Семинар 15

Машина Тьюринга и некоторые алгоритмы

Машина Тьюринга

1.Определение. Машина Тьюринга – это объект, определяющийся следующими составляющими:

$$T = \{A, Q, \varphi(q, a), \psi(q, a), H(q, a)\}$$

A- алфавит входных и выходных символов;

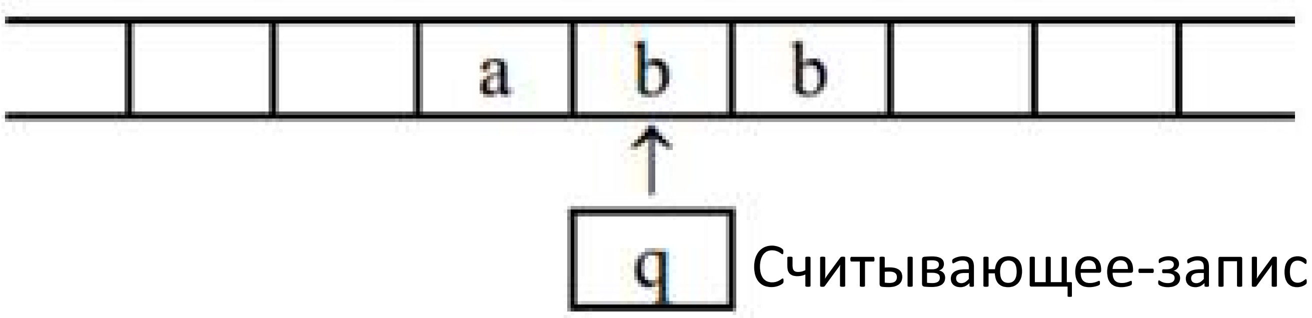
Q- алфавит состояний;

$\varphi(q, a)$ - функция переходов ($\varphi: Q \times A \to Q$);

$\psi(q, a)$ - функция выходов ($\psi: Q \times A \to A$);

$H(q, a)$ - функция сдвига ($H: Q \times A \to \{R, L, S\}$)

Бесконечная лента, разбитая на ячейки



Считывающее-записывающее устройство

2. Способы задания машины Тьюринга

1) Система команд (программа П).

Команда $qa \to q'a'h$

$q' = \varphi(q, a), a' = \psi(q, a), h = H(q, a)$
$h \in \{R, L, S\},\qquad Q = \{q_1, q_2, \dots, q_z\},$

$A = \{\lambda, 1, \#, *, И, Л, \dots\}, \lambda$ – символ пустой клетки.

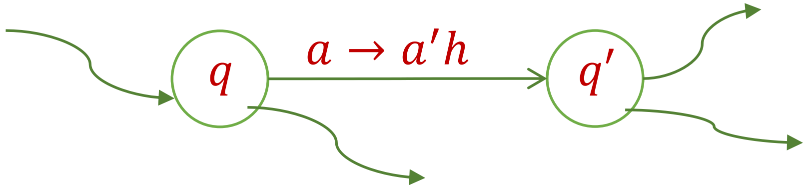
<u>Пример 1</u> . $A = \{\lambda, 1\}$

П: $\boxed{\begin{array}{l} q_1 1 \to q_1 1R \\ q_1 \lambda \to q_1 1R \end{array}}$ программа будет бесконечно долго заполнять единицами правую полуленту

2) Таблица переходов

A \ Q	q_1	…	q	…	q_z
a_1	…	…	…	…	…
…	…	…	…	…	…
a	…	…	$q'a'h$	…	…
…	…	…	…	…	…
λ	…	…	…	…	…

