RETELE DE TRANSPORT

10. RETELE DE TRANSPORT

- Retele de transport
- Notiuni si proprietati de baza
- Flux maxim in retele de transport
- Teorema Ford-Fulkerson
- Algoritmul Ford-Fulkerson
- Cuplaje in grafuri

Algoritmi (pseudocod)

- alg. Ford-Fulkerson (a) Initializare b) Criteriul de stop c) Iteratia de baza) 2 variante

Definitii:

- Retele de transport
- Flux
- matricea de incidenta
- legea conservarii fluxului
- multimea fluxurilor
- nucleul functiei, subspatiu liniar al lui Rm
- dim flux=nr. ciclomatic al grafului neorientat
- **retea de transport**
- **flux de la nodul sursa la nodul destinatie**
- **flux compatibil cu capacitatile arcelor (flux admisibil)**
- Problema de transport
- **taietura**
- **capacitate a unei taieturi**
- capacitate a unui drum intr-o retea de transport
- Graf orientat; in acelasi sens; sens invers;
- ciclu elementar
- graful ecarturilor
- graf bipartit
- Problema (bipartite matching):
- Cuplaj bipartit, cuplaj bipartit maxim:

Proprietati. teoreme

- T. flux pe un graf arbore / arborescenta = flux nul (+demonstratie)
- L.: Val.max. flux admisibil de la nod sursa la destinatie, nu depaseste capacitatea unei taieturi (+demonstratie)
- Corolar: relatia: max, min;
- Cor.: flux; taietura => flux max. taietura capacit. min.
- T. cond.nec.+suff.: fluxului maxim sa aiba solutie = sa nu existe drum de capacit. infinita (+demonstratie)
- Lema lui Minty (Exact una adev.: a) b))
- T. Ford-Fulkerson (+demonstratie)
- T. flux maxim <=> nu exista drum in graful ecarturilor
- Proprietati graf bipartit

Rețele de transport

- rețelele de transport - modalitățile prin care produse pot fi transportate de la centre de producție la consumatori

- aplicații ale rețelelor de transport în probleme din viața reală:

- probleme de programarea a transportului rutier, aerian, feroviar...
- structurarea și dimensionarea optimă a rețelelor de comunicație, transport...
- probleme de gestiune a stocurilor
- probleme de afectare ...

Noțiuni și proprietăți de bază

- $G = (X, U)$ un graf orientat, conex în sens larg

$X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $U = \{u_1, u_2, ..., u_m\}$

Definiție

Se numește **flux** în graful G o funcție $\varphi : U \to \mathbb{R}$ care verifică relația

$$\sum_{u \in \omega^-(x)} \varphi(u) = \sum_{u \in \omega^+(x)} \varphi(u), \ \forall\, x \in X,$$

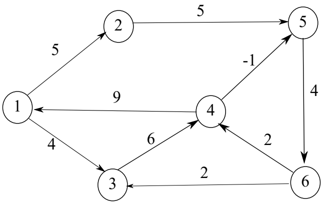
relație numită legea conservării fluxului.

$\varphi_u = \varphi(u)$

$\varphi = (\varphi(u_1), \varphi(u_2), ..., \varphi(u_m)) = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$ - flux

Noțiuni și proprietăți de bază

$G = (X, U)$, $\varphi \in \mathbb{R}^9$, $\varphi = (5, 4, 5, 6, 9, -1, 4, 2, 2)$ flux



