NUMERE FUNDAMENTALE IN TEORIA GRAFURILOR

4. NUMERE FUNDAMENTALE IN TEORIA GRAFURILOR

Definitii:

- multime interior stabila (independenta)
- numar de stabilitate interna (2 def)
- multime interior stabila maxima (2 def)
- multime interior stabila pt. graful neorientat
- nr. stabilitate interna pt. graf neorientat
- multime exterior stabila (dominanta)
- familia multimilor exterior stabile (1,2,3)
- nr. stabilitate externa al grafului
- multime exterior stabila minima
- def. **graf bipartit** det. mult. ext. stabile ale grafului
- nucleu al grafului
- problema colorarii grafurilor
- indice cromatic
- graf k-colorabil (cromatic)
- numar cromatic al grafului
- multimea culorilor; functia de colorare
- Kn: colorarile = f.bijective
- vf. clici: colorate diferit
- polinom cromatic

Proprietati. Teoreme

- interior stabila (1,2,3)
- Mult.int. stabile: m. vida, submultimi singur nod
- familia mult. interior stabile ale grafului (1,2,3)
- L: submultime int. stabila maxima <=> egalitati
- indice cromatic = grad max. noduri sau grad max+1
- nr. cromatic = cel mai mic nr.(exista f. surj.)
- polinom cromatic (4 relatii)
- rel. recurenta: calcul nr. cromatic graf

- Multimi interior stabile
- Numar de stabilitate interna
- Numar de stabilitate externa
- Determinarea multimilor exterior stabile
- Nucleul unui graf
- Colorarea grafurilor
- Indice cromatic
- Numar cromatic

Algoritmi (descriere+pseudocod+ex.)

det. **multimilor interior stabile** (independente) ale grafului

- metoda backtracking

det. **multimilor exterior stabile** (dominante) ale grafului

- alg. foloseste un graf bipartit atasat grafului

det. nucleu al unui graf fara circuite

- alg. det. nucleu al unui graf fara circuite

Proprietati. Teoreme

- T. multime ext. stabila in graf <=> egalitati graf bipartit
- nucleu al grafului => proprietati 1),2)
- T. nucleu => si mult. Max. familiei mult. Int.stabile (Reciproca False)
- T. nucleu: graf simetric fara bucle, orice mult.max.familiei e nucleu
- Corolar: graf simetric fara bucle admite cel putin un nucleu
- T. Vizing (index cromatic)
- T. colorare a grafului => (3 itemi)
- T. Konig: graf bicromatic <=> fara cicluri lungime impara
- T. graf neorientat ordin n, dim. m, graf complementar => rel.(a,b,c)
- T. Nr. cromatic: graf, 2 noduri neadiacente =>rel. nr. cromatice

Mulțimi interior stabile

Problemă

Să se așeze pe o tablă de șah regine care să nu se atace reciproc. Câte astfel de piese se pot așeza?

- se poate modela ca problemă de teoria grafurilor: $G = (X, U)$ cu $X = \{0, 1, 2, ..., 63\}$ mulțimea nodurilor, câte un nod pentru fiecare dintre cele 64 poziții de pe tabla, iar $(x, y) \in U$ dacă și numai dacă poziția x și y sunt pe aceeași linie, coloană sau diagonală

Mulțimi interior stabile

Fie $G = (X, U) = (X, \varGamma)$ un graf orientat.

Definiție

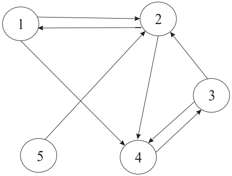
O submulțime de noduri $S \subset X$ se numește **mulțime interior stabilă** sau **independentă** dacă și numai dacă elementele mulțimii S nu au succesori în mulțimea S, adică $\forall x \in S, \Gamma x \cap S = \emptyset$.

- condiția ca S să fie interior stabilă se poate scrie echivalent:

1. $\Gamma S \cap S = \emptyset$;
2. $\forall\ x, y \in S, (x, y) \notin U$;
3. subgraful $G(S)$ format din nodurile din S, conține doar noduri izolate.

Mulțimi interior stabile

- se notează cu $\mathscr{S}$ familia mulțimilor interior stabile ale grafului simplu G
- mulțimea vidă este interior stabilă
- submulțimile lui X ce conțin un singur nod sunt interior stabile



- mulțimile interior stabile:
$S_0 = \emptyset$, $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3\}$,$S_4 = \{4\}$, $S_5 = \{5\}$,
$S_6 = \{1,3\}$, $S_7 = \{1,5\}$, $S_8 = \{3,5\}$, $S_9 = \{4,5\}$, $S_{10} = \{1,3,5\}$

Mulțimi interior stabile

Dacă $\mathscr{S}$ este familia mulțimilor interior stabile ale grafului $G = (X, U)$ atunci

1. $\emptyset \in \mathscr{S}$;
2. $\forall\, x \in X,\ \{x\} \in \mathscr{S}$;
3. dacă $A \in \mathscr{S}$ și $B \subset A$ atunci $B \in \mathscr{S}$, adică orice submulțime a unei mulțimi interior stabile este mulțime interior stabilă.

Număr de stabilitate internă

Definiție

Se numește **număr de stabilitate internă** pentru graful $G = (X, U)$ numărul $\alpha(G) = max\{|S| \mid S \in \mathscr{S}\}$.

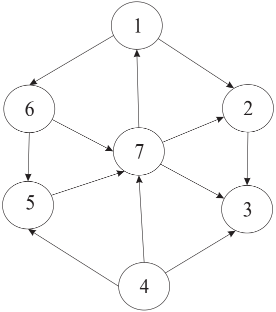
- numărul de stabilitate internă este numărul maxim de noduri dintr-o mulțime interior stabilă, adică numărul maxim de noduri izolate între ele ale grafului

Definiție

Se numește **mulțime interior stabilă maximă** pentru graful $G = (X, U)$ mulțimea $S \in \mathscr{S}$ pentru care $\alpha(G) = |S|$.

- mulțime interior stabilă maximă - mulțimea interior stabilă cu cele mai multe elemente

Număr de stabilitate internă

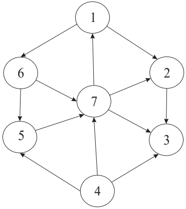


$S_0 = \emptyset$, $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{3\}$, $S_4 = \{4\}$, $S_5 = \{5\}$, $S_6 = \{6\}$, $S_7 = \{7\}$, $S_8 = \{1,3\}$, $S_9 = \{1,4\}$, $S_{10} = \{1,5\}$, $S_{11} = \{2,4\}$, $S_{12} = \{2,5\}$, $S_{13} = \{2,6\}$, $S_{14} = \{3,5\}$, $S_{15} = \{3,6\}$, $S_{16} = \{4,6\}$, $S_{17} = \{1,3,5\}$, $S_{18} = \{2,4,6\}$.

- mulțimi interior stabile maxime: $S_{17} = \{1,3,5\}$ și $S_{18} = \{2,4,6\}$,
- număr de stabilitate internă $\alpha(G) = 3$.

Număr de stabilitate internă

- o mulțime interior stabilă maximă este și maximală (în raport cu incluziunea) în familia $\mathscr{S}$
- o mulțime maximală în $\mathscr{S}$ nu este neapărat maximă



- mulțimi maximale: $S_7 = \{7\}$, $S_9 = \{1, 4\}$, $S_{12} = \{2, 5\}$, $S_{15} = \{3, 6\}$, $S_{17} = \{1, 3, 5\}$, $S_{18} = \{2, 4, 6\}$
- mulțimi maxime: $S_{17} = \{1, 3, 5\}$ și $S_{18} = \{2, 4, 6\}$

Număr de stabilitate internă

Lemă

O submulțime de noduri $S \subseteq X$ a grafului fără bucle $G = (X, \mathit{\Gamma})$ este interior stabilă maximă dacă și numai dacă $S \cap \Gamma S = \emptyset$ și $S \cup \Gamma S = X$.

- grafuri neorientate $G = (X, U)$

Definiție

Se numește **mulțime interior stabilă** pentru graful neorientat $G = (X, U)$ o mulțime de noduri $S \subseteq X$ între care nu există muchii, adică $(x, y) \notin U, \ \forall x, \ y \in S$.

- toate proprietățile mulțimilor interior stabile sunt valabile și pentru grafuri neorientate

- numărul de stabilitate internă pentru un graf neorientat este numărul maxim de noduri izolate între ele.

Număr de stabilitate internă

- determinarea mulțimilor interior stabile ale unui graf se face utilizând metoda backtracking

- se pornește de la submulțimile cu câte un singur nod și se încearcă adăugarea de noduri care să fie izolate de cele deja aflate în mulțime

- probleme care se pot modela ca probleme de teoria grafurilor și a căror rezolvare revine la determinarea mulțimilor interior stabile sunt problema reginelor, problema clicilor,...

Să se determine sistemul $(v_1, ..., v_n)$, $v_i \in S_i$, $i = \overline{1, n}$ care îndeplinesc o condiție $f(v_1, ..., v_n) = 0$, numită condiție de continuare.

- backtracking este o metodă de parcurgere sistematică a spațiului soluțiilor posibile a unei probleme

- este o metodă generală de programare și poate fi adaptată pentru orice problemă pentru care dorim să obținem toate soluțiile posibile, sau să selectăm o soluție optimă, din mulțimea soluțiilor posibile

- se modelează soluția problemei ca vector $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$ în care fiecare element v_k aparține unei mulțimi finite și ordonate S_k, cu $k = 1, n$

- mulțimile $S_1, S_2, ..., S_n$ pot fi identice

Metoda backtracking

1. la pasul k pornim de la soluția parțială $v = (v_1, ..., v_{k-1})$; încercăm să extindem soluția adăugând un nou element la sfârșitul vectorului
2. căutăm în mulțimea S_k un nou element
3. dacă există element neselectat în S_k verificăm dacă îndeplinește condițiile de continuare
4. dacă sunt respectate condițiile de continuare, adăugăm elementul soluției parțiale
5. verificăm dacă am obținut o soluție completă
   - dacă am obținut o soluție completă, o afișăm și se pasul 1
   - dacă nu am obținut o soluție, $k \leftarrow k + 1$ se reia pasul 1
6. dacă nu sunt respectate condițiile de continuare se reia pasul 2
7. dacă nu există element neverificat în S_k atunci nu există posibilitatea de a construi soluția finală, $k \leftarrow k - 1$ și se reia pasul 1

```
void bt(){
  k = 1; init();          // se inițializează vârful stivei
  while(k > 0){           // cât timp stiva nu s-a golit
      as = 1;  ev = 0;
      while(as&&!ev){        // cât timp are succesor nu valid
              as = succesor();      // se caută succesor
              if(as)              // dacă are succesor
                  ev = valid();      // se verifică dacă e valid
          }
      if(as)                   // dacă are succesor
          if(solutie())  // dacă s-au obținut toate elementele soluției
              tipareste();  // atunci se afișează elementele soluției
            else {  k++;  init();      // se urcă în stivă
              }
       else k--;       // se coboară în stivă pentru a reveni
   }
}
```

Mulțimi exterior stabile

Fie $G = (X, U) = (X, \mathit{\Gamma})$ un graf orientat.

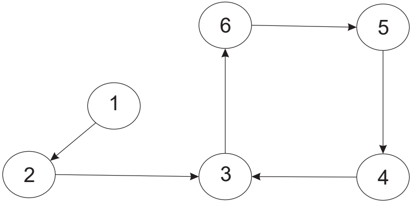
Definiție

Mulțimea $T \subset X$ se numește **mulțime exterior stabilă** sau **dominantă** dacă și numai dacă elementele ce nu fac parte din mulțimea T au succesori în mulțimea T, adică $\forall x \notin T$, $\Gamma x \cap T \neq \emptyset$.

