Раздел 7. Линейные операторы в ЛНП

Лекция 14 Линейное нормированное пространство линейных ограниченных операторов.

Прежде, чем перейти к изучению линейного нормированного пространства ограниченных операторов и сходимости в этом пространстве, рассмотрим более слабый тип сходимости последовательности операторов и функционалов – поточечный. Это полный аналог поточечной сходимости последовательности функций на отрезке.

Говорят, что последовательность линейных ограниченных операторов $\{A_m : X \to Y\,,\, m = 1, 2, \dots\}$ сходится поточечно к оператору A, если $\forall x \in X : A_m(x) \to A(x)$.

В частности: говорят, что последовательность линейных ограниченных функционалов $\{f_m : X \to \mathbb{K}\,,\, m = 1, 2, \dots\}$ сходится поточечно к функционалу f, если $\forall x \in X : f_m(x) \to f(x)$.

Замечание: поточечную сходимость функционалов также называют слабой сходимостью, а поточечную сходимость операторов – как ни удивительно, сильной. Причины этого будут ясны позднее.

Теорема. Поточечный предел последовательности линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в ЛНП Y, есть линейный ограниченный оператор.

Рассмотрим оператор A, являющийся поточечным пределом последовательности A_m: $\forall x \in X : A_m x \to A(x)$. Установим его линейность:

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{m\to\infty} A_m(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \lim_{m\to\infty} (\alpha_1 A_m x_1 + \alpha_2 A_m x_2) =$$
$$= \alpha_1 \lim_{m\to\infty} A_m x_1 + \alpha_2 \lim_{m\to\infty} A_m x_2 = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$$

Для того, чтобы доказать ограниченность оператора A, установим равномерную ограниченность множества операторов, входящих в последовательность. Действительно, если у последовательности A_m есть поточечный предел, то для $\forall x \in X$ последовательность $A_m x$ сходится и, следовательно, ограничена. Это означает, что на каждом элементе пространства множество значений операторов, входящих в последовательность, ограничено, и тогда по принципу равномерной ограниченности само семейство операторов равномерно ограничено, т.е. $\exists M \forall m : \|A_m\| \le M$.

Отсюда следует, что

$$\forall x \in X \forall m : \|A_m x\| \le M\|x\|\,.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ в этом нестрогом неравенстве, получаем:

$$\forall x \in X : \|Ax\| \le M\|x\|\,,$$

что и означает ограниченность предельного оператора A. Теорема доказана.

Замечание. Всё это без изменения переносится на функционалы.

Замечание. Для произвольных (нелинейных) отображений это не так: поточечный предел непрерывных функций может не быть непрерывной функцией.

Единственность поточечного предела (очевидно).

Примеры поточечной сходимости.

- Пусть X – какое-либо пространство, элементами которого являются бесконечные числовые последовательности $x = (x_1, x_2, \dots)$. Рассмотрим последовательность функционалов $\{f_m\}$ таких, что $f_m(x) = x_m$. Тогда в пространствах l_p и c_0 эта последовательность поточечно сходится к нулевому функционалу, поскольку
$\lim_{m\to\infty} f_m(x) = \lim_{m\to\infty} x_m = 0$. При этом $\forall m : \|f_m\| = 1$, норма достигается на элементе e_m: $f_m(e_m) = 1$ (напомню: e_m – последовательность, у которой m-ый элемент равен единице, а остальные нулю).
В пространстве c последовательность $\{f_m\}$ поточечно стремится к функционалу, который сопоставляет последовательности x её предельное значение. В пространстве l_∞ предела нет, последовательность расходится.

- Более общий случай: X – опять какое-либо пространство бесконечных последовательностей, а $f_m(x) = \alpha_m x_m$, где α_m – заданные числа, $\|f_m\| = |\alpha_m|$. Если последовательность $\{\alpha_m\}$ неограниченная, то предела нет, поскольку неограниченной оказывается и последовательность функционалов, а поточечно сходящаяся последовательность должна быть ограниченной. Если последовательность $\{\alpha_m\}$ ограничена, то в пространствах l_p и c_0 последовательность $\{f_m\}$ поточечно сходится к нулю (т.е. к нулевому функционалу). В пространстве c предел есть тогда, когда есть предел у $\{\alpha_m\}$. В пространстве l_∞ предел есть и равен нулю, если $\alpha_m \to 0$.

