Раздел 1. Бесконечные множества

Лекция 1 Теоретико-множественное введение.

Напомню некоторые факты, относящиеся к "наивной" теории множеств. Эти факты нам понадобятся дальше при изучении функционального анализа.

Множества.

$A = \{a, b, c\}$

a, b, c – элементы множества A

$a \in A$, $A \ni a$, $d \notin A$

Элементы сами могут быть множествами.

Равенство множеств – поэлементное. Порядок и повторения не имеют значения:

$\{a, b, c\} = \{b, c, a, b\}$

Одноэлементные множества: $\{a\} \ni a$

Пустое множество: $\emptyset = \{\}$

$\emptyset \neq \{\emptyset\}$ (первое множество пустое, никаких элементов не содержит, второе множество одноэлементное, его единственный элемент – пустое множество).

Подмножества

$A = \{a, b, c\} \quad B = \{b, a\} \quad B \subset A \ (x \in B \Rightarrow x \in A)$

$\emptyset \subset A$

Допускается равенство: $A \subset A$

$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow A = B$

B – собственное подмножество A, если $B \subset A \wedge B \neq A$

Обозначение: $B \subsetneq A$

Альтернативные обозначения: $\subseteq$, если допускается равенство (иногда будем пользоваться), и $\subset$ для собственных подмножеств (не будем пользоваться).

Примеры множеств: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Операции над множествами.

Объединение $A \cup B$

Пересечение $A \cap B$

Коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность.

Наглядное представление: круги Эйлера.

Для непересекающихся множеств ($A \cap B = \emptyset$) иногда объединение записывают в виде суммы: $A \cup B = A + B$

Разность $A \backslash B$

Симметричная разность $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Если $B \subset A$, то разность называют дополнением B до A и иногда записывают в виде $A \backslash B = A - B$.

Просто "дополнение" – дополнение до "универсума" – объединения всех множеств, *рассматриваемых в рамках данной задачи.*

Декартово произведение множеств $A \times B = \{(a,b), a \in A, b \in B\}$ – множество упорядоченных пар элементов.
Если $c = (a,b) \in A \times B$, то $a = P_A(c)$ и $b = P_B(c)$ – проекции элемента c на A и B
Если A содержит n элементов (записывается так: $|A| = n$ или $\sharp A = n$), а B - m элементов ($|B| = \sharp B = m$), то $|A \times B| = n \times m$.

Декартово произведение множества на себя:
$A \times A = A^2 = \{(a_1, a_2), a_{1,2} \in A\}$
Пример: $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2), x_{1,2} \in \mathbb{R}\}$

Декартово произведение нескольких множеств (различных или совпадающих):
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_j \in A_j, j = 1, \ldots, n\}$
$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_j \in A, j = 1, \ldots, n\}$
Если $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то $a_j = P_j(\mathbf{a})$ – проекции
Пример: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2 \ldots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n\}$ – множество упорядоченных последовательностей из n вещественных чисел (или, иначе, множество точек n-мерного вещественного пространства).

Бинарное отношение – подмножество декартова произведения двух множеств (различных или совпадающих): $R \subset X \times Y$ (или $R \subset X^2$).

Вместо $(x,y) \in R$ иногда пишут xRy (элемент x находится в отношении R к элементу y).

Бинарное отношение можно трактовать как многозначную функцию.

Если $(x,y) \in R$, то y – образ x, а x – прообраз y.

Полный образ элемента x: $R(x) = \{y \in Y : (x,y) \in R\}$

Полный прообраз элемента y: $R^{-1}(y) = \{x \in X : (x,y) \in R\}$

Обратное отношение: $R^{-1} = \{(y,x) : (x,y) \in R\} \subset Y \times X$

$D(R) = P_X R = \{x \in X : \exists (x,y) \in R\}$ – проекция R на X, или область определения R.

$E(R) = P_Y R = \{y \in Y : \exists (x,y) \in R\}$ – проекция R на Y, или область значений R.

Отношение R называется полноопределённым, если $D(R) = X$ (полный образ любого элемента $x \in X$ непуст).

Отношение R называется сюрьективным, если $E(R) = Y$ (полный образ любого элемента $y \in Y$ непуст).

Отношение R называется функциональным (или просто функцией), если
$xRy_1 \wedge xRy_2 \Rightarrow y_1 = y_2$
(полный образ любого элемента $x \in X$ состоит не более, чем из одного элемента).

Отношение R называется инъективным, если
$x_1Ry \wedge x_2Ry \Rightarrow x_1 = x_2$
(полный прообраз любого элемента $y \in Y$ состоит не более, чем из одного элемента).

Отношение называется биективным, если оно полноопределённое, сюрьективное, функциональное и инъективное. Оно устанавливает взаимно-однозначное соответствие между элементами множеств X и Y:
$\forall x \in X \exists! y \in Y : xRy$.
Множества, между которыми существует такое соответствие, называются равномощными (записывается как $|X| = |Y|$ или $\sharp X = \sharp Y$).

Остановимся подробнее на функциональных отношениях (синонимы: функция, оператор, отображение). Будем использовать букву F (вместо R).
$(x, y) \in F \Leftrightarrow xFy \Leftrightarrow y = F(x) \Leftrightarrow F : x \mapsto y$
(функция F переводит элемент $x \in X$ в элемент $y \in Y$).
$F : X \to Y$
(функция F отображает X в Y; если отображение сюрьективное, т.е. $E(F) = Y$, то F отображает X *на* Y).
Образ множества $A \subset X$: $F(A) = \{F(x) : x \in A\}$, тогда $E(F) = F(X)$
Прообраз множества $B \subset Y$: $F^{-1}(B) = \{x \in X : F(x) \in B\}$, тогда $D(F) = F^{-1}(Y)$
Множество $Gr(F) = \{(x, F(x))\} \in X \times Y$ называют графиком функции F. Отличия между функцией и её графиком скорее психологические, нежели математические.

Пусть $F_{1,2} : X \to Y$ – два отображения, $D_{1,2} = D(F_{1,2})$ – их области определения, причём $D_1 \subset D_2$, и на D_1 их образы совпадают:
$\forall x \in D_1 : F_2(x) = F_1(x)$
Это эквивалентно тому, что $Gr(F_1) \subset Gr(F_2)$. В этом случае отображение F_1 называют сужением F_2 на D_1, а отображение F_2 – расширением или продолжением F_1 на D_2.

Будем рассматривать полноопределённые отображения из $F : X \to Y$, $D(F) = X$. Множество таких отображений обозначается Y^X. Причина в том, что если $|X| = n$, $|Y| = m$, то $\left|Y^X\right| = m^n$ – число последовательностей длины n, каждый элемент которых может принимать одно из m возможных значений. Иногда в обозначении Y^X имена множеств заменяют числом элементов.

Первый пример: A^n, рассмотренное ранее декартово произведение n экземпляров множества A. Элементы этого множества – конечные последовательности вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ можно истолковать как отображения из n-элементного множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ натуральных чисел, не превосходящих n, в множество A: каждому такому числу j сопоставляется элемент a_j.

Второй пример: m^A, множество отображений из A в m-элементное множество, например, множество $\{1, 2, \ldots, m\}$ натуральных чисел, не превосходящих m. Сопоставим каждому такому числу его прообраз
$A_j = \{a \in A : F(a) = j\}$. В разультате мы получаем разбиение исходного множества A на m непересекающихся подмножеств: $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_m$. Обратно, если мы имеем некоторое *упорядоченное* разбиение A на m непе-

ресекающихся подмножеств (среди которых, разумеется, могут быть и пустые), то такое разбиение задаёт отображение из A в $\{1, 2, \ldots, m\}$: значение функции на первом слагаемом задаём равным единице, на втором – двойке и т.д. Таким образом множество отображений m^A и множество упорядоченных разбиений A на m непересекающихся подмножеств оказываются равномощными.

В важном частном случае, когда $m = 2$, обычно в качестве двухэлементного множества рассматривают не $\{1, 2\}$, а $\{0, 1\}$. Оказывается, что множество 2^A равномощно множеству всех подмножеств множества A (включая само A и пустое множество), которое обозначается $\mathcal{P}(A)$. Действительно, пусть $B \subset A$ (или, что то же самое, $B \in \mathcal{P}(A)$) – некоторое подмножество. Сопоставим ему *характеристическую функцию* $\chi_B(x)$, принимающую значение 1, если $x \in B$, и значение 0 в противном случае. Очевидно, $\chi_B \in 2^A$. Обратно, любой функции, принимающей на множестве A значения 0 и 1 можно единственным образом сопоставить её *носитель* – множество, на котором эта функция принимает значение единица. Таким образом, построено взаимно однозначное соответствие между подмножествами множества A и отображениями из A в $\{0, 1\}$. На всякий случай замечу, что сказанное выше об упорядоченных разбиениях остаётся справедливым и для этого случая: выбор множества B однозначно определяет его дополнение и, тем самым, разбиение A на B и $A - B$.

Вернёмся к рассмотрению бинарных отношений, причём теперь будем рассматривать случай, когда множества в декартовом произведении совпадают: $R \subset X \times X$.

Отношение R называется рефлексивным, если
$\forall x \in X : xRx$

Отношение R называется транзитивным, если
$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Отношение R называется симметричным, если
$xRy \Rightarrow yRx$
В этом случае R совпадает с R^{-1}.

Отношение R называется антисимметричным, если
$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

Отношение R называется отношением эквивалентности (обозначается $\sim$), если оно рефлексивно, транзитивно и симметрично. Если $x \sim y$, то говорят, что x эквивалентно y.

Отношение R называется отношением частичного порядка (обозначается $\preccurlyeq$), если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Если $x \preccurlyeq y$, то говорят, что x предшествует y. Говорят, что элементы x и y сравнимы, если один из них предшествует другому. Множество, на котором задано отношение частичного порядка, называется частично упорядоченным.

Отношение частичного порядка называется отношением линейного порядка, если любые два его элемента сравнимы. Множество, на котором задано отношение линейного порядка, называется линейно упорядоченным.

Примеры:

1) Для любого X отношение тождества $x = y$ является рефлексивным ($\forall x \in X : x = x$), транзитивным ($x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$), симметричным ($x = y \Rightarrow y = x$) и антисимметричным
($x = y \wedge y = x \Rightarrow x = y$), а поэтому является отношением эквивалентности и отношением частичного порядка, в котором каждый элемент сравним только сам с собой. В этом случае множество R – диагональ $\{(x, x), x \in X\}$.
2) Функциональное отношение: $R = \{(x, F(x))\}$, где $F : X \to X$ – некоторое отображение. Если это отображение тождественное, то этот случай сводится к предыдущему. Если F является сужением тождественного отображения (т.е. совпадает с тождественным на своей области определения, отличной от X), то отношение транзитивно, симметрично и антисимметрично. В иных случаях R транзитивно, если $F(x) = x$ на $D(F) \cap E(F)$. Отношение R симметрично, если функция совпадает со своей обратной, в этом случае $F(F(x)) = x$ на $D(F) = E(F)$. Если $D(F) = E(F) = X$, то говорят, что такая функция задаёт инволюцию на X. Отношение R антисимметрично, если $F(F(x)) \neq x$ в случае $F(x) \neq x$. В частности, для $X \subset \mathbb{R}$ этим свойством обладают все монотонно возрастающие функции.
3) Для $X \subset \mathbb{R}$ отношение $\leq$ является рефлексивным ($\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$), транзитивным ($x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$) и антисимметричным
($x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$), т.е. является отношением частичного порядка. Поскольку любые два вещественных числа сравнимы, этот порядок является линейным. В этом случае $R = \{(x, y), x \leq y\}$. Аналогичными свойствами обладает отношение $\geq$.
4) Для $X \subset \mathbb{R}$ отношение $<$ является транзитивным ($x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$) и антисимметричным (условие $x < y \wedge y < x \Rightarrow x = y$ справедливо!). Аналогичными свойствами обладает отношение $>$.
5) Пусть $F : X \to Y$ – некоторое отображение. Отношение $R = \{(x, y) : F(x) = F(y)\}$ транзитивно ($F(x) = F(y) \wedge F(y) = F(z) \Rightarrow F(x) = F(z)$) и симметрично ($F(x) = F(y) \Rightarrow F(y) = F(x)$). В случае $D(F) = X$ отношение R рефлексивно ($\forall x \in X : F(x) = F(x)$) и, тем самым, является отношением эквивалентности. Если функция F инъективна, то отношение R антисимметрично, а если к тому же $D(F) = X$, то R превращается в отношение тождества.
6) Пусть $F : X \to \mathbb{R}$ – некоторое отображение. Отношение $R = \{(x, y) : F(x) \leq F(y)\}$ транзитивно ($F(x) \leq F(y) \wedge F(y) \leq F(z) \Rightarrow F(x) \leq F(z)$). В случае $D(F) = X$ отношение R рефлексивно ($\forall x \in X : F(x) \leq F(x)$). Если функция F инъективна, то отношение R антисимметрично, а если к тому же $D(F) = X$, то R является отношением частичного (точнее, линейного) порядка.
7) Для $X = \mathcal{P}(A)$, элементами которого являются подмножества множества A, отношение $\subset$ является отношением частичного порядка: оно рефлексивно ($\forall x \in X : x \subset x$), транзитивно ($x \subset y \wedge y \subset z \Rightarrow x \subset z$) и антисимметрично ($x \subset y \wedge y \subset x \Rightarrow x = y$).

