

Sprawozdanie 3.

Metoda największego spadku dla macierzy wstęgowej

Mirosław Kołodziej

18.03.2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Metoda największego spadku

Metoda największego spadku to algorytm numeryczny mający na celu znalezienie minimum zadanej funkcji celu. W każdej iteracji w zadanym kierunku wyszukiwana jest wartość minimalna danej funkcji celu. Rozwiązanie dla iteracji $i + 1$ ma postać:

$$\overrightarrow{x_{i+1}} = \overrightarrow{x_i} + \alpha_i \overrightarrow{v_i}$$

Jako v_i wybieramy kierunek gradientu Q :

$$\nabla Q = A\overrightarrow{x_i} - \vec{b} = -\vec{r_i} \Rightarrow \overrightarrow{v_i} = -\vec{r_i}$$

W celu znalezienia współczynnika α_i obliczamy $Q(\overrightarrow{x_{i+1}})$:

$$Q(\overrightarrow{x_i} - \alpha_i \vec{r_i}) = -\frac{1}{2} \overrightarrow{x_i}^T \vec{r} - \frac{1}{2} \overrightarrow{x_i}^T \vec{b} + \frac{1}{2} \alpha_i^2 \vec{r_i}^T A \vec{r_i} + \alpha_i \vec{r_i}^T \vec{r_i}$$

i różniczkujemy je po parametrze wariacyjnym w celu znalezienia minimum:

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = \vec{r_i}^T \vec{r_i} + \alpha_i \vec{r_i}^T A \vec{r_i}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = 0 \Rightarrow \alpha_i = -\frac{\vec{r_i}^T \vec{r_i}}{\vec{r_i}^T A \vec{r_i}}$$

Wyrażenie opisujące kolejne przybliżenie w metodzie największego spadku wygląda w następujący sposób:

$$\overrightarrow{x_{i+1}} = \overrightarrow{x_i} + \frac{\vec{r_i}^T \vec{r_i}}{\vec{r_i}^T A \vec{r_i}} \vec{r_i}$$

Zachodzi dla niego warunek:

$$Q(\overrightarrow{x_i}) > Q(\overrightarrow{x_{i+1}})$$

2. Problem

Zadanie polegało na rozwiązaniu układu równań liniowych $A\vec{x} = \vec{b}$. Na początku musieliśmy utworzyć macierzy $A_{n,n}$, gdzie $n = 1000$. Wypełnialiśmy ją według poniższych równań:

$$\begin{cases} A_{i,j} = \frac{1}{1 + |i - j|}, & \text{gdy } |i - j| \leq m, \\ A_{i,j} = 0, & \text{gdy } |i - j| > m \end{cases} \quad i, j = 0, \dots, n - 1$$

gdzie $m = 10$. Później utworzyliśmy wektor wyrazów wolnych \vec{b} i wypełniliśmy go następująco:

$$\vec{b}_i = 0, \quad i = 0, \dots, n - 1$$

Kolejno przeszliśmy do głównego zadania tych zajęć laboratoryjnych – zaprogramowania metody największego spadku do rozwiązania układu równań liniowych. Zrobiliśmy to według poniższego pseudokodu:

```
inicjalizacja: k=0, x, b, A
do{
    k++
    r=b-Ax
    α=(rᵀr)/(rᵀAr)
    x=x+αr //aktualizacja rozwiązania
}while (||r||₂>10⁻⁶ && k<500)
```

