Aufgabe 1 Der Müesli-Produzent hat die Vermutung, seine Maschine sei falsch kalibriert und packe zu viel Müesli in die Säcke, was seine Marge drückt. Um seiner Vermutung nachzugehen, wiegt er den Inhalt von 50 zufällig ausgewählten Müeslipackungen. Die Stichprobe finden Sie auf Moodle im File `Müesli example (a new sample)`.

(a) Führen Sie einen geeigneten einseitigen z-Test von Hand mit Hilfe der Normalverteilungstabelle durch. Schreiben Sie das Testergebnis inkl. alle Schritte auf.

(b) Führen Sie einen geeigneten einseitigen t-Test mit Python durch. Schreiben Sie das Testergebnis inkl. alle Schritte auf.

Lösungen:

(a) 1) **Modell** für Daten: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind i.i.d. mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 (beide unbekannt). Da $n = 50$ können wir den uns auf den zentralen Grenzwertsatzes beziehen, d.h. $\overline{X}$ ist approximativ normalverteilt. Zudem sind der Stichproben-Mittelwert und die Stichproben-Varianz güte Schäter für den wahren Mittelwert μ und die wahre Varianz σ^2.

2) Die Nullhypothese lautet: $H_0 : \mu \leq 500$.
Die Alternativhypothese lautet: $H_1 : \mu > 500$.

3) Die **Teststatistik** berechnen wir im allgemeinen folgendermassen

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \; .$$

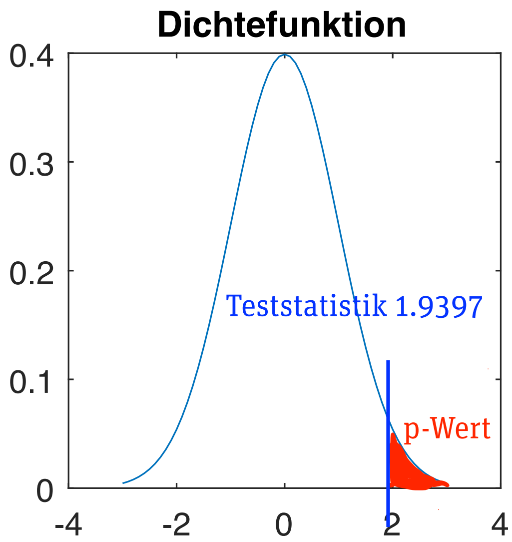
Unter der Nullhypothese ist Z näherungsweise standardnormalverteilt. Für unsere Stichprobe erhalten wir

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{50}} = \frac{501.52 - 500}{5.54109/\sqrt{50}} = 1.9397 \, .$$

4) Der p-**Wert** bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, *unter der Nullhypothese* einen Wert der Teststatistik zu erhalten, der *mindestens so extrem* ist, wie der tatsächlich gemessene. Was „mindestens so extrem“ heisst, hängt von der Alternativhypothese ab. Da wir einseitig testen (upper tail), ist der p-Wert gegeben durch die Wahrscheinlichkeit

$$P(Z \geq 1.9397) = 1 - P(Z < 1.9397) \approx 1 - 0.9738 \approx 0.0262$$

Es hilft wenn man für sich eine kleine Zeichnung macht. So sehe ich wenigstens am Besten, ob ich die richtige Fläche berechnet habe!



5) Das **Signifikanzniveau** α beträgt 5%.

6) Um das zugehörige einseitige 95%-**Konfidenzintervalle** zu berechnen, müssen wir das 95% Quantil bestimmen (asymetrisch in diesem Fall), d.h. wir suchen $z_{0.95}$ so, dass $P(Z \leq z_{0.95}) = 0.95$. Wir erhalten $z_{0.95} = 1.645$.

   Wenn wir das für x ausrechnen, erhalten wir

$$x_{lower\_limit} = \frac{-z_{0.95} \cdot s}{\sqrt{50}} + \overline{x} = \frac{-1.645 \cdot 5.54109}{\sqrt{50}} + 501.52 \approx 500.23$$

   Das 95%-**Konfidenzintervalle** beträgt somit ca. $[500.23\,,\,\infty)$.

