**Aufgabe 1** Eine Befragung von 100 Studentinnen und Studenten hat das folgende Resultat ergeben: 32 studieren Mathematik, 20 Physik, 45 Biologie, 15 Mathematik und Biologie, 7 Mathematik und Physik, 10 Physik und Biologie, 30 keine dieser Fächer.

**(a)** Wieviele Studentinnen und Studenten studieren alle drei Fächer?

**(b)** Füllen Sie in alle 7 Teilgebiete der obigen Figur die korrekten Zahlen ein (d.h die Anzahl Elemente pro Partition soll in der jeweiligen Partition aufgeschrieben werden).

**(c)** Wie hoch schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person aus die Menge aller Studierenden genau ein Fach gewählt hat?

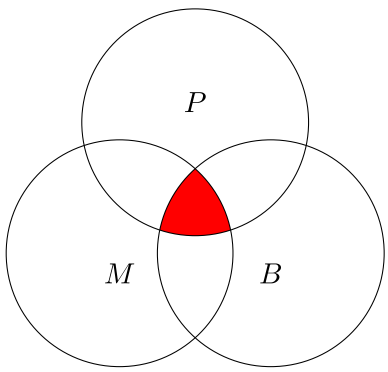
**Lösung**

Wir definieren die folgenden Mengen

$$
\begin{aligned}
M &: \text{ Menge der Mathmatik Studentinnen und Studenten} \\
P &: \text{ Menge der Physik Studentinnen und Studenten} \\
B &: \text{ Menge der Biologie Studentinnen und Studenten}
\end{aligned}
$$

Die Universalmenge $U$ ist die Gesamtanzahl Studentinnen und Studenten $U = 100$. Zudem wissen wir, dass $(|M \cup P \cup B|)^c = 30$

**(a)** Wir suchen die Anzahl Elemente der Menge $|M \cap P \cap B|$, die im folgenden Venn Diagramm rot dargestellt wird.



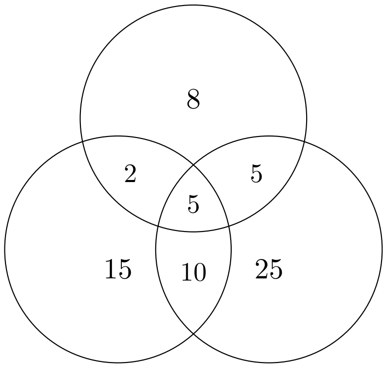

Wir verwenden die Ein-Ausschluss-Formel:

$$|M \cup P \cup B| = |M| + |P| + |B| - |M \cap P| - |M \cap B| - |P \cap I| + |M \cap P \cap B|$$

Nach Einsetzung der bekannten Werte ergibt sich:

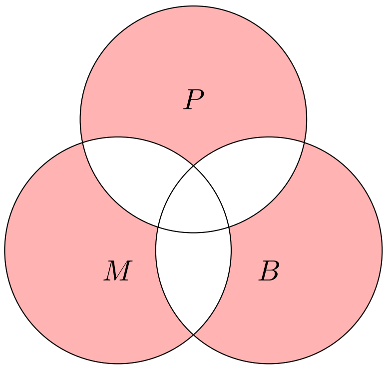
$$100 - 30 = 32 + 20 + 45 - 7 - 15 - 10 + |M \cap P \cap B| \Longrightarrow |M \cap P \cap B| = 5$$

**(b)** Im folgenden Venn Diagramm sind die Anzahl Elemente jeder Partition dargestellt.




Als Kontrolle habe ich die Anzahl Elemente aller Partitionen zusammengezählt und erhalte in der Tat 70.

**(c)** Die Anzahl Elemente der rosarot gekennzeichneten Menge in der Graphik unten, entspricht die Anzahl Studierende, die genau ein Fach gewählt haben.




Es gibt zwei Varianten wie man hier vorgehen kann.

**Variante 1**

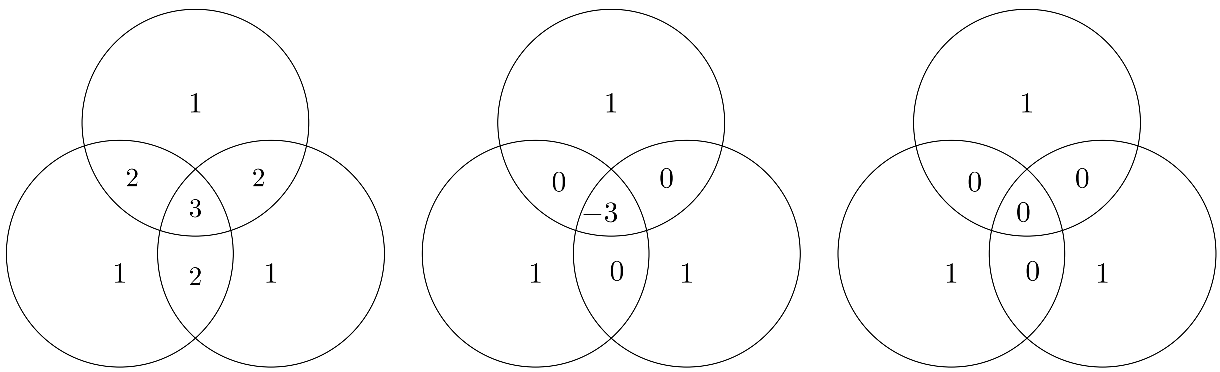
Wir wissen ja wie viele Elemente jede Partition hat, also wir müssen nur noch die nötigen Zahlen zusammenzählen. Insgesamt $25 + 8 + 15 = 48$ Studierende haben genau ein Fach gewählt. Da unsere Stichprobe aus insgesamt 100 Studierenden besteht, beträgt die Schätzung für die gefragte Wahrscheinlichkeit 0.48. Also unser Schätzung nach, wählen ca. 48% der Studierende nur ein Fach. Es kann sein, dass unsere Schätzung komplett falsch ist - ist halt nur eine Schätzung!

