Mirela Mai, Nº USP: 11208392

2) a) Temos que se $\vec{u}$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta$, onde o θ é o ângulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Assim, temos que:

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\cos\theta|$

Temos que $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ para qualquer θ real, logo: $|\cos\theta| \leq 1$

$\Rightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot |\cos\theta| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

$\Rightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

2) b) n NÚMEROS REAIS $a_1, a_2, \cdots a_n > 0$

PODEMOS PEGAR O VETOR $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ E O VETOR $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$, TAIS QUE:

$$\vec{v} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \Rightarrow \|\vec{v}\|^2 = a_1^2 + \cdots + a_n^2$$

E $$\vec{u} = \left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \cdots, \frac{1}{a_n}\right) \Rightarrow \|\vec{u}\|^2 = \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{a_n}\right)^2$$

$$\Rightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}| = \left|\frac{a_1}{a_1} + \frac{a_2}{a_2} + \cdots \frac{a_n}{a_n}\right| = n$$

$$\Rightarrow |\vec{u} \cdot \vec{v}|^2 = n^2$$

NOTE QUE SE $a, b > 0$, ENTÃO

$a + b > \sqrt{a^2 + b^2}$, POIS $a^2 + 2ab + b^2 (a+b)^2$

E $ab > 0$, ENQUANTO QUE $\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = a^2 + b^2$

$\Rightarrow$ COM $\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$ E $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$,

TEMOS QUE $\|\vec{v}\| \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, BEM COMO

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{a_n}\right)^2} \leq \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}$$

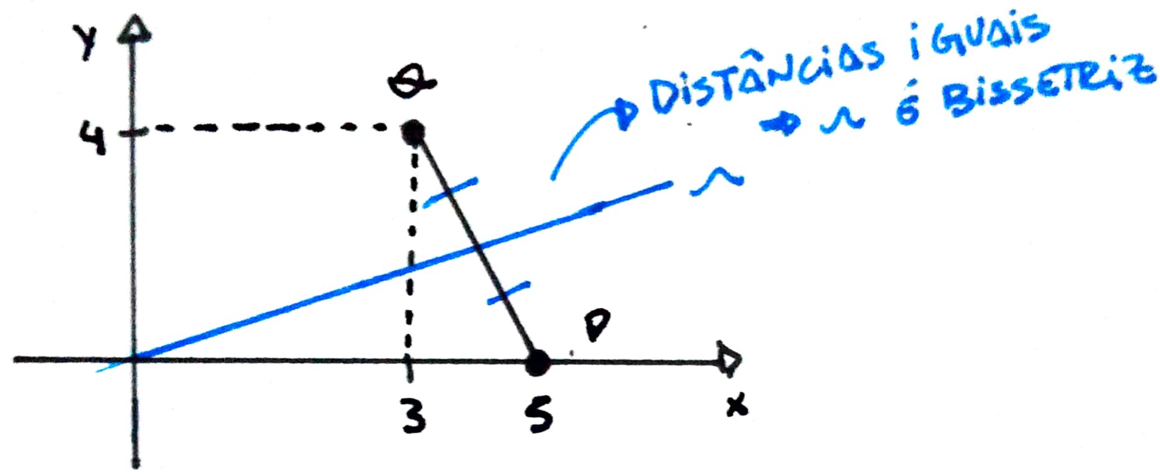
$\Rightarrow$ COMO JÁ DEMONSTRAMOS QUE

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$$

$$\Rightarrow n^2 \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \leq (a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

$$\Rightarrow n^2 \leq (a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)$$

4) $P = (5,0)$ VAI PARA $Q = (3,4)$ COM $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, SENDO T UM OPERADOR DE REFLEXÃO EM TORNO DE UMA RETA,