7) **Testentscheid**: Der berechnete p-Wert liegt *unter* dem Signifikanzniveau von 5%, also *verwerfen* wir die Nullhypothese. Die Müesli Maschine ist mit einer Sicherheit von 95% nicht richtig kalibriert worden. Auch sehen wir das, wenn wir den Konfidenzinterval betrachten. Unser Mittelwert von 501.52 liegt im 95%-Konfidenzintervalle von $[500.23\,,\,\infty]$, aber der Wert von 500 g liegt nicht drin. Also hat die Alternativhypothese durchaus seine Richtigkeit. Wenn wir die Messung 100 Mal wiederholen, werden wir 95 Mal einen Mittelwert erhalten, der im Interval $[500.23\,,\,\infty)$ liegt.

(b) siehe Jupyter Notebook auf Moodle für die Lösung

Aufgabe 2 Ein Investitionsschema verspricht variable monatliche Renditen. Ein Investor wird nur dann darin investieren, wenn ihm ein durchschnittliches Monatseinkommen von 180 CHF zugesichert wird. Er hat eine Stichprobe von 300 Monatsrenditen gemessen, die einen Mittelwert von 190 CHF und eine Standardabweichung von 75 CHF aufweist. Sollte er oder sie in dieses System investieren?

(a) Führen Sie einen z-Test von Hand mit Hilfe der Normalverteilungstabelle durch. Schreiben Sie das Testergebnis inkl. alle Schritte auf.

(b) Führen Sie einen t-Test mit Python durch. Schreiben Sie das Testergebnis inkl. alle Schritte auf.

Lösungen:

(a) 1) **Modell** für Daten: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind i.i.d. mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 (beide unbekannt).

Achtung: In diesem Fall muss man kontrollieren, ob die Messungen tatsächlich unabhängig von einander sind. Z.B. wenn 300 nacheinander folgende Monate gemessen würden, muss das ja nicht sein. Wir könnten uns in einer guten (oder schlechten) Wirtschaftslage befinden. Somit wären die Messungen nicht unabhängig voneinander. Das ist ein wichtiges Problem, ansonsten wird dem Kunden oder Kundin etwas falsches versprochen!

Da $n = 300$ können wir den uns auf den zentralen Grenzwertsatzes beziehen, d.h. $\overline{X}$ ist approximativ normalverteilt. Zudem sind der Stichproben-Mittelwert und die Stichproben-Varianz güte Schäter für den wahren Mittelwert μ und die wahre Varianz σ^2.

2) Die Nullhypothese lautet: $H_0 : \mu \leq 180$.
Die Alternativhypothese lautet: $H_1 : \mu > 180$.

3) Die **Teststatistik** berechnen wir im allgemeinen folgendermassen

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \; .$$

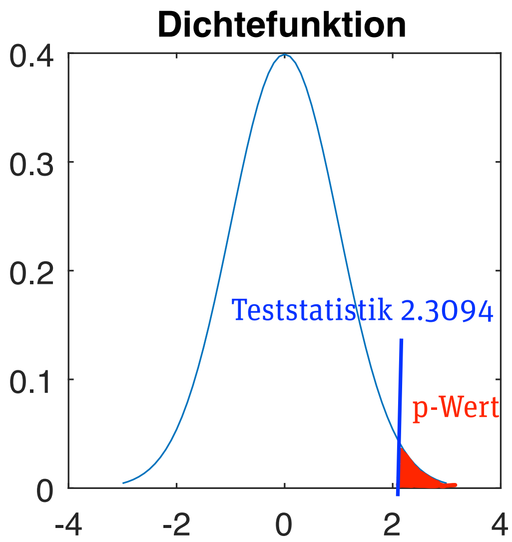
Unter der Nullhypothese ist Z näherungsweise standardnormalverteilt. Für unsere Stichprobe erhalten wir

$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{300}} = \frac{190 - 180}{75/\sqrt{300}} \approx 2.3094 \, .$$

4) Der p-**Wert** bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, *unter der Nullhypothese* einen Wert der Teststatistik zu erhalten, der *mindestens so extrem* ist, wie der tatsächlich gemessene. Was „mindestens so extrem“ heisst, hängt von der Alternativhypothese ab. Da wir einseitig testen (upper tail), ist der p-Wert gegeben durch die Wahrscheinlichkeit

$$P(Z \geq 2.3094) = 1 - P(Z < 2.3094) \approx 1 - 0.9896 \approx 0.01$$

Es hilft wenn man für sich eine kleine Zeichnung macht. So sehe ich wenigstens am Besten, ob ich die richtige Fläche berechnet habe!



