

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1

Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

Направление подготовки бакалавров **01.03.02 «Прикладная математика и информатика»**

Профили подготовки

«Математическое моделирование и вычислительная математика»
«Системное программирование и компьютерные технологии»

Формируемые компетенции:

- способность собирать, обрабатывать и интерпретировать данные современных научных исследований;
- знание принципов решения вероятностных задач с использованием стандартных программных средств;
- владение навыками построения стохастических моделей для исследования случайных явлений.

ЛЕКЦИЯ 1

Основные понятия теории вероятностей

Основные понятия теории вероятностей

Случайное событие – результат (исход) некоторого испытания (эксперимента, наблюдения), который может осуществиться или не осуществиться.

Элементарное событие (элементарный исход) нельзя разделить на события, которые могут осуществиться.

Пространство элементарных событий Ω – множество всех элементарных событий (исходов).

Каждое элементарное событие (исход) ω – элемент Ω , $\omega \in \Omega$.

Каждое событие A – подмножество Ω , $A \subseteq \Omega$. Событие A произошло, когда осуществился некоторый элементарный исход ω , который входит в A , $\omega \in A$.

Ω также называют достоверным событием.

Невозможное событие \emptyset не содержит в себе ни одного элементарного события.

Операции над событиями

Противоположное событие

$$\bar{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$$

Произведение событий

$$AB = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}$$

Сумма событий

$$A+B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$$

Разность событий

$$A - B = A \cdot \bar{B}$$

Симметрическая разность событий

$$A \Delta B = (A \setminus B) + (B \setminus A) = A + B - AB$$

Сравнение терминов теории вероятностей и теории множеств

<i>Теория множеств</i>	<i>Теория вероятностей</i>
1. Ω – множество	1. Ω – достоверное событие
2. $\omega \in \Omega$ – элементы	2. $\omega \in \Omega$ – элементарные исходы
3. $A \subseteq \Omega$ – подмножество	3. $A \subseteq \Omega$ – событие
4. \bar{A} – дополнение	4. \bar{A} – противоположное событие
5. $A \cap B$ – пересечение	5. AB – произведение событий
6. $A \cup B$ – объединение	6. $A+B$ – сумма событий
7. \emptyset – пустое множество	7. \emptyset – невозможное событие
8. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \text{ и } B$ – непересекающиеся множества	8. $AB = \emptyset \Rightarrow A \text{ и } B$ – несовместные события

Свойства операций над событиями

Ассоциативность

$(A+B)+C = A+(B+C)$ – ассоциативность сложения

$(AB)C = A(BC)$ – ассоциативность умножения

Коммутативность

$A+B = B+A$ – коммутативность сложения

$AB = BA$ – коммутативность умножения

Закон двойного отрицания $\overline{\overline{A}} = A$

Дистрибутивность

а) умножения по отношению к сложению

$$A(B+C) = AB + AC$$

б) сложения по отношению к умножению

$$A+BC = (A+B)(A+C)$$

Законы де Моргана $\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$

Вероятностное пространство

Множество событий \mathcal{A} называется σ -алгеброй, если выполнены следующие условия:

- 1) $\Omega \in \mathcal{A}$
- 2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \overline{A} \in \mathcal{A}$
- 3) $A_i \in \mathcal{A}, i=1,2,\dots \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

Отображение $P: \mathcal{A} \rightarrow R$ называется вероятностью, если

1) для любого $A \in \mathcal{A} \quad 0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{и} \quad P(\Omega)=1$

2) $A_i \in \mathcal{A} \quad (i=1,2,\dots); \quad A_i A_j = \emptyset \quad (i \neq j) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Тройка (Ω, \mathcal{A}, P) называется вероятностным пространством.

Основные свойства вероятности

$$1. P(\emptyset) = 0$$

$$2. P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$3. A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$4. P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$5. P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

Примеры вероятностных пространств

1. $\Omega = \{(i, j) | i, j = 1, \dots, 6\}$ – множество всех элементарных событий при бросании двух игральных костей;

$\mathcal{A} = M(\Omega)$ – множество всех подмножеств Ω ;

$\omega = (i, j) \Rightarrow P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}; \quad P(A) = \frac{|A|}{36}, \quad |A|$ – число элементов в A .

2. $\Omega = \{1, 2, \dots\}$; $\mathcal{A} = M(\Omega)$ – множество всех подмножеств Ω ;

$\omega = i \Rightarrow P(\{\omega\}) = \frac{1}{2^i}; \quad P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\{\omega\})$.

3. $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ – квадрат;

$\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ – множество борелевских подмножеств Ω ;

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow P(A) = S_A$ – площадь A .

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 2

Классическая и геометрическая вероятности

Классическая вероятность

Классическое определение вероятности применяется при выполнении условий:

1) $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, $|\Omega| = n < \infty$;

2) все $\omega_i \in \Omega$ равновозможны, т.е. $P(\{\omega_i\}) = p$ для всех $\omega_i \in \Omega$.

При этом из равенства $P(\Omega) = \sum_{i=1}^n P(\{\omega_i\}) = \sum_{i=1}^n p = np = 1$ следует

формула классической вероятности

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n}$$

для всех событий $A \subseteq \Omega$,

где $|A| = m$ – число элементов в A .

Для нахождения числа элементарных исходов в событиях применяются формулы комбинаторики.

Формулы комбинаторики

1. Число подмножеств $M(\Omega)$ множества Ω ($|\Omega|=n$)

равно $|M(\Omega)|=2^n$.

2. Число способов упорядоченного выбора m элементов из множества Ω ($|\Omega|=n$) с возвращением равно n^m .

3. Число способов упорядоченного выбора m элементов из множества Ω ($|\Omega|=n$) без возвращения равно

$$A_n^m = n(n-1)\cdots(n-m+1).$$

Про этой же формуле находится число размещений n различных элементов по m местам.

Формулы комбинаторики

4. Число перестановок n различных элементов $A_n^n = n!$.

5. Число сочетаний n различных элементов по m равно

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

это также равно числу способов неупорядоченного выбора m элементов из множества Ω ($|\Omega|=n$) без возвращения.

6. Число способов распределения n неразличимых элементов по r урнам (в каждой урне может быть от 0 до n элементов)

равно $C_{n+r-1}^n = C_{n+r-1}^{r-1} = \frac{A_{n+r-1}^n}{n!} = \frac{A_{n+r-1}^{r-1}}{(r-1)!} = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}.$

Задача о выборке

Из множества, содержащего N элементов, среди которых M отмеченных элементов, случайным образом выбирают n элементов. Требуется найти вероятность того, что среди n выбранных будет ровно m отмеченных элементов.

Элементарным событием в этом случае является любой неупорядоченный выбор n элементов из N , поэтому число элементов в множестве всех элементарных исходов Ω равно C_N^n .

Число элементарных исходов в рассматриваемом событии находится по правилу умножения: число способов выбора m элементов из M отмеченных умножается на число способов выбора остальных $n-m$ элементов из $N-M$ неотмеченных.

Поэтому требуемая вероятность находится по формуле

$$P = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$$

Геометрическая вероятность

Геометрическое определение вероятности применяется при выполнении условий:

- 1) $\Omega \subseteq R^n$, $0 < \mu(\Omega) < \infty$ (где $\mu(\Omega)$ – мера (площадь, объём) множества Ω в R^n);
- 2) вероятность любого события $A \subseteq \Omega$ пропорциональна его мере $\mu(A)$.

В этом случае $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\Omega)$ – множество борелевских подмножеств Ω .

Из условия 2) следует, что для всех $A \in \mathcal{A}$: $P(A) = \alpha \cdot \mu(A)$,

но $P(\Omega) = 1 = \alpha \cdot \mu(\Omega)$, т.е. $\alpha = \frac{1}{\mu(\Omega)}$. Отсюда получается

формула для геометрической вероятности

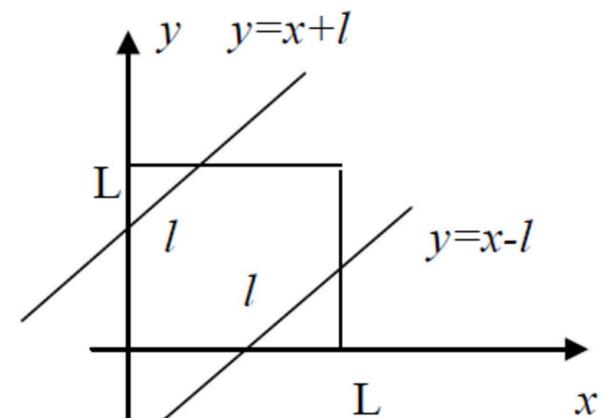
$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}.$$

Задача о встрече

Два человека приходят в парк в интервал времени от a до $a+L$. Каждый проводит там время l . Найти вероятность того, что они встретятся.

