Lista de Exercícios - Probabilidade

Valdinei Freire

28 de Abril de 2021

1. Suponha que uma moeda é arremessada 7 vezes. Deixe A denotar o evento de que cara é obtida no primeiro arremesso e deixe B denotar o evento de que cara é obtida no quinto arremesso. A e B são disjuntos?

   Considere que `K` indica cara e `C` indica coroa. Note que para o resultado $r =$ `KKKKKKK` os dois eventos, A e B, ocorrem para esse resultado, isto é, $r \in A$ e $r \in B$, logo, $A \cap B \neq \emptyset$ e A e B não são disjuntos.

2. Se A, B, e C são três eventos tal que $\Pr(A \cup B \cup C) = 0.7$, qual é o valor de $\Pr(A^c \cap B^c \cap C^c)$?

$$\Pr(A^c \cap B^c \cap C^c) = \Pr((A \cup B \cup C)^c) = 1 - \Pr(A \cup B \cup C) = 0.3$$

3. Suponha que uma eleição contenha 350 eleitores, dos quais 250 votam no candidato A e 100 no candidato B. Se 30 eleitores são escolhidos aleatoriamente, qual é a probabilidade que exatamente 18 eleitores escolham o candidato A?

$$\frac{\binom{250}{18}\binom{100}{12}}{\binom{350}{30}} = 0.0579$$

4. Suponha que uma caixa contenha r bolas vermelhas e w bolas brancas. Suponha também que bolas são retiradas da caixa uma por vez, aleatoriamente, sem reposição. (a) Qual é a probabilidade que todas as r bolas vermelhas sejam obtidas antes de qualquer bola branca? (b) Qual é a probabilidade que todas r bolas vermelhas serão obtidas antes que duas bolas brancas sejam obtidas?

   (a)

$$\frac{\binom{r}{r}\binom{w}{0}}{\binom{r+w}{r}} = \frac{r!w!}{(r+w)!}$$

   (b)

$$\frac{\binom{r}{r}\binom{w}{1}}{\binom{r+w}{r+1}} = \frac{(r+1)!w!}{(r+w)!}$$

5. Suponha que uma caixa contenha r bolas vermelhas, w bolas brancas, e b bolas azuis. Suponha também que bolas são retiradas da caixa uma por vez, aleatoriamente, sem reposição. Qual é a probabilidade de que todas as r bolas vermelhas sejam obtidas antes que qualquer bola branca seja obtida?

$$\frac{\binom{r}{r}\binom{w}{0}}{\binom{r+w}{r}} = \frac{r!w!}{(r+w)!}$$

6. Suponha que 10 cartas, dentre as quais 5 são vermelhas e 5 são verdes, são colocadas aleatoriamente em 10 envelopes, dos quais 7 são vermelhos e três são verdes, isto é, cada envelope contém uma única carta. Determine a probabilidade de que exatamente k envelopes conterá a carta que combine com sua cor ($k = 0, 1, \ldots, 10$).

   Para $k = 2, 4, 6, 8$

$$\Pr(k) = \frac{\binom{3}{(k-2)/2}\binom{7}{(8-k)/2}}{\binom{10}{3}}$$

   e caso contrário: $\Pr(k) = 0$.

7. Suponha que os eventos A e B são disjuntos. Sob quais condições A^c e B^c são disjuntos?

$$A^c = B$$

8. Seja A_1, A_2 e A_3 três eventos arbitrários. Mostre que a probabilidade de que exatamente um desses três eventos ocorra será:

$$\begin{aligned}&\Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3)\\ &\quad -2\Pr(A_1 \cap A_2) - 2\Pr(A_1 \cap A_3) - 2\Pr(A_2 \cap A_3)\\ &\quad +3\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$

   Qual é a fórmula geral para n eventos arbitrários?

   Considere o evento $A_1^- = A_1 - (A_2 \cup A_3)$, então:

$$\Pr(A_1^{-1}) = \Pr(A_1) - \Pr(A_1 \cap A_2) - \Pr(A_1 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

   Defina A_2^- e A_3^- de forma equivalente. Então, deseja-se calcular:

$$\begin{aligned}\Pr(A_1^- \cup A_2^- \cup A_3^-) =& \Pr(A_1) - \Pr(A_1 \cap A_2) - \Pr(A_1 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\\ &+ \Pr(A_2) - \Pr(A_2 \cap A_1) - \Pr(A_2 \cap A_3) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\\ &+ \Pr(A_3) - \Pr(A_3 \cap A_1) - \Pr(A_3 \cap A_2) + \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\\ =& \Pr(A_1) + \Pr(A_2) + \Pr(A_3)\\ &- 2\Pr(A_1 \cap A_2) - 2\Pr(A_1 \cap A_3) - 2\Pr(A_2 \cap A_3)\\ &+ 3\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^{-}\right) = \quad & \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_i) - 2\sum_{i<j} \Pr(A_i \cap A_j) \\ & +3\sum_{i<j<k} \Pr(A_i \cap A_j \cap A_k) + \ldots \\ & +n(-1)^{n+1} \Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n).\end{aligned}$$

1 Bibliografia

- Morris H. DeGroot and Mark J. Schervish. Probability and Statistics, 4th Edition, Addison-Wesley, 2012. Capítulos 1, 2, 3, 5, 6 e 7.