ОСНОВЫ
ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

А. Б. Бакушинский   Ю. И. Худак

2009 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель книги — дать возможность читателям, ***обладающим "стандартной"*** подготовкой ***инженера*** по ***математическому анализу*** и ***алгебре***, значительно обобщить полученные ими знания и уверенно ориентироваться в современном ***математическом моделировании***.

В дальнейшем, это позволит им ***создавать*** и ***исследовать*** новые математические модели в различных областях науки и практики, необходимые для ***информационного*** и ***программного*** обеспечения указанных областей человеческой деятельности.

Книга ***предназначена*** тем, кто хочет или вынужден сделать свои ***первые шаги*** в освоении функционального анализа, именно в той его, уже давно, ставшей ***классической*** части, которая возникла в недрах старой классической математики в начале двадцатого века при осмыслении и обобщении самых фундаментальных ее понятий, таких как ***функция***, ***предел***, ***непрерывность***, ***производная*** и ***интеграл*** от функции.

Современный ***функциональный анализ*** — это ***переплетение многих теорий***, каждая из которых, как правило, содержит большое количество информации об используемых ***методах исследований***, а также большое количество ***конкретных утверждений***.

Весь этот массив знаний, конечно же, нашёл своё отражение в большом количестве монографий и учебников.

Назовём лишь, наиболее близкие нам по направлению исследований и методам их проведения, четыре написанных в разное время и ставших классическими фундаментальных труда по функциональному анализу: Л. В. Канторович, Г. П. Акилов — "Функциональный анализ" , Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц — "Линейные операторы" (три тома, каждый объемом около 1 000 страниц), Э. Хилле, Р. Филлипс — "Функциональный анализ и полугруппы" , и, наконец, Р. Эдвардс — "Функциональный анализ" .

Эти монографии вряд ли годятся для ***первоначального*** знакомства с предметом. Предлагаемая ***книга*** серьезно ***отличается***, как от упомянутых монографий, так и от имеющихся на русском языке "классических" ***учебников*** по функциональному анализу (краткое их перечисление приведено в списке литературы), её более ***узкой*** направленностью и большей ***элементарностью*** изложения.

Основное содержание группируется вокруг понятия ***метрики***, вводимой на произвольном множестве, возникающем при этом понятии ***метрического пространства*** и изучении различных примеров ***функций***, ***отображающих*** одно ***метрическое пространство в*** другое ***метрическое пространство***.

Как показало развитие математики и её приложений в течение XX века, упомянутые выше ***понятия метрического пространства*** и ***отображения*** одного ***метрического пространства в другое*** оказались ***основополагающими*** в широком круге вопросов, возникающих при привлечении ***математических методов*** для описания явлений и процессов в окружающем нас мире.

Теперь, коротко, рассмотрим содержание книги ***по главам***.

В ней четыре главы, в которых мы постарались ***изложить все*** наиболее ***часто используемые*** в приложениях ***факты***, ***и***, при этом, ***не перегрузить читателя***, начинающего знакомиться с функциональным анализом, излишним их обилием.

Первая глава "Метрические пространства" имеет шесть параграфов.

Первые три из них содержат ***минимальный набор*** базовых определений ***и*** самых важных для приложений ***примеров*** и ***свойств*** метрических пространств.

В остальных трёх параграфах главы последовательно рассмотрены три часто используемые в теории и приложениях общие конструкции, касающиеся ***существования пополнения*** (§ 4), ***сжимающих отображений*** (§ 5) и ***компактности*** (§ 6).

Вторая глава "Линейные нормированные пространства и линейные операторы" состоит всего из трёх параграфов. Она, также как и первая глава, в определённом смысле, является ***подготовительной*** для ***центральных*** по своему значению, как для ***теории***, так и для ***приложений***, глав III и IV.

В первом параграфе изложены основные базовые определения: ***линейного пространства***, ***линейной зависимости***, ***размерности*** линейного пространства, а также основные факты, связанные с введением ***нормы*** в линейное пространство, превращающее его в ***метрическое*** пространство.

Во втором параграфе изложены основные определения и результаты, дающие теоретический ***базис*** при изучении и применении ***линейных операторов***, действующих из одного линейного нормированного пространства в другое линейное нормированное пространство.

И, наконец, в третьем параграфе этой главы приведены основные факты, касающиеся ***алгебры операторов***, введено полнятие ***обратного оператора*** и приведены простые достаточные условия ***непрерывности*** обратного оператора.

Глава II содержит весьма ***небольшое*** количество ***материала***, который можно пропустить при первом чтении, без ущерба для понимания дальнейшего. Это, прежде всего, содержащиеся в первом параграфе теорема о ***непрерывном изоморфизме*** всех конечномерных пространств одной и той же размерности, ***теорема Ф. Рисса*** и полезное во многих приложениях свойство ***компактности*** любого ***ограниченного*** множества в любом ***конечномерном*** линейном нормированном пространстве. ***"Необязательный"*** материал отмечен знаком • в заголовке раздела.

Третья глава "Гильбертово пространство. Линейные отображения гильбертовых пространств" содержит шесть параграфов.

В первом параграфе приведено определение пространств ***со скалярным произведением***, понятия слабой сходимости в этих пространствах и основные факты ***об ортогональности*** и ***замкнутости*** линейных множеств в них.

Во втором параграфе изложены основные ***фундаментальные*** факты теории ***гильбертовых пространств***: ***теорема о проекции*** на замкнутое выпуклое множество и, в частности, на замкнутое подпространство, теория ***рядов Фурье*** в пространстве со скалярным произведением и ***об общем виде линейного функционала*** в гильбертовом пространстве.

Третий параграф посвящён доказательству существования у всякого ***самосопряжённого вполне непрерывного*** оператора в ***гильбертовом*** пространстве ***собственных векторов*** и вытекающей из этого факта ***теоремы о спектральном разложении*** рассматриваемых операторов.

В четвёртом параграфе приведены два важных примера систем собственных функций для ***интегрального оператора*** и для ***задачи Штурма - Лиувилля*** для дифференциального оператора второго порядка, опирающиеся на теорию параграфа три.

В пятом параграфе изложена теория решения ***операторного уравнения*** второго рода с ***самосопряжённым вполне непрерывным*** оператором в ***гильбертовом*** пространстве.

И, наконец, в шестом параграфе этой главы исследуются ***операторные уравнения*** второго рода с ***произвольным вполне непрерывным*** оператором в ***гильбертовом*** пространстве.

Четвёртая глава ”Нелинейные отображения линейных нормированных пространств“ является ***кратким введением*** в ***нелинейный функциональный анализ***. Она состоит из четырёх параграфов.

В первом параграфе рассмотрены основные понятия теории дифференцирования и интегрирования ***абстрактных функций*** со значениями в линейном нормированном пространстве.

Во втором параграфе изложены основы ***дифференцирования нелинейных отображений*** линейных нормированных пространств. Приведены определения ***дифференциала Фреше***, дифференциала ***Гато*** и ***вариации*** нелинейного отображения ***по направлению***.

В небольшом третьем параграфе рассмотрен ***метод Ньютона*** построения ***итерационных последовательностей*** для приближённого решения операторных уравнений с ***нелинейным*** оператором в ***гильбертовом*** пространстве. Приведена теорема, содержащая условия сходимости соответствующего итерационного процесса.

Последний, четвёртый параграф четвёртой главы посвящён ***экстремальным задачам*** в ***линейных нормированных пространствах***.

В качестве ***примера*** рассмотрены простейшие задачи классического ***вариационного исчисления***. Приведены основные формулировки и типичные методы рассуждения при установлении ***необходимых*** условий ***минимума*** и ***максимума*** в рассматриваемых задачах.

Несколько ***методических замечаний*** для студентов, предполагающих изучать функциональный анализ по нашей книге.

Освоение всех изложенных результатов необходимо совершать ***постепенно***, шаг за шагом, переходя от одного более простого факта к другому более сложному, только ***убедившись*** в хорошем усвоении предыдущего.

Например, сформулированные в § 1 главы II основные ***свойства***, вытекающие из ***аксиом линейного пространства***, являются ***основой*** элементарных действий и рассуждений, ***постоянно*** используемых при доказательствах ***любых*** фактов функционального анализа.

Обычно, именно недостаточно ***свободное владение*** какими-то из перечисленных правил или их комбинациями служат ***главным*** тормозом на пути успешного овладения принципиальными элементами ***классического*** функционального анализа.

Сложность освоения материала книги ***существенным образом*** зависит от ***уровня*** предварительной подготовки читателя, особенно в области ***линейной алгебры***, ***аналитической геометрии*** и ***математического анализа***, синтезом которых и является часть функционального анализа, рассматриваемая в этой книге.

Поэтому, ***при возникновении затруднений*** с усвоением материала, очень полезно ***понять*** в каком из разделов трёх названных выше математических дисциплин рассматривались понятия, ***похожие*** или ***родственные*** вызвавшим затруднения. Вспомнив и освежив ***старые*** знания, легче будет двигаться ***вперёд***.

В книге принята ***сквозная*** одинарная нумерация формул ***внутри*** каждого ***параграфа***. При ссылке на предыдущий материал, обязательно указываются параграф и глава, в которой находится соответствующий материал или формула.

И, наконец, следует отметить, что отнесение некоторых ***утверждений*** к "разряду" ***теорем*** или ***лемм*** не служит цели увеличения или умаления их ***значения*** в общих математических ***конструкциях***, а, в большинстве случаев, является либо данью устоявшимся ***традициям***, либо личным ***привычкам*** авторов.

Книга ***соответствует*** современным ***учебным планам*** по дисциплине ***Функциональный анализ***, входящим в ***обязательную*** программу подготовки специалистов, бакалавров и магистров, как минимум по двум направлениям подготовки: ***классических университетов*** — **010 500** ***"Прикладная математика и информатика"*** и ***инженерного образования*** в области автоматизации и процессов управления — **220 400** ***"Прикладная математика"***.

Оба автора в течение ряда лет читали и читают курс функционального анализа по примерно одинаковым программам, в основном соответствующим объему материала, изложенного в главах **I – IV**, в Московском государственном институте радиотехники, электроники и автоматики (***техническом университете МИРЭА***) и Московском государственном авиационно-технологическом институте (***техническом университете МАТИ***).

Помещённые в конце каждого параграфа ***задачи*** и ***упражнения***, по нашему мнению, ***могут*** служить ***базой для*** проведения ***практических занятий*** по курсу функционального анализа.

Небольшое количество более трудных задач отмечено знаком * около номера задачи.

Авторы признательны рецензентам книги профессору, доктору физико-математических наук А.В. Чечкину и профессору, доктору физико-математических наук А.Г. Яголе за большую проделанную ими работу и ценные замечания, способствовавшие окончательному редактированию текста.

Глава 1

Метрические пространства

1.1 Определение и примеры метрических пространств

Определение 1. ***Метрическим пространством*** *называется множество* $\mathbf{X}$*, для любых двух* ***элементов*** $\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2$ *которого определено действительное* ***неотрицательное число*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ *– рассстояние между* $\mathbf{x}_1$ *и* $\mathbf{x}_2$*, — обладающее следующими* ***свойствами****:*

1° — *Аксиома невырожденности:*

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 ,$$

т.е. ***расстояние*** *между элементами* ***равно 0*** *тогда и только тогда, когда эти* ***элементы совпадают*** *(как элементы множества* $\mathbf{X}$*).*

2° — *Аксиома симметрии:*

Если $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *— любые два элемента* $\mathbf{X}$*, то:*

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) .$$

$\mathbf{3}^\circ$ — <u>*Аксиома треугольника:*</u>

Если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — *любые три элемента* $\mathbf{X}$, *то:*

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \leqslant \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) .$$

Другими словами, данное определение подразумевает, что ***на прямом*** (или, в другой терминологии, ***декартовом***) ***произведении*** $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ множества $\mathbf{X}$ на себя же, состоящем из всевозможных ***пар*** элементов $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{X}$, задана действительнозначная ***неотрицательная функция*** от ***двух аргументов*** $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, — ***расстояние*** между элементами или ***метрика***, которая обладает свойствами $\mathbf{1}^\circ$ — $\mathbf{3}^\circ$.

В дальнейшем, элементы множества $\mathbf{X}$ мы будем, иногда, называть ***точками*** (***метрического пространства***), а само множество $\mathbf{X}$ — ***носителем*** метрического пространства.

Пример 1 — метрическое пространство $\mathbb{E}^1$

Важным ***примером метрического пространства*** является ***числовая прямая*** $\mathbb{R}^1$ с ***расстоянием*** между точками $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, определяемым следующим стандартным образом: $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

Выполнение аксиом $\mathbf{1}^\circ$ и $\mathbf{2}^\circ$, в данном случае, очевидным образом вытекает непосредственно из ***определения*** расстояния между точками $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.

Во-первых, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \geqslant 0$ и $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 0 \iff x = y$.

Во-вторых, очевидно, $|\mathbf{y} - \mathbf{x}| = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

И, наконец, аксиома $\mathbf{3}^\circ$ является следствием неравенства:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Получившееся метрическое пространство часто обозначается $\mathbb{E}^1$.

$\diamond$

Метрическое пространство $\mathbb{E}^1$ для математического анализа является ***важнейшим*** объектом, т.к. многие принципиальные результаты и конструкции математического анализа, ***впервые*** появляясь при обсуждении свойств функций ***одного вещественного аргумента***, были в дальнейшем распространены на функции любого, но ***конечного***, числа переменных.

Как мы увидим ниже, в ***функциональном анализе*** важнейшие понятия предельного перехода и непрерывности функции одной переменной переносятся на произвольное ***метрическое пространство***.

А это, в свою очередь, дает основание ожидать, что многие другие результаты ***классического*** математического анализа окажутся справедливыми для соответствующих классов ***отображений*** любых ***метрических пространств***.

Нижеследующие примеры ***метрических пространств*** будут неоднократно использоваться на протяжении всего нашего курса.

Пример 2 — метрическое пространство $\mathbb{E}^n$

Множество $\mathbf{X}$ состоит из элементов $\mathbf{x}$ — **n**-***ок*** (наборов из **n** действительных чисел): $\mathbf{x} \overset{def}{=} (x_1, \ldots, x_n)$.

Это ***множество***, обычно, называется ***арифметическим пространством*** $\mathbb{R}^n$.

Зададим в $\mathbb{R}^n$ ***расстояние*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ следующим образом:

если $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ — два ***элемента*** $\mathbb{R}^n$, то

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \tag{1}$$

Убедимся, что функция $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, введенная в (1), действительно удовлетворяет аксиомам $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{3}^\circ$ ***определения*** метрического пространства.

Выражение (1), очевидно, ***неотрицательно*** и может обращаться в нуль только в том случае, когда ***все*** квадраты ***разностей*** обращаются в нуль, т.е. когда наборы чисел $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ полностью совпадают между собой, что, как раз, и означает выполнение аксиомы $\mathbf{1}^\circ$ для предполагаемого расстояния (1).

Аксиома $\mathbf{2}^\circ$ для расстояния, определённого формулой (1), также, очевидным образом, будет выполнена.

Для проверки выполнения аксиомы $\mathbf{3}^\circ$ необходимо и достаточно проверить справедливость неравенства:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leqslant \left(\left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^{n} (z_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \right)^2, \tag{2}$$

для любых трех **n-*ок***: $\mathbf{x} = \{x_i\}$, $\mathbf{y} = \{y_i\}$, $\mathbf{z} = \{z_i\}$ из $\mathbf{X}$.

Обозначим $x_i - z_i = a_i$ и $z_i - y_i = b_i$, тогда неравенство (2) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leqslant \left(\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right]^{1/2} \right)^2 \tag{3}$$

Раскрывая левую и правую части этого предполагаемого неравенства, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \,+\, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \,\leqslant\, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \,+\, 2\left[\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

Справедливость неравенства (2) вытекает теперь из следующего ***неравенства Коши - Буняковского***:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \,\leqslant\, 0 \tag{4}$$

Приведем одно из возможных доказательств неравенства (4).

Определим функцию $\mathbf{\Phi}\,(\lambda)$:

$$\mathbf{\Phi}\,(\lambda) \,=\, \sum_{i=1}^{n} (a_i + \lambda \cdot b_i)^2$$

Функция $\mathbf{\Phi}\,(\lambda)$, ввиду вещественности a_i, b_i и λ, является ***неотрицательной квадратичной*** функцией числового параметра λ.

Поэтому ***дискриминант*** этой функции, совпадающий с левой частью неравенства (4), должен быть ***неотрицательным***.

Таким образом, множество $\mathbb{R}^n$ с ***метрикой*** (1) действительно является ***метрическим пространством***.

Часто оно называется **n-*мерным евклидовым пространством*** $\mathbb{E}^n$, а ***метрика***, определяемая (1), — ***евклидовой*** метрикой в $\mathbb{R}^n$ [1]

◇

[1]Точный смысл, вносимый прилагательным "евклидово" (пространство) или "евклидова" (метрика), связан с тем, что метрика, определяемая в $\mathbb{R}^n$ формулой (1), порождает на $\mathbb{R}^n$ также и соответствующее (1) скалярное произведение, что будет предметом специального обсуждения в главе III.

На базе одного и того же ***носителя*** — множества $\mathbf{X}$, — можно строить ***разные*** метрические пространства, задавая ***различные*** метрики.

Пример 3. На множестве $\mathbb{R}^n$ можно ввести ***метрику*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, например, так:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| \tag{5}$$

Проверку аксиом $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{3}^\circ$ в случае метрики (5) читателю ***рекомендуется*** проделать самостоятельно.

Получившееся метрическое пространство мы будем обозначать $\mathbb{R}^n_{\mathbf{max}}$.

$\diamond$

Пример 4 — метрическое пространство ℓ_2

Множество $\mathbf{X}$ состоит из ***элементов*** $\mathbf{x}$ — бесконечных ***числовых последовательностей*** — $\mathbf{x} \overset{def}{=} (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty \tag{6}$$

Метрика $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задается формулой:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \tag{7}$$

Прежде чем проверять для функции (7) аксиомы метрики $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{3}^\circ$, убедимся, что сама функция (7) корректно определена, т.е. что для любых двух элементов $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ из $\mathbf{X}$, ряд в правой части (7) сходится.

Действительно, в силу неравенства (3) при любом натуральном N:

$$\left[\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2} \leqslant \left[\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right]^{1/2} + \left[\sum_{i=1}^{N} y_i^2 \right]^{1/2}.$$

В силу условия (6), отсюда следует сходимость ряда в (7).

Переходя к пределу при $n \to \infty$ одновременно в правой и левой частях неравенства (2), убеждаемся в справедливости неравенства треугольника — аксиомы $\mathbf{3}^\circ$, — для метрики, определяемой формулой (7).

Справедливость аксиом метрики $\mathbf{1}^\circ$ и $\mathbf{2}^\circ$ для функции (7) ***очевидна*** (см. пример 2).

Множество $\mathbf{X}$, оснащенное метрикой (7), обычно называется ***метрическим пространством*** $\ell_{\mathbf{2}}$.

$\diamond$

Пример 5 — метрическое пространство $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Множество $\mathbf{X}$ состоит из ***непрерывных*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций $x\,(t)$, т.е. $\mathbf{x} \overset{def}{=} x\,(t)$.

Расстояние между элементами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ множества $\mathbf{X}$ задается формулой:

$$\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} |\, x\,(t) - y\,(t)\,| \qquad (8)$$

Справедливость аксиом $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{3}^\circ$, из определения метрического пространства, следует в этом случае из почти очевидных числовых неравенств, которые мы рекомендуем читателю проверить самостоятельно.

Полученное ***метрическое пространство***, обычно, обозначается символом $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

$\diamond$

Пример 6 — метрическое пространство $\mathbb{D}_k\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Множество $\mathbf{X}$ состоит из k раз непрерывно ***дифференцируемых*** функций $x\,(t)$, определенных на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Расстояние между элементами $\mathbf{X}$ можно ввести так:

$$\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \Big\{ \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} |\,x\,(t) - y\,(t)\,|\,, \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} |\,x'\,(t) - y'\,(t)\,|\,, \ldots$$
$$\ldots\ , \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \left| x^{(k-1)}\,(t) - y^{(k-1)}\,(t) \right|, \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \left| x^{(k)}\,(t) - y^{(k)}\,(t) \right| \Big\} \tag{9}$$

Все три аксиомы метрики для (9) проверяются почти также просто, как и для метрики (8) в предыдущем примере (5).

Отличие состоит только в том, что для (9) всякий раз приходится выбирать максимальное значение из набора k чисел, входящих в правую часть формулы (9).

Действительно, функция расстояния (***метрика***), определяемая формулой (9):

$\mathbf{1}^\circ$. ***Неотрицательна*** и может обратиться в 0 только тогда, когда $x\,(t) \equiv y\,(t)$.

$\mathbf{2}^\circ$. ***Симметрична*** относительно её аргументов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

$\mathbf{3}^\circ$. ***Неравенство треугольника*** проверяется немного сложнее.

Во-первых, для любой точки t отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$:

$$|x\,(t) - y\,(t)\,| \leqslant \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}}\,(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}}\,(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \overset{def}{=} \boldsymbol{\rho}_{I}^{(0)} + \boldsymbol{\rho}_{II}^{(0)},$$

а также справедливо аналогичное неравенство для любого номера $1 \leqslant j \leqslant k$

производной:

$$\left| x^{(j)}(t) - y^{(j)}(t) \right| \leqslant \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}} \left(\mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{z}^{(j)} \right) + \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}} \left(\mathbf{z}^{(j)}, \mathbf{y}^{(j)} \right) \overset{def}{=} \boldsymbol{\rho}_{I}^{(j)} + \boldsymbol{\rho}_{II}^{(j)} ,$$

где $\mathbf{x}^{(j)} = x^{(j)}(t)$, $\mathbf{y}^{(j)} = y^{(j)}(t)$, $\mathbf{z}^{(j)} = z^{(j)}(t)$.

Далее, принимая во внимание, что

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k} (\mathbf{x}, \mathbf{z}) \overset{def}{=} \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}} \left(\mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{z}^{(j)} \right) = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \left\{ \boldsymbol{\rho}_{I}^{(j)} \right\} ,$$

и, аналогично,

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k} (\mathbf{z}, \mathbf{y}) \overset{def}{=} \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}} \left(\mathbf{z}^{(j)}, \mathbf{y}^{(j)} \right) = \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \left\{ \boldsymbol{\rho}_{II}^{(j)} \right\} ,$$

получаем, что ***все левые*** части выписанных выше неравенств, для ***любого*** номера ***производной*** $0 \leqslant j \leqslant k$, для ***любой*** точки t отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ удовлетворяют неравенству:

$$\left| x^{(j)}(t) - y^{(j)}(t) \right| \leqslant \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k} (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k} (\mathbf{z}, \mathbf{y}) .$$

Но, выбрав в левых частях выписанных неравенств, максимум по t : $\max\limits_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}}$, а затем максимум, среди получившихся таким образом чисел в левых частях, по j : $\max\limits_{0 \leqslant j \leqslant k}$, получим:

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k} (\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k} (\mathbf{z}, \mathbf{y}) .$$

Построенное ***метрическое пространство*** принято обозначать: $\mathbb{D}_k [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Поэтому, в полном соответствии с этим соглашением $\mathbb{D}_0 [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbb{C} [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

$\Diamond$

Пример 7 — метрическое пространство $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Носитель $\mathbf{X}$ такой же как в примере 5: множество $\mathbf{X}$ состоит из ***непрерывных*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций $x(t)$, т.е. $\mathbf{x} \overset{def}{=} x(t)$.

Но, в отличие от примера 5, ***расстояние*** между функциями, принадлежащими $\mathbf{X}$, определяется так:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\, x(t) - y(t)\,]^2 \, dt \right)^{1/2} \tag{10}$$

Выполнение аксиомы $\mathbf{2}^\circ$ очевидно.

Выполнение аксиомы $\mathbf{1}^\circ$ следует из утверждения о тождественном равенстве нулю на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***неотрицательной непрерывной*** функции при условии равенства нулю интеграла от неё по этому отрезку. (См. задачу 3 в конце этого параграфа).

Выполнение аксиомы треугольника $\mathbf{3}^\circ$ проверяется по схеме аналогичного рассуждения примера 2, для чего используемая там функция $\boldsymbol{\Phi}(\lambda)$ заменяется функцией

$$\boldsymbol{\Phi}(\lambda) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\, x(t) + \lambda\, y(t)\,]^2 \, dt \, .$$

Таким образом множество $\mathbf{X}$ всех непрерывных функций на заданном отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ с метрикой, определенной по формуле (10), является метрическим пространством и, обычно, обозначается так: $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

$\diamond$

Подпространство метрического пространства

Так как на базе одного и того же ***носителя*** — $\mathbf{X}$ выбором ***различных*** метрических функций $\boldsymbol{\rho}$ могут быть образованы ***разные*** метрические пространства, то в некоторых случаях удобно ***обозначать*** абстрактное метрическое пространство с ***носителем*** $\mathbf{X}$ и ***метрикой*** $\boldsymbol{\rho}$ в виде "единого" объекта: $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

Пусть $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ — метрическое пространство.

Если $\mathbf{X}_1 \subset \mathbf{X}$, любое ***подмножество*** $\mathbf{X}$, то $(\mathbf{X}_1, \boldsymbol{\rho})$ — также будет ***метрическим пространством***, т.к. все необходимые для этого свойства метрики для $(\mathbf{X}_1, \boldsymbol{\rho})$ "наследуются" из объемлющего пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

Получаемое таким способом метрическое пространство $(\mathbf{X}_1, \boldsymbol{\rho})$ называется ***подпространством*** рассматриваемого метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

Например, любое множество точек из $\mathbb{E}^n$ образует ***подпространство метрического пространства*** $\mathbb{E}^n$.

Важное предостережение: вообще говоря, рассматриваемое в $\mathbb{E}^n$ ***произвольное*** множество не будет ***подпространством*** в $\mathbb{E}^n$ в смысле, ***обычно*** используемом в ***линейной алгебре!***

Полезные неравенства

В заключение этого параграфа приведем два полезных неравенства.

Первое из них называется ***неравенством четырёхугольника*** и будет несколько раз использовано в дальнейшем изложении.

Если $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ — любые четыре элемента метрического пространства $\mathbf{X}$, то:

$$|\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{u},\mathbf{v})| \quad \leqslant \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{y},\mathbf{v}) \ .$$

Это неравенство получается двукратным применением неравенства треугольника:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad \leqslant \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{u},\mathbf{y}) \quad \leqslant \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v},\mathbf{y}) \ ,$$

откуда

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{u},\mathbf{v}) \quad \leqslant \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v},\mathbf{y}) \ .$$

С другой стороны, поступая аналогично, но начиная не с $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y})$, а с $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u},\mathbf{v})$, получается неравенство:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{u},\mathbf{v}) - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \quad \leqslant \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{v},\mathbf{y}) \ ,$$

которое и завершает доказательство неравенства четырёхугольника, т.к. левые части двух последних неравенств отличаются только ***знаком***, а в их правых частях стоят одинаковые выражения.

Второе полезное неравенство, которое мы здесь упомянем, обычно, называется ***"второе неравенство треугольника"***.

Оно получается из неравенства четырёхугольника, если в нём положить $\mathbf{u} = \mathbf{z}$ и $\mathbf{v} = \mathbf{y}$, и имеет вид:

$$|\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{z},\mathbf{y})| \quad \leqslant \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\mathbf{z}) \ .$$

Упражнения и задачи к параграфу 1.

1. Подробно проверить ***аксиомы метрики*** в примерах 4, 5 и 6.

2. Сформулировать определение ***подпространства*** $\mathbb{E}^n$, принятое в ***линейной алгебре*** и ***аналитической геометрии***.

3. Пусть $x(t) \geqslant 0$ на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***непрерывна*** и, кроме того: $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x(t)\, dt = 0$.

Доказать, что $x(t) \equiv 0$ на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

4. Пусть множество $\mathbf{X}$ состоит из ***элементов*** $\mathbf{x}$ — бесконечных ***числовых последовательностей*** — $\mathbf{x} \overset{def}{=} (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\, x_i\,| < \infty\ .$$

Метрика $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задается формулой:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{\infty} |\, x_i - y_i\,|\ ,$$

где $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n, \ldots)$.

Доказать, что $\mathbf{X}$ — ***метрическое пространство***.

Это метрическое пространство, обычно, обозначается $\ell_{\mathbf{1}}$.

5. Пусть множество $\mathbf{X}$ состоит из ***элементов*** $\mathbf{x}$ — бесконечных ***числовых последовательностей*** — $\mathbf{x} \overset{def}{=} (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ таких, что каждая из этих последовательностей сходится в смысле классического математического анализа.

Метрика $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задается формулой:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_i |\, x_i - y_i\,|\ ,$$

где $y = (y_1, \ldots, y_n, \ldots) \in \mathbf{X}$.

Доказать, что $\mathbf{X}$ — ***метрическое пространство***.

Это метрическое пространство, обычно, обозначается $\mathbf{c}$.

6^*. Пусть множество $\mathbf{X}$ состоит из ***элементов*** $\mathbf{x}$ — бесконечных ***числовых последовательностей*** — $\mathbf{x} \overset{def}{=} (x_1, \ldots, x_k, \ldots)$.

Метрика $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ задается формулой:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|},$$

где $y = (y_1, \ldots, y_k, \ldots) \in \mathbf{X}$.

Доказать, что $\mathbf{X}$ — ***метрическое пространство***.

Это метрическое пространство, обычно, обозначается $\mathbf{s}$.

7. Можно ли на прямой $(-\infty < x < +\infty)$ ввести метрику по формуле $\boldsymbol{\rho}(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$?

8. Можно ли на прямой $(-\infty < x < +\infty)$ ввести метрику по формуле $\boldsymbol{\rho}(x, y) = \operatorname{arctg} |x - y|$?

1.2 Сходимость. Замкнутые и открытые множества в метрическом пространстве

Сходимость последовательности в метрическом пространстве

Всякая заданная ***метрика*** позволяет естественным образом ввести понятие ***сходящейся последовательности*** точек метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

Определение 2. *Элемент* $\mathbf{x}$ *метрического пространства называется* ***пределом последовательности точек*** *(элементов)* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ *того же метрического пространства* $\mathbf{X}$, *если выполняется соотно-*

шение:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) = 0 \tag{1}$$

Замечание. То, что последовательность точек $\{\mathbf{x}_n\}$ ***сходится*** к точке $\mathbf{x}$, для краткости речи, часто, записывают в виде:
« $\mathbf{x_n} \to \mathbf{x}$ при $n \to \infty$ » или « $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x_n} = \mathbf{x}$ ».

Определение 3. *Если из заданной* ***последовательности*** $\{\mathbf{x}_n\}$ *по некоторому* ***правилу****:* $n = k_1, k_2, \ldots, k_m, \ldots,$ *отобраны элементы этой последовательности* $\{\mathbf{x}_{k_m}\}$, $m = 1, 2, \ldots,$ *то* ***последовательность*** *элементов* $\{\mathbf{x}_{k_m}\}$, $m = 1, 2, \ldots,$ *называется* ***подпоследовательностью*** *последовательности* $\{\mathbf{x}_n\}$.

Утверждение 1. *Если последовательность точек* $\{\mathbf{x}_n\}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$ ***сходится*** *к точке* $\mathbf{x}_0$ *этого пространства при* $n \to \infty$, *то* ***всякая*** *подпоследовательность этой последовательности* $\{\mathbf{x}_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots, p, \ldots$ ***сходится*** *при* $k \to \infty$, *к той же самой точке* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$.

Утверждение 2. *Последовательность точек* $\{\mathbf{x}_n\}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$ *может сходиться не более чем к одной точке пространства* $\mathbf{X}$.

Доказательство. Доказательство проведём от противного.

Пусть $\mathbf{x}_n \to \mathbf{a}$ и $\mathbf{x}_n \to \mathbf{b}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{b},\ \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{X})$ при $n \to \infty$.
Тогда, по определению сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{a}, \mathbf{x_n}) = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{b}, \mathbf{x_n}) = 0$.

Рассмотрим расстояние между точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{a}, \mathbf{x_n}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x_n}, \mathbf{b}) \to 0$ при $n \to \infty$, что возможно только при $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, откуда $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. □

Утверждение 3. *Если последовательность точек* $\{\mathbf{x}_n\}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$ ***сходится*** *к точке* $\mathbf{x}$ *пространства* $\mathbf{X}$, *то, для любой точки* $\mathbf{y}$ *пространства* $\mathbf{X}$, *расстояния* $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{x_n})$ ***ограничены*** *в совокупности.*

Доказательство. Доказательство вытекает из неравенства:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}, \mathbf{x}_n) \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leqslant \mathbf{M} + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

где $\mathbf{M}$ величина, ограничивающая ***бесконечно малую*** последовательность $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_n)$. □

Определение 4. ***Открытым шаром*** $\mathbf{S}(\mathbf{a}, r)$ *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$ *называется* ***множество*** *точек* $\mathbf{z}$ *из* $\mathbf{X}$, *для которых:* $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{a}) < r$.

Определение 5. *Множество* $\mathbf{Q}$ *в метрическом пространстве* $\mathbf{X}$ *называется* ***ограниченным****, если оно целиком содержится в некотором шаре* $\mathbf{S}(\mathbf{a}, r)$ *радиуса* $r > 0$ *с центром в точке* $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$: $\mathbf{Q} \subset \mathbf{S}(\mathbf{a}, r)$.

В соответствии с утверждением **3** всякая ***сходящаяся*** последовательность точек $\{\mathbf{x}_n\}$ метрического пространства $\mathbf{X}$ ***ограничена***, т.е. целиком содержится в некотором шаре пространства $\mathbf{X}$.

Более того, центр упомянутого шара может быть выбран в любой точке пространства $\mathbf{X}$.

Однако, далеко ***не всякое*** ограниченное множество в метрическом пространстве $\mathbf{X}$ содержит в себе ***хотя бы одну*** сходящуюся последовательность.

Пример 1. В самом деле рассмотрим, например, последовательность точек $\{\mathbf{x}_n\}$ в пространстве $\ell_{\mathbf{2}}$, где

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x}_1 & = & (1,\, 0,\, \ldots\, 0,\, 0,\, 0,\, \ldots) \\ \mathbf{x}_2 & = & (0,\, 1,\, \ldots\, 0,\, 0,\, 0,\, \ldots) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{x}_n & = & (0,\, 0,\, \ldots\, 0,\, 1,\, 0,\, \ldots) \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Легко видеть, что ***все*** точки этой последовательности находятся на расстоянии 1 от точки $\mathbf{x}_0 = (0,\, 0,\, \ldots\, 0,\, 0,\, 0,\, \ldots)$ этого пространства: $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n) = 1$, т.е. лежат внутри любого шара $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0, r)$ пространства $\ell_{\mathbf{2}}$ с центром в точке $\mathbf{x}_0$ и радиуса $r > 1$.

Однако, указанная последовательность точек пространства $\ell_{\mathbf{2}}$, не содержит ***ни одной*** сходящейся подпоследовательности, т.к. расстояние между ***любыми*** двумя элементами этой последовательности одно и то же, и равно $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) = \sqrt{2}$.

Действительно, предположив противное, т.е. что некоторая подпоследовательность точек $\{\mathbf{x}_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \ldots$ последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$ сходится к некоторой точке $\mathbf{x}^0$ пространства $\ell_{\mathbf{2}}$: $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}^0) \to 0$ при $k \to \infty$, мы немедленно придём к противоречию:

$$\sqrt{2} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}_{n_p}) \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n_k}, \mathbf{x}^0) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n_p}, \mathbf{x}^0) \to 0 \ \text{ при } k, p \to \infty\,.$$

Предельные точки и замкнутые множества

Определение* 2** ***сходящейся последовательности можно ***переформулировать*** так:

Последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ элементов метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ называется ***сходящейся***, если $\forall \varepsilon > 0$ ***существует*** такой номер $N(\varepsilon)$, что ***все*** точки последовательности $\mathbf{x}_n$ с номерами $n \geqslant N(\varepsilon)$, содержатся в ***открытом шаре*** радиуса ε с центром в точке $\mathbf{x}$.

Определение 6. *Пусть $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{X}$. Точка $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$ называется **предельной** для множества $\mathbf{M}$ (**предельной точкой** $\mathbf{M}$), если открытый шар с центром в точке $\mathbf{a}$ любого радиуса $r > 0$ содержит **хотя бы одну** точку из множества $\mathbf{M} \setminus \mathbf{a}$, т.е. хотя бы одну точку множества $\mathbf{M}$, отличную от $\mathbf{a}$.*

Формальная запись содержательной части этого определения на языке ***теории множеств*** выглядит так:

$$\forall r > 0: \quad \mathbf{S}(\mathbf{a}, r) \cap (\mathbf{M} \setminus \mathbf{a}) \neq \varnothing$$

Замечание. ***Предельные точки*** множества $\mathbf{M}$ ***не обязаны*** принадлежать $\mathbf{M}$.

Некоторые из таких точек (***или даже все!***) могут принадлежать $\mathbf{M}$, а другие (***или даже все!***) могут не принадлежать $\mathbf{M}$.

Определение 7. *Объединение множества $\mathbf{M}$ и множества **всех** его предельных точек называется **замыканием множества** $\mathbf{M}$ и, обычно, обозначается $[\mathbf{M}]$.*

Пример 2. ***Замыкание*** множества $\mathbf{Q}$ всех рациональных точек на прямой $\mathbb{R}^1$ относительно ***расстояния*** между точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Q}$, определяемого стандартным образом: $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ — есть вся прямая $\mathbb{R}^1$: $[\mathbf{Q}] = \mathbb{R}^1$.

Пример 3.* ***Замыкание*** множества $\mathbf{P}$ всех многочленов $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ с вещественными коэффициентами a_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, относительно метрики пространства $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, — есть всё пространство $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$: $[\mathbf{P}] = \mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Высказанное в примере 3 утверждение является следствием теоремы К. Вейерштрасса о том, что всякая ***непрерывная*** на заданном отрезке функция может быть представлена как предел ***равномерно*** сходящейся на этом отрезке к рассматриваемой функции последовательности ***многочленов*** с вещественными коэффициентами.

$\diamond$

Определение 8. *Множество* $\mathbf{M}$ *точек метрического пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***замкнутым****, если* ***все*** *предельные точки множества* $\mathbf{M}$ *ему же самому и* ***принадлежат****.*

В частности, согласно этому определению:

$\mathbf{1}^\circ$. ***Всё*** множество $\mathbf{X}$ — носитель метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$, — ***замкнутое*** множество.

$\mathbf{2}^\circ$. ***Пустое*** множество точек ***замкнуто*** в любом метрическом пространстве $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

Любое замкнутое множество обладает следующим свойством:

Утверждение 4. *Если* $\{\mathbf{x}_n\}$ — ***сходящаяся*** *последовательность точек* ***замкнутого*** *множества* $\mathbf{M}$*, то ее* ***предел*** $\mathbf{x}$ *также* ***принадлежит*** $\mathbf{M}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x}_n$, но $\mathbf{x} \notin \mathbf{M}$.

Рассмотрим два случая.

$\mathbf{1}^\circ$. В последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$ присутствует ***бесконечное*** число ***различных*** точек $\mathbf{M}$, образующих ***подпоследовательность*** $\{\mathbf{x}_{n'}\}$ последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$.

Тогда подпоследовательность $\{\mathbf{x}_{n'}\}$ сходится к тому же самому пределу $\mathbf{x}$, что и вся последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$. В этом случае $\mathbf{x}$ предельная точка множества $\mathbf{M}$, и, в силу его замкнутости, принадлежит $\mathbf{M}$, что приводит к противоречию.

$\mathbf{2}^\circ$. В последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$ присутствует лишь ***конечное*** число ***различных*** точек $\mathbf{M}$.

Т.к. по условию последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ сходится к пределу $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$, то, в этом случае, начиная с некоторого номера N все элементы последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$ с номерами $n > N$ должны совпадать с $\mathbf{x}$ и потому мы снова приходим к противоречию. $\square$

Верно и ***обратное*** утверждение:

Утверждение 5. *Если* ***предел*** $\mathbf{x}$ *любой* ***сходящейся*** *последовательности точек из данного множества* $\mathbf{M}$ ***принадлежит*** *этому множеству, то* $\mathbf{M}$ *—* ***замкнуто****.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{a}$ произвольная ***предельная точка*** $\mathbf{M}$.

Рассмотрим последовательность шаров с центром в точке $\mathbf{a}$, радиусы которых r стремятся к 0.

Пусть $\{\varepsilon_n\} \to 0$ — последовательность радиусов этих шаров.

В каждом открытом шаре $\mathbf{S}(\mathbf{a}, \varepsilon_n)$ выберем точку $\mathbf{x_n} \neq \mathbf{a}, \mathbf{x_n} \in \mathbf{M}$. Это всегда можно сделать, так как $\mathbf{a}$ — предельная точка $\mathbf{M}$.

Очевидно $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x_n} = \mathbf{a}$. Следовательно, по условию утверждения, $\mathbf{a} \in \mathbf{M}$, и, т.к. $\mathbf{a}$ — произвольная предельная точка, то $\mathbf{M}$ ***замкнуто***.

$\square$

Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве

Определение 9. *Множество* $\mathbf{M}$ *точек метрического пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***открытым***, *если* $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}\ \exists r > 0$, *такое, что открытый шар* $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r)$ *:* $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r) \subset \mathbf{M}$.

В частности, согласно этому определению, ***всё*** множество $\mathbf{X}$ – носитель метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$, — ***открытое*** множество.

Пусть $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ — два ***открытых*** множества из метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

Утверждение 6. *Множество* $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$ ***открыто***.

Доказательство. Действительно, если $\mathbf{x} \in (\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2)$, то $\mathbf{x}$, принадлежит по крайней мере, одному из этих множеств, например, $\mathbf{M}_1$.

Так как $\mathbf{M}_1$ открыто, то $\mathbf{x} \in \mathbf{M}_1$ вместе с открытым шаром $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r)$ некоторого радиуса r.

Тогда очевидно, что этот же шар $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r)$ целиком принадлежит и "сумме" множеств $\mathbf{M}_1 \cup \mathbf{M}_2$. $\square$

Замечание. Это же рассуждение проходит и в случае "суммы" (в смысле теории множеств) любого не обязательно ***конечного*** объединения ***открытых*** множеств из $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

Поэтому справедливо

Утверждение 7. *Теоретикомножественная* ***сумма*** *любого числа* ***открытых*** *множеств метрического пространства —* ***открытое*** *множество.*

Рассмотрим теперь множество $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$.

Утверждение 8. ***Непустое*** *пересечение двух* ***открытых*** *множеств —* ***открытое*** *множество.*

Доказательство. Действительно, если элемент $\mathbf{x} \in (\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2)$, то, так как $\mathbf{x} \in \mathbf{M}_1$, множеству $\mathbf{M}_1$ принадлежит также открытый шар $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r_1)$ некоторого радиуса $r_1 > 0$.

Одновременно $\mathbf{x} \in \mathbf{M}_2$ и, в силу открытости $\mathbf{M}_2$, существует $r_2 > 0$ и открытый шар $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r_2) \subset \mathbf{M}_2$.

Пусть $r_3 = \min(r_1, r_2) > 0$. Тогда шар $\mathbf{S}(\mathbf{x}, r_3)$ принадлежит как $\mathbf{M}_1$, так и $\mathbf{M}_2$.

Следовательно, множество $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$ ***открыто***. $\square$

Аналогично можно показать ***открытость*** пересечения любого ***конечного*** числа ***открытых*** множеств.

Замечание. Пересечение ***бесконечного*** числа ***открытых*** множеств может не быть ***открытым***!

(См. упражнение 1 к этому параграфу).

Дополнение множества в метрическом пространстве

Пусть $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ — ***метрическое пространство*** и $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\rho})$ — ***подпространство*** этого пространства.

Рассмотрим ***множество*** $\mathbf{X}\setminus\mathbf{M}$, — ***дополнение*** $\mathbf{M}$ до всего пространства $(\mathbf{X},\, \boldsymbol{\rho})$.

Утверждение 9. $\mathbf{1}^\circ$. *Если* $\mathbf{M}$ *—* ***открытое*** *множество, то его дополнение* $\mathbf{X}\setminus\mathbf{M}$ *(до всего* $\mathbf{X}$*) —* ***замкнуто****.*

$\mathbf{2}^\circ$. *Если* $\mathbf{M}$ *—* ***замкнуто****, то его дополнение* $\mathbf{X}\setminus\mathbf{M}$ *(до всего* $\mathbf{X}$*) —* ***открыто****.*

Доказательство. Докажем первую часть утверждения — $\mathbf{1}^\circ$.

Пусть $\mathbf{z}$ ***предельная точка*** $\mathbf{X}\setminus\mathbf{M}$ и $\mathbf{z}\notin(\mathbf{X}\setminus\mathbf{M})$. Тогда $\mathbf{z}\in\mathbf{M}$ и (в силу ***открытости*** $\mathbf{M}$) входит в $\mathbf{M}$ вместе с некоторым шаром $\mathbf{S}(\mathbf{z},\, r)$.

Поэтому шар $\mathbf{S}(\mathbf{z},\, r)$ не содержит точек $\mathbf{X}\setminus\mathbf{M}$. Однако, это противоречит тому, что $\mathbf{z}$ — ***предельная точка*** $\mathbf{X}\setminus\mathbf{M}$.

Следовательно $\mathbf{z}\in(\mathbf{X}\setminus\mathbf{M})$ и дополнение к $\mathbf{M}$ ***замкнуто***.

Докажем вторую часть утверждения — $\mathbf{2}^\circ$.

Пусть $\mathbf{M}$ ***замкнуто*** и $\mathbf{z}$ — точка $\mathbf{X}\setminus\mathbf{M}$, для которой любой шар $\mathbf{S}(\mathbf{z},\, r)$ содержит точки из $\mathbf{M}$.

Пусть $\mathbf{S}(\mathbf{z},\, r_n)$, $n=1,2,\,\ldots$ — последовательность вложенных шаров такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

В каждом из таких шаров содержатся точки из $\mathbf{M}$.

Выберем в каждом из них по одной точке $\mathbf{z}_n\in\mathbf{M}$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{z}_n = \mathbf{z}$ и так как $\mathbf{M}$ ***замкнуто***, то $\mathbf{z}\in\mathbf{M}$ и, следовательно, $\mathbf{z}\notin(\mathbf{X}\setminus\mathbf{M})$. Противоречие. □

Замечание. Доказанное утверждение можно обобщить:

если ***открытое*** множество $\mathbf{M}$ содержится в ***замкнутом*** множестве $\mathbf{F}$, то $\mathbf{F} \setminus \mathbf{M}$ — ***замкнуто***.

Сепарабельные метрические пространства

В заключение данного параграфа введём ещё два важных понятия.

Определение 10. *Множество* $\mathbf{M}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$ *называется* ***всюду плотным*** *в этом метрическом пространстве, если* ***замыкание*** *множества* $\mathbf{M}$ *есть всё это пространство:* $[\mathbf{M}] = \mathbf{X}$.

Рассмотренные выше примеры $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$ — ***характерные*** примеры ***всюду плотных*** множеств в соответствующих метрических пространствах.

Определение 11. *Метрическое пространство* $\mathbf{X}$ *называется* ***сепарабельным***, *если в этом пространстве имеется* ***счётное*** *всюду плотное множество.*

Рассмотренные выше примеры $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, в сочетании с ***утверждением***, что рассматриваемые в этих примерах множества: $\mathbf{Q}$ всех рациональных точек на прямой и $\mathbf{P}$ всех многочленов с вещественными коэффициентами, — ***счётны***, показывают, что соответствующие ***метрические пространства*** $\mathbb{E}^1$ и $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ — ***сепарабельны***.

Другие примеры ***сепарабельных пространств*** ещё не раз встретятся в нашем курсе.

Упражнения и задачи к параграфу 2.

1. Показать на примере, что ***счетное*** пересечение ***открытых*** множеств может ***не быть*** открытым.

Указание. Рассмотреть пересечение последовательности интервалов:

$$\mathbf{M}_n = \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{b} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)$$

из $\mathbb{E}^1$.

Чему равно множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \left(\mathbf{a} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{b} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)$?

2. Показать на примере, что ***счетное*** объединение ***замкнутых*** множеств может не быть ***замкнутым***.

Указание. Рассмотреть объединение последовательности отрезков:

$$\mathbf{M}_\mathbf{n} = \left[\mathbf{a} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{b} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right]$$

из $\mathbb{E}^1$.

Чему равно множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left[\mathbf{a} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}, \mathbf{b} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right]$?

3. Показать, что любой ***открытый шар*** $\mathbf{S}(\mathbf{a}, r)$ в метрическом пространстве $\mathbf{X}$ является ***открытым множеством***, а множество точек $\mathbf{X}:\ \boldsymbol{\rho}(\mathbf{a}, \mathbf{x}) \leqslant r$, (которое часто называют ***замкнутым шаром***), — ***замкнутое множество***.

4*. Обозначим $\mathbf{A}'$ множество всех ***предельных точек*** заданного множества $\mathbf{A}$.

Построить на прямой $\mathbb{R}^1$ такое множество точек $\mathbf{A}$, чтобы множество $\mathbf{A}'' \stackrel{def}{=} (\mathbf{A}')'$ было бы не пустым множеством $(\mathbf{A}'' \neq \varnothing)$, а $\mathbf{A}''' = \varnothing$.

5. Доказать, что множество $\mathbf{A}'$ всегда ***замкнуто***, каково бы ни было множество $\mathbf{A}$.

6. Доказать, что $[\mathbf{M}]$ — ***замкнутое множество***.

7. Показать, что в метрических пространствах могут существовать

множества не являющиеся ни ***открытыми***, ни ***замкнутыми*** и существуют множества замкнутые и открытые ***одновременно***.

Указание. Рассмотреть множества $[\mathbf{a}, \mathbf{b})$ в пространстве $\mathbb{E}^1$, и множества $\varnothing$ и $\mathbf{X}$ в произвольном метрическом пространстве $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$.

8. Величина $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = \inf\limits_{\mathbf{y} \in \mathbf{A}} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ называется ***расстоянием*** от ***точки*** $\mathbf{x}$ метрического пространства $\mathbf{X}$ до некоторого ***множества*** точек $\mathbf{A}$ того же пространства.

Доказать, что для всякого ***замкнутого*** множества $\mathbf{A}$ ***два*** утверждения:

1. $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{A}) = 0$

2. $\mathbf{x} \in \mathbf{A}$

— ***эквивалентны***.

Будет ли иметь место такая ***эквивалентность***, если множество $\mathbf{A}$ ***не замкнуто*** ?

9. Доказать, что для любого множества $\mathbf{A}$ точек метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ множество точек $\mathbf{x}$ этого пространства $\mathbf{A}_\varepsilon$, удовлетворящих ***условию*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{A}) < \varepsilon$, — ***открыто***, а множество $\hat{\mathbf{A}}_\varepsilon$ точек $\mathbf{y}$ этого пространства, удовлетворящих ***условию*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{A}) \leqslant \varepsilon$, — ***замкнуто***.

10. Доказать ***включение*** $[\mathbf{M} \cap \mathbf{N}] \subset \big([\mathbf{M}] \cap [\mathbf{N}]\big)$.

Всегда ли можно в написанном выражении знак ***включения*** заменить на знак ***равенства*** ?

11. Следует ли из ***включения*** $[\mathbf{M}] \subset [\mathbf{N}]$ ***включение*** $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$?

12. Доказать, что $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B})' = \mathbf{A}' \cup \mathbf{B}'$.

13*. Пусть $\mathbf{M}$ множество всех точек $\mathbf{x} - (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ пространства $\ell_{\mathbf{2}}$, у которых все координаты x_j, $j = 1, 2, 3, \ldots$ ***положительны***.

Будет ли указанное множество $\mathbf{M}$ ***открыто*** ?

14*. Пусть вещественная функция $f(x)$ ***определена*** и ***непрерывна*** на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$.

Доказать, что множество $\mathbf{G}$ точек x, где $f(x) < 1$ ***открыто***.

15. В метрическом пространстве $\mathbf{X}$ даны две его точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$.

Каким (***замкнутым*** или ***открытым***) будет множество $\mathbf{M}$ точек этого пространства $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, для которых выполнено ***равенство*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{b})$, и множество $\mathbf{N}$ точек этого пространства $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, для которых выполнено двойное ***неравенство***:
$\alpha < \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{b}) < \beta$, где $\alpha < \beta$ — заданные вещественные положительные числа.

Ответ обосновать.

16*. Доказать, что пространство $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***сепарабельно***.

17*. Доказать, что пространство $\ell_{\mathbf{2}}$ ***сепарабельно***.

1.3 Полные метрические пространства

Фундаментальные последовательности в метрическом пространстве

Определение 12. *Последовательность точек* $\{\mathbf{x}_i\}, (i = 1, 2, \ldots)$ *метрического пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***фундаментальной*** *или*

последовательностью Коши, *если:*

$$\lim_{\mathbf{m},\,\mathbf{n}\to\infty} \boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}_m,\,\mathbf{x}_n) \;=\; 0 \tag{1}$$

Запись (1) означает, что $\forall\,\varepsilon > 0$, найдется такой номер $\mathbf{N}\,(\varepsilon)$, что при $\mathbf{m},\,\mathbf{n} \geqslant \mathbf{N}\,(\varepsilon)$ выполнено неравенство: $\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}_m,\,\mathbf{x}_n) < \varepsilon$.

Из неравенства треугольника немедленно следует

Утверждение 10. *Любая* ***сходящаяся*** *последовательность* ***фундаментальна***.

Доказательство. Действительно, если $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{x}_n \;=\; \mathbf{x}$, то

$$\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}_m,\,\mathbf{x}_n) \;\leqslant\; \boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}_m,\,\mathbf{x}) \;+\; \boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x},\,\mathbf{x}_n) \tag{2}$$

В силу определения предела, правая часть неравенства (2) становится сколь угодно малой (меньше произвольного $\varepsilon > 0$), если $\mathbf{m},\,\mathbf{n}$ достаточно велики. □

Пример 1. Последовательность точек $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ в пространстве $\ell_{\mathbf{2}}$, рассмотренная в примере 1 предыдущего параграфа, ***не*** является ***фундаментальной***.

Более того: никакая ***подпоследовательность*** этой последовательности ***не*** является ***фундаментальной*** в пространстве $\ell_{\mathbf{2}}$.

Если ***метрическое пространство*** $(\,\mathbf{X},\,\boldsymbol{\rho}\,)$ есть ***числовая прямая*** $\mathbb{R}^1$, — с обычной метрикой, то справедливо и ***обратное***, по отношению к утверждению 10:

Утверждение 11. ***Любая фундаментальная*** *в* $\mathbb{E}^1$ *последовательность* ***имеет*** *предел.*

Это утверждение составляет содержание ***критерия Коши*** сходимости числовой последовательности, и, обычно, доказывается в курсе математического анализа.

Свойство полноты метрического пространства

В ***произвольном*** метрическом пространстве $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ ***критерий Коши***, вообще говоря, несправедлив: ***фундаментальная*** последовательность ***может*** не иметь предела (в рассматриваемом пространстве).

