

Appunti Fisica 2023

Silvanus Bordignon, Nicolò Marchini

IMPORTANTE Nell'anno accademico 2022-2023 non è stato trattato l'elettromagnetismo, qui assente. Per gli anni successivi, controllare se Iuppa lo fa prima di basarsi unicamente su questi appunti.

Contents

1	Meccanica	3
1.1	Cinematica: descrivere il movimento	3
1.2	Dinamica: l'origine del movimento	9
1.3	Piano inclinato: lavoriamo con le forze	17
1.4	Moto armonico: pendolo semplice e molle	21
1.5	Lavoro ed energia	26
1.6	Moto parabolico	38
1.7	Gravitazione universale	40
1.8	Urti	43
1.9	Sistemi di riferimento non interziali	52
2	Termodinamica	56
2.1	Introduzione	56
2.2	Lavoro ed energia: remake	60
2.3	Calore specifico e stati della materia	65
2.4	Trasmissione del calore	70
2.5	Gas	73
2.6	Teoria cinetica dei gas	77
2.7	Espansione libera di un gas	83

2.8	Trasformazioni notevoli	85
2.9	Trasformazioni cicliche	88
2.10	Ciclo di Carnot	95
2.11	Secondo principio della termodinamica	97
2.12	Entropia	104
2.13	Cuoricini	111

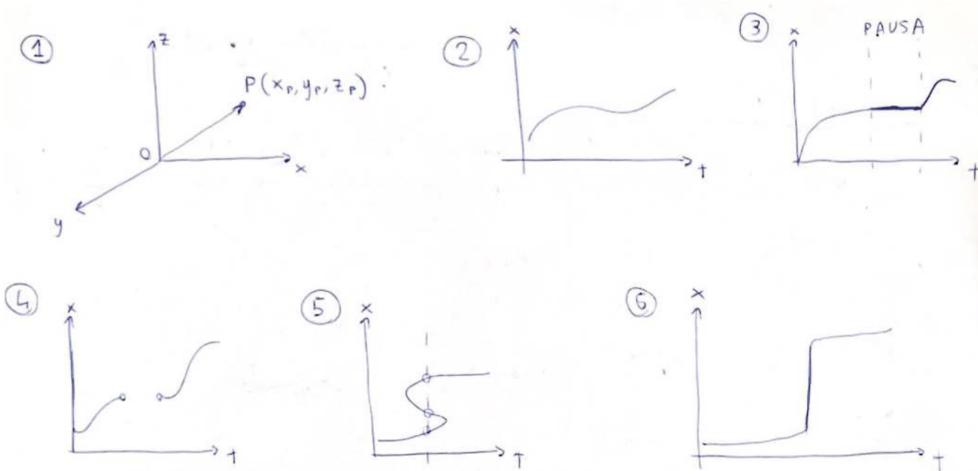
1 Meccanica

1.1 Cinematica: descrivere il movimento

La fisica cerca di trovare l'origine della realtà come meccanismo. Le domande che ci poniamo hanno a che vedere con questo meccanismo, e non è importante ricordarne a memoria una piccola parte, quanto quali progressi sono stati fatti verso una risposta alla domanda principale. Il dialogo cerca di salire a questo livello, dove vogliamo descrivere la realtà come meccanismo, non ripetere mnemonicamente qualche pagina di testo.

Il **movimento** è una relazione tra spazio e tempo. Possiamo vederlo come una funzione dello spazio nel tempo, $s(t)$. Se vogliamo sfruttare la notazione matematica, dobbiamo prima capire come la matematica può aiutarci a descrivere il mondo della fisica, e per fare ciò dobbiamo stabilire alcune regole che ci aiutino ad evitare ambiguità. Un **sistema di riferimento** è una regola che consente a chi osserva il fenomeno di annotarlo in modo non ambiguo, in modo da permettere a chi legga questa annotazione di ricreare il movimento, nello stesso modo.

Per descrivere il movimento usiamo un sistema di riferimenti a tre dimensioni, e per comodità indichiamo con lettere apposite ciascuna dimensione: lunghezza (y), altezza (z) e profondità (x). È un sistema destrorso, la terna x , y e z dev'essere orientata come vengono orientati pollice, indice e medio della mano destra (FIG 1). Possiamo indicare un punto nello spazio con una terna di numeri: $P(x_P, y_P, z_P)$. Possiamo designare P come la punta di un vettore e O , l'origine degli assi, come la base del vettore.



Esempi di movimento

Andiamo al caso unidimensionale per un attimo. Possiamo avere sull'asse delle ascisse il tempo t , su quello delle ordinate la posizione nello spazio x_P e vediamo come si può rappresentare il movimento lungo un asse (FIG 2) e il movimento intervallato da una pausa (FIG 3). Vediamo anche cosa significhi avere un buco in un grafico del genere, dove il movimento avviene in un'altra dimensione rispetto a quella rappresentata (non necessariamente lungo le tre conosciute), dato che non è un grafo di proiezione ma di posizionamento (FIG 4). Possiamo trovarci in più punti nello stesso istante di tempo, come in (FIG 5)? Chissà... Trovandoci invece con una linea quasi verticale, come in (FIG 6), abbiamo qualcosa simile ad un salto o ad un teletrasporto. Cosa potrebbe significare? Potrei trovarmi in più punti nello stesso tempo? O potremmo dire di aver fermato il tempo. Restando nella realtà, se fissiamo che la pendenza è quasi verticale, staremmo

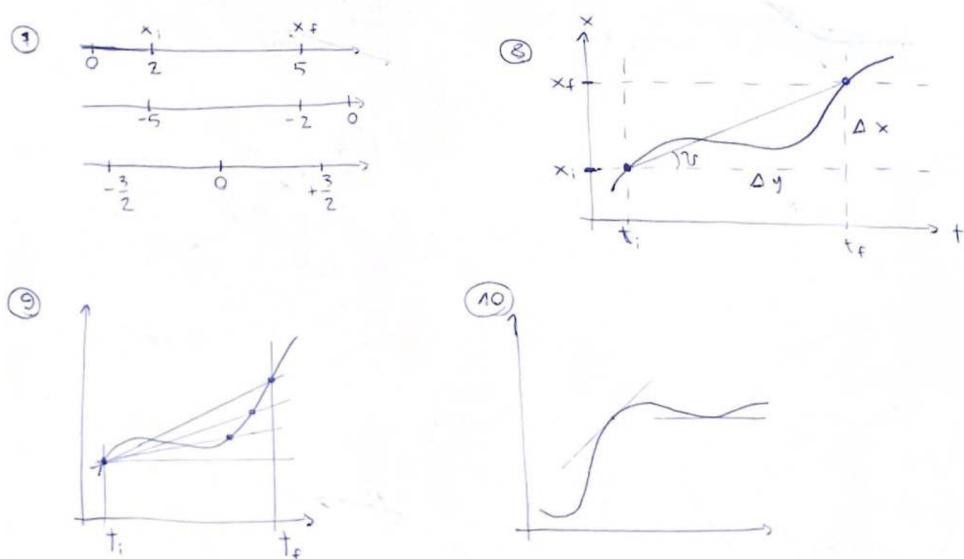
dicendo che in un intervallo molto molto piccolo sarebbe possibile percorrere un intervallo arbitrariamente grande dell'asse. Questo è incompatibile con l'idea di un universo finito. Se l'insieme di tutto ciò che è finito in dimensione, non può esserci qualcosa di rappresentabile in questo modo, altrimenti sarebbe tutto "a portata di braccio", instantaneamente... dal punto di vista del risultato. Einstein ha capito che esiste una velocità limite, vedremo più avanti.

Rimaniamo su una dimensione, e supponiamo di avere una posizione iniziale x_i ed una finale x_f . Consideriamo tre sistemi di riferimento come in (FIG 7). Quello che conta per lo spostamento non sono i valori singoli o le coppie di valori, ma la **differenza** tra le coordinate. Significa che **il movimento non dipende dalla mia scelta del sistema di riferimento**.

Ci interessa la differenza, che può essere positiva o negativa, ma anche la quantità di tempo che intercorre tra l'istante iniziale e quello finale. Le indicheremo con la lettera delta Δ . Vale la seguente relazione, dove un trattino al di sopra del vettore per il prof indica "media":

$$\frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{v}$$

Possiamo considerare il triangolo formato in (FIG 8) da Δx e Δy , dove la tangente dell'angolo è pari al rapporto fra i due cateti.



Esempi di velocità

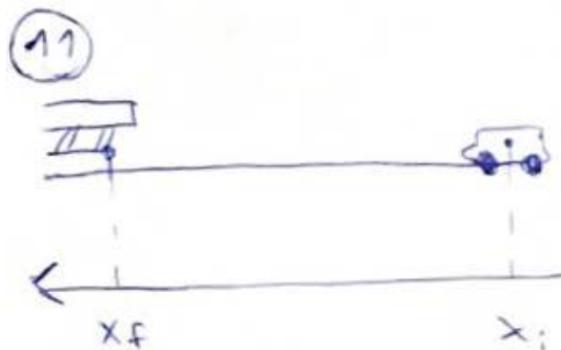
Man mano che mi sposto dal tempo iniziale al tempo finale, vediamo che si formano molte rette in (FIG 9). Queste sono varie, e ci fermiamo a quella corrispondente al tempo finale (si parla di velocità media). Possiamo considerare cosa succede quando l'istante t_f si avvicina al tempo iniziale, quindi quando la differenza tra t_i e t_f tende a 0: andiamo a definire così la **velocità istantanea**:

$$\lim_{t_f \rightarrow t_i} \bar{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta t} \stackrel{\text{def}}{=} v$$

Se compiamo questa operazione in punti diversi come in (FIG 10) notiamo che la pendenza cambia. Se prendiamo un intervallo di tempo breve che include la prima retta in figura vediamo che viene percorsa una distanza maggiore che in un intervallo di tempo breve che include la seconda retta in figura, infatti la velocità istantanea che troviamo nel primo istante è maggiore che nel secondo.

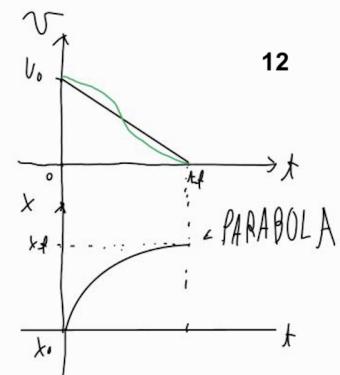
Nota: per potermi muovere prima in un verso e poi in un altro devo essermi fermato almeno una volta.

Supponiamo di essere nella situazione in (FIG 11). Abbiamo a che fare con un asse non banale; all'inizio abbiamo detto che la scelta del sistema di riferimento non deve influenzare il risultato della nostra analisi. Posizioniamo l'origine sull'automobile (ci facilitiamo il lavoro) e supponiamo di avere il casello a 100m di distanza (all'orale può chiedere di stimare qualcosa!). Supponiamo di viaggiare a 100 km/h e di dover arrivare al casello a 0 km/h.



Casello

Proviamo ad immaginare qualche tipo di frenata. In (FIG 12) abbiamo una frenata abbastanza brusca, in quanto all'istante t_0 e t_f abbiamo uno scatto abbastanza brusco, dal punto di vista di chi guida in macchina. Vogliamo puntare a qualcosa di simile alla curva (verde in figura), dove il cambio di velocità è più dolce.



Frenate

Sembra che la velocità, in funzione del tempo, sia pari alla velocità iniziale, meno un valore che dipende dal tempo, diciamo moltiplicato per una certa costante a . Se nel grafico inseriamo t_f otteniamo v_f :

$$v(t) = v_i - at$$

$$v_f = v(t_f) = v_i - at_f$$

Posso pensare di usare la funzione che abbiamo descritto poco fa per trovare la velocità. Il limite che abbiamo descritto prima è il limite di un rapporto, detto incrementale; il limite del

rapporto incrementale, per il tempo che tende a zero, è la derivata:

$$x'(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v(t)$$

Scriveremo anche:

$$v(t) = x'(t) = \frac{dx}{dt}$$

E qui torna in gioco l'integrale, in quanto ci interessa sapere cosa succede tra l'istante iniziale e l'istante finale:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v(t) \\ dx &= v dt \\ \int_i^f dx &= \int_i^f v dt \end{aligned}$$

Possiamo scrivere la differenza tra spazio come:

$$\begin{aligned} x_f - x_i &= \int_i^f \overbrace{(v_i - at)}^v dt \\ &= v_i(t_f - t_i) - \frac{1}{2}a(t_f - t_i)^2 \end{aligned}$$

Se consideriamo di partire all'istante zero, quindi impostiamo $t_i = 0$, andiamo ad ottenere l'equazione di una parabola:

$$x_f = x_i + v_i t_f - \frac{1}{2}a t_f^2$$

Continuiamo convertendo la velocità in un'unità di misura più gestibile:

$$v_i = 100 \text{ km/h} = 100 \cdot \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ h}} = 100 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 27,7 \text{ m/s}$$

Tornando all'ultima figura vista, abbiamo ottenuto una formula che ci restituisce la velocità in base al tempo: si parte da una velocità iniziale, che viene man mano ridotta da un valore che dipende dal tempo, moltiplicato per qualcosa, che abbiamo chiamato a : $v(t) = v_i - a(t - t_i)$. Visto che la velocità l'abbiamo definita come la derivata dello spazio rispetto al tempo, possiamo ottenere lo spazio dalla velocità tramite un'integrazione:

$$x(t) = \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt = x_i + v_i t - \frac{1}{2}a t^2$$

Possiamo sostituire t_f con semplicemente t , visto che ciò che interessa a noi è sapere il tempo iniziale, e grazie a quello siamo in grado di calcolare un qualunque tempo specifico t .

Sempre in quella figura, vediamo al di sotto che lo spazio assume una forma che ha come andamento una parabola. Ora proviamo a risolvere il problema del casello. Quali sono le incognite del seguente sistema?

$$\begin{cases} v(t) = v_i - a(t - t_i) \\ x(t) = \int_{t_i}^{t_f} v(t) dt = x_i + v_i t - \frac{1}{2}a t^2 \end{cases}$$

v_i la conosciamo, così come t_i . Abbiamo $t = t_F = ?$ da trovare, e non conosciamo a . Vale:

$$\begin{cases} v(t_F) = 0 = v_i - at_F \\ x(t_F) = x_F = v_i t_F - \frac{1}{2} a t_F^2 \\ a = \frac{v_i}{t_F} \\ \frac{1}{2} a t_F^2 - v_i t_F + x_F = 0 \end{cases}$$

Dall'equazione di secondo grado ricavo t_F :

$$t_F = \frac{2x_F}{v_i} = 3,8 \frac{m}{\frac{m}{s}} = 7,6 s$$

Posso usare il valore trovato per ricavare l'accelerazione:

$$a = \frac{v_i}{t_F} = \frac{v_i}{\frac{2x_F}{v_i}} = \frac{v_i^2}{2x_F} \simeq 3,2 \frac{\left(\frac{m}{s}\right)^2}{m} = 3,2 \frac{m}{s^2}$$

Nota: **fai sempre un controllo delle unità di misura** o delle dimensioni di ciò con cui stai operando. Qui abbiamo un tempo, che è una lunghezza fratto velocità, etc.

$$[T] = \left[\frac{L}{V} \right] = \left[\frac{L}{L/T} \right] = [T]$$

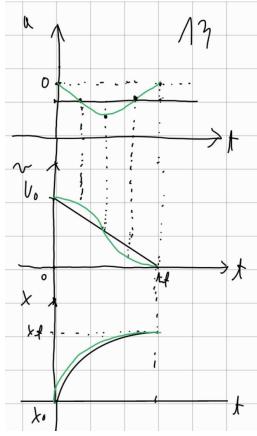
Nota: le grandezze sono quello che misuri, come massa, intervallo di tempo, temperatura, intensità di corrente eccetera (vedi grandezze fondamentali del sistema internazionale di misura). Le unità di misura sono quello che usi per misurare, quindi rispettivamente kilogrammo, secondo, Kelvin, ampere, ecc.

Nota: vediamo un esempio di **problema di Fermi**. Il calcolo a mente può essere utile per ottenere al volo un ordine di grandezza. Prendiamo l'esempio degli accordatori di pianoforte di Fermi. Come prima cosa, quando vogliamo stimare qualcosa prendiamo in considerazione i dati che abbiamo, e se non abbiamo dati, può essere utile usare un campione che si ha a disposizione (aula, ...). I numeri critici che dobbiamo prendere con le pinze sono lo zero, che non è contare, non è nulla in fisica, e 100%, pieno, totale, cosa che difficilmente accade. Abbiamo ottenuto un po' di dati e stimato quante persone ci sono a Trento ($a = 10^5$), quanti pianoforti per abitante ($P = P/a = 10^{-2}$) e ogni quanto un pianoforte viene accordato ($1/(5\text{yr})$). Vediamo di calcolare il numero di accordature all'anno: moltiplichiamo popolazione per pianoforti-per-persona per ogni quanto si accorda, e otteniamo un valore $N_{acc} = aPr = \frac{10^3}{5\text{yr}} = 200/\text{yr}$. Ma dobbiamo trovare il numero di accordatori! Stimiamo che un accordatore lavori solo di quello, e il salario medio in Italia è $s = 30\text{keuro}/\text{yr}$. Stimiamo che accordare costi $0,3\text{keuro}$. Troviamo che si muovono circa $W = 60\text{keuro}/\text{yr}$ per accordare pianoforti... stimiamo 2 accordatori di pianoforte a Trento. E verificando, ne troviamo 5! Questa è una buona stima!

Torniamo ora ad analizzare le curve in (FIG 12). Dalla velocità abbiamo integrato e siamo arrivati allo spazio. Potremmo derivare dallo spazio per arrivare alla velocità. Ma se derivo la velocità, cosa succede?

$$\frac{dv}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} a$$

La derivata della velocità la chiamo **accelerazione**. Ciò significa che posso anche integrare l'accelerazione per ottenere la velocità.



Accelerazione

Supponiamo di partire dalla retta in figura, e dall'equazione che la rappresenta: $v(t) = v_i - at$. Se deriviamo a partire da questa, otteniamo $a(t) = 0 - a = -a$, quindi un'accelerazione costante. Se la decrescita di velocità è costante, anche l'accelerazione è costante, e visto che la velocità diminuisce, l'accelerazione è negativa.

Prendiamo in considerazione (FIG 13). Se consideriamo la versione curva della velocità, cosa succede all'accelerazione? L'accelerazione è la sua derivata, e all'inizio e fine deve avere valore zero, visto che in quei momenti non c'è accelerazione ma la velocità è costante. Poi vediamo che ci sono due punti in cui la pendenza della tangente rispetto la curva è equivalente a quella velocità che decresce in modo costante, quindi la decelerazione in quei punti è equivalente. A metà invece la pendenza è maggiore, quindi abbiamo un valore inferiore. Troviamo una figura simile ad una parabola. Se invece guardiamo lo spazio, come varia questo considerata la velocità che decresce in modo diverso? Vediamo che si crea una curva, simile a quella già presente ma maggiore.

Per ciascuna curva (velocità) esiste un'unica rappresentazione della variazione dell'accelerazione nel tempo e della variazione dello spazio nel tempo. È un sistema deterministico, avendo le stesse condizioni iniziali, il sistema evolverà sempre nello stesso modo.

Supponiamo di avere il primo tipo di frenata, quello dove si inizia subito a diminuire la velocità. Cosa succede all'accelerazione, nel momento in cui la macchina passa da velocità costante ($a = 0$) ad un'accelerazione negativa? Non avviene un salto brusco, in momenti simili dove sembra ci sia un cambio repentino, da zero ad un certo valore, ciò che accade *in realtà* è un cambio graduale, passando per variazioni molto piccole; ciò succede sempre nella fisica.

Nota: non esistono teletrasporti!

Generalizziamo le formule:

$$\begin{aligned} a(t) \\ v(t) &= v_i + \int_{t_i}^t d\tau a(\tau) \\ x(t) &= x_i + \int_{t_i}^t d\sigma v(\sigma) = x_i + \int_{t_i}^t d\sigma \left[v_i + \int_{t_i}^\sigma d\tau a(\tau) \right] \end{aligned}$$

Se derivo la x arrivo alla v , se derivo la v arrivo alla a , e se derivo la a cosa succede? Perché non derivo ulteriormente? Perché non ci fa muovere verso la risposta alla domanda che ci

siamo posti in origine, ovvero l'origine della realtà come meccanismo, di ciò che avviene, che è l'aspetto fondamentale. Qual è l'origine del movimento? Vedremo che è la forza, che va in coppia con l'accelerazione ($F=ma$). Non serve calcolare oltre a quello. Il movimento è causato da forze, che determinano un'accelerazione.

1.2 Dinamica: l'origine del movimento

La **dinamica** è quella branca della fisica che si occupa di studiare e descrivere l'origine del movimento, ciò che causa il movimento. La formulazione moderna si deve a Newton e scienziati della sua epoca, che riassumiamo attorno a tre principi. Un **principio** è una legge non dimostrabile, che si assume provata dall'esperienza, ovvero fino a prova contraria. I principi non si dimostrano, sono verità assunte come tali. I tre principi, o leggi sono: la legge d'inerzia, la seconda legge della dinamica e la terza legge della dinamica.

Il **primo principio della dinamica** afferma che un corpo permane il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme finché non interviene un agente esterno a turbarlo. Un corpo rimane fermo finché qualcuno non lo muove, ma anche un corpo in moto continua a muoversi fino a che non viene fermato da qualcosa. La quiete è comparata al MRU, non c'è differenza qualitativa. Un oggetto in MRU può essere descritto come fermo, non c'è differenza, basta cambiare il punto di vista dell'osservatore, immaginandolo magari "a cavallo" dell'oggetto in movimento. Questo principio sancisce le regole del gioco: da adesso in poi, ci muoviamo in conformità alla prima legge della dinamica. I sistemi dove questa legge vale si dicono sistemi inerziali. È possibile verificare l'esistenza di sistemi dove ciò non vale, ma li vedremo più avanti.

Il **secondo principio della dinamica**, detto anche **legge di Newton**, ha questa validità e questa forma solo nei sistemi inerziali. Vale:

$$m = \frac{\sum_i F_i^{\text{ext}}}{a}$$

L'agente esterno lo chiamiamo **forza** e la variazione di velocità la chiamiamo **accelerazione**. Dobbiamo ora definire come quantificare quella F . Assumiamo che si possa quantificare. La seconda legge della dinamica mi dice che il rapporto tra la forza agente e l'accelerazione indotta è costante, non varia nel tempo. È anche caratteristica del corpo. Questa si chiama **massa inerziale**, ed è una quantità tipica del corpo. Supponiamo di voler ottenere un'accelerazione di 1m/s^2 . L'equazione diventa $m = F/1$: se voglio far accelerare una massa piccola, ho bisogno di poca forza, se voglio far accelerare una massa grande, ho bisogno di più forza; la forza è quindi **proporzionale** alla massa. Mi dice anche quanto il corpo si oppone agli agenti esterni, è la sua inerzia (appunto 'massa inerziale'). Un altro modo di procedere è fissare la forza a 1 (N). Ciò significa che la massa inerziale è uguale a $1/a$, quindi se riesco ad apporre una grande accelerazione al corpo la sua massa dev'essere molto piccola; se invece posso imprimere una piccola accelerazione con 1 di forza, questo significa che quel corpo si oppone molto a questa forza, ed ha quindi una elevata massa inerziale.

Possiamo dire che più che misurare la massa, andiamo a misurare la forza che un corpo esercita su una bilancia, e da lì ricaviamo la massa. Immaginiamo allora di essere nello spazio profondo. Non c'è un effetto gravitazionale vicino. Come si definisce la massa? Possiamo usare una molla.

Tecnicamente, la forza indicata nella formula è la forza totale. Altrimenti possiamo trovare molti esempi in cui una singola forza applicata non causa variazione di velocità, ovvero accel-

erazione. Esempio: un uomo che prova a spingere un bancale carico: la forza c'è, ma il bancale rimane fermo!

Nota: ricorda che la massa inerziale è una proprietà del corpo e non dipende dal luogo dove effettuiamo le misurazioni!

La forza può essere espressa nella seguente forma:

$$F = ma = m \frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}v$$

Questo perché generalmente si ha una variazione di velocità, ma è anche possibile avere una variazione di massa (es. un razzo: il combustibile brucia facendo perdere massa). Se sommiamo queste due quantità, otteniamo:

$$F = m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v = \frac{d}{dt}(mv)$$

Chiamiamo $p = mv$ la **quantità di moto**, e possiamo definire la forza come:

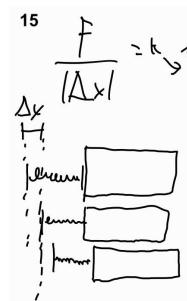
$$F = \frac{dp}{dt}$$

L'unità di misura della massa è il chilogrammo; un oggetto di massa $1kg$ qui ha la stessa massa anche sulla luna. E la forza? Assegnare un'unità di misura è un processo di assegnare ad una data configurazione fisica un numero. Supponiamo di avere un blocchetto come in (FIG 14), su una piattaforma priva di attrito, e un dito che applica una spinta costante verso l'oggetto.



Misurare la forza

Diventa però difficile misurare: ogni dito sente in maniera diversa. Supponiamo allora di mettere una molla tra il dito e l'oggetto (attacchiamola al blocchetto) e iniziamo ad applicare una spinta costante; questa volta ci troviamo su piano scabro. Come in (FIG 15) vediamo che dopo un certo punto, dopo un po' che spingo, il blocco inizia a muoversi; la molla rimane compressa, e l'accelerazione del sistema è pari a quella della molla.



Misurare la forza con una molla

Vediamo che il rapporto tra la forza applicata e la variazione di movimento (Δx) è costante (costante elastica, o durezza della molla):

$$\frac{F}{|\Delta x|} = k$$

Vediamo le unità di misura:

$$[F] = [MA] = \left[M \frac{V}{T} \right] = \left[M \frac{L}{T^2} \right]$$

Così è stata trovata in origine, questa è la definizione operativa della forza. In onore a chi scrisse per la prima volta le leggi della dinamica, chiamiamo **Newton** l'unità di misura della forza:

$$1N = 1kg \frac{m}{s^2}$$

La costante elastica ha come unità di misura:

$$\frac{N}{\Delta x} = k \quad \Rightarrow \quad [K] = \left[\frac{F}{L} \right]$$

Esempio Supponiamo di avere una forza $F = 100N$ applicata ad un corpo di $m = 3,16hg$. Il corpo ha una velocità iniziale $v_i = 5m/s$, e la forza viene applicata per un tempo $T = 7s$. Quale sarà la velocità finale del corpo? Per la seconda legge della dinamica, vale $F = ma$, quindi $a = \frac{F}{m}$. Ricordiamo la formula del moto uniformemente accelerato:

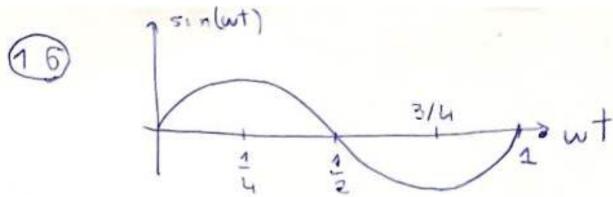
$$v(t) = v_i + \int_0^t a d\tau = v_i + \frac{F}{m} t$$

A noi interessa la velocità finale, dopo un tempo $t = T$:

$$v_f = v_i + \frac{F}{m} T \simeq (5 + 2200) m/s = 2205 m/s$$

Ci ricordiamo di passare da etogrammi a chilogrammi. Qui la velocità finale è determinata quasi del tutto dall'accelerazione, la velocità iniziale in questo caso specifico ha avuto molto meno impatto.

Esempio Supponiamo di avere ora una forza pari ad $F = F_0 \sin(\omega t)$. Ci ricordiamo che le funzioni trigonometriche prendono in ingresso numeri puri, valori adimensionali; inseriamo per questo un ω che avrà come unità di misura $1/s$. Consideriamo $F_0 = 10N$ e $\omega = \frac{1}{2\pi s} \simeq 0,158$. Diamo come posizione iniziale $x_0 = 0$, e diciamo che l'oggetto parte inizialmente fermo ($v_0 = 0$). La forza varia in funzione del seno, il quale è una funzione oscillante, e quindi il valore della forza può essere positivo o negativo, in base al momento nel quale effettuo la misurazione (vedi (FIG 16)).



Variazione della forza

Nota: tutto ciò che viene allontanato da una situazione di equilibrio, avrà un andamento oscillante di questo tipo, tutto.

Andiamo a ricavare la velocità. Ricordiamo l'integrale del seno:

$$\int_0^\beta \sin(x)dx = [-\cos x]_0^\beta = 1 - \cos \beta$$

Andiamo ora a calcolare la velocità:

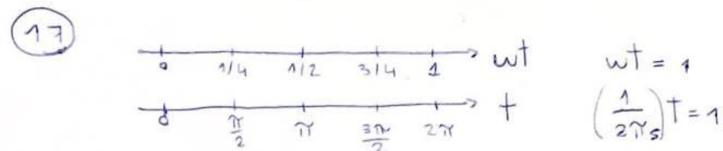
$$\begin{aligned} v(t) &= \int_0^{\omega t} a d[\omega \tau] = \int_0^{\omega t} \frac{F}{m} d[\omega \tau] = \int_0^{\omega t} \frac{F_0 \sin(\omega \tau)}{m} d[\omega \tau] = \frac{F_0}{m} \int_0^{\omega t} \sin(\omega \tau) d[\omega \tau] \\ &= \frac{F_0}{m\omega} \int_0^{\omega t} d[\omega \tau] \sin(\omega \tau) = \frac{F_0}{m\omega} (1 - \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

E ora andiamo a calcolare lo spazio:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_0^t d\tau v(\tau) \\ &= x_0 + \frac{F_0}{m\omega} \int_0^t d\tau (1 - \cos(\omega \tau)) \\ &= x_0 + \frac{F_0}{m\omega} \left\{ [\tau]_0^t - \frac{1}{\omega} [\sin(\omega \tau)]_0^t \right\} \\ &= x_0 + \frac{F_0 t}{m\omega} - \frac{F_0}{m\omega^2} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Ottengo che x al tempo zero dev'essere uguale a x_0 , ma siccome per condizioni iniziali ho dato $x_0 = 0$, ottengo un andamento dello spazio pari a:

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega} \left[t - \frac{1}{\omega} \sin(\omega t) \right]$$



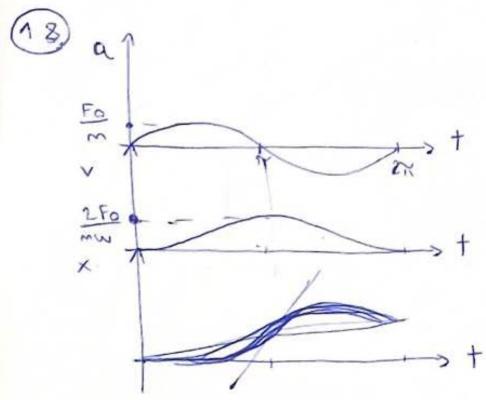
Cambio di assi

In (FIG 17) vediamo un ripasso del passaggio da t a ωt . In (FIG 18) invece vediamo il plot di accelerazione, velocità, spazio. Notiamo come la velocità sia sempre nella stessa direzione, cambia di valore. Nello spazio notiamo che la velocità è massima proprio nel momento in cui la tangente dello spazio ha pendenza massima. Se usiamo l'asse delle ascisse con ωt allora avremmo come spazio $x = \frac{F}{m\omega^2} [(\omega t) - \sin(\omega t)]$.

Le condizioni $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$ sono importanti. Ci portano a quello che definiremo moto armonico. Le condizioni iniziali devono essere definite, in quanto determinano l'evoluzione del sistema. Il punto in cui si arriva dipende da quello da cui si parte.

La **terza legge della dinamica**, enunciata spesso come principio di azione e reazione, sempre nei moti unidimensionali, ci dice che se un corpo esercita su un altro corpo una forza F , allora la fisica è tale per cui il secondo corpo esercita sul primo una forza uguale e opposta in verso:

$$F_{1 \rightarrow 2} = -F_{2 \rightarrow 1}$$



Grafici

È un principio molto importante, il cui segreto si può intuire riprendendo un secondo la formulazione della seconda legge della dinamica e notando un pedice importante: $F_{\text{ext}} = ma$, dove ext sta per "esterne". Parliamo delle forze esterne. La dinamica ha a che vedere con gli effetti delle forze esterne su un corpo. Se non c'è niente su un tavolo, la forza totale che agisce su di esso è 0. Questa legge di azione e reazione ci dice qualcosa su questa esternalità della terza legge della dinamica (vedi (FIG 19)).

19



Forze dopo lo scontro di due palle da biliardo

Per passare agli effetti cinematici della terza legge della dinamica serve introdurre le masse. Se andiamo ad analizzare la forza che 1 esercita su 2, quali masse e accelerazioni usiamo? $m_1 a_1, m_1 a_2, m_2 a_1$ o $m_2 a_2$? Sappiamo che la formula è $F_{\text{ext} \rightarrow A} = m_A a_A$. Il termine su cui punta la freccia deve corrispondere alle etichette dei termini che si trovano a destra. Per $F_{1 \rightarrow 2}$ abbiamo $m_2 a_2$. Se accettiamo questo, stiamo dicendo allora:

$$F_{1 \rightarrow 2} = -F_{2 \rightarrow 1}$$

$$m_2 a_2 = -m_1 a_1$$

Concentriamoci sulle intensità, prendendo quindi il modulo. Otteniamo che il rapporto tra le accelerazioni è pari a 1/rapporto tra le masse.

$$m_2 a_2 = -m_1 a_1 \iff \frac{m_2 a_2}{a_1} = -m_1 \iff \frac{a_2}{a_1} = -\frac{m_1}{m_2} \iff \left| \frac{a_2}{a_1} \right| = \left| -\frac{1}{\frac{m_2}{m_1}} \right|$$

Ciò significa che le accelerazioni sono uguali solo se le due masse sono uguali. Se le masse sono molto diverse, l'accelerazione è molto diversa, portando ad una stessa forza. Ad esempio, fissando Terra e Sole non in movimento, la Terra esercita sul Sole la stessa forza che il Sole esercita sulla Terra; l'accelerazione della Terra è però maggiore di quella del Sole, di ordini di grandezza. Per questo, in tal sistema, la Terra si avvicinerebbe al sole. Quindi: stessa forza \neq stessa accelerazione, ma dipende dalle masse dei corpi.

Nota: le forze sono di natura diversa. La forza che un pacco esercita sul tavolo è di modulo uguale e direzione inversa di quella che il tavolo esercita sul pacco. Quest'ultimo però esercita una forza peso, gravitazionale, mentre il tavolo esercita una reazione vincolare sul tavolo.

Vettori

Esistono in natura dei fenomeni per i quali è interessante fornire, oltre ad un valore, anche una direzione ed un verso.

Supponiamo di avere un **campo**. Se inserisco un valore in questo campo, possiamo parlare di campo numerico. Potremmo associare la quantità di virus in quella celletta, potremmo associarci la temperatura. Un primo oggetto che ha senso pensare come oggetto intermedio è un vettore, che in 3 dimensioni consiste in una terna di tre valori. Se metto una videocamera da qualche parte, delimitando un perimetro, noto che la quantità di colore rosso (R), verde (G) e blu (B) che la videocamera misura è una terna di numeri reali, un vettore. Non è necessariamente un vettore geometrico. Quando definiamo un vettore, diciamo:

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Una terna di numeri è un vettore se questa terna di numeri si trasforma, secondo regole molto precise, quando io cambio il sistema di riferimento. Queste regole sono inscritte nelle matrici di rotazione (che non faremo qui). Il colore in RGB non cambia, cambiando la posizione della videocamera; se cambiamo sistema di riferimento, la posizione cambia. Un vettore è caratterizzato da **modulo, direzione e verso**. Esistono dei fenomeni per i quali è interessante disegnare una freccia e capire dove punta, in che direzione, e quant'è lunga.

Ricordiamo che la somma di due vettori è un vettore:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Per sommare due vettori, devo prima trovare il modo di portarli vicini. Il contatto può essere coda-coda o punta-coda. Come lo faccio? Qualcuno mi deve garantire che nello spostare un vettore non cambi la direzione, non cambi il verso e non cambi la sua lunghezza. Sulla carta, collego punta e coda, uso la regola del parallelogramma. Se invece trasporto la coda del secondo sulla punta del primo, mi basta collegare la coda del primo e la punta del secondo. Vedi (FIG 20).

Dal punto di vista matematico:

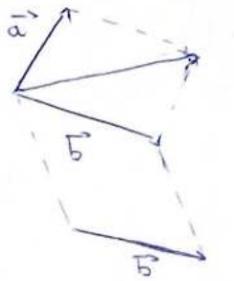
$$\begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

Non si possono sommare scalari con dei vettori. Chi lo chiede vi sta tendendo una trappola!

La seconda operazione è il prodotto di un vettore \vec{a} per lo scalare k : $\vec{b} = k \vec{a}$, con $k \in \mathbb{R}$. Vedi (FIG 21). Se k è negativo, la punta torna indietro.

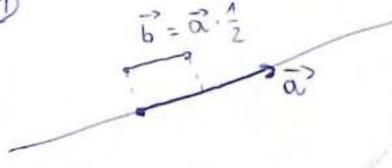
In matematica, se lo spazio è vettoriale, tutti i vettori hanno la coda nell'origine. In fisica, la coda è il **punto di applicazione**.

(20)



Somma di vettori

(21)



Prodotto per scalare

Abbiamo poi una serie di operazioni semplici. La differenza tra vettori, su carta, la facciamo trovando prima $-\vec{b}$ e poi lo sommiamo ad \vec{a} , come più preferiamo. Per i calcoli:

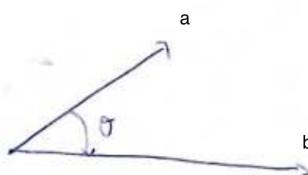
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} + (-1 \cdot \vec{b})$$

Vediamo ora il **prodotto** tra due vettori. Iniziamo indicando con $dir(\vec{v})$ la direzione del vettore, $ver(\vec{v})$ il suo verso e $|\vec{v}| = v$ il suo modulo, o intensità, o ampiezza. Per indicare la direzione usiamo due numeri in tre dimensioni; per indicare un verso ci basta un bit, sono due possibili valori; per il modulo, basta uno scalare. Con i calcoli abbiamo, in tre dimensioni:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^N a_i \cdot b_i =^{N=3} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Se non scomponiamo lungo gli assi del sistema di riferimento, ma consideriamo i moduli del vettore, vale $c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vartheta_{ab})$, dove ϑ è l'angolo tra i due vettori. Vedi (FIG 22).

(22)

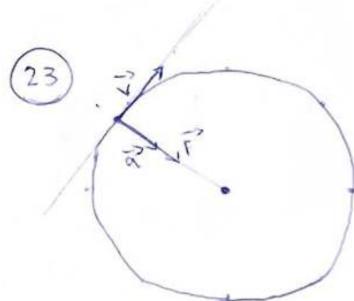


Prodotto scalare

Portiamo ora le leggi della dinamica in tre dimensioni. Vediamo che la direzione, la velocità e la forza sono dei vettori: \vec{x} , \vec{v} , \vec{d} . Abbiamo:

$$\vec{F}_{ext}^{(TOT)} = m \vec{a} \quad m = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$$

La direzione dell'accelerazione è data dalla direzione della forza; la direzione della perturbazione è sempre data dall'agente esterno. Anche il verso dell'accelerazione è sempre il verso della forza; la massa inerziale è sempre positiva. La direzione della velocità non è sempre la direzione dell'accelerazione, quindi né della forza.



Direzioni diverse

Vedi (FIG 23). Se non ci fossero forze, l'oggetto in quell'istante continuerebbe per la tangente di moto rettilineo uniforme, per il primo principio della dinamica. Una forza, diretta verso il centro, determina una variazione della velocità in una direzione diversa da quella di forza e accelerazione.

La traiettoria di un corpo è la variazione del vettore spazio nel tempo. La velocità è la derivata dello spazio rispetto al tempo; è quindi una differenza, differenza di vettori che restituisce un vettore velocità: $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$. In particolare, la velocità, per definizione, è tangente alla traiettoria.

Nota: stai attendo a partire dai presupposti, ad esempio che la massa sia sempre positiva. Non è detto.

Con i vettori, il terzo principio della dinamica diventa $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$. TECNICAMENTE anche prima avremmo dovuto imporre il requisito che $sign[F_{1 \rightarrow 2}] = -sign[F_{2 \rightarrow 1}]$. Questa regola include anche delle osservazioni:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{1 \rightarrow 2} &= -\vec{F}_{2 \rightarrow 1} \\ dir(\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) &= dir(\vec{F}_{2 \rightarrow 1}) \\ |\vec{F}_{1 \rightarrow 2}| &= |\vec{F}_{2 \rightarrow 1}| \\ ver(\vec{F}_{1 \rightarrow 2}) &= -ver(\vec{F}_{2 \rightarrow 1})\end{aligned}$$

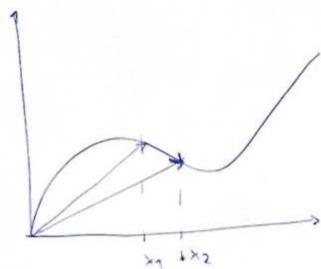
La direzione è *quasi sempre* diretta verso la congiungente (la retta che congiunge i punti d'incontro). Non può essere su una direzione a caso.

