stare corespunzătoare formei canonice controlabile (FCCo), trebuie să punem

în evidență funcția de transfer în forma următoare:

$$H(s) = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}.$$

Realizarea de stare corespunzătoare FCCo este dată de matricea cu blocuri:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{FCCo} & B_{FCCo} \\ \hline C_{FCCo} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} & 0 \\ \hline \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-1} & \gamma_n & \gamma_0 \end{array} \right),$$

unde $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ reprezintă primii $n+1$ parametri Markov ai sistemului.

Exemplu

Se consideră sistemul SISO descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{6s^3 + 21s^2 + 23s + 20}{2s^3 + 7s^2 + 7s + 2}.$$

Urmând pașii din cadrul secțiunii anterioare, funcția de transfer $H(s)$ se scrie astfel:

$$H(s) = 3 + \frac{s+7}{s^3 + \frac{7}{2}s^2 + \frac{7}{2}s + 1}.$$

În continuare, avem nevoie de primii 4 parametri Markov ai sistemului: $\gamma_0 = d = 3$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = \frac{7}{2}$. Realizarea de stare corespunzătoare formei canonice controlabile este descrisă compact de următoarea matrice cu blocuri:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{FCCo} & B_{FCCo} \\ \hline C_{FCCo} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 0 \\ \hline 0 & 1 & \frac{7}{2} & 3 \end{array} \right),$$

având setul de ecuații diferențiale de stare și ecuația de ieșire:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_3 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - \frac{7}{2}x_3 \\ \dot{x}_3 = x_2 - \frac{7}{2}x_3 \\ y = x_2 + \frac{7}{2}x_3 + 3u \end{cases}.$$

Implementare în MATLAB

Pentru a obține parametrii Markov ai unui sistem, se poate utiliza funcția `deconv` în MATLAB, precum în următoarea secvență de cod, iar apoi se urmărește structura generală prezentată mai sus.

```

1 num=[6, 21, 23, 20]; den=[2, 7, 7, 2];
2 % extinderea numaratorului
3 N = 3; num_ext=[num, zeros(1,N)];
4 % forteaza minim primii N parametri Markov
5 gamma=deconv(num_ext,den);

```

Implementarea în Simulink

Schema bloc (Simulink) corespunzătoare formei canonice controlabile este prezentată în Figura 14.3. Caracteristic unei forme de tip control este calea liberă de la intrare spre integratoare. Mai precis, se poate observa că pe firul dintre intrare și cele trei integratoare nu există niciun bloc de înmulțire care ar putea fi zero (ceea ce nu se întâmplă în cazul ieșirii, unde starea x_1 este ponderată cu 0).

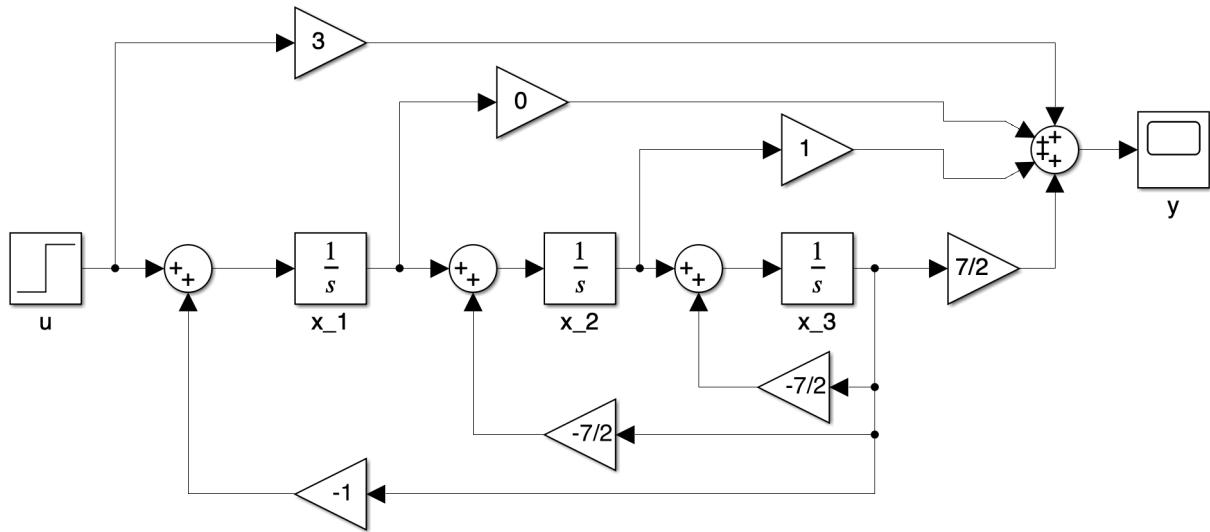


Figura 14.3: Schema bloc corespunzătoare FCCo – Exemplu

14.2.4 Forma canonnică observabilă – FCOb

Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI SISO descris prin funcția de transfer $H(s)$. Pentru a putea evidenția realizarea de stare corespunzătoare formei canonice observabile (FCOb), trebuie să punem în evidență funcția de transfer în forma următoare:

$$H(s) = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}.$$

Realizarea de stare corespunzătoare FCOb este dată de matricea cu blocuri:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{FCOb} & B_{FCOb} \\ \hline C_{FCOb} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \gamma_{n-1} \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & \gamma_n \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_0 \end{array} \right).$$

Se poate observa că și între FCCo și FCOb există o relație de **dualitate algebrică**:

$$A_{FCOb} = A_{FCCo}^\top, \quad B_{FCOb} = C_{FCCo}^\top, \quad C_{FCOb} = B_{FCCo}^\top. \quad (14.8)$$

Exemplu

Se consideră sistemul SISO descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{6s^3 + 21s^2 + 23s + 20}{2s^3 + 7s^2 + 7s + 2}.$$

Urmând pașii din cadrul secțiunii anterioare, funcția de transfer $H(s)$ se scrie astfel:

$$H(s) = 3 + \frac{s + 7}{s^3 + \frac{7}{2}s^2 + \frac{7}{2}s + 1}.$$

În continuare, avem nevoie de primii 4 parametri Markov ai sistemului: $\gamma_0 = d = 3$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, $\gamma_3 = \frac{7}{2}$. Realizarea de stare corespunzătoare formei canonice observabile este descrisă compact de următoarea matrice cu blocuri:

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{FCOb} & B_{FCOb} \\ \hline C_{FCOb} & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right),$$

având setul de ecuații diferențiale de stare și ecuația de ieșire:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 + u \\ \dot{x}_3 = -x_1 - \frac{7}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{7}{2}u \\ y = x_1 + 3u \end{cases}.$$

Implementare în MATLAB

Pentru a obține FCOb, se realizează conversia din realizarea de stare FCCo în FCOb pe baza proprietății de dualitate algebrică a celor două forme canonice, precum în (14.8).

