01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 14

Характеристические функции

Характеристические функции

Характеристическая функция случайной величины ξ:

$$g_\xi(t) = Me^{it\xi} = M(\cos t\xi) + iM(\sin t\xi).$$

Если ξ — дискретная случайная величина и $p_k = P(\xi = x_k)$,

то $g_\xi(t) = \sum\limits_k e^{itx_k} p_k = \sum\limits_k \cos(tx_k) p_k + i\sum\limits_k \sin(tx_k) p_k$.

Если ξ — непрерывная случайная величина с плотностью

$f_\xi(x)$, то $\quad g_\xi(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)dx$.

Характеристические функции

Свойства $g_\xi(t)$:

1) $|g_\xi(t)| \le 1$ при $t \in (-\infty, +\infty)$;

$g_\xi(0) = 1; \quad g_\xi(-t) = \overline{g_\xi(t)}$

2) $\eta = k\xi + b \Rightarrow g_\eta(t) = e^{itb} g_\xi(kt)$;

3) ξ_1 и ξ_2 — независимы $\Rightarrow g_{\xi_1+\xi_2}(t) = g_{\xi_1}(t) g_{\xi_2}(t)$;

4) $M\xi = -ig_\xi'(0); \quad D\xi = (g_\xi'(0))^2 - g_\xi''(0)$;

5) если ξ — непрерывная случайная величина с плотностью

$f_\xi(x)$, то $\quad f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g_\xi(t)\,dt$.

Характеристические функции

Равномерное непрерывное распределение на (a,b)

ξ — равномерно распределена на (a,b)

$$g_\xi(x) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{itx}\,dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$$

$$g_\xi(t) = \frac{\lambda}{-it+\lambda} = \frac{1}{1-ibt} = (1-ibt)^{-1}$$

где $b = \frac{1}{\lambda} = M\xi$.

Характеристические функции

Нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$:

рассмотрим $\xi^* = \dfrac{\xi - a}{\sigma}$, $\xi = \sigma \cdot \xi^* + a$,

ξ^* имеет нормальное распределение $N(0,1)$,

$$g_{\xi^*}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$g_{\xi}(t) = e^{ita} g_{\xi^*}(\sigma \cdot t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Характеристические функции

Гамма–распределение $\gamma(\alpha,\lambda)$:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}, x>0\end{cases}$$

$f_\xi(x)$ — оригинал,

$$f_\xi(x)\div\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)}{(p+\lambda)^\alpha}=\left(\frac{\lambda}{p+\lambda}\right)^\alpha=$$

$$=(1+bp)^{-\alpha},\quad b=\frac{1}{\lambda}.$$

МИРЭА Российский технологический университет

Характеристические функции

Распределение $\chi^2(n) = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \end{cases},$$

$$g_\xi(t) = (1-2it)^{-n/2}.$$