

# **TEORIA SISTEMELOR 2**

---

*Îndrumar de Laborator*

Mircea ȘUȘCĂ, Vlad MIHALY, Dora MORAR

Editia 1.0



---

# PREFATĂ

Acest îndrumar de laborator este elaborat cu rol de anexă pentru cursul *Teoria sistemelor II*, predat la secția *Automatică și Informatică Aplicată* din cadrul Facultății de Automatică și Calculatoare, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca. Suplimentar, lucrarea poate fi parcursă cu rol de îndrumător aplicativ pentru inginerii din domeniul regrării și folosit pentru consolidarea cunoștințelor teoretice elementare în vederea realizării cercetării în domeniu. Obiectul principal de studiu este dat de analiza și sinteza sistemelor liniare și invariante în timp (engl. *Linear Time-Invariant (LTI) systems*).

Îndrumarul este structurat în patru secțiuni: primele trei dedicate procesului de predare și aprofundare a materiei, iar ultima destinată recapitulării și autoevaluării. Partea I, intitulată “Răspunsul în frecvență al sistemelor LTI”, prezintă modalități de trasare și interpretare a diagramelor clasice utilizate pentru reprezentarea răspunsurilor sistemelor LTI la intrări sinusoidale. Suplimentar, această parte prezintă și criteriul Nyquist de stabilitate în buclă închisă, pe baza căruia se pot deduce performanțe ale sistemelor de reglare. Partea a II-a, intitulată “Sisteme LTI numerice”, tratează tehniciile de discretizare ale sistemelor LTI continue pentru implementarea pe calculator. Sunt discutate proprietățile sistemelor numerice comparativ cu cele continue, precum și particularitățile acestora. Partea a III-a, “Realizări de stare. Proprietăți algebrice ale sistemelor LTI”, acoperă principalele proprietăți ale sistemelor LTI din perspectivă algebrică, precum controlabilitatea și observabilitatea, cu aplicații clasice precum algoritmul de reacție de la stare și estimatorul de stare. Se introduce conceptul de sistem multivariabil și se generalizează noțiunile de singularitate, formă minimală, evidențiind necesitatea utilizării algoritmilor stabili numeric. În final, Partea a IV-a, “Recapitulare. Aplicații. Autoevaluare” propune modele de cerințe pentru verificarea cunoștințelor acumulate, oferind oportunitatea de a aplica în mod practic și organizat concepțele studiate.

Se lucrează în mediul MATLAB®. În acest sens, vor fi necesare extensiile Simulink® și Control System Toolbox™. Pentru analiza sistemelor LTI în contextul lucrării de față, pot fi utile și extensiile System Identification Toolbox™, respectiv Signal Processing Toolbox™. Pentru o înțelegere în profunzime a conceptelor prezentate în lucrarea de față, sunt necesare următoarele precondiții: *Analiză matematică*, *Matematici speciale în inginerie* (Analiză complexă), *Algebra liniară și geometrie analitică*, *Teoria sistemelor I*, *Electrotehnica*, *Bazele circuitelor electronice*.

Autorii, Septembrie 2025.



---

# CUPRINS

Prefață	3
Cuprins	5
Listă figuri	9
Listă tabele	13
<b>I Răspunsul în frecvență al sistemelor LTI</b>	<b>15</b>
<b>1 Conceptul de răspuns în frecvență. Analiza tipului filtrului</b>	<b>17</b>
1.1 Răspunsul sistemelor LTI la intrări armonice . . . . .	18
1.2 Analiza tipului filtrului . . . . .	19
1.3 Exemplu rezolvat . . . . .	20
1.4 Analiza tipului filtrului în MATLAB . . . . .	21
<b>2 Trasarea și interpretarea diagramei Nyquist</b>	<b>23</b>
2.1 Trasarea diagramei Nyquist . . . . .	24
2.2 Probleme . . . . .	24
2.3 Interpretarea diagramei Nyquist . . . . .	26
2.4 Trasarea Diagramei Nyquist în MATLAB . . . . .	27
2.5 Determinarea naturii filtrului . . . . .	27
<b>3 Trasarea și interpretarea diagramei Bode</b>	<b>29</b>
3.1 Aproximarea diagramei Bode prin asimptote . . . . .	30
3.2 Probleme . . . . .	33
3.3 Interpretarea diagramei Bode . . . . .	34
3.4 Trasarea diagramei Bode în MATLAB . . . . .	36
<b>4 Sisteme cu timp mort. Sisteme de fază neminimă</b>	<b>37</b>
4.1 Breviar teoretic . . . . .	38
4.2 Trasarea diagramei Nyquist . . . . .	39
4.2.1 Problemă rezolvată . . . . .	40
4.3 Trasarea diagramei Bode . . . . .	40
4.3.1 Problemă rezolvată . . . . .	42
4.4 Probleme propuse . . . . .	43
<b>5 Legături între diagramele Nyquist, Bode și Nichols ale sistemelor LTI</b>	<b>45</b>
5.1 Studii de caz . . . . .	46
5.1.1 Sistem cu două rezervoare inseriate . . . . .	46

5.1.2 Axă CNC . . . . .	47
5.1.3 Sistem de suspensie activă . . . . .	48
5.2 Legătura dintre caracteristica de modul și cea de fază în diagrama Bode . . . . .	51
5.3 Probleme propuse . . . . .	54
<b>6 Stabilitatea SRN. Criteriul Nyquist generalizat</b>	<b>57</b>
6.1 Breviar teoretic . . . . .	58
6.2 Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist . . . . .	59
6.3 Probleme propuse . . . . .	61
<b>7 Stabilitatea SRN. Criteriul Nyquist simplificat</b>	<b>63</b>
7.1 Breviar teoretic . . . . .	64
7.2 Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist . . . . .	65
7.3 Probleme rezolvate utilizând diagramele Bode și Nichols . . . . .	67
7.4 Probleme propuse . . . . .	71
<b>8 Performanțele SRN pe baza răspunsului în frecvență</b>	<b>73</b>
8.1 Cercurile de modul și fază constantă . . . . .	74
8.2 Performanțele SRN deduse pe baza RF al sistemului deschis . . . . .	75
8.3 Funcțiile de senzitivitate . . . . .	77
8.4 Probleme rezolvate . . . . .	78
8.5 Probleme propuse . . . . .	80
<b>II Sisteme LTI numerice</b>	<b>83</b>
<b>9 Eșantionarea semnalelor și sistemelor continue</b>	<b>85</b>
9.1 Eșantionarea semnalelor . . . . .	86
9.1.1 Teorema lui Shannon . . . . .	87
9.1.2 Ilustrarea fenomenului de suprapunere a spectrelor ( <i>aliasing</i> ) . . . . .	87
9.2 Eșantionarea sistemelor descrise prin funcții de transfer . . . . .	88
9.3 Fenomene specifice sistemelor numerice . . . . .	89
9.3.1 Fenomenul de <i>aliasing</i> în cadrul eșantionării sistemelor . . . . .	89
9.3.2 Sensibilitatea la precizia numerică a coeficientilor . . . . .	90
9.3.3 Supraeșantionarea . . . . .	90
9.3.4 Eșantionarea sistemelor cu timp mort . . . . .	91
9.4 Probleme propuse . . . . .	92
<b>10 Discretizarea sistemelor continue</b>	<b>95</b>
10.1 Maparea din planul $s$ în planul $z$ . . . . .	96
10.2 Metode de discretizare . . . . .	97
10.2.1 Metode care provin din integrarea numerică . . . . .	97
10.2.2 Elementul de reținere de ordinul zero . . . . .	98
10.3 Probleme rezolvate . . . . .	98
10.4 Regimuri de funcționare și moduri de oscilație . . . . .	100
10.5 Probleme propuse . . . . .	100
10.6 Tabel de transformate Z elementare. Proprietăți ale transformatei Z . . . . .	103
<b>11 Stabilitatea sistemelor numerice</b>	<b>105</b>
11.1 Stabilitatea sistemelor numerice . . . . .	106

11.2 Criteriul Schur-Cohn-Jury . . . . .	107
11.3 Conexiunea cu reacție negativă a sistemelor numerice . . . . .	108
11.4 Probleme propuse . . . . .	111
<b>12 Răspunsul în frecvență al sistemelor numerice</b>	<b>113</b>
12.1 Răspunsul în frecvență al sistemelor numerice . . . . .	114
12.2 Proiectarea filtrelor numerice . . . . .	115
12.3 Probleme propuse . . . . .	117
<b>13 Implementarea sistemelor numerice</b>	<b>119</b>
13.1 Deducerea ecuațiilor cu diferențe pe baza funcției de transfer . . . . .	120
13.1.1 Conexiunea serie . . . . .	120
13.1.2 Conexiunea paralel . . . . .	121
13.1.3 Împărțirea infinită . . . . .	123
13.2 Deducerea modelelor numerice în spațiul stărilor . . . . .	124
13.3 Scalarea coeficienților în virgulă fixă . . . . .	125
13.4 Implementarea ecuațiilor cu diferențe pe microcontroller . . . . .	127
<b>III Realizări de stare. Proprietăți algebrice ale sistemelor LTI</b>	<b>129</b>
<b>14 Realizări de stare. Forme canonice</b>	<b>131</b>
14.1 Realizări de stare . . . . .	132
14.2 Forme canonice . . . . .	133
14.2.1 Forma canonică de control – FCC . . . . .	133
14.2.2 Forma canonică de observare – FCO . . . . .	134
14.2.3 Forma canonică controlabilă – FCCo . . . . .	136
14.2.4 Forma canonică observabilă – FCOb . . . . .	138
14.2.5 Forma canonică bloc diagonală (Jordan) – FCJ . . . . .	140
14.3 Probleme propuse . . . . .	142
<b>15 Controlabilitatea sistemelor LTI. Reacția de la stare</b>	<b>145</b>
15.1 Controlabilitatea sistemelor . . . . .	146
15.2 Reacția de la stare . . . . .	147
15.3 Problemă rezolvată . . . . .	148
15.4 Probleme propuse . . . . .	150
<b>16 Observabilitatea sistemelor LTI. Estimatorul de stare</b>	<b>153</b>
16.1 Observabilitatea sistemelor . . . . .	154
16.2 Estimatorul de stare . . . . .	155
16.3 Problemă rezolvată . . . . .	157
16.4 Probleme propuse . . . . .	158
<b>17 Singularitățile sistemelor multivariabile</b>	<b>161</b>
17.1 Fascicule matriceale . . . . .	162
17.2 Singularitățile sistemelor MIMO . . . . .	162
17.2.1 Polii sistemelor MIMO . . . . .	162
17.2.2 Zerourile de transmisie ale sistemului MIMO . . . . .	163
17.2.3 Forma Smith-McMillan . . . . .	164
17.3 Problemă rezolvată . . . . .	165

17.4 Probleme propuse . . . . .	166
<b>18 Forma minimală a sistemelor multivariabile</b>	<b>169</b>
18.1 Forma canonică Gilbert . . . . .	170
18.2 Forma canonică Kalman . . . . .	171
18.3 Probleme propuse . . . . .	175
 <b>IV Recapitulare. Aplicații. Autoevaluare</b>	 <b>177</b>
<b>19 Teste de autoevaluare</b>	<b>179</b>
19.1 Capitolul I, Model 1 . . . . .	180
19.2 Capitolul I, Model 2 . . . . .	181
19.3 Capitolul II, Model 1 . . . . .	182
19.4 Capitolul II, Model 2 . . . . .	183
19.5 Capitolul III, Model 1 . . . . .	184
19.6 Capitolul III, Model 2 . . . . .	185
19.7 Test sumativ, Model 1 . . . . .	186
19.8 Test sumativ, Model 2 . . . . .	187
<b>20 Studiu de caz – Proiect de semestru</b>	<b>189</b>
20.1 Descrierea procesului . . . . .	190
20.2 Cerințe . . . . .	191
<b>21 Întrebări de autocontrol</b>	<b>195</b>
21.1 Listă de întrebări . . . . .	196
<b>Bibliografie</b>	<b>199</b>

---

# LISTĂ FIGURI

1.1	Răspunsul unui sistem LTI la o intrare sinusoidală. . . . .	18
1.2	Circuit RLC paralel. . . . .	20
1.3	Simularea răspunsului la intrare sinusoidală pentru evidențierea tipului filtrului. Se remarcă suplimentar pragul de $\sqrt{2}/2 \approx 0.707$ afișat în culoarea roșie.	22
2.1	Diagrama Nyquist pentru sistemul 2.2.1.c), cu evidențierea citirilor de la pulsăriile $\omega = 0.707$ [rad/s] și $\omega = 1.06$ [rad/s]. . . . .	26
2.2	Optiunea de dezactivare a afișării pulsăriilor negative. . . . .	27
2.3	Afișarea cercului unitate pe diagrama Nyquist a unui filtru trece jos. . . . .	28
2.4	Răspunsul în frecvență al unui circuit de tip filtru trece bandă. . . . .	28
3.1	Diagrama Bode a sistemului 3.2.1.c). . . . .	35
4.1	Timpul mort ilustrat în diagrama Nyquist. . . . .	39
4.2	Diagrama Nyquist a sistemului din Secțiunea 4.2.1. . . . .	41
4.3	Diagrama Bode a unui sistem cu timp mort. . . . .	42
4.4	Diagrama Bode a sistemului de fază neminimă din Secțiunea 4.3.1. . . . .	43
5.1	Sistem cu două rezervoare conectate în serie. . . . .	46
5.2	Diagramele Bode, Nyquist, Nichols pentru sistemul cu două rezervoare inseriate. . . . .	47
5.3	Sistem de poziționare cu axă CNC. . . . .	48
5.4	Diagramele Bode, Nyquist, Nichols pentru sistemul de tip axă CNC. . . . .	49
5.5	Suspensia activă a unui automobil. . . . .	50
5.6	Diagramele Bode, Nyquist, Nichols pentru sistemul de tip suspensie activă. . . . .	50
5.7	Diagrama Bode de modul a unui sistem de fază minimă. . . . .	51
5.8	Caracteristica de fază a sistemului din Exemplul 5.2.1. . . . .	52
5.9	Diagrama Bode de modul a unui sistem de fază minimă. . . . .	52
5.10	Caracteristica de fază a sistemului din Exemplul 5.2.2. . . . .	53
5.11	Diagrama Bode a unui sistem de fază neminimă. . . . .	54
5.12	Diagrama Nyquist a unui sistem necunoscut. . . . .	54
5.13	Diagrama Bode a unui sistem necunoscut. . . . .	55
5.14	Diagrama Nichols a unui sistem necunoscut. . . . .	55
6.1	Sistem de reglare cu reacție negativă unitără. . . . .	58
6.2	Variată argumentului pentru sistemul 6.2.a). . . . .	59
6.3	Variată argumentului pentru sistemul 6.2.b). . . . .	60

7.1	Criteriul Nyquist simplificat figurat pentru sistemul 7.2.a). . . . .	66
7.2	Criteriul Nyquist simplificat figurat pentru sistemul 7.2.b). . . . .	67
7.3	Diagramele Bode și Nichols pentru Problema 7.3.a). . . . .	69
7.4	Diagramele Bode și Nichols pentru Problema 7.3.b). . . . .	70
8.1	Sistem de reglare cu reacție negativă unitară. . . . .	74
8.2	Ilustrarea intersecției locului de transfer $H_{des}(j\omega)$ cu cercul de modul constant $M^{dB} = 5.28$ . . . . .	76
8.3	Structura clasică de reglare în buclă închisă cu un grad de libertate și reacție negativă unitară, cu semnalele $r, e, u, d_1, d_2, y, n$ , respectiv funcțiile de transfer în buclă închisă $S, T, KS, GS$ . . . . .	77
8.4	Estimarea și validarea performanțelor sistemului de la Problema 8.4.a). . . .	80
9.1	Eșantionarea semnalelor de diferite frecvențe. . . . .	86
9.2	Schema Simulink pentru eșantionarea unui semnal sinusoidal de frecvență variabilă. . . . .	88
9.3	a) Semnalul de tip <i>Chirp</i> ; b) semnalul eșantionat corect; c) semnalul cu <i>aliasing</i> . . . . .	88
9.4	<i>Aliasing</i> în cazul eșantionării sistemelor. . . . .	90
9.5	Efectele utilizării unui număr redus de zecimale în precizia sistemului. . . .	91
10.1	Maparea planului $s$ în planul $z$ . . . . .	96
10.2	Regimurile de funcționare ale unui sistem discret (partea I). . . . .	101
10.3	Regimurile de funcționare ale unui sistem discret (partea a II-a). . . .	102
11.1	Maparea planului $s$ în planul $z$ . . . . .	106
11.2	Schema tipică de reglare a unui proces continuu cu regulator discret. . . . .	109
11.3	Locul rădăcinilor pentru sistemul în buclă închisă de la Problema 11.3.2. . .	110
12.1	Răspunsul în frecvență al unui sistem numeric. . . . .	115
12.2	Diagrama Bode a unui filtru Butterworth de tip trece jos. . . . .	117
12.3	Maparea poli-zerourii a filtrului eliptic de tip oprește bandă de ordin 16. . .	118
12.4	Diagrama Bode a filtrului eliptic de tip oprește bandă de ordin 16. . . .	118
13.1	Structura corespunzătoare conexiunii serie a unui sistem de ordin II. . . . .	121
13.2	Structura corespunzătoare conexiunii paralel a unui sistem de ordin II. . . .	123
13.3	Structura corespunzătoare împărțirii infinite pentru $N = 5$ . . . . .	125
14.1	Schema bloc corespunzătoare FCC – Exemplu. . . . .	135
14.2	Schema bloc corespunzătoare FCO – Exemplu. . . . .	136
14.3	Schema bloc corespunzătoare FCCo – Exemplu. . . . .	138
14.4	Schema bloc corespunzătoare FCOB – Exemplu. . . . .	140
14.5	Schema bloc corespunzătoare FCJ – Exemplu. . . . .	143
14.6	Modelul matematic al unei axe CNC. . . . .	143
15.1	Schema de control cu reacție de la stare și prefiltrare. . . . .	148
15.2	Reacția de la stare implementată pentru exemplul de la Problema 15.3. . . .	150
15.3	Circuitul echivalent al unui motor de curent continuu cu perii. . . . .	151

16.1 Schema bloc de implementare a unui estimator de stare. . . . .	156
16.2 Schema bloc de implementare a unei reglări cu reacție de la stările estimate, cu referință nulă (sistem de stabilizare). . . . .	157
16.3 Estimatorul de stare pentru exemplul de la Problema 16.3. . . . .	159
18.1 Forma canonică Gilbert pentru exemplul rezolvat 18.1.1. . . . .	172
19.1 Structura unui sistem cu RNU. . . . .	180
19.2 Structura unui sistem cu RNU. . . . .	181
19.3 Structura unui sistem de control cu regulator numeric. . . . .	182
19.4 Structura unui sistem de control cu regulator numeric. . . . .	183
20.1 Circuitul echivalent al unui motor de curent continuu cu perii. . . . .	190



---

## LISTĂ TABELE

3.1 Aproximarea logaritmului zecimal pentru amplasarea pulsăriilor . . . . .	34
10.1 Tabelul de transformate Z . . . . .	103
10.2 Proprietăți ale transformatei Z . . . . .	103
11.1 Tabelul Jury . . . . .	107
11.2 Tabelul Jury pentru exemplul rezolvat 11.2.1 . . . . .	108
13.1 Conversia continuu-discret în spațiul stărilor . . . . .	126
13.2 Conversia discret-continuu în spațiul stărilor . . . . .	126
15.1 Parametrii motorului DC . . . . .	152
20.1 Parametrii motorului DC . . . . .	191



## Partea I

Răspunsul în frecvență al sistemelor LTI



---

---

# Lucrarea 1

---

## Conceptul de răspuns în frecvență. Analiza tipului filtrului

1.1	Răspunsul sistemelor LTI la intrări armonice . . . . .	18
1.2	Analiza tipului filtrului . . . . .	19
1.3	Exemplu rezolvat . . . . .	20
1.4	Analiza tipului filtrului în MATLAB . . . . .	21

În această lucrare se prezintă conceptul de răspuns în frecvență al sistemelor LTI SISO reprezentate prin model de tip funcție de transfer și se prezintă modalități elementare de deducere a naturii filtrului sistemului pe baza răspunsului la intrări sinusoidale.

## 1.1 Răspunsul sistemelor LTI la intrări armonice

Răspunsul unui sistem LTI SISO (engl. *Single Input, Single Output*) descris prin funcția de transfer  $H(s)$  la o intrare armonică de tipul  $u(t) = \sin(\omega t)$ , a cărei transformată Laplace este  $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ , se calculează astfel:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ H(s) \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} = y_\ell(t) + y_p(t), \quad (1.1)$$

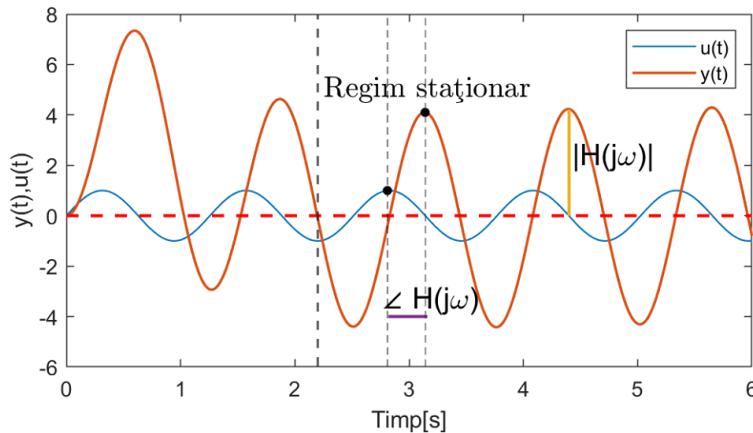
unde  $y_\ell(t)$  este componenta liberă sau tranzitorie, iar  $y_p(t)$  este componenta permanentă sau răspunsul forțat. În componenta tranzitorie intervin modurile sistemului și aceasta determină regimul tranzitoriu. Componenta permanentă a unui sistem LTI este dată de:

$$y_p(t) = |H(j\omega)| \sin(\omega t + \angle H(j\omega)), \quad (1.2)$$

adică ieșirea este tot o sinusoidă având **aceeași pulsărie**, dar este amplificată și defazată.

- Se spune că ieșirea  $y_p(t)$  corespunzătoare pulsăriei  $\omega > 0$  este **amplificată** dacă  $|H(j\omega)| > 1$ , respectiv **atenuată** dacă  $|H(j\omega)| < 1$ .
- Se spune că ieșirea  $y_p(t)$  corespunzătoare pulsăriei  $\omega > 0$  este cu **avans de fază** dacă  $\angle H(j\omega) > 0$ , respectiv cu întârziere de fază dacă  $\angle H(j\omega) < 0$ .

În Figura 1.1 sunt prezentate atât semnalul de intrare (un semnal sinusoidal de amplitudine 1), cât și semnalul de ieșire. De asemenea, au fost evidențiate amplitudinea semnalului de ieșire și defazajul dintre semnalul de intrare și cel de ieșire, care coincid cu modulul, respectiv faza numarului complex  $H(j\omega)$ . **De remarcat faptul că semnalul de intrare și cel de ieșire au aceeași pulsărie**.



**Figura 1.1:** Răspunsul unui sistem LTI la o intrare sinusoidală.

Există două criterii pentru alegerea pragurilor semnalelor sinusoidale de intrare considerate tăiate sau trecute la ieșirea unui filtru:

- **în electronică se consideră pragul de  $-3$  [dB]**, echivalent cu atenuarea amplitudinii semnalului de ieșire la valoarea de  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  din valoarea amplitudinii semnalului de intrare;

- în ingineria reglării automate, pentru utilizarea criteriilor de stabilitate în domeniul frecvențial, se consideră pragul de  $0[dB]$ , motivat de distanța locului de transfer față de punctul critic  $-1 + 0j$ .

În analiza și proiectarea sistemelor LTI sunt de dorit diagrame care pot cuprinde intervale întregi de frecvențe (sau pulsații). Pe baza reprezentării algebrice, respectiv trigonometrice a numerelor complexe, se disting trei diagrame des utilizate pentru a reprezenta răspunsul în frecvență al sistemelor LTI:

- **diagrama Nyquist** (locul de transfer/hodograful):

- $H(j\omega) = \operatorname{Re}\{H(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{H(j\omega)\}$ ;
- $(\operatorname{Re}, \operatorname{Im})$ , unde axa  $Ox$  reprezintă partea reală, iar axa  $Oy$  reprezintă partea imaginată a locului de transfer  $H(j\omega)$ . **Pulsăția este implicită**;

- **diagrama Bode**:

- $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$ ;
- $(\omega, |H(j\omega)|^{dB})$  – caracteristica de modul, unde axa  $Ox$  reprezintă pulsăția în radiani pe secundă, afișată în **scără logaritmică**, iar axa  $Oy$  reprezintă modulul funcției de transfer  $H(j\omega)$  în decibeli;
- $(\omega, \angle H(j\omega)[rad])$  – caracteristica de fază, unde axa  $Ox$  este pulsăția în radiani pe secundă, afișată în **scără logaritmică**, iar axa  $Oy$  este faza funcției de transfer  $H(j\omega)$  în radiani sau grade;

- **diagrama Nichols**:

- $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)}$ ;
- $(\angle H(j\omega)[rad], |H(j\omega)|^{dB})$ , unde axa  $Ox$  este faza funcției de transfer  $H(j\omega)$  în radiani sau grade, iar axa  $Oy$  este modulul funcției de transfer  $H(j\omega)$  în decibeli. **Pulsăția este implicită**.

## 1.2 Analiza tipului filtrului

Se consideră sistemul descris prin funcția de transfer proprie  $H(s)$ :

$$H(s) = \left. \frac{Y(s)}{U(s)} \right|_{CI=0} = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}, \quad (1.3)$$

având polinoamele  $\beta(s)$  și  $\alpha(s)$  de grad  $m$  și  $n$ , respectiv.

Pentru a analiza dacă o intrare armonică de pulsăție dată  $\omega_0$  este tăiată sau este lăsată să treacă, putem apela la modelul de tip funcție de transfer. Astfel, putem compara raportul dintre amplitudinea semnalului de intrare și amplitudinea semnalului de ieșire cu valoarea  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , valoare care corespunde celor  $-3 [dB]$  din electronică, i.e. energia semnalului de ieșire este la jumătate din cea a intrării. Așadar:

- dacă  $\left| \frac{Y(j\omega_0)}{U(j\omega_0)} \right| = |H(j\omega_0)| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , atunci semnalul  $u(t) = \sin(\omega_0 t)$  este considerat **trecut**;
- dacă  $\left| \frac{Y(j\omega_0)}{U(j\omega_0)} \right| = |H(j\omega_0)| < \frac{\sqrt{2}}{2}$ , atunci semnalul  $u(t) = \sin(\omega_0 t)$  este considerat **tăiat**.

Pentru a determina tipul filtrului, putem studia comportamentul în zona frecvențelor joase, în zona frecvențelor înalte și, la nevoie, în zona frecvențelor medii. Astfel:

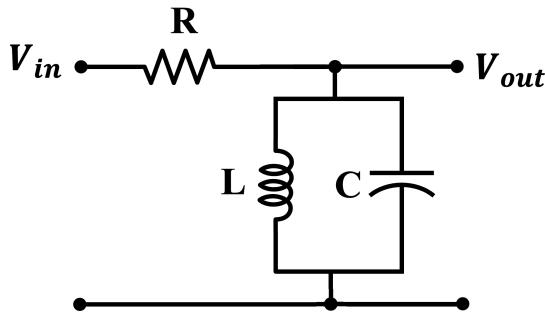
- în zona frecvențelor joase avem:  $\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)|$ , cantitate ce trebuie comparată cu  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;
- în zona frecvențelor înalte avem:  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)|$ , cantitate ce trebuie comparată cu  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Dacă una dintre limite este peste valoarea de prag, iar celalătă sub valoarea de prag, atunci natura filtrului poate fi determinată doar pe baza acestora, fiind **filtru trece jos (FTJ)** sau **filtru trece sus (FTS)**. Suplimentar, dacă circuitul taie frecvențele foarte mici și foarte mari, dar trece frecvențe intermediare, acesta se numește **filtru trece bandă (FTB)**. Reciproc, dacă circuitul trece frecvențele foarte mici și foarte mari, dar anulează frecvențe intermediare, acesta se numește **filtru oprește bandă (FOB)**.

### 1.3 Exemplu rezolvat

Se consideră circuitul RLC paralel din Figura 1.2, având modelul descris prin funcția de transfer (deducerea se face pe baza legilor lui Kirchhoff):

$$H(s) = \frac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC}}. \quad (1.4)$$



**Figura 1.2:** Circuit RLC paralel.

În baza raționamentului prezentat în secțiunea anterioară avem:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} |H(j\omega)| = 0, \quad (1.5)$$

ceea ce înseamnă că filtrul ar putea trece doar frecvențe medii. Pentru a verifica dacă acest lucru este posibil, încercăm frecvențele deduse pe baza termenului liber. Astfel, dacă ne

uităm la un semnal de pulsătie (i.e., pulsăția naturală a circuitului):

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} |H(j\omega)| = 1 \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (1.6)$$

ceea ce înseamnă că semnalele cu pulsării cuprinse în jurul acestei valori vor fi trecute, și putem concluziona că avem un filtru trece bandă (FTB). Dar, analiza propusă este una succintă și incompletă. Traterea adecvată a acestei probleme se poate realiza prin reprezentări grafice în frecvență.

## 1.4 Analiza tipului filtrului în MATLAB

Pentru a analiza tipul filtrului în MATLAB pornind de la relația intrare-ieșire putem utiliza rutina `tf`, pentru a ne declara funcția de transfer în MATLAB, și putem utiliza rutina `lsim` pentru a simula răspunsul sistemului la o intrare dată. Aceste funcții se apelează astfel:

- `H=tf(num,den)`, unde `num` și `den` sunt numărătorul și, respectiv, numitorul f.d.t.;
- `y=lsim(H,u,t)`, unde `H` este un obiect de tip funcție de transfer, `u` este semnalul de intrare și `t` este timpul de simulare.

În cazul sistemului din Figura 1.2 considerăm un rezistor având rezistență  $R = 2.2[\Omega]$ , o bobină având impedanță  $L = 0.1[mH]$  și un condensator având capacitatea  $C = 4.7[\mu F]$ . Folosind fișierul sursă descris mai jos, putem obține răspunsul la intrare sinusoidală pentru trei pulsări relevante: pulsăția medie  $\omega_0$ , împreună cu o decadă în stânga și una în dreapta acestei pulsări. Răspunsurile sistemului la intrările descrise sunt reprezentate pe 10 perioade în Figura 1.3.

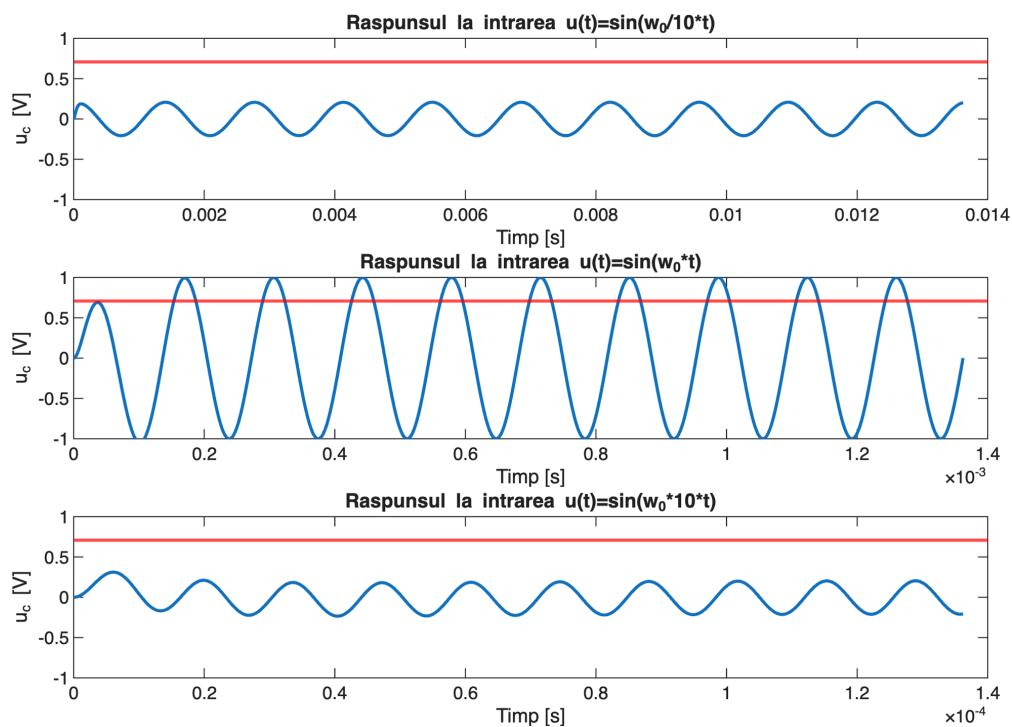
```

1 R = 2.2; L = 1e-4; C = 4.7e-6;
2 % declararea functiei de transfer
3 H = tf([1/R/C 0],[1 1/R/C 1/L/C]);
4 % valoarea pulsatiei centrale
5 w0 = 1/sqrt(L*C);
6 % raspunsul sistemului la intrare sinusoidală de pulsatie w0/10,
    % w0, w0*10 (o decada in stanga si o decada in dreapta pulsatiei
    % centrale)
7
8 % simulare pe 10 perioade
9 T1 = 2*pi/(w0/10);
10 t1 = 0:T1/100:10*T1;
11 u1 = sin(w0/10*t1);
12 y1 = lsim(H,u1,t1);
13
14 T2 = 2*pi/w0;
15 t2 = 0:T2/100:10*T2;
16 u2 = sin(w0*t2);
```

```

17 y2 = lsim(H,u2,t2);
18
19 T3 = 2*pi/(10*w0);
20 t3 = 0:T3/100:10*T3;
21 u3 = sin(w0*10*t3);
22 y3 = lsim(H,u3,t3);
23
24 figure
25 subplot(311); plot(t1,y1,'LineWidth',1.5); hold on
26 yline(sqrt(2)/2,'r','LineWidth',1.5), ylim([-1,1])
27 title('Raspunsul la intrarea u(t)=sin(w_0/10*t)')
28 xlabel('Timp [s]'), ylabel('u_c [V]')
29
30 subplot(312); plot(t2,y2,'LineWidth',1.5); hold on
31 yline(sqrt(2)/2,'r','LineWidth',1.5), ylim([-1,1])
32 title('Raspunsul la intrarea u(t)=sin(w_0*t)')
33 xlabel('Timp [s]'), ylabel('u_c [V]')
34
35 subplot(313); plot(t3,y3,'LineWidth',1.5); hold on
36 yline(sqrt(2)/2,'r','LineWidth',1.5), ylim([-1,1])
37 title('Raspunsul la intrarea u(t)=sin(w_0*10*t)')
38 xlabel('Timp [s]'), ylabel('u_c [V]')

```



**Figura 1.3:** Simularea răspunsului la intrare sinusoidală pentru evidențierea tipului filtrului. Se remarcă suplimentar pragul de  $\sqrt{2}/2 \approx 0.707$  afișat în culoarea roșie.

---

---

## Lucrarea 2

---

### Trasarea și interpretarea diagramei Nyquist

2.1	Trasarea diagramei Nyquist . . . . .	24
2.2	Probleme . . . . .	24
2.3	Interpretarea diagramei Nyquist	26
2.4	Trasarea Diagramei Nyquist în MATLAB . . . . .	27
2.5	Determinarea naturii filtrului	27

În această lucrare se prezintă modalități de trasare a diagramei Nyquist pe foaie, respectiv utilizând mediul MATLAB pentru sisteme de tip LTI SISO descrise prin funcții de transfer. Suplimentar, se prezintă proprietăți ale diagramei Nyquist și interpretarea acesteia pentru a deduce componenta permanentă a ieșirii în cazul unei intrări sinusoidale, respectiv natura filtrului sistemului.

## 2.1 Trasarea diagramei Nyquist

Pentru trasarea diagramei Nyquist a unei funcții de transfer raționale  $H(s)$  se recomandă următorii pași:

1. determinarea părților reale și imaginare în funcție de variabila  $j\omega$ :

$$H(j\omega) = \operatorname{Re}\{H(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{H(j\omega)\}. \quad (2.1)$$

2. determinarea capătului de frecvență joasă (CFJ) în planul complex:

$$\text{CFJ : } \lim_{\omega \rightarrow 0, \omega > 0} H(j\omega) = x_1 + jy_1, \quad x_1, y_1 \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}. \quad (2.2)$$

3. determinarea capătului de frecvență înaltă (CFI) în planul complex:

$$\text{CFI : } \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = x_2 + jy_2, \quad x_2, y_2 \in \overline{\mathbb{R}}. \quad (2.3)$$

4. determinarea intersecțiilor cu axele de coordonate:

- (a) intersecția cu axa reală prin rezolvarea ecuației:

$$\operatorname{Im}\{H(j\omega)\} = 0, \quad \omega > 0, \omega \neq \infty. \quad (2.4)$$

În cazul în care ecuația anterioară prezintă soluții  $\omega^*$  convenabile, atunci intersecțiile se vor găsi în punctele  $(\operatorname{Re}\{H(j\omega^*)\}, 0)$  din planul complex.

- (b) intersecția cu axa imaginară prin rezolvarea ecuației:

$$\operatorname{Re}\{H(j\omega)\} = 0, \quad \omega > 0, \omega \neq \infty. \quad (2.5)$$

În cazul în care ecuația anterioară prezintă soluții  $\omega^*$  convenabile, atunci intersecțiile se vor găsi în punctele  $(0, \operatorname{Im}\{H(j\omega^*)\})$  din planul complex.

5. trasarea diagramei pornind din CFJ, urmărind intersecțiile cu axele de coordonate, ajungând la CFI. De urmărit la pași 2 și 3 dacă partea reală sau imaginară domină pentru a reprezenta corect direcțiile pe grafic.

## 2.2 Probleme

**Problema 2.2.1:** Să se traseze și să se interpreze diagrama Nyquist pentru următoarele funcții de transfer:

$$a) \quad H(s) = \frac{8}{s+5};$$

$$c) \quad H(s) = \frac{s+0.5}{s(s^2+s+1)};$$

$$b) \quad H(s) = \frac{50}{s^2+5s+6};$$

$$d) \quad H(s) = \frac{40s+4}{6s^2+5s+1};$$

$$\begin{array}{ll}
e) \ H(s) = \frac{s^2}{0.3s^2 + s + 1}; & k) \ H(s) = \frac{s - 7}{s(s + 2)}; \\
f) \ H(s) = \frac{K}{s^n}, \ K > 0, \ n \in \{0, 1, 2, \dots\}; & l) \ H(s) = \frac{-s + 30}{s(-s + 4)}; \\
g) \ H(s) = \frac{125}{s^2 + 2s + 25}; & m) \ H(s) = \frac{s + 5}{s^2 + 2}; \\
h) \ H(s) = \frac{125(s + 1)}{s^2 + 5s + 25}; & n) \ H(s) = \frac{-4(10s + 1)}{(3s + 1)(-2s + 1)}; \\
i) \ H(s) = \frac{5s^2 + 2s + 1}{s(s + 1)^2}; & o) \ H(s) = \frac{5(-4s + 1)}{s(s + 8)}; \\
j) \ H(s) = \frac{s + 1}{s(s + 20)}; & p) \ H(s) = \frac{s + 5}{s^2(s + 2)}. \\
\end{array}$$

**Rezolvare 2.2.1.c):** Conform algoritmului prezentat în secțiunea anterioară rezultă:

1. determinarea părților reale și imaginare în funcție de variabila  $j\omega$ :

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 0.5}{j\omega(-\omega^2 + j\omega + 1)} = \frac{0.5 - \omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2} + j \cdot \frac{-0.5 - 0.5\omega^2}{\omega((1 - \omega^2)^2 + \omega^2)}. \quad (2.6)$$

2. determinarea capătului de frecvență joasă (CFJ) în planul complex:

$$\text{CFJ} : \lim_{\omega \rightarrow 0, \omega > 0} H(j\omega) = 0.5 - \infty j. \quad (2.7)$$

3. determinarea capătului de frecvență înaltă (CFI) în planul complex:

$$\text{CFI} : \lim_{\omega \rightarrow \infty} H(j\omega) = -0 - 0j, \quad (2.8)$$

unde partea reală se obține dintr-un raport de polinoame de gradele 2 și 4 (echivalent cu 3 și 5), iar partea imaginară se obține dintr-un raport de polinoame de gradele 2 și 5. Prin urmare, pentru  $\omega \rightarrow \infty$  partea imaginară tinde la zero înaintea părții reale, de unde rezultă că locul de transfer tinde spre origine tangent la **axa reală** negativă.

4. determinarea intersecțiilor cu axele de coordonate:

- (a) intersecția cu axa reală prin rezolvarea ecuației:

$$\text{Im}\{H(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow -0.5 - 0.5\omega^2 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 1 = 0 \Rightarrow \nexists \omega > 0, \quad (2.9)$$

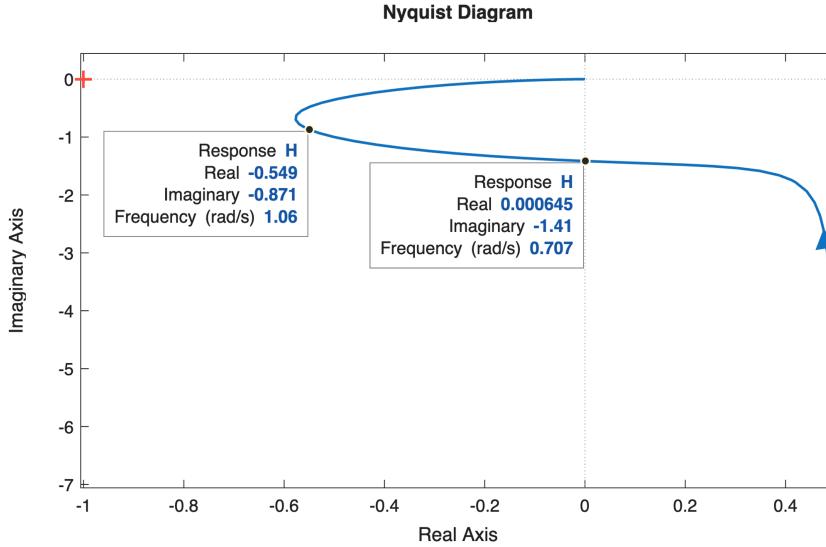
rezultând că nu există intersecții cu axa reală.

- (b) intersecția cu axa imaginară prin rezolvarea ecuației:

$$\text{Re}\{H(j\omega)\} = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = 0.5 \Rightarrow \omega = \sqrt{0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2} [\text{rad/s}]. \quad (2.10)$$

Rezultă un punct de intersecție în  $\left(0, \operatorname{Im} \left\{ H \left( j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} \right) = (0, -\sqrt{2})$ , pentru  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$  [rad/s].

5. trasarea diagramei pornind din CFJ, urmărind intersecțiile cu axele de coordonate, ajungând la CFÎ, rezultând graficul din Figura 2.1.



**Figura 2.1:** Diagrama Nyquist pentru sistemul 2.2.1.c), cu evidențierea citirilor de la pulsăriile  $\omega = 0.707$  [rad/s] și  $\omega = 1.06$  [rad/s].

## 2.3 Interpretarea diagramei Nyquist

Conform axelor de coordonate ale diagramei Nyquist, **pulsatia este implicită**.

Pentru a exemplifica interpretarea diagramei Nyquist se consideră două puncte arbitrarе precum în Figura 2.1:

- Pentru pulsăria  $\omega = 1.06$ , se citește partea reală  $\Re = -0.549$ , respectiv imaginară  $\Im = -0.871$  corespunzătoare locului de transfer  $H(j \cdot 1.06)$ , ceea ce denotă că, pentru semnalul de intrare  $u(t) = \sin(1.06t)$ , componenta permanentă a ieșirii devine:

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \sqrt{(-0.549)^2 + (-0.871)^2} \cdot \sin(1.06t + \operatorname{atan2}(-0.871, -0.549)) \\ &= 1.0296 \cdot \sin(1.06t - 2.1332), \end{aligned}$$

fiind puțin amplificată, respectiv cu întârziere de fază (vizibil cadranul III).

- Pentru pulsăria  $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ , se citește partea reală  $\Re = 0$ , respectiv imaginară  $\Im = -\sqrt{2}$  corespunzătoare locului de transfer  $H(j \cdot \frac{\sqrt{2}}{2})$ , ceea ce denotă că, pentru semnalul de intrare  $u(t) = \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}t)$ , componenta permanentă a ieșirii devine:

$$y_p(t) = \sqrt{0^2 + (-\sqrt{2})^2} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t + \operatorname{atan2}(-\sqrt{2}, 0)\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\pi}{2}\right),$$

fiind amplificată, respectiv cu întârziere de fază. Acest caz este intersecția cu axa imaginară.

## 2.4 Trasarea Diagramei Nyquist în MATLAB

În MATLAB există funcția `nyquist`, care se poate apela astfel:

- `nyquist(SYS)`: apare graficul automat;
- `nyquist(SYS, WMIN, WMAX)`: apare graficul automat trasat pentru domeniul  $\omega \in [WMIN, WMAX]$ ;
- `[RE, IM] = nyquist(SYS, W)`: se returnează vectorii părților reale și imaginare ale locului de transfer pentru pulsăriile din vectorul  $W$  specificat;
- `[RE, IM, W] = nyquist(SYS)`: se returnează vectorii părților reale și imaginare ale locului de transfer pentru pulsăriile din vectorul  $W$  dedus automat.

**Observație:** Calculele, respectiv trasarea diagramei se pot efectua și pentru pulsări negativă, caz în care graficele pentru domeniul negativ și cel pozitiv devin simetrice față de axa reală. Funcția `nyquist` din MATLAB trasează graficul implicit și pentru domeniul negativ, respectiv poate fi înălțurat debifând opțiunea print-un *click* dreapta → **Show** → **Negative frequencies**, conform Figurii 2.2.

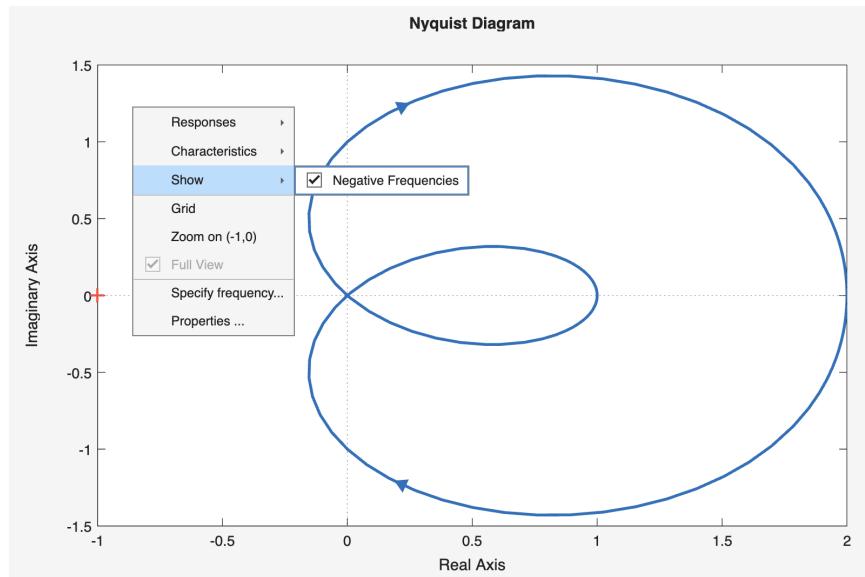


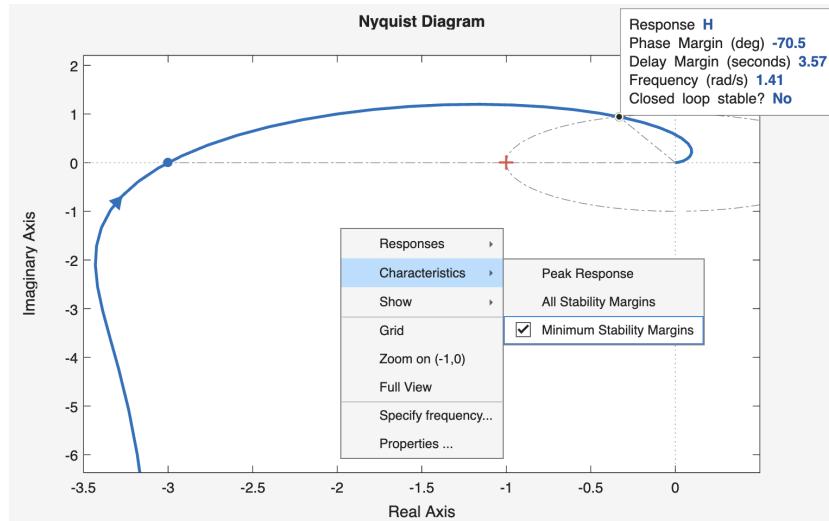
Figura 2.2: Opțiunea de dezactivare a afișării pulsărilor negative.

## 2.5 Determinarea naturii filtrului

Pentru a determina natura filtrului folosind diagrama Nyquist ne orientăm după cercul unitate (cea ce implică pragul de valoarea 1). Dacă punctul corespunzător pulsării  $\omega$  este în

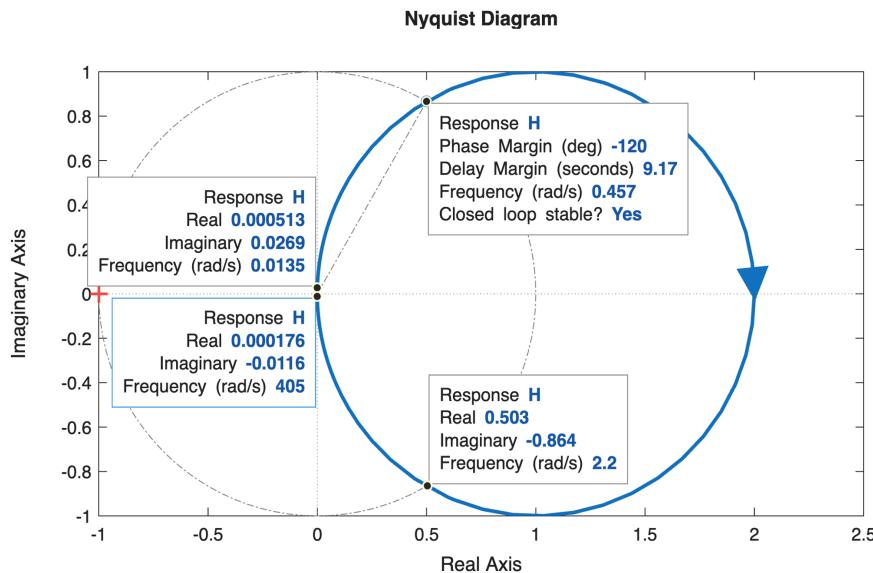
interiorul cercului unitate, semnalul este considerat tăiat, altfel este considerat trecut. Tot cu ajutorul intersecțiilor cu cercul unitate se poate deduce și banda de trecere. În mediul MATLAB acest lucru se poate face folosind **Characteristics** → **Minimum Stability Margins**, precum în Figura 2.3.

Pentru circuitul cu locul de transfer din Figura 2.3 reiese faptul că este un filtru trece jos cu **banda de trecere**  $\omega \in (0, 1.41]$  [rad/s], deoarece vectorii din origine la locul de transfer  $H(j\omega)$  se găsesc în afara cercului unitate (i.e., amplitudinea sinusului de la intrare este amplificată la ieșire) pentru acele valori ale pulsărilor.



**Figura 2.3:** Afisarea cercului unitate pe diagrama Nyquist a unui filtru trece jos.

Pentru circuitul cu locul de transfer din Figura 2.4 reiese faptul că este un filtru trece bandă cu **banda de trecere**  $\omega \in [0.457, 2.2]$  [rad/s].



**Figura 2.4:** Răspunsul în frecvență al unui circuit de tip filtru trece bandă.

---

---

## Lucrarea 3

---

### Trasarea și interpretarea diagramei Bode

3.1 Aproximarea diagramei Bode prin asymptote . . . . .	30
3.2 Probleme . . . . .	33
3.3 Interpretarea diagramei Bode	34
3.4 Trasarea diagramei Bode în MATLAB . . . . .	36

În această lucrare se prezintă modalități de trasare a diagramei Bode pe foaie, respectiv utilizând mediul MATLAB pentru sisteme de tip LTI SISO descrise prin funcții de transfer. Suplimentar, se prezintă proprietăți ale diagramei Bode și interpretarea acesteia pentru a deduce componenta permanentă a ieșirii în cazul unei intrări sinusoidale.

### 3.1 Aproximarea diagramei Bode prin asimptote

O funcție de transfer poate fi scrisă ca raport de polinoame date sub formă de produse de termeni de gradul I sau II. Se evidențiază astfel singularitățile reale, respectiv complex conjugate:

$$H(s) = \frac{K}{s^p} \cdot \frac{\prod \left( \dot{T}_i s + 1 \right) \prod \left( \left( \frac{s}{\dot{\omega}_{n,i}} \right)^2 + \frac{2\zeta_i}{\dot{\omega}_{n,i}} s + 1 \right)}{\prod \left( \hat{T}_j s + 1 \right) \prod \left( \left( \frac{s}{\hat{\omega}_{n,j}} \right)^2 + \frac{2\hat{\zeta}_j}{\hat{\omega}_{n,j}} s + 1 \right)}. \quad (3.1)$$

Prin utilizarea de aproximări ale modului și ale fazei pentru termenii de ordinul I și II se pot obține aproximări ale modului și fazei pentru orice funcție de transfer. Aceste aproximări introduc erori ale modului de până la  $\pm 3$ , respectiv  $\pm 6$  [dB] în jurul pulsărilor de frângere.

**Caracteristica de modul** a funcției de transfer se trasează în decibeli, ceea ce oferă fiecărui termen de tip pol, zero sau factor de proporționalitate un efect aditiv. O cantitate  $X > 0$  se transformă în decibeli prin următoarea formulă de legătură:

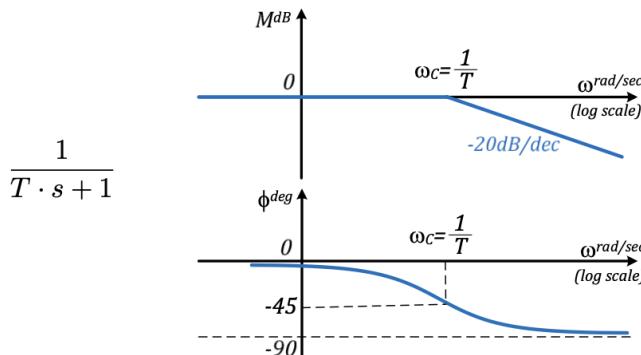
$$X^{dB} = 20 \lg X \Leftrightarrow X = 10^{\frac{X^{dB}}{20}}. \quad (3.2)$$

Pentru componentele din structura generală (3.1), caracteristica de modul se calculează prin formula:

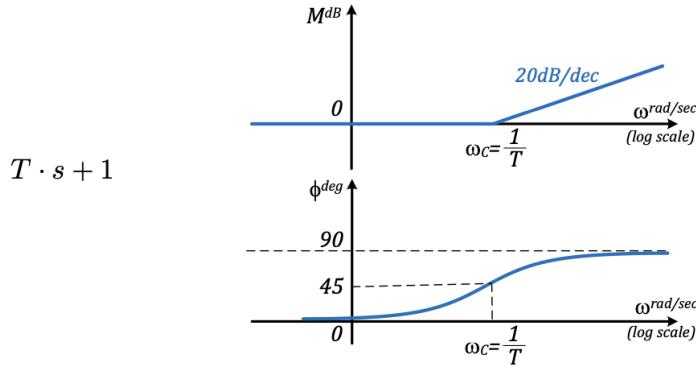
$$\begin{aligned} |H(j\omega)|^{dB} &= |K|^{dB} + \sum 20 \lg \left| \dot{T}_i j\omega + 1 \right| + \sum 20 \lg \left| \left( \frac{j\omega}{\dot{\omega}_{n,i}} \right)^2 + \frac{2\zeta_i}{\dot{\omega}_{n,i}} j\omega + 1 \right| \\ &\quad - 20p \lg \omega - \sum 20 \lg \left| \hat{T}_j j\omega + 1 \right| - \sum 20 \lg \left| \left( \frac{j\omega}{\hat{\omega}_{n,j}} \right)^2 + \frac{2\hat{\zeta}_j}{\hat{\omega}_{n,j}} j\omega + 1 \right|, \end{aligned}$$

fiind ușor trasată pe foaie pe baza următoarelor aproximări:

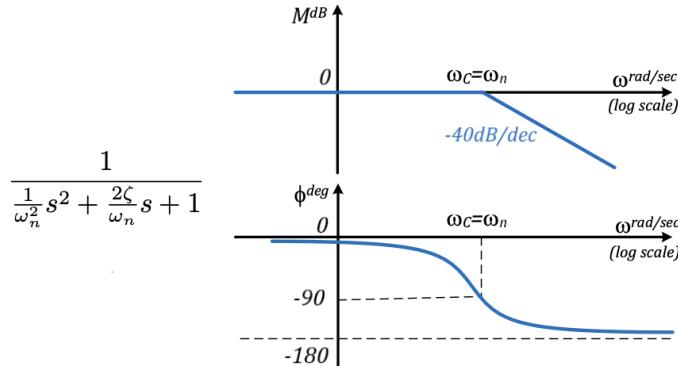
- pol real și negativ,  $\frac{1}{T \cdot s + 1}$ , cu modulul o dreaptă cu pantă de 0 [dB] până la pulsărea de frângere  $\omega_f = \frac{1}{T}$ , urmată de o pantă de  $-20$  [dB/dec]; introduce un defazaj în domeniul  $(0^\circ, -90^\circ)$ ;



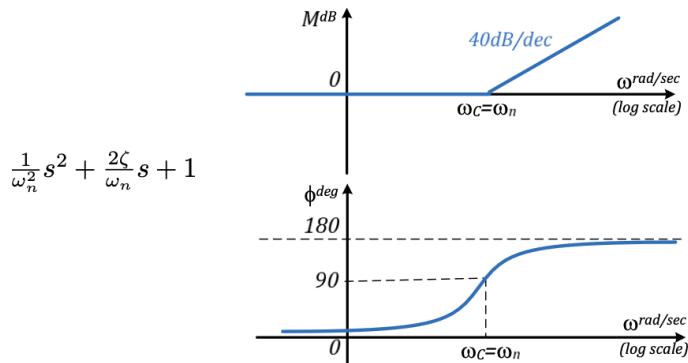
- zerou real și negativ,  $Ts + 1$ , cu modulul o dreaptă cu panta de 0 [dB] până la pulsăția de frângere  $\omega_f = \frac{1}{T}$ , urmată de o pantă de  $+20$  [dB/dec]; introduce un defazaj în domeniul  $(0^\circ, +90^\circ)$ .



