

Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica – 2º sem. 2020

Professor: José Ricardo G. Mendonça

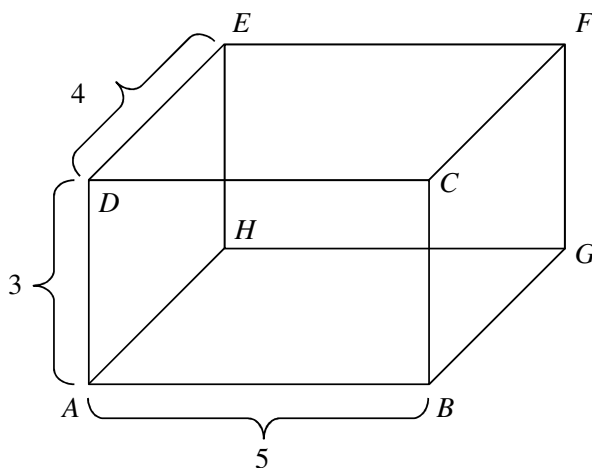
1ª Lista de Exercícios – Data: 01 set. 2020

One thing (...) about all these books – they use pictures to convey the mathematical ideas. Beware of books that don't.

Charles C. Pugh, *Real Mathematical Analysis* (2002)

I. Pontos e vetores

- Seja $P = (2, 3, -7)$ um ponto em \mathbb{R}^3 . Encontre as seguintes distâncias:
 - De P ao ponto $Q = (1, 5, 2)$;
 - De P à origem $O = (0, 0, 0)$;
 - De P ao plano xy ;
 - De P ao plano yz ;
 - De P ao eixo z ;
 - De um ponto (x, y, z) qualquer ao eixo x .
- Supondo que $H = (0, 0, 0)$, encontre as componentes dos vetores \overrightarrow{AE} , \overrightarrow{EG} , \overrightarrow{DG} , \overrightarrow{HB} e \overrightarrow{HC} na figura abaixo.



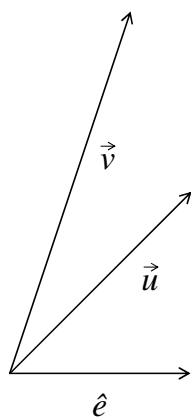
- A sequência de vértices $A-B-\dots-H$ do paralelepípedo do exercício I.2 forma um *circuito hamiltoniano*, que é um caminho que passa por todos os vértices do grafo (no caso, o paralelepípedo) sem repetir nenhum. Circuitos hamiltonianos estão relacionados

com *códigos de Gray*, que são enumerações binárias de objetos com muitas propriedades teóricas e aplicadas de enorme interesse. Representando cada um dos $8 = 2^3$ vértices do paralelepípedo por um número binário $b_2b_1b_0$, o código de Gray é uma sequência de números binários em que cada sucessor difere do anterior somente por um bit—qualquer um, mas somente um. Começando com $A \equiv 000$, encontre o código de Gray para o circuito hamiltoniano do paralelepípedo do exercício I.2. *Observação:* Decidir se um grafo possui ou não um circuito hamiltoniano é um problema *muito difícil* em computação—pertence à classe de problemas de decidibilidade conhecidos como NP-completos.

4. Encontre as coordenadas do vetor $\vec{u} = P - O \in \mathbb{R}^2$ de comprimento 3 e ângulo de inclinação $\pi/3$ (onde, como sempre, $O = (0, 0)$).

