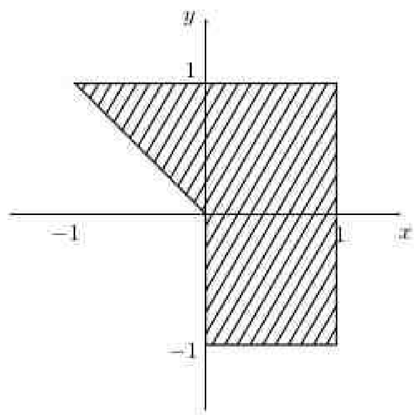
Задача. Случайный вектор принимает значения в области, изображенной на рисунке, и имеет там плотность вероятности

$$\rho(x, y) = A(x + y + 1).$$

Найти значение нормирующей константы A, плотности вероятности, математические ожидания и дисперсии компонент X и Y. Найти коэффициент корреляции между компонентами. Верно ли, что X и Y независимы?



Решение. Сразу, без всяких вычислений, можно дать ответ на вопрос о зависимости компонент. Действительно, при $Y = -1$ значения X находятся в пределах от 0 до 1, а при $Y = 1$ — в пределах от -1 до 1. Поэтому компоненты, разумеется, зависимы.

Обозначим нашу область Ω. Для использования любой системы компьютерной алгебры, как и для счета вручную, следует правильно расставить пределы интегрирования. Получим, что для нашей области для любой функции $f(x, y)$

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-y}^1 f(x,y)dx + \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_0^1 f(x,y)dx$$

Для нахождения нормирующей константы проинтегрируем плотность вероятности $\rho(x, y)$ по нашей области. Получим, что $11A/3 = 1$, следовательно $A = 3/11$.

Для нахождения плотностей вероятности компонент проинтегрируем $\rho(x, y)$ по каждой из переменных. Получим

$$\rho_X(x) = \begin{cases} \frac{3}{22}(x^2 + 4x + 3) \text{ при } x < 0 \\ \frac{6}{11}(x + 1) \text{ при } x > 0; \end{cases}$$

$$\rho_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{22}(2y + 3) \text{ при } y < 0 \\ \frac{3}{22}(y^2 + 4y + 3) \text{ при } y > 0. \end{cases}$$

Найдем теперь математические ожидания компонент:

$$MX = \int\limits_{-1}^1 \rho_X(x)dx = \frac{35}{88};$$

$$MY = \int\limits_{-1}^{1} \rho_Y(y)dy = \frac{27}{88}.$$

Найдем дисперсии:

$$DX = \int\limits_{-1}^{1} (x - MX)^2 \rho_X(x)dx = \frac{7251}{38720};$$

$$DY = \int\limits_{-1}^{1} (y - MY)^2 \rho_Y(y)dy = \frac{10611}{38720};$$

Найдем ковариацию компонент

$$\operatorname{cov}(X, Y) = \iint\limits_{\Omega} (x - MX)(y - MY)\rho(x, y)dxdy = -\frac{2877}{38720}.$$

Следовательно, коэффициент корреляции равен

$$\mathrm{r}(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX \cdot DY}} = -\frac{959\sqrt{23747025}}{14248215} \approx -0,328.$$

Для вычисдения всех этих интегралов следует воспользоваться системой компьютерной алгебры.

Задача. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке $[-3, 0]$. Найти математическое ожидание, дисперсию и плотность распределения случайной величины $\eta = \ln(\xi^2 + 2\xi + 2)$.

Решение

Будем искать функцию распределения

$$F(x) = P(\eta < x) = P(\ln(\xi^2 + 2\xi + 2) < x) = P(\xi^2 + 2\xi + 2 < e^x) =$$

$$= P(\xi^2 + 2\xi + 1 < e^x - 1) = P((\xi + 1)^2 < e^x - 1).$$

При $x < 0$ эта вероятность равна нулю, поэтому дальше будем считать, что $x > 0$. Тогда

$$F(x) = P(-\sqrt{e^x - 1} < \xi + 1 < \sqrt{e^x - 1}) = P(-\sqrt{e^x - 1} - 1 < \xi < \sqrt{e^x - 1} - 1)$$

Плотность вероятности случайной величины ξ равна $1/3$, поэтому

$$F(x) = \frac{1}{3} \int\limits_D dx,$$

где через D обозначено пересечение отрезков $[-3, 0]$ и $[-\sqrt{e^x - 1} - 1, \sqrt{e^x - 1} - 1]$.
Решая уравнение $\sqrt{e^x - 1} - 1 = 0$, найдем $x = \ln 2$.
Решая уравнение $-\sqrt{e^x - 1} - 1 = -3$, найдем $x = \ln 5$.
Поэтому длина отрезка D равна
$2\sqrt{e^x - 1}$, если $x < \ln 2$;
$\sqrt{e^x - 1} + 1$, если $\ln 2 < x < \ln 5$;
3 если $x > \ln 5$. Функция распределения равна

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\sqrt{e^x - 1}, \text{ если } x < \ln 2; \\ \frac{1}{3}(\sqrt{e^x - 1} + 1) \text{ если } \ln 2 < x < \ln 5; \\ 1, \text{ если } x > \ln 5. \end{cases}$$

Плотность вероятностей можно найти дифференцированием

$$\rho(x) = F'(x).$$

При этом можно воспользоваться системой компьютерной алгебры. Поскольку случайная величина η, как выяснилось, принимает значения на отрезке $[0, \ln 5]$, для нахождения математического ожидания и дисперсии можно воспользоваться следующими формулами:

$$MX = \int\limits_0^{\ln 5} x\rho(x)dx;$$

$$DX = M(X - MX)^2 = \int\limits_0^{\ln 5} (x - MX)^2 \rho(x)dx.$$

Для вычисдения этих интегралов также следует воспользоваться системой компьютерной алгебры.