Sprawozdanie 12.

Całkowanie numeryczne metodą Simpsona

Mirosław Kołodziej

27.05.2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Kwadratury Newtona-Cotesa

Rozważamy przypadek z węzłami równoodległymi $x_i = a + ih,\ i = 0, 1, 2, \dots, N$. Gdy końce przedziału są także węzłami, wtedy takie kwardatury nazywamy kwadraturami zamkniętymi. Następnie przybliżamy funkcję podcałkową wielomianem Lagrange'a stopnia co najwyżej N:

$$f(x_i) = L_N(x_i), \qquad i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$L_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f(x_k)\,\Phi_k(x), \qquad \Phi_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

Błąd przybliżenia (interpolacji):

$$R_{N+1}(x) = f(x) - L_N(x) = \frac{1}{(N+1)!}\omega_{N+1}(x) f^{(N+1)}(\xi), \qquad \xi \epsilon (a, b).$$

Wprowadzamy nową zmienną t:

$$x = a + ht \Rightarrow \Phi_k(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} \frac{t - j}{k - j}.$$

Przyjmujemy oznaczenia:

$$h = \frac{b-a}{N}, \qquad f_k = f(a + kh) \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} f_k \int_a^b \Phi_k(x)dx = \sum_{k=0}^{N} f_k h \int_0^N \varphi_k(t)dt = \sum_{k=0}^{N} f_k A_k.$$

Stąd otrzymujemy:

$$S(f) = \sum_{k=0}^{N} A_k f_k.$$

Współczynniki kwadratury Newtona-Cotesa:

$$A_k = h\frac{(-1)^{N-k}}{k!\,(N-k)!}\int_0^N \frac{t(t-1)\dots(t-N)}{(t-k)},$$

$$\Phi_k(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}} \frac{t-j}{k-j} =$$

$$= \frac{(t-0)(t-1)\dots(t-[k-1])\cdot(t-[k+1])\dots(t-N)}{(k-0)(k-1)\dots(k-[k-1])\cdot(k-[k+1])\dots(k-N)} =$$

$$= \frac{(t-0)(t-1)\dots(t-[k-1])\cdot(t-[k+1])\dots(t-N)}{(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k)\cdot(-1)\cdot(-2)\dots(-[N-k])} =$$

$$= \frac{(t-0)(t-1)\dots(t-[k-1])\cdot(t-[k+1])\dots(t-N)}{k!\,(-1)^{N-k}(N-k)!} =$$

$$\frac{(-1)^{N-k}}{k!\,(N-k)!}\frac{t(t-1)\dots(t-N)}{(t-k)}.$$

1.2 Wzór parabol – Simpsona

W metodzie Simpsona stosuje się jako przybliżenie parabolę i oblicza się sumy wycinków obszarów pod nią:

$$A_k = h\frac{(-1)^{N-k}}{k!\,(N-k)!}\int_0^N \frac{t(t-1)\dots(t-N)}{(t-k)},$$

$$h = \frac{b-a}{2}, \qquad A_0 = \frac{1}{3}h, \qquad A_1 = \frac{4}{3}h, \qquad A_2 = \frac{1}{3}h$$

$$S(f) = \frac{1}{3}h(f_0 + 4f_1 + f_2)$$

Ponieważ N jest parzyste, to kwadratura jest dokładna dla wielomianów stopnia $N+1$ i jest rzędu $N+2$, dlatego, że zgodnie ze wzorem na błąd wzoru interpolacyjnego otrzymujemy:

$$E(f) \sim \int_a^b (x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)dx = 0,$$

ze względu nieparzystości funkcji podcałkowej. Nie ma jednak powodu. żeby błąd znikał dla dowolnej funkcji.

Dodajmy dodatkowy węzeł w punkcie $x = \frac{a+b}{2}$, który nie zmienia warunku interpolacji. Wtedy stopień wielomianu czynnikowego wzrasta o 1:

$$E(f) = \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!} \int_a^b (x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 (x-b)dx = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi)$$

2. Problem

Celem naszych ćwiczeń jest obliczenie numeryczne całki typu:

$$I = \int_0^\pi x^m \sin(kx)\, dx$$

metodą Simpsona. W celu sprawdzenia poprawności metody dysponowaliśmy wartościami dokładnymi, które można było dość łatwo obliczyć korzystając z rozwinięcia funkcji $sin(x)$ w szereg:

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+l}}{(2i+1)!}.$$

Wstawiając powyższe rozwinięcie pod całkę i wykonując całkowanie każdego elementu szeregu otrzymujemy:

$$I = \int_a^b x^m \sin(kx)\, dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(kx)^{2i+1}}{(2i+1)!} x^m =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{(kx)^{2i+m+2}}{k^{m+1}(2i+1)!\,(2i+m+2)}\Bigg|_a^b.$$

Jeśli wartość $x - a$ nie jest zbyt duża to sumę szeregu możemy łatwo obliczyć sumując tylko 20-30 pierwszych wyrazów.

Na początek obliczyliśmy wartość całki metodą rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg dla następujących wartości:

a) $m = 0, k = 1$ $(I = 2)$
b) $m = 1, k = 1$ $(I = \pi)$
c) $m = 5, k = 5$ $(I = 56.363569)$

W każdym przypadku zapisywaliśmy do pliku wartości sum, gdy liczba sumowanych wyrazów była równa $l = 1, 2, 3, \ldots, 30$.

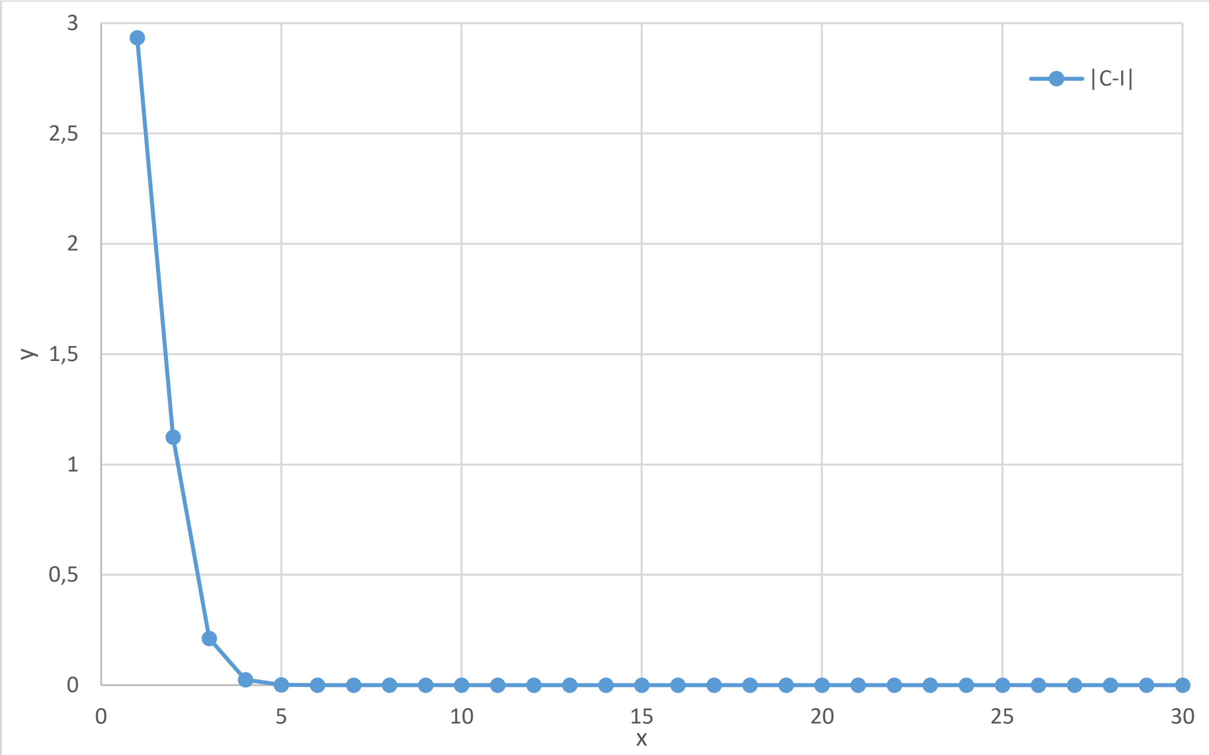
Następnie obliczyliśmy wartość całki metodą Simpsona dla następującej liczby węzłów: $n = 2p + 1 = 11, 21, 51, 101, 201$ oraz poniższych przypadków:

a) $m = 0, k = 1$
b) $m = 1, k = 1$
c) $m = 5, k = 5$

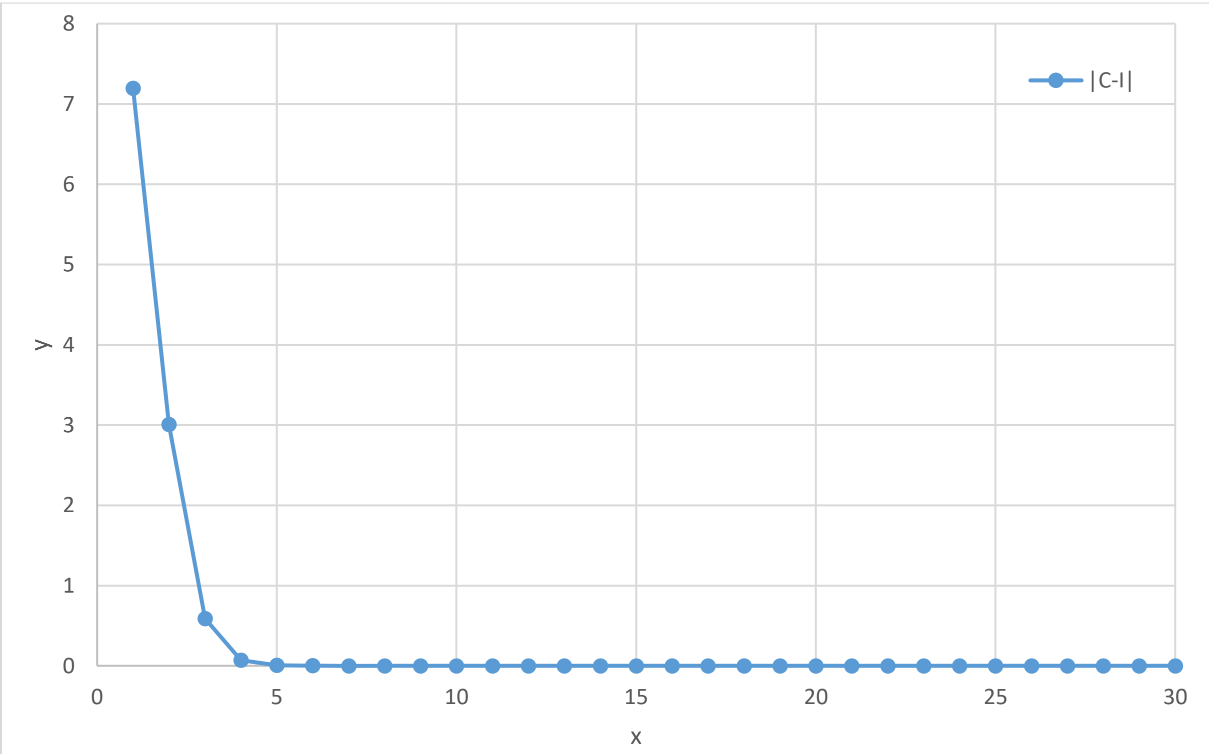
Wyniki zapisaliśmy do pliku tekstowego.

