Раздел 6. Линейные нормированные пространства (ЛНП)

Лекция 10 Линейные пространства.

X – множество, элементы (векторы) обозначаем латинскими буквами.

Закон внутренней композиции (сложение элементов)
$+ : X \times X \to X$.

Коммутативная группа:

1. $\forall a, b \in X : a + b = b + a$ (коммутативность сложения)

2. $\forall a, b, c \in X : (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)

3. $\exists o \in X \, \forall a \in X : a + o = a$ (существование нейтрального по сложению элемента – нуля пространства)

4. $\forall a \in X \, \exists x \in X : a + x = o$ (существование для каждого элемента множества обратного (противоположного) по сложению элемента)

Следствия (свойства) - доказать:

а) Единственность нуля.
$\{\forall a \in X : a + x = a\} \Rightarrow x = o$

б) Более сильное свойство:
$\{\exists a \in X : a + x = a\} \Rightarrow x = o$

в) Единственность противоположного элемента:
$a + x = o \wedge a + y = o \Rightarrow x = y$
Обозначение: $x = (-a)$

г) Существование и единственность разности:
$\forall a, b \in X \, \exists! x \in X : a + x = b$
$x = b + (-a)$ Обозначение: $x = b - a$

Поле $\mathbb{K}$ (в основном будет $\mathbb{R}$, иногда $\mathbb{C}$). Элементы (числа) обозначаем греческими буквами.

Закон внешней композиции (умножение элемента на число)
$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ (точку обычно опускают)

5. $\forall a \in X : 1a = a$ (1 – единица поля $\mathbb{K}$, нейтральный элемент по умножению в поле).

6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \, \forall a \in X : (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ (ассоциативность умножения)

Два закона дистрибутивности:

7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \, \forall a \in X : (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$

8. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \, \forall a, b \in X : \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

Множество X с заданными законами внутренней и внешней композиции, удовлетворяющими восьми перечисленным аксиомам (на самом деле одна лишняя) называется линейным пространством (ЛП) над полем $\mathbb{K}$.

Ещё следствия (свойства) – доказать:

д) $\forall a \in X : 0a = o$ (0 – нуль поля $\mathbb{K}$, o – нейтральный элемент по сложению).

е) $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha o = o$

ж) $\alpha a = o \Rightarrow \alpha = 0 \vee a = o$

з) $\alpha a = \beta a \Rightarrow \alpha = \beta \vee a = o$

и) $\alpha a = \alpha b \Rightarrow \alpha = 0 \vee a = b$

$Y \subset X$ – линеал, если
$\forall x_{1,2} \in Y \, \forall \alpha_{1,2} \in \mathbb{K} : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in Y$
(замкнутость множества относительно линейных операций – сложения и умножения на число). Сам является ЛП. То, что в курсе линейной алгебры называли подпространством (мы это слово дальше будем использовать в более узком смысле). Всегда содержит o.

Отношение эквивалентности: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y$ (доказать выполнение свойств). Факторпространство X/Y. Линейные операции над классами.

$Q \subset X$ – система элементов (подмножество – обычно конечное или счётное).

$L(Q)$ – линейная оболочка Q, множество всевозможных линейных комбинеций элементов Q: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$. Конечные суммы. Наименьший линеал, содержащий Q. Линейная оболочка линеала – он сам.

Тривиальная и нетривиальные линейные комбинации. Линейная зависимость (независимость) системы элементов. Конечномерные ЛП. Размерность ЛП. Базис. Размерность линеала. Коразмерность линеала – размерность фактор-пространства. Бесконечномерные ЛП.

Примеры. l_1, l_2, l_∞, c, c_0, $C[a, b]$, $L_1[a, b]$, $L_2[a, b]$.

Линейные отображения ЛП. Отображение (оператор) $A : X \to Y$ линейно, если
$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$.
Совокупность аддитивности
$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$
и однородности
$A(\alpha x) = \alpha A(x)$.
Скобки для линейных операторов часто опускают. Если X конечномерно, достаточно задать на базисных элементах.

Изоморфизм ЛП: два пространства изоморфны, если существует взаимно однозначное линейное отображение (будем обозначать τ).

Изоморфизм всех конечномерных ЛП одной и той же размерности. (Базисным элементам сопоставляем базисные.)

Примеры. $\mathbb{K}^n$ (в частности, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$), $P_n[a, b]$. $P_n[a, b]$ изоморфно $\mathbb{R}^{n+1}$ (для вещественных многочленов).

Линейная зависимость (независимость) линеалов. Линеалы $Y \subset X$ и $Z \subset X$, линейно независимы, если
$y \in Y$, $z \in Z$, $y + z = o \Rightarrow y = z = o$.
Это эквивалентно тому, что $Y \cap Z = \{o\}$ (доказать!).