**Variante 2**

Die Anzahl Elemente der rosarot markierten Menge können wir aber auch so ausrechnen:

$$|M| + |P| + |B| - 2 \cdot |M \cap B| - 2 \cdot |M \cap P| - 2 \cdot |P \cap B| + 3 \cdot |M \cap P \cap B| = \\ 32 + 20 + 45 - 2 \cdot 15 - 2 \cdot 7 - 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 = 48$$

Und wir erhalten wie erhofft, das gleiche Ergebnis. Die folgende Darstellung kann helfen, die verwendete Formel zu verstehen. Die Zahlen in der folgenden Darstellung bezeichnen wie viele Mal eine bestimmte Partition mitgezählt wird, wenn man die entsprechenden Elemente zusammenzählt.




$|M|+|P|+|B|$ $\qquad -2\cdot|M\cap B|-2\cdot|M\cap P|-2\cdot|P\cap B|$ $\qquad +3\cdot|M\cap P\cap B|$

**Aufgabe 2** Benützen Sie die Einschluss-Ausschluss-Formel um die Anzahl der natürlichen Zahlen $n$ mit $1 \leq n \leq 6'300$ zu bestimmen, die ***weder durch 3, noch durch 5, noch durch 7 teilbar sind***.

**Lösung**

Wir definieren die folgenden Mengen

$$\begin{array}{rcl} U & : & \text{Menge der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 6300} \\ A_3 & : & \text{Menge der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 6300, die durch 3 teilbar sind} \\ A_5 & : & \text{Menge der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 6300, die durch 5 teilbar sind} \\ A_7 & : & \text{Menge der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 6300, die durch 7 teilbar sind} \end{array}$$

Gesucht ist also $|U| - |A_3 \cup A_5 \cup A_7| = 6300 - |A_3 \cup A_5 \cup A_7|$. Nach der Einschluss-Ausschluss-Formel gilt:

$$\begin{aligned} |A_3 \cup A_5 \cup A_7| &= |A_3| + |A_5| + |A_7| - |A_3 \cap A_5| - |A_3 \cap A_7| - |A_5 \cap A_7| \\ &\quad + |A_3 \cap A_5 \cap A_7| \\ &= 2100 + 1260 + 900 - 420 - 300 - 180 + 60 = 3420. \end{aligned}$$

Also ist die gesuchte Anzahl gleich $6300 - 3420 = 2880$.

**Aufgabe 3** Der ELISA-Test auf HIV-Infektion liefert bei 99.5% aller Infizierten ein positives Ergebnis und bei 99.5% aller nicht Infizierten ein negatives Ergebnis. In der Schweiz beträgt die Prävalenz der HIV-Infektion

- ca. 0.01% unter Mitgliedern der so genannten "low-risk" Population und
- ca. 15% unter Mitgliedern der "high-risk" Population (wie z.B. intravenöse Drogenbenutzer und -benutzerinnen).

**(a)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine positiv getestete Person aus der

i) low-risk Gruppe infiziert?

ii) high-risk Gruppe infiziert?

**(b)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine negativ getestete Person aus der

i) low-risk Gruppe nicht infiziert?

ii) high-risk Gruppe nicht infiziert?

**(c)** Wie hoch ist der positiv prädiktive Wert eines zweiten, **unabhängigen** ELISA-Tests für „low-risk“ Probanden, bei denen der erste Test positiv ausgefallen war? Das Ergebnis des zweiten Tests ist niemals unabhängig vom Ergebnis des ersten Tests, aber hier treffen wir diese naive Annahme, um die Berechnung einfacher zu machen!

**Lösung:**

**(a)** Gefragt ist der positiv prädiktive Wert für die jeweilige Gruppe, d.h wir müssen pro Gruppe berechnen

$$PV^+ = \frac{\text{Sensitivität} \cdot \text{Prävalenz}}{\text{Sensitivität} \cdot \text{Prävalenz} + (1 - \text{Spezifität}) \cdot (1 - \text{Prävalenz})}$$

i) Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand aus der low-risk Gruppe infiziert ist, falls der Test positiv ausfällt, beträgt

$$PV^+ = \frac{0.995 \cdot 0.0001}{0.995 \cdot 0.0001 + (1 - 0.995) \cdot (1 - 0.0001)} \approx 0.02$$

ii) Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand aus der low-risk Gruppe infiziert ist, falls der Test positiv ausfällt, beträgt

$$PV^+ = \frac{0.995 \cdot 0.15}{0.995 \cdot 0.15 + (1 - 0.995) \cdot (1 - 0.15)} \approx 0.97$$

Und wir sehen wie wichtig es ist, den richtigen Wert für die Prävalenz der Krankheit zu verwenden! Es gibt eine wahnsinnige Diskrepanz in den Wahrscheinlichkeiten.

