GRAFURI HAMILTONIENE

Definitii:

- drum/lant hamiltonian
- circuit/ciclu hamiltonian
- graf hamiltonian
- graf non-hamiltonian maximal
- inchidere a grafului

7.GRAFURI HAMILTONIENE

- Grafuri hamiltoniene
- Caracterizari ale grafurilor hamiltoniene

Proprietati. Teoreme

- 2 Observatii:: grade: Grafuri hamiltoniene
- Caracterizari ale grafurilor hamiltoniene (Cn, Kn, graf partial)
- T. graf hamiltonian: inegalitate nr. componente conexe subgraf (+demonstratie)
- Sa se demonstreze ca graful Herschel nu este hamiltonian.
- T. Dirac (ineg. gradele tuturor nodurilor = > hamiltonian) (+demonstratie)
- T. Ore: g.hamiltonian <=> G0 hamiltonian (+demonstratie)
- Lema: inchiderea unica (+demonstratie)
- T. Bondy-Chvatal: g.hamiltonian <=> c(G) hamiltonian (+demonstratie)

Consecinta: inchidere c(G) complet => G hamiltonian.

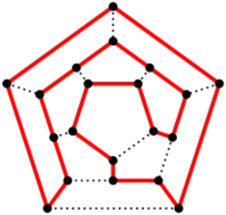
- T. graf complet Kn: (n-1)/2 cicluri hamiltoniene disjuncte (+demonstratie)
- T. graful hamiltonian: oricare relatie are loc: a)-g)

  a) (Dirac); b) (Ore) c) (Posa) ; d) (Bondy) e) (Chvatal); f) (Las Vergnas) g) (Chvatal, Bondy)

Grafuri hamiltoniene

- Sir William Hamilton, matematician irlandez (1805-1865)
- 1856 inventează un puzzle - jocul Icosian, vândut pentru 25 de guinee unui producător de jocuri din Dublin
- jocul Icosian
    - dodecaedru în care cele 20 noduri sunt etichetate cu nume de capitale
    - obiectivul: a construi, folosind muchiile dodecaedrului un traseu prin care se vizitează fiecare oraș exact o dată revenind în orașul de pornire

- să se construiască un ciclu hamiltonian în graful corespunzător dodecaedrului (graful plan obținut prin desfășurarea lui)
- problema studiată inițial de Hamilton a fost cea a simetriilor în icosaedru



Grafuri hamiltoniene

Fie $G = (X, U)$ un graf orientat/neorientat cu mulțimea nodurilor X, $|X| = n$ și mulțimea arcelor/muchiilor U, $|U| = m$.

Definiție

Se numește **drum/lanț hamiltonian** în graful G un drum/lanț în G care trece prin fiecare nod al grafului o singură dată.

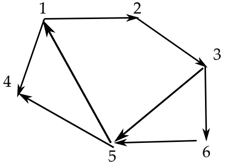
Definiție

Se numește **circuit/ciclu hamiltonian** în graful G un circuit/ciclu în G care trece prin fiecare nod al grafului o singură dată.

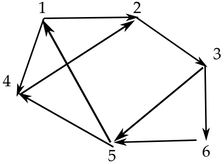
Definiție

Se numește **graf hamiltonian** un graf G care conține circuit/ciclu hamiltonian.

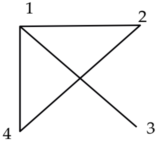
Grafuri hamiltoniene



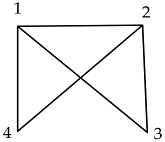
G_1



G_2



G_3



G_4

- $\mu_1 = (1, 2, 3, 6, 5, 4)$ drum hamiltonian în G_1; G_1 nu conține circuit hamiltonian
- $\mu_2 = (4, 2, 3, 6, 5, 1, 4)$ circuit hamiltonian în G_2
- $\mu_3 = (3, 1, 2, 4)$ lanț hamiltonian în G_3; G_3 nu conține ciclu hamiltonian
- $\mu_4 = (3, 2, 4, 1, 3)$ ciclu hamiltonian în G_4
- G_2 și G_4 sunt hamiltoniene.

Observații:

- pentru ca un graf orientat să conțină circuit hamiltonian, nodurile sale trebuie să aibă atât gradul interior cât și exterior nenule
- pentru ca un graf neorientat să conțină ciclu hamiltonian, nodurile sale trebuie să aibă gradele nodurilor cel puțin 2

În continuare, graful $G = (X, U)$ se va considera graf neorientat, dacă nu se precizează altceva.

