Sprawozdanie 8.

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach.

Mirosław Kołodziej

29.04.2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Interpolacja funkcjami sklejanymi

Interpolacja funkcjami sklejanymi – metoda numeryczna polegająca na przybliżaniu nieznanej funkcji wielomianami niskiego stopnia.

Dla przedziału $[a, b]$ mamy $n + 1$ punktów, takich że:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Określają one podział przedziału $[a, b]$ na n podprzedziałów: $[x_i, x_{i+1}]$. Funkcję $s(x)$, która jest określona na tym przedziale nazywamy funkcją sklejaną stopnia m, gdzie $m \geq 1$, jeżeli:

- $s(x)$ jest wielomianem stopnia maksymalnie m-tego na każdym z podprzedziałów $(x_i; x_{i+1})$, dla $i = 0, 1, \dots, n - 1$,
- $s(x) \in C^m$.

Punkty x_i nazywamy węzłami funkcji sklejanej. Funkcja $s(x)$ ma postać:

$$s_i(x) = c_{im}x^m + c_{im-1}x^{m-1} + \dots + c_{i1}x + c_{i0}, \qquad x \in (x_i; x_{i+1}).$$

Funkcja interpolująca to kombinacja liniowa elementów bazy $\{s_i(x)\}$:

$$s(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i s_i(x)\,, \qquad x \in [a, b].$$

W każdym z podprzedziałów do określenia $s(x)$ należałoby wyznaczyć $m + 1$ stałych. Żądamy jednak ciągłości pochodnych rzędu $0, 1, 2, \dots, m$ w każdym węźle, czyli sklejamy rozwiązania. Otrzymujemy $m(n - 1)$ warunków. Ostatecznie funkcja $s(x)$ zależy od $n(m + 1) - m(n - 1) = n + m$ parametrów, które musimy wyznaczyć.

1.2 Funkcje sklejane trzeciego stopnia

Daną funkcję $s(x)$ nazywamy interpolacyjną funkcją sklejaną trzeciego stopnia dla f(x), jeżeli:

$$s(x_i) = f(x_i) = y_i, \qquad i = 0, 1, \dots, n;\ n \geq 2$$

Aby określić funkcję $s(x)$ trzeciego stopnia musimy wyznaczyć $n+3$ parametrów. Ponieważ ilość węzłów jest o 2 mniejsza, musimy założyć kolejne dwa warunki zależne od funkcji $f(x)$ lub od znajomości jej zachowania blisko krańców przedziału $[a,b]$. Ustalamy trzy rodzaje warunków:

1. zależne od pierwszej pochodnej:
$$s^{(1)}(a+0)=\alpha_1$$
$$s^{(1)}(b-0)=\beta_1$$
2. zależne od drugiej pochodnej:
$$s^{(2)}(a+0)=\alpha_2$$
$$s^{(2)}(b-0)=\beta_2$$
3. dla funkcji okresowych:
$$s^{(i)}(a+0)=s^{(i)}(b-0), \qquad i=1,2.$$

1.3 Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach

Przyjmujemy oznaczenie:

$$M_j=s^{(2)}(x_j), \qquad j=0,1,\dots,n.$$

Druga pochodna funkcji $s(x)$ jest ciągła i liniowa w każdym z podprzedziałów $[x_i,x_{i+1}]$ zgodnie z założeniem, więc możemy zapisać:

$$s_{i-1}^{(2)}(x)=M_{i-1}\frac{x_i-x}{h_i}+M_i\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}}$$

$$x\in[x_i,x_{i+1}]$$

$$h_i=x_i-x_{i-1}$$

Całkujemy powyższe wyrażenie dwa razy:

$$s_{i-1}^{(1)}=-M_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{2h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{h_i}+A_i$$

$$s_{i-1}(x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+A_i(x-x_{i-1})+B_i.$$

Stałe A_i i B_i wyznaczamy za pomocą warunku interpolacji:

$$B_i=y_{i-1}-M_{i-1}\frac{h_i^2}{6}$$

$$A_i=\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{h_i}{6}(M_i-M_{i-1}).$$

W punkcie x_i pochodna musi być ciągła:

$$s_{i-1}^{(1)}(x_i-0)=\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i}{3}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}$$

$$s_i^{(1)}(x_i + 0) = -\frac{h_{i+1}}{3} M_i - \frac{h_{i+1}}{6} M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}.$$