**(b)** Gefragt ist der negativ prädiktive Wert für die jeweilige Gruppe, d.h wir berechnen:

$$PV^- = \frac{\text{Spezifität} \cdot (1 - \text{Prävalenz})}{\text{Spezifität} \cdot (1 - \text{Prävalenz}) + (1 - \text{Sensitivität}) \cdot \text{Prävalenz}}$$

i) Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand aus der low-risk Gruppe nicht infiziert ist, falls der Test negativ ausfällt, beträgt

$$PV^- = \frac{0.995 \cdot (1 - 0.0001)}{0.995 \cdot (1 - 0.0001) + (1 - 0.995) \cdot (0.0001)} \approx 1$$

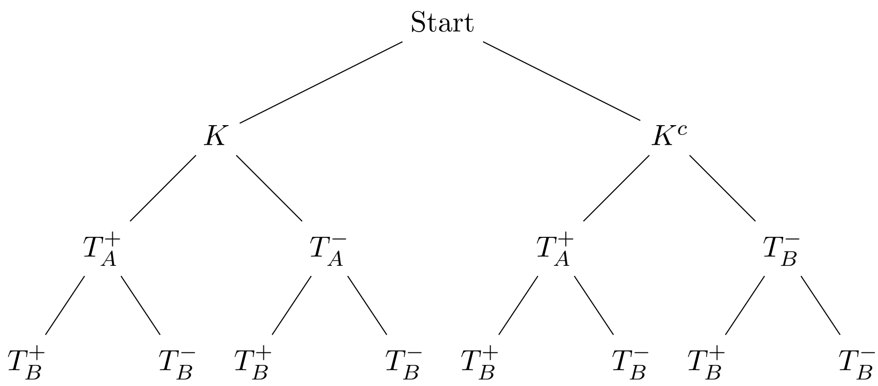
ii) Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand aus der high-risk Gruppe nicht infiziert ist, falls der Test negativ ausfällt, beträgt

$$PV^- = \frac{0.995 \cdot (1 - 0.15)}{0.995 \cdot (1 - 0.15) + (1 - 0.995) \cdot 0.15} \approx 0.999$$

Falls der Test negativ ausfällt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Person nicht infiziert ist fast 100% und zwar für beide Gruppen.

**(c)** Diese Aufgabe ist ein bischen kompliziert. Man muss sich hier einiges gut überlegen, z.B. die Tests werden nach einander geführt, also in Serie. Wir fangen mit einem Baumdiagram an und verwenden dafür die Bezeichnung

- $K$: Person ist Krank
- $K^c$: Person ist nicht Krank
- $T_A^+$ : Test A ist positiv
- $T_A^-$ : Test A ist negativ
- $T_B^+$ : Test B ist positiv
- $T_B^-$ : Test B ist negativ




Wir möchten gerne der gekoppelte $PV^+$ Wert berechnen. Dieser besteht aus der gekoppelten Sensitivität und der gekoppelten Spezifität beider Tests

$$PV^+_{\text{gekoppelt}} = \frac{\text{Sensitivität}_{\text{gekoppelt}} \cdot \text{Prävalenz}}{\text{Sensitivität}_{\text{gekoppelt}} \cdot \text{Prävalenz} + (1 - \text{Spezifität}_{\text{gekoppelt}}) \cdot (1 - \text{Prävalenz})}$$

Jetzt müssen wir nur noch verstehen, dass die gekoppelte Senstivität liest sich aus dem linkesten Ast des Baumdiagramms. Das ist der Fall wo beide Tests ein positives Ergebnis liefen, unter der Bedingung, dass die Person krank ist, also

$$\text{Sensitivität}_{\text{gekoppelt}} = P(T_A^+ \cap T_B^+|K) = P(T_A^+|K) \cdot P(T_B^+|K)$$

Wir erhalten das Produkt, weil wir annehmen, dass beide Tests unabhängig von einander sind.

Die gekopplte Spezifität hingegen ist der Fall wo eins von den Tests ein negatives Ergebnis lieft, unter der Bedingung, dass die Person nicht krank ist! Also ein „oder“ und kein „und“ - die Einschluss-Ausschluss-Formel für 2 Mengen kommt zum Züge.

$$\text{Spezifität}_{\text{gekoppelt}} = P(T_A^- \cup T_B^-|K^c) = P(T_A^-|K^c) + P(T_B^-|K^c) - P(T_A^-|K^c) \cdot P(T_B^-|K^c)$$

Wir erhalten die Werte:

$$\begin{aligned} \text{Spezifität}_{\text{gekoppelt}} &= 0.990025 \\ \text{Spezifität}_{\text{gekoppelt}} &= 0.999975 \\ PV^+_{\text{gekoppelt}} &\approx 0.798 \end{aligned}$$

Also trotz unser naiven Annahme erhöht sich der prädiktive Vorhersage Wert massiv, wenn beide Tests ein positives Ergebnis liefern. Der richtige $PV^+$ Wert wird höher liegen als diese 80%, wenn wir die Abhängigkeit richtig berücksichtigen.

**Aufgabe 4** Eine unfaire Münze mit $P(\text{Zahl}) = \frac{1}{3}$ und $P(\text{Kopf}) = \frac{2}{3}$ wird dreimal hintereinander geworfen. Die Zufallsvariable $X$ ist gleich der Anzahl Resultate *Kopf*.

**(a)** Bestimmen Sie den Stichprobenraum $\Omega$ und die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse (=Ereignisse, die nur ein einziges Element von $\Omega$ umfassen).

**(b)** Bestimmen Sie das Bild (=angenommene Werte) der Zufallsvariablen $X$.

**(c)** Berechnen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung und die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $X$ und stellen Sie beide graphisch dar.

**(d)** Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$ mit Hilfe der berechneten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

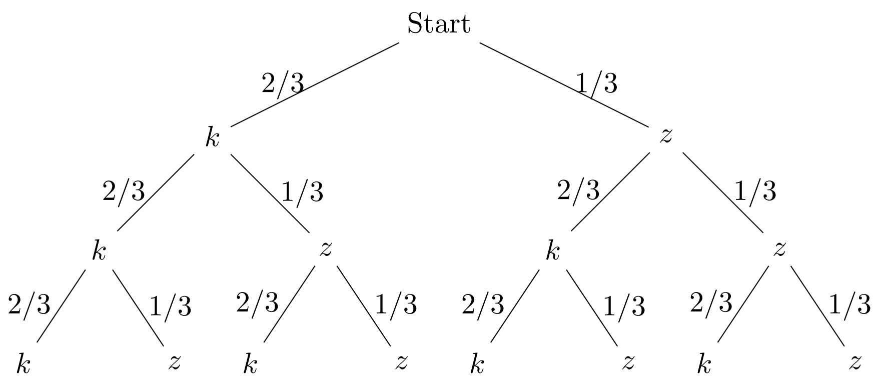
**(e)** Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$ in dem Sie benützen, dass die Würfe ***unabhängig*** von einander sind.

**(f)** Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten im dem Sie die kumulative Verteilungsfunktion benützen. Zeichnen Sie die Werte direkt in Ihre Graphik aus Teil (c) hinein.

$$\text{(i)}\ P(X \leq 1.5) \quad \text{(ii)}\ P(X > 1.5) \quad \text{(iii)}\ P(X \geq 1.5) \quad \text{(iv)}\ P(X = 1.5)$$

**Lösung:**

Wir verwenden die Bezeichnung $k$ für Kopf und $z$ für Zahl. Der Baumdiagram mit der ensprechenden Wahrscheinlichkeit pro Ast sieht folgendermassen aus.




**(a)** Der Stichprobenraum ist

$$\Omega = \{(k, k, k), (k, k, z), (k, z, k), (k, z, z), (z, k, k), (z, k, z), (z, z, k), (z, z, z)\}$$

und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse sind

$$\begin{aligned}
P(\{(k,k,k)\}) &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \\
P(\{(k,k,z)\}) = P(\{(k,z,k)\}) = P(\{(z,k,k)\}) &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{27} \\
P(\{(k,z,z)\}) = P(\{(z,k,z)\}) = P(\{(z,z,k)\}) &= \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{27} \\
P(\{(z,z,z)\}) &= \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}
\end{aligned}$$

**(b)** Die Zufallsvariable $X$ ist die Anzahl Kopf die geworfen wurden, d.h. sie nimmt die Werte $0, 1, 2, 3$ an.

**(c)** Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable $X$ kann folgendermassen berechnet werden:
$P(X = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$, $P(X = 1) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, $P(X = 2) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ und $P(X = 3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$.

Die kumulative Verteilungsfunktion $F(x) = P(X \leq x)$ ist zwar für alle reellen Zahlen $x$ definiert, aber für eine diskrete Zufallsvariable berechnen wir am einfachsten als erstes die Funktionswerte $F(x_i)$:

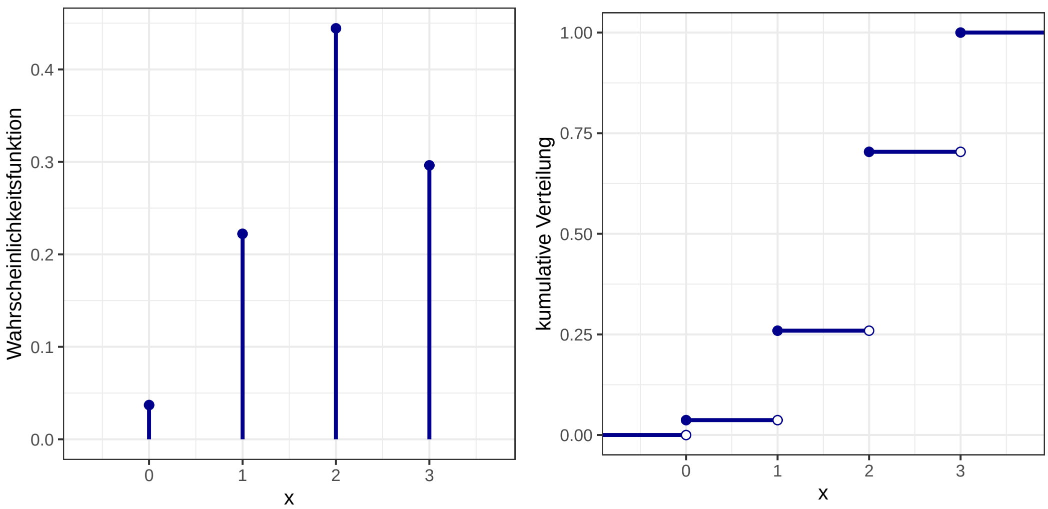
$$\begin{aligned}
F(x_1) = P(X \leq x_1) &= \frac{1}{27} \\
F(x_2) = P(X \leq x_2) &= \frac{1}{27} + \frac{2}{9} = \frac{7}{27} \\
F(x_3) = P(X \leq x_3) &= \frac{7}{27} + \frac{4}{9} = \frac{19}{27} \\
F(x_4) = P(X \leq x_4) &= \frac{19}{27} + \frac{8}{27} = 1
\end{aligned}$$

