Раздел 4. Отображения метрических пространств

Лекция 7 Принцип сжимающих отображений.

Оператор $F : X \to X$.
Операторное уравнение
$$F(x) = x$$
Решение этого уравнения – неподвижная точка отображения F.

(X, ρ) – МП. Можем использовать метрические свойства оператора F.

Отображение $F : X \to X$ называется сжимающим (сжатием), если $\exists q \in [0, 1)\, \forall x', x'' \in X : \rho(F(x'), F(x'')) \leq q \cdot \rho(x', x'')$

Замечание. Условие более сильное, нежели просто $\rho(F(x'), F(x'')) < \rho(x', x'')$. Расстояние между образами точек не просто меньше, чем между прообразами, а квалифицированно меньше, в гарантированное число раз. При этом число q не должно зависеть от x', x'', т.е. его можно выбрать единым для всего пространства.

Сжимающее отображение – равномерно непрерывное на всём пространстве, $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/q$.

Лемма. Если отображение F сжимающее, то оно имеет не более одной неподвижной точки.

Доказательство. Пусть $F(x') = x'$ и $F(x'') = x''$. Тогда
$\rho(x', x'') = \rho(F(x'), F(x'')) \leq q \cdot \rho(x', x'')$.
Отсюда $(1 - q) \cdot \rho(x', x'') \leq 0$. Поскольку $1 - q > 0$, получаем $\rho(x', x'') \leq 0$, откуда $x' = x''$.

Эта лемма справедлива для произвольного МП. Дальше мы сосредоточим наше внимание на полных МП.

Теорема (принцип сжимающих отображений).
Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство, а отображение $F : X \to X$ – сжатие. Тогда оно имеет единственную неподвижную точку.

Единственность мы только что доказали в более общей ситуации, осталось доказать существование.

Выберем произвольный элемент $x_0 \in X$ и образуем последовательность $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ по правилу $x_j = F(x_{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots$ (т.е. $x_1 = F(x_0)$, $x_2 = F(x_1)$, $\ldots$) Мы хотим доказать, что эта последовательность (будем её называть итерационной) сходится, и что её предел является неподвижной точкой отображения F.

Начнём с конца: докажем, что если итерационная последовательность сходится, то предел – неподвижная точка. Пусть $x_j \to x_* \in X$. Перейдём в равенстве $x_j = F(x_{j-1})$ к пределу при $j \to \infty$ и получим $x_* = F(x_*)$, что и требовалось.

Важный момент: здесь мы не пользовались тем, что F – сжатие. Единственное, что нам требовалось – это возможность перейти к пределу под знаком оператора, а для этого нужна только непрерывность. Поэтому делаем вывод: если итерационная последовательность сходится для некоторого непрерывного (но не обязательно сжимающего) оператора F, то её предел – неподвижная точка этого оператора.

Возвращаемся к исследованию итерационной последовательности для сжимающего оператора в полном пространстве. Для того, чтобы доказать сходимость последовательности в полном МП, достаточно установить её фундаментальность. Заметим, что
$\rho(x_j, x_{j+1}) = \rho(F(x_{j-1}), F(x_j)) \le q \cdot \rho(x_{j-1}, x_j)$
Отсюда по индукции доказываем, что
$\rho(x_j, x_{j+1}) \le q^j \cdot \rho(x_0, x_1)$, где $x_1 = F(x_0)$. Тогда
$\rho(x_m, x_{m+p}) \le \sum_{j=m}^{p-1} \rho(x_j, x_{j+1}) \le \sum_{j=m}^{p-1} q^j \rho(x_0, x_1) =$
$= q^m \frac{1-q^p}{1-q} \rho(x_0, x_1) < \frac{q^m}{1-q} \rho(x_0, x_1)$,
откуда и следует фундаментальность итерационной последовательности. Теорема доказана.

Доказанная теорема о неподвижной точке не только гарантирует нам существование и единственность решения операторного уравнения, но и даёт нам способ его приближённого решения: построение итерационной последовательности. Этот метод известен как метод простой итерации. При его реализации полезно, естественно, не только знать, что решение есть и что последовательность сходится к решению, но и как-то оценить число необходимых шагов, необходимых для достижения нужной точности, и текущее значение погрешности.

Прежде всего, заметим, что $\rho(x_{m+1}, x_*) = \rho(F(x_m), F(x_*)) \le q \cdot \rho(x_m, x_*)$. Отсюда по индукции получаем: $\rho(x_m, x_*) \le q^m \rho(x_0, x_*)$.

Если мы можем как-то оценить погрешность начального приближения (расстояние от x_0 до x_*), то последняя формула позволяет оценить и погрешность m-ого приближения. Если нам нужно достичь заданной точности (т.е. добиться выполнения неравенства $\rho(x_m, x_*) \le \varepsilon$), то мы можем найти m из условия $q^m \rho(x_0, x_*) \le \varepsilon$:
$m \ln q \le \ln(\varepsilon / \rho(x_0, x_*)) \Rightarrow m \ge \ln(\varepsilon / \rho(x_0, x_*)) / \ln q$
(при делении на отрицательное число $\ln q$ смысл неравенства меняется на противоположный). Получили априорные оценки для погрешности m-го приближения и для числа шагов, достаточного для достижения нужной точности.

Как поступать, если погрешность начального приближения оценить не можем. Для x_0, $x_1 = F(x_0)$ и x_* запишем неравенство треугольника:
$\rho(x_0, x_*) \le \rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_*)$. Поскольку $\rho(x_1, x_*) \le q \cdot \rho(x_0, x_*)$, получаем:
$\rho(x_0, x_*) \le \rho(x_0, x_1) + q \cdot \rho(x_0, x_*)$, или $\rho(x_0, x_*) \le \rho(x_0, x_1)/(1-q)$.
Отсюда снова получаем априорные оценки в терминах расстояния между x_0 и $x_1 = F(x_0)$: $\rho(x_m, x_*) \le q^m \rho(x_0, x_1)/(1-q)$, $m \ge \ln(\varepsilon(1-q)/\rho(x_0, x_1))/\ln q$.

Это были априорные оценки. Получим апостериорные, которые могут оказаться более точными. Схема прежняя. Пусть x_{m-1} и $x_m = F(x_{m-1})$ – два члена итерационной последовательности. Неравенство треугольника:

$\rho(x_{m-1},x_*) \le \rho(x_{m-1},x_m) + \rho(x_m,x_*) \le \rho(x_{m-1},x_m) + q\cdot\rho(x_{m-1},x_*)$.
Тогда $\rho(x_{m-1},x_*) \le \rho(x_{m-1},x_m)/(1-q)$, и $\rho(x_m,x_*) \le [q/(1-q)]\cdot\rho(x_{m-1},x_m)$.
Погрешность последнего найденного члена последовательности оценивается через величину последнего шага. Коэффициент $q/(1-q)$ растёт с ростом q, он меньше единицы при $q < 1/2$ и больше единицы при $q > 1/2$.

Примеры.

1. Применение принципа сжимающих отображений для решения уравнений вида $f(x) = 0$

   Отделение корней. Для каждого корня: привести к виду $x = F(x)$ (одним из многих способов) и выбрать замкнутое множество $X \subseteq \mathbb{R}$, на котором F – сжатие. Достаточное условие:
   $F : X \to X \wedge \exists q \in [0,1)\, \forall x \in X : |F'(x)| \le q < 1$ (штрих – производная).
   Если $|F'(x)| > 1$ – не сжатие; можно попробовать обратную функцию.

   Один из вариантов для монотонной на X функции: $x = x - \alpha f(x)$, т.е. $F(x) = x - \alpha f(x)$.
   $\alpha > 0$ для возрастающей функции f и $\alpha < 0$ для убывающей, тогда $\alpha f(x) = |\alpha f(x)|$
   Выбор α: $|F'(x)| = |1 - \alpha f'(x)| \le q < 1$, или
   $-q \le 1 - |\alpha f'(x)| \le q$.
   Чем меньше q, тем быстрее сходимость.
   Пусть известно, что $m \le |f'(x)| \le M$ (на X), тогда
   $1 - |\alpha|M \le 1 - |\alpha f'(x)| \le 1 - |\alpha|m$.
   $q = \max\{|1 - |\alpha|M|, |1 - |\alpha|m|\}$. Оптимальный выбор α, когда отрезок симметричный: $|1 - |\alpha|M| = |1 - |\alpha|m|$, $1 - |\alpha|M = -(1 - |\alpha|m)$,
   $|\alpha| = 2/(M + m)$, т.е. $1/\alpha$ – среднее значение производной.
   В этом случае $q = (M - m)/(M + m) < 1$.

   Вместо константы α можно взять функцию $g(x)$, не обращающуюся в нуль: $F(x) = x - g(x)f(x)$.
   Метод Ньютона: $g(x) = 1/f'(x)$, $F(x) = x - f(x)/f'(x)$,
   $F'(x) = (f(x)f''(x))/f'^2(x)$
   Достаточное условие сходимости метода: $|f(x)f''(x)|/f'^2(x) \le q < 1$ на X. Не забывать об условии $F : X \to X$.
   Метод Ньютона – частный случай метода простой итерации, но имеет свою специфику. Сходимость более быстрая, чем у обычного метода простой итерации, за счёт убывания $|F'(x)|$ при приближении к корню. Будет подробнее рассмотрен позже.

2. Применение принципа сжимающих отображений для решения систем линейных алгебраических уравнения (СЛАУ) $Ax = b$ (в $\mathbb{R}^n$).

   $Ax = b$, $x, b \in \mathbb{R}^n$, A – невырожденная матрица $n \times n$, A и b заданы, x ищем. При больших n итерационные методы могут оказаться предпочтительнее прямых (Гаусс).

Если $A = A_0 + A_1$, A_0 – главная легко обратимая часть (например, диагональная матрица), приводим систему к виду $x = F(x)$, где $F(x) = Cx + d$, $C = -A_0^{-1}A_1$, $d = A_0^{-1}b$.
Итерационный процесс: $x_{m+1} = Cx_n + b$
Сходимость покомпонентная (эквивалентная сходимости в $\mathbb{R}^n_{\max}$, $\mathbb{R}^n_1$, E^n). Достаточные условия для каждого варианта метризации разные (рассмотреть). Если хотя бы одно из них выполняется – это гарантирует сходимость (в любой метрике).

3. Применение принципа сжимающих отображений для решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\, + f(s)$$

Рассмотреть достаточные условия сходимости в $C[a,b]$, $L_1[a,b]$, $L_2[a,b]$.

4. Применение принципа сжимающих отображений для доказательства теоремы Пикара.

   Задача Коши для ОДУ 1 порядка:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)) \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

(точка – производная). Функцию f считаем непрерывной по обеим переменным (хотим, чтобы $\dot{x}$ была непрерывной).

Эквивалентное интегральное уравнение:

$$x(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s))\,ds$$

Задача Коши приведена к задаче о неподвижной точке отображения

$$(Ax)(t) = x_0 + \int_a^t f(s, x(s))\,ds$$

Проанализируем условия, при которых оператор A – сжатие в $C[a,b]$.
Пусть $y_{1,2} = Ax_{1,2}$,

$$y_2(t) - y_1(t) = \int_a^t (f(s, x_2(s)) - f(s, x_1(s)))\,ds$$

Чтобы правая часть линейно оценивалась через расстояние в $C[a,b]$ между x_1 и x_2, потребуем липшицевости f по второму аргументу:

$|f(s,x_2) - f(s,x_1)| \le L|x_2 - x_1|$, L – константа Липшица. Тогда

$$|y_2(t) - y_1(t)| = \left| \int_a^t (f(s,x_2(s)) - f(s,x_1(s)))\,ds \right| \le$$
$$\le \int_a^t |f(s,x_2(s)) - f(s,x_1(s))|\,ds \le L \int_a^t |x_2(s) - x_1(s)|\,ds \le$$
$$\le L\rho_{C[a,b]}(x_1,x_2)|t-a| \le L\rho_{C[a,b]}(x_1,x_2)|b-a|\,.$$

Берём максимум по $t \in [a,b]$:

$$\rho_{C[a,b]}(y_1,y_2) \le L|b-a|\rho_{C[a,b]}(x_1,x_2)\,.$$

Если $|b-a| < 1/L$, то отображение сжимающее в $C[a,b]$, и тогда на отрезке $[a,b]$ существует единственное решение задачи Коши. Для $t < a$ поступаем аналогично. Доказали теорему Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши на интервале, содержащем начальную точку, и оценили снизу длину этого интервала. Многомерные обобщения делаются аналогично.