II. O produto escalar

1. O ângulo entre os vetores $\vec{u} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ e $\vec{v} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 5\hat{k}$ é agudo, reto ou obtuso?
2. Encontre o ângulo \hat{A} do triângulo de vértices $A = (1, 4, -3)$, $B = (2, 1, 6)$ e $C = (4, 3, 2)$.
3. Seja $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ um vetor tridimensional qualquer e sejam α , β e γ os ângulos entre \vec{v} e os eixos coordenados x , y e z , respectivamente.
 - (a) Determine $\cos \alpha$, $\cos \beta$ e $\cos \gamma$, conhecidos como *cosenos diretores* de \vec{v} ;
 - (b) Mostre que $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ é o vetor unitário na direção de \vec{v} .
4. Sejam os pontos $A = (2, 3)$, $B = (5, 8)$, $C = (-1, 4)$ e $D = (4, 1)$ no plano. Mostre que os segmentos de reta \overline{AB} e \overline{CD} são perpendiculares entre si (i) fazendo um desenho, (ii) calculando as inclinações dos segmentos de reta e (iii) usando produtos escalares.
5. Encontre o comprimento da projeção do segmento de reta \overline{CE} sobre o segmento de reta \overline{AF} na figura do exercício I.2.
6. Suponha que você ande do ponto $A = (2, 4)$ m até o ponto $B = (8, 9)$ m, vire 90° à esquerda e ande mais 7 m até o ponto C. Dê as coordenadas do ponto C.
7. Dados dois vetores \vec{v} e \hat{e} quaisquer com $\|\hat{e}\| = 1$, mostre que $\vec{v} - (\vec{v} \cdot \hat{e})\hat{e}$ é perpendicular a \hat{e} e interprete esse fato geometricamente (faça um desenho).
8. Dê um argumento geométrico e outro algébrico para as seguintes afirmações envolvendo dois vetores \vec{u} e \vec{v} quaisquer:
 - (a) Se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ então $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \|\vec{u} + \vec{v}\|$;
 - (b) Se $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$ então $\vec{u} - \vec{v}$ é perpendicular a $\vec{u} + \vec{v}$.
9. Na figura abaixo, qual dos vetores \vec{u} e \vec{v} (no plano do papel) possui maior componente na direção do versor \hat{e} (também no plano do papel)?



10. Uma corrida de 100 m rasos é disputada na Olimpíada Rio 2016 numa pista reta orientada na direção $\hat{i} + 2\hat{j}$ e, na hora da prova, sopra um vento sudoeste de magnitude 3 m/s. A corrida termina com a quebra de um recorde! Dado que as regras da IAAF^(a) para corridas de 100/200 m estabelecem que a velocidade máxima do vento na direção da pista não pode exceder ± 2 m/s para efeitos de registro de recordes, o recorde observado deve ou não ser homologado?
11. Os átomos de hidrogênio de uma molécula hipotética de metano (CH_4) estão localizados em $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$ e $(1, 0, 1)$, enquanto o átomo de carbono está em $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Faça um desenho dessa molécula e encontre o valor do ângulo θ formado em cada ligação $\widehat{\text{H-C-H}}$. Compare o valor encontrado com o valor real desse ângulo na literatura.
12. Mostre que para quaisquer vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ vale a *desigualdade de Cauchy-Schwartz* $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$. Em que condições a desigualdade se torna uma igualdade?
13. Dados n números reais $a_1, \dots, a_n > 0$, mostre que $(a_1 + \dots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$.

III. Produto vetorial e produto escalar triplo

1. Determine $\vec{u} \times \vec{v}$ para os seguintes pares de vetores:
 - (a) $\vec{u} = (6, -1, 2), \vec{v} = (3, 4, 3)$;
 - (b) $\vec{u} = (-2, -3, +5), \vec{v} = (1, 1, 4)$;
 - (c) $\vec{u} = (6, 1), \vec{v} = (3, 4)$;
 - (d) $\vec{u} = 5\hat{i} - \hat{j} - 2\hat{k}, \vec{v} = \hat{i} + 2\hat{j}$.
2. Sejam $\vec{u} = 3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ e $\vec{v} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 2\hat{k}$. Determine independentemente os valores de $\sin \theta$ e $\cos \theta$ do ângulo θ formado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} e verifique que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

^(a)International Association of Athletics Federations, *World Athletics Competition and Technical Rules 2020* (IAAF, Monaco, 2019), Part III – World Records, Competition Rule 31.14.3. Repare que na hipótese prevista pela regra, os resultados da competição (vencedores, posições, tempos etc.) continuam válidos, já que o vento sopra igualmente para todos; apenas o recorde não é homologado.