$$\sum_{u \in \omega^-(1)} \varphi_u = \varphi_{(4,1)} = 9 = \sum_{u \in \omega^+(1)} \varphi_u = \varphi_{(1,2)} + \varphi_{(1,3)} = 5 + 4$$
$$\sum_{u \in \omega^-(2)} \varphi_u = \varphi_{(1,2)} = 5 = \sum_{u \in \omega^+(2)} \varphi_u = \varphi_{(2,5)} = 5$$
$$\sum_{u \in \omega^-(3)} \varphi_u = \varphi_{(1,3)} + \varphi_{(6,3)} = 4 + 2 = \sum_{u \in \omega^+(3)} \varphi_u = \varphi_{(3,4)} = 6$$
$$\sum_{u \in \omega^-(4)} \varphi_u = \varphi_{(3,4)} + \varphi_{(6,4)} = 6 + 2 = 8 = \sum_{u \in \omega^+(4)} \varphi_u = \varphi_{(4,1)} + \varphi_{(4,5)} = 9 - 1$$
$$\sum_{u \in \omega^-(5)} \varphi_u = \varphi_{(2,5)} + \varphi_{(4,5)} = 5 - 1 = \sum_{u \in \omega^+(5)} \varphi_u = \varphi_{(5,6)} = 4$$
$$\sum_{u \in \omega^-(6)} \varphi_u = \varphi_{(5,6)} = 4 = \sum \varphi_u = \varphi_{(6,3)} + \varphi_{(6,4)} = 2 + 2$$

Noțiuni și proprietăți de bază

$G = (X, U)$, $X = \{1, 2, ..., n\}$

- $B \in M_{n\times m}(\{-1, 0, 1\})$, $B = (b_{iu})_{i\in X,\ u\in U}$ matricea de incidență G

$\omega^-(i) = \{u \in U,\ b_{iu} = -1\}$, $\omega^+(i) = \{u \in U,\ b_{iu} = 1\} \Rightarrow$

legea conservării fluxului în G : $B \cdot \varphi^t = O \in \mathbb{R}^n$

- fie $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $g(x) = B \cdot x^t$
- mulțimea fluxurilor: $\Phi = \{\varphi \in \mathbb{R}^m |\ g(\varphi) = O\} \Rightarrow$

Φ este nucleul funcției $g \Rightarrow \Phi$ subspațiu liniar al lui $R^m \Rightarrow$

$dim(\Phi) + dim(B) = m$, unde $dim(B) = rang(B) = n - p$

$dim(\Phi) = m - n + p = \nu(G)$, numărul ciclomatic al grafului neorientat

Noțiuni și proprietăți de bază

Teoremă

Un flux pe un graf arbore sau pe o arborescență este în mod necesar fluxul nul.

Demonstrație:

- într-un graf arbore (arborescență), $m = n - 1$, $p = 1 \Rightarrow rang(B) = n - 1$
- sistemul omogen $B \cdot \varphi^t = O$ cu $n - 1$ necunoscute este compatibil, deci are doar soluția nulă.

Definiție

Se numește **rețea de transport** un graf $G = (X, U)$ orientat, conex în sens larg, în care

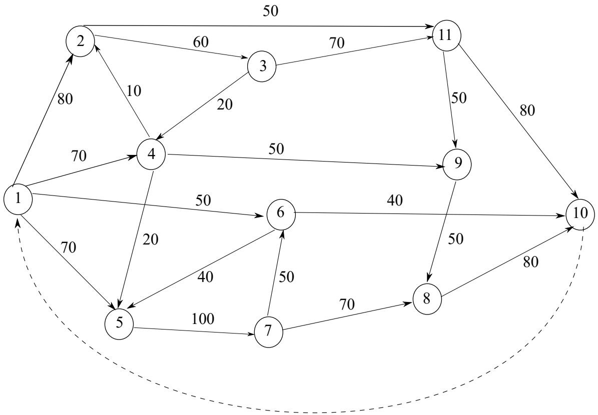
a) există două noduri $s,\ d \in X$ cu $g^-(s) = 0$, $g^+(d) = 0$, numite nod sursă, respectiv nod destinație;

b) fiecare arc $u \in U$ are asociată o valoarea $c_u \geq 0$ numită capacitatea arcului u.

