Плаченов Александр Борисович, доцент кафедры высшей математики

Функциональный анализ, ч.1

01.03.02 "Прикладная математика и информатика“

Профили:
Математическое моделирование и вычислительная математика;
Системное программирование и компьютерные технологии;
Математические методы в здравоохранении.

Виды работы, предусмотренные учебным планом:
Лекции 32 ч.
Практические занятия 32 ч.
СРС 44 ч.
Контроль (экзамен) 36 ч.
Общая трудоёмкость дисциплины в семестре 144 ч.

Дисциплина ”Функциональный анализ“ имеет своей целью способствовать формированию у обучающихся общекультурной компетенции ОК-7 и профессиональной компетенции ПК-2 в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки бакалавров 01.03.02 ”Прикладная математика и информатика“ с учетом специфики профилей ”Математическое моделирование и вычислительная математика“, ”Системное программирование и компьютерные технологии“, ”Математические методы в здравоохранении“.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать:

– основные положения теории метрических пространств;
– основные положения теории линейных нормированных пространств;

уметь:

– применять методы теории метрических и нормированных пространств для представления адекватной современному уровню знаний научной картины мира;
– интерпретировать задачи, возникающие в других разделах математики, информатики и естествознания, в терминах теории метрических и нормированных пространств;

владеть:

– навыками применения методов теории метрических и нормированных пространств для представления адекватной современному уровню знаний научной картины мира;
– навыками анализа задач, возникающих в математическом моделировании, в здравоохранении и при применении компьютерных технологий в терминах теории метрических и линейных нормированных пространств.

Основная и дополнительная учебная литература, необходимая для освоения дисциплины

а) основная литература:

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Эементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2012. – 572 с.
2. Треногин В. А. Функциональный анализ. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 488 с.
3. Бакушинский А.Б., Худак Ю.И. Элементы функционального анализа. М.: Академия, 2011. – 188 с.

б) дополнительная литература:

1. Филимоненкова Н.В. Конспект лекций по функциональному анализу. СПб.: Лань, 2015. – 176 с.
2. Филимоненкова Н.В. Сборник задач по функциональному анализу. СПб.: Лань, 2015. – 240 с.
3. Сетуха А.В. Функциональный анализ. – М.: МИРЭА, 2010. – 210 с.

Раздел 1. Бесконечные множества

Лекция 1 Теоретико-множественное введение.

Напомню некоторые факты, относящиеся к "наивной" теории множеств. Эти факты нам понадобятся дальше при изучении функционального анализа.

Множества.

$A = \{a, b, c\}$

a, b, c – элементы множества A

$a \in A$, $A \ni a$, $d \notin A$

Элементы сами могут быть множествами.

Равенство множеств – поэлементное. Порядок и повторения не имеют значения:

$\{a, b, c\} = \{b, c, a, b\}$

Одноэлементные множества: $\{a\} \ni a$

Пустое множество: $\emptyset = \{\}$

$\emptyset \neq \{\emptyset\}$ (первое множество пустое, никаких элементов не содержит, второе множество одноэлементное, его единственный элемент – пустое множество).

Подмножества

$A = \{a, b, c\} \quad B = \{b, a\} \quad B \subset A \ (x \in B \Rightarrow x \in A)$

$\emptyset \subset A$

Допускается равенство: $A \subset A$

$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Leftrightarrow A = B$

B – собственное подмножество A, если $B \subset A \wedge B \neq A$

Обозначение: $B \subsetneq A$

Альтернативные обозначения: $\subseteq$, если допускается равенство (иногда будем пользоваться), и $\subset$ для собственных подмножеств (не будем пользоваться).

Примеры множеств: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$

Операции над множествами.

Объединение $A \cup B$

Пересечение $A \cap B$

Коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность.

Наглядное представление: круги Эйлера.

Для непересекающихся множеств ($A \cap B = \emptyset$) иногда объединение записывают в виде суммы: $A \cup B = A + B$

Разность $A \backslash B$

Симметричная разность $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

Если $B \subset A$, то разность называют дополнением B до A и иногда записывают в виде $A \backslash B = A - B$.

Просто "дополнение" – дополнение до "универсума" – объединения всех множеств, *рассматриваемых в рамках данной задачи.*

Декартово произведение множеств $A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$ – множество упорядоченных пар элементов.
Если $c = (a, b) \in A \times B$, то $a = P_A(c)$ и $b = P_B(c)$ – проекции элемента c на A и B
Если A содержит n элементов (записывается так: $|A| = n$ или $\sharp A = n$), а B - m элементов ($|B| = \sharp B = m$), то $|A \times B| = n \times m$.

Декартово произведение множества на себя:
$A \times A = A^2 = \{(a_1, a_2), a_{1,2} \in A\}$
Пример: $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2), x_{1,2} \in \mathbb{R}\}$

Декартово произведение нескольких множеств (различных или совпадающих):
$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_j \in A_j, j = 1, \ldots, n\}$
$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), a_j \in A, j = 1, \ldots, n\}$
Если $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то $a_j = P_j(\mathbf{a})$ – проекции
Пример: $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2 \ldots, x_n), x_j \in \mathbb{R}, j = 1, \ldots, n\}$ – множество упорядоченных последовательностей из n вещественных чисел (или, иначе, множество точек n-мерного вещественного пространства).

Бинарное отношение – подмножество декартова произведения двух множеств (различных или совпадающих): $R \subset X \times Y$ (или $R \subset X^2$).

Вместо $(x, y) \in R$ иногда пишут xRy (элемент x находится в отношении R к элементу y).

Бинарное отношение можно трактовать как многозначную функцию.

Если $(x, y) \in R$, то y – образ x, а x – прообраз y.

Полный образ элемента x: $R(x) = \{y \in Y : (x, y) \in R\}$

Полный прообраз элемента y: $R^{-1}(y) = \{x \in X : (x, y) \in R\}$

Обратное отношение: $R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\} \subset Y \times X$

$D(R) = P_X R = \{x \in X : \exists (x, y) \in R\}$ – проекция R на X, или область определения R.

$E(R) = P_Y R = \{y \in Y : \exists (x, y) \in R\}$ – проекция R на Y, или область значений R.

Отношение R называется полноопределённым, если $D(R) = X$ (полный образ любого элемента $x \in X$ непуст).

Отношение R называется сюрьективным, если $E(R) = Y$ (полный образ любого элемента $y \in Y$ непуст).

Отношение R называется функциональным (или просто функцией), если
$xRy_1 \wedge xRy_2 \Rightarrow y_1 = y_2$
(полный образ любого элемента $x \in X$ состоит не более, чем из одного элемента).

Отношение R называется инъективным, если
$x_1Ry \wedge x_2Ry \Rightarrow x_1 = x_2$
(полный прообраз любого элемента $y \in Y$ состоит не более, чем из одного элемента).

Отношение называется биективным, если оно полноопределённое, сюрьективное, функциональное и инъективное. Оно устанавливает взаимнооднозначное соответствие между элементами множеств X и Y:
$\forall x \in X \exists! y \in Y : xRy$.
Множества, между которыми существует такое соответствие, называются равномощными (записывается как $|X| = |Y|$ или $\sharp X = \sharp Y$).

Остановимся подробнее на функциональных отношениях (синонимы: функция, оператор, отображение). Будем использовать букву F (вместо R).
$(x, y) \in F \Leftrightarrow xFy \Leftrightarrow y = F(x) \Leftrightarrow F : x \mapsto y$
(функция F переводит элемент $x \in X$ в элемент $y \in Y$).
$F : X \to Y$
(функция F отображает X в Y; если отображение сюрьективное, т.е. $E(F) = Y$, то F отображает X *на* Y).
Образ множества $A \subset X$: $F(A) = \{F(x) : x \in A\}$, тогда $E(F) = F(X)$
Прообраз множества $B \subset Y$: $F^{-1}(B) = \{x \in X : F(x) \in B\}$, тогда $D(F) = F^{-1}(Y)$
Множество $Gr(F) = \{(x, F(x))\} \in X \times Y$ называют графиком функции F. Отличия между функцией и её графиком скорее психологические, нежели математические.

Пусть $F_{1,2} : X \to Y$ – два отображения, $D_{1,2} = D(F_{1,2})$ – их области определения, причём $D_1 \subset D_2$, и на D_1 их образы совпадают:
$\forall x \in D_1 : F_2(x) = F_1(x)$
Это эквивалентно тому, что $Gr(F_1) \subset Gr(F_2)$. В этом случае отображение F_1 называют сужением F_2 на D_1, а отображение F_2 – расширением или продолжением F_1 на D_2.

Будем рассматривать полноопределённые отображения из $F : X \to Y$, $D(F) = X$. Множество таких отображений обозначается Y^X. Причина в том, что если $|X| = n$, $|Y| = m$, то $\left|Y^X\right| = m^n$ – число последовательностей длины n, каждый элемент которых может принимать одно из m возможных значений. Иногда в обозначении Y^X имена множеств заменяют числом элементов.

Первый пример: A^n, рассмотренное ранее декартово произведение n экземпляров множества A. Элементы этого множества – конечные последовательности вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ можно истолковать как отображения из n-элементного множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ натуральных чисел, не превосходящих n, в множество A: каждому такому числу j сопоставляется элемент a_j.

Второй пример: m^A, множество отображений из A в m-элементное множество, например, множество $\{1, 2, \ldots, m\}$ натуральных чисел, не превосходящих m. Сопоставим каждому такому числу его прообраз
$A_j = \{a \in A : F(a) = j\}$. В разультате мы получаем разбиение исходного множества A на m непересекающихся подмножеств: $A = A_1 + A_2 + \cdots + A_m$. Обратно, если мы имеем некоторое *упорядоченное* разбиение A на m непе-

ресекающихся подмножеств (среди которых, разумеется, могут быть и пустые), то такое разбиение задаёт отображение из A в $\{1, 2, \ldots, m\}$: значение функции на первом слагаемом задаём равным единице, на втором – двойке и т.д. Таким образом множество отображений m^A и множество упорядоченных разбиений A на m непересекающихся подмножеств оказываются равномощными.

В важном частном случае, когда $m = 2$, обычно в качестве двухэлементного множества рассматривают не $\{1, 2\}$, а $\{0, 1\}$. Оказывается, что множество 2^A равномощно множеству всех подмножеств множества A (включая само A и пустое множество), которое обозначается $\mathcal{P}(A)$. Действительно, пусть $B \subset A$ (или, что то же самое, $B \in \mathcal{P}(A)$) – некоторое подмножество. Сопоставим ему *характеристическую функцию* $\chi_B(x)$, принимающую значение 1, если $x \in B$, и значение 0 в противном случае. Очевидно, $\chi_B \in 2^A$. Обратно, любой функции, принимающей на множестве A значения 0 и 1 можно единственным образом сопоставить её *носитель* – множество, на котором эта функция принимает значение единица. Таким образом, построено взаимно однозначное соответствие между подмножествами множества A и отображениями из A в $\{0, 1\}$. На всякий случай замечу, что сказанное выше об упорядоченных разбиениях остаётся справедливым и для этого случая: выбор множества B однозначно определяет его дополнение и, тем самым, разбиение A на B и $A - B$.

Вернёмся к рассмотрению бинарных отношений, причём теперь будем рассматривать случай, когда множества в декартовом произведении совпадают: $R \subset X \times X$.

Отношение R называется рефлексивным, если
$\forall x \in X : xRx$

Отношение R называется транзитивным, если
$xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

Отношение R называется симметричным, если
$xRy \Rightarrow yRx$
В этом случае R совпадает с R^{-1}.

Отношение R называется антисимметричным, если
$xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

Отношение R называется отношением эквивалентности (обозначается $\sim$), если оно рефлексивно, транзитивно и симметрично. Если $x \sim y$, то говорят, что x эквивалентно y.

Отношение R называется отношением частичного порядка (обозначается $\preccurlyeq$), если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Если $x \preccurlyeq y$, то говорят, что x предшествует y. Говорят, что элементы x и y сравнимы, если один из них предшествует другому. Множество, на котором задано отношение частичного порядка, называется частично упорядоченным.

Отношение частичного порядка называется отношением линейного порядка, если любые два его элемента сравнимы. Множество, на котором задано отношение линейного порядка, называется линейно упорядоченным.

Примеры:

1) Для любого X отношение тождества $x = y$ является рефлексивным ($\forall x \in X : x = x$), транзитивным ($x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z$), симметричным ($x = y \Rightarrow y = x$) и антисимметричным
($x = y \wedge y = x \Rightarrow x = y$), а поэтому является отношением эквивалентности и отношением частичного порядка, в котором каждый элемент сравним только сам с собой. В этом случае множество R – диагональ $\{(x, x), x \in X\}$.
2) Функциональное отношение: $R = \{(x, F(x))\}$, где $F : X \to X$ – некоторое отображение. Если это отображение тождественное, то этот случай сводится к предыдущему. Если F является сужением тождественного отображения (т.е. совпадает с тождественным на своей области определения, отличной от X), то отношение транзитивно, симметрично и антисимметрично. В иных случаях R транзитивно, если $F(x) = x$ на $D(F) \cap E(F)$. Отношение R симметрично, если функция совпадает со своей обратной, в этом случае $F(F(x)) = x$ на $D(F) = E(F)$. Если $D(F) = E(F) = X$, то говорят, что такая функция задаёт инволюцию на X. Отношение R антисимметрично, если $F(F(x)) \neq x$ в случае $F(x) \neq x$. В частности, для $X \subset \mathbb{R}$ этим свойством обладают все монотонно возрастающие функции.
3) Для $X \subset \mathbb{R}$ отношение $\leq$ является рефлексивным ($\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$), транзитивным ($x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$) и антисимметричным
($x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$), т.е. является отношением частичного порядка. Поскольку любые два вещественных числа сравнимы, этот порядок является линейным. В этом случае $R = \{(x, y), x \leq y\}$. Аналогичными свойствами обладает отношение $\geq$.
4) Для $X \subset \mathbb{R}$ отношение $<$ является транзитивным ($x < y \wedge y < z \Rightarrow x < z$) и антисимметричным (условие $x < y \wedge y < x \Rightarrow x = y$ справедливо!). Аналогичными свойствами обладает отношение $>$.
5) Пусть $F : X \to Y$ – некоторое отображение. Отношение $R = \{(x, y) : F(x) = F(y)\}$ транзитивно ($F(x) = F(y) \wedge F(y) = F(z) \Rightarrow F(x) = F(z)$) и симметрично ($F(x) = F(y) \Rightarrow F(y) = F(x)$). В случае $D(F) = X$ отношение R рефлексивно ($\forall x \in X : F(x) = F(x)$) и, тем самым, является отношением эквивалентности. Если функция F инъективна, то отношение R антисимметрично, а если к тому же $D(F) = X$, то R превращается в отношение тождества.
6) Пусть $F : X \to \mathbb{R}$ – некоторое отображение. Отношение $R = \{(x, y) : F(x) \leq F(y)\}$ транзитивно ($F(x) \leq F(y) \wedge F(y) \leq F(z) \Rightarrow F(x) \leq F(z)$). В случае $D(F) = X$ отношение R рефлексивно ($\forall x \in X : F(x) \leq F(x)$). Если функция F инъективна, то отношение R антисимметрично, а если к тому же $D(F) = X$, то R является отношением частичного (точнее, линейного) порядка.
7) Для $X = \mathcal{P}(A)$, элементами которого являются подмножества множества A, отношение $\subset$ является отношением частичного порядка: оно рефлексивно ($\forall x \in X : x \subset x$), транзитивно ($x \subset y \wedge y \subset z \Rightarrow x \subset z$) и антисимметрично ($x \subset y \wedge y \subset x \Rightarrow x = y$).

Пусть теперь R – некоторое отношение эквивалентности $\sim$ на X. Сопоставим каждому элементу $x \in X$ его класс эквивалентности

$cl(x) = \{y \in X : y \sim x\}$.

Утверждение: если два класса имеют непустое пересечение, то они совпадают (доказать!).

Тогда произвольное отношение эквивалентности порождает разбиение множества на непересекающиеся классы. (И обратно: разбиение на непересекающиеся подмножества порождает отношение эквивалентности, в котором эквивалентными считаем элементы, попавшие в одно и то же подмножество.) Множество классов эквивалентности – фактормножество множества X по отношению эквивалентности R, обозначается X/R.

Мощность. Мощность множества ($\sharp$) – обобщение понятия количества элементов. Как указано выше, два множества A и B равномощны ($\sharp A = \sharp B$), если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Свойства:
рефлексивность ($\sharp A = \sharp A$, взаимно-однозначное отображение – тождественное);
симметричность ($\sharp A = \sharp B \Rightarrow \sharp B = \sharp A$, отображения взаимно отратные);
транзитивность ($\sharp A = \sharp B \wedge \sharp B = \sharp C \Rightarrow \sharp A = \sharp C$, биективное отображение из A в C – композиция отображений из A в B и из B в C).

Очень похоже на отношение эквивалентности, однако нет того множества (множества всех множеств), на котором устанавливается это отношение. Если бы было, можно было бы объявить мощность классом эквивалентности по отношению равномощности.
(NB: понятие множества всех множеств внутренне противоречиво, что следует из теоремы Кантора, см. ниже).

Говорят, что мощность множества A не превосходит мощности множества B ($\sharp A \leq \sharp B$), а мощность множества B не меньше мощности множества A ($\sharp B \geq \sharp A$), если A равномощно подмножеству множества B.

Утверждение: $\sharp A \leq \sharp B \wedge \sharp B \leq \sharp C \Rightarrow \sharp A \leq \sharp C$ (доказать!)

Теорема Кантора-Бернштейна: $\sharp A \leq \sharp B \wedge \sharp A \geq \sharp B \Rightarrow \sharp A = \sharp B$ (см. ниже)

Говорят, что мощность множества A строго меньше мощности множества B ($\sharp A < \sharp B$), а мощность множества B строго больше мощности множества A ($\sharp B > \sharp A$), если A равномощно подмножеству множества B, но не равномощно самому множеству B.

Утверждение: $\sharp A < \sharp B \wedge \sharp B \leq \sharp C \Rightarrow \sharp A < \sharp C$ (доказать!)

Утверждение: $\sharp A \leq \sharp B \wedge \sharp B < \sharp C \Rightarrow \sharp A < \sharp C$ (доказать!)

Без доказательства: любые два множества сравнимы по мощности, т.е. либо $\sharp A = \sharp B$, либо $\sharp A < \sharp B$, либо $\sharp A > \sharp B$.

Конечные и бесконечные множества.

$\sharp\emptyset = 0$

Непустое множество A конечно, если оно равномощно множеству $\{1, \ldots, n\}$ – отрезку натурального ряда. В этом случае $\sharp A = n$. Элементы можно занумеровать: $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Множество A бесконечно, если $\forall n \in \mathbb{N} : \sharp A \geq n$

Счётные множества.

Множество A счётно, если $\sharp A = \sharp\mathbb{N}$. Обозначение: $\sharp\mathbb{N} = \aleph_0$. Элементы можно занумеровать: $A = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$.

Утверждение: счётными являются множества:
Объединение счётного и конечного;
Разность счётного и конечного;
Объединение двух счётных;
Объединение конечного числа счётных;
Объединение счётного набора счётных множеств.
(доказать!)

Диагональный процесс нумерации.

Примеры: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}^2, \mathbb{N}^n, \dots$

Утверждение: множество конечных последовательностей рациональных чисел счётно (доказать!). Этот факт понадобится в дальнейшем.

Теорема Произвольное бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Теорема
1) Объединение бесконечного множества и конечного равномощно исходному
2) Разность бесконечного множества и конечного равномощно исходному
3) Объединение бесконечного множества и счётного равномощно исходному
4) Разность бесконечного несчётного множества и счётного равномощно исходному
Замечание 1: бесконечное множество равномощно своему собственному подмножеству.
Замечание 2: существование бесконечных несчётных множеств пока что не доказано.

Теорема Кантора. $\left|2^{\mathbb{N}}\right| > |\mathbb{N}|$
Множество бесконечных последовательностей из нулей и единиц несчётно.

Для доказательства установим, что ни одно счётное подмножество $2^{\mathbb{N}}$ не совпадает с $2^{\mathbb{N}}$ (т.е. что дополнение непусто).

Пусть есть такое подмножество. Занумеруем его элементы:

$$
\begin{gathered}
A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1j}, \dots) \\
A_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{2j}, \dots) \\
A_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33}, \dots, a_{3j}, \dots) \\
\dots \\
A_i = (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ij}, \dots) \\
\dots
\end{gathered}
$$

Здесь $a_{ij} \in \{0,1\}$, $\forall i,j \in \mathbb{N}$, и $A_i \in 2^{\mathbb{N}}$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Построим последовательность

$$B = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_j, \dots) \in 2^{\mathbb{N}},$$

не входящую в рассматриваемое подмножество, т.е. $\forall i \in \mathbb{N} : B \neq A_i$.

Положим $b_j = 1 - a_{jj} \neq a_{jj}$. Тогда для любого значения j: $B \neq A_j$, поскольку у этих последовательностей j-е элементы различаются. Поэтому B не входит в рассматриваемый счётный набор, который, таким образом, не может совпадать с $2^{\mathbb{N}}$. Отсюда следует несчётность $2^{\mathbb{N}}$.
Теорема доказана.

Замечание. Вот теперь уже доказано существование несчётных бесконечных множеств, поскольку таковым является $2^{\mathbb{N}}$. Обозначение: $\sharp 2^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$. Мощность континуума.

Континуум.
Примеры:
$2^{\mathbb{N}}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), m^{\mathbb{N}}, \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}, [0,1], [0,1]\times[0,1], [a,b], (a,b), \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, C[a,b], \dots$

Гипотеза континуума: любое непустое подмножество $A \subset \mathbb{R}$ либо континуально, либо счётно, либо конечно. Иными словами, не существует несчётных бесконечных множеств, мощность которых была бы меньше континуальной. Гипотеза не может быть ни доказана, ни опровергнута.

Для дальнейшего нам будет полезно переформулировать теорему Кантора на языке подмножеств: $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$, т.е. множество подмножеств натурального ряда несчётно.
Повторим доказательство в новых терминах. Пусть есть счётный набор подмножеств $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$, $A_i \subset \mathbb{N}$, и нужно доказать, что найдётся такое $B \subset \mathbb{N}$, которое не совпадёт ни с одним из A_i.
Сопоставим подмножеству A_i одноимённую характеристическую числовую последовательность, фигурировавшую в предыдущем доказательстве,
$a_{ij} = 1$ в случае $j \in A_i$ и $a_{ij} = 0$, если $j \notin A_i$. В частности, $a_{ii} = 1$ при $i \in A_i$ и $a_{ii} = 0$ при $i \notin A_i$. Условие $b_i \neq a_{ii}$ означает, что $i \in B$ тогда и только тогда, когда $i \notin A_i$: $B = \{i \in \mathbb{N} : i \notin A_i\}$. Отсюда следует, что $B \neq A_i$, $\forall i$, что и требовалось доказать.

Замечание. Нетрудно заметить, что последовательности здесь совершенно не обязательны и использовались только для перевода предыдущего доказательства на другой язык. Теперь мы готовы к тому, чтобы обобщить теорему на произвольное множество.

Обобщённая теорема Кантора.

Мощность множества подмножеств произвольного множества строго больше мощности исходного множества: $|\mathcal{P}(A)| > |A|$
Чтобы доказать это, установим, что никакое отображение $\varphi : A \to \mathcal{P}(A)$ не может быть сюрьективным: $\mathcal{P}(A) \backslash E(\varphi) \neq \emptyset$
(Теорема Кантора: $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}|$)

Доказательство. Докажем, что $\exists B \in \mathcal{P}(A) \backslash E(\varphi)$. Включим в подмножество $B \subset A$ те и только те элементы $x \in A$, которые не принадлежат своему образу при отображении φ: $B = \{x \in A : x \notin \varphi(x)\}$. Отсюда следует, что $B \neq \varphi(x)$, поскольку эти множества отличаются по крайней мере одним элементом: если $x \in \varphi(x)$, то $x \notin B$, а если $x \notin \varphi(x)$, то $x \in B$. Поскольку это верно для всех $x \in A$, то $B \subset A$ не входит в образ φ, т.е. отображение φ не сюрьективно (а потому и не биективно).

Это значит, что множества A и $\mathcal{P}(A)$ не равномощны. С другой стороны, A равномощно множеству своих одноэлементных подмножеств, содержащихся в $\mathcal{P}(A)$, поэтому $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Следствие: невозможно множество всех множеств (доказать!).

Замечание. В теореме Кантора отображение $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ – это нумерация подмножеств с помощью индекса.

Теорема Кантора-Бернштейна.
$|A| \leq |B| \wedge |B| \leq |A| \Rightarrow |A| = |B|$
Если множество A равномощно подмножеству множества B, а множество B равномощно подмножеству множества A, то множества A и B равномощны. Иными словами: если существуют биекции между A и $B_1 \subsetneq B$ и между B и $A_1 \subsetneq A$, то существует и биекция между A и B.

Доказательство. Обозначим $A_0 = A$, $B_0 = B$. Пусть $f : A_0 \to B_1 \subsetneq B_0$ и $g : B_0 \to A_1 \subsetneq A_0$ – биективные отображения. Обозначим $B_2 = f(A_1)$, $A_2 = g(B_1)$. В силу биективности f, $B_2 \subsetneq B_1$, поскольку $B_1 \backslash B_2 = f(A_0 \backslash A_1)$. Аналогично, в силу биективности g, $A_2 \subsetneq A_1$.

Продолжим эту процедуру, обозначив $B_{j+1} = f(A_j)$, $A_{j+1} = g(B_j)$. Получаем две бесконечные (счётные) сужающиеся цепочки множеств:
$A = A_0 \supsetneq A_1 \supsetneq A_2 \supsetneq \ldots$ и $B = B_0 \supsetneq B_1 \supsetneq B_2 \supsetneq \ldots$.

Обозначим теперь
$C_j = A_j \backslash A_{j+1}$, $C_\infty = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} A_j$,
$D_j = B_j \backslash B_{j+1}$, $D_\infty = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} B_j$.
Произвольный элемент множества A принадлежит либо всем множествам A_j (и тогда принадлежит их пересечению C_∞), либо только конечному их числу (и тогда принадлежит некоторому C_j, где j – номер последнего множества в цепочке, содержащего данный элемент). Тогда множество A есть счётное объединение непересекающихся множеств

$$A = \left(\bigcup_{j \geq 0} C_j \right) \cup C_\infty$$

Аналогично

$$B = \left(\bigcup_{j \geq 0} D_j \right) \cup D_\infty$$

Для того, чтобы установить равномощность A и B, мы установим равномощность множеств C_j и D_j с индексами разной чётности, а также C_∞ и D_∞.

В силу биективности f,

$$f(C_j) = f(A_j \backslash A_{j+1}) = f(A_j) \backslash f(A_{j+1}) = B_{j+1} \backslash B_{j+2} = D_{j+1}\,,$$

а в силу биективности g,

$$g(D_j) = g(B_j \backslash B_{j+1}) = g(B_j) \backslash g(B_{j+1}) = A_{j+1} \backslash A_{j+2} = C_{j+1}\,.$$

Кроме того,

$$f(C_\infty) = f\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} f(A_j) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} B_{j+1} = D_\infty$$

(отсутствие B_1 в последнем пересечении на результат не влияет, поскольку $B_2 = B_1 \cap B_2$). Точно так же доказывается, что $g(D_\infty) = C_\infty$, но нам это не понадобится.

Таким образом, f биективно отображает C_j на D_{j+1}, а также C_∞ на D_∞, а g – D_j на C_{j+1}. Тогда g^{-1} отображает C_{j+1} на D_j. Теперь мы можем построить искомую биекцию A и B.

Отобразим биективно множества C_j с чётными номерами (т.е. $C_0, C_2, C_4, \dots$) на множества D_{j+1} с нечётными номерами, на единицу большими (т.е. $D_1, D_3, D_5, \dots$) с помощью функции f.

Отобразим биективно множества C_{j+1} с нечётными номерами (т.е. $C_1, C_3, C_5, \dots$) на множества D_j с чётными номерами, на единицу меньшими (т.е. $D_0, D_2, D_4, \dots$) с помощью функции g^{-1}.

Наконец, отобразим биективно множество C_∞ на множество D_∞ снова с помощью функции f.

Такое отображение устанавливает взаимно однозначное соответсвие множеств A и B. Теорема доказана.

Раздел 2. Метрическое пространство

Лекция 2 Полуметрические и метрические пространства.

Полуметрическое (предметрическое, квазиметрическое, псевдометрическое) пространство – пара (X, ρ), где X – множество, а ρ – отображение (полноопределённое) $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее трём аксиомам:
1. $\forall x \in X : \rho(x, x) = 0$
2. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Терминология: X – носитель полуметрического пространства (ПМП); ρ – полуметрика; $x, y, \dots \in X$ – точки пространства (хотя характер элементов может быть каким угодно), $\rho(x, y)$ – расстояние между x и y. Аксиома 1: расстояние от точки до самой себя равно нулю. В полуметрическом пространстве допускается, что нулю может быть равно расстояние и между различными элементами множества X (условно говоря, несколько объектов расположено в одном месте). Если исключить такую ситуацию и добавить условие *невырожденности*
1'. $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$,
полуметрическое пространство превращается в метрическое, а полуметрика в метрику. Для метрического пространства (МП) аксиомы 1 и 1' можно объединить:
1''. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Аксиома 2 – аксиома симметрии, аксиома 3 – неравенство треугольника (длина стороны треугольника не превосходит суммы длин других сторон).

Утверждение: $\rho(x, y) \ge 0$ (доказать!) Таким образом, $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$

Второе неравенство треугольника, неравенство четырёхугольника, неравенство многоугольника.

Утверждение: в ПМП $R = \{x, y : \rho(x, y) = 0\}$ – отношение эквивалентности (доказать!)

Утверждение: $x_1 \sim x_2 \wedge y_1 \sim y_2 \Rightarrow \rho(x_1, y_1) = \rho(x_2, y_2)$ (доказать!)
Расстояние между элементами, входящими в различные классы эквивалентности, зависит лишь от классов и не зависит от выбора представителей.

Утверждение: если на $\tilde{X} = X/R$ определить расстояние $\tilde{\rho}(cl(x), cl(y)) = \rho(x, y)$, это определение корректно, и $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ – МП (доказать!).

Различные МП (ПМП) с одним носителем.
Подпространства (П)МП. Подмножества.
Ограниченность (неограниченность) (П)МП и подмножеств. Диаметр.
Примеры (начало).

1. Дискретная метрика. X – произвольное множество, $\rho(x, y) = 1,\ x \ne y$
   ε-дискретное подмножество МП: $\forall x \ne y \in A : \rho(x, y) \ge \varepsilon$

2. Почтовая метрика. X – произвольное множество, $p \in X$ – "почтамт",

$\rho(x,p) = f(x) \geq 0$ – неотрицательная функция, равная нулю только при $x = p$, $\rho(x,y) = f(x) + f(y)$

3. Метрика классической геометрии.

4. Расстояние между вершинами графа – наименьшая сумма длин рёбер.

5. Наименьшее время, необходимое, чтобы попасть из точки в точку.

6. Риманово пространство: $dl = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j}$ (g – метрический тензор), длина кривой $l(\gamma) = \int_\gamma dl$, расстояние как $\inf_\gamma l(\gamma)$ по всем возможным кривым γ, соединяющим заданные точки. Эйконал.

7. Расстояния – экспертные оценки сходства-несходства объектов любой природы (например, в психологии, биологии, геологии, ...). Неравенство треугольника проверяется отдельно.

8. $X = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x - y|$. Будем обозначать E^1. Такую метрику на вещественной оси будем называеть стандартной.

9. $X = \mathbb{C}$, $\rho(x,y) = |x - y|$.

10. Пространство $\mathbb{R}_\Phi$: $X = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|$, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – произвольная функция. Метрика, если Φ инъективная, полуметрика в противном случае.

11. Пространство X_Φ: X – множество, $\rho(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|$, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ – произвольная функция. Метрика, если Φ инъективная, полуметрика в противном случае.

12. X – множество, (Y, ρ_Y) – некоторое МП, $F : X \to Y$. Зададим расстояние на X формулой $\rho_X(x,y) = \rho_Y(F(x), F(y))$. (X, ρ_X) – МП, если F инъективная, ПМП в противном случае.

    Многие (не все) МП являются линейными нормированными пространствами (ЛНП). Более подробно дальше, а сейчас первоначальное знакомство.

    Линейное пространство (ЛП) над полем $\mathbb{K}$

    Сложение, умножение, 8 аксиом (1 курс), свойства. Латинскими буквами будем обозначать векторы (элементы ЛП), греческими – числа (элементы поля). Ограничимся случаями ЛП над полями вещественных (основное внимание) и комплексных чисел.

    Норма и полунорма (преднорма, ...). Обозначение: $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ (X – ЛП).

    Аксиомы полунормы:
    1. Абсолютная (положительная) однородность:
    $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

2. Неравенство треугольника:
$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$

Утверждение: $\|O\| = 0$, где O – нулевой элемент пространства (доказать!)

Утверждение: функция $\rho(x,y) = \|x-y\|$ удовлетворяет аксиомам полуметрического пространства (доказать!) Полуметрика, порождённая полунормой.

Норма: дополнительно аксиома невырожденности:
3. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = O$
(можно стрелочку в обе стороны: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = O$)

В этом случае $\rho(x,y) = \|x-y\|$ – метрика, порождаемая нормой (доказать выполнение аксиом МП!). И обратно, $\|x\| = \rho(x,O)$ (Разумеется, это не для всякой метрики! Не любая метрика порождается нормой)

Поэтому, чтобы не делать дважды одну и ту же работу, будем проверять аксиомы нормированного пространства, а выполнение аксиом метрического получим как следствие.

Примеры ЛНП (которые, разумеется, являются и метрическими, так что сохраняем нумерацию).
При проверке абсолютной однородности проблем не возникает, её опускаю. Проверка невырожденности (когда она есть) также обычно тривиальна (хотя не всегда). Иногда бывают сложности с проверкой неравенства треугольника.

13. Снова рассмотрим E^1: $\|x\| = |x|$, неравенство треугольника: $|x+y| \le |x| + |y|$ (будет многократно использовано дальше)

14. $X = \mathbb{R}^2$, $\|x\| = |x_1|$ – полунорма, $\rho(x,y) = |x_1 - y_1|$ – полуметрика. Элементы – двумерные вектора, полунорма – модуль проекции на ось абсцисс, расстояние между векторами определяется как расстояние между проекциями. Класс эквивалентности – множество векторов с одинаковыми проекциями на ось абсцисс (вертикальная прямая), расстояние между классами после факторизации – расстояние между этими прямыми.

15. $\mathbb{R}^n_1$: $X = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j|$ (проверить аксиомы)
Расстояние: $\rho_1(x,y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$. Манхэттенская метрика.
Смысл индекса 1 при норме и растоянии, а также других индексов, выяснится дальше.

16. Бесконечномерный аналог: l_1. $X = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| < \infty\}$ (множество абсолютно суммируемых бесконечных числовых последовательностей). Проверить, что ЛП.
$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$ (проверить аксиомы)
Расстояние: $\rho_1(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|$.

17. Функциональный аналог. X – множество функций на $[a, b]$, интегрируемых по Риману. ЛП.
$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt$. Полунорма (проверить)
$\rho_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$ – полуметрика. Аксиома невырожденности не выполняется, поскольку существуют интегрируемые по Риману функции, на равные тождественно нулю, для которых интеграл от модуля равен нулю (например, отличные от нуля в конечном числе точек). Такие функции образуют класс эквивалентности тождественного нуля. Класс эквивалентности произвольного элемента x – множество функций, отличающихся от x на элемент из нулевого класса.

18. $C_{L_1}[a, b] = \tilde{L}_1[a, b]$ – подпространство предыдущего. X – множество непрерывных на $[a, b]$ функций.
$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt$ – норма.
$\rho_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$ – метрика.
Теорема: $x \geq 0$ непрерывна и не равна нулю тождественно $\Rightarrow \int_a^b x(t)\, dt > 0$
Вспомнить 1 курс, доказать, применить.

19. $\mathbb{R}^n_{\max}$. $X = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$
Неравенство треугольника. Выписываем для каждого j:
$\forall j : |x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j|$
Дальше двухходовка, которая будет возникать многократно.
1-й шаг: оцениваем правую часть
$\forall j : |x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \|x\| + \|y\|$
2-й шаг: берём максимум левой части по j
$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
Расстояние: $\rho_\infty(x, y) = \max_j |x_j - y_j|$ Равномерная метрика на $\mathbb{R}^n$

20. Бесконечномерный аналог: l_∞. Носитель: ЛП множество бесконечных ограниченных последовательностей.
Норма: $\|x\|_\infty = \sup_j |x_j|$ (максимум может не достигаться, поэтому берём супремум). Доказательство неравенства треугольника такое же.
Расстояние: $\rho_\infty(x, y) = \sup_j |x_j - y_j|$

21. Пространство c – подпространство l_∞. Носитель – ЛП последовательностей, имеющих конечный предел. Норма та же.

22. Пространство c_0 – подпространство c. Носитель – ЛП бесконечно малых последовательностей. Норма та же (вместо $\sup$ можно взять $\max$).

23. Функциональный аналог – пространство $C[a, b]$, ЛП непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой
$\|x\|_C = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$
(Почему $x(t)$ ограничена? Почему максимум достигается? Вспомнить доказательства)
Доказательство неравенства треугольника: при каждом t записать

числовое неравенство треугольника, дальше двухходовка.
Расстояние: $\rho_C(x,y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$

24. Расширение предыдущего пространства: ЛП ограниченных функций на отрезке, вместо максимума всюду супремум, в остальном всё так же.

25. $C^1[a,b]$. Носитель – ЛП непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, $\|x\|_{C^1} = \max\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C\}$, где $\dot{x}$ – производная. Докажем неравенство треугольника. Записываем неравенства треугольника для норм в $C[a,b]$ функции и производной:
$\|x+y\|_C \le \|x\|_C + \|y\|_C$
$\|\dot{x}+\dot{y}\|_C \le \|\dot{x}\|_C + \|\dot{y}\|_C$,
дальше снова двухходовка. Воспроизведём рассуждение ещё раз: 1) оцениваем правые части
$\|x+y\|_C \le \|x\|_C + \|y\|_C \le \|x\|_{C^1} + \|y\|_{C^1}$
$\|\dot{x}+\dot{y}\|_C \le \|\dot{x}\|_C + \|\dot{y}\|_C \le \|x\|_{C^1} + \|y\|_{C^1}$,
дальше 2) поскольку оба выражения, стоящие в левых частях, не превосходят общей константы $\|x\|_{C^1} + \|y\|_{C^1}$, то и максимум из них (то есть $\|x+y\|_{C^1}$) также её не превосходит.

26. $C^l[a,b]$. Носитель: ЛП l раз непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, $\|x\|_{C^l} = \max\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C, \|\ddot{x}\|_C, \dots, \|x^{(l)}\|_C\}$ Доказательство неравенства треугольника – аналогично предыдущему случаю.

27. $\mathbb{R}^n_2 = E^n$ (E – в честь Евклида). Пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$

    Как обычно, некоторую сложность представляет только проверка справедливости неравенства треугольника. Докажем сначала вспомогательное, но очень важное *неравенство Коши-Буняковского-Шварца* (КБШ):

$$\left|\sum_{j=1}^n x_j y_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n |y_j|^2}$$

    Один из способов доказательства: рассмотрение суммы
    $\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^n (x_j + \lambda y_j)^2 \ge 0$
    Функция $\Phi(\lambda)$ неотрицательна при любом λ, поскольку неотрицательны все слагаемые. С другой стороны,
    $\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^n (x_j + \lambda y_j)^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 + 2\lambda \sum_{j=1}^n x_j y_j + \lambda^2 \sum_{j=1}^n y_j^2$,
    т.е. $\Phi(\lambda)$ – квадратный трёхчлен относительно λ (при ненулевом векторе y) с положительным коэффициентом при λ^2. Дискриминант этого трёхчлена должен быть неположительным, в противном случае при некоторых λ (лежащих между корнями) трёхчлен принимал бы отрицательные значения. Отсюда
    $D/4 = \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right) \le 0$,

т.е.
$\left(\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j^2\right)$,
откуда и следует неравенство КБШ.
Замечание 1. Неравенство КБШ превращается в равенство, если дискриминант равен 0, т.е. когда $\Phi(\lambda)$ при некотором λ обращается в 0, т.е. когда все слагаемые в сумме $\Phi(\lambda)$ равны нулю, т.е. $\forall j : (x_j + \lambda y_j) = 0$, т.е. $\forall j : x_j = -\lambda y_j$, т.е. $x = -\lambda y$, т.е. векторы x и y коллинеарны.
Замечание 2. Можно в доказательстве и в самом неравенстве КБШ заменить x_j и y_j модулями. Тогда получаем:
$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \leq \left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot |y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2}$
Замечание 3. Доказательство приведено для случая вещественных векторов. Несколько модифицировав его, можно доказать и комплексный аналог неравенства, который обычно записывают в виде
$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2}$
(верхняя чёрточка – комплексное сопряжение)

Теперь переходим к доказательству неравенства треугольника. Рассмотрим $\Phi(1)$ и применим неравенство КБШ:
$\sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + 2\sum_{j=1}^{n} x_j y_j + \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \leq$
$\leq \sum_{j=1}^{n} x_j^2 + 2\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2} + \sum_{j=1}^{n} y_j^2 =$
$= \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2}\right)^2$
Извлекая квадратный корень, получаем
$\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j + y_j)^2} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2}$,
т.е. $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ – неравенство треугольника.
Расстояние в E^n: $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j)^2}$

28. Бесконечномерный аналог: l_2. $X = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}$ (множество квадратично суммируемых бесконечных числовых последовательностей).
Сначала нужно убедиться, что такие последовательности образуют ЛП, т.е. что произвольная линейная комбинация таких последовательностей также квадратично суммируема. Докажем, что сумма последовательностей из l_2 принадлежит l_2 (умножение на число вопросов не вызывает), т.е. если сходятся ряды $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2$ и $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2$, то ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^2$ также сходится.
Для этого сперва докажем сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$. Мы знаем, что в силу неравенства КБШ
$\forall n : \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2}$
Оценим правую часть, заменив конечные суммы суммами рядов:
$\forall n : \sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2} \leq$
$\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2}$,

что означает ограниченность множества частичных сумм ряда с неотрицательными членами $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j|$, откуда вытекает его сходимость, а это значит, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ также сходится (абсолютно). Поэтому сходится и ряд
$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}(|x_j|^2 + 2x_j y_j + |y_j|^2) =$
$= \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j + \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2,$
то есть мы видим, что l_2 – действительно линейное пространство.

Устремив в неравенстве КБШ n к бесконечности, перейдём к пределу (это можно, поскольку неравенство нестрогое, а пределы существуют) и получим неравенство КБШ для квадратично суммируемых последовательностей:
$\left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2}$
или, в развёрнутом варианте,
$\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \le \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \cdot |y_j| \le$
$\le \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2}$
Отсюда немедленно следует неравенство треугольника (ровно так же, как для E^n).

Расстояние: $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^2}$.

29. Функциональный аналог: $C_{L_2}[a, b] = \tilde{L}_2[a, b]$ – ЛП непрерывных на $[a, b]$ функций с нормой $\|x\|_2 = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\, dt}$. Поскольку функции непрерывные, выполнена аксиома невырожденности, нужно доказать неравенство треугольника.

    Так же, как и раньше, доказываем неравенство КБШ для функций
    $\left|\int_a^b x(t) y(t)\, dt\right| \le \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\, dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |y(t)|^2\, dt},$
    вытекающего из неотрицательности при всех значениях λ функции
    $\Phi(\lambda) = \int_a^b (x(t) + \lambda y(t))^2\, dt =$
    $= \int_a^b x^2(t)\, dt + 2\lambda \int_a^b x(t) y(t)\, dt + \lambda^2 \int_a^b y^2(t)\, dt,$
    и следующей из неё неположительности дискриминанта
    $D/4 = \left(\int_a^b x(t) y(t)\, dt\right)^2 - \left(\int_a^b |x(t)|^2\, dt\right)\left(\int_a^b |y(t)|^2\, dt\right)$
    Доказательство неравенства треугольника повторяет соответствующее доказательство для E^n.

    Расстояние: $\rho_2(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\, dt}$ Такая метрика называется среднеквадратичной.

30. Функциональные пространства с областью определения, отличной от отрезка

31. Весовые пространства

32. Пространства $\tilde{W}_1^l$ и $\tilde{W}_2^l$

33. Пространства вектор-функций

34. Метрическое (не нормированное, не векторное) пространство кривых (на плоскости, в пространстве). Для каждой кривой выбираем параметризацию с помощью вектор-функции на отрезке, находим расстояние между этими функциями. Расстояние зависит от параметризации. Берём $\inf$ по всем параметризациям. (Доказать выполнение аксиом МП)

    Для линейных нормированных пространств есть и другие способы метризации, помимо формулы $\rho(x,y) = \|x-y\|$.

35. Метрика французской железной дороги. В XIX веке все железные дороги во Франции шли через Париж. $P \in X$ – выделенный элемент пространства (Париж), тогда $\rho(x,y) = \|x-y\|$, если вектора $x-P$ и $y-P$ коллинеарны (x и y находятся на одной и той же железнодорожной ветке), в противном случае $\rho(x,y) = \|x-P\| + \|y-P\|$ (едем через Париж). Частный случай $P = O$ – метрика парижского метро.

Далее будут рассмотрены и другие примеры метрических и нормированных пространств.

Раздел 2. Метрическое пространство

Лекция 3 Множества и последовательности в метрических пространствах.

Открытый шар $S_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) < r\}$ – r-окрестность точки a. Радиус r. Множество является окрестностью a, если содержит открытый шар с центром в a. Произвольное расширение окрестности – окрестность. Система окрестностей – топология. Топологически эквивалентные метрические пространства.
Выколотая окрестность.

В ПМП окрестности эквивалентных элементов совпадают, и любая окрестность точки целиком содержит её класс эквивалентности.

Замкнутый шар $\bar{S}_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) \le r\}$

Сфера $\sigma_r(a) = \{x \in X : \rho(x, a) = r\}$

Ограниченное множество $A \subset S_R(a)$, ограниченное МП (ПМП)$X = S_R(a)$. Связь радиуса и диаметра.

Полная ограниченность. Вполне ограниченное множество:
$\forall \varepsilon \exists \{a_1, \ldots, a_N\} : A \subset \bigcup_{j=1}^N S_\varepsilon(a_j)$
Вполне ограниченное множество ограничено.
Полная ограниченность МП (ПМП).

$A \in X$: внутренние точки (входят в A с окрестностью), внешние (входят в дополнение с окрестностью), граничные точки (произвольная окрестность имеет непустое пересечение с A и с дополнением). Множество – окрестность своих внутренних точек.

Открытое множество: все точеи внутренние, входят с окрестностью. Открытое множество – окрестность всех своих точек.
Открытый шар – открытое множество (доказать!)
Множество является окрестностью точки a, если является расширением открытого множества, содержащего a – эквивалентное определение окрестности (доказать!) Таким образом, совокупность открытых множеств определяет топологию.
Примеры открытых множеств. X и $\emptyset$ – всегда открыты. Дискретная топология: все множества открыты.

Объединение любой совокупности открытых множеств открыто (доказать!)

Пересечение конечного набора открытых множеств открыто (доказать!)

Пересечение бесконечного (например, счётного) набора открытых множеств может не быть открытым (привести пример)

Изолированные точки множества: существует выколотая окрестность, не пересекающаяся с множеством. Могут быть внутренними или граничными. В дискретной топологии все точки изолированные. В конечном подмножестве МП все точки изолированные.

Точки прикосновения множества: любая окрестность имеет непустое пересечение с множеством.

Предельные точки множеста: любая выколотая окрестность имеет непустое пересечение с множеством. (Доказать: для МП это пересечение – бесконечное множество) Могут принадлежать или не принадлежать множеству. Могут быть внутренними или граничными. A' – множество предельных точек множества A. Конечное подмножество МП не имеет предельных точек. В дискретной топологии $A' = \emptyset$ для любого A.

Точка прикосновения – принадлежит множеству или является его предельной точкой (или и то, и другое). Либо внутренняя, либо граничная.

Как внутренняя, так и граничная точка множества может быть либо изолированной, либо предельной его точкой. Внешняя не является ни тем, ни другим.

$A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

Замкнутое множество: содержит все свои предельные точки, $A \supset A'$. Замкнутый шар – замкнутое множество (доказать!) Сфера – замкнутое множество (доказать!) Примеры замкнутых множеств. X и $\emptyset$ – всегда замкнуты (и открыты). Все конечные множества замкнуты. Все множества, не имеющие предельных точек, замкнуты. Дискретная топология: все множества замкнуты (и открыты).

Примеры множеств, одновременно открытых и замкнутых. Примеры множеств, не являющихся ни замкнутыми, ни открытыми.

Пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто (доказать!)

Объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто (доказать!)

Объединение бесконечного (например, счётного) набора замкнутых множеств может не быть замкнутым (привести пример)

Дополнение замкнутого множества открыто (доказать)

Дополнение открытого множества замкнуто (доказать)

Таким образом, совокупность замкнутых множеств определяет топологию.

A' замкнуто для любого A (доказать)

Замыкание множества: $[A] = A \cup A'$ – множество точек прикосновения.

Множество замкнуто $\Leftrightarrow$ совпадает со своим замыканием.

$A \subset B \Rightarrow [A] \subset [B]$

$[A]' = A'$ (доказать)

$[[A]] = [A]$ (доказать), то есть $[A]$ замкнуто для любого A

Расстояние от точки до множества:

$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$

$\rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in [A]$ (доказать)

То есть $[A] = \{x : \rho(x, A) = 0\}$

Утверждение: $\rho(x, A) \le \rho(x, y) + \rho(y, A)$

Утверждение: $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \le \rho(x, y)$

Расстояние между множествами:

$\rho(A, B) = \frac{1}{2} \left(\sup_{x \in B} \rho(x, A) + \sup_{y \in A} \rho(y, B) \right)$

Утверждение: эта формула задаёт полуметрику на $\mathcal{P}(X)$ (класс эквивалентности – множества с совпадающими замыканиями) и метрику на множестве замкнутых подмножеств.

ε-окрестность множества: $A_\varepsilon = \{x : \rho(x, A) < \varepsilon\}$

$\bar{A}_\varepsilon = \{x : \rho(x, A) \le \varepsilon\}$

Утверждение: A_ε открыто, $\bar{A}_\varepsilon$ замкнуто.

Утверждение: $A_\varepsilon = \bigcup_{x\in A} S_\varepsilon(x)$

Утверждение: $[A] = \bigcap_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$

Множество A называется ε-сетью для множества B, если
$\forall x \in B\, \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon$
Элементы B аппроксимируются элементами A с погрешностью $< \varepsilon$.

Утверждение: A есть ε-сеть для $B \Leftrightarrow B \subset A_\varepsilon$

Утверждение: множество A вполне ограничено $\Leftrightarrow$ для любого ε найдётся конечная ε-сеть для A.

Если A – ε-сеть для B, а B – δ-сеть для C, то A – $\varepsilon + \delta$-сеть для C.

Если множество B содержит ε-дискретное подмножество B_1, а A – $\varepsilon/2$-сеть для B, то $|A| \ge |B_1|$

Множество A плотно в B, если
$\forall x \in B\, \forall \varepsilon > 0\, \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon$
Элементы B аппроксимируются элементами A с любой точностью.

Множество A плотно в $B \Leftrightarrow$ является ε-сетью для $\forall\varepsilon$.

Множество A плотно в $B \Leftrightarrow B \subset [A]$. В частности, произвольное множество плотно в своём замыкании.

Замечание: не требуем, чтобы $A \subset B$

Транзитивность: A плотно в B и B плотно в $C \Rightarrow A$ плотно в B.

Если множество B содержит ε-дискретное подмножество B_1, а A плотно в B, то $|A| \ge |B_1|$

Множество A всюду плотно, если оно плотно в X: $[A] = X$, любой элемент пространства с произвольной точностью аппроксимируется элементами из A.

Если (X, ρ_1) и (X, ρ_2) – МП (ПМП) с одним и тем же носителем, и
$\exists c > 0 \forall x, y \in X : \rho_1(x, y) \le c\rho_2(x, y)$,
то множество, плотное в (X, ρ_2), плотно и в (X, ρ_1).

Пространство X сепарабельно, если содержит всюду плотное счётное (или конечное) множество (ВПСМ).

Пространство с дискретной метрикой сепарабельно, если его носитель конечен или счётен.

Утверждение: вполне ограниченное МП (или множество) сепарабельно. (доказать!)

Пространство E^1 сепарабельно (ВПСМ – $\mathbb{Q}$).

Пространства E^n, $\mathbb{R}^n_{\max}$, $\mathbb{R}^n_p$ сепарабельны (ВПСМ – $\mathbb{Q}^n$).

Пространства c_0, l_1, l_2 сепарабельны: множество конечных последовательностей (продолженных нулями) плотно в этих пространствах, множество конечных рациональных последовательностей плотно в множестве конечных последовательностей.

Пространство c сепарабельно: множество стабилизирующихся последовательностей (постоянных начиная с некоторого номера) плотно в c, а в нём плотно множество стабилизирующихся рациональных последовательностей.

Пространство l_∞ не сепарабельно: содержит 1-дискретное континуальное подмножество последовательностей из нулей и единиц.

Пространства $C[a,b]$, $\tilde{L}_1[a,b]$, $\tilde{L}_2[a,b]$ сепарабельны. Теорема Вейерштрасса: множество многочленов плотно в $C[a,b]$, а в нём плотно множество многочленов с рациональными коэффициентами. Плотность в $\tilde{L}_1[a,b]$ и $\tilde{L}_2[a,b]$ следует из подчинённости норм.

Прстранства $C^m[a,b]$ сепарабельны: приближаем многочленом старшую производную, затем последовательно интегрируем.

Пространство функций, отличных от нуля в конечном числе точек, не сепарабельно: континуальное 1-дискретное подмножество – функции, равные 1 в одной точке.

Пространство почти периодических функций не сепарабельно: континуальное 1-дискретное подмножество – функции вида $\cos \omega t$ (или синусы)

Последовательность элементов метрического пространства – элемент из $X^{\mathbb{N}}$.

Подпоследовательность.

Ограниченность, неограниченность.

Постоянные последовательности $c(x) = (x, x, \dots)$, $x \in X$. Стабилизирующиеся последовательности.

Эквивалентные последовательности: $x' \sim x'' \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \rho(x'_k, x''_k) = 0$ (доказать, что эквивалентность).

Замечание: на топологические пространства это понятие не обобщается.

Утверждение: эквивалентные последовательности либо одновременно ограничены, либо одновременно неограничены.

Утверждение: если A плотно в B ($[A] \supset B$), и $x' \in B^{\mathbb{N}}$ – последовательность из B, то найдётся эквивалентная ей $x'' \in A^{\mathbb{N}}$ последовательность из A.

В частности, если A всюду плотно в X ($[A] = X$), то для произвольной последовательности элементов из X найдётся эквивалентная ей последовательность элементов из A.

Фундаментальная последовательность (последовательность Коши):
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall k, m > N : \rho(x_k, x_m) < \varepsilon$

Замечание: последнее строгое неравенство можно заменить нестрогим.

Замечание: на топологические пространства это понятие не обобщается.

Последовательность фундаментальна $\Rightarrow$ и любая подпоследовательность тоже.

Любая подпоследовательность ФП ей эквивалентна.

Фундаментальная последовательность ограничена.

Добавление, исключение, изменение конечного числа элементов не влияет на фундаментальность, и в результате применения таких операций к ФП мы получаем ФП, эквивалентную исходной.

Утверждение: эквивалентные последовательности одновременно являются или не являются фундаментальными.
Доказательство с помощью $\varepsilon/3$-приёма (в дальнейшем будет регулярно использоваться).
Пусть x' фундаментальна, $x'' \sim x'$. Докажем, что x'' также фундаментальна.
По неравенству многоугольника
$\rho(x''_k, x''_m) \leq \rho(x''_k, x'_k) + \rho(x'_k, x'_m) + \rho(x'_m, x''_m)$.
В силу эквивалентности последовательностей найдётся
$N_1 : k, m > N_1 \Rightarrow \rho(x''_k, x'_k) < \varepsilon/3, \rho(x''_m, x'_m) < \varepsilon/3$.
В силу фундаментальности x' последовательностей найдётся
$N_2 : k, m > N_2 \Rightarrow \rho(x'_k, x'_m) < \varepsilon/3$.
Тогда при $k, m > \max(N_1, N_2)$ выполнено неравенство $\rho(x''_k, x''_m) < \varepsilon$,
что и означает фундаментальность x''.
(То есть: при больших индексах элементы x'' близки к соответствующим элементам x', а элементы x' близки между собой $\Rightarrow$ элементы x'' также близки между собой.)

Сходящиеся и расходящиеся последовательности.
$x_k \to_{k\to\infty} x^* \Leftrightarrow \rho(x_k, x^*) \to_{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow$
$\lim_{k\to\infty} x_k = x^* \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x^*) = 0 \Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall k > N : \rho(x_k, x^*) < \varepsilon$

Топологическая формулировка: для любой окрестности точки x^* найдётся номер N, начиная с которого все элементы последовательности принадлежат этой окрестности.

Сходящаяся последовательность ограничена.

Последовательность сходится $\Rightarrow$ и любая подпоследовательность тоже (к тому же пределу).

Добавление, исключение, изменение конечного числа элементов не влияет на сходимость, и в результате применения таких операций к сходящейся последовательности мы получаем последовательность, сходящуюся к тому же пределу.

Единственность предела для МП, неединственность для ПМП.

Вне любой окрестности предела последовательности может лежать лишь конечное число её элементов.

Последовательность сходится $\Rightarrow$ она фундаментальна (по неравенству треугольника). Обратно не всегда, зависит от МП.

Утверждение: эквивалентные последовательности либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Пределы сходящихся эквивалентных последовательностей совпадают. Обратно, если две последовательности имеют одинаковые пределы, то они эквивалентны. В частности, если $x_k \to_{k\to\infty} x^*$, то $x \sim c(x^*)$, где $x = (x_1, x_2, \dots)$. Таким образом, сходящаяся последовательность – это последовательность, эквивалентная некоторой постоянной последовательности.

Предельные точки последовательности (частичные пределы) – пределы подпоследовательностей. В любой окрестности предельной точки содержится бесконечное число элементов последовательности (возможно, совпадающих). Точнее: в любой окрестности содержатся элементы x_k для бесконечного множества значений k.

Утверждение: $x_k \in A \wedge x_k \to x^* \Rightarrow x^* \in [A]$
Обратно, если $x^* \in [A]$, то найдётся последовательность элементов из A, сходящаяся к x^*. Если точка изолированная, то последовательность постоянная или стабилизирующаяся.

Утверждение: множество A замкнуто $\Leftrightarrow$ предел любой сходящейся последовательности из A лежит в A. Это можно принять за альтернативное определение замкнутости множества.

Если (X, ρ_1) и (X, ρ_2) – МП (ПМП) с одним и тем же носителем, и
$\exists c > 0 \forall x, y \in X : \rho_1(x, y) \le c\rho_2(x, y)$,
то последовательность, сходящаяся в (X, ρ_2), сходится и в (X, ρ_1) (к тому же пределу); последовательность, фундаментальная в (X, ρ_2), фундаментальна и в (X, ρ_1). Говорят, что сходимость в метрике ρ_2 более сильная, чем в метрике ρ_1. Если оценка двусторонняя, то метрики топологически эквивалентны.

Пример. Сходимость в $\mathbb{R}^n_{\max}$, в $\mathbb{R}^n_1$, в $\mathbb{R}^n_2 = E^n$ эквивалентны покомпонентной (доказать).

Пример. Типы сходимости последовательностей непрерывных функций.
Сходимость в $C[a, b]$ – равномерная сходимость.
Сходимость в $\tilde{L}_1[a, b]$, $\tilde{L}_2[a, b]$ – сходиость в среднем (интегральная).
Поточечная сходимость (не связана с метрикой).
Сходимость в $C[a, b] \Rightarrow$ сходимость в $\tilde{L}_2[a, b] \Rightarrow$ сходимость в $\tilde{L}_1[a, b]$
Сходимость в $C[a, b] \Rightarrow$ поточечная.
Примеры.

Непрерывность расстояния (по Гейне-Борелю) по паре аргументов: если
$x_k \to x \wedge y_k \to y \Rightarrow \rho(x_k, y_k) \to \rho(x, y)$
(из неравенства четырёхугольника).

В частности, $x_k \to x \Rightarrow \forall y \in X : \rho(x_k, y) \to \rho(x, y)$
(как следствие предыдущего, либо из 2-го неравенства треугольника)

Отсюда $x_k \to x \Rightarrow \forall A \subset X : \rho(x_k, A) \to \rho(x, A)$

Простые доказательства замкнутости $\bar{S}_r(a)$, $\sigma_r(a)$, $\bar{A}_\varepsilon$.

Раздел 3. Полнота метрического пространства

Лекция 4 Полные и неполные метрические пространства.

Фундаментальная последовательность (последовательность Коши):
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall k, m > N : \rho(x_k, x_m) < \varepsilon$

Любая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Если какая-либо подпоследовательность фундаментальной последовательности (ФП) сходится, то сходится и сама последовательность (к тому же пределу).

МП называется полным, если произвольная ФП сходится (имеет предел).

МП называется неполным, если в нём найдётся ФП, не имеющая предела.

Понятие полноты (неполноты) обобщается и на ПМП.

Лемма. Если множество $\tilde{X}$ всюду плотно в X (т.е. $[\tilde{X}] = X$), и произвольная ФП элементов из $\tilde{X}$ сходится, то пространство X полное.
Доказательство: для произвольной ФП из X найдётся эквивалентная ей ФП из $\tilde{X}$, которая сходится, тогда исходная ФП также сходится.

Пусть $Y \subset X$ – подпространство метрического пространства.

Утверждение. Если Y не замкнуто в X, то Y – неполное ПМ (независимо от полноты X).

Утверждение. Если Y замкнуто в X, и X – полное МП, то Y – полное ПМ.

Теорема (принцип вложенных шаров). Пусть в полном МП задана бесконечная последовательность замкнутых шаров $\bar{S}_m = \bar{S}_{r_m}(a_m)$, причём $r_m \to 0$ и $\bar{S}_{m+1} \subset \bar{S}_m$. Тогда у этих шаров существует единственная общая точка.
(Доказательство. Единственность: две различные точки не могут принадлежать всем шарам. Существование: рассматриваем последовательность $x_m \in \bar{S}_m$, доказываем её фундаментальность и сходимость, доказываем принадлежность всем шарам предела последовательности.)

Замечание: единственность гарантируется для любого МП, существование – для полного.

Аналог принципа вложенных отрезков для E^1.

Примеры.

1. Пространства с дискретной метрикой и ε-дискретные пространства.

   Все ФП – постоянные или стабилизирующиеся. Сходятся. Пространства полные.

2. E^1 – полное МП (критерий Коши).

3. $X \subset \mathbb{R}$, метрика из E^1. Полное МП, если множество X замкнуто в $\mathbb{R}$ и неполно в противном случае. (Доказать).

4. Пространство $\mathbb{R}_\Phi$: $\rho(x, y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|$, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – инъективная функция. Полное МП, если образ функции Φ замкнутое множество, и неполное в противном случае.

   В частности, если Φ – непрерывная (в обычном смысле) монотонная функция, то её образ – интервал, открытый луч или вся ось. Пространство полное лишь в последнем случае (Φ не ограничена ни сверху, ни снизу), в противном случае бесконечно большие в E^1 последовательности (все или некоторые) будут фундаментальными, но не сходящимися.

5. Пространство $\mathbb{R}^n_{\max}$ n-мерных векторов (конечных последовательностей из n чисел), $\rho_\infty(x, y) = \max_j |x_j - y_j|$.
   Докажем полноту этого пространства. Рассмотрим ФП его элементов $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$, номер элемента последовательности пишем наверху в скобках, а нижний индекс – номер компоненты вектора.

   Первый шаг: рассмотрим числовые последовательности $x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots$ j-ых компонент. Они фундаментальны (доказать). Сходятся по критерию Коши.

   Второй шаг: ссылаемся на доказанный факт, что из покомпонентной сходимости следует сходимость по метрике $\mathbb{R}^n_{\max}$.

   В дальнейшем такая схема будет повторяться: сначала доказывается сходимость в слабом смысле, потом доказывается, что этот слабый предел на самом деле есть предел в смысле метрики пространства.

6. Пространство l_∞ бесконечных ограниченных последовательностей, $\rho_\infty(x, y) = \sup_j |x_j - y_j|$.

   Первый шаг такой же: доказываем покомпонентную сходимость.
   Дальше рассматриваем последовательность, состоящую из покомпонентных пределов: $x_j = \lim_{p\to\infty} x_j^{(p)}$
   Здесь, по сравнению с предыдущим случаем, ещё одна дополнительная проблема: заранее неясно, будет ли эта последовательность ограниченной, то есть принадлежит ли нашему пространству l_∞. Эту принадлежность также нужно будет доказать.

   Вернёмся к определению фундаментальной последовательности:
   $\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall p, q > N : \rho_\infty(x^{(p)}, x^{(q)}) < \varepsilon$, т.е.
   $\sup_j |x_j^{(p)} - x_j^{(q)}| < \varepsilon$, откуда
   $\forall j \in \mathbb{N} : |x_j^{(p)}, x_j^{(q)}| < \varepsilon$
   Перейдём к пределу при $q \to \infty$, строгое неравенство превратится в нестрогое:
   $\forall j \in \mathbb{N} : |x_j^{(p)}, x_j| \leq \varepsilon$

Отсюда следует ограниченность последовательности из покомпонентных пределов, $x \in l_\infty$.
Взяв супремум по j, получаем: $\rho_\infty(x^{(p)}, x) \le \varepsilon$ (при $p > N$), откуда следует сходимость по метрике l_∞.

7. Пространство c сходящихся последовательностей – подпространство l_∞. Поскольку l_∞ полное, для доказательства полноты пространства c достаточно доказать его замкнутость в l_∞.

   Пусть $x^{(p)} \to x$ в l_∞, $x^{(p)} \in c$. Докажем, что $x \in c$. Для этого достаточно доказать фундаментальность x в E^1.

   Применяем $\varepsilon/3$-приём.

   Нам нужно доказать: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \, \forall k, m > N : |x_k - x_m| < \varepsilon$

   Из сходимости $x^{(p)}$ к x в l_∞ следует: найдётся номер p, для которого $\rho_\infty(x^{(p)}, x) < \varepsilon/3$, т.е. $\forall j \in \mathbb{N} : |x_j^{(p)} - x_j| < \varepsilon/3$.

   Поскольку последовательность $x^{(p)} \in c$, она фундаментальна, и тогда $\exists N \in \mathbb{N} \, \forall k, m > N : |x_k^{(p)} - x_m^{(p)}| < \varepsilon/3$.

   Тогда
   $|x_k - x_m| = |(x_k - x_k^{(p)}) + (x_k^{(p)} - x_m^{(p)}) + (x_m^{(p)} - x_m)| \le$
   $\le |x_k - x_k^{(p)}| + |x_k^{(p)} - x_m^{(p)}| + |x_m^{(p)} - x_m| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$
   при $\forall k, m > N$.

8. Пространство c_0 бесконечно малых последовательностей – подпространство c. Для доказательства полноты докажем замкнутость c_0 в c. $\varepsilon/2$-приём.

   Пусть $x^{(p)} \to x$ в c, $x^{(p)} \in c_0$. Докажем, что $x \in c_0$.

   По ε находим p: $\rho_\infty(x^{(p)}, x) < \varepsilon/2$. Поскольку $x^{(p)}$ бесконечно малая, найдётся $N \in \mathbb{N} \, \forall k > N : |x_k^{(p)}| < \varepsilon/2$. Тогда
   $|x_k| = |(x_k - x_k^{(p)}) + x_k^{(p)}| \le |x_k - x_k^{(p)}| + |x_k^{(p)}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

9. Пространство $C[a, b]$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с расстоянием $\rho_C(x, y) = \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|$.

   Для доказательства полноты рассмотрим фундаментальную последовательность непрерывных функций $x_1(t), x_2(t), \ldots$ (теперь индексы ставим внизу). Первый шаг: доказываем поточечную сходимость (поскольку при каждом t имеем фундаментальную числовую последовательность). Осталось доказать, что предельная функция непрерывна (входит в наше пространство), и что сходимость к ней равномерная (по метрике пространства $C[a, b]$).

   Равномерность доказывается так же, как в l_∞. Для доказательства непрерывности предварительно вспоминаем теорему Кантора: непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна. Дальше доказываем равномперную непрерывность предельной функции, применив

$\varepsilon/3$-приём: p выбираем из условия $\rho_C(x, x_p) < \varepsilon/3$, δ из условия $|t' - t''| < \delta \Rightarrow |x_p(t') - x_p(t'')| < \varepsilon/3$, тогда
$|x(t') - x(t'')| \leq |x(t') - x_p(t')| + |x_p(t') - x_p(t'')| + |x_p(t'') - x(t'')| < \varepsilon$.
То есть предельная функция непрерывна.

10. Пространство $C^1[a, b]$ непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, $\rho_{C^1}(x, y) = \max\{\rho_C(x, y), \rho_C(\dot{x}, \dot{y})\}$.
Докажем полноту. Рассмотрим фундаментальную в $C^1[a, b]$ последовательность $x_1(t), x_2(t), \ldots$. Она фундаментальна в $C[a, b]$, и последовательность производных $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \ldots$ также фундаментальна в $C[a, b]$. Сходятся равномерно каждая к своему пределу: первая к $x(t)$, вторая к $y(t)$. Нужно доказать, что, во-первых, $y(t) = \dot{x}(t)$, и, во-вторых, что это сходимость по метрике пространства $C^1[a, b]$.
Первый факт – ссылаемся на теорему из матанализа:
Пусть $\{u_k(t)\}$ и $\{v_k(t)\}$ – последовательности непрерывных на $[a, b]$ функций, причём $v_k(t) = \dot{u}_k(t)$. Пусть последовательность $\{v_k(t)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой предельной функции $\{v(t)\}$, а $\{u_k(t)\}$ сходится хотя бы в одной точке на $[a, b]$. Тогда $\{u_k(t)\}$ также сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $\{u(t)\}$, и справедливо равенство $v(t) = \dot{u}(t)$.
(Вспомнить доказательство!).
Второй факт доказывается так: знаем, что $\rho_C(x_k, x) \to 0$ и $\rho_C(\dot{x_k}, \dot{x}) \to 0$. По ε находим $N_0(\varepsilon)$ и $N_1(\varepsilon)$, начиная с которых соответствующие расстояния меньше ε, тогда при $k > N(\varepsilon) = \max\{N_0(\varepsilon), N_1(\varepsilon)\}$ оба расстояния меньше ε, а тогда и $\rho_{C^1}(x_k, x) < \varepsilon$.

11. Пространство $C^l[a, b]$ l раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций,
$\rho_{C^l}(x, y) = \max\{\rho_C(x, y), \rho_C(\dot{x}, \dot{y}), \rho_C(\ddot{x}, \ddot{y}), \ldots, \rho_C(x^{(l)}, y^{(l)})\} =$
$= \max_{0 \leq s \leq l} \rho_C(x^{(s)}, y^{(s)})$
(верхний индекс в скобках – порядок производной, и, как обычно, под нулевыми производными понимаются сами функции). $C^1[a, b]$ – частный случай.
Полнота доказывается аналогично: рассматриваем последовательность $\{x_k\}$, фундаментальная в $C^l[a, b]$; дальше рассматриваем последовательности $\{x_k^{(s)}\}$ (при всевозможных s), показываем, что они фундаментальны в $C[a, b]$; в силу полноты $C[a, b]$ эти последовательности сходятся в $C[a, b]$ каждая к своему пределу z_s; дальше ссылаемся на ту же теорему, что и в предыдущем пункте, и получаем, что каждая последующая из этих функций есть производная предыдущей: $z_s = \dot{z}_{s-1}$, $s = 1, \ldots, l$; отсюда следует, что они суть последовательные производные функции z_0, и если переобозначить $z_0 = x$, то $z_s(t) = x^{(s)}(t)$. Таким образом, для любого s от нуля до l включительно $x_k^{(s)} \to x^{(s)}$ в метрике $C[a, b]$, т.е. $\rho_C(x_k^{(s)}, x^{(s)}) \to 0$. Дальше доказываем, что это на самом деле есть сходимость в $C^l[a, b]$: по ε находим $N_s(\varepsilon)$ для каждой из последовательностей, выбираем максимальное

$N(\varepsilon) = \max_s N_s(\varepsilon)$ и показываем, что при $k > N(\varepsilon)$ будет выполнено неравенство $\rho_{C^l}(x_k, x) < \varepsilon$.
Замечание. Когда мы доказывали, что из покомпонентной сходимости в $\mathbb{R}^n$ следует сходимость по метрике $\mathbb{R}^n_{\max}$, логика была совершенно такая же.

12. $\mathbb{R}^n_1$: $\rho_1(x, y) = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|$.
Здесь можно сослаться на тот факт, что нормы в $\mathbb{R}^n_1$ и в $\mathbb{R}^n_{\max}$ эквивалентны, поэтому фундаментальные последовательности в этих пространствах одни и те же, и сходящиеся последовательности также одни и те же. Поэтому из полноты $\mathbb{R}^n_{\max}$ следует полнота $\mathbb{R}^n_1$.
Докажем всё-таки непосредственно. Рассмотрим фундаментальную в $\mathbb{R}^n_1$ последовательность $\{x^{(p)}\}$ (в отличие от предыдущего случая, верхний индекс в скобках – снова номер элемента последовательности, а нижний – номер компоненты). Рассматриваем числовые последовательности $\{x^{(p)}_m\}$ (при фиксированном m) для каждой из компонент. Последовательности фундаментальны в E^1 (поскольку $|x^{(p)}_m - x^{(q)}_m| \leq \rho_1(x^{(p)}, x^{(q)})$), сходятся по критерию Коши. Значит, есть покомпонентная сходимость к вектору $x = (x_1, \ldots, x_n)$. По ε находим $N_m(\varepsilon)$, начиная с которого $|x^{(p)}_m - x_m| < \varepsilon/n$, берём $N(\varepsilon) = \max_m N_m(\varepsilon)$ и показываем, что при $p > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho_1(x^{(p)}, x) < \varepsilon$.
Пространства разные, а приёмы доказательства однотипные.

13. l_1 – пространство бесконечных абсолютно суммируемых последовательностей ($\sum_{j=1}^\infty |x_j| < \infty\}$), $\rho_1(x, y) = \sum_{j=1}^\infty |x_j - y_j|$. Докажем полноту.
Рассмотрим фундаментальную в $\mathbb{R}^n_1$ последовательность $\{x^{(p)}\}$ и, как и раньше, числовые последовательности $\{x^{(p)}_m\}$ её компонент, доказываем покомпонентную сходимость (как в предыдущем пункте) к некоторой последовательности $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Нужно доказать, что эта последовательность принадлежит l_1, и что есть сходимость в смысле метрики этого пространства.
Мы уже видели на примере $\mathbb{R}^n_{\max}$, l_∞, c и c_0, что в бесконечномерных пространствах приходится действовать более аккуратно, чем в случае конечномернго аналога (в данном случае им является $\mathbb{R}^n_1$), и искать новые приёмы доказательства.
Выпишем условие фундаментальности:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall p, q > N(\varepsilon) : \sum_{j=1}^\infty |x^{(p)}_j - x^{(q)}_j| < \varepsilon$
Обрежем ряд, заменив его конечной суммой. Неравенство не нарушится: $\sum_{j=1}^M |x^{(p)}_j - x^{(q)}_j| < \varepsilon$ (при тех же условиях на p, q). Здесь M – произвольное, но конечное.
Теперь перейдём в неравенстве к пределу при $q \to \infty$: поскольку сумма конечная, это заведомо можно сделать. При таком переходе $x^{(q)}_j$ превратятся в элементы предельной последовательности x_j, а строгое неравенство превратится в нестрогое: $\sum_{j=1}^M |x^{(p)}_j - x_j| \leq \varepsilon$.

Полученное неравенство означает, что частичные суммы ряда $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(p)} - x_j|$ с неотрицательными членами в совокупности ограничены. Отсюда следует, что этот ряд сходится, а из его сходимости следует и сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|$, поскольку $|x_j| \leq |x_j - x_j^{(p)}| + |x_j^{(p)}|$, а $x^{(p)} \in l_1$.
Далее, перейдя к пределу уже по M, получаем: $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{(p)} - x_j| \leq \varepsilon$, т.е. $\rho_1(x^{(p)}, x) \leq \varepsilon$ при $p > N(\varepsilon)$, что и означает сходимость $x^{(p)} \to x$ в метрике l_1.

14. Пространство $C_{L_1}[a,b] = \tilde{L}_1[a,b]$ непрерывных на $[a,b]$ функций, $\rho_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt$. Это пример неполного МП.

    Утверждение. Если $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ и $x_k \to x$ в $\tilde{L}_1[a,b]$, то $x_k \to x$ в $\tilde{L}_1[\alpha,\beta]$.

    (Уточнение: разумеется, речь идёт о сужениях функций, определённых на более широком множестве $[a,b]$, на более узкое $[\alpha,\beta]$.)

    Пример последовательности $x_k \in \tilde{L}_1[-1,1]$, сходящейся в $\tilde{L}_1[-1,0]$ и в $\tilde{L}_1[0,1]$ к разным постоянным. Фундаментальна в $\tilde{L}_1[-1,1]$ (поскольку фундаментальна в $\tilde{L}_1[-1,0]$ и в $\tilde{L}_1[0,1]$). Не сходится. (От противного: если бы был предел в $\tilde{L}_1[-1,1]$, то это была бы непрерывная функция, совпадающая на $[-1,0]$ и на $[0,1]$ с разными константами.) Поточечный предел – разрывная функция.

    Второй пример рассмотрим для пространства $\tilde{L}_1[0,1]$:
    $x_k(t) = \min\{k, 1/\sqrt{t}\}$ (срезки функции $1/\sqrt{t}$). Фундаментальная (показать!). В любом пространстве вида $\tilde{L}_1[\delta,1]$ стабилизируется и сходится к $1/\sqrt{t}$. Если бы был предел, совпадал бы с $1/\sqrt{t}$ на $(0,1]$ (поскольку на произвольном $[\delta,1]$), но такая функция не может быть непрерывна в нуле. Более того, она неограничена и, тем самым, не интегрируема по Риману.

15. ПМП функций, интегрируемых на $[a,b]$ по Риману, с той же метрикой. Также неполно. Это видно из последнего примера.

    Замечание. Оказывается, ПМП функций, интегралы от которых абсолютно сходятся как несобственные, также неполно (без доказательства).

16. Пространство $\mathbb{R}_2^n = E^n$ с расстоянием $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2}$. Полное, поскольку норма эквивалентна нормам в $\mathbb{R}_1^n$ и $\mathbb{R}_{\max}^n$. Непосредственное доказательство – как для $\mathbb{R}_1^n$, но в самом конце условие $|x_m^{(p)} - x_m| < \varepsilon/n$ заменяется на $|x_m^{(p)} - x_m| < \varepsilon/\sqrt{n}$.

17. Пространство l_2 квадратично суммируемых бесконечных числовых последовательностей ($\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty\}$) с расстонием
    $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^2}$. Доказательство полноты очень похоже на

аналогичное доказательство для l_1.
Рассматриваем ФП $\{x^{(p)}\}$:
$\forall\varepsilon > 0\,\exists N(\varepsilon)\,\forall p, q > N(\varepsilon) : \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(p)} - x_j^{(q)}|^2} < \varepsilon$ (последнее неравенство удобно переписать в виде $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(p)} - x_j^{(q)}|^2 < \varepsilon^2$).
Доказываем покомпонентную сходимость к некоторой последовательности $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Выписываем неравенство для частичных сумм:
$\sum_{j=1}^{M}|x_j^{(p)} - x_j^{(q)}|^2 < \varepsilon^2$,
переходим к пределу при $q \to \infty$: $\sum_{j=1}^{M}|x_j^{(p)} - x_j|^2 \leq \varepsilon^2$,
делаем вывод о сходимости ряда $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(p)} - x_j|^2$.
Это означает, что последовательность $\delta x^{(p)}$ с элементами
$\delta x_j^{(p)} = x_j^{(p)} - x_j$ принадлежит l_2.
Ссылаемся на доказанный ранее факт, что l_2 – это ЛП, поэтому
$x = x^{(p)} - \delta x^{(p)} \in l_2$.
Переходим к пределу при $M \to \infty$, получаем: $\sum_{j=1}^{\infty}|x_j^{(p)} - x_j|^2 \leq \varepsilon^2$,
то есть $\rho_2(x^{(p)}, x) \leq \varepsilon$ при $p > N(\varepsilon)$, откуда следует сходимость $x^{(p)}$ к x по метрике l_2.

18. Пространство непрерывных на $[a, b]$ функций $C_{L_2}[a, b] = \tilde{L}_2[a, b]$ с расстоянием $\rho_2(x, y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\,dt}$ является неполным по тем же причинам, что и $\tilde{L}_1[a, b]$. Небольшое отличие: последовательность срезок для функции $1/\sqrt{t}$ в этом пространстве не будет фундаментальной, поскольку сама функция не является квадратично интегрируемой (интеграл от квадрата расходится), но можно взять, например, срезки для $1/\sqrt[4]{t}$

Раздел 3. Полнота метрического пространства

Лекция 5 Пополнение метрических пространств.

Полнота, как увидим далее – очень важное свойство, и с полными пространствами иметь дело гораздо удобнее, нежели с неполными. Поэтому если изначально пространство неполное, хотелось бы добавить недостающие элементы так, чтобы новое расширенное пространство было уже полным, т.е. чтобы все ФП сходились. При этом не добавить ничего лишнего.

Важный частный случай: подпространства (подмножества) полного МП. Полнота эквивалентна замкнутости: ФП из элементов подпространства сходятся в объемлющем пространстве, поскольку оно полное. Все пределы принадлежат подмножеству, если оно замкнуто, и тогда оно само есть полное МП. Если подмножество незамкнуто, то найдутся предельные точки, ему не принадлежащие, и сходящиеся к ним последовательности – ФП, не имеющие предела в самом подпространстве (неполнота).

Замкнув множество (добавив недостающие предельные точки), получим полное МП. Пополнение = замыканию.

Замечание: полнота – внутреннее свойство МП, замкнутость – внешнее (по отношению к объемлющему пространству). Связаны.

Предварительное определение: МП X является пополнением (в узком смысле) МП $\tilde{X}$, если оно полное, и $\tilde{X}$ плотно в X: $[\tilde{X}] = X$.

Напоминание: последовательности $\{x_j\}$ и $\{x'_j\}$ мы назвали эквивалентными, если
$\rho(x_j, x'_j) \to 0$. Сейчас нам интересен случай, когда эти последовательности фундаментальны.

Если некоторая ФП сходится, то все ФП, ей эквивалентные, также сходятся к тому же пределу.

Если $\{x_j\}$ – ФП элементов из X, а $\tilde{X}$ плотно в X, то найдётся ФП $\{\tilde{x}_j\}$ элементов из $\tilde{X}$, эквивалентная $\{x_j\}$.

Из этих двух утверждений следует доказанная ранее

Лемма. Пусть X – МП, $\tilde{X} \subset X$, $[\tilde{X}] = X$. Пусть известно, что произвольная ФП элементов из $\tilde{X}$ сходится в X. Тогда X – полное МП.

Таким образом, если мы берём некоторое расширение исходного МП, и хотим доказать, что оно является пополнением, то нужно проверить, что исходное МП плотно в нём, и что все ФП элементов исходного пространства сходятся в этом расширении. Проверять, будут ли сходиться все ФП из элементов расширенного пространства, не обязательно. (Это аналог того, что замыкание любого множества замкнуто: при замыкании у нового множества не появляется новых предельных точек.)

Два вопроса:

1. Если мы рассмотрим два различных расширения МП $\tilde{X}$, удовлетворяющих данному определению, то как связаны эти метрические простран-

ства?

2. Что делать, если $\tilde{X}$ не является подпространством какого-то полного объемлющего пространства, т.е. никакого естественного расширения не просматривается?

Чтобы ответить на эти вопросы, введём ещё одно новое понятие:

Биективное отображение $\tau : X \to Y$ МП (X, ρ_X) в МП (Y, ρ_Y) называется ***изометрией***, если $\forall x_{1,2} \in X : \rho_Y(\tau(x_1), \tau(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2)$.
Иными словами, если $y_j = \tau(x_j)$, то $\rho_Y(y_1, y_2) = \rho_X(x_1, x_2)$: расстояние между образами равно расстоянию между прообразами.

В этом случае сами пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называют ***изометричными***. Их метрические свойства неразличимы, хотя элементы могут отличаться. Говорят ещё, что МП (Y, ρ_Y) – изометрическая копия МП (X, ρ_X).

Утверждение: изометрия τ переводит фундаментальную последовательность в фундаментальную, а сходящуюся в сходящуюся, причём образ предела последовательности совпадает с пределом последовательности образов её элементов: если $x_j \to x$, $y_j = \tau(x_j)$, $y = \tau(x)$, то $y_j \to y$.

Утверждение: изометричность обладает всеми свойствами отношения эквивалентности, т.е. рефлексивностью (в качестве τ берём тождественное отображение), симметричностью (берём обратное отображение), транзитивностью (берём композицию).

Примеры:

1. МП точек на плоскости с геометрическим расстоянием и МП E^2 пар вещественных чисел – декартовых координат этих точек в ортонормированной системе.

2. Изометрические отображения МП на себя: движения плоскости и геометрического пространства (сдвиги, повороты, отражения), повороты и отражения сферы (шара), преобразования симметрии различных геометрических фигур.

3. МП $\mathbb{R}_\Phi$ (или, более общо, X_Φ) с инъективной функцией Φ и образ этой функции со стандартной метрикой.

4. X – множество, (Y, ρ_Y) – некоторое МП, $F : X \to Y$ – биекция. Зададим расстояние на X формулой $\rho_X(x, y) = \rho_Y(F(x), F(y))$. Тогда (X, ρ_X) – МП, изометричное (Y, ρ_Y), F – изометрия.

5. Конечночастотные почти периодические функции и функции, отличные от нуля в конечном числе точек (с евклидовой метрикой).

Теорема (фрагмент теоремы Хаусдорфа о пополнении). Пусть Y и Z – полные МП, а $\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}$ – их всюду плотные подмножества, изометричные между собой. Тогда МП Y и Z также изометричны.

Пусть $\tilde{\tau} : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ – изометрия. Наша задача – построить изометрию $\tau : Y \to Z$, которая была бы продолжением (расширением) $\tilde{\tau}$.

Пусть $y \in Y$. Поскольку $Y = [\tilde{Y}]$, найдётся последовательность $\{\tilde{y}_j\}$: $\tilde{y}_j \in \tilde{Y}$, $\tilde{y}_j \to y$. Поскольку последовательность сходится, она фундаментальна. Тогда фундаментальна также последовательность $\tilde{z}_j = \tilde{\tau}(\tilde{y}_j)$. Поскольку МП Z полное, эта последовательность имеет предел в Z: $\tilde{z}_j \to z$. Определим отображение τ так: $\tau(y) = z$, т.е. $\tau(y) = \lim_{j\to\infty} \tilde{\tau}(\tilde{y}_j)$. Осталось доказать: 1) корректность, т.е. независимость значения функции от того, какую последовательность, сходящуюся к y, мы выберем; 2) изометричность; 3) тот факт, что на $\tilde{Y}$ отображение τ действует так же, как $\tilde{\tau}$ (иными словами, сужение τ на $\tilde{Y}$ совпадает с $\tilde{\tau}$).

1) Докажем корректность. Пусть $\tilde{y}_j \to y$, $\tilde{y}_j \in \tilde{Y}$ и одновременно $\tilde{y}'_j \to y$, $\tilde{y}'_j \in \tilde{Y}$. Тогда эти последовательности – эквивалентные ФП (почему?). Тогда их образы $\tilde{z}_j = \tilde{\tau}(\tilde{y}_j)$ и $\tilde{z}'_j = \tilde{\tau}(\tilde{y}'_j)$ – также эквивалентные ФП в Z. Следовательно, их пределы совпадают.

2) Пусть $\tilde{y}_j \to y$, $\tilde{y}_j \in \tilde{Y}$, $y \in Y$ и $\tilde{y}'_j \to y'$, $\tilde{y}'_j \in \tilde{Y}$, $y' \in Y$. Тогда $\tilde{z}_j = \tilde{\tau}(\tilde{y}_j) \to z = \tau(y)$ и $\tilde{z}'_j = \tilde{\tau}(\tilde{y}'_j) \to z' = \tau(y')$. Проверим изометричность: $\rho_Z(z, z') = \lim_{j\to\infty} \rho_Z(\tilde{z}_j, \tilde{z}'_j) = \lim_{j\to\infty} \rho_Y(\tilde{y}_j, \tilde{y}'_j) = \rho_Y(y, y')$

Нужно ещё убедиться в биективности. а) Инъективность: $\tau(y) \neq \tau(y')$ при $y \neq y'$, поскольку в этом случае $\rho_Z(\tau(y), \tau(y')) = \rho_Y(y, y') \neq 0$. б) Сюрьективность. Пусть $z \in Z$. Поскольку $Z = [\tilde{Z}]$, найдётся последовательность $\{\tilde{z}_j\}$: $\tilde{z}_j \in \tilde{Z}$, $\tilde{z}_j \to z$. Поскольку последовательность сходится, она фундаментальна. Из биективности $\tilde{\tau}$ вытекает, что у $\tilde{z}_j$ найдутся прообразы $\tilde{y}_j \in \tilde{Y}$: $\tilde{z}_j = \tilde{\tau}(\tilde{y}_j)$, а из изометричности $\tilde{\tau}$ следует, что последовательность $\tilde{y}_j$ фундаментальна. Поскольку МП Y полное, эта последовательность имеет предел в Y: $\tilde{y}_j \to y$. Отсюда следует, что $z = \tau(y)$, т.е. произвольный элемент Z есть образ некоторого элемента из Y.

3) Докажем, что сужение τ на $\tilde{Y}$ совпадает с $\tilde{\tau}$: если $y \in \tilde{Y}$, то $\tau(y) = \tilde{\tau}(y)$. Действительно, возьмём постоянную последовательность $\tilde{y}_j = y$, очевидно сходящуюся к y. Тогда $\tau(y) = \lim_{j\to\infty} \tilde{\tau}(\tilde{y}_j) = \lim_{j\to\infty} \tilde{\tau}(y) = \tilde{\tau}(y)$.

Доказанная теорема отвечает на первый из поставленных вопросов. Действительно, если $\tilde{Y} = \tilde{Z} = \tilde{X}$, то Y и Z – два различных полных расширения пространства $\tilde{X}$, в которых $\tilde{X}$ плотно. Тогда эти пространства изометричны.

На второй вопрос ответим так. Пусть у МП $\tilde{X}$ нет очевидных полных расширений, но мы можем найти некоторое МП $\tilde{Y}$, изометричное $\tilde{X}$, у которого такое расшиение Y есть, причём $Y = [\tilde{Y}]$. Ранее мы назвали Y пополнением МП $\tilde{Y}$, а теперь мы скорректируем это определение и объявим Y пополнением не только $\tilde{Y}$, но и изометричного ему МП $\tilde{X}$.

Окончательное определение: полное метрическое пространство Y называется пополнением (в широком смысле) метрического пространства $\tilde{X}$, если оно содержит всюду плотное множество $\tilde{Y}$, изометричное $\tilde{X}$.

Очевидно, это определение допускает существование различных пополнений одного и того же МП. Например, если $\tilde{Z}$ – другая изометрическая копия $\tilde{X}$, Z – полное МП и $Z = [\tilde{Z}]$, то Z, согласно данному определению, также является пополнением $\tilde{X}$. Однако из доказанной теоремы следует, что все такие пополнения между собой изометричны. Иными словами, *пополнение метрического пространства единственно с точностью до изометрии.*

Остаётся вопрос: обязательно ли у МП существует хотя бы одно пополнение? Теорема Хаусдорфа отвечает на этот вопрос положительно. Доказательство мы немного отложим, а сейчас рассмотрим примеры пополнений.

1. Множество $\mathbb{Q}$ со стандартной метрикой – неполное МП. Его пополнение – $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой, т.е. E^1. Пополнение в узком смысле, хотя есть нюансы, потом мы вернёмся к этому сюжету.

2. Интервал (a, b) – неполное МП. Пополнение (в узком смысле) – отрезок $[a, b]$.

3. МП $\mathbb{R}_\Phi$ с непрерывной монотонной ограниченной функцией Φ. Образ функции – интервал (a, b). Пространство $\mathbb{R}_\Phi$ изометрично интервалу (a, b) со стандартной метрикой, поэтому отрезок $[a, b]$ является пополнением не только интервала, но и пространства $\mathbb{R}_\Phi$.

4. $C_{L_1}[a, b] = \tilde{L}_1[a, b]$ – неполное МП. Его пополнение – сюжет, достойный отдельного курса. Вкратце – основные понятия.

   Мера множества – обобщение понятия длины интервала (отрезка). Аддитивность. Счётная аддитивность. Конечные и счётные объединения и пересечения интервалов и отрезков. Борелевские множества (сигма-алгебра). Множества меры нуль. Конечные, счётные, но не только: Канторово множество – континуальное множество меры нуль. "Почти всюду"(п.в.) – всюду, за исключением множества меры нуль. Сходимость функциональной последовательности почти всюду – более слабая, чем поточечная. Лебеговские множества, мера Лебега.

   Измеримые множества и измеримые функции (аналогии из ТВ). Конструкция интеграла Лебега. Свойства. Пример: функция Дирихле.

   Функции, абсолютно интегрируемые по Лебегу: ЛП, ПМП. Расстояние. В частности, все функции, интегрируемые по Риману; функции, несобственные интегралы от которых абсолютно сходятся. Класс эквивалентности: функции, совпадающие почти всюду (отличающиеся на множестве меры нуль). Факторизуем, получаем МП $L_1[a, b]$, являющееся пополнением $\tilde{L}_1[a, b]$ (в широком смысле). Изометрическая копия – множество классов, содержащих непрерывного представителя. Плотно в $L_1[a, b]$.

5. $C_{L_2}[a, b] = \tilde{L}_2[a, b]$ – неполное МП. Его пополнение $L_2[a, b]$ – множество классов эквивалентных измеримых функций, квадратично интегрируемых по Лебегу на отрезке. Как множество $L_2[a, b] \subset L_1[a, b]$.

Теорема о пополнении (Хаусдорф). У произвольного метрического пространства существует пополнение, единственное с точностью до изоморфизма.

Единственность доказана раньше. Существование доказывается с помощью универсальной конструкции, к описанию которой сейчас приступаем.

Пусть $\tilde{X}$ – некоторое (неполное) МП. Наша задача – добавить к нему (или, точнее, к его изометрической копии) отсутствующие пределы фундаментальных последовательностей.

Рассмотрим множество $\hat{X}$, элементами которого являются ФП элементов из $\tilde{X}$: $\hat{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots)$. Частный случай – постоянные последовательности, которые теперь будем обозначать $\hat{c}(\tilde{x}) = (\tilde{x}, \tilde{x}, \dots)$ (шляпка над c – для того, чтобы подчеркнуть принадлежность пространству $\hat{X}$), а множество таких последовательностей обозначим $\hat{C}$.

Введём на $\hat{X}$ расстояние по правилу $\rho_{\hat{X}}(\hat{x}, \hat{x}') = \lim_{j\to\infty} \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_j, \tilde{x}'_j)$. Докажем, что это определение корректно, т.е. что предел существует. Для этого достаточно показать, что числовая последовательность $\{\rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_j, \tilde{x}'_j)\}$ фундаментальна. Это следует из неравенства четырёхугольника
$|\rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_k, \tilde{x}'_k) - \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_m, \tilde{x}'_m)| \le \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_k, \tilde{x}_m) + \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}'_k, \tilde{x}'_m)$
и фундаментальности последовательностей $\hat{x}$ и $\hat{x}'$ в $\tilde{X}$.

Утверждение: так введённое расстояние удовлетворяет аксиомам ПМП. Эквивалентность элементов $\hat{X}$ в смысле такой полуметрики – это эквивалентность ФП, введённая выше.

Утверждение: подмножество $\hat{C}$ – метрическое пространство, изометричное $\tilde{X}$. Элементы $\hat{X}$, эквивалентные $\hat{c}(\tilde{x})$ – последовательности, сходящиеся к $\tilde{x}$ в $\tilde{X}$.

Докажем, что $\hat{C}$ плотно в $\hat{X}$. Пусть $\hat{x} \in \hat{X}$ – ФП:
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \, \forall k, m > N(\varepsilon) : \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_k, \tilde{x}_m) < \varepsilon$.
Тогда $\rho_{\hat{X}}(\hat{c}(\tilde{x}_k), \hat{x}) = \lim_{m\to\infty} \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_k, \tilde{x}_m) \le \varepsilon$, если $k > N(\varepsilon)$, т.е. произвольный элемент из $\hat{X}$ может быть приближен элементом из $\hat{C}$ с любой точностью. Отсюда следует также, что $\lim_{k\to\infty} \rho_{\hat{X}}(\hat{c}(\tilde{x}_k), \hat{x}) = 0$. Каждый из этих фактов означает, что $\hat{C}$ плотно в $\hat{X}$.

Рассмотрим теперь ФП элементов из $\hat{C}$: $(\hat{c}(\tilde{x}_1), \hat{c}(\tilde{x}_2), \dots)$. Фундаментальность этой последовательности в $\hat{X}$ эквивалентна фундаментальности последовательности $\hat{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots)$ в $\tilde{X}$, т.е. её принадлежности пространству $\hat{X}$. Как было только что доказано, $\lim_{k\to\infty} \rho_{\hat{X}}(\hat{c}(\tilde{x}_k), \hat{x}) = 0$, т.е.
$\hat{c}(\tilde{x}_k) \to \hat{x}$. Таким образом, мы доказали, что произвольная фундаментальная последовательность элементов из плотного в $\hat{X}$ множества $\hat{C}$, изометричного $\tilde{X}$, сходится некоторому элементу $\hat{x} \in \hat{X}$.

Для завершения доказательства осталось перейти от ПМП $\hat{X}$ к МП X, выполнив факторизацию. Элементами X являются классы эквивалентных ФП. В роли плотного множества, изометричного $\tilde{X}$, выступает множество C классов ФП, эквивалентных постоянным последовательностям (каждый такой класс состоит из последовательностей, сходящихся к фиксированному элементу $\tilde{x} \in \tilde{X}$). Произвольная ФП элементов из этого плотного множества, как показано выше, сходится (поскольку расстояние между классами совпадает с расстоянием между их представителями в ПМП). Отсюда, в силу доказанной выше леммы, вытекает полнота пространства X, которое является пополнением пространства C, а, следовательно, и изометричноего ему пространства $\tilde{X}$. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве этой теоремы Хаусдорф следовал за Риманом, который использовал аналогичную процедуру при конструировании множества вещественных чисел. Риман определил вещественное число как класс эквивалентных фундаментальных последовательностей из рациональных чисел. То есть пополнение множества $\mathbb{Q}$ до $\mathbb{R}$ фактически тоже происходит не непосредственно, а путём перехода к изометрической копии. При этом Риману было сложнее, чем Хаусдорфу: когда мы вводили расстояние между ФП и доказывали корректность этого определения, мы пользовались полнотой E^1, а Риман был лишён такой возможности.

Раздел 4. Отображения метрических пространств

Лекция 6 Непрерывность.

Функция, отображение, оператор.
Будем сейчас рассматривать однозначные полноопределённые функции, элементы Y^X. Иногда под оператором понимают отображение пространства в себя, когда $Y = X$. Мы не будем придерживаться этого ограничения. Если отображение $X \to \mathbb{R}$ (или $X \to \mathbb{C}$) – функционал.

Композиция отображений. Обратное отображение.

Пусть не просто множества, а МП (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y).
Ограниченность отображения F: $F(X)$ – ограниченное множество в Y.
Ограниченность ператора F: образ любого ограниченного множества в X ограничен в Y. Более слабое свойство.
Замечание: достаточно проверить для шаров.

Пусть у нас не одно отображение, а семейство отображений $\{F_\alpha : X \to Y\}$, α – некоторый параметр (элемент множества произвольной природы), нумерующий отображения. Семейство равномерно ограничено, если образы $F_\alpha(X)$ для всех функций из семейства лежат в одном и том же ограниченном множестве в Y.
Применительно к термину "оператор". Семейство операторов равномерно ограничено, если для произвольного ограниченного в X множества его образы лежат в одном и том же ограниченном множестве в Y.
Замечание: опять достаточно проверить для шаров.

Композиция ограниченных отображений – ограниченное отображение.

Утверждение: конечное семейство ограниченных отображений равномерно ограничено. Конечное семейство ограниченных операторов равномерно ограничено.

Непрерывность отображения. Малые (по метрике X) изменения аргумента приводят к малым (по метрике Y) изменениям функции.

Непрерывность отображения F в точке $x_* \in X$. По Коши (на языке $\varepsilon - \delta$):
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \{\rho_X(x, x_*) < \delta \Rightarrow \rho_Y(F(x), F(x_*)) < \varepsilon\}$

(Замечание. Строгие неравенства в силу произвольности ε можно заменить нестрогими.)

То же, но немного по-другому:
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \{x \in S_\delta(x_*) \Rightarrow F(x) \in S_\varepsilon(F(x_*))\}$

На языке окрестностей: для любой окрестности $O_Y(y_*)$ точки $y_* = F(x_*)$ в пространстве Y найдётся окрестность $O_X(x_*)$ точки x_* в пространстве X такая, что $\forall x \in O_X(x_*) : y = F(x) \in O_Y(y_*)$.

Последняя формулировка пригодна не только для метрических, но и для топологических пространств.

Теперь непрерывность отображения F в точке $x_* \in X$ на языке последовательностей (по Гейне-Борелю):

$x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_* \Rightarrow F(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} F(x_*)$

Эквивалентность.

1) Из непрерывности по Коши следует непрерывность по Гейне-Борелю:
Пусть $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \{x \in S_\delta(x_*) \Rightarrow F(x) \in S_\varepsilon(F(x_*))\}$
Хотим доказать, что $x_k \xrightarrow[k\to\infty]{} x_* \Rightarrow y_k = F(x_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} y_* = F(x_*)$,
то есть $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \, \forall k > N : y_k \in S_\varepsilon(y_*)$
Действительно, найдём $\delta(\varepsilon)$. Поскольку $x_k \to x_*$, найдётся номер N, начиная с которого $x_k \in S_\delta(x_*)$. Но тогда при тех же номерах
$y_k = F(x_k) \in S_\varepsilon(y_*)$.

2) Из отсутствия непрерывности по Коши следует отсутствие непрерывности по Гейне-Борелю:
Если непрерывности по Коши нет, то
$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists x \in S_\delta(x_*) : F(x) \notin S_\varepsilon(y_*)$
Возьмём последовательность $\delta_k \to 0$ и сопоставим ей последовательность $x_k \in X : \{x_k \in S_{\delta_k}(x_*) \wedge y_k \notin S_\varepsilon(y_*)\}$. Это означает, что $x_k \to x_*$, и при этом $y_k = F(x_k) \nrightarrow y_*$.

Доказательство обобщается на топологические пространства.

Непрерывность композиции отображений, непрерывных в соответствующих точках.

Функция, непрерывная на множестве $A \subset X$ – непрерывная во всех точках множества. (В частном случае – на всём пространстве.)
$\forall x_* \in A \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon, x_*) : \{\rho_X(x, x_*) < \delta \Rightarrow \rho_Y(F(x), F(x_*)) < \varepsilon\}$.

На языке последовательностей:

$$\lim_{k\to\infty} F(x_k) = F\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right)$$

(если $x_k \in A$ сходится).

Непрерывность композиции отображений, непрерывных на соответствующих множествах.

Равномерная непрерывность на множестве A: δ зависит только от ε и не зависит от x_*. При этом подходе исчезает разница в ролях x_* и x. Не топологическое, а метрическое свойство.
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) \, \forall x', x'' \in A : \{\rho_X(x', x'') < \delta \Rightarrow \rho_Y(F(x'), F(x'')) < \varepsilon\}$.

Частный случай – липшицевость:
$\exists L > 0, \gamma > 0, \forall x', x'' \in A \, \rho_Y(F(x'), F(x'')) \le L\rho_X(x', x'')^\gamma$.

Если $X, Y \subset \mathbb{R}$, то достаточное условие липшицевости с $\gamma = 1$ – ограниченность производной (из формулы конечных приращений).

Равномерная непрернывность композиции равномерно непрерывных отображений.

Лемма. Равномерно непрерывное отображение переводит фундаментальную последовательность в фундаментальную. Образами эквивалентных ФП при равномерно непрерывном отображении также являются эквивалентные ФП.

Пусть снова у нас не одно отображение, а семейство отображений $\{F_\alpha : X \to Y\}$. Семейство равностепенно непрерывно в точке x_*, если
$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta(\varepsilon) > 0\,\forall\alpha : \{\rho_X(x, x_*) < \delta \Rightarrow \rho_Y(F_\alpha(x), F_\alpha(x_*)) < \varepsilon\}$
Здесь ключевой момент – независимость δ от α: можно выбрать общее значение $\delta(\varepsilon)$ для всего семейства.

Утверждение: конечное семейство отображений, непрерывных в заданной точке, равностепенно непрерывно в этой точке.

Равностепенная непрерывность семейства функций на множестве $A \subset X$ (равномерная равностепенная непрерывность):
$\forall\varepsilon > 0\,\exists\delta(\varepsilon)\,\forall\alpha\,\forall x_*, x \in A : \{\rho_X(x, x_*) < \delta \Rightarrow \rho_Y(F_\alpha(x), F_\alpha(x_*)) < \varepsilon\}$.
Здесь снова главное – это независимость δ от выбранной функции. Обычно, когда говорят о равностепенной непрерывности, имеют в виду именно это свойство.

Утверждение: конечное семейство равномерно непрерывных отображений равностепенно непрерывно.

Достаточное условие равностепенной непрерывности – равномерная липшицевость (с L, γ общими для всего семейства).

Если $X, Y \subset \mathbb{R}$, то достаточное условие равностепенной непрерывности – равномерная ограниченность производных.

Примеры.

1. Расстояние $\rho(x, y)$ – равномерно непрерывная числовая функция (функционал) по совокупности аргументов (было показано). Ограничена на ограниченных множествах, а для ограниченных МП – ограничена на всём пространстве (собственно говоря, ограниченность/неограниченность множеств и всего МП и определяется через ограниченность/неограниченности этой функции).

2. На пространстве с дискретной метрикой любое отображение непрерывно (и равномерно непрерывно).

3. Изометрия τ – ограниченный оператор (для ограниченных МП – ограниченное отображение), равномерно непрерывное ($\delta = \varepsilon$).

4. Операторы вложения. МП (X_1, ρ_1), (X_2, ρ_2): $X_1 \subseteq X_2$, $F : X_1 \to X_2$, $F(x) = x$. Например: $\mathbb{R}^n_{\max}$, $\mathbb{R}^n_1$, E^n – пространства с одним носителем, операторы вложения равномерно непрерывны и ограничены в обе стороны (доказать). $l_1 \subset l_2 \subset l_\infty$ (как множества), операторы вложения из l_1 в l_2 и l_∞, из l_2 в l_∞ равномерно непрерывны и ограничены (доказать). Пространства $C[a, b]$, $\tilde{L}_1[a, b]$, $\tilde{L}_2[a, b]$ – пространства с одним носителем, операторы вложения из $C[a, b]$ в $\tilde{L}_1[a, b]$ и $\tilde{L}_2[a, b]$, а также

из $\tilde{L}_2[a,b]$ в $\tilde{L}_1[a,b]$ равномерно непрерывны и ограничены, обратные операторы непрерывными и ограниченными не являются (доказать).

5. Числовая функция $\mathrm{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to E^1$ неограничена и непрерывна (но неравномерно).

6. Функция Дирихле ограничена, но не является непрерывной.

7. Семейство функций $F_\alpha(t) = \alpha t$, $\alpha \in \mathbb{R}$ не является равномерно ограниченным ни на каком интервале (отрезке) и не является равностепенно непрерывным ни в одной точке. В то же время любая из функций этого семейства ограничена на любом отрезке и равномерно непрерывна на всей оси.

Часто удобно задать отображение не на всём пространстве, а на некотором плотном множестве (в пространствах последовательностей это могут быть обрывающиеся последовательности; в функциональных пространствах это могут быть бесконечно гладкие функции и т.п.). Возникает вопрос о том, когда можно продолжить это отображение на всё пространство с сохранением свойств (например, непрерывности). Ответ даёт следующая теорема:

Теорема. Пусть X – МП, $\tilde{X}$ – всюду плотное множество, Y – полное МП и $\tilde{F} : \tilde{X} \to Y$ – равномерно непрерывное на $\tilde{X}$ отображение. Тогда существует единственное отображение $F : X \to Y$, являющееся непрерывным продолжением $\tilde{F}$, т.е. $\forall \tilde{x} \in \tilde{X} : F(\tilde{x}) = \tilde{F}(\tilde{x})$, при этом F равномерно непрерывно на X.

Доказательство. Пусть $x_* \in X$. Поскольку $\tilde{X}$ – всюду плотное множество, найдётся последовательность элементов этого множества, сходящаяся к x_*: $\tilde{x}_j \to x_*$. Эта последовательность фундаментальна. Согласно лемме, последовательность $y_j = \tilde{F}(\tilde{x}_j)$ также фундаментальна и в силу полноты Y сходится к некоторому элементу y_*. Тогда мы положим $F(x_*) = y_*$.

Докажем корректность, т.е. незваисимость результата от выбора последовательности. Пусть есть другая последовательность элементов из $\tilde{X}$, сходящаяся к x_*: $\tilde{x}'_j \to x_*$. Тогда $\{\tilde{x}_j\}$ и $\{\tilde{x}'_j\}$ – эквивалентные ФП. В силу леммы отсюда следует, что $\{y_j\}$ и $\{y'_j\}$, где $y'_j = \tilde{F}(\tilde{x}'_j)$ – также эквивалентные ФП, поэтому они имеют один и тот же предел.

F есть продолжение $\tilde{F}$ (рассмотреть постоянную последовательность).

Докажем равномерную непрерывность F. По условию $\tilde{F}$ равномерно непрерывна, т.е.

$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon)\, \forall \tilde{x}, \tilde{x}' \in \tilde{X} : \{\rho_X(\tilde{x}, \tilde{x}') < \delta \Rightarrow \rho_Y(\tilde{F}(\tilde{x}), \tilde{F}(\tilde{x}')) < \varepsilon\}$.

Пусть теперь $x, x' \in X$ и $\rho_X(x, x') < \delta(\varepsilon)$. Докажем, что $\rho_Y(F(x), F(x')) \le \varepsilon$. Это будет означать равномерную непрерывность F (замена строгого неравенства нестрогим существенной роли не играет).

Рассмотрим аппроксимирующие последовательности из $\tilde{X}$: $\tilde{x}_j \to x$, $\tilde{x}'_j \to x'$. Начиная с некоторого номера будут выполнены неравенства

$\rho_X(\tilde{x}_j, x) < (\delta - \rho_X(x, x'))/2$,

$\rho_X(\tilde{x}'_j, x') < (\delta - \rho_X(x, x'))/2$,

и тогда $\rho_X(\tilde{x}_j, \tilde{x}'_j) < \delta$, откуда $\rho_Y(\tilde{F}(\tilde{x}_j), \tilde{F}(\tilde{x}'_j)) < \varepsilon$.
Переходя к пределу, получаем искомое неравенство.
Осталось доказать единственность. Она иследует из определения непрерывности по Гейне-Борелю: если $\tilde{x}_j \to x_*$, то
$F(x_*) = \lim_{j\to\infty} F(\tilde{x}_j) = \lim_{j\to\infty} \tilde{F}(\tilde{x}_j)$. Теорема доказана.

Примеры.

1. Оператор вложения из $\tilde{L}_2[a,b]$ в $\tilde{L}_1[a,b]$ равномерно непрерывен. Рассмотрим этот оператор как оператор из $L_2[a,b]$ в $L_1[a,b]$, определённый на плотном множестве $\tilde{L}_2[a,b]$. Тогда, согласно доказанной теореме, его можно продолжить на всё пространство $L_2[a,b]$ с сохранением непрерывности. Отсюда следует, что $L_2[a,b]$ непрерывно вкладывается в $L_1[a,b]$.
   Такая схема типична для теорем вложения. Устанавливается непрерывность вложения на плотном множестве, затем переностится на их пополнения. Для функциональных пространств теоремы вложения – неравенства на градких функциях.

2. Числовая функция $\mathrm{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to E^1$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной. На отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$ по непрерывности не продолжается.

Операторные уравнения.

Пусть $F : X \to Y$ и $G : X \to Y$ – отображения (операторы). Пока что не обязательно МП, просто множества. Операторное уравнение:

$$F(x) = G(x)$$

Задача поиска таких элементов $x \in X$, для которых выполняется это равенство. Вопрос о существовании, единственности, числе решений – на всём множестве или его подмножествах, отделение корней (нахождение подмножеств, где решение существует и единственно). Алгоритмы поиска точных или приближённых решений. Если речь о приближённых решениях, то появляется необходимость оценки погрешности, т.е. расстояния от точного решения x до приближённого $\hat{x}$ в X, и невязки, т.е. расстояния от $F(\hat{x})$ до $G(\hat{x})$ в Y. Тогда в X и Y необходимо ввести метрику. Анализ метрических свойств может помочь и при ответе на другие вопросы, напрямую с метрикой не связанные (например, о существование и/или единственности решений).

Два важных частных случая.

1) $G(x) = y$ – фиксированный элемент пространства Y. Операторное уравнение принимает вид

$$F(x) = y$$

Всё те же вопросы о существовании, единственности, числе решений в зависимости от y. Прообраз $F^{-1}(y)$. Поиск решений (всех или некоторых, точный или приближённый, аналитически или численно). Вопрос о корректности задачи: задача корректна, если для заданного $y \in Y$ и в некоторой его окрестности решение существует, единственно и непрерывно зависит от y. Важнейший вопрос о существовании и непрерывности обратного оператора.

2) $Y = X$, G – тождественный оператор. Операторное уравнение принимает вид

$$F(x) = x$$

Его решение называют неподвижной точкой оператора F (который отображает пространство X в себя). Существует ряд теорем, позволяющих судить о существовании и/или единственности неподвижной точки и способах её поиска.

Раздел 4. Отображения метрических пространств

Лекция 7 Принцип сжимающих отображений.

Оператор $F : X \to X$.
Операторное уравнение

$$F(x) = x$$

Решение этого уравнения – неподвижная точка отображения F.

(X, ρ) – МП. Можем использовать метрические свойства оператора F.

Отображение $F : X \to X$ называется сжимающим (сжатием), если $\exists q \in [0,1)\, \forall x', x'' \in X : \rho(F(x'), F(x'')) \le q \cdot \rho(x', x'')$

Замечание. Условие более сильное, нежели просто $\rho(F(x'), F(x'')) < \rho(x', x'')$. Расстояние между образами точек не просто меньше, чем между прообразами, а квалифицированно меньше, в гарантированное число раз. При этом число q не должно зависеть от x', x'', т.е. его можно выбрать единым для всего пространства.

Сжимающее отображение – равномерно непрерывное на всём пространстве, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon / q$.

Лемма. Если отображение F сжимающее, то оно имеет не более одной неподвижной точки.

Доказательство. Пусть $F(x') = x'$ и $F(x'') = x''$. Тогда $\rho(x', x'') = \rho(F(x'), F(x'')) \le q \cdot \rho(x', x'')$.
Отсюда $(1 - q) \cdot \rho(x', x'') \le 0$. Поскольку $1 - q > 0$, получаем $\rho(x', x'') \le 0$, откуда $x' = x''$.

Эта лемма справедлива для произвольного МП. Дальше мы сосредоточим наше внимание на полных МП.

Теорема (принцип сжимающих отображений).
Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство, а отображение $F : X \to X$ – сжатие. Тогда оно имеет единственную неподвижную точку.

Единственность мы только что доказали в более общей ситуации, осталось доказать существование.

Выберем произвольный элемент $x_0 \in X$ и образуем последовательность $(x_0, x_1, x_2, \dots)$ по правилу $x_j = F(x_{j-1})$, $j = 1, 2, \dots$ (т.е. $x_1 = F(x_0)$, $x_2 = F(x_1)$, $\dots$) Мы хотим доказать, что эта последовательность (будем её называть итерационной) сходится, и что её предел является неподвижной точкой отображения F.

Начнём с конца: докажем, что если итерационная последовательность сходится, то предел – неподвижная точка. Пусть $x_j \to x_* \in X$. Перейдём в равенстве $x_j = F(x_{j-1})$ к пределу при $j \to \infty$ и получим $x_* = F(x_*)$, что и требовалось.

Важный момент: здесь мы не пользовались тем, что F – сжатие. Единственное, что нам требовалось – это возможность перейти к пределу под знаком оператора, а для этого нужна только непрерывность. Поэтому делаем вывод: если итерационная последовательность сходится для некоторого непрерывного (но не обязательно сжимающего) оператора F, то её предел – неподвижная точка этого оператора.

Возвращаемся к исследованию итерационной последовательности для сжимающего оператора в полном пространстве. Для того, чтобы доказать сходимость последовательности в полном МП, достаточно установить её фундаментальность. Заметим, что
$\rho(x_j, x_{j+1}) = \rho(F(x_{j-1}), F(x_j)) \le q \cdot \rho(x_{j-1}, x_j)$
Отсюда по индукции доказываем, что
$\rho(x_j, x_{j+1}) \le q^j \cdot \rho(x_0, x_1)$, где $x_1 = F(x_0)$. Тогда
$\rho(x_m, x_{m+p}) \le \sum_{j=m}^{p-1} \rho(x_j, x_{j+1}) \le \sum_{j=m}^{p-1} q^j \rho(x_0, x_1) =$
$= q^m \frac{1-q^p}{1-q} \rho(x_0, x_1) < \frac{q^m}{1-q} \rho(x_0, x_1)$,
откуда и следует фундаментальность итерационной последовательности. Теорема доказана.

Доказанная теорема о неподвижной точке не только гарантирует нам существование и единственность решения операторного уравнения, но и даёт нам способ его приближённого решения: построение итерационной последовательности. Этот метод известен как метод простой итерации. При его реализации полезно, естественно, не только знать, что решение есть и что последовательность сходится к решению, но и как-то оценить число необходимых шагов, необходимых для достижения нужной точности, и текущее значение погрешности.

Прежде всего, заметим, что $\rho(x_{m+1}, x_*) = \rho(F(x_m), F(x_*)) \le q \cdot \rho(x_m, x_*)$. Отсюда по индукции получаем: $\rho(x_m, x_*) \le q^m \rho(x_0, x_*)$.

Если мы можем как-то оценить погрешность начального приближения (расстояние от x_0 до x_*), то последняя формула позволяет оценить и погрешность m-ого приближения. Если нам нужно достичь заданной точности (т.е. добиться выполнения неравенства $\rho(x_m, x_*) \le \varepsilon$), то мы можем найти m из условия $q^m \rho(x_0, x_*) \le \varepsilon$:
$m \ln q \le \ln(\varepsilon/\rho(x_0, x_*)) \Rightarrow m \ge \ln(\varepsilon/\rho(x_0, x_*))/\ln q$
(при делении на отрицательное число $\ln q$ смысл неравенства меняется на противоположный). Получили априорные оценки для погрешности m-го приближения и для числа шагов, достаточного для достижения нужной точности.

Как поступать, если погрешность начального приближения оценить не можем. Для x_0, $x_1 = F(x_0)$ и x_* запишем неравенство треугольника:
$\rho(x_0, x_*) \le \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_*)$. Поскольку $\rho(x_1, x_*) \le q \cdot \rho(x_0, x_*)$, получаем:
$\rho(x_0, x_*) \le \rho(x_0, x_1) + q \cdot \rho(x_0, x_*)$, или $\rho(x_0, x_*) \le \rho(x_0, x_1)/(1-q)$.
Отсюда снова получаем априорные оценки в терминах расстояния между x_0 и $x_1 = F(x_0)$: $\rho(x_m, x_*) \le q^m \rho(x_0, x_1)/(1-q)$, $m \ge \ln(\varepsilon(1-q)/\rho(x_0, x_1))/\ln q$.

Это были априорные оценки. Получим апостериорные, которые могут оказаться более точными. Схема прежняя. Пусть x_{m-1} и $x_m = F(x_{m-1})$ – два члена итерационной последовательности. Неравенство треугольника:

$\rho(x_{m-1}, x_*) \leq \rho(x_{m-1}, x_m) + \rho(x_m, x_*) \leq \rho(x_{m-1}, x_m) + q \cdot \rho(x_{m-1}, x_*)$.
Тогда $\rho(x_{m-1}, x_*) \leq \rho(x_{m-1}, x_m)/(1-q)$, и $\rho(x_m, x_*) \leq [q/(1-q)] \cdot \rho(x_{m-1}, x_m)$.
Погрешность последнего найденного члена последовательности оценивается через величину последнего шага. Коэффициент $q/(1-q)$ растёт с ростом q, он меньше единицы при $q < 1/2$ и больше единицы при $q > 1/2$.

Примеры.

1. Применение принципа сжимающих отображений для решения уравнений вида $f(x) = 0$

   Отделение корней. Для каждого корня: привести к виду $x = F(x)$ (одним из многих способов) и выбрать замкнутое множество $X \subseteq \mathbb{R}$, на котором F – сжатие. Достаточное условие:
   $F : X \to X \wedge \exists q \in [0, 1)\, \forall x \in X : |F'(x)| \leq q < 1$ (штрих – производная).
   Если $|F'(x)| > 1$ – не сжатие; можно попробовать обратную функцию.

   Один из вариантов для монотонной на X функции: $x = x - \alpha f(x)$, т.е. $F(x) = x - \alpha f(x)$.
   $\alpha > 0$ для возрастающей функции f и $\alpha < 0$ для убывающей, тогда $\alpha f(x) = |\alpha f(x)|$
   Выбор α: $|F'(x)| = |1 - \alpha f'(x)| \leq q < 1$, или
   $-q \leq 1 - |\alpha f'(x)| \leq q$.
   Чем меньше q, тем быстрее сходимость.
   Пусть известно, что $m \leq |f'(x)| \leq M$ (на X), тогда
   $1 - |\alpha| M \leq 1 - |\alpha f'(x)| \leq 1 - |\alpha| m$.
   $q = \max\{|1 - |\alpha| M|, |1 - |\alpha| m|\}$. Оптимальный выбор α, когда отрезок симметричный: $|1 - |\alpha| M| = |1 - |\alpha| m|$, $1 - |\alpha| M = -(1 - |\alpha| m)$,
   $|\alpha| = 2/(M + m)$, т.е. $1/\alpha$ – среднее значение производной.
   В этом случае $q = (M - m)/(M + m) < 1$.

   Вместо константы α можно взять функцию $g(x)$, не обращающуюся в нуль: $F(x) = x - g(x) f(x)$.
   Метод Ньютона: $g(x) = 1/f'(x)$, $F(x) = x - f(x)/f'(x)$,
   $F'(x) = (f(x) f''(x))/f'^2(x)$
   Достаточное условие сходимости метода: $|f(x) f''(x)|/f'^2(x) \leq q < 1$ на X. Не забывать об условии $F : X \to X$.
   Метод Ньютона – частный случай метода простой итерации, но имеет свою специфику. Сходимость более быстрая, чем у обычного метода простой итерации, за счёт убывания $|F'(x)|$ при приближении к корню. Будет подробнее рассмотрен позже.

2. Применение принципа сжимающих отображений для решения систем линейных алгебраических уравнения (СЛАУ) $Ax = b$ (в $\mathbb{R}^n$).

   $Ax = b$, $x, b \in \mathbb{R}^n$, A – невырожденная матрица $n \times n$, A и b заданы, x ищем. При больших n итерационные методы могут оказаться предпочтительнее прямых (Гаусс).

Если $A = A_0 + A_1$, A_0 – главная легко обратимая часть (например, диагональная матрица), приводим систему к виду $x = F(x)$, где $F(x) = Cx + d$, $C = -A_0^{-1}A_1$, $d = A_0^{-1}b$.
Итерационный процесс: $x_{m+1} = Cx_n + b$
Сходимость покомпонентная (эквивалентная сходимости в $\mathbb{R}^n_{\max}$, $\mathbb{R}^n_1$, E^n). Достаточные условия для каждого варианта метризации разные (рассмотреть). Если хотя бы одно из них выполняется – это гарантирует сходимость (в любой метрике).

3. Применение принципа сжимающих отображений для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\, + f(s)$$

Рассмотреть достаточные условия сходимости в $C[a,b]$, $L_1[a,b]$, $L_2[a,b]$.

4. Применение принципа сжимающих отображений для доказательства теоремы Пикара.

Задача Коши для ОДУ 1 порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

(точка – производная). Функцию f считаем непрерывной по обеим переменным (хотим, чтобы $\dot{x}$ была непрерывной).

Эквивалентное интегральное уравнение:

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s))\,ds$$

Задача Коши приведена к задаче о неподвижной точке отображения

$$(Ax)(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s))\,ds$$

Проанализируем условия, при которых оператор A – сжатие в $C[a,b]$. Пусть $y_{1,2} = Ax_{1,2}$,

$$y_2(t) - y_1(t) = \int_a^t (f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s)))\,ds$$

Чтобы правая часть линейно оценивалась через расстояние в $C[a,b]$ между x_1 и x_2, потребуем липшицевости f по второму аргументу:

$|f(s, x_2) - f(s, x_1)| \leq L|x_2 - x_1|$, L – константа Липшица. Тогда

$$|y_2(t) - y_1(t)| = \left| \int_a^t (f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s)))\, ds \right| \leq$$
$$\leq \int_a^t |f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s))|\, ds \leq L \int_a^t |x_2(s) - x_1(s)|\, ds \leq$$
$$\leq L\rho_{C[a,b]}(x_1, x_2)|t - a| \leq L\rho_{C[a,b]}(x_1, x_2)|b - a|\,.$$

Берём максимум по $t \in [a, b]$:

$$\rho_{C[a,b]}(y_1, y_2) \leq L|b - a|\rho_{C[a,b]}(x_1, x_2)\,.$$

Если $|b-a| < 1/L$, то отображение сжимающее в $C[a, b]$, и тогда на отрезке $[a, b]$ существует единственное решение задачи Коши. Для $t < a$ поступаем аналогично. Доказали теорему Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши на интервале, содержащем начальную точку, и оценили снизу длину этого интервала. Многомерные обобщения делаются аналогично.

Раздел 5. Компактность

Лекция 8 Компактность метрических пространств и множеств.

МП называется компактом, если любая бесконечная последовательность его элементов содержит сходящуюся подпоследовательность.

Подмножество метрического пространства называем компактом, если оно образует компакт в индуцированной метрике. В этом случае любая бесконечная последовательность его элементов содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого множества.

Ещё одно определение компакта: каждое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие (это свойство ещё называют бикомпактностью). Мы не будем им пользоваться. Для нас важна секвенциальная компактность – т.е. на языке последовательностей.

Множество называют предкомпактным (в узком смысле), если его замыкание – компакт. В этом случае любая бесконечная последовательность его элементов содержит сходящуюся подпоследовательность, однако предел не обязательно является элементом этого множества.
Действительно, элементы последовательности принадлежат также и замыканию множества, являющемуся компактом, поэтому эта последовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу этого замыкания, который, однако, может не принадлежать исходному множеству.

Очевидно, компакт предкомпактен, поскольку его замыкание совпадает с ним самим.

Замечание. Данные определения без изменения переносятся на топологические пространства, поскольку в них определены понятия сходимости и замыкания.

МП или множество будем называть предкомпактным (в широком смысле), если любая бесконечная последовательность его элементов содержит фундаментальную подпоследовательность.
Замечание: такое определение на топологические пространства не обобщается, поскольку в них нет понятия фундаментальной последовательности.
Замечание. Другой вариант терминологии: предкомпактное (в широком смысле) МП или множество назвыают компактным МП (множеством), при этом отличая его от компакта.

Утверждение: предкомпактное в узком смысле множество предкомпактно и в широком смысле.
Действительно, любая последовательность его элементов содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу замыкания. Эта подпоследовательность фундаментальна.

Утверждение: подмножество полного МП, предкомпактное в широком

смысле, предкомпактно и в узком смысле.
То есть нам нужно доказать, что если $A \subset X$, где A – предкомпактное в широком смысле множество, а X – полное МП, то замыкание $[A]$ – компакт.
Доказательство: пусть $\{x_n\}$ – бесконечная последовательность элементов из $[A]$. Тогда существует эквивалентная ей последовательность $\{x'_n\}$ элементов из A. Из неё в силу предкомпактности A можно выбрать фундаментальную подпоследовательность $\{\tilde{x}'_n\}$. Тогда соответствующая ей подпоследовательность исходной последовательности $\{\tilde{x}_n\}$ (с теми же номерами) будет ей эквивалентна и, следовательно, также фундаментальна. В силу полноты X эта подпоследовательность имеет предел в X. В силу замкнутости $[A]$ этот предел принадлежит $[A]$. Таким образом, произвольная последовательность элеменов из $[A]$ содержит сходящуюося в $[A]$ подпоследовательность.

В дальнейшем предкомпактность будет всюду пониматься в широком смысле. Также иногда будем для краткости импользовать термин "предкомпакт"(для предкомпактного МП или множества).

Утверждение: МП предкомпактно $\Leftrightarrow$ его пополнение – компакт. (Доказать.)

Компакт является предкомпактным МП.

Полное предкомпактное МП является компактом.

Неполное МП компактом не является (из расходящейся ФП нельзя выделить сходящуюося подпоследовательность).

Утверждение: любое подмножество предкомпактного множества (и, в частности, компакта) предкомпактно. В частности, если $[A]$ – компакт, то A предкомпактно.

Следствие: любое множество, содержащее непредкомпактное подмножество, непредкомпактно.

Утверждение: любое замкнутое подможество компакта – компакт.

Замечание. В дальнейшем для просторы формулировок исключим $\emptyset$ из рассмотрения и под предкомпактными (компактными) множествами мы будем понимать непустые множества.

Утверждение: если $F : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ – непрерывная сюрьекция, то из компактности (X, ρ_X) следует компактность (Y, ρ_Y). То есть непрерывный образ компакта – компакт.
Доказательство. Пусть $\{y_n\}$ – бесконечная последовательность элементов из Y. В силу сюрьективности F найдутся такие $x_n \in X$, что $y_n = F(x_n)$. В силу компактности (X, ρ_X) найдётся сходящаяся подпоследовательность $\tilde{x}_n \to x^*$. Тогда, в силу непрерывности F, $\tilde{y}_n = F(\tilde{x}_n) \to y^* = F(x^*)$. Поскольку $\{\tilde{y}_n\}$ – подпоследовательность исходной последовательности $\{y_n\}$, МП (Y, ρ_Y) – компакт.

Утверждение: если $F : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ – непрерывная в обе стороны биекция, то пространства либо одновременно являются компактами, либо нет.

Утверждение: если $F : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ – равномерно непрерывная сюрьекция, то из предкомпактности (X, ρ_X) следует предкомпактность (Y, ρ_Y). То есть равномерно непрерывный образ предкомпактного множества (МП) предкомпактен.

Доказательство. Пусть $\{y_n\}$ – бесконечная последовательность элементов из Y. В силу сюрьективности F найдутся такие $x_n \in X$, что $y_n = F(x_n)$. В силу предкомпактности (X, ρ_X) найдётся фундаментальная подпоследовательность $\tilde{x}_n$. Тогда, в силу равномерной непрерывности F, последовательность $\tilde{y}_n = F(\tilde{x}_n)$ фундаментальна. Поскольку $\{\tilde{y}_n\}$ – подпоследовательность исходной последовательности $\{y_n\}$, МП (Y, ρ_Y) – предкомпакт.

Утверждение: если $F : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ – равномерно непрерывная в обе стороны биекция, то пространства либо одновременно являются предкомпактными, либо нет. Частный случай – изометрия: изометрическая копия предкомпакта – предкомпакт (для компакта – аналогично).

Замечание: одной лишь непрерывности недостаточно.
Пример: $\mathrm{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to E^1$.

Применим это к тождественному отображению.

Утверждение: пусть (X, ρ_1), (X, ρ_2) – метрические пространства с одним и тем же носителем, причём в первом сходимость более сильная, и (X, ρ_1) – компакт. Тогда (X, ρ_2) также компакт.

Утверждение: если МП с одним и тем же носителем топологически эквивалентны, то они одновременно являются или не являются компактами. С предкомпактностью это не обязательно так.

Утверждение: пусть (X, ρ_1), (X, ρ_2) – метрические пространства с одним и тем же носителем, причём $\exists c > 0 \, \forall x', x" \in X : \rho_2(x', x") \leq c\rho_1(x', x")$. Тогда из предкомпактности (X, ρ_1) следует предкомпактность (X, ρ_2). Частный случай: множества в ЛНП с одинаковыми носителями, вторая норма подчинена первой.

Пример: компактное (предкомпактное) в пространстве $C[a, b]$ множество является компактным (предкомпактным) также в $L_1[a, b]$ и в $L_2[a, b]$. Множество, компактное (предкомпактное) в $L_2[a, b]$, компактно (предкомпактно) в $L_1[a, b]$. Множество, компактное (предкомпактное) в $l_1[a, b]$, компактно (предкомпактно) в $l_2[a, b]$.

Утверждение: если на одном и том же носителе заданы эквивалентные метрики, то соответствующие МП одновременно являются или не являются предкомпактными. Частный случай: множества в ЛНП с одинаковыми носителями и эквивалентными нормами.

Пример: в пространствах E^n, $\mathbb{R}^n_1$, $\mathbb{R}^n_{\max}$ компактны (предкомпактны) одни и те же множества.

Утверждение: конечное множество – компакт в любой метрике (есть постоянная подпоследовательность).

Примеры предкомпактных и компактных множеств. Доказать: в E^n, $\mathbb{R}^n_1$, $\mathbb{R}^n_{\max}$ любое ограниченное множество предкомпактно, а любое ограниченное и замкнутое множество – компакт (следствие из теоремы Больцано-Вейерштрасса).

Утверждение: если множество (или МП) содержит бесконечное ε-дискретное подмножество, то оно непредкомпактно.

Примеры: $E^1 \supset \mathbb{Z}$; единичный шар в l_1 или l_2.

Замечание: видим, что в общем случае из ограниченности (и замкнутости) предкомпактность (компактность) не следует.

Утверждение: неограниченное множество (МП) непредкомпактно.

Утверждение: незамкнутое множество не является компактом.

Таким образом: ограниченность – необходимое условие предкомпактности. Ограниченность и замкнутость – необходимые условия компактности.

Новое свойство: компактность оператора.

Оператор $F : (X, \rho_X) \to (Y, \rho_Y)$ называют компактным, если образ любого ограниченного множества предкомпактен.

Утверждение: компактный оператор ограничен.

Другое определение: оператор компактен, если образ произвольной ограниченной последовательности содержит фундаментальную подпоследовательность.

Утверждение: если пространство Y полно, то при действии компактного оператора образ произвольной ограниченной последовательности содержит сходящуюся подпоследовательность.

Утверждение: приведённые определения компактности оператора эквивалентны.

Доказательство. Пусть оператор F произвольное ограниченное множество переводит в компактное. Возьмём ограниченную последовательность $\{x_n\}$, множество её элементов ограничено. Тогда множество элементов последовательности $\{y_n = F(x_n)\}$ предкомпактно и, следовательно, из него можно выбрать фундаментальную подпоследовательность.

Пусть теперь F не любое ограниченное множество переводит в предкомпактное, т.е. найдётся ограниченное множество A, для которого множество $B = F(A)$ предкомпактным не является. Тогда найдётся последовательность $\{y_n\}$, элементы которой лежат в B, не содержащая фундаментальной подпоследовательности. Тогда найдётся и последовательность $\{x_n\}$, элементы которой лежат в A, для которой $y_n = F(x_n)$. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена, поскольку ограничено множество A, при этом её образ не содержит фундаментальной подпоследовательности. Эквивалентность доказана.

Напоминание: понятие ε-сети и вполне ограниченного МП (множества).

Теорема (критерий предкомпактности Хаусдорфа). МП предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.

Достаточность (полная ограниченность $\Rightarrow$ предкомпактность).
Рассмотрим последовательность $\{x_1, x_2, \dots\}, x_j \in X$ и будем строить фундаментальную подпоследовательность.
Числовая последовательность $\varepsilon_m \to 0$. Рассмотрим конечную ε_1-сеть для X, тогда X содержится в объединении конечного числа шаров радиуса ε_1. По крайней мере один из шаров (обозначим его центр a_1, а сам шар $S_{\varepsilon_1}(a_1)$)

содержит бесконечное число элементов последовательности. Отбрасываем все элементы последовательности, которые не содержатся в $S_{\varepsilon_1}(a_1)$, выбираем первый из оставшихся, называем его $\hat{x}_1$, $\hat{x}_1 \in S_{\varepsilon_1}(a_1)$.
Следующий шаг: Рассмотрим конечную ε_2-сеть для X, тогда X содержится в объединении конечного числа шаров радиуса ε_2. По крайней мере один из шаров (обозначим его центр a_2, а сам шар $S_{\varepsilon_2}(a_2)$) содержит бесконечное число элементов оставшейся последовательности. Отбрасываем все элементы последовательности, которые не содержатся в $S_{\varepsilon_2}(a_2)$, выбираем первый из оставшихся, называем его $\hat{x}_2$, $\hat{x}_2 \in S_{\varepsilon_1}(a_1) \cap S_{\varepsilon_2}(a_2)$.
Продолжаем процедуру. На m-ом шаге рассматриваем конечную ε_m-сеть для X, тогда X содержится в объединении конечного числа шаров радиуса ε_m. По крайней мере один из шаров (обозначим его центр a_m, а сам шар $S_{\varepsilon_m}(a_m)$) содержит бесконечное число элементов оставшейся последовательности, которые по построению содержатся в пересечении всех предыдущих шаров $S_{\varepsilon_k}(a_k)$, $k < m$. Отбрасываем все её элементы, не содержащиеся в $S_{\varepsilon_m}(a_m)$, выбираем первый из оставшихся, называем его $\hat{x}_m$, $\hat{x}_m \in \bigcap_{k \le m} S_{\varepsilon_k}(a_k)$.
Построенная подпоследовательность будет фундаментальной, поскольку $\forall m, n > N \; \hat{x}_{m,n} \in S_{\varepsilon_N}(a_N) \Rightarrow \rho(\hat{x}_m, \hat{x}_n) < 2\varepsilon_N$.

Необходимость (нет полной ограниченности $\Rightarrow$ нет предкомпактности). Если нет полной ограниченности, то найдётся ε, для которого нет конечной ε-сети.
Выберем произвольный элемент $x_1 \in X$. Поскольку он не образует ε-сети, найдётся элемент $x_2 \in X$: $\rho(\hat{x}_1, \hat{x}_1) > \varepsilon$. Поскольку $\{x_1, x_2\}$ также не образуют ε-сеть, найдётся $x_3 \in X$: $\rho(\hat{x}_{1,2}, \hat{x}_3) > \varepsilon$. Продолжая процедуру, получаем ε-дискретную последовательность, не имеющую фундаментальной подпоследовательности.

Замечание. Если X – не всё МП, а его подмножество, то элементы сети могут принадлежать X, а могут и не принадлежать. На доказательство это никак не повлияет.

Следствие из теоремы. Для того, чтобы множество (или МП) было предкомпактно, необходимо и достаточно, чтобы для любого ε для него существовала предкомпактная ε-сеть.

Необходимось: множество предкомпактно $\Rightarrow$ вполне ограничено, т.е. для любого ε для него существует конечная ε-сеть $\Rightarrow$ она будет и предкомпактной.

Достаточность: в силу произвольности ε для множества найдётся предкомпактная $\varepsilon/2$-сеть, а для неё, в свою очередь, найдётся конечная $\varepsilon/2$-сеть, которая для исходного множества является конечной ε-сетью.

Теорема Арцела-Асколи (критерий предкомпактности в $C[a, b]$). Множество функций $Q \subset C[a, b]$ предкомпактно в $C[a, b]$ тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.

Замечание: равномерная ограниченность множества непрерывных функций – это ограниченность этого множества в МП $C[a, b]$.

Необходимость.
Необходимым условием предкомпактности множества является его ограни-

ченность $\Rightarrow$ отсюда первое свойство.
Докажем равностепенную непрерывность. Воспользуемся $\varepsilon/3$-приёмом. По критерию Хаусдорфа если множество предкомпактно, то для него найдётся конечная $\varepsilon/3$-сеть $\{y_j(t),\, j = 1, \ldots, N\}$.
Т.е. $\forall x \in Q \, \exists m : \rho(x, y_m) < \varepsilon/3$.
Иными словами, $\forall t \in [a, b] : \, |x(t) - y_m(t)| < \varepsilon/3$.
Функции, входящие в сеть, непрерывны на отрезке $\Rightarrow$ следовательно, они равномерно непрерывны (по теореме Кантора).
Было доказано: конечное множество равномерно непрерывных функций равностепенно непрерывно. Тогда
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall m : \{|t' - t''| < \delta \Rightarrow |y_m(t') - y_m(t'')| < \varepsilon/3\}$.
Отсюда
$|x(t') - x(t'')| \le |x(t') - y_m(t')| + |y_m(t') - y_m(t'')| + |y_m(t'') - x(t'')| <$
$< \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$
Равностепенная непрерывность доказана (т.к. δ зависит лишь от ε и не зависит от выбора функции $x \in Q$).

Достаточность. В предположении, что множество Q равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, мы по ε построим предкомпактную ε-сеть, что и будет означать предкомпактность самого множества (по следствию из критерия Хаусдорфа).

Множество Q равномерно ограничено:
$\exists M > 0 \, \forall x \in Q \, \forall t \in [a, b] : |x(t)| \le M$.
Множество Q равностепенно непрерывно:
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in Q : \{|t' - t''| < \delta \Rightarrow |x(t') - x(t'')| < \varepsilon/2\}$.
Разобьём $[a, b]$ на n равных участков длиной $h = (b - a)/n < \delta$.
Сетка $\{t_j = a + jh, j = 0, \ldots, n\}$.
Сеточная функция $\{x_j = x(t_j), j = 0, \ldots, n\}$.
При этом для $t \in [t_{j-1}, t_j]$ справедливо неравенство $|x_j - x(t)| < \varepsilon/2$, поскольку $|t_j - t| < \delta$. В частности, $|x_j - x_{j-1}| < \varepsilon/2$.

Покажем, что множество Y кусочно-линейных функций (непрерывных на $[a, b]$ и линейных на каждом из отрезков $[t_{j-1}, t_j]$), не превосходящих по модулю M, является ε-сетью для Q. Для этого сопоставим каждой функции $x \in Q$ соответствующую функцию $y \in Y$ – линейный интерполяционный сплайн – по правилу:

$$y(t) = x_{j-1} + \frac{x_j - x_{j-1}}{h}(t - t_{j-1}), \quad t \in [t_{j-1}, t_j],$$

при этом $\{y_j = y(t_j) = x_j, j = 0, \ldots, n\}$.
Для линейной на $[t_{j-1}, t_j]$ функции
$|y_j - y(t)| \le |y_j - y_{j-1}| = |x_j - x_{j-1}| < \varepsilon/2$,
поэтому
$|x(t) - y(t)| \le |x(t) - x_j| + |x_j - y(t)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Отсюда вытекает, что $\rho(x, y) < \varepsilon$, т.е. Y – ε-сеть для Q.

Осталось показать, что множество Y предкомпактно. Для этого убедимся, что оно является изометрической копией куба со стороной $2M$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{\max}$. Действительно, пусть $y, z \in Y$, тогда

$\rho_{C[a,b]}(y,z) = \max_{t\in[a,b]} |y(t) - z(t)| = \max_j \max_{t\in[t_{j-1},t_j]} |y(t) - z(t)| = \dots$
На каждом из отрезков $[t_{j-1}, t_j]$ функция $y(t) - z(t)$ линейна, её наибольшее и наименьшее значения достигается на границах отрезка и, следовательно, её модуль достигает наибольшего значения также на одном из концов отрезка. Следовательно,
$\rho_{C[a,b]}(y,z) = \dots = \max_j |y(t_j) - z(t_j)| = \max_j |y_j - z_j| = \rho_\infty(\hat{y}, \hat{z})$,
где $\hat{y} = (y_0, y_1, \dots, y_n)$, $\hat{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n)$ – векторы пространства $\mathbb{R}^{n+1}_{\max}$, представляющие соответствующие кусочно-линейные функции. Поскольку все координаты y_j и z_j не превосходят по модулю M, множество Y изометрически отображается в куб с ребром $2M$. Как установлено выше, этот куб, как и любое ограниченное множество в $\mathbb{R}^{n+1}_{\max}$, предкомпактен (и даже компактен в силу замкнутости), поэтому предкомпактно и множество Y – его изометрическая копия. Таким образом, для произвольного ε у множества Q найдётся предкомпактная ε-сеть, а потому и само множество Q предкомпактно.

Замечание. Как указано выше, множества, предкомпактные в $C[a,b]$, предкомпактны и в пространствах с интегральной метрикой.

Теперь несколько слов о достаточных условиях предкомпактности или непредкомпактности множеств в $C[a,b]$.

Как указано выше, достаточным условием равностепенной непрерывности множества является равномерная липшицевость. Тогда равномерная липшицевость совместно с ограниченностью множества обеспечивает его предкомпактность.

Достаточным условием равномерной липшицевости с показателем 1 является равномерная ограниченность производных (следствие из формулы конечных приращений). Это означает, что множество, ограниченное в $C^1[a,b]$, предкомпактно в $C[a,b]$. Как говорят, $C^1[a,b]$ компактно вкладывается в $C[a,b]$ (оператор вложения компактен).

Если равностепенная непрерывность установлена, то для доказательства равномерной ограниченности множества функций на отрезке достаточно убедиться в его равномерной ограниченности в какой-либо одной точке (почему?).

Если окажется, что в какой-то выделенной точке отсутствует равностепенная непрерывность (или равномерная ограниченность), то множество непредкомпактно в $C[a,b]$.

Множество непредкомпактно в $C[a,b]$, если из него можно выбрать последовательность функций, поточечно сходящуюся к разрывной функции. Из такой последовательности нельзя выбрать фундаментальную подпоследовательность (почему?).

Если множество непрерывных функций $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ счётно, и последовательность x_n равномерно сходится на $[a,b]$, то это множество предкомпактно в $C[a,b]$.

Раздел 5. Компактность

Лекция 9 Свойства непрерывных функционалов на компакте.

Непрерывные функционалы на компакте обладают многими свойствами, которые нам знакомы из курса матанализа применительно к непрерывным функциям на отрезке. Доказательства фактически повторяют те, которые были в первом семестре, на немного другом языке.

Теорема. Непрерывный функционал на компакте ограничен.

Пусть X – компакт, $f : X \to \mathbb{R}$ – непрерывный функционал. Установим, что он ограничен.

Доказательство от противного. Пусть функционал неограничен, тогда $\forall m \, \exists x_m \in X : |f(x_m)| > m$. Это значит, что последовательность $\{f(x_m)\}$ – бесконечно большая числовая последовательность, и таковы же все её подпоследовательности.

Поскольку X – компакт, у последовательности $\{x_m\}$ найдётся сходящаяся подпоследовательность $\{x_{m'}\}$, предел которой обозначим x_*. Тогда в силу непрерывности f (по Гейне-Борелю) получаем: $f(x_{m'}) \to f(x_*)$. Но сходящаяся последовательность ограничена, что противоречит тому, что она должна быть бесконечно большой. Теорема доказана.

Аналогичная теорема справедлива для произвольного непрерывного отображения $F : X \to Y$, где X – компакт, а Y – некоторое метрическое пространство.

Теорема. Непрерывный оператор на компакте ограничен.

Ограниченность оператора на компакте – это ограниченность множества его значений. Это множество ограничено в Y, если ограничено числовое множество значений расстояния от элементов множества до произвольного фиксированного элемента $y_* \in Y$. Последнее означает ограниченность множества значений функционала $f(x) = \rho_Y(F(x), y_*)$. Функционал f непрерывен как композиция непрерывного отображения F и непрерывного в Y функционала $\rho_Y(y, y_*)$ (относительно первого аргумента). По доказанной выше теореме он ограничен, откуда и вытекает ограниченность F.

Замечание. Последнюю теорему можно доказать и непосредственно, просто заменив в доказательстве ограниченности непрерывного функционала на компакте $|f(x_m)|$ на $\rho_Y(F(x_m), y_*)$. При этом нужно сослаться на непрерывность расстояния.

Другая формулировка: образ компакта при непрерывном отображении ограничен.

Следствие. Если непрерывный функционал (оператор) на МП X неограничен, то X – не компакт.

Пример: $\operatorname{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to E^1$. Функция тангенс отображает интервал $(-\pi/2, \pi/2)$ на вещественную ось. Это признак того, что область определения тангенса – интегрвал – компактом не является.

Следствие. Если функционал (оператор) на компакте неограничен, то функционал (оператор) не является непрерывным.

Пример: Продолжим функцию tg на отрезок $[-\pi/2, \pi/2]$, т.е. рассмотрим функцию $f(x)$ такую, что $f(x) = \mathrm{tg}\, x$ при $x \in (-\pi/2, \pi/2)$, и положим $f(-\pi/2) = A$, $f(\pi/2) = B$ (A и B – некоторые числа). Функция f, неограниченная на компакте $[-\pi/2, \pi/2]$, имеет разрывы на границах отрезка.

