Sprawozdanie 9.

Aproksymacja wielomianowa

Mirosław Kołodziej

06.05.2021

1. Wstęp teoretyczny

1.1 Aproksymacja liniowa

Aproksymacja liniowa funkcji to przybliżenie jej za pomocą funkcji liniowej. Polega ona na wyznaczeniu współczynników $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ funkcji aproksymującej:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_m\varphi_m(x),$$

gdzie $\varphi_i(x)$ to funkcje bazowe $m+1$ wymiarowej podprzestrzeni liniowej $X_{m+1}, X_{m+1} \in X$. Funkcja $F(x)$ powinna spełniać warunek:

$$\|f(x) - F(x)\| = minimum$$

Aproksymacja pozwala na odpowiedni dobór podprzestrzeni w zależności od rodzaju problemu:

- podprzestrzeń funkcji trygonometrycznych z bazą:
$$1, \sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(kx), \cos(kx),$$
- podprzestrzeń wielomianów stopnia m z bazą:
$$1, x, x^2, \dots, x^m,$$
- podprzestrzeń funkcji o własnościach ściśle związanych z własnościami rozważanego problemu:
$$\exp(a_0 + a_1x + a_2x^2).$$

1.2 Aproksymacja średniokwadratowa

Aproksymacja średniokwadratowa to aproksymacja, której celem jest minimalizacja błędu na przedziale $[a, b]$. Istotność błędu w poszczególnych punktach mierzymy za pomocą funkcji wagowej $w(x)$. Dla funkcji ciągłej $f(x)$ określonej na wspomnianym wcześniej przedziale poszukujemy minimum wartości poniższej całki:

$$\|F(x) - f(x)\| = \int_a^b w(x)[F(x) - f(x)]^2 dx,$$

lub sumy w przypadku, gdy funkcja jest określona na dyskretnym zbiorze $n+1$ punktów (inaczej nazywany metodą największych kwadratów):

$$\|F(x) - f(x)\| = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - f(x_i)]^2, \qquad w(x_i) \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

1.3 Aproksymacja średniokwadratowa w bazie jednomianów

W przypadku **aproksymacja średniokwadratowa w bazie jednomianów** warunek minimum przyjmuje postać:

$$\sum_{j=0}^{n}\left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i x_j^i\right] x_j^k = 0\,, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, m-1,$$

zaś po zmianie kolejności sumowania:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \left(\sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k}\right) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, x_j^k$$

i wprowadzeniu poniższych oznaczeń:

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k}\,, \qquad \rho_{\,k} = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, x_j^k$$

otrzymujemy układ normalny:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i g_{ik} = \rho_k \;\Rightarrow\; G^T a = \rho.$$

2. Problem

Celem naszych zajęć laboratoryjnych była aproksymacja funkcji typu:

$$g(x) = \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \exp(a_0 + \ a_1 x + \ a_2 x^2),$$

gdzie $a_0 = -\frac{x_0^2}{2\sigma^2}$, $a_1 = \frac{x_0}{\sigma^2}$, $a_2 = -\frac{1}{2\sigma^2}$, $x_0 = 2$, $\sigma = 4$. Po zlogarytmizowaniu funkcji otrzymujemy zależność wielomianową:

$$f(x) = ln(g(x)) = a_0 + \ a_1 x + \ a_2 x^2.$$

Aproksymowaliśmy ją w bazie jednomianów. Wybraliśmy 4-elementową bazę $\{\varphi_i\} = \{1, x, x^2, x^3\}$ i poszukiwaliśmy kombinacji liniowej:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m=3} b_i x^i = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$$

w celu utworzenia funkcji $G(x)$, która jest przybliżeniem funkcji $g(x)$:

$$g(x) \approx G(x) = \exp\big(F(x)\big) = \exp(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$$

Współczynniki b_0, b_1, b_2, b_3 wyznaczamy za pomocą wzorów wymienionych we wstępie teoretycznym. Węzły i elementy bazy numerujemy zaczynając od 0 ze względu na to, że korzystamy z biblioteki GSL. Elementy bazy jednomianów indeksujemy $k = 0, 1, \dots, m-1$, a węzły aproksymacji x_j za pomocą $j = 0, 1, \dots, N-1$. Po uproszczeniach i przyjęciu warunków oraz oznaczeń zadania otrzymaliśmy:

$$G^T b = r.$$

Ponieważ macierz G jest symetryczna ($G^T = G$), równanie ma postać:

$$Gb = r.$$

Do rozwiązaniu układu równań skorzystaliśmy z funkcji:

```
gsl_linalg_HH_svx (gsl_matrix *G, gsl_vector *r)
```

Jako wynik otrzymaliśmy współczynniki b_i. Aproksymację wykonaliśmy dla $n = 11$ równoodległych węzłów na przedziale $x \in [-3\sigma + x_0, 3\sigma + x_0]$.

Kolejnym krokiem była aproksymacja funkcji:

$$g_2(x) = g(x)\big(1 + \delta(x)\big),$$

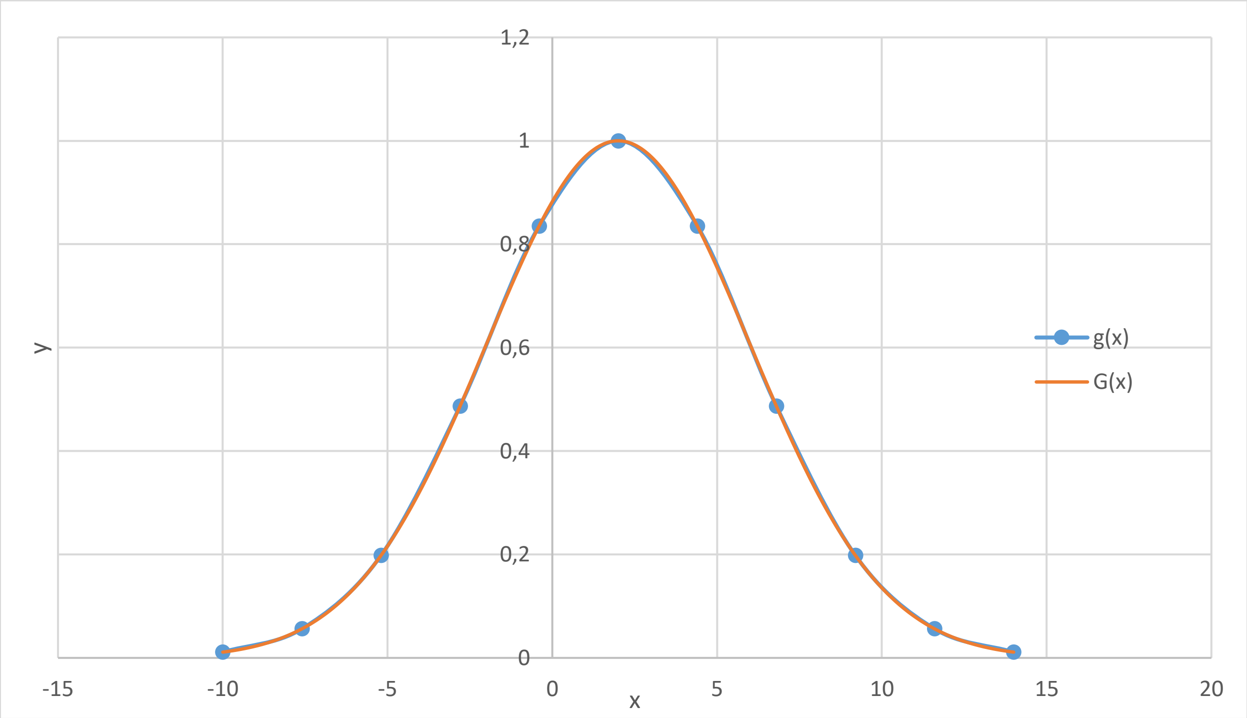
gdzie:

$$\delta(x) = \alpha \cdot (U - 0.5), \qquad U = \frac{rand()}{RAND_{MAX} + 1.0}.$$

Za α przyjęliśmy wartość 0.5, a U jest liczbą pseudolosową z przedziału $[0, 1]$. Aproksymację wykonaliśmy dla liczby węzłów $n = 11, 101$ na przedziale $x \in [-3\sigma + x_0, 3\sigma + x_0]$.

3. Wyniki

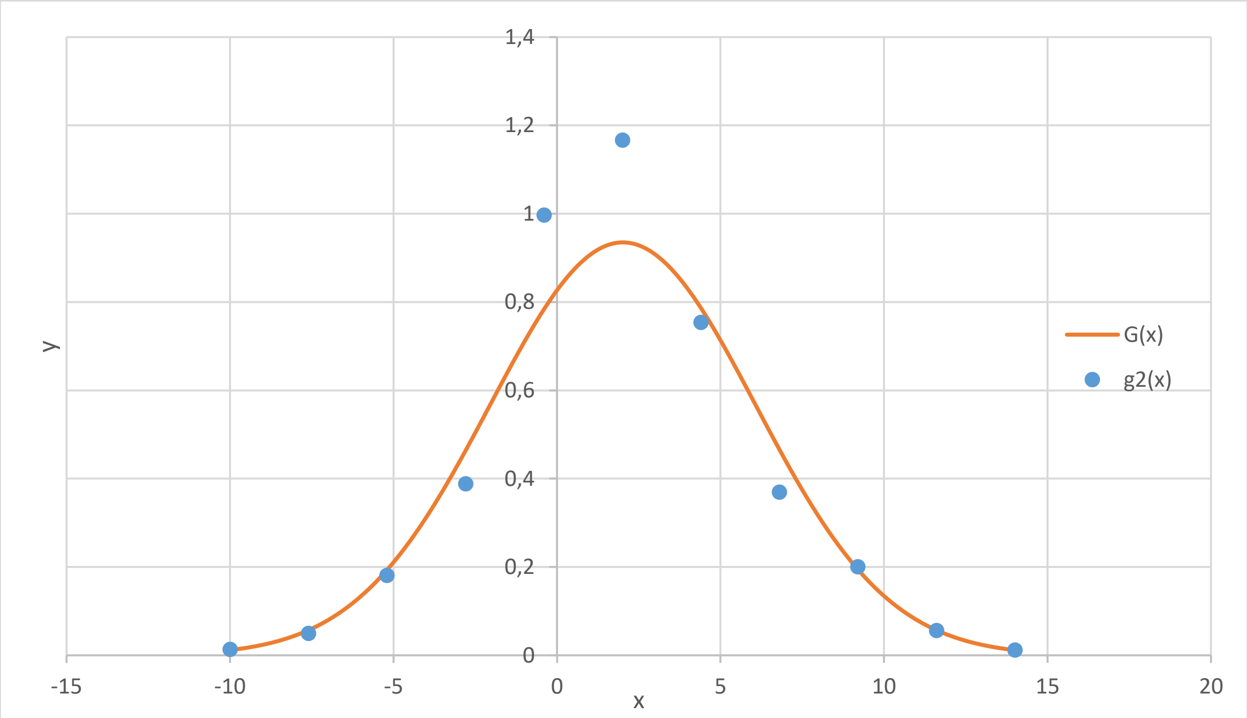
3.1 Wykres aproksymacji funkcji $g(x)$ dla parametru $N = 11$



