Berner Fachhochschule
Haute école spécialisée bernoise
Bern University of Applied Sciences

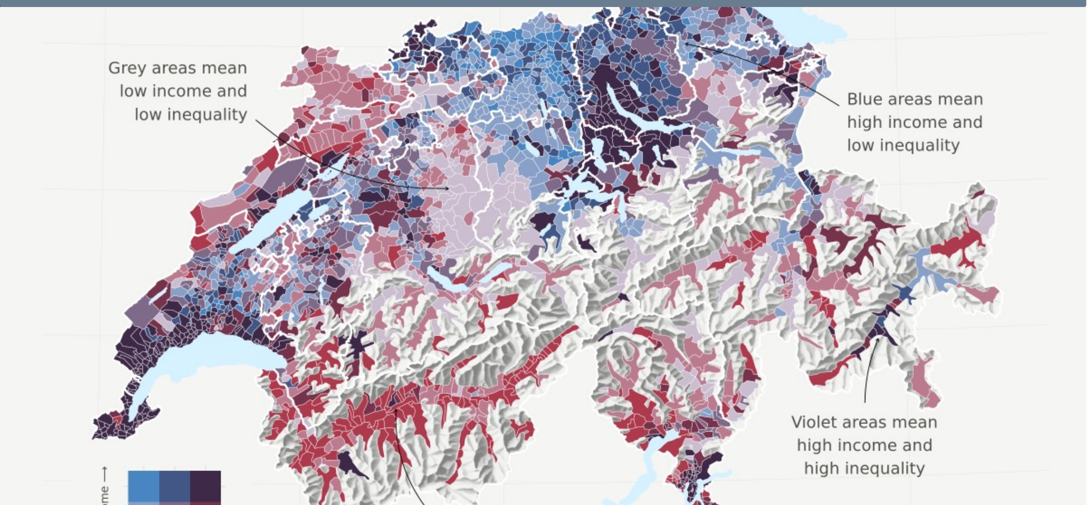


figure source

Statistics for WING

Vidushi Bigler, FS 2020, Classes W1 & W2

▶ Technik und Informatik

- Probability theory
- Venn diagrams
- Probability measure
- Independent & dependent event, conditional probability
- Probability trees
- Bayes theorem
- Dataset Coronavirus

Before we begin, let’s fix the dates!

Kombinatorik – zur Erinnerung

Das Summenprinzip

Wenn man ein Task auf **n** verschiedene Arten erledigen kann **oder** auf **m** verschiedenen Arten, dann gibt es insgesamt **n + m** mögliche Wege diesen Task zu erledigen.

Wichtig: **n + m stimmt nur,** wenn der Task **nicht gleichzeitig** auf beide verschiedene Arten erledigt werden kann.

Wichtig: wenn nicht gesagt wird, ist in der Mathematik mit **oder** immer ***einschliessendes-oder*** gemeint und nie *entweder-oder* (also kein **xor**).

Bsp: Ich gehe heute Abend auswärts essen oder lese ein Buch zu Hause.

Heisst – ich tue das eine oder das andere, aber vielleicht auch beides!

Heisst nicht – ich gehe *entweder* essen *oder* ich lese ein Buch.

Kombinatorik – zur Erinnerung

Das Produktprinzip

Angenommen eine Aufgabe lässt sich in zwei Tasks zerlegen, die hintereinander ausgeführt werden. Wenn man Task 1 auf **n** verschiedene Arten erledigen kann **und** Task 2 für jede Möglichkeit des ersten Tasks auf **m** verschiedenen Arten ausgeführt werden kann, dann kann die Aufgabe auf insgesamt **n x m** Arten erledigt werden.

Wichtig: **n x m stimmt nur,** wenn die Tasks **unabhängig** von einander erledigt werden können.

Probability theory

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Fragestellungen

1. Angenommen Sie werfen einen fairen Würfel einmal. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augenzahl 6 gewürfelt wird? (Ein perfekt geformter Würfel, ein vollkommener Würfel, heisst fair oder Laplace-Würfel. In der Realität existiert kaum so ein Objekt.)

2. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass es Morgen regnen wird? Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass es am 27. Juni regnen wird?

3. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Trump wieder gewählt wird? Nzz

4. Falls Sie in einer Beziehung sind, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie von Ihrem oder Ihren Partner* geliebt werden?

Wahrscheinlichkeitsrechnung

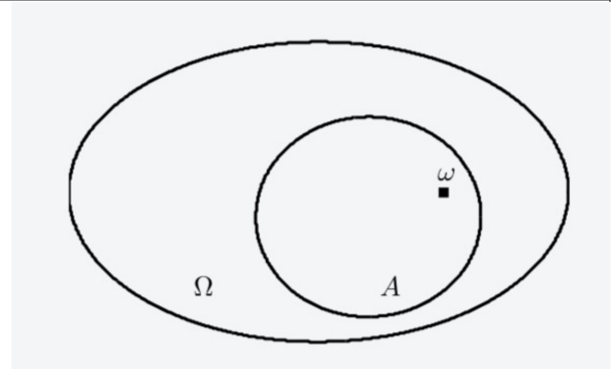
Zufällige Ereignisse

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Statistik werden *zufällige* Ereignisse und ihre Gesetzmässigkeiten untersucht.

Dem gegenüber stehen sogenannte *deterministische* Vorgänge, bei denen man unter genau bekannten Bedingungen das Ergebnis eines Versuchs exakt vorhersagen kann. Deterministische Vorgänge sind nicht vom Zufall beeinflusst.

Ein zufälliger Versuch hingegen ist dadurch charakterisiert, dass sein Ausgang im Rahmen verschiedener Möglichkeiten ungewiss, also zufällig ist. Zudem soll er (zumindest gedanklich) beliebig oft unter gleichen Bedingungen **wiederholbar** sein.

