01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 8

Основные дискретные распределения

Основные дискретные распределения

Равномерное дискретное распределение

ξ	1	2	$\ldots$	n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

где $p_k = \dfrac{1}{n},\ k = 1,\ldots,n.$

Характеристики:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n}\left(k\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right) = \frac{1}{n}\frac{(n+1)n}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{n}k^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2n^2+3n+1}{6} - \frac{n^2+2n+1}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

$$W_\xi(s) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n}s^k\right) = \frac{s}{n}(1+s+\ldots+s^{n-1}) = \frac{s}{n}\frac{1-s^n}{1-s}.$$

Основные дискретные распределения

Распределение Бернулли

ξ	0	1
P	q	p

где $q=1-p$.

Характеристики:

$M\xi = p$.

$M\xi^2 = p$.

$D\xi = p - p^2 = p(1-p) = pq$.

$W_\xi(s) = q\cdot 1 + ps = q + ps$.

Это распределение применяется при рассмотрении одного испытания с вероятностью удачи p: $\xi=1$ **в случае удачного испытания и** $\xi=0$ **в случае неудачного испытания.**

Основные дискретные распределения

Биноминальное распределение

ξ	0	1	$\dots$	n
P	p_0	p_1	$\dots$	p_n

где $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k=0,\dots,n, 0<p\le 1, q=1-p$.

Случайную величину ξ **можно рассматривать, как число удач в** n **независимых испытаниях, где** p **– вероятность успеха в одном испытании.**

При расчёте характеристик удобно представить ξ **в виде суммы независимых одинаково распределенных с.в.** $\xi = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$, **где** $\varepsilon_i = 1$ **с вероятностью** p **в случае удачи в** i **испытании и** $\varepsilon_i = 0$ **в случае неудачи в** i **испытании (с вероятностью** $q = 1-p$**). Получаем:**

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} M\varepsilon_i = np,\ D\xi = \sum_{i=1}^{n} D\varepsilon_i = npq,\ W_\xi(s) = (q+ps)^n.$$

Основные дискретные распределения

Геометрическое распределение I

ξ	0	1	$\ldots$
P	p_0	p_1	$\ldots$

где $p_k = p \cdot q^k,\ k = 0,1,\ldots,\ 0 < p < 1,\ q = 1 - p.$

Случайную величину ξ **можно рассматривать, как число неудач до первой удачи при независимых испытаниях, где** p **– вероятность удачи в одном испытании.**

Характеристики:

$$W_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p s^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qs)^k = \frac{p}{1-qs};$$

$$M\xi = W'_\xi(1) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}; \quad W''_\xi(1) = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = 2\left(\frac{q}{p}\right)^2;$$

$$D\xi = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(p+q)}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Основные дискретные распределения

Геометрическое распределение II

η	1	2	$\ldots$
P	p_1	p_2	$\ldots$

где $p_k = p \cdot q^{k-1}, k = 1,2,\ldots, 0 < p < 1, q = 1 - p$.

Случайную величину η **можно рассматривать, как номер первой удачи при независимых испытаниях, где** p **– вероятность удачи в одном испытании. При этом** $\eta = \xi + 1$, **где** ξ **имеет геометрическое распределение I.**

Характеристики:

$$W_\eta(s) = sW_\xi(s) = \frac{ps}{1-qs};$$

$$M\eta = M\xi + 1 = \frac{q}{p} + 1 = \frac{1}{p}; \quad D\eta = D\xi = \frac{q}{p^2}.$$

Основные дискретные распределения

Распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \;\; k = 0,1,\ldots,$$

Проверка: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = e^{\lambda} e^{-\lambda} = 1.$

Характеристики:

$$W_\xi(s) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = e^{\lambda s} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)};$$

$$M\xi = W'_\xi(1) = \left[\lambda e^{\lambda(s-1)} \right] \Big|_{s=1} = \lambda;$$

$$W''_\xi(1) = \lambda^2;$$

$$D\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$