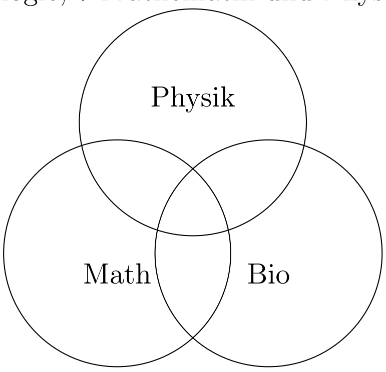
**Übungen in Mengenlehre, diagnostische Tests, Zufallsvariablen** **Serie 5**

**Aufgabe 1** Eine Befragung von 100 Studentinnen und Studenten hat das folgende Resultat ergeben: 32 studieren Mathematik, 20 Physik, 45 Biologie, 15 Mathematik und Biologie, 7 Mathematik und Physik, 10 Physik und Biologie, 30 keine dieser Fächer.




**(a)** Wieviele Studentinnen und Studenten studieren alle drei Fächer?

**(b)** Füllen Sie in alle 7 Teilgebiete der obigen Figur die korrekten Zahlen ein (d.h die Anzahl Elemente pro Partition soll in der jeweiligen Partition aufgeschrieben werden).

**(c)** Wie hoch schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig gewählte Person aus die Menge aller Studierenden genau ein Fach gewählt hat?

**Aufgabe 2** Benützen Sie die Einschluss-Ausschluss-Formel um die Anzahl der natürlichen Zahlen $n$ mit $1 \leq n \leq 6'300$ zu bestimmen, die ***weder durch 3, noch durch 5, noch durch 7 teilbar sind***.

**Aufgabe 3** Der ELISA-Test auf HIV-Infektion liefert bei 99.5% aller Infizierten ein positives Ergebnis und bei 99.5% aller nicht Infizierten ein negatives Ergebnis. In der Schweiz beträgt die Prävalenz der HIV-Infektion

- ca. 0.01% unter Mitgliedern der so genannten "low-risk" Population und
- ca. 15% unter Mitgliedern der "high-risk" Population (wie z.B. intravenöse Drogenbenutzer und -benutzerinnen).

**(a)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine positiv getestete Person aus der

i) low-risk Gruppe infiziert?
ii) high-risk Gruppe infiziert?

**(b)** Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine negativ getestete Person aus der

i) low-risk Gruppe nicht infiziert?
ii) high-risk Gruppe nicht infiziert?

**(c)** Wie hoch ist der positiv prädiktive Wert eines zweiten, **unabhängigen** ELISA-Tests für „low-risk" Probanden, bei denen der erste Test positiv ausgefallen war? Das Ergebnis des zweiten Tests ist niemals unabhängig vom Ergebnis des ersten Tests, aber hier treffen wir diese naive Annahme, um die Berechnung einfacher zu machen!

**Aufgabe 4** Eine unfaire Münze mit $P(\text{Zahl}) = \frac{1}{3}$ und $P(\text{Kopf}) = \frac{2}{3}$ wird dreimal hintereinander geworfen. Die Zufallsvariable $X$ ist gleich der Anzahl Resultate *Kopf*.

**(a)** Bestimmen Sie den Stichprobenraum $\Omega$ und die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse (=Ereignisse, die nur ein einziges Element von $\Omega$ umfassen).

**(b)** Bestimmen Sie das Bild (=angenommene Werte) der Zufallsvariablen $X$.

**(c)** Berechnen Sie die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung und die kumulative Verteilungsfunktion der Zufallsvariable $X$ und stellen Sie beide graphisch dar.

**(d)** Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$ mit Hilfe der berechneten Wahrscheinlichkeitsverteilung.

**(e)** Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $V(X)$ in dem Sie benützen, dass die Würfe ***unabhängig*** von einander sind.

**(f)** Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten im dem Sie die kumulative Verteilungsfunktion benützen. Zeichnen Sie die Werte direkt in Ihre Graphik aus Teil (c) hinein.

(i) $P(X \leq 1.5)$ (ii) $P(X > 1.5)$ (iii) $P(X \geq 1.5)$ (iv) $P(X = 1.5)$

**Aufgabe 5** In einer Urne befinden sich 5 rote und 5 weisse Kugeln. Sie ziehen zufällig 3 Kugeln ***ohne Zurücklegen***. Sei $X$ die Anzahl der roten gezogenen Kugeln.

**(a)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von $X$.

**(b)** Berechnen Sie die zugehörige kumulative Verteilungsfunktion.

**(c)** Stellen Sie die beiden Verteilungen aus Teil (a) und (b) graphisch dar.

**(d)** Berechnen Sie $E(X)$ und $V(X)$ mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

**(e)** Können Sie $E(X)$ und $V(X)$ auch berechnen, in dem Sie behaupten, dass die Ziehungen ***unabhängig*** von einander sind?

**(f)** Bestimmen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten im dem Sie die kumulative Verteilungsfunktion benützen. Zeichnen Sie die Werte direkt in die Graphik aus Teil (c) hinein.

(i) $P(X \leq 2)$ (ii) $P(X > 2)$ (iii) $P(X \geq 2)$ (iv) $P(X = 2)$

**Aufgabe 6** Zwei Personen steigen im Erdgeschoss in einen Lift. Jede der Personen steigt unabhängig von der anderen in einem der Stockwerke 1, 2, 3 oder 4 aus, je mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. Die Zufallsvariable $X$ gibt die Anzahl Halte an, die der Lift macht.

**(a)** Welche Werte kann $X$ annehmen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit?

**(b)** Berechnen Sie die zugehörige kummulative Verteilungsfunktion.

**(c)** Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $X$.

**Aufgabe 7** Wenn Sie im Casino Roulette spielen, interessiert Sie vermutlich nicht in erster Linie die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses, sondern der Gewinn (oder auch der Verlust), den Sie mit einer bestimmten Wette erwarten können. Der Stichprobenraum beim Roulette (französische Version) ist gegeben durch $\Omega = \{0, 1, 2, ..., 36\}$, wobei jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich ist. Nehmen wir nun an, dass wir einen Einsatz von 10 CHF auf die ersten 12 Zahlen (ohne Null) setzen, also auf das Ereignis $A = \{1, 2, 3, ..., 12\}$. Falls $A$ eintritt, erhalten wir den dreifachen Einsatz zurück, erzielen also einen Gewinn von 20 CHF.

**(a)** Macht es Sinn, diese Wette einzugehen?

**(b)** Können Sie bei höherem Einsatz mehr erwarten? Nehmen Sie an, Sie setzen 100 CHF auf die ersten zwölf Zahlen (ohne Null). Was ist Ihr erwarteter Gewinn?