

Appunti di Fisica

Alessio Novel

| | |
|--|----------|
| Introduzione..... | 4 |
| Meccanica..... | 4 |
| Cinematica del punto..... | 4 |
| Introduzione..... | 4 |
| Variabili cinematiche..... | 5 |
| Moto rettilineo..... | 11 |
| Moto verticale di un corpo..... | 15 |
| Moto armonico semplice..... | 16 |
| Moti su traiettoria curvilinea. Accelerazione tangenziale e normale..... | 18 |
| Moto circolare..... | 21 |
| Moto parabolico dei corpi..... | 24 |
| Dinamica del punto: le leggi di Newton..... | 27 |
| Principio d'inerzia: Introduzione al concetto di forza..... | 27 |
| Leggi di Newton..... | 29 |
| Classificazione delle forze..... | 31 |
| Quantità di moto. Impulso..... | 32 |
| Risultante delle forze. Equilibrio statico..... | 33 |
| Azione dinamica delle forze. Equilibrio dinamico..... | 34 |
| Forza peso..... | 35 |
| Reazione vincolare..... | 36 |
| Forza di attrito radente..... | 38 |
| Piano inclinato..... | 39 |
| Tensione dei fili..... | 41 |
| Forza elastica. Oscillatore armonico semplice..... | 44 |
| Pendolo semplice..... | 46 |
| Moti Relativi..... | 48 |
| Sistemi di riferimento. Velocità e accelerazione relative..... | 48 |
| Sistemi di riferimento inerziali. Relatività galileiana..... | 52 |
| Sistemi di riferimento non inerziali. Forze apparenti..... | 53 |
| Dinamica del punto: lavoro, energia, momenti..... | 55 |
| Lavoro. Potenza. Energia cinetica..... | 55 |
| Forze conservative..... | 60 |
| Energia potenziale..... | 61 |
| Conservazione dell'energia meccanica..... | 63 |
| Alcune osservazioni sulla dinamica del punto..... | 64 |

| | |
|---|-----------|
| Dinamica dei sistemi di punti materiali..... | 65 |
| Sistemi di punti. Forze interne e forze esterne..... | 65 |
| Centro di massa di un sistema di punti. Teorema del moto del centro di massa..... | 67 |
| Conservazione della quantità di moto..... | 71 |
| Sistema di riferimento del centro di massa..... | 72 |
| Teoremi di Konig..... | 73 |
| Il teorema dell'energia cinetica..... | 75 |
| Fenomeni d'urto..... | 77 |
| Urti tra due punti materiali..... | 77 |
| Urto elastico..... | 80 |
| Urto completamente anelastico..... | 82 |
| Urto anelastico..... | 83 |
| Gravitazione..... | 85 |
| Forze centrali..... | 85 |
| La forza gravitazionale..... | 86 |
| Massa inerziale e massa gravitazionale..... | 91 |
| Campo gravitazionale..... | 92 |
| Energia potenziale gravitazionale..... | 94 |
| Termodinamica..... | 95 |
| Sistemi termodinamici..... | 95 |
| Introduzione..... | 95 |
| Equilibrio termodinamico..... | 98 |
| Definizione di temperatura. Termometri..... | 101 |
| Calorimetria..... | 104 |
| Processi isotermi. Cambiamenti di fase..... | 108 |
| Trasmissione del calore..... | 113 |
| Dilatazione termica di solidi e liquidi..... | 118 |
| Trasformazioni termodinamiche..... | 120 |
| Lavoro termodinamico..... | 125 |
| Primo principio della termodinamica..... | 128 |
| Esperimenti di Joule..... | 128 |
| Primo principio della termodinamica. Energia interna..... | 130 |
| Leggi dei gas. Equazione di stato dei gas ideali..... | 134 |
| Calori specifici del gas ideale..... | 140 |
| Energia interna del gas ideale..... | 141 |
| Studio di alcune trasformazioni del gas ideale..... | 145 |
| Trasformazioni cicliche. Ciclo di Carnot..... | 152 |
| Teoria cinetica dei gas..... | 158 |
| Significato cinetico di temperatura e calore..... | 165 |
| Secondo principio della termodinamica..... | 166 |
| Enunciati del secondo principio della termodinamica..... | 166 |

| | |
|--|-----|
| Reversibilità e irreversibilità..... | 171 |
| Teorema di Carnot..... | 172 |
| Teorema di Clausius..... | 175 |
| La funzione di stato entropia..... | 178 |
| Il principio di aumento dell'entropia..... | 183 |
| Calcoli di variazioni di entropia..... | 185 |
| Entropia del gas ideale..... | 189 |
| Entropia e probabilità..... | 192 |
| Energia inutilizzabile..... | 195 |
| Conclusioni termodinamiche sull'entropia..... | 197 |
| Cenni sul terzo principio della termodinamica..... | 198 |

Introduzione

La domanda su cui si basa tutta la fisica è **l'origine** della realtà come meccanismo, così da poter capire che cosa l'umanità ha imparato fino ad oggi su un determinato argomento.

La fisica è prima una scienza osservativa e poi sperimentale (infatti alla base della fisica c'è il movimento).

Come viene insegnato a scrivere con lo scopo di perfezionare la lettura, noi studieremo certi argomenti per capire meglio come funziona la realtà.

Lo studio della Fisica Generale ha un importante carattere culturale, sia sotto l'aspetto strettamente propedeutico sia perché presenta una metodologia generale di indagine e di rappresentazione dei fenomeni naturali.

Gli argomenti di Fisica Generale sono:

- Meccanica (moto dei corpi in generale e poi in svariate situazioni particolari)
- Termodinamica (fenomeni termici tra cui le trasformazioni di calore in lavoro)
- Elettromagnetismo (fenomeni dovuti all'esistenza in natura di cariche elettriche)

Questa suddivisione non deve essere presa in modo rigido, in quanto numerosi fenomeni vengono illustrati ricorrendo a nozioni sviluppate nelle varie parti.

Meccanica

La meccanica è stato il primo argomento della Fisica Classica (ovvero quella macroscopica) ad essere sistemato concettualmente.

Le leggi fondamentali che incontreremo, anche se possono apparire come relazioni algebriche, in realtà esprimono delle condizioni sulle variazioni di certe grandezze fisiche e quindi sono leggi che indicano come si evolve il fenomeno da esse descritto.

Le leggi fisiche sono relazioni quantitative tra grandezze. Esse sono ricavate direttamente o indirettamente da osservazioni di fenomeni naturali e, quando possibile, da esperimenti che riproducono in laboratorio i fenomeni. La misura delle grandezze fisiche è pertanto un aspetto fondamentale della sperimentazione e della tecnologia che ne segue; essa comporta da una parte la definizione di unità di misura e di campioni delle stesse, dall'altra la precisazione delle metodologie seguite.

Cinematica del punto

Introduzione

La meccanica riguarda lo **studio del moto di un corpo**: essa spiega la relazione che esiste tra le cause che generano il moto e le caratteristiche di questo e la esprime con leggi quantitative. Se il corpo è esteso, il moto può risultare notevolmente complicato.

Per questo motivo iniziamo lo studio del moto dal più semplice corpo, quello **puntiforme**, detto punto materiale o spesso anche particella: si tratta di un corpo privo di dimensioni ovvero che

presenti dimensioni trascurabili rispetto a quelle dello spazio in cui può muoversi o degli altri corpi con cui può interagire.

Per esempio il moto di un mezzo di trasporto o di un satellite può essere trattato in prima approssimazione come quello di un punto materiale, allo scopo di ottenere facilmente alcune informazioni medie.

Inoltre, più in generale, lo studio del **sistema punto materiale** permette di definire nel modo più facile alcune grandezze meccaniche fondamentali e di capirne il significato con immediatezza, in assenza delle complicazioni che deriverebbero dalla struttura estesa del corpo.

L'analisi completa del moto riguarda sia il collegamento del moto stesso alle interazioni del corpo con i corpi circostanti che la descrizione geometrica dell'evoluzione temporale del fenomeno di movimento.

Questa parte della meccanica, descrittiva del moto di un corpo, indipendentemente dalle cause che lo determinano, viene detta **cinematica**, mentre il perché del moto viene studiato nella **dinamica**. Quindi la dinamica è la branca della fisica che descrive l'origine del movimento, ovvero ciò che lo causa.

Il moto di un punto materiale è determinato se è nota la sua posizione in funzione del tempo in un determinato **sistema di riferimento**, ossia ad esempio le sue coordinate $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ in un sistema di riferimento cartesiano.

Un sistema di riferimento è una regola (o un insieme di regole) che consente di annotare un fenomeno in maniera non ambigua, e di riprodurlo.

La **traiettoria** è il luogo dei punti occupati successivamente dal punto in movimento e costituisce una curva continua nello spazio. Lo studio delle variazioni di posizione lungo la traiettoria nel tempo porterà a definire il concetto di **velocità**, mentre lo studio delle variazioni delle velocità con il tempo introdurrà la grandezza **accelerazione** (si noti che l'occuparsi di variazioni comporterà necessariamente il collegamento con il concetto matematico di derivata).

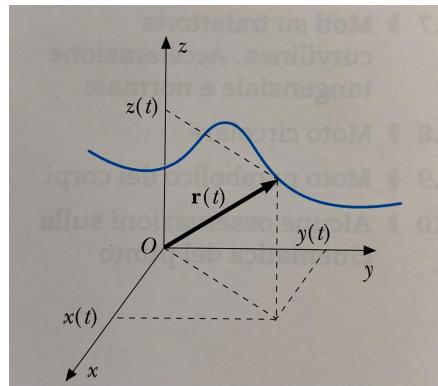
Le **grandezze fondamentali** in cinematica sono pertanto la **posizione**, la **velocità**, **l'accelerazione** e il **tempo**. Il tempo molto spesso viene usato come variabile indipendente, in funzione di cui si esprimono le altre grandezze.

La **quiete** è un particolare tipo di moto in cui le coordinate restano costanti e quindi velocità e accelerazione sono nulle. Notiamo che è molto importante il sistema di riferimento rispetto a cui si osserva il moto, perché un punto in quiete in un sistema di riferimento potrebbe apparire in moto rispetto ad un altro (persona ferma in un mezzo di trasporto in movimento, vista dal mezzo o dal suolo).

Variabili cinematiche

La **traiettoria** di un punto P in moto è in generale una **linea curva**. Per descrivere come avviene lo spostamento di P a un certo istante, non basta specificare il valore numerico della

distanza percorsa, ma occorre precisare in quale direzione sta avvenendo il moto e con quale verso (in generale questa direzione istantanea cambia continuamente lungo la traiettoria).



Grandezze con caratteristiche direzionali oltre che numeriche si chiamano **vettori**.

Dato un sistema di riferimento cartesiano con origine O e assi x, y, z , la **posizione** del punto può essere individuata attraverso il **raggio vettore** \bar{r} che congiunge l'origine O con il punto P . Durante il moto la posizione del punto cambia nel tempo e di conseguenza il raggio vettore è funzione del tempo: $\bar{r} = \bar{r}(t)$.

Se è nota la dipendenza dal tempo di \bar{r} , è individuato il moto del punto P , ovvero conoscere $\bar{r}(t)$ significa conoscere $x(t), y(t), z(t)$ e viceversa. La $\bar{r}(t)$ (o equivalentemente le $x(t), y(t), z(t)$) si chiamano **leggi orarie o equazioni del moto**

$$\bar{r}(t) = \overline{OP} = x(t)\bar{u}_x + y(t)\bar{u}_y + z(t)\bar{u}_z$$

dove \bar{u}_x, \bar{u}_y e \bar{u}_z sono i versori degli assi cartesiani.

Casi particolari si hanno quando il punto è vincolato a muoversi su un piano o su una retta. Nel caso del moto rettilineo scegliendo un asse, per esempio l'asse x , lungo la retta su cui si svolge il movimento il raggio vettore avrà solo la componente $x(t)$.

Quindi in base alla dimensione del moto (tridimensionale, bidimensionale o unidimensionale) cambia il numero di variabili scalari necessarie a descriverlo completamente.

Consideriamo due posizioni occupate dal punto P al tempo t e al tempo $t + \Delta t$: esse sono individuate dai vettori $\bar{r}(t)$ e $\bar{r}(t + \Delta t) = \bar{r}(t) + \Delta \bar{r}$.

Il vettore $\Delta \bar{r}$ si chiama **vettore spostamento** e si definisce **velocità media** del punto materiale durante l'intervallo di tempo Δt il vettore rapporto tra lo spostamento $\Delta \bar{r}$ e l'intervallo di tempo necessario per percorrerlo:

$$\bar{v}_m = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

La velocità media è un vettore parallelo allo spostamento (in quanto rapporto tra il vettore spostamento e uno scalare), ed esprime la rapidità con cui avviene lo spostamento nel tempo (è un'informazione complessiva senza fornire alcuna indicazione su come avviene il moto nell'intervallo di tempo considerato).

Per ovviare a questa indeterminazione si può pensare di ridurre l'intervallo Δt . Il processo di suddivisione in intervalli temporali sempre più piccoli può essere continuato e sperimentalmente il limite a tale procedura è posto dalla capacità di apprezzare piccoli intervalli da parte degli strumenti utilizzati per la misura degli intervalli di spazio e di tempo.

In ogni caso se il vettore \bar{r} risulta suddiviso in un numero elevatissimo di spostamenti infinitesimi $d\bar{r}$, ciascuno percorso nel tempo dt , si può definire la velocità istantanea, a un istante t , del punto in movimento come il rapporto

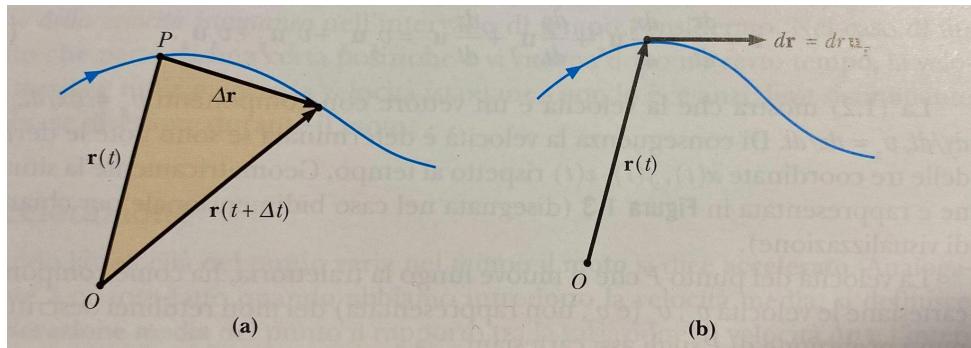
$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

calcolato in quel determinato istante.

Il metodo che abbiamo descritto in modo fisico consiste matematicamente nel calcolare il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ del rapporto incrementale $\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}$, ossia della velocità media.

Pertanto la **velocità istantanea** (o semplicemente velocità) di un punto è data dalla derivata della posizione rispetto al tempo.

Essendo la derivata del raggio vettore rispetto al tempo, la velocità è anch'essa un vettore e rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerato.



Osserviamo che al limite l'incremento $d\bar{r}$ infinitesimo del raggio vettore risulta in **direzione tangente alla traiettoria nel punto P** : il vettore velocità di un punto, essendo parallelo a $d\bar{r}$, è sempre tangente alla traiettoria, per cui possiamo scrivere

$$\bar{v} = v \bar{u}_T$$

dove v è il modulo della velocità e \bar{u}_T è il versore della tangente alla curva, variabile nel tempo man mano che il punto avanza lungo la traiettoria.

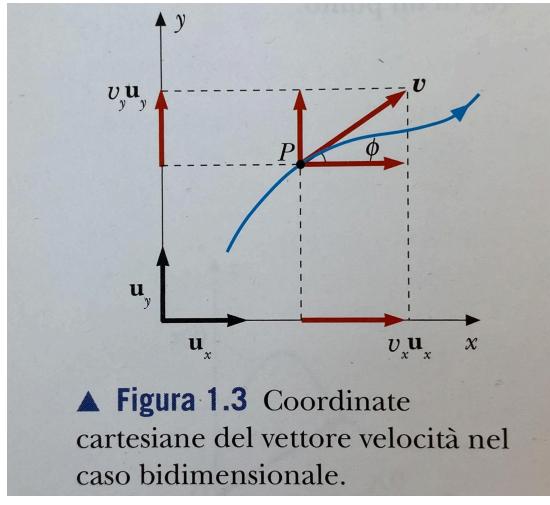
La traiettoria del moto e il fatto che la velocità si scrive $v \bar{u}_T$ sono **caratteristiche intrinseche**, ovvero che non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento.

Ad esempio spostando l'origine sicuramente cambia \bar{r} , ma non cambia $\bar{d}\bar{r}$ e di conseguenza neanche $\bar{d}\bar{r}$. Si parla di **invarianza delle relazioni vettoriali rispetto alla scelta del sistema di riferimento**.

Poiché $\bar{r} = x\bar{u}_x + y\bar{u}_y + z\bar{u}_z$ abbiamo che

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\bar{u}_x + \frac{dy}{dt}\bar{u}_y + \frac{dz}{dt}\bar{u}_z = v_x\bar{u}_x + v_y\bar{u}_y + v_z\bar{u}_z$$

Di conseguenza la velocità è determinata se sono note le derivate delle tre coordinate $x(t), y(t), z(t)$ rispetto al tempo. La derivata di un vettore non è altro che la derivata delle sue componenti.



La velocità del punto P che si muove lungo la traiettoria, ha come componenti cartesiane le velocità v_x, v_y (e v_z non rappresentata) dei moti rettilinei descritti dai punti di proiezione di P sugli assi cartesiani.

Dunque se è nota la posizione in funzione del tempo è possibile calcolare la velocità del punto in funzione del tempo.

Possiamo d'altra parte risolvere il problema inverso, cioè ricavare la funzione $\bar{r}(t)$ se è nota la dipendenza dal tempo della velocità istantanea $\bar{v}(t)$.

Supponiamo che il punto materiale si trovi nella posizione \bar{r} al tempo t e nella posizione $\bar{r} + d\bar{r}$ al tempo $t + dt$. Dalla formula della velocità istantanea, ovvero $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ vediamo che lo spostamento infinitesimo $d\bar{r}$ è eguale al prodotto del tempo dt impiegato a percorrerlo per il valore della velocità al tempo t

$$d\bar{r} = \bar{v}(t) dt$$

qualunque sia la dipendenza della velocità dal tempo.

Lo spostamento complessivo in un intervallo finito di tempo $\Delta t = t - t_0$, è dato dalla somma vettoriale di tutti i successivi spostamenti infinitesimi $d\bar{r}$. Per fare il calcolo utilizziamo

l'operazione di integrazione $\Delta \bar{r} = \int_{r_0}^{\bar{r}} d\bar{r} = \int_{t_0}^t \bar{v}(t) dt$.

Il primo integrale è immediato e vale $\bar{r} - \bar{r}_0$ con $\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0)$, pertanto otteniamo

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(t_0) + \int_{t_0}^t \bar{v}(t) dt$$

Questa è la relazione vettoriale generale che permette il calcolo della posizione conoscendo la velocità in funzione del tempo, qualunque sia il tipo di moto.

$\bar{r}(t_0)$ (o \bar{r}_0) rappresenta la **posizione iniziale** del punto, occupata nell'istante iniziale t_0 .

Pertanto per calcolare $\bar{r}(t)$, nota $\bar{v}(t)$, è necessario conoscere la condizione iniziale del moto.

Dalla definizione di velocità media e da questa formula ricaviamo la relazione tra velocità media e velocità istantanea:

$$\bar{v}_m = \frac{\bar{r}(t) - \bar{r}(t_0)}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \bar{v}(t) dt$$

Quindi la velocità media equivale al valore medio della velocità istantanea nell'intervallo di tempo considerato.

Quando la velocità del punto varia nel tempo il **moto** si dice **accelerato**.

Analogamente a quanto fatto con la velocità media, si definisce **accelerazione media** del punto il rapporto tra la variazione di velocità $\bar{\Delta v}$ e l'intervallo di tempo Δt in cui avviene tale variazione:

$$\bar{a}_m = \frac{\bar{\Delta v}}{\Delta t}$$

Per ottenere l'**accelerazione istantanea** (o accelerazione), cioè la rapidità di variazione temporale della velocità bisogna calcolare il limite ponendo $\Delta t \rightarrow 0$ e otteniamo

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$$

L'accelerazione è dunque la derivata del vettore velocità rispetto al tempo, ovvero la derivata seconda del vettore posizione rispetto al tempo.

Se $\bar{a} = 0$ la velocità è costante in modulo, direzione e verso: il punto si muove su una retta con modulo della velocità costante (moto rettilineo uniforme).

Ne segue che:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt} \bar{u}_x + \frac{dv_y}{dt} \bar{u}_y + \frac{dv_z}{dt} \bar{u}_z = \frac{d^2 x}{dt^2} \bar{u}_x + \frac{d^2 y}{dt^2} \bar{u}_y + \frac{d^2 z}{dt^2} \bar{u}_z = a_x \bar{u}_x + a_y \bar{u}_y + a_z \bar{u}_z$$

Le componenti cartesiane dell'accelerazione sono le accelerazioni dei moti rettilinei proiezioni sugli assi del moto di P lungo la traiettoria curva.

Dunque, nota la velocità in funzione del tempo, è possibile calcolare l'accelerazione del punto in funzione del tempo. Data la similitudine con quello fatto in precedenza, si può dedurre che sia vero anche il viceversa, infatti

$$d\bar{v} = \bar{a}(t) dt$$

Integrando tra un istante t_0 in cui è nota la velocità $\bar{v}(t_0)$ e t :

$$\bar{v}(t) = \bar{v}(t_0) + \int_{t_0}^t \bar{a}(t) dt$$

Dunque per calcolare esplicitamente $\bar{v}(t)$ è necessario conoscere la forma analitica di $\bar{a}(t)$ e la **velocità iniziale** $\bar{v}(t_0)$ (o \bar{v}_0).

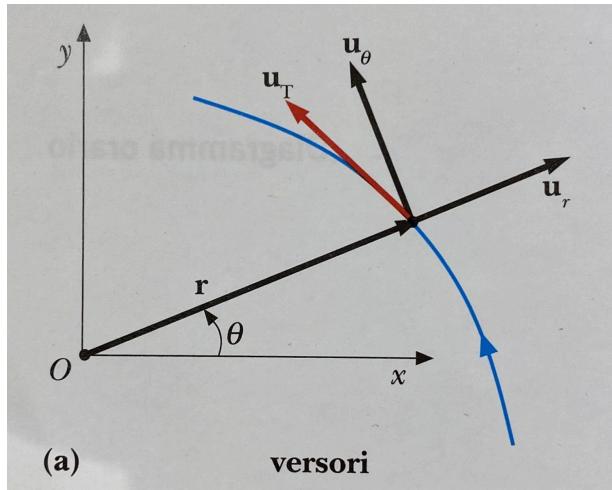
Nel caso del moto su di un piano, la posizione del punto viene individuata da due coordinate.

Queste due coordinate possono essere:

- Con riferimento ad assi cartesiani ortogonali, $x(t)$ e $y(t)$
- In termini di coordinate polari nel piano, $r(t)$ e $\theta(t)$

Le relazioni che intercorrono tra le coordinate cartesiane e quelle polari sono

$$x = r \cos(\theta) \quad y = r \sin(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan(\theta) = \frac{y}{x}$$



Possiamo quindi introdurre i vettori \bar{u}_r e \bar{u}_θ , che sono rispettivamente i versori della direzione di \bar{r} e della ortogonale alla stessa (si noti che questi versori cambiano direzione, ruotano, durante il moto).

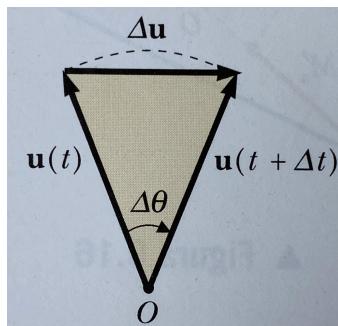
Dunque il raggio vettore \bar{r} può essere espresso come $\bar{r}\bar{u}_r$ e pertanto:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\bar{u}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\bar{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\bar{u}_\theta = \bar{v}_r + \bar{v}_\theta$$

Questo perchè un versore è per definizione un vettore di modulo unitario, ciò che può cambiare in funzione di t è solo la direzione, cioè il versore può compiere solamente una rotazione di un certo angolo $\Delta\theta$. Possiamo quindi scrivere

$$\Delta\bar{u} = \bar{u}(t + \Delta t) - \bar{u}(t)$$

essendo $\Delta\bar{u}$ la corda che unisce gli estremi dell'arco di circonferenza descritto da $\bar{u}(t)$ nella rotazione di $\Delta\theta$.



Al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ la corda $\bar{\Delta u}$ tende a un vettore infinitesimo $d\bar{u}$, perpendicolare a $\bar{u}(t)$ (dal momento che $\Delta\theta \rightarrow 0$ e quindi gli angoli che $\bar{\Delta u}$ forma con $\bar{u}(t)$ e $\bar{u}(t + \Delta t)$ tendono a 90° per la regola della somma degli angoli di un triangolo che fa 180°), e cui il modulo si confonde con l'arco, la cui formula è:

$$du = |u(t)| d\theta = d\theta \quad \Rightarrow \quad d\bar{u} = d\theta \bar{u}_N$$

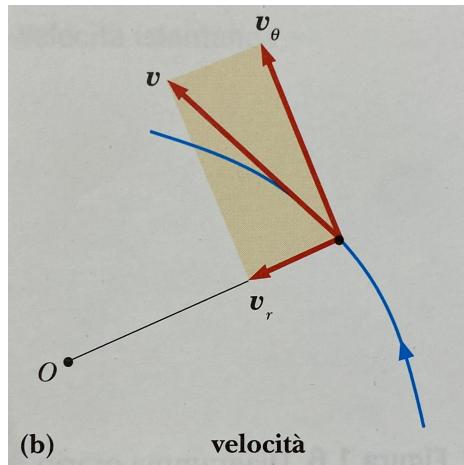
essendo \bar{u}_N un versore perpendicolare a $\bar{u}(t)$. Definiamo quindi la **derivata del versore** $\bar{u}(t)$ come

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \bar{u}_N$$

La derivata di un versore è un vettore perpendicolare al versore, di modulo $\frac{d\theta}{dt}$, in generale diverso da 1: in altre parole $\frac{d\bar{u}}{dt}$ non è un versore.

Dunque, dato $\bar{v} = \bar{v}_r + \bar{v}_\theta = \frac{dr}{dt} \bar{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \bar{u}_\theta$ la velocità (che è sempre tangente alla traiettoria come sappiamo) si scomponete in due componenti:

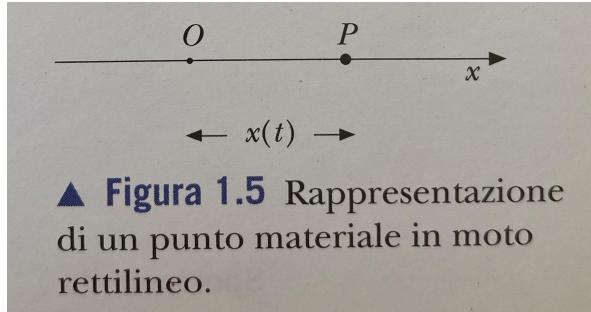
- La **velocità radiale** \bar{v}_r , diretta lungo \bar{r} e di modulo $\frac{dr}{dt}$
- La **velocità trasversa** \bar{v}_θ , ortogonale a \bar{r} e di modulo $r \frac{d\theta}{dt}$



Dunque \bar{v}_r dipende dalle variazioni del modulo del raggio vettore, invece \bar{v}_θ è collegata alle variazioni di direzione dello stesso.

Moto rettilineo

Il moto più semplice da trattare è quello rettilineo (unidimensionale). Esso si svolge lungo una retta sulla quale vengono fissati arbitrariamente un'origine e un verso; il moto del punto è descrivibile tramite una sola coordinata $x(t)$.

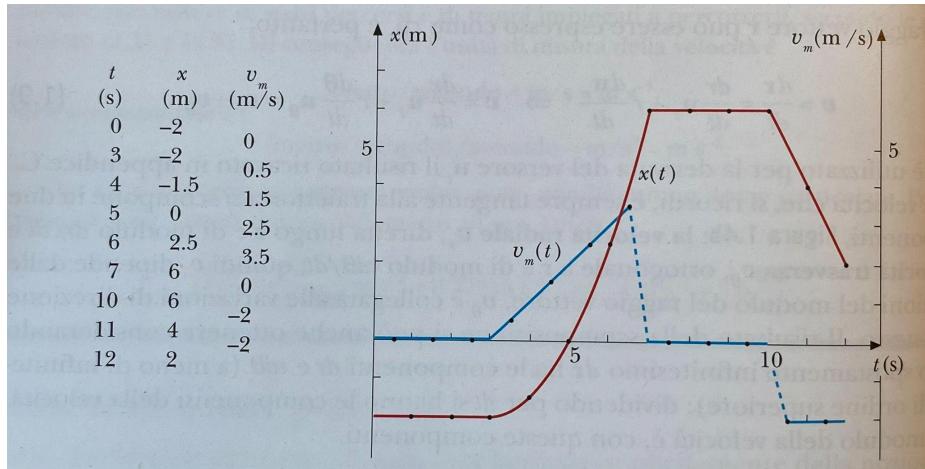


In altre parole i vettori $\bar{r}, \bar{v}, \bar{a}$ hanno una sola componente e le formule che abbiamo visto assumono una formula particolarmente semplice.

Le considerazioni che verranno fatte in questo paragrafo possono essere ripetute, per un moto su traiettoria qualsiasi, per tutte le componenti, ossia per ciascuno dei moti proiettati.

È possibile visualizzare la posizione in funzione del tempo in un semplice grafico con due assi cartesiani. Sull'asse delle ordinate riportiamo i valori di x e su quello delle ascisse i corrispondenti valori del tempo: la figura si chiama **diagramma orario** e corrisponde al grafico della funzione $x(t)$.

Le unità di riferimento dei due assi e la scelta dell'origine è arbitraria, è conveniente scegliere $t = 0$ come il tempo di inizio o fine della nostra osservazione ma ciò non è assolutamente necessario.



Supponiamo che all'istante $t = t_1$ il punto si trovi nella posizione x_1 e all'istante $t = t_2$ nella posizione x_2 . Lo **spostamento** del punto nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ è $\Delta x = x_2 - x_1$. La **velocità media** v_m del punto è definita come rapporto tra lo spostamento Δx e l'intervallo di tempo Δt :

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Per meglio individuare le variazioni della funzione $x(t)$ aumentiamo il numero di misure nell'intervallo di spazio Δx , cioè suddividiamo l'intervallo Δx in numerosi piccoli intervalli $(\Delta x)_1, (\Delta x)_2, \dots, (\Delta x)_n$ percorsi rispettivamente negli intervalli di tempo $(\Delta t)_1, (\Delta t)_2, \dots, (\Delta t)_n$.

Le corrispondenti velocità medie sono $v_i = \frac{(\Delta x)_i}{(\Delta t)_i}$.

Se il moto rettilineo ha velocità costante nel tempo, abbiamo: $v_1 = v_2 = \dots = v_n = v_m$.

Se suddividiamo in un numero elevatissimo Δx in tanti intervallini dx , ciascuno percorso nel tempo dt , si può definire la velocità istantanea, a un istante t , del punto in movimento come il rapporto

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Il metodo che abbiamo descritto in modo fisico consiste matematicamente nel calcolare il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ del rapporto incrementale $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. Pertanto la **velocità istantanea** di un punto nel moto rettilineo è data dalla derivata della posizione rispetto al tempo e rappresenta la rapidità di variazione temporale della posizione nell'istante t considerato.

In questa formula, l'unica componente v_x della velocità vettoriale è stata indicata semplicemente con v , non essendovi possibilità di confonderla con le altre componenti.

Il segno della velocità indica il verso del moto sull'asse x :

- Se $v > 0$ la coordinata x cresce (il punto va da sinistra verso destra)
- Se $v < 0$ il moto avviene nel verso opposto

A sua volta la velocità può essere funzione del tempo $v(t)$. Nel caso particolare in cui sia $v = \text{costante}$ si parla di moto rettilineo uniforme.

In conclusione, se è nota (perché calcolata o misurata) la funzione $x(t)$, ovvero se è nota la **legge oraria**, si può ottenere la velocità istantanea con l'operazione di derivazione.

Possiamo d'altra parte risolvere il problema inverso, cioè ricavare la funzione $x(t)$ se è nota la dipendenza dal tempo della velocità istantanea, $v(t)$.

Supponiamo che il punto materiale si trovi nella posizione x al tempo t e nella posizione $x + dx$ al tempo $t + dt$, dalla formula $v = \frac{dx}{dt}$ vediamo che lo spostamento infinitesimo dx è eguale al prodotto del tempo dt impiegato a percorrerlo per il valore della velocità al tempo t

$$dx = v(t) dt$$

qualunque sia la dipendenza della velocità dal tempo.

Lo spostamento complessivo sulla retta su cui si muove il punto, in un intervallo finito di tempo $\Delta t = t - t_0$, è dato dalla somma di tutti i successivi valori dx . Per fare il calcolo utilizziamo

l'operatore di integrazione $\Delta x = \int_{x_0}^x dx = \int_{t_0}^t v(t) dt$. Il primo integrale è immediato e vale $x - x_0$;

pertanto

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Il termine x_0 rappresenta la **posizione iniziale** del punto, occupata nell'istante t_0 . Pertanto per calcolare $x(t)$, nota $v(t)$, è necessario conoscere la condizione iniziale del moto.

Ricordando la definizione di velocità media, $v_m = \frac{x-x_0}{t-t_0}$, ricaviamo la relazione tra velocità media e velocità istantanea:

$$v_m = \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^t v(t) dt$$

Come prima applicazione di $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$ consideriamo il caso particolare del **moto rettilineo uniforme**, in cui $v = \text{costante}$. Si ha:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt = x_0 + v(t - t_0)$$

E se $t_0 = 0$ abbiamo:

$$x(t) = x_0 + vt$$

Queste formule costituiscono le **leggi orarie o equazioni del moto rettilineo uniforme**, esse mostrano che in questo moto la posizione è una funzione lineare del tempo: in tempi eguali sono percorsi spazi eguali (la velocità istantanea è costante e coincide con la velocità media).

Abbiamo detto che nel caso più generale di moto rettilineo la velocità è funzione del tempo, $v(t)$. Quando la velocità del punto varia nel tempo il **moto si dice accelerato**. Se tra gli istanti t_1 e t_2 la velocità varia da v_1 a v_2 , si definisce **accelerazione media** del punto il rapporto tra la variazione di velocità Δv e l'intervallo di tempo Δt in cui avviene la variazione

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Con un procedimento analogo a quello utilizzato per passare dal concetto di velocità media a quello di velocità istantanea definiamo l'**accelerazione istantanea**, cioè la rapidità di variazione temporale della velocità, come

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'accelerazione istantanea è dunque la derivata della velocità rispetto al tempo, ovvero la derivata seconda della posizione rispetto al tempo.

Se $a = 0$ la velocità è costante (moto rettilineo uniforme), quando a è positiva la velocità cresce nel tempo mentre quando a è negativa la velocità decresce.

Nota la dipendenza della velocità dal tempo abbiamo dunque visto come con l'operazione di derivazione si ottenga la funzione $a(t)$. Se invece conosciamo $a(t)$ possiamo ricavare $v(t)$ tramite l'integrazione dell'equazione differenziale.

Dal legame tra l'accelerazione e la variazione di velocità nel tempo dt otteniamo

$$dv = a(t)dt$$

scriviamo $\Delta v = \int_{v_0}^v dv = \int_{t_0}^t a(t)dt$ e pertanto

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t)dt$$

Questa relazione generale permette il calcolo della velocità se è nota l'accelerazione in funzione del tempo, per calcolare esplicitamente $v(t)$ si devono conoscere la forma analitica di $a(t)$ e la velocità iniziale v_0 .

Il moto rettilineo più generale è vario, intendendo con questo termine che l'accelerazione non è costante; se invece l'accelerazione è costante durante il **moto** questo si dice **uniformemente accelerato** e la dipendenza della velocità dal tempo è lineare, infatti da $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t)dt$

ricaviamo:

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

E se $t_0 = 0$ otteniamo:

$$v(t) = v_0 + at$$

Utilizzando $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t)dt$ e $v(t) = v_0 + a(t - t_0)$ possiamo calcolare la posizione $x(t)$:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t [v_0 + a(t - t_0)]dt = x_0 + \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t a(t - t_0)dt$$

E quindi otteniamo che

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

Nel caso in cui $t_0 = 0$ abbiamo che

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Dunque nel moto rettilineo uniformemente accelerato la velocità è una funzione lineare del tempo mentre lo spazio percorso è una funzione quadratica del tempo.

Moto verticale di un corpo

Se trascuriamo l'esistenza dell'aria, possiamo dire che
un corpo lasciato libero di cadere in vicinanza della superficie terrestre si muove verso il basso con un'accelerazione costante $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$

Il moto osservato sperimentalmente per un corpo lasciato cadere da fermo (o con velocità iniziale diretta verticalmente), è dunque rettilineo uniformemente accelerato.

Se prendiamo un sistema con origine al suolo e asse x rivolto verso l'alto, abbiamo $a = -g = -9.8 \frac{m}{s^2}$ (questo perché la velocità nel tempo diventa sempre più negativa).

Se orientassimo l'asse x verso il basso, allora a sarebbe positiva.

Scriviamo le espressioni della velocità e della posizione in funzione del tempo usando questa accelerazione:

$$v(t) = v_0 - gt \quad x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Moto armonico semplice

Un punto esegue un **moto armonico semplice** quando la legge oraria è definita dalla relazione $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$

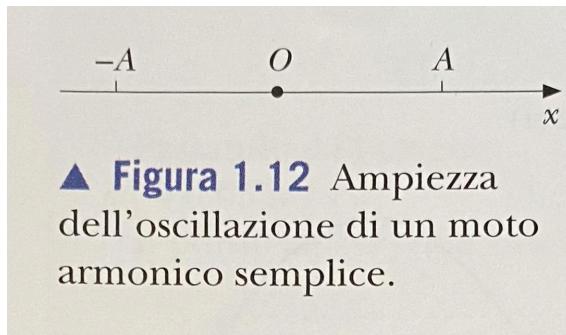
A, ω e ϕ sono grandezze costanti:

- A è detta **ampiezza del moto**
- $\omega t + \phi$ è detta **fase del moto**
- ϕ è detta **fase iniziale**
- ω è detta **pulsazione**

Dunque il moto armonico semplice è un **moto rettilineo vario**, in cui tutte le grandezze cinematiche che lo descrivono $x(t)$, $v(t)$ e $a(t)$ variano nel tempo.

Discutiamo le caratteristiche spaziali di questo moto.

I valori estremi assunti dalla funzione seno sono $+1$ e -1 , pertanto il punto corre un segmento di ampiezza $2A$ con centro nell'origine



Il massimo spostamento del punto dall'origine è A (da cui il nome di ampiezza del moto).

Al tempo $t = 0$ il punto occupa la posizione $x(0) = A \sin(\phi)$

Il moto armonico, considerando che la funzione seno è periodica con periodo 2π , risulta essere **periodico**. Infatti il punto descrive oscillazioni di ampiezza A rispetto al centro O , tutte uguali tra loro e caratterizzate dalla durata, detta **periodo T** del moto armonico.

Il moto di un punto si dice periodico quando a intervalli di tempo eguali il punto ripassa nella stessa posizione con la stessa velocità (e questo avviene per qualsiasi posizione).

Per determinare il periodo T consideriamo due tempi t' e t , con $t' = t + T$. Per definizione $x(t') = x(t)$ e quindi dalla formula $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$, dovendo le fasi nei due istanti differire

di 2π (periodo della funzione seno) abbiamo $\omega t' + \phi = \omega t + \phi + 2\pi$, ne segue che, visto che $T = t' - t$, vale:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ ovvero } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

Capiamo quindi il significato di ω : il moto si ripete velocemente (piccoli valori di T) quando la pulsazione è grande mentre il moto è lento (T grande) per bassi valori della pulsazione.

Si definisce **frequenza** ν del moto il numero di oscillazioni in un secondo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

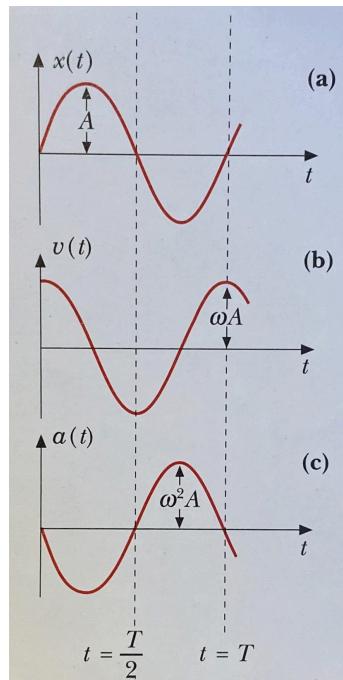
È molto importante osservare che il periodo, e quindi la frequenza, di un moto armonico semplice sono indipendenti dall'ampiezza del moto.

La velocità del punto che si muove con moto armonico si ottiene derivando $x(t)$:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

E con un'ulteriore derivazione si ottiene l'accelerazione del punto:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t)$$



Notiamo che la velocità assume il valore massimo nel centro di oscillazione (l'origine O) e si annulla agli estremi ($x = a$ e $x = -A$).

L'accelerazione si annulla nel centro di oscillazione e assume il valore massimo in modulo agli estremi, dove si inverte la velocità. Inoltre l'accelerazione è sempre proporzionale e opposta allo spostamento dal centro di oscillazione.

Le costanti A e ϕ individuano le condizioni iniziali:

$$x(0) = x_0 = A \sin(\phi) \quad v(0) = v_0 = \omega A \cos(\phi)$$

Viceversa, note le condizioni iniziali x_0 e v_0 si calcolano A e ϕ :

$$\operatorname{tg}(\phi) = \frac{\omega x_0}{v_0} \quad A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}$$

Abbiamo quindi ricavato che l'accelerazione è proporzionale allo spostamento, con segno negativo: $a = -\omega^2 x$. Possiamo anche dire che in un certo moto generale, se si trova che l'accelerazione risulta proporzionale allo spostamento con costante di proporzionalità negativa, allora si dimostra che quel moto è armonico semplice.

In altre parole:

la condizione necessaria e sufficiente perché un moto sia armonico è data dall'equazione

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

detta del moto armonico

Le funzioni seno e coseno, e le loro combinazioni lineari, sono **tutte e sole** le funzioni che soddisfano questa condizione nel campo reale. Questo ci porta ad osservare che anche una funzione con il coseno al posto del seno descrive un moto armonico semplice, infatti le due funzioni differiscono solo per un termine di sfasamento pari a $\frac{\pi}{2}$.

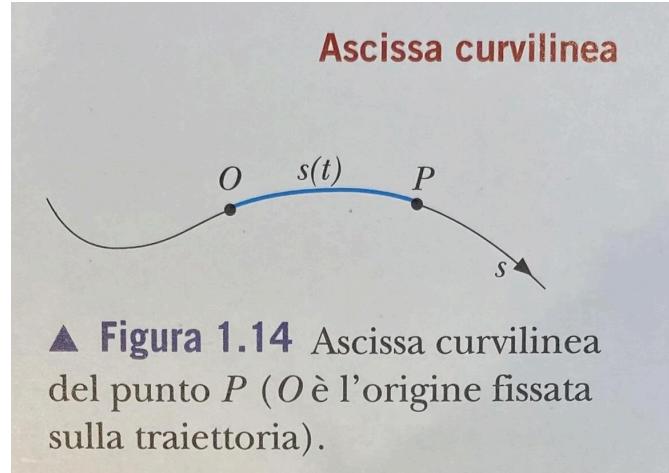
In questo paragrafo abbiamo parlato solo di moto; però se in un diverso fenomeno fisico si trova una grandezza f che obbedisce a un'equazione con struttura $\frac{d^2f}{dt^2} + k^2 f = 0$, la soluzione è sempre $f(z) = A \operatorname{sen}(kz + \phi)$, cioè f descrive un'oscillazione rispetto alla variabile z , il cui periodo dipende da k . Ad esempio può trattarsi di oscillazioni elettriche in un circuito o di oscillazioni di pressione in un gas. Un sistema che obbedisce a questa equazione in generale viene detto **oscillatore armonico semplice**.

Moti su traiettoria curvilinea. Accelerazione tangenziale e normale

Abbiamo visto che la natura vettoriale delle variabili cinematiche implica che siano necessarie tre informazioni per identificarle, infatti la posizione di un punto P può essere individuato attraverso il raggio vettore $\vec{r}(t)$, e quindi attraverso le tre coordinate $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$. Operativamente comunque l'analisi e la soluzione di problemi tridimensionali ricalcano quanto visto nei paragrafi dedicati al moto rettilineo: semplicemente per ogni coordinata si userà e si risolverà il corrispondente set di equazioni (il moto viene scomposto nei tre moti rettilinei proiettati sui tre assi).

Se la traiettoria è nota, però, è possibile anche utilizzare un diverso approccio, in cui la posizione del punto P nello spazio è individuata da una **singola** coordinata curvilinea s , detta **ascissa curvilinea**.

Il valore di s esprime la lunghezza del tratto di traiettoria tra un'origine arbitraria O scelta sulla traiettoria P e varia nel tempo durante il moto. Infatti se diamo la forma della traiettoria e la funzione $s(t)$ abbiamo fornito una descrizione completa del moto.



▲ **Figura 1.14** Ascissa curvilinea del punto P (O è l'origine fissata sulla traiettoria).

Ciò è dimostrato dal fatto che la velocità e l'accelerazione possono essere calcolati usando esclusivamente l'ascissa curvilinea e la geometria della traiettoria (data dal versore tangente \bar{u}_T).

Come sappiamo, al limite l'incremento $d\bar{r}$ del raggio vettore risulta in direzione tangente alla traiettoria del punto P e in modulo eguale allo spostamento infinitesimo ds lungo la traiettoria (l'arco di curva percorso); per cui possiamo scrivere $d\bar{r} = ds \bar{u}_T$.

Quindi la direzione istantanea del moto coincide con quella della tangente alla traiettoria nel punto occupato all'istante considerato. Sapendo che $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$ otteniamo:

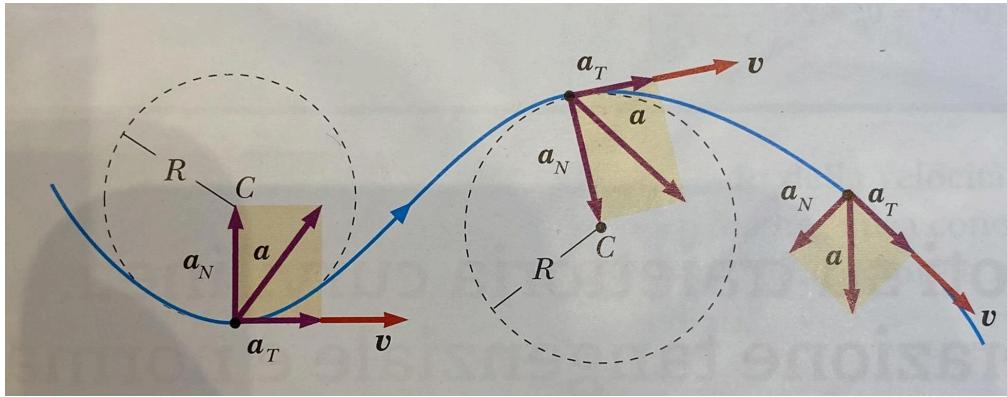
$$\bar{v} = \frac{ds}{dt} \bar{u}_T = v \bar{u}_T$$

Pertanto la velocità vettoriale v ha in ogni istante la direzione e il verso del moto (la tangente alla traiettoria) e $v = \frac{ds}{dt}$.

Questo concetto però vale solo a livello infinitesimo $d\bar{r} = ds \bar{u}_T$, infatti per uno spostamento finito il modulo del vettore spostamento $\Delta\bar{r}$ è ben diverso dalla variazione di ascissa curvilinea Δs , ossia dallo spazio effettivamente percorso lungo la curva (uno è la corda, l'altro l'arco).

L'accelerazione deve esprimere le variazioni della velocità sia come modulo che direzione, e quindi sarà composta da due componenti.

Nel moto rettilineo, dove la velocità mantiene sempre la stessa direzione, l'accelerazione è espressa da un solo termine.



Come si vede dalla figura, l'accelerazione non è parallela alla velocità ed è diretta verso la concavità della curva che rappresenta la traiettoria.

Sappiamo che $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ e quindi $\bar{a} = \frac{d}{dt}(v \bar{u}_T) = \frac{dv}{dt} \bar{u}_T + v \frac{d\bar{u}_T}{dt} = \frac{dv}{dt} \bar{u}_T + v \frac{d\phi}{dt} \bar{u}_N$

La prima componente, parallela alla velocità e quindi alla tangente della traiettoria, esprime la variazione del modulo della velocità.

Il secondo termine, dipendente dalla variazione di direzione della velocità, è ortogonale a questa: \bar{u}_N è un vettore ortogonale a \bar{u}_T diretto verso la concavità della traiettoria e $\frac{d\phi}{dt}$ indica quanto rapidamente cambia la direzione di \bar{u}_T e quindi di \bar{u}_N .

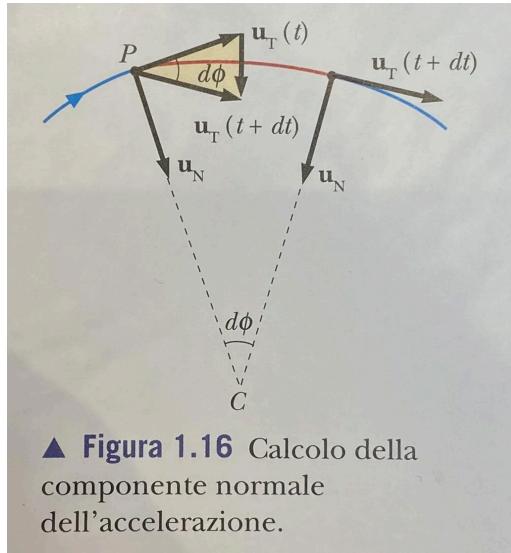


Figura 1.16 Calcolo della componente normale dell'accelerazione.

Questa figura mostra il moto durante un intervallo di tempo infinitesimo dt .

Le rette normali alla traiettoria in due punti molto vicini tra loro si incontrano nel punto C , che coincide con il centro della circonferenza tangente alla traiettoria nel punto P e si chiama anche **centro di curvatura** della traiettoria nel punto P .

L'arco di traiettoria ds è pari a $R d\phi$ con $R = CP$ **raggio di curvatura**. Pertanto vale

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{1}{R} v$$

e sostituendo nell'espressione dell'accelerazione trovata prima

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} \bar{u}_T + \frac{v^2}{R} \bar{u}_N = \bar{a}_T + \bar{a}_N$$

Le due componenti si chiamano **accelerazione tangenziale** \bar{a}_T e **accelerazione normale o centripeta** \bar{a}_N .

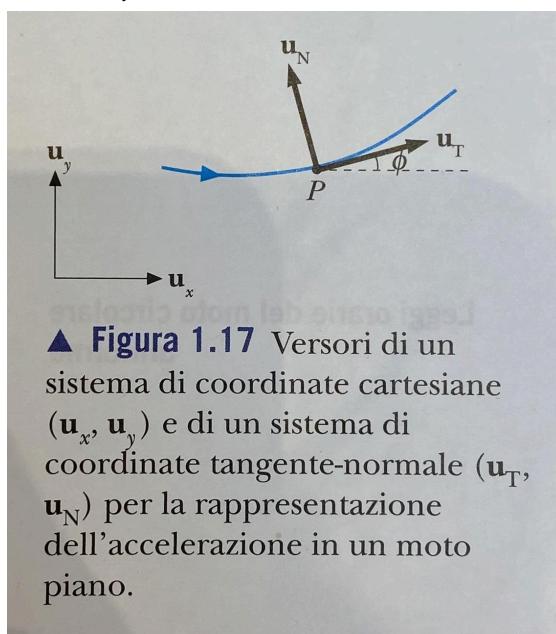
Nel moto rettilineo uniforme abbiamo $a_T = a_N = 0$. Con $a_T \neq 0$ il moto è vario, con $a_N \neq 0$ il moto è curvilineo.

Nel caso di un moto piano è facile trovare la relazione tra componenti cartesiane e componenti tangenziale e normale dell'accelerazione.

Detto ϕ l'angolo che \bar{u}_T forma con \bar{u}_x , abbiamo

$$a_x = \frac{dv}{dt} \cos(\phi) - \frac{v^2}{R} \sin(\phi)$$

$$a_y = \frac{dv}{dt} \sin(\phi) + \frac{v^2}{R} \cos(\phi)$$



In base al particolare problema fisico da affrontare si utilizzerà la rappresentazione più conveniente.

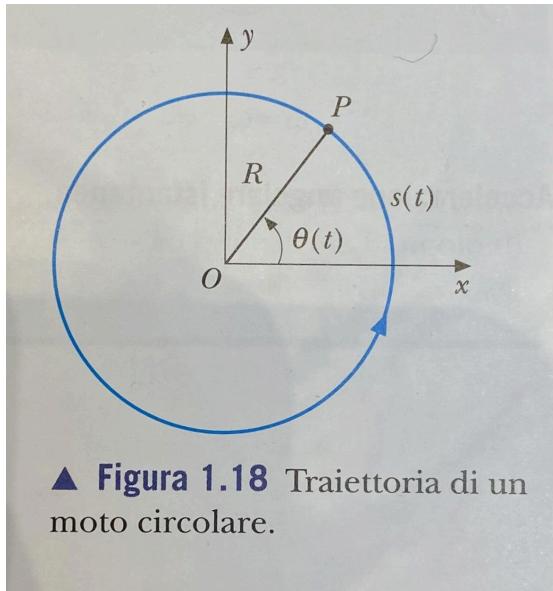
Moto circolare

Si chiama **moto circolare** un moto piano la cui traiettoria è rappresentata da una circonferenza. Considerando che la velocità varia continuamente in direzione, l'**accelerazione centripeta è sempre diversa da zero**.

Nel moto circolare uniforme la velocità è costante in modulo e l'accelerazione tangente è nulla, per cui $\bar{a} = \bar{a}_N$.

Se invece il modulo della velocità cambia nel tempo il moto circolare non è uniforme e \bar{a}_T è diversa da zero.

Il moto circolare può essere descritto facendo riferimento allo spazio percorso sulla circonferenza, ossia all'ascissa $s(t)$ oppure utilizzando l'angolo $\theta(t)$ sotteso dall'arco $s(t)$, con $\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$



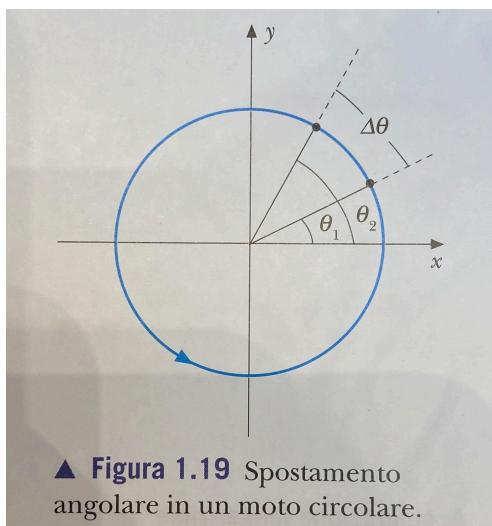
L'assumere come variabile l'angolo $\theta(t)$ significa in sostanza porsi in un sistema di coordinate polari di centro O in cui il moto avviene con $r(t) = R = \text{costante}$ e $\theta(t)$ variabile.

Anche la rappresentazione in coordinate cartesiane è legata come sappiamo a $\theta(t)$, infatti

$$x(t) = R \cos(\theta(t)) \text{ e } y(t) = R \sin(\theta(t))$$

Se il punto all'istante t occupa la posizione angolare θ_1 e all'istante $t + \Delta t$ la posizione angolare θ_2 nell'intervallo Δt ha subito lo **spostamento angolare** definito dalla:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$



Si definisce **velocità angolare media** il rapporto tra $\Delta\theta$ e Δt :

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

La **velocità angolare istantanea** è definita come limite per $\Delta t \rightarrow 0$ di ω_m :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

la velocità angolare istantanea è la derivata rispetto al tempo dell'angolo $\theta(t)$ che descrive la posizione angolare del punto.

Tenendo conto della relazione $\theta(t) = \frac{s(t)}{R}$ otteniamo

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{R} \frac{ds}{dt} = \frac{v}{R}$$

la velocità angolare è proporzionale alla velocità con cui è descritta la circonferenza, dunque se v è variabile lo è anche ω .

Il **moto circolare** più semplice è quello **uniforme**: v e ω sono costanti e le leggi orarie, con riferimento alle due variabili utilizzate, si scrivono (integrandando la velocità)

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t$$

$$s(t) = s_0 + vt$$

Il moto circolare uniforme è un moto accelerato con accelerazione costante, ortogonale alla traiettoria

$$a = a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$$

Si tratta inoltre di un moto periodico con periodo $T = 2\pi \frac{R}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$ (il tempo necessario a compiere un giro completo)

Nel caso del **moto circolare non uniforme** varia sia l'accelerazione centripeta (visto che dipende dal modulo della velocità) sia l'accelerazione tangenziale $a_T = \frac{dv}{dt}$.

Dato che varia anche la velocità angolare ω occorre considerare l'**accelerazione angolare media**

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

L'**accelerazione angolare istantanea** è il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ di α_m :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

Se è nota la legge oraria angolare $\theta(t)$ possiamo determinare le variazioni dell'angolo e della velocità angolare.

Viceversa, nota la funzione $\alpha(t)$, possiamo integrare ottenendo:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha(t) dt$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \int_{t_0}^t \omega(t) dt$$

Nel caso del **moto circolare uniformemente accelerato**, in cui $\alpha = \text{costante}$, ovvero $a_T = \text{costante}$ abbiamo (posto $t_0 = 0$)

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

L'accelerazione centripeta vale quindi $a_N = \omega(t)^2 R = (\omega_0 + \alpha t)^2 R$

//MANCA NOTAZIONE VETTORIALE NEL MOTO CIRCOLARE

Per il moto circolare uniforme i moti proiettati sugli assi cartesiani sono

$$x = R \cos(\theta) = R \cos(\omega t + \theta_0) \quad y = R \sin(\theta) = R \sin(\omega t + \theta_0)$$

Quindi il moto circolare può essere scomposto in due moti armonici di eguale ampiezza, sfasati tra loro di $\frac{\pi}{2}$, e con periodo coincidente con quello del moto circolare uniforme. Numericamente la velocità angolare è eguale alla pulsazione, anche se il significato fisico delle due grandezze è diverso.

Viceversa, la composizione di due moti armonici con le caratteristiche dette dà luogo a un moto circolare.

//MANCA ULTIMA PARTE DELLA SOVRAPPOSIZIONE

Moto parabolico dei corpi

Come estensione di quanto trattato nel moto verticale, studiamo il moto (nel vuoto) di un punto P lanciato dall'origine O con velocità iniziale \bar{v}_0 formante un angolo θ con l'asse delle ascisse (orizzontale).

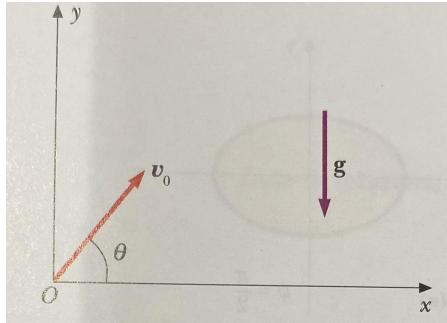
In particolare vogliamo calcolare la **traiettoria**, la **massima altezza** raggiunta e la posizione G in cui il punto ricade sull'asse x ovvero la **gittata OG** .

Il moto è caratterizzato da un'accelerazione costante $\bar{a} = \bar{g} = -g\bar{u}_y$ e le condizioni iniziali sono $\bar{r} = 0$ e $\bar{v} = \bar{v}_0$ al tempo t_0 (istante di lancio).

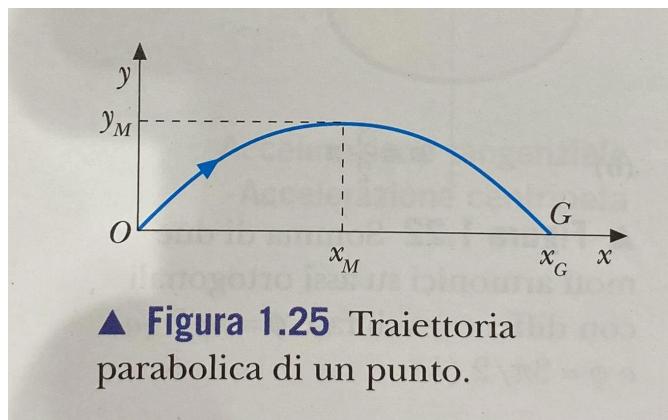
Come sappiamo vale

$$\bar{v}(t) = \bar{v}_0 + \int_0^t \bar{a}(t) dt = \bar{v}_0 - g t \bar{u}_y$$

Dunque la velocità sta sempre nel piano individuato dai vettori costanti \bar{v}_0 e \bar{g} , che è il piano x, y



▲ Figura 1.24 Sistema di coordinate per la descrizione del moto parabolico con accelerazione g .



▲ Figura 1.25 Traiettoria parabolica di un punto.

Sappiamo che la velocità può essere scomposta nella seguente maniera

$$\bar{v}_0 = v_0 \cos(\theta) \bar{u}_x + v_0 \sin(\theta) \bar{u}_y, \text{ dunque}$$

$$\bar{v}(t) = v_0 \cos(\theta) \bar{u}_x + (v_0 \sin(\theta) - gt) \bar{u}_y$$

Le velocità dei moti proiettati sugli assi sono dunque:

- $v_x = v_0 \cos(\theta)$, costante
- $v_y = v_0 \sin(\theta) - gt$

Dunque le leggi orarie dei moti proiettati sono:

$$x = v_0 t \cos(\theta) \quad y = v_0 t \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2$$

Dunque sull'asse x il moto è uniforme (in accordo col fatto che $a_x = 0$), sull'asse y il moto è uniformemente accelerato.

La **traiettoria** viene ricavata eliminando il tempo tra $x(t)$ e $y(t)$ e ottenendo così la funzione $y(x)$.

Dalla prima equazione sappiamo che $t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta)}$ e quindi

$$y(x) = \frac{x v_0 \sin(\theta)}{v_0 \cos(\theta)} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\theta)} \right)^2 = x \tan(\theta) - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2(\theta)} x^2$$

che è l'equazione di una **parabola**.

La **direzione** del moto, in funzione del tempo o della coordinata x , può essere caratterizzata dall'angolo ϕ che il vettore velocità forma con l'asse orizzontale

$$tg(\phi) = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\frac{v_0 \sin(\theta)}{g} t}{\frac{v_0 \cos(\theta)}{g}} = tg(\theta) - \frac{g}{v_0 \cos(\theta)} t = tg(\theta) - \frac{g}{v_0^2 \cos^2(\theta)} x$$

Per calcolare la **gittata** OG imponiamo $y(x) = 0$ e otteniamo due soluzioni: $x = 0$ ovviamente e

$$tg(\theta) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} x = 0$$

e risolvendo

$$x_G = \frac{2v_0^2 \cos^2(\theta) tg(\theta)}{g} = \frac{2v_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta)}{g} = 2x_M$$

con $x_M = \frac{v_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g}$ coordinata del punto di mezzo del segmento OG e quindi, per la simmetria della parabola, ascissa del punto di massima altezza. L'**altezza massima** raggiunta è pertanto

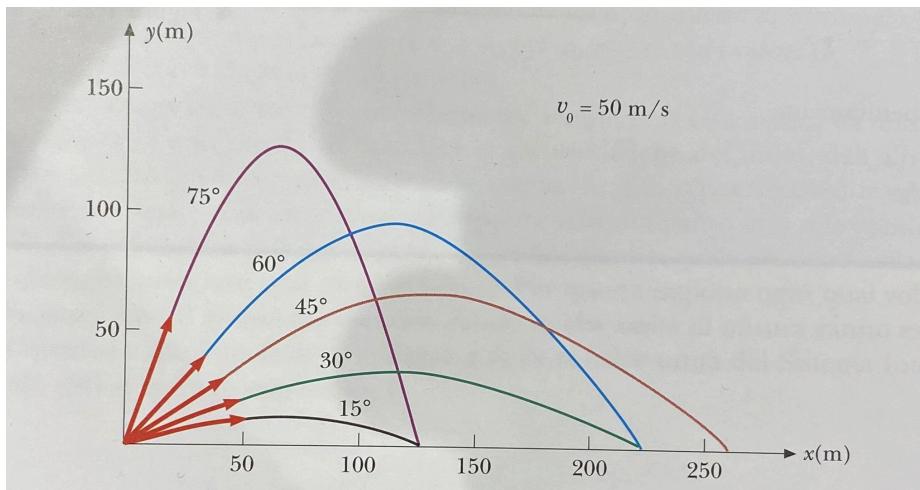
$$y(x_M) = y_M = \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{2g}$$

infatti

$$\begin{aligned} y(x_M) &= \frac{v_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g} tg(\theta) - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} \left(\frac{v_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g} \right)^2 = \frac{v_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} \frac{v_0^4 \cos^2(\theta) \sin^2(\theta)}{g^2} = \\ &= \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{g} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2(\theta)}{g} \end{aligned}$$

L'angolo di lancio per cui si ha la gittata massima si ha massimizzando $\sin(2\theta)$ e lo si fa con

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \text{ dunque risulta } \theta = 45^\circ \text{ e } (x_G)_{max} = \frac{v_0^2}{g}.$$



Dalla figura notiamo che in corrispondenza di due angoli $\theta_1 = 45^\circ + \alpha$ e $\theta_2 = 45^\circ - \alpha$, la gittata è la stessa.

L'altezza massima si può ottenere anche annullando $\frac{dy}{dx}$, ovvero imponendo

$$tg(\theta) - \frac{g}{v_0^2 \cos^2(\theta)} x = 0 \text{ e ottenendo l'ascissa del massimo } x_M, \text{ e poi si calcola } y(x_M).$$

Oppure si può sfruttare il fatto che nel punto di massima altezza la velocità è orizzontale e quindi $v_y = 0$, cioè $t = t_M = v_0 \frac{\sin(\theta)}{g}$, sostituendo in $x(t)$ e $y(t)$ si ritrovano x_M e y_M .

Il tempo di volo t_G è pari al tempo impiegato a percorrere OG con velocità costante

$$v_x = v_0 \cos(\theta)$$

$$t_G = \frac{x_G}{v_0 \cos(\theta)} = \frac{2v_0^2 \cos(\theta) \sin(\theta)}{g \phi v_0 \cos(\theta)} = 2v_0 \frac{\sin(\theta)}{g} = 2t_M$$

Notiamo infine che nella posizione G la velocità è la stessa in modulo che alla partenza, ma è orientata simmetricamente rispetto all'asse x :

$$v_x(t_G) = v_0 \cos(\theta) \quad v_y(t_G) = -v_0 \sin(\theta) \quad tg(\phi) = -tg(\theta)$$

Le caratteristiche geometriche del moto parabolico di un corpo vicino alla superficie terrestre si comprendono chiaramente nel sistema cartesiano adottato che è in definitiva il più naturale in questo problema in cui c'è una direzione di particolare importanza, quella di \bar{g} , a 90° con una direzione di uso pratico molto comune, quella orizzontale.

Invece, per esempio, nella trattazione del moto circolare è sicuramente più semplice servirsi di un sistema di coordinate polari con centro nel centro di simmetria del sistema, mentre non hanno particolare significato gli assi x e y .

È la situazione fisica a suggerire la scelta del sistema di riferimento più adatto; se non ci sono motivi di preferenza di un dato sistema, conviene scegliere un sistema cartesiano.

Dinamica del punto: le leggi di Newton

Principio d'inerzia: Introduzione al concetto di forza

All'inizio del precedente capitolo ci eravamo proposti di studiare il moto indipendentemente dalle cause che lo determinano. Adesso abbiamo imparato come avviene il moto e come lo si caratterizza.

La questione fondamentale però è perché avviene il moto, quali sono le cause fisiche per cui un corpo entra in movimento e descrive un certo tipo di moto invece che un altro.

Tale parte della meccanica si chiama **dinamica del punto materiale** e contiene in particolare anche il caso dell'equilibrio statico, cioè lo studio delle condizioni per cui un punto resta in quiete.

Un'osservazione fondamentale è che la variazione dello stato di moto di un punto è determinata dall'interazione del punto con l'ambiente circostante, espressa dal concetto di forza.

La prima prova di questa osservazione è contenuta nel **principio di inerzia**:

Un corpo non soggetto a forze non subisce cambiamenti di velocità, ovvero resta in stato di quiete se era fermo ($\bar{v} = 0$) oppure si muove di moto rettilineo uniforme (\bar{v} costante non nulla).

Da notare bene è il fatto che l'assenza di forze non implica che non ci sia moto, bensì comporta che la velocità non vari. Infatti lo stato di quiete è equiparato allo stato di moto rettilineo uniforme.

In sintesi un corpo permane nel suo stato di moto finché non interviene un oggetto esterno. I sistemi di riferimento in cui questa legge vale sono detti **sistemi inerziali**.

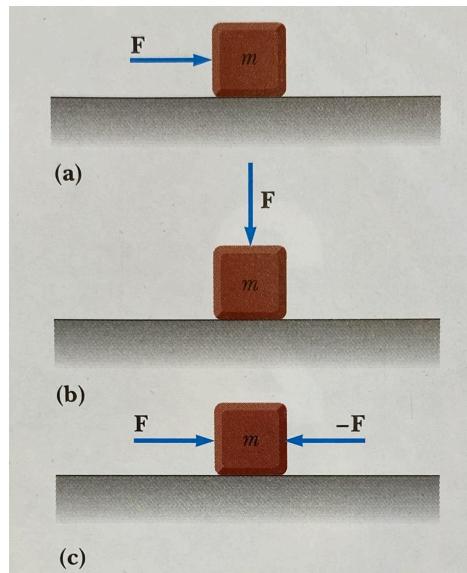
In questo principio è implicitamente contenuta l'idea che sarebbe stata esplicitata da Newton e posta sotto forma di legge quantitativa:

La variazione di velocità, in modulo e/o direzione, di un corpo è dovuta all'azione di una forza.

Di conseguenza **un moto accelerato segnala la presenza di una forza agente** (ad esempio nel moto circolare uniforme la velocità rimane costante in modulo, ma varia in direzione a ciascun istante per effetto dell'accelerazione centripeta, e quindi di una forza).

La nozione primordiale di forza era legata allo sforzo muscolare, successivamente allo sforzo esercitato da sistemi meccanici semplici. In seguito tale concetto si è affinato con la constatazione che non è necessario un contatto per esercitare una forza (ad esempio le forze di attrazione gravitazionale o quelle elettrostatiche).

La forza è una grandezza vettoriale, in quanto a essa sono associate intensità e direzionalità. L'effetto di una forza cambia con la direzione:



- a) Si ha in generale un moto
- b) Non si ha moto, ma eventualmente una deformazione del corpo e/o del supporto
- c) Non si manifesta alcun moto in quanto le due forze si bilanciano

Il caso c introduce la nozione di egualanza di due forze e di **equilibrio** (anche nel caso b possiamo supporre che il piano produca una forza diretta verso l'alto che fa equilibrio).

Per poter utilizzare le forze, occorre poterle misurare. L'intensità di una forza può essere misurata tramite uno strumento chiamato **dinamometro** (costituito da una molla e una scala graduata opportunamente tarata e parallela alla molla).

Il meccanismo di funzionamento del dinamometro sfrutta il principio per il quale la deformazione di una molla è direttamente proporzionale alla forza applicata.

Un particolare dinamometro che usiamo spesso altro non è che la bilancia.

Leggi di Newton

La formulazione quantitativa del legame tra la forza e lo stato del moto è data dalla **legge di Newton**:

$$\bar{F} = m \bar{a}$$

L'interazione del punto con l'ambiente circostante, espresso tramite la forza \bar{F} , determina l'accelerazione del punto, ovvero la variazione della sua velocità nel tempo, secondo un fattore di proporzionalità m , che è la massa inerziale del punto.

Il termine **massa inerziale** è legato al fatto che la massa esprime l'inerzia del punto, ovvero la sua resistenza a variare il proprio stato di moto quando entrano in gioco agenti esterni.

La massa inerziale è una costante del corpo (è una sua caratteristica) ed è definita dal rapporto $\frac{|\bar{F}|}{|\bar{a}|}$, e la sua unità di misura è il Kg . Tutti gli agenti esterni che intervengono sul corpo vengono espressi come forza e la massa non è influenzata in alcun modo da nessun fattore esterno.

L'unità di misura della forza è data dalla massa moltiplicata per l'accelerazione, ovvero $Kg \cdot \frac{m}{s^2}$.

Fissata quindi una determinata forza \bar{F} , l'effetto dinamico è tanto maggiore quanto minore è la massa del punto. Se una certa forza \bar{F} agisce separatamente su due punti materiali diversi, questi acquistano accelerazioni inversamente proporzionali (in modulo) alla loro massa. Infatti proiettando la legge di Newton nella direzione della forza otteniamo:

$$F = m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow \frac{m_2}{m_1} = \frac{a_1}{a_2}$$

Si giustifica così anche il nome **punto materiale**: per descrivere il comportamento dinamico del punto occorre conoscere la sua massa; si può semplificare al massimo concependo un corpo privo di struttura, ma non si può rinunciare alla massa che è un concetto dinamico fondamentale per qualsiasi corpo.

La legge di Newton ci dice che la direzione dell'accelerazione è determinata dalla direzione della forza, e la stessa cosa vale per il verso visto che la massa inerziale è sempre positiva. La direzione della velocità invece non sempre è uguale alla direzione della forza.

In assenza di interazione con l'esterno la forza è nulla, ovvero $\bar{a} = 0$ e quindi $\bar{v} = \text{costante}$. Infatti la legge di Newton contiene, come caso particolare, il principio d'inerzia.

Spesso la legge di Newton viene indicata come **seconda legge di Newton**, mentre ci si riferisce al principio d'inerzia come **prima legge di Newton**.

Usando la definizione di accelerazione, la legge di Newton può essere scritta così

$$\bar{F} = m \bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$$

Questa formula esprime la **legge fondamentale della dinamica del punto**; da essa vengono ricavate tutte le proprietà relative al moto di un punto materiale e in particolare la legge oraria $\bar{r}(t)$.

Questa formula è una legge sperimentale dedotta dall'analisi del moto di un punto soggetto a una determinata forza. La prova della sua validità è costituita dalla correttezza, a posteriori, di tutte le deduzioni fatte a partire da essa. Sempre l'esperienza conferma che la formula è una **legge vettoriale**, fatto che va in ogni caso tenuto presente (nella pratica ciò vuol dire che essa equivale a tre equazioni relative ai tre moti proiettati sugli assi cartesiani).

Sotto l'aspetto matematico la formula può apparire come una relazione algebrica tra forza e accelerazione; però l'accelerazione è legata a velocità e posizione da relazioni non algebriche (ma da equazioni differenziali) e quindi la formula è in realtà un'equazione differenziale tra \bar{F} e \bar{v} oppure tra \bar{F} e \bar{r} .

La formula, oltre che come equazione, va intesa come la vera definizione della grandezza forza. In sostanza, seguendo Newton, noi chiamiamo forza ciò che causa una variazione dello stato di moto di un corpo e la formula ci dice come misurarla, una volta che abbiamo scelto (arbitrariamente) una massa campione.

Pure in relazione alla massa la formula è importante, in quanto ne fissa il significato fisico, rendendo quantitativo il concetto d'inerzia come detto all'inizio del paragrafo.

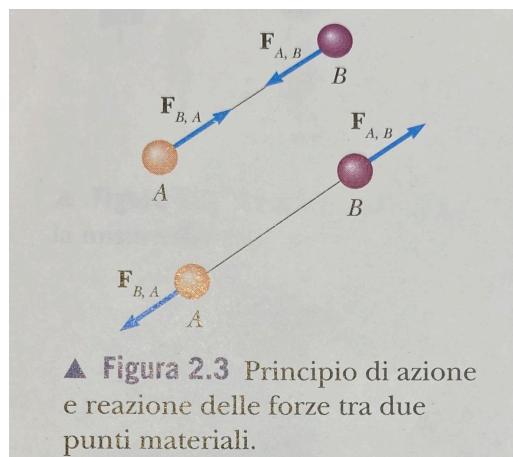
È naturale chiedersi di fronte a una relazione così fondamentale se ci siano dei **limiti di validità**.

Questa formula è valida solo se il moto è studiato in una particolare classe di sistemi di riferimento, i cosiddetti **sistemi di riferimento inerziali**. Inoltre, anche in un sistema di riferimento inerziale, la legge di Newton è applicabile solo se la velocità dei punti considerati è molto minore della velocità della luce ($3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$).

La seconda legge di Newton è la legge della dinamica in base alla quale spieghiamo perché un moto avviene con certe caratteristiche. Newton scoprì anche una proprietà generale delle forze, che si può enunciare in questa forma:

- *Se un corpo A esercita una forza $F_{A,B}$ su un corpo B, il corpo B reagisce esercitando una forza $F_{B,A}$ sul corpo A*
- *Le due forze hanno la stessa direzione, lo stesso modulo e verso opposto, esse cioè sono vettorialmente uguali e contrarie: $F_{A,B} = -F_{B,A}$*

- Le due forze hanno la stessa retta d'azione



In questa figura è rappresentata la situazione per forze attrattive e repulsive tra due oggetti. Tale legge è detta **terza legge di Newton** oppure **principio di azione e reazione delle forze**.

Questa legge non dice che la cinematica dei due corpi è la stessa, infatti la cinematica dipende dalle masse dei corpi.

Infatti abbiamo che:

$$\begin{aligned} F_{A,B} &= -F_{B,A} \\ m_B a_B &= -m_A a_A \\ \left| \frac{a_B}{a_A} \right| &= \frac{1}{\frac{m_B}{m_A}} \end{aligned}$$

Anche la terza legge di Newton vale solo nei sistemi di riferimento inerziali.

Le 3 leggi di Newton sono dette anche **principi della dinamica**. Un principio è una legge non dimostrabile, che è approvata dall'evidenza, quindi sono delle verità assunte come tali sulla base dell'esperienza.

Classificazione delle forze

Se consideriamo le forze responsabili di gran parte dei fenomeni studiati nella fisica classica, o anche in altre discipline quali la biologia, la chimica, l'ingegneria, esse sono tutte riconducibili a poche interazioni fondamentali, l'**interazione gravitazionale** e l'**interazione elettromagnetica**. A livello nucleare e subnucleare si presentano altri due tipi di interazione, l'**interazione forte** e l'**interazione debole**, ma tali argomenti esulano dai contenuti di questo testo.

La scoperta che l'apparente grande varietà di tipi di forze è il manifestarsi, in fenomeni anche molto differenti, di poche interazioni fondamentali, assume una grande rilevanza concettuale ed è il risultato di una lunga indagine sperimentale e teorica rivolta all'unificazione delle interazioni.

Il nostro studio però è ora rivolto a individuare il tipo di moto di un punto in interazione col resto del mondo. L'interazione sarà esprimibile tramite una o più forze, la conoscenza della cui origine non rientra nei nostri scopi e non influenza per ora il nostro studio.

Per ognuna di queste forze fondamentali, chiamiamo **carica** la caratteristiche del sistema/del corpo che lo rende sensibile a un certo tipo di interazione fondamentale.

Le cariche delle varie interazioni hanno praticamente tutte la stessa identica forma/equazione, infatti tutte queste forze sono proporzionali al prodotto delle cariche, inversamente proporzionali al quadrato della distanza e dirette lungo la congiungente (e c'è una costante per questioni di unità di misura).

Nel caso dell'interazione gravitazionale, la **carica gravitazionale** è anche chiamata **massa gravitazionale**.

Quantità di moto. Impulso

Si definisce **quantità di moto** di un punto materiale il vettore

$$\bar{p} = m\bar{v}$$

Quindi se la massa è costante (cosa non vera nella realtà), la seconda legge di Newton si può scrivere così

$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$$

L'azione di una forza determina la variazione nel tempo della quantità di moto ovvero di qualcuna o di tutte queste quantità: massa, direzione, verso e modulo della velocità.

In realtà $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$ è la **forma più generale della seconda legge di Newton**, utilizzabile anche se la massa non è costante. Essa va intesa così: lo stato dinamico del punto è individuato dalla quantità di moto, in cui compaiono la massa e la velocità.

Un punto materiale ha massa costante, però in alcuni casi la massa può variare durante il moto (un automobile che consuma carburante) e quindi $\bar{F} = m\bar{a}$ non vale più, e poi $\bar{F} = m\bar{a}$ non vale neanche se la velocità è prossima a quella della luce.

Noi non tratteremo problemi con massa variabile e velocità che si avvicina a quella della luce, quindi in ogni caso la quantità di moto sarà $m\bar{v}$ con m costante e le relazioni

$$\bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt} = m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \text{ e } \bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} \text{ saranno considerate equivalenti.}$$

Da $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt}$ si ha che $\bar{F} dt = d\bar{p}$, quindi l'azione di una forza durante un tempo dt provoca una variazione infinitesima della quantità di moto del punto. In termini finiti si ha

$$\bar{J} = \int_{t_0}^t \bar{F} dt = \int_{\bar{p}_0}^{\bar{p}} d\bar{p} = \bar{p} - \bar{p}_0 = \Delta\bar{p}$$

Questa è la **forma integrale della seconda legge di Newton**.

Il termine vettoriale \bar{J} , integrale della forza nel tempo (o variazione della quantità di moto), è chiamato **impulso della forza** e la forma integrale della seconda legge di Newton esprime il **teorema dell'impulso**:

- L'impulso di una forza applicata a un punto materiale provoca la variazione della quantità di moto
- Se la massa m è costante, allora $\bar{J} = m(\bar{v} - \bar{v}_0) = m\Delta\bar{v}$

Il teorema dell'impulso è utilizzabile per calcolare effettivamente $\Delta\bar{p}$ solo se si conosce la funzione $\bar{F}(t)$. Se invece misuriamo $\Delta\bar{p}$, applicando il teorema della media all'integrale $\int_{t_0}^t \bar{F} dt$ pari a $\bar{F}_m(t - t_0)$, possiamo sempre calcolare il **valore medio F_m della forza** agente nell'intervallo di tempo $t - t_0$:

$$\bar{F}_m = \frac{\Delta\bar{p}}{t - t_0}$$

Quando \bar{F} è nulla, $\Delta\bar{p} = 0$ e pertanto $\bar{p} = \text{costante}$, e vale il **principio di conservazione della quantità di moto**:

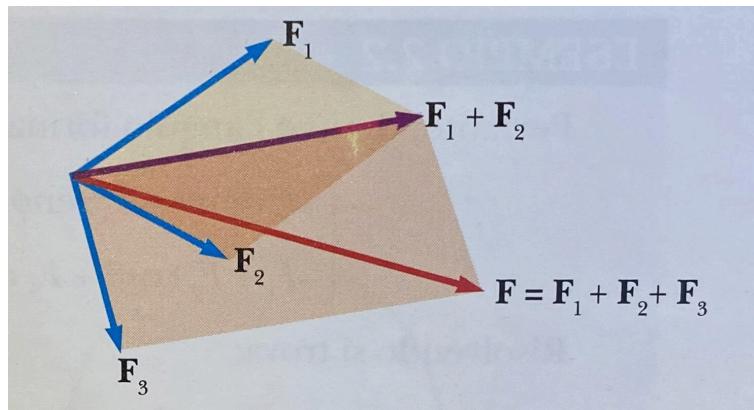
in assenza di forze applicate la quantità di moto di un punto materiale rimane costante, ovvero si conserva

Si tratta evidentemente di un'altra formulazione del principio di inerzia.

Risultante delle forze. Equilibrio statico

Abbiamo già rilevato che la forza è una grandezza vettoriale. Un'importante verifica di questa affermazione si ha quando su un punto materiale agiscono contemporaneamente più forze. Si constata che il moto del punto ha luogo come se agisse una sola forza, ovvero la **risultante delle forze** applicate al punto

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i$$



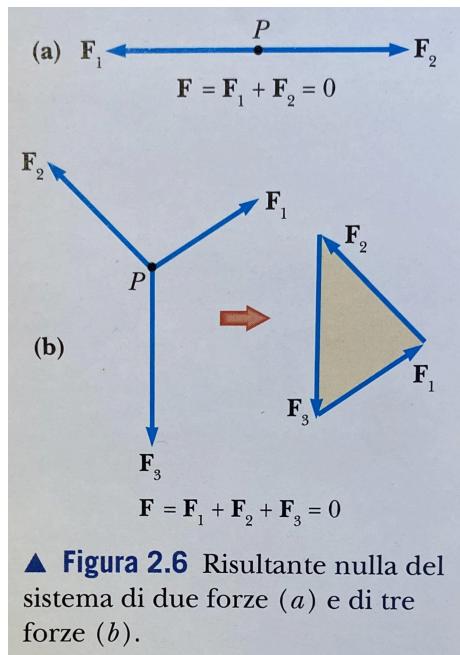
in effetti l'**accelerazione del punto** è pari alla somma vettoriale delle accelerazioni che il punto avrebbe se agisse ciascuna forza da sola:

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{F}_i}{m} = \sum_{i=1}^n \bar{a}_i$$

Dunque ciascuna forza agisce indipendentemente dalle altre, dando un contributo $\bar{a}_i = \frac{\bar{F}_i}{m}$ all'accelerazione del punto, si parla a tale proposito di **indipendenza delle azioni simultanee**. Tutto ciò implica che dallo studio del moto di un punto materiale otteniamo informazioni solo sulla risultante delle forze agenti sul punto stesso, \bar{F} , e non sulle singole forze che concorrono a formare la forza risultante.

In particolare, affermare che la forza agente su un punto è nulla non significa necessariamente che sul punto non agiscono forze, ma spesso indica che la somma delle forze agenti su di esso, cioè la risultante, è nulla.

Se $\bar{F} = 0$ e il punto ha inizialmente velocità nulla, esso rimane in quiete: sono realizzate le condizioni di **equilibrio statico** del punto. In questa situazione devono essere nulle tutte le componenti della risultante.



In generale, dato un insieme di forze applicate a un punto e aventi risultante \bar{F}' , l'equilibrio statico si ottiene applicando al punto una forza eguale ed opposta a \bar{F}' , così da realizzare appunto la condizione $\bar{F} = \bar{F}' - \bar{F}' = 0$.

Azione dinamica delle forze. Equilibrio dinamico

Vediamo ora di individuare quali forze possono produrre i tipi di moto che abbiamo analizzato precedentemente.

Nel caso più generale la forza \bar{F} non è costante e il **moto è vario**, con accelerazione non costante.

Se il **moto è rettilineo uniforme** ($\bar{v} = \text{costante}$, $\bar{a} = 0$) si ha ovviamente $\bar{F} = 0$ (questo si ottiene o in assenza di forze oppure quando ci sono varie forze purché la loro risultante sia nulla).

Se il **moto è uniformemente accelerato** ($\bar{a} = \text{costante}$) allora la forza agente è vettorialmente costante (quindi sia in direzione che in verso che in modulo).

Più in generale, se agisce una forza $\bar{F} = \text{costante}$, allora la componente del moto nella direzione parallela alla forza è uniformemente accelerata con $a = \frac{F}{m}$. Lungo le altre due direzioni può non esserci moto oppure avere un moto rettilineo uniforme se le velocità iniziali lungo tali direzioni sono diverse da zero.

Come abbiamo visto nel caso specifico del **moto curvilineo** l'accelerazione presenta due componenti \bar{a}_T e \bar{a}_N , pertanto vale

$$\bar{F} = m(\bar{a}_T + \bar{a}_N) = m\bar{a}_T + m\bar{a}_N = m\frac{dv}{dt}\bar{u}_T + m\frac{v^2}{R}\bar{u}_N$$

La risultante delle forze agenti sul punto materiale deve avere una componente ortogonale alla traiettoria, \bar{F}_N , per provocare la variazione di direzione della velocità. La componente tangenziale \bar{F}_T della forza determina invece la variazione del modulo della velocità.

\bar{F}_N si chiama **forza centripeta** ed è sempre diversa da zero in un moto curvilineo (la forza centripeta non è un tipo di forza, ma semplicemente il nome che si dà alla componente ortogonale alla traiettoria della risultante delle varie forze agenti).

Prendiamo il caso in cui la risultante delle forze agenti su un punto materiale presenti solo la componente \bar{F}_N . La forza \bar{F}_N determina l'**accelerazione centripeta** secondo la relazione

$$F_N = ma_N = \frac{mv^2}{r}$$

Qualora \bar{F}_N sia anche costante in modulo, allora il punto materiale compie un moto circolare uniforme. Questo è un tipico caso di **equilibrio dinamico**, ossia l'azione di una forza provoca un moto uniforme e non accelerato.

L'equilibrio dinamico differisce da quello statico (risultante delle forze uguale a zero e quindi velocità costante in modulo e direzione) per il fatto che si riferisce a quei particolari casi in cui in presenza di forze il moto del punto avviene con velocità costante in modulo ma variabile in direzione se $\bar{F}_N \neq 0$.

Forza peso

Iniziamo l'esame dei tipi più comuni di forze occupandoci della **forza peso**.

Sperimentalmente si osserva che in uno stesso luogo tutti i corpi, qualunque sia la massa inerziale, assumono, se lasciati liberi, la stessa **accelerazione**, detta **di gravità**, diretta verticalmente verso il suolo il cui modulo, che varia leggermente da posto a posto sulla terra, vale in media $g = 9.8 \frac{m}{s^2}$. Tale accelerazione è conseguente della forza di attrazione terrestre, cioè dall'interazione gravitazionale tra la terra e il corpo.

Se agisce solo la forza peso \bar{P} abbiamo $\bar{P} = m\bar{a} = mg$ visto che $\bar{a} = \bar{g}$. Pertanto **la forza peso risulta proporzionale alla massa** e si scrive sempre

$$\bar{P} = mg$$

Si tratta di una forza costante e in assenza di altre forze il moto ha una componente uniformemente accelerata nella direzione parallela a \bar{g} .

Se invece agiscono anche altre forze in generale si ha $\bar{a} \neq \bar{g}$. In particolare un corpo che cade nell'aria presenta un'accelerazione minore di quella di gravità a causa dell'attrito con l'aria.

La proporzionalità tra forza peso e massa suggerisce che il confronto tra masse possa essere effettuato confrontando le rispettive forze peso; è su questa idea che si basa il metodo di misura delle masse tramite la **bilancia**.

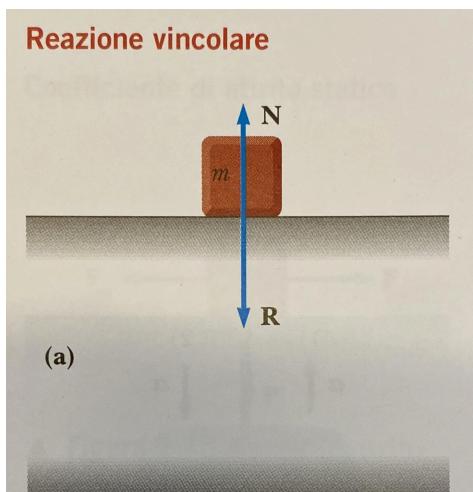
Però non bisogna confonderle: la massa di un corpo è indipendente dalla particolare forza agente (e vedremo che si possono confrontare due masse anche in assenza di qualsiasi forza), la forza peso invece risulta dall'interazione di un corpo con la terra (infatti sulla superficie di un altro pianeta la forza peso sarebbe diversa a parità di massa).

Reazione vincolare

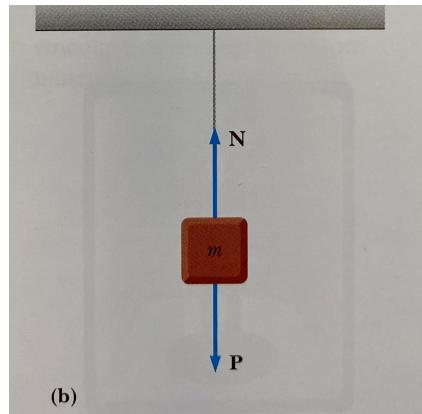
Se un corpo, soggetto all'azione di una forza o della risultante non nulla di un'insieme di forze, rimane fermo, dobbiamo dedurre da quanto detto precedentemente che l'azione della forza provoca una reazione dell'ambiente circostante, detta **reazione vincolare**, che si esprime tramite una forza, eguale e contraria alla forza o alla risultante delle forze agenti, applicata al corpo stesso in modo tale che esso rimanga in quiete. L'origine di tale forza è in accordo con la terza legge di Newton.

Ad esempio un corpo posato su di un tavolo è soggetto alla forza peso perpendicolarmente al piano e, per effetto di tale forza, il corpo preme sulla superficie del tavolo.

Il tavolo deve produrre, viste le condizioni di quiete del corpo, una forza eguale e contraria alla forza peso che chiamiamo reazione vincolare normale \bar{N}



Un altro esempio di reazione vincolare è quello che si manifesta nella situazione fisica di un corpo appeso tramite un filo. Il corpo è in condizioni di equilibrio statico, soggetto alla forza peso e alla reazione del sistema filo-punto di aggancio in modo che $\bar{P} + \bar{N} = 0$



In generale la reazione vincolare non è determinabile a priori, utilizzando una data formula, ma deve essere calcolata caso per caso dall'esame delle condizioni fisiche.

Il concetto di reazione vincolare non è tipico soltanto dell'equilibrio statico, ma si estende anche al caso di corpi in moto lungo una superficie. Se durante il moto risultasse che ad un certo istante la reazione vincolare si annulla, $\bar{N} = 0$, vorrebbe dire che in quell'istante avviene il distacco del corpo dalla superficie.

La sensazione di peso

Quindi, quando un corpo di massa m è poggiato su un pavimento orizzontale, esso risente di una reazione vincolare \bar{N} che in modulo vale mg per l'equilibrio delle forze. È proprio questa reazione applicata al corpo che dà la sensazione di peso e non direttamente la forza peso \bar{P} .

Consideriamo il corpo posato su di una piattaforma che può muoversi verticalmente con un'accelerazione \bar{a} . Finché il corpo resta sulla piattaforma la sua accelerazione è \bar{a} e l'equazione $\bar{F} = m\bar{a}$ si scrive

$$\bar{N} + \bar{P} = m\bar{a} \Rightarrow \bar{N} + m\bar{g} = m\bar{a}$$

in quanto al corpo sono applicate sia la forza peso che la reazione dovuta al contatto con la piattaforma. Solo se fosse $\bar{a} = 0$ sarebbe in modulo $N = P = mg$ come detto sopra.

Risolvendo questa equazione troviamo che

$$\bar{N} = m(\bar{a} - \bar{g})$$

e quindi abbiamo quattro casi da verificare. Prendiamo come asse di riferimento un asse z verticale orientato verso l'alto, quindi $\bar{g} = -gu_z$

1. \bar{a} discorde a \bar{g}

La piattaforma accelera verso l'alto (sta salendo accelerando o scendendo frenando).

In questo caso abbiamo $\bar{N} = m \left[a\bar{u}_z - (-g\bar{u}_z) \right] = m(a + g)\bar{u}_z$. Di conseguenza abbiamo che $N > mg$ e quindi si ha una **sensazione di aumento di peso**, una bilancia pesa persone darebbe una lettura maggiore di quando la piattaforma è ferma.

2. \bar{a} concorde a \bar{g} con $a < g$

La piattaforma accelera verso il basso (sta scendendo accelerando o salendo frenando).

In questo caso abbiamo $\bar{N} = m \left[-a\bar{u}_z - (-g\bar{u}_z) \right] = m(g - a)\bar{u}_z$. Di conseguenza abbiamo che $N < mg$ e quindi si ha una **sensazione di diminuzione di peso**, una bilancia pesa persone darebbe una lettura minore di quando la piattaforma è ferma.

3. \bar{a} concorde a \bar{g} con $a = g$

In questo caso non c'è reazione vincolare (corpo in caduta libera) e di conseguenza **non c'è sensazione di peso**, quindi $\bar{N} = 0$

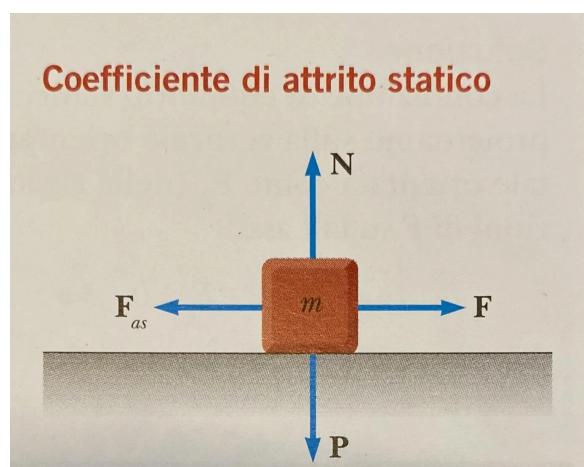
4. \bar{a} concorde a \bar{g} con $a > g$

In questo caso si ha il distacco del corpo dalla piattaforma, infatti la soluzione darebbe \bar{N} discorde all'asse z , la reazione dovrebbe attirare il corpo verso la piattaforma, il che è privo di senso

Forza di attrito radente

Applichiamo a un corpo appoggiato su un tavolo orizzontale una forza \bar{F} parallela al piano di appoggio. Si può osservare sperimentalmente che il corpo non entra in movimento per effetto di \bar{F} fino a che il modulo di \bar{F} non supera il valore $\mu_s N$, dove μ_s è un coefficiente adimensionale che dipende dalla natura dei corpi a contatto, detto **coefficiente di attrito statico** e N è il modulo della reazione vincolare normale al piano d'appoggio.

In realtà la forza di attrito è un insieme di tantissime microforze.



Abbiamo dunque:

condizione di quiete: $F \leq \mu_s N$

condizione di moto: $F > \mu_s N$

In condizione di quiete è realizzato l'equilibrio statico, quindi

$$\bar{R} + \bar{F} + \bar{P} = 0$$

dove \bar{R} è la reazione vincolare esercitata dal piano di appoggio e \bar{P} la forza peso del corpo.

Dette N e F_{as} le componenti rispettivamente verticale e orizzontale di \bar{R} , in modulo si ha

$$N = mg \quad F_{as} = F$$

Il vincolo quindi è in grado di sviluppare una **forza**, detta **di attrito radente statico**, eguale e contraria a \bar{F} . Questo avviene fino a che F non supera il valore di $\mu_s N$.

La forza di attrito radente statico non ha pertanto un valore prefissato, ma varia con il valore della forza \bar{F} applicata, da zero fino al massimo $\mu_s N$.

Il fenomeno ha origine dalle forze di coesione tra i materiali a contatto, che sono premuti uno contro l'altro dalla forza peso del corpo.

Quando F supera $\mu_s N$ il corpo entra in movimento lungo il piano e si osserva che si oppone al moto un'altra forza, detta **forza di attrito radente dinamico** $F_{ad} = \mu_d N$ dove μ_d è detto **coefficiente di attrito dinamico**. Risulta sempre $\mu_d < \mu_s$.

L'equazione del moto lungo il punto è pertanto $F - \mu_d N = ma$.

La componente normale della reazione N è ancora data da P (visto che non c'è moto ortogonalmente al piano e quindi la risultante delle forze deve essere nulla).

La forza di attrito radente dinamico non dipende dalla velocità del corpo rispetto al piano di appoggio ed ha verso contrario alla direzione del moto e quindi al versore della velocità, \bar{u}_v .

Vettorialmente si può scrivere

$$\bar{F}_{ad} = -\mu_d N \bar{u}_v$$

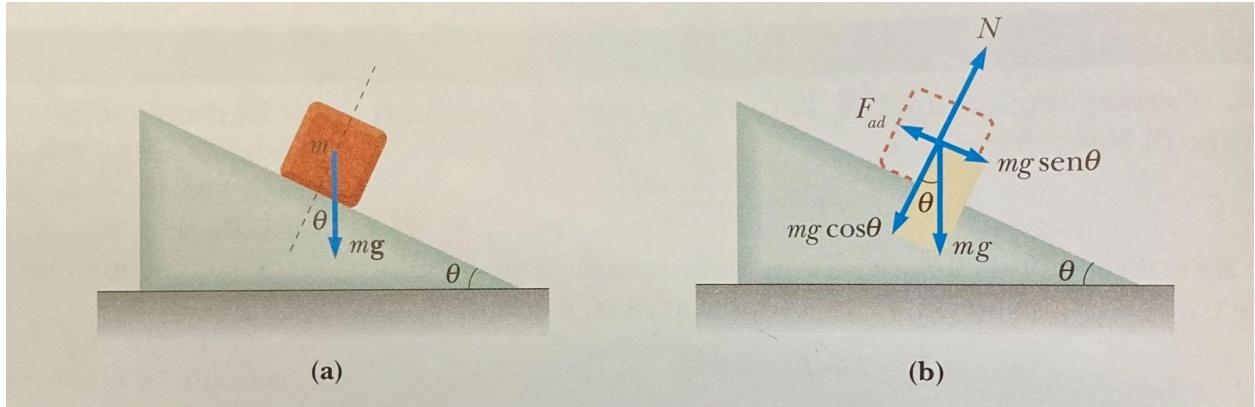
Quindi le forze di attrito radente (statico e dinamico) hanno origine dalle **forze di coesione** tra due materiali, il valore del coefficiente di attrito dipende dallo stato delle superfici a contatto e dalla loro composizione chimica.

Si può tentare di ridurre le forze di attrito (bagnando le superfici) però le forze di attrito radente sono sempre presenti, per quanto si possa tentare di ridurle.

Soltanto per esaminare casi limite ideali e semplificati porremo eguale a zero la forza di attrito, diremo allora che la superficie di scorrimento è **liscia**. In tutti gli altri casi si parla di **superficie scabra**.

Piano inclinato

Consideriamo un corpo, assimilabile a un punto materiale di massa m , che possa muoversi sotto l'azione della forza peso e di eventuali altre forze, compresa la forza di attrito radente, su una superficie piana inclinata di un angolo θ rispetto a un piano orizzontale, detta **piano inclinato**.



Se agisce solo la forza peso \bar{P} , in assenza perciò di attrito tra corpo e piano inclinato, si ha secondo la legge di Newton

$$\bar{P} + \bar{R} = m\bar{a}$$

dove \bar{R} è la reazione vincolare del piano di appoggio che ha un'unica componente normale al piano stesso, **vincolo liscio**. Scomponendo lungo le direzioni ortogonale e parallela al piano inclinato, e notando che l'angolo che si forma tra la forza peso e la retta ortogonale al piano è uguale a θ , si ottiene

$$-mg \cos(\theta) + N = 0 \quad mg \sin(\theta) = ma$$

dato che il corpo è vincolato a muoversi lungo il piano inclinato. Quindi abbiamo che

$$\bar{a} = a_x = g \sin(\theta)$$

Dalla prima condizione si calcola il valore della reazione vincolare, ovvero $N = mg \cos(\theta)$, dalla seconda il valore dell'accelerazione, $a = g \sin(\theta) < g$. Quindi il corpo scende con **moto uniformemente accelerato** e l'accelerazione è minore di quella di gravità (se θ fosse uguale a $\frac{\pi}{2}$, avremo che $a = g$ visto che la parete sarebbe verticale).

Nel caso in cui esista un attrito radente tra il piano inclinato e il corpo, il moto lungo il piano non può avvenire se la componente della forza peso lungo il piano inclinato non supera la massima forza di attrito statico:

$$mg \sin(\theta) \leq F_{as,max} = \mu_s N = \mu_s mg \cos(\theta)$$

Pertanto la **condizione per l'equilibrio statico** di un corpo poggiato su un piano inclinato scabro è

$$\tan(\theta) \leq \mu_s$$

Quindi per avere moto bisogna aumentare l'angolo di inclinazione fino a che $\tan(\theta) > \mu_s$, in queste condizioni si ottiene:

$$\begin{aligned} -mg \cos(\theta) + N &= 0 \\ mg \sin(\theta) - \mu_d N &= ma \end{aligned}$$

E combinando le due equazioni, otteniamo che il corpo scende lungo il piano inclinato con accelerazione uguale a

$$a = (\sin(\theta) - \mu_d \cos(\theta))g$$

Riassumendo, se il corpo è fermo sul piano inclinato esso resta fermo per tutti gli angoli di inclinazione compresi tra 0 e θ_s tale che $\operatorname{tg}(\theta_s) = \mu_s$, invece per $\theta > \theta_s$ il corpo scende lungo il piano inclinato. Però, una volta che il corpo si è messo in movimento, poiché la forza di attrito in queste condizioni è minore di quella in quiete ($\mu_d < \mu_s$), si può avere moto anche per angoli minori di θ_s , precisamente compresi tra θ_d e θ_s , con $\theta_d < \theta_s$ tale che $\operatorname{tg}(\theta_d) = \mu_d$.

Se invece il corpo all'istante iniziale sta scendendo lungo il piano con velocità v_0 :

- Esso decelera se $\operatorname{tg}(\theta) < \mu_d$
- Esso si muove di moto uniformemente accelerato se $\operatorname{tg}(\theta) > \mu_d$
- Esso prosegue con velocità costante se $\operatorname{tg}(\theta) = \mu_d$

La misura degli angoli θ_s (a cui un corpo comincia a scivolare) e θ_d (per cui il moto è uniforme) è utile per determinare i coefficienti μ_s e μ_d .

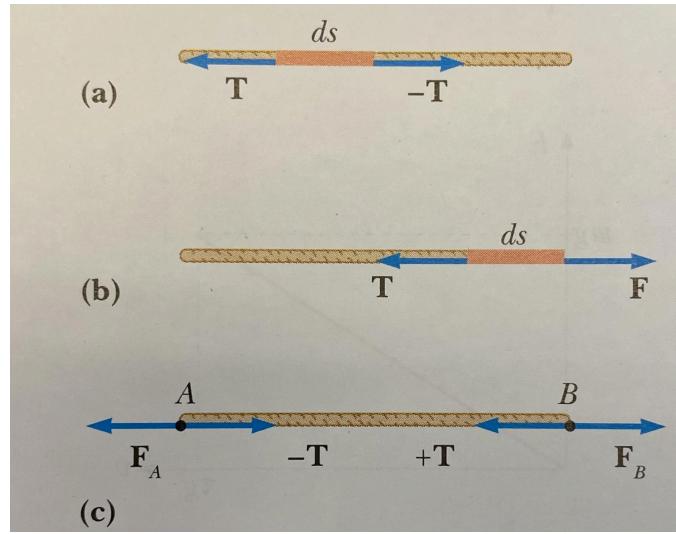
Tensione dei fili

Un filo può essere fissato in un estremo a un punto fisso e nell'altro a un punto materiale oppure collegare due punti materiali. La forza (con direzione lungo il filo teso) che il filo esercita su qualsiasi punto materiale viene chiamata **tensione del filo**. Supporremo sempre che il filo sia inestensibile (lunghezza costante) e di massa trascurabile rispetto alle altre masse (filo ideale).

Per chiarire il concetto di tensione consideriamo un **filo teso in quiete** e prendiamo in esame un elemento infinitesimo ds di esso. Tale elemento è tirato dalle due parti restanti di filo e l'equilibrio statico richiede che le due forze agenti sull'elemento di filo siano eguali in modulo e direzione e di verso opposto. Questo vale per qualunque elemento di filo e la tensione è la stessa ovunque.

In particolare a un estremo $T = -F$.

Per il filo AB nel suo insieme deve valere in modulo $F_A = F_B = T$: per tendere il filo si applicano le forze $\bar{F}_B = -\bar{F}_A$ e la tensione, in modulo, è eguale al modulo di \bar{F}_A e \bar{F}_B .



Consideriamo adesso un **filo tesio in movimento**.

L'ipotesi che il filo sia inestensibile comporta che tutti i punti del filo, compresi gli estremi, abbiano la stessa accelerazione; pertanto due corpi in movimento collegati da un filo tesio devono avere la stessa accelerazione.

L'ipotesi che il filo abbia massa trascurabile fa sì che il prodotto ma risulti nullo per il filo: di conseguenza anche in questo caso le due forze agenti su ogni elemento di filo sono eguali in modulo.

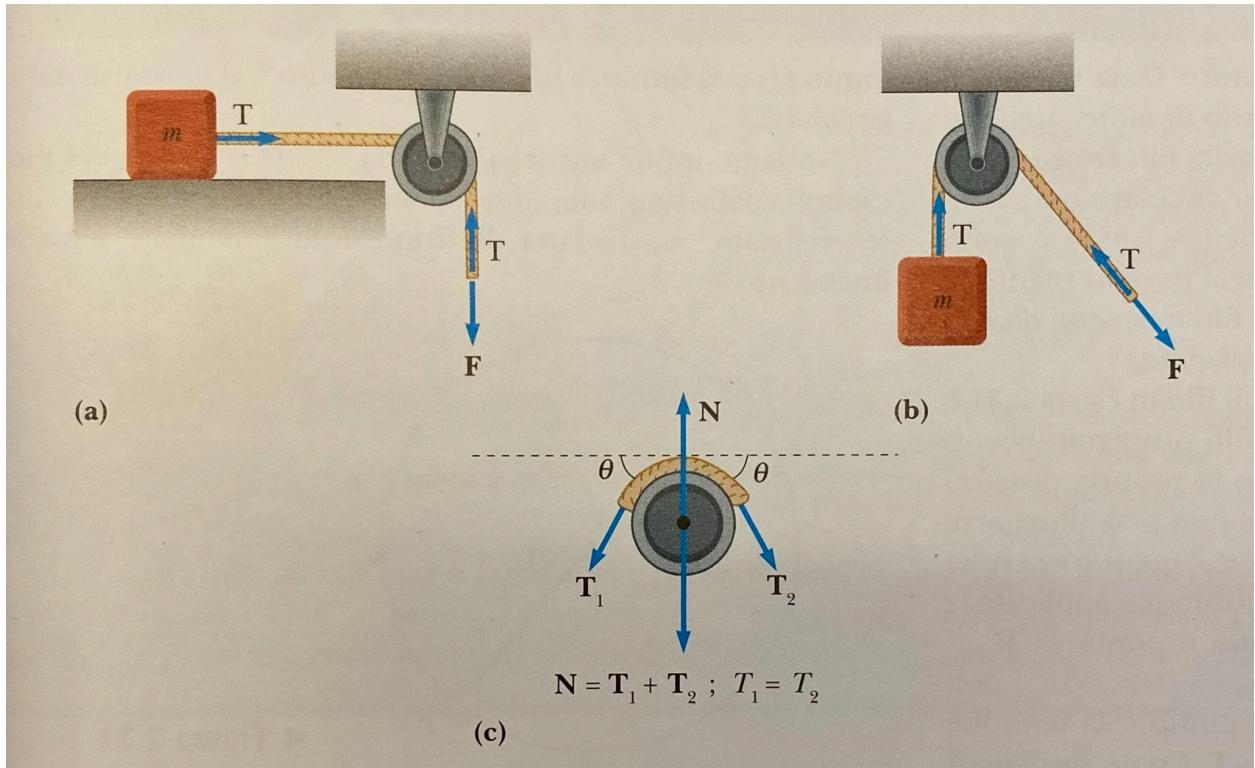
Quindi il valore della tensione durante il moto è lo stesso in qualunque punto del filo (come nel caso statico). Lo stesso ovviamente succede se il moto è uniforme ($a = 0$).

Riassumendo, il filo esercita agli estremi la tensione \bar{T} , il cui valore dipende dalle forze applicate, e che deve essere pensata come la reazione del filo alla forza che lo tende.

Per un filo reale la tensione non può superare un valore massimo T_{max} , oltre il quale il filo si spezza.

Se a un estremo è collegato un punto materiale, la tensione \bar{T} va inserita nella legge di Newton come le altre forze agenti sul punto.

Il filo può scorrere attorno a un perno o essere parzialmente avvolto attorno a un disco mobile, **carrucola**, allo scopo di cambiare la direzione della forza.



Con riferimento alla figura c) un tratto di filo curvo è sottoposto alle due tensioni \bar{T}_1 e \bar{T}_2 e alla forza \bar{N} reazione vincolare del perno, ortogonale al perno se questo è liscio (la carrucola non ruota attorno al perno).

In questa situazione le due tensioni formano lo stesso angolo con la tangente della circonferenza, hanno componenti tangenti uguali ed opposte per soddisfare alla relazione $F_T = ma_T = 0$ (ricordiamo che $m = 0$).

\bar{T}_1 e \bar{T}_2 sono dunque uguali in modulo ed eguali sono le componenti normali la cui somma vale \bar{N} (modulo della risultante di \bar{T}_1 e \bar{T}_2).

Se due corpi collegati da un filo ideale vengono sottoposti a due forze di verso opposto e modulo diverso, la tensione nel filo sarà uguale al modulo della forza di modulo maggiore. Questo principio è noto come principio di Pascal per la trasmissione della pressione nei fluidi, che può essere applicato anche ai fili ideali.

Le carrucole possono essere usate anche per variare le accelerazioni degli oggetti (ad esempio alzare con la forza delle braccia oggetti molto pesanti usando una carrucola mobile).

Nel caso di un sistema con una singola carrucola mobile, il vantaggio meccanico sarà di 2. Ciò significa che la forza richiesta per sollevare un carico sarà dimezzata rispetto alla forza di input. Ad esempio, se si applica una forza di 20 N sul filo, la forza risultante sul carico sarà di 10 N.

L'utilizzo di un sistema con più carrucole mobili o fisse può aumentare ulteriormente il vantaggio meccanico. Ad ogni carrucola aggiuntiva, il vantaggio meccanico aumenta di un fattore di 2. Pertanto, se si utilizzano due carrucole mobili, il vantaggio meccanico sarà di 4; con tre carrucole mobili, sarà di 8 e così via.

Oltre ai fili, si possono utilizzare per lo stesso scopo **bacchette solide**, con le seguenti differenze:

1. Mentre il filo funziona in **trazione**, la bacchetta può funzionare in **trazione** e in **compressione** (un filo può solo tirare un corpo, una bacchetta può anche spingerlo)
2. Un filo può esercitare solo forze che hanno la direzione del filo stesso, cioè non può sopportare una sollecitazione ortogonale, una bacchetta non presenta questa limitazione

Forza elastica. Oscillatore armonico semplice

Si definisce **forza elastica** (unidimensionale) una forza di direzione costante, con verso rivolto sempre a un punto O , chiamato centro, e con modulo proporzionale alla distanza da O . Se assumiamo come asse x la direzione della forza e come origine il centro, possiamo scrivere

$$\bar{F} = -kx\bar{u}_x$$

dove k è una costante positiva, detta **costante elastica**, e \bar{u}_x è il versore dell'asse x . Il moto di un punto sottoposto a una forza elastica è rettilineo, qualora la velocità iniziale sia nulla o diretta come \bar{u}_x .

Applicando la legge di Newton e definendo $\frac{k}{m} = \omega^2$ abbiamo che

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

e quindi il sistema costituisce un **oscillatore armonico semplice**, e il moto è armonico semplice con pulsazione ω e periodo T determinati dal rapporto tra la costante elastica e la massa del punto materiale a cui è applicata la forza elastica:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

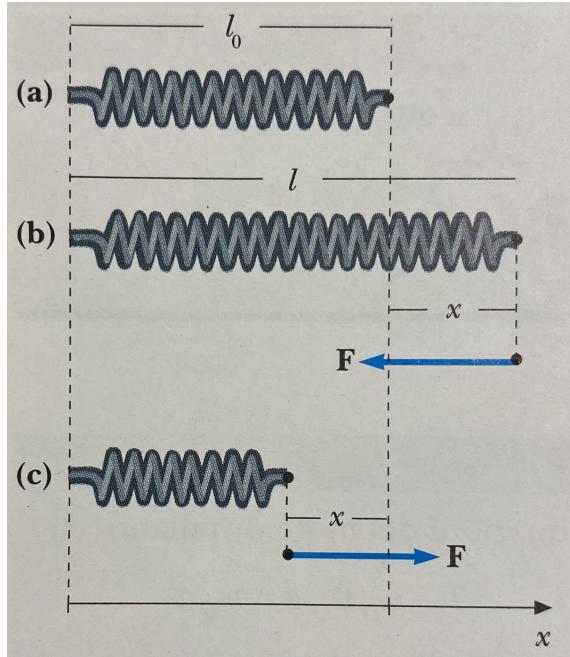
Una forza elastica viene praticamente applicata tramite una molla; questa presenta in genere una lunghezza a riposo di valore finito l_0 .

Se la molla viene estesa, assumendo una lunghezza $l > l_0$, essa sviluppa una forza \bar{F} che tende a riportarla alla condizione di riposo

$$\bar{F} = -k(l - l_0)\bar{u}_x = -kx\bar{u}_x$$

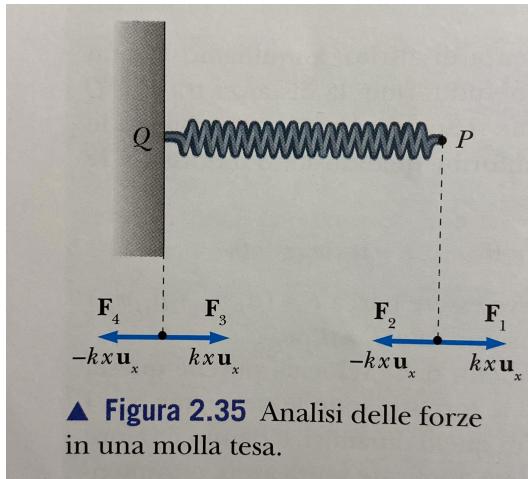
dove $x > 0$ rappresenta la deformazione.

Se invece la molla viene compressa alla lunghezza $l < l_0$, la forza ha la stessa espressione, con $x < 0$, e quindi opposta in direzione: $\bar{F} = kx\bar{u}_x$.



Il modulo di questa **forza di richiamo** è proporzionale alla deformazione fino a che non si supera il limite di elasticità della molla. Nel seguito considereremo molle ideali, ossia con massa nulla (trascrivibile rispetto a quella dei corpi su cui agisce) e limite di elasticità infinito.

Se vogliamo mantenere la molla deformata con una determinata lunghezza l dobbiamo applicare alla molla una forza eguale e opposta alla forza esercitata dalla molla.



▲ **Figura 2.35** Analisi delle forze in una molla tesa.

Nel punto P la forza elastica \bar{F}_2 dovuta alla deformazione della molla viene bilanciata da una forza esterna \bar{F}_1 tale che $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$. Nel punto Q la situazione è analoga, solo che la forza elastica \bar{F}_3 è bilanciata dalla reazione vincolare, che si sviluppa nel punto di aggancio, tale che $\bar{F}_4 = -\bar{F}_3$.

Considerando che la molla, nel suo insieme, è ferma, deve essere nulla la risultante delle forze applicate alla molla, deve cioè essere $\bar{F}_1 = -\bar{F}_4$ da cui segue $\bar{F}_2 = -\bar{F}_3$.

Quindi se vogliamo deformare una molla di una quantità x , dobbiamo applicare ai due estremi due forze eguali e contrarie di modulo kx .

Supponiamo ora di avere una molla bloccata in un estremo, deformata di x_0 , e che all'altro estremo sia fissato un punto materiale di massa m che poggia su un piano orizzontale liscio. Se all'istante $t = 0$ il punto viene lasciato libero con velocità nulla, esso si muove di moto armonico per effetto della forza elastica agente su di esso. La soluzione dell'equazione del moto

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

è quella vista nel paragrafo del moto armonico semplice, abbiamo quindi un moto armonico con $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ con $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

I valori delle costanti A e ϕ si calcolano dalle condizioni iniziali

$$x_0 = A \sin(\phi) \quad 0 = \omega A \cos(\phi)$$

visto che che $v = \omega A \cos(\omega t + \phi)$.

Per ϕ compreso tra 0 e 2π sono possibili le due soluzioni $A = x_0, \phi = \frac{\pi}{2}$ e $A = -x_0, \phi = 3\frac{\pi}{2}$; in ogni caso si hanno per la legge oraria e per la velocità le espressioni

$$x = x_0 \cos(\omega t) \quad v = -\omega x_0 \sin(\omega t)$$

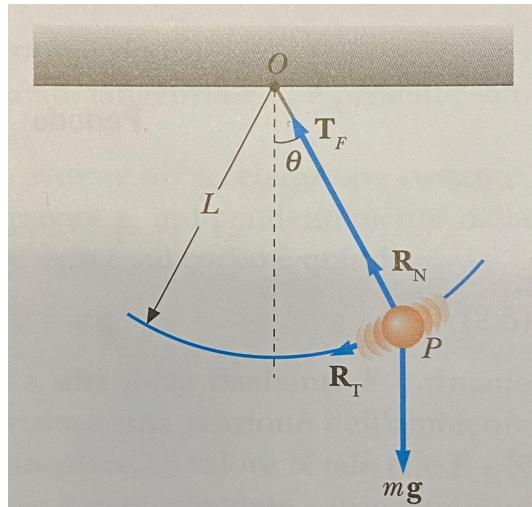
Se le condizioni iniziali sono diverse (quindi velocità iniziale $v_0 \neq 0$) si ottiene sempre un moto armonico con la medesima ω , però il valore dell'ampiezza è in generale diverso da x_0 :

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \quad \operatorname{tg}(\phi) = \omega \frac{x_0}{v_0}$$

A in questo caso è maggiore di x_0 a causa della velocità iniziale diversa da zero.

Pendolo semplice

Il **pendolo semplice** è costituito da un punto materiale appeso tramite un filo ideale.



La posizione di equilibrio statico è quella verticale, con il punto fermo ed il filo teso; la forza esercitata dal filo (tensione del filo) vale in modulo $T_F = mg$.

Se spostiamo il punto della verticale esso inizia a oscillare attorno a questo lungo un arco di circonferenza di raggio L , pari alla lunghezza del filo, in un piano verticale.

Le forze agenti sul punto P sono il peso $m\bar{g}$ e la tensione del filo \bar{T}_F per cui il moto è regolato da

$$m\bar{g} + \bar{T}_F = m\bar{a}.$$

Consideriamo le componenti lungo la traiettoria circolare, orientata come nella figura, e ortogonalmente alla traiettoria (verso positivo da P a O):

$$R_T = -mg \sin(\theta) = ma_T \quad R_N = T_F - mg \cos(\theta) = ma_N$$

Il segno negativo della componente lungo la traiettoria è dovuto al fatto che la forza ha segno opposto rispetto a quello della coordinata s sulla traiettoria.

Infatti per $s < 0$, posizioni sull'arco di circonferenza a sinistra della verticale, la forza è diretta secondo il verso assunto positivo, mentre per $s > 0$ la forza è diretta secondo il verso negativo (e il risultato non dipende dalla scelta del verso di s).

Fisicamente R_T è una forza di richiamo che tende a riportare il punto sulla verticale, anche se non è di direzione costante come nel caso delle forze elastiche.

Visto che dal moto circolare sappiamo che l'accelerazione angolare istantanea è $\alpha = \frac{a_T}{R}$ abbiamo che:

$$a_T = L\alpha = L \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

E dato che $a_N = \frac{v^2}{R}$ vale:

$$a_N = \frac{v^2}{L}$$

Sostituendo queste due accelerazioni nelle equazioni precedente otteniamo:

$$\begin{aligned} -g \sin(\theta) &= L \frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta) \\ m \frac{v^2}{L} &= T_F - mg \cos(\theta) \end{aligned}$$

L'equazione $\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin(\theta)$ è l'equazione differenziale del moto del pendolo, la cui soluzione ci fornisce la legge oraria del moto $\theta(t)$; però, per θ qualunque, la soluzione è analiticamente complicata.

Consideriamo allora piccoli valori di θ e sviluppiamo in serie $\sin(\theta)$:

$$\sin(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots$$

Quantitativamente, per $\theta \leq 0.122 \text{ rad} = 7^\circ$, $\sin(\theta)$ si può approssimare con θ commettendo un errore relativo che è sempre minore di 10^{-3} . Quindi per **piccole oscillazioni** l'equazione differenziale diventa

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

la quale coincide con quella del moto armonico semplice, ponendo $\omega^2 = \frac{g}{L}$

In conclusione il moto del pendolo è oscillatorio armonico quando l'ampiezza delle oscillazioni è piccola così che $\sin(\theta) = \theta$. La legge oraria del moto è:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

l'ampiezza θ_0 dell'oscillazione e la fase iniziale ϕ dipendono dalle condizioni iniziali del moto (come già discusso precedentemente).

Il periodo del moto T è dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

ed è indipendente dall'ampiezza (isocronismo delle piccole oscillazioni)

La legge oraria dello spostamento lungo l'arco di circonferenza è dato da

$$s(t) = L\theta(t) = L\theta_0 \sin(\omega t + \phi)$$

mentre la velocità angolare e la velocità lineare hanno le espressioni

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi) \quad v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = L \frac{d\theta(t)}{dt} = L\omega\theta_0 \cos(\omega t + \phi)$$

La velocità è massima quando il punto passa per la verticale ($\theta = 0$) e nulla agli estremi delle oscillazioni ($\theta = \theta_0$) dove il verso del moto si inverte.

Quando l'ampiezza delle oscillazioni non è piccola il moto è ancora periodico, ma non armonico, e il periodo T' dipende dall'ampiezza.

Risolto il problema del moto, e quindi note $\theta(t)$ e $v(t)$, possiamo ritornare all'equazione del moto proiettata sulla normale della traiettoria e calcolare la **tensione del filo** che sostiene il punto, da $m\frac{v^2}{L} = T_F - mg \cos(\theta)$:

$$T_F = m \left[g \cos(\theta(t)) + \frac{v^2(t)}{L} \right]$$

La tensione è massima nella posizione verticale, dove sia $\cos(\theta(t))$ che $v(t)$ assumono i valori massimi, ed è minima nei punti di inversione.

Moti Relativi

Sistemi di riferimento. Velocità e accelerazione relative

Sperimentalmente è provato con estrema accuratezza che, fissato un sistema di riferimento e stabilita una legge fisica, questa resta uguale anche se cambiano l'origine e l'orientazione degli assi coordinati, ovvero se ci riferiamo ad un altro sistema ottenuto dal primo con una traslazione

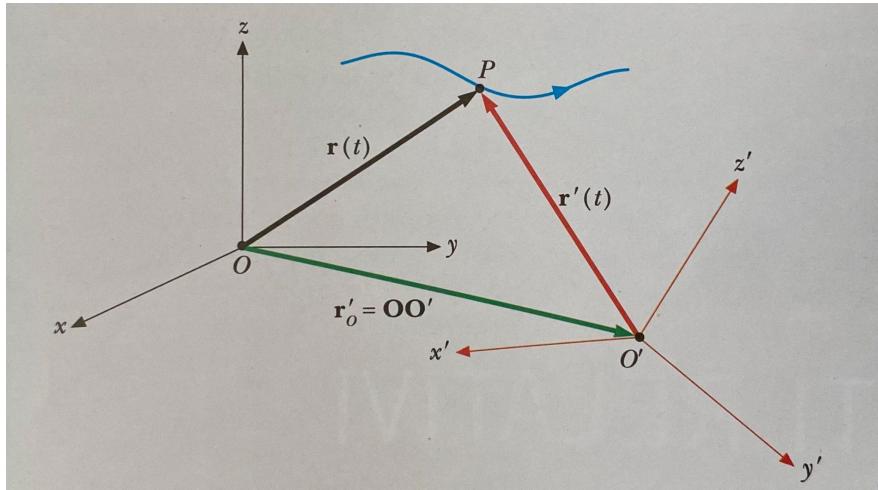
(spostamento dell'origine conservando la stessa direzione degli assi) o rotazione (stessa origine cambiando la direzione degli assi) o con una operazione combinata.

Le leggi fisiche non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento e non esiste pertanto un punto privilegiato dello spazio e nemmeno un'orientazione privilegiata: lo spazio appare omogeneo e isotropo.

La caratteristica sostanziale di **invarianza** acquista un aspetto formale se le leggi fisiche vengono espresse come relazioni tra entità che godono anch'esse delle suddette proprietà di invarianza (come le grandezze scalari o quelle vettoriali).

La situazione si presenta diversa quando un fenomeno viene osservato da due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro. Il moto viene descritto con leggi diverse in due sistemi di riferimento in moto relativo, a meno che questo moto non abbia certe caratteristiche che tra breve specificheremo. Non sussiste cioè invarianza delle leggi fisiche rispetto a due sistemi di riferimento in moto qualsiasi l'uno rispetto all'altro.

Prendiamo in considerazione il seguente esempio:



Nella figura è rappresentato un punto P in movimento lungo una generica traiettoria.

Il suo moto viene osservato da una terna cartesiana con centro in O che, per convenzione, chiamiamo **sistema di riferimento fisso** $S(x, y, z)$ e da una terna cartesiana con centro O' che, sempre per convenzione, chiamiamo **sistema di riferimento mobile** $S'(x', y', z')$.

L'origine del sistema mobile S' ha una velocità $\bar{v}_{O'}$ rispetto al sistema fisso S , inoltre l'insieme dei tre assi mobili, che è assimilabile ad un corpo indeformabile, ruota con velocità angolare $\bar{\omega}$ (vettore perché è importante sapere il piano su cui avviene la rotazione)

Il vettore $\bar{\omega}$ ha la direzione che rappresenta l'asse di rotazione, come modulo ha ω (ovvero $\frac{d\theta}{dt}$) e come verso quello di avanzamento della vite (avvitamento) che ruota come l'oggetto (regola della mano destra)

Vogliamo trovare che relazioni esistono tra la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P , misurate da un osservatore solidale con il sistema fisso, e le corrispondenti grandezze misurate da un osservatore solidale con il sistema mobile. Cercheremo poi di stabilire come la

nozione di invarianza possa eventualmente estendersi appunto al caso in cui i sistemi di riferimento siano in moto l'uno rispetto all'altro.

Ripetiamo che la dizione sistema fisso e sistema mobile è solo una questione di convenzioni (vedremo in seguito che esiste una maniera più fisica per distinguere i sistemi di riferimento in due classi ben diverse).

Indichiamo con $\bar{r} = \bar{x}\bar{u}_x + \bar{y}\bar{u}_y + \bar{z}\bar{u}_z$ il vettore posizione del punto P rispetto al sistema di riferimento fisso $S(x, y, z)$, con $\bar{r}' = \bar{x}'\bar{u}_{x'} + \bar{y}'\bar{u}_{y'} + \bar{z}'\bar{u}_{z'}$ il vettore posizione del punto P rispetto al sistema di riferimento mobile $S'(x, y, z)$ e con $\bar{r}_{O'} = \bar{O}\bar{O}' = \bar{x}_{O'}\bar{u}_x + \bar{y}_{O'}\bar{u}_y + \bar{z}_{O'}\bar{u}_z$ il vettore posizione dell'origine del sistema mobile O' rispetto a quello fisso.

Come si evince dalla figura, la relazione tra le posizioni del punto P , misurate rispetto ai due sistemi di riferimento, è la seguente

$$\bar{r} = \bar{r}_{O'} + \bar{r}'$$

Derivando rispetto al tempo e indicando con \bar{v} la velocità del punto P rispetto al sistema fisso e $\bar{v}_{O'}$ la velocità del sistema mobile rispetto a quello fisso, si ottiene

$$\bar{v} = \bar{v}_{O'} + \frac{d\bar{r}'}{dt}$$

Il vettore posizione \bar{r}' del punto P rispetto al sistema mobile può variare, sia perché varia la posizione di P , sia perché il sistema mobile ruota con velocità angolare $\bar{\omega}$. Pertanto la derivata temporale del vettore \bar{r}' risulta essere:

$$\frac{d\bar{r}'}{dt} = \left(\frac{dx'}{dt} \bar{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \bar{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \bar{u}_{z'} \right) + \left(x' \frac{du_x}{dt} + y' \frac{du_y}{dt} + z' \frac{du_z}{dt} \right)$$

Utilizzando la formula della derivata dei versori $\frac{du}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \bar{u}_n$ (come descritta nell'appendice C) e ricordando la definizione del vettore velocità angolare $\bar{\omega}$, possiamo scrivere vettorialmente $\frac{du}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{u}$, detta **relazione di Poisson**. Pertanto la nostra equazione diventa

$$\frac{d\bar{r}'}{dt} = \left(v'_x \bar{u}_{x'} + v'_y \bar{u}_{y'} + v'_z \bar{u}_{z'} \right) + \left(x' (\bar{\omega} \times \bar{u}_x) + y' (\bar{\omega} \times \bar{u}_y) + z' (\bar{\omega} \times \bar{u}_z) \right) = \bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{r}'$$

avendo indicato con \bar{v}' la velocità del punto P rispetto al sistema mobile (**velocità relativa**).

Dunque alla fine otteniamo sostituendo $\frac{d\bar{r}'}{dt}$ che

$$\bar{v} = \bar{v}_{O'} + \bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{r}' = \bar{v}' + \bar{v}_t$$

Le velocità del punto P viste dai due sistemi di riferimento sono diverse, ma correlate da questa equazione. Il termine correttivo, chiamato **velocità di trascinamento**, è

$$\bar{v}_t = \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}'$$

e dipende dal tipo di moto che compie il sistema mobile rispetto al sistema fisso (traslatorio $\bar{v}_{O'}$, rotatorio $\bar{\omega}$) e dalla posizione del punto P rispetto al sistema mobile (\bar{r}').

Due casi particolari sono importanti:

- Il sistema mobile non ruota rispetto a quello fisso ($\bar{\omega} = 0$); si parla di **moto relativo traslatorio** tra i due sistemi, ovvero di **moto di trascinamento traslatorio** e abbiamo che $\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_{O'}$ con $\bar{v}_t = \bar{v}_{O'}$
- Il sistema mobile non si sposta rispetto a quello fisso ($\bar{v}_{O'} = 0$), ma ruota; si parla di **moto relativo rotatorio** tra i due sistemi, ovvero di **moto di trascinamento rotatorio** e abbiamo che $\bar{v} = \bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{r}'$ con $\bar{v}_t = \bar{\omega} \times \bar{r}'$

In entrambi i casi se il punto P è solidale con il sistema di riferimento mobile, ovvero $\bar{v}' = 0$, la velocità del punto P coincide con la velocità di trascinamento: $\bar{v} = \bar{v}_{O'}$ oppure $\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}'$.

Ricaviamo ora la relazione che sussiste tra le accelerazioni del punto P rispetto ai due sistemi di riferimento S e S' in moto relativo. Chiamiamo con $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$ l'accelerazione di P nel sistema di riferimento fisso e con $\bar{a}_{O'} = \frac{d\bar{v}_{O'}}{dt}$ l'accelerazione dell'origine O' del sistema mobile rispetto a quello fisso.

Derivando la velocità $\bar{v} = \bar{v}' + \bar{v}_{O'} + \bar{\omega} \times \bar{r}'$ si ottiene

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}'}{dt} + \bar{a}_{O'} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}'}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}'$$

Il vettore velocità \bar{v}' del punto P rispetto al sistema mobile può variare sia perché varia la posizione di P , sia perché il sistema mobile ruota con velocità angolare $\bar{\omega}$. Pertanto la derivata temporale del vettore \bar{v}' è

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \left(\frac{dv'_{x'}}{dt} \bar{u}_{x'} + \frac{dv'_{y'}}{dt} \bar{u}_{y'} + \frac{dv'_{z'}}{dt} \bar{u}_{z'} \right) + \left(v'_{x'} \frac{du'_{x'}}{dt} + v'_{y'} \frac{du'_{y'}}{dt} + v'_{z'} \frac{du'_{z'}}{dt} \right)$$

Utilizzando la formula di Poisson, come descritto nel paragrafo precedente, si può riscrivere nel seguente modo:

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \left(a'_{x'} \bar{u}_{x'} + a'_{y'} \bar{u}_{y'} + a'_{z'} \bar{u}_{z'} \right) + \left(v'_{x'} (\bar{\omega} \times \bar{u}_{x'}) + v'_{y'} (\bar{\omega} \times \bar{u}_{y'}) + v'_{z'} (\bar{\omega} \times \bar{u}_{z'}) \right) = \bar{a}' + \bar{\omega} \times \bar{v}'$$

dove \bar{a}' è l'accelerazione del punto P rispetto al sistema mobile (**accelerazione relativa**).

Il termine $\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}'}{dt}$ sapendo che $\frac{d\bar{r}'}{dt} = \bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{r}'$ diventa

$$\bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}'}{dt} = \bar{\omega} \times (\bar{v}' + \bar{\omega} \times \bar{r}') = \bar{\omega} \times \bar{v}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')$$

Andando a sostituire questi risultati nell'accelerazione otteniamo

$$\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_{O'} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}' + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}')$$

Le accelerazioni del punto P viste dai due sistemi di riferimento in moto relativo non coincidono, ma sono correlate da questa equazione. Il termine

$$\bar{a}_t = \bar{a}_{O'} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}'$$

si chiama **accelerazione di trascinamento** e dipende, come \bar{v}_t , dai parametri del moto relativo tra i due sistemi e dalla posizione di P nel sistema mobile. L'accelerazione di trascinamento è data da tre contributi:

- L'accelerazione $\bar{a}_{\theta'}$ del moto di traslazione del sistema mobile
- L'accelerazione centripeta $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$ dovuta al moto di rotazione del sistema mobile
- L'accelerazione tangenziale $\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}$ dovuta anch'essa al moto di rotazione del sistema mobile

Queste ultime sono già state incontrate nel moto circolare.

Il termine

$$\bar{a}_c = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}')$$

è detto **accelerazione complementare o di Coriolis** e dipende dal moto di P rispetto al sistema mobile (\bar{v}').

Dunque possiamo scrivere l'accelerazione in modo sintetico

$$\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

In corrispondenza ai due casi particolari già evidenziati per la velocità abbiamo:

- $\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_{\theta'}$ nel caso di un moto di trascinamento traslatorio
- $\bar{a} = \bar{a}' + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}' + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}')$ nel caso di un moto di trascinamento rotatorio

La complessa struttura dell'accelerazione fa comprendere quanto possa essere diversa la descrizione del moto di uno stesso punto visto da due sistemi diversi. Conseguentemente saranno diverse le forze che vengono *ipotizzate* per spiegare il determinato tipo di moto da parte degli osservatori solidali a differenti sistemi di riferimento.

Sistemi di riferimento inerziali. Relatività galileiana

Definiamo come **sistema di riferimento inerziale** un sistema in cui valga rigorosamente la legge di inerzia, in cui cioè un punto *non soggetto a forze* lanciato con velocità arbitraria in qualunque direzione si muova con moto rettilineo uniforme o, se è in quiete, resti in quiete.

È evidente che la definizione di sistema di riferimento inerziale ha significato solo se siamo in grado di verificare in modo diverso che il punto non è soggetto a forze. È ragionevole supporre che questa situazione si verifichi sia quando il punto è sufficientemente lontano da ogni altro corpo in modo da poter trascurare ogni interazione, sia quando è possibile bilanciare le forze agenti in modo che la risultante sia nulla. Assumiamo pertanto di poter disporre di un punto materiale non soggetto a forze e quindi di poter verificare se il sistema di riferimento in cui si osserva il moto sia inerziale o no (una simile ammissione è stata implicitamente fatta quando abbiamo introdotto il principio di inerzia).

In un sistema di riferimento inerziale la legge di Newton $\bar{F} = m\bar{a}$ ha l'espressione più semplice: le forze che compaiono a primo membro sono le **forze reali** (o vere) cioè quelle che abbiamo esaminato nel capitolo 2 e che sappiamo derivare dalle interazioni fondamentali; la risultante è proporzionale all'accelerazione misurata in quel sistema di riferimento.

Consideriamo ora un altro sistema di riferimento che si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad un certo sistema inerziale. Pertanto si ha

$$\bar{v}_{O'} = \text{costante} \quad \bar{a}_{O'} = 0 \quad \bar{\omega} = 0$$

Da $\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_{O'} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r}' + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}')$ ricaviamo $\bar{a} = \bar{a}'$: **le accelerazioni di un punto misurate nei due sistemi di riferimento sono eguali**. Se $\bar{a} = 0$ anche $\bar{a}' = 0$ e quindi pure il secondo sistema è inerziale.

Abbiamo così ottenuto questo risultato fondamentale: **definito un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi in moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali**. Per tali sistemi la legge di Newton si scrive allo stesso modo, ossia con gli stessi valori di \bar{F} e di \bar{a} : se cioè nel sistema inerziale O la relazione tra l'accelerazione e la forza agente è $\bar{F} = m\bar{a}$, nel sistema inerziale O' la legge di Newton si scrive allo stesso modo $\bar{F} = m\bar{a}'$.

Conseguenza importante è che, essendo la dinamica la stessa, non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi sistemi di riferimento, se uno di essi è in quiete o in moto. Non ha cioè senso il concetto di moto assoluto. Tale situazione fisica viene descritta anche con il termine di **relatività galileiana**.

Sistemi di riferimento non inerziali. Forze apparenti

Definiamo come **sistema di riferimento non inerziale**, un sistema in moto accelerato $\bar{a}_{O'} \neq 0$ oppure in rotazione $\bar{\omega} \neq 0$ o entrambi, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. In tale sistema non vale il principio di inerzia e quindi neanche la legge di Newton: ossia la forza che agisce sul punto materiale non è proporzionale all'accelerazione \bar{a}' relativa a tale sistema mobile.

Tale risultato appare chiaro da $\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_t + \bar{a}_c$: infatti se $\bar{F} = m\bar{a}$ è la forza reale che agisce sul punto materiale nel sistema inerziale, nel sistema mobile, ossia non inerziale, non può sussistere la relazione $\bar{F} = m\bar{a}'$, in quanto $\bar{a} \neq \bar{a}'$. Per capire meglio quanto detto, moltiplichiamo i termini di $\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_t + \bar{a}_c$ per la massa del punto e tenendo conto che $\bar{F} = m\bar{a}$ abbiamo

$$\bar{F} = m\bar{a}' + m\bar{a}_t + m\bar{a}_c$$

Volendo scrivere una relazione analoga alla legge di Newton ma valida nel sistema non inerziale, riscriviamo l'ultima equazione nel seguente modo

$$\bar{F} - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c = m\bar{a}'$$

Questa può essere ricondotta alla forma $\bar{F}' = m\bar{a}'$, del tutto analoga all'equazione di Newton, se come forza totale agente sul corpo si considera la forza $\bar{F}' = \bar{F} - m\bar{a}_t - m\bar{a}_c$. Introducendo quindi le **forze apparenti**

$$\bar{F}_{app} = -m\bar{a}_t - m\bar{a}_c = -m\bar{a}_{o'} - m\left(\frac{d\omega}{dt} \times \bar{r}'\right) - m(\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}')) - 2m(\bar{\omega} \times \bar{v}')$$

possiamo scrivere

$$\bar{F}' = \bar{F} + \bar{F}_{app} = m\bar{a}'$$

Questa rappresenta l'equazione di Newton per sistemi di riferimento non inerziali. In tali sistemi si può quindi utilizzare l'equazione di Newton (e tutto ciò che ne deriva) allo stesso modo purché oltre alle forze reali vengano considerate anche le forze apparenti.

I primi tre termini di \bar{F}_{app} costituiscono la **forza di trascinamento** $\bar{F}_t = -m\bar{a}_t$ che dipende solo dal moto del sistema di riferimento non inerziale e dalla posizione del punto materiale. In particolare il primo termine è diretto in verso opposto all'accelerazione dell'origine del sistema di riferimento non inerziale, il secondo (presente solo se la velocità angolare non è costante nel tempo) ha direzione tangenziale (ortogonale a \bar{r}') mentre il terzo prende il nome di **forza centrifuga** poiché come si può notare è diretta radialmente verso l'esterno rispetto all'asse di rotazione.

L'ultimo termine di \bar{F}_{app} è la **forza di Coriolis** $\bar{F}_c = -m\bar{a}_c$ che agisce sui punti materiali in moto relativo rispetto a un sistema di riferimento rotante.

Risulta evidente che le forze apparenti non derivano dalle interazioni fondamentali ma dal moto del sistema di riferimento e non esistono in un sistema di riferimento inerziale. Inoltre, esse sono sempre proporzionali alla massa del punto e vengono pertanto chiamate anche **forze di inerzia**.

Abbiamo quindi visto che il moto di un punto materiale può essere determinato in maniera corretta sia riferendosi ad un sistema di riferimento inerziale, tramite $\bar{F} = m\bar{a}$, sia attraverso un sistema di riferimento non inerziale tramite $\bar{F}' = \bar{F} + \bar{F}_{app} = m\bar{a}'$.

In un sistema di riferimento inerziale la descrizione di un fenomeno dinamico è solitamente più semplice in quanto è più semplice l'espressione delle forze. In molti casi specifici però può essere più diretta e intuitiva una trattazione che faccia uso di sistemi di riferimento non inerziali. È quindi opportuno valutare caso per caso il sistema di riferimento che rende più semplice la soluzione di un determinato problema fisico.

Dinamica del punto: lavoro, energia, momenti

Lavoro. Potenza. Energia cinetica

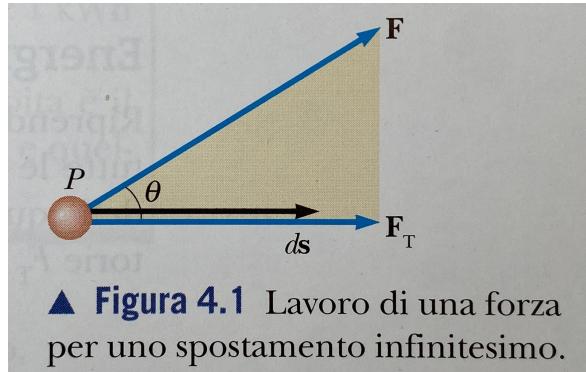
Abbiamo già visto come la legge di Newton ($\bar{F} = m \bar{a} = m \frac{d\bar{v}}{dt} = m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$) si esprime in termini integrali attraverso il teorema dell'impulso, rilevando che si arriva a determinare la variazione finita di quantità di moto solo se si può calcolare esplicitamente l'integrale $\int_{t_0}^t \bar{F}(t) dt$.

Affrontiamo adesso il problema dell'integrazione della legge di Newton quando si considera la forza come funzione della posizione occupata dal punto.

Consideriamo un punto materiale P soggetto a una forza \bar{F} che subisca per azione di questa uno spostamento infinitesimo $d\bar{s}$. Il **lavoro infinitesimo dW compiuto dalla forza** è definito come il prodotto scalare della forza per lo spostamento:

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{s} = F ds \cos(\theta) = F_T ds$$

dove θ è l'angolo tra \bar{F} e $d\bar{s}$ e $F_T = F \cos(\theta)$ è la proiezione della forza lungo la direzione dello spostamento.



Dunque il lavoro dipende, oltre che dal modulo della forza e dello spostamento, anche dall'angolo θ , che determina il valore di F_T .

Si possono presentare tre casi:

- \bar{F} forma con $d\bar{s}$ un angolo minore di $\frac{\pi}{2}$, per cui la componente tangenziale delle forze è concorde con la velocità e tende a farla aumentare: il lavoro risulta positivo e viene chiamato **lavoro motore**.
- \bar{F} forma con $d\bar{s}$ un angolo maggiore di $\frac{\pi}{2}$ e il lavoro risulta negativo e viene chiamato **lavoro resistente**.
- \bar{F} è ortogonale alla traiettoria, quindi $\theta = \frac{\pi}{2}$ e il **lavoro è nullo**.

Per uno spostamento finito dalla posizione A alla posizione B lungo un percorso C il lavoro si ottiene suddividendo il percorso in infiniti spostamenti infinitesimi $d\bar{s}$ e sommando tutti i contributi $\bar{F} \cdot d\bar{s}$. Questo significa eseguire l'integrale di linea della forza \bar{F} lungo il percorso C

$$W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_A^B F \cos(\theta) ds = \int_A^B F_T ds$$

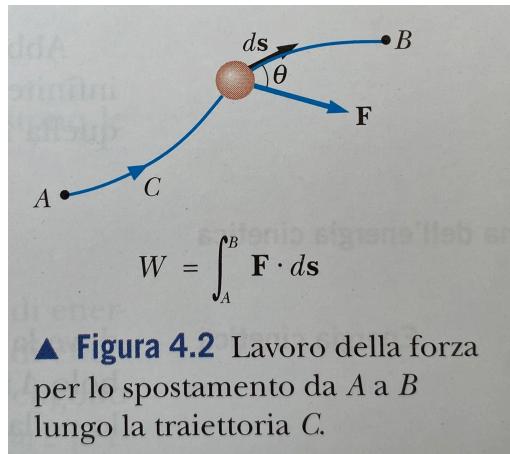


Figura 4.2 Lavoro della forza per lo spostamento da A a B lungo la traiettoria C .

Dunque *il lavoro è l'integrale di linea della forza lungo la traiettoria*.

Naturalmente lungo la traiettoria l'angolo θ varia, di conseguenza varia anche il lavoro.

Quando \bar{F} è la somma di n forze $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, per ciascuna si può calcolare il corrispondente lavoro e risulta:

$$W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_A^B (\bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n) \cdot d\bar{s} = \int_A^B \bar{F}_1 \cdot d\bar{s} + \dots + \int_A^B \bar{F}_n \cdot d\bar{s} = W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

Il lavoro della risultante delle forze è pari alla somma dei lavori delle singole forze agenti, ciascuno dei quali può essere positivo, negativo o nullo.

Possiamo quindi affermare che $W = 0$ quando non agisce nessuna forza oppure agiscono forze la cui risultante o è nulla o quando la forza è sempre ortogonale alla traiettoria.

Un esempio di moto con risultante nulla delle forze è il moto rettilineo uniforme in presenza di attrito radente: occorre applicare una forza eguale e contraria alla forza di attrito e quindi fornire un lavoro motore eguale e opposto al lavoro resistente dell'attrito.

Un esempio di moto con risultante delle forze sempre ortogonale alla traiettoria è il moto curvilineo uniforme, in cui il lavoro totale è nullo.

La **potenza** corrisponde al lavoro per unità di tempo:

$$P = \frac{dW}{dt} = \bar{F} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v} = F_T v$$

Questa è la **potenza istantanea** (o semplicemente **potenza**), in generale variabile durante il moto e caratterizza la rapidità di erogazione del lavoro.

La **potenza media** di un intervallo di tempo Δt è il rapporto $\frac{W}{\Delta t}$, cioè il lavoro totale diviso per il tempo durante cui il lavoro è stato svolto. Tale grandezza risulta particolarmente importante per qualificare le prestazioni di un dispositivo o macchina che fornisce lavoro. A parità di lavoro totale svolto, ha maggiore potenza media quella macchina che lo eroga in minore tempo.

Riprendiamo la relazione relativa al lavoro infinitesimo svolto dalla risultante \bar{F} di tutte le forze agenti sul punto materiale per uno spostamento $d\bar{s}$. Facendo uso dell'equazione di Newton proiettata lungo la componente tangenziale alle traiettorie $F_T = ma_T$ si ha:

$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{s} = F_T ds = ma_T ds = m \frac{dv}{dt} ds = m \frac{ds}{dt} dv = mv dv$$

Abbiamo trovato così il legame esplicito tra il lavoro infinitesimo e la variazione infinitesima del modulo della velocità.

Per un percorso finito dalla posizione A a quella B abbiamo

$$W = \int_A^B mv dv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

dove la quantità $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ prende il nome di **energia cinetica** del punto e il simbolo Δ indica come al solito la differenza tra il valore nella posizione finale e quello nella posizione iniziale. Questa equazione è nota come **teorema dell'energia cinetica**, e afferma che:

il lavoro compiuto dalla risultante delle forze nello spostamento di un punto materiale dalla posizione A alla posizione B è uguale alla variazione dell'energia cinetica del punto materiale stesso

Il teorema dell'energia cinetica è una diretta conseguenza della seconda legge di Newton.

- Se $W > 0$, l'energia cinetica finale è maggiore di quella iniziale
- Se $W < 0$, l'energia cinetica finale è minore di quella iniziale (ad esempio il lavoro delle forze di attrito)
- Se $W = 0$, l'energia cinetica resta costante (per esempio nel moto circolare uniforme il lavoro della forza centripeta è nullo)

W rappresenta quindi il lavoro totale. Se è noto come varia la forza lungo la traiettoria, possiamo calcolare il lavoro e quindi il modulo della velocità in ciascun punto (se conosciamo quella iniziale).

Viceversa, se misuriamo la velocità iniziale e finale, possiamo dedurre il lavoro compiuto dalle forze agenti.

Si faccia attenzione al fatto che la nozione di lavoro, e quindi di variazione di energia cinetica, è strettamente legata a quella dello spostamento. Quindi se non c'è spostamento non può esserci lavoro, qualunque sia la forza applicata (può invece esserci spostamento senza lavoro).

Se riprendiamo le definizioni di energia cinetica e di quantità di moto

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad \bar{p} = mv$$

vediamo che tra energia cinetica e modulo della quantità di moto sussistono le relazioni

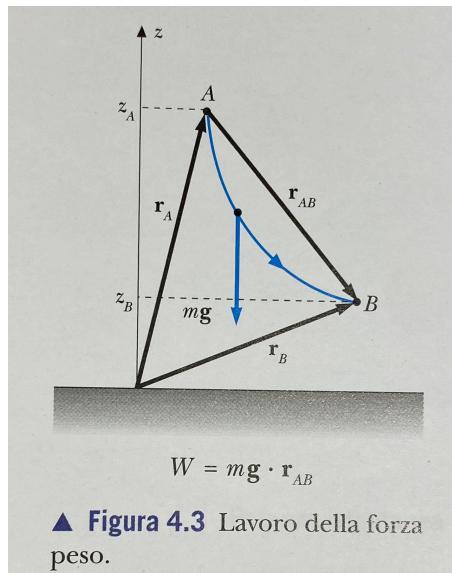
$$E_k = \frac{p^2}{2m} \quad p = \sqrt{2mE_k}$$

Abbiamo introdotto la prima forma di energia (quella cinetica), in seguito troveremo altre forme di energia (come quella potenziale).

Il lavoro è la manifestazione dell'azione di una forza ed è quindi conseguenza dell'interazione con l'ambiente circostante. Si parla pertanto di **lavoro scambiato** e non si dice mai che un corpo possiede lavoro.

Si parla invece di **energia posseduta** dal sistema, che viene modificata dall'interazione con l'ambiente esterno. Un effetto misurabile dell'interazione è la variazione di energia.

Calcoliamo il **lavoro della forza peso** $m\bar{g}$ per uno spostamento generico dalla posizione A a quella B .



L'asse z è orientato dal suolo verso l'alto ed ha quindi verso opposto a \bar{g} .

Dunque abbiamo che

$$W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = \bar{F} \cdot \int_A^B d\bar{s} = m\bar{g} \cdot \bar{r}_{AB}$$

infatti \bar{F} è costante e l'integrale vale $\bar{r}_{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A$

Poiché il peso ha una sola componente diversa da zero, quella secondo l'asse z che vale $-mg$, e la componente di \bar{r}_{AB} lungo l'asse z è $z_B - z_A$, il prodotto scalare si scrive semplicemente

$(m\bar{g})_z \cdot (\bar{r}_{AB})_z = -mg(z_B - z_A)$ e pertanto il lavoro della forza peso vale

$$W = -mg(z_B - z_A)$$

È interessante notare che il risultato ottenuto non dipende dal particolare percorso compiuto dalla massa m , ma solamente dalla posizione iniziale e quella finale, nello specifico le coordinate z_A e z_B . Tale proprietà consente di semplificare notevolmente il calcolo del lavoro poiché, nota la quota iniziale e quella finale del punto materiale, il lavoro della forza peso sarà

data da questa formula, senza la necessità di svolgere l'integrale lungo il particolare percorso effettivamente compiuto dalla massa m

Questa trattazione fatta per la forza peso si estende a qualsiasi altra forza costante \bar{F} . Prendendo per analogia con il caso della forza peso, come asse z un asse parallelo e concorde a \bar{F} , il lavoro di \bar{F} per uno spostamento tra due punti, le cui coordinate z sono z_A e z_B , vale

$$W = - (F_{z_B} - F_{z_A})$$

Il lavoro della forza elastica $\bar{F} = -kx\bar{u}_x$ per uno spostamento lungo l'asse x vale

$$W = \int_A^B kx\bar{u}_x \cdot dx\bar{u}_x = -k \int_A^B x \cdot dx = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$$

Vediamo che anche in questo caso il lavoro dipende solo dalla posizione iniziale e da quella finale. In particolare, analogamente a quanto ottenuto nel caso della forza peso, il lavoro è esprimibile come differenza dei valori assunti da una data funzione (diversa a seconda del tipo di forze) nei punti A e B .

Vediamo ora il **lavoro della forza di attrito radente**. La forza di attrito radente è data da

$$\bar{F}_{ad} = -\mu_d N \bar{u}_v$$

Ricordando che il vettore \bar{u}_v è parallelo e concorde allo spostamento $d\bar{s}$, il lavoro corrispondente si scrive

$$W = \int_A^B \bar{F}_{ad} \cdot d\bar{s} = \int_A^B -\mu_d N \bar{u}_v \cdot d\bar{s} = -\mu_d \int_A^B N \cdot ds$$

Nel caso in cui la reazione normale N sia costante si ottiene:

$$W = -\mu_d N s_{AB}$$

dove s_{AB} è la lunghezza del percorso da A a B , misurata lungo la traiettoria effettiva del punto materiale. Pertanto, a parità dei fattori μ_d e N , abbiamo un lavoro diverso a seconda della forma della traiettoria:

il lavoro della forza di attrito radente dipende dal percorso e non è esprimibile come differenza dei valori di una funzione delle coordinate nei punti A e B
diversamente da quanto avviene per la forza peso e per la forza elastica.

Il lavoro della forza di attrito radente è sempre negativo, cioè è lavoro resistente (si noti che se cambia il verso del moto, cambia anche quello della forza di attrito, sempre opposta alla velocità).

Perché possa verificarsi il moto o deve agire un'altra forza che produca un lavoro motore oppure, in assenza di questa, il punto deve possedere una certa velocità iniziale ovvero una certa energia cinetica $E_{k,A}$. L'energia cinetica diminuisce lungo il percorso e in B la velocità è

minore che in A . In particolare, data $E_{k,A}$ e se N è costante, il punto si ferma dopo un percorso

$$s_{AB} = \frac{E_{k,A}}{\mu_d N}.$$

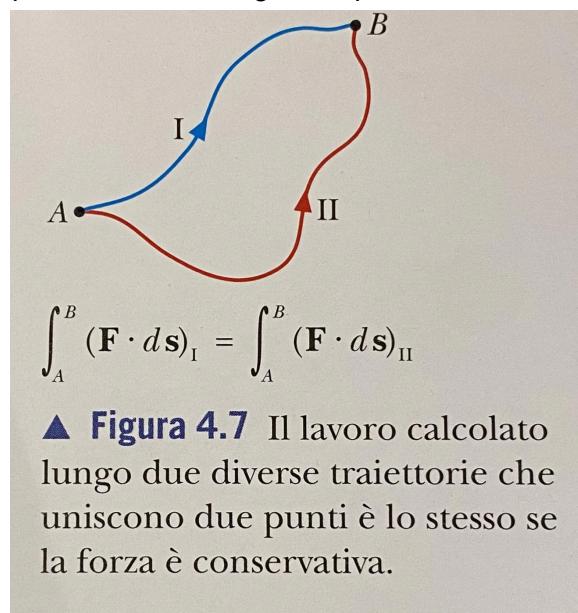
Forze conservative

Come abbiamo visto, abbiamo dei casi in cui il lavoro dipende solo dalle coordinate delle posizioni iniziale e finale A e B e non dal particolare percorso seguito dalla massa puntiforme. In altri casi invece il lavoro dipende dalla traiettoria.

Le forze del primo tipo (quelle per cui il lavoro non dipende dal percorso) vengono definite **forze conservative**. Per il calcolo del lavoro possiamo utilizzare qualsiasi percorso che colleghi A e B

$$W = \int_A^B (\bar{F} \cdot d\bar{s})_I = \int_A^B (\bar{F} \cdot d\bar{s})_{II} = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

Il lavoro lungo il percorso I coincide con quello lungo il percorso II o lungo qualsiasi altro e per eseguire il calcolo pratico possiamo così scegliere il percorso analiticamente più comodo.



È importante notare che invertendo il senso di percorrenza, cioè andando da B a A , il lavoro compiuto è lo stesso in modulo ma con segno opposto:

$$\int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = - \int_B^A \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

Ciò comporta che per un percorso chiuso ABA , anche con traiettorie diverse tra andata e ritorno, si ha:

$$\int_A^B (\bar{F} \cdot d\bar{s})_I + \int_B^A (\bar{F} \cdot d\bar{s})_{II} = \int_A^B (\bar{F} \cdot d\bar{s})_I - \int_A^B (\bar{F} \cdot d\bar{s})_{II} = 0$$

Di conseguenza **lungo un qualsiasi percorso chiuso il lavoro è nullo**:

$$\oint \bar{F} \cdot d\bar{s} = 0$$

(questo è il simbolo di integrale di linea con linea chiusa).

Questa proprietà si può assumere come definizione di forza conservativa (perfettamente equivalente alla precedente definizione). Per chiarezza precisiamo che in tutti gli integrali scritti finora la forza in generale è diversa da punto a punto lungo ciascuna traiettoria e quindi è diversa da traiettoria a traiettoria; però l'integrale di linea non dipende dalla traiettoria

Energia potenziale

Se la forza è conservativa e quindi il lavoro dipende solo dalle posizioni iniziale e finale e non dal percorso, scegliendo a piacere una posizione di riferimento O nello spazio, allora il lavoro che la forza compirebbe nello spostamento tra la posizione di riferimento O e la posizione generica P ,

$$W = \int_0^P \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

può dipendere solo da O e da P (O può non coincidere necessariamente con l'origine).

Essendo comunque O fissato una volta per tutte, il lavoro dipende solo da P , ossia dalle sue coordinate x, y e z .

In definitiva, la conservatività della forza consente di definire in ogni punto P dello spazio una funzione dipendente unicamente dalle coordinate di P :

$$E_p(x, y, z) = E_{p,P} = - \int_0^P \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

Questa funzione viene detta **energia potenziale** del punto, associata alla forza considerata.

Una volta calcolata questa funzione, il lavoro della forza per un qualsiasi spostamento tra due punti A e B vale:

$$W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_A^0 \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_0^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = - \int_0^A \bar{F} \cdot d\bar{s} + \int_0^B \bar{F} \cdot d\bar{s}$$

per cui:

$$W = E_{p,A} - E_{p,B} = - (E_{p,B} - E_{p,A}) = - \Delta E_p$$

Il lavoro di una forza conservativa può quindi essere calcolato come semplice differenza algebrica tra i valori assunti da E_p in A e in B , **senza dover calcolare integrali di linea** come previsto nella definizione di lavoro.

Ai fini del calcolo del lavoro, la scelta del punto di riferimento O è ininfluente in quanto la differenza di energia potenziale tra due punti A e B è indipendente da tale scelta.

Bisogna sottolineare che il concetto di energia potenziale e la formula che abbiamo visto hanno senso solo per forze conservative.

La formula inoltre precisa il significato fisico dell'energia potenziale, legandolo alla capacità di fornire lavoro. Infatti quando durante il moto l'energia potenziale diminuisce (ovvero $\Delta E_p < 0$), il lavoro compiuto dalla forza è positivo e può essere utilizzato. Se invece l'energia potenziale

aumenta (ovvero $\Delta E_p > 0$) il lavoro è negativo e ciò in pratica vuol dire che bisogna fornire lavoro dall'esterno al fine di permettere quel determinato spostamento.

Infine, come si è detto, per un percorso chiuso $E_{p,A} = E_{p,B}$ e $W = 0$: se si spende lavoro per far aumentare E_p nel passaggio da A a B e quando si torna da B ad A si ricava esattamente quanto speso e viceversa. **Da una forza conservativa non si può ricavare lavoro in un percorso chiuso ovvero, come si dice, se il processo è ciclico.**

Sappiamo che ci sono forze per le quali non vale la proprietà di invarianza del lavoro rispetto al percorso e non è quindi possibile esprimere il lavoro tramite la differenza tra valori di una funzione delle coordinate. Queste **forze** si chiamano **non conservative** e per esse non si può introdurre l'energia potenziale, e bisogna quindi usare la definizione di lavoro. Una classe particolare di forze non conservative sono, come visto, le forze di attrito, dette anche **forze dissipative**.

Vediamo l'**energia potenziale della forza peso**.

Applicando la formula dell'energia potenziale $E_{p,P} = - \int_0^P \bar{F} \cdot d\bar{s}$ a quella del lavoro della forza

peso $W_{OP} = \int_0^P \bar{F} \cdot d\bar{s} = - (mgz_P - mgz_O)$, si ottiene:

$$E_{p,P} = mgz$$

Dove z è la coordinata di P rispetto al riferimento O , misurata lungo un asse parallelo e di verso opposto alla forza peso (verso l'alto).

È importante notare che l'energia potenziale è tanto maggiore quanto più il punto in considerazione si trova in alto. Infatti l'energia potenziale diminuisce spostandosi in direzione della forza e aumenta spostandosi in direzione contraria.

Se consideriamo uno spostamento dal punto A al punto B con il punto B collocato più in basso rispetto ad A , il lavoro della forza peso andando da A a B è positivo e l'energia potenziale E_p diminuisce. Possiamo osservare che questo è lo spostamento naturale di un punto sottoposto alla sola forza peso. In questo caso, in presenza della sola forza peso, il corpo accelera verso il basso acquistando energia cinetica a scapito dell'energia potenziale.

Se invece il punto B è in una posizione più alta allora $W < 0$ e l'energia potenziale E_p aumenta (il punto deve avere una sufficiente velocità iniziale per far avvenire lo spostamento oppure bisogna applicare al punto un'altra forza il cui lavoro motore superi in modulo il lavoro resistente della forza peso).

Possiamo verificare la proprietà che la dipendenza del valore dell'energia potenziale dal punto di riferimento non influisce sul calcolo del lavoro in uno spostamento dal punto A al punto B , questo perché nella variazione di energia potenziale la costante che fa differire le due energie potenziali viene eliminata.

Vediamo l'energia potenziale della forza elastica.

Prendendo come riferimento la posizione di riposo della molla, il lavoro della forza elastica è

dato da $W = -\left(\frac{1}{2}kx_B^2 - \frac{1}{2}kx_A^2\right)$ e quindi l'energia potenziale è data da

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}kx^2$$

Si può notare che l'energia è tanto più alta quanto più la molla è deformata rispetto alla sua lunghezza a riposo. Come nel caso precedente, l'energia potenziale aumenta spostandosi in direzione opposta alla forza (allontanandosi dalla posizione di equilibrio) e diminuisce lungo spostamenti concordi alla forza (verso la posizione di equilibrio). Questo significa che una molla allungata (o compressa) possiede un'energia potenziale ed è quindi in grado di compiere un lavoro pari a E_p riportandosi alla sua lunghezza di riposo. Al contrario, una molla nella sua posizione di riposo possiede un'energia potenziale nulla. Per poterla deformare serve quindi un lavoro dall'esterno pari all'energia potenziale immagazzinata nella molla nel suo stato finale.

Riassumendo:

- L'energia potenziale può essere definita solo per le forze conservative
- Per tutte le forze conservative il lavoro si esprime come l'opposto della variazione dell'energia potenziale relativa alla specifica forza
- Non esiste una espressione generale dell'energia potenziale, la sua espressione esplicita dipende dalla particolare forza conservativa cui essa si riferisce

Conservazione dell'energia meccanica

Se agiscono solo forze conservative dunque valgono:

$$W = \Delta E_k = E_{k,B} - E_{k,A} \text{ e } W = -\Delta E_p = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Eguagliando le due relazioni si ottiene:

$$E_{k,B} + E_{p,B} = E_{p,A} + E_{k,A}$$

Dunque *la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale che si muove sotto l'azione di forze conservative resta costante durante il moto, ossia si conserva*. Tale somma si chiama **energia meccanica** per cui l'uguaglianza esprime il **principio di conservazione dell'energia meccanica**:

in presenza di forze conservative l'energia meccanica di un punto materiale si conserva

$$E_m = E_k + E_p = \text{costante}$$

Questo si collega all'osservazione che avevamo fatto per quanto riguarda la variazione dell'energia potenziale. Il lavoro a spese della diminuzione di energia potenziale causa un aumento dell'energia cinetica e viceversa. Durante il moto avviene una trasformazione da una forma di energia all'altra, per tramite di lavoro compiuto e assorbito, ma il contenuto energetico totale, dato dall'energia meccanica, non cambia.

Quando agiscono, come avviene in generale, sia forze conservative che non conservative, il lavoro complessivo è dato dalla somma del lavoro delle forze conservative W_c e di quello delle

forze non conservative W_{nc} , e abbiamo che dato $W = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$

$$W = E_{k,B} - E_{k,A} = W_c + W_{nc}$$

Esprimendo W_c come differenza dell'energia potenziale otteniamo

$$E_{k,B} - E_{k,A} = E_{p,A} - E_{p,B} + W_{nc}$$

e dunque

$$W_{nc} = (E_{k,B} + E_{p,B}) - (E_{k,A} + E_{p,A}) = E_{m,B} - E_{m,A}$$

in presenza di forze non conservative l'energia meccanica non resta costante e la sua variazione è uguale al lavoro delle forze non conservative.

In qualunque processo meccanico si osserva sperimentalmente che è sempre presente una forza di attrito che si oppone al moto. Se tutte le altre forze sono conservative, allora

$W_{nc} = W_{diss} < 0$ e quindi l'energia meccanica diminuisce durante il processo. A questa

situazione si può porre rimedio con l'intervento di altre forze non conservative e l'energia meccanica del punto può essere mantenuta costante o anche aumentare.

Se però si considera un sistema più vasto, costituito dal punto e dal meccanismo che ha fornito il lavoro non conservativo, si trova sempre che l'energia meccanica complessiva non si conserva, ma diminuisce a causa di effetti dissipativi.

Alcune osservazioni sulla dinamica del punto

Ricapitoliamo le nozioni più importanti di dinamica del punto, con lo scopo di chiarirne ulteriormente il significato e di consigliarne il modo di applicazione nella soluzione di problemi.

La **legge fondamentale** da utilizzare per lo studio del moto di un punto materiale è

$\bar{F} = m\bar{a} = m\frac{d\bar{v}}{dt}$. A tal fine si devono identificare le forze che effettivamente agiscono sul punto, non dimenticando reazioni vincolari, tensioni di fili o eventuali attriti. Si deve inoltre valutare lungo quali direzioni può essere più conveniente scomporre le forze, facendo particolare attenzione a non commettere errori di segno proiettando.

In generale velocità e accelerazione non sono parallele e il moto avviene nella direzione e verso della velocità, non dell'accelerazione e quindi della forza (qui giocano un ruolo essenziale le condizioni iniziali). Si consideri ad esempio il moto circolare uniforme dove \bar{a} e \bar{v} sono ortogonali. La forza è diretta verso il centro della circonferenza (forza centripeta), ma il moto avviene lungo la circonferenza. Un satellite è attirato dalla terra, ma, se ha un'opportuna velocità, può descrivere un'orbita circolare senza cadere sulla terra. Ancora, nello studio del moto di un corpo sottoposto alla forza peso abbiamo visto che la traiettoria è parabolica mentre la forza è verticale.

Conseguenza diretta della seconda legge di Newton è che il **lavoro della forza agente è eguale alla variazione dell'energia cinetica del punto su cui agisce la forza**. Una categoria particolare di forze, è costituita dalle forze conservative, a cui appartengono per esempio le forze vettorialmente costanti e le forze centrali, che saranno discusse nel capitolo della Gravitazione. Per tali forze il lavoro è esprimibile tramite la variazione di una funzione delle coordinate del punto, l'energia potenziale, e si ha la conservazione dell'energia meccanica.

Il significato dell'**energia**, sia cinetica che potenziale, è la **capacità di un sistema di scambiare lavoro** ovvero essa va intesa come un **serbatoio di lavoro**. Il fatto che un punto materiale possieda una certa energia potenziale o cinetica implica che con opportuni processi si può ricavare lavoro, parzialmente o integralmente a seconda che ci siano o non ci siano attriti.

Un'applicazione molto comune del **principio di conservazione dell'energia meccanica** sfrutta il legame stabilito da $E_m = E_k + E_p = \text{costante}$ tra l'energia cinetica, funzione della velocità, e l'energia potenziale, funzione delle coordinate, per esprimere la velocità in funzione della posizione. Questa via normalmente è da preferire nei problemi in cui non è richiesta la dipendenza dal tempo (purchè, naturalmente, sia lecito applicare la conservazione dell'energia). Se invece è richiesta esplicitamente la legge oraria conviene applicare la legge di Newton.

Dobbiamo infine sempre tener presente che le leggi viste valgono per il moto di un punto materiale che certamente è un'astrazione in quanto non esistono corpi macroscopici privi di struttura geometrica. Tuttavia ripetiamo che, per questa sua estrema semplicità, il punto materiale ha una notevole importanza concettuale nel senso che lo studio del suo moto permette di comprendere le leggi dei fenomeni dinamici nel caso più elementare, senza le complicazioni dovute alla struttura del sistema in esame. Come vedremo, in pratica dobbiamo trattare corpi estesi in moto, però se il moto è traslatorio, cioè il corpo non ruota e non si deforma, tutti i punti si muovono nello stesso modo, ciascuno come se fosse un punto materiale. Riprenderemo questi argomenti nei capitoli sulla Dinamica dei sistemi di punti materiali e sulla Dinamica del corpo rigido.

Dinamica dei sistemi di punti materiali

Sistemi di punti. Forze interne e forze esterne

Fino ad ora abbiamo studiato la dinamica di un punto materiale, come conseguenza dell'interazione con il resto dell'universo, cioè dell'azione di una forza o di un sistema di forze agenti su di esso.

Consideriamo ora un sistema di n punti materiali, con n maggiore di 1, interagenti tra di loro e con il resto dell'universo.

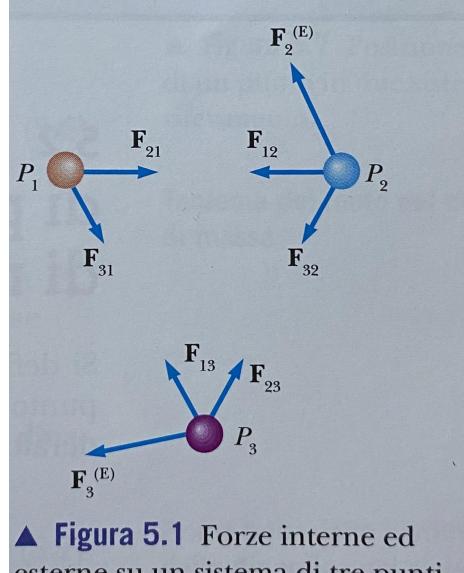
La forza \bar{F}_i agente sull'i-esimo punto si può pensare come risultante delle **forze esterne** agenti sul punto $\bar{F}_i^{(E)}$, e delle forze esercitate dagli altri $n - 1$ punti, **forze interne** al sistema $\bar{F}_i^{(I)}$, dunque

$$\bar{F}_i = \bar{F}_i^{(E)} + \bar{F}_i^{(I)}$$

Questa scomposizione è molto utile concettualmente, ma non possiamo evidenziare dal moto del punto P_i separatamente i due tipi di forze perché il moto è determinato dalla risultante \bar{F}_i .

Ovviamente la distinzione tra forze interne e esterne dipende da come viene definito il sistema di punti (una forza può essere interna o esterna in base a se includiamo un determinato punto nel nostro sistema oppure no).

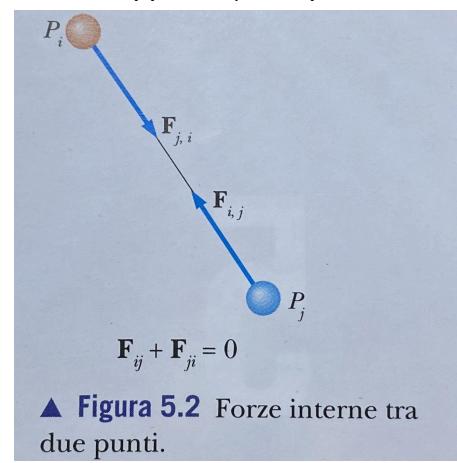
Una possibile configurazione di forze interne ed esterne per un generico sistema di tre punti è la seguente



▲ **Figura 5.1** Forze interne ed esterne su un sistema di tre punti.

Studiamo ora la risultante di tutte le forze agenti sul sistema.

Per quanto riguarda le forze interne dobbiamo tenere presente la **terza legge di Newton**, o **principio di azione e reazione**: se il punto i-esimo esercita sul punto j-esimo la forza $\bar{F}_{i,j}$, il punto j-esimo reagisce esercitando sul punto i-esimo la forza $\bar{F}_{j,i}$ e tali forze hanno la stessa retta di azione, stesso modulo e verso opposto (esse possono essere attrattive o repulsive).



▲ **Figura 5.2** Forze interne tra due punti.

In genere la risultante $\bar{F}_i^{(I)}$ delle forze interne agenti sull'i-esimo punto è diversa da zero, però **la risultante di tutte le forze interne al sistema è nulla** perchè, in base al principio di azione e reazione, esse sono a due a due eguali ed opposte:

$$\bar{F}^{(I)} = \sum_i \bar{F}_i^{(I)} = \sum_{i,j} \bar{F}_{i,j} = 0 \text{ con } i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n \text{ e } i \neq j$$

Si osservi che il principio di azione e reazione si applica a qualunque interazione e quindi anche alle forze esterne: la reazione in tal caso però non ci interessa perché è applicata al resto dell'universo e non al sistema, il cui moto intendiamo studiare.

Per ciascun punto P_i di massa m_i sottoposto alla forza \bar{F}_i consideriamo le grandezze, misurate in un sistema di riferimento inerziale:

- Posizione: \bar{r}_i
- Velocità: \bar{v}_i
- Accelerazione: $\bar{a}_i = \frac{\bar{F}_i}{m_i}$
- Quantità di moto: $\bar{p}_i = m_i \bar{v}_i$
- Momento angolare: $\bar{L}_i = \bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i$
- Energia cinetica: $E_{k,i} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Per il sistema complessivo di punti possiamo inoltre definire le grandezze:

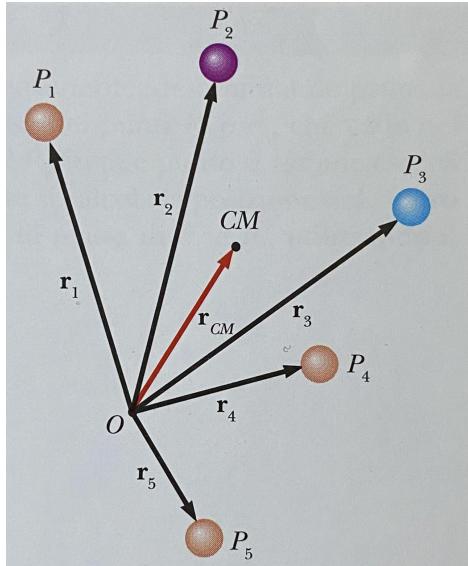
- Quantità di moto: $\bar{P} = \sum_i \bar{p}_i = \sum_i m_i \bar{v}_i$
- Momento angolare: $\bar{L} = \sum_i \bar{L}_i = \sum_i (\bar{r}_i \times m_i \bar{v}_i)$
- Energia cinetica: $\sum_i E_{k,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$

I momenti angolari vanno riferiti a un polo, che nelle formule è stato preso coincidente con l'origine, ma che può essere un qualsiasi altro punto, fermo o in movimento, nel sistema di riferimento inerziale.

Centro di massa di un sistema di punti. Teorema del moto del centro di massa

Si definisce come **centro di massa di un sistema di punti materiali** (o baricentro), il punto geometrico la cui posizione è individuata, nel sistema di riferimento considerato, dal raggio vettore

$$\bar{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i}$$

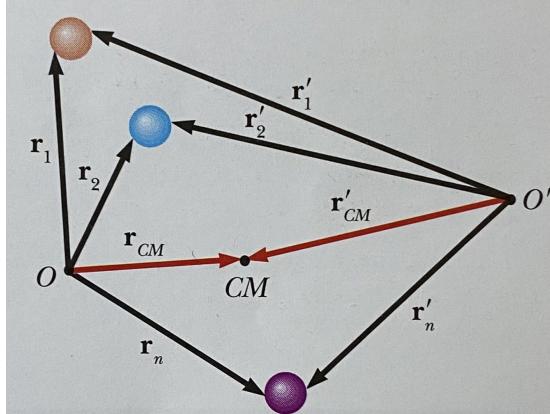


▲ **Figura 5.5** Centro di massa di un sistema di punti materiali.

Le componenti di \bar{r}_{CM} , ovvero le coordinate del centro di massa in un sistema di coordinate cartesiane con l'origine in O , sono

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \quad y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} \quad z_{CM} = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}$$

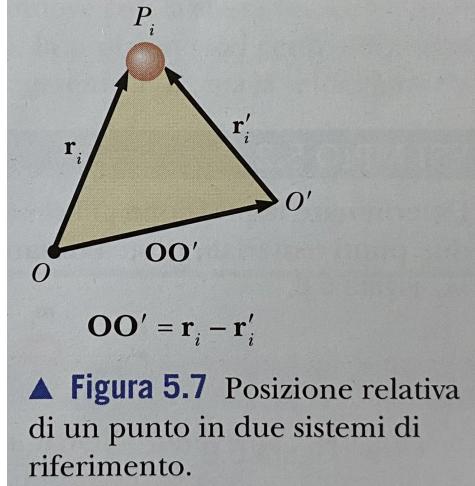
Si noti che la **posizione** del centro di massa nello spazio **non dipende dal sistema di riferimento** (mentre le coordinate variano a seconda del sistema prescelto).



▲ **Figura 5.6** Calcolo del centro di massa in due sistemi di riferimento.

In questa figura sono mostrati un sistema di n punti e i centri di due sistemi di riferimento O e O' . Le posizioni dei punti P_i sono individuate rispettivamente dai raggi \bar{r}_i e \bar{r}'_i con

$$\bar{r}_i = \bar{r}'_i + \overline{OO'} \text{ ovvero } \bar{r}'_i = \bar{r}_i + \overline{O'O}$$



La posizione del centro di massa rispetto ad O è data da $\bar{r}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i}$ e rispetto ad O' da

$$\bar{r}'_{CM} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}'_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i (\bar{r}_i + \bar{O}'O)}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \bar{r}_i}{\sum_i m_i} + \bar{O}'O = \bar{r}_{CM} + \bar{O}'O$$

Se gli n punti sono in movimento, di norma la posizione del centro di massa varia; sulla base della definizione calcoliamo la **velocità del centro di massa**:

$$\bar{v}_{CM} = \frac{d\bar{r}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \bar{v}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\bar{P}}{m}$$

usando la definizione di quantità di moto totale del sistema e definendo $m = \sum_i m_i$ la massa totale del sistema.

Vediamo quindi che *la quantità di moto di un sistema di punti materiali è eguale alla quantità di moto $m\bar{v}_{CM}$ che avrebbe il centro di massa se considerato come un punto materiale che abbia la posizione \bar{r}_{CM} , la velocità \bar{v}_{CM} e massa pari alla massa totale m del sistema.*

Analogamente possiamo ricavare l'**accelerazione del centro di massa**, derivando la velocità:

$$\bar{a}_{CM} = \frac{d\bar{v}_{CM}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \bar{a}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\bar{P}}{m}$$

Se il sistema di riferimento è inerziale abbiamo

$$m_i \bar{a}_i = \bar{F}_i = \bar{F}_i^{(E)} + \bar{F}_i^{(I)}$$

e dunque otteniamo

$$m\bar{a}_{CM} = \sum_i m_i \bar{a}_i = \sum_i (\bar{F}_i^{(E)} + \bar{F}_i^{(I)}) = \bar{F}^{(E)}$$

visto che la risultante delle forze interne è nulla.

La relazione

$$\bar{F}^{(E)} = m\bar{a}_{CM}$$

esprime il **teorema del moto del centro di massa**:

il centro di massa si muove come un punto materiale in cui sia concentrata tutta la massa del sistema e a cui sia applicata la risultante delle forze esterne

Utilizzando $\bar{v}_{CM} = \frac{\bar{P}}{m}$ e $\bar{F}^{(E)} = m\bar{a}_{CM}$ si ottiene la **prima equazione cardinale della dinamica dei sistemi**

$$\bar{F}^{(E)} = m\bar{a}_{CM} = m \frac{d\bar{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt} (m\bar{v}_{CM}) = \frac{d\bar{P}}{dt}$$

la risultante delle forze esterne è eguale alla derivata rispetto al tempo della quantità di moto totale del sistema.

Il moto del centro di massa è determinato dunque solo dalle forze esterne. L'azione delle forze interne non può modificare lo stato di moto del centro di massa; invece il moto di ciascun punto dipende dall'azione delle forze esterne ed interne agenti su di esso. Questo aspetto è molto importante perché il numero delle forze interne diviene rapidamente molto grande al crescere del numero dei punti, rendendo estremamente complicato risolvere l'equazione del moto dei singoli punti del sistema.

La definizione introdotta di centro di massa è puramente matematica, nel senso che non esiste il punto materiale del centro di massa, tuttavia questo punto matematico gode di notevoli proprietà.

Per ora è stato dimostrato che considerando il centro di massa alla stregua di un punto materiale di massa m (eguale alla massa totale del sistema):

- La sua velocità è eguale alla quantità di moto totale divisa per la massa totale, ovvero la sua quantità di moto $m\bar{v}_{CM}$ è eguale alla quantità di moto totale \bar{P}
- La sua accelerazione è determinata dalla risultante delle sole forze esterne agenti sul sistema

In questo senso, facendo riferimento a \bar{P} e $\bar{F}^{(E)}$, possiamo dire che il **moto del centro di massa rappresenta quello globale o di insieme dei punti materiali**

È importante notare che \bar{r}_{CM} , \bar{v}_{CM} e \bar{a}_{CM} sono le **medie pesate** sulle masse dei raggi vettori, velocità e accelerazioni dei singoli punti e pertanto forniscono **informazioni di proprietà medie** e non sul moto dei singoli punti.

Un'altra cosa importante da notare è che il calcolo di \bar{r}_{CM} si può effettuare associando gruppi di punti a piacere, determinando per ciascun gruppo il relativo centro di massa, considerando

quest'ultimo come un punto materiale in cui è posta la massa totale del gruppo e calcolando infine il centro di massa di tali centri di massa parziali.

Conservazione della quantità di moto

Se il sistema di punti considerato è isolato (cioè non soggetto a forze esterne) oppure l'azione delle forze esterne è tale che la loro risultante $\bar{F}^{(E)}$ sia nulla, dal fatto che $\bar{F}^{(E)} = \frac{d\bar{P}}{dt}$ si ha

$$\bar{a}_{CM} = 0 \quad \bar{v}_{CM} = \text{costante} \quad \bar{P} = \text{costante}$$

Tale risultato esprime il **principio della conservazione della quantità di moto** per un sistema di punti materiali:

quando la risultante delle forze esterne è nulla, la quantità di moto totale del sistema rimane costante nel tempo e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o resta in quiete.

Osserviamo inoltre che la conservazione della quantità di moto può avvenire anche parzialmente, cioè essere riferita a una o due delle componenti. Per esempio se solamente $F_x^{(E)} = 0$, allora si avrà solo $P_x = \text{costante}$.

Notiamo poi che, pur verificandosi $\bar{F}^{(E)} = 0$, le quantità di moto dei vari punti $m_i \bar{v}_i$ in generale

variano nel tempo; infatti resta costante solo la loro somma $\sum_i m_i \bar{v}_i$.

Consideriamo ora due punti isolati, che possono quindi interagire solo tra loro:

$$\bar{P} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = \text{costante}$$

Derivando rispetto al tempo

$$\frac{d}{dt} (m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2) = m_1 \bar{a}_1 + m_2 \bar{a}_2 = 0$$

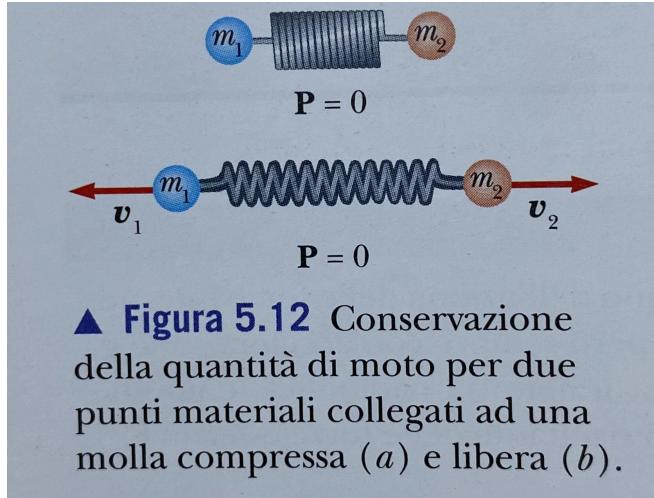
Dunque otteniamo che

$$\bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0 \Rightarrow \bar{F}_1 = -\bar{F}_2$$

Il principio di conservazione della quantità di moto per un sistema isolato di due punti ha come conseguenza che le forze che si esercitano tra i due punti sono eguali in modulo e di verso opposto. Tale risultato non è completamente equivalente al principio di azione e reazione in quanto $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$ non implica che le due forze abbiano la stessa retta di azione.

Fatta questa precisazione, potremmo dire che c'è **equivalenza tra conservazione della quantità di moto e principio di azione e reazione, generalizzabile a sistemi più complessi**.

Il principio della conservazione della quantità di moto permette anche di definire dinamicamente la massa, indipendentemente dalla forza peso. Consideriamo infatti due punti materiali fermi agli estremi di una molla compressa



▲ **Figura 5.12** Conservazione della quantità di moto per due punti materiali collegati ad una molla compressa (a) e libera (b).

Dato che il centro di massa è in quiete, la quantità di moto del sistema dei due punti è nulla, $\bar{P} = 0$. Si lascia espandere la molla: i due punti si muovono in versi opposti e poiché vengono ad agire, durante il moto, solo forze interne al sistema, resta sempre vero che $\bar{P} = 0$. Quindi

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = 0$$

e quindi in modulo vale

$$m_2 = m_1 \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2}$$

Dunque è possibile misurare il valore di una qualsiasi massa, rispetto ad una massa campione, attraverso misure di velocità.

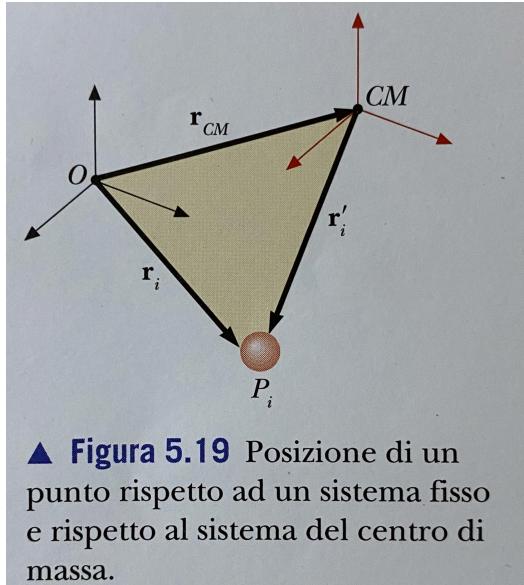
Sistema di riferimento del centro di massa

Nello studio della dinamica dei sistemi di punti materiali è molto utile considerare il **sistema di riferimento del centro di massa**. Esso ha le seguenti caratteristiche:

- l'origine è nel centro di massa
- gli assi mantengono sempre la stessa direzione rispetto agli assi del sistema inerziale e, in particolare, possono essere assunti paralleli a questi
- si tratta in generale di un sistema non inerziale: infatti il moto del sistema del centro di massa è traslatorio, ma non necessariamente rettilineo e uniforme; ciò avviene solo se $\bar{F}^{(E)} = 0$ così che $\bar{a}_{CM} = 0$

Indichiamo con un apice le grandezze relative al sistema del centro di massa; per il punto P_i

$$\bar{r}_i = \bar{r}'_i + \bar{r}_{CM}$$



▲ Figura 5.19 Posizione di un punto rispetto ad un sistema fisso e rispetto al sistema del centro di massa.