Пусть теперь R – некоторое отношение эквивалентности $\sim$ на X. Сопоставим каждому элементу $x \in X$ его класс эквивалентности

$cl(x) = \{y \in X : y \sim x\}$.

Утверждение: если два класса имеют непустое пересечение, то они совпадают (доказать!).

Тогда произвольное отношение эквивалентности порождает разбиение множества на непересекающиеся классы. (И обратно: разбиение на непересекающиеся подмножества порождает отношение эквивалентности, в котором эквивалентными считаем элементы, попавшие в одно и то же подмножество.) Множество классов эквивалентности – фактормножество множества X по отношению эквивалентности R, обозначается X/R.

Мощность. Мощность множества ($\sharp$) – обобщение понятия количества элементов. Как указано выше, два множества A и B равномощны ($\sharp A = \sharp B$), если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Свойства:
рефлексивность ($\sharp A = \sharp A$, взаимно-однозначное отображение – тождественное);
симметричность ($\sharp A = \sharp B \Rightarrow \sharp B = \sharp A$, отображения взаимно отратные);
транзитивность ($\sharp A = \sharp B \wedge \sharp B = \sharp C \Rightarrow \sharp A = \sharp C$, биективное отображение из A в C – композиция отображений из A в B и из B в C).

Очень похоже на отношение эквивалентности, однако нет того множества (множества всех множеств), на котором устанавливается это отношение. Если бы было, можно было бы объявить мощность классом эквивалентности по отношению равномощности.
(NB: понятие множества всех множеств внутренне противоречиво, что следует из теоремы Кантора, см. ниже).

Говорят, что мощность множества A не превосходит мощности множества B ($\sharp A \leq \sharp B$), а мощность множества B не меньше мощности множества A ($\sharp B \geq \sharp A$), если A равномощно подмножеству множества B.

Утверждение: $\sharp A \leq \sharp B \wedge \sharp B \leq \sharp C \Rightarrow \sharp A \leq \sharp C$ (доказать!)

Теорема Кантора-Бернштейна: $\sharp A \leq \sharp B \wedge \sharp A \geq \sharp B \Rightarrow \sharp A = \sharp B$ (см. ниже)

Говорят, что мощность множества A строго меньше мощности множества B ($\sharp A < \sharp B$), а мощность множества B строго больше мощности множества A ($\sharp B > \sharp A$), если A равномощно подмножеству множества B, но не равномощно самому множеству B.

Утверждение: $\sharp A < \sharp B \wedge \sharp B \leq \sharp C \Rightarrow \sharp A < \sharp C$ (доказать!)

Утверждение: $\sharp A \leq \sharp B \wedge \sharp B < \sharp C \Rightarrow \sharp A < \sharp C$ (доказать!)

Без доказательства: любые два множества сравнимы по мощности, т.е. либо $\sharp A = \sharp B$, либо $\sharp A < \sharp B$, либо $\sharp A > \sharp B$.

Конечные и бесконечные множества.

$\sharp\emptyset = 0$

Непустое множество A конечно, если оно равномощно множеству $\{1, \ldots, n\}$ – отрезку натурального ряда. В этом случае $\sharp A = n$. Элементы можно занумеровать: $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Множество A бесконечно, если $\forall n \in \mathbb{N} : \sharp A \geq n$

Счётные множества.

Множество A счётно, если $\sharp A = \sharp\mathbb{N}$. Обозначение: $\sharp\mathbb{N} = \aleph_0$. Элементы можно занумеровать: $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$.

Утверждение: счётными являются множества:
Объединение счётного и конечного;
Разность счётного и конечного;
Объединение двух счётных;
Объединение конечного числа счётных;
Объединение счётного набора счётных множеств.
(доказать!)

Диагональный процесс нумерации.

Примеры: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^2, \mathbb{N}^n, \dots$

Утверждение: множество конечных последовательностей рациональных чисел счётно (доказать!). Этот факт понадобится в дальнейшем.