- G rețea de transport $\Rightarrow G^0 = (X, U \cup \{(d, s)\})$
- arcul $u_0 = (d, s)$ se numește arc de retur

Flux maxim în rețele de transport

- $G = (X, U)$ rețea de transport



- nodul sursă $s = 1$
- nodul destinație $d = 10$
- arcul de retur este $(10, 1)$

Flux maxim în rețele de transport

Definiție

Se numește **flux de la nodul sursă** s **la nodul destinație** d în rețeaua de transport G, vectorul $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$ care verifică legea conservării fluxului în toate nodurile cu excepția nodurilor s și d,

$$\sum_{u \in \omega^-(i)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^+(i)} \varphi_u, \ \forall\, x \in X \setminus \{s, d\},$$

iar pentru nodurile s și t are loc relația

$$\sum_{u \in \omega^+(s)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^-(d)} \varphi_u = \varphi_0.$$

- φ_0 este valoarea fluxului φ, valoarea arcului de retur în G^0

- $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_m)$ este flux de la s la d în $G \Rightarrow \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_m)$ flux simplu în G^0

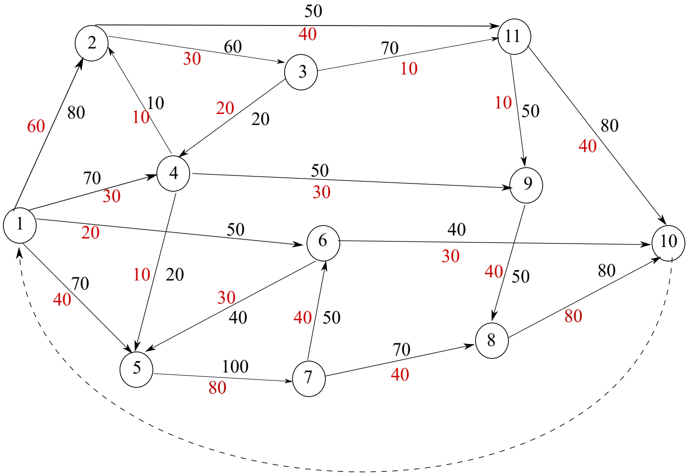
Flux maxim în rețele de transport

Definiție

Un flux $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_m)$ în rețeaua de transport G se numețe **flux compatibil cu capacitățile** arcelor $c = (c_1, ..., c_m)$ sau **flux admisibil**, dacă $0 \le \varphi_u \le c_u, \ \forall u \in U$.

Problema de transport: să se determine un flux $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_m)$ în G^0 care să fie compatibil cu capacitățile grafului G^0 și să aibă valoarea φ_0 maximă.

Flux maxim în rețele de transport



Definiție

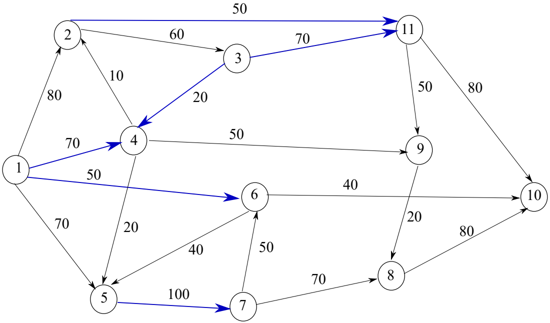
Se numește **tăietură** ce separă nodul sursă s de nodul destinație d în rețeaua de transport G, o mulțime de arce $\omega^+(A)$ unde $A \subset X,\ s \in A,\ d \notin A.$

- $\omega^+(A) = \{u = (i,j) |\ i \in A,\ j \notin A\}$ conține toate arcele ce au extremitatea inițială în mulțimea A și extremitatea finală înafara acesteia și se numește **cocircuit**

Definiție

Se numește **capacitate** a unei tăieturi $\omega^+(A)$, suma capacităților arcelor ce compun tăietura.

Flux maxim în rețele de transport



$A = \{1, 2, 3, 5\}$,
$\omega^+(A) = \{(1,4), (1,6), (2,11), (3,4), (3,11), (5,7)\}$ tăietură
$c = c_{(1,4)} + c_{(1,6)} + c_{(2,11)} + c_{(3,4)} + c_{(3,11)} + c_{(5,7)} =$
$70 + 50 + 50 + 20 + 70 + 100 = 360$

Lemă

Valoarea maximă a unui flux admisibil de la nodul sursă s la nodul destinație d într-o rețea de transport G, nu depășește capacitatea unei tăieturi.