Прямая сумма линейно независимых линеалов:
$Y \dotplus Z = \{y + z, \, y \in Y, \, z \in Z\}$.

Единственность представления:
$y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \Rightarrow y_1 = y_2 \wedge z_1 = z_2$

(доказать!)

Пример: чётные и нечётные функции.

Если $X = Y + Z$ (прямая сумма), то X/Y изоморфно Z. Поэтому Z также иногда называют факторпространством.

Прямая сумма ЛП (над одним и тем же полем) – фактически декартово произведение, на котором заданы линейные операции (покомпонентно).

Линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$ называется выпуклой, если
$\alpha_j \in [0,1], j = 1, \dots, m \wedge \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$

Множество выпукло, если содержит все выпуклые линейные комбинации своих элементов.

Можно в определении ограничиться случаем $m = 2$ (доказать!). То есть достаточное (и, разумеется, необходимое) условие выпуклости (альтернативное определение): вместе с любой парой элементов множество содержит отрезок, их соединяющий. Иначе говоря: Q выпукло, если
$\forall x_{1,2} \in Q \, \forall \alpha_{1,2} \in [0,1] : \{\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in Q\}$
Замечание: в этом случае $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, поэтому условие может быть переписано: $\forall x_{1,2} \in Q \, \forall \alpha \in [0,1] : \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in Q$

Выпуклая оболочка множества Q – совокупность всевозможных выпуклых линейных комбинаций его элементов. Наименьшее выпуклое множество, содержащее Q. Выпуклая оболочка выпуклого множества – само это множество.

Пустое множество выпукло.

Линеал – выпуклое множество.

Пересечение любой совокупности выпуклых множеств выпукло.

Отображение ЛП и его график.
$F : X \to Y \, , Gr(F) = \{(x,y) \in X + Y : y = F(x)\}$

График вещественного функционала:
$f : X \to \mathbb{R} \, , Gr(f) = \{(x,y) \in X + \mathbb{R} : y = f(x)\}$

Надграфик: $epi(f) = \{(x,y) \in X + \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$

Подграфик: $\{(x,y) \in X + \mathbb{R} : y \leq f(x)\}$

Функционал называется выпуклым вниз (вверх), если его надграфик (подграфик) – выпуклое множество.

Замечание. В математике под выпуклым (без уточнения) функционалом понимается выпуклый вниз.

Если функционал f является выпуклым вниз (вверх), то множество
$\{x \in X : f(x) \leq c\}$ ($\{x \in X : f(x) \geq c\}$) выпукло.

Неравенство Йенсена – необходимое и достаточное условие выпуклости (вниз) функционала:
$\forall x_{1,2} \in X \, \forall \alpha \in [0,1] : f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$
Для выпуклости вверх неравенство в обратную сторону.

В более симметричном виде:
$\forall x_{1,2} \in X\, \forall \alpha, \beta \in [0,1] : \{\alpha + \beta = 1 \Rightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) \le \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)\}$
(Доказать)

Частный случай: $X \subset \mathbb{R}$. Выпуклость функций.

Утверждение. Если $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – выпуклая вверх функция, и $f(0) = 0$, то функция $\rho(t_1, t_2) = f(|t_1 - t_2|)$ – метрика на $\mathbb{R}$.

Утверждение. Если функция $f(x)$ непрерывна, кусочно дифференцируема и производная монотонно неубывающая (невозрастающая), то функция выпукла вниз (вверх).

Утверждение: функция $f(x) = x^p$ выпукла вниз на $\mathbb{R}_+$, если $p \ge 1$.

С помощью этого факта докажем неравенство Минковского
$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p}$,
которое нам понадобится в дальнейшем.

Применим неравенство Йенсена к функции x^p:
$(\alpha u + \beta v)^p \le \alpha u^p + \beta v^p$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \in [0,1]$, $u, v \ge 0$
($x_1 = u$, $x_2 = v$). Неравенство превращается в равенство при 1) $\alpha = 0$, $\beta = 1$, 2) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, 3) $u = v$, 4) $p = 1$.

Рассмотрим n-мерные вектора $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$ с неотрицательными компонентами, удовлетворяющие условию нормировки:
$\sum_{j=1}^n u_j^p = \sum_{j=1}^n v_j^p = 1$. Запишем для каждой пары компонент неравенство $(\alpha u_j + \beta v_j)^p \le \alpha u_j^p + \beta v_j^p$ и просуммируем по j:
$\sum_{j=1}^n (\alpha u_j + \beta v_j)^p \le \sum_{j=1}^n (\alpha u_j^p + \beta v_j^p) = \alpha \sum_{j=1}^n u_j^p + \beta \sum_{j=1}^n v_j^p = \alpha + \beta = 1.$
При $p > 1$ неравенство превращается в равенство либо при обращении в 0 одного из коэффициентов α или β, либо при совпадении векторов u и v.

