Sprawozdanie 7.

Interpolacja Lagrange'a funkcji niesymetrycznej z optymalizacją położeń węzłów

Mirosław Kołodziej

22.04.2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Idea interpolacji wielomianowej

Interpolacja polega na wyznaczeniu przybliżonych wartości funkcji w punktach, które nie są węzłami oraz na oszacowaniu błędu przybliżonych wartości. Problem interpolacji sprowadza się do znalezienia funkcji interpolującej $F(x)$, która w węzłach przyjmuje wartości takie jak funkcja interpolowana $y = f(x)$ (jej postać funkcyjna nie musi być znana).

Interpolację najczęściej przeprowadza się za pomocą wielomianów algebraicznych (nieortogonalnych lub ortogonalnych), wielomianów trygonometrycznych oraz funkcji sklejanych.

Twierdzenie:

Istnieje dokładnie jeden wielomian interpolacyjny stopnia co najwyżej n ($n \geq 0$), który w punktach $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ przyjmuje wartości $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$.

Dowód:

$n + 1$ węzłów rozmieszczonych jest w dowolny sposób w $[a, b]$. Szukamy wielomianu interpolacyjnego w postaci:

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Podstawiając do $W_n(x)$ kolejno $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ dostajemy układ $n + 1$ równań na współczynniki a_i:

$$\begin{gathered} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = y_1 \\ \dots = \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = y_n \end{gathered}.$$

Macierz współczynników układu to macierz Vandermode:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix},$$

a wyznacznik D jest wyznacznikiem Vandermode'a:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \Longrightarrow D = \prod_{0 \le j < i \le n} \left(x_i - x_j\right) \neq 0.$$

Wniosek:

Układ ma dokładnie jedno rozwiązanie a_i:

$$a_i = \frac{1}{D} \sum_{j=0}^{n} y_j D_{ij},$$

gdzie D_{ij} to wyznacznik macierzy dopełnień algebraicznych i opisuje ono wielomian interpolacyjny.

1.2 Interpolacja Lagrange'a

Korzystamy z poprzedniego wyniku, czyli podstawiamy:

$$a_i = \frac{1}{D} \sum_{j=0}^{n} y_j D_{ij},$$

do wielomianu:

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

i grupujemy składniki przy y_i:

$$W_n(x) = y_0 \Phi_0(x) + y \Phi_1(x) + y_2 \Phi_2(x) + \ldots + y_n \Phi_n(x).$$

Funkcje $\Phi(x)$ są wielomianami co najwyżej stopnia n. Zauważmy, że dla dowolnego x_i zachodzi zależność:

$$W_n(x) = y_0 \Phi_0(x_i) + y \Phi_1(x_i) + y_2 \Phi_2(x_i) + \ldots + y_n \Phi_n(x_i) = y_i,$$

skąd wynika warunek:

$$\Phi_j(x_i) = \begin{cases} 0, & gdy\ j \neq i \\ 1, & gdy\ j = i \end{cases}$$

Wniosek:

Aby okreslić funkcje $\Phi_j(x)$ należy znaleźć taki wielomian, który zeruje się w węzłach $x_i \neq x_j$ oraz przyjmuje wartość 1 w węźle x_j. Taką funkcją mógłby być np. wielomian:

$$\Phi_j(x) = \lambda(x - x_0)(x - x_1) \ldots \left(x - x_{j-1}\right)\left(x - x_{j+1}\right) \ldots (x - x_n),$$

który w x_j przyjmuje wartość 1:

$$1 = \lambda\left(x_j - x_0\right)\left(x_j - x_1\right) \ldots \left(x_j - x_{j-1}\right)\left(x_j - x_{j+1}\right) \ldots \left(x_j - x_n\right).$$

Otrzymaliśmy wielomian węzłowy Lagrange’a:

$$\Phi_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)}.$$

Szukany wielomian przyjmuje postać:

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n).$$

Zaś wzór interpolacyjny Lagrange'a ma postać:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - xj) \left\{\frac{\omega_n(x)}{x - x_j}\right\}\Big|_{x=x_j}} = \sum_{j=0}^{n} y_j \frac{\omega_n(x)}{(x - xj)\omega_n'(x_j)}.$$

1.3 Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa to układ wielomianów ortogonalnych tworzący bazę przestrzeni wielomianów.

Przy interpolacji wielomianowej często zamiast równoodległych węzłów, używa się węzłów Czebyszewa, leżących w zerach wielomianów Czebyszewa. Pozwala to uniknąć dużych oscylacji wielomianu interpolacyjnego przy krańcach przedziału.

2. Problem

Naszym zadaniem było wykonanie interpolacji Lagrange'a funkcji:

$$y = \frac{x}{1 + x^2},$$

na przedziale $[-3, 8]$. Do wykonania tego zadania skorzystaliśmy z poniższego algorytmu:

```
inicjalizacja: wielomian=0
for (i=0; i<=n; i++){
     inicjalizacja: L=1, M=1
     for (j=0; j<=n; j++){
          if (i!=j){
               L*=(x-xj)
               M*=(xi-xj)
          {
     }
     wielomian+=yi*L/M
}
```

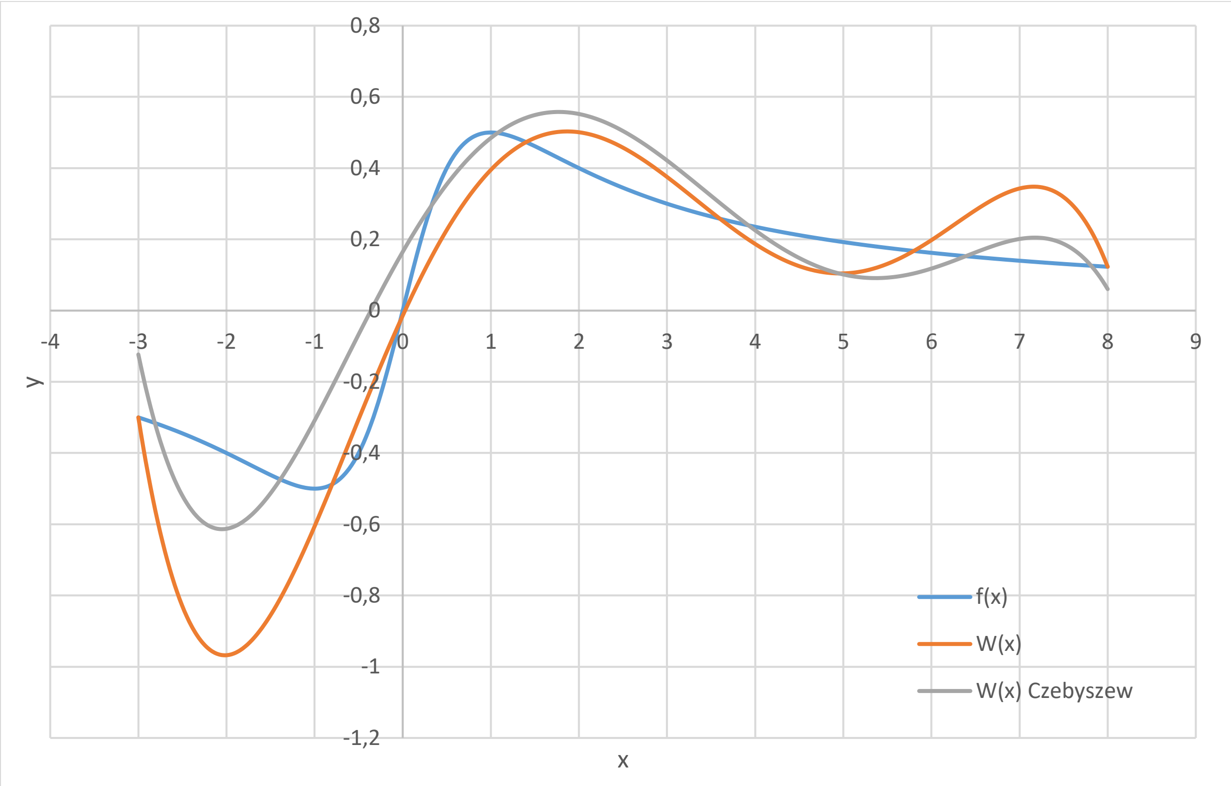
Zaczęliśmy od zaimplementowania go. Następnie wykonaliśmy interpolację funkcji $y(x)$ dla $n = 5, 10, 15$. Zrobiliśmy to dla węzłów rozłożonych równomiernie oraz dla węzłów liczonych jako zera wielomianów Czebyszewa postaci:

$$x_i = \frac{1}{2}\left[(x_b - x_a)\cos\left(\pi \frac{2i + 1}{2n + 2}\right) + (x_a + x_b)\right], \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

