Soluzioni tutorato 17-04

April 2023

1 Esercizio 1

Poichè l'urto è completamente anelastico, possiamo imporre esclusivamente la conservazione della quantità di moto, quindi

$$\begin{cases} m_1 v sen(\alpha) - m_2 v sen(\alpha) = (m_1 + m_2) v' sen(\theta) \\ m_1 v cos(\alpha) + m_2 v cos(\alpha) = (m_1 + m_2) v' cos(\theta) \end{cases} \tag{1}$$

Dalla prima equazione troviamo

$$v = v' \frac{sen(\theta)}{cos(\alpha)} \tag{2}$$

che inserita nella seconda equazione da

$$tan(\alpha) = tan(\theta) \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \tag{3}$$

ed inserendo i numeri troviamo $\alpha = 2.5°$ e $v = 11.94 m/s$

2 Esercizio 2

Imponiamo le equazioni per la conservazione dell'energia e della quantità di moto

$$\begin{cases} \frac{75}{100} \cdot \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m (v_1^2 + v_2^2) \\ m v_i = m (v_1 cos(\theta) + v_2 cos(\alpha)) \\ v_1 sen(\theta) = v_2 sen(\alpha) \end{cases} \tag{4}$$

Dall'ultima equazione ricaviamo

$$v_1 = v_2 \frac{sen(\alpha)}{sen(\theta)} \tag{5}$$

che inserita nella seconda da

$$v_i = v_2 \left(cos(\theta) + sen(\alpha) \frac{cos(\theta)}{sen(\theta)} \right) \tag{6}$$

Inserendoli nella prima equazione troviamo

$$\frac{75}{100} \left(cos^(\alpha) + \frac{sen^2(\alpha)}{tan^2(\theta)} + \frac{2cos(\alpha)sen(\alpha)}{tan(\theta)} = \frac{sen^2(\alpha)}{sen^2(\theta)} + 1(7) \right.$$

ricordando che $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$ e dividendo tutto per $cos^2(\theta)$ ricaviamo

$$tan^2(\alpha) \left(\frac{75}{100tan^2(\theta)} - \frac{1}{sen^2(\theta)} - 1 \right) + tan(\alpha) \frac{150}{100tan(\theta)} - \frac{25}{100} = 0 \tag{8}$$

che da (scegliendo la soluzione con il $+$) $\alpha = 39.9°$, che implica $v_1 = 6.15m/s$ e $v_2 = 4.79m/s$

3 Esercizio 3

Questo esercizio si svolgeva imponendo la conservazione dell'energia meccanica. Lo riprenderemo in futuro, dato che l'argomento del potenziale gravitazionale generalizzato non è ancora stato trattato a lezione.

4 Esercizio 4

Consideriamo la conservazione dell'energia cinetica:
$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_x^2 + \frac{1}{2}m_2v_2fin^2$
$\sqrt{\frac{m_1v_1^2+m_2v_2^2-m_2v_2fin^2}{m_1}} = v_x$
$v_x = 4.43m/S$

Poi consideriamo la conservazione della quantità di moto: $m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_x + m_2v_2fin$
$v_x = \frac{m_1v_1+m_2v_2-m_2v_2fin}{m_1}$
$v_x = 3.65m/s$

Le velocità non coincidono pertanto non è un urto completamente elastico e la velocità corretta è la seconda

5 Esercizio 5

Per quanto riguardo l'urto anelastico consideriamo la conservazione della quantità di moto:

$m_1 v_1 = m_2 v_x$
$v_x = \frac{m_1 v_1}{m_2}$
$v_x = 10 m/s$

Ovviamente il sistema perde anche energia e per dimostrarlo è sufficiente calcolare le energie cinetiche

$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = 1.6 \cdot 10^5 J$
$K_2 = \frac{1}{2} m_2 v_x^2 = 8 \cdot 10^5 J$

6 Esercizio 6

Per calcolare il centro di massa è sufficiente eseguire una media pesata

$X_m = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + x_3 m_3}{m_1 + m_2 + m_3}$
$X_m = 0.118 m$

7 Esercizio 7

Imponendo la conservazione della quantità di moto prima e dopo l'urto otteniamo:

$$mv = mv' + Mv' \iff v' = \frac{mv}{m+M}$$

Imponendo ora la conservazione dell'energia meccanica otteniamo l'altezza massima, rispetto al punto di minimo, raggiunta dal pendolo:

$$h = \frac{v'^2}{2g}$$

e poichè quando viene raggiunto l'angolo massimo θ la lunghezza della proiezione sull'asse verticale dell'estremità del pendolo è $l - h$, otteniamo:

$$\theta = acos(1 - \frac{h}{l}) = 0.38\ rad$$

8 Esercizio 8

Immaginiamo che l'asta sia composta da un numero N di punti materiali allineati. Imponiamo quindi la conservazione della quantità di moto per il sistema composto dal proiettile e dagli N punti, imponendo $N \to \inf$. Se la massa, tendente a zero, di ogni punto materiale è pari a m', otteniamo:

$$mv = mv' + \lim_{N \to \inf} \sum_{i=1}^{N} m'v_i$$

dove v' è la velocità del proiettile, e quindi dell'estremità dell'asta, dopo l'urto. Riconoscendo in $\lim_{N \to \inf} \sum_{i=1}^{N} m'v_i$ la definizione di quantità di moto di un sistema di punti, in questo caso l'asta, possiamo scrivere:

$$mv = mv' + Mv_{CM}$$

Determiniamo ora la relazione tra la velocità dell'estremità dell'asta e il suo centro di massa, a metà dell'asta. Poichè a parità di angolo descritto, l'arco di circonferenza tracciato dal centro di massa è pari alla metà dell'arco tracciato dall'estremità ($s_1 = \alpha\frac{l}{2}$ ed $s_2 = \alpha l$), ne deduciamo che deve valere:

$$v' = 2v_{CM}$$

E quindi:

$$v_{CM} = \frac{mv}{2m + M}$$

ora imponendo la conservazione dell'energia meccanica troviamo:

$$h = \frac{v_{CM}^2}{2g}$$

e poichè la quantità $\frac{l}{2} - h$ è la proiezione sull'asse verticale della posizione del centro di massa dell'asta, quando questa si trova all'angolo massimo θ, otteniamo:

$$\theta = acos(1 - \frac{2h}{l}) = 0.54\ rad$$