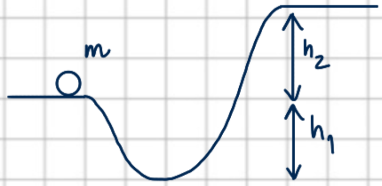
ESERCIZIO 1



$m = 3\,kg$
$h_1 = 20\,m$
$h_2 = 6\,m$

Vogliamo calcolare la velocità iniziale della palla affinchè riesca a raggiungere l'altro lato della conca.

Questo problema si risolve facilmente sfruttando il teorema della conservazione dell'energia meccanica totale, visto che non ci sono forze non conservative in gioco

quindi, ponendo lo zero dell'energia potenziale gravitazionale ad altezza h_1 (per semplicità)
e indicando con i = palla sul lato sx della conca
f = palla sul lato dx della conca

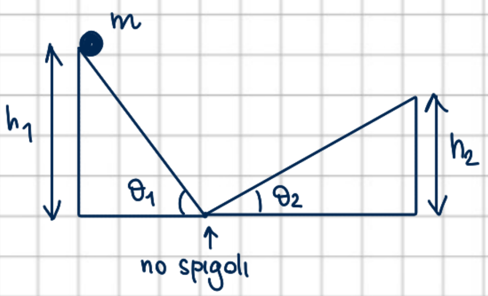
$E_i = E_f$ dove $E_i = U_i + K_i = 0 + \frac{1}{2} m v_i^2$

$E_f = U_f + K_f = mgh_2 + \cancel{\frac{1}{2} m v_f^2}$

NB poniamo $v_f = 0$ perchè ci va bene che la palla si fermi esattamente in cima alla conca.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_i^2 = \cancel{m} g h_2 \Rightarrow v_i = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81\,m/s^2 \cdot 6\,m} = 10{,}8\,m/s$$

ESERCIZIO 2



$\theta_1 = 60°$, $\theta_2 = 30°$
$h = 5\,m$
$m = 1{,}2\,kg$

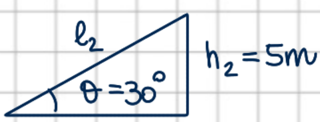
- Vogliamo calcolare la lunghezza della rampa di destra affinchè il corpo raggiunga la cima senza cadere

Utilizziamo il teorema di conservazione dell'energia meccanica (non ci sono forze non conservative)
i = palla in cima alla rampa di sx
f = palla in cima alla rampa di dx

$\Rightarrow E_i = E_f$ dove $E_i = U_i + K_i = mgh_1 + \cancel{\frac{1}{2} m v_i^2}$ $v_i = 0$ perchè supponiamo che il corpo parta da fermo

$E_f = U_f + K_f = mgh_2 + \cancel{\frac{1}{2} m v_f^2}$ $v_f = 0$ perchè vogliamo che il corpo arrivi in cima e si fermi senza cadere

$\Rightarrow mgh_1 = mgh_2 \Rightarrow h_1 = h_2$ ovvero la seconda rampa deve essere alta quanto la prima



conoscendo h_2 e θ ci calcoliamo ℓ_2

$$h_2 = \ell_2 \operatorname{sen}\theta \longrightarrow \ell_2 = \frac{h_2}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{5\,m}{\operatorname{sen}(30°)} = 10\,m$$

- Vogliamo calcolare l'energia cinetica del corpo quando passa nel raccordo

Utilizziamo il teorema di conservazione dell'energia meccanica (non ci sono forze non conservative)
i = palla in cima alla rampa di sx
f = palla nel punto di raccordo

$E_i = E_f$ dove $E_i = U_i + K_i = mgh_1 + \cancel{\frac{1}{2}mv_i^2}$ $v_i = 0$ perchè supponiamo che il corpo parta da fermo

$E_f = U_f + K_f = K_f$

$\Rightarrow mgh_1 = K_f \Rightarrow K_f = 1{,}2\,kg \cdot 9{,}81\,m/s^2 \cdot 5m \simeq 58{,}9\,J$

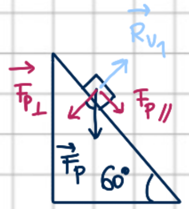
- Vogliamo calcolare come cambiano le risposte alle domande precedenti nel caso di un coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0{,}2$

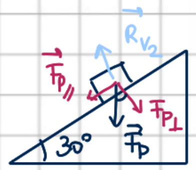
In questo caso non possiamo usare il teorema di conservazione dell'energia meccanica, ma dobbiamo tenere conto del lavoro compiuto dalle forze non conservative (in questo caso dalla forza di attrito dinamico)