Переходим к обобщению теоремы Вейерштрасса.

Теорема. Верхняя и нижняя грани множества значений непрерывного функционала на компакте достигаются.

Иными словами, существуют такие элементы компакта, значения функционала на которых совпадают с супремумом и инфинумом (которые, таким образом, становятся максимумом и минимумом). Ещё раз подчеркнём, что пустое множество мы исключили из рассмотрения.

Доказательство проведём для $\sup$ (с $\inf$ аналогично). В силу доказанной выше теоремы,

$$M = \sup_{x \in X} f(x) < \infty\,.$$

Тогда существует максимизирующая последовательность $\{x_m\}$:
$f(x_m) \to M$. К этому же пределу стремятся значения f на любой подпоследовательности.
Поскольку X – компакт, найдётся сходящаяся подпоследовательность
$x_{m'} \to x_*$, где $x_* \in X$ – её предел. В силу непрерывности f, $f(x_{m'}) \to f(x_*)$.
С другой стороны, $f(x_{m'}) \to M$. Поэтому $f(x_*) = M$. Теорема доказана.

Пример. Пусть X – метрическое пространство, а $A \subset X$ – компакт. Зафиксируем некоторый элемент $x \in X$ и рассмотрим функционал
$f(y) = \rho(x, y)$, где $y \in A$. Согласно доказанной теореме, этот функционал принимает на A наименьшее и наибольшее значение, т.е. для произвольного элемента $x \in X$ существуют ближайший к нему элемент компакта A (возможно, не единственный), а также наиболее удалённый. Отсюда, в частности, следует, что $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y) = \min_{y \in A} \rho(x, y)$.

Замечание. Теорема, в отличие от предыдущей, на операторы не обобщается. Тем не менее, если $F : X \to Y$ – непрерывный оператор, то мы можем рассмотреть произвольный непрерывный функционал $g : Y \to E^1$ и сопоставить ему непрерывный функционал $f : X \to E^1$ по правилу $f(x) = g(F(x))$, который уже будет принимать свои наибольшее и наименьшее в некоторых точках компакта X. В частности, это справедливо для упомянутого выше функционала $f(x) = \rho_Y(F(x), y_*)$.

Следствие. Если верхняя или нижняя грань множества значений непрерывного функционала на МП X не достигается, то X – не компакт.

Пример. Тождественное отображение $f(x) = x$ на интервале $(-1, 1)$. Ни верхняя, ни нижняя грани, равные 1 и -1 соответственно, не достигаются, что свидетельствует о том, что интервал $(-1, 1)$ не является компактом.

Пример. Рассмотрим функционал $f : C[-1, 1] \to E^1$:

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, dt - x(0)\,.$$

Рассмотрим множество значений этого функционала на единичном замкнутом шаре

$$\bar{S}_1(0) = \{x \in C[-1, 1] : \max_{t\in[-1,1]} |x(t)| \le 1\}$$

Точная верхняя грань этого множества равна 3 и не достигается.

Действительно, наибольшее значение первого слагаемого (интеграла) равно 2 и достигается при $x(t)$, тождественно равном единице. Наибольшее значение второго слагаемого, равного $-x(0)$, достигается при $x(0) = -1$ и равно 1. Условия максимальности слагаемых противоречат друг другу, так что одновременно эти слагаемые не могут принимать свои наибольшие значения, и функционал ни на какой функции на шаре значения 3 не принимает. Тем не менее, если функция $x(t)$ равна единице за пределами отрезка $[-\delta, \delta]$, равна минус единице при $t = 0$ и непрерывна (например, кусочно линейна), то $f(x) \ge 3 - 4\delta$. В силу произвольности δ заключаем, что

$$\sup_{x\in\bar{S}_1(0)} f(x) = 3\,.$$

Это свидетельствует о том, что $\bar{S}_1(0)$ не является компактом в $C[-1, 1]$. Действительно, это множество ограничено, замкнуто, но не является равностепенно непрерывным.

Если же взять компакт в пространстве $C[-1, 1]$ (замкнутое ограниченное равностепенно непрерывное множество – например, потребовать дополнительно выполнения условия Липшица с единой для всего множества константой), то произвольный непрерывный на $C[-1, 1]$ функционал будет принимать на нём наибольшее и наименьшее значения.

Следствие. Если функционал на компакте не достигает своей верхней (нижней) грани, то функционал не является непрерывным.

Пример. На отрезке $[-1, 1]$ рассмотрим функцию $f(x)$, такую, что $f(x) = x$ при $x \in (-1, 1)$, и $f(-1) = f(1) = 0$. Ни верхняя, ни нижняя грани, равные 1 и -1 соответственно, не достигаются, функция f имеет разрывы на границах отрезка.

Эти две теоремы могут быть получены как следствие того факта, что непрерывный образ компакта – компакт.

Докажем этот факт, а потом получим утверждения теорем как следствия.

Пусть $F : X \to Y$ – непрерывное отображение, X – компакт. Тогда $F(X) \subset Y$ – также компакт. Действительно, пусть
$\{y_m \in F(X), m = 1, 2, \dots\}$ – некоторая последовательность. Прообраз каждого её элемента непуст, тогда можно рассмотреть последовательность
$\{x_m \in X : F(x_m) = y_m, m = 1, 2, \dots\}$
Поскольку X – компакт, найдётся сходящаяся подпоследовательность
$x_{m'} \to x_* \in X$. Тогда $y_{m'} = F(x_{m'}) \to F(x_*)$ в силу непрерывности F, и тогда $\{y_{m'}\}$ – искомая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{y_m\}$. Отсюда следует, что $F(X)$ – компакт.

Поскольку компакт – ограниченное множество, получаем утверждение первой теоремы.

Кроме того, компакт – замкнутое множество (и полное МП). Если рассматривается функционал, то $f(X)$ – компакт на числовой оси, т.е. замкнутое ограниченное множество. Такое множество содержит свою точную верхнюю и нижнюю грани, которые, тем самым, являются образами некоторызх элементов из множества X.

Теорема о том, что непрерывная функция на отрезке принимает все значения, заключённые между минимальным и максимальным, не имеет аналога для произвольного компакта. Она неверна уже для некоторых компактов на вещественной оси – например, для объединения двух непересекающихся отрезков, или для конечного множества.

Следующая теорема – обобщение теоремы Кантора:

Теорема. Функционал, непрерывный на компакте, равномерно непрерывен.

Доказательство от противного. Пусть равномерной непрерывности нет, тогда
$\exists \varepsilon > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists \hat{x}, \tilde{x} : \{\rho(\hat{x}, \tilde{x}) < \delta \wedge |f(\hat{x}) - f(\tilde{x})| > \varepsilon\}$
Рассмотрим числовую последовательность $\delta_m \to 0$ и соответствующие ей последовательности
$\hat{x}_m, \tilde{x}_m \in X : \{\rho(\hat{x}_m, \tilde{x}_m) < \delta_m \wedge |f(\hat{x}_m) - f(\tilde{x}_m)| > \varepsilon\}$
В силу первого условия эти последовательности эквивалентны, тогда эквивалентны и любые их подпоследовательности, отвечающие одинаковым наборам индексов.

Поскольку X – компакт, у последовательности $\{\hat{x}_m\}$ найдётся сходящаяся подпоследовательность $\{\hat{x}_{m'}\}$, предел которой обозначим x_*. Но тогда эквивалентная ей подпоследовательность второй последовательности $\{\tilde{x}_{m'}\}$ (с теми же индексами) сходится к тому же пределу.
Тогда в силу непрерывности f (по Гейне-Борелю),
$f(\hat{x}_{m'}) \to f(x_*)$ и $f(\tilde{x}_{m'}) \to f(x_*)$,
откуда $|f(\hat{x}_{m'}) - f(\tilde{x}_{m'})| \to 0$,
что противоречит неравенству $|f(\hat{x}_{m'}) - f(\tilde{x}_{m'})| > \varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема обобщается на непрерывные операторы $F : X \to Y$, заданные на компакте. Доказательство отличается заменой $|f(\hat{x}_{m'}) - f(\tilde{x}_{m'})|$ на

$\rho(F(\hat{x}_{m'}), F(\tilde{x}_{m'}))$

Теорема. Оператор, непрерывный на компакте, равномерно непрерывен.

Доказательство от противного. Пусть равномерной непрерывности нет, тогда
$\exists\varepsilon > 0\,\forall\delta > 0\,\exists\hat{x}, \tilde{x} : \{\rho(\hat{x}, \tilde{x}) < \delta \wedge \rho(F(\hat{x}), F(\tilde{x})) > \varepsilon\}$
Рассмотрим числовую последовательность $\delta_m \to 0$ и соответствующие ей последовательности
$\hat{x}_m, \tilde{x}_m \in X : \{\rho(\hat{x}_m, \tilde{x}_m) < \delta_m \wedge \rho(F(\hat{x}_{m'}), F(\tilde{x}_{m'})) > \varepsilon\}$

Поскольку X – компакт, у последовательности $\{\hat{x}_m\}$ найдётся сходящаяся подпоследовательность $\{\hat{x}_{m'}\}$, предел которой обозначим x_*. Но тогда эквивалентная ей подпоследовательность второй последовательности $\{\tilde{x}_{m'}\}$ (с теми же индексами) сходится к тому же пределу.
Тогда в силу непрерывности F (по Гейне-Борелю),
$F(\hat{x}_{m'}) \to F(x_*)$ и $F(\tilde{x}_{m'}) \to F(x_*)$,
откуда $\rho(F(\hat{x}_{m'}), F(\tilde{x}_{m'})) \to 0$,
что противоречит неравенству $\rho(F(\hat{x}_{m'}), F(\tilde{x}_{m'})) > \varepsilon$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть X – компакт, а $\tilde{X} \subset X$ – некоторое его подмножество (разумеется, предкомпактное). Произвольное отображение F, непрерывное на X, согласно теореме Кантора будет равномерно непрерывно на X, а, следовательно, и на $\tilde{X}$.
Поэтому если некоторое отображение G, заданное на $\tilde{X}$, непрерывно, но не равномерно непрерывно, то оно заведомо *не может* быть продолжено на X с сохранением свойства непрерывности.

Замечание. Ранее было доказано, что если $\tilde{X} \subset X$, причём $\tilde{X}$ плотно в X (компактность X не предполагалась), то *равномерно* непрерывное отображение, отображающее $\tilde{X}$ в некоторое полное пространство, *может* быть единственным образом продолжено на X с сохранением свойства непрерывности.

Раздел 6. Линейные нормированные пространства (ЛНП)

Лекция 10 Линейные пространства.

X – множество, элементы (векторы) обозначаем латинскими буквами.

Закон внутренней композиции (сложение элементов)
$+ : X \times X \to X$.

Коммутативная группа:

1. $\forall a, b \in X : a + b = b + a$ (коммутативность сложения)

2. $\forall a, b, c \in X : (a + b) + c = a + (b + c)$ (ассоциативность сложения)

3. $\exists o \in X \, \forall a \in X : a + o = a$ (существование нейтрального по сложению элемента – нуля пространства)

4. $\forall a \in X \, \exists x \in X : a + x = o$ (существование для каждого элемента множества обратного (противоположного) по сложению элемента)

Следствия (свойства) - доказать:

а) Единственность нуля.
$\{\forall a \in X : a + x = a\} \Rightarrow x = o$

б) Более сильное свойство:
$\{\exists a \in X : a + x = a\} \Rightarrow x = o$

в) Единственность противоположного элемента:
$a + x = o \wedge a + y = o \Rightarrow x = y$
Обозначение: $x = (-a)$

г) Существование и единственность разности:
$\forall a, b \in X \, \exists! x \in X : a + x = b$
$x = b + (-a)$ Обозначение: $x = b - a$

Поле $\mathbb{K}$ (в основном будет $\mathbb{R}$, иногда $\mathbb{C}$). Элементы (числа) обозначаем греческими буквами.

Закон внешней композиции (умножение элемента на число)
$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X$ (точку обычно опускают)

5. $\forall a \in X : 1a = a$ (1 – единица поля $\mathbb{K}$, нейтральный элемент по умножению в поле).

6. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \, \forall a \in X : (\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$ (ассоциативность умножения)

Два закона дистрибутивности:

7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \, \forall a \in X : (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$

8. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \, \forall a, b \in X : \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

Множество X с заданными законами внутренней и внешней композиции, удовлетворяющими восьми перечисленным аксиомам (на самом деле одна лишняя) называется линейным пространством (ЛП) над полем $\mathbb{K}$.

Ещё следствия (свойства) – доказать:

д) $\forall a \in X : 0a = o$ (0 – нуль поля $\mathbb{K}$, o – нейтральный элемент по сложению).

е) $\forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha o = o$

ж) $\alpha a = o \Rightarrow \alpha = 0 \vee a = o$

з) $\alpha a = \beta a \Rightarrow \alpha = \beta \vee a = o$

и) $\alpha a = \alpha b \Rightarrow \alpha = 0 \vee a = b$

$Y \subset X$ – линеал, если
$\forall x_{1,2} \in Y \, \forall \alpha_{1,2} \in \mathbb{K} : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in Y$
(замкнутость множества относительно линейных операций – сложения и умножения на число). Сам является ЛП. То, что в курсе линейной алгебры называли подпространством (мы это слово дальше будем использовать в более узком смысле). Всегда содержит o.

Отношение эквивалентности: $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y$ (доказать выполнение свойств). Факторпространство X/Y. Линейные операции над классами.

$Q \subset X$ – система элементов (подмножество – обычно конечное или счётное).

$L(Q)$ – линейная оболочка Q, множество всевозможных линейных комбинеций элементов Q: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$. Конечные суммы. Наименьший линеал, содержащий Q. Линейная оболочка линеала – он сам.

Тривиальная и нетривиальные линейные комбинации. Линейная зависимость (независимость) системы элементов. Конечномерные ЛП. Размерность ЛП. Базис. Размерность линеала. Коразмерность линеала – размерность фактор-пространства. Бесконечномерные ЛП.

Примеры. l_1, l_2, l_∞, c, c_0, $C[a,b]$, $L_1[a,b]$, $L_2[a,b]$.

Линейные отображения ЛП. Отображение (оператор) $A : X \to Y$ линейно, если
$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$.
Совокупность аддитивности
$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$
и однородности
$A(\alpha x) = \alpha A(x)$.
Скобки для линейных операторов часто опускают. Если X конечномерно, достаточно задать на базисных элементах.

Изоморфизм ЛП: два пространства изоморфны, если существует взаимно однозначное линейное отображение (будем обозначать τ).

Изоморфизм всех конечномерных ЛП одной и той же размерности. (Базисным элементам сопоставляем базисные.)

Примеры. $\mathbb{K}^n$ (в частности, $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^n$), $P_n[a,b]$. $P_n[a,b]$ изоморфно $\mathbb{R}^{n+1}$ (для вещественных многочленов).

Линейная зависимость (независимость) линеалов. Линеалы $Y \subset X$ и $Z \subset X$, линейно независимы, если
$y \in Y,\ z \in Z,\ y + z = o \Rightarrow y = z = o$.
Это эквивалентно тому, что $Y \cap Z = \{o\}$ (доказать!).

Прямая сумма линейно независимых линеалов:
$Y \dotplus Z = \{y + z,\ y \in Y,\ z \in Z\}$.

Единственность представления:
$y_1 + z_1 = y_2 + z_2 \Rightarrow y_1 = y_2 \wedge z_1 = z_2$

(доказать!)

Пример: чётные и нечётные функции.

Если $X = Y + Z$ (прямая сумма), то X/Y изоморфно Z. Поэтому Z также иногда называют факторпространством.

Прямая сумма ЛП (над одним и тем же полем) – фактически декартово произведение, на котором заданы линейные операции (покомпонентно).

Линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_m x_m$ называется выпуклой, если
$\alpha_j \in [0,1], j = 1, \ldots, m \wedge \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1$

Множество выпукло, если содержит все выпуклые линейные комбинации своих элементов.

Можно в определении ограничиться случаем $m = 2$ (доказать!). То есть достаточное (и, разумеется, необходимое) условие выпуклости (альтернативное определение): вместе с любой парой элементов множество содержит отрезок, их соединяющий. Иначе говоря: Q выпукло, если
$\forall x_{1,2} \in Q \, \forall \alpha_{1,2} \in [0,1] : \{\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in Q\}$
Замечание: в этом случае $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, поэтому условие может быть переписано: $\forall x_{1,2} \in Q \, \forall \alpha \in [0,1] : \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in Q$

Выпуклая оболочка множества Q – совокупность всевозможных выпуклых линейных комбинаций его элементов. Наименьшее выпуклое множество, содержащее Q. Выпуклая оболочка выпуклого множества – само это множество.

Пустое множество выпукло.

Линеал – выпуклое множество.

Пересечение любой совокупности выпуклых множеств выпукло.

Отображение ЛП и его график.
$F : X \to Y$, $Gr(F) = \{(x,y) \in X + Y : y = F(x)\}$

График вещественного функционала:
$f : X \to \mathbb{R}$, $Gr(f) = \{(x,y) \in X + \mathbb{R} : y = f(x)\}$

Надграфик: $epi(f) = \{(x,y) \in X + \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$

Подграфик: $\{(x,y) \in X + \mathbb{R} : y \leq f(x)\}$

Функционал называется выпуклым вниз (вверх), если его надграфик (подграфик) – выпуклое множество.

Замечание. В математике под выпуклым (без уточнения) функционалом понимается выпуклый вниз.

Если функционал f является выпуклым вниз (вверх), то множество
$\{x \in X : f(x) \leq c\}$ ($\{x \in X : f(x) \geq c\}$) выпукло.

Неравенство Йенсена – необходимое и достаточное условие выпуклости (вниз) функционала:
$\forall x_{1,2} \in X \, \forall \alpha \in [0,1] : f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$
Для выпуклости вверх неравенство в обратную сторону.

В более симметричном виде:
$\forall x_{1,2} \in X\, \forall \alpha, \beta \in [0,1] : \{\alpha + \beta = 1 \Rightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) \le \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)\}$
(Доказать)

Частный случай: $X \subset \mathbb{R}$. Выпуклость функций.

Утверждение. Если $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ – выпуклая вверх функция, и $f(0) = 0$, то функция $\rho(t_1, t_2) = f(|t_1 - t_2|)$ – метрика на $\mathbb{R}$.

Утверждение. Если функция $f(x)$ непрерывна, кусочно дифференцируема и производная монотонно неубывающая (невозрастающая), то функция выпукла вниз (вверх).

Утверждение: функция $f(x) = x^p$ выпукла вниз на $\mathbb{R}_+$, если $p \ge 1$.

С помощью этого факта докажем неравенство Минковского
$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p}$,
которое нам понадобится в дальнейшем.

Применим неравенство Йенсена к функции x^p:
$(\alpha u + \beta v)^p \le \alpha u^p + \beta v^p$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta \in [0,1]$, $u, v \ge 0$
($x_1 = u$, $x_2 = v$). Неравенство превращается в равенство при 1) $\alpha = 0$, $\beta = 1$, 2) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, 3) $u = v$, 4) $p = 1$.

Рассмотрим n-мерные вектора $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$ с неотрицательными компонентами, удовлетворяющие условию нормировки:
$\sum_{j=1}^n u_j^p = \sum_{j=1}^n v_j^p = 1$. Запишем для каждой пары компонент неравенство $(\alpha u_j + \beta v_j)^p \le \alpha u_j^p + \beta v_j^p$ и просуммируем по j:
$\sum_{j=1}^n (\alpha u_j + \beta v_j)^p \le \sum_{j=1}^n (\alpha u_j^p + \beta v_j^p) = \alpha \sum_{j=1}^n u_j^p + \beta \sum_{j=1}^n v_j^p = \alpha + \beta = 1$.
При $p > 1$ неравенство превращается в равенство либо при обращении в 0 одного из коэффициентов α или β, либо при совпадении векторов u и v.

Пусть теперь A, B – произвольные неотрицательные числа. Обозначим $\alpha = A/(A+B)$, $\beta = B/(A+B)$, $\alpha + \beta = 1$.
Тогда
$A = (A+B)\alpha$, $B = (A+B)\beta$,
и
$\sum_{j=1}^n (Au_j + Bv_j)^p = (A+B)^p \sum_{j=1}^n (\alpha u_j + \beta v_j)^p \le (A+B)^p$.
При $p > 1$ неравенство превращается в равенство либо при $AB = 0$, либо при $u = v$.

Пусть теперь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – n-мерные вектора с неотрицательными компонентами. Представим их в виде $x = Au$, $y = Bv$, где u и v удовлетворяют условию нормировки. Тогда
$\sum_{j=1}^n x_j^p = A^p \sum_{j=1}^n u_j^p = A^p$,
$\sum_{j=1}^n y_j^p = B^p \sum_{j=1}^n v_j^p = B^p$,
т.е.
$A = \left(\sum_{j=1}^n x_j^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{j=1}^n y_j^p\right)^{1/p}$.
Отсюда
$\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^p = \sum_{j=1}^n (Au_j + Bv_j)^p \le (A+B)^p$.
При $p > 1$ неравенство превращается в равенство, если вектора x и y отличаются множителем.

Откажемся от предположения о неотрицательности компонент векторов x и y и применим полученное неравенство к их абсолютным величинам. Тогда
$\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p \le \sum_{j=1}^n (|x_j| + |y_j|)^p \le (A+B)^p$,
где теперь уже
$A = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p}$.
При $p > 1$ неравенство превращается в равенство, если вектора x и y отличаются неотрицательным множителем, а при $p = 1$ – если совпадают знаки x_j и y_j при одинаковых j.

(Замечание. Можно вектора считать комплексными, ничего не изменится.)

Извлекая корень p-ой степени из левой и правой части (p не обязательно целое), получаем неравенство Минковского:
$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p}$.

Частными случаями этого неравенства при $p = 1, 2$ являются неравенства треугольника для $\mathbb{R}_1^n$ и E^n.

Обобщим неравенство Минковского на бесконечные последовательности. Пусть x и y – последовательности, для которых сходятся ряды из p-х степеней модулей:
$\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < \infty$, $\sum_{j=1}^\infty |y_j|^p < \infty$.
Тогда
$\left(\sum_{j=1}^n |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^p\right)^{1/p} \le$
$\le \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^\infty |y_j|^p\right)^{1/p} < \infty$.
Это значит, что ряд с неотрицательными членами $\sum_{j=1}^\infty |x_j + y_j|^p$ сходится, поскольку его частичные суммы ограничены в совокупности. Поэтому множество последовательностей, суммируемых с p-ой степенью, образует линейное пространство относительно покомпонентного сложения и умножения (поскольку при одновременном умножении всех элементов последовательности на общий множитель сходимость ряда не нарушается).

Теперь мы можем перейти к пределу при $n \to \infty$ в левой части нестрогого неравенства и получить неравенство Минковского для рядов:
$\left(\sum_{j=1}^\infty |x_j + y_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^\infty |y_j|^p\right)^{1/p}$.

Аналог для функций. Вместо последовательностей – функции $x(t)$ и $y(t)$, вместо суммирования интегрирование. Представляем $|x(t)|$ и $|y(t)|$ в виде произведения константы на нормированные функции: $|x(t)| = Au(t)$, $|y(t)| = Bv(t)$, где

$$A = \left(\int_a^b |x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}, \; B = \left(\int_a^b |y(t)|^p\, dt\right)^{1/p},$$

тогда

$$\int_a^b u^p(t)\,dt = \int_a^b v^p(t)\,dt = 1$$

(проверьте!). Обозначив, как и раньше, $\alpha = A/(A+B)$, $\beta = B/(A+B)$, получим:

$$\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt \le \int_a^b (|x(t)|+|y(t)|)^p\,dt =$$

$$= \int_a^b (Au(t)+Bv(t))^p\,dt = (A+B)^p \int_a^b (\alpha u(t)+\beta v(t))^p\,dt \le$$

$$\le (A+B)^p \int_a^b (\alpha u^p(t)+\beta v^p(t))\,dt =$$

$$= (A+B)^p \left(\alpha \int_a^b u^p(t)\,dt + \beta \int_a^b v^p(t)\,dt\right) =$$

$$= (A+B)^p(\alpha+\beta) = (A+B)^p =$$

$$= \left[\left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\right]^p,$$

откуда, извлекая корень p-ой степени, получаем неравенство Минковского для функций:

$$\left(\int_a^b |x(t)+y(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |y(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Раздел 6. Линейные нормированные пространства (ЛНП)

Лекция 11 Основные свойства нормы.

Напомним понятие полунормы. Полунорма $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ – функционал на ЛП, удовлетворяющая следующим аксиомам:

1. Абсолютная (положительная) однородность:
$\forall x \in X\, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$
2. Неравенство треугольника:
$\forall x, y \in X : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Линейное полунормированное пространство – ЛП с заданной полунормой.

Обозначение: $x^0 = x/\|x\|$ – нормированный элемент x (при $\|x\| \neq 0$). Тогда $\|x^0\| = 1$, $x = x^0\|x\|$.

Утверждение: $\|o\| = 0$.

Утверждение: $\forall x \in X : \|x\| \geq 0$

Утверждение: $X_0 = \{x \in X : \|x\| = 0\}$ – линеал.

Утверждение: $R = \{x, y : \|x - y\| = 0\}$ – отношение эквивалентности (доказать)

Утверждение: $x_1 \sim x_2 \Rightarrow \|x_1\| = \|x_2\|$ (доказать!)
Полунормы элементов, входящих в один и тот же класс эквивалентности, совпадают. Поэтому полунорму можно рассматривать как функцию от класса.

Утверждение: $x_1 \sim x_2 \wedge y_1 \sim y_2 \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : \alpha x_1 + \beta y_1 \sim \alpha x_2 + \beta y_2$

Утверждение: для классов, отличных от нулевого, полунорма отлична от нуля (очевидно).

Норма: дополнительно аксиома невырожденности:
3. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = o$
(можно стрелочку в обе стороны: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = o$)

Рассмотрим факторпространство X/X_0, элементами которого являются классы эквивалентности. Полунорма на X корректно индуцирует норму на X/X_0.

Утверждение: полунорма – выпуклый функционал.

Открытый шар в ПНП: $S_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| < r\}$; замкнутый шар в ПНП: $\bar{S}_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| \leq r\}$.

Утверждение: произвольный шар – выпуклое множество.

Пусть теперь f – неотрицательный абсолютно однородный функционал на X (т.е. $f(\lambda x) = |\lambda| f(x)$), обладающий следующим свойством: множество $u \in X : f(u) \leq 1$ выпуклое. Тогда функционал f – полунорма, т.е. выполнено неравенство треугольника

$\forall x, y \in X : f(x+y) \leq f(x) + f(y)$
(доказать)

Таким образом, неравенство треугольника в определении полунормы можно заменить на выпуклость единичного шара.

Второе неравенство треугольника: $|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|$ (доказать)

Полунорма порождает полуметрику (а норма – метрику):
$\rho(x,y) = \|x-y\|$.

Сходимость: $x_m \to x_* \Leftrightarrow \|x_m - x_*\| \to 0$.

Непрерывность нормы:
$x_m \to x_* \Rightarrow \|x_m\| \to \|x_*\|$ (доказать).

Непрерывность сложения векторов:
$x_m \to x_* \wedge y_m \to y_* \Rightarrow (x_m + y_m) \to (x_* + y_*)$ (доказать)

Непрерывность умножения на число:
$\lambda_m \to \lambda_* \wedge x_m \to x_* \Rightarrow \lambda_m x_m \to \lambda_* x_*$ (доказать)

Ограниченные и неограниченные множества.

Открытые, замкнутые множества. Подпространством будем называть замкнутый линеал. Иногда будем говорить "замкнутое подпространство".

Примеры: $C_0[a,b] \subset C[a,b]$ – подпространство функций, обращающихся в нуль на границах. c_0 – подпространство в c и в l_∞, c – подпространство в l_∞.

Есть и незамкнутые. Множество многочленов образуют линеал в $C[a,b]$, $L_1[a,b]$, $L_2[a,b]$, оно всюду плотное в этих пространствах (замыкание – всё пространство). $C_0[a,b]$ плотно в $L_1[a,b]$, $L_2[a,b]$, незамкнуто в этих пространствах. Обрывающиеся последовательности – всюду плотный линеал в c_0, l_1, l_2.

Утверждение: замыкание линеала – подпространство (т.е. линейность множества при замыкании не нарушается).

Система векторов Q называется полной, если её лиинейная оболочка плотна в X. В $C[a,b]$ – степени t. В $L_2[0,\pi]$ – функции $\{\sin kt\}$ (но не в $C[0,\pi]$!).

Утверждение. В пространстве есть конечная или счётная полная система элементов $\Leftrightarrow$ оно сепарабельно (доказать!).

Полнота. Полные ЛНП – банаховы. При пополнении ЛНП как метрических линейные операции продолжаются по непрерывности (доказать корректность).

Ряды в ЛНП. $\sum_{k=1}^{\infty} x_j$, где $x_k \in X$ – ряд.
Частичные суммы: $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$.
Ряд сходится, если последовательность частичных сумм имеет предел
$S = \lim_{n\to\infty} S_n$.
Этот предел – сумма ряда: $S = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$.

Необходимый признак сходимости. Если ряд сходится, то $S_n \to S$ и одновременно $S_{n-1} \to S$, тогда $x_n = S_n - S_{n-1} \to o$, и $\|x_n\| \to 0$.

Пример: $x = (x_1, x_2, \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$. Здесь уже x_k – не векторы, а числа, а e_k – последовательности с единицей на k-м месте и нулями на остальных.
Равенство верно в c_0, l_1, l_2, поскольку $\|x - S_n\| \to 0$.
Равенство неверно в c, l_∞ (не выполнен необходимый признак).

Функциональные ряды $\sum_{k=1}^{\infty} x_k(t)$.
Равномерная сходимость – сходимость в $C[a,b]$:
$\|S - S_n\| = \max_{t\in[a,b]} |S(t) - S_n(t)| \to 0$.
Сходимость в среднем – в пространствах с интегральной нормой $L_{1,2}[a,b]$:

$$\|S - S_n\|_1 = \int_a^b |S(t) - S_n(t)|\, dt \to 0$$

или

$$\|S - S_n\|_2^2 = \int_a^b |S(t) - S_n(t)|^2\, dt \to 0\,.$$

Если ряд сходится, то последовательность фундаментальна:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n > m > N : \|S_n - S_m\| = \left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| < \varepsilon$.
В частности, при $n = m + 1$ как следствие снова получаем $\|x_n\| \to 0$.
Для банаховых пространств фундаментальность является и достаточным признаком сходимости (критерий Коши).

Обобщённый признак Вейерштрасса (достаточный) для банаховых пространств: если существует сходящийся числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ такой, что $\|x_k\| \le \alpha_k$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится.
Доказательство. Поскольку числовой ряд с неотрицательными членами сходится, по критерию Коши имеем:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N\, \forall n > m > N : \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k < \varepsilon$.
Но
$\left\|\sum_{k=m+1}^{n} x_k\right\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| \le \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k$,
откуда и вытекает сходимость исходного ряда в банаховом пространстве.
Классический признак Вейерштрасса относится к пространству $C[a,b]$: условие $\|x_k\| \le \alpha_k$ означает $\max_{t\in[a,b]} |x_k(t)| \le \alpha_k$ или, что то же,
$\forall t \in [a,b] : |x_k(t)| \le \alpha_k$,
а сходимость функционального ряда в пространстве $C[a,b]$ – это равномерная сходимость.

ЛНП с одинаковыми носителями: $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ и $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$.

Подчинённость норм. Говорят, что норма $\|\cdot\|_1$ подчинена норме $\|\cdot\|_2$, если
$\exists \kappa > 0\, \forall x \in X : \|x\|_1 \le \kappa \|x\|_2$.
В этом случае (докажите!):

- Множество, ограниченное в пространстве X_2, ограничено в пространстве X_1.
- $\|x_k - x^*\|_2 \to 0 \Rightarrow \|x_k - x^*\|_1 \to 0$. Последовательность, сходящаяся в X_2, сходится и в X_1, при этом пределы совпадают. Говорят, что сходи-

мость в X_2 (сходимость по норме $\|\cdot\|_2$) более сильная, чем сходимость в X_1 (сходимость по норме $\|\cdot\|_1$).

- Оператор вложения $I : X_2 \to X_1$ такой, что $I(x) = x$, ограничен и непрерывен.

- Пусть есть оператор $F : X \to Y$, где Y – некоторое МП. Если F ограничен как оператор из X_1 в Y, то он ограничен и как оператор из X_2 в Y. Если F непрерывен как оператор из X_1 в Y, то он непрерывен и как оператор из X_2 в Y. (В частности, это касается и функционалов, когда $Y = E^1$.)

- Пусть есть оператор $G : Y \to X$, где Y – некоторое МП. Если G ограничен как оператор из Y в X_2, то он ограничен и как оператор из Y в X_1. Если G непрерывен как оператор из Y в X_2, то он непрерывен и как оператор из Y в X_1.

- Компакт в пространстве X_2 является компактом в пространстве X_1.

- Если $A \subset X$, то точки, предельные для A в пространстве X_2, являются предельными и в пространстве X_1. Поэтому $A_2' \subset A_1'$, $[A]_2 \subset [A]_1$.

- Шар радиуса r в X_2 содержится в шаре радиуса $\varkappa r$ в X_1. Шар радиуса r в X_1 содержит шар радиуса $r/\varkappa$ в X_2. Произвольная окрестность точки в X_1 содержит некоторую окрестность этой же точки в X_2.

- Внутренняя точка множества в X_1 является внутренней в X_2. Внешняя точка множества в X_1 является внешней в X_2.

- Граничная точка множества в X_2 является граничной в X_1.

- Множество, открытое в X_1, открыто в X_2. Множество, замкнутое в X_1, замкнуто в X_2.

- Последовательность, фундаментальная в X_2, фундаментальна и в X_1

- Множество, предкомпактное в пространстве X_2, предкомпактно в пространстве X_1.

- Пополнение пространства X_2 содержится в пополнении пространства X_1 (точнее, непрерывно вкладывается).

Замечание. Всё это, разумеется, верно и для метрических пространств с одинаковыми носителями $X_1 = (X, \rho_1)$ и $X_2 = (X, \rho_2)$ и расстояниями, удовлетворяющими условию
$\exists \varkappa > 0\, \forall x, y \in X : \rho_1(x, y) \le \rho_2(x, y)$.

Эквивалентность норм. Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ эквивалентны, если они взаимно подчинены, т.е.
$\exists \varkappa_{1,2} > 0\, \forall x \in X : \|x\|_2 \le \varkappa_1 \|x\|_1 \wedge \|x\|_1 \le \varkappa_2 \|x\|_2$.
Тогда справедливы также двусторонние оценки:

$\kappa_2^{-1}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \kappa_1\|x\|_1 \wedge \kappa_1^{-1}\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \kappa_2\|x\|_2$
В этом случае пространства $X_{1,2}$ топологически эквивалентны: у них одни и те же наборы ограниченных, открытых, замкнутых, компактных и предкомпактных множеств, ограниченных и непрерывных отобрвжений, сходящихся и фундаментальных последовательностей, они одновременно полны или неполны и т.п.

Примеры.

- $X = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим пространства $\mathbb{R}^n_1$, $\mathbb{R}^n_2 = E^n$ и $\mathbb{R}^n_{\max}$ с нормами $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$, $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2\right)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_k |x_k|$ соответственно. Все три нормы эквивалентны:
$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2 \le n\|x\|_\infty$
(доказать!)

- X – линейное пространство обрывающихся последовательностей, т.е. бесконечных последовательностей, лишь конечное число элементов которых отлично от нуля. На этом пространстве рассмотрим нормы $\|x\|_1 = \sum_k |x_k|$, $\|x\|_2 = \left(\sum_k |x_k|^2\right)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_k |x_k|$ (суммирование по всем ненулевым элементам). Нормы не эквивалентны и находятся в отношении подчинённости: $\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$ (доказать!) ЛНП X с такими нормами неполны, пополнениями по этим нормам являются банаховы пространства l_1, l_2 и c_0 соответственно, при этом $l_1 \subset l_2 \subset c_0$.

- X – ЛП непрерывных на $[a, b]$ функций. Рассмотрим пространства $\tilde{L}_1[a, b] = C_{L_1}[a, b]$, $\tilde{L}_2[a, b] = C_{L_2}[a, b]$ и $C[a, b]$ с нормами
$\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\,dt$, $\|x\|_2 = \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}$ и $\|x\|_\infty = \max_{t\in[a,b]} |x(t)|$.
Нормы не эквивалентны и находятся в отношении подчинённости:
$\|x\|_1 \le |b-a|^{1/2}\|x\|_2 \le |b-a|\|x\|_\infty$ (доказать!)
Обратите внимание на отличие от предыдущего примера в порядке подчинённости! В частности, самая сильная сходимость – равномерная, из которой следует сходимость в интегральных метриках ("сходимость в среднем").
Пространство $C[a, b]$ – полное, а пополнениями пространств $\tilde{L}_{1,2}[a, b]$ являются пространства $L_{1,2}[a, b]$, при этом $C[a, b] \subset L_2[a, b] \subset L_1[a, b]$.
Замечание: эти включения следует понимать так, что каждой непрерывной функции из $C[a, b]$ соответствуют её классы эквивалентности в пространствах $L_{1,2}[a, b]$, а каждому классу из $L_2[a, b]$ – соответствующий класс из $L_1[a, b]$.

Примеры линейных полунормированных и нормированных пространств. Ряд примеров был приведён ранее. Расширим список.

1. Пространства $\mathbb{R}^n_p$

Это пространства с носителем $\mathbb{R}^n$ и нормой $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p}$. Невырожденность и абсолютная однородность очевидны, неравенство треугольника – это неравенство Минковского. Пространства $\mathbb{R}_1^n$ и $E^n = \mathbb{R}_2^n$ – частные случаи таких пространств.

Сравним значения норм при различных значениях p. Для этого обозначим
$\hat{x}_j = x_j/\|x\|_\infty$,
где, напомню, $\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$ – норма в $\mathbb{R}^n_{\max}$. Тогда $x_j = \|x\|_\infty \hat{x}_j$, т.е. $x = \|x\|_\infty \hat{x}$. Очевидно, $|\hat{x}_j| \leq 1$, при этом по крайней мере для одного значения j неравенство превращается в равенство. Тогда
$\|x\|_p = \|x\|_\infty \|\hat{x}\|_p = \|x\|_\infty \left(\sum_{j=1}^n |\hat{x}_j|^p\right)^{1/p}$

Сумма в скобках содержит по крайней мере одно слагаемое, равное единице, остальные не превосходят единицы, сумма не превосходит n. С ростом p слагаемые, равные единице, не изменяются, а остальные убывают, поэтому сумма с ростом p не возрастает, оставаясь при этом не меньше единицы. Показатель степени $1/p$ с ростом p убывает, что приводит к дополнительному убыванию второго сомножителя, если сумма больше единицы; если она равна единице, то сомножитель не меняется. Поэтому величина $\|x\|_p$ как функция от p при фиксированном векторе x – функция невозрастающая. Она постоянна, если вектор содержит единственный ненулевой элемент, и строго убывает в противном случае. При $p \to \infty$ второй сомножитель стремится к единице, а $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$, что и оправдывает обозначение для нормы в $\mathbb{R}^n_{\max}$.

Пространства $\mathbb{R}_p^n$ – полные и сепарабельные. Доказательство не отличается от доказательства полноты и сепарабельности E^n. Плотное множество – вектора с рациональными компонентами.

Нормы $\|x\|_p$ эквивалентны равномерной норме, двусторонняя оценка: $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p}\|x\|_\infty$. Тогда все они эквивалентны друг другу.

2. Пространства l_p – бесконечномерные аналоги.

Это пространства бесконечных последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$, для которых сходятся ряды из p-х степеней модулей:$\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < \infty$. Было доказано, что это ЛП: линейные комбинации элементов пространства ему принадлежат. Норма: $\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p}$. Невырожденность и абсолютная однородность очевидны. Неравенство треугольника – неравенство Минковского для рядов.

Пространства полные (банаховы) и сепарабельные (счётное плотное множество – обрывающиеся рациональные последовательности). Полнота доказывается как для l_2.

Чтобы рассмотреть соотношение между пространствами с разными p, снова выносим $\|x\|_\infty$ и переходим к $\hat{x} = x/\|x\|_\infty$. Поскольку $x_j \to 0$,

максимум модуля достигается, и в последовательности $\hat{x}_j$ есть конечное число единиц и минус единиц (по крайней мере один элемент), а остальные по модулю меньше единицы. Отсюда следует, что если $p_1 < p_2$ и ряд из p_1-х степеней сходится, то сходится и ряд из p_2-х (по признаку сравнения), и вторая сумма не превосходит первой: $1 \le \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{x}_j|^{p_2} \le \sum_{j=1}^{\infty} |\hat{x}_j|^{p_1}$
(равенство – если все слагаемые нули или единицы). Извлекая корни соответствующих степеней (слева большей, справа меньшей), получаем:

$$1 \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{x}_j|^{p_2} \right)^{1/p_2} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\hat{x}_j|^{p_1} \right)^{1/p_1},$$

т.е. $1 \le \|\hat{x}\|_{p_2} \le \|\hat{x}\|_{p_1}$, равенство теперь достигается лишь в случае равенства сумм единице, т.е. при единственном ненулевом слагаемом. Умножая на $\|x\|_\infty$, получаем: $\|x\|_{p_2} \le \|x\|_{p_1}$. Таким образом, l_{p_2} непрерывно вкладывается в l_{p_1}.

3. Пространства $\tilde{L}_p$ и L_p (пространства Лебега).

   Интегральное неравенство Минковского – неравенство треугольника для нормы
   $$\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}.$$

   Если носитель – множество непрерывных функций на [a,b], получаем ЛНП $\tilde{L}_p[a,b]$. Неполное.

   Если взять функции, интегрируемые по Риману, то получится полунормированное пространство.

   Пополнение $\tilde{L}_p[a,b]$ – пространство $L_p[a,b]$, интеграл понимается в смысле Лебега (должен сходиться), элементы пространства – классы функций, отличающихся на множестве нулевой меры.

   Оказывается, что вложение в обратную сторону по сравнению с l_p: если $p_1 < p_2$, то $L_{p_1}[a,b]$ непрерывно вкладывается в $L_{p_2}[a,b]$ (функции могут быть неограниченными, и условие сходимости несобственных интегралов приводит именно к такому соотношению).

   Можно рассматривать пространства Лебега на неограниченных множествах (например, $L_p(\mathbb{R})$), там пространства несравнимы.

4. Пространства $\tilde{W}_p^l$ и W_p^l (пространства Соболева).
   $\tilde{W}_p^l[a,b]$ – пространство l раз непрерывно дифференцируемых функ-

ций на $[a, b]$ с нормой

$$\|x\|_{W_p^l} = \left(\|x\|_p^p + \|\dot{x}\|_p^p + \dots + \|x^{(l)}\|_p^p\right)^{1/p} =$$
$$= \left[\int_a^b \left(|x(t)|^p + |\dot{x}(t)|^p + \dots + |x^{(l)}(t)|^p\right) dt\right]^{1/p}$$

(докажите, что это норма!). Пространство неполное, его пополнение – пространство $W_p^l[a, b]$. Можно рассматривать и для функций с другими областями определения. Если область определения многомерная, то нужно в сумме учитывать все частные производные, суммарный порядок которых не превосходит l.
Замечание. Иногда норму в таких пространствах определяют иначе, например,
$\|x\|_{W_p^l} = \|x\|_p + \|\dot{x}\|_p + \dots + \|x^{(l)}\|_p$
или
$\|x\|_{W_p^l} = \max\{\|x\|_p, \|\dot{x}\|_p, \dots \|x^{(l)}\|_p\}$.
Такие нормы эквивалентны приведённой выше (доказать!).

5. Весовые пространства.
Для последовательностей (конечных или бесконечных) – аналоги рассмотранных выше пространств, в которых слагаемые умножаются на положительные весовые коэффициенты. Для пространств с интегральной метрикой – подынтегральные функции умножаются на неотрицательную (почти всюду положительную) весовую функцию.
Например: $\mathbb{R}^n_{p,w}$ – ЛНП с носителем $\mathbb{R}^n$ и нормой
$\|x\| = (\sum_{k=1}^n w_k |x_k|^p)^{1/p}$, где $w_k > 0$ – заданные коэффициенты.
Бесконечномерный аналог: пространство $l_{p,w}$, состоит из последовательностей, для которых сходится ряд, $\sum_{k=1}^\infty w_k |x_k|^p$, норма – корень p-ой степени из этой суммы.
Функциональный аналог: пространство $\tilde{L}_{p,w}[a, b]$, непрерывных функций на $[a, b]$ с нормой $\|x\| = \left(\int_a^b w(t)|x(t)|^p\, dt\right)^{1/p}$,
где $w(t)$ – почти всюду положительная функция.
Доказательство неравенства треугольника основано на обобщениях неравенства Минковского. (Попробуйте доказать!)

Раздел 6. Линейные нормированные пространства (ЛНП)

Лекция 12 Конечномерность и компактность.

Мы знаем, что конечномерные пространства одинаковой размерности линейно изоморфны друг другу. Докажем, что линейное отображение, осуществляющее этот изоморфизм, непрерывно в обе стороны, независимо от того, как устроен этот изоморфизм и как введены нормы.

Теорема Любые два конечномерных ЛНП размерности n непрерывно изоморфны друг другу.

То, что пространства линейно изоморфны, знаем. Нужно доказать непрерывность отображения в обе стороны. На самом деле мы докажем не просто непрерывность, а равномерную непрерывность.

Всякое взаимно однозначное линейное отображение ЛП одинаковой размерности можно представить как композицию отображения из первого пространства в $\mathbb{R}^n$ и далее отображения из $\mathbb{R}^n$ во второе пространство. Действительно, любое такое отображение пространств размерности n после выбора базисов представляется с помощью невырожденной матрицы $n \times n$, которую всегда можно представить в виде произведения двух невырожденных матриц (например, взяв в качестве одного из сомножителей единичную матрицу).

Поэтому достаточно показать двустороннюю равномерную непрерывность линейного отображения, устанавливающего линейный изоморфизм $\mathbb{R}^n$ с какой-либо из стандартных норм – например, $\mathbb{R}^n_{\max}$ (для краткости обозначим его X) – и произвольного n-мерного ЛНП, которое будем обозначать Y.

Пусть $\tau : X \to Y$ – линейный изоморфизм. Произвольный элемент X представляется в виде $x = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$, где e_j – базисный элемент пространства X – вектор, у которого на j-м месте стоит единица, а на остальных нули. Норма элемента x равна $\|x\|_X = \max_j |\alpha_j|$, и тогда $\forall j : |\alpha_j| \le \|x\|_X$.

При отображении τ вектору x будет сопоставлен вектор $y = \tau(x) = \alpha_1 \tau(e_1) + \cdots + \alpha_n \tau(e_n)$. Оценим его норму:

$$\|y\|_Y = \|\alpha_1 \tau(e_1) + \cdots + \alpha_n \tau(e_n)\|_Y \le$$
$$\le |\alpha_1| \cdot \|\tau(e_1)\|_Y + \cdots + |\alpha_n| \cdot \|\tau(e_n)\|_Y \le$$
$$=\le \|x\|_X \cdot (\|\tau(e_1)\|_Y + \cdots + \|\tau(e_n)\|_Y) = M\|x\|_X \,,$$

где $M = \|\tau(e_1)\|_Y + \cdots + \|\tau(e_n)\|_Y$.

Покажем, что из полученной оценки вытекает равномерная непрерывность отображения τ. Мы хотим удостовериться, что

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \{\|x' - x''\|_X < \delta \Rightarrow \|\tau(x') - \tau(x'')\|_Y < \varepsilon\} \,.$$

Действительно,

$$\|\tau(x') - \tau(x'')\|_Y = \|\tau(x' - x'')\|_Y \le M\|x' - x''\|_X \,,$$

и требуемое условие будет выполнено при $\delta = \varepsilon/M$.

Осталось доказать равномерную непрерывность обратного отображения. Для того, чтобы это сделать, рассмотрим функционал $f(x) = \|\tau(x)\|_Y$. Этот функционал непрерывен, поскольку является композицией непрерывного (как только что было доказано) отображения $\tau : X \to Y$ и непрерывного функционала нормы в пространстве Y.

Рассмотрим множество значений функционала f на единичной сфере пространства X: $\sigma_1(o) = \{x \in X : \|x\|_X = 1\}$ (в пространстве $X = \mathbb{R}^n_{\max}$ такая сфера представляет собой поверхность n-мерного куба). Сфера является ограниченным и замкнутым множеством (в любом метрическом пространстве), а в пространстве $\mathbb{R}^n_{\max}$ такие множества, как мы знаем, являются компактами. А на любом компакте произвольный ограниченный функционал принимает своё наибольшее и, как нам будет важно, наименьшее значение, которое обозначим m.

Значение m строго положительно. Действительно, поскольку функционал τ биективен, он взаимно однозначно переводит нуль пространства X в нуль пространства Y, а поскольку единичная сфера нуля не содержит, её образ также содержит только элементы пространства Y со строго положительной нормой, а поэтому и наименьшее значение функционала f также положительно.

Покажем, что для произвольного элемента $x \in X$, не обязательно лежащего на сфере, выполнено неравенство $\|\tau(x)\|_Y \geq m\|x\|_X$. Для $x = o$ неравенство выполнено (оно превращается в равенство 0=0). Если же $x \neq o$, то, в силу линейности отображения τ,

$$\tau(x) = \tau(\|x\|_X x^0) = \|x\|_X \tau(x^0)\,,$$

где, напомню, $x^0 = x/\|x\|_X \in \sigma_1(o)$ – нормированный вектор, лежащий на сфере. Поэтому

$$\|\tau(x)\|_Y = \|x\|_X \|\tau(x^0)\|_Y \geq m\|x\|_X\,.$$

Полученное неравенство означает равномерную непрерывность обратного отображения. Действительно, произвольный элемент $y \in Y$ представляется виде $y = \tau(\tau^{-1}(y))$, и поэтому $\|y\|_Y \geq m\|\tau^{-1}(y)\|_X$,
откуда $\|\tau^{-1}(y)\|_X \leq m^{-1}\|y\|_Y$.

