01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 10

Характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ с плотностью $f_\xi(x)$ называется число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx \;,$$

если интеграл абсолютно сходится.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Теорема.

Пусть ξ - непрерывная случайная величина с плотностью $f_\xi(x)$,

$\eta = \varphi(\xi)$ − функция случайной величины ξ. Тогда

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_\xi(x)dx$$

Непрерывные случайные векторы

Теорема.

Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – непрерывный случайный вектор с плотностью $f_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n)$,

$\eta = \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – функция случайного вектора $\vec{\xi}$. Тогда

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} d\, x_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n) f_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) d\, x_n$$

Математическое ожидание

Свойства математического ожидания непрерывной случайной величины

1) $\xi \geq 0 \Rightarrow M\xi \geq 0$

2) $M(\alpha\xi) = \alpha M\xi$

3) $|M\xi| \leq M|\xi|$

4) $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$

5) ξ,η - независимы $\Rightarrow M(\xi\eta) = (M\xi)(M\eta)$

6) пусть (ξ,η) – непрерывный случайный вектор с плотностью $f_{\xi,\eta}(x,y)$, тогда

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi,\eta}(x,y)dy\,;\;\; M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{\xi,\eta}(x,y)dy$$

Дисперсия непрерывной случайной величины

Дисперсия случайной величины ξ :

$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, если математическое ожидание существует.

Теорема.

ξ -непрерывная случайная величина с плотностью $f_\xi(x)$,

тогда $D\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx - (\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx)^2$

Дисперсия непрерывной случайной величины

Доказательство:

$$1)\ \eta = (\xi - M\xi)^2 = \varphi(\xi) \Rightarrow \ M\eta = D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x)dx$$

$$2)\ \ M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) =$$

$$= M\xi^2 - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 = D\xi$$

$$\eta = \xi^2 = \varphi(\xi) \Rightarrow \ M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx \Rightarrow$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x)dx - (\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)dx)^2 .$$

Ковариация непрерывных случайных величин

Ковариация случайных величин ξ_1 и ξ_2 :

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = M\left[(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)\right],$$

если математическое ожидание существует.

Для непрерывных случайных величин ξ_1 и ξ_2

с совместной плотностью $f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2)$

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - M\xi_1)(x_2 - M\xi_2) \cdot f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) dx_2$$

Ковариация непрерывных случайных величин

Доказательство:

$$\eta = (\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)$$

$$\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2) = M\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - M\xi_1)(x_2 - M\xi_2) \cdot f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) d x_2$$

Ковариация непрерывных случайных величин

Другая формула для ковариации случайных величин ξ_1 и ξ_2 :

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) = M(\xi_1 \cdot \xi_2) - (M\xi_1)(M\xi_2).$$

Для непрерывных случайных величин ξ_1 и ξ_2

с совместной плотностью $f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)$

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1x_2) f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)\,dx_2 -$$

$$-(M\xi_1)\,(M\xi_2)$$

Ковариация случайных величин

Свойства $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$

1) $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \operatorname{cov}(\xi_2, \xi_1)$

2) $\operatorname{cov}(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2, \eta) = \alpha_1 \operatorname{cov}(\xi_1, \eta) + \alpha_2 \operatorname{cov}(\xi_2, \eta)$

3) ξ_1, ξ_2 – не зависимы $\Rightarrow \operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$

4) $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \dfrac{1}{2}\left[D(\xi_1 + \xi_2) - D\xi_1 - D\xi_2\right]$

5) $\left|\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)\right| \le \sigma_{\xi_1} \cdot \sigma_{\xi_2}$

Коэффициент корреляции случайных величин

Коэффициент корреляции случайных величин ξ и η:

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi, \sigma_\eta}$$

Свойства $r_{\xi,\eta}$

1) $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$

2) $\left| r_{\xi,\eta} \right| \le 1$

3) ξ, η - независимые $\Rightarrow r_{\xi,\eta} = 0$

4) $\left| r_{\xi,\eta} \right| = 1 \Leftrightarrow \eta = \alpha\xi + \beta$

Коэффициент корреляции случайных величин

Доказательство свойства 4:

пусть $\eta = \alpha \cdot \xi + \beta \Rightarrow D\eta = \alpha^2 D\xi$

$$\sigma_\eta = |\alpha| \sigma_\xi$$

$$\operatorname{cov}(\alpha \cdot \xi + \beta, \xi) = \alpha \operatorname{cov}(\xi, \xi) + \beta \operatorname{cov}(1, \xi) = \alpha \cdot D\xi$$

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\alpha \cdot D\xi}{|\alpha| \sigma_\xi \sigma_\xi} = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \begin{cases} 1, \alpha > 0 \\ -1, \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow |r_{\xi,\eta}| = 1$$

Коэффициент корреляции случайных величин

Доказательство свойства 4: пусть $r_{\xi,\eta}=1$

Рассмотрим $M\left(\frac{\xi-M\xi}{\sigma_\xi}-\frac{\eta-M\eta}{\sigma_\eta}\right)^2=$

$$=\frac{M(\xi-M\xi)^2}{\sigma_\xi^2}+\frac{M(\eta-M\eta)^2}{\sigma_\eta^2}-2\frac{M\left[(\xi-M\xi)(\eta-M\eta)\right]}{\sigma_\xi\sigma_\eta}=1+1-2r_{\xi,\eta}=2-2=0$$

$$\frac{\xi-M\xi}{\sigma_\xi}-\frac{\eta-M\eta}{\sigma_\eta}=0\Rightarrow\eta=\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi-M\xi)+M\eta=\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}\xi+\left(M\eta-\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi\right)=\alpha\cdot\xi+\beta$$

где $\alpha=\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}$, $\beta=M\eta-\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi$

Коэффициент корреляции случайных величин

Доказательство свойства 4:

пусть $r_{\xi,\eta} = -1$

Рассмотрим $M\left(\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi} + \frac{\eta - M\eta}{\sigma_\eta}\right)^2 = \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\sigma_\xi^{\ 2}} + \frac{M(\eta - M\eta)^2}{\sigma_\eta^{\ 2}} + 2\frac{M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)]}{\sigma_\xi \sigma_\eta} =$

$= 1 + 1 + 2r_{\xi,\eta} = 2 - 2 = 0$

$$\eta = -\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi - M\xi) + M\eta = -\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}\xi + \left(M\eta + \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi\right) = \alpha \cdot \xi + \beta,$$

где $\alpha = -\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}$, $\beta = M\eta + \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi$