Esercizio 1

$v = 55 \frac{mi}{h}$ → miglia dove $1\ mi = 5280\ \underbrace{ft}_{piedi}$, $1\ ft = 12\ \underbrace{in}_{pollici}$, $1\ in = 2.54\ cm$

a) $1\ mi = a\ km$
a?

$a = 1 \cdot 5280 \cdot 12 \cdot 2.54 \cdot 10^{-5}\ km = 1.6\ km$

b) v in $\frac{km}{h}$ $v = 55 \cdot 1.6 \frac{km}{h} = 88 \frac{km}{h}$

c) v in $\frac{m}{s}$ $v = 88 \cdot \frac{10^3}{3.6 \times 10^3} \frac{m}{s} = 24 \frac{m}{s}$

Es. 2

$a = 5 \frac{m}{s^2}$, $T = 17s$

Assumendo $x(t=0) = 0\ m$
e moto $v(t=0) = 0 \frac{m}{s}$

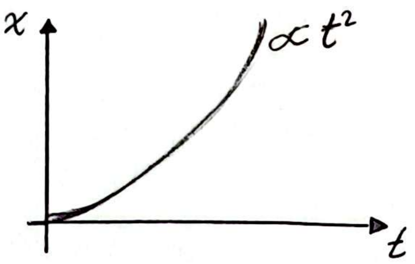
→ legge oraria del corpo

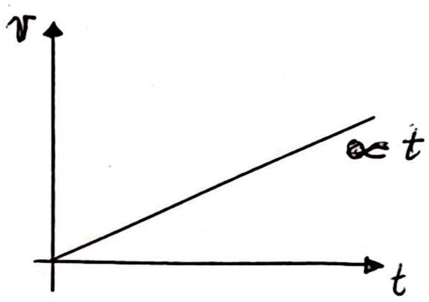
$x(t) = \frac{1}{2} a t^2$

derivando
→ $v(t) = a \cdot t$

• $x(t=T) = 723\ m$

•





Es. 3

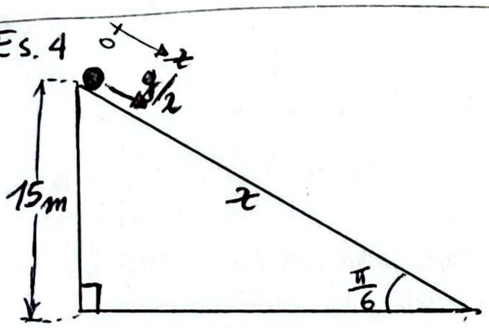
$v_0 = 50 \frac{km}{h} = 14 \frac{m}{s}$, $a = -3 \frac{m}{s^2}$ → "decelerare"

? t^* t.c $v(t^*) = 0$

$v(t) = v_0 + a \cdot t$ @ t^* $0 = v_0 + a t^*$

$t^* = \frac{-v_0}{a} = \frac{14 \frac{m}{s}}{3 \frac{m}{s^2}} = 4.6 s$

Es. 4



$v_0 = 0$, $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

lunghezza rampa : $x^{fin} = \frac{15\ m}{\sin(\frac{\pi}{6})} = 30\ m$

1) $x(t) = \frac{1}{2}\frac{g}{2} t^2$
2) $v(t) = \frac{g}{2} t$

Da 1) ricavo t^* in cui $x = x^{fin}$ → $t^* = \sqrt{\frac{4 \cdot x^{fin}}{g}} = 3.50\ s$

→ $v(t^*) = \frac{g}{2} t^* = 30.0 \frac{m}{s}$

Es. 5

@ $t=0$ $\quad v_0 = 5\ \frac{m}{s}$

@ $t=3s$ $\quad$ accelera con $a = 1.5\ \frac{m}{s^2}$

Dopo $\Delta t = 8s$ decelera con $b = ?$

? Valore di b t.c. in $\Delta x = 30\,m$ $\; v = v_0$ + grafici posizione e velocità

1° tratto $0s \le t < 3s$
$$\begin{cases} x_1(t) = \cancel{x_0}^{\,0} + v_0 t \\ v_1(t) = v_0 \end{cases}$$

2° tratto $3s \le t < 11s$
$$\begin{cases} x_2(t) = x_1(3s) + \overset{v_0}{\overset{\shortparallel}{v_1(3s)}}\, t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v_2(t) = v_0 + a t \end{cases}$$