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L\}$$

$$A = \{(x, y) \in \Omega : |y - x| \leq l\}$$



$$\mu(\Omega) = L^2, \quad \mu(\bar{A}) = (L-l)^2, \quad \mu(A) = L^2 - (L-l)^2$$

$$P(A) = \frac{L^2 - (L-l)^2}{L^2} = 1 - \left(\frac{L-l}{L}\right)^2 = \frac{2l}{L} - \left(\frac{l}{L}\right)^2$$

ЗАДАЧА БЮФФОНА (1777 год)

На плоскость, расчерченную параллельными прямыми с расстоянием a друг от друга, случайным образом бросается игла длиной $l < a$. Найти вероятность того, что игла не пересечет ни одну линию.

$$\Omega = \{(x, \varphi) : 0 \leq x \leq \frac{a}{2}, 0 \leq \varphi \leq \pi\} \subseteq \mathbb{R}^2, \mu(\Omega) = \frac{a\pi}{2}$$

x - расстояние от центра иглы до ближайшей линии;

φ - угол между иглой и линией.

$$A = \{(x, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \pi, x > \frac{1}{2}l \sin \varphi\}, \mu(A) = \int_0^\pi \frac{1}{2}l \sin \varphi d\varphi = l$$

$$P(\bar{A}) = \frac{2l}{a\pi}, P(A) = 1 - \frac{2l}{a\pi}$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 3

Условные вероятности

Условные вероятности

Рассмотрим бросание игральной кости

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}$$

$$A = \{1, 3, 6\} \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$$B = \{2, 4, 6\} \quad P(A|B) = \frac{1}{3} = \frac{|A \cdot B|}{|B|} =$$

$$= \frac{\frac{|A \cdot B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}} = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$$

Условные вероятности

Условная вероятность события A при условии, что событие B произошло ($(P(B)>0)$), обозначается как $P(A|B)$ или $P_B(A)$ и определяется как $P(A|B)=\frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$.

Свойства условной вероятности:

1. Аддитивность:

если $A_i A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), то $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i | B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i | B)$.

2. Формула умножения для двух событий:

$$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

при условии $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$.

Свойства условной вероятности

2. Формула умножения для n событий

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 \dots A_{n-1})$$

Доказательство формулы умножения для n событий:

$$B_k = A_1 \dots A_k \Rightarrow B_1 = A_1; B_k = A_k \cdot B_{k-1}; A_1 A_2 \dots A_n = B_n$$

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_n \cdot B_{n-1}) = P(A_n | B_{n-1}) \cdot P(B_{n-1}) =$$

$$= P(A_n | B_{n-1}) \cdot P(A_{n-1} | B_{n-2}) \cdot P(B_{n-2}) = \dots$$

$$= P(A_n | A_1 \dots A_{n-1}) P(A_{n-1} | A_1 \dots A_{n-2}) \dots P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)$$

Независимость событий

События A и B называются независимыми, если
 $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$.

Если $P(A|B) = P(A)$, то говорят, что событие A не зависит от события B .

Свойства независимости:

1. Следующие свойства эквивалентны при условии

$P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$:

- a) A и B – независимы;**
- б) $P(A|B) = P(A)$ (событие A не зависит от B);**
- в) $P(B|A) = P(B)$ (событие B не зависит от A).**

Свойства независимости

2. Если $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ и $A \cdot B = \emptyset$ (т.е. A и B несовместны), то A и B зависимы.
3. Следующие утверждения эквивалентны:
 - а) A и B независимы;
 - б) A и \bar{B} независимы;
 - в) \bar{A} и B независимы;
 - г) \bar{A} и \bar{B} независимы.
4. Если A и B независимы, то $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$.
5. Для любого события A : A и \emptyset независимы
и A и Ω независимы.

Независимость событий

События $\{A_1, \dots, A_n\}$ называются попарно независимыми, если для всех $i \neq j$ верно $P(A_i A_j) = P(A_i) \cdot P(A_j)$.

События $\{A_1, \dots, A_n\}$ называются независимыми в совокупности, если для всех различных i_1, i_2, \dots, i_k верно $P(A_{i_1} \dots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$.

Из независимости в совокупности следует попарная независимость. Обратное неверно.

Формулы сложения для независимых событий

Формула сложения для 2-х независимых событий

$$P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)$$

Формула сложения для 3-х независимых событий

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) -$$

$$- P(A_1)P(A_2) - P(A_2)P(A_3) -$$

$$- P(A_1)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3) =$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 4

Формула полной вероятности и формула Байеса

Формула полной вероятности и формула Байеса

Полная группа событий

Рассматриваем вероятностное пространство (Ω, \mathcal{A}, P) .

События $\{H_k\}$ ($H_k \in \mathcal{A}$) образуют полную группу событий, если

1. $\sum_k H_k = \Omega$ (т.е. $\{H_k\}$ покрывают все пространство элементарных событий);

2. Для всех $k \neq j$ $H_k \cdot H_j = \emptyset$ (т.е. $\{H_k\}$ несовместны).

При этом справедливо равенство $\sum_k P(H_k) = P(\Omega) = 1$.

Пример: $\{\emptyset, \Omega\}$ – тривиальная полная группа событий.

Формула полной вероятности

Если события $\{H_k\}_{k=1}^n$ образуют ПГС и $P(H_k) > 0$, то

для любого события A : $P(A) = \sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A|H_k)$.

Доказательство:

$A = \sum_{k=1}^n (A \cdot H_k)$ и $(A \cdot H_k) \cdot (A \cdot H_j) = \emptyset$, поэтому

$$P(A) = \sum_{k=1}^n P(A \cdot H_k) = \sum_{k=1}^n P(H_k) \cdot P(A|H_k)$$

Формула Байеса

Если события $\{H_k\}_{k=1}^n$ образуют ПГС , $P(H_k) > 0$ и $P(A) > 0$, то для любого события H_j :

$$P(H_j | A) = \frac{P(H_j) \cdot P(A | H_j)}{\sum_{k=1}^n P(H_k) P(A | H_k)} .$$

Доказательство: используем определение условной вероятности и формулу полной вероятности

$$P(H_j | A) = \frac{P(A \cdot H_j)}{P(A)} = \frac{P(H_j) \cdot P(A | H_j)}{\sum_{k=1}^n P(H_k) P(A | H_k)} .$$

Пример

В первом ящике находится 2 белых шара и 3 чёрных, а во втором – 3 белых шара и 1 чёрный. Из первого ящика случайным образом переложен во второй ящик один шар.

Найти вероятность того, что:

- а) наудачу извлеченный после этого шар из второго ящика будет белым;
- б) из первого ящика был переложен во второй ящик белый шар, если известно, что после этого из второго ящика извлекли белый шар;
- с) из первого ящика был переложен во второй ящик чёрный шар, если известно, что после этого из второго ящика извлекли белый шар.

Решение:

a) Пусть $H_1=\{\text{из первого ящика во второй переложили белый шар}\}$,

$H_2=\{\text{из первого ящика во второй переложили чёрный шар}\}$,

$A=\{\text{из второго ящика извлекли белый шар}\}$.

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A|H_1)+P(H_2)\cdot P(A|H_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}=\frac{17}{25}.$$

$$\text{б)} \quad P(H_1|A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{17}{25}}=\frac{8}{17}.$$

$$\text{в)} \quad P(H_2|A)=\frac{P(H_2)\cdot P(A|H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{17}{25}}=\frac{9}{17}.$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 5

Последовательность независимых испытаний

Последовательность независимых испытаний (Схема Бернулли)

Проводятся одинаковые независимые испытания. Испытание называется удачным, если в нём произошло определённое событие A .

$P(A) = p$ – вероятность удачи, $P(\bar{A}) = 1 - p = q$ – вероятность неудачи. Удаче поставим в соответствие 1, а неудаче – 0.

Пример последовательности независимых испытаний

$A \quad \bar{A} \quad \bar{A} \quad A \quad \bar{A} \quad \bar{A} \quad \bar{A} \quad \bar{A}$

1 0 0 1 0 0 0 0

Рассмотрим событие

$B_k = \{\text{произошло ровно } k \text{ удач в } n \text{ независимых испытаниях}\}.$

Обозначим $P(B_k) = P_n(k)$.

Формула Бернулли

Теорема. $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

Доказательство:

$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, & \text{если удача в } i-\text{ом независимом испытании} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

$$\Omega = \left\{ \bar{\varepsilon} | (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = 0, 1 \right\}$$

$$B_k = \left\{ \bar{\varepsilon} | \sum \varepsilon_i = k \right\}, \quad \bar{\varepsilon} \in B_k \Rightarrow P(\{\bar{\varepsilon}\}) = p^k q^{n-k}$$

$$P(B_k) = |B_k| p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Приближение Пуассона

Применяется при $n \gg 1$, $p \ll 1$, $0,1 < n \cdot p < 10$.

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad (\lambda = np)$$

Теорема Пуассона. Пусть p_n (вероятность удачи) зависит от числа испытаний, при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda > 0$, $\lambda < \infty$.

Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Приближение Лапласа

При больших $n \gg 1$ и при условии

$n \gg 1$, $0 < p < 1$, $np > 10$ или $nq > 10$

применяется **приближение Лапласа**, основанное на теоремах Муавра-Лапласа.

Локальная теорема Муавра-Лапласа:

$$P_n(k) = C_n^k p^n q^{n-k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \text{ где}$$

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Приближение Лапласа

Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Пусть ξ_n – число удач в n независимых испытаниях,

p – вероятность удачи в одном испытании, $q = 1 - p$.

