Раздел 6. Линейные нормированные пространства (ЛНП)

Лекция 12 Конечномерность и компактность.

Мы знаем, что конечномерные пространства одинаковой размерности линейно изоморфны друг другу. Докажем, что линейное отображение, осуществляющее этот изоморфизм, непрерывно в обе стороны, независимо от того, как устроен этот изоморфизм и как введены нормы.

Теорема Любые два конечномерных ЛНП размерности n непрерывно изоморфны друг другу.

То, что пространства линейно изоморфны, знаем. Нужно доказать непрерывность отображения в обе стороны. На самом деле мы докажем не просто непрерывность, а равномерную непрерывность.

Всякое взаимно однозначное линейное отображение ЛП одинаковой размерности можно представить как композицию отображения из первого пространства в $\mathbb{R}^n$ и далее отображения из $\mathbb{R}^n$ во второе пространство. Действительно, любое такое отображение пространств размерности n после выбора базисов представляется с помощью невырожденной матрицы $n \times n$, которую всегда можно представить в виде произведения двух невырожденных матриц (например, взяв в качестве одного из сомножителей единичную матрицу).

Поэтому достаточно показать двустороннюю равномерную непрерывность линейного отображения, устанавливающего линейный изоморфизм $\mathbb{R}^n$ с какой-либо из стандартных норм – например, $\mathbb{R}^n_{\max}$ (для краткости обозначим его X) – и произвольного n-мерного ЛНП, которое будем обозначать Y.

Пусть $\tau : X \to Y$ – линейный изоморфизм. Произвольный элемент X представляется в виде $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$, где e_j – базисный элемент пространства X – вектор, у которого на j-м месте стоит единица, а на остальных нули. Норма элемента x равна $\|x\|_X = \max_j |\alpha_j|$, и тогда $\forall j : |\alpha_j| \le \|x\|_X$.

При отображении τ вектору x будет сопоставлен вектор
$y = \tau(x) = \alpha_1 \tau(e_1) + \dots + \alpha_n \tau(e_n)$. Оценим его норму:

$$\|y\|_Y = \|\alpha_1 \tau(e_1) + \dots + \alpha_n \tau(e_n)\|_Y \le$$
$$\le |\alpha_1| \cdot \|\tau(e_1)\|_Y + \dots + |\alpha_n| \cdot \|\tau(e_n)\|_Y \le$$
$$=\le \|x\|_X \cdot (\|\tau(e_1)\|_Y + \dots + \|\tau(e_n)\|_Y) = M\|x\|_X\,,$$

где $M = \|\tau(e_1)\|_Y + \dots + \|\tau(e_n)\|_Y$.

Покажем, что из полученной оценки вытекает равномерная непрерывность отображения τ. Мы хотим удостовериться, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \{\|x' - x''\|_X < \delta \Rightarrow \|\tau(x') - \tau(x'')\|_Y < \varepsilon\}\,.$$

Действительно,

$$\|\tau(x') - \tau(x'')\|_Y = \|\tau(x' - x'')\|_Y \le M\|x' - x''\|_X\,,$$

и требуемое условие будет выполнено при $\delta = \varepsilon/M$.

Осталось доказать равномерную непрерывность обратного отображения. Для того, чтобы это сделать, рассмотрим функционал $f(x) = \|\tau(x)\|_Y$. Этот функционал непрерывен, поскольку является композицией непрерывного (как только что было доказано) отображения $\tau : X \to Y$ и непрерывного функционала нормы в пространстве Y.

Рассмотрим множество значений функционала f на единичной сфере пространства X: $\sigma_1(o) = \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$ (в пространстве $X = \mathbb{R}^n_{\max}$ такая сфера представляет собой поверхность n-мерного куба). Сфера является ограниченным и замкнутым множеством (в любом метрическом пространстве), а в пространстве $\mathbb{R}^n_{\max}$ такие множества, как мы знаем, являются компактами. А на любом компакте произвольный ограниченный функционал принимает своё наибольшее и, как нам будет важно, наименьшее значение, которое обозначим m.

Значение m строго положительно. Действительно, поскольку функционал τ биективен, он взаимно однозначно переводит нуль пространства X в нуль пространства Y, а поскольку единичная сфера нуля не содержит, её образ также содержит только элементы пространства Y со строго положительной нормой, а поэтому и наименьшее значение функционала f также положительно.