3° tratto $t \ge 11s$
$$\begin{cases} x_3(t) = x_2(11s) + v_2(11s)\, t + \frac{1}{2} b t^2 \\ v_3(t) = v_2(11s) + b t \end{cases}$$

$$v_2(11s) = v_0 + a \underset{8s}{\underset{\shortparallel}{\Delta t}} = 17\ \frac{m}{s}$$

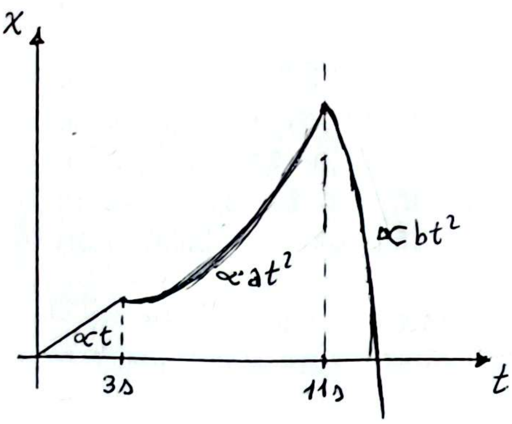
$t^* :=$ tempo in $\Delta x = 30\,m$ in cui $v_3(t^*) = v_0$

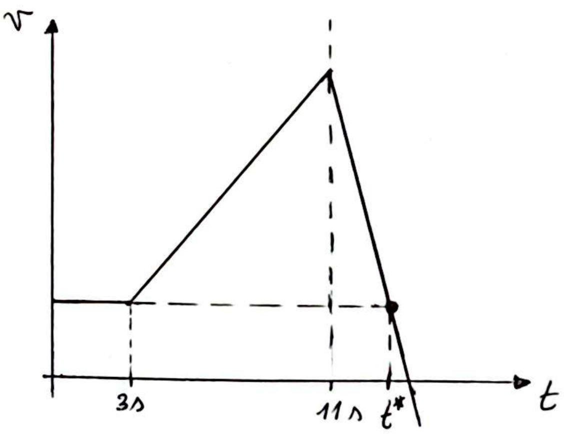
$$\rightarrow v_0 = v_2(11s) + b t^* \Rightarrow t^* = \frac{v_0 - v_2(11s)}{b} = \frac{-12\ \frac{m}{s}}{b}$$

Per trovare b impongo che $x_3(t^*) - x_2(11s) = 30\,m$

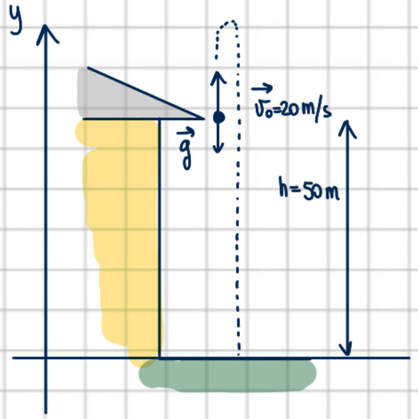
$$\rightarrow v_2(11s)\, t^* + \frac{1}{2} \cancel{b} (t^*)^2 = 30$$

$$17 \cdot \frac{(-12)}{b} + \frac{1}{2} \cancel{b} \frac{(12)^2}{b^{\cancel{2}}} = 30 \rightarrow b = \frac{(-17 \times 12 + \frac{1}{2} 12^2)}{30} = -4.4\ \frac{m}{s^2}$$





ESERCIZIO 6



fissiamo un sdr comodo: con la lettera y indichiamo la direzione verticale, con verso positivo verso l'alto

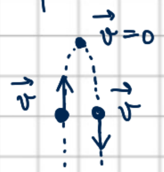
Il moto descritto è un moto rettilineo uniformemente accelerato perchè il corpo è sottoposto all'accelerazione di gravità $\vec{g}$:
Le leggi che descrivono questo tipo di moto sono

$$\begin{cases} s(t) = s_0 + v_0(t-t_0) + \frac{1}{2}a(t-t_0)^2 \\ v(t) = v_0 + a(t-t_0) \end{cases}$$

In questo caso specifico
- lo spostamento s avviene lungo l'asse y (quindi $s \to y$, $s_0 \to y_0 = 50\,m$)
- la velocità iniziale è diretta verso l'alto quindi ha valore positivo ($v_0 = +20\,m/s$)
- nel momento del lancio t=0 ($t_0 = 0$)
- l'accelerazione di gravità $\vec{g}$ è rivolta verso il basso quindi ha valore negativo ($g = -9{,}81\,m/s^2$)

Le leggi diventano
$$\begin{cases} y(t) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \\ v(t) = v_0 + gt \end{cases}$$

- Vogliamo calcolare il tempo a cui la pietra raggiunge la massima altezza $t_{y\,MAX}$.
Questo istante di tempo corrisponde al momento in cui la velocità della pietra si annulla perchè all'altezza massima avviene un'inversione di moto (mentre la pietra sale la velocità è diretta verso l'alto, quando inizia a cadere la velocità è diretta verso il basso, quindi passa da positiva a negativa)



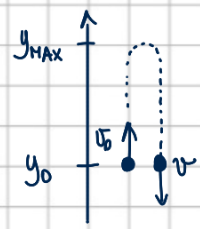
quindi $v_0 + g\,t_{y\,MAX} = v_{y\,MAX} = 0 \quad \rightarrow \quad v_0 + g\,t_{y\,MAX} = 0$

$$t_{y\,MAX} = -\frac{v_0}{g} = -\frac{20\,m/s}{(-9{,}81\,m/s^2)} \simeq 2{,}0\,s$$

- Vogliamo calcolare la massima altezza da terra y_{MAX}
La massima altezza da terra è raggiunta nell'istante $t_{y\,MAX}$ calcolato nel punto precedente

quindi
$$y_{MAX} = y(t_{y\,MAX}) = y_0 + v_0\,t_{y\,MAX} + \frac{1}{2}g\,t_{y\,MAX}^2 =$$
$$= y_0 + v_0\left(-\frac{v_0}{g}\right) + \frac{1}{2}g\left(-\frac{v_0}{g}\right)^2 =$$
$$= y_0 - \frac{v_0^2}{g} + \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} =$$
$$= y_0 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} = 50\,m - \frac{1}{2}\frac{(20\,m/s)^2}{(-9{,}81\,m/s^2)} \simeq 70\,m$$

- Vogliamo calcolare la velocità della pietra quando ripassa per il punto di lancio.
Quindi vogliamo trovare v_{y_0}



$v_{y_0} = v_0 + g\,t_{y_0} \leftarrow$ devo trovarmi t_{y_0}, ovvero il tempo a cui il punto passa di nuovo per y_0
Devo usare la seconda legge

$$y(t_{y_0}) = y_0 = y_0 + v_0 t_{y_0} + \frac{1}{2}g\,t_{y_0}^2$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{y_0} = \cancel{y_0} + v_0 t_{y_0} + \frac{1}{2} g t_0^2 \quad \rightarrow \quad v_0 t_{y_0} + \frac{1}{2} g t_{y_0}^2 = 0$$

$$t_{y_0} \left(v_0 + \frac{1}{2} g t_{y_0} \right) = 0$$

↳ 2 soluzioni:

$$\begin{cases} t_{y_0} = 0 \\ v_0 + \frac{1}{2} g t_{y_0} = 0 \rightarrow \end{cases} \quad \begin{array}{l} t_{y_0} = 0 \\ t_{y_0} = -\frac{2 v_0}{g} \simeq \frac{2 \cdot 20 \, m/s}{9{,}81 \, m/s^2} = 4{,}1 \ s \end{array}$$

$t_{y_0} = 0\,s$ è il tempo corrispondente al momento del lancio
$t_{y_0} = 4{,}1\,s$ è il tempo a cui il punto si trova nuovamente a y_0

quindi $v_{y_0} = v_0 + g t_{y_0} = v_0 + \cancel{g}\left(-\frac{2v_0}{\cancel{g}}\right) = v_0 - 2v_0 = -v_0 = -20 \ m/s$

↳ commento: questo risultato avrà perfettamente senso quando studieremo la conservazione dell'energia meccanica

- Vogliamo calcolare posizione e velocità dopo 5 secondi dal lancio ($t = 5\,s$)
Sostituiamo semplicemente

$$y(t=5s) = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = 50\,m + 20\,m/s \cdot 5\,s + \frac{1}{2}(-9{,}81\,m/s^2)(5\,s)^2 \simeq 27\,m$$

$$v(t=5s) = v_0 + g t = 20\,m/s + (-9{,}81\,m/s^2)(5\,s) \simeq -29\,m/s$$

- Vogliamo calcolare il tempo a cui la pietra raggiunge la massima altezza.
Il procedimento è uguale a quello del primo punto tranne che in questo caso $y_0 = 30\,m$

