

Universidad de La Coruña



## PRÁCTICA 3 - ECUACIÓN DEL CALOR HACIA ATRÁS

*Problemas inversos y Reconstrucción de imágenes*

Miriam Gutiérrez Serrano

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
<b>2. Marco teórico</b>	<b>2</b>
2.1. Método de Tikhonov . . . . .	4
2.2. Método de Landweber . . . . .	4
<b>3. Resolución del problema directo</b>	<b>4</b>
<b>4. Resolución del problema inverso</b>	<b>5</b>
4.1. Reconstrucción en presencia de perturbaciones . . . . .	8
4.2. Reconstrucción en un instante posterior . . . . .	9
<b>5. Anexo</b>	<b>12</b>

## 1. Introducción

Este proyecto se basa en analizar y comparar distintas técnicas de regularización para obtener la temperatura inicial de una barra a partir de mediciones de su temperatura en ciertos instantes de tiempo. Tiene una gran relevancia en aplicaciones prácticas pero plantea un problema complicado debido a su carácter mal condicionado.

Para afrontar esta dificultad, se estudian distintos métodos de regularización, entre ellos el método de Tikhonov y el método de Landweber. A través de representaciones gráficas y análisis de los errores, se evaluará la precisión de cada uno de ellos, tanto en situaciones ideales como en las que hay presencia de perturbaciones en los datos. También se analizará cómo influye la elección de los parámetros en los distintos métodos y los de discretización del problema.

## 2. Marco teórico

La ecuación del calor en una dimensión describe la evolución temporal de la temperatura  $u(x, t)$  en una barra de longitud  $L$ , que cumple unas condiciones de contorno. La formulación matemática del problema directo es

$$\begin{cases} u_t - Du_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (1)$$

Donde  $D$  es el coeficiente de difusión y  $f(x)$  representa la temperatura inicial de la barra. En este proyecto, consideraremos el problema para  $D = 1$ .

Este problema puede resolverse mediante la técnica de separación de variables (método espectral), dando la siguiente solución:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{(n\pi)^2 Dt}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (2)$$

donde

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) dy.$$

También puede expresarse de forma integral como:

$$u(x, t) = \int_0^L K(x, y, t) f(y) dy, \quad (3)$$

donde el núcleo  $K(x, y, t)$  es

$$K(x, y, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(n\pi)^2 Dt}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right). \quad (4)$$

Podemos ver que (3) es un expresión de la forma

$$u = T(f)$$

donde  $T$  es un operador lineal.

Dividiremos el proyecto en problema directo y problema inverso. El directo consiste en determinar la temperatura  $g(x) = u(x, T)$  en un cierto instante de tiempo  $T > 0$ , conociendo la temperatura inicial. De esta forma, conocida  $f$ , tenemos que calcular la integral

$$g(x) = \int_0^L K(x, y, t) f(y) dy. \quad (5)$$

Para resolver el problema directo utilizaremos el método de diferencias finitas descrito en el Proyecto 2.

Sin embargo, el problema inverso consiste en determinar la temperatura inicial  $f(x)$ , conociendo la temperatura en un instante posterior  $T > 0$ , es decir,  $g(x) = u(x, T)$ . De la misma forma que en el directo, podemos plantear el problema de la siguiente forma: conocida  $g(x)$ , encontrar la función  $f$  tal que

$$\int_0^L K(x, y, t) f(y) dy = g(x). \quad (6)$$

Este tipo de problema está típicamente mal condicionado, pequeñas perturbaciones en los datos pueden producir grandes errores en la reconstrucción de  $f$ . Así, plantearemos el problema desde otros puntos de vista.

Para abordar numericámente el problema, se discretiza el intervalo  $[0, L]$  en  $M$  intervalos de la misma longitud  $\Delta y = L/M$  y aproximamos la integral con la regla del trapecio compuesta:

$$g(x_i) = \sum_{j=0}^M w_j K_N(x_i, y_j, T) f(y_j), \quad (7)$$

donde  $w_j$  denota los pesos de cuadratura y  $K_N$  el núcleo truncado en  $N$  términos, es decir,

$$K(x, y, t) \approx K_N(x, y, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^N e^{-\frac{(n\pi)^2 Dt}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right). \quad (8)$$

