Aufgabe 1 (i) Wir werfen einen Würfel und betrachten die Ereignisse $A = \{1, 3\}$ und $B = \{2, 3\}$. Was ist das Ereignis $C = A \cup B$?

(ii) Wir werfen wiederum einen Würfel und betrachten das Ereignis A, eine ungerade Zahl zu würfeln. Was ist das komplementäre Ereignis A^c?

(iii) Nun werfen Sie zwei (unterscheidbare, z.B. verschiedenfarbige) Würfel gleichzeitig. Bestimmen Sie das Ereignis $C = A \cap B$ für die Ereignisse $A = \{$„mindestens ein Würfel zeigt eine 6“$\}$ und $B = \{$„die Summe der Augenzahlen der beiden Würfel ist höchstens 10“$\}$.

Lösung

(i) $C = \{1, 2, 3\}$ und tritt genau dann ein, wenn entweder 1,2 oder 3 gewürfelt wird.

(ii) Das komplementäre Ereignis ist natürlich, eine gerade Zahl zu würfeln, also $A^c = \{2, 4, 6\}$.

(iii) Für A gilt:

$$A = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} ,$$

Um die Menge B zu bestimmen, ist es hilfreich, wenn man eine Matrix verwendet. So kann man die Summen sehr einfach bilden und darstellen.

Würfel 2 \ Würfel 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Es ist aufwendig alle Elemente von B aufzulisten, also nehmen wir das Komplementarereignis

$$B^c = \{(5,6),(6,5),(6,6)\} ,$$

und sagen B ist das gesamte Ω ausser B^c. Somit fallen 3 Elemente aus der Menge A weg, wenn wir den Durschnitt bilden und wir erhalten

$$C = A \cap B = \{(1,6),(2,6),(3,6),(4,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4)\} .$$

Aufgabe 2 (i) Machen Sie sich anhand von Venn-Diagrammen klar, dass die Gesetze von De Morgan gelten:

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

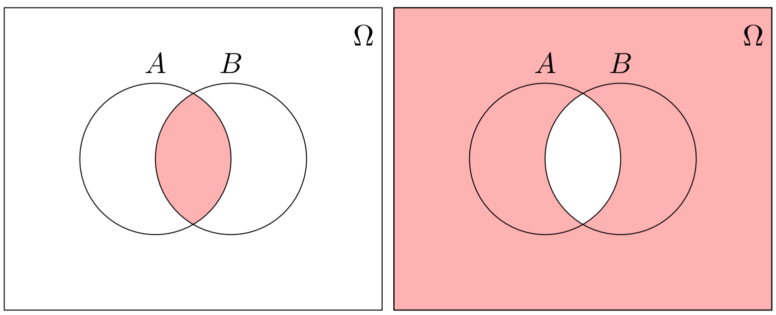
(ii) Stellen Sie sich vor, Sie werfen einen Würfel. Sei nun $A = \{$„die Augenzahl ist gerade“$\}$ und $B = \{$„die Augenzahl ist maximal 3“$\}$. Beschreiben Sie die Ereignisse $(A \cap B)^c$ und $(A \cup B)^c$ in Worten.

Lösung

(i)
- Beweis von $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

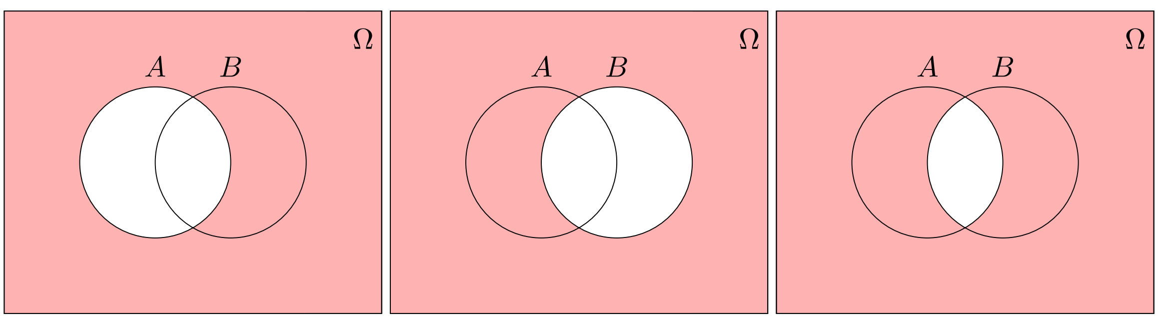
  Für die linke Seite erhalten wir

  $A \cap B$ $\qquad$ $(A \cap B)^c$

  Für die rechte Seite erhalten wir

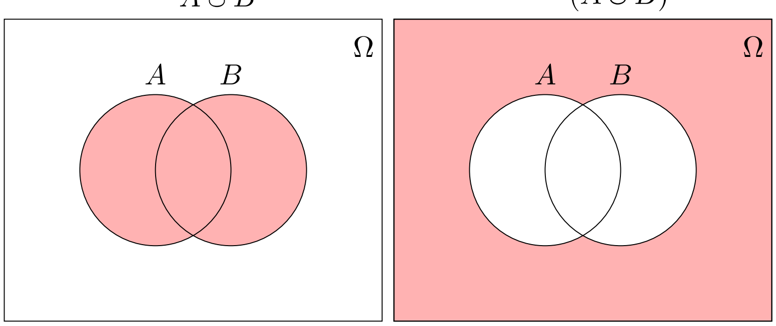
  A^c $\qquad$ B^c $\qquad$ $A^c \cup B^c$