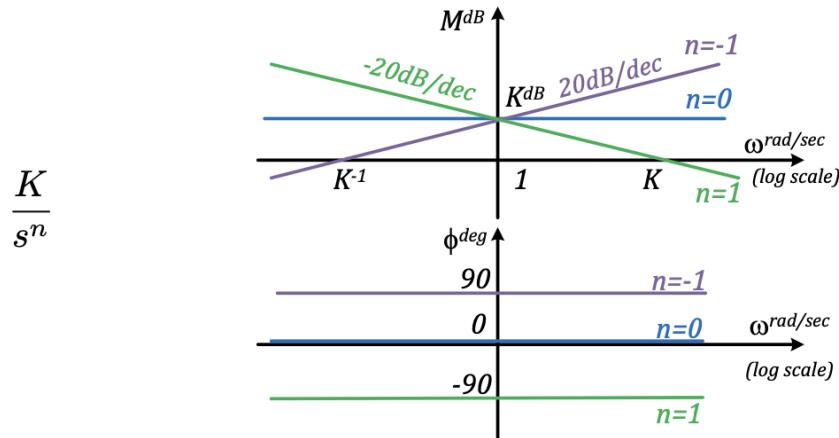
- pereche de poli complex conjugăți cu partea reală negativă,  $\frac{1}{(\frac{s}{\omega_n})^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1}$ , cu modulul o dreaptă cu panta de 0 [dB] până la pulsăția de frângere  $\omega_f = \omega_n$ , urmată de o pantă de  $-40$  [dB/dec]; introduce un defazaj în domeniul  $(0^\circ, -180^\circ)$ .



- pereche de zerouri complex conjugate cu partea reală negativă,  $\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + \frac{2\zeta}{\omega_n}s + 1$ , cu modulul o dreaptă cu panta de 0 [dB] până la pulsăția de frângere  $\omega_f = \omega_n$ , urmată de o pantă de  $+40$  [dB/dec]; introduce un defazaj în domeniul  $(0^\circ, +180^\circ)$ .



- pol în origine,  $\frac{1}{s}$ , cu modulul o dreaptă cu panta de  $-20 [dB/dec]$  și care intersectează axa pulsațiilor în pulsăția “de frângere”  $\omega_f = 1 [rad/s]$ ; introduce un defazaj constant de  $-90^\circ$ ;
- zerou în origine,  $s$ , cu modulul o dreaptă cu panta de  $+20 [dB/dec]$  și care intersectează axa pulsațiilor în pulsăția “de frângere”  $\omega_f = 1 [rad/s]$ ; introduce un defazaj constant de  $+90^\circ$ .



Pentru **caracteristica de fază** se recomandă calculul defazajelor funcției de transfer pentru o serie de pulsății reprezentative, pornind de la formula (3.1):

$$\angle H(j\omega) = \angle K + \sum \angle(\dot{T}_i j\omega + 1) + \sum \angle\left(\left(\frac{j\omega}{\dot{\omega}_{n,i}}\right)^2 + \frac{2\zeta_i}{\dot{\omega}_{n,i}} j\omega + 1\right) - p \cdot \frac{\pi}{2} - \sum \angle(\hat{T}_j j\omega + 1) - \sum \angle\left(\left(\frac{j\omega}{\hat{\omega}_{n,j}}\right)^2 + \frac{2\hat{\zeta}_j}{\hat{\omega}_{n,j}} j\omega + 1\right).$$

Pentru calculul corect al argumentului unui număr complex  $z = x + jy$ , se recomandă funcția `atan2(y,x)` (atenție la ordinea argumentelor!), care se definește pe baza cercului trigonometric în felul următor:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{dacă } x > 0 \text{ și } y \geq 0 \text{ (QI)}, \\ \pi - \text{atan}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right), & \text{dacă } x < 0 \text{ și } y \geq 0 \text{ (QII)}, \\ \pi + \text{atan}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right), & \text{dacă } x < 0 \text{ și } y < 0 \text{ (QIII)}, \\ 2\pi - \text{atan}\left(\left|\frac{y}{x}\right|\right), & \text{dacă } x > 0 \text{ și } y < 0 \text{ (QIV)}, \\ +\frac{\pi}{2}, & \text{dacă } x = 0 \text{ și } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{dacă } x = 0 \text{ și } y < 0, \\ \text{nedefinită}, & \text{dacă } x = y = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

## 3.2 Probleme

**Problema 3.2.1:** Să se traseze și să se interpreteze diagrama Bode pentru următoarele funcții de transfer:

$$a) H(s) = \frac{10}{s+5};$$

$$h) H(s) = \frac{125}{s^2 + 2s + 25};$$

$$b) H(s) = \frac{10}{(s+5)(s+60)};$$

$$i) H(s) = \frac{125(s+1)}{s^2 + 5s + 25};$$

$$c) H(s) = 2 \frac{s+20}{s+70};$$

$$j) H(s) = \frac{5s^2 + 2s + 1}{s(s+1)^2};$$

$$d) H(s) = \frac{s+0.5}{s(s^2+s+1)};$$

$$k) H(s) = \frac{s+5}{s^2+2};$$

$$e) H(s) = \frac{40s+4}{6s^2+5s+1};$$

$$l) H(s) = \frac{s+1}{s(s+20)};$$

$$f) H(s) = \frac{s^2}{0.3s^2+s+1};$$

$$m) H(s) = \frac{s^2}{0.3s^2+s+1};$$

$$g) H(s) = \frac{K}{s^n}, K > 0, n \in \{0, 1, 2, \dots\};$$

$$n) H(s) = \frac{100}{s(s+5)(s+30)}.$$

**Rezolvare 3.2.1.c):**

- se aduce funcția de transfer la **forma standard (normalizată)** pentru termeni de ordinul I și II:

$$H(s) = \frac{4}{7} \frac{\frac{1}{20}s+1}{\frac{1}{70}s+1} \quad (3.4)$$

și se evidențiază trei componente: (I) factorul de proporționalitate  $K = 4/7$ , (II) polinomul zeroului  $(\frac{1}{20}s + 1)$ , (III) polinomul polului  $(\frac{1}{70}s + 1)$ ;

- se ordonează crescător pulsăriile de interes, menționându-se după fiecare pulsărie panta dreptei cu care va fi modificat modulul:  $\omega_1 = 20 \text{ [rad/s]} (+20 \text{ [dB/dec]})$ ,  $\omega_2 = 70 \text{ [rad/s]} (-20 \text{ [dB/dec]})$ ;
- se stabilește domeniul de reprezentare al diagramei, prin stabilirea unei decade la stânga și a unei decade la dreapta față de cea mai mică, respectiv cea mai mare dintre pulsăriile de interes (cele provenite din integratoare/derivatoare pot fi ignorate, deoarece nu se schimbă panta în acele cazuri):  $\omega \in [10^0, 10^3]$ ;
- se plasează pulsăriile de interes pe axele  $Ox$  ale celor două caracteristici, în **scără logaritmică**. Pentru a deduce cu ușurință rapoartele pentru plasarea pulsărilor într-o anumită decadă se poate folosi Tabelul 3.1:

De exemplu, pulsăria de  $20 \text{ [rad/s]}$  se plasează la  $30\%$  din decadea  $[10, 100]$ , iar  $700 \text{ [rad/s]}$  se plasează la  $85\%$  din decadea  $[10^2, 10^3]$ .

$\omega$	$\lg \omega$	$\approx \lg \omega$
1	0	0
2	0.3010	0.30
3	0.4771	0.50
4	0.6021	0.60
5	0.6990	0.70
6	0.7782	0.80
7	0.8451	0.85
8	0.9031	0.90
9	0.9542	0.95

**Tabelul 3.1:** Aproximarea logaritmului zecimal pentru amplasarea pulsărilor

5. se calculează aproximări ale modulului conform termenilor din structura funcției de transfer:

- de la  $\omega = 1$  la  $\omega = 20$  [rad/s], modulul este determinat doar de factorul de proporționalitate transformat în decibeli:  $20 \lg \frac{4}{7} \approx 20 \cdot (0.6 - 0.85) = -5$  [dB];
- de la  $\omega = 20$  la  $\omega = 70$  [rad/s] apare o dreaptă cu panta de  $+20$  [dB/dec] (contribuția zeroului real și negativ), care în 70 [rad/s] ajunge la o amplificare de  $-5$  [dB] +  $20$  [dB] ·  $(0.85 - 0.3) = -5$  [dB] +  $20$  [dB] ·  $0.55 = 6$  [dB];
- după  $\omega = 70$  [rad/s], panta se modifică de la  $+20$  [dB/dec] la  $+20 - 20 = 0$  [dB/dec], iar modulul “rămâne” în  $+6$  [dB] pentru întreg domeniul de pulsări pozitive mai mari decât 70 [rad/s];

6. se calculează defazajul funcției de transfer:

$$\angle H(j\omega) = \angle \frac{4}{7} + \angle \left( \frac{1}{20} j\omega + 1 \right) - \angle \left( \frac{1}{70} j\omega + 1 \right) = 0 + \text{atan} \left( \frac{\omega}{20} \right) - \text{atan} \left( \frac{\omega}{70} \right), \quad (3.5)$$

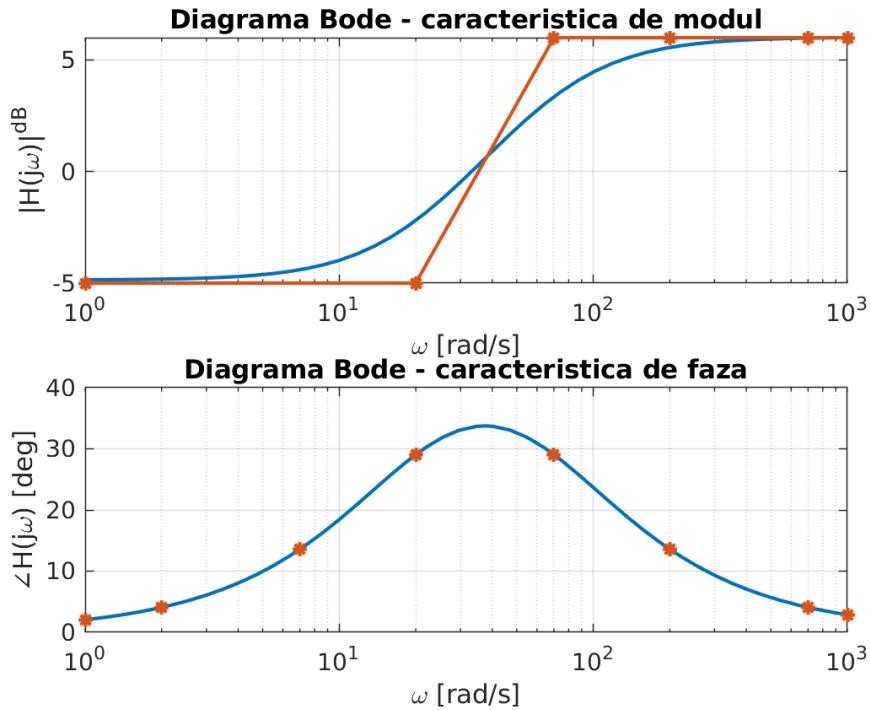
pentru  $\omega \in \{1, 2, 7, 20, 70, 200, 700, 1000\}$ , de exemplu.

Diagrama finală rezultată din MATLAB, respectiv pe baza calculelor menționate în acești pași se observă în Figura 3.1.

### 3.3 Interpretarea diagramei Bode

Dintre cele trei diagrame studiate pentru reprezentări frecvențiale ale sistemelor LTI, diagrama Bode este cea mai explicită și lizibilă din punct de vedere a reprezentării componentei permanente a ieșirii pentru intrări sinusoidale. Pentru o pulsărie  $\omega > 0$  reprezentată pe diagramă, răspunsul  $y_p(t)$  al sistemului  $H(s)$  la intrarea  $u(t) = \sin(\omega t)$  poate fi dedus printr-o citire la verticala corespunzătoare.

Spre exemplificare, pentru sistemul de la subpunctul 3.2.c), conform Figurii 3.1:



**Figura 3.1:** Diagrama Bode a sistemului 3.2.1.c).

- Pentru intrarea  $u(t) = 0.01 \cdot \sin(t)$  se pot deduce  $\omega = 1 = 10^0$  [rad/s],  $M^{dB} = -5$ ,  $\varphi \approx 2^\circ = 0.0349$  [rad], deci:

$$y_p(t) = 0.01 \cdot 10^{-\frac{5}{20}} \cdot \sin(t + 0.0349) = 0.0056 \cdot \sin(t + 0.0349),$$

ceea ce denotă că semnalul de ieșire este atenuat și cu avans de fază nesemnificativ.

- Pentru intrarea  $u(t) = 3 \cdot \sin(20t)$  se pot deduce  $\omega = 20$  [rad/s],  $M^{dB} = -5$  (în trasarea cu asymptote, având abatere de 3 [dB] față de caracteristica reală la pulsăția de frângere),  $\varphi \approx 30^\circ = 0.5236$  [rad], prin urmare:

$$y_p(t) = 3 \cdot 10^{-\frac{5}{20}} \cdot \sin(20t + 0.5236) = 1.6870 \cdot \sin(20t + 0.5236),$$

ceea ce denotă că semnalul de ieșire este atenuat și cu avans de fază.

- Pentru intrarea  $u(t) = \sin(300t)$  se pot deduce  $\omega = 300$  [rad/s],  $M^{dB} = 5$ ,  $\varphi \approx 10^\circ = 0.1745$  [rad], de unde rezultă:

$$y_p(t) = 10^{\frac{5}{20}} \cdot \sin(300t + 0.1745) = 1.7783 \cdot \sin(300t + 0.1745),$$

ceea ce denotă că semnalul de ieșire este amplificat și cu avans de fază.

- Sistemul atenuează sinusoidale de pulsății  $\omega \in [0, \approx 35]$  [rad/s] ( $M^{dB} < 0$ ), respectiv amplifică sinusoidale de pulsății  $\omega \in [\approx 35, \infty]$  [rad/s] ( $M^{dB} \geq 0$ )).
- Sistemul este cu avans de fază pe întreg domeniul  $\omega \in [0, \infty)$ , deoarece  $\varphi > 0$  indiferent de pulsăție.

### 3.4 Trasarea diagramei Bode în MATLAB

În MATLAB există funcția `bode`, care se poate apela astfel:

- `bode(SYS)`: apare graficul automat;
- `bode(SYS, WMIN, WMAX)`: apare graficul automat trasat pentru domeniul  $\omega \in [WMIN, WMAX]$ ;
- `[MAG, PH] = bode(SYS, W)`: se returnează vectorii modulelor și ai fazelor funcției de transfer pentru pulsațiile din vectorul  $W$  specificat;
- `[MAG, PH, W] = bode(SYS)`: se returnează vectorii modulelor și ai fazelor funcției de transfer pentru pulsațiile din vectorul  $W$  dedus automat.

Pentru generarea vectorului de pulsații există două funcții utile predefinite în MATLAB:

- `X = linspace(X1, X2, N)`: generează un vector  $X$  cu  $N$  puncte echidistante între  $X1$  și  $X2$ ; de exemplu, `linspace(1, 10, 10)` generează mulțimea  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ ;
- `X = logspace(X1, X2, N)`: generează un vector  $X$  cu  $N$  puncte logaritmice echidistante între  $10^{X1}$  și  $10^{X2}$ ; de exemplu `logspace(0, 1, 10)` generează mulțimea  $\{1, 1.29, 1.66, 2.15, 2.78, 3.59, 4.64, 5.99, 7.74, 10.00\}$ .

Pentru afișarea graficelor arbitrară în scală logaritmică, există în MATLAB următoarele alternative la funcția `plot(x, y)`:

- `semilogx(x, y)`: afișează coordonatele pe axele  $Ox$  și  $Oy$  utilizând scala logaritmică în baza 10 pentru axa  $Ox$ , respectiv scala liniară pentru axa  $Oy$ .
- `semilogy(x, y)`: afișează coordonatele pe axele  $Ox$  și  $Oy$  utilizând scala liniară pentru axa  $Ox$ , respectiv scala logaritmică în baza 10 pentru axa  $Oy$ .
- `loglog(x, y)`: afișează coordonatele pe axele  $Ox$  și  $Oy$  utilizând scala logaritmică în baza 10 pentru ambele seturi de coordonate.

---

---

## Lucrarea 4

---

### Sisteme cu timp mort. Sisteme de fază neminimă

4.1 Breviar teoretic . . . . .	38
4.2 Trasarea diagramei Nyquist .	39
4.3 Trasarea diagramei Bode . .	40
4.4 Probleme propuse . . . . .	43

În această lucrare se definesc sistemele cu timp mort și de fază neminimă și se prezintă caracteristicile acestora din perspectiva răspunsului în frecvență al sistemelor LTI. Se vor ilustra aspectele suplimentare care apar în trasarea diagramei Nyquist și Bode.

## 4.1 Breviar teoretic

### Definiția 4.1.1: Sistem cu timp mort

Un sistem cu timp mort este descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = H'(s) \cdot e^{-\tau_m s},$$

având întârzierea de valoare  $\tau_m > 0$  secunde, unde  $H'(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)}$  este partea rațională.

Spre deosebire de partea rațională  $H'(s)$ , având ordinul finit  $n = \deg \alpha(s)$ , timpul mort este un sistem de ordin infinit. El poate fi aproimat printr-un ordin finit prin așa-numita familie de aproximății Padé [Skogestad și Postlethwaite 2005]. În mediul MATLAB există funcția `[num,den] = pade(T,N)`, care returnează funcția de transfer  $H = tf(num,den)$  care aproximează timpul mort de valoarea T secunde cu ordinul N. Formula analitică cea mai des întâlnită este cea a aproximăției de ordinul I:

$$e^{-\tau_m s} = \frac{e^{-\frac{\tau_m}{2}s}}{e^{\frac{\tau_m}{2}s}} = \frac{1 - \frac{\tau_m}{2}s + \frac{(\tau_m/2)^2}{2!}s^2 - \dots}{1 + \frac{\tau_m}{2}s + \frac{(\tau_m/2)^2}{2!}s^2 + \dots} \approx \frac{1 - \frac{\tau_m}{2}s}{1 + \frac{\tau_m}{2}s}. \quad (4.1)$$

Pentru a studia răspunsul în frecvență al timpului mort, se pune în evidență forma sa trigonometrică:

$$e^{-\tau_m j\omega} = e^{j(-\tau_m \omega)} = \cos(\tau_m \omega) - j \sin(\tau_m \omega), \quad \omega \geq 0, \quad (4.2)$$

de unde rezultă faptul că:

- $|e^{-j\tau_m \omega}| = 1, \quad \forall \omega \geq 0;$
- $\angle(e^{-j\tau_m \omega}) = -\arctan\left(\frac{\cos(\tau_m \omega)}{\sin(\tau_m \omega)}\right) = -\tau_m \omega, \quad \forall \omega \geq 0.$

În MATLAB, o funcție de transfer cu timp mort  $tm > 0$  se declară utilizând sintaxa:

`H = tf(num,den,'iodelay',tm)`

### Definiția 4.1.2: Sistem de fază neminimă

Un sistem este de fază neminimă dacă există cel puțin o singularitate în semiplanul drept sau are factorul de proporționalitate negativ.

Conform denumirii, aceste componente îndeplinesc o anumită caracteristică de modul (cea a sistemului echivalent de fază minimă), dar induc o caracteristică de fază mai *largă* decât cea minim posibilă. Intuitiv, orice componentă de fază neminimă se poate descompune în conexiunea serie dintre componenta echivalentă de fază minimă (cea care realizează caracteristica de modul) și un filtru trece tot (filtru de modul constant unitar, cu defazaj diferit de zero). Exemple ilustrative:  $H_1(s) = \frac{-s+2}{s+1} = \frac{s+2}{s+1} \cdot \frac{-s+2}{s+2}$ ,  $H_2(s) = \frac{s+1}{s(s-3)} = \frac{s+1}{s(s+3)} \cdot \frac{-(s+3)}{-s+3}$ .

În practică, atât timpul mort, cât și fază neminimă, sunt proprietăți indezirabile, deoarece acestea impun limitări stricte asupra performanțelor care pot fi obținute prin reglare, respectiv pot duce ușor la destabilizarea sistemului în urma închiderii buclei.

## 4.2 Trasarea diagramei Nyquist

**Particularități în cazul sistemelor cu timp mort:** Pentru trasarea diagramei Nyquist a unui astfel de sistem se recomandă următorii pași, adaptați față de Lucrarea 2:

1. determinarea părților reale și imaginare în funcție de variabila  $j\omega$  a funcției raționale:

$$H'(j\omega) = \operatorname{Re}\{H'(j\omega)\} + j\operatorname{Im}\{H'(j\omega)\}. \quad (4.3)$$

2. determinarea capătului de frecvență joasă (CFJ) în planul complex:

$$(\text{CFJ}) : \lim_{\omega \rightarrow 0, \omega > 0} H(j\omega) = x_1 + jy_1, \quad x_1, y_1 \in \overline{\mathbb{R}}. \quad (4.4)$$

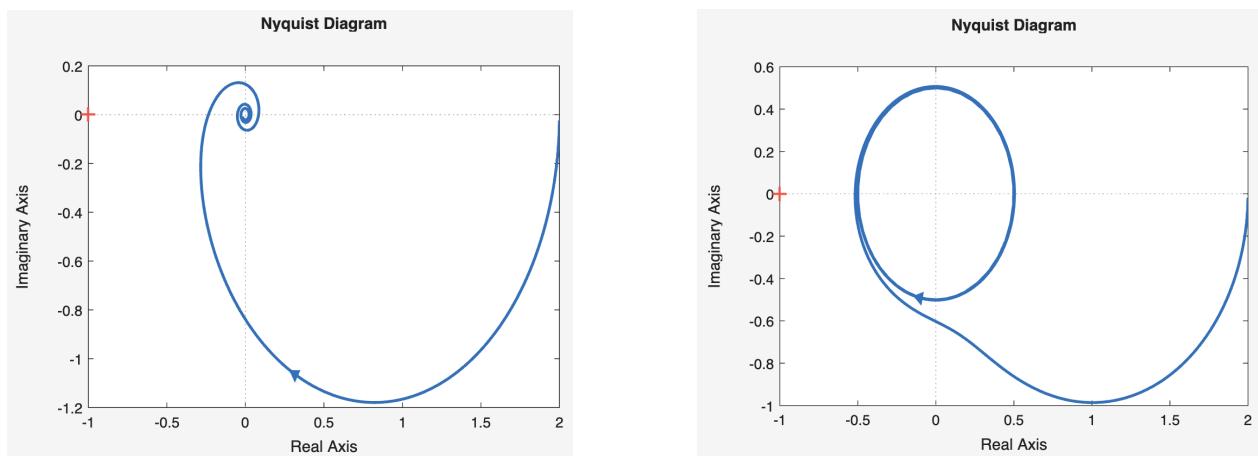
**Remarcă:** Dacă sistemul are cel puțin un integrator, atunci CFJ al sistemului cu timp mort va fi diferit de CFJ al părții raționale, deoarece apar nedeterminări de tipul  $\infty \cdot 0$ .

3. determinarea capătului de frecvență înaltă (CFI) în planul complex. Se disting cazurile:

- dacă  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H'(j\omega) = 0$ , atunci (CFI) este situat în origine;
- dacă  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H'(j\omega) = r \neq 0$ , atunci (CFI) descrie un cerc de rază  $|r|$  centrat în origine (va tinde asymptotic spre el).

4. determinarea intersecțiilor cu axele de coordonate: datorită faptul că ecuațiile  $\sin(\tau_m \omega) = 0$  și  $\cos(\tau_m \omega) = 0$  au o infinitate de soluții, vor exista o infinitate de intersecții cu axele. Ecuațiile rezultate sunt, în general, transcențente și nu au soluție analitică.

5. trasarea diagramei pornind din CFJ, ajungând în CFI și surprinzând **fenomenul de încovoiere** în jurul originii sau de tindere spre cercul de rază  $|r|$ , după caz. Încercuirile se fac în sens invers trigonometric, echivalent cu a adăuga o infinitate de poli la trasarea locului de transfer. Acum acest fenomen este ilustrat în Figura 4.1.



(a) CFI al părții raționale este în origine,  
 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H'(j\omega) = 0$ .

(b) CFI al părții raționale este pe axa reală,  
 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} H'(j\omega) = r \neq 0$ .

**Figura 4.1:** Timpul mort ilustrat în diagrama Nyquist.

**Particularități în cazul sistemelor de fază neminimă:** nu există. Pentru un sistem de fază neminimă, pașii necesari pentru trasarea diagramei Nyquist sunt aceiași cu cei prezențați în Lucrarea 2.

### 4.2.1 Problemă rezolvată

**Enunț:** Să se traseze diagrama Nyquist a sistemului modelat prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{s+1}{s(s+20)} e^{-0.5s}.$$

**Rezolvare:** Conform algoritmului prezentat anterior rezultă:

1. determinarea părților reale și imaginare ale funcției raționale în funcție de variabila  $j\omega$ :

$$H'(j\omega) = \frac{j\omega + 1}{j\omega(j\omega + 20)} = \frac{19}{\omega^2 + 400} + j \cdot \frac{-\omega^2 - 20}{\omega(\omega^2 + 400)}. \quad (4.5)$$

2. determinarea capătului de frecvență joasă (CFJ) în planul complex:

$$\begin{aligned} (\text{CFJ}) : \lim_{\omega \rightarrow 0, \omega > 0} H(j\omega) &= \lim_{\omega \rightarrow 0, \omega > 0} \left( \frac{19}{\omega^2 + 400} + j \frac{-\omega^2 - 20}{\omega(\omega^2 + 400)} \right) (\cos(0.5\omega) - j \sin(0.5\omega)) = \\ &= \frac{19}{400} - 0.5 \frac{20}{400} - \infty j = \frac{9}{400} - \infty j. \end{aligned} \quad (4.6)$$

3. determinarea capătului de frecvență înaltă (CFI) în planul complex:

$$(\text{CFI}) : \lim_{\omega \rightarrow \infty} H'(j\omega) = 0 - 0 \cdot j, \quad (4.7)$$

iar (CFI) este în origine (aici nu putem discuta despre apartenența la un cadran).

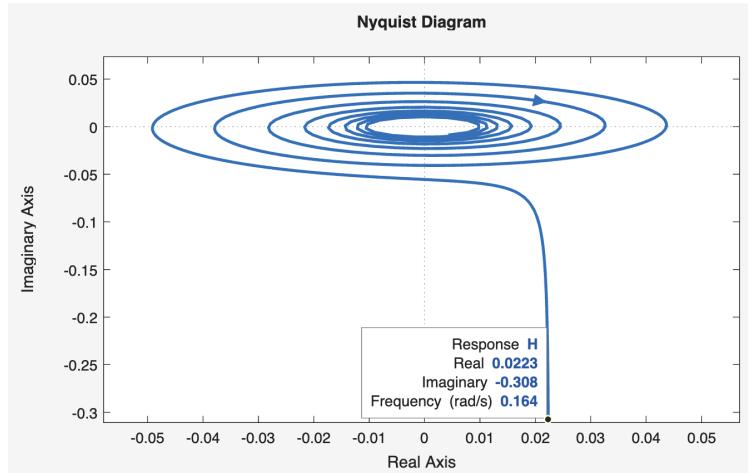
4. determinarea intersecțiilor cu axele de coordonate: sunt o infinitate de astfel de intersecții.
5. trasarea diagramei pornind din CFJ, urmărind intersecțiile cu axele de coordonate, ajungând la CFI, rezultând graficul din Figura 4.2.

### 4.3 Trasarea diagramei Bode

**Particularități în cazul sistemelor cu timp mort:** Pentru trasarea diagramei Bode de modul a unei funcții de transfer  $H(s)$  se utilizează pașii pentru trasarea diagramei Bode de modul a părții raționale  $H'(s)$ , deoarece:

$$|H(s)| = |H'(s)| \cdot |e^{-\tau_m s}| = |H'(s)|,$$

ceea ce înseamnă că **în caracteristica de modul nu apare nicio diferență față de sistemul echivalent fără timp mort**.



**Figura 4.2:** Diagrama Nyquist a sistemului din Secțiunea 4.2.1.

Ecuatia de fază este:

$$\angle H(j\omega) = \angle H'(j\omega) + \angle(e^{-\tau_m j\omega}) = \angle H'(j\omega) - \tau_m \omega,$$

ceea ce înseamnă că peste faza părții raționale se adaugă faza timpului mort. [Cantitatea  \$\tau\_m \omega\$  este în radiani](#). Pulsația de frângere corespunzătoare timpului mort este:

$$\omega_f = \frac{1}{\tau_m}.$$

**Problemă rezolvată:** În cazul trasării diagramei Bode pentru sistemul de la Secțiunea 4.2.1, pornim prin trasarea caracteristicii de modul pentru partea rațională:

$$H'(s) = \frac{s+1}{s(s+20)} = \frac{1}{20} \cdot \frac{s+1}{s(\frac{1}{20}s+1)},$$

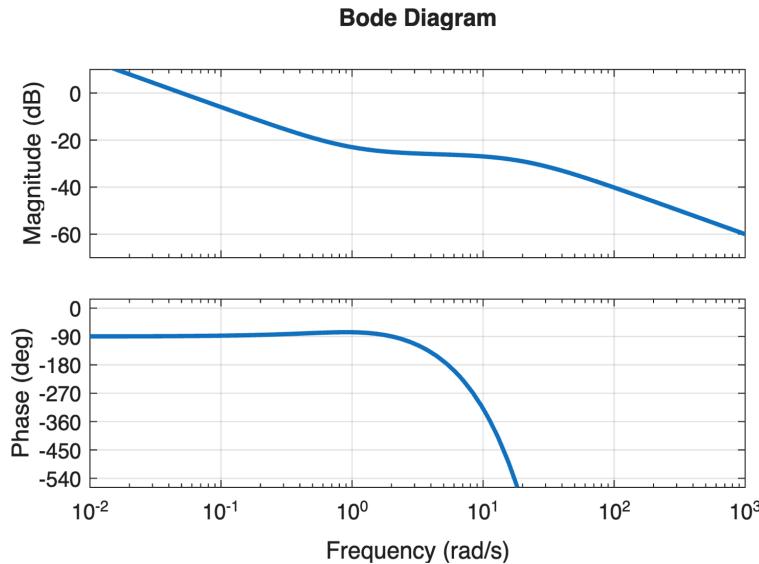
conform algoritmului prezentat în Lucrarea 3. Ecuatia de fază este:

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= \angle(j\omega + 1) - \angle(j\omega) - \angle(j\omega + 20) + \angle(e^{-0.5j\omega}) \\ &= \text{atan} \omega - 90^\circ - \text{atan} \frac{\omega}{20} - \text{rad2deg}(0.5\omega). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Rezultatul este prezentat în Figura 4.3. Implicit în MATLAB, afișarea pentru caracteristica de fază se face pe un interval foarte extins, deci pentru vizualizarea în intervale rezonabile se recomandă funcționalitatea de **Zoom in**.

**Particularități în cazul sistemelor de fază neminimă:** Diagrama Bode de modul a sistemelor de fază neminimă se trasează după aceleasi reguli precum în cazurile de fază minimă, singura diferență fiind la caracteristica de fază:

- faza oricărui zero instabil are comportamentul fazei unui pol stabil;
- faza oricărui pol instabil are comportamentul fazei unui zero stabil;
- în cazul în care *gain*-ul este  $k < 0$ , faza acestuia este  $-180^\circ$ , prin convenție.



**Figura 4.3:** Diagrama Bode a unui sistem cu timp mort.

### 4.3.1 Problemă rezolvată

**Enunț:** Să se traseze diagrama Bode a sistemului modelat prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{s - 7}{s(s + 2)}.$$

**Rezolvare:** Trebuie să trasăm caracteristica de modul pentru  $H(s)$ , fără a exista particularități de trasare, fiind echivalentă cu cea a funcției de transfer  $G(s) = \frac{s+7}{s(s+2)}$ . Totuși, trebuie atenție sporită asupra evidențierii funcției de transfer în forma standard:

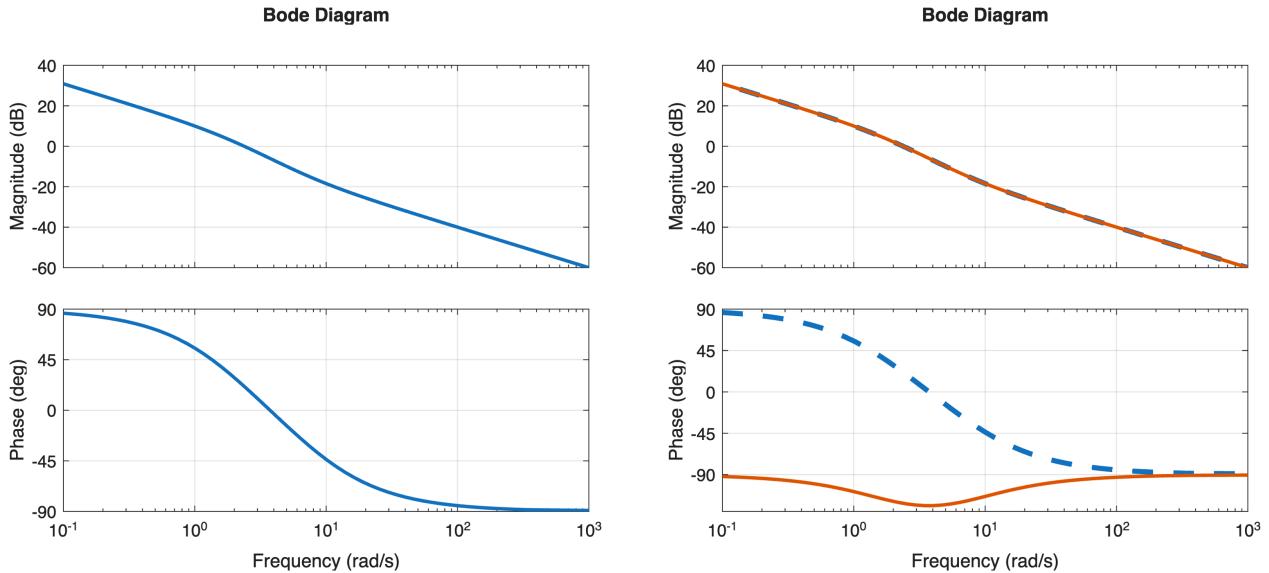
$$H(s) = \frac{-7}{2} \cdot \frac{-\frac{1}{7}s + 1}{s(\frac{1}{2}s + 1)}.$$

Ecuatia de fază este:

$$\begin{aligned} \angle H(j\omega) &= \angle\left(\frac{-7}{2}\right) + \angle\left(-\frac{1}{7}j\omega + 1\right) - \angle(j\omega) - \angle\left(\frac{1}{2}j\omega + 1\right) \\ &= -180^\circ - \text{atan} \frac{\omega}{7} - 90^\circ - \text{atan} \frac{\omega}{2}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

și putem observa atât factorul de proporționalitate negativ, cât și comportamentul în fază a zeroului instabil precum a unui pol stabil. Rezultatul trasării este prezentat în Figura 4.4. Se constată că fază (4.9) sistemului variază în domeniul  $-270^\circ \rightarrow -450^\circ$ , spre deosebire de fază sistemului echivalent de fază minimă, ale cărei capete de frecvență sunt ambele la valoarea de  $-90^\circ$ .

**Observație:** În MATLAB, în cazul sistemelor de fază neminimă, caracteristica de fază poate fi deplasată cu  $\pm 360^\circ$  din cauza implementării diferite utilizate în trasarea diagramei Bode.



(a) Caracteristicile de modul și fază ale sistemului de fază neminimă.

(b) Comparatie cu sistemul echivalent de fază minimă (roșu).

**Figura 4.4:** Diagrama Bode a sistemului de fază neminimă din Secțiunea 4.3.1.

## 4.4 Probleme propuse

**Problema 4.4.1:** Să se traseze și să se interpreteze diagramele Nyquist și Bode pentru următoarele funcții de transfer. Să se anticipateze, pe baza trasărilor obținute, componenta permanentă a ieșirii sistemelor pentru următoarele semnale de intrare:  $u_1(t) = 3$ ,  $u_2(t) = \sin(10^{-3}t)$ ,  $u_3(t) = 4 \sin(0.2t + \frac{\pi}{4})$ ,  $u_4(t) = -\sin(80t - \frac{\pi}{6})$ ,  $u_5(t) = 0.1 \sin(10^4t)$ . Să se deducă natura filtrului considerând pragul de 0 [dB], respectiv banda de trecere (dacă este posibil).

a)  $H(s) = \frac{2}{s}e^{-0.5s};$

e)  $H(s) = \frac{-s+30}{s(-s+4)};$

b)  $H(s) = \frac{s+1}{s(s+20)}e^{-0.5s};$

f)  $H(s) = \frac{100}{s(s+5)(s+30)}e^{-0.2s};$

c)  $H(s) = \frac{s-7}{s(s+2)};$

g)  $H(s) = \frac{-4(10s+1)}{(3s+1)(-2s+1)};$

d)  $H(s) = \frac{s^2}{0.3s^2+s+1}e^{-2s};$

h)  $H(s) = \frac{5(-4s+1)}{s(s+8)}.$



---

---

## Lucrarea 5

---

### Legături între diagramele Nyquist, Bode și Nichols ale sistemelor LTI

5.1 Studii de caz . . . . .	46
5.2 Legătura dintre caracteristica de modul și cea de fază în diagrama Bode . . . . .	51
5.3 Probleme propuse . . . . .	54

În această lucrare se prezintă legături între cele trei diagrame des întâlnite în practică pentru reprezentarea răspunsului în frecvență a sistemelor LTI: diagramele Nyquist, Bode, Nichols. Se vor pune în evidență moduri de a identifica principial funcțiile de transfer pe baza răspunsului în frecvență dedus experimental. Suplimentar, se prezintă metode de identificare a funcțiilor de transfer pe baza diagramei Bode, atât în cazuri de fază minimă, cât și în cazul în care sistemele sunt de fază neminimă.

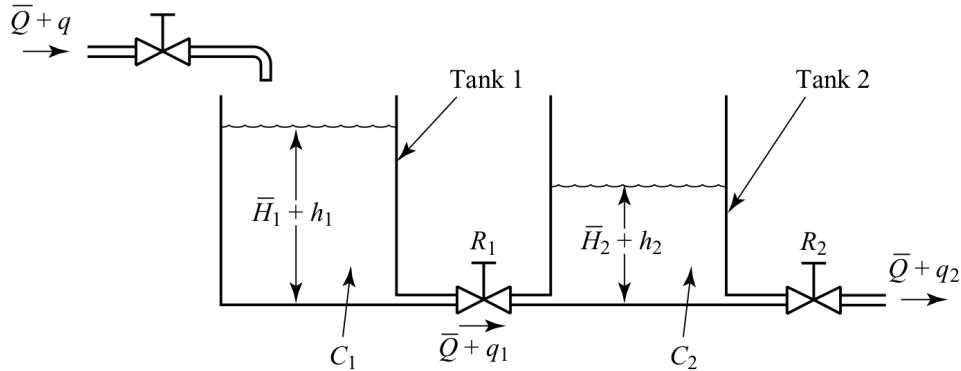
Analogia dintre cele trei tipuri de diagrame utilizate pentru reprezentarea răspunsului în frecvență al sistemelor LTI se poate realiza principal (în general, fără detalii exacte), pornind de la legătura dintre forma algebraică și forma trigonometrică a unui număr complex, urmărind câteva aspecte structurale. Printre acestea, se pot enumera:

- capătul de frecvență joasă, CFJ,  $\omega \rightarrow 0$ ;
- capătul de frecvență înaltă, CFÎ,  $\omega \rightarrow \infty$ ;
- intersecțiile cu axele de coordonate în cazul diagramei Nyquist, care se echivalează cu intersecțiile cu fazele de  $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \pm 2\ell\pi$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ , în diagramele Bode și Nichols;
- intersecțiile cu axele de coordonate în cazul caracteristicii de modul a diagramele Bode și Nichols, care se echivalează cu intersecția cu cercul unitate în diagrama Nyquist;
- panta din gama frecvențelor înalte a diagramei Bode, ceea ce denotă excesul poli-zerouri al sistemului, echivalent cu numărul de cadrane încercuite în diagrama Nyquist etc.

## 5.1 Studii de caz

### 5.1.1 Sistem cu două rezervoare înseriate

Se consideră sistemul format din două rezervoare înseriate din Figura 5.1, având curgere laminară, iar la intrare există o pompă de apă cu debit volumic variabil.



**Figura 5.1:** Sistem cu două rezervoare conectate în serie.

Modelul matematic se deduce prin liniarizare în jurul punctului de echilibru  $(\bar{Q}, \bar{H}_1, \bar{H}_2)$ , astfel:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Q_2(s) [m^3/s]}{Q(s) [m^3/s]} = \frac{1}{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)s + 1}, \quad (5.1)$$

pentru:

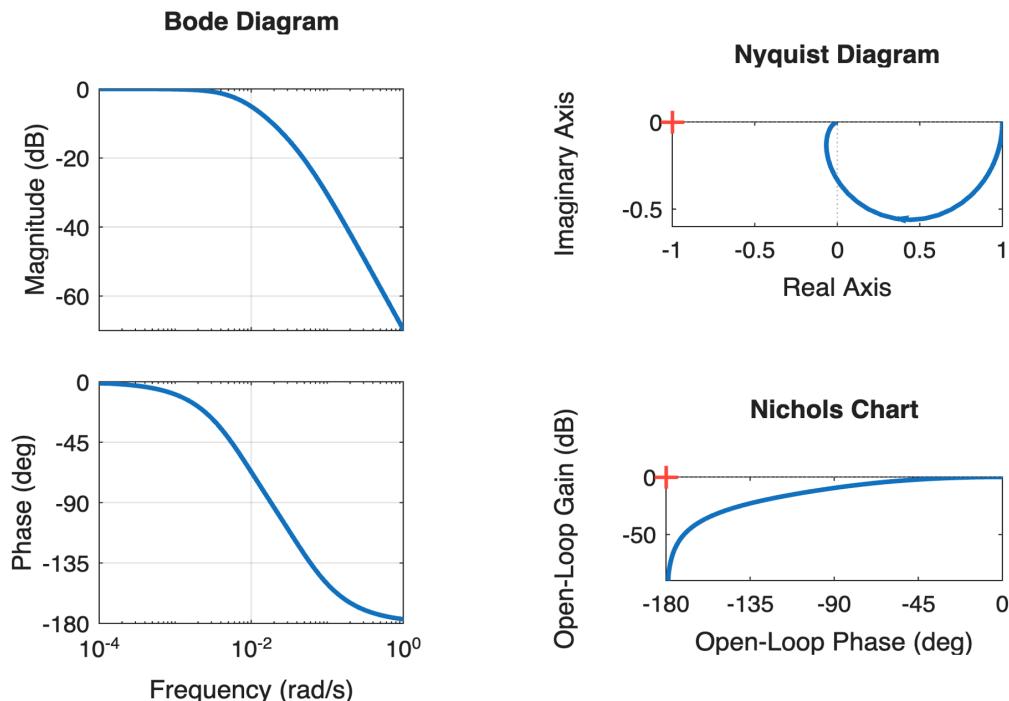
- rezistență pneumatică a conductei 1:  $R_1 = 5.5 [s \cdot m^{-2}]$ ;
- rezistență pneumatică a conductei 2:  $R_2 = 5.5 [s \cdot m^{-2}]$ ;
- capacitanță pneumatică a rezervorului 1:  $C_1 = 10 [m^2]$ ;
- capacitanță pneumatică a rezervorului 2:  $C_2 = 10 [m^2]$ .

**Problemă:** Să se traseze diagrama Nyquist și să se realizeze analogia acesteia cu diagramele Bode, respectiv Nichols și să se interpreteze comportamentul sistemului.

**Discuție:** În Figura 5.2 sunt prezentate cele trei diagrame ale sistemului cu două rezervoare inseriate. Existența unei dinamici de ordinul doi se poate deduce din (i) panta finală de  $-40 a caracteristicii de modul din diagrama Bode; (ii) variația fazei de la  $0^\circ \rightarrow -180^\circ$ , i.e., două arctangente negative, fără nicio creștere care să sugereze prezența zeroilor; (iii) variația diagramei Nyquist în două cadrane în sens anti-trigonometric.$

Panta de  $0 în diagrama Bode la frecvențe mici denotă lipsa integratoarelor și a derivatoarelor în dinamica sistemului. Capătul de frecvență joasă este algebric  $1 + 0j$ , echivalent cu modulul de  $0 și faza de  $0^\circ$ , fapt regăsit atât în diagrama Bode, cât și în diagrama Nichols.$$

Faptul că faza în diagramele Bode și Nichols tinde descrescător spre  $-180^\circ$  se reflectă în diagrama Nyquist prin CFÎ tangent la axa reală negativă prin cadranul III.



**Figura 5.2:** Diagramele Bode, Nyquist, Nichols pentru sistemul cu două rezervoare inseriate.

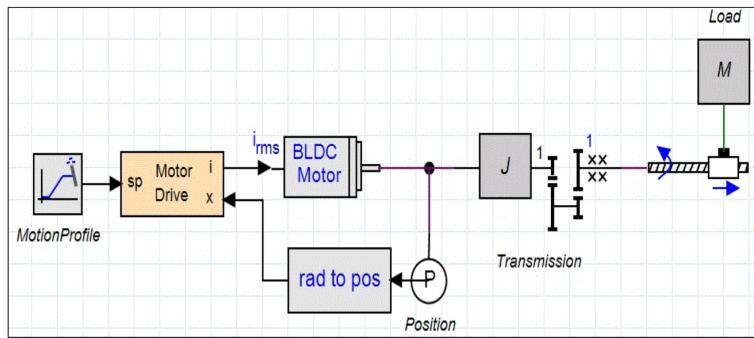
### 5.1.2 Axă CNC

Se consideră un sistem de poziționare pe o axă CNC (engl. *Computer Numerical Control*) având structura din Figura 5.3. Modelul matematic poate fi descompus în două subsisteme: subsistemul intrare (factor de umplere PWM) – viteza unghiulară, respectiv subsistemul viteza unghiulară – poziție. Modelul intrare-poziție în urma identificării este:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega(s)}{F_u(s)} \cdot \frac{\theta(s)}{\omega(s)} = \frac{\theta(s)}{F_u(s)} \frac{[\text{impulsuri}]}{[\cdot 100\%]} = \frac{K_m}{(T_e s + 1)(T_m s + 1)} \cdot \frac{K_i}{s}, \quad (5.2)$$

unde:

- constanta subsistemului tensiune-viteză  $K_m = 334.89$ ;
- constanta integratorului  $K_i = 3.869$ ;
- constanta de timp mecanică  $T_m = 0.1198[s]$ ;
- constanta de timp electrică  $T_e = 0.0025[s]$ .



**Figura 5.3:** Sistem de poziționare cu axă CNC.

**Problemă:** Să se traseze diagrama **Nichols** și să se realizeze analogia acesteia cu diagramele Bode, respectiv Nyquist și să se interpreteze comportamentul sistemului.

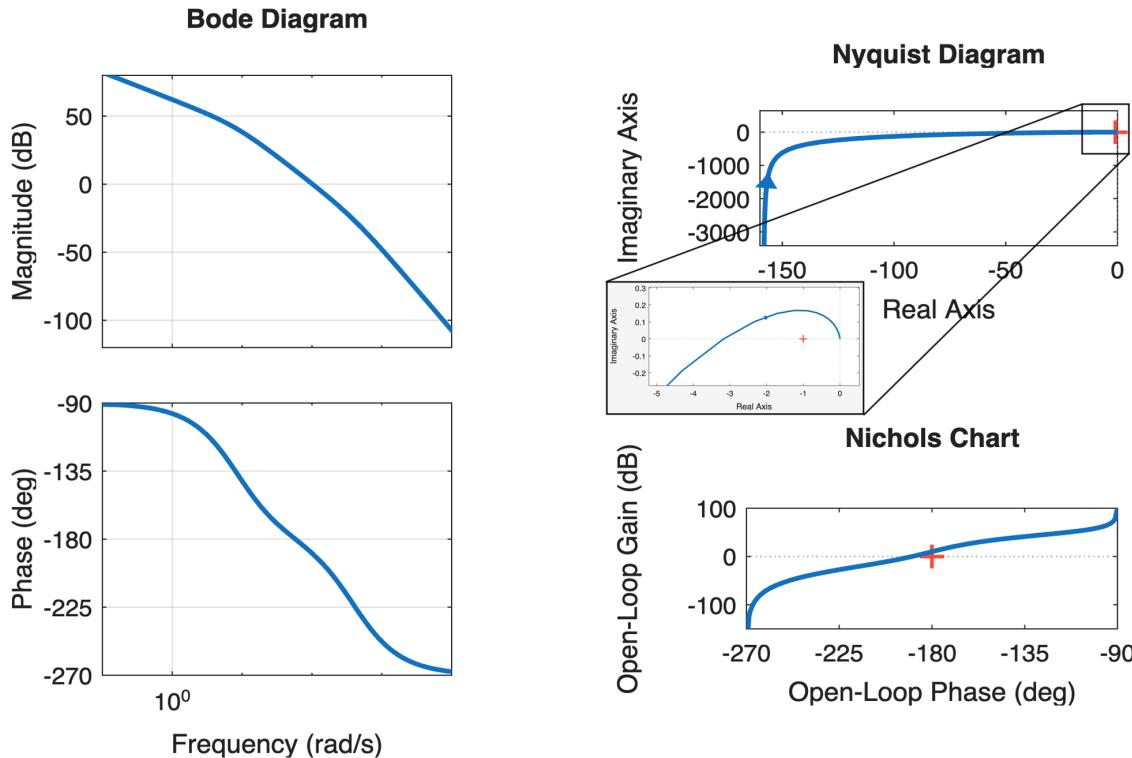
**Discuție:** În Figura 5.4 sunt prezentate cele trei diagrame ale sistemului cu axă CNC. Pornind de la diagrama Nichols, se constată o fază descrescătoare pe domeniul  $-90^\circ \rightarrow -270^\circ$ , ceea ce denotă (i) prezența unui integrator (faza începe din  $-90^\circ$ ), respectiv (ii) doi poli suplimentari, fără zerouri (deoarece faza este strict descrescătoare). Același comportament se regăsește direct și în caracteristica de fază a diagramei Bode.

Din faptul că avem caracteristica de modul strict descrescătoare (cu pante progresive de  $-20, -40, -60 [dB/dec]$  reies trei poli. Excesul poli-zerouri  $e = n - m = 3$  se constată prin încercuirea originii cu trei cadrane în sens anti-trigonometric față de cadranul de pornire al CFJ. Capătul de frecvență joasă trebuie să se afle în cadranul III, deoarece faza pornește de la  $-90^\circ$ , fiind strict inferioară acestei valori pentru  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\omega > 0$ .

Deoarece în diagrama Nichols, locul de transfer se regăsește deasupra punctului critic  $-1 + 0j \Leftrightarrow (-180^\circ, 0 [dB])$ , reiese faptul că în diagrama Bode, mai întâi există intersecția cu faza de  $-\pi$  și doar apoi intersecția cu axa de 0 [dB]. În diagrama Nyquist, acest fapt se traduce prin existența intersecției cu axa reală negativă înainte de intersecția cu cercul unitate.

### 5.1.3 Sistem de suspensie activă

Se consideră sistemul de suspensie activă ilustrat în Figura 5.5. Sistemul poate fi considerat de tip MIMO, având două intrări: forța elementului de acționare hidraulic în [ $kN$ ] și denivelarea drumului în [ $m$ ], respectiv două ieșiri: poziția caroseriei în [ $m$ ] și poziția roții în [ $m$ ].



**Figura 5.4:** Diagramele Bode, Nyquist, Nichols pentru sistemul de tip axă CNC.

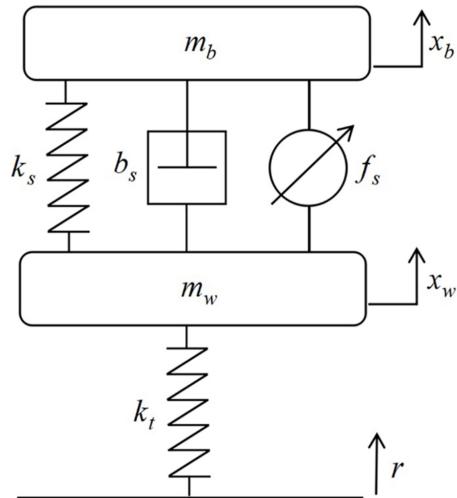
Un exemplu de funcție de transfer de la actuator la poziția caroseriei poate fi obținută experimental sau prin modelare matematică pe baza legilor lui Newton, sub forma:

$$H(s) = \frac{Y(S)}{U(s)} = \frac{X_b(s)}{F_s(s)} \frac{[m]}{[kN]} = \frac{3.333(s^2 + 3167)}{(s^2 + 2.864s + 49.85)(s^2 + 17.14s + 3388)}. \quad (5.3)$$

**Problemă:** Să se traseze diagrama **Bode** și să se realizeze analogia acesteia cu diagramele Nyquist, respectiv Nichols și să se interpreteze comportamentul sistemului.

**Discuție:** În Figura 5.6 sunt prezentate cele trei diagrame ale sistemului de suspensie activă a unui automobil. Din caracteristica de modul a diagramei Bode reiese, în primul rând, perechea de poli complex conjugăți cu un factor de amortizare mic (pe baza rezonanței existente). Urmează o pereche de zerouri complex conjugate cu factorul de amortizare nul, ceea ce prezintă o crestătură la pulsăția de antirezonanță (modulul este anulat complet pentru pulsăția respectivă), fapt ce se constată și prin saltul existent în caracteristica de fază. Existența unei perechi suplimentare de poli complex conjugăți imediat după perechea de zerouri se constată prin faptul că panta în caracteristica de modul are o valoare constantă de  $-40$  [dB/dec] după apariția valorii de rezonanță.