Gdy porównamy prawe strony powyższych równań dla każdego węzła uzyskamy $n - 1$ równań. Możemy je zapisać w postaci:

$$\mu_1 M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n-1$$

gdzie:

$$\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}}, \qquad \mu_i = 1 - \lambda_i$$

$$d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right).$$

Do układu równań należy dołączyć jeszcze 2 równania, które wynikają z dodatkowych warunków. Dla warunków z pierwszą pochodną:

$$2M_0 + M_1 = d_0 \qquad d_0 = \frac{6}{h_1} \left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - \alpha_1 \right)$$

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n \qquad d_n = \frac{6}{h_1} \left(\beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right).$$

Zaś dla warunków z drugą pochodną:

$$M_0 = \alpha_2 \qquad M_n = \beta_2.$$

Otrzymany układ równań można przedstawić w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}.$$

Macierz współczynników układu to macierz silnie diagonalnie dominująca. Moduły elementów na diagonali są większe od sumy modułów pozostałych elementów leżących w tym samym wierszu. Układy te mają więc jednoznaczne rozwiązanie – istnieje dokładnie jedna interpolacyjna funkcja sklejana stopnia trzeciego, która spełnia przyjęte warunki dodatkowe. Po rozwiązaniu układu równań, czyli znalezieniu współczynników M_i, wyznaczamy funkcję sklejaną według wzoru:

$$s_{i-1}(x) = M_{i-1} \frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i.$$

2. Problem

Naszym zadaniem było napisanie programu do interpolacji przy pomocy funkcji sklejanych będących wielomianami trzeciego stopnia poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach. Aby rozwiązać problem, musieliśmy rozwiązać układ równań liniowych:

$$A\vec{m} = \vec{d}.$$

Interpolację musieliśmy przeprowadzić na dwóch funkcjach, $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ i $f_2(x) = \cos(2x)$ na przedziale $[-5, 5]$ dla następujących ilości węzłów: $n = 5, 8, 21$. Aby było to możliwe, musieliśmy napisać dwie procedury. Pierwszą z nich była:

```
void wyznaczM(double *xw, double *yw, double *m, int n, double alfa,
double beta)
```

która służyła nam do wyznaczania wartości drugich pochodnych w węzłach. Przekazywaliśmy do niej wektor z położeniami węzłów x_w, wektor z wartościami funkcji y_w, liczbę węzłów n, wektor do którego zapisywaliśmy wartości drugich pochodnych `m` oraz wartości drugich pochodnych w skrajnych węzłach – `alfa` i `beta` (za te dwie wartości przyjęliśmy 0). Drugą procedurą była zaś:

```
double wyznaczSx(double *xw, double *yw, double *m, int n,  double x)
{
      znajdź pierwszy podprzedział (i-1): xw[i-1]<=x<=xw[i]
      Sx=
```

$$s_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x-x_{i-1}) + B_i$$

```
      return Sx;
}
```

Służyła nam ona do wyznaczania wartości funkcji w położeniu międzywęzłowym. Większość argumentów będzie identyczna jak dla wcześniejszej procedury. Dodaliśmy jeszcze aktualną wartość argumentu x.