3. Encontre a área do triângulo definido pelos vértices do exercício II.2.
4. O que podemos concluir sobre \vec{u} e \vec{v} se $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ e $\vec{u} \times \vec{v} = 0$?
5. Mostre que a equação $\vec{a} \times \vec{v} = \vec{b}$ não possui solução para \vec{v} se $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$.
6. Explique porque não precisamos usar parênteses na expressão $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w}$.
7. Dados $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ e $\vec{v} = 3\hat{i} - 5\hat{j} + 8\hat{k}$, determine $\vec{v} \times \hat{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{u}$ e $(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v})$.
8. Sejam \vec{u} e \vec{v} e \vec{p} e \vec{q} pares de vetores pertencentes a planos distintos paralelos. Determine $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{p} \times \vec{q})$.
9. Mostre geometricamente (faça um desenho) que o vetor $\vec{w} \times (\vec{u} \times \vec{v})$ pertence ao plano determinado pelos vetores \vec{u} e \vec{v} e encontre sua expressão em termos de \vec{u} e \vec{v} .
10. Encontre o volume do paralelepípedo definido pelas arestas orientadas $\vec{u} = \hat{i} + \hat{k}$, $\vec{v} = 2\hat{j} + 3\hat{k}$ e $\vec{w} = 3\hat{i} - 5\hat{k}$.
11. Determine se os pontos $A = (1, 1, 2)$, $B = (2, 3, 5)$, $C = (2, 0, 4)$ e $D = (2, -3, -1)$ são coplanares.
12. Na figura do exercício I.2, o valor de $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AE}$ é positivo, negativo ou nulo?

IV. Divertissement: O desenvolvimento do conceito de vetor

Por incrível que pareça, o conceito de vetor é relativamente recente na matemática. Antes de sua concepção, na segunda metade do século XIX, as operações da geometria e do cálculo—equações de retas, planos e cônicas, derivadas ordinárias e parciais e integrais em uma ou mais dimensões—e suas aplicações—principalmente em mecânica celeste, mecânica dos fluidos e eletromagnetismo—eram realizadas em termos de componentes, complicando bastante a compreensão e síntese do conhecimento. A figura 1 exibe o excerto de uma página de um livro-texto de geometria analítica popular do século XIX e ainda hoje usado para consulta.^(b) Não há menção a vetores em todo o texto (que possui *iii* + 581 páginas), embora matrizes e determinantes, conceitos que foram introduzidos aproximadamente na mesma época em que os vetores, sejam usados na solução de sistemas lineares.

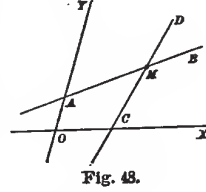
Embora Aristóteles (384 a.C.–322 a.C.) já soubesse que o efeito de duas forças que atuam sobre um objeto pode ser descrito por uma única força usando a “regra do paralelogramo”, o verdadeiro desenvolvimento do conceito de vetor só se deu ao longo do século XIX. Com o advento dos números complexos, matemáticos como Carl Friedrich Gauss (1777–1855), Caspar Wessel (1745–1818) e, especialmente, Jean-Robert Argand (1768–1822) perceberam que é possível usar números complexos para estudar vetores no plano. A ideia consiste em tomar as partes real e imaginária de um número complexo $x + iy$, onde $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária, como as

^(b)C. A. A. Briot e J. C. Bouquet, *Elements of Analytical Geometry of Two Dimensions*, 14th ed. (trad. ed. J. H. Boyd) (Werner School Book Co., Chicago, 1896). A primeira edição original desse texto, sob o título de *Leçons Nouvelles de Géométrie Analytique, Précédées des Éléments de la Trigonométrie*, é de 1847, e sua última (23a.) edição é de 1919.

68. PROBLEM IV.—Find the point of intersection of two given lines.

Let $Ax + By + C = 0,$
 $A'x + B'y + C' = 0,$

be the equations of the two given lines AB and CD (Fig. 48), M the point of intersection of these two lines. The point M being common to each of the two lines, its co-ordinates will satisfy at the same time the two equations; if, therefore, one solves these two simultaneous equations for the two unknown quantities, x and y , we obtain the co-ordinates of the point M ,



$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'}, \quad y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}.$$

When the denominator $AB' - BA'$ is different from zero, the formulas furnish finite and determinate values for x and y , and the two lines intersect in a finite point M . But when the denominator is zero and the numerators different from zero, the values of x and y are infinite; in this case, the two lines are parallel, and, in fact, they have equal angular coefficients $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$. If one has $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}$, the two numerators and denominators will be zero at the same time, and the values

Figura 1: Excerto da p. 75 da 14^a edição norte-americana do livro-texto de Briot e Bouquet, de 1896.

componentes x e y de um vetor (x, y) no plano. Essa conexão entre vetores no plano e números complexos já estava bem estabelecida por volta de 1830 e hoje em dia é ensinada nos colégios.

Exercício: Sejam $u = a + ib$ e $v = x + iy$ as representações complexas dos vetores \vec{u} e \vec{v} no plano. Mostre que $u^*v = \vec{u} \cdot \vec{v} + i\hat{k} \cdot \vec{u} \times \vec{v}$, onde $u^* = a - ib$ denota o complexo conjugado de u .