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_1 \leq \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \leq C_2) = \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{C_1}^{C_2} \varphi_0(t) dt$$

Функции $\varphi_0(t)$ и $\Phi(x)$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_0(t) dt , \quad \varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Свойства: 1) $\varphi_0(t) > 0$, 2) $\varphi_0(-t) = \varphi_0(t)$,

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t) dt = 1$, 4) $\Phi(-x) + \Phi(x) = 1$, 5) $\Phi(0) = 0,5$

Приближение Лапласа

Следствие 1:

$$P(k_1 \leq \xi_n \leq k_2) = P\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \int_{\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}} \varphi_0(t) dt =$$

$$= \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Приближение Лапласа

Следствие 2: Пусть $v_n = \frac{\xi_n}{n}$,

$$\begin{aligned} P(|v_n - p| \leq \varepsilon) &= P(-\varepsilon \leq v_n - p \leq \varepsilon) = P(p - \varepsilon \leq \frac{\xi_n}{n} \leq p + \varepsilon) = \\ &= P(n(p - \varepsilon) \leq \xi_n \leq n(p + \varepsilon)) \approx \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 = 1 - 2\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \end{aligned}$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 6

Дискретные случайные величины и дискретные случайные векторы

Функция распределения случайной величины

Отображение $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ называется **случайной величиной**, если для каждого $x \in \mathbb{R}$ событие $\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$, т.е. является элементом σ -алгебры \mathcal{A} .

Функция распределения случайной величины ξ определяется равенством $F_\xi(x) = P(\xi \leq x)$.

Свойства функции распределения: 1) для всех $x \in \mathbb{R}$: $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$;

2) если $x_1 < x_2$, то $F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$;

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0$;

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = 1$;

5) для каждого $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow a+0} F_\xi(x) = F_\xi(a)$.

Дискретные случайные величины

Отображение $\xi : \Omega \rightarrow M_\xi \subseteq \mathbb{R}$, $M_\xi = \{x_1, \dots, x_k, \dots\}$, называется **дискретной случайной величиной (д.с.в.)**.

События $\{H_k = (\xi = x_k)\}$ образуют полную группу.

Ряд распределения дискретной случайной величины ξ имеет вид

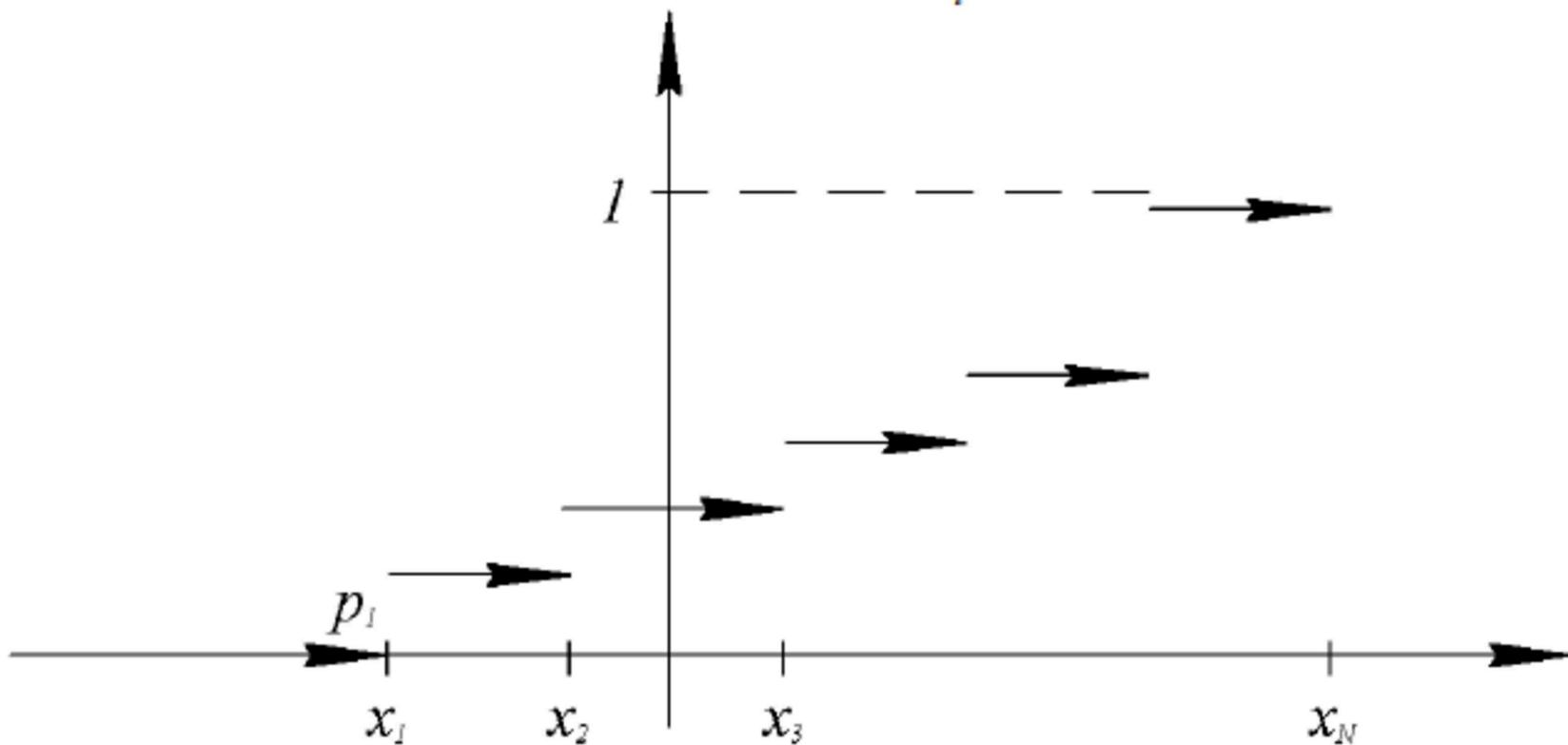
ξ	x_1	\dots	x_k
P	p_1	\dots	p_k

где $p_k = P(H_k)$ обладают следующими свойствами:

- 1) $0 < p_k \leq 1$;
- 2) $\sum p_k = 1$ – **свойство нормировки**;
- 3) $p_k = F_\xi(x_k) - F_\xi(x_k - 0)$.

Функция распределения д.с.в.

$$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$$



Функция дискретной случайной величины

Дана дискретная случайная величина ξ с рядом распределения

ξ	x_1	\dots	x_k
P	p_1	\dots	p_k

и функция $y = \varphi(x)$.

Ряд распределения случайной величины $\eta = \varphi(\xi)$

η	y_1	\dots	y_j
P	q_1	\dots	q_j

Определяется по формулам $y_j = \varphi(x_{i_1}) = \varphi(x_{i_2}) \dots$,

$$q_j = P(\eta = y_j) = \sum_{\varphi(x_i) = y_j} p_i .$$

Дискретные случайные векторы

Дискретный случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, где

$\xi_i : \Omega \rightarrow M_i \subseteq \mathbb{R}$ – дискретные случайные величины.

Двумерный дискретный случайный вектор (ξ, η)

$\xi : \Omega \rightarrow M_\xi = \{x_1, \dots, x_i, \dots\}$, $\eta : \Omega \rightarrow M_\eta = \{y_1, \dots, y_j, \dots\}$,

$\{H_{ij} = (\xi = x_i; \eta = y_j)\}$ – полная группа событий.

Совместные вероятности $p_{ij} = P(H_{ij})$ обладают свойствами:

1) $0 \leq p_{ij} \leq 1$;

2) $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$;

3) $\sum_j p_{ij} = p_i$, $\sum_i p_{ij} = q_j$ – одномерные (частные) вероятности.

Дискретные случайные векторы

Дискретные случайные величины ξ и η называются независимыми, если для всех i, j

$$P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i)P(\eta = y_j).$$

Для проверки независимости по таблице совместного распределения д.с.в. ξ и η сначала находим одномерные вероятности для ξ и η ,

$\xi \setminus \eta$		y_1	\dots	y_j
p_1	x_1	p_{11}	\dots	p_{1j}
p_2
p_i	x_i	p_{i1}		p_{ij}
		q_1	\dots	q_j

затем для всех i, j проверяем равенство $p_{ij} = p_i q_j$. Если оно верно для всех i, j , случайные величины ξ и η будут независимы. Если для каких-либо i, j равенство неверно, то случайные величины ξ и η зависимы.

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 7

Характеристики дискретных случайных величин

Характеристики дискретных случайных величин

Математическое ожидание (среднее значение) дискретной случайной величины ξ находится по формуле: $M\xi = \sum_i x_i p_i$, где $p_i = P(\xi = x_i)$. Математическое ожидание существует, если ряд сходится абсолютно.

