

POLITECNICO DI TORINO

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Aerospaziale



Tesi di Laurea Triennale

ANALISI DI UN FENOMENO AEROELASTICO DINAMICO: IL FLUTTER

Relatore

prof. Michele IOVIENO

Candidato

Miriam LUCHETTI

Ottobre 2023

*A mio papà,
mio punto di riferimento nella
vita e durante questo percorso*

Abstract

L'aeroelasticità è una disciplina che si occupa dello studio dell'interazione tra forze aerodinamiche, elastiche ed inerziali. I fenomeni aeroelastici interessano sia il campo dell'ingegneria meccanica e civile che quello aeronautico, in questa sede ci concentreremo su quest'ultimo.

Si parla di problema aeroelastico quando, in presenza di un incremento di carico aerodinamico, la struttura viene deformata facendo variare la sua incidenza e aumentando ulteriormente il carico aerodinamico. Noto che le forze aerodinamiche sono direttamente proporzionali alla velocità, si raggiungerà un valore della velocità per il quale le forze aerodinamiche sono bilanciate dalle forze elastiche interne, superata questa le forze aerodinamiche prevarranno con conseguente aumento indefinito della deformazione.

I primi studi sull'aeroelasticità risalgono agli anni '20 conseguentemente a problemi in campo aeronautico fino a quel momento attribuiti ad altre cause, portando così alla comprensione dell'importanza dell'interazione tra fluido e struttura.

Con l'impiego dei materiali metallici l'importanza dell'aeroelasticità diventò sempre più evidente, in quanto caratterizzati da un coefficiente di smorzamento inferiore ai materiali precedentemente usati, non permettendo alla struttura di assorbire una parte dell'energia e aumentando l'effetto della deformazione. Inoltre la tendenza a realizzare profili alari sempre più sottili e con allungamenti alari sempre maggiori rese le strutture molto suscettibili a questo tipo di fenomeni. Dopo la seconda guerra mondiale emersero ulteriori problemi legati alla forma in pianta delle ali e alla velocità sempre più elevata che i velivoli potevano raggiungere.

Indice

Elenco delle Immagini	VI
1 Flutter	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Flutter su Pannelli	2
2 Analisi del Fenomeno	4
2.1 Fondamenta Matematiche dell'Aeroelasticità	4
2.1.1 Profilo Senza Alettone	4
2.1.2 Profilo con alettone	6
2.2 Equazioni del Moto per un Profilo con Alettone Sottoposto a Fenomeni Aeroelastici Dinamici	9
2.2.1 Profilo con Alettone in Moto Generico	13
2.2.2 Profilo con Alettone in Moto Armonico	13
2.2.3 Risposta Aeroelastica a Carichi Aerodinamici Variabili nel Tempo con Legge Armonica	17
2.2.4 L'instabilità Aeroelastica Dinamica e il Flutter	21
2.2.5 Misura dell'Amplificazione o dello Smorzamento di Oscillazioni ad Ampiezza Variabile	22
2.2.6 Flutter Classico con Modello Semplificato	23
2.3 Teoria Generale dell'Instabilità Aerodinamica di Theodorsen	27
2.3.1 Potenziale della Velocità, Forze e Momenti Dovuti alla Parte non Circolatoria	27
2.3.2 Potenziale della Velocità, Forze e Momenti Dovuti alla Parte Circolatoria	28
3 Influenza di Parametri sul Flutter	29
3.1 Effetto del Momento Statico sul Flutter	29
3.2 Effetto del Numero di Mach e della quota di volo sul Flutter	30
3.3 Effetto dell'angolo di Freccia sul Flutter	32

4	Il Flutter anche al di Fuori dell'Ambito Aeronautico	34
4.1	Il Ponte di Tacoma	34
4.2	Le Barche a Vela da Regata	35
4.3	I Missili	37
4.3.1	Esempio Numerico	38
5	Conclusioni	43
A	Codice Matlab	45
A.1	Velocità di Flutter al Variare della Quota per Diversi Materiali . . .	45
A.2	Velocità di Flutter al Variare della Quota per Diverse Semiaperture Alari	47
A.3	Velocità di Flutter al Variare della Quota per Diversi Spessori . . .	49
	Bibliografia	51

Elenco delle Immagini

2.1.1 Campo di moto intorno a una lamina piana con incidenza in regime subsonico e forze che vengono generate [G. Chiocchia, <i>Principi di Aeroelasticità</i> (2014), Levrotto&Bella, pagina 96]	6
2.1.2 Profilo alare con alettone [G. Chiocchia, <i>Principi di Aeroelasticità</i> (2014), Levrotto&Bella, pagina 97]	6
2.1.3 Carico aerodinamico perturbativo su una lamina piana con alettone causato da una deflessione infinitesima [G. Chiocchia, <i>Principi di Aeroelasticità</i> (2014), Levrotto&Bella, pagina 99]	8
2.2.1 Riferimento per lo studio di fenomeni aeroelastici dinamici di un profilo alare con alettone [G. Chiocchia, <i>Principi di Aeroelasticità</i> (2014), Levrotto&Bella, pagina 193]	10
2.2.2 Risposta aeroelastica in traslazione verticale ad una raffica armonica unitaria per differenti velocità del fluido. [G. Chiocchia, <i>Principi di Aeroelasticità</i> (2014), Levrotto&Bella, pagina 237]	20
2.2.3 Risposta aeroelastica in traslazione verticale ad una raffica armonica unitaria per differenti valori del rapporto tra la massa della struttura e quella del fluido. [G. Chiocchia, <i>Principi di Aeroelasticità</i> (2014), Levrotto&Bella, pagina 237]	21
3.1.1 Effetto del momento statico e del rapporto delle frequenze proprie sulla velocità di flutter. [G. Chiocchia, <i>Principi di Aeroelasticità</i> (2014), Levrotto&Bella, pagina 275]	30
3.1.2 Effetto del momento statico e del rapporto di massa sulla velocità di flutter. [G. Chiocchia, <i>Principi di Aeroelasticità</i> (2014), Levrotto&Bella, pagina 276]	30

3.2.1 Esempi qualitativi di relazioni di compatibilità tra la velocità di flutter e il numero di Mach. Le tre curve blu, rossa e verde sono esempi di possibili risultati di calcolo. Il caso della curva blu non mostra intersezioni con la retta atmosferica e quindi esclude ogni possibilità di flutter. Il caso verde presenta due velocità critiche con una zona di stabilità centrale, in genere la velocità più bassa è subsonica e quella più alta è supersonica. Nel caso rosso la velocità di flutter è solo una e può essere sia subsonica che supersonica. . . .	31
4.1.1 Andamento dei vortici per diverse velocità del vento, [<i>The failure of the Tacoma Bridge: a physical model</i> , D. Green, W. G. Unruh] . . .	35
4.2.1 Andamento dello smorzamento con evidenziate zone di stabilità e instabilità, [<i>Exploratory Study on the Flutter Behavior of modern yacht keels and appendages</i> , L. Mouton, A. Finkelstein]	36
4.3.1 Missile Aspide della marina peruviana analogo a quelli italiani. . . .	38
4.3.2 Rappresentazione di un impennaggio del missile aspide con alcune dimensioni evidenziate	39
4.3.3 Risultati dell'esempio numerico: velocità di flutter al variare della quota per diversi materiali. La quota, sull'asse x, è misurata in metri e la velocità di flutter, sull'asse y, in metri al secondo. Data la velocità massima raggiungibile dal missile di 1360 m/s è possibile volare a velocità massima a qualsiasi quota solo con un impennaggio in tungsteno. Per valori di G minori di quelli del tungsteno la velocità di flutter diminuisce fino ad incontrare la velocità massima di volo. Si noti che se il missile è fatto di alluminio o titanio non è mai possibile volare alla velocità massima.	40
4.3.4 Risultati dell'esempio numerico: velocità di flutter al variare della quota per diverse semiaperture alari. La quota, sull'asse x, è misurata in metri e la velocità di flutter, sull'asse y, in metri al secondo. Il materiale scelto in questo caso è l'acciaio. Si nota che per le semiaperture di 35 cm e 37,5 cm è possibile volare ala velocità massima a qualsiasi quota. Questo non è vero per le semiaperture di 40 cm o superiori, in cui la velocità di flutter diminuisce fino ad incontrare la velocità massima consentita al missile che è di 1360 m/s.	41

4.3.5 Risultati dell'esempio numerico: variazione della velocità di flutter al variare della quota per diversi spessori. La quota, sull'asse x, è misurata in metri e la velocità di flutter, sull'asse y, in metri al secondo. Il materiale scelto in questo caso è l'acciaio e la semiapertura alare è di 0,4 m. Si nota che con uno spessore di 11 mm o superiore è possibile volare con la velocità massima del missile a qualsiasi quota, per spessori inferiori a 8 mm non è mai possibile volare alla velocità massima. Dato un impennaggio di spessore 9 mm non è possibile volare alla velocità massima di 1360 m/s in quanto la quota di tangenza è di 3500 m.	42
5.0.1 Metodo per il controllo passivo del flutter sui ponti, [<i>Parametric flutter analysis of bridges stabilized with eccentric wings</i> , U. Starossek, RT. Starossek]	44

Capitolo 1

Flutter

1.1 Introduzione

I fenomeni aeroelastici possono essere divisi in due famiglie:

- **fenomeni aeroelastici statici:** ottenuti dall'unione delle forze aerodinamiche con quelle elastiche.
- **fenomeni aeroelastici dinamici:** ottenuti dall'unione di forze aerodinamiche, elastiche e inerziali.

Se la geometria del velivolo e i carichi aerodinamici su di essa applicati variano nel tempo si può manifestare un esempio di aeroelasticità dinamica: il Flutter.

Il flutter è uno degli esempi più tipici di fenomeno aeroelastico: è una vibrazione autoeccitata dovuta all'interazione tra forze aerodinamiche, inerziali ed elastiche. Dopo l'instaurazione del flutter l'aeromobile presenta oscillazioni che potrebbero causare la rottura per fatica della struttura con eventuali incidenti catastrofici. Quando la velocità di volo è bassa l'ampiezza delle vibrazioni che interessano la struttura viene attenuata, all'aumentare della velocità di volo le vibrazioni vengono smorzate meno e possono essere anche amplificate. Inizialmente il flutter era ritenuto un problema che riguardava solo pannelli isotropi, rivestimenti della fusoliera e strutture alari, invece oggi lo si studia anche in ambiti al di fuori del campo aerospaziale.

L'origine dell'instazionarietà può trovarsi nella struttura, in seguito ad un azionamento improvviso di una superficie mobile, al rilascio di un carico, oppure nella corrente che investe il velivolo, per esempio nel caso di una raffica che induce carichi aerodinamici variabili nella struttura che a sua volta risponde con deformazioni variabili nel tempo.

L'obiettivo dello studio del flutter è quello di prevedere l'ampiezza e la durata della risposta. Esistono dei parametri la cui variazione consente di ottenere valori

per cui il fenomeno decade o si amplifica. In corrispondenza dei valori critici in cui la risposta della struttura ha ampiezza costante si parla di flutter. In questa sede parleremo di flutter non solo come fenomeno che si instaura in corrispondenza dei valori critici ma anche per riferirci a quello che rigorosamente viene chiamato post-flutter, cioè i fenomeni che si svolgono nella regione instabile.

1.2 Futtter su Pannelli

Il fenomeno del flutter si può manifestare anche nei pannelli di rivestimento del velivolo quando sono lambiti da una corrente veloce su una faccia e si trovano a pressione costante sull'altra. Si può generare una configurazione oscillatoria che ricorda quella di una vela sbattente, con la differenza che il pannello presenta una rigidità flessionale. Due caratteristiche permettono di distinguere il flutter dei pannelli da quello delle ali:

- è un fenomeno tipicamente supersonico. Questo perchè un pannello incastrato, cioè vincolato nel suo riquadro, forma una sistema rigido in cui comportamenti instabili possono verificarsi solo in presenza di notevoli forze aerodinamiche come sono quelle del regime supersonico. Le prime evidenze di questo tipo di flutter risalgono alla seconda guerra mondiale, quando alcuni fallimenti nei lanci dei missili tedeschi furono attribuiti all'instabilità aeroelastica dei pannelli esterni.
- la presenza di importanti aspetti non lineari, che portano l'oscillazione a stabilizzarsi su un ciclo limite di ampiezza finita. A causa di ciò i pannelli non manifestano catastrofici collassi strutturali come le ali, ma l'affaticamento del materiale può condurre in tempi più o meno lunghi al loro cedimento. Se il fenomeno si manifesta è necessario sostituire i pannelli e i suoi supporti, oltre a cercare di prevenirne la ricomparsa.

L'esperienza e la teoria mostrano, in accordo, che la velocità critica di flutter di un pannello dipende da:

- la natura dei vincoli: se il pannello è incastrato ai bordi o se è libero di ruotare e su quanti lati si estende il vincolo.
- l'eventuale stato di precompressione con cui il pannello è montato nel suo riquadro.
- la forma del pannello o l'allungamento (se il pannello è rettangolare), cioè il rapporto tra la lunghezza b del lato normale alla corrente e quella l del lato ad essa parallelo.

- l'eventuale riscaldamento del pannello per effetto aerodinamico, non trascurabile a velocità ipersoniche.
- la struttura interna: se il pannello è omogeneo o costruito in materiale composito a strati e fibre.
- la curvatura del pannello, che può essere semplice o doppia.
- l'entità dello smorzamento strutturale.
- il volume della cavità sottostante il pannello.

Capitolo 2

Analisi del Fenomeno

2.1 Fondamenta Matematiche dell'Aeroelasticità

In questa analisi del flutter consideriamo tutti i comportamenti strutturali e aerodinamici come lineari, escludiamo quindi sia le ampie deformazioni che il passaggio al regime transonico e il distacco della vena fluida dalla parete. Nonostante i fenomeni in 2D si possano considerare solo come delle approssimazioni di quelli 3D, rimangono validi per la trattazione di fenomeni aeroelastici che coinvolgono fusoliera e piani di coda che si sviluppano nel piano di simmetria del velivolo.

Dal punto di vista qualitativo il comportamento di un profilo alare sottile si può approssimare con quello di una lamina piana investita con incidenza in quanto in campo lineare è possibile scomporre l'azione aerodinamica in due componenti: un contributo dovuto allo spessore e uno dovuto alla linea d'asse e all'incidenza. Il primo contributo, essendo il profilo simmetrico e investito a piccola incidenza, non produce portanza e quindi neanche effetti aeroelastici; il secondo può essere scomposto nella somma di due contributi: uno dovuto alla corda e all'incidenza e l'altro all'inarcamento. Assumendo l'inarcamento come piccolo si ha che il primo contributo prevale sul secondo. Lo studio del fenomeno aerodinamico come se fosse prodotto da una lamina coincidente con la corda e con l'incidenza di quest'ultima significa quindi studiare gli aspetti dominanti del problema e ottenere risultati qualitativamente corretti. Inoltre è necessario specificare che questi risultati valgono per incidenze lontane da quelle di stallo.

2.1.1 Profilo Senza Alettone

La portanza L sviluppata da un profilo ad incidenza α , misurata tra la sua direzione di portanza nulla e quella della corrente di velocità \mathbf{V}_∞ che lo investe, è espressa

tramite il coefficiente adimensionale C_L

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 l}$$

dove ρ_∞ è la densità dell'aria all'infinito a monte e l è la corda della lamina. Il coefficiente di portanza C_L è l'integrale del carico locale adimensionale, cioè della differenza tra i coefficienti di pressione tra dorso e ventre $c_p^+ - c_p^-$ definiti come

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2}$$

Oltre alla portanza agisce anche un momento aerodinamico M calcolato rispetto ad un punto, questo viene espresso con un coefficiente di momento C_M

$$C_M = \frac{M}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 l^2}$$

Portanza e momento aerodinamico costituiscono il sistema risultante delle pressioni aerodinamiche sul profilo alare. I punti caratteristici di questo sistema sono:

- Fuoco: il momento aerodinamico calcolato rispetto a questo punto risulta indipendente dal valore dell'incidenza e prende il nome di momento focale.
- Centro aerodinamico: il momento aerodinamico calcolato rispetto ad esso è nullo. Questo punto risulta essere il punto d'applicazione della risultante delle pressioni, a differenza del fuoco, questo varia al variare dell'incidenza.

Per una lamina piana in un fluido la cui compressibilità può essere trascurata il fuoco e il centro aerodinamico coincidono e sono posizionati entrambi nel quarto anteriore. In questo caso il coefficiente di momento aerodinamico in un punto A che si trova ad una ascissa x_A misurata dal bordo di attacco è

$$C_{MA} = C_L \left(\frac{x_A}{l} - \frac{1}{4} \right)$$

Questo non è più valido per un profilo generico, anche se questi punti non si allontanano molto dal quarto anteriore. La definizione del sistema avviene quindi tramite momento focale e portanza. In regime compressibile lineare si definisce la quantità $\beta_\infty = \sqrt{|1 - M_\infty^2|}$ dove M_∞ è il numero di Mach della corrente indisturbata. Se il flusso è subsonico tale quantità può essere usata per ricavare i coefficienti di portanza e momento aerodinamico, infatti:

$$C_L = \frac{(C_L)_{inc}}{\beta_\infty}; \quad C'_L = \frac{(C'_L)_{inc}}{\beta_\infty}; \quad C_M = \frac{(C_M)_{inc}}{\beta_\infty}$$

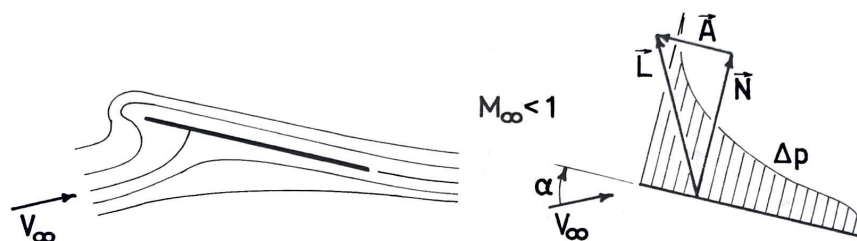


Figura 2.1.1: Campo di moto intorno a una lamina piana con incidenza in regime subsonico e forze che vengono generate [G. Chiocchia, *Principi di Aeroelasticità* (2014), Levrotto&Bella, pagina 96]

La figura 2.1.1 mostra le linee di corrente e la differenza tra le pressioni su ventre e dorso della lamina, dato che sia investita da una corrente subsonica linearizzata. Si nota che la distribuzione di carico non è costante e non si ha resistenza, questo costituisce il paradosso di D'Alembert. La forza normale N è dovuta alla distribuzione delle pressioni, la A è causata dalla circolazione della corrente intorno al bordo d'attacco. La risultante è la portanza L perpendicolare a V_∞ .

2.1.2 Profilo con alettone

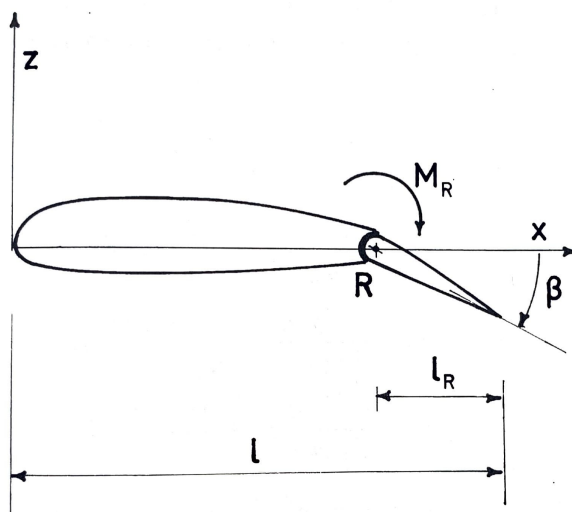


Figura 2.1.2: Profilo alare con alettone [G. Chiocchia, *Principi di Aeroelasticità* (2014), Levrotto&Bella, pagina 97]

L'allettone influenza molto un profilo dal punto di vista aeroelastico. Una deflessione di β genera un momento aerodinamico aggiuntivo M_R intorno alla cerniera R. Data l_R come la corda dell'allettone si ottiene il rapporto di forma $\lambda_R = l_R/l$. Per descrivere adeguatamente il sistema delle forze agenti sono necessari quattro coefficienti aerodinamici, oltre a quelli di portanza e momento aerodinamico già definiti. Il coefficiente di momento di cerniera:

$$C_{MR} = \frac{M_R}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 l_R^2}$$

Il coefficiente di carico sull'allettone:

$$C_{LR} = \frac{L_R}{\frac{1}{2}\rho_\infty V_\infty^2 l_R}$$

dove L_R è la frazione di portanza agente solo sulla superficie mobile.

Per valori sufficientemente bassi di incidenza α e deflessione β si può scrivere:

$$\begin{aligned} C_L &= \frac{\partial C_L}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_L}{\partial \beta} \beta \\ C_M &= \frac{\partial C_M}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_M}{\partial \beta} \beta \\ C_{LR} &= \frac{\partial C_{LR}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_{LR}}{\partial \beta} \beta \\ C_{MR} &= \frac{\partial C_{MR}}{\partial \alpha} \alpha + \frac{\partial C_{MR}}{\partial \beta} \beta \end{aligned}$$

avendo sviluppato i coefficienti aerodinamici con sviluppo di Taylor del primo ordine. Tutte le derivate che compaiono in queste relazioni dipendono dalla forma del profilo e dal rapporto λ_R . Nel caso di lamina piana, il profilo con allettone può essere rappresentato da una lamina spezzata a cui è possibile applicare la teoria linearizzata di Glauert valida per i profili sottili. Da questa si ricava l'espressione del carico locale adimensionale Δc_p a cavallo della lamina quando a β viene dato un valore infinitesimo positivo, quindi con rotazione in senso orario. Sapendo che x viene misurata dal bordo d'attacco e che $x = l/2(1 + \cos \theta)$ si ha che

$$\frac{\partial \Delta c_p}{\partial \beta} = \frac{2}{\pi} \left[\log \frac{1 - \cos(\theta_R + \theta)}{1 - \cos(\theta_R - \theta)} - 2 \cos \theta_R \tan \frac{\theta}{2} \right]$$

il cui andamento lungo la corda è rappresentato in figura 2.1.3.

Nei punti $x=0$ e $x = x_R$ sono presenti delle singolarità dovute alla linearizzazione. Il carico sull'allettone è rappresentato dall'area tratteggiata in figura 2.1.3. Essendo la perturbazione positiva, il contributo al momento aerodinamico di una deflessione

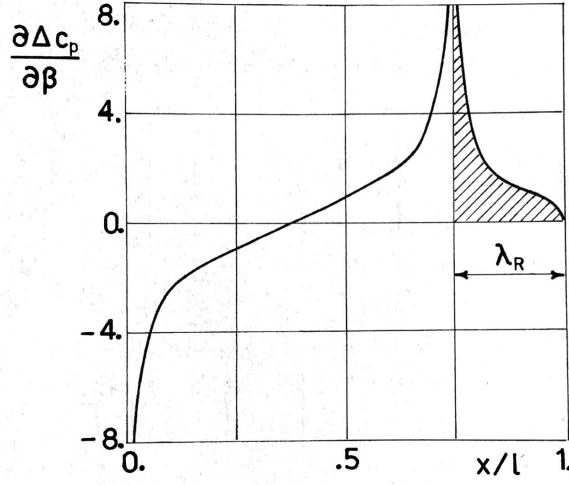


Figura 2.1.3: Carico aerodinamico perturbativo su una lamina piana con alettone causato da una deflessione infinitesima [G. Chiocchia, *Principi di Aeroelasticità* (2014), Levrotto&Bella, pagina 99]

verso il basso della superficie è picchiante, cioè negativo. Dato che $\partial C_L / \partial \alpha = C'_L$, grazie alla teoria di Glauert, le espressioni delle derivate dei coefficienti aerodinamici in funzione di λ_R si scrivono come segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_L}{\partial \beta} &= \frac{2}{\pi} C'_L \left[\sqrt{\lambda_R(1 - \lambda_R)} + \arcsin \sqrt{\lambda_R} \right] \\ \frac{\partial C_M}{\partial \beta} &= -2 \sqrt{\lambda_R(1 - \lambda_R)^3} < 0 \\ \frac{\partial C_{MR}}{\partial \alpha} &= -\frac{C'_L}{2\pi \lambda_R^2} \left[(3 - 2\lambda_R) \sqrt{\lambda_R(1 - \lambda_R)} - (3 - 4\lambda_R) \arcsin \sqrt{\lambda_R} \right] \\ \frac{\partial C_{MR}}{\partial \beta} &= -\frac{4}{\pi} \sqrt{\left(\frac{(1 - \lambda_R)}{\lambda_R} \right)^3} \left[\arcsin \sqrt{\lambda_R} - \sqrt{\lambda_R(1 - \lambda_R)} \right] \\ \frac{\partial C_{LR}}{\partial \alpha} &= \frac{2}{\pi \lambda_R} C'_L \left[\arcsin \sqrt{\lambda_R} - \sqrt{\lambda_R(1 - \lambda_R)} \right] \\ \frac{\partial C_{LR}}{\partial \beta} &= \frac{8}{\pi} (1 - \lambda_R) \end{aligned}$$

Il valore negativo della derivata $\partial C_M / \partial \beta$ dimostra che l'effetto sul momento aerodinamico di una deflessione positiva dell'alettone è picchiante. Queste formule, valide solo per la lamina piana in cui si ha $C'_L = \pi$ danno valori leggermente più alti rispetto a quelli calcolati con teorie più complete. Questo permette di utilizzarle

nell'ambito dell'aeroelasticità in modo prudenziale, riducendo così il margine di rischio. In regime compressibile lineare e subsonico le derivate aerodinamiche possono essere ottenute con la regola di Prandtl-Glauert:

$$\frac{\partial C_L}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta_\infty} \left(\frac{\partial C_L}{\partial \beta} \right)_{inc}$$

$$\frac{\partial C_M}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta_\infty} \left(\frac{\partial C_M}{\partial \beta} \right)_{inc}$$

$$\frac{\partial C_{MR}}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta_\infty} \left(\frac{\partial C_{MR}}{\partial \alpha} \right)_{inc}$$

$$\frac{\partial C_{MR}}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta_\infty} \left(\frac{\partial C_{MR}}{\partial \beta} \right)_{inc}$$

Il riferirsi alla lamina piana non pone dei limiti all'applicabilità di queste formule, è però importante notare il fatto che normalmente gli alettoni occupano una regione limitata dell'ala mentre queste relazioni li presuppongono indefiniti su ali altrettanto indefinite. Questo complica notevolmente il problema aerodinamico data la presenza di campi di moto più complessi alle estremità delle superfici mobili.

2.2 Equazioni del Moto per un Profilo con Alettone Sottoposto a Fenomeni Aeroelastici Dinamici

Si consideri ora una sezione alare con 2 gradi di libertà rotazionale: θ intorno al centro di taglio T e h traslazionale. I due moti descritti da θ e h rappresentano la deformazione flessionale e torsionale dell'ala a cui appartiene la sezione, intorno all'asse elastico. Si considera inoltre il grado di libertà rotazionale β intorno alla cerniera R come rappresentato in figura 2.2.1. L'ascissa x è misurata a partire dalla posizione statica del centro di taglio T ed è assunta positiva verso valle. Nel profilo preso in considerazione l'ascissa del fuoco x_F è negativa, mentre quelle del baricentro x_G e della cerniera x_R sono positive. È utile introdurre altre due coordinate:

- ξ_F che serve a identificare i punti della parte fissa del profilo, ha origine in T per cui coincide con la coordinata x .
- ξ_R che serve a identificare i punti dell'alettone, ha origine in R.

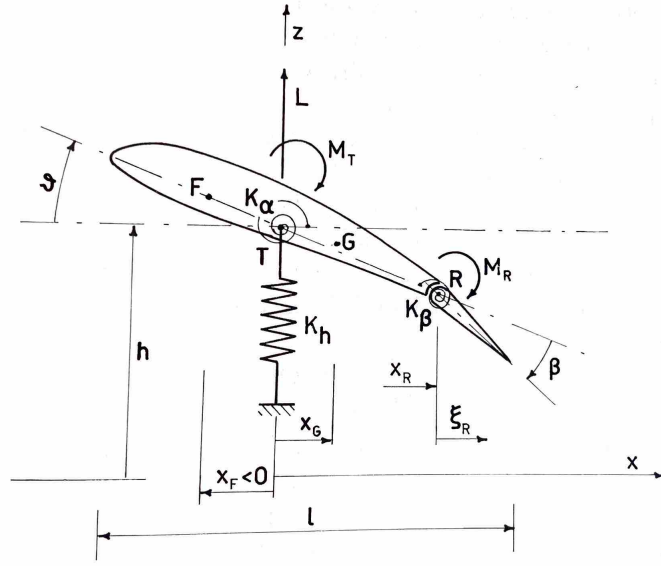


Figura 2.2.1: Riferimento per lo studio di fenomeni aeroelastici dinamici di un profilo alare con alettone [G. Chiocchia, *Principi di Aeroelasticità* (2014), Levrotto&Bella, pagina 193]

I tre possibili movimenti si suppongono contrastati da tre molle di rigidezze K_α , K_h , K_β . Sul profilo agiscono inoltre la portanza $L(t)$ e il momento aerodinamico $M_T(t)$ intorno al punto T , quello di cerniera $M_R(t)$ dell'alettone intorno a R , oltre a forze e coppie d'inerzia. I termini costanti nel tempo come la portanza stazionaria dovuta all'incidenza geometrica α_o o il momento focale relativo alla configurazione stazionaria non vengono considerati, infatti in un problema linearizzato come questo si limiterebbero a spostare la posizioni iniziali dei moti di risposta o quelle dei punti medi delle oscillazioni lasciando però invariate frequenze e ampiezze.

Trattandosi di un sistema a più gradi di libertà, è conveniente affrontare lo studio con le equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} = Q_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2.1)$$

dove T è l'energia cinetica del sistema e U quella potenziale (in questo caso elastica). Le q_i sono le coordinate generalizzate e le Q_i sono le corrispondenti componenti lagrangiane delle forze agenti definite in modo tale che:

$$\sum_{i=1}^3 Q_i \delta q_i = \delta \mathcal{L} \quad (2.2.2)$$

cioè che la somma dei loro prodotti per gli spostamenti virtuali delle corrispondenti coordinate generalizzate dia il complessivo lavoro virtuale del sistema. In questo caso è possibile scegliere h, θ, β come coordinate generalizzate: se h subisce uno spostamento virtuale δh lavora la sola portanza L e analogamente lavorano solo M_T e M_R quando rispettivamente θ e β subiscono spostamenti virtuali $\delta\theta$ e $\delta\beta$. Il lavoro virtuale complessivo sarà quindi:

$$\delta\mathcal{L} = L\delta h + M_T\delta\theta + M_R\delta\beta$$

confrontando quest'ultima con l'equazione 2.2.2 è possibile esplicitarla come

$$\delta\mathcal{L} = Q_h\delta h + Q_\alpha\delta\theta + Q_\beta\delta\beta$$

da cui si ricava che L, M_T, M_R sono le componenti lagrangiane delle forze aerodinamiche secondo le coordinate generalizzate scelte.

Ora che sono noti i secondi membri delle equazioni di Lagrange è necessario calcolare i primi con l'energia potenziale elastica e cinetica. L'espressione dell'energia potenziale elastica è:

$$U = \frac{1}{2}K_h h^2 + \frac{1}{2}K_\alpha \theta^2 + \frac{1}{2}K_\beta \beta^2$$

Per l'energia cinetica occorre distinguere tra la parte fissa dell'ala, anche detta pinna, e l'alettone, che hanno moti differenti. Per la pinna si ha che una massa elementare dm_F posta a distanza ξ_F dal centro di taglio T fornisce all'energia cinetica il contributo

$$dT_F = \frac{1}{2} (\dot{h} - \xi_F \dot{\theta})^2 dm_F$$

che integrato sulla lunghezza della pinna risulta

$$T_F = \frac{1}{2}m_F \dot{h}^2 - S_F \dot{h} \dot{\theta} + \frac{1}{2}I_F \dot{\theta}^2$$

dove

$$\begin{aligned} m_F &= \int dm_F && \text{massa della pinna} \\ S_F &= \int \xi_F dm_F && \text{momento statico della pinna rispetto a T} \\ I_F &= \int \xi_F^2 dm_F && \text{momento d'inerzia della pinna rispetto a T} \end{aligned}$$

Il contributo dell'elemento dm_R dell'alettone è:

$$dT_R = \frac{1}{2} [\dot{h} - (x_R + \xi_R)\dot{\theta} - \xi_R\dot{\beta}]^2 dm_R$$

integrando sulla lunghezza dell'alettone si ottiene:

$$T_R = \frac{1}{2}m_R\dot{h}^2 + \frac{1}{2}I_R\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_\beta\dot{\beta}^2 - S_R\dot{h}\dot{\theta} - S_\beta\dot{h}\dot{\beta} + H_\beta\dot{\theta}\dot{\beta}$$

dove

$$\begin{aligned} m_R &= \int dm_R && \text{massa dell'alettone} \\ S_R &= \int (x_R + \xi_R)dm_R && \text{momento statico dell'alettone rispetto a } T \\ S_\beta &= \int \xi_R dm_R && \text{momento statico dell'alettone rispetto a } R \\ I_R &= \int (x_R + \xi_R)^2 dm_R && \text{momento d'inerzia dell'alettone rispetto a } T \\ I_\beta &= \int \xi_R^2 dm_R && \text{momento d'inerzia dell'alettone rispetto a } R \end{aligned}$$

Inoltre si pone $H_\beta = x_R S_\beta + I_\beta$.

L'energia cinetica complessiva T è la somma di T_F e T_R . Ponendo:

$$\begin{aligned} M &= m_F + m_R && \text{massa complessiva} \\ S_\alpha &= S_F + S_R && \text{momento statico complessivo rispetto a } T \\ I_\alpha &= I_F + I_R && \text{momento d'inerzia complessivo rispetto a } T \end{aligned}$$

si ottiene:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{h}^2 + \frac{1}{2}I_\alpha\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I_\beta\dot{\beta}^2 - S_\alpha\dot{h}\dot{\theta} - S_\beta\dot{h}\dot{\beta} + H_\beta\dot{\theta}\dot{\beta}$$

dove i termini misti mettono in evidenza l'accoppiamento dei moti. Introducendo queste espressioni nell'equazione 2.2.1 si ricava

$$\begin{aligned} M\ddot{h} - S_\alpha\ddot{\theta} - S_\beta\ddot{\beta} + K_h h &= L(t) \\ I_\alpha\ddot{\theta} - S_\alpha\ddot{h} + H_\beta\ddot{\beta} + K_\alpha \theta &= M_T(t) \\ I_\beta\ddot{\beta} - S_\beta\ddot{h} + H_\beta\ddot{\theta} + K_\beta \beta &= M_R(t) \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Queste equazioni descrivono la risposta del sistema all'applicazione di generici carichi esterni variabili nel tempo $L(t)$, $M_T(t)$, $M_R(t)$ con la condizione che i moti risultanti siano di piccola ampiezza. Queste equazioni sono generali e rappresentano un sistema elastico forzato. In aeroelasticità i carichi instazionari sono di natura aerodinamica e dipendono, completamente o in gran parte, dai moti che essi stessi producono. Nel primo caso il sistema di equazioni 2.2.3 diventa omogeneo e descrive un problema di stabilità dinamica o di flutter; nel secondo caso, in cui le forze aerodinamiche hanno una componente indipendente dai moti elastici, il sistema è completo e il problema descritto è di risposta. Le espressioni delle forze aerodinamiche instazionarie assumono forme differenti a seconda che il moto sia generico, armonico o stocastico, cioè che varia nel tempo in modo casuale.

2.2.1 Profilo con Alettone in Moto Generico

Un profilo alare che produce forze aerodinamiche a seguito di moti di piccola ampiezza è assimilabile ad un sistema lineare nel quale ad un ingresso $f(t)$ segue una risposta $R(t)$, che rispettivamente rappresentano la legge del moto imposto e il sistema delle forze aerodinamiche. Esistono numerosi metodi per calcolare $R(t)$ nota $f(t)$, basati sia sulla risoluzione numerica delle equazioni dell'aerodinamica instazionaria che su una risoluzione analitica. In particolare è possibile esprimere $f(t)$ come somma di ingressi di più elementi tale che la risposta di ciascuno di essi sia nota. Il principio di sovrapposizione degli effetti permette di ottenere la risposta al problema complessivo sommando le risposte dei problemi parziali.

L'utilizzo di ingressi armonici si basa sui concetti della trasformata e dell'integrale di Fourier. La generica funzione d'ingresso $f(t)$ è esprimibile nella forma:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.2.4)$$

dove

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad \text{trasformata di Fourier di } f(t)$$

$F(\omega)$ è la *densità spettrale* di $f(t)$. L'equazione 2.2.4 esprime l'ingresso come una somma di armoniche $e^{i\omega t}$ di ampiezza unitaria, ciascuna moltiplicata per il fattore $F(\omega)$ dipendente dalla pulsazione. Si supponga di conoscere la risposta del sistema ad un ingresso costituito dall'armonica $e^{i\omega t}$, per linearità la risposta sarà anch'essa armonica ed esprimibile nella forma $H_{Rf}(\omega) e^{i\omega t}$. Il principio di sovrapposizione degli effetti permette di scrivere la risposta complessiva come:

$$R(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_{Rf}(\omega) F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.2.5)$$

La grandezza H_{Rf} può essere chiamata *risposta specifica in frequenza* o *funzione di trasferimento del sistema*. L'equazione 2.2.5 è utilizzata quando $f(t)$ è esprimibile con un numero limitato di armoniche, caso in cui gli integrali sono facilmente calcolabili. Questa situazione si presenta nelle fasi avanzate dei transitori, quando la maggior parte dei moti inizialmente eccitati sono stati smorzati dal sistema. Le fasi iniziali del transitorio, che possono rappresentare la risposta aeroelastica a raffiche o altri eventi improvvisi, sono caratterizzate da spettri in frequenza circa continui.

2.2.2 Profilo con Alettone in Moto Armonico

Lo studio dei carichi aerodinamici agenti su un profilo soggetto a moti armonici di frequenza prefissata è importante per due motivi:

- assumendo i moti di ampiezza unitaria vengono fornite le funzioni di trasferimento aerodinamiche, utili anche nello studio di un moto vario.
- fornisce la base necessaria all'indagine delle condizioni limite di stabilità aeroelastica dinamica che sono caratterizzate da moti armonici ad ampiezza costante dato che rappresentano una situazione intermedia tra un'oscillazione che si smorza e una che si amplifica.

Un profilo soggetto a generici moti accelerati in una corrente uniforme V_∞ rilascia dietro di sé una scia formata da vortici elementari tutti con asse perpendicolare al piano del moto. Con ciò è soddisfatto il teorema di Lagrange-Thomson, che impone la costanza della circolazione del fluido: una variazione di questa intorno al profilo deve infatti essere compensata da un rilascio di vorticità di segno globalmente contrario. Se i moti eseguiti dal profilo sono armonici la scia vorticoso ha un comportamento ondoso. Inoltre, se il fluido è ideale, quindi la vorticità non può diffondere in questo, e il transitorio precedente l'instaurarsi dell'oscillazione armonica è già concluso, la scia si estende fino all'infinito a valle con lunghezza d'onda L . Il rapporto l/L è un numero che caratterizza il fenomeno e, dato T il periodo dell'oscillazione, si ha che

$$L = V_\infty T = V_\infty \frac{2\pi}{\omega}$$

da cui si ha

$$\frac{l}{L} = \frac{1}{2\pi} \frac{\omega l}{V_\infty} = \frac{\omega^*}{2\pi}$$

dove

$$\omega^* = \frac{\omega l}{V_\infty}$$

prende il nome di *pulsazione ridotta* o di *Strouhal*. Il rapporto l/L rappresenta, a meno di un fattore 2π la pulsazione ridotta. I valori della pulsazione ridotta dell'ordine delle unità caratterizzano le più importanti manifestazioni dell'aeroelasticità dinamica.

Si consideri l'equazione dell'oscillatore armonico non smorzato:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \omega^2 z = 0 \quad (2.2.6)$$

la cui soluzione generale è:

$$z(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (2.2.7)$$

dove A e ϕ vanno determinate imponendo le condizioni iniziali del moto. A è l'*ampiezza massima* dell'oscillazione e ϕ è la *fase iniziale*. L'equazione 2.2.7 è

possibile riscriverla come $z(t) = a_1 \cos(\omega t) - a_2 \sin(\omega t)$ in modo che rappresenti l'oscillazione di generica fase come somma di due moti armonici di diverse ampiezze tra loro in quadratura. $z(t)$ è una funzione reale del tempo che però può essere immaginata come la parte reale di una funzione complessa $\bar{z}(t)$ che soddisfa l'equazione dell'oscillatore armonico non smorzato. Si pone quindi

$$\bar{z}(t) = \bar{A} e^{i\omega t} \quad (2.2.8)$$

dove \bar{A} è una quantità complessa. La parte reale di \bar{z} coincide con z se $\bar{A} = a_1 + ia_2$ oppure $\bar{A} = A e^{i\phi}$. Si nota che l'ampiezza complessa \bar{A} contiene in sé tutte le informazioni legate alle condizioni iniziali, cioè l'ampiezza reale A e la fase ϕ oppure le ampiezze a_1 e a_2 .

Per un profilo alare in moto armonico sono disponibili relazioni che forniscono la distribuzione del carico aerodinamico lungo la corda $\Delta p(x, t) = p^- - p^+$ che è legato al downwash locale $w_c(x, t)$ tramite la condizione di tangenza che per il moto instazionario è:

$$w_c = \frac{\partial z_c}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial z_c}{\partial x} \quad (2.2.9)$$

dove $z_c(x, t)$ definisce la posizione istantanea dei punti della linea d'asse del profilo. Come già detto il contributo dello spessore, essendo il profilo simmetrico, non produce portanza e quindi neanche effetti aeroelastici. Se il moto del profilo è armonico si può scrivere:

$$z_c(x, t) = \bar{z}_c(x) e^{i\omega t}; \quad w_c(x, t) = \bar{w}_c(x) e^{i\omega t}; \quad \Delta p(x, t) = \Delta \bar{p}(x) e^{i\omega t}$$

dove $\bar{z}_c(x)$, $\bar{w}_c(x)$ e $\Delta \bar{p}(x)$ sono funzioni complesse e rappresentano ampiezze di oscillazioni tra loro sfasate. La relazione riguardante il downwash si ricava dalla funzione nota $\bar{z}_c(x)$ tramite la relazione 2.2.9 che si scrive come:

$$\bar{w}_c = i\omega \bar{z}_c + V_\infty \frac{d\bar{z}_c}{dx}$$

Per un generico regime di moto la relazione tra \bar{w}_c e $\Delta \bar{p}(x)$ può essere riscritta come

$$\bar{w}_c(x) = -\frac{1}{\rho_\infty V_\infty} \int_0^l \Delta \bar{p}(\xi) K(x, \xi, \omega, M_\infty) d\xi \quad (2.2.10)$$

dove ρ_∞ e M_∞ sono la densità e il numero di Mach della corrente indisturbata. L'equazione 2.2.10 è un'equazione integrale nell'incognita $\Delta \bar{p}(\xi)$ da risolversi tenendo conto della condizione di Kutta al bordo di fuga $\Delta \bar{p}(l) = 0$.

Il nucleo $K(x, \xi, \omega, M_\infty) d\xi$ è una funzione d'influenza aerodinamica perché rappresenta il contributo della velocità $\bar{w}_c(x)$ all'ascissa x di un carico locale unitario agente all'ascissa ξ : l'effetto complessivo si ha dall'integrazione di questi contributi, ciascuno moltiplicato per l'effettiva entità del carico $\Delta \bar{p}(\xi)$. Questo

può essere calcolato in diversi modi a seconda del regime di moto: in regime incompressibile il numero di Mach scompare dagli argomenti.

Noto $\Delta\bar{p}$, per integrazione lungo la corda si ricavano le ampiezze delle forze e dei momenti aerodinamici. Considerando il caso in cui si ha anche un alettone:

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \int_0^l \Delta\bar{p}(x)dx \\ \bar{M}_A &= - \int_0^l \Delta\bar{p}(x)(x - x_A)dx \\ \bar{M}_R &= - \int_{x_R}^l \Delta\bar{p}(x)(x - x_R)dx\end{aligned}\tag{2.2.11}$$

Avendo supposto come rigida la sezione alare, una linea d'asse inarcata si scosta dalla corda solo per un termine geometrico costante nel tempo, questo termine fornisce quindi un contributo costante alle forze aerodinamiche e quindi non è in grado di modificare ampiezza e frequenza dell'oscillazione.

Nel caso instazionario quindi l'inarcamento può essere trascurato allo stesso modo dello spessore e lo studio della linea d'asse spezzata, che rappresenta la corda con il suo eventuale alettone, è una buona approssimazione. L'equazione della linea d'asse è:

$$z_c(x, t) = \begin{cases} h - \alpha(x - x_A) & \text{se } 0 \leq x \leq x_R \\ h_\alpha(x - x_A) - \beta(x - x_R) & \text{se } x_R \leq x \leq l \end{cases}$$

con h misurato dal centro di rotazione A , da qui l'equazione 2.2.9 permette di ricavare l'ampiezza di downwash:

$$\bar{w}_c(x) = \begin{cases} i\omega\bar{h} - [V_\infty + i\omega(x - x_A)]\bar{\alpha} & \text{se } 0 \leq x \leq x_R \\ i\omega\bar{h} - [V_\infty + i\omega(x - x_A)]\bar{\alpha} - [V_\infty + i\omega(x - x_R)]\bar{\beta} & \text{se } x_R \leq x \leq l \end{cases}$$

avendo posto $h(t) = \bar{h}e^{i\omega t}$, $\alpha(t) = \bar{\alpha}e^{i\omega t}$, $\beta(t) = \bar{\beta}e^{i\omega t}$, le ampiezze \bar{h} , $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ sono quantità complesse perché rappresentano moti che sono in genere sfasati tra loro, tuttavia una di queste quantità può essere assunta reale ponendo a 0 la sua fase e ricavando gli sfasamenti degli altri moti rispetto ad essa.

In regime lineare i contributi agli integrali 2.2.11 dei moti in \bar{h}/l , $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ sono calcolabili separatamente ed addizionabili. Le forze e i momenti sono quindi esprimibili come:

$$\begin{aligned}\bar{L} &= H_{Lh}(\omega^*) \frac{\bar{h}}{l} + H_{L\alpha}(\omega^*) \bar{\alpha} + H_{L\beta}(\omega^*) \bar{\beta} \\ \bar{M}_A &= H_{Mh}(\omega^*) \frac{\bar{h}}{l} + H_{M\alpha}(\omega^*) \bar{\alpha} + H_{M\beta}(\omega^*) \bar{\beta} \\ \bar{M}_R &= H_{Rh}(\omega^*) \frac{\bar{h}}{l} + H_{R\alpha}(\omega^*) \bar{\alpha} + H_{R\beta}(\omega^*) \bar{\beta}\end{aligned}$$

dove $H_{Lh}(\omega^*)$, $H_{L\alpha}(\omega^*)$, $H_{L\beta}(\omega^*)$ e le relative componenti sono le funzioni di trasferimento aerodinamiche, anche dette risposte specifiche in frequenza. Queste possono essere usate per calcolare i carichi aerodinamici anche in un moto generico usando relazioni come la 2.2.5. Se il moto è incompressibile gli integrali 2.2.11 possono essere calcolati analiticamente sapendo che

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \bar{L}_{nc} + \bar{L}_c \\ \bar{M}_A &= \bar{M}_{A_{nc}} + \bar{M}_{A_c} \\ \bar{M}_R &= \bar{M}_{R_{nc}} + \bar{M}_{R_c}\end{aligned}$$

dove le forze e i momenti possono essere rappresentati dalla somma di una parte non ci circolatoria ed una parte circolatoria.

Per lo studio di fenomeni in modo qualitativo è possibile utilizzare teorie dette *quasi stazionarie*, queste rinunciano ad alcuni aspetti tipici della non stazionarietà per una maggiore semplicità di calcolo. Il più radicale di questi approcci consiste nell'assumere come valide le relazioni tipiche del moto stazionario scritte tenendo conto della variabilità dell'incidenza: il coefficiente di portanza si scrive quindi come $C'_L \alpha(t)$, mentre il coefficiente di momento focale rimane costante e per quello di cerniera dell'alettone si usano le relazioni stazionarie. Quest'approssimazione è tuttavia molto drastica, per cui si preferisce ricorrere ad un altro tipo di approssimazione in cui, pur continuando ad usare le relazioni del caso stazionario, si sostituisce l'incidenza geometrica con la somma della stessa e del contributo dovuto al moto verticale: $\alpha(t) \rightarrow \alpha(t) - \dot{h}(t)/V_\infty$. In questo modo è però difficile tener conto del moto dell'alettone.

2.2.3 Risposta Aeroelastica a Carichi Aerodinamici Variabili nel Tempo con Legge Armonica

La risposta del sistema in figura 2.2.1 all'applicazione di un sistema di carichi aerodinamici, considerando un profilo senza alettone, è descritta da:

$$\begin{aligned}M\ddot{h} - S_\alpha\ddot{\theta} + K_h h &= L(t) \\ I_\alpha\ddot{\theta} - S_\alpha\ddot{h} + K_\alpha\theta &= M_T(t)\end{aligned}\tag{2.2.12}$$

Evidenziando il fatto che il simbolo α , precedentemente utilizzato per indicare l'incidenza aerodinamica variabile nel tempo, viene ora sostituito con θ e con l'equivalente cinematico dell'incidenza nel caso di moti accelerati verticali o di risposta a raffica. Inoltre in queste equazioni i momenti vengono calcolati rispetto al centro di taglio T del profilo e se le funzioni di risposta forniscono momenti aerodinamici rispetto a punti generici A diversi da T, questi vanno trasposti in T tramite $M_T(t) = M_A(t) + L(t)(x_T - x_A)$ e analogamente si considera anche la portanza L applicata in T.

In un problema aeroelastico completo i carichi aerodinamici $L(t)$ e $M_T(t)$ possono essere separati in due categorie:

- i carichi esterni esistenti anche in assenza dei moti del profilo $L^g(t)$ e $M_T^g(t)$. I più importanti sono i carichi di raffica che nell'equazione 2.2.12 rappresentano i termini forzanti.
- i carichi dipendenti dal moto del profilo $L^e(t)$ e $M_T^e(t)$. In un problema aeroelastico questi sono sempre presenti, infatti anche se il profilo fosse inizialmente in quiete, una raffica o un altro carico ne ecciterebbero i moti elastici e quindi anche i carichi aerodinamici ad essi legati, nell'equazione 2.2.12 sono quindi termini omogenei.

Grazie a questa scomposizione è possibile riscrivere le 2.2.12 come:

$$\begin{aligned} M\ddot{h} - S_\alpha\ddot{\theta} + K_h h - L^e(t) &= L^g(t) \\ I_\alpha\ddot{\theta} - S_\alpha\ddot{h} + K_\alpha\theta - M_T(t) &= M_T^g(t) \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Nel caso in cui il sistema aeroelastico sia eccitato da una costante esterna di tipo armonico le 2.2.13 si possono riscrivere come:

$$\begin{aligned} (K_h - \omega^2 M)\bar{h} + S_\alpha\omega^2\bar{\theta} - \bar{L}^e &= \bar{L}^g \\ S_\alpha\omega^2\bar{h} + (K_\alpha - \omega^2 I_\alpha)\bar{\theta} - \bar{M}_T^e &= \bar{M}_T^g \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

in cui è stato effettuato il passaggio al dominio delle frequenze. Le ampiezze dei carichi aerodinamici omogenei possono essere espresse in termini di funzioni di trasferimento aerodinamiche:

$$\begin{aligned} \bar{L}^e &= H_{Lh}(\omega^*)\frac{\bar{h}}{l} + H_{L\alpha}(\omega^*)\bar{\theta} \\ \bar{M}_T^e &= H_{Mh}(\omega^*)\frac{\bar{h}}{l} + H_{M\alpha}(\omega^*)\bar{\theta} \end{aligned}$$

analogamente quelle dei carichi aerodinamici esterni:

$$\begin{aligned}\bar{L}^g &= H_{LG}(\omega^*) \frac{w_{Go}}{V_\infty} \\ \bar{M}_T^g &= H_{MG}(\omega^*) \frac{w_{Go}}{V_\infty}\end{aligned}$$

considerando in questo caso l'effetto di una raffica sinusoidale. Indicando con ω_h e ω_α le pulsazioni disaccoppiate del sistema elastomeccanico

$$\omega_h^2 = \frac{K_h}{M}; \quad \omega_\alpha^2 = \frac{K_\alpha}{I_\alpha}$$

è possibile quindi riscrivere le equazioni 2.2.14 come:

$$\begin{bmatrix} Ml(\omega_h^2 - \omega^2) - H_{Lh}(\omega^*) & S_\alpha \omega^2 - H_{L\alpha}(\omega^*) \\ S_\alpha l \omega^2 - H_{Mh}(\omega^*) & I_\alpha(\omega_\alpha^2 - \omega^2) - H_{M\alpha}(\omega^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{h} \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{LG}(\omega^*) \\ H_{MG}(\omega^*) \end{bmatrix} \frac{w_{Go}}{V_\infty} \quad (2.2.15)$$

La risposta all'eccitazione aerodinamica esterna w_{Go}/V_∞ , data dalla soluzione di questo sistema, può essere scritta come:

$$\begin{aligned}\frac{\bar{h}}{l} &= H_{hG}(\omega, \omega^*) \frac{w_{Go}}{V_\infty} \\ \bar{\theta} &= H_{\alpha G}(\omega, \omega^*) \frac{w_{Go}}{V_\infty}\end{aligned} \quad (2.2.16)$$

dove $H_{hG}(\omega, \omega^*)$ e $H_{\alpha G}(\omega, \omega^*)$ sono funzioni di trasferimento aeroelastiche e dipendono sia da ω , tramite i termini di natura meccanica, che da ω^* , tramite i termini di natura aerodinamica, possono inoltre essere scritte come:

$$H_{hG}(\omega, \omega^*) = \frac{N_h(\omega, \omega^*)}{D(\omega, \omega^*)}; \quad H_{\alpha G}(\omega, \omega^*) = \frac{N_\alpha(\omega, \omega^*)}{D(\omega, \omega^*)}$$

dove

$$\begin{aligned}D(\omega, \omega^*) &= [Ml(\omega_h^2 - \omega^2) - H_{Lh}(\omega^*)] [I_\alpha(\omega_\alpha^2 - \omega^2) - H_{M\alpha}(\omega^*)] + \\ &\quad - [S_\alpha \omega^2 - H_{Lh}(\omega^*)] [S_\alpha l \omega^2 - H_{Mh}(\omega^*)]\end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Le equazioni 2.2.16 forniscono la risposta dinamica del sistema aeroelastico all'eccitazione prodotta da una raffica sinusoidale di pulsazione ω che avanza lungo il profilo ad una velocità relativa V_∞ , assegnata questa, la risposta è un'oscillazione armonica di stato stazionario con ampiezza costante e pulsazione ω pari a quella della raffica.

Il denominatore D è una quantità complessa (la causa di ciò risiede nella presenza delle funzioni di trasferimento aerodinamiche). Per ogni valore di V_∞ assegnato è quindi possibile determinare dei valori di ω per cui il valore assoluto di $D(\omega, \omega^*)$ raggiunge dei minimi, in corrispondenza di questi le funzioni di trasferimento aeroelastiche e le ampiezze delle risposte hanno dei massimi. Queste pulsazioni rappresentano la situazione di risonanza aeroelastica ed in questo caso dipendono dalla velocità del fluido. Il comportamento della funzione H_{hG} in regime incompressibile al variare della pulsazione della raffica e della velocità di volo è illustrato in figura 2.2.2. In questa vengono introdotti i parametri adimensionali:

$$x_\alpha = \frac{S_\alpha}{Ml}; \quad r_\alpha = \sqrt{\frac{I_\alpha}{Ml^2}}; \quad \mu = \frac{M}{\mathcal{M}} \quad (2.2.18)$$

Il primo rappresenta l'ascissa del baricentro normalizzata rispetto alla corda e il secondo il raggio giratore d'inerzia del profilo rispetto al centro di taglio normalizzato rispetto alla corda. Il terzo parametro è il rapporto tra la massa della sezione alare e quella virtuale del fluido circostante. Per un'ala nell'atmosfera esso ha valori tipici dell'ordine di decine o centinaia, nel caso di un corpo nell'acqua questo valore può essere dell'unità. Il basso valore attribuito a μ è quindi realistico per una struttura leggera, che permette di evidenziare meglio gli effetti della corrente fluida sulle oscillazioni. Inoltre compaiono il rapporto ω_h/ω_α delle pulsazioni proprie dei moti disaccoppiati nel vuoto e la velocità del flusso adimensionalizzata $V_\infty^* = V_\infty/(\omega_\alpha l)$. In figura 2.2.3 sono confrontate le risposte in traslazione verticale ad un'unica

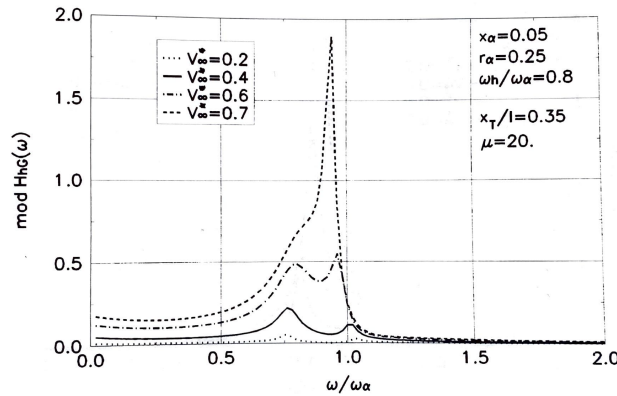


Figura 2.2.2: Risposta aeroelastica in traslazione verticale ad una raffica armonica unitaria per differenti velocità del fluido. [G. Chiocchia, *Principi di Aeroelasticità* (2014), Levrotto&Bella, pagina 237]

velocità ma per diversi valori di μ . Si nota che il fenomeno della coalescenza delle

frequenze è anticipato se la massa del fluido diventa paragonabile a quella della struttura, questo dimostra che effetti simili possono essere ottenuti sia all'aumentare della velocità che usando un fluido più pesante: in entrambi i casi aumentano i carichi aerodinamici.

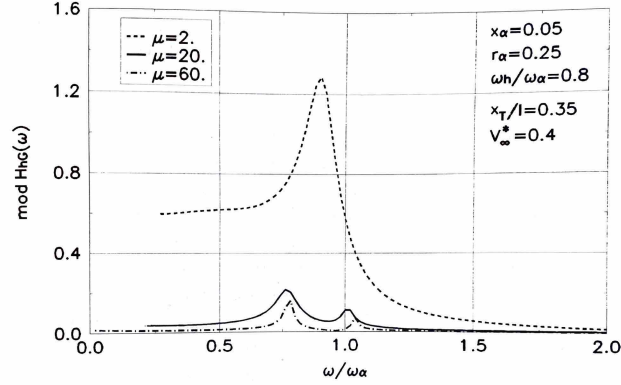


Figura 2.2.3: Risposta aeroelastica in traslazione verticale ad una raffica armonica unitaria per differenti valori del rapporto tra la massa della struttura e quella del fluido. [G. Chiocchia, *Principi di Aeroelasticità* (2014), Levrotto&Bella, pagina 237]

2.2.4 L'instabilità Aeroelastica Dinamica e il Flutter

La quantità $D(\omega, \omega^*)$ rappresenta sia il denominatore comune delle funzioni di trasferimento aeroelastiche che il determinante della matrice dei coefficienti del sistema 2.2.15. Il suo annullarsi in corrispondenza di una coppia di valori (ω, ω^*) o (ω, V_∞) determina le condizioni sotto le quali possono manifestarsi oscillazioni libere aeroelastiche, cioè le oscillazioni in cui oltre alle forze elastiche ed inerziali agiscono solo quelle aerodinamiche generate dai moti del profilo. Anche le oscillazioni libere aeroelastiche possono sovrapporsi a quelle di stato stazionario eventualmente prodotte in risposta ai carichi aerodinamici esterni.

Per lo studio delle oscillazioni libere si esaminano le condizioni in cui $D(\omega, \omega^*) = 0$ con $D(\omega, \omega^*)$ dato dall'equazione 2.2.17. Tale condizione può essere soddisfatta assegnando valori crescenti a V_∞ e per ciascuno di essi si cercano i valori di ω in grado di annullare D . Si ha che:

- per $V_\infty = 0$ il sistema si riduce a quello meccanico in cui la condizione di

annullamento è soddisfatta da $\omega = (\omega_0)_{1,2}$ dove

$$(\omega_0)_{1,2}^2 = (\omega_h \omega_\alpha) \frac{\omega_h/\omega_\alpha + \omega_\alpha/\omega_h \pm \sqrt{(\omega_h/\omega_\alpha + \omega_\alpha/\omega_h)^2 - 4[1 - S_\alpha^2/(MI_\alpha)]}}{2[1 - S_\alpha^2/(MI_\alpha)]}$$

- per $V_\infty > 0$ la condizione $D(\omega, \omega^*) = 0$ non può in generale essere soddisfatta da valori reali di ω . Le due soluzioni sono quindi quantità complesse che possono essere scritte come $\omega = \omega_r + i\omega_i$. La parte reale rappresenta l'effettiva pulsazione del moto libero mentre quella immaginaria fornisce il tasso di amplificazione, se di segno positivo, o di smorzamento, se di segno negativo.

Il segno di ω_i viene deciso dalla velocità del flusso, infatti:

- se il valore di V_∞ è moderato il segno è per forza positivo e le oscillazioni libere sono smorzate. Questo sia perchè un profilo alare investito da una corrente a bassa velocità presenta comportamenti stabili, sia per la continuità di questo campo di velocità a quello sicuramente stabile di $V_\infty = 0$.
- se V_∞ super un certo valore critico il segno di una delle ω_i può diventare negativo. In questo caso l'oscillazione libera aeroelastica ha ampiezza crescente nel tempo, dato che essa può manifestarsi in qualsiasi momento anche sovrapposta ad una risposta di stato stazionario, le conclusioni sono che in queste condizioni il sistema è dinamicamente instabile.

Il passaggio alla situazione in cui $\omega_i < 0$ avviene ad una velocità V_F in cui una delle ω_i si annulla e la relativa ω torna reale assumendo un valore ω_F . Il fenomeno di instabilità che emerge è detto flutter e V_F è la velocità di flutter in cui il fenomeno inizia a manifestarsi. L'equazione complessa $D(\omega, \omega^*) = 0$ può essere usata sia per determinare le caratteristiche delle possibili oscillazioni aeroelastiche libere, che per determinare le condizioni di flutter in termini di combinazioni dei valori (ω_F, V_F) dopo aver imposto $\omega_i = 0$.

2.2.5 Misura dell'Amplificazione o dello Smorzamento di Oscillazioni ad Ampiezza Variabile

Nella classica meccanica delle vibrazioni lo smorzamento è solitamente introdotto in forma viscosa o dissipativa per mezzo di una forza proporzionale ma opposta alla velocità. L'equazione del moto per un oscillatore ad un grado di libertà costituito da una massa m , una molla di rigidezza k e uno smorzatore c si scrive:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + c \frac{dz}{dt} + kz = 0$$

ponendo

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad \omega_i = \frac{c}{2m}$$

dove ω_0 è la pulsazione propria del sistema non smorzato. Sono possibili moti con ampiezza \bar{z} non nulla solo se $\omega = \omega_r + i\omega_i$ soddisfa l'equazione:

$$\omega^2 - 2i\omega_i\omega - \omega_0^2 = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$\omega = \pm \sqrt{\omega_0^2 - \omega_i^2} + i\omega_i$$

La parte immaginaria della pulsazione complessa è quindi $c/(2m)$ positiva se il sistema è smorzato, quindi con $c > 0$, 0 altrimenti. La parte reale è l'effettiva pulsazione del moto oscillatorio. I due valori opposti non corrispondono a soluzioni indipendenti perchè rappresentano moti con la stessa pulsazione ma sfasati di mezzo periodo, per questo ci si limita alla considerazione della soluzione di segno positivo.

2.2.6 Flutter Classico con Modello Semplificato

Il flutter rappresenta il problema principale dell'aeroelasticità dinamica. Il flutter comprende tutte le manifestazioni di oscillazioni autoeccitate dovute alle forze aerodinamiche. Con il nome di flutter classico vengono studiati tutti i fenomeni che sono studiabili analiticamente sulla base della teoria del fluido ideale non viscoso o che richiedono il coinvolgimento simultaneo dei moti in due o più gradi di libertà della struttura. Il flutter classico rappresenta il tipo di flutter più pericoloso perchè riguarda la struttura nella sua integrità e può provocarne la distruzione in pochi secondi.

Dal punto di vista storico, casi di flutter si manifestarono probabilmente fino dai primi anni dell'aviazione. I forti smorzamenti interni dei materiali adoperati a quel tempo, legno e tela, limitarono tuttavia le ampiezze delle oscillazioni e mascherarono il fenomeno. Il graduale diffondersi della costruzione metallica, caratterizzata da coefficienti di smorzamento molto inferiori, diede l'impulso alla ricerca sia teorica che sperimentale.

Attualmente le norme internazionali per la certificazione di un nuovo velivolo impongono che $V_F \geq 1,2V_{max}$ dove V_{max} è la velocità massima dell'aereo in picchiata.

Per rappresentare il fenomeno del flutter è necessario ricorrere a semplificazioni nell'espressione delle forze aerodinamiche. L'equazione da risolvere è: $D(\omega, \omega^*) = 0$, dove D è 2.2.17, che però non è risolvibile in modo analitico se le funzioni di trasferimento aerodinamiche conservano le loro forme complete. Questo è dovuto al fatto che ω^* compare all'interno di funzioni trascendenti e alla conseguente impossibilità di isolarne i valori che soddisfano $D(\omega, \omega^*) = 0$. Seguendo un

modello proposto da S. Pines [4] nel 1958, la semplificazione più drastica in campo incompressibile consiste nell'adozione di una formulazione quasi stazionaria:

$$\bar{L}^e = p_\infty^o l C'_L \bar{\theta}$$

$$\bar{M}_T^e = -x_F \bar{L}^e = -p_\infty^o l x_F C'_L \bar{\theta}$$

grazie a cui le funzioni di trasferimento aeroelastiche si riducono a:

$$H_{L\alpha} = p_\infty^o l C'_L$$

$$H_{M\alpha} = -p_\infty^o l x_F C'_L$$

dove l'ascissa x_F del fuoco va presa con segno negativo se si trova a monte del centro di taglio. Si noti che $H_{L\alpha}$ e $H_{M\alpha}$ non dipendono da ω^* , perchè la formulazione stazionaria presuppone $\omega = 0$. Esse dipendono però da V_∞ tramite p_∞^o , per cui la quantità $D(\omega, \omega^*)$, ora meglio esprimibile come $D(\omega, V_\infty)$ conserva la proprietà di dipendere sia dalla pulsazione che dalla velocità del flusso. Tenendo conto di $D(\omega, \omega^*)$ e dell'equazione 2.2.17 è possibile scrivere:

$$Ml \left(\omega_h^2 - \omega^2 \right) \left[I_\alpha \left(\omega_\alpha^2 - \omega^2 \right) + p_\infty^o l x_F C'_L \right] - S_\alpha^2 \omega^2 \left[S_\alpha^2 \omega^2 - p_\infty^o l C'_L \right] = 0$$

Questa relazione può essere adimensionalizzata facendo uso dei parametri 2.2.18, del rapporto $\tilde{x}_F = x_F/l$ e di quello tra la pressione dinamica p_∞^o della corrente indisturbata e p_D^o definito come:

$$p_D^o = -\frac{K_\alpha}{l x_F C'_L}$$

Si assuma ora $\tilde{x}_F < 0$, ipotesi tipica del caso subsonico; in questo caso p_D^o ha segno positivo e rappresenta la pressione dinamica di divergenza statica.

$$\left(1 - \frac{x_\alpha^2}{r_\alpha^2} \right) \frac{\omega^4}{\omega_\alpha^2} - \left[1 + \frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} - \left(1 - \frac{x_\alpha}{\tilde{x}_F} \right) \frac{p_\infty^o}{p_D^o} \right] \frac{\omega^2}{\omega_\alpha^2} + \frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} \left(1 - \frac{p_\infty^o}{p_D^o} \right) = 0 \quad (2.2.19)$$

Nella condizione critica in cui $p_\infty^o = p_D^o$ l'equazione precedente si riduce a:

$$\frac{\omega^2}{\omega_\alpha^2} \left[\left(1 - \frac{x_\alpha^2}{r_\alpha^2} \right) \frac{\omega^2}{\omega_\alpha^2} - \left(\frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} + \frac{x_\alpha}{\tilde{x}_F} \right) \right] = 0$$

le cui soluzioni sono:

$$\omega = 0$$

$$\frac{\omega}{\omega_\alpha} = \pm \sqrt{\frac{\omega_h^2/\omega_\alpha^2 + x_\alpha/\tilde{x}_F}{1 - x_\alpha^2/r_\alpha^2}}$$

Queste ultime descrivono il comportamento dinamico alla velocità di divergenza del sistema quando su di esso non agiscono altri carichi oltre a quelli dipendenti dalla deformazione. L'equilibrio statico per $p_\infty^o = p_D^o$ è indifferente: le soluzioni trovate illustrano quindi l'evoluzione del sistema quando viene scostato dalla condizione statica e si pone in movimento. La prima soluzione ribadisce la possibilità dell'equilibrio statico. Nella seconda si può osservare che il denominatore è sempre positivo perchè $|x_\alpha| < |r_\alpha|$. A seguito dell'ipotesi $\tilde{x}_F < 0$ si presentano due opzioni:

- Se $x_\alpha < 0$, ovvero il baricentro è a monte dell'asse elastico, il radicando è sempre positivo e le due soluzioni sono reali. Esse rappresentano effettive pulsazioni e il moto consiste in un'oscillazione ad ampiezza costante intorno alla condizione di equilibrio statico indifferente. In questo caso si ha $V_D < V_F$.
- Se invece, come accade più spesso, $x_\alpha > 0$, ovvero il baricentro è a valle dell'asse elastico, il radicando può diventare negativo. Questo può verificarsi per bassi valori del rapporto ω_h/ω_α o per elevati x_α . In questo caso le soluzioni sono immaginarie con segno opposto. Nonostante l'equilibrio statico sia indifferente, uno scostamento del sistema si traduce in un moto ad ampiezza indefinitamente crescente a causa delle forze inerziali e aerodinamiche che lo spostamento stesso ha generato. In questo caso si ha $V_D > V_F$.

L'equazione 2.2.19 può essere scritta in forma più compatta per fare ulteriori deduzioni:

$$A \frac{\omega^4}{\omega_\alpha^4} + B \frac{\omega^2}{\omega_\alpha^2} + C = 0 \quad (2.2.20)$$

essa ammette due soluzioni:

$$\left(\frac{\omega^2}{\omega_\alpha^2} \right)_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Per poter rappresentare i quadrati di moti armonici le soluzioni devono essere sia reali che positive. Il discriminante deve essere positivo o al massimo nullo, per cui:

$$B^2 - 4AC \equiv a \left(\frac{p_\infty^o}{p_D^o} \right)^2 + b \frac{p_\infty^o}{p_D^o} + c \geq 0$$

con a, b, c dipendenti dai parametri geometrici e strutturali del profilo:

$$\begin{aligned} a &= \left(1 - \frac{x_\alpha}{\tilde{x}_F} \right)^2 > 0 \\ b &= -2 \left[\left(1 + \frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} \right) \left(1 - \frac{x_\alpha}{\tilde{x}_F} \right) - 2 \frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} \left(1 - \frac{x_\alpha^2}{r_\alpha^2} \right) \right] \\ c &= \left(\frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} \right)^2 + 2 \left(2 \frac{x_\alpha^2}{r_\alpha^2} - 1 \right) \frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} + 1 > 0 \end{aligned}$$

dato:

$$\left(\frac{p_\infty^o}{p_D^o}\right)_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Solo la radice di segno negativo soddisfa la richiesta all'altra condizione $(\omega^2/\omega_\alpha^2)_{1,2}$ di essere positiva e reale. Questo è di particolare importanza e viene indicato con p_F^o/p_D^o :

$$\frac{p_F^o}{p_D^o} \equiv \left(\frac{p_\infty^o}{p_D^o}\right) = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.2.21)$$

Al tendere delle velocità al valore corrispondente a p_F^o le pulsazioni ω_1 e ω_2 si avvicinano fino ad assumere l'unico valore reale:

$$\frac{\omega_F}{\omega_\alpha} = \sqrt{\frac{-B}{2A}}$$

per $p_\infty^o = p_F^o$ dove il discriminante dell'equazione 2.2.20 si annulla. La coppia (p_F^o, ω_F) definisce le condizioni di flutter e i limiti di stabilità del sistema. Le ω_1 e ω_2 acquistano parti immaginarie di segno opposto, la negativa delle quali rappresenta un moto oscillatorio amplificato, anche in questo caso si hanno due possibili moti, uno dei quali si amplifica esponenzialmente nel tempo.

Quello che può essere dedotto sulla velocità di flutter dipende dal soddisfacimento di due condizioni sull'equazione 2.2.21, cioè che p_F^o sia contemporaneamente reale e positiva. La prima condizione è soddisfatta se $b^2 - 4ac$ è positivo o nullo, cioè:

$$\frac{x_\alpha}{\tilde{x}_F} \left[\frac{x_\alpha}{\tilde{x}_F} - 1 + \frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} \left(1 - \frac{x_\alpha \tilde{x}_F}{r_\alpha^2} \right) \right] \geq 0$$

Per la seconda condizione, sapendo che a e c sono positivi occorre che b sia negativo in modo che:

$$1 - \frac{x_\alpha}{\tilde{x}_F} - \frac{\omega_h^2}{\omega_\alpha^2} \left(1 + \frac{x_\alpha}{\tilde{x}_F} - 2 \frac{x_\alpha}{r_\alpha^2} \right) \geq 0$$

Supponendo che sia \tilde{x}_F che x_α siano negativi, si ha che il rapporto x_α/\tilde{x}_F è positivo. Ricordando che $|x_\alpha| < |r_\alpha|$, il fattore in parentesi quadra nella prima equazione risulta normalmente negativo, perchè di solito si ha $|x_\alpha/\tilde{x}_F| < 1$, $|x_\alpha \tilde{x}_F| < r_\alpha^2$ e $\omega_h^2 < \omega_\alpha^2$. La prima condizione è quindi difficilmente verificata, dato che $x_\alpha < 0$. Anche la seconda condizione è difficilmente verificabile per $x_\alpha < 0$. In conclusione è molto difficile che $(p_\infty^o/p_D^o)_{1,2}$ siano reali e positivi, e che quindi si instauri la condizione di flutter, se il baricentro si trova davanti all'asse elastico.

2.3 Teoria Generale dell'Instabilità Aerodinamica di Theodorsen

Esistono diversi metodi per analizzare il fenomeno del flutter, tra cui la teoria generale dell'instabilità aerodinamica di Theodore Theodorsen che permette di calcolare le forze e i momenti agenti sul profilo al fine di trovare le possibili condizioni di equilibrio instabile. Anche in questo caso è richiesto un sistema a due gradi di libertà per creare una condizione di instabilità, in quanto vibrazioni con un grado di libertà verrebbero smorzate dalle forze aerodinamiche. In questo modello consideriamo solo le piccole oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio.

Questa teoria prevede che vengano calcolati i potenziali delle velocità dovuti al flusso intorno al profilo alare. Questi potenziali vengono suddivisi in:

- Una parte non circolatoria
- Una parte circolatoria, dovuta alla discontinuità del flusso dietro al profilo

2.3.1 Potenziale della Velocità, Forze e Momenti Dovuti alla Parte non Circolatoria

Per calcolare il potenziale della velocità, determinato da posizione e velocità delle varie parti che compongono il profilo, rappresentiamo temporaneamente la sezione alare con un cerchio. Il potenziale di una sorgente ϵ posta nell'origine è dato da:

$$\varphi = \frac{\epsilon}{4\pi} \log(x^2 + y^2)$$

Per una sorgente ϵ posta in (x_1, y_1) , il potenziale è:

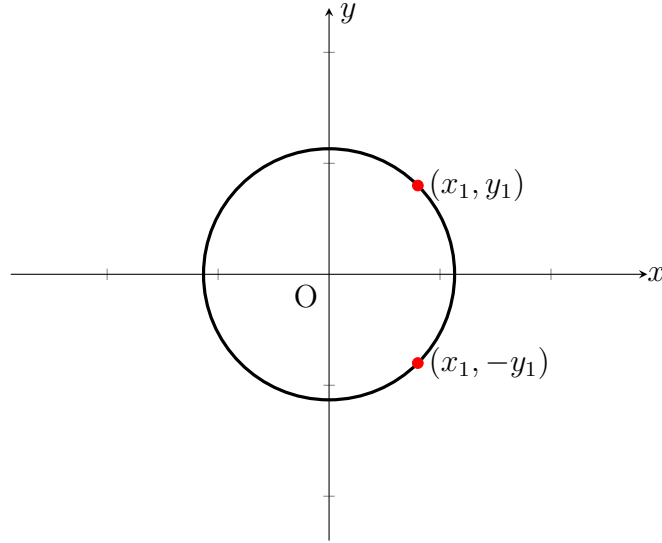
$$\varphi = \frac{\epsilon}{4\pi} \log((x - x_1)^2 + (y - y_1)^2)$$

Mettendo una sorgente 2ϵ in (x_1, y_1) e un pozzo -2ϵ in $(x_1, -y_1)$ otteniamo un flusso intorno al cerchio il cui potenziale è:

$$\varphi = \frac{\epsilon}{2\pi} \log \left(\frac{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}{(x - x_1)^2 + (y + y_1)^2} \right)$$

Conoscendo il potenziale della velocità è possibile calcolare le pressioni locali e per integrazione ottenere le forze e i momenti che agiscono sul profilo. Utilizzando il teorema di Bernoulli per flussi non stazionari, la pressione locale è data da:

$$p_h = -\rho \left(\frac{w^2}{2} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)$$



Dove w è la velocità locale e ϕ il potenziale della velocità nel punto. Sapendo che $w = v + \partial\phi/\partial x$, dove v è la velocità del fluido all'infinito, otteniamo la differenza di pressione tra il dorso e il ventre nel punto x :

$$p = -2\rho \left(v \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial t} \right) \quad (2.3.1)$$

2.3.2 Potenziale della Velocità, Forze e Momenti Dovuti alla Parte Circolatoria

Il potenziale della velocità del flusso intorno al cerchio dato dal vortice $-\delta\Gamma$ in (X_0, O) è:

$$\varphi_\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{2\pi} \left[\tan^{-1} \frac{Y}{X - X_0} - \tan^{-1} \frac{Y}{X - \frac{1}{X_0}} \right]$$

Il valore della parte circolatoria è determinato dalla condizione di Kutta che impone che non siano presenti velocità infinite al bordo di fuga.

Dall'equazione 2.3.1, sapendo che il vortice $-\Delta\Gamma$ si muove verso destra con velocità v si ha che:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial x_0} v$$

per cui:

$$p = -2\rho v \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial x_0} \right)$$

Sapendo la distribuzione delle pressioni sul profilo è possibile calcolare le forze aerodinamiche che agiscono su di esso.

Capitolo 3

Influenza di Parametri sul Flutter

3.1 Effetto del Momento Statico sul Flutter

Dal capitolo precedente è possibile notare come il fenomeno del flutter classico sia controllato da una serie di parametri adimensionali: μ , x_α , ω_h/ω_α , r_α , \tilde{x}_F . In questa sezione descriveremo qualitativamente l'effetto sulle velocità critiche dei primi 3 parametri.

L'effetto di x_α , cioè il momento statico adimensionale, rappresenta la posizione del baricentro rispetto al centro di taglio. Se $x_\alpha = 0$, i termini di accoppiamento dinamico flessio-torsionale scompaiono e per quanto visto senza accoppiamenti di moto non c'è flutter, anche se in realtà le stesse forze aerodinamiche generano gli accoppiamenti necessari il flutter è comunque facilitato da una struttura che per sua natura sviluppa già moti accoppiati.

In figura 3.1.1 è rappresentata la velocità adimensionale di flutter V_F^* in funzione del rapporto delle frequenze proprie dei moti disaccoppiati della struttura, i vari rami si riferiscono ai diversi valori di x_α . Si può notare che la velocità critica diminuisce molto per valori crescenti di x_α . La restrizione del campo di stabilità è maggiore dove $\omega_h/\omega_\alpha \approx 1$, cioè quando le pulsazioni proprie disaccoppiate dei moti sono prossime l'una all'altra.

È possibile studiare l'effetto di x_α anche in relazione al parametro di massa μ come in figura 3.1.2. Anche in questo caso V_F^* si abbassa e la regione instabile risulta maggiore se x_α cresce. Questo comportamento è maggiormente visibile per bassi valori di μ , cioè quando la densità della struttura è poco maggiore di quella del fluido. Questa circostanza si verifica difficilmente in aria ma facilmente in acqua, dato che quest'ultima è circa mille volte più pesante dell'aria.

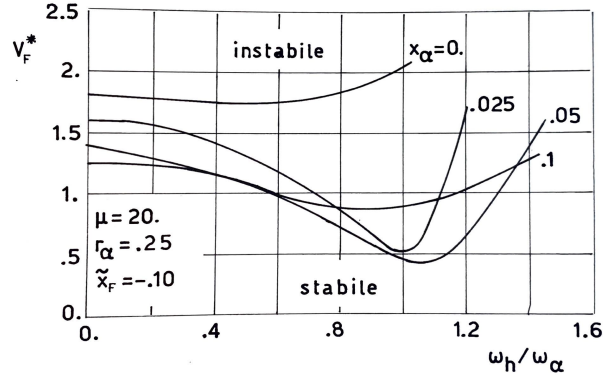


Figura 3.1.1: Effetto del momento statico e del rapporto delle frequenze proprie sulla velocità di flutter. [G. Chiocchia, *Principi di Aeroelasticità* (2014), Levrotto&Bella, pagina 275]

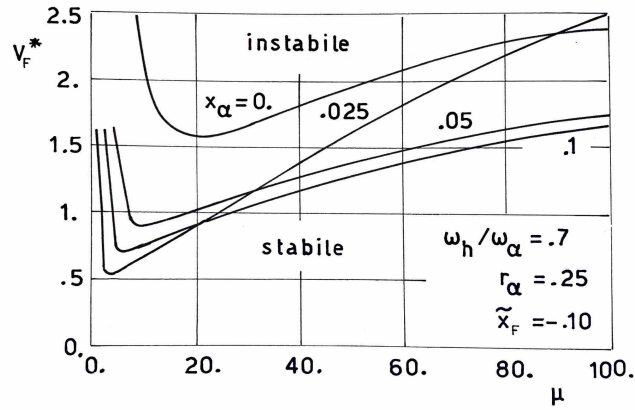


Figura 3.1.2: Effetto del momento statico e del rapporto di massa sulla velocità di flutter. [G. Chiocchia, *Principi di Aeroelasticità* (2014), Levrotto&Bella, pagina 276]

3.2 Effetto del Numero di Mach e della quota di volo sul Flutter

Fissata una quota di volo risultano determinati i valori di ρ_∞ e della temperatura, da cui si ottiene la velocità del suono c_∞ dalla relazione $c = \sqrt{\gamma RT}$. Si possono valutare i possibili numeri di Mach eseguendo un calcolo di flutter per ciascuno di essi. Le velocità di Flutter così ottenute non soddisfano però in generale la

fondamentale condizione fisica per cui $V_F = c_\infty M_\infty$. Questa relazione sarà valida solo per i valori di V_F corrispondenti alle intersezioni delle curve della figura 3.2.1 con la retta atmosferica, rappresentata come una retta tratteggiata. La retta atmosferica è caratterizzata dall'essere inclinata rispetto all'asse x di un angolo la cui tangente è la velocità del suono all'infinito. Le tre curve blu, rossa e verde sono esempi di possibili risultati di calcolo. Il caso della curva blu non mostra intersezioni con la retta atmosferica e quindi esclude ogni possibilità di flutter. Il caso verde presenta due velocità critiche con una zona di stabilità centrale, in genere la velocità più bassa è subsonica e quella più alta è supersonica. Nel caso rosso la velocità di flutter è solo una e può essere sia subsonica che supersonica.

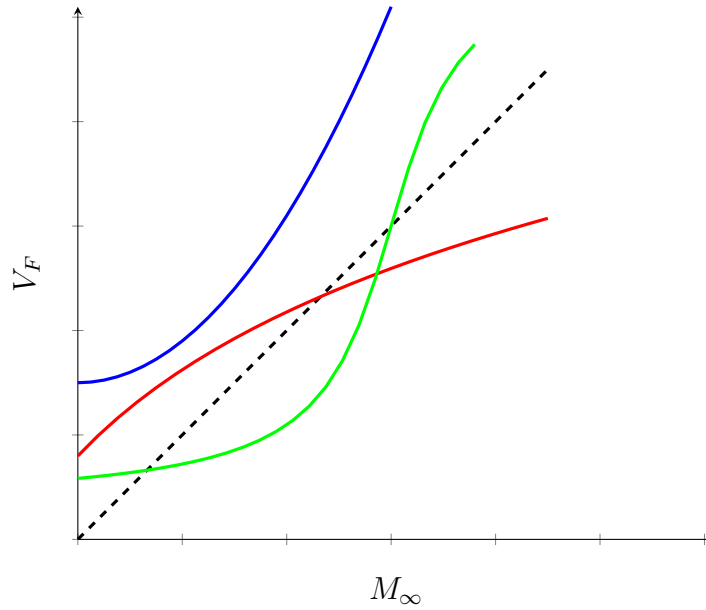


Figura 3.2.1: Esempi qualitativi di relazioni di compatibilità tra la velocità di flutter e il numero di Mach. Le tre curve blu, rossa e verde sono esempi di possibili risultati di calcolo. Il caso della curva blu non mostra intersezioni con la retta atmosferica e quindi esclude ogni possibilità di flutter. Il caso verde presenta due velocità critiche con una zona di stabilità centrale, in genere la velocità più bassa è subsonica e quella più alta è supersonica. Nel caso rosso la velocità di flutter è solo una e può essere sia subsonica che supersonica.

La figura 3.2.1 è utile anche per valutare l'effetto della variazione di quota sulla velocità di flutter. Se la quota di volo aumenta la temperatura dell'aria diminuisce e di conseguenza diminuisce anche la velocità del suono, la retta atmosferica per cui si abbassa ruotando intorno all'origine degli assi. Le curve di flutter invece si alzano perchè la densità diminuisce e di conseguenza diminuiscono le forze aerodinamiche. La retta atmosferica e le curve di flutter tendono quindi ad allontanarsi diminuendo

così la possibilità di interferenza, e quindi flutter. I risultati sperimentali calcolati a quote basse possono quindi essere usati in modo conservativo anche per le quote alte ma non viceversa.

3.3 Effetto dell'angolo di Freccia sul Flutter

Una stima qualitativa dell'effetto della freccia alare sulla velocità critica di flutter può essere effettuata tramite delle considerazioni dimensionali su ali con proprietà geometriche e strutturali costanti lungo l'apertura. Si possono distinguere due casi:

- il confronto con l'ala a pianta rettangolare viene effettuato considerando un uguale allungamento aerodinamico \mathcal{R} . Per ottenere l'ala a freccia da quella dritta si fanno scorrere le sezioni normali all'asse y lungo la direzione di V_∞ , per cui l'apertura alare $2b$ rimane invariata. In questo caso risulta una lunghezza strutturale $\hat{b} = b/\cos\phi$ maggiore, le corde invece si riducono assumendo il valore $\hat{l} = l\cos\phi$. L'allungamento strutturale diventa quindi:

$$\hat{\mathcal{R}} = \frac{2\hat{b}}{\hat{l}} = \frac{\mathcal{R}}{\cos^2\phi}$$

ed è maggiore di quello aerodinamico. Si può studiare l'ala a freccia considerandola dritta, di semiapertura \hat{b} e di allungamento $\hat{\mathcal{R}}$, ma investita da una corrente $V_\infty \cos\phi$. In questa nuova ala tutte le lunghezze significative in direzione normale all'asse elastico risultano ridotte di un fattore $\cos\phi$ rispetto a quella della configurazione originaria, ne consegue che i parametri adimensionali di posizione e i rapporti del tipo EJ/GJ_t conservano approssimativamente i valori precedenti. Se l'allungamento è sufficientemente elevato ci si può attendere che il calcolo della velocità adimensionale di flutter non conduca a risultati significativamente diversi per le due configurazioni. Ciò implica che le velocità effettive di flutter siano proporzionali agli allungamenti strutturali:

$$\frac{\hat{V}_F \cos\phi}{V_F} = \frac{\mathcal{R}}{\hat{\mathcal{R}}}$$

dove \hat{V}_F e V_F sono le velocità di flutter dell'ala a freccia e di quella dritta, da cui $\hat{V}_F = V_F \cos\phi$, quindi il passaggio alla configurazione a freccia comporta un abbassamento del limite di flutter di un fattore $\cos\phi$. Questo risultato è qualitativo, tramite analisi più approfondite è possibile misurare un decremento della velocità critica più prossimo a $\sqrt{\cos\phi}$.

- il confronto può alternativamente essere eseguito a pari allungamento strutturale. La freccia viene analizzata facendo ruotare l'ala intorno alla sua radice.

In questo caso l'ala dritta e quella a freccia hanno le stesse proprietà strutturali. L'unica differenza è nella velocità della corrente in direzione normale all'asse elastico pari a V_∞ se l'ala è dritta e pari a $V_\infty \cos \phi$ se l'ala è a freccia. Si conclude che per un'ala a freccia si ha:

$$\hat{V}_F = \frac{V_F}{\cos \phi}$$

e quindi la velocità di flutter aumenta di un fattore $1/\cos \phi$.

Capitolo 4

Il Flutter anche al di Fuori dell'Ambito Aeronautico

Il flutter è una vibrazione aeroelastica autoeccitata che si instaura in una struttura in moto relativo rispetto a un fluido, quando si verificano particolari condizioni. Anche al di fuori dell'ambito aerospaziale è possibile quindi trovare degli esempi di flutter, ad esempio in ponti, sistemi rotanti e turbine.

4.1 Il Ponte di Tacoma

La causa della caduta del ponte di Tacoma nel 1940, dopo pochi mesi dalla sua inaugurazione, è stata motivo di confusione e argomento di dibattito per molti anni. Dopo la sua caduta fu formata una commissione che esaminasse le cause del crollo, tra i cui membri era presente l'ingegnere italiano Giulio Krall. Fu evidenziato che la causa del crollo era da ricondursi alle oscillazioni torsionali autoeccitate, cioè flutter torsionale, dovute ad una corrente di circa 80 km/h. Il limite del ponte era stato identificato essere di 68 km/h.

Un importante indizio sul motivo della caduta del ponte è dato da un filmato di Barnet Elliott. Durante il filmato è possibile vedere il cemento del ponte rompersi e rilasciare nell'aria frammenti e polvere. Grazie alla polvere è possibile vedere come l'aria si muove sopra il ponte, notando la formazione di un grande vortice che si muove verso il lato destro del ponte. I vortici sono prodotti come risultato del movimento del ponte, è possibile notare che la frequenza della formazione dei vortici equivale alla frequenza di oscillazione del ponte. Visto che il vortice corrisponde ad una zona di bassa pressione, nasce una forza sul ponte che lo spinge in direzione del vortice e ogni volta che il ponte è nella sua posizione iniziale, un nuovo vortice viene generato. Per velocità del vento inferiori alla velocità critica, i vortici non attraversano completamente il ponte in un periodo e producono momenti che

smorzano le oscillazioni. Alla velocità del vento critica, il vortice attraversa il ponte in esattamente un periodo. Per velocità del vento maggiori il vortice attraversa interamente il ponte in meno di un periodo, compiendo un lavoro sul ponte come si può vedere dall'immagine 4.1.1. Ne consegue che il ponte guadagna energia e l'ampiezza delle oscillazioni aumenta.

Le cause del crollo furono quindi definitivamente attribuite alle vibrazioni autoeccitate indotte dal distacco periodico dei vortici di Von Karman.

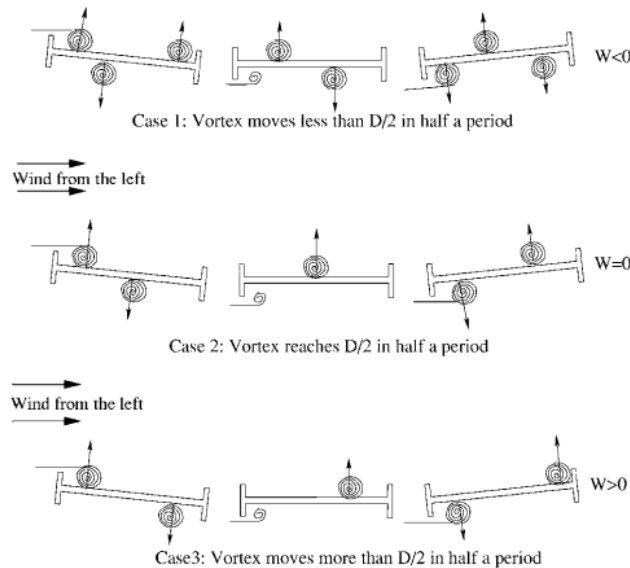


Figura 4.1.1: Andamento dei vortici per diverse velocità del vento, [*The failure of the Tacoma Bridge: a physical model*, D. Green, W. G. Unruh]

4.2 Le Barche a Vela da Regata

Come risultato dell'enorme aumento della velocità nelle regate negli ultimi 20 anni, il flutter della deriva è diventato un aspetto di cui tener conto durante la progettazione. Il flutter si presenta quando le vibrazioni delle superfici portanti, come la deriva, il timone e l'idrofoil, alle frequenze naturali, si combinano determinando la cessione di energia dal fluido alla barca. La vibrazione è autoeccitata e la sua ampiezza cresce velocemente portando ad eventi catastrofici.

Storicamente le barche non sono mai state interessate dal flutter per tre ragioni principali:

- velocità relativamente basse
- chiglie larghe e raccordate

- acciaio come materiale principale

Le derive in materiale composito hanno cominciato a diffondersi agli inizi degli anni 2000 e, oltre ad una notevole diminuzione di peso, questi materiali permettono di regolare precisamente la rigidità e la rigidezza a torsione. Con le chiglie metalliche la relazione tra rigidezza a flessione e a torsione è dettata dalla relazione di Poisson, che è una proprietà intrinseca del materiale e quindi non modulabile. I materiali compositi permettono invece di regolare queste quantità tramite la direzione delle fibre nella matrice. L'utilizzo di questi materiali più leggeri comporta una diminuzione del rapporto di massa μ che, come si può vedere in figura 3.1.2, si traduce in una regione di instabilità maggiore. Inoltre, con l'intento di ridurre la resistenza aerodinamica, i profili sono diventati sempre più lunghi e sottili. L'utilizzo di materiali compositi e di chiglie con meno resistenza aerodinamica hanno permesso di raggiungere maggiori velocità ed eventualmente anche velocità di flutter.

Quando lo smorzamento diventa negativo il fluido dà energia alla deriva, a questo punto ogni minima oscillazione viene amplificata. La velocità in cui lo smorzamento è nullo si chiama velocità critica e per velocità maggiori si osserva il flutter.

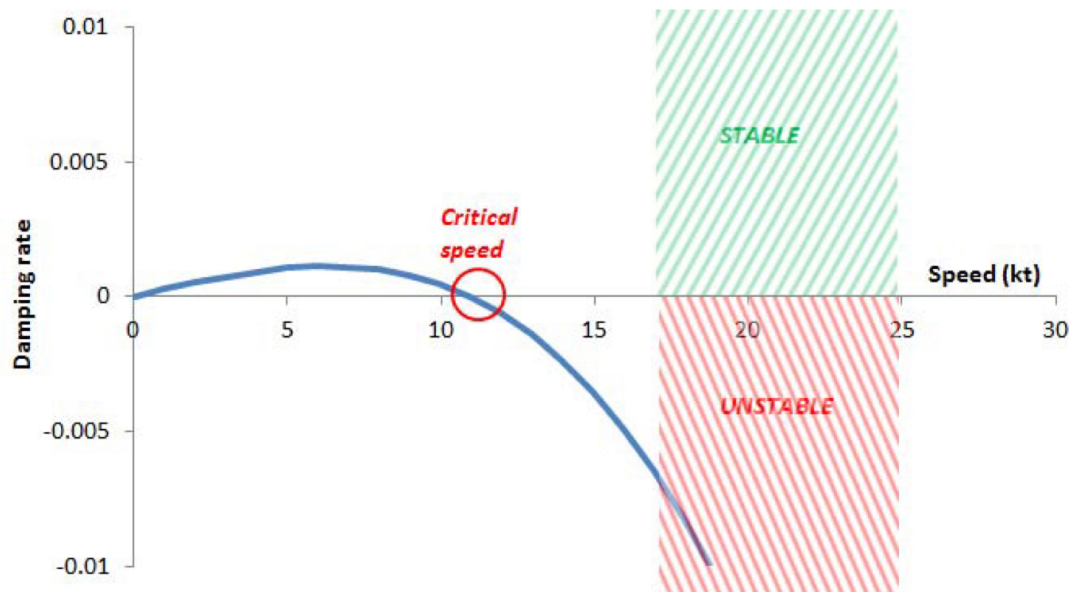


Figura 4.2.1: Andamento dello smorzamento con evidenziate zone di stabilità e instabilità, [*Exploratory Study on the Flutter Behavior of modern yacht keels and appendages*, L. Mouton, A. Finkelstein]

4.3 I Missili

Gli impennaggi di un missile hanno bisogno di un progetto specifico e dell'aria in modo da smorzare le vibrazioni. Lo smorzamento prodotto dall'aria è notevole quando il razzo si trova al di sotto della velocità di flutter, ma una volta superata, l'aria amplifica esponenzialmente le oscillazioni.

L'equazione della velocità di flutter trattata in questa sezione si basa sui calcoli del report NACA 4197 [8]

$$V_f = a \sqrt{\frac{2G(\mathcal{R} + 2)(t/c_r)^3}{1,337\mathcal{R}^3P(\lambda + 1)}}$$

Per l'utilizzo di questa equazione i materiali sono assunti come isotropi, cioè le proprietà meccaniche dei materiali sono le stesse in tutte le direzioni. Questa assunzione è particolarmente accurata per i metalli ma non per legno e materiali compositi. Per utilizzare questa equazione è necessario trovarsi al di sotto della tropopausa e utilizzare una profilo con un centro di gravità che sia posizionato all'incirca al 50% della semiapertura alare. Le variabili in questa equazione sono:

- il modulo di taglio G
- la velocità del suono a
- l'allungamento alare \mathcal{R}
- lo spessore del profilo t
- la corda alla radice del profilo c_r
- la pressione P
- il rapporto di rastremazione λ

La pressione atmosferica può essere calcolata sapendo la quota tramite la relazione:

$$P = P_0 \left(\frac{T_0 - \Lambda z}{T_0} \right)^{5.2561}$$

Dove $\Lambda = 0,0065$ è la variazione di temperatura al variare della quota.

Per calcolare la velocità del suono a è necessario conoscere la temperatura

$$a = \sqrt{\gamma RT}; \quad T = T_0 - \Lambda z$$

Dove γ è il rapporto tra il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante che per l'aria vale 1,4 e R è il rapporto tra la costante universale dei gas (8,3145) e la massa molare dell'aria, pari a circa 29 g/mol.

4.3.1 Esempio Numerico

Prendiamo come esempio il missile Aspide della Marina Militare Italiana in servizio dal 1977. Questo missile può essere usato sia come aria-aria che come superficie-aria, ha una gittata tra i 750 m e i 20 km in versione superficie-aria e di circa 40 km chilometri in versione aria-aria, inoltre ha le quattro alette di manovra indipendenti. La velocità massima che può raggiungere è di Mach 4, cioè circa 1360 m/s. La quota di tangenza per questo modello di missile è di 3500 m.



Figura 4.3.1: Missile Aspide della marina peruviana analogo a quelli italiani.

Prendendo come esempio un impennaggio, come quello nella figura 4.3.2, con dimensioni:

- corda alla radice: $c_r = 0,7$ m
- corda all'estremità: $c_t = 0,4$ m
- spessore: $t = 0,01$ m
- semiapertura alare: $b = 0,4$ m

Con questi dati è possibile calcolare:

- la superficie alare $S = (c_r + c_t) b/2 = 0,22$ m²
- l'allungamento alare $\mathcal{R} = b^2/S = 0,73$
- il rapporto di rastremazione $\lambda = c_t/c_r = 0,57$

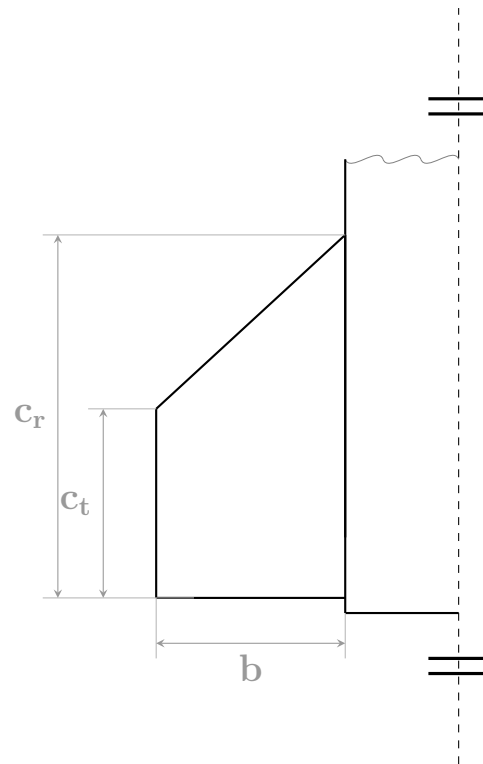


Figura 4.3.2: Rappresentazione di un impennaggio del missile aspidico con alcune dimensioni evidenziate

Prendendo come esempi diversi materiali, che quindi hanno diversi moduli di taglio, si ottengono i valori di velocità di flutter al variare della quota di volo presenti in figura 4.3.3.

Da questo grafico è possibile notare come all'aumentare del modulo di taglio G aumenta anche la velocità critica di flutter, per questo grafico infatti sono stati considerati i seguenti moduli di taglio: 77,97 GPa per l'acciaio inossidabile, 40,986 GPa per il titanio, 26,91 GPa per l'alluminio e 162,15 GPa per il tungsteno. Inoltre è possibile notare che all'aumentare della quota le velocità di flutter aumentano per tutti i materiali, con un aumento più rilevante per i materiali con modulo di taglio maggiore. Si può notare anche che materiali come il titanio e l'alluminio non consentono al missile di volare alla velocità massima possibile in quanto si verificherebbe sicuramente il flutter. L'acciaio consente al missile di volare alla velocità massima sopra alla quota di 600 m e il tungsteno consente di volare sempre a velocità massima. Dopo aver analizzato questo grafico è possibile concludere che per le caratteristiche geometriche di questo missile il titanio e l'alluminio non sono materiali adatti alla sua realizzazione.

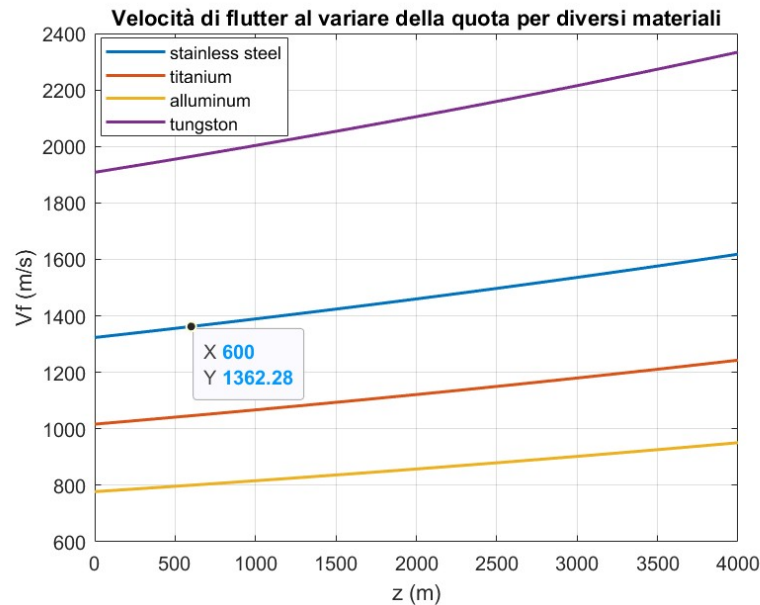


Figura 4.3.3: Risultati dell'esempio numerico: velocità di flutter al variare della quota per diversi materiali. La quota, sull'asse x, è misurata in metri e la velocità di flutter, sull'asse y, in metri al secondo. Data la velocità massima raggiungibile dal missile di 1360 m/s è possibile volare a velocità massima a qualsiasi quota solo con un impennaggio in tungsteno. Per valori di G minori di quelli del tungsteno la velocità di flutter diminuisce fino ad incontrare la velocità massima di volo. Si noti che se il missile è fatto di alluminio o titanio non è mai possibile volare alla velocità massima.

Considerando ora un impennaggio di acciaio con le stesse caratteristiche dimensionali trattate nel caso precedente ma per diverse semiaperture alari si ottiene l'andamento della velocità di flutter rappresentato in figura 4.3.4.

Da questo grafico è possibile notare che all'aumentare della semiapertura alare b la velocità di flutter diminuisce notevolmente. Anche in questo caso all'aumentare della quota aumenta la velocità di flutter per i rispettivi allungamenti, ma l'aumento della velocità per una piccola semiapertura alare è più consistente dell'aumento della velocità critica per una semiapertura maggiore. Con una semiapertura alare pari o maggiore di 37,5 cm è possibile far volare questo missile a qualsiasi quota sfruttando la velocità massima possibile. Con una semiapertura di 40 cm si ottiene il caso analizzato nel grafico precedente per l'acciaio, cioè si può volare a velocità massima oltre la quota di 600 m. Con una semiapertura di 42,5 cm è possibile volare a velocità massima sono oltre la quota di 2300 m e aumentando ancora la semiapertura alare la quota a cui è possibile raggiungere la velocità massima

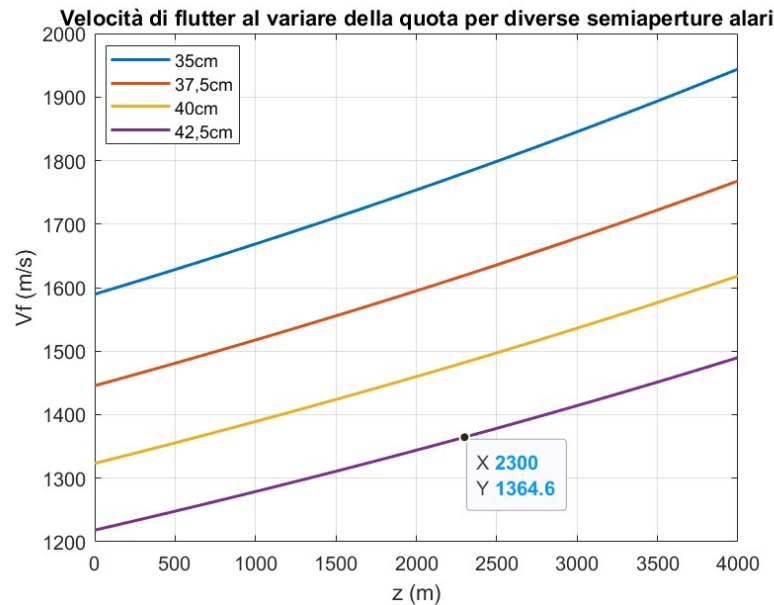


Figura 4.3.4: Risultati dell'esempio numerico: velocità di flutter al variare della quota per diverse semiaperture alari. La quota, sull'asse x, è misurata in metri e la velocità di flutter, sull'asse y, in metri al secondo. Il materiale scelto in questo caso è l'acciaio. Si nota che per le semiaperture di 35 cm e 37,5 cm è possibile volare alla velocità massima a qualsiasi quota. Questo non è vero per le semiaperture di 40 cm o superiori, in cui la velocità di flutter diminuisce fino ad incontrare la velocità massima consentita al missile che è di 1360 m/s.

aumenta sempre di più, fino a superare la quota di tangenza del missile. Nella pratica quindi la velocità massima non è mai raggiungibile.

Variando invece lo spessore del profilo ma tenendo costanti le altre caratteristiche dimensionali usate negli esempi precedenti e utilizzando l'acciaio come materiale l'andamento della velocità di flutter diventa quello presente in figura 4.3.5.

Da questo grafico è possibile notare che all'aumentare dello spessore del profilo aumenta anche la velocità di flutter. All'aumentare della quota aumenta anche la velocità critica in cui si presenta il fenomeno del flutter, a parità di altre condizioni. Per piccoli spessori l'aumento della velocità di flutter con la quota è quasi trascurabile, mentre per spessori maggiori l'aumento è consistente. Con uno spessore del profilo di 11 mm è possibile volare alla velocità massima per qualsiasi quota, con uno spessore di 10 mm è possibile volare alla velocità massima solo oltre la quota di 600 m. Nel caso di uno spessore di 9 mm sarebbe possibile volare alla velocità massima oltre i 3700 m, ma visto che per questo modello di missile la quota di tangenza è di 3500 m non è mai possibile raggiungere la velocità massima. Per

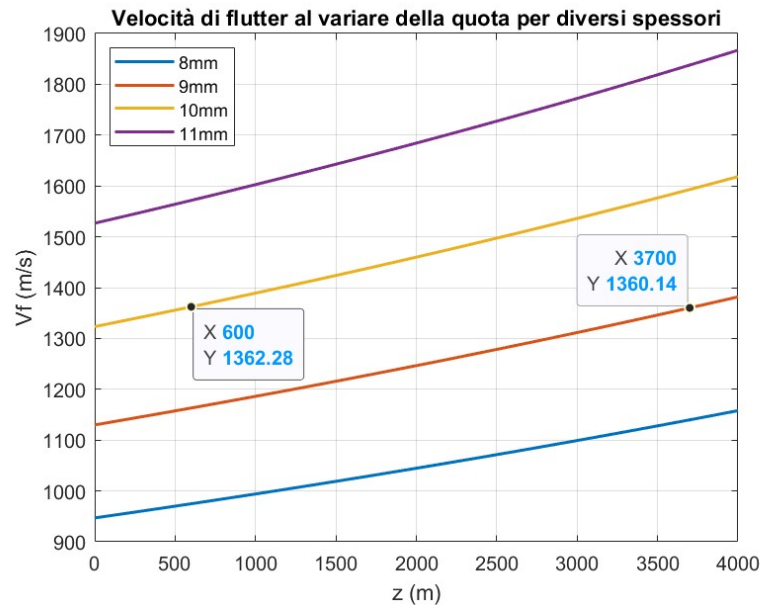


Figura 4.3.5: Risultati dell'esempio numerico: variazione della velocità di flutter al variare della quota per diversi spessori. La quota, sull'asse x, è misurata in metri e la velocità di flutter, sull'asse y, in metri al secondo. Il materiale scelto in questo caso è l'acciaio e la semiapertura alare è di 0,4 m. Si nota che con uno spessore di 11 mm o superiore è possibile volare con la velocità massima del missile a qualsiasi quota, per spessori inferiori a 8 mm non è mai possibile volare alla velocità massima. Dato un impennaggio di spessore 9 mm non è possibile volare alla velocità massima di 1360 m/s in quanto la quota di tangenza è di 3500 m.

spessori uguali o inferiori a 8 mm non è mai possibile volare alla velocità massima senza riscontrare il flutter.