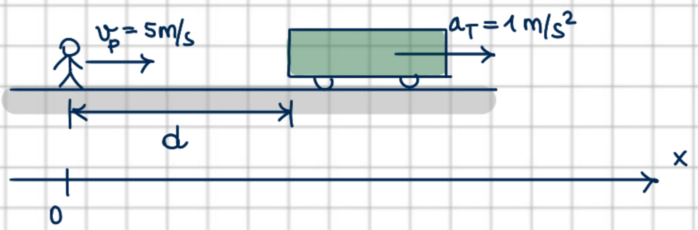
quindi: $v_0 + g t_{yMAX} = v_{yMAX} = 0 \quad \rightarrow \quad v_0 + g t_{yMAX} = 0$

$$t_{yMAX} = -\frac{v_0}{g}$$

) il tempo a cui il punto raggiunge l'altezza massima non dipende da y_0, quindi la risposta non cambia

$$t_{yMAX} \simeq 2{,}0 \ s$$

ESERCIZIO 7



fissiamo un sdr comodo:
con la lettera x indichiamo la direzione orizzontale con verso positivo verso destra

La persona si muove di moto rettilineo uniforme (si muove a velocità costante)
La legge che descrive il suo moto è:

$$s = s_0 + v(t - t_0)$$

nel nostro caso poniamo $s = x_P$, $s_0 = x_0 = 0$, $t_0 = 0$, $v_P > 0$

$$x_p(t) = v_p t$$

Il treno si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato (la sua accelerazione è costante)
Le leggi che descrivono il suo moto sono

$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$
$$v = v_0 + a(t - t_0)$$

nel nostro caso poniamo $s_T = x_T$, $s_0 = x_0 = d$, $v_0 = 0$, $t_0 = 0$

$$\begin{cases} x_T(t) = d + \frac{1}{2}at^2 \\ v_T(t) = a_T t \end{cases}$$

- se d=30 m determinare se la persona riesce a salire sul treno

La persona riesce a salire sul treno se esiste un tempo t positivo al quale la posizione della persona e quella del treno combaciano

imponiamo $x_P = x_T \rightarrow v_P t = d + \frac{1}{2}a_T t^2 \longrightarrow \frac{1}{2}a_T t^2 - v_P t + d = 0$

$$t = \frac{+v_P \pm \sqrt{v_P^2 - 4\left(\frac{1}{2}a_T\right)d}}{a_T}$$

t esiste se la radice ha argomento positivo o uguale a 0

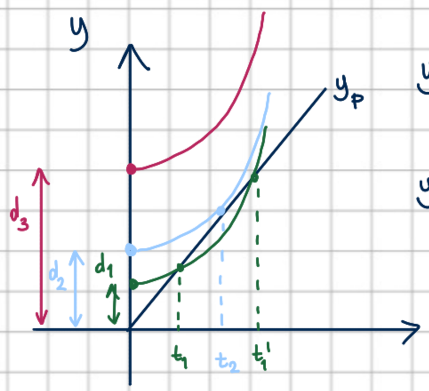
quindi $v_P^2 - 4\left(\frac{1}{2}a_T\right)d = (5\,m/s)^2 - \cancel{4}^{\,2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\,1\,m/s^2 \cdot 30\,m$

$= 25\,m^2/s^2 - 60\,m^2/s^2 = -35\,m^2/s^2 < 0$

quindi la persona non riesce a raggiungere il treno

- Determinare la distanza massima tale che la persona riesca a salire sul treno

Può essere utile rappresentare graficamente lo spostamento del treno e della persona in funzione del tempo



$y_P = v_P t$ è una retta passante per l'origine e con coefficiente angolare v_P

$y_T = \frac{1}{2}a_T t^2 + d$ è una parabola con vertice in $t = 0$ e intersezione con l'asse y pari a d

dal grafico si vede che le due curve possono avere 0, 1, o 2 intersezioni in base al valore assegnato a d quindi, se d è troppo grande (come nel caso 3), allora la persona non riuscirà a salire sul treno. La distanza maggiore a cui il treno si può trovare inizialmente in modo che la persona riesca comunque a prenderlo è d_2 (infatti osserviamo che treno e persona si "intersecano" in t_2). Per d inferiori la persona riuscirà comunque a prendere il treno (avrà 2 occasioni, una quando supera e una quando viene superata dal treno stesso)