Осталось повторить рассуждение, которое было использовано для доказательства непрерывности прямого отображения. Мы хотим удостовериться, что

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \{\|y' - y''\|_Y < \delta \Rightarrow \|\tau^{-1}(y') - \tau^{-1}(y'')\|_X < \varepsilon\}\,.$$

Действительно,

$$\|\tau^{-1}(y') - \tau^{-1}(y'')\|_X = \|\tau^{-1}(y' - y'')\|_X \leq m^{-1}\|y' - y''\|_Y\,,$$

и требуемое условие будет выполнено при $\delta = m\varepsilon$.

Теорема доказана.

Замечание. В процессе доказательства мы получили, что для некоторых $m, M > 0$ справедлива двусторонняя оценка: $m\|x\| \le \|\tau(x)\| \le M\|x\|$. Оценка получена для случая, когда одно из пространств $\mathbb{R}^n_{\max}$, но поскольку биекция любой пары пространств размерности n представляется в виде композиции биекций этих пространств с $\mathbb{R}^n_{\max}$, такая оценка справедлива и для них (с другими константами).

Следствие: все нормы в конечномерных ЛП эквивалентны.
Действительно, рассмотрим отображение двух ЛНП с одним и тем же ностиелем, в котором каждому элементу сопоставляется он сам: $\tau(x) = x$. Тогда, в силу двусторонней непрерывности отображения,
$m\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1$, что и означает эквивалентность норм.

Утверждение: сходимость в произвольном конечномерном ЛНП с заданным базисом эквивалентна покоординатной. (Устанавливаем биекцию с пространством $\mathbb{R}^n_{\max}$, в котором сходимость эквивалентна покоординатной, а при непрерывном отображении сходящиеся последовательности переходят в сходящиеся.)

Утверждение: любое конечномерное ЛНП полное. (Устанавливаем биекцию с пространством $\mathbb{R}^n_{\max}$, в силу равномерной непрерывности образы фундаментальных последовательностей – также фундаментальные последовательности, они сходятся в силу полноты $\mathbb{R}^n_{\max}$, а в силу непрерывности обратного отображения сходятся последовательности из прообразов.)

Утверждение: в любом ЛНП любой конечномерный линеал замкнут, т.е. является подпространством. В частности, является подпространством линейная оболочка любой конечной системы элементов. (Конечномерный линеал – полное МП при любой норме, сходящаяся последовательность его элементов фундаментальна и сходится к элементу самого МП.)

Утверждение: в любом конечномерном ЛНП произвольное ограниченное множество предкомпактно, а произвольное ограниченное замкнутое множество – компакт. (Устанавливаем биекцию с $\mathbb{R}^n_{\max}$, образ ограниченного множества ограничен и является предкомпактным множеством, а образ ограниченного замкнутого ограничен и замкнут, является компактом. Прообразы обладают теми же свойствами.)

Теорема Рисса о почти перпендикуляре.
Пусть X – ЛНП, $Y \subsetneq X$ – его замкнутое подпространство, не совпадающее с X. Тогда
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists u \in X \backslash L : \{\|u\| = 1 \wedge \rho(u, Y) > 1 - \varepsilon\}$

Замечание. Напомню, что расстояние элемента до подпространства (как и до любого множества) опледеляется так:

$$\rho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \rho(x, y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| \,.$$

Это расстояние неотрицательно и равно нулю лишь для элементов пространства. Действительно, обращение в нуль расстояния означает, что x –

точка прикосновения Y, а поскольку подпространство замкнуто, оно содержит все свои точки прикосновения. Следовательно, расстояние до подпространства от элемента, не принадлежащего подпространству, строго положительно. Для незамкнутых множеств (в частности, линеалов), расстояние равно нулю и в случае, если элемент не входит в это множество, но входит в его замыкание.

Замечание. "Перпендикуляр"к подпростренству – элемент, для которого расстояние до подпространства совпадает с его нормой. Тогда в числе ближайших к нему элементов подпространства – o (что не исключает возможности наличия в Y других элементов, находящихся на том же расстоянии). ”Почти перпендикуляр” – элемент, для которого расстояние до подпространства почти совпадает с его нормой. В теореме доказывается, что отличие может быть сделано сколь угодно малым.

Прежде, чем доказать теорему, докажем две леммы.

Лемма. $\forall x \in X\, \forall y \in Y : \rho(x, Y) = \rho(x - y, Y)$ (сдвиг элемента вдоль подпространства не изменяет его расстояния до этого подпространства).

$$\rho(x - y, Y) = \inf_{\tilde{y} \in Y} \|(x - y) - \tilde{y}\| =$$
$$= \inf_{\tilde{y} \in Y} \|x - (y + \tilde{y})\| = \inf_{\hat{y} \in Y} \|x - \hat{y}\| = \rho(x, Y)$$

(Когда $\tilde{y}$ пробегает всё подпространство Y, $\hat{y} = y + \tilde{y}$ также пробегает всё Y.)

Лемма. $\forall x \in X\, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \rho(\lambda x, Y) = |\lambda| \rho(x, Y)$ (умножение элемента на число приводит к умножению расстояния до подпространства на модуль этого числа).

Для $\lambda = 0$ верно: слева и справа 0. Пусть теперь $\lambda \neq 0$:

$$\rho(\lambda x, Y) = \inf_{y \in Y} \|\lambda x - y\| = \inf_{y \in Y} \|\lambda(x - y/\lambda)\| =$$
$$= \inf_{y \in Y} |\lambda| \cdot \|x - y/\lambda\| = |\lambda| \inf_{\hat{y} \in Y} \|x - \hat{y}\| = |\lambda| \rho(x, Y)$$

(Когда $\tilde{y}$ пробегает всё подпространство Y, $\hat{y} = y/\lambda$ также пробегает всё Y.)

Замечание. Из этих лемм, между прочим, следует, что $\rho(x, Y)$ – норма на факторпространстве X/Y.

Теперь докажем теорему. Возьмём произвольный элемент $x \in X \backslash Y$. В силу сказанного выше $d = \rho(x, Y) = \inf_{y \in Y} \|x - y\| > 0$. Тогда
$\forall \varepsilon > 0\, \exists y \in Y : \|x - y\| < (1 + \varepsilon) d$.

Обозначим $v = x - y$. В силу первой из доказанных лемм, $\rho(v, Y) = \rho(x, Y) = d$, при этом $\|v\| < (1 + \varepsilon) d$.

Пусть теперь $u = v^0 = v/\|v\|$. Тогда $\|u\| = 1$ и, в силу второй из доказанных лемм,
$\rho(u, Y) = \rho(v, Y)/\|v\| = d/\|v\| > 1/(1 + \varepsilon) > 1 - \varepsilon$.
Теорема доказана.

Утверждение: для конечномерных подпространств "почти перпендикуляр"можно заменить "перпендикуляром". То есть
$\exists u \in X \backslash Y : \|u\| = \rho(u, Y) = 1$. (Инфинум на самом деле минимум, поскольку можно искать его на пересечении подпространства с замкнутым шаром достаточно большого диаметра, это будет компакт.)

Пример. $X = \mathbb{R}^2_{\max}$, $Y = \{y = (y_1, 0)\}$. Перпендикуляры к этому подпространству, по норме равные единице: $x = (x_1, \pm 1)$, $|x_1| \leq 1$. Если $X = \mathbb{R}^2_p$, то при том же подпространстве Y нормированные перпендикуляры имеют вид $x = (0, \pm 1)$.

Теорема Произвольное ограниченное множество в ЛНП предкомпактно тогда и только тогда, когда ЛНП конечномерно.

То, что ограниченное множество в конечномерном пространстве предкомпактно, уже знаем. Осталось доказать существование непредкомпактного ограниченного множества в произвольном бесконечномерном пространстве.

Докажем непредкомпактность единичной сферы. Выбираем произвольный элемент, строим его линейную оболочку.

Согласно теореме Рисса находим единичный вектор, находящийся на расстоянии $1-\varepsilon$ от этого подпространства (и, следовательно, на не меньшем расстоянии от превого элемента). Берём линейную оболочку первых двух элементов.

Дальше находим третий единичный элемент, находящийся на расстоянии не меньше $1-\varepsilon$ от этого подпространства (и, следовательно, от первых двух элементов) и т.д.

Все линейные оболочки – замкнутые подпространства, так что условия теоремы Рисса на каждом шаге выполняются. То, что эти подпространства не совпадают со всем пространством, следует из его бесконечномерности.

В результате строим $1-\varepsilon$-дискретное счётное подмножество единичной сферы, непредкомпактное. Теорема доказана.

Замечание. Произвольное ограниченное множество в формулировке теоремы можно заменить единичным шаром (с центром в нуле).

Замечание. Поскольку подпространства конечномерные, можно выбирать не почти перпендикуляры, а перпендикуляры (что на результат никак не повлияет).

Раздел 7. Линейные операторы в ЛНП

Лекция 13 Линейный оператор.

Оператор – синоним слова "отображение". $F : X \to Y$, Иногда под оператором понимают отображение пространства в себя, когда $Y = X$. Мы не будем придерживаться этого ограничения. Если отображение $X \to \mathbb{R}$ (или $X \to \mathbb{C}$, а в общем случае $X \to \mathbb{K}$) – функционал. Частный случай оператора, но есть своя специфика.

Линейный оператор: действует из ЛП в ЛП (над одним и тем же полем $\mathbb{K}$), и
$\forall \alpha_{1,2} \in \mathbb{K}\, \forall x_{1,2} \in X : A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$.
Совокупность аддитивности и однородности.
Аддитивность: $\forall x_{1,2} \in X : A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$.
Однородность (первой степени): $\forall \alpha \in \mathbb{K}\, \forall x \in X : A(\alpha x) = \alpha A(x)$.
Скобки для линейных операторов часто опускают. Если X конечномерно, достаточно задать на базисных элементах.

Линейный функционал – это линейное отображение из X в $\mathbb{K}$.

Замечание. В комплексных пространствах, наряду с линейными, рассматривают также полулинейные операторы и функционалы. Они обладают свойством аддитивности, а однородность заменяется на полуоднородность: $\forall \alpha \in \mathbb{C}\, \forall x \in X : A(\alpha x) = \bar{\alpha} A(x)$.

По умолчанию будем считать, что оператор полноопределённый. В общем случае область определения может отличаться от всего пространства.

Утверждение: область определения линейного оператора – линеал в пространстве X.

Утверждение: область значений линейного оператора – линеал в пространстве Y.

Утверждение: график линейного оператора – линеал в прямой сумме $X + Y$.
Замечание. Произвольный линеал в пространстве $X + Y$ называется линейным отношением (частный случай бинарного отношения).

Ядро оператора (множество нулей): $Ker A = \{x \in X : Ax = o\}$.

Утверждение: ядро оператора – линеал в пространстве X.

Примеры: нулевой оператор, единичный оператор, умножение на число, операторы в конечномерном ЛП, умножение на заданную функцию, дифференциальные и интегральные линейные операторы.

Пусть теперь X и Y – ЛНП.

Непрерывность и ограниченность линейного оператора. (Напрминание: оператор ограничен, если образ произвольного ограниченного множества ограничен.) Для произвольных (нелинейных) операторов эти свойства никак не связаны. У линейных операторов своя специфика.

Замечание. Часто (обычно для неограниченных операторов) область определения оператора – всюду плотное множество в X .
Пример: оператор дифференцирования как оператор из $C[a,b]$ в себя. Область определения – $C^1[a,b]$.

Утверждение: ядро непрерывного оператора – замкнутое подпространство.

Теорема Линейный оператор A, непрерывный в точке $x_0 \in X$, равномерно непрерывен на всём пространстве X.

Непрерывность оператора A в точке x_0 по Коши:
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \{\|h\| < \delta \Rightarrow \|A(x_0 + h) - A(x_0)\| < \varepsilon\}$
Но $A(x_0 + h) - A(x_0) = A(h)$, поэтому получаем:
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : \{\|h\| < \delta \Rightarrow \|A(h)\| < \varepsilon\}$
Отсюда вытекает равномерная непрерывность: если $\|x' - x''\| < \delta$, то
$\|A(x') - A(x'')\| = \|A(x' - x'')\| < \varepsilon$.

Теорема. Непрерывность линейного оператора эквивалентна его ограниченности.

Пусть оператор непрерывен. Тогда выберем некоторое ε и найдём такое δ, что из условия $\|h\| \le \delta$ следует $\|A(h)\| \le \varepsilon$. Докажем, что в этом случае образ ограниченного множества ограничен.

Если множество Q ограничено, то все его элементы не превосходят по норме некоторого M. Представим произвольный элемент этого множества в виде $x = (x\delta/M) \cdot M/\delta$. Тогда в силу линейности оператора

$$\forall x \in Q : \|Ax\| = \|A(x\delta/M) \cdot M/\delta\| = M/\delta \cdot \|A(x\delta/M)\| \le M/\delta \cdot \varepsilon \,,$$

поскольку $\forall x \in Q : \|x\delta/M\| \le \delta$. Мы показали, что образ множества Q лежит в шаре радиуса $M\varepsilon/\delta$, то есть является ограниченным множеством.

Докажем теперь, что из ограниченности оператора следует его непрерывность.

Если оператор ограничен, то образ любого ограниченного множества ограничен. В частности, ограничен образ единичной сферы с центром в нуле:

$$\exists M > 0 : \{\|x\| = 1 \Rightarrow \|Ax\| \le M\} \,.$$

Отсюда следует, непрерывность A в нуле:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon/M : \{\|h\| \le \varepsilon/M \Rightarrow \|A(h)\| \le \varepsilon\} \,.$$

Действительно, $\|Ao\| = 0$, а для $h \ne o$

$$\|A(h)\| = \|A(h/\|h\|)\| \cdot \|h\| \le M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon \,.$$

Как вытекает из предыдущей теоремы, непрерывность оператора в нуле влечёт его равномерную непрерывность во всём пространстве. Теорема доказана.

Как следует из доказательства последней теоремы, нам достаточно потребовать ограниченности оператора на сфере, и из этого уже вытекает его непрерывность и ограниченность на произвольном ограниченном множестве. Поэтому мы для линейных операторов може переопределить понятие ограниченности и говорить, что оператор ограничен, если он ограничен на единичной сфере или на единичном шаре (из чего вытекает ограниченность на сфере и далее ограниченность на произвольном множестве). Есть ещё одно определение, эквивалентное данному. Если оператор ограничен на единичной сфере, и норма его значений на сфере не превосходит M, то на произвольном ненулевом элементе пространства $x = x^0\|x\|$ (x^0 – нормированный элемент с единичной нормой) справедливо неравенство $\|Ax\| = \|Ax^0\| \cdot \|x\| \le M\|x\|$. Часто именно этот факт:

$$\exists M > 0\, \forall x \in X : \|Ax\| \le M\|x\|$$

берут в качестве определения ограниченного оператора (разумеется, из него следует ограниченность на сфере, шаре и произвольном ограниченном множестве).

Для линейного оператора его поведение на единичной сфере в силу равенства

$$Ax = Ax^0 \cdot \|x\|$$

определяет его поведение на всём пространстве. В свою очередь, ограниченный линейный оператор на сфере – частный случай непрерывного ограниченного отображения из $\sigma_1(o)$ в ЛНП Y, т.е. элемент пространства $C(\sigma_1(o) \to Y)$, а функционал $f(x) = \|Ax\|$ – элемент пространства $C(\sigma_1(o))$ вещественных непрерывных ограниченных функционалов на единичной сфере. Когда мы имели дело с пространством $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке, мы под нормой элемента этого пространства понимали максимум модуля этого элемента на отрезке $[a, b]$. Поскольку в бесконечномерном пространстве единичная сфера не является компактом, непрерывный функционал может не достигать на ней своего максимального значения, и поэтому максимум мы заменим супремумом и определим норму линейного ограниченного оператора как точную верхнюю грань множества значений его нормы на единичной сфере:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \,.$$

Это не единственное определение нормы. Есть и другие, эквивалентные данному. В частности, мы можем брать точную верхнюю грань не по сфере, а по единичному замкнутому шару:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| \,.$$

Расширение множества не приведёт к увеличению супремума, поскольку если $\|x\| \le 1$, то $\|Ax\| = \|Ax^0\| \cdot \|x\| \le \|Ax^0\|$.
Мы также можем назвать нормой оператора супремум нормы его значений не по замкнутому, а по открытому шару:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\|.$$

Это не приведёт к уменьшению точной верхней грани, поскольку произвольное значение оператора на сфере есть предел его значений в открытом шаре на соответствующем радиусе: $Ax^0 = \lim_{\alpha\to 1-0} A(\alpha x^0)$.

Поскольку для произвольного ненулевого элемента $x = x^0 \cdot \|x\|$ справедливо равенство $\|Ax^0\| = \|Ax\|/\|x\|$, мы также можем записать, что

$$\|A\| = \sup_{x\ne o} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\,.$$

Вспомним теперь, что точная верхняя грань числового множества – это наименьшая из его верхних гранией, т.е.

$$\|A\| = \min\left\{M, \forall x \ne o : \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le M\right\}$$

или, что то же самое,

$$\|A\| = \min\left\{M, \forall x \in X : \|Ax\| \le M\|x\|\right\}\,,$$

то есть норма – это наилучшая из возможных оценок в неравенстве $\|Ax\| \le M\|x\|$, фигурирующем в альтернативном определении ограниченности оператора. Поэтому если мы получим такое неравенство для некоторого M или, что эквивалентно, получим оценку $\|Ax^0\| \le M$ на единичной сфере, то отсюда будет следовать, что $\|A\| \le M$.

Если при этом окажется, что для некоторого $x_* \in X$ неравенство превращается в равенство, т.е. $\|Ax_*\| = M\|x_*\|$ или, что то же, $\|Ax^0_*\| = M$ для некоторого x^0_* с единичной нормой, то это будет означать, что оценка неулучшаема, и, следовательно, $\|A\| = M$: если верхняя грань множества достигается на каком-то элементе, то она является точной верхней гранью. Точно такой же вывод мы можем сделать, если есть последовательность нормированных элементов x^0_m таких, что $\|Ax^0_m\| \to M$: это означает, что оценку нельзя улучшить, и $\|A\| = M$ (такая последовательность называется максимизирующей).

Множество значений $\|Ax\|$ на единичном шаре – это либо отрезок $[0, \|A\|]$, либо полуинтервал $[0, \|A\|)$. В первом случае найдётся такой элемент $x^0_* \in \sigma_1(0)$, что $\|Ax^0_*\| = \|A\|$, и тогда говорят, что норма оператора достигается на элементе x^0_*. Во втором случае такого элемента нет (норма не достигается), но существует максимизирующая последовательность
$x^0_m \in \sigma_1(0) : \|Ax^0_m\| \to \|A\|$.

Утверждение: если линейный оператор ограничен хотя бы на каком-нибудь шаре (открытом или замкнутом) положительного радиуса, то он ограничен.

Будем доказывать для замкнутого шара. (Если шар открыт, то возьмём любой замкнутый шар меньшего радиуса с тем же центром.)

Пусть оператор A ограничен на шаре $\bar{S}_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| \le r\}$, т.е. $\exists M\, \forall x \in \bar{S}_r(a) : \|Ax\| \le M$.

Установим взаимно однозначное соответствие между $\bar{S}_r(a)$ и единичным шаром с центром в нуле $\bar{S}_1(o) = \{y \in X : \|y\| \le 1\}$: $x = a + ry$, $y = (x-a)/r$. Тогда

$$\|Ay\| = \left\|A\frac{x-a}{r}\right\| = \frac{\|A(x-a)\|}{r} =$$
$$= \frac{\|Ax - Aa\|}{r} \le \frac{\|Ax\| + \|Aa\|}{r} \le \frac{2M}{r}.$$

Поскольку y – произвольный элемент единичного шара, отсюда следует, что оператор ограничен и $\|A\| \le 2M/r$.

Замечание. Оценку для нормы можно улучшить, избавившись от множителя 2 (подумайте, как!).

Замечание. Приведённое рассуждение можно обобщить на семейства операторов $\{A_\alpha\}$, а именно: если семейство операторов равномерно ограничено на каком-либо шаре, т.е. если $\exists M\, \forall x \in \bar{S}_r(a)\, \forall \alpha : \|A_\alpha x\| \le M$, то оно равномерно ограничено по норме: $\forall \alpha : \|A_\alpha\| \le 2M/r$. Этим фактом мы воспользуемся при доказательстве принципа равномерной ограниенности (см. ниже).

Примеры ограниченных операторов и вычисления их норм.

- Единичный оператор (в любом пространстве):
  $Ex = x$, $\|Ex\| = \|x\|$, $\|E\| = 1$

- Нулевой оператор (в любом пространстве):
  $Ox = o$, $\|Ox\| = 0$, $\|O\| = 0$

- Оператор умножения на число (в любом пространстве):
  $\Lambda x = \lambda x$, $\|\Lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\|\Lambda\| = |\lambda|$
  (операторы E и O – частные случаи при $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$)

- Оператор покомпонентного умножения (в пространствах $\mathbb{R}^n_{\max}$, $\mathbb{R}^n_p$, c_0, l_∞, l_p последовательностей, конечных или бесконечных):
  $y = Ax$, $y_k = \alpha_k x_k$ ($\{\alpha_k\}$ – ограниченная последовательность; если все $\alpha_k = \lambda$, приходим к предыдущему примеру).
  Обозначим $\lambda = \sup_k |\alpha_k|$, тогда во всех рассмотренных нормах
  $\|Ax\| \le \|\Lambda x\| = \lambda \cdot \|x\|$, и тогда $\|A\| \le \lambda$
  Если супремум достигается, т.е. $\lambda = \max_k |\alpha_k| = |\alpha_m|$ для некоторого m, то на элементе $x = e_m$ (последовательность, у которой $x_m = 1$, а остальные элементы нулевые) справедливо равенство $Ae_m = \lambda e_m$,

поэтому $\|A\| = \lambda$ и достигается на элементе e_m.
Если супремум не достигается, рассмотрим максимизирующую последовательность $|\alpha_{k'}| \to \lambda$. Но $|\alpha_{k'}| = \|Ae_{k'}\|/\|e_{k'}\|$, поэтому снова получаем, что $\|A\| = \lambda$, $\{e_{k'}\}$ – максимизирующая последовательность для нормы. Норма не достигается.

- Функциональный аналог: оператор умножения на непрерывную функцию $\alpha(t) \in C[a,b]$: $y = Ax$, $y(t) = \alpha(t)x(t)$ в пространствах непрерывных функций на отрезке ($C[a,b]$, $\tilde{L}_p[a,b]$).
Обозначим $\lambda = \|\alpha\|_C = \max_{t\in[a,b]} |\alpha(t)|$, тогда $|y(t)| \le \lambda|x(t)|$ и
$\|Ax\| = \|y\| \le \lambda\|x\|$ (в любой из норм), откуда $\|A\| \le \lambda$.
Убедимся, что на самом деле здесь равенство, как и в предыдущем примере. В пространстве $C[a,b]$ мы можем взять функцию $x(t)$, максимум модуля которой достигается в той же точке, что и у $|\alpha(t)|$ (например, $x(t) \equiv 1$). Норма достигается.
В пространствах $\tilde{L}_p[a,b]$ рассмотрим разность

$$\lambda^p\|x\|^p - \|Ax\|^p = \lambda^p \int_a^b |x(t)|^p\,dt - \int_a^b |\alpha(t)x(t)|^p\,dt =$$
$$= \int_a^b (\lambda^p - |\alpha(t)|^p)|x(t)|^p\,dt \ge 0$$

Если равенство $|\alpha(t)| = \lambda$ достигается на некотором отрезке, мы можем выбрать функцию $x(t)$, локализованную на этом отрезке (т.е. равную нулю вне его), и в этом случае подынтегральная функция будет равна нулю тождественно, норма достигается.
Если равенство $|\alpha(t)| = \lambda$ достигается в одной или нескольких точках, то первый сомножитель под интегралом почти всюду положителен, и рассмотренная разность строго положительна при любом непрерывном $x \ne o$. Тем не менее, выбором $x \in \sigma_1(o)$ её можно сделать сколь угодно малой. Действительно, функция $|\alpha(t)|$ непрерывна, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся отрезок $[a',b'] \subset [a,b]$ в окрестности точки максимума, на котором $\lambda^p - |\alpha(t)|^p \le \varepsilon$. Выберем функцию $x(t)$, локализованную на $[a',b']$, тогда

$$\lambda^p\|x\|^p - \|Ax\|^p = \int_a^b (\lambda^p - |\alpha(t)|^p)|x(t)|^p\,dt =$$
$$= \int_{a'}^{b'} (\lambda^p - |\alpha(t)|^p)|x(t)|^p\,dt \le \int_{a'}^{b'} \varepsilon|x(t)|^p\,dt = \varepsilon$$

(при $\|x\| = 1$). Отсюда следует, что $\|A\| = \lambda$, но не достигается.

- A – оператор в конечномерном пространстве, задаётся матрицей:
$y = Ax$, $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. Найдём норму этого оператора в $\mathbb{R}^n_{\max}$ и в $\mathbb{R}^n_1$ и оценим её в $\mathbb{R}^n_2 = E^n$.

Пространство $\mathbb{R}^n_{\max}$:

$$\|Ax\|_\infty = \|y\|_\infty = \max_i |y_i| = \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| =$$
$$= \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty$$

Отсюда $\|A\| \le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (берём элементы матрицы по модулю, вычисляем суммы по строкам и берём максимальную). На самом деле равенство, и норма достигается.
Пусть i_0 – номер той строки, в которой наибольшая сумма модулей. Подберём такой элемент $x \in \sigma_1(o)$, для которого все неравенства превратятся в равенства. Последнее неравенство превращается в равенство при $|x_j| = \|x\|_\infty = 1$, т.е. для вектора, все компоненты которого по модулю равны единице. Знаки выбираем так, чтобы для $i = i_0$ модуль суммы совпадал с суммой модулей. Для этого все слагаемые делаем одного знака, выбирая знаки компонент x_j совпадающими со знаками $a_{i_0 j}$ (либо противоположными).
Пространство $\mathbb{R}^n_1$:

$$\|Ax\|_1 = \|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i| = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij} x_j| =$$
$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^n |x_j| \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x\|_1$$

Отсюда $\|A\| \le \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (берём элементы матрицы по модулю, вычисляем суммы по столбцам и берём максимальную). На самом деле равенство, и норма достигается.
Пусть j_0 – номер того столбца, в котором наибольшая сумма модулей. Подберём такой элемент $x \in \sigma_1(o)$, для которого все неравенства превратятся в равенства. Последнее неравенство превращается в равенство при $|x_j| = 0$ для всех $j \ne j_0$, т.е. для вектора x, единственная ненулевая компонента которого x_{j_0} по модулю равна единице. Знак выбираем произвольным. Поскольку в суммах по j всего по одному слагаемому, первое неравенство также превращается в равенство.

Пространство $\mathbb{R}_2^n = E^n$:

$$\|Ax\|_2^2 = \|y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right|^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right) \right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \cdot \|x\|_2^2$$

(воспользовались неравенством Коши-Буняковского-Шварца). Извлекая квадратный корень, получаем
$\|Ax\|_2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \|x\|_2$, откуда $\|A\|_2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$.
За исключением матрицы ранга 0 или 1, равенство строгое: неравенство КБШ превращается в равенство, когда есть пропорциональность вектора x и строки матрицы, но если разные строки между собой не пропорциональны, то достичь такой пропорциональности одновременно для всех i не удастся.
Замечание. На самом деле норма оператора в E^n – это квадратный корень из наибольшего собственного числа матрицы $A^t A$. Это будет установлено в следующем семестре при изучении пространств со скалярным произведением.

- Функциональный аналог: A – интегральный оператор Фредгольма на отрезке $[a, b]$, задаётся равенством:
  $y = Ax$, $y(t) = \int_a^b K(t, s) x(s)\, ds$.
  Функция $K(t, s)$ непрерывна на $[a, b] \times [a, b]$ и называется ядром интегрального оператора.
  Замечание. К сожалению, так исторически сложилось, что термин "ядро"оказался многозначным. Напомню, что мы под ядром оператора понимаем его множество нулей, т.е. множество тех элементов пространства, которые оператор переводит в o. Разумеется, здесь это слово имеет совершенно иной смысл.
  Найдём норму оператора Фредгольма в $C[a, b]$ и оценим её в $\tilde{L}_1[a, b]$ и в $\tilde{L}_2[a, b]$.
  Пространство $C[a, b]$:

$$\|Ax\|_C = \|y\|_C = \max_{t \in [a,b]} |y(t)| = \max_{t \in [a,b]} \left| \int_a^b K(t, s) x(s)\, ds \right| \leq$$

$$\leq \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t, s) x(s)|\ ds = \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t, s)| \cdot |x(s)|\ ds \leq$$

$$\leq \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t, s)| \cdot \|x\|_C\, ds = \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t, s)|\ ds \cdot \|x\|_C$$

  Отсюда $\|A\| \leq \max_{t \in [a,b]} \int_a^b |K(t, s)|\ ds$ (на самом деле здесь равенство).

Пусть t_0 – значение t, для которого достигается максимум. Попробуем подобрать такой элемент $x \in \sigma_1(o)$, для которого все неравенства превратятся в равенства. Последнее неравенство превращается в равенство при $|x(s)| = \|x\|_C = 1$ при всех s, для которых $K(t_0, s) \neq 0$. В то же время первое неравенство становится равенством (модуль интеграла равен интегралу от модуля) в случае, когда подынтегральная функция при $t = t_0$ сохраняет знак для всех $s \in [a, b]$. Для этого необходимо, чтобы знаки функций $x(s)$ и $K(t_0, s)$ на множестве, где $K(t_0, s) \neq 0$, всюду совпадали (или всюду различались).

Если функция $K(t_0, s)$ сохраняет знак, то норма достигается на элементе $x \equiv 1$ (или $x \equiv -1$). Если функция $K(t_0, s)$ меняет знак, но области, где она имеет разные знаки, разделены отрезками ненулевой длины, где $K(t_0, s) = 0$, то норма достигается на функции $x(s)$, равной $\operatorname{sign} K(t_0, s)$ (т.е. 1 при $K(t_0, s) > 0$ и -1 при $K(t_0, s) < 0$) там, где $K(t_0, s) \neq 0$, а на промежутках, где $K(t_0, s) = 0$, $x(s)$ непрерывно (например, линейно) изменяется от ± 1 до ∓ 1. Если же при смене знака функция $K(t_0, s)$ обращается в нуль в изолированных точках, то найденное значение не достигается, поскольку функция $\operatorname{sign} K(t_0, s)$ в этих точках имеет разрыв первого рода. Убедимся, что оно, тем не менее, остаётся нормой (ограничимся случаев конечного числа корней функции $K(t_0, s)$). Для этого вычислим разность

$$\int_a^b |K(t_0, s)|\, ds - y(t_0) = \int_a^b |K(t_0, s)|\, ds - \int_a^b K(t_0, s) x(s)\, ds =$$
$$= \int_a^b |K(t_0, s)|\, ds - \int_a^b |K(t_0, s)| \operatorname{sign} K(t_0, s) \cdot x(s)\, ds =$$
$$= \int_a^b |K(t_0, s)| \left(1 - \operatorname{sign} K(t_0, s) x(s)\right) ds$$

Выберем $x \in \sigma_1(o)$ так, чтобы эта функция всюду по знаку совпадала с $K(t_0, s)$, причём вне малых окрестностей кореней функции $K(t_0, s)$ общей длиной δ выполнялось равенство $x(s) = \operatorname{sign} K(t_0, s)$, а второй сомножитель в подынтегральной функции, тем самым, обращался в нуль. Тогда остаётся интеграл по указанным малым окрестностям, на которых подынтегральная функция не превосходит $\max_s |K(t_0, s|$. Выбором δ о выражение может быть сделано сколь угодно малым.

Пространство $\tilde{L}_1[a,b]$:

$$\|Ax\|_1 = \|y\|_1 = \int_a^b |y(t)|\,dt = \int_a^b \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\right| dt \le$$

$$\le \int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s)x(s)|\,ds\right) dt = \int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s)|\cdot|x(s)|\,ds\right) dt =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s)|\cdot|x(s)|\,dt\right) ds = \int_a^b |x(s)| \left(\int_a^b |K(t,s)|\,dt\right) ds \le$$

$$\le \int_a^b |x(s)| \left(\max_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,dt\right) ds =$$

$$= \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,dt \cdot \int_a^b |x(s)|\,ds = \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,dt \cdot \|x\|_1$$

Отсюда $\|A\| \le \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,dt$.
Убедимся, что в случае $K(t,s) \ge 0$ справедливо равенство. $\|A\| = \max_{s\in[a,b]} \int_a^b K(t,s)\,dt$. Пусть s_0 – то значение s, на котором достигается максимум интеграла $\int_a^b K(t,s)\,dt$. Поскольку интеграл непрерывно зависит от s, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся такой отрезок $[a',b'] \subset [a,b]$, что при $s \in [a',b']$ выполнено неравенство
$\int_a^b K(t,s_0)\,dt - \int_a^b K(t,s)\,dt \le \varepsilon$.
Выберем в качестве $x \in \sigma_1(o)$ неотрицательную функцию, локализованную на $[a',b']$, и рассмотрим разность:

$$\int_a^b K(t,s_0)\,dt - \|Ax\|_1 =$$

$$= \int_a^b K(t,s_0)\,dt \cdot \int_{a'}^{b'} x(s)\,ds - \int_a^b \left(\int_{a'}^{b'} K(t,s)x(s)\,ds\right) dt =$$

$$= \int_{a'}^{b'} \left(\int_a^b K(t,s_0)\,dt - \int_a^b K(t,s)\,dt\right) x(s)\,ds$$

$$\le \int_{a'}^{b'} \varepsilon x(s)\,ds = \varepsilon\,,$$

откуда и вытекает доказываемое равенство для нормы оператора. Если интеграл $\int_a^b K(t,s)\,dt$ достигает максимума в изолированной точке, то норма не достигается, поскольку первый сомножитель подынтегральной функции строго положителен при $s \ne s_0$. Если же максимум достигается на некотором отрезке $[a',b']$ (сохраним прежнее обозначение), то рассморенная разность обращается в 0, и норма достигается.

Пространство $\tilde{L}_2[a,b]$:

$$\|Ax\|_2^2 = \|y\|_2^2 = \int_a^b |y(t)|^2\,dt = \int_a^b \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\right|^2 dt \leq$$
$$\leq \int_a^b \left[\left(\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\right)\left(\int_a^b |x(s)|^2\,ds\right)\right] dt =$$
$$= \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\,dt \cdot \|x\|_2^2$$

(воспользовались неравенством Коши-Буняковского-Шварца). Извлекая квадратный корень, получаем
$\|Ax\|_2 \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\,dt\right)^{1/2} \|x\|_2$, откуда
$\|A\|_2 \leq \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\,dt\right)^{1/2}$.
Неравенство КБШ при каждом фиксированном t превращается в равенство, когда есть пропорциональность функций $x(s)$ и $K(t,s)$, что возможно при всех значениях t одновременно лишь в случае, когда при любых различных t' и t'' функции $K(t',s)$ и $K(t'',s)$ как функции от s отличаются множителем, т.е. при $K(t,s) = u(t)v(s)$, где u и v – некоторые непрерывные функции. Во всех остальных случаях неравенство строгое, и полученное выражение даёт верхнюю оценку для нормы.

- До сих пор мы рассматривали операторы, действующие из некоторого пространства в него же. Рассмотрим теперь опреатор, действующий из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$, а именно – оператор дифференцирования D:
$y = Dx$, $y(t) = \dot{x}(t)$. Очевидно,
$\|Dx\|_C = \|y\|_C = \|\dot{x}\|_C \leq \|x\|_{C^1} = \max\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C\}$. Отсюда $\|D\| \leq 1$.
На самом деле здесь равенство, и норма достигается на любой функции, для которой $\|\dot{x}\|_C \geq \|x\|_C$ – например, на функции $\sin\omega t$ с достаточно большим ω.

Непрерывность и ограниченность линейных функционалов, норма функционала.
Линейный функционал – частный случай линейного оператора, для которого $Y = \mathbb{K}$ (в частности, $Y = \mathbb{R}$), и для таких функционалов справедливы все утверждения, установленные для линейных операторов. В частности, линейный функционал, непрерывный в какой-либо точке, равномерно непрерывен во всём пространстве; линейный функционал непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен; линейный функционал, ограниченный на каком-либо шаре, ограничен. Роль нормы элемента в поле $\mathbb{K}$ (в частности, $\mathbb{R}$) играет модуль числа, поэтому формулы для нормы ограниченного линейного функционала имеют вид:
$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|<1} |f(x)| = \sup_{x\neq o} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$.
Такая норма совпадает с нормой функционала в пространстве $C(\sigma_1(o))$

непрерывных ограниченных функционалов на сфере. Если функционал вещественный, то модули в формулах можно убрать, т.е.
$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} f(x) = \sup_{\|x\|\le 1} f(x) = \sup_{\|x\|<1} f(x) = \sup_{x\ne o} \frac{f(x)}{\|x\|}$.
Это связано с тем, что $f(-x) = -f(x)$, поэтому область значений линейного функционала на сфере (шаре) симметрична и представляет собой либо отрезок $[-\|f\|, +\|f\|]$, либо интервал $(-\|f\|, +\|f\|)$. В первом случае норма достигается на единичном шаре (сфере), во втором не достигается.
Ещё одно определение ограниченности линейного функционала:
$\exists M \ge 0 \forall x \in X : |f(x)| \le M\|x\|$, тогда норма функционала – наименьшее значение константы M в этом неравенстве. Иными словами, значение M в этом неравенстве есть норма функционала, если оценка неулучшаемая.

Примеры.

- Все линейные функционалы в конечномерном пространстве имеют вид
$f(x) = f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n) = f_1\alpha_1 + \dots + f_n\alpha_n$, где $\{e_j\}$ – базисные элементы, $f_j = f(e_j)$. В частности, в $\mathbb{R}^n$ со стандартным базисом $\alpha_j = x_j$. Все линейные функционалы в конечномерных пространствах с любыми нормами ограничены и непрерывны, поскольку они непрерывны, например, в $\mathbb{R}^n_{\max}$, а конечномерные пространства с совпадающими размерностями непрерывно изоморфны. Норма любого линейного функционала в конечномерном ЛНП достигается, будучи максимальным значением непрерывного функционала на компакте.

  Найдём норму линейного функционала в $\mathbb{R}^n_{\max}$:

$$|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^n f_j x_j\right| \le \sum_{j=1}^n |f_j x_j| = \sum_{j=1}^n |f_j|\cdot|x_j| \le \sum_{j=1}^n |f_j|\cdot\|x\|_\infty$$

  Равенство достигается при $x_j = \operatorname{sign} f_j$ $(x \in \sigma_1(o))$, так что оценка неулучшаемая. Отсюда $\|f\| = \sum_{j=1}^n |f_j| = \|f\|_1$.

  Найдём норму линейного функционала в $\mathbb{R}^n_1$:

$$|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^n f_j x_j\right| \le \sum_{j=1}^n |f_j x_j| = \sum_{j=1}^n |f_j|\cdot|x_j| \le$$
$$\le \sum_{j=1}^n \left(\max_j |f_j|\right)|x_j| = \max_j |f_j|\cdot\|x\|_1$$

  Если j_0 – номер максимального по модулю коэффициента f_j, то на элементе x, для которого $x_{j_0} = 1$, а остальные компоненты равны нулю

$(x \in \sigma_1(o))$, достигается равенство. Поэтому оценка неулучшаема, и $\|f\| = \max_j |f_j| = \|f\|_\infty$.

Найдём норму линейного функционала в $\mathbb{R}_2^n = E^n$:

$$|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^n f_j x_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n |f_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |f_j|^2} \cdot \|x\|_2$$

Неравенство КБШ превращается в равенство при $x_j = cf_j$, где c – константа; при $c = 1/\|f\|_2$ получим нормированный элемент $x \in \sigma_1(o)$. Оценка неулучшаемая, $\|f\| = \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2$.

- Рассмотрим интегральный функционал

$$f(x) = \int_{a'}^{b'} \alpha(t)x(t)\,dt$$

на множестве функций, непрперывных на отрезке $[a,b]$, при этом $[a',b'] \subset [a,b]$, а $\alpha(t)$ – некоторая интегрируемая функция (для определённости, непрерывная с конечным числом промежутков знакопостоянства). Найдём нормы этого функционала в пространствах $C[a,b]$, $\tilde{L}_1[a,b]$ и $\tilde{L}_2[a,b]$.

Пространство $C[a,b]$:

$$|f(x)| = \left|\int_{a'}^{b'} \alpha(t)x(t)\,dt\right| \le \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)x(t)|\;dt =$$
$$= \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)| \cdot |x(t)|\,dt \le \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)| \cdot \|x\|_C\,dt = \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|\,dt \cdot \|x\|_C\,,$$

откуда $\|f\| \le \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|\,dt$. Покажем, что эта оценка неулучшаема. Выберем функцию $x \in \sigma_1(o)$ и рассмотрим разность

$$\Delta = \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|\,dt - f(x) = \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|\,dt - \int_{a'}^{b'} \alpha(t)x(t)\,dt =$$
$$= \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|\,dt - \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)| \operatorname{sign}\alpha(t)x(t)\,dt =$$
$$= \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|(1 - x(t)\operatorname{sign}\alpha(t))\,dt$$

Величина Δ неотрицательна и обращается в нуль в случае, когда при любом значении $t \in [a',b']$ обращается в нуль хотя бы один из сомножителей. Это значит, что при $\alpha(t) \ne 0$ должно выполняться равенство $x(t) = \operatorname{sign}\alpha(t)$. Непрерывная функция, обладающая таким свойством, существует либо в случае знакопостоянства $\alpha(t)$, либо если промежутки, на которых $\alpha(t)$ имеет разные знаки, разделены отрезками, на

которых $\alpha(t) = 0$. Если же промежутки знакопостоянства разделяет изолированный корень, то величина Δ строго положительна, но может быть выбором x сделана сколь угодно малой. Действительно, мы можем выбрать x так, чтобы знаки $x(t)$ и $\alpha(t)$ совпадали при $\alpha(t) \neq 0$, и чтобы равенство $x(t) = \operatorname{sign}\alpha(t)$ нарушалось лишь на промежутках сколь угодно малой суммарной длины δ. Тогда $\Delta \leq \delta \cdot \max_{t\in[a',b']} |\alpha(t)|$.
Таким образом, мы установили, что $\|f\| = \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|\, dt$.

Пространство $\tilde{L}_1[a,b]$:

$$|f(x)| = \left| \int_{a'}^{b'} \alpha(t)x(t)\, dt \right| \leq \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)x(t)|\, dt = \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)| \cdot |x(t)|\, dt \leq$$
$$\leq \int_{a'}^{b'} \|\alpha(t)\| \cdot |x(t)|\, dt = \|\alpha\|_C \cdot \int_{a'}^{b'} |x(t)|\, dt \leq \|\alpha\|_C \cdot \|x\|_1\,,$$

откуда $\|f\| \leq \|\alpha\|_C$. Покажем, что эта оценка неулучшаема.
Пусть $t_0 \in [a', b']$ – то значение, для которого $\|\alpha\|_C = |\alpha(t_0)|$. Поскольку функция $|\alpha(t)|$ непрерывна, по любому $\varepsilon > 0$ найдётся отрезок $[a'', b''] \subset [a', b']$ в окрестности или полуокрестности t_0, на котором $\alpha(t)$ знакопостоянна и $\|\alpha\|_C - |\alpha(t)| \leq \varepsilon$.
Выберем $x \in \sigma_1(o)$ так, чтобы эта функция была локализована на $[a'', b'']$ и по знаку совпадала с $\alpha(t_0)$. Рассмотрим разность:

$$\Delta = \|\alpha\|_C - f(x) = \|\alpha\|_C - \int_{a'}^{b'} \alpha(t)x(t)\, dt =$$
$$= \|\alpha\|_C - \int_{a''}^{b''} \alpha(t) \operatorname{sign}\alpha(t_0)|x(t)|\, dt =$$
$$= \|\alpha\|_C \int_{a''}^{b''} |x(t)|\, dt - \int_{a''}^{b''} |\alpha(t)| \cdot |x(t)|\, dt =$$
$$= \int_{a''}^{b''} (\|\alpha\|_C - |\alpha(t)|)|x(t)|\, dt \leq \int_{a''}^{b''} \varepsilon |x(t)|\, dt = \varepsilon$$

Из полученной оценки вытекает, что $\|f\| = \|\alpha\|_C$.
Если на некотором отрезке $[a'', b'']$ выполнено равенство $|\alpha(t)| = \|\alpha\|_C$, то в этом случае $\Delta = 0$ и норма достигается. В противном случае $\Delta > 0$, норма не достигается.

Пространство $\tilde{L}_2[a,b]$:

$$|f(x)| = \left| \int_{a'}^{b'} \alpha(t)x(t)\, dt \right| \leq \sqrt{\int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|^2\, dt} \cdot \sqrt{\int_{a'}^{b'} |x(t)|^2\, dt} \leq$$
$$\leq \sqrt{\int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|^2\, dt} \cdot \|x\|_2 = \|\alpha\|_2 \cdot \|x\|_2\,,$$

откуда $\|f\| \le \|\alpha\|_2$. Покажем, что оценка неулучшаемая, т.е. $\|f\| = \|\alpha\|_2$.
Выберем произвольное значение $\delta > 0$ и возьмём функцию $x_\delta(t)$ совпадающей с $\alpha(t)$ на $[a', b']$, а за пределами этого отрезка отличной от нуля лишь на промежутках суммарной длиной, не превышающей δ, при этом $|x_\delta(t)| \le \|\alpha\|_C$. Для такой функции

$$|f(x_\delta)| = \left| \int_{a'}^{b'} \alpha(t) x_\delta(t)\, dt \right| = \int_{a'}^{b'} \alpha^2(t)\, dt = \|\alpha\|_2^2 ,$$

$$\|x_\delta\|_2^2 = \int_a^b x_\delta^2(t)\, dt \le \int_{a'}^{b'} \alpha^2(t)\, dt + \|\alpha\|_C^2 \delta = \|\alpha\|_2^2 + \|\alpha\|_C^2 \delta$$

и тогда

$$\frac{|f(x_\delta)|}{\|x_\delta\|_2} \ge \frac{\|\alpha\|_2^2}{\sqrt{\|\alpha\|_2^2 + \|\alpha\|_C^2 \delta}} = \frac{\|\alpha\|_2}{\sqrt{1 + \delta \|\alpha\|_C^2 / \|\alpha\|_C^2}} ,$$

выражение в правой части выбором δ может быть сделано сколь угодно близким к $\|\alpha\|_2$.
Норма достигается в случае, если функция, равная $\alpha(t)$ на $[a', b']$ и нулю на $[a, b] \backslash [a', b']$, окажется непрерывной.

- Рассмотрим функционал $f(x) = x(t^*)$, где $x \in C[a, b]$, $t^* \in [a, b]$.
  Замечание. Этот функционал будем называть дельта-функционалом; название связано с тем, что в теории так называемых обобщённых функций он может быть записан в виде $f(x) = \int_a^b \delta(t - t^*) x(t)\, dt$, где δ – дельта-функция Дирака.
  Вычислим норму функционала: $|f(x)| = |x(t^*)| \le \|x\|_C$, равенство достигается, например, на элементе $x(t) \equiv 1$ (или любом другом, принрмающем максимальное по модулю значение при $t = t^*$), поэтому $\|f\| = 1$.

Примеры неограниченных линейных функционалов и операторов.
Типичной ситуацией для таких функционалов и операторов является следующая: если мы их рассматриваем в банаховом (полном) пространстве, то их область определения не совпадает со всем пространством; если же область определения совпадает с пространством, то пространство неполное. Причину этого мы обсудим позже.

- Дельта-функционал в пространствах $\tilde{L}_p[a, b]$ (неполные пространства). Этот функционал неограничен: на единичном шаре, где $\int_a^b |x(t)|^p\, dt \le 1$, значение $|x(t^*)|$ может быть сколь угодно большим.

- Оператор $A : \tilde{L}_p[a, b] \to C[a, b]$ вида $Ax = x$ неограничен по той же причине: на единичном шаре, где $\int_a^b |x(t)|^p\, dt \le 1$, значение $\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$ может быть сколь угодно большим.

- Оператор покомпонентного умножения в пространствах c_0, l_∞, l_p бесконечных последовательностей:
  $y = Ax$, $y_k = \alpha_k x_k$, где $\{\alpha_k\}$ – теперь уже неограниченная последовательность. Оператор неограничен на единичном шаре в любой из рассматриваемых норм, поскольку $Ae_k = \alpha_k e_k$, и $\|Ae_k\| = |\alpha_k|$ может быть сколь угодно большим. Область определения – те последовательности x, для которых $y = Ax$ лежит в том же пространстве.

- Оператор дифференцирования D: $Dx = \dot{x}$. Выше этот оператор трактовался как оператор из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$ и в таком качестве оказался ограниченным. Если же мы его рассмотрим как оператор из $C[a,b]$ в $C[a,b]$ с областью определения, совпадающей с $C^1[a,b]$, то такой оператор уже неограничен. В частности, элемент $x(t) = \sin\omega t$ при достаточно больших ω лежит на единичной сфере в $C[a,b]$, при этом для $(Dx)(t) = \dot{x}(t) = \omega\cos\omega t$ имеем $\|Dx\| = |\omega|$, при этом значение $|\omega|$ может быть выбрано сколь угодно большим.

Утверждение: ограниченный оператор переводит предкомпактное множество в предкомпактное, а компакт в компакт.
(Ограниченный линейный оператор равномерно непрерывен. Ранее было доказано, что непрерывные отображения (не обязательно линейные) переводят компакт в компакт, а равномерно непрерывные – предкомпактное множество в предкомпактное. Повторите рассуждение для случая линейного отображения.)

