# Семинар 11

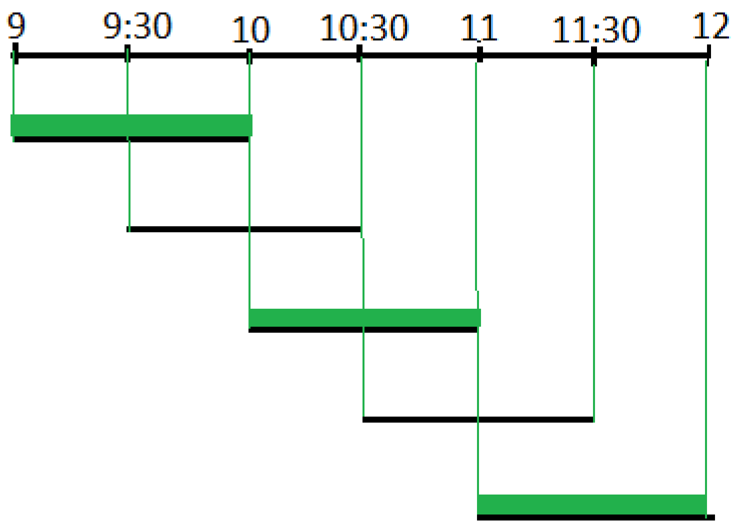
Жадные алгоритмы. Задача о составлении расписания.

# Жадные алгоритмы. Пример 1.

*Жадный алгоритм (GREEDY) стремится максимизировать выгоду каждого отдельного шага. Не всегда приводит к оптимальному решению. Его (алгоритм) легко составить и проанализировать время выполнения, но трудно доказать правильность.*

Пример 1. Имеется учебный класс, в котором нужно перенести как можно больше занятий.

| предмет | с | до |
|---|---|---|
| черчение | 9:00 | 10:00 |
| английский | 9:30 | 10:30 |
| математика | 10:00 | 11:00 |
| информатика | 10:30 | 11:30 |
| физика | 11:00 | 12:00 |




1) Выберем урок, завершающийся раньше всех. (Первый урок).
2) Выберем урок, начинающийся после завершения предыдущего выбранного с самым ранним временем завершения и т.д.

Все уроки провести в классе не получится, есть перекрытия по времени.

1)Черчение
2)Математика
3)Физика

Ответ верный, т.к. класс используется максимально.

# Жадные алгоритмы. Пример 2.

## Задача о рюкзаке.

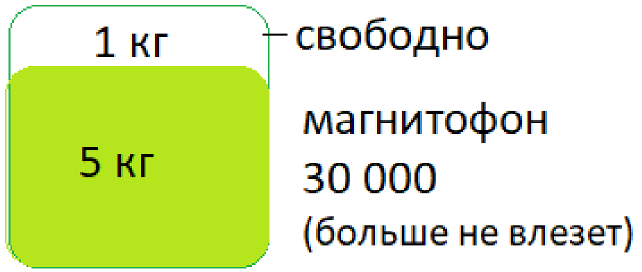
Вор забрался на склад магазина. У него с собой рюкзак, который может выдержать вес W=6кг. Он выбирает предметы так, чтобы их суммарная стоимость была бы максимальной (целевая функция). Перед ним N=3 предмета:

| **магнитофон** | **ноутбук** | **гитара** |
|---|---|---|
| $v_1 = 30000р$<br>$w_1$ =5 кг | $v_2 = 20000р$<br>$w_2$ =3,5 кг | $v_3 = 15000р$<br>$w_3$ =2,5 кг |

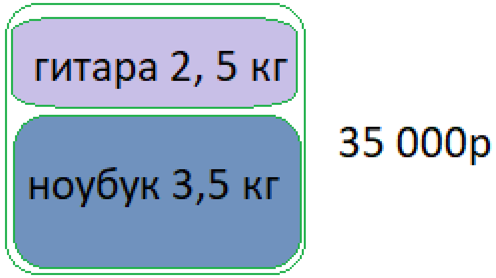
Выберем жадную стратегию:

1)Вор берет самый дорогой предмет, который поместится в рюкзаке.

2) Выбрать следующий самый дорогой предмет и.д.




Есть лучшее (не жадное) решение.