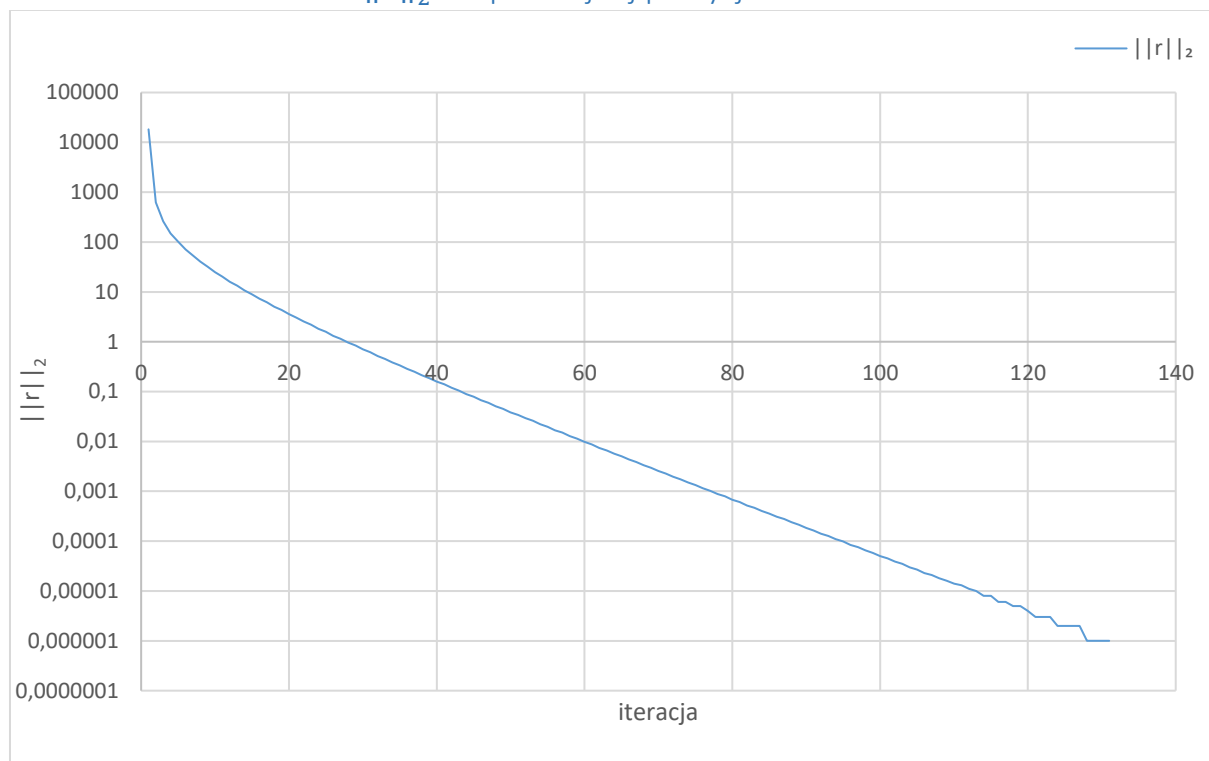
gdzie: k to numer iteracji, \vec{x} to aktualne przybliżenie wektora rozwiązań a \vec{r} jest wektorem reszt.

Układ rozwiązyaliśmy dla dwóch wektorów startowych: $\vec{x} = 0$ i $\vec{x} = 1$. W każdej iteracji zapisywaliśmy do pliku numer obecnej iteracji k , wartość normy euklidesowej wektora reszt $\|r\|_2 = \sqrt{r^T r}$, wartość a_k oraz wartość normy euklidesowej wektora rozwiązań $\|x\|_2 = \sqrt{x^T x}$.

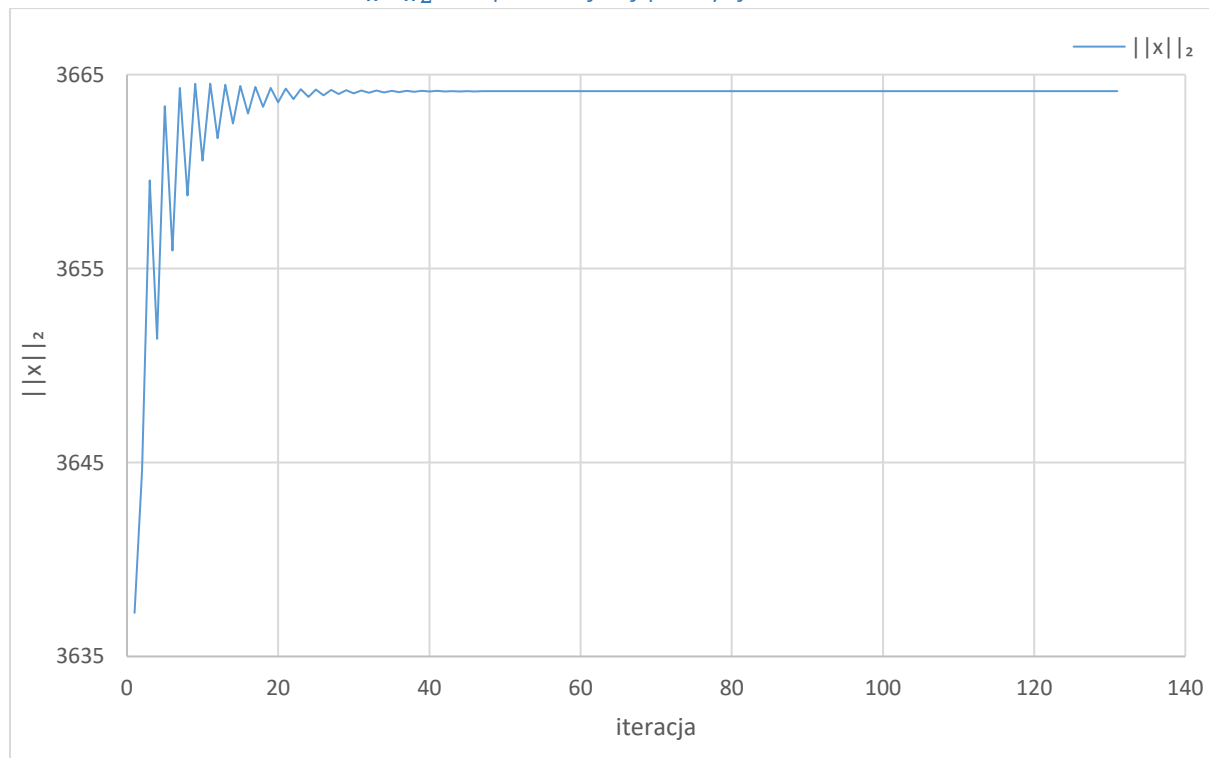
Obliczenia wykonaliśmy w podwójnej precyzji – **double**, oraz w pojedynczej precyzji – **float**. Na koniec wygenerowaliśmy wykresy dla uzyskanych wyników.

3. Wyniki

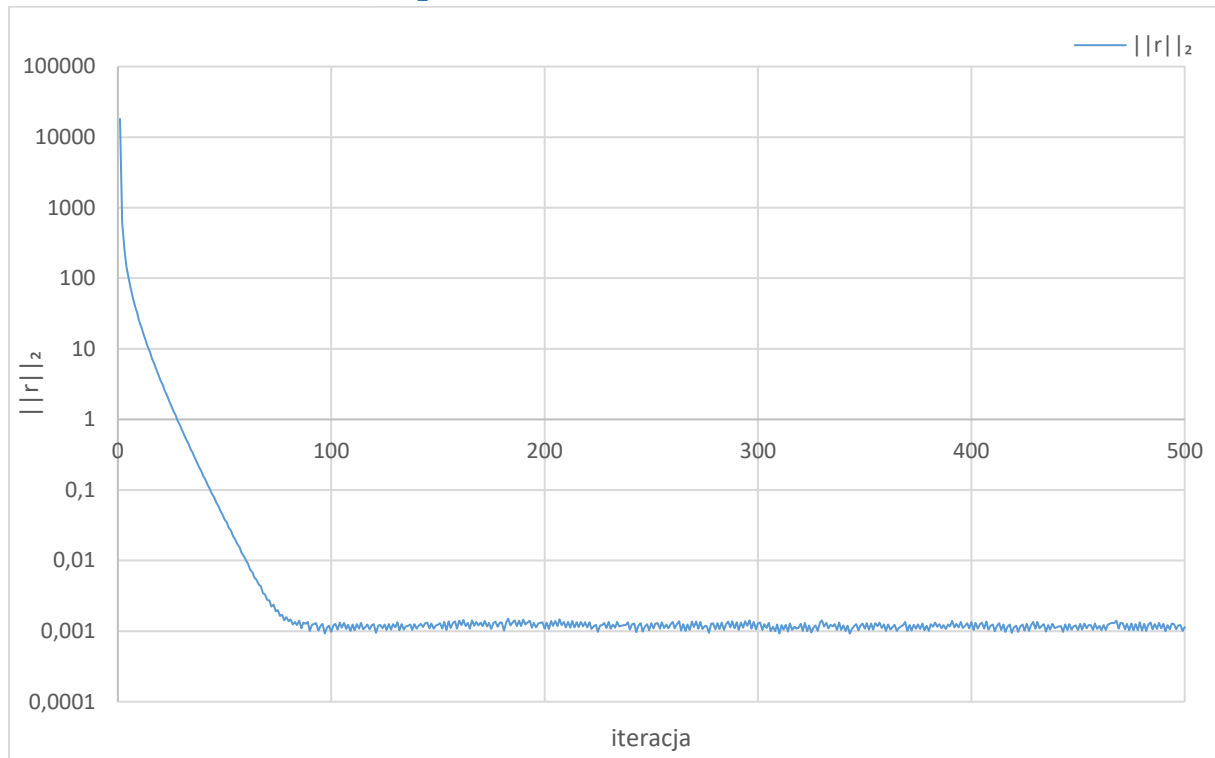
3.1 Norma wektora reszt $\|r\|_2$ dla podwójnej precyzji



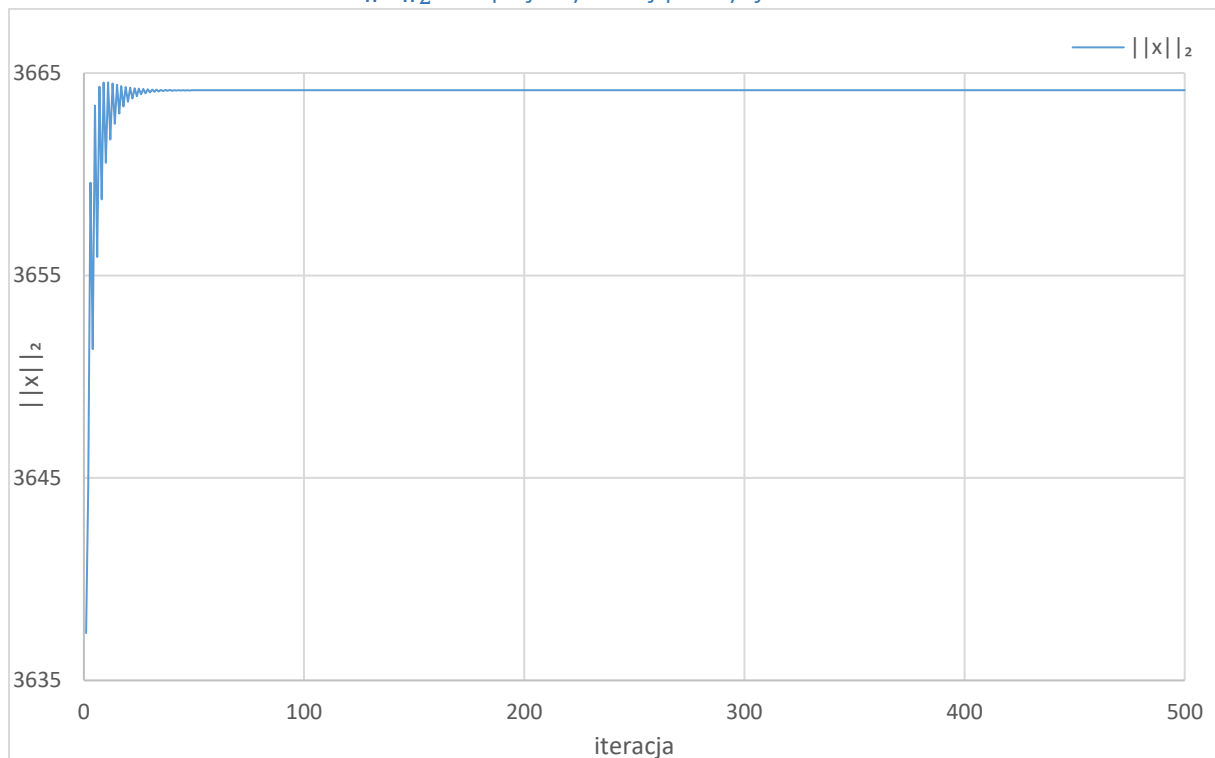
3.2 Norma wektora reszt $\|x\|_2$ dla podwójnej precyzji



3.3 Norma wektora reszt $\|r\|_2$ dla pojedynczej precyzji



3.4 Norma wektora reszt $\|x\|_2$ dla pojedynczej precyzji



4. Wnioski

Korzystając z metody największego spadku rozwiązaliśmy układ równań liniowych $A\vec{x} = \vec{b}$ dla dwóch różnych wektorów rozwiązań - $\vec{x} = 0$ i $\vec{x} = 1$. Zamieściłem wyniki tylko dla jednego z tych wektorów dla pojedynczej i podwójnej precyzji, ponieważ dla obu wektorów były one praktycznie takie same.

Dla pojedynczej precyzji otrzymaliśmy 500 iteracji, zaś dla podwójnej 131. Można wywnioskować, że dobór wektora początkowego nie wpływa na wyniki.

Porównując wykresy dla pojedynczej i podwójnej precyzji łatwo jest zauważyć różnice pomiędzy nimi. Dla pojedynczej precyzji, widzimy, że pętla zatrzymuje się dopiero dla maksymalnej liczby iteracji $k = 500$, czyli wynik nigdy nie osiągnął wartości rzędu 10^{-6} . Wybranie podwójnej precyzji gwarantuje dokładniejsze rozwiązanie.