Evaluando en los nodos  $x_i = y_i = \frac{iL}{M}, i = 0, \dots, M$ , obtenemos la relación lineal  $AF = G$  donde  $F$  está formado por los valores  $f_i = f(y_i)$ ,  $G$  por  $g_i = g(x_i)$  y  $A$  es la matriz construida a partir de los valores del núcleo discretizado,

$$A = \frac{L}{M} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} K_N(x_0, y_0, T) & K_N(x_0, y_1, T) & \dots & K_N(x_0, y_{M-1}, T) & \frac{1}{2} K_N(x_0, y_M, T) \\ \frac{1}{2} K_N(x_1, y_0, T) & K_N(x_1, y_1, T) & \dots & K_N(x_1, y_{M-1}, T) & \frac{1}{2} K_N(x_1, y_M, T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2} K_N(x_M, y_0, T) & K_N(x_M, y_1, T) & \dots & K_N(x_M, y_{M-1}, T) & \frac{1}{2} K_N(x_M, y_M, T) \end{pmatrix}.$$

Como hemos comentado, debido al carácter mal condicionado del sistema  $AF = G$ , se utilizan métodos de regularización para obtener soluciones estables. En este proyecto se estudian el método de Tikhonov y el método de Landweber.

## 2.1. Método de Tikhonov

Buscamos  $f$  el mínimo de

$$\|Af - G\|^2 + \alpha\|f - f_0\|^2,$$

donde  $\alpha > 0$  es el parámetros de regularización y  $f_0$  es una aproximación inicial de  $f$  (normalmente  $f_0 = 0$ ). O equivalentemente, resolveremos

$$(A^*A + \alpha I)f = A^*G + \alpha f_0$$

También consideraremos el método de Tikhonov iterado.

## 2.2. Método de Landweber

Buscamos  $f$ , el mínimo de  $\|Af - G\|^2$  por el método de máximo descenso. Sigue el siguiente algoritmo:

$$\begin{aligned} f_0 &= 0 \\ f_{n+1} &= f_n - \mu A^*(Af - G), \quad n \geq 0. \end{aligned}$$

El parámetro  $\mu$  debe escogerse de forma que  $\mu\|A^*A\| \leq 1$ . En particular tomaremos  $\mu = \frac{0,95}{\|A^*A\|}$ .

Estos métodos nos permiten obtener reconstrucciones mejores de la solución siempre y cuando tomemos apropiadamente los distintos parámetros de regularización en cada uno de ellos.

## 3. Resolución del problema directo

Resolver el problema discreto directo consiste en multiplicar la matriz  $A$  por el vector  $F$ . Consideramos el problema (1) para  $D = 1$  con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{2}{\pi}(\pi - x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

En primer lugar resolvemos el problema por el método de diferencias finitas del anterior proyecto, utilizando como parámetros  $\Delta x = 0,0766$  y  $\Delta t = 9,99 \cdot 10^{-4}$  ( $M + 1 = 41$  y  $N + 1 = 1001T$ , con  $M$  y  $N$  correspondientes con la notación considerada en el método descrito). La solución obtenida en los puntos  $\tilde{x}_i$  se interpola mediante splines cúbicos para obtener la solución por el método espectral.

A continuación, se muestra la tabla correspondiente a los errores relativos obtenidos al comparar la solución espectral con la solución por diferencias finitas, para cada par de valores tomados para  $M$  y  $N$ . Hemos tomado  $M \in \{15, 30\}$  y  $N \in \{5, 10, 15\}$ ; y hemos considerado los casos  $T = 0,1$  y  $T = 1$ .

$M$	$N$	$\Delta x$	Error rel. cuando $T = 0,1$
15	5	0.20944	0.00273854
15	10	0.20744	0.00263018
15	15	0.20744	0.00263017
30	5	0.10472	0.00132741
30	10	0.10472	0.00138415
30	15	0.10472	0.00139420

Tabla 1: Resultados para  $T = 0,1$ .

$M$	$N$	$\Delta x$	Error rel. cuando $T = 0,1$
15	5	0.20944	0.00158063
15	10	0.20744	0.00158063
15	15	0.20744	0.00158063
30	5	0.10472	0.00117005
30	10	0.10472	0.00117005
30	15	0.10472	0.00117005

Tabla 2: Resultados para  $T = 1$ .

- Para un mismo valor de  $M$ , ¿cómo afecta variar  $N$ ?

