Lösungen zu den Übungen in Deskriptive Statistik und Monte-Carlo-Simulationen
Serie 7

Aufgabe 1 Angenommen Sie haben 3 Spielwürfel zur Verfügung und möchten herausfinden, ob diese Würfel fair sind. Also werfen Sie jede dieser Würfel 1000 Mal und notieren sich die angezeigte Augenzahl pro Wurf auf. Die Ergebnisse eines solches Zufallsexperimentes sind in der Datei `Three_Dice.xlsx` auf Moodle zu finden. Laden Sie den Datensatz in `Python` ein.

(i) Berechnen Sie den Mittelwert der Stichprobe pro Würfel und entscheiden Sie, ob jede Würfel fair oder nicht fair ist.

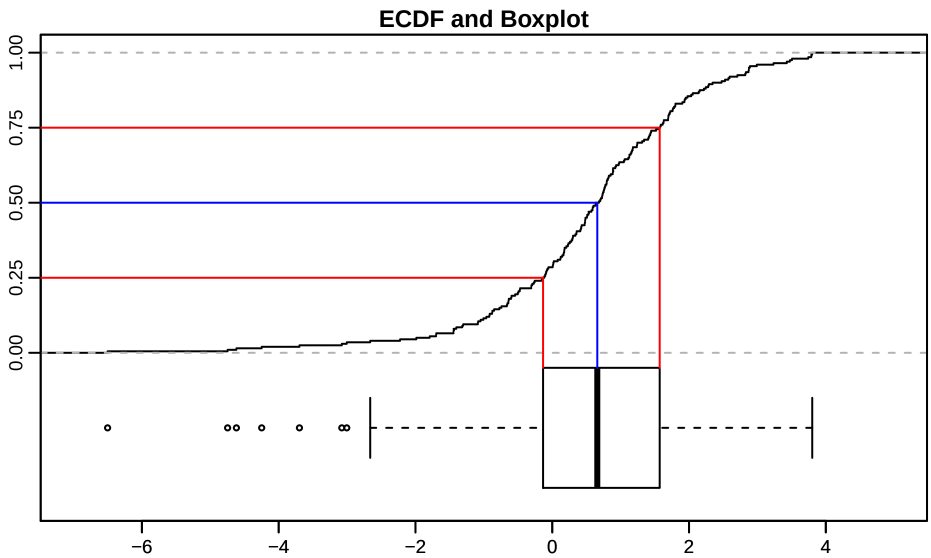
(ii) Berechnen Sie die zugehörigen Varianzen der Stichproben und entscheiden Sie, ob jede Würfel fair oder nicht fair ist.

(iii) Zeichnen Sie die zugehörigen Histogramme, kumulative Verteilungsfunktion und Boxplots. Entscheiden Sie erneut, ob die Würfel fair oder nicht fair sind.

Lösung siehe Jupyter Notebook auf Moodle

Aufgabe 2 Die folgende Darstellung zeigt die empirische kumulative Verteilungsfunktion (ECDF) eines Datensatzes. Zeichnen Sie einen Box-Plot des Datensatzes in die gegebene Graphik hinein.

Lösung



Aufgabe 3 Lösen Sie die folgende Aufgabe sowohl analytisch als auch mit Hilfe einer Monte-Carlo-Simulation.

Folgendes Würfelspiel mit zwei fairen Tetraedern (*vierseitige* Würfel) wird Ihnen vorgeschlagen: Zeigen die beiden Würfel die gleiche Augenzahl, so erhält man das Fünffache des Einsatzes zurück, erzielt also einen Gewinn in Höhe des vierfachen Einsatzes. Unterscheiden sich die Augenzahlen dagegen um 1,2 oder 3, so verliert man den ein-, zwei- bzw. dreifachen Einsatz.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz des Gewinns.

(b) Wie hoch muss die Auszahlung (als Vielfaches des Einsatzes) für zwei gleiche Augenzahlen sein, damit das Spiel fair wird, also der erwartete Gewinn Null beträgt?

Lösungen

(a) Die Zufallsvariable X nimmt die folgende Werte mit den angegebenen Wahrscheinlichkeit an

	x_1	x_2	x_3	x_4
$X = x_i$	-3	-2	-1	4
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$

Der Erwartungswert ist also

$$E(X) = -3 \cdot \frac{2}{16} - 2 \cdot \frac{4}{16} - 1 \cdot \frac{6}{16} + 4 \cdot \frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$$

und die Varianz beträgt

$$V(X) = (-3)^2 \cdot \frac{2}{16} + (-2)^2 \cdot \frac{4}{16} + \frac{6}{16} + 4^2 \cdot \frac{4}{16} - \left(\frac{-1}{4}\right)^2 \approx 6.438$$

(b) Anstatt 4 schreiben wir nun eine unbekannte, die Variable x in die Gleichung

$$E(X) = -3 \cdot \frac{2}{16} - 2 \cdot \frac{4}{16} - 1 \cdot \frac{6}{16} + x \cdot \frac{4}{16} = 0$$

hinein und lösen die Gleichung $E(X) = 0$, um den Wert von x zu bestimmen:

$$x = \frac{16}{4} \cdot \left(+1 \cdot \frac{6}{16} + 2 \cdot \frac{4}{16} + 3 \cdot \frac{2}{16}\right) = 5$$

Damit das Spiel fair ist, muss ein Gewinn in der Höhe des fünffachen Einsatzes erzielt werden, also müsste die Ausszahlung das Sechsfache des Einsatzes betragen.

siehe Jupyter Notebook auf Moodle für die Monte-Carlo-Simulation.