TP4-Exercicio1

January 10, 2023

1 TP4

1.1 Grupo 15

Carlos Eduardo Da Silva Machado A96936

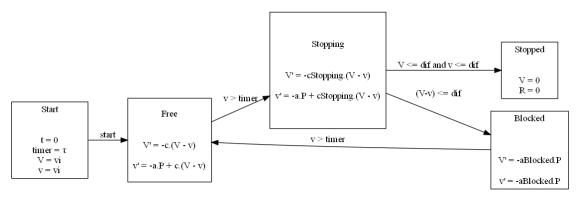
Gonçalo Manuel Maia de Sousa A97485

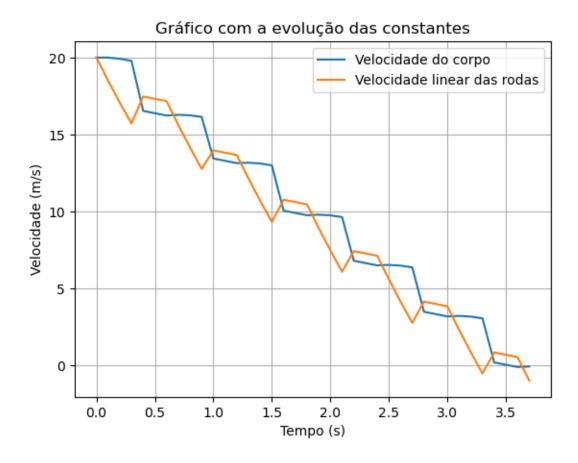
1.2 Exercício 4.1

1.2.1 Descrição do Problema

Pretende-se construir um autómato híbrido que descreva o sistema de travagem ABS ("Anti-Lock Breaking System") e que possa ser usado para verificar as suas propriedades dinâmicas.

- 1. A componente discreta do autómato contém os modos: Start, Free, Stopping, Blocked, e Stopped. No modo Free não existe qualquer força de travagem; no modo Stopping aplica-se a força de travagem alta; no modo Blocked as rodas estão bloqueadas em relação ao corpo mas o veículo desloca-se; no modo Stopped o veículo está imobilizado.
- 2. A componente contínua do autómato usa variáveis contínuas V,v para descrever a velocidade do corpo do veículo em relação ao solo e a velocidade linear das rodas também em relação ao solo. Assume-se que o sistema de travagem exerce uma força de atrito nos travões proporcional à diferença das duas velocidades.
- 3. Os "switchs" devem ser definidos de modo a que o sistema tenha um comportamento desejável, isto é, imobilize-se depressa e não "derrape" muito.
- 4. Além disso, é necessário evitar que o sistema tenha "trajetórias de Zenão". Isto é, sequências infinitas de transições entre dois modos em intervalos de tempo que tendem para zero mas nunca alcançam zero.





1.2.2 Abordagem do Problema

Caracterização das contantes e variáveis: 1. Componentes Contínuas: - velocidade linear das rodas - velocidade do corpo (veículo) - tempo - timer (no nosso caso não é um contador literal)

- 2. Componentes Discretas:
- Modo
- 3. Constantes:
- força de atrito do solo no modo block (baixa) e força de atrito nos restantes modos (alta)
- constante de proporcionalidade no modo stopping (alta) e nos restantes (baixa)
- velocidade inicial
- peso
- dif (Valor que utilizamos para verificar que as velocidades V e v estão próximas)
- Tau (Tempo máximo que controla o tempo permanecido nos modos Free e Blocked)
- delta (Pequena porção adicionada ao tempo de modo a evitar as trajetórias de Zenão)

Eventos: - Start -> Inicio - Free -> A força de travagem não é exercida sobre o veículo - Stopping -> É aplicada uma força de travagem alta sobre o veículo - Blocked -> As rodas estão travadas, porém o veículo continua a mover-se - Stopped -> O veículo pára

Jumps: - Start -> Free (Inicia para um movimento livre) - Free -> Stopping (O veículo começa a travar) - Stopping -> Blocked (O veículo começa a derrapar) - Blocked -> Free (O veículo deixa de derrapar) - Stopping -> Stopped (O veículo pára)

Decisão dos Jumps:

Os jumps ou switches caracterizados pelas transições untimed, forma decididos de forma a obter o comportamento desejável e cumprir com o algumas implicações do enunciado.

