3 Mengenlehre

Die Mengenlehre wurde von Cantor[2] im 19. Jahrhundert entwickelt. Die gesamte Mathematik lässt sich auf die Mengenlehre und die klassische Logik zurückführen. Das heisst insbesondere, dass sich alle mathematischen Begriffe in der Sprache der Mengenlehre formulieren lassen.

3.1 Mengen und Elemente

Cantor verwendete den Begriff der ***Menge*** folgendermassen:

Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedlichen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche Elemente der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.

Betrachten wir einige Beispiele:

(a) Die Menge der Planeten unseres Sonnensystems.

(b) Die Menge der geraden natürlichen Zahlen, die grösser als 2 sind und sich als Summe zweier Primzahlen darstellen lassen.

(c) Die Menge der reellen Zahlen x, für die gilt $x > 5$.

(d) Die Menge der Studierenden an der BFH-TI Biel.

Wir bezeichnen Mengen mit Grossbuchstaben A, B, $C, \ldots$ und Elemente mit kleinen Buchstaben a, b, $c, \ldots$. Die Aussage „p ist ein Element von A“ oder gleichbedeutend „p gehört zu A“ wird folgendermassen abgekürzt:

$$p \in A$$

Die Verneinung der Aussage $p \in A$ schreibt sich $p \notin A$.

Eine Menge ist durch die Angabe ihrer Elemente vollständig bestimmt. Diese Tatsache wird formal durch das folgende Prinzip ausgedrückt:

Extensionalitätsaxiom: *Zwei Mengen A und B sind genau dann gleich, wenn sie die selben Elemente enthalten.*

Wie üblich schreiben wir $A = B$, falls die Mengen A und B gleich sind, $A \neq B$, falls sie verschieden sind.

Es gibt im wesentlichen zwei Arten eine Menge zu definieren. Die erste besteht darin, alle ihre Elemente aufzulisten. Zum Beispiel:

$$\begin{aligned} A &= \{a, b, x, y, z\} \\ B &= \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ C &= \{1, 2, a, b, c\} \end{aligned}$$

In der zweiten Art legen wir die Elemente durch die Angabe von Eigenschaften fest. Zum Beispiel:

$$B = \{n : n \in \mathbb{Z} \ \wedge \ n > 5\} \ ;$$

dies wird folgendermassen gelesen: „B ist die Menge der Elemente n , wofür gilt, n ist eine ganze Zahl grösser als 5.“ Ein Buchstabe, hier n, wird benutzt um ein typisches Element der Menge zu symbolisieren. Der Doppelpunkt bedeutet: „wofür gilt“.

[2] Georg Cantor (1845 St. Petersburg - 1918 Halle): deutscher Mathematiker

Beispiel 22 Welche der folgenden Mengen sind gleich ?

$$\begin{aligned}
A &= \{a,b\} \\
B &= \{b,a\} \\
C &= \{a\} \\
D &= \{1,2,3,4,5\} \\
E &= \{n : n \in \mathbb{Z} \ \wedge \ 1 \leq n \leq 5\} \\
F &= \{x : x \in \mathbb{R} \wedge x^2 - 3x + 2 = 0\} \\
G &= \{1, 4/2\}
\end{aligned}$$

Die Lösung wird im Unterricht erarbeitet. ◇

Beispiel 23 Bestimmen Sie alle Elemente der folgenden Menge:

$$A = \{x : x \in \mathbb{R} \ \wedge \ x^2 + 1 = 0\}$$

Die Lösung wird im Unterricht erarbeitet. ◇

Die Menge welche keine Elemente enthält heisst ***leere Menge*** und wird folgendermassen bezeichnet:

$$\emptyset \quad \text{oder} \quad \{\ \}$$

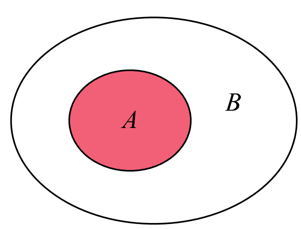
In den Anwendungen der Mengenlehre gehören die Elemente der betrachteten Mengen häufig einer ausgedehnten Menge an, die ***Universalmenge*** genannt wird. Beispielsweise ist in der ebenen euklidischen Geometrie die Universalmenge die Menge aller Punkte der Ebene; in der Analysis ist die Universalmenge die Menge aller reellen Zahlen. Wir benutzen die Bezeichnung U für die Universalmenge, sofern nichts anderes vermerkt wird.

3.2 Teilmengen

Definition 1 *Seien A und B zwei Mengen. A heisst* ***Teilmenge*** *von B, falls jedes Element der Menge A auch ein Element der Menge B ist. Dies wird so abgekürzt:*

$$A \subseteq B$$

Falls A keine Teilmenge von B ist, schreiben wir $A \not\subseteq B$.



Satz 6 *Es bezeichnen A, B und C beliebige Mengen und $\emptyset$ die leere Menge. Dann gilt:*

(i) $\emptyset \subseteq A \wedge A \subseteq A$.

(ii) $(A \subseteq B \ \wedge B \subseteq C) \Longrightarrow (A \subseteq C)$

(iii) $(A = B \Longleftrightarrow ((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A))$

Bew.:

Beispiel 24 Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) $\{1, 2, 3, 4\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$

(b) $\emptyset \subseteq \emptyset$

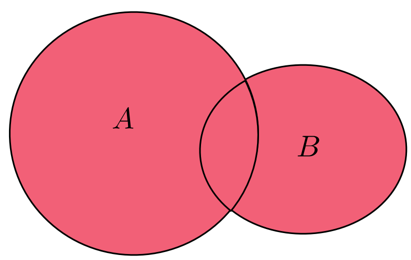
(c) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 4\}$

Die Lösung wird im Unterricht erarbeitet. $\diamond$

3.3 Vereinigung, Durchschnitt und Komplement

Definition 2 *Seien A und B zwei Mengen. Die* ***Vereinigung*** *von A und B, geschrieben $A \cup B$, ist die Menge aller Elemente die zu A oder B gehören:*

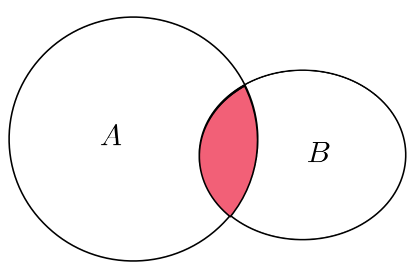
$$A \cup B := \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$$



Wie üblich in der Mathematik wird hier „oder“ in der Bedeutung von „und/oder“ verwendet.

Definition 3 *Seien A und B zwei Mengen. Der* ***Durchschnitt*** *von A und B, geschrieben $A \cap B$, ist die Menge aller Elemente die gleichzeitig zu A und B gehören:*

$$A \cap B := \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$



Falls der Durchschnitt zweier Mengen A und B leer ist,

$$A \cap B = \emptyset\,,$$

heissen A und B ***disjunkt.***

Beispiel 25 Bestimmen Sie die folgenden Mengen:

(a) $\{1,\, 3,\, 5,\, 7\} \cup \{2,\, 4,\, 6,\, 8\}$

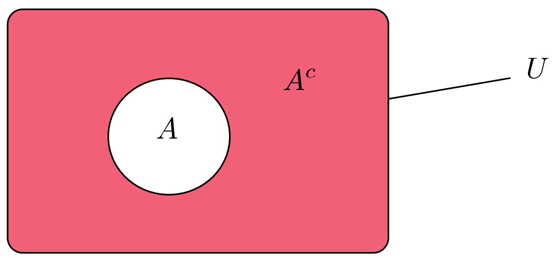
(b) $\{\alpha,\, \beta,\, \gamma,\, \delta\} \cap \{\gamma,\, \delta,\, \epsilon\}$

(c) $\{1,\, 3,\, 5,\, 7, \ldots\} \cap \{0,\, 2,\, 4,\, 6, \ldots\}$

Die Lösung wird im Unterricht erarbeitet. ◇

Definition 4 *Sei $A \subseteq U$. Das **Komplement** der Menge A, geschrieben A^c, ist die Menge aller Elemente von U, die nicht zu A gehören:*

$$A^c := \{x : x \in U \ \wedge \ x \notin A\}$$



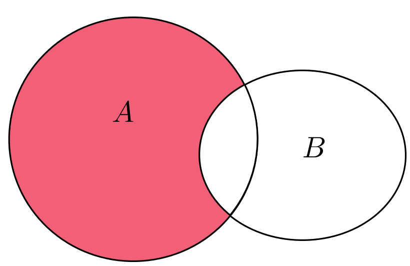
Beispiel 26 Sei $U = \mathbf{R}$. Bestimmen Sie die Komplemente der folgenden Mengen:

$$\begin{aligned} A &= \{x : x^2 \leq 4\} \\ B &= \{x : x < 0\} \end{aligned}$$

Die Lösung wird im Unterricht erarbeitet. ◇

Definition 5 *Seien A und B zwei Mengen. Die **Differenz** zwischen A und B, geschrieben $A \setminus B$, ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören:*

$$A \setminus B := \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$$



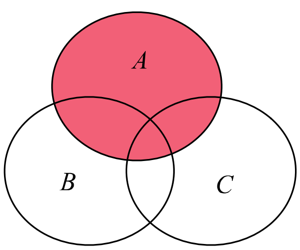
Beispiel 27 Gegeben sind die Mengen $A = \{1, 3, 5\}$ und $B = \{1, 2, 3\}$. Gesucht wird $A \setminus B$.
Die Lösung wird im Unterricht erarbeitet. ◇