3) Диаграмма переходов

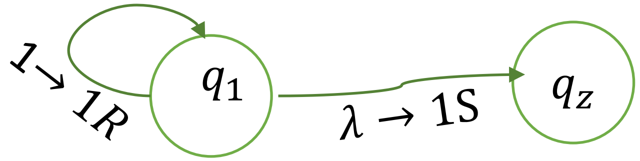


3. Простейшие программы на Машине Тьюринга

<u>Пример 2</u> . $f(x) = x + 1$

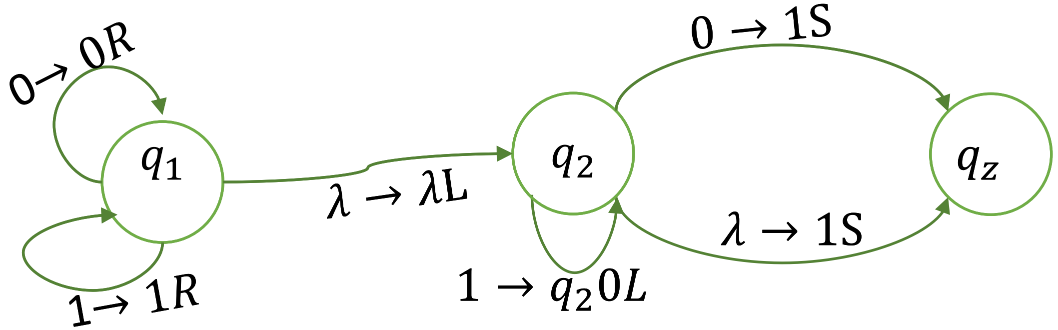
а) унарное кодирование : $A = \{\lambda, 1\}$

$$q_1 1 \to q_1 1\mathrm{R}$$
$$q_1 \lambda \to q_z 1\mathrm{S}$$



б) бинарное кодирование : $A = \{\lambda, 1, 0\}$

$$q_1 0 \to q_1 0\mathrm{R}$$
$$q_1 1 \to q_1 1\mathrm{R}$$
$$q_1 \lambda \to q_2 \lambda\mathrm{L}$$
$$q_2 0 \to q_z 1\mathrm{S}$$
$$q_2 1 \to q_2 0L$$
$$q_2 \lambda \to q_z 1\mathrm{S}$$

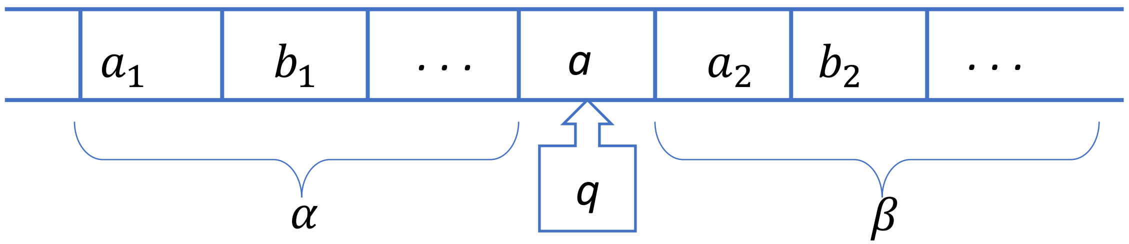


$$\begin{array}{r} 10011 \\ +\quad\; 1 \\ \hline 10100 \end{array}$$

Количество операций: X=$[log_2 x]$ - длина входа.
Максимально можно сделать $2[log_2 x] + 2$ операций

Т.о., независимо от способа кодирования *время= =количество операций* выполнения зависит линейно от длины входа.

§5. Конфигурация и функции, вычислимые по Тьюрингу



Конфигурацией или полным состоянием ленты называется запись $\alpha q a \beta$, где α – префикс написанного слова, (часть слова, предшествующая той клетке, которая обозревается головкой машины Тьюринга, β – суффикс (часть слова правее положения головки).

При заданной программе и некоторой начальной конфигурации работа М.Т. (машины Тьюринга) определена однозначно.

