МИРЭА
Российский технологический университет

**01.03.02 «Прикладная математика и информатика»**

# Теория вероятностей и математическая статистика

## Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 12

# Функции непрерывных случайных величин

# Функции непрерывных случайных величин

**Теорема**

Пусть $\xi$ – непрерывная случайная величина с плотностью $f_\xi(x)$, функция $y=\varphi(x)$ дифференцируема и имеет конечное число экстремумов. Рассмотрим случайную величину $\eta=\varphi(\xi)$. Тогда плотность $\eta$ находится по формуле

$$f_\eta(y)=\sum_i f_\xi(\psi_i(y))\,|\psi_i'(y)|,$$ где $\{x_1,\dots,x_i,\dots\}=\varphi^{-1}(y)$ и $x_i=\psi_i(y)$

при этом $f_\eta(y)=0$, если $\varphi^{-1}(y)=0$.

# Функции непрерывных случайных величин

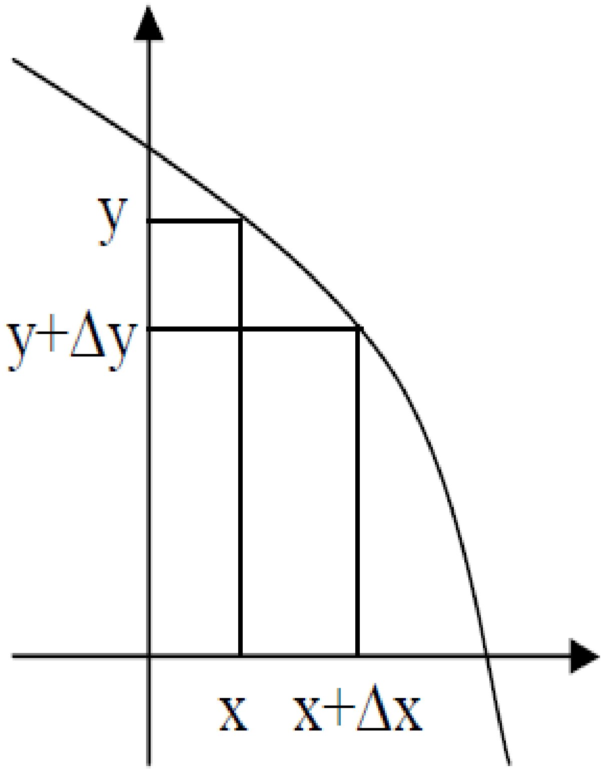
*Доказательство:*

1) $\varphi$ – монотонная

Пусть $\varphi(x) = y,\ x = \varphi^{-1}(y) = \psi(y)$

$$\varphi(x+\Delta x) = y + \Delta y,$$

$$x + \Delta x = \varphi^{-1}(y+\Delta y) = \psi(y+\Delta y)$$



# Функции непрерывных случайных величин

$$P\left(\eta\in\left[y,y+dy\right]\right)=\left|\int_{y}^{y+\Delta y}f_{\eta}(s)ds\right|=f_{\eta}(y^{*})\left|\Delta y\right|,\ y^{*}\in\left[y,y+\Delta y\right]$$

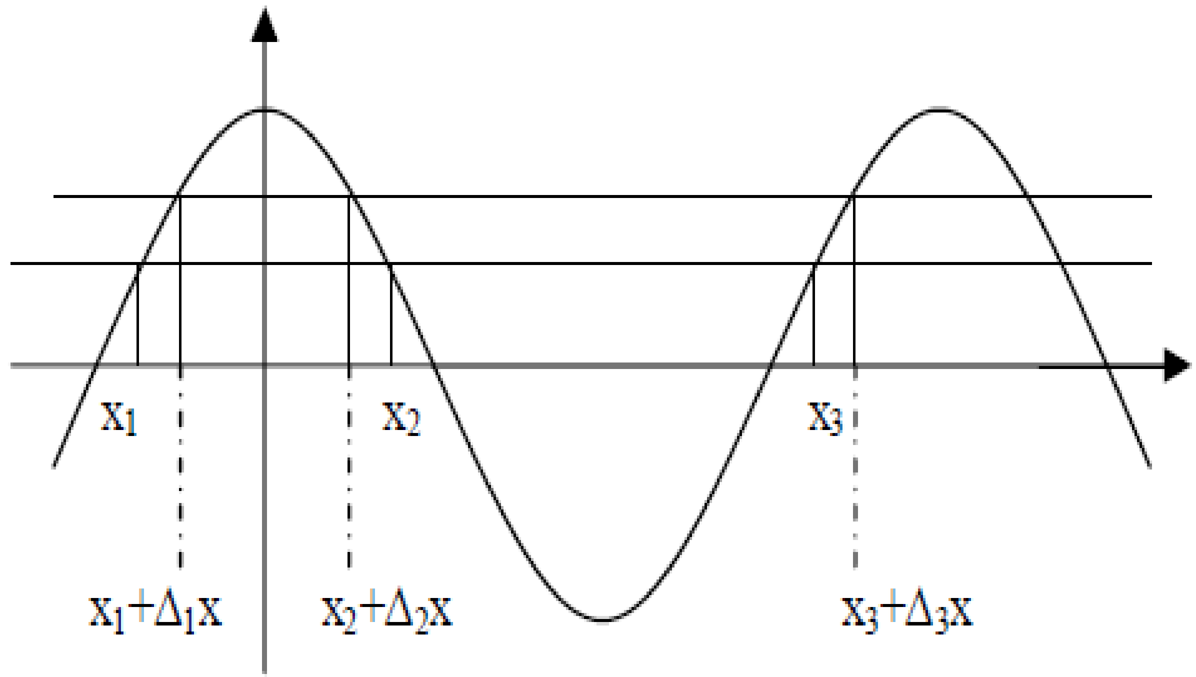
$$P\left(\xi\in\left[x,x+\Delta x\right]\right)=\left|\int_{x}^{x+\Delta x}f_{\xi}(t)dt\right|=f_{\xi}(x^{*})\left|\Delta x\right|,\ x^{*}\in\left[x,x+\Delta x\right]$$

$$f_{y}(y^{*})=f(x^{*})\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right|\Rightarrow f_{\eta}(y)=\lim_{\Delta y\to 0}f_{\eta}(y^{*})=\lim_{\Delta y\to 0}f_{\xi}(x^{*})\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right|=$$

$$=f_{\xi}(x)\lim_{\Delta y\to 0}\left|\frac{\Delta x}{\Delta y}\right|=f_{\xi}(\psi(y))\left|\psi^{/}(y)\right|$$

# Функции непрерывных случайных величин

2) $\varphi$ – немонотонная




Пусть $\varphi^{-1}(y)=\{x_1,x_2,\ldots\},\psi_i(y)=x_i,\ \psi_i(y+\Delta y)=x_i+\Delta_i x$

# Функции непрерывных случайных величин

$$P(\eta \in [y, y+dy]) = \left| \int_{y}^{y+\Delta y} f_\eta(s)ds \right| = f_\eta(y^*)|\Delta y|,\ y^* \in [y, y+\Delta y]$$

$$\sum_i P(\xi \in [x_i, x_i + \Delta_i x]) = \sum_i \left| \int_{x_i}^{x_i+\Delta_i x} f_\xi(t)dt \right| = \sum_i f_\xi(x_i^*)|\Delta_i x|$$

# Функции непрерывных случайных величин

$$P(\eta \in [y, y+dy]) = \left| \int_{y}^{y+\Delta y} f_\eta(s)ds \right| = f_\eta(y^*)|\Delta y|, \ y^* \in [y, y+\Delta y]$$

$$\sum_i P(\xi \in [x_i, x_i + \Delta_i x]) = \sum_i \left| \int_{x_i}^{x_i+\Delta_i x} f_\xi(t)dt \right| = \sum_i f_\xi(x_i^*)|\Delta_i x|$$

# Функции непрерывных случайных величин

*Пример:*

$\xi$ – непрерывная случайная величина с плотностью $f_{\xi}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1\right)$$

$\eta=\xi^2, y=x^2 \Rightarrow x_1=\psi_1(y)=-\sqrt{y},\ x_2=\psi_2(y)=\sqrt{y}$, при y>0

$\eta\geq 0 \Rightarrow f_{\eta}(y)=0\ ,\quad y<0$

$$\psi_1'(y)=-\frac{1}{2\sqrt{y}},\ \psi_2'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}$$

# Функции непрерывных случайных величин

По теореме при y>0:

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, y > 0$$

$$f_{\xi^2}(y) = \begin{cases} 0, y \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, y > 0 \end{cases}$$

Это плотность распределения $\chi^2(1)$.