Раздел 7. Линейные операторы в ЛНП

Лекция 16 Произведение операторов. Обратный оператор.

Пусть X, Y, Z – ЛП; $A : X \to Y$, $B : Y \to Z$ – операторы.
Произведение операторов $C = BA : X \to Z$ – это композиция отображений: $C = BA \Leftrightarrow C(x) = (BA)(x) = B(A(x))$.

Утверждение: если A и B – линейные операторы, то C также линеен.

Пусть $A : X \to Y$ – оператор.
Если $A : X \to Y$ биекция, то $\forall y \in Y \, \exists! x \in X$, для которого $Ax = y$
Оператор, отображающий y в x – обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$.

Утверждение: если A – линейный оператор, то A^{-1} также линейный.

Утверждение: если операторы $A : X \to Y$, $B : Y \to Z$ обратимы, то оператор $BA : X \to Z$ также обратим, и $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.

Утверждение: $C = A^{-1} \Leftrightarrow CA = E_X \wedge AC = E_X$ (доказать)
(это альтернативное опеределение обратного оператора).

Если A инъективный, но не сюрьективный, то обратный оператор определён на образе оператора A. Уравнение $Ax = y$ имеет решение лишь тогда, когда y принадлежит образу оператора. Решение если есть, то единственно: $Ax_1 = y \wedge Ax_2 = y \Rightarrow x_1 = x_2$.

Утверждение: A – инъективен $\Leftrightarrow$ ядро оператора тривиально.

Левый обратный оператор: $BA = E_X$. Его существование гарантирует инъективность A и единственность решения операторного уравнения. (доказать)

Если A сюрьективный, но не инъективный, то образ оператора A – всё пространство Y, и уравнение $Ax = y$ имеет решение лишь при любом y, но не единственное.

Утверждение: общее решение уравнения $Ax = y$ есть частное его решение плюс произвольный элемент ядра оператора.

Аналог обратного отображения – в факторпространство $X/KerA$.

Правый обратный оператор: $AD = E_Y$. Его существование гарантирует сюрьективность A и существование решения операторного уравнения. (доказать)

Утверждение: $\exists B, D : BA = E_X \wedge AD = E_Y \Rightarrow B = D = A^{-1}$ (доказать)
Т.е. если одновременно существуют правый и левый обратный, то существует просто обратный, который совпадает с левым и правым. Оператор A биективен, операторное уравнение однозначно разрешимо при любой правой части.

Пусть теперь пространства не просто линейные, а нормированные.

Утверждение: произведение ограниченных линейных операторов – ограниченный линейный оператор, его норма не превышает произведения норм сомножителей: $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$ (доказать).

В частности, если A и A^{-1} – ограниченные операторы, то
$cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$ (доказать)

Замечание: эта величина называется числом обусловленности оператора A.

Утверждение: произведение непрерывного оператора и оператора конечного ранга (в любом порядке) – оператор конечного ранга. (доказать)

Утверждение: произведение непрерывного оператора и вполне непрерывного оператора (в любом порядке) – вполне непрерывный оператор. (доказать)

Утверждение: произведение непрерывного оператора и компактного оператора (в любом порядке) – компактный оператор. (доказать)

Утверждение: если оператор $A : X \to Y$ компактен, и пространство X бесконечномерно, то у него не может быть ограниченного обратного. (доказать)

Это значит, что уравнение $Ax = y$ либо не является однозначно разрешимым, либо малые изменения правой части (вектора y) могут привести к большим изменениям решения (вектора x). Некорректная задача.

Пример: интегральное уравнение Фредгольма первого рода.

Возникает вопрос об условиях, обеспечивающих корректность задачи, т.е. существование ограниченного обратного оператора. Для этого сначала обсудим круг вопросов, относящихся к знаменитой теореме Банаха о замкнутом графике и её следствию – теореме Банаха о непрерывной биекции (см. ниже).

Напоминание: графиком линейного оператора $A : X \to Y$ называется множество $Gr(A) = \{(x, y) \in X + Y : y = Ax\}$. Здесь $X + Y$ – прямая сумма линейных пространств X и Y, т.е. декартово произведение с введённой на нём линейной структурой: если $z_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2})$, то
$\alpha z_1 + \beta z_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$.

