Раздел 3. Полнота метрического пространства

Лекция 4 Полные и неполные метрические пространства.

Фундаментальная последовательность (последовательность Коши):
$\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall k, m > N : \rho(x_k, x_m) < \varepsilon$

Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Если какая-либо подпоследовательность фундаментальной последовательности (ФП) сходится, то сходится и сама последовательность (к тому же пределу).

МП называется полным, если произвольная ФП сходится (имеет предел).

МП называется неполным, если в нём найдётся ФП, не имеющая предела.

Понятие полноты (неполноты) обобщается и на ПМП.

Лемма. Если множество $\tilde{X}$ всюду плотно в X (т.е. $[\tilde{X}] = X$), и произвольная ФП элементов из $\tilde{X}$ сходится, то пространство X полное.
Доказательство: для произвольной ФП из X найдётся эквивалентная ей ФП из $\tilde{X}$, которая сходится, тогда исходная ФП также сходится.

Пусть $Y \subset X$ – подпространство метрического пространства.

Утверждение. Если Y не замкнуто в X, то Y – неполное ПМ (независимо от полноты X).

Утверждение. Если Y замкнуто в X, и X – полное МП, то Y – полное ПМ.

Теорема (принцип вложенных шаров). Пусть в полном МП задана бесконечная последовательность замкнутых шаров $\bar{S}_m = \bar{S}_{r_m}(a_m)$, причём $r_m \to 0$ и $\bar{S}_{m+1} \subset \bar{S}_m$. Тогда у этих шаров существует единственная общая точка.
(Доказательство. Единственность: две различные точки не могут принадлежать всем шарам. Существование: рассматриваем последовательность $x_m \in \bar{S}_m$, доказываем её фундаментальность и сходимость, доказываем принадлежность всем шарам предела последовательности.)

Замечание: единственность гарантируется для любого МП, существование – для полного.

Аналог принципа вложенных отрезков для E^1.

Примеры.

1. Пространства с дискретной метрикой и ε-дискретные пространства.

   Все ФП – постоянные или стабилизирующиеся. Сходятся. Пространства полные.

2. E^1 – полное МП (критерий Коши).

3. $X \subset \mathbb{R}$, метрика из E^1. Полное МП, если множество X замкнуто в $\mathbb{R}$ и неполно в противном случае. (Доказать).

4. Пространство $\mathbb{R}_\Phi$: $\rho(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|$, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – инъективная функция. Полное МП, если образ функции Φ замкнутое множество, и неполное в противном случае.

   В частности, если Φ – непрерывная (в обычном смысле) монотонная функция, то её образ – интервал, открытый луч или вся ось. Пространство полное лишь в последнем случае (Φ не ограничена ни сверху, ни снизу), в противном случае бесконечно большие в E^1 последовательности (все или некоторые) будут фундаментальными, но не сходящимися.

5. Пространство $\mathbb{R}^n_{\max}$ n-мерных векторов (конечных последовательностей из n чисел), $\rho_\infty(x,y) = \max_j |x_j - y_j|$.
   Докажем полноту этого пространства. Рассмотрим ФП его элементов $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, номер элемента последовательности пишем наверху в скобках, а нижний индекс – номер компоненты вектора.

   Первый шаг: рассмотрим числовые последовательности $x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots$ j-ых компонент. Они фундаментальны (доказать). Сходятся по критерию Коши.

   Второй шаг: ссылаемся на доказанный факт, что из покомпонентной сходимости следует сходимость по метрике $\mathbb{R}^n_{\max}$.

   В дальнейшем такая схема будет повторяться: сначала доказывается сходимость в слабом смысле, потом доказывается, что этот слабый предел на самом деле есть предел в смысле метрики пространства.

6. Пространство l_∞ бесконечных ограниченных последовательностей, $\rho_\infty(x,y) = \sup_j |x_j - y_j|$.

   Первый шаг такой же: доказываем покомпонентную сходимость.
   Дальше рассматриваем последовательность, состоящую из покомпонентных пределов: $x_j = \lim_{p\to\infty} x_j^{(p)}$
   Здесь, по сравнению с предыдущим случаем, ещё одна дополнительная проблема: заранее неясно, будет ли эта последовательность ограниченной, то есть принадлежит ли нашему пространству l_∞. Эту принадлежность также нужно будет доказать.

   Вернёмся к определению фундаментальной последовательности:
   $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall p,q > N : \rho_\infty(x^{(p)}, x^{(q)}) < \varepsilon$, т.е.
   $\sup_j |x_j^{(p)} - x_j^{(q)}| < \varepsilon$, откуда
   $\forall j \in \mathbb{N} : |x_j^{(p)} - x_j^{(q)}| < \varepsilon$
   Перейдём к пределу при $q \to \infty$, строгое неравенство превратится в нестрогое:
   $\forall j \in \mathbb{N} : |x_j^{(p)} - x_j| \le \varepsilon$

Отсюда следует ограниченность последовательности из покомпонентных пределов, $x \in l_\infty$.
Взяв супремум по j, получаем: $\rho_\infty(x^{(p)}, x) \le \varepsilon$ (при $p > N$), откуда следует сходимость по метрике l_∞.

7. Пространство c сходящихся последовательностей – подпространство l_∞. Поскольку l_∞ полное, для доказательства полноты пространства c достаточно доказать его замкнутость в l_∞.

   Пусть $x^{(p)} \to x$ в l_∞, $x^{(p)} \in c$. Докажем, что $x \in c$. Для этого достаточно доказать фундаментальность x в E^1.

   Применяем $\varepsilon/3$-приём.

   Нам нужно доказать: $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall k, m > N : |x_k - x_m| < \varepsilon$

   Из сходимости $x^{(p)}$ к x в l_∞ следует: найдётся номер p, для которого $\rho_\infty(x^{(p)}, x) < \varepsilon/3$, т.е. $\forall j \in \mathbb{N} : |x_j^{(p)} - x_j| < \varepsilon/3$.

   Поскольку последовательность $x^{(p)} \in c$, она фундаментальна, и тогда $\exists N \in \mathbb{N}\, \forall k, m > N : |x_k^{(p)} - x_m^{(p)}| < \varepsilon/3$.

   Тогда
   $|x_k - x_m| = |(x_k - x_k^{(p)}) + (x_k^{(p)} - x_m^{(p)}) + (x_m^{(p)} - x_m)| \le$
   $\le |x_k - x_k^{(p)}| + |x_k^{(p)} - x_m^{(p)}| + |x_m^{(p)} - x_m| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$
   при $\forall k, m > N$.

8. Пространство c_0 бесконечно малых последовательностей – подпространство c. Для доказательства полноты докажем замкнутость c_0 в c. $\varepsilon/2$-приём.

   Пусть $x^{(p)} \to x$ в c, $x^{(p)} \in c_0$. Докажем, что $x \in c_0$.

   По ε находим p: $\rho_\infty(x^{(p)}, x) < \varepsilon/2$. Поскольку $x^{(p)}$ бесконечно малая, найдётся $N \in \mathbb{N}\, \forall k > N : |x_k^{(p)}| < \varepsilon/2$. Тогда
   $|x_k| = |(x_k - x_k^{(p)}) + x_k^{(p)}| \le |x_k - x_k^{(p)}| + |x_k^{(p)}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

9. Пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с расстоянием $\rho_C(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$.

   Для доказательства полноты рассмотрим фундаментальную последовательность непрерывных функций $x_1(t), x_2(t), \ldots$ (теперь индексы ставим внизу). Первый шаг: доказываем поточечную сходимость (поскольку при каждом t имеем фундаментальную числовую последовательность). Осталось доказать, что предельная функция непрерывна (входит в наше пространство), и что сходимость к ней равномерная (по метрике пространства $C[a, b]$).

   Равномерность доказывается так же, как в l_∞. Для доказательства непрерывности предварительно вспоминаем теорему Кантора: непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна. Дальше доказываем равномперную непрерывность предельной функции, применив

$\varepsilon/3$-приём: p выбираем из условия $\rho_C(x, x_p) < \varepsilon/3$, δ из условия
$|t` - t``| < \delta \Rightarrow |x_p(t`) - x_p(t``)| < \varepsilon/3$, тогда
$|x(t`) - x(t``)| \leq |x(t`) - x_p(t`)| + |x_p(t`) - x_p(t``)| + |x_p(t``) - x(t``)| < \varepsilon$.
То есть предельная функция непрерывна.

10. Пространство $C^1[a,b]$ непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, $\rho_{C^1}(x,y) = \max\{\rho_C(x,y), \rho_C(\dot{x},\dot{y})\}$.
Докажем полноту. Рассмотрим фундаментальную в $C^1[a,b]$ последовательность $x_1(t), x_2(t), \ldots$. Она фундаментальна в $C[a,b]$, и последовательность производных $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \ldots$ также фундаментальна в $C[a,b]$. Сходятся равномерно каждая к своему пределу: первая к $x(t)$, вторая к $y(t)$. Нужно доказать, что, во-первых, $y(t) = \dot{x}(t)$, и, во-вторых, что это сходимость по метрике пространства $C^1[a,b]$.
Первый факт – ссылаемся на теорему из матанализа:
Пусть $\{u_k(t)\}$ и $\{v_k(t)\}$ – последовательности непрерывных на $[a,b]$ функций, причём $v_k(t) = \dot{u}_k(t)$. Пусть последовательность $\{v_k(t)\}$ сходится равномерно на $[a,b]$ к некоторой предельной функции $\{v(t)\}$, а $\{u_k(t)\}$ сходится хотя бы в одной точке на $[a,b]$. Тогда $\{u_k(t)\}$ также сходится равномерно на $[a,b]$ к некоторой функции $\{u(t)\}$, и справедливо равенство $v(t) = \dot{u}(t)$.
(Вспомнить доказательство!).
Второй факт доказывается так: знаем, что $\rho_C(x_k, x) \to 0$ и
$\rho_C(\dot{x_k}, \dot{x}) \to 0$. По ε находим $N_0(\varepsilon)$ и $N_1(\varepsilon)$, начиная с которых соответствующие расстояния меньше ε, тогда при
$k > N(\varepsilon) = \max\{N_0(\varepsilon), N_1(\varepsilon)\}$
оба расстояния меньше ε, а тогда и $\rho_{C^1}(x_k, x) < \varepsilon$.

11. Пространство $C^l[a,b]$ l раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a,b]$ функций,
$\rho_{C^l}(x,y) = \max\{\rho_C(x,y), \rho_C(\dot{x},\dot{y}), \rho_C(\ddot{x},\ddot{y}), \ldots, \rho_C(x^{(l)}, y^{(l)})\} =$
$= \max_{0 \leq s \leq l} \rho_C(x^{(s)}, y^{(s)})$
(верхний индекс в скобках – порядок производной, и, как обычно, под нулевыми производными понимаются сами функции). $C^1[a,b]$ – частный случай.
Полнота доказывается аналогично: рассматриваем последовательность $\{x_k\}$, фундаментальная в $C^l[a,b]$; дальше рассматриваем последовательности $\{x_k^{(s)}\}$ (при всевозможных s), показываем, что они фундаментальны в $C[a,b]$; в силу полноты $C[a,b]$ эти последовательности сходятся в $C[a,b]$ каждая к своему пределу z_s; дальше ссылаемся на ту же теорему, что и в предыдущем пункте, и получаем, что каждая последующая из этих функций есть производная предыдущей: $z_s = \dot{z}_{s-1}$, $s = 1, \ldots, l$; отсюда следует, что они суть последовательные производные функции z_0, и если переобозначить $z_0 = x$, то $z_s(t) = x^{(s)}(t)$. Таким образом, для любого s от нуля до l включительно $x_k^{(s)} \to x^{(s)}$ в метрике $C[a,b]$, т.е. $\rho_C(x_k^{(s)}, x^{(s)}) \to 0$. Дальше доказываем, что это на самом деле есть сходимость и в $C^l[a,b]$: по ε находим

$N_s(\varepsilon)$ для каждой из последовательностей, выбираем максимальное $N(\varepsilon) = \max_s N_s(\varepsilon)$ и показываем, что при $k > N(\varepsilon)$ будет выполнено неравенство $\rho_{C^l}(x_k, x) < \varepsilon$.
Замечание. Когда мы доказывали, что из покомпонентной сходимости в $\mathbb{R}^n$ следует сходимость по метрике $\mathbb{R}^n_{\max}$, логика была совершенно такая же.