Demonstrație:
- fie $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_m)$ un flux admisibil în G^0
- fie $\omega^+(A)$ o tăietură ce separă sursa de destinație în G^0
- atunci

$$\varphi_0 + \sum_{u \in \omega^-(A)} \varphi_u = \sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi_u$$

$$\varphi_0 = \sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi_u - \sum_{u \in \omega^-(A)} \varphi_u \leq \sum_{u \in \omega^+(A)} \varphi_u \leq \sum_{u \in \omega^+(A)} c_u$$

Flux maxim în rețele de transport

Corolar

Are loc relația

$$\max \varphi_0 \leq \min\{ \sum_{u \in \omega^-(A)} c_u | \ A \subset X, \ s \in A, \ d \notin A\}.$$

Corolar

Dacă φ este un flux de la nodul sursă s la nodul destinație d în rețeaua de transport G și $\omega(A)$ este o tăietură ce separă s de d astfel încât valoarea fluxului este egală cu capacitatea tăieturii, atunci φ este un flux maxim, iar $\omega(A)$ este tăietură de capacitate minimă.

Definiție

Se numește capacitate a unui drum într-o rețea de transport capacitatea minimă a arcelor ce compun drumul.

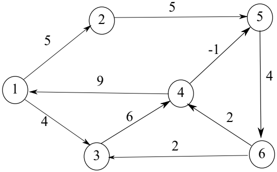
Teoremă

O condiție necesară și suficientă pentru ca problema fluxului maxim să aibă soluție este să nu existe drum de capacitate infinită de la sursă la destinație.

Demonstrație:
a) - există drum de capacitate infinită μ, toate arcele u de pe μ au $c_u = \infty \Rightarrow$ fluxul poate crește oricât pe acel drum
b) - nu există drumuri de valoare infinită între s și $d \Rightarrow$
$G' = (X, U'),\ U' = \{u \in U,\ c_u = +\infty\}$ nu este conex
- $A = \{x \in X |\ \exists\ drum\ in\ G'\ de\ la\ s\ la\ x\} \Rightarrow c_u = finit, \forall\ u \in \omega^+(A) \Rightarrow$
capacitatea tăieturii este $\sum\limits_{u \in \omega^+(A)} c_u = finit \Rightarrow$ fluxul maxim este finit

Flux maxim în rețele de transport

$G = (X, U)$ un graf orientat
- $u = (i, j) \in U$ orientate în același sens dacă $i < j$ respectiv în sens invers dacă $i > j$, $i, j \in X$
- secvența $(x_1, x_2, ..., x_k)$ este ciclu elementar în G dacă nodurile sunt distincte și există arc între două noduri succesive în orice sens



- arcele $(1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, 6)$ orientate în același sens
- arcele $(4, 1), (6, 3), (6, 4)$ orientate în același sens
- $\mu_1 = (1, 2, 5, 4, 1)$, $(3, 4, 6, 3)$ cicluri

Flux maxim în rețele de transport

Lema lui Minty

Fie $G = (X, U)$ un graf în care arcele sunt colorate cu negru, roșu, verde sau sunt necolorate, astfel încât să existe cel puțin un arc negru. Fie arcul u_0 colorat negru. Exact una dintre următoarele propoziții este adevărată:

a) prin u_0 trece un ciclu elementar cu toate arcele colorate roșu sau negru astfel încât arcele negre sunt toate orientate în același sens (sensul lui u_0);

b) u_0 este pe un cociclu elementar fără arce roșii (doar negre sau verzi) astfel încât toate arcele negre sunt orientate în același sens.

- mulțimea arcelor grafului se poate descompune în patru submulțimi disjuncte, una singură fiind sigur nevidă (cea cu arce negre)

- toate arcele unui graf sunt sau pe un circuit sau pe un cocircuit elementar

Flux maxim în rețele de transport

- $u_0 = (d, s)$

- se marchează nodurile lui G astfel:
  - se marchează nodul sursă s
  - dacă $i \in X$ este marcat atunci nodul j nemarcat se marchează dacă
    - $(i, j) \in U$ este negru
    - $(i, j) \in U$ este roșu sau $(j, i) \in U$ este roșu
  - se repetă marcarea până nu se mai pot marca noduri

