Übungen in Wahrscheinlichkeitsrechnung **Serie 3 & 4**

Aufgabe 1 (i) Wir werfen einen Würfel und betrachten die Ereignisse $A = \{1, 3\}$ und $B = \{2, 3\}$. Was ist das Ereignis $C = A \cup B$?

(ii) Wir werfen wiederum einen Würfel und betrachten das Ereignis A, eine ungerade Zahl zu würfeln. Was ist das komplementäre Ereignis A^c?

(iii) Nun werfen Sie zwei (unterscheidbare, z.B. verschiedenfarbige) Würfel gleichzeitig. Bestimmen Sie das Ereignis $C = A \cap B$ für die Ereignisse $A = \{$„mindestens ein Würfel zeigt eine 6“$\}$ und $B = \{$„die Summe der Augenzahlen der beiden Würfel ist höchstens 10“$\}$.

Aufgabe 2 (i) Machen Sie sich anhand von Venn-Diagrammen klar, dass die Gesetze von De Morgan gelten:

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(ii) Stellen Sie sich vor, Sie werfen einen Würfel. Sei nun $A = \{$„die Augenzahl ist gerade“$\}$ und $B = \{$„die Augenzahl ist maximal 3“$\}$. Beschreiben Sie die Ereignisse $(A \cap B)^c$ und $(A \cup B)^c$ in Worten.

Aufgabe 3 Bei einer Qualitätskontrolle werden 4 produzierte Raspberry Pi's der Reihe nach darauf untersucht, ob Sie funktionieren (f), oder defekt (d) sind. Ermitteln Sie die folgenden Ereignisse und deren Gegenereignisse:

(i) Genau 3 Raspberry Pi's sind defekt.

(ii) Das 2. Raspberry Pi ist defekt.

(iii) Mindestens 2 Raspberry Pi's sind defekt.

(iv) Das 2. Raspberry Pi funktioniert.

(v) Entweder das 1. oder das 2. Raspberry Pi funktioniert (aber nicht beide).

(vi) Das 2. und das 4. Raspberry Pi sind defekt.

Hinweis: Ein einzelnes Elementarereignis $\omega \in \Omega$ hat hier die Form $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, wobei ω_i den Zustand des i-ten Rasberry Pi's beschreibt. Insgesamt gibt es also $2^4 = 16$ Elementarereignisse.

Aufgabe 4 Welche Ziffer beim Glücksspiel Roulette die Gewinnzahl ist, entscheidet sich durch das Drehen einer Kugel im Roulettekessel mit 38 Feldern (siehe Bild). Von diesen 38 Feldern sind 18 schwarz, 18 sind rot und 2 sind grün (nämlich die Felder mit 0 und 00). Wir nehmen an, dass das Spiel fair ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit,

(i) dass bei einer Drehung ein rotes Feld gewählt wird.

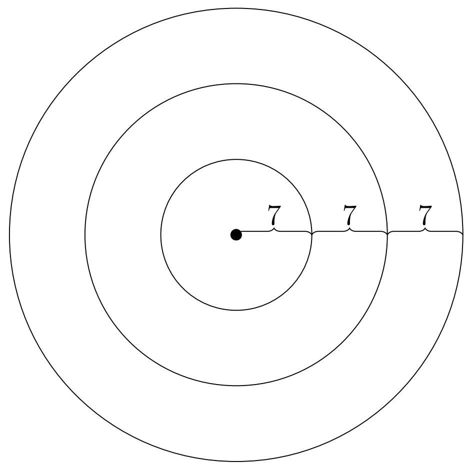
(ii) dass zwei Mal nacheinander ein schwarzes Feld gewählt wird.

(iii) dass bei einer Drehung die Felder 0 oder 00 gewählt werden.

(iv) dass in 5 Drehungen die Felder 0 oder 00 ***nicht*** gewählt werden.

(v) dass bei der ersten Drehung eins von den ersten 6 natürlichen Zahlen gewählt wird, aber bei der zweiten Drehung keines von diesen 6 Zahlen gewählt wird.

Aufgabe 5 Sie werfen Pfeile auf eine Dartscheibe mit drei Kreisscheiben (Längen in der Skizze in Zentimetern):



Im Durchschnitt trifft jeder zweite Pfeil die Dartscheibe; die Trefferwahrscheinlichkeit für die einzelnen Kreisscheiben ist proportional zu ihrer Fläche. Mit A, B, C bezeichnen wir die Ereignisse „innerste", „mittlere" bzw. „äusserste Kreisscheibe wird getroffen". (Zur Sicherheit: Wenn die innerste Kreisscheibe getroffen wird, ist damit auch die mittlere und die äusserste Kreisscheibe getroffen.)

