Условие задачи 1 типового расчета.

Из урны, содержащей m белых и n красных шаров, извлекают без возвращения 5 шаров. Случайная величина X — число белых шаров среди выбранных. Найти закон распределения X, ее математическое ожидание и дисперсию.

В варианте 30 $m = 14$, $n = 5$.

Решая эту задачу, получаем такое распределение

X	0	1	2	3	4	5
P	0,0001	0,0060	0,0783	0,3130	0,4304	0,1722

Математическое ожидание и дисперсия равны соответственно $MX = 3,6842$, $DX = 0,7541$.

Условие задачи 4 типового расчета.

Опыт, описанный в задаче 1, повторяют N раз. Пусть случайная величина Z — суммарное число белых шаров.
Найти MZ и DZ — математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z.
Величины z_-, z_+ и z определены следующим образом:
случайная величина Z принимает значения, большие z_-, с вероятностью 95%;
случайная величина Z принимает значения, меньшие z_+, с вероятностью 95%;
случайная величина Z принимает значения из интервала $(MZ - z, MZ + z)$ с вероятностью 95%.
Оценить величины z_-, z_+ и z с помощью центральной предельной теоремы.

В варианте 30 $N = 1440$.

Решение

По формулам для суммы независимых случайных величин

$$MZ = N \cdot MX = 5305,26; \quad DZ = N \cdot DX = 1085,87.$$

Согласно центральной предельной теореме случайная величина Z имеет приблизительно нормальное распределение.

Значение z_- — это такое число, что случайная величина Z принимает значение, большее z_- с вероятностью 95%. Чтобы найти это значение, составим уравнение

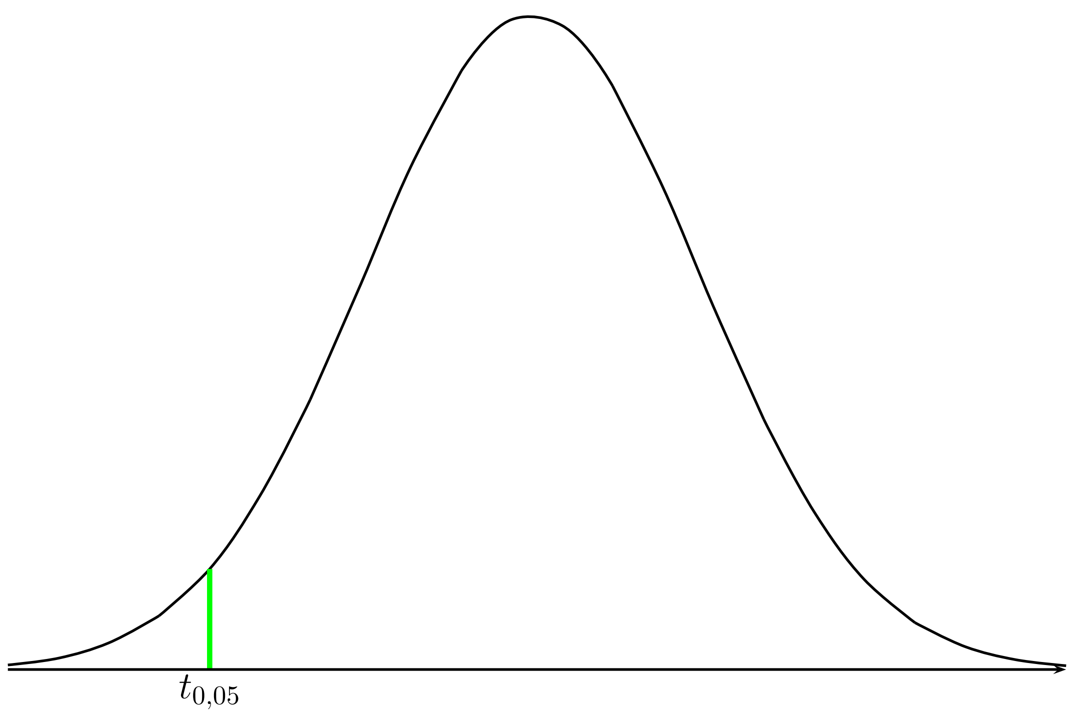
$$P(z_- < Z) = 0,95.$$

Далее действуем так же, как если бы Z имела нормальное распределение. Сначала перейдем к стандартному нормальному, то есть вычтем среднее и разделим на корень из дисперсии. Получим

$$P\Big(\frac{z_- - MZ}{\sqrt{DZ}} < \frac{Z - MZ}{\sqrt{DZ}}\Big) = 0,95.$$

Важно правильно интерпретировать это уравнение. В правой части неравенства величина $(Z - MZ)/\sqrt{DZ}$ — это случайная величина, меющая стандартное нормальное распределение. В левой части неравенства $(z_- - MZ)/\sqrt{DZ}$ — это число. Это такое число, что случайная величина больше него с вероятностью 0,95, и меньше него с вероятностью 0,05. Такое число носит название 0,05-квантиль стандартного нормального распределения.