La **traiettoria** è una linea, una curva, che rappresenta i punti attraverso cui il corpo passa, la successione delle posizioni nel tempo. Se la posizione è in un piano bidimensionale, devo sempre essere in grado di determinare (x,y). La posizione è in funzione del tempo. Vedi (FIG 24).

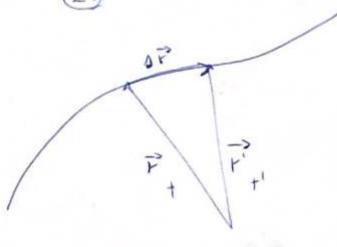
Guardiamo (FIG 25). Sappiamo che $\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r}$, e che è passato un tempo Δt . Abbiamo:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d \vec{r}}{dt}$$

(24)



(25)



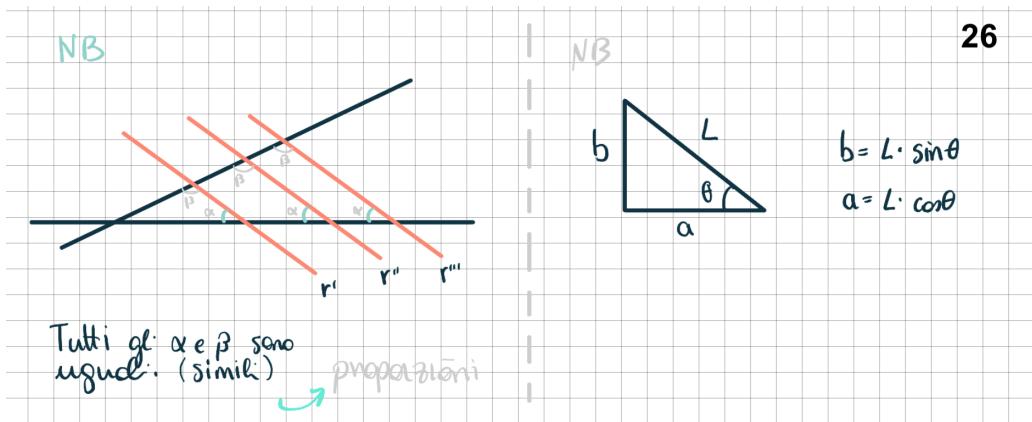
Cambio di posizione

1.3 Piano inclinato: lavoriamo con le forze

Il **piano inclinato** è un piano che non forma un angolo notevole rispetto alla verticale. La verticale è la direzione di caduta degli oggetti, mentre come angoli notevoli abbiamo gli 0° , piano verticale, detto anche parete, e i 90° , piano orizzontale rispetto alla verticale.

Nota: quando viene chiesto di fare un esempio di qualcosa, che sia un piano inclinato o una traiettoria, è meglio tenersi lontani dai casi particolari; piani inclinati di 45° , traiettorie rette o circolari sono casi particolari.

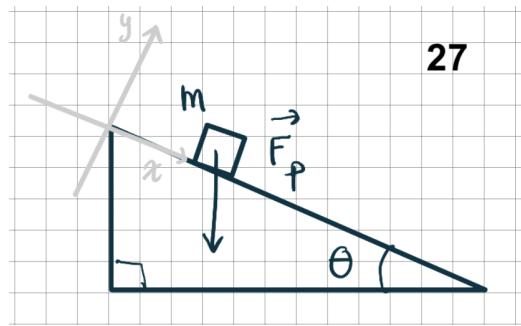
Nota: date due semirette con la stessa origine, i triangoli individuati da rette parallele incidenti ad entrambe le semirette sono triangoli simili, con proprietà simili. Vedi (FIG 26).



Triangoli simili

Triangoli simili si hanno anche nel piano inclinato, torneranno spesso. L'angolo di inclinazione del piano è l'angolo formato dall'intersezione fra il piano inclinato e il pavimento. Per semplificare la trattazione, assumiamo il piano inclinato sia liscio, ovvero che non eserciti attrito agli oggetti su di esso. Per ora posizioniamo oggetti *non tondi*, che quindi non rotolano sul piano ma traslano sopra di esso.

Consideriamo la (FIG 27), e cerchiamo le **forze** in gioco, partendo dalle forze esterne attive; per ora l'unica forza che agisce è la forza peso \vec{P} . Ricordiamoci di scegliere un sistema di riferimento, e per convenienza posizioniamo un asse parallelo al piano inclinato, e il secondo ad esso perpendicolare; è una scelta comoda per noi, ricordiamo che la fisica non è influenzata dal sistema di riferimento. Per lo stesso motivo, posizioniamo l'origine e quindi la posizione iniziale x_0 sulla massa.



Forze in gioco

Nel momento in cui lasciamo l'oggetto, questo inizia a scivolare, a traslare lungo il piano inclinato. Deve per forza esserci una forza in gioco, altrimenti per il primo principio della dinamica l'oggetto manterebbe il suo stato di quiete:

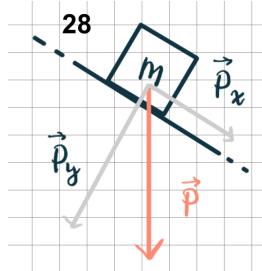
$$\sum_i \vec{F}_{\text{ext}}^{(i)} \neq \vec{0}$$

Ora come ora vediamo solamente la forza peso, ma questa ha una direzione e verso diverse da quelle del moto. Per la seconda legge della dinamica, vale:

$$\sum_i \vec{F}_{\text{ext}}^{(i)} \neq \vec{P}$$

Chiameremo risultante delle forze la somma delle forze esterne:

$$\vec{R} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \vec{F}_i^{(\text{ext})}$$



Scomposizione delle forze

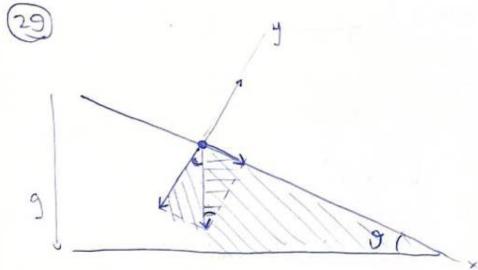
Osserviamo il verso dell'accelerazione, e sappiamo che il verso della risultante deve essere lo stesso dell'accelerazione, sempre per il secondo principio (vedi (FIG 28)). Andiamo ora a scomporre la forza peso, andando quindi a proiettarla lungo le due direzioni definite dagli assi. Chiameremo P_y la proiezione sull'asse y , e P_x la proiezione sull'asse delle x . Notiamo che i triangoli individuati durante la scomposizione sono **simili**, e che entrambi sono simili al triangolo delimitato da piano inclinato, pavimento e forza peso; i rapporti tra il lato minore e l'ipotenusa tra i tre triangoli sono uguali, così come molte altre relazioni (vedi (FIG 29)). Valgono:

$$P_x = P_{/\!/} = P \sin \vartheta$$

asse parallelo

$$P_y = P_{\perp} = P \cos \vartheta$$

asse ortogonale



Triangoli simili sul piano inclinato

Notiamo che non c'è movimento lungo l'asse delle y , significa che la risultante lungo quell'asse è necessariamente 0. Individuiamo un'altra forza, uguale di modulo e opposta di verso alla forza peso che le si oppone, che chiameremo \vec{A} . Vale:

$$R_y = 0 \iff \overbrace{P_y + A}^{R_y} = 0 \iff A = -P_y$$

Lungo la verticale si ha un'accelerazione \vec{g} , di modulo pari a $|\vec{g}| = 9.81 m/s^2$. Abbiamo $\vec{F}^{(\text{ext})} = m_I \vec{a}$, quindi $m_G \vec{g} = m_I \vec{a}$; possiamo semplificare massa inerziale e massa gravitazionale. Otteniamo che l'accelerazione nella caduta dei gravi qui nel pianeta Terra è pari a g .

Nota: per verificare le formule ottenute effettuiamo un processo a limite, ovvero andiamo a vedere i casi particolari. Ad esempio, se non ti ricordi le formule della forza parallela e perpendicolare, puoi intuire che in un piano inclinato dove l'angolo è zero, non ci sarà movimento. Fra le due funzioni trigonometriche è il seno ad essere zero quando l'angolo è 0; ciò significa che fra le due forze scomposte, quella lungo l'asse delle x è quella ottenuta moltiplicando la forza per il seno dell'angolo.

Otteniamo sull'asse delle ascisse:

$$R_x = P_x = P \sin \vartheta \iff m g \sin \vartheta = m a_x a_x \iff a_x = g \sin \vartheta$$

Piano ruvido

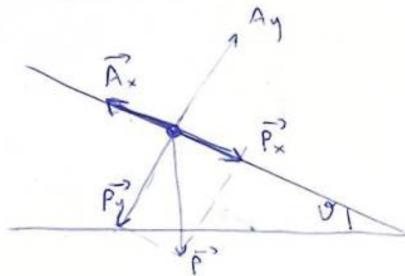
Supponiamo ora di trovarci sempre su un piano inclinato, ma una volta posizionata la massa questa non si muove. Vale $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \vec{0}$, e se la velocità è zero, anche la sua derivata la segue: $\vec{a} = \vec{0}$. Per la seconda legge di Newton, $\vec{R} = m \vec{a}$, vale $\vec{R} = \vec{0}$. Così come nel problema precedente, se lungo un asse non abbiamo un movimento nonostante la presenza di una forza, significa che esiste un'altra forza che le si oppone. Vale:

$$\begin{cases} R_x = 0 = P_x + A_x \Rightarrow A_x = -P_x = -m g \sin \vartheta \\ R_y = 0 = P_y + A_y \Rightarrow A_y = -P_y = +m g \cos \vartheta \end{cases}$$

Questa forza che si oppone al movimento, sia lungo l'asse x che lungo l'asse y che chiamiamo \vec{A} è la **forza d'attrito**. I segni sono corretti rispetto al sistema di riferimento. Vedi (FIG 30).

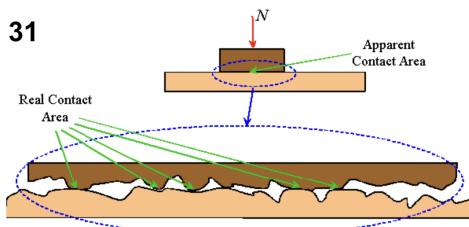
Nota: perché abbiamo la forza d'attrito? Le superfici di due oggetti in contatto sono molto frastagliate, non perfettamente lisce. Si trovano diverse venature e diversi "dentini", che si

(30)



Forze sul piano inclinato

infilano gli uni nelle altre, per entrambe le superfici. Nel momento in cui uno dei due oggetti tenta il movimento, i "dentini" dell'oggetto fermo applicano una forza verso le parti che tentano di muoversi dell'altro oggetto; quell'oggetto vedrà la forza come opposta al movimento. La macroforza, somma di queste microforze, è la **forza d'attrito radente**. Questo era un esempio di come le descrizioni di fenomeni in fisica sono spesso semplificazioni di fenomeni microscopici più complessi. Vedi (FIG 31).



Causa della forza d'attrito

La forza d'attrito dipende dal peso dell'oggetto, è proporzionale alla pressione sul piano, alla forza alla quale le due superfici sono messe a contatto tra loro; questa forza è P_y . Vediamo però che l'attrito A_x è minore di P_y , per via di un valore, un numero puro μ_s che corrisponde al coefficiente d'attrito della superficie: $A_x = \mu_s P_y$.

In generale, la forza d'attrito dipende dal modulo della forza normale alla superficie:

$$\vec{A} = \mu |\vec{F}_N|$$

Per quanto riguarda il modulo, abbiamo visto che gli attriti si oppongono alla direzione del moto:

- nel caso del movimento, moltiplichiamo $\mu |\vec{F}_N|$ per il versore opposto al verso del movimento: $\vec{A} = \mu |\vec{F}_N| \cdot (-\hat{v})$
- nel caso della stasi, moltiplichiamo per il versore tale per cui la risultante delle forze sia zero: $\vec{A} = \mu |\vec{F}_N| \cdot (\hat{x}_{\vec{R}=\vec{0}})$

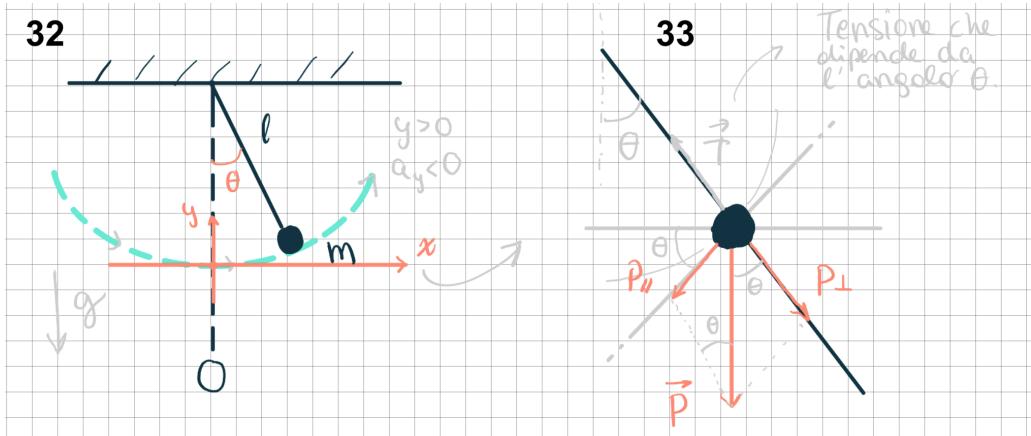
L'attrito si dice radente quando ha a che vedere con lo scivolamento di due superfici, per distinguerlo dall'attrito volvente che ha a che vedere con il rotolamento di una superficie rispetto ad un'altra.

1.4 Moto armonico: pendolo semplice e molle

Vediamo un moto, il movimento di una massa sotto un vincolo puntiforme di movimento inestensibile sottoposto ad un'accelerazione esterna: il **pendolo semplice**.

Ad un vincolo puntiforme è ancorata una fune inestensibile la cui massa trascuriamo, al cui estremo è appesa la massa di interesse al nostro problema. Anche le dimensioni della massa non sono rilevanti. Questo problema ha senso perché la massa è sottoposta ad un campo di accelerazione esterna, che nella maggior parte dei casi corrisponde al campo di accelerazione gravitazionale (accelerazione \vec{g}). C'è una posizione naturale, di riposo del pendolo, in cui il vincolo si estende lungo la verticale.

È interessante capire cosa succede se la posizione iniziale del movimento non coincide con quella dell'equilibrio o di riposo. È noto che se lascio il pendolo ad una direzione come in (FIG 32), questo oscillerà. Iniziamo a caratterizzare il problema, dando i nomi alla lunghezza l e all'angolo ϑ . Useremo l'angolo come quantità che descrive la dinamica del pendolo; lo spazio percorso dalla massa, detto ascissa curvilinea, corrisponde a parte di una circonferenza, ed è quindi ricavabile dall'angolo e dalla lunghezza. L'angolo è una grandezza singola, la trattazione del problema è unidimensionale. Possiamo vedere la verticale come lo zero, e a destra e sinistra si hanno angoli che crescono in positivo o in negativo.



Pendolo semplice

Vediamo (FIG 33) come sistema di riferimento due assi: il primo dato dalla fune l , il secondo tangente al primo. Troviamo come prima forza la forza peso \vec{P} , che andiamo a scomporre in P_{\perp} e P_{\parallel} . Lungo la direzione data dalla fune non abbiamo movimento, ciò significa che deve esserci una forza che si oppone alla componente perpendicolare della forza peso. Abbiamo infatti la **tensione** del filo \vec{T} , che si oppone a P_{\perp} . Definiamo le due componenti:

$$\begin{aligned} |\vec{P}_{\parallel}| &= |\vec{P}| \sin \vartheta = mg \sin \vartheta \\ |\vec{P}_{\perp}| &= |\vec{P}| \cos \vartheta = |\vec{T}| \end{aligned}$$

La dipendenza della forza parallela all'angolo fa riflettere sul sistema di riferimento. La seconda legge della dinamica la posso esprimere in un sistema cartesiano:

$$\vec{F} = m \vec{a} = \begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \end{cases}$$

Come sistema di riferimento possiamo usare un riferimento solidale al corpo, "a cavallo" del corpo? È utile quando il corpo è fermo, tornerà nei sistemi di riferimento non inerziali. In questo caso però non conviene, non potremmo apprezzare i movimenti del pendolo. Dove conviene mettere l'origine? Possiamo metterla dove vogliamo, ricordiamo che la scelta del sistema ci aiuta ma non cambia il funzionamento della fisica. Possiamo mettere l'origine nel punto in cui è fissata la massa, oppure dove la massa si troverebbe nel momento di quiete. Posizioniamo in questo secondo punto l'origine, e usiamo la direzione della corda nel momento di quiete come asse delle y , e la sua tangente come asse delle x .

La tensione dipende dall'angolo, e bilancia la forza impressa da P_{\perp} . Possiamo allora concentrarci sullo scomporre $P_{//}$, ciò che determinerà il moto. Andiamo a scomporla lungo gli assi:

$$\begin{aligned} |\vec{F}_x| &= |\vec{P}_{//_x}| = |\vec{P}_{//}| \cos \vartheta = mg |\sin \vartheta| \cos \vartheta \\ |\vec{F}_y| &= |\vec{P}_{//_y}| = |\vec{P}_{//}| \sin \vartheta = mg \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

Nota: stiamo scomponendo prima rispetto alla direzione della tensione, poi rispetto al piano cartesiano.

Devo mettere il modulo nel primo seno; nel secondo non serve, è comunque quadro. Ora che abbiamo delle forze, possiamo lavorarci.

$$\begin{aligned} -mg \sin \vartheta \cos \vartheta &= ma_x \\ -mg \sin^2 \vartheta &= ma_y \end{aligned}$$

Togliamo i moduli. L'accelerazione a_x sarà positiva in certi momenti e negativa in altri. Le x sono positive quando gli angoli sono positivi, e la a_x è negativa; la x è negativa quando gli angoli sono negativi, e a_x è positiva. Mettiamo allora un - davanti alla prima formula. Per quanto riguarda la seconda formula, l'accelerazione sarà sempre negativa, spingerà sempre verso il basso, e serve un valore negativo anche a sinistra; mettiamo un meno anche lì.

Semplifichiamo le masse e abbiamo:

$$\begin{aligned} -mg \sin \vartheta \cos \vartheta &= ma_x & \Rightarrow & -g \sin \vartheta \cos \vartheta = a_x \\ -mg \sin^2 \vartheta &= ma_y & \Rightarrow & -g \sin^2 \vartheta = a_y \end{aligned}$$

Esprimiamo le accelerazioni tramite gli angoli, troviamo le leggi orarie. Le posizioni dipendono dagli angoli, e qui entra in gioco la lunghezza. Troviamo la velocità tramite derivazione:

$$\begin{aligned} x &= l \sin \vartheta & v_x &= \frac{dx}{dt} = l \cos \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \\ y &= l - l \cos \vartheta & v_y &= \frac{dy}{dt} = l \sin \vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{dt} \end{aligned}$$

Troviamo ora le accelerazioni:

$$\begin{aligned} a_x &= l \left[-\sin \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \cos \vartheta \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \right] = -g \sin \vartheta \cos \vartheta \\ a_y &= l \left[\cos \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \sin \vartheta \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \right] = -g \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

L'uguaglianza finale è con le formule ottenute prima, dalla seconda legge di Newton. In ogni caso, queste sono le formule del pendolo... una bella pezza! A noi però interessano solamente le **piccole oscillazioni (approssimazione)**: l'angolo ϑ ha un range $\vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ma noi approssimiamo dando $\vartheta \in (-\epsilon, +\epsilon)$, con $\epsilon \ll 1$. Ciò significa che passiamo da un range di circa $(-1.57, +1.57)$ ad un range con valori massimo e minimi molto più piccoli di uno.

Sviluppi infinitesimali Con $\epsilon \ll 1$ vengono le seguenti:

$$\sin \epsilon \simeq \epsilon \quad \cos \epsilon \simeq 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \quad \tan \epsilon \simeq \epsilon \quad e^\epsilon \simeq 1 + \epsilon$$

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon)^\alpha &\simeq 1 + \alpha\epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 + \epsilon} = (1 + \epsilon)^{-1} = 1 - \epsilon \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{1 + \epsilon} = (1 + \epsilon)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Torniamo alle formule, dividendo da entrambi i lati per la lunghezza:

$$\begin{aligned} \left[-\sin \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \cos \vartheta \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \right] &= -\frac{g}{l} \sin \vartheta \cos \vartheta \\ \left[\cos \vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \sin \vartheta \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \right] &= -\frac{g}{l} \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

Con ϑ molto piccolo posso permettermi di semplificare i seguenti valori:

$$\begin{aligned} -\vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} \right) \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= -\frac{g}{l} \vartheta \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} \right) \\ \left(1 - \frac{\vartheta^2}{2} \right) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 &= -\frac{g}{l} \vartheta^2 \end{aligned}$$

Trovo che lungo l'asse y ho poca se non zero accelerazione. Ottengo:

$$\begin{aligned} -\vartheta \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= -\frac{g}{l} \vartheta \\ \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 + \vartheta \frac{d^2\vartheta}{dt^2} &= 0 \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione ricavo $\left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2$, e lo inserisco nella prima equazione:

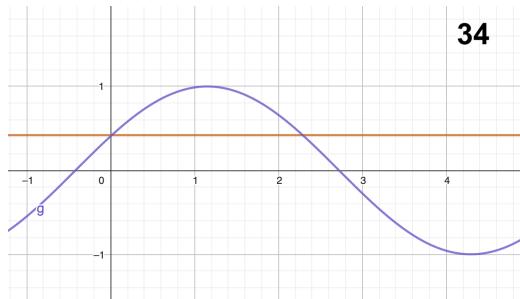
$$-\vartheta \left(-\vartheta \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \right) + \frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l} \vartheta = 0$$

Nelle piccole oscillazioni posso trascurare un valore piccolo come ϑ^2 , approssimandolo a zero e semplificando il primo termine. Definisco $\omega^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g}{l}$, con ω pulsazione, e trovo l'**equazione del moto armonico**:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2 \vartheta = 0$$

Questa equazione **armonica** descrive il movimento di un sistema lungo un punto di equilibrio; la vedremo molto spesso, cambiando l'angolo con un altro valore. Rappresenta tutto ciò che vibra attorno ad un equilibrio.

Verificare che la soluzione di quell'equazione è $\vartheta(t) = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi)$, con ϑ_0 parametro esterno, l'ampiezza massima e φ fase, un certo angolo, parametro esterno (vedi (FIG 34)). Se mi



Equazione moto armonico; la retta corrisponde a phi

mantengo in angoli molto piccoli ($\vartheta \ll 1$), $\vartheta(t)$ oscilla tra un valore massimo ed uno minimo dato dal parametro ϑ_0

Nota: se parlassimo di angoli maggiori, il sistema si allontanerebbe via via dall'equazione definita. Anche l'uguale = nell'ultima formula è più un circa uguale \simeq

Possiamo esprimere ω come $2\pi/T$, il tempo che serve al sistema per ripresentarsi nella stessa situazione, ovvero il periodo:

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$$

Nota: funzione periodica: $\vartheta(\bar{t}) = \vartheta(\bar{t} + T) \quad \bar{t} \in D_t \quad (T \text{ periodo})$

Troviamo che il periodo del pendolo cresce allungando la corda, ma che è anche inversamente proporzionale a g (sulla luna ho un periodo più lungo).

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Ma troviamo anche che il periodo non dipende dall'ampiezza dell'oscillazione, da ϑ_0 ; questo fenomeno si chiama **isocronia delle piccole oscillazioni**. La seconda cosa importante è che questo periodo non dipenda dalla massa.

Parliamo ora di **molle**. Prendiamo in considerazione una molla che non ha massa, o meglio la cui massa è concentrata tutta sulla sua testa. La metto in orizzontale per dimenticarmi della forza peso, e considero una superficie con coefficiente d'attrito nullo. Vedi (FIG 35). Chiamo la lunghezza a riposo della molla l_0 , e spingo o tiro la molla per modificarne la lunghezza in l' .

Se allungo la molla, quindi $l' > l_0$, la forza F_x applicata dalla molla sarà negativa; se invece la comprimo, in modo da avere $l' < l_0$, la forza che applica la molla è positiva, $F_x > 0$. Questa forza è detta **di richiamo**, che richiama la molla alla posizione di riposo.

Questa proporzionalità può essere espressa tramite una costante, l'unico numero che descrive la nostra molla; non ci interessa il colore, la lunghezza, ci interessa la sua **durezza**, espressa dalla **costante elastica k** . La forza elastica è proporzionale all'allungamento e sempre opposta:

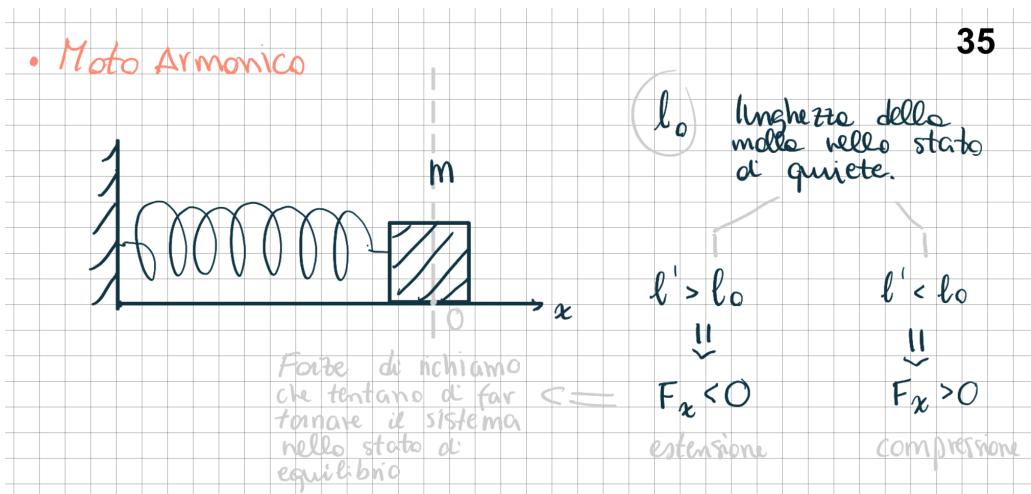
$$F_{el} = -k(x - l_0)$$

Generalizziamo tridimensionalmente:

$$\vec{F} = -k\Delta\vec{x}$$

• Moto Armonico

35



Molla

Così sto dicendo che la forza di richiamo è sempre diretta lungo la deformazione che ho applicato.

Scegliamo come posizione di riferimento lo zero, quindi la posizione della "testa" della molla a riposo; posso perciò assumere $l_0 = 0$ e posso definire la forza di richiamo, ovvero la forza elastica, come:

$$\vec{F}_{\text{el}} = -k \vec{x}$$

Questa è la **legge della forza elastica**, legge di Hooke. Ricordiamo che vale solo entro certi limiti, estendere la molla troppo può danneggiarla.

Nota: il sistema di riferimento non è fissato al corpo, altrimenti non si muoverebbe!

Siccome la forza esterna, quella elastica, è uguale a ma (in una dimensione) abbiamo:

$$\begin{aligned} F_{\text{el}} &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ -kx &= m \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega^2} x &= 0 \\ \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x &= 0 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

Otteniamo un moto armonico. Mentre prima valeva con la condizione che gli angoli fossero molto piccoli, qui vale fino a che la molla non si sfalda (finché rimane).

Anche in questo caso il periodo di oscillazione non dipende da x , ovvero da quanto la allungo o comprimo all'inizio.

Ammortizzatori Assumiamo il periodo delle molle di un ammortizzatore di una macchina pari a $T_{\text{amm}} \simeq 1$ sec. Una macchina avrà una massa tra i 1000 e i 2000 chili: dividiamo il peso lungo i 4 ammortizzatori, ottenendo $m \simeq 300$ kg (ciascuno gestirà tra i 200 e i 500 chili). La costante elastica viene $k = \frac{4\pi^2}{T^2}m = 1,2 \cdot 10^3 \frac{N}{m} = 1 \frac{kN}{m}$.

Nota da video: nella molla, se aumenta la massa legata alla molla, per la seconda legge di Newton, l'accelerazione diminuirà; ciò significa che anche la velocità si abbassa, e di conseguenza il periodo si allunga. Per questo la massa entra in gioco nell'equazione del moto armonico della molla. Per il pendolo invece se aumenta la massa, aumenta la tensione, ma quindi aumenta anche la forza lungo l'asse x (forza di richiamo, quella che fa tornare indietro il pendolo); se aumentano entrambe, non cambia l'accelerazione, quindi la velocità, quindi non cambia il periodo del pendolo. Nella molla se k aumenta, una minore estensione porta ad una forza maggiore e accelerazione maggiore e periodo minore (infatti k è al denominatore). Se il pendolo fosse nello spazio, non oscillerebbe; entro in uno shuttle, lì la gravità percepita è 0 e il pendolo rimane immobile. Ho infatti la costante di gravità a denominatore nel periodo. Se porto una molla nello shuttle questa oscilla comunque; così si misura la massa nello spazio, con una molla conoscendo k . Se aumento la lunghezza della corda del pendolo, ci metterà di più a oscillare; se la riduco, ci metterà di meno.

1.5 Lavoro ed energia

Combinando la seconda legge della dinamica e la definizione che abbiamo dato alla velocità otteniamo:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \vec{a}(\tau) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \frac{\vec{F}(\vec{x}; \vec{v}; \tau)}{m} \\ \vec{x}(t) &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \vec{v}(\tau) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t d\tau \left[\vec{v}_0 + \int_{t_0}^\tau d\sigma \frac{\vec{F}(\vec{x}; \vec{v}; \sigma)}{m} \right]\end{aligned}$$

Torniamo alla molla. Prendiamo in considerazione una molla ideale, con coefficiente elastico k , e proviamo a calcolare la velocità massima v_{\max} che questa raggiunge dopo essere stata estesa per una lunghezza Δx (vedi (FIG 36)).



Esempio molla

Vale:

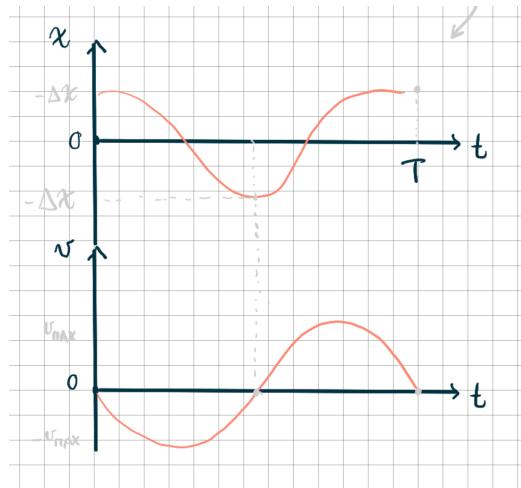
$$F = ma \Rightarrow -kx = mx'' \Rightarrow x'' + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow x'' + \omega^2 x = 0$$

Per risolvere questa otteniamo $x' = x'_0 + \int_{t_0}^t d\tau (-\omega^2 x)$, che ha come soluzione l'equazione del moto armonico: $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Provando a risolvere per $t = 0$ otteniamo:

$$\begin{cases} x(t=0) = \Delta x = x_0 \sin \varphi \\ v(t=0) = 0 = \omega x_0 \cos \varphi \end{cases}$$

Da cui otteniamo che $x_0 = \Delta x$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ o $-\frac{\pi}{2}$. Possiamo inserire questi valori nell'equazione del moto armonico e troviamo:

$$x(t) = \Delta x \cdot \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = \Delta x \cos(\omega t)$$



Moto armonico

Dobbiamo ancora trovare v_{\max} . Proviamo a derivare lo spazio rispetto al tempo per trovare la velocità:

$$v(t) = x'(t) = -\omega \Delta x \sin(\omega t)$$

Per trovare la velocità massima posso guardare il grafico, oppure ricordo che $v(t)$ dipende dal seno, che oscilla tra +1 e -1, e che quindi avrà valore massimo quando $\sin(\omega t) = 1$. Otteniamo quindi la velocità massima:

$$|v_{\max}| = \omega \Delta x = \sqrt{\frac{k}{m}} \Delta x$$

Da qui posso fare qualche passaggio algebrico:

$$\begin{aligned} v_{\max} &= \sqrt{\frac{k}{m}} \Delta x \\ v_{\max}^2 &= \frac{k}{m} (\Delta x)^2 \\ mv_{\max}^2 &= k(\Delta x)^2 \\ \frac{1}{2}mv_{\max}^2 &= \frac{1}{2}k(\Delta x_{\max})^2 \end{aligned}$$

Abbiamo trovato che la velocità massima di questa molla dipende dalla sua elongazione massima. A sinistra abbiamo una variazione di energia cinetica mentre a destra abbiamo una variazione in energia potenziale (ΔE_k), o se vogliamo un lavoro ($-\Delta E_p = W$).

(38)

$$\vec{F} \cdot d\vec{x} = |\vec{F}| |\vec{d}| \cos \theta$$

Prodotto

Torniamo alle formule della dinamica. Proviamo a moltiplicare destra e a sinistra per dx , per

la variazione di posizione:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{F} \cdot d\vec{x} &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{x} \\ \vec{F} \cdot d\vec{x} &= m d\vec{v} \cdot \underbrace{\frac{d\vec{x}}{dt}}_{\vec{v}}\end{aligned}$$

Questo risultato è contenuto all'interno delle leggi di Newton:

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot d\vec{x} &= m d\vec{v} \cdot \vec{v} \\ \vec{F} \cdot d\vec{x} &= m d \left[\frac{v^2}{2} \right]\end{aligned}$$

Per trovare a cosa corrisponde il valore sulla sinistra vediamo (FIG 38). La quantità $F \cdot d\vec{x}$ corrisponde al **lavoro** (W), e dato che il cambio di posizione è stato infinitesimale ($d\vec{x}$), anche la variazione di lavoro è **infinitesimale**:

$$dW = d \left[\frac{1}{2} mv^2 \right]$$

Questo è il **teorema delle forze vive**, nella sua forma infinitesimale. Possiamo vederlo nella sua forma finita:

$$\int_i^f d[W] = m \int_i^f d \left[\frac{v^2}{2} \right]$$

$$W_{i \rightarrow f}^{(\text{ext})} = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_i^2$$

Scriviamo $i \rightarrow f$ perché il lavoro si ha per uno spostamento, quindi sempre da una situazione iniziale ad una finale; $^{(\text{ext})}$ perché rimane si tratta del lavoro della somma delle *forze esterne*.

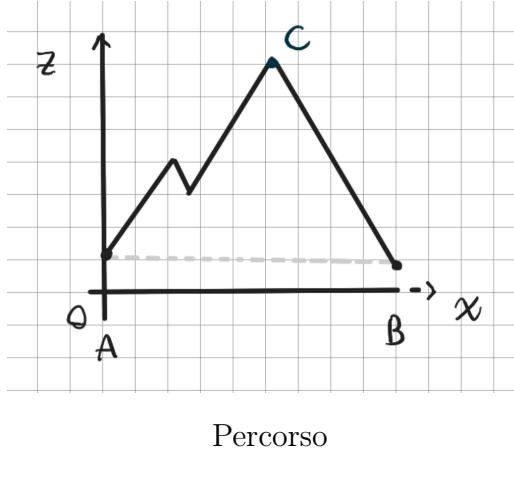
Il lavoro si definisce come forza per spostamento; avrà come unità di misura l'unità di misura della forza per quella dello spostamento. È la prima forma di energia che vedremo in questo corso; si merita un'unità di misura a sé, ovver il *Joule*:

$$\begin{aligned}dW &= \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ [W] &= [FL] \\ \text{udm}[W] &= \text{udm}[F] \text{udm}[L] = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ J}\end{aligned}$$

Questa quantità è sempre definibile per una massa in movimento. Inizialmente questa misura era detta "forza viva", presente quando l'oggetto era in movimento; è chiamata **energia cinetica**: la differenza di energia cinetica è uguale al lavoro compiuto dalle forze esterne, in un sistema inerziale. Definiamo quindi:

$$E_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} mv^2$$

Possiamo ora dedicarci al calcolo del lavoro per delle forze specifiche.



Forza peso Abbiamo $\vec{F} = -mg\hat{z}$. Supponiamo di muoverci in maniera rettilinea lungo un percorso bidimensionale come in (FIG 39), tale per cui la quota nel punto A sia pari alla quota nel punto B ($z_A = z_B$). Vale la seguente per il lavoro:

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B [-mg\hat{z}] \cdot [dx \cdot \hat{x}] = 0$$

In questo caso con $d\vec{s}$ indichiamo lo spostamento di un oggetto che si muove lungo l'asse x di dx (quindi $x\vec{s} = dx\hat{x}$).

Nota: quando lo spostamento e la forza sono ortogonali, il loro prodotto scalare è zero, e quindi non c'è lavoro.

Andiamo ora dal punto B al punto C, dove la quota finale è maggiore dell'iniziale ($z_C > z_B$):

$$\begin{aligned} W_{B \rightarrow C} &= \int_B^C [-mg\hat{z}] \cdot [-\hat{x}dx + \hat{z}dz] \\ &= \int_B^C \underbrace{(-mg\hat{z} \cdot -\hat{x}dx)}_0 \cdot (-mg\hat{z} \cdot -\hat{z}dz) \\ &= \int_B^C -mg \underbrace{(\hat{z} \cdot \hat{z})}_{=1} dz \\ &= -mg \underbrace{(z_c - z_b)}_{>0} \\ &= -mg\Delta z \end{aligned}$$

E il risultato che otteniamo ha senso. Il lavoro fatto dalla forza peso è negativo rispetto allo spostamento compiuto; infatti, salendo sentiamo il peso contro di noi, che va verso il basso. **Non** possiamo dire che il lavoro ottenuto è pari alla differenza di energie cinetiche, perché non siamo sicuri siano tutte le forze in gioco. Siamo però sicuro che questo sia il lavoro fatto dalla forza peso.

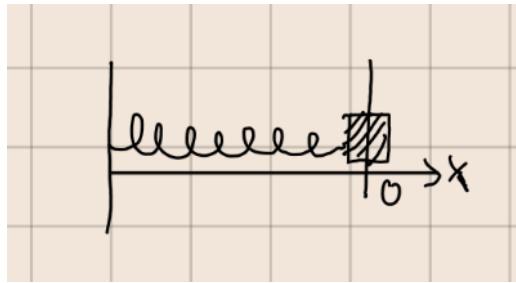
Nota: dimostrare le seguenti: $W_{A \rightarrow C} = W_{B \rightarrow C}$ e che $W_{C \rightarrow B} = -W_{B \rightarrow C}$ e che $W_{A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A} = 0$.

Ricapitolazione Partendo dalla seconda legge della dinamica e siamo arrivati all'uguaglianza tra una quantità infinitesimale di lavoro e un'infinitesimale variazione di energia cinetica ($dW =$

dE_k), da cui il teorema delle forze vive ($W_{i \rightarrow f} = \Delta E_k$). Il lavoro è anche pari all'integrale del lavoro infinitesimale compiuto dall'inizio alla fine ($W_{i \rightarrow f} = \int_i^f dW = \int_i^f \vec{F} \cdot d\vec{s}$). Abbiamo anche preso l'esempio della forza peso, trovando $W_{H \rightarrow H+h} = -mgh$, dove il lavoro non dipende dalla traiettoria ma solo dalla differenza di altezza. Vediamo ora il caso di un'altra forza.

Forza elastica Prendiamo in considerazione una molla in posizione di riposo (FIG 40). Il lavoro compiuto dalla forza elastica è definito come segue:

$$dW_{el} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} = -k(\vec{x} \cdot d\vec{s})$$



Molla a riposo

Noi ci limitiamo ad un caso unidimensionale, dove la direzione dello spostamento causato dalla molla è pari alla direzione della contrazione o estensione della molla ($dir(\vec{x}) = dir(d\vec{s})$), con $d\vec{s} = ds = dx$. Con questa ipotesi unidimensionale, ciò che abbiamo trovato prima diventa:

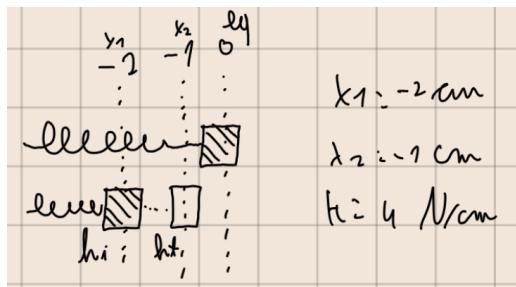
$$dW_{el} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{F}_{el} \cdot d\vec{s} \stackrel{1-D}{=} -kx dx$$

Troviamo che il lavoro vale:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f dW = \int_i^f -kx dx = \left[-\frac{1}{2} kx^2 \right]_i^f = -\frac{1}{2} kx_f^2 + \frac{1}{2} kx_i^2 = -\frac{1}{2} k [x_f^2 - x_i^2]$$

La forza elastica ha un lavoro negativo rispetto al movimento. Notiamo come anche in questo caso il lavoro non si interessa di ciò che accade durante l'azione della forza, ma solamente della variazione tra posizione iniziale e posizione finale.

Nota: nel calcolo del lavoro della molla non influisce la massa collegata alla molla.