- condiția ca o mulțime T să fie exterior stabilă se poate scrie echivalent în următoarele moduri:

1. $\Gamma^{-1} T \cup T = X$;
2. $X \setminus T \subset \Gamma^{-1} T$;
3. $\Gamma(X \setminus T) \subset T$.

Mulțimi exterior stabile



$T_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $T_1 = \{2, 3, 4, 5, 6\}$,
$T_2 = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $T_3 = \{1, 2, 4, 5, 6\}$,
$T_4 = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $T_5 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$,
$T_6 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T_7 = \{2, 4, 5, 6\}$,
$T_8 = \{2, 3, 5, 6\}$, $T_9 = \{2, 3, 4, 6\}$, ...

Mulțimi exterior stabile

- se notează cu $\mathscr{T}$ familia mulțimilor exterior stabile ale grafului $G = (X, U)$

Au loc relațiile:

1. $X \in \mathscr{T}$;
2. Dacă $T \in \mathscr{T}$ și $T \subseteq A \subseteq X$ atunci $A \in \mathscr{T}$.
3. Dacă $T_1, T_2 \in \mathscr{T}$ atunci $T_1 \cup T_2 \in \mathscr{T}$.

Număr de stabilitate externă

Definiție

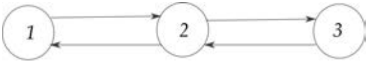
Se numește **număr de stabilitate externă** al grafului G, numărul $\beta(G) = \; min\{card(T)| \; T \in \; \mathscr{T}\}$.

Definiție

Se numește **mulțime exterior stabilă minimă** a grafului G, o mulțime exterior stabilă $T \in \; \mathscr{T}$ cu proprietatea că $card(T) = \beta(G)$.

- mulțime exterior stabilă minimă - mulțime exterior stabilă care are număr minim de elemente.

Număr de stabilitate externă



$\mathscr{T} = \{\{1,2,3\},\ \{1,2\},\ \{2,3\},\ \{1,3\},\ \{2\}\}$

- mulțimea exterior stabilă minimă este $T = \{2\}$ și numărul de stabilitate externă a grafului G este $\beta(G) = 1$

- mulțime exterior stabilă minimă este și minimală în $\mathscr{T}$, dar nu orice mulțime minimală în $\mathscr{T}$ este și minimă
- mulțimea $T = \{1,3\}$ este minimală în $\mathscr{T}$, dar nu este minimă

Determinarea mulțimilor exterior stabile

- pentru determinarea mulțimilor exterior (dominante) se utilizează un algoritm ce folosește un graf bipartit G' atașat grafului $G = (X, \mathit{\Gamma})$

- graful $G' = (Y, \Delta)$ este definit în felul următor:

$Y = X \cup X'$, unde $X' = \{i' |\ i \in X\}$

$\Delta : Y \to \mathcal{P}(Y)$ dată prin:

$\forall j \in X,\ \ i' \in \Delta j$ dacă și numai dacă $i = j$ sau $j \in \mathit{\Gamma} i$.

Teoremă

Mulțimea $T \subseteq X$ este mulțime exterior stabilă în graful $G = (X,\ \mathit{\Gamma})$ dacă și numai dacă $\Delta T = X'$ în $G' = (X \cup X',\ \Delta)$.

Determinarea mulțimilor exterior stabile

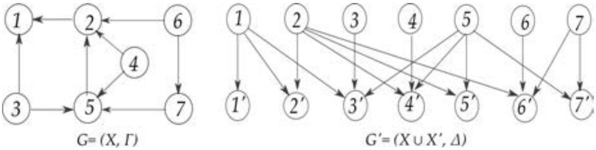
- $G = (X, U)$
- $G' = (Y, \Delta)$ se construiește astfel:

$Y = X \cup X' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \cup \{1', 2', 3', 4', 5', 6', 7'\}$

$\Delta 1 = \{1', 2', 3'\},\ 1 \in \Gamma 2 \Rightarrow 2' \in \Delta 1,\ 1 \in \Gamma 3 \Rightarrow 3' \in \Delta 1$

$\Delta 2 = \{2', 4', 5', 6'\}, \quad \Delta 3 = \{3'\},\ \Delta 4 = \{4'\}$

$\Delta 5 = \{5', 3', 4', 7'\}, \quad \Delta 6 = \{6'\}, \quad \Delta 7 = \{7', 6'\}.$



Determinarea mulțimilor exterior stabile

Determinarea mulțimilor exterior stabile pentru $G = (X, \Gamma)$

a) Inițializare

Se construiește $G' = (X \cup X', \Delta)$;

Fie $T = \emptyset$;

b) Procedura_de_reducere

Câttimp există $j' \in X'$ cu $|\Delta^{-1}j'| = 1$ execută

$T = T \cup \Delta^{-1}j$;

$G' = G' \setminus (\Delta^{-1}j' \cup \Delta(\Delta^{-1}j'))$;

Sfârșit câttimp;

c) Iterația de bază

Câttimp există $X \neq \emptyset$ execută

alege $i \in X$; $\quad T = T \cup \{i\}$;

$G' = G' \setminus (\{i\} \cup \{\Delta i\})$;

elimină din X nodurile j cu $\Delta j = \emptyset$;

execută Procedura_de_reducere;

Sfârșit câttimp;

Nucleul unui graf

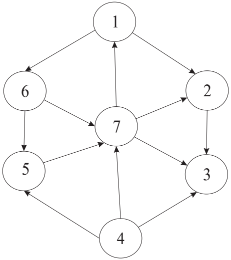
Definiție

Fiind dat un graf $G = (X, U) = (X, \Gamma)$, o mulțime de noduri $N \subseteq X$ se numește nucleu al grafului G dacă și numai dacă N este interior stabilă și exterior stabilă, $N \in \mathscr{S} \cap \mathscr{T}$.

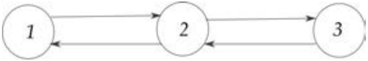
Dacă N este nucleu al grafului G atunci

1. $N \cap \Gamma = \Phi$ și $N \cup \Gamma^{-1} N = X$ - orice succesor al unui vârf aparținând nucleului nu face parte din nucleu și orice succesor al unui vârf care nu face parte din nucleu aparține nucleului;
2. dacă $i \in X$ și $i \in \Gamma i$ atunci $i \notin N$ și dacă $i \in X$ cu $\Gamma^{-1} i = \Phi$ atunci $i \in N$ - vârfurile care au bucle nu fac parte din nucleu și toate vârfurile care nu au predecesori (deci și cele izolate) fac parte din nucleu.

Nucleul unui graf



$N = \{1, 3, 5\}$ este nucleu



$N_1 = \{2\}, \; N_2 = \{1, 3\}$ nuclee

Nucleul unui graf

Teoremă

Dacă N este un nucleu al grafului $G = (X, U)$ atunci mulțimea N este o mulțime maximală a familiei $\mathscr{S}$ a mulțimilor interior stabile, adică $A \in \mathscr{S}$ și $N \subset A$ implică $A = N$.

- reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată

Teoremă

Într-un graf simetric fără bucle, orice mulțime maximală a familiei $\mathscr{S}$ este nucleu.

Corolar: un graf simetric fără bucle admite cel puțin un nucleu.

- algoritm pentru determinarea unui nucleu al unui graf fără circuite

Determinarea unui nucleu într-un graf fără circuite

(a) Fie $N = \Phi$

(b) Câttimp (există $i \in X \setminus N$ cu $\Gamma^{-1} i = \Phi$) execută

$$N = N \cup \{i\};$$

$$G = G \setminus \{i\} \setminus \Gamma i;$$

Sfcattimp.

Colorarea grafurilor

Problemă

Să se coloreze țarile/regiunile pe o hartă astfel încât oricare două regiuni vecine să fie colorate diferit.

- se poate modela harta ca un graf, cu un nod pentru fiecare țară, iar între două noduri există muchie dacă țările sunt vecine; problema revine la colorarea nodurilor grafului astfel încât oricare două noduri adiacente să fie colorate diferit

Colorarea grafurilor

Fie $G = (X, U)$ un graf neorientat.

