

Lista de Exercícios - Variável Aleatória Discreta

Valdinei Freire

18 de Maio de 2021

1. Considere o experimento no qual dois dados são lançados e os valores obtidos em cada dado é observado. Descreva a função probabilidade, a esperança e a variância para as seguintes variáveis aleatórias:

(a) quantidade de valores 6.

$$f(x) = \begin{cases} \binom{2}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{2-x}, & \text{se } x \in \{0, 1, 2\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0.6944, & \text{se } x = 0 \\ 0.2778, & \text{se } x = 1 \\ 0.0278, & \text{se } x = 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = 2 \frac{1}{6} = 0.3333$$

$$\text{Var}(X) = 2 \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 0.2778$$

(b) soma dos valores.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{6 - |x - 7|}{36}, & \text{se } x \in \{2, \dots, 12\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0.0278, & \text{se } x \in \{2, 12\} \\ 0.0556, & \text{se } x \in \{3, 11\} \\ 0.0833, & \text{se } x \in \{4, 10\} \\ 0.1111, & \text{se } x \in \{5, 9\} \\ 0.1389, & \text{se } x \in \{6, 8\} \\ 0.1667, & \text{se } x = 7 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = 2 \frac{1 + 6}{2} = 7$$

$$\text{Var}(X) = 2 \frac{(6 - 1)(6 - 1 + 2)}{12} = 5.8333$$

(c) o maior valor.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - (x-1)^2}{6^2}, & \text{se } x \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = 4.4722$$

$$\text{Var}(X) = 1.9715$$

(d) o menor valor.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(6-x+1)^2 - (6-x)^2}{6^2}, & \text{se } x \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = 2.5278$$

$$\text{Var}(X) = 1.9715$$

2. Repita o item anterior para um experimento com três dados.

(a)

$$f(x) = \begin{cases} \binom{3}{x} \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{3-x}, & \text{se } x \in \{0, 1, 2, 3\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0.5787, & \text{se } x = 0 \\ 0.3472, & \text{se } x = 1 \\ 0.0694, & \text{se } x = 2 \\ 0.0046, & \text{se } x = 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = 3 \frac{1}{6} = 0.5$$

$$\text{Var}(X) = 3 \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{6}\right) = 0.4167$$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)(x-1)}{2} \frac{1}{6^3}, & \text{se } x \in \{3, \dots, 8\} \\ \frac{28 - 2|x-10.5|}{6^3}, & \text{se } x \in \{9, \dots, 12\} \\ \frac{(18-x+1)(18-x+2)}{2} \frac{1}{6^3}, & \text{se } x \in \{13, \dots, 18\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = 3 \frac{1+6}{2} = 10.5$$

$$\text{Var}(X) = 3 \frac{(6-1)(6-1+2)}{12} = 8.75$$

(c)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - (x-1)^3}{6^3}, & \text{se } x \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = 4.9583$$

$$\text{Var}(X) = 1.3084$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(6-x+1)^3 - (6-x)^3}{6^3}, & \text{se } x \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$E(X) = 2.0417$$

$$\text{Var}(X) = 1.3084$$

3. Considere que uma biblioteca faça a compra de 5 livros de Estatística para atender 20 alunas e alunos. Considere que toda semana, cada aluna ou aluno procura o livro independentemente com probabilidade 0.1.

- (a) Qual é a probabilidade de em uma semana qualquer faltar livro para algum aluno ou aluna?

Seja a variável aleatória X que indica a quantidade de alunos e alunas buscando o livro de Estatística, então:

$$\Pr(X > 5) = 1 - \Pr(X \leq 5) = 1 - \sum_{x=0}^5 \binom{20}{x} 0.1^x (1-0.1)^{20-x} = 0.0113$$

- (b) Qual é a probabilidade de em um mês (considere 4 semanas) qualquer faltar livro para algum aluno ou aluna?

$$1 - (1 - \Pr(X > 5))^4 = 0.0443$$

- (c) Considere que um semestre tenha 15 semanas, qual é a probabilidade que durante o semestre falte livro para alguém?

$$1 - (1 - \Pr(X > 5))^{15} = 0.1561$$

- (d) Considere que em uma semana de exame, a probabilidade de procura do livro aumenta para 0.5. Qual é a probabilidade de faltar livro nessa semana?

$$\Pr(X > 5) = 1 - \Pr(X \leq 5) = 1 - \sum_{x=0}^5 \binom{20}{x} 0.5^x (1-0.5)^{20-x} = 0.9793$$

4. Considere que num curso de SI, cada aluna ou aluno deva ser aprovado em 40 disciplinas. Considere que para um aluno em específico, a probabilidade dele ser aprovado por disciplina é de 0.8. Quantas disciplinas em média esse aluno deve cursar para completar o curso?

Considere a variável aleatória X_i que indica a quantidade de vezes que a disciplina i precisou ser cursada até o aluno obter aprovação, então:

$$E\left(\sum_{i=1}^{40} X_i\right) = \sum_{i=1}^{40} E(X_i) = 40 \frac{1}{0.8} = 50.$$

5. Considere que 23 pessoas foram selecionadas aleatoriamente. Qual é a probabilidade de que entre elas existam duas que nasceram no mesmo dia do ano?

Considere que A represente o evento requerido, então:

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c) = 1 - \frac{365!}{(365-23)!365^{23}} = 0.5073$$

6. Considere que pessoas foram selecionadas aleatoriamente, uma por vez, até que duas entre as selecionadas nasceram no mesmo dia do ano. Qual é a esperança e o desvio padrão da quantidade de pessoas selecionadas? (Talvez você precise de um programa de computador para responder essa questão).

Considere que X represente a quantidade de pessoas selecionadas, então:

$$E(X) = \sum_{x=2}^{366} x \frac{365!}{(365-(x-1))!365^{x-1}} \frac{x-1}{365} = 24.6166$$

$$\sigma_X = \sum_{x=2}^{366} (x - E(x))^2 \frac{365!}{(365-(x-1))!365^{x-1}} \frac{x-1}{365} = 12.1918$$

7. Para cada valor de $p > 1$, seja:

$$c(p) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^p}.$$

Suponha que uma V.A. X tenha distribuição discreta com a seguinte p.f.:

$$f(x) = \frac{1}{c(p)x^p} \text{ para } x = 1, 2, \dots$$

- (a) Para cada inteiro positivo fixo n , determine a probabilidade de que X será divisível por n .

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{c(p)(nx)^p} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{c(p)n^p x^p} = \frac{1}{c(p)n^p} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^p} = \frac{1}{n^p}$$

- (b) Determine a probabilidade que X será ímpar.

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{c(p)(2x-1)^p} = 1 - \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{c(p)(2x)^p} = 1 - \frac{1}{2^p}$$

- (c) Suponha que X_1 e X_2 sejam V.A. i.i.d. com p.f. $f(x)$. Determine a probabilidade que $X_1 + X_2$ será par.

$$\left(\frac{1}{2^p}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)^2 = \frac{2}{4^p} - \frac{2}{2^p} + 1$$

8. Suponha que uma variável aleatória X tenha média μ e variância σ^2 e que $Y = aX + b$. Determine os valores de a e b para os quais $E(Y) = 0$ e $\text{Var}(Y) = 1$.

$$\begin{cases} E(Y) = a\mu + b = 0 \\ \text{Var}(Y) = a^2\sigma^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{\sigma} \\ b = -\frac{\mu}{\sigma} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a = -\frac{1}{\sigma} \\ b = \frac{\mu}{\sigma} \end{cases} \Rightarrow Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ ou } Y = \frac{\mu - X}{\sigma}$$