5) Das **Signifikanzniveau** α beträgt 5%.

6) Um das zugehörige einseitige 95%-**Konfidenzintervalle** zu berechnen, müssen wir das 95% Quantil bestimmen (asymetrisch in diesem Fall), d.h. wir suchen $z_{0.95}$ so, dass $P(Z \leq z_{0.95}) = 0.95$. Wir erhalten $z_{0.95} = 1.645$.

   Wenn wir das für x ausrechnen, erhalten wir

$$x_{lower\_limit} = \frac{-z_{0.95} \cdot s}{\sqrt{300}} + \overline{x} = \frac{-1.645 \cdot 75}{\sqrt{300}} + 190 \approx 182.88$$

   Das 95%-**Konfidenzintervalle** beträgt somit ca. $[182.88\,,\,\infty)$.

7) **Testentscheid**: Der berechnete p-Wert liegt *unter* dem Signifikanzniveau von 5%, also *verwerfen* wir die Nullhypothese. Mit einer Sicherheit von 95% kann dem Kunden oder der Kundin eine durchschnittliche Monatasrendite von mindestens 180 CHF zugesichert werden. Das gilt aber nur, wenn die Messwerte i.i.d sind - eine Bedingung, die wir nicht überprüft haben!
   Das gleiche Ergebnis erhalten wir, wenn wir den Konfidenzintervall betrachten. Der Mittelwert von 190 liegt im 95%-Konfidenzintervall $[182.88\,,\,\infty)$. Aber 180 liegt nicht drin. Also können wir die Nullhypothese verwerwerfen.

(b) siehe Jupyter Notebook auf Moodle für die Lösungen

Aufgabe 3 Wir vermuten, dass die mittlere Grösse von Erwachsenen in der Schweiz kleiner gleich 170 cm ist. Nun möchten wir diese Annahme überprüfen und messen dafür Ihre Grösse (d.h. die Grösse der Statistik-Studierenden vom FS 2020, siehe File `Stats_Height_Weight.xlsx` auf Moodle für die Messwerte).

(a) Die Stichprobengrösse beträgt nur $n = 23\,(< 30)$ und wir somit dürften hier eigentlich keinen z-Test ausführen. Warum ist das so? Führen Sie dennoch einen geeigneten z-Test von Hand mit Hilfe der Normalverteilungstabelle durch, damit Sie das üben können.

(b) Führen Sie einen geeigneten t-Test mit Python durch.

(c) Kontrollieren Sie mit Python, ob die nötigen Voraussetzungen für den t-Test erfüllt werden.

Lösungen:

(a) 1) **Modell** für Daten: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind i.i.d. mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 (beide unbekannt).

Achtung: In diesem Fall muss man kontrollieren, ob die Messungen normalverteilt sind. Wir können uns eigentlich nicht auf den zentralen Grenzwertsatz beziehen, da $n = 23$ kleiner als 30 ist. Wir führen dennoch einen z-Test aus, aber nur für Übungszwecken! Also, normalerweise nicht machen!

2) Die Nullhypothese lautet: $H_0 : \mu \geq 170$.
Die Alternativhypothese lautet: $H_1 : \mu < 170$.

3) Die **Teststatistik** berechnen wir im allgemeinen folgendermassen

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \, .$$

Unter der Nullhypothese ist Z näherungsweise standardnormalverteilt, was hier nicht gelten muss, da es zu wenig Messwerte gibt! Für unsere Stichprobe erhalten wir

