Раздел 2. Метрическое пространство

Лекция 3 Множества и последовательности в метрических пространствах.

Открытый шар $S_r(a) = \{x \in X : \rho(x,a) < r\}$ – r-окрестность точки a. Радиус r. Множество является окрестностью a, если содержит открытый шар с центром в a. Произвольное расширение окрестности – окрестность. Система окрестностей – топология. Топологически эквивалентные метрические пространства.
Выколотая окрестность.

В ПМП окрестности эквивалентных элементов совпадают, и любая окрестность точки целиком содержит её класс эквивалентности.

Замкнутый шар $\bar{S}_r(a) = \{x \in X : \rho(x,a) \leq r\}$

Сфера $\sigma_r(a) = \{x \in X : \rho(x,a) = r\}$

Ограниченное множество $A \subset S_R(a)$, ограниченное МП (ПМП)$X = S_R(a)$. Связь радиуса и диаметра.

Полная ограниченность. Вполне ограниченное множество:
$\forall\varepsilon\exists\{a_1,\ldots,a_N\} : A \subset \bigcup_{j=1}^{N} S_\varepsilon(a_j)$
Вполне ограниченное множество ограничено.
Полная ограниченность МП (ПМП).

$A \in X$: внутренние точки (входят в A с окрестностью), внешние (входят в дополнение с окрестностью), граничные точки (произвольная окрестность имеет непустое пересечение с A и с дополнением). Множество – окрестность своих внутренних точек.

Открытое множество: все точеи внутренние, входят с окрестностью. Открытое множество – окрестность всех своих точек.
Открытый шар – открытое множество (доказать!)
Множество является окрестностью точки a, если является расширением открытого множества, содержащего a – эквивалентное определение окрестности (доказать!) Таким образом, совокупность открытых множеств определяет топологию.
Примеры открытых множеств. X и $\emptyset$ – всегда открыты. Дискретная топология: все множества открыты.

Объединение любой совокупности открытых множеств открыто (доказать!)

Пересечение конечного набора открытых множеств открыто (доказать!)

Пересечение бесконечного (например, счётного) набора открытых множеств может не быть открытым (привести пример)

Изолированные точки множества: существует выколотая окрестность, не пересекающаяся с множеством. Могут быть внутренними или граничными. В дискретной топологии все точки изолированные. В конечном подмножестве МП все точки изолированные.

Точки прикосновения множества: любая окрестность имеет непустое пересечение с множеством.

Предельные точки множеста: любая выколотая окрестность имеет непустое пересечение с множеством. (Доказать: для МП это пересечение – бесконечное множество) Могут принадлежать или не принадлежать множеству. Могут быть внутренними или граничными. A' – множество предельных точек множества A. Конечное подмножество МП не имеет предельных точек. В дискретной топологии $A' = \emptyset$ для любого A.

Точка прикосновения – принадлежит множеству или является его предельной точкой (или и то, и другое). Либо внутренняя, либо граничная.

Как внутренняя, так и граничная точка множества может быть либо изолированной, либо предельной его точкой. Внешняя не является ни тем, ни другим.

$A \subset B \Rightarrow A' \subset B'$

Замкнутое множество: содержит все свои предельные точки, $A \supset A'$. Замкнутый шар – замкнутое множество (доказать!) Сфера – замкнутое множество (доказать!) Примеры замкнутых множеств. X и $\emptyset$ – всегда замкнуты (и открыты). Все конечные множества замкнуты. Все множества, не имеющие предельных точек, замкнуты. Дискретная топология: все множества замкнуты (и открыты).

Примеры множеств, одновременно открытых и замкнутых. Примеры множеств, не являющихся ни замкнутыми, ни открытыми.

Пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто (доказать!)

Объединение конечного набора замкнутых множеств замкнуто (доказать!)

Объединение бесконечного (например, счётного) набора замкнутых множеств может не быть замкнутым (привести пример)

Дополнение замкнутого множества открыто (доказать)

Дополнение открытого множества замкнуто (доказать)

Таким образом, совокупность замкнутых множеств определяет топологию.

