Раздел 7. Линейные операторы в ЛНП

Лекция 15 Сопряжённый пространства и сопряжённые операторы.

Напоминание: пространством X^*, сопряжённым к ЛНП X, называется ЛНП линейных ограниченных функционалов над X: $X^* = L_O(X, \mathbb{R})$.

Замечание. Мы рассматриваем случай вещественных пространств.

Замечание. Иногда выражение $f(x)$ записывают в симметричном виде: $f(x) =< x, f >$.

Утверждение. $\forall x \in X : f(x) = 0 \Rightarrow f = o$. Это определение нулевого функционала.

Утверждение. $\forall f \in X^* : f(x) = 0 \Rightarrow x = o$. То есть если значение всех непрерывных функционалов на некотором элементе равно нулю, то этот элемент может быть только нулевым.
Докажем, что для произвольного ненулевого элемента $x \in X$ найдётся $f \in X^*$ такой, что $f(x) \neq 0$. Рассмотрим одномерное подпространство $L(x) = \{\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Зададим на нём функционал f по правилу $f(x) = \|x\|$, тогда $f(\alpha x) = \alpha\|x\|$. Функционал непрерывен, его норма равна 1. По теореме Хана-Банаха его можно продолжить на всё пространство с сохранением нормы, тогда результирующий функционал будет элементом сопряжённого пространства, не зануляющимся на x.

Замечание. Если $f(x) = 0$, то говорят, что элементы $x \in X$ и $f \in X^*$ взаимно ортогональны.

Утверждение: $\|x\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |f(x)|$
Действительно $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, а в случае $\|f\| = 1$ получаем $|f(x)| \leq \|x\|$. С другой стороны, только что доказано, что существует функционал с единичной нормой, для которого неравенство превращается в равенство.

Сравним с определением нормы функционала: $\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|$
Есть очевидная симметрия, но неполная: в предыдущем случае супремум всегда достигается, так что его можно заменить максимумом. В случае функционала норма может не достигаться.

Теперь мы можем получить ещё одну формулу для нормы оператора: $\|A\| = \sup_{\|f\|\leq 1, \|x\|\leq 1} |f(Ax)|$

Типы сходимости в пространствах операторов, функционалов и в исходном ЛНП.

Мы знаем обычную сходимость (по норме) в исходном пространстве X, сходимость по норме (т.е. равномерную) в пространствах $L_O(X, Y)$ и, в частности, в X^*, а также поточечную сходимость в $L_O(X, Y)$ и X^* (в X^* она именуется слабой сходимостью). Введём понятие слабой сходимости в исходном пространстве X.

Говорят, что последовательность элементов $(x_1, x_2, \dots)$ слабо сходится к элементу x_*, если $\forall f \in X^* : f(x_m) \to f(x)$.

Если последовательность сходится в обычном смысле (сильно, по норме), то она сходится и слабо. Обратное неверно.

Примеры.

Говорят, что последовательность операторов A_m слабо сходится к A, если на любом элементе $x \in X$ последовательность $A_m x$ слабо сходится к Ax (в пространстве Y). То есть:
$\forall x \in X \, \forall f \in Y^* : f(A_m x) \to f(Ax)$.

Пример.

Утверждение: в пространстве $L_O(X, Y)$ из сходимости последовательности операторов по норме (равномерной) следует поточечная (её ещё называют сильной – по сравнению со слабой), а из последней, в свою очередь, слабая. В исходном пространстве X из сходимости по норме (сильной) следует слабая. В пространстве X^* из сходимости по норме (сильной, равномерной) следует поточечная (слабая).

Есть некоторое несоответствие в терминологии: для функционалов сильная сходимость – это равномерная, а слабая – поточечная, а для операторов сильная – это поточечная, она сильнее слабой, но слабее равномерной.

Второе сопряжённое пространство X^{**} – пространство, сопряжённое к X^*.
Существует естественное вложение X в X^{**}: каждый элемент $x \in X$ задаёт функционал φ_x над X^* по правилу $\varphi_x(f) = f(x)$.
Норма этого функционала равна
$\|\varphi_x\| = \sup_{\|f\|=1} |\varphi_x(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(x)| = \|x\|$,
т.е. вложение изометрическое. Пишут: $X \subset X^{**}$ (в том смысле, что X^{**} содержит изометрическую копию X).
Если $X = X^{**}$, то пространство X называется рефлексивным, если $X \subsetneq X^{**}$, то нерефлексивным.

Утверждение: X рефлексивно $\Leftrightarrow$ X^* рефлексивно. (доказать)

Замечание. Если существует функционал $f \in X^*$, норма которого не достигается, то пространство нерефлексивно (доказать).

Примеры.

1. Общий вид линейного функционала на $\mathbb{R}^n$.
2. Общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathbb{R}^n_{\max}$, его норма.
3. Общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathbb{R}^n_1$, его норма.
4. Общий вид линейного ограниченного функционала на c_0, его норма.
5. Общий вид линейного ограниченного функционала на l_1, его норма.
6. Общий вид линейного ограниченного функционала на c.
7. Общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathbb{R}^n_2 = E^n$, его норма.

8. Общий вид линейного ограниченного функционала на l_2, его норма.

Сопряжённые показатели.

Положительные числа p и q называются сопряжёнными показателями, если выполняются следующие, эквивалентные дркг другу, равенства:

$$(p-1)(q-1) = 1$$
$$p + q = pq$$
$$p = \frac{q}{q-1} \qquad q = \frac{p}{p-1}$$
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Примеры: 3 и 3/2, 4 и 4/3, 5 и 5/4, 10 и 10/9, 100 и 100/99. Один из показателей лежит на полуинтервале $(1, 2]$, другой на луче $[2, \infty)$. Особый случай равенства показателей: 2 и 2.