Vetores, no entanto, são realmente úteis como objetos no espaço, já que grandezas físicas como forças e deslocamentos são principalmente tridimensionais. Dessa forma, parecia necessário generalizar os números complexos bidimensionais (x, y) para permitir operações de adição, subtração, multiplicação e divisão de objetos tridimensionais do tipo (x, y, z) . A invenção de um análogo espacial dos números complexos coube a Sir William Rowan Hamilton (1805–1865), considerado junto de Sir Isaac Newton (1642–1726) o maior dos físicos e matemáticos britânicos. Hamilton demonstrou genialidade desde muito cedo: aos cinco anos já lia em latim, grego e hebraico, aos oito anos havia aprendido italiano e francês e aos quatorze anos podia ler em árabe, sânscrito e persa. Ainda antes de entrar na universidade, Hamilton já havia estudado os *Principia Mathematica*, de Newton, e os primeiros volumes do monumental *Mécanique Céleste*, de Pierre Simon Laplace (1749–1827), tendo descoberto em 1822 um erro neste último tratado acerca da demonstração da lei do paralelogramo para adição de forças que o tornaria amplamente conhecido, na prática inaugurando sua carreira matemática.^(c) Aos

^(c)Hamilton escreveu posteriormente sobre esse assunto no artigo “On the composition of forces”, *Proceedings of the Royal Irish Academy* 2, 166–168 (1844), no qual ele demonstra (segundo ele, pela primeira vez) que a *direção* da força resultante coincide com a direção da diagonal do paralelogramo formado pelas forças componentes e diz que a

dezessete anos, Hamilton entrou para o Trinity College, em Dublin, na Irlanda, e escreveu um artigo sobre cáusticas (lugares geométricos formados por raios de luz refletidos ou refratados por superfícies curvas) que, reformulado posteriormente, revolucionou a óptica geométrica e introduziu técnicas fundamentais na mecânica analítica que, um século depois, permitiriam estabelecer os fundamentos matemáticos da mecânica quântica.

Depois de dominar a relação entre números complexos e vetores no plano e, de passagem, estabelecer a noção moderna rigorosa de número complexo, Hamilton foi capaz de propor uma generalização tridimensional para os números complexos que, no entanto, possuía quatro componentes! Hamilton batizou esses números, que formavam um sistema numérico inteiramente novo, de *quaternions*. Além de possuírem quatro componentes, os quaternions eram não-comutativos, isto é, $pq \neq qp$ para dois quaternions p e q diferentes, o que era uma novidade na época. Hamilton anunciou a invenção dos quaternions em 1843 em uma reunião da Royal Irish Academy e passou boa parte do resto de sua vida desenvolvendo o assunto.

Hamilton definiu os quaternions como números da forma

$$q = a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k},$$

onde a denota a parte escalar de q e $b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$ denota a parte vetorial de q ,^(d) com os elementos \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} da álgebra obedecendo as relações

$$\hat{i}\hat{i} = \hat{j}\hat{j} = \hat{k}\hat{k} = \hat{i}\hat{j}\hat{k} = -1$$

a partir das quais se pode facilmente obter as relações cíclicas

$$\hat{i}\hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j}\hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k}\hat{i} = \hat{j}$$

e anticíclicas

$$\hat{j}\hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{k}\hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{i}\hat{k} = -\hat{j}.$$

O conjunto dos números quaterniônicos é denotado por \mathbb{H} , em homenagem a Hamilton. Repare que $\mathbb{C} \subset \mathbb{H}$ — basta tomar $c = d = 0$ na definição do quaternion q — e, por conseguinte, $\mathbb{R} \subset \mathbb{H}$ também — basta tomar, adicionalmente, $b = 0$.

Como o produto de dois quaternions é novamente um quaternion, ele também pode ser dividido em partes escalar e vetorial. Acontece que tanto a parte escalar quanto a parte vetorial do produto de dois quaternions contêm produtos das partes vetoriais dos quaternions iniciais. Em 1867, um influente físico-matemático irlandês, Peter Guthrie Tait (1831–1901) publicou um estudo intitulado *An Elementary Treatise on Quaternions* (Cambridge University Press, Cambridge, 1867) explorando as relações entre as partes escalar e vetorial dos quaternions, estabelecendo as identidades $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$ e $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta$ e suas interpretações

versão anterior dessa demonstração, devida a Laplace, considera apenas a *magnitude* da força resultante.