- dacă un nod $j \in X$ este marcat, există lanț de la s la j

1) s-a marcat nodul destinație $d \Rightarrow \ \exists$ lanț de la s la d ce trece prin vf marcate $\Rightarrow$ toate arcele colorate, arcele negre sunt parcurse în sensul orientării lor;
se adaugă $u_0 \Rightarrow$ ciclu conform a)

2) nu s-a marcat $d \Rightarrow$ pentru $A = \{x \in X \ marcat\}, \ s \in A, \ d \notin A$
$\omega^+(A)$ conține doar arce verzi sau necolorate
$\omega^-(A)$ conține doar arce negre sau necolorate
$\omega(A)$ nu are arce roșii
$\Rightarrow$ cociclul $\omega(A) = \omega^+(A) \cup \omega^-(A)$ verifică b)

Teorema Ford-Fulkerson

Teoremă

Valoarea maximă a fluxului de la nodul sursă s la nodul destinație d într-o rețea de transport G este egală cu capacitatea minimă a tăieturilor ce separă pe s de d.

Demonstrație:
Fie $\varphi = (\varphi_0,\ \varphi_1, \ldots,\ \varphi_m)$ flux maxim în G^0 compatibil cu capacitățile.
- se asociază fluxului φ următoarea colorare a arcelor grafului G^0:

- arcul 0 (de retur) se colorează negru
- arcele u cu $\varphi_u = 0$ se colorează negru
- arcele u cu $0 < \varphi_u < c_u$ se colorează roșu
- arcele u cu $\varphi_u = c_u$ se colorează verde

- φ este compatibil $\Rightarrow$ toate arcele sunt colorate

- fie $u_0 = 0$; se aplică lema lui Minty:
  a) $\exists\ \mu$ ciclu negru, roșu, verde ce trece prin 0 cu toate arcele negre în același sens și cele verzi în sens contrar $\Rightarrow$ pe μ fluxul poate crește, contradicție
  b) $\exists\ \omega(A)$ cociclu negru și verde cu $s \in A$ și $d \notin A$ cu arcele din $\omega^+(A)$ verzi și cele din $\omega^-(A)$ negre
  $\Rightarrow \varphi_0 = \sum\limits_{u \in \omega^+(A)} \varphi_u - \sum\limits_{u \in \omega^-(A)} \varphi_u = \sum\limits_{u \in \omega^+(A)} c_u \Rightarrow$ capacitatea tăieturii $\omega^+(A)$ este minimă
- pe arcele negre fluxul poate crește
- pe arcele verzi fluxul poate scădea
- pe arcele roșii fluxul poate crește sau scădea

Algoritmul Ford-Fulkerson

Definiție

Se numește **graful ecarturilor** atașat grafului G și fluxului admisibil φ, $G(\varphi) = (X, U(\varphi))$ unde $U(\varphi)$ se obține astfel: pentru $u = (i, j) \in U$ se adaugă $u^+ = (i, j)$ în $U(\varphi)$ dacă $\varphi_u < c_u$ și
$u^- = (j, i)$ dacă $\varphi_u > 0$.

Arcelor din $U(\varphi)$ li se atribuie capacitățile

$c_u - \varphi_u$ pentru u^+

φ_u pentru u^-, valori numite capacități reziduale.

Teoremă

Fie φ flux de la nodul sursă s la nodul destinație d în rețeaua G și $G(\varphi)$ graful ecarturilor. Atunci φ este flux maxim dacă și numai dacă nu există drum de la s la d în graful $G(\varphi)$.

Algoritmul Ford-Fulkerson

a) Inițializare: $k = 0$; φ^0 flux admisibil (de exemplu $\varphi^0 = (0, ..., 0)$)

b) Criteriul de stop

Dacă ($\exists$ drum μ^k de la s la d în $G(\varphi^k)$) atunci

goto c)

altfel

φ^k flux maxim;

STOP

c) Iterația de bază:

Fie ε capacitatea reziduală a drumului μ^k;

$$\varphi_u^{k+1} = \begin{cases} \varphi_u^k + \varepsilon, \ u^+ \in \mu^k \ sau \ u = 0 \\ \varphi_u^k - \varepsilon, \ u^- \in \mu^k \\ \varphi_u^k \ altfel \end{cases};$$

$k = k + 1$;

goto b);