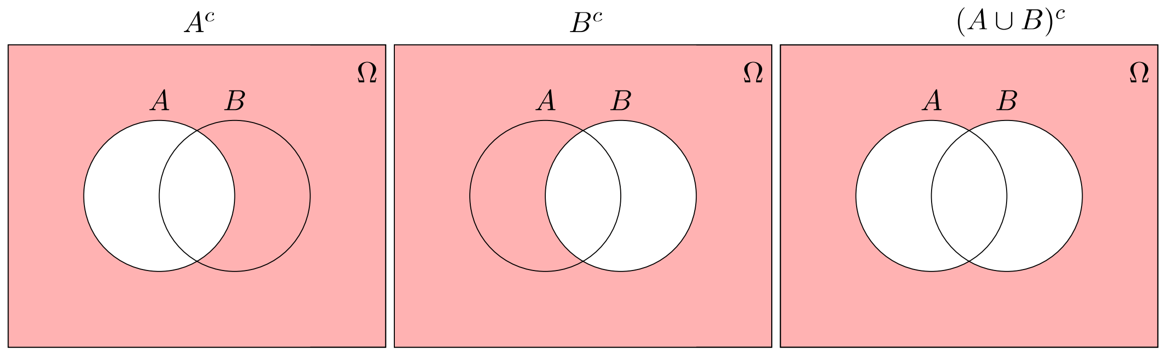
- Beweis von $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

  Für die linke Seite erhalten wir

  $A \cup B$ $\qquad$ $(A \cup B)^c$

  Für die rechte Seite erhalten wir



(ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c = \{$„die Augenzahl ist ungerade *oder* grösser als 3“$\}$
$= \{1, 3, 4, 5, 6\}$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c = \{$„die Augenzahl ist ungerade *und* grösser als 3“$\} = \{5\}$

Aufgabe 3 Bei einer Qualitätskontrolle werden 4 produzierte Raspberry Pi's der Reihe nach darauf untersucht, ob Sie funktionieren (f), oder defekt (d) sind. Ermitteln Sie die folgenden Ereignisse und deren Gegenereignisse:

(i) Genau 3 Raspberry Pi's sind defekt.

(ii) Das 2. Raspberry Pi ist defekt.

(iii) Mindestens 2 Raspberry Pi's sind defekt.

(iv) Das 2. Raspberry Pi funktioniert.

(v) Entweder das 1. oder das 2. Raspberry Pi funktioniert (aber nicht beide).

(vi) Das 2. und das 4. Raspberry Pi sind defekt.

Hinweis: Ein einzelnes Elementarereignis $\omega \in \Omega$ hat hier die Form $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$, wobei ω_i den Zustand des i-ten Rasberry Pi's beschreibt. Insgesamt gibt es also $2^4 = 16$ Elementarereignisse.

Lösung

(i) $A = \{(d, d, d, f), (d, d, f, d), (d, f, d, d), (f, d, d, d)\}$

$$A^c = \{(d, d, d, d), (f, f, d, d), (f, d, f, d), (f, d, d, f), (d, f, f, d), (d, f, d, f), (d, d, f, f), (f, f, f, d), (f, f, d, f), (f, d, f, f), (d, f, f, f), (f, f, f, f)\}$$

Um uns ein wenig Schreibarbeit zu ersparen, schreiben wir im Folgenden jeweils abkürzend d/f für ein defektes *oder* funktionsfähiges Raspberry Pi. Natürlich kommt jedes der 16 Elementarereignisse immer entweder in (z.B.) B oder dem Komplement B^c vor; ausbuchstabiert müssten wir also jedes Mal wie in a) alle 16 Elementarereignisse aufführen.

(ii) $B = \{(d/f, d, d/f, d/f)\}$ und $B^c = \{(d/f, f, d/f, d/f)\}$

(iii) $C = \{(d,d,d/f,d/f),(d,d/f,d,d/f),(d,d/f,d/f,d),(d/f,d,d,d/f),(d/f,d,d/f,d),(d/f,d/f,d,d)\}$
$C^c = \{(f,f,f,d/f),(f,f,d/f,f),(f,d/f,f,f),(d/f,f,f,f)\}$

(iv) $D = B^c$ und somit $D^c = B$

(v) $E = \{(f,d,d/f,d/f),(d,f,d/f,d/f)\}$ und $E^c = \{(f,f,d/f,d/f),(d,d,d/f,d/f)\}$

(vi) $F = \{(d/f,d,d/f,d)\}$ und $F^c = \{(d/f,f,d/f,f),(d/f,f,d/f,d),(d/f,d,d/f,f)\}$

Aufgabe 4 Welche Ziffer beim Glücksspiel Roulette die Gewinnzahl ist, entscheidet sich durch das Drehen einer Kugel im Roulettekessel mit 38 Feldern (siehe Bild). Von diesen 38 Feldern sind 18 schwarz, 18 sind rot und 2 sind grün (nämlich die Felder mit 0 und 00). Wir nehmen an, dass das Spiel fair ist.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit,

(i) dass bei einer Drehung ein rotes Feld gewählt wird.