Per generare questi risultati sono state considerate le relazioni dell'atmosfera e dell'aria standard. I risultati possono essere utilizzati anche per altri missili variando le caratteristiche geometriche, ricordando però che le equazioni qui inserite non sono più valide oltre la tropopausa.

Per il codice usato per generare queste immagini si rimanda all'appendice A.

Capitolo 5

Conclusioni

Considerato il grande problema che il flutter rappresenta per la stabilità dell'aeromobile, sono stati effettuati molti esperimenti al fine di trovare una soluzione che potesse ridurre gli effetti o evitare l'instaurazione del fenomeno. I metodi per il controllo del flutter finora trovati e utilizzati possono essere divisi in attivi e passivi.

I metodi passivi si concentrano prevalentemente sul migliorare la velocità critica a cui si instaura il fenomeno o sulla riduzione delle oscillazioni provocate, aumentando la rigidità della struttura, lo smorzamento o modificando la distribuzione delle masse; invece l'idea dietro ai metodi attivi per il controllo del flutter è quella di ottenere delle informazioni sulle vibrazioni della struttura da sensori distribuiti sulle superfici interessate, in modo da controllare tale superficie, tramite attuatori, con algoritmi designati all'annullamento del flutter delle ali.

In generale, i metodi passivi per il controllo del flutter comportano un aumento della massa dell'aeromobile, oltre a variazioni nella disposizione degli elementi strutturali. Un esempio di metodo per il controllo passivo del flutter dei ponti è quello ideato da Starossek U. e Starossek R. T [11], che consiste in ali poste parallelamente al piano stradale del ponte con l'obiettivo di aumentare l'eccentricità laterale. Questo permette alle ali di produrre uno smorzamento aerodinamico in grado di aumentare la velocità critica di flutter.

Per il controllo attivo del flutter è stato sviluppato un metodo che ricorre all'uso delle reti neurali dinamiche ricorsive per contrastare gli effetti del flutter. Queste vengono allenate in modo da essere in grado di controllare i movimenti del timone e del bordo di fuga delle ali in caso di instaurazione del flutter. L'utilizzo di questa tecnologia ha il vantaggio di non aumentare il peso del velivolo e avere affidabilità e sicurezza elevate. I nuovi metodi sviluppati per il controllo attivo del flutter si sono diffusi molto in ambito aerospaziale, superando anche i più tradizionali metodi per il controllo passivo. Sono in fase di ricerca anche altre soluzioni per il controllo attivo del flutter grazie al continuo sviluppo nell'ambito dell'intelligenza artificiale.

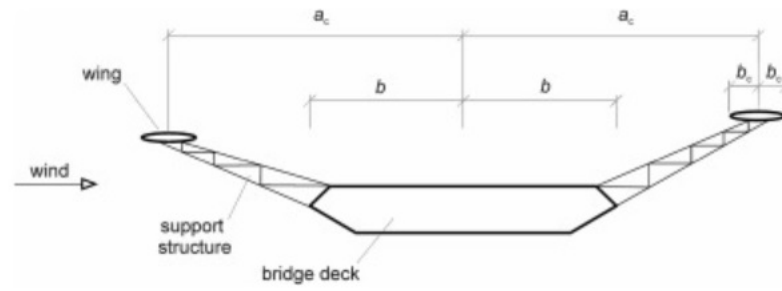


Figura 5.0.1: Metodo per il controllo passivo del flutter sui ponti, [*Parametric flutter analysis of bridges stabilized with eccentric wings*, U. Starossek, RT. Starossek]

Da quanto illustrato nei capitoli precedenti è possibile trarre alcune regole costruttive di carattere generale per ridurre il rischio di flutter nel campo aerospaziale:

- evitare, al massimo delle possibilità, la vicinanza delle frequenze proprie disaccoppiate.
- spostare il baricentro della sezione quanto più possibile a monte dell'asse elastico.
- bilanciare staticamente gli alettoni o, se possibile, sbilanciarli in avanti.

Nella pratica gli alettoni non possono essere eccessivamente sbilanciati in avanti, sia per il maggior peso che le necessarie masse aggiuntive comporterebbero, sia perchè queste ultime modificherebbero tutte le pulsazioni proprie della struttura e l'intero calcolo andrebbe rivisto. La cosa meno onerosa dal punto di vista del calcolo sarebbe aumentare gli smorzamenti propri del sistema.

Appendice A

Codice Matlab

A.1 Velocità di Flutter al Variare della Quota per Diversi Materiali

```
1 cr=0.7; %corda alla radice
2 ct=0.4; %corda al tip
3 b=0.4; %semiapertura alare
4 S=(cr+ct)*b/2; %calcolo della superficie alare
5 h=0.0065;
6 P0=101325; %pressione a livello del mare
7 T0=288.15; %temperatura media a livello del mare
8 z=1000; %quota
9 P=P0*((T0-z*h)/T0)^5.2561; %calcolo della pressione al variare
    della quota
10 lambda=ct/cr;
11 AR=b^2/S; %allungamento alare
12 %G=380000; %modulo di taglio del materiale
13 t=0.01; %spessore
14 gamma=1.4;
15 M=0.029; %massa molare dell'aria
16 R=8.3145/M;
17 T=(T0-z*h);
18 a=sqrt(gamma*R*T); %velocità del suono
19
20
21 G=77.97e9;
22 z=[0:100:4000];
23 P=P0*((T0-z.*h)/T0).^5.2561;
24 T=(T0-z.*h);
```

```

25 a=sqrt(gamma*R*T);
26 Vf=a.*sqrt(G./((1.337*AR^3.*P*(lambda+1)./(2*(AR+2)*(t/cr)^3)))
   );
27 figure(2)
28 grafico=plot(z,Vf)
29 grafico(1).LineWidth=1.5
30 title('Velocità di flutter al variare della quota per diversi
        materiali')
31 xlabel('z')
32 ylabel('Vf')
33 grid on
34 hold on
35
36 G=40.986e9;
37 z=[0:100:4000];
38 P=P0*((T0-z.*h)/T0).^5.2561;
39 T=(T0-z.*h);
40 a=sqrt(gamma*R*T);
41 Vf=a.*sqrt(G./((1.337*AR^3.*P*(lambda+1)./(2*(AR+2)*(t/cr)^3)))
   );
42 grafico=plot(z,Vf)
43 grafico(1).LineWidth=1.5
44 xlabel('z')
45 ylabel('Vf')
46 grid on
47 hold on
48
49 G=26.91e9;
50 z=[0:100:4000];
51 P=P0*((T0-z.*h)/T0).^5.2561;
52 T=(T0-z.*h);
53 a=sqrt(gamma*R*T);
54 Vf=a.*sqrt(G./((1.337*AR^3.*P*(lambda+1)./(2*(AR+2)*(t/cr)^3)))
   );
55 grafico=plot(z,Vf)
56 grafico(1).LineWidth=1.5
57 xlabel('z')
58 ylabel('Vf')
59 grid on
60 hold on
61
62 G=162.15e9;
63 z=[0:100:4000];
64 P=P0*((T0-z.*h)/T0).^5.2561;
65 T=(T0-z.*h);

```

```

66 a=sqrt(gamma*R*T);
67 Vf=a.*sqrt(G./((1.337*AR^3.*P*(lambda+1)./(2*(AR+2)*(t/cr)^3)))
    );
68 grafico=plot(z,Vf)
69 grafico(1).LineWidth=1.5
70 xlabel('z (m)')
71 ylabel('Vf (m/s)')
72 legend('stainless steel','titanium','alluminum','tungston')
73 grid on

```

A.2 Velocità di Flutter al Variare della Quota per Diverse Semiaperture Alari

```

1 G=77.97e9;
2 b=0.25;
3 z=[0:100:4000];
4 P=P0*((T0-z.*h)/T0).^5.2561;
5 T=(T0-z.*h);
6 a=sqrt(gamma*R*T);
7 S=(cr+ct)*b/2;
8 AR=b^2/S;
9 Vf = a.*sqrt(G./((1.337*AR^3.*P*(lambda+1)./(2*(AR+2)*(t/cr)^3)
    )));
10 figure(2)
11 grafico=plot(z,Vf)
12 grafico(1).LineWidth=1.5
13 title('Velocità di flutter al variare della quota per diverse
    semiaperture alari')
14 xlabel('z (m)')
15 ylabel('Vf (m/s)')
16 grid on
17 hold on
18
19 G=77.97e9;
20 b=0.3;
21 z=[0:100:4000];
22 P=P0*((T0-z.*h)/T0).^5.2561;
23 T=(T0-z.*h);
24 a=sqrt(gamma*R*T);
25 S=(cr+ct)*b/2;
26 AR=b^2/S;

```



```

27 Vf=a.*sqrt(G./((1.337*AR^3.*P*(lambda+1)./(2*(AR+2)*(t/cr)^3)))
    );
28 grafico=plot(z,Vf)
29 grafico(1).LineWidth=1.5
30 xlabel('z (m)')
31 ylabel('Vf (m/s)')
32 grid on
33 hold on
34
35 G=77.97e9;
36 b=0.4;
37 z=[0:100:4000];
38 P=P0*((T0-z.*h)/T0).^5.2561;
39 T=(T0-z.*h);
40 a=sqrt(gamma*R*T);
41 S=(cr+ct)*b/2;
42 AR=b^2/S;
43 Vf=a.*sqrt(G./((1.337*AR^3.*P*(lambda+1)./(2*(AR+2)*(t/cr)^3)))
    );
44 grafico=plot(z,Vf)
45 grafico(1).LineWidth=1.5
46 xlabel('z (m)')
47 ylabel('Vf (m/s)')
48 grid on
49 hold on
50
51 G=77.97e9;
52 b=0.45;
53 z=[0:100:4000];
54 P=P0*((T0-z.*h)/T0).^5.2561;
55 T=(T0-z.*h);
56 a=sqrt(gamma*R*T);
57 S=(cr+ct)*b/2;
58 AR=b^2/S;
59 Vf=a.*sqrt(G./((1.337*AR^3.*P*(lambda+1)./(2*(AR+2)*(t/cr)^3)))
    );
60 grafico=plot(z,Vf)
61 grafico(1).LineWidth=1.5
62 xlabel('z (m)')
63 ylabel('Vf (m/s)')
64 legend('b=0.25','b=0.3','b=0.4','b=0.45')
65 grid on

```

A.3 Velocità di Flutter al Variare della Quota per Diversi Spessori

```

1 b=0.4;
2 G=77.97e9;
3 t=0.009;
4 z=[0:100:4000];
5 P=P0*((T0-z.*h)/T0).^5.2561;
6 T=(T0-z.*h);
7 a=sqrt(gamma*R*T);
8 S=(cr+ct)*b/2;
9 AR=b^2/S;
10 Vf = a.*sqrt(G./((1.337*AR^3.*P*(lambda+1)./(2*(AR+2)*(t/cr)^3)
    )));
11 figure(2)
12 grafico=plot(z,Vf)
13 grafico(1).LineWidth=1.5
14 title('Velocità di flutter al variare della quota')
15 xlabel('z (m)')
16 ylabel('Vf (m/s)')
17 grid on
18 hold on
19
20 b=0.4;
21 G=77.97e9;
22 t=0.01;
23 z=[0:100:4000];
24 P=P0*((T0-z.*h)/T0).^5.2561;
25 T=(T0-z.*h);
26 a=sqrt(gamma*R*T);
27 S=(cr+ct)*b/2;
28 AR=b^2/S;
29 Vf = a.*sqrt(G./((1.337*AR^3.*P*(lambda+1)./(2*(AR+2)*(t/cr)^3)
    )));
30 figure(2)
31 grafico=plot(z,Vf)
32 grafico(1).LineWidth=1.5
33 title('Velocità di flutter al variare della quota')
34 xlabel('z (m)')
35 ylabel('Vf (m/s)')
36 grid on
37 hold on

```

```
38 |
39 | b=0.4;
40 | G=77.97e9;
41 | t=0.011;
42 | z=[0:100:4000];
43 | P=P0*((T0-z.*h)/T0).^5.2561;
44 | T=(T0-z.*h);
45 | a=sqrt(gamma*R*T);
46 | S=(cr+ct)*b/2;
47 | AR=b^2/S;
48 | Vf = a.*sqrt(G./((1.337*AR^3.*P*(lambda+1)./(2*(AR+2)*(t/cr)^3)
49 | ));
50 | figure(2)
51 | grafico=plot(z,Vf)
52 | grafico(1).LineWidth=1.5
53 | title('Velocità di flutter al variare della quota per diversi
54 | spessori')
55 | xlabel('z (m)')
56 | ylabel('Vf (m/s)')
57 | legend('8mm','9mm','10mm','11mm')
58 | grid on
```

Bibliografia

- [1] Collar A.R. «The first fifty years of aeroelasticity». In: Royal Aeronautical Society, dic. 1977.
- [2] Chiocchia Gianfranco. *Principi di Aeroelasticità*. Levrotto&Bella, 2014.
- [3] Chai Yuyang, Gao Wei, Ankay Benjamin, Li Fengming e Zhang Chuanzeng. «Aeroelastic analysis and flutter control of wings and panels: A review». In: *International Journal of Mechanical System Dynamics* (2021).
- [4] Pines Samuel. «An elementary explanation of the flutter mechanism». In: *Proceedings of Dynamics and Aeroelasticity Meeting*. IAS New York. 1958, pp. 52–59 (cit. a p. 24).
- [5] Theodorsen Theodore. «General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter». In: National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), 1949.
- [6] Bisplinghoff Raymond L. e Holt Ashley. *Principles of Aeroelasticity*. Dover Publications, inc. New York, 1962.
- [7] Mouton Luc e Finkelstein Alon. «Exploratory study on the flutter behavior of modern yacht keels and appendages». In: *Proceedings of High Performance Yacht Design* (2015), pp. 8–12.
- [8] Martin Dennis J. «Summary of Flutter Experiences as a guide to the preliminary design of lifting surfaces on missiles». In: National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), 1958 (cit. a p. 37).
- [9] engineersedge. *Shear Modulus of Rigidity Table of Engineering Materials*. URL: https://www.engineersedge.com/materials/shear_modulus_of_rigidity_13122.htm (visitato il 12/10/2023).
- [10] Green Daniel e Unruh William G. «The failure of the Tacoma Bridge: A physical model». In: *American journal of physics* 74.8 (2006), pp. 706–716.
- [11] Starossek Uwe e Starossek Rudolf T. «Parametric flutter analysis of bridges stabilized with eccentric wings». In: *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 211 (2021), p. 104566 (cit. a p. 43).

Ringraziamenti

Vorrei dedicare questo spazio della mia tesi a tutte le persone che mi hanno supportato nel mio percorso di crescita universitaria e professionale.

Un sentito ringraziamento va al mio relatore Michele Iovieno, per i suoi preziosi consigli e per la disponibilità. Grazie per avermi fornito spunti fondamentali durante la stesura di questo lavoro.

Ringrazio i miei genitori che mi hanno sempre sostenuta e aiutata a superare i momenti più difficili.

Un grazie speciale va ad Alessandro, che ha condiviso con me tutte le sfide, i fallimenti e i successi, accompagnandomi con la sua forza e la sua pazienza oltre ogni ostacolo. Senza di lui sarebbe stato tutto più difficile.

Vorrei anche ringraziare le mie amiche Carola, Martina, Emilia e Matilda per essere sempre state un punto di riferimento e per avermi incoraggiata quando più ne avevo bisogno.

Grazie ai miei colleghi di corso, che hanno saputo alleggerire i momenti più difficili.

Grazie a tutte le persone che hanno incrociato la loro vita con la mia lasciandomi qualcosa di buono.