Wahrscheinlichkeitsrechnung



Grundbegriffe bei Zufallsexperimenten

Den zufälligen Ausgang eines Zufallsexperiments bezeichnen wir als ***Ergebnis*** oder ***Elementarereignis ω***.

Die Menge aller möglichen Elementarereignisse ω bildet dann den ***Ergebnisraum Ω***.

(Bsp: bei einem zufälligen Würfelwurf ist also $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.)

Ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ wird als Teilmenge von Ω aufgefasst; es tritt dann auf, falls das zufällige Elementarereignis ω in der Menge A ist.

(Bsp: das Ereignis „Der Würfelwurf ist gerade" wird also aufgefasst als die Teilmenge $\{2,4,6\}$ von Ω.)

Wahrscheinlichkeitsrechnung

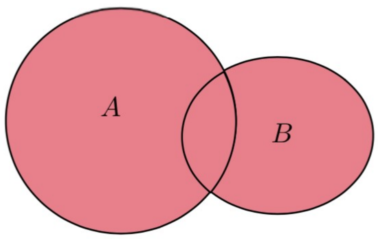
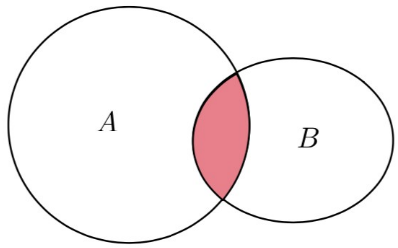
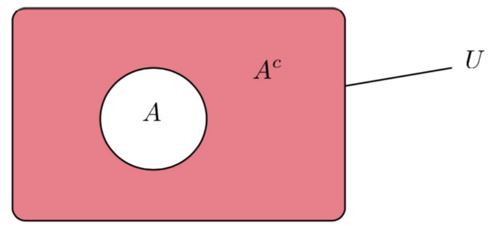
Grundbegriffe bei Zufallsexperimenten (Fortsetzung)

Die Menge aller solcher Ereignisse („Der Würfelwurf ist gerade", „Der Würfelwurf ist ungerade", „Der Würfelwurf ist 2", „Der Würfelwurf ist kleiner als 5", . . .) wird als ***Ereignisraum*** **Σ** bezeichnet.

Σ ist die Menge aller Teilmengen aus **Ω**, also die **Potenzmenge** von **Ω.**

Venn diagrams are very helpful

Venn – Diagramme aus der Mengenlehre

Vereinigung	Durchschnitt	Komplement
$A \cup B$	$A \cap B$	$A^c = \Omega \setminus A$
		
"oder" Verknüpfung	"und" Verknüpfung	Differenz (Gegenereignis)

- Die Universalmenge ***U*** ist das Ergebnisraum **Ω** in unserem Fall.
- Man sagt, dass die Ereignisse A und B disjunkt sind, falls $A \cap B = \emptyset$ (leere Menge) gilt, das gleichzeitige Eintreten von A und B also unmöglich ist.

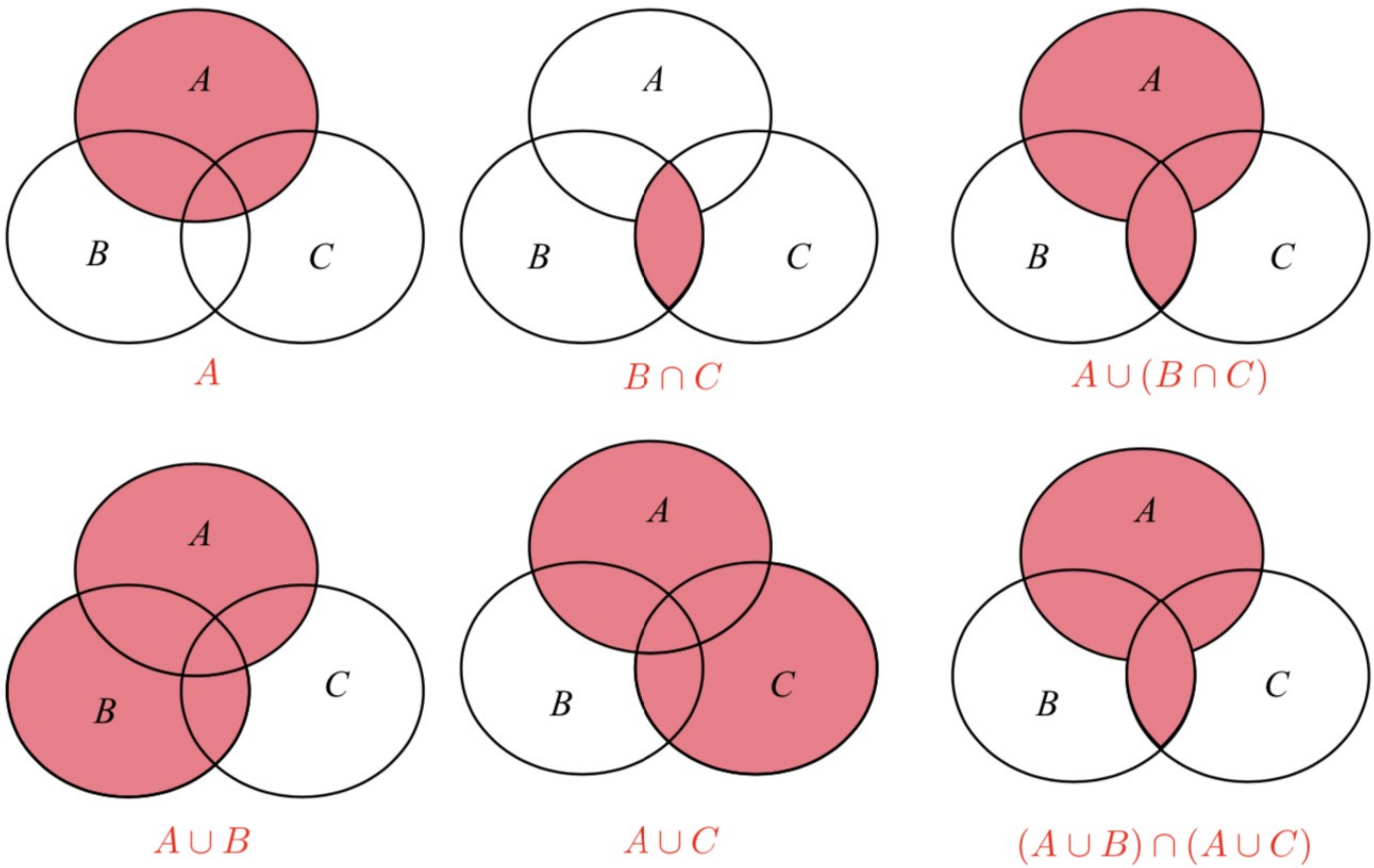
Gesetze der Mengenalgebra	
Idempotenz	
1a) $A \cup A = A$	1b) $A \cap A = A$
Assoziativgesetz	
2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Kommutativgesetz	
3a) $A \cup B = B \cup A$	3b) $A \cap B = B \cap A$
Distributivgesetz	
4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Identitätsgesetz	
5a) $A \cup \emptyset = A$	5b) $A \cap U = A$
6a) $A \cup U = U$	6b) $A \cap \emptyset = \emptyset$
Gesetz vom doppelten Komplement	
7) $(A^c)^c = A$	
Komplemente	
8a) $A \cup A^c = U$	8b) $A \cap A^c = \emptyset$
9a) $U^c = \emptyset$	9b) $\emptyset^c = U$
Gesetz von de Morgan	
10a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	10b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Venn - Diagramme

