Раздел 5. Компактность

Лекция 9 Свойства непрерывных функционалов на компакте.

Непрерывные функционалы на компакте обладают многими свойствами, которые нам знакомы из курса матанализа применительно к непрерывным функциям на отрезке. Доказательства фактически повторяют те, которые были в первом семестре, на немного другом языке.

Теорема. Непрерывный функционал на компакте ограничен.

Пусть X – компакт, $f : X \to \mathbb{R}$ – непрерывный функционал. Установим, что он ограничен.

Доказательство от противного. Пусть функционал неограничен, тогда $\forall m \, \exists x_m \in X : |f(x_m)| > m$. Это значит, что последовательность $\{f(x_m)\}$ – бесконечно большая числовая последовательность, и таковы же все её подпоследовательности.

Поскольку X – компакт, у последовательности $\{x_m\}$ найдётся сходящаяся подпоследовательность $\{x_{m'}\}$, предел которой обозначим x_*. Тогда в силу непрерывности f (по Гейне-Борелю) получаем: $f(x_{m'}) \to f(x_*)$. Но сходящаяся последовательность ограничена, что противоречит тому, что она должна быть бесконечно большой. Теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива для произвольного непрерывного отображения $F : X \to Y$, где X – компакт, а Y – некоторое метрическое пространство.

Теорема. Непрерывный оператор на компакте ограничен.

Ограниченность оператора на компакте – это ограниченность множества его значений. Это множество ограничено в Y, если ограничено числовое множество значений расстояния от элементов множества до произвольного фиксированного элемента $y_* \in Y$. Последнее означает ограниченность множества значений функционала $f(x) = \rho_Y(F(x), y_*)$. Функционал f непрерывен как композиция непрерывного отображения F и непрерывного в Y функционала $\rho_Y(y, y_*)$ (относительно первого аргумента). По доказанной выше теореме он ограничен, откуда и вытекает ограниченность F.

Замечание. Последнюю теорему можно доказать и непосредственно, просто заменив в доказательстве ограниченности непрерывного функционала на компакте $|f(x_m)|$ на $\rho_Y(F(x_m), y_*)$. При этом нужно сослаться на непрерывность расстояния.

Другая формулировка: образ компакта при непрерывном отображении ограничен.

Следствие. Если непрерывный функционал (оператор) на МП X неограничен, то X – не компакт.

Пример: $\mathrm{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to E^1$. Функция тангенс отображает интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ на вещественную ось. Это признак того, что область определения тангенса – интегрвал – компактом не является.

Следствие. Если функционал (оператор) на компакте неограничен, то функционал (оператор) не является непрерывным.

Пример: Продолжим функцию tg на отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$, т.е. рассмотрим функцию $f(x)$ такую, что $f(x) = \operatorname{tg} x$ при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, и положим $f(-\pi/2) = A$, $f(\pi/2) = B$ (A и B – некоторые числа). Функция f, неограниченная на компакте $[-\pi/2, \pi/2]$, имеет разрывы на границах отрезка.

Переходим к обобщению теоремы Вейерштрасса.

Теорема. Верхняя и нижняя грани множества значений непрерывного функционала на компакте достигаются.

Иными словами, существуют такие элементы компакта, значения функционала на которых совпадают с супремумом и инфинумом (которые, таким образом, становятся максимумом и минимумом). Ещё раз подчеркнём, что пустое множество мы исключили из рассмотрения.

Доказательство проведём для sup (с inf аналогично). В силу доказанной выше теоремы,

$$M = \sup_{x \in X} f(x) < \infty\,.$$

Тогда существует максимизирующая последовательность $\{x_m\}$:
$f(x_m) \to M$. К этому же пределу стремятся значения f на любой подпоследовательности.
Поскольку X – компакт, найдётся сходящаяся подпоследовательность
$x_{m'} \to x_*$, где $x_* \in X$ – её предел. В силу непрерывности f, $f(x_{m'}) \to f(x_*)$.
С другой стороны, $f(x_{m'}) \to M$. Поэтому $f(x_*) = M$. Теорема доказана.

Пример. Пусть X – метрическое пространство, а $A \subset X$ – компакт. Зафиксируем некоторый элемент $x \in X$ и рассмотрим функционал
$f(y) = \rho(x, y)$, где $y \in A$. Согласно доказанной теореме, этот функционал принимает на A наименьшее и наибольшее значение, т.е. для произвольного элемента $x \in X$ существуют ближайший к нему элемент компакта A (возможно, не единственный), а также наиболее удалённый. Отсюда, в частности, следует, что $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) = \min_{y \in A} \rho(x, y)$.