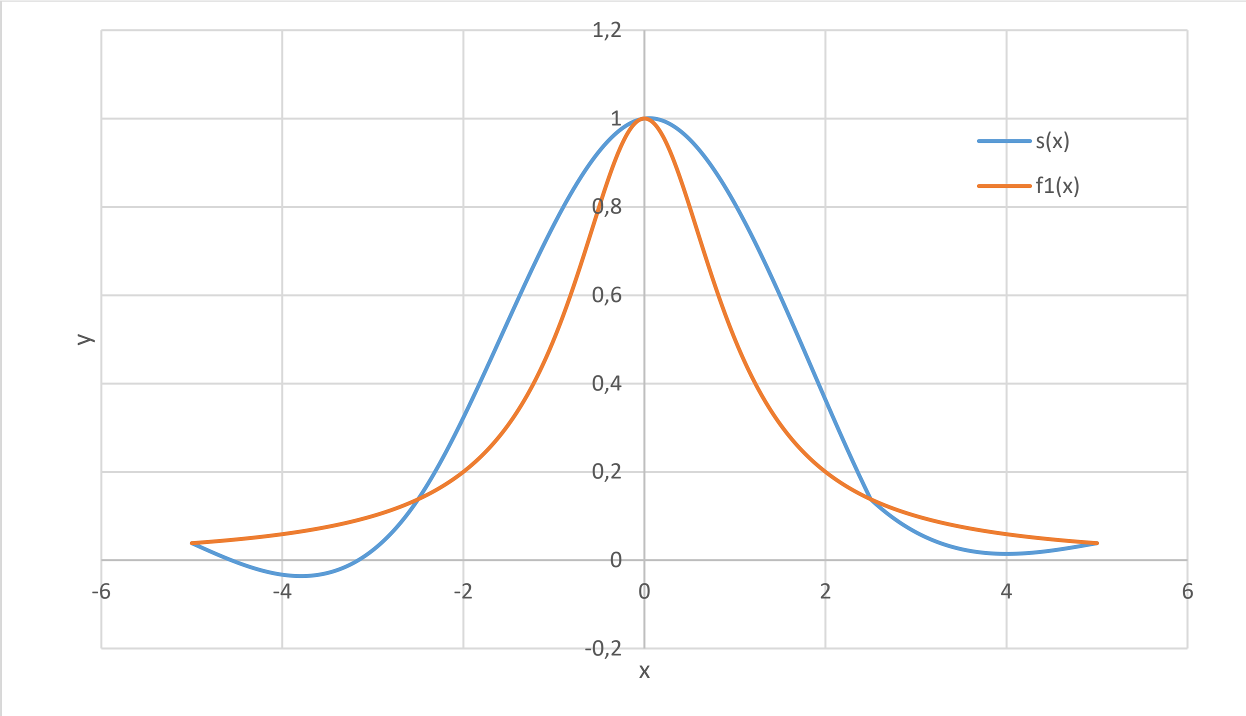
Sporządziliśmy wykresy dla obu funkcji dla wszystkich ilości węzłów wymienionych wyżej. Na koniec dla funkcji $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$ wyznaczyliśmy wartości drugich pochodnych. Porównywaliśmy je z wartościami liczonymi ze wzoru:

$$\frac{d^2f}{dx^2} \approx \frac{f(x-\delta x) - 2f(x) + f(x+\delta x)}{(\delta x)^2},$$

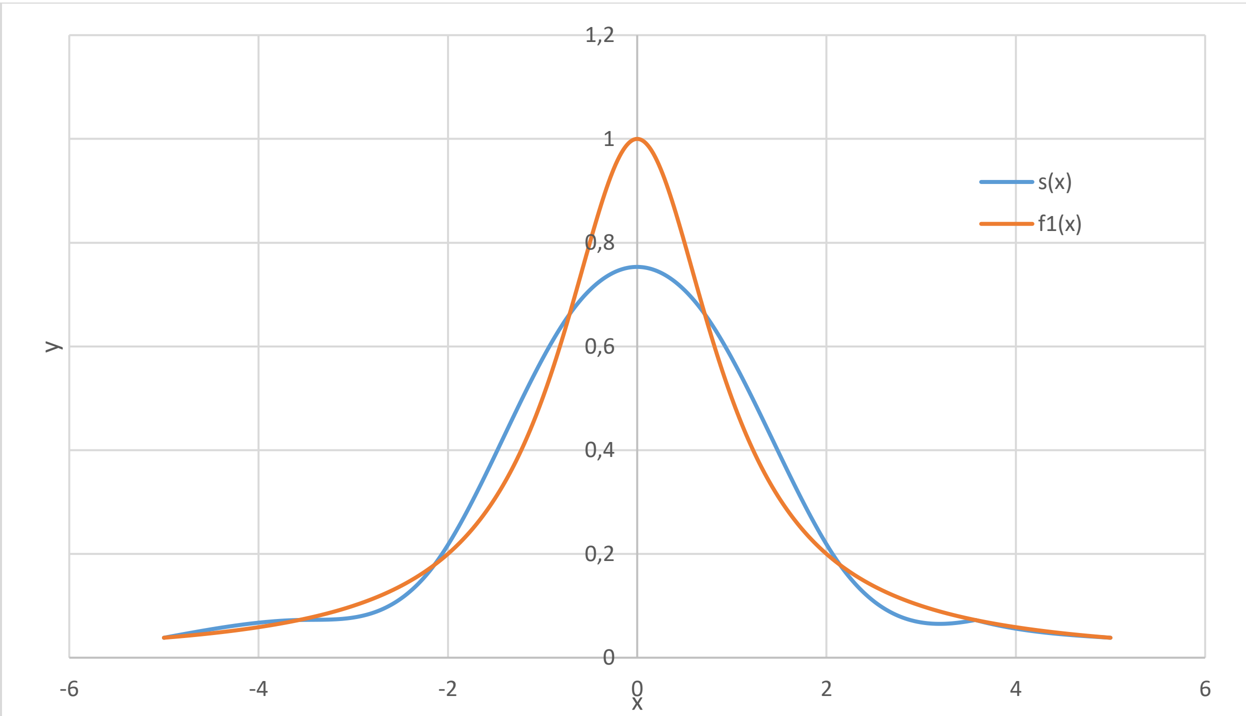
gdzie $\delta x = 0{,}01$.

3. Wyniki

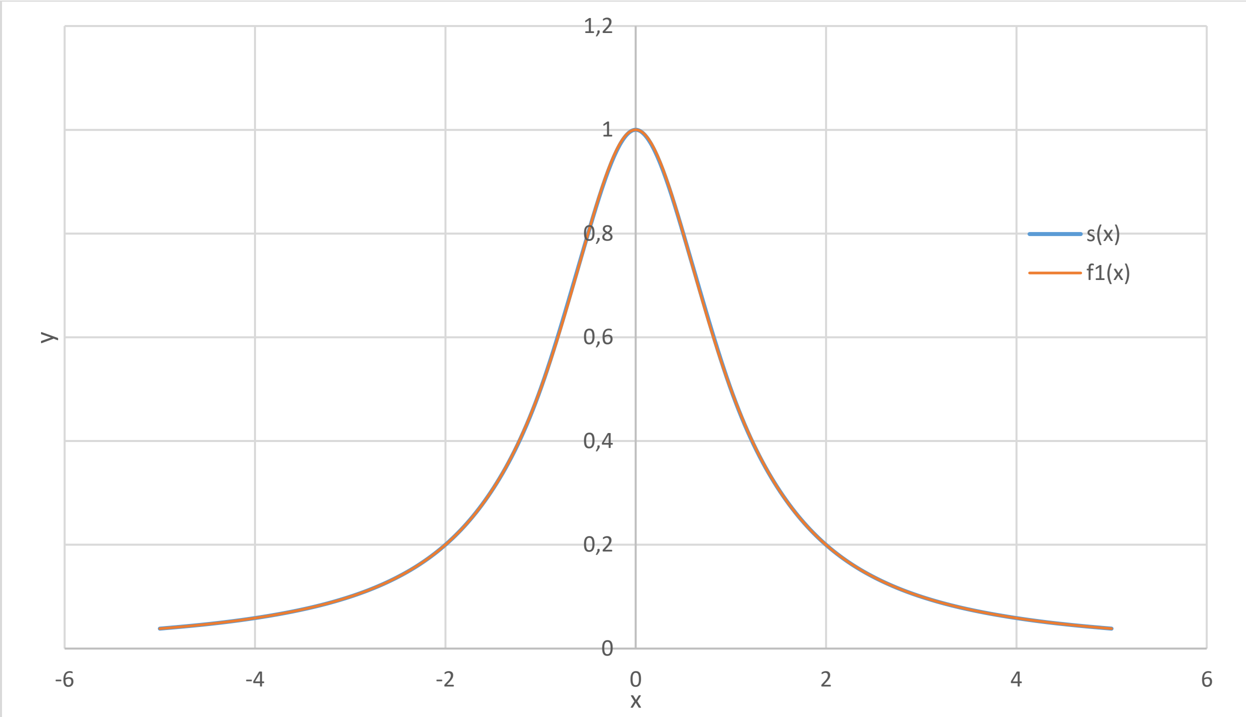
3.1 Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacja dla liczby węzłów $n = 5$



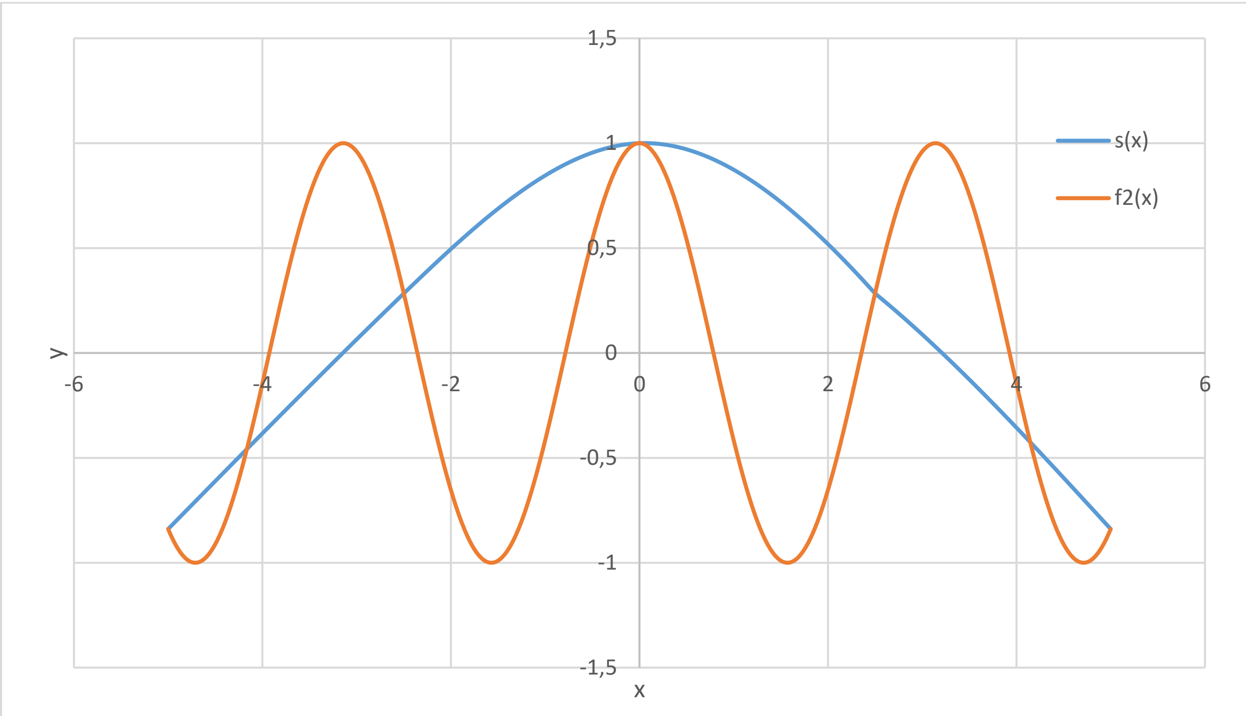
3.2 Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacja dla liczby węzłów $n = 8$



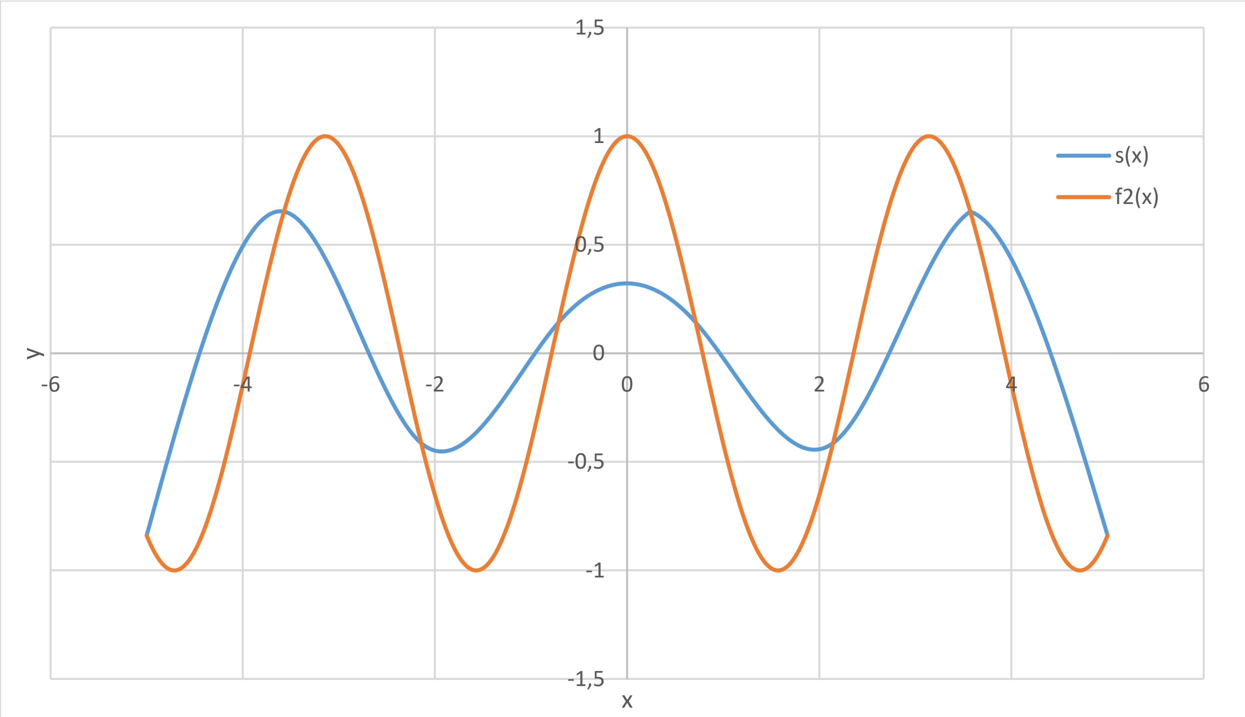
3.3 Wykres funkcji f_1 oraz jej interpolacja dla liczby węzłów $n = 21$



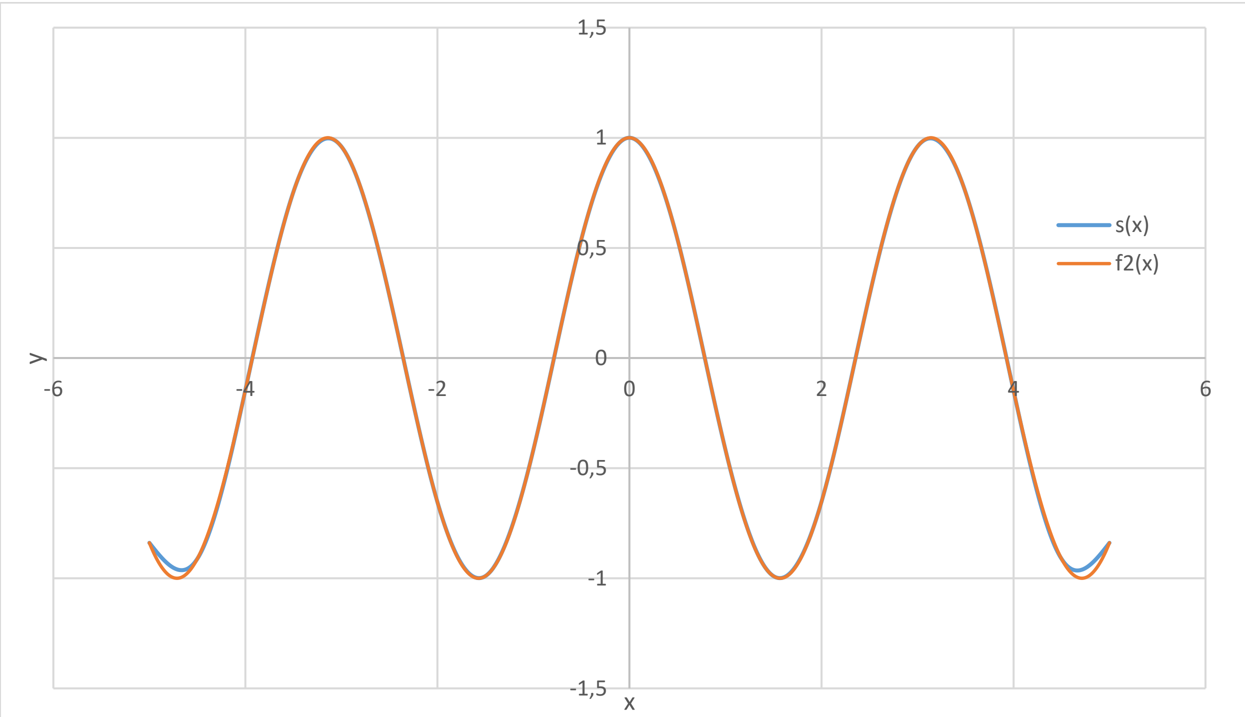
3.4 Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacja dla liczby węzłów $n = 5$