$\Delta E = E_f - E_i = W_{attrito}$

quindi, per la prima domanda $E_i = mgh_1$ (come stabilito sopra)
$E_f = mgh_2$

$\Rightarrow mgh_2 - mgh_1 = W_{attrito\,1} + W_{attrito\,2}$ dove $W_{attrito\,1} = F_{att_1} \cdot \ell_1$
$W_{attrito\,2} = F_{att_2}\,\ell_2$





$F_{att_1} = \mu R_{v_1} = \mu\, m\, g \cos\theta_1$
$F_{att_2} = \mu R_{v_2} = \mu\, m\, g \cos\theta_2$

$h_1 = \ell_1 \operatorname{sen}\theta_1 \rightarrow \ell_1 = \dfrac{h_1}{\operatorname{sen}\theta_1}$

$h_2 = \ell_2 \operatorname{sen}\theta_2 \rightarrow \ell_2 = \dfrac{h_2}{\operatorname{sen}\theta_2}$

$$\Rightarrow \cancel{m}\cancel{g}h_2 - \cancel{m}\cancel{g}h_1 = -\mu \cancel{m}\cancel{g} \cos\theta_1 \ell_1 - \mu \cancel{m}\cancel{g} \cos\theta_2 \ell_2$$

NB: forza e spostamento hanno direzioni opposte, quindi il lavoro ha segno negativo

$$h_2 - h_1 = -\mu \cos\theta_1 \frac{h_1}{\operatorname{sen}\theta_1} - \mu \cos\theta_2 \frac{h_2}{\operatorname{sen}\theta_2}$$

$$h_2\left(1 + \mu \frac{1}{\tan\theta_2}\right) = h_1\left(1 - \mu \frac{1}{\tan\theta_1}\right) \rightarrow h_2 = h_1 \frac{1 - \mu \frac{1}{\tan\theta_1}}{1 + \mu \frac{1}{\tan\theta_2}}$$

$$\Rightarrow h_2 = 5m \frac{1 - 0{,}2 \frac{1}{\tan 60°}}{1 + 0{,}2 \frac{1}{\tan 30°}} \simeq 3{,}3\,m$$

allora $\ell_2 = h_2 \cdot \frac{1}{sen\theta_2} \simeq 3{,}3\,m \cdot \frac{1}{sen 30°} \simeq 6{,}6\,m$

per la seconda domanda $E_i = mgh_1$ (come stabilito sopra)
$E_f = K_f$

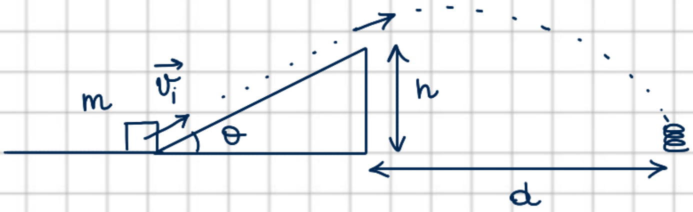
$\Rightarrow K_f - mgh_1 = W_{att_1} = F_{att_1} \cdot s_1 = -\mu mg \cos\theta_1 \cdot \frac{h_1}{sen\theta_1}$

NB: forza e spostamento hanno direzioni opposte, quindi il lavoro è negativo

$K_f = mgh_1 - \mu mg \frac{\cos\theta_1}{sen\theta_1} h_1 = mgh_1 \left(1 - \frac{\mu}{tg\,\theta_1}\right)$

$\simeq 1{,}2\,kg \cdot 9{,}81\,m/s^2 \cdot 5\,m \left(1 - \frac{0{,}2}{tg(60°)}\right) \simeq 52{,}0\,J$

ESERCIZIO 3



$m = 5kg$ $\qquad K = 50\ KN/m$
$\theta = 30°$
$v_i = 20 m/s$
$h = 3m$

Vogliamo calcolare la distanza d a cui porre una molla per attutire la caduta del carretto.

Calcoliamo la velocità raggiunta dal carretto alla fine della rampa con la conservazione dell'energia

$E_i = E_f$ $\qquad$ i = inizio rampa
f = fine rampa

$E_i = U_i + K_i = 0 + \frac{1}{2} m v_i^2$ $\qquad E_f = U_f + K_f = mgh + \frac{1}{2} m v_f^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m} v_i^2 = \cancel{m}gh + \frac{1}{2}\cancel{m}v_f^2 \rightarrow v_f = \sqrt{2\left(\frac{1}{2}v_i^2 - gh\right)} = \sqrt{v_i^2 - 2gh}$$

$$= \sqrt{(20 m/s)^2 - 2 \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 3m} \simeq 18{,}5\ m/s$$

Scomponiamo il moto parabolico del carretto nelle componenti x e y

$x: \quad x(t) = v_{0x} t$ $\qquad y: \begin{cases} y(t) = y_0 + v_{iy} t + \frac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = v_{0y} + g t \end{cases}$

dove $v_0 = v_f$ del punto precedente $\qquad v_{0x} = v_f \cos\theta$
$y_0 = h$ $\qquad v_{0y} = v_f \operatorname{sen}\theta$

