

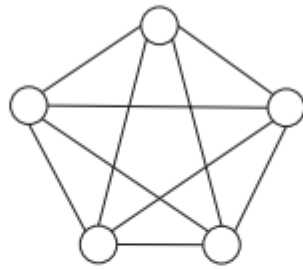
Семинар 13

Динамическое программирование

1. Задача о взвешенном независимом множестве

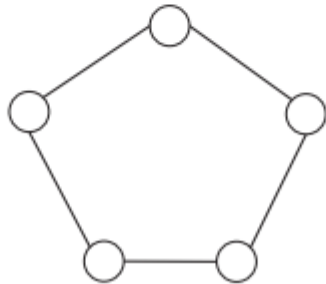
- $G=(V, E)$. Независимое множество графа G – это подмножество взаимно-несмежных вершин.

- Пример: Сколько различных независимых множеств имеет полный граф с пятью вершинами?



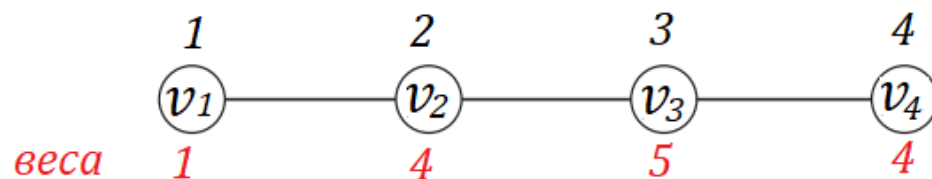
- а) 1 и 2 (соответственно)
- б) 5 и 10
- в) 6 и 11
- г) 6 и 16

Как насчет цикла с пятью вершинами?



MWIS на путевом графе

Пример.



$$n = |V| = 4, \quad m = |E| = 3$$

8 независимых множеств: $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}$

Количество подмножеств растет экспоненциально!!!

- Жадная стратегия – выбрать самую тяжелую вершину. Тогда $W_{max} = 5 + 1 = 6$. Не оптимально! Эта жадная стратегия не подходит.
- Рекурсивно делить пополам и потом соединять («Разделяй и властвуй») тоже не подойдет.

Пусть уже найдено S – MWIS и $W = W_4$ – его вес. Тогда

Случай 1: $v_4 \notin S \Rightarrow S$ для G совпадает с S для G_3 и $W_4 = W_3$;

Случай 2: $v_4 \in S \Rightarrow v_3 \notin S$, S для G совпадает с S для $(G_2 \cup v_4)$ и $W_4 = W_2 + w_4$

Брать ли v_4 в S ? $W_4 = \max\{W_3, W_2 + w_4\}$

Не брать брать

Подходы к решению

Такие же рассуждения для W_3, W_2 . Считаем $W_0 = 0, W_1 = w_1$

В общем случае $W_i = \max\{W_{i-1}, W_{i-2} + w_i\}, i = 2, 3, \dots, n$

Рекурсивный алгоритм для нахождения MWIS

Вход: путь графа G с множеством вершин $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и неотрицательным весом w_i для каждой вершины v_i .

Выход: независимое множество с максимальным весом графа G .

```
1 if  $n = 0$  then                // базовый случай #1
2   return пустое множество
3 if  $n = 1$  then                  // базовый случай #2
4   return  $\{v_1\}$ 
   // рекурсия при  $n \geq 2$ 
5  $S_1 :=$  рекурсивно вычислить MWIS графа  $G_{n-1}$ 
6  $S_2 :=$  рекурсивно вычислить MWIS графа  $G_{n-2}$ 
7 return  $S_1$  или  $S_2 \cup \{v_n\}$ , в зависимости от того, что имеет
   больший вес
```

Верно, но не рационально!

Сколько различных входных графов рассматривалось в пределах всех рекурсивных вызовов?

а) $\Theta(1)$

б) $\Theta(n)$

в) $\Theta(n^2)$

г) $2^{\Theta(n)}$

Будем запоминать результаты задачи, которую решаем впервые, в кэше. Массив $A[0 \dots n]$.

Имеем $n+1$ подзадачу, соответствующую всем префиксам входного графа.

Взвешенное независимое множество (WIS)(восходящая реализация)

Вход: путевой граф G с множеством вершин $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и отрицательным весом для каждой вершины v_i .

Выход: суммарный вес независимого множества с максимальным весом графа G .

```
A := массив длиной (n + 1) // решения подзадач
A[0] := 0 // базовый случай #1
A[1] := w1 // базовый случай #2
for i = 2 to n do
    // использовать рекуррентное соотношение
    // из следствия 16.2
    A[i] := max{  $\underbrace{A[i-1]}_{\text{Случай 1}}$ ,  $\underbrace{A[i-2] + w_i}_{\text{Случай 2}}$  }
return A[n] // решение наибольшей подзадачи
```

Пример:



$$W_1 = 3$$

$$W_2 = \max\{3, 0 + 2\} = 3$$

$$W_3 = \max\{3, 3 + 1\} = 4$$

$$W_4 = \max\{4, 3 + 6\} = 9$$

$$W_5 = \max\{9, 4 + 4\} = 9$$

$$W_6 = \max\{9, 9 + 5\} = 14$$



Реконструкция



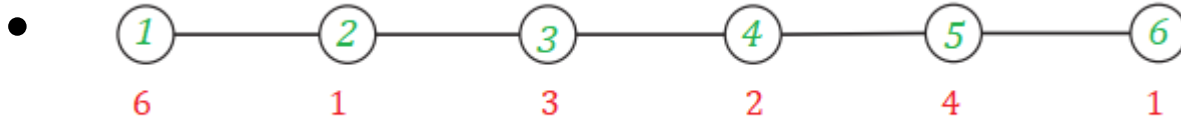
WIS_RECONSTRUCTION

Вход: массив A , вычисленный алгоритмом WIS для путевого графа G с множеством вершин $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, и неотрицательный вес w_i для каждой вершины v_i .

