01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

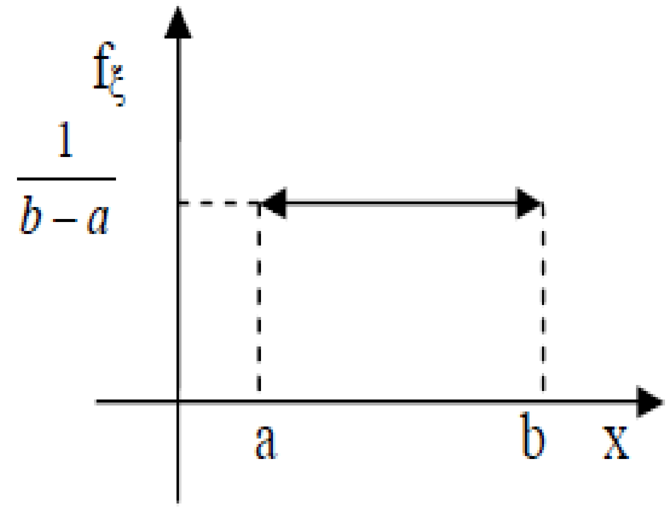
ЛЕКЦИЯ 11

Основные непрерывные распределения

Непрерывные распределения

Равномерное непрерывное распределение на (a,b)

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0, x\notin(a,b)\\ C, x\in(a,b)\end{cases}$$



$$C=\frac{1}{b-a}$$

$$F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x} f_\xi(t)dt=\begin{cases}0, x\le a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, x\in(a,b)\\ 1, x\ge b\end{cases}$$

Равномерное непрерывное распределение на (a,b)

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x)dx = \int_{a}^{b} x\frac{1}{b-a}dx = \frac{b^2-a^2}{2}\cdot\frac{1}{b-a} = \frac{b+a}{2}$$

$$M\xi^2 = \frac{b^3-a^3}{3}\cdot\frac{1}{b-a} = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

$$D\xi = M\xi^2-(M\xi)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

МИРЭА Российский технологический университет

Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, x \ge 0 \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt, x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, x > 0 \end{cases}$$

МИРЭА
Российский технологический университет

Показательное распределение с параметром $\lambda > 0$

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\xi}(x)dx = \int_{0}^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$M\xi^2 = \int_{0}^{+\infty} x^2\lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

МИРЭА Российский технологический университет

Нормальное распределение с параметрами (a, σ^2)

Обозначение: $N(a, \sigma^2)$.

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right), \text{ где } \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma}\varphi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)dx = \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{x-a}{\sigma} \\ dy = \dfrac{dx}{\sigma} \end{array}\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(y)dy = 1$$

Нормальное распределение с параметрами (a,σ^2)

$$F_{\xi}(x)=\int_{-\infty}^{x} f_{\xi}(t)\,dt= \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$

где $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_0(t)\,dt$

$$P(C_1\le\xi\le C_2)=P(C_1<\xi<C_2)=$$

$$=F_{\xi}(C_2)-F_{\xi}(C_1)=\Phi\left(\frac{C_2-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{C_1-a}{\sigma}\right)$$

Нормальное распределение с параметрами (a, σ^2)

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sigma} \varphi_0\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) dx = a$$