^(d)Os termos “escalar” e “vetorial” foram introduzidos pelo próprio Hamilton. Deve-se também a ele a introdução do operador gradiente, $\vec{\nabla} f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right)$ e o nome “nabla” para o símbolo $\vec{\nabla}$.

geométricas através de inúmeros exemplos e marcando o início do declínio do interesse nos quaternions e o início da análise vetorial moderna.

Exercício: Dadas as regras acima para o produto dos elementos \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} , mostre que o produto quaterniônico de dois vetores $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ e $\vec{v} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ é dado por

$$\vec{u} \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \vec{u} \times \vec{v}.$$

Compare este resultado com o do exercício anterior sobre o produto de representações complexas de vetores no plano.

O passo fundamental que impulsionou o desenvolvimento da análise vetorial foi dado por James Clerk Maxwell (1831–1879) em seu extraordinário *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Macmillan, Oxford, 1873). Nesse tratado, Maxwell menciona os quaternions mas trata suas partes escalar e vetorial separadamente e deixa claro que são os vetores que constituem o verdadeiro instrumento de pensamento físico. A partir do trabalho de Maxwell uma grande quantidade de resultados, principalmente em teoria do eletromagnetismo e mecânica dos fluidos, foi desenvolvida tratando as partes escalar e vetorial dos quaternions separadamente.

No início da década de 1880, e de forma independente, Josiah Willard Gibbs (1839–1903) e Oliver Heaviside (1850–1925) deram início ao estudo da análise vetorial como se conhece atualmente. Por exemplo, foi Gibbs que introduziu a notação moderna para os produtos escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$ e vetorial $\vec{u} \times \vec{v}$ entre dois vetores. O formalismo de Heaviside e Gibbs se mostrou mais intuitivo e era mais próximo da tradição matemática então vigente. Em 1901, as notas de aula de Gibbs sobre análise vetorial foram publicadas,^(e) assentando definitivamente a supremacia dos novos métodos sobre os “antigos” quaternions.

O desenvolvimento da álgebra demonstrou que o significado dos quaternions foi inicialmente superestimado por Hamilton e seus seguidores, que formavam um séquito quase religioso. Atualmente quaternions são estudados principalmente como objetos relacionados à teoria dos grupos e das álgebras, muitas vezes tratados meramente como um caso particular de álgebra de matrizes complexas 2×2 ,^(f) tendo perdido espaço na descrição geométrica da

^(e)E. B. Wilson, *Vector Analysis, A Text-Book for the Use of Students of Mathematics and Physics – Founded upon the Lectures of J. Willard Gibbs, Ph. D., LL. D.* (Yale University Press, New Haven, 1901). Esse livro-texto é altamente legível e poderia ser usado com proveito ainda hoje em um curso de introdução à análise vetorial em nível de graduação.

^(f)O quaternion $q = a + b\hat{i} + c\hat{j} + d\hat{k}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pode ser representado pela matriz complexa

$$M(q) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{C}).$$

Nesta representação, adição e multiplicação de quaternions correspondem às respectivas operações com suas matrizes, $p + q \equiv M(p) + M(q)$ e $pq \equiv M(p)M(q)$, a norma ao quadrado de q é dada pelo determinante de sua matriz correspondente, $\|q\|^2 \equiv \det M(q)$, e o quaternion conjugado é dado pela sua matriz transposta conjugada correspondente, $q^* \equiv M(q)^{*T}$. Também podemos representar quaternions através de matrizes 4×4 reais,

$$M(q) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R}).$$

natureza para a análise vetorial e seus desenvolvimentos posteriores, a análise tensorial, a geometria diferencial e a teoria dos grupos. Uma narrativa da descoberta dos quaternions pode ser consultada no artigo de B. L. van der Waerden, “Hamilton’s discovery of quaternions”, *Mathematics Magazine*, v. 49, n. 5 (Nov. 1976), pp. 227–234, enquanto uma história mais completa da análise vetorial é dada em M. J. Crowe, *A History of Vector Analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System* (Dover, New York, 1995). O aluno interessado em cálculo vetorial deve consultar o livro-texto de J. E. Marsden e A. Tromba, *Vector Calculus*, 5a. ed., 2a. imp. (W. H. Freeman, New York, 2004) ou o tratamento mais completo em J. H. Hubbard e B. B. Hubbard, *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms: A Unified Approach*, 5a. ed. (Matrix Editions, Ithaca, 2015).

★ — ★ — ★