Caracterizari ale grafurilor hamiltoniene:

- graful ciclu C_n este graf hamiltonian
- graful complet de ordin n, K_n, este graf hamiltonian
- dacă graful G conține un graf parțial H care este hamiltonian, atunci graful G este hamiltonian

Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

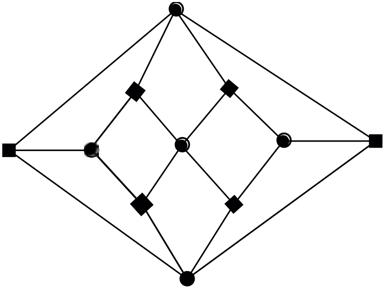
Teoremă

Fie $G = (X, U)$ un graf hamiltonian. Atunci pentru orice submulțime nevidă S a lui X, $S \subset X, S \neq \emptyset$, are loc inegalitatea $p(G - S) \leq |S|$, unde $p(G - S)$ este numărul de componente conexe ale subgrafului lui G obținut prin eliminarea nodurilor din S.

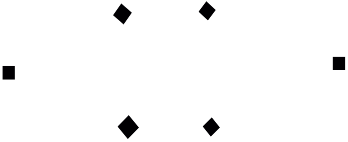
Demonstrație:
- fie $G_1 = (X_1, U_1), G_2 = (X_2, U_2), ..., G_p = (X_p, U_p)$ componentele conexe ale subgrafului $G - S$
- fie $C = (x_1, ..., x_n, x_1)$ ciclu hamiltonian cu $x_1 \in X_1$
- se notează y_i ultimul nod din ciclul C care este în componenta G_i și z_i nodul imediat următor lui y_i în $C \Rightarrow z_i \notin G_i \Rightarrow z_i \in S$ (altfel (y_i, z_i) muchie în $G - S \Rightarrow z_i \in G_i$)
- deci pentru fiecare componentă G_i a lui $G - S$ există un element $z_i \in S$ definit ca mai sus și $z_i \neq z_j,\ i \neq j \Rightarrow p(G - S) \leq |S|$.

Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

Să se demonstreze că graful Herschel nu este hamiltonian.



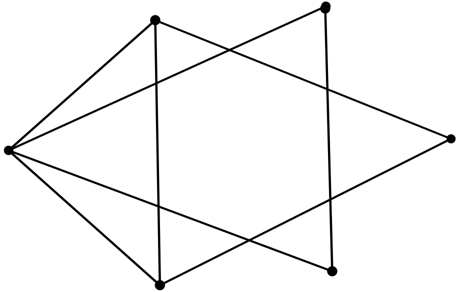
Graful Herschel



- pentru $S =$ mulțimea nodurilor rotunde $\Rightarrow$ $p(G - S) = 6 > 5 = |S|$.

Definiție

Un graf simplu G se numește **non-hamiltonian maximal** dacă nu este hamiltonian, dar prin adăugarea unei muchii între oricare două noduri neadiacente devine hamiltonian.



- graf non hamiltonian maximal.

Teorema lui Dirac

Dacă un graf $G = (X, U)$ cu $n \geq 3$ noduri are gradele tuturor nodurilor $g(x) \geq \frac{n}{2}$, $\forall x \in X$ atunci G este hamiltonian.

Demonstrație:
Pp. graful G nu este hamiltonian

- fie $G' = (X, U')$, $U \subseteq U'$ maximal non-hamiltonian adăugând muchii între noduri neadiacente din $G \Rightarrow G$ graf parțial al lui G'
- în G' are loc relația $g_{G'}(x) \geq \frac{n}{2}$, $\forall x \in X$
- fie $a, b \in X$ neadiacente în G' (există, altfel $G' = K_n$, deci hamiltonian) $\Rightarrow G" = (X, U' \cup \{(a, b)\})$ hamiltonian
- fie C ciclu hamiltonian în $G"$; C conține muchia (a, b) (altfel G' ar fi fost hamiltonian) $\Rightarrow C = (a = x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n} = b)$

Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

- fie C ciclu hamiltonian în G"; C conține muchia (a, b) (altfel G' ar fi fost hamiltonian) $\Rightarrow C = (a = x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n} = b)$

- fie mulțimile de noduri

$$A = \{x \in C | (a, x) \in U\}, \ card(A) = g(a)$$
$$B = \{x \in C | (b, x) \in U\}, \ card(B) = g(b)$$