Пример 2. Рассмотрим ***метрическое пространство***, состоящее из ***всех*** вещественных чисел, принадлежащих интервалу $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ на числовой прямой, с обычной метрикой.

Последовательность точек $\{\mathbf{x}_n = \mathbf{1/n}\}$, ***очевидно***, фундаментальна, т.к. $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) = |\mathbf{1/m} - \mathbf{1/n}| < \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{m}} \to \mathbf{0}$, при $\mathbf{m} \to \infty$, $\mathbf{n} > \mathbf{m}$, но предела (в ***рассматриваемом*** пространстве) не имеет.

Таким образом, существуют такие ***метрические пространства***, в которых критерий Коши сходимости последовательностей точек этого пространства ***справедлив***, и такие, в которых этот критерий ***не справедлив***.

Определение 13. ***Метрическое пространство*** $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***полным****, если в нем* ***любая*** *фундаментальная последовательность* ***имеет предел****.*

Пример 1 — полнота метрического пространства $\mathbb{E}^n$

Пространство $\mathbb{E}^n$ (см. пример 2 из § 1) — ***полно***.

Действительно, если последовательность точек $\left\{ \mathbf{x}^{(\mathbf{p})} \right\} \subset \mathbb{E}^n$, $(\mathbf{p} = 1, 2, \dots)$ ***фундаментальна***, то:

$$\lim_{\mathbf{p},\,\mathbf{q} \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(\mathbf{p})} - x_i^{(\mathbf{q})} \right)^2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\forall\, i \ (i = 1, \dots, n)$ каждая ***числовая*** последовательность отдельных компонент $\left\{ x_i^{(\mathbf{p})} \right\}$ ***фундаментальна*** в пространстве $\mathbb{E}^1$, и, следовательно, в силу ***критерия Коши***, справедливого в этом пространстве, имеет при $\mathbf{p} \to \infty$ предел — x_i .

Поэтому, $\forall\, \varepsilon > 0$, найдется такой номер $\mathbf{N}_i(\varepsilon)$, что при $\mathbf{p} > \mathbf{N}_i(\varepsilon)$ для каждой координаты с номером i будет выполнено свое неравенство: $|\, x_i^{(\mathbf{p})} - x_i \,| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$, а потому, при выполнении условия $\mathbf{p} > \mathbf{N}(\varepsilon)$, где $\mathbf{N}(\varepsilon) = \max\limits_i \{ \mathbf{N}_i(\varepsilon) \}$, будут выполнены сразу все следующие неравенства:

$$|\, x_i^{(\mathbf{p})} - x_i \,| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Пусть $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, — элемент $\mathbb{E}^n$, составленный из ***пределов*** отдельных координат — x_i .

Тогда, очевидно, $\lim\limits_{\mathbf{p} \to \infty} \boldsymbol{\rho} \left(\mathbf{x}^{(\mathbf{p})}, \mathbf{x} \right) = 0$, т.к. для выбранного выше произвольного $\varepsilon > 0$, мы указали $\mathbf{N}(\varepsilon)$, такое, что $\boldsymbol{\rho} \left(\mathbf{x}^{(\mathbf{p})}, \mathbf{x} \right) < \varepsilon$ при $\mathbf{p} > \mathbf{N}(\varepsilon)$, то есть последовательность $\left\{ \mathbf{x}^{(\mathbf{p})} \right\}$ ***сходится*** к $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$.

Пример 2 — полнота метрического пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Пространство $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ непрерывных функций на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ с метрикой (8) параграфа 1 ***полно***.

Действительно, пусть $\{\, x_n\,(\,t\,)\,\}$ ***фундаментальная*** последовательность в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то есть

$$\lim_{\mathbf{m},\,\mathbf{n}\,\to\,\infty}\left\{\max_{\mathbf{a}\,\leqslant\,t\,\leqslant\,\mathbf{b}}|\,x_m\,(t)\;-\;x_n\,(t)\,|\right\}\;=\;0$$

Это означает, что $\forall\,\varepsilon\;>\;0$ существует $\mathbf{N}\,(\varepsilon)$ такое, что:

$$|\,x_m\,(t)\;-\;x_n\,(t)\,|\;<\;\varepsilon \tag{3}$$

для всех $\mathbf{m},\,\mathbf{n}\;\geqslant\;\mathbf{N}\,(\varepsilon)$ ***при всех*** $t\;\in\;[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Из этого соотношения следует, что при любом фиксированном $\xi\;\in\;[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***числовая*** последовательность $\{\,x_n\,(\xi)\,\}$ ***фундаментальна*** в пространстве $\mathbb{E}^1$, и, следовательно, в силу ***критерия Коши*** для пространства $\mathbb{E}^1$, имеет предел, который мы ***обозначим*** — $x\,(\xi)$.

Перейдем в неравенстве (3) к пределу при $\mathbf{m}\;\to\;\infty$.

Так как предельное неравенство выполняется сразу для всех $t\;\in\;[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то можно записать:

$$\sup_{\mathbf{a}\,\leqslant\,t\,\leqslant\,\mathbf{b}}|\,x_n\,(t)\;-\;x\,(t)\,|\;\leqslant\;\varepsilon,\qquad n\;\geqslant\;\mathbf{N}\,(\varepsilon) \tag{4}$$

Неравенство (4) означает, что последовательность функций $\{\,x_n\,(t)\,\}$ сходится к $x\,(t)$ ***равномерно***.

Поэтому функция $x\,(t)$ сама является ***непрерывной*** и, в силу этого, принадлежит $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Поэтому пространство $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***полно***.

Пример 3 — полнота метрического пространства ℓ_2

Пространство ℓ_2 из примера 3 параграфа 1 ***полно***.

Действительно, пусть $\mathbf{x}^{(\mathbf{n})} = \left(x_1^{(n)}, \ldots, x_i^{(n)}, \ldots\right)$ — ***фундаментальная*** последовательность точек из $\ell_{\mathbf{2}}$.

Тогда:

$$\lim_{\mathbf{m},\,\mathbf{n} \to \infty} \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i^{(\mathbf{m})} - x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 = 0 ,$$

то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\mathbf{N}(\varepsilon)$ такое, что:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i^{(\mathbf{m})} - x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 < \varepsilon, \qquad \mathbf{m},\, \mathbf{n} \geqslant \mathbf{N}(\varepsilon) \tag{5}$$

Из этого неравенства следует, что $\forall\, i$ числовая последовательность $\left\{ x_i^{(n)} \right\}$ ***фундаментальна*** в $\mathbb{E}^1$ и, поэтому, имеет предел при $\mathbf{n} \to \infty$, который мы ***обозначим*** x_i.

Покажем, что последовательность $\mathbf{x} \overset{def}{=} \{ x_i \}$, составленная из всех пределов x_i, принадлежит $\ell_{\mathbf{2}}$ и именно к этому элементу $\ell_{\mathbf{2}}$ сходится рассматриваемая ***фундаментальная*** последовательность $\mathbf{x}^{(n)}$.

Пусть $\mathbf{M}$ произвольное натуральное число.

Перепишем неравенство (5) в виде:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i^{(\mathbf{m})} - x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 = \sum_{i=1}^{M} \left(x_i^{(\mathbf{m})} - x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 + \sum_{i=M+1}^{\infty} \left(x_i^{(\mathbf{m})} - x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 \leqslant \varepsilon$$

Отсюда:

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{M}} \left(x_i^{(\mathbf{m})} - x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 \leqslant \varepsilon , \tag{6}$$

при любых натуральных $\mathbf{m},\, \mathbf{n}$.

Зафиксируем в неравенстве (6) параметр $\mathbf{n}$ и перейдем к пределу при $\mathbf{m} \to \infty$.

Получим:

$$\sum_{i=1}^{\mathbf{M}} \left(x_i^{(\mathbf{n})} - x_i \right)^2 \leqslant \varepsilon \tag{7}$$

Неравенство (7) справедливо для произвольного $\mathbf{M}$.

Поэтому в нем можно перейти к пределу при $\mathbf{M} \to \infty$.

Получим следующее неравенство:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i^{(\mathbf{n})} - x_i \right)^2 \leqslant \varepsilon \tag{8}$$

Так как $\mathbf{x}^{(\mathbf{n})} \in \ell_{\mathbf{2}}$, то из (7), (8) в силу неравенства треугольника в пространстве $\mathbb{E}^M$:

$$\sum_{i=1}^{M} x_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{M} \left(x_i^{(\mathbf{n})} \right)^2 + \sum_{i=1}^{M} \left(x_i^{(\mathbf{n})} - x_i \right)^2$$

и произвольности $\mathbf{M}$ следует, что $\mathbf{x} \in \ell_{\mathbf{2}}$, откуда, в силу (8), следует сходимость последовательности $\mathbf{x}^{(\mathbf{n})}$ к $\mathbf{x}$.

Пример 4 — **неполного метрического пространства**

Пространство $\mathbf{X}$ из примера 7 § 1 с метрикой (10) — ***не полно***.

Пусть для определённости $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$.

Рассмотрим последовательность ***непрерывных*** функций:

$$x_n(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } t \in [-\mathbf{1},\, -\mathbf{1}/\mathbf{n}] \\ nt, & \text{если } t \in [-\mathbf{1}/\mathbf{n},\, \mathbf{1}/\mathbf{n}] \\ 1, & \text{если } t \in [\mathbf{1}/\mathbf{n},\, \mathbf{1}] \end{cases} \tag{9}$$

Непосредственно проверяется, что эта последовательность ***фундаментальна*** в метрике (10) § 1.

Предположив, что эта последовательность ***сходится*** в метрике (10) к некоторой ***непрерывной*** на отрезке $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$ функции $x(t)$, мы придем к противоречию.

Действительно, рассмотрим отрезок $[\mathbf{c}, \mathbf{1}]$, $\mathbf{c} > 0$.

Очевидно, что на этом отрезке последовательность $x_n(t)$ ***равномерно сходится*** к функции ***тождественно*** равной 1.

Отсюда, в силу ***единственности*** предела, следует, что введенная выше предельная функция

$$x(t) \equiv 1, \quad t \in [\mathbf{c}, \mathbf{1}], \quad \forall\, \mathbf{c}, \quad 1 > \mathbf{c} > 0$$

Рассуждая аналогично, получим, что наша предельная функция

$$x(t) \equiv -1, \quad t \in [-\mathbf{1}, -\mathbf{c}], \quad \forall\, \mathbf{c}, \quad 1 > \mathbf{c} > 0$$

Но, при любом значении $x(0)$ такая предельная функция $x(t)$ не может быть ***непрерывной*** на $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$.

Следовательно, последовательность (9), будучи ***фундаментальной***, предела в рассматриваемом метрическом пространстве ***не имеет***.

Пример 5 — полнота метрического пространства $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Пространство $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, состоящее из k раз непрерывно ***дифференцируемых*** функций $x(t)$, определенных на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, с метрикой (9) § 1 ***полно***.

Действительно, пусть $\{x_n(t)\}$ ***фундаментальная*** последовательность в пространстве $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то есть

$$\lim_{m,n\to\infty} \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{D}_k}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) =$$

$$= \lim_{m,n\to\infty} \max_{0 \leqslant j \leqslant k} \left[\max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} |x_m(t) - x_n(t)|,\ \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} |x'_m(t) - x'_n(t)|, \ldots \right.$$

$$\ldots \left. ,\ \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \left| x_m^{(k-1)}(t) - x_n^{(k-1)}(t) \right|,\ \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \left| x_m^{(k)}(t) - x_n^{(k)}(t) \right| \right] = 0$$

Это означает, что $\forall\, \varepsilon > 0$ существует $\mathbf{N}(\varepsilon)$ такое, что для ***любого*** номера ***производной*** $0 \leqslant j \leqslant k$:

$$|\, x_m^{(j)}(t) - x_n^{(j)}(t)\,| < \varepsilon \tag{10}$$

для всех $\mathbf{m}, \mathbf{n} \geqslant \mathbf{N}(\varepsilon)$ ***при всех*** $t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Из этого соотношения следует, что каждая последовательность $\left\{ x_n^{(j)}(t) \right\}$ ***фундаментальна*** в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, и, следовательно, в силу полноты пространства $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, имеет в этом пространстве предел, который мы обозначим — $z_j(t)$, $0 \leqslant j \leqslant k$.

Перейдем в неравенстве (10) к пределу при $\mathbf{m} \to \infty$.

Тогда:

$$\max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \left| x_n^{(j)}(t) - z_j(t) \right| \leqslant \varepsilon, \qquad n \geqslant \mathbf{N}(\varepsilon) \tag{11}$$

Неравенство (11) означает, что каждая последовательность функций $\left\{ x_n^{(j)}(t) \right\}$ сходится к $z_j(t)$ ***равномерно***.

Поэтому каждая функция $z_j(t)$ сама является ***непрерывной*** и, в силу этого, принадлежит пространству $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Для завершения доказательства полноты пространства $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ нам понадобится известная из математического анализа

Лемма 1. *Если последовательность* $\{ \boldsymbol{\varphi}_n = \varphi_n(t) \}$ *сходится в пространстве* $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *к* $\boldsymbol{\varphi}_0 = \varphi_0(t)$, *то последовательность* $\{ \boldsymbol{\psi}_n \}$*:*

$$\boldsymbol{\psi}_n = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{t}} \varphi_n(\tau)\, d\tau$$

сходится в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *к*

$$\boldsymbol{\psi}_0 = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{t}} \varphi_0(\tau)\, d\tau\ .$$

Доказательство. По условию $\forall\, \varepsilon > 0$ существует $\mathbf{N}(\varepsilon)$ такое, что при $n > \mathbf{N}(\varepsilon)$

$$\max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} |\, \varphi_n(t) - \varphi_0(t)\,| < \frac{\varepsilon}{\mathbf{b} - \mathbf{a}}$$

Тогда $\forall\, \boldsymbol{\xi} \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

$$|\, \psi_n(\boldsymbol{\xi}) - \psi_0(\boldsymbol{\xi})\,| = \left| \int\limits_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} \varphi_n(\,\tau\,)\, d\tau - \int\limits_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} \varphi_0(\,\tau\,)\, d\tau \right| \leqslant \int\limits_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} |\varphi_n(\,\tau\,) - \varphi_0(\,\tau\,)|\, d\tau < \varepsilon$$

при $n > \mathbf{N}(\varepsilon)$. □

Из доказанной леммы следует, что при выполнении её условий все рассматриваемые в ней функции $\{\, \psi_n(t)\,\}$ имеют производные: $\psi_n'(t) = \varphi_n(t)$, которые принадлежат пространству $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, а функция $\psi_0(t)$ имеет производную: $\psi_0'(t) = \varphi_0(t)$, которая также принадлежит пространству $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Все элементы $x_n(\,t\,)$, рассматриваемой выше, фундаментальной в пространстве $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ последовательности $\{\, x_n(\,t\,)\,\}$, имеют представление:

$$x_n(\boldsymbol{\xi}) = x_n(\mathbf{a}) + \int\limits_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} x_n'(\,\tau\,)\, d\tau$$

Используя это представление, лемму и следствие из неё, можно утверждать, что при $n \to \infty$ получается представление:

$$z_0(\boldsymbol{\xi}) = z_0(\mathbf{a}) + \int\limits_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} z_1(\,\tau\,)\, d\tau\ ,$$

из которого следует, что при $\forall\, t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ существует производная: $z_0'(t) = z_1(t)$.

Совершенно аналогично, для ***любого*** номера ***производной*** $1 \leqslant j \leqslant (k-1)$ имеем представление:

$$x_n^{(j)}(\boldsymbol{\xi}) = x_n^{(j)}(\mathbf{a}) + \int\limits_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} x_n^{(j+1)}(\tau)\, d\tau \ .$$

Используя это представление, лемму и следствие из неё, можно утверждать, что при $n \to \infty$ последовательно по $1 \leqslant j \leqslant (k-1)$ получается представление:

$$z_j(\boldsymbol{\xi}) = z_j(\mathbf{a}) + \int\limits_{\mathbf{a}}^{\boldsymbol{\xi}} z_{j+1}(\tau)\, d\tau \ ,$$

из которого следует, что при $\forall\, t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ существует производная: $z_j'(t) = z_{j+1}(t)$ для ***любого*** номера $1 \leqslant j \leqslant (k-1)$.

Но это означает, что выше определённый набор непрерывных на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций $z_j(t)$, являющихся для каждого $0 \leqslant j \leqslant k$ пределом при $n \to \infty$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ фудаментальной последовательности функций $\left\{ x_n^{(j)}(t) \right\}$, на самом деле, является ***последовательными производными*** порядка $1 \leqslant j \leqslant k$ ***одной и той же функции*** $z_0(t)$, что означает ***сходимость*** рассмотренной фундаментальной последовательности в $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ к $z_0(t)$.

Поэтому пространство $\mathbb{D}_k[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***полно***.

Упражнения и задачи к параграфу 3.

1. Пусть $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ ***полное*** метрическое пространство и $\mathbf{M}$ — его ***замкнутое*** подмножество.

Показать, что ***метрическое пространство*** $(\mathbf{M}, \boldsymbol{\rho})$ также ***полно***.

2. Пусть последовательность ***непрерывных*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций $\{ x_n(t) \}$ ***сходится*** в смысле ***метрики*** $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ к ***функции*** $x(t)$.

Показать, что $x(t)$ является ***пределом*** последовательности $\{ x_n(t) \}$ и в смысле ***метрики*** (10) § 1.

3. Пусть ***последовательность*** $\{ x_n(t) \}$ сходится к ***непрерывной*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функции $x(t)$ в смысле ***метрики*** (10) § 1.

Показать ***на примере***, что такая сходимость ***не влечет*** сходимость последовательности $\{ x_n(t) \}$ к $x(t)$ в ***метрике*** $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

4. Показать, что последовательность ***непрерывных*** функций $\{ x_n(t) \}$ на отрезке $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, где $x_n(t) = \begin{cases} nt, & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \\ 1, & \text{при} \quad \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$, ***сходится*** к функции $x(t) \equiv 1$ ***в*** метрическом ***пространстве*** $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}$, но ***не сходится в пространстве*** $\mathbb{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ к той же самой функции.

5. Показать ***полноту*** метрического пространства с носителем из примера 2 § 1, рассматриваемого с ***метрикой*** (5) примера 3 того же параграфа.

6. Будет ли метрическое пространство, состоящее из точек прямой $(-\infty < x < +\infty)$ с ***метрикой*** $\boldsymbol{\rho}(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, рассмотренной в задаче 7 к § 1, ***полным***?

7. Будет ли метрическое пространство, состоящее из точек прямой $(-\infty < x < +\infty)$ с ***метрикой*** $\boldsymbol{\rho}(x, y) = \operatorname{arctg} |x - y|$, рассмотренной в задаче 8 к § 1, ***полным***?

8. Является ли ***полным*** метрическое пространство c всех числовых последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots)$, где $x_k \to 0$, когда

$k \to \infty$, с ***метрикой***, задаваемой формулой $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup\limits_{k} |x_k - y_k|$, где $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots)$?

9. Пусть $\mathbf{X}$ множество ***рациональных*** чисел $\{\mathbf{r}\}$, ***расстояние*** между которыми определено формулой: $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$.

Показать, что в ***этом метрическом пространстве*** последовательность

$$\mathbf{r}_n = \left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}$$

является ***фундаментальной***, но ***не имеет предела***.

(Из курса математического анализа известно, что рассматриваемая последовательность ***имеет предел*** в метрическом ***пространстве*** $\mathbb{E}^1$).

10. Пусть $\mathbf{X}$ множество многочленов:

$$\{\mathbf{p}\} \overset{def}{=} \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n\},$$

расстояние между которыми определено формулой:
$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \max\limits_{\mathbf{a} \leqslant x \leqslant \mathbf{b}} |p_1(x) - p_2(x)|$.

Показать, что в ***этом метрическом пространстве*** последовательность

$$\mathbf{p}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k$$

является ***фундаментальной***, но ***не имеет предела***.

Будет ли рассматриваемая последовательность ***иметь предел*** в метрическом пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$?

1.4 Пополнение метрических пространств

Полнота того или иного метрического пространства, ***участвующего*** в постановке и решении конкретной математической или прикладной проблемы, часто весьма ***существенна***.

Отсутствие свойства ***полноты*** обычно удается компенсировать, благодаря тому, что у любого ***неполного*** пространства существуют ассоциированные с ним ***полные*** метрические пространства, называемые ***пополнениями*** исходного метрического пространства.

Изометрия метрических пространств и пополнение

Определение 14. *Два метрических пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$ *и* $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}})$ *называются* ***изометричными****, если существует такое* ***взаимнооднозначное*** *соответствие* $\boldsymbol{\tau}$ *между ними, что:*

$$\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X} \qquad \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}))\ .$$

И, наоборот:

$$\forall\, \mathbf{x}' = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{x}), \mathbf{y}' = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y}) \in \mathbf{Y} \qquad \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') = \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ .$$

Само ***отображение*** $\boldsymbol{\tau}$ *называется* ***изометрией*** *(между* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$*).*

Определение 15. ***Полное*** *метрическое пространство* $\mathbf{Y}$ *называется* ***пополнением*** *пространства* $\mathbf{X}$*, если:*

1°. *В* $\mathbf{Y}$ *есть подпространство* $\mathbf{Y}_0$ ***изометричное*** $\mathbf{X}$.

2°. $\mathbf{Y}_0$ ***всюду плотно*** *в* $\mathbf{Y}$*, т.е.* $[\mathbf{Y}_0] = \mathbf{Y}$.

Теорема 1. ***Любое*** *неполное метрическое пространство* $\mathbf{X}$ *имеет* ***пополнение****.*

Все ***пополнения*** *метрического пространства* $\mathbf{X}$ ***изометричны*** *между собой.*

Мы не будем приводить здесь доказательства этой теоремы, [2] а ограничимся только несколькими общими соображениями ***принципиального*** характера.

$\mathbf{1}^{\circ}$. Прежде всего, напомним самое ***существенное*** свойство ***полного*** метрического пространства $\mathbf{X}$.

По определению в каждом таком пространстве ***всякая фундаментальная*** последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ имееет ***предел*** — некоторый элемент $\mathbf{x}_0$ этого же пространства.

$\mathbf{2}^{\circ}$. Тогда всё множество фундаментальных последовательностей ***полного*** пространства можно разделить на классы ***эквивалентных*** между собой последовательностей таким образом, чтобы к одному классу были отнесены все фундаментальные последовательности этого пространства, имеющие пределом ***одну и ту же точку*** $\mathbf{x}_0$.

$\mathbf{3}^{\circ}$. После этого можно считать, что точку $\mathbf{x}_0$ ***полного*** метрического пространства вполне "заменяет" тот самый ***класс*** эквивалентных между собой последовательностей нашего ***полного*** метрического пространства.

$\mathbf{4}^{\circ}$. В ***неполном*** метрическом пространстве $\mathbf{X}$, вообще говоря, для ***некоторых фундаментальных*** в нём последовательностей $\{\mathbf{x}_n\}$ ***не существует*** "соответствующего" такой последовательности элемен-

[2]Конструкция пополнения неполного метрического пространства изложена, например, в книге [2]

та $\mathbf{x}_0$, к которому бы ***сходилась*** данная фундаментальная последовательность.

Но формально ничто не мешает ***обратить ситуацию*** и "заменить" "недостающую" точку $\mathbf{x}_0$ в рассматриваемом случае, также как в случае полного пространства, ***классом эквивалентных*** между собой фундаментальных последовательностей неполного метрического пространства.

5°. При этом вся "тонкость" ситуации состоит в том, что понятие ***эквивалентности*** фундаментальных последовательностей, используемое для ***полных*** метрических пространств в ***неполном*** метрическом пространстве ***не работает***.

6°. Но, к счастью, можно так ***определить*** эквивалентность фундаментальных последовательностей в ***неполном*** метрическом пространстве, чтобы указанная выше замена "отсутствующей" точки $\mathbf{x}_0$ на класс эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей стала возможной.

7°. Подходящее для наших целей ***обобщение*** понятия ***эквивалентности*** фундаментальных последовательностей на случай ***необязательно*** полного метрического пространства содержит

Определение 16. *Две* ***фундаментальных*** *последовательности* $\{\mathbf{x}_n\}$ *и* $\{\mathbf{y}_n\}$ *из* ***метрического*** *пространства* $\mathbf{X}$ *называются* ***эквивалентными****, если:*

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}\,(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \,=\, 0$$

Изложенные в пунктах $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{7}^\circ$ соображения являются ***содержательной основой доказательства*** теоремы 1, ***могут быть ис-***

пользованы при конкретном построении пополнений ***неполных*** метрических пространств, однако, довольно часто пополнение того или иного неполного пространства можно получить и ***иными*** способами.

Пример 1 — пополнение пространства рациональных чисел $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$

Метрическое пространство $\mathbf{X}$, элементами которого являются ***рациональные числа*** отрезка $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, а расстояние между которыми вводится стандартным образом, как на всей числовой прямой, очевидно, ***неполно***.

Его стандартное ***пополнение*** — метрическое пространство $\mathbf{Y}$ — отрезок $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ с расстоянием между точками, как на всей числовой прямой.

Более точно: пополнение рассматриваемого метрического пространства есть метрическое пространство, элементами которого будут ***все*** элементы множества ***действительных*** чисел от нуля до единицы, а функция, определяющая метрику, имеет ***тот же самый вид***, но ***расширенную*** область определения.

Пример 2 — пополнение пространства $\mathbb{R}^{\Phi}$

Рассмотрим ***арифметическое пространство*** $\mathbb{R}^1$ (числовая прямая) с ***метрикой***, задаваемой следующим образом:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{y})| ,$$

где $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ непрерывная, строго возрастающая функция, заданная на $\mathbb{R}^1$ и такая, что

$$\lim_{\mathbf{x} \to -\infty} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = 0, \qquad \lim_{\mathbf{x} \to +\infty} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = 1 .$$

Полученное ***метрическое пространство***, которое мы для удобства будем обозначать $\mathbb{R}^{\mathbf{\Phi}}$, — ***неполное***.

Действительно, как легко проверить, последовательность $\{\mathbf{x}_n = \mathbf{n}\}$ ***фундаментальна*** в этом пространстве, но ***предела*** в этом пространстве не имеет.

Пополнением (одним из возможных!) этого пространства служит отрезок $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ со стандартной ***метрикой***, так как, легко показать, что рассматриваемое пространство ***изометрично*** интервалу $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$.

При этом, требуемое для изометрии ***взаимооднозначное*** соответствие задается отображением: $\mathbf{x} \overset{\tau}{\leftrightarrow} \mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$, — а замыкание интервала $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ есть отрезок $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

Пример 3 — пространство $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, как пополнение пространства $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Вновь рассмотрим ***метрическое пространство*** $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, состоящее из непрерывных на конечном отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций, с ***метрикой*** (10) из § 1.

В § 3 (пример 6) было установлено, что это ***метрическое пространство неполно***.

Пополнение рассматриваемого пространства ***с точностью до изометрии*** совпадает с метрическим ***пространством*** $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, которое состоит не из индивидуальных функций, а из ***классов эквивалентных*** между собой функций, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям, позволяющим ввести ***метрику***, ***согласованную*** с метрикой (10).

Определение 17. *Множество* $\mathbf{M}$ *точек* $\mathbb{R}^1$ *называется множеством* ***меры нуль***, *если при любом* $\varepsilon > 0$ *множество* $\mathbf{M}$ *может быть* ***покрыто*** *конечным или* ***счетным*** *множеством отрезков* ***суммарной длины*** $\leqslant \varepsilon$.

Так как ***отрезок*** и соответствующий ему ***интервал*** (полуинтервал) имеют одинаковую ***длину***, то в этом определении ***отрезки*** можно заменить ***интервалами*** или ***полуинтервалами***.

Определение 18. *Последовательность функций* $\{ f_n(x) \}$, *заданных на* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, *называется сходящейся* ***почти всюду*** *на* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *к некоторой функции* $f(x)$, *если эта последовательность сходится к функции* $f(x)$ *на множестве* $\mathbf{N}$ *точек отрезка,* ***дополнение*** *к которому* $\mathbf{M} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \setminus \mathbf{N}$ *имеет* ***меру нуль***.

Определение 19. *Две функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *определенные на* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, *называются* ***эквивалентными***, *если их значения различаются* ***лишь*** *на множестве точек отрезка* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***меры нуль***.

Приведенные выше определения ещё не позволяют аккуратно объяснить, что представляет из себя каждый ***элемент*** пространства $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Мы сделаем это чуть ниже.

Однако, после определения ***элементов*** пространства $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, ***метрика*** в этом пространстве ***вводится*** формулой, ***по виду*** совпадающей с (10), но ***интеграл*** в которой понимается в более ***общем*** смысле, чем это, обычно, принято в математическом анализе. Этот ***более общий*** интеграл называется ***интегралом Лебега***[3].

Замечание. ***Определить интеграл Лебега*** можно ***различными*** способами.

Мы ***не будем*** проводить аккуратного построения и, тем более, ***обоснования*** теории интеграла Лебега, которое заняло бы значительный объём книги и надолго увело бы в сторону от её ***основной*** тематической линии.

За подробностями теории интеграла Лебега читатель может обратиться к [1], [7].

Для ***понимания*** же дальнейшего материала вполне ***достаточно*** знакомства со следующими ***основными свойствами интегрируемых по Лебегу*** функций.

$\mathbf{1}^\circ$. Если функция $f\,(x)$ ***интегрируема по Лебегу*** на отрезке $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то она останется ***интегрируемой*** с тем же значением интеграла при произвольном изменении значений рассматриваемой функции на произвольном множестве ***меры нуль***.

$\mathbf{2}^\circ$. Если функция ***интегрируема по Риману*** на отрезке $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то она ***интегрируема*** на $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***по Лебегу*** и при этом значения соответствующих интегралов ***совпадают***.

[3] Интеграл, обычно используемый в элементарном анализе, называется ***интегралом Римана***

$\mathbf{3}^\circ$. Если функция $f(x)$ ***интегрируема по Лебегу*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то и функция $|f(x)|$ ***интегрируема по Лебегу*** на этом отрезке (***обратное*** утверждение, вообще говоря, ***неверно!***).

$\mathbf{4}^\circ$. Если последовательность ***интегрируемых по Лебегу*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций $\{ f_n(x) \}$ сходится ***почти всюду*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ к функции $f(x)$,

$$|f_n(x)| \leqslant \varphi(x), \quad \forall\, n = 1, 2, \ldots$$

и $\varphi(x)$ ***интегрируема по Лебегу*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то и предельная функция $f(x)$ ***интегрируема по Лебегу*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f_n(x)\, dx = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(x)\, dx, \qquad \text{причём} \qquad \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\, f(x)\,|\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \varphi(x)\, dx\,.$$

Свойства $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{4}^\circ$, — важные ***теоремы*** лебеговской теории интегрирования, доказательства которых можно найти, например, в [1], [7].

Утверждения $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{4}^\circ$, обычно, позволяют найти ***интеграл Лебега*** от заданной функции либо найдя её ***интеграл*** в смысле ***Римана***, когда это возможно, либо как ***предел последовательности*** результатов таких интегрирований.

Теперь, наконец, мы можем ***сформулировать*** определение пространства $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Определение 20. *Пространство* $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *это множество* ***классов*** *функций.*

Каждый ***класс*** *(отдельный элемент* $\mathbf{x}$ *пространства) состоит из функций,*[4] $\boxed{\textbf{\textit{квадрат}}}$ *которых* ***интегрируем по Лебегу*** *на отрез-*

[4]Все функции, рассматриваемые при построении пространства $\mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ предполагаются ***изме-***

ке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Кроме того, это множество элементов $\boxed{\textbf{\textit{замкнуто}}}$ *относительно линейных операций (сложения и умножения на числа) в* ***алгебраическом*** *смысле, означающем, что линейная комбинация* $\alpha\, x\,(t) \;+\; \beta\, y\,(t)$ *любых двух функций* $x\,(t),\, y\,(t)$ *из двух классов* $\mathbf{x},\, \mathbf{y}$ *, принадлежащих* $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *, сама принадлежит классу* $\alpha\, \mathbf{x} \,+\, \beta\, \mathbf{y}$ *пространства* $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *, то есть соответствующая линейная комбинация* ***интегрируема с квадратом*** *на отрезке* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Пространство $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***полно*** и является ***пополнением*** пространства $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ примера 7 из § 1 .

Строгое доказательство этого утверждения требует более ***детального*** знакомства с теорией интегрирования ***в смысле Лебега*** и здесь не приводится.

Замечание. Каждый элемент пространства $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ можно также, в отличие от проведенной выше схемы рассуждений, рассматривать ровно таким же образом, как это намечено выше в пунктах $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{7}^\circ$, как класс эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей из пространства $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Заметим, что аналогично тому, как мы ввели пространство $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, можно ввести пространство функций $\mathbb{L}_2\,(\,\prod\,[\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\,]\,)$, заданных на произвольном множестве $\prod\,[\,\mathbf{a}, \mathbf{b}\,]$ (см. пример (4) на с. 152 из § 5) и даже пространство $\mathbb{L}_2\,(\,\mathbf{Q}\,)$, где $\mathbf{Q}$ — произвольное ***измеримое*** множество из $\mathbb{E}^n$.

римыми. Это понятие аккуратно обсуждается, например, в [1], [7].

Упражнения и задачи к параграфу 4.

1. Показать, что множество рациональных чисел на отрезке $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ — множество ***меры нуль***.

Указание. Множество рациональных точек отрезка ***счетно***, то есть из всех рациональных чисел $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ можно образовать одну ***последовательность***.

Каждое число, — элемент получившейся таким образом последовательности, можно заключить в отрезок сколь угодно малой длины.

Поэтому достаточно подобрать длины всех этих отрезков так, чтобы сумма длин указанных отрезков была бы сколь угодно малой.

2. Показать, что функция Дирихле на отрезке $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$:

$$\boldsymbol{\chi}(x) = \begin{cases} 1, & x - \text{иррационально} \\ 0, & x - \text{рационально} \end{cases}$$

интегрируема по Лебегу.

Чему равен ***интеграл*** от этой функции?

3. Показать, что функция $f(x) = x \cdot \boldsymbol{\chi}(x)$ ***интегрируема по Лебегу*** на $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ и ***интеграл*** от этой функции равен $1/2$.

1.5 Отображения метрических пространств. Принцип сжатых отображений

Отображения метрических пространств

Одним из самых ***основополагающих*** понятий математики является понятие ***функции***.

Сейчас мы значительно расширим понятие функции (по сравнению со стандартным определением из ***математического анализа***).

Определение 21. *Пусть* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *— два множества и каждому элементу* $\mathbf{x} \in \mathbf{M}$ *поставлен в соответствие некоторый (**только один!**) элемент* $\mathbf{y} \in \mathbf{N}$.

В этом случае говорят, что на $\mathbf{M}$ *задана **функция** со значениями в* $\mathbf{N}$.

Замечание. Вместо слова ***функция***, по сложившейся в математике традиции, в зависимости от контекста, часто используют также слова - синонимы — ***отображение*** и ***оператор***.

Точно также, ***по традиции***, в случае, когда область значений $\mathbf{N}$ состоит из действительных чисел, а $\mathbf{M}$ — произвольное ***метрическое пространство***, то вместо слова ***функция*** обычно используется термин ***функционал***.

Определение 22. *Пусть* f *— **отображение**.*

Элемент $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \mathbf{N}$ *называется **образом*** $\mathbf{x}$ *в* $\mathbf{N}$ *при отображении* f.

Определение 23. *Если* $\mathbf{y} \in \mathbf{N}$, *то под **полным прообразом** элемента* $\mathbf{y}$ *понимается **подмножество** элементов* $\mathbf{M}$, *которые **переходят** в* $\mathbf{y}$ *(соответствуют* $\mathbf{y}$*) при отображении* f, *причем это подмножество, которое, обычно, обозначается* $f^{-1}(\mathbf{y})$, *при некоторых* $\mathbf{y} \in \mathbf{N}$, *может быть и **пустым**.*

Определение 24. *Если* $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{M}$, *то* ***образ множества*** $\mathbf{P}$ *(в множестве* $\mathbf{N}$*): —* $f(\mathbf{P}) \subseteq \mathbf{N}$, *—* ***подмножество*** $\mathbf{N}$, *куда переходят точки из* $\mathbf{P}$ ***под действием оператора*** f.

Если $f(\mathbf{M}) = \mathbf{N}$, *то говорят, что* f *отображает* $\mathbf{M}$ $\boxed{\textbf{на}}$ $\mathbf{N}$.

Если $f(\mathbf{P}) \subset \mathbf{N}$, *то говорят об отображении* $\mathbf{M}$ $\boxed{\textbf{в}}$ $\mathbf{N}$.

Непрерывность отображения метрических пространств

Наличие метрики позволяет ввести понятие ***непрерывности*** отображения.

Определение 25. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ ***функция****, определенная на метрическом пространстве* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$ *со значениями в метрическом пространстве* $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}})$.

Отображение f *называется* ***непрерывным*** *в точке* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, *если* $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\mathbf{x}, \varepsilon)$ *такое, что*

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}\,(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{z})) < \varepsilon ,$$

если

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \delta .$$

Утверждение 12. *Для* ***непрерывности*** *отображения* f *действующего из метрического пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$ *в метрическое пространство* $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}})$ ***необходимо*** *и* ***достаточно****, чтобы для* ***любой*** *последовательности* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}$ *(в смысле сходимости* ***в метрическом пространстве*** $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$*), соответствующая последовательность значений* $f(\mathbf{x}_n) \to f(\mathbf{x})$ ***в метрическом пространстве*** $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}})$.

Доказательство. ***Необходимость***. Пусть отображение $f: \quad \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ непрерывно в точке $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Это означает, что $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\mathbf{x}, \varepsilon)$ такое, что

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}\,(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{z})) < \varepsilon\,,$$

если

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) < \delta\,.$$

Рассмотрим произвольную последовательность точек $\mathbf{x}_n \in \mathbf{X}$, сходящуюся к точке $\mathbf{x}$, т.е. такую, что для рассмотренного выше $\delta(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $\exists N(\delta)$, что $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \delta$ при $n > N(\delta)$.

Тогда последовательность точек $f(\mathbf{x}_n) \in \mathbf{Y}$, сходится к точке $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{Y}$, т.к. для $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\delta)$, $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}\,(f(\mathbf{x}_n), f(\mathbf{x})) < \varepsilon$ при $n > N(\delta)$, т.к. при этом $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \delta$.

Достаточность. Доказательство достаточности проведём от противного.

Пусть для ***всякой*** последовательности точек $\mathbf{x}_n \in \mathbf{X}$, ***сходящейся*** к точке $\mathbf{x}$, соответствующая ей при отображении f последовательность точек $f(\mathbf{x}_n) \in \mathbf{Y}$, ***сходится*** к точке $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{Y}$, но отображение f не является ***непрерывным*** в точке $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, т.е. ***существует*** такое вещественное число $\varepsilon_0 > 0$, что для ***любого*** δ ***существует*** хотя бы один элемент $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ такой, что $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{z}, \mathbf{x}) < \delta$, но $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}\,(f(\mathbf{z}), f(\mathbf{x})) \geqslant \varepsilon_0$.

Положим $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Выберем последовательность точек $\mathbf{z} = \mathbf{x}_n$, таких, что $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \delta_n$, но $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}\,(f(\mathbf{x}_n), f(\mathbf{x})) \geqslant \varepsilon_0$.

Получившаяся таким образом последовательность точек $\mathbf{x}_n \in \mathbf{X}$, во-первых, сходится к точке $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, т.к. по построению $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}) < \frac{1}{n}$, и, во-вторых, соответствующая последовательность точек $f(\mathbf{x}_n) \in \mathbf{Y}$, не сходится к точке $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{Y}$, т.к. $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}(f(\mathbf{x}_n), f(\mathbf{x})) \geqslant \varepsilon_0$, что противоречит нашим предположениям. $\square$

В случае, когда $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}}) = (\mathbf{Y}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{Y}}) = \mathbb{E}^1$, утверждение 4 означает ***эквивалентность*** двух определений ***непрерывной*** функции одного действительного переменного ***по Коши*** и ***по Гейне - Борелю*** соответственно.

Как было отмечено в § 1, ***метрическая функция*** отображает прямое произведение $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ в множество ***неотрицательных чисел*** $\mathbb{R}^1_+$ и, поэтому, можно говорить о её ***непрерывности***.

Имеет место важная

Лемма 2. *Расстояние* $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *является* ***непрерывным функционалом*** *по обеим своим аргументам* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, *т.е. для любых сходящихся последовательностей её аргументов:* $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ *и* $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}_0$ *при* $n \to \infty$, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) \to \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством четырёхугольника, выбрав в качестве соответствующих точек $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$ и $\mathbf{u} = \mathbf{x}_n$, $\mathbf{v} = \mathbf{y}_n$.

Тогда:

$$|\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n)| \leqslant \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_n) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_n) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty$$

$\square$

Операторные уравнения в метрических пространствах

Многие проблемы в различных разделах математики сводятся к отысканию ***решения*** операторного уравнения:

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \, , \tag{1}$$

где F — ***отображение*** метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_\mathbf{X})$ в другое метрическое пространство $(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\rho}_\mathbf{Y})$, то есть к установлению ***непустоты*** полного прообраза $F^{-1}(\mathbf{y})$ ***известного*** элемента $\mathbf{y}$ и нахождения ***всех*** или ***некоторых*** элементов множества $F^{-1}(\mathbf{y})$.

При решении ***прикладных проблем***, обычно, речь идет о ***приближенном*** нахождении каких-либо ***элементов*** множества $F^{-1}(\mathbf{y})$.

Принцип сжимающих отображений

Очень часто исследование конкретных уравнений типа (1) опирается на ***принцип сжимающих отображений***.

Теорема 2 (***принцип сжимающих отображений***). *Пусть* $\mathbf{A}$ *отображение* ***полного*** *метрического пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho}_\mathbf{X})$ *в* ***себя***.

Пусть кроме того $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$ *выполнено следующее неравенство:*

$$\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{y})) \leqslant \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \, , \tag{2}$$

где число $\mathbf{q}$*:* $0 < \mathbf{q} < 1$ *и* ***не зависит*** *от* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$.

Тогда ***существует единственная*** *точка* $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ *такая, что*

$$\mathbf{A}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} \tag{3}$$

Такая точка $\mathbf{z}$ *называется* ***неподвижной точкой*** *отображения* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_0$ произвольно выбранный элемент $(\mathbf{X},\, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$.

Образуем последовательность $\{\mathbf{x}_n\}_{n=0}^{\infty}$ по следующему правилу:

$$\mathbf{x}_0,\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_0),\ \mathbf{x}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1),\ \dots,\ \mathbf{x}_n = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{n-1}),\ \dots$$

Используя несколько раз неравенство (2), получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_n,\, \mathbf{x}_{n-1}) = {} & \boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_{n-1}),\, \mathbf{A}(\mathbf{x}_{n-2})) \leqslant \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n-1},\, \mathbf{x}_{n-2}) \leqslant \cdots \\ \cdots & \qquad \leqslant \mathbf{q}^{n-1} \cdot \boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_0),\, \mathbf{x}_0) \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть p некоторое натуральное число. Тогда, используя нужное число раз неравенство треугольника и окончательный результат (4), получим:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_n,\, \mathbf{x}_{n+p}) \leqslant {} & \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_n,\, \mathbf{x}_{n+1}) + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n+1},\, \mathbf{x}_{n+2}) + \ldots + \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_{n+p-1},\, \mathbf{x}_{n+p}) \leqslant \\ \leqslant {} & \left(\mathbf{q}^n + \ldots + \mathbf{q}^{n+p-1}\right) \cdot \boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_0),\, \mathbf{x}_0) = \\ = {} & \frac{\mathbf{q}^n - \mathbf{q}^{n+p}}{1 - \mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_0),\, \mathbf{x}_0) \leqslant \frac{\mathbf{q}^n}{1 - \mathbf{q}} \cdot \boldsymbol{\rho}(\mathbf{A}(\mathbf{x}_0),\, \mathbf{x}_0) \end{aligned} \tag{5}$$

Из оценки (5) следует, что наша последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ ***фундаментальна*** в $(\mathbf{X},\, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$ и, следовательно, в силу ***полноты*** $(\mathbf{X},\, \boldsymbol{\rho}_{\mathbf{X}})$, ***имеет предел*** $\mathbf{z} = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{x}_n$.

В силу (2) отображение $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ***непрерывно*** в любой точке $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Перейдя к пределу в соотношении:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{n-1}),$$

получим, что $\mathbf{z}$ ***неподвижная точка*** отображения $\mathbf{A}$.

Единственность неподвижной точки сразу следует из неравенства (2).

Действительно, пусть $\mathbf{w}$ какая либо (отличная от $\mathbf{z}$) ***неподвижная точка*** отображения $\mathbf{A}$.

Тогда:

$$\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{z},\,\mathbf{w}\,)\;=\;\boldsymbol{\rho}\;(\,\mathbf{A}\,(\mathbf{z}),\,\mathbf{w}\,)\;\leqslant\;\mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{z},\,\mathbf{w})\;.$$

Отсюда ***следует***, что $\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{z},\,\mathbf{w})\,=\,0$ и, следовательно $\mathbf{z}\,=\,\mathbf{w}$. □

Неравенство (5) позволяет оценить ***расстояние*** между элементами последовательности $\mathbf{x}_n$ и неподвижной точкой $\mathbf{z}$ для любого n.

Действительно, в пределе при $p\,\to\,\infty$ из оценки (5) следует неравенство:

$$\boldsymbol{\rho}\,(\mathbf{x}_n,\,\mathbf{z})\;\leqslant\;\frac{\mathbf{q}^n}{1\,-\,\mathbf{q}}\cdot\boldsymbol{\rho}\;(\mathbf{A}\,(\mathbf{x}_0),\,\mathbf{x}_0\,) \tag{6}$$

Использованная нами в доказательстве, ***рекуррентно*** образованная последовательность $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ (***итерационная последовательность***), — в конкретных случаях может использоваться не только для ***доказательства*** существования решения того или иного операторного уравнения, но и как источник все более точных (согласно оценке (6)) ***приближений*** к его решению $\mathbf{z}$.

Уравнение (1), рассматриваемое в паре ***произвольных*** метрических пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, далеко не всегда можно преобразовать к виду (3), как, впрочем, вообще говоря, ***не всегда*** возможно сведение уравнения (3) к виду (1).

Однако, в приложениях, обычно, ***преобразование*** (1) в (3) или (3) в (1) оказывается возможным.

Пример 1 — уравнение (3) **в** $\mathbb{E}^1$

Пусть $f(x)$ ***дифференцируемая*** функция, определенная для всех действительных x такая, что:

$$|\, f^{'}(x)\, | \leqslant q < 1, \quad \forall\, x \tag{7}$$

Функцию $f(x)$ можно рассматривать как ***отображение*** полного пространства $\mathbb{E}^1$ в себя.

Утверждение 13. *Это отображение* ***сжимающее.***

Доказательство. Действительно:

$$\boldsymbol{\rho}\,(\, f(x_1),\, f(x_2)\,) = |\, f(x_1) - f(x_2)\,| \leqslant q \cdot |\, x_1 - x_2\,|$$

□

В силу принципа ***сжимающих отображений*** уравнение

$$f(x) = x\ ,$$

имеет единственное решение в $\mathbb{E}^1$.

Пример 2 — система линейных алгебраических уравнений, как операторное уравнение (3) **в пространстве** $\mathbb{R}^n_{\mathbf{max}}$

Рассмотрим ***систему линейных алгебраических уравнений*** вида:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i\,, \quad i = 1, \ldots, n \tag{8}$$

Утверждение 14. *Предположим, что выполнено условие:*

$$\max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \right) \;=\; q \;<\; 1 \tag{9}$$

Тогда система (8) ***имеет единственное*** *решение.*

Доказательство. Справедливость сформулированного утверждения можно установить, используя ***принцип сжатых отображений***.

Уравнение (8) можно интерпретировать, как операторное, вида:

$$\mathbf{x} \;=\; \mathbf{A}\,\mathbf{x}\,,$$

в котором $\mathbf{x}$ элемент n-мерного арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ с метрикой примера 3 из § 1.

Это пространство ***полное*** (см. упражнения к § 3).

Его ***отображение*** в себя, задаваемое правыми частями равенств (8), — ***сжимающее***.

Действительно:

$$\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(1)},\, \mathbf{A}\,\mathbf{x}^{(2)}\right) \;=\; \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} \left| a_{ij} \left(x_j^{(1)} \,-\, x_j^{(2)} \right) \right| \right) \;\leqslant$$

$$\leqslant\; \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \right) \cdot \max_j \left| \, x_j^{(1)} \,-\, x_j^{(2)} \, \right| \;\leqslant\; q \cdot \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}^{(1)},\, \mathbf{x}^{(2)}\right)$$

Последнее неравенство получается в силу (9). □

Пользуясь ***принципом сжатых отображений*** можно исследовать уравнения, неизвестными в которых являются не только числа, но также, например, и ***функции*** или ***наборы функций*** одного или нескольких переменных.

Пример 3 — задача Коши для дифференциального уравнения, как уравнение вида (3)

В теории дифференциальных уравнений, в частности, изучается ***задача Коши*** для дифференциального уравнения:

$$y' = f\,(\,x, y\,(x)\,)\,, \quad y\,(x_0) = y_0 \tag{10}$$

Здесь $y\,(x)$ ***неизвестная функция***, которую нужно определить из условий (10), а $f\,(\,x,\,y)$ — ***заданная*** функция двух переменных, обычно считающаяся ***непрерывной*** в некотором (замкнутом) ***прямоугольнике*** евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$ с центром в точке $(\,x_0,\,y_0\,)$.

Ограничимся рассмотрением случая, когда функция $f\,(\,x,\,y)$ ***непрерывна*** в полосе:

$$\mathbf{D} = \{\,\mathbf{a} \leqslant x \leqslant \mathbf{b}, \quad -\infty < y < +\infty\,\}\,.$$

Точка $x_0 \in (\mathbf{a},\,\mathbf{b})$ и для точек полосы $\mathbf{D}$ выполнено условие:

$$|\,f\,(\,x,\,y_1) - f\,(\,x,\,y_2)\,| \leqslant \mathbf{K} \cdot |\,y_1 - y_2\,|\,, \tag{11}$$

где постоянная $\mathbf{K}$ не зависит от $x,\,y_1,\,y_2$.

Условие (11) называется ***условием Липшица***.

Для его выполнения ***достаточно***, чтобы ***существовала*** частная производная $f'_y\,(x,\,y)$ и выполнялось неравенство:

$$\sup_{\mathbf{D}}\,|\,f'_y\,(x,\,y)\,| \leqslant \mathbf{K}$$

Рассмотрим ***отображение*** пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ в себя, задаваемое формулой:

$$z\,(x) \;=\; y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f\,(x,\, y\,(x))\, dx, \text{ или в операторном виде: } \mathbf{z} \;=\; \mathbf{A}\,\mathbf{y}\ , \quad (12)$$

где x_0 фиксированная точка отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, а точка $x \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Непосредственно устанавливается, что оператор $\mathbf{A}$ отображает пространство $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в себя и ***неподвижная точка*** этого отображения является решением задачи Коши (10) на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Вообще говоря, отображение (12) ***не является сжимающим*** в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ при ***произвольных*** значениях чисел $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Однако, оно ***будет сжимающим***, если ***длина*** отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ достаточно ***мала***.

Действительно, используя неравенство (11) и известные свойства интеграла, имеем:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{A}\,\mathbf{y}_1,\, \mathbf{A}\,\mathbf{y}_2) \;&=\; \max_{\mathbf{a} \leqslant x \leqslant \mathbf{b}} \left| \int\limits_{x_0}^{x} [f\,(x,\, y_1\,(x)) \,-\, f\,(x,\, y_2\,(x))]\; dx \right| \leqslant \\
&\leqslant\; K \cdot |\,\mathbf{b} - \mathbf{a}\,| \cdot \max_{\mathbf{a} \leqslant x \leqslant \mathbf{b}} |\,y_1\,(x) \,-\, y_2\,(x)\,| \;= \\
&=\; K \cdot |\,\mathbf{b} - \mathbf{a}\,| \cdot \boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{y}_1,\, \mathbf{y}_2)
\end{aligned}$$

Таким образом, если:

$$|\,\mathbf{b} \,-\, \mathbf{a}\,| \;<\; 1/K\ ,$$

отображение (12) ***сжимающее*** и задача Коши (10) ***имеет*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***единственное*** решение.

Упражнения и задачи к параграфу 5.

1. ***Непрерывны*** ли на ***пространстве*** $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ следующие ***функционалы***:

а). $f\,(\mathbf{x}) = x\,(\mathbf{a})$

б). $f\,(\mathbf{x}) = \max\limits_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} |x\,(t)|$

в). $f\,(\mathbf{x}) = \max\limits_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} x\,(t)$

г). $f\,(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x\,(t)\,dt$

д). $f\,(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x\,(t) \text{ принимает хотя бы одно отрицательное значение} \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x\,(t) \equiv 0 \\ 1, & \text{если } x\,(t) \geqslant 0, \text{ причём } x\,(t) \not\equiv 0 \end{cases}$?

2. ***Непрерывны*** ли на ***пространстве*** $\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ следующие ***функционалы***:

а). $f\,(\mathbf{x}) = x\,(\mathbf{a})$

б). $f\,(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \sqrt{1 + [\,x'(t)\,]^2}\,dt$?

3. ***Непрерывны*** ли ***функции*** $f\,(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{A}\,) = \inf\limits_{\mathbf{y}\,\in\,\mathbf{A}} \boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}\,)$ и $g\,(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{A}\,) = \sup\limits_{\mathbf{y}\,\in\,\mathbf{A}} \boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}\,)$, где $\mathbf{A}$ — множество в ***метрическом*** пространстве $\mathbf{X}$.

4. Проверить, что ***функционал*** $f\,(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\frac{1}{2}} x\,(t)\,dt - \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} x\,(t)\,dt$ ***непрерывен*** на ***пространстве*** $\mathbb{C}\,[\mathbf{0},\mathbf{1}]$.

Показать, что точная ***верхняя грань*** по всем элементам ***единичного шара*** этого пространства от указанной функции ***не достигается*** ни на одном элементе этого шара.

5. ***Отображение*** $\mathbf{F}$ на полупрямой $\mathbf{X}:\ 0 \leqslant x < +\infty$ переводит ***точку*** x в ***точку*** $x + 1/x$.

Будет ли указанное отображение ***сжимающим*** в метрическом ***пространстве*** $\mathbf{X}$ со стандартной ***метрикой*** $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x},\, \mathbf{y}) \;=\; |\,\mathbf{x}-\mathbf{y}\,|$?

Имеет ли указанное отображение ***неподвижную*** точку в $\mathbf{X}$?

6. Рассмотрим систему (8), как ***операторное уравнение*** в ***евклидовом пространстве*** $\mathbb{E}^n$ (с метрикой (1) из § 1 главы I).

Показать, что оператор $\mathbf{A}$, задаваемый правой частью (8), будет ***сжимающим*** в этом ***пространстве***, если выполнено условие:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \;<\; 1$$

7. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ операторное уравнение — ***интегральное уравнение Фредгольма***:

$$y\,(x) \;=\; \lambda \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(x,\, s)\, y\,(s)\, ds \;+\; f\,(x)$$

Пусть $\mathcal{K}\,(x,\, s)$ ***непрерывная*** функция ***на прямом произведении*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Показать, что при выполнении условия:

$$|\,\mathbf{b} \,-\, \mathbf{a}\,| \cdot |\lambda| \cdot \max_{\mathbf{a} \leqslant x,\, s \leqslant \mathbf{b}} |\,\mathcal{K}\,(x,\, s)\,| \;<\; 1\,,$$

такое интегральное уравнение ***имеет единственное*** решение в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

1.6 Компактные метрические пространства. Компакты. Непрерывные функционалы на компактах

Компактные метрические пространства

Определение 26. *Метрическое пространство* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***компактным****, если* ***любая*** *бесконечная последовательность его точек содержит* ***фундаментальную подпоследовательность****.*

Определение 27. *Метрическое пространство* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* ***компактом****, если* ***любая*** *бесконечная последовательность его точек содержит* ***сходящуюся подпоследовательность****.*

Из этих определений следует:

1°. Любое ***полное компактное*** пространство — ***компакт***.

2°. Так как каждое подмножество метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ само является ***метрическим пространством***, то можно говорить о ***компактных*** подмножествах данного метрического пространства и о его подмножествах, которые являются ***компактами***.

В частности, любое ***замкнутое компактное*** подмножество полного метрического пространства — ***компакт***.

Пример 1. Метрическое пространство $\mathbf{X}$, состоящее из ***конечного*** числа точек — ***компакт***.

Пример 2. Отрезок $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, рассматриваемый как подпространство в $\mathbb{E}^1$, — ***компактное*** множество и ***компакт***.

Пример 3. Интервал $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ***компактное*** множество (***компактное*** метрическое пространство), но не ***компакт***.

Утверждения, содержащиеся в примерах 2 и 3 следуют из известной теоремы математического анализа о том, что любая ***ограниченная*** последовательность действительных чисел ***содержит сходящуюся*** подпоследовательность.

Пример 4. Пространство $\mathbb{E}^n$ ***не компактно*** при любом $n = 1, 2, \ldots$.

Действительно, множество всевозможных n-ок ***натуральных чисел*** $(N_1, N_2, \ldots, N_n)$ принадлежит $\mathbb{E}^n$.

Это множество бесконечно, но ***не содержит*** никакой ***фундаментальной*** подпоследовательности.

Компактность ограниченных множеств в $\mathbb{E}^n$

Пример 5. Множество в $\mathbb{E}^n$, описываемое неравенствами:

$$\prod(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{ a_i \leqslant x_i \leqslant b_i \}, \quad i = 1, 2, \ldots, n ,$$

называется ***параллелепипедом*** и является ***компактом***.

Действительно, пусть ***последовательность*** элементов $\mathbf{x^{(k)}} \in \prod(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $k = 1, 2, \ldots$.

Тогда ***числовая*** последовательность ***первых*** координат этих элементов — $\left\{ x_1^{(k)} \right\}$, содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность $\left\{ x_1^{(k_1)} \right\}$.

Числовая последовательность ***вторых*** координат, относящихся к элементам, ***выбранным*** на первом шаге, — $\left\{ x_2^{(k_1)} \right\}$, — содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность $\left\{ x_2^{(k_2)} \right\}$ и так далее.

Последовательность n-ых координат, относящихся к элементам, ***выбранным*** на $(n-1)$-ом шаге, — $\left\{ x_n^{(k_{n-1})} \right\}$, — содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность $\left\{ x_n^{(k_n)} \right\}$.

Полученная в результате указанного выше процесса ***последовательность*** элементов $\left\{\mathbf{x}^{(\mathbf{k_n})}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset \prod(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$ и ***сходится*** в $\mathbb{E}^n$.

В силу ***замкнутости*** множества $\prod(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$ в $\mathbb{E}^n$, ее ***предел*** принадлежит $\prod(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$, то есть рассматриваемое нами множество — ***компакт***.

Пользуясь результатом этого примера, легко доказать, что ***компактом*** будет любое ***замкнутое ограниченное*** множество в $\mathbb{E}^n$ (то есть множество $\mathbf{n}$-ок из $\mathbb{E}^n$, все ***компоненты*** которых ***ограничены*** по модулю).

Для доказательства этого достаточно заметить, что такое множество содержится в некотором компакте $\prod(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$ и любое ***замкнутое*** подмножество ***компакта*** само является ***компактом***.

Некомпактность единичного шара в ℓ_2

Пример 6. Рассмотрим ***замкнутый*** шар $\mathbf{S}\,(\mathbb{O},\, 1)$ в пространстве ℓ_2 с центром в точке $\mathbb{O} = (0, 0,\, \ldots\, , 0,\, \ldots)$ и радиуса 1, то есть множество ***последовательностей*** действительных чисел таких, что:

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \leqslant 1$$

Множество $\mathbf{S}\,(\mathbb{O},\, 1)$ не является ***компактным*** подмножеством в ℓ_2 (и тем более не является ***компактом***).

Действительно, последовательность

$$\mathbf{e}^{(n)} = (0,\, \ldots\, , 0, 1, 0,\, \ldots), \quad \text{где } 1 \text{ стоит на } n\text{-ом месте,}$$

не содержит ***никакой*** фундаментальной подпоследовательности, так как $\boldsymbol{\rho}\,(\,\mathbf{e}^{(m)},\,\mathbf{e}^{(n)}\,) \;=\; \sqrt{2}\,$, если $m \neq n$.

Следовательно, рассматриваемое множество ***не компактно***.

Не компактно даже множество элементов из $\ell_{\mathbf{2}}$, удовлетворяющих условию: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2 \;=\; 1$.

Свойства непрерывных функционалов на компактах

Непрерывные функционалы, заданные ***на компактах***, сохраняют многие существенные свойства ***непрерывных*** функций, заданных ***на отрезке*** числовой оси.

В качестве иллюстрации сказанного, приведем следующие три утверждения.

Утверждение 15. ***Непрерывный*** *функционал* $f\,(\mathbf{x})$, *заданный на* ***компакте*** $\mathbf{Q}$, ***ограничен***.

Доказательство. Предположим противное.

Тогда $\forall\, n \;=\; 1, 2, \,\ldots\;\; \exists\, \mathbf{x_n} \,\in\, \mathbf{Q}$ такой, что $|\, f\,(\mathbf{x_n})\,| \;>\; n$.

По предположению, последовательность $\mathbf{x_n}$ содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность $\mathbf{x_{n_k}}$, $n_k \;\to\; \infty$ при $k \;\to\; \infty$.

Пусть $\lim\limits_{k\,\to\,\infty} \mathbf{x_{n_k}} \;=\; \mathbf{x}\,,\;\; \mathbf{x} \,\in\, \mathbf{Q}$.

В силу ***непрерывности*** $f\,(\mathbf{x})$ на ***компакте*** $\mathbf{Q}$: $\lim\limits_{k\,\to\,\infty} \mathbf{f}\,(\mathbf{x_{n_k}}) \;=\; \mathbf{f}\,(\mathbf{x})$, но, по построению, $|\, f\,(\mathbf{x_{n_k}})\,| \;>\; n_k$ и, следовательно, последовательность $\mathbf{f}\,(\mathbf{x_{n_k}})$ ***не сходится***.

Получили противоречие. $\square$

Теорема 3 (***К. Вейерштрасс*). *Непрерывный*** *функционал* $f(\mathbf{x})$, *заданный на* ***компакте*** $\mathbf{Q}$, ***достигает*** *на компакте* $\mathbf{Q}$ *своей* ***верхней грани***.

Доказательство. В силу (44), функционал $f(\mathbf{x})$ ограничен сверху на компакте $\mathbf{Q}$.

Пусть $\mathbf{M} = \sup\limits_{\mathbf{Q}} f(\mathbf{x})$.

По определению ***верхней грани***, $\forall\, n = 1, 2, \ldots,$ найдется такая точка $\mathbf{x_n}$ компакта $\mathbf{Q}$, что

$$\mathbf{M} \geqslant \mathbf{f}(\mathbf{x_n}) \geqslant \mathbf{M} - \mathbf{1/n} \tag{1}$$

В силу (1) — $\lim\limits_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x_n}) = \mathbf{M}$.

С другой стороны, последовательность $\{\mathbf{x_n}\}$, в силу ***компактности*** $\mathbf{Q}$, содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность — $\{\mathbf{x_{n_k}}\}$.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{x_{n_k}} = \mathbf{z}$.

Тогда, в силу ***непрерывности*** f и (1): $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x_{n_k}}) = \mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{M}$.

Таким образом, в точке $\mathbf{z} \in \mathbf{Q}$ ***достигается*** верхняя грань f — $\mathbf{M}$ ***на компакте*** $\mathbf{Q}$. □

Рассуждая аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы, можно доказать, что ***непрерывный на компакте функционал*** обязательно ***достигает*** своей ***нижней грани***.

Утверждение 16. ***Непрерывный*** *функционал* $f(\mathbf{x})$, *заданный на* ***компакте*** $\mathbf{Q}$, ***равномерно непрерывен*** *на этом* ***компакте***, *т.е.* $\forall\,\varepsilon > 0\ \ \exists\,\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что*

$$|\, f(\mathbf{x}_1) - f(\mathbf{x}_2)\,| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) < \delta(\varepsilon), \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{Q}$$

Доказательство. Пусть это не так.

Тогда $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, такое, что $\forall\, \delta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\exists\, \mathbf{x}_1^{(n)}, \mathbf{x}_2^{(n)}$ такие, что $\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_1^{(n)}, \mathbf{x}_2^{(n)}\right) < \frac{1}{n}$, но

$$\left| f\left(\mathbf{x}_1^{(n)}\right) - f\left(\mathbf{x}_2^{(n)}\right) \right| \geqslant \varepsilon_0$$

Ввиду того, что $\mathbf{Q}$ ***компакт***, из последовательности $\left\{ \mathbf{x}_1^{(n)} \right\}$ можно выбрать ***сходящуюся*** подпоследовательность.

Пусть это будет подпоследовательность $\left\{ \mathbf{x}_1^{(n_k)} \right\}$ и пусть эта подпоследовательность ***сходится*** при $n_k \to \infty$ к ***точке*** $\mathbf{x}_0$ компакта $\mathbf{Q}$.

Тогда ***подпоследовательность*** $\left\{ \mathbf{x}_2^{(n_k)} \right\}$ последовательности $\left\{ \mathbf{x}_2^{(n)} \right\}$ будет также при $n_k \to \infty$ ***сходиться*** к ***точке*** $\mathbf{x}_0$, т.к. в силу неравенства треугольника и определения последовательностей $\left\{ \mathbf{x}_1^{(n)} \right\}$, $\left\{ \mathbf{x}_2^{(n)} \right\}$

$$\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_2^{(n_k)}, \mathbf{x}_0\right) \leqslant \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_2^{(n_k)}, \mathbf{x}_1^{(n_k)}\right) + \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_1^{(n_k)}, \mathbf{x}_0\right) < \frac{1}{n_k} + \boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{x}_1^{(n_k)}, \mathbf{x}_0\right) \to 0$$

при $n_k \to \infty$.

В силу ***непрерывности*** функционала f в ***точке*** $\mathbf{x}_0$ обе последовательности $\left\{ f\left(\mathbf{x}_1^{(n_k)}\right) \right\}$ и $\left\{ f\left(\mathbf{x}_2^{(n_k)}\right) \right\}$ будут ***сходиться*** при $n_k \to \infty$ к одному и тому же ***значению*** $f(x_0)$.

Но тогда обязательно ***найдётся*** такое $N(\varepsilon_0)$, что при $n_k > N(\varepsilon_0)$ будет ***выполнено*** неравенство

$$\left| f\left(\mathbf{x}_1^{(n_k)}\right) - f\left(\mathbf{x}_2^{(n_k)}\right) \right| < \varepsilon_0 ,$$

которое ***противоречит*** нашему предположению.

И тем самым утверждение доказано. □

Критерий компактности множества в метрическом пространстве

Существует ***критерий*** (необходимое и достаточное условие) компактности метрического пространства $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$, полезный в различных приложениях.

Для того, чтобы его сформулировать, введем следующее

Определение 28. ***Подмножество*** $\boldsymbol{\Sigma}$ *метрического пространства* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *называется* $\boldsymbol{\varepsilon}$***-сетью*** *(для множества* $\mathbf{X}$*), если* $\forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ***замкнутый*** *шар* $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ *содержит хотя бы одну* ***точку*** *из* $\boldsymbol{\Sigma}$, *другими словами каждая точка* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *отстоит на расстоянии* ***не большем*** ε *от некоторой точки* $\mathbf{z}$ $\boldsymbol{\varepsilon}$***-сети*** $\boldsymbol{\Sigma}$.

Теорема 4 (***критерий компактности Хаусдорфа)***. *Для того, чтобы метрическое пространство* $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ *было* ***компактным****,* ***необходимо*** *и* ***достаточно****, чтобы в нем, для любого* $\varepsilon > 0$, *существовала* ***конечная*** *(состоящая из* ***конечного числа*** *точек)* $\boldsymbol{\varepsilon}$***-сеть****.*

Доказательство. ***Необходимость****.*

Предположим, что для какого-то $\varepsilon > 0$, для определенности $\varepsilon = 1$, в ***компактном*** пространстве $\mathbf{X}$ не существует конечной **1**-***сети***.

Построим в $\mathbf{X}$ последовательность, не содержащую никакой ***фундаментальной*** подпоследовательности.

В качестве начальной точки такой последовательности можно взять любую точку $\mathbf{X}$. Пусть это будет точка $\mathbf{x}_0$.

Так как в $\mathbf{X}$ не существует **1**-***сети***, состоящей из ***одной*** точки, найдется точка $\mathbf{x}_1 \in \mathbf{X}$ такая, что $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \geqslant 1$.

Точки $\mathbf{x}_0$ и $\mathbf{x}_1$, по предположению, также не образуют $\mathbf{1}$-***сеть***.

Поэтому найдется точка $\mathbf{x}_2$ такая, что $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2) \geqslant 1$, $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \geqslant 1$.

Этот процесс можно продолжить.

В результате получим последовательность точек $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ из $\mathbf{X}$, которая, по построению, не будет ***фундаментальной***, так как $\forall m$ и $n > m - \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_n) \geqslant 1$.

Достаточность.

Пусть в $\mathbf{X}$ существует ***конечная*** $\boldsymbol{\varepsilon}$-***сеть*** при любом $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим произвольную последовательность $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n, \ldots$ точек из $\mathbf{X}$.

Покажем, что она содержит ***фундаментальную*** подпоследовательность.

Обозначим $\boldsymbol{\Sigma}_k = \{\mathbf{y}_1^{(k)}, \mathbf{y}_2^{(k)}, \ldots \mathbf{y}_{m_k}^{(k)}\}$ ***конечную*** $\mathbf{1/k}$-***сеть*** в $\mathbf{X}$, где $k = 1, 2, \ldots$.

Положим $k = 1$.

Объединение ***замкнутых*** шаров радиуса 1 с центрами в точках $\mathbf{y}_1^{(1)}, \mathbf{y}_2^{(1)}, \ldots, \mathbf{y}_{m_1}^{(1)}$ покрывает все $\mathbf{X}$.

Поэтому точки рассматриваемой нами подпоследовательности $\{\mathbf{x}_n\}$ как-то расположены в этой совокупности шаров.

Так как шаров ***конечное*** число, а последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ ***бесконечна***, то, по крайней мере в одном из шаров, находится ***бесконечное*** число членов нашей последовательности.

Выделим один из таких шаров. Пусть точка $\mathbf{x}_{n_1}$ находится в этом выделенном шаре.

Этим завершается первый шаг процесса.

Положим теперь $k = 2$.

Пусть $\mathbf{y}_1^{(2)}, \mathbf{y}_2^{(2)}, \ldots, \mathbf{y}_{m_2}^{(2)}$ ***конечная*** $1/2$-***сеть*** в $\mathbf{X}$.

Аналогично выше сказанному, какой-либо из шаров радиуса $1/2$ с центром в одной из этих точек содержит ***бесконечно*** много точек из $\{\mathbf{x}_n\}$, попавших в шар, который был выделен на первом шаге процесса.

Выделим один из этих шаров второго шага процесса.

В выделенном шаре содержится ***бесконечное*** множество точек $\{\mathbf{x}_n\}$.

Поэтому найдется номер $n_2 > n_1$ такой, что точка $\mathbf{x}_{n_2}$ принадлежит этому шару второго выделения.

По построению $\mathbf{x}_{n_2}$, принадлежит также шару, выделенному на первом шаге процесса.

Полагая последовательно $k = 3, 4, \ldots$, получим подпоследовательность $\{\mathbf{x}_{n_k}\}$ последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$.

Эта подпоследовательность ***фундаментальна***, так как члены этой последовательности с номерами $n_k, n_{k+1}, \ldots$, по построению, принадлежат шару радиуса $1/k$ при $k = 1, 2, \ldots$. $\square$

Следствие 1. *Всякое **компактное** множество* $\mathbf{Q}$ *метрического пространства* $\mathbf{X}$ ***ограничено***.

Доказательство. Пусть $\mathbf{\Sigma_1} \overset{def}{=} \{\mathbf{z}_j\}_{j=1}^{n}$ есть $\mathbf{1}$-сеть для множества $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{x}_0$ фиксированный элемент пространства $\mathbf{X}$.

Пусть

$$d = \max_j \boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_j).$$

Тогда для ***всякого*** элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{Q}$ имеем:

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) \leqslant 1 + d\,,$$

что и означает ограниченность множества $\mathbf{Q}$ в пространстве $\mathbf{X}$. $\square$

Компактные множества в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Для изучения компактных множеств в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ нам понадобится два новых понятия.

Определение 29. ***Множество*** $\mathbf{Q}$ *функций* $\{\varphi(t)\}$ *в пространстве* $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *называется* ***равномерно ограниченным****, если* $\exists\,\mathbf{M}$ *такое, что для* ***любой*** *функции* $\varphi(t) \in \mathbf{Q}$

$$|\,\varphi(t)\,| \leqslant \mathbf{M}, \quad \forall\, t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \tag{2}$$

Определение 30. ***Множество*** $\mathbf{Q}$ *функций* $\{\varphi(t)\}$ *в пространстве* $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *называется* ***равностепенно непрерывным****, если* $\forall\,\varepsilon > 0$ $\exists\,\delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что для* ***любой*** *функции* $\varphi(t) \in \mathbf{Q}$

$$|\,\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\,| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |\,t_1 - t_2\,| < \delta(\varepsilon), \quad t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \tag{3}$$

Утверждение 17. ***Любое конечное*** *множество функций* $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^{n}$ *из пространства* $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***равностепенно непрерывно****.*

Доказательство. Т.к. каждая из функций множества $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^{n}$ непрерывна на ***компакте*** — отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то, она также и ***равномерно непрерывна*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (см. утверждение 16 в этом параграфе), т.е. $\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta_j(\varepsilon) > 0$

$j = 1, 2, \ldots, n$ такие, что для ***каждой*** функции $\varphi_j(t)$:

$$|\varphi_j(t_1) - \varphi_j(t_2)| < \varepsilon, \text{ если } |t_1 - t_2| < \delta_j(\varepsilon),\ t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \qquad (4)$$

Т.к. множество рассматриваемых функций ***конечно***, то мы можем выбрать среди чисел $\delta_j(\varepsilon)$ наименьшее: $\delta(\varepsilon) \overset{def}{=} \min\limits_j \delta_j(\varepsilon)$.

Выбранное выше число $\delta(\varepsilon) > 0$ и, если только $|t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon)$, $t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то выполнены ***все*** неравенства (4), что и означает ***равностепенную непрерывность*** функций конечного множества $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$.

$\square$

Критерий компактности в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ содержит

Теорема 5 (***Ч. Арцела).*** *Для того, чтобы множество* $\mathbf{Q}$ *функций* $\{\varphi(t)\}$ *в пространстве* $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *было* ***компактно****,* ***необходимо*** *и* ***достаточно****, чтобы*

1° . ***Множество*** $\mathbf{Q}$ *было* ***равномерно ограниченным*** *в пространстве* $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

2° . ***Множество*** $\mathbf{Q}$ *было* ***равностепенно непрерывным*** *в пространстве* $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Доказательство. ***Необходимость.*** Пусть множество $\mathbf{Q}$ функций $\{\varphi(t)\}$ компактно в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Тогда ***равномерная ограниченность*** всех функций $\varphi(t)$ множества $\mathbf{Q}$ вытекает из следствия 1 из теоремы Хаусдорфа.

Докажем ***равностепенную непрерывность*** всех функций $\varphi(t)$ множества $\mathbf{Q}$.

Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$.

Согласно ***критерию*** компактности Хаусдорфа, для всякого $\varepsilon > 0$, $\exists$ ***конечная*** (состоящая из ***конечного числа*** $N(\varepsilon)$ точек) $\mathbf{z}_j \stackrel{def}{=} \psi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, ***ε-сеть*** $\boldsymbol{\Sigma}_{N(\varepsilon)} \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{z}_j = \psi_j(t) \}_{j=1}^{n}$ для множества $\mathbf{Q}$, т.е. для всякой точки $\mathbf{x} \stackrel{def}{=} \varphi(t)$ множества $\mathbf{Q}$ всякий ***замкнутый*** шар $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \varepsilon/3)$ содержит хотя бы одну ***точку*** $\mathbf{z}_{j_0} = \psi_{j_0}(t)$ из $\boldsymbol{\Sigma}_{N(\varepsilon)}$.

Пусть $\delta(\varepsilon) > 0$ такое число, существующее в силу утверждения 17, что:

$$
\begin{aligned}
&|\psi_j(t_1) - \psi_j(t_2)| < \varepsilon/3, \\
&\qquad \text{если} \quad |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon), \quad t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] .
\end{aligned}
$$

Тогда для произвольной функции $\varphi(t)$ множества $\mathbf{Q}$, согласно изложенному, найдётся хотя бы одна функция $\psi_{j_0}(t)$ из $\boldsymbol{\Sigma}_{N(\varepsilon)}$, такая, что:

$$
|\varphi(t) - \psi_{j_0}(t)| < \varepsilon/3, \quad \text{если} \quad t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] .
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
&|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < |\varphi(t_1) - \psi_{j_0}(t_1)| + |\psi_{j_0}(t_1) - \psi_{j_0}(t_2)| + |\psi_{j_0}(t_2) - \varphi(t_2)| < \varepsilon, \\
&\text{если} \quad |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon), \quad t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] ,
\end{aligned}
$$

т.к. ***каждое*** из трёх слагаемых в "средней" части рассматриваемого неравенства не превосходит $\varepsilon/3$, что, в итоге, и означает ***равностепенную непрерывность*** всех функций $\{\varphi(t)\}$ множества $\mathbf{Q}$.

Достаточность. Пусть для множества $\mathbf{Q}$ функций $\{\varphi(t)\}$ пространства $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ выполнены условия ***равномерной ограниченности*** (2) и ***равностепенной непрерывности*** (3).

В силу (3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для ***каждой*** функции $\varphi(t) \in \mathbf{Q}$:

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon), \quad t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \quad (3)$$

Возьмём натуральное число N такое, чтобы $h = \frac{b-a}{N}$ было ***меньше*** $\delta(\varepsilon)$.

Разобьем отрезок $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ на подотрезки

$$\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right], \quad \mathbf{t}^{(\mathbf{j})} = \mathbf{a} + jh, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N, \ \textit{\textbf{длины}}\ h\ .$$

Тогда в силу (3)

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |t_1 - t_2| \leqslant h, \quad t_1, t_2 \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

и, в частности, для любых точек t_1, t_2, принадлежащих одному и тому же частичному отрезку $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right], \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Каждой функции $\varphi(t)$ множества $\mathbf{Q}$ поставим в соответствие ***непрерывную*** на всём отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функцию $\psi_N(t)$ таким образом, чтобы были выполнены два условия:

$\mathbf{1}^\circ$.

$$\psi_N\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) = \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N\ .$$

$\mathbf{2}^\circ$. На ***каждом*** из отрезков $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$ функция $\psi_N(t)$ ***линейная***.

В силу условий $\mathbf{1}^\circ$ – $\mathbf{2}^\circ$ функция $\psi_N(t)$ является "ломаной" , состоящей из N звеньев, "вписанной" в график ***непрерывной*** на всём отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функции $\varphi(t)$ и, поэтому, ***однозначно*** определяется $(N + 1)$ -мерным вектором $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_{N+1}$ значений функции $\varphi(t)$ в точках

$\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, N$, деления отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$:

$$\vec{\boldsymbol{\varphi}}_{N+1} = \left(\varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{0})}\right), \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{1})}\right), \ldots, \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{N-1})}\right), \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{N})}\right) \right), \mathbf{t}^{(\mathbf{0})} = \mathbf{a}, \mathbf{t}^{(\mathbf{N})} = \mathbf{b} \tag{5}$$

Обозначим $\mathbf{\Phi}_{N+1}$ множество всех векторов $\{\vec{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{N+1}}\}$.

Если на границах частичного отрезка $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$ для функции $\varphi(t)$ выполнено неравенство:

$$\varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) \leqslant \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right),$$

то, в силу ***линейности*** функции $\psi_N(t)$ на этом отрезке и условия $\mathbf{1}^\circ$, для всех точек отрезка $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$ будет справедливо неравенство:

$$\varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) \leqslant \psi_N(t) \leqslant \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right),$$

откуда, для всех точек t отрезка $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$, следует неравенство:

$$-\varepsilon < \varphi(t) - \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right) \leqslant \varphi(t) - \psi_N(t) \leqslant \varphi(t) - \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) < \varepsilon.$$

Если же на границах частичного отрезка $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$ для функции $\varphi(t)$ выполнено неравенство:

$$\varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) \geqslant \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right),$$

то, в силу ***линейности*** функции $\psi_N(t)$ на этом отрезке и условия $\mathbf{1}^\circ$, для всех точек отрезка $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$ будет справедливо неравенство:

$$\varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) \geqslant \psi_N(t) \geqslant \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right),$$

откуда, для всех точек t отрезка $\left[\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right]$, следует неравенство:

$$-\varepsilon < \varphi(t) - \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j})}\right) \leqslant \varphi(t) - \psi_N(t) \leqslant \varphi(t) - \varphi\left(\mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})}\right) < \varepsilon,$$

т.е. при ***любом*** поведении функции $\varphi(t)$ на каждом из частичных отрезков $\left[\, \mathbf{t}^{(\mathbf{j})},\, \mathbf{t}^{(\mathbf{j+1})} \,\right]$ сразу для ***всех*** точек отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ будет выполнено неравенство:

$$|\,\varphi(t) - \psi_N(t)\,| < \varepsilon\,,$$

которое выражает тот факт, что

$$\boldsymbol{\rho}\,(\,\boldsymbol{\varphi},\, \boldsymbol{\psi}_N\,) < \varepsilon$$

в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

А это означает, что ***множество*** $\boldsymbol{\Sigma}_N \overset{def}{=} \{\, \boldsymbol{\psi}_N \,\}$ есть ***ε-сеть*** для множества $\mathbf{Q}$.

Покажем, что множество $\boldsymbol{\Sigma}_N$ ***компактно*** в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Действительно, множество линейных функций $\boldsymbol{\Sigma}_N$ ***взаимнооднозначно определяется*** вектором $\vec{\boldsymbol{\varphi}}_{N+1}$ (5) из линейного пространства $\mathbb{R}^{N+1}$, которое с метрикой

$$\boldsymbol{\rho}\,\left(\vec{\boldsymbol{\varphi}}^{(1)}_{N+1},\, \vec{\boldsymbol{\varphi}}^{(2)}_{N+1}\right) \overset{def}{=} \max_{0 \leqslant j \leqslant N} \left|\, \varphi^{(1)}_j - \varphi^{(2)}_j \,\right|$$

является ***метрическим пространством*** $\mathbb{R}^{N+1}_{\mathbf{max}}$ (см. пример 3 параграфа 1).

Это ***полное*** (см. упражнение 5 к параграфу 3) пространство $(N+1)$-***мерно***.

В силу ***равномерной ограниченности*** множества $\mathbf{Q}$ константой $\mathbf{K}$, получаем

$$|\,\psi_N(t)\,| \leqslant |\,\varphi(t)\,| + |\,\varphi(t) - \psi_N(t)\,| < \mathbf{K} + \varepsilon\,,$$

что означает ***ограниченность*** множества $\boldsymbol{\Sigma}_N$ константой $\mathbf{K} + \varepsilon$ в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Но, в силу ***линейности*** функций $\psi_N(t)$ на каждом из интервалов разбиения отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, очевидно, следующее равенство:

$$\boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]}\left(\boldsymbol{\psi}_N^{(1)}, \boldsymbol{\psi}_N^{(2)}\right) = \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}}\left|\psi_N^{(1)}(t) - \psi_N^{(2)}(t)\right| =$$
$$= \max_{0\leqslant j\leqslant N}\left|\psi_N^{(1)}(\mathbf{t_j}) - \psi_N^{(2)}(\mathbf{t_j})\right| = \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{R}^{N+1}_{\mathbf{max}}}(\vec{\boldsymbol{\varphi}}_1, \vec{\boldsymbol{\varphi}}_2),$$

где $\mathbf{t}^{(\mathbf{j})} = \mathbf{a} + \frac{j(b-a)}{N}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N$, означающее ***изометрию*** метрических пространств

$$\left(\boldsymbol{\Sigma}_N,\, \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]}\right) \qquad \boldsymbol{\textit{и}} \qquad \left(\boldsymbol{\Phi}_{N+1},\, \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{R}^{N+1}_{\mathbf{max}}}\right),$$

в силу которой множество $\boldsymbol{\Phi}_{N+1}$ ***ограничено*** в ***конечномерном*** пространстве $\mathbb{R}^{n+1}_{\mathbf{max}}$, и, следовательно, ***компактно***.

Но, тогда, в силу указанной выше ***изометрии*** метрических пространств $\left(\boldsymbol{\Sigma}_N, \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]}\right)$ ***и*** $\left(\boldsymbol{\Phi}_{N+1}, \boldsymbol{\rho}_{\mathbb{R}^{N+1}_{\mathbf{max}}}\right)$ из компактности второго следует компактность ***первого***.

Таким образом множество $\boldsymbol{\Sigma}_N$ является ***компактной*** $\boldsymbol{\varepsilon}$ ***-сетью*** для множества $\mathbf{Q}$ в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Теперь проведём рассуждение, ***завершающее*** доказательство ***компактности*** множества $\mathbf{Q}$.

Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано.

Тогда найдется номер N такой, что $\boldsymbol{\Sigma}_N$ образует $\boldsymbol{\varepsilon/2}$***-сеть*** для множества $\mathbf{Q}$.

Кроме того, из ***компактности*** множества $\boldsymbol{\Sigma}_N$ следует, что для него существует ***конечная*** $\boldsymbol{\varepsilon/2}$***-сеть***.

Очевидно, эта самая ***конечная*** $\boldsymbol{\varepsilon/2}$***-сеть*** для множества $\boldsymbol{\Sigma}_N$, будет ***конечной*** $\boldsymbol{\varepsilon}$***-сетью*** для самого множества $\mathbf{Q}$.

Отсюда следует ***компактность*** множества $\mathbf{Q}$. $\square$

Пример. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***подмножество*** $\mathbf{Q}$, состоящее из функций $\varphi\,(t)$, удовлетворяющих двум ***дополнительным*** условиям:

$$
\begin{gathered}
|\,\varphi\,(a)\,| \leqslant \mathbf{M} \\
|\,\varphi\,(t_1) - \varphi\,(t_2)\,| \leqslant \mathbf{L}\cdot|\,t_1 - t_2\,|
\end{gathered}
\tag{6}
$$

Постоянные $\mathbf{M}$ и $\mathbf{L}$ в условиях (6) одни и те же для ***всех*** функций $\varphi\,(x)$ подмножества $\mathbf{Q}$.

В силу (6) множество функций, составляющих $\mathbf{Q}$, равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Поэтому, в силу теоремы Арцела, множество $\mathbf{Q}$ компактно.

Упражнения и задачи к параграфу 6.

1. Показать, что множество $\mathbf{Q}$, ***определённое*** неравенствами (6), ***замкнуто*** в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

2. Показать, что множество функций из $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, выделяемое неравенством $\max\limits_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}}|\,x\,(t)\,| \leqslant 1$, ***замкнуто***, но не является ***компактом.***

3. Может ли быть ***компактное*** множество ***неограниченным*** ?

4. Будет ли при ***каких-либо*** значениях $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ***компактным*** в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***множество*** всех степеней $\{\,\mathbf{x}_n = t^n\}$, $n = 1,\,2,\,\ldots$?

Глава 2

Линейные нормированные пространства и линейные операторы

2.1 Основные определения

Определение линейного пространства

Определение 31. *Множество* $\mathbf{X}$ *называется* ***линейным пространством (ЛП)****, если:*

1 *.* ***Для любых двух*** *элементов* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *из* $\mathbf{X}$ *определена* ***операция*** *их* ***сложения*** *(обозначаемая, обычно, знаком* $+$ *), т.е.* ***однозначно*** *определен элемент* $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ *в* ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$*, называемый* ***суммой*** *элементов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$*.*

2 *.* ***Для любого*** *элемента* $\mathbf{x}$ *из* $\mathbf{X}$ *и* ***любого*** *числа* γ*, определена* ***операция умножения*** *элемента* $\mathbf{x}$ ***на число*** *(действительное или комплексное), (обозначаемая в записях знаком* $\cdot$ *или, в соот-*

ветствии с устоявшейся алгебраической традицией, вообще пропускаемая), т.е. однозначно определён элемент $\gamma\mathbf{x}$ *в* ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$, *называемый* ***произведением*** *элемента* $\mathbf{x}$ *и числа* γ.

3. ***Операции сложения*** *элементов и* ***умножения*** *элементов на числа в* $\mathbf{X}$ *подчиняются следующим* ***аксиомам****, которые для* ***удобства*** *запоминания и использования разделены на три группы:*

I группа (свойства операции сложения элементов)

$\mathbf{1}^\circ$. — *Коммутативность* ***сложения****:*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} .$$

$\mathbf{2}^\circ$. — *Ассоциативность* ***сложения****:*

$$(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) .$$

$\mathbf{3}^\circ$. — *Существование* ***нейтрального*** *(относительно* ***сложения****)* ***элемента****:*

В $\mathbf{X}$ ***существует*** *элемент* $\mathbb{O}$, *называемый* ***нейтральным*** *или, в более привычной терминологии, —* ***нулём*** *(пространства* $\mathbf{X}$*) такой, что*

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} : \quad \mathbf{x} + \mathbb{O} = \mathbf{x} .$$

$\mathbf{4}^\circ$. — *Существование* ***противоположного*** *элемента:*

Для ***любого*** $\mathbf{x}$ *уравнение*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbb{O}$$

разрешимо *в* $\mathbf{X}$.

Элемент $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$, *являющийся решением рассматриваемого уравнения, называется* ***противоположным*** *к элементу* $\mathbf{x}$.

Элемент $\mathbf{y}$ *,* ***противоположный*** *к заданному элементу* $\mathbf{x}$ *, стандартным образом* ***обозначается*** *как* $-\mathbf{x}$ *.*

II группа (свойства операции умножения элементов на числа)

5° *. — Ассоциативность* ***умножения*** *(на числа):*

Если λ *,* μ ***числа, то:***

$$\lambda\,(\,\mu\,\mathbf{x}\,)\;=\;(\,\lambda\,\mu\,)\mathbf{x}\;.$$

6° *. — Нейтральность (особая роль)* ***числа*** $\mathbf{1}$ *(относительно операции умножения элементов на числа):*

$$\forall\,\mathbf{x}\in\mathbf{X}:\;1\cdot\mathbf{x}\;=\;\mathbf{x}\;.$$

III группа *(* ***совместные свойства операций сложения элементов*** *и* ***умножения на числа*** *)*

7° *. — Дистрибутивность* ***сложения элементов***

(относительно ***умножения на числа*** *):*

$$\lambda\cdot(\mathbf{x}\,+\,\mathbf{y})\;=\;\lambda\cdot\mathbf{x}\,+\,\lambda\cdot\mathbf{y}\;.$$

8° *. — Дистрибутивность* ***сложения чисел***

(относительно ***умножения на элементы*** *):*

$$(\,\lambda\,+\,\mu\,)\cdot\mathbf{x}\;=\;\lambda\cdot\mathbf{x}\,+\,\mu\cdot\mathbf{y}\;.$$

В зависимости от того, какие числа (***действительные*** или ***комплексные***) имеются ввиду в ***аксиомах*** $\mathbf{5}^\circ - \mathbf{8}^\circ$, ***линейное пространство (коротко – ЛП)*** называется ***действительным*** или ***комплексным***.

В этом курсе мы будем использовать в рассуждениях только $\boxed{\textit{действительные}}$ ***линейные пространства.***

Примеры линейных пространств

Пример 1. ***Пространство*** $\mathbb{R}^n$.

Его ***элементы*** **n**-***ки*** чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ с ***операциями покомпонентного*** сложения (для записей используется стандартный символ $+$) и умножения на число (для записей используется, а чаще пропускается, стандартный символ $\cdot$).

Сейчас мы приведём ещё несколько примеров ***линейных пространств.***

Пример 2. ***Линейное пространство*** $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, состоящее из ***непрерывных на отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций, с ***естественными операциями*** сложения непрерывных на отрезке функций — ($+$) и умножения их на число — ($\cdot$) .

Пример 3. ***Линейным пространством*** является множество ***интегрируемых на отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций, с ***операциями*** сложения интегрируемых на отрезке функций ($+$) и умножения их на число - ($\cdot$) .

При этом интегрирование можно понимать как ***по Риману***, так и ***по Лебегу***.

Перечисленные в аксиомах свойства операций сложения элементов линейных пространств и умножения их на числа позволяют производить действия с любым ***конечным*** количеством ***элементов*** линейного пространства и ***конечным*** количеством ***чисел***.

Определение 32. *Элемент* $\mathbf{x}$ ***линейного пространства*** $\mathbf{X}$ *на-*

зывается ***линейной комбинацией***, *элементов* $\mathbf{x^{(1)}}, \ldots, \mathbf{x^{(n)}}$ *этого же* ***линейного пространства*** *с* ***коэффициентами*** — *числами* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *если:* $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x^{(1)}} + c_2\mathbf{x^{(2)}} + \ldots + c_n\mathbf{x^{(n)}}$.

Важнейшие следствия аксиом линейного пространства

Ввиду особой ***важности*** и для ***удобства*** читателей отметим несколько полезных свойств и формул, вытекающих из сформулированных выше аксиом.

Свойство 1. ***В*** любом ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ ***нейтральный*** элемент $\mathbb{O}$ может быть только ***один***.

Доказательство. Пусть кроме нейтрального элемента $\mathbb{O}$ в линейном пространстве существует, по крайней мере, ещё один нейтральный элемент $\mathbb{O}' \neq \mathbb{O}$, т.е. такой, что

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} : \quad \mathbf{x} + \mathbb{O}' = \mathbf{x} .$$

Тогда, в частности, $\mathbb{O} + \mathbb{O}' = \mathbb{O}$, а, с другой стороны, используя свойство, определяющее нейтральный элемент $\mathbb{O}$, получим, что:
$\mathbb{O}' + \mathbb{O} = \mathbb{O}'$.

Однако, в силу свойства коммутативности, левые части обеих написанных выше равенств одинаковы: $\mathbb{O} + \mathbb{O}' = \mathbb{O}' + \mathbb{O}$, а потому должны быть одинаковы и их правые части: $\mathbb{O}' = \mathbb{O}$, что, однако, противоречит нашим предположениям, и, следовательно, второго нейтрального элемента существовать не может. $\square$

Свойство 2. ***В*** любом ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ ***уравнение***: $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{a}$, для всякого ***фиксированного*** элемента $\mathbf{a} \in \mathbf{X}$, имеет только ***одно*** решение: $\mathbf{x} = \mathbb{O}$ — ***нейтральный*** элемент пространства $\mathbf{X}$.

Доказательство. Для элемента $\mathbf{a} = \mathbb{O} \in \mathbf{X}$ это, очевидно, верно.

Пусть для некоторого элемента $\mathbf{a} \neq \mathbb{O} \in \mathbf{X}$ существует решение рассматриваемого уравнения — элемент $\mathbf{x}^* \neq \mathbb{O}$, т.е. такой, что для него выполняется равенство: $\mathbf{a} + \mathbf{x}^* = \mathbf{a}$.

Прибавим к левой и правой частям последнего равенства по элементу $-\mathbf{a}$, противоположного к элементу $\mathbf{a}$.

Тогда в правой части полученного равенства получится $\mathbb{O}$, а полученную левую часть — $(\mathbf{a} + \mathbf{x}^*) + -\mathbf{a}$ можно, ввиду свойств сложения, преобразовать к виду: $(\mathbf{a} + -\mathbf{a}) + \mathbf{x}^*$, т.е. получить в левой части $\mathbf{x}^*$, и, таким образом, ввиду тождественности преобразований в левой и правой частях исходного равенства, получить равенство: $\mathbf{x}^* = \mathbb{O}$, которое противоречит нашим исходным предположениям. □

Свойство 3. Для ***всякого*** элемента $\mathbf{x}$ из ***линейного пространства*** $\mathbf{X}$ ***противоположный*** к нему ***элемент*** $-\mathbf{x}$ определяется ***единственным*** образом.

Доказательство. Пусть хотя бы для одного элемента $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ существует, по крайней мере, ещё один противоположный элемент $(-\mathbf{x})' \neq -\mathbf{x}$.

Тогда, с одной стороны, $[\mathbf{x} + (-\mathbf{x})'] + -\mathbf{x} = \mathbb{O} + -\mathbf{x} = -\mathbf{x}$, а с другой стороны, используя ассоциативное свойство сложения, коммутативное и ещё раз ассоциативное свойство сложения, получим в левой части: $[\mathbf{x} + -\mathbf{x}] + (-\mathbf{x})' = \mathbb{O} + (-\mathbf{x})' = (-\mathbf{x})'$, что противоречит нашему предположению. □

Свойство 4. Для ***всякого числа*** λ имеет место ***формула***: $\lambda \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{x}$ и преобразуем это равенство: $\mathbf{a} = \lambda\mathbf{x} = \lambda\,[\mathbf{x} + \mathbb{O}] = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbb{O} = \mathbf{a} + \lambda\mathbb{O}$, откуда следует, что $\lambda \cdot \mathbb{O} = \mathbb{O}$. □

Свойство 5. Для ***всякого элемента*** $\mathbf{x}$ в ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ имеет место ***формула***: $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbb{O}$.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{x}$ и преобразуем это равенство: $\mathbf{a} = \lambda \cdot \mathbf{x} = [\,\lambda + 0\,] \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{x}$, откуда следует, что $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbb{O}$. □

Свойство 6. Для ***всякого элемента*** $\mathbf{x}$ в ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ имеет место ***формула***: $(-1) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

Доказательство. Пусть $(-1)\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Рассмотрим сумму $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, что, по определению $\mathbf{y}$, можно записать в виде $\mathbf{x} + (-1)\,\mathbf{x}$, или, используя тождество: $\mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x}$ и дистрибутивное свойство сложения чисел относительно умножения на элементы, получим: $\mathbf{x} + (-1)\,\mathbf{x} = (1)\,\mathbf{x} + (-1)\,\mathbf{x} = [\,1 + (-1)\,]\,\mathbf{x} = 0\,\mathbf{x} = \mathbb{O}$, откуда следует, что элемент $\mathbf{y}$ есть $-\mathbf{x}$. □

Свойство 7. ***В*** любом ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ ***уравнение***: $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ***имеет*** только ***одно*** решение: $\mathbf{x} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$.

Доказательство. То, что элемент $\mathbf{b} + (-\mathbf{a})$ есть решение рассматриваемого уравнения проверяется непосредственной подстановкой.

Действительно, подставляя это выражение в левую часть уравнения, получаем: $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{a} + [\mathbf{b} + (-\mathbf{a})] = [\mathbf{a} + (-\mathbf{a})] + \mathbf{b} = \mathbb{O} + \mathbf{b} = \mathbf{b}$.

То, что решение может быть только одно, даваемое приведенной в формулировке следствия формулой, докажем от противного.

Пусть $\mathbf{z}$ решение рассматриваемого уравнения при заданной правой части, отличное от даваемого формулой, т.е. $\mathbf{z} \neq \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$.

Тогда $\mathbf{a} + \mathbf{z} = \mathbf{b}$. И, если мы к обеим частям равенства добавим один и тот же элемент $-\mathbf{a}$, то, преобразуя левую часть, мы получим: $[\mathbf{a} + \mathbf{z}] + -\mathbf{a} = [\mathbf{a} + (-\mathbf{a})] + \mathbf{z} = \mathbb{O} + \mathbf{z} = \mathbf{z}$, а в правой части получается элемент $\mathbf{b} + (-\mathbf{a})$ и мы приходим к противоречию. $\square$

Свойство 8. Если ***в линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ имеет место ***равенство*** $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mathbb{O}$, то это ***возможно*** только тогда, когда ***либо*** $\lambda = 0$, ***либо*** $\mathbf{x} = \mathbb{O}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x} \neq \mathbb{O}$. Покажем тогда, что $\lambda = 0$.

Доказательство проведём от противного, предположив, что $\lambda \neq 0$.

Тогда существует число $\mu = \frac{1}{\lambda} \neq 0$ и мы имеем:
$\mathbb{O} = \mu \cdot \mathbb{O} = \mu \cdot (\lambda \cdot \mathbf{x}) = (\mu \cdot \lambda) \cdot \mathbf{x} = 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$, откуда вытекает противоречие. $\square$

Свойство 9. Если ***в линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ имеет место ***равенство*** $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mu \cdot \mathbf{x}$, при $\mathbf{x} \neq \mathbb{O}$, ***то*** $\lambda = \mu$.

Доказательство. Действительно, если $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mu \cdot \mathbf{x}$, то

$\lambda \cdot \mathbf{x} - \mu \cdot \mathbf{x} = \mathbb{O}$, т.е. $(\lambda - \mu) \cdot \mathbf{x} = \mathbb{O}$, что, ввиду условия $\mathbf{x} \neq \mathbb{O}$, влечёт за собой равенство: $\lambda - \mu = 0$, т.е. $\lambda = \mu$. $\square$

Изоморфизм линейных пространств

Определение 33. *Два линейных пространства* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{X}'$ *называются* ***изоморфными****, если между* ***элементами*** *указанных линейных пространств можно установить* ***взаимнооднозначное*** *соответствие:* $\mathbf{x}' \overset{\boldsymbol{\tau}}{=} \mathbf{x}$ *таким образом, что* ***результаты*** *выполнения основных* ***операций*** *(сложение элементов —* $\oplus$ *и умножение их на числа —* $\odot$*)* ***в пространстве*** $\mathbf{X}'$ *будут соответствовать (при указанном выше отображении* $\boldsymbol{\tau}$*) аналогичным* ***результатам*** *выполнения соответствующих* ***операций*** *(сложение элементов —* $+$ *и умножение их на числа —* $\cdot$*)* ***в пространстве*** $\mathbf{X}$, *т.е.*

1. *Если* ***произвольные*** *элементы* $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ *пространства* $\mathbf{X}'$ ***соответствуют*** *при отображении* $\boldsymbol{\tau}$ *элементам* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ *пространства* $\mathbf{X}$, *то* ***сумма*** $\mathbf{z}'$ *элементов* $\mathbf{x}'$ *и* $\mathbf{y}'$*:* $\mathbf{z}' = \mathbf{x}' \oplus \mathbf{y}'$ *будет* ***соответствовать при отображении*** $\boldsymbol{\tau}$ ***сумме*** $\mathbf{z}$ *элементов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$*:* $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$, *т.е.* $\mathbf{z}' \overset{\boldsymbol{\tau}}{=} \mathbf{z}$.

2. *Если* ***произвольный*** *элемент* $\mathbf{x}' \in \mathbf{X}'$ ***соответствует*** *при отображении* $\boldsymbol{\tau}$ *элементу* $\mathbf{x}$ *пространства* $\mathbf{X}$, *то* ***результат умножения*** *элемента* $\mathbf{x}'$ *на* ***любое*** *число* λ*:* $\mathbf{u}' = \lambda \odot \mathbf{x}'$ *будет* ***соответствовать при отображении*** $\boldsymbol{\tau}$ ***результату умножения*** *элемента* $\mathbf{x}$ ***на то же самое*** *число* λ*:* $\mathbf{u} = \lambda \odot \mathbf{x}$, *т.е.* $\mathbf{u}' \overset{\boldsymbol{\tau}}{=} \mathbf{u}$.

Ограничимся всего ***одним*** простым примером изоморфных между собой линейных пространств.

Пример. ***Изоморфными*** друг другу являются ***линейное пространство*** $\mathbb{P}_n$ всех ***многочленов*** с вещественными коэффициентами, ***степени*** которых ***не превосходят*** заданного натурального числа $\mathbf{n}$, рассматриваемое ***с*** естественными в этом пространстве ***операциями сложения многочленов*** — $+$ и ***умножения многочленов на число*** - $\cdot$ и, уже много раз упоминавшееся, ***линейное пространство*** $(n+1)$-мерных ***арифметических векторов*** — $\mathbb{R}^{n+1}$ ***с*** естественными ***операциями сложения элементов*** и ***умножения элементов на числа*** в этом пространстве.

В рассматриваемом примере ***изоморфное*** соответствие $\boldsymbol{\tau}$ между элементами $\mathbf{p} \equiv p\,(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ из пространства $\mathbb{P}_n$ и $(n+1)$-кой чисел $\mathbf{x} \equiv (a_0,\, a_1,\, a_2,\, \ldots\, , a_n)$, образующих элемент пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ ***устанавливается*** формулой:

$$\boldsymbol{\tau}\,(\,p\,(x)\,) \;=\; (a_0,\, a_1,\, a_2,\, \ldots\, , a_n)\;\; .$$

Читателю мы рекомендуем проверить (опираясь на определение) изоморфность этого соответствия.

Размерность линейного пространства

Определение 34. *Элементы* $\mathbf{x^{(1)}}, \ldots , \mathbf{x^{(n)}}$ ***линейного пространства*** $\mathbf{X}$ *называются* ***линейно независимыми****, если из условия:*

$$c_1\, \mathbf{x^{(1)}} \;+\; c_2\, \mathbf{x^{(2)}} \;+\; \ldots \;+\; c_n\, \mathbf{x^{(n)}} \;=\; \mathbb{O}\;,$$

следует:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0 .$$

Определение 35. ***Линейное пространство*** $\mathbf{X}$ *называется* $\mathbf{n}$***-мерным,*** *если в этом пространстве* ***существует*** $\boxed{\mathbf{n}}$ $\boxed{\textbf{\textit{линейно}}}$ $\boxed{\textbf{\textit{независимых}}}$ *элементов, но* ***любые*** $\boxed{\mathbf{n+1}}$ *элементов* ***линейного пространства*** $\mathbf{X}$ $\boxed{\textbf{\textit{линейно}}}$ $\boxed{\textbf{\textit{зависимы}}}$.

Пример 13. ***Линейное пространство*** $\mathbb{R}^n$ из примеров 2, 3 § 1 главы 1 — $\boxed{\mathbf{n}\text{-мерно}}$.

Этот факт устанавливается в линейной алгебре.

Определение 36. *Если* $\boxed{\forall\, \mathbf{n} = 1, 2, 3, \ldots}$ *в* ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ *существует* $\boxed{\mathbf{n}\ \ \textbf{\textit{линейно независимых}}}$ *элементов, то* ***линейное пространство*** *называется* $\boxed{\textbf{\textit{бесконечномерным}}}$.

Пример 14. ***Линейные пространства*** ℓ_2, $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, $\mathbb{D}_k\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ примеров 4, 5 и 6 § 1 главы 1 — $\boxed{\textbf{\textit{бесконечномерные}}}$.

Во всех трёх случаях необходимо для всякого натурального числа $\mathbf{n}$ ***предъявить*** систему линейно независимых элементов, состоящую из $\mathbf{n}$ элементов соответствующего пространства.

Ввиду ***произвольности*** числа $\mathbf{n}$ это и будет означать требуемое.

1. Для пространства ℓ_2 требуемую систему линейно независимых векторов при любом конечном $\mathbf{n}$ составляют векторы $\{\mathbf{e}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, у которых на всех местах, кроме k-ого, стоят нули, а на месте с номером k стоит единица.

2. Для пространств $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и $\mathbb{D}_k\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ требуемую систему линейно независимых при любом конечном $\mathbf{n}$ векторов $\{\mathbf{e}_k\}$ образует, например, система степеней: $\{ t^k \}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Действительно, многочлен $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Отсюда следует линейная независимость системы $\{ t^k \}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ в пространствах $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $\mathbb{D}_k\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Подпространство в линейном пространстве

Определение 37. ***Совокупность*** $\mathbf{L}$ *элементов* ***линейного пространства*** $\mathbf{X}$, *называется* ***подпространством*** *в* $\mathbf{X}$, *если* ***результаты операций сложения*** *любых* ***двух элементов*** *из* $\mathbf{L}$ *и* ***умножения*** *любого* ***элемента*** *из* $\mathbf{L}$ *на любое* ***число принадлежат*** $\mathbf{L}$.

Из этого определения и аксиом ***линейного пространства*** следует, в частности, что:

1. ***Элемент*** $\mathbb{O}$, — ***нуль*** пространства $\mathbf{X}$, — принадлежит ***любому*** подпространству $\mathbf{L}$ пространства $\mathbf{X}$.

2. Для любого ***конечного*** множества элементов $\{ \mathbf{x}^{(\mathbf{1})}, \dots, \mathbf{x}^{(\mathbf{n})} \}$ из ***подпространства*** $\mathbf{L}$ ***линейного пространства*** $\mathbf{X}$ любая их ***линейная комбинация*** $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{x}^{(\mathbf{1})} + c_2 \mathbf{x}^{(\mathbf{2})} + \dots + c_n \mathbf{x}^{(\mathbf{n})}$, также является элементом рассматриваемого ***подпространства***, т.е. всякое ***подпространство*** само является ***линейным пространством*** (с теми же операциями сложения $(+)$ и умножения на числа $(\cdot)$, которые определены в ***объемлющем*** подпространство $\mathbf{L}$ линейном пространстве $\mathbf{X}$).

Определение линейного нормированного пространства (ЛНП)

Если в ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$, каким-либо образом, ввести ***метрику*** $\boldsymbol{\rho}$, то оно превращается в линейное ***метрическое*** пространство $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\rho})$ и, таким образом, приобретает все свойства общих ***метрических*** пространств.

В линейном случае, обычно, используется ***метрика***, вводимая особым образом.