- No jump do start para o free, as variáveis do solver são mantidas à exceção do modo que passa a ser Free.
- 2. O jump free -> stopping acontece quando o timer do free chegada ao limite Tau através de um "timer", que no nosso caso, em python, o "timer" será uma espécie de "threshold" (limite), a atribuição dessa marca é feita em jumps especificos que envolvem como estado destino tanto o free quanto o blocked, portanto, neste jump em específico o que procuramos é comparar o tempo atual ao do limite e se for maior, então o jump é possível.
- 3. Stopping -> Blocked, como o destino é o blocked marcamos um novo timer como a soma do tempo atual mais um Tau (constante), obtendo o tempo máximo que o controlo permanece. Além disso, um fator importante para passarmos do stopping para o blocked, é velocidade do corpo do veículo ser próxima da velocidade das rodas, essa próximidade é dada por outra constante com o nome de dif, assim comparamos a diferença entre as duas velocidade e se a mesma for menor que a constante, então o jump é válido.
- 4. Blocked -> Free, semelhante ao jump free -> stopping, acontece quando o limite atingido e como o destino é free, calculamos o próximo limite.
- 5. Stopping -> Stopped, acontece quando o veículo praticamente pára, isto, é as velocidades são zero ou muito próximas, utilizamos a constante diff para fazer essa verificação.

1.3 Código Python

Instalação da biblioteca pygraphviz: - conda install -c conda-forge pygraphviz

Instalação da biblioteca matplotlib: - conda install -c conda-forge matplotlib

Instalação da biblioteca IPython: - conda update conda - conda update ipython

```
[1]: from pysmt.shortcuts import *
from pysmt.typing import *
import matplotlib.pyplot as matplot
```

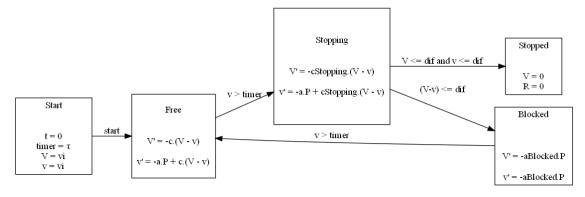
Programa que gera o autómato híbrido que descreve o sistema de travagem ABS:

```
[2]: import pygraphviz as pgraph
from IPython.display import Image
AutomatoHibrido = """digraph{
    rankdir=LR;
    Start [shape=square, label="Start\n\n\nt = 0\ntimer = \tau\nV = \vi\nv = \vi\"];
    Free [shape = square, label="Free\n\n\nV' = -c.(V - v)\n\nv' = -a.P + c.(V - \under \under \viv \viv"];
    Stopping [shape = square, label="Stopping\n\n\nV' = -cStopping.(V - v)\n\nv' \under \u
```

```
Start -> Free[label="start"];
Free -> Stopping [label="v > timer"];
Stopping -> Blocked[label="(V-v) <= dif"];
Stopping -> Stopped[label="V <= dif and v <= dif"];
Blocked -> Free [label="v > timer"];
}"""

Image(pgraph.AGraph(AutomatoHibrido).draw(format='png', prog='dot'))
```

[2]:



Definição das constantes e dos valores dos modos:

```
[3]: Start = Int(-1)
   Free = Int(0)
   Stopping = Int(1)
   Blocked = Int(2)
   Stopped = Int(3)

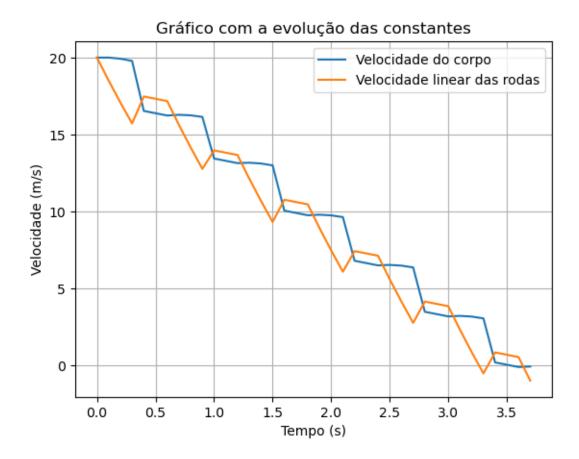
V0 = 20
   aBlocked = 0.001
   a = 0.01
   cStopping = 8
   c = 0.5
   Tau = 0.3
   P = 1500
   dif = 0.7 # intervalo entre velocidade do corpo e das rodas
   delta = 0.1 # intervalo entre os tempos
```

