**01.03.02 «Прикладная математика и информатика»**

# Теория вероятностей и математическая статистика

## Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

МИРЭА
Российский технологический университет

ЛЕКЦИЯ 7

# Характеристики дискретных случайных величин

# Характеристики дискретных случайных величин

**Математическое ожидание (среднее значение) дискретной случайной величины** $\xi$ **находится по формуле:** $M\xi = \sum_i x_i p_i$, **где** $p_i = P(\xi = x_i)$. **Математическое ожидание существует, если ряд сходится абсолютно.**

**Свойства математического ожидания: 1)** $\xi = C \Rightarrow M\xi = C$;

**2)** $\xi \geq 0 \Rightarrow M\xi \geq 0$; **3)** $M(\alpha\xi) = \alpha M\xi$;

**4)** $|M\xi| \leq M|\xi|$ ; **5)** $M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2$ ;

**6)** $\xi_1$ **и** $\xi_2$ **– независимы** $\Rightarrow$ $M(\xi_1 \cdot \xi_2) = (M\xi_1) \cdot (M\xi_2)$;

**7)** $\eta = \varphi(\xi) \Rightarrow M\eta = \sum_i \varphi(x_i) p_i$;

**8)** $\eta = \varphi(\xi_1, \xi_2)$ $\Rightarrow$ $M\eta = \sum_i \sum_j \varphi(x_i, y_j) p_{ij}$.

# Характеристики дискретных случайных величин

**Дисперсия случайной величины $\xi$ определяется формулой $D\xi = M(\xi - M\xi)^2$, если математические ожидания существуют.**

**Формулы расчёта дисперсии дискретной случайной величины:**

**1)** $D\xi = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i$;

**2)** $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \sum x_i^2 p_i - (\sum_i x_i p_i)^2$.

**Свойства дисперсии:**

**1)** $D\xi \geq 0$;

**2)** $\xi = const \Rightarrow D\xi = 0$;

**3)** $D(\alpha \cdot \xi) = \alpha^2 D\xi$;

**4)** $\xi_1$ **и** $\xi_2$ **– независимы** $\Rightarrow D(\xi_1 + \xi_2) = D\xi_1 + D\xi_2$.

# Характеристики дискретных случайных величин

**Среднее квадратическое отклонение случайной величины $\xi$ определяется формулой** $\sigma_\xi = \sqrt{D\xi}$**, если дисперсия существует.**

**Формулы для вычисления среднего квадратического отклонения дискретной случайной величины:**

**1)** $\sigma_\xi = \sqrt{\sum_i (x_i - M\xi)^2 \, p_i}$ **;** **2)** $\sigma_\xi = \sqrt{\sum x_i^2 \, p_i - (\sum_i x_i \, p_i)^2}$ **.**

**Свойства среднего квадратического отклонения:**

**1)** $\sigma_\xi \geq 0$;

**2)** $\xi = const \Rightarrow \sigma_\xi = 0$;

**3)** $\sigma_{\alpha \cdot \xi} = |\alpha| \cdot \sigma_\xi$ **.**

# Характеристики дискретных случайных величин

**Ковариация случайных величин** $\xi_1$ **и** $\xi_2$ **определяется формулой:** $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=M\left[(\xi_1-M\xi_1)(\xi_2-M\xi_2)\right]$,

**если математические ожидания существуют. Формулы расчёта:**

**1)** $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=\sum_i\sum_j(x_i-M\xi_1)(y_j-M\xi_2)p_{ij}$;

**2)** $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=M(\xi_1\cdot\xi_2)-(M\xi_1)\cdot(M\xi_2)=$

$=\sum_i\sum_j x_i y_j p_{ij}-(\sum_i x_i p_i)(\sum_j y_j q_j)$, **где** $p_i=\sum_j p_{ij}$, $q_j=\sum_i p_{ij}$.

**Свойства ковариации:**

**1)** $\operatorname{cov}(\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2,\eta)=\alpha_1\operatorname{cov}(\xi_1,\eta)+\alpha_2\operatorname{cov}(\xi_2,\eta)$;

**2)** $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=\operatorname{cov}(\xi_2,\xi_1)$; **3)** $\xi_1$ **и** $\xi_2$ **– независимы** $\Rightarrow\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=0$

**4)** $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=\frac{1}{2}\left[D(\xi_1+\xi_2)-D\xi_1-D\xi_2\right]$; **5)** $\left|\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)\right|\le\sigma_{\xi_1}\cdot\sigma_{\xi_2}$.

# Характеристики дискретных случайных величин

**Коэффициент корреляции случайных величин $\xi$ и $\eta$ определяется формулой:**

$$r_{\xi,\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$$

**Свойства коэффициента корреляции**

**1)** $r_{\xi,\eta} = r_{\eta,\xi}$;

**2)** $\xi$ **и** $\eta$ **– независимы** $\Rightarrow r_{\xi,\eta} = 0$ ;

**3)** $|r_{\alpha\xi,\eta}| = |r_{\xi,\eta}|$; $r_{\alpha\xi,\eta} = r_{\xi,\eta} \cdot \operatorname{sign}\alpha$;

**4)** $|r_{\xi,\eta}| \le 1$ **5)** $\eta = A\xi + B \Leftrightarrow |r_{\xi,\eta}| = 1$

**Если** $r_{\xi,\eta} = 0$ $(\operatorname{cov}(\xi,\eta) = 0)$, **то случайные величины** $\xi$ **и** $\eta$ **называются некоррелированными.**

**Из некоррелированности независимость не следует.**

# Характеристики дискретных случайных величин

**Производящая функция** целочисленной неотрицательной случайной величины $\xi$ определяется формулой: $W_\xi(s) = Ms^\xi$.

Если задан ряд распределения случайной величины $\xi$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\xi$ | 0 | 1 | … | $k$ | … |
| $P$ | $p_0$ | $p_1$ | … | $p_k$ | … |

то $W_\xi(s) = \sum\limits_k s^k p_k$ (ряд сходится при $|s| \le 1$).

## Свойства производящей функции

1) $W_\xi(1) = 1$; 2) $p_k = \dfrac{1}{k!} W_\xi^{(k)}(0)$;

3) $M\xi = W'_\xi(1)$; 4) $D\xi = W''_\xi(1) + W'_\xi(1) - \left[W'_\xi(1)\right]^2$;

5) $\xi$ и $\eta$ – независимы $\Rightarrow W_{\xi+\eta}(s) = W_\xi(s) \cdot W_\eta(s)$.