Раздел 7. Линейные операторы в ЛНП

Лекция 13 Линейный оператор.

Оператор – синоним слова "отображение". $F : X \to Y$, Иногда под оператором понимают отображение пространства в себя, когда $Y = X$. Мы не будем придерживаться этого ограничения. Если отображение $X \to \mathbb{R}$ (или $X \to \mathbb{C}$, а в общем случае $X \to \mathbb{K}$) – функционал. Частный случай оператора, но есть своя специфика.

Линейный оператор: действует из ЛП в ЛП (над одним и тем же полем $\mathbb{K}$), и
$\forall \alpha_{1,2} \in \mathbb{K} \, \forall x_{1,2} \in X : \, A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A(x_1) + \alpha_2 A(x_2)$.
Совокупность аддитивности и однородности.
Аддитивность: $\forall x_{1,2} \in X : \, A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2)$.
Однородность (первой степени): $\forall \alpha \in \mathbb{K} \, \forall x \in X : \, A(\alpha x) = \alpha A(x)$.
Скобки для линейных операторов часто опускают. Если X конечномерно, достаточно задать на базисных элементах.

Линейный функционал – это линейное отображение из X в $\mathbb{K}$.

Замечание. В комплексных пространствах, наряду с линейными, рассматривают также полулинейные операторы и функционалы. Они обладают свойством аддитивности, а однородность заменяется на полуоднородность: $\forall \alpha \in \mathbb{C} \, \forall x \in X : \, A(\alpha x) = \bar{\alpha} A(x)$.

По умолчанию будем считать, что оператор полноопределённый. В общем случае область определения может отличаться от всего пространства.

Утверждение: область определения линейного оператора – линеал в пространстве X.

Утверждение: область значений линейного оператора – линеал в пространстве Y.

Утверждение: график линейного оператора – линеал в прямой сумме $X + Y$.
Замечание. Произвольный линеал в пространстве $X + Y$ называется линейным отношением (частный случай бинарного отношения).

Ядро оператора (множество нулей): $KerA = \{x \in X : Ax = o\}$.

Утверждение: ядро оператора – линеал в пространстве X.

Примеры: нулевой оператор, единичный оператор, умножение на число, операторы в конечномерном ЛП, умножение на заданную функцию, дифференциальные и интегральные линейные операторы.

Пусть теперь X и Y – ЛНП.

Непрерывность и ограниченность линейного оператора. (Напрминание: оператор ограничен, если образ произвольного ограниченного множества ограничен.) Для произвольных (нелинейных) операторов эти свойства никак не связаны. У линейных операторов своя специфика.

Замечание. Часто (обычно для неограниченных операторов) область определения оператора – всюду плотное множество в X .
Пример: оператор дифференцирования как оператор из $C[a,b]$ в себя. Область определения – $C^1[a,b]$.

Утверждение: ядро непрерывного оператора – замкнутое подпространство.

Теорема Линейный оператор A, непрерывный в точке $x_0 \in X$, равномерно непрерывен на всём пространстве X.

Непрерывность оператора A в точке x_0 по Коши:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \{\|h\| < \delta \Rightarrow \|A(x_0+h) - A(x_0)\| < \varepsilon\}$
Но $A(x_0+h) - A(x_0) = A(h)$, поэтому получаем:
$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0 : \{\|h\| < \delta \Rightarrow \|A(h)\| < \varepsilon\}$
Отсюда вытекает равномерная непрерывность: если $\|x' - x''\| < \delta$, то
$\|A(x') - A(x'')\| = \|A(x' - x'')\| < \varepsilon$.

Теорема. Непрерывность линейного оператора эквивалентна его ограниченности.

Пусть оператор непрерывен. Тогда выберем некоторое ε и найдём такое δ, что из условия $\|h\| \le \delta$ следует $\|A(h)\| \le \varepsilon$. Докажем, что в этом случае образ ограниченного множества ограничен.

Если множество Q ограничено, то все его элементы не превосходят по норме некоторого M. Представим произвольный элемент этого множества в виде $x = (x\delta/M) \cdot M/\delta$. Тогда в силу линейности оператора

$$\forall x \in Q : \|Ax\| = \|A(x\delta/M) \cdot M/\delta\| = M/\delta \cdot \|A(x\delta/M)\| \le M/\delta \cdot \varepsilon\,,$$

поскольку $\forall x \in Q : \|x\delta/M\| \le \delta$. Мы показали, что образ множества Q лежит в шаре радиуса $M\varepsilon/\delta$, то есть является ограниченным множеством.

Докажем теперь, что из ограниченности оператора следует его непрерывность.

Если оператор ограничен, то образ любого ограниченного множества ограничен. В частности, ограничен образ единичной сферы с центром в нуле:

$$\exists M > 0 : \{\|x\| = 1 \Rightarrow \|Ax\| \le M\}\,.$$

Отсюда следует, непрерывность A в нуле:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta(\varepsilon) = \varepsilon/M : \{\|h\| \le \varepsilon/M \Rightarrow \|A(h)\| \le \varepsilon\}\,.$$

Действительно, $\|Ao\| = 0$, а для $h \ne o$

$$\|A(h)\| = \|A(h/\|h\|)\| \cdot \|h\| \le M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon\,.$$

Как вытекает из предыдущей теоремы, непрерывность оператора в нуле влечёт его равномерную непрерывность во всём пространстве. Теорема доказана.

Как следует из доказательства последней теоремы, нам достаточно потребовать ограниченности оператора на сфере, и из этого уже вытекает его непрерывность и ограниченность на произвольном ограниченном множестве. Поэтому мы для линейных операторов може переопределить понятие ограниченности и говорить, что оператор ограничен, если он ограничен на единичной сфере или на единичном шаре (из чего вытекает ограниченность на сфере и далее ограниченность на произвольном множестве). Есть ещё одно определение, эквивалентное данному. Если оператор ограничен на единичной сфере, и норма его значений на сфере не превосходит M, то на произвольном ненулевом элементе пространства $x = x^0\|x\|$ (x^0 – нормированный элемент с единичной нормой) справедливо неравенство $\|Ax\| = \|Ax^0\| \cdot \|x\| \leq M\|x\|$. Часто именно этот факт:

$$\exists M > 0 \, \forall x \in X : \|Ax\| \leq M\|x\|$$

берут в качестве определения ограниченного оператора (разумеется, из него следует ограниченность на сфере, шаре и произвольном ограниченном множестве).

Для линейного оператора его поведение на единичной сфере в силу равенства

$$Ax = Ax^0 \cdot \|x\|$$

определяет его поведение на всём пространстве. В свою очередь, ограниченный линейный оператор на сфере – частный случай непрерывного ограниченного отображения из $\sigma_1(o)$ в ЛНП Y, т.е. элемент пространства $C(\sigma_1(o) \to Y)$, а функционал $f(x) = \|Ax\|$ – элемент пространства $C(\sigma_1(o))$ вещественных непрерывных ограниченных функционалов на единичной сфере. Когда мы имели дело с пространством $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке, мы под нормой элемента этого пространства понимали максимум модуля этого элемента на отрезке $[a, b]$. Поскольку в бесконечномерном пространстве единичная сфера не является компактом, непрерывный функционал может не достигать на ней своего максимального значения, и поэтому максимум мы заменим супремумом и определим норму линейного ограниченного оператора как точную верхнюю грань множества значений его нормы на единичной сфере:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| .$$

Это не единственное определение нормы. Есть и другие, эквивалентные данному. В частности, мы можем брать точную верхнюю грань не по сфере, а по единичному замкнутому шару:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| .$$

Расширение множества не приведёт к увеличению супремума, поскольку если $\|x\| \le 1$, то $\|Ax\| = \|Ax^0\| \cdot \|x\| \le \|Ax^0\|$.
Мы также можем назвать нормой оператора супремум нормы его значений не по замкнутому, а по открытому шару:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|<1} \|Ax\|.$$

Это не приведёт к уменьшению точной верхней грани, поскольку произвольное значение оператора на сфере есть предел его значений в открытом шаре на соответствующем радиусе: $Ax^0 = \lim_{\alpha\to 1-0} A(\alpha x^0)$.

Поскольку для произвольного ненулевого элемента $x = x^0 \cdot \|x\|$ справедливо равенство $\|Ax^0\| = \|Ax\|/\|x\|$, мы также можем записать, что

$$\|A\| = \sup_{x\neq o} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}\,.$$

Вспомним теперь, что точная верхняя грань числового множества – это наименьшая из его верхних гранией, т.е.

$$\|A\| = \min\left\{M, \forall x \neq o : \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \le M\right\}$$

или, что то же самое,

$$\|A\| = \min\left\{M, \forall x \in X : \|Ax\| \le M\|x\|\right\}\,,$$

то есть норма – это наилучшая из возможных оценок в неравенстве $\|Ax\| \le M\|x\|$, фигурирующем в альтернативном определении ограниченности оператора. Поэтому если мы получим такое неравенство для некоторого M или, что эквивалентно, получим оценку $\|Ax^0\| \le M$ на единичной сфере, то отсюда будет следовать, что $\|A\| \le M$.

Если при этом окажется, что для некоторого $x_* \in X$ неравенство превращается в равенство, т.е. $\|Ax_*\| = M\|x_*\|$ или, что то же, $\|Ax^0_*\| = M$ для некоторого x^0_* с единичной нормой, то это будет означать, что оценка неулучшаема, и, следовательно, $\|A\| = M$: если верхняя грань множества достигается на каком-то элементе, то она является точной верхней гранью. Точно такой же вывод мы можем сделать, если есть последовательность нормированных элементов x^0_m таких, что $\|Ax^0_m\| \to M$: это означает, что оценку нельзя улучшить, и $\|A\| = M$ (такая последовательность называется максимизирующей).

Множество значений $\|Ax\|$ на единичном шаре – это либо отрезок $[0, \|A\|]$, либо полуинтервал $[0, \|A\|)$. В первом случае найдётся такой элемент $x^0_* \in \sigma_1(0)$, что $\|Ax^0_*\| = \|A\|$, и тогда говорят, что норма оператора достигается на элементе x^0_*. Во втором случае такого элемента нет (норма не достигается), но существует максимизирующая последовательность
$x^0_m \in \sigma_1(0) : \|Ax^0_m\| \to \|A\|$.

Утверждение: если линейный оператор ограничен хотя бы на каком-нибудь шаре (открытом или замкнутом) положительного радиуса, то он ограничен.
Будем доказывать для замкнутого шара. (Если шар открыт, то возьмём любой замкнутый шар меньшего радиуса с тем же центром.)
Пусть оператор A ограничен на шаре $\bar{S}_r(a) = \{x \in X : \|x - a\| \leq r\}$, т.е. $\exists M \, \forall x \in \bar{S}_r(a) : \|Ax\| \leq M$.
Установим взаимно однозначное соответствие между $\bar{S}_r(a)$ и единичным шаром с центром в нуле $\bar{S}_1(o) = \{y \in X : \|y\| \leq 1\}$: $x = a + ry$, $y = (x-a)/r$. Тогда

$$\|Ay\| = \left\| A\frac{x-a}{r} \right\| = \frac{\|A(x-a)\|}{r} =$$
$$= \frac{\|Ax - Aa\|}{r} \leq \frac{\|Ax\| + \|Aa\|}{r} \leq \frac{2M}{r}\,.$$

Поскольку y – произвольный элемент единичного шара, отсюда следует, что оператор ограничен и $\|A\| \leq 2M/r$.
Замечание. Оценку для нормы можно улучшить, избавившись от множителя 2 (подумайте, как!).
Замечание. Приведённое рассуждение можно обобщить на семейства операторов $\{A_\alpha\}$, а именно: если семейство операторов равномерно ограничено на каком-либо шаре, т.е. если $\exists M \, \forall x \in \bar{S}_r(a) \, \forall \alpha : \|A_\alpha x\| \leq M$, то оно равномерно ограничено по норме: $\forall \alpha : \|A_\alpha\| \leq 2M/r$. Этим фактом мы воспользуемся при доказательстве принципа равномерной огранненности (см. ниже).

Примеры ограниченных операторов и вычисления их норм.

- Единичный оператор (в любом пространстве):
  $Ex = x$, $\|Ex\| = \|x\|$, $\|E\| = 1$

- Нулевой оператор (в любом пространстве):
  $Ox = o$, $\|Ox\| = 0$, $\|O\| = 0$

- Оператор умножения на число (в любом пространстве):
  $\Lambda x = \lambda x$, $\|\Lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$, $\|\Lambda\| = |\lambda|$
  (операторы E и O – частные случаи при $\lambda = 1$ и $\lambda = 0$)

- Оператор покомпонентного умножения (в пространствах $\mathbb{R}^n_{\max}$, $\mathbb{R}^n_p$, c_0, l_∞, l_p последовательностей, конечных или бесконечных):
  $y = Ax$, $y_k = \alpha_k x_k$ ($\{\alpha_k\}$ – ограниченная последовательность; если все $\alpha_k = \lambda$, приходим к предыдущему примеру).
  Обозначим $\lambda = \sup_k |\alpha_k|$, тогда во всех рассмотренных нормах
  $\|Ax\| \leq \|\Lambda x\| = \lambda \cdot \|x\|$, и тогда $\|A\| \leq \lambda$
  Если супремум достигается, т.е. $\lambda = \max_k |\alpha_k| = |\alpha_m|$ для некоторого m, то на элементе $x = e_m$ (последовательность, у которой $x_m = 1$, а остальные элементы нулевые) справедливо равенство $Ae_m = \lambda e_m$,

поэтому $\|A\| = \lambda$ и достигается на элементе e_m.
Если супремум не достигается, рассмотрим максимизирующую последовательность $|\alpha_{k'}| \to \lambda$. Но $|\alpha_{k'}| = \|Ae_{k'}\|/\|e_{k'}\|$, поэтому снова получаем, что $\|A\| = \lambda$, $\{e_{k'}\}$ – максимизирующая последовательность для нормы. Норма не достигается.

- Функциональный аналог: оператор умножения на непрерывную функцию $\alpha(t) \in C[a,b]$: $y = Ax$, $y(t) = \alpha(t)x(t)$ в пространствах непрерывных функций на отрезке ($C[a,b]$, $\tilde{L}_p[a,b]$).
Обозначим $\lambda = \|\alpha\|_C = \max_{t\in[a,b]} |\alpha(t)|$, тогда $|y(t)| \le \lambda|x(t)|$ и
$\|Ax\| = \|y\| \le \lambda\|x\|$ (в любой из норм), откуда $\|A\| \le \lambda$.
Убедимся, что на самом деле здесь равенство, как и в предыдущем примере. В пространстве $C[a,b]$ мы можем взять функцию $x(t)$, максимум модуля которой достигается в той же точке, что и у $|\alpha(t)|$ (например, $x(t) \equiv 1$). Норма достигается.
В пространствах $\tilde{L}_p[a,b]$ рассмотрим разность
$$\lambda^p\|x\|^p - \|Ax\|^p = \lambda^p \int_a^b |x(t)|^p\,dt - \int_a^b |\alpha(t)x(t)|^p\,dt =$$
$$= \int_a^b (\lambda^p - |\alpha(t)|^p)|x(t)|^p\,dt \ge 0$$
Если равенство $|\alpha(t)| = \lambda$ достигается на некотором отрезке, мы можем выбрать функцию $x(t)$, локализованную на этом отрезке (т.е. равную нулю вне его), и в этом случае подынтегральная функция будет равна нулю тождественно, норма достигается.
Если равенство $|\alpha(t)| = \lambda$ достигается в одной или нескольких точках, то первый сомножитель под интегралом почти всюду положителен, и рассмотренная разность строго положительна при любом непрерывном $x \ne o$. Тем не менее, выбором $x \in \sigma_1(o)$ её можно сделать сколь угодно малой. Действительно, функция $|\alpha(t)|$ непрерывна, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся отрезок $[a',b'] \subset [a,b]$ в окрестности точки максимума, на котором $\lambda^p - |\alpha(t)|^p \le \varepsilon$. Выберем функцию $x(t)$, локализованную на $[a',b']$, тогда
$$\lambda^p\|x\|^p - \|Ax\|^p = \int_a^b (\lambda^p - |\alpha(t)|^p)|x(t)|^p\,dt =$$
$$= \int_{a'}^{b'} (\lambda^p - |\alpha(t)|^p)|x(t)|^p\,dt \le \int_{a'}^{b'} \varepsilon|x(t)|^p\,dt = \varepsilon$$
(при $\|x\| = 1$). Отсюда следует, что $\|A\| = \lambda$, но не достигается.

- A – оператор в конечномерном пространстве, задаётся матрицей:
$y = Ax$, $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$. Найдём норму этого оператора в $\mathbb{R}^n_{\max}$ и в $\mathbb{R}^n_1$ и оценим её в $\mathbb{R}^n_2 = E^n$.

Пространство $\mathbb{R}^n_{\max}$:

$$\|Ax\|_\infty = \|y\|_\infty = \max_i |y_i| = \max_i \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| =$$

$$= \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| \le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x\|_\infty$$

Отсюда $\|A\| \le \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (берём элементы матрицы по модулю, вычисляем суммы по строкам и берём максимальную). На самом деле равенство, и норма достигается.
Пусть i_0 – номер той строки, в которой наибольшая сумма модулей. Подберём такой элемент $x \in \sigma_1(o)$, для которого все неравенства превратятся в равенства. Последнее неравенство превращается в равенство при $|x_j| = \|x\|_\infty = 1$, т.е. для вектора, все компоненты которого по модулю равны единице. Знаки выбираем так, чтобы для $i = i_0$ модуль суммы совпадал с суммой модулей. Для этого все слагаемые делаем одного знака, выбирая знаки компонент x_j совпадающими со знаками $a_{i_0 j}$ (либо противоположными).
Пространство $\mathbb{R}^n_1$:

$$\|Ax\|_1 = \|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i| = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \cdot |x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \le$$

$$\le \sum_{j=1}^n |x_j| \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \cdot \|x\|_1$$

Отсюда $\|A\| \le \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$ (берём элементы матрицы по модулю, вычисляем суммы по столбцам и берём максимальную). На самом деле равенство, и норма достигается.
Пусть j_0 – номер того столбца, в котором наибольшая сумма модулей. Подберём такой элемент $x \in \sigma_1(o)$, для которого все неравенства превратятся в равенства. Последнее неравенство превращается в равенство при $|x_j| = 0$ для всех $j \ne j_0$, т.е. для вектора x, единственная ненулевая компонента которого x_{j_0} по модулю равна единице. Знак выбираем произвольным. Поскольку в суммах по j всего по одному слагаемому, первое неравенство также превращается в равенство.

Пространство $\mathbb{R}_2^n = E^n$:

$$\|Ax\|_2^2 = \|y\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2 \le$$
$$\le \sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)\right] = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \cdot \|x\|_2^2$$

(воспользовались неравенством Коши-Буняковского-Шварца). Извлекая квадратный корень, получаем
$\|Ax\|_2 \le \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2} \|x\|_2$, откуда $\|A\|_2 \le \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{1/2}$.
За исключением матрицы ранга 0 или 1, равенство строгое: неравенство КБШ превращается в равенство, когда есть пропорциональность вектора x и строки матрицы, но если разные строки между собой не пропорциональны, то достичь такой пропорциональности одновременно для всех i не удастся.
Замечание. На самом деле норма оператора в E^n – это квадратный корень из наибольшего собственного числа матрицы A^tA. Это будет установлено в следующем семестре при изучении пространств со скалярным произведением.

- Функциональный аналог: A – интегральный оператор Фредгольма на отрезке $[a,b]$, задаётся равенством:
  $y = Ax$, $y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$.
  Функция $K(t,s)$ непрерывна на $[a,b]\times[a,b]$ и называется ядром интегрального оператора.
  Замечание. К сожалению, так исторически сложилось, что термин "ядро"оказался многозначным. Напомню, что мы под ядром оператора понимаем его множество нулей, т.е. множество тех элементов пространства, которые оператор переводит в o. Разумеется, здесь это слово имеет совершенно иной смысл.
  Найдём норму оператора Фредгольма в $C[a,b]$ и оценим её в $\tilde{L}_1[a,b]$ и в $\tilde{L}_2[a,b]$.
  Пространство $C[a,b]$:

$$\|Ax\|_C = \|y\|_C = \max_{t\in[a,b]} |y(t)| = \max_{t\in[a,b]} \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\right| \le$$
$$\le \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)x(s)|\ ds = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\cdot|x(s)|\ ds \le$$
$$\le \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\cdot\|x\|_C\,ds = \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\ ds\cdot\|x\|_C$$

  Отсюда $\|A\| \le \max_{t\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\ ds$ (на самом деле здесь равенство).

Пусть t_0 – значение t, для которого достигается максимум. Попробуем подобрать такой элемент $x \in \sigma_1(o)$, для которого все неравенства превратятся в равенства. Последнее неравенство превращается в равенство при $|x(s)| = \|x\|_C = 1$ при всех s, для которых $K(t_0, s) \neq 0$. В то же время первое неравенство становится равенством (модуль интеграла равен интегралу от модуля) в случае, когда подынтегральная функция при $t = t_0$ сохраняет знак для всех $s \in [a, b]$. Для этого необходимо, чтобы знаки функций $x(s)$ и $K(t_0, s)$ на множестве, где $K(t_0, s) \neq 0$, всюду совпадали (или всюду различались).
Если функция $K(t_0, s)$ сохраняет знак, то норма достигается на элементе $x \equiv 1$ (или $x \equiv -1$). Если функция $K(t_0, s)$ меняет знак, но области, где она имеет разные знаки, разделены отрезками ненулевой длины, где $K(t_0, s) = 0$, то норма достигается на функции $x(s)$, равной $\operatorname{sign} K(t_0, s)$ (т.е. 1 при $K(t_0, s) > 0$ и -1 при $K(t_0, s) < 0$) там, где $K(t_0, s) \neq 0$, а на промежутках, где $K(t_0, s) = 0$, $x(s)$ непрерывно (например, линейно) изменяется от ± 1 до ∓ 1. Если же при смене знака функция $K(t_0, s)$ обращается в нуль в изолированных точках, то найденное значение не достигается, поскольку функция $\operatorname{sign} K(t_0, s)$ в этих точках имеет разрыв первого рода. Убедимся, что оно, тем не менее, остаётся нормой (ограничимся случаев конечного числа корней функции $K(t_0, s)$). Для этого вычислим разность

$$\int_a^b |K(t_0, s)|\, ds - y(t_0) = \int_a^b |K(t_0, s)|\, ds - \int_a^b K(t_0, s) x(s)\, ds =$$
$$= \int_a^b |K(t_0, s)|\, ds - \int_a^b |K(t_0, s)| \operatorname{sign} K(t_0, s) \cdot x(s)\, ds =$$
$$= \int_a^b |K(t_0, s)| \left(1 - \operatorname{sign} K(t_0, s) x(s)\right) ds$$

Выберем $x \in \sigma_1(o)$ так, чтобы эта функция всюду по знаку совпадала с $K(t_0, s)$, причём вне малых окрестностей кореней функции $K(t_0, s)$ общей длиной δ выполнялось равенство $x(s) = \operatorname{sign} K(t_0, s)$, а второй сомножитель в подынтегральной функции, тем самым, обращался в нуль. Тогда остаётся интеграл по указанным малым окрестностям, на которых подынтегральная функция не превосходит $\max_s |K(t_0, s|$. Выбором δ о выражение может быть сделано сколь угодно малым.

Пространство $\tilde{L}_1[a,b]$:

$$\|Ax\|_1 = \|y\|_1 = \int_a^b |y(t)|\,dt = \int_a^b \left| \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds \right| dt \leq$$

$$\leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s)x(s)|\,\,ds \right) dt = \int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s)| \cdot |x(s)|\,ds \right) dt =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b |K(t,s)| \cdot |x(s)|\,dt \right) ds = \int_a^b |x(s)| \left(\int_a^b |K(t,s)|\,dt \right) ds \leq$$

$$\leq \int_a^b |x(s)| \left(\max_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,dt \right) ds =$$

$$= \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,dt \cdot \int_a^b |x(s)|\,ds = \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,dt \cdot \|x\|_1$$

Отсюда $\|A\| \leq \max_{s\in[a,b]} \int_a^b |K(t,s)|\,dt$.
Убедимся, что в случае $K(t,s) \geq 0$ справедливо равенство. $\|A\| = \max_{s\in[a,b]} \int_a^b K(t,s)\,dt$. Пусть s_0 – то значение s, на котором достигается максимум интеграла $\int_a^b K(t,s)\,dt$. Поскольку интеграл непрерывно зависит от s, для произвольного $\varepsilon > 0$ найдётся такой отрезок $[a',b'] \subset [a,b]$, что при $s \in [a',b']$ выполнено неравенство
$\int_a^b K(t,s_0)\,dt - \int_a^b K(t,s)\,dt \leq \varepsilon$.
Выберем в качестве $x \in \sigma_1(o)$ неотрицательную функцию, локализованную на $[a',b']$, и рассмотрим разность:

$$\int_a^b K(t,s_0)\,dt - \|Ax\|_1 =$$

$$= \int_a^b K(t,s_0)\,dt \cdot \int_{a'}^{b'} x(s)\,ds - \int_a^b \left(\int_{a'}^{b'} K(t,s)x(s)\,ds \right) dt =$$

$$= \int_{a'}^{b'} \left(\int_a^b K(t,s_0)\,dt - \int_a^b K(t,s)\,dt \right) x(s)\,ds$$

$$\leq \int_{a'}^{b'} \varepsilon x(s)\,ds = \varepsilon\,,$$

откуда и вытекает доказываемое равенство для нормы оператора. Если интеграл $\int_a^b K(t,s)\,dt$ достигает максимума в изолированной точке, то норма не достигается, поскольку первый сомножитель подынтегральной функции строго положителен при $s \neq s_0$. Если же максимум достигается на некотором отрезке $[a',b']$ (сохраним прежнее обозначение), то рассморенная разность обращается в 0, и норма достигается.

Пространство $\tilde{L}_2[a,b]$:

$$\|Ax\|_2^2 = \|y\|_2^2 = \int_a^b |y(t)|^2\,dt = \int_a^b \left|\int_a^b K(t,s)x(s)\,ds\right|^2\,dt \le$$
$$\le \int_a^b \left[\left(\int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\right)\left(\int_a^b |x(s)|^2\,ds\right)\right]\,dt =$$
$$= \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\,dt \cdot \|x\|_2^2$$

(воспользовались неравенством Коши-Буняковского-Шварца). Извлекая квадратный корень, получаем
$\|Ax\|_2 \le \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\,dt\right)^{1/2} \|x\|_2$, откуда
$\|A\|_2 \le \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2\,ds\,dt\right)^{1/2}$.
Неравенство КБШ при каждом фиксированном t превращается в равенство, когда есть пропорциональность функций $x(s)$ и $K(t,s)$, что возможно при всех значениях t одновременно лишь в случае, когда при любых различных t' и t'' функции $K(t',s)$ и $K(t'',s)$ как функции от s отличаются множителем, т.е. при $K(t,s) = u(t)v(s)$, где u и v – некоторые непрерывные функции. Во всех остальных случаях неравенство строгое, и полученное выражение даёт верхнюю оценку для нормы.

- До сих пор мы рассматривали операторы, действующие из некоторого пространства в него же. Рассмотрим теперь опреатор, действующий из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$, а именно – оператор дифференцирования D:
$y = Dx$, $y(t) = \dot{x}(t)$. Очевидно,
$\|Dx\|_C = \|y\|_C = \|\dot{x}\|_C \le \|x\|_{C^1} = \max\{\|x\|_C, \|\dot{x}\|_C\}$. Отсюда $\|D\| \le 1$.
На самом деле здесь равенство, и норма достигается на любой функции, для которой $\|\dot{x}\|_C \ge \|x\|_C$ – например, на функции $\sin\omega t$ с достаточно большим ω.

Непрерывность и ограниченность линейных функционалов, норма функционала.
Линейный функционал – частный случай линейного оператора, для которого $Y = \mathbb{K}$ (в частности, $Y = \mathbb{R}$), и для таких функционалов справедливы все утверждения, установленные для линейных операторов. В частности, линейный функционал, непрерывный в какой-либо точке, равномерно непрерывен во всём пространстве; линейный функционал непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен; линейный функционал, ограниченный на каком-либо шаре, ограничен. Роль нормы элемента в поле $\mathbb{K}$ (в частности, $\mathbb{R}$) играет модуль числа, поэтому формулы для нормы ограниченного линейного функционала имеют вид:
$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \sup_{\|x\|\le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|<1} |f(x)| = \sup_{x\ne o} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$.
Такая норма совпадает с нормой функционала в пространстве $C(\sigma_1(o))$

непрерывных ограниченных функционалов на сфере. Если функционал вещественный, то модули в формулах можно убрать, т.е.
$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} f(x) = \sup_{\|x\|\le 1} f(x) = \sup_{\|x\|<1} f(x) = \sup_{x\ne o} \frac{f(x)}{\|x\|}$.
Это связано с тем, что $f(-x) = -f(x)$, поэтому область значений линейного функционала на сфере (шаре) симметрична и представляет собой либо отрезок $[-\|f\|, +\|f\|]$, либо интервал $(-\|f\|, +\|f\|)$. В первом случае норма достигается на единичном шаре (сфере), во втором не достигается.
Ещё одно определение ограниченности линейного функционала:
$\exists M \ge 0 \forall x \in X : |f(x)| \le M\|x\|$, тогда норма функционала – наименьшее значение константы M в этом неравенстве. Иными словами, значение M в этом неравенстве есть норма функционала, если оценка неулучшаемая.

Примеры.

- Все линейные функционалы в конечномерном пространстве имеют вид
$f(x) = f(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \dots + \alpha_n f(e_n) = f_1\alpha_1 + \dots + f_n\alpha_n$, где $\{e_j\}$ – базисные элементы, $f_j = f(e_j)$. В частности, в $\mathbb{R}^n$ со стандартным базисом $\alpha_j = x_j$. Все линейные функционалы в конечномерных пространствах с любыми нормами ограничены и непрерывны, поскольку они непрерывны, например, в $\mathbb{R}^n_{\max}$, а конечномерные пространства с совпадающими размерностями непрерывно изоморфны. Норма любого линейного функционала в конечномерном ЛНП достигается, будучи максимальным значением непрерывного функционала на компакте.

  Найдём норму линейного функционала в $\mathbb{R}^n_{\max}$:

  $$|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^n f_j x_j\right| \le \sum_{j=1}^n |f_j x_j| = \sum_{j=1}^n |f_j| \cdot |x_j| \le \sum_{j=1}^n |f_j| \cdot \|x\|_\infty$$

  Равенство достигается при $x_j = \operatorname{sign} f_j$ $(x \in \sigma_1(o))$, так что оценка неулучшаемая. Отсюда $\|f\| = \sum_{j=1}^n |f_j| = \|f\|_1$.

  Найдём норму линейного функционала в $\mathbb{R}^n_1$:

  $$|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^n f_j x_j\right| \le \sum_{j=1}^n |f_j x_j| = \sum_{j=1}^n |f_j| \cdot |x_j| \le$$
  $$\le \sum_{j=1}^n \left(\max_j |f_j|\right) |x_j| = \max_j |f_j| \cdot \|x\|_1$$

  Если j_0 – номер максимального по модулю коэффициента f_j, то на элементе x, для которого $x_{j_0} = 1$, а остальные компоненты равны нулю

($x \in \sigma_1(o)$), достигается равенство. Поэтому оценка неулучшаема, и $\|f\| = \max_j |f_j| = \|f\|_\infty$.

Найдём норму линейного функционала в $\mathbb{R}_2^n = E^n$:

$$|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^n f_j x_j\right| \le \sqrt{\sum_{j=1}^n |f_j|^2} \cdot \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |f_j|^2} \cdot \|x\|_2$$

Неравенство КБШ превращается в равенство при $x_j = cf_j$, где c – константа; при $c = 1/\|f\|_2$ получим нормированный элемент $x \in \sigma_1(o)$. Оценка неулучшаемая, $\|f\| = \left(\sum_{j=1}^n |f_j|^2\right)^{1/2} = \|f\|_2$.

- Рассмотрим интегральный функционал

$$f(x) = \int_{a'}^{b'} \alpha(t)x(t)\,dt$$

на множестве функций, непрперывных на отрезке $[a,b]$, при этом $[a',b'] \subset [a,b]$, а $\alpha(t)$ – некоторая интегрируемая функция (для определённости, непрерывная с конечным числом промежутков знакопостоянства). Найдём нормы этого функционала в пространствах $C[a,b]$, $\tilde{L}_1[a,b]$ и $\tilde{L}_2[a,b]$.

Пространство $C[a,b]$:

$$|f(x)| = \left|\int_{a'}^{b'} \alpha(t)x(t)\,dt\right| \le \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)x(t)|\,dt =$$

$$= \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)| \cdot |x(t)|\,dt \le \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)| \cdot \|x\|_C\,dt = \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|\,dt \cdot \|x\|_C\,,$$

откуда $\|f\| \le \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|\,dt$. Покажем, что эта оценка неулучшаема. Выберем функцию $x \in \sigma_1(o)$ и рассмотрим разность

$$\Delta = \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|\,dt - f(x) = \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|\,dt - \int_{a'}^{b'} \alpha(t)x(t)\,dt =$$

$$= \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|\,dt - \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)| \operatorname{sign}\alpha(t)x(t)\,dt =$$

$$= \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|(1 - x(t)\operatorname{sign}\alpha(t))\,dt$$

Величина Δ неотрицательна и обращается в нуль в случае, когда при любом значении $t \in [a',b']$ обращается в нуль хотя бы один из сомножителей. Это значит, что при $\alpha(t) \ne 0$ должно выполняться равенство $x(t) = \operatorname{sign}\alpha(t)$. Непрерывная функция, обладающая таким свойством, существует либо в случае знакопостоянства $\alpha(t)$, либо если промежутки, на которых $\alpha(t)$ имеет разные знаки, разделены отрезками, на которых $\alpha(t) = 0$. Если же промежутки знакопостоянства разделяет изолированный корень, то величина Δ строго положительна, но может быть выбором x сделана сколь угодно малой. Действительно, мы можем выбрать x так, чтобы знаки $x(t)$ и $\alpha(t)$ совпадали при $\alpha(t) \neq 0$, и чтобы равенство $x(t) = \operatorname{sign}\alpha(t)$ нарушалось лишь на промежутках сколь угодно малой суммарной длины δ. Тогда $\Delta \leq \delta \cdot \max_{t \in [a',b']} |\alpha(t)|$. Таким образом, мы установили, что $\|f\| = \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|\, dt$.

Пространство $\tilde{L}_1[a,b]$:

$$|f(x)| = \left| \int_{a'}^{b'} \alpha(t)x(t)\, dt \right| \leq \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)x(t)|\ dt = \int_{a'}^{b'} |\alpha(t)| \cdot |x(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \int_{a'}^{b'} \|\alpha(t)\| \cdot |x(t)|\, dt = \|\alpha\|_C \cdot \int_{a'}^{b'} |x(t)|\, dt \leq \|\alpha\|_C \cdot \|x\|_1 ,$$

откуда $\|f\| \leq \|\alpha\|_C$. Покажем, что эта оценка неулучшаема.
Пусть $t_0 \in [a', b']$ – то значение, для которого $\|\alpha\|_C = |\alpha(t_0)|$. Поскольку функция $|\alpha(t)|$ непрерывна, по любому $\varepsilon > 0$ найдётся отрезок $[a'', b''] \subset [a', b']$ в окрестности или полуокрестности t_0, на котором $\alpha(t)$ знакопостоянна и $\|\alpha\|_C - |\alpha(t)| \leq \varepsilon$.
Выберем $x \in \sigma_1(o)$ так, чтобы эта функция была локализована на $[a'', b'']$ и по знаку совпадала с $\alpha(t_0)$. Рассмотрим разность:

$$\Delta = \|\alpha\|_C - f(x) = \|\alpha\|_C - \int_{a'}^{b'} \alpha(t)x(t)\, dt =$$

$$= \|\alpha\|_C - \int_{a''}^{b''} \alpha(t) \operatorname{sign}\alpha(t_0)|x(t)|\, dt =$$

$$= \|\alpha\|_C \int_{a''}^{b''} |x(t)|\, dt - \int_{a''}^{b''} |\alpha(t)| \cdot |x(t)|\, dt =$$

$$= \int_{a''}^{b''} (\|\alpha\|_C - |\alpha(t)|)|x(t)|\, dt \leq \int_{a''}^{b''} \varepsilon |x(t)|\, dt = \varepsilon$$

Из полученной оценки вытекает, что $\|f\| = \|\alpha\|_C$.
Если на некотором отрезке $[a'', b'']$ выполнено равенство $|\alpha(t)| = \|\alpha\|_C$, то в этом случае $\Delta = 0$ и норма достигается. В противном случае $\Delta > 0$, норма не достигается.

Пространство $\tilde{L}_2[a,b]$:

$$|f(x)| = \left| \int_{a'}^{b'} \alpha(t)x(t)\, dt \right| \leq \sqrt{\int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|^2\, dt} \cdot \sqrt{\int_{a'}^{b'} |x(t)|^2\, dt} \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_{a'}^{b'} |\alpha(t)|^2\, dt} \cdot \|x\|_2 = \|\alpha\|_2 \cdot \|x\|_2 ,$$

откуда $\|f\| \leq \|\alpha\|_2$. Покажем, что оценка неулучшаемая, т.е. $\|f\| = \|\alpha\|_2$.
Выберем произвольное значение $\delta > 0$ и возьмём функцию $x_\delta(t)$ совпадающей с $\alpha(t)$ на $[a', b']$, а за пределами этого отрезка отличной от нуля лишь на промежутках суммарной длиной, не превышающей δ, при этом $|x_\delta(t)| \leq \|\alpha\|_C$. Для такой функции

$$|f(x_\delta)| = \left| \int_{a'}^{b'} \alpha(t) x_\delta(t)\, dt \right| = \int_{a'}^{b'} \alpha^2(t)\, dt = \|\alpha\|_2^2 ,$$

$$\|x_\delta\|_2^2 = \int_a^b x_\delta^2(t)\, dt \leq \int_{a'}^{b'} \alpha^2(t)\, dt + \|\alpha\|_C^2 \delta = \|\alpha\|_2^2 + \|\alpha\|_C^2 \delta$$

и тогда

$$\frac{|f(x_\delta)|}{\|x_\delta\|_2} \geq \frac{\|\alpha\|_2^2}{\sqrt{\|\alpha\|_2^2 + \|\alpha\|_C^2 \delta}} = \frac{\|\alpha\|_2}{\sqrt{1 + \delta \|\alpha\|_C^2 / \|\alpha\|_C^2}} ,$$

выражение в правой части выбором δ может быть сделано сколь угодно близким к $\|\alpha\|_2$.
Норма достигается в случае, если функция, равная $\alpha(t)$ на $[a', b']$ и нулю на $[a, b] \backslash [a', b']$, окажется непрерывной.

- Рассмотрим функционал $f(x) = x(t^*)$, где $x \in C[a, b]$, $t^* \in [a, b]$.
  Замечание. Этот функционал будем называть дельта-функционалом; название связано с тем, что в теории так называемых обобщённых функций он может быть записан в виде $f(x) = \int_a^b \delta(t - t^*) x(t)\, dt$, где δ – дельта-функция Дирака.
  Вычислим норму функционала: $|f(x)| = |x(t^*)| \leq \|x\|_C$, равенство достигается, например, на элементе $x(t) \equiv 1$ (или любом другом, принрмающем максимальное по модулю значение при $t = t^*$), поэтому $\|f\| = 1$.

Примеры неограниченных линейных функционалов и операторов.
Типичной ситуацией для таких функционалов и операторов является следующая: если мы их рассматриваем в банаховом (полном) пространстве, то их область определения не совпадает со всем пространством; если же область определения совпадает с пространством, то пространство неполное. Причину этого мы обсудим позже.

- Дельта-функционал в пространствах $\tilde{L}_p[a, b]$ (неполные пространства).
  Этот функционал неограничен: на единичном шаре, где $\int_a^b |x(t)|^p\, dt \leq 1$, значение $|x(t^*)|$ может быть сколь угодно большим.

- Оператор $A : \tilde{L}_p[a, b] \to C[a, b]$ вида $Ax = x$ неограничен по той же причине: на единичном шаре, где $\int_a^b |x(t)|^p\, dt \leq 1$, значение $\|x\| = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$ может быть сколь угодно большим.

- Оператор покомпонентного умножения в пространствах c_0, l_∞, l_p бесконечных последовательностей:
  $y = Ax$, $y_k = \alpha_k x_k$, где $\{\alpha_k\}$ – теперь уже неограниченная последовательность. Оператор неограничен на единичном шаре в любой из рассматриваемых норм, поскольку $Ae_k = \alpha_k e_k$, и $\|Ae_k\| = |\alpha_k|$ может быть сколь угодно большим. Область определения – те последовательности x, для которых $y = Ax$ лежит в том же пространстве.

- Оператор дифференцирования D: $Dx = \dot{x}$. Выше этот оператор трактовался как оператор из $C^1[a,b]$ в $C[a,b]$ и в таком качестве оказался ограниченным. Если же мы его рассмотрим как оператор из $C[a,b]$ в $C[a,b]$ с областью определения, совпадающей с $C^1[a,b]$, то такой оператор уже неограничен. В частности, элемент $x(t) = \sin \omega t$ при достаточно больших ω лежит на единичной сфере в $C[a,b]$, при этом для $(Dx)(t) = \dot{x}(t) = \omega \cos \omega t$ имеем $\|Dx\| = |\omega|$, при этом значение $|\omega|$ может быть выбрано сколь угодно большим.

Утверждение: ограниченный оператор переводит предкомпактное множество в предкомпактное, а компакт в компакт.
(Ограниченный линейный оператор равномерно непрерывен. Ранее было доказано, что непрерывные отображения (не обязательно линейные) переводят компакт в компакт, а равномерно непрерывные – предкомпактное множество в предкомпактное. Повторите рассуждение для случая линейного отображения.)

Компактный оператор. Оператор называется компактным, если образ произвольного ограниченного множества предкомпактен.

Альтернативное определение: образ произвольной ограниченной последовательности содержит фундаментальную подпоследовательность.

Утверждение: эти определения эквивалентны. (Было для случая отображений метрических пространств. Повторите.)

Утверждение: компактный оператор ограничен (и, следовательно, непрерывен). (Было для случая отображений метрических пространств. Повторите.)

Достатоное условие компактности линейного оператора: если образ единичного шара предкомпактен, то оператор компактен. (Докажите!)

Утверждение: единичный оператор компактен тогда и только тогда, когда пространство конечномерно. (Образ единичного шара – единичный шар, предкомпактный только в конечномерных пространствах.)

Примеры компактных операторов.

Оператор вложения $I : C^1[a,b] \to C[a,b]$, $Ix = x$. Образ ограниченного множества комрактен. Ограниченное множество в $C^1[a,b]$:
$\|x\|_{C^1} \leq M \Leftrightarrow \|x\|_C \leq M \wedge \|\dot{x}\|_C \leq M$.
Первое условие обеспечивает равномерную ограниченность, а второе равностепенную непрерывность, поскольку

$|t' - t''| < \varepsilon/M \Rightarrow |x(t') - x(t'')| = |\dot{x}(\tilde{t})| \cdot |t' - t''| < M \cdot \varepsilon/M = \varepsilon$
(по формуле конечных приращений).

Интегральный оператор Фредгольма.
Снова рассматриваем оператор:
$y = Ax$, $y(t) = \int_a^b K(t,s)x(s)\,ds$.
Докажем его компактность как оператора из $C[a,b]$ в $C[a,b]$. Для этого установим, что образ произвольного ограниченного множества предкомпактен. Согласно теореме Арцела-Асколи, предкомпактное множество в $C[a,b]$ равномерно ограничено и равностепенно непрерывно. Раномерная ограниченность (т.е. ограниченность в $C[a,b]$) вытекает из ограниченности оператора (была доказана). Осталось доказать равностепенную непрерывность для образа произвольного ограниченного множества, входящего в шар $\bar{S}_M(o)$ (для некоторого M).

$$|y(t') - y(t'')| = \left| \int_a^b K(t',s)x(s)\,ds - \int_a^b K(t'',s)x(s)\,ds \right| =$$
$$= \left| \int_a^b (K(t',s) - K(t'',s))x(s)\,ds \right| \le \int_a^b |(K(t',s) - K(t'',s))x(s)|\,ds =$$
$$= \int_a^b |K(t',s) - K(t'',s)| \cdot |x(s)|\,ds \le \int_a^b |K(t',s) - K(t'',s)| M\,ds$$

Функция $K(t,s)$ непрарывна на компакте $[a,b]\times[a,b]$ и, следовательно, равномерно непрерывна по теореме Кантора. Тогда
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \{\rho((t',s'),(t'',s'')) < \delta \Rightarrow |K(t',s') - K(t'',s'')| < \varepsilon/(M(b-a))\}$
В нашем случае $s' = s'' = s$, и $\rho((t',s),(t'',s)) = |t' - t''|$. Поэтому
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \{|t' - t''| < \delta \Rightarrow |K(t',s) - K(t'',s)| < \varepsilon/(M(b-a))\}$,
и тогда

$$|t' - t''| < \delta \Rightarrow |y(t') - y(t'')| \le \int_a^b |K(t',s) - K(t'',s)| M\,ds \le$$
$$\le \int_a^b \varepsilon/(M(b-a)) M\,ds = \varepsilon$$

Поскольку мы выбрали значение δ, общее для всех $x \in \bar{S}_M(o)$, тем самым мы доказали равностепенную непрерывность образа этого шара, а отсюда, с учётом ограниченности, следует предкомпактность.
Замечание. Поскольку множество, предкомпактное в $C[a,b]$, предкомпактно также и в $L_{1,2}[a,b]$, мы заодно доказали и компактность оператора Фредгольма с непрерывным ядром как оператора из $C[a,b]$ в эти пространства. Попробуйте доказать компактность оператора Фредгольма как оператора из $\tilde{L}_1[a,b]$ в $C[a,b]$.

Утверждение: непрерывный функционал компактен.
(Замечание: слово "линейный"в этом разделе иногда опускаем.)
Доказательство. Непрерывный функционал ограничен, переводит произвольное ограниченное множество в ЛНП в ограниченное множество на вещественной оси. Такое множество предкомпактно по теореме Больцано-Вейерштрасса.

Оператор конечного ранга – оператор, область значений которого конечномерна.
Ранг оператора – размерность области значений оператора.
Ненулевой функционал – оператор первого ранга, поскольку его область значений – поле $\mathbb{K}$ – можно трактовать как пространство размерности единица.
Общий вид оператора конечного ранга. Пусть ранг оператора равен n, тогда в его образе выберем базис $\{e_1, \dots, e_n)\}$. Образ произвольного элемента x – линейная комбинация базисных элементов $\{e_j)\}$ с коэффициентами, зависящими от x, т.е.
$Ax = f_1(x)e_1 + \dots + f_n(x)e_n\,.$
Утверждение: функционалы f_j – линейные. Действительно,
$A(\alpha x + \beta y) = f_1(\alpha x + \beta y)e_1 + \dots + f_n(\alpha x + \beta y)e_n\,.$
С другой стороны,
$A(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax+\beta Ay = \alpha(f_1(x)e_1+\dots+f_n(x)e_n)+\beta(f_1(y)e_1+\dots+f_n(y)e_n).$
Приравнивая коэффициенты при e_j, получаем:
$f_j(\alpha x + \beta y) = \alpha f_j(x) + \beta f_j(y)\,.$
Ограниченность оператора A эквивалентна ограниченность всех функционалов f_j.
Замечание: обычно, рассматривая операторы конечного ранга, подразумевают их ограниченность, так что слова "ограниченный" или "непрерывный" опускают.
Утверждение. Ограниченный оператор конечного ранга компактен. (Доказательство: образ произвольного ограниченного множества – ограниченное множество в конечномерном подпространстве, оно предкомпактно.)

Пример: оператор Фредгольма с $K(t, s) = u_1(t)v_1(s) + \dots + u_n(t)v_n(s)$.
Образ оператора лежит в линейной оболочке $L\{u_1, \dots, u_n\}$ (по крайней мере, не шире), ранг оператора не превосходит n.
Замечание. Если каждая из систем $\{u_1, \dots, u_n\}$ и $\{v_1, \dots, v_n\}$ линейно независима, то ранг оператора в точности равен n.

Семейство ограниченных операторов. Понятие о равномерной ограниченности семейства операторов. (Нам в первую очередь будут интересны последовательности операторов, т.е. семейства, нумеруемые натуральным индексом.)
В общем случае: $\{A_\alpha\}$, индекс α, нумерующий операторы семейства, может принадлежать произвольному множеству.
Семейство ограниченных операторов равномерно ограничено, если
$\exists M \forall \alpha : \|A_\alpha\| \le M.$

Ограниченность множества значений равномерно ограниченного семейства операторов на любом элементе: $\forall x \in X \forall \alpha : \|A_\alpha x\| \leq M\|x\|$.

Утверждение: если семейство линейных операторов равномерно ограничено хотя бы на каком-нибудь шаре, то оно равномерно ограничено.
(Была получена оценка:
если $\exists M \, \forall x \in \bar{S}_r(a) \, \forall \alpha : \|A_\alpha x\| \leq M$, то $\forall \alpha : \|A_\alpha\| \leq 2M/r$.)

Теорема Принцип равномерной ограниченности.

Если множество значений семейства ограниченных операторов на каждом элементе банахова пространства ограничено, то семейство операторов равномерно ограничено.
То есть: если $\forall x \in X \exists C(x) \forall \alpha : \|A_\alpha x\| \leq C(x)$, то $\exists M \forall \alpha : \|A_\alpha\| \leq M$.
Мы докажем, что если семейство ограниченных операторов *не является* равномерно ограниченным, то *не на каждом* элементе банахова пространства множество значений этого семейства ограничено. То есть:
$\{\forall M > 0 \, \exists \alpha : \|A_\alpha\| > M\} \Rightarrow \{\exists x \in X \forall C > 0 \, \exists \alpha : \|A_\alpha x\| > C\}$

Доказательство.

1. Мы знаем, что если семейство линейных операторов равномерно ограничено хотя бы на каком-нибудь шаре, то оно равномерно ограничено (по норме). Поэтому если семейство *не* является равномерно ограниченным, но оно не ограничено ни на каком шаре положительного радиуса (ни на открытом, ни на замкнутом).

2. Выберем какой-либо *замкнутый* шар $\bar{S}_{r_0}(a_0)$ с центром a_0 и радиусом $r_0 \leq 1$. На *открытом* шаре $S_{r_0}(a_0)$ семейство $\{A_\alpha\}$ неограничено. Поэтому найдётся точка $a_1 \in S_{r_0}(a_0)$ и оператор A_{α_1} такие, что $\|A_{\alpha_1} a_1\| \geq 1$.

3. Выберем *замкнутый* шар $\bar{S}_{r_1}(a_1)$ с центром найденной точке a_1 и радиусом r_1, удовлетворяющий трём условиям:
1) $r_1 \leq 1/2$, 2) $\bar{S}_{r_1}(a_1) \subset \bar{S}_{r_0}(a_0)$ и 3) $\forall x \in \bar{S}_{r_1}(a_1) : \|A_{\alpha_1} x\| \geq 1/2$.
Такой шар существует. Второму условию можно удовлетворить, поскольку a_1 – внутренняя точка открытого шара $S_{r_0}(a_0)$, принадлежащая ему, а, значит, и замкнутому шару $\bar{S}_{r_0}(a_0)$ вместе с некоторой окрестностью – открытым шаром с центром в a_1, который, в свою очередь, содержит замкнутый шар меньшего радиуса. Третьему условию можно удовлетворить потому, что $\|A_{\alpha_1} x\|$ – непрерывный функционал относительно x, поскольку это композиция непрерывного оператора A_{α_1} и непрерывного функционала нормы. Значение этого функционала в точке a_1 не меньше единицы, поэтому в силу непрерывности найдётся некоторая окрестность этой точки (открытый шар, а, значит, и лежащий в нём замкнутый меньшего радиуса), на которой значение этого функционала не меньше одной второй. Таким образом, каждому из этих трёх условий по отдельности, очевидно, удовлетворяет свой замкнутый шар, а взяв наименьший них, мы удовлетворим всем трём уловиям одновременно.

4. Семейство $\{A_\alpha\}$ неограничено на *открытом* шаре $S_{r_1}(a_1)$, поэтому найдётся точка $a_2 \in S_{r_1}(a_1)$ и оператор A_{α_2} такие, что $\|A_{\alpha_2} a_2\| \geq 2$. Тогда найдётся и замкнутый шар $\bar{S}_{r_2}(a_2)$ с центром в этой точке такой, что $r_2 \leq 1/4$, $\bar{S}_{r_2}(a_2) \subset \bar{S}_{r_1}(a_1)$ и во всех точках этого шара $\|A_{\alpha_2} x\| \geq 2/2 = 1$. Доказательство существования такого шара аналогично доказательству существования шара $\bar{S}_{r_1}(a_1)$.

5. Продолжив эту процедуру, мы последовательно строим последовательность операторов A_{α_k} и последовательность вложенных замкнутых шаров $\dots \supset \bar{S}_{r_k}(a_k) \supset \bar{S}_{r_{k+1}}(a_{k+1}) \supset \dots$ таких, что $r_k \leq 2^{-k}$, $\|A_{\alpha_k} a_k\| \geq k$ и $\forall x \in \bar{S}_{r_k}(a_k) : \|A_{\alpha_k} x\| \geq k/2$.

6. Поскольку наше пространство банахово (полное ЛНП), мы можем применить принцип вложенных шаров, согласно которому система вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет в полном метрическом пространстве единственную общую точку x^*. Поскольку $\forall k : x^* \in \bar{S}_{r_k}(a_k)$, справедливы неравенства $\|A_{\alpha_k} x^*\| \geq k/2$, что означает, что на элементе x^* множество значений семейства $\{A_\alpha\}$ неограничено. Теорема доказана.

Замечание. Для произвольных (нелинейных) отображений это не так. Ограниченность значений последовательности функций в каждой точке не влечёт равномерной ограниченности этой последовательности.

Замечание. Теорема в полной мере справедлива и для семейств ограниченных линейных функционалов.

Продолжение непрерывного оператора, заданного на плотном множестве.

Теорема. Пусть X – ЛНП, $\tilde{X}$ – всюду плотный линеал, Y – банахово пространство и $\tilde{A} : \tilde{X} \to Y$ – непрерывный на $\tilde{X}$ линейный оператор. Тогда существует единственный линейный оператор $A : X \to Y$, являющийся непрерывным продолжением $\tilde{A}$, т.е. $\forall \tilde{x} \in \tilde{X} : A(\tilde{x}) = \tilde{A}(\tilde{x})$ и A непрерывен на X, при этом $\|A\| = \|\tilde{A}\|$.

Замечание. Было доказательство существования и единственности непрерывного продолжения для равномерно непрерывного оператора (не обязательно линейного), заданного на плотном множестве, со значениями в полном МП. Поскольку непрерывный линейный оператор равномерно непрерывен, можно было бы воспользоваться результатами доказанной теоремы, и тогда осталось бы доказать линейность полученного расширения и совпадение норм. Тем не менее, чтобы не дробить доказательство, повторим его с начала.

Доказательство.

1. Поскольку множество $\tilde{X}$ плотно в X, произвольный элемент $x \in X$ является пределом последовательности элементов из $\tilde{X}$: $x = \lim_{k\to\infty} \tilde{x}_k$, где $\tilde{x}_k \in \tilde{X}$. Определим оператор A формулой $Ax = \lim_{k\to\infty} \tilde{A}\tilde{x}_k$

2. Докажем, что предел существует. Рассмотрим последовательность $y_k = \tilde{A}\tilde{x}_k \in Y$ и докажем её фундаментальность. Действительно, $\|y_k - y_m\| = \|\tilde{A}\tilde{x}_k - \tilde{A}\tilde{x}_m\| = \|\tilde{A}(\tilde{x}_k - \tilde{x}_m)\| \le \|\tilde{A}\| \cdot \|\tilde{x}_k - \tilde{x}_m\|$
Поскольку последовательность $\{\tilde{x}_k\}$ сходится, она фундаментальна, тогда фундаментальна и последовательность $\{y_k\}$. Поскольку пространство Y банахово, последовательнрость сходится.

3. Докажем, что предел определяется лишь элементом x и не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности.
Пусть $\{\tilde{x}'_k\}$ – ещё одна последовательность элементов из $\tilde{X}$, сходящаяся к x, а $y'_k = \tilde{A}\tilde{x}'_k$. Последовательности $\{\tilde{x}_k\}$ и $\{\tilde{x}'_k\}$, сходящиеся к одному и тому же пределу, эквивалентны. Докажем, что последовательности $\{y_k\}$ и $\{y'_k\}$ также эквивалентны. Действительно, $\|y'_k - y_k\| = \|\tilde{A}\tilde{x}'_k - \tilde{A}\tilde{x}_k\| = \|\tilde{A}(\tilde{x}'_k - \tilde{x}_k)\| \le \|\tilde{A}\| \cdot \|\tilde{x}'_k - \tilde{x}_k\| \to 0$, откуда вытекает, что пределы последовательностей $\{y_k\}$ и $\{y'_k\}$ совпадают. Корректность доказана.

4. Докажем, что оператор A является расширением (продолжением) оператора $\tilde{A}$, т.е. что на элементах из $\tilde{X}$ действие этих операторов совпадает.
Пусть $x \in \tilde{X}$, тогда в качестве аппроксимирующей можно взять постоянную последовательность, в которой $\tilde{x}_k = x$, и тогда $Ax = \lim_{k\to\infty} \tilde{A}x = \tilde{A}x$.

5. Докажем линейность оператора A. Пусть x и x' – элементы X, а $\{\tilde{x}_k\}$ и $\{\tilde{x}'_k\}$ – аппроксимирующие последовательности для этих элементов. Тогда $\{\alpha\tilde{x}_k + \beta\tilde{x}'_k\}$ – аппроксимирующая последовательность для элемента $\alpha x + \beta x'$, и поэтому

$$A(\alpha x + \beta x') = \lim_{k\to\infty} \tilde{A}(\alpha\tilde{x}_k + \beta\tilde{x}'_k) = \lim_{k\to\infty} (\alpha\tilde{A}\tilde{x}_k + \beta\tilde{A}\tilde{x}'_k) =$$
$$= \alpha \lim_{k\to\infty} \tilde{A}\tilde{x}_k + \beta \lim_{k\to\infty} \tilde{A}\tilde{x}'_k = \alpha Ax + \beta Ax'$$

6. Докажем ограниченность оператора A и получим верхнюю оценку для его нормы.
Пусть $\{\tilde{x}_k\}$ – аппроксимирующая последовательность для элемента x, тогда $\tilde{x}_k \to x$, $\tilde{A}\tilde{x}_k \to Ax$ и в силу непрерывности норм $\|\tilde{x}_k\| \to \|x\|$, $\|\tilde{A}\tilde{x}_k\| \to \|Ax\|$.
Выпишем неравенство для элементов аппроксимирующей последовательности: $\|\tilde{A}\tilde{x}_k\| \le \|\tilde{A}\| \cdot \|\tilde{x}_k\|$ и перейдём к пределу при $k \to \infty$. В результате получаем: $\|Ax\| \le \|\tilde{A}\| \cdot \|x\|$. Это означает, что оператор A ограничен (и непрерывен), и $\|A\| \le \|\tilde{A}\|$.

7. Получим нижнюю оценку для нормы оператора A и её значение.
Поскольку оператор A является расширением оператора $\tilde{A}$, справедливо неравенство $\|A\| \ge \|\tilde{A}\|$. Действительно,

$$\|\tilde{A}\| = \sup_{\|x\|\leq 1, x\in\tilde{X}} \|Ax\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1, x\in X} \|Ax\| = \|A\|$$

(супремум берётся по более широкому множеству). Тогда, учитывая полученную выше верхнюю оценку, получаем: $\|A\| = \|\tilde{A}\|$.

8. Построенный оператор является единственным непрерывным расширением оператора $\tilde{A}$, поскольку для любого такого расширения должно быть выполнено равенство
$Ax = \lim_{k\to\infty} A\tilde{x}_k = \lim_{k\to\infty} \tilde{A}\tilde{x}_k$

Замечание. Теорема в полной мере справедлива и для ограниченных линейных функционалов.