Função que simula a evolução das constantes de acordo com as equações diferenciais.

```
T = [t]
  timer = 0
  m = Free
  while(t<time and (V>0 or v>0)):
       if m == Stopping and (V - v < dif ) :
          m = Blocked
       elif timer >= tau and m == Blocked:
           m = Free
           timer = 0
       elif timer >= tau and m == Free:
           m = Stopping
           timer = 0
       if m == Free:
           V, v = V + (-c*(V-v))*dt, v + (-a*P + c*(V-v))*dt
       elif m == Stopping:
           V, v = V + (-cStopping*(V-v))*dt, v + (-a*P + cStopping*(V-v))*dt
       else:
           V, v = V + (-aBlocked*P)*dt, v + (-aBlocked*P)*dt
       t += dt
       timer += dt
       V_.append(V)
       v_.append(v)
       T.append(t)
  matplot.plot(T,V_,T,v_)
  matplot.title("Gráfico com a evolução das constantes")
  matplot.xlabel("Tempo (s)")
  matplot.ylabel("Velocidade (m/s)")
  matplot.legend(["Velocidade do corpo", "Velocidade linear das rodas"], loc_
⇒="best")
  matplot.grid(True)
```

Imagem do gráfico gerado:

```
[5]: maxtime = 20
timediference = 0.1
simulation(a,aBlocked, c, cStopping, timediference, dif, P, Tau, maxtime, VO)
```



Função declare cujo objetivo é declarar as variáveis discretas e contínuas.

```
[6]: def declare(i):
    s = {}
    # Discretas
    s['m'] = Symbol('m'+str(i),INT) # Modo
    # Continuas
    s['t'] = Symbol('t'+str(i),REAL) # Tempo
    s['V'] = Symbol('V'+str(i),REAL) # Velocidade do corpo
    s['v'] = Symbol('v'+str(i),REAL) # velocidade linear das rodas
    s['timer'] = Symbol('timer'+str(i),REAL) # Timer
    return s
```

Função de inicialização que caracteriza o estado inicial.

```
[7]: def init(s):
    return And(Equals(s['m'], Start), Equals(s['t'], Real(0)), Equals(s['V'],
    →Real(V0)), Equals(s['v'], Real(V0)), Equals(s['timer'], Real(Tau)))
```

Função de transição que caracteriza as transições entre os estados.

```
[8]: def trans(s,p):
         # untimed
         StartToFree = And(Equals(s['m'],Start),__
      \rightarrow Equals(p['m'],Free), Equals(s['t'],p['t']), Equals(s['V'],p['V']),
      \rightarrowEquals(s['v'],p['v']),
                               Equals(p['timer'],s['timer']))
         FreeToStopping = And(Equals(s['m'],Free),__
      \rightarrowEquals(s['v'],p['v']),
                           Equals(p['timer'],s['timer']), s['t'] > s['timer'])
         StoppingToBlocked = And(Equals(s['m'],Stopping),__
      →Equals(p['m'],Blocked),Equals(s['t'],p['t']), Equals(s['V'],p['V']), __
      \rightarrowEquals(s['v'],p['v']),
                               Equals(p['timer'],s['t']+Real(Tau)),__
      \rightarrow s['V']-s['v'] \le Real(dif)
         BlockedToFree = And(Equals(s['m'],Blocked),__