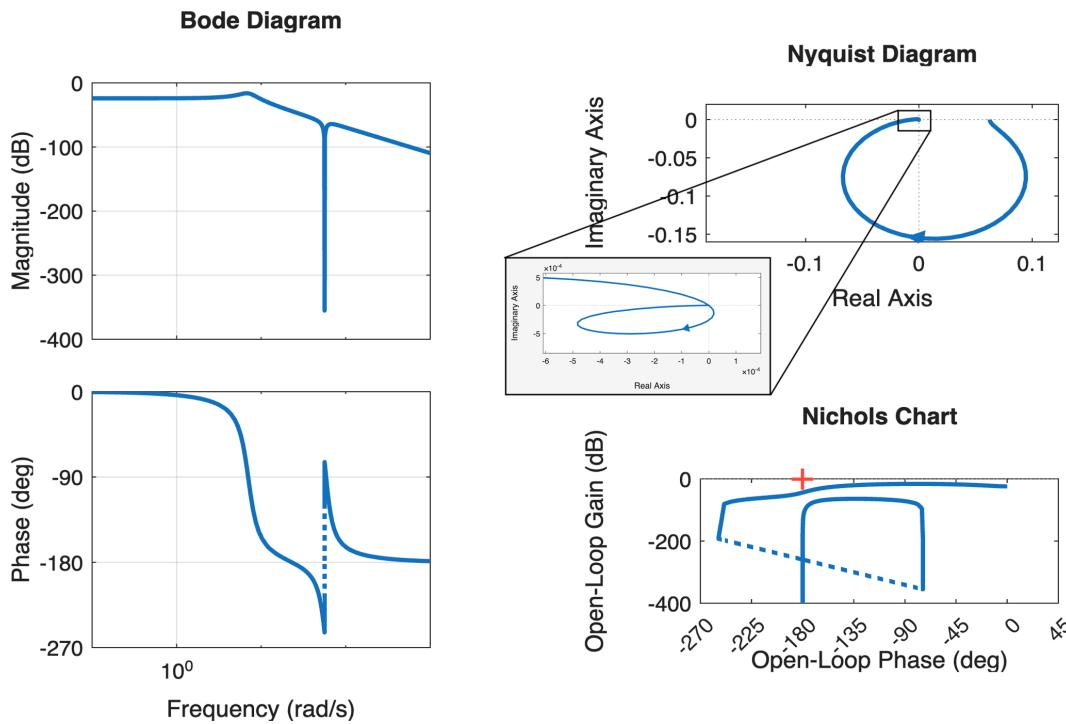
Fenomenul de antirezonanță se constată ușor în diagrama Nichols, prin tranziția (**discontinuă**) de la modulul de  $-\infty$  [dB], tangent la faza de  $-270^\circ$ , la urcarea spre modulele finite prin tangența la faza de  $-90^\circ$ . În diagrama Nyquist se constată anularea modulului la antirezonanță prin tranziția prin origine (printr-o pulsăție intermediară, nu CFÎ!). Din fap-



**Figura 5.5:** Suspensia activă a unui automobil.

tul că diagrama Nyquist are CFÎ în origine tangent la axa reală negativă prin cadranul III denotă excesul poli-zerouri  $e = n - m = 2$ .

Diagrama Bode este cea mai concludentă pe un astfel de exemplu, fiind precisă în reprezentarea caracteristicilor de modul și de fază în funcție de pulsărie, spre deosebire de celelalte două diagrame care devin ambiguie în acest sens. Acest lucru ne permite o identificare relativ ușoară a modelului unui sistem descris prin funcție de transfer din diagrama Bode a acestuia, fapt care constituie subiectul următoarei secțiuni.



**Figura 5.6:** Diagramele Bode, Nyquist, Nichols pentru sistemul de tip suspensie activă.

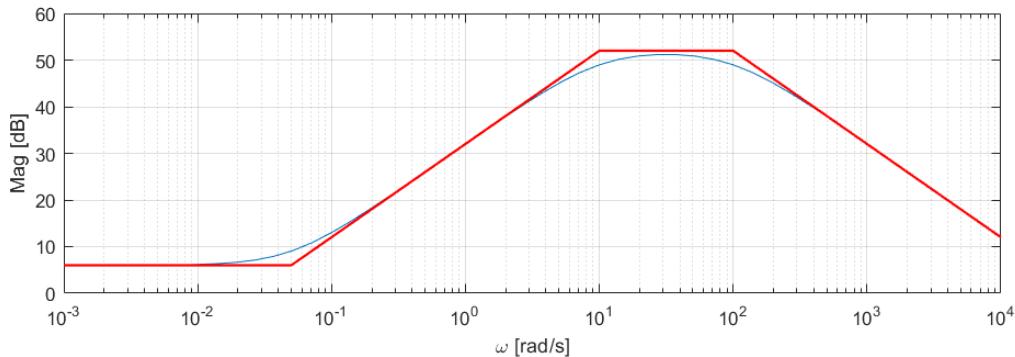
## 5.2 Legătura dintre caracteristica de modul și cea de fază în diagrama Bode

Se pornește de la reprezentarea generală a unei funcții de transfer, precum în Lucrarea 3. O funcție de transfer poate fi scrisă ca raport de polinoame date sub formă de produse de termeni de gradul I sau II. Se evidențiază astfel singularitățile reale, respectiv complex conjugate:

$$H(s) = \frac{K}{s^p} \cdot \frac{\prod (\overset{\circ}{T}_i s + 1)}{\prod (\hat{T}_j s + 1)} \prod \left( \left( \frac{s}{\overset{\circ}{\omega}_{n,i}} \right)^2 + \frac{2\zeta_i}{\overset{\circ}{\omega}_{n,i}} s + 1 \right) \prod \left( \left( \frac{s}{\hat{\omega}_{n,j}} \right)^2 + \frac{2\hat{\zeta}_j}{\hat{\omega}_{n,j}} s + 1 \right). \quad (5.4)$$

Din diagrama Bode de modul putem deduce valorile constantelor de timp sau ale pulsăriilor naturale (prin intermediul pulsăriilor de frângere) și putem stabili dacă acestea corespund unor zerouri sau unor poli. De asemenea, folosind panta inițială a graficului, putem deduce numărul integratoarelor/derivatoarelor ( $p$ ). După ce am stabilit numărul acestora, putem deduce și valoarea factorului de proporționalitate ( $K^{dB}$ ): diferența dintre valoarea citită de pe diagrama de modul în CFJ și valoarea componentei  $\frac{1}{s^p}$  în CFJ.

**Exemplul 5.2.1:** Se consideră diagrama Bode de modul a unui sistem de fază **minimă** din Figura 5.7. Să se identifice structura și valorile parametrilor funcției de transfer  $H(s)$  care are acest răspuns în frecvență.



**Figura 5.7:** Diagrama Bode de modul a unui sistem de fază minimă.

Din această diagramă putem deduce că nu avem integrator/derivator ( $p = 0$ ), iar pulsăriile de frângere sunt:  $\dot{\omega}_f = 5 \cdot 10^{-2} [\text{rad/s}]$  (panta crește de la 0 [ $\text{dB/dec}$ ] la 20 [ $\text{dB/dec}$ ]),  $\hat{\omega}_{f_1} = 10 [\text{rad/s}]$  (panta scade de la 20 [ $\text{dB/dec}$ ] la 0 [ $\text{dB/dec}$ ]), respectiv  $\hat{\omega}_{f_2} = 100 [\text{rad/s}]$  (panta scade de la 0 [ $\text{dB/dec}$ ] la -20 [ $\text{dB/dec}$ ]). De asemenea, deoarece nu avem integrator/derivator, în CFJ putem citi direct  $K^{dB} = 6 [\text{dB}]$ .

Acum, folosind informația *a priori* că sistemul este de fază minimă, putem trasa direct diagrama Bode de fază, deoarece între cele două diagrame Bode există o relație de echivalentă

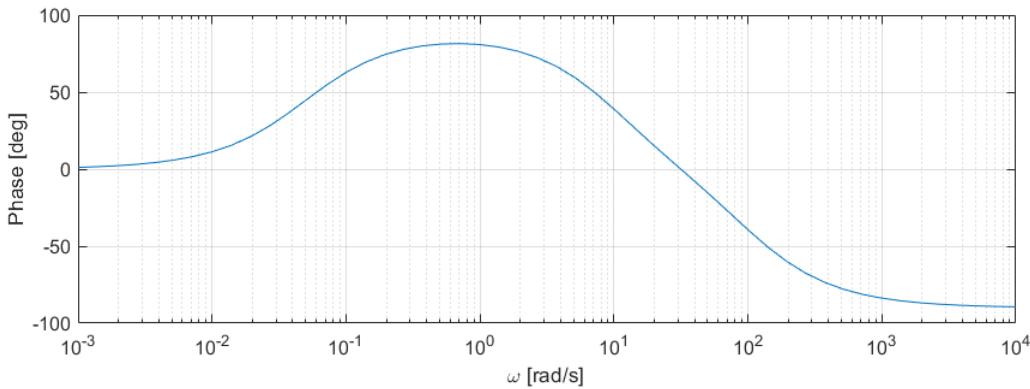
în cazul sistemelor de fază minimă [Ionescu 1985]. Astfel, ecuația de fază este:

$$\angle H(j\omega) = \angle \left( j \frac{\omega}{\hat{\omega}_f} + 1 \right) - \angle \left( j \frac{\omega}{\hat{\omega}_{f_1}} + 1 \right) - \angle \left( j \frac{\omega}{\hat{\omega}_{f_2}} + 1 \right),$$

de unde rezultă modelul:

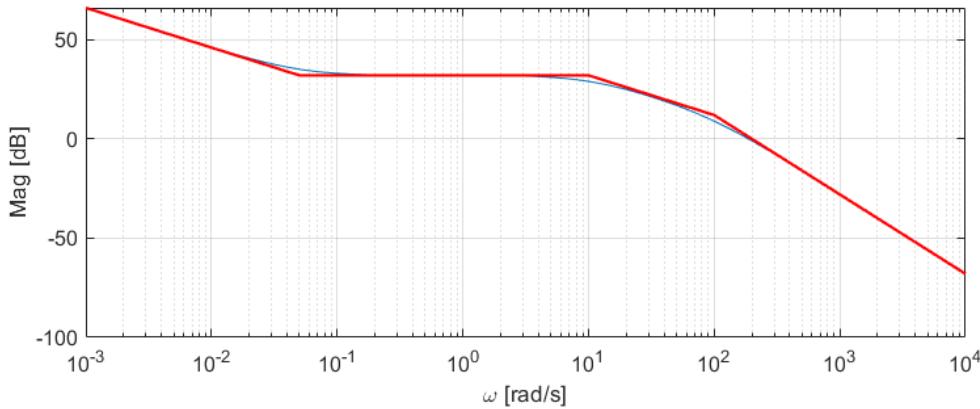
$$H(s) = 2 \cdot \frac{20s + 1}{(0.1s + 1)(0.01s + 1)}, \quad (5.5)$$

iar diagrama de fază este conform Figurii 5.8.



**Figura 5.8:** Caracteristica de fază a sistemului din Exemplul 5.2.1.

**Exemplul 5.2.2:** Se consideră diagrama Bode de modul a sistemului de fază **minimă** din Figura 5.9. Să se identifice structura și valorile parametrilor funcției de transfer  $H(s)$  care are acest răspuns în frecvență.



**Figura 5.9:** Diagrama Bode de modul a unui sistem de fază minimă.

Din această diagramă putem deduce că avem un integrator ( $p = 1$ ) pe baza pantei inițiale de  $-20$  [ $\text{dB}/\text{dec}$ ], iar pulsăriile de frângere sunt:  $\hat{\omega}_f = 5 \cdot 10^{-2}$  [ $\text{rad}/\text{s}$ ] (panta crește de la  $-20$  [ $\text{dB}/\text{dec}$ ] la  $0$  [ $\text{dB}/\text{dec}$ ]),  $\hat{\omega}_{f_1} = 10$  [ $\text{rad}/\text{s}$ ] (panta scade de la  $0$  [ $\text{dB}/\text{dec}$ ] la  $-20$  [ $\text{dB}/\text{dec}$ ]),

respectiv  $\hat{\omega}_{f_2} = 100 \text{ [rad/s]}$  (panta scade de la  $-20 \text{ [dB/dec]}$  la  $-40 \text{ [dB/dec]}$ ). De asemenea, deoarece avem un integrator, din CFJ putem deduce:

$$K^{dB} = 66 - (-20 \cdot \lg 10^{-3}) = 6 \text{ dB}.$$

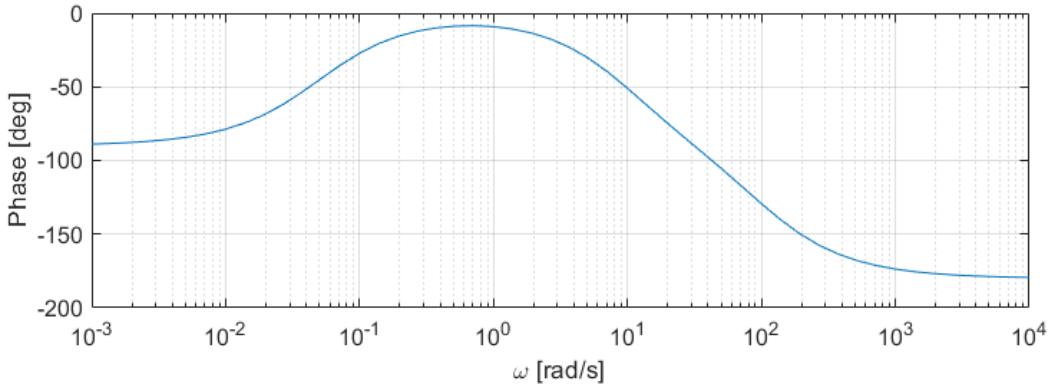
Acum, folosind informația *a priori* că sistemul este de fază minimă, ecuația de fază este:

$$\angle H(j\omega) = \angle \left( j \frac{\omega}{\hat{\omega}_f} + 1 \right) - \angle(j\omega) - \angle \left( j \frac{\omega}{\hat{\omega}_{f_1}} + 1 \right) - \angle \left( j \frac{\omega}{\hat{\omega}_{f_2}} + 1 \right),$$

de unde rezultă modelul:

$$H(s) = 2 \cdot \frac{20s + 1}{s(0.1s + 1)(0.01s + 1)}. \quad (5.6)$$

iar diagrama de fază este:



**Figura 5.10:** Caracteristica de fază a sistemului din Exemplul 5.2.2.

**Exemplul 5.2.3:** Se consideră diagrama Bode din Figura 5.11. Să se identifice structura și valorile parametrilor funcției de transfer  $H(s)$  care are acest răspuns în frecvență.

Din această diagramă putem deduce că avem un integrator ( $p = 1$ ), pe baza pantei inițiale de  $-20 \text{ [dB/dec]}$ , iar pulsațiile de frângere sunt:  $\hat{\omega}_f = 5 \cdot 10^{-2} \text{ [rad/s]}$  (panta crește de la  $-20 \text{ [dB/dec]}$  la  $0 \text{ [dB/dec]}$ ),  $\hat{\omega}_{f_1} = 10 \text{ [rad/s]}$  (panta scade de la  $0 \text{ [dB/dec]}$  la  $-20 \text{ [dB/dec]}$ ), respectiv  $\hat{\omega}_{f_2} = 100 \text{ [rad/s]}$  (panta scade de la  $-20 \text{ [dB/dec]}$  la  $-40 \text{ [dB/dec]}$ ). De asemenea, deoarece avem un integrator, din CFJ putem deduce:

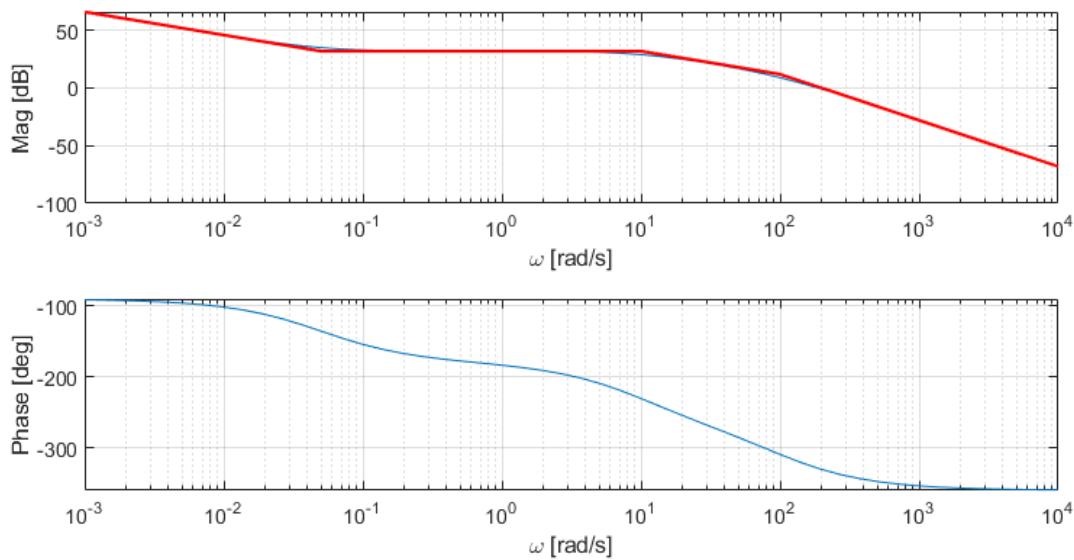
$$K^{dB} = 66 - (-20 \cdot \lg 10^{-3}) = 6 \text{ dB}.$$

Dar, observăm că în jurul pulsației de frângere a zeroului faza scade, ceea ce reprezintă o neconcordanță cu diagrama Bode de modul și marchează faptul că zeroul este de fază neminimă. Caracteristica de fază corectă este:

$$\angle H(j\omega) = -\angle \left( j \frac{\omega}{\hat{\omega}_f} + 1 \right) - \angle(j\omega) - \angle \left( j \frac{\omega}{\hat{\omega}_{f_1}} + 1 \right) - \angle \left( j \frac{\omega}{\hat{\omega}_{f_2}} + 1 \right),$$

de unde rezultă modelul matematic:

$$H(s) = 2 \cdot \frac{-20s + 1}{s(0.1s + 1)(0.01s + 1)}. \quad (5.7)$$

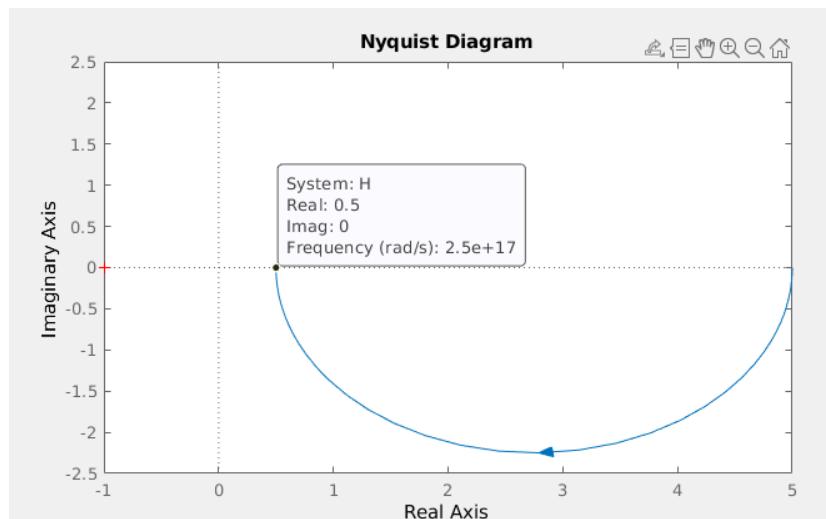


**Figura 5.11:** Diagrama Bode a unui sistem de fază neminimă.

### 5.3 Probleme propuse

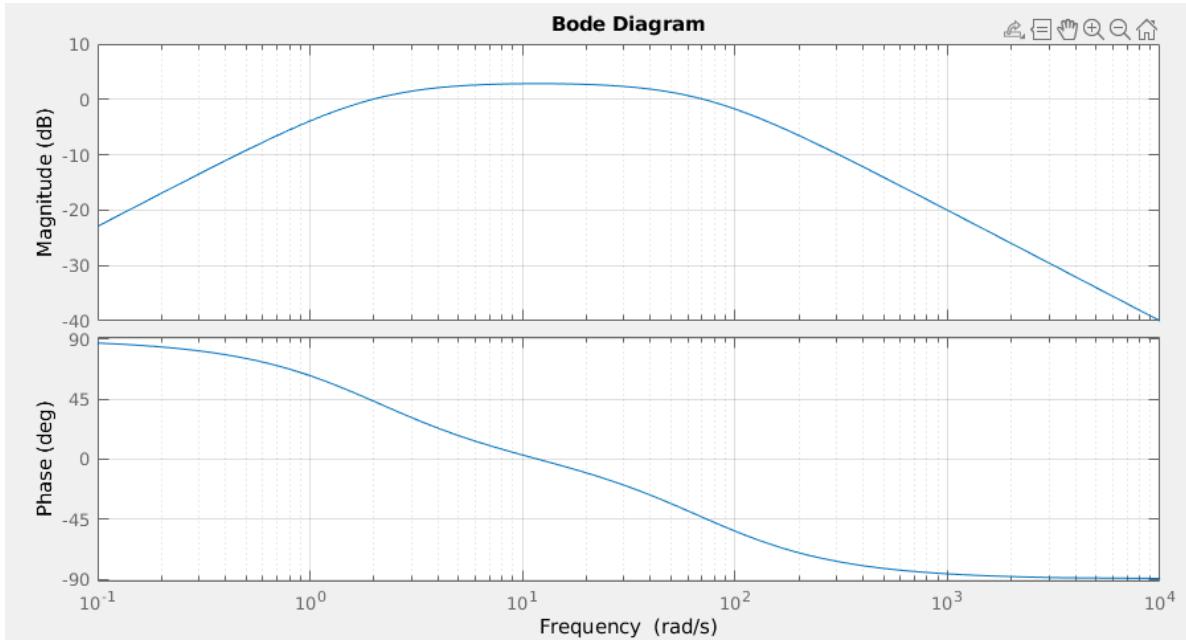
**Enunț:** Se consideră sistemele descrise prin următoarele răspunsuri în frecvență. Pentru fiecare sistem, să se deducă aproximativ celealte diagrame și să se justifice raționamentul. Precizați dacă sistemele au integratoare/derivatoare, poli și zerouri, respectiv pozițiile lor, intersecții cu axele de coordonate, cadranele în care se află punctele esențiale.

- 5.3.a) Se dă **diagrama Nyquist** din Figura 5.12 și se cere deducerea diagramelor Bode și Nichols;



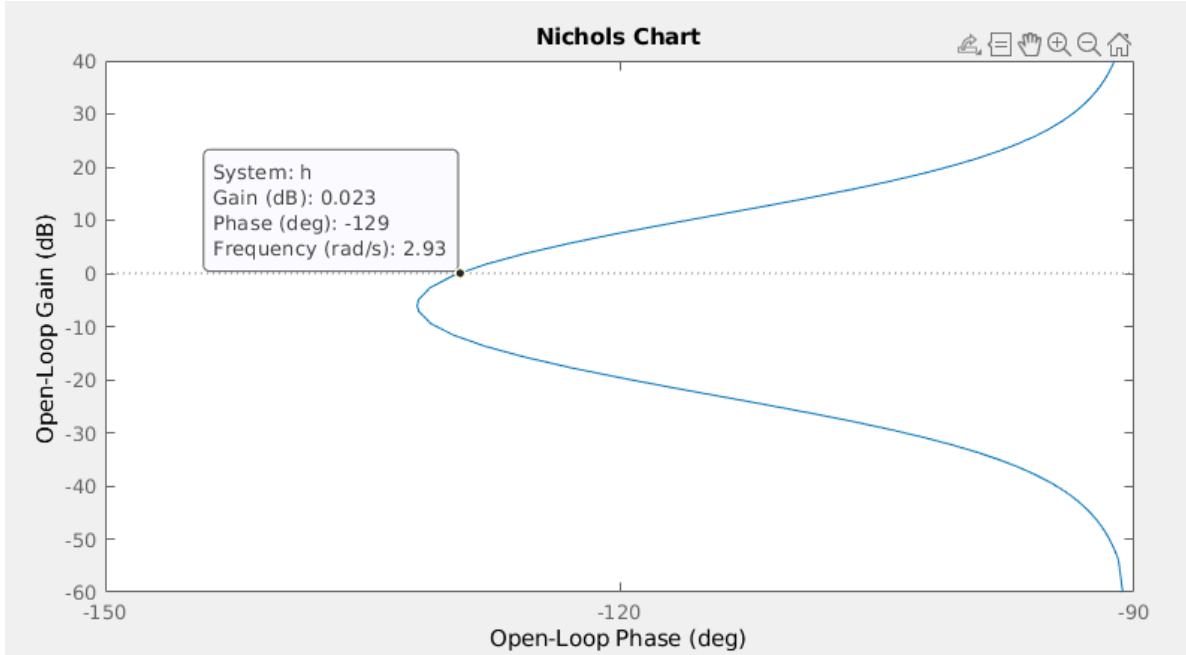
**Figura 5.12:** Diagrama Nyquist a unui sistem necunoscut.

- 5.3.b) Se dă **diagrama Bode** din Figura 5.13 și se cere deducerea diagramelor Nyquist și Nichols;



**Figura 5.13:** Diagrama Bode a unui sistem necunoscut.

- 5.3.c) Se dă **diagrama Nichols** din Figura 5.14 și se cere deducerea diagramelor Bode și Nyquist.



**Figura 5.14:** Diagrama Nichols a unui sistem necunoscut.



---

---

## Lucrarea 6

---

### Stabilitatea SRN. Criteriul Nyquist generalizat

6.1	Breviar teoretic . . . . .	58
6.2	Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist . . . . .	59
6.3	Probleme propuse . . . . .	61

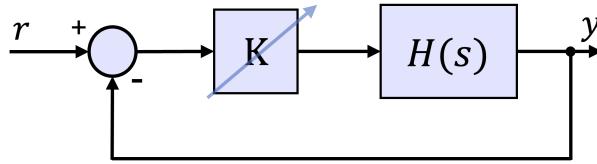
În această lucrare este prezentat criteriul Nyquist generalizat pentru studiul stabilității interne a sistemelor în buclă închisă, alături de modul de aplicare a criteriului utilizând diagrama Nyquist a sistemului în buclă deschisă.

## 6.1 Breviar teoretic

Se consideră sistemul de reglare în buclă închisă cu **reacție negativă unitară** (SRNU) din Figura 6.1, având procesul descris prin funcția de transfer  $H(s)$  și regulatorul proporțional variabil  $K > 0$ . Funcția de transfer echivalentă se calculează conform formulei:

$$H_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s) \cdot H_r(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_{des}(s)} = \frac{K \cdot H(s)}{1 + K \cdot H(s)}, \quad (6.1)$$

unde  $H_d(s)$  este f.d.t. pe calea directă,  $H_r(s)$  este f.d.t. pe calea de reacție,  $H_{des}(s)$  este f.d.t. în buclă deschisă,  $H_0(s)$  este f.d.t. echivalentă în buclă închisă.



**Figura 6.1:** Sistem de reglare cu reacție negativă unitară.

Stabilitatea sistemului în buclă închisă este dată de polii lui  $H_0(s)$ , adică rădăcinile polinomului caracteristic:

$$P_c(s) \equiv 1 + H_{des}(s) = 0. \quad (6.2)$$

Pe baza principiului argumentului (teorema lui Cauchy) din analiza complexă se deduce unul dintre cele mai importante și utile rezultate din teoria sistemelor de control.

### Teorema 6.1.1: Criteriul Nyquist generalizat (CNG)

1. Pentru un sistem LTI descris printr-o funcție de transfer **în buclă deschisă**  $H_{des}(s)$  se definesc:

- $N_-$ : numărul de poli din semiplanul stâng (poli stabili);
- $N_+$ : numărul de poli din semiplanul drept (poli instabili);
- $N_0$ : numărul de poli aflați pe axa imaginată (la limita de stabilitate).

2. Se trasează diagrama Nyquist (locul de transfer) pentru  $H_{des}(j\omega)$ . Se pune în evidență punctul critic  $-1 + 0j$ .

3. Se calculează variația argumentului  $\Delta_{arg}$  când pulsăția variază de la 0 la infinit.

4. Se verifică dacă este satisfăcută **condiția de stabilitate asymptotică a sistemului în buclă închisă** prin compararea variației argumentului citită de pe diagramă  $\Delta_{arg}$  cu cea teoretică datorată structurii lui  $H_{des}(s)$ ,  $\Delta$ :

$$\Delta = \Delta_{arg} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} (N_0 + 2N_+) = \Delta_{arg}. \quad (6.3)$$

5. Se poate generaliza în funcție de  $K > 0$  dacă în loc de punctul critic  $-1 + 0j$  se consideră punctul  $-1/K + 0j$ .

## 6.2 Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist

**Enunț:** Să se traseze diagrama Nyquist și să se studieze stabilitatea în buclă închisă pentru următoarele funcții de transfer în buclă deschisă:

$$6.2.a) \quad H_{des}(s) = 5 \cdot \frac{-s + 2}{s(s + 2)^2};$$

$$6.2.b) \quad H_{des}(s) = \frac{-s + 2}{s(s + 2)^2}.$$

**Rezolvare 6.2.a):** Pe baza structurii sistemului rezultă:

- $\hat{s}_1 = 0 \Rightarrow N_0 = 1;$
- $\hat{s}_{2,3} = -2 \Rightarrow N_- = 2;$
- $N_+ = 0$ , deoarece nu există poli cu partea reală pozitivă.

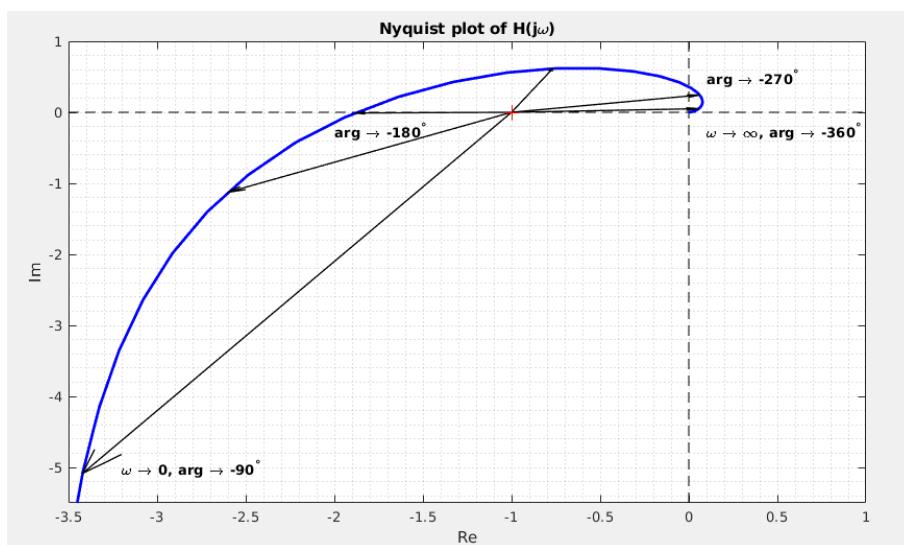
Pentru aplicarea criteriului Nyquist generalizat se consideră variația teoretică a argumentului:

$$\Delta = \frac{\pi}{2}(N_0 + 2N_+) = \frac{\pi}{2}(1 + 2 \cdot 0) = \frac{\pi}{2}. \quad (6.4)$$

Variația argumentului pentru pulsării de la 0 la  $\infty$  în urma trasării locului de transfer se poate deduce considerând vectori cu originea în punctul critic  $-1 + 0j$  și cu vârful pe locul de transfer, precum în Figura 6.2. Se poate observa că argumentul pornește la limita inferioară (CFJ) din valoarea  $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$ , ajungând la limita superioară a pulsărilor (CFI) la valoarea  $-2\pi = -360^\circ$ . Astfel, rezultă o variație a argumentului de:

$$\Delta_{arg} = (-360^\circ) - (-90^\circ) = -270^\circ = -\frac{3\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} = \Delta. \quad (6.5)$$

În concluzie, sistemul în buclă închisă **NU este** intern asymptotic stabil.



**Figura 6.2:** Variația argumentului pentru sistemul 6.2.a).

**Rezolvare 6.2.b):** Din analiza structurii sistemului:

$$H_{des}(s) = \frac{-s + 2}{s(s + 2)^2}, \quad (6.6)$$

care este identic celui de la punctul a) cu excepția factorului de proporționalitate, rezultă:

- $\hat{s}_1 = 0 \Rightarrow N_0 = 1$ ;
- $\hat{s}_{2,3} = -2 \Rightarrow N_- = 2$ ;
- $N_+ = 0$ , deoarece nu există poli cu partea reală pozitivă.

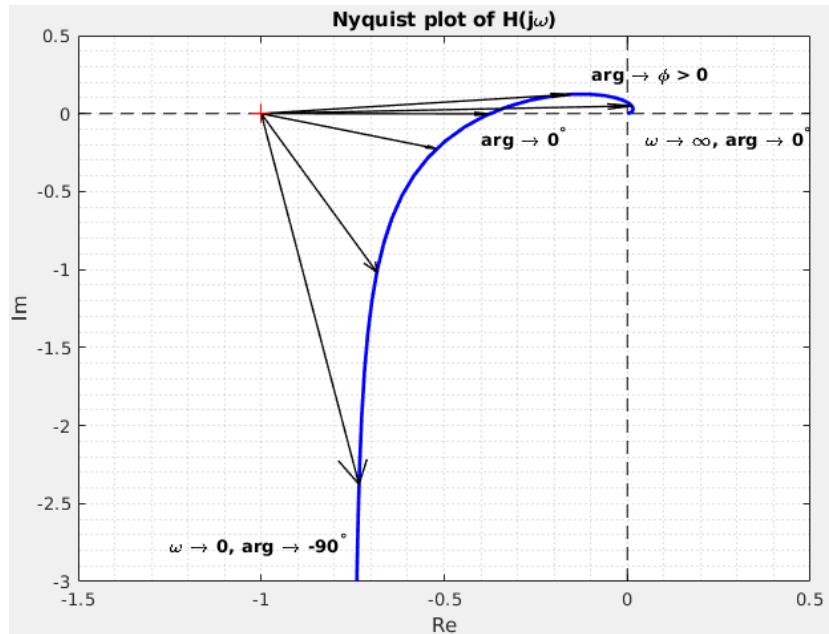
Pentru aplicarea criteriului Nyquist generalizat se consideră variația teoretică a argumentului:

$$\Delta = \frac{\pi}{2}(N_0 + 2N_+) = \frac{\pi}{2}(1 + 2 \cdot 0) = \frac{\pi}{2}. \quad (6.7)$$

Variația argumentului pentru pulsării de la 0 la  $\infty$  în urma trasării locului de transfer se poate deduce considerând vectori cu originea în punctul critic  $-1 + 0j$  și cu vârful pe locul de transfer, precum în Figura 6.3. Se poate observa că argumentul pornește la limita inferioară (CFJ) din valoarea  $-\frac{\pi}{2} = -90^\circ$ , ajungând la un moment dat la valoarea  $0^\circ$ , urcând la o anumită valoare maximă  $\phi$ , iar pentru limita superioară a pulsărilor (CFI) revenind la valoarea  $0^\circ$ . Astfel, rezultă o variație a argumentului de:

$$\Delta_{arg} = (0^\circ) - (-90^\circ) = 90^\circ = \frac{\pi}{2} = \Delta. \quad (6.8)$$

În concluzie, sistemul în buclă închisă este intern asimptotic stabil.



**Figura 6.3:** Variația argumentului pentru sistemul 6.2.b).

**Observație:** În MATLAB, stabilitatea sistemului închis pe baza sistemului deschis  $H_{des}(s)$  trasat, respectiv marginile de stabilitate, se pot citi din opțiunile **Characteristics** → **Minimum Stability Margins** sau **Characteristics** → **All Stability Margins**.

### 6.3 Probleme propuse

**Problema 6.3.1:** Să se traseze diagrama Nyquist și să se studieze stabilitatea în buclă închisă pentru următoarele funcții de transfer în buclă deschisă:

a)  $H_{des}(s) = \frac{s+9}{s+5};$

l)  $H_{des}(s) = \frac{10}{s^2 + 0.2s + 1};$

b)  $H_{des}(s) = \frac{s-9}{s+5};$

m)  $H_{des}(s) = \frac{10(-s+1)}{(s^2 + 0.2s + 1)};$

c)  $H_{des}(s) = \frac{s-9}{s-5};$

n)  $H_{des}(s) = \frac{1}{(s+1)^n}, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 8\};$

d)  $H_{des}(s) = \frac{s+9}{s-5};$

o)  $H_{des}(s) = \frac{1}{s(s+1)^n}, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 8\};$

e)  $H_{des}(s) = \frac{-s+9}{s+5};$

p)  $H_{des}(s) = \frac{1}{(s+1)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)},$   
 $\alpha \in \{0.1, 0.2, 1\};$

f)  $H_{des}(s) = -\frac{s-9}{s-5};$

q)  $H_{des}(s) = \frac{100}{(s+10)^2} \left( \frac{1}{s+1} + \frac{0.5}{s+0.05} \right);$

g)  $H_{des}(s) = -\frac{s+9}{-s+5};$

r)  $H_{des}(s) = \frac{(s+6)^2}{s(s+1)^2(s+36)};$

h)  $H_{des}(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s+9}{s+5} \cdot e^{-0.1s};$

s)  $H_{des}(s) = \frac{1-\alpha s}{(s+1)^3},$   
 $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\};$

i)  $H_{des}(s) = \frac{5s^2 + 2s + 1}{s(s-1)^2};$

t)  $H_{des}(s) = \frac{1-\alpha s}{s(s+1)^3},$   
 $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\}.$

j)  $H_{des}(s) = \frac{s(s+6)}{(s+4)(s-1)};$

k)  $H_{des}(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+4)};$

(\*) Studiați stabilitatea în buclă închisă în funcție de parametrul  $K > 0$  pentru bucla deschisă descrisă de  $H_{des}(s) = K \cdot H'_{des}(s)$ , cu  $H'_{des}(s)$  fixat definit la subpunctele de mai sus.



---

---

## Lucrarea 7

---

### Stabilitatea SRN. Criteriul Nyquist simplificat

7.1	Breviar teoretic . . . . .	64
7.2	Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist . . . . .	65
7.3	Probleme rezolvate utilizând diagramele Bode și Nichols . .	67
7.4	Probleme propuse . . . . .	71

În această lucrare se prezintă criteriul Nyquist simplificat (practic) pentru studiul stabilității interne a sistemelor în buclă închisă, utilizat cel mai adesea în practică. Suplimentar, se prezintă modul de aplicare al criteriului utilizând diagramele Nyquist, Bode, și Nichols ale sistemului în buclă deschisă.

## 7.1 Breviar teoretic

Se pornește de la contextul sistemelor cu reacție negativă unitară expus în Lucrarea 6.

În practică, majoritatea proceselor nu prezintă poli instabili sau mai mult de doi poli pe axa imaginară (în general integratoare). Un factor suplimentar care ne conduce la criteriul Nyquist practic (simplificat) este necesitatea de a avea un criteriu care, pe lângă afirmația calitativă că un sistem este stabil sau instabil, să prezinte o *metrică* asupra gradului de apropiere a sistemului de instabilitate.

Astfel, precondiția de aplicare a criteriului simplificat este:

$$N_+ = 0 \text{ și } N_0 \in \{0, 1, 2\}. \quad (7.1)$$

### Teorema 7.1.1: Criteriul Nyquist simplificat (CNS)

1. Pentru un sistem LTI descris printr-o funcție de transfer în buclă deschisă  $H_{des}(s)$  care îndeplinește **precondiția de mai sus**, se definesc:

- **pulsăția de tăiere**,  $\omega_t$ :  $|H_{des}(j\omega_t)| = 1$ ;
- **pulsăția la faza de  $-\pi$** ,  $\omega_{-\pi}$ :  $\angle H_{des}(j\omega_{-\pi}) = -\pi$ ;
- **marginea de fază**,  $\gamma_k$ , definită ca distanța dintre faza de  $-\pi$  și faza locului de transfer la pulsăția  $\omega_t$ :

$$\gamma_k = \angle H_{des}(j\omega_t) - (-\pi) = \pi + \angle H_{des}(j\omega_t); \quad (7.2)$$

- **marginea de câștig**,  $m_k$ , definită ca modulul locului de transfer la pulsăția  $\omega_{-\pi}$ :

$$m_k = |H_{des}(j\omega_{-\pi})|. \quad (7.3)$$

2. Se trasează diagrama Nyquist (locul de transfer) pentru  $H_{des}(j\omega)$ . Se pune în evidență punctul  $-1 + 0j$ .

3. Se verifică dacă este satisfăcută **condiția de stabilitate asimptotică a sistemului în buclă închisă**, care poate fi formulată în mai multe moduri echivalente:

- condiția utilizând marginile de fază și de câștig:

$$\gamma_k > 0 \text{ și } m_k < 1 \Leftrightarrow m_k^{dB} < 0.$$

- condiția utilizând pulsăția de tăiere și pulsăția la faza de  $-\pi$ :

$$\omega_t < \omega_{-\pi}.$$

- Punctul critic  $-1 + 0j$  trebuie să rămână în stânga locului de transfer când  $\omega$  parcurge domeniul  $(0, \infty)$ .

**Observație:** În MATLAB, stabilitatea sistemului închis pe baza sistemului deschis  $H_{des}(s)$  trasat, respectiv marginile de stabilitate, se pot citi din opțiunile **Characteristics** → **Minimum Stability Margins** sau **Characteristics** → **All Stability Margins**. Cea din urmă consideră toate pulsăriile posibile la faza de  $-\pi$ , i.e.  $-\pi \pm 2\ell\pi$ ,  $\ell \in \mathbb{Z}$ .

**Observație:** În MATLAB, marginea de câștig se definește ca fiind inversul echivalentului din lucrare, i.e.  $m_k^{\text{lucrare}} = \frac{1}{m_k^{\text{MATLAB}}}$ . În acest sens, echivalentul în decibeli va avea semn inversat față de ceea ce rezultă din calculul conform formulei (7.3):  $m_k^{\text{dB,lucrare}} = -m_k^{\text{dB,MATLAB}}$ .

**Observație:** Pot exista ambele margini de stabilitate, una dintre ele sau niciuna. Calitatea unui sistem de a fi stabil sau instabil nu este condiționată de existența marginilor de stabilitate. În caz de ambiguitate, se recomandă utilizarea **criteriului Nyquist generalizat**.

## 7.2 Probleme rezolvate utilizând diagrama Nyquist

**Enunț:** Să se traseze diagrama Nyquist și să se studieze stabilitatea în buclă închisă pentru următoarele funcții de transfer în buclă deschisă:

$$7.2.a) \ H_{des}(s) = 5 \frac{-s+2}{s(s+2)^2};$$

$$7.2.b) \ H_{des}(s) = \frac{-s+2}{s(s+2)^2}.$$

**Rezolvare 7.2.a):** Pe baza structurii sistemului rezultă:

- $\hat{s}_1 = 0 \Rightarrow N_0 = 1 \checkmark$ ;
- $\hat{s}_{2,3} = -2 \Rightarrow N_- = 2$ ;
- $N_+ = 0 \checkmark$ , deoarece nu există poli cu partea reală pozitivă.

Din  $N_0 = 1$  și  $N_+ = 0$  rezultă că se poate aplica și criteriul Nyquist simplificat.

Prin aplicarea criteriului Nyquist practic, rezultă următoarele valori:

$$\omega_t : \left| 5 \frac{-j\omega + 2}{j\omega(j\omega + 2)^2} \right| = 1 \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 + 4}}{\omega(\sqrt{\omega^2 + 4})^2} = 1 \Leftrightarrow \omega^4 + 4\omega^2 - 25 = 0 \Rightarrow \omega_t \approx 1.84 \text{ [rad/s].}$$

Scriind funcția de transfer în formă normalizată:

$$H_{des}(s) = \frac{5}{2} \cdot \frac{-\frac{s}{2} + 1}{s \left( \frac{s}{2} + 1 \right)^2},$$

rezultă marginea de fază:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \pi + \angle \frac{5}{2} + \angle \left( -j \frac{\omega_t}{2} + 1 \right) - \angle(j\omega_t) - 2 \cdot \angle \left( j \frac{\omega_t}{2} + 1 \right) \\ &= \pi - \frac{\pi}{2} - 3 \arctan \left( \frac{\omega_t}{2} \right) = -0.6605 \text{ [rad]} = -37.8^\circ < 0, \end{aligned}$$

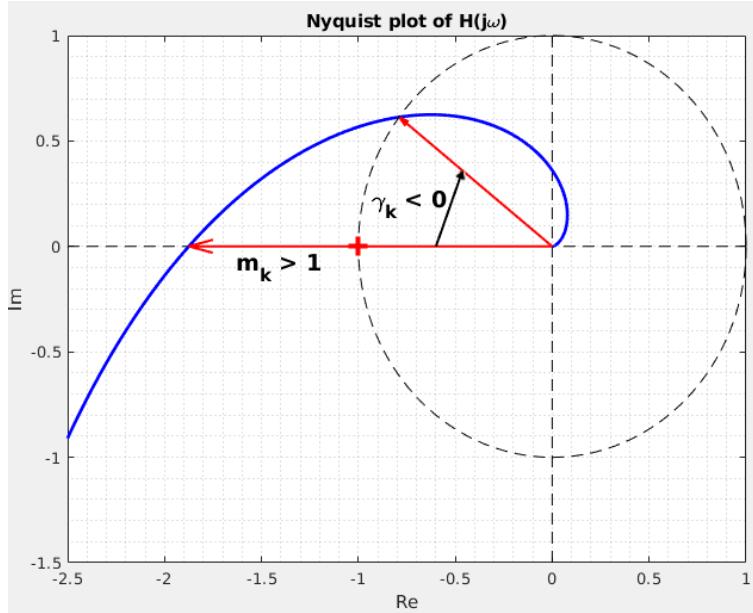
Suplimentar, pulsația la faza de  $-\pi$  se poate calcula rezolvând ecuația:

$$\omega_{-\pi} : -\frac{\pi}{2} - 3 \arctan \left( \frac{\omega}{2} \right) = -\pi \Leftrightarrow \omega_{-\pi} = 2 \cdot \tan \left( \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1.15 \text{ [rad/s].}$$

Marginea de câstig devine:

$$m_k = \left| \frac{5}{\omega_{-\pi} \sqrt{\omega_{-\pi}^2 + 4}} \right| = 1.875 > 1.$$

Deoarece (i)  $\gamma_k < 0$  și  $m_k > 1$  rezultă faptul că sistemul în buclă închisă **NU este intern asimptotic stabil**. Concluzia se putea obține și pe baza uneia dintre cantități doar, cealaltă fiind redundantă în contextul precondiției (7.1). Marginile de stabilitate sunt ilustrate în Figura 7.1. În mod echivalent, (ii) se deduce aceeași concluzie asupra stabilității prin faptul că  $\omega_t > \omega_{-\pi}$ . În mod echivalent, (iii) se deduce aceeași concluzie asupra stabilității prin faptul că punctul critic  $-1 + 0j$  **NU rămâne în stânga** locului de transfer când pulsația parcurge intervalul  $\omega \in (0, \infty)$ .



**Figura 7.1:** Criteriul Nyquist simplificat figurat pentru sistemul 7.2.a).

**Rezolvare 7.2.b):** Din analiza structurii sistemului:

$$H_{des}(s) = \frac{-s + 2}{s(s + 2)^2}, \quad (7.4)$$

care este identic celui de la punctul a) cu excepția factorului de proporționalitate, rezultă:

- $\hat{s}_1 = 0 \Rightarrow N_0 = 1 \checkmark$ ;
- $\hat{s}_{2,3} = -2 \Rightarrow N_- = 2$ ;

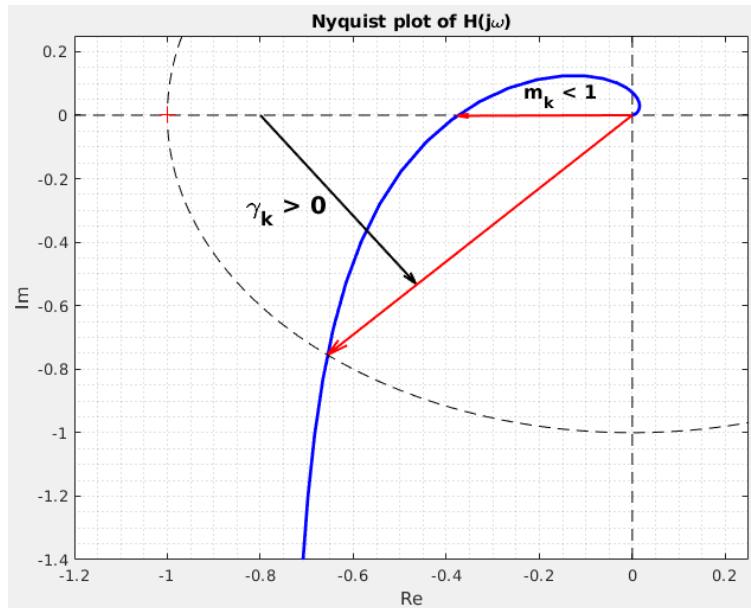
- $N_+ = 0 \checkmark$ , deoarece nu există poli cu partea reală pozitivă.

Din  $N_0 = 1$  și  $N_+ = 0$  rezultă că se poate aplica și criteriul Nyquist simplificat.

Prin aplicarea criteriului Nyquist practic, reies prin calcule sau prin citire directă din MATLAB, următoarele valori, ilustrate în Figura 7.2:

$$\omega_t = 0.48, \quad \omega_{-\pi} = 1.15, \quad \gamma_k = +49^\circ, \quad m_k = 0.375. \quad (7.5)$$

Deoarece (i)  $\gamma_k > 0$  și  $m_k < 1$  rezultă faptul că sistemul în buclă închisă este intern asimptotic stabil. Concluzia se poate obține și pe baza uneia dintre cantități doar, ceea ce fiind redundantă în contextul precondiției (7.1). Marginile de stabilitate sunt ilustrate în Figura 7.2. În mod echivalent, (ii) se deduce aceeași concluzie asupra stabilității prin faptul că  $\omega_t < \omega_{-\pi}$ . În mod echivalent, (iii) se deduce aceeași concluzie asupra stabilității prin faptul că punctul critic  $-1 + 0j$  rămâne în stânga locului de transfer când pulsăția parcurge intervalul  $\omega \in (0, \infty)$ .



**Figura 7.2:** Criteriul Nyquist simplificat figurat pentru sistemul 7.2.b).

### 7.3 Probleme rezolvate utilizând diagramele Bode și Nichols

**Enunț:** Să se traseze diagramele Bode, respectiv Nichols și să se studieze stabilitatea în buclă închisă pentru următoarele funcții de transfer în buclă deschisă:

$$7.3.a) \quad H_{des}(s) = -2 \frac{s-2}{s(s+6)};$$

$$7.3.b) \quad H_{des}(s) = \frac{8(s+9)}{s(s+50)} e^{-2s}.$$

**Rezolvare 7.3.a):** Primul sistem are modelul în buclă deschisă:

$$H_{des}(s) = -2 \frac{s-2}{s(s+6)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{2}s+1}{s(\frac{1}{6}s+1)}, \quad (7.6)$$

se deduc  $N_0 = 1$ ,  $N_+ = 0$ , de unde rezultă că poate fi aplicat criteriul Nyquist simplificat.

Diagramele Bode și Nichols pentru acest exemplu, cu figurarea marginilor de fază și de câstig, sunt ilustrate în Figura 7.3. **Pornind de la trasarea diagramei Bode prin asimptote reiese că pulsația de tăiere este subunitară.** Acest aspect poate fi exploatat pentru aproximarea analitică a pulsației de tăiere astfel:

$$\omega_t : \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1}}{\omega \sqrt{\left(\frac{\omega}{6}\right)^2 + 1}} = 1 \stackrel{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2, \left(\frac{\omega}{6}\right)^2 \ll 1}{\approx} \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 + 1}}{\omega \sqrt{\left(\frac{\omega}{6}\right)^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \omega_t \approx \frac{2}{3},$$

ceea ce este aproape de valoarea reală  $\omega_t = 0.702$  [rad/s]. Ulterior, marginea de fază devine, utilizând forma normalizată a funcției de transfer:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \pi + \angle\left(\frac{2}{3}\right) + \angle\left(-j\frac{\omega_t}{2} + 1\right) - \angle(j\omega_t) - \angle\left(j\frac{\omega_t}{6} + 1\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_t}{2}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_t}{6}\right) = 1.1425 \text{ [rad]} = 65.4^\circ > 0. \end{aligned}$$

Pulsația la faza de  $-\pi$  se obține pe baza ecuației:

$$\omega_{-\pi} : -\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{6}\right) = -\pi \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right) + \arctan\left(\frac{\omega}{6}\right) = \frac{\pi}{2}. \quad (7.7)$$

O astfel de ecuație se poate rezolva aplicând funcția tangentă și ținând cont de identitățile trigonometrice:

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta} \Leftrightarrow \arctan \alpha \pm \arctan \beta = \arctan\left(\frac{\alpha \pm \beta}{1 \mp \alpha \beta}\right). \quad (7.8)$$

Astfel, ecuația (7.7) devine:

$$\frac{\frac{\omega}{2} + \frac{\omega}{6}}{1 - \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\omega}{6}} = \tan \frac{\pi}{2} = \text{nedefinit} \Rightarrow 1 - \frac{\omega^2}{12} = 0 \Rightarrow \omega_{-\pi} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46 \text{ [rad/s]}.$$

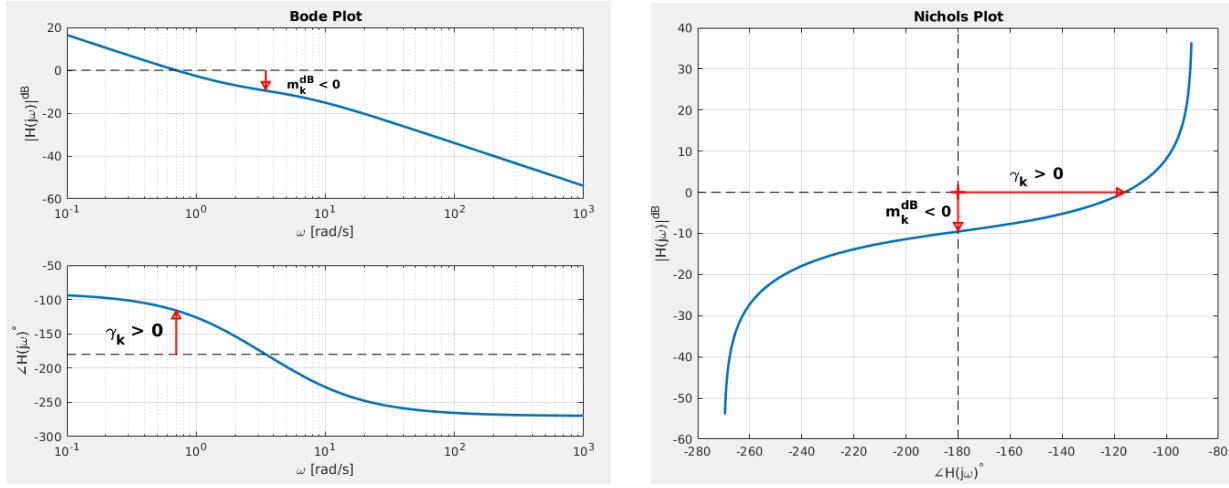
Marginea de câstig se poate determina ca fiind:

$$m_k = 2 \cdot \frac{\sqrt{\omega^2 + 4}}{\omega \sqrt{\omega^2 + 36}} \Big|_{\omega=\omega_{-\pi}} = 0.333 \Rightarrow m_k^{\text{dB}} = -9.54 \text{ [dB]}.$$

Pe baza criteriului Nyquist simplificat rezultă că sistemul **este intern asimptotic stabil**, atât pe baza formulării cu marginile de stabilitate ( $\gamma_k > 0$  și  $m_k^{\text{dB}} < 0$ ), cât și din cea bazată pe pulsațiile corespunzătoare ( $\omega_t < \omega_{-\pi}$ ).

**Rezolvare 7.3.b):** Al doilea sistem are pe bucla deschisă:

$$H_{des}(s) = \frac{8(s+9)}{s(s+50)} e^{-2s} = \frac{36}{25} \cdot \frac{\frac{1}{9}s+1}{s\left(\frac{1}{50}s+1\right)}, \quad (7.9)$$



(a) CNS pentru D. Bode a sistemului 7.3.a) (b) CNS pentru D. Nichols a sistemului 7.3.a)

**Figura 7.3:** Diagramele Bode și Nichols pentru Problema 7.3.a).

se deduc  $N_0 = 1$ ,  $N_+ = 0$ , de unde rezultă că poate fi aplicat criteriul Nyquist simplificat.

Pornind de la trasarea diagramei Bode prin asimptote reiese că pulsărea de tăiere  $\omega_t \in (1, 2)$ . Acest aspect poate fi exploarat pentru aproximarea analitică a pulsării de tăiere, prin faptul că  $(\frac{\omega}{9})^2 \ll 1$  și  $(\frac{\omega}{50})^2 \ll 1$ :

$$\frac{36}{25} \cdot \frac{\sqrt{(\frac{\omega}{9})^2 + 1}}{\omega \sqrt{(\frac{\omega}{50})^2 + 1}} = 1 \approx \frac{36}{25} \cdot \frac{\sqrt{(\frac{\omega}{9})^2 + 1}}{\omega \sqrt{(\frac{\omega}{50})^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \omega_t \approx \frac{36}{25} = 1.44 \text{ [rad/s]},$$

ceea ce ne duce la un rezultat apropiat de realitate, valoarea exactă fiind  $\omega_t = 1.46 \text{ [rad/s]}$ .

Marginea de fază rezultă în continuare:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \pi + \angle\left(\frac{36}{25}\right) + \angle\left(j\frac{\omega_t}{9} + 1\right) - \angle(j\omega_t) - \angle\left(j\frac{\omega_t}{50} + 1\right) + \angle e^{-2\omega_t j} \\ &= \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega_t}{9}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_t}{50}\right) - 2\omega_t = -1.1793 \text{ [rad]} = -67.5^\circ < 0. \end{aligned}$$

Pentru deducerea pulsării la faza de  $-\pi$  avem ecuația:

$$\omega_{-\pi} : \arctan\left(\frac{\omega_t}{9}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_t}{50}\right) - 2\omega_t = -\pi.$$

În ecuația de mai sus se regăsește variabila necunoscută  $\omega$  atât în funcții trigonometrice, cât și într-o expresie polinomială, prin urmare, este o **ecuație transcendentă**. Aceste tipuri de ecuații nu se pot rezolva analitic, ci doar prin aproximări până la o toleranță impusă. Definim funcția:

$$f(\omega) := \arctan\left(\frac{\omega_t}{9}\right) - \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega_t}{50}\right) - 2\omega_t + \pi = \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{\omega_t}{9}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_t}{50}\right) - 2\omega_t.$$

Funcția  $f(\omega)$  este continuă și se constată pe baza caracteristicii de fază din diagrama Bode că soluția ei este în intervalul  $\omega \in (0.5, 1)$ .