- evident $b \notin B, \ b \notin A \Rightarrow card(A \cup B) < n$

- vom demonstra că $A \cap B = \emptyset$

- dacă $\exists \ x_{i_k} \in A \cap B \Rightarrow \ C' = (a, x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}, ..., x_{i_n}, x_{i_k}, ..., x_{i_2}, a)$ ciclu hamiltonian în G' contradicție

- atunci $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B) = card(A) + card(B) \Rightarrow \ g(a) + g(b) = card(A \cup B) < n$, contradicție cu $g(a), \ g(b) \geq \dfrac{n}{2}$

Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

Teorema lui Ore

Fie un graf $G = (X, U)$ cu n noduri și fie a și b două noduri neadiacente în G astfel încât $g(a) + g(b) \geq n$. Graful G este hamiltonian dacă și numai dacă $G' = (X, U \cup \{(a, b)\})$ este hamiltonian.

Demonstrație (Bondy):

- fie G, $|X| = n$ și $a, b \in X$ neadiacente cu $g(a) + g(b) \geq n$

"G hamiltonian $\Rightarrow$ G' hamiltonian

- fie C ciclu hamiltonian în G

- fie $G' = (X, U \cup \{(a, b)\})$

- C ciclu hamiltonian și în G' $\Rightarrow$ G' hamiltonian

Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

"G' hamiltonian $\Rightarrow$ G hamiltonian"

- G' Hamiltonian $\Rightarrow \exists$ C ciclu hamiltonian în G'

- pp. G nu hamiltonian $\Rightarrow$ C conține muchia $(a, b) \Rightarrow$ în G există lanț hamiltonian între a și b

- fie $K_n = (X, U_{max})$ în care muchiile din U sunt colorate albastru, iar cele din $U_{max} \setminus U$ sunt roșii

- fie C_K ciclu hamiltonian în K_n cu cât mai multe muchii albastre posibil

- dem. că toate muchiile ciclului C_K sunt albastre, deci ciclul C_K este hamiltonian în G

- presupunem că C_K conține muchia roșie (a, a^-) și fie $S = \{x \in X,\ (a, x) \in U\}$ mulțimea nodurilor adiacente cu a în G

- toate muchiile $(a, x),\ x \in S$ sunt albastre

- vecinul a^- al lui a în C_K are o muchie albastră $(a^-,\ c^-)$ cu c^- succesor al unui nod din $S,\ c^- \in \Gamma S$; altfel, dacă a^- ar fi adiacent în C_K numai cu noduri din $X \setminus (\Gamma S \cup \{u^-\})$ am avea că

$$g_G(a) + g_G(a^-) \leq |S| + (|X| - |S| - 1) = n - 1 < n,$$

contradicție cu ipoteza teoremei

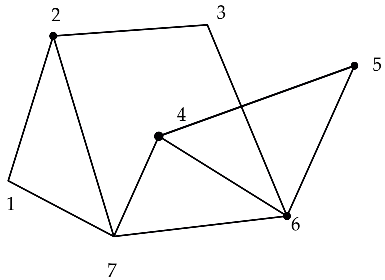
- atunci ciclul C' obținut din C_K schimbând muchia (a, a^-) cu (c, c^-) are mai multe muchii albastre decât C_K, contradicție cu faptul că C_K are număr maxim de muchii albastre.

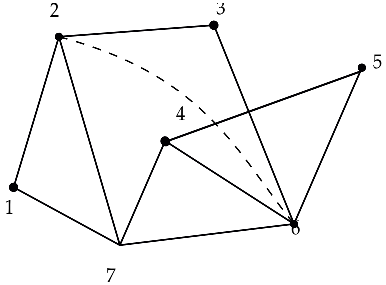
Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

Definiție

Se numește **închidere a grafului** G, graful $c(G) = (X, V)$ (closure of G) obținut prin adăugarea succesivă de muchii (x, y) între noduri neadiacente din graful G astfel: dacă există nodurile neadiacente x și y astfel încât $g(x) + g(y) \geq n$ atunci se adaugă muchia (x, y); procedeul se repetă până când nu se mai pot adăuga astfel de muchii.