      →Equals(p['m'],Free),Equals(s['t'],p['t']), Equals(s['V'],p['V']),
      \rightarrowEquals(s['v'],p['v']),
                           Equals(p['timer'],s['t'] + Real(Tau)), s['t'] > s['timer'])
         StoppingToStopped = And(Equals(s['m'],Stopping),__
      →Equals(p['m'],Stopped),Equals(s['t'],p['t']), Equals(s['V'],p['V']), __
      \rightarrowEquals(s['v'],p['v']),
                           Equals(p['timer'],s['timer']), s['v'] <= Real(dif), s['V']
      →<= Real(dif))</pre>
         # timed
         FreeFree = And(Equals(s['m'],Free),Equals(p['m'],Free),
                        s['t'] <= s['timer'],
                        Equals(p['t'],s['t'] + Real(delta)),
                        s['v'] >= 0, p['v'] >= 0, s['V'] >= 0, p['v'] >= 0,
                        Equals(p['timer'], s['timer']),
                        Equals(p['v'] - s['v'], (Real(-1) * Real(a) * Real(P) +
      \hookrightarrow (\text{Real}(c) * (s['V'] - s['v']))) * (p['t'] - s['t'])),
                        Equals(p['V'] - s['V'], Real(-1) * (Real(c) * (s['V'] - U
      \rightarrow s['v'])) * (p['t'] - s['t']))
         StoppingStopping = And(Equals(s['m'], Stopping), Equals(p['m'], Stopping),
                        Equals(p['t'],s['t']+Real(delta)),
                        s['v'] >= 0, p['v'] >= 0, s['V'] >= 0, p['v'] >= 0, p['v'] >= p['V'],
                        Equals(p['timer'], s['timer']),
```

```
Equals(p['v'] - s['v'], (Real(-1) * Real(a) * Real(P) +
\hookrightarrow (Real(cStopping) * (s['V'] - s['v']))) * (p['t'] - s['t'])),
                  Equals(p['V'] - s['V'], Real(-1) * (Real(cStopping) * (s['V']_{\sqcup}
→- s['v'])) * (p['t'] - s['t']))
   BlockedBlocked = And(Equals(s['m'],Blocked),Equals(p['m'],Blocked),
                  s['t'] <= s['timer'],
                  Equals(p['t'],s['t']+Real(delta)),
                  s['v'] >= 0, p['v'] >= 0, s['V'] >= 0, p['v'] >= 0,
                  Equals(p['timer'], s['timer']),
                  Equals(p['V']-s['V'], (Real(-1) * Real(aBlocked) * Real(P)) *
\hookrightarrow (p['t'] - s['t'])),
                  Equals(p['v']-s['v'], (Real(-1) * Real(aBlocked) * Real(P)) *
\hookrightarrow (p['t'] - s['t']))
   StoppedStopped = And(Equals(s['m'],Stopped),Equals(p['m'],Stopped),
                  Equals(p['t'],s['t']+Real(delta)),
                  s['v'] >= 0, p['v'] >= 0, s['V'] >= 0, p['v'] >= 0,
                  s['v'] >= p['v'], s['V'] >= p['V'],
                  Equals(p['timer'], s['timer']),
                  Equals(p['v'],Real(0)), Equals(p['V'],Real(0))
   return Or(StartToFree, FreeToStopping, StoppingToBlocked, BlockedToFree,
→StoppingToStopped, FreeFree, StoppingStopping, BlockedBlocked, StoppedStopped)
```