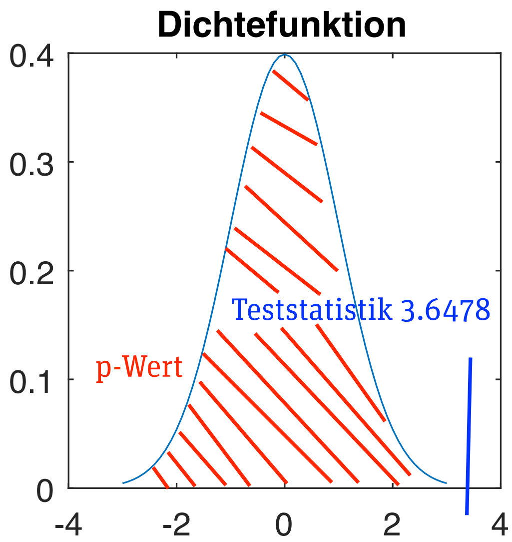
$$z = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{23}} \approx \frac{177.39130 - 170}{9.71755/\sqrt{23}} \approx 3.6478 \, .$$

4) Der p-**Wert** bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, *unter der Nullhypothese* einen Wert der Teststatistik zu erhalten, der *mindestens so extrem* ist, wie der tatsächlich gemessene. Was „mindestens so extrem" heisst, hängt von der Alternativhypothese ab. Da wir einseitig testen (lower tail), ist der p-Wert gegeben durch die Wahrscheinlichkeit

$$P(Z \leq 3.6478) \approx 0.9989$$

Wir beziehen uns auf die Symmetrie der Standardnormalverteilung, damit wir die Wahrscheinlichkeit für negative Teststatistiken mit der Tabelle berechnen können.

Es hilft wenn man für sich eine kleine Zeichnung macht. So sehe ich wenigstens am Besten, ob ich die richtige Fläche berechnet habe! In diesem Fall ist es tatsächlich fast die gesamte rot gekennzeichnete Fläche.



5) Das **Signifikanzniveau** α beträgt 5%.

6) Um das zugehörige einseitige 95%-**Konfidenzintervalle** zu berechnen, müssen wir das 95% Quantil bestimmen (asymetrisch in diesem Fall). In diesem Fall suchen wir aber $z_{1-0.95}$, d.h. $P(Z \geq z_{0.05}) = 0.95$, und es gilt

$$\begin{aligned} P(Z \geq z_{0.05}) &= 1 - P(Z \leq z_{0.05}) = 0.95 \\ P(Z \geq z_{0.05}) &= 1 - P(Z \leq z_{0.05}) = 0.95 \\ P(Z \leq z_{0.05}) &= 1 - 0.95 = 0.05 \end{aligned}$$

Wir erhalten $z_{0.05} = -1.645$ indem wir die Tabelle benützen und nochmals die Symmetrie der Standardnormalverteilung benützen

$$\begin{aligned} P(Z \leq z_{0.05}) &= 1 - P(Z \leq z_{0.95}) \\ z_{0.95} &\approx 1.645 \\ z_{0.05} &\approx -1.645 \end{aligned}$$

Für die Zufallsvariable X, erhalten wir

$$x_{upper\_limit} = \frac{z_{0.95} \cdot s}{\sqrt{23}} + \overline{x} = \frac{1.645 \cdot 9.71755}{\sqrt{23}} + 177.3913 \approx 180.72$$

Das 95%-**Konfidenzintervalle** beträgt somit ca. $(-\infty\,, 180.72]$.

7) **Testentscheid**: Der berechnete p-Wert liegt *nicht unter* dem Signifikanzniveau von 5%, also können wir die Nullhypothese *nicht verwerfen*. Wir können eben keine Aussage machen. Auch sehen wir, dass der Wert von ca. 177 cm durchaus im 95%-Konfidenzintervall liegt, also wieder ist keine Aussage möglich.

Wenn wir einen Mittelwert von kleiner gleich 174.058 **cm gemessen hätten, hätten wir die Nullhypothese verwerfen können. Denn der Verwerfungsbereich für unsere Alternativhypothese beträgt**

$(-\infty\,, 174.058]$**. Die obere Grenze kann folgendermassen bestimmt werden**

$$
\begin{aligned}
\text{Verwerfungsbereich}_{upper\_limit} &= \frac{P(Z \leq z_{0.05}) \cdot s}{\sqrt{23}} + \overline{x} \\
&= \frac{(-1.645) \cdot 9.71755}{\sqrt{23}} + 177.3913 \approx 174.058
\end{aligned}
$$

(b) siehe Jupyter Notebook auf Moodle für die Lösungen

(c) siehe Jupyter Notebook auf Moodle für die Lösungen