12. $\mathbb{R}^n_1$: $\rho_1(x, y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$.
Здесь можно сослаться на тот факт, что нормы в $\mathbb{R}^n_1$ и в $\mathbb{R}^n_{\max}$ эквивалентны, поэтому фундаментальные последовательности в этих пространствах одни и те же, и сходящиеся последовательности также одни и те же. Поэтому из полноты $\mathbb{R}^n_{\max}$ следует полнота $\mathbb{R}^n_1$.
Докажем всё-таки непосредственно. Рассмотрим фундаментальную в $\mathbb{R}^n_1$ последовательность $\{x^{(p)}\}$ (в отличие от предыдущего случая, верхний индекс в скобках – снова номер элемента последовательности, а нижний – номер компоненты). Рассматриваем числовые последовательности $\{x^{(p)}_m\}$ (при фиксированном m) для каждой из компонент. Последовательности фундаментальны в E^1 (поскольку $|x^{(p)}_m - x^{(q)}_m| \leq \rho_1(x^{(p)}, x^{(q)})$), поэтому сходятся по критерию Коши. Значит, есть покомпонентная сходимость к вектору $x = (x_1, \dots, x_n)$. По ε находим $N_m(\varepsilon)$, начиная с которого $|x^{(p)}_m - x_m| < \varepsilon/n$, берём $N(\varepsilon) = \max_m N_m(\varepsilon)$ и показываем, что при $p > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho_1(x^{(p)}, x) < \varepsilon$.
Пространства разные, а приёмы доказательства однотипные.

13. l_1 – пространство бесконечных абсолютно суммируемых последовательностей ($\sum_{j=1}^\infty |x_j| < \infty\}$), $\rho_1(x, y) = \sum_{j=1}^\infty |x_j - y_j|$. Докажем полноту.
Рассмотрим фундаментальную в $\mathbb{R}^n_1$ последовательность $\{x^{(p)}\}$ и, как и раньше, числовые последовательности $\{x^{(p)}_m\}$ её компонент, доказываем покомпонентную сходимость (как в предыдущем пункте) к некоторой последовательности $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Нужно доказать, что эта последовательность принадлежит l_1, и что есть сходимость в смысле метрики этого пространства.
Мы уже видели на примере $\mathbb{R}^n_{\max}$, l_∞, c и c_0, что в бесконечномерных пространствах приходится действовать более аккуратно, чем в случае конечномернго аналога (в данном случае им является $\mathbb{R}^n_1$), и иногда искать новые приёмы доказательства.
Выпишем условие фундаментальности:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall p, q > N(\varepsilon) : \sum_{j=1}^\infty |x^{(p)}_j - x^{(q)}_j| < \varepsilon$
Обрежем ряд, заменив его конечной суммой. Неравенство не нарушится: $\sum_{j=1}^M |x^{(p)}_j - x^{(q)}_j| < \varepsilon$ (при тех же условиях на p, q). Здесь M – произвольное, но конечное.
Теперь перейдём в неравенстве к пределу при $q \to \infty$: поскольку сумма конечная, это заведомо можно сделать. При таком переходе $x^{(q)}_j$ превратятся в элементы предельной последовательности x_j, а строгое

неравенство превратится в нестрогое: $\sum_{j=1}^{M} |x_j^{(p)} - x_j| \le \varepsilon$.
Полученное неравенство означает, что частичные суммы ряда $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(p)} - x_j|$ с неотрицательными членами в совокупности ограничены. Отсюда следует, что этот ряд сходится, а из его сходимости следует и сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$, поскольку $|x_j| \le |x_j - x_j^{(p)}| + |x_j^{(p)}|$, а $x^{(p)} \in l_1$.
Далее, перейдя к пределу уже по M, получаем: $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(p)} - x_j| \le \varepsilon$, т.е. $\rho_1(x^{(p)}, x) \le \varepsilon$ при $p > N(\varepsilon)$, что и означает сходимость $x^{(p)} \to x$ в метрике l_1.

14. Пространство $C_{L_1}[a,b] = \tilde{L}_1[a,b]$ непрерывных на $[a,b]$ функций, $\rho_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt$. Это пример неполного МП.

    Утверждение. Если $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ и $x_k \to x$ в $\tilde{L}_1[a,b]$, то $x_k \to x$ в $\tilde{L}_1[\alpha,\beta]$.

    (Уточнение: разумеется, речь идёт о сужениях функций, определённых на более широком множестве $[a,b]$, на более узкое $[\alpha,\beta]$.)