Implementarea în Simulink

Schema bloc (Simulink) corespunzătoare formei canonice observabile este prezentată în Figura 14.4. Caracteristic unei forme de tip observare este calea liberă de la integratoare spre ieșire. Mai precis, se poate observa că pe firul dintre cele trei integratoare și ieșire nu există niciun bloc de înmulțire care ar putea fi zero (ceea ce nu se întâmplă în cazul intrării, unde intrarea în ecuația diferențială corespunzătoare stării x_1 este ponderată cu 0).

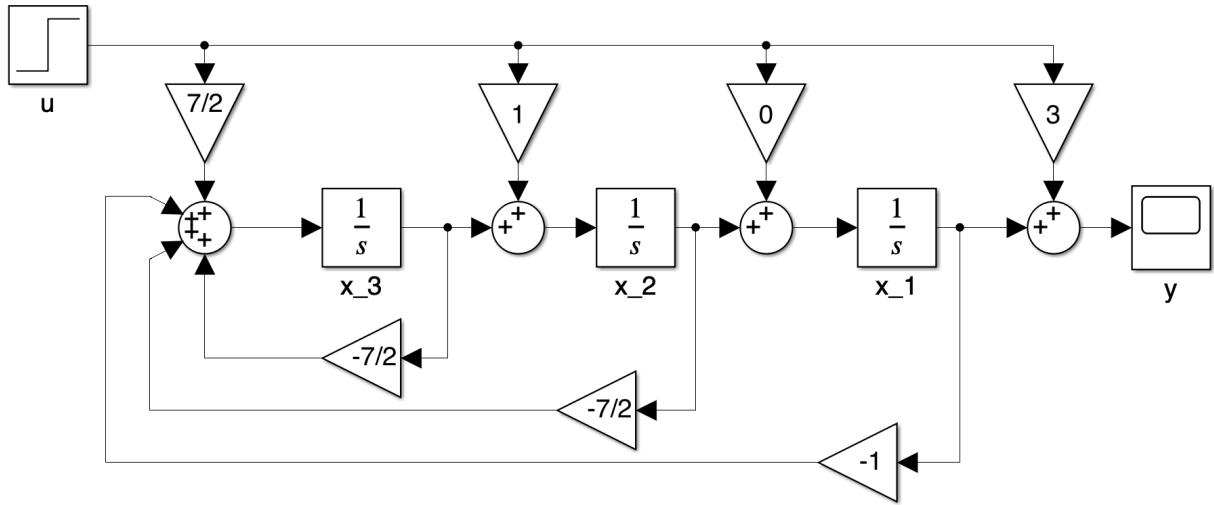


Figura 14.4: Schema bloc corespunzătoare FCOB – Exemplu

14.2.5 Forma canonică bloc diagonală (Jordan) – FCJ

Se consideră sistemul LTI SISO descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}.$$

Din punct de vedere algebric numărul de vectori proprii liniar independenți corespunzători unei valori proprii este dat de **multiplicitatea geometrică** a fiecărei valori proprii. Dacă multiplicitatea geometrică coincide cu multiplicitatea algebrică, pe baza teoremei reziduuriilor, sistemul poate fi descompus sub următoarea formă:

$$H(s) = R_\infty + \frac{R_{\hat{s}_1}}{s - \hat{s}_1} + \dots + \frac{R_{\hat{s}_n}}{s - \hat{s}_n}. \quad (14.9)$$

Astfel, rezultă o topologie paralelă formată din n subsisteme de ordinul I (caracterizate de poli reali sau complecsi) și transferul instantaneu R_∞ . O astfel de descompunere se poate obține în mediul MATLAB cu ajutorul funcției `residue`. Sistemul în spațiul stărilor în forma diagonală are n stări decuplate între ele, acționate în mod identic de intrarea $u(t)$, iar ieșirea este formată prin însumarea celor n stări ponderate cu valorile reziduurilor $R_{\hat{s}_k}$.

$$\left(\begin{array}{c|c} A_d & B_d \\ \hline C_d & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc|c} \hat{s}_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \hat{s}_2 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{s}_n & 1 \\ \hline R_{\hat{s}_1} & R_{\hat{s}_2} & \dots & R_{\hat{s}_n} & R_{\infty} \end{array} \right).$$

Observația 1: Termenii de multiplicitate geometrică mai mare decât $\rho > 1$ se obțin prin înscrierea a ρ termeni de ordinul 1, obținuți structural printr-o conexiune cu reacție pozitivă dintr-un bloc integrator pe calea directă și o scalare cu valoarea polului pe calea de reacție, ceea ce duce la apariția blocurilor Jordan de dimensiune ρ în realizarea de stare.

Observația 2: În forma diagonală prezentată în (14.9) perechile de poli complex conjugăți se descompun algebric în termeni de ordinul I cu poli complecsi, respectiv reziduuri complexe. Pentru a evita utilizarea numerelor complexe în realizarea de stare cu integratoare, se preferă structurile alternative care folosesc blocuri reale de ordinul II, precum forma Jordan reală.

Observație: Realizările de stare sunt echivalente structural și în cazul sistemelor numerice, cu mențiunea că blocurile de tip integrator $\frac{1}{s}$ se înlocuiesc cu blocuri de tip întârziere de tact z^{-1} , respectiv se folosesc matricele realizării de stare obținute în urma discretizării adecvate.

14.3 Probleme propuse

P1): Se consideră sistemul descris prin structura din figura 14.5, unde $K_1 = 320$, $K_2 = 3.8$, $T = 0.1[s]$. Se cer:

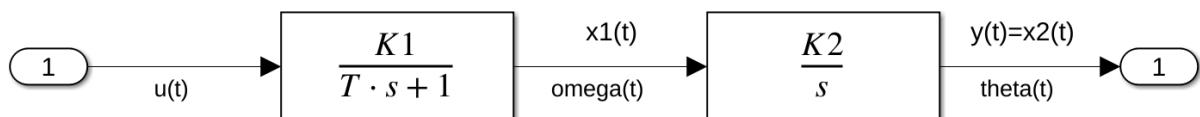


Figura 14.5: Modelul matematic al unei axe CNC

- a) Să se determine modelul de tip spațiul stărilor în care variabilele de stare au semnificație fizică.
- b) Să se determine cele 5 forme canonice pentru sisteme SISO studiate la laborator.

Lucrarea 15

Controlabilitatea și observabilitatea sistemelor LTI. Reacția de la stare și estimatorul de stare

15.1 Controlabilitatea sistemelor.	
Reacția de la stare	142
15.2 Observabilitatea sistemelor.	
Estimatorul de stare	144
15.3 Probleme propuse	145
15.4 Studiu de caz	147

Lucrarea de față cuprinde studiul proprietăților fundamentale de controlabilitate și observabilitate a sistemelor:

- controlabilitatea sistemelor LTI, cu aplicația directă de calcul de matrice de reacție de la stare prin formula lui Ackermann;
- observabilitatea sistemelor LTI, cu aplicația directă de calcul de estimatoare de stare.

15.1 Controlabilitatea sistemelor. Reactia de la stare

Se consideră sistemul LTI cu următoarea descriere în spațiul stărilor:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad \text{cu } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+m)}, \quad (15.1)$$

având numărul de **stări** $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ (**ordinul sistemului**), numărul de **intrări** $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, respectiv numărul de **ieșiri** $p \in \mathbb{N}$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$.

Un sistem dinamic se numește de **stare complet controlabilă** dacă există o comandă $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1] \in \mathbb{R}^+$, continuă pe porțiuni, care transferă sistemul din orice stare inițială $\mathbf{x}(t_0)$, $\forall t_0 \in \mathbb{R}^+$, în orice stare finală $\mathbf{x}(t_1)$, $\forall t_1 \in \mathbb{R}^+$, finit, cu $t_1 > t_0$. În caz contrar, sistemul se numește, după caz, de stare **partial controlabilă** sau de **stare necontrolabilă**.

Interpretarea algebrică a definiției (??) se face studiind dimensionalitatea subspațiului generat de matricele A și B , de unde se poate considera **matricea de controlabilitate** a sistemului astfel:

$$\mathcal{C}o(A, B) := [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times nm}. \quad (15.2)$$

Teoremă: Un sistem (A, B, C, D) este complet controlabil dacă și numai dacă $\text{rank}(\mathcal{C}o(A, B)) = n$. Rangul matricei de controlabilitate indică numărul de stări controlabile ale sistemului.

Matricea de controlabilitate se poate calcula în MATLAB cu ajutorul funcției `ctrb` astfel: `Co = ctrb(A, B)`.

Majoritatea proceselor fizice întâlnite în industrie au un caracter trece-jos, deci nu prezintă transfer instantaneu. Se va lucra în continuare considerând matricea $D = 0$.

În cazul unui sistem complet controlabil se poate calcula matricea de reacție de la stare $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) - K\mathbf{x}(t)$ astfel încât sistemul în buclă închisă să aibă regimul tranzitoriu impus:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B(\mathbf{v}(t) - K\mathbf{x}(t)); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (A - BK)\mathbf{x}(t) + B\mathbf{v}(t) \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (15.3)$$

unde $\mathbf{v}(t)$ reprezintă un semnal de referință. Astfel, față de sistemul inițial care avea valorile proprii $\Lambda(A)$, sistemul în buclă închisă cu reacție de la stare va avea valorile proprii $\Lambda(A - BK)$.

Pentru a calcula matricea de reacție de la stare K pe baza unui set de valori proprii impuse, se poate utiliza **formula lui Ackermann**:

$$K = e_n^T (\mathcal{C}o(A, B))^{-1} P_0(A), \quad (15.4)$$

unde:

$$e_k^T = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0), \text{ unde valoarea 1 se găsește pe poziția } k, \text{ iar} \quad (15.5)$$

$$P_0(A) = P_0(s) \Big|_{s=A} = (s - \hat{s}_{01})(s - \hat{s}_{02}) \cdots (s - \hat{s}_{0n}) \Big|_{s=A} = (A - \hat{s}_{01}I)(A - \hat{s}_{02}I) \cdots (A - \hat{s}_{0n}I) \quad (15.6)$$

este polinomul caracteristic cu polii impuși în buclă închisă, aplicat în A.

În MATLAB, pentru calcul matricei de reacție de la stare, există funcțiile `acker` și `place`, astfel:

- $K = \text{acker}(A, B, [\hat{s}_{01}, \hat{s}_{02}, \dots, \hat{s}_{0n}]);$
- $K = \text{place}(A, B, [\hat{s}_{01}, \hat{s}_{02}, \dots, \hat{s}_{0n}]).$

Mai multe detalii se găsesc în `help`-ul din MATLAB.

Observație: Valorile proprii în buclă închisă se aleg astfel încât sistemul să aibă regimul tranzitoriu dorit: stabilitatea asigurată, regimul aperiodic (critic) sau oscilant, un timp de răspuns mai mic, suprareglaj mai mic. Cu cât se impun performanțe mai stricte, cu atât va fi mai mare efortul asupra elementelor de execuție, deci încep să intervină limitări practice.

Observație: Reacția de la stare asigură **doar** regimul tranzitoriu impus, nu și performanțe în regimul staționar. În acest caz, se consideră suplimentar o **matrice de prefiltrare** a referinței $\mathbf{v}(t) = F\mathbf{r}(t)$ care impune **eroare staționară la poziție nulă** astfel:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (A - BK)\mathbf{x}(t) + BF\mathbf{r}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (15.7)$$

Se impune pentru funcția de transfer în buclă închisă:

$$H_{yr}(s) = C(sI - A_0)^{-1}B_0 \Big|_{s=0} = C(sI - A + BK)^{-1}BF \Big|_{s=0} = I \Rightarrow \quad (15.8)$$

$$F = [C(-A + BK)^{-1}B]^{-1}. \quad (15.9)$$

În figura 15.1 este ilustrată schema de reglare a unui sistem descris în spațiul stărilor cu reacție de la stare și prefiltrarea referinței.

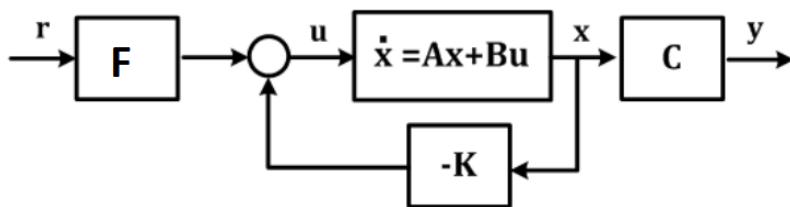


Figura 15.1: Schema de control cu reacție de la stare și prefiltrare

15.2 Observabilitatea sistemelor. Estimatorul de stare

Un sistem dinamic se numește de **stare complet observabilă** dacă vectorul de stare poate fi determinat complet peste orice interval de timp finit $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}^+$, $t_1 > t_0$, pe baza cunoașterii complete a intrării $\mathbf{u}(t)$ și a ieșirii $\mathbf{y}(t)$ peste același interval de timp finit. În caz contrar, sistemul se numește, după caz, de stare **partial observabilă** sau de **stare neobservabilă**.

Interpretarea algebrică a definiției (??) se face studiind dimensionalitatea subspațiului generat de matricele A și C , de unde se poate considera **matricea de observabilitate** a sistemului astfel:

$$\mathcal{O}b(A, C) := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times n}. \quad (15.10)$$

Teorema 15.2.1: U

sistem (A, B, C, D) este complet observabil dacă și numai dacă $\text{rank}(\mathcal{O}b(A, C)) = n$. Rangul matricei de observabilitate indică numărul de stări observabile ale sistemului.

Matricea de observabilitate se poate calcula în MATLAB cu ajutorul funcției `obsv` astfel: `Ob = obsv(A, C)`.