Dal teorema delle velocità relative con $\bar{\omega} = 0$ (moto di trascinamento traslatorio) si ha

$$\bar{v}_i = \bar{v}'_i + \bar{v}_{CM}$$

Avendo assunto il centro di massa come riferimento, evidentemente la posizione, la velocità e l'accelerazione del centro di massa rispetto a se stesso sono nulle:

$$\bar{r}_{CM} = 0 \quad \bar{v}_{CM} = 0 \quad \bar{a}_{CM} = 0$$

Ne segue che

$$\sum_i m_i \bar{r}'_i = 0 \quad \sum_i m_i \bar{v}'_i = 0 \quad \sum_i m_i \bar{a}'_i = 0$$

Pertanto:

la quantità di moto totale del sistema, $\bar{P}' = \sum_i m_i \bar{v}'_i$, risulta nulla se misurata nel sistema di riferimento del centro di massa, anche se i singoli termini $m_i \bar{v}'_i$ sono in generale diversi da zero.

Come abbiamo detto, in generale il sistema di riferimento centro di massa non è un sistema di riferimento inerziale, pertanto nei singoli punti agisce anche la forza di trascinamento

$-m_i \bar{a}_t = -m_i \bar{a}_{CM}$, in quanto l'accelerazione di trascinamento è pari a quella dell'origine, cioè del centro di massa. Per ogni punto abbiamo quindi

$$\bar{F}_i^{(E)} + \bar{F}_i^{(I)} - m_i \bar{a}_{CM} = m_i \bar{a}'_i$$

//MANCA PARTE DEL MOMENTO ANGOLARE

Teoremi di Konig

La nozione di sistema di riferimento del centro di massa è essenziale per stabilire due notevoli proprietà che vanno sotto il nome di teoremi di Konig e forniscono, sia per il momento angolare

che per l'energia cinetica di un sistema di punti materiali, una relazione tra il valore misurato in un sistema inerziale e quello misurato nel sistema del centro di massa.

Teorema di Konig per l'energia cinetica

L'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento inerziale è

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2$$

Utilizzando $\bar{v}_i = \bar{v}'_i + \bar{v}_{CM}$ otteniamo

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\bar{v}'_i + \bar{v}_{CM})^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \bar{v}'_i^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \bar{v}_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i (\bar{v}'_i \cdot \bar{v}_{CM})$$

Il primo termine rappresenta l'energia cinetica calcolata nel sistema di riferimento del centro di massa, ossia l'energia cinetica rispetto al centro di massa, E'_k .

Il secondo termine è pari a $\frac{1}{2} m \bar{v}_{CM}^2$, energia cinetica di un punto materiale che possiede tutta la massa del sistema e si muove con la velocità del centro di massa.

L'ultimo termine è nullo visto che in un sistema di riferimento del centro di massa vale

$$\sum_i m_i \bar{v}'_i = 0.$$

Pertanto

$$E_k = E'_k + \frac{1}{2} m \bar{v}_{CM}^2 = E'_k + E_{k,CM}$$

relazione nota come **secondo teorema di Konig**:

l'energia cinetica del sistema di punti si può scrivere, nel sistema di riferimento inerziale, come la somma dell'energia cinetica dovuta al moto del centro di massa, $E_{k,CM}$, e di quella del sistema rispetto al centro di massa.

Commento sui teoremi di Konig

È chiara l'analogia strutturale e di significato tra i due teoremi di Konig. Servendosi della definizione e delle proprietà del centro di massa, essi mettono in evidenza una scomposizione semplice e significativa del momento angolare e dell'energia cinetica in termini del moto medio del sistema, rappresentato dal moto del centro di massa, e del moto medio del sistema rispetto al centro di massa, che potremmo chiamare moto interno. Una proprietà analoga non sussiste per la quantità di moto: infatti la quantità di moto totale di un sistema è eguale alla quantità di moto del centro di massa, mentre la quantità di moto rispetto al centro di massa è nulla,

$$\bar{P} = m \bar{v}_{CM} \text{ e } P' = 0.$$

Possiamo dunque affermare che per quanto riguarda il momento angolare e l'energia cinetica il centro di massa non riassume le proprietà del sistema, a differenza di quanto discusso riguardo a \bar{P} e $\bar{F}^{(E)}$. Non è sufficiente conoscere il moto del centro di massa, cioè appunto \bar{P} e $\bar{F}^{(E)}$, per ricavare \bar{L} e E_k , ma bisogna tener conto anche del moto rispetto al centro di massa. Ovvero, il

moto globale e il moto medio coincidono solo per quanto riguarda la quantità di moto, che è nulla nel moto interno, mentre per quanto riguarda \bar{L} e E_k abbiamo contributi sia dal moto medio che dal moto interno.

//MANCANO PRECISAZIONI MOMENTO ANGOLARE

Passando all'energia cinetica, di nuovo sappiamo che per un singolo punto essa è nulla se il punto è fermo; invece per un sistema anche se $\bar{v}_{CM} = 0$ l'energia cinetica non è necessariamente nulla: il movimento dei singoli punti può rendere $E'_k \neq 0$. Se però $E_k = 0$, allora devono essere necessariamente nulle sia E'_k che $E_{k,CM}$ dato che l'energia cinetica non può essere negativa.

Il teorema dell'energia cinetica

Calcoliamo il lavoro associato al moto di un sistema di punti materiali. Come già visto nel caso di un solo punto, il lavoro per uno spostamento $d\bar{r}_i$ del punto P_i è

$$dW_i = \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i = \bar{F}_i^{(E)} \cdot d\bar{r}_i + \bar{F}_i^{(I)} \cdot d\bar{r}_i = dW_i^{(E)} + dW_i^{(I)}$$

(IMMAGINE)

Sommendo su tutti i punti e integrando lungo le traiettorie C_i percorse si ottiene il lavoro totale

$$W = W^{(E)} + W^{(I)}$$

somma del lavoro delle forze esterne e delle forze interne. Questa volta il contributo delle forze interne non scompare: infatti $dW_i^{(I)}$ è formato da coppie di termini del tipo

$$\bar{F}_{ij} \cdot d\bar{r}_j + \bar{F}_{ji} \cdot d\bar{r}_i = \bar{F}_{ij} \cdot (d\bar{r}_j - d\bar{r}_i) = \bar{F}_{ij} \cdot d(\bar{r}_j - \bar{r}_i) = \bar{F}_{ij} \cdot d\bar{r}_{ij}$$

in generale non nulli e con somma diversa da zero. La struttura di $dW_i^{(I)}$ implica che al lavoro delle forze interne è legato un cambiamento delle distanze mutue tra i vari punti. Se queste non potessero variare, come avviene per esempio se il corpo è rigido, sarebbe $W_i^{(I)} = 0$.

Ritornando all'espressione $dW_i = \bar{F}_i \cdot d\bar{r}_i$, sappiamo dal paragrafo sul Lavoro, Potenza ed Energia Cinetica che essa è eguale a $m_i v_i dv_i$; sommando su tutti i punti e integrando

$$W = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,B}^2 - \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i,A}^2 = E_{k,B} - E_{k,A}$$

dove $v_{i,A}$ e $v_{i,B}$ sono i moduli delle velocità dell'i-esimo punto nella configurazione iniziale A e nella configurazione finale B, $E_{k,A}$ e $E_{k,B}$ le energie cinetiche del sistema rispettivamente nella configurazione iniziale A e nella finale B.

(IMMAGINE)

Mettendo insieme i risultati ottenuti,

$$W^{(E)} + W^{(I)} = E_{k,B} - E_{k,A} = \Delta E_k$$

che esprime il **teorema dell'energia cinetica**:

il lavoro complessivo fatto dalle forze esterne ed interne che agiscono su un sistema di punti materiali è uguale alla variazione dell'energia cinetica dello stesso sistema tra la configurazione finale e quella iniziale

Se le forze interne sono conservative, il lavoro è esprimibile come l'opposto della variazione dell'energia potenziale legata a queste forze, $W^{(I)} = -\Delta E_p^{(I)}$ analogamente, se lo sono quelle esterne, $W^{(E)} = -\Delta E_p^{(E)}$. Quando tutte le forze agenti, sia interne che esterne, sono conservative, abbiamo il **teorema di conservazione dell'energia meccanica del sistema**:

$$\begin{aligned} W &= \Delta E_k = -\Delta E_p = -(E_{p,B} - E_{p,A}) \\ E_{m,A} &= (E_k + E_p)_A = E_{m,B} = (E_k + E_p)_B = \text{costante} \end{aligned}$$

l'**energia meccanica** è definita come somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, $E_m = E_k + E_p$, l'energia potenziale E_p è la somma di tutte le energie potenziali in gioco, associate alle forze interne e alle forze esterne agenti sul sistema.

Se non tutte le forze sono conservative abbiamo invece

$$W_{nc} = (E_k + E_p)_B - (E_k + E_p)_A = E_{m,B} - E_{m,A}$$

in questa formula il lavoro delle forze conservative è espresso da $E_{p,A} - E_{p,B}$ e quello delle forze non conservative da W_{nc} .

È essenziale osservare che anche in assenza di forze esterne (sistema isolato) non è detto che l'energia meccanica si conservi: ciò dipende dalle caratteristiche delle forze interne.

Riprendiamo qui la discussione del paragrafo sulla conservazione dell'energia meccanica. La presenza di forze non conservative che svolgono lavoro comporta una variazione dell'energia meccanica, che può aumentare o diminuire; quando sono presenti soltanto forze di attrito, l'energia meccanica certamente diminuisce. Se si considera tutto ciò che partecipa allo svolgimento di un fenomeno meccanico macroscopico, in generale non si verifica mai che l'energia meccanica si conservi; però nel processo intervengono scambi di energia di altro tipo e, prendendo in esame ogni possibile forma di energia, si trova che l'energia complessa si conserva (primo principio della termodinamica).

Nei fenomeni microscopici la situazione è relativamente più semplice: tutte le interazioni fondamentali sono conservative e questo fatto si manifesta con la conservazione dell'energia senza eccezioni; si tratta di una legge fondamentale e, come si può dimostrare, essa discende dal fatto che non esiste un'origine privilegiata per la misura del tempo.

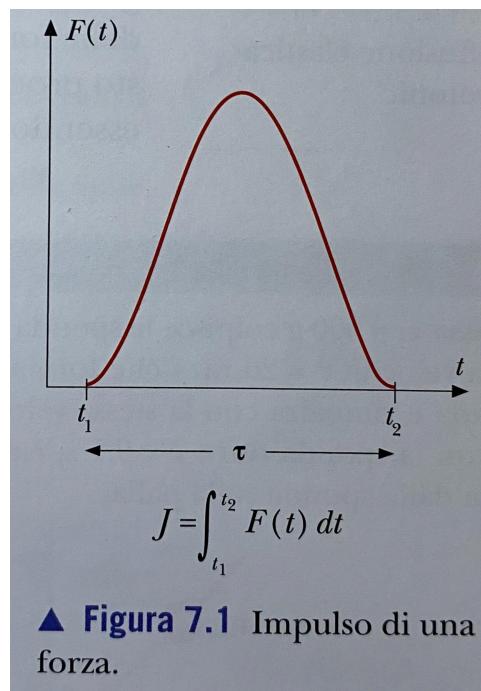
Fenomeni d'urto

Urti tra due punti materiali

Si parla usualmente di **urto** quando due corpi vengono bruscamente a contatto, ossia interagiscono violentemente per un intervallo di tempo trascurabile rispetto ai tempi tipici di osservazione del loro moto prima e dopo il contatto (data la rapidità del contatto è giustificato ritenere che durante l'interazione i due corpi non si muovano in modo apprezzabile).

Cominciamo con il considerare l'urto tra due punti materiali. Durante l'urto si possono sviluppare forze molto intense che modificano la quantità di moto di ciascun punto. Queste forze che, come avviene in un urto, agiscono per un tempo breve rispetto al tempo di osservazione, sono chiamate **forze impulsive**.

In questa figura è rappresentato un possibile andamento del modulo della forza impulsiva



▲ **Figura 7.1** Impulso di una forza.

Osserviamo che le forze che si manifestano durante il processo d'urto sono forze interne al sistema costituito dai due punti materiali interagenti. **In assenza di forze esterne (sistema isolato) si verifica pertanto durante l'urto la conservazione della quantità di moto totale.**

Un sistema può essere:

- Aperto (il sistema scambia con l'esterno sia materia che energia)
- Chiuso (il sistema scambia solo energia)
- Isolato (il sistema non scambia niente. Un esempio classico di sistema isolato è l'universo)

Se indichiamo con $\bar{v}_{1,in}$ e $\bar{v}_{2,in}$ le velocità nell'istante precedente all'urto dei due punti materiali, di masse m_1 e m_2 e con $\bar{v}_{1,fin}$ e $\bar{v}_{2,fin}$ le corrispondenti velocità nell'istante successivo all'urto, la conservazione di \bar{P} si scrive

$$\bar{P}_{in} = m_1 \bar{v}_{1,in} + m_2 \bar{v}_{2,in} = m_1 \bar{v}_{1,fin} + m_2 \bar{v}_{2,fin} = \bar{P}_{fin}$$

Dunque la quantità di moto del centro di massa rimane invariata nell'urto:

$$\bar{P} = (m_1 + m_2) \bar{v}_{CM} = \bar{P}_{in} = \bar{P}_{fin} = \text{costante}$$

il moto del centro di massa non viene cioè alterato dall'urto.

Variano invece le quantità di moto di ciascun punto materiale per effetto dell'impulso della forza di interazione:

$$m_1 \bar{v}_{1,fin} - m_1 \bar{v}_{1,in} = \bar{J}_{2,1} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_{2,1} dt$$

$$m_2 \bar{v}_{2,fin} - m_2 \bar{v}_{2,in} = \bar{J}_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}_{1,2} dt$$

$\bar{J}_{2,1}$ è l'impulso dovuto alla forza impulsiva $\bar{F}_{2,1}$ esercitata dal punto 2 sul punto 1 (analogo significato ha $\bar{J}_{1,2}$).

Naturalmente vale

$$\bar{F}_{1,2} = -\bar{F}_{2,1}$$

e quindi

$$\bar{J}_{1,2} = -\bar{J}_{2,1}$$

Dunque le variazioni di quantità di moto sono eguali e opposte.

Possiamo conservare la quantità di moto totale anche in presenza di forze esterne (sistema non isolato)? La risposta è positiva se la durata τ dell'urto è sufficientemente piccola e le forze esterne non sono impulsive. Infatti la variazione di quantità di moto totale del sistema dovuta alle forze esterne è

$$\Delta \bar{P} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}^{(E)} dt = \bar{F}_m^{(E)} \tau$$

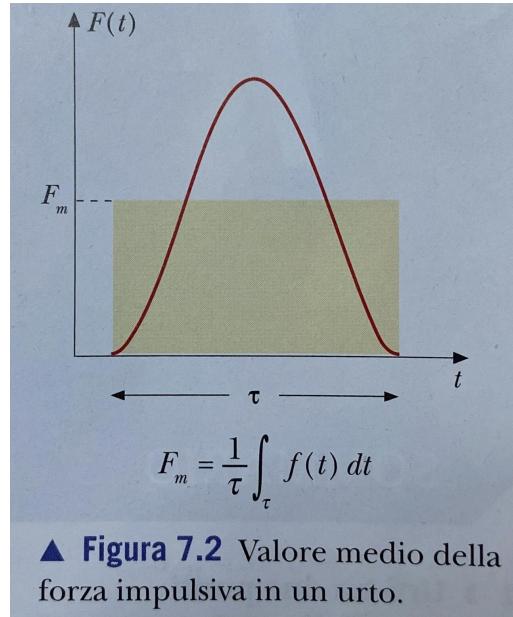
e se τ è molto breve $\Delta \bar{P}$ risulta trascurabile.

Il ragionamento non sarebbe corretto se $\bar{F}^{(E)}$ fosse impulsiva nell'intervallo τ in quanto in tal caso il valore medio $\bar{F}_m^{(E)}$ potrebbe assumere valori rilevanti.

Alternativamente, considerando $\bar{J}_{1,2}$ o $\bar{J}_{2,1}$ prima calcolati, si può scrivere

$$\bar{J} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F} dt = \bar{F}_m \tau$$

dove \bar{F}_m è il valore medio della forza impulsiva nell'intervallo τ .



▲ Figura 7.2 Valore medio della forza impulsiva in un urto.

Dato che \bar{J} assume un valore finito e τ è molto breve, \bar{F}_m può assumere valori estremamente grandi, rispetto ai quali $\bar{F}_m^{(E)}$ è certamente trascurabile. La forza esterna non modifica i singoli impulsi durante l'urto e quindi resta vera l'eguaglianza $\bar{J}_{1,2} = -\bar{J}_{2,1}$ e valida la conservazione della quantità di moto totale.

Quindi definendo urto un processo in cui l'interazione tra i punti materiali abbia un'intensità molto grande rispetto alle eventuali forze esterne presenti si ha che:

- un urto comporta uno scambio di quantità di moto tra due punti sotto forma di impulsi dovuti alle forze interne tra gli stessi
- nell'urto la quantità di moto totale prima dell'urto è uguale alla quantità di moto totale dopo l'urto, dunque la quantità di moto del sistema si conserva

Questa definizione prescinde dal meccanismo specifico con cui avviene il trasferimento di impulsi e quindi dall'effettivo contatto tra i due punti materiali (ad esempio nel caso dei protoni, esso non vengono mai effettivamente a contatto e il trasferimento di impulsi è causato dalla forza elettrica).

Ricordiamo infine che a priori non è noto se le forze interne che si sviluppano nell'urto sono conservative e pertanto non si può assumere la conservazione dell'energia meccanica del sistema durante l'urto.

Dato che la posizione dei punti non varia nell'urto, eventuali energie potenziali dei punti non variano nell'urto e quindi $\Delta E_m = \Delta E_k$: l'argomento appena esposto si traduce pertanto nel fatto che **in un urto non si può assumere a priori che l'energia cinetica si conservi**.
Riguardo all'energia cinetica torna utile il secondo teorema di Konig: per i due punti

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \bar{v}_{CM}^2 + E'_k$$

Il primo termine, energia cinetica del centro di massa, non varia nell'urto se vale la conservazione della quantità di moto, come supponiamo. Ciò che resta costante o varia, a seconda che le forze interne siano conservative o non conservative, è l'energia cinetica rispetto al centro di massa

$$E'_k = \frac{1}{2} (m_1 v'_1^2 + m_2 v'_2^2)$$

Come osservato precedentemente, in un urto non si conserva necessariamente l'energia meccanica e quindi l'energia cinetica. Nello studio degli urti risulta utile distinguere i casi in cui avviene la conservazione dell'energia da quelli in cui questa condizione non è verificata.

Si definisce **urto elastico** un urto durante il quale, oltre alla quantità di moto, si conserva anche l'energia cinetica totale del sistema. Per lo studio di questo tipo di urti si potrà quindi applicare sia la conservazione della quantità di moto che la conservazione dell'energia.

Analogamente vengono detti **urti anelastici** tutti quegli urti durante i quali l'energia non si conserva. Per quanto riguarda questi ultimi, l'energia cinetica finale sarà diversa da quella iniziale. Nei casi più comuni l'energia cinetica sarà minore di quella iniziale se nell'urto entrano in gioco forze dissipative. Vi possono però essere urti in cui l'energia cinetica finale è maggiore di quella iniziale (ad esempio un petardo che esplode in due frammenti sotto l'effetto di una forza impulsiva causa una conservazione della quantità di moto ma un aumento dell'energia cinetica).

È inoltre importante notare che negli urti anelastici, a prescindere dal tipo di interazione tra i due punti materiali, non tutti i valori dell'energia cinetica finale sono in generale possibili. In particolare questa avrà un valore minimo sotto al quale non è possibile scendere, ovvero non sempre tutta l'energia cinetica dei punti materiali può essere dissipata nell'urto. Questo perché a causa della conservazione della quantità di moto, la velocità del centro di massa non può variare. Prendendo in considerazione il secondo teorema di König $E_k = E_{k,CM} + E'_k$, il termine $E_{k,CM}$ rimarrà invariato tra prima e dopo l'urto. Essendo l'energia cinetica una quantità sempre positiva, il valore minimo che essa può assumere dopo l'urto è $E_{k,CM}$, il che avviene quando $E'_k = 0$. Questo implica che dopo l'urto le due particelle siano ferme rispetto al sistema di riferimento del centro di massa. Questo tipo particolare di urto anelastico viene detto **urto completamente anelastico**, e si verifica quando le due particelle dopo l'urto rimangono attaccate tra loro. In questo caso, dopo l'urto, la posizione delle due particelle coincide con quella del centro di massa, per cui la loro velocità relativa rispetto al centro di massa è nulla.

Urto elastico

In base alla definizione data precedentemente, in un **urto elastico si conserva anche l'energia cinetica del sistema**. Questo comporta che le forze interne, che si manifestano durante l'urto, siano conservative. I due corpi reali che si urtano subiscono, durante l'urto, delle deformazioni elastiche, riprendendo la configurazione iniziale subito dopo l'urto.

Nello studio di un urto elastico possiamo utilizzare le equazioni

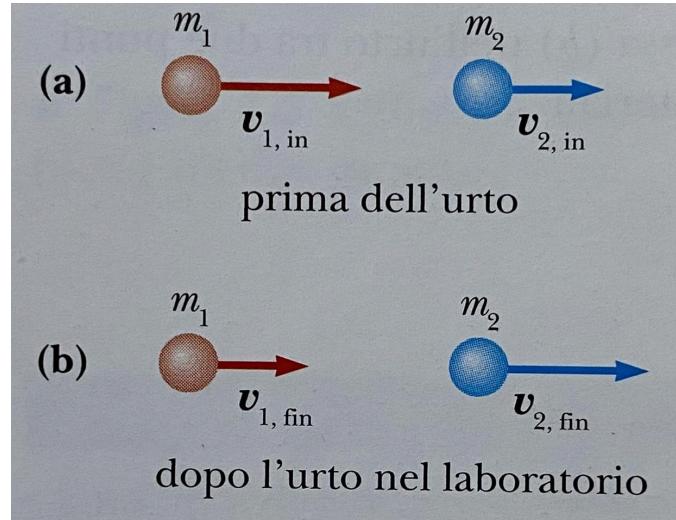
$$\bar{P}_{in} = \bar{P}_{fin} \quad E_{k,in} = E_{k,fin}$$

ed è l'unico caso in cui le due leggi valgono simultaneamente.

Limitandoci a un **urto centrale**, che avviene quando due punti materiali si muovono prima e dopo l'urto lungo la stessa direzione, abbiamo due equazioni di conservazione e due incognite (le velocità dei due punti dopo l'urto):

$$m_1 v_{1,in} + m_2 v_{2,in} = m_1 v_{1,fin} + m_2 v_{2,fin} = (m_1 + m_2) v_{CM}$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,in}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,in}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,fin}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,fin}^2$$



Risolvendo il sistema si trova la soluzione

$$v_{1,fin} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1,in} + 2m_2 v_{2,in}}{m_1 + m_2} \quad v_{2,fin} = \frac{2m_1 v_{1,in} + (m_2 - m_1)v_{2,in}}{m_1 + m_2}$$

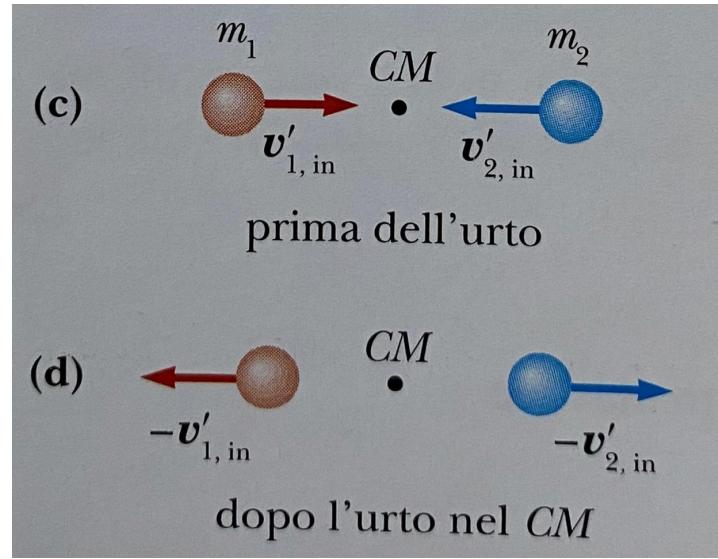
Nell'applicazione di queste due formule bisogna fare attenzione ai segni delle velocità.

Prendendo come positivo il verso di \$\bar{v}_{1,in}\$, allora \$v_{2,in}\$ va inserita con segno positivo o negativo a seconda che \$\bar{v}_{2,in}\$ sia concorde o discorde a \$\bar{v}_{1,in}\$. Per le velocità finali, bisogna guardare il segno con lo stesso criterio per capire se è concorde o discorde a \$\bar{v}_{1,in}\$.

Se l'urto elastico viene considerato nel sistema di riferimento del centro di massa si trova:

$$\bar{v}'_{1,fin} = -\bar{v}'_{1,in} \quad \bar{v}'_{2,fin} = -\bar{v}'_{2,in}$$

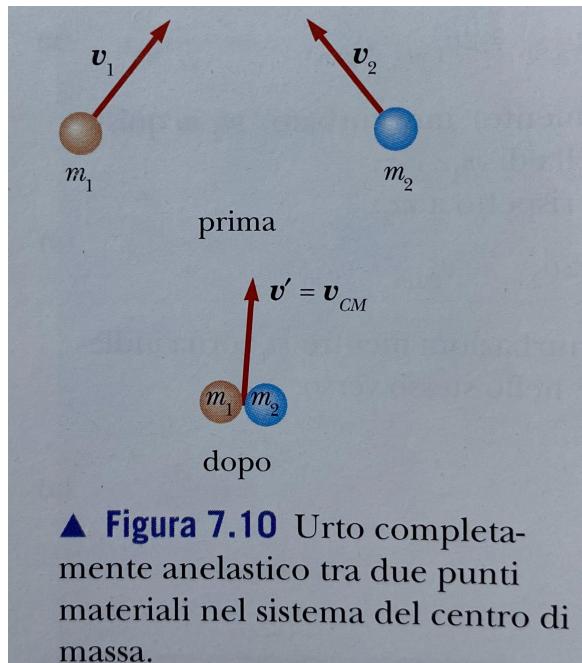
La velocità e la quantità di moto di ciascun punto restano le stesse in modulo, cambiano solo di verso



Nel caso invece in cui il moto avvenisse in più dimensioni, il numero di equazioni sarà inferiore al numero di incognite quindi non potremmo descrivere con esattezza i moti solamente dalle condizioni iniziali, ma ci servirà ad esempio l'angolo che si forma con la nuova traiettoria.

Urto completamente anelastico

Nell'urto completamente anelastico i due punti restano attaccati dopo l'urto formando un unico corpo puntiforme di massa $m_1 + m_2$.



Se \bar{v}_1 e \bar{v}_2 sono le velocità dei due punti nell'istante prima dell'urto e \bar{v}' la velocità comune immediatamente dopo l'urto, dalla conservazione della quantità di moto si ha che

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = (m_1 + m_2) \bar{v}' = (m_1 + m_2) \bar{v}_{CM}$$

dunque

$$\bar{v}' = \bar{v}_{CM} = \frac{m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2}{(m_1 + m_2)}$$

Subito dopo l'urto i punti si muovono con la velocità che aveva il centro di massa un istante prima dell'urto (\bar{v}_{CM} resta invariata nell'urto). Le variazioni di quantità di moto dei singoli punti sono $m_1 \bar{v}_{CM} - m_1 \bar{v}_1$ e $m_2 \bar{v}_{CM} - m_2 \bar{v}_2$ e si verifica subito che sono eguali e opposte.

Calcoliamo l'energia cinetica del sistema prima e dopo l'urto:

$$E_{k,in} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = E'_{k,in} + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \bar{v}_{CM}^2$$

avendo applicato il secondo teorema di Konig, invece

$$E_{k,fin} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \bar{v}_{CM}^2$$

che è sicuramente minore di $E_{k,in}$.

In effetti, dopo l'urto completamente anelastico non c'è più moto rispetto al centro di massa, con cui i due punti vengono a coincidere, e concludiamo che in questo tipo d'urto è assorbita proprio $E'_{k,in}$, l'energia cinetica che i punti hanno rispetto al centro di massa prima dell'urto:

$$\Delta E_k = E_{k,fin} - E_{k,in} = -E'_{k,in} = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \bar{v}_{CM}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 - \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

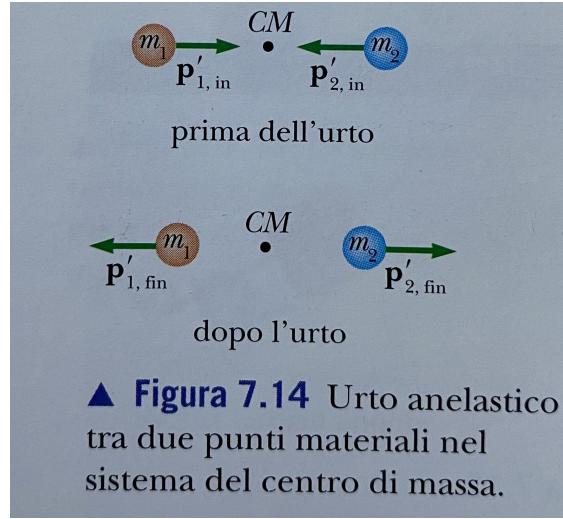
Ciò che avviene in realtà si può schematizzare così: i due corpi, che abbiamo trattato come punti materiali, in realtà durante l'urto si deformano in modo permanente e restano compenetrati. Il lavoro compiuto, a spese dell'energia cinetica iniziale, per fare avvenire la deformazione non viene più recuperato, ovvero le **forze interne** che si sviluppano nell'urto **non sono conservative**.

Urto anelastico

Questo è il caso più comune: i punti ritornano separati dopo l'urto, durante il quale, non agendo forze esterne di tipo impulsivo, si conserva la quantità di moto del sistema, ma non l'energia cinetica. Una certa frazione di $E'_{k,in}$, energia cinetica prima dell'urto rispetto al centro di massa, viene assorbita.

Ciò è determinato, negli urti tra particelle reali, dal fatto che l'impulso della forza di interazione di una particella con l'altra risulta, nella fase di deformazione dei corpi, superiore a quello nella fase di ritorno dei corpi alla configurazione iniziale. Se l'urto fosse elastico i due impulsi sarebbero eguali (in modulo), mentre per un urto completamente anelastico il secondo sarebbe nullo.

Per chiarire meglio il processo, consideriamolo nel sistema di riferimento del centro di massa



▲ **Figura 7.14** Urto anelastico tra due punti materiali nel sistema del centro di massa.

Il punto con quantità di moto $p'_{1,in}$ nell'istante precedente all'urto vede, per effetto dell'impulso nella fase di deformazione, ridursi progressivamente a zero la sua quantità di moto fino ad arrestarsi. Nella fase successiva, sempre durante l'urto, il punto riacquista quantità di moto fino al valore $p'_{1,fin}$, opposto in verso e minore in modulo rispetto a $p'_{1,in}$. Si definisce **coefficiente di restituzione** il rapporto

$$e = -\frac{p'_{1,fin}}{p'_{1,in}} = -\frac{v'_{1,fin}}{v'_{1,in}} = -\frac{p'_{2,fin}}{p'_{2,in}} = -\frac{v'_{2,fin}}{v'_{2,in}}$$

Ricordiamo che, essendo $P' = 0$, in modulo $p'_{1,in} = p'_{2,in}$ e $p'_{1,fin} = p'_{2,fin}$, per cui il coefficiente di restituzione è lo stesso anche per la seconda particella.

L'energia cinetica delle due particelle dopo l'urto è data da

$$E'_{k,fin} = \frac{1}{2}m_1 v'_{1,fin}^2 + \frac{1}{2}m_2 v'_{2,fin}^2 = e^2 \left(\frac{1}{2}m_1 v'_{1,in}^2 + \frac{1}{2}m_2 v'_{2,in}^2 \right)$$

e quindi

$$E'_{k,fin} = e^2 E'_{k,in}$$

La variazione relativa di energia cinetica rispetto al centro di massa nell'urto è

$$\delta = \frac{E'_{k,fin} - E'_{k,in}}{E'_{k,in}} = e^2 - 1$$

Nell'urto elastico $e = 1$ e $\delta = 0$ e l'energia cinetica si conserva.

Nell'urto completamente anelastico $e = 0$ e $\delta = -1$: tutta l'energia cinetica del moto relativo al centro di massa è assorbita e trasformata.

Normalmente in un urto anelastico si ha dissipazione di energia e il coefficiente di restituzione e risulta compreso tra zero e uno, dunque $E'_{k,fin}$ è sempre minore di $E'_{k,in}$.

La soluzione per le velocità finali nel sistema di riferimento inerziale, sempre nel caso di un urto centrale come per l'urto elastico, risulta:

$$v'_{1,fin} = \frac{(m_1 - em_2)v'_{1,in} + m_2(1+e)v'_{2,in}}{m_1 + m_2} \quad v'_{2,fin} = \frac{m_1(1+e)v'_{1,in} + (m_2 - em_1)v'_{2,in}}{m_1 + m_2}$$

Con $e = 1$ si ritorna alle formule dell'urto elastico, mentre con $e = 0$ si ha $v_{1,fin} = v_{2,fin} = v_{CM}$, come è giusto per l'urto completamente anelastico.

Gravitazione

Forze centrali

Questo capitolo è dedicato all'**interazione gravitazionale**.

Prima di entrare in argomento è importante premettere lo studio delle cosiddette forze centrali, in quanto la forza gravitazionale ne è un esempio.

Si definisce **forza centrale** una forza agente in una certa regione dello spazio con le seguenti proprietà:

- La sua retta di applicazione passa sempre per un punto O (detto centro della forza)
- Il modulo è in funzione soltanto della distanza tra il centro O e il punto P in cui essa è applicata

Se \bar{u}_r è il versore della direzione $\overline{OP} = \bar{r}$, allora vale $\bar{F} = F(r)\bar{u}_r$:

- Con $F(r) > 0$ la forza è **repulsiva**
- Con $F(r) < 0$ la forza è **attrattiva**

La presenza di una forza, funzione della posizione, che agisce in una certa regione dello spazio, costituisce una modifica dello spazio stesso e stabilisce quello che si chiama un (che agisce su ogni particella che si trova in esso)

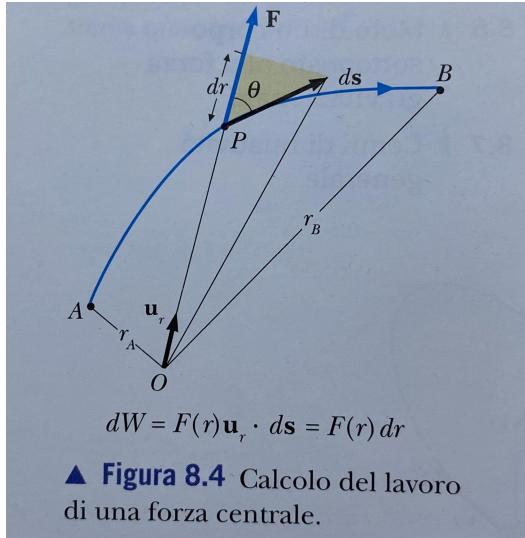
//MANCA PARTE MOMENTO ANGOLARE

Concludiamo questo paragrafo dimostrando che le forze centrali sono **conservative**. Abbiamo già detto che il modulo di una forza centrale dipende solo dalla distanza r dal centro, $\bar{F} = F(r)\bar{u}_r$

Il lavoro di questa forza si scrive

$$W = \int_A^B \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_A^B F(r)\bar{u}_r \cdot d\bar{s}$$

Il prodotto scalare $\bar{u}_r \cdot d\bar{s}$ vale $ds \cos(\theta)$ e possiamo vedere dalla figura che $ds \cos(\theta)$ equivale a dr , ovvero la variazione del modulo di \bar{r} durante lo spostamento $d\bar{s}$.



Quindi

$$W = \int_A^B F(r) dr = f(r_B) - f(r_A)$$

dunque il lavoro è dato dalla variazione di una funzione delle sole coordinate di A e B , condizione perché la forza sia conservativa; la funzione f è, a meno del segno, l'energia potenziale.

La forza gravitazionale

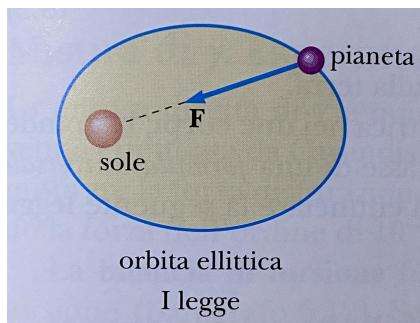
Richiamiamo brevemente le conoscenze sul moto dei pianeti che si avevano prima di Newton (vissuto dal 1642 al 1727).

Intorno al 1540 era stata avanzata da Copernico l'ipotesi eliocentrica: il sole (e non la terra) era il corpo celeste attorno al quale si svolgeva il moto dei pianeti.

Successivamente, le posizioni assunte da questi nel tempo erano state oggetto di numerose e accurate misure da parte di Brahe (tra il 1576 e la fine del secolo), misure su cui si basò Keplero per formulare, tra il 1600 e il 1620, le sue tre leggi.

- Prima legge**

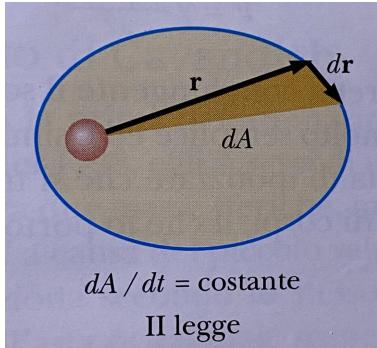
I pianeti percorrono orbite ellittiche attorno al sole, che occupa uno dei fuochi dell'ellisse



- Seconda legge**

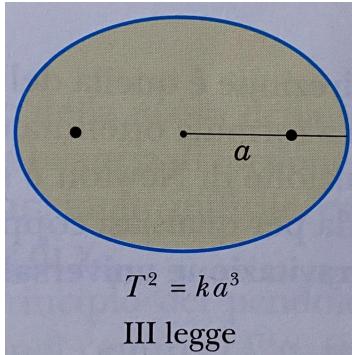
La velocità areale $\frac{dA}{dt}$ con cui il raggio vettore che unisce il sole a un pianeta descrive l'orbita è costante, o in altre parole, i pianeti impiegano lo stesso tempo a percorrere

archi dell'ellisse che sottintendono la stessa area



- **Terza legge**

Il quadrato del periodo di rivoluzione di ogni pianeta è proporzionale al cubo del semiasse maggiore dell'ellisse: $T^2 = ka^3$, con k costante detta costante di Keplero



Queste tre leggi danno una descrizione cinematica del moto dei pianeti. La spiegazione dinamica venne trovata da Newton nel 1666 e resa nota solamente nel 1687. Da essa prese corpo la **teoria della gravitazione universale** (vedremo solo gli aspetti più semplici).

Diamo una traccia del ragionamento di Newton, inizialmente approssimato.

Le orbite dei pianeti, pur essendo certamente ellittiche, sono molto prossime a circonferenze; immaginiamo allora che siano circolari. Se questo è vero e se la velocità areale è costante, il moto di un pianeta è circolare uniforme: infatti, visto che $A = \frac{1}{2}r^2\theta$, allora

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

visto che la velocità areale è costante e anche r è costante, allora anche $\frac{d\theta}{dt}$ è costante.

La forza che agisce sul pianeta, permettendogli di percorrere una traiettoria circolare con velocità costante, deve essere esclusivamente centripeta, cioè senza componente tangenziale e si scrive

$$F = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

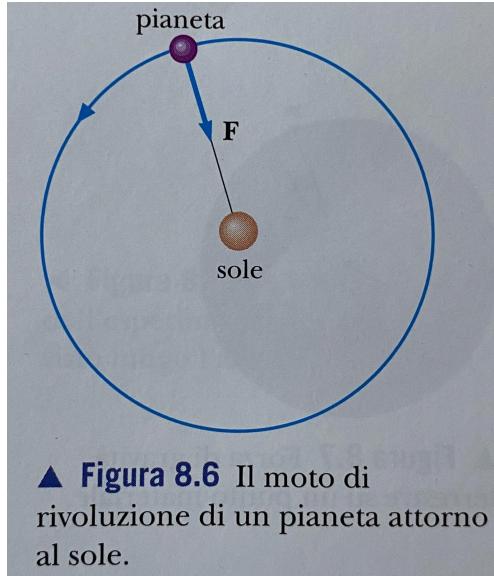


Figura 8.6 Il moto di rivoluzione di un pianeta attorno al sole.

essendo T il periodo di rivoluzione, m la massa e r il raggio dell'orbita del pianeta.

Utilizziamo ora la terza legge di Keplero $T^2 = kr^3$, con $a = r$ visto che il semiasse maggiore dell'ellisse coincide per orbite circolari con il raggio della circonferenza, la forza diviene

$$F = m \frac{(2\pi)^2}{kr^3} r = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2}$$

Ecco il primo risultato fondamentale:

la forza esercitata dal sole sui pianeti, che incurva la loro orbita, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza dal sole

Consideriamo quindi il sistema sole-terra: la forza esercitata dal sole sulla terra può quindi essere scritta

$$F_{S,T} = \frac{4\pi^2}{k_T} \frac{m_T}{r^2}$$

Nell'ipotesi che anche la forza esercitata dalla terra sul sole abbia un'espressione analoga, risultando in particolare proporzionale alla massa del sole si ha:

$$F_{T,S} = \frac{4\pi^2}{k_S} \frac{m_S}{r^2}$$

Per il principio di azione e reazione, $F_{T,S}$ deve essere eguale in modulo a $F_{S,T}$, e dall'uguaglianza si ottiene

$$m_T k_S = m_S k_T$$

Possiamo dunque definire la costante $\gamma = \frac{4\pi^2}{m_T k_S} = \frac{4\pi^2}{m_S k_T}$.

Dunque il modulo della forza sole-terra è

$$F = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2}$$

e la direzione è quella della retta congiungente il sole alla terra. Questa forza è attrattiva, questo perchè il verso della forza applicata alla terra è verso il sole, dunque dovrò inserire un segno meno:

$$\overline{F} = -\gamma \frac{m_s m_t}{r^2} \overline{u}_r$$

La formula ottenuta è molto semplice ed è simmetrica nei due corpi; la grande intuizione di Newton è stata di ipotizzare che si trattasse di una **formula universale** valida per qualsiasi coppia di corpi, il che lo portò ad enunciare la seguente **legge di gravitazione universale**: *date due masse qualsiasi, di dimensioni trascurabili rispetto alla distanza mutua, tra di esse agisce una forza attrattiva diretta lungo la retta congiungente le due masse, il cui modulo dipende direttamente dal prodotto delle masse e inversamente dal quadrato della distanza.* È molto importante notare che non esiste sistema fisico che non sia soggetto alla forza gravitazionale.

La costante di proporzionalità γ è una **costante universale** detta **coefficiente di gravitazione universale**, che non dipende dai valori delle masse e dalla geometria del sistema, ma è caratteristica dell'interazione gravitazionale. Innumerevoli verifiche sperimentali, soprattutto in campo astronomico, hanno confermato la correttezza dell'ipotesi.

Le determinazioni più recenti danno per γ il valore

$$6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

L'ordine di grandezza di questa costante spiega il perchè quando affrontiamo i problemi della dinamica non prendiamo in considerazione tutte le forze gravitazionali che ci sono tra i vari corpi, questo perché questa forza è minuscola a meno di una massa enorme.

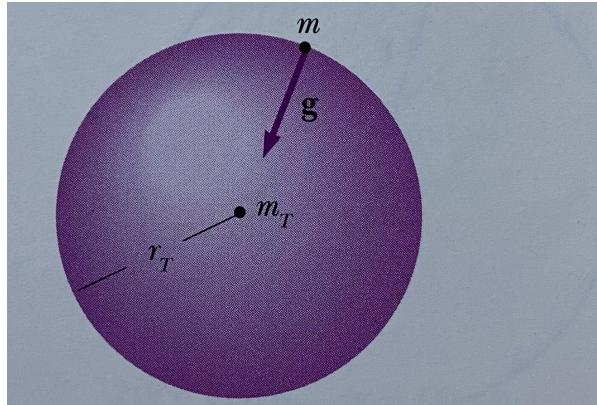
La prima verifica è sempre dovuta a Newton. Visto che $F = \gamma \frac{m_s m_t}{r^2}$ deve valere anche per un corpo di massa m posto sulla terra, la quale è approssimabile a un corpo sferico di massa m_t e raggio r_t (possiamo usare il raggio in quanto le piccole variazioni di distanza dalla superficie terrestre sono ininfluenti): per la forza subita dal corpo scriviamo

$$F = \gamma \frac{m_t m}{r_t^2}$$

Questa formula è valida se si ammette che un corpo a simmetria sferica eserciti una forza come se la massa fosse tutta concentrata nel suo centro; la prova di questa proprietà fu una delle cause che ritardò la pubblicazione della formula $F = \gamma \frac{m_s m_t}{r^2}$.

Visto che sappiamo che $F = mg$ allora abbiamo che (assumendo che la massa inerziale del corpo sia uguale alla massa gravitazionale del corpo)

$$g = \gamma \frac{m_t}{r_t^2}$$



▲ Figura 8.7 Forza di gravità terrestre su un punto materiale.

Il problema era che Newton non conosceva né il valore di γ né la massa della terra. Tuttavia, con riferimento al sistema terra-luna, si può scrivere

$$F_{T,L} = \gamma \frac{m_T m_L}{r_L^2} = m_L \omega_L^2 r_L$$



▲ Figura 8.8 Moto di rivoluzione della luna attorno alla terra.

per la forza esercitata dalla terra sulla luna, che è centripeta per la luna; segue che (assumendo che massa inerziale e gravitazionale della luna siano la stessa cosa) $\gamma m_T = \omega_L^2 r_L^3$ e dunque dal periodo di rotazione della luna attorno alla terra e dalla distanza terra-luna, è possibile determinare il prodotto γm_T e quindi g .

Con i valori noti oggi l'accordo è perfetto. Al tempo di Newton il valore stimato della distanza terra-luna era sbagliato e solo dopo una misurazione astronomica più precisa Newton poté trovare un buon accordo tra g e $\gamma \frac{m_T}{r_T^2}$ (altro fatto che ritardò la pubblicazione della teoria).

La formula $F = \gamma \frac{m_S m_T}{r^2}$ mostra che la forza gravitazionale è una forza centrale: viene così chiarito il perché della validità della seconda legge di Keplero.

Sottolineiamo che a differenza delle forze finora considerate, che si manifestano al contatto (macroscopico) tra i corpi, la forza gravitazionale si manifesta a distanza, senza che le masse vengano a contatto. In effetti tutte le interazioni fondamentali conosciute sono forze a distanza, che differiscono però nel raggio di azione (oltre che per altre proprietà): la forza gravitazionale e la forza tra cariche elettriche hanno la stessa dipendenza dalla distanza ($\frac{1}{r^2}$) e si dice che il loro raggio di azione è infinito, invece la forza forte e quella debole decrescono molto più rapidamente con la distanza e sono efficaci solo a livello subatomico.

Altre caratteristiche notevoli della forza gravitazionale tra due corpi sono costituite dall'indipendenza rispetto a diversi fattori, quali lo stato di moto relativo, la presenza di materia interposta e proprietà specifiche come stato di aggregazione e composizione chimica dei due corpi.

//MANCA ESPERIMENTO DI CAVENDISH

Massa inerziale e massa gravitazionale

La legge $F = \gamma \frac{m_s m_t}{r^2}$ esprime un particolare tipo di interazione esistente in natura il cui valore numerico dipende dalla costante γ , che è tipica dell'interazione, della geometria del sistema e da una caratteristica dei corpi che partecipano all'interazione, che abbiamo indicato con m e chiamiamo massa gravitazionale.

A priori non c'è nessuna ragione logica per cui la massa gravitazionale, legata a una particolare interazione, debba essere uguale alla massa inerziale che compare nella legge di Newton $\bar{F} = m\bar{a}$; qui la grandezza m caratterizza l'inerzia del corpo, qualunque sia la forza agente, e sappiamo che essa può essere determinata con misure cinematiche indipendenti dalla forza peso.

Per un corpo in caduta libera sulla superficie terrestre vale l'equazione

$$m_I g = \gamma \frac{m_{T,G} m_G}{r_T^2}$$

dove m_I e m_G sono rispettivamente la **massa inerziale** e la **massa gravitazionale** del corpo attirato dalla terra, la cui massa gravitazionale è $m_{T,G}$. Ne ricaviamo

$$g = \gamma \frac{m_{T,G}}{r_T^2} \frac{m_G}{m_I}$$

Sperimentalmente, in uno stesso luogo g è la stessa per tutti i corpi, quindi per qualsiasi corpo il rapporto $\frac{m_G}{m_I}$ è pari a una costante, indipendente dal corpo: le due masse m_I e m_G sono per lo meno proporzionali.

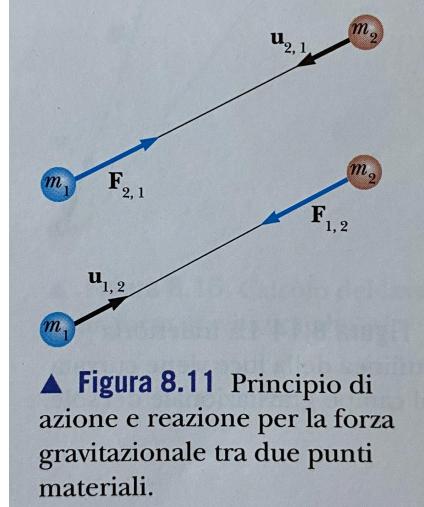
Poiché non esiste un modo diretto per misurare il rapporto $\frac{m_G}{m_I}$, l'ipotesi più semplice è supporre che numericamente valga $m_I = m_G$.

Campo gravitazionale

In termini vettoriali, l'espressione della forza gravitazionale che la massa m_1 esercita sulla massa m_2 è

$$\bar{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \bar{u}_{1,2}$$

dove $\bar{u}_{1,2}$ è il versore della direzione che va da m_1 a m_2 . La forza $\bar{F}_{2,1}$ subita da m_1 ad opera di m_2 vale $-\bar{F}_{1,2}$.



La struttura di $\bar{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \bar{u}_{1,2}$ si presta ad una considerazione interessante; possiamo infatti scrivere:

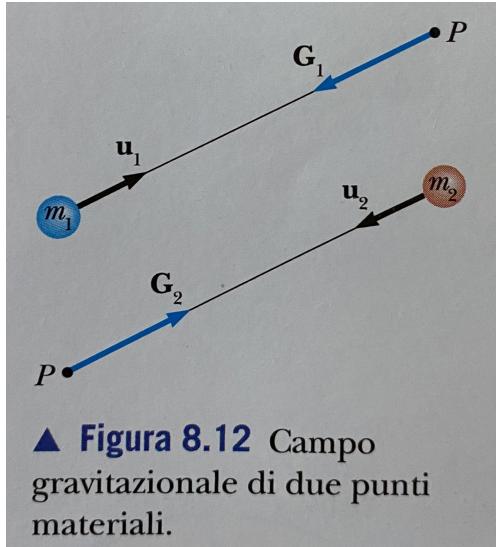
$$\bar{F}_{1,2} = \left(-\gamma \frac{m_1}{r^2} \bar{u}_{1,2} \right) m_2 \text{ e } \bar{F}_{2,1} = \left(-\gamma \frac{m_2}{r^2} \bar{u}_{2,1} \right) m_1$$

e dire che la forza gravitazionale $\bar{F}_{1,2}$, esercitata dal corpo di massa m_1 sull'altro di massa m_2 è pari al prodotto di m_2 per un vettore, che non dipende da m_2 , ma solo da m_1 e dalla distanza da m_1 ; viceversa nel caso di $\bar{F}_{2,1}$.

Il vettore tra parentesi si chiama **campo gravitazionale** \bar{G} generato dalla massa sorgente del campo nel punto P distante r dalla sorgente

$$\begin{aligned} \bar{G}_1 &= -\gamma \frac{m_1}{r^2} \bar{u}_1 & \bar{F}_{1,2} &= m_2 \bar{G}_1 \\ \bar{G}_2 &= -\gamma \frac{m_2}{r^2} \bar{u}_2 & \bar{F}_{2,1} &= m_1 \bar{G}_2 \end{aligned}$$

dove \bar{u}_i è un versore uscente radialmente dal punto in cui si trova la massa sorgente m_i , dunque \bar{G}_1 è diverso da \bar{G}_2 , anche in modulo, però vale $\bar{F}_{1,2} = -\bar{F}_{2,1}$.



Queste formule che abbiamo visto sono valide per masse puntiformi, o a simmetria sferica; in tal caso anche il campo è a simmetria sferica, cioè centrale, ed è sempre rivolto verso la massa origine del campo.

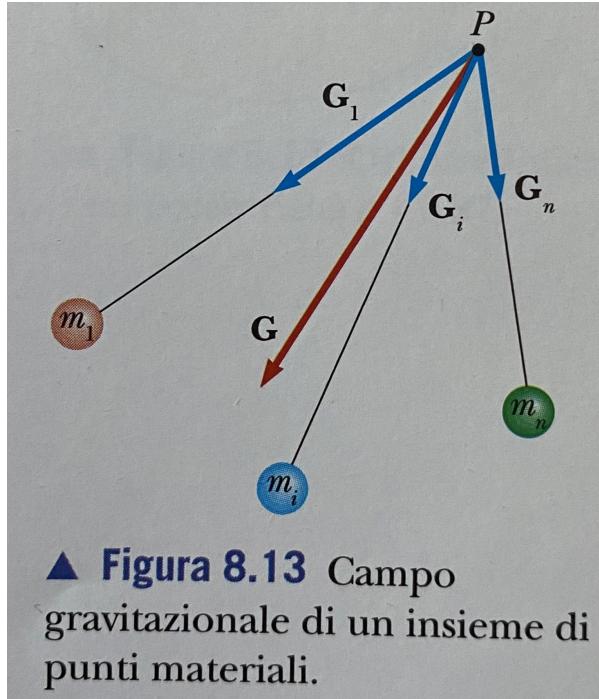
Il campo gravitazionale totale \bar{G} in un punto P dovuto a più masse puntiformi $m_1, \dots, m_i, \dots, m_n$ si ottiene sommando vettorialmente i vari contributi

$$\bar{G}_i = -\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \bar{u}_i$$

delle singole masse

$$\bar{G}(P) = \sum_{i=1}^n \bar{G}_i = \sum_{i=1}^n \left(-\gamma \frac{m_i}{r_i^2} \bar{u}_i \right)$$

Il procedimento si estende al caso di una massa estesa, il cui campo si calcola integrando i contributi $d\bar{G}$ degli elementi di massa dm .

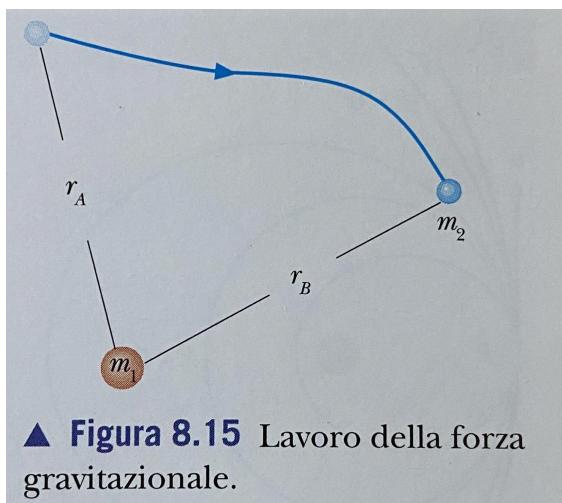


In ogni caso, per quanto numerose siano le masse sorgenti, calcolato \bar{G} una volta per tutte, la forza agente su qualsiasi massa puntiforme m si ottiene immediatamente con il semplice prodotto $\bar{F} = m\bar{G}$. Se invece tale massa è estesa, bisogna integrare sulla forza $d\bar{F}$ agente sulla massa dm .

La nozione di campo è utile concettualmente anche se non indispensabile.

Energia potenziale gravitazionale

Dimostriamo direttamente che la forza gravitazionale è conservativa (sappiamo già che lo è in quanto è una forza centrale, ma il calcolo ci serve per trovare l'espressione dell'energia potenziale).

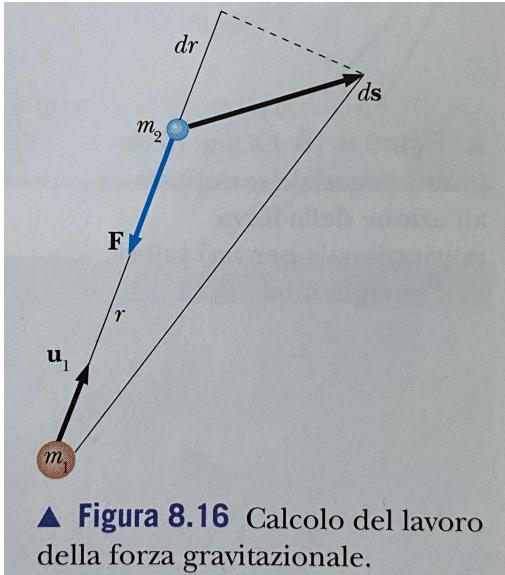


In figura è mostrata la traiettoria di una massa m_2 nel campo di una massa m_1 .

Il lavoro compiuto durante lo spostamento $d\bar{s}$ è

$$dW = \bar{F}_{1,2} \cdot d\bar{s} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \bar{u}_1 \cdot d\bar{s}$$

il prodotto scalare $\bar{u}_1 \cdot d\bar{s}$ è pari alla proiezione di $d\bar{s}$ su \bar{u}_1 e quindi a dr , variazione del modulo della distanza tra m_1 e m_2 a seguito dello spostamento $d\bar{s}$.



Pertanto

$$W = \int_A^B dW = \int_{r_A}^{r_B} \left(-\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \right) dr = -\gamma m_1 m_2 \left(-\frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \right) = E_{p,A} - E_{p,B}$$

Verifichiamo così che il lavoro non dipende dalla traiettoria, ma solo dalle posizioni iniziale e finale, e che l'**energia potenziale** ha l'espressione

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}$$

Il segno negativo deriva da quello di $\bar{F}_{1,2} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \bar{u}_{1,2}$ e significa che la forza gravitazionale è attrattiva (a distanza infinita l'energia potenziale è nulla, se il corpo inizia ad avvicinarsi allora aumenta l'energia cinetica e deve diminuire quella potenziale, dunque l'energia potenziale assume valori negativi).

Termodinamica

Sistemi termodinamici

Introduzione

Nello studio della meccanica abbiamo posto l'attenzione sul moto dei punti o delle parti che costituiscono un determinato sistema. Tra le varie proprietà abbiamo visto che il lavoro

compiuto dalle forze agenti è eguale alla variazione dell'energia cinetica delle parti componenti il sistema. In presenza di forze conservative si è visto inoltre che il lavoro si può esprimere come variazione dell'energia potenziale e che l'energia meccanica del sistema, somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, resta costante durante il moto ovvero si conserva, risultato noto come **principio di conservazione dell'energia meccanica**.

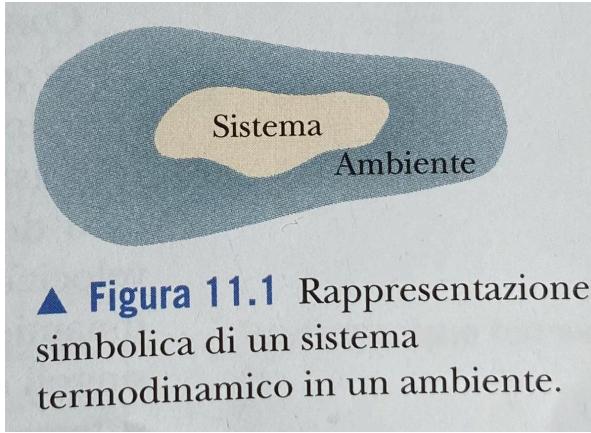
Se agiscono anche forze dissipative, come le forze di attrito, l'energia meccanica non si conserva, ma diminuisce; nello studio della meccanica non è stato necessario approfondire le ragioni e le conseguenze della non conservazione dell'energia del sistema. D'altra parte, nei fenomeni meccanici macroscopici, la situazione di non conservazione dell'energia meccanica è praticamente sempre verificata.

Uno degli argomenti principali della **termodinamica** è proprio l'esame del bilancio energetico complessivo di un processo fisico, estendendo l'indagine a scambi di energia che non sono meccanici nel senso macroscopico finora discusso. Prima di arrivare alla formulazione di una legge di conservazione più generale è però necessario premettere un'esposizione sui sistemi e sui fenomeni di cui si occupa la termodinamica e introdurre nuove grandezze fisiche, come la **temperatura e il calore**.

Un **sistema termodinamico** è spesso assimilabile, da un punto di vista meccanico, a un sistema continuo, considerato che microscopicamente è costituito da un numero di elementi dell'ordine del **numero di Avogadro**, $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$. Però non è lo studio del moto che ci interessa, né quello globale né quello dei singoli punti, che del resto sarebbe impossibile, dato il numero elevato sia di punti che di interazioni. In effetti i sistemi termodinamici che studieremo saranno tutti praticamente in quiete. Cercheremo invece di descrivere le **trasformazioni** che il sistema può subire e gli scambi energetici che ne risultano con l'ambiente circostante, individuando le grandezze più appropriate a tale descrizione. Storicamente l'origine della termodinamica classica è appunto legata al problema della produzione di lavoro con mezzi termici.

Chiamiamo **sistema termodinamico una porzione di universo che può essere costituita da una o più parti**, per esempio un volume di un gas, un liquido in equilibrio con il suo vapore, un insieme di blocchi di solidi diversi; tale sistema è oggetto delle nostre osservazioni per quanto riguarda le proprietà fisiche macroscopiche che lo caratterizzano e le loro eventuali variazioni.

Per ambiente circostante, o semplicemente **ambiente**, intendiamo tutto ciò con cui il sistema può interagire: l'ambiente pertanto contribuisce in generale a determinare le caratteristiche fisiche macroscopiche del sistema e la loro evoluzione.



L'ambiente può essere più o meno complesso, ossia costituito da una sola parte (per esempio l'aria o un altro fluido in cui è immerso il sistema) o da più parti (per esempio diversi corpi solidi a contatto con il sistema).

L'insieme sistema più ambiente si chiama **universo termodinamico**, in senso locale.

Se tra il sistema e l'ambiente avvengono *scambi di energia e di materia*, il **sistema** è detto **aperto**. Ad esempio, se il sistema è costituito da un liquido in ebollizione e l'ambiente dal recipiente che contiene il liquido, dall'atmosfera esterna compreso il vapore e dalla sorgente di calore, nel processo di ebollizione si ha trasformazione di liquido in vapore e quindi passaggio di materia dal sistema all'ambiente; inoltre vi è certamente passaggio di energia dall'ambiente al sistema tramite la sorgente di calore.

Il **sistema** si dice **chiuso** se sono esclusi scambi di materia, ma si hanno solamente *scambi di energia*. Ritornando all'esempio precedente, il liquido è contenuto in un recipiente chiuso, a contatto con la sorgente di calore; il vapore prodotto rimane all'interno del sistema.

Infine il **sistema** è detto **isolato** se non avvengono scambi di energia e di materia con un altro sistema esterno, cioè con l'ambiente. L'**universo termodinamico** formato da un sistema e dal suo ambiente è da considerarsi come un sistema isolato.

Sistemi in cui viene scambiata materia ma non energia non possono esistere, in quanto la materia è essa stessa energia.

Nella nostra trattazione ci occuperemo esclusivamente di sistemi chiusi, ovvero dove avviene solamente scambio di energia.

In termodinamica un sistema viene descritto tramite un numero ridotto di grandezze fisiche macroscopiche direttamente misurabili, dette coordinate o **variabili termodinamiche**, come **volume**, **pressione**, **temperatura** (che definiremo a breve), **massa**, **concentrazione**, **densità**, ecc.

Alcune variabili termodinamiche esprimono una **proprietà globale** del sistema, che dipende in particolare dalle dimensioni o dall'estensione del sistema; tali variabili vengono chiamate **estensive** e sono additive (ad esempio massa e volume).

Altre variabili esprimono invece una proprietà locale, che può variare da punto a punto del sistema; queste sono chiamate **intensive** e non sono additive (ad esempio pressione, temperatura e densità).

Il numero minimo di coordinate termodinamiche necessario per descrivere completamente lo stato di un sistema termodinamico non è fissato a priori, ma dipende dalle caratteristiche chimico-fisiche dei vari sistemi che vengono studiati.

Lo stato di un **gas ideale** (detto anche gas perfetto, ovvero molto rarefatto), ad esempio, è descrivibile tramite tre grandezze, **pressione, volume e temperatura**.

