Раздел 3. Полнота метрического пространства

Лекция 5 Пополнение метрических пространств.

Полнота, как увидим далее – очень важное свойство, и с полными пространствами иметь дело гораздо удобнее, нежели с неполными. Поэтому если изначально пространство неполное, хотелось бы добавить недостающие элементы так, чтобы новое расширенное пространство было уже полным, т.е. чтобы все ФП сходились. При этом не добавить ничего лишнего.

Важный частный случай: подпространства (подмножества) полного МП. Полнота эквивалентна замкнутости: ФП из элементов подпространства сходятся в объемлющем пространстве, поскольку оно полное. Все пределы принадлежат подмножеству, если оно замкнуто, и тогда оно само есть полное МП. Если подмножество незамкнуто, то найдутся предельные точки, ему не принадлежащие, и сходящиеся к ним последовательности – ФП, не имеющие предела в самом подпространстве (неполнота).

Замкнув множество (добавив недостающие предельные точки), получим полное МП. Пополнение = замыканию.

Замечание: полнота – внутреннее свойство МП, замкнутость – внешнее (по отношению к объемлющему пространству). Связаны.

Предварительное определение: МП X является пополнением (в узком смысле) МП $\tilde{X}$, если оно полное, и $\tilde{X}$ плотно в X: $[\tilde{X}] = X$.

Напоминание: последовательности $\{x_j\}$ и $\{x'_j\}$ мы назвали эквивалентными, если
$\rho(x_j, x'_j) \to 0$. Сейчас нам интересен случай, когда эти последовательности фундаментальны.

Если некоторая ФП сходится, то все ФП, ей эквивалентные, также сходятся к тому же пределу.

Если $\{x_j\}$ – ФП элементов из X, а $\tilde{X}$ плотно в X, то найдётся ФП $\{\tilde{x}_j\}$ элементов из $\tilde{X}$, эквивалентная $\{x_j\}$.

Из этих двух утверждений следует доказанная ранее

Лемма. Пусть X – МП, $\tilde{X} \subset X$, $[\tilde{X}] = X$. Пусть известно, что произвольная ФП элементов из $\tilde{X}$ сходится в X. Тогда X – полное МП.

Таким образом, если мы берём некоторое расширение исходного МП, и хотим доказать, что оно является пополнением, то нужно проверить, что исходное МП плотно в нём, и что все ФП элементов исходного пространства сходятся в этом расширении. Проверять, будут ли сходиться все ФП из элементов расширенного пространства, не обязательно. (Это аналог того, что замыкание любого множества замкнуто: при замыкании у нового множества не появляется новых предельных точек.)

Два вопроса:

1. Если мы рассмотрим два различных расширения МП $\tilde{X}$, удовлетворяющих данному определению, то как связаны эти метрические простран-

ства?

2. Что делать, если $\tilde{X}$ не является подпространством какого-то полного объемлющего пространства, т.е. никакого естественного расширения не просматривается?

Чтобы ответить на эти вопросы, введём ещё одно новое понятие:

Биективное отображение $\tau : X \to Y$ МП (X, ρ_X) в МП (Y, ρ_Y) называется *изометрией*, если $\forall x_{1,2} \in X : \rho_Y(\tau(x_1), \tau(x_2)) = \rho_X(x_1, x_2)$.
Иными словами, если $y_j = \tau(x_j)$, то $\rho_Y(y_1, y_2) = \rho_X(x_1, x_2)$: расстояние между образами равно расстоянию между прообразами.

В этом случае сами пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называют *изометричными.* Их метрические свойства неразличимы, хотя элементы могут отличаться. Говорят ещё, что МП (Y, ρ_Y) – изометрическая копия МП (X, ρ_X).

Утверждение: изометрия τ переводит фундаментальную последовательность в фундаментальную, а сходящуюся в сходящуюся, причём образ предела последовательности совпадает с пределом последовательности образов её элементов: если $x_j \to x$, $y_j = \tau(x_j)$, $y = \tau(x)$, то $y_j \to y$.

Утверждение: изометричность обладает всеми свойствами отношения эквивалентности, т.е. рефлексивностью (в качестве τ берём тождественное отображение), симметричностью (берём обратное отображение), транзитивностью (берём композицию).

Примеры:

1. МП точек на плоскости с геометрическим расстоянием и МП E^2 пар вещественных чисел – декартовых координат этих точек в ортонормированной системе.

2. Изометрические отображения МП на себя: движения плоскости и геометрического пространства (сдвиги, повороты, отражения), повороты и отражения сферы (шара), преобразования симметрии различных геометрических фигур.

3. МП $\mathbb{R}_\Phi$ (или, более общо, X_Φ) с инъективной функцией Φ и образ этой функции со стандартной метрикой.

