МИРЭА
Российский технологический университет

Теория вероятностей и математическая статистика Часть 1

Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

МИРЭА
Российский технологический университет

Направление подготовки бакалавров 01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Профили подготовки

«Математическое моделирование и вычислительная математика»
«Системное программирование и компьютерные технологии»

Формируемые компетенции:

- способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований;
- знание принципов решения вероятностных задач с использованием стандартных программных средств;
- владение навыками построения стохастических моделей для исследования случайных явлений.

ЛЕКЦИЯ 1

Основные понятия теории вероятностей

Основные понятия теории вероятностей

Случайное событие – результат (исход) некоторого испытания (эксперимента, наблюдения), который может осуществиться или не осуществиться.

Элементарное событие (элементарный исход) нельзя разделить на события, которые могут осуществиться.

Пространство элементарных событий Ω – множество всех элементарных событий (исходов).

Каждое элементарное событие (исход) ω – элемент Ω, $\omega \in \Omega$.

Каждое событие A – подмножество Ω, $A \subseteq \Omega$. Событие A произошло, когда осуществился некоторый элементарный исход ω, который входит в A, $\omega \in A$.

Ω также называют достоверным событием.

Невозможное событие $\varnothing$ не содержит в себе ни одного элементарного события.

Операции над событиями

Противоположное событие

$$\overline{A}=\left\{\omega\in\Omega \middle| \omega\notin A\right\}$$

Произведение событий

$$AB=\left\{\omega\in\Omega \middle| \omega\in A \text{ и } \omega\in B\right\}$$

Сумма событий

$$A+B=\left\{\omega\in\Omega \middle| \omega\in A \text{ или } \omega\in B\right\}$$

Разность событий

$$A-B=A\cdot\overline{B}$$

Симметрическая разность событий

$$A\Delta B=\left(A\setminus B\right)+\left(B\setminus A\right)=A+B-AB$$

Сравнение терминов теории вероятностей и теории множеств

Теория множеств	*Теория вероятностей*
1. Ω – множество	1. Ω – достоверное событие
2. $\omega\in\Omega$ – элементы	2. $\omega\in\Omega$ – элементарные исходы
3. $A\subseteq\Omega$ – подмножество	3. $A\subseteq\Omega$ – событие
4. $\overline{A}$ – дополнение	4. $\overline{A}$ – противоположное событие
5. $A\cap B$ – пересечение	5. AB – произведение событий
6. $A\cup B$ – объединение	6. $A+B$ – сумма событий
7. $\varnothing$ – пустое множество	7. $\varnothing$ – невозможное событие
8. $A\cap B=\varnothing \Rightarrow A$ *и* B – непересекающиеся множества	8. $AB=\varnothing \Rightarrow A$ *и* B – несовместные события

Свойства операций над событиями

Ассоциативность

$(A+B)+C=A+(B+C)$ – **ассоциативность сложения**

$(AB)C=A(BC)$ – **ассоциативность умножения**

Коммутативность

$A+B=B+A$ – **коммутативность сложения**

$AB=BA$ – **коммутативность умножения**

Закон двойного отрицания $\overline{\overline{A}}=A$

Дистрибутивность

а) **умножения по отношению к сложению**

$A(B+C)=AB+AC$

б) **сложения по отношению к умножению**

$A+BC=(A+B)(A+C)$

Законы де Моргана $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

Вероятностное пространство

Множество событий $\mathcal{A}$ называется σ-алгеброй, если выполнены следующие условия:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$

3) $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Отображение $\mathrm{P} : \mathcal{A} \to \boldsymbol{R}$ **называется вероятностью, если**

1) для любого $A \in \mathcal{A} \quad 0 \le \mathrm{P}(A) \le 1$ **и** $\mathrm{P}(\Omega) = 1$

2) $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, 2, \ldots)$; $\quad A_i A_j = \varnothing$ $(i \ne j) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mathrm{P}\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$$

Тройка $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ **называется вероятностным пространством.**

Основные свойства вероятности

1. $\mathrm{P}(\varnothing)=0$

2. $\mathrm{P}(\overline{A})=1-\mathrm{P}(A)$

3. $A\subseteq B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$

4. $\mathrm{P}(A+B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(AB)$

5. $\mathrm{P}(A+B+C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)-$

$-\mathrm{P}(AB)-\mathrm{P}(AC)-\mathrm{P}(BC)+\mathrm{P}(ABC)$

Примеры вероятностных пространств

1. $\Omega=\{(i,j)\,|\,i,j=1,\dots,6\}$ **– множество всех элементарных событий при бросании двух игральных костей;**

$\mathcal{A}=M(\Omega)$ **– множество всех подмножеств** Ω**;**

$\omega=(i,j)\Rightarrow \mathrm{P}(\{\omega\})=\frac{1}{36}$; $\mathrm{P}(A)=\frac{|A|}{36}$, $|A|$ **– число элементов в** A**.**

2. $\Omega=\{1,2,\dots\}$ **;** $\mathcal{A}=M(\Omega)$ **– множество всех подмножеств** Ω**;**

$\omega=i\Rightarrow$ $\mathrm{P}(\{\omega\})=\frac{1}{2^i}$ **;** $\mathrm{P}(A)=\sum\limits_{\omega\in A}^{\infty}\mathrm{P}(\{\omega\})$ **.**

3. $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ **– квадрат;**

$\mathcal{A}=\mathscr{B}(\Omega)$ **– множество борелевских подмножеств** Ω**;**

$A\in\mathcal{A}\Rightarrow \mathrm{P}(A)=S_A$ **– площадь** A**.**

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

МИРЭА
Российский технологический университет

ЛЕКЦИЯ 2

Классическая и геометрическая вероятности

Классическая вероятность

Классическое определение вероятности применяется при выполнении условий:

1) $\Omega=\{\omega_1,\ldots\omega_n\},\quad |\Omega|=n<\infty$ **;**

2) все $\omega_i\in\Omega$ **равновозможны, т.е.** $P(\{\omega_i\})=p$ **для всех** $\omega_i\in\Omega$ **.**

При этом из равенства $P(\Omega)=\sum_{i=1}^{n}P(\{\omega_i\})=\sum_{i=1}^{n}p=np=1$ **следует**

формула классической вероятности

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{m}{n}$$

для всех событий $A\subseteq\Omega$**,**

где $|A|=m$ **– число элементов в** A**.**

Для нахождения числа элементарных исходов в событиях применяются формулы комбинаторики.

Формулы комбинаторики

1. Число подмножеств $M(\Omega)$ множества Ω $(|\Omega|=n)$ равно $|M(\Omega)|=2^n$.

2. Число способов упорядоченного выбора m элементов из множества Ω $(|\Omega|=n)$ с возвращением равно n^m .

3. Число способов упорядоченного выбора m элементов из множества Ω $(|\Omega|=n)$ без возвращения равно

$$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1).$$

Про этой же формуле находится число размещений n различимых элементов по m местам.

Формулы комбинаторики

4. Число перестановок n различимых элементов $A_n^n = n!$.

5. Число сочетаний n различимых элементов по m равно

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

это также равно числу способов неупорядоченного выбора m элементов из множества Ω ($|\Omega| = n$) без возвращения.

6. Число способов распределения n неразличимых элементов по r урнам (в каждой урне может быть от 0 до n элементов)

равно $$C_{n+r-1}^n = C_{n+r-1}^{r-1} = \frac{A_{n+r-1}^n}{n!} = \frac{A_{n+r-1}^{r-1}}{(r-1)!} = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}.$$

Задача о выборке

Из множества, содержащего N элементов, среди которых M отмеченных элементов, случайным образом выбирают n элементов. Требуется найти вероятность того, что среди n выбранных будет ровно m отмеченных элементов.
Элементарным событием в этом случае является любой неупорядоченный выбор n элементов из N, поэтому число элементов в множестве всех элементарных исходов Ω равно C_N^n .
Число элементарных исходов в рассматриваемом событии находится по правилу умножения: число способов выбора m элементов из M отмеченных умножается на число способов выбора остальных $n-m$ элементов из $N-M$ неотмеченных.

Поэтому требуемая вероятность находится по формуле

$$P=\frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Геометрическая вероятность

Геометрическое определение вероятности применяется при выполнении условий:
1) $\Omega \subseteq R^n$, $0 < \mu(\Omega) < \infty$ **(где** $\mu(\Omega)$ **– мера (площадь, объём) множества** Ω **в** R^n**) ;**
2) вероятность любого события $A \subseteq \Omega$ **пропорциональна его мере** $\mu(A)$ **.**

В этом случае $\mathcal{A} = \mathscr{B}(\Omega)$ **– множество борелевских подмножеств** Ω**.**

Из условия 2) следует, что для всех $A \in \mathcal{A}$: $\mathrm{P}(A) = \alpha \cdot \mu(A)$ **,**

но $\mathrm{P}(\Omega) = 1 = \alpha \cdot \mu(\Omega)$ **, т.е.** $\alpha = \dfrac{1}{\mu(\Omega)}$ **. Отсюда получается**

формула для геометрической вероятности

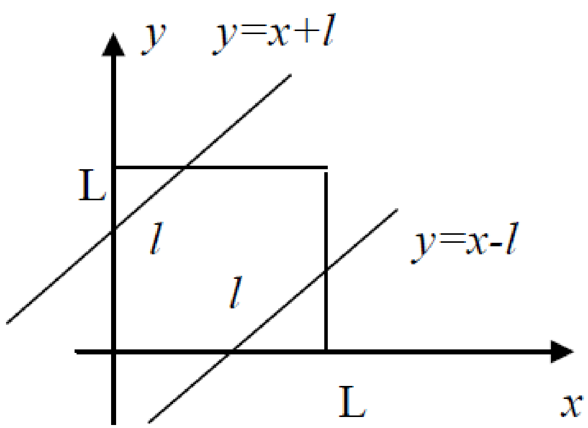
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} .$$

Задача о встрече

Два человека приходят в парк в интервал времени от a до $a+L$. Каждый проводит там время l. Найти вероятность того, что они встретятся.

$$\Omega=\{(x,y):\ 0\le x\le L\ ,\ 0\le y\le L\}$$

$$A=\{(x,y)\in\Omega:\ |y-x|\le l\}$$



$$\mu(\Omega)=L^2\ ,\ \ \mu(\overline{A})=(L-l)^2\ ,\ \mu(A)=L^2-(L-l)^2$$

$$P(A)=\frac{L^2-(L-l)^2}{L^2}=1-\left(\frac{L-l}{L}\right)^2=\frac{2l}{L}-\left(\frac{l}{L}\right)^2$$

ЗАДАЧА БЮФФОНА (1777 год)

На плоскость, расчерченную параллельными прямыми с расстоянием a друг от друга, случайным образом бросается игла длиной $l<a$. Найти вероятность того, что игла не пересечет ни одну линию.

$$\Omega=\{(x,\varphi):\ 0\le x\le a/2,\ 0\le\varphi\le\pi\}\subseteq R^2,\ \mu(\Omega)=(a\pi)/2$$

x - расстояние от центра иглы до ближайшей линии;

φ - угол между иглой и линией.

$$A=\{(x,\varphi):\ 0\le\varphi\le\pi,\ x>\frac{1}{2}l\sin\varphi\},\ \mu(\overline{A})=\int_0^\pi\frac{1}{2}l\sin\varphi d\varphi=l$$

$$P(\overline{A})=\frac{2l}{a\pi},\ P(A)=1-\frac{2l}{a\pi}$$

МИРЭА
Российский технологический университет

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 3

Условные вероятности

Условные вероятности

Рассмотрим бросание игральной кости

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\}$$

$$A = \{1,3,6\} \qquad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$B = \{2,4,6\} \qquad P(A|B) = \frac{1}{3} = \frac{|A \cdot B|}{|B|} =$$

$$= \frac{\dfrac{|A \cdot B|}{|\Omega|}}{\dfrac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Условные вероятности

Условная вероятность события A **при условии, что событие** B **произошло** ($(P(B)>0)$, **обозначается как** $P(A|B)$ **или** $P_B(A)$ **и определяется как** $P(A|B)=\dfrac{P(A\cdot B)}{P(B)}$.

Свойства условной вероятности:

1. Аддитивность:

если $A_i A_j=\varnothing\ (i\neq j)$, **то** $\mathrm{P}(\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i|B)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mathrm{P}(A_i|B)$.

2. Формула умножения для двух событий:

$$P(A\cdot B)=P(B)\cdot P(A|B)=P(A)\cdot P(B|A)$$

при условии $P(A)\neq 0,\ P(B)\neq 0$.

Свойства условной вероятности

2. Формула умножения для *n* событий

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1A_2)\ldots P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})$$

Доказательство формулы умножения для *n* событий:

$$B_k=A_1\ldots A_k\Rightarrow B_1=A_1;B_k=A_k\cdot B_{k-1};A_1A_2\ldots A_n=B_n$$

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_n\cdot B_{n-1})=P(A_n|B_{n-1})\cdot P(B_{n-1})=$$

$$=P(A_n|B_{n-1})\cdot P(A_{n-1}|B_{n-2})\cdot P(B_{n-2})=\ldots$$

$$=P(A_n|A_1\ldots A_{n-1})P(A_{n-1}|A_1\ldots A_{n-2})\ldots P(A_2|A_1)\cdot P(A_1)$$

Независимость событий

События A и B называются независимыми, если $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Если $P(A|B) = P(A)$, то говорят, что событие A не зависит от события B.

Свойства независимости:

1. Следующие свойства эквивалентны при условии $P(A) \neq 0,\ P(B) \neq 0$:

   а) A и B – независимы;

   б) $P(A|B) = P(A)$ (событие A не зависит от B);

   в) $P(B|A) = P(B)$ (событие B не зависит от A).

Свойства независимости

2. Если $P(A)\neq 0$, $P(B)\neq 0$ **и** $A\cdot B=\varnothing$ **(т.е.** A **и** B **несовместны), то** A **и** B **зависимы.**

3. Следующие утверждения эквивалентны:

а) A **и** B **независимы;**

б) A **и** $\overline{B}$ **независимы;**

в) $\overline{A}$ **и** B **независимы;**

г) $\overline{A}$ **и** $\overline{B}$ **независимы.**

4. Если A **и** B **независимы, то** $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$ **.**

5. Для любого события A**:** A **и** $\varnothing$ **независимы**

и A **и** Ω **независимы.**

Независимость событий

События $\{A_1,\dots,A_n\}$ **называются попарно независимыми, если для всех** $i \neq j$ **верно** $P(A_i A_j) = P(A_i)\cdot P(A_j)$.

События $\{A_1,\dots,A_n\}$ **называются независимыми в совокупности, если для всех различных** $i_1, i_2, \dots, i_k$ **верно** $P(A_{i_1}\dots A_{i_k}) = P(A_{i_1})\cdot\dots\cdot P(A_{i_k})$.

Из независимости в совокупности следует попарная независимость. Обратное неверно.

Формулы сложения для независимых событий

Формула сложения для 2-х независимых событий

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)$$

Формула сложения для 3-х независимых событий

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) -$$

$$-P(A_1)P(A_2) - P(A_2)P(A_3) -$$

$$-P(A_1)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 4

Формула полной вероятности и формула Байеса

Формула полной вероятности и формула Байеса

Полная группа событий

Рассматриваем вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

События $\{H_k\}$ $(H_k \in \mathcal{A})$ образуют полную группу событий, если

1. $\sum\limits_k H_k = \Omega$ **(т.е. $\{H_k\}$ покрывают все пространство элементарных событий);**

2. Для всех $k \neq j$ $H_k \cdot H_j = \varnothing$ (т.е. $\{H_k\}$ несовместны).

При этом справедливо равенство $\sum\limits_k P(H_k) = P(\Omega) = 1$.

Пример: $\{\varnothing, \Omega\}$ **– тривиальная полная группа событий.**

Формула полной вероятности

Если события $\{H_k\}_{k=1}^{n}$ образуют ПГС и $P(H_k) > 0$, то

для любого события A: $\quad P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A|H_k)$.

Доказательство:

$$A = \sum_{k=1}^{n} (A \cdot H_k) \text{ и } (A \cdot H_k) \cdot (A \cdot H_j) = \varnothing \text{, поэтому}$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cdot H_k) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P(A|H_k)$$

Формула Байеса

Если события $\{H_k\}_{k=1}^{n}$ образуют ПГС , $P(H_k) > 0$ и $P(A) > 0$, то для любого события H_j:

$$P(H_j|A) = \frac{P(H_j)\cdot P(A|H_j)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}.$$

<u>Доказательство</u>: используем определение условной вероятности и формулу полной вероятности

$$P(H_j|A) = \frac{P(A\cdot H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j)\cdot P(A|H_j)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)}.$$

Пример

В первом ящике находится 2 белых шара и 3 чёрных, а во втором – 3 белых шара и 1 чёрный. Из первого ящика случайным образом переложен во второй ящик один шар.

Найти вероятность того, что:

а) наудачу извлеченный после этого шар из второго ящика будет белым;

b) из первого ящика был переложен во второй ящик белый шар, если известно, что после этого из второго ящика извлекли белый шар;

c) из первого ящика был переложен во второй ящик чёрный шар, если известно, что после этого из второго ящика извлекли белый шар.

Решение:

а) Пусть ***H₁***={из первого ящика во второй переложили белый шар},

H₂={из первого ящика во второй переложили чёрный шар},

A= {из второго ящика извлекли белый шар}.

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{17}{25}.$$

b) $$P(H_1|A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{17}{25}}=\frac{8}{17}.$$

c) $$P(H_2|A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{17}{25}}=\frac{9}{17}.$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 5

Последовательность независимых испытаний

Последовательность независимых испытаний
(Схема Бернулли)

Проводятся одинаковые независимые испытания. Испытание называется удачным, если в нём произошло определённое событие A**.**

$P(A)=p$ **– вероятность удачи,** $P(\overline{A})=1-p=q$ **– вероятность неудачи. Удаче поставим в соответствие** 1**, а неудаче –** 0**.**

Пример последовательности независимых испытаний

$$A \quad \overline{A} \quad \overline{A} \quad A \quad \overline{A} \quad \overline{A} \quad \overline{A} \quad \overline{A}$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Рассмотрим событие

$$B_k=\{\textit{произошло ровно } \underline{k} \textit{ удач в } \underline{n} \textit{ независимых испытаниях}\}.$$

Обозначим $P(B_k)=P_n(k).$

Формула Бернулли

Теорема. $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

Доказательство:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, \text{ если удача в } i-\text{ом независимом испытании} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$\Omega = \{\overline{\varepsilon} \mid (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = 0,1\}$$

$$B_k = \{\overline{\varepsilon} \mid \sum \varepsilon_i = k\}, \quad \overline{\varepsilon} \in B_k \Rightarrow P(\{\overline{\varepsilon}\}) = p^k q^{n-k}$$

$$P(B_k) = |B_k| \, p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Приближение Пуассона

Применяется при $n >> 1, \quad p << 1, \quad 0,1 < n \cdot p < 10$.

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (\lambda = np)$$

<u>*Теорема Пуассона.*</u> Пусть p_n (вероятность удачи) зависит от числа испытаний, при этом $\lim\limits_{n \to \infty} np_n = \lambda > 0, \quad \lambda < \infty$.

Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Приближение Лапласа

При больших $n>>1$ **и при условии**

$$n>>1,\ 0<p<1,\ np>10\ или\ nq>10$$

применяется приближение Лапласа, основанное на теоремах Муавра-Лапласа.

Локальная теорема Муавра-Лапласа:

$$P_n(k)=C_n^k p_n q^{n-k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi_0\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),$$ **где**

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Приближение Лапласа

Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Пусть ξ_n – число удач в n независимых испытаниях,

p – вероятность удачи в одном испытании, $q = 1 - p$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(C_1 \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \le C_2\right) = \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{C_1}^{C_2} \varphi_0(t)dt$$

Функции $\varphi_0(t)$ и $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)dt \quad , \quad \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Свойства: 1) $\varphi_0(t) > 0$, 2) $\varphi_0(-t) = \varphi_0(t)$,

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)dt = 1$, 4) $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$, 5) $\Phi(0) = 0{,}5$

Приближение Лапласа

Следствие 1:

$$P(k_1 \le \xi_n \le k_2) = P\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \int\limits_{\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}} \varphi_0(t)dt =$$

$$= \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Приближение Лапласа

Следствие 2: Пусть $\nu_n = \dfrac{\xi_n}{n}$,

$$P(|\nu_n - p| \le \varepsilon) = P(-\varepsilon \le \nu_n - p \le \varepsilon) = P\left(p - \varepsilon \le \frac{\xi_n}{n} \le p + \varepsilon\right) =$$

$$= P(n(p-\varepsilon) \le \xi_n \le n(p+\varepsilon)) \approx \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 = 1 - 2\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

МИРЭА
Российский технологический университет

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 6

Дискретные случайные величины и дискретные случайные векторы

Функция распределения случайной величины

Отображение $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ **называется случайной величиной, если для каждого** $x\in\mathbb{R}$ **событие** $\{\omega\in\Omega\,|\,\xi(\omega)\le x\}\in\mathcal{A}$**,**

т.е. является элементом σ-алгебры $\mathcal{A}$**.**

Функция распределения случайной величины ξ **определяется равенством** $F_\xi(x)=P(\xi\le x)$**.**

Свойства функции распределения: 1) для всех $x\in\mathbb{R}$: $0\le F_\xi(x)\le 1$;

2) если $x_1<x_2$**, то** $F_\xi(x_1)\le F_\xi(x_2)$; **3)** $\lim\limits_{x\to-\infty}F_\xi(x)=0$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}F_\xi(x)=1$; **5) для каждого** $a\in\mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to a+0}F_\xi(x)=F_\xi(a)$.

Дискретные случайные величины

Отображение $\xi:\Omega\to M_\xi\subseteq\mathbb{R}$, $M_\xi=\{x_1,\dots,x_k,\dots\}$, **называется дискретной случайной величиной (д.с.в.).**

События $\{H_k=(\xi=x_k)\}$ **образуют полную группу.**

Ряд распределения дискретной случайной величины ξ **имеет вид**

ξ	x_1	$\dots$	x_k
P	p_1	$\dots$	p_k

где $p_k=P(H_k)$ **обладают следующими свойствами:**

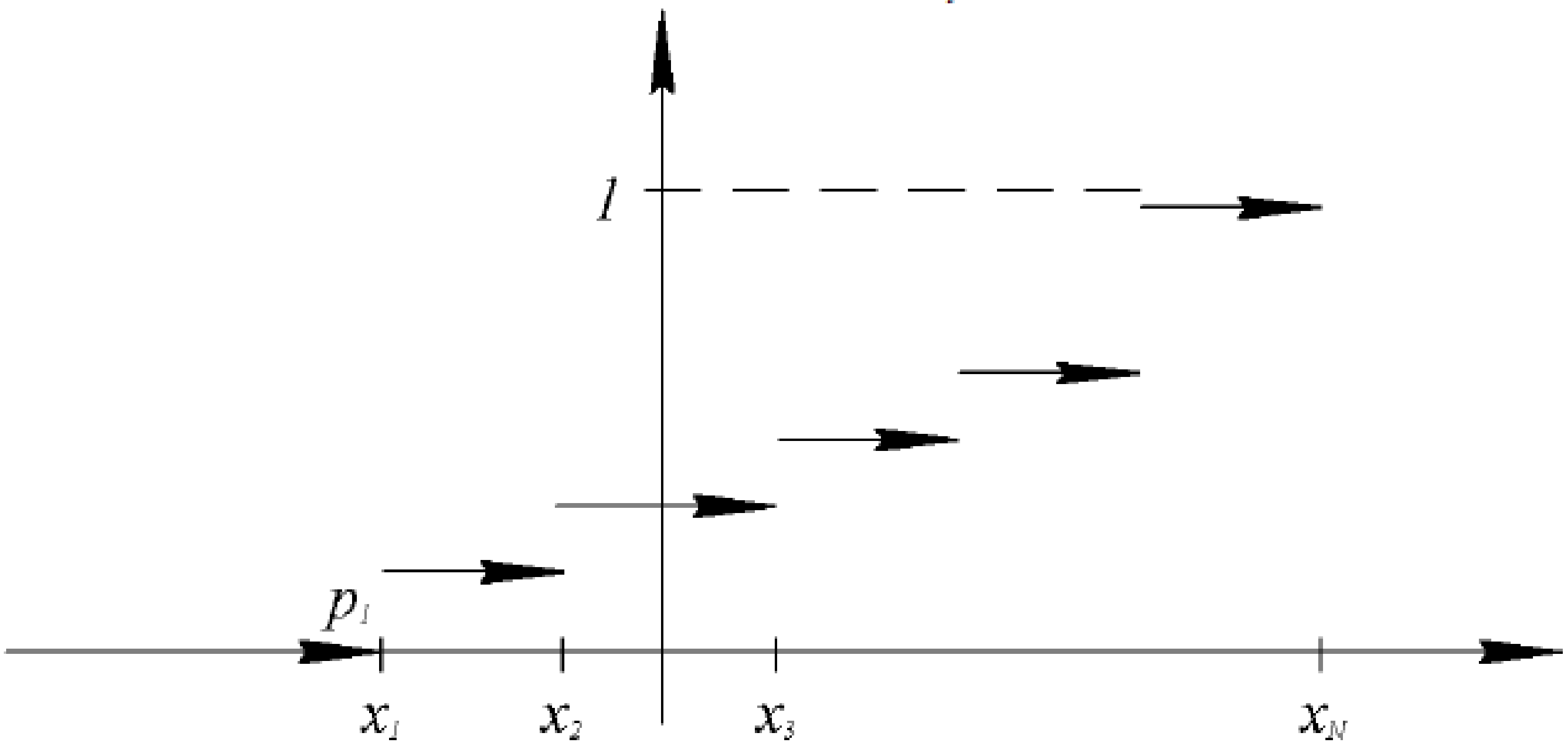
1) $0<p_k\le 1$;

2) $\sum p_k=1$ – **свойство нормировки;**

3) $p_k=F_\xi(x_k)-F_\xi(x_k-0)$.

Функция распределения д.с.в.

$$F_{\xi}(x) = P(\xi \le x) = \sum_{x_i \le x} p_i$$



Функция дискретной случайной величины

Дана дискретная случайная величина ξ с рядом распределения

ξ	x_1	$\dots$	x_k
P	p_1	$\dots$	p_k

и функция $y=\varphi(x)$.

Ряд распределения случайной величины $\eta=\varphi(\xi)$

η	y_1	$\dots$	y_j
P	q_1	$\dots$	q_j

Определяется по формулам $y_j=\varphi(x_{i_1})=\varphi(x_{i_2})\dots,$

$$q_j=P(\eta=y_j)=\sum_{\varphi(x_i)=y_j} p_i \;.$$

Дискретные случайные векторы

Дискретный случайный вектор $\overline{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$**, где**

$\xi_i : \Omega \to M_i \subseteq \mathbb{R}$ **– дискретные случайные величины.**

Двумерный дискретный случайный вектор (ξ, η)

$\xi : \Omega \to M_\xi = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\},\ \eta : \Omega \to M_\eta = \{y_1, \ldots, y_j, \ldots\},$

$\{H_{ij} = (\xi = x_i; \eta = y_j)\}$**– полная группа событий.**

Совместные вероятности $p_{ij} = P(H_{ij})$ **обладают свойствами:**

1) $0 \le p_{ij} \le 1;$

2) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1;$

3) $\sum_j p_{ij} = p_i\ ,\ \sum_i p_{ij} = q_j$ **– одномерные (частные) вероятности.**

Дискретные случайные векторы

Дискретные случайные величины ξ и η называются независимыми, если для всех i, j

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j).$$

Для проверки независимости по таблице совместного распределения д.с.в. ξ и η сначала находим одномерные вероятности для ξ и η,

	$\xi \backslash \eta$	y_1	$\ldots$	y_j
p_1	x_1	p_{11}	$\ldots$	p_{1j}
p_2	$\vdots$			
p_i	x_i	p_{i1}		p_{ij}
		q_1	$\ldots$	q_j

затем для всех i, j проверяем равенство $p_{ij} = p_i q_j$. Если оно верно для всех i, j, случайные величины ξ и η будут независимы. Если для каких-либо i, j равенство неверно, то случайные величины ξ и η зависимы.

МИРЭА
Российский технологический университет

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 7

Характеристики дискретных случайных величин

Характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание (среднее значение) дискретной случайной величины ξ **находится по формуле:** $M\xi = \sum_i x_i p_i$**, где** $p_i = P(\xi = x_i)$**. Математическое ожидание существует, если ряд сходится абсолютно.**

Свойства математического ожидания: 1) $\xi = C \Rightarrow M\xi = C$;

2) $\xi \geq 0 \Rightarrow M\xi \geq 0$; **3)** $M(\alpha\xi) = \alpha M\xi$;

4) $|M\xi| \leq M|\xi|$; **5)** $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$;

6) ξ_1 **и** ξ_2 **– независимы** $\Rightarrow M(\xi_1 \cdot \xi_2) = (M\xi_1) \cdot (M\xi_2)$;

7) $\eta = \varphi(\xi) \Rightarrow M\eta = \sum_i \varphi(x_i) p_i$;

8) $\eta = \varphi(\xi_1, \xi_2) \Rightarrow M\eta = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij}$.

Характеристики дискретных случайных величин

Дисперсия случайной величины ξ определяется формулой $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, если математические ожидания существуют.

Формулы расчёта дисперсии дискретной случайной величины:

1) $D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i$;

2) $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum x_i^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2$.

Свойства дисперсии:

1) $D\xi \geq 0$;

2) $\xi = const \Rightarrow D\xi = 0$;

3) $D(\alpha \cdot \xi) = \alpha^2 D\xi$;

4) ξ_1 **и** ξ_2 **– независимы** $\Rightarrow D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$.

Характеристики дискретных случайных величин

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ определяется формулой $\sigma_{\xi} = \sqrt{D\xi}$, если дисперсия существует.

Формулы для вычисления среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины:

1) $\sigma_{\xi} = \sqrt{\sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i}$ **;** **2)** $\sigma_{\xi} = \sqrt{\sum x_i^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2}$ **.**

Свойства среднего квадратического отклонения:

1) $\sigma_{\xi} \geq 0$;

2) $\xi = const \Rightarrow \sigma_{\xi} = 0$;

3) $\sigma_{\alpha \cdot \xi} = |\alpha| \cdot \sigma_{\xi}$.

Характеристики дискретных случайных величин

Ковариация случайных величин ξ_1 и ξ_2 определяется формулой: $\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=M\left[(\xi_1-M\xi_1)(\xi_2-M\xi_2)\right]$,

если математические ожидания существуют. Формулы расчёта:

1) $\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=\sum\limits_i\sum\limits_j(x_i-M\xi_1)(y_j-M\xi_2)p_{ij}$;

2) $\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=M(\xi_1\cdot\xi_2)-(M\xi_1)\cdot(M\xi_2)=$

$=\sum\limits_i\sum\limits_j x_i y_j p_{ij}-(\sum\limits_i x_i p_i)(\sum\limits_j y_j q_j)$, **где** $p_i=\sum\limits_j p_{ij}$, $q_j=\sum\limits_i p_{ij}$.

Свойства ковариации:

1) $\mathrm{cov}(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2,\eta)=\alpha_1\mathrm{cov}(\xi_1,\eta)+\alpha_2\mathrm{cov}(\xi_2,\eta)$;

2) $\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=\mathrm{cov}(\xi_2,\xi_1)$; **3)** ξ_1 **и** ξ_2 **– независимы** $\Rightarrow\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=0$

4) $\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{2}\left[D(\xi_1+\xi_2)-D\xi_1-D\xi_2\right]$; **5)** $\left|\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)\right|\le\sigma_{\xi_1}\cdot\sigma_{\xi_2}$.

Характеристики дискретных случайных величин

Коэффициент корреляции случайных величин ξ и η определяется формулой:

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$$

Свойства коэффициента корреляции

1) $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$;

2) ξ **и** η **– независимы** $\Rightarrow r_{\xi,\eta} = 0$;

3) $|r_{\alpha\xi,\eta}| = |r_{\xi,\eta}|$; $r_{\alpha\xi,\eta} = r_{\xi,\eta} \cdot \operatorname{sign}\alpha$;

4) $|r_{\xi,\eta}| \le 1$ **5)** $\eta = A\xi + B \Leftrightarrow |r_{\xi,\eta}| = 1$

Если $r_{\xi,\eta} = 0$ ($\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0$), то случайные величины ξ и η называются некоррелированными.

Из некоррелированности независимость не следует.

Характеристики дискретных случайных величин

Производящая функция целочисленной неотрицательной случайной величины ξ определяется формулой: $W_\xi(s) = Ms^\xi$.

Если задан ряд распределения случайной величины ξ

ξ	0	1	...	k	...
P	p_0	p_1	...	p_k	...

то $W_\xi(s) = \sum_k s^k p_k$ (ряд сходится при $|s| \le 1$).

Свойства производящей функции

1) $W_\xi(1) = 1$; 2) $p_k = \dfrac{1}{k!} W_\xi^{(k)}(0)$;

3) $M\xi = W'_\xi(1)$; 4) $D\xi = W''_\xi(1) + W'_\xi(1) - \left[W'_\xi(1)\right]^2$;

5) ξ и η – независимы $\Rightarrow W_{\xi+\eta}(s) = W_\xi(s) \cdot W_\eta(s)$.

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 8

Основные дискретные распределения

Основные дискретные распределения

Равномерное дискретное распределение

ξ	1	2	$\dots$	n
P	p_1	p_2	$\dots$	p_n

где $p_k = \dfrac{1}{n}, k = 1, \dots, n.$

Характеристики:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n}(k\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}(\sum_{k=1}^{n} k) = \frac{1}{n}\frac{(n+1)n}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2n^2+3n+1}{6} - \frac{n^2+2n+1}{4} = \frac{n^2-1}{12}.$$

$$W_\xi(s) = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{n}s^k) = \frac{s}{n}(1+s+\dots+s^{n-1}) = \frac{s}{n}\frac{1-s^n}{1-s}.$$

Основные дискретные распределения

Распределение Бернулли

ξ	0	1
P	q	p

где $q = 1 - p$.

Характеристики:

$M\xi = p$.

$M\xi^2 = p$.

$D\xi = p - p^2 = p(1-p) = pq$.

$W_\xi(s) = q \cdot 1 + ps = q + ps$.

Это распределение применяется при рассмотрении одного испытания с вероятностью удачи p: $\xi = 1$ в случае удачного испытания и $\xi = 0$ в случае неудачного испытания.

Основные дискретные распределения

Биноминальное распределение

ξ	0	1	...	n
P	p_0	p_1	...	p_n

где $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}, k = 0,\ldots,n, 0 < p \le 1, q = 1 - p.$

Случайную величину ξ можно рассматривать, как число удач в n независимых испытаниях, где p – вероятность успеха в одном испытании.

При расчёте характеристик удобно представить ξ в виде суммы независимых одинаково распределенных с.в. $\xi = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = 1$ с вероятностью p в случае удачи в i испытании и $\varepsilon_i = 0$ в случае неудачи в i испытании (с вероятностью $q = 1 - p$). Получаем:

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} M\varepsilon_i = np,\ D\xi = \sum_{i=1}^{n} D\varepsilon_i = npq,\ W_\xi(s) = (q + ps)^n.$$

Основные дискретные распределения

Геометрическое распределение I

ξ	0	1	$\ldots$
P	p_0	p_1	$\ldots$

где $p_k = p \cdot q^k,\ k = 0,1,\ldots,\ 0 < p < 1,\ q = 1 - p.$

Случайную величину ξ можно рассматривать, как число неудач до первой удачи при независимых испытаниях, где p – вероятность удачи в одном испытании.

Характеристики:

$$W_\xi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p s^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qs)^k = \frac{p}{1 - qs};$$

$$M\xi = W'_\xi(1) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}; \quad W''_\xi(1) = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = 2\left(\frac{q}{p}\right)^2;$$

$$D\xi = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(p+q)}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Основные дискретные распределения

Геометрическое распределение II

η	1	2	$\dots$
P	p_1	p_2	$\dots$

где $p_k = p \cdot q^{k-1}, k = 1,2,\dots, 0 < p < 1, q = 1 - p$.

Случайную величину η можно рассматривать, как номер первой удачи при независимых испытаниях, где p – вероятность удачи в одном испытании. При этом $\eta = \xi + 1$, где ξ имеет геометрическое распределение I.

Характеристики:

$$W_\eta(s) = sW_\xi(s) = \frac{ps}{1 - qs};$$

$$M\eta = M\xi + 1 = \frac{q}{p} + 1 = \frac{1}{p}; \quad D\eta = D\xi = \frac{q}{p^2}.$$

Основные дискретные распределения

Распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

Проверка: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = e^{\lambda} e^{-\lambda} = 1.$

Характеристики:

$$W_\xi(s) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = e^{\lambda s} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)};$$

$$M\xi = W'_\xi(1) = \left[\lambda e^{\lambda(s-1)} \right]\Big|_{s=1} = \lambda;$$

$$W''_\xi(1) = \lambda^2;$$

$$D\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

МИРЭА
Российский технологический университет

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 9

Непрерывные случайные величины и векторы

Непрерывные случайные величины

Случайная величина ξ называется непрерывной, если существует такая функция $f_\xi(x)$, что для всех $x \in R$ функция распределения ξ выражается следующей формулой $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$, при этом $f_\xi(x)$ называется плотностью распределения непрерывной случайной величины ξ.

Из этого определения следует: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет конкретное значение $x \in R$, равна нулю.

Если случайная величина принимает значения только на интервале $[0, +\infty)$, то она называется неотрицательной.

Непрерывные случайные величины

Свойства плотности непрерывной случайной величины:

1) $f_\xi(x) \geq 0$ (для всех x где $f_\xi(x)$ непрерывна);

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt = 1$ (свойство нормировки);

3) $f_\xi(x) = \frac{d}{dx}F_\xi(x)$, если $f_\xi(x)$ непрерывна в точке x;

4) $P(C_1 < \xi < C_2) = P(C_1 < \xi \leq C_2) = P(C_1 \leq \xi < C_2) =$

$$= P(C_1 \leq \xi \leq C_2) = \int\limits_{C_1}^{C_2} f_\xi(t)dt \ .$$

Случайные векторы

$\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ - случайный вектор; $\xi_i : \Omega \to R$

Функция распределения случайного вектора $\vec{\xi}$:

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = P(\xi_1 \le x_1; \xi_2 \le x_2; \ldots; \xi_n \le x_n) = F_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

(функция совместного распределения случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$)

МИРЭА
Российский технологический университет

Функция распределения случайного вектора

Свойства $F_\xi(x_1,\ldots,x_n)$:

1) $\forall (x_1,\ldots x_n)\in R^n:\ 0\le F_\xi(x_1,\ldots,x_n)\le 1$

2) $x_i\le y_i \Rightarrow F_\xi(x_1,\ldots,x_n)\le F_\xi(y_1,\ldots,y_n)$

3) $\lim\limits_{\{x_i\to-\infty\}} F_\xi(x_1,\ldots,x_n)=0$

4) $\lim\limits_{\{x_i\to+\infty\}} F_\xi(x_1,\ldots,x_n)=1$

Независимые случайные величины

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 - независимы, если

$\forall (x_1, x_2) \in R^2: \qquad F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2)$

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - независимы в совокупности, если $\forall (i_1, \ldots, i_k)$ и

$$\forall\ (y_1, \ldots, y_k) \in R^k:$$

$$F_{\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}}(y_1, \ldots, y_k) = F_{\xi_{i_1}}(y_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_{i_k}}(y_k)$$

Непрерывные случайные векторы

Случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется непрерывным, если существует такая функция $f_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n)$, что для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ функция распределения $\vec{\xi}$

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} d\,t_1 \int_{-\infty}^{x_2} d\,t_2 \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\vec{\xi}}(t_1, \ldots, t_n)\,d\,t_n,$$

$f_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n)$ - плотность распределения непрерывного случайного вектора $\vec{\xi}$ (совместная плотность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$).

Плотность непрерывного случайного вектора

Свойства $f_{\xi}(x_1,\ldots,x_n)$:

1) $f_{\xi}(x_1,\ldots,x_n)\geq 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x_1,\ldots,x_n)dx_n = 1$;

3) $f_{\xi}(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F_{\xi}(x_1,\ldots,x_n)$,

если f_{ξ} - непрерывна в точке $(x_1,\ldots,x_n)$.

4) $P(\vec{\xi} \in D) = \int \ldots \int\limits_{D} f_{\xi}(x_1,\ldots,x_n)dx_1 \ldots dx_n$

Непрерывные случайные векторы

Теорема.

ξ и η - независимые, непрерывные случайные величины $\Leftrightarrow$ $f_{\xi,\eta}(x,y)=f_\xi(x)f_\eta(y)$ для (x,y): $f_{\xi,\eta}$ - непрерывна в точке (x,y).

Доказательство:

=> $F_{\xi,\eta}(x,y)=F_\xi(x)F_\eta(y)$

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(F_\xi(x)F_\eta(y))=(\frac{\partial}{\partial x}F_\xi(x))(\frac{\partial}{\partial y}F_\eta(y))=f_\xi(x)f_\eta(y)$$

<=

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dt\int_{-\infty}^{y}f_{\xi,\eta}(t,s)ds=\int_{-\infty}^{x}dt\int_{-\infty}^{y}f_\xi(t)f_\eta(s)ds=$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{x}f_\xi(t)dt\right)\left(\int_{-\infty}^{y}f_\eta(s)ds\right)=F_\xi(x)F_\eta(y)$$

Свойства случайных векторов

Теорема.

1. (ξ,η) – случайный вектор => $F_\xi(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}F_{\xi,\eta}(x,y)$; $F_\eta(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F_{\xi,\eta}(x,y)$

2. (ξ,η) – непрерывный случайный вектор с плотностью $f_{\xi,\eta}(x,y)$ =>

$$f_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi,\eta}(x,y)dy\,;\; f_\eta(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi,\eta}(x,y)dx$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 10

Характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ с плотностью $f_\xi(x)$ называется число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx \quad ,$$

если интеграл абсолютно сходится.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Теорема.

Пусть ξ - непрерывная случайная величина с плотностью $f_\xi(x)$,

$\eta = \varphi(\xi)$ − функция случайной величины ξ. Тогда

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_\xi(x) dx$$

Непрерывные случайные векторы

Теорема.

Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ − непрерывный случайный вектор с плотностью $f_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n)$,

$\eta = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ − функция случайного вектора $\vec{\xi}$. Тогда

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} d\,x_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n) f_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) d\,x_n$$

МИРЭА
Российский технологический университет

Математическое ожидание

Свойства математического ожидания непрерывной случайной величины

1) $\xi \geq 0 \Rightarrow M\xi \geq 0$

2) $M(\alpha\xi) = \alpha M\xi$

3) $|M\xi| \leq M|\xi|$

4) $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$

5) ξ, η - независимы $\Rightarrow M(\xi\eta) = (M\xi)(M\eta)$

6) пусть (ξ, η) – непрерывный случайный вектор с плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$, тогда

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi,\eta}(x, y) dy \, ; \; M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi,\eta}(x, y) dy$$

Дисперсия непрерывной случайной величины

Дисперсия случайной величины ξ :

$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, если математическое ожидание существует.

Теорема.

ξ -непрерывная случайная величина с плотностью $f_\xi(x)$,

тогда $D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_\xi(x)dx - (\int\limits_{-\infty}^{+\infty}xf_\xi(x)dx)^2$

Дисперсия непрерывной случайной величины

Доказательство:

1) $\eta = (\xi - M\xi)^2 = \varphi(\xi) \Rightarrow \ M\eta = D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx$

2) $M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) =$

$$= M\xi^2 - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 = D\xi$$

$$\eta = \xi^2 = \varphi(\xi) \Rightarrow \ M\xi^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx \Rightarrow$$

$$D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx - (\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx)^2 .$$

Ковариация непрерывных случайных величин

Ковариация случайных величин ξ_1 и ξ_2 :

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = M[(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)],$$

если математическое ожидание существует.

Для непрерывных случайных величин ξ_1 и ξ_2

с совместной плотностью $f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)$

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - M\xi_1)(x_2 - M\xi_2) \cdot f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) dx_2$$

Ковариация непрерывных случайных величин

Доказательство:

$$\eta = (\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)$$

$$\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = M\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - M\xi_1)(x_2 - M\xi_2) \cdot f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) d x_2$$

Ковариация непрерывных случайных величин

Другая формула для ковариации случайных величин ξ_1 и ξ_2 :

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) = M(\xi_1 \cdot \xi_2) - (M\xi_1)(M\xi_2).$$

Для непрерывных случайных величин ξ_1 и ξ_2

с совместной плотностью $f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)$

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 x_2) f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)\, dx_2 -$$

$$-(M\xi_1)\,(M\xi_2)$$

Ковариация случайных величин

Свойства $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)$

1) $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{cov}(\xi_2, \xi_1)$

2) $\mathrm{cov}(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2, \eta) = \alpha_1 \mathrm{cov}(\xi_1, \eta) + \alpha_2 \mathrm{cov}(\xi_2, \eta)$

3) ξ_1, ξ_2 – не зависимы $\Rightarrow \mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$

4) $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = \dfrac{1}{2}\left[D(\xi_1 + \xi_2) - D\xi_1 - D\xi_2\right]$

5) $\left|\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)\right| \le \sigma_{\xi_1} \cdot \sigma_{\xi_2}$

Коэффициент корреляции случайных величин

Коэффициент корреляции случайных величин ξ и η:

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi, \sigma_\eta}$$

Свойства $r_{\xi,\eta}$

1) $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$

2) $\left|r_{\xi,\eta}\right| \le 1$

3) ξ,η - независимые $\Rightarrow r_{\xi,\eta} = 0$

4) $\left|r_{\xi,\eta}\right| = 1 \Leftrightarrow \eta = \alpha\xi + \beta$

Коэффициент корреляции случайных величин

Доказательство свойства 4:

пусть $\eta = \alpha \cdot \xi + \beta \Rightarrow D\eta = \alpha^2 D\xi$

$$\sigma_\eta = |\alpha| \sigma_\xi$$

$$\operatorname{cov}(\alpha \cdot \xi + \beta, \xi) = \alpha \operatorname{cov}(\xi, \xi) + \beta \operatorname{cov}(1, \xi) = \alpha \cdot D\xi$$

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\alpha \cdot D\xi}{|\alpha| \sigma_\xi \sigma_\xi} = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \begin{cases} 1, \alpha > 0 \\ -1, \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow |r_{\xi,\eta}| = 1$$

Коэффициент корреляции случайных величин

Доказательство свойства 4: пусть $r_{\xi,\eta} = 1$

Рассмотрим $M\left(\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi} - \frac{\eta - M\eta}{\sigma_\eta}\right)^2 =$

$$= \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{M(\eta - M\eta)^2}{\sigma_\eta^2} - 2\frac{M\left[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)\right]}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = 1 + 1 - 2r_{\xi,\eta} = 2 - 2 = 0$$

$$\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi} - \frac{\eta - M\eta}{\sigma_\eta} = 0 \Rightarrow \eta = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi - M\xi) + M\eta = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}\xi + \left(M\eta - \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi\right) = \alpha \cdot \xi + \beta$$

где $\alpha = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}$, $\beta = M\eta - \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi$

Коэффициент корреляции случайных величин

Доказательство свойства 4:

пусть $r_{\xi,\eta} = -1$

Рассмотрим $M\left(\dfrac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi} + \dfrac{\eta - M\eta}{\sigma_\eta}\right)^2 = \dfrac{M(\xi - M\xi)^2}{\sigma_\xi{}^2} + \dfrac{M(\eta - M\eta)^2}{\sigma_\eta{}^2} + 2\dfrac{M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)]}{\sigma_\xi \sigma_\eta} =$

$= 1 + 1 + 2r_{\xi,\eta} = 2 - 2 = 0$

$$\eta = -\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi - M\xi) + M\eta = -\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}\xi + \left(M\eta + \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi\right) = \alpha \cdot \xi + \beta,$$

где $\alpha = -\dfrac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}$, $\beta = M\eta + \dfrac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

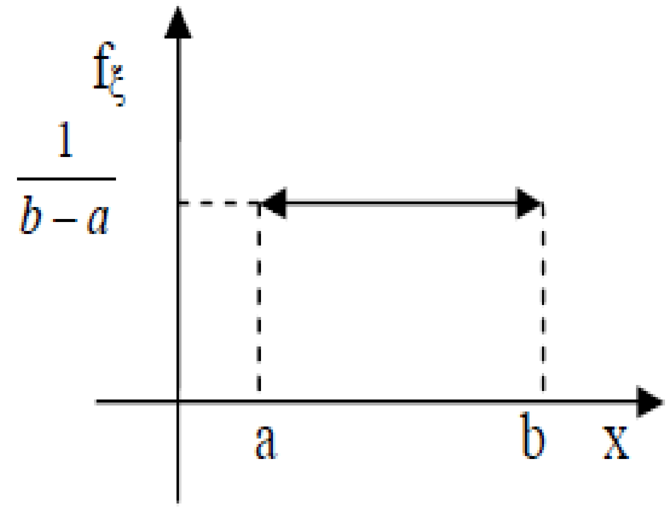
ЛЕКЦИЯ 11

Основные непрерывные распределения

Непрерывные распределения

Равномерное непрерывное распределение на (a,b)

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin(a,b)\\ C, x\in(a,b)\end{cases}$$



$$C=\frac{1}{b-a}$$

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt=\begin{cases}0, x\le a\\ \frac{x-a}{b-a}, x\in(a,b)\\ 1, x\ge b\end{cases}$$

Равномерное непрерывное распределение на (a,b)

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x)dx = \int_{a}^{b} x \frac{1}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

$$M\xi^2 = \frac{b^3 - a^3}{3} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3}$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt, x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x > 0 \end{cases}$$

Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$M\xi^2 = \int_{0}^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Нормальное распределение с параметрами (a,σ^2)

Обозначение: $N(a,\sigma^2)$. $$f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_\xi(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$, где $$\varphi_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_\xi(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sigma}\varphi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)dx=\begin{bmatrix} y=\dfrac{x-a}{\sigma} \\ dy=\dfrac{dx}{\sigma}\end{bmatrix}=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(y)dy=1$$

Нормальное распределение с параметрами (a, σ^2)

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)\,dt = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)\,dt$

$$P(C_1 \le \xi \le C_2) = P(C_1 < \xi < C_2) =$$

$$= F_\xi(C_2) - F_\xi(C_1) = \Phi\left(\frac{C_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{C_1 - a}{\sigma}\right)$$

Нормальное распределение с параметрами (a, σ^2)

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma} \varphi_0 \left(\frac{x-a}{\sigma} \right) dx = a$$

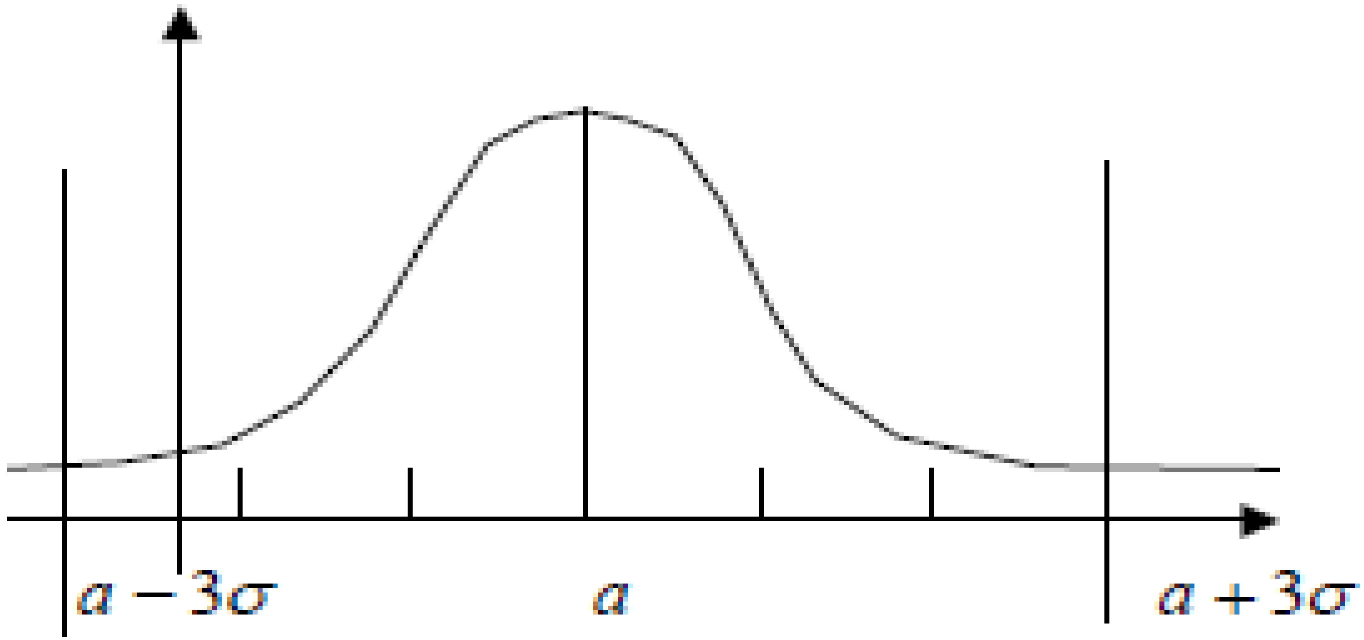
$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sigma^2$$

Нормальное распределение с параметрами (a, σ^2)

Правило «3-х сигм»

$$P(|\xi - a| \le 3\sigma) \approx 0{,}9973\ldots$$

Правило «3-х сигм»



$$P(|\xi - a| \le 3\sigma) \approx 0{,}9973\ldots$$

Гамма-распределение с параметрами $(\alpha, \lambda), \ \lambda > 0$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{\lambda^\alpha \cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, x > 0 \end{cases}$$

Обозначение: $\gamma(\alpha, \lambda)$

Гамма-распределение с параметрами (α, λ), $\lambda > 0$

$$M\xi = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$D\xi = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Распределение «хи –квадрат» с n степенями свободы

$$\chi^2(n) = \gamma\left(\frac{n}{2};\frac{1}{2}\right)$$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \end{cases}$$

Распределение «хи –квадрат» с n степенями свободы

$$M\xi = n$$

$$D\xi = 2n$$

При $n=1$

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \end{cases}$$

МИРЭА
Российский технологический университет

Распределение Стьюдента с n степенями свободы (t-распределение)

$$f_{\xi}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Обозначение: $t(n)$

Распределение Стьюдента с n степенями свободы

$$M\xi = 0, n > 1$$

$$D\xi = \frac{n}{n-2}, n > 2$$

При $n=1$ $\quad f_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ — распределение Коши.

Равномерное двумерное распределение в области G

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=\begin{cases} 0,\ (x_1,x_2)\notin G \\ C=\dfrac{1}{S_G},\ (x_1,x_2)\in G \end{cases}$$

Нормальное двумерное распределение с параметрами $(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right) + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

Нормальное двумерное распределение с параметрами $(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$

$$\xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2) \qquad a_1 = M\xi_1 \quad \sigma_1^2 = D\xi_1$$

$$\xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2) \qquad a_2 = M\xi_2 \quad \sigma_2^2 = D\xi_2$$

$$\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)\, dx_2 = r\sigma_1\sigma_2$$

Коэффициент корреляции $r_{\xi_1, \xi_2} = \dfrac{\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = r$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 12

Функции непрерывных случайных величин

Функции непрерывных случайных величин

Теорема

Пусть ξ – непрерывная случайная величина с плотностью $f_\xi(x)$, функция $y=\varphi(x)$ дифференцируема и имеет конечное число экстремумов. Рассмотрим случайную величину $\eta=\varphi(\xi)$. Тогда плотность η находится по формуле

$$f_\eta(y)=\sum_i f_\xi(\psi_i(y))\,|\psi_i^{'}(y)|,$$ где $\{x_1,\ldots,x_i,\ldots\}=\varphi^{-1}(y)$ и $x_i=\psi_i(y)$

при этом $f_\eta(y)=0$, если $\varphi^{-1}(y)=0$.

Функции непрерывных случайных величин

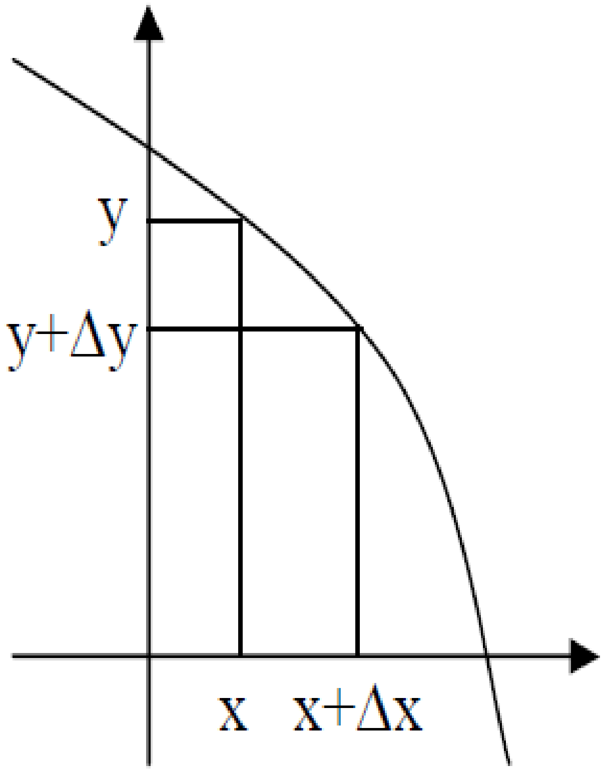
Доказательство:

1) φ – монотонная

Пусть $\varphi(x)=y,\ x=\varphi^{-1}(y)=\psi(y)$

$\varphi(x+\Delta x)=y+\Delta y,$

$x+\Delta x=\varphi^{-1}(y+\Delta y)=\psi(y+\Delta y)$



Функции непрерывных случайных величин

$$P(\eta \in [y, y+dy]) = \left| \int_{y}^{y+\Delta y} f_\eta(s)ds \right| = f_\eta(y^*)|\Delta y|,\ y^* \in [y, y+\Delta y]$$

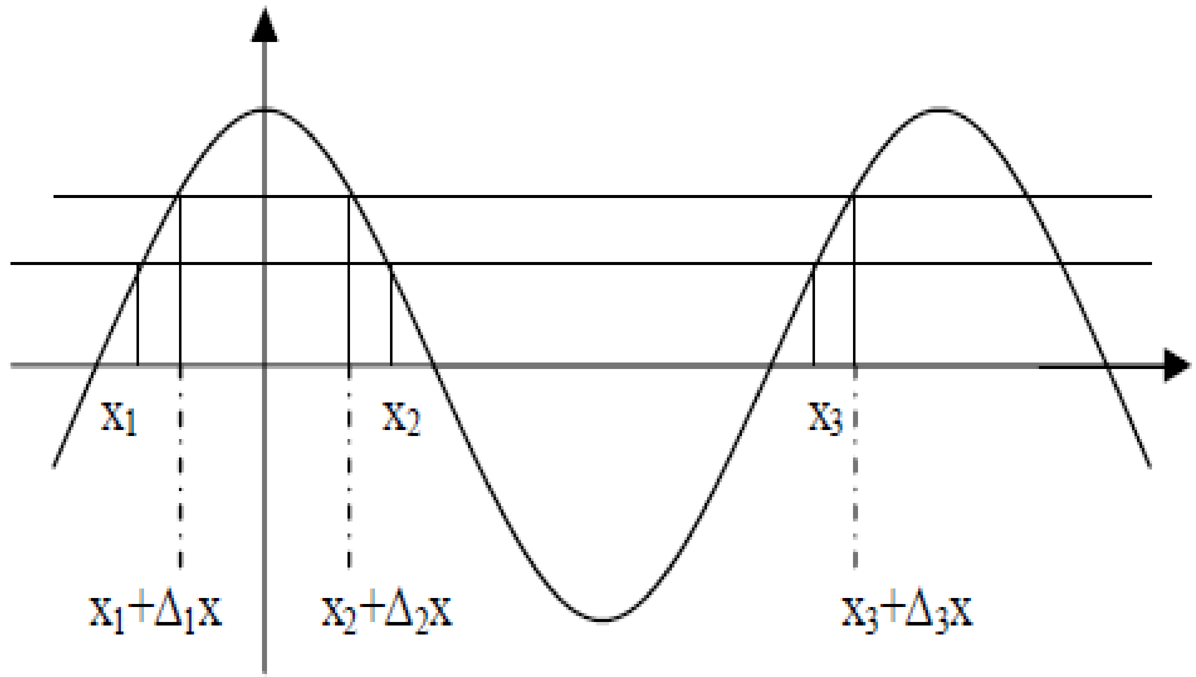
$$P(\xi \in [x, x+\Delta x]) = \left| \int_{x}^{x+\Delta x} f_\xi(t)dt \right| = f_\xi(x^*)|\Delta x|,\ x^* \in [x, x+\Delta x]$$

$$f_y(y^*) = f(x^*)\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right| \Rightarrow f_\eta(y) = \lim_{\Delta y \to 0} f_\eta(y^*) = \lim_{\Delta y \to 0} f_\xi(x^*)\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right| =$$

$$= f_\xi(x)\lim_{\Delta y \to 0}\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right| = f_\xi(\psi(y))\left|\psi'(y)\right|$$

Функции непрерывных случайных величин

2) φ – немонотонная



Пусть $\varphi^{-1}(y)=\{x_1,x_2,\dots\},\psi_i(y)=x_i,\ \psi_i(y+\Delta y)=x_i+\Delta_i x$

Функции непрерывных случайных величин

$$P\left(\eta \in [y, y+dy]\right) = \left| \int_{y}^{y+\Delta y} f_\eta(s)ds \right| = f_\eta(y^*)|\Delta y|,\ y^* \in [y, y+\Delta y]$$

$$\sum_i P\left(\xi \in [x_i, x_i + \Delta_i x]\right) = \sum_i \left| \int_{x_i}^{x_i+\Delta_i x} f_\xi(t)dt \right| = \sum_i f_\xi(x_i^*)|\Delta_i x|$$

Функции непрерывных случайных величин

$$P(\eta \in [y, y + dy]) = \left| \int_{y}^{y+\Delta y} f_\eta(s) ds \right| = f_\eta(y^*) |\Delta y|,\ y^* \in [y, y + \Delta y]$$

$$\sum_i P(\xi \in [x_i, x_i + \Delta_i x]) = \sum_i \left| \int_{x_i}^{x_i+\Delta_i x} f_\xi(t) dt \right| = \sum_i f_\xi(x_i^*) |\Delta_i x|$$

Функции непрерывных случайных величин

Пример:

ξ – непрерывная случайная величина с плотностью $f_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1\right)$$

$\eta=\xi^2, y=x^2 \Rightarrow x_1=\psi_1(y)=-\sqrt{y},\ x_2=\psi_2(y)=\sqrt{y}$, при y>0

$\eta\geq 0 \Rightarrow f_\eta(y)=0\ ,\quad y<0$

$$\psi_1'(y)=-\frac{1}{2\sqrt{y}},\ \psi_2'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Функции непрерывных случайных величин

По теореме при y>0:

$$f_\eta(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\cdot\left|-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y}{2}}\cdot\left|\frac{1}{2\sqrt{y}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}\ ,y>0$$

$$f_{\xi^2}(y)=\begin{cases}0, y\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, y>0\end{cases}$$

Это плотность распределения $\chi^2(1)$.

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 13

Функции непрерывных случайных векторов

Функции непрерывных случайных векторов

Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – непрерывный случайный вектор

с плотностью $f_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n)$.