Podemos observar que para  $M = 15$  y  $T = 0,1$ , al aumentar el valor de  $N$  el error reduce ligeramente, sobre todo para  $N = 10$  y  $15$  que el error es prácticamente el mismo. Sin embargo, fijando  $M = 30$ , a medida que aumentamos el valor de  $N$ , el error aumenta pero muy poco. Para  $T = 1$ , variar  $N$  no influye directamente en el error. Es decir, el valor de  $N$  no afecta a la solución obtenida con ambos métodos.

- Para un mismo valor de  $N$ , ¿cómo afecta variar  $M$ ?

Por otra parte, si fijamos  $N$ , si observamos más cambios al variar  $M$ . Los errores para  $M = 30$  son significativamente más pequeños. Obviamente, cuanto más grande sea el valor de  $M$ , mejor se aproxima la integral.

- Si fijamos los valores de  $M$  y  $N$ , ¿cambia el error relativo cuando aumenta  $T$ ?

Los errores relativos disminuyen cuando se pasa de  $T = 0,1$  a  $T = 1$  para cualquier combinación de  $M$  y  $N$ . Por ejemplo, tomando  $M = 15$  y  $N = 5$ , el error disminuye de 0,00273854 (para  $T = 0,1$ ) a 0,00158063 (para  $T = 1$ ).

## 4. Resolución del problema inverso

Resolver el problema inverso consiste en resolver el sistema de ecuaciones  $AF = G$ . Al igual que en el caso del problema directo, consideraremos el problema (1) para  $D = 1$  y temperatatura inicial (3).

Primero hemos utilizado el método de diferencias finitas para generar una aproximación de  $u(x, 0,4)$ , tomando  $M = 40$  y  $N = 400$ . Para obtener los valores aproximados de la temperatura en  $T = 0,4$  en los puntos  $x_i = iL/M$  para  $M = 30$ , interpolamos los valores obtenidos. Los datos obtenidos se almacenaron en el fichero `datos_T04_M30.mat`,

que contiene los valores de  $x_i$  y  $u_{\text{aprox}}$  para  $M = 30$  y  $T = 0.4$ . La figura siguiente muestra los valores de  $u(x, 0.4)$  que se usarán para resolver el problema inverso.

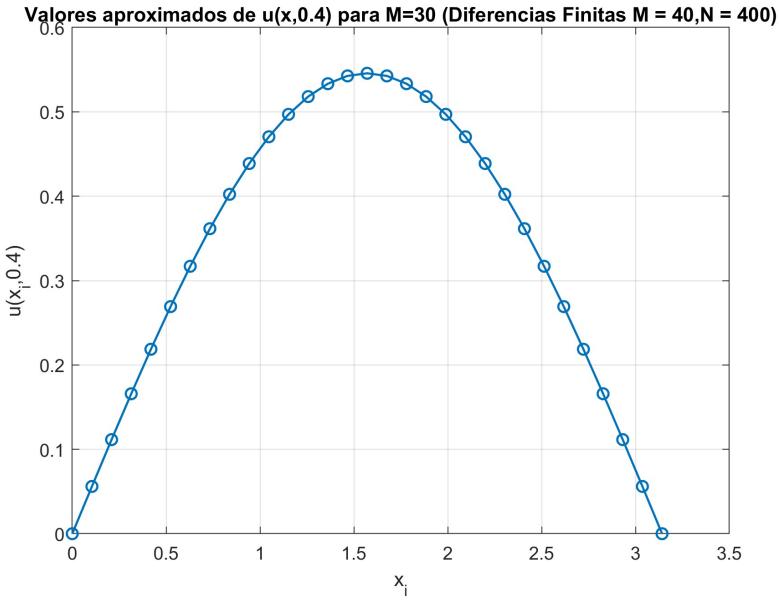


Figura 1

Una vez obtenidos los valores aproximados podemos comenzar a resolver el problema inverso. El objetivo es reconstruir la condición inicial  $f(x)$  resolviendo el sistema

$$AF = G,$$

donde  $A$  es la matriz del sistema correspondiente a seleccionar  $M = 30$  y  $N = 10$ . Debido al mal condicionamiento de la matriz, utilizamos primero el método de Tikhonov con  $\alpha = 10^{-5}$  y la aproximación inicial nula.