Beweisen Sie die Richtigkeit vom Gesetz 4 a)
mit Hilfe von Venn-Diagrammen.

Distributivgesetz	
4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Nachfolgend eine Visualisierung des Gesetzes 4a):



A very useful application of Venn diagrams

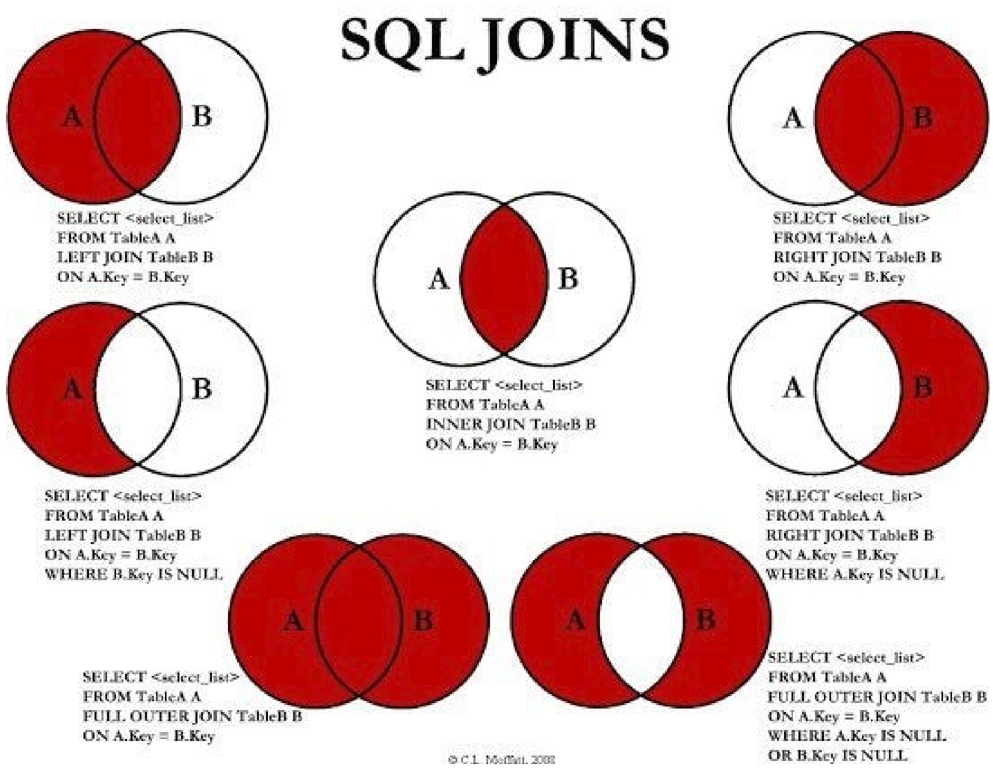


figure source

Probability measure

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeitsmass

In der Mathematik nennt man die Funktion P, welche jedem Ereignis eines Ereignisraums $\mathbf{\Sigma}$ eine Wahrscheinlichkeit „zuweist“, *Wahrscheinlichkeitsmass*. Ein Wahrscheinlichkeitsmass erfüllt immer folgende 3 Eigenschaften:

1. für jedes Ereignis A aus $\mathbf{\Sigma}$ gilt $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$ (Normierung);
3. falls A und B disjunkte Ereignisse sind, gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (Additivität).

Dass die Wahrscheinlichkeit des gesamten Ergebnisraums Ω gleich 1 ist, macht auch intuitiv Sinn: schliesslich erhalten wir in 100% der Fälle ein Elementarereignis aus Ω.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wahrscheinlichkeitsmass

Aus den drei Eigenschaften lassen sich zudem einige zusätzliche nützliche Eigenschaften herleiten.

1. für jedes Ereignis A aus Σ gilt $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. $P(\Omega) = 1$ (Normierung);
3. falls A und B disjunkte Ereignisse sind, gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

4. *Gegenereignis*: $P(A^c) = 1 - P(A)$ für ein beliebiges Ereignis $A \subseteq \Omega$. Insbesondere gilt $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 0$.