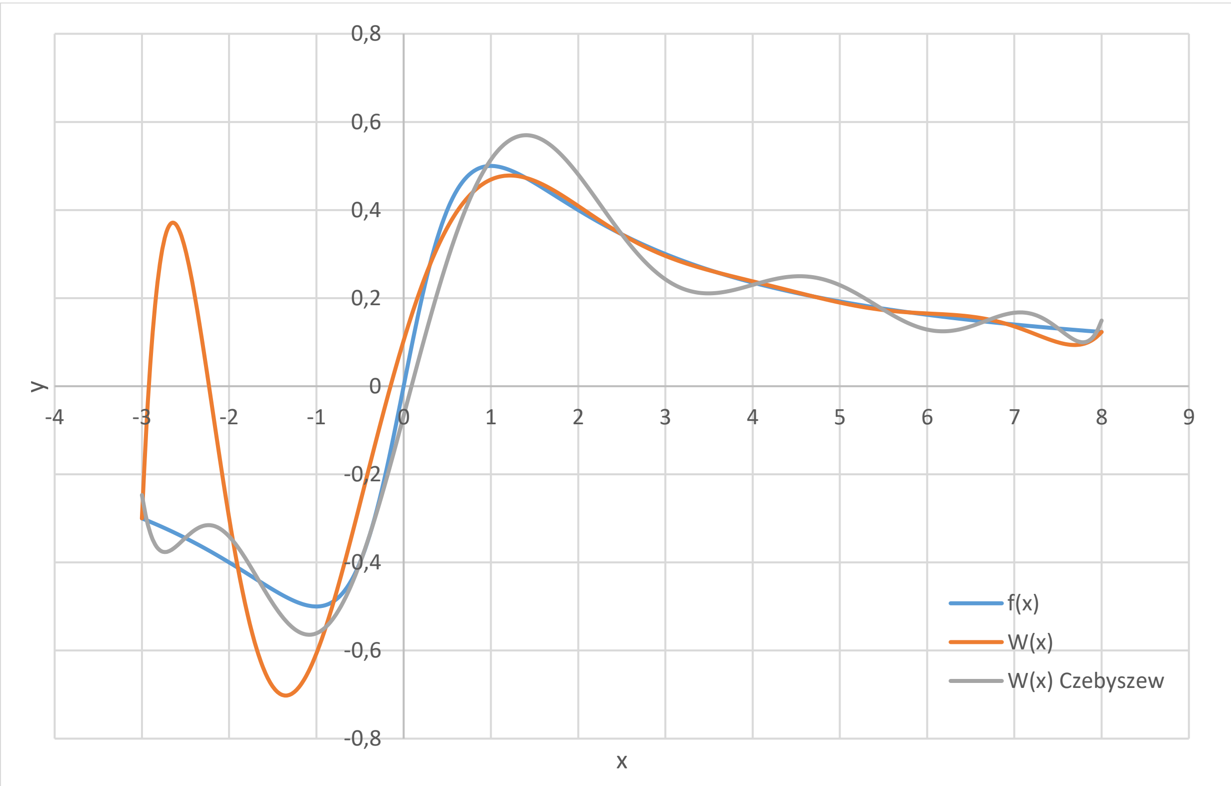
Dla każdego n sporządziliśmy rysunek zawierający przebieg funkcji $y(x)$ oraz obu wielomianów interpolacyjnych. Wykonaliśmy je dla 200 punktów.