- Свойства математического ожидания:**
- 1) $\xi = C \Rightarrow M\xi = C$;
 - 2) $\xi \geq 0 \Rightarrow M\xi \geq 0$;
 - 3) $M(\alpha\xi) = \alpha M\xi$;
 - 4) $|M\xi| \leq M|\xi|$;
 - 5) $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$;
 - 6) ξ_1 и ξ_2 – независимы $\Rightarrow M(\xi_1 \cdot \xi_2) = (M\xi_1) \cdot (M\xi_2)$;
 - 7) $\eta = \varphi(\xi) \Rightarrow M\eta = \sum_i \varphi(x_i) p_i$;
 - 8) $\eta = \varphi(\xi_1, \xi_2) \Rightarrow M\eta = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij}$.

Характеристики дискретных случайных величин

Дисперсия случайной величины ξ определяется формулой

$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, если математические ожидания существуют.

Формулы расчёта дисперсии дискретной случайной величины:

1) $D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i$;

2) $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum_i x_i^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2$.

Свойства дисперсии:

1) $D\xi \geq 0$;

2) $\xi = const \Rightarrow D\xi = 0$;

3) $D(\alpha \cdot \xi) = \alpha^2 D\xi$;

4) ξ_1 и ξ_2 – независимы $\Rightarrow D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$.

Характеристики дискретных случайных величин

Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ определяется формулой $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$, если дисперсия существует.

Формулы для вычисления среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины:

$$1) \sigma_\xi = \sqrt{\sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i}; \quad 2) \sigma_\xi = \sqrt{\sum x_i^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2}.$$

Свойства среднего квадратического отклонения:

- 1) $\sigma_\xi \geq 0$;
- 2) $\xi = const \Rightarrow \sigma_\xi = 0$;
- 3) $\sigma_{\alpha \cdot \xi} = |\alpha| \cdot \sigma_\xi$.

Характеристики дискретных случайных величин

Ковариация случайных величин ξ_1 и ξ_2 определяется формулой: $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = M[(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)]$,

если математические ожидания существуют. Формулы расчёта:

1) $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \sum_i \sum_j (x_i - M\xi_1)(y_j - M\xi_2)p_{ij}$;

2) $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1 \cdot \xi_2) - (M\xi_1) \cdot (M\xi_2) =$
 $= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - (\sum_i x_i p_i)(\sum_j y_j q_j)$, где $p_i = \sum_j p_{ij}$, $q_j = \sum_i p_{ij}$.

Свойства ковариации:

1) $\text{cov}(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2, \eta) = \alpha_1 \text{cov}(\xi_1, \eta) + \alpha_2 \text{cov}(\xi_2, \eta)$;

2) $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \text{cov}(\xi_2, \xi_1)$; 3) ξ_1 и ξ_2 – независимы $\Rightarrow \text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$

4) $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2}[D(\xi_1 + \xi_2) - D\xi_1 - D\xi_2]$; 5) $|\text{cov}(\xi_1, \xi_2)| \leq \sigma_{\xi_1} \cdot \sigma_{\xi_2}$.

Характеристики дискретных случайных величин

Коэффициент корреляции случайных величин ξ и η определяется формулой:

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$$

Свойства коэффициента корреляции

1) $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$;

2) ξ и η – независимы $\Rightarrow r_{\xi,\eta} = 0$;

3) $|r_{\alpha\xi,\eta}| = |r_{\xi,\eta}|$; $r_{\alpha\xi,\eta} = r_{\xi,\eta} \cdot \text{sign } \alpha$;

4) $|r_{\xi,\eta}| \leq 1$ 5) $\eta = A\xi + B \Leftrightarrow |r_{\xi,\eta}| = 1$

Если $r_{\xi,\eta} = 0$ ($\text{cov}(\xi, \eta) = 0$), то случайные величины ξ и η называются некоррелированными.

Из некоррелированности независимость не следует.

Характеристики дискретных случайных величин

Производящая функция целочисленной неотрицательной случайной величины ξ определяется формулой: $W_\xi(s) = Ms^\xi$.

Если задан ряд распределения случайной величины ξ

ξ	0	1	\dots	k	\dots
P	p_0	p_1	\dots	p_k	\dots

то $W_\xi(s) = \sum_k s^k p_k$ (ряд сходится при $|s| \leq 1$).

Свойства производящей функции

- 1) $W_\xi(1) = 1$;
- 2) $p_k = \frac{1}{k!} W_\xi^{(k)}(0)$;
- 3) $M\xi = W'_\xi(1)$;
- 4) $D\xi = W''_\xi(1) + W'_\xi(1) - [W'_\xi(1)]^2$;
- 5) ξ и η – независимы $\Rightarrow W_{\xi+\eta}(s) = W_\xi(s) \cdot W_\eta(s)$.

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 8

Основные дискретные распределения

Основные дискретные распределения

Равномерное дискретное распределение

ξ	1	2	\dots	n
P	p_1	p_2	\dots	p_n

где $p_k = \frac{1}{n}$, $k = 1, \dots, n$.

Характеристики:

$$M\xi = \sum_{k=1}^n \left(k \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n k \right) = \frac{1}{n} \frac{(n+1)n}{2} = \frac{n+1}{2}.$$

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^n k^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2n^2 + 3n + 1}{6} - \frac{n^2 + 2n + 1}{4} = \frac{n^2 - 1}{12}.$$

$$W_\xi(s) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n} s^k \right) = \frac{s}{n} (1 + s + \dots + s^{n-1}) = \frac{s}{n} \frac{1 - s^n}{1 - s}.$$

Основные дискретные распределения

Распределение Бернулли

ξ	0	1
P	q	p

где $q = 1 - p$.

Характеристики:

$$M\xi = p.$$

$$M\xi^2 = p.$$

$$D\xi = p - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

$$W_\xi(s) = q \cdot 1 + ps = q + ps.$$

Это распределение применяется при рассмотрении одного испытания с вероятностью удачи p : $\xi = 1$ в случае удачного испытания и $\xi = 0$ в случае неудачного испытания.

Основные дискретные распределения

Биноминальное распределение

ξ	0	1	\dots	n
P	p_0	p_1	\dots	p_n

где $p_k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, $k=0, \dots, n$, $0 < p \leq 1$, $q = 1 - p$.

Случайную величину ξ можно рассматривать, как число удач в n независимых испытаниях, где p – вероятность успеха в одном испытании.

При расчёте характеристик удобно представить ξ в виде суммы независимых одинаково распределенных с.в. $\xi = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$, где $\varepsilon_i = 1$ с вероятностью p в случае удачи в i испытании и $\varepsilon_i = 0$ в случае неудачи в i испытании (с вероятностью $q = 1 - p$). Получаем:

$$M\xi = \sum_{i=1}^n M\varepsilon_i = np, D\xi = \sum_{i=1}^n D\varepsilon_i = npq, W_\xi(s) = (q + ps)^n.$$

Основные дискретные распределения

Геометрическое распределение I

ξ	0	1	\dots
P	p_0	p_1	\dots

где $p_k = p \cdot q^k$, $k=0,1,\dots$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Случайную величину ξ можно рассматривать, как число неудач до первой удачи при независимых испытаниях, где p – вероятность удачи в одном испытании.

Характеристики:

$$W_{\xi}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k p s^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qs)^k = \frac{p}{1-qs};$$

$$M\xi = W'_{\xi}(1) = \frac{pq}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}; \quad W''_{\xi}(1) = \frac{2pq^2}{(1-q)^3} = 2\left(\frac{q}{p}\right)^2;$$

$$D\xi = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q(p+q)}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Основные дискретные распределения

Геометрическое распределение II

η	1	2	\dots
P	p_1	p_2	\dots

где $p_k = p \cdot q^{k-1}$, $k=1,2,\dots$, $0 < p < 1$, $q = 1 - p$.

Случайную величину η можно рассматривать, как номер первой удачи при независимых испытаниях, где p – вероятность удачи в одном испытании. При этом $\eta = \xi + 1$, где ξ имеет геометрическое распределение I.

Характеристики:

$$W_\eta(s) = s W_\xi(s) = \frac{ps}{1 - qs};$$

$$M\eta = M\xi + 1 = \frac{q}{p} + 1 = \frac{1}{p}; \quad D\eta = D\xi = \frac{q}{p^2}.$$

Основные дискретные распределения

Распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k=0,1,\dots,$$

Проверка: $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = e^\lambda e^{-\lambda} = 1.$

Характеристики:

$$W_\xi(s) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} \right) e^{-\lambda} = e^{\lambda s} e^{-\lambda} = e^{\lambda(s-1)};$$

$$M\xi = W'_\xi(1) = \left[\lambda e^{\lambda(s-1)} \right]_{s=1} = \lambda;$$

$$W''_\xi(1) = \lambda^2;$$

$$D\xi = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 9

Непрерывные случайные величины и векторы

Непрерывные случайные величины

Случайная величина ξ называется непрерывной, если существует такая функция $f_\xi(x)$, что для всех $x \in R$ функция распределения ξ выражается следующей формулой $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(t)dt$, при этом $f_\xi(x)$ называется плотностью распределения непрерывной случайной величины ξ .

Из этого определения следует: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет конкретное значение $x \in R$, равна нулю.

Если случайная величина принимает значения только на интервале $[0, +\infty)$, то она называется неотрицательной.

Непрерывные случайные величины

Свойства плотности непрерывной случайной величины:

- 1) $f_\xi(x) \geq 0$ (для всех x где $f_\xi(x)$ непрерывна);
- 2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt = 1$ (свойство нормировки);
- 3) $f_\xi(x) = \frac{d}{dx} F_\xi(x)$, если $f_\xi(x)$ непрерывна в точке x ;
- 4) $P(C_1 < \xi < C_2) = P(C_1 < \xi \leq C_2) = P(C_1 \leq \xi < C_2) =$

$$= P(C_1 \leq \xi \leq C_2) = \int_{C_1}^{C_2} f_\xi(t)dt .$$

Случайные векторы

$\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ - случайный вектор; $\xi_i : \Omega \rightarrow R$

Функция распределения случайного вектора $\vec{\xi}$:

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \leq x_1, \xi_2 \leq x_2, \dots, \xi_n \leq x_n) = F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$$

(функция совместного распределения
случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n)

Функция распределения случайного вектора

Свойства $F_{\xi}(x_1, \dots, x_n)$:

$$1) \forall (x_1, \dots, x_n) \in R^n : 0 \leq F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) \leq 1$$

$$2) x_i \leq y_i \Rightarrow F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) \leq F_{\xi}(y_1, \dots, y_n)$$

$$3) \lim_{\{x_i \rightarrow -\infty\}} F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$4) \lim_{\{x_i \rightarrow +\infty\}} F_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = 1$$

Независимые случайные величины

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 - независимы, если

$$\forall (x_1, x_2) \in R^2 : F_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2)$$

Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n - независимы
в совокупности, если $\forall (i_1, \dots, i_k)$ и

$$\forall (y_1, \dots, y_k) \in R^k :$$

$$F_{\xi_1 \dots \xi_k}(y_1, \dots, y_k) = F_{\xi_1}(y_1) \cdot \dots \cdot F_{\xi_k}(y_k)$$

Непрерывные случайные векторы

Случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ называется непрерывным, если существует такая функция $f_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n)$, что для всех $(x_1, \dots, x_n) \in R^n$ функция распределения $\vec{\xi}$

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} d t_1 \int_{-\infty}^{x_2} d t_2 \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\vec{\xi}}(t_1, \dots, t_n) d t_n,$$

$f_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n)$ - плотность распределения непрерывного случайного вектора $\vec{\xi}$ (совместная плотность случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n).

Плотность непрерывного случайного вектора

Свойства $f_{\xi}(x_1, \dots, x_n)$:

$$1) f_{\xi}(x_1, \dots, x_n) \geq 0;$$

$$2) \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x_1, \dots, x_n) dx_n = 1;$$

$$3) f_{\xi}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} F_{\xi}(x_1, \dots, x_n),$$

если f_{ξ} - непрерывна в точке (x_1, \dots, x_n) .

$$4) P(\vec{\xi} \in D) = \int \dots \int_D f_{\xi}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

Непрерывные случайные векторы

Теорема.

ξ и η - независимые, непрерывные случайные величины $\Leftrightarrow f_{\xi,\eta}(x,y) = f_\xi(x)f_\eta(y)$ для (x,y) : $f_{\xi,\eta}$ - непрерывна в точке (x,y) .

Доказательство:

$$\Rightarrow F_{\xi,\eta}(x,y) = F_\xi(x)F_\eta(y)$$

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (F_\xi(x)F_\eta(y)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} F_\xi(x)\right) \left(\frac{\partial}{\partial y} F_\eta(y)\right) = f_\xi(x)f_\eta(y)$$

$$F_{\xi,\eta}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^x d t \int\limits_{-\infty}^y f_{\xi,\eta}(t,s) d s = \int\limits_{-\infty}^x d t \int\limits_{-\infty}^y f_\xi(t)f_\eta(s) d s =$$

$$<= \left(\int\limits_{-\infty}^x f_\xi(t) d t \right) \left(\int\limits_{-\infty}^y f_\eta(s) d s \right) = F_\xi(x)F_\eta(y)$$

Свойства случайных векторов

Теорема.

1. (ξ, η) – случайный вектор $\Rightarrow F_\xi(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} F_{\xi, \eta}(x, y); F_\eta(y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi, \eta}(x, y)$

2. (ξ, η) – непрерывный случайный вектор с плотностью $f_{\xi, \eta}(x, y) \Rightarrow$

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi, \eta}(x, y) dy; f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi, \eta}(x, y) dx$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 10

Характеристики непрерывных случайных величин

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ с плотностью $f_\xi(x)$ называется число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_\xi(x)dx ,$$

если интеграл абсолютно сходится.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины

Теорема.

Пусть ξ - непрерывная случайная величина

с плотностью $f_\xi(x)$,

$\eta = \varphi(\xi)$ – функция случайной величины ξ . Тогда

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_\xi(x) dx$$

Непрерывные случайные векторы

Теорема.

Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ – непрерывный случайный вектор с плотностью $f_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n)$,

$\eta = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$ – функция случайного вектора $\vec{\xi}$. Тогда

$$M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} d x_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n) f_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) d x_n$$

Математическое ожидание

Свойства математического ожидания
непрерывной случайной величины

- 1) $\xi \geq 0 \Rightarrow M\xi \geq 0$
- 2) $M(\alpha\xi) = \alpha M\xi$
- 3) $|M\xi| \leq M|\xi|$
- 4) $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$
- 5) ξ, η - независимы $\Rightarrow M(\xi\eta) = (M\xi)(M\eta)$
- 6) пусть (ξ, η) – непрерывный случайный вектор
с плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$, тогда

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{\xi,\eta}(x, y) dy ; M\eta = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} yf_{\xi,\eta}(x, y) dy$$

Дисперсия непрерывной случайной величины

Дисперсия случайной величины ξ :

$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, если математическое ожидание существует.

Теорема.

ξ -непрерывная случайная величина с плотностью $f_\xi(x)$,

тогда $D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx \right)^2$

Дисперсия непрерывной случайной величины

Доказательство:

$$1) \eta = (\xi - M\xi)^2 = \varphi(\xi) \Rightarrow M\eta = D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 f_\xi(x) dx$$

$$2) M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) =$$

$$= M\xi^2 - 2(M\xi)^2 + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 = D\xi$$

$$\eta = \xi^2 = \varphi(\xi) \Rightarrow M\xi^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx \Rightarrow$$

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_\xi(x) dx - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx \right)^2.$$

Ковариация непрерывных случайных величин

Ковариация случайных величин ξ_1 и ξ_2 :

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = M[(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)],$$

если математическое ожидание существует.

Для непрерывных случайных величин ξ_1 и ξ_2

с совместной плотностью $f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - M\xi_1)(x_2 - M\xi_2) \cdot f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) dx_2$$

Ковариация непрерывных случайных величин

Доказательство:

$$\eta = (\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2)$$

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = M\eta =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - M\xi_1)(x_2 - M\xi_2) \cdot f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) dx_2$$

Ковариация непрерывных случайных величин

Другая формула для ковариации случайных величин ξ_1 и ξ_2 :

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1 \cdot \xi_2) - (M\xi_1)(M\xi_2).$$

Для непрерывных случайных величин ξ_1 и ξ_2

с совместной плотностью $f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 x_2) f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) dx_2 - \\ -(M\xi_1)(M\xi_2)$$

Ковариация случайных величин

Свойства $\text{cov}(\xi_1, \xi_2)$

- 1) $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \text{cov}(\xi_2, \xi_1)$
- 2) $\text{cov}(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2, \eta) = \alpha_1 \text{cov}(\xi_1, \eta) + \alpha_2 \text{cov}(\xi_2, \eta)$
- 3) ξ_1, ξ_2 – не зависимы $\Rightarrow \text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$
- 4) $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2} [D(\xi_1 + \xi_2) - D\xi_1 - D\xi_2]$
- 5) $|\text{cov}(\xi_1, \xi_2)| \leq \sigma_{\xi_1} \cdot \sigma_{\xi_2}$

Коэффициент корреляции случайных величин

Коэффициент корреляции случайных величин ξ и η :

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi, \sigma_\eta}$$

Свойства $r_{\xi,\eta}$

- 1) $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$
- 2) $|r_{\xi,\eta}| \leq 1$
- 3) ξ, η - независимые $\Rightarrow r_{\xi,\eta} = 0$
- 4) $|r_{\xi,\eta}| = 1 \Leftrightarrow \eta = \alpha\xi + \beta$

Коэффициент корреляции случайных величин

Доказательство свойства 4:

пусть $\eta = \alpha \cdot \xi + \beta \Rightarrow D\eta = \alpha^2 D\xi$

$$\sigma_\eta = |\alpha| \sigma_\xi$$

$$\text{cov}(\alpha \cdot \xi + \beta, \xi) = \alpha \text{cov}(\xi, \xi) + \beta \text{cov}(1, \xi) = \alpha \cdot D\xi$$

$$r_{\xi, \eta} = \frac{\alpha \cdot D\xi}{|\alpha| \sigma_\xi \sigma_\xi} = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \begin{cases} 1, \alpha > 0 \\ -1, \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow |r_{\xi, \eta}| = 1$$

