МИРЭА
Российский технологический университет

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 13

Функции непрерывных случайных векторов

Функции непрерывных случайных векторов

Пусть $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ – непрерывный случайный вектор

с плотностью $f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)$.

Распределение $\eta=\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)$:

$$F_\eta(y)=P(\eta\le y)=P(\varphi(\xi_1,\ldots,\xi_n)\le y)=P((\xi_1,\ldots,\xi_n)\in D_y)=$$
$$=\int\ldots\int_{D_y} f_{\xi_1,\ldots,\xi_n}(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

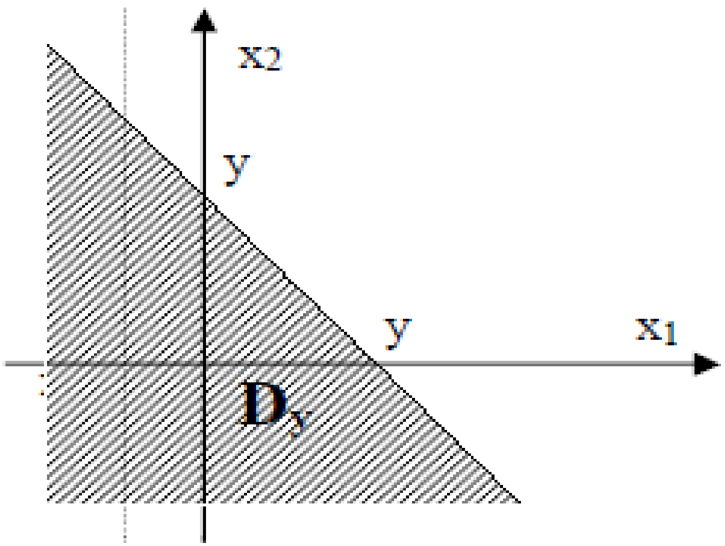
где $D_y=\{(x_1,\ldots,x_n)\in R^n \mid \varphi(x_1,\ldots,x_n)\le y\}$.

Функции непрерывных случайных векторов

$(\xi_1, \xi_2)-$ непрерывный случайный вектор с плотностью $f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)$

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 \Rightarrow F_\eta(y) = P(\xi_1 + \xi_2 \le y) =$$

$$= \iint_{D_y} f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2, \text{ где } D_y = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \le y\}$$



Функции непрерывных случайных векторов

$$F_{\eta}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{-\infty}^{y-x_1}f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)dx_2=\left\{\begin{aligned}x_1+x_2&=u\\x_2&=u-x_1\\dx_2&=du\end{aligned}\right\}=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{-\infty}^{y}f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,u-x_1)du=\int_{-\infty}^{y}du\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,u-x_1)dx_1$$

$$f_{\eta}(y)=\frac{d}{dy}F_{\eta}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,y-x_1)dx$$

Функции непрерывных случайных векторов

Если ξ_1 и ξ_2 – независимые непрерывные

случайные величины, то

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=f_{\xi_1}(x_1)\cdot f_{\xi_2}(x_2)$$

$$f_{\xi_1+\xi_2}(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x_1)\cdot f_{\xi_2}(y-x_1)\,dx_1=(f_{\xi_1}*f_{\xi_2})(y)$$

т.е. плотность суммы независимых непрерывных

случайных величин равна свертке плотностей.

МИРЭА
Российский технологический университет

Функции непрерывных случайных векторов

Пусть ξ_1 и ξ_2 − независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0,1]$. Тогда случайный вектор (ξ_1,ξ_2) равномерно распределён в единичном квадрате $[0,1]\times[0,1]$.

Рассмотрим функцию случайного вектора $\eta=\xi_1+\xi_2$.

Найдём функцию распределения случайной величины η:

$$F_\eta(y)=P(\eta\le y)=P(\xi_1+\xi_2\le y)=P((\xi_1,\xi_2)\in D_y),$$

где $D_y=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1+x_2\le y\}$.

Функции непрерывных случайных векторов

Получаем

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \le 0; \\ \dfrac{y^2}{2}, 0 < y \le 1; \\ 1 - \dfrac{(2-y)^2}{2}, 1 < y < 2; \\ 1, 2 \le y. \end{cases}$$

Функции непрерывных случайных векторов

Поэтому плотность распределения η равна

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty); \\ y, 0 < y \leq 1; \\ 2 - y, 1 < y < 2. \end{cases}$$