Para la elección de  $\alpha$  hemos representado la curva L para  $\alpha = 10^{-2}, 10^{-5}$  y  $10^{-8}$  y se ha tomado el valor más próximo a la esquina, como se puede ver en la siguiente figura:

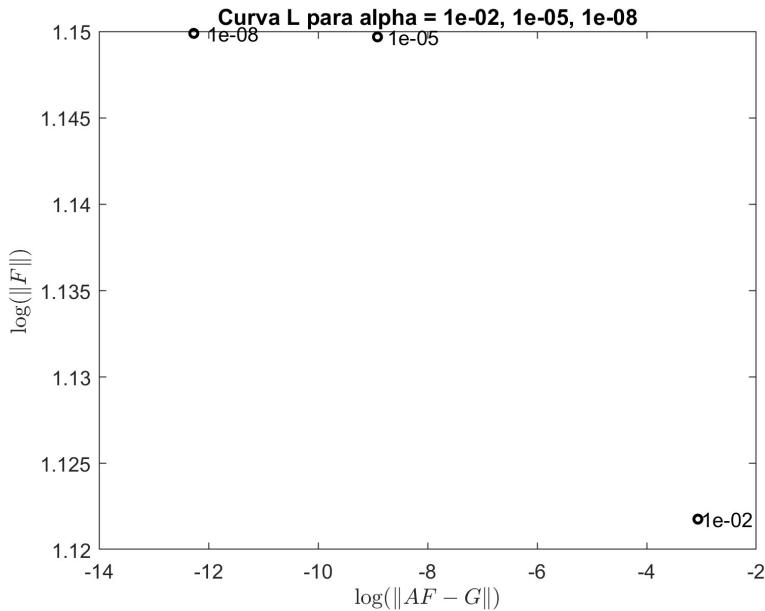


Figura 2

De esta forma, se ha comparado graficamente la temperatura inicial obtenida con la temperatura inicial exacta en (3).

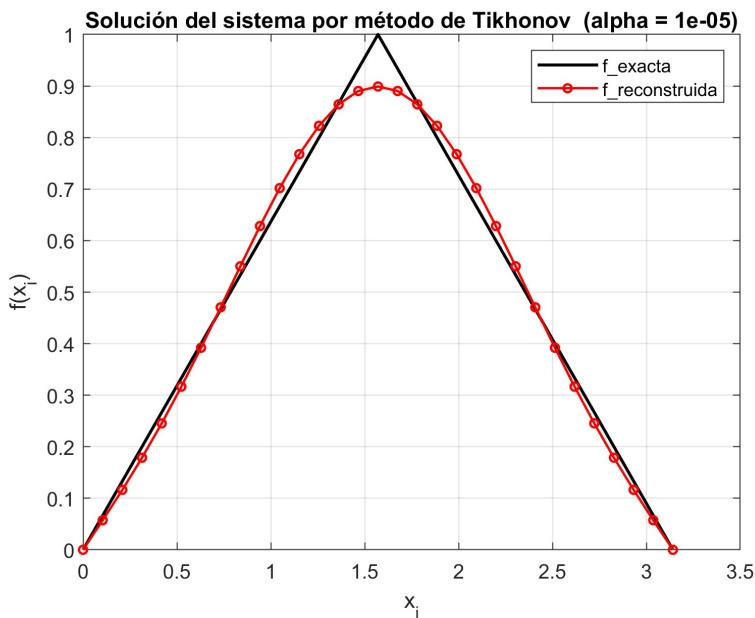


Figura 3

Además del método de Tikhonov se han considerado el método de Tikhonov 1 y de Tikhonov 2 (iterados para  $n = 1, 2$ ). El objetivo es observar si la iteración adicional mejora la solución. En ambos casos se ha utilizado el mismo parámetros de regularización  $\alpha = 10^{-5}$ , y los resultados se muestran en la siguiente figura