Неравенство Юнга.

$$uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

Геометрическое доказательство (кривая $v = u^{p-1}$ или $u = v^{q-1}$ разделяет первый квадрент, рассмотреть площади, отсекаемые вертикалью и горизонталью)
Аналитическое доказательство: функция ln выпукла вверх, неравенство Йенсена при $\alpha = 1/p$, $\beta = 1/q$:

$$\ln\left(\frac{a}{p} + \frac{b}{q}\right) \geq \frac{\ln a}{p} + \frac{\ln b}{q} = \ln\left(a^{1/p} b^{1/q}\right)$$
$$u = a^{1/p} \qquad v = b^{1/q}$$
$$\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq uv$$

Равенство при $a = b$, т.е. при $u^p = v^q$.

Неравенство Гёльдера для конечных последовательностей.

Рассмотрим n-мерные вектора $u = (u_1, \ldots, u_n)$ и $v = (v_1, \ldots, v_n)$ с неотрицательными компонентами, удовлетворяющие условиям нормировки:
$\sum_{j=1}^n u_j^p = \sum_{j=1}^n v_j^q = 1$. Запишем для каждой пары компонент неравенство Юнга $u_j v_j \leq u_j^p/p + v_j^q/q$ и просуммируем по j:

$$\sum_{j=1}^n u_j v_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\frac{u_j^p}{p} + \frac{v_j^q}{q}\right) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^n u_j^p + \frac{1}{q}\sum_{j=1}^n v_j^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Неравенство превращается в равенство при $u_j^p = v_j^q$.

Пусть теперь $x = (x_1, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, \dots, y_n)$ – n-мерные вектора с неотрицательными компонентами. Представим их в виде $x = Au$, $y = Bv$, где u и v удовлетворяют условиям нормировки. Тогда
$\sum_{j=1}^n x_j^p = A^p \sum_{j=1}^n u_j^p = A^p$,
$\sum_{j=1}^n y_j^q = B^q \sum_{j=1}^n v_j^q = B^q$,
т.е.
$A = \left(\sum_{j=1}^n x_j^p\right)^{1/p}$, $B = \left(\sum_{j=1}^n y_j^q\right)^{1/q}$.
Отсюда
$\sum_{j=1}^n x_j y_j = AB \sum_{j=1}^n u_j v_j \le AB$.
Неравенство превращается в равенство, если вектора с компонентами x_j^p и y_j^q отличаются множителем.

Откажемся от предположения о неотрицательности компонент векторов x и y и применим полученное неравенство к их абсолютным величинам. Тогда
$\left|\sum_{j=1}^n x_j y_j\right| \le \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot |y_j| \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q}$.
Неравенство превращается в равенство, если вектора с компонентами $|x_j|^p \operatorname{sign} x_j$ и $|y_j|^q \operatorname{sign} y_j$ отличаются множителем.

Полученное неравенство носит название неравенства Гёльдера.

(Замечание. Можно вектора счистать комплексными, ничего не изменится.)

Частным случаем этого неравенства при $p = q = 2$ является неравенство Коши-Буньковского-Шварца.

9. Общий вид линейного ограниченного функционала на $\mathbb{R}_p^n$, его норма.

Неравенство Гёльдера для бесконечных последовательностей.

Обобщим неравенство Гёльдера на бесконечные последовательности. Пусть x и y – последовательности, для которых сходятся ряды из p-х и q-х степеней модулей соответственно:
$\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p < \infty$, $\sum_{j=1}^\infty |y_j|^q < \infty$.
Тогда
$\sum_{j=1}^n |x_j y_j| \le \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^q\right)^{1/q} \le$
$\le \left(\sum_{j=1}^\infty |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^\infty |y_j|^q\right)^{1/q} < \infty$.
Это значит, что ряд с неотрицательными членами $\sum_{j=1}^\infty |x_j y_j|$ сходится, поскольку его частичные суммы ограничены в совокупности, а ряд $\sum_{j=1}^\infty x_j y_j$ сходится абсолютно.

Теперь мы можем перейти к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве Гёльдера и получить неравенство Гёльдера для рядов:

$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j y_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j|^q\right)^{1/q}.$

10. Общий вид линейного ограниченного функционала на l_p, его норма.

    Неравенство Гёльдера для функций.

11. Общий вид линейного ограниченного функционала на $L_p[a, b]$, его норма (без доказательства общности).

12. Общий вид линейного ограниченного функционала на $C[a, b]$, его норма (без доказательства). Понятие об обобщённых функциях.

Сопряжённый оператор.

Пусть $A : X \to Y$, $f \in Y^*$. Рассмотрим $f(Ax)$ как функционал над X: $f(Ax) = g(x)$. Ограниченный:
$|g(x)| = |f(Ax)| \leq \|f\| \cdot \|Ax| \ \leq \|f\| \cdot \|A| \ \cdot \|x\| \Rightarrow \|g\| \leq \|f\| \cdot \|A\|$.
Тогда $g \in X^*$.
Зафиксируем A и будем рассматривать зависимость g от f. Отображение $A^* : f \mapsto g$ называется сопряжённым оператором.

Утверждение: A^* – линейное отображение. (доказать)

Утверждение: $A^* : Y^* \to X^*$ – ограниченный оператор, и $\|A^*\| \leq \|A\|$ (поскольку $\|g\| \leq \|A\| \cdot \|f\|$).

Докажем, что есть равенство:
$\|A^*\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \|A^* f\| = \sup_{\|f\| \leq 1} \sup_{\|x\| \leq 1} |(A^* f)(x)| =$
$= \sup_{\|x\| \leq 1} \sup_{\|f\| \leq 1} |f(Ax)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| = \|A\|$.