01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 16

Закон больших чисел

Закон больших чисел

Сходимость по вероятности

Последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$

сходится при $k \to \infty$ к случайной величине η

по вероятности, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\left|\xi_k - \eta\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad \left(\text{или } \lim_{k\to\infty} P\left(\left|\xi_k - \eta\right| \ge \varepsilon\right) = 0\right)$$

Обозначение: $\xi_k \xrightarrow[k\to\infty]{P} \eta$.

Закон больших чисел

Неравенство Чебышева

Пусть у случайной величины ξ существуют $M\xi$ и $D\xi$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P\left(\left|\xi - M\xi\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Закон больших чисел

Теорема Чебышева
(ЗБЧ для средних)

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — попарно независимые случайные величины и существуют $M\xi_k$ и $D\xi_k$. Также существует такая константа C, что $D\xi_k \le C$ для всех $k = 1,2,\ldots$ Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k}{n} - \frac{\sum_{k=1}^{n} M\xi_k}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1 \text{ ,т.е. } \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\xi_k \right) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

Закон больших чисел

Следствие из теоремы Чебышева

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.), тогда $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$,

где $a = M\xi_k$ для всех k. По теореме Чебышева:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}M\xi_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$, т.е.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow[n\to\infty]{P} a$$

Закон больших чисел

Теорема Бернулли
(ЗБЧ для частот событий)

Пусть ξ_n — число удач в n независимых испытаниях,
p — вероятность удачи в одном испытании,
$q = 1 - p$ — вероятность неудачи в одном испытании,
$\nu_n = \dfrac{\xi_n}{n}$ — частота удач.

Тогда $\nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} p$.