Segunda Versão da função de transição onde tentamos reduzir os erros de verificação, reduzindo a granularidade da discretização subdividindo os modos free e Blocked em submodos. Esta ideia segue de uma sugestão da ficha 12, onde cada modo de um termostato poderia ser sub-dividido em 4 sub-modos. No nosso caso, como sabemos que o veículo perde velocidade, a velocidade inicial é a maior velocidade que o veículo atingiu então conseguimos limitar superiormente, ora, como também sabemos que o veículo irá parar, temos igualmente um limite inferior, portanto, basta subdividir em todas as velocidades, de 0 até V0, de 1 em 1.

Além disso, em vez de avançar com o tempo de v+delta em v+delta, tentamos utilizar intervalos, ou seja, o tempo asseguir tem de ser o tempo atual mais esse delta.

```
FreeToStopping = And(Equals(s['m'], Free),
                         Equals(p['m'], Stopping),
                         Equals(p['V'], s['V']),
                         Equals(p['v'], s['v']),
                         Equals(p['t'],s['t']),
                         p['t'] >= s['timer'],
                         Equals(p['timer'],s['timer']))
   StoppingToBlocked = And(Equals(s['m'], Stopping),
                            Equals(p['m'], Blocked),
                            s['V']-s['v'] \le Real(dif),
                            Equals(p['V'], s['V']),
                            Equals(p['v'], s['v']),
                            Equals(p['t'], s['t']),
                            Equals(p['timer'],s['t'] + Real(Tau)))
   BlockedToFree = And(Equals(s['m'], Blocked),
                       Equals(p['m'], Free),
                       Equals(p['V'], s['V']),
                       Equals(p['v'], s['v']),
                       p['t'] >= s['timer'],
                       Equals(p['timer'],s['t'] + Real(Tau)),
                       Equals(p['t'], s['t']))
   StoppingToStopped = And(Equals(s['m'], Stopping),
                            Equals(p['m'], Stopped),
                            Equals(p['V'], s['V']),
                            Equals(p['v'], s['v']),
                            Equals(p['t'], s['t']),
                            p['V'] <= Real(dif),</pre>
                            p['v'] <= Real(dif),</pre>
                            Equals(p['timer'],s['timer']))
   # timed
   FreeFree = Or([And(Equals(s['m'], Free),
                  Equals(p['m'], Free),
                  s['V'] >= 0, p['V'] >= 0, s['V'] >= 0, p['V'] >= 0,
                  s['V']-s['v']<Real(i)+Real(dif),
\rightarrow s['V'] - s['v'] > = Real(i) - Real(dif),
                  Equals(p['V']-s['V'], -(Real(c) * i) * (p['t'] - s['t'])),
                  Equals(p['v']-s['v'], (-(Real(a) * Real(P)) + (Real(c) * i))
→* (p['t'] - s['t'])),
                  p['t'] > s['t'] + Real(delta),
                  s['t'] < s['timer'],
                  Equals(p['timer'],s['timer'])) for i in range(0,V0+1)])
```

```
StoppingStopping = Or([And(Equals(s['m'], Stopping),
                       Equals(p['m'], Stopping),
                       s['V'] >= 0, p['V'] >= 0, s['V'] >= 0, p['V'] >= 0,
                       s['V']-s['v']<Real(i)+Real(dif),__
\rightarrows['V']-s['v']>=Real(i)-Real(dif),
                       Equals(p['V']-s['V'], -(Real(cStopping) * i) * (p['t'] -__
\hookrightarrows['t'])),
                       Equals(p['v']-s['v'], (-(Real(a) * Real(P)) +
\hookrightarrow (Real(cStopping) * i)) * (p['t'] - s['t'])),
                       p['t'] > s['t'] + Real(delta),
                       Equals(p['timer'],s['timer'])) for i in range(0,V0+1)])
   BlockedBlocked = And(Equals(s['m'], Blocked),
                         Equals(p['m'], Blocked),
                         Equals(p['V'],s['v']),
                         s['V'] >= 0, p['V'] >= 0, s['V'] >= 0, p['V'] >= 0,
                         Equals(p['v']-s['v'], (-Real(aBlocked) * Real(P)) *___
\hookrightarrow (p['t'] - s['t'])),
                         p['t'] > s['t'] + Real(delta),
                         s['t'] < s['timer'],
                         Equals(p['timer'],s['timer']))
   StoppedStopped = And(Equals(s['m'],Stopped),Equals(p['m'],Stopped),
                  p['t'] > s['t']+Real(delta),
                  s['v'] >= 0, p['v'] >= 0, s['V'] >= 0, p['v'] >= 0,
                  Equals(p['timer'], s['timer']),
                  Equals(p['v'],Real(0)), Equals(p['V'],Real(0))
   return Or(StartToFree, FreeToStopping, StoppingToBlocked, BlockedToFree,
→StoppingToStopped, FreeFree, StoppingStopping, BlockedBlocked, StoppedStopped)
```

Função de geração do traço, adapatada das aulas práticas.

```
[11]: def gera_traco(declare,init,trans,k):
    with Solver(name="z3") as s:
    # completar

# cria k copias do estado
    trace = [declare(i) for i in range(k)]

# criar o traço
    s.add_assertion(init(trace[0]))
    for i in range(k-1):
```

```
s.add_assertion(trans(trace[i], trace[i+1]))
if s.solve():
   for i in range(k):
        print()
        print("Modo:",i)
        m = s.get_py_value(trace[i]['m'])
        if m==1:
            print("Stopping")
        elif m==2:
            print("Blocked")
            print("timer =", float(s.get_py_value(trace[i]['timer'])))
        elif m==0:
            print("Free")
            print("timer =", float(s.get_py_value(trace[i]['timer'])))
        elif m==3:
            print("Stopped")
        else:
            print("Start")
        print("t =", round(float(s.get_py_value(trace[i]['t'])),6))
        print("V =", float(s.get_py_value(trace[i]['V'])))
        print("v =", float(s.get_py_value(trace[i]['v'])))
else:
    print("Solver cannot solve")
```

[21]: gera_traco(declare,init,trans2,20)

Modo: 0 Start t = 0.0V = 20.0v = 20.0Modo: 1 Free timer = 0.3t = 0.0V = 20.0v = 20.0Modo: 2 Free timer = 0.3t = 0.3V = 20.0v = 15.5