A' замкнуто для любого A (доказать)

Замыкание множества: $[A] = A \cup A'$ – множество точек прикосновения.

Множество замкнуто $\Leftrightarrow$ совпадает со своим замыканием.

$A \subset B \Rightarrow [A] \subset [B]$

$[A]' = A'$ (доказать)

$[[A]] = [A]$ (доказать), то есть $[A]$ замкнуто для любого A

Расстояние от точки до множества:

$\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$

$\rho(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in [A]$ (доказать)

То есть $[A] = \{x : \rho(x, A) = 0\}$

Утверждение: $\rho(x, A) \leq \rho(x, y) + \rho(y, A)$

Утверждение: $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y)$

Расстояние между множествами:

$\rho(A, B) = \frac{1}{2}\left(\sup_{x \in B} \rho(x, A) + \sup_{y \in A} \rho(y, B)\right)$

Утверждение: эта формула задаёт полуметрику на $\mathcal{P}(X)$ (класс эквивалентности – множества с совпадающими замыканиями) и метрику на множестве замкнутых подмножеств.

ε-окрестность множества: $A_\varepsilon = \{x : \rho(x, A) < \varepsilon\}$

$\bar{A}_\varepsilon = \{x : \rho(x, A) \le \varepsilon\}$

Утверждение: A_ε открыто, $\bar{A}_\varepsilon$ замкнуто.

Утверждение: $A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} S_\varepsilon(x)$

Утверждение: $[A] = \bigcap_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$

Множество A называется ε-сетью для множества B, если
$\forall x \in B \, \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon$
Элементы B аппроксимируются элементами A с погрешностью $< \varepsilon$.

Утверждение: A есть ε-сеть для $B \Leftrightarrow B \subset A_\varepsilon$

Утверждение: множество A вполне ограничено $\Leftrightarrow$ для любого ε найдётся конечная ε-сеть для A.

Если A – ε-сеть для B, а B – δ-сеть для C, то A – $\varepsilon + \delta$-сеть для C.

Если множество B содержит ε-дискретное подмножество B_1, а A – $\varepsilon/2$-сеть для B, то $|A| \ge |B_1|$

Множество A плотно в B, если
$\forall x \in B \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists y \in A : \rho(x, y) < \varepsilon$
Элементы B аппроксимируются элементами A с любой точностью.

Множество A плотно в $B \Leftrightarrow$ является ε-сетью для $\forall \varepsilon$.

Множество A плотно в $B \Leftrightarrow B \subset [A]$. В частности, произвольное множество плотно в своём замыкании.

Замечание: не требуем, чтобы $A \subset B$

Транзитивность: A плотно в B и B плотно в $C \Rightarrow A$ плотно в B.

Если множество B содержит ε-дискретное подмножество B_1, а A плотно в B, то $|A| \ge |B_1|$

Множество A всюду плотно, если оно плотно в X: $[A] = X$, любой элемент пространства с произвольной точностью аппроксимируется элементами из A.

Если (X, ρ_1) и (X, ρ_2) – МП (ПМП) с одним и тем же носителем, и
$\exists c > 0 \forall x, y \in X : \rho_1(x, y) \le c\rho_2(x, y)$,
то множество, плотное в (X, ρ_2), плотно и в (X, ρ_1).

Пространство X сепарабельно, если содержит всюду плотное счётное (или конечное) множество (ВПСМ).

Пространство с дискретной метрикой сепарабельно, если его носитель конечен или счётен.

Утверждение: вполне ограниченное МП (или множество) сепарабельно. (доказать!)

Пространство E^1 сепарабельно (ВПСМ – $\mathbb{Q}$).

Пространства E^n, $\mathbb{R}^n_{\max}$, $\mathbb{R}^n_p$ сепарабельны (ВПСМ – $\mathbb{Q}^n$).

Пространства c_0, l_1, l_2 сепарабельны: множество конечных последовательностей (продолженных нулями) плотно в этих пространствах, множество конечных рациональных последовательностей плотно в множестве конечных последовательностей.

Пространство c сепарабельно: множество стабилизирующихся последовательностей (постоянных начиная с некоторого номера) плотно в c, а в нём плотно множество стабилизирующихся рациональных последовательностей.

Пространство l_∞ не сепарабельно: содержит 1-дискретное континуальное подмножество последовательностей из нулей и единиц.

Пространства $C[a,b]$, $\tilde{L}_1[a,b]$, $\tilde{L}_2[a,b]$ сепарабельны. Теорема Вейерштрасса: множество многочленов плотно в $C[a,b]$, а в нём плотно множество многочленов с рациональными коэффициентами. Плотность в $\tilde{L}_1[a,b]$ и $\tilde{L}_2[a,b]$ следует из подчинённости норм.

Прстранства $C^m[a,b]$ сепарабельны: приближаем многочленом старшую производную, затем последовательно интегрируем.

Пространство функций, отличных от нуля в конечном числе точек, не сепарабельно: континуальное 1-дискретное подмножество – функции, равные 1 в одной точке.

Пространство почти периодических функций не сепарабельно: континуальное 1-дискретное подмножество – функции вида $\cos \omega t$ (или синусы)

Последовательность элементов метрического пространства – элемент из $X^{\mathbb{N}}$.

Подпоследовательность.

Ограниченность, неограниченность.

Постоянные последовательности $c(x) = (x, x, \ldots)$, $x \in X$. Стабилизирующиеся последовательности.

Эквивалентные последовательности: $x' \sim x'' \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \rho(x'_k, x''_k) = 0$ (доказать, что эквивалентность).

Замечание: на топологические пространства это понятие не обобщается.

Утверждение: эквивалентные последовательности либо одновременно ограничены, либо одновременно неограничены.

Утверждение: если A плотно в B ($[A] \supset B$), и $x' \in B^{\mathbb{N}}$ – последовательность из B, то найдётся эквивалентная ей $x'' \in A^{\mathbb{N}}$ последовательность из A.

В частности, если A всюду плотно в X ($[A] = X$), то для произвольной последовательности элементов из X найдётся эквивалентная ей последовательность элементов из A.

Фундаментальная последовательность (последовательность Коши):

$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall k, m > N : \rho(x_k, x_m) < \varepsilon$

Замечание: последнее строгое неравенство можно заменить нестрогим.

Замечание: на топологические пространства это понятие не обобщается.

Последовательность фундаментальна $\Rightarrow$ и любая подпоследовательность тоже.

Любая подпоследовательность ФП ей эквивалентна.

Фундаментальная последовательность ограничена.

Добавление, исключение, изменение конечного числа элементов не влияет на фундаментальность, и в результате применения таких операций к ФП мы получаем ФП, эквивалентную исходной.

Утверждение: эквивалентные последовательности одновременно являются или не являются фундаментальными.
Доказательство с помощью $\varepsilon/3$-приёма (в дальнейшем будет регулярно использоваться).
Пусть x' фундаментальна, $x'' \sim x'$. Докажем, что x'' также фундаментальна.
По неравенству многоугольника
$\rho(x''_k, x''_m) \leq \rho(x''_k, x'_k) + \rho(x'_k, x'_m) + \rho(x'_m, x''_m)$.
В силу эквивалентности последовательностей найдётся
$N_1 : k, m > N_1 \Rightarrow \rho(x''_k, x'_k) < \varepsilon/3, \rho(x''_m, x'_m) < \varepsilon/3$.
В силу фундаментальности x' последовательностей найдётся
$N_2 : k, m > N_2 \Rightarrow \rho(x'_k, x'_m) < \varepsilon/3$.
Тогда при $k, m > \max(N_1, N_2)$ выполнено неравенство $\rho(x''_k, x''_m) < \varepsilon$,
что и означает фундаментальность x''.
(То есть: при больших индексах элементы x'' близки к соответствующим элементам x', а элементы x' близки между собой $\Rightarrow$ элементы x'' также близки между собой.)

Сходящиеся и расходящиеся последовательности.
$x_k \to_{k\to\infty} x^* \Leftrightarrow \rho(x_k, x^*) \to_{k\to\infty} 0 \Leftrightarrow$
$\lim_{k\to\infty} x_k = x^* \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x^*) = 0 \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall k > N : \rho(x_k, x^*) < \varepsilon$

Топологическая формулировка: для любой окрестности точки x^* найдётся номер N, начиная с которого все элементы последовательности принадлежат этой окрестности.

Сходящаяся последовательность ограничена.

Последовательность сходится $\Rightarrow$ и любая подпоследовательность тоже (к тому же пределу).

Добавление, исключение, изменение конечного числа элементов не влияет на сходимость, и в результате применения таких операций к сходящейся последовательности мы получаем последовательность, сходящуюся к тому же пределу.

Единственность предела для МП, неединственность для ПМП.

Вне любой окрестности предела последовательности может лежать лишь конечное число её элементов.

Последовательность сходится $\Rightarrow$ она фундаментальна (по неравенству треугольника). Обратно не всегда, зависит от МП.

Утверждение: эквивалентные последовательности либо одновременно сходятся, либо одновременно расходятся. Пределы сходящихся эквивалентных последовательностей совпадают. Обратно, если две последовательности имеют одинаковые пределы, то они эквивалентны. В частности, если $x_k \to_{k\to\infty} x^*$, то $x \sim c(x^*)$, где $x = (x_1, x_2, \dots)$. Таким образом, сходящаяся последовательность – это последовательность, эквивалентная некоторой постоянной последовательности.

Предельные точки последовательности (частичные пределы) – пределы подпоследовательностей. В любой окрестности предельной точки содержится бесконечное число элементов последовательности (возможно, совпадающих). Точнее: в любой окрестности содержатся элементы x_k для бесконечного множества значений k.

Утверждение: $x_k \in A \wedge x_k \to x^* \Rightarrow x^* \in [A]$
Обратно, если $x^* \in [A]$, то найдётся последовательность элементов из A, сходящаяся к x^*. Если точка изолированная, то последовательность постоянная или стабилизирующаяся.

Утверждение: множество A замкнуто $\Leftrightarrow$ предел любой сходящейся последовательности из A лежит в A. Это можно принять за альтернативное определение замкнутости множества.

Если (X, ρ_1) и (X, ρ_2) – МП (ПМП) с одним и тем же носителем, и
$\exists c > 0 \forall x, y \in X : \rho_1(x, y) \leq c\rho_2(x, y)$,
то последовательность, сходящаяся в (X, ρ_2), сходится и в (X, ρ_1) (к тому же пределу); последовательность, фундаментальная в (X, ρ_2), фундаментальна и в (X, ρ_1). Говорят, что сходимость в метрике ρ_2 более сильная, чем в метрике ρ_1. Если оценка двусторонняя, то метрики топологически эквивалентны.

Пример. Сходимость в $\mathbb{R}^n_{\max}$, в $\mathbb{R}^n_1$, в $\mathbb{R}^n_2 = E^n$ эквивалентны покомпонентной (доказать).

Пример. Типы сходимости последовательностей непрерывных функций.
Сходимость в $C[a, b]$ – равномерная сходимость.
Сходимость в $\tilde{L}_1[a, b]$, $\tilde{L}_2[a, b]$ – сходиость в среднем (интегральная).
Поточечная сходимость (не связана с метрикой).
Сходимость в $C[a, b] \Rightarrow$ сходимость в $\tilde{L}_2[a, b] \Rightarrow$ сходимость в $\tilde{L}_1[a, b]$
Сходимость в $C[a, b] \Rightarrow$ поточечная.
Примеры.

Непрерывность расстояния (по Гейне-Борелю) по паре аргументов: если
$x_k \to x \wedge y_k \to y \Rightarrow \rho(x_k, y_k) \to \rho(x, y)$
(из неравенства четырёхугольника).

В частности, $x_k \to x \Rightarrow \forall y \in X : \rho(x_k, y) \to \rho(x, y)$
(как следствие предыдущего, либо из 2-го неравенства треугольника)

Отсюда $x_k \to x \Rightarrow \forall A \subset X : \rho(x_k, A) \to \rho(x, A)$

Простые доказательства замкнутости $\bar{S}_r(a)$, $\sigma_r(a)$, $\bar{A}_\varepsilon$.