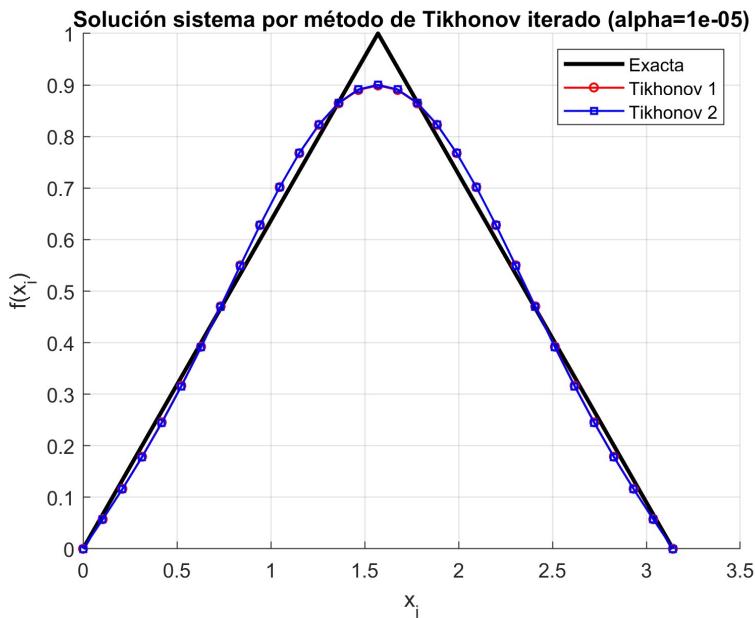


Figura 4

La gráfica no muestra grandes diferencias entre hacer 1 o 2 iteraciones en el método.

El otro método de regularización que se ha considerado es el método de Landweber, que al igual que en el caso anterior, esta basado en un método iterativo. En este proyecto, hemos tomado 3 valores distintos para la iteraciones,  $n = 10, 80$  y  $300$ . La figura que se muestra a continuación son las soluciones obtenidas para cada caso.

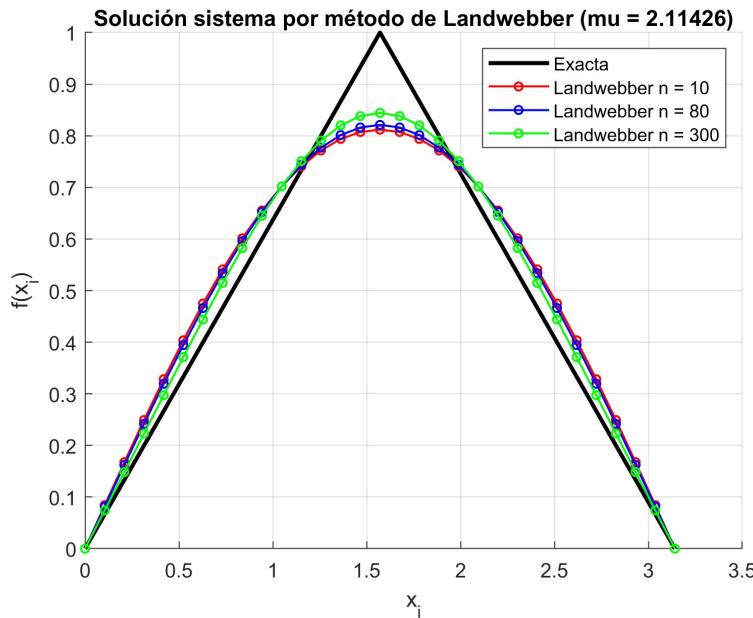


Figura 5

Podemos observar que a medida que se incrementa el número de iteraciones en el algoritmo la solución del sistema se aproxima más a la temperatura inicial del problema.

#### 4.1. Reconstrucción en presencia de perturbaciones

Para estudiar la sensibilidad de los métodos aplicados frente a errores en los datos, se ha introducido una perturbación al vector  $G$ . En concreto, a cada componente se le ha introducido un error aleatorio  $\varepsilon_i$  tal que  $|\varepsilon_i| \leq 0.001 \max(G)$ .

Una vez tomado este vector, hemos repetido los mismos pasos realizados anteriormente, aplicando el método de Landweber, Tikhonov, Tikhonov 1 y Tikhonov 2 con los mismos parámetros.

Para obtener resultados similares fue necesario ajustar  $\alpha$  en Tikhonov, aumentándolo hasta  $\alpha = 10^{-3}$ .