(ii) dass zwei Mal nacheinander ein schwarzes Feld gewählt wird.

(iii) dass bei einer Drehung die Felder 0 oder 00 gewählt werden.

(iv) dass in 5 Drehungen die Felder 0 oder 00 ***nicht*** gewählt werden.

(v) dass bei der ersten Drehung eins von den ersten 6 natürlichen Zahlen gewählt wird, aber bei der zweiten Drehung keines von diesen 6 Zahlen gewählt wird.

Lösung

(i) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein rotes Feld gewählt wird: $P(R) = \frac{18}{38} \approx 0.47$

(ii) Alle Drehungen sind unabhängig voneinander. Daher lässt sich die gefragte Wahrscheinlichkeit als Produkt berechnen $P(S \cap S) = P(S) \cdot P(S) = \left(\frac{18}{38}\right)^2 \approx 0.22$

(iii) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P(\{0\} \cup \{00\}) = P(\{0\}) + P(\{00\}) = 2 \cdot \frac{1}{38} \approx 0.05$

(iv) Die Wahrscheinlichkeit bei einer Drehung, die Felder 0 oder 00 **nicht** zu wählen, beträgt $(1 - P(\{0\} \cup \{00\})$. Die Drehungen sind von einander unabhängig, d.h. diese Wahrscheinlichkeit ist bei jeder Drehung die Gleiche. Insgesamt ist die hier gesuchte Wahrscheinlichkeit $(1 - P(\{0\} \cup \{00\}))^5 = (1 - 2 \cdot \frac{1}{38})^5 \approx 0.76$.

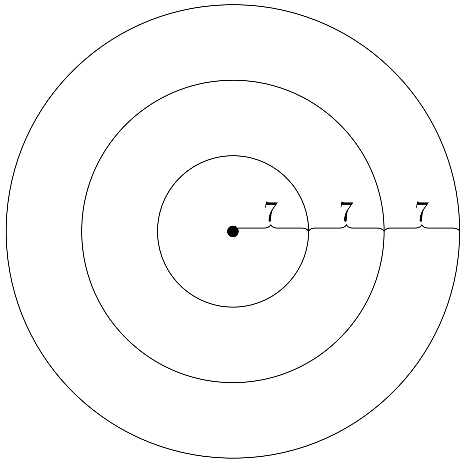
(v) Sei

E: das Ereignis, bei einer Drehung eine der Zahlen $\{1,2,3,4,5,6\}$ zu wählen und

F: das Ereignis, eine der Zahlen $\{1,2,3,4,5,6\}$ **nicht** zu wählen

Die Wahrscheinlichkeit ist $P(E) \cdot P(F) = P(E) \cdot (1 - P(E)) = \frac{6}{38} \cdot (1 - \frac{6}{38}) \approx 0.13$.

Aufgabe 5 Sie werfen Pfeile auf eine Dartscheibe mit drei Kreisscheiben (Längen in der Skizze in Zentimetern):



Im Durchschnitt trifft jeder zweite Pfeil die Dartscheibe; die Trefferwahrscheinlichkeit für die einzelnen Kreisscheiben ist proportional zu ihrer Fläche. Mit A, B, C bezeichnen wir die Ereignisse „innerste", „mittlere" bzw. „äusserste Kreisscheibe wird getroffen". (Zur Sicherheit: Wenn die innerste Kreisscheibe getroffen wird, ist damit auch die mittlere und die äusserste Kreisscheibe getroffen.)

(i) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, die innerste, mittlere bzw. äusserste Kreisscheibe zu treffen.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, den mittleren Kreisring zu treffen.

Lösung

(i) Mit A, B, C bezeichnen wir die Ereignisse „innerste", „mittlere" bzw. „äusserste Kreisscheibe wird getroffen". (Es gilt also $A \subseteq B \subseteq C$ und $A \cup B \cup C = C$.) Da die Trefferwahrscheinlichkeit proportional zur Fläche auf der Dartscheibe ist, muss das Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten $P(A) : P(B) : P(C)$ gerade $7^2\pi : 14^2\pi : 21^2\pi = 1 : 4 : 9$ betragen. Da im Schnitt die Hälfte der Pfeile die Dartscheibe trifft, wissen wir bereits, dass $P(C) = \frac{1}{2}$. Daher gilt

$$P(B) = \frac{4}{9} \cdot P(C) = \frac{2}{9}, \qquad P(A) = \frac{1}{9} \cdot P(C) = \frac{1}{18} \, .$$

(ii) Die Wahrscheinlichkeit, den mittleren Kreisring zu treffen, ist $P(B \setminus A) = P(B) - P(A) = \frac{2}{9} - \frac{1}{18} = \frac{1}{6}$ (wobei wir verwendet haben, dass $A \subseteq B$).

