INTRODUCERE. MULTIGRAFURI.
GRAFURI ORIENTATE

1. INTRODUCERE. MULTIGRAFURI. GRAFURI ORIENTATE

- Istoric
- Multigrafuri
- Grafuri orientate

Definitii:

- multigraf orientat; varfuri/noduri; arcele multigrafului
- extremitatea initiala/finala arc
- indexul arcului; arc incident exterior/interior vf.
- varfuri adiacente; arce adiacente; bucla
- multigraf, multigraf finit, infinit
- ordinul, dimensiunea multigrafului
- k- graf orientat
- graf orientat; graf orientat ca aplicatie multivoca
- multimea succesorilor nodurilor
- multimea descendentilor nodului
- inchiderea reflexiva a aplicatiei multivoce
- grad, grad exterior, interior, nod izolat
- graf complementar, simetric, antisimetric, turneu
- graf bipartit
- subgraf, subgraf generat
- graf partial; subgraf partial
- drumuri in graf, drum concatenare
- drum simplu, drum compus, drum elementar

Definitii:

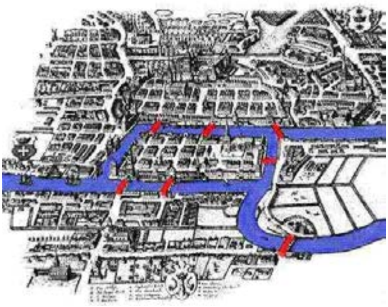
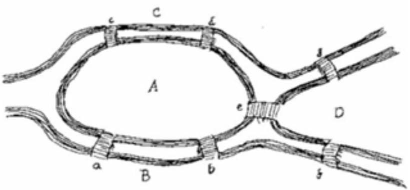
- circuit, circuit simplu,
- circuit elementar
- graf tare conex
- graf eulerian, drum eulerian
- graf hamiltonian,drum hamiltonian
- grafuri izomorfe, functie izomorfism

Proprietati. Teoreme

- suma grade exterioare = suma grade interioare
- relatie izomorfism=relatie echivalenta

Istoric

- 1736, problema celor 7 poduri (din Königsberg)
- Königsberg

- Există posibilitatea ca un locuitor al orașului, să facă o plimbare, pornind de la locuința sa, traversând fiecare dintre cele 7 poduri o singură dată și revenind acasă?

Istoric

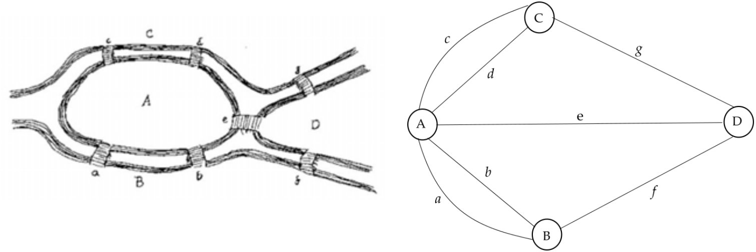
- matematicianul elvețian Leonhard Euler (1707–1783) a construit un model matematic
- 

Figure: Podurile din Königsberg. Model matematic

Istoric

- 1857, matematicianul irlandez Sir William Rowan Hamilton a inventat un puzzle "A Voyage round the world" sau **Jocul icosian**

- 

Figure: Hamilton puzzle

Istoric

- Gustav Kirchhoff (1824-1887) a folosit modelul abstract introdus de Euler în modul de studiu al curentului în rețele și circuite electrice, definind în 1845 conceptul de arbore
- Arthur Cayley (1821-1895), James J. Sylvester(1806-1897), George Polya(1887-1985) și alții au folosit același model pentru a descrie moleculele în chimie
- J. Sylvester- primul care a folosit noțiunea de *graf*, într-un articol publicat în 1878 în primul număr al revistei American Journal of Mathematics

Istoric

- 1936, Denes König (1884-1944), *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen*- prima carte de teoria grafurilor
- 1957, Claude Berge (1926-2002) a publicat cartea *Théorie des graphes et ses applications*

Aplicații

- informatică: rețele de comunicație, moduri de organizare a datelor, fluxuri computaționale s.a.m.d.
- lingvistică: analizarea structurii și corectitudinii unui limbaj natural
- chimie: grafurile sunt modele naturale ce pot descrie molecule (nodurile sunt atomi, iar muchiile legături dintre aceștia), iar tranzițiile de fază și fenomenele critice pot fi studiate folosind grafuri
- modelarea rețelelor electrice
- biologie: analiza datelor între care există relații, modelarea migrația speciilor sau răspândirea bolilor
- neuroștiințe: descrierea neuronilor și legăturilor dintre aceștia