4. X – множество, (Y, ρ_Y) – некоторое МП, $F : X \to Y$ – биекция. Зададим расстояние на X формулой $\rho_X(x, y) = \rho_Y(F(x), F(y))$. Тогда (X, ρ_X) – МП, изометричное (Y, ρ_Y), F – изометрия.

5. Конечночастотные почти периодические функции и функции, отличные от нуля в конечном числе точек (с евклидовой метрикой).

Теорема (фрагмент теоремы Хаусдорфа о пополнении). Пусть Y и Z – полные МП, а $\tilde{Y}$ и $\tilde{Z}$ – их всюду плотные подмножества, изометричные между собой. Тогда МП Y и Z также изометричны.

Пусть $\tilde{\tau} : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ – изометрия. Наша задача – построить изометрию $\tau : Y \to Z$, которая была бы продолжением (расширением) $\tilde{\tau}$.

Пусть $y \in Y$. Поскольку $Y = [\tilde{Y}]$, найдётся последовательность $\{\tilde{y}_j\}$: $\tilde{y}_j \in \tilde{Y}$, $\tilde{y}_j \to y$. Поскольку последовательность сходится, она фундаментальна. Тогда фундаментальна также последовательность $\tilde{z}_j = \tilde{\tau}(\tilde{y}_j)$. Поскольку МП Z полное, эта последовательность имеет предел в Z: $\tilde{z}_j \to z$. Определим отображение τ так: $\tau(y) = z$, т.е. $\tau(y) = \lim_{j\to\infty} \tilde{\tau}(\tilde{y}_j)$. Осталось доказать: 1) корректность, т.е. независимость значения функции от того, какую последовательность, сходящуюся к y, мы выберем; 2) изометричность; 3) тот факт, что на $\tilde{Y}$ отображение τ действует так же, как $\tilde{\tau}$ (иными словами, сужение τ на $\tilde{Y}$ совпадает с $\tilde{\tau}$).

1) Докажем корректность. Пусть $\tilde{y}_j \to y$, $\tilde{y}_j \in \tilde{Y}$ и одновременно $\tilde{y}'_j \to y$, $\tilde{y}'_j \in \tilde{Y}$. Тогда эти последовательности – эквивалентные ФП (почему?). Тогда их образы $\tilde{z}_j = \tilde{\tau}(\tilde{y}_j)$ и $\tilde{z}'_j = \tilde{\tau}(\tilde{y}'_j)$ – также эквивалентные ФП в Z. Следовательно, их пределы совпадают.

2) Пусть $\tilde{y}_j \to y$, $\tilde{y}_j \in \tilde{Y}$, $y \in Y$ и $\tilde{y}'_j \to y'$, $\tilde{y}'_j \in \tilde{Y}$, $y' \in Y$. Тогда $\tilde{z}_j = \tilde{\tau}(\tilde{y}_j) \to z = \tau(y)$ и $\tilde{z}'_j = \tilde{\tau}(\tilde{y}'_j) \to z' = \tau(y')$. Проверим изометричность: $\rho_Z(z, z') = \lim_{j\to\infty} \rho_Z(\tilde{z}_j, \tilde{z}'_j) = \lim_{j\to\infty} \rho_Y(\tilde{y}_j, \tilde{y}'_j) = \rho_Y(y, y')$

Нужно ещё убедиться в биективности. а) Инъективность: $\tau(y) \neq \tau(y')$ при $y \neq y'$, поскольку в этом случае $\rho_Z(\tau(y), \tau(y')) = \rho_Y(y, y') \neq 0$. б) Сюрьективность. Пусть $z \in Z$. Поскольку $Z = [\tilde{Z}]$, найдётся последовательность $\{\tilde{z}_j\}$: $\tilde{z}_j \in \tilde{Z}$, $\tilde{z}_j \to z$. Поскольку последовательность сходится, она фундаментальна. Из биективности $\tilde{\tau}$ вытекает, что у $\tilde{z}_j$ найдутся прообразы $\tilde{y}_j \in \tilde{Y}$: $\tilde{z}_j = \tilde{\tau}(\tilde{y}_j)$, а из изометричности $\tilde{\tau}$ следует, что последовательность $\tilde{y}_j$ фундаментальна. Поскольку МП Y полное, эта последовательность имеет предел в Y: $\tilde{y}_j \to y$. Отсюда следует, что $z = \tau(y)$, т.е. произвольный элемент Z есть образ некоторого элемента из Y.

3) Докажем, что сужение τ на $\tilde{Y}$ совпадает с $\tilde{\tau}$: если $y \in \tilde{Y}$, то $\tau(y) = \tilde{\tau}(y)$. Действительно, возьмём постоянную последовательность $\tilde{y}_j = y$, очевидно сходящуюся к y. Тогда $\tau(y) = \lim_{j\to\infty} \tilde{\tau}(\tilde{y}_j) = \lim_{j\to\infty} \tilde{\tau}(y) = \tilde{\tau}(y)$.

