Aufgabe 1 Die Prüfungsergebnisse einer fiktiven Klassen sind auf Moodle unter der Dateiname `Exam_results.xlsx` zu finden. Die Klasse hat 2 Prüfungen geschrieben; beim ersten Test könnte man max. 20 Punkte und beim zweite Test könnte man max. 40 Punkte erreichen. Wir möchten mit Hilfe von deskriptiver Statistik untersuchen, ob das erste oder das zweite Test besser gelungen ist.

Lösungen siehe Jupyter Notebook auf Moodle für die Lösungen

Aufgabe 2 Die stetige Zufallsvariable X ist gleichverteilt zwischen 5 und 7, hat also die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } x \in [5,7] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(i) Bestimmen Sie die kumulative Verteilungsfunktion $F(x)$ zu $f(x)$ und veranschaulichen Sie die beiden Funktionen in einem Graphen.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(X < 5.5)$ und $P(5.8 < X < 6.8)$.

(iii) Berechnen Sie den Median und das 90%-Quantil der Verteilung.

Lösung

(i) Offensichtlich ist $F(x) = P(X < x)$ gleich 0 für $x < 5$ und gleich 1 für $x \geq 7$. Für $x \in [5,7]$ erwarten wir eine lineare Funktion. Und nach ein bisschen Überlegung, erhalten wir

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < 5 \\ \frac{x-5}{2}, & \text{für } x \in [5,7] \\ 1, & \text{für } x > 7 \end{cases}$$

Falls Sie bereits integrieren können, rechnen Sie $F(x)$ so aus

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{5}^{x} \frac{1}{2}dt = \frac{x-5}{2}.$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(X < 5.5) &= F(5.5) = \frac{1}{4}, \\ P(5.8 < X < 6.8) &= F(6.8) - F(5.8) = \frac{(6.8-5)}{2} - \frac{(5.8-5)}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Man kann grundsätzlich immer wahlweise via die Dichtefunktion $f(x)$ oder via die Verteilungsfunktion $F(x)$ rechnen.

(iii)

$$\begin{aligned} F^{-1}(p) &= 2 \cdot p + 5, \\ F^{-1}(0.5) &= 2 \cdot 0.5 + 5 = 6, \\ F^{-1}(0.9) &= 2 \cdot 0.9 + 5 = 6.8, \end{aligned}$$

Also $q_{0.5} = 6$ und $q_{0.9} = 6.8$.

Aufgabe 3 Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{falls } x \in [0,1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a \in \mathbb{R}_+$.

(i) Bestimmen Sie den Parameter a damit die Funktion f eine **Dichte** ist.

(ii) Berechnen Sie die zugehörige kumulative Verteilungsfunktion (CDF) und stellen Sie beide Funktionen graphisch dar.

(iii) Sei X eine Zufallsvariable mit der Dichtefunktion f. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und zeichnen Sie diese ebenfalls in die erstellten Graphiken hinein.

$$P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{3}{4}\right), \quad P\left(X \leq \frac{1}{2}\right), \quad P\left(X \geq \frac{3}{4}\right)$$

Lösung

(i) Wenn wir a ignorieren, erhalten wir einen rechtwinkligen Dreieck mit 2 Seiten, die beide Länge 1 haben (gleichschenklig). Also ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks gleich 0.5. Der Flächeninhalt unter der Kurve f muss eins werden, damit wir eine Dichte erhalten, d.h. es gibt nur die Möglichkeit $a = 2$.

Mit Integralrechnung würden wir das so ausrechnen. Der Flächeninhalt unter der Kurve f muss eins werden, heisst die folgende Bedingung muss erfüllt sein

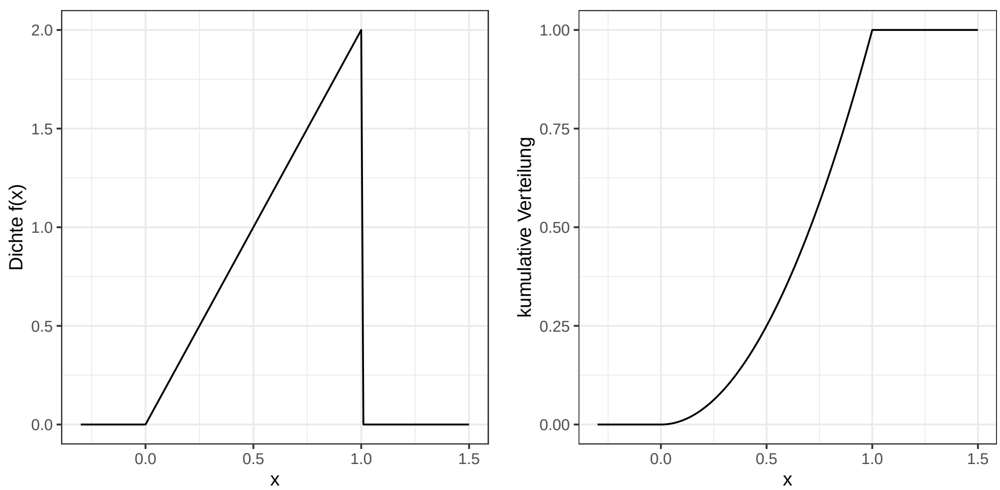
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 a \cdot x\, dx = 1\,.$$

Somit ist $a = 2$, weil

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 a \cdot x\, dx = a \cdot \frac{x^2}{2}\,\Big|_0^1 = a \cdot \frac{(1-0)}{2} = \frac{a}{2}\,.$$

(ii) Die zugehörige kumulative Verteilungsfunktion ist gegen durch

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{for } x < 0 \\ x^2, & \text{for } x \in [0,1] \\ 1, & \text{for } x > 1 \end{cases}$$



Falls Sie integrieren können, erhalten Sie den mittleren Teil dieser Funktion, indem Sie das folgende Integral ausführen

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} 2 \cdot u\,du = 2 \cdot \frac{u^2}{2}\Big|_0^x = x^2 - 0 = x^2\,.$$

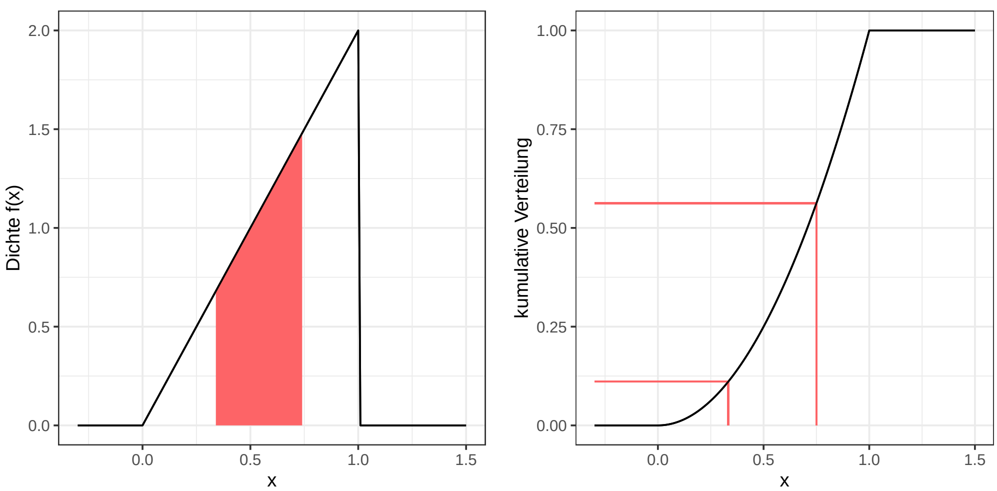
Falls Sie noch nicht integrieren können, überlegen Sie sich was für Dreiecke, dass Sie erhalten, wenn Sie $P(X \leq x)$ für verschiedene $x \in [0,1]$ ausrechnen. Die Dreiecke sind zwar immer noch rechtwinklig, aber nicht mehr gleichschenklig. Die vertikale Seite b ist doppelt so lang wie die horizontale Seite a (die Hypothenuse c ignorieren wir). Also machen wir z.B. so eine Tabelle um die kumulative Verteilung zu rechnen, und können so $F(x)$ erraten.

x	$P(X \leq x) = 0.5 \cdot x \cdot 2 \cdot x$
0.1	$0.1^2 = 0.01$
0.5	$0.5^2 = 0.25$
0.8	$0.8^2 = 0.64$
1	$1^2 = 1$

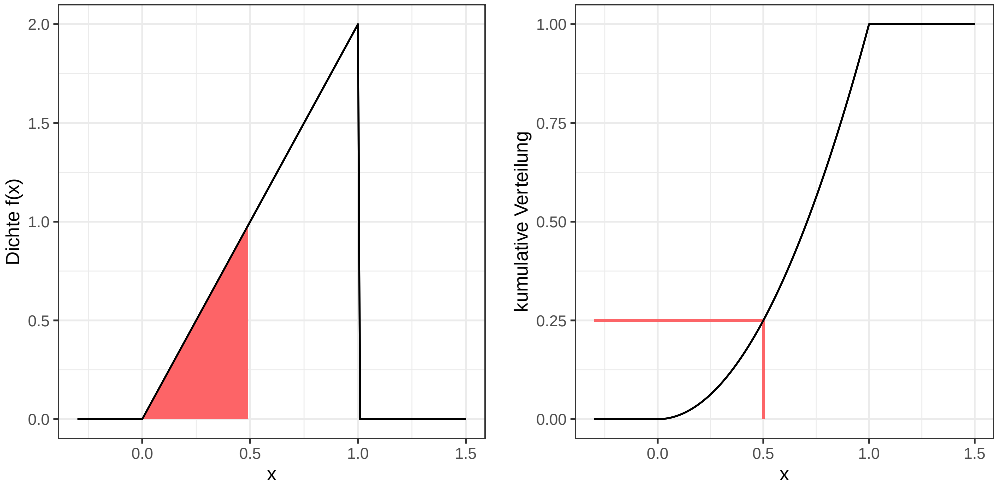
(iii) Diese Wahrscheinlichkeiten können wir sehr schnell berechnen indem wir die kumulative Verteilungsfunktion verwenden.

$$P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) \quad = \quad P\left(X \leq \frac{3}{4}\right) - P\left(X \leq \frac{1}{3}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.451\,,$$

Graphische Darstellung



$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \quad = \quad F\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0.25\,,$$



$$P\left(X \geq \frac{3}{4}\right) \quad = \quad 1 - P\left(X < \frac{3}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \approx 0.438\,.$$