Компактный оператор. Оператор называется компактным, если образ произвольного ограниченного множества предкомпактен.

Альтернативное определение: образ произвольной ограниченной последовательности содержит фундаментальную подпоследовательность.

Утверждение: эти определения эквивалентны. (Было для случая отображений метрических пространств. Повторите.)

Утверждение: компактный оператор ограничен (и, следовательно, непрерывен). (Было для случая отображений метрических пространств. Повторите.)

Достатоное условие компактности линейного оператора: если образ единичного шара предкомпактен, то оператор компактен. (Докажите!)

Утверждение: единичный оператор компактен тогда и только тогда, когда пространство конечномерно. (Образ единичного шара – единичный шар, предкомпактный только в конечномерных пространствах.)

Примеры компактных операторов.

Оператор вложения $I : C^1[a,b] \to C[a,b]$, $Ix = x$. Образ ограниченного множества комрактен. Ограниченное множество в $C^1[a,b]$:
$\|x\|_{C^1} \leq M \Leftrightarrow \|x\|_C \leq M \wedge \|\dot{x}\|_C \leq M$.
Первое условие обеспечивает равномерную ограниченность, а второе равностепенную непрерывность, поскольку

$|t' - t''| < \varepsilon/M \Rightarrow |x(t') - x(t'')| = |\dot{x}(\tilde{t})| \cdot |t' - t''| < M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon$
(по формуле конечных приращений).

Интегральный оператор Фредгольма.
Снова рассматриваем оператор:
$y = Ax$, $y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$.
Докажем его компактность как оператора из $C[a,b]$ в $C[a,b]$. Для этого установим, что образ произвольного ограниченного множества предкомпактен. Согласно теореме Арцела-Асколи, предкомпактное множество в $C[a,b]$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Раномерная ограниченность (т.е. ограниченность в $C[a,b]$) вытекает из ограниченности оператора (была доказана). Осталось доказать равностепенную непрерывность для образа произвольного ограниченного множества, входящего в шар $\bar{S}_M(o)$ (для некоторого M).

$$|y(t') - y(t'')| = \left| \int_a^b K(t',s)x(s)\,ds - \int_a^b K(t'',s)x(s)\,ds \right| =$$
$$= \left| \int_a^b (K(t',s) - K(t'',s))x(s)\,ds \right| \le \int_a^b |(K(t',s) - K(t'',s))x(s)|\,ds =$$
$$= \int_a^b |K(t',s) - K(t'',s)| \cdot |x(s)|\,ds \le \int_a^b |K(t',s) - K(t'',s)| M\,ds$$

Функция $K(t,s)$ непрарывна на компакте $[a,b] \times [a,b]$ и, следовательно, равномерно непрерывна по теореме Кантора. Тогда
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \{\rho((t',s'),(t'',s'')) < \delta \Rightarrow |K(t',s') - K(t'',s'')| < \varepsilon/(M(b-a))\}$
В нашем случае $s' = s'' = s$, и $\rho((t',s),(t'',s)) = |t' - t''|$. Поэтому
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \{|t' - t''| < \delta \Rightarrow |K(t',s) - K(t'',s)| < \varepsilon/(M(b-a))\}$,
и тогда

$$|t' - t''| < \delta \Rightarrow |y(t') - y(t'')| \le \int_a^b |K(t',s) - K(t'',s)| M\,ds \le$$
$$\le \int_a^b \varepsilon/(M(b-a)) M\,ds = \varepsilon$$

Поскольку мы выбрали значение δ, общее для всех $x \in \bar{S}_M(o)$, тем самым мы доказали равностепенную непрерывность образа этого шара, а отсюда, с учётом ограниченности, следует предкомпактность.
Замечание. Поскольку множество, предкомпактное в $C[a,b]$, предкомпактно также и в $L_{1,2}[a,b]$, мы заодно доказали и компактность оператора Фредгольма с непрерывным ядром как оператора из $C[a,b]$ в эти пространства.
Попробуйте доказать компактность оператора Фредгольма как оператора из $\tilde{L}_1[a,b]$ в $C[a,b]$.

Утверждение: непрерывный функционал компактен.
(Замечание: слово "линейный"в этом разделе иногда опускаем.)
Доказательство. Непрерывный функционал ограничен, переводит произвольное ограниченное множество в ЛНП в ограниченное множество на вещественной оси. Такое множество предкомпактно по теореме Больцано-Вейерштрасса.

Оператор конечного ранга – оператор, область значений которого конечномерна.
Ранг оператора – размерность области значений оператора.
Ненулевой функционал – оператор первого ранга, поскольку его область значений – поле $\mathbb{K}$ – можно трактовать как пространство размерности единица.
Общий вид оператора конечного ранга. Пусть ранг оператора равен n, тогда в его образе выберем базис $\{e_1, \dots, e_n)\}$. Образ произвольного элемента x – линейная комбинация базисных элементов $\{e_j)\}$ с коэффициентами, зависящими от x, т.е.
$Ax = f_1(x)e_1 + \cdots + f_n(x)e_n$.
Утверждение: функционалы f_j – линейные. Действительно,
$A(\alpha x + \beta y) = f_1(\alpha x + \beta y)e_1 + \cdots + f_n(\alpha x + \beta y)e_n$.
С другой стороны,
$A(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax+\beta Ay = \alpha(f_1(x)e_1+\cdots+f_n(x)e_n)+\beta(f_1(y)e_1+\cdots+f_n(y)e_n)$.
Приравнивая коэффициенты при e_j, получаем:
$f_j(\alpha x + \beta y) = \alpha f_j(x) + \beta f_j(y)$.
Ограниченность оператора A эквивалентна ограниченность всех функционалов f_j.
Замечание: обычно, рассматривая операторы конечного ранга, подразумевают их ограниченность, так что слова "ограниченный" или "непрерывный" опускают.
Утверждение. Ограниченный оператор конечного ранга компактен. (Доказательство: образ произвольного ограниченного множества – ограниченное множество в конечномерном подпространстве, оно предкомпактно.)

Пример: оператор Фредгольма с $K(t, s) = u_1(t)v_1(s) + \cdots + u_n(t)v_n(s)$.
Образ оператора лежит в линейной оболочке $L\{u_1, \dots, u_n\}$ (по крайней мере, не шире), ранг оператора не превосходит n.
Замечание. Если каждая из систем $\{u_1, \dots, u_n\}$ и $\{v_1, \dots, v_n\}$ линейно независима, то ранг оператора в точности равен n.

Семейство ограниченных операторов. Понятие о равномерной ограниченности семейства операторов. (Нам в первую очередь будут интересны последовательности операторов, т.е. семейства, нумеруемые натуральным индексом.)
В общем случае: $\{A_\alpha\}$, индекс α, нумерующий операторы семейства, может принадлежать произвольному множеству.
Семейство ограниченных операторов равномерно ограничено, если
$\exists M \forall \alpha : \|A_\alpha\| \le M$.

Ограниченность множества значений равномерно ограниченного семейства операторов на любом элементе: $\forall x \in X \forall \alpha : \|A_\alpha x\| \leq M\|x\|$.

Утверждение: если семейство линейных операторов равномерно ограничено хотя бы на каком-нибудь шаре, то оно равномерно ограничено.
(Была получена оценка:
если $\exists M \, \forall x \in \bar{S}_r(a) \, \forall \alpha : \|A_\alpha x\| \leq M$, то $\forall \alpha : \|A_\alpha\| \leq 2M/r$.)

Теорема Принцип равномерной ограниченности.

Если множество значений семейства ограниченных операторов на каждом элементе банахова пространства ограничено, то семейство операторов равномерно ограничено.
То есть: если $\forall x \in X \exists C(x) \forall \alpha : \|A_\alpha x\| \leq C(x)$, то $\exists M \forall \alpha : \|A_\alpha\| \leq M$.
Мы докажем, что если семейство ограниченных операторов ***не является*** равномерно ограниченным, то ***не на каждом*** элементе банахова пространства множество значений этого семейства ограничено. То есть:
$\{\forall M > 0 \, \exists \alpha : \|A_\alpha\| > M\} \Rightarrow \{\exists x \in X \forall C > 0 \, \exists \alpha : \|A_\alpha x\| > C\}$

Доказательство.

1. Мы знаем, что если семейство линейных операторов равномерно ограничено хотя бы на каком-нибудь шаре, то оно равномерно ограничено (по норме). Поэтому если семейство ***не*** является равномерно ограниченным, но оно не ограничено ни на каком шаре положительного радиуса (ни на открытом, ни на замкнутом).

2. Выберем какой-либо ***замкнутый*** шар $\bar{S}_{r_0}(a_0)$ с центром a_0 и радиусом $r_0 \leq 1$. На ***открытом*** шаре $S_{r_0}(a_0)$ семейство $\{A_\alpha\}$ неограничено. Поэтому найдётся точка $a_1 \in S_{r_0}(a_0)$ и оператор A_{α_1} такие, что $\|A_{\alpha_1} a_1\| \geq 1$.

3. Выберем ***замкнутый*** шар $\bar{S}_{r_1}(a_1)$ с центром найденной точке a_1 и радиусом r_1, удовлетворяющий трём условиям:
1) $r_1 \leq 1/2$, 2) $\bar{S}_{r_1}(a_1) \subset \bar{S}_{r_0}(a_0)$ и 3) $\forall x \in \bar{S}_{r_1}(a_1) : \|A_{\alpha_1} x\| \geq 1/2$.
Такой шар существует. Второму условию можно удовлетворить, поскольку a_1 – внутренняя точка открытого шара $S_{r_0}(a_0)$, принадлежащая ему, а, значит, и замкнутому шару $\bar{S}_{r_0}(a_0)$ вместе с некоторой окрестностью – открытым шаром с центром в a_1, который, в свою очередь, содержит замкнутый шар меньшего радиуса. Третьему условию можно удовлетворить потому, что $\|A_{\alpha_1} x\|$ – непрерывный функционал относительно x, поскольку это композиция непрерывного оператора A_{α_1} и непрерывного функционала нормы. Значение этого функционала в точке a_1 не меньше единицы, поэтому в силу непрерывности найдётся некоторая окрестность этой точки (открытый шар, а, значит, и лежащий в нём замкнутый меньшего радиуса), на которой значение этого функционала не меньше одной второй. Таким образом, каждому из этих трёх условий по отдельности, очевидно, удовлетворяет свой замкнутый шар, а взяв наименьший них, мы удовлетворим всем трём уловиям одновременно.

4. Семейство $\{A_\alpha\}$ неограничено на *открытом* шаре $S_{r_1}(a_1)$, поэтому найдётся точка $a_2 \in S_{r_1}(a_1)$ и оператор A_{α_2} такие, что $\|A_{\alpha_2}a_2\| \geq 2$. Тогда найдётся и замкнутый шар $\bar{S}_{r_2}(a_2)$ с центром в этой точке такой, что $r_2 \leq 1/4$, $\bar{S}_{r_2}(a_2) \subset \bar{S}_{r_1}(a_1)$ и во всех точках этого шара $\|A_{\alpha_2}x\| \geq 2/2 = 1$. Доказательство существования такого шара аналогично доказательству существования шара $\bar{S}_{r_1}(a_1)$.

5. Продолжив эту процедуру, мы последовательно строим последовательность операторов A_{α_k} и последовательность вложенных замкнутых шаров $\dots \supset \bar{S}_{r_k}(a_k) \supset \bar{S}_{r_{k+1}}(a_{k+1}) \supset \dots$ таких, что $r_k \leq 2^{-k}$, $\|A_{\alpha_k}a_k\| \geq k$ и $\forall x \in \bar{S}_{r_k}(a_k) : \|A_{\alpha_k}x\| \geq k/2$.

6. Поскольку наше пространство банахово (полное ЛНП), мы можем применить принцип вложенных шаров, согласно которому система вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет в полном метрическом пространстве единственную общую точку x^*. Поскольку $\forall k : x^* \in \bar{S}_{r_k}(a_k)$, справедливы неравенства $\|A_{\alpha_k}x^*\| \geq k/2$, что означает, что на элементе x^* множество значений семейства $\{A_\alpha\}$ неограничено. Теорема доказана.

Замечание. Для произвольных (нелинейных) отображений это не так. Ограниченность значений последовательности функций в каждой точке не влечёт равномерной ограниченности этой последовательности.

Замечание. Теорема в полной мере справедлива и для семейств ограниченных линейных функционалов.

Продолжение непрерывного оператора, заданного на плотном множестве.

Теорема. Пусть X – ЛНП, $\tilde{X}$ – всюду плотный линеал, Y – банахово пространство и $\tilde{A} : \tilde{X} \to Y$ – непрерывный на $\tilde{X}$ линейный оператор. Тогда существует единственный линейный оператор $A : X \to Y$, являющийся непрерывным продолжением $\tilde{A}$, т.е. $\forall \tilde{x} \in \tilde{X} : A(\tilde{x}) = \tilde{A}(\tilde{x})$ и A непрерывен на X, при этом $\|A\| = \|\tilde{A}\|$.

Замечание. Было доказательство существования и единственности непрерывного продолжения для равномерно непрерывного оператора (не обязательно линейного), заданного на плотном множестве, со значениями в полном МП. Поскольку непрерывный линейный оператор равномерно непрерывен, можно было бы воспользоваться результатами доказанной теоремы, и тогда осталось бы доказать линейность полученного расширения и совпадение норм. Тем не менее, чтобы не дробить доказательство, повторим его с начала.

Доказательство.

1. Поскольку множество $\tilde{X}$ плотно в X, произвольный элемент $x \in X$ является пределом последовательности элементов из $\tilde{X}$: $x = \lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k$, где $\tilde{x}_k \in \tilde{X}$. Определим оператор A формулой $Ax = \lim_{k\to\infty} \tilde{A}\tilde{x}_k$

2. Докажем, что предел существует. Рассмотрим последовательность $y_k = \tilde{A}\tilde{x}_k \in Y$ и докажем её фундаментальность. Действительно, $\|y_k - y_m\| = \|\tilde{A}\tilde{x}_k - \tilde{A}\tilde{x}_m\| = \|\tilde{A}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_m)\| \leq \|\tilde{A}\| \cdot \|\tilde{x}_k - \tilde{x}_m\|$
Поскольку последовательность $\{\tilde{x}_k\}$ сходится, она фундаментальна, тогда фундаментальна и последовательность $\{y_k\}$. Поскольку пространство Y банахово, последовательнрость сходится.

3. Докажем, что предел определяется лишь элементом x и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности.
Пусть $\{\tilde{x}'_k\}$ – ещё одна последовательность элементов из $\tilde{X}$, сходящаяся к x, а $y'_k = \tilde{A}\tilde{x}'_k$. Последовательности $\{\tilde{x}_k\}$ и $\{\tilde{x}'_k\}$, сходящиеся к одному и тому же пределу, эквивалентны. Докажем, что последовательности $\{y_k\}$ и $\{y'_k\}$ также эквивалентны. Действительно,
$\|y'_k - y_k\| = \|\tilde{A}\tilde{x}'_k - \tilde{A}\tilde{x}_k\| = \|\tilde{A}(\tilde{x}'_k - \tilde{x}_k)\| \leq \|\tilde{A}\| \cdot \|\tilde{x}'_k - \tilde{x}_k\| \to 0$,
откуда вытекает, что пределы последовательностей $\{y_k\}$ и $\{y'_k\}$ совпадают. Корректность доказана.

4. Докажем, что оператор A является расширением (продолжением) оператора $\tilde{A}$, т.е. что на элементах из $\tilde{X}$ действие этих операторов совпадает.
Пусть $x \in \tilde{X}$, тогда в качестве аппроксимирующей можно взять постоянную последовательность, в которой $\tilde{x}_k = x$, и тогда
$Ax = \lim_{k\to\infty} \tilde{A}x = \tilde{A}x$.

5. Докажем линейность оператора A. Пусть x и x' – элементы X, а $\{\tilde{x}_k\}$ и $\{\tilde{x}'_k\}$ – аппроксимирующие последовательности для этих элементов. Тогда $\{\alpha\tilde{x}_k + \beta\tilde{x}'_k\}$ – аппроксимирующая последовательность для элемента $\alpha x + \beta x'$, и поэтому

$$A(\alpha x + \beta x') = \lim_{k\to\infty} \tilde{A}(\alpha\tilde{x}_k + \beta\tilde{x}'_k) = \lim_{k\to\infty} (\alpha\tilde{A}\tilde{x}_k + \beta\tilde{A}\tilde{x}'_k) =$$
$$= \alpha \lim_{k\to\infty} \tilde{A}\tilde{x}_k + \beta \lim_{k\to\infty} \tilde{A}\tilde{x}'_k = \alpha Ax + \beta Ax'$$

6. Докажем ограниченность оператора A и получим верхнюю оценку для его нормы.
Пусть $\{\tilde{x}_k\}$ – аппроксимирующая последовательность для элемента x, тогда $\tilde{x}_k \to x$, $\tilde{A}\tilde{x}_k \to Ax$ и в силу непрерывности норм $\|\tilde{x}_k\| \to \|x\|$, $\|\tilde{A}\tilde{x}_k\| \to \|Ax\|$.
Выпишем неравенство для элементов аппроксимирующей последовательности: $\|\tilde{A}\tilde{x}_k\| \leq \|\tilde{A}\| \cdot \|\tilde{x}_k\|$ и перейдём к пределу при $k \to \infty$. В результате получаем: $\|Ax\| \leq \|\tilde{A}\| \cdot \|x\|$. Это означает, что оператор A ограничен (и непрерывен), и $\|A\| \leq \|\tilde{A}\|$.

7. Получим нижнюю оценку для нормы оператора A и её значение.
Поскольку оператор A является расширением оператора $\tilde{A}$, справедливо неравенство $\|A\| \geq \|\tilde{A}\|$. Действительно,

$$\|\tilde{A}\| = \sup_{\|x\|\leq 1, x\in\tilde{X}} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1, x\in X} \|Ax\| = \|A\|$$

(супремум берётся по более широкому множеству). Тогда, учитывая полученную выше верхнюю оценку, получаем: $\|A\| = \|\tilde{A}\|$.

8. Построенный оператор является единственным непрерывным расширением оператора $\tilde{A}$, поскольку для любого такого расширения должно быть выполнено равенство
$Ax = \lim_{k\to\infty} A\tilde{x}_k = \lim_{k\to\infty} \tilde{A}\tilde{x}_k$

Замечание. Теорема в полной мере справедлива и для ограниченных линейных функционалов.

Замечание. Из теоремы следует, что при изучении линейного ограниченного оператора или функционала можно первоначально ограничиться анализом его действия на элементы плотного линеала, а далее переносить результат на всё пространство. Это бывает полезно и удобно, поскольку действие оператора на такие элементы може оказаться более простым, чем в общем случае. Например, для пространств, элементами которых являются бесконечные последовательности, в большинстве случаев в роли плотного линеала можно использовать множество обрывающихся последовательностей, для которых ряды превращаются в конечные суммы, и нет необходимости задумываться о сходимости таких рядов, возможности перестановки порядка суммирования и т.д. Для функциональных пространств в роли плотного множества могут выступать бесконечно гладкие функции (например, многочлены). В частности, в пространствах $L_p[a, b]$ можно брать множество гладких функций, обращающихся в нуль со всеми производными в окрестности границ отрезка (что особенно удобно при интегрировании по частям), либо, как альтернатива, множество кусочно постоянных функций (разрывных), принимающих конечное число значений (это тоже ниогда бывает полезно).

Следующая теорема касается продолжения функционала, заданного на подпространстве, на всё пространство с сохранением нормы. (Если он задан на незамкнутом линеале, следует предварительно его расширить на замыкание по непрерывности.) Предварительно – лемма об элементарном продолжении.

Лемма об элементарном продолжении.

Пусть X – вещественное ЛНП, $Y \subsetneq X$ – его нетривиальное (содержащее не только o) замкнутое подпространство, не совпадающее со всем пространством, и $x \in X\backslash Y$. Пусть на Y задан непрерывный линейный функционал f. Тогда существует непрерывный линейный функционал на прямой сумме Y и одномерного подпространства $\{\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}\}$, являющийся расширением f и имеющий ту же норму.
Замечание. Эта прямая сумма – линейная оболочка $L(Y, x)$.

Доказательство этой леммы – фейерверк удивительных идей и неожиданных поворотов мысли.

- Итак, уясним задачу. У нас есть подпространство Y и линейный ограниченный функционал f, определённый на этом подпространстве, при этом $\forall y \in Y : |f(y)| \leq \|f\| \cdot \|y\|$.
  У нас также есть элемент x, не лежащий в подпространстве Y, и мы хотим продолжить функционал на линейную оболочку $L(Y,x)$ элементы вида $\lambda x + y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in Y$, таким образом, чтобы норма такого расширенного функционала не превосходила норму исходного (а что уменьшиться эта норма не может, мы уже знаем).
  Любое расширение линейного функционала на такое множество определяется заданием значения функционала на элементе x:
  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda c + f(y)$, где $c = f(x)$. Таким образом, задать расширение – это задать константу c. Наша задача – доказать, что каковы бы ни были ЛНП и функционал f, эту константу всегда можно выбрать таким образом, чтобы при всех значениях $\lambda \in \mathbb{R}$ и $y \in Y$ выполнялось неравенство $|\lambda c + f(y)| \leq \|f\| \cdot \|\lambda x + y\|$.

- Сделаем первый шаг – избавимся от множителя λ.
  Если $\lambda = 0$, то неравенство выполнено при любом значении c.
  Если $\lambda \neq 0$, то поделим обе части неравенства на $|\lambda|$. В результате, с учётом линейности функционала, получаем:
  $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall \lambda \neq 0\, \forall y \in Y : |c + f(y/\lambda)| \leq \|f\| \cdot \|x + y/\lambda\|$
  Но при всевозможных $\lambda \neq 0$ и $y \in Y$ элемент y/λ пробегает то же самое подпространство Y, что и y. Поэтому мы можем упростить условие, заменив y/λ на y:
  $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall y \in Y : |c + f(y)| \leq \|f\| \cdot \|x + y\|$.

- Следующий шаг: превращаем неравенство для модуля в двойное неравенство для c:
  $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall y \in Y : -\|f\| \cdot \|x + y\| \leq c + f(y) \leq \|f\| \cdot \|x + y\|$
  и далее
  $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall y \in Y : -\|f\| \cdot \|x + y\| - f(y) \leq c \leq \|f\| \cdot \|x + y\| - f(y)$

- Следующий момент ключевой: "раздвоение" игрека. Мы переписываем последнее двойное неравенство в виде:
  $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall y_{1,2} \in Y : -\|f\| \cdot \|x + y_1\| - f(y_1) \leq c \leq \|f\| \cdot \|x + y_2\| - f(y_2)$
  Действительно, двойное неравенство – это система двух неравенств на c, каждое из которых должно выполняться при любом значении элемента $y \in Y$. Оттого, что для этого элемент в каждом из неравенств мы использовали своё обозначение, по сути ничего не изменилось.

- А теперь следующий шаг: изымаем центральную часть неравенства, константу c, и оставляем крайние:
  $\forall y_{1,2} \in Y : -\|f\| \cdot \|x + y_1\| - f(y_1) \leq \|f\| \cdot \|x + y_2\| - f(y_2)$
  Удивительный поворот: мы стремились доказать, что существует константа c, удовлетворяющая двойному неравенству, а пришли к нера-

венству, в котором этой константы нет! В чём смысл? Смысл здесь вот какой.
Левая часть неравенства при всевозможных $y_1 \in Y$ пробегает некоторое числовое множество, для которого константа c должна быть верхней гранью. Одновременно правая часть неравенства при всевозможных $y_2 \in Y$ пробегает другое числовое множество, для которого константа c должна быть уже нижней гранью. В каком случае такое возможно? В том случае, если точная верхняя грань "левого" множества не превосходит точной нижней грани "правого". А это будет так при условии, если ни один элемент "левого" множества не превосходит какого-либо элемента "правого". Поэтому выполнение последнего неравенства, не содержащего константу c, на самом деле гарантирует нам её существование.

- Теперь преобразовываем последнее неравенство, которое нам нужно доказать. Слагаемые с функционалом переносим налево, слагаемые с нормами направо:
$\forall y_{1,2} \in Y : f(y_2) - f(y_1) \leq \|f\| \cdot \|x + y_1\| + \|f\| \cdot \|x + y_2\|$,
или
$\forall y_{1,2} \in Y : f(y_2 - y_1) \leq \|f\| \cdot (\|x + y_1\| + \|x + y_2\|)$
Обратите внимание: выражение слева "живёт" на подпространстве Y и никак не связано с объемлющим пространством, ничего не знает о том, какая там норма за пределами Y и не содержит элемента x. Таким образом, нужно доказать, что каким бы ни был элемент x и как бы ни была устроена норма в объемлющем пространстве (эта норма присутствует в правой части) неравенство должно выполняться. Как ни удивительно, это действительно так.

- Итак, оцениваем левую часть:
$f(y_2 - y_1) \leq \|f\| \cdot \|y_2 - y_1\| = \dots$
От функционала осталась норма, которая присутствует и в правой части, но теперь нужно каким-то образом включить в это выражение элемент x, которого там до сих пор не было. Делается это так:
$\|f\| \cdot \|y_2 - y_1\| = \|f\| \cdot \|(y_2 + x) - (y_1 + x)\| \leq \|f\| \cdot (\|x + y_1\| + \|x + y_2\|)$
Воспользовались неравенством треугольника, которое позволило поставить точку в доказательстве.

Теорема Хана-Банаха.
Пусть X – вещественное ЛНП, $Y \subsetneq X$ – его нетривиальное (содержащее не только o) подпространство, не совпадающее со всем пространством. Пусть на Y задан непрерывный функционал f. Тогда существует непрерывный линейный функционал на X, являющийся расширением f и имеющий ту же норму.

Доказательство проведём для случая сепарабельного пространства. В этом пространстве найдётся счётное плотное множество $Q = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Первый шаг – продолжение функционала с сохранением нормы на линейную оболочку $L(Y, Q)$ последовательным применением леммы об элементарном продолжении: сначала продолжаем на $L(Y, x_1)$, затем на $L(Y, x_1, x_2)$ и т.д. Если окажется, что какой-то элемент x_m уже содержится в $L(Y, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$, то этот шаг пропускаем. Таким образом, мы сможем, в частности, вычислить значение функционала на каждом из элементов множества Q, выполнив конечное (для каждого из элементов своё) число шагов расширения функционала.

Поскольку множество Q всюду плотное, тем более будет всюду плотной линейная оболочка $L(Y, Q) \supset Q$. Таким образом, мы получили ограниченный функционал, определённый на плотном линеале. Следующий шаг – продолжение функционала на всё пространство по непрерывности, существование и единственность которого следует из доказанной выше теоремы.

Замечание. Доказательство теоремы в случае несепарабельных пространств требует использования леммы Цорна.

Замечание. На полунормированных пространствах рассуждения те же самые.

Замечание. Существует обобщение теоремы Хана-Банаха на комплексные ЛНП – теорема Сухомлинова.

Замечание. На операторы теорема не обобщается.

Раздел 7. Линейные операторы в ЛНП

Лекция 15 Сопряжённый пространства и сопряжённые операторы.

Напоминание: пространством X^*, сопряжённым к ЛНП X, называется ЛНП линейных ограниченных функционалов над X: $X^* = L_O(X, \mathbb{R})$.

Замечание. Мы рассматриваем случай вещественных пространств.

Замечание. Иногда выражение $f(x)$ записывают в симметричном виде: $f(x) =< x, f >$.

Утверждение. $\forall x \in X : f(x) = 0 \Rightarrow f = o$. Это определение нулевого функционала.

Утверждение. $\forall f \in X^* : f(x) = 0 \Rightarrow x = o$. То есть хотим доказать, что если значение всех непрерывных функционалов на некотором элементе равно нулю, то этот элемент может быть только нулевым.

Докажем, что для произвольного ненулевого элемента $x \in X$ найдётся $f \in X^*$ такой, что $f(x) \neq 0$. Рассмотрим одномерное подпространство $L(x) = \{\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Зададим на нём функционал f по правилу $f(x) = \|x\|$, тогда $f(\alpha x) = \alpha\|x\|$. Функционал непрерывен, его норма равна 1. По теореме Хана-Банаха его можно продолжить на всё пространство с сохранением нормы, тогда результирующий функционал будет элементом сопряжённого пространства, не зануляющимся на x.

Замечание. Если $f(x) = 0$, то говорят, что элементы $x \in X$ и $f \in X^*$ взаимно ортогональны.

Утверждение:

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)|$$

Действительно $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, а в случае $\|f\| = 1$ получаем $|f(x)| \leq \|x\|$. С другой стороны, только что доказано, что существует функционал с единичной нормой, для которого неравенство превращается в равенство.

Сравним с определением нормы функционала:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$$

Есть очевидная симметрия, но неполная: в предыдущем случае супремум всегда достигается, так что его можно заменить максимумом. В случае функционала норма может не достигаться.

Теперь мы можем получить ещё одну формулу для нормы оператора:

$$\|A\| = \sup_{\|f\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |f(Ax)| = \sup_{\|f\| \leq 1, \|x\| \leq 1} | < Ax, f > | \,.$$

Разумеется, всюду "≤ 1"можно заменить на "$= 1$".

Второе сопряжённое пространство X^{**} – пространство, сопряжённое к X^*.

Существует естественное вложение X в X^{**}: каждый элемент $x \in X$ задаёт функционал φ_x над X^* по правилу $\varphi_x(f) = f(x)$.
Норма этого функционала равна

$$\|\varphi_x\| = \sup_{\|f\|=1} |\varphi_x(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|,$$

т.е. вложение изометрическое. Пишут: $X \subset X^{**}$ (в том смысле, что X^{**} содержит изометрическую копию X).
Если $X = X^{**}$, то пространство X называется рефлексивным, а если $X \subsetneq X^{**}$, то нерефлексивным.

Утверждение: X рефлексивно $\Leftrightarrow$ X^* рефлексивно (доказать).

Замечание. Если существует функционал $f \in X^*$, норма которого не достигается, то пространство нерефлексивно (доказать).

Примеры. Здесь нам будет удобно иногда использовать обозначение $f(x) =< x, f >$, $x \in X$, $f \in X^*$.

1. Общий вид линейного функционала на $\mathbb{R}^n$.
   В силу линейности функционала
   $f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k f\left(e_k\right)$.
   Здесь, как обычно, e_k – вектор, k-я компонента которого равна единице, а остальные нулю.
   Обозначим $f_k := f(e_k)$ (здесь f_k – число!). Тогда
   $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f_k$.
   Таким образом, произвольный линейный функционал на $\mathbb{R}^n$ определяется набором из n чисел $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – вектором в вещественном n-мерном пространстве. При этом линейной комбинации линейных функционалов соответствует линейная комбинация представляющих их векторов (доказать). Отсюда следует, что линейное пространство линейных функционалов над $\mathbb{R}^n$ линейно изоморфно $\mathbb{R}^n$.

2. Общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathbb{R}^n_{\max}$, его норма.
   Утверждение: если $X = \mathbb{R}^n_{\max}$, то $X^* = \mathbb{R}^n_1$, и $< x, f >= \sum_{k=1}^n x_k f_k$.
   Доказательство.
   Мы установили, что произвольный линейный функционал в $\mathbb{R}^n$ имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f_k$. Убедимся в его ограниченности в $\mathbb{R}^n_{\max}$ и найдём его норму:
   $|f(x)| = |\sum_{k=1}^n x_k f_k| \le \sum_{k=1}^n |x_k f_k| = \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |f_k| \le$
   $\le \sum_{k=1}^n \|x\|_\infty \cdot |f_k| = \|f\|_1 \cdot \|x\|_\infty$.
   Равенство достигается при $x_k = \operatorname{sign} f_k$, откуда следует, что
   $\|f\|_{(\mathbb{R}^n_{\max})^*} = \|f\|_1$, т.е. норма функционала f равна норме представляющего его вектора в пространстве $\mathbb{R}^n_1$.
   Таким образом, пространство $(\mathbb{R}^n_{\max})^*$ изоморфно $\mathbb{R}^n_1$ как ЛНП, поэтому эти пространства обычно отождествляют и пишут: $(\mathbb{R}^n_{\max})^* = \mathbb{R}^n_1$.

3. Общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathbb{R}^n_1$, его норма. Утверждение: если $X = \mathbb{R}^n_1$, то $X^* = \mathbb{R}^n_{\max}$, и $< x, f >= \sum_{k=1}^n x_k f_k$.
Доказательство.
Произвольный линейный функционал в $\mathbb{R}^n$ имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f_k$. Убедимся в его ограниченности в $\mathbb{R}^n_1$ и найдём его норму:
$|f(x)| = |\sum_{k=1}^n x_k f_k| \leq \sum_{k=1}^n |x_k f_k| = \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |f_k| \leq$
$\leq \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \cdot \|x\|_1$.
Равенство достигается на элементе $x = e_{k_0}$, где k_0 – тот номер, для которого $\|f\|_\infty = |f_{k_0}|$. Отсюда вытекает, что $\|f\|_{(\mathbb{R}^n_1)^*} = \|f\|_\infty$ и, тем самым, $(\mathbb{R}^n_1)^* = \mathbb{R}^n_{\max}$.
Мы видим, что пространства $\mathbb{R}^n_{\max}$ и $\mathbb{R}^n_1$ взаимно сопряжены и, следовательно, являются пространствами рефлексивными.

4. Общий вид линейного ограниченного функционала на c_0, его норма. Утверждение: если $X = c_0$, то $X^* = l_1$, и $< x, f >= \sum_{k=1}^\infty x_k f_k$.
Доказательство.
Рассмотрим сначала плотное в c_0 множество обрывающихся последовательностей вида $x = \sum_{k=1}^N x_k e_k$, где N – номер последней ненулевой компоненты последовательности x. Тогда для произвольного линейного функционала f (не обязательно ограниченного) справедливо равенство
$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^N x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^N x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^N x_k f_k$,
где $f_k = f(e_k)$. Таким образом, действие линейного функционала на обрывающихся последовательностях определяется его значениями на элементах e_k.
Оценим модуль функционала на элементах плотного множества:
$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^N x_k f_k\right| \leq \sum_{k=1}^N |x_k f_k| =$
$= \sum_{k=1}^N |x_k| \cdot |f_k| \leq \sum_{k=1}^N |f_k| \cdot \|x\|_\infty$,
равенство достигается на элементе x, для которого $x_k = \operatorname{sign} f_k$ при $k \leq N$ и $x_k = 0$ при $k > N$. Если ряд $\sum_{k=1}^\infty |f_k|$ расходится, то функционал неограничен, поскольку отношение $|f(x)|/\|x\|_\infty$ выбором N может быть сделано сколь угодно большим. Если же ряд сходится, то
$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^N |f_k| \cdot \|x\|_\infty \leq \sum_{k=1}^\infty |f_k| \cdot \|x\|_\infty = \|f\|_1 \cdot \|x\|_\infty$.
За исключением случаев, когда последовательность f_k обрывается, равенство не достигается, однако разность правой и левой части на единичном шаре может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, множество ограниченных на плотном множестве линейных функционалов – это множество функционалов, для которых последовательность $f_k = f(e_k)$ принадлежит l_1, а норма функционала на плотном множестве – это норма указанной последовательности в l_1.
Ограниченный на плотном множестве функционал может быть по непрерывности единственным образом продолжен на всё пространство с сохранением нормы. Поскольку произвольный элемент $x \in c_0$ является пределом последовательности своих срезок
$x^{(N)} = (x_1, \ldots x_N, 0, \ldots)$, такое продолжение даётся формулой

$< x, f >= \lim_{N\to\infty} < x^{(N)}, f >= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k f_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.
Таким образом, не только на обрывающихся последовательностях, но и на всём пространстве c_0 действие ограниченного линейного функционала полностью определяется значениями элементов последовательности $f_k = f(e_k)$, при этом такая последовательность лежит в l_1 и норма функционала совпадает с нормой последовательности в l_1. Отсюда следует, что $c_0^* = l_1$ (как всегда, с точностью до изоморфизма).

5. Общий вид линейного ограниченного функционала на l_1, его норма.
Утверждение: если $X = l_1$, то $X^* = l_\infty$, и $< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.
Доказательство.
Снова рассмотрим плотное множество обрывающихся последовательностей и действие на нём линейного функционала:
$f(x) = \sum_{k=1}^{N} x_k f_k$, где $f_k = f(e_k)$, и номер последней ненулевой компоненты последовательности x не превосходит N. Оценим модуль функционала на элементах плотного множества:
$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{N} x_k f_k\right| \le \sum_{k=1}^{N} |x_k f_k| = \sum_{k=1}^{N} |x_k| \cdot |f_k| \le$
$\le \max_{k\le N} |f_k| \sum_{k=1}^{N} |x_k| = \max_{k\le N} |f_k| \cdot \|x\|_1$,
равенство достигается на элементе $x = e_{k_0}$, где k_0 – тот номер, для которого $\max_{k\le N} |f_k| = |f_{k_0}|$.
Если последовательность f_k неограничена, то функционал также неограничен, поскольку выбором N отношение $|f(x)|/\|x\|_1$ может быть сделано сколь угодно большим. Если же последовательность f_k ограничена, то $|f(x)| \le \sup_k |f_k| \cdot \|x\|_1 = \|f\|_\infty \cdot \|x\|_1$,
равенство достигается, если у множества $\{|f_k|\}$ есть максимальный элемент и не достигается в противном случае. Тем не менее, в любом случае разность правой и левой части на единичном шаре может быть сделана сколь угодно малой, так что норма функционала на плотном множестве совпадает с $\|f\|_\infty$.
Далее мы снова продолжаем ограниченный функционал на всё пространство l_1 по непрерывности с сохранением нормы рядом
$< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$, который сходится для ограниченных последовательностей f_k. В результате мы получаем, что $l_1^* = l_\infty$.
Мы видим, что $c_0^{**} = l_1^* = l_\infty \ne c_0$, поэтому пространства c_0, l_1 и l_∞ не являются рефлексивными.

6. Общий вид линейного ограниченного функционала на c и его норма.
Утверждение: если $X = c$, то $X^* = R^1 + l_1$, и
$< x, f >= x_\infty f_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$, где $x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k$.
Доказательство.
Обозначим, как и раньше, $f_k = f(e_k)$. Было установлено, что необходимым и достаточным условием ограниченности линейного функционала на c_0 является принадлежность последовательности f_k пространству l_1. Однако пространство c_0 является подпространством пространства c, поэтому принадлежность последовательности f_k пространству l_1 является необходимым (но пока ещё не достаточным) условием огра-

ниченности функционала на c. Будем считать это условие выполненным.

Заметим теперь, что, в отличие от рассмотренных пространств c_0 и l_1, обрывающиеся последовательности не образуют плотное множество в c. Поэтому, помимо элементов e_k, рассмотрим дополнительно элемент $\hat{e} \in c$ такой, что все его компоненты равны единице, и обозначим $f(\hat{e}) = \hat{f}$. Произвольный элемент $x \in c$ представляется в виде $x = x_\infty \hat{e} + x'$, где $x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k$, а $x' = x - x_\infty \hat{e} \in c_0$, поскольку $x'_k = x_k - x_\infty \to 0$. Тогда для произвольного линейного функционала над c справедливо равенство

$f(x) = f(x_\infty \hat{e} + x') = x_\infty \hat{f} + f(x')\,.$

Но $x' \in c_0$, поэтому мы можем воспользоваться полученным ранее результатом и написать:

$f(x') = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k f_k = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_\infty) f_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k - x_\infty \sum_{k=1}^{\infty} f_k$

(представление в виде разности рядов корректно, поскольку оба ряда сходятся), и тогда

$f(x) = x_\infty \hat{f} + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k - x_\infty \sum_{k=1}^{\infty} f_k = x_\infty f_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k\,,$

где $f_\infty = \hat{f} - \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,.$

Из полученной формулы видно, что условие $f \in l_1$ является не только необходимым, но и достаточным для ограниченности функционала:

$|f(x)| = |x_\infty f_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k| \le |x_\infty| \cdot |f_\infty| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot |f_k| \le$

$\le |f_\infty| \cdot \|x\|_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \cdot \|x\|_\infty = (|f_\infty| + \|f\|_1) \cdot \|x\|_\infty$

Из полученной оценки следует, что $\|f\|_{c^*} \le |f_\infty| + \|f\|_1$. Чтобы показать, что здесь на самом деле равенство, рассмотрим элемент $x \in c$, принадлежащий единичной сфере, для которого $x_k = \operatorname{sign} f_k$ при $k \le N$ и $x_k = \operatorname{sign} f_\infty$ при $k > N$, где N – некоторое натуральное число. В этом случае $x_\infty = \operatorname{sign} f_\infty$ и

$f(x) = |f_\infty| + \sum_{k=1}^{N} |f_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k \operatorname{sign} f_\infty =$

$= |f_\infty| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| - \sum_{k=N+1}^{\infty} |f_k| (1 - \operatorname{sign}(f_k f_\infty))$

В силу $f \in l_1$ последняя сумма с ростом N стремится к нулю.

Замечание. Пространство c рефлексивным не является: пространство $c^* = R^1 + l_1$ изоморфно l_1 (со сдвигом на единицу в индексации), и поэтому c^{**} изоморфно l_∞.

7. Общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathbb{R}_2^n = E^n$, его норма.

   Утверждение: если $X = E^n$, то $X^* = E^n$, и $< x, f >= \sum_{k=1}^{n} x_k f_k$.

   Доказательство.

   Произвольный линейный функционал в $\mathbb{R}^n$ имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k$. Убедимся в его ограниченности в E^n и найдём его норму:

   $|f(x)| = |\sum_{k=1}^{n} x_k f_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2 \cdot \|x\|_2.$

   Воспользовались неравенством КБШ, равенство достигается в случае, когда векторы x и f пропорциональны. Отсюда вытекает, что $\|f\|_{(E^n)^*} = \|f\|_2$, и $(E^n)^* = E^n$.

   Поскольку $(E^n)^{**} = (E^n)^* = (E^n)$, пространство E^n, рефлексивно.

8. Общий вид линейного ограниченного функционала на l_2, его норма.
Утверждение: если $X = l_2$, то $X^* = l_2$, и $< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.
Доказательство.
Рассматриваем плотное множество обрывающихся последовательностей, на элементах которого
$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{N} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{N} x_k f_k$, где $f_k = f(e_k)$.
Оценим модуль с помощью неравенства КБШ:
$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{N} x_k f_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k|^2\right)^{1/2} =$
$= \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k|^2\right)^{1/2} \cdot \|x\|_2$,
равенство достигается, когда элементы последовательностей x и f пропорциональны при $k \le N$.
Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2$ расходится, то функционал неограничен, поскольку отношение $|f(x)|/\|x\|_2$ может быть сколь угодно большим. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2$ сходится, т.е. $f \in l_2$, то $|f(x)| \le \|f\|_2 \cdot \|x\|_2$, функционал ограничен на плотном множестве и единственным образом продолжается по непрерывности на всё пространство l_2 формулой
$< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.
Поскольку $| < x, f > | \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2 \cdot \|x\|_2$, причём равенство достигается в случае пропорциональности теперь уже бесконечных последовательностей x и f, отсюда следует, что норма функционала совпадает с нормой представляющей его последовательности в l_2, и $l_2^* = l_2$.
Поскольку $l_2^{**} = l_2^* = l_2$, пространство l_2 рефлексивно.

9. Общий вид линейного ограниченного функционала на $L_2[a, b]$, его норма (без доказательства общности).
Утверждение: если $X = L_2[a, b]$, то $X^* = L_2[a, b]$, и

$$< x, f >= \int_a^b x(t) f(t)\, dt$$

(интеграл понимается в смысле Лебега).
Это утверждение мы доказывать не будем.
Замечание: здесь мы отждествляем функционал и представляющую его функцию $f \in L_2[a, b]$ подобно тому, как раньше мы отождествляли функционал и представляющую его последовательность. Разумеется, речь здесь идёт об изоморфизме: всякому ограниченному линейному функционалу сопоставляется функция, с помощью которой он записывается, при этом норма функционала в $L_2^*[a, b]$ совпадает с нормой функции в $L_2[a, b]$. Последний факт вытекает из неравенства КБШ для функций:

$$| < x, f > | = \left|\int_a^b x(t) f(t)\, dt\right| \le \|f\|_2 \cdot \|x\|_2$$

и того обстоятельства, что равенство достигается для функций $x(t)$, отличающихся от $f(t)$ числовым множителем.
Из приведённых рассуждений следует включение (с точностью до изоморфизма) $L_2[a,b] \subset L_2^*[a,b]$: пространство $L_2[a,b]$ изометрически вкладывается в $L_2^*[a,b]$. Недоказанным остался тот факт, что приведённое представление является общим, т.е. что в пространстве $L_2[a,b]$ не существуют других линейных ограниченных функционалов, не представляющихся в виде интеграла от произведения $x \in L_2[a,b]$ и $f \in L_2[a,b]$. Этот факт будет доказан в дальнейшем (в следующем семестре) при изучении гильбертовых пространств.
Поскольку $L_2^{**}[a,b] = L_2^*[a,b] = L_2[a,b]$, пространство $L_2[a,b]$ рефлексивно.
Замечание. Разумеется, мы помним, что элементами $L_2[a,b]$ являются не индивидуальные функции, а классы функций, совпадающих почти всюду на $[a,b]$.

Сопряжённые показатели.
Положительные числа p и q называются сопряжёнными показателями, если выполняются следующие, эквивалентные друг другу, равенства:

$$(p-1)(q-1) = 1$$
$$p + q = pq$$
$$p = \frac{q}{q-1} \qquad q = \frac{p}{p-1}$$
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Примеры: $8/3$ и $8/5$, $23/7$ и $23/16$, 3 и $3/2$, 4 и $4/3$, 5 и $5/4$, 10 и $10/9$, 50 и $50/49$, 100 и $100/99$.
Один из показателей лежит на полуинтервале $(1,2]$, другой на луче $[2,\infty)$.
Особый случай равенства показателей: 2 и 2.

Неравенство Юнга.
$$uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$
Геометрическое доказательство (кривая $v = u^{p-1}$ или $u = v^{q-1}$ разделяет первый квадрант, рассмотреть площади, отсекаемые вертикалью и горизонталью, сравнить с площадью прямоугольника).
Аналитическое доказательство: функция $\ln$ выпукла вверх, рассмат-

риваем и преобразовываем неравенство Йенсена при $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$:

$$\ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \geq \frac{\ln a}{p} + \frac{\ln b}{q} = \ln\left(a^{1/p} b^{1/q}\right)$$

$$u = a^{1/p} \qquad v = b^{1/q}$$

$$\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq uv$$

Равенство при $a = b$, т.е. при $u^p = v^q$.

Неравенство Гёльдера для конечных последовательностей.

Рассмотрим n-мерные вектора $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$ с неотрицательными компонентами, удовлетворяющие условиям нормировки:
$\sum_{j=1}^n u_j^p = \sum_{j=1}^n v_j^q = 1$.
Запишем для каждой пары компонент неравенство Юнга
$u_j v_j \leq u_j^p/p + v_j^q/q$
и просуммируем по j:

$$\sum_{j=1}^n u_j v_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{u_j^p}{p} + \frac{v_j^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^n u_j^p + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^n v_j^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Неравенство превращается в равенство при $u_j^p = v_j^q$.

Пусть теперь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – n-мерные вектора с неотрицательными компонентами. Представим их в виде $x = Au$, $y = Bv$, где u и v удовлетворяют условиям нормировки. Тогда
$\sum_{j=1}^n x_j^p = A^p \sum_{j=1}^n u_j^p = A^p$,
$\sum_{j=1}^n y_j^q = B^q \sum_{j=1}^n v_j^q = B^q$,
т.е.
$A = \left(\sum_{j=1}^n x_j^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{j=1}^n y_j^q\right)^{1/q}$.
Отсюда
$\sum_{j=1}^n x_j y_j = AB \sum_{j=1}^n u_j v_j \leq AB$.
Неравенство превращается в равенство, если вектора с компонентами x_j^p и y_j^q отличаются множителем.

Откажемся от предположения о неотрицательности компонент векторов x и y и применим полученное неравенство к их абсолютным величинам. Тогда
$\left|\sum_{j=1}^n x_j y_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot |y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q}$.
Неравенство превращается в равенство, если вектора с компонентами $|x_j|^p \operatorname{sign} x_j$ и $|y_j|^q \operatorname{sign} y_j$ отличаются множителем.

Полученное неравенство носит название неравенства Гёльдера.

(Замечание. Можно вектора считать комплексными, ничего не изменится.)

Частным случаем этого неравенства при $p = q = 2$ является неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

10. Общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathbb{R}_p^n$ $(1 < p < \infty)$, его норма.
Утверждение: если $X = \mathbb{R}_p^n$, то $X^* = \mathbb{R}_q^n$, где p и q – сопряжённые показатели, и $< x, f >= \sum_{k=1}^n x_k f_k$.
Доказательство.
Произвольный линейный функционал в $\mathbb{R}^n$ имеет вид
$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f_k$. Убедимся в его ограниченности в $\mathbb{R}_p^n$ и найдём его норму, воспользовавшись неравенством Гёльдера:
$|f(x)| = |\sum_{k=1}^n x_k f_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |f_k|^q\right)^{1/q} = \|f\|_q \cdot \|x\|_p$.
Равенство достигается в случае, когда векторы с компонентами $|x_k|^p \operatorname{sign} x_k$ и $|f_k|^q \operatorname{sign} f_k$ пропорциональны, т.е. x_k пропорциональны $|f_k|^{q/p} \operatorname{sign} f_k$. Отсюда вытекает, что $\|f\|_{(\mathbb{R}_p^n)^*} = \|f\|_q$, и $(\mathbb{R}_p^n)^* = \mathbb{R}_q^n$.
Поскольку $(\mathbb{R}_p^n)^{**} = (\mathbb{R}_q^n)^* = \mathbb{R}_p^n$, пространства $\mathbb{R}_p^n$ рефлексивны.
Замечание. При $p = q = 2$ приходим к рассмотренному ранее случаю пространства E^n.

Неравенство Гёльдера для бесконечных последовательностей.

Обобщим неравенство Гёльдера на бесконечные последовательности. Пусть x и y – последовательности, для которых сходятся ряды из p-х и q-х степеней модулей соответственно:
$\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < \infty$, $\sum_{j=1}^\infty |y_j|^q < \infty$.
Тогда
$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q} \leq$
$\leq \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^\infty |y_j|^q\right)^{1/q} < \infty$.
Это значит, что ряд с неотрицательными членами $\sum_{j=1}^\infty |x_j y_j|$ сходится, поскольку его частичные суммы ограничены в совокупности, и тогда ряд $\sum_{j=1}^\infty x_j y_j$ сходится абсолютно.

Теперь мы можем перейти к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве Гёльдера и получить неравенство Гёльдера для рядов:
$\left|\sum_{j=1}^\infty x_j y_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^\infty |y_j|^q\right)^{1/q}$.
Неравенство превращается в равенство, если последовательности с компонентами $|x_j|^p \operatorname{sign} x_j$ и $|y_j|^q \operatorname{sign} y_j$ отличаются множителем.

11. Общий вид линейного ограниченного функционала на l_p $(1 < p < \infty)$, его норма.
Утверждение: если $X = l_p$, то $X^* = l_q$, где p и q – сопряжённые показатели, и $< x, f >= \sum_{k=1}^\infty x_k f_k$.
Доказательство.

Рассматриваем плотное множество обрывающихся последовательностей, на элементах которого
$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{N} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{N} x_k f_k$, где $f_k = f(e_k)$.
Оценим модуль с помощью неравенства Гёльдера:
$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{N} x_k f_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k|^q\right)^{1/q} =$
$= \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k|^q\right)^{1/q} \cdot \|x\|_p$,
равенство достигается, когда элементы последовательностей
$|x_k|^p \operatorname{sign} x_k$ и $|f_k|^q \operatorname{sign} f_k$ пропорциональны при $k \le N$.
Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q$ расходится, то функционал неограничен, поскольку отношение $|f(x)|/\|x\|_p$ может быть сколь угодно большим. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q$ сходится, т.е. $f \in l_q$, то $|f(x)| \le \|f\|_q \cdot \|x\|_p$, функционал ограничен на плотном множестве и единственным образом продолжается по непрерывности на всё пространство l_p формулой
$< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.
Поскольку $| < x, f > | \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q\right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} = \|f\|_q \cdot \|x\|_p$, причём равенство достигается в случае пропорциональности теперь уже бесконечных последовательностей $|x_k|^p \operatorname{sign} x_k$ и $|f_k|^q \operatorname{sign} f_k$ (т.е. пропорциональности x_k и $|f_k|^{q/p} \operatorname{sign} f_k$), отсюда следует, что норма функционала совпадает с нормой представляющей его последовательности в l_q, и $l_p^* = l_q$.
Поскольку $l_p^{**} = l_q^* = l_p$, пространства l_p при $p \in (1, \infty)$ рефлексивны.
Замечание. При $p = q = 2$ приходим к рассмотренному ранее случаю пространства l_2.

Неравенство Гёльдера для функций.
Хотим доказать, что

$$\left|\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right| \le \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Делаем подстановку: $|x(t)| = Au(t)$, $|y(t)| = Bv(t)$, где константы A и B выбираются из условия

$$\int_a^b u^p(t)\,dt = \int_a^b v^q(t)\,dt = 1\,,$$

тогда

$$A = \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} = \|x\|_p\,, B = \left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q} = \|y\|_q$$

(проверьте!). Заметим, что

$$\int_a^b u(t)v(t)\,dt \le \int_a^b \left(\frac{u^p(t)}{p} + \frac{v^q(t)}{q}\right) dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

(воспользовались неравенством Юнга под знаком интеграла), тогда

$$\left|\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right| \le \int_a^b |x(t)y(t)|\;dt = AB\int_a^b u(t)v(t)\,dt \le$$
$$\le AB = \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Функции не обязательно непрерывные. Интегралы могут пониматься как в смысле Римана, так и в смысле Лебега. Необходимо лишь, чтобы все эти интегралы сходились. В этом случае можно интегрировать нестрогое неравенство Юнга.

12. Общий вид линейного ограниченного функционала на $L_p[a,b]$ $(1 < p < \infty)$, его норма (без доказательства общности).
Утверждение: если $X = L_p[a,b]$, то $X^* = L_q[a,b]$, где p и q – сопряжённые показатели, и

$$< x, f >= \int_a^b x(t)f(t)\,dt$$

(интеграл понимается в смысле Лебега).
Это утверждение мы доказывать не будем.
Замечание: здесь мы снова отждествляем функционал и представляющую его функцию $f \in L_q[a,b]$ (точнее, класс функций). Разумеется, как и раньше, речь здесь идёт об изоморфизме: всякому ограниченному линейному функционалу сопоставляется функция (или её класс), с помощью которой этот функционал записывается, при этом норма функционала в $L_p^*[a,b]$ совпадает с нормой функции в $L_q[a,b]$. Последний факт вытекает из неравенства Гёльдера для функций

$$| < x, f > | = \left|\int_a^b x(t)f(t)\,dt\right| \le \|f\|_q \cdot \|x\|_p$$

и того обстоятельства, что равенство достигается для
$x(t) = |f(t)|^{q/p}\operatorname{sign} f(t)\cdot \mathrm{const}$.
Это доказывает включение (с точностью до изоморфизма)
$L_q[a,b] \subset L_p^*[a,b]$: пространство $L_q[a,b]$ изометрически вкладывается в $L_p^*[a,b]$. Недоказанным остался тот факт, что приведённое представление является общим, т.е. что в пространстве $L_p[a,b]$ не существуют других линейных ограниченных функционалов, не представляющихся в виде интеграла от произведения $x \in L_p[a,b]$ и $f \in L_q[a,b]$.
Поскольку $L_p^{**}[a,b] = L_q^*[a,b] = L_p[a,b]$, пространства $L_p[a,b]$ при $p \in (1,\infty)$ рефлексивны.
Замечание. При $p = q = 2$ мы приходим к случаю пространства

$L_2[a, b]$.
Замечание. Напомню, что элементами $L_{p,q}[a, b]$ являются не индивидуальные функции, а классы функций, совпадающих почти всюду на $[a, b]$.

13. Общий вид линейного ограниченного функционала на $C[a, b]$, его норма (без доказательства).
Утверждение: если $X = C[a, b]$, то $X^* = V[a, b]$ – пространство классов функций ограниченной вариации, и

$$< x, f >= \int_a^b x(t)\, df(t)$$

(интеграл Стилтьеса).
Это утверждение (ещё одна теорема Рисса) мы доказывать не будем, однако поясним смысл терминов.

Рассмотрим разбиение отрезка $[a, b]$ точками $t_0 = a, t_1, \ldots, t_N = b$ и сумму вида $\sum_{j=1}^{N} |f(t_j) - f(t_{j-1})|$. Если для функции f множество значений таких сумм для всевозможных разбиений ограничено, то f называется функцией ограниченной вариации, а точная верхняя грань таких сумм по всем разбиениям называется вариацией функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначается $V_a^b(f)$. Функции ограниченной вариации образуют линейное пространство, а вариация является в этом пространстве полунормой: элементы, на которых она обращается в нуль – это константы. Соответственно, после факторизации мы получаем нормированное пространство классов функций ограниенной вариации, элементы каждого класса отличаются друг от друга на постоянную.
Теперь об интеграле Стилтьеса. Мы можем снова устроить разбиение отрезка $[a, b]$ точками $\{t_j\}$, выбрать на каждом отрезке $[t_{j-1}, t_j]$ точку ξ_j и рассмотреть интегральную сумму $\sum_{j=1}^{N} x(\xi_j)(f(t_j) - f(t_{j-1}))$. Если при стремлении ранга разбиения к нулю такие суммы стремятся к пределу, не зависящему от выбора точек $\{t_j\}$ и $\{\xi_j\}$, то такой предел называется интегралом Стилтьеса (или Стильтьеса) от x по f на отрезке $[a, b]$ и обозначается $\int_a^b x(t)\, df(t)$. Доказывается, что такой интеграл гарантированно существует, если функция x непрерывна, а f имеет ограниченную вариацию. Очевидно, для функций f, отличающихся на константу и входящих в один класс эквивалентности, интегралы совпадают. Обычный интеграл Римана – это интеграл Стилтьеса для $f(t) = t + \mathrm{const}$.
В теореме Рисса утверждается, что произвольный ограниченный линейный функционал на $C[a, b]$ представляется в виде интеграла Стилтьеса от непрерывной функции по некоторой функции ограниченной вариации f, при этом функция f определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого и норма функционала равна вариа-

ции функции f по отрезку $[a, b]$.

Нескльо слов о структуре функций ограниченной вариации. Первый факт: любая такая функция представляется в виде суммы двух монотонных функций (невозрастающей и неубывающей). Как известно, монотонные функции почти всюду непрерывны – точнее, могут иметь не более чем счётный набор точек разрыва первого рода. Соответственно, это свойство переностися и на функции ограниченной вариации: каждая такая функция представляется в виде суммы кусочно постоянной (с конечным или счётным набором точек разрыва, причём сумма модулей скачков конечна) и непрерывной функций.

Каждый скачок порождает дельта-функционал. Например, если функция f равна f_- при $t < t^*$ и f_+ при $t > t^*$, где $t^* \in (a, b)$, то $\int_a^b x(t)\, df(t) = x(t^*)(f_+ - f_-)$.

Непрерывные функции ограниченной вариации, в свою очередь, представляются в виде суммы абсолютно непрерывной и сингулярно непрерывной функций. Абсолютно непрерывная функция почти всюду дифференцируема и представляется в виде $f(t) = f(a) + \int_a^t \phi(\tau)\, d\tau$, где ϕ – некоторая интегрируемая функция. В этом случае $df(t) = \phi(t)\, dt$ и $\int_a^b x(t)\, df(t) = \int_a^b x(t)\phi(t)\, dt$.

Наконец, сингулярно непрерывная функция почти всюду имеет производную, равную нулю, но при этом не равна константе. Для такой функции, соответственно, не будет справедливой формула Ньютона-Лейбница. Наиболее известный пример такой функции – функция Кантора.

Типы сходимости в пространствах операторов, функционалов и в исходном ЛНП.

Мы знаем обычную сходимость (по норме) в исходном пространстве X, сходимость по норме (т.е. равномерную) в пространствах $L_O(X, Y)$ и, в частности, в X^*, а также поточечную сходимость в $L_O(X, Y)$ и X^* (в X^* она именуется слабой сходимостью). Введём понятие слабой сходимости в исходном пространстве X.

Говорят, что последовательность элементов $(x_1, x_2, \dots)$ слабо сходится к элементу x_*, если $\forall f \in X^* : f(x_m) \to f(x_*)$.

Утверждение: если последовательность $\{x_m\}$ слабо сходится к x_*, то последовательность $\{x_m - x_*\}$ слабо сходится к нулю (т.е. к элементу o): $f(x_m - x_*) = f(x_m) - f(x_*) \to 0 = f(o)$.

Если последовательность сходится в обычном смысле (сильно, по норме), то она сходится и слабо (следствие непрерывности функционала по Гейне-Борелю). Обратное неверно.

Замечание. Если последовательность $\{x_m\}$ такова, что для произвольного ограниченного линейного функционала $f \in X^*$ числовая последовательность $f(x_m)$ сходится, то отсюда, вообще говоря, ещё не следует слабая сходимость: в пространстве X может не найтись такого элемента x_*, что $\lim_{m\to\infty} f(x_m) = f(x_*)$. (Докажите, что если пространство X рефлексивно, то такой элемент найдётся всегда.)

Примеры.

- Пусть X – одно из пространств, элементами которого являются бесконечные числовые последовательности, и $x_m = e_m$ (на всякий случай: e_m – это вектор, m-я компонента которого равна единице, а остальные нулю).
  Замечание: напоминаю, что теперь x_m – это m-ый вектор последовательности векторов, а не m-я компонента фиксированного вектора!
  Рассмотрим $f(x_m) = f(e_m) = f_m$. Из рассмотренных примеров следует, что при $X = c_0, c, l_p(p > 1)$ имеет место стремление f_m к нулю для любого $f \in X^*$. Это значит, что и сама последовательность $x_m = e_m$ слабо стремится к нулю (притом, что норма всех её элементов равна единице, так что сильной сходимости к нулю заведомо нет).
  В то же время при $X = l_1$ $X^* = l_\infty$, т.е. f_m – ограниченная, но не обязательно сходящаяся последовательность. Отсюда вытекает, что в пространстве l_1 последовательность $x_m = e_m$ не имеет слабого предела и, в частности, к нулю не стремится ни сильно, ни слабо.

- $X = c$, $x_m = (0, \dots, 0, 1, 1, \dots)$ (первая единица стоит на m-м месте). Тогда $f(x_m) = f_\infty + \sum_{k=m}^{\infty} f_k \xrightarrow[m\to\infty]{} f_\infty$, т.е. последовательность $f(x_m)$ сходится для произвольного функционала $f \in c^*$. Тем не менее, последовательность x_m не имеет слабого предела в c. Действительно, предположим, что такой предел $\tilde{x}$ существует, и тогда $\forall f \in c^* : f(\tilde{x}) = f_\infty$. С другой стороны, $f(\tilde{x}) = \tilde{x}_\infty + \sum_{k=1} \tilde{x}_k f_k$, где $\tilde{x}_k$ – k-я компонента вектора $\tilde{x}$, а $\tilde{x}_\infty = \lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k$. Отсюда вытекает, что $\tilde{x}_\infty = 1$ и одновременно $\forall k \in \mathbb{N} : \tilde{x}_k = 0$, что невозможно.
  В то же время если мы рассмотрим последовательность функционалов $\varphi_{x_m} \in c^{**}$ таких, что $\varphi_{x_m}(f) = f(x_m) = f_\infty + \sum_{k=m}^{\infty} f_k$, то такая последовательность поточечно сходится к функционалу $\tilde{\varphi} \in c^{**}$ такому, что $\tilde{\varphi}(f) = f_\infty$.

Говорят, что последовательность операторов A_m слабо сходится к A, если на любом элементе $x \in X$ последовательность $A_m x$ слабо сходится к Ax (в пространстве Y). То есть:
$\forall x \in X \, \forall f \in Y^* : f(A_m x) \to f(Ax)$
(или, в других обозначениях, $< A_m x, f > \to < Ax, f >$).

Утверждение. Если последовательность операторов A_m слабо сходится к A, то последовательность $A_m - A$ слабо сходится к нулю (к оператору O). Действительно, в этом случае
$\forall x \in X \, \forall f \in Y^* : f((A_m - A)x) = f(A_m x) - f(Ax) \to 0 = f(Ox)$.

Пример. Выше мы рассмотрели последовательность операторов левого сдвига T_m, поточечно сходящуюся к нулю во всех стандартных пространствах бесконечных последовательностей, за исключением c и l_∞. Теперь мы рассмотрим операторы правого сдвига $\hat{T}_m$, действующие следующим образом: если $y = \hat{T}_m x$, то $y_k = 0$ при $k \le m$ и $y_k = x_{k-m}$ при $k > m$. То есть

если $x = (x_1, x_2, \dots)$, то $\hat{T}_m x = (0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots)$ (в начале последовательности m нулей).
(Замечание: здесь x_k, y_k – снова k-е компоненты векторов x, y.)
Во всех стандартных пространствах бесконечных последовательностей операторы $\hat{T}_m$ изометрические, т.е. $\forall x \in X \forall m \in \mathbb{N} : \|\hat{T}_m x\| = \|x\|$ (откуда, между прочим, следует, что $\|\hat{T}_m\| = 1$), поэтому последовательность $\hat{T}_m x$ для любого ненулевого вектора x по норме к нулю заведомо не стремится. Тем не менее, в некоторых (не во всех) пространствах такие последовательности стремятся к нулю слабо. Действительно, рассмотрим значения функционала f на элементах $\hat{T}_m x$: для $X \neq c, l_\infty$
$f(\hat{T}_m x) = 0 \cdot f_1 + \dots + 0 \cdot f_m + x_1 f_{m+1} + x_2 f_{m+2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_{m+k}$.
При $X = c_0$ $f \in c_0^* = l_1$, $|f(\hat{T}_m x)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k| \cdot \|x\|_\infty \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$
и, следовательно, последовательность $\hat{T}_m$ слабо сходится к нулю.
При $X = l_1$ $f \in l_1^* = l_\infty$, и $f(\hat{T}_m x)$, вообще говоря, не имеет предела.
При $X = l_p$, $1 < p < \infty$, $f \in l_p^* = l_q$,
$|f(\hat{T}_m x)| \leq \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k|^q\right)^{1/q} \cdot \|x\|_p \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$
и, следовательно, последовательность $\hat{T}_m$ слабо сходится к нулю.
Интересная ситуация возникает при $X = c$. В этом случае
$f(\hat{T}_m x) = x_\infty f_\infty + 0 \cdot f_1 + \dots + 0 \cdot f_m + x_1 f_{m+1} + x_2 f_{m+2} + \dots =$
$= x_\infty f_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_{m+k} \xrightarrow[m\to\infty]{} x_\infty f_\infty$.
При любых $x \in c$ и $f \in c^*$ есть сходимость, но предельное значение не является, вообще говоря, значением функционала f на каком-либо элементе пространства c, поскольку в противном случае такой элемент был бы числовой последовательностью, все компоненты которой равны нулю, а их предел равен x_∞. Очевидно, таких последовательностей не бывает (при $x_\infty \neq 0$), поэтому у последовательности $\hat{T}_m$ нет слабого предела в $L_O(c)$. Выше мы уже рассматривали аналогичную ситуацию для случая, когда $x = (1, 1, \dots)$.

Утверждение: в пространстве $L_O(X, Y)$ из сходимости последовательности операторов по норме (равномерной) следует поточечная (её ещё называют сильной – по сравнению со слабой), а из последней, в свою очередь, слабая. В исходном пространстве X из сходимости по норме (сильной) следует слабая. В пространстве X^* из сходимости по норме (сильной, равномерной) следует поточечная (слабая).

Есть некоторое несоответствие в терминологии: для функционалов сильная сходимость – это равномерная, а слабая – поточечная, а для операторов сильная – это поточечная, она сильнее слабой, но слабее равномерной.

Сопряжённый оператор.

Пусть $A \in L_O(X, Y)$, $f \in Y^*$. Рассмотрим $f(Ax)$ как функционал над X: $f(Ax) = g(x)$. Он линейный (доказать) и ограниченный:
$|g(x)| = |f(Ax)| \leq \|f\| \cdot \|Ax\| \leq \|f\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|g\| \leq \|f\| \cdot \|A\|$.
Тогда $g \in X^*$.

Зафиксируем A и будем рассматривать зависимость g от f. Отображение $A^* : f \mapsto g$ называется сопряжённым оператором, $g = A^*(f)$

Утверждение: A^* – линейное отображение. Действительно,
$(A^*(\alpha f_1 + \beta f_2))(x) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(Ax) = \alpha f_1(Ax) + \beta f_2(Ax) =$
$= \alpha(A^*(f_1))(x) + \beta(A^*(f_2))(x)$.

Как обычно, скобки будем опускать: $g = A^* f$, тогда
$g(x) = f(Ax) = (A^* f)(x)$, или, в других обозначениях,
$< Ax, f >=< x, A^* f >$.

Утверждение: $A^* : Y^* \to X^*$ – ограниченный оператор, и $\|A^*\| \le \|A\|$ (поскольку $\|g\| \le \|A\| \cdot \|f\|$).

Докажем, что есть равенство:

$$\|A^*\| = \sup_{\|f\|\le 1} \|A^* f\| = \sup_{\|f\|\le 1} \sup_{\|x\|\le 1} |(A^* f)(x)| =$$
$$= \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|f\|\le 1} |f(Ax)| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Замечание. Мы установили, что операция сопряжения (обозначаемая звёздочкой) – это изометрическое отображение из $L_O(X,Y)$ в $L_O(Y^*, X^*)$. "Супероператор"(оператор в пространстве операторов).
Линеен: $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$ (доказать).

Замечание. Если $A : X \to X$, то $A^* : X^* \to X^*$.

Пример. Пусть $X = c_0$ или $X = l_p$, $1 < p < \infty$, тогда $X^* = l_1$ или $X^* = l_q$, соответственно. В этих случаях $f(x) =< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.
Докажем, что $T_m^* = \hat{T}_m$ и $\hat{T}_m^* = T_m$ (напомню, что T_m и $\hat{T}_m$ – операторы левого и правого сдвига на m позиций).
Доказательство:

$< T_m x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+m} f_k = \sum_{j=1+m}^{\infty} x_j f_{j-m} =$
$= \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot 0 + \sum_{j=1+m}^{\infty} x_j f_{j-m} =< x, \hat{T}_m f >$,

$< \hat{T}_m x, f >= \sum_{k=1}^{m} 0 \cdot f_k + \sum_{k=1+m}^{\infty} x_{k-m} f_k =$
$= \sum_{k=1+m}^{\infty} x_{k-m} f_k = \sum_{j=1}^{\infty} x_j f_{j+m} =< x, T_m f >$.

Раздел 7. Линейные операторы в ЛНП

Лекция 15 Сопряжённый пространства и сопряжённые операторы.

Напоминание: пространством X^*, сопряжённым к ЛНП X, называется ЛНП линейных ограниченных функционалов над X: $X^* = L_O(X, \mathbb{R})$.

Замечание. Мы рассматриваем случай вещественных пространств.

Замечание. Иногда выражение $f(x)$ записывают в симметричном виде: $f(x) =< x, f >$.

Утверждение. $\forall x \in X : f(x) = 0 \Rightarrow f = o$. Это определение нулевого функционала.

Утверждение. $\forall f \in X^* : f(x) = 0 \Rightarrow x = o$. То есть хотим доказать, что если значение всех непрерывных функционалов на некотором элементе равно нулю, то этот элемент может быть только нулевым.
Докажем, что для произвольного ненулевого элемента $x \in X$ найдётся $f \in X^*$ такой, что $f(x) \neq 0$. Рассмотрим одномерное подпространство $L(x) = \{\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Зададим на нём функционал f по правилу $f(x) = \|x\|$, тогда $f(\alpha x) = \alpha \|x\|$. Функционал непрерывен, его норма равна 1. По теореме Хана-Банаха его можно продолжить на всё пространство с сохранением нормы, тогда результирующий функционал будет элементом сопряжённого пространства, не зануляющимся на x.

Замечание. Если $f(x) = 0$, то говорят, что элементы $x \in X$ и $f \in X^*$ взаимно ортогональны.

Утверждение:

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)|$$

Действительно $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, а в случае $\|f\| = 1$ получаем $|f(x)| \leq \|x\|$. С другой стороны, только что доказано, что существует функционал с единичной нормой, для которого неравенство превращается в равенство.

Сравним с определением нормы функционала:

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$$

Есть очевидная симметрия, но неполная: в предыдущем случае супремум всегда достигается, так что его можно заменить максимумом. В случае функционала норма может не достигаться.

Теперь мы можем получить ещё одну формулу для нормы оператора:

$$\|A\| = \sup_{\|f\| \leq 1, \|x\| \leq 1} |f(Ax)| = \sup_{\|f\| \leq 1, \|x\| \leq 1} | < Ax, f > | \, .$$

Разумеется, всюду "≤ 1"можно заменить на "$= 1$".

Второе сопряжённое пространство X^{**} – пространство, сопряжённое к X^*.

Существует естественное вложение X в X^{**}: каждый элемент $x \in X$ задаёт функционал φ_x над X^* по правилу $\varphi_x(f) = f(x)$.
Норма этого функционала равна

$$\|\varphi_x\| = \sup_{\|f\|=1} |\varphi_x(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|,$$

т.е. вложение изометрическое. Пишут: $X \subset X^{**}$ (в том смысле, что X^{**} содержит изометрическую копию X).
Если $X = X^{**}$, то пространство X называется рефлексивным, а если $X \subsetneq X^{**}$, то нерефлексивным.

Утверждение: X рефлексивно $\Leftrightarrow$ X^* рефлексивно (доказать).

Замечание. Если существует функционал $f \in X^*$, норма которого не достигается, то пространство нерефлексивно (доказать).

Примеры. Здесь нам будет удобно иногда использовать обозначение $f(x) =< x, f >$, $x \in X$, $f \in X^*$.

1. Общий вид линейного функционала на $\mathbb{R}^n$.
   В силу линейности функционала
   $f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k f\left(e_k\right)$.
   Здесь, как обычно, e_k – вектор, k-я компонента которого равна единице, а остальные нулю.
   Обозначим $f_k := f(e_k)$ (здесь f_k – число!). Тогда
   $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f_k$.
   Таким образом, произвольный линейный функционал на $\mathbb{R}^n$ определяется набором из n чисел $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – вектором в вещественном n-мерном пространстве. При этом линейной комбинации линейных функционалов соответствует линейная комбинация представляющих их векторов (доказать). Отсюда следует, что линейное пространство линейных функционалов над $\mathbb{R}^n$ линейно изоморфно $\mathbb{R}^n$.

2. Общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathbb{R}^n_{\max}$, его норма.
   Утверждение: если $X = \mathbb{R}^n_{\max}$, то $X^* = \mathbb{R}^n_1$, и $< x, f >= \sum_{k=1}^n x_k f_k$.
   Доказательство.
   Мы установили, что произвольный линейный функционал в $\mathbb{R}^n$ имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f_k$. Убедимся в его ограниченности в $\mathbb{R}^n_{\max}$ и найдём его норму:
   $|f(x)| = |\sum_{k=1}^n x_k f_k| \le \sum_{k=1}^n |x_k f_k| = \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |f_k| \le$
   $\le \sum_{k=1}^n \|x\|_\infty \cdot |f_k| = \|f\|_1 \cdot \|x\|_\infty$.
   Равенство достигается при $x_k = \operatorname{sign} f_k$, откуда следует, что $\|f\|_{(\mathbb{R}^n_{\max})^*} = \|f\|_1$, т.е. норма функционала f равна норме представляющего его вектора в пространстве $\mathbb{R}^n_1$.
   Таким образом, пространство $(\mathbb{R}^n_{\max})^*$ изоморфно $\mathbb{R}^n_1$ как ЛНП, поэтому эти пространства обычно отождествляют и пишут: $(\mathbb{R}^n_{\max})^* = \mathbb{R}^n_1$.

3. Общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathbb{R}_1^n$, его норма.
Утверждение: если $X = \mathbb{R}_1^n$, то $X^* = \mathbb{R}^n_{\max}$, и $< x, f >= \sum_{k=1}^n x_k f_k$.
Доказательство.
Произвольный линейный функционал в $\mathbb{R}^n$ имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f_k$.
Убедимся в его ограниченности в $\mathbb{R}_1^n$ и найдём его норму:
$|f(x)| = |\sum_{k=1}^n x_k f_k| \le \sum_{k=1}^n |x_k f_k| = \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot |f_k| \le$
$\le \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \cdot \|x\|_1$.
Равенство достигается на элементе $x = e_{k_0}$, где k_0 – тот номер, для которого $\|f\|_\infty = |f_{k_0}|$. Отсюда вытекает, что $\|f\|_{(\mathbb{R}_1^n)^*} = \|f\|_\infty$ и, тем самым, $(\mathbb{R}_1^n)^* = \mathbb{R}^n_{\max}$.
Мы видим, что пространства $\mathbb{R}^n_{\max}$ и $\mathbb{R}_1^n$ взаимно сопряжены и, следовательно, являются пространствами рефлексивными.

4. Общий вид линейного ограниченного функционала на c_0, его норма.
Утверждение: если $X = c_0$, то $X^* = l_1$, и $< x, f >= \sum_{k=1}^\infty x_k f_k$.
Доказательство.
Рассмотрим сначала плотное в c_0 множество обрывающихся последовательностей вида $x = \sum_{k=1}^N x_k e_k$, где N – номер последней ненулевой компоненты последовательности x. Тогда для произвольного линейного функционала f (не обязательно ограниченного) справедливо равенство
$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^N x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^N x_k f\left(e_k\right) = \sum_{k=1}^N x_k f_k$,
где $f_k = f(e_k)$. Таким образом, действие линейного функционала на обрывающихся последовательностях определяется его значениями на элементах e_k.
Оценим модуль функционала на элементах плотного множества:
$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^N x_k f_k\right| \le \sum_{k=1}^N |x_k f_k| =$
$= \sum_{k=1}^N |x_k| \cdot |f_k| \le \sum_{k=1}^N |f_k| \cdot \|x\|_\infty$,
равенство достигается на элементе x, для которого $x_k = \operatorname{sign} f_k$ при $k \le N$ и $x_k = 0$ при $k > N$. Если ряд $\sum_{k=1}^\infty |f_k|$ расходится, то функционал неограничен, поскольку отношение $|f(x)|/\|x\|_\infty$ выбором N может быть сделано сколь угодно большим. Если же ряд сходится, то
$|f(x)| \le \sum_{k=1}^N |f_k| \cdot \|x\|_\infty \le \sum_{k=1}^\infty |f_k| \cdot \|x\|_\infty = \|f\|_1 \cdot \|x\|_\infty$.
За исключением случаев, когда последовательность f_k обрывается, равенство не достигается, однако разность правой и левой части на единичном шаре может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, множество ограниченных на плотном множестве линейных функционалов – это множество функционалов, для которых последовательность $f_k = f(e_k)$ принадлежит l_1, а норма функционала на плотном множестве – это норма указанной последовательности в l_1.
Ограниченный на плотном множестве функционал может быть по непрерывности единственным образом продолжен на всё пространство с сохранением нормы. Поскольку произвольный элемент $x \in c_0$ является пределом последовательности своих срезок
$x^{(N)} = (x_1, \dots x_N, 0, \dots)$, такое продолжение даётся формулой

$< x, f >= \lim_{N\to\infty} < x^{(N)}, f >= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} x_k f_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.
Таким образом, не только на обрывающихся последовательностях, но и на всём пространстве c_0 действие ограниченного линейного функционала полностью определяется значениями элементов последовательности $f_k = f(e_k)$, при этом такая последовательность лежит в l_1 и норма функционала совпадает с нормой последовательности в l_1. Отсюда следует, что $c_0^* = l_1$ (как всегда, с точностью до изоморфизма).

5. Общий вид линейного ограниченного функционала на l_1, его норма.
Утверждение: если $X = l_1$, то $X^* = l_\infty$, и $< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.
Доказательство.
Снова рассмотрим плотное множество обрывающихся последовательностей и действие на нём линейного функционала:
$f(x) = \sum_{k=1}^{N} x_k f_k$, где $f_k = f(e_k)$, и номер последней ненулевой компоненты последовательности x не превосходит N. Оценим модуль функционала на элементах плотного множества:
$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{N} x_k f_k\right| \le \sum_{k=1}^{N} |x_k f_k| = \sum_{k=1}^{N} |x_k| \cdot |f_k| \le$
$\le \max_{k\le N} |f_k| \sum_{k=1}^{N} |x_k| = \max_{k\le N} |f_k| \cdot \|x\|_1$,
равенство достигается на элементе $x = e_{k_0}$, где k_0 – тот номер, для которого $\max_{k\le N} |f_k| = |f_{k_0}|$.
Если последовательность f_k неограничена, то функционал также неограничен, поскольку выбором N отношение $|f(x)|/\|x\|_1$ может быть сделано сколь угодно большим. Если же последовательность f_k ограничена, то $|f(x)| \le \sup_k |f_k| \cdot \|x\|_1 = \|f\|_\infty \cdot \|x\|_1$,
равенство достигается, если у множества $\{|f_k|\}$ есть максимальный элемент и не достигается в противном случае. Тем не менее, в любом случае разность правой и левой части на единичном шаре может быть сделана сколь угодно малой, так что норма функционала на плотном множестве совпадает с $\|f\|_\infty$.
Далее мы снова продолжаем ограниченный функционал на всё пространство l_1 по непрерывности с сохранением нормы рядом
$< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$, который сходится для ограниченных последовательностей f_k. В результате мы получаем, что $l_1^* = l_\infty$.
Мы видим, что $c_0^{**} = l_1^* = l_\infty \ne c_0$, поэтому пространства c_0, l_1 и l_∞ не являются рефлексивными.

6. Общий вид линейного ограниченного функционала на c и его норма.
Утверждение: если $X = c$, то $X^* = R^1 + l_1$, и
$< x, f >= x_\infty f_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$, где $x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k$.
Доказательство.
Обозначим, как и раньше, $f_k = f(e_k)$. Было установлено, что необходимым и достаточным условием ограниченности линейного функционала на c_0 является принадлежность последовательности f_k пространству l_1. Однако пространство c_0 является подпространством пространства c, поэтому принадлежность последовательности f_k пространству l_1 является необходимым (но пока ещё не достаточным) условием огра-

ниченности функционала на c. Будем считать это условие выполненным.

Заметим теперь, что, в отличие от рассмотренных пространств c_0 и l_1, обрывающиеся последовательности не образуют плотное множество в c. Поэтому, помимо элементов e_k, рассмотрим дополнительно элемент $\hat{e} \in c$ такой, что все его компоненты равны единице, и обозначим $f(\hat{e}) = \hat{f}$. Произвольный элемент $x \in c$ представляется в виде $x = x_\infty \hat{e} + x'$, где $x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k$, а $x' = x - x_\infty \hat{e} \in c_0$, поскольку $x'_k = x_k - x_\infty \to 0$. Тогда для произвольного линейного функционала над c справедливо равенство

$f(x) = f(x_\infty \hat{e} + x') = x_\infty \hat{f} + f(x')\,.$

Но $x' \in c_0$, поэтому мы можем воспользоваться полученным ранее результатом и написать:

$f(x') = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k f_k = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_\infty) f_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k - x_\infty \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ (представление в виде разности рядов корректно, поскольку оба ряда сходятся), и тогда

$f(x) = x_\infty \hat{f} + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k - x_\infty \sum_{k=1}^{\infty} f_k = x_\infty f_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k\,,$

где $f_\infty = \hat{f} - \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,.$

Из полученной формулы видно, что условие $f \in l_1$ является не только необходимым, но и достаточным для ограниченности функционала:

$|f(x)| = |x_\infty f_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k| \le |x_\infty| \cdot |f_\infty| + \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \cdot |f_k| \le$

$\le |f_\infty| \cdot \|x\|_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \cdot \|x\|_\infty = (|f_\infty| + \|f\|_1) \cdot \|x\|_\infty$

Из полученной оценки следует, что $\|f\|_{c^*} \le |f_\infty| + \|f\|_1$. Чтобы показать, что здесь на самом деле равенство, рассмотрим элемент $x \in c$, принадлежащий единичной сфере, для которого $x_k = \operatorname{sign} f_k$ при $k \le N$ и $x_k = \operatorname{sign} f_\infty$ при $k > N$, где N – некоторое натуральное число. В этом случае $x_\infty = \operatorname{sign} f_\infty$ и

$f(x) = |f_\infty| + \sum_{k=1}^{N} |f_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k \operatorname{sign} f_\infty =$

$= |f_\infty| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| - \sum_{k=N+1}^{\infty} |f_k|(1 - \operatorname{sign}(f_k f_\infty))$

В силу $f \in l_1$ последняя сумма с ростом N стремится к нулю.

Замечание. Пространство c рефлексивным не является: пространство $c^* = R^1 + l_1$ изоморфно l_1 (со сдвигом на единицу в индексации), и поэтому c^{**} изоморфно l_∞.

7. Общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathbb{R}_2^n = E^n$, его норма.

   Утверждение: если $X = E^n$, то $X^* = E^n$, и $< x, f >= \sum_{k=1}^{n} x_k f_k$.

   Доказательство.

   Произвольный линейный функционал в $\mathbb{R}^n$ имеет вид $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k$. Убедимся в его ограниченности в E^n и найдём его норму:

   $|f(x)| = |\sum_{k=1}^{n} x_k f_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2 \cdot \|x\|_2.$

   Воспользовались неравенством КБШ, равенство достигается в случае, когда векторы x и f пропорциональны. Отсюда вытекает, что $\|f\|_{(E^n)^*} = \|f\|_2$, и $(E^n)^* = E^n$.

   Поскольку $(E^n)^{**} = (E^n)^* = (E^n)$, пространство E^n, рефлексивно.

8. Общий вид линейного ограниченного функционала на l_2, его норма.
Утверждение: если $X = l_2$, то $X^* = l_2$, и $< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.
Доказательство.
Рассматриваем плотное множество обрывающихся последовательностей, на элементах которого
$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{N} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^{N} x_k f_k$, где $f_k = f(e_k)$.
Оценим модуль с помощью неравенства КБШ:
$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{N} x_k f_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k|^2\right)^{1/2} =$
$= \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k|^2\right)^{1/2} \cdot \|x\|_2$,
равенство достигается, когда элементы последовательностей x и f пропорциональны при $k \le N$.
Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2$ расходится, то функционал неограничен, поскольку отношение $|f(x)|/\|x\|_2$ может быть сколь угодно большим. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2$ сходится, т.е. $f \in l_2$, то $|f(x)| \le \|f\|_2 \cdot \|x\|_2$, функционал ограничен на плотном множестве и единственным образом продолжается по непрерывности на всё пространство l_2 формулой
$< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.
Поскольку $| < x, f > | \le \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2 \cdot \|x\|_2$, причём равенство достигается в случае пропорциональности теперь уже бесконечных последовательностей x и f, отсюда следует, что норма функционала совпадает с нормой представляющей его последовательности в l_2, и $l_2^* = l_2$.
Поскольку $l_2^{**} = l_2^* = l_2$, пространство l_2 рефлексивно.

9. Общий вид линейного ограниченного функционала на $L_2[a, b]$, его норма (без доказательства общности).
Утверждение: если $X = L_2[a, b]$, то $X^* = L_2[a, b]$, и

$$< x, f >= \int_a^b x(t) f(t)\, dt$$

(интеграл понимается в смысле Лебега).
Это утверждение мы доказывать не будем.
Замечание: здесь мы отждествляем функционал и представляющую его функцию $f \in L_2[a, b]$ подобно тому, как раньше мы отождествляли функционал и представляющую его последовательность. Разумеется, речь здесь идёт об изоморфизме: всякому ограниченному линейному функционалу сопоставляется функция, с помощью которой он записывается, при этом норма функционала в $L_2^*[a, b]$ совпадает с нормой функции в $L_2[a, b]$. Последний факт вытекает из неравенства КБШ для функций:

$$| < x, f > | = \left|\int_a^b x(t) f(t)\, dt\right| \le \|f\|_2 \cdot \|x\|_2$$

и того обстоятельства, что равенство достигается для функций $x(t)$, отличающихся от $f(t)$ числовым множителем.
Из приведённых рассуждений следует включение (с точностью до изоморфизма) $L_2[a,b] \subset L_2^*[a,b]$: пространство $L_2[a,b]$ изометрически вкладывается в $L_2^*[a,b]$. Недоказанным остался тот факт, что приведённое представление является общим, т.е. что в пространстве $L_2[a,b]$ не существуют других линейных ограниченных функционалов, не представляющихся в виде интеграла от произведения $x \in L_2[a,b]$ и
$f \in L_2[a,b]$. Этот факт будет доказан в дальнейшем (в следующем семестре) при изучении гильбертовых пространств.
Поскольку $L_2^{**}[a,b] = L_2^*[a,b] = L_2[a,b]$, пространство $L_2[a,b]$ рефлексивно.
Замечание. Разумеется, мы помним, что элементами $L_2[a,b]$ являются не индивидуальные функции, а классы функций, совпадающих почти всюду на $[a,b]$.

Сопряжённые показатели.
Положительные числа p и q называются сопряжёнными показателями, если выполняются следующие, эквивалентные друг другу, равенства:

$$(p-1)(q-1) = 1$$
$$p + q = pq$$
$$p = \frac{q}{q-1} \qquad q = \frac{p}{p-1}$$
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Примеры: 8/3 и 8/5, 23/7 и 23/16, 3 и 3/2, 4 и 4/3, 5 и 5/4, 10 и 10/9, 50 и 50/49, 100 и 100/99.
Один из показателей лежит на полуинтервале $(1,2]$, другой на луче $[2,\infty)$.
Особый случай равенства показателей: 2 и 2.

Неравенство Юнга.

$$uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Геометрическое доказательство (кривая $v = u^{p-1}$ или $u = v^{q-1}$ разделяет первый квадрант, рассмотреть площади, отсекаемые вертикалью и горизонталью, сравнить с площадью прямоугольника).
Аналитическое доказательство: функция $\ln$ выпукла вверх, рассмат-

риваем и преобразовываем неравенство Йенсена при $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$:

$$\ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \geq \frac{\ln a}{p} + \frac{\ln b}{q} = \ln\left(a^{1/p} b^{1/q}\right)$$

$$u = a^{1/p} \qquad v = b^{1/q}$$

$$\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq uv$$

Равенство при $a = b$, т.е. при $u^p = v^q$.

Неравенство Гёльдера для конечных последовательностей.

Рассмотрим n-мерные вектора $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$ с неотрицательными компонентами, удовлетворяющие условиям нормировки:
$\sum_{j=1}^n u_j^p = \sum_{j=1}^n v_j^q = 1$.
Запишем для каждой пары компонент неравенство Юнга
$u_j v_j \leq u_j^p/p + v_j^q/q$
и просуммируем по j:

$$\sum_{j=1}^n u_j v_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{u_j^p}{p} + \frac{v_j^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^n u_j^p + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^n v_j^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Неравенство превращается в равенство при $u_j^p = v_j^q$.

Пусть теперь $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ – n-мерные вектора с неотрицательными компонентами. Представим их в виде $x = Au$, $y = Bv$, где u и v удовлетворяют условиям нормировки. Тогда
$\sum_{j=1}^n x_j^p = A^p \sum_{j=1}^n u_j^p = A^p$,
$\sum_{j=1}^n y_j^q = B^q \sum_{j=1}^n v_j^q = B^q$,
т.е.
$A = \left(\sum_{j=1}^n x_j^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{j=1}^n y_j^q\right)^{1/q}$.
Отсюда
$\sum_{j=1}^n x_j y_j = AB \sum_{j=1}^n u_j v_j \leq AB$.
Неравенство превращается в равенство, если вектора с компонентами x_j^p и y_j^q отличаются множителем.

Откажемся от предположения о неотрицательности компонент векторов x и y и применим полученное неравенство к их абсолютным величинам. Тогда
$\left|\sum_{j=1}^n x_j y_j\right| \leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot |y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q}$.
Неравенство превращается в равенство, если вектора с компонентами $|x_j|^p \operatorname{sign} x_j$ и $|y_j|^q \operatorname{sign} y_j$ отличаются множителем.

Полученное неравенство носит название неравенства Гёльдера.

(Замечание. Можно вектора считать комплексными, ничего не изменится.)

Частным случаем этого неравенства при $p = q = 2$ является неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

10. Общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathbb{R}_p^n$ $(1 < p < \infty)$, его норма.
Утверждение: если $X = \mathbb{R}_p^n$, то $X^* = \mathbb{R}_q^n$, где p и q – сопряжённые показатели, и $< x, f >= \sum_{k=1}^n x_k f_k$.
Доказательство.
Произвольный линейный функционал в $\mathbb{R}^n$ имеет вид
$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f_k$. Убедимся в его ограниченности в $\mathbb{R}_p^n$ и найдём его норму, воспользовавшись неравенством Гёльдера:
$|f(x)| = |\sum_{k=1}^n x_k f_k| \le \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |f_k|^q\right)^{1/q} = \|f\|_q \cdot \|x\|_p$.
Равенство достигается в случае, когда векторы с компонентами
$|x_k|^p \operatorname{sign} x_k$ и $|f_k|^q \operatorname{sign} f_k$ пропорциональны, т.е. x_k пропорциональны $|f_k|^{q/p} \operatorname{sign} f_k$. Отсюда вытекает, что $\|f\|_{(\mathbb{R}_p^n)^*} = \|f\|_q$, и $(\mathbb{R}_p^n)^* = \mathbb{R}_q^n$.
Поскольку $(\mathbb{R}_p^n)^{**} = (\mathbb{R}_q^n)^* = \mathbb{R}_p^n$, пространства $\mathbb{R}_p^n$ рефлексивны.
Замечание. При $p = q = 2$ приходим к рассмотренному ранее случаю пространства E^n.

Неравенство Гёльдера для бесконечных последовательностей.

Обобщим неравенство Гёльдера на бесконечные последовательности.
Пусть x и y – последовательности, для которых сходятся ряды из p-х и q-х степеней модулей соответственно:
$\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < \infty$, $\sum_{j=1}^\infty |y_j|^q < \infty$.
Тогда
$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q} \le$
$\le \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^\infty |y_j|^q\right)^{1/q} < \infty$.
Это значит, что ряд с неотрицательными членами $\sum_{j=1}^\infty |x_j y_j|$ сходится, поскольку его частичные суммы ограничены в совокупности, и тогда ряд $\sum_{j=1}^\infty x_j y_j$ сходится абсолютно.

Теперь мы можем перейти к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве Гёльдера и получить неравенство Гёльдера для рядов:
$\left|\sum_{j=1}^\infty x_j y_j\right| \le \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^\infty |y_j|^q\right)^{1/q}$.
Неравенство превращается в равенство, если последовательности с компонентами $|x_j|^p \operatorname{sign} x_j$ и $|y_j|^q \operatorname{sign} y_j$ отличаются множителем.

11. Общий вид линейного ограниченного функционала на l_p $(1 < p < \infty)$, его норма.
Утверждение: если $X = l_p$, то $X^* = l_q$, где p и q – сопряжённые показатели, и $< x, f >= \sum_{k=1}^\infty x_k f_k$.
Доказательство.

Рассматриваем плотное множество обрывающихся последовательностей, на элементах которого
$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^{N} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} x_k f\left(e_k\right) = \sum_{k=1}^{N} x_k f_k$, где $f_k = f(e_k)$.
Оценим модуль с помощью неравенства Гёльдера:
$|f(x)| = \left|\sum_{k=1}^{N} x_k f_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k|^q\right)^{1/q} =$
$= \left(\sum_{k=1}^{N} |f_k|^q\right)^{1/q} \cdot \|x\|_p$,
равенство достигается, когда элементы последовательностей $|x_k|^p \operatorname{sign} x_k$ и $|f_k|^q \operatorname{sign} f_k$ пропорциональны при $k \leq N$.
Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q$ расходится, то функционал неограничен, поскольку отношение $|f(x)|/\|x\|_p$ может быть сколь угодно большим. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q$ сходится, т.е. $f \in l_q$, то $|f(x)| \leq \|f\|_q \cdot \|x\|_p$, функционал ограничен на плотном множестве и единственным образом продолжается по непрерывности на всё пространство l_p формулой
$< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.
Поскольку $| < x, f > | \leq (\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^q)^{1/q} (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p)^{1/p} = \|f\|_q \cdot \|x\|_p$, причём равенство достигается в случае пропорциональности теперь уже бесконечных последовательностей $|x_k|^p \operatorname{sign} x_k$ и $|f_k|^q \operatorname{sign} f_k$ (т.е. пропорциональности x_k и $|f_k|^{q/p} \operatorname{sign} f_k$), отсюда следует, что норма функционала совпадает с нормой представляющей его последовательности в l_q, и $l_p^* = l_q$.
Поскольку $l_p^{**} = l_q^* = l_p$, пространства l_p при $p \in (1, \infty)$ рефлексивны.
Замечание. При $p = q = 2$ приходим к рассмотренному ранее случаю пространства l_2.

Неравенство Гёльдера для функций.
Хотим доказать, что

$$\left|\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right| \leq \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} \left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q}.$$

Делаем подстановку: $|x(t)| = Au(t)$, $|y(t)| = Bv(t)$, где константы A и B выбираются из условия

$$\int_a^b u^p(t)\,dt = \int_a^b v^q(t)\,dt = 1\,,$$

тогда

$$A = \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p} = \|x\|_p\,, B = \left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q} = \|y\|_q$$

(проверьте!). Заметим, что

$$\int_a^b u(t)v(t)\,dt \leq \int_a^b \left(\frac{u^p(t)}{p} + \frac{v^q(t)}{q}\right) dt = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,$$

(воспользовались неравенством Юнга под знаком интеграла), тогда

$$\left|\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right| \le \int_a^b |x(t)y(t)|\,dt = AB\int_a^b u(t)v(t)\,dt \le$$
$$\le AB = \left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{1/p}\left(\int_a^b |y(t)|^q\,dt\right)^{1/q},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Функции не обязательно непрерывные. Интегралы могут пониматься как в смысле Римана, так и в смысле Лебега. Необходимо лишь, чтобы все эти интегралы сходились. В этом случае можно интегрировать нестрогое неравенство Юнга.

12. Общий вид линейного ограниченного функционала на $L_p[a,b]$ $(1 < p < \infty)$, его норма (без доказательства общности).
Утверждение: если $X = L_p[a,b]$, то $X^* = L_q[a,b]$, где p и q – сопряжённые показатели, и

$$< x, f >= \int_a^b x(t)f(t)\,dt$$

(интеграл понимается в смысле Лебега).
Это утверждение мы доказывать не будем.
Замечание: здесь мы снова отождествляем функционал и представляющую его функцию $f \in L_q[a,b]$ (точнее, класс функций). Разумеется, как и раньше, речь здесь идёт об изоморфизме: всякому ограниченному линейному функционалу сопоставляется функция (или её класс), с помощью которой этот функционал записывается, при этом норма функционала в $L_p^*[a,b]$ совпадает с нормой функции в $L_q[a,b]$. Последний факт вытекает из неравенства Гёльдера для функций

$$| < x, f > | = \left|\int_a^b x(t)f(t)\,dt\right| \le \|f\|_q \cdot \|x\|_p$$

и того обстоятельства, что равенство достигается для
$x(t) = |f(t)|^{q/p}\operatorname{sign} f(t) \cdot \mathrm{const}$.
Это доказывает включение (с точностью до изоморфизма)
$L_q[a,b] \subset L_p^*[a,b]$: пространство $L_q[a,b]$ изометрически вкладывается в $L_p^*[a,b]$. Недоказанным остался тот факт, что приведённое представление является общим, т.е. что в пространстве $L_p[a,b]$ не существуют других линейных ограниченных функционалов, не представляющихся в виде интеграла от произведения $x \in L_p[a,b]$ и $f \in L_q[a,b]$.
Поскольку $L_p^{**}[a,b] = L_q^*[a,b] = L_p[a,b]$, пространства $L_p[a,b]$ при $p \in (1,\infty)$ рефлексивны.
Замечание. При $p = q = 2$ мы приходим к случаю пространства

$L_2[a,b]$.
Замечание. Напомню, что элементами $L_{p,q}[a,b]$ являются не индивидуальные функции, а классы функций, совпадающих почти всюду на $[a,b]$.