În cazul unui sistem complet observabil se va considera estimatorul de stare cu următoarea structură. Scopul este de a avea un sistem dinamic cu aceeași structură precum cea a sistemului fizic, pentru a putea accesa stările sau ieșirile acestuia:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) + L(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)); \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = C\hat{\mathbf{x}}(t); \end{cases} \quad (15.11)$$

Se definește eroarea de estimare $\mathbf{e}(t) := \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$ care trebuie să conveagă la zero pentru $t \rightarrow \infty$. Rezultă:

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\hat{\mathbf{x}}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u} - A\hat{\mathbf{x}} - B\mathbf{u} - L(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = A(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) - L(C\mathbf{x} - C\hat{\mathbf{x}}) = (A - LC)\mathbf{e}. \quad (15.12)$$

Astfel, rezultă că vectorul de eroare $\mathbf{e}(t)$ tinde la zero din orice condiție inițială $\mathbf{e}(t_0) \Leftrightarrow \mathbf{x}(t_0)$ dacă matricea de stare $A - LC$ este Hurwitz. În cazul sistemelor numerice, condiția este echivalentă cu a avea matricea $A - LC$ de tip Jury.

Teoremă: Pe baza dualității dintre proprietățile de controlabilitate și observabilitate, o pereche (A, B) este controlabilă dacă și numai dacă perechea (A^T, B^T) este observabilă. În mod analog, o pereche (A, C) este observabilă dacă și numai dacă perechea (A^T, C^T) este controlabilă.

Pentru calculul matricei estimatorului se poate folosi formula lui Ackermann pentru sistemul dual. În MATLAB, pentru calcul matricei estimatorului L , ţinând cont de teorema precedentă privind dualitatea, se pot folosi funcțiile `acker` și `place`, astfel:

- $L^T = \text{acker}(A^T, C^T, [\hat{s}_{01}^e, \hat{s}_{02}^e, \dots, \hat{s}_{0n}^e])$;
- $L^T = \text{place}(A^T, C^T, [\hat{s}_{01}^e, \hat{s}_{02}^e, \dots, \hat{s}_{0n}^e])$.

Observație: Valorile proprii ale *observer*-ului se aleg mult mai rapide decât cele ale sistemului inițial, pentru a converge stările sale la cele ale sistemului fizic. Înțînd cont că *observerul* este parte din logica de control, acesta va fi implementat pe un microcontroller și este recomandată alegerea valorilor proprii de aproximativ 10 ori mai rapide. Dacă se merge cu mult mai mult de atât, matricea estimatorului L va avea parametrii de valori foarte mari și încep să apară probleme numerice la implementare.

În figura 15.2 se prezintă structura cu integratoare a unui sistem fizic cu *observer* de stare. Deoarece, în multe cazuri practice, nu există traductoare pentru toate variabilele de stare ale unui sistem, se propune schema de control din figura 15.3, în care reacția de la stare se face prin stările estimate, nu cele fizice, neaccesibile, ale sistemului practic. În cazul unui sistem numeric, structura este identică, în loc de blocuri de integrare fiind blocuri de întârziere cu un tact, iar matricele de stare și intrare, A și B , devin cele obținute în urma discretizării.

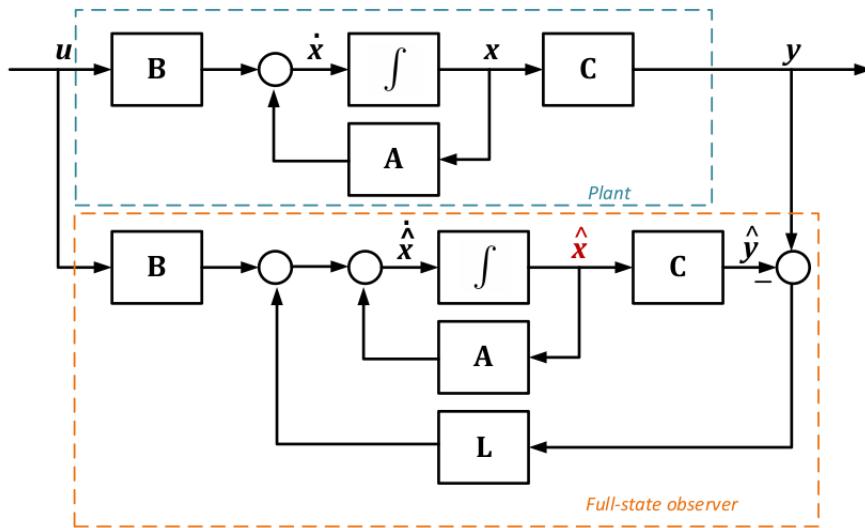


Figura 15.2: Schema de implementare a unui estimator de stare

15.3 Probleme propuse

Se consideră precesele descrise prin realizările de stare:

a)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t); \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t); \end{cases}$$

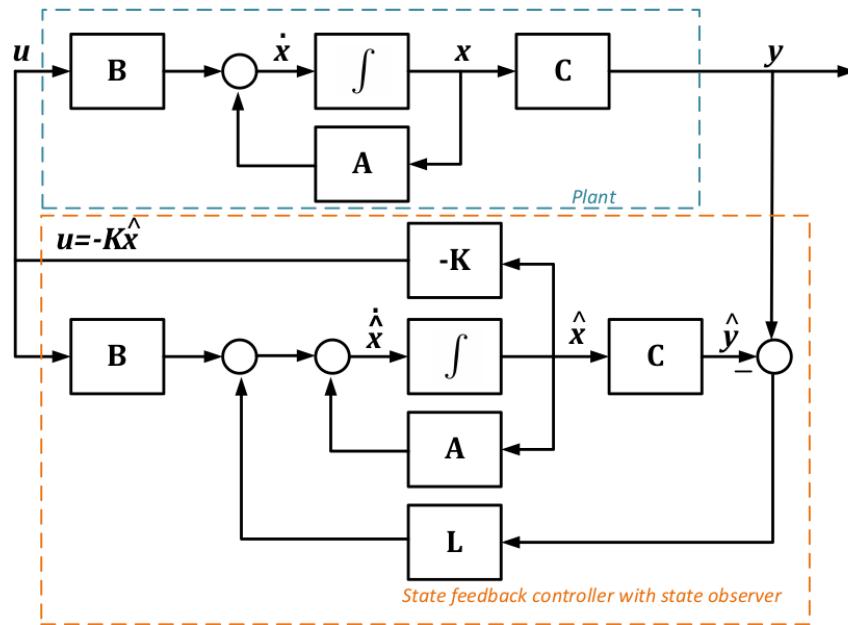


Figura 15.3: Schema de implementare a unei reglări cu reacție de la stările estimate, cu referință nulă (sistem de stabilizare)

b)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t); \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

Să se deducă pe foaie, respectiv să se verifice în MATLAB:

- 1) Studiul controlabilității sistemului;
- 2) Calculul matricei de reacție de la stare astfel încât sistemul închis să aibă:
 - 2.1) regim aperiodic critic amortizat și timp de răspuns cu 25% mai mic;
 - 2.2) regim oscilant amortizat, cu timp de răspuns cu 30% mai mic și suprareglaj de 5%;
 - 2.3) polii $\hat{s}_i = [-1, -2]$ pentru sistemul a) și $\hat{s}_i = [-2+4j, -2-4j, -10]$ pentru sistemul b).
- 3) Calculul erorii staționare la poziție pentru sistemele obținute la 2), respectiv calculul matricelor de prefiltrare astfel încât eroarea staționară la poziție să devină nulă;
- 4) Studiul observabilității sistemului;
- 5) Calculul matricei estimatorului de stare astfel încât *observer*-ul să fie de 10 ori mai rapid;

- 6) Implementarea sistemelor de control din figurile 15.1 și 15.3 în Simulink cu matricele K, F, L deduse.

15.4 Studiu de caz

Se consideră modelul matematic al unui motor de curent continuu cu perii precum în figura 15.4.

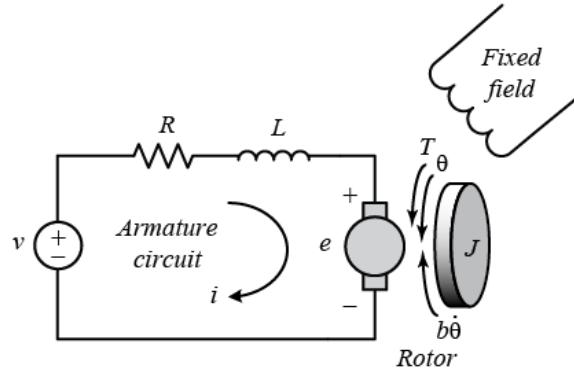


Figura 15.4: Circuitul echivalent al unui motor de curent continuu cu perii

Aplicând legea a doua a lui Kirchhoff pe ochiul principal al circuitului, respectiv legea a doua a lui Newton, rezultă ecuațiile diferențiale electrice și mecanice ale motorului:

$$\begin{cases} L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = K_{PWM}v - e; \\ J \frac{d\omega}{dt} + B_f \omega + T_L = T; \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega. \end{cases} \quad (15.13)$$

Pe lângă ecuațiile electrice și mecanice specifice motorului, există și ecuațiile de legătură între subsistemul mecanic și cel electric astfel:

$$\begin{cases} T = K_T i_a \\ e = K_e \omega. \end{cases} \quad (15.14)$$

Considerând un sistem de tip MIMO, cu intrările $\mathbf{u}(t) = (v, T_L)^T$, stările $\mathbf{x}(t) = (i_a, \omega, \theta)^T$, respectiv ieșirile $\mathbf{y}(t) = (\omega, \theta)^T$, rezultă modelul în spațiul stărilor:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} -\frac{R_a}{L_a} & \frac{-K_e}{L_a} & 0 & \frac{K_{PWM}}{L_a} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{B_f}{J} & 0 & 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (15.15)$$

Un set de parametrii pentru motorul descris se prezintă în tabelul 15.1.

Tabelul 15.1: Parametrii motorului DC

Parametru	Valoare	U.M.
R_a	0.92	Ω
L_a	$2e-3$	H
K_e	0.296	Vs/rad
K_t	0.294	Nm/A
J	$7e-4$	N/m^2
B_f	$3.35e-4$	N/m
K_{PWM}	38.46	—

Să se proiecteze două sisteme de control cu reacție de la stare și estimator, unul pentru reglarea turației folosind subsistemul $([v], [i_a, \omega], [\omega])$, respectiv unul pentru reglarea poziției folosind sistemul $([v], [i_a, \omega, \theta], [\theta])$, privind intrarea de cuplu de sarcină T_L strict ca o perturbație externă. Deoarece semnalul de curent prin bobină nu este accesibil la ieșirea sistemului (nefiind măsurabil în sistemul considerat), se justifica utilizarea estimatoarelor. Să se studieze controlabilitatea și observabilitatea sistemelor, să se proiecteze matricele de reacție de la stare K , de prefiltrare F și de estimare L impunând un set adecvat de performanțe și să se implementeze schemele de reglare în MATLAB și Simulink.

Lucrarea 16

Sisteme multivariabile

16.1 Forma minimală	150
16.2 Singularitățile sistemelor MIMO	153
16.3 Probleme propuse	155
16.4 Referințe propuse	156

Lucrarea de față cuprinde metode de a obține realizări de stare pornind de la matricea de transfer a sistemelor LTI cu mai multe intrări și ieșiri. Se pun în evidență formele canonice Gilbert și Kalman din care reiese ordinul minimal de reprezentare a sistemului, respectiv o serie de proprietăți generale și modalități de a le analiza utilizând mediul MATLAB.

16.1 Forma minimală

16.1.1 Forma canonică Gilbert

Se consideră sistemul *multi-input multi-output* (MIMO) cu m intrări și p ieșiri descris prin matricea de transfer:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \begin{pmatrix} H_{1,1}(s) & H_{1,2}(s) & \cdots & H_{1,m}(s) \\ H_{2,1}(s) & H_{2,2}(s) & \cdots & H_{2,m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{p,1}(s) & H_{p,2}(s) & \cdots & H_{p,m}(s) \end{pmatrix}. \quad (16.1)$$

Funcțiile de transfer individuale $H_{j,i}(s)$ reprezintă transferul de la intrarea i la ieșirea j .

Realizările de stare ale sistemului se pot deduce prin conexiuni paralele ale subsistemelor implicate în matricea de transfer, dar aceste abordări duc de obicei la sisteme de formă neminimală, deoarece stările pot fi adesea reutilizate între mai multe intrări și ieșiri. Ordinul sistemului se poate deduce din rangul matricei Hankel $\mathcal{H}_{n,n}$ a sistemului, în care fiecare parametru Markov are următoarea expresie: $\gamma_i = CA^{i-1}B$, $i \geq 1$.

O altă metodă de a deduce ordinul sistemului este utilizând teorema lui Gilbert, metodă cu ajutorul căreia se poate obține o realizare de stare în formă minimală. Această metodă va fi ilustrată pentru următorul exemplu rezolvat. Principiul funcționează pentru sisteme cu poli distincți.

$$\mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{s+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{s^2+3s+2} & \frac{s+1}{s+2} \end{pmatrix}. \quad (16.2)$$

Sistemul descris în (16.2) este cu două intrări și două ieșiri, iar o reprezentare simplă de stare se poate obține utilizând forma canonică de control pentru fiecare dintre cele 4 subsisteme astfel:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} -1 & & & & 1 & 0 \\ & -1 & & & 0 & 1 \\ \hline & & -3 & -2 & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & & & & -2 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Abordarea aceasta nu garantează că sistemul este în formă minimală. Alternativa este de a descompune sistemul în forma paralelă cu ajutorul teoremei reziduurilor:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{s+2} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{s+1} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{s+2} = \frac{\mathbf{R}_{\hat{s}_1=-1}}{s+1} + \frac{\mathbf{R}_{\hat{s}_2=-2}}{s+2}. \quad (16.3)$$

Conform teoremei lui Gilbert:

$$\min \text{ord } \mathbf{H} = \text{rank}(\mathbf{R}_{\hat{s}_1}) + \text{rank}(\mathbf{R}_{\hat{s}_2}) = \rho_1 + \rho_2,$$

iar polinomul caracteristic al sistemului este:

$$P_c(s) = (s - \hat{s}_1)^{\rho_1}(s - \hat{s}_2)^{\rho_2} = (s + 1)^2(s + 2), \quad (16.4)$$

de unde reiese că ordinul minimal este $n = 3$. Scriind ieșirile individuale:

$$\begin{cases} Y_1(s) = \frac{1}{s+1}U_1(s) + \frac{2}{s+1}U_2(s) = \frac{1}{s+1}U_1(s) + 2 \cdot \frac{1}{s+1}U_2(s); \\ Y_2(s) = \frac{-1}{s+1}U_2(s) + \frac{1}{s+2}U_1(s) + \frac{1}{s+2}U_2(s) = (-1) \cdot \frac{1}{s+1}U_1(s) + \frac{1}{s+2}(U_1(s) + U_2(s)), \end{cases} \quad (16.5)$$

Realizarea de stare cu integratoare se prezintă în figura 16.1.

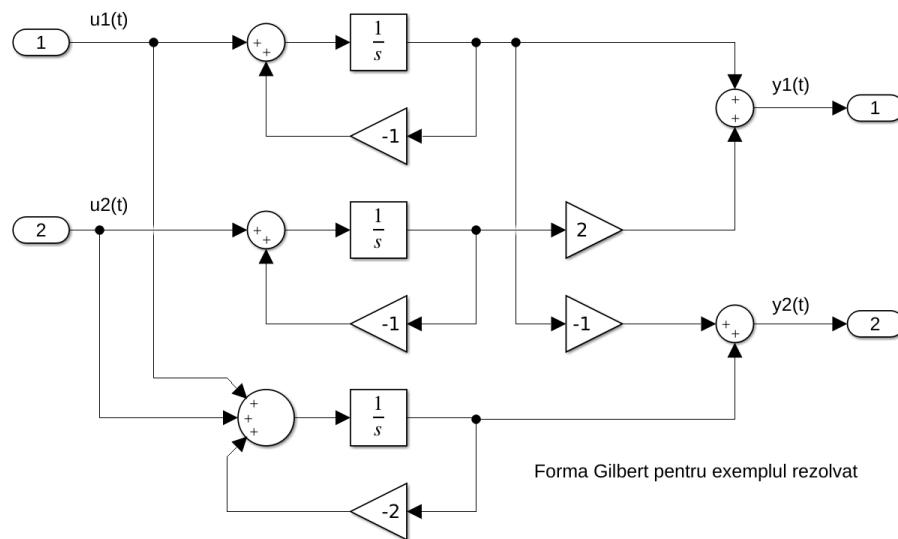


Figura 16.1: Forma canonică Gilbert pentru exemplul rezolvat

de unde **forma canonică Gilbert** se poate deduce ca fiind:

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

16.1.2 Deducerea subspațiilor controlabile și observabile

Se consideră sistemul MIMO $\mathbf{H}(s)$ descris prin matricele (A, B, C, D) , având m intrări și p ieșiri.

O schimbare de coordonate prin similaritate $\mathbf{z} = T\mathbf{x}$ se poate defini prin intermediul unei matrice de transformare T de dimensiunea variabilei de stare, inversabilă, astfel:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= A\mathbf{x} + B\mathbf{u}; & \dot{\mathbf{z}} &= (TAT^{-1})\mathbf{z} + (TB)\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} &= C\mathbf{x} + D\mathbf{u}. & \mathbf{y} &= (CT^{-1})\mathbf{z} + D\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (16.6)$$

Evidențierea subsistemului controlabil

Prin aplicarea funcției MATLAB `ctrbf` (engl. *controllability staircase form*) asupra matricelor (A, B, C) , se obține o realizare de stare echivalentă *în scară* a sistemului inițial prin aplicarea unei transformări de similaritate ortogonale T , $T^{-1} = T^\top$, în care se pune în evidență subspațiul controlabil, respectiv necontrolabil:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{nc} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{nc} & O \\ A_{21} & A_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{nc} \\ \mathbf{x}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ B_c \end{pmatrix} \mathbf{u}; \quad (16.7)$$

$$\mathbf{y} = (C_{nc} \ C_c) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{nc} \\ \mathbf{x}_c \end{pmatrix} + D \mathbf{u}, \quad (16.8)$$

unde $\Lambda(A_c)$ reprezintă spectrul controlabil, iar $\Lambda(A_{nc})$ conține modurile necontrolabile ale sistemului. Astfel, perechea (A_c, B_c) este complet controlabilă, iar perechea (A_{nc}, O) este necontrolabilă. Matricea de transfer echivalentă poate fi scrisă doar în termenii subsistemului controlabil astfel:

$$\mathbf{H}(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c = C (sI - A)^{-1} B. \quad (16.9)$$

Evidențierea subsistemului observabil

Prin aplicarea funcției MATLAB `obsvf` (engl. *observability staircase form*) asupra matricelor (A, B, C) , se obține o realizare de stare echivalentă *în scară* a sistemului prin aplicarea unei transformări de similaritate ortogonale T , $T^{-1} = T^\top$, în care se pune în evidență subspațiul observabil, respectiv cel neobservabil:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{no} \\ \dot{\mathbf{x}}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{no} & A_{12} \\ O & A_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{no} \\ \mathbf{x}_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{no} \\ B_o \end{pmatrix} \mathbf{u}; \quad (16.10)$$

$$\mathbf{y} = (O \ C_o) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{no} \\ \mathbf{x}_o \end{pmatrix} + D \mathbf{u}, \quad (16.11)$$

unde $\Lambda(A_o)$ reprezintă spectrul observabil, iar $\Lambda(A_{no})$ conține modurile neobservabile ale sistemului. Astfel, perechea (A_o, C_o) este complet observabilă, iar perechea (A_{no}, O) este neobservabilă. Matricea de transfer echivalentă poate fi scrisă doar în termenii subsistemului observabil astfel:

$$\mathbf{H}(s) = C_o (sI - A_o)^{-1} B_o = C (sI - A)^{-1} B. \quad (16.12)$$

Forma canonica Kalman

Teoremă: Un sistem LTI este în formă minimală dacă este simultan controlabil și observabil.

Aplicând în mod succesiv algoritmul *în scară* pentru evidențierea subspațiului controlabil, urmat apoi de evidențierea subspațiului observabil pe acesta, se poate scoate în evidență subsistemul simultan controlabil și observabil, într-un mod stabil numeric.

