Центр дистанционного обучения
образование в стиле hi tech

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

МИРЭА
Российский технологический университет

ЛЕКЦИЯ 15

Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема

Последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится к случайной величине η, если $\lim\limits_{k\to\infty} F_{\xi_k}(x) = F_{\eta}(x)$ во всех точках x, в которых $F_{\eta}(x)$ непрерывна.

Обозначение: $\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{w} \eta$.

$$\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{w} \eta \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} g_{\xi_k}(t) = g_{\eta}(t)$$

Центральная предельная теорема

Нормированная случайная величина ξ^* для случайной величины ξ

$$\xi^* = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}.$$

Свойства:

1) $M\xi^* = 0$

2) $D\xi^* = M(\xi^*)^2 = 1$

Центральная предельная теорема

Теорема Линдеберга-Леви

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины.

Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$.

Тогда

$$S_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{w} \eta \sim N(0,1) .$$

Центральная предельная теорема

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Пусть ξ_n — число удач в n независимых испытаниях, p — вероятность удачи в одном испытании, $q = 1 - p$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(C_1 \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \le C_2\right) = \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Центральная предельная теорема

Следствие 1:

$$P\left(C_1 \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \le C_2\right) \approx \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \Phi(C_2) - \Phi(C_1) = \Phi_0(C_2) - \Phi_0(C_1),$$

где $\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi_0(t)dt$,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)\,dt = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$$

Центральная предельная теорема

Следствие 2:

$$P(k_1 \le \xi_n \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Центральная предельная теорема

Следствие 3:

$$\nu_n = \frac{\xi_n}{n} \Rightarrow P\left(\left|\nu_n - p\right| \le \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 = 1 - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$