5. *Vereinigung*: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ für beliebige Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$, und deswegen insbesondere $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$. (Verallgemeinerung Einschluss-Ausschluss-Formel)

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Laplace-Wahrscheinlichkeit (Beispiel für ein Wahrscheinlichkeitsmass)

Besonders einfach lassen sich Wahrscheinlichkeiten berechnen, wenn alle Elementarereignisse ω gleich wahrscheinlich sind wie bei einem fairen Würfel. In diesem Fall ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A gerade die Anzahl Elementarereignisse $\omega \in A$, dividiert durch die Anzahl aller Elementarereignisse $\omega \in \Omega$:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl günstige Fälle}}{\text{Anzahl mögliche Fälle}} = \frac{\text{Anzahl Elemente der Menge A}}{\text{Anzahl Elemente der Menge }\Omega} \in [0,1]$$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Fragestellungen

1. Angenommen Sie werfen eine faire Münze einmal.
   - Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie Kopf erhalten?
   - Wie sieht Ω für dieses Zufallsexperiment aus?

2. Angenommen Sie werfen eine faire Münze zweimal nach einander.
   - Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie ***mindestens einmal*** Kopf erhalten?
   - Wie sieht Ω für dieses Zufallsexperiment aus?

Laplace-Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Fragestellungen

3. Angenommen Sie werfen eine gezinkte (!) Münze zweimal nach einander. Die Wahrscheinlichkeit Kopf zu erhalten, beträgt 20%.

   - Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie ***mindestens einmal*** Kopf erhalten?

   - Wie sieht Ω für dieses Zufallsexperiment aus?

   - Angenommen Sie haben beim zweiten Wurf, Kopf erhalten. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie beim ersten Wurf ebenfalls Kopf erhalten haben?

Keine Laplace-Wahrscheinlichkeit

Independent & dependent events, the concept of conditional probability

Unabhängige und abhängige Ereignisse

2 unterschiedliche Situationen

Angenommen Sie haben einen kleinen Sack mit 4 roten und 3 blaue Marmorkugeln und ziehen (blind) zwei Kugeln nach einander daraus.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die **zweite gezogene Kugel rot** ist, wenn Sie

1. die Kugel nach der ersten Ziehung **zürucklegen**?
2. die Kugel nach der ersten Ziehung **nicht zürucklegen**?

Wir definieren die Ereignisse – A : erste Kugel ist rot
B : zweite Kugel ist rot

Probability trees are very helpful

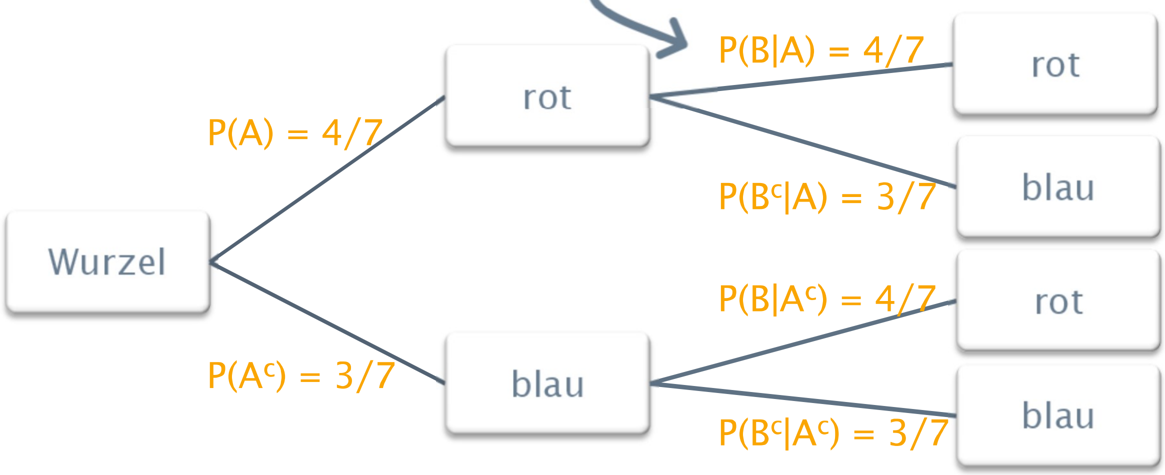
Unabhängige & abhängige Ereignisse, bedingte Wahrscheinlichkeit

Situation I: ziehen mit zürucklegen

Angenommen Sie haben einen kleinen Sack mit 4 roten und 3 blaue Marmorkugeln und ziehen (blind) zwei Kugeln nach einander daraus.

Dieses Zufallsexperiment wird mit einem Baumdiagramm dargestellt.

Unter der Bedingung, dass A eintritt, was ist die Wahrscheinlichkeit für B?



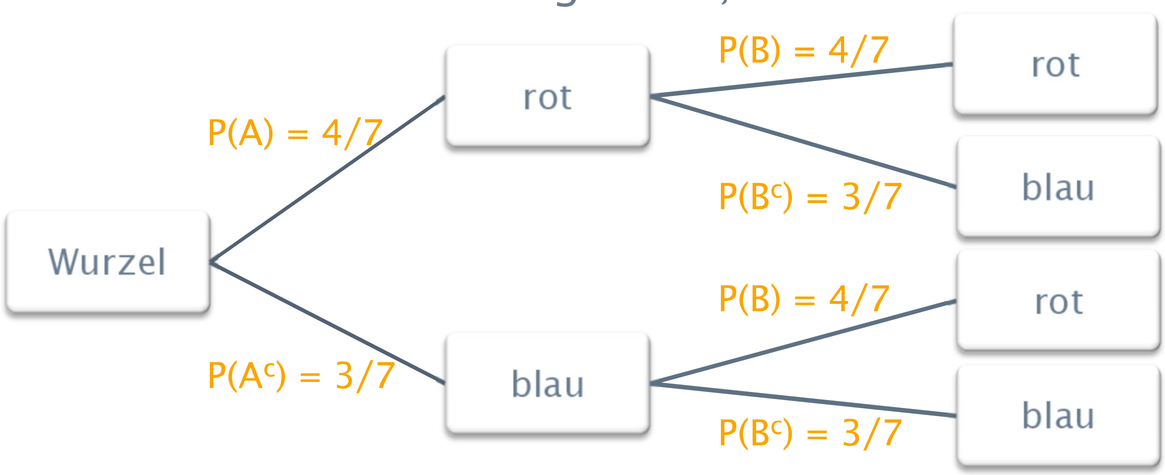
Unabhängige & abhängige Ereignisse, bedingte Wahrscheinlichkeit