Aplicații

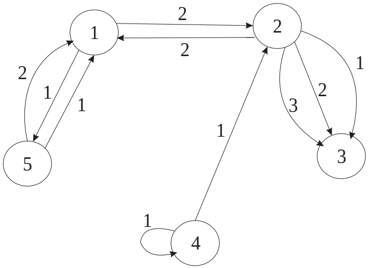
- geometria și topologia folosesc frecvent structura de graf
- există legături și între teoria grupurilor din algebră și anumite tipuri de grafuri (Cayley)
- științele sociale: folosesc structura de graf (social network) pentru a studia legături între persoane sau fenomene și modul în care acestea pot influența comportamentul unui grup
- economie: procese economice, probleme de planificare, afectare, ordonanțare

Istoric

- Grigore Moisil (1906-1973), părintele informaticii românești: *Azi teoria grafurilor a devenit o disciplină majoră, deși nu-și găsește locul într-o clasificare dogmatică a capitolelor matematicii. Folosirea teoriei grafurilor în domenii variate, de la chimie la economie, de la studiul rețelelor electrice la critica textelor și la politică, îi dau azi un prestigiu de care cel ce clasifică științele trebuie să țină seama.*
- Ioan Tomescu (1942-)- specialist de talie internațională în teoria grafurilor, care și-a susținut teza de doctorat sub îndrumarea lui Grigore Moisil și a publicat peste 150 de articole de teoria grafurilor în reviste de prestigiu. Ioan Tomescu este profesor universitar în cadrul Departamentului de Informatică, Facultatea de Matematică și Informatică a Universității din București și membru corespondent al Academiei Române

Definiție

Se numește **multigraf orientat** sistemul $G = (X, U)$ unde X este o mulțime de elemente numite **vârfurile** sau **nodurile multigrafului**, iar $U \subseteq X \times X \times \mathbb{N}$ este o mulțime de elemente numite **arcele multigrafului**.



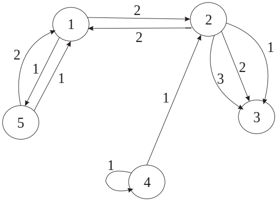
Multigrafuri

$G = (X, U)$ multigraf orientat și $u = (x, y, k) \in U$ arc al multigrafului

- vârful $x \in X$ se numește **extremitatea inițială** a arcului u
- vârful $y \in X$ se numește **extremitatea finală** a arcului u
- numărul natural $k \in \mathbb{N}$ este **indexul** arcului u
- arcul $u = (x, y, k) \in U$ este **incident exterior** vârfului $x \in X$
- arcul $u = (x, y, k) \in U$ este **incident interior** vârfului $y \in X$
- extremitățile x, y ale lui $u = (x, y, k) \in U$ sunt **vârfuri adiacente**
- $u_1 = (x_1, y_1, k_1),\ u_2 = (x_2, y_2, k_2) \in U$ cu $\{x_1, y_1\} \cap \{x_2, y_2\} \neq \emptyset$ sunt **arce adiacente**
- $u = (x, x, k) \in U$ se numește **buclă**

Multigrafuri

- $G = (X, U)$ multigraf



- $u = (5, 1, 2)$ are nodul 5 extremitate inițială, nodul 1 extremitate finală și index 2
- nodurile 1 și 2 sunt adiacente, $u = (1, 2, 2) \in U$, ...
- arcul $u = (4, 2, 1)$ este incident interior nodului 2 și incident exterior nodului 4
- arce adiacente
  - $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$; $(1, 2, 2)$, $(1, 5, 1)$
  - $(1, 2, 2)$, $(4, 1, 1)$; $(1, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$; ...
- $u = (4, 4, 1)$ buclă

Multigrafuri

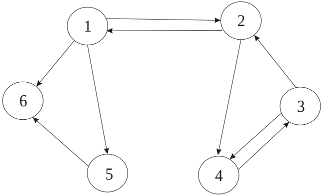
- dacă mulțimea X a nodurilor și mulțimea U a arcelor multigrafului $G = (X, U)$ sunt finite, multigraful se numește **multigraf finit** altfel multigraful se numește **multigraf infinit**
- numărul nodurilor $n = |X|$ se numește **ordinul multigrafului**
- numărul arcelor $m = |U|$ se numește **dimensiunea multigrafului**
- multigraful orientat $G = (X, U)$ se numește **k- graf orientat** dacă între oricare două noduri există cel mult k arce și există două noduri între care există exact k arce

Grafuri orientate

Definiție

Se numește **graf orientat** sistemul $G = (X, U)$ unde X este o mulțime de elemente numite noduri sau vârfuri, iar $U \subseteq X \times X$ este o mulțime de perechi ordonate de noduri numite arce.