Aufgabe 6 (i) Im Kanton Bern sind (ohne Berücksichtigung der Vorwahl) die Telefonnummern siebenstellig. Wie viele Telefonanschlüsse sind möglich, wenn die Ziffern 0 bis 9 zur Verfügung stehen, die erste Ziffer aber keine 0 sein darf?

(ii) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie durch Anrufen auf eine zufällig gewählte (korrekt gebildete) Telefonummer einen Ihrer 45 Freunde erreichen, die noch einen Festnetzanschluss im Kanton Bern haben?

Lösung

(i) Wir haben für jede Stelle der Telefonnummer 10 Möglichkeiten; bei der ersten Stelle sind es allerdings nur 9. Wir erhalten $9 \cdot 10^6$, also 9 Millionen unterschiedliche Telefonnummern.

(ii) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $45/(9 \cdot 10^6) = 5 \cdot 10^{-6}$.

Aufgabe 7 Amy Farrah Fowler besitzt 6 Pullover und 5 Hosen. Von den Pullovern sind drei rot, zwei braun und einer grün; von den Hosen sind zwei rot, eine braun, eine blau und eine grün. Amy greift zufällig in den Kleiderschrank und zieht sich an. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ihr Pullover und ihre Hose die gleiche Farbe haben?

Lösung

Von den $6 \cdot 5 = 30$ (gleich wahrscheinlichen!) Kombinationen sind insgesamt

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 9$$

Möglichkeiten günstig. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $9/30 = 0.3$.

Aufgabe 8 Wie viele verschiedene Tipps gibt es beim Zahlenlotto 6 aus 45? Was ist also die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige?

Lösung

Es gibt $\binom{45}{6} = 8\,145\,060$ verschiedene Tipps. Die Wahrscheinlichkeit für 6 Richtige ist $1/\binom{45}{6} \approx 1.228 \cdot 10^{-7}$ (ein bisschen mehr als ein Zehnmillionstel).

Aufgabe 9 (i) Wie gross ist beim Schieber die Wahrscheinlichkeit, dass Sie 4 Bauern erhalten?
(*Schieber*: 4 Personen erhalten je 9 Karten; insgesamt gibt es nur 4 Bauern von gesamthaft 36 Karten.)

(ii) Wie gross ist beim Schieber die Wahrscheinlichkeit, dass Sie 0,1,2 oder 3 Bauern erhalten?

Lösung

(i) Die Anzahl möglicher Blätter, die Sie erhalten können ist $\binom{36}{9}$, wovon nur $\binom{32}{5}$ die 4 geforderten Bauern enthalten (die 5 Karten neben den 4 Bauern können beliebig aus den 32 verbleibenden Karten ausgesucht werden). Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich zu ca. 0.002; die Chance, dass Sie 4 Bauern in einer Runde weisen können, ist also lediglich ca. 0.2%.

(ii)
- Wahrscheinlichkeit für 0 Bauern: Die Anzahl günstiger Blätter ist in diesem Fall $\binom{32}{9}$, also beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit $0.298 \approx 30\%$.
- Wahrscheinlichkeit für 1 Bauern: Die Anzahl günstiger Blätter ist in diesem Fall $\binom{32}{8} \cdot \binom{4}{1}$. (Sie können nämlich einen beliebigen Bauern ziehen $\binom{4}{1}$ und die restlichen 8 Karten aus 32 ziehen $\binom{32}{8}$.) Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $0.447 \approx 45\%$.
- Wahrscheinlichkeit für 2 Bauern: Analog ist hier die Anzahl günstiger Blätter $\binom{32}{7} \cdot \binom{4}{2}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $0.215 \approx 22\%$.
- Wahrscheinlichkeit für 3 Bauern: Analog ist hier die Anzahl günstiger Blätter $\binom{32}{6} \cdot \binom{4}{3}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also $0.039 \approx 4\%$. (Klar summieren sich alle berechneten Wahrscheinlichkeiten auf 100%!)

Aufgabe 10 In einer Urne befinden sich 42 rote und 42 schwarze Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln zufällig gezogen, ohne Zurücklegen.

(i) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Kugel rot ist?

(ii) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste gezogene Kugel rot ist?

(iii) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel rot ist, wenn die erste gezogene Kugel schwarz ist?

(iv) Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel rot ist?

Lösung

(i) Jede Kugel hat die gleiche Wahrscheinlichkeit, als erste Kugel gezogen zu werden; die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $42/84 = 0.5$.

(ii) Wenn die erste Kugel rot ist, sind bei der zweiten Ziehung insgesamt nur noch 83 Kugeln in der Urne, davon 41 rote. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $41/83$.

(iii) Wenn die erste Kugel schwarz ist, sind bei der zweiten Ziehung insgesamt nur noch 83 Kugeln in der Urne, davon 42 rote. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $42/83$.

