Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica – 2º sem. 2020
Professor: Dr. José Ricardo G. Mendonça

3ª Lista de Exercícios — Data: 28 set. 2020

The different branches of Arithmetic – Ambition,
Distraction, Uglification, and Derision.
Charles Lutwidge Dodgson (1832–1898)

I. Matrizes, determinantes e matrizes inversas

1. Dadas as matrizes
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix},$$

    (a) Resolva a equação $3X - 2A = B + 5X$ para a matriz X.

    (b) Resolva o sistema de equações $2X - 3Y = A$, $5X - 6Y = B$ para as matrizes X e Y.

2. Dadas as matrizes
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

    (a) Calcule AB e BA.

    (b) Calcule $2A - 3B^T$, onde X^T denota a matriz transposta da matrix X.

    (c) Calcule $(A + B^T)(A^T - B)$.

3. Prove que se duas matrizes A e B comutam, isto é, se $AB = BA$, então

    (a) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

    (b) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

4. Encontre todas as matrizes de ordem 3 que comutam com a matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Encontre uma matriz não-nula A de ordem 3 tal que $A^2 = 0$.

6. A matriz de rotação pelo ângulo $\theta \in [0, 2\pi)$ no plano é dada por

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Calcule $T(0)$, $T(-\theta)$ e $T(\theta)T(\theta')$, com $\theta \neq \theta'$.

7. Uma matriz quadrada A é simétrica se $A^T = A$ e antissimétrica se $A^T = -A$.

    (a) Mostre que se A e B são ambas simétricas (antissimétricas), então $A + B$ e λA, com λ um escalar qualquer em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, também são simétricas (antissimétricas).

    (b) Mostre que qualquer matriz quadrada pode ser decomposta como a soma de uma matriz simétrica com uma matriz antissimétrica.

8. A matriz de adjacências do grafo que representa a topologia de uma rede de comunicação de dados é dada pelos elementos $a_{ij} = 1$ se o nó i (por exemplo, um *router* ou *access point*) pode transmitir dados ao nó j e $a_{ij} = 0$ caso contrário. Suponha que a matriz de adjacências de determinada rede de comunicação de cinco nós distintos seja dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

    (a) Desenhe o grafo da rede a partir das conexões determinadas pela matriz A. *Observação*: Quando desenhamos um arco entre os nós i e j de um grafo para o qual $a_{ij} \neq 0$ mas $a_{ji} = 0$, indicamos o sentido da conexão por uma seta, $i \to j$.

    (b) O que significa o fato de a matriz A ser não-simétrica em termos da topologia da rede? E se ela fosse simétrica, o que isso significaria?

    (c) Seja $A^{(2)} = A \cdot A = (a_{ij}^{(2)})$. Por exemplo, o elemento $a_{42}^{(2)}$ de $A^{(2)}$ vale

$$a_{42}^{(2)} = \sum_{k=1}^{5} a_{4k} \cdot a_{k2} = 0 + 0 + 1 + 0 + 0 = 1.$$

    Vemos que a única contribuição para o elemento $a_{42}^{(2)}$ vem da parcela $a_{43} \cdot a_{32} = 1 \cdot 1 = 1$. Isso significa que em uma comunicação em duas etapas entre os nós 4 e 2, primeiro o nó 4 transmite o pacote de dados para o nó 3 e então o nó 3 retransmite o pacote para o nó 2, embora não exista um canal direto de comunicação entre os nós 4 e 2, pois $a_{42} = 0$. Calcule $A^{(2)}$ e discuta o significado dos elementos nulos, iguais a 1 e maiores que 1 dessa matriz.

(*d*) Qual é o significado das matrizes $A+A^{(2)}$ e $A+A^{(2)}+A^{(3)}$?

9. Qual é a relação que existe entre

   (*a*) $\det A$ e $\det A^T$?

   (*b*) $\det A$, $\det B$ e $\det(AB)$?

   (*c*) $\det A$ e $\det(\lambda A)$, com λ um escalar qualquer em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$?

10. Seja A uma matriz triangular inferior ou superior de ordem n.

    (*a*) Mostre que $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

    (*b*) Mostre que se A é uma matriz triangular inferior ou superior e A^{-1} existe, então A^{-1} também é uma matriz triangular inferior ou superior.

11. Prove que se $A^3=0$ então $(I-A)^{-1}=I+A+A^2$, onde I é a matriz identidade.

12. Uma matriz M é ortogonal se $M^TM=1$.

    (*a*) Prove que se M é ortogonal então $MM^T=1$.

    (*b*) Prove que o determinante de uma matriz ortogonal pode valer somente $+1$ ou -1.

    (*c*) Prove que o produto de duas matrizes ortogonais é novamente uma matriz ortogonal.

    Matrizes ortogonais são muito importantes (por exemplo, em geometria computacional) porque representam transformações que preservam algum tipo de simetria do sistema (por exemplo, comprimentos ou ângulos ou ainda simetrias mais sutis).

13. Mostre que $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

14. Dadas as matrizes

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad C=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix},$$

    (*a*) Calcule A^{-1}, B^{-1} e C^{-1}; (*b*) Calcule A^{-2}; (*c*) Calcule $[(A-I)^{-1}B]^{-1}$.

15. Dada a matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

    calcule seu polinômio característico $p_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)$ e mostre que $p_A(A)=0$, isto é, que a matriz A é solução de seu próprio polinômio característico. Use esse fato para encontrar a matriz inversa de A. *Observação*: Toda matriz quadrada A satisfaz seu próprio polinômio característico—um resultado derivado do teorema de Cayley-Hamilton.

16. Denotando o determinante de A por $|A|$, mostre que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 0 & 1 & 3x^2 \\ 0 & x & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x+1 & 3 \\ 1 & 2x-1 & x^3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Observe o padrão acima e generalize essa igualdade.

17. Mostre que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2).$$

A partir deste resultado, mostre por indução finita que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

Uma matriz em que os termos de cada linha formam uma progressão geométrica, como a matriz acima, é denominada *matriz de Vandermonde* (que pode ser quadrada ou não).

18. Seja A a matriz de adjacências de um grafo G, isto é, a matriz cujos elementos $a_{ij}=1$ se os vértices i e j de G estão conectados entre si e $a_{ij}=0$ caso contrário, dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Repare que, ao contrário do caso no problema 8, a matriz A é simétrica, $a_{ij}=a_{ji}$, o que significa que neste caso o grafo G não é direcionado.

(a) Desenhe o grafo correspondente à matriz A.

(b) Calcule o polinômio característico da matriz A, dado por

$$p_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_n,$$

e mostre que $c_1=0$, $-c_2$ corresponde ao número de arestas de G e $-c_3$ corresponde ao dobro do número de triângulos em G. Esses fatos são muito úteis e importantes e valem para qualquer grafo G simples e sem *loops* (isto é, com todos os $a_{ii}=0$).

II. Sistemas de equações lineares

1. Resolva o sistema de equações lineares abaixo por eliminação, isto é, através de operações elementares sobre as linhas, escrevendo a sequência de matrizes de coeficientes ampliadas correspondentes:
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 11, \\ 4x - 3y + 2z = 0, \\ x + y + z = 6, \\ 3x + y + z = 4. \end{cases}$$

2. Encontre as matrizes linha-reduzidas à forma escada e determine os postos e nulidades das seguintes matrizes:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares encontrando suas matrizes ampliadas linha-reduzidas à forma escada e determine seus postos, os postos das matrizes de coeficientes e, se o sistema for possível, seus graus de liberdade:

$$(a) \quad \begin{cases} x + 2y - z + 3w = 1 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x + 5y - 2z = 3. \end{cases}$$

$$(c) \quad \begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x + 5y - 2z = 3, \\ x + 7y - 7z = 5. \end{cases}$$

$$(d) \quad \begin{cases} x + y + z + w = 0, \\ x + y + z - w = 4, \\ x + y - z + w = -4, \\ x - y + z + w = 2. \end{cases}$$

$$(e) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = 0, \\ 2x + y + 3z = 0, \\ 3x - 2y + z = 0. \end{cases}$$

$$(f) \quad \begin{cases} 3x + 2y - 4z = 1, \\ x - y + z = 3, \\ x - y - 3z = -3, \\ 3x + 3y - 5z = 0, \\ x - y - z = -1. \end{cases}$$

4. O método de Gauss para resolução de sistemas lineares consiste em linha-reduzir a matriz ampliada do sistema a uma forma similar à forma escada, exceto que a condição de que cada coluna que contém o primeiro elemento não-nulo de cada linha não-nula possua todos os outros elementos nulos é relaxada para a condição de que apenas os elementos abaixo do elemento não-nulo sejam nulos. Após a redução da matriz ampliada do sistema a essa forma, a solução do sistema é obtida por subsituição dos valores das incógnitas "de baixo para cima". Resolva os sistemas lineares do exercício II.3(d)–(f) pelo método de Gauss e compare as respostas.

5. Um sistema linear de m equações e n incógnitas é homogêneo se todos os seus termos independentes são iguais a zero: $b_i = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

   (a) Mostre que todo sistema linear homogêneo possui pelo menos uma solução, dita solução trivial, e exiba essa solução.

   (b) Encontre os valores de $k \in \mathbb{R}$ tais que o sistema homogêneo

$$\begin{cases} kx - 5y - 2z = 0, \\ -x + y + z = 0, \\ 2x - kz = 0 \end{cases}$$

   possua pelo menos uma solução diferente da solução trivial.

6. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + 6y - 8z = 1, \\ 2x + 6y - 4z = 0, \end{cases}$$

que podemos escrever em forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Verifique que a matriz

$$X' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

   é uma solução particular para o sistema linear dado.

   (b) Verifique que a matriz

$$X'' = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4\lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix},$$

   com λ em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, é solução do sistema homogêneo associado ao sistema dado.

(c) Resolva o sistema linear dado e verifique que todas as suas soluções podem ser escritas na forma $X = X' + X''$. Conclua que o conjunto solução do sistema linear dado é formado pelas suas soluções particulares mais as soluções de seu sistema homogêneo associado. Essa é uma conclusão de grande abrangência e extremamente importante, por exemplo, no estudo de equações diferencias ordinárias e parciais.

III. *Divertissement*: Primeiros *solvers* de equações lineares

Até o início do século XX, o termo "computador" era aplicado a prodígios do cálculo mental—por exemplo, pessoas capazes de efetuar mentalmente longas multiplicações ou radiciações de números de muitas dezenas de dígitos—ou a pessoas (em geral, mulheres) que trabalhavam em centros de pesquisa e desenvolvimento realizando cálculos, frequentemente longos e tediosos, com auxílio de papel, réguas e máquinas de cálculo de todo tipo. Equipes de "computadores" foram cruciais durante a II Guerra Mundial, realizando cálculos balísticos, logísticos, mecânicos e em esforços de criptografia.

A automação da computação era, então, prioridade, e novos dispositivos eletromecânicos eram inventados, testados e colocados no mercado frequentemente, alguns deles especializados em tarefas específicas de cálculo. O trecho abaixo, retirado de um artigo de revisão sobre o "estado da arte" em métodos e equipamentos voltados a cálculos matriciais por volta de 1945,[a] descreve um equipamento dedicado à resolução de sistemas de equações lineares de até 12 variáveis com precisão de até 4 casas decimais em apenas alguns minutos!

> *For solving systems of linear equations several electrical devices have been built. One of these is now actually being put on the market by the Consolidated Engineering Company of Pasadena. It is arranged so as to solve as many as twelve linear equations in twelve unknowns, and is essentially an electrical network of resistances alone, in contrast with the earlier Mallock device (...), which relies on induction. After setting in the coefficients the operator must try different combinations of settings for twelve knobs, representing the unknowns, until a pointer reaches a zero position indicating that the trial values of the unknowns satisfy the equations. There may be some question whether this process might not require an excessive amount of time with a large number of unknowns, but data supplied by the company (...) with certain examples indicate that problems with no more than twelve unknowns can be solved with very satisfactory speed in a few minutes. The coefficients are set in as four-digit numbers, and in the examples given the results are correct to four significant figures except sometimes in the last place.*

[a] H. Hotelling, "Practical problems of matrix calculation", in: J. Neyman (ed.), *Proceedings of Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Aug. 13–18, 1945, and Jan. 27–29, 1946 (Berkeley: University of California Press, 1949), pp. 275–293.

Developing this device and making it generally available represent an important advance.

Exercício: Desenhe o projeto elétrico de uma máquina de resolver sistemas de equações lineares a partir dos elementos de especificação dados acima. *Dica*: você só vai precisar da lei de Ohm, reostatos (ou elementos equivalentes, como *dimmers*) e de criatividade; se você dispuser de um *protoboard*, melhor ainda.

Referências

O aluno interessado em teoria dos grafos encontrará uma boa exposição elementar e abundantemente ilustrada em

WILSON, R. J. (2014). **Introduction to Graph Theory**. 5a. ed. London: Prentice-Hall.

O mesmo aluno tirará bastante proveito da leitura dos três primeiros capítulos de

BIGGS, N. (1974). **Algebraic Graph Theory**. London: Cambridge University Press.

Aplicações da teoria dos grafos a problemas de fluxos, roteamento, otimização etc. em redes de comunicações e outros tipos de redes, incluindo a descrição detalhada dos principais algoritmos e estruturas de dados empregados, podem ser encontradas em

AHUJA, R. K.; MAGNANTI, T. L.; ORLIN, J. B. (1993). **Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications**. Upper Saddle River: Prentice-Hall.