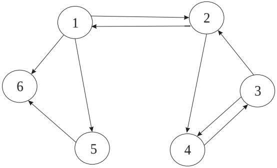
- un graf orientat este un 1-multigraf orientat dacă $U \neq \emptyset$
- $G = (X, U),\ X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  $U = \{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (5, 6)\}$



- $n = |X| = 6$ ordinul grafului, $m = |U| = 9$ dimensiunea

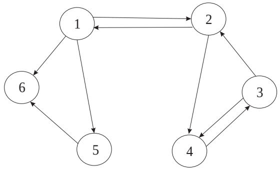
Grafuri orientate

Se numește **graf orientat** sistemul $G = (X, \Gamma)$, unde X este o mulțime de elemente numite nodurile sau vârfurile grafului, iar $\Gamma : X \to \wp(X)$ este o aplicație multivocă de la mulțimea nodurilor la ea însăși.

- 

- $\Gamma,\ \Gamma^{-1} : \{1,2,3,4,5\} \to \wp(\{1,2,3,4,5\})$ cu
  $\Gamma 1 = \{2,5,6\}$, $\Gamma 2 = \{1,4\}$, $\Gamma 3 = \{2,4\}$, $\Gamma 4 = \{3\}$, $\Gamma 5 = \{6\}$, $\Gamma 6 = \emptyset$
  $\Gamma^{-1} 1 = \{2\}$, $\Gamma^{-1} 2 = \{1,3\}$, $\Gamma^{-1} 3 = \{4\}$,
  $\Gamma^{-1} 4 = \{2,3\}$, $\Gamma^{-1} 5 = \{1\}$, $\Gamma^{-1} 6 = \{1,5\}$

- $A \subseteq X$ submulțime de noduri a grafului $G = (X, U)$, se definește mulțimea succesorilor nodurilor din A, $\Gamma A = \bigcup_{i \in A} \Gamma i$
- $\Gamma^n i = \begin{cases} \{i\}, n = 0 \\ \Gamma(\Gamma^{n-1} i), n \geq 1 \end{cases}$
- **mulțimea descendenților** nodului $i \in X$ este mulțimea $\Gamma^+ i = \bigcup_{n \geq 1} \Gamma^n i$, adică închiderea tranzitivă a mulțimii Γ
- $\widehat{\Gamma} i = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma^n i = \Gamma^+ i \bigcup \{i\}$ se numește **închiderea reflexivă** a aplicației multivoce Γ și conține succesorii nodului $i \in X$, inclusiv nodul i



- $\Gamma 1 = \{2, 5, 6\}$,
- $\Gamma^2 1 = \Gamma(\{2, 5, 6\}) = \Gamma 2 \cup \Gamma 5 \cup \Gamma 6 = \{1, 4\} \cup \{6\} \cup \emptyset = \{1, 4, 6\}$
- $\Gamma^3 1 = \Gamma(\{1, 4, 6\}) = \Gamma 1 \cup \Gamma 4 \cup \Gamma 6 = \{2, 5, 6\} \cup \{3\} \cup \emptyset = \{2, 3, 5, 6\}$
- $\Gamma^4 1 = \Gamma(\{2, 3, 5, 6\}) = \Gamma 2 \cup \Gamma 3 \cup \Gamma 5 \cup \Gamma 6 = \{1, 4\} \cup \{2, 4\} \cup \{6\} \cup \emptyset = \{1, 2, 4, 6\}$
- $\Gamma^5 1 = \Gamma(\{1, 2, 4, 6\}) = \Gamma 1 \cup \Gamma 2 \cup \Gamma 4 \cup \Gamma 6 = \{2, 5, 6\} \cup \{1, 4\} \cup \{3\} \cup \emptyset = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = X$
- $\Gamma^+ 1 = \bigcup_{n \geq 1} \Gamma^n 1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = X, \quad \widehat{\Gamma} 1 = \bigcup_{n \geq 0} \Gamma^n 1 = X$

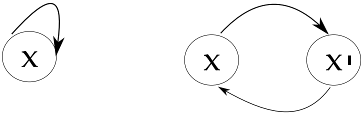
Grafuri orientate

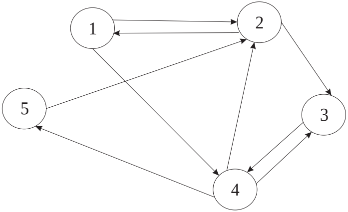
Fie $G = (X, \Gamma)$ un graf orientat.