Osserviamo che la definizione di **stato termodinamico** è concettualmente diversa da quella di stato meccanico, per il quale in linea di principio si presuppone la conoscenza di posizione e velocità di ciascuno degli n punti che costituiscono il sistema.

In questi termini un sistema termodinamico non è definibile, visto il grande valore di n . In effetti, se è noto lo stato termodinamico, non è noto in generale quello meccanico, anzi a un dato stato termodinamico, possono corrispondere moltissimi stati meccanici diversi.

Ad esempio per un blocco costituito da un solido cristallino in quiete a una certa temperatura abbiamo che gli ioni che lo costituiscono oscillano intorno alle posizioni di equilibrio, dunque istante per istante la configurazione microscopica è diversa, quindi lo stato meccanico dei componenti è in continua evoluzione. Il sistema però è in quiete, la velocità del suo centro di massa è nulla, la temperatura è costante, lo stato termodinamico non cambia.

Non possiamo dunque determinare lo stato dinamico dei singoli elementi, ma siamo in grado di caratterizzare lo stato termodinamico del sistema complessivo.

Questo esempio mostra come la descrizione termodinamica di un sistema e dei suoi scambi energetici, tramite un numero limitato di grandezze termodinamiche, porta a conclusioni di grande generalità, applicabili a sistemi molto diversi tra loro. Tale descrizione però non può fornire informazioni sulle caratteristiche microscopiche del sistema, che dipendono da un numero molto grande di variabili microscopiche, e che vanno studiate in modo concettualmente diverso. (Tuttavia vedremo come sia possibile, nel caso dei gas ideali, legare le grandezze termodinamiche che caratterizzano il sistema, pressione e temperatura, alle caratteristiche meccaniche che descrivono dinamicamente il sistema, velocità e energia cinetica media delle particelle costituenti il gas).

Equilibrio termodinamico

Si osserva che un sistema termodinamico lasciato libero di evolversi in assenza di azioni esterne (ossia senza interagire con l'ambiente) tende a uno stato di **equilibrio termodinamico** in cui le variabili termodinamiche non variano più nel tempo.

In uno stato di equilibrio i valori delle variabili termodinamiche possono essere determinati e individuano il comportamento di tutto il sistema. All'equilibrio le variabili termodinamiche sono perciò dette anche **variabili di stato**.

L'equilibrio termodinamico è il risultato di tre diversi tipi di equilibrio, che devono essere realizzati contemporaneamente:

- **Equilibrio meccanico**

Inteso come equilibrio di forze e momenti (secondo quanto studiato in meccanica)

- **Equilibrio chimico**

Non avvengono reazioni chimiche o trasferimenti di un componente del sistema entro il sistema esteso

- **Equilibrio termico**

La temperatura è la stessa ovunque

Nella trattazione successiva considereremo il sistema sempre in equilibrio chimico.

Se uno stato è di equilibrio, le condizioni di equilibrio devono essere soddisfatte all'interno del sistema o di ciascuna delle sue parti, nell'interazione tra le parti del sistema e in quella tra sistema e ambiente. Quando c'è equilibrio con l'ambiente, vuol dire che esiste equilibrio tra le forze macroscopiche, qualunque sia la loro natura, agenti dall'esterno sul sistema e quelle sviluppate dal sistema; inoltre la temperatura del sistema, se questo non è isolato termicamente, è uguale alla temperatura dell'ambiente.

In uno stato di equilibrio esistono, in generale, precise relazioni tra le coordinate termodinamiche, dette **equazioni di stato**, per cui non tutte sono variabili indipendenti.

Se, per esempio, le coordinate termodinamiche sono pressione p , volume V e temperatura T , come avviene per una quantità di sostanza omogenea e pura, l'equazione di stato si scrive, in forma implicita, $f(p, V, T) = 0$ o in una qualsiasi delle tre forme esplicite $p = p(V, T)$, $V = V(p, T)$, $T = T(p, V)$. Le variabili indipendenti sono in tal caso due mentre la terza è determinata dal valore che assumono le altre due.

Dati due diversi stati di equilibrio termodinamico di un certo sistema, l'eventuale evoluzione del sistema dal primo al secondo stato si chiama **trasformazione termodinamica del sistema**. Come si vedrà, è proprio durante una trasformazione che il sistema scambia energia con l'ambiente, nelle forme che studieremo, meccanica e termica. Considereremo sempre come stati iniziali e finali di una certa trasformazione degli stati di equilibrio. Invece gli stati intermedi attraverso cui passa il sistema durante l'evoluzione possono essere di equilibrio o di non equilibrio; in questo secondo caso non è detto che si possano determinare tutte le coordinate termodinamiche del sistema.

Ai fini del calcolo si considerano anche **trasformazioni infinitesime**, tra stati molto prossimi, le cui coordinate differiscono di quantità infinitesime, per esempio dp , dV o dT .

Va notato che la termodinamica studia come variano i valori delle variabili termodinamiche durante una trasformazione, ma a differenza di quanto avviene in meccanica il tempo

necessario per effettuare la trasformazione non viene preso in considerazione, e quindi la variabile tempo non compare esplicitamente nelle equazioni.

Vediamo ora di precisare il concetto di equilibrio termico. Si considerino due sistemi A e B , ciascuno in equilibrio termodinamico, con il sistema A alla temperatura T_A e il sistema B alla temperatura T_B . I sistemi si dicono in equilibrio termico tra loro quando hanno la stessa temperatura, $T_A = T_B$: la **temperatura è pertanto l'indice dell'equilibrio termico tra due sistemi**.

È verificato sperimentalmente il **principio dell'equilibrio termico** (detto anche **principio zero della termodinamica**):

se due sistemi A e B sono ciascuno in equilibrio con un terzo sistema C , ovvero $T_A = T_C$ e $T_B = T_C$, allora essi sono in equilibrio termico tra loro $T_A = T_B$

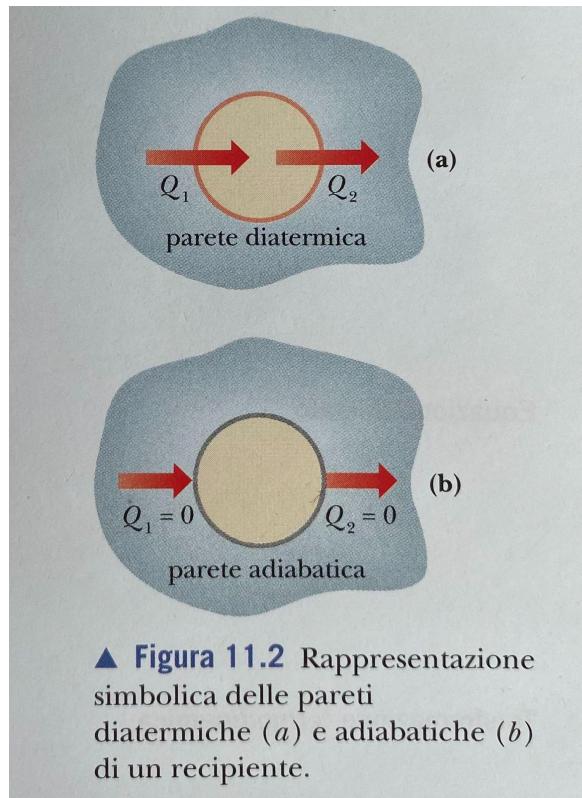
Un metodo possibile per portare due sistemi all'equilibrio termico è quello di tenerli a contatto, tramite una parete. Se viene raggiunto l'equilibrio termico si parla di **parete diatermica**, mentre se non si raggiunge mai l'equilibrio termico, e pertanto le due temperature sono indipendenti, la **parete è detta adiabatica**. Nella realtà la situazione adiabatica (completo isolamento termico) è un caso limite, che può essere realizzato per tempi brevi, ma non in assoluto.

Due sistemi separati da una parete diatermica si dicono anche in **contatto termico** tra loro e inevitabilmente raggiungono l'equilibrio termico. Il contatto termico si può realizzare anche direttamente, senza alcuna parete, come avviene per due corpi solidi a contatto, per un corpo solido immerso in un fluido o per due liquidi non miscibili a contatto; la parete diatermica si rende necessaria quando bisogna contenere il sistema, come avviene nel caso di un gas.

Un sistema è detto adiabatico se è circondato da pareti adiabatiche e quindi non può essere messo in contatto termico con un altro sistema o con l'ambiente. Una parete è sempre necessaria per impedire o ritardare l'equilibrio termico.

Concludendo:

- Una trasformazione che porta all'equilibrio termico avviene con scambio di calore
- Una **parete diatermica** permette il passaggio di calore da un sistema all'altro, è quindi una parete conduttrice di calore
- Una **parete adiabatica** non permette il passaggio di calore, è quindi isolante rispetto allo scambio di calore



▲ **Figura 11.2** Rappresentazione simbolica delle pareti diatermiche (a) e adiabatiche (b) di un recipiente.

Queste precisazioni completano l'esame del ruolo delle pareti tra due sistemi dal punto di vista degli scambi di calore.

Nella pratica l'adiabaticità perfetta non esiste; tutte le sostanze con cui si realizzano pareti adiabatiche permettono un certo scambio di calore. Si ammette che possa essere adiabatica una trasformazione che avviene rapidamente, così che non ci sia tempo per scambi di calore apprezzabili.

Notiamo infine che l'esistenza di equilibrio termico tra due sistemi non presuppone affatto che essi siano anche in equilibrio meccanico, così come l'equilibrio meccanico non comporta anche quello termico: i due tipi di equilibrio sono indipendenti tra loro.

Definizione di temperatura. Termometri

Vediamo ora come si può procedere a una **definizione operativa di temperatura**. Per poterla effettuare devono essere realizzate due condizioni.

Innanzitutto deve esistere una grandezza X che caratterizza un fenomeno fisico e che varia con la temperatura. X si chiama **caratteristica termometrica** e la temperatura è una funzione di X , $\theta(X)$, detta **funzione termometrica**. Il dispositivo in cui avviene il fenomeno e che fornisce il valore della caratteristica termometrica è indicato come **termometro**.

I termometri possono essere:

- **a liquido**
Il fenomeno consiste nella dilatazione termica di un liquido, la caratteristica termica è la lunghezza della colonna di liquido
- **a resistenza**
Il fenomeno consiste nella variazione della resistenza elettrica di un conduttore metallico o di un semiconduttore con la temperatura, la caratteristica termica è la resistenza elettrica
- **a gas a volume costante**
Il fenomeno consiste nella variazione della pressione con la temperatura, la caratteristica termica è la pressione
- **a termocoppia**
Il fenomeno consiste nella forza elettromotrice che compare in un circuito formato da due fili diversi, con una giunzione a una temperatura di riferimento e l'altra a diversa temperatura, la caratteristica termica è la forza elettromotrice

In secondo luogo deve esistere un sistema, in uno stato di equilibrio, definibile con precisione e riproducibile con facilità, cui viene attribuito un valore arbitrario di temperatura, detto **punto fisso**.

Il punto fisso campione (deciso nel 1954 dalla Conferenza dei Pesi e Misure) è il **punto triplo dell'acqua**, ovvero quel particolare stato in cui ghiaccio, acqua e vapore d'acqua saturo sono in equilibrio. Al punto triplo dell'acqua corrisponde la temperatura di 273.16 K , dove il simbolo K indica l'unità di misura della temperatura, il **kelvin**. Storicamente infatti il *kelvin* è stato definito come $\frac{1}{273.16}$ **della temperatura del punto triplo dell'acqua**. Tale definizione è stata recentemente rivista, operativamente comunque è possibile utilizzare la definizione data sopra.

Per arrivare ad esprimere numericamente la temperatura stabiliamo che la forma della funzione $\theta(X)$ sia $\theta(X) = \alpha \cdot X$, con α costante. La scelta della funzione $\theta(X)$ è arbitraria, e quindi conviene che sia la più semplice possibile, in assenza di motivi contrari. La costante α viene determinata utilizzando il valore X_{pt} che il termometro fornisce al punto triplo dell'acqua e imponendo che, per definizione,

$$\theta(X_{pt}) = \alpha \cdot X_{pt} = 273.16$$

da cui $\alpha = \frac{273.16}{X_{pt}}$, valore valido per quel termometro.

Il sistema, di cui vogliamo misurare la temperatura, viene messo a contatto termico con il termometro che, all'equilibrio termico, fornisce il valore X .

Ne segue che la temperatura T in kelvin del sistema, espressa dal valore della funzione $\theta(X) = \alpha \cdot X$, si scrive

$$T = 273.16 \frac{X}{X_{pt}}$$

Questa è la formula fondamentale per ogni termometro e fornisce la **temperatura empirica** di quel termometro.

Rivediamo in breve la procedura seguita:

- si tara il termometro mettendolo in contatto termico con una cella al punto triplo dell'acqua ottenendo X_{pt}
- si mette il termometro in contatto termico con il sistema di cui si vuole misurare la temperatura e si determina X
- si calcola T con $T = 273.16 \frac{X}{X_{pt}}$

Nella pratica il risultato della misura viene fornito direttamente in Kelvin.

Si usa il termine **temperatura empirica** in quanto, sperimentalmente, si constata che termometri di tipo diverso, o anche due diversi termometri dello stesso tipo, danno sempre letture diverse quando sono in equilibrio termico con lo stesso stato di un certo sistema, pur dando per costruzione tutti la stessa temperatura al punto triplo dell'acqua. Vedremo come si supera questo problema con l'introduzione della **temperatura termodinamica assoluta**.

La **scala** che viene più comunemente usata nelle normali misure di temperatura è quella **Celsius** (detta anche **centigrada**), in cui la temperatura del punto triplo dell'acqua vale 0.01 gradi Celsius (simbolo $^{\circ}C$). Pertanto lo zero della scala Celsius è a 273.15 K e corrisponde alla temperatura di fusione del ghiaccio a pressione atmosferica. Il valore di una differenza di temperatura è lo stesso in gradi Celsius o in kelvin e pertanto la formula di conversione in kelvin $T(K)$ al valore in gradi Celsius $t(^{\circ}C)$ è semplicemente

$$t(^{\circ}C) = T(K) - 273.15$$

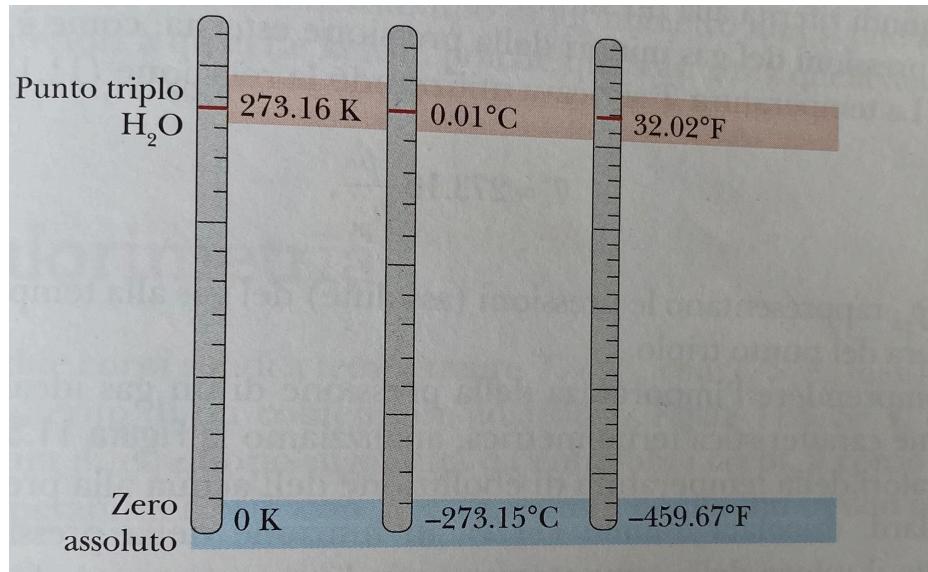
Nei paesi anglosassoni viene utilizzata un'altra scala di temperatura, la **scala Fahrenheit**, che è così definita rispetto alla temperatura espressa in kelvin:

$$t(^{\circ}F) = \frac{9}{5}T(K) - 459.67$$

Il legame tra scala Fahrenheit e scala Celsius è pertanto:

$$t(^{\circ}F) = \frac{9}{5}T(^{\circ}C) + 32 \quad t(^{\circ}C) = \frac{5}{9}[t(^{\circ}F) - 32]$$

Ecco le scale termometriche Kelvin, Celsius e Fahrenheit.

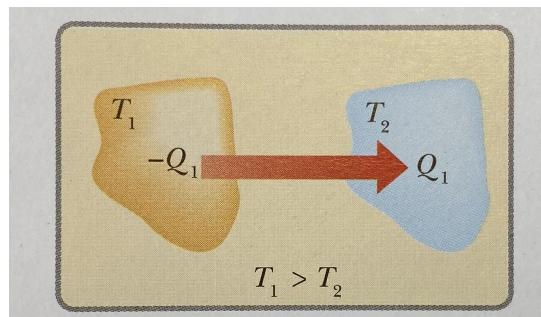


Nella scala Fahrenheit il punto di fusione del ghiaccio (0°C) corrisponde a 32°F e il punto di ebollizione dell'acqua (100°C) a 212°F ; la temperatura ambiente di 20°C vale 68°F , la temperatura corporea di 37°C vale 98.6°F .

Quindi, mentre il grado Celsius e il kelvin corrispondono allo stesso intervallo di temperatura, il grado Fahrenheit vale i $\frac{5}{9}$ dei precedenti.

Calorimetria

Consideriamo due corpi solidi a temperature T_1 e T_2 , con $T_1 > T_2$, messi in contatto termico all'interno di un contenitore adiabatico.



▲ **Figura 11.6** Scambio di calore tra due corpi a temperatura diversa.

Se T_e è il valore della temperatura di equilibrio raggiunta da entrambi i corpi, il corpo più caldo passa dalla temperatura T_1 a T_e con $T_e < T_1$, mentre quello più freddo passa da T_2 a T_e , con $T_e > T_2$.

Il cambiamento di temperatura è dovuto al trasferimento di energia tra i due corpi. La reale natura di questa energia sarà chiarita successivamente nella Teoria Cinetica dei Gas, ma storicamente il processo fu attribuito al passaggio di una sorta di “fluido”, detto calore, e indicato con il simbolo Q , tra i due corpi. Sebbene non corretta microscopicamente, questa descrizione conduce a una corretta analisi quantitativa dei fenomeni termici, motivo per cui il concetto di calore è ancora oggi in uso.

La quantità di calore dQ che è necessario fornire a un corpo di massa m per variarne la temperatura di dT è definita dalla

$$dQ = m c dT$$

dove c è una grandezza caratteristica della sostanza di cui è costituito il corpo, in generale funzione a sua volta della temperatura, chiamata **calore specifico**, che è una grandezza intensiva (dipendente da vari fattori come la pressione, dalla salinità, etc.).

Da questa equazione si deduce che

$$c = \frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}$$

il calore specifico rappresenta il calore che occorre scambiare con l'unità di massa di una data sostanza, alla temperatura T , per farne variare la temperatura di 1 K (ovvero di 1 °C)

Il prodotto $C = m c$, detto **capacità termica** del corpo, rappresenta **il calore necessario per far variare di 1 K la temperatura del corpo** di massa m , ed è una grandezza estensiva (dipendente dalla massa appunto).

Nel caso in cui un corpo sia costituito da più parti di diversi materiali, si può definire la capacità termica come la somma delle capacità termiche dei vari corpi:

$$C = \sum_{i=1}^n C_i = \sum_{i=1}^n m_i c_i$$

L'equazione $dQ = m c dT$ mostra che il calore scambiato da un corpo può essere positivo (assorbito) o negativo (ceduto), a seconda che in seguito a tale scambio il corpo aumenti o diminuisca la sua temperatura.

Integrando, la quantità di calore Q che è necessario fornire a un corpo di massa m per portarne la temperatura da un valore iniziale T_{in} a un valore finale T_{fin} è

$$Q = \int dQ = m \int_{T_{in}}^{T_{fin}} c(T) dT$$

Nel caso, fortunatamente abbastanza frequente, che il calore specifico nell'intervallo di temperatura interessato si possa considerare sostanzialmente costante, l'equazione si semplifica

$$Q = mc(T_{fin} - T_{in})$$

Ritornando al caso dei due corpi in contatto termico, essi scambieranno rispettivamente le quantità di calore Q_1 e Q_2 . Essendo il recipiente adiabatico non c'è scambio di calore con l'esterno e quindi $Q_{TOT} = Q_1 + Q_2 = 0$. Di conseguenza $Q_1 = -Q_2$: **il calore ceduto dal primo corpo, il corpo più caldo, è eguale in modulo a quello assorbito dal secondo corpo, più freddo.**

$$\text{Utilizzando } Q = mc(T_{fin} - T_{in}) \\ m_1 c_1 (T_e - T_1) = -m_2 c_2 (T_e - T_2)$$

da cui, noti i calori specifici e date le masse e le temperature iniziali, si può calcolare la temperatura finale di equilibrio T_e :

$$T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} = \frac{c_1 T_1 + c_2 T_2}{c_1 + c_2}$$

che risulta essere la media pesata delle temperature dei due corpi, con il "peso" costituito dalla capacità termiche dei due corpi.

È evidente come questa equazione sia facilmente generalizzabile al caso in cui i corpi posti all'interno del recipiente, e che raggiungono l'equilibrio termico, siano un numero n qualsiasi.

Risultati analoghi possono essere stabiliti per i gas, nei quali però la situazione è più complessa. Infatti, come vedremo, si hanno diversi calori specifici a seconda delle condizioni in cui avviene lo scambio di calore, per esempio a volume o a pressione costante. A rigore la stessa distinzione andrebbe fatta per i solidi e i liquidi, però le variazioni di volume che si verificano a seguito di una variazione di temperatura sono così piccole da permettere di trascurare, in prima approssimazione, le differenze tra processi a pressione costante e a volume costante.

Ritornando alla definizione di calore specifico $c = \frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}$, in molte situazioni si preferisce fare riferimento al calore scambiato da un certo numero n di moli di una sostanza e pertanto si definisce anche il **calore specifico molare**

$$c = \frac{1}{n} \cdot \frac{dQ}{dT}$$

il calore specifico molare rappresenta il calore che occorre scambiare con una mole di una data sostanza, alla temperatura T , per farne variare la temperatura di 1 K (ovvero di 1 °C)

In questa situazione la quantità di calore diventa rispettivamente

$$dQ = n c dT \\ Q = nc(T_{fin} - T_{in}) \\ Q = n \int_{T_{in}}^{T_{fin}} c(T) dT$$

Ricordiamo che una **mole** di sostanza è la quantità di materia di quella data sostanza che contiene $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ entità elementari (atomi o molecole), essendo N_A il numero di Avogadro. Una mole non corrisponde quindi sempre alla stessa massa, bensì a un numero di grammi eguale alla massa molecolare della sostanza stessa.

Dalla definizione di mole risulta che, detta A la massa molare di una sostanza, il numero di moli contenuto in una massa M di quella sostanza è

$$n = \frac{M}{A} = \frac{M}{N_A m}$$

dove m è la massa di una molecola.

È infine necessaria una precisazione riguardo alle definizioni di calore specifico.

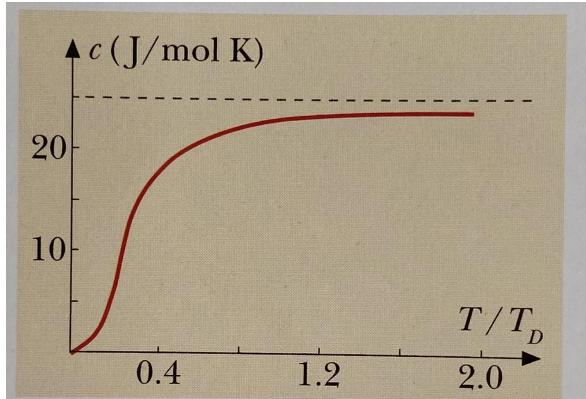
In generale, il calore scambiato dipende dalla trasformazione e quindi sono possibili casi in cui per una stessa sostanza si possano definire diversi calori specifici (abbiamo citato l'esempio dei gas).

Può anche avvenire che la definizione stessa di calore specifico perda significato. Ad esempio vedremo il caso di una trasformazione (il cambiamento di fase) in cui c'è scambio di calore anche se la temperatura è costante. In tal caso la nostra definizione darebbe un calore specifico indefinito.

Ecco i valori dei calori specifici di alcune sostanze solide e liquide:

| Sostanza | Temperatura | | Calore specifico (J/kg K) |
|--------------------|-------------|------|------------------------------|
| | (K) | (°C) | |
| acqua | 288 | 15 | 4186.8 |
| alcool etilico | 293 | 20 | 2240.0 |
| alluminio | 293 | 20 | 896.0 |
| argento | 298 | 25 | 234.0 |
| ferro | 293 | 20 | 448.0 |
| ghiaccio | 273 | 0 | 2051.5 |
| mattone | 293 | 20 | 837.0 |
| oro | 298 | 25 | 129.0 |
| piombo | 14 | -259 | 29.3 |
| piombo | 173 | -100 | 117.2 |
| piombo | 293 | 20 | 129.8 |
| rame | 298 | 25 | 387.0 |
| silicio | 298 | 25 | 703.0 |
| vetro per finestre | 293 | 20 | 628.0 |

In tabella abbiamo riportato il calore specifico del piombo in un ampio intervallo di temperature, per farne notare la grande variazione. D'altra parte in intervalli di temperatura non troppo grandi e a temperature non troppo basse le variazioni sono piccole. Per esempio, il calore specifico dell'acqua tra 0 °C e 100 °C presenta una differenza percentuale tra valore massimo e valore minimo che è inferiore all'1%.



▲ **Figura 11.8** Calore specifico molare di un solido in funzione della temperatura.

Nella figura è riportato l'andamento tipico del calore specifico molare delle sostanze solide in funzione della temperatura, misurata in unità di T_D , la **temperatura di Debye**, parametro caratteristico del tipo di solido.

Si noti che per $\frac{T}{T_D} > 1$ il calore specifico molare tende a un valore costante, eguale per tutte le sostanze solide, pari a circa $25 \frac{J}{mol K}$, **legge di Dulong-Petit**.

| TABELLA 11.5 Temperatura di Debye | |
|-----------------------------------|-----------|
| Sostanza | T_D (K) |
| alluminio | 398 |
| argento | 215 |
| diamante | 1860 |
| ferro | 420 |
| nickel | 370 |
| rame | 315 |
| piombo | 80 |
| sale NaCl | 280 |
| zinco | 250 |

In tabella sono riportati i valori della temperatura di Debye per alcuni solidi. Per valori bassi di T_D il calore specifico può essere assunto costante anche alla temperatura ambiente.

Processi isotermi. Cambiamenti di fase

Nel precedente paragrafo abbiamo visto come uno scambio di calore determini una variazione

di temperatura del corpo secondo $Q = \int dQ = m \int_{T_{in}}^{T_{fin}} c(T) dT$.

Vi sono però processi in cui, pur in presenza di uno scambio di calore, la temperatura non cambia. Da $c = \frac{1}{m} \cdot \frac{dQ}{dT}$ si vede subito che in tal caso il concetto di calore specifico perde di

significato e dunque $Q = \int dQ = m \int_{T_{in}}^{T_{fin}} c(T) dT$ è inutilizzabile.

Tra i processi isotermi in cui avviene scambio di calore analizzeremo ora i **cambiamenti di fase** e gli scambi di calore che coinvolgono le **sorgenti di calore**.

Sono detti **cambiamenti di fase** i passaggi di una sostanza da una fase (stato di aggregazione) all'altra, per esempio dalla fase solida alla fase liquida o dalla fase liquida a quella di vapore.

- I materiali allo **stato solido** hanno forma e volume proprio. Nei solidi, le molecole sono reciprocamente legate da forze intense e occupano posizioni mediamente fisse una rispetto all'altra.
- I materiali allo **stato liquido** hanno anch'essi volume proprio, ma assumono la forma del recipiente che li contiene. Nei liquidi le molecole sono legate da forze meno intense, per cui sono libere di scorrere l'una contro l'altra.
- I materiali allo **stato gassoso** non hanno volume proprio e, liberi da ostacoli, tendono ad espandersi occupando tutto lo spazio disponibile. Nei gas, infatti, le forze di attrazione tra le singole molecole sono deboli.

La terminologia dei vari cambiamenti di fase è la seguente:

TABELLA 11.6 Cambiamenti di fase

| Cambiamento di fase | Terminologia |
|------------------------------------|---------------------------|
| solido \Rightarrow liquido | fusione (Liquefazione) |
| liquido \Rightarrow solido | solidificazione |
| liquido \Rightarrow evaporazione | evaporazione |
| evaporazione \Rightarrow liquido | condensazione |
| solido \Rightarrow vapore | sublimazione |
| vapore \Rightarrow solido | brinamento (sublimazione) |

Alcuni cambiamenti di fase, come fusione e solidificazione, che avvengono a una determinata temperatura, costante durante il processo, costituiscono un punto di riferimento (punto fisso) per le scale termometriche, purché siano ben precise le condizioni esterne (soprattutto la pressione). L'evaporazione di un liquido ha luogo invece a qualsiasi temperatura; essa assume un carattere molto particolare solo quando la pressione massima del vapore egualgia la pressione esterna: si ha in tal caso l'**ebollizione** che avviene a una ben determinata temperatura, dipendente dalla pressione esterna.

L'evaporazione è un processo che avviene solo alla superficie dell'acqua, è tanto più veloce quanto maggiore è la temperatura e si arresta soltanto quando tutta l'acqua è evaporata. Per ebollizione si intende il passaggio rapido e tumultuoso dell'acqua dallo stato liquido allo stato di vapore; l'ebollizione dell'acqua (alla pressione ambiente di 1 *atm*) avviene alla temperatura di 100 °C.

A differenza dell'evaporazione che è un fenomeno limitato alle sole molecole distribuite sulla superficie libera del liquido, l'ebollizione interessa quindi tutta la massa del liquido ed è caratterizzata dal formarsi di bolle, che, risalendo in superficie, sfuggono attraverso essa.

L'evaporazione invece avviene per temperature inferiori a quella di ebollizione (che, come detto, è di 100°C) e interessa soltanto le molecole distribuite sulla superficie libera del liquido.

Supponiamo di riscaldare dell'acqua: inizialmente l'acqua evapora e l'evaporazione è sempre più veloce man mano che aumentiamo la temperatura.

Quando alla pressione ambiente raggiungiamo i 100°C l'acqua inizia il processo di ebollizione con la formazione di bolle di vapore anche all'interno della massa liquida.

Nella definizione della scala Celsius si era utilizzato il punto fisso fornito dal ghiaccio fondente a pressione atmosferica, posto eguale a 0 °C, e quello corrispondente all'ebollizione dell'acqua a pressione atmosferica, posto eguale a 100 °C.

I cambiamenti di fase sono accompagnati da scambi di calore e si osserva che, per unità di massa, si tratta di quantità ben definite, dette **calori latenti** λ . Pertanto il calore richiesto per il cambiamento di fase della massa m di una sostanza pura è dato da

$$Q = m \lambda$$

Il calore Q cambia segno per cambiamenti di fase di tipo opposto: ad esempio Q deve essere ceduto alla sostanza per fare avvenire la **fusione** o sottratto alla sostanza per produrre la **solidificazione**.

Ecco alcuni valori dei calori latenti di alcune sostanze per diversi tipi di cambiamento di fase a pressione atmosferica. L'unità di misura è $\frac{J}{Kg}$.

TABELLA 11.7 Calori latenti

| Sostanza | Cambiamento di fase | Temperatura (K) | Calore latente (J/kg) |
|--------------------|---------------------|-----------------|-----------------------|
| acqua | fusione | 273 | $3.3 \cdot 10^5$ |
| acqua | ebollizione | 373 | $22.6 \cdot 10^5$ |
| alcool etilico | fusione | 159 | $10.4 \cdot 10^4$ |
| alcool etilico | ebollizione | 351 | $85.4 \cdot 10^4$ |
| alluminio | fusione | 933 | $9.0 \cdot 10^4$ |
| alluminio | ebollizione | 2723 | $11.4 \cdot 10^6$ |
| anidride carbonica | sublimazione | 213 | $3.7 \cdot 10^5$ |
| azoto | fusione | 63.3 | $25.5 \cdot 10^3$ |
| elio | fusione | 3.5 | $5.2 \cdot 10^3$ |
| elio | ebollizione | 4.2 | $20.9 \cdot 10^3$ |
| ferro | fusione | 1803 | $2.1 \cdot 10^5$ |
| oro | fusione | 1336 | $64.5 \cdot 10^3$ |
| ossigeno | fusione | 54.4 | $13.8 \cdot 10^3$ |
| piombo | fusione | 600 | $24.5 \cdot 10^3$ |
| piombo | ebollizione | 2023 | $87.1 \cdot 10^4$ |

segue

TABELLA 11.7 continua

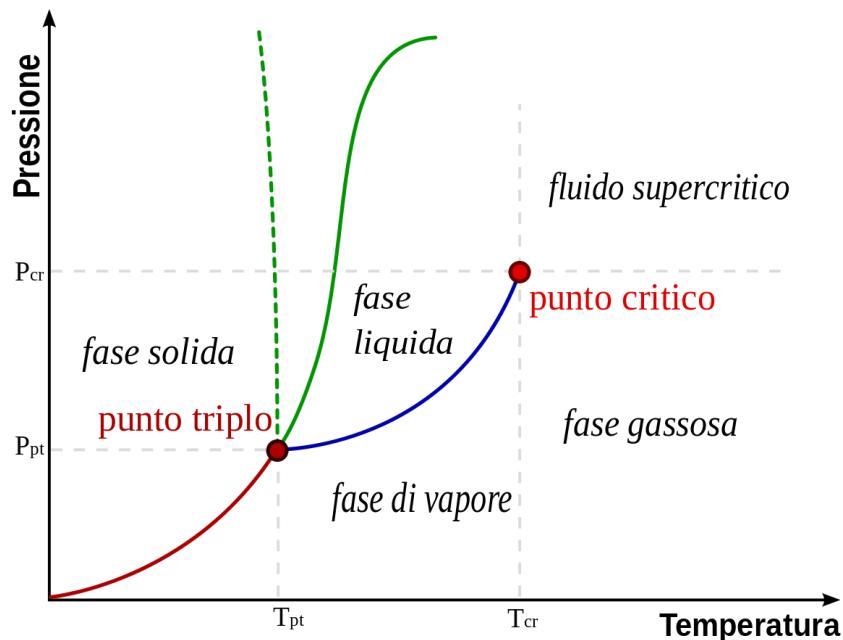
| Sostanza | Cambiamento di fase | Temperatura (K) | Calore latente (J/kg) |
|----------|---------------------|-----------------|-----------------------|
| platino | fusione | 2046 | $1.1 \cdot 10^5$ |
| rame | fusione | 1356 | $13.4 \cdot 10^4$ |
| rame | ebollizione | 1460 | $506.5 \cdot 10^4$ |
| stagno | fusione | 505 | $6.0 \cdot 10^4$ |
| zolfo | fusione | 392 | $38.1 \cdot 10^3$ |

Nel caso dell'evaporazione il calore latente non ha un valore fisso, ma è una funzione decrescente della temperatura e si annulla alla temperatura critica.

Una caratteristica molto importante dei cambiamenti di fase è di essere, in opportune condizioni, trasformazioni praticamente reversibili.

Il **punto triplo** è un particolare stato termodinamico determinato dai valori di temperatura e pressione in cui coesistono, in condizioni di equilibrio, tre fasi di aggregazione di una sostanza: nel caso più comune, quelle solida, liquida e aeriforme.

Ecco il grafico del punto triplo dell'acqua:



Prende il nome di **punto critico** la coppia di valori temperatura pressione (T, P) al di sopra dei quali la sostanza si trova in uno stato non ben definito, nel quale non è più possibile rilevare una distinzione netta tra gas e liquido.

I valori sono

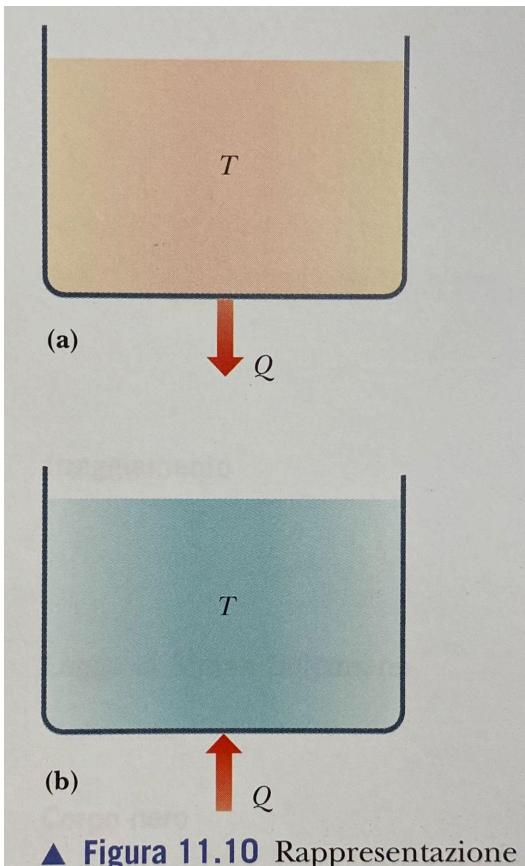
$$\begin{aligned} p_{pt} &= 0,6117 \text{ kPa} & T_{pt} &= 273,16 \text{ K} = 0,01^\circ\text{C} \\ p_{cr} &= 221192 \text{ kPa} & T_{cr} &= 647,3 \text{ K} = 374,15^\circ\text{C} \end{aligned}$$

Abbiamo visto in qualche esempio come lo scambio di calore avvenga talvolta con sistemi a temperatura costante. Nello studio delle macchine termiche troveremo che esse scambiano calore con un certo numero di corpi a temperatura costante.

Definiamo come **sorgente di calore o serbatoio un corpo con capacità termica praticamente infinita** e quindi con la proprietà di poter scambiare calore restando a temperatura costante.

Una grande massa d'acqua o d'aria può essere considerata una sorgente di calore. Invece un corpo con massa non elevata può essere considerata una sorgente solo per un tempo limitato ed è necessario fornire e sottrarre energia per mantenerlo a temperatura costante. Esempi pratici sono i forni o gli ambienti frigoriferi.

La simbologia usata per le sorgenti di calore è la seguente



▲ **Figura 11.10** Rappresentazione simbolica di un serbatoio che eroga calore (a) e assorbe calore (b).

Nel caso a) il calore scambiato è positivo per il sistema e negativo per la sorgente a temperatura T ; nel caso b) Q è negativo per il sistema e positivo per la sorgente.

Quando un sistema è a contatto con una sorgente, se la differenza di temperatura tra sistema e sorgente è infinitesima c'è l'equilibrio termico durante lo scambio. Se invece la differenza di temperatura è finita non può esserci equilibrio termico: questo viene raggiunto solo se si mantiene il contatto termico abbastanza a lungo, fino a che il sistema raggiunge la temperatura T della sorgente e lo scambio termico cessa.

Trasmissione del calore

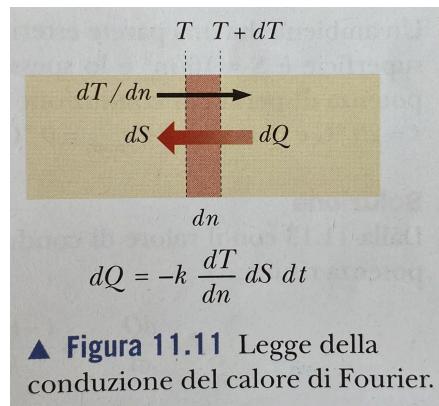
Lo scambio e il trasporto di calore entro un sistema possono avvenire tramite tre meccanismi distinti, che nel loro complesso sono indicati come trasmissione del calore: **conduzione**, **convezione** e **irraggiamento termici**. I tre meccanismi operano sempre in presenza di una differenza di temperatura tra sistema e ambiente o all'interno dello stesso sistema.

Consideriamo un corpo esteso in cui la temperatura non sia uniforme e tracciamo le superfici isoterme, cioè il luogo dei punti in cui la funzione $T(x, y, z)$ assume un valore costante, per esempio T_1 sulla superficie isoterma S_1 , T_2 su S_2 , ecc.

La legge fenomenologica che regola la **conduzione del calore** è la **legge di Fourier**, formulata nel 1815. Se dS è un elemento di una superficie isoterma, indicando con n l'asse perpendicolare a essa, il calore che fluisce attraverso dS nel tempo dt è dato da

$$dQ = -k \frac{dT}{dn} dS dt$$

dove la grandezza k , detta **conducibilità** o **conduttività termica**, è tipica del materiale ed è in generale funzione della temperatura (le unità di misura sono $\frac{J}{m s K}$ o $\frac{Cal}{m s K}$).



▲ **Figura 11.11** Legge della conduzione del calore di Fourier.

Il segno negativo indica che il flusso di calore avviene nel senso in cui la temperatura diminuisce, cioè nel verso opposto al gradiente di temperatura, dalla regione a temperatura maggiore a quella a temperatura minore.

L'esistenza di un gradiente di temperatura in un corpo, ovvero la mancanza di equilibrio termico, indica che c'è una trasmissione di calore attraverso il corpo, regolata dalla legge di Fourier.

La conducibilità termica varia da sostanza a sostanza anche di diversi ordini di grandezza, ecco riportate le costanti con anche le temperature a cui si riferiscono i vari valori:

TABELLA 11.8 Conducibilità termica

| | $T(K)$ | $k(J/m s K)$ | | $T(K)$ | $k(J/m s K)$ |
|--------------------|--------|--------------|----------------|--------|--------------|
| Metalli | | | | | |
| alluminio | 273 | 201.0 | aria | 293 | 0.023 |
| argento | 273 | 418.7 | azoto | 293 | 0.023 |
| ferro | 273 | 50.2 | elio | 293 | 0.14 |
| oro | 300 | 310.0 | idrogeno | 293 | 0.17 |
| piombo | 300 | 35.0 | ossigeno | 293 | 0.024 |
| rame | 273 | 387.4 | | | |
| stagno | 300 | 61.0 | Liquidi | | |
| | | | acqua | 300 | 0.59 |
| | | | alcool etilico | 300 | 0.18 |
| Gas | | | glicerina | 290 | 2.7 |
| anidride carbonica | 273 | 0.13 | mercurio | 300 | 7.9 |

segue

TABELLA 11.8 *continua*

| | $T(K)$ | $k(J/m s K)$ | | $T(K)$ | $k(J/m s K)$ |
|--------------------|--------|---------------------|---------------------|--------|---------------------|
| Dielettrici | | | | | |
| amianto | 293 | $8.0 \cdot 10^{-2}$ | lana di roccia | 300 | $4.2 \cdot 10^{-2}$ |
| cemento | 293 | $8.0 \cdot 10^{-1}$ | legno di larice | 293 | $3.7 \cdot 10^{-1}$ |
| diamante puro | 300 | $2.0 \cdot 10^3$ | mattone | 293 | $6.3 \cdot 10^{-1}$ |
| ghiaccio | 273 | 2.1 | polistirolo espanso | 300 | $4.0 \cdot 10^{-2}$ |
| gomma | 293 | $2.0 \cdot 10^{-1}$ | sughero | 300 | $4.0 \cdot 10^{-2}$ |
| | | | vetro | 293 | $8.4 \cdot 10^{-1}$ |

I metalli sono buoni conduttori termici; i gas e i dielettrici, eccetto il diamante, sono invece cattivi conduttori termici; i liquidi invece sono in una situazione intermedia.

La conducibilità termica ha una diversa dipendenza dalla temperatura per le varie sostanze. Nei gas semplici k cresce debolmente con la temperatura, in proporzione alla radice quadrata della stessa. Anche nei liquidi e nei dielettrici non vi è una notevole variazione con la temperatura. Nei metalli puri la conducibilità presenta sempre un massimo a bassa temperatura, che è due o tre ordini di grandezza maggiore del valore a temperatura ambiente. Il rame, per esempio, ha un massimo nella conducibilità termica a circa 20 K , con un valore di $2 \cdot 10^4 \frac{J}{m s K}$ da confrontare con $3.9 \cdot 10^2 \frac{J}{m s K}$ a temperatura ambiente; a 2 K il valore è di $4 \cdot 10^3 \frac{J}{m s K}$.

La conduzione termica è importante nei solidi metallici; essa avviene anche nei fluidi, però le conducibilità termiche sono piuttosto piccole, come è evidente dai dati della tabella. Inoltre la conduzione nei fluidi è difficile da osservare perché in essi si manifesta anche un altro fenomeno di trasmissione del calore, la **convezione**, che descriviamo qualitativamente.

Se si riscalda una massa fluida, quella parte più vicina alla sorgente di calore assume una temperatura maggiore e diminuisce di densità, dilatandosi. Viene così alterato l'equilibrio statico nel fluido, poiché gli elementi di fluido più caldi risentono, dalle parti di fluido circostante più fredde, di una spinta di Archimede maggiore del loro peso. Ciò dà origine a **correnti ascensionali**, dette di **convezione**, che trasportano in alto gli elementi di fluido sovrastanti più freddi e ciò permette a elementi con temperatura minore di avvicinarsi a loro volta alla sorgente di calore. Un processo del tutto analogo avviene naturalmente se la massa fluida viene raffreddata ponendola a contatto con una sorgente a temperatura inferiore.

La trasmissione di calore per convezione avviene quindi, a differenza della conduzione, con spostamenti di materia, tramite correnti convettive. Questo migliora notevolmente l'efficienza dello scambio termico, mantenendo a contatto con la sorgente gli elementi di fluido con maggiore differenza di temperatura con la sorgente.

La convezione è responsabile del movimento delle masse d'aria nell'atmosfera o delle correnti marine, con effetti sulle condizioni climatiche e metereologiche.

Un corpo a temperatura T **irraggia**, ossia emette, energia sotto forma di onde elettromagnetiche, che si propagano nello spazio circostante, anche se vuoto. Il **potere emissivo del corpo** ε , che ha il significato di energia emessa per unità di tempo e per unità di superficie, è dato dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$\varepsilon = \sigma e T^4$$

dove $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{J}{m^2 s K^4}$ è una costante universale ed e una grandezza, detta **emissività**,

che può variare tra 0 e 1, dipendendo dalle proprietà della superficie. Se $e = 1$ la superficie è detta **superficie nera, corpo nero**, e presenta, a parità di temperatura, il massimo potere emissivo.

Contemporaneamente il corpo assorbe una parte dell'energia elettromagnetica emessa da altri corpi e che lo colpisce; in particolare una superficie nera assorbe tutta l'energia che incide su di essa.

Tramite questi fenomeni la temperatura di un corpo aumenta o diminuisce a seconda del bilancio tra energia irradiata e assorbita; se il bilancio è in parità la temperatura resta costante, il corpo è in equilibrio con l'ambiente circostante. Naturalmente l'equilibrio può essere mantenuto anche fornendo o sottraendo energia con altri mezzi, per compensare l'irraggiamento.

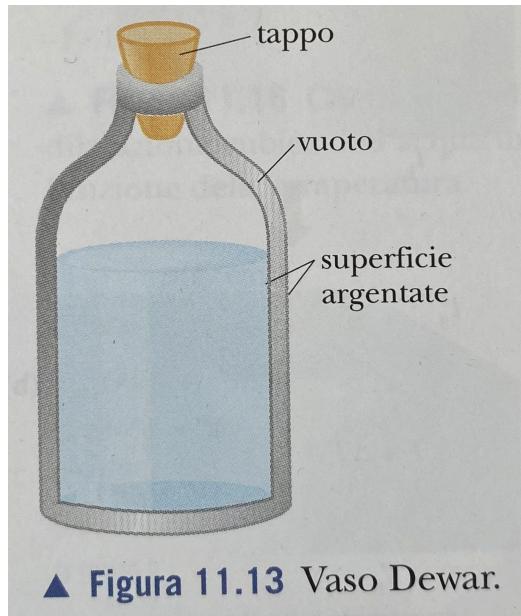
È attraverso il meccanismo dell'irraggiamento che il sole trasmette energia alla superficie terrestre, nella misura di $1.37 \cdot 10^3 \frac{W}{m^2}$.

Malgrado gli effetti termici descritti siano equivalenti a quelli dovuti a scambi di calore, in realtà è improprio parlare di trasmissione del calore per irraggiamento, se per calore intendiamo un modo di trasmissione di energia legato a fenomeni meccanici microscopici, ma non all'emissione e all'assorbimento di onde elettromagnetiche. In effetti, nel caso dell'irraggiamento l'energia è **trasportata** nello spazio dalle onde elettromagnetiche e **trasformata** in calore all'interno del corpo considerato.

Vediamo in base ai vari effetti studiati come è possibile realizzare una parete adiabatica. Se lo scopo è quello di limitare lo scambio di calore in presenza di piccole differenze di temperatura è sufficiente una opportuna combinazione di materiali isolanti, cioè materiali a bassa conducibilità termica; questa tecnica è usata, per esempio, nelle pareti dei comuni frigoriferi.

Se invece si vuole ridurre al massimo lo scambio di calore, come è necessario per conservare a lungo in un contenitore un liquido criogenico (ad esempio azoto a 70 K o idrogeno a 20 K) oppure per studiare i fenomeni chimico-fisici che avvengono a bassissime temperature, bisogna innanzitutto impedire conduzione e convezione. Si utilizza allo scopo un contenitore detto **vaso Dewar**, dal nome del suo inventore, costituito da due pareti isolanti, per esempio di vetro, tra le quali è fatto il vuoto: in questo modo si minimizza la trasmissione di calore per conduzione e convezione nell'intercapedine. Resta la possibilità di trasmissione di energia per irraggiamento, anche se piccola a basse temperature, secondo $\varepsilon = \sigma e T^4$: per questa ragione l'interno

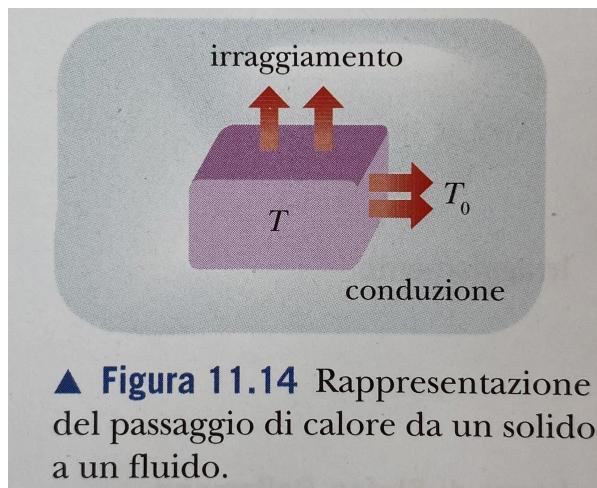
dell'intercapedine è argentato, per ridurre il potere emissivo (che è nullo per una parete perfettamente riflettente).



▲ Figura 11.13 Vaso Dewar.

Si possono realizzare contenitori termicamente isolanti a basso costo inserendo nell'intercapedine tra le due pareti un materiale solido a bassa conducibilità termica (per esempio polistirolo) che minimizza conduzione e convezione, anche se con meno efficacia del vuoto usato nel vaso Dewar.

La **trasmissione di calore da un solido a un fluido** è molto comune nella pratica; avviene per esempio nel riscaldamento di un locale tramite i termosifoni. Consideriamo un solido alla temperatura T , con una superficie pari a S , mentre il fluido si trova, nei punti non prossimi al solido, alla temperatura $T_0 < T$. Il fenomeno è complesso perché avvengono sia convezione che conduzione e irraggiamento.



▲ Figura 11.14 Rappresentazione del passaggio di calore da un solido a un fluido.

Tuttavia, in prima approssimazione, se $\Delta T = T - T_0$ non è molto grande, il fenomeno può essere descritto con una **legge** molto semplice, scoperta da **Newton**: il modulo del calore scambiato nel tempo t , ceduto dal solido e assorbito dal fluido, è dato da

$$Q = h(T - T_0)S t$$

La costante h è detta **conducibilità termica esterna**; per un filo caldo (perchè percorso da corrente elettrica) immerso in aria $h = 10 \frac{J}{m^2 s K}$

Dilatazione termica di solidi e liquidi

Il volume di un corpo, a pressione costante, cambia (e in genere aumenta) al crescere della temperatura. Il fenomeno prende il nome di **dilatazione termica**.

Tale effetto riveste particolare importanza nella pratica: di esso bisogna tener conto nella costruzione di binari ferroviari, di ponti e di edifici, per evitare che la dilatazione, se non compensata, porti a deformazioni o a rotture. Molti termometri pratici funzionano basandosi sulla dilatazione termica di una colonna di liquido e numerosi servomeccanismi di controllo della temperatura sfruttano le variazioni di dimensioni di opportuni sensori.

Per variazioni di temperatura ΔT abbastanza piccole la variazione Δl della lunghezza l di una delle dimensioni del corpo risulta proporzionale a ΔT , se la pressione è costante:

$$\Delta l = \lambda l \Delta T \text{ ovvero } l + \Delta l = l(1 + \lambda \Delta T)$$

λ , **coefficiente di dilatazione lineare**, è caratteristico del materiale di cui è composto il corpo ed è in generale funzione della temperatura. Dalla relazione precedente abbiamo

$$\lambda = \frac{1}{l} \frac{\Delta l}{\Delta T}$$

e si vede che λ esprime la variazione relativa di lunghezza per variazione unitaria di temperatura; l'unità di misura è $\frac{1}{K}$.

A rigore $\lambda = \frac{1}{l} \frac{\Delta l}{\Delta T}$ dà il coefficiente di dilatazione medio nell'intervallo ΔT . Il valore reale si calcola, come sempre, tramite la derivata

$$\lambda = \frac{1}{l} \frac{dl}{dT}$$

Nella determinazione della variazione del volume di un corpo al variare della temperatura dobbiamo distinguere tra **corpi isotropi** per i quali λ assume lo stesso valore in tutte le direzioni, e pertanto non viene modificata la forma nella dilatazione, e **corpi anisotropi**, come i solidi cristallini, per i quali λ varia al variare della direzione.

Consideriamo un corpo isotropo a forma di parallelepipedo di dimensioni l_1, l_2, l_3 e quindi volume $V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3$, alla temperatura T . Il volume alla temperatura $T + \Delta T$ è dato da

$$\begin{aligned} V + \Delta V &= l_1(1 + \lambda \Delta T) \cdot l_2(1 + \lambda \Delta T) \cdot l_3(1 + \lambda \Delta T) = V(1 + \lambda \Delta T)^3 = \\ &= V(1 + 3\lambda \Delta T + 3(\lambda \Delta T)^2 + (\lambda \Delta T)^3) \approx V(1 + 3\lambda \Delta T) \end{aligned}$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che i termini contenenti λ^2 e λ^3 si possono trascurare rispetto al termine lineare perché i valori tipici di λ sono sempre inferiori a $10^{-3} \frac{1}{K}$. Ne segue

$$\Delta V = V 3\lambda \Delta T = V \alpha \Delta T$$

introducendo il **coefficiente di dilatazione cubica**

$$\alpha = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta T}$$

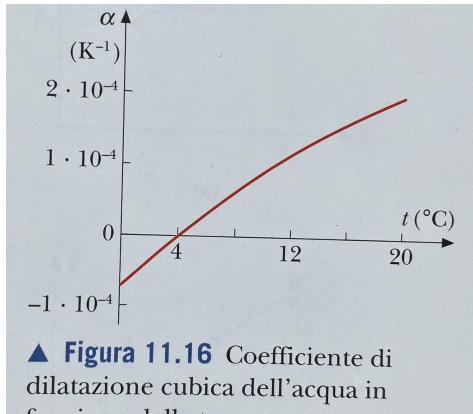
che pertanto, nei corpi isotropi, vale 3λ ; il risultato è indipendente dalla forma del corpo. La relazione di linearità tra variazione relativa di volume e variazione di temperatura vale anche per i liquidi, sempre in intervalli limitati di temperatura.

In modo analogo si trova che il **coefficiente di dilatazione superficiale** di una lastra piana isotropa è 2λ .

Nella tabella sono riportati i coefficienti di dilatazione lineare per alcuni solidi isotropi e di dilatazione cubica per alcuni liquidi, alla temperatura ambiente di $20^\circ C$

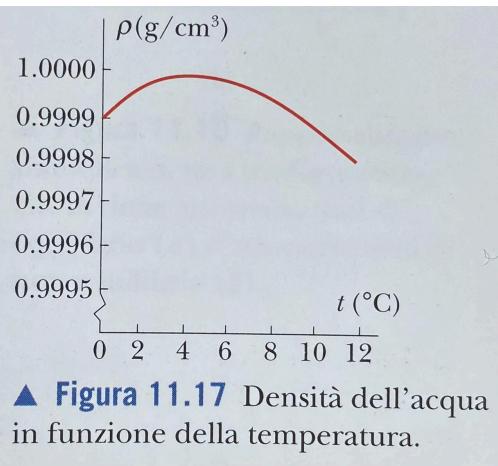
| TABELLA 11.9 Coefficienti di dilatazione | |
|--|----------------------|
| Materiale | $\lambda (K^{-1})$ |
| Dilatazione lineare | |
| acciaio | $1.1 \cdot 10^{-5}$ |
| alluminio | $2.4 \cdot 10^{-5}$ |
| cemento | $1.2 \cdot 10^{-5}$ |
| ferro | $9.1 \cdot 10^{-6}$ |
| invar (lega Fe-Ni) | $7.0 \cdot 10^{-7}$ |
| ottone | $1.9 \cdot 10^{-5}$ |
| piombo | $2.9 \cdot 10^{-5}$ |
| rame | $1.7 \cdot 10^{-5}$ |
| vetro per finestre | $9.0 \cdot 10^{-6}$ |
| vetro pyrex | $3.2 \cdot 10^{-6}$ |
| Materiale | $\alpha (K^{-1})$ |
| Dilatazione cubica | |
| acqua | $1.8 \cdot 10^{-4}$ |
| alcool etilico | $10.4 \cdot 10^{-4}$ |
| benzina | $9.6 \cdot 10^{-4}$ |
| cloroformio | $14.0 \cdot 10^{-4}$ |
| glicerina | $5.3 \cdot 10^{-4}$ |
| mercurio | $1.8 \cdot 10^{-4}$ |

All'aumentare della temperatura la densità del corpo che si dilata diminuisce. A questo comportamento generale fa eccezione l'**acqua** che, nell'intervallo di temperatura da $0^\circ C$ a $4^\circ C$ ha un coefficiente di dilatazione cubica negativo



▲ Figura 11.16 Coefficiente di dilatazione cubica dell'acqua in funzione della temperatura.

pertanto all'aumentare della temperatura il volume diminuisce e la densità aumenta, raggiungendo il valore massimo a 4 °C



▲ Figura 11.17 Densità dell'acqua in funzione della temperatura.

Per temperature superiori il comportamento è normale, con $\alpha > 0$.

Quando la temperatura di una grande massa d'acqua, come per esempio di un lago, diminuisce a causa del raffreddarsi dell'aria, l'acqua dello strato superficiale freddo, che ha densità maggiore rispetto all'acqua più profonda essendo a temperatura minore, scende verso il fondo spingendo in superficie l'acqua sottostante, che a sua volta si raffredda. Queste correnti convettive cessano a 4 °C perché la densità dell'acqua diminuisce al diminuire della temperatura: l'acqua più fredda resta in superficie e inizia a solidificare quando viene raggiunta la temperatura di 0 °C. Il ghiaccio che si forma resta anch'esso in superficie perché la sua densità è minore di quella dell'acqua, mentre in profondità la temperatura dell'acqua si mantiene intorno a 4 °C, permettendo ai pesci e alle altre forme di vita subacquea di sopravvivere.

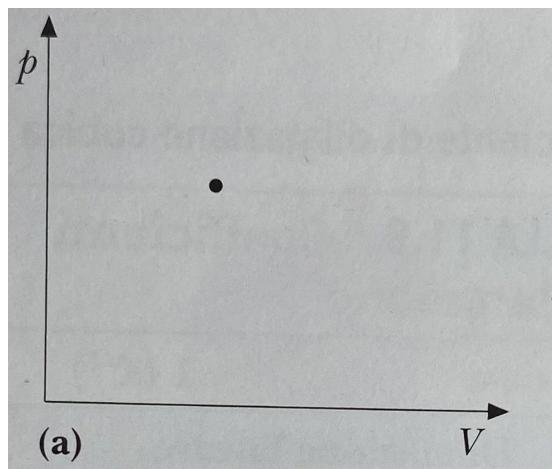
Trasformazioni termodinamiche

Precedentemente, abbiamo definito una trasformazione come un processo in cui un sistema termodinamico passa da uno stato di equilibrio iniziale a uno finale attraverso una successione di stati intermedi, e durante il quale quindi cambiano le coordinate termodinamiche, qualcuna o tutte, del sistema.

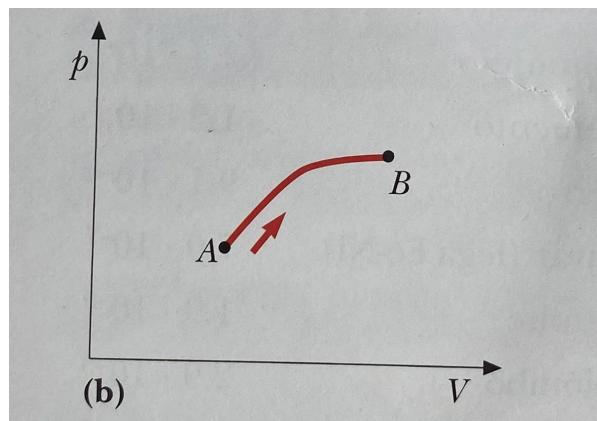
Lo scambio di calore descritto nella Calorimetria è un esempio di trasformazione termodinamica.

Abbiamo visto che per molti sistemi, e in particolare per un gas ideale, le variabili di stato necessarie per la descrizione del sistema sono pressione, volume e temperatura, delle quali solo due indipendenti a causa dell'esistenza dell'equazione di stato.

Scegliendo allora p e V come variabili indipendenti (da cui T si ricava univocamente attraverso l'equazione di stato), è possibile rappresentare graficamente gli stati di equilibrio termodinamico in un semplice diagramma cartesiano in cui il volume rappresenta l'asse delle ascisse e la pressione quello delle ordinate. Un punto in tale piano (p, V) infatti individua una coppia di valori p, V che per quanto detto descrive completamente lo stato termodinamico del sistema all'equilibrio.



Una trasformazione, rappresentando l'evoluzione del sistema a partire da uno stato iniziale A a uno finale B attraverso una successione di stati intermedi, viene visualizzata in tale diagramma da una linea (purché anche gli stati intermedi siano di equilibrio, come vedremo in dettaglio a breve).



Il piano (p, V) è detto **piano di Clapeyron** e come si intuisce è di grande utilità per rappresentare graficamente la trasformazione. Una trasformazione è così individuata dalla funzione $p(V)$ che fornisce la pressione del sistema per ogni valore del suo volume.

Quanto appena detto riguardo la rappresentazione delle trasformazioni termodinamiche nel piano (p, V) necessita di un chiarimento. Solo negli stati di equilibrio i valori delle variabili termodinamiche sono univocamente definiti, e quindi solo tali stati possono essere rappresentati come punti nel piano di Clapeyron.

In una trasformazione qualsiasi però, gli stati intermedi attraverso cui passa il sistema possono essere di equilibrio e di non equilibrio. Chiariamo tali situazioni con alcuni esempi.

1. Due corpi solidi a temperature diverse, T_1 e T_2 sono contenuti in un unico contenitore adiabatico. I due corpi vengono posti in contatto termico; tra di essi c'è uno scambio di calore e alla fine essi raggiungono uno stato di equilibrio termico a una temperatura intermedia tra T_1 e T_2 . Durante il processo c'è sempre una differenza di temperatura finita tra i due corpi, e quindi durante la trasformazione, non c'è mai equilibrio termico: gli **stati intermedi** sono di **non equilibrio**, anche se vi è sempre equilibrio meccanico e chimico
2. Un contenitore adiabatico è diviso in due parti: in una c'è un gas a bassa pressione mentre nell'altra siamo in condizioni di vuoto. Viene aperto un forellino nella parete divisoria e il gas si espande fino a riempire completamente tutto il contenitore. Sperimentalmente si osserva che in questo processo c'è sempre equilibrio termico, però non c'è equilibrio meccanico: in ogni istante c'è sempre una differenza finita di pressione tra le due parti e solo alla fine del processo la pressione è la stessa ovunque. Gli **stati intermedi** sono di **non equilibrio**.
3. Un corpo con velocità iniziale v viene frenato dall'attrito con il piano su cui si muove fino a fermarsi. L'energia cinetica diminuisce e contemporaneamente si osserva un aumento di temperatura delle superfici a contatto, del corpo e del piano. Assumiamo che questo processo duri un tempo breve, così da essere sostanzialmente adiabatico. Successivamente i corpi riscaldatisi cedono calore all'ambiente e alla fine tutto è ritornato alla temperatura ambiente. Nella prima fase del processo non c'è equilibrio meccanico; nella seconda fase non c'è equilibrio termico. Tutti gli **stati intermedi** sono di **non equilibrio**.
4. Un gas è contenuto in un recipiente, immerso a sua volta in una vasca d'acqua a temperatura costante T . Le pareti del recipiente sono diatermiche per cui il gas è in equilibrio termico alla temperatura T . Muovendo una parete del contenitore si lascia espandere il gas lentamente, così che ci sia sempre in pratica l'equilibrio termico con l'acqua. L'espansione viene effettuata applicando alla parete mobile una forza che in ogni istante è appena inferiore a quella di pressione esercitata dal gas, in modo che sia realizzato anche l'equilibrio meccanico. Tale situazione può essere sperimentalmente ottenuta se la parete mobile è orizzontale e su di essa sono posati N piccoli pesetti di massa m , tali che il loro peso Nmg controbilanci la forza di pressione del gas; togliendo lentamente e successivamente i pesetti si compie il processo descritto. Ci si approssima sempre meglio alla condizione di equilibrio meccanico quanto più piccolo e numerosi sono i pesetti. Oppure si può equilibrare la pressione del gas con la pressione (regolabile) di un altro gas che agisce sulla parte esterna della parete mobile. A

differenza dei casi 1), 2) e 3) tutti gli **stati intermedi** si possono considerare di **equilibrio**: la pressione e la temperatura del gas sono in ogni istante conosciute e sono eguali ai valori caratteristici dell'ambiente esterno. Se invece l'espansione del gas fosse rapida, non sarebbe possibile realizzare le condizioni di equilibrio in ogni istante.

Dagli esempi discussi e da molti altri simili, possiamo trarre alcune conclusioni: per effettuare una trasformazione che passi attraverso stati di equilibrio bisogna procedere con variazioni molto piccole delle coordinate termodinamiche, in modo che queste siano in pratica definite in ogni istante. Ciò si può realizzare discostandosi molto poco da uno stato di equilibrio, per permettere che la trasformazione avvenga, e attendendo il ristabilirsi dell'equilibrio nelle nuove condizioni prima di procedere a un'ulteriore variazione infinitesima di stato. Quando si opera così, si parla di **trasformazione quasi-statica**, caratterizzata, in conseguenza di quanto detto, da uno svolgimento molto lento.

Osserviamo però che la lentezza della trasformazione, se è in pratica una condizione necessaria, non è certamente sufficiente affinché gli stati intermedi siano di equilibrio. Nei casi 1), 2) e 3) visti precedentemente, per quanto lento sia il processo gli stati intermedi sono sempre di non equilibrio.

Oltre all'esame delle condizioni di equilibrio o non equilibrio si deve verificare durante la trasformazione l'eventuale presenza di **forze dissipative**, come attriti che si oppongono allo spostamento di parti meccaniche durante lo scambio di lavoro, attriti viscosi, ecc.

Una trasformazione attraverso stati di non equilibrio può realizzarsi invece in conseguenza di un processo di espansione o compressione rapida, per cui non sussiste né equilibrio meccanico né termico, o per effetto di una espansione o compressione lenta con una differenza di pressione finita così che, pur potendoci essere equilibrio termico, non c'è equilibrio meccanico, oppure a seguito di contatto termico con differenza finita di temperatura (possibile equilibrio meccanico, ma non equilibrio termico).

In definitiva, possiamo classificare le trasformazioni secondo il seguente schema:

- una trasformazione è detta reversibile se essa avviene attraverso stati di equilibrio e in assenza di qualsiasi forza dissipativa
- una trasformazione è detta irreversibile qualora non si svolga secondo le modalità precedenti, ossia passi attraverso stati di non equilibrio o avvenga in presenza di forze dissipative oppure si verifichino, durante il suo svolgimento, entrambe queste situazioni

Le trasformazioni reversibili sono casi limite, utilissime concettualmente per i calcoli, ma difficilmente realizzabili.

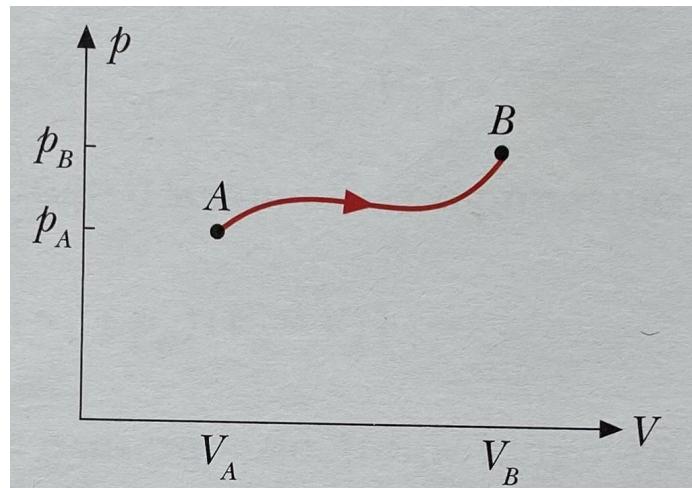
Una trasformazione reversibile può essere arrestata in qualunque stato intermedio e, variando di poco le condizioni esterne, si può invertire il verso della trasformazione, ripercorrendo gli stessi stati già traversati.

In tal caso $Q = m \int_{T_{in}}^{T_{fin}} c(T) dT$ mostra che il calore scambiato cambia semplicemente di segno.

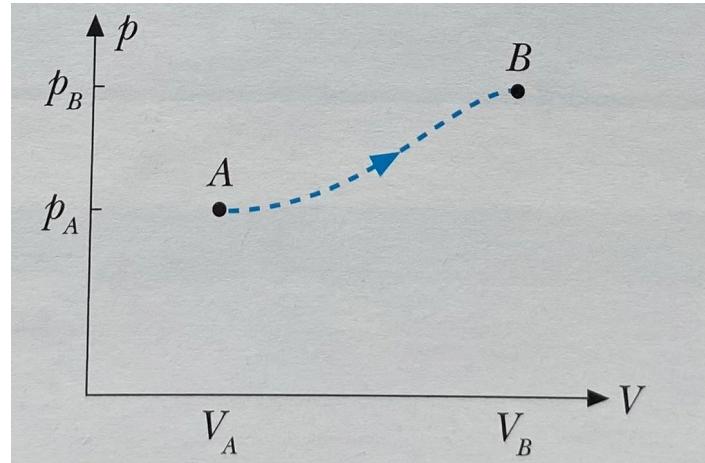
Non è invece possibile invertire il senso di una trasformazione irreversibile, dal momento che negli stati di non equilibrio non è possibile assegnare un valore alle coordinate termodinamiche. Per lo stesso motivo le formule di Calorimetria per il calcolo del calore scambiato da un corpo non sono utilizzabili nel caso di trasformazioni irreversibili.

Quando avremo discusso il secondo principio della termodinamica saremo in grado di comprendere meglio, dal punto di vista concettuale, il significato di reversibilità e irreversibilità.

Da quanto appena detto risulta chiaro che solo le trasformazioni reversibili possono essere rappresentate come una successione di punti (gli stati intermedi di equilibrio), e quindi una linea continua, nel piano (p, V)



Se invece la trasformazione ha luogo attraverso stati di non equilibrio si usa una rappresentazione simbolica a tratto per indicare che si ignorano i valori delle coordinate durante il processo



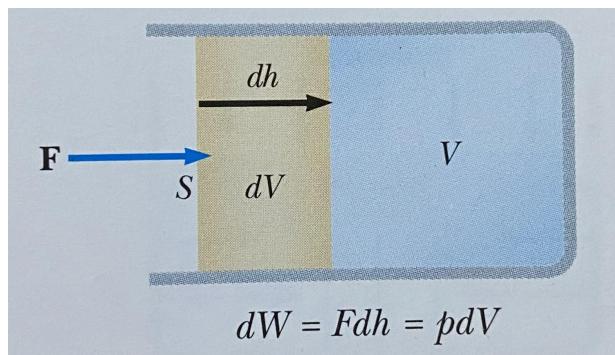
Lavoro termodinamico

Consideriamo due stati di equilibrio A e B di un sistema descritto dalle coordinate termodinamiche p , V e T e che il sistema è suscettibile di cambiare il proprio volume. Noti i valori della pressione e del volume, dall'equazione di stato si ricavano i valori della temperatura, e le trasformazioni effettuate dal sistema possono essere rappresentate nel piano di Clapeyron.

Come esempio di tale sistema si può considerare un gas chiuso in un recipiente dotato di un pistone mobile che consente di variarne il volume.

In equilibrio statico non ci sono spostamenti, anche se ci sono forze, pertanto il lavoro è nullo. È però possibile in condizioni diverse che sotto l'azione delle forze di pressione ci sia uno spostamento e quindi un lavoro associato.

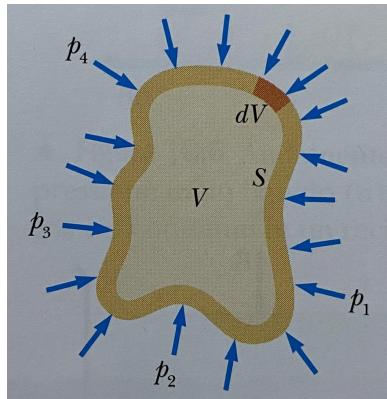
Consideriamo la situazione più facile: una forza esterna costante $F = pS$ agisce ortogonalmente a una superficie S che a seguito di ciò si sposta concordemente alla forza di una quantità dh .



Il lavoro infinitesimo vale

$$dW = F dh = p S dh = p dV$$

dove $dV = S dh$ è il volume infinitesimo coperto dalla superficie S nello spostamento dh .



L'espressione per il lavoro dW è valida nella situazione generale illustrata in figura: un volume di fluido V è soggetto alla pressione esercitata da forze esterne, dovute ad esempio al fluido che lo circonda, che agiscono in ogni punto perpendicolarmente alla superficie S che delimita il volume stesso. Integrando sulla variazione complessiva di volume da V_1 a V_2 si ottiene il lavoro:

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p \, dV$$

Dunque un fluido sottoposto a una pressione esterna subisce in generale una variazione di volume dovuta al lavoro compiuto dalla pressione.

Dunque, quando il sistema si espande o viene compresso avviene uno scambio di lavoro che in termini infinitesimi si può scrivere in generale $dW = p \, dV$.

In una trasformazione finita dallo stato A allo stato B si avrebbe

$$W = \int_A^B p(V) \, dV$$

però bisogna fare attenzione perché questa espressione esplicita del lavoro è utile soltanto quando si conosce la funzione $p(V)$, circostanza verificata sostanzialmente in due sole situazioni:

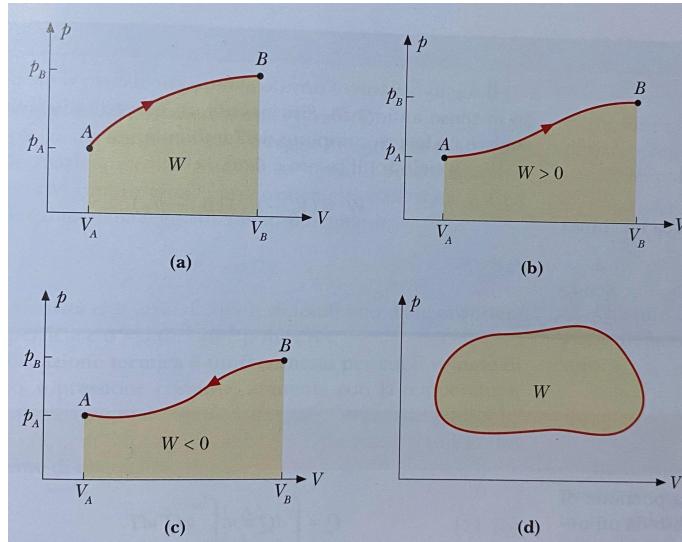
- **è nota la pressione esterna p** e quindi l'integrale è direttamente calcolabile; in particolare per processi che avvengono a pressione atmosferica $p = p_{amb}$ è costante e $W = p_{amb}(V_B - V_A)$
- la trasformazione è reversibile e pertanto si può calcolare l'integrale, dato che la pressione è determinata in ogni stato intermedio, $p = p_{sist} = p_{amb}$

In tutti gli altri casi in cui la pressione non è nota non si può applicare $W = \int_A^B p(V) \, dV$.

A ogni modo, se la trasformazione è isocora ($V = \text{costante}$ ovvero $\Delta V = 0$), il lavoro è sempre nullo; se il sistema si espande il volume finale V_B è maggiore del volume iniziale V_A e il sistema compie un lavoro sull'ambiente che secondo la convenzione adottata è positivo; se il sistema viene compresso, $V_B < V_A$ e il sistema subisce un lavoro (negativo), compiuto dall'ambiente.

Il lavoro, se si può utilizzare $W = \int_A^B p(V) \, dV$, ha un semplice significato geometrico nel piano di Clapeyron. Nel caso di una trasformazione che passa attraverso stati di equilibrio è quindi rappresentabile con una curva continua, la curva $p = p(V)$ nel piano (p, V) , in accordo con il significato geometrico dell'operazione di integrazione,

il lavoro compiuto dal sistema termodinamico è uguale all'area compresa tra la curva e l'asse dei volumi
vedi figura a).

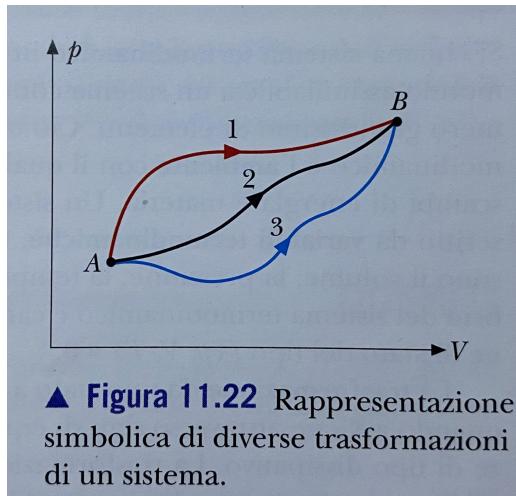


Nella figura b) è mostrato il caso di un'espansione reversibile in cui il lavoro compiuto dal sistema è positivo ($W > 0$). Nella figura c) è mostrato il caso di una compressione reversibile in cui si compie dall'esterno lavoro sul sistema ($W < 0$). In figura d) è rappresentata una trasformazione ciclica reversibile e si ha che:

il lavoro compiuto dal sistema termodinamico in una trasformazione ciclica reversibile è dato dall'area racchiusa dal ciclo stesso

Il lavoro è positivo ($W > 0$) se il ciclo è compiuto in senso orario, negativo ($W < 0$) se il senso è antiorario.

Dalle considerazioni appena esposte si comprende l'importanza della rappresentazione di una trasformazione nel piano (p, V) rispetto alle possibili alternative (p, T) e (V, T), almeno per quel che riguarda il lavoro.



▲ **Figura 11.22** Rappresentazione simbolica di diverse trasformazioni di un sistema.

Dall'osservazione delle trasformazioni reversibili disegnate in figura, si verifica che, a parità di stato iniziale e finale, il lavoro dipende dalla trasformazione, $W_1 \neq W_2 \neq W_3$. Si noti che tale

conclusione è valida anche per le trasformazioni non reversibili, che non possono essere rappresentate nel piano (p, V) .

Se un sistema termodinamico compie una trasformazione reversibile dallo stato A allo stato B , quando questa viene percorsa in senso opposto, da B ad A , il lavoro cambia soltanto di segno,

come è evidente da $W = \int_A^B p(V) dV$: $W_{BA} = -W_{AB}$. Nel precedente paragrafo si è visto che la stessa cosa avviene per il calore scambiato, data la somiglianza formale tra

$$Q = \int dQ = m \int_{T_{in}}^{T_{fin}} c(T) dT \text{ e } W = \int_A^B p(V) dV.$$

Niente di simile si può invece affermare se la trasformazione è irreversibile.

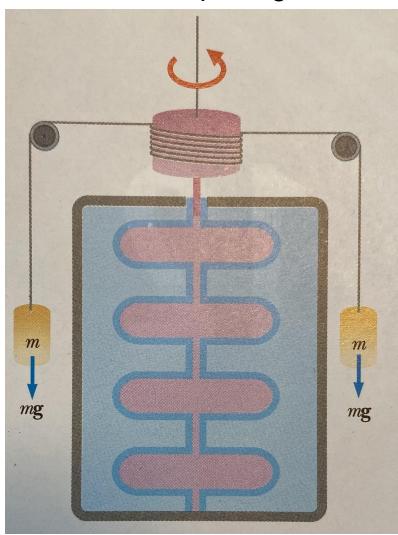
Primo principio della termodinamica

Esperimenti di Joule

Verso la metà del 1800 Joule condusse una serie di esperimenti fondamentali sugli effetti termici del lavoro meccanico.

Schematicamente, le varie **esperienze** eseguite da **Joule**, su un sistema termodinamico costituito da una certa quantità d'acqua, avevano lo scopo di realizzare un aumento della temperatura del sistema con procedimenti diversi.

- Viene messo in rotazione un mulinello nell'acqua spendendo il lavoro W_1 fornito dalla variazione di energia potenziale di due masse che scendono sotto l'azione della forza peso. Con varie palette fissate immerse nell'acqua si impedisce che essa entri in rotazione. L'acqua, agitata dal mulinello, viene riscaldata per effetto dell'attrito.



- Viene immerso nell'acqua un conduttore di resistenza R , percorso da corrente. W_2 è il lavoro speso per fare circolare la corrente.
- Viene compressa una certa quantità di gas, contenuta in un recipiente con pareti diatermiche, immerso nell'acqua. Il processo di compressione del gas richiede un lavoro W_3 .
- Vengono strofinati tra loro due blocchi di metallo immersi nell'acqua. Il lavoro speso contro le forze di attrito è W_4

Nelle varie esperienze l'insieme costituito dall'acqua e dal dispositivo meccanico o elettrico è racchiuso entro pareti adiabatiche.

Il risultato fondamentale osservato da Joule è che il lavoro speso, a parità di massa d'acqua, W_1 o W_2 o W_3 o W_4 , è sempre proporzionale alla variazione di temperatura dell'acqua con la stessa costante di proporzionalità. Il sistema termodinamico massa d'acqua passa da uno stato iniziale di equilibrio, caratterizzato dal valore T_{in} della temperatura, a uno stato finale di equilibrio con temperatura T_{fin} tramite quattro diversi processi, ma il **lavoro meccanico è sempre lo stesso**.

Questo risultato, l'indipendenza del lavoro dal tipo di trasformazione che congiunge due stati termodinamici, purché il sistema sia adiabatico, è confermato da altri esperimenti e può essere assunto come legge generale.

Sulla base delle considerazioni fatte per l'energia potenziale nel caso delle forze conservative (indipendenza del lavoro dal percorso che collega due posizioni) scriviamo la seguente relazione:

$$W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}$$

dove U è una funzione che dipende solo dallo stato del sistema, cioè dalle sue coordinate termodinamiche.

Se il sistema fornisce lavoro all'esterno, W è assunto positivo e pertanto l'energia U diminuisce; se invece si compie lavoro dall'esterno sul sistema W è assunto negativo e l'energia U aumenta.

La relazione $W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}$ fornisce una definizione operativa dell'energia U . Dato un valore arbitrario U_A all'energia dello stato A , preso come riferimento, il valore U_B nello stato B è determinato dal lavoro adiabatico scambiato, secondo la relazione.

L'energia U pertanto è definita a meno di una costante additiva, come nel caso dell'energia potenziale; però la presenza di questa costante è irrilevante, in quanto dal punto di vista fisico è importante solo la variazione dell'energia U .

L'aumento di temperatura di una massa d'acqua si può d'altra parte ottenere facilmente, come è esperienza comune, avvicinando l'acqua a un corpo più caldo, cioè a temperatura superiore. Immaginiamo questa volta di avere il corpo caldo e l'acqua dentro un contenitore adiabatico: si

realizza uno scambio di calore tra il corpo e l'acqua, senza nessuna azione meccanica macroscopica (masse che scendono, corpi strofinati, ecc.)

Se possiamo ottenere lo stesso cambiamento di stato termodinamico dell'acqua, segnalato dalla variazione di temperatura, tramite scambio di calore o di lavoro meccanico, possiamo postulare l'equivalenza degli effetti delle due procedure e scrivere, anche nel caso di scambio di calore con lavoro nullo, una relazione analoga a $W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}$:

$$Q = -W_{ad}$$

Questa relazione stabilisce l'equivalenza tra calore e lavoro:

il calore Q scambiato, senza lavoro esterno, per far variare la temperatura di ΔT di una massa d'acqua è uguale al lavoro W_{ad} che deve essere speso, in condizioni adiabatiche, per ottenere la stessa variazione di temperatura

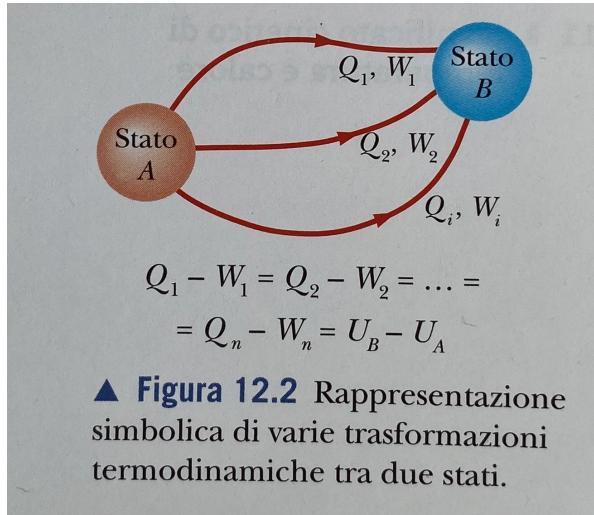
In questa relazione il segno meno deriva dalla convenzione adottata per i segni degli scambi di energia. $Q = -W_{ad}$ indica anche il modo in cui si possa eseguire una misura di calore scambiato; il calore in questo modo viene espresso in joule. Con questo esperimento è stata determinata l'equivalenza $1 \text{ Cal} = 4186.6 \text{ J}$. L'equivalenza calore-lavoro valida per qualunque sistema venne enunciata per la prima volta nel 1842 da Mayer.

Primo principio della termodinamica. Energia interna

Nel paragrafo precedente abbiamo trattato il caso di un processo con scambio di lavoro in condizioni adiabatiche. Ora consideriamo una situazione più generale: si abbia un sistema che oltre allo scambio di lavoro meccanico con l'ambiente possa avere anche scambio di calore, cioè trasmissione di energia non accompagnata da fenomeni meccanici macroscopici.

Sperimentalmente si trova sempre verificata una legge nota come **primo principio della termodinamica**, che stabilisce:

se un sistema compie una trasformazione dallo stato A allo stato B, scambiando calore e lavoro con l'ambiente, Q e W dipendono dalla trasformazione che congiunge i due stati termodinamici, mentre la differenza $Q - W$ risulta indipendente dalla trasformazione



Si può pertanto scrivere, posto $\Delta U = U_B - U_A$,

$$\Delta U = Q - W$$

Il primo principio della termodinamica viene assunto come postulato basato sull'esperienza; possiamo notare che esso contiene come casi particolari le situazioni che ci avevano portato a scrivere $W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}$

Discutiamo il significato di $\Delta U = Q - W$, che può essere articolato in vari punti.

- Il primo principio mette in evidenza l'esistenza di un meccanismo di scambio di energia che non è esprimibile come lavoro meccanico macroscopico: si tratta del **calore** introdotto nel capitolo precedente. Questa equazione ne fornisce la definizione più generale, sia concettualmente che dal punto di vista del calcolo.
- Esiste una funzione delle coordinate termodinamiche del sistema o, come si dice, **una funzione di stato**, chiamata **energia interna** U , le cui variazioni dipendono dagli scambi energetici del sistema con l'ambiente che lo circonda durante una trasformazione. Dati due stati A e B qualunque è fissata ΔU : in una particolare trasformazione dallo stato A a quello B può essere preponderante lo scambio di calore, mentre in un'altra trasformazione, sempre tra tali stati, quello di lavoro, però in ambedue le diverse trasformazioni lo scambio totale $Q - W$ è lo stesso. Se U resta costante durante una trasformazione, e quindi $\Delta U = 0$, può essere che sia verificata la situazione $Q = 0$ e $W = 0$ oppure $Q \neq 0$ e $W \neq 0$, ma a ogni modo si ha $Q - W = 0$, ossia $Q = W$
- Quando, durante una trasformazione, si fornisce energia a un sistema, sia tramite un lavoro meccanico che con uno scambio di calore, questa resta immagazzinata sotto forma di energia interna e può essere successivamente riutilizzata. Il primo principio della termodinamica non impone limiti concettuali per questi processi, purchè sia rispettata $\Delta U = Q - W$. Vedremo però che esiste un limite per la riutilizzazione dell'energia termica quando studieremo il **secondo principio della termodinamica**. Possiamo dire che $\Delta U = Q - W$ costituisce l'espressione del bilancio energetico di una

trasformazione termodinamica; si tratta di un bilancio più completo di quello che è possibile fare in meccanica, in quanto si tiene conto anche degli scambi di calore

- Il termine energia interna indica che non si tratta dell'energia cinetica del sistema in senso macroscopico o di energia potenziale, per esempio gravitazionale, bensì di energia legata a proprietà interne del sistema, come moto molecolare o forze intermolecolari, che non dipendono dallo stato complessivo di moto, ma piuttosto dalla temperatura del sistema, dalla pressione a cui è sottoposto o dal volume che occupa. È importante osservare che l'espressione esplicita dell'energia interna in funzione delle coordinate termodinamiche che individuano lo stato di un sistema dipende dal sistema stesso; non esiste cioè un'espressione analitica dell'energia interna valida per qualsiasi sistema
- La quantità ΔU può essere calcolata direttamente se è nota l'espressione esplicita di U , altrimenti è possibile servirsi di $\Delta U = Q - W$, se si conoscono il calore e il lavoro scambiati. Si osservi però che ΔU non deve necessariamente essere calcolata lungo l'effettiva trasformazione, bensì lungo una qualsiasi trasformazione che abbia gli stessi stati iniziale e finale e per la quale risulti più facile determinare Q e W . Infatti, l'energia interna è funzione di stato e quindi non dipende dalla trasformazione.
- Se si conoscono le espressioni di ΔU , Q e W in funzione delle coordinate termodinamiche, la $\Delta U = Q - W$ diventa un'equazione che lega le coordinate termodinamiche durante la trasformazione, ovvero diventa l'equazione della trasformazione
- A proposito di calore e lavoro è necessario prestare attenzione alla terminologia, per evitare espressioni concettualmente errate: il calore e il lavoro sono forme di **scambio di energia** e quindi si deve sempre parlare di calore o lavoro scambiati tra sistemi e mai di calore o lavoro posseduti da un sistema. Ciò che un sistema possiede è una certa quantità di energia interna che può variare in una trasformazione, appunto a seguito di scambi di calore e lavoro. Anche espressioni come sviluppo di calore in un corpo, ad esempio a seguito del passaggio di una corrente elettrica in un conduttore o di una compressione rapida in un gas, sono errate.
- Se un sistema termodinamico esegue una qualsiasi trasformazione che lo riporti allo stato iniziale, ovvero una **trasformazione ciclica** o chiusa, si ha per definizione $\Delta U = 0 \Rightarrow Q = W$ il calore scambiato è eguale al lavoro scambiato.

Se nella trasformazione ciclica il sistema complessivamente assorbe calore, $Q > 0$, esso fornisce lavoro, $W > 0$, e costituisce una **macchina termica**.

Se invece il sistema cede calore, $Q < 0$, esso deve assorbire lavoro, $W < 0$. Si noti che Q e W rappresentano la somma algebrica dei calori e dei lavori scambiati nelle singole trasformazioni che, considerate in successione, formano la trasformazione ciclica completa.

- Per eseguire calcoli specifici può essere utile analizzare trasformazioni termodinamiche nelle quali le variabili di stato cambiano di quantità infinitesime. In una tale trasformazione infinitesima il primo principio ha la forma:

$$dU = dQ - dW$$

Integrando per una trasformazione finita si ha

$$\Delta U = \int_A^B dU = U_B - U_A$$

indipendente dalla trasformazione. Il calore e il lavoro scambiati nella trasformazione finita si ottengono sommando sulle quantità infinitesime, cioè di nuovo integrando:

$$Q_{AB} = \int_A^B dQ, W_{AB} = \int_A^B dW$$

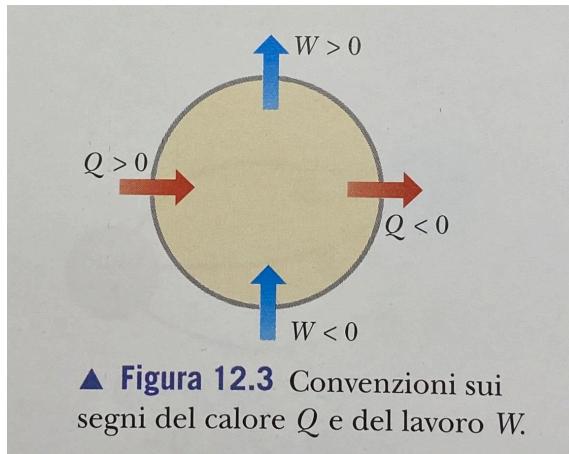
però come sappiamo, Q e W dipendono da come si è svolta effettivamente la trasformazione e nessuno dei due può essere espresso come differenza dei valori di una funzione di stato, $f(B) - f(A)$. Questi fatti si esprimono dicendo che, in $dU = dQ - dW$: *la variazione infinitesima di energia interna è un differenziale esatto, mentre dQ e dW , cioè le quantità infinitesime di calore e lavoro scambiati, non sono differenziali esatti*

L'unità di misure di energia interna, calore e lavoro è ovviamente la stessa ed è il **joule**.

Riportiamo qui sotto la convenzione sui segni di Q e W , adottata sulla base della principale applicazione che storicamente è stata fatta dai fenomeni termici, cioè la trasformazione di calore in lavoro nelle macchine termiche. Con tale convenzione i flussi di calore e di lavoro hanno segno opposto e il primo principio viene scritto nella forma $\Delta U = Q - W$.

Assumiamo dunque

- calore che entra in un sistema dall'esterno: segno positivo
- lavoro che è compiuto da un sistema sull'esterno: segno positivo
- calore che esce da un sistema verso l'esterno: segno negativo
- lavoro che è compiuto dall'esterno sul sistema: segno negativo



Se invece i segni dei flussi di calore e di lavoro fossero scelti eguali, il primo principio si dovrebbe scrivere nella forma $\Delta U = Q + W$.

Naturalmente quello che importa in una trasformazione è capire qual è il flusso energetico, cioè se il calore è assorbito o ceduto dal sistema, se il lavoro è prodotto o subito, in modo da poter correttamente pervenire al bilancio energetico.

I segni sono solo convenzionali, però scelta una certa convenzione questa va mantenuta in tutti i ragionamenti.

Si faccia attenzione al fatto che noi stiamo considerando i flussi di energia dal punto di vista del sistema. Se il sistema assorbe calore, e diciamo che Q è positivo, questo calore è ceduto al sistema dall'ambiente e pertanto l'ambiente è negativo e come tale dobbiamo trattarlo se ragioniamo sull'ambiente: se Q è il calore scambiato dal sistema, $-Q$ è quello scambiato dall'ambiente. Un discorso analogo va fatto per il lavoro.

Leggi dei gas. Equazione di stato dei gas ideali

Un gas è un fluido con le seguenti caratteristiche:

- Non ha forma né volume proprio, occupa pertanto tutto il volume a disposizione, per esempio quello del recipiente che lo contiene
- È facilmente comprimibile, con conseguenti variazioni notevoli di volume, densità e pressione
- È un insieme di molecole debolmente interagenti tra di loro

Nel seguito del capitolo considereremo il gas racchiuso dentro un contenitore di volume V , con un valore della pressione eguale in tutti i punti. Per una data quantità di gas le **variabili termodinamiche** più appropriate per descrivere lo stato termodinamico del gas e le eventuali trasformazioni sono la **pressione p** , il **volumen V** e la **temperatura T** .

Quando il volume del contenitore cambia, come può avvenire se una parte dello stesso è mobile, si realizza uno scambio di lavoro con l'ambiente esterno; inoltre, a seconda del tipo di pareti del contenitore, diatermiche o adiabatiche, è possibile o viene impedito lo scambio di calore con l'ambiente. Il gas può dunque compiere trasformazioni in cui scambia soltanto lavoro o calore con l'ambiente, oppure entrambi; in ogni caso il bilancio energetico è regolato dal primo principio della termodinamica $\Delta U = Q - W$.

Ci occuperemo più avanti degli aspetti energetici delle trasformazioni di un sistema gassoso; adesso stabiliamo alcune semplici relazioni tra le coordinate termodinamiche di un gas, che sono tanto meglio verificate quanto più un gas è rarefatto (densità bassa) e, più in particolare, si trovi in condizioni di pressione sufficientemente bassa e di temperatura alta rispetto a quella per cui si avrebbe condensazione. Si parla in tal caso di **comportamento ideale**. Vedremo più chiaramente successivamente le condizioni fisiche che individuano un gas ideale.

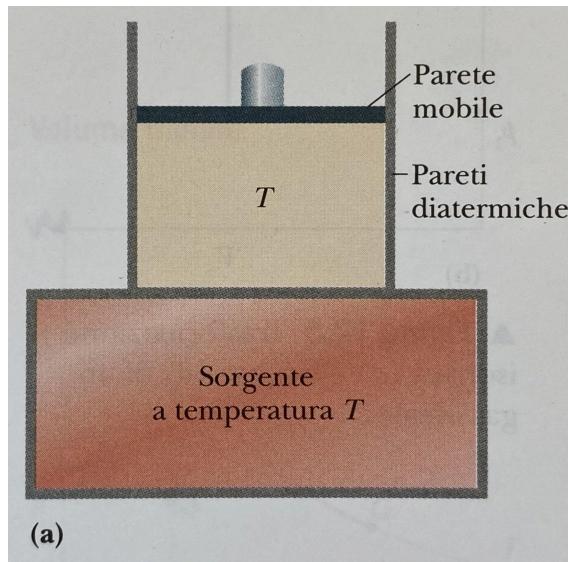
Si abbia un gas in equilibrio termodinamico a una certa pressione p entro un dato volume V e a temperatura T : se si fanno variare i valori della pressione e del volume, mantenendo costante la temperatura, si trova che in tutti i possibili stati di equilibrio isotermi il prodotto della pressione per il volume ha sempre lo stesso valore. Vale cioè la **legge di Boyle**

$$pV = \text{costante}$$

a temperatura costante la pressione è inversamente proporzionale al volume.

Una **trasformazione isoterna** tra due stati di equilibrio di un gas si può realizzare, ad esempio, se il contenitore, a pareti diatermiche, è mantenuto in contatto termico con una sorgente di

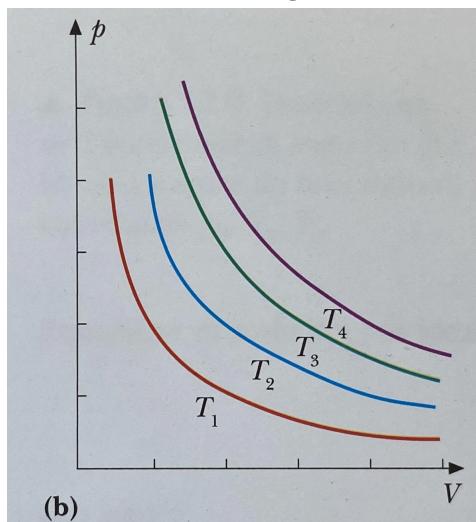
calore alla temperatura T e la parete mobile si muove a seguito di una differenza infinitesima di pressione tra gas e ambiente esterno. Si hanno condizioni di equilibrio meccanico e termico e possiamo assumere che durante la trasformazione la temperatura sia costante e la pressione del gas sempre eguale a quella esterna.



Comunque il gas passi da uno stato di equilibrio a pressione p_1 e volume V_1 a un altro con pressione p_2 e volume V_2 (anche se durante la trasformazione la temperatura è variata per poi tornare allo stesso valore di quella iniziale), la legge di Boyle stabilisce che si ha sempre

$$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

Nel piano (p, V) di Clapeyron, il luogo dei punti che rappresentano gli stati di equilibrio di un gas a una data temperatura è costituito da un ramo di iperbole. Infatti $pV = \text{costante}$ è l'equazione di un'iperbole equilatera nelle coordinate p, V . Per ogni temperatura si ha una diversa iperbole e le curve così ottenute si chiamano le **isoterme del gas ideale**.



Nella figura sono mostrate alcune isoterme; poiché la costante di $pV = \text{costante}$ è proporzionale alla temperatura, come vedremo tra breve, si ha $T_4 > T_3 > T_2 > T_1$

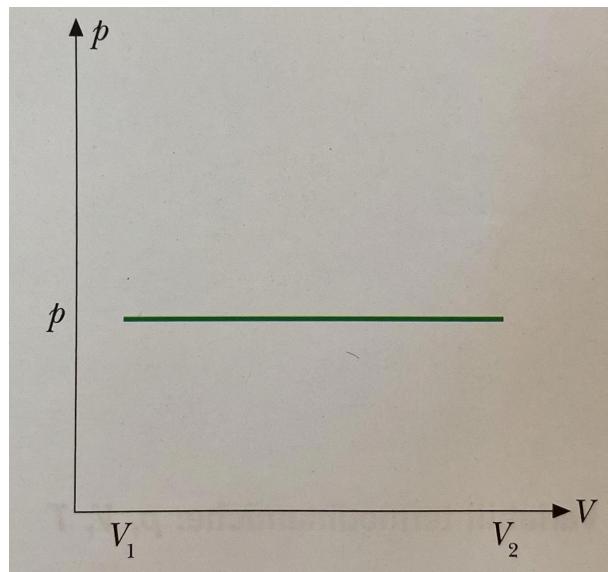
Se la pressione di un gas durante una trasformazione resta costante, si parla di **trasformazione isobara**; si verifica che in condizioni isobare il volume varia linearmente con la temperatura:

$$V = V_0(1 + \alpha t)$$

In questa equazione la temperatura è espressa in gradi Celsius (per questo motivo la t minuscola), V_0 è il volume occupato dal gas per $t = 0$ e α è una costante che varia poco al variare del tipo di gas, detta **coefficiente di dilatazione termica** (in effetti da essa si può ricavare una relazione analoga a quella della dilatazione cubica).

Per provare la validità della **legge isobara di Volta-Gay Lussac** si può mettere il gas in equilibrio termico con diverse sorgenti di calore, mantenendo sempre l'equilibrio meccanico con l'ambiente (pressione interna uguale alla pressione esterna costante) e ogni volta misurare il volume del contenitore, che ha una parete mobile come nel caso precedente.

La trasformazione isobara, nel piano (p, V) già considerato, è rappresentata da un segmento di retta parallelo all'asse dei volumi:

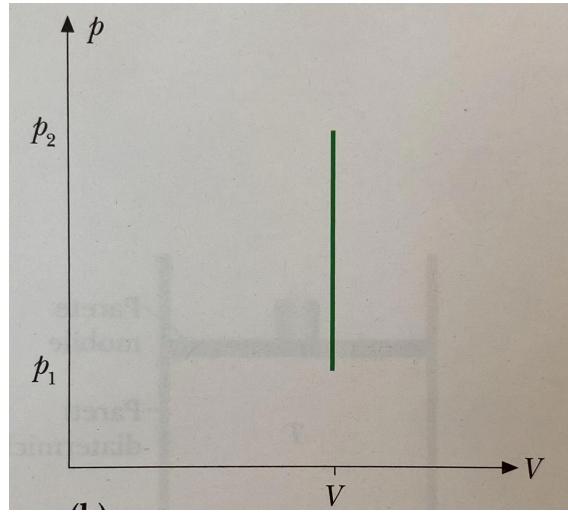


Se invece si mantiene costante il volume di un gas la pressione risulta funzione lineare della temperatura:

$$p = p_0(1 + \beta t)$$

Anche ora la temperatura è espressa in gradi Celsius; p_0 è la pressione del gas per $t = 0$ e β una costante, praticamente indipendente dal tipo di gas.

Una **trasformazione a volume costante** si dice **isocora**; nel piano (p, V) essa è rappresentata da un segmento di retta parallelo all'asse delle pressioni:



La verifica della **legge isocora di Volta-Gay Lussac** si può eseguire utilizzando il solito contenitore, mantenendo bloccata la parete mobile e misurando la pressione in diversi stati di equilibrio, con il gas in contatto termico con diverse sorgenti di calore.

Se disegniamo i grafici della pressione in funzione della temperatura delle trasformazioni isocore e del volume in funzione della temperatura nelle trasformazioni isobare, e facciamo convergere le rette che troviamo per i vari gas, possiamo osservare che convergono tutti ad un valore della temperatura t^* , e in questo punto i valori della pressione nel primo caso e il valore del volume nel secondo equivale a 0. Il valore di t^* è $-273.16\text{ }^{\circ}\text{C}$ e questo valore è stato impostato come 0 K nella scala kelvin. Questo è un caso estremo della materia (ho tramortito tutta la materia) e non è raggiungibile nella realtà.

Ricordiamo quanto detto all'inizio e cioè che il comportamento dei diversi gas è in accordo con $pV = \text{costante}$, $V = V_0(1 + \alpha t)$ e $p = p_0(1 + \beta t)$ quanto più ci si avvicina alle condizioni di gas ideale (bassa pressione e alta temperatura). Così facendo si osserva che le costanti α e β assumono lo stesso valore per tutti i gas:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{273.15} \frac{1}{\text{ }^{\circ}\text{C}}$$

Le due leggi di Gay-Lussac si possono pertanto scrivere

$$V = V_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = V_0 \alpha T$$

$$p = p_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = p_0 \alpha T$$

dove con $T = \frac{1}{\alpha} + t = 273.15 + t$ è indicata la temperatura misurata in kelvin. Abbiamo così ritrovato la relazione tra i valori della temperatura espressi in gradi Celsius e in kelvin. Si può notare che mentre alla temperatura di $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ non corrisponde uno stato particolare, a 0 K si ha $V = 0$ e $p = 0$: lo 0 kelvin corrisponde ad uno stato limite in natura, e temperature inferiori non hanno significato.

La quarta legge dei gas è la **legge di Avogadro**, di carattere completamente diverso dalle precedenti leggi elementari, in quanto direttamente collegata alla struttura microscopica di un gas. Essa stabilisce che

volumi eguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di molecole

Ovvero, in modo del tutto equivalente

volumi eguali di gas diversi, alla stessa temperatura e pressione, contengono lo stesso numero di moli

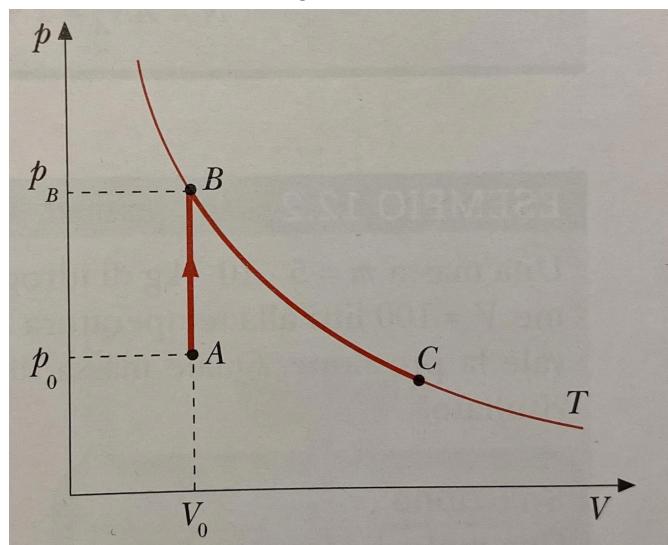
Ricordiamo infatti che la mole è definita come la quantità di sostanza che contiene un numero di molecole pari al **numero di Avogadro**, $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{\text{molecole}}{\text{mol}}$. È importante sottolineare che anche la legge di Avogadro si riferisce a gas che abbiano un comportamento ideale e quindi obbediscano alle leggi precedentemente enunciate.

Come conseguenza della legge di Avogadro **una mole qualsiasi di gas, a una data temperatura e pressione, occupa sempre lo stesso volume**. Si trova che se la pressione è quella atmosferica ($p_0 = 101325 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$) e la temperatura è $T_0 = 273.15 \text{ K} = 0^\circ\text{C}$, tale volume vale

$$V_m = 0.02241 \text{ m}^3 = 22.41 \text{ litri}$$

V_m viene indicato col nome di **volume molare** a temperatura e pressione standard.

Cerchiamo ora un'equazione generale per i gas perfetti, che metta in relazione le variabili termodinamiche p , V e T in un dato stato termodinamico. Se consideriamo n moli di un gas alla pressione atmosferica $p_0 = 1 \text{ atm}$ e alla temperatura $T_0 = 273.15 \text{ K}$, esse occupano, come abbiamo appena detto, il volume $V_0 = nV_m$. Portiamo ora il gas da questo stato di riferimento A a uno stato termodinamico qualsiasi B di coordinate p , V e T . Ciò può essere fatto ad esempio attraverso una trasformazione isocora AB seguita da un'isoterma BC .



La pressione nello stato B è quindi $p_B = p_0 \alpha T$. Nell'isoterma, per la legge di Boyle

$$pV = p_B V_0 = p_0 \alpha T V_0 = n p_0 V_m \alpha T$$

Visto che abbiamo detto che $V_0 = n \cdot V_m$.

Il prodotto $p_0 V_m \alpha$ è una costante universale, che ha lo stesso valore per tutti i gas, quindi si ha la relazione che costituisce l'**equazione di stato del gas ideale**:

$$pV = nRT$$

con

$$R = p_0 V_m \alpha = 8.314 \frac{J}{mol K}$$

Visto che $n = \frac{N}{N_A}$ e $\frac{R}{N_A} = k_B$ possiamo anche scrivere

$$pV = Nk_B T$$

Sulla base delle tre leggi elementari e della legge di Avogadro, definiamo quindi come **gas ideale un sistema le cui coordinate termodinamiche in uno stato di equilibrio obbediscono a $pV = nRT$** . Pertanto in un gas ideale il prodotto della pressione per il volume è proporzionale al numero di moli e alla temperatura attraverso la costante universale R , detta **costante dei gas ideali**. Osserviamo che nella relazione tra p , V e T espressa da questa equazione la quantità di gas è individuata dal numero di moli, cioè il numero di molecole del gas, e non dalla sua massa.

Questa equazione mostra che in un gas ideale in equilibrio sono indipendenti solo due variabili, in quanto la terza si ricava appunto tramite l'equazione di stato. Vediamo allora che, per un dato numero di moli, un punto nel piano (p, V) di Clapeyron, rappresenta completamente uno stato di equilibrio del gas, potendosi ricavare subito la temperatura da $pV = nRT$.

L'equazione di stato contiene $pV = \text{costante}$, $V = V_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = V_0 \alpha T$ e $p = p_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = p_0 \alpha T$: infatti basta mantenere costante T , p o V in $pV = nRT$ e si ottengono le tre leggi isoterma, isobara o isocora.

Anche la legge di Avogadro è contenuta in $pV = nRT$, infatti $R = N_a \cdot k_B$ e quindi $pV = N k_B T$ con N numero di molecole. A questo punto possiamo scrivere $N = \frac{1}{k_B} \frac{pV}{T}$, che è la legge di Avogadro per quanto riguarda il numero di molecole.

$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$ è la costante di Boltzmann.

È possibile scrivere l'equazione di stato in forme diverse da $pV = nRT$. Se ad esempio al posto del volume si utilizza la densità $\rho = \frac{M}{V}$ e al posto della passa M del gas si mette An , con A massa molecolare, l'equazione diventa

$$p \frac{A}{\rho} = RT$$

e quindi

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{A}$$

Ricordiamo ancora una volta che l'equazione di stato dei gas ideali esprime un comportamento al limite, al quale si avvicinano i gas reali quanto più lontana è la loro temperatura da $T = 0$ e quanto più bassa è la loro pressione ovvero la loro densità, cioè quanto più sono caldi e rarefatti. In queste condizioni le differenze di comportamento dei diversi gas praticamente scompaiono e tutti seguono approssimativamente $pV = nRT$.

Calori specifici del gas ideale

In una trasformazione generica un gas può scambiare calore con l'ambiente e per il calcolo si può ricorrere al primo principio. È inoltre possibile nelle trasformazioni non isoterme (e ovviamente non adiabatiche) ricorrere al concetto di calore specifico secondo la $dQ = nc dT$, con l'avvertenza che bisogna specificare il tipo di processo.

Precisamente, per una trasformazione infinitesima isocora si ha $dQ = n c_V dT$, mentre per una isobara $dQ = n c_p dT$; le quantità

$$c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V \quad c_p = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p$$

si chiamano, rispettivamente, **calore specifico molare a volume costante e a pressione costante** e si misurano in $\frac{J}{mol K}$.

Generalmente, per queste trasformazioni c_V e c_p variano molto poco con la temperatura, per cui, in base a $Q = nc(T_{fin} - T_{in})$ il calore scambiato per una variazione ΔT di temperatura ($\Delta T = T_B - T_A$) si scrive nei due casi

$$Q_V = n c_V \Delta T \quad Q_p = n c_p \Delta T$$

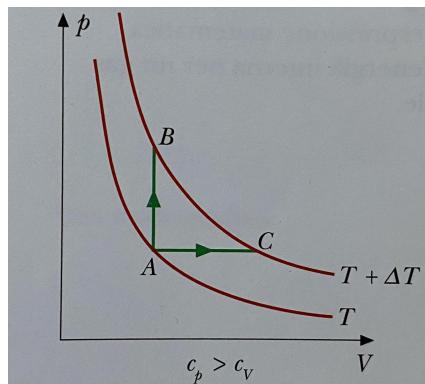
Altrimenti, secondo $Q = n \int_{T_{in}}^{T_{fin}} c(T) dT$

$$Q_V = n \int_{T_A}^{T_B} c_V(T) dT \quad Q_p = n \int_{T_A}^{T_B} c_p(T) dT$$

Una caratteristica delle equazioni con c_V e c_p costanti è che il calore scambiato dipende soltanto dalla variazione di temperatura, come nel caso di solidi e liquidi (si faccia però attenzione a non estendere il risultato a trasformazioni che non siano isocore o isobare).

Nel prossimo paragrafo vedremo che l'energia interna di un gas ideale è funzione solo della temperatura e cresce con la stessa. Sfruttando tale risultato dimostriamo che in un gas ideale deve essere $c_p > c_V$.

Consideriamo infatti due trasformazioni, una isocora e una isobara, durante le quali si abbia la stessa variazione positiva di temperatura ΔT .



▲ **Figura 12.7** Dimostrazione che per un gas ideale $c_p > c_V$.

Dal primo principio $Q = \Delta U + W$ applicato alla trasformazione isocora AB risulta

$$Q_V = n c_V \Delta T = \Delta U$$

in quanto $W = 0$. Nella trasformazione isobara AC , $W = p\Delta V$, positivo perché il volume cresce con la temperatura e quindi

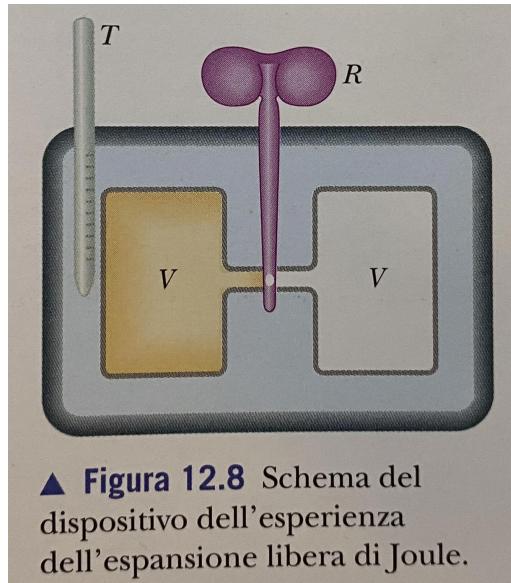
$$Q_p = n c_p \Delta T = \Delta U + p\Delta V$$

Dato che la variazione di temperatura è la stessa nelle due trasformazioni e che l'energia interna è funzione solo della temperatura, la variazione ΔU è la stessa nei due casi e quindi $Q_p > Q_V$ da cui segue $c_p > c_V$, visto che è l'unico parametro che cambia.: **il calore che bisogna cedere a una mole di gas ideale per fare aumentare la sua temperatura di 1 K è maggiore a pressione costante che a volume costante, perché a pressione costante il gas compie anche del lavoro** (che deve essere bilanciato).

Energia interna del gas ideale

La dipendenza dell'energia interna di un gas ideale dalle coordinate termodinamiche è stata ricavata analizzando il risultato dell'**esperienza dell'espansione libera, eseguita da Joule**.

In un contenitore con pareti rigide e diatermiche, diviso in due parti eguali separate da un rubinetto, si trova un gas nella parte sinistra, mentre nella parte destra è stata realizzata una condizione di vuoto.



Il contenitore è immerso in un calorimetro (contenitore adiabatico pieno di liquido) e la temperatura di equilibrio è T . Si apre il rubinetto R e si lascia espandere il gas in tutto il volume a disposizione. L'espansione è chiamata libera perché non ci sono forze esterne che agiscono sul gas. Sperimentalmente si osserva, per un gas che approssimi il comportamento ideale, che comunque si operi, aprendo lentamente o rapidamente il rubinetto, con gas inizialmente ad alta o bassa pressione, **la temperatura del liquido calorimetrico alla fine del processo è sempre pari a T , temperatura iniziale di equilibrio.**

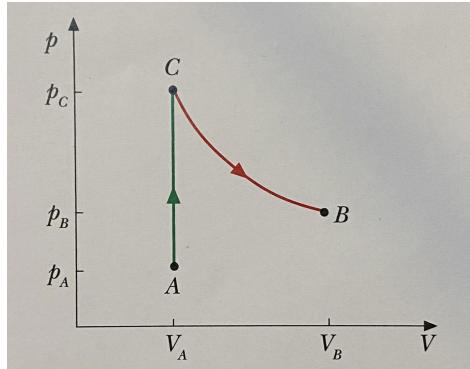
Dal primo principio applicato all'intero sistema, segue $\Delta U = \Delta U_{gas} + \Delta U_{cal} = Q - W = 0$, in quanto il sistema non scambia né calore né lavoro con l'ambiente. D'altra parte, lo stato del liquido calorimetrico è lo stesso di quello iniziale, per cui la sua energia non è variata. Ne segue che **nell'espansione libera l'energia interna di un gas ideale non varia**. Possiamo allora giungere alla seguente conclusione: poiché nel processo la temperatura del gas non cambia, mentre variano pressione e volume, **l'energia interna deve essere funzione soltanto della temperatura.**

Il risultato è vero rigorosamente solo per un gas ideale.

Per determinare l'espressione esplicita della funzione $U(T)$ consideriamo due generici stati di equilibrio A e B : $\Delta U = U_B - U_A$ deve essere la stessa qualsiasi trasformazione si scelga, essendo U una funzione di stato. Se sceglieremo in particolare una trasformazione AC isocora e una CB isoterna, si ha

$$\Delta U = U_B - U_A = U_B - U_C + U_C - U_A = U_C - U_A$$

in quanto $U_B = U_C$ essendo gli stati B e C alla stessa temperatura e U funzione solo della temperatura.



Applichiamo ora il primo principio alla trasformazione isocora: dato che $W = 0$, $\Delta U = Q$, dove Q

è il calore scambiato in condizioni isocore, dato da $Q_V = n c_V \Delta T$ o $Q_V = n \int_{T_A}^{T_B} c_V(T) dT$. Pertanto

$$\Delta U = U_B - U_A = n c_V (T_B - T_A) = n c_V \Delta T$$

$$\Delta U = U_B - U_A = n \int_{T_A}^{T_B} c_V(T) dT$$

a seconda che il calore specifico a volume costante sia indipendente dalla temperatura oppure no. Per trasformazioni infinitesime

$$dU = n c_V dT$$

da cui si ricava

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$$

Poiché l'energia interna è funzione soltanto della temperatura, anche **il calore specifico a volume costante di un gas ideale dipende solo dalla temperatura, potendo essere, in particolare, costante.**

Possiamo adesso scrivere in maniera esplicita il primo principio $\Delta U = Q - W$ per quel che riguarda le trasformazioni di gas ideali, considerando c_V costante:

$$dQ = n c_V dT + dW \quad \Rightarrow \quad Q = n c_V \Delta T + W$$

Se la trasformazione è reversibile le equazioni diventano

$$dQ = n c_V dT + p dV \quad \Rightarrow \quad Q = n c_V \Delta T + \int_{V_A}^{V_B} p dV$$

Alla fine del precedente paragrafo abbiamo dimostrato che in un gas ideale il calore specifico a pressione costante è maggiore di quello a volume costante; adesso possiamo rendere quantitativa l'affermazione. In una trasformazione isobara infinitesima $dQ = n c_p dT$ e

$dW = p dV$ per cui, da $dQ = n c_V dT + dW$,

$$n c_p dT = n c_V dT + p dV$$

Differenziando l'equazione di stato dei gas ideali $pV = nRT$ si ha

$$p dV + V dp = nR dT$$

in una trasformazione isobara si ha $dp = 0$ e quindi $p dV = nR dT$. Pertanto

$$n c_p dT = n c_v dT + nR dT$$

e in conclusione si ottiene la **relazione di Mayer**

$$c_p = c_v + R$$

ovvero

$$c_p - c_v = R$$

Di conseguenza **in un gas ideale anche c_p è funzione soltanto della temperatura potendo in particolare essere costante.**

Da $c_p - c_v = R$, dato che a p costante $p dV = dQ - dU = n(c_p - c_v)dT = nR dT$, si ricava un significato energetico per la costante dei gas ideali R : essa rappresenta il lavoro che a pressione costante compie una mole di gas in corrispondenza a un aumento di temperatura di $1 K$. Il **rappporto tra i calori specifici**

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

risulta in un gas ideale sempre maggiore di 1 ed è funzione soltanto della temperatura o, in particolare, costante.

Sperimentalmente si trovano per i calori specifici dei gas ideali questi risultati:

- i **gas ideali monoatomici** (gas rari come elio, neon, argon, vapori di sodio e di mercurio) hanno c_v costante e pari a $\frac{3}{2}R$:
 $c_v = \frac{3}{2}R = 12.47 \frac{J}{mol K}$, $c_p = \frac{5}{2}R = 20.79 \frac{J}{mol K}$, $\gamma = \frac{5}{3} = 1.667$
- alcuni **gas ideali biatomici** (idrogeno, azoto, monossido di azoto NO e monossido di carbonio CO) a temperature non troppo lontane dalla temperatura ambiente hanno c_v costante e pari a $\frac{5}{2}R$:
 $c_v = \frac{5}{2}R = 20.79 \frac{J}{mol K}$, $c_p = \frac{7}{2}R = 29.10 \frac{J}{mol K}$, $\gamma = \frac{7}{5} = 1.4$
- altri **gas ideali biatomici** (ossigeno, fluoro, cloro, bromo) e i gas ideali poliatomici (anidride carbonica CO_2 , ammoniaca NH_3 , metano CH_4) hanno i calori specifici variabili con la temperatura secondo leggi che dipendono dal particolare gas considerato

In tabella sono riportati i dati sperimentali alla temperatura $T = 300 K$ per alcuni gas monoatomici e biatomici, da cui sono state dedotte le regole appena esposte. L'interpretazione è fornita dal modello cinetico del gas ideale che svilupperemo successivamente.

| Gas | c_p | c_v | $c_p - c_v$ | $\gamma = c_p/c_v$ |
|-----------------|-------|-------|-------------|--------------------|
| Gas monoatomici | | | | |
| He | 20.8 | 12.5 | 8.33 | 1.67 |
| Ar | 20.8 | 12.5 | 8.33 | 1.67 |
| Ne | 20.8 | 12.7 | 8.12 | 1.64 |
| Kr | 20.8 | 12.3 | 8.49 | 1.69 |
| Gas biamomici | | | | |
| H ₂ | 28.8 | 20.4 | 8.33 | 1.41 |
| N ₂ | 29.1 | 20.8 | 8.33 | 1.40 |
| O ₂ | 29.4 | 21.1 | 8.33 | 1.40 |
| CO | 29.3 | 21.0 | 8.33 | 1.40 |
| Cl ₂ | 34.7 | 25.7 | 8.96 | 1.35 |

I valori dei calori specifici sono espressi in J/mol K.

I primi due casi suddetti sono quelli a cui ci limiteremo nel seguito della trattazione, salvo situazioni specificamente indicate. Pertanto utilizzeremo le relazioni

$$\Delta U = n c_v \Delta T \quad \text{per qualsiasi trasformazione}$$

$$Q = n c_v \Delta T \quad \text{se } V = \text{costante}$$

$$Q = n c_p \Delta T \quad \text{se } p = \text{costante}$$

Ricordiamo che accanto a queste valgono sempre per un gas ideale le seguenti proprietà:

$$\text{equazione di stato} \quad pV = nRT \quad \text{in uno stato di equilibrio}$$

$$\text{relazione di Mayer} \quad c_p - c_v = R$$

Studio di alcune trasformazioni del gas ideale

Studiamo ora alcune trasformazioni termodinamiche molto comuni dei gas. Considereremo i gas ideali, con c_v e c_p indipendenti dalla temperatura. Particolare attenzione verrà prestata al fatto che le trasformazioni siano reversibili o irreversibili.

Iniziamo con le **trasformazioni adiabatiche**.

Il gas è racchiuso in un contenitore con pareti adiabatiche e quindi può scambiare solo lavoro, per esempio in conseguenza del fatto che una parete è mobile. Dal primo principio e da

$\Delta U = n c_v \Delta T$ si ha per una trasformazione tra due qualsiasi stati di equilibrio A iniziale e B finale

$$W_{AB} = -\Delta U = -n c_v (T_B - T_A)$$

Dato che $T = \frac{pV}{nR}$ dall'equazione di stato, abbiamo che

$$-n c_v (T_B - T_A) = -\frac{n c_v}{nR} (p_B V_B - p_A V_A) = \frac{c_v}{R} (p_A V_A - p_B V_B)$$

Poi abbiamo che, visto $R = c_p - c_v$ e $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$

$$\frac{c_v}{R} = \frac{c_v}{c_p - c_v} = \frac{c_v}{\gamma c_v - c_v} = \frac{1}{\gamma - 1}$$

e quindi in conclusione

$$W_{AB} = -\Delta U = -n c_V (T_B - T_A) = \frac{1}{\gamma-1} (p_A V_A - p_B V_B)$$

Se si ha un'espansione adiabatica il lavoro W_{AB} è positivo e quindi ΔU è negativa e T_B è minore di T_A : il gas si raffredda.

Se invece si ha una compressione adiabatica, $W_{AB} < 0$, $\Delta U > 0$, $T_B > T_A$, il gas si riscalda.

Queste variazioni di temperatura sono comunemente sperimentate nelle variazioni rapide di un volume di un gas.

Non è possibile ricavare altre relazioni tra le coordinate termodinamiche di due stati collegati da una trasformazione adiabatica generica salvo alcune limitazioni, derivanti dal secondo principio di termodinamica.

Se invece la **trasformazione è adiabatica reversibile**, l'espressione infinitesima del primo principio diviene

$$dQ = dU + dW = n c_V dT + p dV = 0$$

in quanto possiamo esprimere il lavoro in funzione delle coordinate termodinamiche, appunto perché la trasformazione è reversibile. Per questa stessa ragione si può utilizzare l'equazione di stato in qualsiasi stato intermedio per esprimere la pressione come $p = \frac{nRT}{V}$ e si ottiene

$$n c_V dT + \frac{nRT}{V} dV = 0$$

Da cui

$$\frac{nR}{n c_V} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

e utilizzando $R = c_p - c_V$

$$\frac{c_p - c_V}{c_V} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

E quindi visto che $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$

$$(\gamma - 1) \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

Questa equazione differenziale rappresenta la condizione a cui obbediscono le coordinate degli stati di un gas ideale collegati da una trasformazione adiabatica reversibile. Integrando dallo stato A allo stato B ,

$$(\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \frac{T_A}{T_B}$$

e quindi per le proprietà dei logaritmi

$$\ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \ln \frac{T_A}{T_B}$$

L'eguaglianza tra i logaritmi comporta l'eguaglianza tra gli argomenti, per cui

$$\left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_A}{T_B}$$

e quindi

$$T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

espressione che dà la relazione tra le coordinate termodinamiche del gas durante una trasformazione adiabatica reversibile.

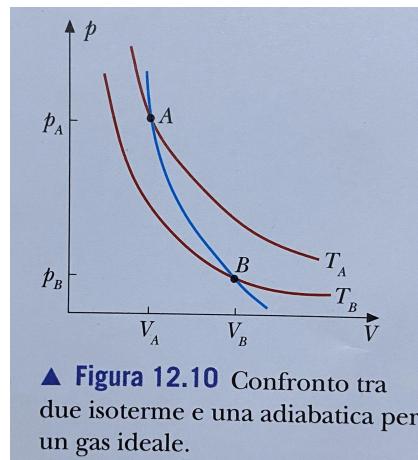
Tramite l'equazione di stato si può trasformare la relazione tra T e V in una tra p e V o tra p e T e in conclusione si hanno tre espressioni equivalenti:

$$T V^{\gamma-1} = \text{costante} \quad p V^\gamma = \text{costante} \quad T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{costante}$$

Il procedimento che ha portato dal primo principio a queste espressioni è un esempio del fatto citato quando abbiamo parlato del primo principio della dinamica, e cioè che quando si possono esprimere i termini di $\Delta U = Q - W$ in funzione delle coordinate termodinamiche si ottiene una relazione tra queste che rappresenta l'equazione della trasformazione.

Le espressioni si chiamano infatti le **equazioni di una trasformazione adiabatica reversibile di un gas ideale**.

In particolare utilizziamo l'equazione $p V^\gamma = \text{costante}$ per rappresentare la trasformazione nel piano di Clapeyron.



Rispetto alla curva isoterma $pV = \text{costante}$ passante per esempio per il punto rappresentativo dello stato A , la curva adiabatica ha un andamento simile però con pendenza maggiore perché γ è sempre maggiore di 1: si conferma che $T_B < T_A$.

Una trasformazione adiabatica reversibile costituisce un caso limite, in quanto per essere reversibile dovrebbe svolgersi molto lentamente, ma ciò introduce difficoltà nel mantenere l'adiabaticità. Le trasformazioni reali sono irreversibili, in particolare possiamo considerare adiabatica irreversibile una trasformazione che comporta una variazione rapida di volume, così che non ci sia tempo per scambi di calore. L'espansione libera di Joule è un altro caso di trasformazione adiabatica irreversibile.

Un esempio di trasformazione adiabatica si ha nell'atmosfera, quando una massa d'aria calda si sposta rapidamente dal suolo verso l'alto (corrente convettiva ascensionale). Diminuendo la

pressione con l'altezza, il volume della massa d'aria aumenta: il processo è approssimabile a una trasformazione adiabatica e ne segue un abbassamento della temperatura della massa d'aria. Se questa contiene vapor d'acqua, si ha condensazione a seguito del raffreddamento e formazione di nuvole, come si osserva in giornate serene, ma umide.

Vediamo ora le **trasformazioni isoterme**.

Nel caso di una trasformazione isoterma si considera il gas racchiuso in un recipiente che è in contatto termico con una sorgente di calore alla temperatura T . Durante la trasformazione la temperatura del gas resta costante al valore T e abbiamo

$$\Delta U = 0, \quad Q = W, \quad p_A V_A = p_B V_B$$

Se la trasformazione è una espansione isoterma $W_{AB} > 0$ e quindi $Q_{AB} > 0$: il gas compie lavoro e assorbe calore.

Se invece la trasformazione è una compressione isoterma $W_{AB} < 0$ e $Q_{AB} < 0$: il gas subisce lavoro e cede calore.

Qualora la trasformazione sia isoterma reversibile, da $W = \int_A^B p(V) dV$ e $pV = nRT$ si ha

$$W_{AB} = \int_A^B p(V) dV = \int_A^B \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_A^B \frac{1}{V} dV = nRT \ln \frac{V_B}{V_A}$$

e questa è anche l'espressione esplicita del calore scambiato.

Si noti che è sempre $Q \neq 0$: una trasformazione isoterma reversibile comporta sempre uno scambio di calore, a meno che non sia $T = 0$, condizione che, come vedremo, non è mai raggiungibile.

Una particolare trasformazione isoterma irreversibile è l'espansione libera di Joule. Tale trasformazione isoterma è insieme adiabatica e isoterma: ciò è possibile solo perché la trasformazione è irreversibile, per una reversibile i due fatti son ben distinti ed è impossibile che una trasformazione isoterma sia anche adiabatica.

Vediamo le **trasformazioni isocore**.

Il gas è contenuto in un recipiente diatermico di volume fisso: $V = \text{costante}$ e $W = 0$; il gas può scambiare solo calore e questo è eguale, per il primo principio, alla variazione di energia interna:

$$Q = \Delta U = n c_V (T_B - T_A)$$

Essendo il volume costante, dall'equazione di stato $pV = nRT$, o meglio da

$$p = p_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = p_0 \alpha T \text{ si ha}$$

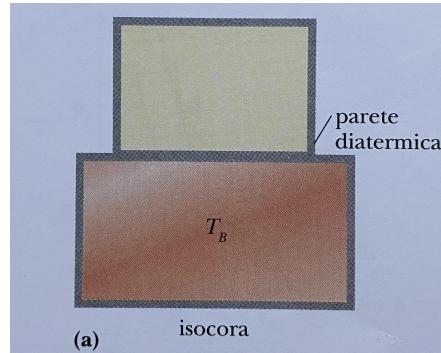
$$\frac{p_A}{p_0 \alpha T_A} = \frac{p_B}{p_0 \alpha T_B}$$

e quindi

$$\frac{p_A}{p_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

Se si cede calore al gas, la sua pressione e la sua temperatura aumentano, mentre se si assorbe calore dal gas pressione e temperatura diminuiscono.

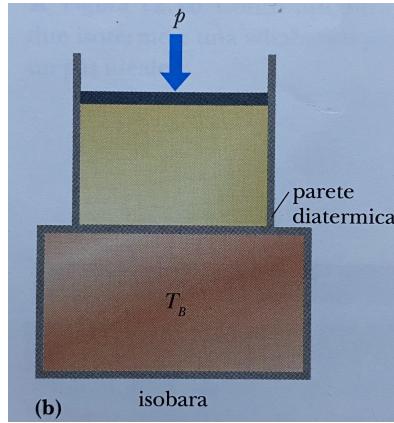
Nella pratica ciò viene effettuato mettendo il gas, a temperatura T_A , in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_B : la trasformazione è irreversibile in quanto non c'è equilibrio termico tra sistema e ambiente, alla fine il gas assume la temperatura T_B .



Una **trasformazione isocora reversibile** si realizza invece mettendo il gas, a temperatura T_A , in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura $T_1 = T_A + dT$, poi con una sorgente a temperatura $T_2 = T_1 + dT$, e così via, utilizzando in teoria una serie infinita di sorgenti.

Vediamo infine le **trasformazioni isobare**.

Il gas è contenuto ora in un recipiente diatermico con una parete mobile su cui agisce una pressione esterna costante p .



Dall'equazione di stato o da $V = V_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + t \right) = V_0 \alpha T$ abbiamo che in una trasformazione isobara

$$\frac{V_A}{V_0 \alpha T_A} = \frac{V_B}{V_0 \alpha T_B}$$

e quindi

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

Il gas può scambiare sia calore che lavoro, dati da

$$Q = n c_p (T_B - T_A), \quad W = p(V_B - V_A) = p\left(\frac{nRT_B}{p} - \frac{nRT_A}{p}\right) = nR(T_B - T_A)$$

e deve essere sempre $Q - W = \Delta U = n c_V (T_B - T_A)$.

Se si cede calore al gas, il suo volume e la sua temperatura aumentano e il gas compie lavoro; se si assorbe calore dal gas, volume e temperatura diminuiscono, il gas subisce lavoro.

Una trasformazione isobara si può compiere mettendo il gas, a temperatura T_A , in contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_B ; non essendoci equilibrio termico la trasformazione è irreversibile. Invece, per avere una trasformazione reversibile bisogna disporre una serie infinita di sorgenti (come descritto per le trasformazioni isocore).

Osserviamo esplicitamente che se un gas ad alta pressione si porta a bassa pressione espandendosi e compiendo lavoro contro la pressione atmosferica, la trasformazione

(irreversibile) non è isobara; il lavoro è $p_{atm}(V_2 - V_1)$, però non vale la relazione $\frac{T_2}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}$.

Perchè la trasformazione sia isobara occorre cioè che sia costante la pressione del gas.

Si definisce **entalpia** la funzione

$$H = U + pV$$

che risulta una **funzione di stato** in quanto sia U che pV sono funzioni soltanto delle coordinate termodinamiche.

In un gas ideale U è funzione solo della temperatura e ciò è vero anche per il prodotto pV , in base all'equazione di stato: si conclude che l'**entalpia del gas ideale è funzione solo della temperatura, $H = H(T)$** .

Per una qualsiasi trasformazione infinitesima

$$dH = dU + d(pV) = n c_V dT + nR dT$$

E visto che $R = c_p - c_V$ abbiamo

$$dH = n c_V dT + n c_p dT - n c_V dT = n c_p dT$$

Per una trasformazione finita

$$\Delta H = n \int_{T_A}^{T_B} c_p dT$$

$$\Delta H = n c_p (T_B - T_A) \text{ se } c_p = \text{costante}$$

e in particolare per una trasformazione isobara risulta $Q = \Delta H$.

Vediamo dunque che per una generica trasformazione di un gas ideale le due funzioni di stato energia interna ed entalpia dipendono solo dalla variazione di temperatura tra stato finale e stato iniziale, essendo in particolare proporzionali a ΔT se i calori specifici sono costanti; il calore scambiato dipende invece dalla trasformazione. Però,

$$\text{se la trasformazione è isocora} \quad Q = \Delta U$$

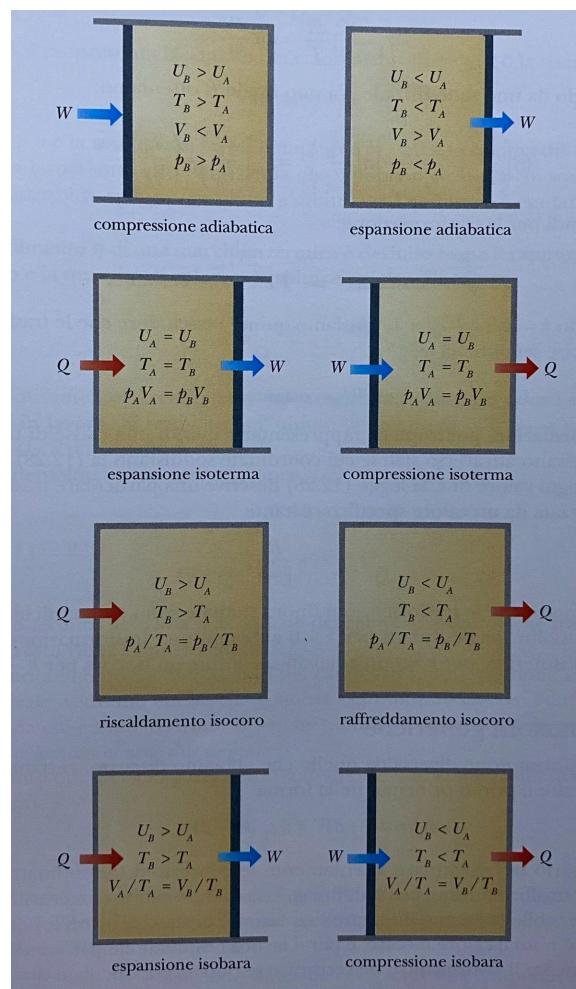
$$\text{se la trasformazione è isobara} \quad Q = \Delta H$$

In entrambi i casi il calore è eguale alla variazione di una funzione di stato e questo fatto ci fornisce una formula per il calcolo di Q senza dover ricorrere al primo principio.

Le formule dei calori specifici $c_V = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V$ e $c_p = \frac{1}{n} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p$ si possono scrivere

$$c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} \quad c_p = \frac{1}{n} \frac{dH}{dT}$$

Riassumendo graficamente nella figura gli scambi energetici nelle trasformazioni adiabatiche, isoterme, isocore e isobare; A indica lo stato iniziale, B quello finale.



Si noti che i versi degli scambi energetici (dall'ambiente al sistema e dal sistema all'ambiente) sono univoci; cioè non dipendono ovviamente dalla convenzione adottata per i relativi segni; da questa dipende solo il fatto di chiamare positivo o negativo il calore assorbito dal sistema, etc.

//MANCA TRASFORMAZIONI POLITROPICHE E TRASFORMAZIONI GENERICHE

Trasformazioni cicliche. Ciclo di Carnot

Abbiamo definito precedentemente trasformazione ciclica, o ciclo, una trasformazione in cui lo stato finale coincide con lo stato iniziale; di conseguenza in un ciclo $\Delta U = 0$ e quindi $Q = W$, ovvero il calore scambiato è eguale al lavoro scambiato.

Se durante il ciclo viene prodotto lavoro ($W > 0$), assorbendo complessivamente calore da un opportuno numero di sorgenti, tale **ciclo** è detto **termico**. Il dispositivo che opera è indicato come **macchina termica**.

Se invece il ciclo è tale che venga richiesto un lavoro esterno ($W < 0$), cedendo complessivamente calore a un opportuno numero di sorgenti, si parla di **ciclo frigorifero**. Il dispositivo corrispondente è detto **macchina frigorifera**.

Se consideriamo le varie trasformazioni che compongono il ciclo e il calore e il lavoro complessivamente scambiati, possiamo scrivere

$$Q = Q_A + Q_C$$

dove $Q_A > 0$ rappresenta la somma dei calori assorbiti e $Q_C < 0$ la somma dei calori ceduti,

$$W = W_F + W_S$$

in cui $W_F > 0$ è la somma dei lavori compiuti e $W_S < 0$ è la somma dei lavori subiti.

I calori e i lavori sono visti dal sistema che compie il ciclo e a cui sono riferiti gli aggettivi assorbito, ceduto, compiuto e subito. Per l'ambiente è esattamente il contrario.

Il rendimento η di una macchina termica è definito come il rapporto tra il lavoro fornito e la quantità di calore assorbito, e poiché $W_F = W = Q$:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

Alternativamente: **il rendimento rappresenta la frazione di calore assorbito trasformato in lavoro**. Si noti che nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che Q_C è una quantità negativa.

Sperimentalmente si osserva sempre

$$0 \leq \eta < 1$$

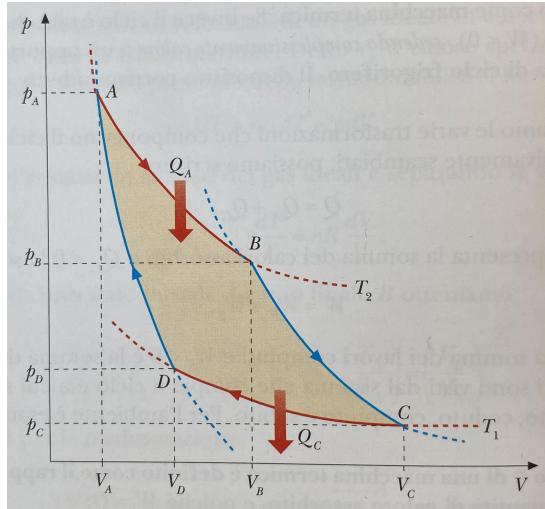
ovvero, da $\eta = \frac{W}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$,

$$W < Q_A, \quad |Q_C| < Q_A, \quad Q_C \neq 0$$

in un ciclo termico solo una percentuale del calore assorbito viene trasformata in lavoro, il resto viene sempre ceduto.

Riprenderemo questo argomento nel secondo principio della termodinamica e vedremo che ha carattere generale; vedremo anche che il calore Q_C non può essere ceduto alla stessa sorgente

da cui è stato assorbito Q_A e che quindi un sistema che compie un ciclo deve scambiare calore con almeno due sorgenti.



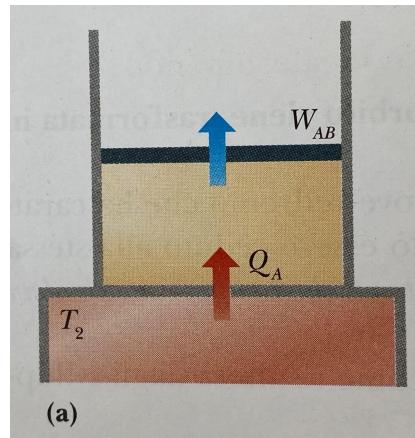
Il ciclo di Carnot, rappresentato nella figura per un gas ideale, è costituito da quattro trasformazioni reversibili:

- Trasformazione AB , **espansione isoterma reversibile alla temperatura T_2**
- Trasformazione BC , **espansione adiabatica reversibile**
- Trasformazione CD , **compressione isoterma reversibile alla temperatura T_1**
- Trasformazione DA , **compressione adiabatica reversibile**

Analizziamo ora una ad una le singole trasformazioni, visualizzando anche graficamente i versi degli scambi di calore.

a)

Nello stato A il gas è in equilibrio a contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_2 . L'espansione isoterma reversibile AB è rappresentata in figura:



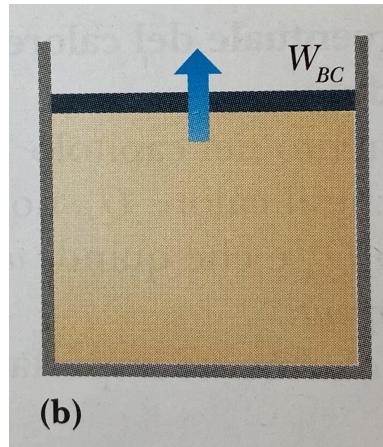
Come risultato, il gas passa dallo stato A , di coordinate termodinamiche p_A , V_A e T_2 , allo stato B di coordinate p_B , V_B e T_2 , assorbendo il calore

$$Q_A = nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} = W_{AB}$$

in quanto W_{AB} è il lavoro fatto dal gas nell'espansione isoterna.

b)

Nella trasformazione BC il gas è isolato da qualsiasi sorgente di calore.



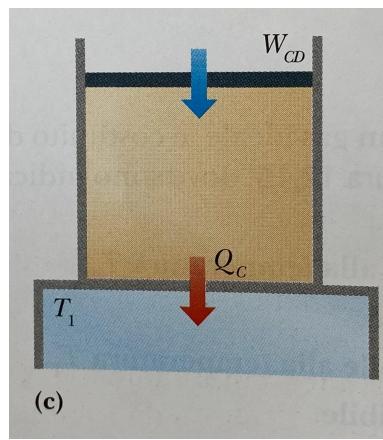
Il gas passa quindi dallo stato B (p_B, V_B, T_2) allo stato C (p_C, V_C, T_1), con T_1 minore di T_2 e, secondo $TV^{\gamma-1} = \text{costante}$,

$$T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$$

Il lavoro fatto dal gas è $W_{BC} = -\Delta U_{BC} = n c_V (T_2 - T_1)$.

c)

Nella trasformazione CD il gas è a contatto termico con una sorgente di calore a temperatura T_1 .



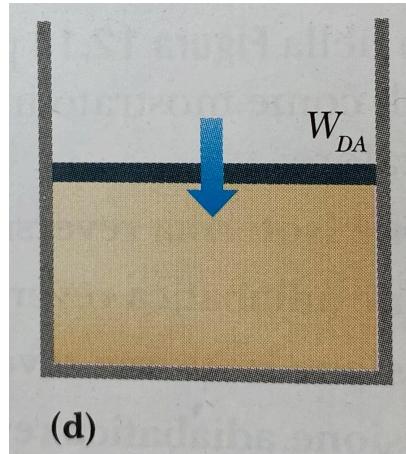
Il processo è analogo ad AB , però ora il gas si comprime. Il calore ceduto complessivamente è

$$Q_C = nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C} = W_{CD}$$

ed è negativo, come il lavoro, poiché $V_D < V_C$.

d)

Infine nella trasformazione DA il gas è di nuovo isolato termicamente e ritorna nello stato iniziale.



Avendo assunto γ costante (ovvero i calori specifici non dipendono dalla temperatura), vale la relazione

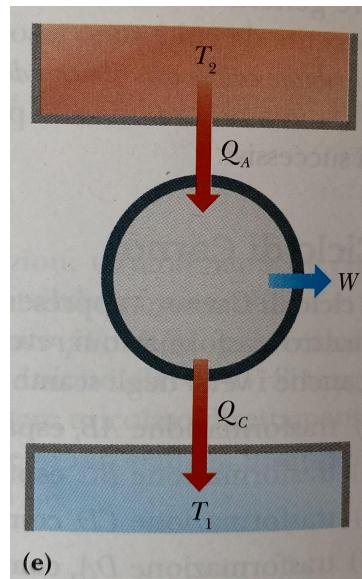
$$T_1 V_D^{\gamma-1} = T_2 V_A^{\gamma-1}$$

Il lavoro scambiato è $W_{DA} = -\Delta U_{DA} = n c_V (T_1 - T_2) = -W_{BC}$

Sommando tutti i contributi otteniamo

$$Q = Q_A + Q_C = W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = W_{AB} + W_{CD}$$

e questa quantità coincide con l'area racchiusa dal ciclo.



Il rendimento del ciclo è

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{nRT_1 \ln \frac{V_D}{V_C}}{nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A}} = 1 - \frac{T_1 \ln \frac{V_C}{V_D}}{T_2 \ln \frac{V_B}{V_A}}$$

Dividendo membro a membro i termini delle relazioni $T_2 V_B^{\gamma-1} = T_1 V_C^{\gamma-1}$ e $T_2 V_A^{\gamma-1} = T_1 V_D^{\gamma-1}$, otteniamo

$$\frac{V_B^{\gamma-1}}{V_A^{\gamma-1}} = \frac{V_C^{\gamma-1}}{V_D^{\gamma-1}}$$

e quindi

$$\left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_C}{V_D}\right)^{\gamma-1}$$

ovvero

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$$

Quindi

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Si noti il fatto molto importante che in questa equazione per il rendimento non compare alcuna grandezza caratteristica del gas, ma solo i valori delle temperature delle sorgenti con cui il gas scambia calore:

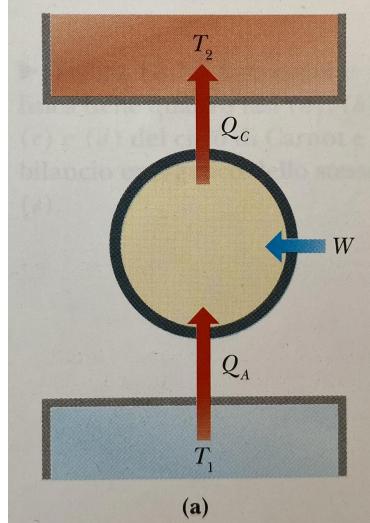
il rendimento del ciclo di Carnot, compiuto da un gas ideale, dipende solo dalle temperature a cui avvengono gli scambi isotermi di calore

Vedremo più avanti che **questa proprietà è vera qualunque sia la sostanza che descrive il ciclo.**

Poichè $T_1 < T_2$ verifichiamo che $\eta < 1$; inoltre da $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$ si ha $|Q_A| > |Q_C|$. Il gas complessivamente assorbe calore perché $Q_A + Q_C > 0$ e produce il lavoro $W = Q_A + Q_C$, pari alla somma algebrica di quello fatto durante l'espansione isoterna e subito durante alla compressione isoterna (perché i lavori svolti durante le adiabatiche sono eguali e opposti).

Negli esempi trattati di cicli termici abbiamo visto che il sistema scambia calore con varie sorgenti: dal punto di vista termico l'ambiente non è unico, ma cambia da trasformazione a trasformazione e anzi, nelle adiabatiche, non partecipa al processo. Possiamo dire, sempre da un punto di vista termico, che l'ambiente si può rappresentare con un numero, finito o infinito, di sorgenti di calore. Abbiamo anche verificato quanto detto all'inizio: il rendimento risulta sempre minore di 1 e le sorgenti sono sempre almeno due, una a temperatura T_2 che cede calore al sistema, l'altra a temperatura T_1 che assorbe calore dal sistema; il calore che il sistema assorbe è sempre maggiore, in modulo, di quello che il sistema cede, $|Q_A| > |Q_C|$, e si trova sempre $T_2 > T_1$. Questi risultati sono più generali di quanto i pochi esempi visti possano far credere; infatti essi sono validi per qualsiasi ciclo termico (vedremo che tali fatti costituiscono un aspetto del secondo principio della termodinamica).

In un **ciclo frigorifero** il sistema complessivamente assorbe lavoro e cede calore ($Q = W < 0$). Nella situazione più semplice il sistema assorbe il calore Q_A da una sorgente fredda, assorbe lavoro e cede il calore Q_C a una sorgente calda: risulta sempre $|Q_C| > Q_A$.

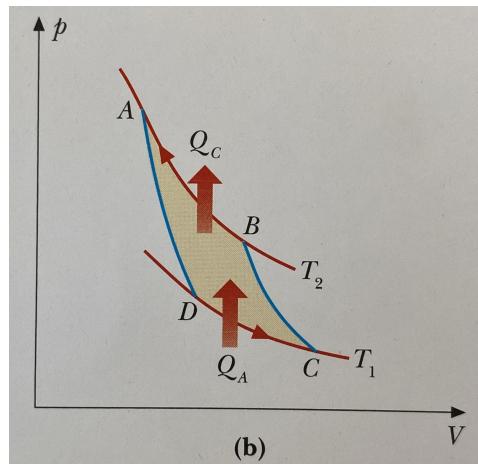


Si definisce efficienza o **coefficiente di prestazione** di un ciclo frigorifero il rapporto

$$\xi = \frac{Q_A}{|W|}$$

che è tanto maggiore quanto minore è il modulo del lavoro speso nel ciclo, a parità di calore Q_A assorbito.

Un ciclo di Carnot percorso in senso inverso costituisce un esempio di ciclo frigorifero reversibile.



Il gas assorbe il calore $Q_A = nRT_1 \ln \frac{V_c}{V_d}$ dalla sorgente alla temperatura T_1 (sorgente fredda) e cede il calore $Q_C = nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_B}$ alla sorgente alla temperatura T_2 (sorgente calda), assorbendo il lavoro $W = Q_A + Q_C$. L'efficienza è

$$\xi = \frac{Q_A}{|Q_C + Q_A|} = \frac{nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_D}}{nRT_2 \ln \frac{V_B}{V_A} - nRT_1 \ln \frac{V_C}{V_D}} = \frac{T_1}{T_2 - T_1}$$

ricordando che $\frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D}$.

Anche per i cicli frigoriferi sono verificati alcuni fatti di carattere generale: il calore ceduto dal sistema alle sorgenti calde è sempre maggiore, in modulo, di quello assorbito, cioè sottratto alla sorgente fredda e quindi il processo avviene sempre in presenza di lavoro fornito dall'ambiente al sistema ($Q_A + |W| = |Q_C|$). Si tratta di un altro aspetto del secondo principio.

Teoria cinetica dei gas

Le proprietà elastiche dei gas e l'esistenza della pressione esercitata da un gas sulle pareti del recipiente che lo contiene avevano suggerito, fin dai tempi di Newton, che i gas fossero composti da particelle in continuo movimento. L'idea era stata sviluppata da Bernoulli intorno al 1740 e infine Joule, nel 1848, era stato in grado di arrivare a una espressione per la pressione di un gas contenuto in un dato volume.

Le ipotesi di partenza del modello cinetico del gas ideale, enunciate in termini moderni, sono le seguenti:

- un gas è costituito da molecole eguali, in moto continuo e disordinato
- gli urti tra molecole e tra molecole e pareti del contenitore sono elastici
- non ci sono forze intermolecolari, se non durante gli urti: gli urti sono dovuti cioè a forze repulsive a corto raggio di azione, mentre si assumono trascurabili le forze attrattive agenti tra le molecole
- le dimensioni delle molecole sono molto piccole rispetto alle distanze medie tra di esse

Con **moto disordinato** si intende che, in media, considerato un certo numero di molecole che si muovono concordemente in una certa direzione, esiste lo stesso numero di molecole che si muovono nella stessa direzione con verso opposto, e tale condizione è valida indipendentemente dalla direzione scelta.

Sulla base della prima ipotesi, in ogni istante (moto continuo), considerata una qualsiasi direzione orientata \bar{u} , ci sono tante molecole che hanno velocità concorde a \bar{u} quante hanno velocità discorde a \bar{u} (definizione di moto disordinato); la velocità media \bar{v}_m è quindi nulla. Infatti, macroscopicamente, un gas chiuso in un recipiente è in quiete, $\bar{P} = M\bar{v}_{CM} = 0$. Il moto disordinato implica anche che le molecole siano distribuite in modo omogeneo in tutto il volume che occupa il gas; in qualunque punto ci mettiamo, il numero di molecole per unità di volume è sempre lo stesso (densità costante).

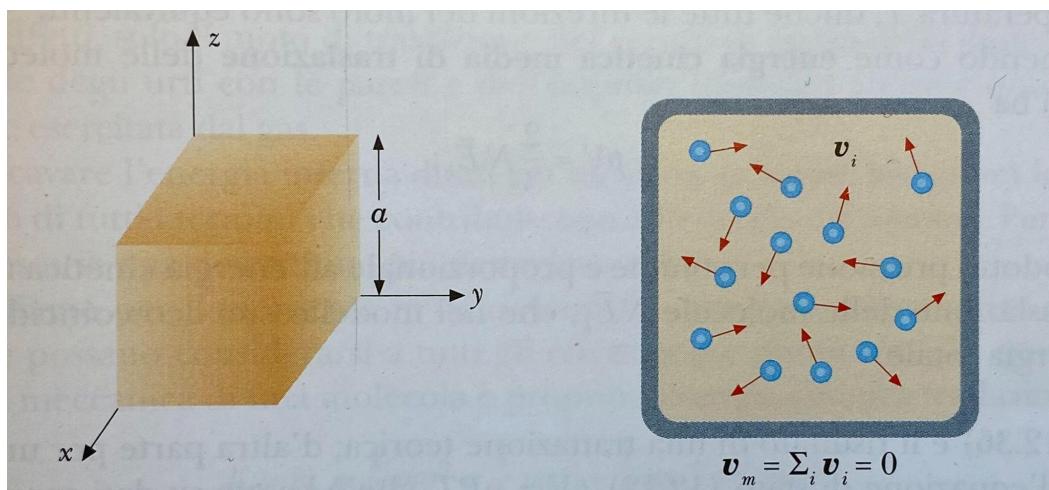
La seconda ipotesi implica che negli urti tra molecole si conservano quantità di moto ed energia, mentre nell'urto di una molecola contro una parete si conserva solo l'energia (le forze esterne impulsive modificano la quantità di moto).

Dalla terza ipotesi deriva che l'energia potenziale interna è nulla e quindi la sola forma di energia è quella cinetica delle molecole.

Infine, la quarta ipotesi indica che il volume totale occupato dalle molecole è trascurabile rispetto a quello del recipiente.

Sulla base del modello cinetico è stata sviluppata, nella seconda metà dell'800, la teoria cinetica dei gas, che permette di arrivare a previsioni sul comportamento dei gas, verificabili sperimentalmente.

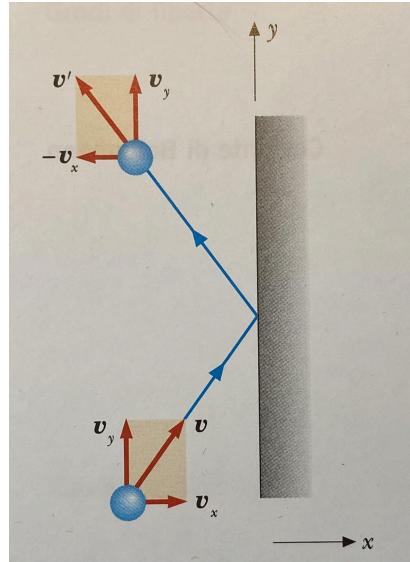
Si consideri un contenitore cubico di lato a riempito con un gas che si comporta come prescritto dal modello cinetico.



La velocità di una molecola è data da $\bar{v} = v_x \bar{u}_x + v_y \bar{u}_y + v_z \bar{u}_z$:

- $v_x \bar{u}_x$ è ortogonale alla parete yz
- $v_y \bar{u}_y$ è ortogonale alla parete xz
- $v_z \bar{u}_z$ è ortogonale alla parete xy .

Nell'urto elastico contro la parete yz cambia solo la componente $v_x \bar{u}_x$ che diventa $-v_x \bar{u}_x$, nel caso l'urto avvenga nel piano xy , mentre le altre rimangono invariate, data l'assenza di forze di attrito.



La variazione di quantità di moto nell'urto della molecola con la parete yz è pari a $-2mv_x \bar{u}_x$, se m è la massa della molecola, e quindi l'impulso comunicato alla parete è $2mv_x \bar{u}_x$.

L'urto successivo contro la parete yz considerata avviene dopo un tempo $\Delta t = 2\frac{a}{v_x}$, necessario per attraversare nei due sensi il cubo lungo la direzione x . In realtà non è la stessa molecola che compie l'urto successivo perché nel tragitto $2a$ essa può subire un urto contro un'altra molecola e venire deviata. Tuttavia, a causa del moto completamente disordinato (prima ipotesi), per una molecola che perde la componente v_x ce n'è un'altra che, a seguito di un urto, acquista tale componente v_x .

Pertanto il numero di urti al secondo sulla parete yz è dato da $\frac{1}{\Delta t} = \frac{v_x}{2a}$ e l'impulso comunicato in un secondo, pari alla componente x della forza esercitata sulla parete da ogni molecola, vale in modulo

$$F_x = 2mv_x \frac{v_x}{2a} = \frac{mv_x^2}{a}$$

La forza risultante sulla parete è data dalla somma delle forze delle singole molecole ed è

$$R_x = \sum_i F_{x,i} = \frac{m}{a} \sum_i v_{x,i}^2$$

dove la somma è estesa a tutte le molecole; la pressione sulla parete yz di area $S = a^2$, dovuta agli urti molecolari, risulta essere quindi

$$p = \frac{R_x}{S} = \frac{m}{a^3} \sum_i v_{x,i}^2 = \frac{Nm}{V} \frac{1}{N} \sum_i v_{x,i}^2$$

dove N è il numero totale di molecole nel cubo di volume $V = a^3$.

Si chiama **velocità quadratica media** la quantità $v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$, definita come radice quadrata della media dei quadrati delle velocità.

Per la media dei quadrati delle velocità vale:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_i (v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2)$$

Se il moto è completamente disordinato non c'è alcuna direzione preferita per le molecole e pertanto i valori medi quadratici $\langle v_x^2 \rangle$, $\langle v_y^2 \rangle$ e $\langle v_z^2 \rangle$ sono eguali tra loro:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

In conclusione si ha l'**equazione di Joule-Clausius-Krönig**

$$p = \frac{Nm}{V} \langle v_x^2 \rangle = \frac{Nm}{V} \frac{\langle v^2 \rangle}{3} \Rightarrow pV = \frac{1}{3} N m \langle v^2 \rangle$$

Il ragionamento è identico per quanto riguarda gli urti sulle altre pareti e si estende a contenitori di forma qualunque. Il risultato è generale, nel senso che non dipende da come sono distribuite le velocità delle singole molecole in un gas alla temperatura T , finché tutte le direzioni del moto sono equivalenti.

Definendo come **energia cinetica media di traslazione** delle molecole $\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$ si ha

$$pV = \frac{2}{3} N \langle E_k \rangle$$

il prodotto pressione per volume è proporzionale all'energia cinetica media di traslazione delle molecole $N \langle E_k \rangle$, che nel modello cinetico coincide con l'energia totale

$pV = \frac{2}{3} N \langle E_k \rangle$ è il risultato di una trattazione teorica; d'altra parte per un gas ideale vale

l'equazione di stato $pV = nRT$, che è basata su dati sperimentali.

Eguagliando si trova

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} \frac{n}{N} RT = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T$$

dato che $n N_A = N$. Definendo la costante

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.3806 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

detta **costante di Boltzmann**, otteniamo:

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

l'energia cinetica media traslazionale di una molecola di un gas ideale è proporzionale alla temperatura del gas, espressa in kelvin

Se il modello cinetico è corretto (cosa che ancora non sappiamo confermare non avendo finora fatto delle previsioni verificabili sperimentalmente) abbiamo trovato il significato microscopico della grandezza temperatura:

la temperatura è proporzionale all'energia cinetica media di traslazione delle molecole ovvero, per un dato gas, al quadrato della velocità media quadratica, ovvero alla media dei quadrati delle velocità

Per calcolare il valore della velocità media quadratica previsto dal modello cinetico per un gas a temperatura T basta eguagliare $\langle E_k \rangle = \frac{3}{2}k_B T$ a $\langle E_k \rangle = \frac{1}{2}m \langle v^2 \rangle$:

$$v_{qm} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{A}}$$

avendo moltiplicato, per passare dal secondo al terzo membro, numeratore e denominatore per N_A , numero di Avogadro; ricordiamo che A è la massa molare del gas. I risultati per alcuni gas a 300 K sono riportati in tabella

TABELLA 12.4 *Velocità quadratiche medie*

| Gas | A (g/mol) | \bar{v} (m/s) |
|---------------|-------------|-----------------|
| idrogeno | 2 | 1934 |
| elio | 4 | 1368 |
| vapor d'acqua | 18 | 645 |
| azoto | 28 | 517 |
| ossigeno | 32 | 454 |

Fino ad ora abbiamo preso in considerazione esclusivamente il moto di traslazione di una molecola, senza considerare eventuali rotazioni od oscillazioni delle molecole. In effetti, solo il moto di traslazione del centro di massa della molecole è responsabile degli urti con le pareti e dell'impulso trasferito a esse e quindi della pressione esercitata dal gas.

Per ricavare l'energia interna di un gas ideale in generale bisognerà invece tener conto di tutti i termini che contribuiscono all'energia del sistema. Per fare ciò sarà necessaria una descrizione più dettagliata del gas.

Prendiamo per il momento in considerazione un gas monoatomico in cui le molecole possano considerarsi a tutti gli effetti come puntiformi. In questo caso l'energia meccanica di una molecola è proprio l'energia cinetica traslazionale:

$$E = E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2$$

L'energia meccanica è quindi costituita da tre termini quadratici indipendenti, relativi alle tre direzioni dello spazio. Diremo quindi che il sistema ha **tre gradi di libertà**. Calcolando il valor medio si ha:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{2}m\langle v_x^2 \rangle + \frac{1}{2}m\langle v_y^2 \rangle + \frac{1}{2}m\langle v_z^2 \rangle = \langle E_x \rangle + \langle E_y \rangle + \langle E_z \rangle$$

e teniamo conto della $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$, si ha:

$$\langle E_x \rangle = \langle E_y \rangle = \langle E_z \rangle = \frac{1}{3} \langle E_k \rangle$$

Il confronto con $\langle E_k \rangle = \frac{3}{2}k_B T$ fornisce la relazione

$$\langle E_x \rangle = \langle E_y \rangle = \langle E_z \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

Dunque per le molecole di un **gas monoatomico**, che presentano 3 gradi di libertà,

$\langle E_x \rangle = \langle E_y \rangle = \langle E_z \rangle = \frac{1}{2}k_B T$ stabilisce che a ciascun grado di libertà compete un'energia cinetica media

$$\langle E_l \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

Questa equazione, ricavata nel caso di un gas ideale monoatomico, ha in realtà un carattere più generale, risultando valida per sistemi più complessi.

Essa costituisce il **teorema di equipartizione dell'energia**:

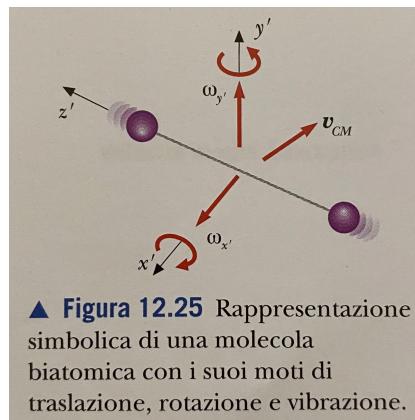
- *a ciascun grado di libertà della molecola di gas ideale compete l'energia media*

$$\langle E_l \rangle = \frac{1}{2}k_B T$$

- *le molecole di un gas ideale hanno un'energia media $\langle E \rangle = l \langle E_l \rangle = \frac{1}{2}lk_B T$*

avendo indicato con l il numero il numero di gradi di libertà della molecola (numero di coordinate che servono per descrivere il sistema).

Ad esempio, per un **gas ideale biatomico**, in comuni condizioni di temperatura la molecola può essere visualizzata come due punti materiali (i due atomi) vincolati a restare a una data distanza tra loro.



La sua energia è data da cinque contributi:

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2 + \frac{1}{2}I\omega_{x'}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{y'}^2$$

I primi tre termini sono legati al moto del centro di massa e gli ultimi due alla rotazione della molecola. Infatti solo due componenti rotazionali contribuiscono all'energia, ovvero ω_x e ω_y , mentre è da escludere il termine di rotazione attorno all'asse della molecola (asse z'), poiché il momento di inerzia rispetto a tale asse è da considerarsi nullo.

Il sistema descritto ha quindi cinque gradi di libertà, corrispondenti a cinque termini quadratici indipendenti che compaiono nell'espressione dell'energia di una molecola. Si ha quindi:

$$\text{gas biatomico} \quad l = 5 \quad \langle E \rangle = \frac{5}{2} k_B T$$

Ad alta temperatura entra in gioco anche il moto di vibrazione degli atomi lungo la congiungente, per cui si aggiungono due ulteriori contributi, uno relativo all'energia cinetica vibrazionale e uno relativo all'energia potenziale della forza elastica che determina la vibrazione. Avremo quindi un sistema con sette gradi di libertà.

$$\text{gas biatomico (con vibrazione)} \quad l = 7 \quad \langle E \rangle = \frac{7}{2} k_B T$$

Date quindi n moli di un gas ideale, l'energia interna è ottenuta moltiplicando l'energia di ciascuna molecola per il numero totale di molecole:

$$U = n N_A \frac{l}{2} k_B T = n \frac{l}{2} R T = N \frac{l}{2} k_B T$$

Il teorema di equipartizione dell'energia rimane valido anche per sistemi differenti dai gas ideali. Se ad esempio consideriamo un **cristallo** formato da atomi distribuiti con regolarità nello spazio, che oscillano attorno alle loro posizioni di equilibrio interagendo con gli atomi circostanti tramite forze di tipo elastico, l'energia di ogni atomo è esprimibile come

$$E = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) + \frac{1}{2} k_x x^2 + \frac{1}{2} k_y y^2 + \frac{1}{2} k_z z^2$$

dove k_x , k_y e k_z indicano le costanti elastiche caratteristiche del cristallo, associate alle tre componenti di oscillazione. Pertanto per l'atomo nel cristallo l'energia è data da tre termini quadratici legati all'energia cinetica e tre legati all'energia potenziale, corrispondenti a sei gradi di libertà

$$\text{Cristallo} \quad l = 6 \quad \langle E \rangle = 3k_B T$$

Per un gas ideale si ricava dalle $c_V = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT}$ e $U = n \frac{l}{2} R T$ il calore specifico molare a volume costante, avendo

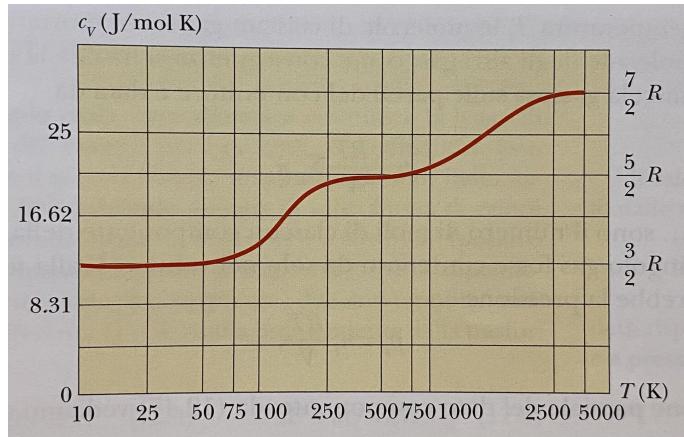
$$dU = n c_V dT \quad \text{e} \quad dU = n \frac{l}{2} R dT$$

dunque

$$c_V = \frac{l}{2} R$$

e di conseguenza

$$c_p = \frac{l+2}{2} R$$



In figura sono riportate misure del calore specifico molare c_V dell'idrogeno gassoso in funzione della temperatura. Il grafico sembra indicare che a bassa temperatura, $T < 100K$ le molecole siano dotate solo del moto traslazionale ($l = 3$); per temperatura comprese tra circa $250K$ e $1000K$ le molecole possano anche ruotare ($l = 5$) e infine per $T \approx 3000K$ gli atomi possano anche vibrare ($l = 7$).

Questa interpretazione è in contrasto con il modello cinetico del gas ideale, che non prevede che il calore specifico vari con la temperatura. La spiegazione risiede nel fatto che gli atomi sono stati trattati come un sistema classico di punti materiali e non secondo la meccanica quantistica. La meccanica quantistica spiega l'andamento $c_V(T)$ osservato e in particolare i salti discreti di c_V : $\frac{3}{2}R \rightarrow \frac{5}{2}R \rightarrow \frac{7}{2}R$, dovuti all'eccitazione di livelli di energia discreti alla molecola.

Un'altra applicazione del teorema di equipartizione dell'energia al calcolo dei calori specifici si ha per i solidi cristallini. In questo caso, l'energia del cristallo è

$$U = n N_A \frac{6}{2} k_B T = U = 3n N_A k_B T = 3nRT \text{ e } c_V = 3R$$

indipendentemente dalla composizione del solido. Ciò costituisce la regola di Dulong-Petit, a cui abbiamo accennato nel paragrafo della calorimetria, per la quale per tutte le sostanze all'aumentare della temperatura il calore specifico molare tende a $c_V = 3R \approx 25 \frac{J}{mol K}$.

Concludiamo ricordando che la previsione dell'equipartizione dell'energia, dovuta a Maxwell e Boltzmann, venne anche confermata dalle osservazioni di Perrin sul **moto browniano**, moto disordinato di particelle microscopiche in una sospensione colloidale. L'interpretazione del fenomeno è che le particelle siano urtate dalle molecole e che quindi esse riflettano con il loro moto il moto circolare.

//MANCA LEGGE DI DALTON

Significato cinetico di temperatura e calore

Il confronto del dato sperimentale, costituito dall'equazione di stato, con l'espressione calcolata per l'energia cinetica, ha suggerito il collegamento diretto tra temperatura ed energia cinetica

media del moto molecolare. Il successo del modello cinetico nella spiegazione dei vari fatti sperimentali porta a ritenere corretta questa interpretazione del concetto di temperatura e a estenderla.

L'ipotesi di base è dunque che le molecole di una qualsiasi sostanza siano, compatibilmente con i vincoli a cui sono sottoposte, in moto continuo e disordinato, detto **moto di agitazione termica**. La temperatura è l'espressione dell'energia media di questo moto, sia che si tratti delle molecole di un gas, di quelle di un liquido o degli ioni che costituiscono il reticolo cristallino di un solido.

A differenza di quanto avviene in un gas ideale, in un gas reale si manifesta l'interazione tra le molecole con la dipendenza dell'energia interna dalla pressione, ovvero dal numero di molecole per unità di volume e quindi dalla loro distanza.

Nei liquidi e nei solidi il legame tra le molecole e gli atomi viene evidenziato dalla presenza di calori latenti nei cambiamenti di fase solido-liquido e liquido-vapore, che hanno il significato di energia necessaria a vincere le forze intermolecolari.

All'agitazione termica si riconduce anche il meccanismo di scambio di energia che chiamiamo calore. La trasmissione di calore da un corpo caldo a uno freddo, o all'interno di uno stesso corpo dalle zone più calde a quelle più fredde, cioè in presenza di un gradiente di temperatura, si spiega in termini di cessione di energia meccanica negli urti che avvengono tra le molecole. Si comprende quindi, anche intuitivamente, la ragione per cui il calore passa spontaneamente da un corpo caldo a uno freddo e non avviene il contrario.

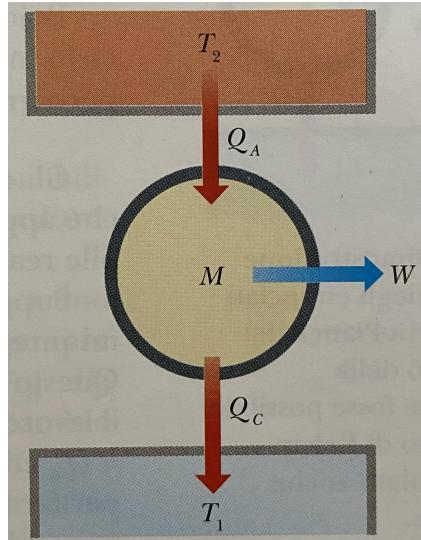
Secondo principio della termodinamica

Enunciati del secondo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica non pone limiti alle trasformazioni di energia da una forma all'altra, però la situazione sperimentale non appare simmetrica: mentre è sempre possibile trasformare integralmente lavoro in calore (per esempio sfruttando l'attrito), la trasformazione contraria di calore in lavoro sembra essere limitata, indipendentemente dal primo principio.

Il problema pratico della trasformazione di "calorico in forza motrice" portò Carnot, già nel 1824, a formulare i fondamenti del secondo principio della termodinamica.

Prendiamo in esame il caso di una macchina che compie un ciclo termico scambiando calore con due sorgenti. Si verifica sempre la situazione schematizzata in figura



ovvero: il calore scambiato complessivamente dal sistema, che viene utilizzato per far funzionare la macchina M , con le due sorgenti di calore alle temperature T_1 e T_2 (con $T_2 > T_1$) è dato dalla somma di una quantità Q_A , assorbita dalla sorgente a temperatura maggiore, e di una quantità Q_C , ceduta alla sorgente a temperatura minore. Si osserva che è sempre $Q_C < 0$, cioè non succede mai $Q_C = 0$ o $Q_C > 0$. Questo risultato comporta che Q_A non viene trasformato integralmente in lavoro, ma una parte Q_C viene sempre ceduta alla sorgente a temperatura inferiore. Il lavoro è $W = Q_A + Q_C$, in accordo con il primo principio (visto che $\Delta U = 0$ in un processo ciclico), però non si ha mai $W = Q_A$, bensì $W < Q_A$.

Nel caso ci siano più sorgenti con cui la macchina M scambia calore la situazione è analoga: la somma dei calori assorbiti non si trasforma mai totalmente in lavoro, una parte viene sempre ceduta restando cioè sotto forma di calore scambiato. Non esistono esempi contrari: in un processo ciclico vi è un'impossibilità di trasformazione integrale di calore in lavoro ovvero la trasformazione di calore in lavoro è sempre accompagnata da cessione di calore.

Se il processo non è ciclico è possibile ottenere una trasformazione integrale di calore in lavoro, però essa non è l'unico risultato finale del processo considerato, in quanto si verifica sempre una variazione dello stato termodinamico del sistema. Per esempio, in una espansione isoterma di un gas ideale, $\Delta U = 0$ perché T è costante e quindi $W = Q$, però lo stato finale del gas differisce da quello iniziale dato che il volume è aumentato e la pressione diminuita. Se volessimo riportare il gas nello stato iniziale, con una generica trasformazione, per costruire un ciclo termico, dovremmo assorbire lavoro e cedere calore, ricadendo nel caso precedente.

Accanto all'impossibilità finora discussa esiste un'altra impossibilità sperimentale. Se consideriamo due corpi a temperatura diversa e li mettiamo a contatto termico, c'è sempre una cessione di calore dal corpo caldo al corpo freddo fino a che si raggiunge l'equilibrio termico. Il calore non passa mai spontaneamente dal corpo freddo al corpo caldo. È possibile fare

avvenire questo passaggio, come si realizza in una macchina frigorifera, ma deve essere eseguito un lavoro sulla sostanza che compie il ciclo.

Il secondo principio della termodinamica consiste nel prendere atto di queste impossibilità sperimentali, che non presentano eccezioni conosciute, e nel trasformarle in postulati, secondo i seguenti enunciati.

Enunciato di Kelvin-Planck

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato la trasformazione in lavoro del calore fornito da una sorgente a temperatura uniforme

Enunciato di Clausius

È impossibile realizzare un processo che abbia come unico risultato il trasferimento di una quantità di calore da un corpo a un altro a temperatura maggiore

L'aggettivo **unico** utilizzato nei due enunciati è essenziale: abbiamo infatti già visto negli esempi dell'espansione isoterma di un gas ideale e del ciclo frigorifero che i processi proibiti dal secondo principio sono possibili, se non costituiscono l'unico risultato.

Conseguenza immediata del secondo principio, nell'enunciato di Kelvin-Planck, sono i fatti già evidenziati: in un processo ciclico per produrre effettivamente lavoro sono necessarie sempre almeno due sorgenti, cioè non può sussistere il risultato $Q_C = 0$ e quindi vale sempre (secondo $\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$) $\eta < 1$.

In particolare, per un processo ciclico che si svolge utilizzando una sola sorgente, detto anche **ciclo monotermo**, non essendo possibile assorbire calore e produrre lavoro senza violare il secondo principio, devono valere le diseguaglianze

$$Q \leq 0 \quad W \leq 0$$

Pertanto il sistema che compie il ciclo monotermo assorbe lavoro dall'ambiente esterno e cede calore alla sorgente, ossia trasforma integralmente lavoro in calore, senza limite alcuno, oppure non ha scambi energetici, $Q = 0$ e $W = 0$.

Se il ciclo monotermo è reversibile esso può venire percorso in senso contrario, e come sappiamo dalle trasformazioni termodinamiche e dal lavoro termodinamico, in tal caso gli scambi di calore e lavoro cambiano di segno: dovrebbero valere allora le diseguaglianze

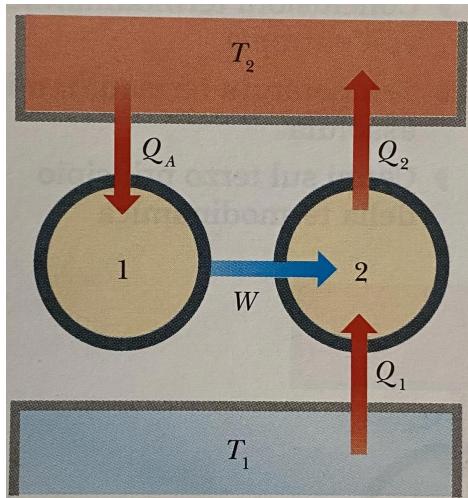
$$Q \geq 0 \quad W \geq 0$$

Poiché il segno di maggiore è in contrasto con il secondo principio, per un ciclo monotermo reversibile deve essere sempre, indipendentemente dal verso di percorrenza,

$$Q = 0 \quad W = 0$$

Gli enunciati di Kelvin-Planck e di Clausius, pur se riferiti a fatti sperimentali che appaiono molto diversi, sono strettamente connessi in quanto se fosse possibile realizzare uno dei due processi proibiti sarebbe possibile realizzare anche l'altro.

Supponiamo infatti che sia possibile realizzare un processo ciclico che trasformi integralmente calore in lavoro, in contrasto con l'enunciato di Kelvin-Planck.



Questo fatto è rappresentato nella figura, dove la macchina termica 1 produce il lavoro W trasformando il calore Q_A assorbito dalla sorgente a temperatura T_2 : $W = Q_A$ ed è nulla la cessione di calore alla sorgente fredda. Utilizziamo il lavoro W per far funzionare una macchina frigorifera, che preleva il calore Q_1 dalla sorgente a temperatura T_1 e cede il calore Q_2 alla sorgente a temperatura $T_2 > T_1$. Questa seconda macchina non contraddice l'enunciato di Clausius dato che nel processo interviene il lavoro $W' = -W$ fatto sul sistema (il lavoro W è fatto dalla macchina 1 ed è positivo, mentre W' è subito dalla macchina 2 ed è negativo: le due quantità sono eguali in modulo, ma opposte in segno). Il bilancio della macchina 2, sulla base del primo principio, è

$$Q_1 + Q_2 = W' = -W$$

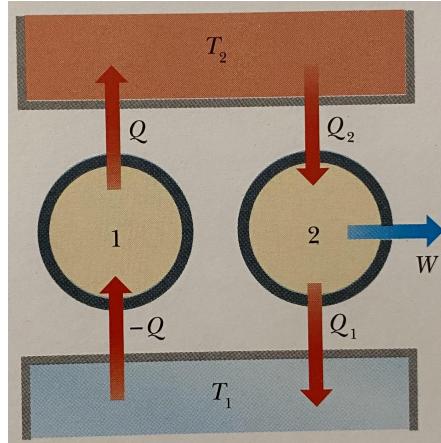
La macchina complessiva, costituita dall'insieme delle due macchine, assorbe Q_1 a temperatura T_1 e scambia

$$Q_A + Q_2 = W + Q_2 = -Q_1$$

a temperatura T_2 .

Se Q_1 è assorbito, $-Q_1$ è ceduto. Il lavoro complessivo della macchina è nullo in quanto non c'è scambio di lavoro con l'ambiente esterno e l'unico risultato pertanto è il passaggio spontaneo di calore dalla sorgente a temperatura inferiore a quella a temperatura superiore, violando l'enunciato di Clausius.

Supponiamo ora di poter realizzare una macchina che come unico risultato faccia passare il calore Q da una sorgente a temperatura T_1 a un'altra temperatura $T_2 > T_1$ e consideriamo una seconda macchina che lavori normalmente tra le due sorgenti, in accordo col secondo principio.



Dimensioniamo questa seconda macchina in modo che $Q_1 = Q$, cioè in modo da cedere alla sorgente a T_1 lo stesso calore che viene assorbito dalla prima macchina. Pertanto alla fine di un ciclo della macchina complessiva la sorgente a T_1 non scambia calore e il lavoro prodotto è dato da

$$W = Q_2 + Q_1 = Q_2 + Q$$

ed è positivo, perché $Q_2 > |Q_1| = |Q|$; tale lavoro è eguale al calore complessivamente scambiato con la sorgente a T_2 e in conclusione l'unico risultato è la trasformazione integrale in lavoro del calore assorbito da una sola sorgente (a temperatura T_2), violando l'enunciato di Kelvin-Planck.

L'unione dei risultati ottenuti costituisce la cosiddetta **equivalenza tra i due enunciati del secondo principio della termodinamica** nel senso che abbiamo visto: la negazione di uno ha come conseguenza la negazione dell'altro.

Si noti che nella dimostrazione dell'equivalenza tra gli enunciati abbiamo implicitamente ammesso che le macchine collegate tra loro per formare una complessiva compissero lo stesso numero di cicli nell'unità di tempo, ossia che a un ciclo completo di una corrispondesse un ciclo completo dell'altra. Si introduce questa ipotesi per semplicità e noi continueremo a farlo; peraltro i risultati ottenuti non dipendono da tale ipotesi. Sottolineiamo che esistono altri enunciati equivalenti del secondo principio: quelli di Kelvin-Planck e di Clausius sono quelli storicamente più importanti.

Avvertiamo infine che nel resto del capitolo quando useremo il termine macchina intenderemo, come in questo paragrafo, indicare un sistema che compie un ciclo termodinamico qualsiasi, in particolare termico o frigorifero, reversibile o irreversibile. Da un punto di vista solamente termico l'ambiente, per una macchina o un sistema di macchine, è costituito dall'insieme di sorgenti o di corpi con cui avvengono gli scambi di calore.

Reversibilità e irreversibilità

Nel capitolo dei sistemi termodinamici abbiamo posto l'attenzione, ai fini della reversibilità o irreversibilità di un processo, sulle caratteristiche di equilibrio degli stati termodinamici attraversati dal sistema. Estendiamo ora le nostre considerazioni all'ambiente.

Quando viene compiuta una trasformazione reversibile da uno stato A a uno stato B , con scambio della quantità Q_{AB} e W_{AB} tra il sistema e l'ambiente, è sempre possibile ripercorrerla in senso inverso, scambiando le quantità $-Q_{AB}$ e $-W_{AB}$: alla fine sistema e ambiente sono ritornati ai rispettivi stati iniziali, dato che lo scambio totale di calore e lavoro è nullo per entrambi.

L'argomento si estende ai cicli reversibili: alla fine di un ciclo il sistema torna sempre nello stato iniziale, ma l'ambiente ha subito una modifica perché ha, per esempio, ceduto calore e assorbito lavoro. Percorrendo il ciclo in senso inverso gli scambi energetici dell'ambiente sono eguali e opposti ed esso ritorna nello stato iniziale.

In generale possiamo dire che

una trasformazione reversibile non comporta alterazioni permanenti, nel senso che è sempre possibile riportare nei rispettivi stati iniziali il sistema e l'ambiente che con esso interagisce

La situazione è completamente diversa per le trasformazioni irreversibili, come ora discutiamo con alcuni esempi.

- Presenza durante il processo di effetti dissipativi dovuti alle forze di attrito, come avviene nello spostamento del pistone di un cilindro contenente un gas: contro le forze di attrito viene speso un certo lavoro W che alla fine ritroviamo trasformato integralmente in calore Q ceduto all'ambiente. Questo calore Q non può essere ritrasformato integralmente in lavoro: si è verificata una modifica permanente.
- Espansione libera di un gas: in essa $Q = W = 0$. Alla fine della trasformazione, se vogliamo riportare il gas nello stato iniziale possiamo utilizzare una compressione isoterma reversibile, che richiede un lavoro esterno. Il gas viene riportato nello stato iniziale, ma l'ambiente ha subito una modifica che non si può più recuperare.
- Passaggio di calore tra due corpi a contatto termico e che presentano una differenza finita di temperatura: alla fine si raggiunge l'equilibrio termico, senza produzione di lavoro, ma per ripristinare la situazione iniziale si dovrebbe fornire lavoro dall'esterno, per esempio utilizzando una macchina frigorifera reversibile.

Da questi, e da qualsiasi altro esempio, si conclude che

quando avviene una trasformazione irreversibile non è più possibile ritornare allo stato di partenza senza modificare il resto dell'universo

Il sistema può essere riportato allo stato iniziale attraverso altre trasformazioni, ma l'ambiente subisce una modifica irreversibile.

Commenteremo ulteriormente questa situazione nel paragrafo dell'energia inutilizzabile. Nel paragrafo del principio dell'aumento di entropia troveremo che questa definizione operativa di processo reversibile e irreversibile si traduce in una legge quantitativa che permette di classificare il processo in esame.

Le considerazioni esposte sono importanti perché nella pratica tutte le trasformazioni che avvengono in natura contengono fattori di irreversibilità. La rappresentazione di un fenomeno reale con una trasformazione reversibile costituisce quindi una idealizzazione del processo che permette di eseguire calcoli altrimenti impossibili e avere stime sulle grandezze in gioco, spesso sotto forma di limiti superiori.

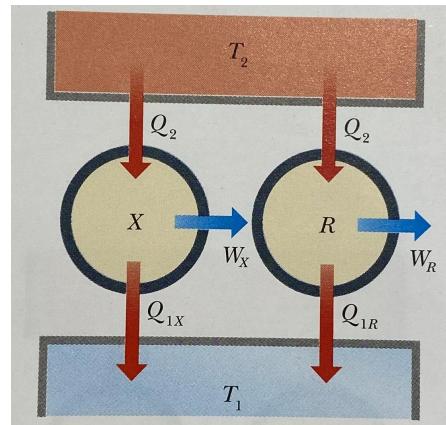
Teorema di Carnot

Il secondo principio è stato enunciato sulla base di due impossibilità, ma senza un'esplicita espressione matematica, come è invece avvenuto per il primo principio.

Il teorema di Carnot rappresenta una prima precisazione quantitativa dell'enunciato di Kelvin-Planck, in quanto fissa la massima percentuale di calore assorbito da una macchina termica che può essere trasformata in lavoro.

Consideriamo due macchine che lavorano utilizzando le stesse sorgenti di calore alle temperature T_1 e $T_2 > T_1$, dimensionate in modo tale da assorbire lo stesso calore Q_2 .