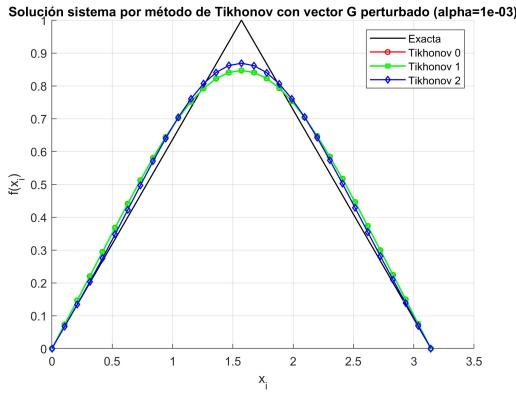


Figura 6

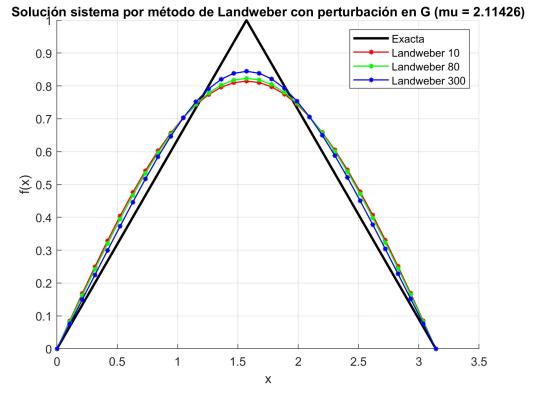


Figura 7

Podemos observar que las reconstrucciones son muy similares pero no se aproximan a la solución tanto como en los otros casos sin perturbar. Por ejemplo, si tomamos  $\alpha = 10^{-5}$ , como anteriormente, obtenemos la siguiente solución

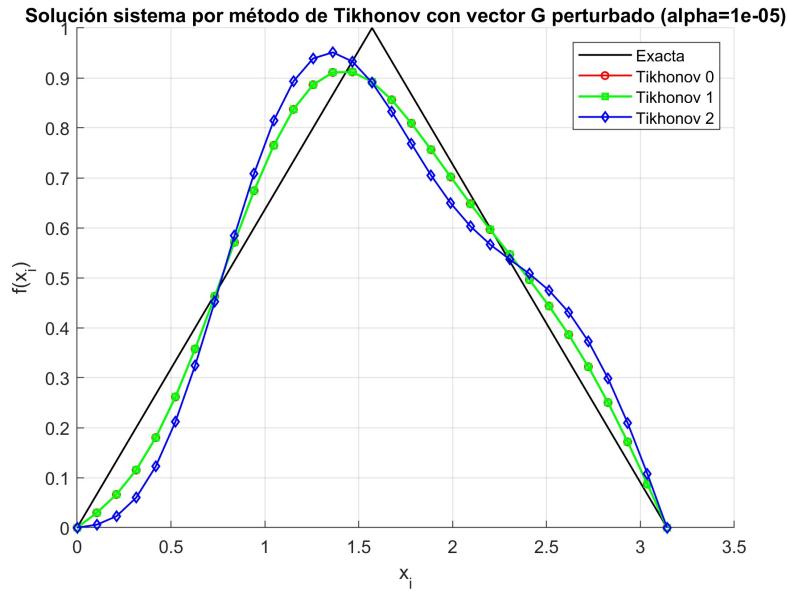


Figura 8

Esta reconstrucción es totalmente inestable.

## 4.2. Reconstrucción en un instante posterior

Finalmente, se ha considerado un instante temporal mayor,  $T = 1$ , y hemos procedido de forma analoga. En este caso, hemos construido el vector  $G$  obteniendo los valores aproximados de  $u(x, 1)$ . Los datos obtenidos se almacenaron en `datos_T1_M30.mat` y se muestran graficamente en la siguiente figura.

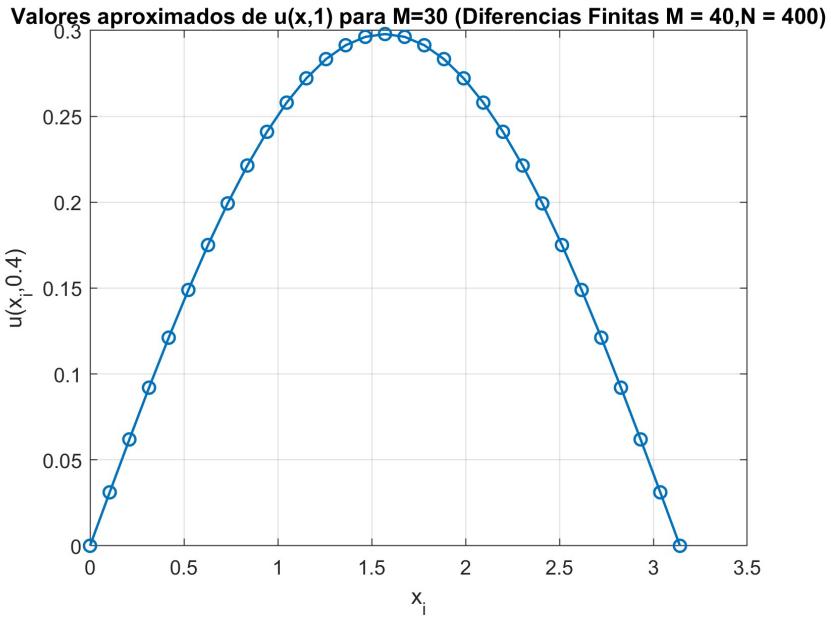


Figura 9

En primer lugar, se aplicaron los métodos de regularización Tikhonov y Landweber con los mismos parámetros de discretización que anteriormente,  $M = 30$  y  $N = 10$ .