3. Wyniki

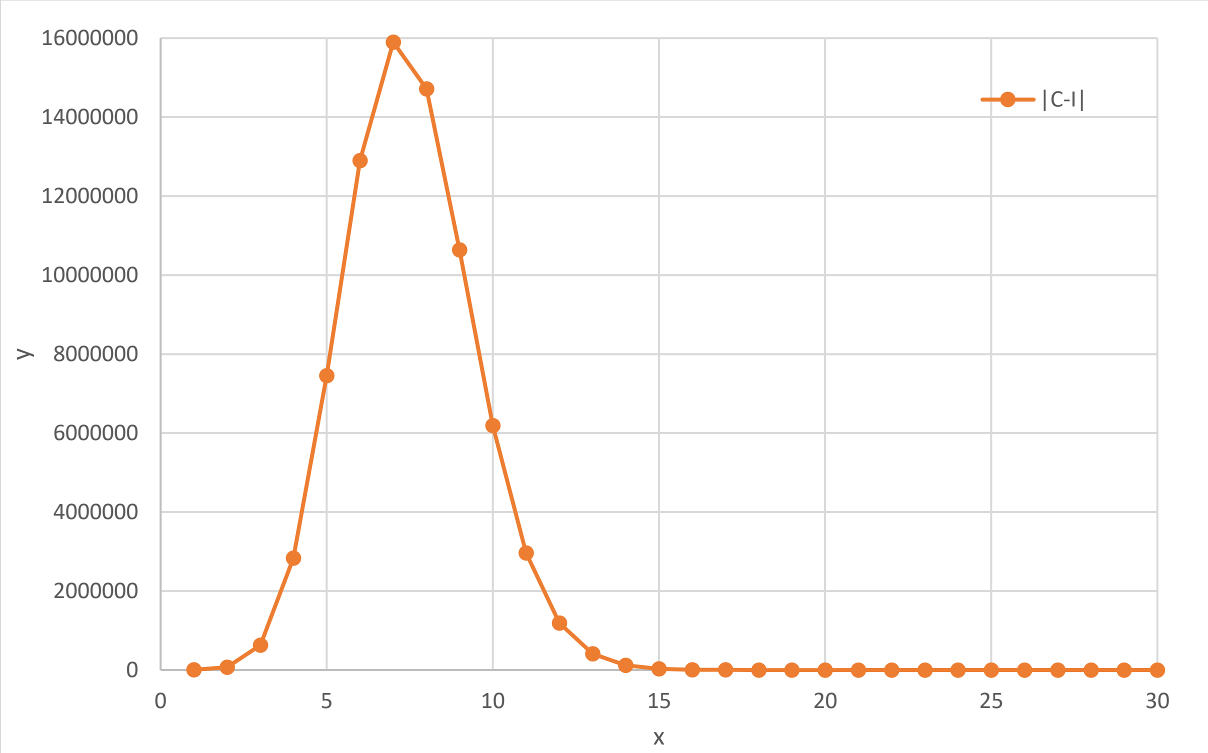
3.1 Wykresy zależności $|C - I|$ od ilości węzłów dla $m = 0$, $k = 1$



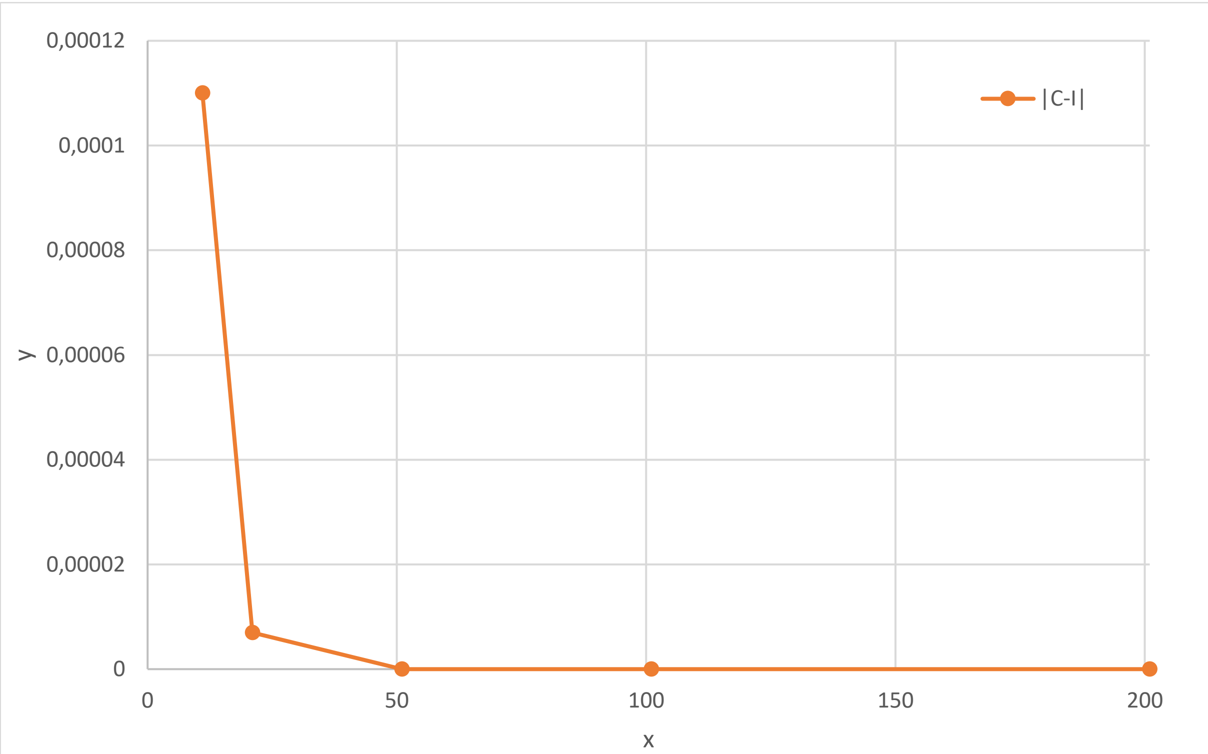
3.2 Wykresy zależności $|C - I|$ od ilości węzłów dla $m = 1$, $k = 1$