Modo: 3
Stopping
t = 0.3

V = 20.0

v = 15.5

Modo: 4
Stopping

t = 0.440013

V = 15.51958762886598 v = 17.880219072164948

Modo: 5 Blocked

timer = 0.7400128865979381

t = 0.440013

V = 15.51958762886598 v = 17.880219072164948

Modo: 6 Blocked

timer = 0.7400128865979381

t = 0.559601

V = 17.880219072164948 v = 17.70083762886598

Modo: 7 Blocked

timer = 0.7400128865979381

t = 0.679188

V = 17.70083762886598 v = 17.52145618556701

Modo: 8 Blocked

timer = 0.7400128865979381

t = 7.545855

V = 17.52145618556701v = 7.2214561855670105

Modo: 9 Free

timer = 7.845854810996563

t = 7.545855

V = 17.52145618556701 v = 7.2214561855670105 Modo: 10 Free

timer = 7.845854810996563

t = 7.726267

V = 16.529188144329897 v = 5.5075386597938145

Modo: 11 Free

timer = 7.845854810996563

t = 7.845855

V = 15.87145618556701v = 4.37145618556701

Modo: 12
Stopping
+ = 7.8458

t = 7.845855

V = 15.87145618556701v = 4.37145618556701

Modo: 13
Stopping
t = 7.965442

V = 4.391043814432989

v = 14.05805412371134

Modo: 14 Blocked

timer = 8.265442439862543

t = 7.965442

V = 4.391043814432989v = 14.05805412371134

Modo: 15 Blocked

timer = 8.265442439862543

t = 8.08503

V = 14.05805412371134 v = 13.878672680412372

Modo: 16 Blocked

timer = 8.265442439862543

t = 8.204618

V = 13.878672680412372 v = 13.699291237113401

Modo: 17

```
Blocked
timer = 8.265442439862543
t = 9.071284
V = 13.699291237113401
v = 12.399291237113403
Modo: 18
Free
timer = 9.371284364261168
t = 9.071284
V = 13.699291237113401
v = 12.399291237113403
Modo: 19
Free
timer = 9.371284364261168
t = 9.955549
V = 12.815026693667157
v = 0.019587628865979378
```

1.3.1 Provar propriedades

Função bmc always alterada para verificar a propriedade ii)

```
[13]: def bmc_always(declare,init,trans,prop,K):
          for k in range(1,K+1):
              with Solver(name="z3") as s:
                  # completar
                  trace = [declare(i) for i in range(k)]
                  invariante = []
                  s.add_assertion(init(trace[0]))
                  for i in range(k-1):
                      s.add_assertion(trans(trace[i], trace[i+1]))
                      invariante.append(Not(prop(trace[i], trace[i+1])))
                  s.add_assertion(Or(invariante))
                  #s.add_assertion(Not(prop(trace[k-1])))
                  if s.solve():
                      for i in range(k):
                          print()
                          print("State:",i)
                          m = s.get_py_value(trace[i]['m'])
                          if m==1:
                              print("Stopping")
                          elif m==2:
                              print("Blocked")
```

Função bmc_eventually alterada para verificar a propriedade i)

```
[14]: def bmc_eventually(declare,init,trans,prop,tempo,bound):
         for k in range(1,bound+1):
              with Solver(name="z3") as s:
                 # completar
                 trace = [declare(i) for i in range(k)]
                 s.add_assertion(init(trace[0]))
                 for i in range(k-1):
                     s.add_assertion(trans(trace[i], trace[i+1]))
                 for i in range(k):
                     s.add_assertion(Not(prop(trace[i],tempo)))
                 s.add_assertion(Or(trans(trace[k-1],trace[i]) for i in range(k)))
                 if s.solve():
                     for i in range(k):
                         print()
                         print("State:",i)
                         m = s.get_py_value(trace[i]['m'])
                         if m==1:
                            print("Stopping")
                         elif m==2:
                            print("Blocked")
                            print("timer =", float(s.
       elif m==0:
```

Propriedade 1: "o veículo imobiliza-se completamente em menos de t segundos"

$$t>=t2 \implies m=Stopped \lor (v \le 0 \land V \le 0)$$

```
[15]: def propriedade1(s,t2):
    return Implies(s['t'] >= t2, Or(Equals(s['m'],Stopped),And(s['v'] <= 0, □
    →s['V'] <= 0)))
```

A propriedade é válida para traços de tamanho até 20

Propriedade 2: "a velocidade V diminui sempre com o tempo"

$$t < t' \iff V > V'$$

```
[17]: def propriedade2(s,p):
    return Iff(s['t'] < p['t'],s['V'] > p['V'])
```

[18]: bmc_always(declare, init, trans, propriedade2, 20)

```
State: 0
Start
t = 0.0
V = 20.0
v = 20.0
State: 1
Free
timer = 0.3
t = 0.0
V = 20.0
```

```
v = 20.0
State: 2
Free
timer = 0.3
t = 0.1
V = 20.0
v = 18.5
```

[]:[