Покажем, что для произвольного элемента $x \in X$, не обязательно лежащего на сфере, выполнено неравенство $\|\tau(x)\|_Y \geq m\|x\|_X$. Для $x = o$ неравенство выполнено (оно превращается в равенство 0=0). Если же $x \neq o$, то, в силу линейности отображения τ,

$$\tau(x) = \tau(\|x\|_X x^0) = \|x\|_X \tau(x^0)\,,$$

где, напомню, $x^0 = x/\|x\|_X \in \sigma_1(o)$ – нормированный вектор, лежащий на сфере. Поэтому

$$\|\tau(x)\|_Y = \|x\|_X \|\tau(x^0)\|_Y \geq m\|x\|_X\,.$$

Полученное неравенство означает равномерную непрерывность обратного отображения. Действительно, произвольный элемент $y \in Y$ представляется виде $y = \tau(\tau^{-1}(y))$, и поэтому $\|y\|_Y \geq m\|\tau^{-1}(y)\|_X$,
откуда $\|\tau^{-1}(y)\|_X \leq m^{-1}\|y\|_Y$.

Осталось повторить рассуждение, которое было использовано для доказательства непрерывности прямого отображения. Мы хотим удостовериться, что

$$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta > 0 : \{\|y' - y''\|_Y < \delta \Rightarrow \|\tau^{-1}(y') - \tau^{-1}(y'')\|_X < \varepsilon\}\,.$$

Действительно,

$$\|\tau^{-1}(y') - \tau^{-1}(y'')\|_X = \|\tau^{-1}(y' - y'')\|_X \leq m^{-1}\|y' - y''\|_Y\,,$$

и требуемое условие будет выполнено при $\delta = m\varepsilon$.

Теорема доказана.

Замечание. В процессе доказательства мы получили, что для некоторых $m, M > 0$ справедлива двусторонняя оценка: $m\|x\| \leq \|\tau(x)\| \leq M\|x\|$. Оценка получена для случая, когда одно из пространств $\mathbb{R}^n_{\max}$, но поскольку биекция любой пары пространств размерности n представляется в виде композиции биекций этих пространств с $\mathbb{R}^n_{\max}$, такая оценка справедлива и для них (с другими константами).

Следствие: все нормы в конечномерных ЛП эквивалентны.
Действительно, рассмотрим отображение двух ЛНП с одним и тем же ностиелем, в котором каждому элементу сопоставляется он сам: $\tau(x) = x$. Тогда, в силу двусторонней непрерывности отображения,
$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$, что и означает эквивалентность норм.

Утверждение: сходимость в произвольном конечномерном ЛНП с заданным базисом эквивалентна покоординатной. (Устанавливаем биекцию с пространством $\mathbb{R}^n_{\max}$, в котором сходимость эквивалентна покоординатной, а при непрерывном отображении сходящиеся последовательности переходят в сходящиеся.)

Утверждение: любое конечномерное ЛНП полное. (Устанавливаем биекцию с пространством $\mathbb{R}^n_{\max}$, в силу равномерной непрерывности образы фундаментальных последовательностей – также фундаментальные последовательности, они сходятся в силу полноты $\mathbb{R}^n_{\max}$, а в силу непрерывности обратного отображения сходятся последовательности из прообразов.)

Утверждение: в любом ЛНП любой конечномерный линеал замкнут, т.е. является подпространством. В частности, является подпространством линейная оболочка любой конечной системы элементов. (Конечномерный линеал – полное МП при любой норме, сходящаяся последовательность его элементов фундаментальна и сходится к элементу самого МП.)

Утверждение: в любом конечномерном ЛНП произвольное ограниченное множество предкомпактно, а произвольное ограниченное замкнутое множество – компакт. (Устанавливаем биекцию с $\mathbb{R}^n_{\max}$, образ ограниченного множества ограничен и является предкомпактным множеством, а образ ограниченного замкнутого ограничен и замкнут, является компактом. Прообразы обладают теми же свойствами.)

Теорема Рисса о почти перпендикуляре.
Пусть X – ЛНП, $Y \subsetneq X$ – его замкнутое подпространство, не совпадающее с X. Тогда
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists u \in X \backslash L : \{\|u\| = 1 \wedge \rho(u, Y) > 1 - \varepsilon\}$

Замечание. Напомню, что расстояние элемента до подпространства (как и до любого множества) опледеляется так:

$$\rho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x, y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| .$$

Это расстояние неотрицательно и равно нулю лишь для элементов пространства. Действительно, обращение в нуль расстояния означает, что x –

точка прикосновения Y, а поскольку подпространство замкнуто, оно содержит все свои точки прикосновения. Следовательно, расстояние до подпространства от элемента, не принадлежащего подпространству, строго положительно. Для незамкнутых множеств (в частности, линеалов), расстояние равно нулю и в случае, если элемент не входит в это множество, но входит в его замыкание.

Замечание. "Перпендикуляр"к подпростренству – элемент, для которого расстояние до подпространства совпадает с его нормой. Тогда в числе ближайших к нему элементов подпространства – o (что не исключает возможности наличия в Y других элементов, находящихся на том же расстоянии). "Почти перпендикуляр" – элемент, для которого расстояние до подпространства почти совпадает с его нормой. В теореме доказывается, что отличие может быть сделано сколь угодно малым.