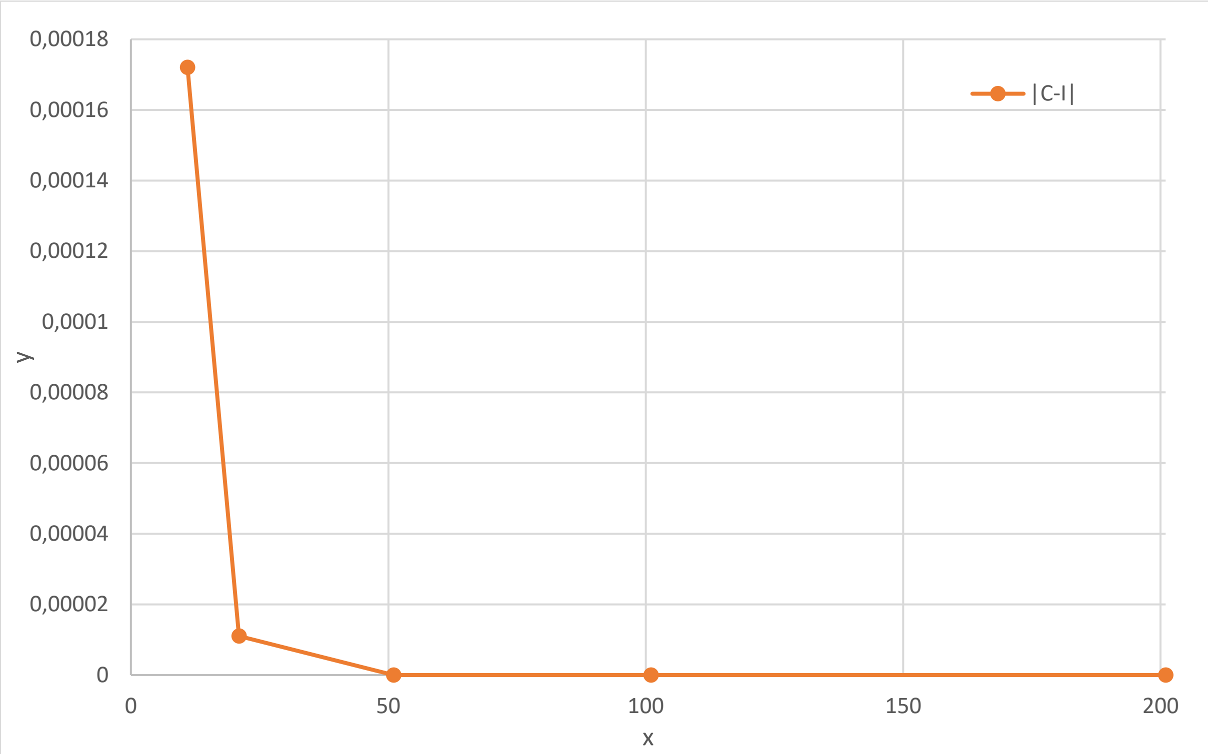
3.3 Wykresy zależności $|C - I|$ od ilości węzłów dla $m = 5, k = 5$



