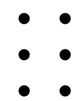
Lösungen zu den Übungen in Kombinatorik **Serie 2**

Aufgabe 1 Für die Blindenschrift benötzt man die Braillesche Zelle. Diese besteht aus 6 Punkten in der folgenden Anordnung:



Indem einer oder mehrere Punkte durchgedrückt werden, lassen sich Zeichen definieren. Wie viele Zeichen gibt es

(a) mit 1 Punkt?	**(b)** mit 2 Punkten?
(c) mit 3 Punkten?	**(d)** mit 4 Punkten?
(e) mit 5 Punkten ?	**(f)** mit 6 Punkten?
(g) insgesamt ?	

Lösung:

(a) $\binom{6}{1} = 6$ **(b)** $\binom{6}{2} = 15$

(c) $\binom{6}{3} = 20$ **(d)** $\binom{6}{4} = 15$

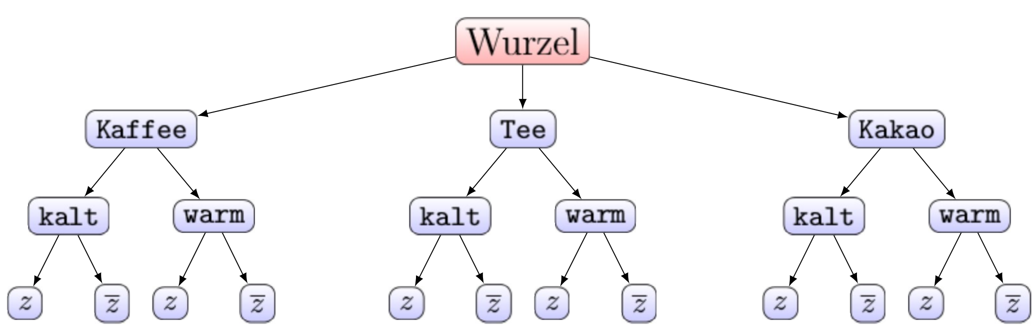
(e) $\binom{6}{5} = 6$ **(f)** $\binom{6}{6} = 1$

(g) $6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63 = 2^6 - 1$

Aufgabe 2 Bei einem Getränkeautomat kann Kaffee, Tee oder Kakao gewählt werden. Weiter kann das gewählte Getränk kalt oder warm sein und Zucker oder kein Zucker enthalten. Wie viele verschiedene Getränke können gewählt werden? Verwenden Sie ein Baumdiagramm.

Lösung:

Damit mein Baumdiagramm nicht überfüllt wird, verwende ich die Bezeichnung z für Getränk mit Zucker respective $\overline{z}$ für Getränk ohne Zucker. Es gibt insgesamt 12 mögliche Getränke, die gewählt werden können.



Aufgabe 3 Amy Farrah Fowler besitzt 4 Kleider, 3 Hüte und 5 Paar Schuhe. Auf wie viele Arten kann sie sich zum Ausgehen anziehen, wenn alles zueinander passt und das Tragen eines Hutes a) Pflicht und b) freiwillig ist?

Lösung:

(a) $4 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

(b) $4 \cdot (3 + 1) \cdot 5 = 80$

Aufgabe 4 In einem Raum gibt es 8 Lampen, die man unabhängig voneinander ein- und ausschalten kann. Wie viele Beleuchtungsarten gibt es

(a) total?

(b) bei denen genau 5 Lampen brennen?

(c) bei denen mindestens 5 Lampen brennen?

(d) bei denen höchstens 3 Lampen brennen?

Lösung:

(a) Jede der 8 Lampen kann ein- oder ausgeschaltet sein. Es gibt total also $2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^8 = 256$ Beleuchtungsarten.

(b) Es gibt $\binom{8}{5} = 56$ Beleuchtungsarten, bei denen genau 5 Lampen brennen.

(c) Es gibt $\binom{8}{5} + \binom{8}{6} + \binom{8}{7} + \binom{8}{8} = 56 + 28 + 8 + 1 = 93$ Beleuchtungsarten, bei denen mindestens 5 Lampen brennen.

(d) Es gibt $\binom{8}{3} + \binom{8}{2} + \binom{8}{1} + \binom{8}{0} = 56 + 28 + 8 + 1 = 93$ Beleuchtungsarten, bei denen höchstens 3 Lampen brennen; vgl. mit c).

Aufgabe 5 **(a)** Sie gehen mit 6 Freunden ins Feierabendbier. Wie oft klingen die Gläser, wenn jeder mit jedem anstösst?

(b) Wie viele Leute sind an einer Cocktail-Party, wenn beim Anstossen die Gläser 253 Mal klirren?

Lösung:

(i) Die Gläser klingen $\binom{7}{2} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ Mal.

(ii) 23 Personen, da $\binom{23}{2} = \frac{23 \cdot 22}{2} = 253$.

Aufgabe 6 Bei einem fünfstelligen Ziffernschloss können an jedem der 5 Rädchen die Ziffern zwischen 0 und 9 eingestellt werden. Wie viel Zeit benötigt man, um alle Einstellungen auszuprobieren, wenn man für eine Einstellung durchschnittlich 4 Sekunden braucht?

Lösung:

Es gibt 10^5 unterschiedliche Einstellungen. Somit braucht man $10^5 \cdot 4\,\mathrm{s} \approx 4.6$ Tage, um alle möglichen Einstellungen auszuprobieren.

Aufgabe 7 Herr Meier hat 7 Sorten Wein im Keller. Für eine Party benötigt er 3 Flaschen Wein von derselben Sorte. Die Sorte selbst ist ihm gleichgültig. Wegen eines Defektes an der Kellerbeleuchtung muss er die Flaschen im Dunkeln herausgreifen. Wie viele Flaschen muss er mindestens aus dem Keller mitnehmen, damit sicher 3 Flaschen von der gleichen Sorte darunter sind?

Lösung:

Er muss $2 \cdot 7 + 1 = 15$ Flaschen mitnehmen. (Mit 14 Flaschen hat er im schlechtesten Fall genau 2 Flaschen Wein von jeder der 7 Sorten.)

Aufgabe 8 Was ist besser: zwei Schlösser mit je einem 3-stelligen PIN oder ein Schloss mit einem 6-stelligen PIN?

Lösung:

Sei n die Anzahl der verschiedenen Zeichen (typischerweise haben wir die Ziffern von 0 bis 9, also ist $n = 10$). Die Anzahl der 6-stelligen Codes ist nach dem Produktprinzip gleich

$$n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n = n^6 \ .$$

Für die Anzahl der dreistelligen Codes erhalten wir analog n^3.

Würde ein möglicher Dieb oder eine mögliche Diebin zuerst einen Code bei Schloss 1 und dann einen Code bei Schloss 2 anwenden, dann wäre die Anzahl der Möglichkeiten ebenfalls $1'000 \cdot 1'000 = 10^6$. Im schlimmsten Fall müssen also 10^6 Möglichkeiten durchprobiert werden. Es gibt aber einen viel schnelleren Weg. Der Dieb oder die Diebin versucht zuerst das Schloss 1 zu öffnen. Dazu sind höchstens $1'000$ Versuche möglich. Wenn das Schloss 1 geöffnet ist, dann kann wiederum mit höchstens $1'000$ Versuchen das Schloss 2 geöffnet werden. Im schlimmsten Fall sind also $2'000$ Versuche möglich.

Ein Schloss mit einem 6-stelligen Code ist also viel sicherer als 2 Schlösser mit je einem 3-stelligen Code.