Определение 38. ***Неотрицательный*** *функционал, определенный на* ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ *называется* **нормой** *и обозначается* $\|\mathbf{x}\|$ $(\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X})$, *если он обладает следующими* ***свойствами****:*

$\mathbf{1}^\circ$. — *Невырожденность:*

$$\|\mathbf{x}\| \geqslant 0, \ \textbf{\textit{и, если}}: \ \|\mathbf{x}\| = 0, \ \textbf{\textit{то}}: \ \mathbf{x} = \mathbb{O}.$$

$\mathbf{2}^\circ$. — *Положительная однородность:*

$$\|\lambda \cdot \mathbf{x}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{x}\|.$$

$\mathbf{3}^\circ$. — *Полуаддитивность или неравенство треугольника:*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|.$$

Если в ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ введена норма $\|\mathbf{x}\|$, то в нём может быть введена ***метрика*** $\boldsymbol{\rho}$ по формуле:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \tag{1}$$

Мы оставляем читателю проверку того, что формула (1) действительно определяет ***метрику***.

Непрерывность нормы и операций сложения и умножения на числа в линейном нормированном пространстве

Утверждение 18. *В любом* ***линейном нормированном пространстве*** $\mathbf{X}$ ***обе*** *операции –* ***сложения*** *векторов и* ***умножения*** *вектора* ***на число,*** *–* ***непрерывны.***

Доказательство. **1**. Пусть последовательность элементов $\{\mathbf{x}_n\}$ сходится к элементу $\mathbf{x}$, а последовательность элементов $\{\mathbf{y}_n\}$ сходится к элементу $\mathbf{y}$ в линейном нормированном пространстве $\mathbf{X}$, при $n \to \infty$.

Тогда, в силу неравенства треугольника:

$$\|(\mathbf{x}_n + \mathbf{y}_n) - (\mathbf{x} + \mathbf{y})\| \leqslant \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}\| \to 0\,,$$

при $n \to \infty$, что означает непрерывность сложения относительно обеих аргументов данной операции в линейном нормированном пространстве $\mathbf{X}$.

2. Пусть последовательность элементов $\{\mathbf{x}_n\}$ сходится к элементу $\mathbf{x}$ в линейном нормированном пространстве $\mathbf{X}$, а последовательность чисел $\{\gamma_n\}$ сходится к числу γ при $n \to \infty$.

Тогда, добавляя и вычитая слагаемое $\{\gamma \cdot \mathbf{x}_n\}$, на основании неравенства треугольника, получаем:

$$\|\gamma_n\mathbf{x}_n - \gamma\,\mathbf{x}\| \leqslant \|(\gamma_n - \gamma)\cdot\mathbf{x}_n + \gamma\,(\mathbf{x}_n - \mathbf{x})\| \leqslant |\gamma_n - \gamma|\|\mathbf{x}_n\| + |\gamma|\|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}\| \to 0\,,$$

при $n \to \infty$, что означает непрерывность умножения относительно обеих аргументов данной операции в линейном нормированном пространстве $\mathbf{X}$. □

Утверждение 19. *Имеет место неравенство:*

$$\big|\,\|\,\mathbf{x}\,\| \;-\; \|\,\mathbf{y}\,\|\,\big| \;\leqslant\; \|\,\mathbf{x} \;-\; \mathbf{y}\,\|$$

Доказательство. Это неравенство получается из второго неравенства треугольника для общих метрических пространств, если в нём положить $\mathbf{z} = \mathbb{O}$. □

Утверждение 20. *Функционал нормы* $\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbf{X}}$ ***непрерывен*** *в* ***линейном нормированном пространстве*** $\mathbf{X}$.

Доказательство. Пусть последовательность элементов $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ сходится к элементу $\mathbf{x}$ в линейном нормированном пространстве $\mathbf{X}$, при $n \;\to\; \infty$.

Тогда, в силу предыдущего утверждения:

$$\big|\,\|\,\mathbf{x}_n\,\| \;-\; \|\,\mathbf{x}\,\|\,\big| \;\leqslant\; \|\,\mathbf{x}_n \;-\; \mathbf{x}\,\| \;\to\; 0\;,$$

при $n \;\to\; \infty$, что и означает непрерывность функционала нормы в линейном нормированном пространстве $\mathbf{X}$. □

Метрические пространства $\mathbf{X}$, описанные в примерах $1 - 7$, параграфа 1 главы 1, являются ***линейными нормированными пространствами***.

Такое заключение ***непосредственно*** следует из формул, определяющих в них ***метрику***.

Изоморфизм конечномерных пространств данного числа измерений •

Теорема 6. *Любые два* ***конечномерных*** *линейных* ***нормированных*** *пространства* ***данного*** *числа измерений* $\mathbf{n}$ — $\mathbf{X}_1$ *и* $\mathbf{X}_2$, — ***изоморфны*** *между собой, т.к. каждое из них* ***изоморфно*** *пространству* $\mathbb{E}^n$ ***соответствующего*** *числа измерений.*

Устанавливаемый в теореме ***изоморфизм*** $\boldsymbol{\tau}$ *является* ***непрерывным*** *в обе стороны отображением пространств* $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2$ *и* $\mathbb{E}^n$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{X}$ $\mathbf{n}$-***мерное линейное нормированное пространство***, в котором, согласно определению, существует система $\mathbf{n}$ ***линейно независимых*** векторов, через которую ***линейно выражается*** любой вектор этого пространства.

(В ***линейной алгебре*** всякая система элементов линейного пространства, обладающая ***обеими*** указанными свойствами, называется ***базисом*** этого пространства.)

Пусть ***базис*** образуют элементы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Тогда всякий элемент $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{X}$ имеет ***единственное*** представление:

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n ,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые вещественные числа, коэффициенты разложения элемента $\mathbf{x}$, определяемые по данному ***элементу*** и данному ***базису единственным*** образом.

Поставим в соответствие элементу $\mathbf{x}$ линейного нормированного пространства $\mathbf{X}$ элемент $\check{\mathbf{x}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $\mathbf{n}$-***мерного*** пространства $\mathbb{E}^n$

и будем обозначать это соответствие $\boldsymbol{\tau}: \ \mathbf{x} \overset{\tau}{\leftrightarrow} \check{\mathbf{x}}$.

Очевидно, что указанное соответствие $\boldsymbol{\tau}$ является ***взаимнооднозначным*** и сохраняет ***соответствие*** между ***результатами*** выполнения операций ***сложения*** и ***умножения*** на числа в линейных пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbb{E}^n$:

$$\mathbf{x} \overset{\tau}{\leftrightarrow} \check{\mathbf{x}} \qquad\qquad \mathbf{x}+\mathbf{y} \overset{\tau}{\leftrightarrow} \check{\mathbf{x}}+\check{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{y} \overset{\tau}{\leftrightarrow} \check{\mathbf{y}} \qquad\qquad \alpha\cdot\mathbf{x} \overset{\tau}{\leftrightarrow} \alpha\cdot\check{\mathbf{x}}$$

Написанные выше формулы означают то, что отображение $\boldsymbol{\tau}$ является ***изоморфизмом*** между линейными пространствами $\mathbf{X}$ и $\mathbb{E}^n$.

Покажем, что соответствие $\boldsymbol{\tau}$ будет также ***непрерывным*** в обе стороны: из $\mathbf{X}$ в $\mathbb{E}^n$ и из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbf{X}$.

Действительно для $\forall\,\mathbf{x} \in \mathbf{X}$:

$$\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} = \left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{e}_j\right\|_{\mathbf{X}} \leqslant \sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|\|\mathbf{e}_j\|_{\mathbf{X}} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}\|\mathbf{e}_j\|^2_{\mathbf{X}}\right)^{1/2}\left(\sum_{j=1}^{n}\|\alpha_j\|^2\right)^{1/2} = \boldsymbol{\gamma}\|\check{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{E}^n}\,,$$

где $\boldsymbol{\gamma} = \left(\sum\limits_{j=1}^{n}\|\,\mathbf{e}_j\,\|^2_{\mathbf{X}}\right)^{1/2}$.

Поэтому

$$\|\,\mathbf{y}\,-\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbf{X}} \leqslant \gamma\cdot\|\,\check{\mathbf{y}}\,-\,\check{\mathbf{x}}\,\|_{\mathbb{E}^n} \tag{2}$$

Покажем теперь, что существует константа $m > 0$ такая, что

$$\|\,\mathbf{y}\,-\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbf{X}} \geqslant m\cdot\|\,\check{\mathbf{y}}\,-\,\check{\mathbf{x}}\,\|_{\mathbb{E}^n} \tag{3}$$

Рассмотрим функцию:

$$f\,(\check{\mathbf{x}}) \overset{def}{=} f\,(\,\alpha_1,\,\alpha_2,\,\ldots\,,\alpha_n\,) \overset{def}{=} \left\|\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{e}_j\right\|_{\mathbf{X}} = \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbf{X}} \geqslant 0\,.$$

Эта функция, в силу определения, обладает тем свойством, что:

$$f(\check{\mathbf{x}}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbb{O}_{\mathbf{X}} \quad \overset{\boldsymbol{\tau}}{\Longrightarrow} \quad \check{\mathbf{x}} = \mathbb{O}_{\mathbb{E}^n} \ ,$$

т.е. может обращаться в нуль ***только*** на элементе $\mathbb{O}_{\mathbb{E}^n}$.

Оценка

$$\bigl|f\ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) - f\ (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)\bigr| = \bigl|\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} - \|\mathbf{y}\|_{\mathbf{X}}\bigr| \leqslant \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_{\mathbf{X}} \leqslant \boldsymbol{\gamma}\cdot\|\check{\mathbf{x}}-\check{\mathbf{y}}\|_{\mathbb{E}^n}$$

показывает, что $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — ***непрерывная*** функция, т.е. при $\check{\mathbf{x}} \to \check{\mathbf{y}}$ в пространстве $\mathbb{E}^n$ $f(\check{\mathbf{x}}) \to f(\check{\mathbf{y}})$ в пространстве $\mathbf{X}$.

В пространстве $\mathbb{E}^n$ рассмотрим множество $\mathbf{S} : \left\{ \alpha_i \,\middle|\, \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2 = 1 \right\}$ — это единичная сфера пространства $\mathbb{E}^n$.

Т.к. сфера $\mathbf{S}$ ***ограниченное*** в пространстве $\mathbb{E}^n$ множество, а потому ***компактное*** в $\mathbb{E}^n$ множество, то в силу ***замкнутости*** $\mathbf{S}$, это множество — ***компакт***.

По теореме К. Вейерштрасса, ***непрерывная*** функция $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ ***на компакте*** $\mathbf{S}$ достигает своего ***минимума*** m хотя бы в одной точке $\check{\mathbf{x}}_* \in \mathbf{S} : \ f(\check{\mathbf{x}}_*) = m$.

При этом ***обязательно*** $m > 0$.

Таким образом, для $\forall\, \check{\mathbf{x}} \in \mathbf{S}$:

$$f(\check{\mathbf{x}}) = \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} \geqslant m > 0 \ .$$

Далее имеем для $\check{\mathbf{x}} \neq \mathbb{O}_{\mathbb{E}^n}$:

$$f(\check{\mathbf{x}}) \overset{def}{=} \|\mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} = \|\check{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{E}^n} \cdot \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j^2\right)^{1/2}} \mathbf{e}_j \right\|_{\mathbf{X}} \geqslant m \cdot \|\check{\mathbf{x}}\|_{\mathbb{E}^n} \ ,$$

которое, очевидно, будет также справедливо и при $\check{\mathbf{x}} = \mathbb{O}_{\mathbb{E}^n}$.

Т.к. полученное неравенство справедливо для ***всех*** элементов пространства $\mathbb{E}^n$, то оно означает ***непрерывность*** построенного в начале доказательства отображения $\boldsymbol{\tau}$ из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbf{X}$.

Непрерывность отображения $\boldsymbol{\tau}$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbb{E}^n$ была доказана выше.

$\square$

В некоторых случаях, в теории и приложениях полезно в линейном пространстве $\mathbf{X}$ "параллельно" рассматривать две нормы. В такой ситуации пространство $\mathbf{X}$ с первой нормой можно рассматривать, как линейное нормированное пространство $\mathbf{X}_1$, а то же линейное пространство со второй нормой, как $\mathbf{X}_2$.

Определение 39. *Две* ***нормы*** $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$ *в* ***линейном пространстве*** $\mathbf{X}$ *называются* ***эквивалентными****, если существуют такие* ***постоянные*** $\varkappa_1, \varkappa_2 > 0$*, что для любого* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *справедливо двойное неравенство:*

$$\varkappa_1 \cdot \|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \varkappa_2 \cdot \|\mathbf{x}\|_1 .$$

Заметим, что отсутствующая в приведенном определении "симметрия" относительно использования норм $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$, легко "восстанавливается", т.к.

$$\frac{1}{\varkappa_2} \cdot \|\mathbf{x}\|_2 \leqslant \|\mathbf{x}\|_1 \leqslant \frac{1}{\varkappa_1} \cdot \|\mathbf{x}\|_2 .$$

Если пространство $\mathbf{X}$ ***конечномерное***, то полученные при доказательстве теоремы об изоморфизме неравенства (2) и (3) позволяют утверждать, что ***нормы*** в пространствах $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$ ***эквивалентны***.

Частное рассуждение подобного рода, важное с точки зрения конкретных ***значений*** констант $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, содержит

Пример. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ нормы $\|\,\mathbf{x}\,\|_1 \stackrel{def}{=} \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |\,x_j\,|$ и $\|\,\mathbf{x}\,\|_2 \stackrel{def}{=} \sum\limits_{j=1}^{n} |\,x_j\,|$ ***эквивалентны***, т.к.

$$\|\,\mathbf{x}\,\|_1 \leqslant \|\,\mathbf{x}\,\|_2 \leqslant n \cdot \|\,\mathbf{x}\,\|_1 ,$$

где $\varkappa_1 = 1$, $\varkappa_2 = n$.

Следствие 2. *В любом* ***конечномерном*** *линейном нормированном пространстве* $\mathbf{X}$ *с базисом* $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ *сходимость* ***по норме эквивалентна покоординатной*** *сходимости, т.е. последовательность векторов* $\{\,\mathbf{x}_k\,\}$, $k = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ *будет сходиться к вектору* $\mathbf{x}_0$ *при* $k \to \infty$, ***тогда*** *и* ***только тогда****, когда* **все** *последовательности, составленные из "одноимённых" координат векторов* $\{\,\mathbf{x}_k\,\}$ *будут сходиться к "одноимённой" координате вектора* $\mathbf{x}_0$ *при* $k \to \infty$.

Доказательство следует из неравенств (2) и (3), обоснованных выше.

Следствие 3. *Любое* ***конечномерное*** *линейное нормированное пространство* $\mathbf{X}$ ***полное****.*

Действительно, ***любое*** конечномерное линейное нормированное пространство $\mathbf{X}$ размерности n ***полно***, т.к. оно ***непрерывно изоморфно*** полному пространству $\mathbb{E}^n$. (***Полнота*** $\mathbb{E}^n$ была доказана в параграфе 3 главы 1).

Следствие 4. *Всякое* ***конечномерное*** *подпространство* $\mathbf{L}_m$ *в* ***линейном нормированном пространстве*** $\mathbf{X}$ ***замкнуто****, т. е. обязательно является* ***замкнутым подпространством*** $\mathbf{X}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ базис $\mathbf{L}_m$, а последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, k, \ldots$ сходится к вектору $\mathbf{x}_0$ при $k \to \infty$ в пространстве $\mathbf{X}$.

Покажем, что вектор $\mathbf{x}_0$ принадлежит подпространству $\mathbf{L}_m$.

В самом деле, каждый вектор последовательности $\{\mathbf{x}_k\}$ имеет разложение по базису $\mathbf{L}_m$:

$$\mathbf{x}_k = \alpha_1^{(k)}\mathbf{e}_1 + \alpha_2^{(k)}\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_m^{(k)}\mathbf{e}_m ,$$

где $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_m^{(k)}$ — коэффициенты разложения элемента $\mathbf{x}_k$, $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$.

Каждая из последовательностей $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \ldots, \alpha_m^{(k)}$ координат указанных разложений, согласно следствию (10) , является сходящейся числовой последовательностью.

Обозначим пределы этих последовательностей $\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_m^{(0)}$ и рассмотрим вектор:

$$\alpha_1^{(0)}\mathbf{e}_1 + \alpha_2^{(0)}\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_m^{(0)}\mathbf{e}_m .$$

Очевидно, что этот вектор принадлежит $\mathbf{L}_m$ и, в силу ***единственности*** предела в метрическом пространстве $\mathbf{X}$, совпадает с вектором $\mathbf{x}_0$. □

$\boxed{\textit{Бесконечномерное}}$ подпространство в ***линейном нормированном пространстве*** $\mathbf{X}$ может быть и ***не замкнуто***.

Пример 15. Пусть пространство $\mathbf{X} = \mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, а $\mathbf{L}$ его ***бесконечномерное*** линейное подпространство, порожденное ***всеми*** степенями независимого переменного t : $\{1, t, t^2, t^3, \dots, t^n, \dots\}$, — т.е. $\mathbf{L}$ — множество ***всех*** многочленов с вещественными коэффициентами в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Оно ***не замкнуто*** в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, т.к. предел последовательности многочленов в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***может*** не быть многочленом.

Поэтому $[\mathbf{L}] \neq \mathbf{L}$.

Теорема Ф. Рисса $^\bullet$

Для любого ***замкнутого подпространства*** в ***линейном нормированном пространстве*** имеет место важная

Теорема 7 (***Ф. Рисс).*** *Пусть* $\mathbf{L}$ ***замкнутое подпространство*** *в* ***линейном нормированном*** *пространстве* $\mathbf{X}$, *не совпадающее с* $\mathbf{X}$: $\mathbf{L} \subset \mathbf{X}$, *но* $\mathbf{L} \neq \mathbf{X}$.

Тогда $\forall\,\varepsilon > 0$ *в пространстве* $\mathbf{X}$ $\exists\,\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{X}$, *с нормой* 1 : $\|\,\bar{\mathbf{u}}\,\|_{\mathbf{X}} = 1$ *такой, что* $\forall\,\mathbf{x} \in \mathbf{L}$:

$$\|\,\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{x}\,\|_{\mathbf{X}} > 1 - \varepsilon\ ,$$

т.е. элемент $\bar{\mathbf{u}}$ *находится на* ***положительном*** *расстоянии от* ***всех*** $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}_0$ любой элемент $\mathbf{X}$ не принадлежащий подпространству $\mathbf{L}$.

Рассмотрим на $\mathbf{L}$ числовую функцию

$$f\,(\mathbf{x}) = \|\,\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}\,\|_{\mathbf{X}} \geqslant 0$$

Т.к. множество значений функции $f(\mathbf{x})$ ограничено снизу, то существует их точная нижняя $\inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{L}} f(\mathbf{x}) = \inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{L}} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} = d$ и хотя бы одна минимизирующая последовательность $\{\mathbf{x}_n\} \in \mathbf{L}$ такая, что:

$$d \leqslant \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_n\|_{\mathbf{X}} < d + \varepsilon\ .$$

Заметим, что $d > 0$, т.к. иначе элемент $\mathbf{u}_0$ был бы ***предельным*** элементом всякой минимизирующей для $f(\mathbf{x})$ последовательности, и, в силу того, что $\mathbf{L}$ ***замкнутое*** подпространство в $\mathbf{X}$, обязан бы был принадлежать $\mathbf{L}$, что, однако, противоречит исходному предположению.

Далее, т.к. $d = \inf\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{L}} \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}\|_{\mathbf{X}}$, то $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\,\mathbf{x}_0 \in \mathbf{L}$ такой, что

$$0 < d \leqslant \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}} < d + d\cdot\varepsilon\ .$$

Положим

$$\bar{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}}}\ .$$

Очевидно, что $\bar{\mathbf{u}} \notin \mathbf{L}$, т.к. иначе бы, вопреки предположению, и элемент $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{L}$.

Кроме того, очевидно, что $\|\bar{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{X}} = 1$.

Возьмём любой элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и пусть

$$\mathbf{v} = \mathbf{x}_0 + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{x}\ .$$

Тогда $\mathbf{v} \in \mathbf{L}$ и

$$\|\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} = \left\| \frac{\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}}} - \mathbf{x} \right\|_{\mathbf{X}} =$$

$$= \frac{1}{\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}}} \cdot \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0 - \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\| \cdot \mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} =$$

$$= \frac{1}{\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}}} \cdot \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} > \frac{1}{d + d \cdot \varepsilon} \cdot \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{d}{d + d \cdot \varepsilon} = \frac{1}{1 + \varepsilon} > 1 - \varepsilon\,.$$

□

Конечномерность и компактность •

Теорема 8. *Для того, чтобы* ***подпространство*** $\mathbf{L}$ *линейного нормированного пространства* $\mathbf{X}$ *было* $\boxed{\textbf{\textit{конечномерным}}}$, ***необходимо*** *и* ***достаточно****, чтобы* ***каждое ограниченное*** *множество элементов из* $\mathbf{L}$ *было* ***компактно****.*

Доказательство. ***Необходимость****.*

Пусть $\mathbf{L}$ n-мерно.

Тогда по доказанному выше пространство $\mathbf{L}$ ***непрерывно изоморфно*** евклидову пространству $\mathbb{E}^n$ и всякое ***ограниченное*** множество элементов $\mathbf{M} \in \mathbf{L}$ взаимнооднозначно и взаимнонепрерывно преобразуется в ***ограниченное*** же множество $\mathbf{N} \in \mathbb{E}^n$.

Поскольку всякое ***ограниченное*** множество $\mathbf{N} \in \mathbb{E}^n$ ***компактно***, то в каждом таком множестве $\mathbf{N}$ найдётся хотя бы одна бесконечная ***фундаментальная*** последовательность.

Пусть эта последовательность $\{\check{\mathbf{x}}_k\}$.

Тогда каждому элементу этой последовательности будет отвечать единственный элемент множества $\mathbf{M} \in \mathbf{L}$, т.е. в $\mathbf{M}$ мы получаем последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$.

В силу ***непрерывности*** изоморфного соответствия последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ будет ***фундаментальной*** в $\mathbf{M}$, а потому содержащее последовательность $\{\mathbf{x}_k\}$ множество $\mathbf{M}$ будет ***компактным***.

Достаточность.

Пусть всякое ***ограниченное*** множество $\mathbf{M} \in \mathbf{L}$ ***компактно***.

Покажем, что в этом случае пространство $\mathbf{L}$ — ***конечномерно***.

Возьмём в $\mathbf{L}$ произвольный элемент $\mathbf{x}_1$ с нормой 1 : $\|\mathbf{x}_1\| = 1$.

Рассмотрим линейное подпространство $\mathbf{L}_1$, ***порождаемое*** единственным элементом $\mathbf{x}_1$.

Если $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1$, то теорема доказана.

Если же $\mathbf{L} \neq \mathbf{L}_1$, то по теореме Ф. Рисса при $\varepsilon = 1/2$ в $\mathbf{L}$ найдётся такой элемент $\mathbf{x}_2$, что, во-первых, $\|\mathbf{x}_2\| = 1$ и, во-вторых, расстояние от этого элемента до всех элементов подпространства $\mathbf{L}_1$ будет больше $1/2$, т.е., в частности, $\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \geqslant 1/2$.

Обозначим через $\mathbf{L}_2$ линейное ***подпространство*** в $\mathbf{L}$ — линейную оболочку векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$.

Если $\mathbf{L} = \mathbf{L}_2$, то теорема доказана.

Если же $\mathbf{L} \neq \mathbf{L}_2$, то по теореме Ф. Рисса при $\varepsilon = 1/2$ в $\mathbf{L}$ найдётся такой элемент $\mathbf{x}_3$, что, во-первых, $\|\mathbf{x}_3\| = 1$ и, во-вторых, расстояние от этого элемента до всех элементов подпространства $\mathbf{L}_2$ будет больше $1/2$, т.е., в частности, $\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\| \geqslant 1/2$ и $\|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\| \geqslant 1/2$.

Продолжая процесс дальше, мы на каждом шаге этого процесса имеем только ***две возможности***: либо ***при некотором*** n подпространство $\mathbf{L}_n$, построенное как линейная оболочка — множество ***всех линейных комбинаций*** элементов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, получаемых на каждом шаге элементов пространства $\mathbf{L}$, совпадает с $\mathbf{L}$: $\mathbf{L} = \mathbf{L}_n$, процесс построения новых векторов ***обрывается*** на данном шаге и теорема, таким образом, ***доказана***.

Либо процесс ***продолжается бесконечно***, т.е. для ***всякого*** n имеет место ***вторая*** возможность: $\mathbf{L} \neq \mathbf{L}_n$, и тогда по теореме Ф. Рисса при $\varepsilon = 1/2$ в $\mathbf{L}$ найдётся такой элемент $\mathbf{x}_{n+1}$, что, во-первых, $\| \mathbf{x}_{n+1} \| = 1$ и, во-вторых, расстояние от этого элемента до ***всех*** элементов подпространства $\mathbf{L}_n$ будет больше $1/2$, т.е., в частности, $\| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_1 \| \geqslant 1/2$, и $\| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_2 \| \geqslant 1/2$, и так далее: $\| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}_n \| \geqslant 1/2$.

В этом случае мы ***эффективно*** строим ***бесконечную*** последовательность векторов из пространства $\mathbf{L}$ — $\{ \mathbf{x}_k \}$ такую, что во-первых, $\| \mathbf{x}_k \| = 1$ и, во-вторых, расстояние от этого элемента до всех элементов подпространства $\mathbf{L}_k$ будет больше $1/2$, т.е., в частности, $\| \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_m \| \geqslant 1/2$ при $m < k$.

Но, указанная таким образом ***ограниченная*** последовательность $\{ \mathbf{x}_k \}$ ***не может*** содержать бесконечной ***фундаментальной*** подпоследовательности, что противоречит ***компактности*** единичной сферы пространства $\mathbf{L}$. $\square$

Банаховы пространства

Определение 40. ***Полное*** *линейное нормированное пространство называется* ***банаховым*** *пространством* ***(B-пространством)****.*

Если линейное нормированное пространство ***неполно***, то, в силу теоремы о пополнении (параграф 4 главы 1), его можно ***пополнить***.

Вообще говоря, ***пополнение*** линейного нормированного пространства не обязано быть ***линейным*** пространством.

Однако, можно показать, что среди пополнений ***обязательно*** есть ***банахово*** пространство с ***нормой***, согласованной с первоначальной, в том смысле, что ее значения на части этого пространства, соответствующей ***пополняемому*** пространству $\mathbf{X}$, ***совпадают*** со значениями, даваемыми ***первоначальной*** нормой.

Определение 41. *Пусть* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k, \ldots$ *некоторые элементы* ***банахова*** *пространства* $\mathbf{X}$.

Выражение

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$$

формально представляющее из себя ***бесконечную*** *сумму всех элементов множества* $\{\mathbf{x}_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$ *называется* ***рядом****, составленным из элементов* $\{\mathbf{x}_k\}$.

"Параллельно" с ***рядом*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ рассмотрим для каждого n ***конечную сумму***

$$\mathbf{s}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k \ ,$$

которая ***называется*** n-ой ***частичной суммой*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$.

Определение 42. ***Ряд*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ *называется* ***сходящимся*** *к* ***элементу*** $\mathbf{x}$ *, если* ***последовательность*** *частичных сумм этого ряда* $\{\mathbf{s}_n\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k\right\}$ ***сходится*** *к* $\mathbf{x}$ *, т.е.*

$$\|\mathbf{s}_n - \mathbf{x}\|_{\mathbf{X}} \to 0 \quad при \quad n \to \infty \ .$$

Элемент $\mathbf{x}$ *пространства* $\mathbf{X}$ *, к которому сходится последовательность* $\{\mathbf{s}_n\}$ *частичных сумм ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ *, называется* ***суммой ряда*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$.

В силу ***полноты*** пространства $\mathbf{X}$ для сходимости ***последовательности*** частичных сумм $\{\mathbf{s}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***необходимо*** и ***достаточно***, чтобы эта последовательность была ***фундаментальной***.

Сделанное выше замечание позволяет сформулировать ***достаточное*** условие сходимости рядов из элементов в ***банаховом*** пространстве.

Утверждение 21 (***Обобщённый признак К. Вейерштрасса).*** *Пусть все* ***элементы*** $\{\mathbf{x}_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$ ***ряда*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***мажорируются*** *числами* $\{\alpha_k\}$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$ *т.е. для всех* $k = 1, 2, 3, \ldots$ *имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{x}_k\|_{\mathbf{X}} \leqslant \alpha_k \ .$$

Пусть ***числовой ряд***

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \ ,$$

составленный из ***неотрицательных*** *чисел* α_k *,* ***сходится****.*

Тогда ***ряд*** $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***сходится*** *в банаховом пространстве* $\mathbf{X}$ *к некоторому его* ***элементу*** $\mathbf{x}$ *.*

Доказательство. Неравенство

$$\|\,\mathbf{s}_{n+p} - \mathbf{s}_n\,\|_{\mathbf{X}} = \|\,\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{x}_{n+2} + \cdots + \mathbf{x}_{n+p}\,\|_{\mathbf{X}} \leqslant \alpha_{n+1} + \alpha_{n+2} + \cdots + \alpha_{n+p}$$

показывает, что в силу ***критерия Коши*** для ***числового*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, правая часть этого неравенства $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k \to 0$ при $n \to \infty\,, \forall\, p > 0$ и, следовательно, ***последовательность*** $\mathbf{s}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{x}_k$ ***частичных сумм*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$ ***фундаментальна*** в $\mathbf{X}$.

Поэтому в пространстве $\mathbf{X}$ ***существует*** такой элемент $\mathbf{x}$, что $\mathbf{x} = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{s}_n$.

Этот ***элемент*** $\mathbf{x}$ и будет ***суммой*** ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{x}_k$. □

Упражнения и задачи к параграфу 1.

1. Доказать ***бесконечномерность*** пространства $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

2. Множество $\mathbf{M}$ в ***линейном*** пространстве $\mathbf{X}$ называется ***выпуклым***, если оно вместе с любыми своими точками $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ содержит все точки $\mathbf{z} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$, такие, что $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta = 1$, или, выражаясь ***геометрическим*** языком, целиком содержит ***отрезок***, концами которого являются точки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

Показать, что любой ***шар*** в линейном ***нормированном*** пространстве является ***выпуклым*** множеством.

3*. Доказать, что ***аксиома треугольника*** в определении линейного ***нормированного*** пространства и условие ***выпуклости единичного шара*** этого пространства ***эквивалентные*** утверждения.

4. Пусть $e_1,\, e_2,\, \ldots,\, e_n$ ***базис*** n-мерного ***линейного*** пространства $\mathbf{X}$.

Тогда ***всякий*** элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ имеет ***единственное*** разложение:

$$\mathbf{x} \;=\; \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \;.$$

Показать, что каждая из формул

$$\|\mathbf{x}\|_I \;=\; \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\,\alpha_j\,|$$

и

$$\|\mathbf{x}\|_{II} \;=\; \sum_{j=1}^{n} |\,\alpha_j\,|$$

определяет ***норму*** в пространстве $\mathbf{X}$.

5. Доказать, что ***нормы*** $\|\mathbf{x}\|_I$ и $\|\mathbf{x}\|_{II}$ в ***любом конечномерном*** линейном пространстве $\mathbf{X}$, введённые в предыдущем упражнении, ***эквивалентны*** (см. определение 39).

2.2 Линейные операторы

Определение и примеры

Определение 43. *Пусть* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *два* ***линейных нормированных пространства****.*

Отображение $\mathbf{A}$ *из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$ *называется* ***линейным оператором****, если для* ***любых*** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X}$ *и* ***любых*** $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$:

$$\mathbf{A}\big(\alpha\,\mathbf{x}_1 \,+\, \beta\,\mathbf{x}_2\big) \;=\; \alpha\,\mathbf{A}\mathbf{x}_1 \,+\, \beta\,\mathbf{A}\mathbf{x}_2 \;.$$

Пример 1. Оператор $\mathbb{O}$ определяется следующим условием: каждому элементу $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{X}$ этот оператор ставит в соответствие нулевой элемент $\mathbb{O}_{\mathbf{X}}$ этого пространства так, что по определению справедлива запись: $\mathbb{O}\mathbf{x} \stackrel{def}{=} \mathbb{O}_{\mathbf{X}}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Пример 2. Оператор $\mathbb{E}$ определяется следующим условием: каждому элементу $\mathbf{x}$ этот оператор ставит в соответствие тот же самый элемент $\mathbf{x}$ этого же пространства так, что по определению справедлива запись: $\mathbb{E}\mathbf{x} \stackrel{def}{=} \mathbf{x}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Пример 3. Оператор $\mathbf{\Lambda}$ определяется следующим условием: при некотором заранее фиксированном числе λ каждому элементу $\mathbf{x}$ этот оператор ставит в соответствие элемент $\lambda \cdot \mathbf{x}$ этого же пространства: $\mathbf{\Lambda}\mathbf{x} \stackrel{def}{=} \lambda \cdot \mathbf{x}$.

Пример 4. Пусть $\alpha\,(t)$ непрерывная на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функция одного вещественного переменного t, т.е. некоторый фиксированный ***элемент*** пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Для всякого элемента $\mathbf{x}$ пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ определим оператор $\mathbf{A}$ (умножения на функцию) $\alpha\,(t)$ следующим условием: каждому элементу $\mathbf{x} \stackrel{def}{=} x\,(t)$ этот оператор ставит в соответствие элемент $\alpha\,(t) \cdot \mathbf{x}$ этого же пространства, т.е. $\mathbf{A}\mathbf{x} \stackrel{def}{=} \alpha\,(t) \cdot \mathbf{x}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X} = \mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Непрерывность и ограниченность линейного оператора. Норма оператора

Теорема 9. ***Линейный оператор*** $\mathbf{A}$, ***непрерывный*** *в точке* $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{X}$ ***непрерывен*** *в* ***любой*** *другой точке линейного пространства* $\mathbf{X}$.

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbf{A}$ ***непрерывен*** в точке $\mathbf{x}_0$, то есть $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\mathbf{x}_0, \varepsilon)$ такое, что:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_{\mathbf{Y}} \leqslant \varepsilon, \qquad \text{если} \quad \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}} \leqslant \delta \tag{1}$$

Если $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ ***любые*** точки $\mathbf{X}$, то, обозначая $\mathbf{x} = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) + \mathbf{x}_0$ и используя ***линейность*** $\mathbf{A}$, из (1) получим:

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x}_0) - \mathbf{A}\mathbf{x}_0\|_{\mathbf{Y}} \leqslant \varepsilon, \quad \text{если} \quad \|(\mathbf{u} - \mathbf{v} + \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}_0\|_{\mathbf{X}} \leqslant \delta \,.$$

То есть:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{u} - \mathbf{A}\mathbf{v}\|_{\mathbf{Y}} \leqslant \varepsilon, \qquad \text{если} \quad \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_{\mathbf{X}} \leqslant \delta \,.$$

Но, справедливость этих неравенств, как раз, и означает ***непрерывность*** оператора $\mathbf{A}$ в точке $\mathbf{u}$ (или $\mathbf{v}$). □

В дальнейшем мы будем опускать нижние индексы у знака ***нормы***, указывающие на ***пространство***, в котором она определена, если это ясно из контекста.

Определение 44. *Оператор* $\mathbf{A}$ *называется* ***ограниченным****, если* $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$, $\exists$ ***постоянная*** $\mathbf{M} > 0$ *такая, что:*

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \mathbf{M} \cdot \|\mathbf{x}\| \,.$$

Множество *всех таких возможных постоянных* $\mathbf{M}$ ***ограничено снизу*** *нулем и, поэтому, имеет* ***нижнюю грань****.*

Эта ***нижняя грань обозначается*** $\|\mathbf{A}\|$ *и называется* ***нормой оператора*** $\mathbf{A}$.

Утверждение 22.

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\| = 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| .$$

Доказательство. Обозначим правую часть этого предполагаемого равенства через $\mathbf{L}$.

Из ***ограниченности*** $\mathbf{A}$ следует $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\|$ и поэтому $\mathbf{L} \leqslant \|\mathbf{A}\|$.

С другой стороны

$$\left\| \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right\| = 1, \quad \text{и потому:} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \left\| \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \right) \right\| \cdot \|\mathbf{x}\| \leqslant \mathbf{L} \, \|\mathbf{x}\| .$$

Следовательно $\|\mathbf{A}\| \leqslant \mathbf{L}$.

Окончательно: $\|\mathbf{A}\| = \mathbf{L} = \sup\limits_{\|\mathbf{x}\| = 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$. □

Оказывается, что свойства ***ограниченности*** и ***непрерывности*** линейного оператора не являются ***независимыми***.

Теорема 10. ***Ограниченный линейный*** *оператор* $\mathbf{A}$ ***непрерывен*** *и, наоборот,* ***непрерывный линейный*** *оператор* $\mathbf{A}$ ***ограничен***.

Доказательство. Действительно, в силу ***ограниченности*** $\mathbf{A}$,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \leqslant \varepsilon ,$$

если

$$\|\mathbf{x}\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\|\mathbf{A}\|} .$$

Но это означает ***непрерывность*** $\mathbf{A}$ в точке $\mathbb{O}$, а, поэтому, и в ***любой*** точке пространства $\mathbf{X}$.

Доказательство ***обратного*** утверждения проведем ***от противного***.

Пусть $\mathbf{A}$ ***непрерывен*** в $\mathbb{O}$, но ***не ограничен***.

Тогда найдется последовательность точек $\{\mathbf{x}_n\}$, $\|\mathbf{x}_n\| = 1$, такая, что:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x_n}\| \geqslant n, \quad n = 1, \ldots$$

Последовательность

$$\mathbf{y}_n = \frac{\mathbf{x}_n}{n}$$

сходится к $\mathbb{O}$ при $n \to \infty$, но $\|\mathbf{A}\mathbf{y}_n\| \geqslant 1, \quad n = 1, \ldots.$

Это ***противоречит*** непрерывности $\mathbf{A}$ в точке $\mathbb{O}$. $\square$

Линейный оператор в $\mathbb{R}^n_{\mathbf{max}}$

Пример 5. В ***линейной алгебре*** показывается, что ***любое линейное*** отображение $\mathbf{A}$ пространства $\mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^m$ задается ***матрицей*** $\mathcal{A}$, имеющей n столбцов и m строк:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Действие этого оператора на ***элемент*** $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ***определяется*** как ***умножение матрицы*** $\mathcal{A}$ на ***столбец*** $(x_1, \ldots, x_n)$ по известному из линейной алгебры классическому правилу.

Введем в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ ***норму***:

$$\|\mathbf{x}\| = \max_i |x_i| .$$

Утверждение 23. ***Оператор*** $\mathbf{A}$, *порожденный матрицей* $\{a_{ij}\}$, *— линейный* ***ограниченный*** *оператор из* $\mathbb{R}^n_{\mathbf{max}}$ *в* $\mathbb{R}^n_{\mathbf{max}}$.

Доказательство. Действительно, образ элемента $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ есть элемент $(y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, где

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j, \qquad \|\mathbf{y}\| = \max_i \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \right| \leqslant \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \right) \cdot \|\mathbf{x}\| \,.$$

Отсюда:

$$\|\mathbf{A}\| \leqslant \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \right) \tag{2}$$

Покажем, что ***правая*** часть неравенства равна его ***левой*** части.

Пусть ***максимум*** в правой части (2) ***достигается*** на индексе $i_0 \in \{1, \ldots, m\}$.

Рассмотрим ***элемент*** $\mathbb{R}^n$, определенный следующим образом: $x_j = sgn\,(a_{i_0 j})$, где $sgn\,(\,\cdot\,)$ означает ***знак*** соответствующего элемента матрицы.

Ясно, что $\|\mathbf{x}\| = 1$. Кроме того:

$$y_{i_0} = \sum_{j=1}^{n} |\, a_{i_0 j} \,|, \quad \text{а} \quad |y_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \quad \text{при } i \neq i_0 \,.$$

Следовательно:

$$\max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \right) = \|\mathbf{y}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| \leqslant \|\mathbf{A}\| \leqslant \max_i \left(\sum_{j=1}^{n} |\, a_{ij} \,| \right)$$

$\square$

Линейный интегральный оператор, действующий из $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$

Пример 6. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***интегральный оператор***, действующий по формуле:

$$\mathbf{Ax} \overset{def}{=} \mathbf{A}x\,(t) \;=\; \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(t,\, s)x(s)\,ds, \quad \mathbf{a} \leqslant s,\, t \leqslant \mathbf{b}\;.$$

Функция $\mathcal{K}\,(t,\, s)$ называется ***ядром*** интегрального оператора.

Мы предполагаем функцию $\mathcal{K}\,(t,\, s)$ ***непрерывной*** на множестве $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \times [\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Выше определённый интегральный оператор, обычно, называют интегральным оператором ***Фредгольма***.

Непосредственно из свойств интеграла следует ***линейность*** введенного оператора.

Кроме того:

$$\left| \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(t,\, s)x(s)\,ds \right| \leqslant \|\,\mathbf{x}\,\| \cdot \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\,\mathcal{K}\,(t,\, s)\,|\; ds\;.$$

Оценка, полученная в правой части неравенства, не зависит от t и поэтому:

$$\|\,\mathbf{Ax}\,\| \leqslant \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\,\mathcal{K}\,(t,\, s)\,|\; ds \cdot \|\,\mathbf{x}\,\|\;,$$

и

$$\|\,\mathbf{A}\,\| \leqslant \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\,\mathcal{K}\,(t,\, s)\,|\; ds \tag{3}$$

Замечание. Можно показать, что оценка (3) является ***точной***: ***норма*** оператора $\mathbf{A}$ равна правой части ***оценки*** (3).

Пример неограниченного оператора

Пусть $\mathbf{X}$ ***линейное подпространство*** в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, состоящее из всех ***непрерывно дифференцируемых*** функций.

Линейное подпространство $\mathbf{X}$ — линейное ***нормированное пространство*** с ***нормой***, наследуемой из $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Рассмотрим ***оператор дифференцирования***

$$\mathbf{Ax} \stackrel{def}{=} \frac{d}{dt}\,[\,x\,(t)\,]\ .$$

Оператор $\mathbf{A}$, очевидно, ***линеен***. Покажем, что ***оператор*** $\mathbf{A}$ ***неограничен***, как оператор из $\mathbf{X}$ в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

В самом деле, ***множество*** элементов

$$\mathbf{x}_n \stackrel{def}{=} x_n\,(t) \equiv sin\,nt, \quad n = 1,\,2,\,3,\,\ldots\ ,$$

пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ при

$$n > \frac{\boldsymbol{\pi}}{2\max\{\,|\mathbf{a}|,\,|\mathbf{b}|\,\}}\ ,$$

принадлежит ***единичной сфере*** пространства $\mathbf{X}$ с центром в нуле: $\mathbb{O} \stackrel{def}{=} x\,(t) \equiv 0$.

Если же к указанным функциям применить оператор $\mathbf{A}$, то соответствующие ***образы*** указанных элементов $\mathbf{Ax}_n$ ***не*** будут ***ограничены все*** сразу, при достаточно большом n, никакой фиксированной постоянной:

$$\|\mathbf{Ax}_n\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} = \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} \left|\frac{d}{dt}\,[x_n\,(t)]\right| = \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} |n\cdot cos\,nt| = n\cdot \max_{\mathbf{a}\leqslant t\leqslant \mathbf{b}} |cos\,nt| = n \to \infty\,.$$

Заметим, что рассматривая оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$, как оператор действующий из пространства $\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, являющегося собственной частью $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, мы получим ***ограниченный*** оператор, т.к.

$$\left\| \frac{d}{dt}\mathbf{x} \right\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} = \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \left| \frac{d}{dt}\,[\,x\,(t)\,] \right| \leqslant \|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \ ,$$

в силу чего

$$\left\| \frac{d}{dt} \right\|_{\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \leqslant 1 \ .$$

Вполне непрерывные операторы

Определение 45. ***Линейный*** *оператор* $\mathbf{A}$, *действующий из* ***линейного нормированного пространства*** $\mathbf{X}$ *в* ***линейное нормированное пространство*** $\mathbf{Y}$, *называется* ***вполне непрерывным*** *(компактным) оператором, если образ* ***любой ограниченной*** *в* $\mathbf{X}$ *последовательности* $\{\,\mathbf{x}_n\,\}$ *содержит* ***сходящуюся*** *в* $\mathbf{Y}$ ***подпоследовательность.***

Пример. Любой ***линейный*** оператор, действующий из пространства $\mathbb{E}^m$ в пространство $\mathbb{E}^n$, — ***вполне непрерывен.***

Действительно, линейный оператор $\mathbf{A}$ является ***ограниченным*** и потому всякое ***ограниченное*** в пространстве $\mathbb{E}^m$ множество $\mathbf{M}$ переводит в ***ограниченное*** в пространстве $\mathbb{E}^n$ множество $\mathbf{N} = \mathbf{A}\,(\,\mathbf{M}\,)$.

А в силу ***конечной*** размерности n пространства $\mathbb{E}^n$, множество $\mathbf{N}$, ***компактно*** в пространстве $\mathbb{E}^n$ для ***всякого*** ограниченного множества $\mathbf{M}$, что и означает ***полную непрерывность*** оператора $\mathbf{A}$, т.к. в $\mathbb{E}^n$ ***всякая*** последовательность Коши сходится.

Пример. Рассмотрим ***интегральный оператор Фредгольма*** из примера 6.

Если ядро $\mathcal{K}(t,\ s)$ этого оператора ***непрерывно*** на множестве $[\mathbf{a},\mathbf{b}]\times[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то оператор Фредгольма является ***вполне непрерывным*** оператором из пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Действительно, пусть

$$y\,(t) \;=\; \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(t,\ s)x(s)\,ds\ .$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ шар радиуса r — множество $\mathbf{M}_r$ элементов этого пространства таких, что $\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \;\leqslant\; r$.

Обозначим $\mathbf{K} \;=\; \max\limits_{[\mathbf{a},\mathbf{b}]\,\times\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} |\,\mathcal{K}\,(\,t,\ s\,)\,|$.

Тогда

$$\max_{\mathbf{a}\,\leqslant\, t\,\leqslant\,\mathbf{b}} |\,y\,(t)\,| \;\leqslant\; \mathbf{K}\cdot|\,\mathbf{b}\;-\;\mathbf{a}\,|\cdot \max_{\mathbf{a}\,\leqslant\, s\,\leqslant\,\mathbf{b}} |\,x\,(s)\,|\ ,$$

а потому:

$$\|\,\mathbf{y}\,\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \;=\; \max_{\mathbf{a}\,\leqslant\, t\,\leqslant\,\mathbf{b}} |\,y\,(t)\,| \;\leqslant\; \|\,\mathbf{A}\,\|\cdot r\ ,$$

что означает ***равномерную ограниченность*** всех функций из образа $\mathbf{A}\,(\,\mathbf{M}_r\,)$.

Т.к. функция $\mathcal{K}\,(\,t,\ s\,)$ ***непрерывна*** на ***компакте*** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]\;\times\;[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то, в силу утверждения 16 главы 1, эта функция ***равномерно непрерывна*** на указанном компакте, а потому $\forall\,\varepsilon\;>\;0\quad\exists\,\delta\,(\varepsilon)\;>\;0$ такое, что, в частности:

$$|\,\mathcal{K}\;(\,t_1,\ s\,)\;-\mathcal{K}\;(\,t_2,\ s\,)\,|\;<\;\frac{\varepsilon}{r\cdot|\mathbf{b}-\mathbf{a}|},\quad \text{если}\quad |\,t_1\;-\;t_2\,|\;<\;\delta\,(\varepsilon),$$

$$t_1,\,t_2\;\in\;[\mathbf{a},\mathbf{b}],\quad\forall\,s\;\in\;[\mathbf{a},\mathbf{b}]\ .$$

Поэтому все функции $y(t)$ из образа $\mathbf{A}(\mathbf{M}_r)$ ***равностепенно непрерывны***, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что:

$$|\, y\,(t_1) - y\,(t_2)\,| = \left| \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t_1, s) x(s)\, ds - \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t_2, s) x(s)\, ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \big| \mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s) \big| \cdot \big| x(s) \big|\, ds < \varepsilon .$$

Поэтому, если $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{C}[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \leqslant r$, то функции, ***определяемые*** интегралом (1), согласно теореме Арцела (см. § 5, главы 1) образуют подмножество, которое ***компактно*** в $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

В силу полноты пространства $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, из этого следует ***полная непрерывность*** рассматриваемого интегрального оператора.

Утверждение 24. *Всякий* ***вполне непрерывный*** *оператор* $\mathbf{A}$ ***непрерывен****.*

Доказательство. Действительно, множество $\{\mathbf{Ax} : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ ***компактно*** в $\mathbf{Y}$ и, поэтому, ***ограничено***, то есть $\exists\, \mathbf{C} > 0$:

$$\sup_{\|\mathbf{x}\| = 1} \|\mathbf{Ax}\| < \mathbf{C} .$$

Следовательно оператор $\mathbf{A}$ ***ограничен*** и, поэтому, ***непрерывен***. □

Упражнения и задачи к параграфу 2.

1. Показать, что ***линейный*** оператор, действующий из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, переводит ***нуль*** пространства $\mathbf{X}$ – $\mathbb{O}_{\mathbf{X}}$, в ***нуль*** пространства $\mathbf{Y}$ – $\mathbb{O}_{\mathbf{Y}}$.

2. Показать, что в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ввести ***норму*** по формуле:

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^{n} |\, x_i\,| .$$

Показать, что ***норма линейного оператора*** $\mathbf{A}$ примера (1) в этом случае дается равенством:

$$\| \mathbf{A} \| = \max_j \left(\sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | \right)$$

Указание. Использовать в рассуждениях ***элемент*** пространства $\mathbb{R}^n$ вида: $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, где 1 стоит на месте с номером j_0, на котором ***достигается*** максимум правой части оценки.

3. Показать, что ***линейный оператор*** $\mathbf{A}$, действующий из ***евклидова*** пространства $\mathbb{E}^n$ в аналогичное $\mathbb{E}^m$, ***норма*** которого определяется формулой (1), имеет следующую ***оценку*** нормы:

$$\| \mathbf{A} \| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} {a_{ij}}^2 \right)^{1/2} .$$

4*. Доказать ***точность*** оценки (3), в случае $\mathcal{K}(t, s) \geqslant 0$.

5. Найти ***норму*** оператора $\mathbf{A}$, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = x(t)$ в пространстве $\mathbb{L}_2$ по формуле $\mathbf{Ax} = t \cdot x(t)$.

6. Найти ***норму*** оператора $\mathbf{A}$, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = x(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{1}, \mathbf{2}]$ по формуле $\mathbf{Ax} = t^2 \cdot x(1)$.

7. Найти ***норму*** оператора $\mathbf{A}$, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = x(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ по формуле $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathcal{K}(t, s) x(s)\, ds$, если ***ядро*** этого интегрального оператора имеет вид: $\mathcal{K}(t, s) = t \cdot s$.

8. Доказать ***линейность*** и найти ***норму*** оператора $\mathbf{A}$, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ в пространстве $\ell_\mathbf{2}$ по формуле: $\mathbf{y} = \mathbf{Ax} = (x_2, \ldots, x_{n+1}, \ldots)$.

9. Доказать ***линейность*** и найти ***норму*** функционала f, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ в пространстве $\ell_\mathbf{2}$

по формуле:

$f(\mathbf{x}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$.

10. Доказать ***линейность*** и оценить ***норму*** функционала f, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = x(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ по формуле: $f(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}} x(t)\,dt - \int\limits_{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}^{\mathbf{1}} x(t)\,dt$.

11. Доказать ***линейность*** и ***оценить норму функционала*** f, действующего на каждый элемент $\mathbf{x} = x(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ по формуле: $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot x(0) + \mathbf{b} \cdot x(1)$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ некоторые ***фиксированные*** вещественные числа.

2.3 Пространство линейных операторов. Линейные операторные уравнения и обратные операторы

Линейное пространство линейных операторов

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ два ***линейных*** оператора, определенных в ***линейном*** пространстве $\mathbf{X}$ и действующих в ***линейное*** пространство $\mathbf{Y}$.

Тогда, естественным образом можно определить ***линейные*** операторы $\mathbf{C} \overset{def}{=} \mathbf{A} + \mathbf{B}$ и $\mathbf{D} \overset{def}{=} \lambda \cdot \mathbf{A}$ (или $\lambda \cdot \mathbf{B}$), где λ произвольное ***действительное*** число.

Определение 46. *Именно, по определению:*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\,\mathbf{x} \overset{def}{=} \mathbf{Ax} + \mathbf{Bx} .$$

$$(\lambda \cdot \mathbf{A})\,\mathbf{x} \overset{def}{=} \lambda\,(\mathbf{Ax}) .$$

Определение 47. *Можно также определить* ***нулевой*** *оператор* $\mathbf{O}$:

$$\mathbf{Ox} \stackrel{def}{=} \mathbb{O}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$$

и ***противоположный*** *оператор* $(-\mathbf{A})$ *к (произвольному) линейному оператору* $\mathbf{A}$:

$$(-\mathbf{A})\,\mathbf{x} \stackrel{def}{=} -(\mathbf{Ax}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}\,.$$

Утверждение 25. *Совокупность всех* ***линейных операторов****, действующих из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$*, — образует* ***линейное пространство*** *—* $\mathbf{L}\,(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$*.*

Доказательство сформулированного утверждения состоит в непосредственной проверке выполнения всех аксиом, определяющих ***линейное пространство***.

Мы рекомендуем, чтобы читатель самостоятельно проверил ***все*** восемь аксиом из определения линейного пространства и таким образом ***убедился*** в справедливости сформулированной теоремы.

Норма в линейном пространстве линейных операторов

Утверждение 26. *Если* $\mathbf{X}$ *и* $\mathbf{Y}$ *— линейные* ***нормированные*** *пространства, то множество* ***линейных ограниченных*** *операторов, действующих из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$*, само является* ***линейным нормированным пространством****,* ***норма*** *каждого* ***элемента*** *которого есть введенная нами в параграфе* 2 ***норма*** *линейного оператора.*

Полученное ***линейное нормированное пространство*** *будем* ***обозначать*** $\mathbf{L_O}\,(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$*, чтобы отличать его от* ***линейного*** *простран-*

ства $\mathbf{L}\,(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})\,,$ *введенного выше.*

Доказательство сформулированного утверждения состоит в непосредственной проверке выполнения для $\mathbf{L_O}\,(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})$ всех 3-х аксиом, определяющих линейное ***нормированное*** пространство.

Читателю мы рекомендуем самостоятельно провести ***все*** необходимые рассуждения.

