MÁSTER EN MATEMÁTICA INDUSTRIAL, CURSO 2024–25. DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA – USC. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Sistemas Dinámicos.*

Parte de EDO – Práctica 1: θ-métodos.

Se pide hacer un código en MATLAB® que resuelva mediante el θ-método el problema de valor inicial (PVI) m-dimensional siguiente:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \eta \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \tag{1}$$

Se recuerda que, una vez fijado el valor de θ (*zeta*), el θ-método define el vector y_{n+1} como la solución y del sistema no lineal

$$y = y_n + h\{\theta f(x_n, y_n) + (1 - \theta) f(x_{n+1}, y)\}. \tag{2}$$

Aunque cualquier $\theta \in \mathbb{R}$ proporciona un método convergente, su valor suele elegirse en el intervalo $[0, 1]$.

El programa debe incluir dos opciones para resolver (2): método de punto fijo y método de Newton.

El objetivo es, para una malla uniforme de N puntos `x = linspace(a ,b, N)`, crear una matriz `yh` de dimensiones $N \times m$ que contenga en la columna j las aproximaciones de la componente j de la solución exacta en los puntos de la malla. Por lo tanto, la primera fila de `yh` es siempre el vector η, y dar un paso de tiempo (equivalentemente, calcular y_{n+1}) significa calcular una nueva fila de `yh`.

Debe seguirse la estructura del programa de Euler explícito (EE), cuyos ficheros se proporcionan a las/los estudiantes. Puede comprobarse que, con cada ejecución, se crean m salidas gráficas, una para cada componente de la solución, y también un fichero de texto llamado «output.txt» en el que se escriben los resultados numéricos.

La transición del método de EE al θ-método requiere efectuar los siguientes cambios:

1. En el fichero «data.m», añadir: valor de θ, opción para resolver el sistema (2) (punto fijo o Newton), máximo número de iteraciones (para cualquiera de esos dos métodos), épsilon de parada (ϵ-test débil, también para cualquiera de esos dos métodos) y delta de parada (δ-test, solamente para Newton).

2. En el fichero «EEmethod.m»: cambiar su nombre por «THETAmethod.m» y sustituir la línea

```
yh(i+1, :) = yh(i, :) + h * f(x(i), yh(i,:));
```

   (que es la fórmula del método de EE) por

```
yh(i+1, :) = fixedpoint(th, h, x(i), x(i+1), yh(i, :), maxit, epsi);
```

   o por

```
yh(i+1, :) = newton(th, h, x(i), x(i+1), yh(i, :), maxit, epsi, delta, m);
```

   según sea la opción escogida (aquí, `th` es θ, y se evita el uso de `eps` por ser este un comando de MATLAB®).

3. Crear los ficheros «fixedpoint.m» y «newton.m». Crear también el fichero «jacf.m» con la matriz jacobiana de f con respecto a y, que habrá que usar en el método de Newton.

4. En el fichero «prinEE.m»: cambiar su nombre por «prinTHETA.m» y sustituir la línea

```
[m, x, yh] = EEmethod(a, b, eta, N, ofi);
```

   por

```
[m, x, yh] = THETAmethod(th, a, b, eta, N, ofi, maxit, epsi, delta, option);
```

5. En cada fichero, revisar las líneas comentadas y adaptarlas al nuevo método.

El fichero que se ejecuta es el `prinTHETA.m`, pues es el que llama a todos los demás.

Ejemplos de prueba

1. Resuelve la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$y'' + y = \cos(3x), \quad 0 \le x \le 3, \tag{3}$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Solución exacta: $y(x) = (9/8)\cos(x) - (1/8)\cos(3x)$.

2. Integra el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{cases} y_1' = 2xy_4y_1, \\ y_2' = 10xy_4y_1^5, \\ y_3' = 2xy_4, \\ y_4' = -2x(y_3 - 1), \end{cases} \tag{4}$$

con la condición inicial $y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1,\ y_3(0) = 1,\ y_4(0) = 1$, en el intervalo $[0, 1]$.

Solución exacta: $y_1(x) = \exp(\sin(x^2)),\ y_2(x) = \exp(5\sin(x^2)),\ y_3(x) = \sin(x^2) + 1,\ y_4(x) = \cos(x^2)$.

3. Resuelve, en el intervalo $[0, 5]$, el siguiente problema de valor inicial escalar:

$$[y' + y = \mathrm{e}^{-x}y^2, \quad y(0) = 1]. \tag{5}$$

Solución exacta: $y(x) = 2/(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}) = \operatorname{sech} x$.

Nota. *Deberá observarse orden 1 de convergencia si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ y orden 2 si $\theta = 1/2$. El θ-método que resulta al tomar $\theta = 1/2$ se conoce con el nombre de método o regla del trapecio.*