Pe baza continuității, se poate aproxima soluția  $\omega_{-\pi}$  prin bisecții ale intervalului de căutare, deoarece pentru un interval arbitrar  $(\omega_1, \omega_2)$ , dacă  $f(\omega_1) \cdot f(\omega_2) < 0$ , atunci  $\omega^*$  pentru care  $f(\omega^*) = 0$  se găsește în intervalul deschis  $(\omega_1, \omega_2)$ . În cazul nostru se constată:

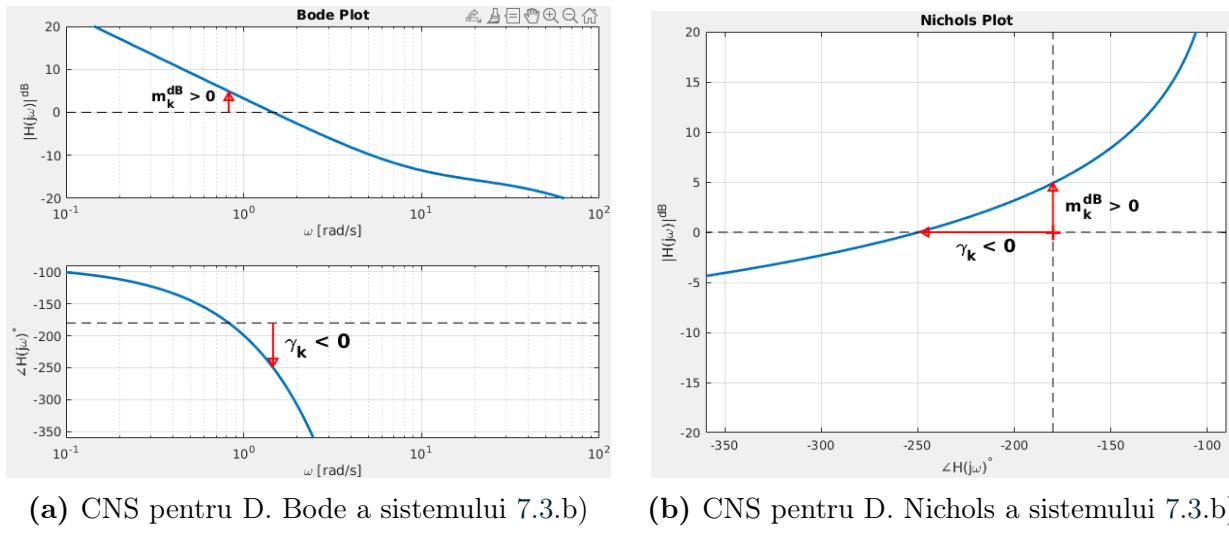
$$\begin{aligned} f(0.5) &= 0.6163 > 0, \quad f(1) = -0.3385 < 0, \quad f(0.5) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \omega_{-\pi} \in (0.5, 1); \\ f(0.75) &= 0.1389 > 0, \quad f(0.75) \cdot f(1) < 0 \Rightarrow \omega_{-\pi} \in (0.75, 1); \\ f(0.85) &= -0.0520 < 0, \quad f(0.75) \cdot f(0.85) < 0 \Rightarrow \omega_{-\pi} \in (0.75, 0.85); \\ &\vdots \\ \omega_{-\pi} &\approx 0.825 \text{ [rad/s].} \end{aligned}$$

Marginea de câstig se calculează apoi ca:

$$m_k = \frac{36}{25} \cdot \left. \frac{\sqrt{\left(\frac{\omega}{9}\right)^2 + 1}}{\omega \sqrt{\left(\frac{\omega}{50}\right)^2 + 1}} \right|_{\omega_{-\pi}=0.825} = 1.7525 > 1 \Leftrightarrow m_k^{dB} = 4.8733 > 0.$$

Pe baza criteriului Nyquist simplificat rezultă că sistemul **NU este intern asimptotic stabil**, atât pe baza formulării cu marginile de stabilitate ( $\gamma_k < 0$  și  $m_k^{dB} > 0$ ), cât și din cea bazată pe pulsăriile corespunzătoare ( $\omega_t > \omega_{-\pi}$ ).

Diagramele Bode și Nichols pentru acest exemplu, cu figurarea marginilor de fază și de câstig, sunt ilustrate în Figura 7.4



(a) CNS pentru D. Bode a sistemului 7.3.b)      (b) CNS pentru D. Nichols a sistemului 7.3.b)

Figura 7.4: Diagramele Bode și Nichols pentru Problema 7.3.b).

**Discuție:** ce se întâmplă dacă variază factorul de proporționalitate  $K$ ? Dar dacă variază timpul mort  $\tau_m$ ? Studiați impactul lor asupra marginilor de stabilitate și a pulsărilor acestora.

## 7.4 Probleme propuse

**Problema 7.4.1** Să se traseze diagramele Nyquist, Bode și Nichols pentru următoarele funcții de transfer în buclă deschisă și să se studieze stabilitatea în buclă închisă pe baza criteriului Nyquist simplificat. Figurați marginile de stabilitate. Verificați condițiile de aplicabilitate a criteriului simplificat, iar, în caz contrar, folosiți criteriul Nyquist generalizat.

a)  $H_{des}(s) = \frac{s+9}{s+5};$

h)  $H_{des}(s) = \frac{10(-s+1)}{(s^2 + 0.2s + 1)};$

b)  $H_{des}(s) = \frac{s-9}{s+5};$

i)  $H_{des}(s) = \frac{1}{(s+1)^n}, \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 8\};$

c)  $H_{des}(s) = \frac{-s+9}{s+5};$

j)  $H_{des}(s) = \frac{1}{s(s+1)^n},$   
 $n \in \{1, 2, 3, 4, 8\};$

d)  $H_{des}(s) = -\frac{s-9}{s-5};$

k)  $H_{des}(s) = \frac{100}{(s+10)^2} \left( \frac{1}{s+1} + \frac{0.5}{s+0.05} \right);$

e)  $H_{des}(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{s+9}{s+5} \cdot e^{-0.1s};$

l)  $H_{des}(s) = \frac{1-\alpha s}{(s+1)^3},$   
 $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\};$

f)  $H_{des}(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+4)};$

m)  $H_{des}(s) = \frac{1-\alpha s}{s(s+1)^3},$   
 $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\}.$

g)  $H_{des}(s) = \frac{10}{s^2 + 0.2s + 1};$

(\*) Se consideră structura extinsă în ipoteza existenței unui regulator proporțional variabil  $K > 0$ , respectiv a unui timp mort variabil  $\tau_m > 0$ ,  $H_{des}(s) = K \cdot H'_{des}(s) \cdot e^{-\tau_m s}$ , cu  $H'_{des}(s)$  fixat definit la subpunctele de mai sus. Discutați stabilitatea în buclă închisă în funcție de parametrii  $K$  și  $\tau_m$  (i) în ipoteza în care unul dintre ei este fixat și variază celălalt; (ii) în ipoteza în care cei doi variază simultan.



---

---

## Lucrarea 8

---

### Performanțele SRN pe baza răspunsului în frecvență

8.1 Cercurile de modul și fază constantă . . . . .	74
8.2 Performanțele SRN deduse pe baza RF al sistemului deschis	75
8.3 Funcțiile de senzitivitate . . . . .	77
8.4 Probleme rezolvate . . . . .	78
8.5 Probleme propuse . . . . .	80

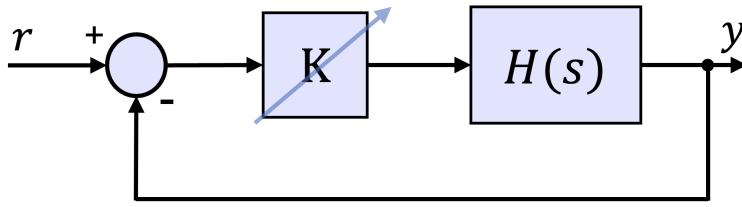
În această lucrare se prezintă cercurile de modul constant și de fază constantă pentru sistemul în buclă închisă, utilizate pentru a deduce performanțele relevante pentru regimul staționar și cel tranzitoriu. Toate aceste citiri se efectuează pe baza răspunsului în frecvență (RF) a sistemului în buclă deschisă. Se vor ilustra modurile de citire, respectiv validare a acestor performanțe.

## 8.1 Cercurile de modul și fază constantă

Se pornește de la contextul sistemelor cu reacție negativă unitară (**SRNU**) –  $H_r(s) = 1$  – expus în Lucrarea 6, precum în Figura 8.1. Se poate stabili legătura matematică între expresia lui  $H_0(s)$  și  $H_d(s) \equiv H_{des}(s) = K \cdot H(s)$ :

$$H_0(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s) \cdot H_r(s)} = \frac{H_d(s)}{1 + H_d(s)} = \frac{P(\omega) + jQ(\omega)}{1 + P(\omega) + jQ(\omega)}, \quad (8.1)$$

unde  $H_d(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ .



**Figura 8.1:** Sistem de reglare cu reacție negativă unitară.

**Observație:** Spre deosebire de criteriul Nyquist (generalizat și simplificat) care funcționează și dacă reacția este neunitară, analiza performanțelor folosind cercurile de modul constant se poate utiliza doar în cazul SRNU.

Impunând **modulul lui  $H_0(j\omega)$  la o anumită valoare** pozitivă:  $M(\omega) = |H_0(j\omega)|$  se deduce locul geometric descris prin ecuația următorului cerc de centru  $(X_0, Y_0)$  și rază  $R$ :

$$X_0 = \frac{-M^2}{M^2 - 1}, \quad Y_0 = 0, \quad R = \left| \frac{M}{M^2 - 1} \right|. \quad (8.2)$$

**Exemplu de interpretare:** pulsația pentru care  $|H_0(j\omega)| = 0.8$  trebuie citită de pe diaograma Nyquist la intersecția locului de transfer  $H_d(j\omega)$  cu cercul corespunzător lui  $M = 0.8$ .

Impunând **faza lui  $H_0(j\omega)$  la o anumită valoare**:  $N(\omega) = \tan \angle H_0(j\omega)$  se deduce locul geometric descris prin ecuația următorului cerc de centru  $(X_0, Y_0)$  și rază  $R$ :

$$X_0 = -\frac{1}{2}, \quad Y_0 = \frac{1}{2N}, \quad R = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{(2N)^2}}. \quad (8.3)$$

**Exemplu de interpretare:** pulsația pentru care  $\angle H_0(j\omega) = 30^\circ$  trebuie citită de pe diaograma Nyquist la intersecția locului de transfer  $H_d(j\omega)$  cu cercul corespunzător lui  $N = \tan 30^\circ = 0.577$ .

În MATLAB, apelând opțiunea `grid` se afișează cercurile importante de modul constant pentru diaograma Nyquist, respectiv echivalentul lor pentru diaograma Nichols, precum este ilustrat în Figurile 8.2.a) și 8.2.b).

Pentru a trasa cercuri suplimentare, se propune următoarea secvență de program:

```

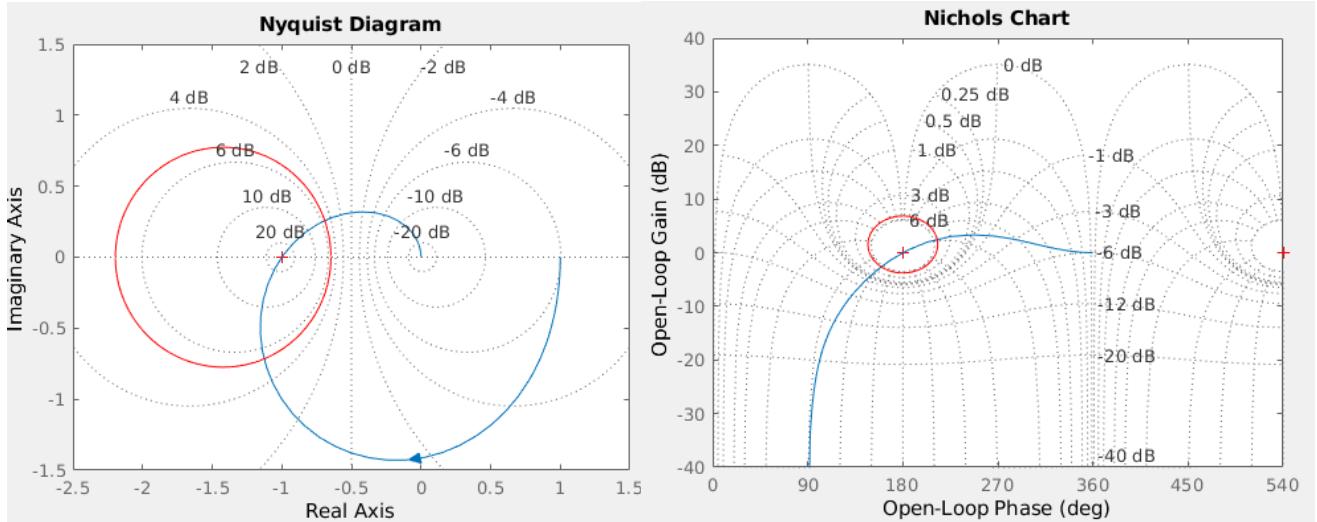
1 clf , nichols(Hdes) , grid , hold on
2 Mdb = 5.28; % modulul evidentiat
3 M = 10^(Mdb/20);
4 Ts = 0.01;
5
6 % jumatarea din dreapta de cerc
7 t = ( pi+Ts):Ts:(2*pi);
8 X = -M^2/(M^2-1);
9 Y = 0;
10 R = abs(M/(M^2-1));
11 % cercurile din diagrama Nyquist
12 x = X+R*cos(t); y = Y+R*sin(t);
13 % echivalentul lor in diagrama Nichols
14 mag = db(sqrt(x.^2+y.^2));
15 ph = atan2(y,x);
16 plot(rad2deg(ph),mag,'r') % poate trebuie adaugate/scazute
    cercuri!
17
18 % jumatarea din stanga de cerc
19 t = Ts:Ts:( pi);
20 X = -M^2/(M^2-1);
21 Y = 0;
22 R = abs(M/(M^2-1));
23 % cercurile din diagrama Nyquist
24 x = X+R*cos(t); y = Y+R*sin(t);
25 % echivalentul cercurilor din diagrama Nichols
26 mag = db(sqrt(x.^2+y.^2));
27 ph = atan2(y,x);
28 plot(-360+rad2deg(ph),mag,'r') % poate trebuie adaugate/scazute
    cercuri!
29 shg

```

## 8.2 Performanțele SRN deduse pe baza RF al sistemului deschis

În funcție de gama de frecvențe vizată, se pot distinge următoarele seturi de performanțe, în care se va prezenta inițial modalitatea de a le deduce pe baza lui  $H_{des}(s)$  utilizând diagramele Nyquist sau Nichols, iar apoi cum pot fi verificate explicit pentru  $H_0(s)$ , în general pe diagrama Bode:

- stabilitatea sistemului închis:** se poate deduce aplicând criteriul Nyquist (generalizat sau practic) pentru sistemul în buclă deschisă  $H_{des}(j\omega)$ . Pe lângă aspectul calitativ al stabilității, se pot calcula sau citi **marginile de stabilitate**  $\gamma_k$  și  $m_k$  pentru pulsăriile  $\omega_t$ , respectiv  $\omega_{-\pi}$ . Verificarea stabilității lui  $H_0(s)$  se poate face studiind concret polii.

(a) D. Nyquist pentru  $H_{des}(j\omega)$ ,  $M^{dB} = 5.28$ (b) D. Nichols pentru  $H_{des}(j\omega)$ ,  $M^{dB} = 5.28$ **Figura 8.2:** Ilustrarea intersecției locului de transfer  $H_{des}(j\omega)$  cu cercul de modul constant  $M^{dB} = 5.28$ .

2. **performanțele regimului staționar** (frecvențe joase,  $\omega \ll \omega_t, \omega_{-\pi}$ ): din diagrama Nichols se deduce cu ușurință capătul de frecvență joasă al funcției de transfer, de unde rezultă:

$$H_0(j \cdot 0) = \frac{H_d(j \cdot 0)}{1 + H_d(j \cdot 0)}. \quad (8.4)$$

Astfel, se poate calcula **eroarea staționară la poziție** a sistemului închis pentru o intrare de tip treaptă **unitară**, pe baza teoremei valorii finale:

$$\varepsilon_{ssp} := \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t) - y(t)) = 1 - H_0(0). \quad (8.5)$$

Verificarea erorii staționare la poziție se poate face cu ajutorul apelului `step(H0)`. Sistemul de reglare trebuie să fie extern stabil.

3. **performanțele regimului tranzitoriu** (frecvențe medii, în jurul lui  $\omega_t, \omega_{-\pi}$ )

- (a) **amplitudinea maximă a sistemului închis**,  $M_p$  (engl. *peak amplitude*): se citește la cercul tangent locului de transfer  $H_{des}(j\omega)$ , dată de valoarea corespunzătoare a lui  $M$ . Dacă locul de transfer intersectează un cerc de modul  $M$  de două ori atunci, pe baza continuității, acea valoare nu este maximă, iar dacă nu intersectează deloc, atunci funcția de transfer nu atinge valoarea respectivă. Se verifică în diagrama Bode a sistemului  $H_0(s)$  la modulul maxim:  $|H_0(j\omega_p)|$ . Cu cât amplitudinea maximă  $M_p$  este mai mare, cu atât factorul de amortizare (dominant) al sistemului închis este mai mic, deci va avea un caracter mai oscilant.
- (b) **lățimea de bandă a sistemului închis** (engl. *bandwidth*): se consideră că sistemul închis reușește să urmărească semnale de referință dacă modulul este

peste valoarea de prag  $\sqrt{2}/2$  pentru pulsăriile cuprinse în acel semnal:

$$\omega_B : |H_0(j\omega_B)| = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (8.6)$$

Cu cât sistemul are o lățime de bandă mai mare, cu atât este mai rapid, reușind să urmărească semnalele de referință mai rapide, având spectrul în intervalul  $[0, \omega_B]$ . Citirea lățimii de bandă se poate face din intersecția locului de transfer  $H_{des}$  cu cercul de  $M^{dB} = -3$ , iar verificarea se poate face din diagrama Bode a sistemului  $H_0(s)$  la modulul de  $-3$  [dB]. În fișe tehnice pentru diverse circuite electrice, lățimea de bandă este corelată cu timpul de urcare:  $\omega_B \approx 1/t_u$ ,  $t_u := t_{90\%} - t_{10\%}$ .

4. **capacitatea de rejecție a zgomotelor** (engl. *roll-off*, frecvențe înalte,  $\omega \gg \omega_t, \omega_{-\pi}$ ): după proiectarea sistemului de reglare cu lățimea de bandă dorită, semnalele de frecvențe mai mari trebuie atenuate, fiind considerate perturbații. Printre acestea se află și zgomotul de măsură al senzorului sau traductorului. Rejecția zgomotelor este dată de panta finală de atenuare (panta totală după activarea tuturor pulsărilor de frângere ale sistemului) a funcției de transfer în buclă deschisă, care coincide cu panta finală de atenuare a funcției de transfer în buclă închisă. Este dată de excesul polilor față de zerouri:

$$e = n - m \Rightarrow \text{Panta finală} = -20 \cdot (n - m) [\text{dB/dec}]. \quad (8.7)$$

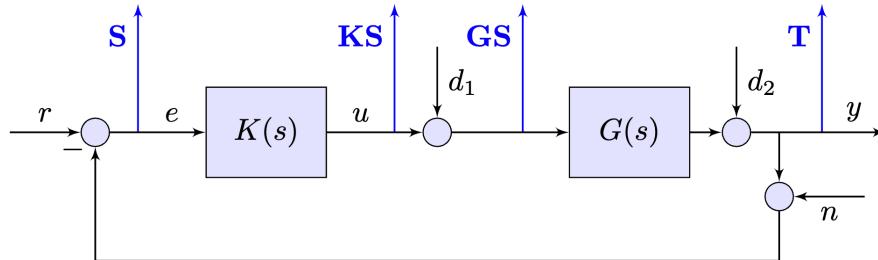
Se citește din diagrama Bode a lui  $H_{des}(s)$  și se poate verifica din diagrama Bode a lui  $H_0(s)$ .

### 8.3 Funcțiile de sensibilitate

În Figura 8.3 se prezintă structura clasică de reglare în buclă închisă cu un grad de libertate și reacție negativă unitară. Procesul este descris prin modelul  $G(s)$ , iar regulatorul este descris prin  $K(s)$ .

Se consideră **funcția de transfer în buclă deschisă**,  $L$ , definită de la semnalul de eroare  $e$  la ieșirea  $y$ :

$$L = H_{des} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{Y}{E} = KG = GK. \quad (8.8)$$



**Figura 8.3:** Structura clasică de reglare în buclă închisă cu un grad de libertate și reacție negativă unitară, cu semnalele  $r$ ,  $e$ ,  $u$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $y$ ,  $n$ , respectiv funcțiile de transfer în buclă închisă  $S$ ,  $T$ ,  $KS$ ,  $GS$ .

Se definesc următoarele funcții de transfer specifice buclei din Figura 8.3, cu notațiile consacrate în literatură:

1. **funcția de senzitivitate în buclă închisă**,  $S$ , definită de la referința  $r$  la semnalul de eroare  $e$ :

$$S \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{E}{R} = \frac{1}{1+L}; \quad (8.9)$$

2. **complementara funcției de senzitivitate în buclă închisă**,  $T$ , de la referința  $r$  la ieșire  $y$ :

$$T \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{Y}{R} = \frac{L}{1+L}; \quad (8.10)$$

3. **efortul comenzi**, definit de la referința  $r$  la semnalul de comandă al procesului  $u$ :

$$KS \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{U}{R} = \frac{K}{1+L}; \quad (8.11)$$

4. **funcția de cuantificare a efectului perturbației**, definită de la perturbația de intrare  $d_1$  la semnalul de ieșire al procesului  $y$ :

$$GS \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{Y}{D_1} = \frac{G}{1+L}. \quad (8.12)$$

Conform definițiilor, se poate constata legătura esențială dintre funcția de senzitivitate a erorii  $S$  și complementara funcției de senzitivitate  $T$ :

$$S(s) + T(s) = 1, \quad \forall s \in \mathbb{C}, \quad 1+L(s) \neq 0.$$

Funcțiile de senzitivitate în buclă închisă de la intrările  $(r, d_1, d_2, n)^\top$  la ieșirile  $(e, u, y)^\top$  se pot deduce ca fiind bazate pe variațiuni ale celor patru funcții de transfer în buclă închisă de mai sus:

$$\begin{pmatrix} e \\ u \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+GK} & -\frac{G}{1+GK} & -\frac{1}{1+GK} & -\frac{1}{1+GK} \\ \frac{K}{1+GK} & -\frac{KG}{1+GK} & -\frac{K}{1+GK} & -\frac{K}{1+GK} \\ \frac{GK}{1+GK} & \frac{G}{1+GK} & \frac{1}{1+GK} & -\frac{GK}{1+GK} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ d_1 \\ d_2 \\ n \end{pmatrix}, \quad (8.13)$$

și, prin ponderarea răspunsurilor în frecvență de la fiecare intrare la fiecare ieșire, se poate formula o singură problemă de proiectare care să impună răspunsurile dorite, în funcție de aplicație [Skogestad și Postlethwaite 2005]. Avantajul, chiar dacă răspunsurile în frecvență ale celor 4 funcții sunt uneori contradictorii (creșterea amplitudinii pentru una dintre funcții poate duce implicit la scăderea amplitudinii în alta ș.a.m.d.), domeniile de frecvență în care se dorește o amplitudine mare este adesea compensat de necesitatea unei funcții complementare de a avea amplificare mică.

## 8.4 Probleme rezolvate

**Enunț:** Să se deducă performanțele sistemului în buclă închisă  $H_0(s)$  pe baza diagramei Nichols a sistemului în buclă deschisă  $H_{des}(s)$  în ipoteza structurii din Figura 8.1. Validați rezultatele obținute pe baza sistemului închis.

**Problema 8.4.a)** Se consideră funcția de transfer identificată a unei axe CNC acționată cu un motor BLDC:

$$H_{des}(s) = \frac{1295.68}{s(0.1198s + 1)}. \quad (8.14)$$

Trasând diagrama Nichols pentru  $H_{des}(s)$  se pot deduce:

- $N_+ = 0$  și  $N_0 = 1$ , deci poate fi aplicat criteriul Nyquist practic. Astfel,  $\omega_t = 104$  [rad/s],  $\gamma_k = 4.6^\circ$ ,  $\omega_{-\pi} = +\infty$ ,  $m_k^{dB} = -\infty$ , de unde rezultă că sistemul închis este stabil;
- $H_{des}(0) = \infty$ , rezultă că  $H_0(0) = \frac{H_{des}(0)}{1+H_{des}(0)} = \frac{\infty}{1+\infty} = 1$ , deci  $\frac{Y(s)}{U(s)} = 1$ ,  $s = j\omega \leftarrow j0 \Leftrightarrow \varepsilon_{ssp} = 1 - 1 = 0$ ;
- $M_p^{dB} = 21.9$ ,  $\omega_p = 104$  [rad/s]; în practică se doresc valori sub  $\approx 6$  [dB], iar în cazul curent se anticipatează un caracter puternic oscilant al sistemului;
- $\omega_B = 161$  [rad/s], având deci un timp de urcare de aproximativ  $t_u \approx 1/161 = 6.2$  [ms];
- $e = n - m = 2 - 0 = 2$ , rezultă că sistemul închis atenuază zgomotele cu o pantă de  $-40$  [dB/dec].

Toate aceste performanțe sunt ilustrate în Figura 8.4.

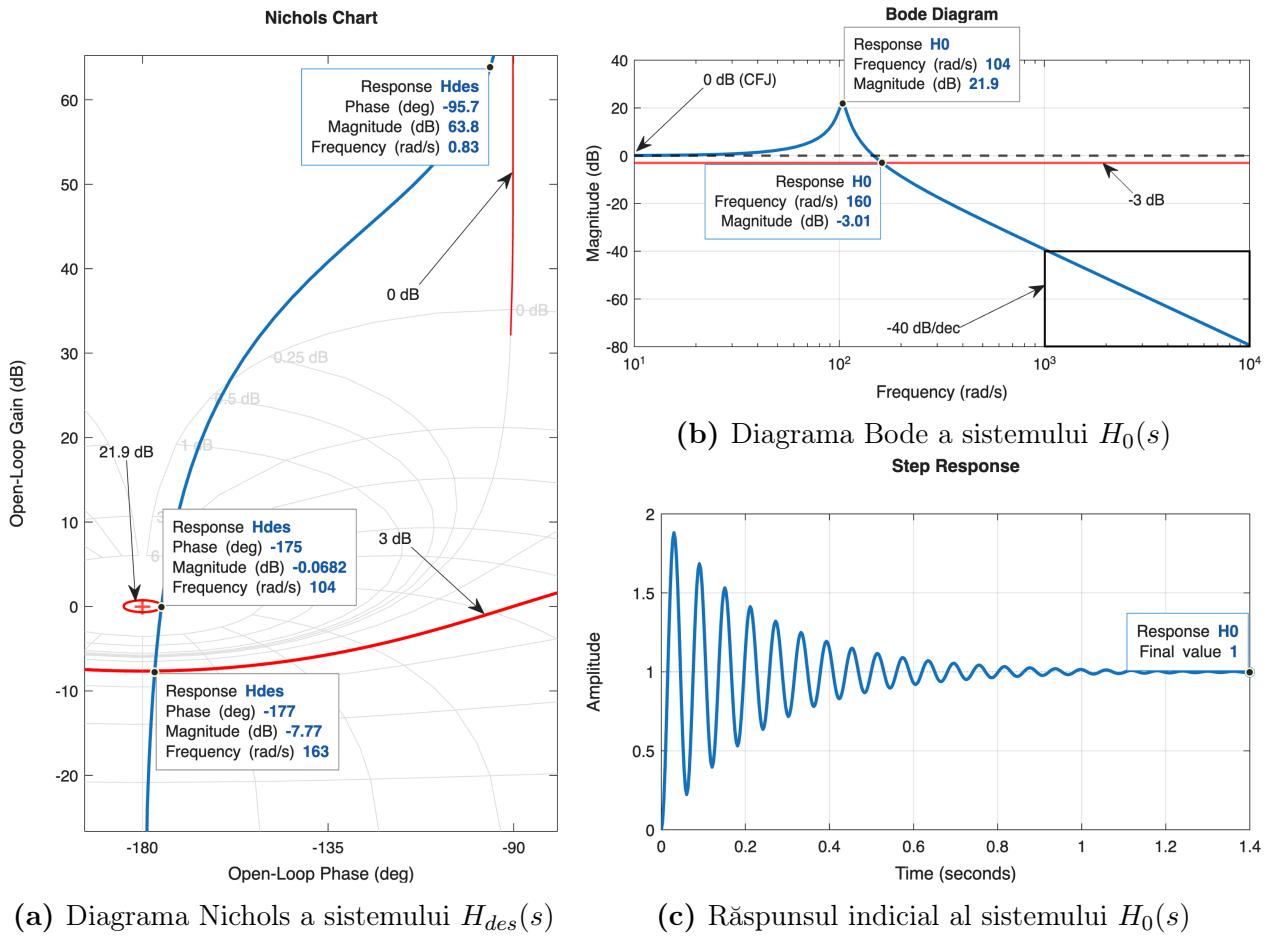
**Problema 8.4.b)** Se consideră un proces termic modelat prin:

$$H_{des}(s) = \frac{2}{(s + 1)(10s + 1)} e^{-0.15s}. \quad (8.15)$$

Trasând diagrama Nichols pentru  $H_{des}(s)$  se pot deduce:

- $N_+ = 0$  și  $N_0 = 0$ , deci poate fi aplicat criteriul Nyquist practic. Astfel,  $\omega_t = 0.17$  [rad/s],  $\gamma_k = 109^\circ$ ,  $\omega_{-\pi} = 2.65$  [rad/s],  $m_k^{dB} = -31.5$ , de unde rezultă că sistemul închis este intern asimptotic stabil;
- $|H_{des}(0)|^{dB} \approx 6 \Leftrightarrow |H_{des}(0)| = 2$ , rezultă că  $H_0(0) = \frac{H_{des}(0)}{1+H_{des}(0)} = \frac{2}{1+2} = 0.66$ , deci  $\frac{Y(s)}{U(s)} = 0.66$ ,  $s = j\omega \leftarrow j0 \Leftrightarrow \varepsilon_{ssp} = 1 - 0.66 = 0.33$ ;
- $M_p^{dB} \rightarrow -3.52 < 0$ ,  $\omega_p \rightarrow 0$  [rad/s]; cum  $\omega_p \rightarrow 0$  rezultă că nu există rezonanță în acest sistem (valoarea maximă este la capătul de frecvențe joase);
- $\nexists \omega_B$ , deoarece  $H_0(j\omega)$  are permanent modulul mai mic decât  $-3$  [dB], deci, privit ca un sistem de control, nu este capabil să urmărească semnalele de referință. Trebuie să mărit modulul în zona frecvențelor joase;
- $e = n - m = 2 - 0 = 2$ , rezultă că sistemul închis atenuază zgomotele cu o pantă de  $-40$  [dB/dec].

Ilustrarea performanțelor pe diagramele corespunzătoare este lăsată ca temă cititorului.



**Figura 8.4:** Estimarea și validarea performanțelor sistemului de la Problema 8.4.a).

## 8.5 Probleme propuse

**Problema 8.5.1:** Să se deducă performanțele sistemului în buclă închisă (margini de stabilitate, amplitudinea maximă a RF și pulsăția la care se găsește, lățimea de bandă, eroarea staționară la poziție, capacitatea de rejectie a zgomotelor) folosind diagrama Nichols sau Nyquist trasată pentru  $H_{des}(s)$ , format din conexiunea serie dintre regulator și proces. Să se valideze performanțele obținute pe baza diagramei Bode a lui  $H_0(s)$ , pentru următoarele exemple:

- $H_{des}(s) = H_R(s) \cdot H_f(s) = \frac{41.7(s + 4.41)}{s + 18.4} \cdot \frac{4}{s(s + 2)}$ ;
- $H_{des}(s) = H_R(s) \cdot H_f(s) = \frac{10s + 1}{100s + 1} \cdot \frac{5}{s(s + 1)(0.5s + 1)}$ ;
- $c) H_f(s) = \frac{(s + 6)^2}{s(s + 1)^2(s + 36)}$ . Proiectați un regulator proporțional  $H_R(s) = K > 0$  și analizați comportamentul sistemului rezultat;

d)  $H_f(s) = \frac{1}{(s+1)(1+\alpha s)(1+\alpha^2 s)(1+\alpha^3 s)}$ ,  $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1\}$ . Proiectați un regulator cu avans/întârziere de fază  $H_R(s) = K \frac{s+z}{s+p}$ ,  $K, z, p > 0$  și verificați performanțele sistemului rezultat.

**Problema 8.5.2:** Să se traseze funcțiile de sensibilitate  $S$ ,  $T$ ,  $KS$ ,  $GS$  pentru sistemele  $H_R(s) \cdot H_f(s)$  de la **Problema 8.5.1**. Comparați graficele și performanțele cu cele ale proceselor  $H_R(s)$  fără regulator. Ce constatați?



## Partea II

### Sisteme LTI numerice



---

---

## Lucrarea 9

---

### Eșantionarea semnalelor și sistemelor continue

9.1	Eșantionarea semnalelor . . . . .	86
9.2	Eșantionarea sistemelor descrise prin funcții de transfer . . . . .	88
9.3	Fenomene specifice sistemelor numerice . . . . .	89
9.4	Probleme propuse . . . . .	92

Lucrarea de față prezintă o introducere în domeniul sistemelor numerice și vizează metode de eșantionare a semnalelor și sistemelor continue având la bază teorema Shannon-Nyquist, respectiv fenomenele relevante care apar în cadrul sistemelor discretizate. Printre aceste fenomene se enumera cel de suprapunere a spectrelor, sensibilitatea la precizia numerică și supraeșantionarea în contextul proiectării regulatoarelor.

Capitolul prezent are ca scop dezvoltarea formalismului matematic care permite inginerului automatist să implementeze un sistem de reglare proiectat pentru procese fizice (prin excelență, analogice) pe un mediu de calcul numeric, precum calculator, microcontroller, *Field Programmable Gate Array* (FPGA) etc., medii care sunt, inherent, discrete.

## 9.1 Eșantionarea semnalelor

Fie trei semnale periodice de trei frecvențe diferite:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \cos(2\pi f_1 t), \quad f_1 = 1 \text{ [Hz]}; \\x_2(t) &= \cos(2\pi f_2 t), \quad f_2 = 9 \text{ [Hz]}; \\x_3(t) &= \cos(2\pi f_3 t), \quad f_3 = 11 \text{ [Hz]}.\end{aligned}$$

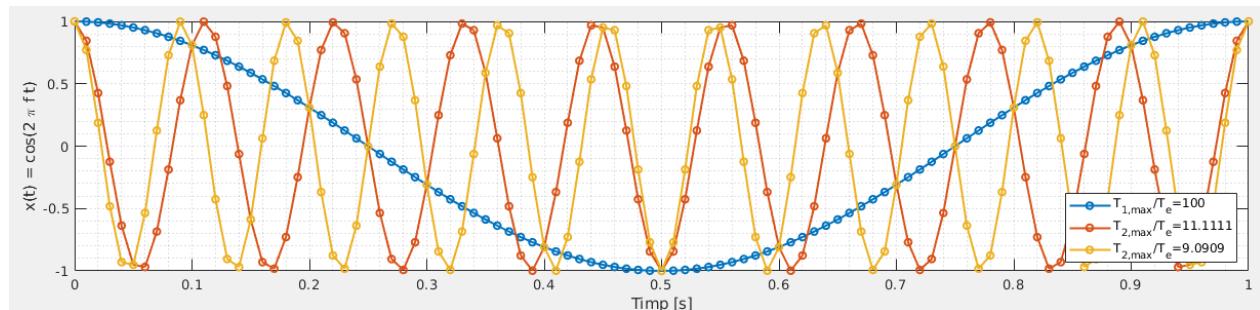
Se propune următorul *script* MATLAB pentru a ilustra efectul alegerii perioadei de eșantionare pentru cele trei semnale:

```

1 % fie trei semnale de frecvență diferita
2 f1=1;f2=9;f3=11;
3 Te=0.01; % perioada de eșantionare configurabilă
4 t=0:Te:1;
5 x1=cos(2*pi*f1*t);
6 x2=cos(2*pi*f2*t);
7 x3=cos(2*pi*f3*t);
8 % se reprezintă grafic semnalele
9 plot(t,x1,'-o',t,x2,'-o',t,x3,'-o','linewidth',1.5,'markersize',5)
10 legend(['T_{1,max}/T_e=',num2str(1/f1/Te)],...
11         ['T_{2,max}/T_e=',num2str(1/f2/Te)],...
12         ['T_{3,max}/T_e=',num2str(1/f3/Te)])
13 xlabel('Timp [s]')
14 ylabel('x(t) = cos(2 \pi f t)'), grid minor

```

Rezultatul execuției programului pentru perioada de eșantionare  $T_e = 0.01 \text{ [s]}$  este ilustrat în Figura 9.1.



**Figura 9.1:** Eșantionarea semnalelor de diferite frecvențe.

**Discuție:** Ce se întâmplă dacă se modifică perioada de eșantionare? Execuați scriptul pentru  $T_e \in \{0.01, 0.025, 0.05, 0.1\}$  și comentați rezultatele obținute. Care este valoarea maximă a perioadei de eșantionare  $T_e$  pentru care cele trei semnale sunt corect eșantionate?

### 9.1.1 Teorema lui Shannon

Se consideră un sistem de achiziție de date ideal care măsoară un semnal  $x(t), t \geq 0$  cu o frecvență constantă  $f_e$ . Acest sistem realizează astfel un tren de impulsuri Dirac ideale, distanțate uniform cu pasul de eșantionare  $T_e = 1/f_e$ :

$$\psi_{T_e}(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e). \quad (9.1)$$

Semnalul discretizat rezultat are următoarea formă, pe baza convoluçãoi dintre semnalul continuu  $x(t)$  și trenul de impulsuri  $\psi_{T_e}(t)$ :

$$x^*[n] = (x(t) * \psi_{T_e}(t)) [n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) \Big|_{t=nT_e}. \quad (9.2)$$

Prin convenție, în loc de  $x^*(nT_e)$  pentru a ilustra eșantionul la momentul  $t = nT_e$ , se preferă notația  $x^*[n]$ .

#### Teorema 9.1.1: Teorema Shannon-Nyquist

Un semnal în timp continuu  $x(t), t \geq 0$  cu un spectru mărginit de valoarea  $f_{max}$  [Hz], poate fi reconstituit complet din eșantioanele sale dacă se respectă:

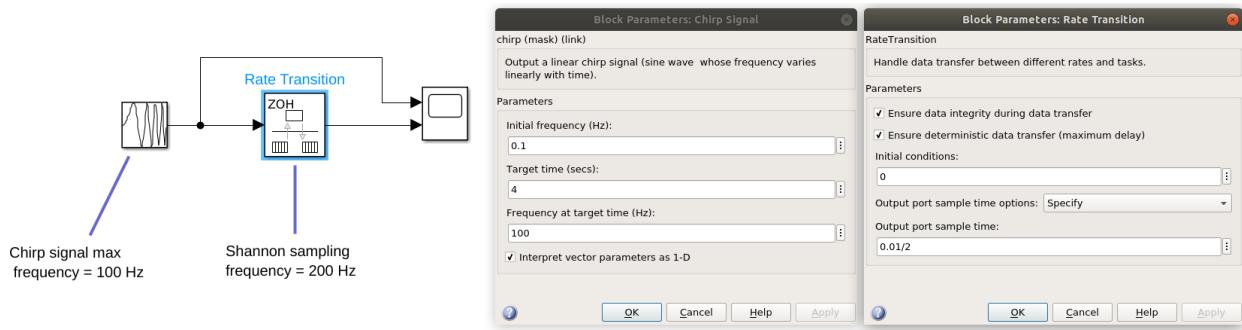
$$f_e > 2f_{max} \Leftrightarrow T_e < \frac{T_{min}}{2}, \text{ unde } f_{max} = \frac{1}{T_{min}}. \quad (9.3)$$

### 9.1.2 Ilustrarea fenomenului de suprapunere a spectrelor (*aliasing*)

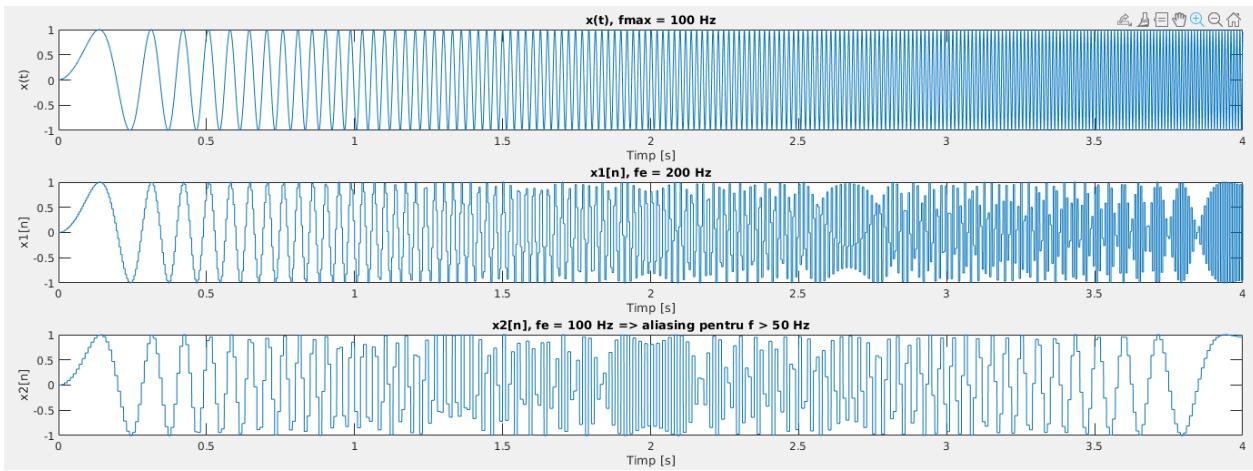
Pentru a ilustra fenomenul de suprapunere a spectrelor, se propune următoarea schemă Simulink, bazată pe eșantionarea unui semnal sinusoidal cu frecvență variabilă (de tip *Chirp*), timp de 4 secunde, cu frecvență inițială  $f_{min} = 0.1$  [Hz] și frecvență finală  $f_{max} = 100$  [Hz]. Eșantionarea se realizează cu un bloc de tip *Rate Transition*, setat inițial la frecvența  $f_e = 200$  [Hz], ceea ce, conform teoremei lui Shannon, permite eșantionarea corectă a semnalelor cu frecvențe de până la 100 [Hz]. Această schemă Simulink se prezintă în Figura 9.2, unde trebuie setată și metoda de integrare cu pas fix  $Ts = 1e-4$  [s] din panoul **Model Configuration Parameters**.

Dacă frecvența de eșantionare este setată la valoarea  $f_e = 100$  [Hz], ceea ce permite eșantionarea corectă până la  $f_e/2 = 50$  [Hz], atunci se poate observa că, până în 50 [Hz] intrarea este eșantionată corect, iar după 50 [Hz] frecvențele de la ieșire se comportă la fel cu cele de până la 50 [Hz], deci apare fenomenul de ***aliasing***. În Figura 9.3 se prezintă semnalul de intrare, semnalul eșantionat corect, respectiv semnalul cu suprapunerea spectrelor.

Combaterea fenomenului de *aliasing* se face utilizând un filtru trece jos bine calibrat pentru a atenua frecvențele peste valoarea  $f_{max}$  impusă.



**Figura 9.2:** Schema Simulink pentru eșantionarea unui semnal sinusoidal de frecvență variabilă.



**Figura 9.3:** a) Semnalul de tip *Chirp*; b) semnalul eșantionat corect; c) semnalul cu *aliasing*.

## 9.2 Eșantionarea sistemelor descrise prin funcții de transfer

Se consideră structura generală a unei funcții de transfer fără timp mort:

$$H(s) = \frac{1}{s^p} \cdot \frac{\beta(s)}{\prod (T_i s + 1) \prod \left( s^2 + 2\zeta_j \omega_{n_j} s + \omega_{n_j}^2 \right)}. \quad (9.4)$$

Pentru a eșantiona sistemele descrise prin funcții de transfer, dinamica acestora se determină în funcție de **timpii de răspuns ai modurilor de oscilație**. Astfel, aplicând teorema lui Shannon pentru structura generală (9.4) rezultă următoarea formulă de eșantionare:

$$T_e < \frac{\min \left\{ T_i, \frac{1}{\zeta_j \omega_{n_j}} \right\}}{2} \Leftrightarrow T_e < \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{t_r}{4} \right\}. \quad (9.5)$$

Pe baza formulei (9.5) se constată următoarele observații:

- NU se iau în considerare zerourile pentru eșantionare; doar modurile sunt relevante;
- NU se iau în considerare integratoarele și derivatoarele;
- Pentru rigurozitate, în contexte practice se preferă suplimentar și considerarea pulsărilor părților imaginare ale polilor complex conjugați, i.e., pulsăriile de oscilație  $\omega_{osc} = \text{Im}(\hat{s}_i)$  [rad/s], ceea ce implică extensia condiției (9.5) și cu perioadele  $T_i = T_{osc} = \frac{2\pi}{\omega_{osc}}$  [s].

În practică, pentru a nu utiliza filtre trece jos foarte performante (cu *roll-off* mare), se alege perioada de eșantionare cu o margine considerabilă peste minimul teoretic  $2f_{max}$  conform teoremei Shannon. Astfel, minimul recomandat în practică pentru  $f_e$  este de 4-5 ori mai mult, respectiv **de preferat ca  $f_e$  să fie de 10 ori mai mare decât  $f_{max}$** .

Pentru conversia din domeniul continuu în discret și reciproc (pentru obiecte de tip **tf**, **ss**, **zpk**), respectiv declararea sistemelor discretizate, MATLAB pune la dispoziție următoarele funcții:

- **c2d**: `sysd=c2d(sysc,Te,'metoda');`
- **c2dm**: `[nd,dd]=c2dm(nc,dc,Te,'metoda')` (se pot folosi și matricele A,B,C,D în loc de `num,den`);
- **tf**: `Hd=tf(nd,dd,Te);`
- **ss**: `sysd=ss(A,B,C,D,Te);`
- **d2c**: `sysc=d2c(sysd,'metoda');`
- **d2cm**: `[nc,dc]=d2cm(nd,dd,Te,'metoda')` (se pot folosi și matricele A,B,C,D în loc de `num,den`).

Există multiple metode de discretizare prevăzute în MATLAB. O parte dintre acestea sunt:

- **zoh** (engl. *zero-order hold*): metoda elementului de reținere de ordin zero;
- **foh** (engl. *first-order hold*): metoda elementului de reținere de ordin unu;
- **tustin** (alături de **prewarp**): metoda Tustin/trapezelor (cu preîncovoiere);
- **matched**: metoda potrivirii polilor/zerourilor din planul  $s$  în planul  $z$ ;
- **imp**: metoda invariantei răspunsului la impuls.

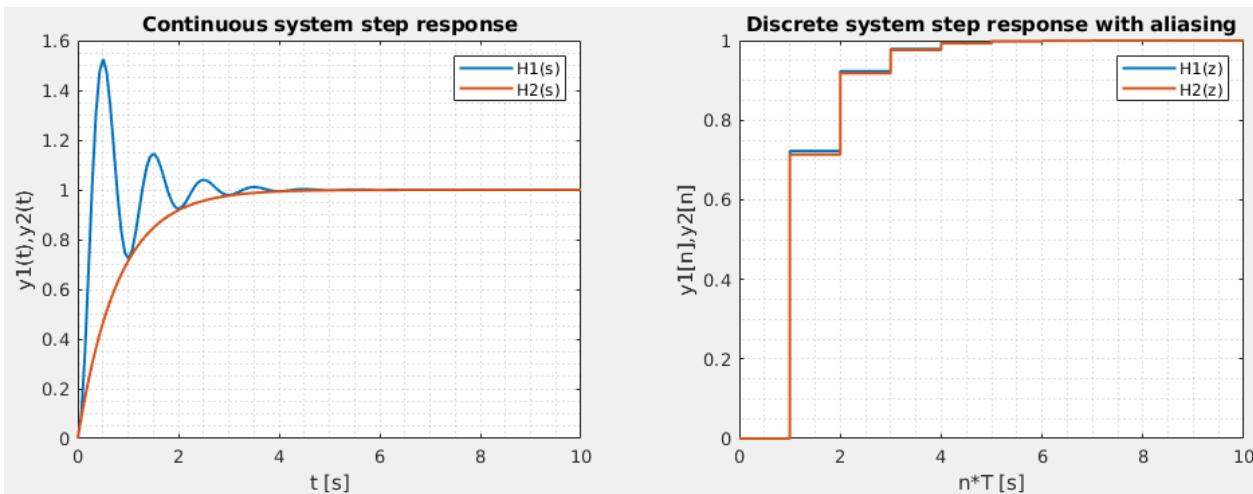
## 9.3 Fenomene specifice sistemelor numerice

### 9.3.1 Fenomenul de *aliasing* în cadrul eșantionării sistemelor

Se consideră sistemele:

$$H_1(s) = \frac{\left(\frac{10}{\sqrt{24}}\pi\right)^2}{s^2 + \frac{4\pi}{\sqrt{24}}s + \left(\frac{10}{\sqrt{24}}\pi\right)^2}, \quad H_2(s) = \frac{1}{0.8s + 1}. \quad (9.6)$$

Dacă cele două sisteme se eșantionează cu perioada  $T_e = 1$  [s] și cu metoda *zero-order hold* atunci răspunsurile la treaptă unitară arată precum în Figura 9.4. Se observă că răspunsurile sistemelor discrete sunt aproape identice, deși răspunsurile sistemelor continue sunt esențial diferite, având regimuri diferite. De aceea, **pentru a evita fenomenul de *aliasing* în implementarea sistemelor numerice, trebuie utilizată teorema lui Shannon**.



**Figura 9.4:** *Aliasing* în cazul eșantionării sistemelor.

### 9.3.2 Sensibilitatea la precizia numerică a coeficientilor

Spre deosebire de un proces sau sistem de reglare analogic care există sub formă de sistem mecanic, electric, hidraulic, pneumatic, sistemele numerice se implementează pe calculatoare, microprocesoare, iar precizia lor este limitată de lungimile numerelor utilizate în implementare (pe 8/16/32/64 biți, cu semn sau fără semn etc.). Astfel, se poate studia sensibilitatea sistemelor numerice la numărul de zecimale luate în considerare. În acest sens, se propune următorul *script* MATLAB pentru o funcție de transfer:

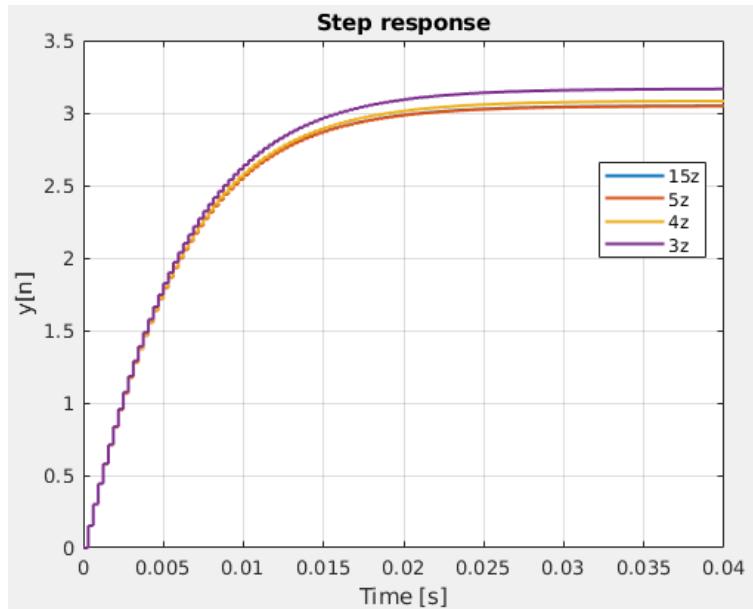
```

1 Hc = tf(500*[1,410],conv([1,210],[1,320]));
2 Te = min([1/210,1/320])/10;
3 format long
4 Hd = c2d(Hc,Te,'zoh');
5 [num,den]=tfdata(Hd,'v');
6 Hd5=tf([0.15331,-0.13487],[1,-1.84131,0.84736],Te);
7 Hd4=tf([0.1533,-0.1348],[1,-1.8413,0.8473],Te);
8 Hd3=tf([0.153,-0.134],[1,-1.841,0.847],Te);
9 step(Hd,Hd5,Hd4,Hd3,0.04),shg % timpul de simulare de 0.04[s]
10 legend('15z','5z','4z','3z');
```

Conform Figurii 9.5, se observă că se schimbă factorul de proporționalitate al sistemului în funcție de numărul de zecimale considerate. Dacă s-ar utiliza două zecimale se pierde și stabilitatea sistemului numeric. În general, **se recomandă lucrul cu minim 4-5 zecimale utile ale coeficientilor**.

### 9.3.3 Supraeșantionarea

Din punct de vedere a corectitudinii eșantionării, trebuie respectată teorema lui Shannon. Deoarece în domeniul ingineriei reglării se dorește, în primul rând, obținerea unui model aproximativ, de ordin cât mai redus, al sistemului real, care să cuprindă comportamentul esențial al acestuia, respectiv de a implementa regulatorul utilizând o perioadă mai mare



**Figura 9.5:** Efectele utilizării unui număr redus de zecimale în precizia sistemului.

pentru sistemul de întreruperi și al modulului *Timer*, se preferă uneori alegerea perioadei de eşantionare ținând cont doar de timpul de răspuns al modului dominant.

De exemplu, pentru sistemul:

$$H(s) = \frac{1}{(2s+1)(100s+1)}, \quad (9.7)$$

există două constante de timp aferente polilor:  $T_1 = 2 \text{ [s]} \Rightarrow t_{r,1} = 4T_1 = 8 \text{ [s]}$  și  $T_2 = 100 \text{ [s]} \Rightarrow t_{r,2} = 4T_2 = 400 \text{ [s]} \gg 8 \text{ [s]} = t_{r,1}$ . În acest caz, deoarece timpul de răspuns al sistemului se poate considera că este dat aproape în totalitate de polul dominant ( $t_r = (t_{r,1} + t_{r,2}) \approx t_{r,2}$ ), se preferă alegerea perioadei de eşantionare doar în funcție de acesta, conform teoremei lui Shannon practice:

$$T_e = \frac{1}{10} \frac{t_{r,2}}{4} = \frac{T_2}{10} = 10 \text{ [s]}. \quad (9.8)$$

Se consideră în acest caz că apare fenomenul de **supraesantionare**, ceea ce duce la creșterea nejustificată (relativ la avantajele obținute) a frecvenței de eşantionare.

**Temă:** Realizați o ilustrare comparativă a răspunsurilor la treaptă unită pentru sistemele:

- a) continuu  $H(s)$  din (9.7);
- b) discretizat  $H_1(z)$  utilizând perioada de eşantionare  $T_e = 10 \text{ [s]}$  din (9.8);
- c) discretizat  $H_2(z)$  utilizând perioada de eşantionare  $T_e = 0.2 \text{ [s]}$ .

#### 9.3.4 Eşantionarea sistemelor cu timp mort

Se consideră un sistem cu timp mort de forma:

$$H(s) = H'(s)e^{-\tau_m s}. \quad (9.9)$$

Pentru a evita utilizarea transformatei  $\mathcal{Z}$  modificate, se recomandă suplimentar ca perioada de eşantionare  $T_e$ , pe lângă respectarea teoremei lui Shannon pentru subsistemul  $H'(s)$ , să fie aleasă un submultiplu întreg al timpului mort  $\tau_m$ :

$$\frac{\tau_m}{T_e} \in \mathbb{N}^*. \quad (9.10)$$

Pe de altă parte, cu cât raportul  $\tau_m/T_e = N$  devine mai mare, cu atât crește gradul funcției de transfer discretizate, ceea ce duce la un efort computațional mai ridicat:

$$H(z) = H'(z)e^{-\tau_m s} = H'(z)e^{-N \cdot (T_e s)} = H'(z) \cdot z^{-N}. \quad (9.11)$$

Prin urmare, se dorește alegerea perioadei de eşantionare astfel încat valoarea  $N$  să fie cât mai mică. De exemplu, pentru sistemul:

$$H(s) = \frac{4}{4s+1} e^{-0.1s}, \quad (9.12)$$

există constanta de timp  $T = 4$  [s] și constanta timpului mort  $\tau_m = 0.1$  [s]. Pentru partea ratională  $H'(s)$ , conform teoremei lui Shannon  $T_e < \frac{4}{2} = 2$  [s]. Dacă se alege  $T_e = \frac{4}{10} = 0.4$  [s] (conform teoremei lui Shannon practice),  $N = \frac{\tau_m}{T_e} = 4$ . Se preferă alegerea  $T_e = 0.1$  [s], astfel încât  $N$  să fie minimul posibil ( $N = 1$ , în acest caz).  $T_e = 0.1$  [s] respectă în continuare teorema lui Shannon!