Algoritmul Ford-Fulkerson

- determinarea μ^k și a a valorii rezuduale ε fără $G(\varphi)$

- $j \in X$ se etichetează cu $(e_1, e_2, e_3) \in (X \cup \{0\}) \times \{+, -\} \times \mathbb{R}_+$ astfel

    - dacă $e_2 = +$ și $e_1 = i$ atunci $\exists\ u = (i, j) \in U$ și $\exists\ \mu$ drum de la s la j în $G(\varphi)$ cu ultim arc $u^+ = (i, j)$ cu capacitatea e_3

    - dacă $e_2 = -$ și $e_1 = i$ atunci $\exists\ u = (j, i) \in U$ și $\exists\ \mu$ drum de la s la j în $G(\varphi)$ cu ultim arc $u^- = (j, i)$ cu capacitatea e_3

- prin procedeul de etichetare se determină un arbore cu rădăcina s

- dacă d este etichetat prin acest procedeu atunci există unic drum de la s la d
- se etichetează s cu $(0, \cdot, \infty)$

Procedura Etichetare

Repetă

$k = 0$;

Pentru $i \in X$ etichetat execută

dacă $(\exists j \in X \ neetich \ cu \ u = (i, j) \in U, \ \varphi_u < c_u)$ atunci

se etichetează j cu $(i, +, min(e_3(i), c_u - \varphi_u))$;

$k = 1$;

dacă $(\exists j \in X \ neetich \ cu \ u = (j, i) \in U, \ \varphi_u > 0)$ atunci

se etichetează j cu $(i, -, min(e_3(i), \varphi_u))$;

$k = 1$;

Sfârșit pentru;

Până când (s-a etichetat d sau $(k = 0)$);

- dacă s-a etichetat d există unic drum de la s la d,
$\mu = (s = x_p, x_{p-1}, ..., x_1 = d)$
- drumul se determină astfel:

$p = 1;\ x_1 = d;$
Câttimp $(x_p \neq s)$ execută
$p = p + 1;$
$x_p = e_1(x_{p-1});$
Sfârșit câttimp;
- dacă se iese cu $k = 0$, nodul d nu este etichetat, nu există drum de la s la d

Algoritmul Ford-Fulkerson

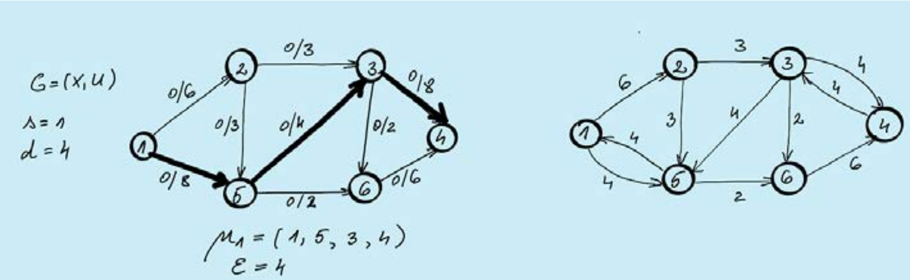
a) Inițializare: $k = 0$; φ flux admisibil (de exemplu $\varphi = (0, 0, ..., 0)$)
b) Criteriul de stop:

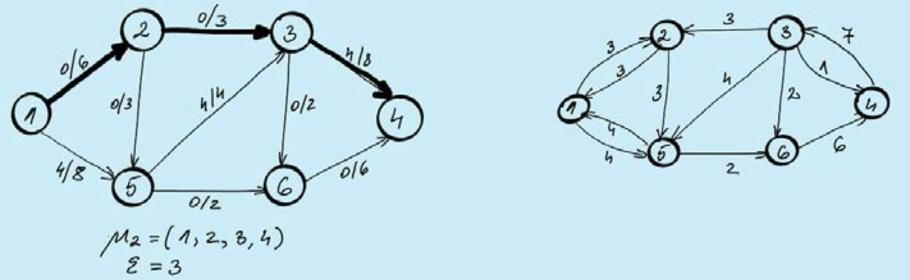
Etichetare;
Dacă $(k = 0)$ atunci φ cu valoarea φ_0 este flux maxim;
$STOP$;

c) Iterația de bază:

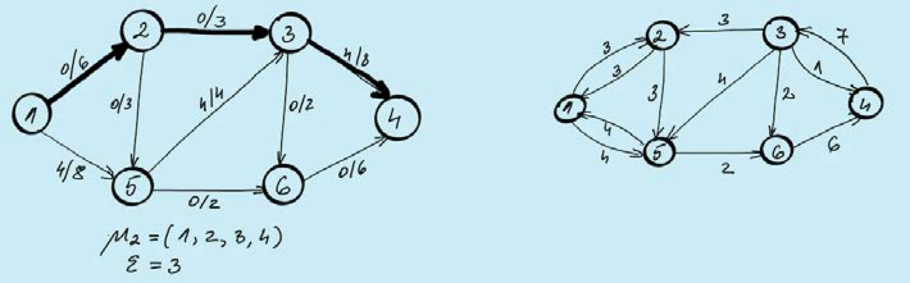
fie $\varepsilon = e_3(d)$; $j = d$;
Câttimp$(j \neq s)$ execută
  $i = e_1(j)$;
  dacă $(e_2(j) = +)$ atunci $\varphi_u = \varphi_u + \varepsilon$;
  altfel $\varphi_u = \varphi_u - \varepsilon$;
  $j = i$;
Sfârșit câttimp;
$\varphi_0 = \varphi_0 + \varepsilon$;
goto b);

Algoritmul Ford-Fulkerson

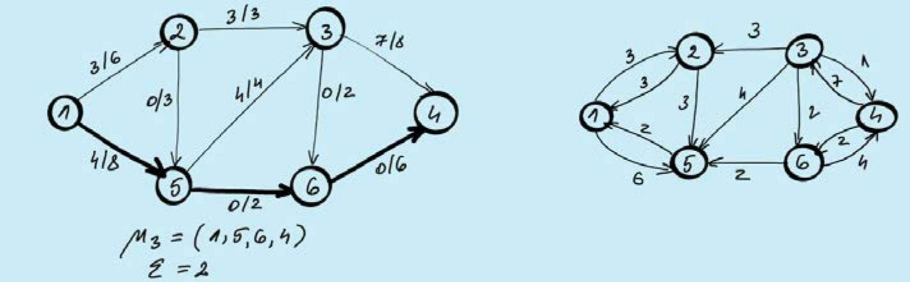



0/3
0/6
0/3
4/4
4/8
0/2
4/8
0/2
0/6
$\mu_2 = (1, 2, 3, 4)$
$\varepsilon = 3$
3
3
3
3
7
4
1
2
4
4
2
6

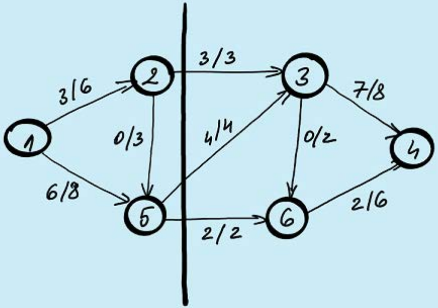
Algoritmul Ford-Fulkerson



Algoritmul Ford-Fulkerson



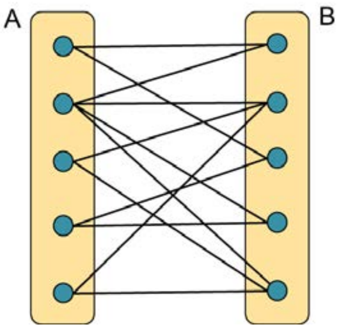
Algoritmul Ford-Fulkerson



$\varphi = 3 + 6 = 9 = 7 + 2$

Cuplaje în grafuri

- un graf $G = (A \cup B, U)$ cu proprietatea că $U \subseteq A \times B$ se numește graf bipartit

