Lista de Exercícios - Probabilidade Condicional

Valdinei Freire

5 de Maio de 2021

1. Suponha que A, B e D sejam três eventos tais que $\Pr(A|D) \geq \Pr(B|D)$ e $\Pr(A|D^c) \geq \Pr(B|D^c)$. Prove que $\Pr(A) \geq \Pr(B)$.

$$\Pr(A) = \Pr(A|D) + \Pr(A|D^c) \geq \Pr(B|D) + \Pr(B|D^c) = \Pr(B)$$

2. Suponha que uma moeda justa seja arremessada repetidamente de forma independente até que apareça cara e coroa pelo menos uma vez. Qual é a probabilidade de que exatamente três arremessos sejam necessários?

$$\frac{1}{4}$$

3. Suponha que A e B são eventos tais que $\Pr(A) = 1/3$, $\Pr(B) = 1/5$, e $\Pr(A|B) + \Pr(B|A) = 2/3$. Calcule $\Pr(A^c \cup B^c)$.

   Temos que

$$\Pr(A^c \cup B^c) = \Pr((A \cap B)^c) = 1 - \Pr(A \cap B)$$

   e

$$\Pr(A|B)+\Pr(B|A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}+\frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = 5\Pr(A\cap B)+3\Pr(A\cap B) = \frac{2}{3}.$$

   Logo,

$$\Pr(A \cap B) = \frac{1}{12}.$$

   e

$$\Pr(A^c \cup B^c) = \frac{11}{12}.$$

4. Suponha que A e B são eventos independentes tais que $\Pr(A) = 1/3$ e $\Pr(B) > 0$. Qual é o valor de $\Pr(A \cup B^c|B)$?

   Temos que

$$\Pr(A\cup B^c|B) = \Pr(A|B)+\Pr(B^c|B)-\Pr(A\cap B^c|B) = \Pr(A|B) = \Pr(A) = \frac{1}{3}.$$

5. Suponha que em 10 jogadas de um dado, o número 6 apareceu exatamente três vezes. Qual é a probabilidade que nas primeiras três jogadas todas obteve o número 6?

   Temos que
$$\frac{\binom{3}{3}\binom{7}{0}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{120}.$$

6. Suponha que A, B, e D são eventos tais que A e B são independentes, $\Pr(A \cap B \cap D) = 0.04$, $\Pr(D|A \cap B) = 0.25$, e $\Pr(B) = 4\Pr(A)$. Calcule $\Pr(A \cup B)$.

   Temos:
$$\Pr(D|A \cap B) = \frac{\Pr(A \cap B \cap D)}{\Pr(A \cap B)} = \frac{0.04}{\Pr(A)\Pr(B)} = \frac{0.04}{4\Pr(A)\Pr(A)} = 0.25$$

   Logo $\Pr(A) = 0.2$ e $\Pr(B) = 0.8$ e

   $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A)\Pr(B) = 0.84.$

7. Suponha que os eventos A e B são disjuntos e que cada um deles tem probabilidade positiva. A e B são independentes?

   Não, pois
$$\Pr(A \cap B) = \Pr(\emptyset) = 0 \neq \Pr(A)\Pr(B).$$

8. Suponha que há uma probabilidade de $1/50$ que você vencerá um certo jogo. Se você jogar o jogo 50 vezes, independentemente, qual é a probabilidade que você vencerá pelo menos uma vez?
$$1 - \left(\frac{49}{50}\right)^{50} = 0.6358$$

9. Três estudantes A, B e C estão matriculados na mesma classe. Suponha que A vá às aulas 30% do tempo, B vá às aulas 50% do tempo, e C vá às aulas 80% do tempo. Se esses estudantes vão às aulas independentemente um do outro, qual é: (a) a probabilidade que ao menos um deles estará na sala em um dia particular, e (b) a probabilidade que exatamente um deles estará na sala em um dia particular?

   (a)
$$1 - (1 - 0.3) \times (1 - 0.5) \times (1 - 0.8) = 0.93$$

   (b)

   $0.3 \times (1-0.5) \times (1-0.8) + (1-0.3) \times 0.5 \times (1-0.8) + (1-0.3) \times (1-0.5) \times 0.8 = 0.38$

10. Suponha que três bolas vermelhas e três bolas brancas são arremessadas aleatoriamente dentro de três caixas e que todos arremessos são independentes. Qual é a probabilidade que cada caixa contenha uma bola vermelha e uma bola branca?

$$\frac{3!}{3^3}\frac{3!}{3^3} = \frac{4}{81}$$

11. Se cinco bolas são arremessadas aleatoriamente dentro de n caixas, e que todos arremessos são independentes, qual é a probabilidade que nenhuma caixa contenha mais que duas bolas?

$$1 - n \times \left(\frac{\binom{5}{3}(n-1)^2}{n^5} + \frac{\binom{5}{4}(n-1)}{n^5} + \frac{1}{n^5} \right) = \frac{(n-1)(n-2)(n^2+3n-3)}{n^4}$$

12. Três jogadores A, B, e C arremessam uma moeda um de cada vez. Suponha que A arremesse a moeda primeiro, B arremesse em segundo, e C arremesse em terceiro; e suponha que o ciclo se repita até que alguém vença ao obter uma cara. Determine a probabilidade que cada um dos três jogadores vencer o jogo.

$$\Pr(A \text{ vencer o jogo}) = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5 \times 0.5^{3i} = 0.5 \sum_{i=0}^{\infty} (0.5^3)^i = 0.5 \sum_{i=0}^{\infty} (0.125)^i = 0.5 \frac{1}{1-0.125} = \frac{4}{7}$$

$$\Pr(B \text{ vencer o jogo}) = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^2 \times 0.5^{3i} = \frac{2}{7}$$

$$\Pr(C \text{ vencer o jogo}) = \sum_{i=0}^{\infty} 0.5^3 \times 0.5^{3i} = \frac{1}{7}$$