(iv) Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite Kugel rot ist, kann folgendermassen ausgerechnet werden
$$\frac{42}{84} \cdot \frac{41}{83} + \frac{42}{84} \cdot \frac{42}{83} = 0.5\,.$$

Aufgabe 11 Man wirft zwei faire ***unterscheidbare*** Würfel (z.B. verschieden farbige Würfel).

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für eine Doppelsechs?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Augensumme kleiner oder gleich 4 ist?

(c) Unter der Bedingung, dass die Summe gleich 6 ist, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Würfel eine 2 zeigt.

Hinweis: eine geeignete Darstellung ist sehr hilfreich

Lösung:

Wir verwenden den Stichprobenraum:

$$\Omega = \{(i, j) \in \mathbf{N}^2 : 1 \leq i \leq 6 \wedge 1 \leq j \leq 6\}$$

Es handelt sich um einen Laplace-Raum.

(a) $\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$

(b) Die folgenden Resultate ergeben eine Augensumme kleiner oder gleich 4:

$$(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (1,3),\ (3,1),\ (2,2)$$

Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}\ .$$

Es hilft je nach dem die Summen der beiden Augenzahlen in einer Matrix darzustellen.

Würfel 2 \ Würfel 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(c) Wir verwenden die Bezeichnungen:

- A : "(mindestens) einer der Würfel zeigt eine 2"
- B : "die Summe der Resultate ist gleich 6"

Gesucht wird die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}\ .$$

Es ist

$$A\cap B = \{(2,4),(4,2)\} \quad \text{und} \quad B = \{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}\ .$$

Also ist

$$P(A\cap B) = \frac{2}{36} \quad \text{und} \quad P(B) = \frac{5}{36}\ .$$

Damit erhalten wir

$$P(A|B) = \frac{2}{5}\ .$$

Aufgabe 12 Ein Spital besitzt zwei Operationssäle, welche mit der gleichen Wahrscheinlichkeit besetzt sind. Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der beiden Säle besetzt ist, beträgt 0.9, jene, dass beide Säle besetzt sind 0.5. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,

(a) dass der erste Saal frei ist?

(b) dass beide Säle frei sind?

(c) dass mindestens ein Saal frei ist?

(d) dass genau ein Saal frei ist?

(e) dass der zweite Saal frei ist, wenn man weiss, dass der erste besetzt ist?

Sind die folgenden Ereignisse A_1 und A_2 unabhängige Ereignisse?

A_1 : „der erste Saal ist besetzt“
A_2 : „der zweite Saal ist besetzt“

Verdeutlichen Sie die Situation mit einem ***Venn-Diagramm***.

Lösung

Gemäss Aufgabenstellung kennen wir die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

- $P(A_1 \cup A_2) = 0.9$
- $P(A_1 \cap A_2) = 0.5$

Weiter wissen wir, dass gilt: $P(A_1) = P(A_2)$.

(a) Es gilt:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 2P(A_1) - P(A_1 \cap A_2)$$

Also:

$$P(A_1) = \frac{1}{2}\,[P(A_1 \cup A_2) + P(A_1 \cap A_2)] = 0.7$$

Damit folgt: $P(A_1^c) = 1 - P(A_1) = 0.3$

(b)

$$P(A_1^c \cap A_2^c) = P((A_1 \cup A_2)^c) = 1 - P(A_1 \cup A_2) = 0.1$$

(c)

$$P(A_1^c \cup A_2^c) = P((A_1 \cap A_2)^c) = 1 - P(A_1 \cap A_2) = 0.5$$

(d)

$$P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_1) - P(A_2 \cap A_1) = 0.4$$

(e)

$$P(A_2^c | A_1) = \frac{P(A_1 \cap A_2^c)}{P(A_1)} = \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7}$$

Aufgabe 13 In einer Gruppe von 900 Personen haben sich 600 prophylaktisch gegen Grippe impfen lassen. Nach einer bestimmten Zeit wird ermittelt, wer an einer Grippe erkrankt ist. Die Ergebnisse werden in einer sogenannten Vierfeldertafel dargestellt:

Gruppe	B (erkrankt)	B^c (nicht erkrankt)	Summe
A (mit Impfung)	60	540	600
A^c (ohne Impfung)	120	180	300
Summe	180	720	900

Das Ereignis A sei „Person ist geimpft“ und das Ereignis B „Person ist erkrankt“. A^c und B^c sind die jeweiligen Gegenereignisse zu A respective B. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und beschreiben Sie die Bedeutung der einzelnen Ergebnisse in Worten:

(i) $P(A)$ (iii) $P(A \cap B)$ (v) $P(A|B)$ (vii) $P(B|A^c)$

(ii) $P(B)$ (iv) $P(B|A)$ (vi) $P(A^c \cap B)$

Lösung:

(i) $P(A) = \frac{600}{900} \approx 0.667$: Bei der zufälligen Auswahl einer Person ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine geimpfte Person zu ziehen etwa 0.667.

(ii) $P(B) = \frac{180}{900} = 0.2$: Bei der zufälligen Auswahl einer Person ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine erkrankte Person zu ziehen 0.2.