Доказанная теорема отвечает на первый из поставленных вопросов. Действительно, если $\tilde{Y} = \tilde{Z} = \tilde{X}$, то Y и Z – два различных полных расширения пространства $\tilde{X}$, в которых $\tilde{X}$ плотно. Тогда эти пространства изометричны.

На второй вопрос ответим так. Пусть у МП $\tilde{X}$ нет очевидных полных расширений, но мы можем найти некоторое МП $\tilde{Y}$, изометричное $\tilde{X}$, у которого такое расшиение Y есть, причём $Y = [\tilde{Y}]$. Ранее мы назвали Y пополнением МП $\tilde{Y}$, а теперь мы скорректируем это определение и объявим Y пополнением не только $\tilde{Y}$, но и изометричного ему МП $\tilde{X}$.

Окончательное определение: полное метрическое пространство Y называется пополнением (в широком смысле) метрического пространства $\tilde{X}$, если оно содержит всюду плотное множество $\tilde{Y}$, изометричное $\tilde{X}$.

Очевидно, это определение допускает существование различных пополнений одного и того же МП. Например, если $\tilde{Z}$ – другая изометрическая копия $\tilde{X}$, Z – полное МП и $Z = [\tilde{Z}]$, то Z, согласно данному определению, также является пополнением $\tilde{X}$. Однако из доказанной теоремы следует, что все такие пополнения между собой изометричны. Иными словами, *пополнение метрического пространства единственно с точностью до изометрии.*

Остаётся вопрос: обязательно ли у МП существует хотя бы одно пополнение? Теорема Хаусдорфа отвечает на этот вопрос положительно. Доказательство мы немного отложим, а сейчас рассмотрим примеры пополнений.

1. Множество $\mathbb{Q}$ со стандартной метрикой – неполное МП. Его пополнение – $\mathbb{R}$ со стандартной метрикой, т.е. E^1. Пополнение в узком смысле, хотя есть нюансы, потом мы вернёмся к этому сюжету.

2. Интервал (a, b) – неполное МП. Пополнение (в узком смысле) – отрезок $[a, b]$.

3. МП $\mathbb{R}_\Phi$ с непрерывной монотонной ограниченной функцией Φ. Образ функции – интервал (a, b). Пространство $\mathbb{R}_\Phi$ изометрично интервалу (a, b) со стандартной метрикой, поэтому отрезок $[a, b]$ является пополнением не только интервала, но и пространства $\mathbb{R}_\Phi$.

4. $C_{L_1}[a, b] = \tilde{L}_1[a, b]$ – неполное МП. Его пополнение – сюжет, достойный отдельного курса. Вкратце – основные понятия.

   Мера множества – обобщение понятия длины интервала (отрезка). Аддитивность. Счётная аддитивность. Конечные и счётные объединения и пересечения интервалов и отрезков. Борелевские множества (сигма-алгебра). Множества меры нуль. Конечные, счётные, но не только: Канторово множество – континуальное множество меры нуль. "Почти всюду"(п.в.) – всюду, за исключением множества меры нуль. Сходимость функциональной последовательности почти всюду – более слабая, чем поточечная. Лебеговские множества, мера Лебега.

   Измеримые множества и измеримые функции (аналогии из ТВ). Конструкция интеграла Лебега. Свойства. Пример: функция Дирихле.

   Функции, абсолютно интегрируемые по Лебегу: ЛП, ПМП. Расстояние. В частности, все функции, интегрируемые по Риману; функции, несобственные интегралы от которых абсолютно сходятся. Класс эквивалентности: функции, совпадающие почти всюду (отличающиеся на множестве меры нуль). Факторизуем, получаем МП $L_1[a, b]$, являющееся пополнением $\tilde{L}_1[a, b]$ (в широком смысле). Изометрическая копия – множество классов, содержащих непрерывного представителя. Плотно в $L_1[a, b]$.

5. $C_{L_2}[a, b] = \tilde{L}_2[a, b]$ – неполное МП. Его пополнение $L_2[a, b]$ – множество классов эквивалентных измеримых функций, квадратично интегрируемых по Лебегу на отрезке. Как множество $L_2[a, b] \subset L_1[a, b]$.

Теорема о пополнении (Хаусдорф). У произвольного метрического пространства существует пополнение, единственное с точностью до изоморфизма.

Единственность доказана раньше. Существование доказывается с помощью универсальной конструкции, к описанию которой сейчас приступаем.

Пусть $\tilde{X}$ – некоторое (неполное) МП. Наша задача – добавить к нему (или, точнее, к его изометрической копии) отсутствующие пределы фундаментальных последовательностей.

Рассмотрим множество $\hat{X}$, элементами которого являются ФП элементов из $\tilde{X}$: $\hat{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots)$. Частный случай – постоянные последовательности, которые теперь будем обозначать $\hat{c}(\tilde{x}) = (\tilde{x}, \tilde{x}, \dots)$ (шляпка над c – для того, чтобы подчеркнуть принадлежность пространству $\hat{X}$), а множество таких последовательностей обозначим $\hat{C}$.

Введём на $\hat{X}$ расстояние по правилу $\rho_{\hat{X}}(\hat{x}, \hat{x}') = \lim_{j\to\infty} \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_j, \tilde{x}'_j)$. Докажем, что это определение корректно, т.е. что предел существует. Для этого достаточно показать, что числовая последовательность $\{\rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_j, \tilde{x}'_j)\}$ фундаментальна. Это следует из неравенства четырёхугольника
$|\rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_k, \tilde{x}'_k) - \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_m, \tilde{x}'_m)| \le \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_k, \tilde{x}_m) + \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}'_k, \tilde{x}'_m)$
и фундаментальности последовательностей $\hat{x}$ и $\hat{x}'$ в $\tilde{X}$.

Утверждение: так введённое расстояние удовлетворяет аксиомам ПМП. Эквивалентность элементов $\hat{X}$ в смысле такой полуметрики – это эквивалентность ФП, введённая выше.

Утверждение: подмножество $\hat{C}$ – метрическое пространство, изометричное $\tilde{X}$. Элементы $\hat{X}$, эквивалентные $\hat{c}(\tilde{x})$ – последовательности, сходящиеся к $\tilde{x}$ в $\tilde{X}$.

Докажем, что $\hat{C}$ плотно в $\hat{X}$. Пусть $\hat{x} \in \hat{X}$ – ФП:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall k, m > N(\varepsilon) : \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_k, \tilde{x}_m) < \varepsilon$.
Тогда $\rho_{\hat{X}}(\hat{c}(\tilde{x}_k), \hat{x}) = \lim_{m\to\infty} \rho_{\tilde{X}}(\tilde{x}_k, \tilde{x}_m) \le \varepsilon$, если $k > N(\varepsilon)$, т.е. произвольный элемент из $\hat{X}$ может быть приближен элементом из $\hat{C}$ с любой точностью. Отсюда следует также, что $\lim_{k\to\infty} \rho_{\hat{X}}(\hat{c}(\tilde{x}_k), \hat{x}) = 0$. Каждый из этих фактов означает, что $\hat{C}$ плотно в $\hat{X}$.

Рассмотрим теперь ФП элементов из $\hat{C}$: $(\hat{c}(\tilde{x}_1), \hat{c}(\tilde{x}_2), \dots)$. Фундаментальность этой последовательности в $\hat{X}$ эквивалентна фундаментальности последовательности $\hat{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots)$ в $\tilde{X}$, т.е. её принадлежности пространству $\hat{X}$. Как было только что доказано, $\lim_{k\to\infty} \rho_{\hat{X}}(\hat{c}(\tilde{x}_k), \hat{x}) = 0$, т.е.
$\hat{c}(\tilde{x}_k) \to \hat{x}$. Таким образом, мы доказали, что произвольная фундаментальная последовательность элементов из плотного в $\hat{X}$ множества $\hat{C}$, изометричного $\tilde{X}$, сходится некоторому элементу $\hat{x} \in \hat{X}$.

Для завершения доказательства осталось перейти от ПМП $\hat{X}$ к МП X, выполнив факторизацию. Элементами X являются классы эквивалентных ФП. В роли плотного множества, изометричного $\tilde{X}$, выступает множество C классов ФП, эквивалентных постоянным последовательностям (каждый такой класс состоит из последовательностей, сходящихся к фиксированному элементу $\tilde{x} \in \tilde{X}$). Произвольная ФП элементов из этого плотного множества, как показано выше, сходится (поскольку расстояние между классами совпадает с расстоянием между их представителями в ПМП). Отсюда, в силу доказанной выше леммы, вытекает полнота пространства X, которое является пополнением пространства C, а, следовательно, и изометричноего ему пространства $\tilde{X}$. Теорема доказана.

Замечание. При доказательстве этой теоремы Хаусдорф следовал за Риманом, который использовал аналогичную процедуру при конструировании множества вещественных чисел. Риман определил вещественное число как класс эквивалентных фундаментальных последовательностей из рациональных чисел. То есть пополнение множества $\mathbb{Q}$ до $\mathbb{R}$ фактически тоже происходит не непосредственно, а путём перехода к изометрической копии. При этом Риману было сложнее, чем Хаусдорфу: когда мы вводили расстояние между ФП и доказывали корректность этого определения, мы пользовались полнотой E^1, а Риман был лишён такой возможности.