Сопряжённое пространство к линейному пространству

Особо отметим частный случай пространства $\mathbf{L_O}\,(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})\,,$ в котором в качестве $\mathbf{Y}$ фигурирует пространство $\mathbb{E}^1\,.$

Определение 48. *Пространство* $\mathbf{L_O}\left(\mathbf{X},\,\mathbb{E}^1\right)$ *называется пространством,* ***сопряжённым*** *к* $\mathbf{X}\,,$ *и, обычно,* ***обозначается*** $\mathbf{X}^*\,.$

Элементы *пространства* $\mathbf{X}^*$ *— всевозможные* ***непрерывные*** *(ограниченные)* ***линейные функционалы*** *над* $\mathbf{X}\,.$

Для пространства $\mathbf{X}^*\,,$ сопряжённого к заданному ***линейному нормированному пространству*** $\mathbf{X}\,,$ справедливо одно очень важное свойство — такое пространство всегда ***полно***.

Отмеченное свойство вытекает из значительно более общего факта:

Теорема 11. *Если* $\mathbf{Y}$ *—* ***банахово*** *пространство, то и* $\mathbf{L_O}\,(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})$ *—* ***банахово*** *пространство.*

Доказательство. Действительно, пусть $\{\,\mathbf{A}_n\,\}$ ***фундаментальная*** последовательность операторов из пространства $\mathbf{L_O}\,(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})\,,$ то есть

$$\lim_{m,\,n\,\to\,\infty}\|\,\mathbf{A}_m\;-\;\mathbf{A}_n\,\|\;=\;0 \tag{1}$$

Тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$: $\lim\limits_{m,n\to\infty} \| \mathbf{A}_m\mathbf{x} - \mathbf{A}_n\mathbf{x} \| = 0$, в силу чего последовательность $\{\mathbf{A}_n\mathbf{x}\}$ ***фундаментальна*** в $\mathbf{Y}$.

В силу ***полноты*** $\mathbf{Y}$, последовательность $\{\mathbf{A}_n\mathbf{x}\}$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ ***сходится*** в $\mathbf{Y}$ к некоторому его ***элементу***, вообще говоря, зависящему от элемента $\mathbf{x}$.

Таким образом, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$ выше определено (предельное) ***отображение***, которое мы обозначим через $\mathbf{A}$ и которое, в силу своего определения, действует из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$.

По определению отображения $\mathbf{A}$, используя свойства предельного перехода в линейном нормированном пространстве, получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{A}_n(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lim_{n\to\infty}(\lambda\mathbf{A}_n\mathbf{x} + \mu\mathbf{A}_n\mathbf{y}) = \\ &= \lambda\lim_{n\to\infty}\mathbf{A}_n\mathbf{x} + \mu\lim_{n\to\infty}\mathbf{A}_n\mathbf{y} = \lambda\mathbf{A}\mathbf{x} + \mu\mathbf{A}\mathbf{x}, \end{aligned}$$

что и означает ***линейность*** получившегося отображения $\mathbf{A}$.

В силу ***фундаментальности*** последовательности $\{\mathbf{A}_n\}$, ***нормы*** всех операторов $\mathbf{A}_n$ ограничены в совокупности:
$\exists \mathbf{C} > 0 \quad \|\mathbf{A}_n\| \leqslant \mathbf{C}, \quad \forall n = 1, 2, \ldots$.

Далее, в силу ***непрерывности нормы***:

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \lim_{n\to\infty}\|\mathbf{A}_n\mathbf{x}\| \leqslant \mathbf{C}\,\|\mathbf{x}\|,$$

что означает ***ограниченность*** отображения $\mathbf{A}$.

Поэтому, сконструированное нами ***отображение*** $\mathbf{A}$ будет принадлежать $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Остается доказать, что последовательность операторов $\{\mathbf{A}_n\}$ сходится при $n \to \infty$ к построенному выше оператору $\mathbf{A}$:

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathbf{A}_n - \mathbf{A} \| = 0 \tag{2}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу (1) при достаточно больших m и n, $(m, n \geqslant N(\varepsilon))$:

$$\| \mathbf{A}_m - \mathbf{A}_n \| \leqslant \varepsilon \|\mathbf{x}\|$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$.

В результате будем иметь неравенство:

$$\|\mathbf{A_n} - \mathbf{A}\| \leqslant \varepsilon \|\mathbf{x}\| \quad \text{при} \quad n \geqslant N(\varepsilon) \, ,$$

которое доказывает соотношение (2), а с ним и наше утверждение. □

Следствие 5. *Так как* $\mathbb{E}^1$ *—* ***банахово*** *пространство, то, в силу доказанного утверждения,* $\mathbf{X}^* = \mathbf{L_O}\left(\mathbf{X}, \mathbb{E}^1\right)$ *—* ***всегда банахово****, независимо от того* ***полно*** $\mathbf{X}$ *или нет.*

Поточечная сходимость в пространстве линейных операторов

В ***линейном нормированном пространстве*** операторов $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, кроме стандартной сходимости операторов ***по норме***, часто приходится рассматривать и другой вид сходимости операторов, который называется ***поточечной*** сходимостью операторов в $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Определение 49. *Последовательность операторов* $\{\mathbf{A}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *из пространства* $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *сходится* ***поточечно***
к оператору $\mathbf{A} \in \mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, *если* $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}$:

$$\|\mathbf{A}_n\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_{\mathbf{Y}} \to 0 \, , \quad \text{при } n \to \infty \, .$$

Для ***поточечной сходимости*** *операторов соответствующим образом определяются и* ***фундаментальные*** *(относительно* ***поточечной*** *сходимости) последовательности операторов* $\{\mathbf{A}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ *из* ***пространства*** $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Замечание. Очевидно, что в пространстве операторов $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ из сходимости последовательности операторов $\{\mathbf{A}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ ***по норме*** к оператору $\mathbf{A}$, следует ***поточечная*** сходимостью этой же последовательности операторов $\{\mathbf{A}_n\}$ к тому же самому оператору $\mathbf{A}$ в $\mathbf{L_O}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Обратное заключение ***неверно***, что показывает нижеследующий

Пример. В линейном нормированном пространстве $\ell_\mathbf{2}$ рассмотрим ***последовательность*** операторов $\{\mathbf{P}_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ определяемых для всякого элемента $\mathbf{x} \overset{def}{=} (x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ пространства $\ell_\mathbf{2}$ следующим образом:

$$\mathbf{P}_n\mathbf{x} \overset{def}{=} (x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \overset{def}{=} \mathbf{x}_n .$$

Т.к. $\mathbf{x} \in \ell_\mathbf{2}$, то

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{P}_n\mathbf{x}\|_{\ell_\mathbf{2}} \overset{def}{=} \|(0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)\|_{\ell_\mathbf{2}} = \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} x_j^2\right)^{1/2} \to 0$$

при $n \to \infty$, что, как раз, и означает, что ***последовательность*** операторов $\{\mathbf{P}_n\}$ ***поточечно*** сходится к ***единичному*** оператору $\mathbf{E}$ в пространстве $\ell_\mathbf{2}$, переводящему всякий элемент пространства $\mathbf{x}$ из $\ell_\mathbf{2}$ снова в этот же элемент $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{P}_n\mathbf{x} \to \mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad \text{при } n \to \infty .$$

Однако, сходимость последовательности операторов $\{\mathbf{P}_n\}$ ***по норме*** к тому же ***единичному*** оператору $\mathbf{E}$ ***не имеет места***, т.е.

$$\|\mathbf{E}-\mathbf{P}_n\|_{\mathbf{L_O}(\ell_2,\ell_2)} \not\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty\,,$$

т.к. при ***любом*** n, например, для вектора $\mathbf{e}_{n+1} \overset{def}{=} (0,\,\ldots\,,0,\,1,\,0,\,\ldots)$ из ℓ_2, где 1 стоит на месте с номером $n+1$, имеем:

$$\|\mathbf{E}\mathbf{e}_{n+1}-\mathbf{P}_n\mathbf{e}_{n+1}\|_{\ell_2} = \|\mathbf{e}_{n+1}-\mathbb{O}\|_{\ell_2} = \|\mathbf{e}_{n+1}\|_{\ell_2} = 1\,.$$

Поэтому, для ***всех*** n

$$\|\mathbf{E}-\mathbf{P}_n\|_{\mathbf{L_O}(\ell_2,\ell_2)} = \sup_{\|\mathbf{x}\|_{\ell_2}=1}\|\mathbf{E}\mathbf{x}-\mathbf{P}_n\mathbf{x}\|_{\ell_2} \geqslant \|\mathbf{E}\mathbf{e}_{n+1}-\mathbf{P}_n\mathbf{e}_{n+1}\|_{\ell_2} = 1 \not\to 0\,.$$

Произведение операторов и обратный оператор

Определение 50. *Если* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ *— три* ***линейных*** *пространства, оператор* $\mathbf{A}$ *действует из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$, *а* $\mathbf{B}$ *— оператор, действующий из* $\mathbf{Y}$ *в* $\mathbf{Z}$, *то можно определить* ***произведение*** *(композицию) операторов* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x})\,.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{C}$ *действует из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Z}$ *и будет* ***линейным*** *оператором, если* ***линейны*** *оба оператора* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$.

Определение 51. *Оператор* $\mathbf{C}$, ***действующий из*** $\mathbf{Y}$ ***в*** $\mathbf{X}$ *называется* ***обратным*** *к оператору* $\mathbf{A}$, *действующему из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$, *если:*

$$\mathbf{CAx} = \mathbf{x}\,, \qquad \forall\,\mathbf{x} \in \mathbf{X}$$
$$\tag{3}$$
$$\mathbf{ACy} = \mathbf{y}\,, \qquad \forall\,\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$$

Утверждение 27. ***Обратный*** *оператор, если он* ***существует****, —* ***единственен****.*

Доказательство. Действительно, если $\mathbf{D}$ некоторый другой ***обратный*** к $\mathbf{A}$, то , в силу второго из равенств (3): $\mathbf{D}\,(\,\mathbf{AC}\,)\,\mathbf{y} = \mathbf{Dy}$, а, в силу первого равенства (3) $(\,\mathbf{DA}\,)\,\mathbf{Cy} = \mathbf{Cy}$, следовательно
$\mathbf{Cy} = \mathbf{Dy}$, $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, что означает совпадение операторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{C}$. □

Обратный к $\mathbf{A}$ оператор, который выше, в формуле (3) был обозначен $\mathbf{C}$, обычно ***обозначается*** символом $\mathbf{A}^{-1}$.

Теорема 12. ***Существование обратного*** *оператора к оператору* $\mathbf{A}$ ***эквивалентно однозначной разрешимости*** *операторного уравнения:*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \quad \forall\,\mathbf{y} \in \mathbf{Y} \tag{4}$$

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbf{A}$ имеет ***обратный*** — $\mathbf{A}^{-1}$.

Тогда $\forall\,\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ элемент $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$, ***очевидно***, является решением уравнения (4). Покажем, что это решение — ***единственное***.

В самом деле, в противном случае, пусть $\mathbf{z}$ — какое-либо решение (4), отличное от $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$.

Тогда:

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{z}\right) = \mathbb{O}\,.$$

Подействовав на это равенство оператором $\mathbf{A}^{-1}$, получим:

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbb{O} \quad \text{или} \quad \mathbf{z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} .$$

Пусть теперь уравнение (4) ***однозначно разрешимо*** при любом $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Обозначим это решение $\mathbf{C}(\mathbf{y})$.

Покажем, что $\mathbf{C}(\mathbf{y})$ — ***линейное*** отображение.

Действительно, $\forall \mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in \mathbf{Y}$, рассмотрим линейную комбинацию $\alpha \mathbf{y_1} + \beta \mathbf{y_2}$.

Тогда $\mathbf{C}(\alpha \mathbf{y_1} + \beta \mathbf{y_2})$ — ***единственное*** решение уравнения (4) с правой частью $\alpha \mathbf{y_1} + \beta \mathbf{y_2}$.

Но, из ***линейности*** $\mathbf{A}$ следует, что $\alpha \mathbf{C}\mathbf{y_1} + \beta \mathbf{C}\mathbf{y_2}$ — ***решение*** этого же уравнения.

Поэтому, в силу ***единственности*** решения уравнения (4) :

$$\mathbf{C}(\alpha \mathbf{y_1} + \beta \mathbf{y_2}) = \alpha \mathbf{C}\mathbf{y_1} + \beta \mathbf{C}\mathbf{y_2} ,$$

и, следовательно, $\mathbf{C}$ — ***линейный*** оператор.

Непосредственно проверяется, что оператор $\mathbf{C}$ удовлетворяет условиям (3), то есть $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}$. $\square$

Достаточное условие ограниченности обратного оператора

Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ ***линейные нормированные пространства***, то можно ставить вопрос о ***непрерывности*** (ограниченности) ***обратного*** оператора $\mathbf{A}^{-1}$.

Теорема 13. *Пусть* $\mathbf{A}$ ***линейное*** *отображение* ***линейного нормированного пространства*** $\mathbf{X}$ $\boxed{\textit{на}}$ ***линейное нормированное пространство*** $\mathbf{Y}$ *такое, что для некоторого* $\mathbf{m} > 0$ *выполнено условие:*

$$\|\mathbf{Ax}\| \geqslant \mathbf{m} \cdot \|\mathbf{x}\|, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \tag{5}$$

Тогда ***существует*** *обратный оператор* $\mathbf{A}^{-1}$ *и, кроме того, справедлива следующая* ***оценка нормы*** *этого* ***обратного*** *оператора:*

$$\left\| \mathbf{A}^{-1} \right\| \leqslant 1/\mathbf{m} \ .$$

Заметим, что сам оператор $\mathbf{A}$ не предполагается ***непрерывным***.

Доказательство. Действительно, так как $\mathbf{A}$ — отображение $\boxed{\textit{на}}$ $\mathbf{Y}$, то $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, уравнение (4) ***имеет*** решение, которое, в силу (5), ***единственно***.

Следовательно оператор $\mathbf{A}^{-1}$ существует.

Полагая в (5) $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$, получим:

$$\left\| \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y} \right\| \leqslant 1/\mathbf{m} \cdot \| \mathbf{y} \| \ ,$$

что и означает утверждаемую ***оценку нормы*** обратного оператора. □

Пример. Пусть $\mathbf{Y} = \mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, а пространство $\mathbf{X}$ — ***линейное подпространство*** в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, состоящее из ***дифференцируемых*** функций, обращающихся в 0 в точке $t = \mathbf{a}$.

Под $\mathbf{A}$ будем понимать ***оператор***, ставящий в соответствии ***функции***, определенной на $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, — ***ее производную***.

То есть:

$$\mathbf{A}\,x(t) = x'(t), \quad x(\mathbf{a}) = 0 \ .$$

Отображение $\mathbf{A}$ есть отображение $\boxed{\textbf{\textit{на}}}$ $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то есть уравнение

$$x'(t) \;=\; y(t), \quad x(\mathbf{a}) \;=\; 0$$

имеет решение при любой $y(t) \in \mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Оно, ***очевидно***, дается формулой:

$$x(t) \;=\; \int\limits_{\mathbf{a}}^{t} y(\tau)\, d\tau \;.$$

Кроме того, выполнено и условие (5).

Действительно, $\forall\, \mathbf{f} \in \mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, справедливо неравенство:

$$\frac{1}{\mathbf{b}\,-\,\mathbf{a}} \left\| \int\limits_{\mathbf{a}}^{t} f(\tau)\, d\tau \right\| \;\leqslant\; \|\mathbf{f}\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \;.$$

Подставим в него, вместо f, — $x'(t)$, и получим неравенство (5) с

$$\mathbf{m} \;=\; \frac{1}{\mathbf{b}\,-\,\mathbf{a}} \;.$$

Сам оператор $\mathbf{A}\, x(t) \;=\; x'(t)$ не является ***непрерывным*** на $\mathbf{X}$, что было показано ранее в п. 2.2.

Теорема Банаха об обратном операторе

В следующем утверждении линейное нормированное пространство $\mathbf{X}$, на котором задан ***линейный*** оператор $\mathbf{A}$, предполагается ***банаховым***, и оператор $\mathbf{A}$ действует в это же самое пространство $\mathbf{X}$.

Теорема 14 (***С. Банах).*** *Пусть* $\mathbf{A}$ ***ограниченный линейный*** *оператор, действующий из* ***банахова*** *пространства* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{X}$ *и* $\|\,\mathbf{A}\,\| < 1$.

Тогда оператор $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ***имеет ограниченный обратный*** *и при этом:*

$$\left\| (\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \right\| \leqslant \frac{1}{1 - \|\mathbf{A}\|}\ .$$

Здесь под $\mathbf{E}$ *понимается* ***тождественный*** *оператор:* $\mathbf{Ex} = \mathbf{x}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbf{X}$.

Доказательство. Проверим выполнение в случае ***теоремы Банаха*** условий ***теоремы*** 8.

Рассмотрим операторное уравнение:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{y}$$

Его можно записать в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{y} = \mathbf{Bx} \tag{6}$$

В силу условия: $\|\mathbf{A}\| < 1$, оператор в ***правой части*** уравнения (6) ***сжимающий*** $\forall\, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, и уравнение (6) ***имеет единственное*** решение.

Поэтому ***отображение*** $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ является отображением $\boxed{\textbf{\textit{на}}}$ $\mathbf{X}$.

Кроме того, в силу неравенства из утверждения 2 § 1 :

$$\|(\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{Ax}\| \geqslant \Big|\, \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{x}\| \,\Big| = \Big(1 - \|\mathbf{A}\|\Big) \cdot \|\mathbf{x}\|\,,$$

то есть для оператора $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ справедливы условия ***теоремы*** 8, где постоянная $\mathbf{m} = 1 - \|\mathbf{A}\|$.

Теорема Банаха доказана. $\square$

Следствием теоремы Банаха является следующее

Утверждение 28. *Пусть оператор* $\mathbf{A}$, *действующий из* ***банахова*** *пространства* $\mathbf{X}$ $\boxed{\textit{в}}$ ***линейное нормированное пространство*** $\mathbf{Y}$, *имеет* ***ограниченный обратный*** $\mathbf{A}^{-1}$, *и* $\mathbf{B}$ ***линейный непрерывный*** *оператор из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$ *и его* ***норма*** *удовлетворяет неравенству:*

$$\left\| \mathbf{A}^{-1} \right\| \cdot \| \mathbf{B} \| < 1 \tag{7}$$

Тогда оператор $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *также имеет* ***ограниченный обратный***, ***определяемый*** *формулой:*

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{B} \right)^{-1} = \left(\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{A}^{-1} , \tag{8}$$

где $\mathbf{E}$ — ***единичный*** *оператор в* $\mathbf{X}$.

Доказательство. Действительно, оператор $\left(\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \right)$ удовлетворяет условиям ***теоремы Банаха*** и, поэтому, имеет ***обратный*** (из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$).

Формула (8) проверяется ***непосредственно***, с учетом того, что:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A}\left(\mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \right) .$$

$\square$

Если $\mathbf{Y}$ — ***банахово*** пространство, то ***обратный*** к $(\mathbf{A} + \mathbf{B})$ допускает, при условии (7), также и такое ***представление***:

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{B} \right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \left(\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \right)^{-1} ,$$

где $\mathbf{E}$ — ***единичный*** оператор в $\mathbf{Y}$.

Собственные значения и спектр линейного оператора

Определение 52. *Элемент* $\mathbf{x} \neq \mathbb{O}$ ***линейного*** *пространства* $\mathbf{X}$*, в котором действует оператор* $\mathbf{A}$*, называется* ***собственным элементом****, если для некоторого действительного числа* λ *выполнено равенство:*

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x} \tag{9}$$

Число λ *называется* ***собственным значением****, соответствующим* ***собственному элементу*** $\mathbf{x}$*.*

Определение 53. *Значение параметра* λ *называется* ***регулярным*** *для оператора* $\mathbf{A}$*, если при этом значении* λ *существует* ***ограниченный*** *обратный оператор по отношению к оператору* $(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A})$*.*

Этот оператор — $(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \overset{def}{=} \mathbf{R}_{\lambda}^{\mathbf{A}}$*, называется* ***резольвентой*** *оператора* $\mathbf{A}$*, а множество регулярных значений* λ *называется* ***резольвентным*** *множеством оператора* $\mathbf{A}$*.*

Множество значений параметра λ*,* ***не являющихся регулярными****, образуют* ***спектр*** *оператора* $\mathbf{A}$*.*

Таким образом, все ***собственные значения*** λ оператора $\mathbf{A}$ ***входят*** в ***спектр*** этого оператора, т.к. при таком значении λ
$\boldsymbol{ker}(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A}) \overset{def}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} \mid (\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbb{O}\} \neq \{\mathbb{O}\}$,
и, поэтому, оператор $(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ***необратим***.

Пример 1. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ оператор $\mathbf{A}$ ***умножения*** на независимую ***переменную*** t, определяемый для ***всякого***

элемента $\mathbf{x} \equiv x(t)$ этого пространства ***формулой***:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = t \cdot x(t) \, .$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ операторное уравнение:

$$(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A})\,\mathbf{x} = \mathbf{y}, \; \mathbf{y} \in \mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}], \quad \text{или} \quad \lambda\,x(t) - t\,x(t) = y(t) \qquad (10)$$

$\mathbf{1}^\circ$. Если значение λ лежит ***вне отрезка*** $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$, то это ***уравнение*** имеет ***единственное*** решение при любой ***функции*** $y(t) \in \mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$:

$$x(t) = \frac{1}{\lambda - t}\,y(t) \, .$$

Эта формула определяет ограниченный оператор $(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \stackrel{def}{=} \mathbf{R}_\lambda^{\mathbf{A}}$ для $\forall\, y(t) \in \mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$, поэтому все значения λ_0 из ***дополнения*** отрезка $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ являются ***регулярными*** для рассматриваемого оператора, и принадлежат ***резольвентному*** множеству оператора $\mathbf{A}$.

$\mathbf{2}^\circ$. Все значения λ_0 из ***отрезка*** $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ принадлежат ***спектру*** рассматриваемого оператора $\mathbf{A}$, т.к., если в качестве правой части уравнения (10) взять ***любую*** непрерывную на отрезке $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ функцию $y(t)$, такую, что в точке $t = \lambda_0 \, : \, y(\lambda_0) = a \neq 0$, то, уравнение (10) ***не имеет*** решения $x(t) \in \mathbb{C}[\mathbf{0},\mathbf{1}]$, т.к. левая часть ***равна нулю*** при $t = \lambda_0$, а правая часть ***не равна нулю*** в силу условия $y(\lambda_0) = a \neq 0$.

В заключение заметим, что ***ни одно*** значение λ_0 из отрезка $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ ***не является собственным значением*** для оператора $\mathbf{A}$.

Пример 2. Пусть пространство, в котором действует оператор $\mathbf{A}$, есть $\mathbf{X} = \mathbb{E}^n$, а сам оператор $\mathbf{A}$ задан квадратной ***симметричной*** матрицей $\mathcal{A} = (a_{ij}), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Тогда уравнение, определяющее ***резольвенту***, в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\begin{array}{lcl} (a_{1\,1} - \lambda)x_1 + a_{1\,2}x_2 + \cdots + a_{1\,n}x_n & = & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n\,1}x_1 + a_{n\,2}x_2 + \cdots + (a_{n\,n} - \lambda)x_n & = & y_n \end{array}$$

т.е. является системой $\mathbf{n}$ ***алгебраических уравнений*** относительно $\mathbf{n}$ неизвестных $(x_1, \ldots, x_n)$ с ***симметричной*** матрицей $\mathcal{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, и правой частью $(y_1, \ldots, y_n)$.

$\mathbf{1}^\circ$. Если значение λ ***не является корнем характеристического уравнения*** матрицы системы, то ***определитель*** этой системы ***отличен от нуля*** и система имеет ***единственное*** решение при ***любой*** правой части $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{E}^n$, что означает ***регулярность*** всякого такого значения λ, т.к. в данном случае существует ***резольвента***, порождённая ***обратной*** к $(\lambda\,\mathcal{E} - \mathcal{A})$ матрицей, где $\mathcal{E}$ — единичная матрица.

$\mathbf{2}^\circ$. Если значение λ является ***корнем характеристического уравнения*** матрицы системы, то ***определитель*** этой системы ***равен нулю*** и система перестаёт быть разрешимой для ***любой*** правой части, т.е. в рассматриваемом случае оператор $(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A})$, определяемый матрицей $(\lambda\,\mathcal{E} - \mathcal{A})$, — ***необратим***.

Поэтому ***все корни характеристического многочлена*** матрицы системы ***являются точками спектра оператора*** $\mathbf{A}$.

В рассматриваемом случае ***каждый корень характеристического многочлена*** матрицы будет ***собственным значением оператора*** $\mathbf{A}$, порождённого матрицей $\mathcal{A} = (a_{ij}),\ i,\, j = 1, 2, \ldots, n$.

Упражнения и задачи к параграфу 3.

1. Как ***определяются*** элементы $-\mathbf{A}$ и $\mathbb{O}$ в ***линейном пространстве*** линейных операторов $\mathbf{L}\,(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$?

2. Показать выполнение ***аксиом нормы*** в ***линейном пространстве*** линейных ограниченных операторов $\mathbf{L_O}\,(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

3. Показать, что произведение ***линейных ограниченных*** операторов есть ***линейный ограниченный*** оператор и его ***норма*** не превосходит произведения ***норм*** сомножителей.

4. Показать, что оператор ***дифференцирования***, заданный на линейном ***подпространстве*** дифференцируемых функций из $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ с условием $x(\mathbf{a}) = 0$ и ***действующий*** $\boxed{\text{в}}$ $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, не является ***непрерывным***.

Указание. Рассмотреть ***последовательность*** функций:
$x_n\,(t) = 1/n\, \sin n(t - \mathbf{a})$.

5. Показать, что ***в условиях*** теоремы Банаха оператор $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ может быть ***представлен*** в виде ряда: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n$, ***сходящегося*** в смысле ***нормы*** пространства операторов $\mathbf{L_O}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X})$.

6. Пусть $\mathbf{A}$ ***вполне непрерывный*** оператор из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$, а оператор $\mathbf{B}$ ***принадлежит*** $\mathbf{L_O}\,(\mathbf{X}, \mathbf{X})$.

Доказать, что $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$ ***вполне непрерывные*** операторы из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$.

7. В пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ задан ***интегральный*** оператор
$\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(t,\, s)\,x\,(s)\,ds$, и ***последовательность интегральных*** опе-

раторов $\{\mathbf{A}_n\mathbf{x}\} = \left\{\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{P}_n(t, s)x(s)\,ds\right\}$, где ядро $\mathcal{K}(t, s)$ интегрального оператора $\mathbf{A}$ ***непрерывно*** на квадрате $\mathbf{a} \leqslant t, s \leqslant \mathbf{b}$, а ***ядра*** $\mathcal{P}_n(t, s)$ ***последовательности*** операторов $\{\mathbf{A}_n\}$ являются ***полиномами*** степени n, удовлетворяющими условию:
$\max\limits_{\mathbf{a} \leqslant t, s \leqslant \mathbf{b}} |\mathcal{K}(t, s) - \mathcal{P}_n(t, s)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Сходятся ли операторы $\{\mathbf{A}_n\}$ к оператору $\mathbf{A}$ и, если сходятся, то определить тип сходимости: ***по норме*** или ***поточечно*** ?

8. В пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ задан ***интегральный*** оператор $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t, s)x(s)\,ds$, и ***последовательность интегральных*** операторов $\{\mathbf{A}_n\mathbf{x}\} = \left\{\int\limits_{\mathbf{a_n}}^{\mathbf{b_n}} \mathcal{K}(t, s)x(s)\,ds\right\}$, где ядра $\mathcal{K}(t, s)$ интегрального оператора $\mathbf{A}$ и последовательности операторов $\{\mathbf{A}_n\}$ ***непрерывны*** на квадрате $\mathbf{a} \leqslant t, s \leqslant \mathbf{b}$, а соответствующие отрезки $[\mathbf{a_n}, \mathbf{b_n}]$ и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ удовлетворяют условию: $[\mathbf{a_n}, \mathbf{b_n}] \subset [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и $\mathbf{a}_n \to \mathbf{a}$, $\mathbf{b}_n \to \mathbf{b}$ при $n \to \infty$.

Сходятся ли операторы $\{\mathbf{A}_n\}$ к оператору $\mathbf{A}$ и, если сходятся, то определить тип сходимости: ***по норме*** или ***поточечно*** ?

9. Пусть операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ определены формулами: $\mathbf{Ax} = t \cdot x(t)$, $\mathbf{Bx} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} x(\tau)\,d\tau$.

Будут ли операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ***перестановочны*** ?

10. Пусть операторы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ определены формулами: $\mathbf{Ax} = t^2x(t)$, $\mathbf{Bx} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{t}} x(\tau)\,d\tau$ и
$\mathbf{Cx} = x(\mathbf{a}) + t \cdot x(\mathbf{b})$.

Какие из указанных операторов являются ***вполне непрерывными*** ?

11. Пусть оператор $\mathbf{A}$ в пространстве $\ell_{\mathbf{2}}$ определен формулой: $\mathbf{Ax} = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{2j}$.

Показать, что оператор $\mathbf{A}$ ***вполне непрерывный***, если его рассматривать как оператор действующий из пространства $\ell_{\mathbf{2}}$ в $\mathbb{E}^1$.

12. Имеет ли оператор $\mathbf{A}$, действующий на каждый элемент $\mathbf{x} = x(t)$ в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ по формуле $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} x(\tau)\, d\tau$ ***собственные значения*** и ***собственные векторы*** ?

13*. Показать, что для операторного уравнения $\mathbf{Ax} - \lambda\mathbf{x} = \mathbf{y}$, где $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{t}} \mathcal{K}(t, s) x(s)\, ds$, — ***оператор Вольтерра***, а ядро $\mathcal{K}(t, s)$ ***интегрального*** оператора $\mathbf{A}$ непрерывно на квадрате $\mathbf{a} \leqslant t, s \leqslant \mathbf{b}$, все значения параметра $\lambda \neq 0$ ***регулярны***, т.е. интегральное уравнение $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{t}} \mathcal{K}(t, s) x(s)\, ds = \lambda x(t)$ имеет лишь ***тривиальное*** решение.

14. Показать, что если значение параметра λ ***регулярно*** для оператора $\mathbf{A}$, то это же значение λ будет ***регулярным*** и для оператора $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, если $\| \mathbf{B} \|$ достаточно ***мала***.

15. Каковы ***собственные функции интегрального оператора Фредгольма*** $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t, s) x(s)\, ds$, с ***ядром*** $\mathcal{K}(t, s) = \cos(t + s)$ ***на промежутках***:

а). $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$

б). $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left[\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$?

Глава 3

Гильбертово пространство. Линейные отображения гильбертовых пространств

3.1 Определение гильбертова пространства. Простейшие свойства

Пространство со скалярным произведением

Определение 54. ***Линейное пространство*** $\mathbf{X}$ *называется* ***пространством со скалярным произведением****, если любым* ***двум*** *элементам* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X}$ *поставлено в соответствии* ***число*** *(элемент* $\mathbb{R}^1$ *), называемое* ***скалярным произведением*** *этих элементов и обозначаемое* $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$*, таким образом, что выполнены следующие условия —* ***аксиомы скалярного произведения****:*

1°. — ***Аксиома симметрии****:*

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) .$$

2° . — ***Аксиома линейности***:

$$(\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v},\, \mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{u},\, \mathbf{z}) + \mu(\mathbf{v},\, \mathbf{z})\ .$$

3° . — ***Аксиома невырожденности***:

$(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) \geqslant 0,$ *и из условия* : $(\mathbf{u},\, \mathbf{u}) = 0\,,$ *следует, что* $\mathbf{u} = \mathbb{O}$.

Из условий **1**° — **3**° легко получаются

Неравенство Коши - Буняковского:

$$\big|(\mathbf{u},\, \mathbf{v})\big| \leqslant \sqrt{(\mathbf{u},\, \mathbf{u})} \cdot \sqrt{(\mathbf{v},\, \mathbf{v})} \tag{1}$$

Неравенство треугольника:

$$\sqrt{(\mathbf{u}+\mathbf{v},\, \mathbf{u}+\mathbf{v})} \leqslant \sqrt{(\mathbf{u},\, \mathbf{u})} + \sqrt{(\mathbf{v},\, \mathbf{v})} \tag{2}$$

Докажем неравенство (1) .

Пусть λ — действительное число.

В силу свойств **1**° — **3**° :

$$(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v},\, \mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + 2\lambda(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) + \lambda^2(\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \geqslant 0\ .$$

Ввиду ***неотрицательности*** выписанного ***квадратичного***, относительно λ, ***трехчлена***, его ***дискриминант неположителен***, то есть:

$$(\mathbf{u},\, \mathbf{v})^2 \leqslant (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \tag{3}$$

Неравенство (3) ***эквивалентно*** неравенству (1) , а неравенство (2) , — простое ***следствие*** неравенства (1) .

Действительно:

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v},\, \mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + 2\,(\mathbf{u},\, \mathbf{v}) + (\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \leqslant (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + 2\,|(\mathbf{u},\, \mathbf{v})| + (\mathbf{v},\, \mathbf{v}) \leqslant$$
$$\leqslant (\mathbf{u},\, \mathbf{u}) + 2\sqrt{(\mathbf{u},\, \mathbf{u})}\sqrt{(\mathbf{v},\, \mathbf{v})} + (\mathbf{v},\, \mathbf{v}) = \Big(\sqrt{(\mathbf{u},\, \mathbf{u})} + \sqrt{(\mathbf{v},\, \mathbf{v})}\Big)^2$$

Свойства $\mathbf{1^\circ} - \mathbf{3^\circ}$ ***скалярного произведения*** и неравенства (1) и (2) позволяют ввести в линейном пространстве со скалярным произведением ***норму*** любого элемента $\mathbf{u}$ этого ***пространства*** по формуле:

$$\|\,\mathbf{u}\,\| = \sqrt{(\,\mathbf{u},\,\mathbf{u}\,)} \tag{4}$$

Очевидно, что для нормы, порождаемой скалярным произведением, справедливо ***тождество параллелограмма***:

$$\|\,\mathbf{x} + \mathbf{y}\,\|^2 + \|\,\mathbf{x} - \mathbf{y}\,\|^2 = 2\big(\|\,\mathbf{x}\,\|^2 + \|\,\mathbf{y}\,\|^2\big)$$

Определение 55. ***Полное*** *пространство* ***со скалярным произведением*** *называется* ***гильбертовым*** *пространством.*

Приведем несколько примеров ***линейных пространств со скалярным произведением***.

Примеры пространств со скалярным произведением

Пример 1. ***Пространство*** $\mathbb{E}^n$ — примера 1 § 1 главы I является ***линейным пространством со скалярным произведением***, определяемым формулой:

$$(\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}\,) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \tag{5}$$

Так как это пространство ***полно***, то оно — ***гильбертово***.

Пример 2. ***Пространство*** $\ell_{\mathbf{2}}$ — (пример 3 § 1 главы I), — ***гильбертово***, а ***скалярное произведение*** в нем задается формулой:

$$(\,\mathbf{x},\,\mathbf{y}\,) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot y_i \tag{6}$$

Так как:

$$| x_i y_i | \leqslant \frac{1}{2}\left(x_i^2 + y_i^2 \right), \quad \forall\, i\,,$$

и, по определению пространства ℓ_2, ряды $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i^2$ ***сходятся***, то ряд (6) сходится ***абсолютно*** и правая часть (6) определена корректно.

Аксиомы $\mathbf{1}^\circ - \mathbf{3}^\circ$ скалярного произведения, ***очевидно***, выполнены.

Пример 3. ***Линейное пространство непрерывных на отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функций становится пространством ***со скалярным произведением***, если последнее определить формулой:

$$(\,\mathbf{x}, \mathbf{y}\,) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x\,(t) \cdot y\,(t)\, dt \tag{7}$$

Полученное пространство совпадает с рассматриваемым нами ранее пространством $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ из примера 7 § 1 главы I.

Это пространство ***не полно*** и, следовательно, ***не гильбертово***.

Любое ***линейное пространство со скалярным произведением*** можно ***пополнить*** так, что ***пополнение*** станет ***гильбертовым*** пространством, причем ***скалярное произведение*** в пополняемом пространстве будет совпадать со скалярным произведением в гильбертовом пространстве (точнее на подмножестве этого гильбертова пространства ***изометричном*** пополняемому пространству) (см. § 4 главы I).

Пример 4. Рассмотрим ***пополнение*** неполного пространства со скалярным произведением, сконструированного в предыдущем примере.

Среди его возможных пополнений будет пространство $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, введённое в § 4 главы 1 . Это пространство — ***гильбертово***.

Скалярное произведение в нём определяется формулой (7), интеграл в которой понимается ***в смысле Лебега***. (См. § 4 главы I, или, более подробно, [1], [7]).

Слабая сходимость в пространстве со скалярным произведением

В ***любом*** линейном пространстве со скалярным произведением справедливо

Утверждение 29. ***Скалярное произведение*** $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *является* ***непрерывной*** *функцией* ***своих аргументов*** *в смысле* ***сходимости****, порожденной* ***нормой*** (4).

То есть:

$$\lim_{n \to \infty} (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{8}$$

если:

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \| = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \| \mathbf{y}_n - \mathbf{y} \| = 0 .$$

Доказательство утверждения (8) следует из цепочки неравенств:

$$\big| (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n) - (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \big| \leqslant \big| (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}_n - \mathbf{y}) - (\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \big| \leqslant$$
$$\leqslant \| \mathbf{x}_n \| \cdot \| \mathbf{y}_n - \mathbf{y} \| + \| \mathbf{y} \| \cdot \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \| .$$

Т.к. последовательнос $\{ \| x_n \| \}$ ***ограничена***, то правая часть последнего неравенства стремится к 0 при $n \to \infty$.

Утверждение 30. *Частным случаем утверждения* 29 *является следующее* ***предельное*** *равенство:*

$$\forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}: \quad \lim_{n \to \infty} (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{9}$$

если:

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \| = 0 .$$

Обратить это утверждение нельзя:
из ***справедливости*** соотношения (9) для последовательности $\{ \mathbf{x}_n \}$ $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{X}$, вообще говоря, ***не следует*** сходимость $\mathbf{x}_n$ к $\mathbf{x}$ ***по норме***.

Определение 56. *Последовательность элементов* $\{ \mathbf{x}_n \}$ *в* ***линейном пространстве со скалярным произведением*** *называется* ***слабо сходящейся*** *к* ***элементу*** $\mathbf{x}$*, если выполнено условие* (9) .

Пример 5. Примером ***слабо сходящейся*** (но ***не сходящейся сильно***, т.е. в смысле ***нормы***), последовательности, является последовательность элементов пространства $\ell_{\mathbf{2}}$ из примера 5 § 2 главы I :

$$\mathbf{x}_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots ,0 \ldots) ,$$

где 1 стоит на n-ом месте.

Эта ***последовательность слабо сходится*** к $\mathbb{O}_{\ell_{\mathbf{2}}}$ в $\ell_{\mathbf{2}}$.

Действительно:

$\forall \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots) \in \ell_{\mathbf{2}}, \quad (\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) = y_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Утверждение 31. ***Слабо сходящаяся последовательность*** *имеет только* ***один*** *слабый предел.*

Доказательство. Действительно, пусть $\{ \mathbf{x}_n \}$ имеет ***два*** слабых предела $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$.

Из (9) следует, что $(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y}$ или $(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{y}) = 0$.

Полагая $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{z}$, получим в силу свойства 3° ***скалярного произведения***: $\mathbf{x} = \mathbf{z}$. $\square$

Ортогональность и замкнутость множеств в пространстве со скалярным произведением

Определение 57. ***Два*** *элемента* $\mathbf{x}, \mathbf{y}$, *принадлежащие* ***линейному пространству со скалярным произведением***, *называются* ***ортогональными***, *если:*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

Утверждение 32. *Пусть* $\mathbf{x}$ — ***фиксированный*** *элемент* ***линейного пространства со скалярным произведением*** $\mathbf{X}$.

Множество $\mathbf{L}$ *элементов пространства* $\mathbf{X}$, ***ортогональных*** *фиксированному* ***элементу*** $\mathbf{x}$, *является* ***замкнутым подпространством*** *в* $\mathbf{X}$.

Доказательство. То, что $\mathbf{L}$ — ***линеал***, т.е. линейное подпространство в $\mathbf{X}$, сразу следует из свойств $1^\circ - 3^\circ$ ***скалярного произведения***.

Замкнутость $\mathbf{L}$ немедленно следует из утверждения (9) о ***непрерывности*** скалярного произведения. □

Важным примером ***подпространства*** в любом ***линейном пространстве со скалярным произведением*** является множество $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$, состоящее из ***всевозможных линейных комбинаций*** $N < \infty$ ***линейно независимых*** элементов $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N$, то есть множество вида:

$$\{ c_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + c_N \boldsymbol{\xi}_N \} , \tag{10}$$

где $c_1, \ldots, c_N$ — ***произвольные*** действительные числа.

Подпространство $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$, обычно, называют ***линейной оболочкой*** системы элементов $\{ \boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N \}$.

Утверждение 33. *Множество* (10) ***замкнутое подпространство*** *в* $\mathbf{X}$.

Это утверждение было доказано в главе II (§ 1 следствие 3) для ***произвольных*** линейных ***нормированных*** пространств.

Ниже мы приведём ещё одно доказательство сформулированного утверждения, использующее ***специфику*** пространств ***со скалярным произведением***. Оно интересно само по себе. Кроме того, возможно, что читатель не ознакомился с содержанием соответствующих страниц параграфа 1 главы II, помеченных знаком $^\bullet$.

То, что множество (10) — ***линейное подпространство*** в $\mathbf{X}$, — ***очевидно***. Покажем его ***замкнутость***.

Если ***элемент*** $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ имеет вид (10), то соответствующие ***коэффициенты*** $c_1, \ldots, c_N$ ***однозначно определяются*** набором скалярных произведений:

$$(\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_1), \ldots, (\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_N).$$

Действительно, пусть:

$$\mathbf{z} = c_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + c_N \boldsymbol{\xi}_N. \tag{11}$$

Умножая ***скалярно*** правую и левую часть этого равенства последовательно на $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N$, получим совокупность равенств:

$$\begin{array}{ccccc} c_1(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1) & + \cdots + & c_N(\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{\xi}_1) & = & (\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \cdots & + \cdots + & \cdots & = & \cdots \\ c_1(\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_N) & + \cdots + & c_N(\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{\xi}_N) & = & (\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_N), \end{array} \tag{12}$$

которую можно рассматривать, как ***систему линейных алгебраических уравнений*** относительно $c_1, \ldots, c_N$.

Матрица $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ системы (12) называется ***матрицей Грама системы*** элементов $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N$.

Утверждение 34. ***Определитель матрицы Грама*** $\boldsymbol{det}\, \boldsymbol{\mathcal{G}} \neq 0$.

Доказательство. Действительно, если $\boldsymbol{det}\, \boldsymbol{\mathcal{G}} = 0$, то имеется ***линейная зависимость*** между ***столбцами*** матрицы Грама.

Представим предполагаемую ***зависимость*** в виде:

$$d_1 \cdot \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_N) \end{pmatrix} + d_2 \cdot \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\xi}_N) \end{pmatrix} + \cdots + d_N \cdot \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ (\boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{\xi}_N) \end{pmatrix} = \mathbb{O},$$

где $\mathbb{O}$ — ***нуль-элемент*** $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$.

То есть:

$$\begin{aligned} (d_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + d_N \cdot \boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{\xi}_1) &= 0 \\ \cdots \quad + \cdots + \quad \cdots \quad &= \cdots \\ (d_1 \cdot \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + d_N \cdot \boldsymbol{\xi}_N, \boldsymbol{\xi}_N) &= 0 \end{aligned}$$

Умножим i-ую строчку этих равенств на d_i и просуммируем по i от 1 до N.

Получим: $(d_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + d_N \boldsymbol{\xi}_N, d_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + d_N \boldsymbol{\xi}_N) = 0$.

Откуда следует, что: $d_1 \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + d_N \boldsymbol{\xi}_N = \mathbb{O}$, то есть элементы $\{\boldsymbol{\xi}_i\}$ ***линейно зависимы***, вопреки нашему предположению об их ***независимости***.

Поэтому $\boldsymbol{det}\, \boldsymbol{\mathcal{G}} \neq 0$ и существует ***обратная*** матрица $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{-1}$. $\square$

Коэффициенты $\{c_i\}$ в равенстве (1) и его ***правая часть*** связаны следующим соотношением:

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\mathcal{G}}^{-1} \begin{pmatrix} (\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_N) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где

$$\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_N).$$

Из (13) следует ***замкнутость линеала*** (линейного пространства) (10).

Действительно, пусть $\mathbf{z}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ — ***последовательность*** элементов линеала (10) и $\lim\limits_{k \to \infty} \| \mathbf{z}_k - \mathbf{z} \| = 0$.

Нужно показать, что элемент $\mathbf{z} \in \mathbf{X}$ также ***имеет представление*** (10) с ***некоторым*** набором коэффициентов $(c_1, \ldots, c_N)$.

Рассмотрим последовательность элементов из пространства $\mathbb{R}^N$ вида:

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{z}_1, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{z}_1, \boldsymbol{\xi}_N) \end{pmatrix}, \quad \ldots \quad, \begin{pmatrix} (\mathbf{z}_k, \boldsymbol{\xi}_1) \\ \vdots \\ (\mathbf{z}_k, \boldsymbol{\xi}_N) \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

Так как $\mathbf{z}_k \to \mathbf{z}$, при $k \to \infty$, то, в силу ***непрерывности*** скалярного произведения:

$$\lim_{k \to \infty} (\mathbf{z}_k, \boldsymbol{\xi}_i) = (\mathbf{z}, \boldsymbol{\xi}_i), \quad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{14}$$

Введем в пространстве $\mathbb{R}^N$ ***норму***, как в примере 1 § 2 главы II. Тогда, из представлений $\mathbf{z}_k$ в виде: $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i^{(k)} \boldsymbol{\xi}_i$, следует, что: $\boldsymbol{\mathcal{G}}^{-1}$

будет ***линейным ограниченным*** оператором в этом вспомогательном пространстве.

Поэтому из (14) будет следовать ***покомпонентная*** сходимость при $k \to \infty$, коэффициентов $c_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots N$, к ***некоторым*** значениям. Пусть эти ***предельные*** коэффициенты будут $c_1, \dots, c_N$ и $\mathbf{w} = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i\, \boldsymbol{\xi}_i$.

Из неравенства: $\quad \| \mathbf{z}_k - \mathbf{w} \| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{N} \left| c_i^{(k)} - c_i \right| \cdot \| \boldsymbol{\xi}_i \|$

и ***сходимости*** $c_i^{(k)} \to c_i$, при $k \to \infty$, $\forall\, i = 1, \dots, N$, следует что: $\lim\limits_{k \to \infty} \| \mathbf{z}_k - \mathbf{w} \| = 0$.

Но, по предположению: $\lim\limits_{k \to \infty} \| \mathbf{z}_k - \mathbf{z} \| = 0$.

Поэтому $\mathbf{z} = \mathbf{w} = \sum\limits_{i=1}^{N} c_i\, \boldsymbol{\xi}_i$ и ***замкнутость*** линеала (10) доказана.

Рассуждая аналогично, можно установить ***полноту*** линейного ***подпространства*** (10), независимо от того полно ***объемлющее*** рассматриваемое подпространство ***пространство*** $\mathbf{X}$ или нет.

Упражнения и задачи к параграфу 1.

1. Проверить выполнение аксиом $1^\circ - 3^\circ$ для (4).

2. Доказать ***полноту подпространства*** $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$ (10).

3. Можно ли ввести в пространстве $\mathbb{R}^1$ ***скалярное произведение*** по формуле: $(x, y) = x \cdot y$?

4. ***Доказать***, что в любом ***линейном пространстве со скалярным произведением*** справедливо ***тождество параллелограмма***:

$$\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \|^2 + \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|^2 = 2\Big(\| \mathbf{x} \|^2 + \| \mathbf{y} \|^2 \Big).$$

5*. Пусть в ***линейном нормированном*** пространстве $\mathbf{X}$ для любой пары его элементов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ справедливо ***тождество параллелограмма***.

Доказать, что ***функция*** двух переменных $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}$:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \overset{def}{=} \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \right)$$

определяет ***скалярное произведение*** в пространстве $\mathbf{X}$.

3.2 Теорема о проекции на замкнутое выпуклое множество и некоторые ее следствия

Теорема о проекции

Напомним данное выше

Определение 58. ***Множество*** $\mathbf{Q}$, *лежащее в **линейном** пространстве* $\mathbf{X}$, *называется **выпуклым**, если* $\forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{Q}$ ***отрезок:*** $\alpha\,\mathbf{x} + (1 - \alpha)\,\mathbf{y}$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *также **принадлежит*** $\mathbf{Q}$.

Теорема 15. *Пусть* $\mathbf{Q}$ ***замкнутое выпуклое*** *множество в **гильбертовом** пространстве* $\mathbf{H}$ *и* $\mathbf{w}$ — *некоторый **фиксированный** элемент* $\mathbf{H}$.

Существует единственный *элемент* $\mathbf{z} \in \mathbf{Q}$ *такой, что:*

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{w}\| = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{Q}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = \min_{\mathbf{u} \in \mathbf{Q}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|$$

Элемент $\mathbf{z}$ *называется **метрической проекцией** элемента* $\mathbf{w}$ ***на*** $\mathbf{Q}$.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{x}_n\}$ последовательность элементов $\mathbf{Q}$ и

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{w}\| = \inf_{\mathbf{u} \in \mathbf{Q}} \|\mathbf{u} - \mathbf{w}\| = d$$

Такая последовательность всегда ***существует***, по определению $\mathbf{inf}$.

Покажем, что при наших предположениях существует ***предел*** этой последовательности.

Равенство ***параллелограмма***, примененное к элементам $\mathbf{x}_n - \mathbf{w}$ и $\mathbf{x}_m - \mathbf{w}$, дает:

$$\left\|\frac{\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{x}_m - \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{x}_n - \mathbf{w}\|^2\right) - \left\|\frac{\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_n}{2} - \mathbf{w}\right\|^2 \qquad (1)$$

Если $m, n \to \infty$, то $\lim\limits_{m\to\infty} \|\mathbf{x}_m - \mathbf{w}\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n - \mathbf{w}\| = d$.

В силу ***выпуклости*** $\mathbf{Q}$:

$$\frac{\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_n}{2} \in \mathbf{Q} \quad \text{и поэтому} \quad \left\|\frac{\mathbf{x}_m + \mathbf{x}_n}{2} - \mathbf{w}\right\|^2 \geqslant d^2$$

Следовательно, при достаточно больших m, n, правая часть (1) будет меньше любого наперед заданного положительного ε.

И, таким образом, последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ ***фундаментальна*** в $\mathbf{H}$.

Так как пространство $\mathbf{H}$ ***гильбертово***, то последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$ ***имеет предел*** $\mathbf{z}$, который, в силу ***замкнутости*** $\mathbf{Q}$, принадлежит $\mathbf{Q}$.

В силу ***непрерывности нормы*** $\|\mathbf{z} - \mathbf{w}\| = d$.

Покажем ***единственность*** такого элемента $\mathbf{z}$.

Пусть $\mathbf{z}_1 \in \mathbf{Q}$ ***отличный*** от $\mathbf{z}$ элемент, на котором достигается ***минимум*** расстояния до $\mathbf{w}$.

Подставляя в равенство (1) $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}_1$ вместо $\mathbf{x}_m$ и $\mathbf{x}_n$, получим:

$$\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_1\| \leqslant 0,$$

и, следовательно, $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1$.

Теорема полностью доказана. □

Условия, определяющие проекцию

Получим теперь ***необходимое*** (и ***достаточное***) условие, которому должна удовлетворять ***метрическая проекция***.

Пусть $\mathbf{z_w}$ ***метрическая проекция*** элемента $\mathbf{w}$ ***на*** $\mathbf{Q}$.

В силу ***определения*** $\mathbf{z_w}$, и ***выпуклости*** множества $\mathbf{Q}$, имеем $\forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{Q}$:

$$\Big\| \mathbf{w} - \Big((1 - \lambda)\, \mathbf{z_w} + \lambda\, \mathbf{u} \Big) \Big\|^2 \geqslant \| \mathbf{w} - \mathbf{z_w} \|^2, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \,,$$

или

$$\| \mathbf{w} - \mathbf{z_w} + \lambda\, (\mathbf{z_w} - \mathbf{u}) \|^2 \geqslant \| \mathbf{w} - \mathbf{z_w} \|^2 \,, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \qquad (2)$$

Раскрывая левую часть неравенства (2), получим:

$$2\lambda\, (\mathbf{w} - \mathbf{z_w}, \mathbf{z_w} - \mathbf{u}) + \lambda^2\, (\mathbf{z_w} - \mathbf{u}, \mathbf{z_w} - \mathbf{u}) \geqslant 0 \,.$$

Откуда:

$$(\mathbf{w} - \mathbf{z_w}, \mathbf{z_w} - \mathbf{u}) \geqslant -\frac{\lambda}{2}\, (\mathbf{z_w} - \mathbf{u}, \mathbf{z_w} - \mathbf{u}) \,.$$

Т.к. λ ***произвольное*** число из $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, то это неравенство может выполняться только, если:

$$(\mathbf{z_w} - \mathbf{w}, \mathbf{z_w} - \mathbf{u}) \leqslant 0 \,, \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathbf{Q} \qquad (3)$$

Следовательно, неравенство (3) ***необходимое*** условие, которому должна удовлетворять ***метрическая проекция***.

Покажем, что $\mathbf{z_w}$ ***единственный*** элемент $\mathbf{Q}$ для которого неравенство (3) выполнено.

Пусть $\mathbf{z}_1 \in \mathbf{Q}$, $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{z}_\mathbf{w}$, и, аналогично (3) :

$$(\mathbf{z}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{z}_1 - \mathbf{u}) \leqslant 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{Q} \tag{4}$$

Из (3), (4) следует, что:

$$(\mathbf{w} - \mathbf{z}_\mathbf{w}, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_\mathbf{w}) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{z}_1 - \mathbf{w}, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_\mathbf{w}) \leqslant 0 .$$

Складывая эти неравенства, получим:

$$(\mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_\mathbf{w}, \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_\mathbf{w}) \leqslant 0 .$$

Следовательно $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_\mathbf{w}$.

Поэтому выполнение условия:

$$(\mathbf{z} - \mathbf{w}, \mathbf{z} - \mathbf{u}) \leqslant 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{Q},$$

для какого-либо элемента $\mathbf{z} \in \mathbf{Q}$, означает, что $\mathbf{z} = \mathbf{z}_\mathbf{w}$ и условие (3) не только ***необходимое***, но и ***достаточное*** условие, которому должна удовлетворять ***метрическая проекция***.

Проекция на подпространство

Важным частным случаем ***замкнутого выпуклого*** множества в ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ является всякое его ***замкнутое подпространство*** $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$ (10) § 1, которое мы, для простоты, обозначим $\mathbf{H}_1$.

Пусть w произвольный элемент $\mathbf{H}$.

Найдем его ***проекцию*** на ***подпространство*** $\mathbf{H}_1$.