COM $r: x + By + C = 0$

$d_{Qr} = d_{Pr}$

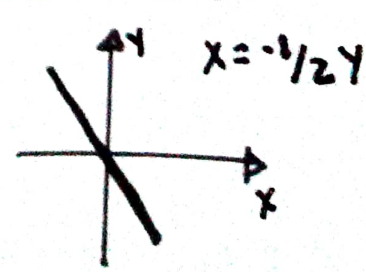
$$\Rightarrow \frac{|5 + 0.B + C|}{\sqrt{1+B^2}} = \frac{|3 + 4B + C|}{\sqrt{1+B^2}}$$

MAS $x = y = 0 \to C = 0$

$\Rightarrow 5 = |3 + 4B|$

$\Rightarrow -4B - 3 = 5 \to B = -2 \to$ OK

OU $4B + 3 = 5 \to B = 1/2 \to$ NÃO FARIA SENTIDO



$\Rightarrow r: x \cdot \frac{1}{2} = y \equiv x - 2y = 0$

A BASE (x,y) É $(1,0)$ E $(0,1)$

COMO $(5,0) \to (3,4) \Rightarrow (1,0) \to (3/5, 4/5)$

$$d_{r(0,1)} = \frac{|0-2.1|}{\sqrt{1+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{|x-2y|}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow |x-2y| = 2$$

* MAS A REFLEXÃO É ABAIXO DE r,

LOGO: $y < 1/2 x \to x > 2y \to |x-2y| = x-2y = 2$

$\Rightarrow x = 2y + 2$

MAS A REFLEXÃO CONSERVA O MÓDULO DO VETOR $\Rightarrow x^2+y^2=1$

$\Rightarrow 4y^2+8y+4+y^2=1$

$\Rightarrow 5y^2+8y+3=0$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{64-4.5.3} = \sqrt{64-3.20} = \sqrt{4} = 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{-8 \pm 2}{10} \begin{cases} \to -1 \\ \to -3/5 \end{cases}$$

SE FOSSE $y=-1$ SERIA EM TORNO DE O_x

$$\Rightarrow y = -3/5 \Rightarrow x = \frac{-6}{5} + 2 = \frac{10-6}{5} = 4/5$$

$\Rightarrow (0,1) \to (4/5, -3/5)$

$\Rightarrow T\vec{u} = \vec{u}'$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \to a = 3/5 \text{ e } c = 4/5$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} \to b = 4/5 \text{ e } d = -3/5$$

$$\Rightarrow T = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$$

6) a) M É ORTOGONAL $\rightarrow M^T M = \mathbb{1}$

TEMOS QUE $\begin{cases} \det(A.B) = \det(A).\det(B) \\ \det(A^T) = \det(A) \end{cases}$

$$\Rightarrow \det(M^T.M) = \det(M^T).\det(M) = \det(\mathbb{1})$$

TEMOS $\det(\mathbb{1}) = 1$ e $\det(M^T) = \det(M)$

$$\Rightarrow \det(M^T.M) = (\det(M))^2 = 1$$

$$\Rightarrow \det M = 1 \text{ ou } \det M = -1$$

b) SEJA B ORTOGONAL $(B.B^T = \mathbb{1})$ E

M TAMBÉM ORTOGONAL $(M.M^T = \mathbb{1})$:

SEJA $A = B.M \Rightarrow A^T = (B.M)^T = M^T B^T$

$$\Rightarrow A.A^T = B.M.M^T.B^T = B.\mathbb{1}.B^T = B.B^T = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ A É ORTOGONAL TAMBÉM,

COMO QUERÍAMOS DEMONSTRAR

8) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & -7 & 5 \end{array}\right)$ $L_2 : L_2 - 2L_1$
$L_3 : L_3 - L_1$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & -4 & -5 \\ 0 & 6 & -8 & 1 \end{array}\right)$ $L_3 : L_3 - 2L_2$

$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{array}\right)$

→ NÃO EXISTE SOLUÇÃO

$\{$ M → MATRIZ DE COEFICIENTES
M' → MATRIZ AMPLIADA

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$

POSTO: nº de LINHAS NÃO NULAS ESCALONADAS

→ POSTO(M) = 2
POSTO(M') = 3

SISTEMA IMPOSSÍVEL!