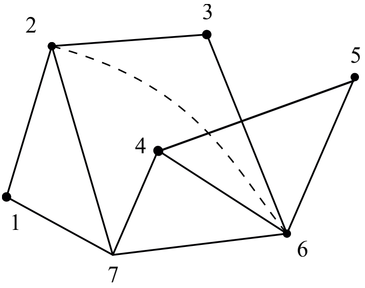
Exemplu:

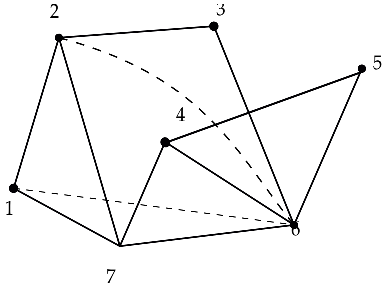




- muchiile se adaugă în ordinea: $(2, 6)$;

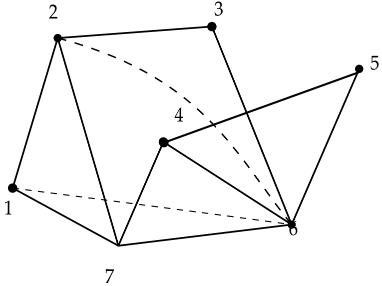
Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

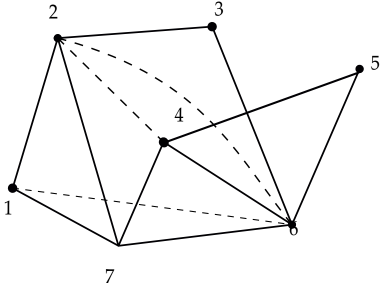




- muchiile se adaugă în ordinea: $(2, 6)$, $(1, 6)$;

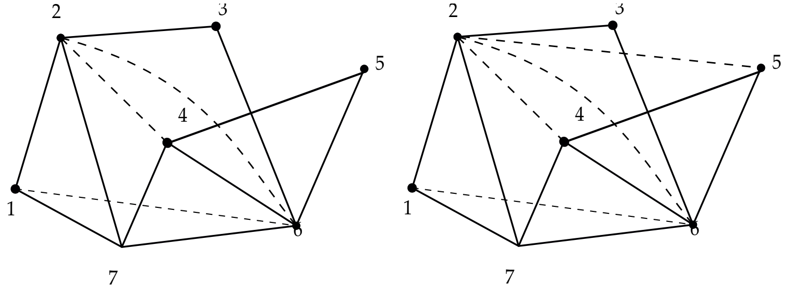
Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene





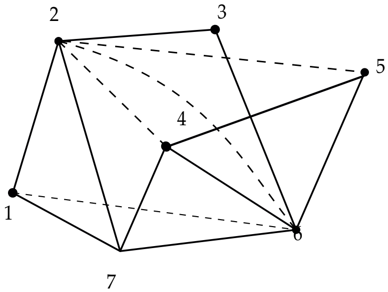
- muchiile se adaugă în ordinea: $(2,6)$, $(1,6)$, $(2,4)$

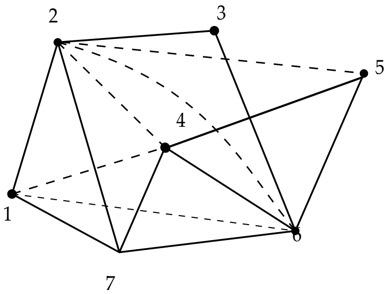
Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene



- muchiile se adaugă în ordinea: $(2, 6)$, $(1, 6)$, $(2, 4)$, $(2, 5)$

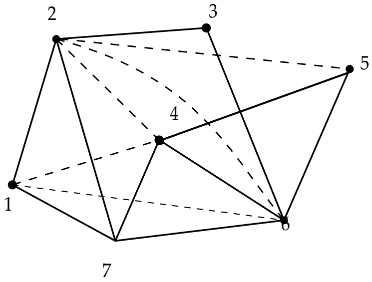
Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

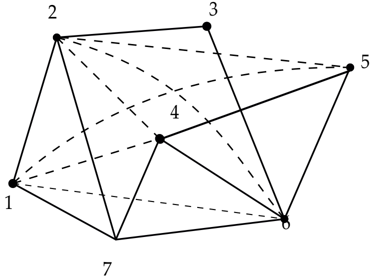




- muchiile se adaugă în ordinea: $(2,6)$, $(1,6)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(1,4)$

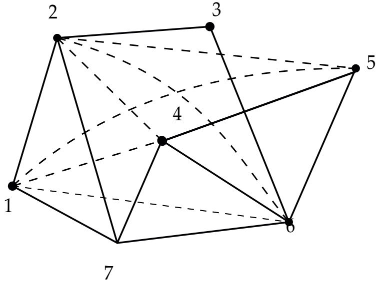
Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene





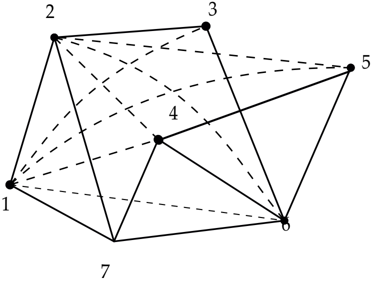
- muchiile se adaugă în ordinea: $(2,6)$, $(1,6)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(1,4)$, $(1,5)$

Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene



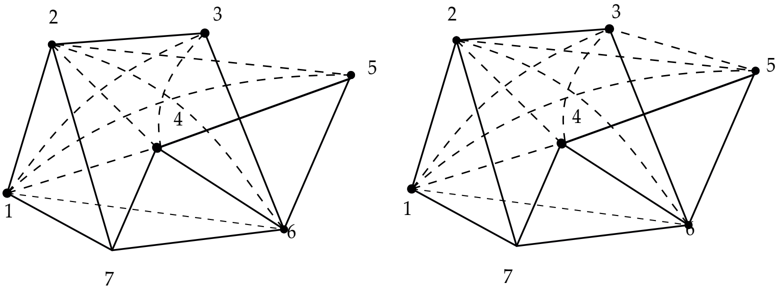
- muchiile se adaugă în ordinea: $(2,6)$, $(1,6)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,3)$

Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene



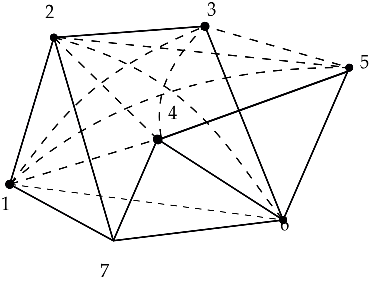
- muchiile se adaugă în ordinea: $(2,6)$, $(1,6)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,3)$, $(3,4)$

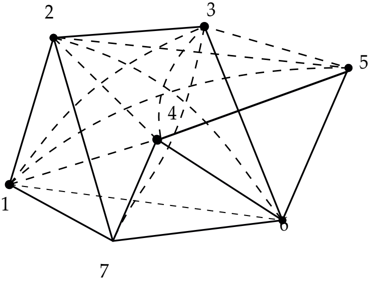
Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene



- muchiile se adaugă în ordinea: $(2,6)$, $(1,6)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$

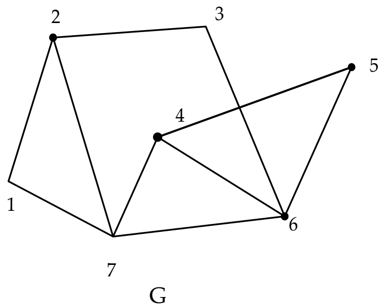
Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

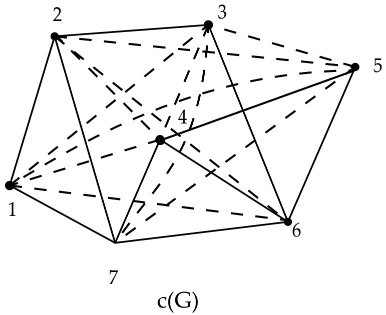




- muchiile se adaugă în ordinea: $(2,6)$, $(1,6)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,7)$

Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene





- muchiile se adaugă în ordinea: $(2,6)$, $(1,6)$, $(2,4)$, $(2,5)$, $(1,4)$, $(1,5)$, $(1,3)$, $(3,4)$, $(3,5)$, $(3,7)$, $(5,7)$

$c(G) = K_7$

Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

Lemă

Pentru un graf G, închiderea $c(G)$ este unică, adică nu depinde de ordinea de alegere a perechilor de noduri între care se adaugă muchii.

Demonstrație:

Pp. că există două grafuri închidere, $G_1 = (X, V_1)$ respectiv $G_2 = (X, V_2)$
- fie $e_1, e_2, ..., e_p \in V_1 \setminus U$, $f_1, f_2, ..., f_q \in V_2 \setminus U$ secvențele de muchii selectate pentru cele două grafuri
- dem. că $e_i \in V_1 \Rightarrow e_i \in V_2$ și $f_i \in V_2 \Rightarrow f_1 \in G_1$
- pp. $\exists\ e_k = (a, b) \in V_1$ și $e_k \notin V_2$ prima în V_1 cu această proprietate $\Rightarrow e_1, ..., e_{k-1} \in V_2$
- fie $H_1 = (X, U \cup \{e_1, e_2, ..., e_{k-1}\}) \Rightarrow g_{G_1}(a) + g_{G_1}(b) \geq n$
- H_1 este subgraf al lui $G_2 \Rightarrow g_{G_2}(a) \geq g_H(a),\ g_{G_2}(b) \geq g_H(b) \Rightarrow g_{G_2}(a) + g_{G_2}(b) \geq g_H(a) + g_H(b) \geq n \Rightarrow e_k \in V_2$
- deci $\{e_1, e_2, ..., e_p\} = \{f_1, f_2, ..., f_q\} \iff V_1 = V_2 \iff G_1 = G_2$.

Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

Teorema Bondy-Chvatal

Fie G un graf cu $n \geq 3$ noduri. Atunci G este hamiltonian dacă și numai dacă $c(G)$ este hamiltonian.

Demonstrație:
- G este graf parțial al lui $c(G)$, dacă G este hamiltonian, atunci și $c(G)$ este hamiltonian
- $c(G)$ graf hamiltonian și fie $G, G_1, G_2, ..., G_{k-1}, G_k = c(G)$ secvența prin care se obține graful închidere $c(G)$
- $c(G) = G_k$ se obtine din G_{k-1} prin adăugarea unei muchii (a, b) între noduri neadiacente în G_{k-1} cu $g(a) + g(b) \geq n \Rightarrow G_{k-1}$ e hamiltonian
- analog G_{k-2} e hamiltonian ș.a.m.d. G este amiltonian

Consecință

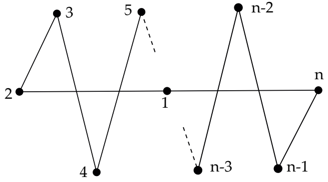
Fie $G = (X, U)$ un graf cu $|X| = n \geq 3$ noduri. Dacă graful închidere $c(G)$ este complet atunci graful G este hamiltonian.

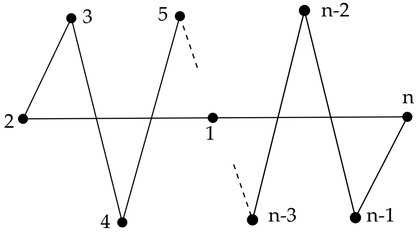
Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

Teoremă

Într-un graf complet K_n cu $n \geq 3$ impar, există $\dfrac{n-1}{2}$ cicluri hamiltoniene disjuncte.

Demonstrație:
- un graf complet G cu n noduri are $\frac{n(n-1)}{2}$ muchii
- un ciclu hamiltonian conține n muchii
- numărul de cicluri disjuncte nu poate depăși $\frac{n-1}{2}$.
- următorul graf parțial K_n este ciclu hamiltonian.





- dacă considerăm nodurile fixate pe un cerc și rotim poligonul în sensul acelor de ceasornic cu $\frac{360}{n-1}, 2 \cdot \frac{360}{n-1}, \ldots, \frac{n-3}{2} \cdot \frac{360}{n-1}$ grade se obține de fiecare dată un ciclu hamiltonian care nu are nici o muchie comună cu cele dinaintea lui

- există $\frac{n-3}{2}$ cicluri hamiltoniene noi, disjuncte oricare două și disjuncte de cel din figura $\Rightarrow$ există $\frac{n-1}{2}$ cicluri Hamiltoniene disjuncte

Caracterizări ale grafurilor hamiltoniene

Teoremă

Fie un graf $G = (X, U)$ cu gradele nodurilor $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq ... \leq d_n$. Dacă oricare dintre următoarele releții are loc atunci graful este hamiltonian:

a) $d_k \geq \frac{n}{2}, \ \forall\ k = \overline{1, n}$ (Dirac)

b) $d(x) + d(y) \geq \frac{n}{2}, \ \forall\ x, y \in X$ cu $(x, y) \notin U$ (Ore)

c) $d_k > k$ pentru $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ (Posa)

d) $d_j + d_k \geq n$ pentru orice $j < k$ cu $d_j \leq j, \ d_k \leq k - 1$ (Bondy)

e) $d_{n-k} \geq n - k, \ \forall\ d_k \leq k < \frac{n}{2}$ (Chvatal)

f) pentru orice $i, \ j \in \{1, 2, ..., n\}$ cu $i + j \geq n$ cu $(x_i, x_j) \notin U$ și
$d(x_i) \leq i, \ d(x_j) \leq j - 1$ are loc $d(x_i) + d(x_j) \geq n$ (Las Vergnas)

g) $c(G)$ este graf complet (Chvatal, Bondy).