Прежде, чем доказать теорему, докажем две леммы.

Лемма. $\forall x \in X \, \forall y \in Y : \rho(x, Y) = \rho(x - y, Y)$ (сдвиг элемента вдоль подпространства не изменяет его расстояния до этого подпространства).

$$\rho(x - y, Y) = \inf_{\tilde{y} \in Y} \|(x - y) - \tilde{y}\| =$$
$$= \inf_{\tilde{y} \in Y} \|x - (y + \tilde{y})\| = \inf_{\hat{y} \in Y} \|x - \hat{y}\| = \rho(x, Y)$$

(Когда $\tilde{y}$ пробегает всё подпространство Y, $\hat{y} = y + \tilde{y}$ также пробегает всё Y.)

Лемма. $\forall x \in X \, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \rho(\lambda x, Y) = |\lambda| \rho(x, Y)$ (умножение элемента на число приводит к умножению расстояния до подпространства на модуль этого числа).

Для $\lambda = 0$ верно: слева и справа 0. Пусть теперь $\lambda \neq 0$:

$$\rho(\lambda x, Y) = \inf_{y \in Y} \|\lambda x - y\| = \inf_{y \in Y} \|\lambda(x - y/\lambda)\| =$$
$$= \inf_{y \in Y} |\lambda| \cdot \|x - y/\lambda\| = |\lambda| \inf_{\hat{y} \in Y} \|x - \hat{y}\| = |\lambda| \rho(x, Y)$$

(Когда $\tilde{y}$ пробегает всё подпространство Y, $\hat{y} = y/\lambda$ также пробегает всё Y.)

Замечание. Из этих лемм, между прочим, следует, что $\rho(x, Y)$ – норма на факторпространстве X/Y.

Теперь докажем теорему. Возьмём произвольный элемент $x \in X \backslash Y$. В силу сказанного выше $d = \rho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| > 0$. Тогда
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists y \in Y : \|x - y\| < (1 + \varepsilon) d$.

Обозначим $v = x - y$. В силу первой из доказанных лемм, $\rho(v, Y) = \rho(x, Y) = d$, при этом $\|v\| < (1 + \varepsilon) d$.

Пусть теперь $u = v^0 = v/\|v\|$. Тогда $\|u\| = 1$ и, в силу второй из доказанных лемм,
$\rho(u, Y) = \rho(v, Y)/\|v\| = d/\|v\| > 1/(1 + \varepsilon) > 1 - \varepsilon$.
Теорема доказана.

Утверждение: для конечномерных подпространств "почти перпендикуляр"можно заменить "перпендикуляром". То есть
$\exists u \in X \backslash Y : \|u\| = \rho(u, Y) = 1$. (Инфинум на самом деле минимум, поскольку можно искать его на пересечении подпространства с замкнутым шаром достаточно большого диаметра, это будет компакт.)

Пример. $X = \mathbb{R}^2_{\max}$, $Y = \{y = (y_1, 0)\}$. Перпендикуляры к этому подпространству, по норме равные единице: $x = (x_1, \pm 1)$, $|x_1| \leq 1$. Если $X = \mathbb{R}^2_p$, то при том же подпространстве Y нормированные перпендикуляры имеют вид $x = (0, \pm 1)$.

Теорема Произвольное ограниченное множество в ЛНП предкомпактно тогда и только тогда, когда ЛНП конечномерно.

То, что ограниченное множество в конечномерном пространстве предкомпактно, уже знаем. Осталось доказать существование непредкомпактного ограниченного множества в произвольном бесконечномерном пространстве.

Докажем непредкомпактность единичной сферы. Выбираем произвольный элемент, строим его линейную оболочку.

Согласно теореме Рисса находим единичный вектор, находящийся на расстоянии $1-\varepsilon$ от этого подпространства (и, следовательно, на не меньшем расстоянии от превого элемента). Берём линейную оболочку первых двух элементов.

Дальше находим третий единичный элемент, находящийся на расстоянии не меньше $1-\varepsilon$ от этого подпространства (и, следовательно, от первых двух элементов) и т.д.

Все линейные оболочки – замкнутые подпространства, так что условия теоремы Рисса на каждом шаге выполняются. То, что эти подпространства не совпадают со всем пространством, следует из его бесконечномерности.

В результате строим $1-\varepsilon$-дискретное счётное подмножество единичной сферы, непредкомпактное. Теорема доказана.

Замечание. Произвольное ограниченное множество в формулировке теоремы можно заменить единичным шаром (с центром в нуле).

Замечание. Поскольку подпространства конечномерные, можно выбирать не почти перпендикуляры, а перпендикуляры (что на результат никак не повлияет).