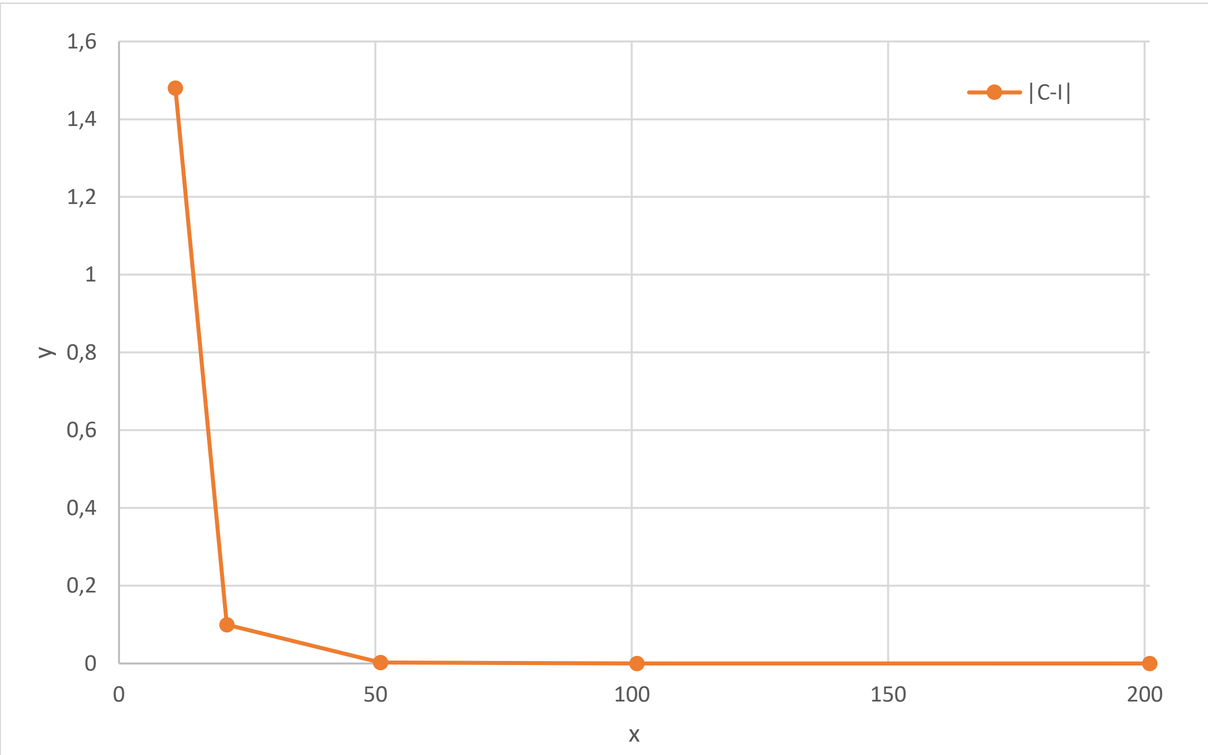
3.4 Wykresy zależności $|C - I|$ od ilości węzłów dla $m = 0, k = 1$ dla metody Simpsona



3.5 Wykresy zależności $|C - I|$ od ilości węzłów dla $m = 1$, $k = 1$ dla metody Simpsona



3.6 Wykresy zależności $|C - I|$ od ilości węzłów dla $m = 5$, $k = 5$ dla metody Simpsona



4. Wnioski

Obliczyliśmy całkę oznaczoną za pomocą metody rozwinięcia funkcji podcałkowej w szereg oraz metody Simpsona. Z obu metod otrzymujemy dokładne wyniki.

Sama dokładność w przypadku metody rozwinięcia funkcji podcałkowej zależy od ilości sumowanych wyrazów. Im więcej ich sumujemy, tym dokładniejsze wyniki otrzymujemy. Zaś w przypadku metody Simpsona zależy ona od ilości węzłów - im więcej węzłów tym dokładniejsze wyniki.