Situation I: ziehen mit zürucklegen

Die beiden Ziehungen sind unabhängig von einander. Ob die zweite Kugel rot ist oder nicht, hängt nicht von der ersten Ziehung ab. Daher folgt automatisch, dass

$$P(B|A) = P(B)$$

Wir können die "Striche" weglassen, alles einfacher aufschreiben

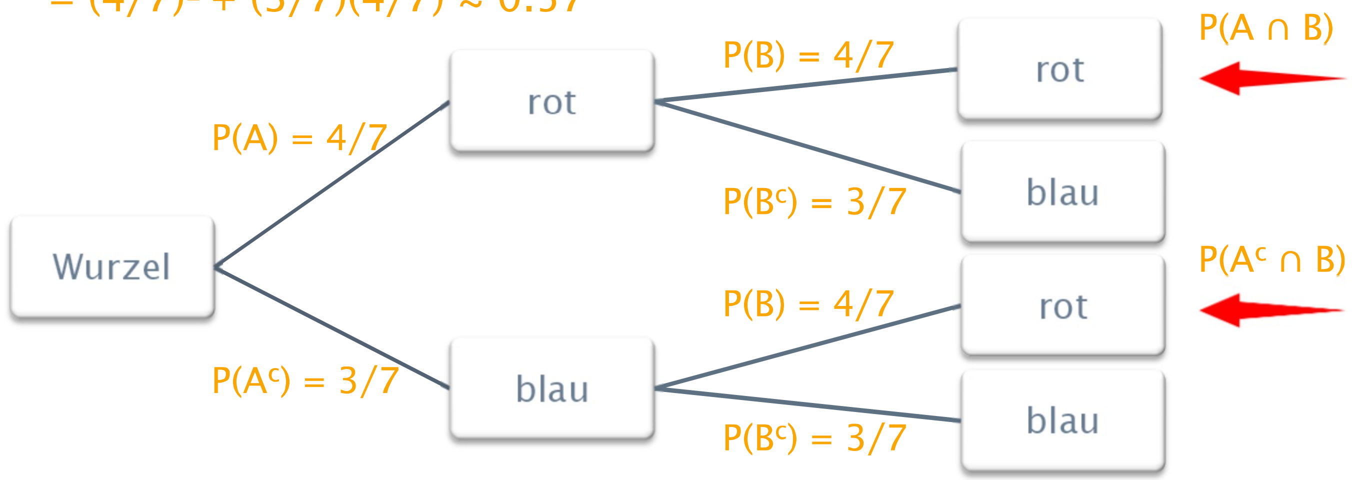


Unabhängige & abhängige Ereignisse, bedingte Wahrscheinlichkeit

Situation I: ziehen mit zürucklegen (züruck zu der Frage)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die **zweite gezogene Kugel rot** ist?

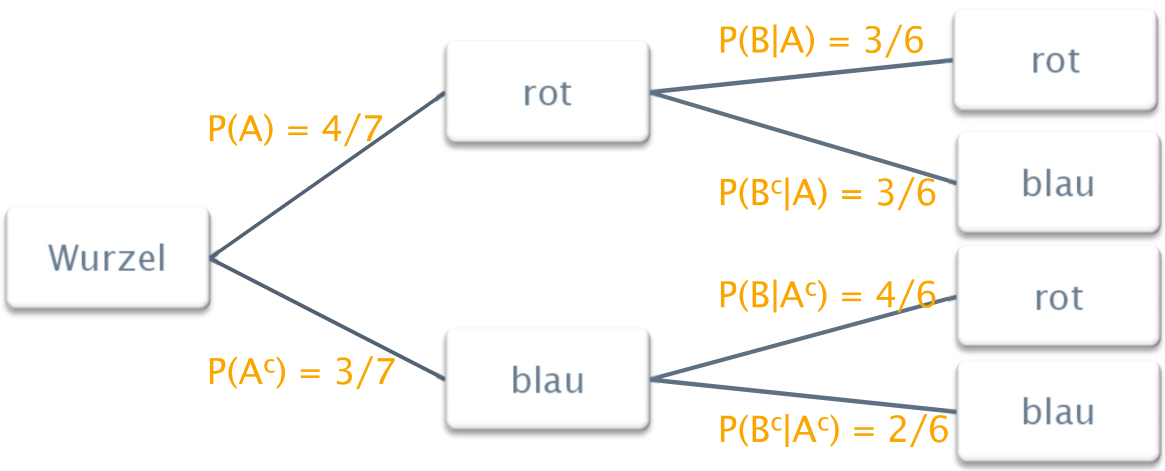
$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(A) \times P(B) + P(A^c) \times P(B)$$
$$= (4/7)^2 + (3/7)(4/7) \approx 0.57$$