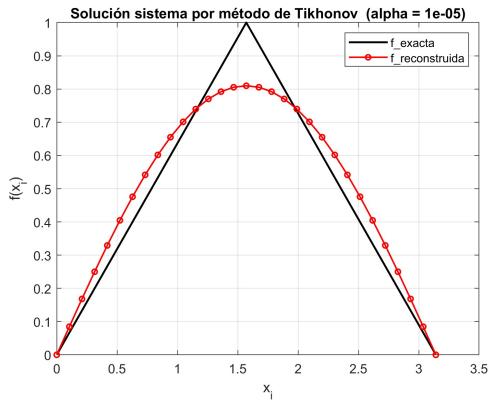


Figura 10

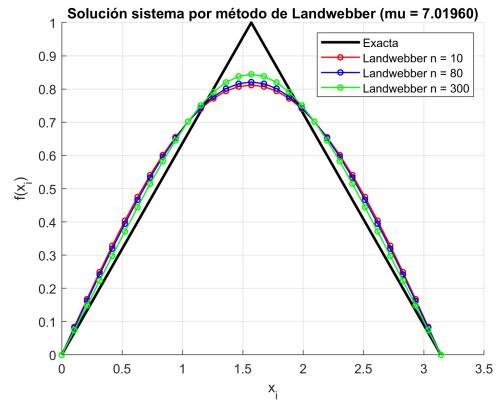


Figura 11

La figura (10) muestra la reconstrucción obtenida mediante el método de Tikhonov con  $\alpha = 10^{-5}$ . De nuevo, la regularización mantiene cierta estabilidad en la solución, pero no se obtiene la misma fidelidad que para el caso  $T = 0.4$ . En la figura (11) se muestran los resultados obtenidos con el método de Landweber para distintos números de iteraciones (10, 80 y 300). Se observa que, aunque el método aproxima la condición inicial, la reconstrucción presenta una pérdida de precisión a medida que disminuye el número de iteraciones.

Posteriormente, se aplicó el método de Tikhonov iterado, como se muestra en la siguiente figura.

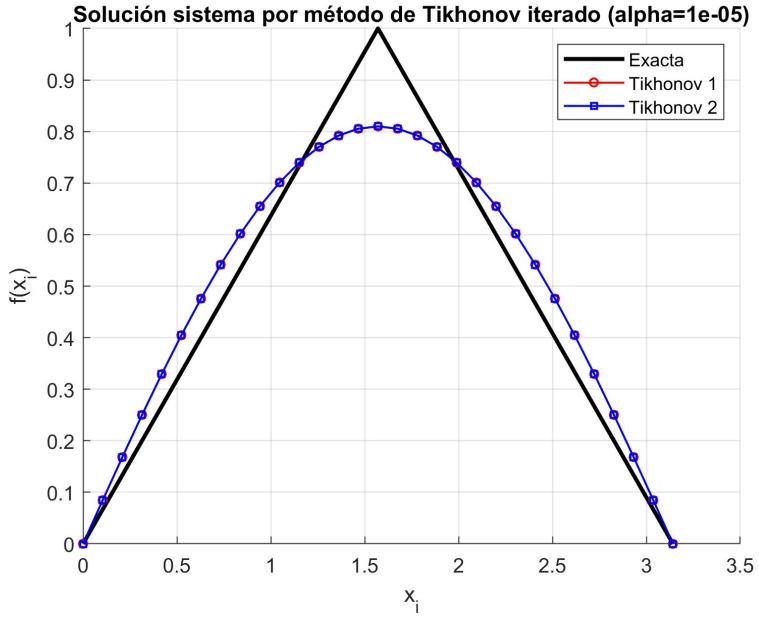


Figura 12

Podemos observar que la reconstrucción para  $n = 1$  y  $n = 2$  es prácticamente idéntica. Sin embargo, con respecto a Tikhonov clásico mejora pero no significativamente.

De nuevo se ha perturbado el vector  $G$  obtenido añadiendo el mismo error aleatorio pequeño,  $\varepsilon_i$ , tal que  $|\varepsilon_i| \leq 0.001 \max(G)$ .

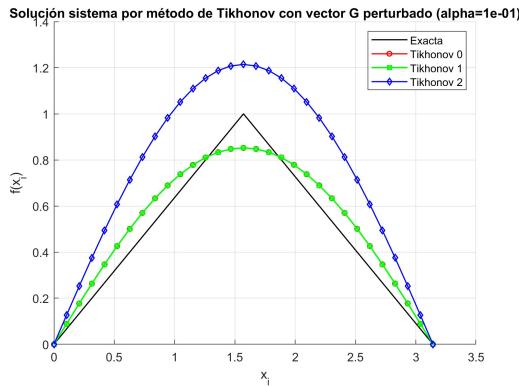


Figura 13

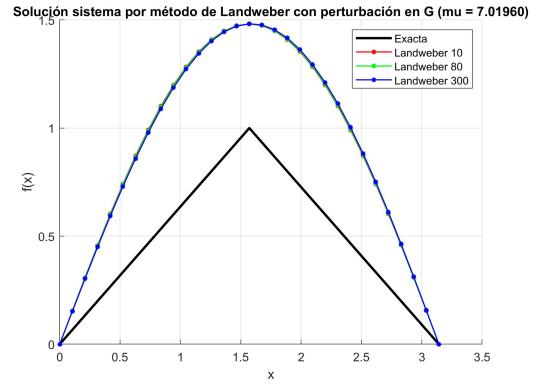


Figura 14

Las figuras (13) y (14) muestran los resultados obtenidos mediante Tikhonov (y Tikhonov 1 y 2) y Landweber, respectivamente, mediante los datos perturbados. Como era de esperar, la presencia de error empeora la calidad de la reconstrucción notablemente. En el caso de Landweber, no se ha obtenido una buena reconstrucción ni considerando un número alto de iteraciones ni bajo.

Por otra parte, para el método de Tikhonov, tomando el parámetro de regularización  $\alpha = 10^{-1}$ , hemos conseguido que Tikhonov y Tikhonov 1 se aproximen razonablemente mejor a la función exacta.

En conclusión, los resultados obtenidos en la reconstrucción tomando  $T = 1$  es significativamente peor. La evolución temporal suaviza las soluciones de la ecuación, eliminando

información esencial sobre la condición inicial y haciendo que el problema inverso sea altamente sensible a errores y perturbaciones. Como cabía esperar, la reconstrucción de la condición inicial es menos fiel.

## 5. Anexo

A continuación, se presentan los códigos utilizados en este trabajo, los cuales se adjuntan como archivos separados. No obstante, todos los scripts utilizados, junto con las gráficas generadas, están recopilados en el archivo principal Proyecto3.mlx.

### DiferenciasFinitas2.m

Resuelve el problema planteado por el esquema de diferencias finitas considerado en el proyecto 2.

### espectral.m

Resuelve el problema planteado por el esquema espectral considerado en el proyecto actual y calcula el error relativo entre el anterior y este.

### tikhonov

Método que resuelve el sistema  $Ax = b$  usando el método de regularización de Tikhonov

### tikhonov\_iterado.m

Método que resuelve el sistema  $Ax = b$  usando el método de regularización de Tikhonov para  $n$  iteraciones.

### landweber.m

Método que resuelve el sistema  $Ax = b$  usando el método de regularización de Landweber.

### CurvaL.m

Genera la Curva L para la elección del parámetro de regularización  $\alpha$  en el método de Tikhonov.

### Ej2\_1.m

Genera los datos de la aproximación de  $u(x, 0.4)$  por diferencias finitas y se almacenan en un fichero.

### Ej2\_2.m

Genera las gráficas correspondientes a la reconstrucción del sistema por el método de Tikhonov.

## **Ej2\_3.m**

Genera las gráficas correspondientes a la reconstrucción del sistema por el método de Tikhonov iterado.

## **Ej2\_4.m**

Genera las gráficas correspondientes a la reconstrucción del sistema por el método de Landweber.

## **Ej2\_5.m**

Genera las gráficas correspondientes a la reconstrucción del sistema perturbado por todos los métodos utilizados.

## **Ej2\_6.m**

Script que recapitula todos los anteriores considerando  $T = 1$ .

Los archivos correspondientes se adjuntan junto con este informe para su consulta y ejecución.