Sprawozdanie 4.

Uogólniony (symetryczny) problem własny - wyznaczanie modów własnych struny w 1D

Mirosław Kołodziej

25.03.2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Problem własny

Problem własny to równanie liniowe zapisane w postaci:

$$A\overrightarrow{x_k} = \lambda_k \overrightarrow{x_k},$$

gdzie A jest macierzą kwadratową $n \times n$, a $\overrightarrow{x_k}$ jest wektorem własnym macierzy odpowiadającym wartości własnej λ_k. Często jednak mamy do czynienia z trudniejszą postacią, czyli uogólnionym problemem własnym:

$$A \cdot x = \lambda B \cdot x.$$

1.2 Delta Kroneckera

Delta Kroneckera (inaczej symbol Kroneckera) to dwuargumentowa funkcja określona na zbiorze $T \times T \rightarrow \{0,1\}$, gdzie $T \neq \emptyset$, oznaczana symbolem δ_{ij}. Przyjmuje ona wartość 1 dla $i = j$ oraz 0 dla $i \neq j$.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & dla\ i = j \\ 0, & dla\ i \neq j \end{cases}$$

2. Problem

Na laboratorium zajęliśmy się wyznaczeniem częstości drgań struny, której wychylenie jest opisywane przez funkcję $\psi = \psi(x, t)$. Dynamiką struny rządzi równanie falowe:

$$\frac{N}{\rho(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},$$

gdzie N to naciąg struny a $\rho(x)$ to liniowy rozkład gęstości. Następnie dokonujemy separacji zmiennych – najpierw podstawiamy $\psi(x, t) = u(x)\theta(t)$, a później dzielimy przez iloczyn $u\theta$:

$$\frac{N}{\rho(x)} \frac{1}{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\theta} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = const = -\lambda,$$

gdzie $\lambda = \omega^2$, a ω to częstotliwość własna drgań. Dzięki temu otrzymujemy równanie różniczkowe zależne tylko od jednej zmiennej położeniowej:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda \frac{\rho(x)}{N} u.$$

Struna jest przymocowana w punktach $\pm\frac{L}{2}$, gdzie L to długość struny. Wprowadzamy siatkę równoodległych węzłów: $x = x_i$, $u(x) = u_i$ oraz $\rho(x) = \rho_i$. Odległość pomiędzy nimi wynosi:

$$\Delta x = \frac{L}{n+1},$$

a ich położenie wyznaczamy w poniższy sposób:

$$x_i = -\frac{L}{2} + \Delta x \cdot (i+1), \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Następnie możemy dokonać dyskretyzacji równania podstawiając trójpunktowy iloraz różnicowy centralny w miejsce drugiej pochodnej:

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \lambda \frac{\rho_i}{N} u_i.$$

Możemy to zapisać w postaci:

$$Au = \lambda B u,$$

co stanowi uogólniony problem własny, w którym elementy macierzy definiujemy następująco:

$$A_{i,j} = \frac{(\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1})}{\Delta x^2},$$

$$B_{i,j} = \frac{\rho_i}{N} \delta_{i,j}.$$

Wyrażenie $\delta_{i,j}$ jest deltą Kroneckera.

W rozwiązaniu zadania przyjęliśmy $L = 10$, $n = 200$, $\rho(x) = 1 + 4\alpha x^2$, $N = 1$. Następnie tworzyliśmy macierze A i B. Wypełniliśmy je zgodnie z powyższymi wzorami. Później rozwiązujemy równanie dla $\alpha \in [0,100]$ z krokiem $\Delta\alpha = 2$. Skorzystaliśmy przy tym z metody biblioteki GSL:

```
int gsl_eigen_gensymmv(gsl_matrix * A, gsl_matrix * B, gsl_vector *
eval, gsl_matrix * evec, gsl_eigen_gensymm_workspace * w)
```

gdzie `eval` to wektor wartości własnych (nieposortowany), `evec` to macierz $n \times n$ w której kolumnach zapisane są wektory własne, a wektor pomocniczy w definiujemy w następujący sposób:

```
gsl_eigen_gensymmv_workspace *w = gsl_eigen_gensymmv_alloc(n);
```

Wartości i wektory własne sortujemy (po rozwiązaniu problemu) stosując funkcję GSL-a:

```
int gsl_eigen_gensymmv_sort(gsl_vector * eval, gsl_matrix *
evec,gsl_eigen_sort_t sort_type);
```

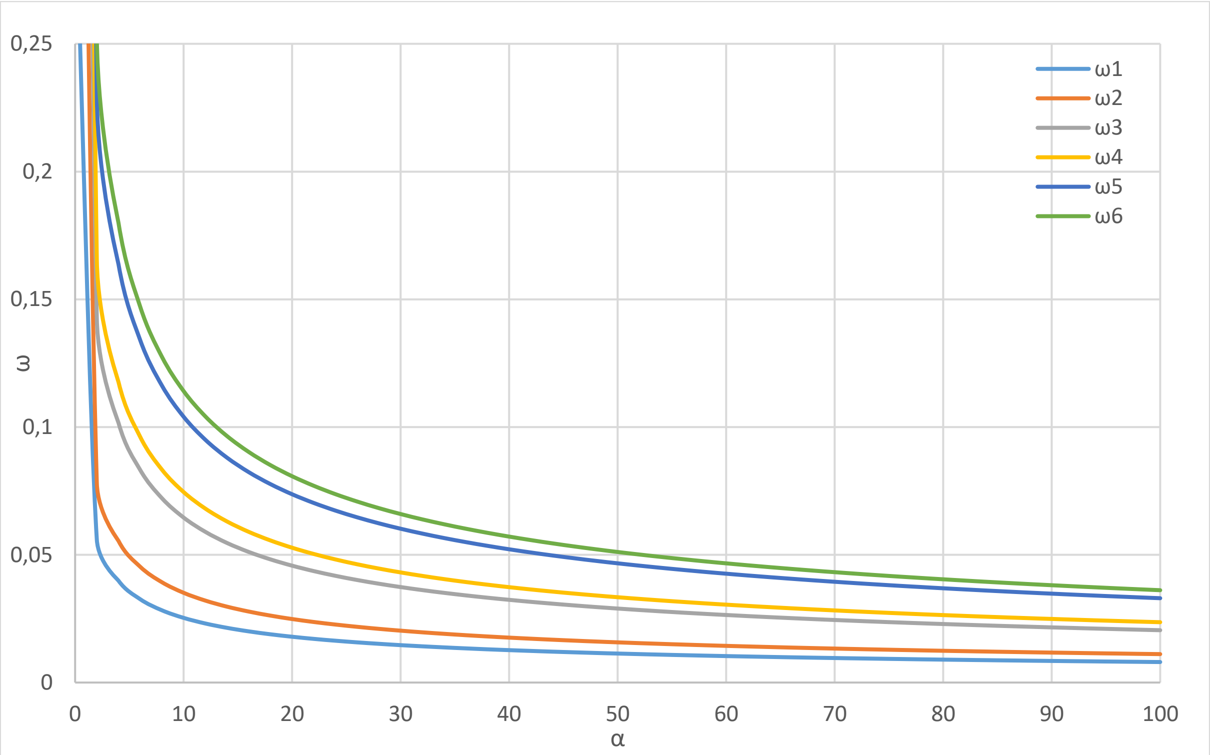
gdzie podstawiamy:

```
gsl_eigen_sort_t=GSL_EIGEN_SORT_ABS_ASC
```

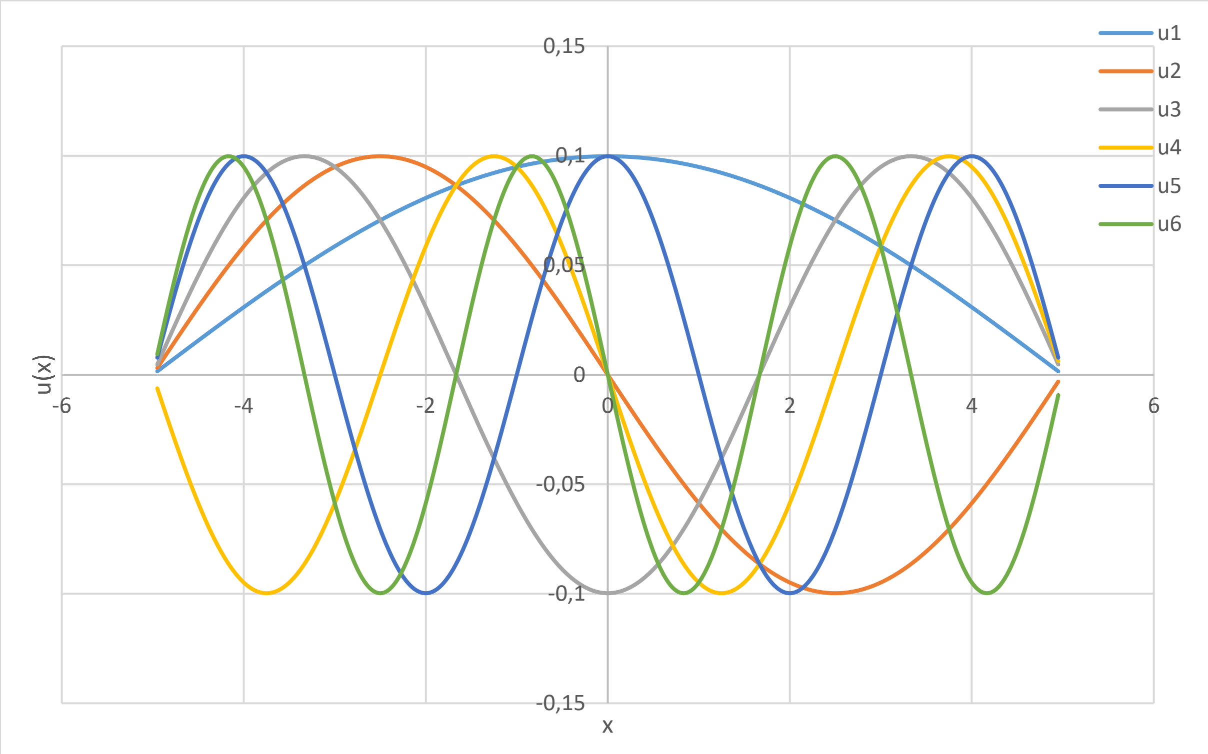
Dla każdej wartości parametru α zapisywaliśmy do pliku wartości pierwiastków z 6 kolejnych najmniejszych wartości własnych i tworzyliśmy odpowiedni wykres. Również dla $\alpha = 0$ oraz $\alpha = 100$ zapisywaliśmy do pliku wektory własne odpowiadające 6 najniższym wartościom własnym i tworzyliśmy wykresy.

3. Wyniki

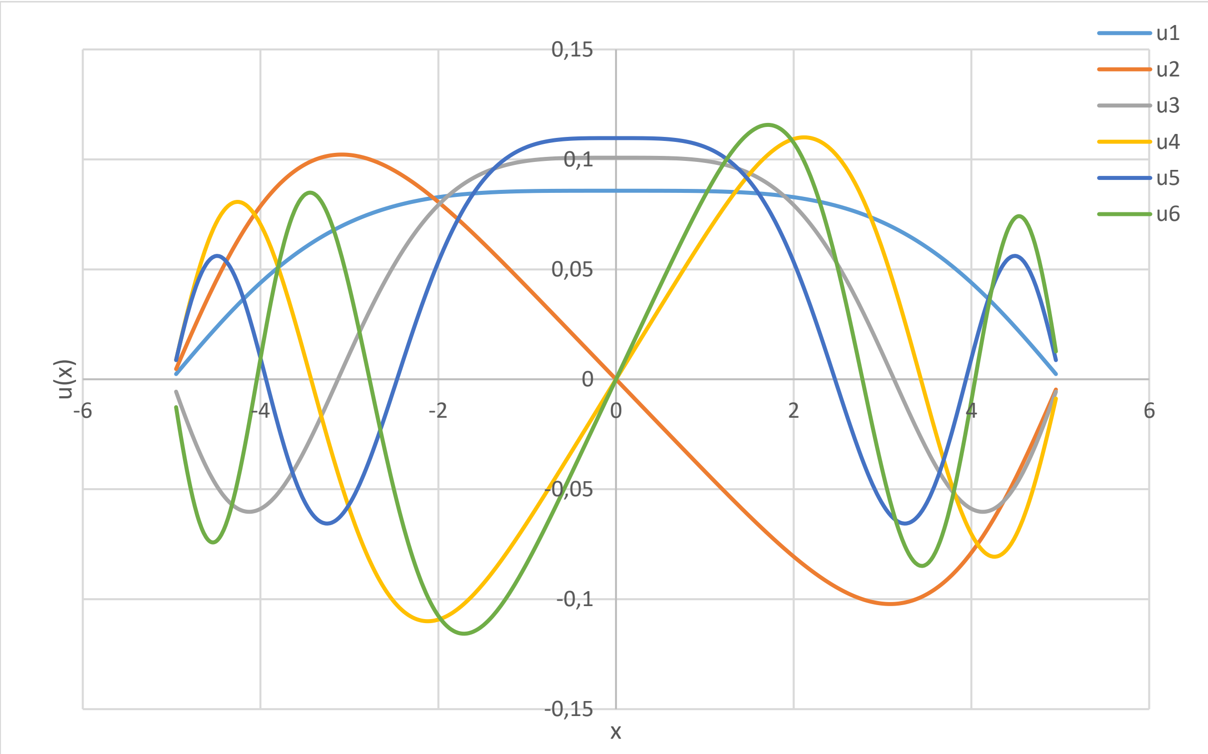
3.1 Zmiany wartości własnych w funkcji parametru α



3.2 Wykres wektorów własnych odpowiadających 6 najniższym wartościom własnym dla $\alpha = 0$



3.3 Wykres wektorów własnych odpowiadających 6 najniższym wartościom własnym dla $\alpha = 100$



4. Wnioski

Rozwiązanie uogólnionego problemu własnego pozwoliło nam na wyznaczanie modów własnych struny w 1D. Dla $\alpha = 0$ możemy zaobserwować, że wykresy mają takie same wartości minimalne i maksymalne – dzieje się tak dlatego, że gęstość była jednorodna, niezależnie od położenia na strunie. Wykresy miały sinusoidalny kształt, a ich okres zależał od częstotliwości. Zwiększenie parametru α spowodowało zniekształcenie sinusoidalnego kształtu – mają różne wychylenia i część z nich jest spłaszczona na środku. Kształt wykresów oraz krótki czas obliczeń potwierdzają skuteczność tej metody w rozwiązaniu takich równań falowych.