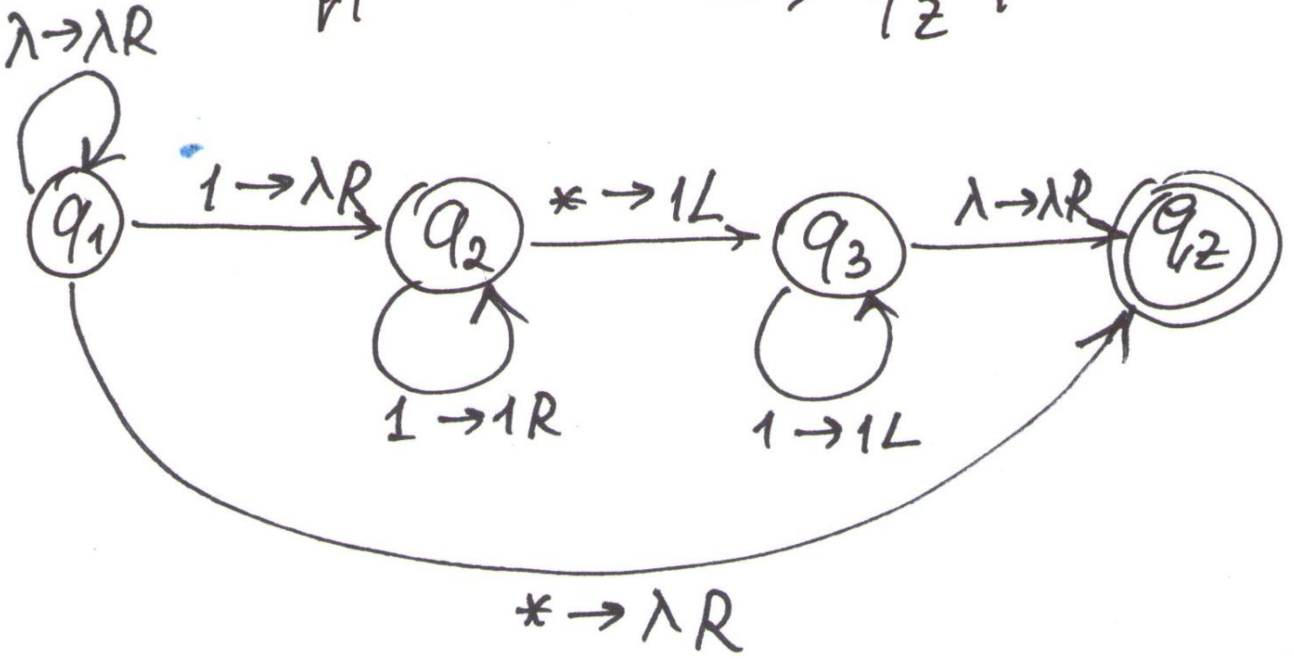
М.Т. начинает работу в нач.конфигурации $q_1\alpha$. Далее происходит смена конфигураций. Последовательность этих конфигураций записывается в протокол. Если достигнуто q_z, то М.Т. *применима* к данным α. Иначе – *неприменима* к α.

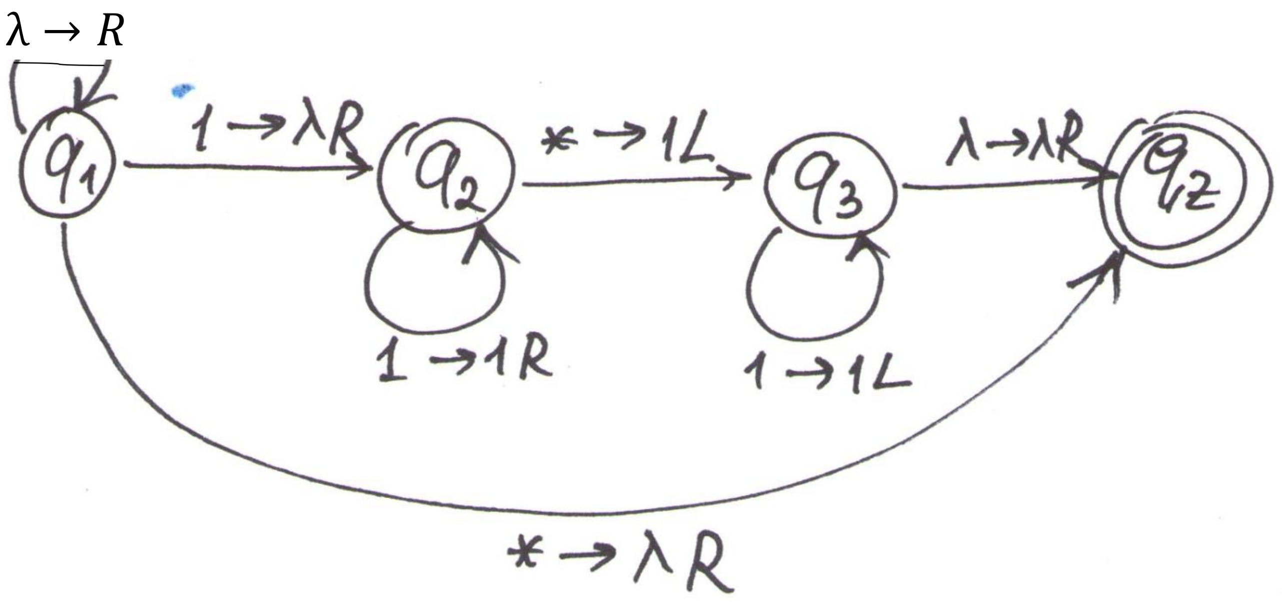
Определение. Конфигурация называется правильной (регулярной), если она имеет вид $q_1\alpha$.