Calcoliamo d:

$$y(t_c) = 0 = h + v_f \operatorname{sen}\theta\, t_c + \frac{1}{2} g t_c^2 \rightarrow \frac{1}{2} g t_c^2 + v_f \operatorname{sen}\theta\, t_c + h = 0$$

$$t_c = \frac{-v_f \operatorname{sen}\theta \pm \sqrt{(v_f \operatorname{sen}\theta)^2 - 4\left(\frac{1}{2}g\right)h}}{g}$$

$$= \frac{-18{,}5\ m/s \cdot 0{,}5 \pm \sqrt{(18{,}5 m/s \cdot 0{,}5)^2 - (-2 \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 3m)}}{-9{,}81\ m/s^2} \begin{cases} -0{,}28\ s \\ 2{,}17\ s \end{cases}$$

$t_c \simeq 2{,}17 s$

$$x(t_c) = d = v_0 \cos\theta\, t_c \longrightarrow d = v_0 \cos\theta\, t_c$$

$$\simeq 18{,}5 m/s \cdot \cos 30° \cdot 2{,}17\ s \simeq 34{,}8\ m$$

Usiamo la conservazione dell'energia meccanica per calcolare di quanto si accorcia la molla. Consideriamo i = inizio rampa

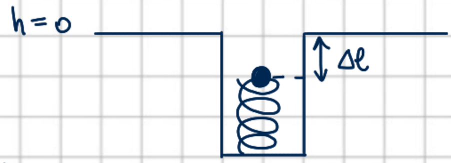
f = molla compressa al massimo, corpo fermo

$E_i = E_f$ dove $E_i = K_i + \cancel{U_i} = \frac{1}{2}mv_i^2$

$E_f = \cancel{K_f} + U_f + U_{ef}$

$= -mg\Delta y + \frac{1}{2}k\Delta y^2$

ha segno negativo perché il corpo si trova sotto il livello dello zero dell'energia potenziale gravitazionale



$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}k\Delta y^2 - mg\Delta y$$

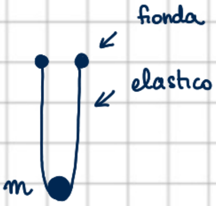
$$\frac{1}{2}k\Delta y^2 - mg\Delta y - \frac{1}{2}mv_i^2 = 0$$

$$\Delta y = \frac{mg \pm \sqrt{(mg)^2 - 4\left(\frac{1}{2}k\right)\left(-\frac{1}{2}mv_i^2\right)}}{k} = \frac{mg \pm \sqrt{(-mg)^2 + mkv_i^2}}{k}$$

$$\simeq \frac{5\ kg \cdot 9{,}81\ m/s^2 \pm \sqrt{(-5\ kg \cdot 9{,}81\ m/s^2)^2 + 5\ kg \cdot 50\cdot 10^3\ N\ (20\ m/s)^2}}{50\cdot 10^3\ N} \quad \begin{cases} 0{,}20\ m \\ -0{,}20\ m \end{cases}$$

$\Delta y \simeq 20\ cm$

ESERCIZIO 4

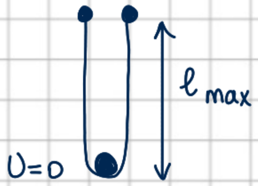


$m = 20\,g = 0{,}02\ kg$
$\ell_{max} = 40\ cm = 0{,}03\ m$
$\ell_0 = 10\ cm = 0{,}1\ m$
$K = 30\ N/cm = 3 \cdot 10^3\ N/m$

Vogliamo calcolare l'energia potenziale elastica, potenziale gravitazionale e cinetica

- Nel momento in cui la fionda è completamente estesa

istante 1



Pongo lo 0 dell'energia potenziale gravitazionale all'altezza della massa quando la fionda è completamente estesa per semplicità

$U_{g_1} = 0\ J$
$K_1 = \frac{1}{2} m v^2 = 0\ J$ perchè la massa è ferma

$U_{el_1} = \frac{1}{2} K \Delta\ell^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 10^3\ N/m \cdot (0{,}3\ m)^2 \simeq 135\ J$

- Nel momento in cui il sasso lascia l'elastico della fionda

istante 2

$U_{g_2} = mg\ell_{max} = 0{,}02\ kg \cdot 9{,}81\ m/s^2 \cdot 0{,}4\ m \simeq 7{,}8 \cdot 10^{-2}\ J$

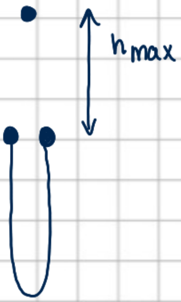
$K_2 = U_{el_1} - U_{g_2} = 135\ J - 7{,}8 \cdot 10^{-2}\ J \simeq 134{,}9\ J$

perchè l'energia meccanica si conserva, quindi
$E_1 = E_2 \rightarrow U_{el_1} = U_{g_2} + K_2 \rightarrow K_2 = U_{el_1} - U_{g_2}$

$U_{el_2} = \frac{1}{2} K \Delta\ell^2 = 0\ J$ perchè l'allungamento è nullo

- Nel momento in cui il sasso raggiunge la massima altezza

istante 3



$U_{g_3} = U_{el_1} \simeq 135\ J$

perchè l'energia meccanica si conserva, quindi
$E_1 = E_3 \rightarrow U_{el_1} = U_{g_3}$

$K_3 = 0\ J$ perchè nel punto di massima altezza il sasso ha velocità nulla (inversione di moto)

$U_{el_3} = 0\ J$ perchè l'allungamento dell'elastico è nullo

Es. 6

Per la forza d'attrito:

Un corpo (visto dall'alto) ha due possibilità per raggiungere il punto B partendo da A, il percorso [1] o il percorso [2].

Se il corpo parte con una velocità v_i, quale sarà la velocità nei due casi [1] o [2]? (2) $v_{f_2} = v_i$ Non agiscono forze → Cons. energia $v_i = v_f$

(1) $v_{f_1} \neq v_i$. Perché, da cons. energia mecc. → $\frac{1}{2} m (v_i^2 - v_{f_1}^2) = W_{ATT}$

Quindi concludiamo che la forza d'attrito non è conservativa, data la dipendenza dalla scelta di cammino compiuto.

Per la forza peso:

Sappiamo che per una forza conservativa vale $F = -\frac{dU}{dx}$

dove U è un potenziale.

Nel caso della forza peso: $U(x) = -mgx + C$ ← costante indip. dalla posizione x

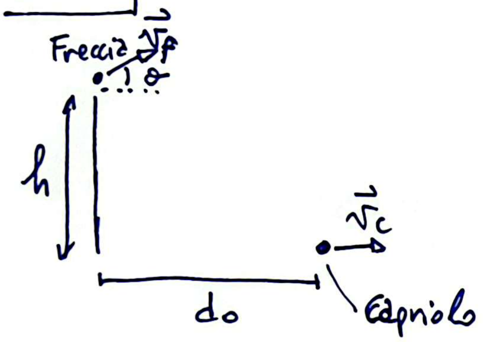
→ $F = -\frac{dU(x)}{dx} = \underline{\underline{mg}}$

Es. 6

$v_i = 50\ m/s \quad , \quad K = 7\ \frac{N\cdot s}{m} \quad , \quad m = 10^5\ kg$

$$W_{att} = \Delta E_K = \frac{1}{2} m \left(\cancel{v_f^2}^{\,0} - v_i^2\right) = -1.25 \times 10^8\ J$$

Es. 7



$h = 30\ m \quad , \quad d_0 = 50\ m$

$v_c = 15\ \frac{km}{h} = 4.2\ \frac{m}{s} \quad , \quad \theta = \pi/4$

Arco $\Leftrightarrow$ molle con $K = 800\ \frac{N}{m}$

$m_{freccia} = 100\ g = 0.1\ kg$

Eq. del moto

$$\begin{cases} x_F(t) = v_f \cdot \cos(\theta) \cdot t \\ y_F(t) = h + v_f \cdot \sin(\theta) \cdot t - \frac{g}{2} t^2 \\ x_c(t) = d_0 + v_c \cdot t \end{cases}$$

A t^* ho
1) $x_F = x_c$
2) $y_F = 0$

Da 1) $\rightarrow \quad t^* = \dfrac{d_0}{v_f \cos\theta - v_c}$ e inserendo nella 2) otteniamo:

$$h_0 + v_f \sin\theta \frac{d_0}{v_f \cos\theta - v_c} - \frac{g}{2} \frac{d_0^2}{(v_f \cos\theta - v_c)^2} = 0$$

Che può essere scritta come un'equazione di 2° grado:

$$v_f^2 (h_0 \cos^2\theta + \sin\theta \cos\theta\, d_0) + v_f(-2 v_c \cos\theta\, h_0 - v_c \sin\theta\, d_0) + \left(v_c^2 h_0 - \frac{g}{2} d_0^2\right) = 0$$

e otteniamo $v_f = \begin{cases} 21.7\ m/s \ \checkmark \\ -13.5\ m/s \end{cases}$

Imponendo conservazione energia: $E_K = U_{el}$

$$\rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{m}{K}}\, v_f = 0.24\ m$$