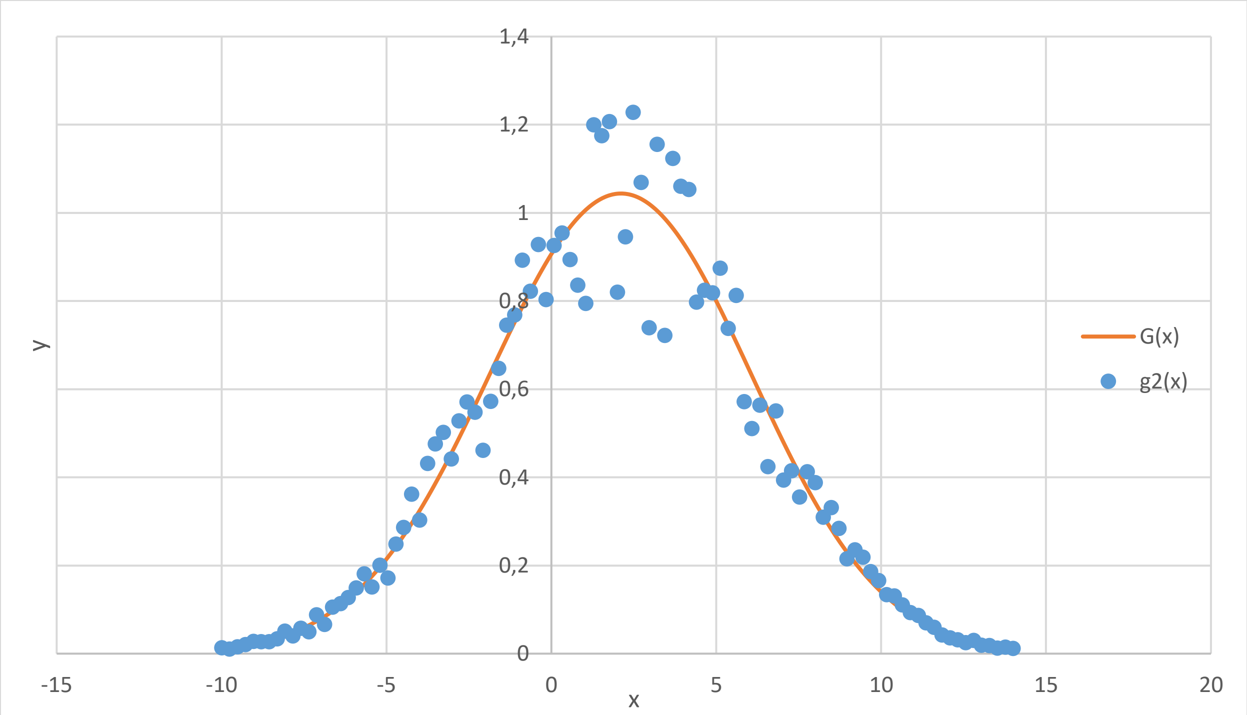
3.2 Współczynniki a_i oraz b_i dla funkcji $g(x)$

	Dokładna wartość		Przybliżona wartość
a_0	-0.125	b_0	-0.125
a_1	0.125	b_1	0.125
a_2	-0.03125	b_2	-0.03125
		b_3	$3.0227 \cdot 10^{-16}$

3.3 Wykres aproksymacji funkcji $g_2(x)$ dla parametrów $\alpha = 0.5$ i $N = 11$



3.4 Wykres aproksymacji funkcji $g_2(x)$ dla parametrów $\alpha = 0.5$ i $N = 101$



3.5 Współczynniki a_i oraz b_i dla funkcji $g_2(x)$

	Dokładna wartość		Przybliżona wartość, $N = 11$	Przybliżona wartość, $N = 101$
a_0	-0.125	b_0	-0.190275	-0.0981122
a_1	0.125	b_1	0.122213	0.133227
a_2	-0.03125	b_2	-0.0302972	-0.0313183
		b_3	$-8.57348 \cdot 10^{-6}$	$-6.71604 \cdot 10^{-5}$

4. Wnioski

Wykonaliśmy aproksymację funkcji $g(x)$. Jak możemy zauważyć na uzyskanych wykresach, metoda aproksymacji wielomianowej daje możliwość uzyskania dokładnego przybliżenia funkcji. Aproksymacja redukuje również szumy, z tego powodu nie uzyskaliśmy dużych odchyleń od początkowego wykresu. Również wyznaczone przez aproksymację współczynniki są bliskie dokładnej wartości.