Esempio forza elastica

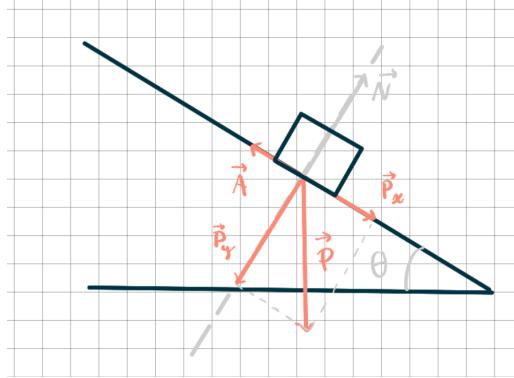
Immaginiamo ora di avere una molla con $k = 4N/cm$, che si trova in posizione iniziale $x_i = -2cm$ e viene portata in posizione finale $x_f = -1cm$ (FIG 41). Se applichiamo la formula

ottenuta abbiamo:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{el}} &= -\frac{1}{2} 4 \frac{N}{cm} [(-1cm)^2 - (-2cm)^2] \\
 &= -2 \frac{N}{cm} [1cm^2 - 4cm^2] \\
 &= 6 N \cdot cm = 6 N \cdot 10^{-2} m = 6 \cdot 10^{-2} J
 \end{aligned}$$

Attrito dinamico Esistono delle configurazioni in cui una massa posta su un piano inclinato scende a velocità costante. Velocità costante significa assenza di accelerazione, e dalla seconda legge della dinamica $\vec{F}^{(\text{ext})} = m \vec{a}$, sappiamo che la somma delle forze esterne deve essere zero. Peso e reazione vincolare da sole non sono sufficienti per annullare le forze; c'è quindi un'altra forza, l'attrito, che contribuisce al sistema: $\vec{P} + \vec{N} + \vec{A} = \vec{0}$.

La forza ad'attrito è data dal prodotto tra la reazione vincolare del piano e il coefficiente d'attrito dinamico μ_d , in quanto siamo in movimento; si moltiplica per il verso opposto a quello della velocità, in quanto questa forza è sempre opposta al movimento. Il coefficiente d'attrito μ_d contiene tutto ciò che microscopicamente accade tra le due superfici (prende in considerazione la rugosità della prima superficie, la rugosità della seconda, le interazioni elettromagnetiche anche deboli, è una media di tutte queste caratteristiche). Vale quindi $\vec{A} = \mu_d |\vec{N}| (-\hat{v})$.



Forze piano inclinato

Torniamo sul piano inclinato, situazione in (FIG 42). Ricordo che il blocco è già in movimento, e noi stiamo considerando il caso in cui non ci sia accelerazione. Ciò significa che lungo l'asse x le forze si bilanciano. Valgono le seguenti:

$$P = mg \quad P_{\parallel} = mg \sin \vartheta \quad P_{\perp} = mg \cos \vartheta = N \quad A = \mu_d N = \mu_d mg \cos \vartheta$$

Dalle quali possiamo ottenere:

$$P_{\parallel} - A = 0 \Rightarrow mg \sin \vartheta = \mu_d mg \cos \theta \Rightarrow \tan \vartheta = \mu_d$$

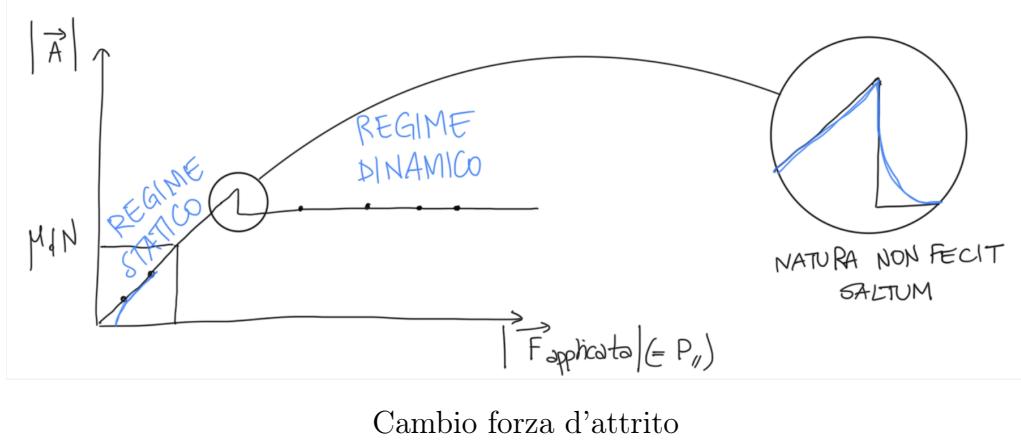
La forza d'attrito dinamico bilancia la forza peso parallela quando il coefficiente d'attrito dinamico è pari alla tangente dell'angolo d'inclinazione del piano.

Rappresentiamo il modulo della forza d'attrito in funzione della forza applicata, in questo caso il peso parallelo P_{\parallel} . Provo a spingere una sedia e noto l'assenza di movimento. Se non c'è movimento, significa che per il valore della forza applicata, la forza d'attrito ha modulo uguale. Se continuo a spingere la sedia, prima in modo da darle velocità costante e poi facendola

accelerare, la forza d'attrito fra questi due casi rimane uguale: abbiamo visto come la forza d'attrito dinamica dipende dalla reazione vincolare, dalla forza che il piano esercita sulla sedia, e tra i due movimenti questa non cambia. La differenza tra la prima e le seconde due situazioni è che nel primo caso non c'è movimento, nelle altre sì... in che momento lo spingere la sedia fa sì che da ferma questa inizi a muoversi? Quando avviene il punto di rottura, da staticità a dinamicità?

Uno potrebbe dire che la forza necessaria a dare inizio allo spostamento è pari a quella necessaria per mantenerla in movimento... ma ciò non è vero, e con quella forza l'oggetto non si sposterebbe dalla sua posizione. Applico una forza crescente per far muovere l'oggetto, e nel momento in cui il movimento si avvia, la forza necessaria per mantenerlo in movimento è leggermente minore; c'è un calo nella forza necessaria, e perciò deve esserci un calo nella forza d'attrito tra la superficie e il corpo in movimento (FIG 43).

Nota: natura non fecit saltum, sia nel momento d'inizio di applicazione della forza che nel momento in cui c'è il salto tra l'attrito statico massimo e l'attrito dinamico che si oppone al movimento non c'è un vero e proprio salto, una verticale nel grafico; il cambiamento è sempre graduale.



Attenzione! La forza d'attrito statico che si ottiene con $F_{AS}^{\text{MAX}} = \mu_s N$ è la forza di attrito statico massima che può venir applicata. La forza di attrito statico che abbiamo visto nel grafico, crescente, che contrasta la forza applicata e che impedisce il movimento del blocco è minore di quella massima, $F_{AS} \leq \mu_s N = F_{AS}^{\text{MAX}}$.

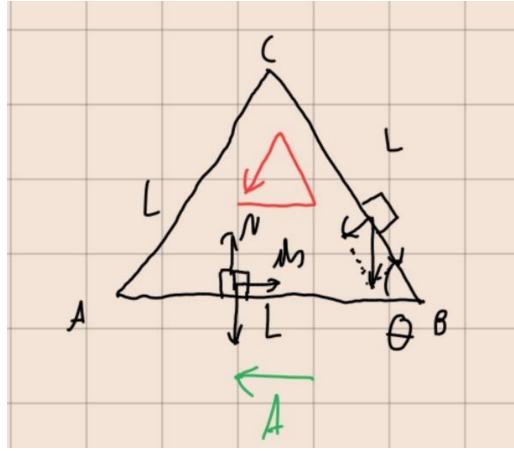
Piano inclinato, aumentiamo l'inclinazione. Nel momento in cui avviene il distacco, il blocco inizia a muoversi e il movimento è accelerato, perché la forza applicata dal peso aumenta fino ad un punto in cui batte la forza d'attrito statico massima, che è maggiore della forza d'attrito dinamico; non c'è bilanciamento delle forze. Se volessimo ottenere velocità costante, si dovrebbe ora abbassare il piano.

Riprendiamo la situazione in figura (FIG 44). Andiamo a calcolare il lavoro per spostarci dalla posizione A alla posizione B:

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{attr}} = \int_A^B \vec{F}_{\text{attr}} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -\mu_d N ds = -\mu_d N \int_A^B ds = -\mu_d N_{AB} L = -\mu_d PL$$

Adesso andiamo a spingere la massa verso l'alto, da B a C, lungo il lato L. Otteniamo:

$$W_{B \rightarrow C} = / \text{vedi su} / = -\mu_d N_{BC} L = -\mu_d PL \cos \vartheta$$



Percorso con forza d'attrito

Se invece volessi calcolare il lavoro della forza d'attrito ottenuto da B a C abbiamo:

$$W_{B \rightarrow C} = / \text{vedi su} / = -\mu_d N_{CA} L = -\mu_d P L \cos \vartheta$$

Sommando le tre quantità ottenute, troviamo che il lavoro totale compiuto dalla forza d'attrito vale:

$$W_{A \rightarrow A}^{\text{attr}} = -\mu_d P L (1 + 2 \cos \vartheta)$$

Non possiamo conoscere il lavoro necessario per compiere un movimento da un punto A, attraverso un percorso, fino a ritornare a quel punto. Se l'unica forza da contrastare è la forza peso, nessun problema, il lavoro è zero in quanto torno alla posizione iniziale; se però entra in gioco l'attrito, devo necessariamente conoscere il percorso.

Nuovo contesto, piano inclinato, sciatore sulla cima del piano. Abbiamo: $\vartheta = 30^\circ$, $m = 67 \text{ kg}$, $\mu_d = 10^{-2}$. Parte da una velocità iniziale $v_i = 0$, e percorre il piano di $D = 100 \text{ m}$. A quale velocità finale v_f arriverà alla base della vallata?

Sfruttiamo le formule del lavoro $W_{i \rightarrow f}^{(\text{ext})} = \Delta E_k = E_{kf} - E_{ki}$ e dell'energia $E_k = \frac{1}{2}mv^2$:

$$\begin{aligned} W_{i \rightarrow f}^P &+ W_{i \rightarrow f}^{\text{attr}} &= E_{kf} + E_{ki} \\ -mg(h_f - h_i) &- \mu_d ND &= E_{kf} + E_{ki} \\ \cancel{mgD \sin \vartheta} &- \mu_d \cancel{mg \cos(\vartheta)} \cdot D &= \frac{1}{2}mv_f^2 + 0 \end{aligned}$$

Da qui otteniamo la velocità finale:

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{2gD(\sin \vartheta - \mu_d \cos \vartheta)} \\ &= \sqrt{2 \cdot 10^3 (0,5 - 8,066 \cdot 10^{-2})} \text{ m/s} \\ &= \pi \cdot 10 \text{ m/s} = 31,4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Approssimiamo $g = 10$. Notiamo come la forza d'attrito abbia un impatto molto minore rispetto alla forza peso, nel nostro contesto in cui la sciatrice scenda dritta verso la valle, senza curve.

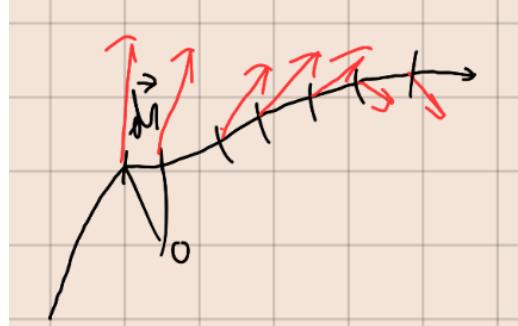
Per alcune forze, come la forza peso $\vec{F} = m\vec{g}$ e la forza elastica $\vec{F} = -k\vec{x}$, se una volta terminato il movimento si ritorna al punto di partenza il lavoro compiuto è pari a zero: $W_{A \rightarrow A} =$

0. Abbiamo visto poi che per l'attrito dinamico $\vec{F} = -\mu_d |\vec{N}| \hat{v}$ il lavoro di un movimento che ha come destinazione il punto di partenza non è mai zero: $W_{A \rightarrow A} \neq 0$. Possiamo separare queste due classi di forze in forze conservative e forze non conservative.

Il lavoro sul percorso è definito come segue:

$$W_{A \rightarrow B}^* = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}^* \cdot d\vec{s}$$

Quindi come la somma di dei micro-lavori compiuti dalle micro-forze lungo i micro-spostamenti che compongono la traiettoria (vedi (FIG 45)).

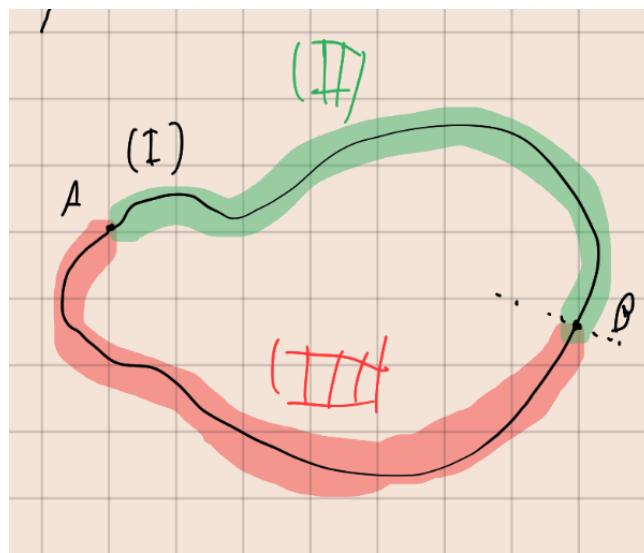


Somma dei micro-lavori

Possiamo definire le forze il cui lavoro per muoversi da una posizione e tornare alla stessa, il cui integrale lo indichiamo con il cerchietto nel mezzo, come **forze conservative**:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \text{def} \quad \text{Forze conservative}$$

Corollario (1)



Percorsi I, II, III

Questa definizione ha come corollario:

$$(1) \quad \int_{(II)}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{(III)}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \dots$$

Il percorso scelto non influenza il lavoro totale.

Osserva la figura (FIG 46). Vale $\vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot (-d\vec{s}) = -\vec{F} \cdot d\vec{s}$. Quindi per definizione, l'integrale lungo il primo tratto (I):

$$\oint_{\substack{A \rightarrow A \\ (I)}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Se guardiamo il disegno, troviamo che l'integrale appena calcolato lungo il percorso (I) è uguale alla somma del lavoro nel percorso (II) e del percorso (III):

$$\int_{(II)}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{(III)}^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Possiamo invertire il verso del terzo percorso, trovando un lavoro opposto:

$$\int_{(II)}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{(III)}^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Le ultime equazioni scritte sono uguaglianze. Posso quindi arrivare a dire che:

$$\int_{(II)}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{(III)}^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Abbiamo quindi verificato come il lavoro non dipenda dal percorso scelto.

Gradiente

Il simbolo ∇ o $\text{grad}[]$ indica il gradiente. Per una funzione a più variabili $f(x, y)$, il gradiente è definito come:

$$\overrightarrow{\text{grad}}[f] = \begin{bmatrix} \frac{df}{dx} \\ \frac{df}{dy} \end{bmatrix}$$

Se prendiamo la funzione $f(x, y) = xy - x^2$ e proviamo a derivare fissando la y su un certo valore, troviamo $\text{grad}[f]_x = y - 2x$; se invece fissiamo un valore x , la derivata della funzione fissato x è $\text{grad}[f]_y = x$. Troviamo allora che il nostro gradiente è un vettore in due dimensioni:

$$\text{grad}[f] = \begin{pmatrix} y - 2x \\ x \end{pmatrix}$$

Proviamo a disegnare il gradiente. Dato un punto di partenza x, y , possiamo trovare il valore del gradiente come il vettore che parte da x, y e arriva al valore di quel gradiente. In figura (FIG 47) vediamo i valori per $x = 1, y = 0$, per $x = 1, y = 1$ e per $x = 1, y = -1$.

Nota: quando facciamo le derivate su funzioni a più variabili e ne consideriamo una sola stiamo facendo derivate parziali: $\frac{\partial f}{\partial x}$.



Gradiente

Corollario (2)

Abbiamo come corollario il seguente:

$$\exists U(\vec{r}) \mid \vec{F} = -\nabla [U(\vec{r})] \Leftrightarrow -\frac{\vec{d}U}{d\vec{r}}$$

Nota: la \cup indica una funzione qualsiasi

Il motivo del segno meno lo vedremo più avanti. Il segno di vettore ci ricorda che la quantità a destra è un vettore, il gradiente. Le parentesi quadre nella prima definizione di gradiente ci ricordano che è una funzione, ed equivale a un vettore.

Si consideri la seguente uguaglianza, dove la Φ è usata come simbolo per la primitiva:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{r}_B) - \Phi(\vec{r}_A)$$

Sostituiamo la Φ con una cosa uguale, ma di segno opposto, chiamata U . Il motivo del segno meno è lo stesso del meno nel gradiente, e vedremo più avanti perché. Vale quindi:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{r}_B) - \Phi(\vec{r}_A) = -[U(\vec{r}_B) - U(\vec{r}_A)]$$

Proviamo ora a derivare a destra e a sinistra del primo uguale. Sappiamo che la derivata dell'integrale di una funzione è pari alla funzione:

$$\vec{F} = D_x \left[\int_x^{x+\varepsilon} f(y) dy \right] = D_x [F(x + \varepsilon) - F(x)] = D_x [F(x)] = -\frac{\vec{d}}{d\vec{r}} U(\vec{r})$$

Forze conservative Le forze conservative sono quelle per cui il lavoro lungo un percorso chiuso è 0, oppure il lavoro tra un punto A e un punto B non dipende dal percorso, oppure che si possono esprimere come il gradiente di una funzione.

Nota

Ricordiamo il teorema del calcolo integrale:

$$\int_x^{x+\varepsilon} f(y) dy = F(x + \varepsilon) - F(x)$$

Se dividiamo da entrambi i lati per ε , e poi prendiamo il limite di ε che tende a 0, troviamo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_x^{x+\varepsilon} f(y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon}$$

A sinistra stiamo portando l'intervallo dell'integrale ad un valore sempre più piccolo, mentre a destra stiamo calcolando la derivata secondo definizione:

$$\frac{f(x)\not\in}{\not\in}$$

Ricordiamo che per A intendiamo un raggio vettore $\vec{r}_A = \vec{r}$, e per B intendiamo una nuova posizione, $\vec{r}_B = \vec{r} + \delta \vec{r}$. Nello spazio una posizione si indica tramite un vettore.

Definizioni

Dal secondo corollario, otteniamo:

$$W_{A \rightarrow B} = -[U(B) - U(A)] = -\Delta U_{A \rightarrow B}$$

Chiamiamo U **energia potenziale**. Questa definizione viene dal secondo corollario, e vale solamente perché abbiamo definito cosa siano le forze conservative. Non si può parlare dell'energia potenziale di forze non conservative, come la forza d'attrito.

Stiamo dicendo che $-U(\vec{r}) + \text{cost.}$ è la primitiva di $\vec{F} \cdot d\vec{r}$:

$$-U(\vec{r}) + \text{cost.} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Dalla definizione di forza conservativa troviamo anche $\Delta U_{A \rightarrow A} = 0$.

Forza peso La forza peso vale $\vec{F} = -mg\hat{z}$, e per come abbiamo definito l'energia potenziale rispetto al lavoro questa vale $U = mgz$.

Forza elastica La forza elastica lungo la direzione \hat{x} vale $\vec{F} = -kx\hat{x}$, la cui energia potenziale vale $U = \frac{1}{2}kx^2$. Sempre per come l'abbiamo definita rispetto al lavoro.

Sappiamo che il lavoro totale che le forze esterne compiono per andare da A a B nel sistema è uguale alla variazione di energia cinetica:

$$W_{A \rightarrow B}^{(\text{TOT,EXT})} = E_{K,B} - E_{K,A}$$

Queste forze esterne possono essere conservative, oppure no. Una parte di lavoro compiuto dalle forze conservative e una parte dalle forze non conservative. L'uguaglianza è uguale a:

$$W_{A \rightarrow B}^{(\text{TOT,CONS})} + W_{A \rightarrow B}^{\text{TOT,N.C.}} = E_{K,B} - E_{K,A}$$

Abbiamo dimostrato che il lavoro totale compiuto dalle forze conservative è uguale alla variazione di energia potenziale:

$$-[U_B - U_A] + W_{A \rightarrow B}^{\text{TOT,N.C.}} = E_{K,B} - E_{K,A}$$

Se cambio un attimo la notazione:

$$-\Delta U_{AB} + W_{A \rightarrow B}^{\text{TOT,N.C.}} = \Delta E_{K,AB}$$

Ottengo il **teorema generale della conservazione dell'energia meccanica**:

$$\Delta U_{AB} + \Delta E_{K,AB} = W_{A \rightarrow B}^{\text{TOT,N.C.}}$$

Posso definire l'**energia meccanica** come la somma dell'energia potenziale dell'energia cinetica:

$$E \stackrel{\text{def}}{=} U + E_K$$

Insomma, otteniamo che il lavoro compiuto dalle forze non conservative è pari alla variazione di energia meccanica:

$$W^{\text{N.C.}} = \Delta E$$

Cerchiamo ora di spiegare il – che abbiamo usato un paio di volte. Ci è servito per poter spostare la variazione di energia potenziale.

Quando ci sono **solo** forze conservative significa che la variazione di energia meccanica è pari a zero, $\Delta E = 0$. Se non varia, significa che si conserva; da questo il nome forze conservative. Se l'energia meccanica non varia, quando non ci sono forze non conservative, significa che l'energia meccanica nello stato iniziale è pari all'energia nello stato finale: $E_i = E_f$. Quest'equazione non ci dice che non c'è dinamica, che non c'è movimento; ci dice solo che tutto ciò che accade qui rimane entro i vincoli definiti da questa uguaglianza.

Prendiamo ad esempio un pendolo. Nella posizione iniziale i l'energia cinetica è zero, $E_{K,i} = 0$, in quanto parto da fermo; l'energia potenziale è data dalla forza peso, $E_{p,i} = mgz$. È brutto dire che l'energia potenziale dipende dalla z , perché cambiare il sistema di riferimento sarebbe sufficiente per avere energia diversa... vediamo più avanti. Alla posizione finale, l'equilibrio, il valore dell'energia potenziale è zero, in quanto abbiamo lì l'origine $E_{p,f} = 0$; l'energia cinetica finora non saremmo stati in grado di calcolarla... ora però sappiamo che l'energia meccanica si conserva, e che in quel punto l'energia cinetica vale mgz_i , non come formula ma come *valore*. Se cambiassimo il punto finale, prendendo f' al punto finale dell'oscillazione, avremmo l'energia cinetica pari a zero in quanto il pendolo si fermerebbe (prima di riprendere ad oscillare), con $E_{k,f'} = 0$; l'energia potenziale sarebbe invece pari a $E_{p,f} = mgz_i - mg\varepsilon$. Si ha l'energia che c'era prima, alla quale tolgo qualcosa; perché alla fine dell'oscillazione arriverebbe un po' più in basso.

1.6 Moto parabolico

Il moto parabolico prende il nome dalla traiettoria descritta dall'oggetto in moto, che prende la forma di una parabola. È un argomento puramente di cinematica, non è necessario usare concetti di dinamica o di meccanica. È un moto piano, caratterizzato da un'accelerazione costante; la più famosa è l'accelerazione di gravità. Il movimento dell'oggetto lungo il piano può essere sempre scomposto nella sua componente lungo x e lungo y . Se chiamiamo \vec{r} la posizione dell'oggetto, vale:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Derivando la posizione due volte otteniamo l'accelerazione, che lungo l'asse delle x è zero, mentre lungo l'asse delle y è pari all'accelerazione di gravità, con verso negativo. Dobbiamo risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} x'' = 0 \\ y'' = -g \end{cases} \quad \begin{cases} x = x_0 + v_{0x}(t - t_0) \\ y = y_0 + v_{0y}(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \end{cases}$$

Andiamo ora a dimostrare che il moto è effettivamente parabolico. Scegliamo la via dolorosa ma breve:

$$\begin{cases} (t - t_0) = \frac{(x - x_0)}{v_{0x}} \\ y = [y_0] + \left[\frac{v_{0y}}{v_{0x}} \right] (x - [x_0]) - \left[\frac{g}{2v_{0x}^2} \right] (x - [x_0])^2 \end{cases}$$

Tutti i dati che abbiamo riquadrato sono numeri, valori che conosciamo e che caratterizzano un problema specifico. Raccogliendo questi valori, troviamo che la seconda riga del sistema equivale a:

$$y = \underbrace{\left(y_0 - \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x_0 - \frac{gx_0^2}{2v_{0x}^2} \right)}_c + \underbrace{\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}} + \frac{gx_0}{v_{0x}^2} \right)}_{bx} x + \underbrace{\left(-\frac{g}{2v_{0x}^2} \right)}_{ax^2} x^2$$

Ritroviamo che i valori dell'asse y hanno una dipendenza dai valori dell'asse x nella forma $y = c + bx + ax^2$, la stessa equazione di una parabola. È per questo che il moto parabolico che riconosciamo in natura lo ritroviamo avere la stessa forma della curva che tanto conosciamo.

Per molti moti parabolici non ha senso parlare di "gittata", perché il moto non deve partire necessariamente dall'origine e formare una parabola completa; è quindi una caratteristica che solo alcuni moti parabolici hanno.

Storia Aristotele per spiegare l'origine di questo moto ha descritto la necessità di una forza applicata all'oggetto, verso l'alto, per combattere la naturale tendenza dell'oggetto a cadere. Una volta terminata la propulsione data dalla forza, l'oggetto sarebbe caduto in una linea retta. Questa traiettoria però non si vede in natura, e già verso il 500 iniziarono delle approssimazioni di questa traiettoria, portandola ad avere una curva sempre più accentuata poco prima dell'inizio della caduta. Un esempio dalla balistica, quando si lancia una palla di cannone, ad esempio, fa vedere come la traiettoria rimane simile a quella parabolica fino a poco dopo aver raggiunto il punto più alto, ma con una caduta molto più rapida; la traiettoria si discosta da quella parabolica per via dell'attrito. La trattazione di questo problema fu molto utile, per motivi pratici e teorici, e persone importanti hanno trattato questo problema.

Se facciamo il rapporto tra i valori scomposti della velocità iniziale troviamo la tangente dell'angolo di lancio: $\frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \tan \vartheta$. Proviamo a calcolare la **quota massima** sfruttando la conservazione dell'energia meccanica, ignorando l'attrito con l'aria. Impostando come situazione

finale il momento in cui l'oggetto raggiunge la massima altezza, vale:

$$\begin{aligned}
 E_i &= E_v \\
 \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh_1 &= \frac{1}{2}mv_v^2 + mgh_v \\
 mv_0^2 + 2mgh_1 &= mv_v^2 + 2mgh_v \\
 v_0^2 + 2gh_1 &= v_v^2 + 2gh_v \\
 v_0^2 - v_v^2 &= 2gh_v - 2gh_1 \\
 v_0^2 - v_v^2 &= 2g(h_v - h_1)
 \end{aligned}$$

Tenendo in considerazione $v_v = v_{0x} = v_0 \cos \vartheta$, troviamo:

$$v_0^2 - v_v^2 = v_0^2 - v_{0x}^2 = v_0^2 - (v_0 \cos \vartheta)^2 = v_0^2(1 - \cos^2 \vartheta)$$

Da cui:

$$v_0^2(1 - \cos^2 \vartheta) = 2g(h_v - h_1) \iff (v_0 \sin \vartheta)^2 = 2g(h_v - h_i)$$

Dal sistema iniziale possiamo ricavare la gittata, la distanza percorsa lungo l'asse delle x al momento dell'atterraggio. Troviamo il tempo che impiega l'oggetto ad atterrare e lo usiamo per il calcolo: $x_f = x_i + v_{0x}t$.

1.7 Gravitazione universale

La forza di gravitazione universale è un'interazione che avviene tra **qualsiasi** due corpi presi in considerazione. Qui il significato di qualsiasi è universale, indipendentemente dal sistema di riferimento; nulla sfugge alla gravità, nemmeno la luce.

Dati due corpi, C_1 e C_2 , hanno una certa caratteristica di difficile definizione. È difficile darla visto che tutti hanno questa caratteristica, il subire la gravità. La forza di gravitazione subita da entrambi è il prodotto di questa caratteristica, divisa per il quadrato della distanza tra loro:

$$\vec{F} = -G \frac{C_1 \cdot C_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{12}$$

Il versore \hat{r}_{12} indica la direzione della congiungente tra i due corpi, con il verso diretto verso C_2 . La costante G ci aiuta a sistemare le unità di misura, visto che a sinistra abbiamo Newton e a destra dobbiamo ancora definire l'unità di misura di C_1 e C_2 . È una forza sempre attrattiva, caratteristica indicata dal segno meno.

C'è un template in natura, che ci indica che una forza tra due corpi è data da una qualità, specifica, identificata di due corpi che indica la loro propensione a sentire questa forza, questa interazione. Si divide per il quadrato della distanza fra questi due corpi, e si moltiplica il tutto per una costante e per un versore:

$$\vec{F} = k \frac{q_1 \cdot q_2}{|\vec{r}_{12}|^2} \hat{r}_{12}$$

Sembra che la natura sia stata costruita secondo un template, dalla quale sono state tirate fuori le quattro forze fondamentali che conosciamo (forza gravitazionale, forza debole, forza forte,

forza elettromagnetica). Nella prima formula il segno meno lo abbiamo esplicitato, nel template generale non ancora.

Nel template la q_1 è la carica, nella forza gravitazionale la C_1 è la massa m_1 ; potremmo dire che la q è la qualità elettrica, la C è una qualità gravitazionale identificabile. La qualità o caratteristica è qualcosa di intrinseca all'oggetto stesso.

La carica elettrica c'è ed è non nulla se l'oggetto è carico elettricamente, e si sente se interagisce elettricamente con altri oggetti. Non tutti gli oggetti sono carichi elettricamente, ma tutti gli oggetti hanno una massa; la massa è una caratteristica che si sente se un oggetto interagisce gravitazionalmente con altri oggetti.

Definiamo **massa gravitazionale** la caratteristica di un corpo di subire l'interazione gravitazionale. Possiamo quindi scrivere m_{G1} al posto di m_1 . Prendiamo in considerazione come forza esterna, nel secondo principio della dinamica, la forza gravitazionale:

$$\vec{F}_{G1 \rightarrow 2} = m_{I2} \vec{a}_2$$

Dalla quale ottengo:

$$-G \frac{m_{G1} m_{G2}}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} = -m_{I2} g \hat{r}_{12}$$

Nota: il segno meno a destra è per la g , che poi semplifichiamo

La massa m_1 la penso tutta concentrata al centro del sistema Terra. Per ora la diamo per scontata, la spiegheremo col teorema di Gauss più avanti. Semplifichiamo i versori, e otteniamo che l'accelerazione di gravità g sulla terra è legata ad una costante fondamentale G , a delle caratteristiche del nostro pianeta (m_{G1} è la massa della Terra), la distanza che corrisponde al raggio della Terra, e ad un rapporto fra due grandezze del corpo 2: il rapporto tra la massa gravitazionale e la massa inerziale. Due quantità, una introdotta per descrivere la capacità di un corpo di attirarsi con un qualsiasi altro elemento nell'universo, l'altra introdotta per far sì che le nostre leggi della dinamica si possano scrivere come abbiamo sempre fatto $\vec{F} = m_I \vec{a}$:

$$g = G \overbrace{\frac{m_{G1}}{r_{12}^2}}^{m_T} \cdot \frac{m_{G2}}{m_{I2}}$$

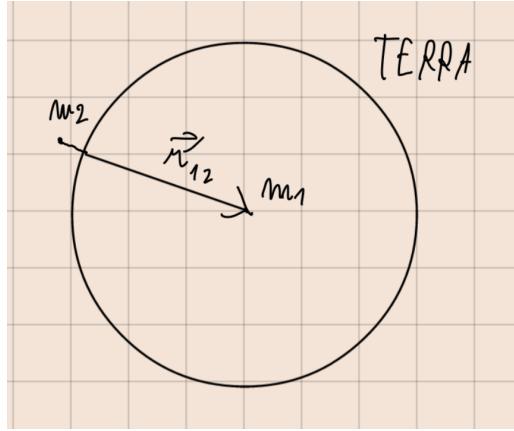
Possiamo dimostrare che massa inerziale e gravitazionale coincidono, quindi per noi il rapporto è pari a 1. Sembra proprio che g dipenda da una costante e da alcune proprietà del pianeta, quali massa e raggio.

La Terra non è una sfera, è schiacciata ai poli, la distanza dal centro del solido all'equatore è maggiore ai poli. Ad ogni modo. Se chiamiamo:

$$\frac{1}{r_{12}^2} = \frac{1}{(R_t + h)^2} = \frac{1}{R_T^2 \left(1 + \frac{h}{R_t}\right)^2} = \frac{1}{R_T^2} \frac{1}{1 + \varepsilon} = \frac{1}{R_T^2} (1 - \varepsilon)$$

Da qui $\frac{h}{R_T}$ è molto piccolo, considerato che R_T è pari a $6,7 \cdot 10^3 \text{ km}$. Ignoriamo le piccole variazioni di altezza in superficie. Vedi (FIG 48).

Nota: pozzo di Assuan, o Siene; prima misura del raggio della Terra. Cerca un resoconto possibilmente scientifico o storico



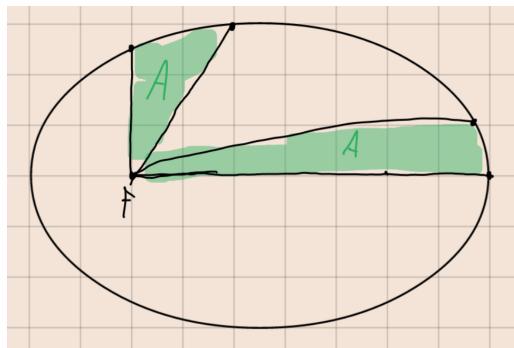
Raggio terrestre e altezza

Con le precedenti considerazioni giungiamo alla conclusione che:

$$g = G \frac{m_T}{R_T^2}$$

La costante G la dobbiamo a Cavendish, che ha trovato $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}$.

Leggi di Keplero La prima legge di Keplero dice che il moto di un pianeta è un orbita attorno al sole di traiettoria ellittica, e il sole occupa uno dei due fuochi di questa ellisse. La seconda legge tratta delle velocità areolari costanti: il raggio vettore del pianeta spazia aree uguali in tempi uguali (vedi (FIG 49)). La terza legge dice che per un dato sistema planetario, come ad esempio il sistema solare, tutte le orbite dei pianeti che vi orbitano attorno hanno una costante: il rapporto tra il cubo del semiasse maggiore e il quadrato del periodo di orbita.



Seconda legge di Keplero

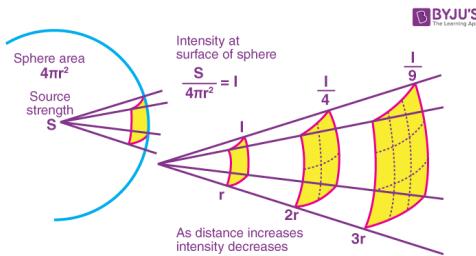
Torniamo al template visto prima. Moltiplichiamo sopra e sotto per 4π :

$$4\pi k \frac{q_1 \cdot q_2}{4\pi r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Possiamo considerare $4\pi k$ come un'altra costante, diciamo k' . Al denominatore però troviamo $4\pi r_{12}^2$, che ricordiamo essere l'area di una superficie sferica. Consideriamo come corpi la Terra e il sole; possiamo allora dire questo: la Terra partecipa a questo scambio di forze con la sua m_{GT} (massa gravitazionale Terra); la forza che il Sole è in grado di mettere in giro, con cui il sole perturba l'universo attorno, l'importanza, la prestanza del Sole, tutta espressa da m_{GS} , a questa distanza qui è come se si distribuisse in modo uniforme (vedi (FIG 50)). La parte

che arriva alla terra è semplicemente il totale diviso $4\pi r_{12}^2$. Su questo tema c'è ancora ricerca aperta.

$$k' \frac{m_{GT} \cdot m_{GS}}{4\pi r_{TS}^2} \hat{r}_{TS}$$



Forza dal sole

Analogia Immaginiamo di avere una sorgente di un fluido, che spara in tutte le direzioni 3600 litri l'ora. Ho un sensore di umidità microscopico, di dimensioni trascurabili. Lo pongo lì vicino, e voglio misurare quanta acqua riceverà. Mi metto a un metro di distanza: quanta acqua prenderò in un secondo? Di tutto l'angolo solido, prenderò soltanto la frazione che corrisponde al mio puntino, $\frac{1}{4\pi r^2}$. Quando metto quello a denominatore sto dividendo per il numero di "toppe", buchi, aree di misura, punti sulla superficie.

Nota: isotropo, ugualmente nella stessa direzione, non si ammette differenza rispetto alla direzione.

Nota: la forza gravitazionale che io esercito in questo momento è verso tutti i corpi, democraticamente, e si espande, sempre più tenue.

Vedremo che le cariche elettriche possono essere positive o negative. Il problema dell'attrarsi o respingersi è già contenuto nel valore delle cariche, nella q_1 e q_2 . Per la gravitazione è diverso, le masse si attraggono sempre, quindi esprimo il segno meno.

Nota: in natura esiste l'antimateria, versioni con caratteristiche opposte delle particelle elementari... elettrone e positrone, carica, comportamenti, tutto opposto, tranne la massa. La massa gravitazionale è una caratteristica intrinsecamente positiva.

1.8 Urti

Gran parte della fisica contemporanea è stata scoperta, viene studiata, facendo scontrare elementi fondamentali della materia. Dal punto di vista dell'osservazione, tutto è un urto: la luce parte da una fonte luminosa e dopo aver rimbalzato su un oggetto raggiunge la retina. Si tratta di fenomeni fisici importanti.

Diciamo che finalmente diamo attenzione al terzo principio della dinamica:

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

Mi metto non solo in un sistema inerziale, ma in un sistema **isolato**. Lo introduciamo qui, ma in termodinamica sarà molto più comune. Abbiamo sistemi isolati, chiusi e aperti. È uno strumento concettuale, non qualcosa di particolarmente concreto.

Un sistema si dice **aperto** se, definito il sistema, esso può scambiare con tutto ciò che c'è oltre al sistema stesso materia ed energia. Un sistema **chiuso** con l'universo può scambiare energia ma non scambia materia. Il sistema **isolato** non scambia né energia né materia. Un esempio di sistema isolato che non ci delude mai è l'universo stesso.

Prendiamo in considerazione un sistema di punti materiali: punto 1, punto 2, punto 3, punto n . Ribadiamo la definizione di **punto materiale**, la rappresentazione dinamica di un corpo con una data massa e con dimensioni trascurabili rispetto alle distanze che percorre lungo la dinamica. Proprio per questo lo rappresentiamo come un punto.

Definiamo il **centro di massa** (o baricentro) di un sistema di punti materiali una posizione che di fatto è la media pesata delle posizioni dei punti:

$$\vec{r}_{CM} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Più un punto materiale ha massa, più importante la sua posizione e la sua influenza nel centro di massa (che è una posizione).



Centro di massa, sistema Sole-Terra

Prendiamo in considerazione una prima massa, il sole, una seconda massa, la terra, e la loro distanza (vedi (FIG 51)):

$$\begin{aligned} m_1 &= m_S = 2 \cdot 10^{33} g \\ m_2 &= m_T = 6 \cdot 10^{27} g \\ r_{12} &= r_{ST} = 1 \text{ A.U.} = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ cm} \\ \vec{r}_1 &= \vec{r}_S = \vec{0} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_T = \begin{pmatrix} 1,5 \cdot 10^{13} \text{ cm} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nota: A.U. sta per *Astronomical Unit*

Il centro di massa di questo sistema si trova tramite la formula definita precedentemente:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{CM}^{TS} &= \frac{m_T \vec{r}_T + m_S \vec{r}_S}{m_T + m_S} = \\ &= \frac{m_T}{m_T + m_S} \vec{r}_T = \frac{m_T}{m_S} \frac{1}{1 + \frac{m_T}{m_S}} \vec{r}_T \end{aligned}$$

Mi ritrovo nuovamente in questa posizione di dover moltiplicare un valore, la posizione della Terra, per il rapporto tra due masse, quella della terra e quella del sole:

$$\begin{aligned}\vec{r}_{CM}^{TS} &= \frac{m_T}{m_S} \vec{r}_T = 3 \cdot 10^{-6} \begin{bmatrix} 1,5 \cdot 10^{13} \text{ cm} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= 4,5 \cdot 10^7 \text{ cm } \hat{x} \\ &= 450 \text{ km } \hat{x}\end{aligned}$$

Troviamo che il centro di massa del sistema isolato Sole-Terra è dentro al sole; questo per via di quanto è maggiore la massa del sole rispetto a quella della Terra; alla fine abbiamo moltiplicato la distanza per il rapporto fra le due masse.

Consideriamo la forza totale che agisce su un sistema di punti materiali come la somma delle forze che agiscono sul sistema:

$$\vec{F}_{TOT} = \sum_i^N \vec{F}_i = \sum_i^N \left(\vec{F}_i^{(\text{ext})} + \vec{F}_i^{(\text{int})} \right)$$

Questa somma possiamo suddividerla in forza dovute ad un fattore esterno al sistema, e forza o *contributo* dovuta ad un fattore interno al sistema.

A questo punto noto che la forza che agisce sulla massa i -esima dovuta a fattori interni al sistema è uguale alla somma che va da $j = 1$ a N delle forze che agiscono su questo corpo i -esimo:

$$\vec{F}_i^{(\text{int})} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

Se io faccio la somma su i di queste forze i -esime mi ritrovo di fatto a fare la somma su i e su j , purché diverse tra di loro, delle forze $j \rightarrow i$:

$$\sum_i \vec{F}_i^{(\text{int})} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{N,N} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

Considero una tabella, i nelle colonne e j nelle righe, dove in ciascuna cella metto la forza che la massa i esercita su j . Qui però mi trovo a sommare forze che, per il terzo principio della dinamica, si bilanciano: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$ e $\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ ad esempio. Le forze interne al sistema si binalciano e sono pari a zero.

Da qui allora la forza totale del sistema è pari alla somma delle forze esterne:

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_{TOT}^{(\text{ext})} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(\text{ext})} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} = (*)$$

Primo passaggio: porto la m dentro, son punti materiali, biglie di diversa massa:

$$(*) = \sum_{i=1}^N \frac{d^2}{dt^2} m_i \vec{x}_i = (**)$$

Secondo passaggio: porto la somma dentro, l'operazione di derivazione la posso lasciare fuori:

$$(**) = \frac{d^2}{dt^2} \left[\sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i \right] = (***)$$

Terzo passaggio: divido e moltiplico per la massa totale del sistema, che ricordiamo essere $M_{TOT} = \sum_{i=1}^N m_i$:

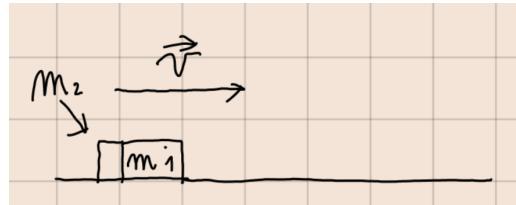
$$(***) = M_{TOT} \cdot \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{x}_i}{M_{TOT}} \right] = M_{TOT} \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = M_{TOT} \vec{a}_{CM}$$

Per un sistema isolato, la forza esterna ad un sistema che agisce sul sistema stesso si può sempre pensare come una forza che determina un'accelerazione \vec{a}_{CM} su un punto collocato nel centro del punto di massa e avente massa pari alla massa totale del sistema. Da qui il **teorema del centro di massa**:

$$\vec{F}_{TOT}^{(ext)} = M_{TOT} \vec{a}_{CM}$$

Se il sistema non è sottoposto a forze esterne, o se la somma delle forze esterne al sistema è uguale a zero, l'accelerazione del centro di massa è uguale a zero; ciò significa che la velocità del centro di massa è costante; non significa che la posizione reciproca dei vari elementi nel sistema non cambi, ma che la velocità complessiva non cambia:

$$\vec{F}_{TOT}^{(ext)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a}_{CM} = \vec{0} \\ \vec{v}_{CM} = \text{cost}$$



Slitta

Supponiamo di avere una slitta con attaccata dietro una seconda massa (vedi (FIG 52)). L'intero sistema si muove su di un piano privo di attrito ad una velocità \vec{v} . Richiamiamo la nozione di **quantità di moto**, ottenuta dal prodotto della massa per la velocità:

$$m_1 \vec{v} = \vec{p}_1 \\ m_2 \vec{v} = \vec{p}_2 \\ \vec{p}_{TOT} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

La velocità del centro di massa è costante, e questo avviene in assenza di forze esterne. Per la conservazione della quantità di moto, vale:

$$M_{TOT} \vec{v}_{CM}^{(i)} = M_{TOT} \vec{v}_{CM}^{(f)}$$

$$\frac{M_{TOT} m_1 \vec{v}_1^{(i)} + m_2 \vec{v}_2^{(i)}}{M_{TOT}} = \frac{m_1 \vec{v}_1^{(f)} + m_2 \vec{v}_2^{(f)}}{M_{TOT}} M_{TOT}$$

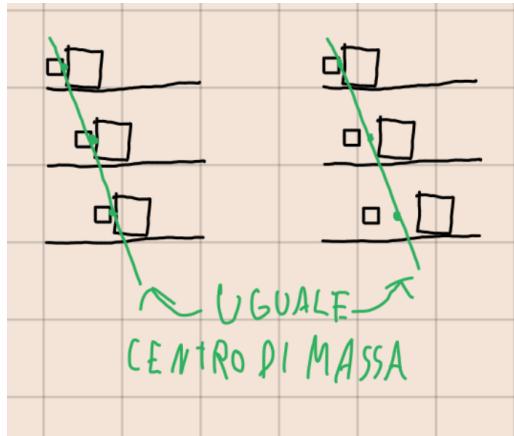
$$(m_1 + m_2) \vec{v} = m_1 \vec{v}_1^{(f)} + m_2 \vec{v}_2^{(f)}$$

Nota: slitta e massa si muovono inizialmente assieme, quindi $\vec{v}_1^{(i)} = \vec{v}_2^{(i)} = \vec{v}$.

Consideriamo $m_1 = 100\text{kg}$, $m_2 = 10\text{ kg}$, $|\vec{v}| = 10\text{ m/s}$ e $|\vec{v}_2^{(f)}| = 1\text{ m/s}$. Supponiamo l'oggetto attaccato venga lanciato all'indietro con una velocità negativa, per cui $v_2^{(f)} = 9\text{ m/s}$. La velocità della seconda massa dipende dalla velocità iniziale, sommata alla velocità alla quale viene lanciata all'indietro.

Con i dati a nostra disposizione otteniamo:

$$v_1^f = \frac{(m_1 + m_2)v - m_2 v_2^f}{m_1} = \frac{110 \cdot 10 - 10 \cdot 9}{100} \text{ m/s} = 10,1 \text{ m/s}$$



Conservazione quantità di moto

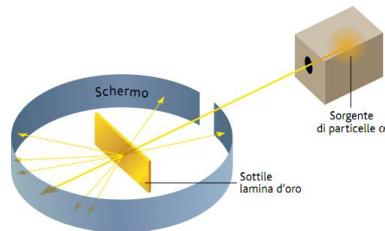
Osserviamo che lasciando la seconda cassa, la slitta accelera. Lanciando all'indietro una cassa, conferisco al sistema una quantità di moto in quella direzione; per la conservazione della quantità di moto, in senso opposto deve verificarsi una stessa variazione, altrimenti la spinta della cassa indietro aggiungerebbe una variazione che non verrebbe compensata. Il centro di massa però si muove allo stesso modo (vedi (FIG 53)): non ci sono forze esterne, l'accelerazione del sistema rimane la stessa, nonostante ora le due masse siano separate e si muovano ad una velocità diversa. Ho che $\vec{v}_{CM} = \vec{cost}$, se moltiplico per la massa totale del sistema ho $M_{TOT} \vec{v}_{CM} = \vec{cost}$, ovvero $\vec{P}^{(TOT)} = \vec{cost}$, quindi **la quantità di moto del sistema si conserva nel tempo**.

Chiarito che dall'esterno, se non ci sono forze, il centro di massa continua a muoversi imperturbato, vediamo cosa succede all'interno del sistema. Ha senso considerare le componenti di un sistema su cui non agiscono forze esterne come a degli elementi, delle palline che agiscono le une sulle altre **urtandosi**. O sono palline in qualche modo connesse fra di loro: gli atomi sul reticolo cristallino di un solido sono fermi, le forze interne sono ben definite, lo studio del sistema si riduce allo studio delle strutture, delle "molle" che li connettono. Il problema assume maggiore importanza se le palline, se questi elementi possono muoversi.

Gli urti sono il modo in cui descriviamo qualcosa che non conosciamo. L'estensione della regione in cui l'urto avviene la assumiamo piccola rispetto all'area totale del problema; due molecole di gas si scontrano, la zona in cui avviene l'urto è molto piccola rispetto alla lunghezza del cammino medio che percorrono.

Nell'esperimento di Rutherford si ha un lancio di particelle α su una lamina d'oro, le quali vengono deflesse (scattered) in molte direzioni. Questo non era il comportamento atteso. Ruther-

Rutherford scopre che la lamina d'oro è composta da "biglie" sulle quali le onde si scontrano, non da una superficie continua (vedi (FIG 54)).



Esperimento di Rutherford

Descriviamo come urto una variazione di velocità. So che ad esempio una particella ha una velocità iniziale, una velocità finale, e quello che è successo... non sempre è noto. Nel caso di Rutherford, quello che è successo fra le particelle e la lamina è un'interazione coulombiana. Se assumiamo l'urto puntiforme, allora lo assumiamo istantaneo... queste assunzioni caleranno più avanti, perché sappiamo essere non vere.

Se prendo una particella e una lamina, non ci sono forze esterne. L'unica forza che agirà è la repulsione elettrica tale per cui la particella verrà deviata. Se il sistema è isolato la quantità di moto del sistema è la seguente:

$$m_{\text{particella}} v_{\text{particella}} + m_{\text{lamina}} \cdot 0$$

Questo in quanto la lamina non si muove. Questa quantità (data solo dalla particella) rimarrà uguale dopo l'urto. Ma non succede. Se facciamo una foto subito dopo l'urto, per il principio di azione e reazione, ciascuno dei vari nuclei avrà rinculato di un po' dopo l'urto; se sommiamo questi rinculi delle particelle della lamina, otteniamo un vettore che sommato alla deviazione della particella, ci dà nuovamente il vettore velocità che aveva la particella inizialmente, mostrando che la quantità di moto è conservata (vedi (FIG 55)). Non è fondamentale l'interazione che determina l'urto quando lo studiamo, ma che la quantità di moto del sistema si conserva. Vale **sempre**, per **tutti** i tipi di urto: legge fondamentale degli urti $\vec{p}^{(i)} = \vec{p}^{(f)}$.



Urto particelle e lamina

Questo apre una serie di problemi. Consideriamo ad esempio una pallina m con una certa velocità iniziale v_i (rimaniamo in una dimensione) e una seconda pallina ferma, stessa massa; supponiamo di voler trovare la velocità iniziale della prima pallina. La quantità di moto iniziale dovrà essere uguale alla quantità di moto finale:

$$\begin{aligned} p_i &= mv_i + m \cdot 0 = mv_i \\ p_f &= mv_{2f} + v_{2f} \end{aligned}$$

Otteniamo:

$$\cancel{m}v_i = \cancel{m}(v_{1f} + v_{2f})$$

In questo modo non abbiamo risolto il problema: data una v_i ad esempio di 3 m/s, potremmo avere infinite configurazioni delle velocità finali della prima e seconda massa (0 e 3, 1.5 e 1.5, 2 e 1, non possiamo saperlo).

Proviamo a descrivere come si suddivide l'energia cinetica fra le masse coinvolte nell'urto. Troviamo per energia cinetica iniziale e finale:

$$E_k^{(i)} = \sum_1^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{(i)^2} (*)$$

$$E_k^{(f)} = \sum_1^M \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{(f)^2} (x)$$

Nell'energia cinetica finale sostituiamo N con M , le masse alla fine dell'urto potrebbero attaccarsi, o una biglia potrebbe spaccarsi in due pezzi.

L'energia cinetica procede dalla velocità, che è una quantità che dipende dal sistema di riferimento; anche l'energia cinetica dipende dal sistema di riferimento. Potrebbe essere cambiare sistema di riferimento. Possiamo metterci a cavallo del centro di massa: da questo punto di vista, il centro di massa appare fermo.

Nel momento dell'urto sostanzialmente le varie componenti del sistema si concentreranno nel centro di massa, e dopo l'urto si allontaneranno da esso. Mi vado a calcolare l'energia cinetica nel sistema del centro di massa:

$$E_k^{(i,CM)} = \sum_1^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{(i,CM)^2}$$

$$E_k^{(f,CM)} = \sum_1^M \frac{1}{2} m_j \vec{v}_j^{(f,CM)^2}$$

Ricordiamo che le velocità sono quelle delle varie masse, secondo il sistema di riferimento centrato sul centro di massa. Adesso andiamoci a calcolare la quantità di moto del sistema iniziale e finale:

$$\vec{p}^{(i)} = \sum_1^N m_i \vec{v}_i^{(i)}$$

$$\vec{p}^{(f)} = \sum_1^M m_j \vec{v}_j^{(f)}$$

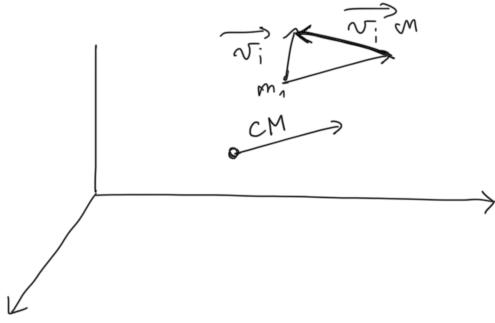
Anche in questo caso spostiamoci con un sistema di riferimento a cavallo del centro di massa:

$$\vec{p}^{(i,CM)} = \sum_1^N m_i \vec{v}_i^{(i,CM)} = \vec{0} = M_{TOT} \vec{v}_{CM}^{(CM)} = 0$$

$$\vec{p}^{(f,CM)} = \sum_1^M m_j \vec{v}_j^{(f,CM)} = \vec{0}$$

Sappiamo che nel primo s.d.r. $\vec{p}^{(i)} = \vec{p}^{(f)}$ per assenza di altre forze. Sappiamo che anche nel centro di massa le velocità sono nulle, in quanto è lì che poniamo l'origine del nostro nuovo sistema di riferimento.

Nota: prendiamo in considerazione la (FIG 56). Abbiamo due sistemi di riferimento: il laboratorio nel quale facciamo le misure, e un sistema centrato sul centro di massa in movimento. Il CM si muove con velocità \vec{v}_{CM} . La velocità di un oggetto in movimento possiamo vederla come la somma fra la velocità del centro di massa, più la velocità come vista dal centro di massa: $\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^{(CM)}$.



Velocità dal centro di massa

Proviamo ora a sviluppare le prime due equazioni dell'energia cinetica che abbiamo scritto:

$$E_{k,i} = \sum_1^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{(i)^2} = \sum_1^N \frac{1}{2} m_i \left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_i^{(i,CM)} \right)^2$$

$$E_{k,f} = \sum_1^M \frac{1}{2} m_j \vec{v}_j^{(f)^2} = \sum_1^M \frac{1}{2} m_j \left(\vec{v}_{CM} + \vec{v}_j^{(f,CM)} \right)^2$$

Passiamo dalla formula generalizzata alla formula per due masse. Abbiamo:

$$E_{k,i} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{CM}^2 + \sum_1^N \frac{1}{2} (2m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i^{(i,CM)}) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{(i,CM)^2}$$

Espandiamo il quadrato di binomio, il secondo termine. Dal termine centrale semplifichiamo 2 e 1/2, portiamo fuori la velocità del centro di massa, che è una costante:

$$\sum m_i \vec{v}_{CM} \cdot \vec{v}_i^{(i,CM)} = \vec{v}_{CM} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{(i,CM)} = \vec{v}_{CM} \cdot \vec{p}_i^{(i,CM)} = 0$$

Notiamo che otteniamo la quantità di moto rispetto al centro di massa, che abbiamo visto prima essere zero. Ci mettiamo a considerare la quantità di moto di tutto il sistema, *nel centro di massa*, che per definizione è zero.

Se sviluppiamo invece il primo termine otteniamo:

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{CM}^2 = \frac{1}{2} \vec{v}_{CM}^2 \sum_{i=1}^N m_i = \frac{1}{2} M_{TOT} \vec{v}_{CM}^2$$

Questo non è nullo.

Insomma, troviamo che l'energia cinetica è pari a:

$$E_k^{(i)} = \frac{1}{2} M_{TOT} \vec{v}_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^{(i,CM)^2}$$

L'energia cinetica di tutto il sistema che si sta muovendo è data dall'energia di tutto il sistema, in blocco, che si sta muovendo, sommato alle piccole energie cinematiche dei movimenti all'interno del sistema.

Allo stato finale posso fare un ragionamento simile:

$$E_k^{(f)} = \frac{1}{2} M_{TOT} \vec{v}_{CM}^2 + \sum_j^M \frac{1}{2} m_j \vec{v}_j^{(f,CM)^2}$$

Fra lo stato iniziale e finale non è detto ci sia la stessa energia cinetica. La differenza di energia cinetica in un urto è dovuta puramente alla differenza di energia cinetica rispetto al centro di massa. I due secondi termini si semplificano, rimane solo quella:

$$\Delta E_k = \Delta E_k^{(CM)}$$

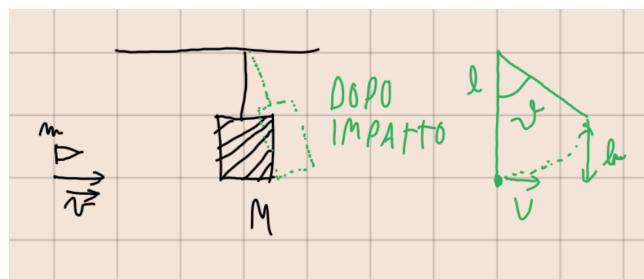
Si può avere una variazione di energia cinetica anche in un sistema isolato. Può venir utilizzata all'interno del sistema stesso: ad esempio due molecole che si uniscono o si separano per un urto portano ad un consumo o ad un guadagno di energia.

Facciamo un esempio. Consideriamo un **urto elastico**, un urto in cui l'energia cinetica si conserva. Considerato il problema visto prima:

$$\begin{cases} v_i = v_{1f} + v_{2f} \\ \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}mv_{1f}^2 + \frac{1}{2}mv_{2f}^2 \end{cases}$$

Otteniamo un'equazione del tipo $\{D = X + Y, D^2 = X^2 + Y^2\}$. Ora il problema è risolvibile, in quanto abbiamo aggiunto la condizione che si tratti di un urto elastico.

Poi ci sono gli **urti anelastici**, o inelastici, che sono tutti gli altri, dove l'energia cinetica non si conserva. Prendiamo l'esempio del **pendolo balistico**, usato per misurare la velocità dei proiettili (vedi (FIG 57)).



Pendolo balistico

Abbiamo un proiettile di massa m lanciato ad una velocità iniziale \vec{v} . Questo proiettile va a colpire un sacco di sabbia di massa M , tale che $M \gg m$, e ci si infila dentro. Quello che succede è che il sacco di sabbia comincia a oscillare. Oscilla di poco se la massa è molto grande. L'ampiezza di massima oscillazione del pendolo è facilmente osservabile, e connettibile alla velocità del proiettile, che è invece molto difficile da misurare (difficile da cronometrare).

Dimostreremo che è un urto **completamente anelastico**, distinzione che non c'è veramente negli urti elastici. Scriviamo la seguente equazione, dove V è la velocità alla quale iniziano a muoversi proiettile e sacco dopo l'urto:

$$mv = (m + M)V$$

Abbiamo la velocità dopo l'urto V , la lunghezza del pendolo l , l'altezza massima alla quale arriva il sacco+proiettile H e l'angolo ϑ ; possiamo misurare l'angolo oppure di quanto si alza l'oggetto.

Abbiamo l'equazione degli urti, sempre valida. Ci serve un'equazione relativa all'energia, dove in questo caso vale:

$$\Delta E_k = -\Delta U_p$$

Queste due equazioni sono sufficienti per collegare la velocità v ad H , o per essere precisi a ϑ . Vale:

URTO	$\left\{ \begin{array}{l} mv = (m + M)V \\ \Delta E_k = -\Delta U_p \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 - \frac{1}{2}(m + M)V^2 = -[(m + M)gH - 0] \end{array} \right.$
OSCILLAZIONE	

Nota: ricordiamo che la variazione di energia potenziale è pari a $-$ il lavoro che la forza peso fa per portare un oggetto da una posizione all'altra

Bene, ricordiamo che il nostro obiettivo è collegare la velocità iniziale ad H . Continuiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \\ V^2 = 2gH \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} mv = (m + M)\sqrt{2gH} \\ \rightarrow \end{array} \right. \Rightarrow v = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gH}$$

Troviamo che, se aumenta H aumenta anche la velocità del proiettile; ha senso. Se $M \gg m$ come detto all'inizio, possiamo dire che al numeratore abbiamo solamente M :

$$v = \frac{m + M}{m}\sqrt{2gH} \quad \stackrel{M \gg m}{\approx} \quad v = \frac{M}{m}\sqrt{2gH}$$

Se facciamo il sacco troppo grande, il rapporto diventa molto grande, e la H di conseguenza molto piccola.

Per l'energia cinetica vale:

$$\begin{aligned} E_k^{(i)} &= \frac{1}{2}mv^2 \\ E_k^{(f)} &= \frac{1}{2}(m + M)V^2 = \frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 \end{aligned}$$

Possiamo farlo per via della conservazione della quantità di moto, che vale sempre. Abbiamo poi:

$$E_k^{(f)} = \frac{1}{2}(m + M)\left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m^2}{m+M}v^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{m}{m+M}\right) = E_k^{(i)} \overbrace{\frac{m}{m+M}}^{<1}$$

L'energia cinetica finale è pari all'iniziale moltiplicata per un numero molto minore di 1, quindi minore dell'iniziale. Dov'è andata? Per fermarsi c'è stato attrito con la sabbia, possiamo dire che se n'è andata dal lavoro della forza d'attrito... è un'energia di legame, possiamo dire.

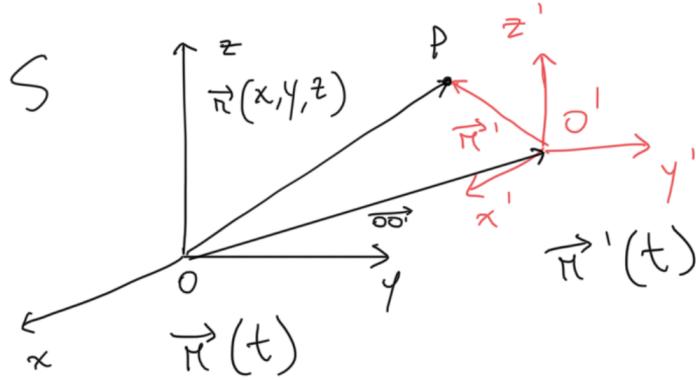
Un urto si dice **completamente anelastico** quando di fatto **tutta** l'energia cinetica iniziale viene dissipata per formare il sistema finale; questo sempre dentro il sistema di riferimento del centro di massa. Non è detto che la dobbiamo usare tutta; nei problemi che affronteremo o lo troviamo elastico o completamente anelastico.

1.9 Sistemi di riferimento non interzionali

Consideriamo un sistema di riferimento S come in figura (FIG 58), con all'interno un altro sistema di riferimento S' , che sarà in movimento rispetto ad S . Con un punto P nello spazio, dovremo esprimere le coordinate rispetto ad S e ad S' . La domanda che ci poniamo è come

passiamo dal sistema S al sistema S' , quindi come passo dal vettore posizione $\vec{r}(x, y, z)$ al vettore $\vec{r}'(x', y', z')$:

$$\begin{pmatrix} r \\ v \\ a \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad ? \quad} \begin{pmatrix} r' \\ v' \\ a' \end{pmatrix}$$



Due sistemi di riferimento

Qui i tempi non sono diversi, stiamo considerando lo stesso movimento, che si svolge negli stessi istanti, rispetto a due sistemi di riferimento. Se chiamo $\overrightarrow{OO'}$ il vettore dall'origine di S a quella di S' , per la somma di vettori, so che $\vec{r} = \overrightarrow{OO'} + \vec{r}'$. Qua abbiamo già la prima relazione, che ci dice che per passare da \vec{r} ad \vec{r}' possiamo usare la regola del parallelogrammo.

Possiamo fare la derivata dell'ultima relazione ottenuta, ottenendo:

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}] = \frac{d}{dt} [\vec{r}' + \overrightarrow{OO'}]$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \underbrace{\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}}_{\vec{v}_{O'}}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \underbrace{[\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}']}_{\vec{v}_T}$$

La velocità misurata nel sistema S è uguale alla velocità di O' più \vec{v}' ; con cui l'osservatore in S osserva il punto muoversi nel tempo. I nostri predecessori avrebbero aggiunto a destra la componente $\vec{\omega} \times \vec{r}'$, componente legata al fatto che il punto è visto da S magari anche ruotando.

Si possono raggruppare due termini in **velocità di trascinamento**: $\vec{v}_T = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$. Quindi la velocità vista da S è data dalla velocità \vec{v}' sommata alla velocità di trascinamento.

Vediamo di fare una seconda derivazione rispetto al tempo per trovare le accelerazioni:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \underbrace{\left[\vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \right]}_{\vec{a}_T} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{a_c}$$

Le componenti raggruppate nella box compongono l'accelerazione di trascinamento, ovvero che ha il sistema S' rispetto a S . L'accelerazione \vec{a}_c è detta accelerazione di Coriolis, ed è nulla se ω vale zero; c'è solo se il sistema S' è il rotazione rispetto ad S . È l'unico termine che contiene una velocità; tiene conto che sistema di riferimento si sta a sua volta muovendo.

Esistono casi semplici. Quando consideriamo $\vec{\omega} = \vec{0}$, la nostra velocità di trascinamento coinciderà con $\vec{v}_{O'}$, e l'accelerazione di trascinamento coinciderà con $\vec{a}_{O'}$:

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \vec{v}' + \vec{v}_{O'} \\ \vec{a} &= \vec{a}' + \vec{a}_{O'}\end{aligned}$$

Consideriamo invece due sistemi S ed S' , il prof che tiene in mano un gesso e uno studente. Se il prof inizia a piroettare, il gesso rimarrà fermo rispetto al prof, e inizierà a muoversi rispetto allo studente. In questo caso $\vec{v}_{O'}$ sarebbe zero, non c'è movimento fra i sistemi, e anche \vec{v}' viene zero, il gesso è fermo rispetto al prof; si troverà che la velocità corrisponderà ad un vettore esprimibile proprio in $\vec{\omega} \times \vec{r}'$.

Supponiamo che il nostro sistema di riferimento S sia un sistema di riferimento **inerziale**, definito secondo il primo principio della dinamica. Ci accorgiamo che è inerziale perché al meglio delle nostre capacità sperimentali non notiamo variazioni nello stato di moto degli oggetti *a meno che* non agiscano forze esterne. Solo per questo motivo possiamo affidarci alla seconda legge della dinamica, $\vec{F}_{ext} = m_I \vec{a}$. Se ci spostiamo in S' , questo potrebbe non essere inerziale, potrebbe avere una sua accelerazione; dobbiamo modificare la formula allora:

$$\vec{F}_{ext} = m_I (\vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_c)$$

Portiamo a sinistra tutto ciò che "mi dà fastidio" dal punto di vista dell'inerzialità:

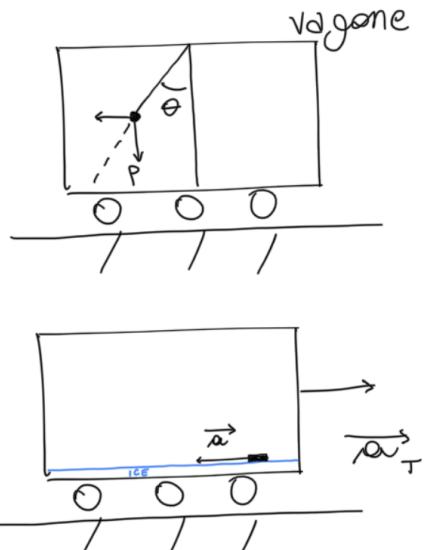
$$\vec{F}_{ext} - m_I \vec{a}_T - m_I \vec{a}_c = m_I \vec{a}'$$

L'accelerazione dipende dalle forze esterne, più altre componenti. Ed è per questo che si parla di sistemi non inerziali: anche se le forze esterne fossero pari a zero, **ci sarebbe comunque un'accelerazione** dovuta al fatto che il sistema stesso è in movimento.

Supponiamo che Coriolis non ci sia, parliamo di un vagone in movimento come in (FIG 59); il mondo esterno non c'è, non possiamo vederlo, e consideriamo solo questo vagone. Abbiamo una fotocamera che inquadra l'interno del vagone, siamo da un'altra parte, e consideriamo un pendolo attaccato al soffitto del vagone, il quale ci permette di osservare vari effetti. Prendo una livella, tiro la verticale, e la confronto col pendolo. Se vedo che anche il pendolo ha la direzione della verticale, sono in una situazione che conosco: forza peso bilanciata dalla tensione del filo. Non ho elementi per dire che mi trovo in un sistema non inerziale. Sembra proprio che dal pendolo io non possa dedurre niente; ambiente analogo ad un laboratorio, o ad altre situazioni simili. Supponiamo che ad un certo punto il pendolo cambi direzione, per cui ci sia un angolo ϑ fra la verticale e la corda del pendolo (sempre un pendolo ottimo).

Siccome l'oggetto non oscilla, è fermo, significa che la somma delle forze è zero. Possiamo fare un'analisi, e dedurre che siccome c'è una forza peso e una tensione che agiscono sul pendolo, deve esserci una forza diretta verso il retro del vagone per cui la somma delle forze è nulla.

Consideriamo un altro vagone, uno che al suo interno contiene uno strato liscio di ghiaccio, e dalla fotocamera vediamo un disco di hokey. Ad un certo punto vediamo che il disco inizia ad accelerare da solo, e dall'analisi frame per frame del video vediamo che si muove di un moto accelerato.



Vagoni

Queste due casistiche possono ben essere descritte dall'ultima formula vista. Il vagone non sta ruotando, quindi lasciamo stare Coriolis. Non abbiamo nemmeno forze esterne, dei vincoli bilanciano la forza peso in entrambi i casi. Rimangono solamente gli altri due termini, che possiamo dimostrare corrispondano all'accelerazione del pendolo e del disco.

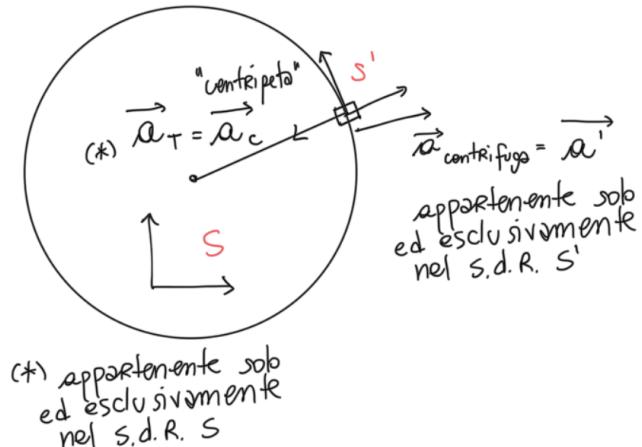
Assumiamo che il treno si muova di moto accelerato \vec{a}_T , che imprime quell'accelerazione al vagone. Ma è giusto non considerare questa come forza esterna. Supponiamo di guardare due vagoni dall'alto, prendiamo due molle e attacchiamole in alto su entrambi i vagoni. Nel caso che stiamo definendo noi, un disco si muove per il semplice fatto che è il suo sistema di riferimento che si sta muovendo. Se io quel vagone lo tenessi fermo, anche il disco non si muoverebbe. Ciò che fa muovere il disco è una **forza apparente**, perché appare come effetto del moto del sistema di riferimento stesso. Sono legate e dovute al movimento del riferimento. "Apparente" di nome, sono forze vere e proprie.

L'accelerazione di trascinamento che si misura in S , l'omino che guarda i treni muoversi, l'accelerazione del vagone quindi, è uguale all'accelerazione che nella formula troviamo, con un meno, in $-m_I \vec{a}_T$. Troviamo:

$$\boxed{\vec{F}_{APP} = m_I \vec{a}'}$$

Quella forza apparente, in questo caso, è proprio uguale a $\vec{F}_{APP} = -m_I \vec{a}_T$.

Moto circolare uniforme come in (FIG 60), nel sistema di riferimento S dove osserviamo il movimento sappiamo che dev'esserci una forza continua che fa sì che l'oggetto mantenga la traiettoria circolare; questa è l'accelerazione **centripeta** \vec{a}_c , in una forza centripeta. In questo caso è proprio uguale alla forza di riferimento $\vec{a}_c = \vec{a}_T$. Se mi metto in un sistema di riferimento S' solidale al corpo, sappiamo che il corpo è fermo; muovendosi il corpo sente una forza verso l'esterno, un'accelerazione **centrifuga** $\vec{a}_{\text{centrifuga}}$, che corrisponde proprio all'accelerazione del corpo $\vec{a}' = \vec{a}_{\text{centrifuga}}$. Questa è opposta alla forza verso il centro. Nel sistema S non è possibile sentire l'accelerazione centrifuga, questa emerge solamente se ci mettiamo in S' , così come in S' l'accelerazione centripeta non esiste; se fossimo lì, ambiente buio, non sappiamo di star girando, sentiamo solo un'accelerazione verso "l'esterno". Qui non c'è Coriolis. La forza centrifuga è una forza apparente.



Accelerazioni nel moto circolare uniforme

Situazione diversa, forze esterne nulle, abbiamo un \vec{v}' e un ω . Abbiamo un termine di accelerazione di trascinamento e una di accelerazione di Coriolis, qui avremmo entrambe. Possiamo avere un sistema S fisso e un sistema S' , con l'origine che coincide, che ruota; una ballerina ruota al centro, con in mano un giroscopio. Qualsiasi movimento interno ad S' determina una forza apparente e un'accelerazione \vec{a}' .

Nota: rivedere problema ascensore

2 Termodinamica

2.1 Introduzione

Cambiamo ambito. Ci accorgiamo che tutto ciò che abbiamo fatto finora, usato bene, ci consente di aprire un altro mondo, totale. La termodinamica storicamente è la prima evidenza che l'umanità ha avuto dell'esistenza di un mondo microscopico. Immaginando di avere tanti, tanti, tanti punti materiali, e applicando le leggi che abbiamo visto finora, ci si può rendere conto di comportamenti macroscopici degli oggetti, e si rafforza l'ipotesi che gli oggetti macroscopici siano in realtà fatti di tanti piccoli oggetti microscopici. Se uno ci chiedesse che prove abbiamo che il mondo è fatto di tanti piccoli oggetti, noi che prove avremmo? Parliamo di atomismo, dell'ipotesi quantitativa che tutto, dalle stelle dell'universo ai capelli che abbiamo in testa, sia composto dagli stessi pezzettini, in quantità diverse e ricombinati in modo diverso. Che cos'è l'acqua, l'aria? Di cosa sono composte? Le prime evidenze si hanno dalla termodinamica. Ecco il primo motivo per cui la studiamo.

Il secondo motivo è che l'evoluzione della termodinamica, la meccanica statistica, l'analisi della meccanica degli oggetti quando sono tanti, per cui si usa un approccio statistico, è all'origine di una quantità enorme di algoritmi che governano le nostre vite oggi. Quando abbiamo un sistema con molti punti, si parla sempre di un problema di meccanica statistica. Magari piuttosto dell'energia abbiamo il peso di un nodo in una rete, l'importanza del soggetto nel social network che stiamo analizzando, whatever, l'approccio è sempre quello della meccanica statistica. Vedremo qualche esempio verso la fine.

Ipotesi: sistemi composti da tante particelle. Cosa intendiamo per tanti? Tanti significa comparabili col **numero di Avogadro**, ovvero $N_A = 6,022 \times 10^{23}$... cosa? Patate? Atomi? Palline? Ognuna è corretta, il numero di Avogadro è un numero puro. Potremmo usare un'unità di misura in particolare, che è la **mole**: 1 mol. È l'unità di misura che descrive la **quantità di sostanza**. Una mole di sostanza contiene un numero di elementi di quella sostanza pari ad N_A .

Questa parte di programma cerca anche di rispondere all'equazione generale dell'energia meccanica, forma più generale: $W_{NC} = \Delta E_m$. In particolare, ci chiediamo dove va a finire quest'energia? Dove viene trasferita? Come un sistema trasferisce all'esterno dell'energia, e come l'esterno trasferisce energia al sistema.

Da adesso chiamiamo *ambiente* o *universo* tutto ciò che non fa parte del sistema in considerazione. Nella termodinamica che studiamo c'è il sistema che stiamo studiando, analizzando, e tutto ciò che non ne fa parte, l'esterno.

DEF \ scambio	Materia (massa)	Energia	Esempi
Isolato	X	X	Bollire l'acqua, pan insulated
Chiuso	X	V	Bollire l'acqua, pan closed
Aperto	V	V	—
Impossibile	V	X	—

Quando parliamo delle proprietà del sistema, le variabili termodinamiche che lo descrivono, possiamo distinguerle in due categorie:

1. proprietà globali, dipendono dall'estensione del sistema → **grandezze estensive** (es. massa)
2. proprietà locali, non dipendono dalle dimensioni del sistema → **grandezze intensive** (es. temperatura)

Relazione tra dimensione e temperatura

C'è una relazione tra dimensione e temperatura di un oggetto? Proviamo a trovare un rapporto fra le due. La dimensione di un oggetto consiste nella sua estensione lineare nello spazio. Non possiamo usare il diametro di un oggetto come dimensione, altrimenti saremmo bloccati su un caso specifico. Spostiamoci sulle energie: potremmo considerare il prodotto di *forza* per *spostamento*, ma dovremmo trattare una forza specifica; in alternativa possiamo parlare di un'energia nei fenomeni ondulatori, che hanno una loro dimensione tipica (ogni onda ha una sua lunghezza d'onda). Definiamo l'**energia termica** come il prodotto fra la temperatura e la costante di Boltzmann, e l'energia ondulatoria come il prodotto la costante di Planck e c .

Iniziamo con la definizione di alcune costanti ed unità di misura:

- costante di Planck ridotta: $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6,58 \times 10^{-16} \text{ eV} \cdot \text{s}$
- velocità della luce: $c = 299.792.458 \frac{\text{m}}{\text{s}} \simeq 2 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- elettronvolt: $\text{eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$
- costante di Boltzmann: $K_B = 1,3 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$

Definiamo pc come il prodotto fra la quantità di moto di una particella e c , velocità della luce alla quale si sta muovendo. Ha le stesse dimensioni dell'energia cinetica: *massa per metro quadro fratto secondo quadro*. Diamo per assunta la seguente espressione, dove mettiamo a confronto due energie:

$$pc = \frac{\hbar c}{\lambda} \simeq K_B T$$

Ricaviamo:

$$\frac{1}{\lambda} \simeq \frac{K_B}{\hbar c} T$$

Espandiamo la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} &\simeq \frac{K_B}{\hbar c} T = \frac{1,3 \times 10^{-23} \frac{J}{K}}{6,58 \times 10^{-16} eV \cdot \cancel{s} \quad 299.792.458 \frac{m}{\cancel{s}}} T \\ &= \frac{1,3 \times 10^{-23} \frac{J}{K}}{2 \times 10^{-7} eV \cdot m} T \quad \left(= \frac{1,3 \times 10^{-23} \frac{J}{K}}{2 \times 10^8 eV \cdot fm} T \right) \\ &= \frac{1,3 \times 10^{-23} \frac{J}{K}}{2 \times 10^{-7} \times 1,6 \times 10^{-19} J \times m} T \\ &= \frac{10^{-23} \frac{1}{K}}{2 \times 10^{-26} m} T \\ &= \frac{1}{2} \times 10^3 \frac{1}{K \times m} T \\ &= 500 \frac{1}{K \times m} T \end{aligned}$$

Otteniamo la seguente relazione, con le corrispondenti unità di misura:

$$\frac{1}{\lambda} \simeq 500 T[k] \quad \left[\frac{1}{m} \right] \simeq \left[\frac{1}{m \times K} \right] \cdot [K]$$

500 è il valore per il quale dobbiamo moltiplicare la temperatura per trovare $\frac{1}{\lambda}$, dove λ è la lunghezza d'onda delle onde elettromagnetiche che il corpo irradia.

Prendiamo in considerazione un esempio. Nell'LHC di Ginevra l'energia delle particelle la possiamo misurare dalla quantità di moto e dalla velocità della luce, in quanto particelle che si muovono a tale velocità. Hanno la stessa dimensione di un'energia, dell'energia cinetica (massa per velocità al quadrato). Vale:

$$E = pc = 13 T eV$$

Dove $pc = \frac{\hbar c}{\lambda_{EXP}}$, T è tera-, quindi 10^{12} , ed eV sono gli elettron-volt, $1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Da qui troviamo:

$$\lambda_{EXP} = \frac{\hbar c}{E_{LHC}} = \frac{200 \overbrace{M}^{10^6} \overbrace{eV}^{10^{15}} \overbrace{fm}^{10^{12}}}{13 \underbrace{T}_{10^{12}} eV} = 15 \times 10^{-21} m$$

Nota: a volte si chiama Fermi il femtometro

Non è importante che ci orientiamo troppo con questi dati. Sono importanti le costanti della natura, e che due energie si possono confrontare tra di loro e danno origine a un confronto alle grandezze che danno origine a quelle energie.

Due sistemi li definiamo in **equilibrio termodinamico** tra di loro quando si verifica l'AND fra tre condizioni, ovvero dell'equilibrio termico, equilibrio meccanico e l'equilibrio chimico. L'equilibrio chimico avviene quando fra due sottoparti del sistema in questione non c'è alcuna reazione chimica. Se c'è equilibrio meccanico significa che non c'è squilibrio delle forze applicate da una parte del sistema alle altre. Equilibrio termico si ha quando fra due parti del sistema che stiamo considerando non c'è differenza di temperatura.

Nota: una reazione chimica è il processo attraverso il quale si ha la rottura dei legami che compongono i reagenti e la formazione di nuovi legami che danno origine ai prodotti

Siamo in grado di descrivere i sistemi termodinamici solo quando sono in equilibrio. Il passaggio da uno stato di equilibrio A ad uno di equilibrio B si chiama **trasformazione termodinamica**. Durante la trasformazione non c'è equilibrio, infatti la trasformazione è il passaggio da un equilibrio all'altro.

Per adesso nella nostra termodinamica non c'è spazio per il tempo; nella meccanica invece le nostre equazioni del moto erano espresse rispetto al tempo.

Per adesso diremo che la **temperatura** è quella grandezza che mi dice quanto un corpo è caldo oppure freddo, e la temperatura cresce man mano che il corpo è più caldo. Per quantificarla useremo i termometri, apparati, sistemi di misura che di fatto traducono la nozione di caldo e di freddo in una scala graduata e lo fanno sfruttando un effetto fisico. Esistono termometri a contatto che si basano su un materiale che cambia proprietà in base alla temperatura. La misura della lunghezza d'onda che viene emanata da un corpo ad una certa temperatura può dare anch'essa informazioni sulla temperatura del corpo.

Nota: due superfici a contatto l'una con l'altra sono anche in contatto termico; maggiore è la superficie a contatto, migliore sarà contatto termico

Nota: parete diatermica, una parete che conduce calore; sensibile alle variazioni di temperatura.

Nota: parete adiabatico, parete insensibile alla temperatura degli altri oggetti. Non c'è scambio di calore fra un oggetto adiabatico ed altri oggetti

Esiste un **principio 0**, o **legge 0** della termodinamica che più o meno recita questo: supponiamo di avere due corpi alla stessa temperatura $T_A = T_B$, e un terzo corpo con la stessa temperatura del secondo $T_B = T_C$. Il principio dice:

$$T_A = T_B \quad \text{e} \quad T_B = T_C \quad \Rightarrow \quad T_A = T_C$$

Possiamo dimostrarlo mettendo i tre corpi in contatto termico come in (FIG 61); i corpi hanno una temperatura iniziale $T_{A_i}, T_{B_i}, T_{C_i}$. Se la superficie B è diatermica, troveremo che dopo un tempo Δt sufficiente $T_{A_f} = T_{B_f} = T_{C_f}$; se invece il corpo B è adiabatico, dopo un tempo non abbastanza lungo troviamo $T_{A_f} \neq T_{B_f} \neq T_{C_f}$.

Gli oggetti posti a contatto tra di loro hanno una loro identità termica, una loro temperatura. Quando è consentito scambiarsi calore, questi finiscono ad avere la stessa temperatura, altrimenti no.

T_{Ai}	T_{Bi}	T_{Ci}
A	B	C

Principio 0

menti mantengono questa identità termica. Due temperature sono diverse quando metto il termometro a contatto con A e misuro qualcosa di diverso dal metterlo a contatto con B .

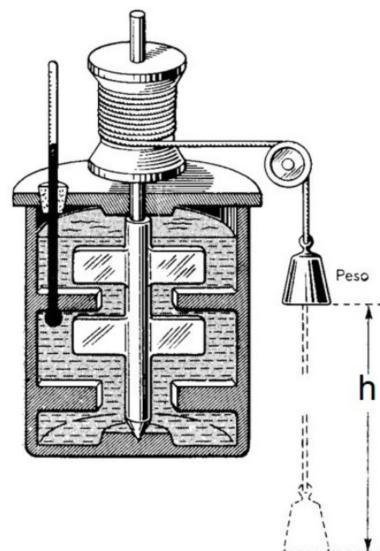
È inevitabile che anche nel secondo caso, se aspettassimo per un tempo abbastanza lungo (procedura al limite), troveremmo che i tre oggetti avranno la stessa temperatura; questo perché non esiste nulla che sia totalmente adiabatico.

Ciò che abbiamo fatto ci dice che il principio che abbiamo visto ha una verificabilità sperimentale. Il principio poi ci dice di accettare che se B a contatto con A hanno la stessa temperatura e che se B a contatto con C hanno una la stessa temperatura, allora A e C hanno la stessa temperatura.

Questo principio ci ha permesso di definire l'equilibrio termico fra due oggetti senza dover passare per la definizione

2.2 Lavoro ed energia: remake

Joule era un birraio, un giovane rampollo di una famiglia di birrai e aveva il problema di gestire l'attività di famiglia durante la transizione dal termodinamico, dai motori a vapore, all'elettrico; doveva valutare se convenisse passare ai motori elettrici.



Esperimento di Joule

Ha fatto diversi esperimenti durante questo periodo; vediamo il principale, l'esperimento del mulinello come in (FIG 62). Consideriamo un recipiente adiabatico riempito di liquido con un

foro al di sopra. All'interno del recipiente c'è un mulinello, collegato dal foro ad un filo e ad una carrucola. Joule aziona il mulinello lasciando libera la massa di cadere. Con un altro forellino misura la temperatura. Se la massa è in grado di compiere un lavoro $W = mgh$ (scendere di una certa altezza), trova che la temperatura aumenta: $T_i \rightarrow T_f > T_i$ ($\Delta T > 0$). Il lavoro compiuto si trasforma in calore. Questo lavoro è legato ad un energia? Vedremo.

Altri esperimenti. Prende un peso e lo collega 2) ad una batteria, 3) a delle palette per misurare l'attrito, 4) e all'espansione di un palloncino. In tutti i casi trova il modo di far derivare dal lavoro compiuto dal sistema una variazione di temperatura. Non importa la fonte, il punto non è il tipo di fenomeno analizzato ma il concetto stesso di lavoro. Trova inoltre che a lavori uguali corrispondono cambi di temperatura uguali, indipendentemente da come questo lavoro viene applicato. Queste sono grandissime e importantissime scoperte.

Per far passare il sistema da uno stato termodinamico iniziale ad uno finale, da una temperatura iniziale ad una finale, il passaggio dipende non da come applico un lavoro, ma solamente dalla quantità di lavoro applicata. C'è di mezzo un'energia che... si conserva! Questa è ciò che chiameremo ΔU : la variazione dell'energia del sistema è pari al lavoro svolto:

$$W_{\text{subito}} = -\Delta U_{\text{int}}$$

Vale:

1. parliamo di **energia interna**, di tutte le energie del sistema; energia potenziale ma anche cinetica; anche se il sistema sembra fermo, del movimento c'è; vedremo
2. lavoro che dall'esterno immettiamo nel sistema per far succedere qualcosa. Da ora il lavoro non sarà più positivo se la forza lo fa sul mio sistema, ma positivo se il mio sistema lo fa verso l'esterno

Il lavoro subito è positivo se compiuto dal sistema, e negativo se subito dal sistema

Nota: prima abbiamo usato un segno meno per dire che la variazione dell'energia potenziale è uguale al negativo del lavoro; ci è tornato utile perché poi abbiamo potuto sommare energia cinetica e potenziale con lo stesso segno. Un pezzo di storia del genere umano. Questo è un altro: qui le locomotive dovevano muoversi, dovevano compiere lavoro, quindi il segno positivo è stato usato per dire che il sistema compie lavoro.

Abbiamo visto che l'energia U sembra dipendere solamente dalla temperatura, e che riguardi solamente l'energia *interna* ad un sistema. Abbiamo stabilito sperimentalmente, tramite le esperienze di Joule (220 anni fa circa) la relazione fra energia interna ad un sistema e lavoro compiuto: $W = -\Delta U$.

Parliamo ora del calore Q . Se forniamo calore ad un sistema, questo aumenta di temperatura; se invece assorbiamo calore da un sistema, la sua temperatura diminuisce. La variazione di temperatura è proporzionale al calore, moltiplicato per una costante:

$$\Delta T = \gamma Q \quad Q = \overbrace{\frac{1}{\gamma}}^{\mu} \Delta T$$

Nota: μ è solo il nome di una costante

γ dipende dalla temperatura, ma la sua dipendenza possiamo assumere sia molto piccola. Ci

limitiamo a piccoli intervalli per i quali la variazione di temperatura non ha influenza su γ , per cui la consideriamo costante.

Definiamo $U_{\text{int}} = U(T)$, quindi diciamo che l'energia interna è funzione della temperatura. Possiamo anche invertire questa funzione, partendo dall'energia e ottenendo la temperatura (il -1 indica la funzione inversa):

$$Q = \frac{1}{\gamma} \Delta T = \frac{1}{\gamma} (T_f - T_i) = \frac{1}{\gamma} [U^{-1}(U_f) - U^{-1}(U_i)] = \overbrace{\frac{1}{\gamma} c}^{\eta} [U_f - U_i] = \boxed{\eta \Delta U}$$

Da questo si capisce che $U(T)$ è una funzione lineare. Due quantità legate fra loro da una costante sono *molto* legate fra loro; spesso le costanti le usiamo solamente per aggiustare le dimensioni.

Il calore non ho motivo di pensarla in modo troppo diverso da un'energia. Possiamo porre la costante η , adimensionale, pari a 1, ottenendo $Q = \Delta U$. Non è una definizione di natura, è una definizione ricavata da certe convenzioni.

Vediamo il **primo principio della termodinamica**:

$$\begin{aligned} \Delta U_{\text{int}} &= \Delta U_{\text{int}}^{(W)} + \Delta U_{\text{int}}^{(Q)} \\ &= (-W) + (+Q) \end{aligned}$$

La variazione di energia interna al sistema la otteniamo dal lavoro compiuto dal sistema e dal calore acquisito. Prima abbiamo visto che la variazione di energia dipende dal lavoro compiuto dal sistema; con le convenzioni viste oggi, se il sistema ottiene solamente un cambio di calore, la variazione di energia corrisponde esattamente a questo calore. Mettendo insieme le due cose, ottenendo questa prima legge:

$$\boxed{\Delta U = Q - W}$$

Ricordiamo essere un principio, per cui non è qualcosa che possiamo dimostrare, ma che abbiamo ottenuto da prove sperimentali.

Alcune osservazioni. In meccanica la forma più generale di conservazione dell'energia era $W_{\text{n.c.}} = \Delta E = \Delta U$, la variazione di tutta l'energia del sistema (che ora chiamiamo ΔU) dipende dal fatto che qualcuno avesse compiuto del lavoro sul sistema. Prima abbiamo visto il – davanti al lavoro, oggi abbiamo completato il tutto con la Q : la prima legge della termodinamica è la forma più generale della conservazione dell'energia. Se l'automobile rallenta, magari non stiamo compiendo lavoro ma stiamo cedendo calore ai freni:

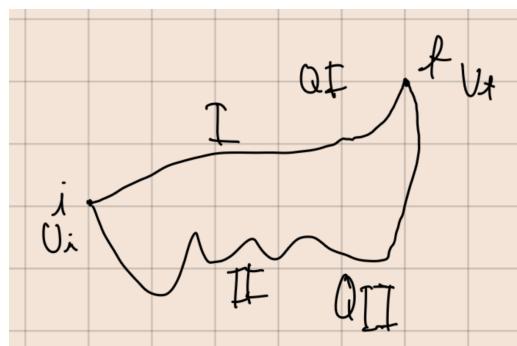
$$\begin{aligned} W_{\text{n.c.}} &= \Delta E \\ Q - W &= \Delta U \end{aligned}$$

Seconda osservazione. Qualora io prenda il sistema, lo usi e lo riporti alla condizione iniziale (trasformazione ciclica), e siccome la U dipende solo dalla temperatura, se parto da una temperatura iniziale e finisco ad una temperatura finale uguale, passando da uno ad un altro equilibrio termodinamico, la variazione di energia sarebbe zero, quindi sembrerebbe che $Q = W$, possiamo scambiare lavoro e calore. Non è del tutto vero, non si può ad esempio bruciare qualcosa e convertire totalmente il calore e il lavoro (vedremo più avanti).

Terza osservazione. Esiste una forma differenziale in cui ci occupiamo di piccole variazioni, non variazioni macroscopiche. La U diventa dU , e mettiamo un delta davanti alle altre due:

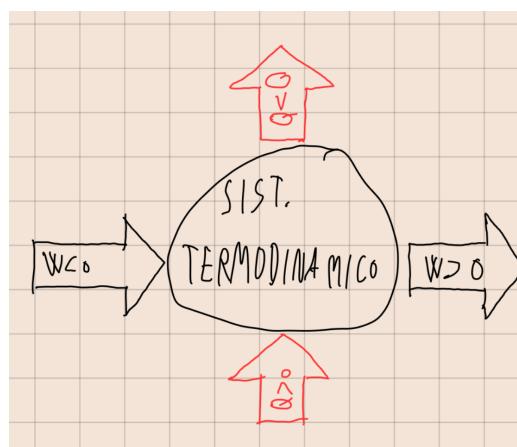
$$dU = \delta Q - \delta W$$

La d è un oggetto matematicamente ben definito, mentre a destra usiamo delle δ , quelle piccole quantità non si possono definire sempre, a priori, come differenze matematiche. Il calore e il lavoro sono modi di trasferire energia, non sono energia e basta. Un corpo in sé non immagazzina calore, non è vero, un corpo in sé non ha lavoro, in sé ha solo energia. Quello che il primo principio della termodinamica ci sta dicendo è che la variazione di energia interna è legata ed è possibile solo se avviene un trasferimento di energia, per fare ciò abbiamo due modi: il calore e il lavoro. Il modo in cui trasferisco lavoro e calore dipendono dalla situazione specifica, dal sistema, esso non è sempre definibile, per questo non usiamo il differenziale esatto.



Scambi di calore diversi

L'energia interna $U(T)$, che dipende dalla temperatura, possiamo definirla funzione di stato, in quanto è funzione del (solo) stato termodynamico. Quando faccio le differenze di temperatura fra due stati, faccio differenze fra due quantità ben definite matematicamente. Se però mi sposto da una posizione iniziale ad una finale, il calore che scambio in un percorso è diverso da quello che scambio se seguo un percorso diverso. Il calore scambiato, così come il lavoro, dipendono dal percorso (vedi (FIG 63)).



Sistema termodinamico

Supponiamo di avere un sistema termodinamico come in (FIG 64); tutto il resto è l'universo. Il lavoro è negativo quando viene subito dal sistema ed è positivo quando il sistema lo compie verso l'ambiente esterno; questa è la convenzione che usiamo. Il calore è positivo quando il sistema termodinamico lo assorbe, ovvero quando entra nel sistema termodinamico, ed è negativo quando esce dal sistema termodinamico.

Esempio Far west, macchinisti del treno. Il macchinista aveva la responsabilità della caldaia. Era necessario immettere nella caldaia del carbone e fare il modo di trasformare quel calore in lavoro. Il sistema termodinamico in questione è il motore. In media, il calore entra nel sistema bruciando il carbone e il lavoro esce dal sistema, in quanto compiuto. Si ottiene:

$$\Delta U = \overbrace{Q}^{>0} - \overbrace{W}^{>0}$$

Immaginiamo ora di immettere lavoro al sistema, in qualche modo; otterremmo:

$$\Delta U = \overbrace{Q}^{>0} - \overbrace{W}^{<0}$$

Un positivo *meno* un negativo (doppia negazione) fa un positivo maggiore, infatti l'energia aumenta.

In un sistema posso avere aumento di calore o lavoro, perdita di calore o lavoro compiuto, in qualsiasi combinazione possibile (solo una, due, tre, tutte e quattro, combinazioni incluse).



Cambio di temperatura

Nello spostarmi da uno stato di equilibrio i ad uno stato di equilibrio f passo attraverso molti stati non in equilibrio. Ciò significa che durante le mia analisi, concentrandomi in un punto diverso da i ed f , vedrei una nuvola di stati diversi (FIG 65), e ogni volta che riconduco l'esperimento sarebbe diverso. Introduciamo la lentezza di trasformazione: una trasformazione è lenta o **quasi-statica** quando posso immaginare ogni stato intermedio di una trasformazione termodinamica come un punto di equilibrio. Ciò non è vero. Posso però assumere che il passaggio da i a f sia come il passaggio tra tanti equilibri vicini tra loro, dall'iniziale i al finale f . Per fare questo devo essere sicuro di muovermi piano, lentamente. Immaginiamo di avere un gas di particelle all'interno di un concenitore su cui c'è un pistone (FIG 65). Immaginiamo di muovere il pistone in modo molto veloce, e di poter vedere le particelle. Se muovessimo molto velocemente vedremmo vortici, turbolenze; la turbolenza è una conseguenza di una trasformazione che non è quasi-statica. Se lo muovessi molto, molto lentamente invece avrei delle trasformazioni quasi-statiche. È importante ricordare che le trasformazioni quasi-statiche sono reversibili! Non è detto che tutte le quasi-statiche siano reversibili, esistono alcune che non lo sono; certamente se è una trasformazione reversibile è anche quasi-statica.

Il fatto che i fenomeni siano o no reversibili dà un senso al tempo. Cos'è che determina un avanti e un indietro al tempo? Nasce il problema qui in termodinamica. Quando invece parliamo di stato iniziale e finale non ci riferiamo necessariamente a posizioni diverse, sono istanti di tempi diversi.

La fisica dei sistemi macroscopici è una fisica statistica: posso descrivere dei comportamenti medi, ma non delle singole componenti del sistema quando questo è composto da un N_A di parti (clicca [qui](#) per un esempio; non possiamo sapere come si comporterà la singola componente, ma sappiamo come andrà a distribuirsi il sistema).

2.3 Calore specifico e stati della materia

Ricordiamo il primo esperimento di Joule. Ho una temperatura iniziale T_i , una certa quota iniziale della massa z_i , e otteniamo che la quota diminuisce $z_f < z_i$ e la temperatura aumenta a T_f . Se congeliamo l'acqua, la massa risale? Assolutamente no. C'è quindi un'asimmetria fra queste trasformazioni.

Il calore ha storicamente un'altra unità di misura oltre al Joule, la **caloria**:

$$\text{udm}[Q] = 1 \text{ cal} \quad 4,18 \text{ J} = 1 \text{ cal}$$

Le calorie le troviamo nel cibo, nel potere calorifero dei combustibili.

Prendiamo un adulto di 50 kg e diciamo che consuma, quindi brucia, una media di $Q = 2000 \text{ Kcal}$ al giorno. Queste vengono difatto consumare in un giorno. Vale:

$$Q = 2000 \text{ Kcal} = 2 \times 10^6 \text{ cal} = 2 \times 10^6 \times 4,18 \text{ J} = 8,4 \times 10^6 \text{ J}$$

In un giorno ci sono $\Delta t = 1 \text{ d} = 86400 \text{ s} = 8,6 \times 10^4 \text{ s}$. Se prendiamo le calorie consumate e il tempo durante il quale vengono consumate troviamo la **potenza**:

$$P = \frac{Q}{\Delta t} = 100 \text{ W}$$

Noi bruciamo le calorie ad esempio nel movimento dei muscoli. Serve compiere del lavoro per sollevare un braccio andando contro la forza di gravità. La temperatura corporea è un buon indicatore del fatto che ci siano i processi interni che ci mantengono vivi.

Supponiamo che metà di questi 100W se ne vadano in energia termica. Cosa succede se chiudo 1000 persone, sazie, in un teatro? Prendo $N = 10^3$ persone per uno spettacolo di $T = 2h$. In un ambiente chiuso so che la temperatura della sala aumenterà. Supponendo che la dimensione della sala sia $V = 50m \times 50m \times 4m$ e trovando il calore specifico dell'aria su Google, calcolare di quanto sale la temperatura del teatro. (può mai aumentare più della temperatura della persona più calda? Sì).

Supponiamo ora di far salire l'uomo di $h = 2 \times 10^3$ metri, ottenendo una variazione per via dell'energia potenziale di $\Delta U_{\text{int}} = mgh = 50 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^3 = 10^6 \text{ J} = \frac{10^6}{4,18} \text{ cal} = 2,5 \times 10^5 \text{ cal} = 250 \text{ Kcal}$. $Q = 1000 \text{ Kcal}$. Sembra che la variazione di energia interna del sistema sia solo di 250 Kcal ; tuttavia noi vediamo, dal tracking di uno smartwatch ad esempio, che dice abbiamo consumato 1000 Kcal . Come mai? Sicuramente non c'è da considerare solamente l'energia gravitazionale. Sono da considerare le funzioni base dell'organismo, quelle consumano. Lo sforzo meccanico è incluso nei 250 Kcal . Perché quindi? Ci sono inefficienze. E questo è il

corpo umano, uno dei più efficienti che ci sono. Noi non riusciamo a produrre macchine così efficienti. Per un processo chiamo **efficienza**, o **rendimento**, il rapporto tra il lavoro che il sistema compie, diviso le risorse necessarie per attuare questo lavoro. Siccome le risorse in questo caso, quasi sempre sono calore, noi siamo interessati all'efficienza come lavoro compiuto diviso calore assorbito:

$$\eta = \frac{W_{\text{compiuto}}}{Q_{\text{ass}}}$$

Nota: anche qui η è un simbolo generico, sostituibile con qualunque altro

Il primo principio della termodinamica ci conferma che nessuno ruba energia, l'energia si conserva. Troviamo che non tutta l'energia disponibile è impiegabile ai nostri scopi, e vediamo dove questa si perde (in realtà no, vedremo). Ci sono delle inefficienze nei processi.

Problema Un recipiente contiene $V_{H_2O} = 700 \text{ l}$ di acqua ad una temperatura $t_{H_2O} = 40^\circ$. Viene inserito un cilindro di diametro $D = 45 \text{ cm}$ e altezza $H = 55 \text{ cm}$, con temperatura $t_{CYL} = 95^\circ$. La densità del cilindro di metallo è $\rho = 4 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, e ha calore specifico $c = 500 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{Kg}}$. Ricordiamo che la densità dell'acqua è $\rho_{H_2O} = 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ e ha calore specifico $C_{H_2O} = 4,2 \frac{\text{KJ}}{\text{K} \cdot \text{Kg}}$. Trovare la temperatura finale, in equilibrio.

Nota: sono tanti 700 litri? Quanta acqua contiene una vasca da bagno? Supponiamo dimensioni $150 \text{ cm} \times 60 \text{ cm} \times 60 \text{ cm}$ e troviamo $1,5 \times 6 \times 6 \times 10^4 \text{ cm}^3 = 54 \times 10 \times \underbrace{(10 \text{ cm}^3)}_{1 \text{ dm}} = 540 \text{ l}$.

L'acqua non ha contatto altro che con il cilindro, non dissipa con la stanza, non siamo in bagno. Gli unici protagonisti sono acqua e cilindro, e il volume del cilindro e dell'acqua non variano (il problema inizia appena immerso, quando l'acqua si è stabilizzata). Non c'è lavoro compiuto. Avrò un calore riferito alla nostra acqua positivo, in quanto viene trasmesso, e negativo riferito al cilindro, in quanto viene dissipato:

$$\overbrace{Q_{H_2O}}^{>0} + \overbrace{Q_{CYL}}^{<0} = \Delta U = \Delta U_{H_2O} + \Delta U_{CYL}$$

Potremmo metterci a ragionare qui, o pensare al fatto che il sistema per come descritto è tutto il nostro universo. È possibile che la variazione di energia dallo stato iniziale a finale dell'energia sia diversa da zero? Chi gliel'ha data? Chi gliel'ha tolta l'energia? La variazione di energia è zero; questa è la prima osservazione:

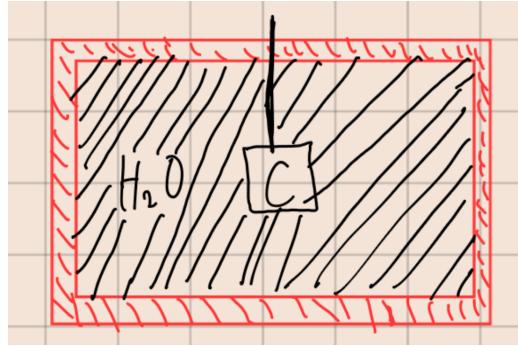


Ricordiamo la relazione fra calore e temperatura. Iniziamo a caratterizzare la costante γ . Abbiamo una capacità termica C relativa al materiale. Questa la otteniamo come prodotto fra la massa dell'oggetto e un altro valore, il calore specifico c :

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} \boxed{C} \Delta T$$

$$Q = \boxed{mc} \Delta T$$

Consideriamo un recipiente a pareti adiabatiche come in (FIG 66), spesse, che non fanno passare il calore. Dentro c'è dell'acqua, e di fatto a un certo punto inserisco nel recipiente in questione



Recipiente e corpo

un corpo a una certa temperatura, il tutto mantenendo l'adiabaticità del contenitore. Avrà una temperatura iniziale dell'acqua $T_{H_2O,i}$ e una temperatura iniziale del corpo $T_{c,i}$. Vogliono tendere ad una certa temperatura finale $T_x = T_{H_2O,f} = T_{c,f}$.

Abbiamo due condizioni. $Q_{TOT} = 0$. Il contenitore è a pareti rigide, non cambia il volume del contenitore, neanche di un infinitesimo $\delta V = 0$, e quindi non cambiano neanche le forze in gioco $\delta x = 0$. Quindi anche $\vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$; in questo tipo di problemi si ha un'assenza di lavoro, $\delta W = 0$, quindi $W_{TOT} = 0$.

Se non c'è lavoro e non c'è calore scambiato dal sistema acqua+corpo, vado a dimostrare per il primo principio della termodinamica (per cui la variazione dell'energia totale del sistema è calore meno lavoro), sto dicendo che non varia l'energia del sistema:

$$\Delta U_{H_2O} + \Delta U_c = 0$$

La somma delle loro variazioni è uguale a zero, quindi possiamo dire che le variazioni di energia fra acqua e corpo sono opposte.

Il problema ci chiede delle temperature, dobbiamo collegarle all'energia. Torniamo al caso della variazione di energia indotta dal calore (negli esperimenti di Joule l'energia cambia compiendo lavoro sul sistema e abbiamo poi visto che l'energia può cambiare fornendo o togliendo calore ad un sistema; concentriamoci sul secondo caso). Vale quindi che:

$$Q_{H_2O} + Q_c = 0$$

Questo passaggio lo facciamo perché il lavoro sia dell'acqua che del corpo sono pari a zero. Entrambi non guadagnano né perdono volume. Evidentemente c'è uno scambio di calore fra acqua e corpo, il calore che l'acqua guadagna è il calore che il corpo cede.

Il calore necessario per far cambiare la temperatura da T_i a T_f di un corpo di un certo materiale è proporzionale alla variazione di temperatura, alla massa e ad un coefficiente che dipende dal materiale:

$$\begin{aligned} Q_{H_2O} &= m_{H_2O} c_{H_2O} (T_f - T_{i,H_2O}) \\ Q_c &= m_c c_c (T_f - T_{i,c}) \end{aligned}$$

Questo coefficiente c è il **calore specifico**, e lo abbiamo definito come:

$$c_\gamma = \frac{1}{m} \left[\frac{\delta Q}{dT} \right]_\gamma$$

Dipende dalla particolare trasformazione γ che stiamo considerando; la derivata la faccio lungo il tratto γ che percorriamo. Non essendo costante, è chiaro che dipenda dalla temperatura, e

ciò che abbiamo definito sarebbe $c_\gamma(T)$ (è incluso nella dipendenza da γ). L'unità di misura è J/Kg . Qui parliamo del calore specifico dove il materiale viene misurato in termini di massa; più avanti parleremo del calore specifico molare.

Notiamo due cose. Stiamo dividendo il calore per la massa (ricordiamo che calore $Q = mc\Delta T$). Dividiamo per la massa, la quantità di materiale che stiamo trattando. La c ottenuta non contiene informazioni sulla quantità di materia, il che la rende una grandezza intensiva. La seconda questione è che abbiamo un problema quando $dT \rightarrow 0$, quando non c'è una variazione di temperatura. Lega il calore al cambio di temperatura; non torna utile se non c'è cambio di temperatura, e il calore può tornare utile per altro che non sia cambiare la temperatura.

Possiamo ottenere una grandezza estensiva moltiplicando il calore specifico per la massa, ottenendo la **capacità termica**:

$$mc_\gamma \stackrel{\text{def}}{=} C_\gamma \left[\frac{\delta Q}{dT} \right]_\gamma$$

Se prendiamo un progetto con molte piccole parti, possiamo sommare questi piccoli oggetti, ottenendo...

$$C_\gamma = \sum_{i=1}^N C_\gamma^{(i)} = \sum_{i=1}^N m_i c_\gamma^{(i)}$$

Per terminare il problema iniziale: possiamo uguagliare i due scambi di calore ottenendo:

$$m_{H_2O} c_{H_2O}(T_f - T_{i,H_2O}) = m_c c_c(T_f - T_{i,c})$$

Da qui possiamo ricavare la temperatura finale.

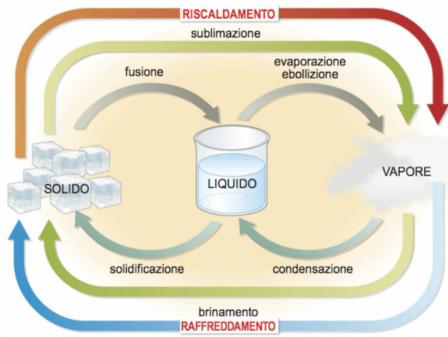
Il calore si può usare per altro che non sia causare una variazione di temperatura. Il **cambio di fase**, passaggio dalla fase liquida alla fase gassosa ad esempio, avviene ad una temperatura **costante**. Serve fornire calore al sistema, e in questo caso calore fornito \neq variazione di temperatura.

Come fasi abbiamo il solido, il gassoso e il liquido. Uno stato si dice **gassoso** se la materia in questione non ha né un volume né una forma propri. Di fatto assume la forma, e quindi anche il volume, del recipiente in cui lo disponiamo. Se noi infiliamo del gas all'interno di un palloncino di raggio 50 cm, se il palloncino regge, il gas sta lì; se il palloncino ha raggio 20 cm, il gas rimane lì. Se svuotiamo il palloncino in un contenitore cilindrico, il gas assume la forma di quel contenitore; idem per una bottiglia. Il **liquido** si definisce come quello stato della materia per cui la materia ha un suo **volume**; lo possiamo mettere in vari contenitori, la forma viene ancora decisa da questo. Lo stato **solido** si ha quanto la materia ha sia volume che forma propria.

I passaggi di materia hanno un loro nome: da solido a liquido si ha la liquefazione, da liquido a solido la solidificazione; da liquido a gassoso si ha l'evaporazione, da gassoso a liquido la condensazione; da gassoso a solido e viceversa si chiama sublimazione (vedi (FIG 67))

Se rappresento le fasi dell'acqua sul piano PT , pressione-temperatura (vale per 1L, 100.000L, 1mL, grandezze intensive non estensive, non metto per questo il volume), noto che le fasi sono ben distinte su questo piano (vedi (FIG 68)).

In particolare ho una struttura che ad un certo punto, **punto triplo**, vi sono tre linee che demarcano i cambiamenti di fase. L'area in alto a sinistra è la fase solida, in basso è la fase



Trasformazioni della materia

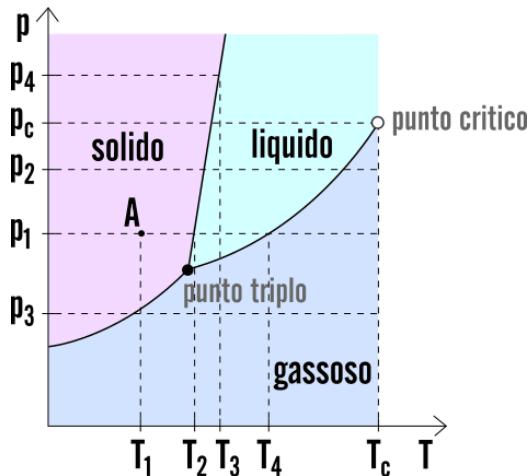


Diagramma pressione-temperatura dell'acqua

gassosa, in alto a destra ho la fase liquida. Le linee che separano le tre aree prendono il nome dei passaggi di materia, in base anche al senso di percorrenza (da che area a che altra area). Mentre la linea fra solido e liquido prosegue, virtualmente all'infinito, la linea fra liquido e gassoso ha un punto finale detto **punto critico**; qui non ha più senso parlare di distinzione fra fase liquida e gassosa, le due fasi coesistono, c'è un unico fluido (liquido e gas sono fluidi). Oltre questo punto critico di fatto abbiamo un'unica fase fluida, che si distingue da quella solida. Il punto triplo è unico, ben definito, e consente di prenderlo come riferimento per definire delle scale di temperatura. Usiamo lo zero assoluto come un estremo, e il punto triplo dell'acqua come altro estremo; il punto triplo dell'acqua lo impostiamo per definizione come $273,16\text{ K}$, ad una pressione di 611 Pa . In quel punto le tre fasi coesistono, o, siccome è un punto su un piano termodinamico, che nascondono insidie quando zoommiamo per bene, possiamo anche dire che in quel punto nessuna di quelle tre fasi esiste; sappiamo che l'equilibrio termodinamico è un equilibrio vivo, attorno al quale ci si muove.

Nota: la pressione è forza *su* unità di superficie, quindi $1\text{ Pa} = 1\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Mentre la pressione è una grandezza ancorata alle nostre nozioni di meccanica, che abbiamo misurato indipendentemente da questa situazione specifica, la temperatura l'abbiamo definita in modo da assegnare a questo punto (punto triplo) il valore $273,16\text{ K}$, a quella pressione di 611 Pa .

Il calore da fornire ad un materiale per causare un cambio di fase si ottiene dal prodotto fra la massa della materia alla quale si vuol far cambiare fase, e il suo **calore latente**:

$$Q = \lambda m$$

Se vogliamo far evaporare un materiale dobbiamo fornire un calore positivo: $Q_{>0} = \lambda_{ev}m$; se

vogliamo invece far condensare un liquido serve portare via calore ad un materiale: $Q_{<0} = \lambda_{condm}$.

L'unità di misura della pressione nel sistema internazionale è il Pascal. Abbiamo anche il bar, e le atmosfere:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Pa} &= \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ m}^2} \\ 1 \text{ bar} &= 10^5 \text{ Pa} \\ 1 \text{ atm} &= 1,013 \text{ bar} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Pascal, ottenuto dalla meccanica. Atmosfera, misuriamo che la colonna d'aria che abbiamo sulla testa a livello del mare è $1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$, quindi la definiamo come atmosfera. bar? Così, han deciso di semplificare, togliendo gli 0,013.

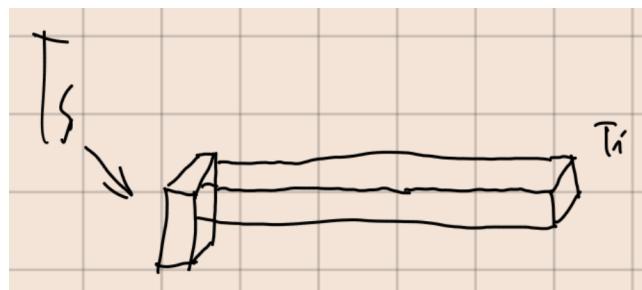
Nota: il calore latente di fusione dell'acqua è $\lambda_{\text{fusione}}^{H_2O} = 330 \text{ kJ/Kg}$. Abbiamo invece il calore latente di ebollizione dell'acqua pari a $\lambda_{\text{eboll}} = 22,6 \times 10^5 \text{ J/Kg}$.

2.4 Trasmissione del calore

Parliamo ora dei modi di trasmissione del calore. L'abbiamo definito come "energia in movimento", ma non ci siamo soffermati su come quest'energia veramente si mette in movimento. Ci sono tre modi di trasmissione del calore, convenzionalmente: la conduzione, la convezione e l'irraggiamento.

Se abbiamo un oggetto omogeneo e si determina una differenza di temperatura fra un punto dell'oggetto e un altro, c'è dell'energia che si muove da un punto all'altro. Se mettiamo in contatto una barra di metallo e una sorgente calda, otterrò che l'estremità della barra si scalda e il resto inizialmente rimane della stessa temperatura; poi però anche il resto del metallo si scalda. C'è del calore che si propaga nel solido. Questa si chiama **conduzione** del calore.

Ci sono due temperature interessanti: la temperatura di sorgente T_S , e quella iniziale alla quale si trova il corpo T_i . All'istante zero abbiamo tutto alla temperatura T_i ; se aspettiamo un pochino l'estremità in contatto si scalda; aspettando ancora un po' vediamo che il calore si espande lungo la sbarra; alla fine vediamo tutto il corpo alla stessa temperatura, quella della sorgente T_S . Vediamo in (FIG 69).



Conduzione del calore

Ma... la sorgente non si raffredda? Che poi, chi stabilisce qual è la sorgente? Non ci si può basare sulla temperatura: lancio un fiammifero in acqua, si raffredda quello, non si scalda un largo corpo d'acqua. Nemmeno il volume ci può aiutare. Noi chiamiamo **sorgente** un corpo che ha una capacità termica virtualmente infinita, talmente grande che l'interazione termodinamica con il corpo che stiamo analizzando non lo perturba. Quando abbiamo la stufa

che scalda l'ambiente, questa manterrà la sua temperatura indipendentemente da cosa accade nella stanza. Questo non è mai vero in assoluto. È una cosa tutto sommato arbitraria. La chiamiamo sorgente fredda o **pozzo** di calore quando può assorbire calore infinitamente, senza mai aumentare di temperatura.



Scala graduata

Prendiamo una scala graduata sulla quale segniamo le temperature T_0, T_1, \dots, T_n , nell'asse z come in (FIG), scala che rappresenta la conduzione di calore tra un segmento interno alla sbarra, tra un punto e un suo altro punto. Parliamo di come dimensionare la quantità di calore da un punto all'altro nello stesso corpo. Il calore che si conduce tra un blocchetto e l'altro è proporzionale alla temperatura dei blocchetti, alla superficie attraversata e al tempo; condurre il calore da un punto all'altro sarà più o meno efficiente in base a quanto distanti sono i punti:

$$\begin{aligned} Q &\propto \Delta T \\ Q &\propto \Delta S \\ Q &\propto \Delta t \\ Q &\propto \frac{1}{\Delta z} \end{aligned}$$

\propto significa "proporzionale"

Se li mettiamo tutti in relazione otteniamo che la variazione infinitesimale di calore si ha come:

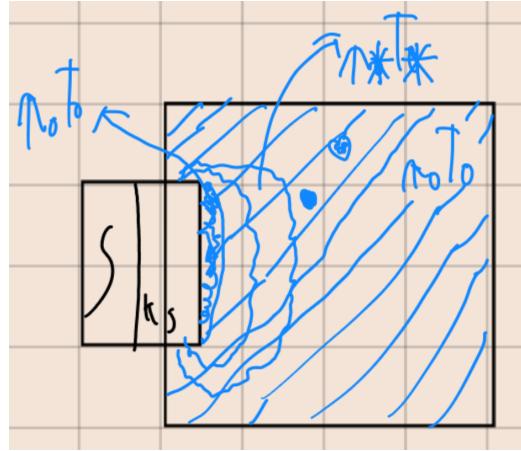
$$dQ = -K \frac{dT}{dz} dS dt$$

Esempio della **diffusione del calore**, o **conduzione del calore**. Nell'esempio si parte con una sorgente calda e una barra fredda, e l'asse delle z lo procediamo in senso positivo. La costante K dipende dal materiale ed è detta **conducibilità** del materiale; si misura in J/msK . Usiamo dQ , anche δQ è corretto.

Ad esempio, $K_{Al} = 200 \frac{J}{msK}$. L'alluminio porta in giro su un metro quadro di barra, lungo un metro, $200 J/s$, se la differenza tra un punto del blocchetto e l'altro è di anche un solo Kelvin. Il sughero invece ha $K_{sughero} \sim 4 \times 10^{-2} \frac{J}{msK}$.

La conduzione avviene sì fra due oggetti, ma è anche all'interno degli oggetti stessi! Se esponiamo mezza barra di metallo al sole, questa si scalderà, ma alla lunga anche la metà all'ombra aumenterà di temperatura. È il processo per cui il calore si muove all'interno della materia.

Passiamo alla convezione. Immaginiamo di avere un recipiente pieno di acqua, e sul lato viene posta una sorgente a temperatura T_S . Immaginiamo che l'acqua sia ad una temperatura T_0 e pressione P_0 , con $T_S > T_0$. Possiamo immaginare uno scaldabagno: pellicola vicino alla sorgente, immersa nell'acqua, in condizioni anche questa T_0 e P_0 . La sorgente inizia a scaldare per contatto. Immaginiamo che vicino alla pellicola si inizi a scaldare dell'acqua a temperatura T^* e pressione P^* , intermedia fra quelle della sorgente e dell'acqua. Facendo passare il tempo, vediamo che delle parti di acqua vicino alla pellicola si "distaccano", e iniziano a muoversi liberamente nel liquido; vedi (FIG 70). Questi dominii di acqua potrebbero muoversi e tornare vicino alla sorgente, acquisendo ancora calore, arrivando a temperatura $T^{**} > T^*$, e tornare nell'acqua. Man mano che ciò accade, man mano che iniziano ad apparire zone localmente più calde, si alza la temperatura media del liquido. Di fatto nei gas, nei fluidi tutto funziona a convezione. Aria calda e fredda nell'atmosfera si muovono così. Il metallo della pentola scalda l'acqua che è a contatto con il metallo, ma questi pezzettini d'acqua si staccano e si muovono



Convezione del calore

nella pentola. Definire quantitativamente la **convezione** è molto difficile. Anche le simulazioni numeriche sono molto molto complesse. Per noi è sufficiente avere in mente il concetto. Ad un tempo abbastanza lungo... dipende; con un recipiente adiabatico si raggiungerà T_S in tutto il liquido.



Irraggiamento

L'**irraggiamento** è un fenomeno che collega la temperatura del corpo e l'emissione e assorbimento di onde elettromagnetiche, vedi (FIG 72). C'è una connessione tra l'energia che associo ad una temperatura e l'energia che associo ad una lunghezza d'onda: $K_B T \simeq \frac{\hbar c}{\lambda}$. Lo conosciamo questo, la famosa videocamera a infrarossi fa vedere particolari lunghezze d'onda, proporzionali alla temperatura; possiamo farci dei termometri. Questa luce che viene via è energia. Il fatto che una certa cosa sia visibile è perché si sta raffreddando; quello che possiamo vedere perde energia. C'è una legge qui che si chiama **legge di Stefan-Boltzmann**; non la facciamo, ma vediamo come lavora. Ci dice che il potere emissivo di un corpo dipende da una costante σ , dall'emissività di un corpo (energia *per* superficie *per* tempo) e dalla temperatura assoluta alla quarta potenza:

$$\varepsilon = \sigma e T^4$$

$$[\varepsilon] = \left[\frac{E}{L^2 \text{Tempo}} \right] \quad \text{equazione dimensionale}$$

σ è una costante di natura (si misura, punto. Non si ricava da altre cose; un altro esempio di costante di natura è G). Abbiamo $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ J/m}^2 \text{sK}^4$, e ci dice quanta energia perde il corpo in base alla temperatura. e invece è compresa tra $[0, 1]$, è adimensionale e dipende dal corpo; fosse perfetto sarebbe 1.

Quest'equazione ci dice due cose. Possiamo misurare la temperatura di un corpo in base a quanta energia emette. Ci dice anche che stiamo drenando energia dal corpo, se ci mettiamo vicino ad un corpo che emette radiazioni ci scaldiamo.

Come facciamo ad isolare termicamente un oggetto, ad assicurarci che l'energia di un oggetto non venga dissipata nell'ambiente esterno? Ora che sappiamo che il modo per trasferire energia tramite calore è triplice, basta proteggersi da questi tre modi. Per proteggersi dalla conduzione serve rivestire l'intorno del sistema con materiali isolanti, a conducibilità bassa; la conducibilità più bassa ce l'ha il vuoto. È facile proteggersi dalla convezione (non perdendo liquidi). Per proteggersi dall'irraggiamento, visto che non posso impedirgli di emanare onde, circondo il sistema da superfici riflettenti per far sì che le onde emesse dal corpo rimbalzino e tornino da lui. Contenitore con pareti riflettenti, e intorno vuoto (o aria, il vuoto è molto costoso; o schiuma; piuma d'oca; roba leggera).

2.5 Gas

I **gas** sono un sistema di particelle debolmente interagenti fra di loro, descritti con quattro grandezze fondamentali: pressione, volume, temperatura e quantità di sostanza.

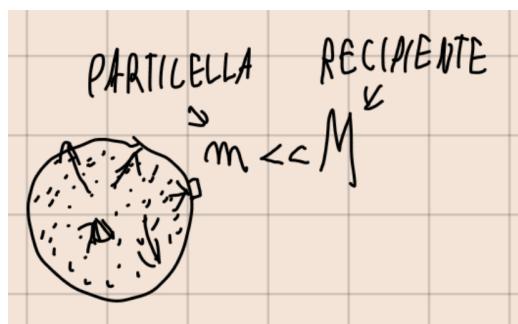
Per i nostri scopi, il **volume** di un gas coincide con quello del recipiente che lo contiene; il gas tende a riempire tutto il volume del contenitore; se dividessi a metà il volume del contenitore, avrei metà delle molecole che compongono il gas da una parte, metà dall'altra. Abbiamo come unità di misura una lunghezza alla terza potenza, $[L^3]$, e la misureremo in m^3 , o in litri (1000 lt in $1\ m^3$).

La **temperatura** si può misurare in gradi Kelvin, Celsius o Farenheit.

La **pressione** la definiamo come la componente della forza ortogonale alla superficie, diviso la superficie stessa:

$$p = \frac{F_\perp}{S}$$

Se aumenta la superficie di contatto a parità di forza applicata, la pressione applicata diminuisce. Cambiano le cose quando parliamo della pressione di un gas. Se ho del gas all'interno di un recipiente, le particelle che compongono il gas sono animate da movimenti casuali indipendenti l'uno dall'altro. Qualche volta queste particelle andranno ad urtare le pareti del recipiente. Quando vanno ad urtarle, siccome la massa dei costituenti del gas è molto minore della massa della parete (anche considerando il pezzettino di parete interessato dall'urto), possiamo considerare l'urto come completamente elastico fra una particella di piccola massa m e una parete di massa infinita M ($m \ll M$) (vedi (FIG 73)).



Gas

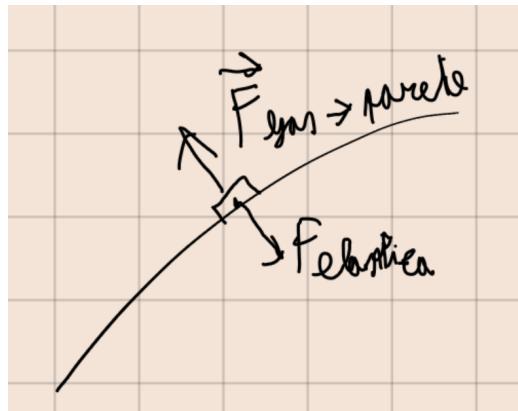
Vado a considerare la quantità di moto ortogonale alla superficie:

$$\left. \begin{array}{l} mv_i = p_i \rightarrow p_i^\perp \\ mv_f = p_f \rightarrow p_f^\perp = -p_i^\perp \end{array} \right\} \quad \frac{\Delta p^\perp}{\Delta t} = \frac{p_f^\perp - p_i^\perp}{\Delta t} = \frac{-2mv_i^\perp}{\Delta t} \sim F_i^\perp \longrightarrow \frac{n_s \times \langle F_i^\perp \rangle}{S} = p$$

Otterrò che la componente ortogonale della velocità dopo l'urto sarà opposta e uguale a quella prima dell'urto. Se prendiamo la variazione di quantità di moto in un intervallo di tempo Δt , otteniamo una forza che la singola componente del gas avrà esercitato sulla parete del contenitore. Il passaggio successivo è prendere in considerazione gli n_s urti che avvengono nell'istante di tempo, e li moltiplico per la forza che ciascuno applica, posso dividerlo per la superficie interessata dagli urti per ottenere la **pressione** del gas.

Nota: ricordiamo che questo è un modello!

Quando esercitiamo una forza su una superficie, e questa è non nulla, sappiamo si verifica un'accelerazione; nonostante ciò, la superficie di un palloncino non accelera, nonostante sia continuamente soggetta alla pressione del gas. Potremmo considerare il singolo urto, ma qui trattiamo 6×10^{23} urti, le cose si complicano. La superficie in questione è elastica, e nel momento in cui le particelle esercitano una forza su un punto nella superficie del palloncino, questa esercita una forza elastica nel verso opposto (immaginala come una molla) (vedi (FIG 74)).



Pressione sul contenitore

La pressione di un gas viene definita come l'inverso della pressione esercitata dal recipiente; non c'è altro modo di definirla sperimentalmente. Vale:

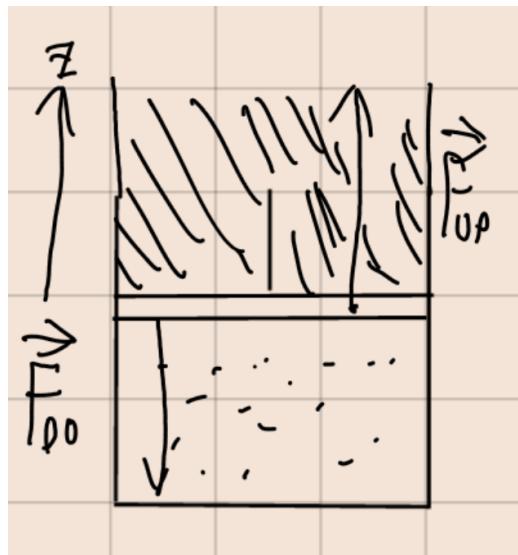
$$p_{\text{gas}} \stackrel{\text{def}}{=} -p_{\text{contenitore}}$$

Prendiamo in considerazione un **pistone**, adagiato su un cilindro, all'interno del quale è disposto un gas (vedi (FIG 75)). La pressione del gas sostanzialmente tenderà a spingere il pistone verso l'alto, e sarà uguale alla pressione del gas *per* la superficie del pistone *per* \hat{z} versore:

$$\vec{F} = p_{\text{gas}} S_{\text{pistone}} \hat{z}$$

La misuro guardando il sistema quando in equilibrio (stato termodinamico ben definito): significa che meccanicamente c'è equilibrio, e ciò perché c'è un'altra forza, diretta verso il basso, dovuta dalla massa del pistone *per g...* e basta? Dipende da dove mi trovo. Potrei dover sommare la **pressione atmosferica**, data dalla colonna d'aria che raggiunge la fine dell'atmosfera, centinaia di chilometri sopra le nostre teste. Sommiamo quindi la massa della colonna d'aria *per g*; si può dimostrare sia pari alla pressione atmosferica *per* la superficie del pistone *per* $-\hat{z}$. Vale:

$$m_{\text{pist}} \vec{g} + \underbrace{m_{\text{AIR}} \vec{g}}_{-p_{\text{ATM}} S_{\text{pist}} \hat{z}}$$



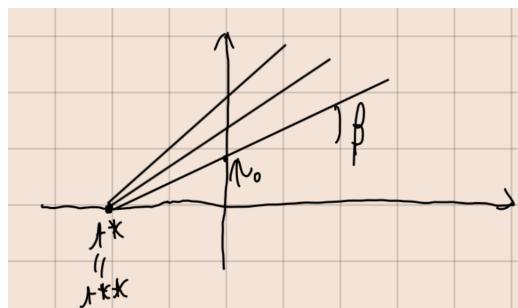
Pistone su un gas

La pressione dell'ambiente esterno è uguale alla pressione del gas ed è definita come segue:

$$|p_{\text{amb}}| = p_{\text{atm}} + \frac{mg}{S} = |p_{\text{gas}}|$$

Passiamo ora alle leggi fondamentali dei gas. Mi concentro sul caso dei **gas ideali**, o **gas perfetti**, che definiremo più avanti; per ora ci basta sapere che sono un'eccellente approssimazione per i gas a bassa pressione (rarefatti, a bassa densità). Valgono quattro leggi importanti:

- la pressione aumenta linearmente con la temperatura: $p = p_0(1 + \beta t)$, dove t è la temperatura misurata in una qualunque delle tre scale. Questa è la legge di Gay-Lussac, e vale qualora riusciamo a mantenere il volumen costante durante le nostre trasformazioni. Nella scala temperatura-pressione abbiamo una retta di coefficiente angolare β , che incontra l'asse delle ordinate in p_0 ; mi raccomando, vale a volumen costante. Questa rientra fra le trasformazioni dette isocore. I valori p_0 e β dipendono dal gas



Gay-Lussac

- seconda legge di Gay-Lussac. Teniamo la pressione costante, abbiamo una trasformazione isobara, e consideriamo un diagramma temperatura-volume. Otteniamo che il volume varia secondo $V = V_0(1 + \alpha t)$; cambiamo (V_0, α) e sostanzialmente stiamo cambiando gas. Otteniamo anche qui delle rette simili a quelle della proprietà precedente

C'avete in mente il pistoncino di prima? Ci mettiamo sotto una bella fiammella, e vediamo che man mano che scalidiamo il gas, il pistoncino tenderà a salire. Quando il gas è ad una certa

temperatura t , mettiamo dei pesetti sopra al pistone fino a tornare al volume originale del gas e facciamo il calcolo di prima (con m , g , la pressione atmosferica). Scaldo ancora, metto altri pesi, calcolo ancora, e continuo. I punti che ottengo stanno su una retta.

Sperimentalmente, scendere inteso come andare verso il freddo è molto difficile; raffreddare ambienti, oggetti, richiede strumenti, maestria, tecnologia; più raffreddiamo, più è difficile fare i nostri esperimenti. Possiamo però raccolgere un numero ragionevole di punti e poi fare un'estrapolazione; notiamo che le rette che estrapoliamo all'indietro convergono tutte verso la stessa temperatura t^* ; anche con la prima legge di Gay-Lussac tutte le rette tendono verso lo stesso t^{**} , che coincide con il primo. Ora, cerchiamo di capire cosa sono questi punti. In t^* la temperatura ha un valore particolare, che dipenderà dalla mia scala particolare; è importante che sull'asse delle y sono andato a 0. Per la seconda di Gay-Lussac ho volume 0, per la prima ho portato la pressione a 0. Pressione a zero significa che, per il modello di poco fa, non ci sono urti con la parete; le molecole son ferme, sembra che abbia "fermato il tempo". Altra cosa... che vuol dire volume = 0? È lo spazio occupato, ovvero "dove prima o poi vanno a finire" le componenti del gas; le ho fermate, il volume è zero perché, tralasciando il volume delle molecole, non vanno ad occupare altro spazio nella materia, quindi posso abbassare ancora il pistone. Il valore t^* è molto importante; se usiamo la scala Celsius, troviamo $t^* = -273,15$ gradi Celsius; la scala Kelvin semplicemente sceglie di porre qui lo zero, detto **zero assoluto**. Potremmo andare più indietro di così? Non possiamo arrivare ad un volume negativo, pressione negativa poi? Non ha senso.

Così sono giunti storicamente a questa conclusione. Altri due secoli hanno confermato la cosa; altrimenti si poteva pensare che la temperatura si abbassasse ancora, con volume e/o pressione che tendono a $-\infty$. Perché in Celsius? Perché gli europei ci sono arrivati prima, nulla di più.

Si può raggiungere lo zero assoluto? No; sarebbe necessario un lavoro infinito per giungere allo zero assoluto.

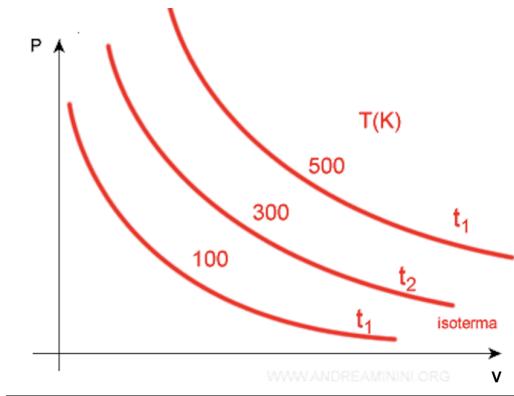
Quello di cui parliamo **è solo un modello**, definito entro certi limiti. Non possiamo spingerlo oltre, perché l'abbiamo definito in un certo modo. Qui usiamo il modello per evidenziare che esiste una temperatura caratteristica di tutti i gas molto interessante, tale da assumerla come origine per tutte le temperature. Nonostante tutti i dubbi *sul modello* che possono nascere, il punto t^* , lo zero assoluto esiste lo stesso! Pressione negativa, volume a zero, se rimane un gas, tutti limiti che servono per questo modello.

3. Vediamo la **legge di Boyle**. Se manteniamo la temperatura costante, in una trasformazione isoterma, vale: $p_i V_i = p_f V_f = \text{cost} = \propto T$. Se mappiamo volume e temperatura, vale che se scegliamo una temperatura, la pressione giace su un'iperbole $p = \frac{\text{cost}}{V}$ (vedi (FIG 77)).
4. Legge di **Avogadro**. Il numero di costituenti di un gas, fissati il volume, pressione e temperatura, è proporzionale a pressione e volume, e inversamente proporzionale alla temperatura: $N = \frac{1}{K_B T} \frac{pV}{N_A}$; viene moltiplicata per la costante di Boltzmann: $K_B = 1,38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$

Se considero invece il numero di moli come numero totale di molecole *diviso* il numero di Avogadro, ottengo:

$$n = \frac{N}{N_A} = \frac{pV}{N_A K_B T}$$

Se usiamo una mole di gas e la mettiamo ad una pressione di 1 atmosfera e usiamo una temperatura di 0 gradi Celsius, anche detti 273,16 K, questa legge ci fa fare tombola rispetto



Legge di Boyle

al volume! La legge di Avogadro ci dice che per tutte le singole moli di gas perfetti esiste un unico volume, detto **volume molare**, e vale $22,41\text{ l}$.

Riuniamo il tutto nella **legge dei gas perfetti**:

$$pV = NK_B T$$

Detta anche:

$$pV = nRT$$

Dove la R corrisponde ad $R = N_A \cdot K_B = 6,022 \times \frac{10^{23}}{\text{mol}} \cdot 1,38 \times 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}} = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$.

Consideriamo il seguente problema. Abbiamo due moli di gas ideale che occupano un volume di $1,67\text{ l}$. La pressione del gas è di 5 atmosfere, qual è la sua temperatura? Successivamente scaldiamo il gas fino a $T_1 = 100\text{ K}$ di temperatura, e il volume si mantiene lo stesso. Come è cambiata la pressione p_1 ?

$$pV = nRT \Rightarrow T = \frac{pV}{nR} = \frac{5 \times 1,013 \times 10^5 \text{ Pa} \times \frac{5}{3} \times 10^{-3} \text{ m}^3}{2 \times 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}} = \frac{25}{2 \times 25} \frac{\text{J}}{\text{K}} \times 10^2 = 50\text{ K}$$

Nota: scrivo $1,67 = \frac{5}{3}$ e $\text{Pa} \cdot \text{m}^3 = \text{J}$

Abbiamo ottenuto la temperatura avendo *tutto il resto*. L'equazione di stato descrive univocamente lo stato termodinamico di un gas. La seconda parte del problema ci dice che nel piano pressione-temperatura, partendo da un punto $P_0(50\text{ K}, 5\text{ atm})$ mi troverò ad un punto con temperatura 100 K , con il volume che si manterrà lo stesso. Sfrutto la stessa equazione:

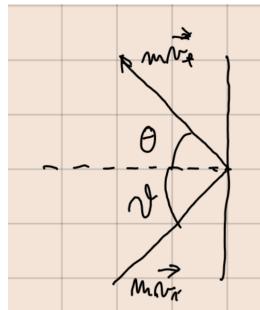
$$pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nR}{V}T = 10\text{ atm}$$

L'ho scritta così perché volume, numero di moli, R sono sempre le stesse, non cambiano; se la temperatura da 50 è diventata 100 K , quindi è raddoppiata, anche la pressione è raddoppiata. Ci troviamo nel punto $P_1(100\text{ K}, 10\text{ atm})$. Ricordiamo la potenza dello stato termodinamico: nessuno ci dice che movimento abbiamo fatto nel piano per giungere a P_1 : lineare, parabolico, un qualunque altro; è importante definire stato iniziale e finale. Non è specificato che il volume si mantenga uguale durante la trasformazione.

2.6 Teoria cinetica dei gas

La **teoria cinetica dei gas** è l'unica parte del corso dove partiamo da conoscenze sperimentali, e aggiungiamo conoscenza che va oltre le esperienze. Vogliamo derivare la legge dei gas perfetti,

che ha evidenza sperimentale (le leggi viste prima), e derivarla da altro, dalla teoria, da altri principi.



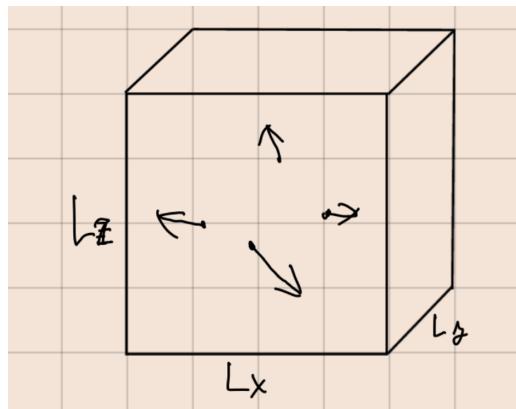
Urto

Consideriamo la parete di un recipiente come in (FIG 78). Abbiamo una quantità di moto iniziale $m\vec{v}_i$ e una finale $m\vec{v}_f$, dove gli angoli fra il moto della molecola e la parete sono uguali prima e dopo l'urto. Assumiamo in primo luogo che stiamo parlando di un urto elastico:

$$\frac{1}{2}m\vec{v}_i^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}_f^2 \Rightarrow |\vec{v}_{f,x}| = |\vec{v}_{i,x}|$$

La variazione della quantità di moto:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = 2m\vec{v}_x$$



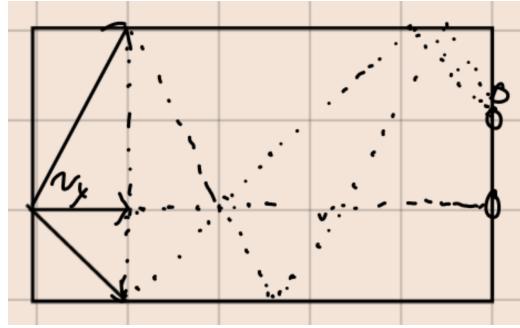
Gradi di libertà

Consideriamo la particella libera di muoversi in un contenitore $L_x \times L_y \times L_z$ (vedi (FIG 79)). Torniamo all'esempio visto inizialmente. Vale:

$$\frac{\Delta\vec{p}_x}{\Delta t} = \frac{2m\vec{v}_x}{?}$$

Qual è il Δt tipico? Abbiamo un urto su una parete, dopo quanto accadrà il prossimo urto? Questo tempo dipende unicamente da v_x , perché la particella deve giungere all'altro lato del contenitore. La velocità potrebbe essere diretta non lungo la perpendicolare alla parete, ma dirigere la molecola verso le altre due pareti; ciò che influenza il tempo che la molecola impiega per giungere dall'altro lato rimane solo v_x . Vedi in (FIG 80) tre traiettorie.

Se riesco a concentrarmi sulla componente x della velocità, determino l'intervallo di tempo necessario per andare da una parete a quella opposta; indipendentemente dalla traiettoria della



Tre traiettorie

particella. Il tempo prima del prossimo urto sulla stessa parete è dato da spazio *fratto* velocità, due volte la distanza fra la parete urtata e quella opposta *fratto* la velocità lungo x :

$$\frac{\Delta \vec{p}_x}{\Delta t} = \frac{2m \vec{v}_x}{2L_x/v_x} = \vec{F}_x = \frac{mv_x^2}{L_x}$$

Ce ne saranno tantissime, e ciascuna con una velocità totale diversa dalle altre. L'unico vincolo che pongo è che abbiano la stessa velocità.

Abbiamo ottenuto la forza che la particella i -esima, con una velocità specifica, ha esercitato. La forza totale lungo x a quanto sarà uguale?

$$F_x^{TOT} = \sum_{i=1}^N \frac{m v_x^{(i)2}}{L_x} = \frac{m}{L_x} \sum_{i=1}^N v_x^{(i)2} = \frac{mN}{L_x} \frac{\sum_{i=1}^N v_x^{(i)2}}{N} = \frac{Nm\langle v_x^2 \rangle}{L_x}$$

Al terzo passaggio ho moltiplicato e diviso per N . Mi ritrovo così ad avere la somma delle N velocità al quadrato *fratto* N , il numero di molecole. Ho ottenuto così la media delle velocità al quadrato.

La superficie sulla quale agiscono questi oggetti, considerando il parallelepipedo di prima, è pari ad $L_y \cdot L_z$. Se dividiamo la forza per la superficie sulla quale stiamo insistendo otteniamo:

$$p_x = \frac{F_x^{TOT}}{S} = \frac{F_x^{TOT}}{L_y L_z} = \frac{Nm\langle v_x^2 \rangle}{L_x \cdot L_y L_z} = \frac{Nm\langle v_x^2 \rangle}{V}$$

Nota: una proprietà dei fluidi è che la pressione in un suo punto è la stessa in tutti i punti del fluido; se è in equilibrio significa che le forze sono le stesse all'interno, in tutte le dimensioni, e quindi si bilanciano.

$p_x = p_y = p_z = p$ in qualunque direzione, abbiamo trovato la pressione del gas!

Ci calcoliamo poi \vec{v}^2 :

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 &= v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \\ \langle \vec{v}^2 \rangle &= \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle \end{aligned}$$

Il valor medio del quadrato delle velocità lungo una direzione è sempre lo stesso, la scelta è arbitraria. Se invertissi L_y con L_z o con L_x la questione non cambierebbe. Ogni direzione ha lo stesso peso delle altre.

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$$

Stabilito ciò, ottengo:

$$p = \frac{N m \langle \vec{v}^2 \rangle / 3}{V} \quad \rightarrow \quad pV = N \frac{2}{3} \underbrace{\frac{1}{2} m \langle \vec{v}^2 \rangle}_{\langle E_k \rangle}$$

Nota: la pressione è sempre una quantità positiva quando ci si riferisce ad un fluido

Nota: la media dei quadrati non è la media al quadrato, $\langle \vec{v}^2 \rangle \neq \langle \vec{v} \rangle^2$

Il nostro modellino è semplice, una scatola con delle palline che urtano elasticamente sulle le pareti e non si incontrano fra di loro, ci ha portato a trovare l'energia cinetica media delle particelle che compongono il gas; ho portato $\frac{1}{2}$ ed m dentro la media, sono costanti. Se uniamo questo ritrovamento con l'equazione di stato dei gas perfetti ottengo:

$$\left. \begin{array}{l} pV = N \frac{2}{3} \underbrace{\frac{1}{2} m \langle \vec{v}^2 \rangle}_{\langle E_k \rangle} \\ pV = N K_B T \end{array} \right\} \Rightarrow K_B T = \frac{2}{3} \langle E_k \rangle \quad \Rightarrow \underbrace{\langle E_k \rangle}_{\text{modello}} = \underbrace{\frac{3}{2} K_B T}_{\text{esperimento}}$$

Ho connesso il comportamento del nostro modello con delle informazioni che posso ottenere sperimentalmente.

Rivediamo le ipotesi che abbiamo stabilito durante la definizione di questa teoria:

- (1) urti elastici parete-molecole ($M \gg m$)
- (2) no interazioni fra le molecole del gas
- (3) dimensione molecole trascurabili

Queste sono le condizioni che nel nostro modello rendono il nostro gas adatto a riprodurre i risultati sperimentali; queste sono le condizioni che definiscono un **gas perfetto**, o **gas ideale**.

Scriviamo:

$$pV = N K_B T = nRT \quad \Rightarrow \quad pV - nRT = 0 \quad \Rightarrow \quad f(p, V, T, n) = 0$$

Equazione di stato, funzione della pressione, volume, temperatura e numero di moli, ed è uguale a zero. Descrive la vita in equilibrio di uno stato termodinamico, lo stato termodinamico di un sistema è dato da una funzione di stato, che nel caso dei gas perfetti è questa. Per i gas non ideali cambio funzione, devo tenere conto delle interazioni fra le molecole (interazioni di van der Waals), ottenendo l'equazione di stato $f_{VDW}(p, V, T, n)$.

Per i gas ideali otteniamo quest'equazione molto semplice. Il loro stato termodinamico è definito solamente da queste quattro variabili.

Vediamo meglio cosa intendiamo con "poche interazioni". Facciamo un calcolo, prendendo in considerazione molecole di idrogeno. Abbiamo un diametro $d = 2A = 2 \times 10^{-10} m$ ($1 A = 1 \text{ angstrom}$), raggio $r = 1A$, assumendolo sferico un volume $V_{mol} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4 \times 10^{-30} m^3$. Ricordando $n = 1 \text{ mol} \Rightarrow N = N_A = 6 \times 10^{23} \text{ molecole}$, e assumiamo il contenitore di volume $V_{cont} = 22,4 l$. Il volume totale delle molecole viene pari a $V_{mol}^{TOT} = 24 \times 10^{-7} l$. Se facciamo il rapporto fra il volume totale delle molecole e quello del contenitore troviamo: $\varphi = \frac{V_{mol}^{TOT}}{V_{cont}} = 10^{-7}$.

Non è così inverosibile pensare che non ci siano interazioni; il nostro rimane comunque un modello. Il volume del contenitore lo prendiamo pari al volume che occupa una mole di gas a zero gradi centigradi, ad un'atmosfera.

Torniamo alla formula $\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} K_B T$; il 3 deriva dal fatto che la velocità si descrive con un vettore in tre dimensioni. Se schiacciassimo la nostra scatola lungo una dimensione, fino a che non diventi piccola piccola, di 2\AA , limiteremmo le molecole ad una velocità lungo due dimensioni, bidimensionale. Un'altra cosa da tenere a mente è che il nostro assumere che le molecole non abbiano una massa ha un impatto sull'effetto macroscopico, su come abbiam collegato l'energia cinetica media.

L'energia cinetica media ε di una particella vale:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{l}{2} K_B T$$

Dove l è il numero di gradi di libertà che concorrono alla determinazione dell'energia totale della molecola. Sono 3 nel nostro caso perché abbiamo considerato un moto tridimensionale; se considerassimo gli urti, o le interazioni con altri gas, dovremmo tener conto di aggiustamenti piccolissimi. Dovremmo considerare non solo l'energia che viene dal movimento, ma anche che viene dalla rotazione delle molecole; gli atomi di una molecola biatomica potrebbero variare di distanza (il legame non è fisso, è un'interazione elettromagnetica; si può considerare come una molla, in vibrazione), aggiungendo un ulteriore grado di libertà. Per le rotazioni delle molecole biatomiche abbiamo due gradi di rotazione in più. Il grado di difficoltà di questa cosa non è superiore al passaggio da 3 dimensioni al coefficiente 3 nella formula. Noi nei problemi tratteremo gas monoatomici, $l = 3$, o biatomici, $l = 5$.

Nota: non consideriamo le rotazioni del singolo atomo su sé stesso, nel nostro modello non ha effetti. Potrebbe avere effetti in due situazioni: se interagisce con un altro atomo (non abbiamo interazioni), o se va a scontrarsi con una parete (ma la parete è talmente massiccia che la rotazione dell'atomo non ha effetto nell'urto).

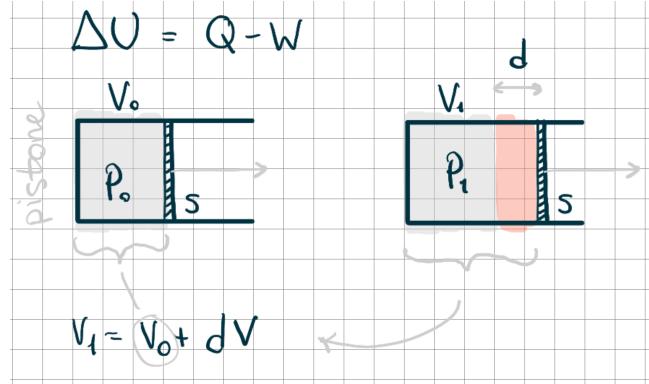
Nota: sui gradi di rotazione di una molecola biatomica. Chiamiamo **gradi di libertà** il numero di dati necessari per descrivere un certo sistema. Supponiamo di avere un atomo al centro di un s.d.r. tridimensionale, e di fissare la distanza con il secondo atomo. Abbiamo un angolo θ che segna la distanza fra il secondo atomo e z , e un angolo φ che segna la distanza del secondo atomo da x .

L'energia interna del sistema è pari all'energia media della particella per il numero di molecole:

$$U = N \langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} N K_B T$$

L'energia interna non dipende da pressione e volume, ma solamente dalla temperatura. Non è la prima volta che lo vediamo; la temperatura non è altro che **l'espressione dell'energia media dei costituenti del gas**. Ma quindi cosa succede allo zero assoluto? Prima parlavamo di medie, se vogliamo che una media risulti pari a zero significa che tutti gli elementi in considerazione devono essere zero; in termini di energia cinetica, devono essere fermi. Tutti i gas, tutte le molecole sono a zero.

Nota: se posizionassimo un cubetto nel vuoto, dove non ci sono radiazioni o interazioni, questo comunque si raffredderebbe per irraggiamento; non possiamo impedirlo



Lavoro dei gas

Mettiamo in chiaro cosa significa il lavoro per i gas, visto $\Delta U = Q - W$. Il gas compie lavoro se il suo volume iniziale passa ad un volume più grande; più parti del gas che hanno spinto il recipiente, verso l'esterno, di quelle verso l'interno del gas. Il caso classico è il pistone, gas inizialmente a p_0 , V_0 , ed una forza \vec{F} che ci porta ad una situazione $V_1 = V_0 + dV$, come in (FIG 81); il pistone viene spostato di dh . Il lavoro compiuto in questo piccolo spostamento è:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ &= F dh \\ &= \frac{F}{S} S dh \\ dW &= pdV \end{aligned}$$

La pressione altro non è che la forza che ha mosso il pistone, normalizzata rispetto alla superficie sulla quale ha agito. Se ho un fluido, un gas, questo compie lavoro se cambia il suo volume; possiamo trovare la quantità di lavoro infinitesimale se la pressione rimane la stessa, durante il cambiamento infinitesimale di volume infinitesimale dV ; possiamo assumerlo in quanto consideriamo ogni piccolo cambio di stato termodinamico come una trasformazione quasi statica, che avviene piano piano, così che il piccolo spostamento che facciamo possiamo supporlo a pressione costante. Da qui troviamo che dW è espresso come la pressione *per* questo cambiamento di volume ($dW = p \cdot dV$).

In questo problema particolare possiamo immaginare il gas che compie pressione, spostando il pistone. In questo caso ricordiamo che la forza è esercitata anche sugli altri 3 lati del pistone, cambia solo che in quegli altri lati il contenitore esercita una reazione vincolare pari e opposta.

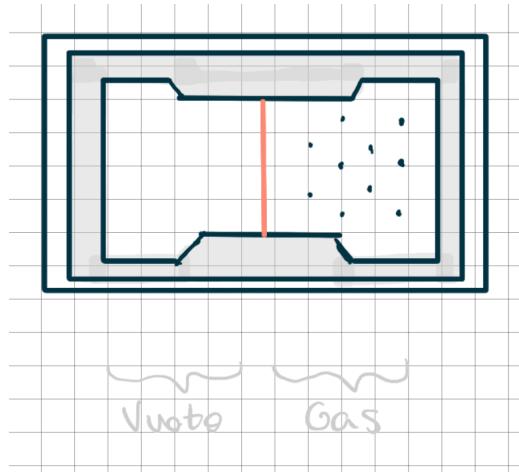
La pressione del gas **non** dipende dalla rigidità del contenitore. Cos'è? Quanti urti per unità di tempo fanno le molecole.

Se faccio una trasformazione per cui non cambia il volume del gas, non c'è lavoro. L'unico modo di avere un gas che compie lavoro è avere uno spostamento che causa una variazione di volume. Quindi il lavoro *non infinitesimale* di un gas lo definiamo come l'integrale di questi piccoli valori:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f dW = \int_i^f p(V) dV$$

Qui la pressione cambia durante il passaggio da V_i a V_f , come dettato dalla funzione $p(V)$; questa potrebbe anche essere una costante, non lo sappiamo a priori. Avere questa funzione è ciò che ci permette di trovare il lavoro compiuto dal gas.

2.7 Espansione libera di un gas



Espansione libera

Parliamo dell'**espansione libera di un gas**. Qui sarà il prof a proporre situazioni assurde. Mi procuro un bel contenitore dalle pareti rigide, ma di un rigido che più rigido non si può, quello interno in (FIG 82). Le sue pareti sono perfettamente diatermiche; è un conduttore perfettissimo, se metto il contenitore rigido dentro un bagno termico, posso usare la temperatura dell'acqua per ricavarmi più o meno la temperatura del suo interno. Metto un po' di gas nella metà del contenitore, divisa da un separatore, e mi segno la temperatura del mio fluido. Allo stato iniziale abbiamo V_i , p_i e T_i . Ad un certo punto tolgo il separatore, e ha qui inizio il nostro esperimento. Un po' di gas inizia a spostarsi *liberamente*, poi dell'altro, fino a che il gas non si distribuisce equamente nel contenitore. Aspettiamo abbastanza a lungo e ci ritroviamo con V_f , p_f e T_f , con il gas distribuito su tutto il contenitore. È un processo irreversibile, non si può avere il fenomeno contrario.

Nota: immergiamo le cose in un bagno termico per via della sua alta capacità termica, possiamo inserire un termometro per misurare facilmente il cambio di temperatura.

Ricordiamo che nel calcolo del volume abbiamo una pressione applicata sulle pareti del recipiente esterno, moltiplicata per la variazione di volume di quest'ultimo:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f dW = \int_i^f p_{ext}(V) \underbrace{dV}_{=0} = 0$$

Scriviamo p_{ext} perché la pressione che il gas esercita sul contenitore è uguale a quella che il contenitore, l'esterno, esercita sul gas. Ci rendiamo conto che in questo esperimento, il sistema non compie lavoro. Il gas si espande, ma non sta esercitando del lavoro nei confronti di un recipiente, verso una parete. Non sta spostando qualcosa. Questo lavoro è zero perché questo dV è identicamente zero, che ricordiamo essere il volume delle pareti diatermiche e infinitamente rigide del contenitore interno.

Nota: quindi, il volume V_i che consideriamo a inizio problema è sempre il volume del contenitore e non il volume del gas a inizio esperimento, che equivale a metà quello del contenitore (ricorda la definizione di 'gas' come stato di materia)

L'altro fatto importante di cui ci accorgeremmo se effettuassimo questo esperimento è che la temperatura a cui si trova il gas, misurata tramite il termometro all'inizio e alla fine,

non cambia. Potremmo seguire l'esperimento secondo per secondo e non notare alcuna variazione nella temperatura. Poiché tra il bagno e il gas c'è un continuo scambio di calore, se non cambia la temperatura del bagno non cambia nemmeno quelal del gas, non c'è scambio di calore netto fra i due sistemi. Il sistema totale non scambia calore con l'esterno. In questo esperimento vale anche:

$$Q_{i \rightarrow f} = 0$$

L'espansione libera di un gas, interpretata tramite il primo principio della termodinamica, ci sta dicendo che durante questa espansione l'energia interna del gas non varia, la sua variazione è zero; l'energia interna iniziale è uguale a quella finale:

$$\left. \begin{array}{l} W_{i \rightarrow f} = \int_i^f dW = \int_i^f p_{ext}(V) dV = 0 \\ Q_{i \rightarrow f} = 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \Delta U = Q - W \\ \Delta U = 0 \\ U_i = U_f \end{array}$$

Questo può essere trattato prima della teoria cinetica dei gas. Questo esperimento ci sta dicendo che in un sistema in cui misuro l'assenza di scambi di energia con l'esterno, sto misurando anche che non varia la temperatura. Ci conferma che l'energia interna ad un sistema termodinamico è funzione della sola temperatura, in quanto è l'unica cosa che non varia quando a non variare è l'energia interna: $U = U(T)$.

Calma un attimo. Non cambia il volume ma cambia la pressione? Allora. Immaginiamo di avere una bomboletta di vernice; la vernice spray è contenuta all'interno della bomboletta ad una certa pressione, maggiore dell'atmosferica. Sappiamo che se la lasciamo al sole possiamo aspettarci che la pressione del gas aumenti, arrivando ad un punto in cui è talmente forte da battere la forza che costituisce la struttura meccanica del contenitore, rompendolo ("esplode"). La pressione all'interno della bomboletta aumenta lentamente, non in maniera instantanea. Non possiamo dire che questo aumento è correlato a del lavoro. Il fatto che cambino le condizioni termodinamiche del gas non determina necessariamente che esista un lavoro (in questo esempio c'è però un aumento di calore). Dobbiamo vedere che succede nel rapporto col recipiente quando consideriamo il lavoro fatto. Se la bomboletta da una situazione iniziale passa ad una dove la parete si vede "gonfiata", allora il gas ha sì compiuto del lavoro sulla bomboletta; ma finché non si arriva a quel punto, la bomboletta resta identica, quindi non si può dire che il gas ha compiuto del lavoro (ha acquisito energia sotto forma di calore, per irraggiamento).

Nell'espansione libera il gas ha raddoppiato il suo volume, ma ciò non determina che abbia compiuto del lavoro sul sistema. Non c'è scambio di calore e non c'è lavoro; la temperatura infatti resta costante.

La temperatura non è altro che una forma dell'energia. Prima l'abbiamo detto con un modello, ora l'abbiamo detto tramite da un esperimento. Finché lo dice il prof è "fisica matematica, forse filosofia (nel senso peggiore del termine)"; quando faccio un esperimento diventa scienza sperimentale. Se qualcuno ci chiede di che è funzione l'energia interna di un sistema, a cosa è legata la temperatura misurata, dobbiamo rispondere che energia e temperatura sono legate, ma per motivare questa risposta è un po' fragile tirar fuori solo la teoria cinetica dei gas; conviene partire dall'espansione libera dei gas, in quanto dà una base sperimentale alla nostra asserzione.

Per ora questa relazione vale per i gas. Possiamo descriverli con 4 grandezze, possiamo dire che qui l'unica responsabile per l'energia interna è la temperatura. Fare il passo verso fluidi più generali, o sistemi solido-fluidi più complessi è meno scontato; lì può aiutare la teoria. Nella teoria cinetica dei gas che abbiamo messo giù si vede bene che la temperatura non è altro che

una somma di energia delle varie componenti, e se funziona per sistemi semplici può funzionare anche per sistemi più complicati; non avrei solo energia cinetica, anche chimica, elettrica, molte altre, ma vanno tutte a contribuire alla temperatura.

Nota: espansione, il gas si espande; libera, non ci sono vincoli. Non ci spieghiamo perché, se partendo dalla situazione iniziale e aspettando tempo, non ci troviamo con tutto il gas concentrato su un angolo; ma hey, vedremo qualcosa più avanti.

2.8 Trasformazioni notevoli

Facciamo un pochino di **trasformazioni notevoli** dei gas perfetti. Quando si studia la termodinamica nei cicli inferiori si fa solo questo argomento; lo trattiamo, ma non è da spenderci troppo.

Quando la pressione si mantiene costante le trasformazioni sono dette **isobare**. Nel piano termodinamico $p - V$, le trasformazioni si rappresentano come linee orizzontali; il volume cambia, mentre la pressione rimane costante. Qui calcolare il lavoro rimane abbastanza semplice:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f p dV = p(V_f - V_i) = p\Delta V$$

Abbiamo poi le trasformazioni **isocore**, dove è il volume a rimanere costante. È chiaro che:

$$W_{i \rightarrow f} = 0$$

Le trasformazioni dove la temperatura rimane costante sono dette **isoterme**, e il lavoro si può ricavare esprimendo la pressione in funzione del volume: $pV = nRT \Rightarrow p = \frac{nRT}{V}$, nRT rimane costante, in quanto assumiamo che la quantità di gas non cambi, siccome è una trasformazione isoterma la temperatura non cambia, ed R è una costante. Posso tirarla fuori dall'integrale, rimane l'integrale rispetto a V di $\frac{1}{V}$. Vale quindi:

$$W_{i \rightarrow f} = \int_i^f p dV = \int_i^f \frac{nRT}{V} dV = nRT \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right]$$

Abbiamo risolto il lavoro, diamo un'occhiata al calore. Lo scriviamo facendo uso della nozione di **calore specifico molare** (dove consideriamo 1 mole di sistanza invece di 1 Kg nella definizione). Il calore specifico è caratteristico della trasformazione che effettuiamo (c_γ); le trasformazioni isobare hanno pressione costante, scriveremo c_p :

$$Q_{i \rightarrow f} = nc_p \Delta t$$

Per le isocore invece useremo il calore specifico relativo ad una trasformazione dove il volume rimane costante:

$$Q_{i \rightarrow f} = nc_V \Delta V$$

Per le isoterme invece il calore è necessariamente uguale a zero... or is it?

$$Q \stackrel{?}{=} 0$$

Vediamo infine l'energia. Sappiamo che l'energia interna è uguale a calore *meno* lavoro. Nel caso delle isobare abbiamo:

$$-\Delta U = -nc_p \Delta T + p\Delta V$$

Per le isocore, siccome il lavoro è uguale a zero, rimane la definizione di prima:

$$\boxed{\Delta U = nc_V \Delta T}$$

Con le isocore ho scoperto ciò, tra poco rivedremo*. Vediamo infine la temperatura. La variazione di energia deve essere uguale a *meno* il lavoro:

$$\Delta U = 0$$

Ma... come mai? Se $\Delta U = Q - W$, e il lavoro non sembra essere zero, come mai $Q \stackrel{?}{=} 0$? Non è che siccome non varia la temperatura allora il sistema non riceve calore. Ricevere calore o cedere calore non si deve ridurre necessariamente ad un cambio di temperatura. Ci sono altri effetti che il calore può determinare sul sistema. Ciò significa che $Q \neq 0$.

*rivediamo. Abbiamo stabilito poco fa, in maniera sperimentale, che per i gas la variazione di energia interna dipende solo dalla temperatura: $U = U(T)$. Il fatto di aver stabilito questo non significa aver determinato la forma funzionale di U . Potrebbe essere che $U = 1J e^{\frac{T}{100K}}$, potrebbero esserci seni e coseno, non abbiamo ancora stabilito nulla. Con le isocore però abbiamo ottenuto una forma funzionale, $\Delta U = nc_v \Delta T$. È vero che lo abbiamo definito solo per le isocore, ma ci dà una formula che esprime l'energia interna in base alla temperatura. Ci dice che:

$$U_{\text{gas perfetti}} \stackrel{\text{def}}{=} n c_V T$$

Ciò vale **sempre**. Questa variazione di energia non è valida solo per le isocore. È valida sempre. Ci ha convinto di queste con le isocore, abbiamo riflettuto insieme: "non varia il volume il lavoro è zero, definisco il calore come al solito, $\Delta U = Q$ per via del primo principio, ΔU è uguale a questo". Potremmo andare avanti, ma fermandoci ci accorgiamo di aver trovato una definizione che è valida sempre. La variazione di energia interna per la trasformazione γ qualsiasi dei gas perfetti è **sempre** $nc_V \Delta T$, non solo se il volume è costante, sempre:

$$\Delta U_{\substack{\gamma \text{ qualsiasi} \\ \text{di gas perfetti}}} = nc_V \Delta T$$

Calore e lavoro dipendono dal caso particolare, U dipende da T ma manca la forma funzionale. Diventa complicato trovarlo quando abbiamo sia Q che W che cambiano. Ci mettiamo in una situazione semplificata, dove si toglie W , e dove siamo stati fortunati a trovare la dipendenza dell'energia dalla temperatura.

Nel primo caso, nelle isobare, abbiamo trovato che ΔU dipende non solo da $nc_p \Delta T$, ma anche da p e ΔV ; si vede che nel c_p è contenuto qualcosa che ha a che fare con $p\Delta V$, visto che U deve dipendere solo dalla temperatura.

Come fa una formula che usa volume costante a valere sempre? Semplicemente, stiamo scoprando che non è interessante il contributo della pressione.

Riassumendo:

	ΔU	W	Q
ISOBARA	$nc_V \Delta T$	$p\Delta V$	$nc_p \Delta T$
ISOCORA	$nc_V \Delta T$	0	$nc_V \Delta T$
ISOTERMA	0	$nRT \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right]$	$nRT \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right]$

Leggendo dalla tabellina abbiamo:

$$\begin{array}{l|l} W = Q - \Delta U & pV = nRT \\ p\Delta V = nc_p\Delta T - nc_V\Delta t & p\Delta V = nR\Delta T \end{array}$$

Unendole troviamo:

$$\cancel{\pi R\Delta T} = \cancel{\pi(c_p - c_v)\Delta T}$$

Da cui otteniamo la **relazione di Mayer**:

$$R = c_p - c_v$$

Se conosciamo c_v di un materiale, facilmente calcoliamo c_p ; siccome questi valori si misurano, ci possiamo mettere in laboratorio nella situazione più comoda a noi, per misurarne uno e ricavarne l'altro.

Nota: ricorda che $NK_B = nR$

Dalla teoria cinetica dei gas perfetti abbiamo ottenuto:

$$U = \frac{l}{2}nRT$$

D'altra parte, il mio esperimento in laboratorio mi dice che:

$$U = nc_V T$$

Dal confronto fra teoria ed esperimento consegue che:

$$\begin{aligned} \frac{l}{2}\cancel{\pi R\chi} &= \cancel{\pi c_V\chi} \\ \frac{l}{2}R &= c_V \end{aligned}$$

Per c_p :

$$\begin{aligned} W &= Q - \Delta U \\ W = pV &= \cancel{\pi R\chi} = \cancel{\pi c_p\Delta T} - \frac{l}{2}R \\ \frac{l+2}{2}R &= c_p \end{aligned}$$

Per i gas monoatomici, dove i gradi di libertà sono quelli che abbiamo già visto, vale:

$$\left. \begin{array}{l} c_V = \frac{3}{2}R \\ c_p = \frac{5}{2}R \end{array} \right\} \text{monoatomici} \quad \left. \begin{array}{l} c_V = \frac{5}{2}R \\ c_p = \frac{7}{2}R \end{array} \right\} \text{biatomici}$$

Se si usano molecole ancora più complesse, i gradi di libertà aumentano:

$$1 < \gamma = \frac{c_p}{c_V} = \frac{l+2}{l} \xrightarrow{l \rightarrow +\infty} 1^+$$

Ultima trasformazione, adiabatica, dove non vi è alcuna variazione di calore. Completiamo la tabella di prima, riassumendo:

	ΔU	W	Q	eq. fondamentale
ISOBARA	$nc_V\Delta T$	$p\Delta V$	$nc_p\Delta T$	$p = \text{costante}$
ISOCORA	$nc_V\Delta T$	0	$nc_V\Delta T$	$V = \text{costante}$
ISOTERMA	0	$nRT \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right]$	$nRT \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right]$	$pV = \text{costante}$
ADIABATICA	$nc_v\Delta T$	$-nc_v\Delta T$	0	$pV^\gamma = \text{costante}$

Da dove abbiamo ricavato l'ultimo riquadro?

$$\begin{aligned}\Delta U &= -W \\ dU &= -\delta W \\ nc_VdT &= -pdV\end{aligned}$$

Sapendo che vale l'equazione dei gas perfetti, facciamo un po' di sostituzioni e troviamo che $pV^\gamma = \text{costante}$.

Vediamo degli **esercizi**; partiamo dall'esercizio sul volume molare dell'ultima volta. Sappiamo che vale $pV = nRT$ per i gas ideali, perfetti, poco densi, indipendentemente da quali siano e che valori specifici assumono la p , la V e la T . Uno può definire delle condizioni standard su cui ci si mette d'accordo, per cui definisce $p = 1 \text{ atm}$, $n = 1 \text{ mol}$ e $T = 0^\circ\text{C}$. Le condizioni standard sono queste; per la temperatura prendiamo o $273,16 \text{ K}$ o 300 K . A queste condizioni, quindi a questa temperatura, pressione, quantità di materia, diciamo che il gas occupa un certo volume. Partendo dalla formula:

$$V = \frac{nRT}{p} = \frac{1 \text{ mol} \cdot 8,31 \frac{\text{J}}{\text{K mol}} \cdot 273,16 \text{ K}}{1,013 \times 10^5 \text{ Pa}} = 2240 \times 10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{Pa}} = 2240 \times 10^{-5} \times 10^3 \text{ l} = 22,4 \text{ l}$$

Ricordando che $\frac{J}{\text{Pa}} = \frac{1 \text{ N} \cdot 1 \text{ m}}{1 \text{ m}^2} = 1 \text{ m}^3$. Questo è il volume che un gas perfetto assume, indipendentemente dalla sua composizione molecolare.

Bene, vediamo ora un problema, tornando al pendolo balistico. Abbiamo determinato la relazione fra la velocità del proiettile e l'alzo della massa $v \leftrightarrow \vartheta$. L'idea è che il proiettile sia di piombo, abbia massa 5 g e $c_{\text{Lead}} = 129,8 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$ e velocità $v_i = 200 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, e il sacco abbia massa $M = 10 \text{ Kg}$, per un alzo di $h = 1 \text{ cm}$. La domanda è ora di quanto si scalda il proiettile.

Questo problema si risolve con la termodinamica; consideriamo il sistema dato dal proiettile; se considerassimo sacco+proiettile non ci sarebbe trasferimento di calore con l'esterno, solo fra due componenti interne. Per il proiettile non c'è lavoro (o meglio: o lo contiamo come lavoro per sollevare il sacco, o come differenza di energia, prendiamo la seconda):

$$\Delta U = Q - W$$

2.9 Trasformazioni cicliche

Abbiamo discusso di $\Delta U = nc_V\Delta T$. Sappiamo che se vale questo vale anche la forma infinitesimale $dU = nc_vdT$. Per passare alla U e alla T posso fare l'integrale, da un'energia di riferimento a quella che sto considerando (U_0), e da una temperatura di riferimento (T_0) a quella che sto



Esempio pendolo balistico

considerando:

$$\begin{aligned}\Delta U &= n c_V \Delta T \\ dU &= n c_v dT \\ \int_{U_0}^U dU &= \int_{T_0}^T n c_V d\tau \\ U - U_0 &= n c_V (T - T_0) \\ U &= n c_V T + \underbrace{(U_0 - n c_v T_0)}_0\end{aligned}$$

Quest'ultimo l'abbiamo ottenuto da evidenza sperimentale. Dalla teoria cinetica dei gas invece abbiamo ricavato:

$$U = n N_A \frac{l}{2} K_B T = \overbrace{n N_A}^N \langle E \rangle$$

Connettiamo poi la teoria con la prova sperimentale, e come ieri otteniamo:

$$U = n c_V T = n N_A \frac{l}{2} K_B T \Rightarrow c_v = \underbrace{N_A K_B}_R \frac{l}{2}$$

Vediamo poi una nota sul calore specifico. $c_\gamma = c_{\text{tr.}}$, quindi il calore specifico legato alla trasformazione specifica. Vale:

$$c_{\text{tr.}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n} \left[\frac{dQ}{dT} \right]_{\text{tr.}}$$

Possiamo sempre scriverla così:

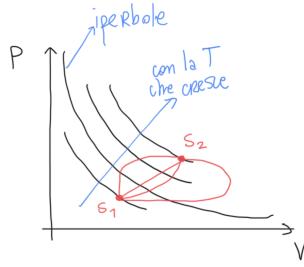
$$dQ_{\text{tr.}} = n c_{\text{tr.}} dT$$

Ovvero, se c'è per una trasformazione una variazione di temperatura dT , il calore collegabile a quella variazione di temperatura è $n * c_{\text{tr.}} * \text{questa variazione di temperatura}$. Non è che il calore specifico c'è solo se c'è una variazione di temperatura, è una caratteristica del corpo; semplicemente, se nella trasformazione c'è una variazione di temperatura lo usiamo, altrimenti no.

Ci siamo detti che la variazione di energia interna è uguale a $\Delta U = n c_V \Delta T$, indipendentemente dalla trasformazione. Sul piano $p - V$ le temperature costanti individuano delle linee, dei rami d'iperbole; temperatura costante significa che $pV = \text{costante}$, sostanzialmente abbiamo $p = \frac{\text{cost.}}{V}$, un po' come $y = \frac{3}{x}$; di fatto si tratta di un'iperbole. Al crescere della temperatura, le iperboli crescono come in (FIG).

Supponiamo ora di spostarci nel piano pV da uno stato iniziale ad uno finale, per via di una trasformazione qualsiasi:

$$(p_1, V_1) \longrightarrow (p_2, V_2)$$



Rami d'iperbole

Abbiamo molte possibilità per questa trasformazione. Nel punto S_1 così come in S_2 saranno associate delle iperbole, delle temperature. Indipendentemente da come è avvenuta la trasformazione, la variazione di energia interna ΔU è unicamente determinata dalla differenza fra le temperature associate allo stato iniziale e finale, in quanto $\Delta U = nC_V \Delta T$.

Introduciamo le **trasformazioni cicliche**. Una trasformazione si chiama ciclica quando il suo stato iniziale coincide con il suo stato di equilibrio finale; qualsiasi sia il piano sul quale viene rappresentata, la trasformazione apparirà come una curva chiusa, con inizio e fine sullo stesso punto. Un ciclo è la descrizione di ciò che avviene nelle macchine termiche, dove ad esempio il motore compie delle operazioni, tornando al suo stato iniziale e ricominciando nuovamente.

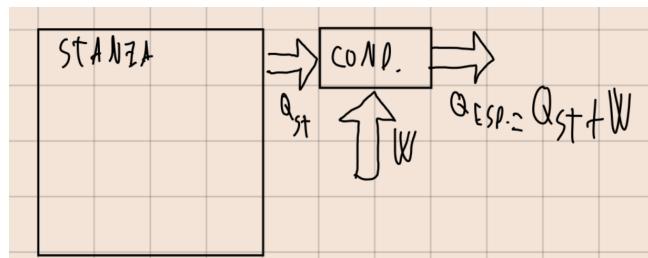
Lungo un ciclo, vediamo cosa succede quando considero il primo principio della termodinamica:

$$\Delta U = Q - W$$

La U è una funzione di stato, il suo valore dipende solamente dallo stato termodinamico, cosa non vera per Q e W , energie in trasferimento. Se lo stato iniziale è uguale a quello finale avrà $\Delta U = U_f - U_i = 0$. Per i cicli, il bilancio calorico deve essere uguale a quello del lavoro; la somma dei lavori deve essere uguale alla somma dei calori:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta U = Q - W \\ \Delta U = U_f - U_i = 0 \end{array} \right] \quad Q^{\text{TOT}} = W^{\text{TOT}}$$

Proviamo a fare degli esempi. Il condizionatore ha un motore dentro, e il suo compito è estrarre il calore da una stanza Q_{stanza} e lo espelle (Q_{espulso}). Questa descrizione non è sufficiente; non possiamo dire che compie lavoro, altrimenti avremmo pure dell'energia infinita. Abbiamo del lavoro W in ingresso (energia elettrica) per far sì che il condizionatore funzioni. Il calore espulso non è uguale a quello della stanza, ma è pari al calore della stanza + il nostro lavoro. Usiamo le frecce nel disegno e non i segni per non confondere.



Condizionatore

Il condizionatore ideale è quello per cui il rapporto fra il calore assorbito e il lavoro compiuto + il calore assorbito stesso sia il più grande possibile; idealmente vorrei non avere bisogno di energia,

di lavoro, avendo un rapporto = 1. Questo rapporto è detto **coefficiente di prestazione** ed è un numero sempre minore di 1:

$$\text{C.O.P.} = \frac{|Q_{\text{ASS}}|}{|W| + |Q_{\text{ASS}}|}$$

Per le **macchine frigorifere** questo è il corrispondente del rendimento nelle macchine termiche.

A una macchina termica si associa una trasformazione ciclica; nelle trasformazioni isocore non abbiamo stati iniziali e finali uguali, solo il volume; e mi raccomando, il volume nelle isocore è costante durante tutta la trasformazione.

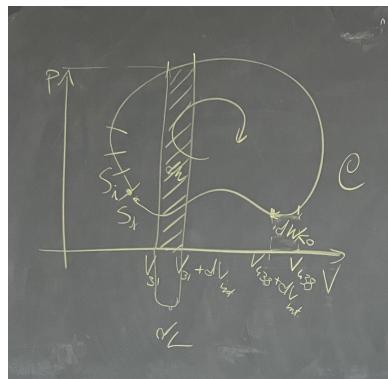
Nota: il condizionatore è il sistema che abbiamo studiato, la macchina termica M . La stanza e l'esterno sono due sorgenti esterne, una dalla quale prendere calore e una alla quale cederlo.

Torniamo a $Q^{\text{TOT}} = W^{\text{TOT}}$. Se chiamo il ciclo \mathcal{C} , il calore totale lo posso definire come segue (possiamo scrivere d invece di δ perché stiamo definendo la trasformazione che facciamo, specifichiamo il percorso (se definiamo il percorso perfettamente e lo percorriamo 100.000 volte, misureremmo gli stessi valori)):

$$Q = \int_i^f dQ = \oint_{\mathcal{C}} dQ$$

È come se dividessimo la trasformazione in tanti piccoli pezzettini, misurassimo il calore in ognuno, e poi li sommassimo tutti. Allo stesso modo posso calcolare il lavoro, che sarà definito come segue:

$$W = \int_i^f dW = \oint_{\mathcal{C}} dW \stackrel{\text{nei fluidi}}{=} \oint_{\mathcal{C}} p dV$$

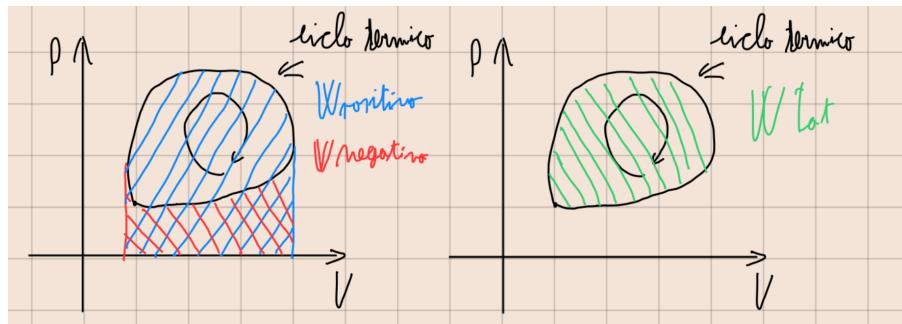


Trasformazione ciclica

Se osservo in (FIG) la trasformazione sul piano pV e prendo la variazione di volume dV , il lavoro corrisponde all'area sotto la curva delimitata dalla trasformazione. Se considero il piccolo segmento della trasformazione che va da V_{438} a $V_{438+dV_{\text{int}}}$ (dV_{int} è il dV di integrazione, che può essere negativo) sto tornando indietro, che per le regole degli integrali è equivalente a sottrarre quell'area.

Posso vedere nella nuova (FIG) che se sommo tutto il lavoro positivo compiuto andando "avanti" e sottraendo quello negativo "tornando indietro" trovo che quando rappresento un ciclo **termico** (in questo caso) sul piano pV , il lavoro che si fa in un ciclo è rappresentato dall'area contenuta nel ciclo:

Se il ciclo andasse nella direzione inversa non sarebbe un ciclo termico ma un **ciclo frigorifero**; assorbirebbe calore.



Lavoro nei cicli

Il calore lo vediamo come la somma del calore assorbito e del calore ceduto:

$$Q = Q_A + Q_C$$

Data la macchina termica M , il calore assorbito lo diciamo positivo, e il calore ceduto è per definizione negativo. $Q_A = Q_A^{\text{TOT}}$, somma di tutti i calori che assorbo; $Q_C = Q_C^{\text{TOT}}$ è la somma di tutti i calori ceduti; non scriveremo più il $^{\text{TOT}}$, ma il senso è quello.

Il lavoro lo vediamo come la somma del lavoro fatto e del lavoro subito:

$$W = W_F + W_S$$

Data sempre la macchina termica M , il lavoro subito dalla macchina è negativo, mentre quello fatto dalla macchina è per definizione positivo.

Definiamo il **rendimento** di una macchina termica. Una macchina ha un buon rendimento quando fa tanto lavoro per poco calore assorbito. Definiamo:

$$\eta = \frac{W}{Q_A}$$

Di solito abbiamo il lavoro fatto, W_F , ma lo consideriamo il lavoro totale in quanto una macchina in genere deve solo fare lavoro, non ne necessita. Per quello che abbiamo detto sulle trasformazioni cicliche $Q = W$, possiamo scrivere:

$$\eta = \frac{W}{Q_A} = \frac{Q_A + Q_C}{Q_A} = 1 + \frac{Q_C}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A}$$

Nota: esplicitiamo il meno per sottolineare che sia negativo

Mettiamo a numeratore una misura di merito, il lavoro che riesco a fare, e a denominatore una misura di costo, il calore assorbito... al quale dovremmo sommare W_S . Noi però trattiamo macchine termiche, che devono trasformare il calore in lavoro, per questo come costo teniamo conto del calore, qualcosa che possa essere paragonabile a del combustibile da bruciare.

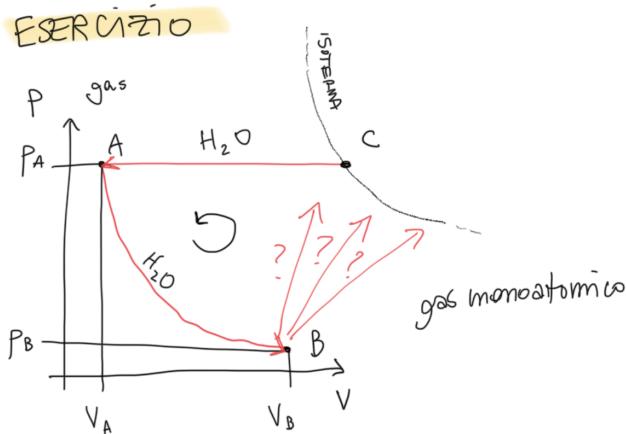
Consideriamo una macchina di $m = 2 \times 10^3 \text{ Kg}$ e portiamola ad una velocità $v_f = 31,62 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ in 10 s .

$$\left. \begin{array}{l} m = 2 \times 10^3 \text{ Kg} \\ v_f = 31,62 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \Delta E_k = \frac{1}{2} m v_f^2 = 10^6 \text{ J} \\ \Delta t = 10 \text{ s} \end{array} \right\} \quad \bar{P} = 100 \text{ kW}$$

In questo calcolo otteniamo 100 kW di potenza. Non consideriamo il costo per avviare la macchina, quel W_S , perché molto minore del lavoro fatto.

Parentesi storica: i motori termici sono stati una vera rivoluzione (*industriale*); poter trasformare il calore in così tanto lavoro portò un enorme cambiamento nella storia.

Ora vediamo un problema su un ciclo frigorifero di una macchina incaricata di raffreddare dell'acqua. Consideriamo $n = 1,6 \text{ mol}$, una temperatura iniziale di $T_A = 273,16 \text{ K}$, una pressione iniziale di $p_A = 10^5 \text{ Pa}$ e un volume $V_A = \frac{nRT_A}{p_A} = 36,3 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. Il gas è a contatto con l'acqua, compie un'espansione isoterma; quando nel diagramma rappresento lo stato del gas, di fatto lo seguo e vedo che il suo volume si espande; lo faccio osservando che la temperatura di questo gas è sempre la stessa, ed è ovviamente quella dello stato A. Abbiamo il gas a contatto con quest'acqua a 0 gradi Celsius.



Esercizio

Il passaggio allo stato B tramite una trasformazione isoterma reversibile è tale che $T_B = T_A$, la pressione $p_B = 0,64 \times 10^5 \text{ Pa}$ (minore della pressione allo stato iniziale A, me lo aspetto); il volume in B diventa $V_B = 56,8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. Tramite una trasformazione che non ci viene specificata arriviamo ad una pressione $p_C = p_A$, ma con volume V_C e temperatura T_C da calcolarci. Sappiamo infine che da C torniamo ad A tramite una trasformazione isobara. Non sappiamo quale sia la trasformazione che ci porta in C (non sappiamo dove sia C nel piano).

Il ciclo $A - B - C - A$ è frigorifero, si muove in senso antiorario. Sappiamo che in un ciclo siamo in grado di gestire $m_{H_2O} = 8 \times 10^{-3} \text{ Kg}$ di acqua, 8 grammi, e che il calore che il gas è in grado di assorbire da quest'acqua, sempre in un ciclo, è di $Q_{\text{gas}} = -246 \text{ J}$ (il gas cede un calore *negativo*, quindi lo prende dall'acqua). Qual è il lavoro che il gas compie, o subisce, da B a C, quindi $W_{BC}^{(\text{gas})} = ?$.

Possiamo immaginare il nostro solito pistone che limita il gas. Nel diagramma vediamo che ad un certo volume sono associate delle temperature; a quel volume corrisponde una temperatura durante AB, e a quello stesso volume un'altra temperatura durante CA.

Ragioniamo sul calore e sul lavoro in ciascuno di questi tratti:

	Q	W	ΔU
AB	+	+	0
BC	?	?	+
CA	-	-	-

Partiamo coi segni. Da A a B il volume aumenta; se disegniamo un integrale vediamo che è positivo; il lavoro da A a B è positivo. La variazione di energia interna è nulla, quindi se il lavoro

è positivo il calore dev'essere anch'esso positivo. Sto fornendo calore al gas, che in cambio sta compiendo un lavoro; senza formule!! Nel secondo tratto sappiamo che l'energia aumenta, in quanto aumenta la temperatura. Essendo un ciclo chiuso, l'energia che si guadagna in BC si perde in CA. Il calore in CA è negativo, mi serve per poter ottenere una variazione di energia di segno opposto a quella in BC.

Nota: il punto D è uguale al punto A al ritorno (CA di prima = CD di adesso)

Continuiamo il calcolo di ieri. Iniziamo definendo il calore $Q_{H_2O} = m\lambda = 2,64 \text{ kJ}$; questo lo possiamo anche indicare come $-Q_{ICE}$.

Riprendiamo la tabella vista ieri, aggiungendo delle considerazioni:

	Q	W	ΔU
AB	+	+	$Q_{AB} = W_{AB}$
BC	?	?	$Q_{BC} = \Delta U_{BC} + W_{BC} = \boxed{n c_V (T_C - T_B)} + W_{BC}$
CA	-	-	$Q_{CD} = \Delta U_{CD} + W_{CD} = \boxed{n c_V (T_D - T_C)} + W_{CD}$ $= n c_p (T_D - T_C)$

Trattandosi di gas, abbiamo potuto sostituire la formula dell'energia ΔU nel secondo e terzo caso. Nell'ultimo caso, trattandosi di una trasformazione isobara, abbiamo potuto sostituire il calore $Q_{CD} = n c_p (T_D - T_C)$.

Nel primo tratto non c'è variazione di energia interna; nel secondo caso c'è una certa variazione ΔU ; visto che è un ciclo, nell'ultimo tratto deve esserci l'opposto del ΔU trovato nel secondo tratto ($n c_p (T_C - T_B) = n c_p (T_D - T_C)$).

Scriviamo un po' le incognite che abbiamo:

1. $\boxed{Q_{AB}} = \boxed{W_{AB}}$
2. $\boxed{Q_{BC}} = \boxed{-\Delta U} + \boxed{W_{BC}}$
3. $\boxed{Q_{CD}} = \Delta U + W_{CD} = n c_V \Delta T + n R \Delta T = n \Delta T (c_v + R) = n \Delta T (c_v + c_p - c_v) =$
 $= n c_p \Delta T = n \frac{c_p}{c_v} \cdot c_v \Delta T = n \gamma c_v \Delta T = \gamma \Delta U$
4. $Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} = Q_{gas}$
5. $Q_{AB} + Q_{CD} = Q_{H_2O}$
6. $W_{AB} = n R T \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right]$

Nel tratto AB e nel tratto CD il gas è a contatto con l'acqua; nel secondo tratto no (questo è un dato del problema).

Noi stiamo congelando dell'acqua. Il mezzo che fa il ciclo è il gas; scambia calore con "un esterno", con l'acqua nella prima e terza trasformazione. Alla fine del ciclo, il bilancio del calore del gas è negativo. Ne assorbe un po' dall'acqua, lo cede all'esterno (nel tratto BC) e cede anche il lavoro necessario per fare il movimento.

Ricordiamo i dati del problema: conosciamo Q_{H_2O} , Q_{gas} , N , $T_A = T_B$, $p_A = p_C$, V_A , p_B e abbiamo calcolato V_B . Abbiamo cerchiato nell'elenco (una volta ciascuna) i dati che non

conosciamo; risultano 6 incognite con 6 equazioni. Non dobbiamo risolvere tutto il sistema, dobbiamo concentrarci sulle incognite a noi richieste, e procedere da lì.

Da dove ricaviamo la temperatura T_C ? Non compare esplicitamente nel sistema, ma la troviamo nascosta nell'energia: $T_C \leftarrow \Delta U = n c_V (T_A - T_C)$. Proviamo a prenderla dalla terza equazione (sembra la più semplice): $\Delta U = \frac{Q_{CD}}{\gamma}$. Uso poi la quinta, visto che non conosco il lavoro nell'ultimo tratto:

$$\Delta U = \frac{Q_{CD}}{\gamma} = \frac{Q_{H_2O} - Q_{AB}}{\gamma} = \frac{-W_{AB} + Q_{H_2O}}{\gamma} = \frac{-n R T \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right] + Q_{H_2O}}{\gamma}$$

Abbiamo usato la prima equazione per sostituire il calore nell'ultimo tratto con il lavoro; usiamo poi la sesta equazione per sostituire il questo lavoro.

Nota: tieni conto di quali equazioni hai già usato nella risoluzione

Possiamo adesso procedere nel ricavare T_C dall'energia:

$$\begin{aligned} n c_V (T_A - T_C) &= \frac{-n R T_A \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right] + Q_{H_2O}}{\gamma} \\ n c_p (T_A - T_C) &= Q_{H_2O} - n R T_A \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right] \\ T_A - T_C &= \frac{Q_{H_2O} - n R T_A \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right]}{n c_p} \\ T_C &= T_A - \frac{Q_{H_2O} - n R T_A \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right]}{n c_p} \end{aligned}$$

Abbiamo trovato la temperatura; lasciamo il calcolo del lavoro W_{BC} per la prossima volta.

2.10 Ciclo di Carnot

Trattiamo ora il ciclo termico più importante che esista, il **ciclo di Carnot**. Il ciclo in questione può essere utilizzato come strumento teorico per l'analisi di tutti i cicli termici; non ha importanza per i suoi risvolti tecnologici (al contrario ad esempio del ciclo di Diesel), ma corrisponde ad una serie di trasformazioni che semplificano il contesto attorno al problema del ciclo e consentono una trattazione semplice e dettagliata, tanto da diventare uno strumento matematico.

Nota: disegnarlo BENE, all'orale mostrare che avete un po' di preoccupazione che venga fatto bene

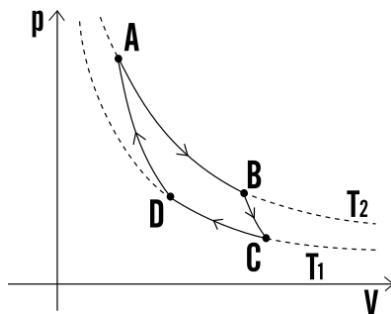
Il ciclo di Carnot sul piano pV (che ricordiamo non essere l'unico) è un ciclo in cui il gas viene in contatto con due sorgenti a diverse temperature: una caldo e una fredda. In un ciclo qualsiasi potrei avere quasi infinite sorgenti (=temperature) con le quali entro in contatto. Abbiamo una trasformazione isoterma fredda a T_1 e un'isoterma calda a T_2 . La connessione tra queste due isoterme è fatta in maniera tale che lo scambio di calore sia solo con le sorgenti.

Quando percorro un'isoterma il gas scambia calore con l'esterno; la percorro, quindi compio lavoro e quindi scambio calore; questo calore è scambiato con la sorgente, o gruppo di sorgenti,

insomma, con un ambiente esterno a temperatura fissa. Nel ciclo di Carnot questi sono gli unici scambi di calore nel ciclo.

Come faccio ora a collegare questi due rami in modo da non avere scambi di calore? Se li connettessi "verticalmente" avrei delle isocore, ci sarebbe quindi scambio di calore. Se non voglio scambio di calore, per definizione, devo avere trasformazioni adiabatiche: $pV^\gamma = \text{costante}$. Questo è il ciclo di Carnot, termico, quindi gira in senso orario.

Nota: nel grafico le adiabatiche sono $p = \frac{c_A}{V^\gamma}$, sono una funzione di potenza



Ciclo di Carnot

Partendo da A avrei un'espansione isoterma ad alta temperatura, un'ulteriore espansione adiabatica in cui la temperatura diminuisce, una contrazione isoterma a bassa temperatura, e un'ultima contrazione adiabatica.

Analizziamo il ciclo:

	ΔU	Q	W
AB	0	$n R T_2 \ln \left[\frac{V_B}{V_A} \right] (> 0)$	$n R T_2 \ln \left[\frac{V_B}{V_A} \right] (> 0)$
BC	$n c_V (T_1 - T_2) (< 0)$	0	$n c_V (T_2 - T_1) (> 0)$
CD	0	$n R T_1 \ln \left[\frac{V_D}{V_C} \right] (< 0)$	$n R T_1 \ln \left[\frac{V_D}{V_C} \right] (< 0)$
DA	$n c_V (T_2 - T_1) (> 0)$	0	$n c_V (T_1 - T_2) (< 0)$

Il bello di questo ciclo sono gli zeri, il primo principio della termodinamica risulta essere un'uguaglianza fra due elementi.

Il rendimento nel ciclo di Carnot lo troviamo come:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB}}$$

Il rendimento del ciclo di Carnot è 1 *meno* una certa quantità, la nostra inefficienza. Dipende dal rapporto dei calori che nei due tratti a contatto con le sorgenti riusciamo a cedere e assorbire.

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} = 1 - \frac{|Q_{CD}|}{Q_{AB}} \\ &= 1 - \frac{n R T_1 \ln \left[\frac{V_C}{V_D} \right]}{n R T_2 \ln \left[\frac{V_E}{V_A} \right]} \end{aligned}$$

Nota: uso $\ln \left[\frac{a}{b} \right] = \ln a - \ln b = -(\ln b - \ln a) = -\ln \left[\frac{b}{a} \right] = -1 \ln \frac{b}{a}$ per invertire l'argomento del logaritmo. Q_{CD} è negativo; nel momento in cui vado a prendere il suo modulo, essendo negativo, sto mettendo un meno davanti, avendo $1 - \frac{-Q_{CD}}{Q_{AB}}$; inverto il logaritmo per tornare ad avere un meno davanti e annullare il meno aggiunto dal valore assoluto

Nota: per casa dimostrare (=rendersi convinti oltre ogni ragionevile evidenza) che $\frac{V_C}{V_D} = \frac{V_B}{V_A}$. Sfruttare le equazioni delle trasformazioni adiabatiche! ([soluzione](#))

Potendo semplificare questa eguaglianza fra rapporti, ottengo che l'efficienza nel ciclo di Carnot è:

$$\eta_{c(T_1, T_2)} = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

L'efficienza nel ciclo di Carnot è data interamente dalla temperatura delle due sorgenti.

Mi raccomando, il ciclo di Carnot è reversibile.

Dall'equazione dei gas generale che contiene grandezze extensive siamo passati a grandezze intensive, la temperatura. Non c'è scritto quanto deve essere grande la macchina di Carnot; potrei farlo in scala microscopica come in scala planetaria. Ciò che dà il rendimento è solamente il rapporto fra le temperature in esercizio, e l'inefficienza dipende da quel rapporto, ed è tanto maggiore quando più alto il salto fra le due. Se le due temperature sono uguali non c'è rendimento, è zero. Se T_2 e T_1 sono uguali le due curve coincidono, l'area sparisce, non si fa lavoro, e per l'altra definizione di rendimento (lavoro al numeratore), si otterrebbe appunto zero.

Per come abbiamo impostato il problema $T_1 < T_2$, quindi l'efficienza $0 \leq \eta \leq 1$. L'efficienza aumenta quanto più aumenta la distanza fra le due temperature. Se fisso T_1 , l'area fra le curve aumenterà quanto più "alzo" la curva T_2 . È molto efficiente fare lavoro quando di fatto sono al freddo; lo è di meno se sono al caldo, perché se la temperatura da cui estraggo calore e quella a cui lo cedo sono molto vicine, sarò per definizione poco efficiente.

Nota: quando parliamo di raffreddare qualcosa, non è che quel qualcosa lavora meglio al freddo, è che non può lavorare se diventa troppo caldo; il nostro obiettivo è togliere il calore da quello strumento affinché possa lavorare ad una maggiore intensità, produrre più calore, e far sì che quel calore venga portato via.

Nota: spoiler, Carnot è il limite. Non si può fare meglio di così. Le macchine reali lavorano sempre peggio di così. Il limite teorico dipende dal rapporto fra le temperature. È un limite teorico; se ci congeliamo e ci risvegliamo fra 100 anni, la civiltà sarà andata molto avanti, ma i cicli di refrigerazione che lavorano fra due temperature non possono aver ecceduto questa efficienza, non si può fare, non dipende dalla tecnologia.

2.11 Secondo principio della termodinamica

Noi conosciamo, e lo conosciamo perché lo usiamo, il primo principio della termodinamica:

$$(1) \Delta U = Q - W$$

Abbiamo visto e studiato che in un ciclo $\Delta U = 0$, il che implica che $Q = W$. Proseguiamo la

nostra riflessione nel cercare di chiarire quale sia il rapporto fra calore e lavoro. Sappiamo che assorbire calore per produrre lavoro è possibile, ma vediamo che non è mai l'unico effetto. La seconda cosa che notiamo (2), importante, è che

(2) il calore non fluisce mai spontaneamente dal freddo al caldo

Mi raccomando, non diciamo che è impossibile (un es. è il frigorifero), ma che non è spontaneo. Ultima osservazione, che è un po' un corollario, è che

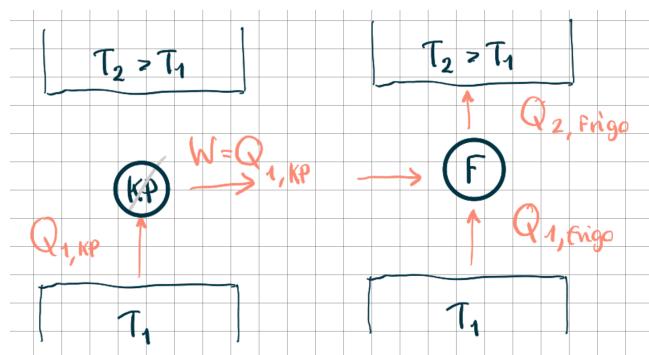
(*) è sempre possibile trasformare il lavoro in calore (vedi esperimenti di Joule).

Sono entrambe energie in movimento, ma dall'esperienza viene che trasformare il lavoro in energia è più "puro", "cristallino", rispetto a lavorare con il calore. Quando c'è un'esperienza sperimentale, che non dimostriamo, andiamo ad enunciare il **secondo principio della termodinamica**.

Vi sono due enunciati per questo principio. Il primo enunciato è di Kelvin-Planck, che dice che è impossibile realizzare un processo in cui l'unico risultato sia il trasformare il calore in lavoro. Il secondo, l'enunciato di Clausius, mi dice che è impossibile realizzare un processo il cui unico risultato sia il trasferire il calore da un corpo ad un altro a temperatura maggiore.

Abbiamo usato pochissime volte termini come "sempre" o "impossibile". In certi casi però ci stanno bene, come per queste leggi fondamentali. È impossibile, non può accadere, se accade violiamo un principio base della fisica. K-P parla della fenomenologia (1), mentre C parla della fenomenologia (2), connessi fra loro. Non possiamo dimostrare ciò. Quello che possiamo dimostrare è l'equivalenza di queste due formulazioni.

L'equivalenza si fa per assurdo: assumiamo ci sia una macchina che viola K-P, e facciamo vedere che esistendo lei, violeremo Clausus. Una macchina che violi K-P (da adesso useremo delle macchine di Carnot), ha una sorgente a temperatura T_1 , e una sorgente a temperatura T_2 , e in mezzo ci mettiamo la macchina, in grado di subire o compiere lavoro e può assorbire o cedere calore. Diciamo che il suo unico scopo è eseguire un processo che prende del calore e lo trasforma interamente in lavoro.



Kelvin-Planck (1)

Ci metto vicino una macchina che lavora alle stesse identiche temperature. Questa prende in ingresso il lavoro prodotto dalla prima macchina, $Q_{1,KP}$; ricordiamo di poter trasformare tranquillamente lavoro in calore. Questa macchina F toglie da T_1 del calore $Q_{1,F}$ e fornisce alla temperatura T_2 un calore $Q_{2,F}$.

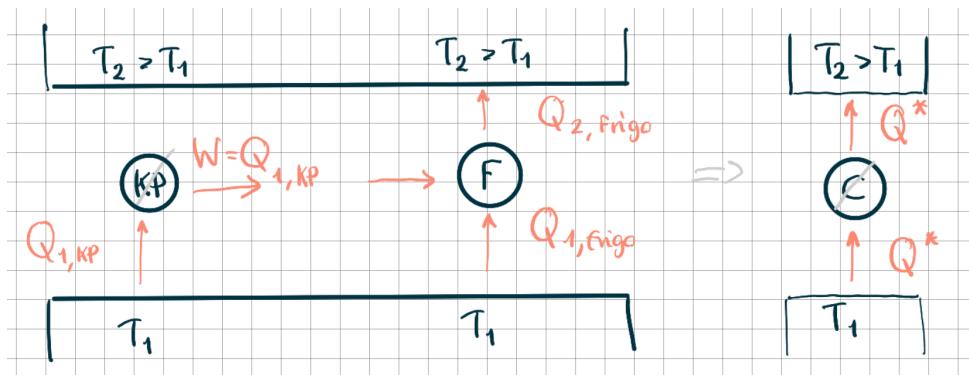
Facciamo il calcolo delle energie:

$$\begin{cases} |W| + |Q_{1,F}| = |Q_{2,F}| \\ |Q_{1,KP}| = |W| \end{cases} \quad \Downarrow$$

$$|Q_{1,KP}| + |Q_{1,F}| = |Q_{2,F}|$$

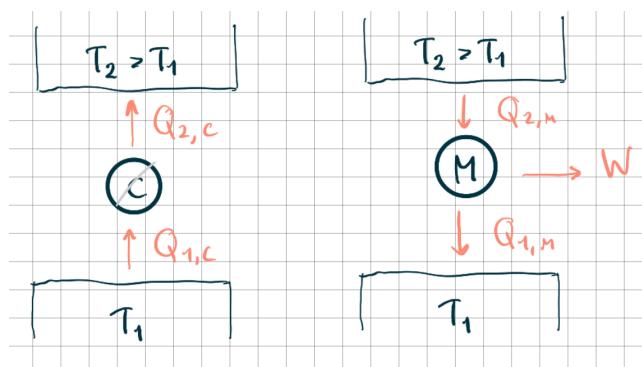
$$Q_{1,KP} + Q_{1,F} = -Q_{2,F} \quad \text{aggiustando i segni}$$

Possiamo vedere le due macchine come una singola macchina, che prende del calore dalla sorgente fredda e la sposta alla sorgente calda, il che viola Clausius. Questa dimostrazione ci dice che se fosse possibile creare una macchina che trasforma perfettamente il calore in lavoro, allora saremmo in grado di prendere del calore da una sorgente fredda e usarlo per aumentare la temperatura di una sorgente calda.



Kelvin-Planck (2)

Nota: il negato di K-P implica il negato di C. Dal punto di vista logico non è sufficiente per dire che sono equivalenti. Andiamo ora a dimostrare che il negato di C implica il negato di K-P, e che quindi i due enunciati indicano la stessa cosa.



Clausius (1)

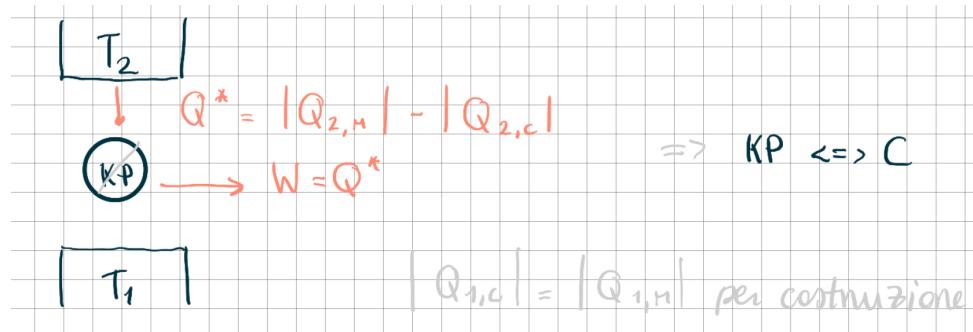
Facciamo l'inverso. Prendo una macchina \mathcal{O} in grado di prendere del calore $Q_{1,C}$ da una sorgente fredda e trasferirla ad una sorgente calda ($|Q_{1,C}| = |Q_{2,C}|$). La metto di fianco ad una classica macchina termica che prende il calore dalla sorgente calda, ne assorbe un po' per trasformarlo in calore.

Faccio in modo ora che:

$$|Q_{1,C}| = |Q_{1,M}|$$

Questo posso farlo, devo dimensionare il motore della macchina per far sì di avere più o meno calore. In questo modo ho ottenuto un'unica macchina, che lavora con le temperature T_2 e T_1 ,

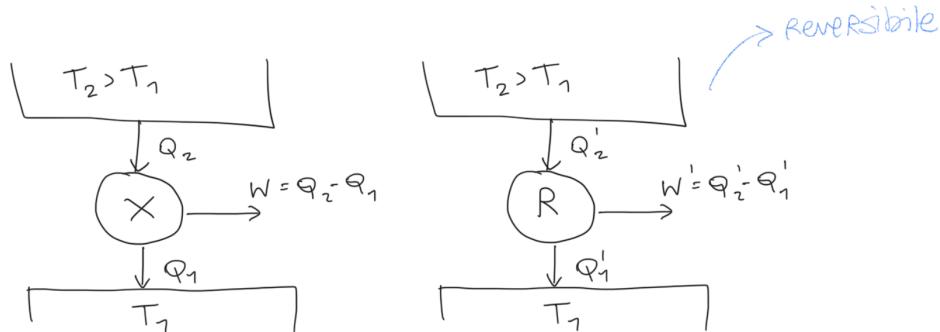
che prende il calore $Q^* = |Q_{2,M}| - |Q_{2,C}|$ e lo trasforma in lavoro $W = Q^*$. Sono riuscito a trovare una macchina che prende del calore e lo trasforma interamente in lavoro, negando K-P.



Clausius (2)

Queste due dimostrazioni mi permettono di dire che $K-P \iff C$.

Vediamo ora un teorema fondamentale della termodinamica, il **teorema di Carnot**. Non lo facciamo partire come teorema, ma come domanda. Disegniamo il solito sistema con due sorgenti $T_2 > T_1$, con una macchina X che prende Q_2 , cede Q_1 e compie un lavoro $W = Q_2 - Q_1$. Questa la confronto con una macchina R, **reversibile**, che lavora con due sorgenti alla stessa temperatura (per confrontare due macchine devo farle lavorare alle stesse temperature); R prende Q'_2 , cede Q'_1 e produce $W' = Q'_2 - Q'_1$.



Teorema di Carnot (1)

Se prendo il rendimento di una qualsiasi macchina termica come la prima e lo confronto con quello di R, di una macchina reversibile, cosa trovo?

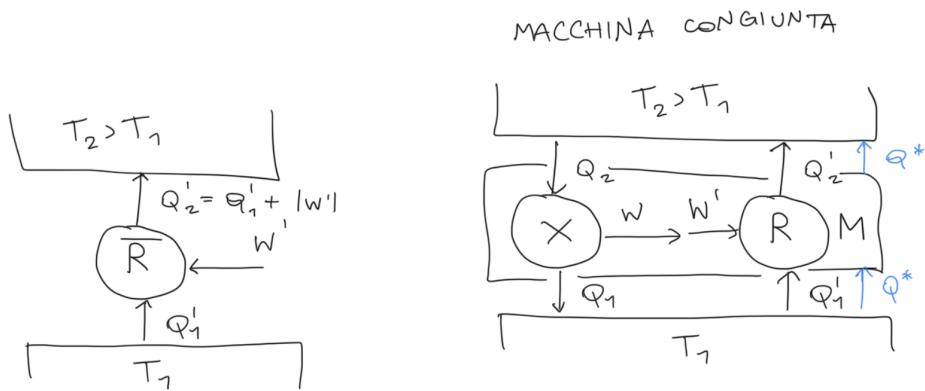
$$\eta_{X(T_1, T_2)} \gtrless \eta_{R(T_1, T_2)}$$

È maggiore, minore, uguale? Ricordiamo che $\eta_X = \frac{W}{Q_2}$ e che $\eta_R = \frac{W'}{Q'_2}$.

Per ipotesi diciamo che $\eta_X > \eta_R$ e chiediamoci se è possibile:

$$\begin{aligned} \eta_X &> \eta_R \\ \frac{W}{Q_2} &> \frac{W'}{Q'_2} \end{aligned}$$

Vediamo in (FIG) la macchina reversa a R, chiamiamola \bar{R} . Chiamiamo M la macchina che



Teorema di Carnot (2)

unisce X e R , come in (FIG). Nel caso di M (macchina congiunta $W = W'$) sto dicendo che:

$$\begin{aligned} Q'_2 > Q_2 &\Rightarrow Q'_2 - Q_2 > 0 \\ Q_2 - Q'_2 < 0 \\ Q^* < 0 \end{aligned}$$

Siamo dicendo che M funziona con un Q^* che va verso T_2 , e che quindi deve esserci un Q^* in ingresso ad M ; questa macchina prende del calore da una sorgente fredda e lo usa per scaldare una sorgente calda: Clausius negato! Significa che non è possibile che una macchina qualsiasi abbia un rendimento maggiore di una macchina reversibile (a parità di temperatura di esercizio). Ipotesi sbagliata, non è possibile.

Occhio che R contiene un'informazione sul tempo! Reversibile, significa che posso tornare indietro; i fenomeni reversibili sono quelli che rendono al massimo. Quando facciamo qualcosa di irreversibile anche la natura ci sta dicendo che stiamo facendo qualcosa di non efficiente al massimo.

Se metto insieme due macchine e una è più efficiente dell'altra, determino uno squilibrio, un flusso netto nella macchina. Se avessi due macchine uguali, quello che produce in più uno lo assorbe l'altro, si bilanciano. Con queste due macchine ho trovato che si crea uno squilibrio sbagliato. Abbiamo dimostrato che $\eta_X \leq \eta_R$.

Cosa succede se invece prendo una macchina X è reversibile? Prendiamo X reversibile (chiamiamola R') e R qualsiasi (chiamiamola X') (certo che è reversibile (lo so) ma è anche qualsiasi). Se ho dimostrato $\eta_X \leq \eta_R$, allora:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_X \leq \eta_R \\ \eta_{X'} \leq \eta_{R'} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \eta_X \leq \eta_R \\ \eta_R \leq \eta_X \end{array} \right\} \quad \eta_X = \eta_R$$

Ho confrontato ciò che ho trovato prima, con due nuove macchine. Trovo che **se due macchine sono reversibili allora hanno lo stesso rendimento**; questo è il teorema di Carnot. Prese due macchine termiche, X qualsiasi e R reversibile:

$$\begin{aligned} (A) \quad \eta_x(T_1, T_2) &\leq \eta_R(T_1, T_2) \\ (B) \quad "=" \text{ solo se } X &\text{ è reversibile!} \end{aligned}$$

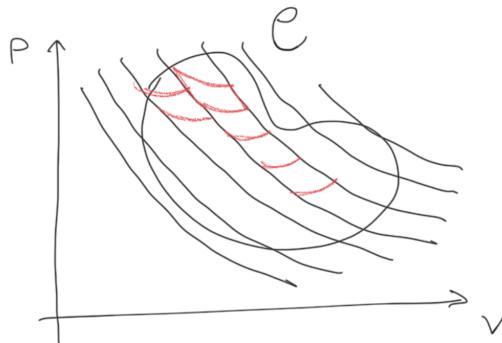
Vediamo alcuni corollari del teorema di Carnot. Il primo mi dice che il rendimento di una macchina reversibile qualsiasi è per forza uguale a quello della macchina di Carnot, e visto che quella dipende solamente dalle temperature, significa posso trovare il rendimento di una qualsiasi macchina reversibile che lavora tra T_1 e T_2 :

$$(1) \quad \eta_{R_1}(T_1, T_2) = \eta_{T_2}(T_1, T_2) = \dots = \eta_{\text{Carnot}}(T_1, T_2) \Rightarrow \eta_R(T_1, T_2) = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

Vediamo il secondo. Il rendimento a sinistra vale sempre, il rendimento a destra vale solo per le macchine reversibili. Vale (2):

$$\begin{aligned} \eta_X(T_1, T_2) &\leq \eta_R(T_1, T_2) \\ 1 - \frac{|Q_1|}{Q_2} &\leq 1 - \frac{T_1}{T_2} \\ 1 + \frac{Q_1}{Q_2} &\leq 1 - \frac{T_1}{T_2} \\ \boxed{\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0} \end{aligned}$$

Possiamo andare avanti, e vedere il tutto come una sequenza di tante trasformazioni. Il rapporto fra il calore scambiato e la temperatura al quale si scambia, sommata sommata sommata, risulta essere un numero negativo. L'uguale si ha quando anche la trasformazione X è reversibile.



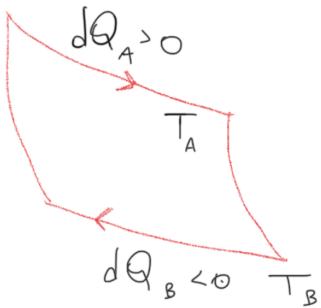
Tassellamento

Facciamo una trasformazione qualsiasi, come in (FIG). La pensiamo come una serie di tanti cicli di Carnot; laddove il ciclo approssima male, chissene importa, lo penso come qualcosa che tende all'infinito. Pensiamo di "tassellare" il nostro ciclo termodinamico con tanti cicli di Carnot. Se percorriamo una volta ciascun ciclo, le linee interne dei cicli vengono percorse due volte in sensi opposti, "annullandosi".

Per un piccolo componente del ciclo, uno scambio è "cedere calore"; per un altro componente lì a fianco quello stesso scambio è "assorbire" calore. Possiamo approssimare il nostro ciclo C come:

$$C = \lim_{n \rightarrow +\infty} \bigcup_{i=1}^n \text{Carnot}_i$$

Il lemma, corollario numero (3) del teorema di Carnot che abbiamo enunciato prima si va a



Parti del ciclo che si semplificano

tradurre in questo:

$$\sum_{i=1}^N \frac{dQ_{T_2,i}}{T_{2,i}} + \frac{dQ_{T_1,i}}{T_{1,i}} \leq 0 \quad N \xrightarrow{\rightarrow \infty} \oint_C \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Stiamo applicando il secondo (2) corollario su tutti i piccoli contributi del ciclo. Con $N \rightarrow \infty$, questo si traduce nell'integrale applicato sull'intero ciclo. Questo è il **teorema di Clausius**. Se tasselliamo il ciclo di Carnot secondo il teorema di Carnot, otteniamo il teorema di Clausius.

Definiamo l'integrale di Clausius come $\oint_C \frac{dQ}{T} = I_C$, e il teorema di Clausius ci dice che l'integrale di Clausius su tutto il ciclo è ≤ 0 : l'uguale si applica solo se il ciclo è reversibile.

Nota: con Carnot abbiamo lavorato con una grandezza estensiva come il calore e un'intensiva come la temperatura, qui le mettiamo entrambe assieme. Il valore dipende da quanto è grande la macchina

Inizio ripasso ——

Il teorema di Carnot ci dice che il rendimento di una macchina qualsiasi che lavora tra le temperature T_1 e T_2 è minore o uguale al rendimento di una macchina reversibile, dove il minore si applica se il ciclo della prima macchina è irreversibile, l'uguale se la prima macchina compie un ciclo reversibile: $\eta_X(T_1, T_2) \leq \eta_R(T_1, T_2)$. Per il caso reversibile, ricordiamo che $\eta_R(T_1, T_2) = 1 - \frac{T_1}{T_2}$; nel caso generale invece $\eta_X = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}$. Tramite un po' di algebra, otteniamo:

$$\eta_X(T_1, T_2) \leq \eta_R(T_1, T_2) \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0$$

Se tasselliamo un ciclo generico con tanti piccoli cicli di Carnot che operano a varie temperature, possiamo passare ad una generalizzazione della formula appena ottenuta:

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \dots + \frac{Q_N}{T_N} \leq 0$$

Portando questo procedimento al limite, assumendo quindi un numero molto alto di questi cicli di Carnot che approssimano il nostro ciclo generico, arriviamo all'integrale di Clausius, calcolato su tutto il ciclo.

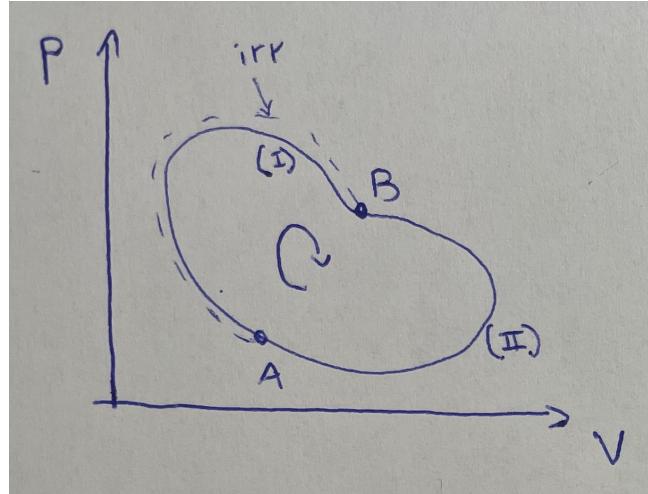
$$\sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad Q_i \xrightarrow{N \rightarrow \infty} dQ \quad \oint_C \frac{dQ}{T} \leq 0$$

Il teorema di Carnot è un teorema, dimostrabile, che si appoggia sul secondo principio della termodinamica.

Fine ripasso ——

2.12 Entropia

Consideriamo ora un ciclo generico come in (FIG):



Ciclo generico

Per l'integrale di Clausius sappiamo che $\oint \frac{dQ}{T} \leq 0$. Consideriamo due punti nel ciclo A e B . Vale necessariamente:

$$\int_{A,I}^B \frac{dQ}{T} + \int_{B,II}^A \frac{dQ}{T} \leq 0$$

(1) Nella prima ipotesi consideriamo un ciclo reversibile, vale:

$$\int_{A,(I)}^B \frac{dQ}{T} = \int_{A,(II)}^B \frac{dQ}{T}$$

Andare da A a B e tornare indietro mi riporta alle condizioni iniziali.

(2) Nel secondo caso consideriamo un ciclo irreversibile, in (FIG) tratteggiato. Ricordiamo che un ciclo è irreversibile anche se un suo piccolo pezzetto è irreversibile. Vale:

$$\int_{irr}^{A,(I)} \frac{dQ}{T} < \int_{rev}^{A,(II)} \frac{dQ}{T}$$

Nota: porto l'integrale a destra, viene un segno meno; non mi piace molto, posso girare l'integrale e di conseguenza togliere il meno? Se il ciclo è reversibile, allora lo faccio.

Notiamo una cosa:

$$\int_{rev}^{A,(I)} \frac{dQ}{T} = \int_{rev}^{A,(II)} \frac{dQ}{T} = \int_{rev}^{A,(III)} \frac{dQ}{T} \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \Delta S_{AB}$$

Questo integrale non dipende dal percorso. Il risultato dipende solamente dalla posizione iniziale e dalla finale. Questo risultato lo chiamo **entropia**, la quantità S tale per cui

$$S_B - S_A = \int_{rev}^B \frac{dQ}{T}$$

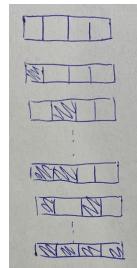
Queste trasformazioni hanno in comune una cosa: sono reversibili. L'entropia è definita come l'integrale da A a B , lungo il percorso più comodo a noi, purché sia **reversibile**. L'entropia è

una funzione di stato, come l'energia. Lo è perché, molto banalmente, se faccio l'integrale da un punto all'altro in equilibrio termodinamico, la variazione sarà sempre la stessa, indipendentemente da come ci sono arrivato; purché ci passi in modo reversibile.

Parentesi sull'entropia ——

Abbiamo visto che l'energia interna è una funzione di stato, in quanto nel passaggio da A a B rilevo che dipende solamente dalla temperatura. La S , che è una misura di stato, da cosa dipende in termine dei costituenti dei gas? Riusciamo a connettere una grandezza macroscopica alla somma di una caratteristica dei costituenti? Abbiamo visto che l'energia interna dei gas dipende dall'energia di tutti i piccoli costituenti.

L'entropia misura la probabilità di realizzare lo stato termodinamico che abbiamo in mente, a partire dai costituenti che abbiamo. Consideriamo un sistema quattro elementi, che possono essere accesi o spenti, bianchi o neri. Ciò che caratterizza il sistema dal punto di vista macroscopico è il numero di bit accesi, ed è la nostra variabile termodinamica; può assumere i valori $[0, 4]$. Immaginiamola come la temperatura, da 0 (molto fredda) a 4 (molto calda). Quanti modi ci sono di realizzare le varie temperature?



STATO	MODI
0	(1)
1	(4)
2	(6)
3	(4)
4	(1)

Ci sono più modi di realizzare la temperatura 2 di quanti ce ne sono di realizzare la temperatura 1, 4, 0. L'entropia misura quanto è possibile realizzare uno stato macrodinamico; macro, ciò che ci interessa è solamente lo stato finale, variabile termodinamica relativa al comportamento di moli di oggetti. Fissato uno stato termodinamico, quanti modi ci sono per le componenti di arrangiarsi per far sì che quello stato si raggiunga? Questo misura l'entropia. Spesso si parla di disordine.

Consideriamo di partire dallo stato 4, A , e di arrivare a temperatura 2, B . Poiché ci sono più modi per realizzare la temperatura 2 rispetto alle altre temperature considerate, una maggiore differenza di entropia suggerisce una maggiore probabilità di successo nel raggiungere lo stato desiderato. Questo esempio illustra come l'entropia sia correlata alla probabilità di transizione tra stati termodinamici e la capacità di un sistema di organizzarsi in conformazione specifiche per raggiungere uno stato finale desiderato.

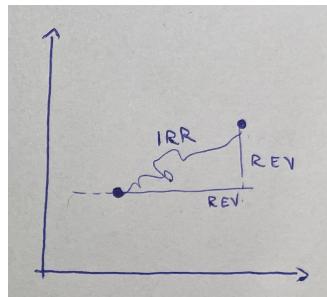
Nota: la natura tende a configurazioni di **minima energia** e di **massima probabilità** (entropia); alla natura non piace essere vincolata.

Siamo partiti dalla termodinamica, nell'esempio consideriamo solo la temperatura; è un concetto generale che può venir applicato a molti altri contesti.

Chiudiamo la parentesi ——

Abbiamo definito la variazione di entropia. Ma esiste l'entropia "assoluta" di un oggetto? Stesso ragionamento del trovare un'energia potenziale "assoluta" del sistema. L'energia interna

di un sistema è zero quando tutte le particelle sono ferme; la variazione di entropia è zero quando un sistema può essere in un solo stato termodinamico.



Scelta della trasformazione

Se mi trovo a fare l'analisi di un sistema reale, caratterizzato da una trasformazione irreversibile, posso usare la trasformazione reversibile a me più comoda per trovare la variazione di entropia. Vedi (FIG). Vale:

$$A \xrightarrow{\text{any}} B \quad \Delta S_{AB} = \int_{(rev)}^B \frac{dQ}{T}$$

Prendiamo ora il caso (2), dove abbiamo definito una certa disuguaglianza. Con la definizione di entropia appena trovata, troviamo:

$$\int_{A,irr}^B \frac{dQ}{T} < \int_{A,rev}^B \frac{dQ}{T} \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad S_{A \rightarrow B}$$

Troviamo:

$$\Delta S_{A \rightarrow B} > \int_{irr}^B \frac{dQ}{T}$$

Quindi abbiamo visto che in un caso reale, la stima dell'entropia che troviamo è sempre **minore** della vera variazione di entropia.

Prendiamo in considerazione le trasformazioni tipiche dei gas. Consideriamo una trasformazione **isoterma**, e troviamo la variazione di entropia:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{T} &= \frac{dW}{T} = \frac{p dV}{T} = \frac{n R \chi dV}{\chi V} \\ dS &= n R \frac{dV}{V} \quad \Rightarrow \quad \Delta S = n R \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right] \end{aligned}$$

Se manteniamo la temperatura costante, ciò che determina la variazione di entropia è la variazione di volume.

Vediamo ora le **isocore**:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{T} &= \frac{dU}{T} = n c_V \frac{dT}{T} \\ dS &= n c_V \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \Delta S = n c_V \ln \left[\frac{T_f}{T_i} \right] \end{aligned}$$

Se manteniamo il volume costante, ciò che determina la variazione di entropia è la temperatura.

Nelle **isobare**, dove la pressione rimane costante per tutta la durata della trasformazione:

$$\frac{dQ}{T} = \frac{n c_p dT}{T}$$

$$dS = n c_p \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad \Delta S = n c_p \ln \left[\frac{T_f}{T_i} \right] = n c_p \ln \left[\frac{\frac{p V_f}{n R}}{\frac{p V_i}{n R}} \right] = n c_p \ln \left[\frac{V_f}{V_i} \right]$$

Nelle **adiabatiche**:

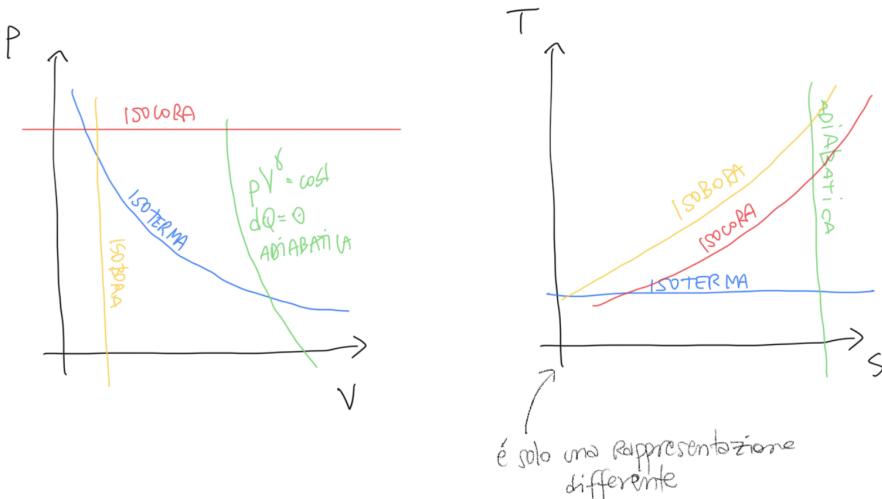
$$\frac{dQ}{T} = 0 \quad dS = 0 \quad \Delta S = 0$$

Quanto è l'entropia in un ciclo irreversibile? Sarebbe 0, in quanto l'entropia è una funzione di stato e quindi non importa il tipo di ciclo.

Per i **cambi di fase**:

$$\frac{dQ}{T} = \frac{\lambda dm}{T} \quad \Delta S = \frac{\lambda m}{T}$$

Noi siamo abituati al piano pV ; possiamo anche usare il piano $T - S$, temperatura ed entropia. Vediamo in (FIG) un confronto.



Piano T-S

Vediamo il **teorema dell'entropia**. Sul piano pV consideriamo una trasformazione da A a B , portata a termine in due modi. Il primo I irreversibile, il secondo modo II reversibile. Vale:

$$S_B - S_A = \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{rev} > \int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{irr}$$

Non pensiamo alle sole piccole trasformazioni che abbiamo visto. Non consideriamo solo il gas, ma il gas, con la stanza, con l'universo, la trasformazione che vediamo è un insieme di molte piccole trasformazioni.

Ora invece concentriamoci su un sistema isolato, dove non sono scambiati calore, energia, materia con l'esterno. Al suo interno questo sistema *vive* delle trasformazioni. Per questo sistema isolato, $dQ = 0$. Questo vuol dire che:

$$\int_A^B \left(\frac{dQ}{T} \right)_{any}$$

Significa che qualsiasi trasformazione io faccia, questo integrale fa zero. Reversibili o non reversibili. Il calore che una parte del sistema perde la riceve un'altra.

Se facciamo questa trasformazione abbiamo due casi:

1. il sistema isolato subisce una trasformazione reversibile: $0 = \Delta S_{AB}$
2. il sistema isolato subisce una trasformazione irreversibile: $0 < \Delta S_{A'B'}$

Il teorema dell'entropia ci dice che per un sistema isolato, lasciato evolvere, l'entropia non può che aumentare:

$$\Delta S \geq 0$$

L'universo è un sistema isolato, man mano che il tempo va avanti aumenta la sua entropia. Se stessimo guardando il film dell'universo, e vedessimo che l'entropia va calando, diremmo che è un falso!

Esistono ottime approssimazioni di sistemi isolati. Possiamo immaginare esperimenti dove tutto è sotto controllo; anche lì diamo un modo di dare un senso al tempo, potremmo registrare l'esperimento e capire la successione corretta degli eventi, il giusto verso del tempo.

Nota: a livello macroscopico non misuriamo mai l'entropia da sola, ma solo una variazione.

L'entropia può continuare a crescere all'infinito? Se la fisica fosse solo quella che studiamo qui, sembra di sì; fatto sta che la fisica non si limita a quello che vediamo qui.

A un certo punto abbiamo trovato che l'entropia nei gas è dipendente da nR (altre quantità sono adimensionali, o circa). Abbiamo espresso $nR = NK_B$; N dipende dall'esperimento che abbiamo in quel momento; ciò significa che l'entropia si misura con la costante di Boltzmann, una costante di natura importantissima.

Nota: se avessimo più tempo, potremmo dire che $S = K_B \ln [N_{\text{microstati compatibili con macrostato}}]$. Il calcolo di quanti macrostati si possono avere a partire dai microstati di tutti le componenti dell'universo. Questo N non si può calcolare.

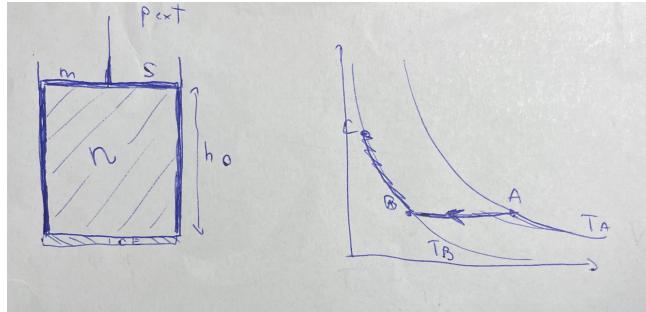
Per calcolare l'entropia in un certo punto del piano pV dobbiamo usare il metodo visto (logaritmo degli stati...); misuriamo, quindi conosciamo sperimentalmente, le variazioni di entropia.

Non è che l'entropia ci dà un senso del tempo; possiamo dimostrare che in un sistema isolato le trasformazioni certamente non contribuiscono a diminuire l'entropia. Se abbiamo un'entropia iniziale, rappresentare la sua evoluzione in funzione del tempo ci mostrerà una curva al minimo piatta, generalmente crescente; se come sistema isolato consideriamo l'universo, possiamo vedere come nell'universo l'entropia tende ad aumentare e come ciò ci dà un senso di tempo: se l'entropia diminuisse, sapremmo di star "tornando" indietro.

Le trasformazioni che abbiamo visto e le formule relative riguardano sistemi isolati di gas. Se è vero che non ci sono scambi di calore con l'esterno, ci possono tranquillamente essere scambi di calore all'interno del sistema.

Esercizi

Consideriamo $n = 5 \text{ mol}$ di gas all'intero di un sistema costituito da un recipiente e da un pistone, come in (FIG). La superficie del pistone è $S = 500 \text{ cm}^2 = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^2$. Abbiamo poi la massa del nostro pistone, $m = 500 \text{ Kg}$, inizialmente sollevato ad $h_0 = 1,3 \text{ m}$. La pressione esterna al pistone è pari a $p_{ext} = p_{atm} = 1 \text{ atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$. A contatto col recipiente vi è una sottile lastra di ghiaccio di massa $m_{ICE} = 106,5 \text{ g}$, a temperatura iniziale $T_0 = -18^\circ\text{C} = 255,15 \text{ K}$.



Esercizio pistone

Il sistema raggiunge un ulteriore equilibrio termico a $T_2 = 0^\circ\text{C} = 273,16 \text{ K}$, il ghiaccio è ancora tutto solido. Conosciamo il calore specifico del ghiaccio pari a $c_{ICE} = 2052 \frac{\text{J}}{\text{KgK}}$.

Vediamo intanto di trovare γ , il c_V e il c_p .

Cosa possiamo dire? Sicuramente che il pistone si abbassa. La pressione iniziale e finale coincidono, in quanto il pistone non cambia di massa, e sono date dalla somma della pressione del pistone e dell'atmosfera. Ciò però non ci garantisce che la trasformazione sia isobara, in quanto non è detto che siamo arrivati alla situazione finale mantenendo una pressione costante.

Proviamo a rappresentare la situazione nel piano pV ; usiamo A e B per riferirci agli stati finali e iniziali del gas, e assumiamo una trasformazione isobara; non è nei dati, è una buona assunzione. Possiamo dire che la pressione iniziale $p_A = p_{atm} + \frac{mg}{S}$. La T_A è la temperatura iniziale del gas; ora come ora non la conosciamo. Sappiamo che la temperatura del gas alla fine sarà la temperatura del gas, in quanto assumiamo l'equilibrio; vale perciò $T_B = T_2$.

Nota: non serve nemmeno dirlo che le pareti del pistone e del recipiente sono adiabatiche

Il calore del ghiaccio $Q_{ICE} = m_{ICE} c_{ICE} (T_2 - T_0)$; questo è un valore positivo, parliamo di calore assorbito, infatti il ghiaccio si scalda. Essendo un sistema isolato significa che necessariamente il gas si raffredda.

Siccome si tratta di una trasformazione dove la quantità di gas rimane costante, vale $Q_{gas} = n c_p (T_2 - T_A)$. Confrontiamo questo valore col calore del ghiaccio; vale:

$$n c_p (T_2 - T_A) = -Q_{ICE}$$

$$\begin{aligned} c_p &= -\frac{Q_{ICE}}{n(T_2 - T_A)} = \\ &= -\frac{m_{ICE} c_{ICE} (T_2 - T_0)}{n(T_2 - \frac{p_A V_A}{n R})} \\ &= -\frac{m_{ICE} c_{ICE} (T_2 - T_0)}{n R T_2 - p_A V_A} R \\ \frac{c_p}{R} &= \frac{m_{ICE} c_{ICE} (T_2 - T_0)}{n R T_2 - (p_{ext} + \frac{mg}{S}) (S h_0)} \end{aligned}$$

Non ci conviene calcolare c_p in quel modo; piuttosto calcoliamoci c_p fratto R ; ricordiamo che le unità di misura coincidono bene. Vale:

$$\frac{c_p}{R} = \frac{m_{ICE} c_{ICE} (T_2 - T_0)}{n R T_2 - (p_{ext} + \frac{mg}{S}) (S h_0)} = \frac{-3,9 \text{ kJ}}{-1,6 \text{ kJ}} = 2,49 = \frac{5}{2}$$

Possiamo quindi assumere parliamo di un gas monoatomico, dato che c_p è pari a $\frac{5}{2} R$. Da qui sappiamo che $c_V = \frac{3}{2} R$ e $\gamma = \frac{5}{3}$.

Cambiamo situazione: aumento la pressione, arrivando alla pressione $p_C = p_{atm} + \frac{2mg}{S} \frac{J}{S}$. Vogliamo trovare la quantità m_{H_2O} di gas assorbita.

Vale $\Delta U = 0$, e $Q_{gas} - W_{gas} = 0$ e $Q_{gas} = \underbrace{W_{gas} - Q_{ICE}}$. Siccome rimane solido, so che tutto il calore trasferito dal gas viene usato per scogliere.

E ora ci chiediamo: il gas compie lavoro? $W_{gas} = n R T_2 \ln \left(\frac{V_C}{V_B} \right)$.

Ci serve il lavoro che il gas trasferisce, che in questo caso lo troviamo pari alla pressione esterna. Vale: $W_{gas}^{(BC)} = p_c (V_C - V_B)$. Nel primo caso ottengo $-4,6 \text{ kJ}$, nel secondo $-5,7 \text{ KJ}$. Vediamo due lavori diversi. È una trasformazione irreversibile; dell'energia viene sprecata, trasferita all'esterno. C'è un surplus di energia richiesto.

Nota: $p_c (V_C - V_B) = \frac{F_C}{\cancel{\$}} (\cancel{\$} h_C - \cancel{\$} h_B) = F_C (h_C - h_B)$; una forza viene applicata lungo uno spostamento, è un lavoro. Non importa che ci sia del gas o degli gnometti; qualcosa si oppone alla mia forza.

Vale: $p_c (V_C - V_B) = -m_{H_2O} \lambda \rightarrow$ posso ricavare m_{H_2O}

Se vogliamo una trasformazione dove la pressione è quasi statica, non possiamo mettere direttamente un peso come il pistone. Dobbiamo mettere granello per granello di sabbia, accompagnando il sistema lungo l'isoterma, compiendo una trasformazione reversibile (questo perché se inizio a togliere granello per granello compiere all'indietro quell'isoterma).

2.13 Cuoricini

Vediamo qualche equazione e il suo grado di apprezzamento degli studenti, e l'importanza data dal prof (♡):

- $pV = nRT$ riscontra una popolarità dell'85 %, due cuoricini!
- $\Delta U = Q - W$ un 60%, tre cuoricini, e il prof si trattiene; è molto importante
- $\vec{F} = m\vec{a}$ un buon 85%, tre cuoricini, una base
- $\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{d^2} \hat{r}$ un 20%, ha un cuoricino periodico, è fondamentale saperla
- $U = n c_V T$ riscontra un 40% di popolarità, un cuoricino solo però
- $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$ riceve un 55%, tre cuoricini, molto importante
- $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega^2\vartheta = 0$ conta un 10%, e varia da mezzo cuore a tre cuori; dipende da come gli gira
- $U = \frac{l}{2} K_B T$ riceve un 55%, ma due cuori + un cuore nero, simbolo del fatto che al prof sia affezionato
- $\Delta E = W_{N.C}$ riceve un buon 90%, vale addirittura quattro cuori
- $\eta_*(T_1, T_2) \leq \eta_R(T_1, T_2)$ conta un 80%, due cuori, ma rimane il punto di partenza per molti altri argomenti
- il II principio della termodinamica ha un 95%, vale MOLTI cuori
- $S = K_B \ln(\eta_{comp})$ per il 30L con l'esempio dei bit
- il principio d'inerzia vale molto, quattro cuori, di solito partiamo per discutere i sistemi non interzionali, forze apparenti (NON CITARE CORIOLIS SE CI TIENI ALLA VITA)
- $W_{i \rightarrow f}^{(ext)} = E_{k,f} - E_{k,i} \rightarrow -\Delta U = \Delta E_k$, tre cuoricini, vale sempre; quella qui sotto vale solo nei sistemi conservativi
- $W_{A \rightarrow B} \stackrel{\text{def}}{=} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = -(U_B - U_A)$ (ricordando che il - si mette per motivi che hanno a che vedere la formulazione dell'energia meccanica)
- $\vec{F} = -\frac{dU}{d\vec{x}} = -\nabla U$

Sicuramente sono da tenere a mente le definizioni importanti che abbiamo visto:

- $E_k = \frac{1}{2} m \vec{v}^2$ ci definisce l'energia cinetica, tre asterischi ***
- il lavoro lo definiamo in due modi, importante, sono 4 asterischi ****:

$$\left. \begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{s} \\ W_{A \rightarrow B} &= \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \right\}$$

- $\vec{p} = m\vec{v}$ con tre asterischi ***
- $\Delta S_{A \rightarrow B} = \int_{rev}^B \frac{dQ}{T}$ merita quattro ****, molto importante
- teniamo il ciclo di Carnot
- $W = \int p dV$, una *, lo diamo per scontato

- $\vec{X}_{CM} = \frac{\sum_i m_i \vec{X}_i}{\sum_i m_i}$

- $E \stackrel{\text{def}}{=} E_k + E_p$

Il numero di asterischi è inversamente proporzionale al tempo che abbiamo per rispondere all'orale!

E non posso mancare le costanti! Vediamo:

- $K_B = 1,38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$, dalla quale deriviamo R tramite al numero di Avogadro $N_A = 6,023 \times 10^{23}$
- $G = 6,67 \times 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$
- $c = \overbrace{2,998}^3 \times 10^8 \frac{m}{s}$
- $\sigma = \dots$ siccome non se la ricorda lui, non serve ce la ricordiamo noi
- $\frac{\hbar}{\lambda} \simeq K_B T$, dove $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,055 \times 10^{-33} J \cdot s$