Все это хорошо видно на рисунке. На нем изображены график плотности вероятности для стандартного нормального распределения и точка $t_{0,05}$ — квантиль. Площадь под всем графиком равна 1 (ведь это же график плотности вероятностей), левее $t_{0,05}$ площадь равна $0,05$, а правее, соответственно, $0,95$.



Все значения площадей под этим графиком известны и представлены в таблицах, как бумажных, так и электронных. Площадь от $-\infty$

до точки x (точка x произвольная, она на рисунке не показана) — эта новая специальная функция, которая обозначается $\Phi(x)$ (заглавная греческая буква "фи"). Это стандартная функция, которая используется настолько часто, что заслужила несколько особых наименований:
— интеграл вероятностей;
— интеграл ошибок;
— пробит-функция (от слова "probability" — вепрятность).
Ну и, конечно, это функция распределения для стандартного нормального распределения. Математическая формула для этой функции такая

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Впрочем, она нам не понадобится, поскольку интеграл этот не берется в элементарных функциях, и поэтому пользуются таблицами.

Нам, однако, нужны не найти значения этой функции в какой-то точке, а решить обратную задачу: в какой точке ее значение равно 0,05. Иными словами, нам надо решить уравнение

$$\Phi\Big(\frac{z_- - MZ}{\sqrt{DZ}}\Big) = 0,05.$$

Для его решения тоже нужно воспользоваться таблицей. В программе Libre Office версии 6.0.7.3 это значение вычисляет стандартная функция НОРМСТОБР. Получим

$$\frac{z_- - MZ}{\sqrt{DZ}} = -1,64.$$

Подставляя значения MZ и DZ, получим окончательно

$$z_- = MZ - 1,64 \cdot \sqrt{DZ} = 5251,06.$$

Это и есть ответ к первой части задания.

Вторая часть задания аналогична. Составим уравнение

$$P(Z < z_+) = 0,95.$$

Далее опять же перейдем к стандартному нормальному распределению — вычтем среднее и разделим на корень из дисперсии. Получим

$$P\Big(\frac{Z - MZ}{\sqrt{DZ}} < \frac{z_+ - MZ}{\sqrt{DZ}}\Big) = 0,95.$$

Теперь переходим к уравнению

$$\Phi\Big(\frac{z_- - MZ}{\sqrt{DZ}}\Big) = 0,95.$$

По таблице находим

$$\frac{z_+ - MZ}{\sqrt{DZ}} = 1,64.$$

Никого не должно удивлять, что α-квантиль и $(1-\alpha)$-квантиль отличаются только знаком. Это сразу следует из того, что плотность вероятности стандартного нормального распределения — симметричная функция. Поэтому площадь левее t_α такая же, как и площадь правее $t_{1-\alpha}$. Из этого следует и еще одна формула, которая нам скоро пригодится:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

Теперь осталось подставить значения

$$z_+ = MZ + 1,64 \cdot \sqrt{DZ} = 5359,47.$$

В третьей части задания надо найти интервал $(MZ - z, MZ + z)$, вероятность которого равна 0,95. Для этого запишем такое уравнение

$$P(MZ - z < Z < MZ + z) = 0,95.$$

Дальше действуем уже привычным способом: вычитаем среднее из всех трех частей двойного неравенства и делим на корень из дисперсии. Получим

$$P\Big(-\frac{z}{\sqrt{DZ}} < \frac{Z - MZ}{\sqrt{DZ}} < \frac{z}{\sqrt{DZ}}\Big) = 0,95.$$

Переходим к функции распределения

$$\Phi\Big(\frac{z}{\sqrt{DZ}}\Big) - \Phi\Big(-\frac{z}{\sqrt{DZ}}\Big) = 0,95.$$

Теперь воспользуемся недавно выведенной формулой

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

и получим

$$2\Phi\Big(\frac{z}{\sqrt{DZ}}\Big) - 1 = 0,95,$$

поэтому
$$\Phi(\frac{z}{\sqrt{DZ}}) = 0,975.$$
По таблице находим
$$\frac{z}{\sqrt{DZ}} = 1,96,$$
и окончательно $z = 64,59$.

Двусторонний интервал, имеющий заданную вероятность, в нашем случае 0,95, изображен на рисунке: это интервал между 0,025 и 0,975-квантилями.