Заметим, что какой бы элемент $\mathbf{h}$ из ***подпространства*** $\mathbf{H}_1$ мы бы ни взяли, элементы $\mathbf{z}_\mathbf{w} + \mathbf{h}$ и $\mathbf{z}_\mathbf{w} - \mathbf{h}$ ***принадлежат*** этому же ***подпространству***.

Подставляя эти элементы вместо $\mathbf{u}$ в неравенство (3), имеем:

$$(\mathbf{w} - \mathbf{z_w}, \mathbf{h}) \leqslant 0 \qquad \text{и} \qquad (\mathbf{w} - \mathbf{z_w}, -\mathbf{h}) \leqslant 0 .$$

А это возможно только в том случае, когда выполняется следующее условие ***ортогональности***:

$$(\mathbf{w} - \mathbf{z_w}, \mathbf{h}) = 0 , \quad \forall\, \mathbf{h} \in \mathbf{H}_1 \tag{5}$$

Пусть

$$\mathbf{z_w} = \sum_{i=1}^{N} c_i\, \boldsymbol{\xi}_i \tag{6}$$

Из условия ***ортогональности*** (5) легко получить систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения (6).

Действительно: $\left(\mathbf{w} - \sum\limits_{i=1}^{N} c_i\, \boldsymbol{\xi}_i,\, \boldsymbol{\xi}_j\right) = 0 , \quad j = 1, \ldots , N ,$ или

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \left(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j\right) = \left(\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}_j\right) , \quad j = 1, \ldots , N \tag{7}$$

Матрица этой системы — уже знакомая нам ***матрица Грама*** $\boldsymbol{\mathcal{G}}$.

В § 1 мы установили, что ***определитель*** $\boldsymbol{det\,\mathcal{G}} \neq 0$.

Поэтому, ***решив*** систему (7), мы по формуле (6) ***найдем*** искомую ***проекцию***.

Неравенство Бесселя

Задача нахождения ***проекции*** на ***подпространство*** $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$, порожденное системой линейно независимых элементов $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots , \boldsymbol{\xi}_N$, упрощается, если система $\{\boldsymbol{\xi}_i\}_{i=1}^{N}$ ***ортонормирована***, то есть:

$$\|\boldsymbol{\xi}_i\| = 1, \quad i = 1, \ldots , N, \quad \text{и} \quad \left(\boldsymbol{\xi}_i, \boldsymbol{\xi}_j\right) = 0 \ \ \text{при}\, i \neq j .$$

В этом случае матрица Грама $\boldsymbol{\mathcal{G}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}$ — ***единичная***, и

$$c_i = (\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}_i), \quad i = 1, \ldots, N \tag{8}$$

Кроме того: $\quad \| \mathbf{z_w} \|^2 = \sum\limits_{i=1}^{N} (\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}_i)^2$.

В силу (5) $\quad \mathbf{w} - \mathbf{z_w}$ и $\mathbf{z_w}$ ***ортогональны***.

Поэтому:

$\| \mathbf{w} \|^2 = \| \mathbf{w} - \mathbf{z_w} \|^2 + \| \mathbf{z_w} \|^2$, и, следовательно, $\| \mathbf{z_w} \|^2 \leqslant \| \mathbf{w} \|^2$, то есть:

$$\sum_{i=1}^{N} (\mathbf{w}, \boldsymbol{\xi}_i)^2 \leqslant \| \mathbf{w} \|^2 \tag{9}$$

Неравенство (9) называется ***неравенством Бесселя***.

Оно справедливо для ***любого*** элемента ***гильбертова*** пространства $\mathbf{H}$ и ***любой*** (конечной) ***ортонормированной*** системы его элементов.

Замечание. Теорема ***о проекции*** и рассмотренные нами ее следствия остаются справедливыми в любом ***линейном пространстве со скалярным произведением***, если предположить ***полноту*** $\mathbf{Q}$, как ***метрического*** пространства.

Действительно, используемая в доказательстве теоремы последовательность $\mathbf{x}_n$ принадлежит $\mathbf{Q}$ и ***полнота*** этого множества обеспечивает корректность последующих рассуждений.

Т.к. подпространство $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$ (10) § 1 ***полно*** в любом ***линейном пространстве со скалярным произведением***, то ***неравенство Бесселя*** (9) справедливо независимо от полноты ***объемлющего*** пространства $\mathbf{H}$.

Ортонормированные системы в пространстве со скалярным произведением

Следствием теоремы о проекции и замечания в конце предыдущего пункта является следующее

Утверждение 35. *В любом **бесконечномерном линейном пространстве** $\mathbf{X}$ **со скалярным произведением**, в частности, гильбертовом, **существует счетная ортонормированная система** элементов.*

Доказательство. Действительно, возьмем произвольный ***ненулевой*** элемент $\boldsymbol{\xi}_1 \in \mathbf{X}$ и ***нормируем*** его, то есть, образуем элемент:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\boldsymbol{\xi}_1}{\| \boldsymbol{\xi}_1 \|} .$$

По условию ***существует*** элемент $\boldsymbol{\xi}_2$ ***линейно независимый*** от $\mathbf{e}_1$.

Спроектируем его на ***подпространство*** $\{ c_1 \mathbf{e}_1 \}$, ***порожденное*** элементом $\mathbf{e}_1$.

Элемент $\boldsymbol{\xi}_2 - (\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{e}_1) \cdot \mathbf{e}_1$ будет, в силу (5) и (8), ***ортогонален*** $\mathbf{e}_1$.

Обозначим

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\xi}_2 - (\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{e}_1)}{\| \boldsymbol{\xi}_2 - (\boldsymbol{\xi}_2, \mathbf{e}_1) \|} .$$

Имеем:

$\| \mathbf{e}_1 \| = \| \mathbf{e}_2 \| = 1$ и $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 0$.

Элементы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, по предположению, порождают ***подпространство*** в $\mathbf{X}$, ***не совпадающее*** с $\mathbf{X}$.

Возьмем элемент $\boldsymbol{\xi}_3$, ***линейно независимый*** с $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, и спроектируем его на ***подпространство*** $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, порождаемое $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

Нормируем разность между $\boldsymbol{\xi}_3$ и его проекцией на $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и обозначим эту ***нормированную разность*** через $\mathbf{e}_3$.

Элементы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ***взаимноортогональны*** и ***нормированы***, по построению.

В силу предположенной ***бесконечномерности*** $\mathbf{X}$, этот процесс можно продолжать ***неограниченно***.

Результатом его будет ***ортогональная*** система элементов $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ из $\mathbf{X}$. □

Замечание. Применённый при доказательстве утверждения 35 способ построения ортонормированной системы векторов $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ в бесконечномерном линейном пространстве $\mathbf{X}$ со скалярным произведением, называется ***процессом ортогонализации Грама - Шмидта***.

Если ***пространство*** со скалярным произведением ***конечномерно*** (конкретно — N-***мерно***), то примененная нами конструкция приводит к построению ***ортонормированного базиса*** такого пространства, исходя из произвольной ***линейно независимой системы*** $\{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N\}$ элементов этого пространства.

Ряды Фурье в гильбертовом пространстве

Пусть теперь $\mathbf{H}$ — ***бесконечномерное гильбертово*** пространство и $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ ***счетная ортонормированная система*** его элементов.

Пусть $\mathbf{x}$ — некоторый элемент пространства $\mathbf{H}$.

Сопоставим элементу $\mathbf{x}$ формальный ***ряд***

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\,\mathbf{x},\, \mathbf{e}_i\,) \cdot \mathbf{e}_i \tag{10}$$

Этот ряд, обычно, называется ***рядом Фурье*** элемента $\mathbf{x}$ по системе $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

В силу неравенства ***Бесселя*** — (9), — числовой ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\,\mathbf{x},\, \mathbf{e}_i\,)^2 \tag{11}$$

сходится.

Обозначим

$$\mathbf{S}_n \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} (\,\mathbf{x},\, \mathbf{e}_i\,) \cdot \mathbf{e}_i$$

— ***частичную сумму*** ряда Фурье $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (\,\mathbf{x},\, \mathbf{e}_i\,) \cdot \mathbf{e}_i$.

Так как система $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ ***ортонормирована***, то $\forall\, n,\, p \geqslant 1$

$$\|\,\mathbf{S}_{n+p} - \mathbf{S}_n\,\|^2 = \sum_{i\,=\,n+1}^{n+p} (\,\mathbf{x},\, \mathbf{e}_i\,)^2$$

Из этого равенства и из сходимости ряда (11) немедленно следует сходимость ряда Фурье (10).

Равенство Парсеваля и полнота системы элементов $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$

Обозначим сумму ряда Фурье (10) — $\mathbf{S}\,(\mathbf{x})$.

Вообще говоря, $\mathbf{S}\,(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}$.

Для теории и приложений важно знать, когда сумма ряда Фурье $\mathbf{S}\,(\mathbf{x})$ элемента $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{H}$ совпадает с $\mathbf{x}$ и возможен ли случай такого совпадения для ***всех*** элементов $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{H}$.

Рассмотрим тождество

$$\mathbf{x} \;=\; \mathbf{S}\,(\mathbf{x}) \;+\; [\,\mathbf{x} \;-\; \mathbf{S}\,(\mathbf{x})\,] \tag{12}$$

Справедливо равенство:

$$\|\,\mathbf{S}\,(\mathbf{x})\,\|^2 \;=\; \sum_{i\,=\,1}^{\infty} (\,\mathbf{x},\,\mathbf{e}_i\,)^2 \tag{13}$$

Действительно, из ***ортонормированности*** системы $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ следует:

$$\|\,\mathbf{S}_n\,\|^2 \;=\; \sum_{i\,=\,1}^{n} (\,\mathbf{x},\,\mathbf{e}_i\,)^2 \tag{14}$$

Так как последовательность $\mathbf{S}_n \;=\; \sum\limits_{i\,=\,1}^{n} (\,\mathbf{x},\,\mathbf{e}_i\,)\cdot\mathbf{e}_i$ сходится к $\mathbf{S}\,(\mathbf{x})$, то, в силу ***непрерывности*** нормы в гильбертовом пространстве, из равенства (14) следует:

$$\lim_{n\,\to\,\infty} \|\,\mathbf{S}_n\,\|^2 \;=\; \|\,\mathbf{S}\,(\mathbf{x})\,\|^2 \;,$$

и, следовательно, равенство (13) справедливо.

Непосредственно устанавливается справедливость тождества

$$(\,\mathbf{x},\,\mathbf{S}\,(\mathbf{x})\,) \;=\; \|\,\mathbf{S}\,(\mathbf{x})\,\|^2 \;,$$

из которого следует ортогональность $\mathbf{S}\,(\mathbf{x})$ и $\mathbf{S}\,(\mathbf{x}) \;-\; \mathbf{x}$.

Из (12) имеем

$$\|\,\mathbf{x}\,\|^2 \;=\; \|\,\mathbf{S}\,(\mathbf{x})\,\|^2 \;+\; \|\,\mathbf{x} \;-\; \mathbf{S}\,(\mathbf{x})\,\|^2 \;.$$

С учетом (13) это тождество можно переписать так:

$$\|\,\mathbf{x}\,\|^2 \;-\; \sum_{i=1}^{\infty} (\,\mathbf{x},\,\mathbf{e}_i\,)^2 \;=\; \|\,\mathbf{x} \;-\; \mathbf{S}\,(\mathbf{x})\,\|^2 \;.$$

Таким образом, мы доказали

Утверждение 36. *Для справедливости равенства:*

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

необходимо *и* ***достаточно****, чтобы выполнялось* ***равенство Парсеваля****:*

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)^2 \qquad (15)$$

Утверждение 37. *Для того, чтобы* ***равенство Парсеваля*** *было справедливо для любого* $\mathbf{x}$ *пространства* $\mathbf{H}$, ***необходимо*** *и* ***достаточно****, чтобы в* $\mathbf{H}$ *не существовало* ***ненулевого*** *элемента, ортогонального всем* $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Доказательство. ***Достаточность***.

Пусть такого элемента нет, но в $\mathbf{H}$ существует элемент $\mathbf{y}$, для которого равенство Парсеваля не справедливо.

Тогда ненулевой элемент $\mathbf{y} - \mathbf{S}(\mathbf{y})$, очевидно, будет ортогонален всем $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Получаем противоречие.

Необходимость.

Пусть равенство Парсеваля выполнено для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$, но существует ненулевой элемент $\mathbf{h} \neq \mathbb{O}_{\mathbf{H}}$, ортогональный всем $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Очевидно, что $\mathbf{S}(\mathbf{h}) = \mathbb{O}_{\mathbf{H}}$.

Из равенства Парсеваля (15) следует, что $\|\mathbf{h}\| = 0$.

И, таким образом, мы снова получили противоречие. □

Замечание. Выполнимость условия утверждения 37 (7), целиком зависит только от свойств системы $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Определение 59. ***Ортонормированная*** *система* $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$, *для которой в* $\mathbf{H}$ *не существует* ***ненулевого*** *элемента,* ***ортогонального*** *всем элементам этой системы, называется* ***полной.***

Утверждение 37 можно сформулировать так.

Для того, что бы ***равенство Парсеваля*** было справедливо для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$, ***необходимо*** и ***достаточно*** чтобы система $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ была ***полной***.

Теорема об ортогональном разложении

Следующее утверждение также является следствием теоремы о проекции и часто используется. Оно называется ***теоремой об ортогональном разложении*** или ***теоремой Б. Леви***.

Утверждение 38. *Пусть* $\mathbf{H}$ ***гильбертово*** *пространство и* $\mathbf{H}_1$ *его* ***замкнутое*** *подпространство.*

Любой *элемент* $\mathbf{z} \in \mathbf{H}$ *допускает* ***представление****:*

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \,, \tag{16}$$

где $\mathbf{z}_1 \in \mathbf{H}_1$, *а* $\mathbf{z}_2$ ***ортогонально*** $\mathbf{H}_1$.

Обе части *разложения* (16) *определяются по* $\mathbf{z}$ ***однозначно****.*

Доказательство. Действительно, спроектируем $\mathbf{z}$ на $\mathbf{H}_1$ и обозначим эту ***проекцию*** $\mathbf{pr}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{z})$.

Так как $\mathbf{H}_1$ — ***подпространство***, то определяющее проекцию неравенство (3) превращается в равенство (5) :

$$\big(\mathbf{z} - \mathbf{pr}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{z}), \mathbf{h}\big) = 0, \quad \forall\, \mathbf{h} \in \mathbf{H}_1 \,.$$

Следовательно элементы $\mathbf{pr}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{z})$ и $\mathbf{z} - \mathbf{pr}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{z})$ ***ортогональны***, и $\mathbf{z}$ допускает ***представление*** (16), в котором:

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{pr}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z}_2 = \mathbf{z} - \mathbf{pr}_{\mathbf{H}_1}(\mathbf{z}) .$$

Предположим, что существует ***другое*** ортогональное разложение:

$$\mathbf{z} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \quad \mathbf{w}_1 \in \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{w}_2 \perp \mathbf{H}_1 .$$

Тогда:

$$\mathbf{z}_1 - \mathbf{w}_1 + \mathbf{z}_2 - \mathbf{w}_2 = \mathbb{O} .$$

Так как $\mathbf{z}_1 - \mathbf{w}_1 \in \mathbf{H}_1$, а $\mathbf{z}_2$ и $\mathbf{w}_2$ ***ортогональны*** $\mathbf{H}_1$, то из этого равенства следует:

$$\| \mathbf{z}_1 - \mathbf{w}_1 \|^2 + \| \mathbf{z}_2 - \mathbf{w}_2 \|^2 = 0 ,$$

и, следовательно $\mathbf{z}_1 = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{z}_2 = \mathbf{w}_2$. □

Утверждение 39. ***Множество*** *элементов* $\mathbf{H}$, ***ортогональных*** *фиксированному* ***линейному*** *подпространству* $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}$, *является* ***замкнутым подпространством*** *в* $\mathbf{H}$.

Замечание. Частный случай этого утверждения, когда $\mathbf{H}_1$ порождено единственным элементом $\mathbf{x}$ доказан в § 1.

Общий случай составляет содержание задачи 3 к этому параграфу и ***рассматривается*** аналогично.

Определение 60. ***Множество*** *элементов пространства* $\mathbf{H}$, ***ортогональных*** *фиксированному линейному* ***подпространству*** $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}$, *есть* ***подпространство****, обычно* ***обозначаемое*** $\mathbf{H}_1^{\perp}$.

Оно называется ***ортогональным дополнением*** *к* $\mathbf{H}_1$.

С использованием нового обозначения, равенство (16) можно символически записать в виде: $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_1^{\perp}$.

Это равенство нужно понимать так: ***любое*** подпространство $\mathbf{H}_1$ ***гильбертова*** пространства $\mathbf{H}$ порождает разложение $\mathbf{H}$ в сумму (в смысле равенства (16)) ***двух ортогональных*** друг другу ***подпространств***, одно из которых совпадает с $\mathbf{H}_1$.

Теорема об общем виде линейного функционала

Одним из следствий теоремы об ортогональном разложении является теорема ***об общем виде линейного непрерывного функционала*** в ***гильбертовом пространстве***.

Теорема 16 (***Ф. Рисс). Любой линейный функционал*** $\ell(\mathbf{x})$, *определенный в* ***гильбертовом*** *пространстве* $\mathbf{H}$, *имеет вид:*

$$\ell(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x}_\ell) \ , \tag{17}$$

где элемент $\mathbf{x}_\ell \in \mathbf{H}$ *и* ***единственным*** *образом определяется по* $\ell(\mathbf{x})$.

При этом:

$$\|\ell\| = \|\mathbf{x}_\ell\| \ .$$

Доказательство. Рассмотрим в $\mathbf{H}$ ***множество*** $\mathbf{N}_\ell$ элементов, на которых функционал $\ell(\mathbf{x})$ ***обращается*** в 0 .

В силу ***линейности*** и ***непрерывности*** функционала ℓ множество $\mathbf{N}_\ell$ — линейное ***подпространство*** в $\mathbf{H}$.

Рассмотрим $\mathbf{N}_\ell{}^{\perp}$ — ***ортогональное дополнение*** $\mathbf{N}_\ell$ в $\mathbf{H}$.

Любые два элемента из $\mathbf{N}_\ell{}^\perp$ ***линейно зависимы***, то есть ***пространство*** $\mathbf{N}_\ell{}^\perp$ ***одномерно***.

Действительно, пусть $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ два различных элемента из $\mathbf{N}_\ell{}^\perp$.

Тогда $\ell(\mathbf{z}_1) \neq 0, \ell(\mathbf{z}_2) \neq 0$ и ***элемент*** $\mathbf{w} = \ell(\mathbf{z_1})\,\mathbf{z_2} - \ell(\mathbf{z}_2)\,\mathbf{z}_1 \in \mathbf{N}_\ell{}^\perp$.

С другой стороны, ***очевидно***: $\ell(\mathbf{w}) = 0$ и поэтому $\mathbf{w} \in \mathbf{N}_\ell$.

Но, в силу ***ортогональности*** $\mathbf{N}_\ell$ и $\mathbf{N}_\ell{}^\perp$ у них нет общих точек, кроме точки $\mathbb{O}$.

Поэтому $\mathbf{w} = \mathbb{O}$ и элементы $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$ ***линейно зависимы***.

Пусть $\mathbf{e}_0$ элемент $\mathbf{N}_\ell{}^\perp$ такой, что: $\|\,\mathbf{e}_0\,\| = 1$.

Любой элемент $\mathbf{H}$ может быть представлен в виде: $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mathbf{N}_\ell} + \mathbf{x}_{\mathbf{N}_\ell{}^\perp}$,

где $\mathbf{x}_{\mathbf{N}_\ell}$ и $\mathbf{x}_{\mathbf{N}_\ell{}^\perp}$ — проекции $\mathbf{x}$ на соответствующие ***подпространства***.

В силу формул (8): $\mathbf{x}_{\mathbf{N}_\ell{}^\perp} = (\,\mathbf{x},\,\mathbf{e}_0\,)\cdot\mathbf{e}_0$.

Следовательно:

$$\ell(\mathbf{x}) = (\,\mathbf{x},\,\mathbf{e}_0\,)\cdot\ell(\mathbf{e}_0) = (\,\mathbf{x},\,\mathbf{x}_\ell\,), \quad \text{где} \quad \mathbf{x}_\ell = \ell(\mathbf{e}_0)\cdot\mathbf{e}_0$$

Кроме того:

$$\|\,\ell\,\| = \sup_{\|\,\mathbf{x}\,\|=1} |\,\ell(\mathbf{x})\,| = \sup_{\|\,\mathbf{x}\,\|=1} \Big|\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{x}_\ell\,)\,\Big| \leqslant \|\,\mathbf{x}_\ell\,\| .$$

Но:

$$\ell\left(\frac{\mathbf{x}_\ell}{\|\,\mathbf{x}_\ell\,\|}\right) = \left(\frac{\mathbf{x}_\ell}{\|\,\mathbf{x}_\ell\,\|}, \mathbf{x}_\ell\right) = \|\,\mathbf{x}_\ell\,\| ,$$

и, следовательно: $\|\,\ell\,\| = \|\,\mathbf{x}_\ell\,\|$.

Предположим, что $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}_\ell$ и также порождает представление того же самого линейного функционала (17) : $\ell(\mathbf{x}) = (\,\mathbf{x},\,\mathbf{x}'\,)$.

Тогда для $\forall\,\mathbf{x} \in \mathbf{H}$: $(\,\mathbf{x},\,\mathbf{x}' - \mathbf{x}_\ell\,) = 0$.

Полагая в последнем равенстве $\mathbf{x} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}_\ell$, получаем, что $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_\ell$ и, тем самым, теорема Ф. Рисса полностью доказана. $\square$

Упражнения и задачи к параграфу 2.

1. Объяснить, почему ***подпространство*** $\mathbf{L}_{\{\boldsymbol{\xi}\}_1^N}$ (10) из § 1 является ***выпуклым*** множеством.

2. Показать, что любая (***конечная***) ***ортонормированная*** система ***линейно независима***.

3. Доказать приведенное в тексте параграфа утверждение о том, что $\mathbf{H}_1^\perp$ всегда является ***замкнутым***, независимо от ***замкнутости*** или ***незамкнутости*** $\mathbf{H}_1$.

4. Показать, что система функций

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n\,t\right\}, \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

является (***бесконечной***) ***ортонормированной*** системой в пространстве $\mathbb{L}_2[-\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}]$, но она ***не полна*** в этом пространстве.

5. Показать, что любая ***счетная ортонормированная*** последовательность в ***пространстве со скалярным произведением слабо сходится*** к $\mathbb{O}$.

6*. Доказать, что ***любое*** сепарабельное гильбертово пространство $\mathbf{H}$ ***непрерывно изоморфно*** пространству ℓ_2.

3.3 Спектральное представление симметричного вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве

Сопряжённый оператор к линейному оператору

Пусть $\mathbf{A}$ ***линейный непрерывный*** оператор, действующий из ***гильбертова*** пространства $\mathbf{H}_1$ в ***гильбертово*** пространство $\mathbf{H}_2$.

Если $\mathbf{y}$ — ***фиксированный*** элемент $\mathbf{H}_2$, а элемент $\mathbf{x}$ ***пробегает*** $\mathbf{H}_1$, то выражение $\ell_{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \stackrel{def}{=} (\mathbf{Ax}, \mathbf{y})_{\mathbf{H}_2}$, определяет ***линейный*** функционал $\ell_{\mathbf{A}}$ в ***пространстве*** $\mathbf{H}_1$.

Так как $\big|(\mathbf{Ax}, \mathbf{y})\big| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\|\,\|\mathbf{y}\|$, то этот функционал ***ограничен***.

По теореме Ф. Рисса о представлении линейного непрерывного функционала, функционал $\ell_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ может быть представлен в виде:

$$(\mathbf{Ax}, \mathbf{y})_{\mathbf{H}_2} = (\mathbf{x}, \mathbf{z})_{\mathbf{H}_1}, \tag{1}$$

где $\mathbf{z}$ — некоторый ***фиксированный*** элемент $\mathbf{H}_1$, ***однозначно*** определенный оператором $\mathbf{A}$ и элементом $\mathbf{y}$.

Равенство (1) позволяет ***каждому*** элементу $\mathbf{y} \in \mathbf{H_2}$ поставить в соответствие некоторый элемент $\mathbf{z} \in \mathbf{H}_1$.

Это соответствие, ***очевидно***, линейно, кроме того, по теореме о представлении: $\|\ell_{\mathbf{A}}\| = \|\mathbf{z}\|$.

С другой стороны, по определению ***нормы*** функционала:

$$\|\ell_{\mathbf{A}}\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \big|\ell_{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\big| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \big|(\mathbf{Ax}, \mathbf{y})\big| \leqslant \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{y}\|.$$

Поэтому:

$$\| \mathbf{z} \| \leqslant \| \mathbf{A} \| \| \mathbf{y} \| \tag{2}$$

и, следовательно, равенство (1) порождает ***линейный ограниченный*** оператор из $\mathbf{H}_2$ в $\mathbf{H}_1$.

Этот оператор называется ***сопряженным*** к оператору $\mathbf{A}$ и обозначается $\mathbf{A}^*$. Таким образом, в равенстве (1) : $\mathbf{z} = \mathbf{A}^*\mathbf{y}$.

Из (2) следует, что $\| \mathbf{A}^* \| \leqslant \| \mathbf{A} \|$.

Положим в (1) $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, тогда $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}_1$:

$$(\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x})_{\mathbf{H}_2} = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x})_{\mathbf{H}_1}$$

и $\| \mathbf{A}\mathbf{x} \|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{A}\mathbf{x}) \leqslant \| \mathbf{A}^* \| \| \mathbf{A} \| \| \mathbf{x} \|^2$ и, следовательно: $\| \mathbf{A} \|^2 \leqslant \| \mathbf{A}^* \| \| \mathbf{A} \|$.

Откуда $\| \mathbf{A} \| \leqslant \| \mathbf{A}^* \|$, то есть ***нормы оператора*** $\mathbf{A}$ и его ***сопряженного*** $\mathbf{A}^*$ ***всегда совпадают***: $\| \mathbf{A}^* \| = \| \mathbf{A} \|$.

Самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве

Определение 61. *Если пространства* $\mathbf{H}_1$ *и* $\mathbf{H}_2$ *совпадают, то* ***сопряженный*** *оператор* $\mathbf{A}^*$ *действует в том же пространстве, что и оператор* $\mathbf{A}$*.*

В этом случае для ***некоторых*** *операторов* $\mathbf{A}$ *может оказаться, что* $\mathbf{A}^*$ *и* $\mathbf{A}$ *совпадают.*

Если *такое* ***совпадение*** *имеет место, то оператор* $\mathbf{A}$ *называют* ***самосопряженным***.

Определение 62. ***Линейный*** *оператор* $\mathbf{A}$, *действующий в* ***линейном пространстве со скалярным произведением*** $\mathbf{X}$ *(не обязательно* ***полном****) называется* ***симметричным****, если:*

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{X}: \qquad (\mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{y}) \tag{3}$$

Из определения ***самосопряженного*** оператора в ***гильбертовом*** пространстве следует, что для ***непрерывного*** оператора в гильбертовом пространстве, из ***симметричности*** следует ***самосопряженность*** и, ***наоборот***.

Поэтому для ***ограниченных*** линейных операторов в гильбертовом пространстве термины ***симметричный*** и ***самосопряженный*** характеризуют одно и тоже ***свойство*** оператора и они взаимозаменяемы.

Собственные векторы оператора в гильбертовом пространстве

Остальная часть этого параграфа посвящена исследованию ***симметричного*** (самосопряженного) ***вполне непрерывного*** оператора $\mathbf{A}$ в ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$.

Согласно параграфу 3 главы II, мы называем элемент $\mathbf{x} \neq \mathbb{O}$ пространства $\mathbf{H}$, в котором действует оператор $\mathbf{A}$, ***собственным вектором*** (или элементом), если для некоторого действительного числа λ выполнено равенство:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \tag{4}$$

Число λ называется ***собственным значением*** оператора $\mathbf{A}$, соответствующим ***собственному вектору*** $\mathbf{x}$.

Утверждение 40. *Множество* *собственных векторов* ***линейного непрерывного*** *оператора* $\mathbf{A}$, *соответствующих* ***фиксированному*** *собственному значению* λ, *образуют* ***подпространство*** *в* $\mathbf{H}$, *а абсолютная величина* ***любого*** *собственного значения* ***не превышает*** $\| \mathbf{A} \|$.

Доказательство этого утверждения ***непосредственно*** следует из (4).

Существование собственного вектора у вполне непрерывного оператора

Собственные векторы существуют не у ***всякого*** линейного ограниченного оператора в $\mathbf{H}$. Однако справедлива

Теорема 17. *У* ***любого симметричного*** *(самосопряженного)* ***вполне непрерывного*** *оператора* $\mathbf{A}$, *действующего в* ***гильбертовом*** *пространстве* $\mathbf{H}$ *и* ***отличного*** *от оператора* $\mathbf{O}$, ***существует ненулевое собственное значение*** *и соответствующий ему* ***собственный вектор***.

Доказательство. Рассмотрим функционал: $\Phi(\mathbf{x}) = (\mathbf{Ax}, \mathbf{Ax})$.

Поскольку $\mathbf{A}$ ***линейный ограниченный*** оператор, то:

$$\sup_{\| \mathbf{x} \| = 1} \Phi(\mathbf{x}) = \| \mathbf{A} \|^2 .$$

По определению ***верхней грани***, существует последовательность $\{\mathbf{x}_n\}$, $\| \mathbf{x}_n \| = 1$, такая, что: $\lim\limits_{n \to \infty} \Phi(\mathbf{x}_n) = \| \mathbf{A} \|^2$.

Поскольку $\mathbf{A}$ ***вполне непрерывен***, последовательность $\{ \mathbf{Ax}_n \}$ содержит ***сходящуюся*** подпоследовательность.

Ей соответствует ***подпоследовательность*** последовательности $\{\mathbf{x}_n\}$, которую мы ***обозначим*** $\{\mathbf{f}_n\}$.

Тогда: $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(\mathbf{f}_n) = \|\mathbf{A}\|^2, \quad \|\mathbf{f}_n\| = 1$, и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}\mathbf{f}_n = \mathbf{z}, \quad (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \lim_{n\to\infty} \Phi(\mathbf{f}_n) = \|\mathbf{A}\|^2 \tag{4}$$

Рассмотрим выражение:

$$\Big\|\mathbf{A^2}\mathbf{f}_n - \|\mathbf{A}\|^2\cdot\mathbf{f}_n\Big\|^2 = \big(\mathbf{A^2}\mathbf{f}_n, \mathbf{A^2}\mathbf{f}_n\big) - 2\|\mathbf{A}\|^2\cdot\big(\mathbf{A^2}\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_n\big) + \|\mathbf{A}\|^4 \tag{5}$$

В силу (4) и ***симметричности*** оператора $\mathbf{A}$:

$$\lim_{n\to\infty}\big(\mathbf{A^2}\mathbf{f}_n, \mathbf{A^2}\mathbf{f}_n\big) = (\mathbf{A}\mathbf{z}, \mathbf{A}\mathbf{z}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\big(\mathbf{A^2}\mathbf{f}_n, \mathbf{f}_n\big) = \lim_{n\to\infty}(\mathbf{A}\mathbf{f}_n, \mathbf{A}\mathbf{f}_n) = (\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \|\mathbf{A}\|^2.$$

Поэтому ***правая часть*** равенства (5) имеет ***предел*** при $n \to \infty$ равный:

$$(\mathbf{A}\mathbf{z}, \mathbf{A}\mathbf{z}) - \|\mathbf{A}\|^4 \leqslant 0 \tag{6}$$

Левая часть равенства (5), очевидно, имеет тот же ***предел***.

В силу ***положительности*** обеих частей равенства (5) при любом $n = 1, 2, \ldots,$ неравенство (6) выполняется, как равенство:

$$\lim_{n\to\infty}\Big\|\mathbf{A^2}\mathbf{f}_n - \|\mathbf{A}\|^2\cdot\mathbf{f}_n\Big\| = 0.$$

В силу (4), отсюда следует ***сходимость*** последовательности $\{\mathbf{f}_n\}$ к некоторому элементу $\mathbf{f}$, $\|\mathbf{f}\| = 1$, и:

$$\mathbf{A^2}\mathbf{f} - \|\mathbf{A}\|^2\cdot\mathbf{f} = \mathbb{O} \tag{7}$$

Равенство (7) можно записать в виде:

$$\Big(\mathbf{A} + \|\mathbf{A}\|\cdot\mathbf{E}\Big)\cdot\Big(\mathbf{A} - \|\mathbf{A}\|\cdot\mathbf{E}\Big)\mathbf{f} = \mathbb{O},$$

или:
$$\Big(\mathbf{A} + \|\,\mathbf{A}\,\| \cdot \mathbf{E}\Big) \cdot \Big(\mathbf{Af} - \|\,\mathbf{A}\,\| \cdot \mathbf{f}\Big) = \mathbb{O}\,.$$

Последнее равенство возможно только в том случае, если выполнено хотя бы одно из условий:

1°. $\mathbf{f}$ — ***собственный вектор*** $\mathbf{A}$ (с ***собственным значением*** $\lambda = \|\,\mathbf{A}\,\|$),

2°. $\Big(\mathbf{Af} - \|\,\mathbf{A}\,\| \cdot \mathbf{f}\Big)$ — ***собственный вектор*** оператора $\mathbf{A}$ (с ***собственным значением*** $\lambda = -\|\,\mathbf{A}\,\|$).

Теорема доказана. □

Теорема о спектральном разложении вполне непрерывного оператора

Так как ***любое*** собственное значение по модулю не превосходит $\|\,\mathbf{A}\,\|$, ***доказательство*** теоремы демонстрирует у всякого самосопряжённого вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$ наличие хотя бы одного собственного ***вектора*** с собственным ***значением*** $\lambda_1 : |\lambda_1| = \|\,\mathbf{A}\,\|$.

Пусть $\mathbf{e}_1$ ***нормированный собственный вектор*** с ***собственным значением*** $-\|\,\mathbf{A}\,\|$ или $\|\,\mathbf{A}\,\|$.

В силу теоремы ***об ортогональном разложении*** из § 2, пространство $\mathbf{H}$ можно представить в виде: $\mathbf{H} = \{\mathbf{e}_1\} \oplus \{\mathbf{e}_1\}^{\perp} = \{\mathbf{e}_1\} \oplus \mathbf{H}_1$, где ***подпространство*** $\mathbf{H}_1$ — ***ортогональное дополнение*** к ***одномерному подпространству*** $\{\mathbf{e}_1\}$ в $\mathbf{H}$, и, поэтому, само является ***гильбертовым*** пространством.

Кроме того ***подпространство*** $\mathbf{H}_1$ ***инвариантно*** относительно действия оператора $\mathbf{A}$, то есть: $\mathbf{A}(\mathbf{H}_1) \subseteq \mathbf{H}_1$.

Действительно, если $\mathbf{z} \in \mathbf{H}_1$, то есть $(\mathbf{z}, \mathbf{e}_1) = 0$, то:

$$(\mathbf{Az}, \mathbf{e}_1) = (\mathbf{z}, \mathbf{Ae}_1) = \lambda_1 \cdot (\mathbf{z}, \mathbf{e}_1) = 0 .$$

В силу сказанного, оператор $\mathbf{A}$ можно теперь рассматривать как оператор, ***действующий*** лишь в $\mathbf{H}_1$, и повторить предыдущие рассуждения.

Таким образом, если $\mathbf{A}\big(\mathbf{H}_1\big) \neq \mathbb{O}$, получим новый ***нормированный собственный вектор*** $\mathbf{e}_2$ с некоторым ***собственным значением*** λ_2.

При этом, т.к. $\mathbf{H}_1 \subset \mathbf{H}$, то: $\big|\lambda_1\big| \geqslant \big|\lambda_2\big|$ и $\mathbf{e}_2$ ***ортогонален*** $\mathbf{e}_1$.

Далее можно рассмотреть ***подпространство*** $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, порожденное векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, и его ***ортогональное дополнение*** в $\mathbf{H}$, подпространство $\mathbf{H}_2$: $\mathbf{H} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \oplus \mathbf{H}_2$.

Аналогично доказательству ***инвариантности*** $\mathbf{H}_1$ относительно $\mathbf{A}$, можно показать ***инвариантность*** $\mathbf{H}_2$ относительно $\mathbf{A}$.

Рассматривая оператор $\mathbf{A}$, как оператор из $\mathbf{H}_2$ в $\mathbf{H}_2$, если $\mathbf{A}\big(\mathbf{H}_2\big) \neq \mathbb{O}$, можно получить ***нормированный собственный вектор*** $\mathbf{e}_3$ с ***собственным значением*** λ_3.

При этом: $\big|\lambda_1\big| \geqslant \big|\lambda_2\big| \geqslant \big|\lambda_3\big|$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — ***взаимно ортогональны***.

Этот ***процесс выделения ортонормированных собственных векторов*** оператора $\mathbf{A}$ можно ***продолжать*** и дальше.

При этом образуется ***последовательность собственных векторов***: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, \ldots$, и соответствующая ***последовательность***

собственных значений: $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$, такая, что:

$$\left|\lambda_1\right| \geqslant \left|\lambda_2\right| \geqslant \left|\lambda_3\right| \geqslant \cdots \geqslant \left|\lambda_n\right| \geqslant \cdots \tag{8}$$

Утверждение 41. *Какое бы число* $\delta > 0$ *мы ни взяли, последовательность* (8) *содержит лишь* ***конечное*** *число членов* λ_k, *таких, что:* $\lambda_k \geqslant \delta$.

Доказательство. Действительно, пусть утверждение не верно, тогда $\exists$ ***бесконечная*** система $\{\mathbf{e}_n\}$ ***ортонормированных собственных векторов*** оператора $\mathbf{A}$ и

$$\|\mathbf{A}\mathbf{e}_m - \mathbf{A}\mathbf{e}_n\|^2 = \|\lambda_m\mathbf{e}_m - \lambda_n\mathbf{e}_n\|^2 = \lambda_m^2 + \lambda_n^2 \geqslant 2\delta^2 \tag{9}$$

для всех натуральных m и n.

Но, неравенство (9), ***очевидно***, противоречит ***полной непрерывности*** оператора $\mathbf{A}$. □

Из этого утверждения следует:

1°. Каждому ***собственному значению*** соответствует лишь ***конечное*** число ***линейно независимых собственных элементов*** оператора $\mathbf{A}$.

2°. ***Последовательность*** собственных чисел, ***не равных*** 0, — $\{\lambda_n\}$, — ***или сходится*** к 0, ***или содержит*** лишь ***конечное*** число членов.

Если ***последовательность*** собственных чисел ***бесконечна***, то ей соответствует ***бесконечная*** (счетная) ***последовательность*** ортонормированных ***собственных векторов*** $\{\mathbf{e}_n\}$.

Пусть $\mathbf{x}$ некоторый элемент пространства $\mathbf{H}$ и $\{\mathbf{e}_i\}$ ортонормированная система собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, для которых $|\lambda_i| > 0$.

В § 2 мы показали, что

$$\mathbf{x} = \sum_i (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)\,\mathbf{e}_i + \mathbf{h}$$

и $\mathbf{h}$ ортогонален всем $\{\mathbf{e}_i\}$.

Покажем, что оператор $\mathbf{A}$ переводит элемент $\mathbf{h}$ в $\mathbb{O}_{\mathbf{H}}$, то есть $\mathbf{h} \in \mathbf{kerA}$.

Действительно, элемент $\mathbf{h}$ ортогонален всем $\{\mathbf{e}_i\}$ и, следовательно, $\forall N \geqslant 1$ подпространству $\mathbf{H}_N \subseteq \mathbf{H}$, порожденному элементами $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$.

Это означает, что $\mathbf{h} \in \bigcap\limits_N \mathbf{H}_N^{\perp}$.

Каждое подпространство $\mathbf{H}_N^{\perp}$ инвариантно относительно действия оператора $\mathbf{A}$.

По построению, норма оператора $\mathbf{A}$ относительно пространства $\mathbf{H}_N^{\perp}$ не превосходит $|\lambda_N|$.

Пусть ненулевых λ_i конечное число — N.

Тогда оператор $\mathbf{A}$ переводит все элементы подпространства $\mathbf{H}_N^{\perp}$ в $\mathbb{O}_{\mathbf{H}}$.

(В противном случае мы могли бы выполнить ещё один шаг процесса и получить ещё один ***ненулевой*** собственный элемент.)

Поэтому, в рассматриваемом случае: $\mathbf{h} \in \mathbf{kerA}$.

Если число ненулевых λ_i бесконечно, то при $\mathbf{h} \in \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \mathbf{H}_i^{\perp}$ справедливо неравенство: $\|\mathbf{Ah}\| \leqslant |\lambda_i|$.

Т.к. $\lim\limits_{i\to\infty} |\lambda_i| = 0$, то $\|\mathbf{Ah}\| = 0$ и снова $\mathbf{h} \in \mathbf{kerA}$. Сказанное выше можно представить в виде теоремы:

Теорема 18 (***о спектральном разложении***)**.** *Любой* ***симметричный вполне непрерывный*** *оператор в* ***гильбертовом*** *пространстве* $\mathbf{H}$ *имеет* ***конечную*** *или* ***счетную*** *систему* ***ортонормированных собственных векторов*** $\{\mathbf{e}_i\}$ *с* ***ненулевыми собственными значениями*** λ_i *.*

Любой *элемент* $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ *может быть представлен в виде:*

$$\mathbf{x} = \sum_i (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i)\, \mathbf{e}_i + \mathbf{h}, \quad \textit{где} \quad \mathbf{Ah} = \mathbb{O}_{\mathbf{H}}\,, \quad \textit{и}$$

$$\mathbf{Ax} = \sum_i \lambda_i \cdot (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i \tag{10}$$

Равенство (10) *называется* ***спектральным разложением*** *оператора* $\mathbf{A}$ *.*

Доказанная теорема обобщает известное утверждение ***линейной алгебры*** о том, что ***симметричная*** матрица имеет в ***некотором*** ортогональном базисе ***диагональный вид***.

Из утверждений этой теоремы следует, что ***ортонормированная система собственных векторов*** с ***ненулевыми*** собственными значениями симметричного вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$ ***полна*** в $\mathbf{H}$ ***тогда и только тогда***, когда: $\mathbf{ker}\mathbf{A} = \mathbb{O}_{\mathbf{H}}$.

Упражнения и задачи к параграфу 3.

1. Показать, что любой ***непрерывный*** оператор в ***евклидовом*** пространстве $\mathbb{E}^n$ ***вполне непрерывен***.

2. Пусть для всякого $\mathbf{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in \ell_2$, оператор $\mathbf{A}$ действует по формуле:

$$\mathbf{Ax} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{2j}$$

Показать, что оператор $\mathbf{A}$ — ***вполне непрерывный*** оператор из ℓ_2 в $\mathbb{E}^1$.

3. Доказать, что ***линейный*** оператор $\mathbf{A}$, действующий из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^n$, ***симметричен*** тогда и только тогда, когда ***симметрична*** представляющая его ***матрица***.

4. Выписать ***сопряженный*** оператор к оператору $\mathbf{A}$ в $\mathbb{E}^2$, ***определяемому*** матрицей: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Показать, что $\big(\mathbf{A}^*\big)^* = \mathbf{A}$ и $\big(\mathbf{A}^*\mathbf{A}\big)^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$.

6. Проверить, что если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ ***сопряжённые*** друг другу операторы, то $\mathbf{A} + \mathbf{A}^*$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^*$ и $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ — ***самосопряжённые*** операторы и $\|\, \mathbf{A}\mathbf{A}^* \,\| = \|\, \mathbf{A}^*\mathbf{A} \,\| = \|\, \mathbf{A} \,\|^2$.

7. Пусть в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ задана ***полная*** система $\{\, \mathbf{e}_i \,\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ ***ортонормированных*** векторов.

Тогда всякому элементу $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ соответствует его ***ряд Фурье*** относительно системы $\{\, \mathbf{e}_i \,\}$, $i = 1, 2, \ldots$: $\mathbf{x} \overset{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i \cdot \mathbf{e}_i$

Оператор $\mathbf{A}$ действующий на всякий элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ по формуле: $\mathbf{A}\mathbf{x} \overset{def}{=} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot c_i \cdot \mathbf{e}_i$, называется оператором ***нормального*** типа.

Показать, что оператор ***нормального*** типа в гильбертовом пространстве будет иметь ***ограниченный*** обратный ***тогда*** и ***только тогда***, когда ***существует*** такая постоянная величина $\gamma > 0$, что выполняется неравенство: $\inf\limits_{n} |\, \lambda_n \,| \geqslant \gamma$.

8. Показать, что оператор ***нормального*** типа в гильбертовом пространстве (см. определение в упражнении 7) будет ***вполне непрерывным*** тогда и только тогда, когда выполняется равенство: $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$.

9*. Показать, что для всякого ***ограниченного*** оператора $\mathbf{A}$, действующего в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ по формуле $\mathbf{y} = \mathbf{Ax}$, в пространстве ℓ_2 существует "***подобный***" оператору $\mathbf{A}$, ***ограниченный*** оператор $\mathcal{A}$ такой, что $\| \mathcal{A} \|_{\ell_2 \to \ell_2} = \| \mathbf{A} \|_{\mathbf{H} \to \mathbf{H}}$.

Указание. В соответствии с задачей 6 § 2, любое сепарабельное гильбертово пространство $\mathbf{H}$ ***непрерывно изоморфно*** пространству ℓ_2. Поэтому всякой "паре" векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \stackrel{def}{=} \mathbf{Ax} \in \mathbf{H}$, отвечает при указанном изоморфизме "пара" векторов $\check{\mathbf{x}} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in \ell_2$ и $\check{\mathbf{y}} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots) \in \ell_2$, которая и определяет действие оператора $\mathcal{A}$ в пространстве ℓ_2 по формуле: $\mathcal{A}\check{\mathbf{x}} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots) \in \ell_2$.

10. Показать, что оператор $\mathcal{A}$ в пространстве ℓ_2, построенный в предыдущей задаче для заданного оператора $\mathbf{A}$, будет ***вполне непрерывным*** тогда и только тогда, когда вполне непрерывным будет исходный оператор $\mathbf{A}$.

11. Пусть в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ задана ***полная*** система $\{ \mathbf{e}_i \}$, $i = 1, 2, \ldots,$ ***ортонормированных*** векторов.

Показать, что тогда всякий ***линейный*** оператор $\mathbf{A} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ может быть задан бесконечной ***матрицей*** $\mathcal{A} = (a_{ij})$, ***определяемой*** равенством: $\mathbf{h}_j = \mathbf{Ae}_j = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ij}\mathbf{e}_i$.

Написать формулы для вычисления ***элементов*** (a_{ij}) матрицы $\mathcal{A}$.

12. Пусть в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ задана ***полная*** система $\{ \mathbf{e}_i \}$, $i = 1, 2, \ldots,$ ***ортонормированных*** векторов. Пусть $\mathbf{A} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ ***ограниченный*** оператор. Показать, что тогда $\exists \mathbf{K} \in \mathbb{R}^1_+$, что для $\forall (x_1, \ldots, x_m)$ и $\forall (y_1, \ldots, y_n)$ имеет место

неравенство:

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j\right|^2 \leqslant \mathbf{K}\cdot\sum_{i=1}^{m} x_i^2\sum_{j=1}^{n} y_j^2$$

13. Пусть в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ задана ***полная*** система $\{\,\mathbf{e}_i\,\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ ***ортонормированных*** векторов.

Пусть $\exists\,\mathbf{K} \in \mathbb{R}^1_+$, что для $\forall\,(x_1, \ldots, x_m)$ и $\forall\,(y_1, \ldots, y_n)$ имеет место неравенство:

$$\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j\right|^2 \leqslant \mathbf{K}\cdot\sum_{i=1}^{m} x_i^2\sum_{j=1}^{n} y_j^2$$

Показать, что тогда оператор $\mathbf{A} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ — ***ограниченный***.

14. Пусть в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ задана ***полная*** система $\{\,\mathbf{e}_i\,\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ ***ортонормированных*** векторов.

Пусть $\mathbf{A} : \mathbf{H} \to \mathbf{H}$ ***ограниченный*** оператор.

Получить оценку снизу ***нормы*** оператора $\mathbf{A}$:

$$\sup_i\left\{\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2\right\} \leqslant \|\,\mathbf{A}\,\|^2_{\mathbf{H}}$$

15. Показать, что оператор $\mathbf{A}$, заданный бесконечной ***матрицей*** $\mathcal{A} = (\,a_{ij}\,)$ относительно ***полной*** системы $\{\,\mathbf{e}_i\,\}$, $i = 1, 2, 3, \ldots,$ ***ортонормированных*** векторов $\{\,\mathbf{e}_j\,\}$ в ***сепарабельном гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$, и действующий по формуле $\mathbf{A}\mathbf{e}_j = \sum\limits_{i=1}^{\infty} a_{ij}\mathbf{e}_i$ ***вполне непрерывен***, если $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2 < \infty$.

3.4 Примеры самосопряженных вполне непрерывных операторов в пространстве $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Пример 1

Пусть $\mathcal{K}\,(\,t,\ s\,)$ ***непрерывная*** на множестве $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ функция двух переменных.

Из свойств интеграла (Лебега) следует, что для любого элемента $x\,(s)$ из пространства $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***корректно*** определена функция

$$y\,(\,t\,) \;=\; \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}\,(\,t,\ s\,)x\,(s)\,ds \tag{1}$$

Утверждение 42. ***Интеграл*** *в правой части* (1) *определяет* ***линейный*** *оператор из* $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *в* $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *и этот оператор* ***вполне непрерывен***.

Доказательство. Действительно, интеграл в правой части (1) зависит от параметра t и определяет ***поточечно*** некоторую функцию.

Рассмотрим ***ограниченное*** в пространстве $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***множество*** $\mathbf{M}_r$ элементов $\mathbf{x} \equiv x\,(s)$:

$$\mathbf{M}_r : \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x^2\,(s)\,ds \;\leqslant\; r^2$$

Обозначим $\mathbf{K} \;=\; (\,\mathbf{b} \,-\, \mathbf{a}\,)^{1/2} \cdot r\,.$

Тогда, в силу неравенства ***Коши - Буняковского***:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} |\,x\,(s)\,|\,ds \;\leqslant\; (\,\mathbf{b} \,-\, \mathbf{a}\,)^{1/2} \cdot \left[\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x^2\,(s)\,ds\right]^{1/2} \;\leqslant\; \mathbf{K}$$

Покажем, что образ множества $\mathbf{M}_r \subset \mathbb{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ — ***множество*** $\mathbf{A}(\mathbf{M}_r)$, ***компактно*** в пространстве $\mathbb{C}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, а тогда ***и в пространстве*** $\mathbb{L}_2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Действительно, т.к функция $\mathcal{K}(t, s)$ ***непрерывна*** на ***компакте*** $[\mathbf{a},\mathbf{b}] \times [\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то, в силу утверждения 16 главы 1, эта функция ***равномерно непрерывна*** на указанном компакте, а потому $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что, в частности:

$$|\mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s)| < \frac{\varepsilon}{\mathbf{K}}, \quad \text{если} \quad |t_1 - t_2| < \delta(\varepsilon),$$
$$t_1, t_2 \in [\mathbf{a},\mathbf{b}], \quad \forall\, s \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$$

Поэтому все функции $y(t)$ из множества $\mathbf{A}(\mathbf{M}_r)$, во-первых, ***равностепенно непрерывны***, т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что:

$$\Big| y(t_1) - y(t_2) \Big| = \left| \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t_1, s) x(s)\, ds - \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t_2, s) x(s)\, ds \right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \big| \mathcal{K}(t_1, s) - \mathcal{K}(t_2, s) \big| \cdot \big| x(s) \big|\, ds < \varepsilon \tag{2}$$

А, во-вторых, ***ограничены*** одной и той же ***константой***:

$$\left| \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t, s) x(s)\, ds \right| \leqslant \sqrt{\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \big| \mathcal{K}(t, s) \big|^2 ds \cdot \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \big| x(s) \big|^2 ds} \leqslant$$
$$\leqslant \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{L}_2} \cdot \max_{[\mathbf{a},\mathbf{b}] \times [\mathbf{a},\mathbf{b}]} |\mathcal{K}(t, s)| \cdot \sqrt{\mathbf{b} - \mathbf{a}} \tag{3}$$

Поэтому, если $\|\mathbf{x}\|_{\mathbb{L}_2} \leqslant r$, то функции, ***определяемые*** интегралом (1), согласно теореме Арцела (см. § 5, главы 1) образуют подмножество, которое ***компактно*** в $\mathbb{C}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

В свою очередь, каждая такая функция порождает ***элемент*** $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ (§ 4 главы 1) и, следовательно, ***интегральный оператор*** (1) порождает ***отображение*** $\mathbf{A}$ из $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ в $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

В силу свойства ***линейности интеграла***, это отображение ***линейное***.

Пусть $Y\,(t)$ ***элемент*** $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, ***содержащий*** функцию $y\,(t)$, равную значению интеграла в правой части (1).

Если последовательность функций $\{\,y_n\,(t)\,\}$ ***фундаментальна*** в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то последовательность элементов $\{\,Y_n\,(t)\,\}\in\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***фундаментальна*** в $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Действительно:

$$\|\,\mathbf{Y}_m-\mathbf{Y}_n\,\|^2_{\mathbb{L}_2}=\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\left[y_m\,(t)-y_n\,(t)\right]^2 ds\leqslant\|\,\mathbf{y}_m-\mathbf{y}_n\,\|^2_{\mathbb{C}}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\quad(4)$$

Так как функции $y\,(t)$, получающиеся при отображении $\mathbf{A}$ из элементов $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, принадлежащих шару: $\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbb{L}_2}\leqslant r$, образуют, как мы установили, ***компактное*** множество в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то, в силу (4), образ шара $\|\,\mathbf{x}\,\|_{\mathbb{L}_2}\leqslant r$ при отображении $\mathbf{A}$ ***компактен*** в $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и, следовательно, ***интегральный оператор*** (1) — ***линейный вполне непрерывный*** оператор из $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ в $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. □

Утверждение 43. *Если* $\mathcal{K}\,(\,t,\,s\,)=\mathcal{K}\,(\,s,\,t\,)$, *то полученный оператор будет* ***симметричным*** *(самосопряженным) в* $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Доказательство. Действительно, если $\mathbf{z} \in \mathbb{L}_2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то:

$$\begin{aligned}(\mathbf{z}, \mathbf{A}\mathbf{x}) &= \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left(z(t) \cdot \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t,\, s) x(s)\, ds \right) dt = \\ &= \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x(s) \cdot \left(\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} z(t) \mathcal{K}(t,\, s)\, dt \right) ds = (\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{z})\end{aligned} \tag{5}$$

Последнее равенство справедливо в силу предположенной ***независимости*** значений функции $\mathcal{K}(t,\, s)$ от перестановки ее аргументов. $\square$

Замечание. При выводе равенства (5) мы воспользовались возможностью в нашем случае ***переставлять*** пределы интегрирования в ***повторном*** интеграле Лебега (см. [1], [7]).