Теорема Произвольное бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Теорема
1) Объединение бесконечного множества и конечного равномощно исходному
2) Разность бесконечного множества и конечного равномощно исходному
3) Объединение бесконечного множества и счётного равномощно исходному
4) Разность бесконечного несчётного множества и счётного равномощно исходному
Замечание 1: бесконечное множество равномощно своему собственному подмножеству.
Замечание 2: существование бесконечных несчётных множеств пока что не доказано.

Теорема Кантора. $\left|2^{\mathbb{N}}\right| > |\mathbb{N}|$
Множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц несчётно.

Для доказательства установим, что ни одно счётное подмножество $2^{\mathbb{N}}$ не совпадает с $2^{\mathbb{N}}$ (т.е. что дополнение непусто).

Пусть есть такое подмножество. Занумеруем его элементы:

$$\begin{gathered}
A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1j}, \dots) \\
A_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2j}, \dots) \\
A_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3j}, \dots) \\
\dots \\
A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ij}, \dots) \\
\dots
\end{gathered}$$

Здесь $a_{ij} \in \{0,1\}$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$, и $A_i \in 2^{\mathbb{N}}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Построим последовательность

$$B = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_j, \dots) \in 2^{\mathbb{N}},$$

не входящую в рассматриваемое подмножество, т.е. $\forall i \in \mathbb{N} : B \neq A_i$.

Положим $b_j = 1 - a_{jj} \neq a_{jj}$. Тогда для любого значения j: $B \neq A_j$, поскольку у этих последовательностей j-е элементы различаются. Поэтому B не входит в рассматриваемый счётный набор, который, таким образом, не может совпадать с $2^{\mathbb{N}}$. Отсюда следует несчётность $2^{\mathbb{N}}$.
Теорема доказана.

Замечание. Вот теперь уже доказано существование несчётных бесконечных множеств, поскольку таковым является $2^{\mathbb{N}}$. Обозначение: $\sharp 2^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$. Мощность континуума.

Континуум.
Примеры:
$2^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m^{\mathbb{N}}, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, [0,1], [0,1] \times [0,1], [a,b], (a,b), \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, C[a,b], \dots$

Гипотеза континуума: любое непустое подмножество $A \subset \mathbb{R}$ либо континуально, либо счётно, либо конечно. Иными словами, не существует несчётных бесконечных множеств, мощность которых была бы меньше континуальной. Гипотеза не может быть ни доказана, ни опровергнута.

Для дальнейшего нам будет полезно переформулировать теорему Кантора на языке подмножеств: $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$, т.е. множество подмножеств натурального ряда несчётно.
Повторим доказательство в новых терминах. Пусть есть счётный набор подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$, $A_i \subset \mathbb{N}$, и нужно доказать, что найдётся такое $B \subset \mathbb{N}$, которое не совпадёт ни с одним из A_i.
Сопоставим подмножеству A_i одноимённую характеристическую числовую последовательность, фигурировавшую в предыдущем доказательстве,
$a_{ij} = 1$ в случае $j \in A_i$ и $a_{ij} = 0$, если $j \notin A_i$. В частности, $a_{ii} = 1$ при $i \in A_i$ и $a_{ii} = 0$ при $i \notin A_i$. Условие $b_i \neq a_{ii}$ означает, что $i \in B$ тогда и только тогда, когда $i \neq A_i$: $B = \{i \in \mathbb{N} : i \notin A_i\}$. Отсюда следует, что $B \neq A_i$, $\forall i$, что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно заметить, что последовательности здесь совершенно не обязательны и использовались только для перевода предыдущего доказательства на другой язык. Теперь мы готовы к тому, чтобы обобщить теорему на произвольное множество.

Обобщённая теорема Кантора.

Мощность множества подмножеств произвольного множества строго больше мощности исходного множества: $|\mathcal{P}(A)| > |A|$
Чтобы доказать это, установим, что никакое отображение $\varphi : A \to \mathcal{P}(A)$ не может быть сюрьективным: $\mathcal{P}(A) \backslash E(\varphi) \neq \emptyset$
(Теорема Кантора: $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$)

Доказательство. Докажем, что $\exists B \in \mathcal{P}(A) \backslash E(\varphi)$. Включим в подмножество $B \subset A$ те и только те элементы $x \in A$, которые не принадлежат своему образу при отображении φ: $B = \{x \in A : x \notin \varphi(x)\}$. Отсюда следует, что $B \neq \varphi(x)$, поскольку эти множества отличаются по крайней мере одним элементом: если $x \in \varphi(x)$, то $x \notin B$, а если $x \notin \varphi(x)$, то $x \in B$. Поскольку это верно для всех $x \in A$, то $B \subset A$ не входит в образ φ, т.е. отображение φ не сюрьективно (а потому и не биективно).