(iii) $P(A \cap B) = \frac{60}{900} \approx 0.067$: Bei der zufälligen Auswahl einer Person ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine trotz Impfung erkrankte Person zu ziehen etwa 0.067.

(iv) $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{60}{600} = 0.1$: Eine Person, von der man weiss, dass sie geimpft wurde, ist mit Wahrscheinlichkeit 0.1 dennoch erkrankt.

(v) $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{60}{180} \approx 0.333$: Eine Person, von der man weiss, dass sie erkrankt ist, wurde mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0.333 geimpft.

(vi) $P(A^c \cap B) = \frac{120}{900} \approx 0.133$: Bei der zufälligen Auswahl einer Person ist die Wahrscheinlichkeit dafür, eine nicht geimpfte und auch erkrankte Person zu ziehen etwa 0.133.

(vii) $P(B|A^c) = \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{120}{300} = 0.4$: Eine Person, von der man weiss, dass sie nicht geimpft wurde, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.4 auch erkrankt.

Aufgabe 14 Ein Warenhausabwart wird jährlich etwa 100 mal alarmiert. Es handelt sich um rund 20 Feueralarme, 40 Einbruchalarme und 30 Wasserbruchalarme. Die restlichen Alarme betreffen die Liftanlagen. 70% der Feueralarme, 50% der Einbruchalarme, 60% der Wasserbruchalarme und 40% der Liftalarme sind Fehlalarme.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Fehlalarm handelt, wenn ein Alarm ausgelöst wurde?

(b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Feueralarm und einen Fehlalarm handelt, wenn ein Alarm ausgelöst wurde?

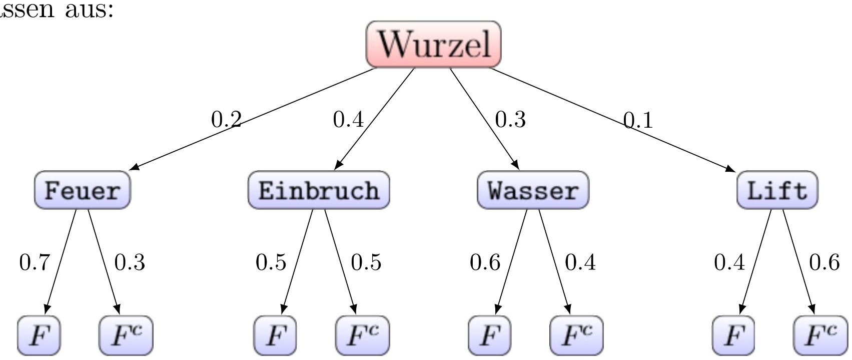
(c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehlalarm von einem defekten Feuermelder stammt (d.h. Fehlalarm unter der Bedingung Feueralarm wurde ausgelöst)?

Lösung

Sei

F: das Ereignis, ein Fehlalarm wurde ausgelöst,
A: das Ereignis, ein Feueralarm wurde ausgelöst,
E: das Ereignis, ein Einbruchalarm wurde ausgelöst,
W: das Ereignis, ein Wasserbruchalarm wurde ausgelöst,
L: das Ereignis, ein Liftalarm wurde ausgelöst.

Das Baumdiagramm mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sieht folgerdermassen aus:



(a) Die totale Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehlalarm ausgelöst wird, ist über 50% und somit relativ hoch. Sie kann folgendermassen berechnet werden

$$\begin{aligned} P(F) &= P(F|A) \cdot P(A) + P(F|E) \cdot P(E) + P(F|W) \cdot P(W) + P(F|L) \cdot P(L) \\ &= 0.7 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.4 + 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.1 = 0.56 \end{aligned}$$

(b) $P(F \cap A) = P(F|A) \cdot P(A) = 0.7 \cdot 0.2 = 0.14\,.$

(c) $P(F|A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = 0.7\,.$

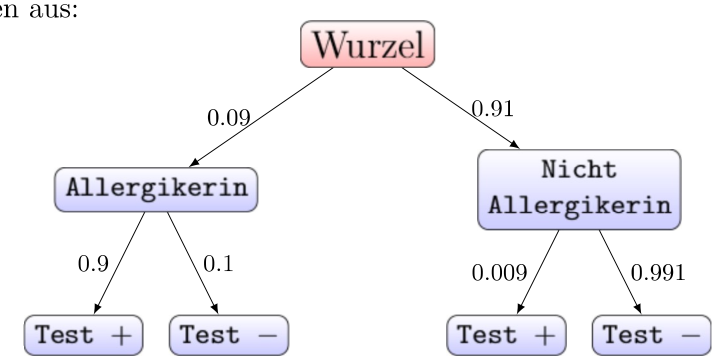
Aufgabe 15 9% der Bevölkerung leiden an einer bestimmten Allergie. Ein Allergietest zeigt bei 90% dieser Allergiker ein positives Resultat. Irrtümlicherweise reagiert er auch bei 0.9% der Nichtallergiker positiv. Eine zufällig ausgewählte Person wird getestet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

(a) erzielt die Versuchsperson ein positives Resultat?