Пример 2

Пусть $f(t)$ ***непрерывная на отрезке*** $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ функция.

Рассмотрим ***дифференциальное*** уравнение

$$-y'' = f \tag{6}$$

с ***краевыми условиями***

$$y(\mathbf{0}) = y(\boldsymbol{\pi}) = 0 .$$

Решение ***краевой задачи*** (6) можно выразить ***в квадратурах***, т.е. представить в виде интегралов от заданной функции $f(t)$.

Действительно, ***общее решение*** дифференциального уравнения (6) записывается в виде:

$$y(t) = -\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} f(\tau)\, d\tau\, ds + \mathbf{C}t + \mathbf{C}_1 ,$$

где $\mathbf{C}$, $\mathbf{C}_1$ — произвольные постоянные.

Для выполнения ***дополнительных условий*** нужно, чтобы:

$$\mathbf{C}_1 = 0 , \qquad \big(y(\mathbf{0}) = 0 \big) ,$$

и

$$\mathbf{C} = \frac{1}{\boldsymbol{\pi}} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} f(\tau)\, d\tau\, ds , \qquad \big(y(\boldsymbol{\pi}) = 0 \big) .$$

Таким образом:

$$y(t) = -\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} f(\tau)\, d\tau\, ds + \frac{t}{\boldsymbol{\pi}} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{s}} f(\tau)\, d\tau\, ds \tag{7}$$

В ***повторных*** интегралах правой части этого равенства можно ***поменять*** порядок интегрирования.

Произведя эту операцию, получим:

$$y(t) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{t}} f(\tau)(\tau - t)\, d\tau + \frac{t}{\boldsymbol{\pi}} \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} f(\tau)(\boldsymbol{\pi} - \tau)\, d\tau$$

Это равенство можно записать в виде:

$$y(t) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \mathcal{K}(t, \tau) f(\tau)\, d\tau , \tag{8}$$

где

$$\mathcal{K}(t, \tau) = \begin{cases} \tau - t + \frac{t}{\pi}(\boldsymbol{\pi} - \tau), & \tau \leqslant t \\ \frac{t}{\pi}(\boldsymbol{\pi} - \tau), & \tau > t \end{cases}$$

или

$$\mathcal{K}(t, \tau) = \begin{cases} \tau \left(1 - \frac{t}{\pi}\right), & \tau \leqslant t \\ t \left(1 - \frac{\tau}{\pi}\right), & \tau > t \end{cases}$$

Ядро интегрального оператора (8) — $\mathcal{K}(t, \tau)$, называется ***функцией Грина краевой задачи*** (6).

Функция Грина, во-первых, ***симметрична*** относительно своих аргументов t, τ, а, во-вторых, ***непрерывна*** всюду на компакте $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}] \times [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$, и, в-третьих, удовлетворяет ***условию Липшица*** по первому аргументу (см. задачу 1 к этому параграфу).

Поэтому (см. пример 1) — ***интегральный оператор***, определяемый формулой (8), является ***вполне непрерывным симметричным*** оператором из $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ в $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ и для него справедлива доказанная в § 3 теорема ***о спектральном разложении***.

В этом конкретном случае можно явно найти ***собственные функции*** и соответствующие им ***ненулевые собственные значения***.

Действительно, искомые ***собственные функции*** оператора (8) удовлетворяют равенству:

$$\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \mathcal{K}(t,\, s)y(s)\,ds \;=\; \lambda \cdot y(t) \tag{9}$$

Каждую конкретную функцию $y(s) \in \mathbb{L}_2\,[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ интегральный оператор (8) переводит в ***непрерывную*** функцию и, следовательно, ***любой*** собственный элемент соответствующего оператора — ***непрерывная*** на $[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ функция (точнее ***класс*** эквивалентных функций, — элемент пространства $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$, содержащий непрерывную функцию).

Но, если $y(s)$ ***непрерывна***, то, в силу построения оператора (8), интеграл в левой части (9) ***дважды дифференцируем*** по t.

Если ***обозначить*** его через $z(t)$, то в силу (7) :

$$-z''(t) \;=\; y(t), \quad z(\mathbf{0}) \;=\; z(\boldsymbol{\pi}) \;=\; 0\,.$$

В силу (9) : $\quad y(\mathbf{0}) \;=\; y(\boldsymbol{\pi}) \;=\; 0\,.$

Кроме того, из (9) следует, что:

$$z''(t) = \lambda \cdot y''(t)\ .$$

Следовательно, ***ненулевые*** λ и $y(t)$ должны быть ***нетривиальными*** решениями следующей ***краевой задачи***, называемой ***задачей Штурма - Лиувилля***:

$$-\lambda\, y''(t) = y(t), \quad y(\mathbf{0}) = y(\boldsymbol{\pi}) = 0 \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что при $\lambda \leqslant 0$ ***нетривиального*** решения задачи (10) ***не существует***.

При $\lambda > 0$ ***общее решение*** дифференциального уравнения из (10) имеет вид:

$$y(t) = \mathbf{C_1} \sin\frac{t}{\sqrt{\lambda}} + \mathbf{C_2} \cos\frac{t}{\sqrt{\lambda}}$$

Так как $y(\mathbf{0}) = 0\,,$ то $\mathbf{C}_2 = 0\,.$

Удовлетворение второго ***краевого условия*** $y(\boldsymbol{\pi}) = 0$ возможно, если:

$$\sin\frac{\boldsymbol{\pi}}{\sqrt{\lambda}} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\boldsymbol{\pi}}{\sqrt{\lambda}} = n\,\boldsymbol{\pi}, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

Отсюда:

$$\lambda_n = \frac{1}{n^2}, \qquad n = 1,\, 2,\, \ldots$$

Одномерное пространство, порожденное каждым таким ***собственным значением***, имеет вид:

$$\{\, c \cdot \sin n\, t\,\}\ .$$

Т.к.:

$$\|\, \sin n\, t\,\|_{\mathbb{L}_2\,[\mathbf{0},\boldsymbol{\pi}]} = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \sin^2 n\, t\, dt = \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\ ,$$

то система $\left\{ \sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{\pi}}} \sin n\, t \right\}$, $n = 1, 2, \ldots$ — ***ортонормированная система собственных функций*** оператора (8) и $\forall\, \mathbf{f} \in \mathbb{L}_2\, [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$:

$$\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} \mathcal{K}\,(\,t,\, s\,) f\,(s)\, ds \;=\; \frac{\mathbf{2}}{\boldsymbol{\pi}} \cdot \sum_{n\,=\,1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left(\int\limits_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{\pi}} f\,(s) \sin\, ns\, ds \right) \cdot \sin\, nt$$

Можно показать, что полученная ортонормальная система ***полна*** в $\mathbb{L}_2\, [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$.

Для этого нужно убедиться, что ***ядро*** оператора (8) — $\mathbf{ker A}$, — содержит только ***нулевой элемент*** $\mathbb{O}$ или ***непосредственно*** установить, что в $\mathbb{L}_2\, [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$ нет ***ненулевых*** элементов, ***ортогональных всем*** функциям $\sin n\, t$, $n = 1, 2, \ldots$.

В последнем можно убедиться, используя некоторые результаты о сходимости ***стандартных рядов Фурье***.

Мы не будем на этом останавливаться.

Упражнения и задачи к параграфу 4.

1. Проверить ***симметричность функции Грина*** в (8) и выполнение ***условия Липшица*** по первому аргументу.

2. Не используя явный вид решения ***задачи Штурма - Лиувилля*** (10), показать, что ***любые*** два ее решения, с разными λ_i, ***ортогональны***.

3.5 Линейные уравнения с вполне непрерывным симметричным оператором

Представление решения

Рассмотрим ***операторное*** уравнение в ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$:

$$\lambda \mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} , \qquad (1)$$

где $\mathbf{A}$ ***вполне непрерывный симметричный*** оператор, λ — некоторое действительное ***число***.

Используя доказанную в § 3 теорему ***о спектральном разложении*** оператора $\mathbf{A}$, можно получить ***явное*** представление решения уравнения (1) через ***собственные значения*** и ***собственные элементы*** оператора $\mathbf{A}$.

Пусть $\{ \lambda_i \}$ последовательность ***ненулевых*** собственных значений оператора $\mathbf{A}$ и $\{ \mathbf{e}_i \}$ соответствующая последовательность ***ортонормированных*** собственных элементов.

Любой элемент $\mathbf{x}$ пространства $\mathbf{H}$ допускает, согласно теореме о спектральном разложении § 3 , представление:

$$\mathbf{x} = \sum_i \mathbf{c_i}\, \mathbf{e_i} + \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} \in \mathbf{kerA} , \qquad (2)$$

где $\mathbf{c}_i$ и элемент $\mathbf{h}$ ***однозначно*** определяются по $\mathbf{x}$.

Поэтому, ***любое*** решение уравнения (1) имеет представление в виде (2) .

Представим элемент $\mathbf{y}$ в виде:

$$\mathbf{y} = \sum_i (\mathbf{y}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i + \mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\mathbf{y})$$

В силу (1):

$$\lambda\,\mathbf{h} + \lambda\cdot\sum_i \mathbf{c}_i\,\mathbf{e}_i - \sum_i \lambda_i\cdot\mathbf{c}_i\cdot\mathbf{e}_i = \sum_i (\,\mathbf{y},\,\mathbf{e}_i\,)\cdot\mathbf{e}_i + \mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\,\mathbf{y}\,)$$

Учитывая ***ортогональность*** $\mathbf{kerA}$ и ***подпространства***, образованного всеми $\mathbf{e}_i$, получим:

$$\lambda\,\mathbf{h} = \mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\,\mathbf{y}\,), \qquad \sum_i \mathbf{c}_i\,(\,\lambda - \lambda_i\,)\cdot\mathbf{e}_i = \sum_i (\,\mathbf{y},\,\mathbf{e}_i\,)\cdot\mathbf{e}_i \tag{3}$$

Зависимость решения уравнения (1) от параметра λ

Рассмотрим несколько ***возможных*** случаев ***взаимного*** расположения значений параметра λ и собственных значений оператора $\mathbf{A}$ - $\{\,\lambda_i\,\}$.

1°. $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$ и $\boldsymbol{\lambda \neq \lambda_i}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Из равенств (3) можно ***однозначно*** определить ***неизвестный*** элемент $\mathbf{h}$ и ***коэффициенты*** $\mathbf{c}_i$.

Именно:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\,\mathbf{y}\,)}{\lambda}\,; \qquad \mathbf{c}_i = \frac{(\,\mathbf{y},\,\mathbf{e}_i\,)}{\lambda - \lambda_i}$$

Решение уравнения (1) можно записать в виде:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{pr}_{\mathbf{kerA}}(\,\mathbf{y}\,)}{\lambda} + \sum_i \frac{(\,\mathbf{y},\,\mathbf{e}_i\,)\cdot\mathbf{e}_i}{\lambda - \lambda_i} \tag{4}$$

Так как, по предположению $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ то:

$$d = \inf_i \left|\,\lambda - \lambda_i\,\right| \neq 0$$

Действительно:

$$\left|\,\lambda - \lambda_i\,\right| \geqslant \Big|\,|\,\lambda\,| - |\,\lambda_i\,|\,\Big|$$

Если число ***ненулевых*** λ_i ***конечно***, то правая часть этого неравенства ограничена снизу положительной постоянной.

Поэтому в рассматриваемом случае $d \neq 0$.

Если число ***ненулевых*** λ_i ***бесконечно***, то $\lim\limits_{i\to\infty} \lambda_i = 0$.

В этом случае выберем столь большое N, чтобы при $i \geqslant N$ выполнялось неравенство:

$$\Big|\,|\lambda| - |\lambda_i|\,\Big| \geqslant \frac{|\lambda|}{2}$$

Таким образом для $i \geqslant N$

$$|\lambda - \lambda_i| \geqslant \frac{|\lambda|}{2}$$

Для оставшихся в рассматриваемом случае номеров $i < N$ правая часть нужного неравенства ограничена снизу некоторой положительной величиной, т.к. $\lambda \neq \lambda_i,\, i = 1, 2, \ldots$.

Поэтому, и в случае бесконечного числа ***ненулевых*** λ_i, — $d \neq 0$.

Итак, в случае $\mathbf{1}^\circ$, можно утверждать, что уравнение (1) имеет ***единственное*** решение при ***любом*** $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$.

Это решение может быть представлено в виде (4).

Согласно § 3 главы II, оператор $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$, в этом случае, имеет ***обратный*** — $\left(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}$.

Из представления (4) следует его ***ограниченность***. Более того, ***норма*** этого оператора равна:

$$\max\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{d}\right),$$

(см. задачу 1 к этому параграфу).

$\mathbf{2}^\circ$. $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$, но $\boldsymbol{\lambda}$ ***совпадает*** с ***одним*** из ***собственных значений*** $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{i_0}}$.

В этом случае, равенствам (3) можно удовлетворить только, если выполнено условие:

$$(\mathbf{y}, \{\mathbf{e}_{\mathbf{i_0}}\}) = 0 \tag{5}$$

Здесь $\{\mathbf{e}_{i_0}\}$ ***конечное*** множество линейно независимых ***собственных векторов*** оператора $\mathbf{A}$, соответствующих ***собственному значению*** λ_{i_0}.

При выполнении условия (5), равенства (3) удовлетворяются, если:

$$\mathbf{h} = \frac{\mathbf{pr}_{\mathbf{ker A}}(\mathbf{y})}{\lambda}\,;\ \mathbf{c}_i = \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{e}_i)}{\lambda - \lambda_i}, \text{ если } \lambda_i \neq \lambda_{i_0}\,;\ \mathbf{c}_i\text{—произвольно, если} \lambda_i = \lambda_{i_0}$$

Решение уравнения (1), в рассматриваемом случае, имеет вид:

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{pr}_{\mathbf{ker A}}(\mathbf{y})}{\lambda} + \sum_{i,\, \lambda_i \neq \lambda_{i_0}} \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_i}{\lambda - \lambda_i} + \sum_{i,\, \lambda_i = \lambda_{i_0}} \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{e}_i \tag{6}$$

Из (6) видно, что, в случае $\mathbf{2}^\circ$, совокупность решений уравнения (1) образует ***подмножество*** (гиперплоскость) в пространстве $\mathbf{H}$, являющееся ***суммой конечномерного подпространства*** и некоторого ***фиксированного*** элемента $\mathbf{H}$.

Упомянутое ***конечномерное подпространство*** есть ***множество*** решений уравнения (1) с правой частью $\mathbf{y} = \mathbb{O}_{\mathbf{H}}$ при $\lambda = \lambda_{i_0}$.

$\mathbf{3}^\circ$. $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$.

В этом, в некотором смысле, ***особом*** случае, из первого равенства (3) следует, что $\mathbf{pr}_{\mathbf{ker A}}(\mathbf{y}) = \mathbb{O}$ и, поэтому, для разрешимости уравнения (1) ***необходимо***, чтобы его правая часть $\mathbf{y}$ была бы ***ортогональна*** $\mathbf{ker A}$.

Остальные условия (3), ***очевидно***, выполняются при:

$$\mathbf{c}_i = -\frac{(\mathbf{y}, \mathbf{e}_i)}{\lambda_i},$$

и ***любое*** решение уравнения (1) должно иметь вид:

$$-\sum_i \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{e}_i)}{\lambda_i}$$

Однако, этот ***ряд*** будет определять ***элемент*** $\mathbf{H}$ только, если:

$$\sum_i \frac{(\mathbf{y}, \mathbf{e}_i)^2}{\lambda_i^2} < \infty \qquad (7)$$

Условие (7) выполнено для ***любого*** $\mathbf{y} \in \mathbf{H}$, если существует лишь ***конечное*** число отличных от 0 ***собственных значений***.

Последнее заведомо справедливо, ***например***, тогда, когда пространство $\mathbf{H}$, в котором рассматривается операторное уравнение (1), ***конечномерно***.

В ***общем случае*** условие ***сходимости*** ряда в левой части (7), — ***дополнительное*** (помимо условия ортогональности ядру оператора $\mathbf{ker A}$) условие ***на правую часть*** уравнения (1), ***обеспечивающее*** его ***разрешимость***.

Упражнения и задачи к параграфу 5.

1. Показать, что в случае $\mathbf{1}^\circ$ ***норма обратного*** оператора $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$ равна:

$$\max\left(\frac{1}{|\lambda|}, \frac{1}{d}\right).$$

2. Пусть $\mathbf{A}$ ***линейный ограниченный*** оператор в $\mathbf{H}$.

Согласно определению § 3 главы II, оператор $\mathbf{R}_\lambda = \left(\lambda\,\mathbf{E} - \mathbf{A}\right)^{-1}$, если он ***непрерывен***, называется ***резольвентой*** оператора $\mathbf{A}$, а множество ***чисел*** λ, для которых резольвента ***существует***, называется ***резольвентным множеством*** оператора $\mathbf{A}$.

Показать, что ***резольвентное множество открыто*** в $\mathbb{E}^1$.

3. ***Дополнительное*** к резольвентному множеству оператора $\mathbf{A}$ ***множество*** точек ***действительной оси*** называется ***спектром*** (§ 3 главы II) оператора $\mathbf{A}$.

Описать ***спектр вполне непрерывного симметричного*** оператора $\mathbf{A}$.

<u>Указание</u>. Отдельно рассмотреть случаи ***конечномерного*** и ***бесконечномерного*** пространств $\mathbf{H}$.

3.6 Линейные уравнения с произвольным вполне непрерывным оператором в гильбертовом пространстве

Уравнения с оператором, обладающим замкнутой областью значений

Пусть $\mathbf{B}$ — ***линейный ограниченный*** оператор в ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$.

Утверждение 44. ***Ортогональное дополнение*** *к* ***множеству значений*** *оператора* $\mathbf{B}$ – $\mathbf{B}(\mathbf{H})$, *– есть* $\mathbf{ker B}^*$, *то есть:*

$$\mathbf{B}(\mathbf{H})^\perp = \mathbf{ker B}^*$$

Доказательство. Действительно, если $\mathbf{z} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})^{\perp}$, то $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}$:

$$(\mathbf{Bx}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x}, \mathbf{B}^*\mathbf{z}) = 0 .$$

Так как $\mathbf{x}$ ***произвольный*** элемент $\mathbf{H}$ то, поэтому, $\mathbf{B}^*\mathbf{z} = \mathbb{O}_{\mathbf{H}}$ и $\mathbf{z} \in \mathbf{ker B}^*$.

Наоборот, если $\mathbf{z} \in \mathbf{ker B}^*$, то из равенства соответствующих ***скалярных произведений*** следует, что:

$$(\mathbf{Bx}, \mathbf{z}) = 0 ,$$

$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{H}$, то есть $\mathbf{z} \in \mathbf{B}(\mathbf{H})^{\perp}$.

Если $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ — ***замкнутое*** множество, то, по теореме ***об ортогональном разложении***, (см. утверждение 2 § 2 главы III):

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}(\mathbf{H}) \oplus \mathbf{ker B}^* \tag{1}$$

Поэтому, для оператора $\mathbf{B}$ с ***замкнутой*** областью ***значений***, операторное уравнение:

$$\mathbf{Bx} = \mathbf{y} \tag{2}$$

разрешимо ***тогда*** и ***только тогда***, когда $\mathbf{y}$ ***ортогонально ядру*** $\mathbf{B}^*$.

$\square$

Замкнутость области значений оператора $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ вполне непрерывный оператор в $\mathbf{H}$ и $\lambda \neq 0$

Нашей ближайшей целью будет установление ***замкнутости*** области ***значений*** оператора $\mathbf{B}$ вида $(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$, где $\lambda \neq 0$ и $\mathbf{A}$ ***вполне непрерывный*** оператор в ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$.

Предварительно установим ***замкнутость*** области ***значений*** линейного непрерывного оператора $\mathbf{B}$, действующего в ***пространстве*** $\mathbb{E}^n$.

В этом случае оператор $\mathbf{B}$ описывается квадратной ***матрицей*** размера $n \times n$, которую мы будем обозначать $\mathcal{B}$.

Из ***линейной алгебры*** известно (***теорема Кронекера - Капелли***), что ***разрешимость*** уравнения вида (2) в ***линейном*** пространстве $\mathbb{R}^n$ связана с ***рангом расширенной*** матрицы $(\mathcal{B}; \mathbf{b})$ этой системы.

Если $\mathbf{r}_1$ — ***ранг расширенной*** матрицы $(\mathcal{B}; \mathbf{b})$ совпадает с $\mathbf{r}$ — ***рангом*** матрицы $\mathcal{B}$: $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$, то система ***разрешима***.

В ***противном*** случае разрешимости ***нет***.

Очевидно, что операторное уравнение (2) в ***пространстве*** $\mathbb{E}^n$ разрешимо тогда и только тогда, когда оно разрешимо в ***линейном*** пространстве $\mathbb{R}^n$.

Предположим, что множество $\mathbf{B}(\mathbb{E}^n)$ ***не замкнуто*** и ***ранг*** $\mathcal{B}$ равен $\mathbf{r}$.

Тогда, для некоторой ***предельной точки*** $\mathbf{y}$ множества $\mathbf{B}(\mathbb{E}^n)$, ***ранг*** матрицы $(\mathcal{B}; \mathbf{y})$ ***больше*** $\mathbf{r}$, то есть в ***расширенной*** матрице найдется ***подматрица*** размера $(\mathbf{r}+\mathbf{1}) \times (\mathbf{r}+\mathbf{1})$ с определителем ***не равным*** 0.

Так как определитель ***непрерывная*** функция ***элементов*** матрицы, то и в ***расширенной*** матрице $(\mathcal{B}; \tilde{\mathbf{y}})$, где $\| \tilde{\mathbf{y}} - \mathbf{y} \|_{\mathbb{E}^n}$ достаточно ***мала***, ***определитель*** соответствующей ***подматрицы*** будет отличен от 0 и система линейных уравнений, соответствующая уравнению (2), будет ***неразрешима*** для ***всех*** правых частей $\tilde{\mathbf{y}}$, ***близких*** по норме $\mathbb{E}^n$ к $\mathbf{y}$.

Но, это противоречит тому, что $\mathbf{y}$ — ***предельная*** точка области ***разрешимости***.

Итак, область ***значений любого линейного*** (непрерывного) оператора $\mathbf{B}$ в $\mathbb{E}^n$ ***замкнута*** и справедливо равенство (1).

Связь между сопряжёнными уравнениями второго рода (случай операторов конечного ранга)

Пусть $\{\mathbf{e}_k\}$ и $\{\boldsymbol{\psi}_k\}$, $k = 1, \ldots, N$, — две ***линейно независимые системы*** элементов пространства $\mathbf{H}$.

Эти системы позволяют ***определить*** линейный оператор в пространстве $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_k) \cdot \mathbf{e}_k \tag{3}$$

Область ***значений*** оператора $\mathbf{A}$ лежит в ***конечномерном подпространстве***, образованном системой $\{\mathbf{e}_k\}$.

Поэтому такие операторы часто называют ***операторами конечного ранга***.

Непосредственно проверяется, что

$$\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{y}, \mathbf{e}_k) \cdot \boldsymbol{\psi}_k \tag{4}$$

Кроме того, как оператор $\mathbf{A}$, так и оператор $\mathbf{A}^*$ ***вполне непрерывны*** (см. упражнение 1 к этому параграфу).

Пусть $\mathbf{B} = \lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$, $\lambda \neq 0$, где $\mathbf{A}$ задается равенством (3).

В дальнейших рассуждениях будем, ***без ограничения общности***, считать $\lambda = 1$.

Из определения ***сопряженного*** оператора ***непосредственно*** следует (с учетом соглашения: $\lambda = 1$), что $\mathbf{B}^* = \mathbf{E} - \mathbf{A}^*$.

Рассмотрим три ***тесно связанные*** между собой операторных уравнения:

$$\mathbf{Bx} = \mathbf{x} - \mathbf{Ax} = \mathbf{y} \,, \tag{5}$$

$$\mathbf{x} - \mathbf{Ax} = \mathbb{O} \,, \tag{6}$$

$$\mathbf{z} - \mathbf{A}^*\mathbf{z} = \mathbb{O} \,. \tag{7}$$

В силу (3), ***решение*** уравнения (5), если оно существует, ***должно*** иметь вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \sum_{i=1}^{N} c_i \, \mathbf{e}_i \,, \tag{8}$$

где c_i некоторые числа.

Подставляя выражение (8) в уравнение (5), будем иметь:

$$\sum_{k=1}^{N} c_k \, \mathbf{e}_k - \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} c_i \, (\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\psi}_k) \cdot \mathbf{e}_k = \mathbf{Ay} = \sum_{k=1}^{N} (\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}_k) \cdot \mathbf{e}_k$$

или:

$$\sum_{k=1}^{N} \left(c_k - \sum_{i=1}^{N} c_i \, (\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\psi}_k) - (\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}_k) \right) \cdot \mathbf{e}_k = \mathbb{O} \,.$$

Так как $\{\mathbf{e}_k\}$, по предположению, ***линейно независимы***, то отсюда следует:

$$c_k - \sum_{i=1}^{N} c_i \, (\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\psi}_k) = (\mathbf{y}, \boldsymbol{\psi}_k), \quad k = 1, \dots, N \tag{9}$$

Мы получили ***систему*** линейных алгебраических уравнений с ***матрицей***:

$$a_{i\,k} = \boldsymbol{\delta}_{i\,k} - (\mathbf{e}_i, \boldsymbol{\psi}_k)$$

для нахождения ***коэффициентов*** в формуле (8), где $\boldsymbol{\delta}_{i\,k}$ — символ Кронекера:

$$\boldsymbol{\delta}_{i\,k} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k\,. \end{cases}$$

Линейное операторное уравнение (5) и ***система линейных алгебраических уравнений*** (9) ***эквиваленты*** в том смысле, что $\mathbf{y}$ принадлежит образу пространства $\mathbf{H}$ при действии на него оператора $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$:

$$\mathbf{y} \in \{ (\mathbf{E} - \mathbf{A})(\mathbf{H}) \} \,,$$

тогда и ***только тогда***, когда ***разрешима*** система (9) и ***каждое*** решение (9) порождает ***решение*** (5) и, ***наоборот***.

Точно также, ***система*** (9) с ***нулевыми*** правыми частями и ***уравнение*** (6) ***эквивалентны*** в том же смысле.

Рассуждая аналогично тому, как это мы это делали при выводе системы (9), можно получить систему линейных алгебраических уравнений, ***эквивалентную*** операторному уравнению (7).

Действительно, если решение $\mathbf{z}$ уравнения (7) ***существует***, то оно должно иметь ***вид***:

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{N} c_k \, \boldsymbol{\psi}_k$$

и

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \, \boldsymbol{\psi}_i - \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{N} c_k \, \boldsymbol{\psi}_k, \, \mathbf{e}_i \right) \cdot \boldsymbol{\psi}_i = \mathbb{O}$$

В силу ***линейной независимости*** системы $\{ \boldsymbol{\psi}_i \}$:

$$c_i - \sum_{k=1}^{N} c_k \, (\boldsymbol{\psi}_k, \, \mathbf{e}_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, N \,, \tag{10}$$

и полученная таким образом ***система линейных алгебраических уравнений эквивалентна операторному*** уравнению (7).

Матрицы систем (9) и (10) ***сопряжены***.

Рассмотрим эквивалентное системе (9) операторное уравнение в пространстве $\mathbb{E}^n$.

Для его разрешимости (а, следовательно, и разрешимости системы (9)) ***необходимо*** и ***достаточно***, чтобы столбец правых частей (9), рассматриваемый как элемент $\mathbb{E}^n$, был ортогонален в $\mathbb{E}^n$ всем решениям однородного сопряжённого уравнения (10) (утверждение 44, применительно к уравнению (9)).

Упомянутое ***условие ортогональности*** имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{N} (\, \mathbf{y},\, \boldsymbol{\psi}_k \,) \cdot c_k \;=\; 0 \;, \tag{11}$$

где $\{\, c_k \,\}_{k=1}^{N}$ — ***любое*** решение уравнения (10).

Условие (11) можно переписать в виде:

$$\Big(\, \mathbf{y},\, \sum_{k=1}^{N} c_k\, \boldsymbol{\psi}_k \,\Big) \;=\; 0 \tag{12}$$

Но ***элемент***

$$\mathbf{z} \;=\; \sum_{k=1}^{N} c_k\, \boldsymbol{\psi}_k \;,$$

где $\{\, c_k \,\}$ — решение (10), ***удовлетворяет*** уравнению (7), то есть ***принадлежит*** $\mathbf{ker}\,(\, \mathbf{E} \,-\, \mathbf{A}^* \,)$ и, наоборот, любое решение (7) имеет такой вид.

В силу всего сказанного, условие: $\mathbf{y}$ ***ортогонально*** $\mathbf{ker}\,(\, \mathbf{E} \,-\, \mathbf{A}^* \,)$, — ***необходимо*** и ***достаточно*** для ***разрешимости*** уравнения (5) с оператором $\mathbf{A}$, определяемым формулой (3).

Другими словами, область ***значений*** оператора $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ***совпадает*** с ***ортогональным дополнением*** к $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A}^*)$, и, поэтому ***замкнута***.

Кроме этого, ***размерности*** $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ и $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A}^*)$ ***совпадают***, так как в силу ***взаимооднозначного соответствия*** между решениями уравнений (6) и (7) , и решениями соответствующих ***систем линейных алгебраических уравнений***, любая совокупность ***линейно независимых*** решений (6) или (7) порождает совокупность ***линейно независимых*** решений ***систем линейных алгебраических уравнений*** и, ***наоборот***.

В частности, операторное уравнение

$$\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{y} \,,$$

с оператором $\mathbf{A}$ вида (3), ***разрешимо*** $\forall\, \mathbf{y} \in \mathbf{H}$ ***тогда*** и ***только тогда***, когда ***не существует нетривиальных*** решений ***однородного*** уравнения:

$$\mathbf{x} - \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbb{O} \,.$$

Связь между сопряжёнными уравнениями второго рода (общий случай)

Оказывается, что утверждения о разрешимости уравнения (5) справедливы не только для уравнений с оператором $\mathbf{A}$ ***конечного*** ранга, но и для уравнений (5), в которых $\mathbf{A}$ произвольный ***вполне непрерывный*** оператор в $\mathbf{H}$.

Предпошлем дальнейшему несколько простых замечаний.

1°. Так как любой ***вполне непрерывный*** оператор $\mathbf{A}$ переводит ***ограниченное*** множество в ***компактное*** и оператор $\mathbf{A}^*$ ***ограничен*** и, поэтому, переводит ***сходящиеся*** последовательности в ***сходящиеся***, то оператор $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ ***вполне непрерывен***.

2°. Кроме того $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ ***симметричен*** (см. упражнения к § 3).

3°. Наконец: $\mathbf{ker}\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{ker}\mathbf{A}$.

Действительно, если $\mathbf{z} \in \mathbf{ker}\mathbf{A}$, то есть $\mathbf{Az} = \mathbb{O}$, то и $\mathbf{A}^*\mathbf{Az} = \mathbb{O}$.

Наоборот, если $\mathbf{A}^*\mathbf{Az} = \mathbb{O}$, то $(\mathbf{A}^*\mathbf{Az}, \mathbf{z}) = (\mathbf{Az}, \mathbf{Az}) = 0$, т.е. $\mathbf{Az} = \mathbb{O}$, и $\mathbf{z} \in \mathbf{ker}\mathbf{A}$.

В силу сказанного, для ***вполне непрерывного симметричного*** оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ справедливо утверждение теоремы ***о спектральном разложении*** § 3 этой главы.

В частности, ***любой*** элемент $\mathbf{x} \in \mathbf{H}$ допускает разложение:

$$\mathbf{x} = \sum_i (\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_i) \cdot \boldsymbol{\psi}_i + \mathbf{h}, \tag{13}$$

где ψ_i — ***ортонормированная система собственных элементов*** $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ с ***ненулевыми*** собственными значениями λ_i и $\mathbf{h} \in \mathbf{ker}\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{ker}\mathbf{A}$.

Подействовав на равенство (13) оператором $\mathbf{A}$, будем иметь такое представление оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{Ax} = \sum_i (\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_i) \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i \tag{14}$$

Справа здесь стоит ***сходящийся*** (или обрывающийся) ***ряд*** элементов гильбертова пространства $\mathbf{H}$.

Рассмотрим теперь ***последовательность*** операторов $\{\mathbf{A}_N\}$:

$$\mathbf{A}_N\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{x}, \boldsymbol{\psi}_i) \cdot \mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i \tag{15}$$

Система элементов $\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i$ ***ортогональна***.

Действительно:

$$\big(\,\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i,\,\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_j\,\big) \;=\; \big(\,\boldsymbol{\psi}_i,\,\mathbf{A}^*\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_j\,\big) \;=\; \lambda_j\,\cdot\,\big(\,\boldsymbol{\psi}_i,\,\boldsymbol{\psi}_j\,\big) \;=\; 0, \quad \forall\, i,\, j \tag{16}$$

Следовательно, она ***линейно независима*** и формула (15) определяет оператор ***конечного ранга*** (вида (3)).

Из (16) следует также, что все ***ненулевые собственные значения*** оператора $\mathbf{A}^*\mathbf{A}$ ***больше*** нуля.

Нетрудно проверить, что

$$\lim_{N\,\to\,\infty}\,\|\,\mathbf{A}\;-\;\mathbf{A}_N\,\|\;=\;0 \tag{17}$$

Действительно:

$$\|\,(\,\mathbf{A}\;-\;\mathbf{A}_N\,)\mathbf{x}\,\|^2\;=\;\left\|\,\sum_{i=N+1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}\,(\,\mathbf{x},\,\boldsymbol{\psi}_i\,)\,\frac{\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i}{\sqrt{\lambda_i}}\,\right\|^2$$

Из (16) следует, что последовательность

$$\left\{\frac{\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\}$$

ортонормирована.

Поэтому (см. § 2):

$$\left\|\sum_{i=N+1}^{\infty}\sqrt{\lambda_i}(\mathbf{x},\,\boldsymbol{\psi}_i)\,\frac{\mathbf{A}\boldsymbol{\psi}_i}{\sqrt{\lambda_i}}\right\|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty}\lambda_i\,\,(\mathbf{x},\,\boldsymbol{\psi}_i)^2\leqslant\lambda_{N+1}\,\sum_{i=1}^{\infty}(\mathbf{x},\,\boldsymbol{\psi}_i)^2\leqslant\lambda_{N+1}\cdot\|\,\mathbf{x}\,\|^2$$

Отсюда

$$\|\,\mathbf{A}\;-\;\mathbf{A}_N\,\|\;\leqslant\;\lambda_{N+1}\;,$$

и, так как:

$$\lim_{N\,\to\,\infty}\lambda_{N+1}\;=\;0\;,$$

равенство (17) справедливо.

Рассмотрим теперь уравнения (5) — (7), в которых $\mathbf{A}$ произвольный ***вполне непрерывный*** оператор в $\mathbf{H}$.

Выберем N таким, чтобы $\| \mathbf{A} - \mathbf{A}_N \| < 1$ и ***обозначим***:

$\mathbf{A} - \mathbf{A}_N = \mathbf{C}_N$.

Уравнения (5), (6) можно переписать в виде:

$$(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N)\,\mathbf{x} - \mathbf{A}_N\mathbf{x} = \mathbf{y}\ ; \qquad (\mathbf{E} - \mathbf{C}_N)\,\mathbf{x} - \mathbf{A}_N\mathbf{x} = \mathbb{O} \tag{18}$$

В силу ***теоремы Банаха*** (§ 3 главы II), оператор $(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N)$ имеет ***непрерывный обратный***, и, поэтому, уравнения (18) можно переписать в ***эквивалентном*** виде:

$$\mathbf{x} - \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x} = \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{y}_1\ ;\ \mathbf{x} - \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{A}_N\mathbf{x} = \mathbb{O} \tag{19}$$

Но оператор $\left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{A}_N$ является оператором ***конечного ранга***.

Это следует из формулы (15) и ***линейной независимости*** элементов $(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N)^{-1} \cdot \mathbf{A}\psi_i$ (см. упражнения к этому параграфу).

В силу доказанного ранее, область значений оператора $\left(\mathbf{E} - \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{A}_N\right)$ ***замкнута***.

Теперь мы можем доказать ***замкнутость*** и ***области значений*** $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ ***произвольный вполне непрерывный*** оператор.

Действительно, пусть $\mathbf{y}$ ***предельная*** точка области значений $\{(\mathbf{E} - \mathbf{A})\,(\mathbf{H})\}$.

Так как оператор $\left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}$ ***непрерывен***, то точка

$\mathbf{y}_1 = \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{y}$ — ***предельная*** для ***области значений*** оператора $\left(\mathbf{E} - \left(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\right)^{-1}\mathbf{A}_N\right)$.

А так как последняя ***замкнута***, то первое уравнение (19) с правой частью $\mathbf{y}_1 = \big(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\big)^{-1}\mathbf{y}$ ***разрешимо***.

Но, оно ***эквивалентно*** уравнению (18) с правой частью $\mathbf{y}$.

Поэтому $\mathbf{y}$ принадлежит ***области значений*** $(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ и, следовательно, эта область ***замкнута***.

Поэтому уравнение (5) с ***вполне непрерывным*** оператором $\mathbf{A}$ разрешимо ***тогда*** и ***только тогда***, когда элемент $\mathbf{y}$ ***ортогонален*** $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A}^*)$.

Так как второе уравнение (18) ***эквивалентно*** второму уравнению (19) , то ***пространство*** $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ ***конечномерно***.

Размерность пространства $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ совпадает с ***размерностью*** пространства $\mathbf{ker}\Big(\mathbf{E} - \big(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\big)^{-1}\mathbf{A}_N\Big)$.

Сопряженное уравнение ко второму уравнению (19) имеет вид:

$$\mathbf{z} - \mathbf{A}_N^*\left[\big(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N\big)^{-1}\right]^*\mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{A}_N^*\left[\big(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N^*\big)^{-1}\right]\mathbf{z} = \mathbb{O} \quad (20)$$

Мы воспользовались при этом соотношениями справедливыми для любых ***непрерывных*** операторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в пространстве $\mathbf{H}$:

$$(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^* \quad \text{и} \quad \big(\mathbf{A}^{-1}\big)^* = \big(\mathbf{A}^*\big)^{-1}$$

(см. упражнения к этому параграфу).

Поэтому ***размерность*** $\mathbf{ker}\,(\mathbf{E} - \mathbf{A})$ совпадает с ***размерностью пространства решений*** уравнения (20) .

Но, между решениями уравнения (20) и решениями уравнения (7) можно установить ***взаимнооднозначное*** соответствие при помощи оператора $(\mathbf{E} - \mathbf{C}_N^*)$.

Действительно, если $\mathbf{z}$ какое-либо ***решение*** уравнения (20), то:

$$\mathbf{w} \;=\; \left(\,\mathbf{E} \,-\, \mathbf{C}_N^*\,\right)^{-1}\mathbf{z}$$

удовлетворяет уравнению:

$$\mathbb{O} \;=\; (\,\mathbf{E} \,-\, \mathbf{C}_N^*\,)\,\mathbf{w} \,-\, \mathbf{A}_N^*\mathbf{w} \;=\; (\,\mathbf{E} \,-\, \mathbf{A}^*\,)\,\mathbf{w}$$

и, ***наоборот.***

Поэтому, ***размерности*** $\mathbf{ker}\,(\,\mathbf{E} \,-\, \mathbf{A}\,)$ и $\mathbf{ker}\,(\,\mathbf{E} \,-\, \mathbf{A}^*\,)$ ***совпадают*** для любого ***вполне непрерывного*** оператора $\mathbf{A}$.

Результаты нашего анализа можно представить в виде

Теорема 19. *Для любого* ***вполне непрерывного*** *оператора* $\mathbf{A}$ *в* ***гильбертовом*** *пространстве* $\mathbf{H}$:

$\mathbf{1}^\circ$. *Операторное* ***уравнение*** (5) *разрешимо* ***тогда*** *и* ***только тогда,*** *когда его* ***правая часть ортогональна пространству решений*** *уравнения* (7).

$\mathbf{2}^\circ$. ***Размерности*** *пространств решений уравнений* (6) *и* (7) ***конечны*** *и* ***равны.***

$\mathbf{3}^\circ$. *Уравнение* (5) ***разрешимо*** $\forall\,\mathbf{y} \in \mathbf{H}$ ***тогда*** *и* ***только тогда,*** *когда уравнение* (6) *имеет* ***лишь нулевое*** *решение.*

Доказанную теорему, обычно, связывают с именами ***Фредгольма*** и ***Рисса.***

Упражнения и задачи к параграфу 6.

1. Доказать ***полную непрерывность*** оператора $\mathbf{A}$, задаваемого равенством (3).

2. Проверить ***сопряженность*** операторов (3) и (4).

3. Показать, что любой ***ограниченный*** оператор $\mathbf{B}$ переводит ***компактное*** множество в ***компактное***.

4. Если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ ***ограниченные линейные*** операторы, то $(\mathbf{AB})^* = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*$.

Если $\mathbf{A^{-1}}$ ***существует*** и ***ограничен***, то $\mathbf{A}^*$ имеет ***ограниченный обратный*** и $\left(\mathbf{A^{-1}}\right)^* = \left(\mathbf{A}^*\right)^{-1}$.

5. Показать, что в ***бесконечномерном*** гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ ***вполне непрерывный*** оператор ***не может*** иметь ***ограниченного обратного***.

Указание. Рассмотреть соотношение: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A^{-1}} = \mathbf{E}$.

6. Показать ***полную непрерывность*** оператора $\mathbf{A}^*$, ***сопряженного*** к ***вполне непрерывному*** $\mathbf{A}$.

7. Каковы ***собственные функции интегрального оператора Фредгольма*** $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t, s)x(s)\,ds$, с ***ядром*** $\mathcal{K}(t, s) = \cos(t+s)$ ***на промежутке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$?

8. Каковы ***собственные функции интегрального оператора Фредгольма*** $\mathbf{Ax} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t, s)x(s)\,ds$, с ***ядром*** $\mathcal{K}(t, s) = \cos(t+s)$ ***на промежутке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left[\mathbf{0}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$?

9. Решить ***интегральное*** уравнение

$$x(t) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\pi} \cos(t+s)\,x(s)\,ds + 1$$

Глава 4

Нелинейные отображения линейных нормированных пространств

4.1 Дифференциальное и интегральное исчисление для абстрактных функций

Определения производной и интеграла от абстрактных функций

Определение 63. ***Функцией числового аргумента*** *со* ***значениями*** *в* ***линейном нормированном пространстве*** *мы будем называть* ***отображение числового*** *множества из* $\mathbb{E}^1$ *в* ***линейное нормированное пространство*** $\mathbf{X}$.

Для краткости, будем называть такие отображения ***абстрактными функциями*** *и, иногда, использовать для них, в целях сокращения записи, обозначение:* $\mathcal{A}$*-функция.*

Так как любое подмножество $\mathbb{E}^1$ является ***метрическим пространством***, то можно говорить о ***непрерывности*** абстрактной функции ***в*** некоторой ***точке*** множества ее определения (см. § 4 главы 1).

Если ***множество определения*** функции в $\mathbb{E}^1$ ***открыто***, то можно определить ***производную*** абстрактной функции ***в*** любой ***точке*** этого множества, аналогично тому, как это делается в математическом анализе для ***обычных*** функций одного переменного.

Определение 64. *Пусть* $\mathbf{x}(t)$ *—* ***абстрактная функция****, определенная на интервале* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *из* $\mathbb{E}^1$*.*

Элемент $\mathbf{z}$ *называется* ***производной*** $\mathbf{x}(t)$ ***в точке*** $t_0 \in (\mathbf{a}, \mathbf{b})$*, если:*

$$\lim_{\Delta t \to o} \left\| \frac{\mathbf{x}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{x}(t_0)}{\Delta t} - \mathbf{z} \right\|_{\mathbf{X}} = 0 .$$

Как и в случае ***обычной*** *функции одного переменного,* ***элемент*** $\mathbf{z}$ ***обозначается*** $\mathbf{x}'(t_0)$*.*

Взятие производной от произвольной ***линейной комбинации абстрактных функций*** производится по тем же правилам, что и дифференцирование ***линейной комбинации обычных функций***.

Напротив, так как элементы ***линейного нормированного пространства***, вообще говоря, нельзя ***умножать*** и ***делить*** друг на друга, то нельзя говорить о дифференцировании ***произведения*** и ***частного*** абстрактных функций.

Обсудим некоторые факты, связанные с ***интегрированием*** абстрактных функций.

Пусть $\mathbf{x}(t)$ — ***абстрактная функция***, заданная на ***отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Интеграл Римана от ***абстрактной функции*** по ***отрезку*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ определяется аналогично интегралу Римана от ***обычной*** функции одного переменного, как предел (если он существует) соответствующих ***интегральных сумм***.

Можно показать, что ***непрерывная*** на ***отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ $\mathcal{A}$-функция ***интегрируема***.

Соответствующий интеграл, как и в случае обычных функций, обозначается $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}(t)\, dt$, и является некоторым ***элементом*** пространства $\mathbf{X}$.

Свойства интегралов от абстрактных функций

Свойства ***операции интегрирования*** абстрактных функций ***аналогичны*** таковым же для ***обычных*** функций.

1°. ***Линейность*** операции интегрирования:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \big(\lambda \cdot \mathbf{x}(t) + \mu \cdot \mathbf{y}(t) \big)\, dt = \lambda \cdot \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}(t)\, dt + \mu \cdot \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{y}(t)\, dt$$

Это равенство справедливо, если интегралы в ***правой*** и ***левой*** его части ***существуют***.

В частности, оно справедливо для ***непрерывных*** $\mathcal{A}$-функций.

2°. ***Оценка*** интеграла от абстрактной функции:

$$\left\| \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}(t)\, dt \right\| \leqslant \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \| \mathbf{x}(t) \|\, dt \tag{1}$$

Неравенство (1) справедливо при условии ***существования*** соответствующих интегралов.

В частности, оно справедливо для ***непрерывных*** $\mathcal{A}$-функций.

Утверждения **1°** и **2°** ***следуют*** из ***непосредственно*** проверяемых соотношений для ***интегральных сумм*** и последующего ***предель-***

ного перехода.

Связь между операциями ***дифференцирования*** и ***интегрирования*** абстрактных функций такая же, как и для ***обычных*** функций.

Замечание. Следует иметь в виду, что для абстрактных функций, вообще говоря, не справедливы ***теоремы о промежуточных значениях*** , например, теоремы ***Ролля*** и ***Лагранжа***.

В силу этого, непосредственное перенесение ***доказательств*** соответствующих теорем о связи операций интегрирования и дифференцирования ***не всегда возможно***.

3° . ***Теорема Ньютона - Лейбница***.

Для обычных функций справедливо:

Утверждение 45. *Если* $x(t)$ ***непрерывно дифференцируема на отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *, то:*

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} x'(t)\,dt \;=\; x(\mathbf{b}) \;-\; x(\mathbf{a}) \tag{2}$$

Соотношение (2) для ***обычных*** функций чаще всего доказывается с использованием утверждения:

Утверждение 46. *Для любой* ***непрерывной*** *на* ***отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *функции* $x(t)$ *справедливо равенство:*

$$\left(\int\limits_{\mathbf{a}}^{t} x(\tau)\,d\tau \right)' \;=\; x(t) \tag{3}$$

Из равенства (3) следует (2), если учесть, что для ***обычных*** функций из равенства: $x'(t) \;=\; 0, \quad \forall\, t \in [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***следует***, что: $x(t) \;=\; const$.

Последнее ***утверждение*** есть ***следствие*** из ***теоремы Ролля***, которая, как мы отметили выше, для $\mathcal{A}$-функций ***несправедлива***.

Поэтому, хотя равенство (3) ***легко*** доказать для произвольной абстрактной функции (см. упражнения к этому параграфу), ***непосредственный*** переход от (3) к (2) ***невозможен***.

Чтобы ***обойти*** это препятствие, поступим следующим образом.

Пусть $\mathbf{f}$ ***любой*** элемент ***сопряженного*** к $\mathbf{X}$ ***пространства*** $\mathbf{X}^*$, то есть любой ***линейный непрерывный функционал*** на $\mathbf{X}$.

Тогда, рассматривая интеграл, как предел интегральных сумм, в силу непрерывности $\mathbf{f}$ для любой ***непрерывной*** на ***отрезке*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ абстрактной функции $\mathbf{x}(t)$:

$$\mathbf{f}\left(\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}(t)\, dt\right) = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}(t)\Big)\, dt \tag{4}$$

Рассмотрим ***обычную*** функцию на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$: $z(t) = \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}(t)\Big)$.

Если $\mathbf{x}(t)$ ***дифференцируема*** в точке t, то: $z'(t) = \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}'(t)\Big)$ (проверяется ***непосредственно***).

Если $\mathbf{x}'(t)$ ***непрерывна*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то и $z'(t)$ ***непрерывна*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и для нее выполняется ***утверждение*** теоремы Ньютона - Лейбница:

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} z'(t)\, dt = z(\mathbf{b}) - z(\mathbf{a})$$

Но, это означает, что:

$$\mathbf{f}\left(\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}'(t)\, dt\right) = \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}(\mathbf{b})\Big) - \mathbf{f}\Big(\mathbf{x}(\mathbf{a})\Big), \quad \forall\, \mathbf{f} \in \mathbf{X}^* \tag{5}$$

Отсюда ***следует*** соотношение (2), если учесть

Утверждение 47. *Если* $\mathbf{X}$ — ***линейное нормированное пространство*** *и* $\mathbf{X}^*$, — ***сопряженное*** *к нему* ***пространство****, то из условия* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, $\forall\, \mathbf{f} \in \mathbf{X}^*$, *следует, что* $\mathbf{x} = \mathbb{O}_{\mathbf{X}}$.

Само это ***утверждение*** — следствие ***теоремы Хана - Банаха*** о продолжении линейных функционалов (см., например, [2]).

Если $\mathbf{X}$ ***линейное нормированное пространство со скалярным произведением***, то равенство (5), в силу теоремы Ф. Рисса (§ 2 главы III), можно записать в виде:

$$\left(\mathbf{y}, \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}'(t)\, dt\right) = \big(\mathbf{y}, \mathbf{x}(\mathbf{b}) - \mathbf{x}(\mathbf{a})\big), \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathbf{X}.$$

Полагая в этом соотношении: $\mathbf{y} = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{x}'(t)\, dt - \mathbf{x}(\mathbf{b}) - \mathbf{x}(\mathbf{a})$, приходим к равенству (2).

Оценка разности значений абстрактной функции

Равенство (2) и неравенство (1) позволяют получить ***оценку*** разности значений ***абстрактной*** функции через её производную.

Именно, если $\mathbf{x}'(t)$ ***непрерывна*** на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, то:

$$\|\mathbf{x}(\mathbf{b}) - \mathbf{x}(\mathbf{a})\| \leqslant \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \|\mathbf{x}'(t)\|\, dt \leqslant (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \max_{\mathbf{a} \leqslant t \leqslant \mathbf{b}} \|\mathbf{x}'(t)\| \qquad (6)$$

Для ***обычных*** функций одного переменного оценка (6) может быть ***уточнена*** (теорема о промежуточном значении Лагранжа).

Однако, как мы уже отмечали, такое уточнение в ***общем случае невозможно***.

Упражнения и задачи к параграфу 1.

1. Привести ***пример*** невыполнения утверждения ***теоремы Ролля*** для ***абстрактных*** функций.

Указание. Рассмотреть ***отображение*** из $\mathbb{E}^1$ в $\mathbb{E}^2$.

2. Доказать ***соотношение*** (3) для произвольной непрерывной абстрактной функции.

3. Показать справедливость ***равенства*** (4) (для ***непрерывной*** абстрактной функции $\mathbf{x}(t)$).

4.2 Дифференцирование нелинейных отображений

Дифференцируемость по Фреше

Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ — ***отображение*** из ***линейного нормированного пространства*** $\mathbf{X}$ в ***линейное нормированное пространство*** $\mathbf{Y}$.

Определение 65. *Отображение (**оператор**) $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ называется **сильно дифференцируемым** (дифференцируемым **по Фреше**) в **точке** $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, если **существует линейный ограниченный** оператор $\mathbf{A}$, такой, что:*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{h} + \omega(\mathbf{x}, \mathbf{h}), \qquad \lim_{\|\mathbf{h}\| \to 0} \frac{\|\omega(\mathbf{x}, \mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0 \quad (1)$$

Оператор $\mathbf{A}$, *в этом случае, называется **производной Фреше** отображения* $\mathbf{F}$ *в **точке*** $\mathbf{x}$.

Элемент $\mathbf{A}\mathbf{h} \in \mathbf{Y}$ *называется **дифференциалом Фреше** отображения* $\mathbf{F}$ *в **точке*** $\mathbf{x}$.

Для ***производной*** *Фреше* — $\mathbf{A}$, *и* ***дифференциала*** *Фреше* — $\mathbf{Ah}$, *часто используются* ***обозначения:*** $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ *и* $d\,\mathbf{F}(\mathbf{x},\,\mathbf{h})$ — ***соответственно****.*

Утверждение 48. *Может существовать только* ***один линейный непрерывный*** *оператор, удовлетворяющий соотношению* (1) *.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathbf{B}$ ***линейный*** оператор, ***отличный*** от $\mathbf{A}$, для которого также выполнено соотношение (1), но возможно, с другим остатком $\omega_1(\mathbf{x},\,\mathbf{h})$.

Тогда:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})\,\mathbf{h} = \omega(\mathbf{x},\,\mathbf{h}) - \omega_1(\mathbf{x},\,\mathbf{h}) \tag{2}$$

Зафиксируем ***элемент*** $\mathbf{h}$ и рассмотрим ***семейство*** элементов $t\cdot\mathbf{h}$.

Из (2) следует:

$$(\mathbf{A} - \mathbf{B})\,\mathbf{h} = \frac{\omega(\mathbf{x},\,t\,\mathbf{h}) - \omega_1(\mathbf{x},\,t\,\mathbf{h})}{t}$$

В силу (1):

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{\omega(\mathbf{x},\,t\,\mathbf{h})}{t}\right\| \leqslant \lim_{t\to 0}\left(\frac{\|\,\omega(\mathbf{x},\,t\,\mathbf{h})\,\|}{\|\,t\,\mathbf{h}\,\|} + \frac{\|\,\omega_1(\mathbf{x},\,t\,\mathbf{h})\,\|}{\|\,t\,\mathbf{h}\,\|}\right)\cdot\|\,\mathbf{h}\,\| = 0$$

Поэтому: $\mathbf{Ah} = \mathbf{Bh}$.

Отсюда, ввиду произвольности $\mathbf{h}$, следует: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. □

Замечание. ***Существование производной Фреше*** у ***нелинейного оператора*** $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ во многих случаях позволяет использовать в ***окрестности точки*** $\mathbf{x}$ вместо полного ***нелинейного*** оператора $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ его ***аффинную часть*** — $\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x})\mathbf{h}$, так как результат действия

аффинного оператора $\mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{F}'(\mathbf{x})\mathbf{h}$ ***аппроксимирует*** (тем точнее, чем меньше $\|\mathbf{h}\|$) ***результат*** действия оператора $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{h})$.