- se numește **grad exterior** al vârfului $i \in X$ numărul succesorilor vârfului i și se notează $g^+(i)$, $g^+(i) = |\Gamma i|$
- se numește **grad interior** al vârfului $i \in X$ numărul predecesorilor vârfului i și se notează $g^-(i)$, $g^-(i) = |\Gamma^- i|$
- se numește **gradul** vârfului $i \in X$ numărul nodurilor adiacente vârfului i și se notează $g(i)$, $g(i) = g^-(i) + g^+(i)$
- suma gradelor exterioare ale nodurilor unui graf orientat $G = (X, U)$ este egală cu suma gradelor interioare, $\sum\limits_{x \in X} g^+(x) = \sum\limits_{x \in X} g^-(x)$
- un nod al grafului este **nod izolat** dacă nu are arce incidente

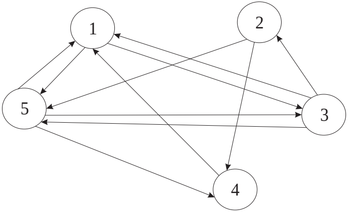
Tipuri de grafuri orientate:

- un graf orientat fără bucle se numește **graf orientat simplu**
- se numește **graf complementar** al grafului orientat $G = (X, U)$, graful orientat $\overline{G} = (X, V)$ cu $V = (X \times X) \setminus U \setminus \{(x, x) | x \in X\}$
- graful orientat $G = (X, U)$ se numește **graf simetric** dacă existența unui arc între nodurile i și $j \in X$ implică existența unui arc și între nodurile j și i, adică $(i, j) \in U \Rightarrow (j, i) \in U$
- graful orientat $G = (X, U)$ se numește **graf antisimetric** dacă existența unui arc între nodurile i și $j \in X$ implică inexistența unui arc și între nodurile j și i, adică $(i, j) \in U \Rightarrow (j, i) \notin U$
- graful orientat $G = (X, U)$ se numește **graf turneu** sau graf turnir dacă este graf antisimetric cu număr maxim de arce

- 

- 

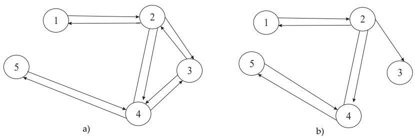
4 A)



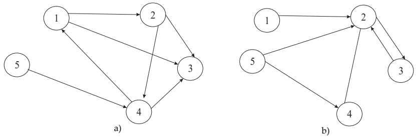
4 B)

Graf a) si graf complementar b)

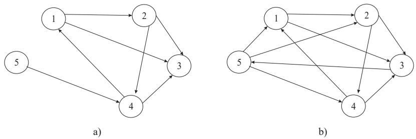
Grafuri orientate

- 

  Graf a) simetric, respectiv nu simetric b)

- 

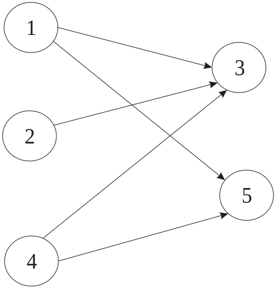
  Graf antisimetric, respectiv nu antisimetric

- 

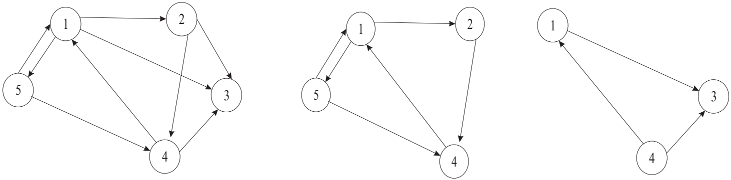
  Graf antisimetric și graf turnir

Grafuri orientate

- graful orientat $G = (X, U)$ se numește **graf bipartit** dacă este există o submulțime de noduri $A \subset X$ astfel încât $U \subseteq A \times (X \setminus A)$

