МИРЭА
Российский технологический университет

01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 9

Непрерывные случайные величины и векторы

Непрерывные случайные величины

Случайная величина ξ называется непрерывной, если существует такая функция $f_\xi(x)$, что для всех $x \in R$ функция распределения ξ выражается следующей формулой $F_\xi(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt$, при этом $f_\xi(x)$ называется плотностью распределения непрерывной случайной величины ξ.

Из этого определения следует: вероятность того, что непрерывная случайная величина примет конкретное значение $x \in R$, равна нулю.

Если случайная величина принимает значения только на интервале $[0, +\infty)$, то она называется неотрицательной.

Непрерывные случайные величины

Свойства плотности непрерывной случайной величины:

1) $f_\xi(x) \geq 0$ (для всех x где $f_\xi(x)$ непрерывна);

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(t)dt = 1$ (свойство нормировки);

3) $f_\xi(x) = \frac{d}{dx}F_\xi(x)$, если $f_\xi(x)$ непрерывна в точке x;

4) $P(C_1 < \xi < C_2) = P(C_1 < \xi \leq C_2) = P(C_1 \leq \xi < C_2) =$

$$= P(C_1 \leq \xi \leq C_2) = \int\limits_{C_1}^{C_2} f_\xi(t)dt\ .$$

Случайные векторы

$\vec{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ - случайный вектор; $\xi_i : \Omega \to R$

Функция распределения случайного вектора $\vec{\xi}$:

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 \le x_1; \xi_2 \le x_2; \dots; \xi_n \le x_n) = F_{\xi_1, \dots, \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$$

(функция совместного распределения случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n$)

Функция распределения случайного вектора

Свойства $F_\xi(x_1,\ldots,x_n)$:

1) $\forall (x_1,\ldots x_n)\in R^n:\ 0\le F_\xi(x_1,\ldots,x_n)\le 1$

2) $x_i\le y_i \Rightarrow F_\xi(x_1,\ldots,x_n)\le F_\xi(y_1,\ldots,y_n)$

3) $\lim\limits_{\{x_i\to-\infty\}} F_\xi(x_1,\ldots,x_n)=0$

4) $\lim\limits_{\{x_i\to+\infty\}} F_\xi(x_1,\ldots,x_n)=1$

МИРЭА
Российский технологический университет

Независимые случайные величины

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 - независимы, если

$$\forall (x_1, x_2) \in R^2: \qquad F_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = F_{\xi_1}(x_1) F_{\xi_2}(x_2)$$

Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ - независимы в совокупности, если $\forall (i_1, \ldots, i_k)$ и

$$\forall \ (y_1, \ldots, y_k) \in R^k :$$

$$F_{\xi_{i_1} \ldots \xi_{i_k}}(y_1, \ldots, y_k) = F_{\xi_{i_1}}(y_1) \cdot \ldots \cdot F_{\xi_{i_k}}(y_k)$$

Непрерывные случайные векторы

Случайный вектор $\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ называется непрерывным, если существует такая функция $f_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n)$, что для всех $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ функция распределения $\vec{\xi}$

$$F_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} d\,t_1 \int_{-\infty}^{x_2} d\,t_2 \ldots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\vec{\xi}}(t_1, \ldots, t_n)\, d\,t_n,$$

$f_{\vec{\xi}}(x_1, \ldots, x_n)$ - плотность распределения непрерывного случайного вектора $\vec{\xi}$ (совместная плотность случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$).

Плотность непрерывного случайного вектора

Свойства $f_{\xi}(x_1,\ldots,x_n)$:

1) $f_{\xi}(x_1,\ldots,x_n)\geq 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi}(x_1,\ldots,x_n)dx_n = 1$;

3) $f_{\xi}(x_1,\ldots,x_n) = \dfrac{\partial^n}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} F_{\xi}(x_1,\ldots,x_n)$,

если f_{ξ} - непрерывна в точке $(x_1,\ldots,x_n)$.

4) $P(\vec{\xi} \in D) = \int \ldots \int\limits_{D} f_{\xi}(x_1,\ldots,x_n)dx_1 \ldots dx_n$

Непрерывные случайные векторы

Теорема.

ξ и η - независимые, непрерывные случайные величины $\Leftrightarrow$ $f_{\xi,\eta}(x,y)=f_{\xi}(x)f_{\eta}(y)$ для (x,y): $f_{\xi,\eta}$ - непрерывна в точке (x,y).

Доказательство:

=> $F_{\xi,\eta}(x,y)=F_{\xi}(x)F_{\eta}(y)$

$$f_{\xi,\eta}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(F_{\xi}(x)F_{\eta}(y))=(\frac{\partial}{\partial x}F_{\xi}(x))(\frac{\partial}{\partial y}F_{\eta}(y))=f_{\xi}(x)f_{\eta}(y)$$

<=

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\int_{-\infty}^{x}d\ t\int_{-\infty}^{y}f_{\xi,\eta}(t,s)d\ s=\int_{-\infty}^{x}d\ t\int_{-\infty}^{y}f_{\xi}(t)f_{\eta}(s)d\ s=$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{x}f_{\xi}(t)d\ t\right)\left(\int_{-\infty}^{y}f_{\eta}(s)d\ s\right)=F_{\xi}(x)F_{\eta}(y)$$

Свойства случайных векторов

Теорема.

1. (ξ,η) – случайный вектор => $F_\xi(x) = \lim\limits_{y\to+\infty} F_{\xi,\eta}(x,y)$; $F_\eta(y) = \lim\limits_{x\to+\infty} F_{\xi,\eta}(x,y)$

2. (ξ,η) – непрерывный случайный вектор с плотностью $f_{\xi,\eta}(x,y)$ =>

$$f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dy;\ f_\eta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi,\eta}(x,y)dx$$