(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, die innerste, mittlere bzw. äusserste Kreisscheibe zu treffen.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, den mittleren Kreisring zu treffen.

Aufgabe 6 (i) Im Kanton Bern sind (ohne Berücksichtigung der Vorwahl) die Telefonnummern siebenstellig. Wie viele Telefonanschlüsse sind möglich, wenn die Ziffern 0 bis 9 zur Verfügung stehen, die erste Ziffer aber keine 0 sein darf?

(ii) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie durch Anrufen auf eine zufällig gewählte (korrekt gebildete) Telefonummer einen Ihrer 45 Freunde erreichen, die noch einen Festnetzanschluss im Kanton Bern haben?

Aufgabe 7 Amy Farrah Fowler besitzt 6 Pullover und 5 Hosen. Von den Pullovern sind drei rot, zwei braun und einer grün; von den Hosen sind zwei rot, eine braun, eine blau und eine grün. Amy greift zufällig in den Kleiderschrank und zieht sich an. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Pullover und ihre Hose die gleiche Farbe haben?

Aufgabe 8 Wie viele verschiedene Tipps gibt es beim Zahlenlotto 6 aus 45? Was ist also die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige?

Aufgabe 9 (i) Wie gross ist beim Schieber die Wahrscheinlichkeit, dass Sie 4 Bauern erhalten?
(*Schieber*: 4 Personen erhalten je 9 Karten; insgesamt gibt es nur 4 Bauern von gesamthaft 36 Karten.)

(ii) Wie gross ist beim Schieber die Wahrscheinlichkeit, dass Sie 0,1,2 oder 3 Bauern erhalten?

Aufgabe 10 In einer Urne befinden sich 42 rote und 42 schwarze Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln zufällig gezogen, ohne Zurücklegen.

(i) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel rot ist?

(ii) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel rot ist?

(iii) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste gezogene Kugel rot ist?

(iv) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste gezogene Kugel schwarz ist?

Aufgabe 11 Man wirft zwei faire ***unterscheidbare*** Würfel (z.B. verschieden farbige Würfel).

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für eine Doppelsechs?
(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme kleiner oder gleich 4 ist?
(c) Unter der Bedingung, dass die Summe gleich 6 ist, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Würfel eine 2 zeigt.

Hinweis: eine geeignete Darstellung ist sehr hilfreich

Aufgabe 12 Ein Spital besitzt zwei Operationssäle, welche mit der gleichen Wahrscheinlichkeit besetzt sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der beiden Säle besetzt ist, beträgt 0.9, jene, dass beide Säle besetzt sind 0.5. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

(a) dass der erste Saal frei ist?
(b) dass beide Säle frei sind?
(c) dass mindestens ein Saal frei ist?
(d) dass genau ein Saal frei ist?
(e) dass der zweite Saal frei ist, wenn man weiss, dass der erste besetzt ist?

Sind die folgenden Ereignisse A_1 und A_2 unabhängige Ereignisse?

A_1 : „der erste Saal ist besetzt“
A_2 : „der zweite Saal ist besetzt“

Verdeutlichen Sie die Situation mit einem ***Venn-Diagramm***.

Aufgabe 13 In einer Gruppe von 900 Personen haben sich 600 prophylaktisch gegen Grippe impfen lassen. Nach einer bestimmten Zeit wird ermittelt, wer an einer Grippe erkrankt ist. Die Ergebnisse werden in einer sogenannten Vierfeldertafel dargestellt:

Gruppe	B (erkrankt)	B^c (nicht erkrankt)	Summe
A (mit Impfung)	60	540	600
A^c (ohne Impfung)	120	180	300
Summe	180	720	900

Das Ereignis A sei „Person ist geimpft" und das Ereignis B „Person ist erkrankt". A^c und B^c sind die jeweiligen Gegenereignisse zu A respective B. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und beschreiben Sie die Bedeutung der einzelnen Ergebnisse in Worten:

(i) $P(A)$ (iii) $P(A \cap B)$ (v) $P(A|B)$ (vii) $P(B|A^c)$

(ii) $P(B)$ (iv) $P(B|A)$ (vi) $P(A^c \cap B)$

Aufgabe 14 Ein Warenhausabwart wird jährlich etwa 100 mal alarmiert. Es handelt sich um rund 20 Feueralarme, 40 Einbruchalarme und 30 Wasserbruchalarme. Die restlichen Alarme betreffen die Liftanlagen. 70% der Feueralarme, 50% der Einbruchalarme, 60% der Wasserbruchalarme und 40% der Liftalarme sind Fehlalarme.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Fehlalarm handelt, wenn ein Alarm ausgelöst wurde?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Feueralarm und einen Fehlalarm handelt, wenn ein Alarm ausgelöst wurde?