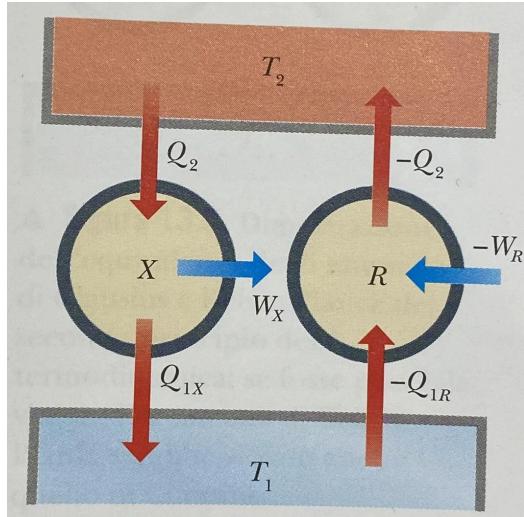
Indichiamo le due macchine con i simboli X e R : per la prima macchina non facciamo per ora alcuna ipotesi di reversibilità o irreversibilità, mentre assumiamo che la seconda sia reversibile.



I rendimenti delle due macchine sono, data l'ipotesi sul calore assorbito,

$$\eta_X = \frac{W_X}{Q_2}, \quad \eta_R = \frac{W_R}{Q_2}$$

Essendo la macchina R reversibile, possiamo farla operare come macchina frigorifera, e i valori del lavoro e dei calori scambiati cambiano di segno



In queste condizioni la sorgente a temperatura T_2 non scambia complessivamente alcun calore.

Per l'enunciato di Kelvin-Planck la macchina così realizzata non può produrre lavoro poiché scambia calore con un'unica sorgente (a temperatura T_1). Questo significa che:

$$W_X - W_R \leq 0 \quad \Rightarrow \quad W_X \leq W_R$$

per cui per i rendimenti, dati da $\eta_X = \frac{W_X}{Q_2}$ e $\eta_R = \frac{W_R}{Q_2}$, si ha:

$$\eta_X \leq \eta_R$$

Se anche la macchina X fosse reversibile, potremmo invece far funzionare la macchina X come macchina frigorifera al posto della macchina R . Percorrendo lo stesso ragionamento effettuato in precedenza troveremmo $\eta_X \geq \eta_R$. Questa disegualanza è compatibile con $\eta_X \leq \eta_R$ solo se

$$\eta_X = \eta_R$$

In conclusione il teorema di Carnot afferma che

- *tutte le macchine reversibili che lavorano tra le stesse sorgenti alle temperature T_1 e T_2 hanno rendimento eguale*
- *qualsiasi altra macchina che lavori tra le stesse sorgenti non può avere rendimento maggiore*
- *il risultato è indipendente dal particolare sistema che compie il ciclo*

Abbiamo già studiato una particolare macchina reversibile che lavora tra due sorgenti, il **ciclo di Carnot a gas ideale**, il cui rendimento è dato da

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Da $\eta_X = \eta_R$ deduciamo allora che $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$ rappresenta il rendimento di tutte le macchine reversibili che lavorano con due sole sorgenti, alle temperature T_1 e T_2 .

Fissate dunque le temperature delle sorgenti, T_1 e T_2 , con $T_2 > T_1$, per il teorema di Carnot

$$\eta_R = \eta_{max} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

ovvero la macchina reversibile è quella che sfrutta meglio l'energia fornita sotto forma di calore. Infatti, **a parità di calore assorbito Q_A , la macchina reversibile è quella che fornisce il lavoro massimo**

$$W_{max} = Q_A \eta_R = Q_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)$$

ovvero, **a parità di lavoro fornito, la macchina reversibile è quella che assorbe il minimo calore**

$$Q_{min} = \frac{W}{\eta_R} = \frac{W}{1 - \frac{T_1}{T_2}}$$

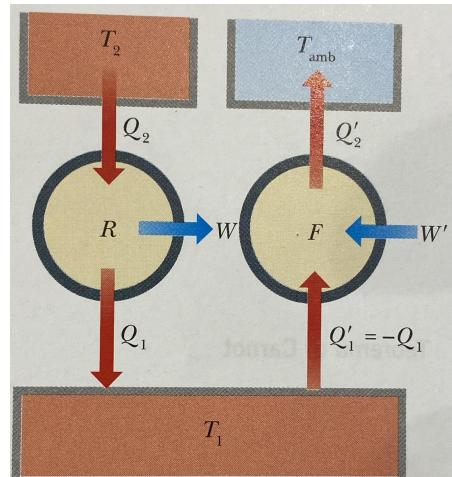
Il teorema di Carnot risulta valido anche per macchine che lavorano con più sorgenti: la macchina che funziona in modo reversibile è sempre quella il cui rendimento è il limite superiore dei rendimenti possibili; non esiste però una formula generale come $\eta_{max} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$.

Vediamo ora lo **studio del rendimento massimo**.

Vediamo come bisogna scegliere in pratica le temperature delle sorgenti, sulla base di

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_1}{T_2}, \text{ per ottenere un valore elevato di } \eta_{max}.$$

Una possibilità potrebbe essere di scegliere T_2 di poco superiore alla temperatura ambiente T_{amb} e $T_1 << T_{amb}$ ($T_1 = 0$ non è possibile, come vedremo). In tal caso però bisogna sottrarre il calore, ceduto durante il funzionamento della macchina, alla sorgente a bassissima temperatura, per evitare che T_1 cresca, e cederlo per esempio all'ambiente utilizzando una macchina frigorifera (non esiste una sorgente reale che resti spontaneamente a T_1 se $T_1 << T_{amb}$).



Realizziamo allo scopo il processo rappresentato in figura in cui la macchina frigorifera F assorbe dalla sorgente a T_1 esattamente il calore ceduto da R alla stessa sorgente. La macchina complessiva, costituita dalle macchine R e F , non scambia calore con la sorgente a T_1 , assorbe Q_2 dalla sorgente a T_2 e cede Q_2' all'ambiente alla temperatura T_{amb} . Essa produce il lavoro $W + W' < W$, in quanto W' , assorbito dalla macchina F , è negativo. Il rendimento è pertanto dato da

$$\eta = \frac{W+W'}{Q_2} = \frac{Q_1+Q_2-Q_1+Q_2'}{Q_2} = \frac{Q_2+Q_2'}{Q_2} = 1 + \frac{Q_2'}{Q_2}$$

come se si utilizzassero soltanto le due sorgenti alle temperature T_2 e T_{amb} ; è quindi inutile servirsi di una sorgente molto fredda, se quello che conta è il bilancio energetico globale.

L'unica scelta praticabile dunque è $T_2 \gg T_1 \simeq T_{amb}$, il che comporta l'uso di sorgenti calde, naturali o artificiali (in qual caso occorre spendere energia per mantenerle).

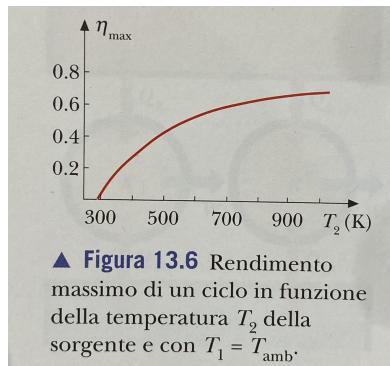


Figura 13.6 Rendimento massimo di un ciclo in funzione della temperatura T_2 della sorgente e con $T_1 = T_{amb}$.

La dipendenza di η_{max} da T_2 è rappresentata in figura, con $T_1 = 290K$; $\eta = 0.5$ è raggiunto per $T_2 = 2T_1 = 580K$. Si vede che anche per elevati valori di T_2 il rendimento ideale resta significativamente minore di 1.

Dato che tutte le macchine reali sono irreversibili, una qualsiasi macchina che lavori tra due sorgenti ha un rendimento inferiore a quello dato da $\eta_{max} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$. La presenza di forze di attrito impedisce l'utilizzazione completa del lavoro prodotto, una parte del quale si trasforma invece in calore. Inoltre la sostanza che compie il ciclo si trova in realtà, durante l'espansione isoterma, a una temperatura T_2' inferiore a quella T_2 della sorgente, mentre nella compressione isoterma è a una temperatura $T_1' > T_1$. In queste condizioni il rendimento effettivo massimo è:

$$\eta' = 1 - \frac{T_1'}{T_2'} < 1 - \frac{T_1}{T_2} = \eta_R$$

Teorema di Clausius

Ricaviamo ora un'importante relazione tra i calori scambiati e le temperature delle sorgenti di una data macchina termica. Analizziamo inizialmente il caso in cui la macchina scambi calore

con due sole sorgenti. Data una macchina termica X che lavora tra le temperature T_1 e $T_2 > T_1$, abbiamo visto dal teorema di Carnot che:

$$\eta_R \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

dove vale il segno di uguaglianza se la macchina è reversibile. Utilizzando la $\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$, valida per qualunque macchina operante con le due sorgenti, otteniamo:

$$1 + \frac{Q_1}{Q_2} \leq 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Semplificando gli 1 e moltiplicando per $\frac{Q_2}{T_1}$ si ha quindi:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

ovvero

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{Q_i}{T_i} \right) \leq 0$$

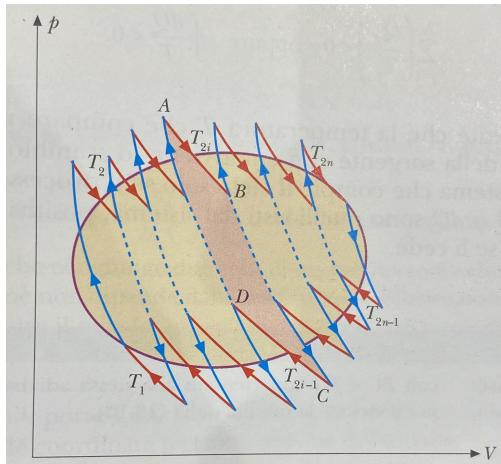
e in particolare se la macchina è reversibile si ha

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$$

ovvero

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{Q_i}{T_i} \right) = 0$$

Questi due risultati possono essere estesi e generalizzati a macchine operanti con più sorgenti di calore.



In figura è rappresentato un ciclo reversibile di un gas ideale di forma qualunque. Come mostrato in figura suddividiamo il ciclo in una serie di cicli di Carnot contigui operanti alle temperature indicate (le linee rosse rappresentano delle isoterme, quelle blu delle adiabatiche). In questa maniera possiamo generalizzare la diseguaglianza ottenuta precedentemente ad un ciclo qualsiasi.

Questa suddivisione approssima tanto meglio il ciclo originario quanto maggiore è il numero n di cicli scelti. Tenuto conto che i tratti di adiabatica interni al ciclo vengono percorsi in versi opposti in due cicli contigui, per cui il loro contributo si elide, la figura stessa definisce una macchina che compie un ciclo di forma qualunque, costituito da una serie alternata di trasformazioni isoterme e adiabatiche, operante con $N = 2n$ sorgenti alla temperatura $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_{2n}$. Per

ciascuno di questi cicli vale la $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$:

$$\frac{Q_{2i}}{T_{2i}} + \frac{Q_{2i-1}}{T_{2i-1}} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

sommmando sugli n cicli si ottiene:

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{Q_{2i}}{T_{2i}} + \frac{Q_{2i-1}}{T_{2i-1}} \right) = 0$$

La stessa sommatoria si può scrivere in termini delle $N = 2n$ sorgenti

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{Q_j}{T_j} \right) = 0$$

Se gli scambi di calore avvengono in forma irreversibile per la $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$ la quantità tra

parentesi, ovvero $\frac{Q_{2i}}{T_{2i}} + \frac{Q_{2i-1}}{T_{2i-1}}$, risulta non maggiore di zero. In base alle considerazioni

sviluppate nel paragrafo sulla reversibilità e irreversibilità, possiamo assumere in generale che per le macchine irreversibili essa sia strettamente minore di zero, per cui si verifica la diseguaglianza:

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{Q_j}{T_j} \right) < 0$$

Affinché l'insieme degli n cicli coincida con il ciclo iniziale, che è reversibile, dobbiamo far tendere n a infinito e le trasformazioni di stato a ogni temperatura T_i , devono essere

infinitesime: i rapporti $\frac{Q_i}{T_i}$ devono essere sostituiti da $\frac{dQ}{T}$ per cui le sommatorie divengono

integrali estesi al ciclo $\oint \frac{dQ}{T}$.

I risultati ottenuti costituiscono nel loro complesso il **teorema di Clausius**, secondo il quale:

- *per una macchina che compie un **ciclo reversibile** si verifica:*

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{Q_j}{T_j} \right) = 0 \text{ oppure } \oint \frac{dQ}{T} = 0$$

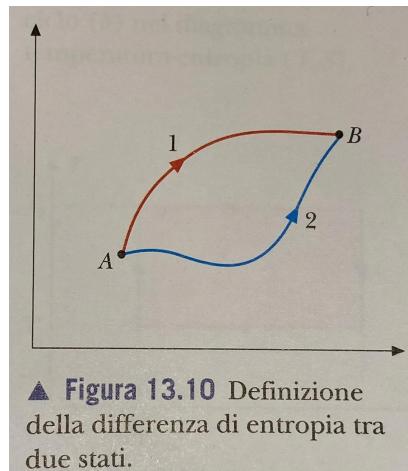
- *per una macchina che compie un **ciclo irreversibile** si verifica:*

$$\sum_{j=1}^N \left(\frac{Q_j}{T_j} \right) < 0 \text{ oppure } \oint \frac{dQ}{T} < 0$$

Si tenga presente che la temperatura T che compare in queste espressioni è quella della sorgente con cui avviene lo scambio: essa coincide con quella del sistema che compie il ciclo solo se il processo è reversibile. Inoltre i calori Q o dQ sono quelli visti dal sistema, positivi se il sistema li assorbe, negativi se li cede.

La funzione di stato entropia

Siano A e B due stati qualunque di un sistema termodinamico e passiamo da uno all'altro tramite due diverse trasformazioni reversibili, rappresentate dalle linee 1 e 2 della figura in un diagramma bidimensionale; per un gas si tratterebbe, ad esempio, del piano (p, V) .



Se percorriamo in senso inverso la trasformazione 2, abbiamo composto un ciclo reversibile, che si svolge da A a B lungo la prima trasformazione e da B ad A lungo la seconda.

Da il teorema di Clausius per un ciclo reversibile

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_2$$

L'ultimo passaggio discende dalla proprietà delle trasformazioni reversibili secondo cui il cambio di verso nella trasformazione comporta soltanto il cambio di segno degli scambi energetici.

Pertanto si ottiene

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_2$$

Essendo le trasformazioni 1 e 2 arbitrarie, possiamo concludere che

Il valore dell'integrale $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$, esteso a una qualunque trasformazione reversibile che

congiunge due stati di un sistema termodinamico, è sempre lo stesso, cioè non dipende dalla particolare trasformazione reversibile scelta per eseguire il calcolo, ma solamente dagli stati termodinamici iniziale e finale.

Si può quindi porre l'integrale eguale alla variazione di una funzione che dipende solo dalle coordinate termodinamiche del sistema.

Di conseguenza possiamo definire una funzione S tale che

$$S_B - S_A = \Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$$

La funzione di stato S così introdotta è detta **entropia** (il nome significa trasformazione in greco).

La definizione $\Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$ dà l'entropia a meno di una costante additiva arbitraria. Se fissiamo uno stato di riferimento O la cui entropia vale S_O , la variazione di entropia nel passaggio da O a uno stato qualsiasi P è

$$S_P - S_O = \int_O^P \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev} \Rightarrow S_P = S_O + \int_O^P \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$$

Ciò mostra che, come già visto per altre funzioni di stato (energia potenziale, energia interna), l'entropia in un determinato stato P è definita a meno di una costante S_O che dipende dalla scelta (arbitraria) dello stato di riferimento. Nel calcolo della variazione di entropia tra due stati però la costante arbitraria S_O si elide nel calcolo della differenza e quindi la variazione di

entropia $\Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$ è perfettamente definita.

La $\Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$ può essere scritta anche in forma infinitesima, cioè con riferimento a una trasformazione reversibile infinitesima, che implica una variazione infinitesima delle coordinate termodinamiche:

$$dS = \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$$

dQ non è un differenziale esatto (come già detto), però se tale quantità è divisa per T ed è considerata una trasformazione reversibile, essa dà luogo al differenziale esatto dS .

L'entropia è una quantità additiva. Dati due sistemi di entropia S_1 e S_2 , l'entropia complessiva è espressa da $S = S_1 + S_2$. Questa proprietà è conseguenza del fatto che l'energia interna complessiva dei due sistemi è la somma delle energie interne come pure il lavoro complessivo è la somma dei lavori, per lo meno se i sistemi sono indipendenti, pertanto anche il calore scambiato dal sistema complessivo è la somma dei calori scambiati e il risultato si estende all'entropia (si noti che la parte del ragionamento riguardante U , Q , W è stata utilizzata nei bilanci energetici delle macchine risultanti dalla composizione di più macchine). In particolare risulta che se si aumenta la massa di un sistema, l'entropia aumenta in proporzione. L'entropia quindi ha le caratteristiche di una grandezza estensiva.

Supponiamo ora di avere una trasformazione irreversibile che collega lo stato A allo stato B e di voler calcolare la variazione di entropia del sistema che descrive la trasformazione. Le considerazioni finora esposte ci danno le seguenti indicazioni:

- L'entropia degli stati iniziale e finale è certamente definibile, a partire ad esempio da un certo stato di riferimento
- Conseguentemente è definibile la variazione $S_B - S_A$
- La variazione $S_B - S_A$ non dipende dal tipo di trasformazione che collega A e B , ma solo dalle coordinate termodinamiche di A e B , in quanto l'entropia è una funzione di stato

Pertanto

per il calcolo della variazione di entropia in una trasformazione irreversibile da A a B è necessario scegliere una qualsiasi altra trasformazione reversibile che colleghi A e

$$B \text{ e applicare a questa } \Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$$

In conclusione, nell'evoluzione di un sistema da uno stato A a uno stato B l'entropia del sistema in generale cambia: la variazione non dipende dalle modalità dell'evoluzione (sia essa

reversibile o irreversibile), ma solo dagli stati A e B . La $\Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$ fornisce il metodo di

calcolo: la scelta della trasformazione reversibile AB da utilizzare è determinata solo da considerazioni sulla facilità del calcolo stesso.

L'unità di misura dell'entropia è $\frac{J}{K}$.

Vediamo ora i **diagrammi TS**.

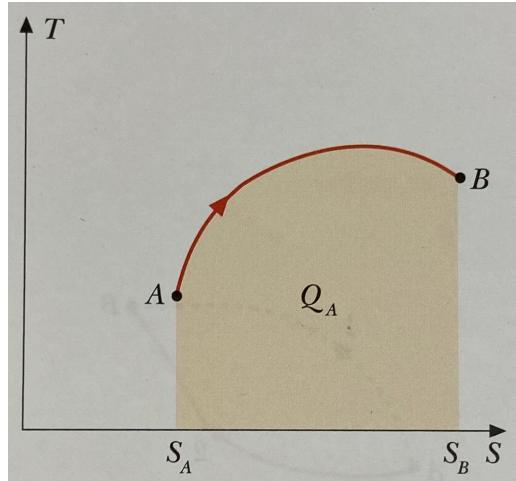
Osserviamo che l'entropia, essendo funzione di stato, può essere scelta come variabile indipendente (coordinata termodinamica) per descrivere, insieme a una seconda variabile indipendente opportunamente scelta, lo stato termodinamico di un sistema (se descrivibile con due sole variabili). Spesso viene considerata la coppia di variabili indipendenti S e T e tale scelta è giustificata dai seguenti motivi.

Nel piano (T, S) una trasformazione reversibile è rappresentata da un tratto di curva continua che fornisce il grafico della funzione $T(S)$. Il calore scambiato dal sistema che descrive la

trasformazione è, secondo $dS = \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$,

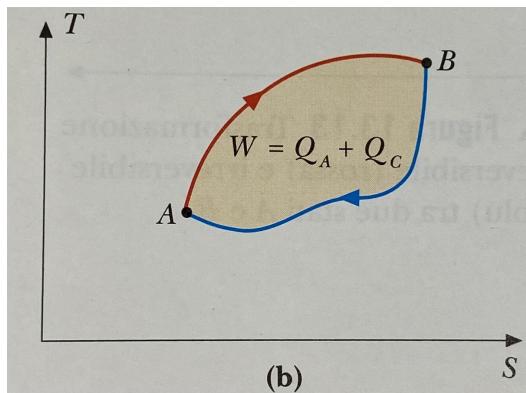
$$dQ_{rev} = T dS \quad \Rightarrow \quad Q_{rev} = \int_A^B T dS$$

con riferimento alla figura



Ne deriva che il calore scambiato nella trasformazione, assorbito se si passa da A a B ($S_B > S_A$), ceduto se invece si va da B ad A , è dato dall'area sotto la curva AB . Nel piano (T, S) il calore ha una semplice interpretazione grafica, come il lavoro nel piano (p, V) , se le trasformazioni sono reversibili.

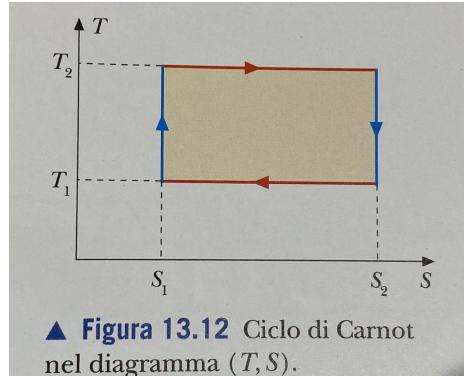
Un ciclo reversibile nel piano (T, S) delimita un'area che è pari alla somma algebrica dei calori scambiati in totale dal sistema, $Q_A + Q_C$, positiva se il ciclo è percorso in senso orario, negativa in caso contrario. Tale area rappresenta anche, per il primo principio, il lavoro compiuto.



Il rendimento di una macchina che compie un ciclo termico ha una semplice rappresentazione: esso è dato dal rapporto tra l'area racchiusa dal ciclo (W) e l'area totale sottesa dalla curva superiore (Q_A); risulta così evidente che il rendimento della macchina è inferiore all'unità.

Nel piano (T, S) una trasformazione isoterma reversibile è rappresentata da un segmento orizzontale ($T = \text{costante}$), una trasformazione adiabatica reversibile da un segmento verticale ($S = \text{costante}$): infatti in tal caso $dQ_{rev} = 0$ e, da $dS = \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev}$, $dS = 0$. **Una trasformazione adiabatica reversibile è dunque isoentropica, lungo di essa l'entropia del sistema non varia.**

Un ciclo di Carnot ha la forma di un rettangolo



▲ Figura 13.12 Ciclo di Carnot nel diagramma (T, S) .

e ricaviamo subito, da $Q_{rev} = \int_A^B T dS$, visto che le temperature sono costanti

$$Q_A = \int_{S_1}^{S_2} T dS = T_2(S_2 - S_1) \quad Q_C = \int_{S_1}^{S_2} T dS = T_1(S_1 - S_2)$$

e quindi

$$Q = Q_A + Q_C = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1) = W$$

e poi vale sempre

$$\eta = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Inoltre, ricaviamo $S_2 - S_1 = \frac{Q_A}{T_2} = -\frac{Q_C}{T_1}$, che è la $\Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev}$, e

$$W = (T_2 - T_1)(S_2 - S_1) = (T_2 - T_1)\frac{Q_A}{T_2}$$

che coincide con il lavoro massimo ottenibile lavorando alle due temperature

$$W_{max} = Q_A \eta_R = Q_A \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right), \text{ infatti}$$

$$(T_2 - T_1)\frac{Q_A}{T_2} = \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right)Q_A$$

Abbiamo così trovato come si calcola la variazione di entropia in due importanti trasformazioni.

In una isotermica reversibile alla temperatura T

$$\Delta S = \frac{Q}{T} \quad \text{isoterma reversibile}$$

essendo Q il calore scambiato; in una adiabatica reversibile

$$\Delta S = 0 \quad \text{adiabatica reversibile}$$

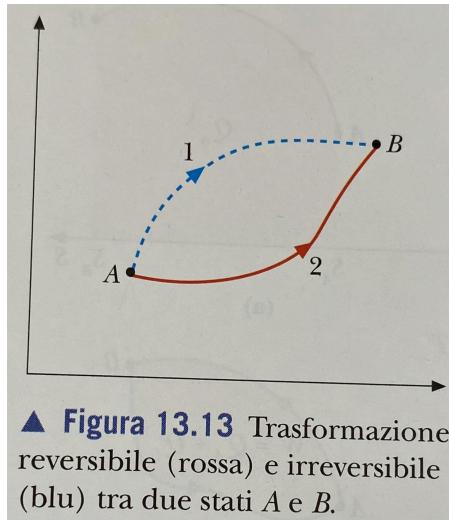
Ovviamente entrambe si ottengono anche direttamente da $\Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev}$.

Infine è evidente che per qualsiasi trasformazione ciclica la variazione di entropia della sostanza che descrive il ciclo è eguale a zero per definizione, essendo l'entropia funzione di stato:

$$\Delta S = 0 \quad \text{trasformazione ciclica}$$

Il principio di aumento dell'entropia

Ritorniamo alla situazione rappresentata all'inizio dello scorso paragrafo, assumendo però che la trasformazione 1 sia irreversibile, mentre la 2 resta reversibile.



Pertanto, percorrendo in senso inverso la trasformazione 2 (da B ad A), otteniamo un ciclo irreversibile (un ciclo si definisce irreversibile se anche solo una piccola parte lo è). Il teorema di

Clausius $\oint \frac{dQ}{T} < 0$ si scrive

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_1 + \int_B^A \left(\frac{dQ}{T} \right)_2 = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{irr} - \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev} < 0$$

L'integrale $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$ dà la variazione di entropia e quindi

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{irr}$$

È necessario soffermarsi con attenzione sul significato di questa espressione per evitare possibili equivoci. L'integrale $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ calcolato lungo una generica trasformazione irreversibile AB dipende dalla trasformazione e non ha nessun particolare significato fisico, salvo che dovrebbe obbedire a questa equazione e quindi essere sempre minore dell'integrale $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$, il quale invece è **indipendente dalla trasformazione**, purché **reversibile**, e definisce la variazione della funzione di stato entropia secondo $\Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$. In altre parole, se per una generica trasformazione AB effettivamente eseguita da un sistema siamo in grado di calcolare $\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)$, in generale il risultato non è eguale alla variazione di entropia $S_B - S_A$, ma minore; se vogliamo

calcolare $S_B - S_A$ per quella data trasformazione, dobbiamo servirci di **un'altra trasformazione AB reversibile**.

In termini infinitesimi la $S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{irr}$ si scrive
 $dS = \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev} > \left(\frac{dQ}{T} \right)_{irr}$

Se il sistema che descrive la trasformazione AB è isolato termicamente, cioè non scambia calore, si ha $dQ = 0$ e quindi

$$S_B - S_A \geq 0 \quad \Rightarrow \quad S_B \geq S_A$$

Questa relazione esprime il **principio di aumento dell'entropia**:

L'entropia di un sistema termicamente isolato non può diminuire: essa aumenta se la trasformazione è irreversibile, resta costante solo se la trasformazione è reversibile.

La sua formulazione infinitesima

$$dS \geq 0 \quad \text{sistema isolato}$$

costituisce una **formulazione matematica del secondo principio della termodinamica**.

Un sistema isolato si ottiene sempre quando si considera un sistema propriamente detto e il suo ambiente, cioè un universo termodinamico. Per l'universo termodinamico

$$\Delta S_u \geq 0 \quad \text{con } \Delta S_u = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb}$$

Se l'universo compie una trasformazione reversibile

$$\Delta S_u = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{sist} = -\Delta S_{amb}$$

se invece l'universo compie una trasformazione irreversibile

$$\Delta S_u > 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta S_{sist} \neq -\Delta S_{amb}$$

In particolare, quando la trasformazione è ciclica, sappiamo da $\Delta S = 0$ che $\Delta S_{sist} = 0$; allora,

$$\text{se il \textbf{ciclo} è reversibile} \quad \Delta S_u = \Delta S_{amb} = 0$$

$$\text{se il \textbf{ciclo} è irreversibile} \quad \Delta S_u = \Delta S_{amb} > 0$$

Una conclusione importante che si trae dai risultati appena esposti è che l'irreversibilità è sempre accompagnata da un aumento di entropia dell'universo. D'altra parte abbiamo già rilevato più volte che i processi naturali sono tutti sostanzialmente irreversibili. Possiamo quindi affermare che

ogni processo naturale si svolge necessariamente nel verso che determina un aumento dell'entropia complessiva del sistema e del suo ambiente.

L'evoluzione termina quando viene raggiunto il massimo valore dell'entropia compatibile con le condizioni fisiche di sistema e ambiente: tale stato corrisponde allo stato di equilibrio stabile.

Notiamo esplicitamente che l'aumento di entropia dell'universo, in presenza di trasformazioni irreversibili, non significa che l'entropia debba aumentare in tutte le varie parti del sistema e dell'ambiente che costituiscono l'universo termodinamico. In una o più parti l'entropia può diminuire, ma ce n'è almeno un'altra in cui aumenta, in modo da soddisfare la $S_B \geq S_A$.

Analoghe considerazioni valgono nei casi in cui l'entropia dell'universo resta costante.

Richiamiamo infine un uso pratico di $S_B - S_A \geq 0$ e $dS \geq 0$ nel caso di un processo reversibile.

Imporre $\Delta S_u = 0$ equivale a scrivere un'equazione tra quantità di calore scambiate e temperature che può diventare, come vedremo in molti esempi, un'equazione tra le coordinate termodinamiche, utile per determinarne una in funzione delle altre. Pertanto nella risoluzione di problemi, oltre a servirsi del bilancio energetico (primo principio), conviene sempre verificare, nel caso di processi reversibili, quali informazioni si possano ricavare dalla costanza dell'entropia dell'universo (secondo principio).

Calcoli di variazioni di entropia

In questo paragrafo trattiamo alcuni processi tipici, in cui sistemi costituiti da corpi solidi o liquidi scambiano calore tra loro o con sorgenti, e calcoliamo le corrispondenti variazioni di entropia. L'argomento è completato nel paragrafo dell'entropia dei gas ideali.

Trasformazioni adiabatiche

Un sistema che compie una trasformazione adiabatica costituisce un caso particolare di universo termodinamico isolato termicamente dall'ambiente: l'ambiente non scambia calore col sistema, ma soltanto lavoro; pertanto $\Delta S_{amb} = 0$ e

$$\Delta S_{sist} = \Delta S_u \geq 0$$

Se la trasformazione è reversibile $\Delta S_{sist} = 0$, la trasformazione cioè è isoentropica. Come già detto nel paragrafo sulla funzione di stato entropia, il risultato si ottiene anche direttamente dalla definizione $S_B - S_A = \Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$.

Per una trasformazione adiabatica irreversibile invece $\Delta S_{sist} > 0$, l'entropia aumenta. In effetti questa volta $dQ = 0$ non implica $dS = 0$: il calore scambiato lungo la trasformazione è nullo, però ΔS_{sist} non è calcolabile lungo questa trasformazione, bensì lungo un'altra con gli stessi estremi, ma reversibile, che non può essere adiabatica a sua volta. Questo perché due stati collegati con una adiabatica irreversibile hanno necessariamente entropia diversa e non possono quindi essere collegati con una adiabatica reversibile, che è isoentropica (e viceversa, due stati diversi per i quali è $\Delta S = 0$ non possono essere collegati con un'adiabatica irreversibile).

Scambi di calore con sorgenti

Consideriamo il caso della cessione di calore Q da una sorgente a temperatura T_2 a una sorgente a temperatura $T_1 < T_2$.

La sorgente che assorbe il calore Q ha una variazione di entropia

$$\Delta S_1 = \int_A^B \frac{dQ}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int_A^B dQ = \frac{Q}{T_1}$$

mentre per la sorgente a T_2 che cede il calore $-Q$ si ha

$$\Delta S_2 = -\frac{Q}{T_2}$$

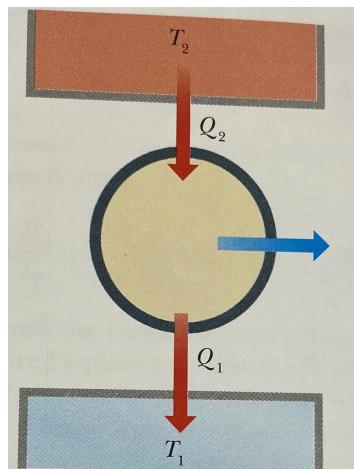
L'universo è costituito dalle due sorgenti e

$$\Delta S_u = \Delta S_1 + \Delta S_2 = \frac{Q}{T_1} - \frac{Q}{T_2} = Q \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right)$$

si verifica che la variazione è positiva, dato che $T_1 < T_2$. L'entropia della sorgente fredda è aumentata, quella della sorgente calda è diminuita, però $|\Delta S_2| < \Delta S_1$.

Il processo contrario è proibito perché comporterebbe una diminuzione dell'entropia dell'universo.

Il fenomeno descritto è irreversibile; esso si può realizzare ponendo a contatto termico le sorgenti per il tempo necessario a scambiare il calore Q . Comunque sia, per definizione il processo di scambio di calore da parte di una sorgente è isoterma; per tale ragione abbiamo utilizzato $\Delta S = \frac{Q}{T}$ nel calcolo di ΔS_1 e ΔS_2 , immaginando di compiere, per ciascuna sorgente, una trasformazione isoterma reversibile tra gli stessi stati iniziale e finale.



▲ **Figura 13.14** Passaggio di calore tra due sorgenti con l'impiego di una macchina termodinamica.

Un passaggio di calore tra due sorgenti avviene anche quando tra di esse lavora una macchina, secondo la figura. La variazione di entropia del sistema macchina è nulla in un ciclo; l'ambiente è costituito dalle due sorgenti e la variazione complessiva di entropia è

$$\Delta S_u = \Delta S_{amb} = -\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} = -\left(\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2}\right)$$

Il segno meno è dovuto al fatto che con Q_1 e Q_2 intendiamo i calori scambiati dal sistema, mentre ora stiamo calcolando la variazione di entropia dell'ambiente, per il quale i calori hanno segno opposto. Dalla $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$ vediamo che il termine tra parentesi non è positivo e quindi

$$\Delta S_u \geq 0, \text{ come deve. Se la macchina è reversibile vale } \sum_{j=1}^N \left(\frac{Q_j}{T_j} \right) = 0 \text{ e } \Delta S_u = 0, \text{ altrimenti } \Delta S_u > 0$$

Il ragionamento resta valido anche se la macchina della figura fosse frigorifera.

Consideriamo adesso lo scambio di calore tra un corpo di massa m , calore specifico c costante, temperatura T_1 e una sorgente a temperatura T_2 , con cui il corpo viene messo a contatto termico.

Il processo è irreversibile (non c'è equilibrio termico); per il calcolo della variazione di entropia del corpo immaginiamo un processo reversibile con scambio di calore tra il corpo e infinite sorgenti a temperatura crescente $T_1 + dT, T_1 + 2dT, \dots, T_2 - dT, T_2$. Con ciascuna sorgente

viene scambiato il calore $dQ = mc dT$ e, da $\Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$,

$$\Delta S_{sist} = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} mc \frac{dT}{T} = mc \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

Se $T_1 < T_2$ il corpo assorbe calore dalla sorgente e la sua entropia aumenta; se $T_1 > T_2$ il corpo invece cede calore alla sorgente e la sua entropia diminuisce.

Il calore scambiato dal corpo è

$$Q = mc(T_2 - T_1)$$

e quindi il calore scambiato dalla sorgente è $-Q$. La variazione di entropia della sorgente è

$$\Delta S_{amb} = -\frac{Q}{T_2} = \frac{mc(T_1 - T_2)}{T_2}$$

essa è di segno opposto rispetto a ΔS_{sist} ed è diversa in modulo.

La variazione di entropia dell'universo è data da

$$\Delta S_u = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} = mc \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{mc(T_1 - T_2)}{T_2}$$

ed è facile verificare che essa è sempre positiva, sia per $T_2 > T_1$ che per $T_2 < T_1$. Per esempio, nel caso $T_2 > T_1$,

$$dS_{sist} = \frac{mc \, dT}{T} \quad dS_{amb} = -\frac{mc \, dT}{T_2}$$

essendo sempre $T < T_2$ durante il processo, $dS_{sist} > |dS_{amb}|$ e la disegualanza si mantiene a integrazione effettuata:

$$\Delta S_{sist} = mc \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) > \frac{mc|T_2 - T_1|}{T_2} = |\Delta S_{amb}|$$

Quando $T_1 > T_2$, cambiano i segni delle variazioni di entropia ed è sempre $T > T_2$, per cui $dS_{amb} > |dS_{sist}|$ e si ottiene di nuovo $\Delta S_u > 0$.

Con un ragionamento quasi identico si verifica, per il corpo, $dS = \left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} > \left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr}$: infatti

$$\left(\frac{dQ}{T}\right)_{rev} = mc \frac{dT}{T}$$

mentre nel processo reale irreversibile la temperatura a cui avviene lo scambio di calore è la temperatura T_2 della sorgente per cui

$$\left(\frac{dQ}{T}\right)_{irr} = mc \frac{dT}{T_2}$$

Quando $T_2 > T_1$, dT è positivo, T è minore di T_2 , $\frac{dT}{T}$ è maggiore di $\frac{dT}{T_2}$; quando $T_2 < T_1$, dT è negativo, T è maggiore di T_2 e di nuovo $\frac{dT}{T}$ è maggiore di $\frac{dT}{T_2}$ (in modulo è minore, ma si tratta di numeri negativi).

Scambi di calore tra due corpi

Un corpo di massa m_1 , calore specifico costante c_1 e temperatura T_1 , viene messo a contatto, in un recipiente isolato termicamente, con un altro corpo di massa m_2 , calore specifico costante c_2 e temperatura $T_2 > T_1$. Avviene uno scambio di calore irreversibile, considerata la differenza iniziale di temperatura tra i due corpi (irreversibilità termica), e i due corpi raggiungono l'**equilibrio termico** alla temperatura T_e data da:

$$T_e = \frac{m_1 c_1 T_1 + m_2 c_2 T_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2}$$

Per le variazioni di entropia dei due corpi utilizziamo $\Delta S_{sist} = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} mc \frac{dT}{T} = mc \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$:

$$\Delta S_1 = m_1 c_1 \ln\left(\frac{T_e}{T_1}\right) > 0 \quad \Delta S_2 = m_2 c_2 \ln\left(\frac{T_e}{T_2}\right) < 0$$

L'intero processo è adiabatico (irreversibile) per cui $\Delta S_u = S_1 + S_2$ e si ha sempre $\Delta S_u > 0$.

Cambiamenti di fase

I cambiamenti di fase sono processi isotermi: mettendo insieme $\Delta S = \frac{Q}{T}$ e $Q = m\lambda$, la variazione di entropia di m chilogrammi di una sostanza che cambia fase alla temperatura T è

$$\Delta S = \frac{m\lambda}{T}$$

Riscaldamento per attrito

Riprendiamo dal paragrafo delle trasformazioni termodinamiche l'esempio del corpo il cui moto viene frenato da una forza di attrito. Il lavoro dissipativo W è eguale all'opposto della variazione di energia interna del corpo e del sistema che esercita la forza di attrito, secondo

$W_{ad} = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}$: $W = U_A - U_B$ e, siccome il lavoro è negativo, l'energia interna aumenta ($U_B > U_A$) e aumenta la temperatura da T_{amb} a T . Successivamente viene ceduto calore all'ambiente, $Q = U_A - U_B = W$ e la temperatura dei corpi che hanno partecipato al fenomeno ritorna al valore iniziale T_{amb} , così come U ritorna da U_B a U_A .

In definitiva i corpi hanno subito una trasformazione ciclica: la loro entropia è aumentata durante

$$\text{il riscaldamento ed è calcolabile con formule tipo } \Delta S_{sist} = S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} mc \frac{dT}{T} = mc \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right),$$

immaginando una cessione di calore reversibile al posto del processo reale adiabatico irreversibile; però durante la cessione di calore all'ambiente l'entropia dei corpi diminuisce e alla fine l'unica variazione di entropia diversa da zero è quella dell'ambiente, che riceve il calore $-Q$ (si ricordi che Q è negativo, in quanto è il calore ceduto dal corpo):

$$\Delta S_{amb} = -\frac{Q}{T_{amb}} = -\frac{W}{T_{amb}} = \Delta S_u > 0$$

Quello descritto è solo un caso particolare; è possibile mantenere costante la velocità del corpo con la fornitura di lavoro motore che bilanci il lavoro resistente (equilibrio dinamico nel moto uniforme reale) e ciò comporta una cessione continua di calore all'ambiente. Oppure si può considerare il caso dell'innalzamento stabile di temperatura di un corpo in quiete in cui si raggiunge un equilibrio energetico nel senso che il calore ceduto dal corpo all'ambiente è compensato dall'energia fornita al corpo attraverso fenomeni di attrito. In ogni situazione si verifica sempre $\Delta S_u > 0$, segnale dell'irreversibilità di questi processi.

Entropia del gas ideale

Consideriamo n moli di gas ideale che passano dallo stato $A (p_A, V_A, T_A)$ allo stato $B (p_B, V_B, T_B)$. Il calore scambiato nella trasformazione si esprime attraverso il primo principio:

$$dQ = n c_V dT + dW$$

Per il calcolo della variazione di entropia dobbiamo utilizzare una trasformazione AB reversibile e questo ci permette di servirci delle relazioni

$$dW = p dV, \quad pV = nRT \quad \Rightarrow \quad dW = nRT \frac{dV}{V}$$

Pertanto

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev} = \int_A^B n c_V \frac{dT}{T} + \int_A^B nR \frac{dV}{V}$$

Integrando si ottiene

$$S_B - S_A = n c_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) + nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Passando tramite l'equazione di stato e la relazione di Mayer si ottengono anche

$$\begin{aligned} S_B - S_A &= n c_V \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) + n c_p \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) \\ S_B - S_A &= n c_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) - nR \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) \end{aligned}$$

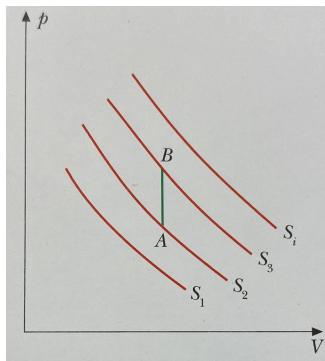
Dati gli stati iniziale e finale, la variazione di entropia di un gas ideale si può dunque scrivere utilizzando una qualsiasi delle espressioni viste, indipendentemente dalla trasformazione *AB* realmente avvenuta; si vede che in generale la variazione di entropia dipende da due coordinate termodinamiche. Dalle espressioni generali, viste prima, ricaviamo in particolare:

| | |
|-------------------------|---|
| trasformazione isoterma | $S_B - S_A = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = -nR \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)$ |
| trasformazione isocora | $S_B - S_A = n c_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = n c_V \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)$ |
| trasformazione isobara | $S_B - S_A = n c_p \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = n c_p \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right)$ |

Si noti come nell'integrazione che porta alle espressioni generali si sia assunto costante il calore specifico molare a volume costante (e la stessa assunzione è stata fatta nel paragrafo precedente per i calori specifici di corpi solidi o liquidi). Se questa ipotesi non è verificata si hanno formule particolari a seconda della dipendenza di c_V dalla temperatura, però la sostanza dei ragionamenti non cambia.

Trasformazioni adiabatiche

Nel piano (p, V) le adiabatiche reversibili formano la famiglia di curve $pV^\gamma = \text{costante}$, mostrate nella figura



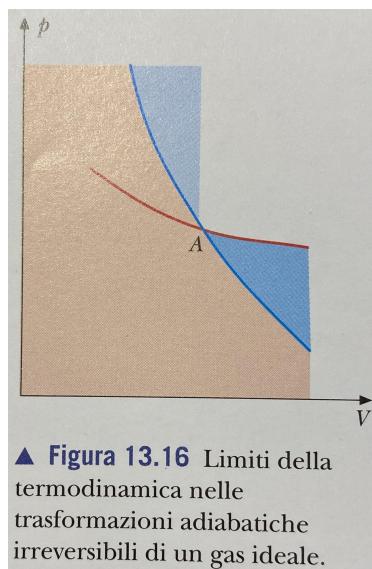
▲ Figura 13.15 Curve isoentropiche nel piano di Clapeyron.

A ciascuna curva compete un valore costante dell'entropia e per questo tali curve sono chiamate anche isoentropiche.

Si verifica che $S_1 < S_2 < S_3 < \dots < S_i$. Infatti, per esempio, $S_3 - S_2$, si calcola congiungendo con una qualsiasi trasformazione reversibile un generico punto della curva 2 con un generico punto della curva 3 (su una curva tutti i punti corrispondono a stati con la stessa entropia). Possiamo in particolare scegliere un'isocora per la quale, in base a $S_B - S_A = n c_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = n c_V \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right)$,

$$S_3 - S_2 = n c_V \ln\left(\frac{p_B}{p_A}\right) \quad \Rightarrow \quad S_3 > S_2, \text{ poiché } p_B > p_A$$

Trattiamo ora in generale le trasformazioni adiabatiche irreversibili di un gas ideale. Date n moli di gas nello stato A , tracciamo le curve corrispondenti a una isoterma reversibile e a una adiabatica reversibile passanti per A



Un'espansione adiabatica irreversibile che parte da A non può avere lo stato finale nella zona colorata al di sotto dell'isoentropica passante per A in quanto ciò comporterebbe una diminuzione di entropia, come discusso prima, mentre deve essere $\Delta S > 0$.

Inoltre la temperatura di tale stato finale è minore o uguale a T_A perché durante un'espansione adiabatica un gas si raffredda sempre, a meno che non si tratti di un'espansione libera che è isoterma (a parità di volume finale il raffreddamento è sempre minore per una adiabatica irreversibile che per una adiabatica reversibile). Gli stati finali stanno quindi sotto l'isoterma (per il primo principio) e sopra l'isoentropica (per il secondo principio), nella zona indicata col blu.

In una compressione adiabatica che parte da A lo stato finale deve sempre stare sopra l'isoentropica e deve avere volume minore di V_A : la zona a disposizione è quella indicata in azzurro; a parità di volume finale, il riscaldamento è maggiore nell'adiabatica irreversibile che in quella reversibile.

Le leggi della termodinamica pongono quindi vincoli ben precisi agli stati finali accessibili da un dato stato iniziale tramite una trasformazione adiabatica irreversibile. Si osservi inoltre che quando si passa tramite un'adiabatica irreversibile da uno stato A a uno stato B , con S_B necessariamente maggiore di S_A , non è più possibile ritornare in A adiabaticamente, né in modo reversibile nè in modo irreversibile, perché sarebbe in ogni caso $\Delta S < 0$ (tale osservazione è valida per qualsiasi sistema e non solo per il gas ideale, come del resto abbiamo già rilevato nel paragrafo sulla funzione di stato entropia). Possiamo dire che una trasformazione adiabatica irreversibile presenta una irreversibilità in senso stretto, cioè non è proprio possibile tornare allo stato iniziale con lo stesso tipo di trasformazione. Questo non è il caso di altre trasformazioni irreversibili: l'intervento dell'ambiente con le sue variazioni di entropia rende possibile il ritorno allo stato iniziale con lo stesso tipo di trasformazione (ma non necessariamente attraverso gli stessi stati) senza violare il principio di aumento dell'entropia dell'universo termodinamico.

Concludiamo con un'ultima osservazione, anch'essa di carattere generale. La figura mostra che, fissato lo stato iniziale, le coordinate termodinamiche dello stato finale di una trasformazione adiabatica, reversibile o irreversibile, devono soddisfare ben determinate condizioni: due stati termodinamici qualsiasi non sono in generale collegabili in modo adiabatico. Con riferimento al primo principio ci rendiamo conto che la situazione $W = -\Delta U$ è molto particolare, nel senso che la maggior parte delle trasformazioni di un sistema termodinamico avvengono solo se c'è anche scambio di calore.

Entropia e probabilità

Uno stato termodinamico è individuato dai valori delle coordinate termodinamiche; tuttavia esso può corrispondere a un numero molto grande di distribuzioni diverse della posizione e della velocità dei singoli elementi che lo compongono. Ad esempio, ai fini della pressione esercitata da un gas su una parete, è indifferente che l'urto sulla parete avvenga da parte di una molecola o di un'altra, purché con la stessa velocità: le due configurazioni microscopiche sono diverse, lo stato termodinamico è lo stesso.

Possiamo pertanto affermare che uno stato termodinamico corrisponde a N stati dinamici: N è un numero molto grande che viene anche indicato con il nome di **probabilità termodinamica**. Si ammette che sia più probabile uno stato termodinamico a cui corrisponde un maggior numero di stati dinamici e che un sistema tenda a evolvere naturalmente verso stati più probabili. Dato che un sistema (isolato) evolve verso stati con entropia maggiore, appare evidente che deve esistere un legame tra entropia e probabilità termodinamica. Tale relazione è stata enunciata per la prima volta da Boltzmann:

$$S = k_B \ln(N) + \text{costante}$$

dove k_B è la costante di Boltzmann.

La presenza del logaritmo si spiega intuitivamente tenendo conto che la probabilità è una grandezza moltiplicativa mentre l'entropia è additiva. Se un sistema si trova in uno stato A caratterizzato dal valore S_A dell'entropia e da una probabilità termodinamica N_A e un altro

sistema in uno stato B caratterizzato da S_B e N_B , l'insieme dei due ha entropia $S_A + S_B$ e probabilità termodinamica $N_A \cdot N_B$. Se c'è una relazione tra probabilità ed entropia, deve essere tale da trasformare un prodotto in una somma: la funzione logaritmo ha questa proprietà.

Un esempio classico sul numero di stati dinamici corrispondenti a un certo stato termodinamico è quello che considera n particelle distinguibili suddivise in due scatole eguali.

| TABELLA 13.1 Stati termodinamici per n piccoli | | | | | | | | |
|--|--------|-----|----------|--------|-----|----------|--------|-----|
| $n = 2$ | | | $n = 6$ | | | $n = 10$ | | |
| sinistra | destra | N | sinistra | destra | N | sinistra | destra | N |
| 0 | 2 | 1 | 0 | 6 | 1 | 0 | 10 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 5 | 6 | 1 | 9 | 10 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 4 | 15 | 2 | 8 | 45 |
| | | | 3 | 3 | 20 | 3 | 7 | 120 |
| | | | 4 | 2 | 15 | 4 | 6 | 210 |
| | | | 5 | 1 | 6 | 5 | 5 | 252 |
| | | | 6 | 0 | 1 | 6 | 4 | 210 |
| | | | | | | 7 | 3 | 120 |
| | | | | | | 8 | 2 | 45 |
| | | | | | | 9 | 1 | 10 |
| | | | | | | 10 | 0 | 1 |

Nella tabella indichiamo per alcuni piccoli valori di n i vari stati termodinamici differenti tra loro sulla base di quante particelle stanno a sinistra e quante a destra; N è il numero di stati dinamici corrispondenti a una certa partizione, cioè il numero di modi per realizzare questa partizione. Si vede che se n è il numero di particelle, $n + 1$ è il numero di stati termodinamici e $2n$ il numero totale di stati dinamici.

Il numero di stati dinamici corrispondenti a uno stato termodinamico con m particelle a destra e $n - m$ particelle a sinistra è dato dalla formula di calcolo combinatorio

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

che rappresenta il numero di combinazioni distinte di n oggetti a gruppi di m . Per esempio, la ripartizione di 6 particelle con 2 in una scatola si può fare in $N = 15$ modi diversi:

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = 15$$

N è massimo quando il numero di particelle è eguale nelle due scatole: lo stato più probabile corrisponde all'equipartizione.

Se con 6 particelle il rapporto tra la probabilità di una distribuzione uniforme e quella con una sola particella a destra (o a sinistra) è pari a $\frac{20}{6}$, con 10 particelle sale a $\frac{252}{10}$. Passando a 10^2 , $10^3, \dots$ particelle i rapporti di probabilità crescono molto rapidamente. L'esempio si presta molto bene per spiegare la ripartizione di un gas tra due contenitori comunicanti: se il numero di molecole fosse piccolo si potrebbero osservare fluttuazioni di densità nei contenitori, ma con un numero di molecole che è dell'ordine del numero di Avogadro si osservano solo stati assai prossimi all'equilibrio. Stati anche poco differenti da quelli più probabili non sono impossibili, ma sono talmente improbabili che non riusciremo mai a osservarli. Concludiamo che non solo il gas

non si concentrerà mai spontaneamente in un solo contenitore, ma che nemmeno piccolissime variazioni di densità nei due contenitori saranno osservate.

Un gas che compie un'espansione libera si trova inizialmente nelle condizioni della prima riga della tabella; alla fine della trasformazione lo troviamo equipartito tra i due contenitori. Il sistema è isolato e la sua entropia è aumentata; d'altra parte la probabilità termodinamica ha raggiunto il massimo valore possibile. La situazione è in realtà più complessa: anche nello stato termodinamico iniziale il numero di stati dinamici è enorme, perché le molecole non sono ferme; tuttavia nell'espansione gli stati dinamici aumentano: infatti la temperatura, e quindi l'energia cinetica media del moto molecolare restano costanti, però aumenta il volume e quindi aumentano le configurazioni geometriche possibili, a parità di distribuzione delle velocità.

Analogamente, un gas ideale che compie una generica espansione adiabatica irreversibile si raffredda, ma si espande e la probabilità termodinamica aumenta: l'aumento di volume predomina sulla diminuzione di temperatura; invece nella compressione adiabatica irreversibile è l'aumento di temperatura a essere più importante della diminuzione del volume, dal punto di vista del numero di stati dinamici disponibili (i due effetti si equivalgono soltanto se la trasformazione adiabatica è reversibile).

Passiamo a considerare un sistema gassoso non isolato, per esempio un gas che compie una trasformazione isocora: l'entropia del gas può aumentare o diminuire a seconda che venga ceduto o sottratto calore. In corrispondenza la probabilità termodinamica aumenta o diminuisce perchè, pur restando costante il volume, cambia la velocità media molecolare con la temperatura.

Accenniamo infine a una sostanza che cambia fase. Premettiamo che in un cambiamento di fase si ha un mutamento della struttura interna: da un solido spazialmente ordinato si passa a un liquido che, pur presentando un certo ordine su piccole distanze, è spazialmente disordinato e a un gas che è completamente disordinato e in cui ogni molecola ha a disposizione un volume notevole (circa 1000 volte maggiore che nel liquido, se guardiamo il rapporto delle densità). Il numero di stati dinamici aumenta in corrispondenza. Anche l'entropia aumenta: per far passare una sostanza dalla fase solida alla fase liquida occorre fornire una certa quantità di calore per unità di massa e ΔS è dato da $\Delta S = \frac{m\lambda}{T}$; altrettanto succede nella evaporazione e nella sublimazione. Nei processi inversi l'entropia della sostanza diminuisce e diminuisce la probabilità termodinamica.

La relazione di Boltzmann, che costituisce il collegamento tra la termodinamica macroscopica e la trattazione statistica dei fenomeni termici, suggerisce che le impossibilità sancite dal secondo principio derivino da enormi differenze di probabilità. Da questo punto di vista potremmo correttamente utilizzare il termine "estremamente improbabile" al posto di "impossibile" per dare maggiore precisione concettuale agli enunciati del secondo principio (però la realtà sperimentale resta quella descritta).

La discussione su entropia e probabilità termodinamica porta alla conclusione che il secondo principio, e il principio dell'aumento dell'entropia che a esso equivale, hanno origine dalla stessa composizione atomica della materia e dal fatto che gli atomi, o le molecole, sono in movimento continuo e incontrollabile. Attraverso gli urti eventuali differenze tendono a scomparire e un sistema isolato si porta verso stati in cui grandezze macroscopiche come temperatura e pressione sono uniformi, segno della completa casualità del moto molecolare. In questi stati più probabili il numero di stati dinamici corrispondenti è massimo e di conseguenza è massima la nostra ignoranza sul piano della conoscenza meccanica del moto molecolare.

La stessa irreversibilità meccanica o termica ha origine da questa situazione: una volta raggiunto l'equilibrio è praticamente impossibile, a causa del gran numero di molecole presenti e del loro moto completamente disordinato, che si verifichino le condizioni per trasferire stabilmente energia da una parte del sistema a un'altra, come sarebbe necessario per invertire una espansione libera o lo scambio di calore tra due corpi (tra cui l'enunciato di Clausius). Si può anche intuire come, in tal contesto, sia praticamente impossibile anche la trasformazione integrale di calore in lavoro, ossia il passaggio completo da una forma di energia più disordinata a una meno disordinata (da cui l'enunciato di Kelvin-Planck).

Energia inutilizzabile

Un fenomeno strettamente connesso con l'irreversibilità dei processi naturali e quindi con l'aumento di entropia dell'universo è la **degradazione dell'energia**, ovvero la perdita di disponibilità di lavoro.

Affrontiamo questo argomento discutendo prima alcuni esempi di processi che presentano irreversibilità meccanica o termica, che avvengono cioè in assenza di equilibrio meccanico o termico.

Espansione libera

Nell'espansione libera non c'è equilibrio meccanico; il gas non produce lavoro e non scambia calore, $W = Q = 0$, la sua temperatura resta costante e il suo volume aumenta. La variazione di entropia del gas, che coincide con quella dell'universo per l'adiabaticità del processo è

$$\Delta S_u = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

visto che la trasformazione è isoterma.

Potremmo collegare gli stati A e B con una trasformazione isoterma reversibile in cui il gas assorbe il calore Q alla temperatura T producendo il lavoro $W_{AB} = nRT \ln\frac{V_B}{V_A}$ (sempre per una trasformazione isoterma) e quindi

$$W_{AB} = T\Delta S_u$$

La differenza tra il lavoro che avremmo potuto ottenere operando in modo reversibile tra gli stessi stati e il lavoro effettivamente ottenuto è uguale al prodotto della variazione di entropia

dell'universo nella trasformazione irreversibile reale per la temperatura costante a cui avviene l'espansione:

$$W_R - W = T \Delta S_u$$

Passaggio di calore da una sorgente calda a una fredda

Il processo che consideriamo caso tipico di irreversibilità termica consiste nel sottrarre il calore Q a una sorgente a temperatura T_2 e cederlo a una sorgente a temperatura $T_1 < T_2$. Il lavoro prodotto in corrispondenza del passaggio di calore è nullo, $W = 0$. Abbiamo calcolato nel paragrafo del Calcolo delle variazioni di entropia che in questo processo

$$\Delta S_u = -\frac{Q}{T_2} + \frac{Q}{T_1}$$

Se prelevassimo Q dalla sorgente calda con una macchina reversibile operante tra T_1 e T_2 , produrremmo il lavoro massimo:

$$W_R = Q\eta_R = Q\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) = T_1 \Delta S_u$$

anche questa volta troviamo $W_R - W = T_1 \Delta S_u$ essendo T_1 la temperatura della sorgente fredda.

Macchina irreversibile che lavora tra due sorgenti

La macchina assorbe Q_2 a temperatura T_2 , cede Q_1 a temperatura T_1 e produce il lavoro W , inferiore al lavoro W_R prodotto da una macchina reversibile che lavora tra le stesse sorgenti, a parità di calore assorbito:

$$W_R - W = Q_2\left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) - (Q_1 + Q_2) = T_1\left(-\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2}\right)$$

Il termine tra parentesi è la variazione di entropia delle sorgenti durante un ciclo della macchina irreversibile quindi

$$W_R - W = T_1 \Delta S_u$$

Questi esempi sono casi particolari di una proprietà che può essere dimostrata in generale: quando avviene un processo irreversibile in cui l'entropia dell'universo aumenta di ΔS_u , la grandezza

$$E_{IN} = T_0 \Delta S_u$$

è pari alla differenza tra il lavoro che si sarebbe potuto ottenere se il processo fosse stato reversibile e il lavoro effettivamente ottenuto; T_0 è la temperatura più bassa tra quelle delle sorgenti disponibili nell'ambiente

E_{IN} viene chiamata **energia inutilizzabile**: non si tratta di energia persa, ma sprecata, in accordo col primo principio secondo cui l'energia viene convertita e non perduta.

Riprendendo quanto già discusso in precedenza sulle alterazioni prodotte da una trasformazione irreversibile, possiamo dire che l'energia inutilizzabile costituisce una misura delle modifiche subite dall'universo; precisamente, rianalizzando gli esempi esposti, sarebbe

semplice provare che l'**energia inutilizzabile è pari al lavoro supplementare che bisognerebbe spendere per riportare in modo reversibile il sistema complessivo nello stato iniziale.**

Conclusioni termodinamiche sull'entropia

Le leggi della termodinamica introducono la definizione di particolari grandezze fisiche legate allo stato di un sistema:

| | | |
|-----------------------------------|---|-----------------|
| principio dell'equilibrio termico | ⇒ | temperatura |
| primo principio | ⇒ | energia interna |
| secondo principio | ⇒ | entropia |

Le proprietà di temperatura ed energia sono state ampiamente discusse e anche il loro significato fisico appare chiaro, soprattutto dopo lo studio della teoria cinetica dei gas che, pur se riferita a un particolare sistema, porta a considerazioni di carattere microscopico estendibili almeno in parte ad altri sistemi.

Soffermiamoci adesso sull'entropia per riassumere gli aspetti macroscopici.

In quanto funzione di stato l'entropia in generale cambia al variare delle coordinate termodinamiche del sistema. Non bisogna quindi associare la variazione di entropia esclusivamente a scambi di calore: abbiamo visto che essa varia anche in una trasformazione

adiabatica irreversibile. La $S_B - S_A = \Delta S = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev}$ fissa il metodo di calcolo e ci dice che solo

nelle trasformazioni reversibili ΔS è sempre conseguenza di uno scambio di calore.

Quando si passa a considerare un universo termodinamico che descrive trasformazioni reali, l'entropia complessiva cresce sempre. **L'aumento di entropia dell'universo è il segnale dell'irreversibilità**, ovvero di una modifica permanente dell'universo: una volta che ΔS_u si è verificata, non è più possibile tornare a uno stato entropico precedente; è questo il significato più profondo dell'irreversibilità.

Le impossibilità enunciate con il secondo principio trovano nelle variazioni di entropia dell'universo la loro espressione quantitativa. Inoltre ΔS_u ha anche una implicazione energetica: l'energia che l'irreversibilità dei processi costringe a sprecare è proporzionale a ΔS_u secondo $E_{IN} = T_0 \Delta S_u$; quindi maggiore è ΔS_u , cioè più lontana la trasformazione da un possibile equilibrio, maggiore è lo spreco di energia.

La trasformazione reversibile di un sistema da uno stato *A* a uno stato *B* rappresenta lo svolgimento ottimale di un processo, in quanto $\Delta S_u = 0$. Nel fenomeno reale, anche se gli stati iniziale e finale del sistema sono gli stessi, sono differenti le situazioni fisiche all'interno del sistema e tra sistema e ambiente, per cui l'universo reale è diverso da quello ideale: in un certo senso ΔS_u misura questa differenza di comportamento.

Cenni sul terzo principio della termodinamica

Il terzo principio della termodinamica stabilisce che la variazione di entropia associata a una trasformazione reversibile di un sistema tende a zero al tendere a zero della temperatura termodinamica assoluta (enunciato di Nernst-Simon).

Esso venne proposto, in forma leggermente diversa, da Nernst nel 1906 in conseguenza di una serie di risultati sperimentali. La sua base teorica moderna richiede una formulazione statistico-quantistica dell'entropia ed esula dalla termodinamica classica.

Dal terzo principio segue il fatto che i calori specifici devono tendere a zero al tendere a zero della temperatura, risultato confermato sperimentalmente; così come è confermata un'altra deduzione, la tendenza a zero per $T \rightarrow 0$ del coefficiente di dilatazione termica di ogni sostanza.

La conseguenza forse più importante del terzo principio è l'impossibilità di raggiungere lo zero assoluto. Per $T \rightarrow 0$ la variazione di entropia associata a una trasformazione isoterna reversibile tende a zero e quindi il calore scambiato, dato dal prodotto $T dS$, tende a zero ancora più rapidamente di T . Pertanto il processo di sottrazione di calore da un corpo diventa sempre meno efficiente al tendere a zero della temperatura e con un numero finito di processi non è possibile raggiungere lo zero assoluto. Questo risultato viene assunto come enunciato del terzo principio della termodinamica, alternativo ma equivalente a quello di Nernst-Simon.