Sprawozdanie 1.

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Mirosław Kołodziej

04.03.2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Rozkład LU oraz dekompozycja macierzy

Rozkład LU – metoda rozwiązywania układów równań liniowych. Polega ona na podziale macierzy na dwie trójkątne – dolną L (od lower) i górną U (od upper):

$$A = L \cdot U$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Zakładamy, że w jednej z tych dwóch macierzy na przekątnej będą znajdywały się elementy o wartości 1. Proces rozkładania tej macierzy nazywamy dekompozycją. Układ $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$ wówczas przyjmuje postać:

$$L \cdot U \cdot \vec{x} = \vec{y}$$

co sprowadza się do postaci:

$$\begin{cases} L \cdot \vec{z} = \vec{y} \\ U \cdot \vec{x} = \vec{z} \end{cases}$$

Taki układ pozwala na szybkie rozwiązanie ze względu na macierze trójkątne.

1.2 Obliczanie wyznacznika macierzy

Obliczanie wyznacznika macierzy A wyznaczamy z pomocą twierdzenia Cauchy'ego:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Po dekompozycji sprowadza się to do wymnożenia elementów przekątnej macierzy U, zakładając, że w macierzy L elementy mają wartość 1. Otrzymujemy więc wzór:

$$\det A = \det L \ \cdot \det U = 1 \cdot \prod_{i=1}^{n} u_{i,i}$$

1.3 Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Wskaźnik uwarunkowania jest to wartość określająca w jakim stopniu dane wejściowe problemu mają wpływ na błąd wyniku. Problem mający niski wskaźnik nazywamy dobrze uwarunkowanym, zaś te o wskaźniku wysokim źle uwarunkowanym. Określamy go wzorem:

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$$

Gdy dane mają zbyt duży wskaźnik uwarunkowania nie nadają się do rozwiązania numerycznego ze względu na błąd wynikający z samej reprezentacji numerycznej, który wprowadza nieproporcjonalnie duży błąd w wynikach obliczeń.

Obliczając wskaźnik, stosujemy następującą normę:

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}|$$

2. Problem

Podczas laboratoriów zajęliśmy się macierzą 4x4, której elementy były zdefiniowane w poniższy sposób:

$$A_{i,j} = \frac{1}{i + j + \delta}$$

gdzie i, j oznaczają pozycję w macierzy, zaś $\delta = 2$ (ze względu na to, że korzystaliśmy z biblioteki GSL). Naszym zadaniem początkowo było znalezienie rozkładu LU macierzy A. Skorzystaliśmy w tym przypadku z funkcji biblioteki GSL:

```
int gsl_linalg_LU_decomp (gsl_matrix *A, gsl_permutation *p, int *signum)
```

gdzie: A to macierz układu, p - wektor permutacji wierszy, a $signum$ określa parzystą lub nieparzystą liczbę permutacji. Funkcja ta, w celu zaoszczędzenia miejsca, zapisuje macierze L oraz U w miejsce zajmowane przez A. Może tak zrobić ze względu na to, że na głównej diagonali macierzy L znajdują się liczby o wartości 1.

Następnym zadaniem było znaleźć macierz odwrotną A^{-1} rozwiązując n układów równań z wektorami wyrazów wolnych:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Skorzystaliśmy w tym przypadku z procedury z biblioteki GSL:

```
int gsl_linalg_LU_solve (gsl_matrix *LU, gsl_permutation *p, gsl_vector *b,
gsl_vector *x)
```

gdzie b to wektor wyrazów wolnych, a x to wektor rozwiązań. Rozwiązywanie znacząco ułatwiła nam dekompozycja.

Kolejnym krokiem było obliczenie iloczynu macierzy A oraz A^{-1}. Służy nam to do sprawdzenia efektywności naszego rozwiązania. Użyliśmy poniższej metody:

```
for(i=0; i<n; i++) {
      for (j=0; j<n; j++) {
            C[i][j]=0;
            for(k=0; k<n; k++)
                  C[i][j]+=A[i][k]*B[k][j];
      }
}
```

Metoda ta może nie jest najbardziej optymalna, ale bardzo dobrze sprawdza się dla małych macierzy.

Ostatnim zadaniem było policzenie wskaźnika uwarunkowania macierzy:

$$cond = \|A^{-1}\|_{\alpha,\beta} \cdot \|A\|_{\alpha,\beta}$$

korzystając z normy:

$$\|A\|_{1,\infty} = \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{i,j}|$$

Wyznaczyliśmy go za pomocą znalezienia maksymalnych wartości znajdujących się w macierzach A oraz A^{-1} i wymnożenia ich.

3. Wyniki

3.1 Elementy diagonalne macierzy U:

$$\begin{bmatrix} 0{,}50000000 & & & \\ & 0{,}03333333 & & \\ & & -0{,}0013889 & \\ & & & 0{,}00010204 \end{bmatrix}$$

3.2 Wyznacznik macierzy A:

$$\det(A) = -2{,}362056 \cdot 10^{-9}$$

3.3 Macierz odwrotna A^{-1}:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{bmatrix}$$

3.4 Iloczyn $A \cdot A^{-1}$:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2{,}2737 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 \\ -2{,}8422 \cdot 10^{-14} & 1 & 4.5475 \cdot 10^{-13} & 0 \\ 0 & -2.2737 \cdot 10^{-13} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.5 Wskaźnik uwarunkowania macierzy:

$$\mathrm{cond} = 14700$$

4. Wnioski

Korzystając z metody LU, odwróciliśmy macierz oraz obliczyliśmy wyznacznik i wskaźnik uwarunkowania macierzy. Dzięki skorzystaniu z tej właśnie metody, bardzo łatwo otrzymaliśmy wartość wyznacznika – wystarczyło przemnożyć elementy głównej diagonali macierzy U.

Odwrócenie macierzy należy zaś oceniać przez wymnożenie macierzy z jej odwrotnością. Widzimy, że faktycznie na głównej diagonali uzyskujemy elementy o wartości jeden, lecz nie wszystkie z pozostałych elementów są zerami, część z nich jest tylko wartościami zbliżonymi do zera. Z tego powodu otrzymaliśmy tak wysoką wartość wskaźnika umiarkowania. Jak widać, rozwiązanie nie jest w pełni dokładne i zawiera błędy.