Unabhängige & abhängige Ereignisse, bedingte Wahrscheinlichkeit

Situation II: ziehen ohne zürucklegen

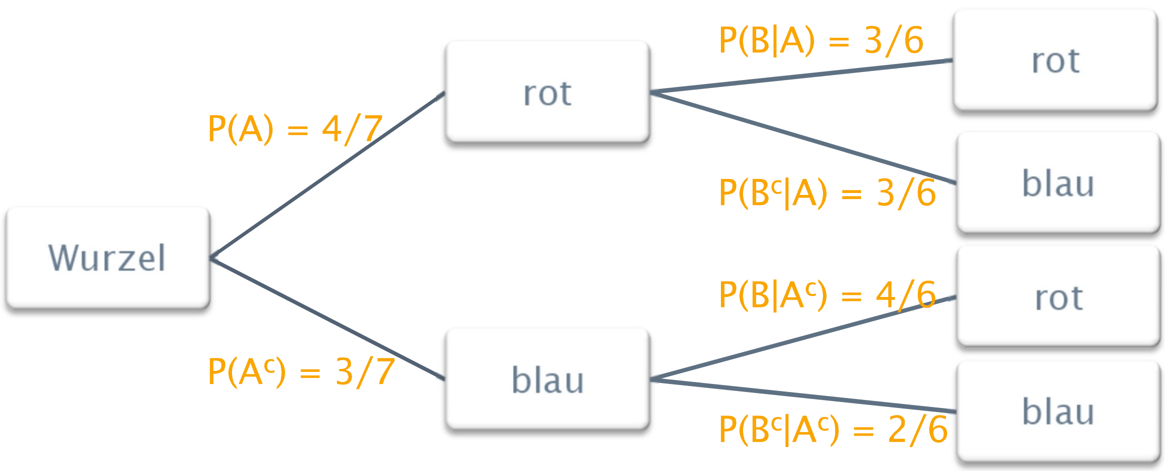
Angenommen Sie haben einen kleinen Sack mit 4 roten und 3 blaue Marmorkugeln und ziehen (blind) zwei Kugeln nach einander daraus.



Unabhängige & abhängige Ereignisse, bedingte Wahrscheinlichkeit

Situation II: ziehen ohne zürucklegen

Die beide Ziehungen sind abhängig von einander, also **P(B|A) ≠ P(B)**

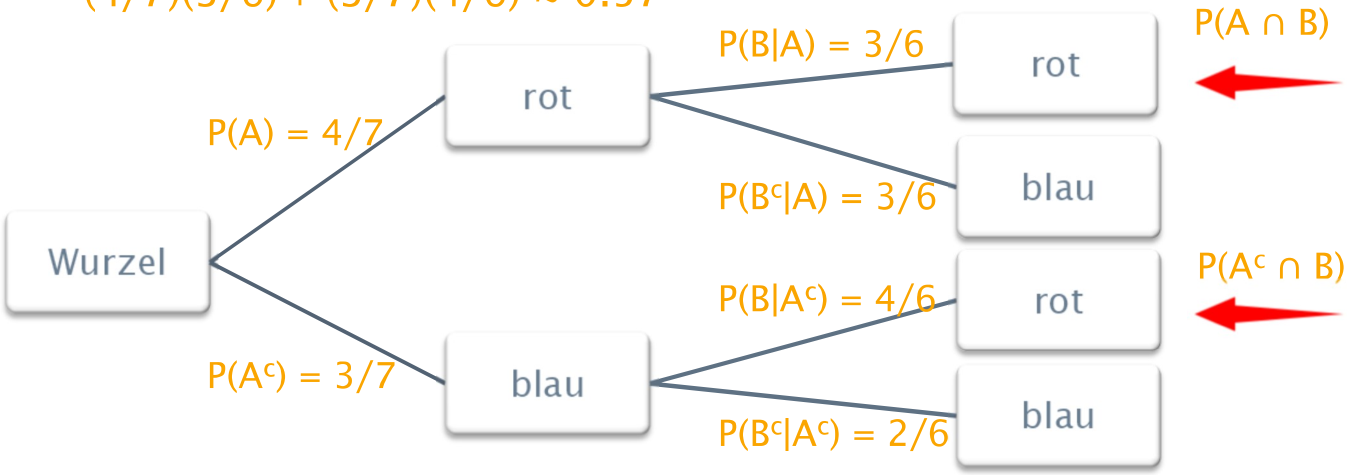


Unabhängige & abhängige Ereignisse, bedingte Wahrscheinlichkeit

Situation II: ziehen ohne zürucklegen (zürucklegen zu der Frage)

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die **zweite gezogene Kugel rot** ist?

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(A) \times P(B|A) + P(A^c) \times P(B|A^c)$$
$$= (4/7)(3/6) + (3/7)(4/6) \approx 0.57$$



Bayes theorem

Unabhängige & abhängige Ereignisse, bedingte Wahrscheinlichkeit

Wichtig für Sie !!!

Falls A und B unabhängige Ereignisse sind, dann gilt

- $P(B|A) = P(B)$
- $P(A|B) = P(A)$

Im Allgemeinen gilt aber für beliebige Ereignisse A und B, dass

- $P(B|A) = \frac{\mathbf{P(B \cap A)}}{\mathbf{P(A)}}$
- $P(A|B) = \frac{\mathbf{P(A \cap B)}}{\mathbf{P(B)}}$

Unabhängige & abhängige Ereignisse, bedingte Wahrscheinlichkeit

Wichtig für Sie !!!

Im Allgemeinen gilt $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$ und $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Aus dem Kommutativgesetz 3b) folgt sofort, dass $(A \cap B) = (B \cap A)$, und daher ist auch automatisch $P(B \cap A) = P(A \cap B)$.

Nach wenig umformen, erhalten wir eine sehr wichtige Formel.

Die Formel von Bayes: $P(A|B) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$

Lots of practice!

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Frage 1

Calvin hat 6 verschiedene Hemden und 3 verschiedene Hosen in seiner Garderobe. Er hat genau ein graues Hemd und genau ein Paar schwarze Hosen.

Falls er zufällig seine Kleider wählt, was ist die Wahrscheinlichkeit, dass er das graue Hemd und die schwarzen Hosen anzieht?

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Frage 2

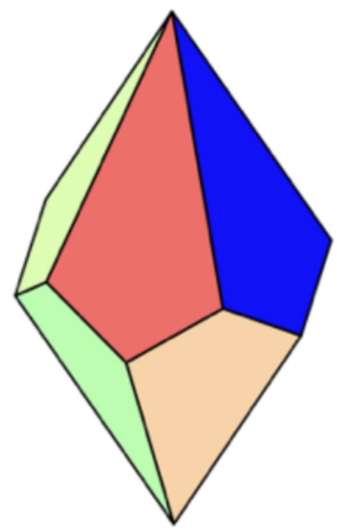
Sie werfen 3 faire Würfel separat. Die Würfel sind rot, grün und blau gefärbt.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die rote Würfel eine 1 zeigt, die blaue eine 2 zeigt und die grüne eine 3 zeigt?

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Frage 3

Ein Wurm steht auf dem obersten Knotenpunkt der angezeigten Figure (eine Pentagonale-Trapezoeder). Alle 10 Sekunden wählt der Wurm zufällig eine anliegende Kante und kriecht zum nächsten Knotenpunkt.



Was ist die Wahrscheinlichkeit,
dass der Wurm in 30 Sekunden den
untersten Knotenpunkt erreichen wird?

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Frage 4

Bei einem Pferderennen nehmen 12 Pferde teil. Alle Pferde haben die gleiche Wahrscheinlichkeit zu gewinnen. Maximilian und Maythehorsebewithu sind zwei dieser Pferde.

Wir betrachten die folgenden Ereignisse:

- A: das Ereignis, Maximilian gewinnt das Rennen
- B: das Ereignis, Maythehorsebewithu gewinnt

Sind diese Ereignisse unabhängig?

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Frage 5

Ein Paar hat 2 Kinder. Angenommen das erste Kind ist ein Mädchen.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Kind ebenfalls ein Mädchen ist?

Wir nehmen an, dass Mädchen und Jungen beide mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% geboren werden.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Frage 6

Ein Paar hat 2 Kinder. Wir wissen, dass eins von den Kindern ein Mädchen ist.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind?

Wir nehmen weiterhin an, dass Mädchen und Jungen beide mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% geboren werden.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Frage 7

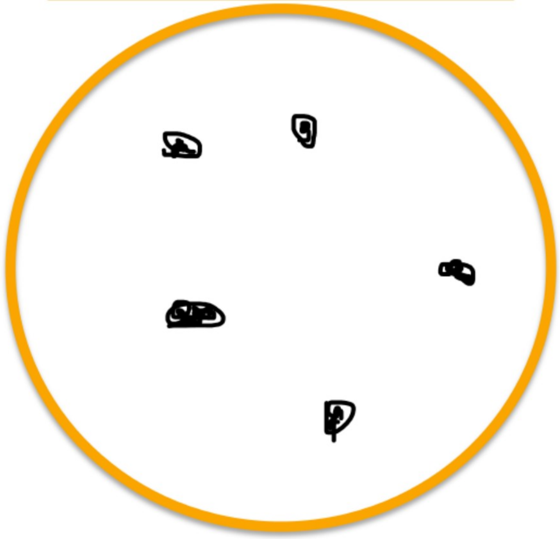
Monty Hall Problem

https://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem

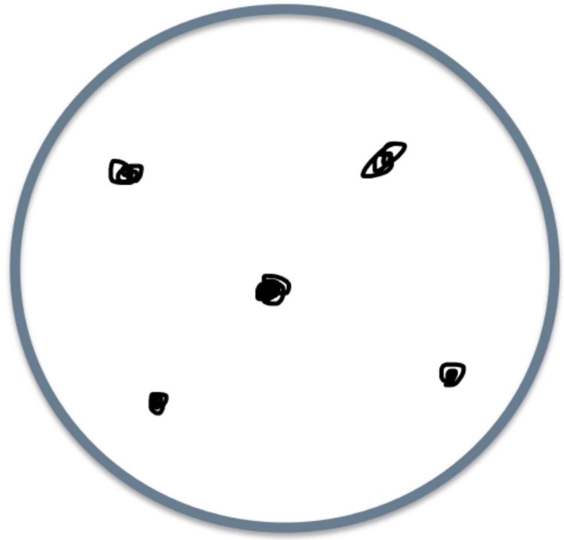
Classification - Spam or Ham?

Background Information

set of exercises
maths class



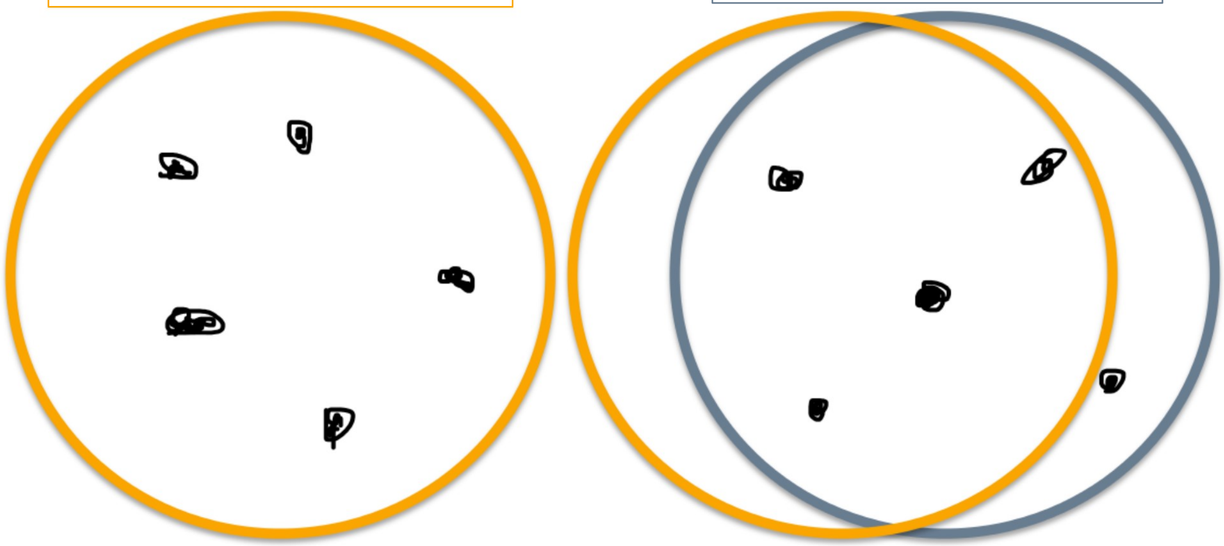
set of problems
real world



Background Information

set of exercises
maths class

set of problems
real world



Devise an algorithm to filter spam emails
conditional probability & Bayes theorem