- $X = C[a, b]$, $f_m(x) = x(t_m)$, где $t_m \in [a, b]$. Если последовательность $\{t_m\}$ сходится, то $f_m(x) = x(t_m) \to x(t^*)$, где $t^* = \lim_{m\to\infty} t_m$, т.е. $\{f_m\}$ поточечно стремится к функционалу f^* такому, что $f^*(x) = x(t^*)$.
Замечание: на пространства $\tilde{L}_p$ (неполные!) это рассуждение переностися без изменения, однако в этом случае как f_m, так и f^* – неограниченные (!) функционалы.

- Пусть снова X – какое-либо пространство, элементами которого являются бесконечные числовые последовательности. Рассмотрим последовательность операторов P_n – проекторов на n-мерные подпространства – таких, что
$P_n x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$.
Утверждение: $P_n \to E$ (поточечно) в пространствах l_p и c_0, а в пространствах c и l_∞ последовательность поточечного предела не имеет.

Действительно, рассмотрим элемент
$z^{(n)} = Ex - P_n x = x - P_n x = (0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$.
В c_0: $\|z^{(n)}\|_\infty = \sup_{k>n} |x_k| \to 0$ при $n \to \infty$.
В l_p: $\|z^{(n)}\|_p = \left(\sum_{k=n+1}^\infty |x_k|^p\right)^{1/p} \to 0$ при $n \to \infty$.
В c и l_∞: $P_{n+1}x - P_n x = x_{n+1}e_{n+1}$, $\|P_{n+1}x - P_n x\| = |x_{n+1}| \nrightarrow 0$, поэтому последовательность $\{P_n x\}$ не фундаментальна и, тем самым, не сходится.

- X – пространство, элементами которого являются бесконечные числовые последовательности. Рассмотрим последовательность операторов T_n – операторов левого сдвига на n позиций – таких, что
  $T_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)$.
  В пространствах l_p и c_0 последовательность поточечно стремится к нулевому оператору, поскольку $\|T_n x\| = \|x - P_n x\| \to 0$.
  В пространстве c поточечный предел – оператор (назовём его T_∞), сопоставляющий сходящейся последовательности постоянную последовательность, элементы которой равны пределу $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$:
  $T_\infty x = (x_\infty, x_\infty, \dots)$.
  Действительно, $T_n x - T_\infty x = (x_{n+1} - x_\infty, x_{n+2} - x_\infty, \dots)$, и
  $\|T_n x - T_\infty x\|_\infty = \sup_{k>n} |x_k - x_\infty| \to 0$ при $n \to \infty$.
  В пространстве l_∞ предела нет (докажите).

Пусть нам известно, что последовательность линейных ограниченных операторов поточечно сходится на некотором плотном множестве. Можно ли утверждать, что есть сходимость на всём пространстве? Не всегда.

Теорема Банаха-Штейнгауза.

Для того, чтобы последовательность линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, поточечно сходилась в X, необходимо и достаточно, чтобы она сходилась на некотором всюду плотном множестве и была равномерно ограничена.

Необходимость фактически уже доказана. Если последовательность сходится поточечно, то её равномерная ограниченность следует из принципа равномерной ограниченности, соответствующее рассуждение приведено в доказательстве теоремы о линейности и ограниченности поточечного предела. Сходимость на плотном множестве очевидна (поскольку последовательность сходится всюду), в качестве плотного множества можно взять само пространство X.

Достаточность. Последовательность A_m равномерно ограничена, т.е. $\exists M\, \forall m : \|A_m\| \le M$, и сходится на плотном множестве $\tilde{X} \subset X$ к некоторому оператору $A(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Пусть $x \in X \backslash \tilde{X}$. Докажем, что последовательность $A_m x$ также сходится.

Поскольку пространство Y банахово, достаточно установить, что последовательность $A_m x$ фундаментальна, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall m, k > N : \|A_m x - A_k x\| \le \varepsilon$$

Для этого воспользуемся $\varepsilon/3$-приёмом.
Выберем $\tilde{x} \in \tilde{X} : \|x - \tilde{x}\| \le \varepsilon/(3M)$.
Поскольку последовательность $A_m\tilde{x}$ сходится, она фундаментальна, и
$\exists N\, \forall m, k > N : \|A_m\tilde{x} - A_k\tilde{x}\| \le \varepsilon/3$.
Тогда для таких номеров

$$\begin{aligned}\|A_m x - A_k x\| &= \|(A_m x - A_m\tilde{x}) + (A_m\tilde{x} - A_k\tilde{x}) + (A_k\tilde{x} - A_k x)\| \le \\ &\le \|A_m x - A_m\tilde{x}\| + \|A_m\tilde{x} - A_k\tilde{x}\| + \|A_k\tilde{x} - A_k x\| \le \\ &\le \|A_m(x - \tilde{x})\| + \varepsilon/3 + \|A_k(\tilde{x} - x)\| \le \\ &\le \|A_m\| \cdot \|x - \tilde{x}\| + \varepsilon/3 + \|A_k\| \cdot \|\tilde{x} - x\| \le \\ &\le M \cdot \varepsilon/(3M) + \varepsilon/3 + M \cdot \varepsilon/(3M) = \varepsilon\end{aligned}$$

Таким образом, установлена фундаментальность последовательности $A_m x$, а, значит, и сходимость её на произвольном элементе $x \in X$. Теорема доказана.

Замечание. Иногда теорму Банаха-Штейнгауза формулируют иначе: требуют поточечной сходимости последовательности A_m на $\tilde{X}$ к значениям некоторого ограниченного линейного оператора A, заданного на всём пространстве. В этом случае можно обойтись без предположения о банаховости Y. Будем считать, что $\|A\| \le M$, в противном случае переопределим константу M. Тогда

$$\begin{aligned}\|A_m x - Ax\| &= \|(A_m x - A_m\tilde{x}) + (A_m\tilde{x} - A\tilde{x}) + (A\tilde{x} - Ax)\| \le \\ &\le \|A_m x - A_m\tilde{x}\| + \|A_m\tilde{x} - A\tilde{x}\| + \|A\tilde{x} - Ax\| \le \\ &\le \|A_m(x - \tilde{x})\| + \varepsilon/3 + \|A(\tilde{x} - x)\| \le \\ &\le \|A_m\| \cdot \|x - \tilde{x}\| + \varepsilon/3 + \|A\| \cdot \|\tilde{x} - x\| \le \\ &\le M \cdot \varepsilon/(3M) + \varepsilon/3 + M \cdot \varepsilon/(3M) = \varepsilon\,,\end{aligned}$$

т.е. $A_m x \to Ax$.

Замечание. Иногда теоремой Банаха-Штейнгауза называют принцип равномерной ограниченности.

Замечание. Всё это без изменения переносится на функционалы.

Примеры.

- Рассмотренный ранее случай: X – какое-либо пространство бесконечных последовательностей, а $f_m(x) = \alpha_m x_m$, где α_m – заданные числа, $\|f_m\| = |\alpha_m|$. В пространствах l_p и c_0 в качестве плотного линеала можно взять множество обрывающихся последовательностей. На каждом элементе этого множества значения $f_m(x) = \alpha_m x_m$ равны нулю начиная с некоторого m, т.е последовательность функционалов поточечно сходится к нулю (т.е. к нулевому функционалу).
  Тем не менее, на всём пространстве последовательность f_m поточечно сходится (к тому же нулевому функционалу) только в случае, если

последовательность α_m ограничена, и множество $\{f_m\}$, тем самым, равномерно ограничено по норме.

- X – l_1, l_2 или c_0, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k/k$. На обрывающихся последовательностях, образующих плотное множество в рассмариваемых пространствах, последовательность функционалов сходится: в этом случае начиная с некоторого номера значение $f_n(x)$ с ростом n перестаёт меняться. Предельный функционал имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k/k$, при этом на обрывающихся последовательностях ряд превращается в конечную сумму.
Для того, чтобы выяснить, сходится ли последовательность поточечно на всём пространстве, оценим нормы функционалов f_n.
l_1: $|f_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} x_k/k| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|/k \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \le \|x\|_1$, т.е. $\|f_n\| \le 1$, множество функционалов равномерно ограничено, последовательность поточечно сходится на всём пространстве l_1.
l_2: $|f_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} x_k/k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} 1/k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2} \le$
$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2\right)^{1/2} \|x\|_2 = \pi/\sqrt{6} \cdot \|x\|_2$ т.е. $\|f_n\| \le \pi/\sqrt{6}$,
множество функционалов равномерно ограничено, последовательность поточечно сходится на всём пространстве l_2.
c_0: $|f_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} x_k/k| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|/k \le \sum_{k=1}^{n} \|x\|_\infty/k =$
$= (\sum_{k=1}^{n} 1/k) \cdot \|x\|_\infty$, равенство достигается на элементе, первые n компонент которого равны единице, а остальные нулю. Следовательно, $\|f_n\| = (\sum_{k=1}^{n} 1/k) \to \infty$, равномерной ограниченности нет, тогда нет и поточечной сходимости на пространстве c_0 – что означает, что на некоторых $x \in c_0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k/k$ расходится (приведите пример!).

Теорема. Произвольная ограниченная последовательность линейных ограниченных функционалов $\{f_n\}$, действующих в сепарабельном банаховом пространстве X, содержит поточечно сходящуюся на этом пространстве подпоследовательность.
Доказательство

- Если последовательность функционалов $\{f_n\}$ ограничена, то
$\exists M\, \forall n : \|f_n\| \le M$. Тогда $\forall x \in X : |f_n(x)| \le \|f_n\| \cdot \|x\| \le M\|x\|$, т.е. числовая последовательность значений функционалов на любом фиксированном элементе ограничена. По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

- Поскольку пространство X сепарабельно, оно содержит счётное всюду плотное множество $\{x_1, x_2, \dots\}$.
Из числовой последовательности $f_n(x_1)$ выберем сходящуюся подпоследовательность и соответствующую подпоследовательность функционалов обозначим $f_n^{(1)}$.
Из числовой последовательности $f_n^{(1)}(x_2)$ выберем сходящуюся подпоследовательность и соответствующую подпоследовательность функционалов обозначим $f_n^{(2)}$.

Продолжим этот процесс. Каждая следующая последовательность при этом будет подпоследовательностью предыдущей, при этом m-я последовательность $f_n^{(m)}$ сходится на элементах $x_1, x_2, \dots, x_m$ плотного множества.

- Составим "диагональную" последовательность $f_1^{(1)}, f_2^{(2)}, \dots, f_m^{(m)}, \dots$ Элементы этой последовательности, начиная с номера m, суть элементы m-ой подпоследовательности, сходящейся на x_m, поэтому и вся диагональная последовательность сходится на x_m. Поскольку m произвольно, диагональная последовательность сходится на всём плотном множестве $\{x_1, x_2, \dots\}$.

- Из теоремы Банаха-Штейнгауза следует, что диагональная последовательность поточечно сходится на всём пространстве X. Теорема доказана.

Замечание. Альтернативные формулировки теоремы:
Если банахово пространство сепарабельно, то замкнутый шар в сопряжённом пространстве слабо компактен.
Или:
Если банахово пространство сепарабельно, то ограниченное множество в сопряжённом пространстве слабо предкомпактно.
Пояснение. Сопряжённое пространство – пространство линейных ограниченных функционалов (см. ниже). Замкнутый шар радиуса M в этом пространстве – множество линейных ограниченных функционалов, норма которых не превосходит M. Ограниченное множество в этом пространстве – множество, лежащее в каком-либо шаре. Слабая сходимость последовательности функционалов – это поточечная сходимость. Множество называется слабо компактным, если из любой последовательности его элементов можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к элементу этого же множества. Множество называется слабо предкомпактным, если из любой последовательности его элементов можно выбрать слабо сходящуюся подпоследовательность, при этом предел может не принадлежать множеству.
Ограниченность последовательности функционалов – это принадлежность её некоторому замкнутому шару радиуса M. По доказанной теореме из неё можно выбрать слабо (поточечно) сходящуюся подпоследовательность. При этом, как было доказано ранее, норма предельного функционала не превосходит M, т.е. этот предел принадлежит тому же шару. Если же элементы последовательности принадлежат какому-то другому ограниченному множеству, то слабо (поточечно) сходящаяся подпоследовательность у этой последовательности найдётся, а вот принадлежность слабого предела исходному множеству не обязательна.

Замечание. Сфера в сопряжённом пространстве, будучи ограниченным множеством слабо предкомпактна, но, в отличие от замкнутого шара, не является слабо компактной. Мы уже видели, что последовательность функционалов, по норме равных единице, может поточечно стремиться к нулю.

Примеры.

- $X = C[a,b]$ (сепарабельное), $f_m(x) = x(t_m)$, где $t_m \in [a,b]$, $\|f_m\| = 1$. Из последовательности $\{t_m\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $t_{m'} \to t^*$, тогда соответствующая подпоследовательность функционалов также сходится (поточечно) к функционалу f^* такому, что $f^*(x) = x(t^*)$, при этом $\|f^*\| = 1$.

- $X = c$, $f_m(x) = \alpha_m x_m$, где $\{\alpha_m\}$ – ограниченная числовая последовательность, тогда и последовательность функционалов также ограничена, $\|f_m\| = |\alpha_m| \le \|\alpha\|_\infty$. Выберем из последовательности $\{\alpha_m\}$ сходящуюся подпоследовательность $\alpha_{m'} \to \alpha^*$, тогда для элементов соответствующей подпоследовательности функционалов
$f_{m'}(x) = \alpha_{m'} x_{m'} \to \alpha^* x_\infty$, где $x_\infty = \lim_{m\to\infty} x_m$. Подпоследовательность функционалов поточечно сходится к функционалу, сопоставляющему элементу $x \in c$ (сходящейся последовательности) её предел, умноженный на число α^*, норма такого функционала равна
$|\alpha^*| \le \|\alpha\|_\infty$.

- $X = l_\infty$, $f_m(x) = x_m$, $\|f_m\| = 1$. Из такой последовательности нельзя выбрать подпоследовательность, поточечно сходящуюся на всём пространстве. Какую бы подпоследовательность $f_{m'}$, мы ни выбрали, всегда найдётся такой элемент $x \in l_\infty$ (ограниченная последовательность), что её подпоследовательность $x_{m'} = f_{m'}(x)$ не будет иметь предела. Причина в том, что пространство l_∞ не является сепарабельным.

Линейное пространство линейных операторов.

Линейный оператор – частный случай отображения (функции).

Функции с одной и той же областью определения X и со значениями в одном и том же ЛП Y можно складывать и умножать на число (поточечно). $(F+G)(x) = F(x) + G(x)$, $(\alpha F)(x) = \alpha F(x)$.
Они образуют ЛП, где в качестве нулевого элемента выступает функция, тождественно равная нулю пространства Y, а $(-F)(x) = -F(x)$.
Пространство линейных операторов $L(X,Y)$ – подпространство этого пространства (пока что без нормы): $(\alpha A + \beta B)(x) = \alpha Ax + \beta Bx$.
Нуль этого пространства – нулевой оператор, $(-A)(x) = -(Ax)$.

Проверить выполнение аксиом линейного пространства.

Проверить, что линейная комбинация линейных операторов – линейный оператор.

Замечание. Здесь подразумевается, что операторы полноопределённые, облась их определения совпадает со всем пространством.

Линейное нормированное пространство линейных ограниченных операторов.

Пусть теперь X и Y – не просто линейные пространства, а ЛНП. Будем рассматривать не все линейные операторы, а только ограниченные (непрерывные). Пространство $L_O(X,Y)$.

Операции сложения и умножения на число определяются так же.

Замечание. Поточечная сходимость последовательности операторов A_n к оператору A эквивалентно поточечной сходимости последовательности операторов $A_n - A$ к нулю (к нулевому оператору).

Превратим пространство $L_O(X, Y)$ в нормированное. В качестве нормы элемента пространства $L_O(X, Y)$ будем использовать введённую ранее норму оператора.

Проверим выполнение аксиом линейного нормированного пространства.
Невырожденность:
$\|A\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \sigma_1(o) : \|Ax\| = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall x \in \sigma_1(o) : Ax = o \Leftrightarrow \forall x \in X : Ax = o \Leftrightarrow A = O$
Абсолютная однородность:
$\|\lambda A\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda Ax\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda| \cdot \|Ax\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = |\lambda| \cdot \|A\|$
Неравенство треугольника:
$\forall x \in X : \|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq$
$\leq \|A\| \cdot \|x\| + \|B\| \cdot \|x\| = (\|A\| + \|B\|)\|x\| \Rightarrow \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

Замечание. Как указано выше, норма в $L_O(X, Y)$ – это норма в пространстве непрерывных ограниченных отображений $C(\bar{S}_1(o) \to Y)$, где $\bar{S}_1(o)$ – единичный замкнутый шар с центром в нуле пространства X. Вместо замкнутого можно взять открытый шар $S_1(o)$ или сферу $\sigma_1(o)$.

Если $Y = \mathbb{R}$, то получаем пространство непрерывных функционалов $L_O(X, \mathbb{R}) = X^*$, которое также называется пространством, сопряжённым к X (для вещественных ЛНП).

Поскольку в пространстве ограниченных операторов появилась норма, то появилась и метрика, топология, открытые и замкнутые множества операторов, предельные точки и сходимость.

$A_m \to A \Leftrightarrow A_m - A \to O \Leftrightarrow \|A_m - A\| \to 0.$

Такая сходимость – сходимость по норме.

Из неё следует поточечная:
$\forall x \in X : \|A_m x - Ax\| = \|(A_m - A)x\| \leq \|A_m - A\| \cdot \|x\| \to 0.$
Обратное неверно. В частности, мы уже убедились, что поточечная сходимость последовательности операторов (функционалов) к нулю далеко не всегда сопровождается стремлением к нулю последовательности их норм. Для большинства рассмотренных выше примеров поточечной сходимости функционалов и операторов сходимость по норме отсутствует. (Проверить.)

Сходимость по норме – равномерная сходимость на единичном шаре (и на произвольном ограниченном множестве) (доказать).

Утверждение. Множество компактных операторов линейно и замкнуто (т.е. образует подпространство в $L_O(X, Y)$).

Доказательство.

Докажем линейность. Пусть A и B – компактные операторы. Докажем, что линейная комбинация $\alpha A + \beta B$ – также компактный оператор. Это удобно сделать на языке последовательностей, т.е. доказать, что образ произвольной ограниченной последовательности содержит фундаментальную подпоследовательность.
Пусть $\{x_n\}$ – ограниченная последовательность.
Обозначим $y_n = (\alpha A + \beta B)x_n = \alpha A x_n + \beta B x_n$
Пусть $u_n = Ax_n$, $v_n = Bx_n$, тогда $y_n = \alpha u_n + \beta v_n$
Поскольку оператор A компактен, последовательность u_n содержит фундаментальную подпоследовательность $u_{n'}$.
Поскольку оператор B компактен, последовательность $v_{n'} = Bx_{n'}$ содержит фундаментальную подпоследовательность $v_{n''}$.
Очевидно, соответствующая подпоследовательность $u_{n''}$, будучи подпоследовательностью для $u_{n'}$, также фундаментальна.
Но тогда фундаментальна и их линейная комбинация – подпоследовательность $y_{n''} = \alpha u_{n''} + \beta v_{n''}$. Линейность доказана.

Докажем замкнутость. Пусть оператор A – предельная точка множества компактных операторов в $L_O(X,Y)$. Требуется доказать, что сам оператор компактен. Для этого докажем, что образ произвольного ограниченного множества Ω при отображении A компактен. Для доказательства воспользуемся следствием из теоремы Хаусдорфа и установим, что для любого ε у множества $A(\Omega)$ найдётся компактная ε-сеть.

Если множество Ω ограничено, то $\exists M\, \forall x \in \Omega : \|x\| \le M$. Поскольку A – предельная точка множества компактных операторов, то найдётся компактный оператор $\hat{A}$, отличающийся по норме от A не более, чем на ε/M. Тогда компактное (в силу компактности $\hat{A}$ и ограниченности Ω) множество $\hat{A}(\Omega)$ – искомая ε-сеть для $A(\Omega)$.
Действительно,

$$\forall x \in \Omega : \|Ax - \hat{A}x\| = \|(A - \hat{A})x\| \le \|A - \hat{A}\| \cdot \|x\| \le \varepsilon/M \cdot M = \varepsilon\,.$$

Утверждение. Множество операторов конечного ранга – линеал. Это следует из того, что образ линейной комбинации двух операторов лежит в линейной оболочке образов каждого из них (доказать).

Вполне непрерывные операторы. Множество вполне непрерывных операторов – замыкание множества операторов конечного ранга в $L_O(X,Y)$. A вполне непрерывен, если
$\forall \varepsilon > 0 : A = A_N + C_N$, где A_N – оператор конечного ранга (N), а C_N по норме не превосходит ε ($\|C_N\| \le \varepsilon$).
Вполне непрерывный оператор с любой точностью аппроксимируется оператором конечного ранга.

Утверждение: множество вполне непрерывных операторов – подпространство (линейно и замкнуто). (Доказать.)

Утверждение: вполне непрерывный оператор компактен. (Это следует из компактности операторов конечного ранга и замкнутости множества компактных операторов).

Замечание: во многих пространствах все компактные операторы вполне непрерывны. Существуют, однако, пространства, где это не так.

Фундаментальные последовательности операторов (функционалов). Произвольная сходящаяся по норме последовательность фундаментальна, обратное верно, если пространство полно (банахово).

Теорема. Пространство $L_O(X,Y)$ банахово тогда и только тогда, когда банаховым является пространство Y.

Доказательство. Пусть A_m – фундаментальная последовательность в пространстве $L_O(X,Y)$:

$$\forall\varepsilon>0\,\exists N\,\forall m,k>N:\|A_m-A_k\|\le\varepsilon\,.$$

Мы хотим доказать, что если пространство Y банахово, то последовательность A_m сходится по норме, т.е. что
$\exists A\in L_O(X,Y):\|A_m-A\|\to 0$.
Если же пространство Y неполно, то найдётся фундаментальная последовательность A_m, не имеющая предела в $L_O(X,Y)$.

Пусть пространство Y неполно, тогда найдётся фундаментальная последовательность y_m, не имеющая предела. Рассмотрим последовательность линейных операторов первого ранга A_m, действующих по правилу

$$A_m x=f(x)y_m\,,$$

где f – ограниченный функционал, значение которого на некотором элементе x_* равно единице. Тогда последовательность $A_m x_*=y_m$ расходится, т.е. последовательность операторов A_m не сходится поточечно, а тем более по норме. В то же время операторы A_m ограничены ($\|A_m\|=\|f\|\cdot\|y_m\|$), а их последовательность фундаментальна в силу фундаментальности y_m, поскольку $\|A_m-A_k\|=\|f\|\cdot\|y_m-y_k\|$.
Таким образом, в пространстве $L_O(X,Y)$ существует фундаментальная последовательность, не имеющая предела, так что само пространство $L_O(X,Y)$ неполно.

Пусть теперь пространство Y полно, последовательность A_m фундаментальна. Установим сначала, что она сходится поточечно. Действительно, пусть $x\in X$, и рассмотрим последовательность $A_m x$. Эта последовательность фундаментальна в силу фундаментальности A_m:
$\|A_m x-A_k x\|=\|(A_m-A_k)x\|\le\|A_m-A_k\|\cdot\|x\|$.
Поскольку пространство Y, которому принадлежат элементы этой последовательности, полно, то последовательность сходится для любого x, то есть A_m сходится поточечно к некоторому оператору A, который, как показано выше, является линейным и ограниченным.

Осталось доказать, что сходимость A_m к A есть не только поточечная, но и по норме. Для этого снова рассмотрим неравенство
$\|A_m x-A_k x\|\le\|A_m-A_k\|\cdot\|x\|$.
Поскольку последовательность A_m фундаментальна,

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall m, k > N : \|A_m - A_k\| \le \varepsilon.$
Тогда для таких номеров справедливо неравенство $\|A_m x - A_k x\| \le \varepsilon \|x\|$.
Устремим k к бесконечности, тогда в силу поточечной сходимости
$A_k x \to Ax$.
Перейдя к пределу в нестрогом неравенстве, получаем:
$\|A_m x - Ax\| = \|(A_m - A)x\| \le \varepsilon \|x\|$.
Отсюда вытекает, что $\|A_m - A\| \le \varepsilon$ при $m > N$, что и означает стремление $\|A_m - A\|$ к нулю. Отсюда следует сходимость A_m к A по норме пространства $L_O(X, Y)$. Полнота доказана.

Обратите внимание, что здесь использован тот же приём, что и при доказательстве полноты других пространств: сначала устанавливается сходимость в каком-то более слабом смысле, чем требуется, а потом доказывается, что этот найденный слабый предел на самом деле является пределом по норме нужного нам пространства.

Следствие: каково бы ни было пространство X, пространство X^* всегда полно.