13. Общий вид линейного ограниченного функционала на $C[a,b]$, его норма (без доказательства).
Утверждение: если $X = C[a,b]$, то $X^* = V[a,b]$ – пространство классов функций ограниченной вариации, и

$$< x, f >= \int_a^b x(t)\, df(t)$$

(интеграл Стилтьеса).
Это утверждение (ещё одна теорема Рисса) мы доказывать не будем, однако поясним смысл терминов.

Рассмотрим разбиение отрезка $[a,b]$ точками $t_0 = a, t_1, \ldots, t_N = b$ и сумму вида $\sum_{j=1}^N |f(t_j) - f(t_{j-1})|$. Если для функции f множество значений таких сумм для всевозможных разбиений ограничено, то f называется функцией ограниченной вариации, а точная верхняя грань таких сумм по всем разбиениям называется вариацией функции f на отрезке $[a,b]$ и обозначается $V_a^b(f)$. Функции ограниченной вариации образуют линейное пространство, а вариация является в этом пространстве полунормой: элементы, на которых она обращается в нуль – это константы. Соответственно, после факторизации мы получаем нормированное пространство классов функций ограниенной вариации, элементы каждого класса отличаются друг от друга на постоянную.
Теперь об интеграле Стилтьеса. Мы можем снова устроить разбиение отрезка $[a,b]$ точками $\{t_j\}$, выбрать на каждом отрезке $[t_{j-1}, t_j]$ точку ξ_j и рассмотреть интегральную сумму $\sum_{j=1}^N x(\xi_j)(f(t_j) - f(t_{j-1}))$. Если при стремлении ранга разбиения к нулю такие суммы стремятся к пределу, не зависящему от выбора точек $\{t_j\}$ и $\{\xi_j\}$, то такой предел называется интегралом Стилтьеса (или Стильтьеса) от x по f на отрезке $[a,b]$ и обозначается $\int_a^b x(t)\, df(t)$. Доказывается, что такой интеграл гарантированно существует, если функция x непрерывна, а f имеет ограниченную вариацию. Очевидно, для функций f, отличающихся на константу и входящих в один класс эквивалентности, интегралы совпадают. Обычный интеграл Римана – это интеграл Стилтьеса для $f(t) = t + \mathrm{const}$.
В теореме Рисса утверждается, что произвольный ограниченный линейный функционал на $C[a,b]$ представляется в виде интеграла Стилтьеса от непрерывной функции по некоторой функции ограниченной вариации f, при этом функция f определяется однозначно с точностью до постоянного слагаемого и норма функционала равна вариа-

ции функции f по отрезку $[a, b]$.

Нескльо слов о структуре функций ограниченной вариации. Первый факт: любая такая функция представляется в виде суммы двух монотонных функций (невозрастающей и неубывающей). Как известно, монотонные функции почти всюду непрерывны – точнее, могут иметь не более чем счётный набор точек разрыва первого рода. Соответственно, это свойство переностися и на функции ограниченной вариации: каждая такая функция представляется в виде суммы кусочно постоянной (с конечным или счётным набором точек разрыва, причём сумма модулей скачков конечна) и непрерывной функций.

Каждый скачок порождает дельта-функционал. Например, если функция f равна f_- при $t < t^*$ и f_+ при $t > t^*$, где $t^* \in (a, b)$, то $\int_a^b x(t)\, df(t) \ = x(t^*)(f_+ - f_-)$.

Непрерывные функции ограниченной вариации, в свою очередь, представляются в виде суммы абсолютно непрерывной и сингулярно непрерывной функций. Абсолютно непрерывная функция почти всюду дифференцируема и представляется в виде $f(t) = f(a) + \int_a^t \phi(\tau)\, d\tau$, где ϕ – некоторая интегрируемая функция. В этом случае $df(t) = \phi(t)\, dt$ и $\int_a^b x(t)\, df(t) \ = \int_a^b x(t)\phi(t)\, dt$.

Наконец, сингулярно непрерывная функция почти всюду имеет производную, равную нулю, но при этом не равна константе. Для такой функции, соответственно, не будет справедливой формула Ньютона-Лейбница. Наиболее известный пример такой функции – функция Кантора.

Типы сходимости в пространствах операторов, функционалов и в исходном ЛНП.

Мы знаем обычную сходимость (по норме) в исходном пространстве X, сходимость по норме (т.е. равномерную) в пространствах $L_O(X, Y)$ и, в частности, в X^*, а также поточечную сходимость в $L_O(X, Y)$ и X^* (в X^* она именуется слабой сходимостью). Введём понятие слабой сходимости в исходном пространстве X.

Говорят, что последовательность элементов $(x_1, x_2, \dots)$ слабо сходится к элементу x_*, если $\forall f \in X^* : f(x_m) \to f(x_*)$.

Утверждение: если последовательность $\{x_m\}$ слабо сходится к x_*, то последовательность $\{x_m - x_*\}$ слабо сходится к нулю (т.е. к элементу o): $f(x_m - x_*) = f(x_m) - f(x_*) \to 0 = f(o)$.

Если последовательность сходится в обычном смысле (сильно, по норме), то она сходится и слабо (следствие непрерывности функционала по Гейне-Борелю). Обратное неверно.

Замечание. Если последовательность $\{x_m\}$ такова, что для произвольного ограниченного линейного функционала $f \in X^*$ числовая последовательность $f(x_m)$ сходится, то отсюда, вообще говоря, ещё не следует слабая сходимость: в пространстве X может не найтись такого элемента x_*, что $\lim_{m\to\infty} f(x_m) = f(x_*)$. (Докажите, что если пространство X рефлексивно, то такой элемент найдётся всегда.)

Примеры.

- Пусть X – одно из пространств, элементами которого являются бесконечные числовые последовательности, и $x_m = e_m$ (на всякий случай: e_m – это вектор, m-я компонента которого равна единице, а остальные нулю).
  Замечание: напоминаю, что теперь x_m – это m-ый вектор последовательности векторов, а не m-я компонента фиксированного вектора!
  Рассмотрим $f(x_m) = f(e_m) = f_m$. Из рассмотренных примеров следует, что при $X = c_0, c, l_p (p > 1)$ имеет место стремление f_m к нулю для любого $f \in X^*$. Это значит, что и сама последовательность $x_m = e_m$ слабо стремится к нулю (притом, что норма всех её элементов равна единице, так что сильной сходимости к нулю заведомо нет).
  В то же время при $X = l_1$ $X^* = l_\infty$, т.е. f_m – ограниченная, но не обязательно сходящаяся последовательность. Отсюда вытекает, что в пространстве l_1 последовательность $x_m = e_m$ не имеет слабого предела и, в частности, к нулю не стремится ни сильно, ни слабо.

- $X = c$, $x_m = (0, \dots, 0, 1, 1, \dots)$ (первая единица стоит на m-м месте). Тогда $f(x_m) = f_\infty + \sum_{k=m}^{\infty} f_k \xrightarrow[m\to\infty]{} f_\infty$, т.е. последовательность $f(x_m)$ сходится для произвольного функционала $f \in c^*$. Тем не менее, последовательность x_m не имеет слабого предела в c. Действительно, предположим, что такой предел $\tilde{x}$ существует, и тогда $\forall f \in c^* : f(\tilde{x}) = f_\infty$. С другой стороны, $f(\tilde{x}) = \tilde{x}_\infty + \sum_{k=1} \tilde{x}_k f_k$, где $\tilde{x}_k$ – k-я компонента вектора $\tilde{x}$, а $\tilde{x}_\infty = \lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k$. Отсюда вытекает, что $\tilde{x}_\infty = 1$ и одновременно $\forall k \in \mathbb{N} : \tilde{x}_k = 0$, что невозможно.
  В то же время если мы рассмотрим последовательность функционалов $\varphi_{x_m} \in c^{**}$ таких, что $\varphi_{x_m}(f) = f(x_m) = f_\infty + \sum_{k=m}^{\infty} f_k$, то такая последовательность поточечно сходится к функционалу $\tilde{\varphi} \in c^{**}$ такому, что $\tilde{\varphi}(f) = f_\infty$.

Говорят, что последовательность операторов A_m слабо сходится к A, если на любом элементе $x \in X$ последовательность $A_m x$ слабо сходится к Ax (в пространстве Y). То есть:
$\forall x \in X \, \forall f \in Y^* : f(A_m x) \to f(Ax)$
(или, в других обозначениях, $< A_m x, f > \to < Ax, f >$).

Утверждение. Если последовательность операторов A_m слабо сходится к A, то последовательность $A_m - A$ слабо сходится к нулю (к оператору O). Действительно, в этом случае
$\forall x \in X \, \forall f \in Y^* : f((A_m - A)x) = f(A_m x) - f(Ax) \to 0 = f(Ox)$.

Пример. Выше мы рассмотрели последовательность операторов левого сдвига T_m, поточечно сходящуюся к нулю во всех стандартных пространствах бесконечных последовательностей, за исключением c и l_∞. Теперь мы рассмотрим операторы правого сдвига $\hat{T}_m$, действующие следующим образом: если $y = \hat{T}_m x$, то $y_k = 0$ при $k \le m$ и $y_k = x_{k-m}$ при $k > m$. То есть

если $x = (x_1, x_2, \dots)$, то $\hat{T}_m x = (0, \dots, 0, x_1, x_2, \dots)$ (в начале последовательности m нулей).
(Замечание: здесь x_k, y_k – снова k-е компоненты векторов x, y.)
Во всех стандартных пространствах бесконечных последовательностей операторы $\hat{T}_m$ изометрические, т.е. $\forall x \in X \forall m \in \mathbb{N} : \|\hat{T}_m x\| = \|x\|$ (откуда, между прочим, следует, что $\|\hat{T}_m\| = 1$), поэтому последовательность $\hat{T}_m x$ для любого ненулевого вектора x по норме к нулю заведомо не стремится. Тем не менее, в некоторых (не во всех) пространствах такие последовательности стремятся к нулю слабо. Действительно, рассмотрим значения функционала f на элементах $\hat{T}_m x$: для $X \neq c, l_\infty$
$f(\hat{T}_m x) = 0 \cdot f_1 + \dots + 0 \cdot f_m + x_1 f_{m+1} + x_2 f_{m+2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_{m+k}$.
При $X = c_0$ $f \in c_0^* = l_1$, $|f(\hat{T}_m x)| \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k| \cdot \|x\|_\infty \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$
и, следовательно, последовательность $\hat{T}_m$ слабо сходится к нулю.
При $X = l_1$ $f \in l_1^* = l_\infty$, и $f(\hat{T}_m x)$, вообще говоря, не имеет предела.
При $X = l_p$, $1 < p < \infty$, $f \in l_p^* = l_q$,
$|f(\hat{T}_m x)| \leq \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |f_k|^q\right)^{1/q} \cdot \|x\|_p \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$
и, следовательно, последовательность $\hat{T}_m$ слабо сходится к нулю.
Интересная ситуация возникает при $X = c$. В этом случае
$f(\hat{T}_m x) = x_\infty f_\infty + 0 \cdot f_1 + \dots + 0 \cdot f_m + x_1 f_{m+1} + x_2 f_{m+2} + \dots =$
$= x_\infty f_\infty + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_{m+k} \xrightarrow[m \to \infty]{} x_\infty f_\infty$.
При любых $x \in c$ и $f \in c^*$ есть сходимость, но предельное значение не является, вообще говоря, значением функционала f на каком-либо элементе пространства c, поскольку в противном случае такой элемент был бы числовой последовательностью, все компоненты которой равны нулю, а их предел равен x_∞. Очевидно, таких последовательностей не бывает (при $x_\infty \neq 0$), поэтому у последовательности $\hat{T}_m$ нет слабого предела в $L_O(c)$. Выше мы уже рассматривали аналогичную ситуацию для случая, когда $x = (1, 1, \dots)$.

Утверждение: в пространстве $L_O(X, Y)$ из сходимости последовательности операторов по норме (равномерной) следует поточечная (её ещё называют сильной – по сравнению со слабой), а из последней, в свою очередь, слабая. В исходном пространстве X из сходимости по норме (сильной) следует слабая. В пространстве X^* из сходимости по норме (сильной, равномерной) следует поточечная (слабая).

Есть некоторое несоответствие в терминологии: для функционалов сильная сходимость – это равномерная, а слабая – поточечная, а для операторов сильная – это поточечная, она сильнее слабой, но слабее равномерной.

Сопряжённый оператор.

Пусть $A \in L_O(X, Y)$, $f \in Y^*$. Рассмотрим $f(Ax)$ как функционал над X: $f(Ax) = g(x)$. Он линейный (доказать) и ограниченный:
$|g(x)| = |f(Ax)| \leq \|f\| \cdot \|Ax\| \leq \|f\| \cdot \|A\| \cdot \|x\| \Rightarrow \|g\| \leq \|f\| \cdot \|A\|$.
Тогда $g \in X^*$.

Зафиксируем A и будем рассматривать зависимость g от f. Отображение $A^* : f \mapsto g$ называется сопряжённым оператором, $g = A^*(f)$

Утверждение: A^* – линейное отображение. Действительно,
$(A^*(\alpha f_1 + \beta f_2))(x) = (\alpha f_1 + \beta f_2)(Ax) = \alpha f_1(Ax) + \beta f_2(Ax) =$
$= \alpha(A^*(f_1))(x) + \beta(A^*(f_2))(x)$.

Как обычно, скобки будем опускать: $g = A^* f$, тогда
$g(x) = f(Ax) = (A^* f)(x)$, или, в других обозначениях,
$< Ax, f >=< x, A^* f >$.

Утверждение: $A^* : Y^* \to X^*$ – ограниченный оператор, и $\|A^*\| \leq \|A\|$ (поскольку $\|g\| \leq \|A\| \cdot \|f\|$).

Докажем, что есть равенство:

$$\|A^*\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|A^* f\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} |(A^* f)(x)| =$$
$$= \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} |f(Ax)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\|.$$

Замечание. Мы установили, что операция сопряжения (обозначаемая звёздочкой) – это изометрическое отображение из $L_O(X, Y)$ в $L_O(Y^*, X^*)$. "Супероператор"(оператор в пространстве операторов).
Линеен: $(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*$ (доказать).

Замечание. Если $A : X \to X$, то $A^* : X^* \to X^*$.

Пример. Пусть $X = c_0$ или $X = l_p$, $1 < p < \infty$, тогда $X^* = l_1$ или $X^* = l_q$, соответственно. В этих случаях $f(x) =< x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k$.
Докажем, что $T_m^* = \hat{T}_m$ и $\hat{T}_m^* = T_m$ (напомню, что T_m и $\hat{T}_m$ – операторы левого и правого сдвига на m позиций).
Доказательство:

$< T_m x, f >= \sum_{k=1}^{\infty} x_{k+m} f_k = \sum_{j=1+m}^{\infty} x_j f_{j-m} =$
$= \sum_{j=1}^{m} x_j \cdot 0 + \sum_{j=1+m}^{\infty} x_j f_{j-m} =< x, \hat{T}_m f >$,

$< \hat{T}_m x, f >= \sum_{k=1}^{m} 0 \cdot f_k + \sum_{k=1+m}^{\infty} x_{k-m} f_k =$
$= \sum_{k=1+m}^{\infty} x_{k-m} f_k = \sum_{j=1}^{\infty} x_j f_{j+m} =< x, T_m f >$.

Раздел 7. Линейные операторы в ЛНП

Лекция 16 Произведение операторов. Обратный оператор.

Пусть X, Y, Z – ЛП; $A : X \to Y$, $B : Y \to Z$ – операторы.
Произведение операторов $C = BA : X \to Z$ – это композиция отображений: $C = BA \Leftrightarrow C(x) = (BA)(x) = B(A(x))$. Ассоциативность (по определению).
Замечание. Если $Z \neq X$, то оператор AB не существует. Если $X = Z \neq Y$, то $BA : X \to X$, а $AB : Y \to X$. Коммутативности заведомо нет.

Утверждение: если A и B – линейные операторы, то C также линеен (доказать).

Утверждение: умножение операторов дистрибутивно по обоим сомножителям:
$(\alpha B_1 + \beta B_2)A = \alpha B_1 A + \beta B_2 A$,
$B(\alpha A_1 + \beta A_2) = \alpha BA_1 + \beta BA_2$
(доказать).
Замечание. Первое равенство справедливо в том числе и для нелинейных отображений. Для доказательства второго равенства требуется линейность оператора B (линейность $A_{1,2}$ не обязательна).

Если пространства конечномерные, то операторы задаются матрицами, и матрица, отвечающая произведению операторов – произведением матриц сомножителей.

Частный случай: левый сомножитель – функционал. Тогда
$(fA)(x) = f(Ax)$, f – функционал над Y, fA – функционал над X.

Другой частный случай: $X = Y = Z$, операторы A, B, AB и BA действуют из X в X. Вообще говоря, коммутативности нет, $AB \neq BA$.
$[A, B] = AB - BA$ – коммутатор операторов A и B. Если окажется, что $AB = BA$, т.е. $[A, B] = O$, то говорят, что операторы A и B коммутируют.
Операторы вида λE коммутируют со всеми операторами.
Для $A : X \to X$, можно рассмотреть натуральную степень оператора: $A^2 = AA$, $A^{n+1} = A^n A = AA^n$. Нулевая степень: $A^0 = E_X$. Любые степени одного и того же оператора коммутируют (доказать).

Пусть $A : X \to Y$ – оператор.
Если $A : X \to Y$ биекция, то $\forall y \in Y\ \exists! x \in X$, для которого $Ax = y$
Оператор, отображающий y в x – обратный оператор $A^{-1} : Y \to X$, $A^{-1}y = x$. Единственность обратного оператора (очевидно).

Утверждение: если A – линейный оператор, то A^{-1} также линейный (доказать).

Утверждение: если операторы $A : X \to Y$, $B : Y \to Z$ обратимы, то оператор $BA : X \to Z$ также обратим, и $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ (доказать).

Утверждение: $C = A^{-1} \Leftrightarrow CA = E_X \wedge AC = E_Y$ (доказать)
(это альтернативное опеределение обратного оператора).

Если A инъективный, но не сюрьективный, то обратный оператор определён на образе оператора A. Уравнение $Ax = y$ имеет решение лишь тогда, когда y принадлежит образу оператора. Решение если есть, то единственно: $Ax_1 = y \wedge Ax_2 = y \Rightarrow x_1 = x_2$.

Утверждение: A – инъективен $\Leftrightarrow$ ядро оператора тривиально (доказать).

Левый обратный оператор: $BA = E_X$. Его существование гарантирует инъективность A и единственность решения операторного уравнения (в случае, когда оно существует, т.е. при $y \in ImA$) (доказать). Сам оператор B может определяться, вообще говоря, не единственным образом (на дополнении к образу A).

Если A сюрьективный, но не инъективный, то образ оператора A – всё пространство Y, и уравнение $Ax = y$ имеет решение при любом y, но не единственное.

Утверждение: общее решение уравнения $Ax = y$ есть частное его решение плюс произвольный элемент ядра оператора (доказать).

Аналог обратного оператора – отображение в факторпространство $X/Ker\,A$.

Правый обратный оператор: $AD = E_Y$. Его существование гарантирует сюрьективность A и существование решения операторного уравнения для произвольного $y \in Y$ (доказать). Оператор D может определяться, вообще говоря, не единственным образом.

Утверждение: $\exists B, D : BA = E_X \wedge AD = E_Y \Rightarrow B = D = A^{-1}$ (доказать). Т.е. если одновременно существуют правый и левый обратный, то они определяются единственным образом, и существует просто обратный, который совпадает с левым и правым. Оператор A биективен, операторное уравнение однозначно разрешимо при любой правой части.

Пусть теперь пространства не просто линейные, а нормированные.

Утверждение: произведение ограниченных линейных операторов – ограниченный линейный оператор, его норма не превышает произведения норм сомножителей: $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$ (доказать).

В частности, если A и A^{-1} – ограниченные операторы, то $cond(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$ (доказать).

Замечание: эта величина называется числом обусловленности оператора A.

Утверждение: произведение операторов непрерывно по обоим переменным. То есть если $A_n \to A$ и $B_n \to B$, то $B_n A_n \to BA$.
Действительно, $\delta A_n = A_n - A \to O$, $\delta B_n = B_n - B \to O$, тогда
$B_n A_n = (B + \delta B_n)(A + \delta A_n) = BA + \delta B_n A + B\delta A_n + \delta B_n \delta A_n \to BA$,
поскольку
$\|\delta B_n A + B\delta A_n + \delta B_n \delta A_n\| \leq \|\delta B_n\| \cdot \|A\| + \|B\| \cdot \|\delta A_n\| + \|\delta B_n\| \cdot \|\delta A_n\| \to 0$.

Утверждение: произведение непрерывного оператора и оператора конечного ранга (в любом порядке) – оператор конечного ранга (доказать).

Утверждение: произведение непрерывного оператора и вполне непрерывного оператора (в любом порядке) – вполне непрерывный оператор (доказать).

Утверждение: произведение непрерывного оператора и компактного оператора (в любом порядке) – компактный оператор (доказать).

Утверждение: если оператор $A : X \to Y$ компактен, и пространство X бесконечномерно, то у него не может быть ограниченного обратного (доказать).

Это значит, что уравнение $Ax = y$ либо не является однозначно разрешимым, либо малые изменения правой части (вектора y) могут привести к большим изменениям решения (вектора x). Некорректная задача.

Пример: интегральное уравнение Фредгольма первого рода.

Пусть $A : X \to X$ – ограниченный оператор.
Утверждение: $\|A^n\| \le \|A\|^n$ (доказать).
Рассмотрим операторноый степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Возникает вопрос о сходимости.
Пусть R – радиус сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k| z^k$.
Утверждение: если $\|A\| < R$ и пространство X банахово, то операторный ряд сходится (по теореме Вейерштрасса).
Аналитические функции от оператора: если $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$, то
$F(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$. Например, $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k A^k/k!$ – операторная экспонента.
Если к тому же A непрерывно обратим, то можно рассмотреть также ряды Лорана, содержащие в том числе и отрицательные степени оператора.
Утверждение: различные аналитические функции от одного и того же оператора коммутируют (доказать).

Вернёмся к рассмотрению произведения оператора и функционала. Пусть $A \in L_O(X, Y)$ и $f \in Y^*$, тогда $g = fA \in X^*$, т.е. $g(x) = (fA)(x) = f(Ax)$.
Но согласно определению сопряжённого оператора, $g = A^* f$, т.е. $fA = A^* f$.
Замечание: в последнем равенстве левая и правая части при внешней схожести имеют совершенно разный смысл. В первом случае это произведение (композиция) линейных отображений. Во втором случае это результат действия оператора A^* на элемент $f \in Y^*$. Поэтому во втором случае нет никакой ассоциативности: $(A^* f)(x) \ne A^*(f(x))$ (и более того, выражение в правой части последнего неравенства просто не имеет смысла, поскольку $x \in X$, а $f \in Y^*$).

Разберёмся, что из себя представляет $Ker\, A^*$ – ядро сопряжённого оператора. Если $f \in Ker\, A^*$, то $A^* f = fA = o$, т.е. f – функционал, обнуляющий образ оператора A (иными словами, $Im\, A \subset Ker\, f$).

Теперь у нас всё готово для получения необходимого условия разрешимости операторного уравнения $Ax = y$. Здесь мы не предполагаем, что A инъективен, так что о единственности решения речи не идёт, вопрос о существовании. Мы хотим выяснить, принадлежит ли элемент y образу оператора A (что и означает существование такого x, для которого $Ax = y$). В конечномерном случае ответ даёт теорема Кронекера-Капелли. В бесконечномерных задачах универсального ответа нет, но мы можем указать условие, при нарушении которого уравнение заведомо не имеет решения, а именно: значение любого функционала, принадлежащего ядру сопряжённого опе-

ратора и зануляющего $Im\,A$, должно быть на этом элементе равно нулю: $\forall f \in Ker\,A^* : f(y) =< y, f >= 0$.
Напомню, что в случае $< y, f >= 0$ говорят, что элемент y и функционал f взаимно ортогональны. Поэтому необходимое условие разрешимости обычно формулируют так: для того, чтобы уравнение $Ax = y$ было разрешимо, необходимо, чтобы элемент y (правая часть уравнения) был ортогонален ядру сопряжённого оператора. Или, иными словами, этот элемент должен принадлежать ортогональному дополнению к ядру сопряжённого оператора (под ортогональным дополнением к множеству понимают другое множество, все элементы которого ортогональны всем элементам первого множества).
Замечание. В данном случае термин "ортогональное дополнение" выглядит несколько странно, поскольку множество и его ортогональное дополнение лежат в разных пространствах (X^* и X) и непонятно, до чего оно "дополняет". Происхождение этого термина прояснится в дальнейшем, при изучении теории пространств со скалярным произведением, в которых исходное пространство и сопряжённое в некотором смысле отождествляются.

Итак, мы получили необходимое условие разрешимости уравнения $Ax = y$. Достаточным оно, вообще говоря, не является. Те операторы, для которых это условие не только необходимо, но и достаточно, носят название нормально разрешимых операторов ("нормально" – от слова "нормаль", т.е. перпендикуляр) – иначе говоря, операторов, разрешимых на ортогональном дополнении к ядру сопряжённого.

Утверждение. Нормально разрешимые операторы – это операторы, область значений которых замкнута (т.е. является подпространством – замкнутым линеалом).
Этот факт вытекает из следующей теоремы:

Теорема. Для того, чтобы на элементе $y \in Y$ обращались в нуль все линейные ограниченные функционалы, принадлежащие ядру оператора A^*, необходимо и достаточно, чтобы элемент y принадлежал замыканию образа оператора A. (Иначе говоря, ортогональное дополнение к $KerA^*$ совпадает с $[Im\,A]$.)

Докажем сначала следующий факт, интересный сам по себе:

Лемма. Для любого подпространства $Z \subsetneq Y$ и элемента $y \in Y \setminus Z$ найдётся линейный ограниченный функционал $f \in Y^*$ такой, что его значения на y равно единице, а на Z – нулю.

Доказательство. Прежде всего, напомню, что расстояние $\rho(y, Z) = \inf_{z \in Z} \|y - z\|$ от элемента y до подпространства Z строго положительно в силу замкнутости Z.
Рассмотрим теперь линейную оболочку $L(y, Z)$, каждый элемент которой единственным образом (доказать!) представляется в виде $\alpha y + z$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in Z$, и определим на $L(y, Z)$ функционал f равенством

$f(\alpha y + z) = \alpha$. Этот функционал линеен (доказать!), на Z обращается в нуль, при этом $f(y) = 1$.
Функционал f ограничен. Действительно, при $\alpha = 0$ имеем $|f(z)|/\|z\| = 0$ при $\|z\| \neq 0$. Если же $\alpha \neq 0$, то

$$\frac{|f(\alpha y + z)|}{\|\alpha y + z\|} = \frac{|\alpha|}{|\alpha|(\|y + z/\alpha\|)} = \frac{1}{\|y + z/\alpha\|} \leq \frac{1}{\rho(y, Z)},$$

поскольку $\|y + z/\alpha\| \geq \rho(y, Z) > 0$. Отсюда вытекает, что $\|f\| \leq \rho^{-1}(y, Z)$ (докажите, что здесь равенство), т.е. мы построили на $L(y, Z)$ ограниченный линейный функционал, обладающий требуемыми свойствами. По теореме Хана-Банаха он продолжается на пространство Y с сохранением нормы. Лемма доказана.

Перейдём к доказательству теоремы. Рассмотрим замкнутое подпространство $Z = [Im\, A]$. В силу доказанной леммы для любого элемента $y \in Y \backslash Z$ найдётся линейный ограниченный функционал $f \in Y^*$ такой, что его значения на y равно единице, а на Z – нулю. Но если f обращается в нуль на Z, то он обращается в нуль и на $Im\, A \subset Z$, откуда следует, что $f \in Ker\, A^*$. Таким образом, $\forall y \in Y \backslash [Im\, A] \, \exists\, f \in Ker\, A^* : \, f(y) = 1 \neq 0$.
Пусть теперь $y \in [Im\, A]$. Произвольный функционал $f \in Ker\, A^*$ обращается в нуль на $Im\, A$, но тогда он в силу непрерывности обращается в нуль и на замыкании $Z = [Im\, A]$. Следовательно, $f(y) = 0$. Теорема доказана.

Таким образом, выполнение необходимого условия разрешимости эквивалентно включению $y \in [Im\, A]$. Если область значений оператора замкнута, то $Z = Im\, A = [Im\, A]$, и тогда $\forall f \in Ker\, A^* : f(y) = 0 \Leftrightarrow y \in Im\, A$, и оператор A нормально разрешим. Если область значений оператора незамкнута, то $Im\, A \subsetneq [Im\, A]$, и $\exists y \in [Im\, A] \backslash Im\, A$ такой, что $\forall f \in Ker\, A^* : f(y) = 0$, при этом уравнение $Ax = y$ не имеет решения. Оператор нормально разрешимым не является.

Пример. Произвольный линейный ограниченный оператор конечного ранга нормально разрешим (все конечномерные линеалы замкнуты). В частности, нормально разрешимы все линейные операторы в конечномерных пространствах $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Замечание. Напоминаю, что если ядро самого оператора $Ker\, A$ тривиально, то в этом случае оператор инъективен и решение единственно. Поэтому оператор с тривиальным ядром и замкнутой областью значений однозначно обратим на ортогональном дополнении к ядру сопряжённого оператора.

Рассмотрим теперь вопрос об условиях, обеспечивающих не просто существование решения уравнения $Ax = y$, но и корректность задачи, т.е. существование ограниченного обратного оператора. Для этого сначала обсудим круг вопросов, относящихся к знаменитой теореме Банаха о замкнутом графике и её следствию – теореме Банаха о непрерывной биекции (см.

ниже).

Напоминание: графиком линейного оператора $A : X \to Y$ называется множество $Gr(A) = \{(x, y) \in X + Y : y = Ax\}$. Здесь $X + Y$ – прямая сумма линейных пространств X и Y, т.е. декартово произведение с введённой на нём линейной структурой: если $z_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2})$, то
$\alpha z_1 + \beta z_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2)$.

Замечание. В частном случае пространства X и Y могут совпадать.

Проекция графика на X есть область определения оператора, проекция на Y – область значений.

Утверждение: график оператора – линеал в $X + Y$. Действительно, если $z_{1,2} \in Gr(A)$, то $y_{1,2} = Ax_{1,2}$. Тогда
$\alpha z_1 + \beta z_2 = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha Ax_1 + \beta Ax_2) =$
$= (\alpha x_1 + \beta x_2, A(\alpha x_1 + \beta x_2)) \in Gr(A)$

Напоминаем, что линеал в $X + Y$ называется линейным отношением (частный случай бинарного отношения). Тогда график оператора – это функциональное линейное отношение.

Утверждение. Для того, чтобы линейное отношение G было графиком какого-либо оператора, необходимо и достаточно, чтобы из $(o_X, y) \in G$ следовало $y = o_Y$.

Доказательство. Необходимость очевидна: если $G = Gr(A)$, то
$(o_X, y) \in Gr(A) \Rightarrow y = Ao_X = o_Y$. Докажем достаточность.
Из линейности G вытекает, что $(x, y_2) - (x, y_1) = (o_X, y_2 - y_1) \in G$, откуда $y_2 - y_1 = o_Y$ и $y_2 = y_1$. Это значит, что для произвольного $x \in X$ найдётся не более одного элемента $(x, y) \in G$. Область определения оператора определяется условием $D(A) = \{x \in X : \exists (x, y) \in G\}$, область значений – условием $R(A) = \{y \in Y : \exists (x, y) \in G\}$, а действие оператора на этой облсти – условием $y = Ax \Leftrightarrow (x, y) \in G$. Линейность оператора (и его областей определения и значений) вытекает из линейности G (докажите).

Рассмотрим теперь прямую сумму $Y + X$ (с обратном порядке) и линейное отношение $\{(y, x) : y = Ax\}$, или, иначе, $\{(y, x) : (x, y) \in Gr(A)\}$. Это отношение, обратное к $Gr(A)$, и отличается от него перестановкой x и y. Оно является графиком некоторого оператора (обратного к A) если и только если $\{(o_Y, x) : o_Y = Ax\} \Rightarrow x = o_X$, т.е. мы снова пришли к условию тривиальности ядра оператора A (в терминах графика оператора $KerA = \{x \in X : (x, o_Y) \in Gr(A)\}$).

Пусть теперь X, Y – ЛНП, тогда на прямой сумме $X + Y$ можно ввести норму по правилу $\|z\| = \|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$ (убедитесть в выполнении свойств нормы). Тогда можно говорить об открытых, замкнутых множествах, сходимости, полноте и т.д.

Очевидно, мы можем точно так же ввести норму на $Y + X$ по правилу $\|(y, x)\| = \|y\|_Y + \|x\|_X$. В этом случае мы получим изометрическую копию пространства $X + Y$, а оператор, осуществляющий изометрию – линейный оператор, переставляющий местами x и y.

Оператор называется замкнутым, если его график замкнут.

Утверждение. Если оператор A замкнут и обратим, то оператор A^{-1} также замкнут.
Это вытекает из того, что графики этих операторов – изометрические копии друг друга.

Разберёмся, что означает замкнутость графика оператора.
Точка (x^*, y^*) является предельной точкой $Gr(A)$, если существует такая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in D(A)$, что одновременно $x_n \to x^*$ и $y_n = Ax_n \to y^*$. График замкнут, если все такие точки в нём содержатся, т.е. если $x^* \in D(A)$ и $Ax^* = y^*$.

Если же график оператора незамкнут, то это означает, что найдётся такая последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in D(A)$, что одновременно $x_n \to x^*$ и $y_n = Ax_n \to y^*$, но при этом либо $x^* \notin D(A)$, либо $Ax^* \neq y^*$.
В первом случае мы можем попробовать построить расширение оператора, замкнув его график (такая операция называется замыканием оператора). В результате замыкания линеала мы получим некоторое подпространство в $X + Y$ – линейное отношение, но остаётся вопрос, будет ли оно графиком какого-либо оператора. Для этого, как мы знаем, необходимо, чтобы оно не содержало элементов вида (o_X, y) при $y \neq o_Y$. Это значит, что исходный график не должен иметь предельных точек такого вида, т.е. чтобы для последовательностей $x_n \in D(X)$, $x_n \to o_X$ соответствующие последовательности $y_n = Ax_n$ либо стремились к o_Y, либо расходились.

Утверждение. Если оператор A ограничен и его область опредения замкнута, то график этого оператора также замкнут.
Доказательство. Пусть $x_n \to x^*$ и $y_n = Ax_n \to y^*$. Поскольку $D(A)$ замкнута, то $x^* \in D(A)$. Но тогда в силу непрерывности $Ax_n \to Ax^*$, откуда $Ax^* = y^*$.

Замечание. Это относится, в том числе, к полноопределённым операторам, для которых $D(A) = X$.

Замечание. Если область определения непрерывного линейного оператора – незамкнутый линеал, то его график также незамкнут. Однако такой оператор можно единственным образом продолжить по непрерывности на замыкание области определения.

Утверждение. Замкнутый оператор с незамкнутой областью определения неограничен (доказать).

Утверждение. Если непрерывный оператор, определённый на подпространстве, обратим, то обратный оператор замкнут.
Это следует из того, что графики этих операторов – изометрические копии и замкнуты одновременно.

Замечание. Мы видели, что у компактного оператора в бесконечномерном пространстве не может быть ограниченного обратного. Тем не менее, если ядро компактного оператора тривиально, то обратный оператор (неограниченный) существует, и он замкнут.

Утверждение. Если $A : X \to Y$ – инъективный ограниченный полноопределённый оператор с незамкнутой областью значений, то обратный оператор, определённый на области значений A, неограничен (доказать).

Приведём без доказательства следующую теорему:

Теорема Банаха о замкнутом графике.

Пусть пространства X и Y банаховы, а $A : X \to Y$ – линейный оператор с замкнутой областью определения и замкнутым графиком. Тогда оператор A ограничен.

Замечание. В частности, это касается операторов, у которых область определения – всё пространство X. В принципе в формулировке теоремы можно было бы ограничиться этим случаем, поскольку замкнутое подпространство банахова пространства само является банаховым пространством.

Замечание. Это касается также линейных функционалов на банаховых пространствах.

Замечание. То, что ограниченный оператор с замкнутой областью определения замкнут, мы уже знали. Теперь знаем, что замкнутый оператор с замкнутой областью определения ограничен.

Следствие. Если неограниченный оператор, определённый на всём пространстве, замкнут, то пространство не банахово (неполное).

Следствие. Если неограниченный оператор, действующий из банахова пространства в банахово, замкнут, то его область определения – незамкнутый линеал (часто – плотное множество). Именно с такими неограниченными операторами (в частном случае – функционалами) мы, как правило, и имеем дело.

Следствие. Если область определения неограниченного оператора, действующего из банахова пространства в банахово, совпадает со всем пространством, то график оператора незамкнут. Это значит, что найдётся сходящаяся последовательность $x_n \to x^*$, для которой $y_n = Ax_n \to y^* \neq Ax^*$. Тогда $A(x_n - x^*) \to y^* - Ax^* \neq o_Y$. То есть последовательность значений оператора на некоторой бесконечно малой последовательности $x_n - x^* \to o_X$ не просто не стремится к нулю пространства Y, но стремится к пределу, отличному от нуля.

Ещё одним важным следствием теоремы о замкнутом графике является

Теорема Банаха о непрерывной биекции.

Пусть $A : X \to Y$ – непрерывный оператор, биективно отображающий банахово пространство X на банахово пространство Y. Тогда обратный оператор A^{-1} также непрерывен.

Доказательство. Поскольку A осуществляет биекцию, обратный оператор A^{-1} существует и определён на всём пространстве Y. Поскольку A непрерывен и определён на всём пространстве X, его график замкнут, тогда график обратного оператора также замкнут. То есть A^{-1} – полноопределённый оператор с замкнутым графиком и, следовательно, он непрерывен по теореме о замкнутом графике.

Следствие. Пусть $X_1 = (X, \|\cdot\|_1)$ и $X_2 = (X, \|\cdot\|_2)$ – ЛНП с одним и тем же носителем, при этом нормы не эквивалентны и норма $\|\cdot\|_2$ подчинена норме $\|\cdot\|_1$: $\exists\kappa\,\forall x \in X : \|x\|_2 \leq \kappa\|x\|_1$. Тогда пространства $X_{1,2}$ не могут быть одновременно полными (банаховыми).
Доказательство. Оператор вложения из X_1 в X_2 непрерывен и обратим. Если бы пространства $X_{1,2}$ были банаховыми, то по теореме о непрерывной биекции обратный оператор также был бы непрерывен, что означало бы эквивалентность норм. Следовательно, пространства $X_{1,2}$ одновременно банаховыми быть не могут.
Пример: пространства $C[a,b]$ и $\tilde{L}_p[a,b]$. Носитель – множество непрерывных функций, норма в $\tilde{L}_p[a,b]$ подчинена норме в $C[a,b]$, при этом нормы не эквивалентны. ЛНП $\tilde{L}_p[a,b]$ полными не являются.

Следствие. Пусть A – компактный оператор, действующий из бесконечномерного банахова пространства X в банахово пространство Y. Тогда либо его образ незамкнут, либо он имеет нетривиальное ядро (доказать).

Следствие. Если $A : X \to Y$ – непрерывно обратимый неограниченный оператор, а X и Y – банаховы пространства, то область определения A не может совпадать с X и представляет собой незамкнутый линеал (доказать).

Перейдём теперь к рассмотрению другого круга идей, не связанного с теоремой о замкнутом графике. Откажемся от предположения о банаховости пространств X и Y и непрерывности A. Справедлива следующая теорема:

Теорема. Достаточное условие непрерывной обратимости линейного оператора.

Пусть $A : X \to Y$ – линейное отображение ЛНП X на ЛНП Y такое, что $\exists m > 0\,\forall x \in X : \|Ax\| \geq m\|x\|$.
Тогда существует ограниченный обратный оператор A^{-1}, и
$\|A^{-1}\| \leq m^{-1}$.

Доказательство.
Сюрьективность дана в условии.
Ядро тривиально: $Ax = o \Rightarrow 0 \geq m\|x\| \Rightarrow x = o$
Тогда оператор инъективен, биективен, обратим.
$\forall x \in X : \|Ax\| \geq m\|x\| \Leftrightarrow \forall y \in Y : \|y\| \geq m\|A^{-1}y\|$
Отсюда оценка для нормы.

Следующая теорема касается ограниченного оператора, действующего из банахова пространства в это же пространство.

Теорема Банаха об обратном операторе.

Пусть $A : X \to X$ – ограниченный линейный оператор, X – банахово пространство, $\|A\| < 1$. Тогда оператор $E - A$ имеет ограниченный обратный, и $\|(E-A)^{-1}\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$.

Доказательство. Докажем сначала, что оператор $E - A$ сюрьективен, т.е.

уравнение $(E-A)x = y$ разрешимо для $\forall y \in X$.

Перепишем уравнение в виде $x = Ax+y$, или $B(x) = x$, где $B(x) = Ax+y$, B – нелинейное отображение (оператор) пространства X в себя.

Покажем, что B – сжатие. Действительно,
$\forall x', x'' \in X : \|B(x') - B(x'')\| = \|(Ax' + y) - (Ax'' + y)\| = \|Ax' - Ax''\| =$
$= \|A(x' - x'')\| \leq \|A\| \cdot \|x' - x''\|$.
Поскольку $\|A\| < 1$, отображение B сжимающее, и, следовательно, имеет неподвижную точку (поскольку пространство банахово): $B(x) = x$, что эквивалентно исходному уравнению. Сюрьективность $E - A$ доказана.

Чтобы воспользоваться предыдущей теоремой, докажем оценку:
$\|(E - A)x\| = \|x - Ax\| \geq \|x\| - \|Ax\| \geq \|x\| - \|A\| \cdot \|x\| = (1 - \|A\|)\|x\|$.

Выполнено достаточное условие непрерывной обратимости оператора $E-A$ (с $m = 1-\|A\|$), откуда следует и требуемая оценка нормы обратного оператора $(E-A)^{-1}$.
Замечание. В условии теоремы разность $E - A$ можно заменить суммой $E + A = E - (-A)$, результат не изменится.

Следствием теоремы Банаха является следующая теорема:

Теорема Пусть $A : X \to Y$ – непрерывно обратимый оператор, и по крайней мере одно из пространств X, Y – банахово. Пусть $B : X \to Y$ – ограниченный линейный оператор, и $\|A^{-1}\| \cdot \|B\| < 1$. Тогда оператор $A+B$ непрерывно обратим.

Доказательство. Пусть X банахово, тогда $A+B = A(E_X+A^{-1}B)$. Левый сомножитель непрерывно обратим по условию теоремы, правый – в силу теоремы Банаха, поскольку $\|A^{-1}B\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|B\| < 1$, и тогда
$(A + B)^{-1} = (E_X + A^{-1}B)^{-1}A^{-1}$ – непрерывный оператор.

Пусть теперь Y банахово, тогда $A + B = (E_Y + BA^{-1})A$. Правый сомножитель непрерывно обратим по условию теоремы, левый – в силу теоремы Банаха, поскольку $\|BA^{-1}\| \leq \|B\| \cdot \|A^{-1}\| < 1$, и тогда
$(A+B)^{-1} = A^{-1}(E_Y+BA^{-1})^{-1}$ – непрерывный оператор. Теорема доказана.

Замечание. В обоих случаях $\|(A + B)^{-1}\| \leq \|A^{-1}\|(1 - \|A^{-1}\| \cdot \|B\|)^{-1}$

Замечание. В условии теоремы не требуется, чтобы оператор A был ограниченным. Если A неограничен, то его область определения, как правило – незамкнутый линеал, который выступает в роли X. Тогда для выполнения теоремы необходимо, чтобы банаховым было пространство Y.

Замечание. Если считать, что A – не только непрерывно обратимый, но и непрерывный оператор, то теорему можно интерпретировать следующим образом: у каждого непрерывно обратимого оператора в пространстве $L_O(X, Y)$ найдётся окрестность, все элементы которой также непрерывно обратимы. Это означает, что множество непрерывно обратимых операторов открыто в $L_O(X, Y)$, а множество операторов, не имеющих ограниченного обратного – соответственно, замкнуто.

Собственные значения и спектр линейного оператора

Элемент $x \neq o$ вещественного линейного пространства X (не обязательно нормированного) называется собственным элементом оператора
$A : X \to X$, если для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ выполнено равенство
$Ax = \lambda x$.
Число λ называется собственным числом (собственным значением) оператора, соответствующим собственному элементу x.

Замечание. Используются также теримины "собственный вектор"и "собственная функция"(последний – когда элементами X являются функции).

Замечание. Если рассматриваются ЛП над полем $\mathbb{K}$ (в частности, над $\mathbb{C}$), то и собственные числа также принадлежат этому же полю.

Утверждение: для ограниченных операторов в ЛНП $|\lambda| \leq \|A\|$ (доказать).

Собственные элементы, отвечающие одному и тому же значению λ, после добавления нуля образуют в совокупности собственное подпространство оператора (для неограниченного оператора – вообще говоря, линеал), совпадающее с ядром оператора $\lambda E - A$.

Значение параметра λ называется регулярным для оператора A, если при этом значении λ существует ограниченный обратный оператор по отношению к оператору $\lambda E - A$.

Этот оператор $R_\lambda(A) = (\lambda E - A)^{-1}$ называется резольвентой оператора A, а множество регулярных значений λ называется резольвентным множеством оператора A (обозначается $\rho(A)$).

Замечание. Иногда под резольвентой понимают оператор $(A - \lambda E)^{-1}$ (отличие в знаке).

Замечание. Вектор $R_\lambda(A)y$ – это решение операторного уравнения
$\lambda x = Ax + y$.

Утверждение: резольвентное множество открыто. Если для некоторого λ оператор $\lambda E - A$ непрерывно обратим, то для δ таких, что $|\delta| \cdot \|R_\lambda(A)\| < 1$, оператор $\lambda E - A + \delta E = (\lambda + \delta)E - A$ также непрерывно обратим (пространство X считаем банаховым).

Дополнение к резольвентному множеству – спектр оператора (обозначается $\sigma(A)$). Содержит значения λ, для которых не существует ограниченного обратного к $\lambda E - A$. Спектр замкнут.

Утверждение. Собственные значения оператора принадлежат его спектру ($Ker(\lambda E - A)$ нетривиален, оператор $\lambda E - A$ необратим).

В конечномерном случае этим дело и ограничиается: оператор задаётся матрицей, и если λ не является её собственным числом, то существует матрица $(\lambda E - A)^{-1}$, задающая непрерывный оператор. Чисто точечный спектр.

В бесконечномерном случае так тоже иногда бывает, например:
$\sigma(E) = \{1\}$. Единица – единственное собственное число единичного оператора, собственное подпространство – всё пространство. В этом случае оператор $\lambda E - E = (\lambda - 1)E$ непрерывно обратим при любом $\lambda \neq 1$.

Утверждение. В бесконечномерном пространстве спектр компактного оператора содержит 0 (поскольку не существует ограниченного обратного).

В общем случае спектр может быть не связан с собственными числами.

Пример. Пространство $C[a, b]$, A – оператор умножения на независимую переменную: если $y = Ax$, то $y(t) = tx(t)$.
Рассмотрим задачу на собственные значения: $Ax = \lambda x$, т.е. $tx(t) = \lambda x(t)$, откуда $(\lambda - t)x(t) = 0$. Отсюда $x(t) = 0$ при $t \neq \lambda$, но функция $x(t)$ непрерывна, и поэтому $x(t) \equiv 0$ – не является собственной функцией. Собственных чисел и собственных функций у оператора нет.
Рассмотрим теперь уравнение $(\lambda E - A)x = y$, т.е. $(\lambda - t)x(t) = y(t)$. Если $\lambda \notin [a, b]$, то уравнение однозначно разрешимо при любой правой части: $x(t) = y(t)/(\lambda - t)$, при этом $\|x\| \leq \|y\|/\rho(\lambda, [a, b])$. Отсюда следует непрерывная обратимость оператора $\lambda E - A$ и оценка для нормы резольвенты: $\|(\lambda E - A)^{-1}\| \leq 1/\rho(\lambda, [a, b])$ (покажите что здесь равенство). Поэтому дополнение к отрезку $[a, b]$ принадлежит резольвентному множеству оператора A.
Если же $\lambda \in [a, b]$, то уравнение разрешимо не для всех правых частях: решение существет лишь для функций y, обращающихся в нуль при $t = \lambda$, причём должен существовать конечный предел $\lim_{t \to \lambda} y(t)/(\lambda - t)$. Это значит, что отрезок $[a, b]$ принадлежит спектру оператора A (точнее, совпадает с ним: $\sigma(A) = [a, b]$). Такой спектр называется непрерывным.

Бывают операторы со смешанным спектром.

В вещественном пространстве есть операторы, спектр которых пуст (например, оператор поворота в $\mathbb{R}^2$ на угол, не кратный π). В комплексном пространстве любой оператор имеет непустой спектр на $\mathbb{C}$. Это следствие теоремы Лиувилля. При любых $x \in X$, $f \in X^*$ $f(R_\lambda(A)x)$ – аналитическая функция от λ, стремящаяся к нулю на бесконечности. Если спектр пуст, то у этой функции нет особенностей, и тогда она тождественно равна нулю. В силу произвольности x и f отсюда следует, что резольвента – нулевой оператор, что невозможно.