Замечание. В частном случае пространства X и Y могут совпадать.

Проекция графика на X есть область определения оператора, проекция на Y – область значений.

Утверждение: график оператора – линеал в $X + Y$. Действительно, если $z_{1,2} \in Gr(A)$, то $y_{1,2} = Ax_{1,2}$. Тогда
$\alpha z_1 + \beta z_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha Ax_1 + \beta Ax_2) =$
$= (\alpha x_1 + \beta x_2, A(\alpha x_1 + \beta x_2)) \in Gr(A)$

Напоминаем, что линеал в $X + Y$ называется линейным отношением (частный случай декартова отношения). Тогда график оператора – это функциональное линейное отношение.

Утверждение. Для того, чтобы линейное отношение G было графиком какого-либо оператора, необходимо и достаточно, чтобы из $(o_X, y) \in G$ следовало $y = o_Y$.

Доказательство. Необходимость очевидна: если $G = Gr(A)$, то
$(o_X, y) \in Gr(A) \Rightarrow y = Ao_X = o_Y$. Докажем достаточность.
Из линейности G вытекает, что $(x, y_2) - (x, y_1) = (o_X, y_2 - y_1) \in G$, откуда $y_2 - y_1 = o_Y$ и $y_2 = y_1$. Это значит, что для произвольного $x \in X$ найдётся не

более одного элемента $(x, y) \in G$. Область определения оператора определяется условием $D(A) = \{x \in X : \exists (x, y) \in G\}$, область значений – условием $R(A) = \{y \in Y : \exists (x, y) \in G\}$, а действие оператора на этой облсти – условием $y = Ax \Leftrightarrow (x, y) \in G$. Линейность оператора (и его областей определения и значений) вытекает из линейности G (докажите).

Рассмотрим теперь прямую сумму $Y + X$ (с обратном порядке) и линейное отношение $\{(y, x) : y = Ax\}$, или, иначе, $\{(y, x) : (x, y) \in Gr(A)\}$. Это отношение, обратное к $Gr(A)$, и отличается от него перестановкой x и y. Оно является графиком некоторого оператора (обратного к A) если и только если $\{(o_Y, x) : o_Y = Ax\} \Rightarrow x = o_X$, т.е. мы снова пришли к условию тривиальности ядра оператора A (в терминах графика оператора $KerA = \{x \in X : (x, o_Y) \ \in Gr(A)\}$).

Пусть теперь X, Y – ЛНП, тогда на прямой сумме $X + Y$ можно ввести норму по правилу $\|z\| = \|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ (убедитесть в выполнении свойств нормы). Тогда можно говорить об открытых, замкнутых множествах, сходимости, полноте и т.д.

Очевидно, мы можем точно так же ввести норму на $Y + X$ по правилу $\|(y, x)\| = \|y\|_Y + \|x\|_X$. В этом случае мы получим изометрическую копию пространства $X + Y$, а оператор, осуществляющий изометрию – линейный оператор, переставляющий местами x и y.

Оператор называется замкнутым, если его график замкнут.

Утверждение. Если оператор A замкнут и обратим, то оператор A^{-1} также замкнут.
Это вытекает из того, что графики этих операторов – изометрические копии друг друга.

Разберёмся, что означает замкнутость графика оператора.
Точка (x^*, y^*) является предельной точкой $Gr(A)$, если существует такая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in D(A)$, что одновременно $x_n \to x^*$ и
$y_n = Ax_n \to y^*$. График замкнут, если все такие точки в нём содержатся, т.е. если $x^* \in D(A)$ и $Ax^* = y^*$.

Если же график оператора незамкнут, то это означает, что найдётся такая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in D(A)$, что одновременно $x_n \to x^*$ и $y_n = Ax_n \to y^*$, но при этом либо $x^* \notin D(A)$, либо $Ax^* \neq y^*$.
В первом случае мы можем попробовать построить расширение оператора, замкнув его график (такая операция называется замыканием оператора). В результате замыкания линеала мы получим некоторое подпространство в $X + Y$ – линейное отношение, но остаётся вопрос, будет ли оно графиком какого-либо оператора. Для этого, как мы знаем, необходимо, чтобы оно не содержало элементов вида (o_X, y) при $y \neq o_Y$. Это значит, что исходный график не должен иметь предельных точек такого вида, т.е. чтобы для последовательностей $x_n \in D(X)$, $x_n \to o_X$ соответствующие последовательности $y_n = Ax_n$ либо стремились к o_Y, либо расходились.