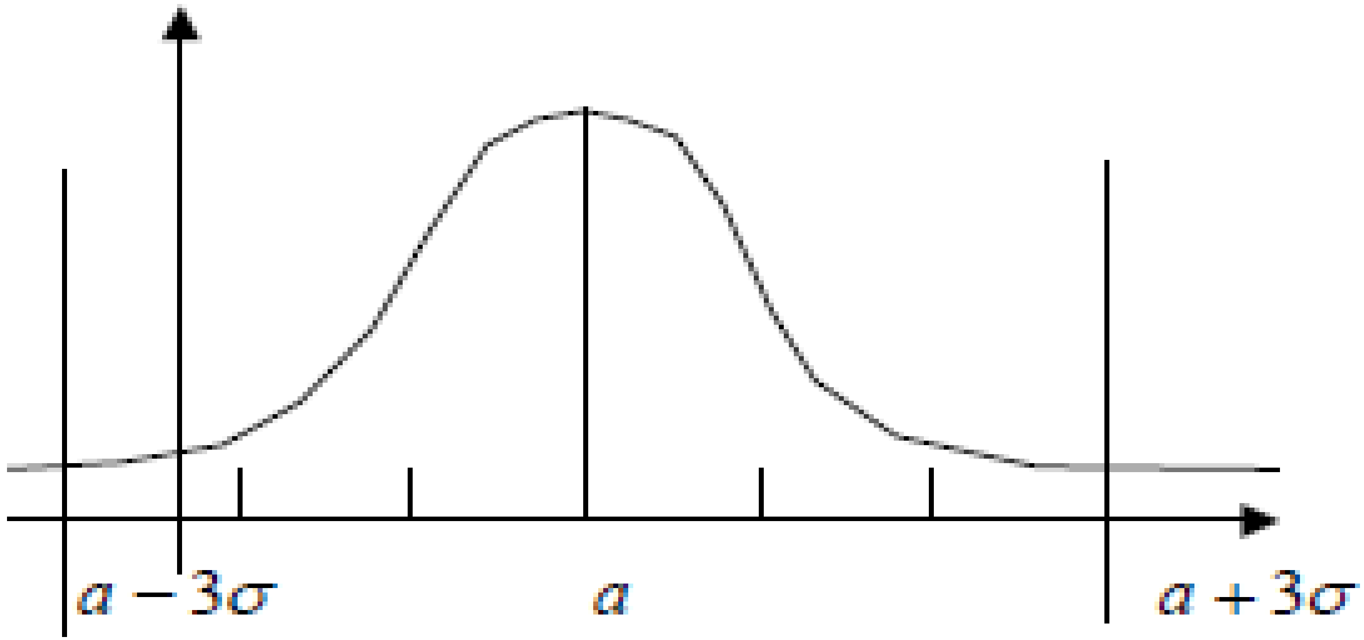
$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = \sigma^2$$

Нормальное распределение с параметрами (a, σ^2)

Правило «3-х сигм»

$$P(|\xi - a| \leq 3\sigma) \approx 0{,}9973\ldots$$

Правило «3-х сигм»



$$P(|\xi - a| \le 3\sigma) \approx 0{,}9973\ldots$$

Гамма-распределение с параметрами (α, λ), $\lambda > 0$

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{\lambda^{\alpha} \cdot x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, x > 0 \end{cases}$$

Обозначение: $\gamma(\alpha, \lambda)$

Гамма-распределение с параметрами (α, λ), $\lambda > 0$

$$M\xi = \frac{\alpha}{\lambda}$$

$$D\xi = \frac{\alpha^2 + \alpha}{\lambda^2} - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Распределение «хи –квадрат» с n степенями свободы

$$\chi^2(n) = \gamma\left(\frac{n}{2};\frac{1}{2}\right)$$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \end{cases}$$

Распределение «хи –квадрат» с n степенями свободы

$$M\xi = n$$

$$D\xi = 2n$$

При $n=1$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, x > 0 \end{cases}$$

Российский технологический университет

Распределение Стьюдента с n степенями свободы (t-распределение)

$$f_{\xi}(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

Обозначение: $t(n)$

Распределение Стьюдента с n степенями свободы

$$M\xi = 0, n > 1$$

$$D\xi = \frac{n}{n-2}, n > 2$$

При $n=1$ $\quad f_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$ — распределение Коши.

Равномерное двумерное распределение в области G

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1,x_2)=\begin{cases} 0,\ (x_1,x_2)\notin G \\ C=\dfrac{1}{S_G},\ (x_1,x_2)\in G \end{cases}$$

Нормальное двумерное распределение с параметрами $(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$

$$f_{\xi_1,\xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \cdot$$

$$\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right) + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

Нормальное двумерное распределение
с параметрами $(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, r)$

$$\xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2) \qquad a_1 = M\xi_1 \quad \sigma_1^2 = D\xi_1$$
$$\xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2) \qquad a_2 = M\xi_2 \quad \sigma_2^2 = D\xi_2$$

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - a_1)(x_2 - a_2) f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2)\, dx_2 = r\sigma_1\sigma_2$$

Коэффициент корреляции $r_{\xi_1, \xi_2} = \dfrac{\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sigma_1\sigma_2} = r$