Замечание. Теорема, в отличие от предыдущей, на операторы не обобщается. Тем не менее, если $F : X \to Y$ – непрерывный оператор, то мы можем рассмотреть произвольный непрерывный функционал $g : Y \to E^1$ и сопоставить ему непрерывный функционал $f : X \to E^1$ по правилу $f(x) = g(F(x))$, который уже будет принимать свои наибольшее и наименьшее в некоторых точках компакта X. В частности, это справедливо для упомянутого выше функционала $f(x) = \rho_Y(F(x), y_*)$.

Следствие. Если верхняя или нижняя грань множества значений непрерывного функционала на МП X не достигается, то X – не компакт.

Пример. Тождественное отображение $f(x) = x$ на интервале $(-1, 1)$. Ни верхняя, ни нижняя грани, равные 1 и -1 соответственно, не достигаются, что свидетельствует о том, что интервал $(-1, 1)$ не является компактом.

Пример. Рассмотрим функционал $f : C[-1, 1] \to E^1$:

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, dt - x(0)\,.$$

Рассмотрим множество значений этого функционала на единичном замкнутом шаре

$$\bar{S}_1(0) = \{x \in C[-1, 1] : \max_{t \in [-1,1]} |x(t)| \leq 1\}$$

Точная верхняя грань этого множества равна 3 и не достигается.

Действительно, наибольшее значение первого слагаемого (интеграла) равно 2 и достигается при $x(t)$, тождественно равном единице. Наибольшее значение второго слагаемого, равного $-x(0)$, достигается при $x(0) = -1$ и равно 1. Условия максимальности слагаемых противоречат друг другу, так что одновременно эти слагаемые не могут принимать свои наибольшие значения, и функционал ни на какой функции на шаре значения 3 не принимает. Тем не менее, если функция $x(t)$ равна единице за пределами отрезка $[-\delta, \delta]$, равна минус единице при $t = 0$ и непрерывна (например, кусочно линейна), то $f(x) \geq 3 - 4\delta$. В силу произвольности δ заключаем, что

$$\sup_{x \in \bar{S}_1(0)} f(x) = 3\,.$$

Это свидетельствует о том, что $\bar{S}_1(0)$ не является компактом в $C[-1, 1]$. Действительно, это множество ограничено, замкнуто, но не является равностепенно непрерывным.

Если же взять компакт в пространстве $C[-1, 1]$ (замкнутое ограниченное равностепенно непрерывное множество – например, потребовать дополнительно выполнения условия Липшица с единой для всего множества константой), то произвольный непрерывный на $C[-1, 1]$ функционал будет принимать на нём наибольшее и наименьшее значения.

Следствие. Если функционал на компакте не достигает своей верхней (нижней) грани, то функционал не является непрерывным.

Пример. На отрезке $[-1, 1]$ рассмотрим функцию $f(x)$, такую, что
$f(x) = x$ при $x \in (-1, 1)$, и $f(-1) = f(1) = 0$. Ни верхняя, ни нижняя грани, равные 1 и -1 соответственно, не достигаются, функция f имеет разрывы на границах отрезка.

Эти две теоремы могут быть получены как следствие того факта, что непрерывный образ компакта – компакт.

Докажем этот факт, а потом получим утверждения теорем как следствия.

Пусть $F : X \to Y$ – непрерывное отображение, X – компакт. Тогда $F(X) \subset Y$ – также компакт. Действительно, пусть
$\{y_m \in F(X), m = 1, 2, \dots\}$ – некоторая последовательность. Прообраз каждого её элемента непуст, тогда можно рассмотреть последовательность
$\{x_m \in X : F(x_m) = y_m, m = 1, 2, \dots\}$
Поскольку X – компакт, найдётся сходящаяся подпоследовательность
$x_{m'} \to x_* \in X$. Тогда $y_{m'} = F(x_{m'}) \to F(x_*)$ в силу непрерывности F, и тогда $\{y_{m'}\}$ – искомая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{y_m\}$. Отсюда следует, что $F(X)$ – компакт.

Поскольку компакт – ограниченное множество, получаем утверждение первой теоремы.

Кроме того, компакт – замкнутое множество (и полное МП). Если рассматривается функционал, то $f(X)$ – компакт на числовой оси, т.е. замкнутое ограниченное множество. Такое множество содержит свою точную верхнюю и нижнюю грани, которые, тем самым, являются образами некоторызх элементов из множества X.