Определение. Функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ называется правильно вычислимой по Тьюрингу, если для нее можно написать программу на машине Тьюринга (в унарном коде), которая работает следующим образом: $q_1 1^{x_1} * 1^{x_2} * \cdots 1^{x_n} \overset{T}{\Rightarrow} q_z 1^y$ (начинает и заканчивает в правильной конфигурации) или работает бесконечно долго, если $y = f(x_1, \dots, x_n)$ не определена.

Пример: $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ (сложение)

$$q_1 1^{x_1} * 1^{x_2} \xRightarrow{T_+} q_z 1^{x_1 + x_2}$$





Пусть надо сложить 2 + 3

Запишем протокол работы М.Т. (T_+)
(последовательность конфигураций)

$q_1 11*111 \longmapsto q_2 1*111 \longmapsto 1 q_2 *111 \longmapsto$

$\longmapsto (1 q_3 1111) \longmapsto q_3 11111 \longmapsto q_3 \lambda 11111 \longmapsto q_z 11111$

сразу

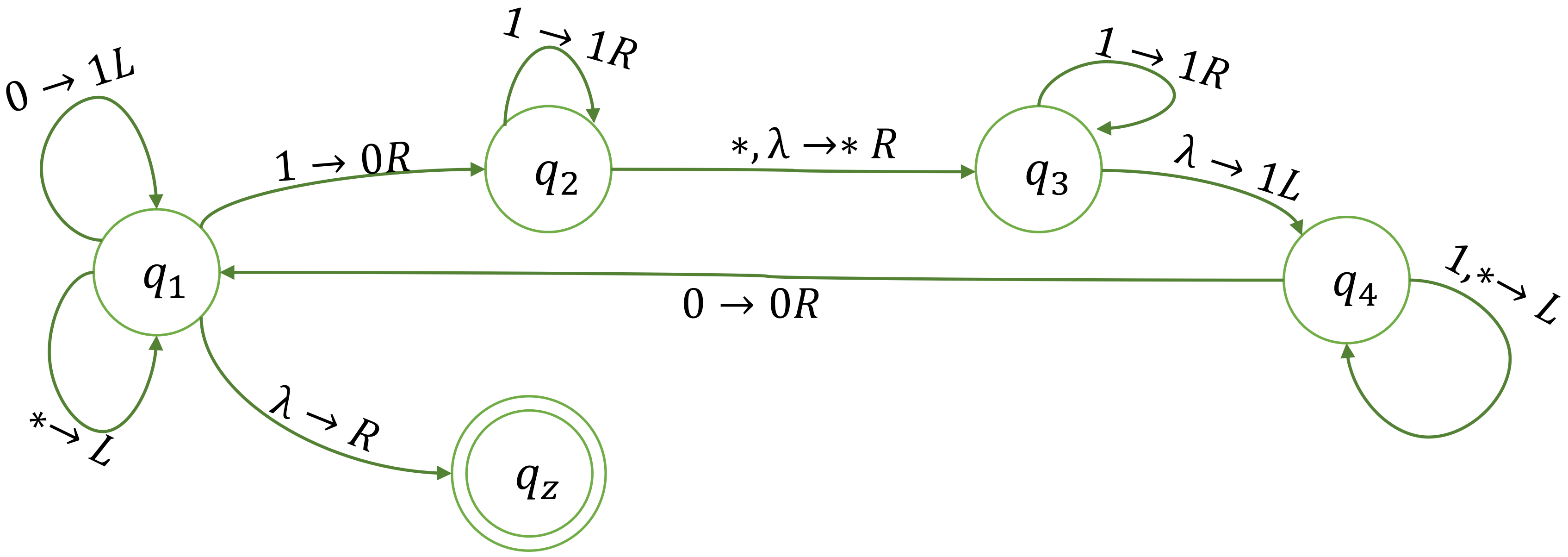
Задание: Написать T_+ в виде таблицы переходов

Пример. Копировальная машина T_c

$$q_1 1^x \overset{T_c}{\Rightarrow} q_z 1^x * 1^x$$

Идея: $\underbrace{11\ldots1}_{\hat{q}_1\quad x} \to \cdots \to 0\,\underbrace{11\ldots.1}_{x-1} * \to 0\,\underbrace{11\ldots.1}_{x-1} * 1 \to$

$$\to \cdots \to 00\ldots0 * 11\ldots1 \to \cdots \to \underbrace{11\ldots.1}_{\hat{q}_z\quad x} * \underbrace{11\ldots.1}_{x}$$



Задача

- Рассмотрим Машину Тьюринга с одной лентой, q состояниями, не включая завершающее, но включая начальное, и s символами в ленточном алфавите A (включая λ). Сколько всего конфигураций этой машины, занимающих не более N ячеек на ленте?
- Можно строить многоленточные МТ.
- К МТ применимы следующие операции:

<u>композиция машин</u>

Пусть $y = f(x), z = g(y).\text{ Вычислить } z = g\big(f(x)\big).$

$\Pi_{\text{т}} = \{\Pi_1, \Pi_2\}, \text{T} = T_2(T_1)$

Пример. $f(x) = 2x = x + x. \quad \text{T}_{x+x} = T_+(T_c)$

<u>Условный оператор</u> (если $f(x) = \text{И}, \text{то } T_1(g(x))$, иначе $T_2(g(x))$

<u>оператор цикла</u>

и т.д.

Тезис Тьюринга, разрешимые и неразрешимые проблемы

- Не смотря на громоздкость, на МТ можно реализовать любой алгоритм.
- Имеет место **тезис Тьюринга**: любую задачу, для которой существует алгоритм, можно реализовать на МТ.
- Существуют задачи, для которых нельзя составить алгоритм (алгоритмически неразрешимые).

Проблема останова: не существует алгоритма, позволяющего по описанию произвольного алгоритма и его исходных данных определить, остановится ли этот алгоритм на этих данных или будет работать бесконечно.

Алгоритмически разрешимые проблемы

1. Задача SAT (выполнимость булевой формулы)

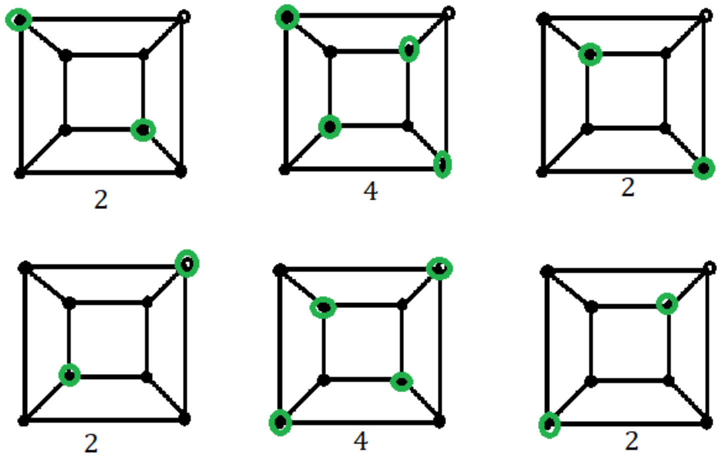
например, $K = (p \vee q \vee \overline{r}) \wedge (\overline{p} \vee q \vee r \vee \overline{s}) \wedge (\overline{q} \vee s)$. Существует ли такой набор истинностных значений переменных, при которых $K = 1$?

2. Задача 3SAT- каждый дизъюнкт содержит не более 3 литералов.

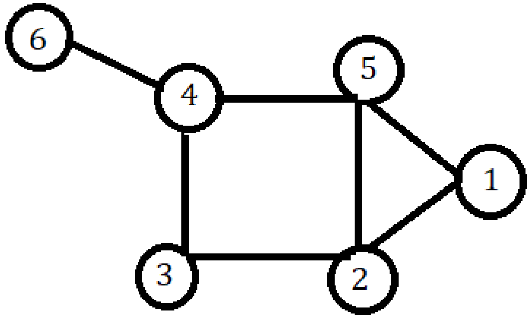
например, $(x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee h) \wedge (z \vee h)$

3. Независимое множество: G=(V, E), незав. множество $S \subseteq V, \forall v, u \in S$ $(v, u) \notin E$.

Пример: найти максимальные независимые множества на развертке куба.



4. Задача о вершинном покрытии



Граф G=(V, E), $S \subseteq V, \forall e = (v, u) \in E \;\; v \in S$ или $u \in S$.

Пример: Найти вершинное покрытие размером 3 и 4

5. Клика – множество вершин $S \subseteq V$, каждая пара вершин соединена ребром $e \in E$. Найти на рисунке клику размера 3.

6. Гамильтонов цикл – простой цикл, проходящий через все вершины графа ровно 1 раз.

Найти в графе ГЦ.