Коэффициент корреляции случайных величин

Доказательство свойства 4: пусть $r_{\xi,\eta} = 1$

Рассмотрим $M \left(\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi} - \frac{\eta - M\eta}{\sigma_\eta} \right)^2 =$

$$= \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{M(\eta - M\eta)^2}{\sigma_\eta^2} - 2 \frac{M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)]}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = 1 + 1 - 2r_{\xi,\eta} = 2 - 2 = 0$$

$$\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi} - \frac{\eta - M\eta}{\sigma_\eta} = 0 \Rightarrow \eta = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi - M\xi) + M\eta = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}\xi + \left(M\eta - \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi \right) = \alpha \cdot \xi + \beta$$

где $\alpha = \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}$, $\beta = M\eta - \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi$

Коэффициент корреляции случайных величин

Доказательство свойства 4:

пусть $r_{\xi,\eta} = -1$

$$\text{Рассмотрим } M \left(\frac{\xi - M\xi}{\sigma_\xi} + \frac{\eta - M\eta}{\sigma_\eta} \right)^2 = \frac{M(\xi - M\xi)^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{M(\eta - M\eta)^2}{\sigma_\eta^2} + 2 \frac{M[(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)]}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \\ = 1 + 1 + 2r_{\xi,\eta} = 2 - 2 = 0$$

$$\eta = -\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}(\xi - M\xi) + M\eta = -\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}\xi + \left(M\eta + \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi\right) = \alpha \cdot \xi + \beta,$$

$$\text{где } \alpha = -\frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}, \quad \beta = M\eta + \frac{\sigma_\eta}{\sigma_\xi}M\xi$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 11

Основные непрерывные распределения

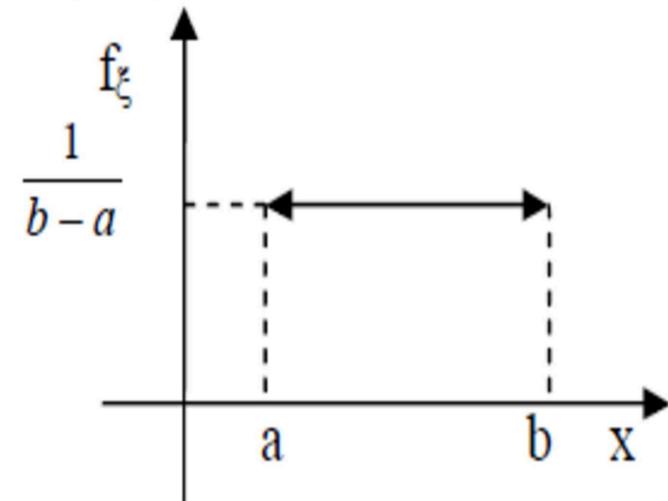
Непрерывные распределения

Равномерное непрерывное распределение на (a, b)

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a, b) \\ C, & x \in (a, b) \end{cases}$$

$$C = \frac{1}{b-a}$$

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 1, & x \geq b \end{cases}$$



Равномерное непрерывное распределение на (a,b)

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{\xi}(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

$$M\xi^2 = \frac{b^3 - a^3}{3} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{a^2 + b^2 + ab}{3}$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt, & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{\xi}(x)dx = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$M\xi^2 = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Нормальное распределение с параметрами (a, σ^2)

Обозначение: $N(a, \sigma^2)$.
$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \text{ где } \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma} \varphi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) dx = \begin{bmatrix} y = \frac{x-a}{\sigma} \\ dy = \frac{dx}{\sigma} \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(y) dy = 1$$

Нормальное распределение с параметрами (a, σ^2)

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt = \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

где $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_0(t) dt$

$$P(C_1 \leq \xi \leq C_2) = P(C_1 < \xi < C_2) =$$

$$= F_{\xi}(C_2) - F_{\xi}(C_1) = \Phi\left(\frac{C_2-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{C_1-a}{\sigma}\right)$$

Нормальное распределение с параметрами (a, σ^2)

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{\xi}(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma} \varphi_0 \left(\frac{x-a}{\sigma} \right) dx = a$$

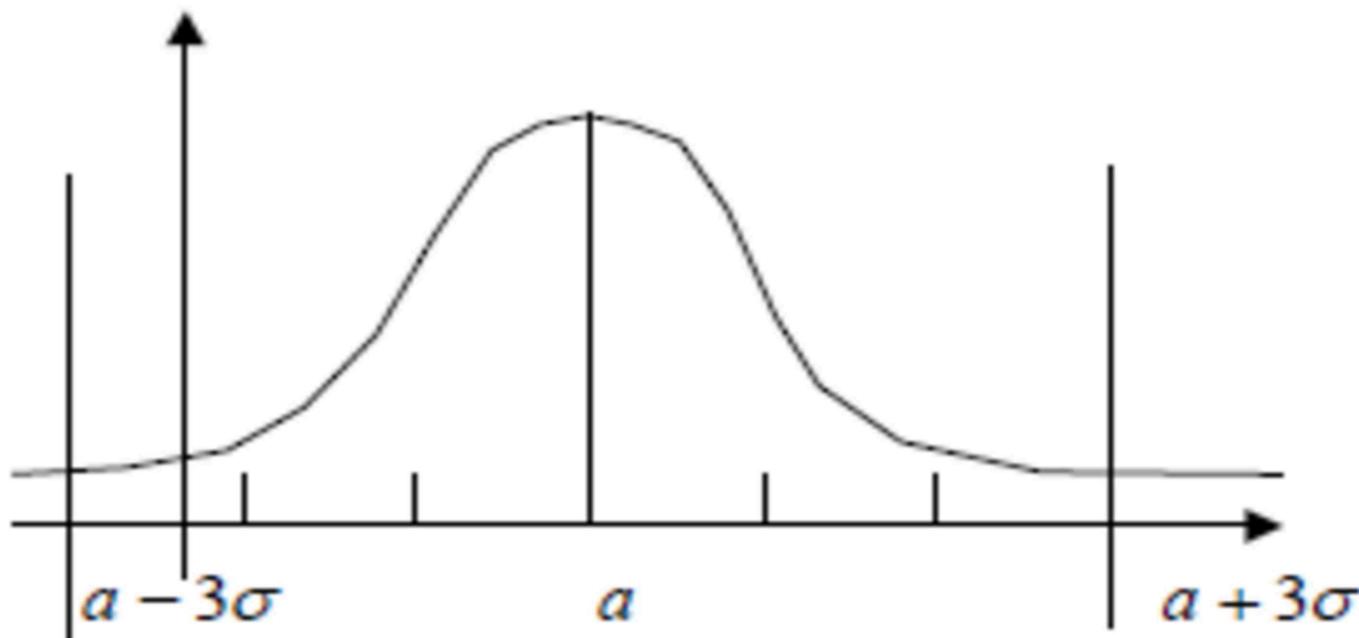
$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sigma^2$$

Нормальное распределение с параметрами (a, σ^2)

Правило «3-х сигм»

$$P(|\xi - a| \leq 3\sigma) \approx 0,9973\dots$$

Правило «3-х сигм»



$$P(|\xi - a| \leq 3\sigma) \approx 0,9973\dots$$

Гамма-распределение с параметрами (α, λ) , $\lambda > 0$

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^{\alpha} \cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

Обозначение: $\gamma(\alpha, \lambda)$

Гамма-распределение с параметрами (α, λ) , $\lambda > 0$

$$M\xi = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$D\xi = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Распределение «хи –квадрат» с n степенями свободы

$$\chi^2(n) = \gamma\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

Распределение «хи –квадрат» с n степенями свободы

$$M\xi = n$$

$$D\xi = 2n$$

При $n=1$

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

Распределение Стьюдента с n степенями свободы (t-распределение)

$$f_{\xi}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Обозначение: $t(n)$

Распределение Стьюдента с n степенями свободы

$$M\xi = 0, n > 1$$

$$D\xi = \frac{n}{n-2}, n > 2$$

При $n=1$ $f_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ — распределение Коши.

Равномерное двумерное распределение в области G

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 0, (x_1, x_2) \notin G \\ C = \frac{1}{S_G}, (x_1, x_2) \in G \end{cases}$$

Нормальное двумерное распределение с параметрами $(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$

$$f_{\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \cdot$$

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x_1 - a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r \left(\frac{x_1 - a_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{x_2 - a_2}{\sigma_2} \right) + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

Нормальное двумерное распределение с параметрами $(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$

$$\xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2) \quad a_1 = M\xi_1 \quad \sigma_1^2 = D\xi_1$$

$$\xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2) \quad a_2 = M\xi_2 \quad \sigma_2^2 = D\xi_2$$

$$\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) dx_2 = r\sigma_1\sigma_2$$

Коэффициент корреляции $r_{\xi_1, \xi_2} = \frac{\text{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sigma_1 \sigma_2} = r$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 12

Функции непрерывных случайных величин

Функции непрерывных случайных величин

Теорема

Пусть ξ – непрерывная случайная величина с плотностью $f_\xi(x)$,
функция $y = \varphi(x)$ дифференцируема и имеет конечное число экстремумов.
Рассмотрим случайную величину $\eta = \varphi(\xi)$. Тогда плотность η находится
по формуле

$$f_\eta(y) = \sum_i f_\xi(\psi_i(y)) |\psi_i'(y)|, \text{ где } \{\psi_1, \dots, \psi_i, \dots\} = \varphi^{-1}(y) \text{ и } x_i = \psi_i(y)$$

при этом $f_\eta(y) = 0$, если $\varphi^{-1}(y) = 0$.