3.4 Mengenalgebra, Dualität

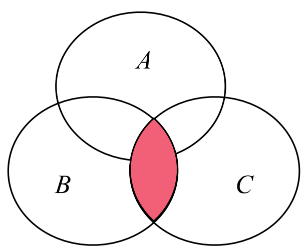
Die oben definierten Operationen gehorchen den nachfolgenden Gesetzen:

Gesetze der Mengenalgebra	
Idempotenz	
1a) $A \cup A = A$	1b) $A \cap A = A$
Assoziativgesetz	
2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Kommutativgesetz	
3a) $A \cup B = B \cup A$	3b) $A \cap B = B \cap A$
Distributivgesetz	
4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identitätsgesetz	
5a) $A \cup \emptyset = A$	5b) $A \cap U = A$
6a) $A \cup U = U$	6b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
Gesetz vom doppelten Komplement	
7) $(A^c)^c = A$	
Komplemente	
8a) $A \cup A^c = U$	8b) $A \cap A^c = \emptyset$
9a) $U^c = \emptyset$	9b) $\emptyset^c = U$
Gesetz von de Morgan	
10a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	10b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

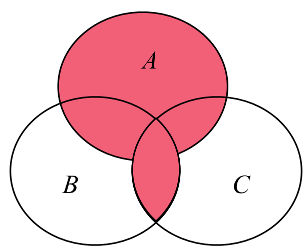
Nachfolgend eine Visualisierung des Gesetzes 4a):



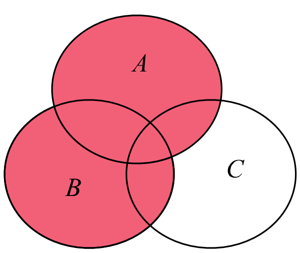
A



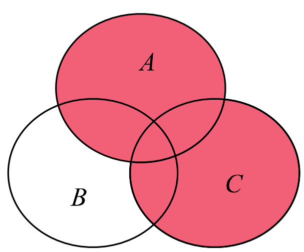
$B \cap C$



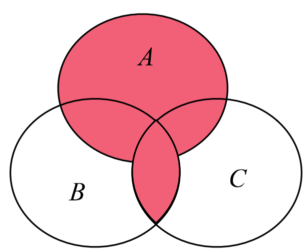
$A \cup (B \cap C)$



$A \cup B$



$A \cup C$



$(A \cup B) \cap (A \cup C)$

Beispiel 28 Visualisieren Sie das Gesetz 10b) mithilfe von Venn-Diagrammen.
Die Lösung wird im Unterricht erarbeitet. ◇

Beispiel 29 Wieso werden die Gesetze paarweise aufgelistet? Formulieren Sie das ***Prinzip der Dualität.***

Die Lösung wird im Unterricht erarbeitet. $\diamond$

3.5 Geordnete Paare, Tripel, n-Tupel, Produktmengen

Die Reihenfolge, in welcher die Elemente einer Menge aufgeschrieben werden, spielt keine Rolle:

$$\{a, b\} = \{b, a\}$$

Ein ***geordnetes Paar*** hingegen, besteht aus zwei Elementen von denen eines als erstes und das andere als zweites Element definiert ist. Wir verwenden für ein solches Paar die Schreibweise (a, b), wo a das erste Element und b das zweite Element ist. Zwei geordnete Paare (a, b) und (c, d) sind genau dann gleich, wenn gilt

$$a = c \text{ und } b = d\ .$$

Definition 6 *Seien A und B zwei Mengen. Die Menge aller geordneter Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$ heisst das **kartesische Produkt** von A und B und wird mit $A \times B$ bezeichnet:*

$$A \times B := \{(x, y) : x \in A \ \wedge \ y \in B\}$$

Statt $A \times A$ schreibt man oft A^2.

Beispiel 30 Seien $A = \{1, 2\}$ und $B = \{a, b, c\}$. Bestimmen Sie $A \times B$, $B \times A$ und A^2.

Die Lösung wird im Unterricht erarbeitet. $\diamond$

Beispiel 31 Ein Zufallsexperiment besteht darin, zuerst eine Münze und danach einen Würfel zu werfen. Geben Sie den Stichprobenraum Ω (=Menge aller möglichen Resultate an).

Die Lösung wird im Unterricht erarbeitet. $\diamond$

Natürlich lässt sich der Begriff des geordneten Paares verallgemeinern:

- Ein geordnete Folge bestehend aus 3 Elementen nennt man ein Tripel. Zwei Tripel sind genau dann gleich, wenn die entsprechenden Komponenten gleich sind:

  $$(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_2) \Longleftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \wedge a_3 = b_3$$

  Wenn A_1 , A_2 und A_3 drei Mengen sind, dann ist $A_1 \times A_2 \times A_3$ die Menge aller Tripel, wo die erste Komponenten in A_1 , die zweite Komponente in A_2 und die dritte Komponente in A_3 ist.

- Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine geordnete Folge von n Elementen, bezeichnet man als n-Tupel. Zwei n-Tupel sind genau dann gleich, wenn die entsprechenden Komponenten gleich sind:

  $$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \Longleftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n$$

  Wenn A_1 , A_2 , . . . , A_n Mengen sind, dann ist $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ die Menge aller n-Tupel mit der ersten Komponente in A_1 , der zweiten Komponente in A_2 etc.

3.6 Endliche Mengen, Ein- und Ausschlussformel

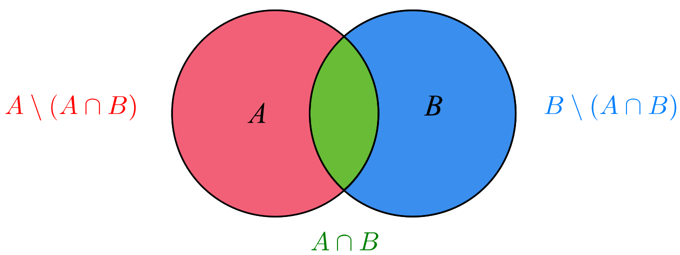
Eine Menge heisst ***endlich***, falls sie genau m verschiedene Elemente enthält, wo m eine natürliche Zahl ist. Andernfalls heisst die Menge ***unendlich.*** Beispielsweise sind die leere Menge $\emptyset$ und die Menge der Buchstaben des Alphabets endliche Mengen, während die Menge der positiven ganzen Zahlen $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ unendlich ist.

Falls eine Menge A endlich ist, so bezeichnen wir die Anzahl der Elemente von A mit $|A|$.

Satz 7 *Seien A und B endliche Mengen. Dann ist $A \cup B$ ebenfalls endlich und es gilt*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \; .$$

Bew.: Wird klar anhand der folgenden Graphik:



Die drei Mengen $A \setminus (A \cap B)$, $A \cap B$ und $B \setminus (A \cap B)$ bilden eine Partition von $A \cup B$. Es gilt also:

Es ist:

$$\begin{aligned} |A \cup B| &= |A \setminus (A \cap B)| + |A \cap B| + |B \setminus (A \cap B)| \\ &= |A| - |A \cap B| + |A \cap B| + |B| - |A \cap B| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| \end{aligned}$$

□

Dieses Resultat kann auf den Fall von k endlichen Mengen verallgemeinert werden. Im Fall von $k = 3$ endlichen Mengen A, B und C lautet die Formel:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \; . \tag{3}$$

Im Fall von $k = 4$ endlichen Mengen A, B, C und D lautet die Formel:

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| \\ &\quad - |B \cap D| - |C \cap D| + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| \\ &\quad + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$

Man bezeichnet diese Formeln als ***Einschluss-Ausschluss-Formeln.***

Beispiel 32 Beweisen Sie die Formel (3).

Die Lösung wird im Unterricht erarbeitet. ◇

Beispiel 33 Frau Dr. med. Ungesund hat in ihrer Arztpraxis im Verlaufe einer Woche total 60 Patientinnen und Patienten mit Grippesymptomen behandelt:

- 24 Patientinnen litten an Kopfschmerzen
- 35 Patienten litten an Husten
- 28 hatten Gliederschmerzen
- 8 hatten Kopfschmerzen und Husten
- 10 hatten Kopfschmerzen und Gliederschmerzen
- 12 hatten Husten und Gliederschmerzen

(a) Wie viele Patientinnen und Patienten litten an allen drei einem Symptomen?

(b) Wie viele Patientinnen und Patienten litten an genau einem Symptom?

Die Lösung wird im Unterricht erarbeitet. $\diamond$