3. Wyniki

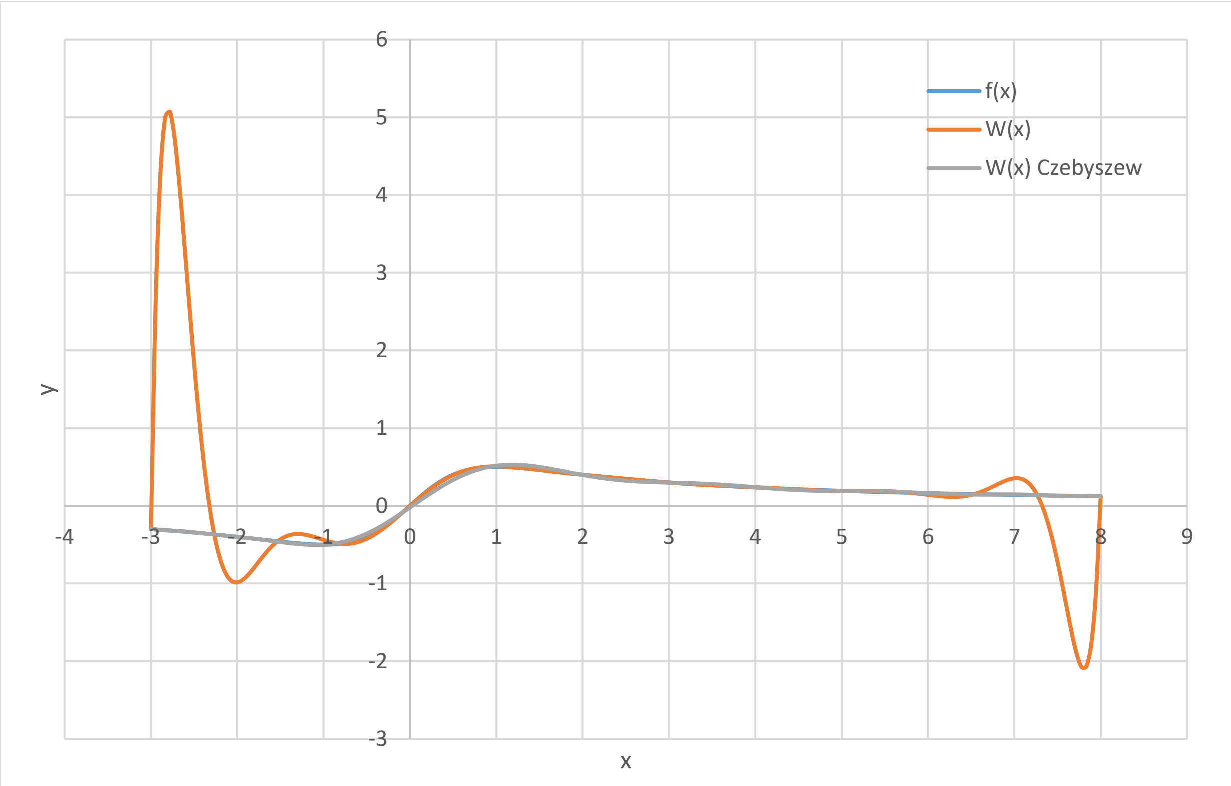
3.1 Wykres interpolacji Lagrange'a dla $n = 5$



3.2 Wykres interpolacji Lagrange'a dla $n = 10$



3.3 Wykres interpolacji Lagrange'a dla $n = 15$



4. Wnioski

Wykonaliśmy interpolację funkcji $y = \frac{x}{1+x^2}$. Jak można zauważyć, dla większej ilości węzłów otrzymujemy dokładniejsze dopasowania dla obu rodzajów. Widzimy jednak, że dla węzłów rozłożonych równomiernie przy większej ich ilości wykresy zaczynają oscylować na krańcach. Można temu zapobiec stosując węzły wyznaczone przez zera wielomianu Czebyszewa. Dla tego przypadku przy 15 węzłach wykres prawie idealnie odwzorowuje funkcję.

Interpolacja pozwala więc na całkiem dokładne wyznaczenie przybliżonych wartości funkcji, o ile skorzystamy z odpowiednio zoptymalizowanych węzłach.