Siccome ci interessa la distanza massima, ci concentriamo sul caso 2. Vogliamo che l'intersezione tra retta e parabola sia una sola, quindi dobbiamo imporre che il sistema associato abbia una sola soluzione. Questo succede quando il Δ è nullo:

$$\begin{cases} x_p(t) = v_p t \\ x_T(t) = d + \frac{1}{2} a_T t^2 \end{cases}$$

poniamo $x_p = x_T \rightarrow$

$$v_p t = d + \frac{1}{2} a_T t^2$$

$$\frac{1}{2} a_T t^2 - v_p t + d = 0$$

$$\Delta = v_p^2 - 4 \frac{1}{2} a_T d_{MAX} = 0 \longrightarrow v_p^2 - 2 a_T d_{MAX} = 0 \longrightarrow d_{MAX} = \frac{v_p^2}{2 a_T} = \frac{(5\,m/s)^2}{2 \cdot 1\,m/s^2} = 12{,}5\ m$$

- determinare la velocità del treno quando la persona sale sul treno se $d = 10{,}5$ m

La persona sale sul treno quando $x_0 = x_T$. Questo avviene ad un t^* che possiamo determinare da

$$x_p = x_T \qquad v_p t^* = d + \frac{1}{2} a_T t^{*2} \longrightarrow \frac{1}{2} a t^{*2} - v_p t^* + d = 0$$

$$t^*_{1,2} = \frac{v_p \pm \sqrt{v_p^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} a d}}{a} = \frac{5\,m/s \pm \sqrt{(5\,m/s)^2 - 2 \cdot 1\,m/s^2 \cdot 10{,}5\,m}}{1\,m/s^2} = \frac{5\,m/s \pm 2\,m/s}{1\,m/s^2}$$

$t_1^* = 7\,s$

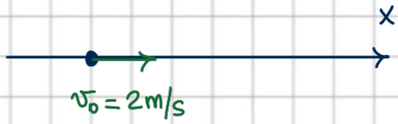
$t_2^* = 3\,s$

↳ questo è la primo istante possibile per salire sul treno

allora, la velocità del treno quando la persona riesce a salire:

$$v_T(t^*) = a_T t^* = 1\,m/s^2 \cdot 3\,s = 3\,m/s$$

ESERCIZIO 8



$a = ct$
$c = -4 m/s^3$

Per definizione $\quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad , \quad v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

Quindi è possibile trovare le espressioni della velocità e dello spazio percorso in funzione del tempo integrando $a(t)$

$$\begin{cases} a(t) = ct \\ v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} dt'\, a(t') = v_0 + \int_{t_0}^{t} dt'\, ct' = v_0 + \left[\frac{1}{2} ct^2 \right]_{t_0=0}^{t} = v_0 + \frac{1}{2}ct^2 \\ x(t) = \underbrace{\cancel{x_0}}_{=0} + \int_{t_0}^{t} dt'\, v(t') = \int_{t_0}^{t} dt' \left(v_0 + \frac{1}{2}ct^2 \right) = \left[v_0 t + \frac{1}{6}ct^3 \right]_{t_0=0}^{t} = v_0 t + \frac{1}{6}ct^3 \end{cases}$$

Ora vogliamo determinare quanto spazio percorrerà il punto prima di fermarsi.
Questo avverrà ad un tempo t_F:

$$v(t_F) = 0 = v_0 + \frac{1}{2}ct_F^2 \longrightarrow t_F = \pm\sqrt{\frac{-2v_0}{c}} = \pm\sqrt{\frac{2 \cdot 2 m/s}{4 m/s^3}} = 1 s$$

Calcolato il tempo di fermata t_F possiamo calcolarci anche lo spazio di fermata:

$$x_F = x(t_F) = v_0 t_F + \frac{1}{6}ct_F^3 = 2 m/s \cdot 1 s + \frac{1}{6}(-4 m/s^3)(1 s)^3 =$$

$$= 2 m - \frac{2}{3} m = \frac{4}{3} m \simeq 1{,}33 m$$