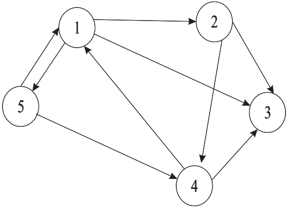


-

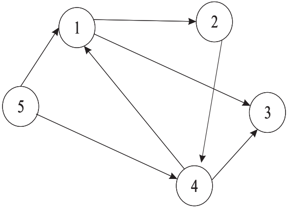
- graful $G_1 = (Y, V)$ se numește **subgraf** al grafului $G = (X, U)$ dacă Y este o submulțime de vârfuri ale grafului G, $Y \subset X$, iar mulțimea V a arcelor este $V = U \cap (Y \times Y)$
- subgraful cu mulțimea nodurilor $Y \subset X$ se numește subgraf generat de Y și se notează cu $G(Y)$
- 

a) b) c)

- graful $G_1 = (X, V)$ se numește **graf parțial** al grafului $G = (X, U)$ dacă V este o submulțime de arce ale grafului G, $V \subset U$
- graful $G_1 = (X, V)$ cu mulțimea arcelor $V \subset U$ este graful parțial al grafului $G = (X, U)$ generat de V și se notează cu $G(V)$



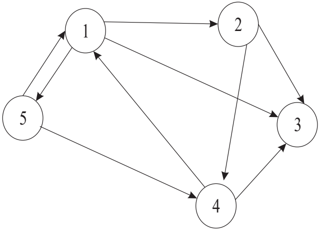
a)



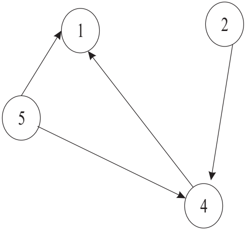
b)

Grafuri orientate

- graful $G_1 = (Y, V)$ se numește **subgraf parțial** al grafului $G = (X, U)$ dacă Y este o submulțime de noduri a grafului G, $Y \subset X$, iar V este o submulțime de arce $V \subset U \cap (Y \times Y)$

- 

a)



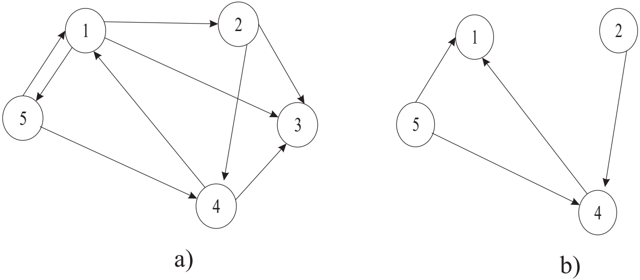
b)

Definiție

Se numește **drum** în graful orientat $G = (X, U)$ o succesiune de arce cu proprietatea că extremitatea finală a unui arc din succesiune este extremitatea inițială a arcului următor.

- succesiunea de arce $\mu = (u_1, u_2, u_3, ..., u_{k-1}, u_k)$ reprezintă un drum în graful $G = (X, U)$ dacă arcele sunt de forma $u_i = (x_i, x_{i+1}), i = \overline{1, k}$ unde $x_i \in X, i = \overline{1, k}$
- succesiune de vârfuri ale grafului astfel încât între oricare două noduri vecine din succesiune există arc, adică $\mu = (x_1, x_2, x_3, ..., x_{k-1}, x_k)$ cu $(x_i, x_{i+1}) \in U,\ i = \overline{1, k-1}$
- se numește **lungimea** unui drum μ în graful $G = (X, U)$, numărul $l(\mu)$ al arcelor ce compun drumul respectiv

Grafuri orientate



- $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ definite prin
  $\mu_1 = (1, 2, 4, 1, 3) = ((1, 2), (2, 4), (4, 1), (1, 3))$,
  $\mu_2 = (1, 5, 4, 3) = ((1, 5), (5, 4), (4, 3))$,
  $\mu_3 = (5, 4, 1, 3) = ((5, 4), (4, 1), (1, 3))$,
  $\mu_4 = (1, 2, 4, 1, 2, 3) = ((1, 2), (2, 4), (4, 1), (1, 2), (2, 3))$
- $l(\mu_1) = 4, l(\mu_2) = 3, l(\mu_3) = 3, l(\mu_4) = 5$