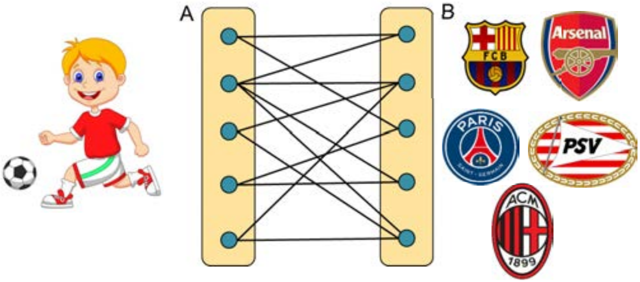


Proprietati:

- grafurile bipartite sunt grafuri bicromatice (2-colorabile)
- grafurile bipartite sunt grafuri care nu conțin cicluri de lungime impară

Cuplaje în grafuri

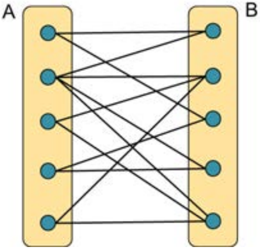
- grafuri bipartite sunt modele pentru relațiile dintre două clase de obiecte
- exemple
    - jucatori și cluburi: jucatorul x ar vrea sa joace la clubul y



Cuplaje în grafuri

- grafuri bipartite sunt modele pentru relațiile dintre două clase de obiecte
- exemple

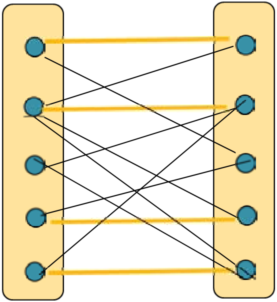
  - jucători și cluburi: jucătorul x ar vrea să joace la clubul y
  - angajati și activități: angajatul x poate executa activitatea y



Cuplaje în grafuri

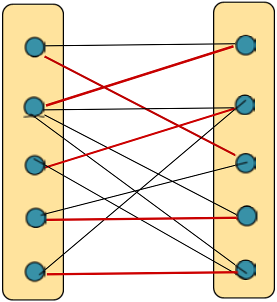
- A= mulțime de angajați
- B= mulțime de activități

Problema (bipartite matching): dacă fiecare angajat poate executa cel mult o activitate, câte activități pot fi executate?

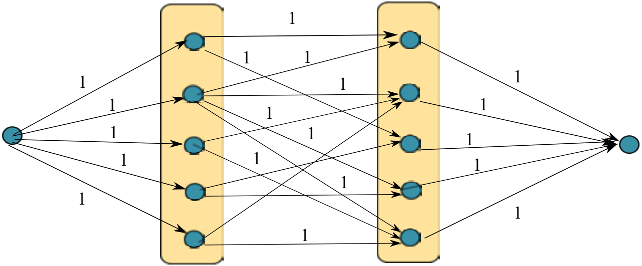


Cuplaj bipartit: submulțime de muchii fără extremități comune într-un graf bipartit

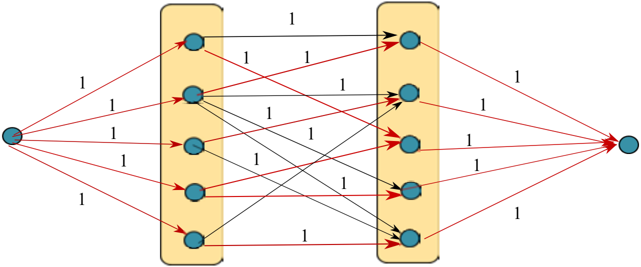
Cuplaj bipartit maxim: cuplaj bipartit cu numar maxim de muchii



- se poate folosi problema determinării fluxului maxim (max-flow) la rezolvarea problemei de cuplaj în grafuri bipartite



Cuplaje în grafuri



Cuplaje în grafuri

Problema: fiind dată starea curentă într-o competiție în care la fiecare meci câștigat echipa primește 2 puncte și la meci egal fiecare echipă primește 1 punct, stabiliți care echipă ar putea câștiga competiția.

Team name	Played	Points
Team Rocket	2	3
Team Aqua	1	2
Team Magma	2	2
Team Galactic	3	2
Team Plasma	2	1

Meciurile urmatoare:

Team Rocket – Team Plasma;
Team Magma – Team Galactic;
Team Rocket – Team Aqua
Team Aqua – Team Magma
Team Plasma – Team Aqua