Пусть теперь A, B – произвольные неотрицательные числа. Обозначим $\alpha = A/(A + B)$, $\beta = B/(A + B)$, $\alpha + \beta = 1$.
Тогда
$A = (A + B)\alpha$, $B = (A + B)\beta$,
и
$\sum_{j=1}^n (Au_j + Bv_j)^p = (A + B)^p \sum_{j=1}^n (\alpha u_j + \beta v_j)^p \le (A + B)^p.$
При $p > 1$ неравенство превращается в равенство либо при $AB = 0$, либо при $u = v$.

Пусть теперь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – n-мерные вектора с неотрицательными компонентами. Представим их в виде $x = Au$, $y = Bv$, где u и v удовлетворяют условию нормировки. Тогда
$\sum_{j=1}^n x_j^p = A^p \sum_{j=1}^n u_j^p = A^p$,
$\sum_{j=1}^n y_j^p = B^p \sum_{j=1}^n v_j^p = B^p$,
т.е.
$A = \left(\sum_{j=1}^n x_j^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{j=1}^n y_j^p\right)^{1/p}$.
Отсюда
$\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^p = \sum_{j=1}^n (Au_j + Bv_j)^p \le (A + B)^p.$
При $p > 1$ неравенство превращается в равенство, если вектора x и y отличаются множителем.

Откажемся от предположения о неотрицательности компонент векторов x и y и применим полученное неравенство к их абсолютным величинам. Тогда
$\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^p \le \sum_{j=1}^{n}(|x_j|+|y_j|)^p \le (A+B)^p$,
где теперь уже
$A=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p}$, $B=\left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p\right)^{1/p}$.
При $p>1$ неравенство превращается в равенство, если вектора x и y отличаются неотрицательным множителем, а при $p=1$ – если совпадают знаки x_j и y_j при одинаковых j.

(Замечание. Можно вектора считать комплексными, ничего не изменится.)

Извлекая корень p-ой степени из левой и правой части (p не обязательно целое), получаем неравенство Минковского:
$\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p\right)^{1/p}$.

Частными случаями этого неравенства при $p=1,2$ являются неравенства треугольника для $\mathbb{R}_1^n$ и E^n.

Обобщим неравенство Минковского на бесконечные последовательности. Пусть x и y – последовательности, для которых сходятся ряды из p-х степеней модулей:
$\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p<\infty$, $\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^p<\infty$.
Тогда
$\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j+y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{n}|y_j|^p\right)^{1/p} \le$
$\le \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^p\right)^{1/p} < \infty$.
Это значит, что ряд с неотрицательными членами $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p$ сходится, поскольку его частичные суммы ограничены в совокупности. Поэтому множество последовательностей, суммируемых с p-ой степенью, образует линейное пространство относительно покомпонентного сложения и умножения (поскольку при одновременном умножении всех элементов последовательности на общий множитель сходимость ряда не нарушается).

Теперь мы можем перейти к пределу при $n\to\infty$ в левой части нестрого неравенства и получить неравенство Минковского для рядов:
$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j+y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty}|x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}|y_j|^p\right)^{1/p}$.

Аналог для функций. Вместо последовательностей – функции $x(t)$ и $y(t)$, вместо суммирования интегрирование. Представляем $|x(t)|$ и $|y(t)|$ в виде произведения константы на нормированные функции: $|x(t)|=Au(t)$, $|y(t)|=Bv(t)$, где

$$A=\left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p},\ B=\left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p},$$

тогда

$$\int_a^b u^p(t)\,dt = \int_a^b v^p(t)\,dt = 1$$

(проверьте!). Обозначив, как и раньше, $\alpha = A/(A+B)$, $\beta = B/(A+B)$, получим:

$$\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt \le \int_a^b (|x(t)|+|y(t)|)^p\,dt =$$

$$= \int_a^b (Au(t)+Bv(t))^p\,dt = (A+B)^p \int_a^b (\alpha u(t)+\beta v(t))^p\,dt \le$$

$$\le (A+B)^p \int_a^b (\alpha u^p(t)+\beta v^p(t))\,dt =$$

$$= (A+B)^p \left(\alpha \int_a^b u^p(t)\,dt + \beta \int_a^b v^p(t)\,dt\right) =$$

$$= (A+B)^p(\alpha+\beta) = (A+B)^p =$$

$$= \left[\left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\right]^p,$$

откуда, извлекая корень p-ой степени, получаем неравенство Минковского для функций:

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$