Выход: независимое множество с максимальным весом графа G .

```
 $S := \emptyset$  // вершины в множестве MWIS
 $i := n$ 
while  $i \geq 2$  do
  if  $A[i-1] \geq A[i-2] + w_i$  then // Случай 1 побеждает
     $i := i - 1$  // исключить  $v_i$ 
  else // Случай 2 побеждает
     $S := S \cup \{v_i\}$  // включить  $v_i$ 
     $i := i - 2$  // исключить  $v_{i-1}$ 
if  $i = 1$  then // базовый случай #2
   $S := S \cup \{v_1\}$ 
return  $S$ 
```

Самостоятельно найти MWIS



0	1	2	3	4	5	6
0						

Задача о рюкзаке

Имеется n предметов.

$0 \leq v_1, v_2, \dots, v_n$ - стоимости

$0 \leq s_1, s_2, \dots, s_n$ - размеры

C – емкость рюкзака

Найти $S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$: $\sum_{i \in S} v_i \rightarrow \max$ при $\sum_{i \in S} s_i \leq C$

Пример (почти как в семинаре 11), $C = 6$ кг

магнитофон	ноутбук	гитара
$v_1 = 30000p$ $w_1 = 5$ кг	$v_2 = 20000p$ $w_2 = 3$ кг	$v_3 = 15000p$ $w_3 = 2$ кг

Жадная стратегия дает результат неверный (магнитофон)

Верный результат – ноутбук + гитара

Решение с помощью динамического программирования




магнитофон	ноутбук	гитара
$v_1 = 30000p$ $w_1 = 5 \text{ кг}$	$v_2 = 20000p$ $w_2 = 3 \text{ кг}$	$v_3 = 15000p$ $w_3 = 2 \text{ кг}$

- Пусть задача решена и найден набор предметов, имеющих в сумме максимальную стоимость $V_{3,6}$
 - Если гитара не попала в этот набор, то для магнитофона и ноутбука остаточный вес $c = C = 6 \text{ кг}$ и $V_{3,6} = V_{2,6}$.
 - Если гитара попала в набор, то для магнитофона и ноутбука остаточный вес равен $c = 6 - 2 = 4 \text{ кг}$ ($V_{3,6} = V_{2,4} + v_3$)
 - Для $V_{2,6}$ и $V_{2,4}$ рассуждаем аналогично (попал или не попал ноутбук в набор предметов)
- $V_{i,c}$ - максимальная суммарная стоимость первых i предметов с размером (весом) рюкзака не больше c .

При $i = 0$ $V_{i,c} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, n$ и $c = 0, 1, \dots, C$




$$V_{i,c} = \begin{cases} \underbrace{V_{i-1,c}}_{\text{Случай 1}} & \text{если } s_i > c \\ \max \left\{ \underbrace{V_{i-1,c}}_{\text{Случай 1}}, \underbrace{V_{i-1,c-s_i} + v_i}_{\text{Случай 2}} \right\} & \text{если } s_i \leq c. \end{cases}$$

магнитофон	ноутбук	гитара
$v_1 = 30000p$ $w_1 = 5 \text{ кг}$	$v_2 = 20000p$ $w_2 = 3 \text{ кг}$	$v_3 = 15000p$ $w_3 = 2 \text{ кг}$

Остаточная емкость c	6	0	30	30	35
	5	0	30	30	35
	4	0	0	20	20
	3	0	0	20	20
	2	0	0	0	15
	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
	0	1 	2 	3 	
		префиксная длина i			

Вопросы к задаче о рюкзаке





1) Если переставить столбцы местами, изменится ли результат?

Остаточная емкость s	6	0	15	30	35
	5	0	15	15	35
	4	0	15	15	20
	3	0	15	15	20
	2	0	15	15	15
	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0
		0	1 	2 	3 
		префиксная длина i			

гитара	магнитофон	ноутбук
$v_3 = 15000p$ $w_3 = 2 \text{ кг}$	$v_1 = 30000p$ $w_1 = 5 \text{ кг}$	$v_2 = 20000p$ $w_2 = 3 \text{ кг}$

2) Что будет, если добавить ожерелье весом 0,5 и стоимостью 1000р?

•

Остаточная емкость s	6	0				
				
				
	1,5	0				
	1	0				
	0,5	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	0
	0	1	2	3	4	
						
	префиксная длина i					

магнитофон	ноутбук	гитара	ожерелье
$v_1 = 30000\text{p}$ $w_1 = 5 \text{ кг}$	$v_2 = 20000\text{p}$ $w_2 = 3 \text{ кг}$	$v_3 = 15000\text{p}$ $w_3 = 2 \text{ кг}$	$v_4 = 1000\text{p}$ $w_4 = 0.5\text{кг}$

3) Допустим, что рюкзак наполняется в продуктовом магазине.

рис	гречка	пшено
100р/кг	150р/кг	120р/кг

Как решать?