(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehlalarm von einem defekten Feuermelder stammt (d.h. Fehlalarm unter der Bedingung Feueralarm wurde ausgelöst)?

Aufgabe 15 9% der Bevölkerung leiden an einer bestimmten Allergie. Ein Allergietest zeigt bei 90% dieser Allergiker ein positives Resultat. Irrtümlicherweise reagiert er auch bei 0.9% der Nichtallergiker positiv. Eine zufällig ausgewählte Person wird getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) erzielt die Versuchsperson ein positives Resultat?

(b) ist die Versuchsperson gesund, obwohl der Test positiv ausfällt?

Aufgabe 16 An Freitagen fehlen Bonnie und Clyde oft im Unterricht, und zwar Bonnie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.3 und Clyde mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.45. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide anwesend sind, beträgt nur gerade 0.4.

(a) Sind die Anwesenheit von Bonnie und Clyde unabhängige Ereignisse?

(b) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bonnie an einem bestimmten Freitag anwesend ist, wenn man weiss, dass Clyde an diesem Tag anwesend ist?

(c) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bonnie an einem bestimmten Freitag abwesend ist, wenn man weiss, dass Clyde an diesem Tag abwesend ist?

Hinweis: Für **(c)** das Gesetze von de Morgan (Mengenlehre) wird verwendet

Aufgabe 17 Von einem gezinkten Würfel wissen wir, dass

- die Wahrscheinlichkeit für eine 6 gleich gross ist wie die Wahrscheinlichkeit aller andern Zahlen zusammen, d.h. $P(\{6\}) = P(\{1, 2, 3, 4, 5\})$
- die Zahlen 1 bis 5 gleich wahrscheinlich sind.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(\{1\}), P(\{2\}), \ldots, P(\{6\})$.

(b) Wie gross ist beim zweimaligen Werfen dieses Würfels die Wahrscheinlichkeit, dass erst eine Sechs und dann eine Eins fällt? Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit ebenfalls für einen fairen Würfel und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

Aufgabe 18 Angenommen eine Grippewelle sucht eine Stadt heim. In 10% der Familien leidet die Mutter an der Grippe. In 10% der Familien leidet der Vater an der Grippe. In 2% der Familien leidet sowohl die Mutter als auch der Vater an der Grippe. Wir definieren die Ereignisse:

- A_1 : die Mutter hat die Grippe.
- A_2 : der Vater hat die Grippe.

(a) Sind die Ereignisse A_1 und A_2 unabhängig?

(b) Bestimmen Sie $P(A_2|A_1)$ und $P(A_2|A_1^c)$.

Aufgabe 19 Die Spülmaschine einer Getränkefirma spült nur 98% der Flaschen sauber. Daher werden die Flaschen nach dem Spülen kontrolliert. Die Kontrollmaschine zeigt jedoch nur 90% der sauberen Flaschen als sauber an, sortiert also fälschlicherweise 10% der sauberen Flaschen aus. Zudem werden 5% der noch verschmutzten Flaschen als sauber eingestuft, also fälschlicherweise nicht aussortiert.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Flasche, die sauber ist, aussortiert?

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Flasche als sauber eingestuft?

(iii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Flasche, die nicht aussortiert worden ist, tatsächlich sauber?

Aufgabe 20 In Freiburg sind 80% aller Autos rot. Sie sehen nachts ein Auto, dass ihnen ***nicht rot erscheint***. Sie wissen, dass Sie ein rotes Auto nur in 70% aller Fälle korrekt erkennen, gegeben das Auto ist rot. Allerdings erkennen sie ein nicht-rotes Auto in 90% der Fälle korrekt.

(i) Listen (***nicht berechnen***) Sie sämtliche bedingten und nicht-bedingten Wahrscheinlichkeiten, die sich der Aufgabenstellung direkt entnehmen lassen.

Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen der Aussage, dass ein Auto rot ist und der Aussage, dass Sie glauben ein rotes Auto gesehen zu haben.

(ii) Berechnen Sie mit welcher Wahrscheinlichtkeit das Auto ***wirklich rot*** ist, wenn Sie in Freiburg nachts ein Auto ***als rot wahrnehmen***.