RESULTADOS PARA ALUMNAS/OS, P2 – EDOSD, curso 2024−25.

Parte 1, ejemplos:

(1) Adams-Bashforth de k pasos (explícitos de orden k):

a. De 2 pasos: $y_{n+1} - y_n = \frac{h}{2}\{3f_n - f_{n-1}\}$.

b. De 3 pasos: $y_{n+1} - y_n = \frac{h}{12}\{23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}\}$.

c. De 4 pasos: $y_{n+1} - y_n = \frac{h}{24}\{55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}\}$.

(2) Adams-Moulton de k pasos (implícitos de orden $k+1$):

a. De 2 pasos: $y_n - y_{n-1} = \frac{h}{12}\{5f_n + 8f_{n-1} - f_{n-2}\}$.

b. De 3 pasos: $y_n - y_{n-1} = \frac{h}{24}\{9f_n + 19f_{n-1} - 5f_{n-2} + f_{n-3}\}$.

c. De 4 pasos: $y_n - y_{n-1} = \frac{h}{720}\{251f_n + 646f_{n-1} - 264f_{n-2} + 106f_{n-3} - 19f_{n-4}\}$.

(3) Nyström de k pasos (explícitos de orden k):

a. De 3 pasos: $y_{n+1} - y_{n-1} = \frac{h}{3}\{7f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}\}$.

b. De 4 pasos: $y_{n+1} - y_{n-1} = \frac{h}{3}\{8f_n - 5f_{n-1} + 4f_{n-2} - f_{n-3}\}$.

(4) Milne-Simpson de k pasos (implícitos, de orden 4 si $k = 2$, de orden $k+1$ si $k \geq 4$):

a. De 2 pasos (método de Simpson): $y_n - y_{n-2} = \frac{h}{3}\{f_n + 4f_{n-1} + f_{n-2}\}$.

b. De 4 pasos: $y_n - y_{n-2} = \frac{h}{90}\{29f_n + 124f_{n-1} + 24f_{n-2} + 4f_{n-3} - f_{n-4}\}$.

(5) BDF de k pasos (implícitos de orden k si $1 \leq k \leq 6$):

a. De 2 pasos: $3y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 2hf_{n+2}$.

b. De 3 pasos: $11y_{n+3} - 18y_{n+2} + 9y_{n+1} - 2y_n = 6hf_{n+3}$.

c. De 4 pasos: $25y_{n+4} - 48y_{n+3} + 36y_{n+2} - 16y_{n+1} + 3y_n = 12hf_{n+4}$.

(6) Consistente, pero no estable (falla la condición de Dahlquist porque el primer polinomio característico tiene una raíz doble de módulo 1). Por tanto, no convergente:

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n = h\{f_{n+1} - f_n\}.$$

(7) Consistente, pero no estable (falla la condición de Dahlquist porque el primer polinomio característico tiene alguna raíz de módulo mayor que 1). Por tanto, no convergente:

$$y_{n+5} - 5y_{n+4} + 12y_{n+3} - 16y_{n+2} + 12y_{n+1} - 4y_n = hf_{n+1}.$$

(8) Estable, pero no consistente (falla la condición $\rho(1) = 0$). Por tanto, no convergente:

$$2y_{n+1} + y_n = h\{f_{n+1} + f_n\}.$$

(9) Estable, pero no consistente (falla la condición $\rho'(1) = \sigma(1)$). Por tanto, no convergente:

$$y_{n+1} - y_n = h\{f_{n+1} + f_n\}.$$

RESULTADOS PARA ALUMNAS/OS, P2 – EDOSD, curso 2024–25.

Parte 2, tablas para el ejemplo de prueba n.º 3 de la P1:

Se recuerda que el ejemplo de prueba n.º 3 de la P1 es el siguiente PVI:

$$y' + y = \mathrm{e}^{-x} y^2, \qquad x \in [0,5],$$

con la condición inicial $y(0) = 1$, y que su solución exacta es $y(x) = 2/(\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}) = \operatorname{sech} x$.

Los resultados numéricos que siguen han sido obtenidos para los criterios de convergencia explicados en clase, tomando $\varepsilon = 10^{-14}$ y $\delta = 10^{-11}$.

RESULTADOS OBTENIDOS CON EL BDF5 (empleando Newton para resolver el sistema no lineal que surge en cada paso de tiempo):

$\boldsymbol{N}$	Norma $\mathbf{2}$ del error en $\boldsymbol{x} = \mathbf{5}$ (efectuando el arranque con RK clásico, de orden 4)
$\mathbf{10}$	2.429×10^{-3}
$\mathbf{100}$	5.773×10^{-9}
$\mathbf{1000}$	2.451×10^{-14}
$\mathbf{10000}$	4.528×10^{-16}

Como se observará en las siguientes tablas, el orden 5 del BDF5 se pierde cuando el arranque se realiza con un método de orden menor que 4 (**dicho de otra manera, es preciso arrancar con un método que tenga al menos orden $\mathbf{4}$**).

Es posible que los errores más pequeños que aquí se presentan, tanto en la tabla anterior como en las que siguen, estén afectados por errores de redondeo, razón por la cual los resultados obtenidos por los alumnos en esos casos pueden ser ligeramente distintos. Deben respetarse, no obstante, los órdenes de magnitud.

$\boldsymbol{N}$	Norma $\mathbf{2}$ del error en $\boldsymbol{x} = \mathbf{5}$ (efectuando el arranque con Euler explícito, de orden 1)
$\mathbf{10}$	1.049×10^{-2}
$\mathbf{100}$	1.341×10^{-4}
$\mathbf{1000}$	1.498×10^{-6}
$\mathbf{10000}$	1.514×10^{-8}

$\boldsymbol{N}$	Norma $\mathbf{2}$ del error en $\boldsymbol{x} = \mathbf{5}$ (efectuando el arranque con el RK explícito de orden 2 de la P2)
$\mathbf{10}$	8.095×10^{-5}
$\mathbf{100}$	3.091×10^{-6}
$\mathbf{1000}$	3.716×10^{-9}
$\mathbf{10000}$	3.782×10^{-12}

$\boldsymbol{N}$	Norma $\mathbf{2}$ del error en $\boldsymbol{x} = \mathbf{5}$ (efectuando el arranque con el RK explícito de orden 3 de la P2)
$\mathbf{10}$	2.563×10^{-3}
$\mathbf{100}$	1.251×10^{-7}
$\mathbf{1000}$	1.432×10^{-11}
$\mathbf{10000}$	1.591×10^{-15}