Утверждение. Если оператор A ограничен, и его область опредения замкнута, то график этого оператора также замкнута.

Доказательство. Пусть $x_n \to x^*$ и $y_n = Ax_n \to y^*$. Поскольку $D(A)$ замкнута, то $x^* \in D(A)$. Но тогда в силу непрерывности $Ax_n \to Ax^*$, откуда $Ax^* = y^*$.

Замечание. Это относится, в том числе, к полноопределённым операторам, для которых $D(A) = X$.

Замечание. Если область определения непрерывного линейного оператора – незамкнутый линеал, то его график также незамкнут. Однако такой оператор можно единственным образом продолжить по непрерывности на замыкание области определения.

Утверждение. Замкнутый оператор с незамкнутой областью определения неограничен. (Доказать)

Утверждение. Если непрерывный оператор, определённый на подпространстве, обратим, то обратный оператор замкнут.
Это следует из того, что графики этих операторов – изометрические копии и замкнуты одновременно.

Замечание. Мы видели, что у компактного оператора в бесконечномерном пространстве не может быть ограниченного обратного. Тем не менее, если ядро компактного оператора тривиально, то обратный оператор (неограниченный) существует, и он замкнут.

Утверждение. Если $A : X \to Y$ – инъективный ограниченный полноопределённый оператор с незамкнутой областью значений, то обратный оператор, определённый на области значений A, неограничен. (доказать)

Приведём без доказательства следующую теорему:

Теорема Банаха о замкнутом графике.

Пусть пространства X и Y банаховы, а $A : X \to Y$ – линейный оператор с замкнутой областью определения и замкнутым графиком. Тогда оператор A ограничен.

Замечание. В частности, это касается операторов, у которых область определения – всё пространство X. В принципе в формулировке теоремы можно было бы ограничиться этим случаем, поскольку замкнутое подпространство банахова пространства само является банаховым пространством.

Замечание. Это касается также линейных функционалов на банаховых пространствах.

Замечание. То, что ограниченный оператор с замкнутой областью определения замкнут, мы уже знали. Теперь знаем, что замкнутый оператор с замкнутой областью определения ограничен.

Следствие. Если неограниченный оператор, определённый на всём пространстве, замкнут, то пространство не банахово (неполное).

Следствие. Если неограниченный оператор, действующий из банахова пространства в банахово, замкнут, то его область определения – незамкнутый линеал (часто – плотное множество). Именно с такими неограниченными операторами (в частном случае – функционалами) мы, как правило, и имеем дело.

Следствие. Если область определения неограниченного оператора, действующего из банахова пространства в банахово, совпадает со всем пространством, то график оператора незамкнут. Это значит, что найдётся сходящаяся последовательность $x_n \to x^*$, для которой $y_n = Ax_n \to y^* \neq Ax^*$. Тогда $A(x_n - x^*) \to y^* - Ax^* \neq o_Y$. То есть последовательность значений оператора на некоторой бесконечно малой последовательности $x_n - x^* \to o_X$ не просто не стремится к нулю пространства Y, но стремится к пределу, отличному от нуля.

Ещё одним важным следствием теоремы о замкнутом графике является

Теорема Банаха о непрерывной биекции.

Пусть $A : X \to Y$ – непрерывный оператор, биективно отображающий банахово пространство X на банахово пространство Y. Тогда обратный оператор A^{-1} также непрерывен.

Доказательство: Поскольку A осуществляет биекцию, обратный оператор A^{-1} существует и определён на всём пространстве Y. Поскольку A непрерывен и определён на всём пространстве X, его график замкнут, тогда график обратного оператора также замкнут. То есть A^{-1} – полноопределённый оператор с замкнутым графиком и, следовательно, он непрерывен по теореме о замкнутом графике.