Функции непрерывных случайных величин

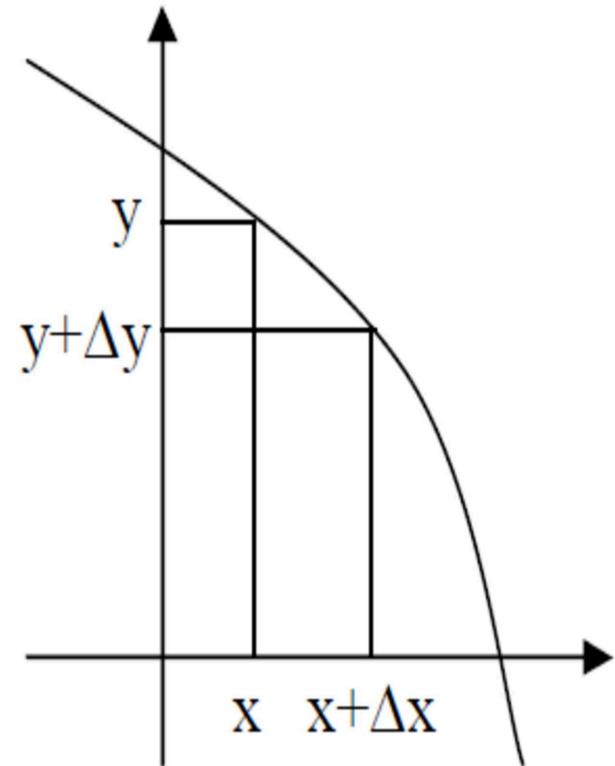
Доказательство:

1) φ – монотонная

Пусть $\varphi(x) = y$, $x = \varphi^{-1}(y) = \psi(y)$

$\varphi(x + \Delta x) = y + \Delta y$,

$x + \Delta x = \varphi^{-1}(y + \Delta y) = \psi(y + \Delta y)$



Функции непрерывных случайных величин

$$P(\eta \in [y, y + dy]) = \left| \int_y^{y+\Delta y} f_\eta(s) ds \right| = f_\eta(y^*) |\Delta y|, y^* \in [y, y + \Delta y]$$

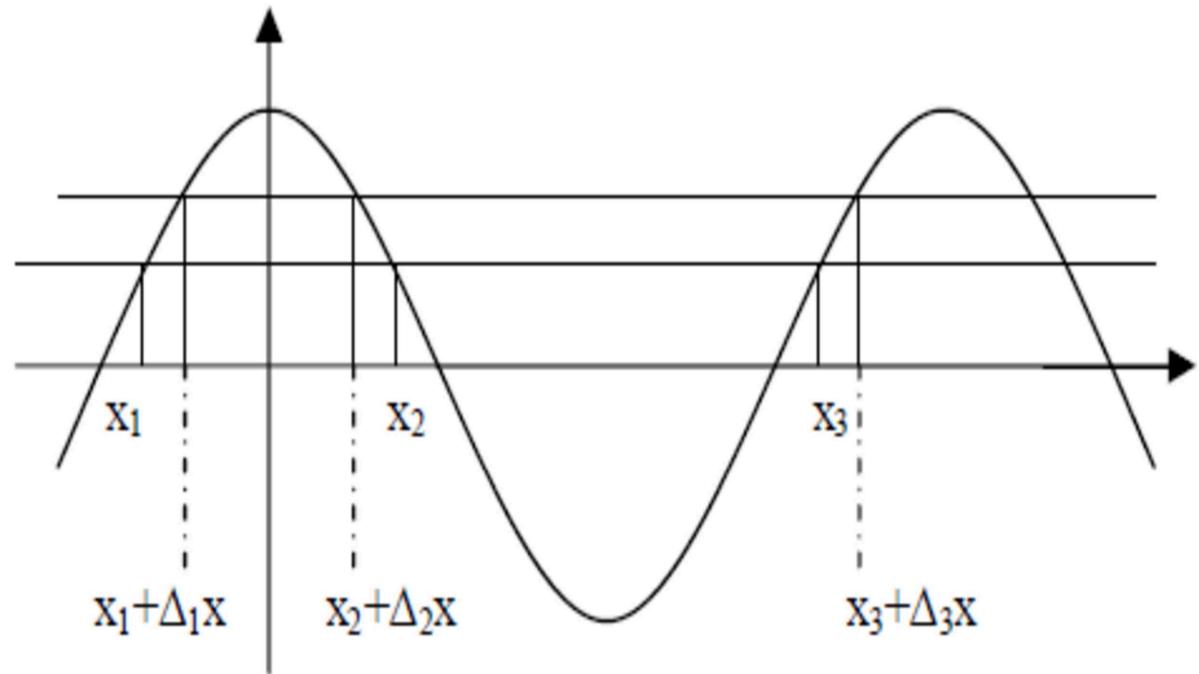
$$P(\xi \in [x, x + \Delta x]) = \left| \int_x^{x+\Delta x} f_\xi(t) dt \right| = f_\xi(x^*) |\Delta x|, x^* \in [x, x + \Delta x]$$

$$f_y(y^*) = f(x^*) \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} \right| \Rightarrow f_\eta(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f_\eta(y^*) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} f_\xi(x^*) \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} \right| =$$

$$= f_\xi(x) \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta x}{\Delta y} \right| = f_\xi(\psi(y)) |\psi'(y)|$$

Функции непрерывных случайных величин

2) φ – немонотонная



Пусть $\varphi^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots\}$, $\psi_i(y) = x_i$, $\psi_i(y + \Delta y) = x_i + \Delta_i x$

Функции непрерывных случайных величин

$$P(\eta \in [y, y + dy]) = \left| \int_y^{y+\Delta y} f_\eta(s) ds \right| = f_\eta(y^*) |\Delta y|, y^* \in [y, y + \Delta y]$$

$$\sum_i P(\xi \in [x_i, x_i + \Delta_i x]) = \sum_i \left| \int_{x_i}^{x_i + \Delta_i x} f_\xi(t) dt \right| = \sum_i f_\xi(x_i^*) |\Delta_i x|$$

Функции непрерывных случайных величин

$$P(\eta \in [y, y + dy]) = \left| \int_y^{y+\Delta y} f_\eta(s) ds \right| = f_\eta(y^*) |\Delta y|, y^* \in [y, y + \Delta y]$$

$$\sum_i P(\xi \in [x_i, x_i + \Delta_i x]) = \sum_i \left| \int_{x_i}^{x_i + \Delta_i x} f_\xi(t) dt \right| = \sum_i f_\xi(x_i^*) |\Delta_i x|$$

Функции непрерывных случайных величин

Пример:

ξ – непрерывная случайная величина с плотностью $f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 \right)$$

$\eta = \xi^2$, $y = x^2 \Rightarrow x_1 = \psi_1(y) = -\sqrt{y}$, $x_2 = \psi_2(y) = \sqrt{y}$, при $y > 0$

$\eta \geq 0 \Rightarrow f_\eta(y) = 0$, $y < 0$

$$\psi'_1(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad \psi'_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

Функции непрерывных случайных величин

По теореме при $y > 0$:

$$f_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \left| -\frac{1}{2\sqrt{y}} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \left| \frac{1}{2\sqrt{y}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, y > 0$$

$$f_{\xi^2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \end{cases}$$

Это плотность распределения $\chi^2(1)$.

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 13

Функции непрерывных случайных векторов

Функции непрерывных случайных векторов

Пусть (ξ_1, \dots, ξ_n) – непрерывный случайный вектор

с плотностью $f_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$.

Распределение $\eta = \varphi(\xi_1, \dots, \xi_n)$:

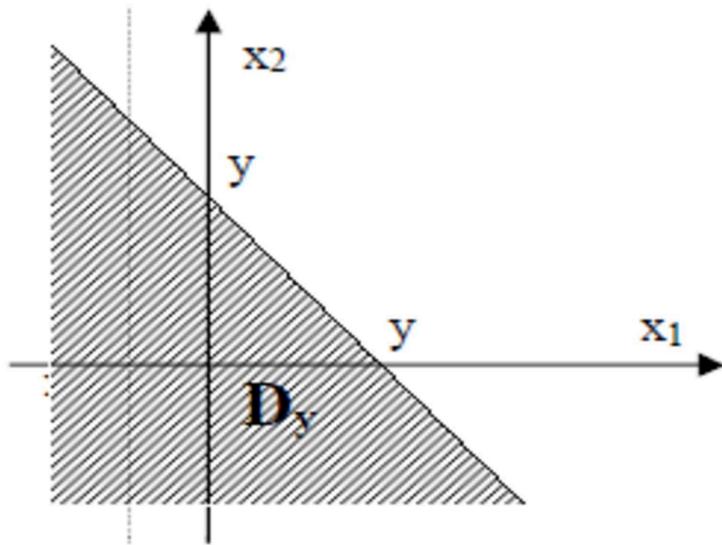
$$\begin{aligned} F_\eta(y) &= P(\eta \leq y) = P(\varphi(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq y) = P((\xi_1, \dots, \xi_n) \in D_y) = \\ &= \int \dots \int_{D_y} f_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \end{aligned}$$

где $D_y = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n \mid \varphi(x_1, \dots, x_n) \leq y\}$.