13. Suponha que 80% de todos estatísticos sejam tímidos, enquanto apenas 15% de todos economistas são tímidos. Suponha também que 90% das pessoas em uma conferência sejam economistas e que outros 10% seja estatísticos. Se você encontrar uma pessoa tímida aleatoriamente na conferência, qual é a probabilidade que a pessoa é uma estatística?

$$\begin{aligned}\Pr(\texttt{estatística}|\texttt{tímida}) &= \frac{\Pr(\texttt{tímida}|\texttt{estatística})\Pr(\texttt{estatística})}{\Pr(\texttt{tímida})} \\ &= \frac{0.8 \times 0.1}{0.9 \times 0.15 + 0.1 \times 0.8} = 0.3721\end{aligned}$$

14. Suponha que uma família tenha exatamente n crianças ($n \geq 2$). Assuma que a probabilidade que qualquer criança será uma garota é 1/2 e que todos nascimentos sejam independentes. Dada que a família tenha pelo menos uma garota, determine a probabilidade que a família tenha pelo menos um garoto.

$$\frac{2^n - 2}{2^n - 1}$$

15. Uma sequência de n candidatos a um trabalho são preparados para serem entrevistados. Nós gostaríamos de contratar o melhor candidato, mas não temos informações para distinguir os candidatos antes de entrevistá-los. Nós assumimos que o melhor candidato é igualmente provável de ser qualquer um dos n candidatos na sequência antes da entrevista começar. Depois que as entrevistas começam, nós podemos ranquear os candidatos já entrevistados, mas não temos nenhuma informação sobre onde os candidatos restantes se localizam no ranque geral. Depois de cada entrevista, nós temos que ou contratar o candidato atual imediatamente, ou deixar o candidato ir embora e nunca mais contactá-lo. A seguinte regra é utilizada: um número r é selecionado e nós entrevistamos os primeiros r candidatos sem intenção de contratá-los. Iniciando com próximo candidato $r+1$, nós continuamos entrevistando até que o candidato atual é o melhor que vimos até o momento; a entrevista para e contrata o candidato atual. Se nenhum dos candidatos de $r+1$ até n é o melhor, o candidato n é contratado. Nós gostaríamos de selecionar r de tal forma que maximize a probabilidade de contratar o melhor candidato. Seja A o evento de que o melhor candidato é contratado, e seja B_i o evento de que o melhor candidato está na posição i na sequência de entrevistas.

    (a) Seja $i > r$. Encontre a probabilidade de que o candidato que é relativamente o melhor entre os i primeiro entrevistados apareça nas primeiras r entrevistas.

    $$\frac{r}{i}$$

    (b) Prove que $\Pr(A|B_i) = 0$ para $i \leq r$ e $\Pr(A|B_i) = \frac{r}{i-1}$ para $i > r$.
    Se $i \leq r$ então o melhor já foi perdido e não será contratado. Se $i > r$, o melhor só é contratado se ninguém até $i-1$ foi contratado, isto é, o melhor entre os $i-1$ primeiro está entre os r primeiros. Então, basta usar o resultado de (a).

    (c) Para r fixo, seja p_r a probabilidade de A usando aquele valor de r. Prove que $p_r = (r/n)\sum_{i=r+1}^{n}(i-1)^{-1}$.

    $$\Pr(A) = \sum_{i=r+1}^{n} \Pr(A|B_i)\Pr(B_i) = \frac{r}{n}\sum_{i=r+1}^{n}\frac{1}{i-1}$$

(d) Seja $q_r = p_r - p_{r-1}$ para $r = 1, \ldots, n-1$, prove que q_r é uma função estritamente decrescente em r.

$$
\begin{aligned}
q_r = p_r - p_{r-1} &= \frac{r}{n}\sum_{i=r+1}^{n}\frac{1}{i-1} - \frac{r-1}{n}\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{i-1} \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{i-1} - \frac{r}{r-1}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_r - q_{r+1} &= \frac{1}{n}\left(\sum_{i=r}^{n}\frac{1}{i-1} - \frac{r}{r-1}\right) - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=r+1}^{n}\frac{1}{i-1} - \frac{r+1}{r}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{r-1} - \frac{r}{r-1} + \frac{r+1}{r}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1-r}{r-1} + \frac{r+1}{r}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{r+1}{r} - 1\right) = \frac{1}{nr} > 0
\end{aligned}
$$

(e) Mostre que o valor de r que maximiza p_r é o último r tal que $q_r > 0$.
Se $q_r > 0$, então temos que $p_r > p_{r-1}$. Por outro lado, se $q_{r+1} < 0$, então temos que $p_r > p_{r+1}$. Ainda, como q_r é estritamente decrescente em r, para todo r tal que $q_r > 0$, temos que $p_r > p_{r-1} > \ldots > p_0$, e, para todo r tal que $q_{r+1} < 0$, temos que $p_r > p_{r+1} > \ldots > p_{n-1}$. Logo a escolha de r como consta no enunciado maximiza p_r.

(f) Para $n = 10$, encontre o valor de r que maximiza p_r, e encontre o valor de p_r correspondente.
Para $r = 3$ temos que $p_r = 0.3987$.

1 Bibliografia

- Morris H. DeGroot and Mark J. Schervish. Probability and Statistics, 4th Edition, Addison-Wesley, 2012. Capítulos 1, 2, 3, 5, 6 e 7.