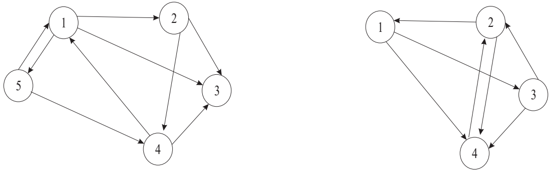
Grafuri orientate

- dacă $\mu_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $\mu_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_l)$ sunt drumuri în graful $G = (X, U)$ și $x_k = y_1$ atunci $\mu_3 = (x_1, x_2, \ldots, x_k = y_1, y_2, \ldots, y_l)$ este **drumul concatenare** al drumurilor μ_1 și μ_2
- un drum care nu folosește de două ori un același arc al grafului se numește **drum simplu**; dacă există cel puțin un arc parcurs de două ori se numește **drum compus**
- un drum care nu folosește de două ori un același vârf al grafului se numește **drum elementar**
- un drum pentru care extremitatea finală a ultimului arc este extremitate inițială pentru primul arc se numește **circuit**
- circuit simplu, circuit elementar

Grafuri orientate

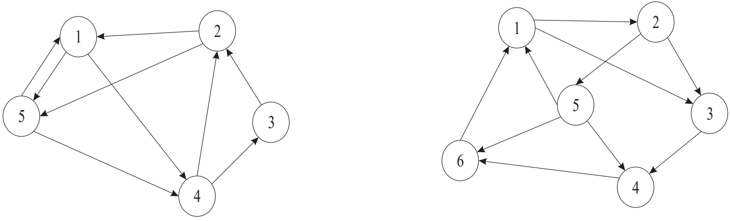
Definiție

Un graf orientat $G = (X, U)$ se numește **graf tare conex** dacă există drum între oricare două noduri ale grafului.

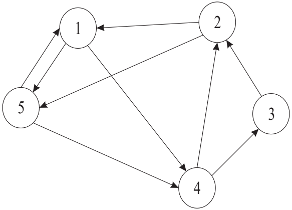
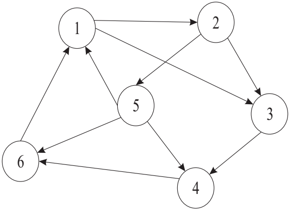


a) b)

- graful a) nu tare conex, nu există drum de la nodul 3 la nici un alt nod
- b) tare conex, există drum între oricare două noduri:
  $\mu_{12} = (1, 3, 2)$, $\mu_{13} = (1, 3)$, $\mu_{14} = (1, 4)$, $\mu_{21} = (2, 1)$,
  $\mu_{23} = (2, 1, 3)$, $\mu_{24} = (2, 4)$, $\mu_{31} = (3, 2, 1)$, $\mu_{32} = (3, 2)$,
  $\mu_{34} = (3, 4)$, $\mu_{41} = (4, 2, 1)$, $\mu_{42} = (4, 3)$, $\mu_{43} = (4, 2, 1, 3)$

- un drum simplu care folosește toate arcele grafului se numește **drum eulerian**
- un drum elementar care folosește toate nodurile grafului se numește **drum hamiltonian**
- 

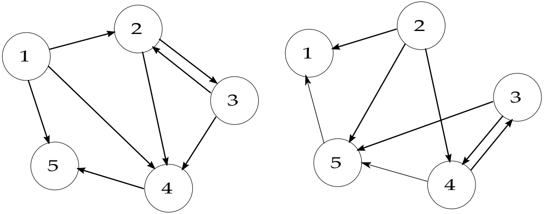
a) b)
- drum eulerian în graful G_1, a),
  $\mu_1 = \{(1,4),(4,2),(2,5),(5,4),(4,3),(3,2),(2,1),(1,5),(5,1)\}$
- drum hamiltonian în graful G_2, b), $\mu_2 = \{2,5,4,6,1,3\}$

- un graf $G = (X, U)$ care conține cel puțin un circuit eulerian se numește **graf eulerian**
- un graf $G = (X, U)$ care conține cel puțin un circuit hamiltonian se numește **graf hamiltonian**
- 
a)

b)

G_1 din a) este eulerian și hamiltonian

$\mu_1 = \{(1,4),(4,2),(2,5),(5,4),(4,3),(3,2),(2,1),(1,5),(5,1)\}$

$\mu_2 = \{1,5,4,3,2,1\}$

- două grafuri $G_1 = (X_1, U_1)$ și $G_2 = (X_2, U_2)$ se numesc **izomorfe** dacă există o funcție bijectivă $f : X_1 \to X_2$ cu proprietatea că $(x_1, x_2) \in U_1 \Rightarrow (f(x_1), f(x_2)) \in U_2$, $G_1 \cong G_2$
- funcția $f : X_1 \to X_2$ care definește izomorfismul este dată prin $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 3, f(4) = 5, f(5) = 1$
- 

- relația de izomorfism este o relație de echivalență deoarece este reflexivă, simetrică și tranzitivă