    Пример последовательности $x_k \in \tilde{L}_1[-1,1]$, сходящейся в $\tilde{L}_1[-1,0]$ и в $\tilde{L}_1[0,1]$ к разным постоянным. Фундаментальна в $\tilde{L}_1[-1,1]$ (поскольку фундаментальна в $\tilde{L}_1[-1,0]$ и в $\tilde{L}_1[0,1]$). Не сходится. (От противного: если бы был предел в $\tilde{L}_1[-1,1]$, то это была бы непрерывная функция, совпадающая на $[-1,0]$ и на $[0,1]$ с разными константами.) Поточечный предел – разрывная функция.

    Второй пример рассмотрим для пространства $\tilde{L}_1[0,1]$:
    $x_k(t) = \min\{k, 1/\sqrt{t}\}$ (срезки функции $1/\sqrt{t}$). Фундаментальная (показать!). В любом пространстве вида $\tilde{L}_1[\delta,1]$ стабилизируется и сходится к $1/\sqrt{t}$. Если бы был предел, совпадал бы с $1/\sqrt{t}$ на $(0,1]$ (поскольку на произвольном $[\delta,1]$), но такая функция не может быть непрерывна в нуле. Более того, она неограничена и, тем самым, не интегрируема по Риману.

15. ПМП функций, интегрируемых на $[a,b]$ по Риману, с той же метрикой. Также неполно. Это видно из последнего примера.

    Замечание. Оказывается, ПМП функций, интегралы от которых абсолютно сходятся как несобственные, также неполно (без доказательства).

16. Пространство $\mathbb{R}_2^n = E^n$ с расстоянием $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2}$. Полное, поскольку норма эквивалентна нормам в $\mathbb{R}_1^n$ и $\mathbb{R}_{\max}^n$. Непосредственное доказательство – как для $\mathbb{R}_1^n$, но в самом конце условие $|x_m^{(p)} - x_m| < \varepsilon/n$ заменяется на $|x_m^{(p)} - x_m| < \varepsilon/\sqrt{n}$.

17. Пространство l_2 квадратично суммируемых бесконечных числовых последовательностей ($\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}$) с расстонием
    $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^2}$. Доказательство полноты очень похоже на

аналогичное доказательство для l_1.
Рассматриваем ФП $\{x^{(p)}\}$:
$\forall\varepsilon > 0\,\exists N(\varepsilon)\,\forall p, q > N(\varepsilon) : \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(p)} - x_j^{(q)}|^2} < \varepsilon$ (последнее неравенство удобно переписать в виде $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(p)} - x_j^{(q)}|^2 < \varepsilon^2$).
Доказываем покомпонентную сходимость к некоторой последовательности $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Выписываем неравенство для частичных сумм:
$\sum_{j=1}^{M} |x_j^{(p)} - x_j^{(q)}|^2 < \varepsilon^2$,
переходим к пределу при $q \to \infty$: $\sum_{j=1}^{M} |x_j^{(p)} - x_j|^2 \le \varepsilon^2$,
делаем вывод о сходимости ряда $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(p)} - x_j|^2$.
Это означает, что последовательность $\delta x^{(p)}$ с элементами
$\delta x_j^{(p)} = x_j^{(p)} - x_j$ принадлежит l_2.
Ссылаемся на доказанный ранее факт, что l_2 – это ЛП, поэтому
$x = x^{(p)} - \delta x^{(p)} \in l_2$.
Переходим к пределу при $M \to \infty$, получаем: $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(p)} - x_j|^2 \le \varepsilon^2$, то есть $\rho_2(x^{(p)}, x) \le \varepsilon$ при $p > N(\varepsilon)$, откуда следует сходимость $x^{(p)}$ к x по метрике l_2.

18. Пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $C_{L_2}[a, b] = \tilde{L}_2[a, b]$ с расстоянием $\rho_2(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\, dt}$ является неполным по тем же причинам, что и $\tilde{L}_1[a, b]$. Небольшое отличие: последовательность срезок для функции $1/\sqrt{t}$ в этом пространстве не будет фундаментальной, поскольку сама функция не является квадратично интегрируемой (интеграл от квадрата расходится), но можно взять, например, срезки для $1/\sqrt[4]{t}$