# Задача планирования

Есть $n$ работ и $l_i$ - длительность каждой работы. Расписание $\sigma$ – последовательность работ в определенном порядке. $c_i(\sigma)$ срок завершения $i$ –ой работы в расписании $\sigma$.

Пример: $l_1 = 1, l_2 = 2, l_3 = 3$. Начнем с 1-ой, потом 2-ая, потом 3-я.

Каковы сроки завершения работ в этом расписании?

а) 1, 2 и 3

б) 3, 5 и 6

в) 1, 3 и 6

г) 1, 4 и 6

Каждая $i$-ая работа имеет вес $w_i$. Составим целевую функцию: $S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot c_i(\sigma)$

**Задача:** найти такое расписание $\sigma$, чтобы $S(\sigma) \to min$

Всего $n$! Вариантов расписаний. Перебирать слишком долго. *Применим жадную стратегию.*

# Частные случаи задачи планирования и общий случай

(1) если все длины работ являются идентичными, должны ли мы раньше планировать работы меньшего или большего веса?

(2) если все веса работ являются идентичными, должны ли мы раньше планировать более короткие или более длинные работы?

а) большего; короткие

б) меньшего; короткие

в) большего; длинные

г) меньшего; длинные

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot c_i(\sigma) \ \rightarrow min$$

## Общий случай: желательно спланировать расписание так, чтобы работы уменьшались по весу и увеличивались по длине.

- *Предложение 1* (Greedydiff ): планировать работы в убывающем порядке величин $w_j - l_j$ .
- *Предложение 2*(Greedyratio): планировать работы в убывающем порядке величин $\frac{w_j}{l_j}$.

Что выбрать?

# Примеры применения жадной стратегии к задаче планирования

$$S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot c_i(\sigma)$$

| | Работа №1 | Работа №2 |
|---|---|---|
| длительность | $l_1 = 5$ | $l_2 = 2$ |
| вес | $w_1 = 3$ | $w_2 = 1$ |

$\mathrm{Greedydiff}$ точно неверный.

$w_j - l_j$

$\mathrm{Greedydiff}$ : 3-5<1-2 (Сначала №2, потом №1)
Целевая функция $1 \cdot 2 + 3 \cdot (5 + 2) = 23$

$\frac{w_j}{l_j}$

$\mathrm{Greedyratio}$ : $\frac{3}{5} > \frac{1}{2}$ (Сначала №1, потом №2)
Целевая функция 3$\cdot$ $5 + 1 \cdot (2 + 5) = 22$

Справедлива <u>теорема</u> (правильность алгоритма $\mathrm{Greedyratio}$): Для любого множества положительных весов $w_1,\ w_2,\ \ldots, w_n$ и множества положительных длин $l_1,\ l_2,\ \ldots, l_n$ алгоритм $\mathit{Greedyratio}$ выводит расписание с минимально возможной суммой взвешенных работ.

Доказательство (см. лекция 6) основано на понятии **обмена.** Если $\sigma$ жадное расписание не является оптимальным, а $\sigma^*$ оптимальное. Любое не жадное расписание имеет по крайней мере одну последовательную инверсию. Уберем ее в $\sigma^*$ - получим расписание $\sigma'$ -лучшее, чем оптимальное $\sigma^*$ - не может быть. $\Rightarrow$ $\sigma$ – оптимальное.

# Асимптотическое время работы алгоритмов $Greedydiff$ и $Greedyratio$

Каково асимптотическое время работы алгоритмов $Greedydiff$ и $Greedyratio?$

Записать псевдокод алгоритма $Greedyratio$.

# Задача о резервных копиях

Имеется распределенная система, состоящая из N хранилищ различной емкости, причем в $i$-ом хранилище можно разместить $A_i$ блоков информации.

Хранение одного блока считается надежным, если имеется 2 копии в различных хранилищах. Требуется определить наибольшее количество надежных блоков, которое можно разместить в N хранилищах.

Например, возьмем 4 хранилища размерами 8, 7, 4, 3. В таблице одинаковыми числами отмечены номера одинаковых блоков. Число (№ блока) не может дважды Находится в одном столбце (хранилище)

Всего можно разместить 11 блоков.

Ресурс полностью использован.

| размер / № итерац. | 8 | 7 | 4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| 3 | 5 | 5 | 6 | 6 |
| 4 | 7 | 7 | - □ | - |
| 5 | 8 | 8 | - □ | - |
| 6 | 9 | 9 | - □ | - |
| 7 | 10 | 10 | - □ | - |
| 8 | 11 | - | 11 | - |

# Выбор стратегии

Применим жадный алгоритм. Сведем задачу к эквивалентной: имеется N кучек камней, каждым ходом можно выбрать по одинаковому количеству камней из любой пары кучек. Найти такой порядок игры, при котором останется минимальное число камней. При оптимальном решении все кучки станут пустыми.

I стратегия: Выбрать 2 наименьшие кучки и взять из них наибольшее количество камней.

| размер / № итерац. | 8 | 7 | 4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 7 | 1 | 0 |
| 2 | 8 | 6 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |

Неверное решение

II стратегия: Выбрать наибольшую и наименьшую кучки и взять из них наибольшее количество камней.

| № итерац. \ размер | 8 | 7 | 4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 7 | 4 | 0 |
| 2 | 5 | 3 | 0 | 0 |
| 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |

Неверное решение

III стратегия: Выбрать 2 наибольшие кучки и взять из них наибольшее количество камней.

| № итерац. \ размер | 8 | 7 | 4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 4 | 3 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Оптимальное решение

Другие данные

| № итерац. \ размер | 8 | 7 | 7 | 6 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 7 | 6 | 5 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 5 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 0 | 4 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |

Неверное решение

# IV стратегия: Выбрать наибольшую и наименьшую кучки и взять из них по одному камню

| № итерац. \ размер | 8 | 7 | 4 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 7 | 4 | 2 |
| 2 | 7 | 6 | 4 | 1 |
| 3 | 6 | 6 | 4 | 0 |
| 4 | 5 | 6 | 3 | 0 |
| 5 | 5 | 5 | 2 | 0 |
| 6 | 4 | 5 | 1 | 0 |
| 7 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| 8… | 0 | 0 | 0 | 0 |

Оптимальное решение

Другие данные

| № итерац. \ размер | 8 | 7 | 7 | 6 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 7 | 7 | 6 | 4 |
| 2 | 7 | 7 | 6 | 6 | 3 |
| 3 | 7 | 6 | 6 | 6 | 2 |
| 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 1 |
| 5 | 6 | 6 | 6 | 5 | 0 |
| 6 | 6 | 6 | 5 | 4 | 0 |
| 7 | 6 | 5 | 5 | 3 | 0 |
| 8 | 5 | 5 | 5 | 2 | 0 |
| 9 | 5 | 5 | 4 | 1 | 0 |
| 10 | 5 | 4 | 4 | 0 | 0 |
| 11 | 4 | 4 | 3 | 0 | 0 |
| 12 | 4 | 3 | 2 | 0 | 0 |
| 13 | 3 | 3 | 1 | 0 | 0 |
| 14 | 3 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| 15 | 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 16 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Похоже, что оптимальное решение

# Утверждение: стратегия IV оптимальна

Доказательство:

1) На каждой «большой» итерации наименьшая из куч опустошается (из нее всегда производится взятие).

2) Когда останется 3 кучки $A, B, C$; $A \geq B \geq C$

а) $A > B + C \Rightarrow$ ответ:
$A - B - C$ на каждом ходе $A$ остается наибольшим, происходит вычитание из $A$.

| 6 | 3 | 2 |
|---|---|---|
| 5 | 3 | 1 |
| 4 | 3 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |

б) $A = B + C \Rightarrow$ ответ: $0$

| 6 | 4 | 2 |
|---|---|---|
| 5 | 4 | 1 |
| 4 | 4 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

в) $A < B + C \Rightarrow$ ответ:
После некоторой, возможно нулевой последовательности ходов достигается ситуация, когда $A' = B' > C'$ которая ведет к позиции $A' - \left\lfloor \frac{C'}{2} \right\rfloor$; $A' - \left\lceil \frac{C'}{2} \right\rceil$
В зависимости от четности $C'$ результат будет $0$ или $1$

| 6 | 4 | 3 |
|---|---|---|
| 5 | 4 | 2 |
| 4 | 4 | 1 |
| 3 | 4 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |

| 7 | 5 | 4 |
|---|---|---|
| 6 | 5 | 3 |
| 5 | 5 | 2 |
| 4 | 5 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |