Раздел 6. Линейные нормированные пространства (ЛНП)

Лекция 11 Основные свойства нормы.

Напомним понятие полунормы. Полунорма $\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}$ – функционал на ЛП, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. Абсолютная (положительная) однородность:
$\forall x \in X \, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
2. Неравенство треугольника:
$\forall x, y \in X : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Линейное полунормированное пространство – ЛП с заданной полунормой.

Обозначение: $x^0 = x/\|x\|$ – нормированный элемент x (при $\|x\| \neq 0$). Тогда $\|x^0\| = 1$, $x = x^0\|x\|$.

Утверждение: $\|o\| = 0$.

Утверждение: $\forall x \in X : \|x\| \geq 0$

Утверждение: $X_0 = \{x \in X : \|x\| = 0\}$ – линеал.

Утверждение: $R = \{x, y : \|x - y\| = 0\}$ – отношение эквивалентности (доказать)

Утверждение: $x_1 \sim x_2 \Rightarrow \|x_1\| = \|x_2\|$ (доказать!)
Полунормы элементов, входящих в один и тот же класс эквивалентности, совпадают. Поэтому полунорму можно рассматривать как функцию от класса.

Утверждение: $x_1 \sim x_2 \wedge y_1 \sim y_2 \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha x_1 + \beta y_1 \sim \alpha x_2 + \beta y_2$

Утверждение: для классов, отличных от нулевого, полунорма отлична от нуля (очевидно).

Норма: дополнительно аксиома невырожденности:
3. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = o$
(можно стрелочку в обе стороны: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$)

Рассмотрим факторпространство X/X_0, элементами которого являются классы эквивалентности. Полунорма на X корректно индуцирует норму на X/X_0.

Утверждение: полунорма – выпуклый функционал.

Открытый шар в ПНП: $S_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}$; замкнутый шар в ПНП: $\bar{S}_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| \leq r\}$.

Утверждение: произвольный шар – выпуклое множество.

Пусть теперь f – неотрицательный абсолютно однородный функционал на X (т.е. $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$), обладающий следующим свойством: множество $u \in X : f(u) \leq 1$ выпуклое. Тогда функционал f – полунорма, т.е. выполнено неравенство треугольника

$\forall x, y \in X : f(x+y) \le f(x) + f(y)$
(доказать)

Таким образом, неравенство треугольника в определении полунормы можно заменить на выпуклость единичного шара.

Второе неравенство треугольника: $|\,\|x\| - \|y\|\,| \le \|x-y\|$ (доказать)

Полунорма порождает полуметрику (а норма – метрику):
$\rho(x,y) = \|x-y\|$.

Сходимость: $x_m \to x_* \Leftrightarrow \|x_m - x_*\| \to 0$.

Непрерывность нормы:
$x_m \to x_* \Rightarrow \|x_m\| \to \|x_*\|$ (доказать).

Непрерывность сложения векторов:
$x_m \to x_* \wedge y_m \to y_* \Rightarrow (x_m + y_m) \to (x_* + y_*)$ (доказать)

Непрерывность умножения на число:
$\lambda_m \to \lambda_* \wedge x_m \to x_* \Rightarrow \lambda_m x_m \to \lambda_* x_*$ (доказать)

Ограниченные и неограниченные множества.

Открытые, замкнутые множества. Подпространством будем называть замкнутый линеал. Иногда будем говорить "замкнутое подпространство".

Примеры: $C_0[a,b] \subset C[a,b]$ – подпространство функций, обращающихся в нуль на границах. c_0 – подпространство в c и в l_∞, c – подпространство в l_∞.

Есть и незамкнутые. Множество многочленов образуют линеал в $C[a,b]$, $L_1[a,b]$, $L_2[a,b]$, оно всюду плотное в этих пространствах (замыкание – всё пространство). $C_0[a,b]$ плотно в $L_1[a,b]$, $L_2[a,b]$, незамкнуто в этих пространствах. Обрывающиеся последовательности – всюду плотный линеал в c_0, l_1, l_2.

Утверждение: замыкание линеала – подпространство (т.е. линейность множества при замыкании не нарушается).

Система векторов Q называется полной, если её лиинейная оболочка плотна в X. В $C[a,b]$ – степени t. В $L_2[0,\pi]$ – функции $\{\sin kt\}$ (но не в $C[0,\pi]$!).

Утверждение. В пространстве есть конечная или счётная полная система элементов $\Leftrightarrow$ оно сепарабельно (доказать!).

Полнота. Полные ЛНП – банаховы. При пополнении ЛНП как метрических линейные операции продолжаются по непрерывности (доказать корректность).

Ряды в ЛНП. $\sum_{k=1}^{\infty} x_j$, где $x_k \in X$ – ряд.
Частичные суммы: $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.
Ряд сходится, если последовательность частичных сумм имеет предел
$S = \lim_{n\to\infty} S_n$.
Этот предел – сумма ряда: $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Необходимый признак сходимости. Если ряд сходится, то $S_n \to S$ и одновременно $S_{n-1} \to S$, тогда $x_n = S_n - S_{n-1} \to o$, и $\|x_n\| \to 0$.

Пример: $x = (x_1, x_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$. Здесь уже x_k – не векторы, а числа, а e_k – последовательности с единицей на k-м месте и нулями на остальных.
Равенство верно в c_0, l_1, l_2, поскольку $\|x - S_n\| \to 0$.
Равенство неверно в c, l_∞ (не выполнен необходимый признак).

Функциональные ряды $\sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$.
Равномерная сходимость – сходимость в $C[a,b]$:
$\|S - S_n\| = \max_{t\in[a,b]} |S(t) - S_n(t)| \to 0$.
Сходимость в среднем – в пространствах с интегральной нормой $L_{1,2}[a,b]$:

$$\|S - S_n\|_1 = \int_a^b |S(t) - S_n(t)|\, dt \to 0$$

или

$$\|S - S_n\|_2^2 = \int_a^b |S(t) - S_n(t)|^2\, dt \to 0\,.$$

Если ряд сходится, то последовательность фундаментальна:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n > m > N : \|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| < \varepsilon$.
В частности, при $n = m + 1$ как следствие снова получаем $\|x_n\| \to 0$.
Для банаховых пространств фундаментальность является и достаточным признаком сходимости (критерий Коши).

Обобщённый признак Вейерштрасса (достаточный) для банаховых пространств: если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ такой, что $\|x_k\| \le \alpha_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится.
Доказательство. Поскольку числовой ряд с неотрицательными членами сходится, по критерию Коши имеем:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n > m > N : \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k < \varepsilon$.
Но
$\left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k$,
откуда и вытекает сходимость исходного ряда в банаховом пространстве.
Классический признак Вейерштрасса относится к пространству $C[a,b]$: условие $\|x_k\| \le \alpha_k$ означает $\max_{t\in[a,b]} |x_k(t)| \le \alpha_k$ или, что то же,
$\forall t \in [a,b] : |x_k(t)| \le \alpha_k$,
а сходимость функционального ряда в пространстве $C[a,b]$ – это равномерная сходимость.

ЛНП с одинаковыми носителями: $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ и $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$.

Подчинённость норм. Говорят, что норма $\|\cdot\|_1$ подчинена норме $\|\cdot\|_2$, если
$\exists \kappa > 0\, \forall x \in X : \|x\|_1 \le \kappa \|x\|_2$.
В этом случае (докажите!):

- Множество, ограниченное в пространстве X_2, ограничено в пространстве X_1.
- $\|x_k - x^*\|_2 \to 0 \Rightarrow \|x_k - x^*\|_1 \to 0$. Последовательность, сходящаяся в X_2, сходится и в X_1, при этом пределы совпадают. Говорят, что сходи-

мость в X_2 (сходимость по норме $\|\cdot\|_2$) более сильная, чем сходимость в X_1 (сходимость по норме $\|\cdot\|_1$).

- Оператор вложения $I : X_2 \to X_1$ такой, что $I(x) = x$, ограничен и непрерывен.

- Пусть есть оператор $F : X \to Y$, где Y – некоторое МП. Если F ограничен как оператор из X_1 в Y, то он ограничен и как оператор из X_2 в Y. Если F непрерывен как оператор из X_1 в Y, то он непрерывен и как оператор из X_2 в Y. (В частности, это касается и функционалов, когда $Y = E^1$.)

- Пусть есть оператор $G : Y \to X$, где Y – некоторое МП. Если G ограничен как оператор из Y в X_2, то он ограничен и как оператор из Y в X_1. Если G непрерывен как оператор из Y в X_2, то он непрерывен и как оператор из Y в X_1.

- Компакт в пространстве X_2 является компактом в пространстве X_1.

- Если $A \subset X$, то точки, предельные для A в пространстве X_2, являются предельными и в пространстве X_1. Поэтому $A'_2 \subset A'_1$, $[A]_2 \subset [A]_1$.

- Шар радиуса r в X_2 содержится в шаре радиуса κr в X_1. Шар радиуса r в X_1 содержит шар радиуса r/κ в X_2. Произвольная окрестность точки в X_1 содержит некоторую окрестность этой же точки в X_2.

- Внутренняя точка множества в X_1 является внутренней в X_2. Внешняя точка множества в X_1 является внешней в X_2.

- Граничная точка множества в X_2 является граничной в X_1.

- Множество, открытое в X_1, открыто в X_2. Множество, замкнутое в X_1, замкнуто в X_2.

- Последовательность, фундаментальная в X_2, фундаментальна и в X_1

- Множество, предкомпактное в пространстве X_2, предкомпактно в пространстве X_1.

- Пополнение пространства X_2 содержится в пополнении пространства X_1 (точнее, непрерывно вкладывается).

Замечание. Всё это, разумеется, верно и для метрических пространств с одинаковыми носителями $X_1 = (X, \rho_1)$ и $X_2 = (X, \rho_2)$ и расстояниями, удовлетворяющими условию
$\exists \kappa > 0 \, \forall x, y \in X : \rho_1(x, y) \le \rho_2(x, y)$.

Эквивалентность норм. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, если они взаимно подчинены, т.е.
$\exists \kappa_{1,2} > 0 \, \forall x \in X : \|x\|_2 \le \kappa_1 \|x\|_1 \wedge \|x\|_1 \le \kappa_2 \|x\|_2$.
Тогда справедливы также двусторонние оценки:

$\kappa_2^{-1}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \kappa_1\|x\|_1 \wedge \kappa_1^{-1}\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \kappa_2\|x\|_2$
В этом случае пространства $X_{1,2}$ топологически эквивалентны: у них одни и те же наборы ограниченных, открытых, замкнутых, компактных и предкомпактных множеств, ограниченных и непрерывных отобрвжений, сходящихся и фундаментальных последовательностей, они одновременно полны или неполны и т.п.

Примеры.

- $X = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим пространства $\mathbb{R}^n_1$, $\mathbb{R}^n_2 = E^n$ и $\mathbb{R}^n_{\max}$ с нормами $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_k |x_k|$ соответственно. Все три нормы эквивалентны:
  $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty$
  (доказать!)

- X – линейное пространство обрывающихся последовательностей, т.е. бесконечных последовательностей, лишь конечное число элементов которых отлично от нуля. На этом пространстве рассмотрим нормы $\|x\|_1 = \sum_k |x_k|$, $\|x\|_2 = \left(\sum_k |x_k|^2\right)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_k |x_k|$ (суммирование по всем ненулевым элементам). Нормы не эквивалентны и находятся в отношении подчинённости: $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$ (доказать!) ЛНП X с такими нормами неполны, пополнениями по этим нормам являются банаховы пространства l_1, l_2 и c_0 соответственно, при этом $l_1 \subset l_2 \subset c_0$.

- X – ЛП непрерывных на $[a,b]$ функций. Рассмотрим пространства $\tilde{L}_1[a,b] = C_{L_1}[a,b]$, $\tilde{L}_2[a,b] = C_{L_2}[a,b]$ и $C[a,b]$ с нормами
  $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\,dt$, $\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$.
  Нормы не эквивалентны и находятся в отношении подчинённости:
  $\|x\|_1 \le |b-a|^{1/2}\|x\|_2 \le |b-a|\|x\|_\infty$ (доказать!)
  Обратите внимание на отличие от предыдущего примера в порядке подчинённости! В частности, самая сильная сходимость – равномерная, из которой следует сходимость в интегральных метриках ("сходимость в среднем").
  Пространство $C[a,b]$ – полное, а пополнениями пространств $\tilde{L}_{1,2}[a,b]$ являются пространства $L_{1,2}[a,b]$, при этом $C[a,b] \subset L_2[a,b] \subset L_1[a,b]$.
  Замечание: эти включения следует понимать так, что каждой непрерывной функции из $C[a,b]$ соответствуют её классы эквивалентности в пространствах $L_{1,2}[a,b]$, а каждому классу из $L_2[a,b]$ – соответствующий класс из $L_1[a,b]$.

Примеры линейных полунормированных и нормированных пространств. Ряд примеров был приведён ранее. Расширим список.

1. Пространства $\mathbb{R}^n_p$

Это пространства с носителем $\mathbb{R}^n$ и нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$. Невырожденность и абсолютная однородность очевидны, неравенство треугольника – это неравенство Минковского. Пространства $\mathbb{R}_1^n$ и $E^n = \mathbb{R}_2^n$ – частные случаи таких пространств.

Сравним значения норм при различных значениях p. Для этого обозначим
$\hat{x}_j = x_j/\|x\|_\infty$,
где, напомню, $\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$ – норма в $\mathbb{R}_{\max}^n$. Тогда $x_j = \|x\|_\infty \hat{x}_j$, т.е. $x = \|x\|_\infty \hat{x}$. Очевидно, $|\hat{x}_j| \le 1$, при этом по крайней мере для одного значения j неравенство превращается в равенство. Тогда
$\|x\|_p = \|x\|_\infty \|\hat{x}\|_p = \|x\|_\infty \left(\sum_{j=1}^n |\hat{x}_j|^p\right)^{1/p}$

Сумма в скобках содержит по крайней мере одно слагаемое, равное единице, остальные не превосходят единицы, сумма не превосходит n. С ростом p слагаемые, равные единице, не изменяются, а остальные убывают, поэтому сумма с ростом p не возрастает, оставаясь при этом не меньше единицы. Показатель степени $1/p$ с ростом p убывает, что приводит к дополнительному убыванию второго сомножителя, если сумма больше единицы; если она равна единице, то сомножитель не меняется. Поэтому величина $\|x\|_p$ как функция от p при фиксированном векторе x – функция невозрастающая. Она постоянна, если вектор содержит единственный ненулевой элемент, и строго убывает в противном случае. При $p \to \infty$ второй сомножитель стремится к единице, а $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$, что и оправдывает обозначение для нормы в $\mathbb{R}_{\max}^n$.

Пространства $\mathbb{R}_p^n$ – полные и сепарабельные. Доказательство не отличается от доказательства полноты и сепарабельности E^n. Плотное множество – вектора с рациональными компонентами.

Нормы $\|x\|_p$ эквивалентны равномерной норме, двусторонняя оценка: $\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p}\|x\|_\infty$. Тогда все они эквивалентны друг другу.

2. Пространства l_p – бесконечномерные аналоги.

   Это пространства бесконечных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, для которых сходятся ряды из p-х степеней модулей:$\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < \infty$. Было доказано, что это ЛП: линейные комбинации элементов пространства ему принадлежат. Норма: $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p}$. Невырожденность и абсолютная однородность очевидны. Неравенство треугольника – неравенство Минковского для рядов.

   Пространства полные (банаховы) и сепарабельные (счётное плотное множество – обрывающиеся рациональные последовательности). Полнота доказывается как для l_2.

   Чтобы рассмотреть соотношение между пространствами с разными p, снова выносим $\|x\|_\infty$ и переходим к $\hat{x} = x/\|x\|_\infty$. Поскольку $x_j \to 0$,

максимум модуля достигается, и в последовательности $\hat{x}_j$ есть конечное число единиц и минус единиц (по крайней мере один элемент), а остальные по модулю меньше единицы. Отсюда следует, что если $p_1 < p_2$ и ряд из p_1-х степеней сходится, то сходится и ряд из p_2-х (по признаку сравнения), и вторая сумма не превосходит первой: $1 \le \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{x}_j|^{p_2} \le \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{x}_j|^{p_1}$
(равенство – если все слагаемые нули или единицы). Извлекая корни соответствующих степеней (слева большей, справа меньшей), получаем:

$$1 \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{x}_j|^{p_2} \right)^{1/p_2} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{x}_j|^{p_1} \right)^{1/p_1},$$

т.е. $1 \le \|\hat{x}\|_{p_2} \le \|\hat{x}\|_{p_1}$, равенство теперь достигается лишь в случае равенства сумм единице, т.е. при единственном ненулевом слагаемом. Умножая на $\|x\|_\infty$, получаем: $\|x\|_{p_2} \le \|x\|_{p_1}$. Таким образом, l_{p_2} непрерывно вкладывается в l_{p_1}.

3. Пространства $\tilde{L}_p$ и L_p (пространства Лебега).

   Интегральное неравенство Минковского – неравенство треугольника для нормы
   $$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

   Если носитель – множество непрерывных функций на [a,b], получаем ЛНП $\tilde{L}_p[a,b]$. Неполное.

   Если взять функции, интегрируемые по Риману, то получится полунормированное пространство.

   Пополнение $\tilde{L}_p[a,b]$ – пространство $L_p[a,b]$, интеграл понимается в смысле Лебега (должен сходиться), элементы пространства – классы функций, отличающихся на множестве нулевой меры.

   Оказывается, что вложение в обратную сторону по сравнению с l_p: если $p_1 < p_2$, то $L_{p_1}[a,b]$ непрерывно вкладывается в $L_{p_2}[a,b]$ (функции могут быть неограниченными, и условие сходимости несобственных интегралов приводит именно к такому соотношению).

   Можно рассматривать пространства Лебега на неограниченных множествах (например, $L_p(\mathbb{R})$), там пространства несравнимы.

4. Пространства $\tilde{W}_p^l$ и W_p^l (пространства Соболева).
   $\tilde{W}_p^l[a,b]$ – пространство l раз непрерывно дифференцируемых функ-

ций на $[a,b]$ с нормой

$$\|x\|_{W_p^l} = \left(\|x\|_p^p + \|\dot{x}\|_p^p + \dots + \|x^{(l)}\|_p^p\right)^{1/p} =$$
$$= \left[\int_a^b \left(|x(t)|^p + |\dot{x}(t)|^p + \dots + |x^{(l)}(t)|^p\right) dt\right]^{1/p}$$

(докажите, что это норма!). Пространство неполное, его пополнение – пространство $W_p^l[a,b]$. Можно рассматривать и для функций с другими областями определения. Если область определения многомерная, то нужно в сумме учитывать все частные производные, суммарный порядок которых не превосходит l.
Замечание. Иногда норму в таких пространствах определяют иначе, например,
$\|x\|_{W_p^l} = \|x\|_p + \|\dot{x}\|_p + \dots + \|x^{(l)}\|_p$
или
$\|x\|_{W_p^l} = \max\{\|x\|_p, \|\dot{x}\|_p, \dots \|x^{(l)}\|_p\}$.
Такие нормы эквивалентны приведённой выше (доказать!).

5. Весовые пространства.
Для последовательностей (конечных или бесконечных) – аналоги рассмотранных выше пространств, в которых слагаемые умножаются на положительные весовые коэффициенты. Для пространств с интегральной метрикой – подынтегральные функции умножаются на неотрицательную (почти всюду положительную) весовую функцию.
Например: $\mathbb{R}^n_{p,w}$ – ЛНП с носителем $\mathbb{R}^n$ и нормой
$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n w_k|x_k|^p\right)^{1/p}$, где $w_k > 0$ – заданные коэффициенты.
Бесконечномерный аналог: пространство $l_{p,w}$, состоит из последовательностей, для которых сходится ряд, $\sum_{k=1}^\infty w_k|x_k|^p$, норма – корень p-ой степени из этой суммы.
Функциональный аналог: пространство $\tilde{L}_{p,w}[a,b]$, непрерывных функций на $[a,b]$ с нормой $\|x\| = \left(\int_a^b w(t)|x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$,
где $w(t)$ – почти всюду положительная функция.
Доказательство неравенства треугольника основано на обобщениях неравенства Минковского. (Попробуйте доказать!)