Background Information

Inferential statistics

Frequentist approach

Bayesian approach

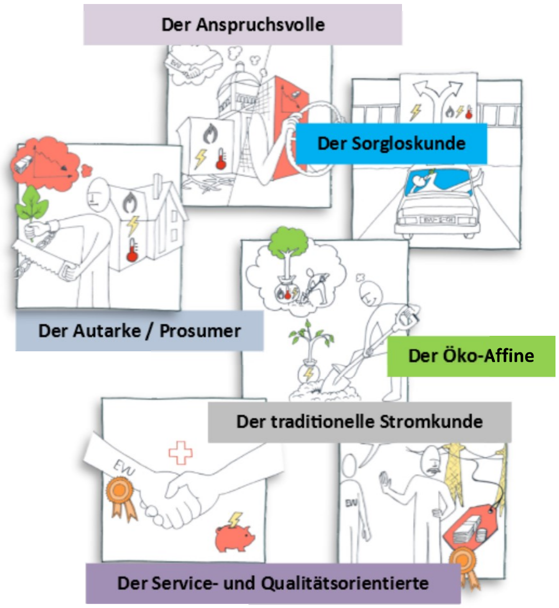
Clustering vs. Classifikation

Clustering

Ausgangslage:
Die Gruppenzuteilung ist **nicht** bekannt.
Die Anzahl der Gruppen ist **nicht bekannt**.

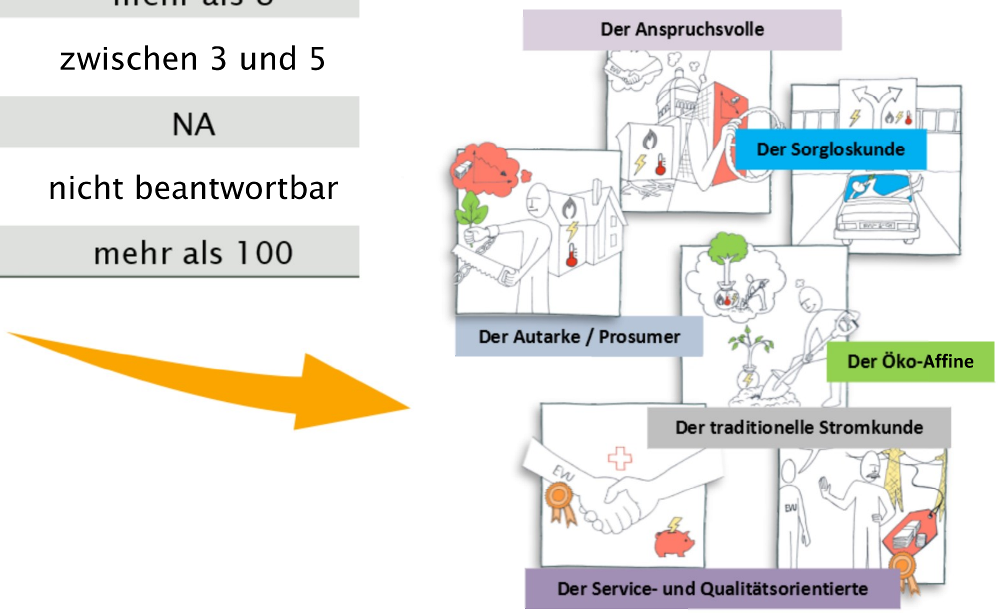
Classification

Ausgangslage:
Die Gruppenzuteilung ist **teilweise** bekannt.
Die Anzahl der Gruppen ist **bekannt.**



Clustering – anhand von Fragebodendaten

Frage 1	Frage 2	Frage 3
ja	10.5	weniger als 3
ja	30	mehr als 3
nein	20.2	mehr als 8
nein	1	zwischen 3 und 5
ja	2.5	NA
ja	9	nicht beantwortbar
manchmal	99.9	mehr als 100



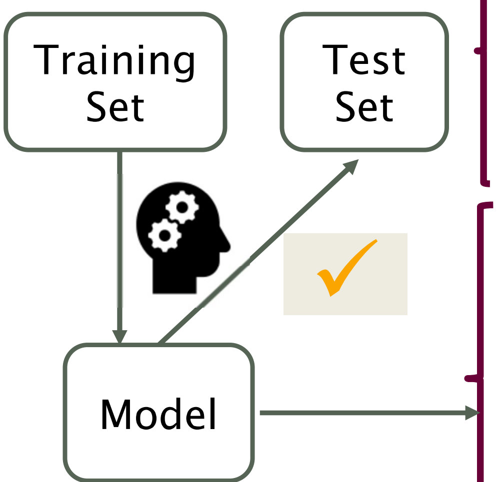
Classification – die nicht gefragten Kunden?

Befragten Kunden

?

Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4	Interesse an Eigenverbrauch
5.1	3.5	1.4	0.2	JA
4.9	3	1.4	0.2	NEIN
6.7	3	5.2	2.3	NEIN
5.1	2.5	3	1.1	JA
5.7	2.8	4.1	1.3	?
4.7	3.2	1.3	0.2	?
6.3	2.5	5	1.9	?
6.5	3	5.2	2	?
6.2	2.9	4.3	1.3	?

Classification – Gruppenzuteilung anhand von Merkmalen



Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Interesse an Eigenverbrauch
5.1	3.5	1.4	JA
4.9	3	1.4	NEIN
6.7	3	5.2	NEIN
5.1	2.5	3	JA
5.7	2.8	4.1	?
4.7	3.2	1.3	?
6.3	2.5	5	?
6.5	3	5.2	?
6.2	2.9	4.3	?

Thank you for your time and attention.