Раздел 2. Метрическое пространство

Лекция 2 Полуметрические и метрические пространства.

Полуметрическое (предметрическое, квазиметрическое, псевдометрическое) пространство – пара (X, ρ), где X – множество, а ρ – отображение (полноопределённое) $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющее трём аксиомам:
1. $\forall x \in X : \rho(x, x) = 0$
2. $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$
3. $\forall x, y, z \in X : \rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Терминология: X – носитель полуметрического пространства (ПМП); ρ – полуметрика; $x, y, \dots \in X$ – точки пространства (хотя характер элементов может быть каким угодно), $\rho(x, y)$ – расстояние между x и y. Аксиома 1: расстояние от точки до самой себя равно нулю. В полуметрическом пространстве допускается, что нулю может быть равно расстояние и между различными элементами множества X (условно говоря, несколько объектов расположено в одном месте). Если исключить такую ситуацию и добавить условие *невырожденности*
1'. $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$,
полуметрическое пространство превращается в метрическое, а полуметрика в метрику. Для метрического пространства (МП) аксиомы 1 и 1' можно объединить:
1". $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
Аксиома 2 – аксиома симметрии, аксиома 3 – неравенство треугольника (длина стороны треугольника не превосходит суммы длин других сторон).

Утверждение: $\rho(x, y) \geq 0$ (доказать!) Таким образом, $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$

Второе неравенство треугольника, неравенство четырёхугольника, неравенство многоугольника.

Утверждение: в ПМП $R = \{x, y : \rho(x, y) = 0\}$ – отношение эквивалентности (доказать!)

Утверждение: $x_1 \sim x_2 \wedge y_1 \sim y_2 \Rightarrow \rho(x_1, y_1) = \rho(x_2, y_2)$ (доказать!)
Расстояние между элементами, входящими в различные классы эквивалентности, зависит лишь от классов и не зависит от выбора представителей.

Утверждение: если на $\tilde{X} = X/R$ определить расстояние $\tilde{\rho}(cl(x), cl(y)) = \rho(x, y)$, это определение корректно, и $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ – МП (доказать!).

Различные МП (ПМП) с одним носителем.
Подпространства (П)МП. Подмножества.
Ограниченность (неограниченность) (П)МП и подмножеств. Диаметр.
Примеры (начало).

1. Дискретная метрика. X – произвольное множество, $\rho(x, y) = 1$, $x \neq y$
   ε-дискретное подмножество МП: $\forall x \neq y \in A : \rho(x, y) \geq \varepsilon$

2. Почтовая метрика. X – произвольное множество, $p \in X$ – "почтамт",

$\rho(x,p) = f(x) \geq 0$ – неотрицательная функция, равная нулю только при $x = p$, $\rho(x,y) = f(x) + f(y)$

3. Метрика классической геометрии.

4. Расстояние между вершинами графа – наименьшая сумма длин рёбер.

5. Наименьшее время, необходимое, чтобы попасть из точки в точку.

6. Риманово пространство: $dl = \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j}$ (g – метрический тензор), длина кривой $l(\gamma) = \int_\gamma dl$, расстояние как $\inf_\gamma l(\gamma)$ по всем возможным кривым γ, соединяющим заданные точки. Эйконал.

7. Расстояния – экспертные оценки сходства-несходства объектов любой природы (например, в психологии, биологии, геологии, ...). Неравенство треугольника проверяется отдельно.

8. $X = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |x - y|$. Будем обозначать E^1. Такую метрику на вещественной оси будем называеть стандартной.

9. $X = \mathbb{C}$, $\rho(x,y) = |x - y|$.

10. Пространство $\mathbb{R}_\Phi$: $X = \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|$, $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – произвольная функция. Метрика, если Φ инъективная, полуметрика в противном случае.

11. Пространство X_Φ: X – множество, $\rho(x,y) = |\Phi(x) - \Phi(y)|$, $\Phi : X \to \mathbb{R}$ – произвольная функция. Метрика, если Φ инъективная, полуметрика в противном случае.

12. X – множество, (Y, ρ_Y) – некоторое МП, $F : X \to Y$. Зададим расстояние на X формулой $\rho_X(x,y) = \rho_Y(F(x), F(y))$. (X, ρ_X) – МП, если F инъективная, ПМП в противном случае.

    Многие (не все) МП являются линейными нормированными пространствами (ЛНП). Более подробно дальше, а сейчас первоначальное знакомство.

    Линейное пространство (ЛП) над полем $\mathbb{K}$

    Сложение, умножение, 8 аксиом (1 курс), свойства. Латинскими буквами будем обозначать векторы (элементы ЛП), греческими – числа (элементы поля). Ограничимся случаями ЛП над полями вещественных (основное внимание) и комплексных чисел.

    Норма и полунорма (преднорма, ...). Обозначение: $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ (X – ЛП).

    Аксиомы полунормы:
    1. Абсолютная (положительная) однородность:
    $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

2. Неравенство треугольника:
$\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

Утверждение: $\|O\|=0$, где O – нулевой элемент пространства (доказать!)

Утверждение: функция $\rho(x,y)=\|x-y\|$ удовлетворяет аксиомам полуметрического пространства (доказать!) Полуметрика, порождённая полунормой.

Норма: дополнительно аксиома невырожденности:
3. $\|x\|=0 \Rightarrow x=O$
(можно стрелочку в обе стороны: $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=O$)

В этом случае $\rho(x,y)=\|x-y\|$ – метрика, порождаемая нормой (доказать выполнение аксиом МП!). И обратно, $\|x\|=\rho(x,O)$ (Разумеется, это не для всякой метрики! Не любая метрика порождается нормой)

Поэтому, чтобы не делать дважды одну и ту же работу, будем проверять аксиомы нормированного пространства, а выполнение аксиом метрического получим как следствие.

Примеры ЛНП (которые, разумеется, являются и метрическими, так что сохраняем нумерацию).
При проверке абсолютной однородности проблем не возникает, её опускаю. Проверка невырожденности (когда она есть) также обычно тривиальна (хотя не всегда). Иногда бывают сложности с проверкой неравенства треугольника.

13. Снова рассмотрим E^1: $\|x\|=|x|$, неравенство треугольника: $|x+y| \leq |x|+|y|$ (будет многократно использовано дальше)

14. $X=\mathbb{R}^2$, $\|x\|=|x_1|$ – полунорма, $\rho(x,y)=|x_1-y_1|$ – полуметрика. Элементы – двумерные вектора, полунорма – модуль проекции на ось абсцисс, расстояние между векторами определяется как расстояние между проекциями. Класс эквивалентности – множество векторов с одинаковыми проекциями на ось абсцисс (вертикальная прямая), расстояние между классами после факторизации – расстояние между этими прямыми.

15. $\mathbb{R}^n_1$: $X=\mathbb{R}^n$, $\|x\|_1=\sum_{j=1}^n |x_j|$ (проверить аксиомы)
Расстояние: $\rho_1(x,y)=\sum_{j=1}^n |x_j-y_j|$. Манхэттенская метрика.
Смысл индекса 1 при норме и растоянии, а также других индексов, выяснится дальше.

16. Бесконечномерный аналог: l_1. $X=\{x\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^\infty |x_j|<\infty\}$ (множество абсолютно суммируемых бесконечных числовых последовательностей). Проверить, что ЛП.
$\|x\|_1=\sum_{j=1}^\infty |x_j|$ (проверить аксиомы)
Расстояние: $\rho_1(x,y)=\sum_{j=1}^\infty |x_j-y_j|$.

17. Функциональный аналог. X – множество функций на $[a, b]$, интегрируемых по Риману. ЛП.
    $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt$. Полунорма (проверить)
    $\rho_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$ – полуметрика. Аксиома невырожденности не выполняется, поскольку существуют интегрируемые по Риману функции, на равные тождественно нулю, для которых интеграл от модуля равен нулю (например, отличные от нуля в конечном числе точек). Такие функции образуют класс эквивалентности тождественного нуля. Класс эквивалентности произвольного элемента x – множество функций, отличающихся от x на элемент из нулевого класса.

18. $C_{L_1}[a, b] = \tilde{L}_1[a, b]$ – подпространство предыдущего. X – множество непрерывных на $[a, b]$ функций.
    $\|x\|_1 = \int_a^b |x(t)|\, dt$ – норма.
    $\rho_1(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\, dt$ – метрика.
    Теорема: $x \geq 0$ непрерывна и не равна нулю тождественно $\Rightarrow \int_a^b x(t)\, dt > 0$
    Вспомнить 1 курс, доказать, применить.

19. $\mathbb{R}^n_{\max}$. $X = \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$
    Неравенство треугольника. Выписываем для каждого j:
    $\forall j : |x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j|$
    Дальше двухходовка, которая будет возникать многократно.
    1-й шаг: оцениваем правую часть
    $\forall j : |x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| \leq \|x\| + \|y\|$
    2-й шаг: берём максимум левой части по j
    $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
    Расстояние: $\rho_\infty(x, y) = \max_j |x_j - y_j|$ Равномерная метрика на $\mathbb{R}^n$

20. Бесконечномерный аналог: l_∞. Носитель: ЛП множество бесконечных ограниченных последовательностей.
    Норма: $\|x\|_\infty = \sup_j |x_j|$ (максимум может не достигаться, поэтому берём супремум). Доказательство неравенства треугольника такое же.
    Расстояние: $\rho_\infty(x, y) = \sup_j |x_j - y_j|$

21. Пространство c – подпространство l_∞. Носитель – ЛП последовательностей, имеющих конечный предел. Норма та же.

22. Пространство c_0 – подпространство c. Носитель – ЛП бесконечно малых последовательностей. Норма та же (вместо sup можно взять max).

23. Функциональный аналог – пространство $C[a, b]$, ЛП непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой
    $\|x\|_C = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|$
    (Почему $x(t)$ ограничена? Почему максимум достигается? Вспомнить доказательства)
    Доказательство неравенства треугольника: при каждом t записать

числовое неравенство треугольника, дальше двуххододовка.
Расстояние: $\rho_C(x, y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|$

24. Расширение предыдущего пространства: ЛП ограниченных функций на отрезке, вместо максимума всюду супремум, в остальном всё так же.

25. $C^1[a, b]$. Носитель – ЛП непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, $\|x\|_{C^1} = \max\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C\}$, где $\dot{x}$ – производная. Докажем неравенство треугольника. Записываем неравенства треугольника для норм в $C[a, b]$ функции и производной:
$\|x + y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$
$\|\dot{x} + \dot{y}\|_C \leq \|\dot{x}\|_C + \|\dot{y}\|_C$,
дальше снова двуххододовка. Воспроизведём рассуждение ещё раз: 1) оцениваем правые части
$\|x + y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C \leq \|x\|_{C^1} + \|y\|_{C^1}$
$\|\dot{x} + \dot{y}\|_C \leq \|\dot{x}\|_C + \|\dot{y}\|_C \leq \|x\|_{C^1} + \|y\|_{C^1}$,
дальше 2) поскольку оба выражения, стоящие в левых частях, не превосходят общей константы $\|x\|_{C^1} + \|y\|_{C^1}$, то и максимум из них (то есть $\|x + y\|_{C^1}$) также её не превосходит.

26. $C^l[a, b]$. Носитель: ЛП l раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, $\|x\|_{C^l} = \max\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C, \|\ddot{x}\|_C, \ldots, \|x^{(l)}\|_C\}$ Доказательство неравенства треугольника – аналогично предыдущему случаю.

27. $\mathbb{R}^n_2 = E^n$ (E – в честь Евклида). Пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$

    Как обычно, некоторую сложность представляет только проверка справедливости неравенства треугольника. Докажем сначала вспомогательное, но очень важное *неравенство Коши-Буняковского-Шварца* (КБШ):

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |y_j|^2}$$

    Один из способов доказательства: рассмотрение суммы
    $\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^n (x_j + \lambda y_j)^2 \geq 0$
    Функция $\Phi(\lambda)$ неотрицательна при любом λ, поскольку неотрицательны все слагаемые. С другой стороны,
    $\Phi(\lambda) = \sum_{j=1}^n (x_j + \lambda y_j)^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 + 2\lambda \sum_{j=1}^n x_j y_j + \lambda^2 \sum_{j=1}^n y_j^2$,
    т.е. $\Phi(\lambda)$ – квадратный трёхчлен относительно λ (при ненулевом векторе y) с положительным коэффициентом при λ^2. Дискриминант этого трёхчлена должен быть неположительным, в противном случае при некоторых λ (лежащих между корнями) трёхчлен принимал бы отрицательные значения. Отсюда
    $D/4 = \left(\sum_{j=1}^n x_j y_j\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right) \leq 0$,

т.е.
$\left(\sum_{j=1}^n x_jy_j\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n y_j^2\right)$,
откуда и следует неравенство КБШ.
Замечание 1. Неравенство КБШ превращается в равенство, если дискриминант равен 0, т.е. когда $\Phi(\lambda)$ при некотором λ обращается в 0, т.е. когда все слагаемые в сумме $\Phi(\lambda)$ равны нулю, т.е. $\forall j : (x_j + \lambda y_j) = 0$, т.е. $\forall j : x_j = -\lambda y_j$, т.е. $x = -\lambda y$, т.е. векторы x и y коллинеарны.
Замечание 2. Можно в доказательстве и в самом неравенстве КБШ заменить x_j и y_j модулями. Тогда получаем:
$\sum_{j=1}^n x_jy_j \le \left|\sum_{j=1}^n x_jy_j\right| \le \sum_{j=1}^n |x_j|\cdot|y_j| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^n |y_j|^2}$
Замечание 3. Доказательство приведено для случая вещественных векторов. Несколько модифицировав его, можно доказать и комплексный аналог неравенства, который обычно записывают в виде
$\left|\sum_{j=1}^n x_j\bar{y}_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^n |y_j|^2}$
(верхняя чёрточка – комплексное сопряжение)

Теперь переходим к доказательству неравенства треугольника. Рассмотрим $\Phi(1)$ и применим неравенство КБШ:
$\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 + 2\sum_{j=1}^n x_jy_j + \sum_{j=1}^n y_j^2 \le$
$\le \sum_{j=1}^n x_j^2 + 2\sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^n |y_j|^2} + \sum_{j=1}^n y_j^2 =$
$= \left(\sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n |y_j|^2}\right)^2$
Извлекая квадратный корень, получаем
$\sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j + y_j)^2} \le \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} + \sqrt{\sum_{j=1}^n |y_j|^2}$,
т.е. $\|x + y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2$ – неравенство треугольника.
Расстояние в E^n: $\rho_2(x, y) = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2}$

28. Бесконечномерный аналог: l_2. $X = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^\infty |x_j|^2 < \infty\}$ (множество квадратично суммируемых бесконечных числовых последовательностей).
Сначала нужно убедиться, что такие последовательности образуют ЛП, т.е. что произвольная линейная комбинация таких последовательностей также квадратично суммируема. Докажем, что сумма последовательностей из l_2 принадлежит l_2 (умножение на число вопросов не вызывает), т.е. если сходятся ряды $\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2$ и $\sum_{j=1}^\infty |y_j|^2$, то ряд $\sum_{j=1}^\infty |x_j + y_j|^2$ также сходится.
Для этого сперва докажем сходимость ряда $\sum_{j=1}^\infty x_jy_j$. Мы знаем, что в силу неравенства КБШ
$\forall n : \sum_{j=1}^n |x_jy_j| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^n |y_j|^2}$
Оценим правую часть, заменив конечные суммы суммами рядов:
$\forall n : \sum_{j=1}^n |x_jy_j| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^n |y_j|^2} \le$
$\le \sqrt{\sum_{j=1}^\infty |x_j|^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^\infty |y_j|^2}$,

что означает ограниченность множества частичных сумм ряда с неотрицательными членами $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j|$, откуда вытекает его сходимость, а это значит, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$ также сходится (абсолютно). Поэтому сходится и ряд
$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (|x_j|^2 + 2x_j y_j + |y_j|^2) =$
$= \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 + 2\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j + \sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2,$
то есть мы видим, что l_2 – действительно линейное пространство.

Устремив в неравенстве КБШ n к бесконечности, перейдём к пределу (это можно, поскольку неравенство нестрогое, а пределы существуют) и получим неравенство КБШ для квадратично суммируемых последовательностей:
$\left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2}$
или, в развёрнутом варианте,
$\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \le \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j\right| \le \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \cdot |y_j| \le$
$\le \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2}$
Отсюда немедленно следует неравенство треугольника (ровно так же, как для E^n).

Расстояние: $\rho_2(x,y) = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^2}$.

29. Функциональный аналог: $C_{L_2}[a,b] = \tilde{L}_2[a,b]$ – ЛП непрерывных на $[a,b]$ функций с нормой $\|x\|_2 = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\,dt}$. Поскольку функции непрерывные, выполнена аксиома невырожденности, нужно доказать неравенство треугольника.

    Так же, как и раньше, доказываем неравенство КБШ для функций
    $\left|\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\,dt} \cdot \sqrt{\int_a^b |y(t)|^2\,dt},$
    вытекающего из неотрицательности при всех значениях λ функции
    $\Phi(\lambda) = \int_a^b (x(t) + \lambda y(t))^2\,dt =$
    $= \int_a^b x^2(t)\,dt + 2\lambda \int_a^b x(t)y(t)\,dt + \lambda^2 \int_a^b y^2(t)\,dt,$
    и следующей из неё неположительности дискриминанта
    $D/4 = \left(\int_a^b x(t)y(t)\,dt\right)^2 - \left(\int_a^b |x(t)|^2\,dt\right)\left(\int_a^b |y(t)|^2\,dt\right)$
    Доказательство неравенства треугольника повторяет соответствующее доказательство для E^n.

    Расстояние: $\rho_2(x,y) = \sqrt{\int_a^b |x(t) - y(t)|^2\,dt}$ Такая метрика называется среднеквадратичной.

30. Функциональные пространства с областью определения, отличной от отрезка

31. Весовые пространства

32. Пространства $\tilde{W}_1^l$ и $\tilde{W}_2^l$

33. Пространства вектор-функций

34. Метрическое (не нормированное, не векторное) пространство кривых (на плоскости, в пространстве). Для каждой кривой выбираем параметризацию с помощью вектор-функции на отрезке, находим расстояние между этими функциями. Расстояние зависит от параметризации. Берём inf по всем параметризациям. (Доказать выполнение аксиом МП)

    Для линейных нормированных пространств есть и другие способы метризации, помимо формулы $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

35. Метрика французской железной дороги. В XIX веке все железные дороги во Франции шли через Париж. $P \in X$ – выделенный элемент пространства (Париж), тогда $\rho(x, y) = \|x - y\|$, если вектора $x - P$ и $y - P$ коллинеарны (x и y находятся на одной и той же железнодорожной ветке), в противном случае $\rho(x, y) = \|x - P\| + \|y - P\|$ (едем через Париж). Частный случай $P = O$ – метрика парижского метро.

Далее будут рассмотрены и другие примеры метрических и нормированных пространств.