Следствие. Пусть $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ и $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ – ЛНП с одним и тем же носителем, при этом нормы не эквивалентны и норма $\|\cdot\|_2$ подчинена норме $\|\cdot\|_1$: $\exists \kappa \forall x \in X : \|x\|_2 \leq \kappa \|x\|_1$. Тогда пространства $X_{1,2}$ не могут быть одновременно полными (банаховыми).
Доказательство. Оператор вложения из X_1 в X_2 непрерывен и обратим. Если бы пространства $X_{1,2}$ были банаховыми, то по теореме о непрерывной биекции обратный оператор также был бы непрерывен, что означало бы эквивалентность норм. Следовательно, пространства $X_{1,2}$ одновременно банаховыми быть не могут.
Пример: пространства $C[a,b]$ и $\tilde{L}_p[a,b]$. Носитель – множество непрерывных функций, норма в $\tilde{L}_p[a,b]$ подчинена норме в $C[a,b]$, при этом нормы не эквивалентны. ЛНП $\tilde{L}_p[a,b]$ полными не являются.

Следствие. Пусть A – компактный оператор, действующий из бесконечномерного банахова пространства X в банахово пространство Y. Тогда либо его образ незамкнут, либо он имеет нетривиальное ядро. (доказать)

Следствие. Если $A : X \to Y$ – непрерывно обратимый неограниченный оператор, а X и Y – банаховы пространства, то область определения A не может совпадать с X и представляет собой незамкнутый линеал. (доказать)

Перейдём теперь к рассмотрению другого круга идей, не связанного с теоремой о замкнутом графике. Откажемся от предположения о банаховости пространств X и Y и непрерывности A. Справедлива следующая теорема:

Теорема. Достаточное условие непрерывной обратимости линейного оператора.

Пусть $A : X \to Y$ – линейное отображение ЛНП X на ЛНП Y такое, что $\exists m > 0 \, \forall x \in X : \|Ax\| \geq m\|x\|$.
Тогда существует ограниченный обратный оператор A^{-1}, и
$\|A^{-1}\| \leq m^{-1}$.

Доказательство.
Сюрьективность дана в условии.
Ядро тривиально: $Ax = o \Rightarrow 0 \geq m\|x\| \Rightarrow x = o$
Тогда оператор инъективен, биективен, обратим.
$\forall x \in X : \|Ax\| \geq m\|x\| \Leftrightarrow \forall y \in Y : \|y\| \geq m\|A^{-1}y\|$
Отсюда оценка для нормы.

Следующая теорема касается ограниченного оператора, действующего из банахова пространства в это же пространство.

Теорема Банаха об обратном операторе.

Пусть $A : X \to X$ – ограниченный линейный оператор, X – банахово пространство, $\|A\| < 1$. Тогда оператор $E - A$ имеет ограниченный обратный, и $\|(E - A)^{-1}\| < (1 - \|A\|)^{-1}$.

Следствием теоремы Банаха явлшяется следующая теорема:

Теорема Пусть $A : X \to Y$ – непрерывно обратимый оператор, и по крайней мере одно из пространств X, Y – банахово. Пусть $B : X \to Y$ – ограниченный линейный оператор, и $\|A^{-1}\| \cdot \|B\| < 1$. Тогда оператор $A + B$ непрерывно обратим.

Замечание. В условии теоремы не требуется, чтобы оператор A был ограниченным. Если A неограничен, то его область определения, как правило – незамкнутый линеал, который выступает в роли X. Тогда для выполнения теоремы необходимо, чтобы банаховым было пространство Y.

Замечание. Если считать, что A – не только непрерывно обратимый, но и непрерывный оператор, то теорему можно интерпретировать следующим образом: у каждого непрерывно обратимого оператора в пространстве $L_O(X, Y)$ найдётся окрестность, все элементы которой также непрерывно обратимы. Это означает, что множество непрерывно обратимых операторов открыто в $L_O(X, Y)$, а множество операторов, не имеющих ограниченного обратного – соответственно, замкнуто.

Необходимое условие существования решения операторного уравнения $Ax = y$.

Здесь мы не предполагаем, что A инъективен, так что о единственности речи не идёт, вопрос о существовании. Мы хотим узнать, принадлежит ли

y области значений оператора. В конечномерном случае ответ даёт теорема Кронекера-Капелли. В бесконечномерных задачах универсального ответа нет, но мы можем указать условие, при нарушении которого уравнение заведомо не имеет решения.