Varianta teoretică echivalentă, dar cu dificultăți în a fi obținută numeric, este de a realiza descompunerea sistemului în forma Kalman, având următoarea structură:

$$\text{Forma canonică Kalman: } \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \sim \left(\left[\begin{array}{cccc} A_{\bar{co}} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ O & A_{co} & O & A_{24} \\ O & O & A_{\bar{co}} & A_{34} \\ O & O & O & A_{\bar{co}} \end{array} \right] \mid \begin{array}{c} B_{\bar{co}} \\ B_{co} \\ O \\ O \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} O & C_{co} \\ C_{co} & O \end{array} \right] \mid D \right), \quad (16.13)$$

din care reies următoarele subsisteme:

- $(A_{co}, B_{co}, C_{co}, D)$: controlabil și observabil;
- $\left(\begin{bmatrix} A_{\bar{co}} & A_{12} \\ O & A_{co} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{\bar{co}} \\ B_{co} \end{bmatrix}, [O \ C_{co}], D \right)$: controlabil;
- $\left(\begin{bmatrix} A_{co} & A_{24} \\ O & A_{\bar{co}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{co} \\ O \end{bmatrix}, [C_{co} \ C_{\bar{co}}], D \right)$: observabil;
- $(A_{\bar{co}}, O, O, D)$: necontrolabil și neobservabil.

Astfel, ordinul minimal al sistemului inițial \mathbf{H} se obține ca fiind:

$$\min \text{ord } \mathbf{H} = \text{ord} \left(\begin{array}{c|c} A_{co} & B_{co} \\ \hline C_{co} & D \end{array} \right).$$

16.2 Singularitățile sistemelor MIMO

16.2.1 Fascicule matriciale

Definiție: Matricea parametrizată $\lambda M - N$ se numește **fascicul matricial** (engl. *matrix pencil*) liniar determinat de matricele $M, N \in \mathbb{C}^{n \times n}$, notată prin convenție (M, N) .

Valorile proprii generalizate se definesc ca soluție a ecuației caracteristice a fasciculului (M, N) :

$$\chi(\lambda) := \det(\lambda M - N) = 0, \quad (16.14)$$

cu vectorii proprii aferenți:

$$N\mathbf{v} = \lambda M\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq 0. \quad (16.15)$$

Problema este bine definită dacă fasciculul (M, N) este pătratic și polinomul $\chi(\lambda)$ nu este identic nul.

Cazul particular clasic este pentru $M := I_n$, de unde rezultă problema determinării valorilor proprii ale unei matrice pătratice $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda I - N) = 0, \quad (16.16)$$

cu definiția consacrată a vectorilor proprii atașați valorii proprii λ :

$$N\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq 0. \quad (16.17)$$

Funcția `eig` din MATLAB suportă determinarea valorilor și a vectorilor proprii atât pentru cazul clasic al unei matrice pătratice N , cât și pentru un fascicul matricial (M, N) .

16.2.2 Singularitățile sistemelor MIMO

Se consideră sistemul MIMO $\mathbf{H}(s)$ descris prin matricele (A, B, C, D) , având m intrări și p ieșiri.

Polii sistemului multivarabil se definesc ca fiind valorile proprii ale matricei de stare A :

$$\det(\lambda I - A) = 0. \quad (16.18)$$

Sistemul $\mathbf{H}(s)$ este stabil dacă toți polii săi se află în semiplanul complex stâng.

În cazul unui sistem pătratic, i.e. $m = p$, se definește conceptul de transmisie blocată în felul următor:

Definiție: Procesul are un **zero de transmisie** în valoarea (complexă) z_k dacă există vectorii $\xi_k \in \mathbb{C}^n$ și $u_k \in \mathbb{C}^m$, nu amândoi nuli, astfel încât soluția sistemului de ecuații diferențiale:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu_ke^{z_k t}, \quad \mathbf{x}(0) = \xi_k, \quad (16.19)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + Du_ke^{z_k t}, \quad (16.20)$$

să aibă proprietatea:

$$\mathbf{y}(t) \equiv 0, \quad \forall t > 0. \quad (16.21)$$

Exemplu: Se consideră funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{s+1}{s(s-1)},$$

cu reprezentarea în spațiul stărilor: $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}, 0 \right)$. Pentru $u(t) = 2e^{-t}$, intrare corespunzătoare perechii $u_k = 2$ și $z_k = -1$, respectiv pentru vectorul condițiilor inițiale $\xi_k = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, atunci:

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) + 2e^{-t}, \quad x_2(0) = -1 \Rightarrow x_2(t) = -e^t + e^t \int_0^t e^{-\tau} 2e^{-\tau} d\tau = -e^{-t}; \quad (16.22)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t), \quad x_1(0) = 1 \Rightarrow x_1(t) = 1 + e^{-t} - 1 = e^{-t} \Rightarrow y(t) = x_1(t) + x_2(t) = 0, \quad (16.23)$$

de unde reiese că $z = -1$ este un zero de transmisie pentru sistemul $H(s)$.

Zerourile de transmisie ale unui sistem pătratic reprezintă soluțiile ecuației caracteristice a fasciculului matricial $sM - N$, adică acele valori $s \in \mathbb{C}$ pentru care scade rangul fasciculului:

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ -C & -D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix} = 0; \quad M := \begin{bmatrix} I & O \\ O & O \end{bmatrix}; \quad N := \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (16.24)$$

Acest fascicul poartă denumirea de **matrice Rosenbrock** a sistemului. În cazul sistemelor dreptunghiu-lare, i.e. $m \neq p$, se face distincție între zerourile de transmisie la stânga, respectiv dreapta.

16.2.3 Funcții MATLAB

- `sys = tf(NUM,DEN)`, `sys = ss(A,B,C,D)`, `sys = pck(A,B,C,D)`;
- `p = pole(sys)`, `z = zero(sys)`, `z = tzero(sys)`;
- $\Lambda = \text{eig}(A)$, $\Lambda_g = \text{eig}(M,N)$;
- `ctrb(A,B)`, `obsv(A,C)` – *nerecomandate* pentru sisteme de ordin mare;
- `Wc = gram(sys,'c')`, `Wo = gram(sys,'o')` – alternativele recomandate (stabile numeric) prin studiul rangurilor matricelor Gram (gramian) de controlabilitate și observabilitate;
- `ctrbf(A,B,C)`, `obsvf(A,B,C)`, `minreal(sys)`;

16.3 Probleme propuse

P1): Deducreți o realizare de stare (nu neapărat în formă minimală) pe baza formelor canonicе clasice (de control, de observare, controlabilă, observabilă, Jordan), respectiv realizarea de stare minimală Gilbert a sistemelor MIMO:

$$a) \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix};$$

$$c) \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+2} & \frac{4}{s+2} \\ \frac{4.5}{s+2} & \frac{2(s-1)}{s+2} \end{pmatrix};$$

$$b) \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 1 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix};$$

$$d) \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \\ \frac{-6}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{pmatrix}.$$

P2): Studiați proprietățile următoarelor sisteme LTI: singularități, controlabilitate, observabilitate, performanțe în domeniile timp și frecvență, ordin minimal, realizare de stare minimală:

a)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (16.25)$$

b)

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{s+2} & 0 \\ \frac{s+2}{s+3} & \frac{1}{s+4} \end{bmatrix}; \quad (16.26)$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (16.27)$$

d)

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; C = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]; D = [0]; \quad (16.28)$$

e) aceeași analiză pentru sistemele de la problema P1).