Распределение $\eta = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$:

$$F_\eta(y) = P(\eta \le y) = P(\varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) \le y) = P(\,(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in D_y) =$$
$$= \int \underset{D_y}{\ldots} \int f_{\xi_1, \ldots, \xi_n}(x_1, \ldots, x_n) dx_1 \ldots dx_n$$

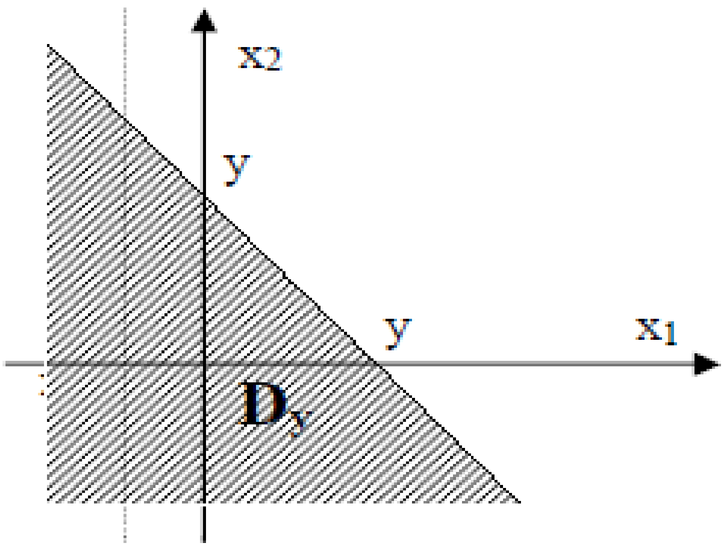
где $D_y = \{(x_1, \ldots, x_n) \in R^n \mid \varphi(x_1, \ldots, x_n) \le y\}$.

Функции непрерывных случайных векторов

(ξ_1, ξ_2) – непрерывный случайный вектор с плотностью $f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)$

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 \Rightarrow F_\eta(y) = P(\xi_1 + \xi_2 \le y) =$$

$$= \iint\limits_{D_y} f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)\,dx_1 dx_2$$, где $D_y = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \le y\}$



Функции непрерывных случайных векторов

$$F_{\eta}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{-\infty}^{y-x_1}f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)dx_2=\left\{\begin{aligned}x_1+x_2&=u\\x_2&=u-x_1\\dx_2&=du\end{aligned}\right\}=$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}dx_1\int_{-\infty}^{y}f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,u-x_1)du=\int_{-\infty}^{y}du\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,u-x_1)dx_1$$

$$f_{\eta}(y)=\frac{d}{dy}F_{\eta}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,y-x_1)dx$$

Функции непрерывных случайных векторов

Если ξ_1 и ξ_2 – независимые непрерывные случайные величины, то

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=f_{\xi_1}(x_1)\cdot f_{\xi_2}(x_2)$$

$$f_{\xi_1+\xi_2}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x_1)\cdot f_{\xi_2}(y-x_1)\,dx_1=(f_{\xi_1}*f_{\xi_2})(y)$$

т.е. плотность суммы независимых непрерывных случайных величин равна свертке плотностей.

Функции непрерывных случайных векторов

Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0,1]$. Тогда случайный вектор (ξ_1,ξ_2) равномерно распределён в единичном квадрате $[0,1]\times[0,1]$.

Рассмотрим функцию случайного вектора $\eta=\xi_1+\xi_2$.

Найдём функцию распределения случайной величины η:

$$F_\eta(y)=P(\eta\le y)=P(\xi_1+\xi_2\le y)=P((\xi_1,\xi_2)\in D_y),$$

где $D_y=\{(x_1,x_2)\,|\,x_1+x_2\le y\}$.

Функции непрерывных случайных векторов

Получаем

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \le 0; \\ \dfrac{y^2}{2}, 0 < y \le 1; \\ 1 - \dfrac{(2-y)^2}{2}, 1 < y < 2; \\ 1, 2 \le y. \end{cases}$$

Функции непрерывных случайных векторов

Поэтому плотность распределения η равна

$$f_\eta(y) = F'_\eta(y) = \begin{cases} 0, y \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty); \\ y, 0 < y \le 1; \\ 2 - y, 1 < y < 2. \end{cases}$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 14

Характеристические функции

Характеристические функции

Характеристическая функция случайной величины ξ:

$$g_\xi(t) = Me^{it\xi} = M(\cos t\xi) + iM(\sin t\xi).$$

Если ξ — дискретная случайная величина и $p_k = P(\xi = x_k)$,

то $g_\xi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k = \sum_k \cos(tx_k) p_k + i \sum_k \sin(tx_k) p_k$.

Если ξ — непрерывная случайная величина с плотностью

$f_\xi(x)$, то $g_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_\xi(x)\,dx$.

Характеристические функции

Свойства $g_\xi(t)$:

1) $|g_\xi(t)| \le 1$ при $t \in (-\infty, +\infty)$;

$g_\xi(0) = 1; \quad g_\xi(-t) = \overline{g_\xi(t)}$

2) $\eta = k\xi + b \Rightarrow g_\eta(t) = e^{itb} g_\xi(kt)$;

3) ξ_1 и ξ_2 — независимы $\Rightarrow g_{\xi_1+\xi_2}(t) = g_{\xi_1}(t) g_{\xi_2}(t)$;

4) $M\xi = -ig_\xi'(0); \quad D\xi = (g_\xi'(0))^2 - g_\xi''(0)$;

5) если ξ — непрерывная случайная величина с плотностью

$f_\xi(x)$, то $\quad f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g_\xi(t)dt$.

Характеристические функции

Равномерное непрерывное распределение на (a,b)

ξ — равномерно распределена на (a,b)

$$g_\xi(x) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{itx}\,dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x \geq 0 \end{cases}$$

$$g_\xi(t) = \frac{\lambda}{-it+\lambda} = \frac{1}{1-ibt} = (1-ibt)^{-1}$$

где $b = \frac{1}{\lambda} = M\xi$.

Характеристические функции

Нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$:

рассмотрим $\xi^* = \dfrac{\xi - a}{\sigma}$, $\xi = \sigma \cdot \xi^* + a$,

ξ^* имеет нормальное распределение $N(0,1)$,

$$g_{\xi^*}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$g_{\xi}(t) = e^{ita} g_{\xi^*}(\sigma \cdot t) = e^{iat - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Характеристические функции

Гамма–распределение $\gamma(\alpha,\lambda)$:

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, x\le 0\\ \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}, x>0\end{cases}$$

$f_\xi(x)$ — оригинал,

$$f_\xi(x)\div\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha)}{(p+\lambda)^\alpha}=\left(\frac{\lambda}{p+\lambda}\right)^\alpha=$$

$$=(1+bp)^{-\alpha},\quad b=\frac{1}{\lambda}.$$

Характеристические функции

Распределение $\chi^2(n) = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \end{cases},$$

$$g_\xi(t) = (1-2it)^{-n/2}.$$

МИРЭА
Российский технологический университет

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 15

Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема

Последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится к случайной величине η, если $\lim\limits_{k\to\infty} F_{\xi_k}(x) = F_{\eta}(x)$ во всех точках x, в которых $F_{\eta}(x)$ непрерывна.

Обозначение: $\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{w} \eta$.

$$\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{w} \eta \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} g_{\xi_k}(t) = g_{\eta}(t)$$

Центральная предельная теорема

Нормированная случайная величина ξ^* для случайной величины ξ

$$\xi^* = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}.$$

Свойства:

1) $M\xi^* = 0$

2) $D\xi^* = M(\xi^*)^2 = 1$

Центральная предельная теорема

Теорема Линдеберга-Леви

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины.

Пусть $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$.

Тогда

$$S_n^* \xrightarrow[n\to\infty]{w} \eta \sim N(0,1).$$

Центральная предельная теорема

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Пусть ξ_n — число удач в n независимых испытаниях, p — вероятность удачи в одном испытании, $q = 1 - p$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(C_1 \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \le C_2\right) = \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Центральная предельная теорема

Следствие 1:

$$P\left(C_1 \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \le C_2 \right) \approx \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \Phi(C_2) - \Phi(C_1) = \Phi_0(C_2) - \Phi_0(C_1),$$

где $\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi_0(t)dt$,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_0(t)\,dt = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$$

Центральная предельная теорема

Следствие 2:

$$P(k_1 \le \xi_n \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Центральная предельная теорема

Следствие 3:

$$\nu_n = \frac{\xi_n}{n} \Rightarrow P\left(\left|\nu_n - p\right| \le \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 = 1 - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

МИРЭА
Российский технологический университет

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 16

Закон больших чисел

Закон больших чисел

Сходимость по вероятности

Последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$

сходится при $k \to \infty$ к случайной величине η

по вероятности, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\left|\xi_k - \eta\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad \left(\text{или } \lim_{k\to\infty} P\left(\left|\xi_k - \eta\right| \geq \varepsilon\right) = 0\right)$$

Обозначение: $\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{P} \eta$.

Закон больших чисел

Неравенство Чебышева

Пусть у случайной величины ξ

существуют $M\xi$ и $D\xi$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\xi - M\xi\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Закон больших чисел

Теорема Чебышева
(ЗБЧ для средних)

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — попарно независимые случайные величины и существуют $M\xi_k$ и $D\xi_k$. Также существует такая константа C, что $D\xi_k \le C$ для всех $k = 1,2,\ldots$ Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{k=1}^{n}\xi_k}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{n}M\xi_k}{n}\right| < \varepsilon\right) = 1 \text{ ,т.е. } \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k\right)\xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

Закон больших чисел

Следствие из теоремы Чебышева

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.), тогда $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$,

где $a = M\xi_k$ для всех k. По теореме Чебышева:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

, т.е.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$$

Закон больших чисел

Теорема Бернулли
(ЗБЧ для частот событий)

Пусть ξ_n — число удач в n независимых испытаниях,
p — вероятность удачи в одном испытании,
$q = 1 - p$ — вероятность неудачи в одном испытании,

$\nu_n = \dfrac{\xi_n}{n}$ — частота удач.

Тогда $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$.