- problema colorării grafurilor: să se coloreze nodurile/ muchiile unui graf astfel încât oricare două noduri/muchii adiacente să fie colorate diferit.

- orientarea nu este relevantă în acest caz

Indice cromatic

Definiție

Numărul minim de culori cu care se pot colora muchiile grafului G astfel încât oricare două muchii adiacente să fie colorate cu culori diferite se numește **indice cromatic**.

- indicele cromatic se notează de obicei cu $q(G)$

Teoremă (Vizing)

Pentru orice graf $G = (X, U)$ are loc relația

$$q(G) \leq max\{g(i)|\ i \in X\} + 1.$$

- pe de altă parte, evident că $q(G) \geq max\{g(i)|\ i \in X\}$, deci indicele cromatic este gradul maxim al nodurilor sau gradul maxim plus 1.

Număr cromatic

Definiție

Un graf $G = (X, U)$ este k-colorabil (cromatic) dacă vârfurile sale se pot colora cu cel mult k culori astfel încât oricare două vârfuri adiacente să fie colorare diferit.

Definiție

Se numește număr cromatic al grafului $G = (X, U)$ cel mai mic număr natural k pentru care graful este k-colorabil și se noteazaă $\chi(G)$.

Număr cromatic

- numărul cromatic al grafului $G = (X, U)$ este cel mai mic număr p cu proprietatea că există o funcție surjectivă $f : X \to \{1, 2, ..., p\}$ astfel încât $(x, y) \in U \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

- mulțimea $C = \{1, 2, ..., p\}$ se numește mulțimea culorilor, iar funcția $f : X \to C$ cu proprietatea că $(x, y) \in U \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ se numește **colorare a grafului** G

Teoremă

Dacă $f : X \to C$ este o colorare a grafului $G = (X, U)$ atunci

- $\forall a \neq b \in C$, $f^{-1}(a) \cap f^{-1}(b) = \emptyset$;
- $\forall a \in C$, $f^{-1}(a)$ este mulțime interior stabilă în G;
- $X = \bigcup_{a \in Im(f)} f^{-1}(a)$

Număr cromatic

- pentru K_n colorările sunt funcții bijective, $\chi(K_n) = n$
- vârfurile oricărei clici trebuie colorate cu culori diferite sau $\chi(H) = |A|$ pentru orice clică $H = (A, V)$;

Teoremă (König)

Un graf este bicromatic dacă și numai dacă graful nu conține cicluri de lungime impară.

Teoremă

Fie $G = (X, U)$ un graf neorientat de ordin$n$ și dimensiune m, iar $\overline{G}$ graful complementar al lui G. Atunci au loc relațiile:

a) $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$;

b) $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \leq \dfrac{(n+1)^2}{4}$;

c) $\chi(G) \geq \dfrac{n^2}{n^2 - 2m}$.

Număr cromatic

- pentru un graf $G = (X, U)$ și un număr natural x, se notează $C(G, x)$ numărul colorărilor distincte ale grafului G cu x culori

Definiție

Se numește polinom cromatic, polinomul a cărei valoare în x este $C(G, x)$.

- au loc relațiile

- $x < \chi(G) \Rightarrow C(G, x) = 0$
- $C(K_n, x) = x(x-1)...(x-n-1)$- numărul colorărilor grafului K_n cu x culori este nr. funcțiilor injective definite pe X cu valori în C
- pentru $G = (X, \emptyset)$ atunci $C(G, x) = x^n$
- $C(T_n, x) = x(x-1)^n$

Număr cromatic

Teoremă

Aacă $G = (X, U)$ este un graf și $u,\ v \in X$ două noduri neadiacente atunci

$$C(G, x) = C(G + uv, x) + \ C(\varepsilon G, x),$$

unde $G + uv$ este graful obținut prin adăugarea muchiei $(u,\ v)$, iar εG graful obținut prin identificarea nodurilor u și v.

- relație de recurență pentru calculul numărului cromatic al unui graf

- aplicând repetat relația, va conține doar termeni de forma $C(K_n, x)$