16.4 Referințe propuse

[1] W.S. Levine (Ed.), *The Control Handbook, Volume 3, Control System Advanced Methods*, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011.

[2] A. Emami-Naeini, P. van Dooren, Computation of Zeros of Linear Multivariable Systems, *Automatica*, Vol. 18, No. 4, pp. 415–430, 1982, doi:0005-1098182/040415-16503.00/0.

[3] V. Ionescu, C. Oară, M. Weiss, *Generalized Riccati Theory and Robust Control: A Popov Function Approach*, John Wiley & Sons Ltd, England, 1999.

Partea IV

Recapitulare. Aplicații. Autoevaluare

Lucrarea 17

Teste de autoevaluare

Lucrarea curentă prezintă exemple de teste de autoevaluare din capitoile principale ale îndrumarului.

Oficiu: [1p]

Lucrarea 18

Studiu de caz – Proiect de semestru

18.1 Cerințe 162

Această lucrare prezintă o serie de cerințe pe baza materiei cuprinse în îndrumar, cu scopul efectuării unui studiu de caz complet pe un model de sistem dinamic la alegere din literatură. Cerințele au fost elaborate în scopul studiului individual pe parcursul unui semestru, cu finalizare printr-o documentație redactată în mediile Word sau L^AT_EX.

18.1 Cerințe

Alegeți un model de sistem dinamic din literatură de ordin între 2 și 4. Să se rezolve pe foaie și în mediul MATLAB următoarele cerințe pe baza lucrărilor de laborator.

Lucrarea 19

Întrebări de autocontrol

19.1 Listă de întrebări 164

Lucrarea de față prezintă o serie de întrebări de autocontrol cu rolul de a sintetiza esența teoretică disciplinei și de a deschide calea spre aplicarea practică a conceptelor studiate.

19.1 Listă de întrebări

1. Ce legătură este între funcțiile `odexy` și `lsim` din mediul MATLAB? Care dintre ele este mai generală și de ce?
2. Demonstrați că un sistem este în formă minimală dacă și numai dacă este controlabil și observabil.
3. Prezentați asemănări/deosebiri, respectiv avantaje/dezavantaje între modelele de tip spațiu stărilor și funcție de transfer.
4. Cum se poate verifica experimental că un sistem are un pol în valoarea $\hat{s} = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$ aplicând un semnal intrare $u(t)$ adecvat? Dar în cazul unui zero în valoarea $\hat{s} = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$?
5. Ce unități de măsură au parametrii cu semnificație fizică dintr-o funcție de transfer: factorul de proporționalitate, constantele de timp, factorii de amortizare, pulsăriile naturale de oscilație?
6. De ce stabilitatea internă este o proprietate mai puternică decât stabilitatea externă? În ce caz cele două proprietăți coincid?
7. De ce funcția pondere a unui sistem LTI permite inferența comportamentului acestuia la orice intrare arbitrară $u(t), t \geq 0$?
8. Cum se poate simula cu exactitate răspunsul unui sistem LTI la intrarea $u(t) = 1(t) + \delta(t - 10)$ utilizând mediul MATLAB?
9. Cum se poate aproxima timpul de răspuns al unui sistem LTI în cazul în care acesta are 3 constante de timp? Discuție.
10. Care indice de performanță variază continuu odată cu schimbarea parametrilor sistemului (K, T, ζ, ω_n): timpul de răspuns sau timpul de urcare? Justificați răspunsul.
11. Ce elemente structurale pot cauza un suprareglaj mai mare decât 100% într-un sistem LTI?
12. De ce un sistem de reglare în buclă închisă se comportă (respectiv se doresc prin proiectare să se comporte) precum un filtru trece-jos?
13. Găsiți exemple de sisteme fizice/biologice/economice/etc. ce prezintă inerent reacții pozitive și negative.
14. Ce dificultăți tehnice aduce impunerea unei erori staționare la viteza nulă? Dar la accelerare? Studiați problema din punct de vedere frecvențial.
15. De ce în practică este nefezabil un regulator care anulează un pol instabil al procesului cu un zero în semiplanul drept?

BIBLIOGRAFIE

- [AV73] B.D.O. Anderson și S. Vongpanitlerd, *Network Analysis and Synthesis. A Modern Systems Theory Approach*, Prentice-Hall Inc., 1973.
- [ÅH00] K.J. Åström și T. Hägglund, „Benchmark Systems for PID Control”, în *IFAC Proceedings Volumes* 33.4 (2000), pp. 165–166.
- [Bro70] R.W. Brockett, *Finite Dimensional Linear Systems*, John Wiley & Sons, 1970.
- [Che99] C.-T. Chen, *Linear Syst. Theory and Design*, a 3-a ed., Oxford Univ. Press, 1999.
- [Dob02] P. Dobra, *Teoria Sistemelor, Realizări de stare*, Cluj-Napoca: Mediamira, 2002.
- [DD14] P. Dobra și M. Dobra, *Teoria Sistemelor*, Cluj-Napoca: Mediamira, 2014.
- [DB11] R.C. Dorf și R.H. Bishop, *Modern Control Systems*, a 12-a ed., Prentice Hall, Pearson, 2011.
- [FPW98] G.F. Franklin, J.D. Powell și M.L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, a 3-a ed., Addison-Wesley Longman, Inc., 1998.
- [Ion85] V. Ionescu, *Teoria Sistemelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.
- [Kha96] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*, a 3-a ed., Prentice Hall, 1996.
- [Lev11] W.S. Levine, *The Control Handbook: Control System Fundamentals*, a 2-a ed., CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011.
- [Mat24] Inc. MathWorks, *MATLAB[®] Control System ToolboxTM User's Guide*, <https://www.mathworks.com/help/control/>, Accesat: 2024-10-24, 2024.
- [Nis15] N.S. Nise, *Control Systems Engineering*, a 7-a ed., Wiley, 2015.
- [Oga10] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, a 5-a ed., Prentice Hall, Pearson, 2010.
- [PSK18] P.H. Petkov, T.N. Slavov și J.K. Kralev, *Design of Embedded Robust Control Systems Using MATLAB/Simulink*, The Institution of Engineering și Technology, IET CONTROL, ROBOTICS & SENSORS SERIES 113, 2018.
- [RTM22] M. Rossi, N. Toscani și M. Mauri, *Introduction to Microcontroller Programming for Power Electronics Control Applications – Coding with MATLAB and Simulink*, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2022.
- [SP05] S. Skogestad și I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design*, John Wiley & Sons, 2005.
- [Voi86] M. Voicu, *Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate*, Editura Tehnică, București, 1986.