**Randnotiz**: es ist übersichtlicher, wenn die Ergebnisse in einer Tabelle dargestellt werden und auch einfacher zu rechnen

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| Werte von $X$, d.h. $X = x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{8}{27}$ |
| $F(x_i) = P(X \leq x_i)$ | $\frac{1}{27}$ | $\frac{7}{27}$ | $\frac{19}{27}$ | 1 |

Es ist **wichtig**, dass wir unser Erbegnis für die kumulative Verteilungsfunktion folgendermassen aufschreiben (denn diese Funktion ist für alle reelen Zahlen $x$ definiert):

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{1}{27} & \text{falls} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{27} & \text{falls} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{19}{27} & \text{falls} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{falls} \quad 3 \leq x \end{cases}$$




**(d)** Der Erwartungswert kann folgendermassen berechnet werden

$$\begin{aligned} \color{red}{E(X)} &= \sum_{i=1}^{4} p_i \cdot x_i \\ &= \frac{1}{27} \cdot 0 + \frac{6}{27} \cdot 1 + \frac{12}{27} \cdot 2 + \frac{8}{27} \cdot 3 = \color{red}{2} \end{aligned}$$

Es gibt zwei Varianten die Varianz zu berechnen.

**Variante 1 (meiner Meinung nach einfacher von Hand auszuführen):**

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - (\color{red}{E(X)})^2 = \sum_{i=1}^{4} p_i \cdot x_i^2 - \color{red}{2}^2 \\ &= \frac{1}{27} \cdot 0^2 + \frac{6}{27} \cdot 1^2 + \frac{12}{27} \cdot 2^2 + \frac{8}{27} \cdot 3^2 - 4 \\ &= \frac{6 + 48 + 72}{27} - 4 = \frac{126}{27} - 4 = 0.\overline{6} \end{aligned}$$

**Variante 2:**

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{i=1}^{4} p_i \cdot (x_i - \color{red}{E(X)})^2 = E((X - \color{red}{E(X)})^2 \\ &= \frac{1}{27} \cdot (0 - \color{red}{2})^2 + \frac{6}{27} \cdot (1 - \color{red}{2})^2 + \frac{12}{27} \cdot (2 - \color{red}{2})^2 + \frac{8}{27} \cdot (3 - \color{red}{2})^2 \\ &= \frac{4 + 6 + 8}{27} = \frac{14}{27} = 0.\overline{6} \end{aligned}$$

**(e)** Wir definieren die Zufallsvariablen

- $X_1$: gleich der Anzahl Resultate *Kopf* beim ersten Wurf
- $X_2$: gleich der Anzahl Resultate *Kopf* beim zweiten Wurf
- $X_3$: gleich der Anzahl Resultate *Kopf* beim dritten Wurf

Es gilt $E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{2}{3} \cdot 1$. Und die folgende Formel stimmt auch für den Fall, dass die Zufallsvariablen **abhängig** voneinander sind.

$$E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \cdot \frac{2}{3} = \color{red}{2}$$

Also wir erhalten das gleiche Ergebnis wie bei der Teilaufgabe **(a)**.

Es gilt $V(X_1) = V(X_2) = V(X_3) = \frac{1}{3} \cdot 0^2 + \frac{2}{3} \cdot 1^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$. Für die Varianz gilt die folgende Formel nur für den Fall, dass die Zufallsvariablen **unabhängig** voneinander sind (was in diesem Fall erfüllt ist)

$$V(X_1 + X_2 + X_3) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3) = 3 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9} = 0.\overline{6}$$

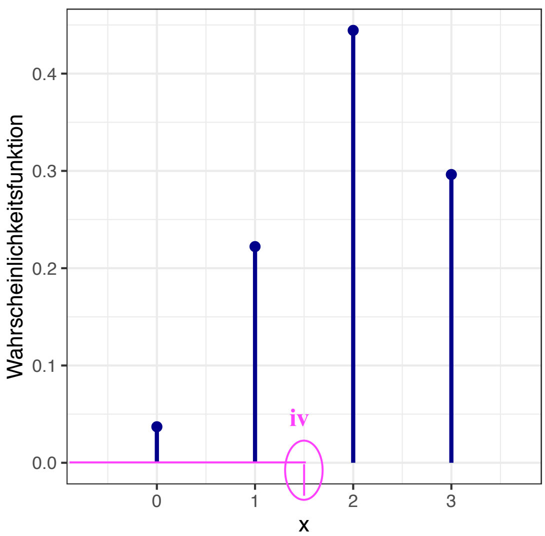
Und wir erhalten nochmals das gleiche Ergebnis wie bei der Teilaufgabe **(d)**.

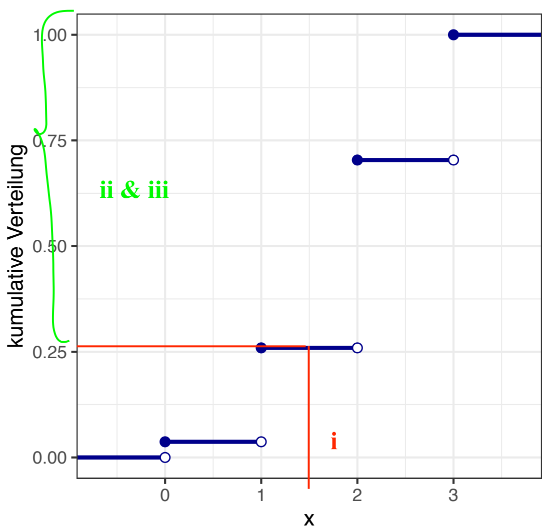
**(f)** Die kumulative Verteilungsfunktion haben wir bereits berechnet. Diese sieht folgendermassen aus:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{1}{27} & \text{falls} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{27} & \text{falls} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{19}{27} & \text{falls} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{falls} \quad 3 \leq x \end{cases}$$

Und wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{(i)}\ \ P(X \leq 1.5) &= \frac{7}{27} \approx 0.26 \\ \text{(ii)}\ \ P(X > 1.5) &= 1 - P(X \leq 1.5) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27} \approx 0.74 \\ \text{(iii)}\ \ P(X \geq 1.5) &= 1 - P(X < 1.5) \approx 0.74 \\ \text{(iv)}\ \ P(X = 1.5) &= 0 \end{aligned}$$



**Aufgabe 5** In einer Urne befinden sich 5 rote und 5 weisse Kugeln. Sie ziehen zufällig 3 Kugeln ***ohne Zurücklegen***. Sei $X$ die Anzahl der roten gezogenen Kugeln.

**(a)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X$.

**(b)** Berechnen Sie die zugehörige kumulative Verteilungsfunktion.

**(c)** Stellen Sie die beiden Verteilungen aus Teil (a) und (b) graphisch dar.

**(d)** Berechnen Sie $E(X)$ und $V(X)$ mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

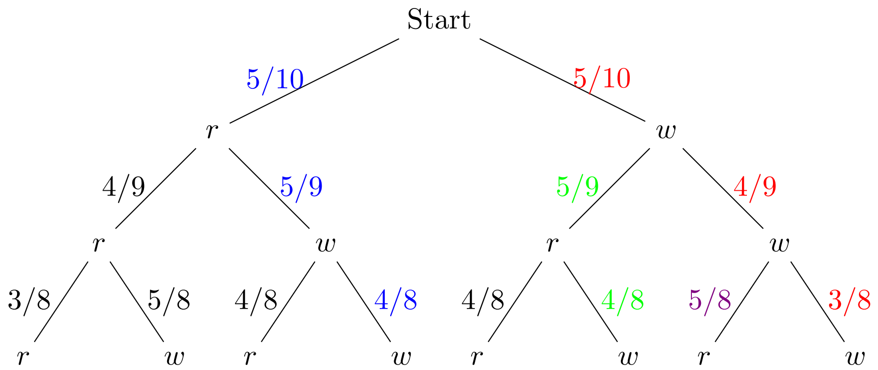
**(e)** Können Sie $E(X)$ und $V(X)$ auch berechnen, in dem Sie behaupten, dass die Ziehungen ***unabhängig*** von einander sind?

**(f)** Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten im dem Sie die kumulative Verteilungsfunktion benützen. Zeichnen Sie die Werte direkt in die Graphik aus Teil (c) hinein.

(i) $P(X \leq 2)$ (ii) $P(X > 2)$ (iii) $P(X \geq 2)$ (iv) $P(X = 2)$

**Lösung**

Der Baumdiagram mit der ensprechenden Wahrscheinlichkeit pro Ast für das Zufallsexperiment sieht folgendermassen aus ($w$ bezeichen weisse und $r$ rote Kugel):




**(a)** $X$ nimmt die Werte 0, 1, 2 und 3 an. Wir verwenden die Bezeichnungen:

- $A_i$ : die $i$-te gezogene Kugel ist rot ($i \in \{1, 2, 3\}$)
- $A_i^c$ : die $i$-te gezogene Kugel ist weiss ($i \in \{1, 2, 3\}$)

Wir berechnen die Verteilung von $X$ :

$$P(X = 0) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c | A_1^c) \cdot P(A_3^c | A_1^c \cap A_2^c) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}$$

$P(X = 1)$ : Die rote Kugel kann als erste, zweite oder dritte Kugel gezogen werden. Das sind 3 Fälle. Jeder dieser 3 Fälle berechnet sich mit einer analogen Multiplikationsformel wie vorhin. Da die 3 Fälle unvereinbar sind, können wir die Wahrscheinlichkeiten addieren:

$$P(X = 1) = \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{8} + \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} = \frac{5}{12}$$

Aus Symmetriegründen ist $P(X = 2) = P(X = 1)$ und $P(X = 3) = P(X = 0)$. Insgesamt finden wir:

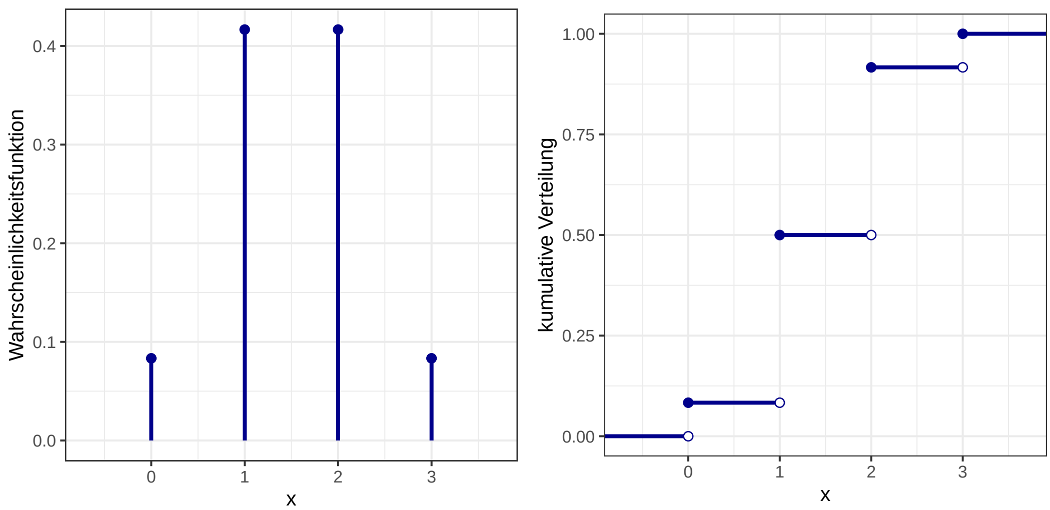
| $X = x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |

**(b)** Weil die Zufallsvariable $X$ diskrete Werte annimmt, berechnen wir für die kumulative Verteilungsfunktion in zwei Schritte. Als erstes berechnen wir:

| $X = x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{12}$ |
| $F(x_i) = P(X \leq x_i)$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{6}{12}$ | $\frac{11}{12}$ | $\frac{12}{12}$ |

Dann schreiben wir die reelwertige Funktion $F(x)$ folgendermassen auf:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{1}{12} & \text{falls} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{falls} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & \text{falls} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{falls} \quad 3 \leq x \end{cases}$$




**(c)**

**(d) Erwartungswert:**

$$E(X) = \frac{1}{12} \cdot 0 + \frac{5}{12} \cdot 1 + \frac{5}{12} \cdot 2 + \frac{1}{12} \cdot 3 = 1.5$$

**Varianz (Variante 1):**

$$V(X) = \frac{1}{12} \cdot 0^2 + \frac{5}{12} \cdot 1^2 + \frac{5}{12} \cdot 2^2 + \frac{1}{12} \cdot 3^2 - 1.5^2 \approx 0.583$$

**Varianz (Variante 2):**

$$V(X) = \frac{1}{12} \cdot (0 - 1.5)^2 + \frac{5}{12} \cdot (1 - 1.5)^2 + \frac{5}{12} \cdot (2 - 1.5)^2 + \frac{1}{12} \cdot (3 - 1.5)^2 \approx 0.583$$

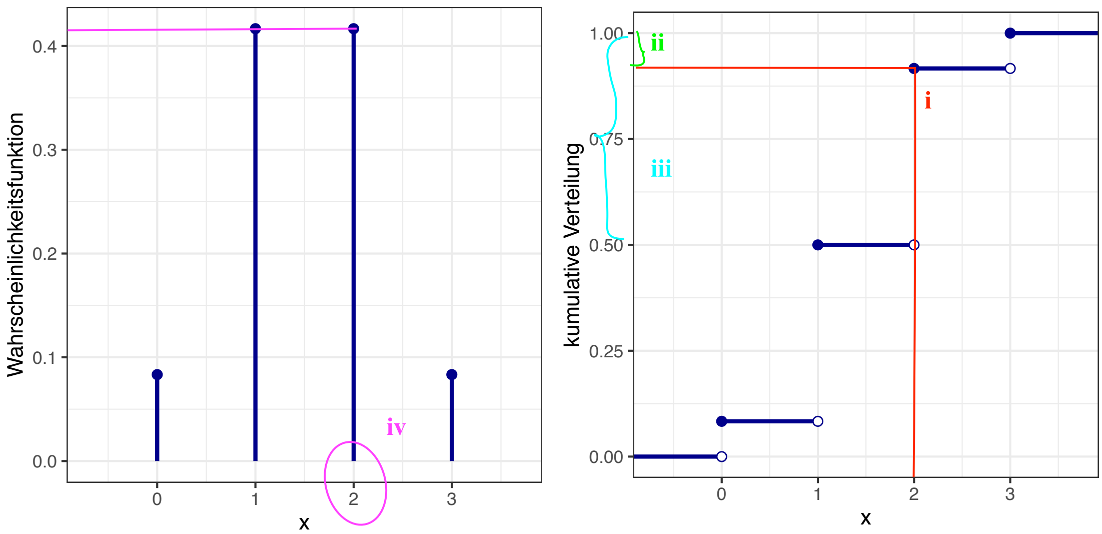
**(e)** Die Ziehungen sind nicht unabhängig von einander. Die Behauptung ist falsch. Wir können die Unabhängigkeit nicht benützen um die Varianz auszurechnen. Für den Erwartungswert spielt es keine Rolle, denn $E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_2) = 3XXXX$ egal ob die Zufallsvariablen abhängig oder unabhängig von einander sind.

**(f)** Die reelwertige Funktion $F(x)$ sieht folgendermassen auf:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 0 \\ \frac{1}{12} & \text{falls} \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{falls} \quad 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{12} & \text{falls} \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{falls} \quad 3 \leq x \end{cases}$$

Und wir erhalten

$$\begin{aligned} \text{(i)}\ P(X \leq 2) &= \frac{11}{12} = F(x \leq 2) \approx 0.92 \\ \text{(ii)}\ P(X > 2) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(x \leq 2) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12} \approx 0.08 \\ \text{(iii)}\ P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) = 1 - F(x < 2) = 1 - \frac{1}{2} = 0.5 \\ \text{(iv)}\ P(X = 2) &= \frac{5}{12} \approx 0.42 \end{aligned}$$




**Aufgabe 6** Zwei Personen steigen im Erdgeschoss in einen Lift. Jede der Personen steigt unabhängig von der anderen in einem der Stockwerke 1, 2, 3 oder 4 aus, je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. Die Zufallsvariable $X$ gibt die Anzahl Halte an, die der Lift macht.

**(a)** Welche Werte kann $X$ annehmen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit?

**(b)** Berechnen Sie die zugehörige kummulative Verteilungsfunktion.

**(c)** Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X$.

**Lösung:**

**(a)** $X$ kann die Werte 1 oder 2 annehmen mit den Wahrscheinlichkeiten

$$P(X=1) = 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$$
$$P(X=2) = 1 - P(X=1) = \frac{3}{4}$$

**(b)** Die kumulative Verteilungsfunktion ist für alle reellen $x$ definiert (nicht nur für $x = 1$ und $x = 2$), aber wir berechnen die Werte

$$F(x_1) = P(X \leq x_1) = P(X \leq 1) = \frac{1}{4}$$
$$F(x_2) = P(X \leq x_2) = P(X \leq 2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

Und schreiben unser Ergebnis folgendermassen auf:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x < 1 \\ \frac{1}{4} & \text{falls} \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{falls} \quad 2 \leq x \end{cases}$$

**(c)** Der Erwartungswert ist $E(X) = \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$. Und die Varianz ist $V(X) = \frac{1}{4} + 2^2 \cdot \frac{3}{4} - 1.75^2 = 0.1875$.

**Aufgabe 7** Wenn Sie im Casino Roulette spielen, interessiert Sie vermutlich nicht in erster Linie die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses, sondern der Gewinn (oder auch der Verlust), den Sie mit einer bestimmten Wette erwarten können. Der Stichprobenraum beim Roulette (französische Version) ist gegeben durch $\Omega = \{0, 1, 2, ..., 36\}$, wobei jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich ist. Nehmen wir nun an, dass wir einen Einsatz von 10 CHF auf die ersten 12 Zahlen (ohne Null) setzen, also auf das Ereignis $A = \{1, 2, 3, ..., 12\}$. Falls $A$ eintritt, erhalten wir den dreifachen Einsatz zurück, erzielen also einen Gewinn von 20 CHF.

**(a)** Macht es Sinn, diese Wette einzugehen?

**(b)** Können Sie bei höherem Einsatz mehr erwarten? Nehmen Sie an, Sie setzen 100 CHF auf die ersten zwölf Zahlen (ohne Null). Was ist Ihr erwarteter Gewinn?

**Lösung:**

**(a)** Um diese Frage zu beantworten, müssen wir sowohl die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A als auch den Betrag des Einsatzes und des möglichen Gewinns berücksichtigen. Wir gewinnen 20 CHF mit der Wahrscheinlichkeit $P(A) = 12/37$, und verlieren 10 CHF mit Wahrscheinlichkeit $P(A^c) = 1 - 12/37 = 25/37$. Wenn wir diese Wette oft eingehen, sagen wir $n$-mal, werden wir also ungefähr $12/37 \cdot n$-mal 20 CHF gewinnen, und ungefähr $25/37 \cdot n$-mal 10 CHF verlieren. Insgesamt erzielen wir nach dieser Rechnung einen "Gewinn" von

$$\frac{12}{37} \cdot 20 \cdot n - \frac{25}{37} \cdot 10 \cdot n = -\frac{10}{37} \cdot n$$

also einen Verlust von $10/37 \approx 0.27$ CHF pro Spiel.

**(b)** Längerfristig gesehen lohnt sich diese Wette für den Spieler oder Spielerin ebenfalls nicht, weil

$$\frac{12}{37} \cdot 200 \cdot n - \frac{25}{37} \cdot 100 \cdot n = -\frac{100}{37} \cdot n$$

Also durchschnittlich gesehen, erleidet ein Casino-Besucher oder Besucherin einen Verlust von $100/37 \approx 2.7$ CHF pro Spiel, falls er oder sie diese Wette eingeht. Der erwartete "Gewinn" ist ein Verlust von 2.7 CHF.