Теорема о том, что непрерывная функция на отрезке принимает все значения, заключённые между минимальным и максимальным, не имеет аналога для произвольного компакта. Она неверна уже для некоторых компактов на вещественной оси – например, для объединения двух непересекающихся отрезков, или для конечного множества.

Следующая теорема – обобщение теоремы Кантора:

Теорема. Функционал, непрерывный на компакте, равномерно непрерывен.

Доказательство от противного. Пусть равномерной непрерывности нет, тогда
$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists \hat{x}, \tilde{x} : \{\rho(\hat{x}, \tilde{x}) < \delta \wedge |f(\hat{x}) - f(\tilde{x})| > \varepsilon\}$
Рассмотрим числовую последовательность $\delta_m \to 0$ и соответствующие ей последовательности
$\hat{x}_m, \tilde{x}_m \in X : \{\rho(\hat{x}_m, \tilde{x}_m) < \delta_m \wedge |f(\hat{x}_m) - f(\tilde{x}_m)| > \varepsilon\}$
В силу первого условия эти последовательности эквивалентны, тогда эквивалентны и любые их подпоследовательности, отвечающие одинаковым наборам индексов.

Поскольку X – компакт, у последовательности $\{\hat{x}_m\}$ найдётся сходящаяся подпоследовательность $\{\hat{x}_{m'}\}$, предел которой обозначим x_*. Но тогда эквивалентная ей подпоследовательность второй последовательности $\{\tilde{x}_{m'}\}$ (с теми же индексами) сходится к тому же пределу.
Тогда в силу непрерывности f (по Гейне-Борелю),
$f(\hat{x}_{m'}) \to f(x_*)$ и $f(\tilde{x}_{m'}) \to f(x_*)$,
откуда $|f(\hat{x}_{m'}) - f(\tilde{x}_{m'})| \to 0$,
что противоречит неравенству $|f(\hat{x}_{m'}) - f(\tilde{x}_{m'})| > \varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема обобщается на непрерывные операторы $F : X \to Y$, заданные на компакте. Доказательство отличается заменой $|f(\hat{x}_{m'}) - f(\tilde{x}_{m'})|$ на

$\rho(F(\hat{x}_{m'}), F(\tilde{x}_{m'}))$

Теорема. Оператор, непрерывный на компакте, равномерно непрерывен.

Доказательство от противного. Пусть равномерной непрерывности нет, тогда
$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists \hat{x}, \tilde{x} : \{\rho(\hat{x}, \tilde{x}) < \delta \wedge \rho(F(\hat{x}), F(\tilde{x})) > \varepsilon\}$
Рассмотрим числовую последовательность $\delta_m \to 0$ и соответствующие ей последовательности
$\hat{x}_m, \tilde{x}_m \in X : \{\rho(\hat{x}_m, \tilde{x}_m) < \delta_m \wedge \rho(F(\hat{x}_{m'}), F(\tilde{x}_{m'})) > \varepsilon\}$

Поскольку X – компакт, у последовательности $\{\hat{x}_m\}$ найдётся сходящаяся подпоследовательность $\{\hat{x}_{m'}\}$, предел которой обозначим x_*. Но тогда эквивалентная ей подпоследовательность второй последовательности $\{\tilde{x}_{m'}\}$ (с теми же индексами) сходится к тому же пределу.
Тогда в силу непрерывности F (по Гейне-Борелю),
$F(\hat{x}_{m'}) \to F(x_*)$ и $F(\tilde{x}_{m'}) \to F(x_*)$,
откуда $\rho(F(\hat{x}_{m'}), F(\tilde{x}_{m'})) \to 0$,
что противоречит неравенству $\rho(F(\hat{x}_{m'}), F(\tilde{x}_{m'})) > \varepsilon$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть X – компакт, а $\tilde{X} \subset X$ – некоторое его подмножество (разумеется, предкомпактное). Произвольное отображение F, непрерывное на X, согласно теореме Кантора будет равномерно непрерывно на X, а, следовательно, и на $\tilde{X}$.
Поэтому если некоторое отображение G, заданное на $\tilde{X}$, непрерывно, но не равномерно непрерывно, то оно заведомо *не может* быть продолжено на X с сохранением свойства непрерывности.

Замечание. Ранее было доказано, что если $\tilde{X} \subset X$, причём $\tilde{X}$ плотно в X (компактность X не предполагалась), то *равномерно* непрерывное отображение, отображающее $\tilde{X}$ в некоторое полное пространство, *может* быть единственным образом продолжено на X с сохранением свойства непрерывности.