## 9.4 Probleme propuse

**Problema 9.4.1:** Alegeti perioada de eşantionare pentru următoarele sisteme, verificați corectitudinea acesteia utilizând mediul MATLAB și justificați alegerea făcută:

a)  $H(s) = \frac{10}{8s+1};$

e)  $H(s) = \frac{200}{(s+5)(s+P)},$

b)  $H(s) = \frac{5}{(s+4)(s+16)};$

$P \in \{1, 2.5, 5, 10, 25, 50, 100\}$ ; afișați simultan toate răspunsurile la treaptă pe aceeași figură; corelați timpii de răspuns cu valorile constantelor de timp;

c)  $H(s) = \frac{s+5}{s^2+8s+64};$

d)  $H(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+100)};$

f)  $H(s) = \frac{s+7}{s+9} \cdot e^{-0.5s}.$

**Problema 9.4.2:** Discretizați următoarele sisteme continue bazate pe structuri clasice din mediul industrial [Åström și Hägglund 2000]. Studiați, utilizând mai multe perioade de eşantionare (care respectă teorema lui Shannon, respectiv care nu) și metode de discretizare suportate în MATLAB, polii, zerourile, factorul de proporționalitate și influența numărului de zecimale considerate asupra răspunsurilor sistemelor la treaptă și impuls.

- a)  $H(s) = \frac{K}{s^n}$ ,  $K \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
- b)  $H(s) = \frac{1}{(s+1)^n}$ ,  $n \in \{1, 2, 3, 4, 8\}$ ;
- c)  $H(s) = \frac{1}{(s+1)(\alpha s+1)(\alpha^2 s+1)}$ ,  
 $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1\}$ ;
- d)  $H(s) = \frac{-\alpha s + 1}{(s+1)^3}$ ,  
 $\alpha \in \{0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5\}$ ;

- e)  $H(s) = \frac{\omega_n^2}{(s+1)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$ ,  
 $\zeta \in \{0.1, 0.5, 0.8\}$ ,  $\omega_n \in \{1, 2, 5, 10\}$ ;
- f)  $H(s) = \frac{1}{(Ts+1)^k} \cdot e^{-s}$ ,  
 $k \in \{1, 2\}$ ,  $T \in \{0.1, 0.2, 0.5, 2, 5, 10\}$ ;
- g)  $H(s) = \frac{(s+6)^2}{s(s+1)^2(s+36)}$ ;
- h)  $H(s) = \frac{1}{(s-1)(Ts+1)}$ ,  
 $T \in \{0.01, 0.1, 0.5, 1, 5, 10, 100\}$ .



---

---

# Lucrarea 10

---

## Discretizarea sistemelor continue

10.1 Maparea din planul $s$ în planul $z$ . . . . .	96
10.2 Metode de discretizare . . . . .	97
10.3 Probleme rezolvate . . . . .	98
10.4 Regimuri de funcționare și moduri de oscilație . . . . .	100
10.5 Probleme propuse . . . . .	100
10.6 Tabel de transformate Z elementare. Proprietăți ale transformatei Z . . . . .	103

În această lucrare este prezentată maparea din planul  $s$  în planul  $z$  și principalele metode de discretizare a sistemelor LTI continue. De asemenea, sunt prezentate principalele avantaje și dezavantaje ale fiecărei metode, împreună cu singularitățile sistemului discret, respectiv modurile de oscilație și regimurile de funcționare ale acestuia.

## 10.1 Maparea din planul $s$ în planul $z$

Pornind de la un semnal continuu în timp și amplitudine  $y(t)$  și eșantionând cu perioada  $T_e$ , obținem semnalul eșantionat  $y^*(t)$  care poate fi descris prin relația:

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT_e) \delta(t - kT_e), \quad (10.1)$$

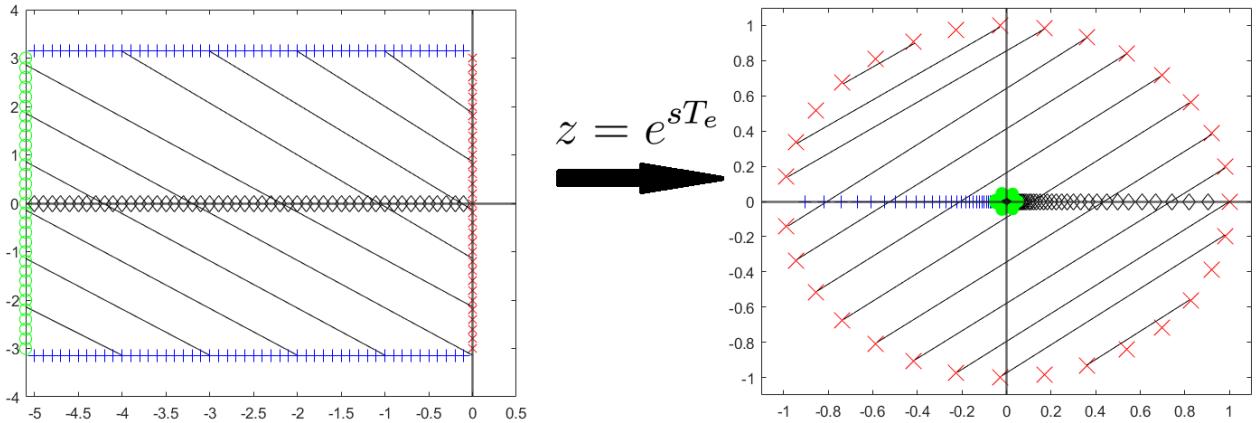
unde  $\delta$  este impulsul Dirac. Prin evaluarea transformatelor Laplace și  $\mathcal{Z}$  corespunzătoare semnalului eșantionat  $y^*(t)$ , obținem:

$$\begin{aligned} Y^*(s) &= \mathcal{L}\{y^*(t)\}(s) = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} y(kT_e) \delta(t - kT_e) e^{-st} dt = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} y[k] \int_0^{\infty} \delta(t - kT_e) e^{-st} dt = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] e^{-skT_e}, \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$Y^*(z) = \mathcal{Z}\{y^*(t)\}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] z^{-k}, \quad (10.3)$$

de unde putem deduce relația de mapare între planul  $s$  și planul  $z$ , precum în Figura 10.1:

$$z = e^{sT_e}. \quad (10.4)$$



**Figura 10.1:** Maparea planului  $s$  în planul  $z$ .

Pentru a studia răspunsul în frecvență, din variabila complexă  $s = \sigma + j\omega$  se reține doar partea imaginară, unde  $\omega \in (-\infty, \infty)$  semnifică pulsația. Dar, folosind transformarea  $z = e^{sT_e}$ , răspunsul în frecvență al sistemelor discrete devine:

$$H_c(j\omega) \rightarrow H_d(e^{j\omega T_e}) = H_d(e^{j\Omega}), \quad (10.5)$$

unde  $\Omega = \omega T_e$  este pulsația numerică. Din periodicitatea funcțiilor trigonometrice sin și cos, obținem că  $\Omega = \omega T_e \in [-\pi, \pi]$ . De aici, obținem fâșia principală din semiplanul stâng (partea

hașurată din Figura 10.1) care este delimitată simetric pe axa imaginară de pulsăția:

$$\omega_N = \frac{\omega_e}{2} = \frac{2\pi f_e}{2} = \frac{\pi}{T_e}, \quad (10.6)$$

numită **pulsăția Nyquist**. Pentru pulsățiile  $|\omega| > \omega_N$  apare fenomenul de *aliasing*, i.e., suprapunerea spectrelor.

Fâșia principală se mapează în planul  $z$  în discul unitate astfel:

- pentru punctele de pe axa imaginară  $s = j\omega$ ,  $\omega \in [-\omega_N, \omega_N]$  (simbolizate cu **x**) avem  $z = e^{j\omega T_e}$  și obținem cercul unitate;
- pentru marginile fâșiei principale  $s = -\sigma \pm j\frac{\pi}{T_e}$  (simbolizate cu **+**) avem  $z = e^{-\sigma T_e}$  și obținem axa reală negativă din interior cercului unitate – puncte de forma  $-e^{-\sigma T_e} \pm 0j$ , cu  $\sigma \in (0, \infty)$ ;
- pentru punctele de la infinit  $s = -\infty + j\omega$ ,  $\omega \in [-\omega_N, \omega_N]$  (simbolizate cu **o**) obținem un cerc de rază  $\varepsilon \rightarrow 0$  în jurul originii;
- punctele de pe axa reală negativă (marcate cu **◊**) se mapează în punctele de pe axa reală pozitivă din interiorul discului unitate ( $e^{-\infty T_e}$ ,  $e^{0 T_e}$ );
- **restul punctelor din fâșia principală se vor mapea în interiorul discului unitate** (zonele hașurate).

Punctele din semiplanul drept se vor mapea în exteriorul cercului unitate. Punctele din semiplanul stâng care sunt în afara fâșiei principale vor avea un corespondent în fâșia principală (prin reducerea pulsăției numerice  $\Omega = \omega T_e$  la intervalul  $[-\pi, \pi]$ ) și se vor mapea tot în discul unitate (fenomenul de *aliasing*).

## 10.2 Metode de discretizare

### 10.2.1 Metode care provin din integrarea numerică

Pornind de la un sistem de ordinul I descris prin ecuația diferențială:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -ay(t) + bu(t), \quad (10.7)$$

prin integrare pe  $[0, t]$  din condiții initiale nule obținem:

$$y(t) = \int_0^t (-ay(\tau) + bu(\tau)) d\tau, \quad (10.8)$$

iar prin eşantionare cu perioada  $T_e$  avem:

$$y(kT_e) = y((k-1)T_e) + \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} (-ay(\tau) + bu(\tau)) d\tau. \quad (10.9)$$

Pornind de la posibilitățile de a evalua numeric integrala care apare în ecuația anterioară, vom prezenta în continuare trei metode de discretizare.

### 1. Metoda dreptunghiurilor înainte (Euler înainte)

Se utilizează pentru simulări de tip *Hardware-in-the-Loop* și se obține folosind substituția:

$$s = \frac{z - 1}{T_e} = \frac{1 - z^{-1}}{T_e \cdot z^{-1}}. \quad (10.10)$$

### 2. Metoda dreptunghiurilor înapoi (Euler înapoi)

Este o metodă de integrare implicită și se obține prin substituția:

$$s = \frac{z - 1}{T_e \cdot z} = \frac{1 - z^{-1}}{T_e}. \quad (10.11)$$

### 3. Metoda trapezelor (Tustin)

Este o transformare biliniară care menține stabilitatea și faza minimă la trecerea din continuu în discret. Această metodă este utilizată pentru răspunsul în frecvență și se obține folosind substituția:

$$s = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{z - 1}{z + 1} = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}. \quad (10.12)$$

#### 10.2.2 Elementul de reținere de ordinul zero

Pentru a descrie funcționarea unui proces comandat cu un sistem numeric trebuie utilizat un element de reținere de ordinul zero (engl. *zero-order hold* – **zoh**) având modelul matematic:

$$H_{zoh}(s) = \frac{1 - e^{-sT_e}}{s}, \quad (10.13)$$

iar sistemul discret se obține folosind:

$$H(z) = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \{ H_{zoh}(s)H(s) \} \right\} = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\} \right\}. \quad (10.14)$$

Această metodă de discretizare este inherentă proceselor continue comandate de un regulator numeric. Din punct de vedere a fidelității reprezentării din domeniile continuu și discret, metoda **zoh** introduce un tact de întârziere și **NU se recomandă pentru aproximarea unui regulator sau filtru**. În astfel de cazuri, se recomandă metoda Tustin, pentru fidelitatea răspunsului în frecvență.

## 10.3 Probleme rezolvate

**Problema 10.3.1:** Să se determine o perioadă de eşantionare convenabilă și să se discretizeze folosind cele trei metode care provin din integrarea numerică sistemul descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{5}{4s + 1} e^{-0.5s}.$$

**Rezolvare:** Avem constanta de timp  $T = 4 [s]$ , de unde rezultă că perioada de eşantionare ar trebui să verifice relația  $T_e \leq 0.4$ . Dar, pentru a evita folosirea transformatei  $\mathcal{Z}$  modificată, impunem  $\frac{T_m}{T_e} \in \mathbb{N}^*$  și rezultă că o perioadă de eşantionare adecvată este  $T_e = 0.25 [s]$ .

Folosind **metoda dreptunghiurilor înainte**, obținem:

$$H_{d,1}(z) = H(s)|_{s=\frac{z-1}{T_e}} = \frac{5}{4\frac{z-1}{0.25} + 1} z^{-2} = \frac{5}{z^2(16z - 15)},$$

cu singularitățile:  $\hat{z}_{1,2} = 0$ ,  $\hat{z}_3 = \frac{15}{16}$ .

Folosind **metoda dreptunghiurilor înapoi**, obținem:

$$H_{d,2}(z) = H(s)|_{s=\frac{z-1}{zT_e}} = \frac{5}{4\frac{z-1}{z \cdot 0.25} + 1} z^{-2} = \frac{5}{z(17z - 16)},$$

cu singularitățile:  $\hat{z}_1 = 0$ ,  $\hat{z}_2 = \frac{16}{17}$ .

Folosind **metoda Tustin**, obținem:

$$H_{d,3}(z) = H(s)|_{s=\frac{\frac{2}{T_e} \frac{z-1}{z+1}}{z+1}} = \frac{5}{4\frac{\frac{2}{0.25} \frac{z-1}{z+1}}{z+1} + 1} z^{-2} = \frac{5(z+1)}{z^2(33z - 31)},$$

cu singularitățile:  $\hat{z}_{1,2} = 0$ ,  $\hat{z}_3 = \frac{31}{33}$ ,  $\hat{z}_1 = -1$ .

**Remarcă:** În cadrul metodei Tustin apar zerouri în  $-1$  astfel încât partea rațională va avea excesul polilor față de zerouri egal cu 0, chiar dacă acest lucru nu era impus de structura sistemului continuu. Același lucru este valabil și la metoda dreptunghiurilor înapoi, zerourile introduse suplimentar fiind toate egale cu 0.

**Problema 10.3.2:** Să se determine o perioadă de eşantionare convenabilă și să se discreteze folosind metoda zoh sistemul descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{s+2}{(4s+1)(s-1)}.$$

**Rezolvare:** Avem două constante de timp la numitor ( $T_1 = 4 [s]$  și  $T_2 = 1 [s]$ ), de unde rezultă că perioada de eşantionare ar trebui să verifice relația  $T_e \leq 0.1$ . Alegem perioada de eşantionare  $T_e = 0.1 [s]$ . Pentru a determina funcția de transfer discretă trebuie să calculăm:

$$H_d(z) = \mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\{H_{zoh}(s)H(s)\}\right\} = (1 - z^{-1})\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \frac{s+2}{(4s+1)(s-1)}\right\}\right\}.$$

Mai întâi descompunem în fracții simple:

$$\frac{s+2}{(4s+1)(s-1)} = \frac{-\frac{7}{5}}{4s+1} + \frac{\frac{3}{5}}{s-1},$$

și, folosind formula de transformare din Tabelul 10.1:

$$\mathcal{Z}\left\{\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s(s+a)}\right\}\right\} = \frac{(1 - e^{-a \cdot T_e})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-a \cdot T_e}z^{-1})},$$

obținem:

$$\begin{aligned}
 H_d(z) &= (1 - z^{-1}) \left( \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-7/20}{s(s + \frac{1}{4})} \right\} \right\} + \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3/5}{s(s - 1)} \right\} \right\} \right) \\
 &= (1 - z^{-1}) \left( -\frac{7}{5} \frac{(1 - e^{-\frac{0.1}{4}})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{-\frac{0.1}{4}}z^{-1})} + -\frac{3}{5} \frac{(1 - e^{0.1})z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - e^{0.1}z^{-1})} \right) = \\
 &= \frac{(0.0285 - 0.0233z^{-1})z^{-1}}{(1 - 0.9753z^{-1})(1 - 1.1052z^{-1})},
 \end{aligned}$$

cu singularitățile:  $\hat{z}_1 = 0.9753$ ,  $\hat{z}_2 = 1.1052 = e^{T_e}$  și  $\dot{z}_1 = 0.818 = e^{-\frac{1}{4}T_e}$ . Se remarcă un tact de întârziere  $z^{-1}$  în componentă sistemului, respectiv faptul că sistemul rămâne instabil și în cazul discret, deoarece polii corespund celor din cazul continuu prin formula (10.4), unde  $T_e = 0.1$  [s].

## 10.4 Regimuri de funcționare și moduri de oscilație

**Regimul de funcționare** prezintă caracterul general al regimului tranzitoriu al unui sistem LTI. Acesta este determinat de modurile de oscilație dominante ale componentei tranzistorii. În cazul sistemelor discrete, polii dominanți sunt cei care au modulul cel mai mare (cei mai departe de origine). În cazul polilor stabili, polii dominanți sunt cei mai aproape de conturul discului unitate.

**Modurile de oscilație** sunt funcțiile care se obțin în răspunsul sistemului discret la o intrare arbitrară cauzată de polii acestuia. Acestea pot fi de următoarele tipuri:

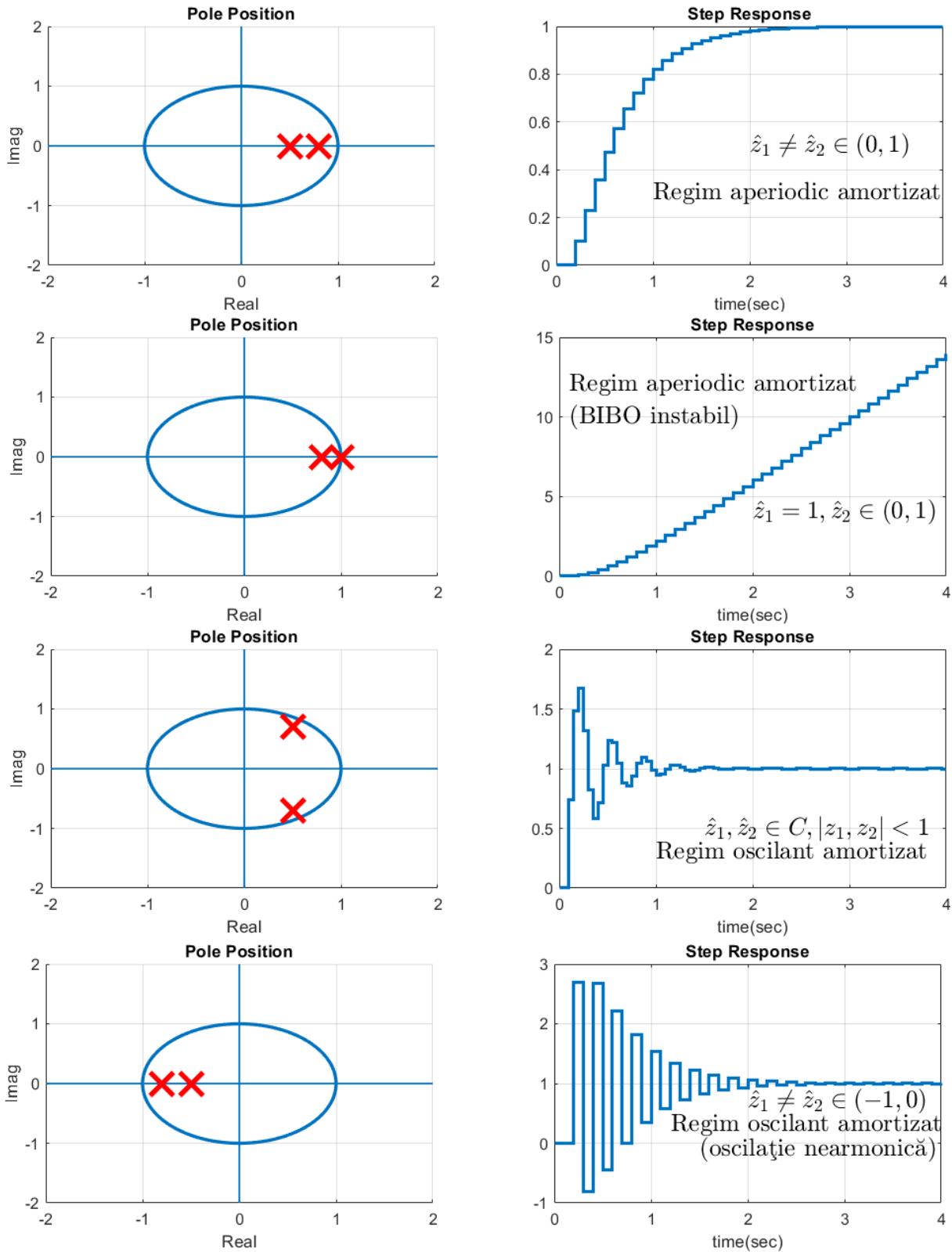
- în cazul polilor reali de multiplicitate  $n$ :  $\frac{k^{n-1}}{(n-1)!} \cdot |\hat{z}|^k$ ;
- în cazul perechilor de poli complex conjugăți de multiplicitate  $n$ :  $\frac{k^{n-1}}{(n-1)!} \cdot |\hat{z}|^k \sin(k\angle\hat{z})$ .

În Figurile 10.2 și 10.3 sunt ilustrate grafic răspunsurile la intrare treaptă corespunzătoare fiecărui regim de funcționare pentru un sistem de ordin II.

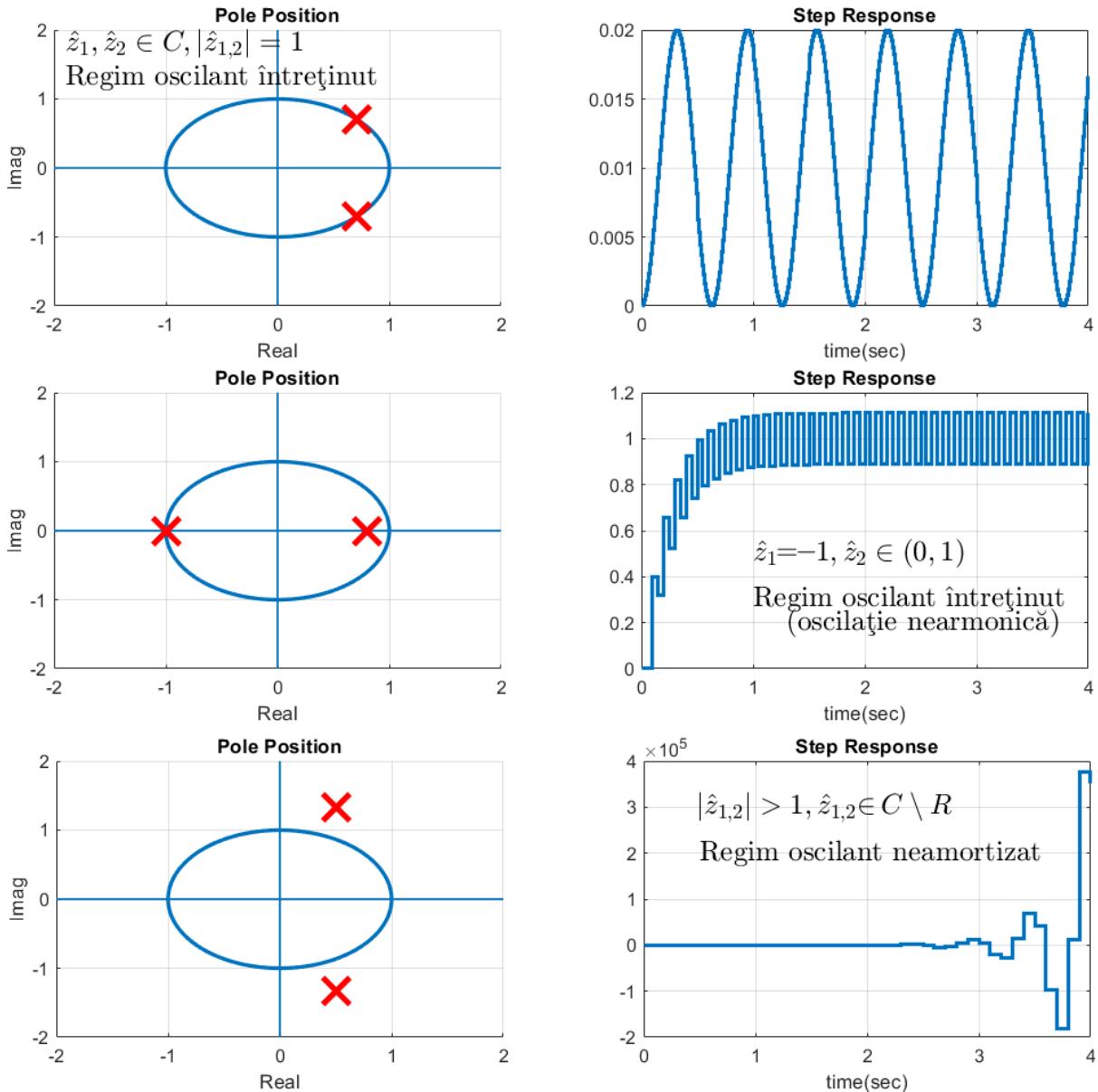
Spre deosebire de regimul staționar în planul  $s$  obținut pe baza Teoremei Valorii Finale prin  $s \rightarrow 0$ , pe baza formulei (10.4) rezultă că, în planul  $z$ , regimul staționar este dat de  $z \rightarrow 1$ .

## 10.5 Probleme propuse

**Problema 10.5.1:** Să se determine o perioadă de eșantionare convenabilă și să se discreteze sistemele continue de mai jos folosind metoda indicată. Studiați influența perioadei de eșantionare asupra singularităților și asupra factorului de proporționalitate. Determinați modurile și regimul fiecărui sistem.



**Figura 10.2:** Regimurile de funcționare ale unui sistem discret (partea I).



**Figura 10.3:** Regimurile de funcționare ale unui sistem discret (partea a II-a).

a)  $H(s) = \frac{s + 200}{(s + 5)(s + 10)}$ , Tustin;

b)  $H(s) = \frac{s + 2}{s(s + 1)(s + 100)}$ , Euler înainte – analizați fenomenul de **supraesantionare**;

c)  $H(s) = \frac{s + 7}{s + 9} \cdot e^{-0.2s}$ , zoh;

d)  $H(s) = \frac{72}{s^2 + 6s + 36}$ , Euler înapoi;

e)  $H(s) = \frac{200}{(s + 5)(s + P)}$ ,  
 $P \in \{1, 2.5, 5, 10, 25, 50, 100\}$ , zoh – analizați fenomenul de **supraesantionare**, dacă este cazul;

f)  $H(s) = \frac{-s + 3}{s^2 + 2s + 4} \cdot e^{-0.2s}$ , Euler înainte.

## 10.6 Tabel de transformate Z elementare. Proprietăți ale transformatei Z

Domeniul timp $f(t)$	Transformata Laplace $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Transformata Z $F(z) = \mathcal{Z}[f(t) _{t=kT}] = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k}$
$\delta(t)$	1	1
1	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$\frac{1}{a}(1(t) - e^{-at})$	$\frac{a}{s(s+a)}$	$\frac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$
$\frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{b-a} \left( \frac{z}{z-e^{-aT}} - \frac{z}{z-e^{-bT}} \right)$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT} \cos \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$

**Tabelul 10.1:** Tabelul de transformate Z

Proprietatea	Temp discret $f(kT)$	Domeniul z $F(z) = \mathcal{Z}[f(kT)]$
Liniaritate	$af_1(kT) + bf_2(kT)$	$aF_1(z) + bF_2(z)$
Deplasare la dreapta cu $T$	$f((k-1)T)$	$z^{-1}F(z)$
Deplasare la dreapta cu $nT$	$f((k-n)T)$	$z^{-n}F(z)$
Deplasare la stânga cu $T$	$f((k+1)T)$	$zF(z) - zf(0)$
Deplasare la stânga cu $nT$	$f((k+n)T)$	$z^nF(z) - \sum_{i=0}^{n-1} f(iT)z^{k-i}$
Teorema Valorii Finale	$f(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(kT)$	$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z)$ dacă polii funcției $(z-1)F(z)$ se află în discul unitate

**Tabelul 10.2:** Proprietăți ale transformatei Z



---

---

# Lucrarea 11

---

## Stabilitatea sistemelor numerice

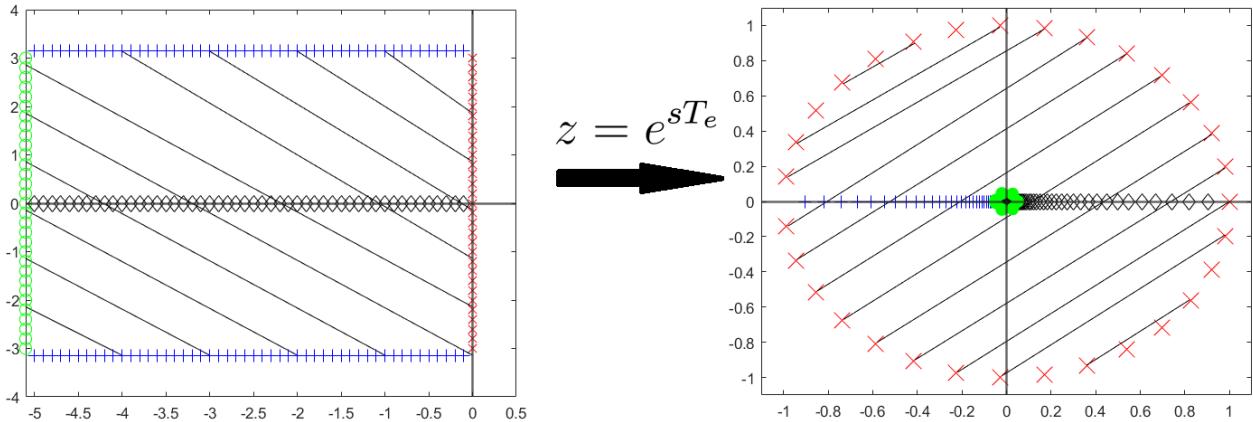
11.1 Stabilitatea sistemelor numerice	106
11.2 Criteriul Schur-Cohn-Jury . . . . .	107
11.3 Conexiunea cu reacție negativă a sistemelor numerice . . . . .	108
11.4 Probleme propuse . . . . .	111

În această lucrare se prezintă modalități de studiu a stabilității sistemelor numerice, pornind de la condiția generală de stabilitate, alături de utilizarea criteriului Schur-Cohn-Jury pentru a deduce localizarea polilor în raport cu cercul unitate fără a fi calculați explicit. De asemenea, se prezintă tehnici de analiză a stabilității sistemelor în conexiunea cu reacție negativă pe baza criteriului Jury și a metodei locului rădăcinilor.

## 11.1 Stabilitatea sistemelor numerice

Se pornește de la legătura analitică dintre variabila  $s$  a transformatei Laplace și variabila  $z$  a transformatei  $\mathcal{Z}$  din lucrarea anterioară. Această mapare este ilustrată în Figura 11.1, fiind dată de formula:

$$z = e^{sT_e}, \quad T_e > 0. \quad (11.1)$$



**Figura 11.1:** Maparea planului  $s$  în planul  $z$ .

Se consideră sistemul LTI numeric cu  $n$  stări,  $m$  intrări și  $p$  ieșiri, descris prin modelul de tip spațiul stărilor:

$$\begin{cases} x[k+1] = A_d x[k] + B_d u[k]; \\ y[k] = C_d x[k] + D_d u[k], \end{cases} \quad (11.2)$$

unde  $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_d \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C_d \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $D_d \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Condiția de **stabilitate internă** a sistemelor continue, conform căreia valorile proprii ale matricei de stare trebuie să se afle în semiplanul complex stâng se transformă în **condiția ca valorile proprii ale matricei de stare a sistemului discret să aibă modulul subunitar**:

$$|\lambda_i| < 1, \quad \forall \lambda_i \in \Lambda(A_d). \quad (11.3)$$

Funcția de transfer echivalentă a sistemului (11.2) este determinată prin formula:

$$H_d(z) = C_d (zI - A_d)^{-1} B_d + D_d. \quad (11.4)$$

În mod similar, condiția de **stabilitate externă** a sistemelor continue, conform căreia polii trebuie să se afle în semiplanul stâng se transformă în **condiția ca polii sistemului discret să aibă modulul subunitar**:

$$|\hat{z}_i| < 1, \quad \forall \hat{z}_i \in \mathcal{P}(H_d), \quad (11.5)$$

unde  $\mathcal{P}(H_d)$  este multimea polilor funcției de transfer  $H_d(z)$  **în formă minimală**.

## 11.2 Criteriul Schur-Cohn-Jury

Criteriul **Routh-Hurwitz** prezintă un algoritm care verifică dacă rădăcinile unui polinom se află în semiplanul stâng, respectiv câte rădăcini există în semiplanul drept. În mod similar, criteriul **Schur-Cohn-Jury** verifică dacă rădăcinile unui polinom  $P_c(z)$  de ordin  $n$  se află în interiorul discului unitate, respectiv câte rădăcini există în exteriorul acestuia. Aceasta poate fi folosit pentru a determina stabilitatea unui sistem numeric, pe baza polinomului său caracteristic, fără a fi nevoie de calculul efectiv al polilor săi.

**(Criteriul Schur-Cohn-Jury)** Se consideră polinomul caracteristic  $P_c(z) = a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_{n-1}z + a_n$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Se completează tabelul Jury după următoarele reguli:

- se scriu coeficienții lui  $P_c$  în ordine descrescătoare a puterilor și apoi în ordine crescătoare;
- se calculează recursiv:

$$b_0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_n \\ a_n & a_0 \end{vmatrix}, \quad b_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-1} \\ a_n & a_1 \end{vmatrix}, \quad \dots \quad (11.6)$$

- completarea tabelului se oprește când obținem o pereche de linii cu trei termeni.

Pe baza acestui mod de completare, rezultă un tabel precum în continuare:

$z^n$	$z^{n-1}$	$z^{n-2}$	$\dots$	$z^1$	$z^0$
$a_0$	$a_1$	$a_2$	$\dots$	$a_{n-1}$	$a_n$
$a_n$	$a_{n-1}$	$a_{n-2}$	$\dots$	$a_1$	$a_0$
$b_0$	$b_1$	$b_2$	$\dots$	$b_{n-1}$	/
$b_{n-1}$	$b_{n-2}$	$b_{n-3}$	$\dots$	$b_0$	/
...					
$m_0$	$m_1$	$m_2$	/	$\dots$	/
$m_2$	$m_1$	$m_0$	/	$\dots$	/

**Tabelul 11.1:** Tabelul Jury

Condițiile criteriului Jury:

a)  $P_c(1) > 0$ ;

b)  $(-1)^n P_c(-1) > 0$ ;

c)  $|a_0| > |a_n|$ ;

d)  $|b_0| > |b_{n-1}|$ ;

:

m)  $|m_0| > |m_2|$ ;

Dacă se îndeplinesc simultan condițiile  $a) - m$ ), atunci toate cele  $n$  rădăcini ale polinomului  $P_c(z)$  se află în interiorul discului unitate. În caz contrar, există cel puțin o rădăcină în afara discului unitate. Dacă cel puțin una din condițiile  $a) - m$ ) se îndeplinește cu egalitate, iar celelalte rămân inegalități stricte, atunci cel puțin o rădăcină se află pe cercul unitate.

**Observație:** Pentru a aplica criteriul Jury în cazul sistemelor de ordinul I, se utilizează doar primele două condiții. De preferat ar fi să se calculeze direct polul sistemului și să se concluzioneze de acolo stabilitatea.

**Problemă rezolvată 11.2.1:** Se consideră polinomul  $P_c(z) = z^3 - 1.9z^2 + 1.06z - 0.144$ , având:  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = -1.9$ ,  $a_2 = 1.06$ ,  $a_3 = -0.144$ .

Din efectuarea calculelor rezultă o pereche suplimentară de linii având valorile  $b_0 = 0.9793$ ,  $b_1 = -1.7474$ ,  $b_2 = 0.7864$ , iar în tabelul 11.2 este prezentat tabloul Jury corespunzător.

Pentru verificarea condițiilor criteriului avem:

- $P(1) = 1 - 1.9 + 1.06 - 0.144 = 0.016 > 0 \checkmark$
- $(-1)^3 P(-1) = (-1)(-1 - 1.9 - 1.06 - 0.144) = 4.104 > 0 \checkmark$
- $|a_0| > |a_3| \Leftrightarrow 1 > 0.144 \checkmark$
- $|b_0| > |b_2| \Leftrightarrow 0.9793 > 0.7864 \checkmark$

Astfel, rezultă că polinomul caracteristic  $P_c(z)$  are toate rădăcinile în interiorul discului unitate. Ca validare, prin calcul direct rezultă rădăcinile:  $z_1 = 0.2$ ,  $z_2 = 0.8$ ,  $z_3 = 0.9$ .

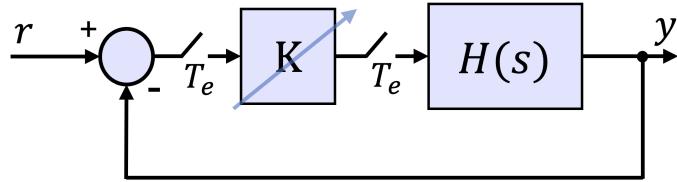
$z^3$	$z^2$	$z^1$	$z^0$
1	-1.9	1.06	-0.144
-0.144	1.06	-1.9	1
0.9793	-1.7474	0.7864	/
0.7864	-1.7474	0.9793	/

**Tabelul 11.2:** Tabelul Jury pentru exemplul rezolvat 11.2.1

### 11.3 Conexiunea cu reacție negativă a sistemelor numerice

Există aceleași tipuri de conexiuni elementare în cazul sistemelor numerice precum în cazul sistemelor continue: [conexiunea serie, paralel și cu reacție \(pozitivă sau negativă\)](#). În aplicarea formulelor deja cunoscute, se adaugă următoarea particularitate suplimentară: se discretizează fiecare conexiune de sisteme continue încadrate între două puncte de eșantionare și apoi se lucrează cu echivalentele numerice.

Cea mai des întâlnită conexiune cu reacție negativă formată din proces continuu și regulator discret este cea din Figura 11.2.



**Figura 11.2:** Schema tipică de reglare a unui proces continuu cu regulator discret.

Astfel, rezultă următoarea expresie a sistemului numeric în buclă închisă:

$$H_0(z) = \frac{\mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}\} \cdot \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}\}}{1 + \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{K(s)\}\} \cdot \mathcal{Z}\{\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}\}} = \frac{K(z) \cdot H(z)}{1 + K(z) \cdot H(z)}. \quad (11.7)$$

Pentru un regulator proporțional, i.e.  $K(s) \equiv K > 0$ , rezultă următoarea expresie a sistemului închis:

$$H_0(z) = \frac{K \cdot H(z)}{1 + K \cdot H(z)} = \frac{K \cdot \beta(z)}{P_c(z, K)} \quad (11.8)$$

$$= \frac{K \cdot \beta(z)}{a_0(K)z^n + a_1(K)z^{n-1} + a_2(K)z^{n-2} + \dots + a_{n-1}(K)z + a_n(K)}. \quad (11.9)$$

Pentru studiul stabilității sistemului în funcție de un parametru  $K > 0$ , se impun toate condițiile criteriului Jury. Dacă se adeveresc toate pentru o anumită valoare a lui  $K$  atunci sistemul este stabil în acel caz. **Prima condiție care nu se mai adeverește relativ la parcurgerea lui  $K \in (0, +\infty)$  reprezintă condiția de aducere a sistemului la limita de stabilitate. Pot exista mai multe astfel de valori.**

Acest rezultat bazat pe aplicarea criteriului lui Jury pentru sistemul în buclă închisă este inclus în algoritmul metodei locului rădăcinilor pentru sisteme numerice. Trasarea are loc în mod analog sistemelor continue, iar interpretarea se realizează pe baza regimurilor de funcționare induse de poziția polilor față de cercul unitate.

**Problemă rezolvată 11.3.2:** Se consideră un sistem cu RNU conform Figurii 11.2, cu procesul descris prin:

$$H(s) = \frac{2}{(s+2)(s+100)}. \quad (11.10)$$

Deoarece structura descrie un proces continuu controlat printr-un regulator numeric (utilizând un convertor numeric-analogic pentru transmiterea semnalului de comandă), metoda de discretizare fizic existentă în acel proces este cea a elementului de reținere de ordinul zero (engl. *zero-order hold*). Pentru a evita supraesantionarea, constanta de timp dominantă fiind  $T_1 = \frac{1}{2} \gg T_2 = \frac{1}{100}$ , se consideră perioada de eşantionare de  $T_e = \frac{1}{20} [s]$ .

În urma discretizării rezultă:

$$H_{zoh}(z) = \frac{0.0007683z + 0.0001769}{z^2 - 0.9916z + 0.006097}. \quad (11.11)$$

De aici, sistemul închis capătă expresia:

$$H_0(z) = \frac{K \cdot H_{zoh}(z)}{1 + K \cdot H_{zoh}(z)} = \frac{K(0.0007683z + 0.0001769)}{z^2 + (0.0007683K - 0.9916)z + (0.0001769K + 0.006097)}. \quad (11.12)$$

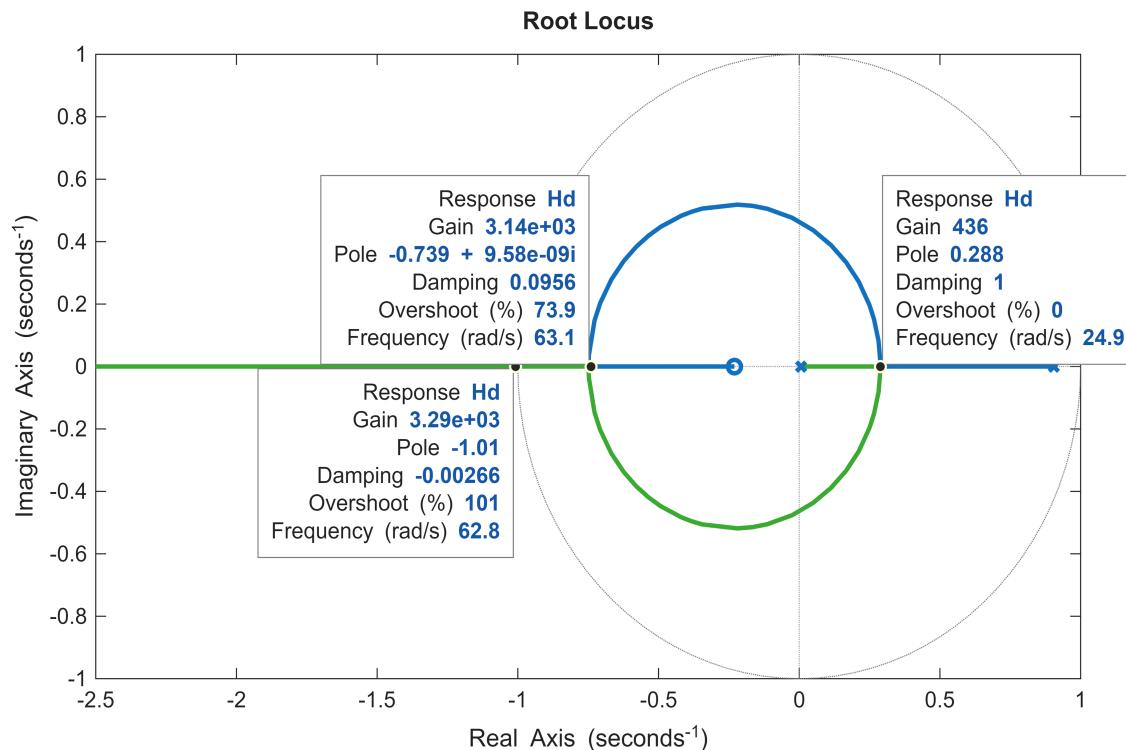
Pentru verificarea stabilității pe baza criteriului Jury avem:

- $P_c(1) = 1 + 0.007683K - 0.9916 + 0.0001769K + 0.006097 > 0, \forall K > 0 \checkmark$
- $(-1)^2 P_c(-1) = 1 + 0.9916 + 0.006097 + K(0.0001769 - 0.0007683) > 0 \Leftrightarrow K < 3.24 \cdot 10^3;$
- $|a_0| > |a_2| \Leftrightarrow 1 > 0.0001769K + 0.006097 \Rightarrow K < 5.61 \cdot 10^3.$

Din cele trei condiții rezultă că domeniul de stabilitate pentru sistemul  $H_0(z)$  este  $K \in (0, 3.24 \times 10^3)$ , având un singur  $K_{critic}$ .

De asemenea, analiza stabilității se poate face folosind **metoda locului rădăcinilor**. Trasarea acestuia utilizând mediul MATLAB se prezintă în Figura 11.3. Se observă:

- $K_{critic} \approx 3.2 \times 10^3$ , la intersecția cu cercul unitate;
- $K_{despr} \approx 436$  și  $K_{apr} \approx 3.14 \times 10^3$ .



**Figura 11.3:** Locul rădăcinilor pentru sistemul în buclă închisă de la Problema 11.3.2.

Se observă că sistemul închis este stabil pentru orice  $K \in (0, 3.2 \times 10^3)$ . În funcție de valorile lui  $K$  se disting următoarele regimuri de funcționare:

- $K \in (0, 436)$ : regim aperiodic amortizat, cu modurile  $|\hat{z}_{o1}|^k, |\hat{z}_{o2}|^k$ ;
- $K = 436$ : regim aperiodic critic amortizat, cu modurile  $|\hat{z}_{o1}|^k, k|\hat{z}_{o2}|^k$  ( $\hat{z}_{o1} = \hat{z}_{o2}$ );
- $K \in (436, 3.14 \times 10^3)$ : regim oscilant amortizat, cu modurile  $|\hat{z}_{o1,o2}|^k \cdot \sin(k\angle\hat{z}_{o1,o2})$ ;

- $K = 3.14 \times 10^3$ : regim oscilant critic amortizat (oscilație nearmonică), cu modurile  $|\hat{z}_{o1}|^k, k|\hat{z}_{o2}|^k$  ( $\hat{z}_{o1} = \hat{z}_{o2}$ );
- $K \in (3.14 \times 10^3, 3.2 \times 10^3)$ : regim oscilant amortizat (oscilație nearmonică), cu modurile  $|\hat{z}_{o1}|^k, |\hat{z}_{o2}|^k$ ;
- $K = 3.2 \times 10^3$ : regim oscilant întreținut (oscilație nearmonică), cu modurile  $|\hat{z}_{o1}|^k, |\hat{z}_{o2}|^k$  ( $\hat{z}_{o1} = -1$ );
- $K \in (3.2 \times 10^3, \infty)$ : regim oscilant neamortizat (oscilație nearmonică), cu modurile  $|\hat{z}_{o1}|^k, |\hat{z}_{o2}|^k$ ;

Sensibilitatea sistemului este relativ mare, deoarece sistemul își pierde stabilitatea pentru  $K > 3.2 \times 10^3$ , regimurile de funcționare variază, iar ramura dominantă tinde asimptotic spre infinit.

**Discuție:** Se poate relua același studiu în cazul în care s-ar fi efectuat supræsantionarea, respectând teorema lui Shannon pentru întreaga dinamică a sistemului, deci  $T_e = \frac{1}{1000}$ . Ce schimbări apar?

**Discuție:** Dar dacă pentru studiul stabilității utilizând cele două perioade de eşantionare,  $T_{e,1} = \frac{1}{20}$  [s] și  $T_{e,2} = \frac{1}{1000}$  [s], s-ar efectua discretizarea procesului cu metoda Tustin, ce schimbări intervin?

## 11.4 Probleme propuse

**Problema 11.4.1:** Se consideră următoarele sisteme continue  $H(s)$  aflate în structura din Figura 11.2,  $K > 0$ , alături de o metodă de discretizare propusă:

- |   |   |
|---|---|
| 1) $H(s) = \frac{2}{(5s+1)(s+1)}$ , Tustin;                 | 6) $H(s) = \frac{4}{2s+1} e^{-0.3s}$ , zoh, $T_e=0.15$ [s];               |
| 2) $H(s) = \frac{2}{(5s+1)(s+1)}$ , zoh;                    | 7) $H(s) = \frac{s+4.41}{s+18.4} \cdot \frac{4}{s(s+2)}$ , Euler înainte; |
| 3) $H(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+100)}$ , Euler înainte;        | 8) $H(s) = \frac{s+4.41}{s+18.4} \cdot \frac{4}{s(s+2)}$ , zoh;           |
| 4) $H(s) = \frac{2}{s(s+2)(s+100)}$ , Euler înapoi;         | 9) $H(s) = \frac{s-1}{s(s+2)}$ , zoh;                                     |
| 5) $H(s) = \frac{4}{2s+1} e^{-0.3s}$ , zoh, $T_e=0.30$ [s]; | 10) $H(s) = \frac{14}{s^2+7s+49}$ , Tustin.                               |

Se cer:

- Alegeți o perioadă de eşantionare adecvată și discretizați sistemul;

- b) Studiați stabilitatea lui  $H_0(z)$  pentru  $K = 1$ ;
- c) Studiați stabilitatea lui  $H_0(z)$  pentru  $K \in (0, +\infty)$  utilizând criteriul lui Jury;
- d) Studiați stabilitatea lui  $H_0(z)$  pentru  $K \in (0, +\infty)$  utilizând metoda locului rădăcinilor. Discutați regimurile de funcționare, modurile și senzitivitatea sistemului în funcție de parametrul  $K$ .
- e)\* Studiați stabilitatea lui  $H_0(s)$  în funcție de parametrii  $K > 0$  și  $T_e > 0$ .

**Problema 11.4.2:**

- a) Implementați în MATLAB criteriul Schur-Cohn-Jury pentru un polinom arbitrar  $P_c(z)$  cu coeficienți constanti precum în Secțiunea 11.2;
- b\*) Implementați în MATLAB criteriul Schur-Cohn-Jury pentru un polinom arbitrar de forma  $P_c(z) = \alpha(z) + k\beta(z)$ , cu  $\alpha(z)$  și  $\beta(z)$  două polinoame cu coeficienți constanti, astfel încât să se determine valorile lui  $k > 0$  pentru care toate rădăcinile lui  $P_c(z)$  sunt în interiorul discului unitate.

**Problema 11.4.3:** Structura unui sistem cu eșantionare se prezintă în Figura 11.2. Se consideră procesul descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{2}{0.2s + 1} e^{-\tau_m s} \text{ și } K > 0.$$

Să se rezolve cerințele:

- a) Pentru  $\tau_m = 0$  și  $T_e = 0.1$  [s] să se analizeze stabilitatea sistemului cu eșantionare din figură utilizând metoda Tustin pentru discretizarea funcției de transfer  $H(s)$ ;
- b) Pentru  $\tau_m = 0.1$  [s] și  $T_e = 0.1$  [s] să se analizeze stabilitatea sistemului cu eșantionare din figură utilizând metoda Tustin pentru discretizarea funcției de transfer  $H(s)$ .

---

---

## Lucrarea 12

---

### Răspunsul în frecvență al sistemelor numerice

12.1 Răspunsul în frecvență al sistemelor numerice . . . . .	114
12.2 Proiectarea filtrelor numerice	115
12.3 Probleme propuse . . . . .	117

În această lucrare este prezentat răspunsul în frecvență al sistemelor numerice, utilizând metoda  $zoh$ , metoda Tustin și metoda Tustin cu preîncovoiere (engl. *prewarping*). Alegerea metodei de discretizare este utilă în cazul în care se pornește de la un sistem continuu în timp. Suplimentar, se prezintă mecanismele puse la dispoziție în MATLAB pentru proiectarea filtrelor numerice, fiind necesare și regăsite în multiple clase de aplicații practice, atât în domeniul ingineriei reglării automate, cât și în contextul mai larg al procesării semnalelor.

## 12.1 Răspunsul în frecvență al sistemelor numerice

Conform teoremei de eşantionare a lui Shannon, frecvența de eşantionare trebuie să fie de două ori mai mare decât cea mai mare frecvență prezentă în sistem. Astfel, corespunzător unei frecvențe de eşantionare  $f_e$  putem defini limita superioară a frecvențelor ce pot fi reprezentate corect folosind eşantionarea de frecvență  $f_e$ , numită **frecvență Nyquist**  $f_N$ :

$$f_N = \frac{f_e}{2} \Rightarrow \omega_N = \frac{\pi}{T_e}. \quad (12.1)$$

Peste această valoare a pulsației apare fenomenul de **aliasing**. Astfel, pentru **pulsăția analogică**  $\omega \in (-\infty, \infty)$ , folosind perioada de eşantionare  $T_e$ , obținem **pulsăția numerică**  $\Omega = \omega T_e \in [-\pi, \pi]$ , conform formulei de transformare  $z = e^{sT_e}$ .

Astfel, răspunsul în frecvență al sistemelor numerice se trasează doar pentru pulsații până la pulsăția Nyquist. Așa cum am văzut în Lucrarea 10, fiecare metodă de discretizare vine cu avantajele și dezavantajele ei. **Dacă metoda zoh este implicită la interfațarea unui proces continuu cu un controller numeric, această metodă nu este recomandată pentru implementarea filtrelor numerice și a regulatoarelor, metoda Tustin fiind mai potrivită.** Dar, dacă se dorește ca sistemul numeric să aibă un comportament identic în jurul unei pulsații  $\omega_0$  (de exemplu, pentru a surprinde fenomenul de antirezonanță al unui filtru *Notch*), se folosește metoda Tustin cu **prewarping**, i.e. *prewarping*:

$$s = \frac{\omega_0}{\tan\left(\frac{\omega_0 T_e}{2}\right)} \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (12.2)$$

Se constată faptul că formula anterioară este mai generală decât transformarea Tustin obișnuită, aceasta regăsindu-se în cazul  $\omega_0 \rightarrow 0$ .

**Exemplul 12.1.1:** Se consideră filtrul *Notch* descris prin funcția de transfer:

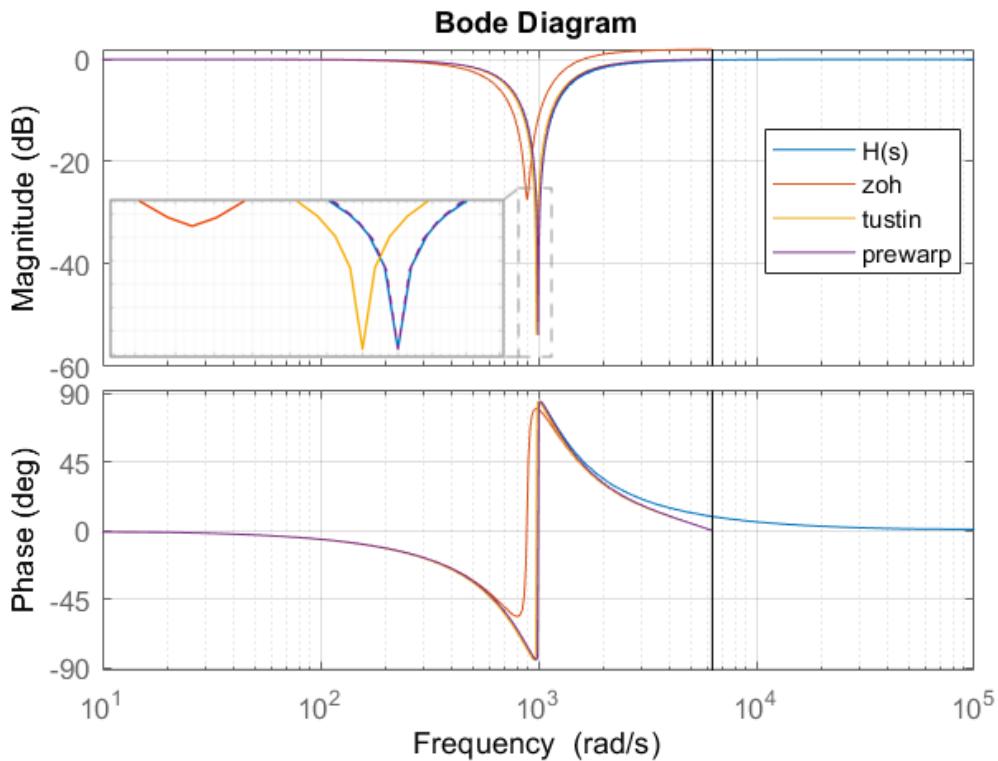
$$H(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_n s + \omega_n^2}, \quad (12.3)$$

unde  $\omega_n = 10^3$  [rad/s],  $\zeta_1 = 10^{-3}$  și  $\zeta_2 = 0.5$ . Conform teoremei lui Shannon, perioada de eşantionare trebuie să respecte:

$$T_e < \frac{\frac{1}{\zeta_2\omega_n}}{2} \Rightarrow T_e < 1 \text{ [ms]}, \quad (12.4)$$

și putem alege  $T_e = 500[\mu\text{s}]$ . În Figura 12.1 sunt prezentate diagramele Bode obținute folosind metodele **zoh**, Tustin, respectiv Tustin cu frecvență de *prewarping*  $\omega_0 = \omega_n$ . Se poate observa că metoda **zoh** introduce atenuarea mult mai mică și la o frecvență sensibil diferită de frecvența de tăiere a filtrului *Notch* analogic, în timp ce metoda Tustin are o foarte mică deviație față de pulsăția din continuu, iar metoda Tustin cu *prewarping* reușește să urmărească întocmai antirezonanța la care a fost proiectat filtrul în planul  $s$ .

Prezentăm mai jos o modalitate de a obține răspunsul în frecvență comparativ al sistemului numeric în mediul MATLAB.



**Figura 12.1:** Răspunsul în frecvență al unui sistem numeric.

```

1 wn=1e3; zeta1=1e-3; zeta2=0.5;
2 Hc=tf([1,2*zeta1*wn,wn^2],[1,2*zeta2*wn,wn^2]);
3 Te=500e-6;
4 Hd1=c2d(Hc,Te,'zoh');
5 Hd2=c2d(Hc,Te,'tustin');
6 % utilizarea metodei Tustin cu prewarping
7 opt = c2dOptions('Method','tustin','prewarpfrequency',wn);
8 Hd3=c2d(Hc,Te,opt);
9 figure
10 bode(Hc,Hd1,Hd2,Hd3);
11 legend('H(s)', 'zoh', 'tustin', 'prewarp');

```

## 12.2 Proiectarea filtrelor numerice

În MATLAB, proiectarea filtrelor este un proces relativ simplu, datorită funcțiilor dedicate ce permit configurarea detaliată a caracteristicilor filtrului.

În proiectarea filtrelor digitale, MATLAB oferă o suiată robustă de funcții care facilitează configuraarea și analiza diverselor tipuri de filtre, fiecare având caracteristici distincte care le fac potrivite pentru diferite aplicații. Printre aceste funcții de proiectare, se enumeră:

- butter: filtre de tip Butterworth;

- **cheby1**: filtre Chebyshev (Cebîșev) de tip I;
- **cheby2**: filtre Chebyshev (Cebîșev) de tip II;
- **ellip**: filtre eliptice;
- **fir1**: filtre cu răspuns finit la impuls pe baza unei ferestre spectrale etc.

Filtrul **Butterworth** se remarcă prin răspunsul în frecvență extrem de neted și plat în banda de trecere, fără ondulații (riplu), fiind ideal pentru aplicații unde uniformitatea răspunsului este prioritată, însă are o tranziție relativ lentă către banda de oprire. În schimb, filtrele **Chebyshev de tip I** permit o tranziție mai rapidă, datorită ondulației acceptate în banda de trecere, fiind utile când se preferă o tranziție abruptă, dar cu o ondulație controlată. Filtrele **Chebyshev de tip II**, pe de altă parte, prezintă ondulații doar în banda de oprire, menținând banda de trecere netedă și fiind preferate în situațiile în care ondulațiile în banda de trecere sunt inaceptabile. Filtrul **eliptic** face excepție prin oferirea celei mai rapide tranziții între banda de trecere și cea de oprire, având ondulații atât în banda de trecere, cât și în cea de oprire, fiind cel mai eficient pentru proiectele unde cerințele de selectivitate sunt extrem de restrictive. În cele din urmă, filtrul **FIR fir1** se diferențiază prin răspunsul în fază liniară și este preferat în aplicații unde această caracteristică este critică, precum în procesarea audio sau în reglarea sistemelor neliniare, însă necesită un ordin mai mare pentru a realiza o tranziție similară cu cea a filtrelor Chebyshev sau eliptic.

Cu oricare dintre aceste topologii de filtre se pot alege: tipul filtrului (**trece jos**, **trece sus**, **trece bandă**, **oprește bandă**), ordinul filtrului, banda de trecere (normalizată în domeniul  $[0, 1]$ ), ceea ce corespunde domeniului de pulsații analogice  $[0, f_N]$  [Hz] și alte specificații suplimentare. Toate aceste funcții pot returna atât filtre continue, cât și numerice.

Interpretarea și ajustarea acestor filtre poate fi facilitată cu ajutorul funcțiilor de vizualizare, cum ar fi **freqz**, care oferă o reprezentare grafică a răspunsului în frecvență al filtrului proiectat.

**Exemplul 12.2.1, proiectarea unui filtru trece jos numeric:** În secțiunea următoare de cod se prezintă proiectarea unui filtru trece jos de tip Butterworth de ordinul 4.

```

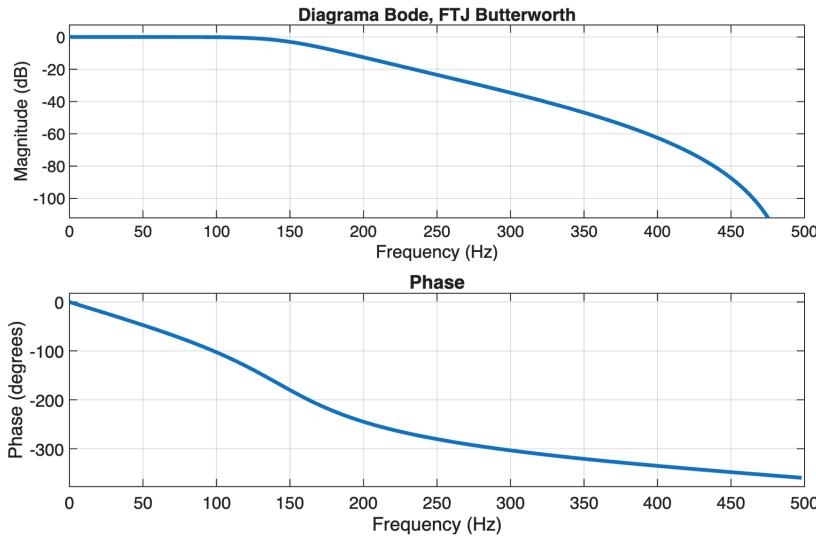
1 fe = 1000;    % frecvența de esantionare [Hz]
2 fN = fe /2;   % frecvența Nyquist
3 N = 4;         % N = ordinul filtrului (în cazurile FTJ și FTS)
4 Fc = 150/fN;   % frecvența de taiere normalizată (150 Hz)
5 [B, A] = butter(N, Fc, 'low');
6 % vizualizarea răspunsului
7 freqz(B, A, 1024, fe);
8 title('Diagrama Bode, FTJ Butterworth');

```

Rezultatul execuției secțiunii de cod de mai sus este filtrul caracterizat prin funcția de transfer  $H = \text{tf}(B, A, 1/fe)$ , descrisă prin:

$$H(z) = \frac{0.01856z^4 + 0.07425z^3 + 0.1114z^2 + 0.07425z + 0.01856}{z^4 - 1.57z^3 + 1.276z^2 - 0.4844z + 0.0762}, \quad (12.5)$$

având răspunsul în frecvență ilustrat în Figura 12.2. Se constată că la frecvența de tăiere cerută de  $F_c = 150$  [Hz], filtrul prezintă atenuarea de  $-3$  [dB].



**Figura 12.2:** Diagrama Bode a unui filtru Butterworth de tip trece jos.

**Exemplul 12.2.2, proiectarea unui filtru oprește bandă numeric:** În secțiunea următoare de cod se prezintă proiectarea unui filtru oprește bandă eliptic de ordinul 16.

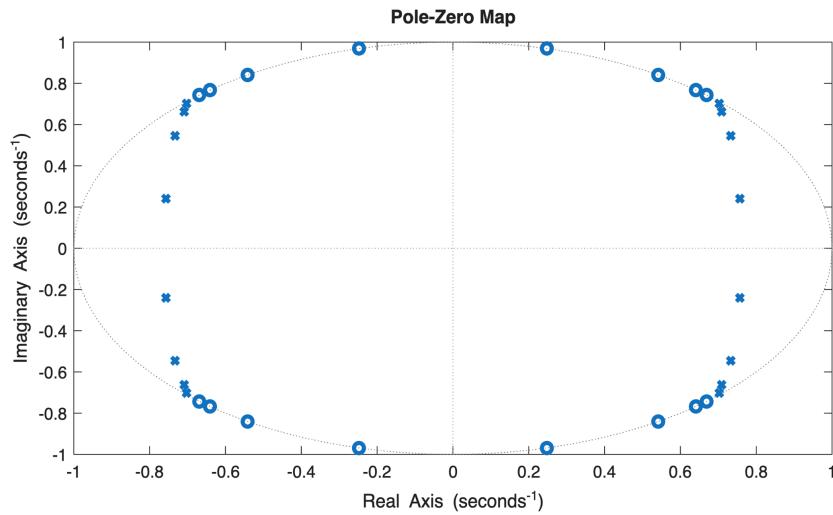
```

1 fe = 2000; % frecventa de esantionare [Hz]
2 fN = fe /2; % frecventa Nyquist
3 N = 8; % N = ordinul filtrului / 2 (in cazurile FTB si FOB)
4 Wp = [300 700]/fN; % banda de trecere (bandpass)
5 Ws = [250 750]/fN; % banda de oprire (bandstop)
6 rp = 1; % ondulatia maxima in banda de trecere [dB]
7 rs = 60; % atenuarea minima [dB] in banda de oprire
8 [B, A] = ellip(N, rp, rs, Ws, 'stop');
9 freqz(B, A, 1024, fe);
10 title ('Diagrama Bode, FOB eliptic');
```

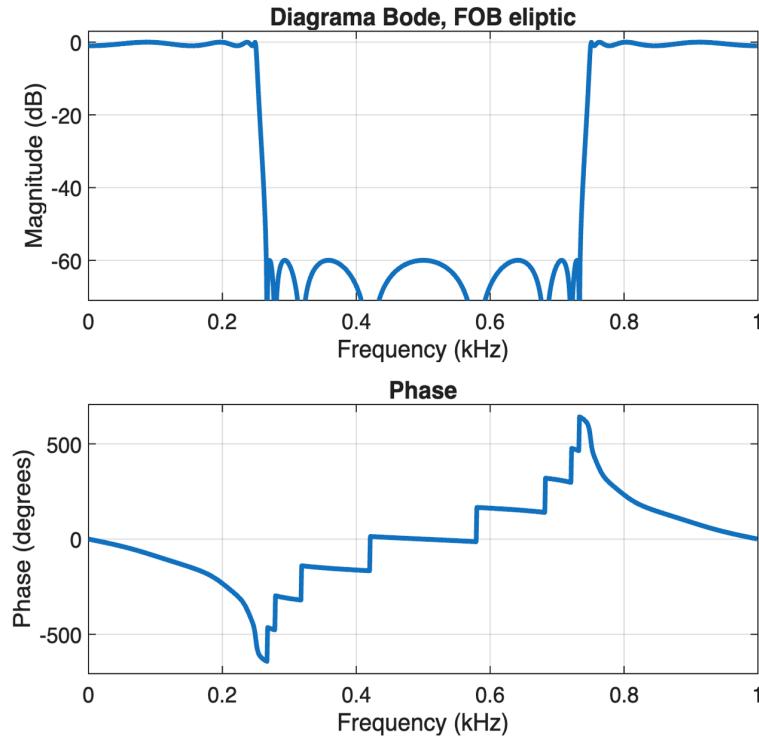
Execuția secțiunii de cod de mai sus este filtrul caracterizat prin funcția de transfer  $H = \text{tf}(B, A, 1/fe)$ , descrisă prin configurația poli-zerouri (funcția `pzmap` din MATLAB) din Figura 12.3, având răspunsul în frecvență ilustrat în Figura 12.4. Se constată că, datorită ordinului ridicat și a topologiei eliptice, tranzitia între banda de trecere și banda de oprire este foarte abruptă, dezavantajul fiind prezența ondulațiilor pe întreg spectrul. Filtrul îndeplinește specificațiile cerute (în caz contrar, este necesar un ordin mai mare).

## 12.3 Probleme propuse

**Problema 12.3.1:** Proiectați un filtru numeric descris prin funcția de transfer  $H(z)$  utilizând rutinile corespunzătoare din MATLAB. Utilizați documentația `help` și `doc` pentru apelul complet al funcțiilor. Se cer următoarele specificații:



**Figura 12.3:** Maparea poli-zerourii a filtrului eliptic de tip oprește bandă de ordin 16.



**Figura 12.4:** Diagrama Bode a filtrului eliptic de tip oprește bandă de ordin 16.

- a) filtru de tip trece sus, topologia Butterworth, ordin 6, frecvența de eșantionare  $f_e = 10$  [kHz], frecvența de tăiere 3500 [Hz];
- b) filtru trece bandă Chebyshev de tip II, ordin 4, perioada de eșantionare  $T_e = 100$  [ $\mu$ s], banda de frecvențe de tăiere [500, 1000] [Hz], ondulația din banda de oprire de 3 [dB].

Determinați funcțiile de transfer corespunzătoare, studiați singularitățile, respectiv trasați diagramele Bode și Nyquist aferente. Câte filtre pot fi realizate cu specificațiile de mai sus?

---

---

# Lucrarea 13

---

## Implementarea sistemelor numerice

13.1 Deducerea ecuațiilor cu diferențe pe baza funcției de transfer . . . . .	120
13.2 Deducerea modelelor numerice în spațiul stărilor . . . . .	124
13.3 Scalarea coeficienților în virgulă fixă . . . . .	125
13.4 Implementarea ecuațiilor cu diferențe pe microcontroller . . . . .	127

În această lucrare sunt prezentate trei metode de implementare a sistemelor numerice pornind de la funcția de transfer: conexiunea serie, conexiunea paralel și împărțirea infinită, respectiv definirea și obținerea modelelor numerice în spațiul stărilor. Suplimentar, sunt prezentate aspecte de scalare a coeficienților în virgulă fixă și pașii necesari pentru implementarea pe *microcontroller* a dinamicii modelată prin funcție de transfer.

## 13.1 Deducerea ecuațiilor cu diferențe pe baza funcției de transfer

Procesul de proiectare a regulatoarelor sau a filtrelor numerice în planul  $s$  este cel mai des folosit. Dar, datorită creșterii puterii de calcul a unui sistem numeric, împreună cu dezavantajele care provin din implementarea analogică, sistemele proiectate în continuu sunt convertite în sisteme numerice, având ca scop implementarea pe un sistem numeric de calcul (*microcontroller*). În această secțiune vom prezenta trei metode (topologii) distințe de implementare a sistemelor numerice. Pentru reprezentarea grafică a semnalelor numerice în MATLAB, se pot utiliza funcțiile `stairs` și `stem`. În schema bloc a fiecărei topologii este utilizat blocul  $z^{-1}$ , corespunzător operatorului de întârziere cu un tact.

### 13.1.1 Conexiunea serie

Numită și programarea directă, **conexiunea serie** este o implementare recursivă, pe baza ecuației cu diferențe. Astfel, pornind de la funcția de transfer:

$$H_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z^{-n_d} B(z^{-1})}{A(z^{-1})} = \frac{b_1 z^{-n_d} + b_2 z^{-n_d-1} + \cdots + b_{n_B} z^{-n_d-n_B+1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A}}, \quad (13.1)$$

de unde obținem:

$$Y(z) (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_{n_A} z^{-n_A}) = U(z) (z^{-n_d} + z^{-n_d-1} + \cdots + z^{-n_d-n_B+1}), \quad (13.2)$$

ceea ce, prin aplicarea transformatei  $\mathcal{Z}^{-1}$ , devine:

$$\begin{aligned} y[n] &= -a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] - \cdots - a_{n_A} y[n-n_A] \\ &\quad + b_1 u[n-n_d] + b_2 u[n-n_d-1] + \cdots + b_{n_B} u[n-n_d-n_B+1], \end{aligned} \quad (13.3)$$

și se numește **ecuația cu diferențe** a sistemului discret  $H_d(z)$ .

**Exemplul 13.1.1:** Pentru exemplificare vom considera un sistem continuu descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}, \quad (13.4)$$

discretizat folosind metoda `zoh` și o perioadă de eşantionare  $T_e = 0.2$  [s]. O posibilă implementare a conexiunii serie în MATLAB este prezentată mai jos, iar schema bloc a sistemului este cea din Figura 13.1.

```

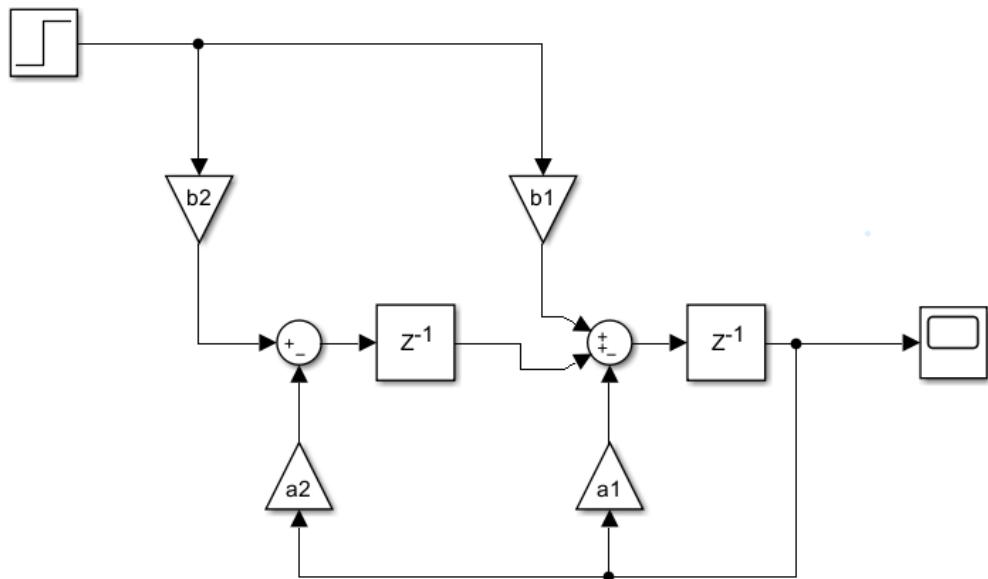
1 % perioada de esantionare
2 Te=0.2;
3 % functia de transfer cu zoh
4 Hd=c2d(tf(1,[1 3 2]),Te, 'zoh');
5 % extragerea numaratorului si numitorului
6 [num,den]=tfdata(Hd, 'v');
7 % extragerea parametrilor pentru implementare

```

```

8 a2=den(3); a1=den(2);
9 b2=num(3); b1=num(2);
10 % conditiile initiale
11 y(1)=0;
12 y(2)=b1;
13 % numarul de esantioane
14 n=30;
15 % semnalul de intrare
16 u=ones(1,n);
17 % implementarea sistemului numeric
18 for k=3:n
19     y(k)=b2*u(k-2)+b1*u(k-1)-a2*y(k-2)-a1*y(k-1);
20 end
21 % timpul de simulare
22 te=0:Te:(n-1)*Te;
23 % comparatia intre ce s-a calculat si ce returneaza MATLAB
24 stairs(te,y,'r*'); hold; step(Hd)

```



**Figura 13.1:** Structura corespunzătoare conexiunii serie a unui sistem de ordin II.

### 13.1.2 Conexiunea paralel

Cunoscută și sub denumirea de descompunere în fracții simple, **conexiunea paralel** are la bază punerea în evidență a funcției de transfer în funcție de transferul instantaneu, polii sistemului discret și reziduurile corespunzătoare acestora:

$$H_d(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = D + \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{z - \hat{z}_i} = D + \sum_{i=1}^n \frac{r_i z^{-1}}{1 - \hat{z}_i z^{-1}}, \quad (13.5)$$

iar fiecare subsistem de ordin I va fi implementat folosind conexiunea serie:

$$y_i[n] = \hat{z}_i y_i[n-1] + r_i u[n-1], \quad (13.6)$$

ieșirea finală a sistemului fiind:

$$y[n] = D \cdot u[n] + \sum_{i=1}^n y_i[n]. \quad (13.7)$$

Pentru a obține coeficeinții  $r_i$ ,  $\hat{z}_i$  și  $D$  corespunzători acestei implementări, se poate utiliza funcția `residue`, care primește două polinoame (numărătorul și numitorul funcție de transfer) și returnează vectorul reziduurilor, vectorul polilor și transferul instantaneu.

**Remarcă:** În relația (13.5) este prezentată structura pur algebraică. Dar, polii și reziduurile pot fi numere complexe. De aceea, pentru implementarea unui astfel de sistem numeric, polii complex-conjugați vor forma subsisteme de ordin II de forma:

$$H_{d,i}(z) = \frac{r_{i,1}z^{-1} + r_{i,2}z^{-2}}{1 - 2\operatorname{Re}\{\hat{z}_i\}z^{-1} + |\hat{z}_i|^2 z^{-2}}. \quad (13.8)$$

**Exemplu:** Pentru exemplificare, vom considera același sistem continuu (13.4) discretizat folosind metoda zoh și o perioadă de eşantionare  $T_e = 0.2$  [s]. O posibilă implementare a conexiunii paralel în MATLAB este prezentată mai jos, iar schema bloc a sistemului este cea din Figura 13.2.

```

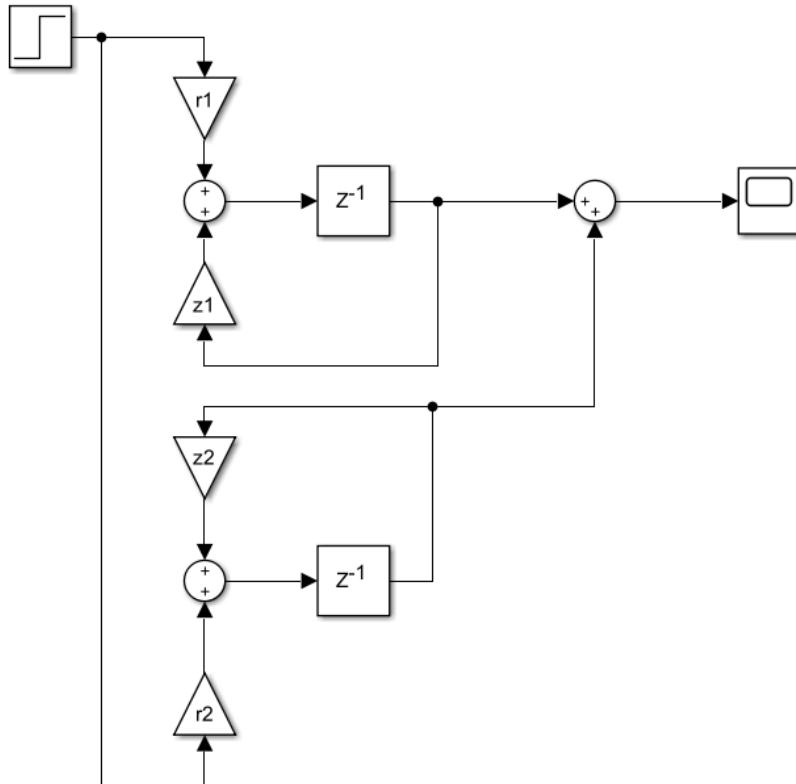
1 % perioada de esantionare
2 Te=0.2;
3 % functia de transfer cu zoh
4 Hd=c2d(tf(1,[1 3 2]),Te,'zoh');
5 % extragerea numaratorului si numitorului
6 [num,den]=tfdata(Hd,'v');
7 % extragerea parametrilor pentru implementare
8 [Res,Pole,Dir]=residue(num,den);
9 r1=Res(1); r2=Res(2);
10 z1=Pole(1); z2=Pole(2);
11 % conditiile initiale
12 y1(1)=0;
13 y2(1)=0;
14 y(1)=y1(1)+y2(1);
15 % numarul de esantioane
16 n=30;
17 % semnalul de intrare
18 u=ones(1,n);
19 % implementarea sistemului numeric
20 for k=2:n
    y1(k)=z1*y1(k-1)+r1*u(k-1);

```

```

22      y2(k)=z2*y2(k-1)+r2*u(k-1);
23      y(k)=y1(k)+y2(k);
24 end
25 % timpul de simulare
26 te=0:Te:(n-1)*Te;
27 % comparatia intre ce s-a calculat si ce returneaza MATLAB
28 stairs(te,y,'r*');hold;step(Hd)

```



**Figura 13.2:** Structura corespunzătoare conexiunii paralel a unui sistem de ordin II.

### 13.1.3 Împărțirea infinită

Dacă cele două metode anterioare de implementare erau corespunzătoare unor filtre **IIR** (engl. *Infinite Impulse Response*), această metodă este caracteristică unui filtru **FIR** (engl. *Finite Impulse Response*). Un sistem discret descris prin funcția de transfer se poate scrie sub forma unei serii infinite, serie care se poate approxima folosind primii  $N$  termeni:

$$H_d(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]z^{-k} \approx \sum_{k=0}^{N-1} h[k]z^{-k}, \quad (13.9)$$

unde  $h[k]$  sunt eşantioanele corespunzătoare răspunsului la impuls (parametrii Markov), care se pot calcula prin împărțirea polinomului de la numărător la polinomul de la numitor.

În MATLAB, acest lucru este posibil prin intermediul funcției `deconv`. Ieșirea sistemului se obține prin conoluția dintre primii  $N$  termeni ai răspunsului la impuls și intrarea sistemului:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]u[n-k]. \quad (13.10)$$

**Remarcă:** Față de experimentele anterioare, în acest caz, sistemul numeric va fi capabil să urmărească doar primele  $N$  eșantioane ale răspunsului la treaptă al sistemului numeric.

**Exemplu:** Pentru exemplificare, vom considera același sistem continuu (13.4) discretizat folosind metoda `zoh` și o perioadă de eșantionare  $T_e = 0.2$  [s]. O posibilă implementare a împărțirii infinite în MATLAB este prezentată mai jos, iar schema bloc a sistemului este cea din Figura 13.3.

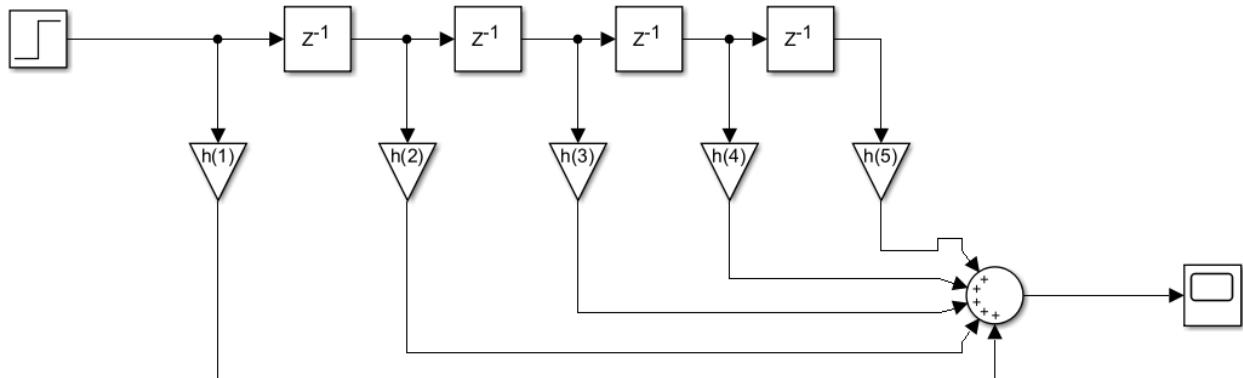
```

1 % perioada de esantionare
2 Te=0.2;
3 % functia de transfer cu ZOH
4 Hd=c2d(tf(1,[1 3 2]),Te,'zoh');
5 % extragerea numaratorului si numitorului
6 [num,den]=tfdata(Hd,'v');
7 % numarul termenilor pentru aproximare
8 N = 10;
9 % extragerea parametrilor
10 [h,~] = deconv([num zeros(1,N)],den);
11 % numarul de eșantioane
12 n=30;
13 % initializarea iesirii
14 y = zeros(1,n);
15 % semnalul de intrare
16 u=[zeros(1,N) ones(1,n-N)];
17 for k=N+1:n
18     for j=1:N
19         y(k)=y(k)+h(j)*u(k-j);
20     end
21 end
22 % timpul de simulare
23 t=0:Te:(n-N-2)*Te;
24 % comparatia intre ce s-a calculat si ce returneaza MATLAB
25 stairs(t,y(N+2:n),'r*');hold;step(Hd)

```

## 13.2 Deducerea modelelor numerice în spațiul stărilor

În prezent, multiple tehnici de proiectare a regulatoarelor oferă modelele acestora sub formă de realizare de stare. Astfel, de interes devine obținerea ecuației cu diferențe corespunzătoare



**Figura 13.3:** Structura corespunzătoare împărțirii infinite pentru  $N = 5$ .

pentru modelele în spațiul stărilor.

Pornind de la reprezentarea unui model în timp continuu:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= A_c x(t) + B_c u(t); \\ y(t) &= C_c x(t) + D_c u(t), \end{cases} \quad (13.11)$$

echivalentul său numeric, cu perioada de eşantionare  $T > 0$ , va avea reprezentarea:

$$\begin{cases} x[k+1] &= A_d x[k] + B_d u[k]; \\ y[k] &= C_d x[k] + D_d u[k]. \end{cases} \quad (13.12)$$

Funcțiile de transfer în  $s$  și  $z$  se calculează pe baza formulei de legătură:

$$H(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c + D_c, \quad H(z) = C_d (zI - A_d)^{-1} B_d + D_d. \quad (13.13)$$

Legăturile între modelele  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$  și  $(A_d, B_d, C_d, D_d)$  se obțin din diversele metode de discretizare, cu o parte dintre ele menționate în continuare. Spre exemplu, metoda *zero-order hold* implică faptul că vectorul de intrare  $u(t)$  este constant pe fiecare interval de timp  $[kT, (k+1)T]$ , ceea ce duce la o reprezentare:

$$\Sigma_{zoh}(z) : \begin{cases} x[k+1] &= (e^{A_c T}) x[k] + \left( \int_0^T e^{A_c(T-\tau)} B_c u[k] d\tau \right) = A_d x[k] + B_d u[k]; \\ y[k] &= C_c x[k] + D_c u[k]. \end{cases} \quad (13.14)$$

În Tabelul 13.1 se redau în mod sintetic relațiile prin care se obține descrierea sistemului numeric în spațiul stărilor  $(A_d, B_d, C_d, D_d)$  plecând de la sistemul continuu  $(A_c, B_c, C_c, D_c)$ , pentru cele trei metode de discretizare prin aproximarea numerică a integralei. Conversia inversă, pornind de la sistemul discret către cel continuu, se prezintă în Tabelul 13.2.

### 13.3 Scalarea coeficienților în virgulă fixă

Se consideră următoarea funcție de transfer în  $z$ :

$$H_d(z^{-1}) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (13.15)$$

	Metoda dreptunghiurilor înainte	Metoda dreptunghiurilor înapoi	Metoda Tustin
$A_d$	$I + TA_c$	$(I - TA_c)^{-1}$	$(I - \frac{T}{2}A_c)^{-1}(I + \frac{T}{2}A_c)$
$B_d$	$TB_c$	$(I - TA_c)^{-1}TB_c$	$(I - \frac{T}{2}A_c)^{-1}\frac{T}{2}B_c$
$C_d$	$C_c$	$C_c(I - TA_c)^{-1}$	$2C_c(I - \frac{T}{2}A_c)^{-1}$
$D_d$	$D_c$	$D_c + C_c(I - TA_c)^{-1}TB_c$	$D_c + C_c(I - \frac{T}{2}A_c)^{-1}\frac{T}{2}B_c$

**Tabelul 13.1:** Conversia continuu-discret în spațiul stărilor

	Metoda dreptunghiurilor înainte	Metoda dreptunghiurilor înapoi	Metoda Tustin
$A_c$	$\frac{1}{T}(A_d - I)$	$\frac{1}{T}(I - A_d^{-1})$	$\frac{2}{T}(A_d - I)(I + A_d)^{-1}$
$B_c$	$\frac{1}{T}B_d$	$\frac{1}{T}A_d^{-1}B_d$	$\frac{4}{T}(I + A_d)^{-1}B_d$
$C_c$	$C_d$	$C_dA_d^{-1}$	$C_d(I + A_d)^{-1}$
$D_c$	$D_d$	$D_d - C_dA_d^{-1}B_d$	$D_d - C_d(I + A_d)^{-1}B_d$

**Tabelul 13.2:** Conversia discret-continuu în spațiul stărilor

cu coeficienții  $\{a_i, b_j\} \in \mathbb{R}$ . Prin aplicarea transformatei  $\mathcal{Z}$  inverse și utilizând conexiunea serie rezultă următoarea ecuație cu diferențe finite:

$$y[n] = -a_1y[n-1] - a_2y[n-2] + b_0u[n] + b_1u[n-1] + b_2u[n-2]. \quad (13.16)$$

Inițial, coeficienții se obțin în virgulă flotantă, pe 64 de biți (*double*). Majoritatea microcontrollerelor nu suportă operațiile de adunare și înmulțire cu numere în virgulă flotantă implicit în structura lor hardware. Astfel, se propune **scalarea coeficienților în formatul de virgulă fixă, utilizând numere întregi în codificarea complement față de doi** pentru sporirea vitezei de efectuare a calculelor.

Se constată următoarea încadrare a modulelor coeficienților:

$$\max \{|a_i|, |b_j|\} \leq 2^m, m \geq 0. \quad (13.17)$$

Dacă se utilizată un microcontroller cu lungimea implicită a numerelor întregi pe  $L$  biți, atunci scalarea care profită optim de această lungime se efectuează prin următoarele deplasări pe biți:

$$\tilde{a}_i \leftarrow (a_i \ll (L - m - 1)), \quad \tilde{b}_j \leftarrow (b_j \ll (L - m - 1)), \quad (13.18)$$

unde scăderea suplimentară cu 1 se datorează locului alocat bitului de semn.

Astfel, ecuația cu diferențe devine:

$$\tilde{y}[n] = -\tilde{a}_1\tilde{y}[n-1] - \tilde{a}_2\tilde{y}[n-2] + \tilde{b}_0u[n] + \tilde{b}_1u[n-1] + \tilde{b}_2u[n-2]. \quad (13.19)$$

Deoarece se pot memora intrările și ieșirile precedente în unitățile convertoarelor analog-numerice și numeric-analogice pe  $L$  biți, iar coeficienții  $\tilde{a}_i$  și  $\tilde{b}_j$  sunt memorati tot pe  $L$  biți, rezultatul obținut este pe  $2L$  biți, iar valoarea care trebuie transmisă la ieșirea microcontrollerului trebuie rescalată prin următoarea deplasare:

$$y[n] \leftarrow (\tilde{y}[n] \gg (L - m - 1)). \quad (13.20)$$

Înainte de trecerea la implementarea pe microcontroller utilizând limbajul C, se recomandă simularea și validarea filtrului proiectat și scalat la coeficienți întregi în mediul MATLAB.

**Exemplu numeric:** Pentru funcția de transfer a unui filtru *Notch*, se consideră funcția de transfer numerică cu perioada de eşantionare  $T_e = 31.25 \text{ } [\mu\text{s}]$ :

$$H(s) = \frac{s^2 + 3030^2}{s^2 + 6060s + 3030^2} \xrightarrow{\text{Tustin}} H_d(z^{-1}) = \frac{0.9136 - 1.81916z^{-1} + 0.9136z^{-2}}{1 - 1.8191z^{-1} + 0.82734z^{-2}}. \quad (13.21)$$

Considerând notația (13.15), se constată că:

$$\max \{|a_i|, |b_j|\} \leq 2^1. \quad (13.22)$$

Pentru o reprezentare numerică pe  $L = 16$  biți, ținând cont suplimentar de bitul de semn, rezultă că reprezentarea părții fractionale a coeficienților poate fi stocată pe  $L - m - 1 = 14$  biți, profitând de precizia maximă a codificării, cu o rezoluție  $\varepsilon = 2^{-14}$ . Astfel, coeficienții stocați aparțin domeniului  $[-2, 2 - \varepsilon]$ . Aplicând scalarea (13.18), rezultă funcția de transfer cu coeficienți în virgulă fixă:

$$\tilde{H}_d(z^{-1}) = \frac{14970 - 29805z^{-1} + 14970z^{-2}}{16384 - 29805z^{-1} + 13555z^{-2}}, \quad (13.23)$$

pe baza căreia rezultă ecuația cu diferențe scalată (13.19). Pentru a reveni la domeniul propus al semnalelor, rezultatul formulei,  $\tilde{y}[n]$ , trebuie re-scalat conform (13.20).

## 13.4 Implementarea ecuațiilor cu diferențe pe microcontroller

Pentru implementarea pe microcontroller a regulatorului/filtrului numeric trebuie efectuatii următorii pași:

- deducerea ecuației cu diferențe conform unei anumite topologii (serie, paralel etc.);
- selectarea și setarea unui convertor analog-numeric pentru citirea intrărilor  $u[n]$ ;
- selectarea și setarea unui modul de ieșire pentru transmiterea valorii calculate  $y[n]$ : convertor numeric-analogic, modul PWM, modul de comunicație CAN, I2C etc.;
- setarea unui modul *Timer* la perioada de eşantionare dorită și atașarea acestuia la sistemul de întreruperi al microcontrollerului;
- în rutina de întrerupere atașată se implementează operațiile din (13.19) și (13.20), alături de decalarea intrărilor (la începutul rutinei) și ieșirilor (la finalul rutinei):  $u[n - 1], u[n - 2], y[n - 1], y[n - 2]$ ;
- testarea și validarea ansamblului utilizând un generator de semnale și osciloscop.

Pentru mai multe detalii, probleme aferente și exemple de implementări, se recomandă parcurgerea referințelor [Franklin, Powell și Workman 1998], [Rossi, Toscani și Mauri 2022], [Petkov, Slavov și Kralev 2018].



## Partea III

Realizări de stare. Proprietăți algebrice  
ale sistemelor LTI



---

---

## Lucrarea 14

---

### Realizări de stare. Forme canonice

14.1 Realizări de stare . . . . .	132
14.2 Forme canonice . . . . .	133
14.3 Probleme propuse . . . . .	142

Lucrarea de față cuprinde metode de a obține realizări de stare pornind de la funcția de transfer a sistemelor LTI. În aceste cazuri, stările nu au în mod obligatoriu semnificație fizică. Se descriu următoarele forme canonice:

- Forma canonică de control – **FCC**;
- Forma canonică de observare – **FCO**;
- Forma canonică controlabilă – **FCCo**;
- Forma canonică observabilă – **FCOb**;
- Forma canonică bloc diagonală (Jordan) – **FCJ**.

## 14.1 Realizări de stare

Un sistem LTI are următoarea descriere în spațiul stărilor:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad (14.1)$$

având numărul de **stări**  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  (**ordinul sistemului**), numărul de **intrări**  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ , respectiv numărul de **ieșiri**  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ . Pentru un asemenea sistem avem reprezentarea compactă folosind matricea cu blocuri:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+m)}. \quad (14.2)$$

În funcție de numărul de intrări și ieșiri, sistemele se clasifică în:

- **SISO** (engl. *Single Input, Single Output*):  $m = p = 1$ ;
- **MISO** (engl. *Multi-Input, Single Output*):  $m > 1$ ,  $p = 1$ ;
- **SIMO** (engl. *Single Input, Multi-Output*):  $m = 1$ ,  $p > 1$ ;
- **MIMO** (engl. *Multi-Input, Multi-Output*):  $m > 1$ ,  $p > 1$ .

Pentru un sistem LTI, indiferent de numărul de intrări sau de ieșiri, trecerea din spațiul stărilor la funcția/matricea de transfer echivalentă se face prin aplicarea transformatei Laplace în condiții initiale nule:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) |_{\mathcal{L}}, \mathbf{C}\mathbf{I} \equiv 0; \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t); |_{\mathcal{L}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s\mathbf{X}(s) = A\mathbf{X}(s) + B\mathbf{U}(s); \\ \mathbf{Y}(s) = C\mathbf{X}(s) + D\mathbf{U}(s). \end{cases} \quad (14.3)$$

Prin eliminarea termenului  $\mathbf{X}(s)$  se obține relația de legătură între  $\mathbf{U}(s)$  și  $\mathbf{Y}(s)$  astfel:

$$\mathbf{X}(s) = (sI - A)^{-1} B\mathbf{U}(s) \Rightarrow \mathbf{Y}(s) = [C(sI - A)^{-1} B + D] \mathbf{U}(s) \Rightarrow \quad (14.4)$$

$$\mathbf{H}(s) = \left[ \frac{Y_j(s)}{U_i(s)} \right]_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq m}} = C(sI - A)^{-1} B + D, \quad (14.5)$$

unde  $\mathbf{H}(s)$  reprezintă matricea de transfer a sistemului, cu elementele individuale de tip funcție de transfer, având  $m$  coloane corespunzătoare semnalelor de intrare, respectiv  $p$  linii corespunzătoare semnalelor de ieșire. Doar în cazul particular al sistemelor SISO discutăm despre funcția de transfer a sistemului.

## 14.2 Forme canonice

### 14.2.1 Forma canonica de control – FCC

#### Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI SISO descris prin funcția de transfer  $H(s)$ . Pentru a putea evidenția realizarea de stare corespunzătoare **formei canonice de control (FCC)**, trebuie să punem în evidență funcția de transfer în forma următoare:

$$H(s) = \frac{\beta(s)}{\alpha(s)} = \textcolor{red}{d} + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{\textcolor{blue}{s}^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}. \quad (14.6)$$

Realizarea de stare corespunzătoare FCC este dată de matricea cu blocuri:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCC} & B_{FCC} \\ \hline C_{FCC} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccccc|c} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \hline b_{n-1} & b_{n-2} & \dots & b_1 & b_0 & d \end{array} \right). \quad (14.7)$$

#### Exemplu:

Se consideră sistemul SISO descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{6s^3 + 21s^2 + 23s + 20}{2s^3 + 7s^2 + 7s + 2}.$$

În primul rând punem în evidență transferul instantaneu:

$$d = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 3 \implies H(s) = 3 + \frac{2s + 14}{\textcolor{red}{2}s^3 + 7s^2 + 7s + 2}.$$

Deoarece polinomul de la numitor nu este monic (i.e., nu are coeficientul dominant 1), re scriem funcția de transfer astfel:

$$H(s) = 3 + \frac{s + 7}{s^3 + \frac{7}{2}s^2 + \frac{7}{2}s + 1}.$$

După ce avem evidențiată funcția de transfer ca în relația (14.6), realizarea de stare corespunzătoare formei canonice de control este descrisă compact de următoarea matrice cu blocuri:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCC} & B_{FCC} \\ \hline C_{FCC} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 7 & 3 \end{array} \right),$$

având setul de ecuații diferențiale de stare și ecuația de ieșire:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{7}{2}x_1 - \frac{7}{2}x_2 - x_3 + u; \\ \dot{x}_2 = x_1; \\ \dot{x}_3 = x_2; \\ y = x_2 + 7x_3 + 3u. \end{cases}$$

### Implementare în MATLAB

Pentru a ajunge de la funcția de transfer la modelul în spațiul stărilor, în MATLAB se poate utiliza funcția `tf2ss`. Aceasta ne va returna realizarea de stare corespunzătoare formei canonice de control.

Determinarea formei canonice de control utilizând mediul MATLAB pentru exemplul prezentat se poate face astfel:

```

1 num=[6, 21, 23, 20]; den=[2, 7, 7, 2];
2 % determinarea matricelor corespunzătoare FCC
3 [A_FCC,B_FCC,C_FCC,D]=tf2ss (num,den);
4 % crearea obiectului de tip spatiul starilor
5 sys=ss (A_FCC,B_FCC,C_FCC,D);
```

### Implementarea în Simulink

Schema bloc (Simulink) corespunzătoare formei canonice de control este prezentată în Figura 14.1. Caracteristic unei forme de tip control este calea liberă de la intrare spre integratoare. Mai precis, se poate observa că pe firul dintre intrare și cele trei integratoare nu există niciun bloc de înmulțire care ar putea fi zero (ceea ce nu se întâmplă în cazul ieșirii, unde starea  $x_1$  este ponderată cu 0).

#### 14.2.2 Forma canonnică de observare – FCO

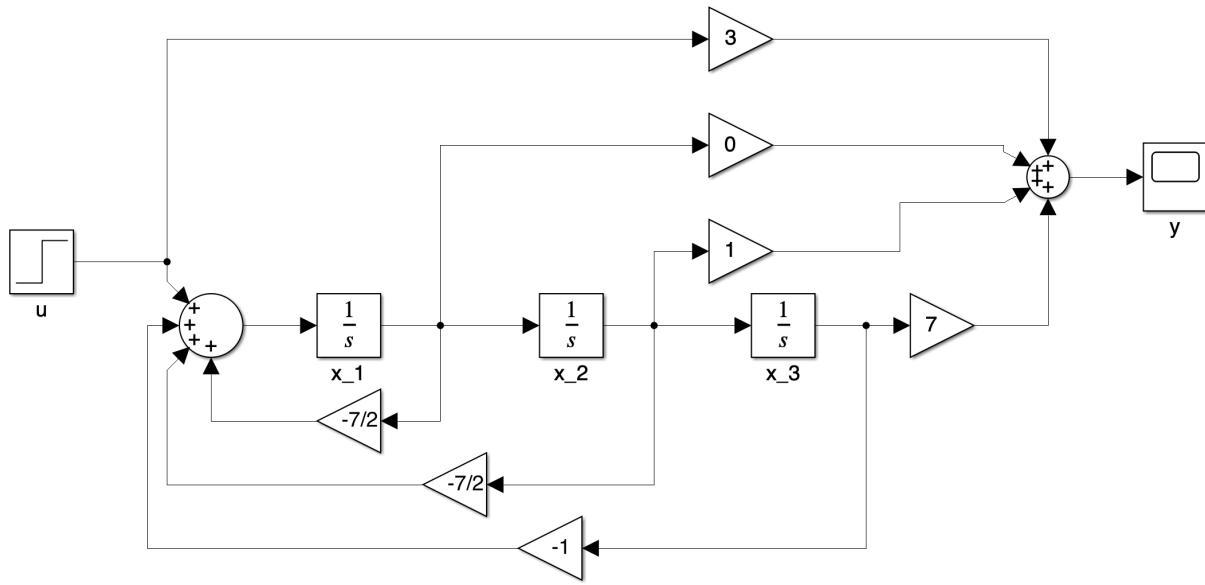
##### Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI SISO descris prin funcția de transfer  $H(s)$ . Pentru a putea evidenția realizarea de stare corespunzătoare **formei canonice de observare (FCO)**, trebuie să punem în evidență funcția de transfer în forma următoare:

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}.$$

Realizarea de stare corespunzătoare FCO este dată de matricea cu blocuri:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCO} & B_{FCO} \\ \hline C_{FCO} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccccc|c} -a_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 & b_{n-1} \\ -a_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 0 & b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_1 \\ -a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_0 \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & d \end{array} \right). \quad (14.8)$$



**Figura 14.1:** Schema bloc corespunzătoare FCC – Exemplu.

Se poate observa că între FCC și FCO există o relație de **dualitate algebrică**:

$$A_{FCO} = A_{FCC}^\top, \quad B_{FCO} = C_{FCC}^\top, \quad C_{FCO} = B_{FCC}^\top. \quad (14.9)$$

Trebuie remarcat că transferul instantaneu nu este caracteristic unei realizări de stare, el reprezentând relația directă intrare- ieșire.

### Exemplu:

Se consideră sistemul SISO descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{6s^3 + 21s^2 + 23s + 20}{2s^3 + 7s^2 + 7s + 2}.$$

Urmând pașii din cadrul secțiunii anterioare, funcția de transfer  $H(s)$  se scrie astfel:

$$H(s) = 3 + \frac{s + 7}{s^3 + \frac{7}{2}s^2 + \frac{7}{2}s + 1}.$$

După ce avem evidențiată funcția de transfer în forma convenabilă, realizarea de stare corespunzătoare formei canonice de observare este descrisă compact de următoarea matrice cu blocuri:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCO} & B_{FCO} \\ \hline C_{FCO} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} -\frac{7}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{7}{2} & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right),$$

având setul de ecuații diferențiale de stare și ecuația de ieșire:

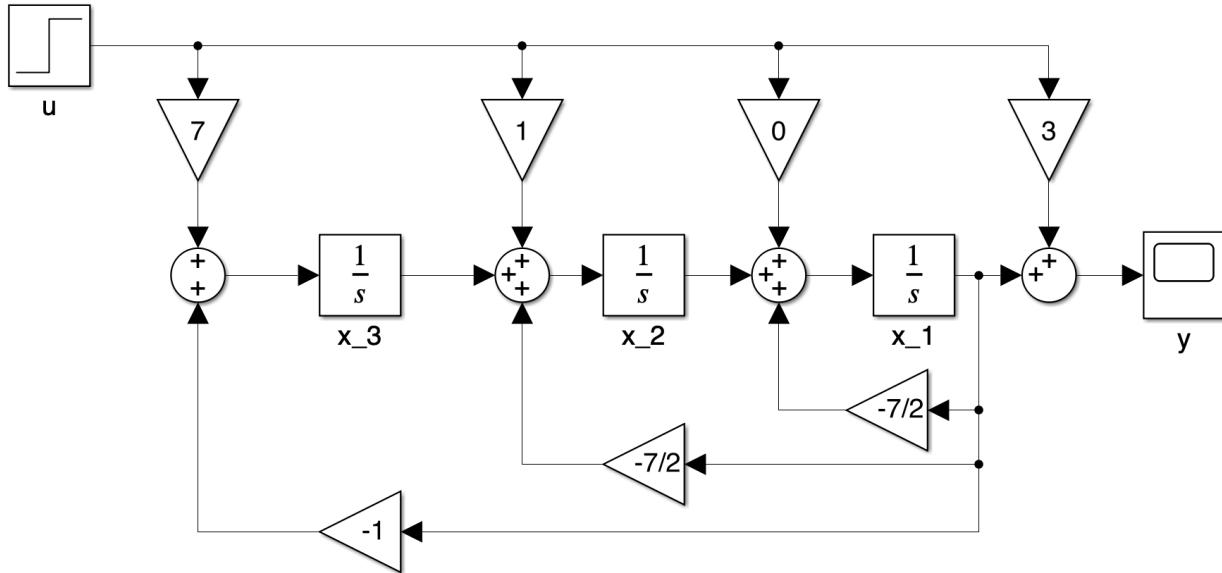
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{7}{2}x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = -\frac{7}{2}x_1 + x_3 + u; \\ \dot{x}_3 = -x_1 + 7u; \\ y = x_1 + 3u. \end{cases}$$

### Implementare în MATLAB

Pentru a obține realizarea de stare corespunzătoare formei canonice de observare, se realizează conversia din funcția de transfer în forma canonică de control prin rutina `tf2ss` și apoi se folosește proprietatea de dualitate algebrică din (14.9) a celor două forme canonice.

### Implementarea în Simulink

Schema bloc (Simulink) corespunzătoare formei canonice de observare este prezentată în Figura 14.2. Caracteristic unei forme de tip observare este calea liberă de la integratoare spre ieșire. Mai precis, se poate observa că pe firul dintre cele trei integratoare și ieșire nu există niciun bloc de înmulțire care ar putea fi zero (ceea ce nu se întâmplă în cazul intrării, unde intrarea în ecuația diferențială corespunzătoare stării  $x_1$  este ponderată cu 0).



**Figura 14.2:** Schema bloc corespunzătoare FCO – Exemplu.

### 14.2.3 Forma canonnică controlabilă – FCCo

#### Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI SISO descris prin funcția de transfer  $H(s)$ . Pentru a putea evidenția realizarea de stare corespunzătoare **formei canonice controlabile (FCCo)**, trebuie să punem

în evidență funcția de transfer în forma următoare:

$$H(s) = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}.$$

Realizarea de stare corespunzătoare FCCo este dată de matricea cu blocuri:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCCo} & B_{FCCo} \\ \hline C_{FCCo} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} & 0 \\ \hline \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_{n-1} & \gamma_n & \gamma_0 \end{array} \right), \quad (14.10)$$

unde  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  reprezintă primii  $n+1$  parametri Markov ai sistemului.

### Exemplu:

Se consideră sistemul SISO descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{6s^3 + 21s^2 + 23s + 20}{2s^3 + 7s^2 + 7s + 2}.$$

Urmând pașii din cadrul secțiunii anterioare, funcția de transfer  $H(s)$  se scrie astfel:

$$H(s) = 3 + \frac{s+7}{s^3 + \frac{7}{2}s^2 + \frac{7}{2}s + 1}.$$

În continuare, avem nevoie de primii 4 parametri Markov ai sistemului:  $\gamma_0 = d = 3$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 1$ ,  $\gamma_3 = \frac{7}{2}$ . Realizarea de stare corespunzătoare formei canonice controlabile este descrisă compact de următoarea matrice cu blocuri:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCCo} & B_{FCCo} \\ \hline C_{FCCo} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & 0 \\ \hline 0 & 1 & \frac{7}{2} & 3 \end{array} \right),$$

având setul de ecuații diferențiale de stare și ecuația de ieșire:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_3 + u; \\ \dot{x}_2 = x_1 - \frac{7}{2}x_3; \\ \dot{x}_3 = x_2 - \frac{7}{2}x_3; \\ y = x_2 + \frac{7}{2}x_3 + 3u. \end{cases}$$

## Implementare în MATLAB

Pentru a obține parametrii Markov ai unui sistem, se poate utiliza funcția `deconv` în mediul MATLAB, precum în următoarea secvență de cod, iar apoi se urmărește structura generală prezentată mai sus.

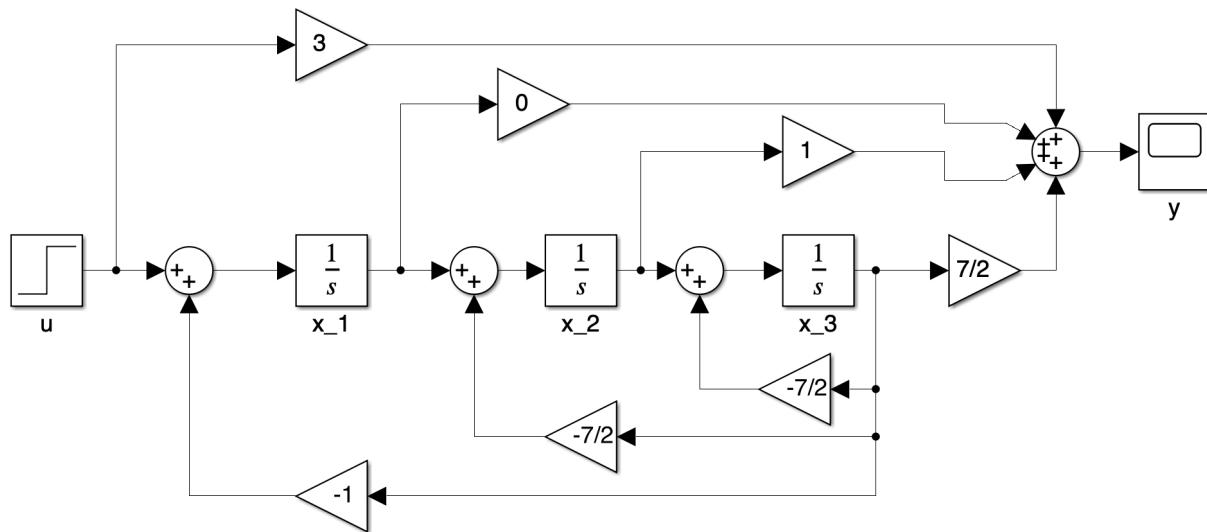
```

1 num=[6, 21, 23, 20]; den=[2, 7, 7, 2];
2 % extinderea număratorului
3 N = 3; num_ext=[num, zeros(1,N)];
4 % forțează minim primii N parametri Markov
5 gamma=deconv(num_ext,den);

```

## Implementarea în Simulink

Schema bloc (Simulink) corespunzătoare formei canonice controlabile este prezentată în Figura 14.3. Caracteristic unei forme de tip control este calea liberă de la intrare spre integratoare. Mai precis, se poate observa că pe firul dintre intrare și cele trei integratoare nu există niciun bloc de înmulțire care ar putea fi zero (ceea ce nu se întâmplă în cazul ieșirii, unde starea  $x_1$  este ponderată cu 0).



**Figura 14.3:** Schema bloc corespunzătoare FCCo – Exemplu.

### 14.2.4 Forma canonnică observabilă – FCOb

#### Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI SISO descris prin funcția de transfer  $H(s)$ . Pentru a putea evidenția realizarea de stare corespunzătoare **formei canonice observabile (FCOb)**, trebuie să punem

în evidență funcția de transfer în forma următoare:

$$H(s) = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}.$$

Realizarea de stare corespunzătoare FCOb este dată de matricea cu blocuri:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCOb} & B_{FCOb} \\ \hline C_{FCOb} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \gamma_{n-1} \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} & \gamma_n \\ \hline 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_0 \end{array} \right). \quad (14.11)$$

Se poate observa că și între FCCo și FCOb există o relație de **dualitate algebrică**:

$$A_{FCOb} = A_{FCCo}^\top, \quad B_{FCOb} = C_{FCCo}^\top, \quad C_{FCOb} = B_{FCCo}^\top. \quad (14.12)$$

### Exemplu:

Se consideră sistemul SISO descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{6s^3 + 21s^2 + 23s + 20}{2s^3 + 7s^2 + 7s + 2}.$$

Urmând pașii din cadrul secțiunii anterioare, funcția de transfer  $H(s)$  se scrie astfel:

$$H(s) = 3 + \frac{s+7}{s^3 + \frac{7}{2}s^2 + \frac{7}{2}s + 1}.$$

În continuare, avem nevoie de primii 4 parametri Markov ai sistemului:  $\gamma_0 = d = 3$ ,  $\gamma_1 = 0$ ,  $\gamma_2 = 1$ ,  $\gamma_3 = \frac{7}{2}$ . Realizarea de stare corespunzătoare formei canonice observabile este descrisă compact de următoarea matrice cu blocuri:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCOb} & B_{FCOb} \\ \hline C_{FCOb} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{7}{2} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right),$$

având setul de ecuații diferențiale de stare și ecuația de ieșire:

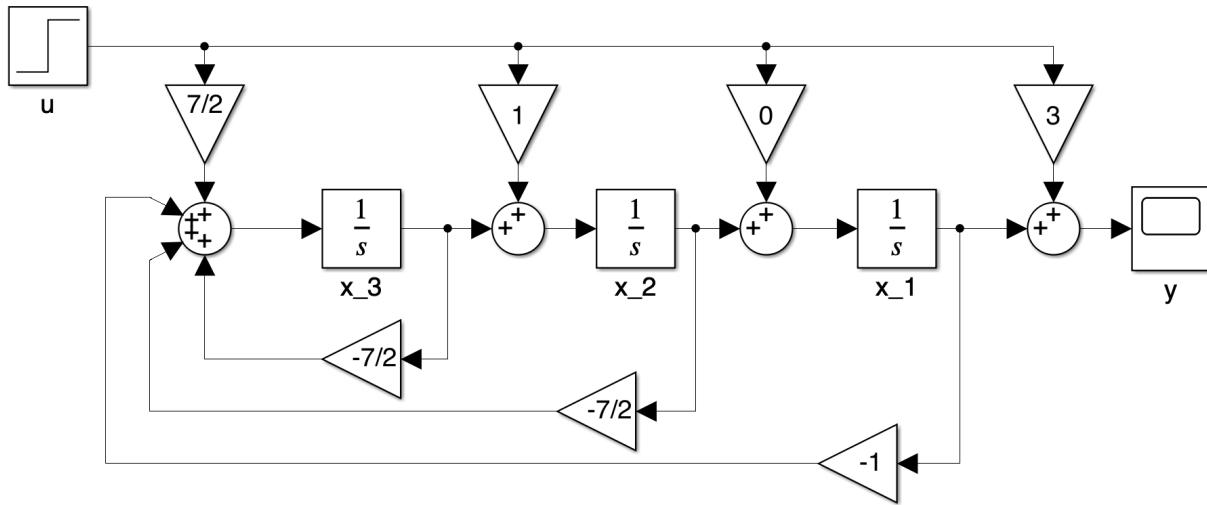
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3 + u; \\ \dot{x}_3 = -x_1 - \frac{7}{2}x_2 - \frac{7}{2}x_3 + \frac{7}{2}u; \\ y = x_1 + 3u. \end{cases}$$

## Implementare în MATLAB

Pentru a obține FCOB, se realizează conversia din realizarea de stare FCCo în FCOB pe baza proprietății de dualitate algebrică a celor două forme canonice, precum în (14.12).

## Implementarea în Simulink

Schema bloc (Simulink) corespunzătoare formei canonice observabile este prezentată în Figura 14.4. Caracteristic unei forme de tip observare este calea liberă de la integratoare spre ieșire. Mai precis, se poate observa că pe firul dintre cele trei integratoare și ieșire nu există niciun bloc de înmulțire care ar putea fi zero (ceea ce nu se întâmplă în cazul intrării, unde intrarea în ecuația diferențială corespunzătoare stării  $x_1$  este ponderată cu 0).



**Figura 14.4:** Schema bloc corespunzătoare FCOB – Exemplu.

### 14.2.5 Forma canonnică bloc diagonală (Jordan) – FCJ

#### Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI SISO descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = d + \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}.$$

Din punct de vedere algebric, numărul de vectori proprii liniar independenți corespunzători unei valori proprii este dat de **multiplicitatea geometrică** a fiecărei valori proprii. Dacă multiplicitatea geometrică coincide cu multiplicitatea algebrică, pe baza teoremei reziduurilor, sistemul poate fi descompus sub următoarea formă:

$$H(s) = R_\infty + \frac{R_{\hat{s}_1}}{s - \hat{s}_1} + \cdots + \frac{R_{\hat{s}_n}}{s - \hat{s}_n}. \quad (14.13)$$

Astfel, rezultă o topologie paralelă formată din  $n$  subsisteme de ordinul I (caracterizate de poli reali sau complecsi) și transferul instantaneu  $R_\infty$ . Sistemul în spațiul stărilor în forma diagonală are  $n$  stări decuplate între ele, acționate în mod identic de intrarea  $u(t)$ , iar ieșirea este formată prin însumarea celor  $n$  stări ponderate cu valorile reziduurilor  $R_{\hat{s}_k}$ .

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCJ} & B_{FCJ} \\ \hline C_{FCJ} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cccc|c} \hat{s}_1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \hat{s}_2 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{s}_n & 1 \\ \hline R_{\hat{s}_1} & R_{\hat{s}_2} & \dots & R_{\hat{s}_n} & R_\infty \end{array} \right). \quad (14.14)$$

**Observația 1:** Termenii de multiplicitate geometrică mai mare decât  $\rho > 1$  se obțin prin înscrierea a  $\rho$  termeni de ordinul I, obținuți structural printr-o conexiune cu reacție pozitivă dintr-un bloc integrator pe calea directă și o scalare cu valoarea polului pe calea de reacție, ceea ce duce la apariția blocurilor Jordan de dimensiune  $\rho$  în realizarea de stare.

**Observația 2:** În forma diagonală prezentată în (14.13) perechile de poli complex conjugăți se descompun algebric în termeni de ordinul I cu poli complecsi, respectiv reziduuri complexe. Pentru a evita utilizarea numerelor complexe în realizarea de stare cu integratoare, se preferă structurile alternative care folosesc blocuri reale de ordinul II, precum forma Jordan reală.

### Exemplu:

Se consideră sistemul SISO descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{6s^3 + 21s^2 + 23s + 20}{2s^3 + 7s^2 + 7s + 2}.$$

Descompunem  $H(s)$  în fracții simple și obținem:

$$H(s) = 3 + \frac{s+7}{(s+0.5)(s+1)(s+2)} = 3 + \frac{R_{\hat{s}_1}}{s+0.5} + \frac{R_{\hat{s}_2}}{s+1} + \frac{R_{\hat{s}_3}}{s+2},$$

iar reziduurile se pot calcula astfel:

$$\begin{aligned} R_{\hat{s}_1} &= \frac{s+7}{(s+0.5)(s+1)(s+2)} \cdot \cancel{(s+0.5)} \Big|_{s=-0.5} = \frac{26}{3}; \\ R_{\hat{s}_2} &= \frac{s+7}{(s+0.5)\cancel{(s+1)}(s+2)} \cdot \cancel{(s+1)} \Big|_{s=-1} = -12; \\ R_{\hat{s}_3} &= \frac{s+7}{(s+0.5)(s+1)\cancel{(s+2)}} \cdot \cancel{(s+2)} \Big|_{s=-2} = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Realizarea de stare corespunzătoare formei canonice Jordan este descrisă compact de următoarea matrice cu blocuri:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_{FCJ} & B_{FCJ} \\ \hline C_{FCJ} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|c} -0.5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ \hline \frac{26}{3} & -12 & \frac{10}{3} & 3 \end{array} \right),$$

având setul de ecuații diferențiale de stare și ecuația de ieșire:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -0.5x_1 + u; \\ \dot{x}_2 = -x_2 + u; \\ \dot{x}_3 = -2x_3 + u; \\ y = \frac{26}{3}x_1 - 12x_2 + \frac{10}{3}x_3 + 3u. \end{cases}$$

### Implementare în MATLAB

O astfel de descompunere în fracții simple se poate obține în mediul MATLAB cu ajutorul funcției `residue`, precum în secvența de mai jos.

```

1 num=[6, 21, 23, 20]; den=[2, 7, 7, 2];
2 % obtinerea reziduurilor si a polilor
3 [R,P,Rinf] = residue(num,den);
4 % determinarea matricelor corespunzatoare FCJ
5 A_FCJ = diag(P);
6 B_FCJ = ones(length(P),1);
7 C_FCJ = R';
8 D = Rinf; % daca Rinf este vector gol, se pune 0
9 % crearea obiectului de tip spatiul starilor
10 sys=ss(A_FCJ,B_FCJ,C_FCJ,D);
```

### Implementare în Simulink

Schema bloc (Simulink) corespunzătoare formei canonice Jordan este prezentată în Figura 14.5.

**Observație generală:** Realizările de stare sunt echivalente structurale și în cazul sistemelor numerice, cu mențiunea că blocurile de tip integrator  $\frac{1}{s}$  se înlocuiesc cu blocuri de tip întârziere de tact  $z^{-1}$ , respectiv se folosesc matricele realizării de stare obținute în urma discretizării adecvate.

## 14.3 Probleme propuse

**Problema 14.3.1:** Să se determine realizările de stare corespunzătoare formelor canonice (FCC, FCO, FCCo, FCOb, FCJ) ale următoarelor sisteme descrise prin funcția de transfer:

a)  $H(s) = \frac{s+1}{s^2+7s+8};$

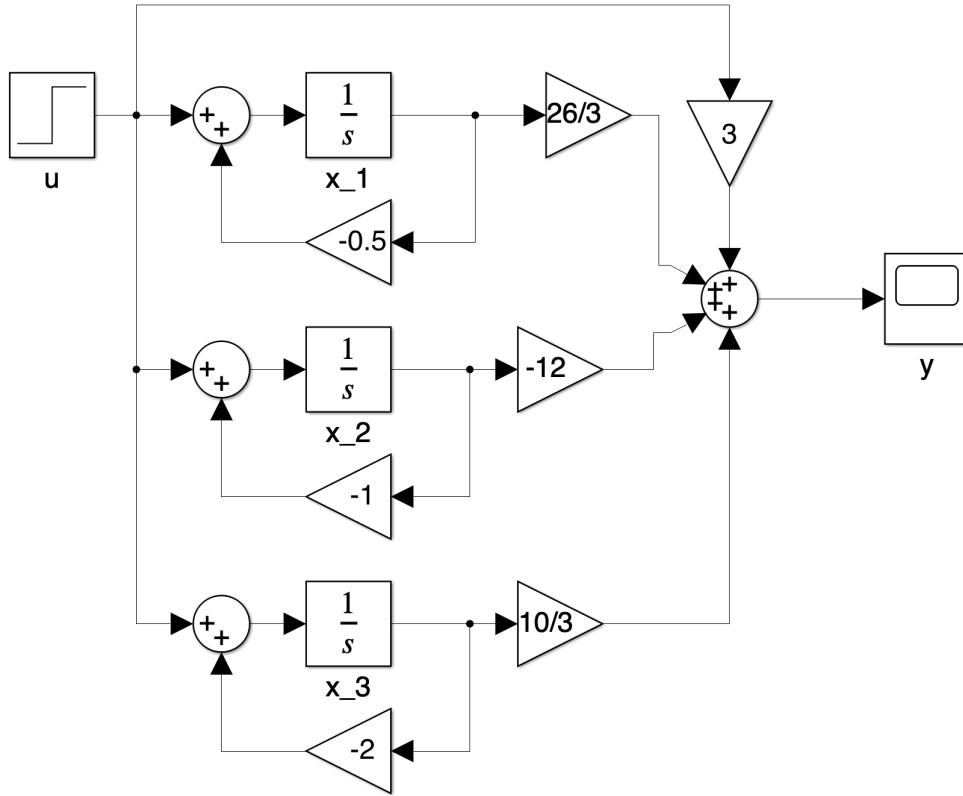
d)  $H(s) = \frac{2s^2+4}{s^3+1};$

b)  $H(s) = \frac{3}{s^3+7s+2};$

e)  $H(s) = \frac{1}{s^2+s};$

c)  $H(s) = \frac{2s^2+2s+2}{s^2+4s+4};$

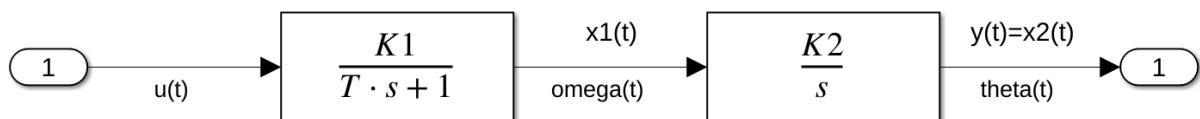
f)  $H(s) = \frac{2s+6}{s^3+2s^2+4s+5}.$



**Figura 14.5:** Schema bloc corespunzătoare FCJ – Exemplu.

**Problema 14.3.2:** Se consideră sistemul descris prin structura din Figura 14.6, unde  $K_1 = 320$ ,  $K_2 = 3.8$ ,  $T = 0.1$  [s]. Se cer:

- Să se determine modelul de tip spațiul stărilor în care variabilele de stare au semnificație fizică.
- Să se determine cele 5 forme canonice pentru sisteme SISO studiate la laborator.



**Figura 14.6:** Modelul matematic al unei axe CNC.

**Problema 14.3.3:** Pentru sistemele continue de la Problema 14.3.1, determinați funcția de transfer în domeniul discret și apoi obțineți realizările de stare corespunzătoare FCC/FCO/FCCo/ FCOb/FCJ pentru sistemele numerice rezultate.



---

---

## Lucrarea 15

---

### Controlabilitatea sistemelor LTI. Reactia de la stare

15.1 Controlabilitatea sistemelor . . . . .	146
15.2 Reactia de la stare . . . . .	147
15.3 Problemă rezolvată . . . . .	148
15.4 Probleme propuse . . . . .	150

Lucrarea de față cuprinde studiul proprietății fundamentale de controlabilitate a sistemelor LTI, cu aplicația directă de calcul de matrice de reacție de la stare prin formula lui Ackermann, fiind una dintre cele mai comune structuri de reglare din practică.

## 15.1 Controlabilitatea sistemelor

### Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI cu următoarea descriere în spațiul stărilor:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad \text{cu} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+m)}, \quad (15.1)$$

având  $n \in \mathbb{N}$  stări  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $m \in \mathbb{N}$  intrări  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  și  $p \in \mathbb{N}$  ieșiri  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ . **Ordinul sistemului** este dat de numărul variabilelor de stare.

Prezentăm întâi conceptul general de sistem dinamic controlabil.

#### Definiția 15.1.1: Controlabilitatea unui sistem

Un sistem dinamic se numește de **stare complet controlabilă** dacă există o comandă  $\mathbf{u}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}^+$ , continuă pe portiuni, care transferă sistemul din orice stare inițială  $\mathbf{x}(t_0)$ ,  $\forall t_0 \in \mathbb{R}^+$ , în orice stare finală  $\mathbf{x}(t_1)$ ,  $\forall t_1 \in \mathbb{R}^+$ , finit, cu  $t_1 > t_0$ . În caz contrar, sistemul se numește, după caz, de stare **partial controlabilă** sau de **stare necontrolabilă**.

În cadrul sistemelor LTI, interpretarea algebrică a definiției (15.1) se poate face mai simplu studiind dimensionalitatea subspațiului generat de matricele  $A$  și  $B$ . Pornind de la această idee, se poate considera **matricea de controlabilitate** a sistemului astfel:

$$\mathcal{C}o(A, B) := [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n \times nm}. \quad (15.2)$$

#### Teorema 15.1.2

Un sistem  $(A, B, C, D)$  are numărul de stări controlabile egal cu rangul matricei de controlabilitate.

#### Corolarul 15.1.3

Un sistem  $(A, B, C, D)$  este complet controlabil dacă și numai dacă  $\text{rank}(\mathcal{C}o(A, B)) = n$ .

### Implementarea în MATLAB

Matricea de controlabilitate se poate calcula în MATLAB cu ajutorul funcției `ctrb` astfel:

`1 Co = ctrb(A,B);`

## 15.2 Reacția de la stare

### Prezentare teoretică

Majoritatea proceselor fizice întâlnite în industrie au un caracter trece jos, deci nu prezintă transfer instantaneu. Astfel, vom considera în continuare o realizare de stare având  $D = 0$ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (15.3)$$

De asemenea, vom presupune că perechea  $(A, B)$  este controlabilă (i.e.,  $\text{rank}(\mathcal{C}\text{o}(A, B)) = n$ ). În cazul unui sistem complet controlabil se poate calcula **matricea de reacție de la stare**  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  astfel încât sistemul în buclă închisă să aibă regimul tranzitoriu impus. Cu alte cuvinte, dorim să impunem polii (valorile proprii ale matricei de stare). Considerăm legea de control  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{v}(t) - K\mathbf{x}(t)$ , cu  $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^m$ , aplicată realizării de stare din (15.3) și obținem:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B(\mathbf{v}(t) - K\mathbf{x}(t)); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (A - BK)\mathbf{x}(t) + B\mathbf{v}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (15.4)$$

unde  $\mathbf{v}(t)$  reprezintă un semnal de referință. Astfel, față de sistemul inițial care avea polii sistemului dați de valorile proprii  $\Lambda(A)$ , sistemul în buclă închisă cu reacție de la stare va avea polii dați de valorile proprii  $\Lambda(A - BK)$ .

În cazul sistemelor SISO, pentru a calcula matricea de reacție de la stare  $K \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  pe baza unui set de valori proprii impuse  $\{\hat{s}_{o,i}\}_{i=1,n}$ , se poate utiliza **formula lui Ackermann**:

$$K = e_n^T (\mathcal{C}\text{o}(A, B))^{-1} P_o(A), \quad (15.5)$$

unde:

- $e_k^T = (0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0)$ , iar valoarea 1 se găsește pe poziția  $k$ ;
- $P_o(s) = (s - \hat{s}_{o,1})(s - \hat{s}_{o,2}) \dots (s - \hat{s}_{o,n})$  este polinomul characteristic impus al sistemului în buclă închisă, cu:

$$P_o(A) = P_o(s) \Big|_{s=A} = (A - \hat{s}_{o,1}I)(A - \hat{s}_{o,2}I) \cdots (A - \hat{s}_{o,n}I). \quad (15.6)$$

**Observație:** Valorile proprii în buclă închisă se aleg astfel încât sistemul să aibă regimul tranzitoriu dorit: stabilitatea asigurată, regimul aperiodic (critic) sau oscilant, un timp de răspuns mai mic, suprareglaj mai mic. Cu cât se impun performanțe mai stricte, cu atât va fi mai mare efortul asupra elementelor de execuție, deci încep să intervină limitări practice.

### Implementarea în MATLAB

În MATLAB, pentru calcul matricei de reacție de la stare, există funcțiile **acker** și **place**:

- $K = \text{acker}(A, B, [\hat{s}_{01}, \hat{s}_{02}, \dots, \hat{s}_{0n}]);$
- $K = \text{place}(A, B, [\hat{s}_{01}, \hat{s}_{02}, \dots, \hat{s}_{0n}]).$

Mai multe detalii se găsesc în **help**-ul din MATLAB.

Reacția de la stare asigură **doar** regimul tranzitoriu impus prin valorile proprii ale matricei de stare, **nu și** performanțe în regimul staționar. În acest caz, se consideră suplimentar o **matrice de prefiltrare**  $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$  a referinței (i.e.,  $\mathbf{v}(t) = F\mathbf{r}(t)$ ), care conduce la următoarea realizare de stare:

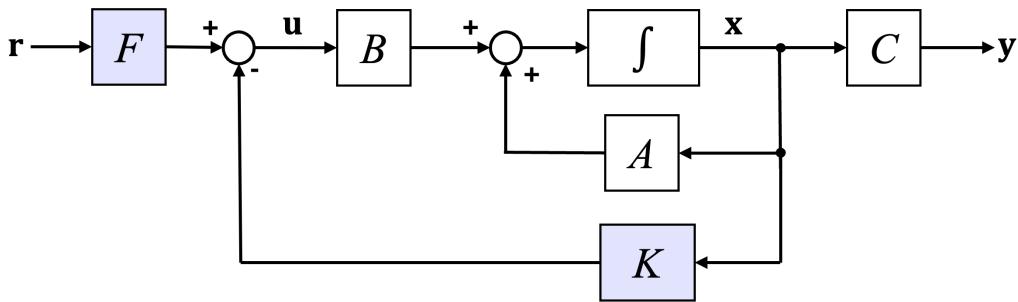
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = (A - BK)\mathbf{x}(t) + BF\mathbf{r}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (15.7)$$

Pentru a impune o eroare staționară la poziție nulă, se impune pentru funcția de transfer în buclă închisă:

$$H_{yr}(0) = I \Leftrightarrow C(sI - A + BK)^{-1}BF \Big|_{s=0} = I \Leftrightarrow \quad (15.8)$$

$$F = [C(-A + BK)^{-1}B]^{-1}. \quad (15.9)$$

În Figura 15.1 este ilustrată schema bloc de reglare a unui sistem descris în spațiul stărilor cu reacție de la stare și prefiltrarea referinței.



**Figura 15.1:** Schema de control cu reacție de la stare și prefiltrare.

### 15.3 Problemă rezolvată

**Enunț:** Se consideră sistemul LTI având realizarea de stare:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u(t); \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

- Să se studieze controlabilitatea sistemului;
- Să se studieze stabilitatea internă a sistemului și să se determine reacția de la stare capabilă să stabilizeze sistemul descris;
- Să se calculeze eroarea staționară la poziție a sistemului nou obținut și să se determine matricea de prefiltrare capabilă să asigure eroarea staționară la poziție nulă;
- Să se implementeze schema bloc (Simulink) a procesului cu reacție de la stare.

**Soluție:** a) Matricea de controlabilitate a sistemului este:

$$\mathcal{C}o(A, B) = [B \ AB \ A^2B] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pentru care  $\det(\mathcal{C}o(A, B)) = 1 \neq 0$ , urmând ca  $\text{rank}(\mathcal{C}o(A, B)) = 3$ , deci sistemul este **complet controlabil**.

b) Valorile proprii ale matricei de stare sunt  $\Lambda(A) = \{-1, 1, 2\}$ . Deoarece avem două valori proprii în semiplanul drept, sistemul este **instabil intern**.

Deoarece sistemul este complet controlabil, putem aloca polii sistemului în semiplanul stâng pentru a-l stabiliza. Considerăm  $\hat{s}_{o,1,2,3} = -5$  (putem alege oricare trei valori în semiplanul stâng). Matricea de reacție de la stare este, conform formulei lui Ackermann:

$$\begin{aligned} K &= e_3^\top (\mathcal{C}o(A, B))^{-1} P_o(A) = (0 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot (A + 5I_3)^3 = \\ &= (0 \ 0 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 360 & 76 & -220 \\ 110 & 140 & -34 \\ 17 & 76 & 123 \end{pmatrix} = (17 \ 76 \ 123). \end{aligned}$$

**Verificare:** Matricea sistemului în buclă închisă este:

$$A_o = A - BK = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (17 \ 76 \ 123) = \begin{pmatrix} -15 & -75 & -125 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

care are valorile proprii  $\lambda_{o,1,2,3} = -5$ .

c) Funcția de transfer a sistemului cu reacție de la stare este:

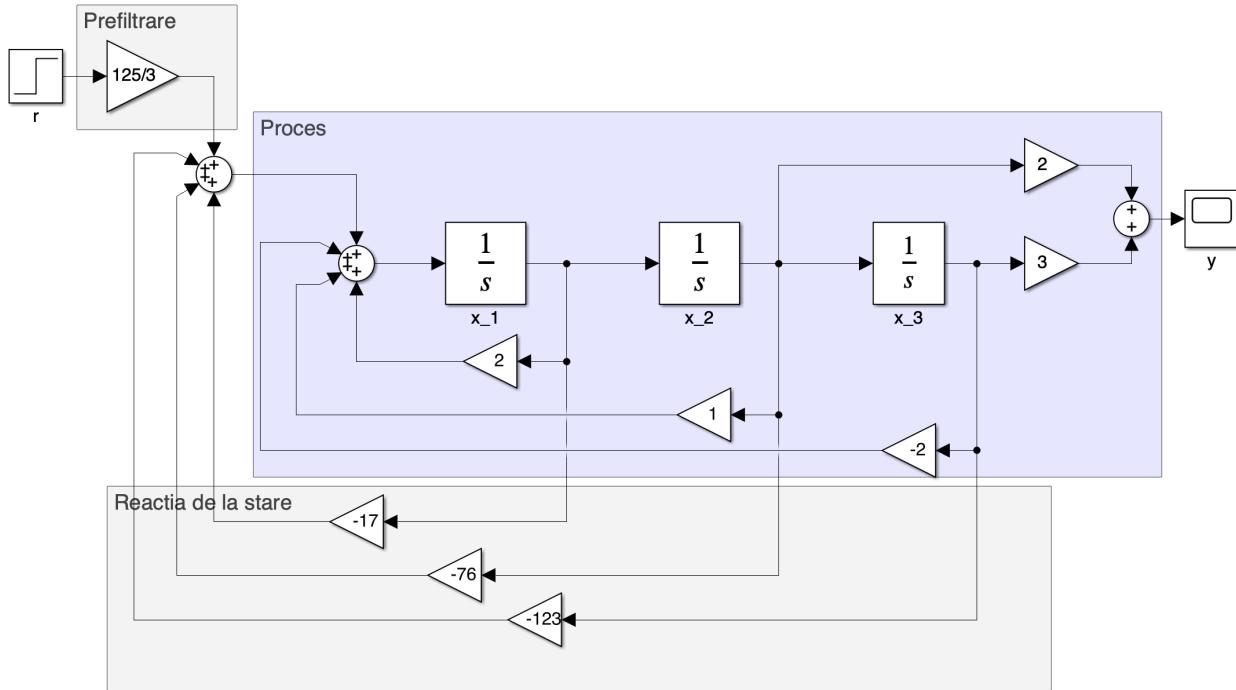
$$H_{y,v}(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B = \frac{2s + 3}{s^3 + 15s^2 + 75s + 125}.$$

Eroarea staționară la poziție a sistemului este  $\varepsilon_{stp} = 1 - H_{y,v}(0) = 1 - \frac{3}{125} = \frac{122}{125} \neq 0$ , ceea ce implică necesitatea matricei de prefiltrare. Aceasta este dată de:

$$F = \frac{1}{C(-A + BK)^{-1}B} = \frac{125}{3}.$$

**Remarcă:** Dacă avem deja funcția de transfer  $v \rightarrow y$  calculată, matricea de prefiltrare este dată de  $F = \frac{1}{H_{y,v}(0)} = \frac{125}{3}$ .

d) Schema bloc (Simulink) se regăsește în Figura 15.2. În chenarul mov este reprezentat procesul inițial, iar în chenarele gri sunt prezentate elementele structurii de control cu reacție de la stare.



**Figura 15.2:** Reacția de la stare implementată pentru exemplul de la Problema 15.3.

## 15.4 Probleme propuse

**Problema 15.4.1:** Se consideră procesele descrise prin realizările de stare:

a)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t); \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t); \end{cases}$$

b)

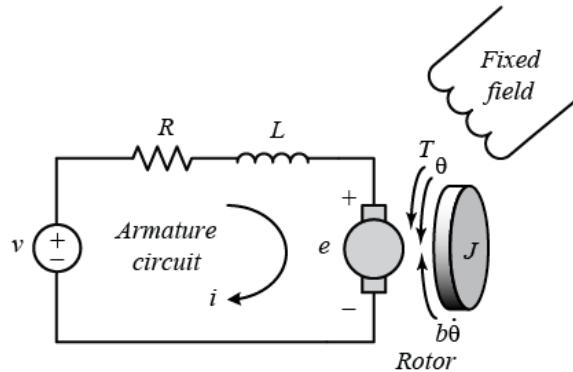
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t); \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

Să se deducă pe foaie, respectiv să se verifice în MATLAB:

- 1) Studiul controlabilității sistemului;
- 2) Calculul matricei de reacție de la stare astfel încât sistemul închis să aibă:
  - 2.1) regim aperiodic critic amortizat și timp de răspuns cu 25% mai mic;
  - 2.2) regim oscilant amortizat, cu timp de răspuns cu 30% mai mic și suprareglaj de 5%;

- 2.3) polii  $\hat{s}_i = [-1, -2]$  pentru sistemul *a*) și  $\hat{s}_i = [-2+4j, -2-4j, -10]$  pentru sistemul *b*).
- 3) Calculul erorii staționare la poziție pentru sistemele obținute la 2), respectiv calculul matricelor de prefiltrare astfel încât eroarea staționară la poziție să devină nulă;
- 4) Implementarea sistemului de control din Figura 15.1 în Simulink cu matricele  $K$  și  $F$  deduse la subpunctele anterioare.

**Problema 15.4.2:** Se consideră modelul matematic al unui motor de curent continuu cu perii precum în Figura 15.3, adaptat după [Tilbury și Messner 2025]. Aplicând legea a doua



**Figura 15.3:** Circuitul echivalent al unui motor de curent continuu cu perii.

a lui Kirchhoff pe ochiul principal al circuitului, respectiv legea a doua a lui Newton, rezultă ecuațiile diferențiale electrice și mecanice ale motorului:

$$\begin{cases} L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = K_{PWM}v - e; \\ J \frac{d\omega}{dt} + B_f \omega + T_L = T; \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega. \end{cases} \quad (15.10)$$

Pe lângă ecuațiile electrice și mecanice specifice motorului, există și ecuațiile de legătură între subsistemul mecanic și cel electric astfel:

$$\begin{cases} T = K_T i_a; \\ e = K_e \omega. \end{cases} \quad (15.11)$$

Considerând un sistem de tip MIMO, cu intrările  $\mathbf{u}(t) = (v, T_L)^T$ , stările  $\mathbf{x}(t) = (i_a, \omega, \theta)^T$ , respectiv ieșirile  $\mathbf{y}(t) = (\omega, \theta)^T$ , rezultă modelul în spațiul stărilor:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|cc} -\frac{R_a}{L_a} & \frac{-K_e}{L_a} & 0 & \frac{K_{PWM}}{L_a} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{B_f}{J} & 0 & 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (15.12)$$

Parametru	Valoare	U.M.
$R_a$	0.92	$\Omega$
$L_a$	$2e-3$	$H$
$K_e$	0.296	$Vs/rad$
$K_t$	0.294	$Nm/A$
$J$	$7e-4$	$N/m^2$
$B_f$	$3.35e-4$	$N/m$
$K_{PWM}$	38.46	—

**Tabelul 15.1:** Parametrii motorului DC

Un set de parametri pentru motorul descris se prezintă în Tabelul 15.1.

Să se proiecteze două sisteme de control cu reacție de la stare, unul pentru reglarea turăției folosind subsistemul  $([v], [i_a, \omega], [\omega])$ , respectiv unul pentru reglarea poziției folosind sistemul  $([v], [i_a, \omega, \theta], [\theta])$ , privind intrarea de cuplu de sarcină  $T_L$  strict ca o perturbație externă. Să se studieze controlabilitatea sistemelor, să se proiecteze matricele de reacție de la stare  $K$ , de prefiltrare  $F$ , impunând un set adecvat de performanțe. Să se implementeze schemele de reglare în MATLAB și Simulink.

---

---

## Lucrarea 16

---

# Observabilitatea sistemelor LTI. Estimatorul de stare

16.1 Observabilitatea sistemelor . . . . .	154
16.2 Estimatorul de stare . . . . .	155
16.3 Problemă rezolvată . . . . .	157
16.4 Probleme propuse . . . . .	158

Lucrarea de față cuprinde studiul proprietății fundamentale de observabilitate a sistemelor LTI, cu aplicația directă de calcul de estimatoare de stare. Estimatorul este o componentă esențială în domeniul controlului sistemelor dinamice, deoarece permite (în anumite condiții) obținerea variabilelor de stare fără necesitatea măsurătorilor fizice, respectiv permite estimarea măsurătorilor cu zgomot redus, dacă senzorii existenți prezintă astfel de probleme. Structurile prezentate în lucrarea curentă poartă denumirea de estimator Luenberger și filtru Kalman.

## 16.1 Observabilitatea sistemelor

### Prezentare teoretică

Se consideră sistemul LTI cu următoarea descriere în spațiul stărilor:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad \text{cu } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+m)}, \quad (16.1)$$

având  $n \in \mathbb{N}$  **stări**  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $m \in \mathbb{N}$  **intrări**  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  și  $p \in \mathbb{N}$  **ieșiri**  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ . **Ordinul sistemului** este dat de numărul variabilelor de stare.

Prezentăm mai întâi conceptul general de sistem dinamic observabil.

#### Definiția 16.1.1: Observabilitatea unui sistem

Un sistem dinamic se numește de **stare complet observabilă** dacă vectorul de stare poate fi determinat complet peste orice interval de timp finit  $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}^+$ ,  $t_1 > t_0$ , pe baza cunoașterii complete a intrării  $\mathbf{u}(t)$  și a ieșirii  $\mathbf{y}(t)$  peste același interval de timp finit. În caz contrar, sistemul se numește, după caz, de stare **partial observabilă** sau de **stare neobservabilă**.

În cadrul sistemelor LTI, interpretarea algebrică a definiției (16.1) se poate face mai simplu studiind dimensionalitatea subspațiului generat de matricele  $A$  și  $C$ . Pornind de la această idee, se poate considera **matricea de observabilitate** a sistemului astfel:

$$\mathcal{O}b(A, C) := \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times n}. \quad (16.2)$$

#### Teorema 16.1.2

Un sistem  $(A, B, C, D)$  are numărul de stări observabile egal cu rangul matricei de observabilitate.

#### Corolarul 16.1.3

Un sistem  $(A, B, C, D)$  este complet observabil dacă și numai dacă  $\text{rank}(\mathcal{O}b(A, C)) = n$ .

#### Implementare în MATLAB

Matricea de observabilitate se poate calcula în MATLAB cu ajutorul funcției `obsv` astfel:

<sub>1</sub>  $\text{Ob} = \text{obsv}(A, C);$

## 16.2 Estimatorul de stare

### Prezentare teoretică

Majoritatea proceselor fizice întâlnite în industrie au un caracter trece jos, deci nu prezintă transfer instantaneu. Astfel, vom considera în continuare o realizare de stare având  $D = 0$ :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t). \end{cases} \quad (16.3)$$

De asemenea, vom presupune că perechea  $(A, C)$  este observabilă (i.e.,  $\text{rank}(\mathcal{O}b(A, C)) = n$ ). În cazul unui sistem complet observabil se consideră estimatorul de stare, numit **estimator Luenberger** în literatură, cu următoarea structură:

$$\begin{cases} \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\hat{\mathbf{x}}(t) + B\mathbf{u}(t) + L(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)); \\ \hat{\mathbf{y}}(t) = C\hat{\mathbf{x}}(t), \end{cases} \quad (16.4)$$

unde  $L \in \mathbb{R}^{n \times p}$  este **matricea estimatorului de stare**. Scopul este de a avea un sistem dinamic cu aceeași structură precum cea a sistemului fizic, pentru a putea accesa stările sau ieșirile acestuia. Se definește eroarea de estimare  $\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$  care trebuie să conveargă la zero pentru  $t \rightarrow \infty$ . Rezultă:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) - A\hat{\mathbf{x}}(t) - B\mathbf{u}(t) - L(\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{y}}(t)) = \\ &= A(\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)) - L(C\mathbf{x}(t) - C\hat{\mathbf{x}}(t)) = (A - LC)\mathbf{e}(t). \end{aligned} \quad (16.5)$$

Astfel, rezultă că vectorul de eroare  $\mathbf{e}(t)$  tinde la zero din orice condiție inițială  $\mathbf{e}(t_0)$  (i.e., oricare ar fi condiția inițială  $\mathbf{x}(t_0)$ ) dacă matricea de stare  $A - LC$  este Hurwitz.

**Remarcă:** În cazul sistemelor numerice, condiția este echivalentă cu a avea matricea  $A - LC$  de tip Jury.

### Teorema 16.2.1

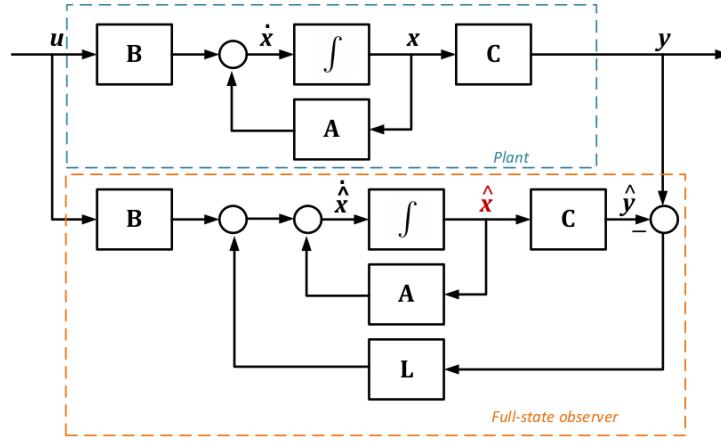
Pe baza dualității dintre proprietățile de controlabilitate și observabilitate, o pereche  $(A, B)$  este **controlabilă** dacă și numai dacă perechea  $(A^T, B^T)$  este **observabilă**. În mod analog, o pereche  $(A, C)$  este **observabilă** dacă și numai dacă perechea  $(A^T, C^T)$  este **controlabilă**.

În cazul sistemelor SISO, pentru a calcula matricea estimatorului de stare  $L \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  pe baza unui set de valori proprii impuse  $\{\hat{s}_{e,1}, \hat{s}_{e,2}, \dots, \hat{s}_{e,n}\}$ , se poate utiliza **formula lui Ackermann** pe baza dualității algebrice:

$$L^\top = e_n^T (\mathcal{O}b(A, C))^{-\top} P_e(A^\top), \quad (16.6)$$

unde:

- $e_k^T = (0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0)$ , iar valoarea 1 se găsește pe poziția  $k$ ;



**Figura 16.1:** Schema bloc de implementare a unui estimator de stare.

- $P_e(s) = (s - \hat{s}_{e,1})(s - \hat{s}_{e,2}) \dots (s - \hat{s}_{e,n})$  este polinomul caracteristic impus al estimatorului, cu:

$$P_e(A^\top) = P_e(s) \Big|_{s=A^\top} = (A^\top - \hat{s}_{e,1}I)(A^\top - \hat{s}_{e,2}I) \cdots (A^\top - \hat{s}_{e,n}I). \quad (16.7)$$

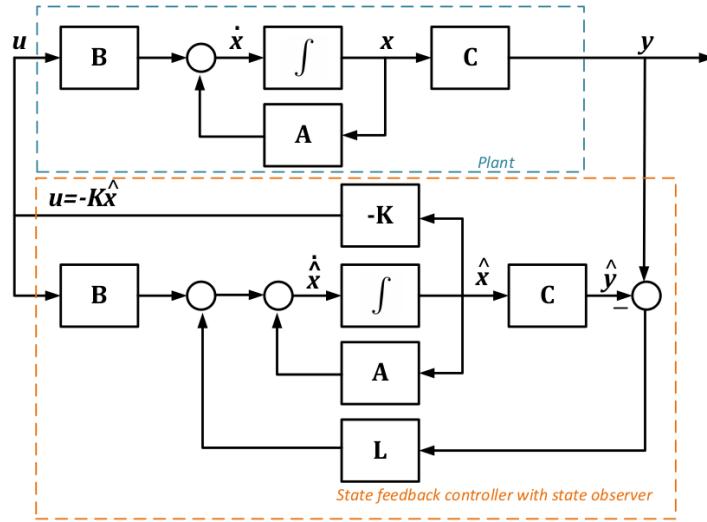
**Observație:** Valorile proprii ale *observer-ului* se aleg mult mai rapide decât cele ale sistemului inițial, pentru a converge stările sale la cele ale sistemului fizic. Înținând cont că *observer-ul* este parte din logica de control, acesta va fi implementat pe un microcontroller și este recomandată alegerea valorilor proprii de aproximativ 10 ori mai rapide. Dacă se merge cu mult mai mult de atât, matricea estimatorului  $L$  va avea coeficienții de valori foarte mari și încep să apară probleme numerice la implementare.

În Figura 16.1 se prezintă structura cu integratoare a unui sistem fizic cu *observer* de stare. Deoarece, în multe cazuri practice, nu există traductoare pentru toate variabilele de stare ale unui sistem, se propune schema de control din Figura 16.2, în care reacția de la stare se face prin stările estimate, nu cele fizice, neaccesibile, ale sistemului practic. În cazul unui sistem numeric, structura este identică, în loc de blocuri de integrare fiind blocuri de întârziere cu un tact, iar matricele de stare și intrare,  $A$  și  $B$ , devin cele obținute în urma discretizării.

### Implementarea în MATLAB

În MATLAB, pentru calcul matricei estimatorului  $L$ , înținând cont de teorema precedentă privind dualitatea, se pot folosi funcțiile `acker` și `place`, astfel:

- $L^T = \text{acker}(A^T, C^T, [\hat{s}_{01}^e, \hat{s}_{02}^e, \dots, \hat{s}_{0n}^e]);$
- $L^T = \text{place}(A^T, C^T, [\hat{s}_{01}^e, \hat{s}_{02}^e, \dots, \hat{s}_{0n}^e]).$



**Figura 16.2:** Schema bloc de implementare a unei reglări cu reacție de la stările estimate, cu referință nulă (sistem de stabilizare).

### 16.3 Problemă rezolvată

**Enunț:** Se consideră sistemul LTI având realizarea de stare:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} u(t); \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

- Să se studieze observabilitatea sistemului;
- Să se studieze stabilitatea internă a sistemului și să se determine estimatorul de stare adecvat;
- Să se implementeze schema bloc (Simulink) a procesului cu estimator de stare.

**Soluție:** a) Matricea de observabilitate a sistemului este:

$$\mathcal{O}b(A, C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

pentru care  $\det(\mathcal{O}b(A, C)) = 1 \neq 0$ , prin urmare  $\text{rank}(\mathcal{O}b(A, C)) = 3$ , deci sistemul este complet observabil.

- Valorile proprii ale matricei de stare sunt  $\Lambda(A) = \{-1, 1, 2\}$ . Deoarece avem două valori proprii în semiplanul drept, sistemul este **instabil intern**.

Deoarece sistemul este complet observabil, putem aloca polii estimatorului în semiplanul stâng pentru a estima corect stările sistemului, chiar dacă acesta este instabil. Considerăm  $\hat{s}_{o,1,2,3} = -3$  (putem alege oricare trei valori în semiplanul stâng). Matricea estimatorului de stare este, conform formulei lui Ackermann:

$$\begin{aligned} L^\top &= e_3^\top (\mathcal{O}b(A, C))^{-T} P_e (A^\top) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-T} \cdot (A^\top + 3I_3)^3 = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 136 & 28 & -100 \\ 50 & 36 & -22 \\ 11 & 28 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 28 & 25 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Verificare:** Matricea de stare a estimatorului este:

$$A_e = A - LC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 28 \\ 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 1 & 0 \\ -27 & 0 & 1 \\ -27 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

care are valorile proprii  $\lambda_{e,1,2,3} = -3$ .

c) Schema bloc (Simulink) se regăsește în Figura 16.3. În chenarul mov este reprezentat procesul initial, iar în chenarul cyan este prezentat estimatorul de stare.

## 16.4 Probleme propuse

**Problema 16.4.1:** Se consideră preceșele descrise prin realizările de stare:

a)

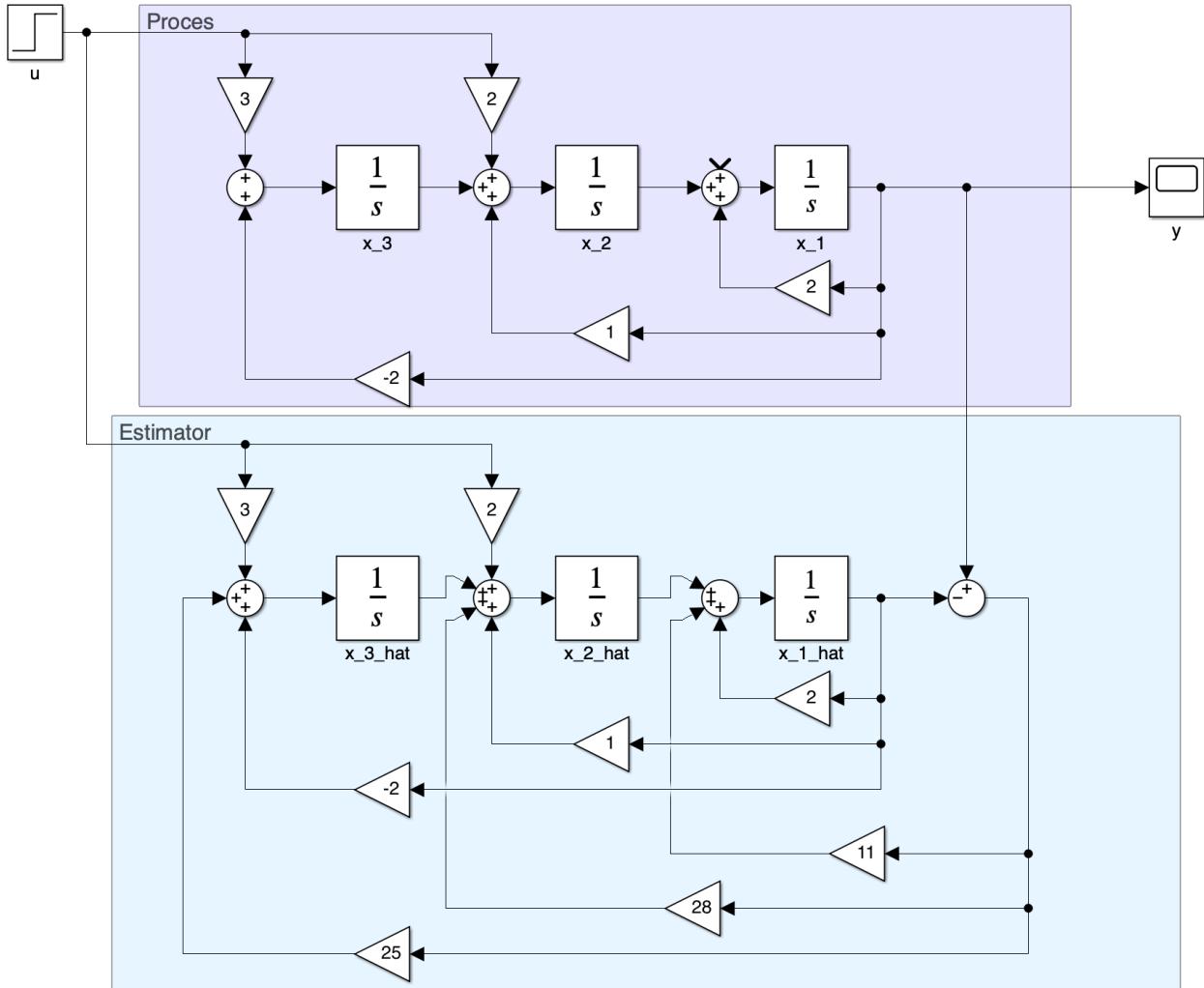
$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t); \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t); \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t); \\ \mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \end{cases}$$

Să se deducă pe foaie, respectiv să se verifice în MATLAB:

- 1) Studiul observabilității sistemului;
- 2) Calculul matricei estimatorului de stare astfel încât *observer*-ul să fie de 10 ori mai rapid decât procesul;
- 3) Implementarea în Simulink a estimatorului de stare, precum în Figura 16.1;
- 4) Implementarea sistemului de control din Figura 16.2 în Simulink, folosind rezultatele Problemei 15.4.1 din lucrarea anterioară.



**Figura 16.3:** Estimatorul de stare pentru exemplul de la Problema 16.3.

**Problema 16.4.2:** Se consideră modelul matematic al motorului de curent continuu cu perii de la Lucrarea 15, Problema 15.4.2.

Să se proiecteze două sisteme de control cu reacție de la stare și estimator, unul pentru reglarea turației folosind subsistemul  $([v], [i_a, \omega], [\omega])$ , respectiv unul pentru reglarea poziției folosind sistemul  $([v], [i_a, \omega, \theta], [\theta])$ , privind intrarea de cuplu de sarcină  $T_L$  strict ca o perturbație externă. Deoarece semnalul de curent prin bobină nu este accesibil la ieșirea sistemului (nefiind măsurabil în sistemul considerat), se justifică utilizarea estimatoarelor. Să se studieze controlabilitatea și observabilitatea sistemelor, să se proiecteze matricele de reacție de la stare  $K$ , de prefiltrare  $F$  și de estimare  $L$  impunând un set adecvat de performanțe. Să se implementeze schemele de reglare în MATLAB și Simulink.



---

---

## Lucrarea 17

---

### Singularitățile sistemelor multivariabile

17.1 Fascicule matriceale . . . . .	162
17.2 Singularitățile sistemelor MIMO	162
17.3 Problemă rezolvată . . . . .	165
17.4 Probleme propuse . . . . .	166

Lucrarea de față cuprinde metode de a obține singularitățile sistemelor MIMO, cu accent pe obținerea zerourilor de transmisie utilizând atât fasciculul Rosenbrock, cât și prin intermediul formei Smith-McMillan.

## 17.1 Fascicule matriceale

Prezentare teoretică

### Definiția 17.1.1: Fascicul matriceal

Matricea parametrizată  $\lambda M - N$  se numește **fascicul matriceal** (engl. *matrix pencil*) liniar determinat de matricele  $M, N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , notată prin convenție  $(M, N)$ .

### Definiția 17.1.2: Valori proprii generalizate

**Valorile proprii generalizate** asociate unui fascicul  $(M, N)$  se definesc ca soluție a ecuației caracteristice a fasciculului:

$$\chi(\lambda) := \det(\lambda M - N) = 0, \quad (17.1)$$

cu **vectorii proprii** aferenți valorii proprii generalizate  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$N\mathbf{v} = \lambda M\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \quad (17.2)$$

**Remarcă:** Problema determinării valorilor proprii generalizate este bine definită dacă fasciculul  $(M, N)$  este pătratic și polinomul  $\chi(\lambda)$  nu este identic nul.

Cazul particular clasic este pentru  $M := I_n$ , de unde rezultă problema determinării valorilor proprii ale unei matrice pătratice  $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ :

$$\chi(\lambda) = \det(\lambda I - N) = 0, \quad (17.3)$$

cu definiția consacrată a vectorilor proprii atașați valorii proprii  $\lambda \in \mathbb{C}$ :

$$N\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}, \quad \mathbf{v} \neq 0. \quad (17.4)$$

### Implementare în MATLAB

Funcția `eig` din MATLAB suportă determinarea valorilor și a vectorilor proprii atât pentru cazul clasic al unei matrice pătratice  $N$ , cât și pentru un fascicul matriceal  $(M, N)$ .

## 17.2 Singularitățile sistemelor MIMO

### 17.2.1 Polii sistemelor MIMO

Prezentare teoretică

Se consideră sistemul MIMO  $\mathbf{H}(s)$  cu următoarea descriere în spațiul stărilor:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t); \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t), \end{cases} \quad \text{cu } \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+m)}, \quad (17.5)$$

având  $n \in \mathbb{N}$  stări  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $m \in \mathbb{N}$  intrări  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  și  $p \in \mathbb{N}$  ieșiri  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ .

### Definiția 17.2.1: Polii sistemului

**Polii sistemului multivariabil** se definesc ca fiind valorile proprii ale matricei de stare  $A$ :

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

### Teorema 17.2.2

Sistemul  $\mathbf{H}(s)$  este stabil dacă toți polii săi se află în semiplanul complex stâng.

### Implementare în MATLAB

Pentru a calcula polii sistemului multivariabil avem la dispoziție două funcții:

- `pole(sys)` – unde `sys` este fie un obiect de tip spațiul stărilor, fie o matrice de transfer;
- `eig(A)` – unde  $A$  este matricea de stare.

## 17.2.2 Zerourile de transmisie ale sistemului MIMO

### Prezentare teoretică

În cazul unui sistem pătratic, i.e.  $m = p$ , se definește conceptul de transmisie blocată astfel:

### Definiția 17.2.3: Zerourile de transmisie ale sistemului

Procesul multivariabil are un **zero de transmisie** în valoarea (complexă)  $z_k$  dacă există vectorii  $\xi_k \in \mathbb{C}^n$  și  $u_k \in \mathbb{C}^m$ , nu amândoi nuli, astfel încât soluția sistemului de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + Bu_ke^{z_k t}, & \mathbf{x}(0) = \xi_k, \\ \mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + Du_ke^{z_k t}, \end{cases} \quad (17.6)$$

să aibă proprietatea:

$$\mathbf{y}(t) \equiv 0, \quad \forall t > 0. \quad (17.7)$$

### Exemplu

Se consideră funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{s+1}{s(s-1)},$$

cu reprezentarea în spațiul stărilor:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Pentru  $u(t) = 2e^{-t}$ , intrare corespunzătoare perechii  $u_k = 2$  și  $z_k = -1$ , respectiv pentru vectorul condițiilor inițiale  $\xi_k = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ , obținem succesiv:

$$\dot{x}_2(t) = x_2(t) + 2e^{-t} \xrightarrow{x_2(0)=-1} x_2(t) = -e^t + e^t \int_0^t e^{-\tau} 2e^{-\tau} d\tau = -e^{-t}; \quad (17.8)$$

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \xrightarrow{x_1(0)=1} x_1(t) = 1 + e^{-t} - 1 = e^{-t} \Rightarrow y(t) = x_1(t) + x_2(t) = 0, \quad (17.9)$$

de unde reiese că  $z = -1$  este un **zero de transmisie** pentru sistemul  $H(s)$ .

### Fasciculul Rosenbrock

#### Definiția 17.2.4: Fasciculul Rosenbrock

Fasciculul matriceal  $(M, N)$  cu:

$$M = \begin{bmatrix} I & O \\ O & O \end{bmatrix} \text{ și } N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (17.10)$$

poartă denumirea de **fascicul matriceal Rosenbrock** al sistemului.

#### Teorema 17.2.5

**Zerourile de transmisie** ale unui sistem pătratic reprezintă **soluțiile ecuației caracteristice a fasciculului matriceal Rosenbrock**, adică acele valori  $s \in \mathbb{C}$  pentru care scade rangul fasciculului:

$$\det \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ -C & -D \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & D \end{bmatrix} = 0. \quad (17.11)$$

**Remarcă:** În cazul sistemelor dreptunghiulare, i.e.,  $m \neq p$ , se face distincție între zerourile de transmisie la stânga, respectiv la dreapta.

#### Implementarea în MATLAB

- `sys = tf(NUM,DEN)`, `sys = ss(A,B,C,D)`, `sys = pck(A,B,C,D)`;
- `p = pole(sys)`, `z = zero(sys)`, `z = tzero(sys)`;
- `A = eig(A)`, `A_g = eig(M,N)`;

#### 17.2.3 Forma Smith-McMillan

Un alt mod de a determina polii și zerourile de transmisie ale unui sistem **în formă minimală** este dat de posibilitatea de a scrie matricea de transfer **în forma Smith-McMillan**. Vom descrie pașii necesari, urmând ca aceștia să fie ilustrați pe un exemplu.

Se consideră sistemul LTI MIMO descris prin matricea de transfer  $\mathbf{H}(s)$ .

- Fie  $D(s)$  cel mai mic multiplu comun al tuturor polinoamelor de la numitor din  $\mathbf{H}(s)$ . Atunci putem scrie:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{D(s)} \mathbf{N}(s),$$

unde  $\mathbf{N}(s)$  este o matrice de polinoame de aceeași dimensiune cu  $\mathbf{H}(s)$ .

- Fie  $D_i(s)$  cel mai mare divizor comun al tuturor minorilor de ordin  $i$  ai matricei  $\mathbf{N}(s)$ , unde  $D_0(s) = 1$ . Definim în continuare fracțiile polinomiale  $\varepsilon_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)}$ .
- Conform teoremei Smith-McMillan, matricea de transfer  $\mathbf{H}(s)$  este echivalentă cu:

$$\mathbf{H}(s) \sim \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{D(s)} & & & \\ & \frac{\varepsilon_2(s)}{D(s)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{\varepsilon_n(s)}{D(s)} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{H}_{SM}(s).$$

#### Teorema 17.2.6: Forma Smith-McMillan

**Polii** sistemului MIMO  $\mathbf{H}(s)$  în **formă minimală** sunt date de rădăcinile polinoamelor de la numitorul formei sale Smith-McMillan  $\mathbf{H}_{SM}(s)$ , iar **zerourile de transmisie** ale sistemului în **formă minimală** sunt date de rădăcinile polinoamelor de la numărătorul formei sale Smith-McMillan.

### 17.3 Problemă rezolvată

**Enunț:** Se consideră sistemul LTI MIMO descris prin realizarea de stare:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccccc|cc} -1 & & & & & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & & & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & & & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (17.12)$$

având matricea de transfer:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+2} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix}. \quad (17.13)$$

- Să se determine polii sistemului;
- Să se determine zerourile de transmisie ale sistemului pe baza fasciculului Rosenbrock;
- Să se determine singularitățile sistemului în formă minimală pe baza formei Smith-McMillan.