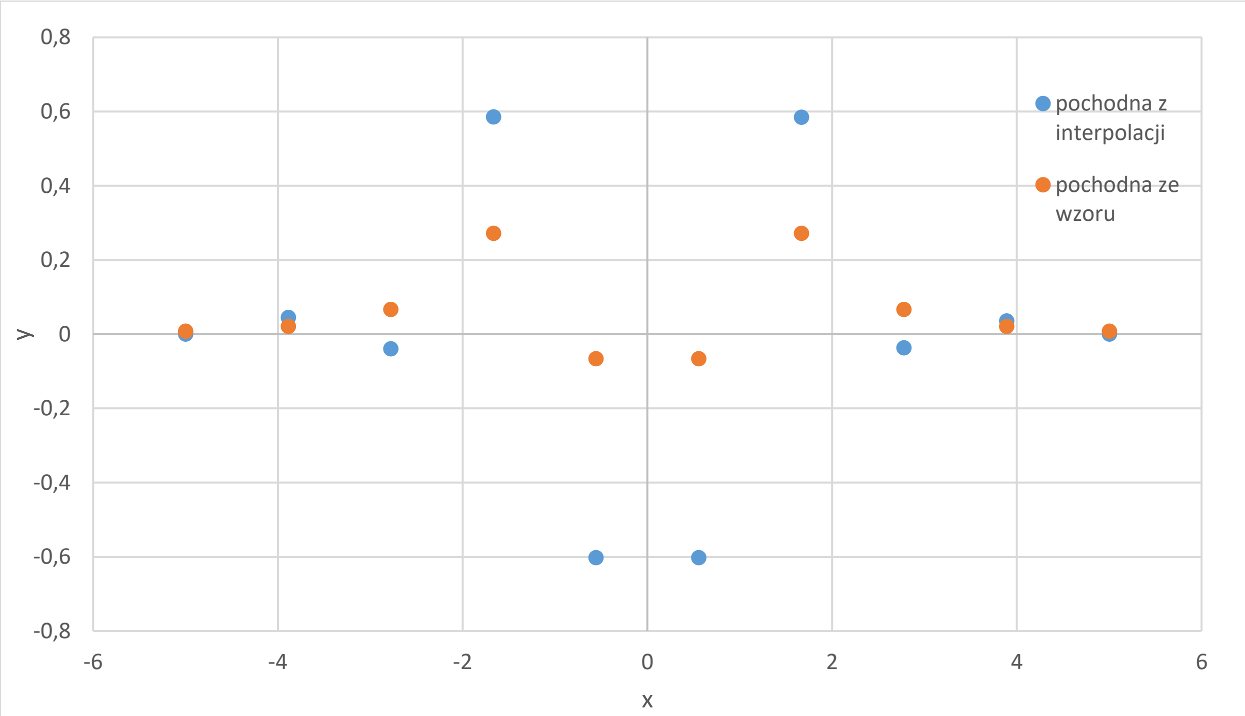
3.5 Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacja dla liczby węzłów $n = 8$



3.6 Wykres funkcji f_2 oraz jej interpolacja dla liczby węzłów $n = 21$



3.7 Wartości drugich pochodnych wyznaczone z interpolacji oraz ze wzoru dla liczby węzłów $n = 10$



4. Wnioski

Wykonaliśmy interpolację dwóch funkcji za pomocą funkcji sklejanych. Dla obu funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ możemy zaobserwować, że wraz ze wzrostem ilości węzłów funkcja powstała z interpolacji coraz bardziej odzwierciedla funkcje $f_1(x)$ i $f_2(x)$. Nie występuje więc efekt Rungego. Na krańcach przedziałów funkcje uzyskane z interpolacji dla większych ilości węzłów nie odbiegają zbyt bardzo od ich rzeczywistych odpowiedników.

Metoda sklejek kubicznych w porównaniu do metody Lagrange'a lepiej odwzorowuje dane funkcje dla większej ilości węzłów. Na dodatek nie występują oscylacje na krańcach przedziału interpolacji.