При переходе к ***другой*** точке $\mathbf{x_1}$ пространства $\mathbf{X}$ ***отображение*** $\mathbf{F}$ ***может*** остаться ***дифференцируемым***, но при этом, вообще говоря, $\mathbf{F}'(\mathbf{x_1}) \neq \mathbf{F}'(\mathbf{x})$.

Пример 1 — дифференцируемость по Фреше отображения из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^1$

Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ***отображение*** из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^1$, задаваемое ***функцией*** n переменных: $F(x_1, \ldots, x_n)$.

Если в некоторой ***окрестности*** точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ***существуют непрерывные частные производные*** $F'_{x_i}(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$, то, как известно из курса ***математического анализа***:

$$F(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - F(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \left[F'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n) \cdot h_1 + \cdots + F'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n) \cdot h_n\right] + \omega(x_1, \ldots, x_n; h_1, \ldots, h_n),$$

причем:

$$\lim_{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2} \to 0} \frac{|\omega(x_1, \ldots, x_n; h_1, \ldots, h_n)|}{\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}} = 0.$$

Равенство (3), в рассматриваемом случае, ***полностью*** соответствует ***определению*** (1).

Линейный (относительно $\mathbf{h}$) функционал:

$$F'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n) \cdot h_1 + \cdots + F'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n) \cdot h_n = \big(\ell(\mathbf{x}), \mathbf{h}\big)$$

в обычном ***математическом анализе*** называется ***дифференциалом*** функции $\mathbf{F}$ в точке $(x_1, \ldots, x_n)$ и обозначается $d\mathbf{F}(x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 66. *В равенстве* (3) *участвует* ***набор частных производных:*** $\{ F'_{x_1}, \ldots, F'_{x_n} \}$.

Этот ***набор*** *называется* ***градиентом*** *функции* $F(x_1, \ldots, x_n)$, *и, таким образом,* ***градиент*** *это* ***элемент*** *пространства* $\mathbb{E}^n$.

Градиент *зависит от точки* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{E}^n$.

Возникающее отображение из $\mathbb{E}^n$ *в* $\mathbb{E}^n$: $(x_1, \ldots, x_n) \to \{ F'_{x_1}, \ldots, F'_{x_n} \}$ *называется* ***градиентным отображением.***

Пример 2 — дифференцируемость по Фреше отображения из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^m$

Пусть $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ***отображение*** из ***пространства*** $\mathbb{E}^n$ в ***пространство*** $\mathbb{E}^m$.

Оно задается ***набором*** функций:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \qquad \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{4}$$

Если в некоторой ***окрестности*** точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ ***существуют*** непрерывные ***частные производные*** всех ***функций*** из (4), то из (3) ***легко*** получить, что:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f'_{1\,x_1} & \cdots & f'_{1\,x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{m\,x_1} & \cdots & f'_{m\,x_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} + \omega(x_1, \ldots, x_n; h_1, \ldots, h_n),$$

$$\lim_{\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{E}^n} \to 0} \frac{\|\omega(\mathbf{x}; \mathbf{h})\|_{\mathbb{E}^m}}{\|\mathbf{h}\|_{\mathbb{E}^n}} = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае, ***производной Фреше*** будет ***линейный оператор*** из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^m$, ***порожденный матрицей частных производных*** от ***компонент*** отображения $\mathbf{F} - \{ f_1, \dots, f_m \}$.

Определение 67. ***Матрица***, *составленная из* ***частных производных*** *от* ***компонент*** *отображения* $\mathbf{F} - \{ f_1, \dots, f_m \}$, *называется* ***матрицей Якоби*** *отображения* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ (4) *в* ***точке*** $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Пример 3 — дифференцируемость по Фреше отображения из $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

Пусть $g(s, \tau)$ — ***функция*** 2-х переменных, определенная и ***непрерывная*** в полосе: $\mathbf{a} \leqslant s \leqslant \mathbf{b}$, $-\infty < \tau < \infty$.

Кроме того, пусть ***существует*** частная производная $g'_\tau(s, \tau)$, для которой выполнено ***условие Липшица***:

$| g'_\tau(s, \tau_1) - g'_\tau(s, \tau_2) | \leqslant \mathbf{L} \cdot | \tau_1 - \tau_2 |$, где постоянная $\mathbf{L}$ ***не зависит*** от s, τ_1, τ_2 : $\mathbf{a} \leqslant s \leqslant \mathbf{b}$, $-\infty < \tau_1, \tau_2 < \infty$.

Рассмотрим ***оператор***, действующий из $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ ***по правилу***:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = g\,(s, x(s)) \tag{5}$$

Оператор (5) ***дифференцируем по Фреше*** в любой ***точке*** $x(s) \in \mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и его ***дифференциал Фреше*** в ***точке*** $x(s)$:

$$d\,F(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = g'_\tau\,(s, x(s)) \cdot h(s) \tag{6}$$

Доказательство. Действительно, используя ***теорему Лагранжа*** при фиксированном s :

$$g\ (s, x(s) + h(s)) - g\ (s, x(s)) = g'_\tau\ (s, x(s) + \theta \cdot h(s)) \cdot h(s) =$$
$$= g'_\tau\ (s, x(s)) \cdot h(s) + [g'_\tau\ (s, x(s) + \theta \cdot h(s)) - g'_\tau\ (s, x(s))] \cdot h(s) =$$
$$= g'_\tau\ (s, x(s)) \cdot h(s) + \omega\ (\mathbf{x}, \mathbf{h})\ , \quad 0 \leqslant \theta(s) \leqslant 1\ .$$

В силу сделанных относительно функции g предположений:

$$\|\,\omega\,(\,\mathbf{x},\ \mathbf{h}\,)\,\|_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]} \leqslant \mathbf{L} \cdot \max_{\mathbf{a} \leqslant s \leqslant \mathbf{b}} h^2(s) = \mathbf{L} \cdot \|\,\mathbf{h}\,\|^2_{\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$$

Таким образом, равенство (6) ***справедливо***. □

Дифференциалы Фреше n-го порядка

Если ***производная Фреше*** отображения $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ ***существует*** на некотором ***подмножестве*** $\mathbf{X}$ (в частности, во всех точках $\mathbf{X}$), то можно рассмотреть ***отображение***:

$$\mathbf{x} \xrightarrow{\mathbf{F}'(\mathbf{x})} \mathbf{L_O}\,(\,\mathbf{X},\ \mathbf{Y}\,)\ ,$$

где $\mathbf{L_O}\,(\,\mathbf{X},\ \mathbf{Y}\,)$ — ***пространство линейных непрерывных операторов*** из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$.

Так как $\mathbf{L_O}\,(\,\mathbf{X},\ \mathbf{Y}\,)$ само является ***линейным нормированным пространством*** (см. глава II), то можно, ***аналогично*** (1), ввести понятие ***второй производной Фреше*** отображения $\mathbf{F}(\mathbf{x})$:

$$(\,\mathbf{F}'\,)'\,(\mathbf{x})\ =\ \mathbf{F}''(\mathbf{x})$$

Следует помнить, что $\mathbf{F}''(\mathbf{x})$ — ***линейный оператор*** из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{L_O}\,(\,\mathbf{X},\ \mathbf{Y}\,)$.

Поэтому ***результатом*** операции $\mathbf{F}''(\mathbf{x})$ будет не элемент пространства $\mathbf{X}$, а ***линейный оператор*** из ***пространства*** $\mathbf{L_O}\,(\,\mathbf{X},\ \mathbf{Y}\,)$!

Отправляясь от ***второй*** производной Фреше отображения $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, можно определить ***третью***, ***четвертую*** и т.д. ***производные Фреше*** $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Более подробно смотри, например, [5, глава II].

Дифференцируемость отображения по Гато

Пусть отображение $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ имеет ***производную*** (***Фреше***) в ***точке*** $\mathbf{x}$. Зафиксируем элемент $\mathbf{h}$ и рассмотрим $\mathcal{A}$-***функцию*** $\mathbf{F}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h})$. Из (1) имеем (если $t \neq 0$):

$$\frac{\mathbf{F}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h}) - \mathbf{F}(\mathbf{x})}{t} = \mathbf{A}\mathbf{h} + \frac{\omega(\mathbf{x}, t\,\mathbf{h})}{t} \quad \text{и}$$

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{\omega(\mathbf{x}, t\,\mathbf{h})}{t} \right\| = \lim_{t \to 0} \|\mathbf{h}\| \frac{\|\omega(\mathbf{x}, t\,\mathbf{h})\|}{\|t\,\mathbf{h}\|} = 0$$

Поэтому ***абстрактная функция*** $\mathbf{F}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h})$ имеет ***производную*** в ***точке*** $t = 0$ и

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h}))\Big|_{t=0} = \mathbf{A}\mathbf{h} \tag{7}$$

Формула (7) бывает удобна при вычислении производной.

Выражение в левой части равенства (7) может ***иметь смысл*** и в том случае, когда отображение $\mathbf{F}$ ***не имеет*** в точке $\mathbf{x}$ ***производной Фреше***.

Определение 68. ***Выражение*** $\frac{d}{dt}\big(\mathbf{F}(\mathbf{x} + t\,\mathbf{h})\big)\Big|_{t=0}$, *если оно* ***определено*** *для* ***любого*** $\mathbf{h} \in \mathbf{X}$, *называется* ***дифференциалом Гато*** *отображения* $\mathbf{F}$ *в* ***точке*** $\mathbf{x}$, *или* ***слабым*** *дифференциалом отображения* $\mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Как мы только что ***показали***, из существования ***производной Фреше следует*** существование ***дифференциала Гато***.

Обратная импликация, вообще говоря, ***не справедлива***.

Вариация отображения $\big($в точке $(\,\mathbf{x}\,)$ по направлению $(\,\mathbf{h}\,)\big)$

Определение 69. *При* ***фиксированных*** $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{h}$, $\|\,\mathbf{h}\,\| = 1$, *рассмотрим*

$$\lim_{t \to +0} \frac{\mathbf{F}\,(\,\mathbf{x} + t\,\mathbf{h}\,) - \mathbf{F}\,(\,\mathbf{x}\,)}{t}$$

Предельный ***элемент*** *(из* $\mathbf{Y}$ *), если он* ***существует***, *называется* ***вариацией*** *отображения* $\mathbf{F}$ *в* ***точке*** $\mathbf{x}$ *по* ***направлению*** $\mathbf{h}$.

Этот ***элемент*** *обычно обозначается* $\mathbf{Var}\,[\,\mathbf{F}\,(\,\mathbf{x};\,\mathbf{h}\,)\,]$.

Из ***существования дифференциала Гато вытекает существование вариации по любому направлению***, но ***обратное***, вообще говоря, ***не верно***.

Предположим, что отображение $\mathbf{F}$ ***непрерывно дифференцируемо по Фреше на множестве*** в пространстве $\mathbf{X}$, содержащем ***отрезок***, ***соединяющий*** точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в $\mathbf{X}$.

Рассмотрим ***абстрактную функцию***:

$$\varphi\,(t) = \mathbf{F}\Big(\,(1 - t)\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}\Big) = \mathbf{F}\Big(\mathbf{a} + t\,(\mathbf{b} - \mathbf{a})\Big), \quad \mathbf{0} \leqslant t \leqslant \mathbf{1}$$

Утверждение 49. *Функция* $\varphi\,(t)$ *имеет* ***непрерывную производную на отрезке*** $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$.

При этом:

$$\varphi'\,(t) = \mathbf{F}'\Big(\,\mathbf{a} + t\,(\,\mathbf{b} - \mathbf{a}\,)\Big)(\,\mathbf{b} - \mathbf{a}\,) \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{F}'$ — ***производная Фреше*** *отображения* $\mathbf{F}$.

Доказательство. Действительно:

$$\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t) = \mathbf{F}\big(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\Delta t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\big)-\mathbf{F}\big(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\big) =$$
$$= \mathbf{F}'\big(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\big)\cdot\Delta t(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\omega\big(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a}),\,\Delta t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\big)\,,$$

причем, в силу (1), $\|\omega\| \to 0$, если $\Delta t \to 0$.

Деля обе части этого равенства на Δt и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим равенство (8). □

Оценка остатка при дифференцировании по Фреше

Так как мы предположили ***непрерывную дифференцируемость*** $\mathbf{F}$, то $\varphi'(t)$ — ***непрерывная функция*** t и, в силу равенства (2), имеем:

$$\varphi(1)-\varphi(0) = \mathbf{F}(\mathbf{b})-\mathbf{F}(\mathbf{a}) = \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathbf{F}'\big(\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})\big)\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})\,dt \quad (9)$$

Если $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ ***непрерывна*** по $\mathbf{x}$ ***на множестве***, включающем ***отрезок*** между точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, $\|\mathbf{F}(\mathbf{x})\|$ ***непрерывна*** и во всех точках такого отрезка выполнено неравенство:

$$\|\mathbf{F}'(\mathbf{x})\| \leqslant \mathbf{N}_1\,, \qquad (10)$$

где $\mathbf{N}_1$ ***не зависит*** от $\mathbf{x}$, то из (9) следует:

$$\big\|\mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})\big\| \leqslant \mathbf{N}_1\cdot\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$$

Замечание. Эта ***оценка*** — ***аналог оценки*** (6) для ***абстрактных функций***.

Предположим теперь, что $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$ не только ***непрерывно*** зависит от $\mathbf{x}$, но ***на множестве***, включающем ***отрезок*** $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, выполнено ***условие Липшица***:

$$\big\| \mathbf{F}'(\mathbf{x}) - \mathbf{F}'(\mathbf{y}) \big\| \leqslant \mathbf{N}_2 \cdot \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \| \tag{11}$$

В этом случае, из (9) следует:

$$\mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a}) = \mathbf{F}'(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \Big[\mathbf{F}'\big(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})\big) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})\Big] \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})\, dt\,,$$

и, с учетом (11):

$$\left\| \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \Big[\mathbf{F}'\big(\mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})\big) - \mathbf{F}'(\mathbf{a})\Big] (\mathbf{b} - \mathbf{a})\, dt \right\| \leqslant \mathbf{N}_2 \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} t\, dt = \frac{\mathbf{N}_2}{2} \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|^2 \tag{12}$$

Сравнивая равенства (12) и (1), мы видим, что предположение (11) ведет к эффективной ***оценке*** остаточного члена ω в определении ***производной*** отображения F.

Упражнения и задачи к параграфу 2.

1. Показать, что в ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ ***функционал*** $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ ***дифференцируем по Фреше***. Найти его ***дифференциал***.

2. Показать, что в любом ***линейном нормированном пространстве функционал*** нормы $\| \mathbf{x} \|$ ***не дифференцируем по Фреше*** в ***точке*** $\mathbf{x} = \mathbb{O}$, но ***имеет*** в этой ***точке вариацию*** по всем направлениям.

<u>Указание</u>. Показать, что функционал $\| \mathbf{x} \|$ ***не дифференцируем по Гато*** в ***точке*** $\mathbf{x} = \mathbb{O}$.

3. Пусть $\mathbf{A}$ — ***ограниченный оператор***, действующий из ***линейного нормированного пространства*** $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$, а ***отображение*** $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X}$ ***дифференцируемо по Фреше*** в ***точке*** $\mathbf{x}$.

Показать, что ***отображение*** $\mathbf{F}_1 \stackrel{def}{=} \mathbf{AF}(\mathbf{x})$ также будет ***дифференцируемо по Фреше*** в ***точке*** $\mathbf{x}$. Чему равна $\mathbf{F}_1'(\mathbf{x})$?

4. Пусть $\mathcal{K}(t, s)$ ***непрерывная*** функция на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, а функция $g(u, v)$ удовлетворяет условиям примера 3.

Показать, что нелинейный ***интегральный оператор***, определяемый формулой:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathcal{K}(t, s) \cdot g(s, x(s))\, dt ,$$

как оператор из $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, ***дифференцируем по Фреше*** в любой ***точке пространства*** $\mathbb{C}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Чему равна $\mathbf{F}'(\mathbf{x})$?

5. Объяснить почему справедливо неравенство (10).

4.3 Метод Ньютона

Предварительные построения

Метод Ньютона — это процесс последовательных приближений (***итерационный процесс***), предназначенный для (приближенного) ***решения операторного уравнения***:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbb{O} , \tag{1}$$

где $\mathbf{F}$ ***нелинейный оператор*** из ***линейного нормированного пространства*** $\mathbf{X}$ в ***линейное нормированное пространство*** $\mathbf{Y}$.

Будем предполагать:

1°. ***Существует решение*** $\mathbf{x}^*$ уравнения (1).

2°. ***Оператор*** $\mathbf{F}$ ***дифференцируем по Фреше*** и ***всюду*** в $\mathbf{X}$ ***выполнено*** условие (11) из § 2.

3°. Выполнено ***условие регулярности***, то есть ***оператор*** $\mathbf{F}'$ ***непрерывно обратим*** в каждой ***точке*** $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$, и, кроме того существует постоянная $m > 0$ такая, что:

$$\left\| \mathbf{F}'(\mathbf{x})^{-1} \right\| < \mathbf{m}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \tag{2}$$

Пусть $\mathbf{x}_0$ — какая-либо точка $\mathbf{X}$.

Уравнение (1) можно, ***очевидно***, представить в виде:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = \mathbb{O} \tag{3}$$

и задачу поиска ***решения*** (1) можно заменить на задачу поиска ***решения уравнения*** (3), но уже относительно ***неизвестного*** элемента $\mathbf{h}$.

Процесс Ньютона основан на следующих интуитивных соображениях.

1°. Если $\mathbf{x}_0$ ***достаточна близка*** к $\mathbf{x}^*$, то решение уравнения (3), относительно $\mathbf{h}$, имеет ***малую норму***.

2°. В силу ***дифференцируемости*** $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) \approx \mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} \tag{4}$$

Это ***приближенное*** равенство тем ***точнее***, чем ***меньше*** $\|\mathbf{h}\|$.

3°. В силу (4) можно пытаться (приближенно) определить ***решение*** уравнения (3), решая ***линейное*** относительно $\mathbf{h}$ ***операторное уравнение***:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) + \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)\mathbf{h} = \mathbb{O} \tag{5}$$

$\mathbf{4^\circ}$. В силу ***предположения*** 3°, уравнение (5) ***имеет единственное*** решение: $\mathbf{h}_0 = -\mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$

$\mathbf{5^\circ}$. Можно ожидать, что элемент $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \mathbf{F}'(\mathbf{x}_0)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$ будет ***лучше*** приближать решение $\mathbf{x}^*$, чем ***начальный*** элемент $\mathbf{x}_0$.

$\mathbf{6^\circ}$. ***Заменяя*** $\mathbf{x}_0$ ***на*** $\mathbf{x}_1$ и рассуждая аналогично, можно найти элемент $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{F}'(\mathbf{x}_1)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_1)$

Итерационный процесс Ньютона

Вообще, если $\mathbf{x}_n$ ***найдено***, то ***можно*** найти $\mathbf{x}_{n+1}$ по правилу:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n - \mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}_n) \tag{6}$$

Определение 70. ***Рекуррентная последовательность*** (6) *называется* ***итерационным процессом Ньютона*** *(методом Ньютона) для приближенного* ***решения*** *уравнения* (1).

Проанализируем возможность ***сходимости*** этой последовательности к решению уравнения (1).

Теорема 20. *Если* ***выполнены предположения*** $1^\circ - 3^\circ$, *то справедлива* ***оценка:***

$$\|\mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^*\| \leqslant \frac{2}{\mathbf{mN_2}} \cdot \left\| \frac{\mathbf{mN_2}}{2}(\mathbf{x_0} - \mathbf{x}^*) \right\|^{2^{n+1}} \tag{7}$$

В частности, если

$$\|\mathbf{x_0} - \mathbf{x}^*\| < \frac{2}{\mathbf{mN_2}}, \tag{8}$$

то последовательность (6) ***сходится*** *к* $\mathbf{x}^*$.

Доказательство. Действительно:

$$\| \mathbf{x_{n+1}} - \mathbf{x}^* \| \leqslant \left\| \mathbf{x_n} - \mathbf{x}^* + \mathbf{F}'(\mathbf{x_n})^{-1} \left[\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{F}(\mathbf{x_n}) \right] \right\| \tag{9}$$

Разность $\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{F}(\mathbf{x_n})$ представим согласно (12) из § 2, то есть:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{F}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{F}'(\mathbf{x}_n)(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n) + \omega,$$
$$\text{где} \quad \| \omega \| \leqslant \frac{\mathbf{N_2}}{2} \cdot \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n\| .$$

Используя это представление в неравенстве (9), получим:

$$\| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^* \| \leqslant \frac{\mathbf{mN_2}}{2} \cdot \| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n \|^2$$

Оценивая аналогично предыдущему $\| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n \|$ через $\| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_{n-1} \|$, и так далее, раз за разом повторяя рассуждения, получим:

$$\| \mathbf{x}_{n+1} - \mathbf{x}^* \| \leqslant \frac{\mathbf{mN_2}}{2} \cdot \left(\frac{\mathbf{mN_2}}{2} \right)^2 \cdot \| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_n \|^4 \leqslant$$
$$\leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{\mathbf{mN_2}}{2} \right)^{1+2+2^2+\cdots+2^n} \cdot \| \mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0 \|^{2^{n+1}} =$$
$$= \frac{2}{\mathbf{mN_2}} \cdot \left\| \frac{\mathbf{mN_2}}{2} (\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0) \right\|^{2^{n+1}}$$

Оценка (7) доказана. Условие (8), ***очевидно***, обеспечивает ***сходимость*** $\mathbf{x}_n$ к $\mathbf{x}^*$ при $n \to \infty$. □

Простые примеры показывают ***отсутствие сходимости*** последовательности (6), если величина $\| \mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^* \|$ не согласована с величинами $\mathbf{m}$ и $\mathbf{N_2}$.

При нарушении условия ***регулярности*** (2), процесс Ньютона может оказаться ***неосуществимым***.

Название ***метод Ньютона*** заимствовано у ***классического*** метода нахождения ***корня*** уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ — ***обычная*** функция ***числового*** переменного x.

В этом случае f может рассматриваться как ***отображение*** $\mathbb{E}^1$ в $\mathbb{E}^1$, а ***процесс*** (6) имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Этот ***итеративный процесс*** решения уравнения $f(x) = 0$, называемый также ***методом касательных***, традиционно связывают с именем ***Ньютона***.

Упражнения и задачи к параграфу 3.

1. Для ***отображения*** f из $\mathbb{E}^1$ в $\mathbb{E}^1$ показать на примере ***отсутствие сходимости*** последовательности (6) даже при наличии ***регулярности***, если начальное приближение x_0 выбрано ***далеко*** от ***корня*** x^*.

2. Привести ***пример функции*** f и выбора ***начального приближения*** x_0 таких, что процесс Ньютона ***не осуществим*** (начиная с x_0).

4.4 Экстремальные задачи в нормированных пространствах

Предварительные соображения и основные определения

Пусть $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ вещественный ***функционал***, заданный на ***линейном нормированном пространстве*** $\mathbf{X}$.

Рассмотрим его значения на некотором подмножестве $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{X}$.

Определение 71. ***Элемент*** $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ *называется* ***точкой*** *(элементом)* ***локального максимума*** *функционала* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ *на* $\mathbf{M}$, *если* ***существует*** *число* $r > 0$ *такое, что:*

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0) \geqslant \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

для ***всех*** $\mathbf{x}$, *принадлежащих* $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0, r) \cap \mathbf{M}$.

Если неравенство (1) *выполняется в* $\mathbf{S}(\mathbf{x}_0, r) \cap \mathbf{M}$ *при* ***любом*** r, *то* $\mathbf{x}_0$ *называется точкой* ***глобального максимума*** *функционала* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ *на* $\mathbf{M}$.

Определение 72. *Если знак неравенства в* (1) *поменять на* ***противоположный****, сохранив при этом все прочие предположения, получится определение* ***локального*** *и* ***глобального минимума*** *функционала* $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x})$ *на* $\mathbf{M}$ *соответственно.*

Необходимые условия экстремума

Рассмотрим более подробно случай, когда $\mathbf{M}$ ***выпуклое множество*** в $\mathbf{X}$, в частности, когда $\mathbf{M} = \mathbf{X}$.

Пусть $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{M}$ точка ***локального максимума*** функционала $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{z}$ некоторая, отличная от $\mathbf{x}_0$, точка $\mathbf{M}$.

Тогда ***отрезок*** $\mathbf{x}_0 + t \cdot \frac{\mathbf{z}-\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{z}-\mathbf{x}_0\|}$, $0 \leqslant t \leqslant \|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\|$ ***целиком*** принадлежит $\mathbf{M}$ (в силу выпуклости $\mathbf{M}$).

Рассмотрим ***числовую*** функцию: $\varphi(t) = \mathbf{\Phi}\left(\mathbf{x}_0 + t\,\frac{\mathbf{z}-\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{z}-\mathbf{x}_0\|}\right)$.

В силу (1) ***функция*** $\varphi(t)$ имеет ***локальный максимум*** по t в точке $t = 0$.

Предположим, что $\varphi(t)$ имеет в точке $t = 0$ ***одностороннюю производную*** $\varphi'_+(0)$.

Поскольку $\varphi(t)$ ***убывает***, по крайней мере, на достаточно ***малом*** отрезке $[\mathbf{0}, \mathbf{t_1}]$, то:

$$\varphi'_+(0) \leqslant 0 \tag{2}$$

В силу определения ***вариации*** по направлению (§ 2), условие (2) означает ***неположительность*** вариации функционала $\mathbf{\Phi}$ в ***точке*** $\mathbf{x}_0$ ***по направлению*** $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{z} - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\|}$.

Будем, ***для краткости***, называть указанное выше $\mathbf{h}$, где $\mathbf{z}$ — некоторая точка $\mathbf{M}$, — ***направлением***, ***ведущим*** в $\mathbf{M}$ из точки $\mathbf{x}_0$.

Из (2) следует, что, если $\mathbf{x}_0$ точка ***локального максимума*** $\mathbf{\Phi}$ на $\mathbf{M}$, и ***существует вариация*** $\mathbf{\Phi}$ в ***точке*** $\mathbf{x}_0$ ***по*** некоторому ***направлению*** $\mathbf{h}$, ***ведущему*** в $\mathbf{M}$ из $\mathbf{x}_0$, то ***необходимо***:

$$\mathbf{Var}\,[\,\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}_0, \mathbf{h})\,] \leqslant 0 \tag{3}$$

В частности, если функционал $\mathbf{\Phi}$ ***дифференцируем по Фреше***, то:

$$\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \leqslant 0 \tag{4}$$

на ***любом*** направлении $\mathbf{h}$, ***ведущем*** из $\mathbf{x}_0$ в $\mathbf{M}$.

Если $\mathbf{x}_0$ ***внутренняя*** точка $\mathbf{M}$, то из (4) следует, что ***линейный функционал*** $\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h})$ ***неположителен*** для ***любого*** $\mathbf{h} \in \mathbf{X}$.

Поэтому:

$$\mathbf{\Phi}'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \equiv 0 \tag{5}$$

В случае, когда $\mathbf{X} = \mathbf{H}$ ($\mathbf{H}$ — ***гильбертово*** пространство) ***линейный*** функционал $\mathbf{\Phi}'\,(\,\mathbf{x}_0\,)\,(\,\mathbf{h}\,)$ можно представить в виде ***скалярного произведения***: $\mathbf{\Phi}'\,(\,\mathbf{x}_0\,)\,(\,\mathbf{h}\,) = \big(\,\mathbf{w}\,(\mathbf{x}_0),\, \mathbf{h}\,\big)$.

Элемент $\mathbf{w}\,(\mathbf{x}_0)$, “представляющий” по теореме Рисса линейный функционал $\mathbf{\Phi}'\,(\,\mathbf{x}_0\,)\,(\,\mathbf{h}\,)$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, называется ***градиентом функционала*** $\mathbf{\Phi}'\,(\,\mathbf{x}_0\,)$ и обозначается $\mathbf{grad}\,\mathbf{\Phi}\,(\,\mathbf{x}_0\,)$.

Условия (4) и (5) можно поэтому представить в виде:

$$(\,\mathbf{grad}\,\mathbf{\Phi}\,(\,\mathbf{x}_0\,),\, \mathbf{h}\,) \leqslant 0 \tag{6}$$

или

$$\mathbf{grad}\,\mathbf{\Phi}\,(\,\mathbf{x}_0\,) = 0 \tag{7}$$

Т.к. $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{z} - \mathbf{x}_0}{\|\,\mathbf{z} - \mathbf{x}_0\,\|}$, то из (6) , следует неравенство:

$$(\,\mathbf{grad}\,\mathbf{\Phi}\,(\,\mathbf{x}_0\,),\, \mathbf{z} - \mathbf{x}_0\,) \leqslant 0, \quad \forall\, \mathbf{z} \in \mathbf{M}\,,$$

являющееся ***необходимым условием максимума***.

Если теперь $\mathbf{x}_0$ ***точка минимума*** $\mathbf{\Phi}$ на $\mathbf{M}$ (локальная или глобальная), то аналогичные рассуждения приведут нас к ***необходимым*** условиям ***минимума*** вида (3) — (5) , но ***знаки неравенств*** нужно заменить на ***противоположные***.

Следующие ниже примеры 1 и 2 служат кратким ***введением*** в ***математическую дисциплину***, называемую ***вариационным исчислением***.

Пример 1 — простейшая задача классического вариационного исчисления

Рассмотрим в ***пространстве*** $\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ (оно определено в примере 5 § 1 главы I) ***непрерывно дифференцируемых*** функций на ***отрезке*** $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***интегральный*** функционал:

$$\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{x}) \;=\; \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f\,\big(\,s,\,x\,(s),\,x'\,(s)\,\big)\,ds \tag{8}$$

Предположим, что, во-первых, ***порождающая функция*** $f\,(s,\,u,\,v)$ ***непрерывна*** по $s,\,u,\,v$ в области $\Omega : \{\,\mathbf{a} \leqslant s \leqslant \mathbf{b}\,;\, -\infty < u,\,v < -\infty\,\}$, во-вторых, ***обладает*** в точках этой области ***непрерывными частными производными*** f'_u, f'_v и, кроме того, ***во всех*** точках области Ω выполнены неравенства:

$$|\,f'_u\,(\,s,\,u_1,\,v_1\,) \,-\, f'_u\,(\,s,\,u_2,\,v_2\,)\,| \,\leqslant\, \mathbf{L}\cdot(\,|\,u_1 - u_2\,| + |\,v_1 - v_2\,|\,)\,,$$
$$|\,f'_v\,(\,s,\,u_1,\,v_1\,) \,-\, f'_v\,(\,s,\,u_2,\,v_2\,)\,| \,\leqslant\, \mathbf{L}\cdot(\,|\,u_1 - u_2\,| + |\,v_1 - v_2\,|\,)\,,$$

в которых ***постоянная Липшица*** $\mathbf{L}$ ***не зависит*** от $s,\,u,\,v$.

Утверждение 50. *При сделанных предположениях* ***функционал*** (8) ***дифференцируем по Фреше всюду*** *в* $\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Доказательство. Сделанные относительно ***порождающей*** функционал (8) ***функции*** f предположения, позволяют записать:

$$\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - \mathbf{\Phi}\,(\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}}\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \frac{d}{dt}\big[f\,\big(s, x\,(s) + t\,h\,(s),\, x'\,(s) + t\,h'\,(s)\big)\big]\;dt\,ds =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \big[\,f'_u\,\big(s, x\,(s) + t\,h\,(s), x'\,(s) + t\,h'\,(s)\big)h\,(s) +$$
$$+\, f'_v\big(s, x\,(s) + t\,h\,(s), x'\,(s) + t\,h'\,(s)\big)h'\,(s)\big]\;ds\,dt$$

Отсюда: $\qquad \mathbf{\Phi}\,(\mathbf{x}+\mathbf{h})\;-\;\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{x})\;=$

$$= \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [f'_u\;(s, x\,(s), x'\,(s))\,h\,(s) + f'_v\;(s, x\,(s) x'\,(s))\,h'\,(s)]\;ds +$$

$$+\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}}\left\{\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [f'_u\;(s, x\,(s)+t\,h\,(s), x'\,(s)+t\,h'\,(s)) - f'_u\;(s, x\,(s), x'\,(s))]\,h\,(s)\,ds +\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [f'_v\;(s, x\,(s)+t\,h\,(s), x'\,(s)+t\,h'\,(s)) - f'_v\;(s, x\,(s), x'\,(s))]\,h'\,(s)\,ds\right\} dt =$$

$$=\;\ell\,(\,\mathbf{x}\,)\;+\;\omega\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{h}\,)$$

Из предположенной ***непрерывности*** f'_u и f'_v следует, что линейный функционал $\ell\,(\mathbf{x})$ в этом равенстве — ***непрерывный линейный функционал*** в $\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, а $|\,\omega\,(\,\mathbf{x},\,\mathbf{h})\,|$ нетрудно ***оценить*** с использованием неравенств (12) из § 2 этой главы: $\qquad |\,\omega\,(\mathbf{x}, \mathbf{h})\,|\;\leqslant$

$$\leqslant\;\int\limits_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} t\,\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \{\mathbf{L}\,(|\,h\,(s)| + |h'\,(s)|)\,|h\,(s)| + \mathbf{L}\,(|h\,(s)| + |h'\,(s)|)\,|h'\,(s)|\}\;ds\,dt\;\leqslant$$

$$\leqslant\;\tfrac{1}{2}\cdot\mathbf{L}\cdot 2\cdot\|\,\mathbf{h}\,\|^2_{\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]}\;=\;\mathbf{L}\cdot\|\,\mathbf{h}\,\|^2_{\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]}$$

Полученные оценки показывают ***дифференцируемость по Фреше функционала*** (8) в ***пространстве*** $\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. $\square$

При этом его ***дифференциал Фреше*** в ***точке*** $x\,(s)$ определяется формулой:

$$d\,\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{x},\,\mathbf{h}) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \{\,f'_u\;(\,s,\;x\,(s), x'\,(s)\,)\;h\,(s) + f'_v\;(\,s,\;x\,(s), x'\,(s)\,)\;h'\,(s)\,\}\;ds$$

Если теперь $x_0\,(s)$ ***элемент*** $\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, на котором ***достигается локальный минимум*** (или максимум) функционала (8), то согласно условию (5), $\qquad d\,\mathbf{\Phi}\,(\mathbf{x}_0,\,\mathbf{h})\;\underset{\mathbf{h}}{\equiv}\;0$, $\qquad$ или $\qquad \forall\,\mathbf{h}\,\in\,\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \{f'_u\;(s, x\,(s), x'\,(s))\,h\,(s) + f'_v\;(s, x\,(s), x'\,(s))\,h'\,(s)\}\;ds = 0 \qquad (9)$$

Хотя пространство $\mathbb{D}_1[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ ***не является гильбертовым***, тем не менее, ***необходимое*** условие экстремума, и в этом случае, удается свести к условию (9) , аналогичному условию (7), — к ***операторному уравнению***, которому должна удовлетворять экстремальная ***точка*** $\mathbf{x}_0$.

Нам понадобится следующее вспомогательное

Утверждение 51. *Если* $f(s)$ ***непрерывная*** *на отрезке* $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *функция и для* ***любой*** *функции* $h(s) \in \mathbb{C}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *выполнено равенство:*

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(s)h(s)\,ds = 0 , \tag{10}$$

то $f(s) \equiv 0$ *на* $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ *и это утверждение останется справедливым, если в* (10) *использовать только те функции* $h(s) \in \mathbb{C}[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, *для которых* $h(\mathbf{a}) = h(\mathbf{b}) = 0$.

Доказательство. Действительно, пусть $f(s) \neq 0$ в некоторой ***точке*** $s_0 \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Так как $f(s)$ ***непрерывна*** на $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, то ***найдется*** некоторый ***интервал*** $(\mathbf{c},\mathbf{d}) \subseteq [\mathbf{a},\mathbf{b}]$, на котором $f(s) \neq 0$ и потому сохраняет знак.

Будем теперь в качестве функции $h(s)$ в (10) рассматривать только такие функции, которые всюду, вне $(\mathbf{c},\mathbf{d})$, равны 0.

Очевидно, внутри $(\mathbf{c},\mathbf{d})$ можно подобрать значения $h(s)$ так, чтобы $h(s)$, во-первых, была ***непрерывна*** на всём отрезке $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и, во-вторых, на некотором внутреннем интервале $(\mathbf{c_1},\mathbf{d_1}) \subset (\mathbf{c},\mathbf{d})$, сколь угодно мало отличающемся от последнего, ***совпадала*** с $f(s)$.

Тогда равенство (10) ***не выполнено***, следовательно, наше ***предположение противоречит условию*** утверждения. $\square$

Рассмотрим теперь тождество (9).

Обозначим для краткости:

$$f'_u\,(\,s,\,x_0\,(s), x'_0\,(s)\,)\;=\;m\,(s)\,;\qquad f'_v\,(\,s,\,x_0\,(s), x'_0\,(s)\,)\;=\;n\,(s)$$

В силу наших предположений $m\,(s)$ и $n\,(s)$ ***непрерывны*** на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Тождество (9) в этих обозначениях примет вид:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\,m\,(s)\,h\,(s)\;+\;n\,(s)\,h'\,(s)\,]\;ds\;\equiv\;0,\quad \forall\,\mathbf{h}\,\in\,\mathbb{D}_1\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \tag{11}$$

Такое равенство возможно только, если $m\,(s)$ и $n\,(s)$ подчинены некоторым ***дополнительным*** условиям.

Обозначим: $M\,(s)\;=\;\int\limits_{\mathbf{a}}^{s} m\,(\tau)\,d\tau$.

Тождество (11) можно переписать в виде:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\,M'\,(s)\cdot h\,(s)\;+\;n\,(s)\cdot h'\,(s)\,]\;ds\;\equiv\;0\;.$$

Учтем, что $M\,(\mathbf{a})\;=\;0$ и, интегрируя по частям первое слагаемое под знаком интеграла в (11), получим:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} M'\,(s)\cdot h\,(s)\,ds\;=\;M\,(s)\cdot h\,(s)\Big|_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} - \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} M\,(s)\cdot h'\,(s)\,ds\;.$$

Поэтому, предыдущее тождество перепишется в виде:

$$M\,(\mathbf{b})\cdot h\,(\mathbf{b})\;+\;\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\,n\,(s)\;-\;M\,(s)\,]\cdot h'\,(s)\,ds\;\equiv\;0\;.$$

Здесь $h'\,(s)$ — ***любая непрерывная*** функция и $h\,(s)$ любая ее ***первообразная***.

В частности, это тождество должно удовлетворяться при $h\,(s)\;\equiv\;1$.

Но, это возможно ***только***, если: $M(\mathbf{b}) = 0$.

Учтя это условие, мы видим, что тождество (11) свелось к интегральному соотношению:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\, n(s) - M(s)\,] \cdot h'(s)\, ds \equiv 0 \tag{12}$$

Кроме этого, должно быть: $M(\mathbf{a}) = M(\mathbf{b}) = 0$, а так как $h'(s)$ — ***любая непрерывная*** функция, то в силу утверждения 51 :

$$n(s) - M(s) \equiv 0 \quad \text{на } [\mathbf{a}, \mathbf{b}]\,, \tag{13}$$

и дополнительно: $M(\mathbf{a}) = M(\mathbf{b}) = 0$.

Поэтому $n(s)$ обязана быть ***дифференцируемой*** и:

$$n'(s) \equiv M'(s) \equiv m(s)\,.$$

Кроме того, из (13) следует, что: $n(\mathbf{a}) = n(\mathbf{b}) = 0$.

Окончательно, из тождества (13) мы получаем такое ***следствие***:

Если $x_0(s)$ — ***экстремальная точка*** функционала (8), то ***функция*** $x_0(s)$ ***необходимо*** удовлетворяет ***дифференциальному уравнению***:

$$f'_x\big(s,\, x(s),\, x'(s)\big) - \frac{d}{ds}\big[\, f'_{x'}(s,\, x(s),\, x'(s))\,\big] = 0 \tag{14}$$

и условиям:

$$f'_{x'}(\mathbf{a},\, x(\mathbf{a}),\, x'(\mathbf{a})) = f'_{x'}(\mathbf{b},\, x(\mathbf{b}),\, x'(\mathbf{b})) = 0$$

на концах отрезка $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Дифференциальное уравнение (14) называется ***уравнением Эйлера*** для функционала (8).

Пример 2 — задача вариационного исчисления

с закреплёнными концами

Рассмотрим теперь функционал (8) с теми же, что и раньше условиями на ***порождающую функцию*** f, но будем искать условия его (локального) ***минимума*** на ***подмножестве*** $\mathbf{M} \subset \mathbb{D}_1[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, которое состоит из функций $\mathbb{D}_1[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ с ***фиксированными*** в концах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ значениями: $x(\mathbf{a}) = A$, $x(\mathbf{b}) = B$.

Непосредственно проверяется ***выпуклость*** множества $\mathbf{M}$.

Поэтому, для ***минимизирующего элемента*** должно выполняться условие (4).

Учитывая полученную в примере 1 формулу для ***производной Фреше*** функционала (8), видим, что в ***точке минимума*** $x_0(s)$ должны выполняться условия:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \{f'_u\,(s, x_0(s), x'_0(s)) \cdot h(s) + f'_v\,(s, x_0(s), x'_0(s)) \cdot h'(s)\}\, ds \leqslant 0\ , \qquad (15)$$

$$x_0(\mathbf{a}) = A, \quad x_0(\mathbf{b}) = B,$$

для ***всех допустимых направлений*** $\mathbf{h}$, т.е. идущих из $\mathbf{x}_0$ в $\mathbf{M}$.

А для того, чтобы ***направление*** $\mathbf{h}$ ***вело*** бы в $\mathbf{M}$, ***очевидно***, нужно потребовать, чтобы:

$$h(\mathbf{a}) = h(\mathbf{b}) = 0, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{D}_1[\mathbf{a},\mathbf{b}] \qquad (16)$$

Очевидно, что если $\mathbf{h}$ ***допустимо***, то и ***направление*** — $-\mathbf{h}$, – также ***допустимо***.

Следовательно, ***неравенство*** в (15) должно удовлетворяться, как ***равенство***.

Мы получили ***необходимое*** условие минимума, по виду совпадающие с (9), но с ***дополнительными*** краевыми условиями в (15) и (16).

Преобразуем равенство (15) аналогично тому, как мы преобразовывали равенство (9).

Учитывая краевые условия, мы получим соотношение вида (12) в котором $h'(s)$ уже ***не произвольная*** непрерывная функция, а такая, ***первообразная*** которой удовлетворяет сразу двум ***дополнительным*** условиям: $h(\mathbf{a}) = 0$ и $h(\mathbf{b}) = 0$.

Из (12), в этом случае, уже ***не следует*** условие: $M(s) = n(s)$.

Но, как мы увидим ниже, из (12) ***следует, в этом случае***, что:

$$n(s) - M(s) \equiv const \tag{17}$$

Покажем справедливость следующего утверждения.

Утверждение 52. *Если* $f(s)$ — ***непрерывная*** *на отрезке* $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ *функция и*

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(s) \cdot h'(s)\, ds = 0, \quad h(s) \in \mathbb{D}_1[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \quad h(\mathbf{a}) = 0, h(\mathbf{b}) = 0\ , \tag{18}$$

то: $f(s) \equiv const$.

Доказательство. ***Легко*** показать, что условие (18), определяющее справедливость заключения утверждения 52, можно заменить на эквивалентное ему:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(s)\, g(s)\, ds = 0 \tag{19}$$

для любой ***непрерывной*** функции $g(s)$ такой, что: $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} g(s)\,ds = 0$.

Действительно, любая допустимая в условиях утверждения функция $h(s)$ имеет вид: $h(s) = \int\limits_{\mathbf{a}}^{s} g(\tau)\,d\tau$, где $g(\tau)$ — произвольная ***непрерывная*** на $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ функция.

Тогда условие $h(\mathbf{a}) = 0$, очевидно, выполнено, а условие $h(\mathbf{b}) = 0$ ***эквивалентно*** условию: $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} g(\tau)\,d\tau = 0$.

Теперь покажем, что из (19) ***следует*** заключение утверждения 52 , т.е. что $f(s) \equiv const$.

Пусть $f(s)$ — ***непрерывная*** функция, для которой выполнено (19).

Очевидно:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left[f(s) - \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\tau)\,d\tau \right] ds = 0 \tag{20}$$

Пусть теперь $\ell(s)$ любая ***непрерывная*** функция.

Ее можно представить в виде: $\ell(s) = \lambda(s) + \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \ell(\tau)\,d\tau$,

где $\lambda(s) = \ell(s) - \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \ell(\tau)\,d\tau$, и $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \lambda(s)\,ds = 0$.

Рассмотрим тождество:

$$\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left[f(s) - \tfrac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\tau)\,d\tau \right] \ell(s)\,ds =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left[f(s) - \tfrac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\tau)\,d\tau \right] \lambda(s)\,ds + \tfrac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \ell(\tau)\,d\tau \cdot \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left[f(s) - \tfrac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\tau)\,d\tau \right] ds$$

В ***правой части*** этого равенства ***первое*** слагаемое равно 0 в силу (19), а ***второе*** — в силу (20).

Поэтому: $\int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \left[f(s) - \tfrac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\tau)\,d\tau \right] \ell(s)\,ds = 0$ для ***любой непрерывной*** на $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ функции $\ell(s)$.

Тогда, в силу утверждения 51 наша функция $f(s)$ должна удовлетворять ***интегральному*** уравнению:

$f(s) - \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}} \int\limits_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} f(\tau)\, d\tau = 0$, с ядром $\mathcal{K}(s, \tau) = \frac{1}{\mathbf{b}-\mathbf{a}}$ на $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \times [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, которое является, таким образом, интегральным уравнением с оператором конечного ранга $(N = 1)$ (см. (3), § (6) главы III).

Непрерывным решением такого уравнения могут быть ***только постоянные*** функции $f(s) \equiv const$, т.е. утверждение 52 доказано.

□

Вернемся к равенству (12) при краевых условиях в (15) и (16).

Из только что доказанного утверждения 52, получаем (17).

Отсюда, как и в примере 1, следует ***дифференцируемость*** $n(s)$ и равенство $n'(s) = m(s)$.

Следовательно, ***минимизирующий элемент*** $x_0(s)$ и в этом случае должен удовлетворять ***уравнению Эйлера*** (14).

Дополнительные условия на решение этого уравнения — ***краевые*** условия, содержащиеся в (15).

Упражнения и задачи к параграфу 4.

1. Пользуясь рассуждениями примеров 1 и 2 получить ***необходимые*** условия ***минимума*** функционала (8) при одном ***дополнительном*** условии: $x(\mathbf{a}) = 0$.

2. Показать, что в случае $\mathbf{b} - \mathbf{a} = 1$ из условия (18) ***утверждения*** 52 ***следует***, что: $f(s) \equiv 0$.

3. В ***гильбертовом*** пространстве $\mathbf{H}$ найти ***градиент*** функционала: $\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + (\mathbf{c}, \mathbf{x})$, где $\mathbf{c}$ некоторый ***фиксированный*** элемент $\mathbf{H}$.

Литература

[1] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин Элементы теории функций и функционального анализа. М. "Физматлит". 2006г.

[2] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев Краткий курс функционального анализа. М. "Высшая школа". 1982г.

[3] В. А. Треногин Функциональный анализ. М. "Физматлит". 2002г.

[4] Л. Э. Эльсгольц Вариационное исчисление. М. "URSS". 2006г.

[5] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров Теория экстремальных задач. М. "Наука". 1974г.

[6] В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева Задачи и упражнения по функциональному анализу. М. "Физматлит". 2002г.

[7] А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани Теоремы и задачи функционального анализа. М. "Наука". 1988г.

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ **1**

1 Метрические пространства **9**

1.1 Определение и примеры метрических пространств 9

Метрическое пространство $\mathbb{E}^1$ 10

Метрическое пространство $\mathbb{E}^n$ 11

Метрическое пространство $\ell_{\mathbf{2}}$ 14

Метрическое пространство $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 15

Метрическое пространство $\mathbb{D}_k\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 16

Метрическое пространство $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 18

Подпространство метрического пространства 19

Полезные неравенства 19

1.2 Сходимость. Замкнутые и открытые множества в метрическом пространстве 22

Сходимость последовательности в метрическом пространстве 22

Предельные точки и замкнутые множества 25

Открытые и замкнутые множества в метрическом пространстве 29

Дополнение множества в метрическом пространстве 30
Сепарабельные метрические пространства 32
1.3 Полные метрические пространства 35
Фундаментальные последовательности в метрическом пространстве 35
Свойство полноты метрического пространства 37
Пример 1 — полнота метрического пространства $\mathbb{E}^n$ 37
Пример 2 — полнота метрического пространства $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$. 38
Пример 3 — полнота метрического пространства $\ell_{\mathbf{2}}$ 39
Пример 4 — неполного метрического пространства 41
Пример 5 — полнота метрического пространства $\mathbb{D}_k\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 42
1.4 Пополнение метрических пространств 48
Изометрия метрических пространств и пополнение 48
Пополнение пространства рациональных чисел $[\mathbf{0},\mathbf{1}]$ 51
Пополнение пространства $\mathbb{R}^{\Phi}$ 51
Пространство $\mathbb{L}_2\,[\,\mathbf{a},\mathbf{b}\,]$, как пополнение пространства $\mathbb{C}_{\mathbb{L}_2}\,[\,\mathbf{a},\mathbf{b}\,]$ 52
1.5 Отображения метрических пространств.
Принцип сжатых отображений 57
Отображения метрических пространств 57
Непрерывность отображения метрических пространств . . 59
Операторные уравнения в метрических пространствах . . 62
Принцип сжимающих отображений 62
Пример 1 — уравнение (3) в $\mathbb{E}^1$ 65

Пример 2 — система линейных алгебраических уравнений,
как операторное уравнение (3) в пространстве $\mathbb{R}^n_{\mathbf{max}}$ 65
Пример 3 — задача Коши для дифференциального уравнения,
как уравнение вида (3) 67
1.6 Компактные метрические пространства.
Компакты. Непрерывные функционалы на компактах . . . 71
Компактные метрические пространства 71
Компактность ограниченных множеств в $\mathbb{E}^n$ 72
Некомпактность единичного шара в $\ell_\mathbf{2}$ 73
Свойства непрерывных функционалов на компактах 74
Критерий компактности множества в метрическом пространстве 77
Компактные множества в пространстве $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 80

2 Линейные нормированные пространства и линейные операторы **89**
2.1 Основные определения 89
Определение линейного пространства 89
Примеры линейных пространств 92
Важнейшие следствия аксиом линейного пространства . . 93
Изоморфизм линейных пространств 97
Линейная зависимость и размерность линейного пространства 98
Подпространство в линейном пространстве 100

Определение линейного нормированного пространства (ЛНП) 101
Непрерывность нормы и операций сложения и
умножения на числа в линейном нормированном пространстве 102
Изоморфизм конечномерных пространств
данного числа измерений • 104
Теорема Ф. Рисса • 110
Конечномерность и компактность • 112
Банаховы пространства 115
2.2 Линейные операторы 118
Определение и примеры 118
Непрерывность и ограниченность линейного оператора.
Норма оператора 119
Линейный оператор в $\mathbb{R}^n_{\mathbf{max}}$ 122
Линейный интегральный оператор, действующий из $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$
в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 124
Пример неограниченного оператора 125
Вполне непрерывные операторы 126
2.3 Пространство линейных операторов.
Линейные операторные уравнения и
обратные операторы 130
Линейное пространство линейных операторов 130
Норма в линейном пространстве линейных операторов . . 131
Сопряжённое пространство к линейному пространству . . 132

Поточечная сходимость в пространстве линейных операторов 134

Произведение операторов и обратный оператор 136

Достаточное условие ограниченности обратного оператора 138

Теорема Банаха об обратном операторе 140

Собственные значения и спектр линейного оператора . . . 143

3 Гильбертово пространство. Линейные отображения гильбертовых пространств 149

3.1 Определение гильбертова пространства. Простейшие свойства 149

Пространство со скалярным произведением 149

Примеры пространств со скалярным произведением 151

Слабая сходимость в пространстве со скалярным произведением 153

Ортогональность и замкнутость множеств в пространстве со скалярным произведением 155

3.2 Теорема о проекции на замкнутое выпуклое множество и некоторые ее следствия 160

Теорема о проекции 160

Условия, определяющие проекцию 162

Проекция на подпространство 163

Неравенство Бесселя 164

Ортонормированные системы в пространстве со скалярным произведением 166
Ряды Фурье в гильбертовом пространстве 167
Равенство Парсеваля и полнота системы элементов $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^{\infty}$ 168
Теорема об ортогональном разложении 171
Теорема об общем виде линейного функционала 173
3.3 Спектральное представление симметричного вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве 176
Сопряжённый оператор к линейному оператору 176
Самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве 177
Собственные векторы оператора в гильбертовом пространстве 178
Существование собственного вектора у вполне непрерывного оператора 179
Теорема о спектральном разложении вполне непрерывного оператора 181
3.4 Примеры самосопряженных вполне непрерывных операторов в пространстве $\mathbb{L}_2\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 189
Пример 1 189
Пример 2 192
3.5 Линейные уравнения с вполне непрерывным симметричным оператором 197
Представление решения 197

Зависимость решения уравнения (1) от параметра λ . . 198

3.6 Линейные уравнения с произвольным вполне непрерывным оператором в гильбертовом пространстве 202

Уравнения с оператором, обладающим замкнутой областью значений 202

Замкнутость области значений оператора $(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ вполне непрерывный оператор в $\mathbf{H}$ и $\lambda \neq 0$. 203

Связь между сопряжёнными уравнениями второго рода (случай операторов конечного ранга) 205

Связь между сопряжёнными уравнениями второго рода (общий случай) 209

4 Нелинейные отображения линейных нормированных пространств 217

4.1 Дифференциальное и интегральное исчисление для абстрактных функций 217

Определения производной и интеграла от абстрактных функций 217

Свойства интегралов от абстрактных функций 219

Оценка разности значений абстрактной функции 222

4.2 Дифференцирование нелинейных отображений 223

Дифференцируемость по Фреше 223

Дифференцируемость по Фреше отображения из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^1$ 225

Дифференцируемость по Фреше отображения из $\mathbb{E}^n$ в $\mathbb{E}^m$ 226

Дифференцируемость по Фреше отображения из $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$

в $\mathbb{C}\,[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ 227

Дифференциалы Фреше n-го порядка 228

Дифференцируемость отображения по Гато 229

Вариация отображения $\big($в точке $(\,\mathbf{x}\,)$ по направлению $(\,\mathbf{h}\,)\big)$ 230

Оценка остатка при дифференцировании по Фреше 231

4.3 Метод Ньютона 233

Предварительные построения 233

Итерационный процесс Ньютона 235

4.4 Экстремальные задачи

в нормированных пространствах 237

Предварительные соображения и основные определения . . 237

Необходимые условия экстремума 238

Простейшая задача классического вариационного исчисления 241

Задача вариационного исчисления с закреплёнными концами 246