Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2033 – Matrizes, Vetores e Geometria Analítica – 2º sem. 2020
Professor: José Ricardo G. Mendonça

Prova de recuperação – Data: 15 mar. 2021

*Se o seu **número USP for ímpar** você deve resolver os **exercícios de número ímpar** (1, 3, 5 e 7); se o seu **número USP for par** você deve resolver os **exercícios de número par** (2, 4, 6 e 8).*

Na resolução dos problemas, explique seu raciocínio e o que você está fazendo de forma que eu possa acompanhá-lo(a). Soluções "mágicas" ou "geniais" não serão aceitas.

Problemas

1. Os átomos de hidrogênio de uma molécula hipotética de metano (CH_4) estão localizados em $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$ e $(1,0,1)$, enquanto o átomo de carbono está em $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Encontre o valor do ângulo θ formado em cada ligação $\widehat{\text{H–C–H}}$.

2. (a) Mostre que para quaisquer vetores $\vec{u}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ vale a desigualdade de Cauchy-Schwartz $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$. Em que condições essa desigualdade vale como uma igualdade?

   (b) Dados n números reais $a_1,\ldots,a_n > 0$, mostre que $\big(a_1+\cdots+a_n\big)\big(\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\big) \geqslant n^2$.

3. Encontre as intersecções da reta $x = 1+2t$, $y = 3-t$, $z = 2+2t$ com os planos $2x+6y+z = 8$ e $2x+6y+z = 22$.

4. Uma transformação linear de reflexão $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva o ponto $P = (5,0)$ ao ponto $Q = (3,4)$. Encontre a equação da reta que representa o eixo de reflexão e a matriz que representa T.

5. Encontre a matriz da transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que dilata os vetores por um fator a, reflete esses vetores em torno da reta $y = 2x$ e a seguir projeta estes vetores sobre o eixo y.

6. Uma matriz M é ortogonal se $M^T M = 1$.

   (a) Prove que o determinante de uma matriz ortogonal pode valer somente $+1$ ou -1.

   (b) Prove que o produto de duas matrizes ortogonais é novamente uma matriz ortogonal.

7. Resolva o seguinte sistema de equações lineares encontrando sua matriz ampliada linha-reduzida à forma escada e determine seu posto, o posto da matriz de coeficientes e, se o sistema for possível, seus graus de liberdade:
$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x + 5y - 2z = 3. \end{cases}$$

8. Resolva o seguinte sistema de equações lineares encontrando sua matriz ampliada linha-reduzida à forma escada e determine seu posto, o posto da matriz de coeficientes e, se o sistema for possível, seus graus de liberdade:
$$\begin{cases} x + y + z = 4, \\ 2x + 5y - 2z = 3, \\ x + 7y - 7z = 5. \end{cases}$$

⋆ — ⋆ — ⋆