01.03.02 «Прикладная математика и информатика»

Теория вероятностей и математическая статистика

Часть 1 Теория вероятностей

Лектор: **Лобузов Алексей Аркадьевич**

ЛЕКЦИЯ 5

Последовательность независимых испытаний

Последовательность независимых испытаний
(Схема Бернулли)

Проводятся одинаковые независимые испытания. Испытание называется удачным, если в нём произошло определённое событие A.

$P(A)=p$ – **вероятность удачи,** $P(\overline{A})=1-p=q$ – **вероятность неудачи. Удаче поставим в соответствие** 1, **а неудаче** – 0.

Пример последовательности независимых испытаний

$$A \quad \overline{A} \quad \overline{A} \quad A \quad \overline{A} \quad \overline{A} \quad \overline{A} \quad \overline{A}$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

Рассмотрим событие

$$B_k=\{\text{произошло ровно } \underline{k} \text{ удач в } \underline{n} \text{ независимых испытаниях}\}.$$

Обозначим $P(B_k)=P_n(k)$.

Формула Бернулли

Теорема. $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

Доказательство:

$$\varepsilon_i = \begin{cases} 1, \text{ если удача в } i-\text{ом независимом испытании} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

$$\Omega = \left\{ \overline{\varepsilon} \mid (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n), \varepsilon_i = 0,1 \right\}$$

$$B_k = \left\{ \overline{\varepsilon} \mid \sum \varepsilon_i = k \right\}, \quad \overline{\varepsilon} \in B_k \Rightarrow P(\{\overline{\varepsilon}\}) = p^k q^{n-k}$$

$$P(B_k) = |B_k| \, p^k q^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}$$

Приближение Пуассона

Применяется при $n >> 1, \qquad p << 1, \quad 0{,}1 < n \cdot p < 10$.

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (\lambda = np)$$

Теорема Пуассона. Пусть p_n (вероятность удачи) зависит от числа испытаний, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0, \quad \lambda < \infty$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Приближение Лапласа

При больших $n >> 1$ **и при условии**

$$n >> 1,\ 0 < p < 1,\ np > 10 \text{ или } nq > 10$$

применяется приближение Лапласа, основанное на теоремах Муавра-Лапласа.

Локальная теорема Муавра-Лапласа:

$$P_n(k) = C_n^k p_n q^{n-k} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right),$$ **где**

$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Приближение Лапласа

Интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Пусть ξ_n – число удач в n независимых испытаниях, p – вероятность удачи в одном испытании, $q = 1 - p$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left(C_1 \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \le C_2\right) = \int_{C_1}^{C_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{C_1}^{C_2} \varphi_0(t) dt$$

Функции $\varphi_0(t)$ и $\Phi(x)$

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi_0(t)dt\ ,\quad \varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Свойства: 1) $\varphi_0(t)>0$, 2) $\varphi_0(-t)=\varphi_0(t)$,

3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_0(t)dt=1$, 4) $\Phi(-x)+\Phi(x)=1$, 5) $\Phi(0)=0,5$

Приближение Лапласа

Следствие 1:

$$P(k_1 \le \xi_n \le k_2) = P\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{\xi_n - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) \approx \int_{\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}} \varphi_0(t)dt =$$

$$= \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Приближение Лапласа

Следствие 2: Пусть $\nu_n = \dfrac{\xi_n}{n}$,

$$P(|\nu_n - p| \le \varepsilon) = P(-\varepsilon \le \nu_n - p \le \varepsilon) = P\left(p - \varepsilon \le \frac{\xi_n}{n} \le p + \varepsilon\right) =$$

$$= P(n(p-\varepsilon) \le \xi_n \le n(p+\varepsilon)) \approx \Phi\left(\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(-\frac{n\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right) =$$

$$= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - 1 = 1 - 2\Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$