Это значит, что множества A и $\mathcal{P}(A)$ не равномощны. С другой стороны, A равномощно множеству своих одноэлементных подмножеств, содержащихся в $\mathcal{P}(A)$, поэтому $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие: невозможно множество всех множеств (доказать!).

Замечание. В теореме Кантора отображение $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ – это нумерация подмножеств с помощью индекса.

Теорема Кантора-Бернштейна.
$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$
Если множество A равномощно подмножеству множества B, а множество B равномощно подмножеству множества A, то множества A и B равномощны. Иными словами: если существуют биекции между A и $B_1 \subsetneq B$ и между B и $A_1 \subsetneq A$, то существует и биекция между A и B.

Доказательство. Обозначим $A_0 = A$, B_0=B. Пусть $f : A_0 \to B_1 \subsetneq B_0$ и $g : B_0 \to A_1 \subsetneq A_0$ – биективные отображения. Обозначим $B_2 = f(A_1)$, $A_2 = g(B_1)$. В силу биективности f, $B_2 \subsetneq B_1$, поскольку $B_1 \backslash B_2 = f(A_0 \backslash A_1)$. Аналогично, в силу биективности g, $A_2 \subsetneq A_1$.

Продолжим эту процедуру, обозначив $B_{j+1} = f(A_j)$, $A_{j+1} = g(B_j)$. Получаем две бесконечные (счётные) сужающиеся цепочки множеств:
$A = A_0 \supsetneq A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \dots$ и $B = B_0 \supsetneq B_1 \supsetneq B_2 \supsetneq \dots$.

Обозначим теперь
$C_j = A_j \backslash A_{j+1}$, $C_\infty = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$,
$D_j = B_j \backslash B_{j+1}$, $D_\infty = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_j$.
Произвольный элемент множества A принадлежит либо всем множествам A_j (и тогда принадлежит их пересечению C_∞), либо только конечному их числу (и тогда принадлежит некоторому C_j, где j – номер последнего множества в цепочке, содержащего данный элемент). Тогда множество A есть счётное объединение непересекающихся множеств

$$A = \left(\bigcup_{j \geq 0} C_j \right) \cup C_\infty$$

Аналогично

$$B = \left(\bigcup_{j \geq 0} D_j \right) \cup D_\infty$$

Для того, чтобы установить равномощность A и B, мы установим равномощность множеств C_j и D_j с индексами разной чётности, а также C_∞ и D_∞.

В силу биективности f,

$$f(C_j) = f(A_j \backslash A_{j+1}) = f(A_j) \backslash f(A_{j+1}) = B_{j+1} \backslash B_{j+2} = D_{j+1}\,,$$

а в силу биективности g,

$$g(D_j) = g(B_j \backslash B_{j+1}) = g(B_j) \backslash g(B_{j+1}) = A_{j+1} \backslash A_{j+2} = C_{j+1}\,.$$

Кроме того,

$$f(C_\infty) = f\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} f(A_j) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_{j+1} = D_\infty$$

(отсутствие B_1 в последнем пересечении на результат не влияет, поскольку $B_2 = B_1 \cap B_2$). Точно так же доказывается, что $g(D_\infty) = C_\infty$, но нам это не понадобится.

Таким образом, f биективно отображает C_j на D_{j+1}, а также C_∞ на D_∞, а g – D_j на C_{j+1}. Тогда g^{-1} отображает C_{j+1} на D_j. Теперь мы можем построить искомую биекцию A и B.

Отобразим биективно множества C_j с чётными номерами (т.е. $C_0, C_2, C_4, \dots$) на множества D_{j+1} с нечётными номерами, на единицу большими (т.е. $D_1, D_3, D_5, \dots$) с помощью функции f.

Отобразим биективно множества C_{j+1} с нечётными номерами (т.е. $C_1, C_3, C_5, \dots$) на множества D_j с чётными номерами, на единицу меньшими (т.е. $D_0, D_2, D_4, \dots$) с помощью функции g^{-1}.

Наконец, отобразим биективно множество C_∞ на множество D_∞ снова с помощью функции f.

Такое отображение устанавливает взаимно однозначное соответсвие множеств A и B. Теорема доказана.