(b) ist die Versuchsperson gesund, obwohl der Test positiv ausfällt?

Lösung

Das Baumdiagramm mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sieht folgerdermassen aus:



Wir definieren die Ereignisse

T: Test ist positiv
A: die Versuchsperson leidet an der Allergie

(a) Die totale Wahrscheinlichkeit ein positives Testergebnis zu erhalten, beträgt

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T|A) \cdot P(A) + P(T|A^c) \cdot P(A^c) \\ &= 0.09 \cdot 0.9 + 0.91 \cdot 0.009 = 0.08919 \end{aligned}$$

Also in ca. 9 % der getesteten Fälle, wird der Test positiv ausfallen.

(b)

$$P(A^c|T) = \frac{P(A^c \cap T)}{P(T)} = \frac{0.91 \cdot 0.009}{0.08919} \approx 0.0918 \,.$$

Die Wahrscheinlichkeit ein "falsch postives" Ergebnis zu erhalten, beträgt ca. 9.2%.

Aufgabe 16 An Freitagen fehlen Bonnie und Clyde oft im Unterricht, und zwar Bonnie mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.3 und Clyde mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.45. Die Wahrscheinlichkeit, dass beide anwesend sind, beträgt nur gerade 0.4.

(a) Sind die Anwesenheit von Bonnie und Clyde unabhängige Ereignisse?

(b) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bonnie an einem bestimmten Freitag anwesend ist, wenn man weiss, dass Clyde an diesem Tag anwesend ist?

(c) Was ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bonnie an einem bestimmten Freitag abwesend ist, wenn man weiss, dass Clyde an diesem Tag abwesend ist?

Hinweis: Für **(c)** das Gesetze von de Morgan (Mengenlehre) wird verwendet

Lösung

Wir definieren die Ereignisse:

- B : Bonnie anwesend
- C : Clyde anwesend

(a) Wir wissen, dass $\mathrm{P}(B) = 0.7$ und $\mathrm{P}(C) = 0.55$. Und wir sehen, dass

$$\mathrm{P}(B \cap C) = 0.4 \neq 0.7 \cdot 0.55 = 0.385$$

Somit sind die Anwesenheit von Bonnie und Clyde abhängige Ereignisse. (Damit sind auch die Abwesenheit von Bonnie und Clyde abhängige Ereignisse.)

(b)

$$\mathrm{P}(B|C) = \frac{\mathrm{P}(B \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{0.4}{0.55} \approx 0.727$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\text{“beide abwesend”}) &= \mathrm{P}(B^c \cap C^c) = 1 - \mathrm{P}(B \cup C) \\ &= 1 - (\mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B \cap C)) \\ &= 1 - (0.7 + 0.55 - 0.4) = 1 - 0.85 = 0.15 \end{aligned}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(\text{“Bonnie abwesend”}|\text{“Clyde abwesend”}) &= \mathrm{P}(B^c|C^c) = \frac{\mathrm{P}(B^c \cap C^c)}{\mathrm{P}(C^c)} \\ &= \frac{0.15}{0.45} = \frac{1}{3} \approx 0.\overline{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 17 Von einem gezinkten Würfel wissen wir, dass

- die Wahrscheinlichkeit für eine 6 gleich gross ist wie die Wahrscheinlichkeit aller andern Zahlen zusammen, d.h. $P(\{6\}) = P(\{1,2,3,4,5\})$
- die Zahlen 1 bis 5 gleich wahrscheinlich sind.

(a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(\{1\}), P(\{2\}), \ldots, P(\{6\})$.

(b) Wie gross ist beim zweimaligen Werfen dieses Würfels die Wahrscheinlichkeit, dass erst eine Sechs und dann eine Eins fällt? Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit ebenfalls für einen fairen Würfel und vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.

Lösung

(a) Wegen der Normierung und der Additivität (disjunkte Mengen) gilt

$$\mathrm{P}(\{1,2,3,4,5\}) + \mathrm{P}(\{6\}) = 1\,;$$

zusammen mit der Angabe $\mathrm{P}(\{1,2,3,4,5\}) = \mathrm{P}(\{6\})$ führt das zum Schluss $P(\{6\}) = P(\{1,2,3,4,5\}) = \frac{1}{2}$. Da die Zahlen von 1 bis 5 gleich wahrscheinlich sind, können wir (wieder wegen der Additivität) folgern:

$$\mathrm{P}(\{1\}) = \mathrm{P}(\{2\}) = \ldots = \mathrm{P}(\{5\}) = \frac{1}{10}$$

(b) Wir können davon ausgehen, dass die beiden Ereignisse "*erster Wurf ist* 6" und "*zweiter Wurf ist* 1" unabhängig voneinander sind, und dürfen deswegen die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten miteinander multiplizieren.

Für einen fairen Würfel erhalten wir $\mathrm{P}((6,1)) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, was man natürlich auch mit der Laplace-Wahrscheinlichkeit einsehen kann. Mit der gleichen Überlegung erhält man für den gezinkten Würfel $\mathrm{P}((6,1)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$. Dies konnten wir bisher nicht ausrechnen!