**Soluție:** a) Dacă avem la dispoziție matricea de transfer, polii sistemului sunt dați de polii fiecărei funcții de transfer în parte. Astfel, avem  $\hat{s}_{1,2,3} = -1$  și  $\hat{s}_{4,5} = -2$ .

Pe de altă parte, polii sunt dați de valorile proprii ale matricei de stare:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = -1 \text{ și } \lambda_{4,5} = -2.$$

b) Polinomul characteristic al fasciculului matriceal Rosenbrock este:

$$\det(sM - N) = \begin{vmatrix} s+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & s+1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & s+3 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s+2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

iar rădăcinile polinomului characteristic al fasciculului Rosenbrock sunt  $\dot{z}_1 = -1$ ,  $\dot{z}_2 = -2$  și  $\dot{z}_3 = -3$ , care sunt și zerourile de transmisie ale acestui sistem MIMO.

c) Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor  $s + 1$ ,  $s + 1$ ,  $s^2 + 3s + 2$  și  $s + 2$  este  $D(s) = s^2 + 3s + 2$ . De aici putem scrie:

$$\mathbf{H}(s) = \frac{1}{D(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} s+2 & 2(s+2) \\ -1 & s+1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{N}(s)}.$$

Polinoamele  $D_i(s)$  corespunzătoare celui mai mare divizor comun al minorilor de ordin  $i$  sunt:  $D_0(s) = D_1(s) = 1$  și  $D_2(s) = (s+2)(s+3)$ . De aici avem  $\varepsilon_1(s) = \frac{D_1(s)}{D_0(s)} = 1$  și  $\varepsilon_2(s) = \frac{D_2(s)}{D_1(s)} = (s+2)(s+3)$ . Apoi forma Smith-McMillan este:

$$\mathbf{H}_{SM}(s) = \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon_1(s)}{D(s)} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon_2(s)}{D(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} & 0 \\ 0 & \frac{s+3}{s+1} \end{pmatrix}.$$

Așadar, polii sistemului în formă minimală sunt  $\hat{s}_{1,2} = -1$  și  $\hat{s}_3 = -2$ , iar zeroul de transmisie al sistemului în formă minimală este  $\dot{z}_1 = -3$ .

## 17.4 Probleme propuse

**Problema 17.4.1:** Determinați singularitățile următoarelor sisteme LTI:

a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (17.14)$$

b)

$$\mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s+2} & 0 \\ \frac{s+2}{s+3} & \frac{1}{s+4} \end{pmatrix}; \quad (17.15)$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (17.16)$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0); \quad D = (0). \quad (17.17)$$

**Problema 17.4.2:** Să se determine singularitățile în formă minimală ale sistemelor următoare, pe baza formei Smith-McMillan:

a)  $\mathbf{H}(s) = \left( \begin{smallmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-1} \end{smallmatrix} \right);$

e)  $\mathbf{H}(s) = \left( \begin{smallmatrix} \frac{s-1}{s+1} & \frac{s-1}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{s+2}{s^2-1} \end{smallmatrix} \right);$

b)  $\mathbf{H}(s) = \left( \begin{smallmatrix} \frac{1}{s-1} & 1 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{smallmatrix} \right);$

f)  $\mathbf{H}(s) = \left( \begin{smallmatrix} \frac{1}{(s+2)^2} & \frac{s+1}{s+2} \\ -\frac{s+1}{s+2} & \frac{s+1}{s+2} \end{smallmatrix} \right);$

c)  $\mathbf{H}(s) = \left( \begin{smallmatrix} \frac{s-1}{s+2} & \frac{4}{2(s-1)} \\ \frac{4.5}{s+2} & \frac{s+2}{s+2} \end{smallmatrix} \right);$

g)  $\mathbf{H}(s) = \left( \begin{smallmatrix} 0 & \frac{-1}{s+1} \\ 1 & \frac{s+1}{s(s+1)} \end{smallmatrix} \right);$

d)  $\mathbf{H}(s) = \left( \begin{smallmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \\ \frac{-6}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{smallmatrix} \right);$

h)  $\mathbf{H}(s) = 50 \left( \begin{smallmatrix} \frac{-1}{s^2+1} & \frac{-(s+1)}{s} \\ \frac{1}{s^2+1} & 0 \end{smallmatrix} \right).$



---

---

## Lucrarea 18

---

### Forma minimală a sistemelor multivariabile

18.1 Forma canonică Gilbert . . . . .	170
18.2 Forma canonică Kalman . . . . .	171
18.3 Probleme propuse . . . . .	175

Lucrarea de față cuprinde metode de a obține realizări de stare pornind de la matricea de transfer a sistemelor LTI cu mai multe intrări și ieșiri. Se pun în evidență formele canonice Gilbert și Kalman din care reiese ordinul minimal de reprezentare a sistemului, respectiv o serie de proprietăți generale și modalități de a le analiza utilizând mediul MATLAB.

## 18.1 Forma canonică Gilbert

### Prezentare teoretică

Se consideră sistemul MIMO având  $m$  intrări și  $p$  ieșiri descris prin matricea de transfer:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} Y_j(s) \\ U_i(s) \end{bmatrix}_{\substack{1 \leq j \leq p \\ 1 \leq i \leq m}} = \begin{pmatrix} H_{1,1}(s) & H_{1,2}(s) & \cdots & H_{1,m}(s) \\ H_{2,1}(s) & H_{2,2}(s) & \cdots & H_{2,m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{p,1}(s) & H_{p,2}(s) & \cdots & H_{p,m}(s) \end{pmatrix}. \quad (18.1)$$

Funcțiile de transfer individuale  $H_{j,i}(s)$  reprezintă transferul de la intrarea  $i$  la ieșirea  $j$ .

Realizările de stare ale sistemului se pot deduce prin conexiuni paralele ale subsistemelor implicate în matricea de transfer, dar aceste abordări duc de obicei la **sisteme de formă neminimală**, deoarece stările pot fi adesea reutilizate între mai multe intrări și ieșiri.

Ordinul sistemului se poate deduce din rangul matricei Hankel  $\mathcal{H}_{n,n}$  a sistemului:

$$\mathcal{H}_{n,n} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \\ \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_n & \gamma_{n+1} & \cdots & \gamma_{2n-1} \end{bmatrix},$$

în care fiecare parametru Markov este o matrice de forma  $\gamma_i = CA^{i-1}B$ ,  $i \geq 1$ . Dezavantajul acestei metode este că aflăm doar ordinul sistemului în formă minimală, fără a determina și forma minimală propriu-zisă.

O altă metodă de a deduce ordinul sistemului este utilizând **teorema lui Gilbert**, metodă cu ajutorul căreia se poate obține chiar o realizare de stare în formă minimală. Această metodă va fi ilustrată pentru următorul exemplu rezolvat. **Principiul funcționează pentru sisteme cu poli distincți.**

### Exemplul rezolvat 18.1.1:

Se consideră sistemul LTI MIMO descris prin matricea de transfer:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{s+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{s^2+3s+2} & \frac{s+1}{s+2} \end{pmatrix}. \quad (18.2)$$

Sistemul descris în (18.2) este cu două intrări și două ieșiri. O realizare de stare se poate obține utilizând formă canonică de control (sau oricare altă formă canonică) pentru fiecare dintre cele 4 subsisteme astfel:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} -1 & & & & 1 & 0 \\ & -1 & & & 0 & 1 \\ \hline & & -3 & -2 & 1 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right). \quad (18.3)$$

Abordarea aceasta nu garantează că sistemul este în formă minimală.

Pentru a determina o realizare de stare a sistemului în formă minimală, descompunem sistemul în forma paralelă cu ajutorul teoremei reziduurilor:

$$\mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{2}{s+1} \\ \frac{-1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+1}{s+2} \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{s+1} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{s+2} = \frac{\mathbf{R}_{\hat{s}_1=-1}}{s+1} + \frac{\mathbf{R}_{\hat{s}_2=-2}}{s+2}. \quad (18.4)$$

Conform teoremei lui Gilbert:

$$\min \text{ord } \mathbf{H} = \text{rank}(\mathbf{R}_{\hat{s}_1}) + \text{rank}(\mathbf{R}_{\hat{s}_2}) = \rho_1 + \rho_2,$$

iar polinomul caracteristic al sistemului este:

$$P_c(s) = (s - \hat{s}_1)^{\rho_1}(s - \hat{s}_2)^{\rho_2} = (s + 1)^2(s + 2), \quad (18.5)$$

de unde reiese că ordinul minimal este  $n = 3$ . În plus, avem informația că polul  $-1$  este dublu, iar polul  $-2$  este simplu.

Scriind ieșirile individuale, obținem:

$$\begin{cases} Y_1(s) = \frac{1}{s+1}U_1(s) + \frac{2}{s+1}U_2(s) = \frac{1}{s+1}\textcolor{red}{U_1(s)} + 2 \cdot \frac{1}{s+1}U_2(s); \\ Y_2(s) = \frac{-1}{s+1}U_2(s) + \frac{1}{s+2}U_1(s) + \frac{1}{s+2}U_2(s) = (-1) \cdot \frac{1}{s+1}\textcolor{red}{U_1(s)} + \frac{1}{s+2}(U_1(s) + U_2(s)), \end{cases} \quad (18.6)$$

Observăm că termenul  $\frac{1}{s+1}U_1(s)$  poate fi reutilizat în ambele expresii, deci avem trei termeni distincți de ordin I, în conformitate cu ceea ce indică teorema lui Gilbert. **Forma canonică Gilbert**, reprezentând o realizare de stare în formă minimală, se poate scrie:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_m & B_m \\ \hline C_m & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|cc} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Realizarea de stare cu integratoare se prezintă în Figura 18.1.

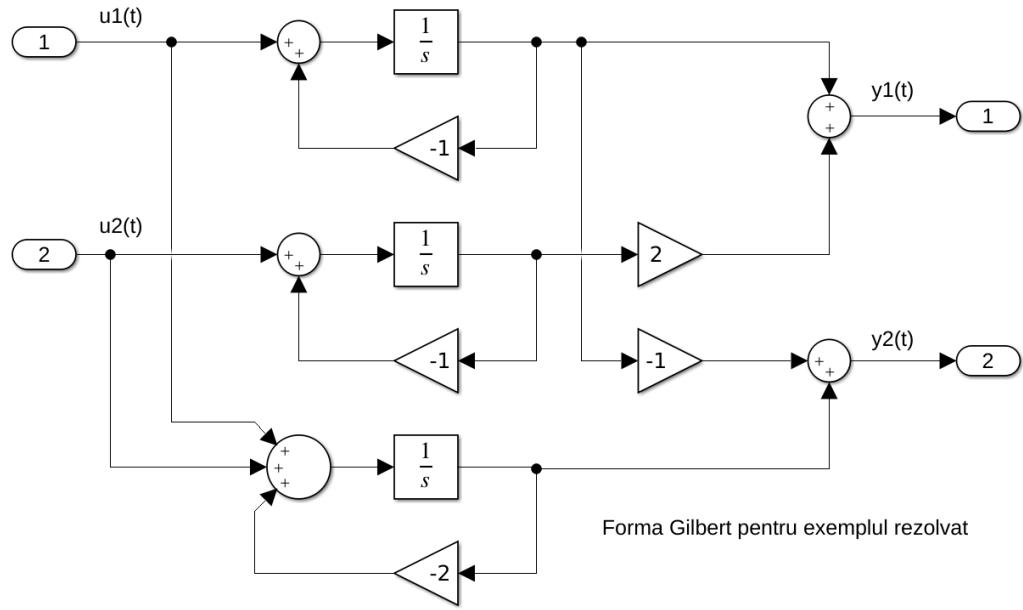
## 18.2 Forma canonică Kalman

Se consideră sistemul MIMO  $\mathbf{H}(s)$  descris prin matricele  $(A, B, C, D)$ , având  $n$  stări,  $m$  intrări și  $p$  ieșiri:

$$\mathbf{H}(s) : \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right). \quad (18.7)$$

O schimbare de coordonate prin similaritate  $\mathbf{z} = T\mathbf{x}$  se poate defini prin intermediul unei matrice **inversabilă** de transformare  $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  astfel:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = (TAT^{-1})\mathbf{z} + (TB)\mathbf{u}; \\ \mathbf{y} = (CT^{-1})\mathbf{z} + D\mathbf{u}. \end{cases} \quad (18.8)$$



**Figura 18.1:** Forma canonică Gilbert pentru exemplul rezolvat 18.1.1.

### Evidențierea subsistemului controlabil

Prin aplicarea funcției MATLAB `ctrbf` (engl. *controllability staircase form*) asupra matricelor  $(A, B, C)$ , se obține o realizare de stare echivalentă *în scară* a sistemului inițial prin aplicarea unei transformări de similaritate ortogonale  $T$ ,  $T^{-1} = T^\top$ , în care se pune în evidență subspațiul controlabil, respectiv necontrolabil:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{nc} \\ \dot{\mathbf{x}}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{nc} & O \\ A_{21} & A_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{nc} \\ \mathbf{x}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O \\ B_c \end{pmatrix} \mathbf{u}; \quad (18.9)$$

$$\mathbf{y} = (C_{nc} \ C_c) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{nc} \\ \mathbf{x}_c \end{pmatrix} + D \mathbf{u}, \quad (18.10)$$

unde  $\Lambda(A_c)$  reprezintă spectrul controlabil, iar  $\Lambda(A_{nc})$  conține modurile necontrolabile ale sistemului. Astfel, perechea  $(A_c, B_c)$  este complet controlabilă, iar perechea  $(A_{nc}, O)$  este necontrolabilă. Matricea de transfer echivalentă poate fi scrisă doar în termenii subsistemului controlabil astfel:

$$\mathbf{H}(s) = C_c (sI - A_c)^{-1} B_c = C (sI - A)^{-1} B. \quad (18.11)$$

### Evidențierea subsistemului observabil

Prin aplicarea funcției MATLAB `obsvf` (engl. *observability staircase form*) asupra matricelor  $(A, B, C)$ , se obține o realizare de stare echivalentă *în scară* a sistemului prin aplicarea unei transformări de similaritate ortogonale  $T$ ,  $T^{-1} = T^\top$ , în care se pune în evidență subspațiul

observabil, respectiv cel neobservabil:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{no} \\ \dot{\mathbf{x}}_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{no} & A_{12} \\ O & A_o \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{no} \\ \mathbf{x}_o \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{no} \\ B_o \end{pmatrix} \mathbf{u}; \quad (18.12)$$

$$\mathbf{y} = (O \ C_o) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{no} \\ \mathbf{x}_o \end{pmatrix} + D \mathbf{u}, \quad (18.13)$$

unde  $\Lambda(A_o)$  reprezintă spectrul observabil, iar  $\Lambda(A_{no})$  conține modurile neobservabile ale sistemului. Astfel, perechea  $(A_o, C_o)$  este complet observabilă, iar perechea  $(A_{no}, O)$  este neobservabilă. Matricea de transfer echivalentă poate fi scrisă doar în termenii subsistemului observabil astfel:

$$\mathbf{H}(s) = C_o(sI - A_o)^{-1} B_o = C(sI - A)^{-1} B. \quad (18.14)$$

### Forma canonică Kalman

#### Teorema 18.2.1: Forma minimală

Un sistem LTI este în formă minimală dacă și numai dacă este simultan controlabil și observabil.

Aplicând în mod succesiv algoritmul în scară pentru evidențierea subspațiului controlabil, urmat apoi de evidențierea subspațiului observabil pe acesta, se poate scoate în evidență subsistemul simultan controlabil și observabil, într-un mod stabil numeric.

Varianta teoretică echivalentă, dar cu dificultăți în a fi obținută numeric, este de a realiza descompunerea sistemului în forma Kalman, având următoarea structură:

**Forma canonică Kalman:**  $\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccccc|c} A_{\bar{co}} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & & B_{\bar{co}} \\ O & A_{co} & O & A_{24} & & B_{co} \\ O & O & A_{\bar{co}} & A_{34} & & O \\ O & O & O & A_{\bar{co}} & & O \\ \hline O & C_{co} & O & C_{\bar{co}} & & D \end{array} \right), \quad (18.15)$

din care reies următoarele subsisteme:

- $(A_{co}, B_{co}, C_{co}, D)$  – subsistemul controlabil și observabil;
- $\left( \begin{bmatrix} A_{\bar{co}} & A_{12} \\ O & A_{co} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{\bar{co}} \\ B_{co} \end{bmatrix}, [O \ C_{co}], D \right)$  – subsistemul controlabil;
- $\left( \begin{bmatrix} A_{co} & A_{24} \\ O & A_{\bar{co}} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_{co} \\ O \end{bmatrix}, [C_{co} \ C_{\bar{co}}], D \right)$  – subsistemul observabil;
- $(A_{\bar{co}}, O, O, D)$  – subsistemul necontrolabil și neobservabil.

Astfel, o realizare de stare în formă minimală a sistemului  $\mathbf{H}$  se obține izolând partea controlabilă și observabilă a acestuia, ordinul minimal fiind dat de:

$$\min \text{ord } \mathbf{H} = \text{ord} \left( \begin{array}{c|c} A_{co} & B_{co} \\ \hline C_{co} & D \end{array} \right).$$

**Exemplul rezolvat 18.2.1:**

Considerăm realizarea de stare brută din (18.3) a sistemului (18.2):

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|cc} -1 & & & 1 & 0 \\ -1 & & & 0 & 1 \\ & -3 & -2 & 1 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ \hline & & & & 0 \end{array} \right).$$

Folosind comanda **ctrbf**, putem evidenția o stare necontrolabilă și patru stări controlabile:

$$\left( \begin{array}{c|c|c} A_{nc} & O_{1,4} & B_{nc} \\ \hline A_{21} & A_c & B_c \\ \hline C_{nc} & C_c & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ -2.1213 & 0 & -1 & 0 & 1.2247 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & -1.5 & 0 & 0 & -1.1412 \\ \hline 1.7321 & 0 & 0 & 0 & -2 & -1.4142 & 0 \\ -0.4082 & -1.4142 & -0.5774 & -1.4142 & -0.7071 & 0 & 0 \\ -0.8165 & 0.7071 & 0.5774 & -0.7071 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Aplicăm apoi comanda **obsvf** pentru a evidenția starea neobservabilă și cele trei stări observabile **din partea controlabilă** a sistemului:

$$\left( \begin{array}{c|c|c} A_{co} & A_{12} & B_{co} \\ \hline O_{3,1} & A_{co} & B_{co} \\ \hline C_{co} & C_{co} & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|ccccc} -2 & -0.9733 & -0.2722 & -0.4781 & 0.8165 & -0.4082 \\ 0 & -1.2105 & 0.2421 & -0.0485 & 1.0596 & -0.1325 \\ 0 & 0.6934 & -1.7973 & 0.1597 & 0.0824 & -1.0373 \\ 0 & 0.0339 & -0.0389 & -0.9922 & 0.4514 & 0.8602 \\ \hline 0 & 0 & -0.1072 & 2.1959 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1.1359 & -0.2073 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

De aici obținem o altă realizare de stare în formă minimală:

$$\left( \begin{array}{c|c} A_m & B_m \\ \hline C_m & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|cc} -1.2105 & 0.2421 & -0.0485 & 1.0596 & -0.1325 \\ 0.6934 & -1.7973 & 0.1597 & 0.0824 & -1.0373 \\ 0.0339 & -0.0389 & -0.9922 & 0.4514 & 0.8602 \\ \hline 0 & -0.1072 & 2.1959 & 0 & 0 \\ 0 & -1.1359 & -0.2073 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Se poate observa că forma canonica Gilbert aduce sistemul la o realizare de stare în formă paralelă, în timp ce aplicarea succesivă a izolării subspațiului controlabil și al celui observabil conduce la o realizare de stare necaracteristică vreunei forme canonice. Dar, **în timp ce forma Gilbert are un caracter mai degrabă didactic, izolarea subspațiilor este o metodă stabilă numeric ce se poate aplica sistemelor de dimensiuni mari.**

## Implementarea în MATLAB

- `ctrb(A,B)`, `obsv(A,C)` – *nerecomandate* pentru sisteme de ordin mare;
- `Wc = gram(sys,'c')`, `Wo = gram(sys,'o')` – alternativele recomandate (stabile numeric) prin studiul rangurilor matricelor Gram (gramian) de controlabilitate și observabilitate;
- `ctrbf(A,B,C)`, `obsfv(A,B,C)`, `minreal(sys)`.

## 18.3 Probleme propuse

**Problema 18.3.1:** Se consideră următoarele sisteme MIMO:

$$1) \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix};$$

$$3) \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s-1}{s+2} & \frac{4}{s+2} \\ \frac{4.5}{s+2} & \frac{2(s-1)}{s+2} \end{pmatrix};$$

$$2) \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-1} & 1 \\ 0 & \frac{1}{s-1} \end{pmatrix};$$

$$4) \quad \mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s-1)^2} & \frac{1}{s-1} \\ \frac{-6}{(s-1)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{pmatrix}.$$

Să se rezolve următoarele cerințe pentru fiecare sistem  $\mathbf{H}(s)$ :

- Deducreți o realizare de stare (nu neapărat în formă minimală) pe baza formelor canonice clasice (de control, de observare, controlabilă, observabilă, Jordan);
- Deducreți realizarea de stare minimală Gilbert;

*Hint: În cazul polilor cu multiplicitate algebrică mai mare de 1, descompunerea în fracții simple se face utilizând termeni de forma:*

$$\frac{R_{\hat{s}_1}^{(1)}}{s - \hat{s}_1} + \frac{R_{\hat{s}_1}^{(2)}}{(s - \hat{s}_1)^2} + \dots$$

- Aplicați succesiv evidențierea subspațiilor controlabile/necontrolabile, respectiv observabile/neobservabile pentru a obține forma canonică Kalman, apoi deducreți realizarea de stare în formă minimală a sistemului.

**Problema 18.3.2:** Studiați proprietățile următoarelor sisteme LTI: singularități, controlabilitate, observabilitate, performanțe în domeniul timp și frecvențial, ordin minimal, realizare de stare minimală:

a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (18.16)$$

b)

$$\mathbf{H}(s) = \begin{pmatrix} \frac{s+1}{s+2} & 0 \\ \frac{s+2}{s+3} & \frac{1}{s+4} \end{pmatrix}; \quad (18.17)$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad (18.18)$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C = (0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0); \quad D = (0). \quad (18.19)$$

# Partea IV

## Recapitulare. Aplicații. Autoevaluare



---

---

# Lucrarea 19

---

## Teste de autoevaluare

19.1 Capitolul I, Model 1 . . . . .	180
19.2 Capitolul I, Model 2 . . . . .	181
19.3 Capitolul II, Model 1 . . . . .	182
19.4 Capitolul II, Model 2 . . . . .	183
19.5 Capitolul III, Model 1 . . . . .	184
19.6 Capitolul III, Model 2 . . . . .	185
19.7 Test sumativ, Model 1 . . . . .	186
19.8 Test sumativ, Model 2 . . . . .	187

Lucrarea curentă prezintă exemple de teste de autoevaluare din capitolele individuale ale îndrumarului. Suplimentar, sunt prezentate și variante de teste sumative, acoperind cerințe din toată materia cuprinsă.

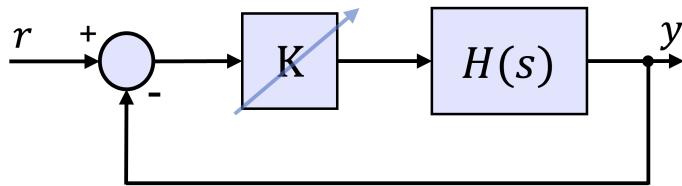
## 19.1 Capitolul I, Model 1

Valorile numerelor care generează subiectul pot fi alese  $m = 1, 3$ ,  $n \geq 1$ .

Se consideră sistemul descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{10^m(-s + 100 \cdot n)}{s(s + 10 \cdot n)^2},$$

respectiv conexiunea cu reacție negativă unitară din figura de mai jos.



Structura unui sistem cu RNU.

Să se rezolve următoarele cerințe:

- Să se traseze diagrama Bode a sistemului  $H(s)$ ; [0.5p]
- Să se calculeze **pe foaie** marginile de fază și câstig, respectiv să se figureze în diagrama de la subpunctul anterior; [1p]
- Să se precizeze, folosind criteriul Nyquist simplificat, dacă sistemul în buclă închisă este stabil pentru  $k = 1$ ; [0.5p]
- Să se precizeze amplificarea maximă a sistemului în buclă închisă pentru  $k = 1$  și să se figureze în diagrama Bode a sistemului închis; [0.5p]
- Să se precizeze și să se justifice care sunt diferențele între marginile de stabilitate ale sistemului  $H(s)$  și ale sistemului  $H'(s)$ ; [0.5p]

$$H'(s) = \frac{-10^m(\textcolor{red}{s} + 100 \cdot n)}{s(s + 10 \cdot n)^2}.$$

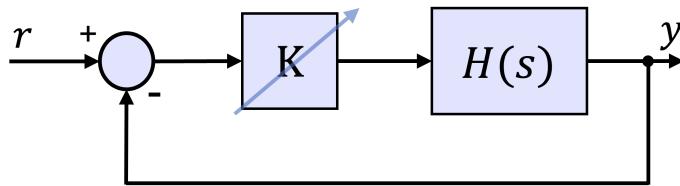
## 19.2 Capitolul I, Model 2

Valorile numerelor care generează subiectul pot fi alese  $m = 1, 10$ ,  $n \geq 1$ .

Se consideră sistemul descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{10(s + 1000 \cdot m)}{s(s + 10 \cdot n)(s + 100 \cdot n)},$$

respectiv conexiunea cu reacție negativă unitară din figura de mai jos.



Structura unui sistem cu RNU.

Să se rezolve următoarele cerințe:

- a) Să se traseze diagrama Bode a sistemului  $H(s)$ ; [0.5p]
- b) Să se calculeze **pe foaie** pulsația de tăiere și marginea de fază și să se figureze în diagrama de la subpunktul anterior. Precizați stabilitatea sistemului închis pe baza marginilor de stabilitate; [1.25p]
- c) Să se precizeze lățimea de bandă a sistemului în buclă închisă pentru  $k = 1$  și pentru  $k = 5$  și să se figureze în diagrama Bode a sistemului închis. Creșterea parametrului  $k > 0$  îmbunătățește sau degradează performanța? [0.75p]
- d) Să se precizeze și să se justifice care ar fi diferențele în diagrama Bode între sistemul  $H(s)$  și  $H'(s)$ ; [0.5p]

$$H'(s) = \frac{10(-s + 1000 \cdot m)}{s(s + 10 \cdot n)(-s + 100 \cdot n)}.$$

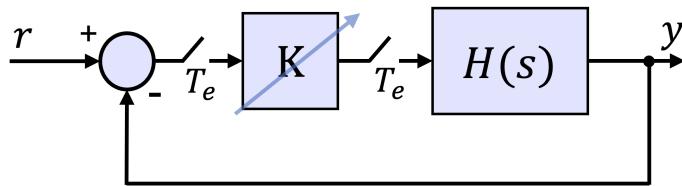
### 19.3 Capitolul II, Model 1

Valorile numerelor care generează subiectul pot fi alese  $m = 1, 2, n \geq 1$ .

Se consideră sistemul descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{5 \cdot n \cdot m}{s(4n \cdot s + 1)} \cdot e^{-0.4 \cdot n},$$

respectiv conexiunea cu reacție negativă unitară din figura de mai jos.



Structura unui sistem de control cu regulator numeric.

Să se rezolve următoarele cerințe:

- Să se decidă o perioadă de eşantionare corespunzătoare discretizării procesului  $H(s)$ . Justificați alegerea făcută; [0.5p]
- Discretizați pe foaie procesul  $H(s)$  folosind metoda Tustin. Precizați și justificați stabilitatea sistemului  $H(z)$  obținut; [0.75p]
- Să se determine ecuația cu diferențe corespunzătoare sistemului  $H(z)$ ; [0.5p]
- Pentru  $K(s) = k > 0$  să se determine stabilitatea și sensibilitatea sistemului în buclă închisă în raport cu parametrul  $k$  pe baza locului rădăcinilor; [0.75p]
- Cum se modifică valoarea lui  $k$  pentru limita de stabilitate dacă procesul  $H(s)$  se dicretează folosind metoda zoh? [0.5p]

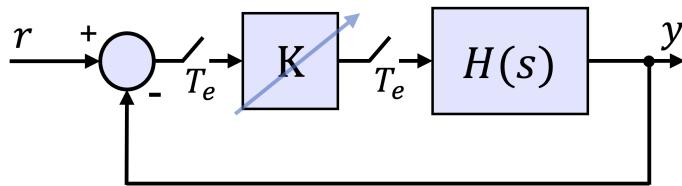
## 19.4 Capitolul II, Model 2

Valorile numerelor care generează subiectul pot fi alese  $m = 1, 2, n \geq 1$ .

Se consideră sistemul descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{0.1n \cdot s + 1}{s((-1)^m \cdot m \cdot s + 1)},$$

respectiv conexiunea cu reacție negativă unitară din figura de mai jos.



Structura unui sistem de control cu regulator numeric.

Să se rezolve următoarele cerințe:

- Să se decidă o perioadă de eşantionare corespunzătoare discretizării procesului  $H(s)$  și discretizați procesul  $H(s)$  folosind metoda zoh. Să se valideze discretizarea printr-un grafic adecvat; [0.75p]
- Pentru  $k = 10n$  să se deducă stabilitatea sistemului în buclă închisă pe baza criteriului Jury și să se valideze concluzia obținută pe baza unei metode alternative; [0.75p]
- Pentru  $K(z) = k > 0$  să se interpreteze comportamentul sistemului din figură. Interpretarea trebuie să conțină: stabilitatea, regimurile de funcționare, modurile sistemului, sensibilitatea; [1p]
- Cum se modifică valoarea lui  $k$  pentru limita de stabilitate dacă procesul  $H(s)$  se dicretează folosind o perioadă de eşantionare de două ori mai mică? [0.5p]

## 19.5 Capitolul III, Model 1

Valorile numerelor care generează subiectul pot fi alese  $m \in \{1, 2\}$ ,  $n \in \{1, 2\}$ .

Se consideră sistemul descris prin modelul de tip spațiul stărilor:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \dot{x}_1 = (-n - 1) \cdot x_1 - n \cdot x_2 + u_1; \\ \dot{x}_2 = x_1; \\ \dot{x}_3 = -n \cdot x_3 + u_2; \\ \dot{x}_4 = -3n \cdot x_4 + u_2; \\ \dot{x}_5 = (-n - 2) \cdot x_5 - 2n \cdot x_6 + u_1; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x}_6 = x_5; \\ \dot{x}_7 = (-m - 1) \cdot x_7 - m \cdot x_8 + u_2; \\ \dot{x}_8 = x_7; \\ y_1 = x_1 + 2m \cdot x_3 - m \cdot x_4; \\ y_2 = x_6 + m \cdot x_8. \end{cases}$$

Să se rezolve următoarele cerințe:

- a) Să se determine polii și zerourile de transmisie ale sistemului  $(\Sigma)$ ; [0.5p]
- b) Să se determine ordinul minimal al sistemului  $(\Sigma)$  pe baza proprietăților de controlabilitate și observabilitate; [0.5p]
- c) Pentru sistemul  $G(s)$  în formă minimală, determinați realizarea de stare corespunzătoare **formei canonice controlabile** (matricea cu blocuri); [1p]
- d) Pentru realizarea de stare de la punctul anterior, studiați controlabilitatea acesteia și determinați **pe foaie** matricea de reacție de la stare astfel încât sistemul de reglare să asigure un timp de răspuns de două ori mai mic și eroarea staționară la poziție nulă. Validați printr-un grafic sugestiv rezultatele obținute; [1.25p]
- e) Reprezentați schema cu integratoare corespunzătoare structurii de control de la punctul anterior. [0.75p]

Fie  $G(s)$  sistemul care are intrarea  $u_m$  și ieșirea  $y_n$ .

## 19.6 Capitolul III, Model 2

Valorile numerelor care generează subiectul pot fi alese  $m \in \{1, 2\}$ ,  $n \in \{1, 2\}$ .

Se consideră sistemul descris prin matricea de transfer:

$$(\Sigma) : \begin{pmatrix} \frac{5(-2ns+1)}{(5ns+1)(6ns+1)} & 2 \times \frac{5(-2ns+1)}{(5ns+1)(6ns+1)} & 4 \times \frac{5(-2ns+1)}{(5ns+1)(6ns+1)} \\ \frac{10(s-2n)}{(4ns+1)(5ns+1)} & 2 \times \frac{10(s-2n)}{(4ns+1)(5ns+1)} & 4 \times \frac{10(s-2n)}{(4ns+1)(5ns+1)} \end{pmatrix}.$$

*Hint:* Pentru declararea unei matrice de transfer se poate folosi concatenarea de funcții de transfer precum în operarea cu matrice. Sunt direct aplicabile funcțiile **tf** și **ss**.

Să se rezolve următoarele cerințe:

- a) Determinați **pe foaie** realizarea de stare corespunzătoare **formei canonice controlabile** pentru funcția de transfer  $H(s)$ , considerată de la intrarea  $u_n$  la ieșirea  $y_m$  (matricea cu blocuri); [1p]
- b) Pentru realizarea de stare de la punctul anterior, studiați **pe foaie** observabilitatea acesteia și determinați matricea estimatorului astfel încât polii estimatorului să fie de  $6 \times n$  ori mai rapizi decât ai sistemului inițial. Să se verifice corectitudinea matricei obținute; [1p]
- c) Reprezentați schema cu integratoare corespunzătoare subsistemului  $H(s)$  cu estimator de la punctele a) și b); [0.75p]
- d) Determinați o realizare minimală de stare a sistemului  $(\Sigma)$  prin evidențierea subspațiilor sale controlabile și observabile din forma canonică Kalman; [0.75p]
- e) Ignorând intrarea  $u_1$ , determinați zerourile de transmisie ale subsistemului MIMO de la intrările  $u_2, u_3$  la ieșirile  $y_1, y_2$ . [0.5p]

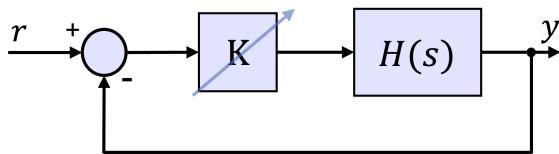
## 19.7 Test sumativ, Model 1

Valorile numerelor care generează subiectul pot fi alese  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$ .

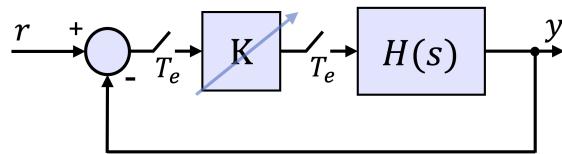
Se consideră sistemul continuu  $H(s)$  descris prin următoarea structură poli/zerouri/factor de amplificare:

$$\dot{\hat{s}}_1 = n, \dot{\hat{s}}_2 = -\frac{m}{10}, \hat{s}_{1,2} = 0, \hat{s}_3 = -m, K = -1,$$

alături de structurile clasice de reglare de mai jos.



(a) Sistem de reglare continuu



(b) Sistem de reglare cu *controller* numeric

Să se rezolve următoarele cerințe:

- Determinați funcția de transfer  $H(s)$  a sistemului; [1p]
- Pentru  $k = 2$ , precizați valoarea pulsației de tăiere și calculați pe foaie valoarea marginii de fază; [1p]
- Pentru  $k = 2$ , studiați stabilitatea sistemului din Figura (a) utilizând criteriul Nyquist simplificat; [1p]
- Pentru  $k = 1$ , determinați o realizare de stare pentru  $H(s)$  în forma canonica controlabilă (FCCo); [1p]
- Studiați controlabilitatea sistemului  $H(s)$  și calculați matricea de reacție de la stare  $K_x$  pentru o configurație stabilă a valorilor proprii ale matricei de stare; [1p]
- Pentru  $k = 1$ , discretizați sistemul  $H(s)$  utilizând metoda Euler înainte și o perioadă de eșantionare convenabilă; [1p]
- Implementați în Simulink sistemul  $H(z)$  discretizat la subpunctul f) folosind conexiunea serie; [2p]
- Se consideră structura cu reacție negativă din Figura (b). Să se discute stabilitatea, regimurile de funcționare, modurile și sensibilitatea sistemului pentru  $k > 0$ . [2p]

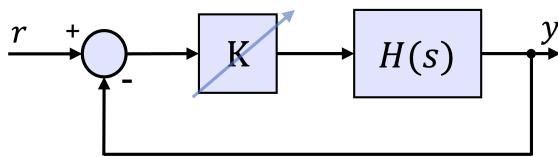
## 19.8 Test sumativ, Model 2

Valorile numerelor care generează subiectul pot fi alese  $m \geq 1$ ,  $n \geq 1$ .

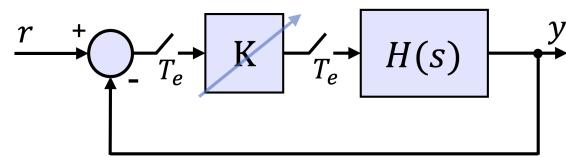
Se consideră sistemul descris prin modelul de tip spațiul stărilor:

$$H(s) : \begin{cases} \dot{x}_1 = -nx_1 - n^2x_2 + u; \\ \dot{x}_2 = x_1; \\ y = -x_1 + mx_2. \end{cases}$$

alături de structurile clasice de reglare de mai jos.



(a) Sistem de reglare continuu



(b) Sistem de reglare cu *controller* numeric

Să se rezolve următoarele cerințe:

- Determinați controlabilitatea realizării de stare dată și calculați matricea de reacție de la stare care să asigure un regim aperiodic critic amortizat cu un timp de răspuns cu 50% mai mic și precizați valoarea erorii staționare la poziție; [2p]
- Determinați funcția de transfer a sistemului dat; [1p]
- Precizați valoarea pulsăției la faza de  $-\pi$  și calculați pe foaie valoarea marginii de câștig; [1p]
- Studiați stabilitatea sistemului din Figura (a) în funcție de parametrul  $k > 0$  pe baza răspunsului în frecvență; [1p]
- Discretizați pe foaie sistemul dat utilizând metoda Tustin și o perioadă de eșantionare convenabilă; [1p]
- Se consideră structura cu reacție negativă din Figura (b). Să se studieze stabilitatea sistemului pentru  $k = 10 \times n$ ; [1p]
- Implementați într-un model Simulink modelul de tip spațiul stărilor corespunzător formei canonice controlabile a sistemului  $H(s)$ . [2p]



---

---

## Lucrarea 20

---

### Studiu de caz – Proiect de semestru

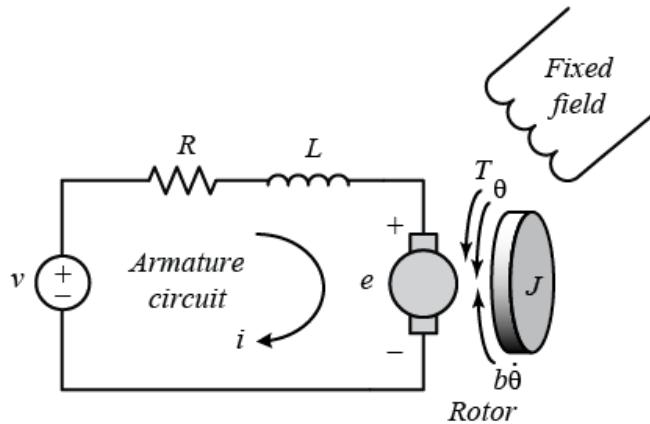
20.1 Descrierea procesului . . . . .	190
20.2 Cerințe . . . . .	191

Această lucrare prezintă o serie de cerințe pe baza materiei cuprinse în îndrumar, cu scopul efectuării unui studiu de caz complet pe un model de sistem dinamic clasic din literatură. Cerințele au fost elaborate în scopul studiului individual pe parcursul unui semestru, cu finalizare printr-o documentație redactată în mediile Microsoft Word, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X sau MATLAB Live Script.

## 20.1 Descrierea procesului

Se consideră modelul matematic al unui motor de curent continuu cu perii (engl. *DC Motor*) precum în Figura 20.1, adaptat după [Tilbury și Messner 2025]. Intrarea de comandă a sistemului este tensiunea  $v$  aplicată la armătura motorului, având suplimentar intrarea de perturbație  $T_L$ , ceea ce reprezintă cuplul de sarcină. Suplimentar, ieșirile sunt viteza de rotație unghiulară a axului,  $\omega$ , respectiv poziția unghiulară a axului,  $\theta$ . Se consideră că rotorul și axul sunt rigide și modelul presupune frecare vâscoasă, ceea ce înseamnă că are cuplul de frecare proporțional cu viteza unghiulară a arborelui.

Parametrii fizici ai motorului de curent continuu fără perii sunt: momentul de inerție al rotorului  $J$ , constanta de frecare vâscoasă a motorului  $B_f$ , constanta forței electromotoare  $K_e$ , constanta cuplului motorului  $K_t$ , rezistența electrică  $R_a$ , inductanța electrică  $L_a$ .



**Figura 20.1:** Circuitul echivalent al unui motor de curent continuu cu perii.

Aplicând legea a doua a lui Kirchhoff pe ochiul principal al circuitului, respectiv legea a doua a lui Newton, rezultă ecuațiile diferențiale electrice și mecanice ale motorului:

$$\begin{cases} L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a = K_{PWM} v - e; \\ J \frac{d\omega}{dt} + B_f \omega + T_L = T; \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega. \end{cases} \quad (20.1)$$

Pe lângă ecuațiile electrice și mecanice specifice motorului, există și ecuațiile de legătură între subsistemul mecanic și cel electric astfel:

$$\begin{cases} T = K_T i_a; \\ e = K_e \omega. \end{cases} \quad (20.2)$$

Considerând un sistem de tip MIMO, cu intrările  $\mathbf{u}(t) = (v, T_L)^T$ , stările  $\mathbf{x}(t) = (i_a, \omega, \theta)^T$ ,

respectiv ieşirile  $\mathbf{y}(t) = (\omega, \theta)^T$ , rezultă modelul în spaţiul stărilor:

$$\left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc|cc} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_e}{L_a} & 0 & \frac{K_{\text{PWM}}}{L_a} & 0 \\ \frac{K_t}{J} & -\frac{B_f}{J} & 0 & 0 & -\frac{1}{J} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (20.3)$$

Un set de parametri pentru motorul descris se prezintă în Tabelul 20.1.

Parametru	Valoare	U.M.
$R_a$	0.92	$\Omega$
$L_a$	$10^{-3}$	$H$
$K_e$	0.296	$Vs/rad$
$K_t$	0.294	$Nm/A$
$J$	$7 \cdot 10^{-4}$	$N/m^2$
$B_f$	$3.35 \cdot 10^{-4}$	$N/m$
$K_{\text{PWM}}$	38.46	–

**Tabelul 20.1:** Parametrii motorului DC

## 20.2 Cerințe

În ipoteza neglijării dinamicii electrice, să se analizeze sistemul având intrarea  $v$  și ieșirea  $\theta$ . Pentru acest sistem:

### Cerința A

- Să se proiecteze un regulator cu avans sau întârziere de fază care să asigure un timp de urcare cât mai mic și suprareglaj 0%. Regulatorul cu avans de fază se definește ca:

$$H_R(s) = K \cdot \frac{s + z}{s + p}, \quad p > z > 0, \quad K > 0, \quad (20.4)$$

respectiv cel cu întârziere de fază are condiția reciprocă între singularități:  $z > p > 0$ ;

- Să se ilustreze proiectarea acestuia pe diagrama Nichols și să se evidențieze modificările aduse de regulator asupra sistemului în buclă deschisă;
- Să se evidențieze funcțiile de senzitivitate: senzitivitatea  $S$ , senzitivitatea complementară  $T$  și efortul de control  $KS$ , utilizând diagrama Bode;
- În ipoteza în care comanda maximă admisă este de 5 [V], determinați dacă această constrângere este respectată pentru o referință  $\theta^* = 100$  [rad], iar, în caz contrar, modificați regulatorul astfel încât să se respecte și această constrângere;

- 5) Realizați toate simulările menționate anterior în ipoteza în care partea electrică nu este neglijată și precizați ce degradări ale performanțelor ați constatat.

### Cerința B

Să se analizeze robustețea structurilor de control propuse în raport cu variația parametrilor motorului. Considerați o variație de  $\pm 10\%$  pe fiecare parametru din Tabelul 20.1, exceptând amplificarea  $K_{PWM}$ , și studiați degradarea performanțelor obținute folosind regulatoarele calculate la **Cerința A**.

*Hint:* Utilizați funcția `ureal` din MATLAB.

### Cerința C

În ipoteza implementării numerice a unuia dintre regulatoarele calculate la **Cerința A**, să se analizeze următoarele aspecte, în ipoteza neglijării părții electrice a procesului:

- 6) Să se determine o perioadă de eșantionare adecvată sistemului de control astfel încât să existe o degradare minimă a performanțelor, fără a fi nevoie de o perioadă de eșantionare aberant de mică;
- 7) Pornind de la structura numerică de control menționată anterior, să se realizeze o analiză a impactului numărului de zecimale considerate pentru implementarea regulatorului numeric asupra stabilității și a performanțelor;
- 8) Realizați toate simulările menționate anterior în ipoteza în care partea electrică nu este neglijată și precizați ce degradări ale performanțelor ați constatat.

### Cerința D

Pornind de la modelul de tip spațiul stărilor din (20.3), să se rezolve următoarele cerințe:

- 9) Să se proiecteze un regulator cu reacție de la stare capabil să asigure eroarea staționară la poziție. Se cere ca suprareglajul să fie nul, iar timpul de răspuns să fie cât mai mic;
- 10) Pentru regulatorul propus la subpunctul anterior, să se analizeze valoarea maximă a comenzi;
- 11) Să se modifice regulatorul cu reacție de la stare calculat anterior astfel încât valoarea maximă a comenzi să nu depășească valoarea maximă de 5 [V];
- 12) În vederea implementării acestei structuri de control, curentul  $i_a$  nu poate fi măsurat. Proiectați un estimator de stare capabil să furnizeze măsurători suficient de rapide pentru a nu degrada performanțele impuse.

### Cerința E

Pornind de la regulatorul cu reacție de la stare calculat la **Cerința D**, să se analizeze următoarele aspecte, considerând disponibile măsurători pentru toate cele trei variabile de stare:

- 13) Să se determine o perioadă de eşantionare adecvată sistemului de control astfel încât să existe o degradare minimă a performanțelor, fără a fi nevoie de o perioadă de eşantionare aberant de mică;
- 14) Pornind de la structura numerică de control menționată anterior, să se realizeze o analiză a impactului numărului de zecimale considerate pentru implementarea regulatorului numeric asupra stabilității și a performanțelor;
- 15) Ce modificări apar dacă și estimatorul de stare ar trebui implementat pe același microcontroller? Analizați din punct de vedere a perioadei de eşantionare, a numărului de zecimale etc.

### Cerința F

Se consideră sistemul multivariabil cu ambele intrări,  $\mathbf{u}(t) = (v, T_L)^T$ , și ambele ieșiri,  $\mathbf{y}(t) = (\omega, \theta)^T$ .

- 16) Să se determine forma minimală a sistemului MIMO pe baza teoremei lui Gilbert;
- 17) Să se determine forma minimală a sistemului MIMO pe baza evidențierii subspațiului controlabil și al celui observabil;
- 18) Să se determine singularitățile sistemului MIMO.

(\*) Să se întocmească o documentație care prezintă rezolvările analitice, respectiv simulările numerice pentru cerințele de mai sus. Documentația poate fi redactată în mediile Microsoft Word, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X sau MATLAB Live Script.

(\*\*) Porniți de la alte exemple concrete de procese fizice regăsite în referințele lucrării, precum [Ogata 2010], [Dorf și Bishop 2011], [Levine 2011a], [Nise 2015], și adaptați un set de cerințe asemănătoare și adecvate proceselor în cauză.



---

---

## Lucrarea 21

---

### Întrebări de autocontrol

21.1 Listă de întrebări . . . . . 196

Lucrarea de față prezintă o serie de întrebări de autocontrol cu rolul de a sintetiza esența teoretică a disciplinei și de a deschide calea spre aplicarea practică a conceptelor studiate.

## 21.1 Listă de întrebări

1. Găsiți exemple de procese din practică la care nu se respectă precondițiile criteriului Nyquist simplificat.
2. Ce se poate spune despre stabilitatea unui sistem în buclă închisă dacă sistemul deschis nu are margini de stabilitate, i.e., nu există margine de fază și margine de câștig?
3. Care dintre cele trei tipuri de diagrame (Bode, Nyquist, Nichols) este mai utilă în proiectarea regulațoarelor? Dar în contextul istoric al proiectării pe hârtie, fără sisteme *Computer-Aided Design* precum MATLAB?
4. Care dintre cele trei tipuri de diagrame (Bode, Nyquist, Nichols) este mai utilă în identificarea funcției de transfer pe cale experimentală?
5. Precizați patru avantaje ale tehnicii aferente răspunsului în frecvență comparativ cu metoda locului rădăcinilor.
6. Pentru un sistem cu trei poli în valoarea  $-4$ , care este diferența maximă între aproximarea prin asimptote și răspunsul real al caracteristicii de modul?
7. De ce este necesar să se limiteze amplitudinea semnalului de comandă în anumite aplicații de automatizare industrială?
8. Prezentați asemănări/deosebiri, respectiv avantaje/dezavantaje între modelele de tip spațiu stărilor și cele de tip funcție de transfer.
9. De ce un sistem de reglare în buclă închisă se comportă (respectiv se doresc prin proiectare să se compore) precum un filtru trece jos?
10. Ce dificultăți tehnice aduce impunerea unei erori staționare la viteză nulă? Dar la acceleratie? Studiați problema din punct de vedere frecvențial.
11. De ce în practică este nefezabil un regulator care anulează un pol instabil al procesului cu un zero în semiplanul drept?
12. Ce implicații are proiectarea unui regulator în domeniul continuu și discretizarea acestuia comparativ cu discretizarea procesului și proiectarea regulatorului direct în domeniul discret? Cum se procedează în practică și de ce?
13. Ce dificultăți de implementare aduce o perioadă de eșantionare (excesiv de) mică? Analizați și din punct de vedere a modelului matematic rezultat în urma discretizării.
14. De ce trebuie folosit un filtru trece jos la intrarea unui sistem numeric de achiziție de date, chiar dacă perioada de eșantionare ar putea fi suficient de mică pentru semnalele care se eșantionează?
15. Ce avantaje prezintă un regulator/filtru numeric față de echivalentul său analogic în practică? Dar dezavantaje?

16. În ce contexte apar regimurile specifice sistemelor numerice?
17. Mai există alte categorii de filtre decât cele patru variante tipice, i.e., filtru trece jos, trece sus, trece bandă, oprește bandă? Ce rol ar avea în practică alte categorii de filtre?
18. Dați exemple din practică la care se pretează structura de reglare cu reacție de la stare.
19. Cum se poate deduce funcția de transfer în buclă deschisă pentru un sistem cu reacție de la stare (stabilizatoare)? Ce margini de stabilitate prezintă?
20. Cum se poate extinde structura cu reacție de la stare încât să fie prevăzut efect integrator pe eroarea de urmărire?
21. Estimatoarele, pe lângă rolul prezentat în laborator de a furniza stările care nu permit măsurarea lor, pot furniza suplimentar și o estimare a semnalelor de ieșire. Ce avantaje și aplicații există în astfel de cazuri?
22. Demonstrați că un sistem LTI este în formă minimală dacă și numai dacă este controlabil și observabil.
23. În cazul modelului matematic al motorului de curent continuu fără perii din Lucrarea 20, ce modificări aduce neglijarea constantei de timp electrice? Ce impact asupra răspunsului în frecvență aduc astfel de simplificări?
24. Cum afectează procesul de cuantizare și zgomatul performanța unui sistem discretizat? Analizați problemele specifice care apar în contextul unui sistem cu răspuns rapid.
25. Precizați un exemplu practic de sistem cu timp mort. Cum poate să influențeze timpul mort stabilitatea? Justificați din punctul de vedere al răspunsului în frecvență.
26. Precizați un exemplu practic de sistem de fază neminimă. Cum poate să influențeze faza neminimă stabilitatea? Justificați din punctul de vedere al răspunsului în frecvență.
27. Cum se poate modifica matricea de prefiltrare astfel încât să asigure o eroare staționară la poziție de 2%?
28. În ce condiții se poate stabiliza un sistem folosind reacția de la stare (completă sau parțială)?



---

## BIBLIOGRAFIE

**Anderson et al.: Network Analysis and Synthesis**

**Anderson1973**

B.D.O. Anderson și S. Vongpanitlerd, *Network Analysis and Synthesis. A Modern Systems Theory Approach*, Prentice-Hall Inc., 1973.

**Åström et al.: Benchmark Systems for PID Control**

**Astrom2000**

K.J. Åström și T. Hägglund, „Benchmark Systems for PID Control”, în *IFAC Proceedings Volumes* 33.4 (2000), pp. 165–166.

**Brockett: Finite Dimensional Linear Systems**

**Brockett1970**

R.W. Brockett, *Finite Dimensional Linear Systems*, John Wiley & Sons, 1970.

**Chen: Linear System Theory and Design**

**Chen1999**

C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*, a 3-a ed., Oxford University Press, 1999.

**P. Dobra: Teoria Sistemelor, Realizări de stare**

**Dobra2002**

P. Dobra, *Teoria Sistemelor, Realizări de stare*, Cluj-Napoca: Mediamira, 2002.

**P. Dobra et al.: Teoria Sistemelor**

**Dobra2014**

P. Dobra și M. Dobra, *Teoria Sistemelor*, Cluj-Napoca: Mediamira, 2014.

**Dorf et al.: Modern Control Systems**

**Dorf2011**

R.C. Dorf și R.H. Bishop, *Modern Control Systems*, a 12-a ed., Prentice Hall, Pearson, 2011.

**Emami-Naeini et al.: Computation of Zeros of Linear Multivariable Systems**

**EmamiNaeini1982**

A. Emami-Naeini și P. van Dooren, „Computation of Zeros of Linear Multivariable Systems”, în *Automatica* 18.4 (1982), pp. 415–430.

**Franklin et al.: Digital Control of Dynamic Systems****Franklin1998**

---

G.F. Franklin, J.D. Powell și M.L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, a 3-a ed., Addison-Wesley Longman, Inc., 1998.

**Ionescu: Teoria Sistemelor****Ionescu1985**

---

V. Ionescu, *Teoria Sistemelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1985.

**Ionescu et al.: Generalized Riccati Theory and Robust Control: A Popov Function Approach****Ionescu1999**

---

V. Ionescu, C. Oară și M. Weiss, *Generalized Riccati Theory and Robust Control: A Popov Function Approach*, John Wiley & Sons Ltd., 1999.

**Khalil: Nonlinear Systems****Khalil1996**

---

H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*, a 3-a ed., Prentice Hall, 1996.

**Levine: The Control Handbook: Control System Advanced Methods****Levine2011V3**

---

W.S. Levine, *The Control Handbook: Control System Advanced Methods*, vol. 3, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011.

**Levine: The Control Handbook: Control System Fundamentals****Levine2011V1**

---

W.S. Levine, *The Control Handbook: Control System Fundamentals*, a 2-a ed., vol. 1, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2011.

**MathWorks: MATLAB<sup>®</sup> Control System Toolbox<sup>TM</sup> User's Guide****MatlabCST2024**

---

Inc. MathWorks, *MATLAB<sup>®</sup> Control System Toolbox<sup>TM</sup> User's Guide*, <https://www.mathworks.com/help/control/>, Accesat: 2024-10-24, 2024.

**Nise: Control Systems Engineering****Nise2015**

---

N.S. Nise, *Control Systems Engineering*, a 7-a ed., Wiley, 2015.

**Ogata: Modern Control Engineering****Ogata2010**

---

K. Ogata, *Modern Control Engineering*, a 5-a ed., Prentice Hall, Pearson, 2010.

---

**Petkov et al.: Design of Embedded Robust Control Systems Using MATLAB/-Simulink** Petkov2018

---

P.H. Petkov, T.N. Slavov și J.K. Kralev, *Design of Embedded Robust Control Systems Using MATLAB/Simulink*, The Institution of Engineering și Technology, IET CONTROL, ROBOTICS & SENSORS SERIES 113, 2018.

---

**Rossi et al.: Introduction to Microcontroller Programming for Power Electronics Control Applications – Coding with MATLAB and Simulink** Rossi2022

---

M. Rossi, N. Toscani și M. Mauri, *Introduction to Microcontroller Programming for Power Electronics Control Applications – Coding with MATLAB and Simulink*, CRC Press, Taylor & Francis Group, 2022.

---

**Skogestad et al.: Multivariable Feedback Control, Analysis and Design** Skg2005

---

S. Skogestad și I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control, Analysis and Design*, John Wiley & Sons, 2005.

---

**Tilbury et al.:** CTMS2025

---

D. Tilbury și B. Messner, <https://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=MotorSpeed&section=SystemModeling>, Control Tutorials for MATLAB & Simulink (CTMS), Carnegie Mellon University, Accesat: 2025-09-01, 2025.

---

**Voicu: Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate** Voicu1986

---

M. Voicu, *Tehnici de analiză a stabilității sistemelor automate*, Editura Tehnică, București, 1986.