Функции непрерывных случайных векторов

(ξ_1, ξ_2) – непрерывный случайный вектор с
плотностью $f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}\eta = \xi_1 + \xi_2 \Rightarrow F_\eta(y) &= P(\xi_1 + \xi_2 \leq y) = \\ &= \iint_{D_y} f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \text{ где } D_y = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 \leq y\}\end{aligned}$$



Функции непрерывных случайных векторов

$$F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) dx_2 = \begin{cases} x_1 + x_2 = u \\ x_2 = u - x_1 \\ dx_2 = du \end{cases} =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^y f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, u - x_1) du = \int_{-\infty}^y du \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, u - x_1) dx_1$$

$$f_\eta(y) = \frac{d}{dy} F_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, y - x_1) dx_1$$

Функции непрерывных случайных векторов

Если ξ_1 и ξ_2 – независимые непрерывные
случайные величины, то

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot f_{\xi_2}(x_2)$$

$$f_{\xi_1 + \xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x_1) \cdot f_{\xi_2}(y - x_1) dx_1 = (f_{\xi_1} * f_{\xi_2})(y)$$

т.е. плотность суммы независимых непрерывных
случайных величин равна свертке плотностей.

Функции непрерывных случайных векторов

Пусть ξ_1 и ξ_2 – независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0,1]$. Тогда случайный вектор (ξ_1, ξ_2) равномерно распределён в единичном квадрате $[0,1] \times [0,1]$.

Рассмотрим функцию случайного вектора $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Найдём функцию распределения случайной величины η :

$$F_\eta(y) = P(\eta \leq y) = P(\xi_1 + \xi_2 \leq y) = P((\xi_1, \xi_2) \in D_y),$$

где $D_y = \{(x_1, x_2) | x_1 + x_2 \leq y\}$.

Функции непрерывных случайных векторов

Получаем

$$F_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{y^2}{2}, & 0 < y \leq 1; \\ 1 - \frac{(2-y)^2}{2}, & 1 < y < 2; \\ 1, & 2 \leq y. \end{cases}$$

Функции непрерывных случайных векторов

Поэтому плотность распределения η равна

$$f_{\eta}(y) = F'_{\eta}(y) = \begin{cases} 0, & y \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty); \\ y, & 0 < y \leq 1; \\ 2 - y, & 1 < y < 2. \end{cases}$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 14

Характеристические функции

Характеристические функции

Характеристическая функция случайной величины ξ :

$$g_{\xi}(t) = M e^{it\xi} = M(\cos t\xi) + i M(\sin t\xi).$$

Если ξ — дискретная случайная величина и $p_k = P(\xi = x_k)$,

$$\text{то } g_{\xi}(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k = \sum_k \cos(tx_k) p_k + i \sum_k \sin(tx_k) p_k.$$

Если ξ — непрерывная случайная величина с плотностью

$$f_{\xi}(x), \text{ то } g_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) dx.$$

Характеристические функции

Свойства $g_\xi(t)$:

1) $|g_\xi(t)| \leq 1$ при $t \in (-\infty, +\infty)$;

$$g_\xi(0) = 1; \quad g_\xi(-t) = \overline{g_\xi(t)}$$

2) $\eta = k\xi + b \Rightarrow g_\eta(t) = e^{itb} g_\xi(kt);$

3) ξ_1 и ξ_2 — независимы $\Rightarrow g_{\xi_1+\xi_2}(t) = g_{\xi_1}(t)g_{\xi_2}(t);$

4) $M\xi = -ig'_\xi(0); \quad D\xi = (g'_\xi(0))^2 - g''_\xi(0);$

5) если ξ — непрерывная случайная величина с плотностью

$$f_\xi(x), \text{ то } f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} g_\xi(t) dt.$$

Характеристические функции

Равномерное непрерывное распределение на (a,b)

ξ — равномерно распределена на (a,b)

$$g_{\xi}(x) = \int_a^b \frac{1}{b-a} e^{itx} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$g_{\xi}(t) = \frac{\lambda}{-it + \lambda} = \frac{1}{1 - ibt} = (1 - ibt)^{-1}$$

$$\text{где } b = \frac{1}{\lambda} = M_{\xi}.$$

Характеристические функции

Нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$:

рассмотрим $\xi^* = \frac{\xi - a}{\sigma}$, $\xi = \sigma \cdot \xi^* + a$,

ξ^* имеет нормальное распределение $N(0, 1)$,

$$g_{\xi^*}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

$$g_{\xi}(t) = e^{ita} g_{\xi^*}(\sigma \cdot t) = e^{ita - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Характеристические функции

Гамма–распределение $\gamma(\alpha, \lambda)$:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

$f_{\xi}(x)$ — оригинал,

$$\begin{aligned} f_{\xi}(x) &\div \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{(p+\lambda)^{\alpha}} = \left(\frac{\lambda}{p+\lambda} \right)^{\alpha} = \\ &= (1+bp)^{-\alpha}, \quad b = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Характеристические функции

Распределение $\chi^2(n) = \gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$:

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \end{cases},$$

$$g_{\xi}(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}.$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 15

Центральная предельная теорема

Центральная предельная теорема

Последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ слабо сходится к случайной величине η , если $\lim_{k \rightarrow \infty} F_{\xi_k}(x) = F_{\eta}(x)$ во всех точках x , в которых $F_{\eta}(x)$ непрерывна.

Обозначение: $\xi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{w} \eta$.

$$\xi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{w} \eta \Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} g_{\xi_k}(t) = g_{\eta}(t)$$

Центральная предельная теорема

Нормированная случайная величина ξ^*
для случайной величины ξ

$$\xi^* = \frac{\xi - M\xi}{\sqrt{D\xi}}.$$

Свойства:

$$1) M\xi^* = 0$$

$$2) D\xi^* = M(\xi^*)^2 = 1$$

Центральная предельная теорема

Теорема Линдеберга-Леви

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины.

Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$.

Тогда

$$S_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{w} \eta \sim N(0,1).$$

Центральная предельная теорема

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Пусть ξ_n — число удач в n независимых испытаниях, p — вероятность удачи в одном испытании, $q = 1 - p$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_1 \leq \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \leq C_2) = \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Центральная предельная теорема

Следствие 1:

$$P\left(C_1 \leq \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \leq C_2\right) \approx \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \Phi(C_2) - \Phi(C_1) = \Phi_0(C_2) - \Phi_0(C_1),$$

где $\Phi_0(x) = \int_0^x \varphi_0(t) dt$,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_0(t) dt = \Phi_0(x) + \frac{1}{2}$$

Центральная предельная теорема

Следствие 2:

$$\begin{aligned} P(k_1 \leq \xi_n \leq k_2) &\approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \\ &= \Phi_0\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi_0\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) \end{aligned}$$

Центральная предельная теорема

Следствие 3:

$$\begin{aligned} v_n = \frac{\xi_n}{n} \Rightarrow P(|v_n - p| \leq \varepsilon) &\approx \Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 = 1 - \Phi\left(-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi_0\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \end{aligned}$$

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: Лобузов Алексей Аркадьевич

ЛЕКЦИЯ 16

Закон больших чисел

Закон больших чисел

Сходимость по вероятности

Последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится при $k \rightarrow \infty$ к случайной величине η по вероятности, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(|\xi_k - \eta| < \varepsilon) = 1 \quad (\text{или } \lim_{k \rightarrow \infty} P(|\xi_k - \eta| \geq \varepsilon) = 0)$$

Обозначение: $\xi_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{P} \eta$.

Закон больших чисел

Неравенство Чебышева

Пусть у случайной величины ξ
существуют $M\xi$ и $D\xi$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

Закон больших чисел

Теорема Чебышева
(ЗБЧ для средних)

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — попарно независимые
случайные величины и существуют $M\xi_k$ и $D\xi_k$.
Также существует такая константа C , что
 $D\xi_k \leq C$ для всех $k = 1, 2, \dots$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left| \frac{\sum_{k=1}^n \xi_k}{n} - \frac{\sum_{k=1}^n M\xi_k}{n} \right| < \varepsilon\right) = 1 \text{ ,т.е. } \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

Закон больших чисел

Следствие из теоремы Чебышева

Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.), тогда $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} a$,

где $a = M\xi_k$ для всех k . По теореме Чебышева:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - a \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0, \text{ т.е.}$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} a$$

Закон больших чисел

Теорема Бернулли (ЗБЧ для частот событий)

Пусть ξ_n — число удач в n независимых испытаниях,

p — вероятность удачи в одном испытании,

$q = 1 - p$ — вероятность неудачи в одном испытании,

$v_n = \frac{\xi_n}{n}$ — частота удач.

Тогда $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} p$.