Замечание. Из теоремы следует, что при изучении линейного ограниченного оператора или функционала можно первоначально ограничиться анализом его действия на элементы плотного линеала, а далее переносить результат на всё пространство. Это бывает полезно и удобно, поскольку действие оператора на такие элементы може оказаться более простым, чем в общем случае. Например, для пространств, элементами которых являются бесконечные последовательности, в большинстве случаев в роли плотного линеала можно использовать множество обрывающихся последовательностей, для которых ряды превращаются в конечные суммы, и нет необходимости задумываться о сходимости таких рядов, возможности перестановки порядка суммирования и т.д. Для функциональных пространств в роли плотного множества могут выступать бесконечно гладкие функции (например, многочлены). В частности, в пространствах $L_p[a, b]$ можно брать множество гладких функций, обращающихся в нуль со всеми производными в окрестности границ отрезка (что особенно удобно при интегрировании по частям), либо, как альтернатива, множество кусочно постоянных функций (разрывных), принимающих конечное число значений (это тоже ниогда бывает полезно).

Следующая теорема касается продолжения функционала, заданного на подпространстве, на всё пространство с сохранением нормы. (Если он задан на незамкнутом линеале, следует предварительно его расширить на замыкание по непрерывности.) Предварительно – лемма об элементарном продолжении.

Лемма об элементарном продолжении.

Пусть X – вещественное ЛНП, $Y \subsetneq X$ – его нетривиальное (содержащее не только o) замкнутое подпространство, не совпадающее со всем пространством, и $x \in X\backslash Y$. Пусть на Y задан непрерывный линейный функционал f. Тогда существует непрерывный линейный функционал на прямой сумме Y и одномерного подпространства $\{\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}\}$, являющийся расширением f и имеющий ту же норму.
Замечание. Эта прямая сумма – линейная оболочка $L(Y, x)$.

Доказательство этой леммы – фейерверк удивительных идей и неожиданных поворотов мысли.

- Итак, уясним задачу. У нас есть подпространство Y и линейный ограниченный функционал f, определённый на этом подпространстве, при этом $\forall y \in Y : |f(y)| \leq \|f\| \cdot \|y\|$.
  У нас также есть элемент x, не лежащий в подпространстве Y, и мы хотим продолжить функционал на линейную оболочку $L(Y, x)$ элементы вида $\lambda x + y$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $y \in Y$, таким образом, чтобы норма такого расширенного функционала не превосходила норму исходного (а что уменьшиться эта норма не может, мы уже знаем).
  Любое расширение линейного функционала на такое множество определяется заданием значения функционала на элементе x:
  $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = \lambda c + f(y)$, где $c = f(x)$. Таким образом, задать расширение – это задать константу c. Наша задача – доказать, что каковы бы ни были ЛНП и функционал f, эту константу всегда можно выбрать таким образом, чтобы при всех значениях $\lambda \in \mathbb{R}$ и $y \in Y$ выполнялось неравенство $|\lambda c + f(y)| \leq \|f\| \cdot \|\lambda x + y\|$.

- Сделаем первый шаг – избавимся от множителя λ.
  Если $\lambda = 0$, то неравенство выполнено при любом значении c.
  Если $\lambda \neq 0$, то поделим обе части неравенства на $|\lambda|$. В результате, с учётом линейности функционала, получаем:
  $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall \lambda \neq 0\, \forall y \in Y : |c + f(y/\lambda)| \leq \|f\| \cdot \|x + y/\lambda\|$
  Но при всевозможных $\lambda \neq 0$ и $y \in Y$ элемент y/λ пробегает то же самое подпространство Y, что и y. Поэтому мы можем упростить условие, заменив y/λ на y:
  $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall y \in Y : |c + f(y)| \leq \|f\| \cdot \|x + y\|$.

- Следующий шаг: превращаем неравенство для модуля в двойное неравенство для c:
  $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall y \in Y : -\|f\| \cdot \|x + y\| \leq c + f(y) \leq \|f\| \cdot \|x + y\|$
  и далее
  $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall y \in Y : -\|f\| \cdot \|x + y\| - f(y) \leq c \leq \|f\| \cdot \|x + y\| - f(y)$

- Следующий момент ключевой: ”раздвоение” игрека. Мы переписываем последнее двойное неравенство в виде:
  $\exists c \in \mathbb{R}\, \forall y_{1,2} \in Y : -\|f\| \cdot \|x + y_1\| - f(y_1) \leq c \leq \|f\| \cdot \|x + y_2\| - f(y_2)$
  Действительно, двойное неравенство – это система двух неравенств на c, каждое из которых должно выполняться при любом значении элемента $y \in Y$. Оттого, что для этого элемент в каждом из неравенств мы использовали своё обозначение, по сути ничего не изменилось.

- А теперь следующий шаг: изымаем центральную часть неравенства, константу c, и оставляем крайние:
  $\forall y_{1,2} \in Y : -\|f\| \cdot \|x + y_1\| - f(y_1) \leq \|f\| \cdot \|x + y_2\| - f(y_2)$
  Удивительный поворот: мы стремились доказать, что существует константа c, удовлетворяющая двойному неравенству, а пришли к нера-

венству, в котором этой константы нет! В чём смысл? Смысл здесь вот какой.
Левая часть неравенства при всевозможных $y_1 \in Y$ пробегает некоторое числовое множество, для которого константа c должна быть верхней гранью. Одновременно правая часть неравенства при всевозможных $y_2 \in Y$ пробегает другое числовое множество, для которого константа c должна быть уже нижней гранью. В каком случае такое возможно? В том случае, если точная верхняя грань "левого" множества не превосходит точной нижней грани "правого". А это будет так при условии, если ни один элемент "левого" множества не превосходит какого-либо элемента "правого". Поэтому выполнение последнего неравенства, не содержащего константу c, на самом деле гарантирует нам её существование.

- Теперь преобразовываем последнее неравенство, которое нам нужно доказать. Слагаемые с функционалом переносим налево, слагаемые с нормами направо:
  $\forall y_{1,2} \in Y : f(y_2) - f(y_1) \leq \|f\| \cdot \|x + y_1\| + \|f\| \cdot \|x + y_2\|,$
  или
  $\forall y_{1,2} \in Y : f(y_2 - y_1) \leq \|f\| \cdot (\|x + y_1\| + \|x + y_2\|)$
  Обратите внимание: выражение слева "живёт" на подпространстве Y и никак не связано с объемлющим пространством, ничего не знает о том, какая там норма за пределами Y и не содержит элемента x. Таким образом, нужно доказать, что каким бы ни был элемент x и как бы ни была устроена норма в объемлющем пространстве (эта норма присутствует в правой части) неравенство должно выполняться. Как ни удивительно, это действительно так.

- Итак, оцениваем левую часть:
  $f(y_2 - y_1) \leq \|f\| \cdot \|y_2 - y_1\| = \dots$
  От функционала осталась норма, которая присутствует и в правой части, но теперь нужно каким-то образом включить в это выражение элемент x, которого там до сих пор не было. Делается это так:
  $\|f\| \cdot \|y_2 - y_1\| = \|f\| \cdot \|(y_2 + x) - (y_1 + x)\| \leq \|f\| \cdot (\|x + y_1\| + \|x + y_2\|)$
  Воспользовались неравенством треугольника, которое позволило поставить точку в доказательстве.

Теорема Хана-Банаха.
Пусть X – вещественное ЛНП, $Y \subsetneq X$ – его нетривиальное (содержащее не только o) подпространство, не совпадающее со всем пространством. Пусть на Y задан непрерывный функционал f. Тогда существует непрерывный линейный функционал на X, являющийся расширением f и имеющий ту же норму.

Доказательство проведём для случая сепарабельного пространства. В этом пространстве найдётся счётное плотное множество $Q = \{x_1, x_2, \dots\}$.

Первый шаг – продолжение функционала с сохранением нормы на линейную оболочку $L(Y, Q)$ последовательным применением леммы об элементарном продолжении: сначала продолжаем на $L(Y, x_1)$, затем на $L(Y, x_1, x_2)$ и т.д. Если окажется, что какой-то элемент x_m уже содержится в $L(Y, x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$, то этот шаг пропускаем. Таким образом, мы сможем, в частности, вычислить значение функционала на каждом из элементов множества Q, выполнив конечное (для каждого из элементов своё) число шагов расширения функционала.

Поскольку множество Q всюду плотное, тем более будет всюду плотной линейная оболочка $L(Y, Q) \supset Q$. Таким образом, мы получили ограниченный функционал, определённый на плотном линеале. Следующий шаг – продолжение функционала на всё пространство по непрерывности, существование и единственность которого следует из доказанной выше теоремы.

Замечание. Доказательство теоремы в случае несепарабельных пространств требует использования леммы Цорна.

Замечание. На полунормированных пространствах рассуждения те же самые.

Замечание. Существует обобщение теоремы Хана-Банаха на комплексные ЛНП – теорема Сухомлинова.

Замечание. На операторы теорема не обобщается.