Aufgabe 18 Angenommen eine Grippewelle sucht eine Stadt heim. In 10% der Familien leidet die Mutter an der Grippe. In 10% der Familien leidet der Vater an der Grippe. In 2% der Familien leidet sowohl die Mutter als auch der Vater an der Grippe. Wir definieren die Ereignisse:

- A_1 : die Mutter hat die Grippe.
- A_2 : der Vater hat die Grippe.

(a) Sind die Ereignisse A_1 und A_2 unabhängig?

(b) Bestimmen Sie $P(A_2|A_1)$ und $P(A_2|A_1^c)$.

Lösung:

(a) Da

$$P(A_1) \cdot P(A_2) = 0.1 \cdot 0.1 = 0.01 \neq P(A_1 \cap A_2) = 0.02$$

sind die Ereignisse nicht unabhängig.

(b) Es gilt:

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{0.02}{0.1} = \frac{1}{5}$$

Weiter ist:

$$P(A_2|A_1^c) = \frac{P(A_2 \cap A_1^c)}{P(A_1^c)} = \frac{P(A_2) - P(A_2 \cap A_1)}{1 - P(A_1)} = \frac{0.1 - 0.02}{1 - 0.1} = 0.0\overline{8}$$

Aufgabe 19 Die Spülmaschine einer Getränkefirma spült nur 98% der Flaschen sauber. Daher werden die Flaschen nach dem Spülen kontrolliert. Die Kontrollmaschine zeigt jedoch nur 90% der sauberen Flaschen als sauber an, sortiert also fälschlicherweise 10% der sauberen Flaschen aus. Zudem werden 5% der noch verschmutzten Flaschen als sauber eingestuft, also fälschlicherweise nicht aussortiert.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Flasche, die sauber ist, aussortiert?

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine Flasche als sauber eingestuft?

(iii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine Flasche, die nicht aussortiert worden ist, tatsächlich sauber?

Lösung

(i) $P(\text{„aussortiert“}|\text{„sauber“}) = 0.1$

(ii) $P(\text{„nicht aussortiert“}) = 0.02 \cdot 0.05 + 0.98 \cdot 0.9 = 0.883$

(iii) $P(\text{„sauber“}|\text{„nicht aussortiert“}) = \frac{P(\text{„sauber“} \cap \text{„nicht aussortiert“})}{P(\text{„nicht aussortiert“})} = \frac{0.98 \cdot 0.9}{0.02 \cdot 0.05 + 0.98 \cdot 0.9} \approx 0.999$

Aufgabe 20 In Freiburg sind 80% aller Autos rot. Sie sehen nachts ein Auto, dass ihnen ***nicht rot erscheint***. Sie wissen, dass Sie ein rotes Auto nur in 70% aller Fälle korrekt erkennen, gegeben das Auto ist rot. Allerdings erkennen sie ein nicht-rotes Auto in 90% der Fälle korrekt.

(i) Listen (***nicht berechnen***) Sie sämtliche bedingten und nicht-bedingten Wahrscheinlichkeiten, die sich der Aufgabenstellung direkt entnehmen lassen.

Hinweis: Unterscheiden Sie zwischen der Aussage, dass ein Auto rot ist und der Aussage, dass Sie glauben ein rotes Auto gesehen zu haben.

(ii) Berechnen Sie mit welcher Wahrscheinlichtkeit das Auto ***wirklich rot*** ist, wenn Sie in Freiburg nachts ein Auto ***als rot wahrnehmen***.

Lösung

(i) Wir definieren die Ereignisse:

- R: Auto ist rot
- R^c: Auto ist nicht rot (Komplementär-Ereignis zu R)
- W: Auto wird als rot wahrgenommen
- W^c: Auto wird nicht als rot wahrgenommen

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(R) &= 0.8\,, \qquad \mathrm{P}(R^c) = 0.2 \\ \mathrm{P}(W|R) &= 0.7\,, \qquad \mathrm{P}(W^c|R^c) = 0.9 \end{aligned}$$

(ii)

$$\mathrm{P}(R|W) = \frac{\mathrm{P}(R \cap W)}{\mathrm{P}(W)} = \frac{\mathrm{P}(W|R) \cdot \mathrm{P}(R)}{\mathrm{P}(W)} = \frac{0.7 \cdot 0.8}{\mathrm{P}(W)}$$

Wir brauchen die totale Wahrscheinlichkeit $\mathrm{P}(W)$:

$$\mathrm{P}(W) = \mathrm{P}(W|R) \cdot \mathrm{P}(R) + \mathrm{P}(W|R^c) \cdot \mathrm{P}(R^c) = 0.7 \cdot 0.8 + (1 - 0.9) \cdot 0.2 = 0.58$$

Man muss hier benützen, dass $\mathrm{P}(W|R^c) = 1 - \mathrm{P}(W^c|R^c)$. Die gesuchte Wahrscheinlich ist somit $\mathrm{P}(R|W) = \frac{0.7 \cdot 0.8}{0.58} \approx 0.97\,$.