Применим функционал f к левой и правой части: $f(Ax) = f(y)$.
Преобразуем левую часть: $(A^*f)(x) = f(y)$.
Если A^*f – нулевой функционал, то левая часть обращается в нуль при любом x. Значит, должна обращаться в нуль и правая.
Таким образом, для существования решения операторного уравнения необходимо, чтобы $\forall f \in KerA^* : f(y) = 0$.
Правая часть уравнения должна быть ортогональна ядру сопряжённого оператора.

Если это условие является достаточным, то оператор называется нормально разрешимым.

Пример: $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Собственные значения и спектр линейного оператора

Элемент $x \neq o$ пространства X называется собственным элементом оператора $A : X \to X$, если для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено равенство
$Ax = \lambda x$.
Число λ называется собственным числом (собственным значением) оператора, соответствующим собственному элементу x.

Замечание. Используются также теримины "собственный вектор"и "собственная функция"(последний – когда элементами X являются функции).

Замечание. Если рассматриваются ЛНП над полем $\mathbb{K}$ (в частности, над $\mathbb{C}$), то и собственные числа также принадлежат этому же полю.

Утверждение: для ограниченных операторов $|\lambda| \leq \|A\|$ (доказать).

Собственные элементы, отвечающие одному и тому же значению λ, после добавления нуля образуют в совокупности собственное подпространство оператора (для неограниченного оператора – вообще говоря, линеал), совпадающее с ядром оператора $\lambda E - A$.

Значение параметра λ называется регулярным для оператора A, если при этом значении λ существует ограниченный обратный оператор по отношению к оператору $\lambda E - A$.

Этот оператор $R_\lambda(A) = (\lambda E - A)^{-1}$ называется резольвентой оператора A, а множество регулярных значений λ называется резольвентным множеством оператора A ($\rho(A)$).

Замечание. Иногда под резольвентой понимают оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ (отличие в знаке).

Замечание. Вектор $R_\lambda(A)y$ – это решение операторного уравнения $\lambda x = Ax + y$

Утверждение: резольвентное множество открыто. Если для некоторого λ оператор $\lambda E - A$ непрерывно обратим, то для δ таких, что $|\delta| \cdot \|R_\lambda(A)\| < 1$, оператор $\lambda E - A + \delta E = (\lambda + \delta)E - A$ также непрерывно обратим (пространство X считаем банаховым).

Дополнение к резольвентному множеству – спектр оператора ($\sigma(A)$). Содержит значения λ, для которых не существует ограниченного обратного к $\lambda E - A$. Спектр замкнут.

Утверждение. Собственные значения оператора принадлежат его спектру ($Ker(\lambda E - A)$ нетривиален, оператор $\lambda E - A$ необратим).

В конечномерном случае этим дело и ограничиается: оператор задаётся матрицей, и если λ не является её собственным числом, то существует матрица $(\lambda E - A)^{-1}$, задающая непрерывный оператор. Чисто дискретный спектр.

В бесконечномерном случае так тоже иногда бывает, например: $\sigma(E) = \{1\}$. Единица – единственное собственное число единичного оператора, собственное подпространство – всё пространство, оператор $\lambda E - E = (\lambda - 1)E$ непрерывно обратим при любом $\lambda \neq 1$.

Утверждение. В бесконоечномерном пространстве спектр компактного оператора содержит 0.

Пример. Умножение на независимую переменную. Чисто непрерывный спектр, собственные значения отсутствуют.

Бывают операторы со смешанным спектром.

В вещественном пространстве есть операторы, спектр которых пуст (например, оператор поворота в $\mathbb{R}^2$). В комплексном пространстве любой оператор имеет непустой спектр на $\mathbb{C}$. Это следствие теоремы Лиувилля. При любых $x \in X$, $f \in X^*$ $f(R_\lambda(A)x)$ – аналитическая функция от λ, стремящаяся к нулю на бесконечности. Если спектр пуст, то у этой функции нет особенностей, и тогда она тождественно равна нулю. В силу произвольности x и f отсюда следует, что резольвента – нулевой оператор, что невозможно.