

Rüdiger Scholz

Fourier-Analyse zeitabhängiger Signale

Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis.....	2
Literatur.....	2
1 Periodische Funktionen: Fourier-Reihen	3
1.1 Mathematisierung des Problems	3
1.2 Darstellungen	5
2 Nichtperiodische Funktionen: Fourier-Integral.....	6
3 Zusammenfassung	7
Fourier-Reihen, reel	7
... und komplex.....	7
Fourier-Integral	7
Weitere Beispiele	7
4 Einige physikalische Anwendungen.....	9
Energiespektren	9
Gedämpfter harmonischer Oszillator	9
Dämpfungsfunktion	9
Strahlungsemission	10
5 Messwert-Analyse.....	11
5.1 Diskrete Fourier-Transformation (= DFT)	11
5.2 Abtasttheorem, Nyquist-Frequenz	13
5.3 Datenfenster	14
6 Anhang	15
5.1 Weitere wichtige Themen der Fourier-Analysis	15
5.2 Hinweise zu Funktionen	15
5.3 Ein heuristischer Weg zur Deltafunktion	16
5.4 Parsevals Gleichung für nichtperiodische Funktionen.....	17
Impressum.....	18
Bildverzeichnis	18

Literatur

1. Lehrbücher zur reellen Analysis; Vor allem Murray R. Spiegel: *Fourier-Analysis*; McGraw Hill
2. M. Schulz: „*Physik mit dem Bleistift*“, Verlag Harri Deutsch
3. T. Butz; „Fourier-Transformation für Fußgänger“; Vieweg-Teubner, Wiesbaden, 7. Auflage 2011

1 Periodische Funktionen: Fourier-Reihen

Periodische Funktionen lassen sich in ihre Frequenzanteile zerlegen. Abb. 1 zeigt was gemeint ist. Dort ist die zunehmend „besser“ werdende Approximation eines Sägezahnsignals durch harmonische Teilschwingungen gezeigt.

Stören beispielsweise die Verformungen an den Signalrändern und die Restwelligkeit nicht, käme bereits die in Abb. 1 gezeigte Näherung mit den ersten 5 Teilschwingungen in Betracht. Abb. 2 zeigt, in umgekehrter Perspektive, die Zerlegung des Sägezahnsignals in sein Schwingungsspektrum (seine Frequenzanteile).

1.1 Mathematisierung des Problems

Eine Funktion $b(t)$ sei im Intervall $[-T/2, T/2]$ definiert und mit T periodisch ($b(t+T) = b(t)$). Die Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n 2\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n 2\pi}{T} t \right)$$

definiert die *Fourier-Reihe* von $b(t)$ (hier wird die Zeit leicht auf x als Ortskoordinate übertragen).

Unter bestimmten Bedingungen konvergiert die Reihe gegen $b(t)$:

Die *Dirichlet-Bedingungen* legen die Konvergenzbedingungen fest. Danach reicht es aus, wenn $b(t)$ im Intervall $[-T/2, T/2]$ bis auf endlich viele Stellen eindeutig definiert und stückweise stetig ist. Unter diesen Voraussetzungen gilt also:

$$b(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad \text{mit } \omega = 2\pi/T \quad (1)$$

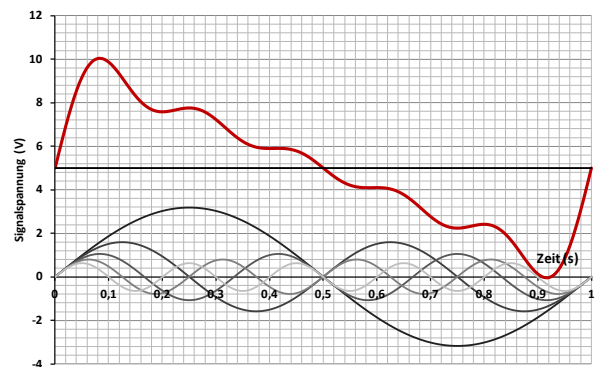
Wie berechnet man die Koeffizienten a_n und b_n damit die Reihe gegen $f(t)$ konvergiert?

Dazu müssen Sie folgende Integrale ausrechnen

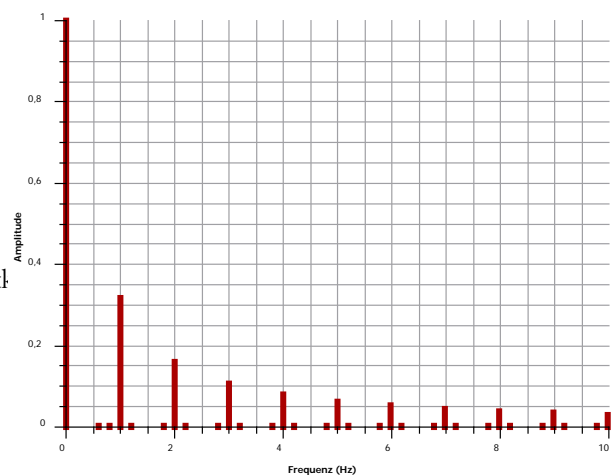
$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t); a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t) \cos n\omega t \quad \text{und} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) \sin n\omega t; n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Gl. 2 können aus einem typisch physikalischen Annäherungsargument herleiten (vgl. Anhang für die Details der Rechnung). Dazu untersucht man, ob die Funktionenfolge $b_n(t)$:

$$b_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t) \quad (3)$$



- 1 Zerlegung eines Sägezahnsignals ($f(t) = 10 \text{ V} - 10 \text{ V/s} \cdot t$) in Partialschwingungen, für das rot dargestellte Summensignal wurden die ersten 5 Partialschwingungen mit den Frequenzen $f_n = n \cdot 1 \text{ Hz}$ und den Amplituden $a_0 = 10 \text{ V}$ und $b_n = 10 \text{ V}/(\pi n)$ addiert. Die Partialschwingungen bis $n = 5$ sind dargestellt.



- 2 Zerlegung des Signals oben links in seine Frequenzkomponenten; unschwer sind die Frequenzkomponenten 0 Hz, 1 Hz, 2 Hz, ... zu erkennen. Der 0-Hz-Anteil ist in Abb. 1 als Gleichspannung „Offset“ bei konstant 5 V zu erkennen.

mit zunehmendem n die Funktion $b(t)$ approximiert, ob also der *quadratische Fehler*

$$\delta_n^2 \doteq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt (b(t) - b_n(t))^2$$

durch entsprechende Wahl der Koeffizienten a_k und b_k minimal wird. Setzen Sie Gl. 3 ein:

$$\begin{aligned} \delta_n^2 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt (b(t) - b_n(t))^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt (b(t)^2 - 2b(t)b_n(t) + b_n(t)^2) = \dots \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t)^2 + \left(\frac{a_0^2}{4} - \frac{a_0}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t) \right) + \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k^2}{2} - a_k \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t) \cos k\omega t + \frac{b_k^2}{2} - b_k \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t) \sin k\omega t \right). \end{aligned}$$

Jeder einzelne Klammerausdruck für sich muss minimal werden. Die Nullstellen der ersten Ableitung der Klammern nach den a_0 , a_k bzw. b_k ergeben:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t); \quad a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t) \cos k\omega t \quad \text{und} \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t) \sin k\omega t; \quad k = 1, 2, \dots$$

Das sind aber gerade die Formeln aus Gl. 2. Einsetzen in δ_n^2 liefert den Minimalfehler:

$$\delta_{n,\min}^2 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right).$$

Daraus folgen zwei wichtige Beziehungen:

1. Die *Besselsche Ungleichung*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dx b(x)^2.$$

2. Die *Parsevalsche Gleichung* gilt, wenn die Folge der Fourier-Polynome *im Mittel gegen $b(t)$ konvergiert*:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t)^2. \quad (4)$$

Ein kurzer Beweis von Gl. 2 nutzt man die Orthogonalität¹ der trigonometrischen Funktionen:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} dt \cos n\omega t \cdot \cos m\omega t &= \frac{T}{2} (\delta_{m,n} + \delta_{m,-n}); \quad \int_{-T/2}^{T/2} dt \sin n\omega t \cdot \sin m\omega t = \frac{T}{2} (\delta_{m,n} - \delta_{m,-n}); \\ \int_{-T/2}^{T/2} dt \sin n\omega t \cdot \cos m\omega t &= 0. \end{aligned}$$

Man multipliziere also Gl. 1 mit $\cos m\omega t$ bzw. $\sin m\omega t$ und integriere von $-T/2$ bis $T/2$. und erhält Gl. 2. Diese Herleitung setzt voraus, dass die Reihenfolge von Summation und Integration getauscht werden darf. Wenn $b(t)$ sich in oben beschriebener Weise „einigermaßen zahm“ verhält, vor allem, wenn ihre *Schwankung beschränkt* ist², dürfen Sie vertauschen.

¹ Zur Orthogonalität von Funktionen: s. Anhang

² $f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ von beschränkter Schwankung, wenn $f(x)$ dort stückweise stetig ist und nur endlich viele Maxima und Minima besitzt; vgl. /1/

1.2 Darstellungen

Transformation der Variablen

Für explizit zeitabhängige Funktionen $b(t)$, die auf $[c, c+T]$ periodisch sind schreibt man ($t' = c+t+T/2$):

$$a_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} dt b(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t \text{ und } b_n = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} dt b(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t$$

Symmetrieargumente

- Ist die Funktion b gerade, gilt also $b(t) = b(-t)$ müssen alle ungeraden Anteile der Reihe

$$\text{verschwinden. Es gilt also } b_n = 0 \text{ für alle } n. \text{ und } a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t) \cos n\omega t$$

- Ist die Funktion ungerade, müssen die a_n sämtlich verschwinden: $a_n = 0$ und

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t) \sin n\omega t.$$

Komplexe Darstellung

In der Quantenphysik sind Wellenfunktionen und Variablen prinzipiell komplexwertig. Die komplexe Exponentialfunktion (Eulergleichung) $\exp(i\omega t) = \cos \omega t + i \sin \omega t$ liefert die Lösung:

$$\begin{aligned} b(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp in\omega t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (\cos n\omega t + i \sin n\omega t) = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\cos n\omega t + i \sin n\omega t) + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (\cos n\omega t + i \sin n\omega t) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(c_n + c_{-n}) \cos n\omega t + i(c_n - c_{-n}) \sin n\omega t] \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich mit $b(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$ liefert die Beziehung zwischen a_n , b_n und c_n :

$$b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t) \text{ mit } c_n = \begin{cases} \frac{1}{2} a_0 & n = 0 \\ \frac{1}{2} (a_n - i b_n) & n > 0, \text{ umgekehrt} \\ \frac{1}{2} (a_{|n|} + i b_{|n|}) & n < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_0 = 2c_0 \\ a_{|n|} = c_{|n|} + c_{-|n|} \\ b_{|n|} = i(c_{|n|} - c_{-|n|}) \end{cases}$$

mit $n = 0, 1, 2, \dots$ also:

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - i b_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t) (\cos n\omega t - i \sin n\omega t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t) \exp(-in\omega t) \quad (5)$$

Die Parsevalsche Gleichung Gl. 4 für reelle Funktion $b(t)$ vereinfacht sich zu

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t)^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \quad (6)$$

2 Nichtperiodische Funktionen: Fourier-Integral

- Mit zunehmender Breite des Periodizitätsintervalls $[-T/2, T/2]$, also wachsendem T , liegen die diskreten Fourier-Frequenzen $\omega_n = n2\pi/T$ zunehmend enger beieinander.
- Der Frequenzschritt von ω_n zu ω_{n+1} wird immer kleiner, $\omega_{n+1} - \omega_n = 2\pi/T \rightarrow 0$.
- ω_n wird zur kontinuierlichen Variablen $n2\pi/T \rightarrow \omega$.
- Das diskrete Spektrum wandelt sich in ein kontinuierliches.

Dieser Prozess wird mathematisch durch den Übergang von der Fourier-Reihe zur Fourier-Integral beschrieben.

In $b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(i\omega_n t)$ werden die diskreten Fourierkoeffizienten c_n durch eine kontinuierliche sog. *Fouriertransformierte* $F(\omega)$ ersetzt:³

$$H(\omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} T c_n = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt b(t) \exp(-i\omega_n t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt b(t) \exp(-i\omega t).$$

Die Rücktransformation $H(\omega) \rightarrow b(t)$ erhält man aus der Periodizität bzw. Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen. Mithilfe der Deltafunktion rechnen Sie aus

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega H(\omega) \exp(i\omega t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} dt' b(t') \exp(-i\omega t') \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' b(t') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \exp(i\omega(t-t'))}_{2\pi\delta(t-t')} = b(t) \end{aligned}$$

Allgemein gilt der *Fourier-Integral-Satz*:

$b(t)$ und $db(t)/dt$ seien auf jedem endlichen Intervall wenigstens stückweise stetig und das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dt |b(t)|$ existiere, dann existiert die Fourier-Transformierte von $b(t)$ (vgl. /1/):

$$b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega H(\omega) \exp(i\omega t) \text{ wobei } H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt b(t) \exp(-i\omega t) \text{ ist.}$$

Ergänzungen:

(1) Die δ -Funktion ist die F-Transformierte der 1:

$$\text{FT}(1) = \int_{-\infty}^{\infty} dt 1 \cdot \exp(-i\omega t) = 2\pi\delta(\omega) \text{ und } \text{FT}(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \delta(t) \cdot \exp(i\omega t) = 1$$

(2) Die *Parsevalsche Beziehung* lässt sich auf den kontinuierlichen Fall ausweiten (s. Anhang)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |b(t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |H(\omega)|^2.$$

(3) Für reelle Funktionen $b(t)$ ist

³ Hier wird auf einen Faktor $1/\sqrt{2\pi}$ verzichtet, damit $F(0)$ den Mittelwert der Funktion ergibt.

$$H(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, b(t) \exp(-i(-\omega t)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, b(t) \exp(i\omega t) = H^*(\omega).$$

(4) Unter der *Faltung* zweier reeller Funktionen f und g versteht man die folgende Integraloperation:

$$f \circ g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} dy \, f(y) g(x-y) = g \circ f(x)$$

Der wichtige **Faltungssatz** sagt nun (Beweis s. z. B. [1/]), dass die *Fourier-Transformierte der Faltungsfunktion* gleich dem Produkt der Fourier-Transformierten der Einzelfunktionen ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \, f \circ g(x) \exp i k x := \int_{-\infty}^{\infty} dx \, f(x) \exp i k x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx \, g(x) \exp i k x.$$

3 Zusammenfassung

Fourier-Reihen, reel ...

$b(t)$ sei eine T -periodische Funktion, $b(t) = b(t + T)$ und erfülle die Dirichlet-Bedingungen.

$$b(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n2\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n2\pi}{T} t \right); a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \, b(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t; b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \, b(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t \quad (7A)$$

... und komplex

$$b(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp i \frac{n2\pi}{T} t; c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \, b(t) \exp \left(-i \frac{n2\pi}{T} t \right). \quad (7B)$$

Fourier-Integral

Hier gilt der *Fourier-Integral-Satz*: $b(t)$ und $db(t)/dt$ seien auf jedem endlichen Intervall wenigstens stückweise stetig und das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} dt \, |b(t)|$ existiere, dann kann $b(t)$ als Integral dargestellt werden:

$$b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \, H(\omega) \exp i \omega t; FH(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \, b(t) \exp -i \omega t. \quad (7C)$$

Weitere Beispiele

(1) F-Transformierte der cos-Funktion $b(t) = \cos(\Omega t)$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \cos \Omega t \exp -i \omega t = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, (\exp i \Omega t + \exp -i \Omega t) \exp -i \omega t \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dt \, (\exp i(\Omega - \omega)t + \exp -i(\Omega + \omega)t) \\ &= \pi [\delta(\Omega - \omega) + \delta(\Omega + \omega)] \end{aligned}$$

Sie finden zwei „ δ -Spitzen“, eine bei der Kreisfrequenz Ω und eine bei $-\Omega$. Diese negative Kreisfrequenz hat ihre Ursache in der komplexen Darstellung. Die Form $\cos \Omega t = (\exp i\Omega t + \exp -i\Omega t)/2$ weist anschaulich zwei rotierende Zeiger in der komplexen Ebene aus; der erste dreht gegen den Uhrzeigersinn (positive Kreisfrequenz) der zweite im Uhrzeigersinn (negative Kreisfrequenz).

(2) F-Transformierte einer T -periodischen Funktion

Als periodische Funktion ist $f(t)$ durch eine F-Reihe darstellbar

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp i \frac{n2\pi}{T} t.$$

Daraus berechnen Sie die F-Transformierte

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) \exp -i\omega t = \int_{-\infty}^{\infty} dt \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp i \frac{n2\pi}{T} t \exp -i\omega t \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp i \left(\frac{n2\pi}{T} - \omega \right) t = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta \left(\frac{n2\pi}{T} - \omega \right) \end{aligned}$$

Anschaulich gesprochen, erhalten Sie eine Folge von δ -Zinken der Länge c_n an den Stellen $\omega = n \cdot 2\pi/T$. Dieses Bild führt auf die Bezeichnung *δ -Kamm*.

(3) F-Transformierte der Ableitung

$$\begin{aligned} \text{FT} \left(\frac{db}{dt} \right) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{db}{dt} \exp(-i\omega t) \stackrel{\text{partielle Integration}}{=} b(t) \exp(-i\omega t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - (-i\omega) \int_{-\infty}^{\infty} dt b(t) \exp(-i\omega t) \\ &= i\omega H(\omega). \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet, weil Funktion $b(t)$ integrabel sein sollte ist $b(|t| \rightarrow \infty) = 0$. Ableitungen in der t -Welt verwandeln sich in einfache Produkte in der ω -Welt.

4 Einige physikalische Anwendungen

Energiespektren

Physikalisch oft von besonderem Interesse ist das Energiespektrum einer zeitabhängigen Funktion $f(t)$. $f(t)$ stelle z. B. die Amplitude einer Zeitreihe dar, mit $0 \leq t \leq T$. Die Fourier-Entwicklung ist dann:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \text{ mit } \omega = 2\pi/T.$$

Der zeitliche Mittelwert der Energie berechnet sich aus dem Quadrieren der Amplitude.

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T dt |f(t)|^2 &= \frac{1}{T} \int_0^T dt \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \right|^2 = \\ &= \left| \frac{a_0}{2} \right|^2 \frac{1}{T} \int_0^T dt + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n^2 \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos^2 n\omega t + b_n^2 \frac{1}{T} \int_0^T dt \sin^2 n\omega t \right] \\ &= \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned}$$

(Die Betragsstriche entfallen bei reellen Koeffizienten.) Man sieht hier sehr schön, dass jede Fourier-Komponente für sich zur mittleren Energie beiträgt, ohne Interferenzterme.

Gedämpfter harmonischer Oszillator

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für den gedämpften harmonischen Oszillator ist

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) \text{ mit der äußeren Kraft } m f(t), \text{ der Dämpfungskonstanten } \gamma \text{ und der}$$

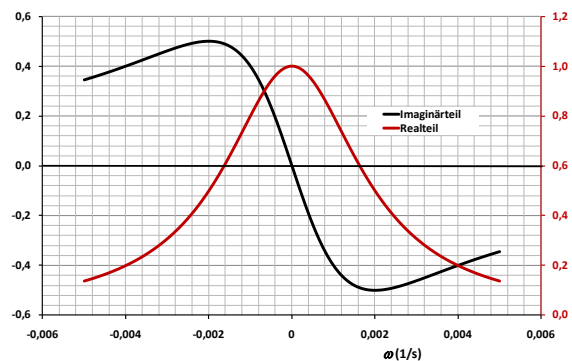
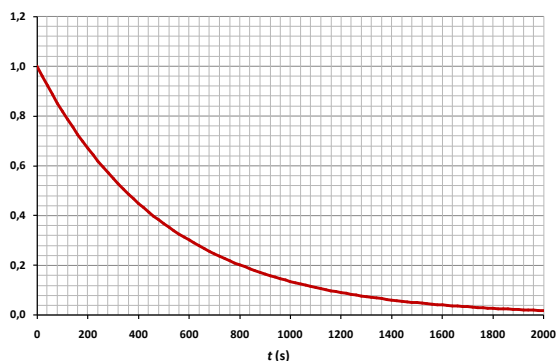
Eigenfrequenz des Oszillators $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Fourier-Transformation der Bewegungsgleichung ergibt (X bzw F sind die Fourier-Transformierten von x bzw f):

$$-\omega^2 X(\omega) + 2\gamma i \omega X(\omega) + \omega_0^2 X(\omega) = F(\omega) \Rightarrow X(\omega) = \frac{F(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\gamma i \omega}.$$

Dämpfungsfunktion

Die Funktion $[b(t) = b_0 \cdot \exp(-\gamma t) \text{ für } t > 0 \text{ und } b(t) = \text{sonst}]$ ist nicht periodisch. Die Analyse mittels Fourier-Integral ergibt (Abb. 3):

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt b(t) \exp(-i\omega t) = b_0 \int_0^{\infty} dt \exp(-(\gamma + i\omega)t) = b_0 \frac{1}{(\gamma + i\omega)} = b_0 \frac{\gamma - i\omega}{\omega^2 + \gamma^2}$$



3 Die Funktion $b(t) = b_0 \cdot \exp(-\gamma t)$ (links) und ihre Fourier-Transformierte $H(\omega)$ (rechts) für $\gamma = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$

Strahlungsemission

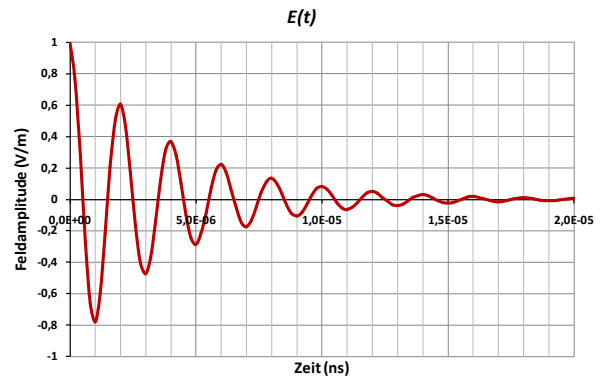
Eine Strahlungsquelle sende ein Strahlungsfeld exponentiell abnehmender Intensität aus (Abb. 4). Für die Feldamplitude $E(t)$ gilt damit:

$$E(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E_0 \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \cdot \cos \Omega t & t > 0 \end{cases};$$

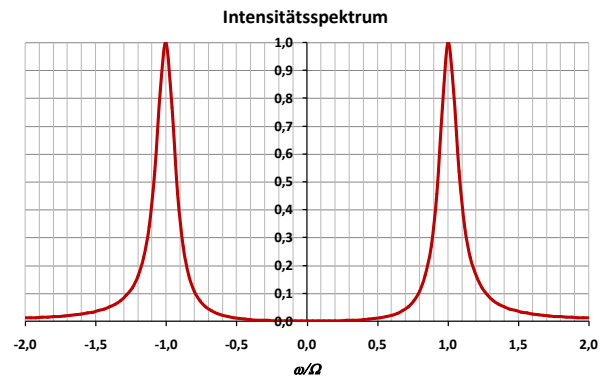
das liefert die Fourier-Transformierte $E(\omega)$:

$$\begin{aligned} E(\omega) &= E_0 \int_0^{\infty} dt \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) \cdot \cos \Omega t \exp(-i\omega t) \\ &= E_0 \int_0^{\infty} dt \frac{1}{2} (\exp i\Omega t + \exp -i\Omega t) \exp -i \left(\omega - \frac{i}{2\tau} \right) t = \frac{E_0}{2i} \left(\frac{1}{\left(\omega - \Omega - \frac{i}{2\tau} \right)} + \frac{1}{\left(\omega + \Omega - \frac{i}{2\tau} \right)} \right) \end{aligned}$$

Das Intensitätsspektrum $I(\omega)$ erhalten Sie daraus nach $I(\omega) = |E(\omega)|^2$ (Abb. 5). Sie erkennen die erwartete Resonanzstelle bei $\omega = \Omega$. Die Fourier-Transformierte $E(\omega)$ weist hier wiederum die Resonanz bei $\omega = -\Omega$ auf, entsprechend der Darstellung einer Schwingung mithilfe der gegenläufig rotierenden Zeiger in der komplexen Ebene (s. o.): Damit das resultierende Feld reell wird, gibt es für jede Fourier-Komponenten $E(\omega)$ die „Schwesterkomponente“ mit $E(\omega) = E^*(-\omega)$. In der Atomphysik: unterscheiden sich die Wechselwirkungen von $E(\omega)$ und $E(-\omega)$ möglicherweise. Hier erlangen negative Frequenzen „echte“ physikalische Bedeutung.



4 Gedämpftes Strahlungsfeld $\tau = 2 \cdot 10^{-15}$ s; $f = 5 \cdot 10^{14}$ Hz; $\lambda = 600$ nm

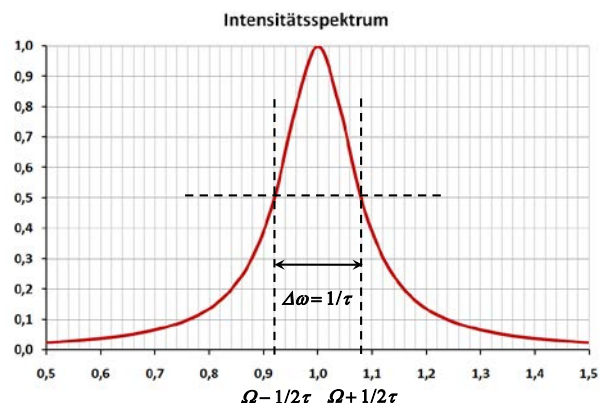


5 Intensitätsspektrum $I(\omega)$; ω ist in Einheiten von Ω aufgetragen

Für die Analyse der Linienform betrachtet man eine der Resonanzlinien (Abb. 6):

$$I(\omega) = |E(\omega)|^2 = E_0^2 \left| \frac{1}{\left(\frac{1}{2\tau} - i(\Omega - \omega) \right)} \right|^2 = E_0^2 \frac{1}{\frac{1}{4\tau^2} + (\Omega - \omega)^2}$$

Diese Linienform wird als *Lorentzprofil* bezeichnet. Sie ist die typische Linienform zur Beschreibung des Resonanzverhaltens gedämpfter Oszillatoren. Die Linie ist um $\omega = \Omega$ symmetrisch, die Linienbreite ist (full width at half maximum = FWHM) $\Delta\omega = 1/\tau$. Die Analyse von Position und Form von Resonanzlinien gehört zu den Hauptaufgaben der Physik. Sichtbar wird ein typisch duales Argument: Je kürzer die Lebensdauer τ der Schwingung, desto breiter die Linie.



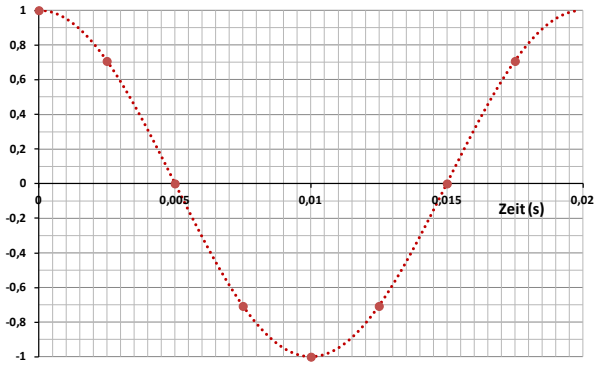
6 Intensitätsspektrum $I(\omega)$; ω ist in Einheiten von Ω aufgetragen

5 Messwert-Analyse

In aller Regel liegen die Messergebnisse eines Experimentes nicht als kontinuierlicher Funktionsterm $u(t)$, sondern, wie in Abb. 7, als Liste diskreter Messwerte vor. Abb. 7 zeigt $N = 8$ Ergebnisse einer Messreihe. Die Messwerte wurden in konstanten Zeitschritten $\Delta t = 2,5 \text{ ms}$, also mit einer Abtastrate (*Sampling-Frequenz*) von $f_s = 1/\Delta t = 400 \text{ Hz}$ aufgenommen worden:

$$u_n = u(t_n) = u(n \cdot \Delta t); n = 0, 1, \dots (N - 1).$$

Messwerte außerhalb des Zeitintervalls $[0, T] = [0, N \cdot \Delta t]$ existieren nicht.



7 8 Messpunkte der Messung einer cos-Schwingung mit $f = 50 \text{ Hz}$; Samplingintervall $T = 8 \cdot 2,5 \text{ ms} = 0,02 \text{ s}$

5.1 Diskrete Fourier-Transformation (= DFT)

Um eine diskrete Messreihe zu analysieren, verwenden Sie die *diskrete Fourier-Transformation*, wahrscheinlich mit einem Algorithmus, der als *schnelle Fourier-Transformation* = fast Fourier-Transformation = FFT bekannt und in zahlreichen Programmen zur Datenverarbeitung verfügbar ist. Aus diesem Grunde sollen hier bereits deren Grundannahmen eingeführt werden:

- N ist eine 2er-Potenz, $N = 2^m$, $m = 0, 2, 3, \dots$
- Die Folge der Messwerte $\{u_n\}$ wird außerhalb des Intervalls $[0, T = N \cdot \Delta t]$ automatisch periodisch fortgesetzt.: $u_N = u_0$.

Die erste Einschränkung ist praktisch ohne Bedeutung, bei der zweiten müssen Sie ggf. Gegenmaßnahmen ergreifen, weil dies mit den experimentellen Gegebenheiten u. U. nicht zusammenpasst.

Statt der kontinuierlichen Zeitvariablen t verwendet die DFT die diskreten Zeitwerte $t_n = n \cdot \Delta t = n \cdot T/N$. Statt der kontinuierlichen Kreisfrequenzvariablen ω wird durch die automatische periodische Fortsetzung nach Durchlaufen des Sampling-Intervalls T (Sampling-Frequenz $f_s = 1/\Delta t = 1/(T \cdot N)$) die diskrete Kreisfrequenzvariable $\omega_n = n \cdot 2\pi/T = n \cdot 2\pi \cdot 1/(N \cdot \Delta t) = n/N \cdot 2\pi \cdot f_s$ festgelegt. Die Exponentialfunktion in Gl. 7C wird also ersetzt (vgl. dazu /3/):

$$\exp(i\omega t) \rightarrow \exp\left(i \frac{2\pi t_n}{T}\right) = \exp\left(i \frac{2\pi n \Delta t}{T}\right) = \exp(i\omega_n \Delta t) = \exp\left(i\omega_n \frac{T}{N}\right).$$

Um das Spektrum der Folge $\{u_n\}$ zu bestimmen wird die Fourier-Reihe Gl. 7B angepasst:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt u(t) \exp\left(-i \frac{n 2\pi}{T} t\right) \rightarrow \\ c_n &= \frac{1}{N \Delta t} \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t u(k \cdot \Delta t) \exp\left(-i \frac{n 2\pi}{N \cdot \Delta t} k \cdot \Delta t\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} u(k \cdot \Delta t) \exp\left(-i 2\pi \frac{n \cdot k}{N}\right) \end{aligned}$$

Man definiert die *DFT* durch:

$$U_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n \exp\left(-i 2\pi \frac{n \cdot k}{N}\right) \text{ und zurück } u_n = \sum_{k=0}^{N-1} U_k \exp\left(i 2\pi \frac{n \cdot k}{N}\right). \quad (8)$$

Die beiden Transformationsrichtungen passen zueinander, wie Sie leicht so nachrechnen:

$$\begin{aligned}
 u_n &= \sum_{k=0}^{N-1} U_k \exp\left(i2\pi \frac{n \cdot k}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} u_{n'} \exp\left(-i2\pi \frac{n' \cdot k}{N}\right) \exp\left(i2\pi \frac{n \cdot k}{N}\right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} u_{n'} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-i2\pi \frac{k}{N}(n - n')\right)}_{N\delta_{nn'}} = u_n
 \end{aligned}$$

Auch der seltsame Faktor N kürzt sich weg.

Die diskreten Fourier-Kreisfrequenzen ω_k , die zu den Fourier-Komponenten U_k gehören:

$$\omega_k \Delta t = 2\pi \frac{k}{N} \Rightarrow \omega_k = 2\pi \frac{k}{N\Delta t} = 2\pi \frac{k}{T}, \quad (9)$$

hängen vom Sampling-Intervall T ab, nicht jedoch von einer eventuell die ursprüngliche Funktion $u(t)$ kennzeichnenden Periodizität mit einer Kreisfrequenz Ω . Hier müssen Sie Obacht geben. Es ist nicht in jedem Fall sofort klar, welche Auswirkungen es hat, wenn sich Ω und ω_k ähneln.

Beispiel aus Abb7: Wechselspannung $u(t) = \cos(\Omega t)$ mit einer Frequenz von $\Omega = 2\pi/T_0 = 2\pi \cdot (50 \text{ Hz})$. Um $N = 8$ Samplestellen genau über eine Periode zu legen, wählt man $\Delta t = T_0/N = 20 \text{ ms}/8 = 2,5 \text{ ms}$. Daraus erhalten Sie die Messwertefolge

$$u_0 = 0; u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; u_2 = 0; u_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; u_4 = -1; u_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}; u_6 = 0; u_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Daraus berechnen Sie eine Folge reeller Fourier-Komponenten U_k :

$$U_0 = 0; U_1 = 0,5; U_2 = 0 = U_3 = U_4 = U_5 = U_6; U_7 = 0,5.$$

Diese gehören zu den Fourier-Kreisfrequenzen $\omega_k = 2\pi k/(N\Delta t)$:

$$\omega_0 = 0; \omega_1 = 2\pi \cdot (50 \text{ Hz}); \omega_2 = 2 \cdot 2\pi \cdot (50 \text{ Hz}); \omega_3 = 3 \cdot 2\pi \cdot (50 \text{ Hz}); \omega_4 = 4 \cdot 2\pi \cdot (50 \text{ Hz}); \dots$$

Zu der von null verschiedenen Komponente U_7 gehört die Kreisfrequenz $\omega_7 = 7 \cdot 2\pi \cdot (50 \text{ Hz})$. Welche Bedeutung hat diese Kreisfrequenz? Mit Gl. 8 berechnen Sie

$$\begin{aligned}
 U_{N-k} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n \exp\left(-i2\pi \frac{n \cdot (N-k)}{N}\right) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n \exp\left(-i2\pi \left(n + \frac{-nk}{N}\right)\right) \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} u_n \exp\left(-i2\pi \frac{-nk}{N}\right) = U_{-k}
 \end{aligned}$$

Die Fourier-Kreisfrequenz ω_7 gehört danach als Kreisfrequenz $\omega_1 = -\omega_1$ zu der Fourier-Komponente U_1 . Mit Blick auf die kontinuierliche Transformation der Funktion $\cos(\Omega t)$ war das Erscheinen einer negativen Frequenzkomponente auch zu erwarten.

Die Transformation nach Gl. 8 nummeriert die Fourier-Komponenten offenbar um: $U_{N-k} = U_{-k}$. Anschaulich: Der Teil des Spektrums mit negativen Kreisfrequenzen wird „nach rechts geklappt“ (englisch: wrapping). Bis $k = N/2$ wird positiv aufwärts gezählt, ab da von der negativen Seite aufwärts bis $k = 0$. Im Beispiel von Abb. 7: $U_0 = 0; U_1 = 0,5; U_2 = 0; U_3 = 0; \boxed{U_4 = U_{-4} = 0}; U_5 = U_{-3} = U_{-3} = 0; U_6 = U_{-2}; U_7 = U_{-1} = 0,5$. Und bei $U_8 = U_0$ beginnt die Zählung wieder neu. Diese Darstellung ist vielleicht etwas gewöhnungsbedürftig. Darum noch einige Bemerkungen dazu.

Ist der Transformationsinput $u(t)$ reell, so ist $U_{N-k} = U_k = U_k^*$. Ist $u(t)$ eine gerade Funktion, sieht der Spektralbereich rechts von $U_{N/2}$ genauso aus, wie der Bereich bis $U_{N/2}$ - nur gespiegelt. Bei ungerader Funktion $u(t)$ steht in der rechten Hälfte das konjugiert Komplexe, also dasselbe wie links, jedoch mit umgekehrtem Vorzeichen (/3/). Rechnen Sie mit Gl. 8 nach.

5.2 Abtasttheorem, Nyquist-Frequenz

Das Wrapping-Verfahren macht klar, dass die maximale Kreisfrequenz bei $U_{N/2}$, nach Gl. 9 als für auftritt.

$$\Omega_{Ny} = 2\pi \frac{N/2}{N\Delta t} = \frac{\pi}{\Delta t} = 2\pi \left(\frac{1}{2\Delta t} \right) = 2\pi \frac{f_s}{2}; \text{ mit } f_s = 1/\Delta t.$$

In diesem Fall werden pro Sampling-Intervall gerade einmal zwei Signalwerte aufgenommen. Diese Kreisfrequenz wird als *Nyquist-Frequenz* bezeichnet. Sie spielt in der Fourier-Analyse eine zentrale Rolle:

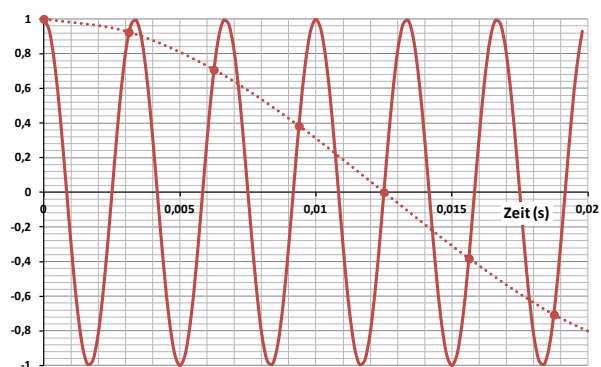
Die Nyquist-Frequenz ist die größte Kreisfrequenz, die bei gegebener Abtastrate $1/\Delta t$ gerade noch vernünftig dargestellt werden kann.

Die Bandbreite eines Signals, also die maximale darin enthaltene Frequenz $f_{\max} = \Omega_{Ny}/(2\pi)$, müssen zur Festlegung der Abtastrate $1/\Delta t$ bekannt sein. Nicht bandbreiten-begrenzte Signale machen deshalb Probleme. Frequenzanteile, die außerhalb des Intervalls $[-\Omega_{Ny}, \Omega_{Ny}]$ werden „irgendwie“ in den abbildbaren Bereich hinuntergefaltet und erzeugt u. U. Signalanteile, die ursprünglich nicht vorhanden waren. Dieser Effekt wird als *aliasing* bezeichnet.

Das **Abtasttheorem** stellt sicher, dass die DFT überhaupt zu verwertbaren Ergebnissen führen kann. Es besagt, dass die echte Funktion $u(t)$ aus den Folgentermen $u(k\Delta t)$ rekonstruiert werden kann, wenn $u(t)$ bandbreiten-begrenzt ist und man alle Samples $u(k\Delta t)$ mit der jeweiligen Gewichtung $\sin \omega t / \omega t$ aufaddiert (vgl./3/):

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u(k\Delta t) \frac{\sin \Omega_{Ny} (t - k\Delta t)}{\Omega_{Ny} (t - k\Delta t)}.$$

Abb. 8 demonstriert den Alias-Effekt: Die Sampling-Frequenz beträgt $f_s = 320$ Hz. Damit ergibt sich eine Nyquist-Frequenz von $f_{Ny} = \Omega_{Ny}/(2\pi) = 160$ Hz. Die Signalfrequenz von $f = 300$ Hz, ist so nicht abtastbar. Die Fourier-Analyse würde eine sehr niedrige Frequenz vortäuschen. Da der Alias-Effekt nicht reversibel ist, wenn er denn einmal das Spektrum verfälscht hat, sollten Sie lieber „auf Nummer sicher gehen“ und etwas zu feine Samples aufnehmen und ggf. später die Datensätze komprimieren. Einen Alias-Effekt kann man nachträglich nicht entfernen.



8 Alias-Effekt: Die Abtastrate ist etwas größer als die Frequenz der Wechselspannung: $f_s = 320$ Hz, $f = 300$ Hz

5.3 Datenfenster

Datensätze sind prinzipiell endlich, sie fangen zum Zeitpunkt t_a an und enden zum Zeitpunkt t_e . Ein solcher Datenstrom bildet also stets nur einen zeitlichen Ausschnitt der ganzen Wahrheit. Ein derartiges Ausschneiden entspricht mathematisch der Multiplikation des Signal $u(t)$ mit einem Zeitfenster $w(t)$. Dieses Zeitfenster ist so gebaut, dass $w(t) \approx 0$ für $t < t_a$ und $t > t_e$.

Aus dem bisher vorgestellten ist klar, dass ein solches Abschneiden die FT erheblich beeinflusst. Sei also $w(t)$ eine Funktion, die zentriert um $t = 0$ ist und nur in einem wählbaren Bereich um $t = 0$ von null verschieden ist. Dann berechnet sich die FT inkl. Fensterfunktion so:

$$U(w) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left[u(t) w(t - t_0) \exp(-2\pi i \omega t) \right].$$

Die Auswirkung einer Fensterfunktion erkennen Sie gut, wenn Sie ausschließlich das Fenster transformieren. Dazu drei typische Beispiele

(1) Rechteckfenster: $w(t) = 1$ für $-T < t < T$ und $w(t) = 0$ sonst (Standardfenster bei qtiPlot)

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt w(t) \exp(-i\omega t) = \int_{-T}^T dt \exp(-i\omega t) = \frac{1}{-i\omega} (\exp(-i\omega T) - \exp(-i\omega(-T))) = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}.$$

(2) Dreieckfenster (Parzen-Fenster): $w(t) = 1 - \text{sign}(t) \cdot t/T$ für $-T < t < T$ und $w(t) = 0$ sonst

$$W(\omega) = \int_{-T}^T dt w(t) \exp(-i\omega t) = T \left(\frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} \right)^2.$$

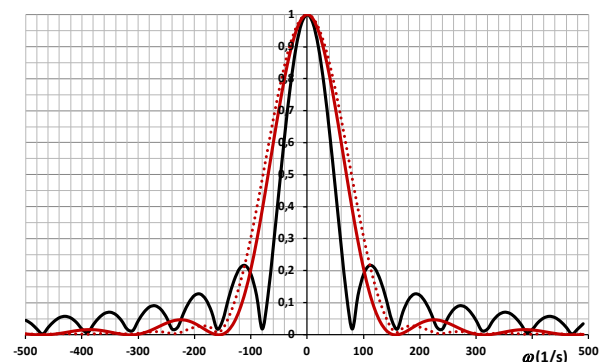
(3) Das \cos^2 -Fenster (Hann-Fenster): $w(t) = \cos^2(\pi t/2T)$ für $-T < t < T$ und $w(t) = 0$ sonst

$$W(\omega) = \int_{-T}^T dt w(t) \exp(-i\omega t) = \frac{T}{2} \sin \omega T \cdot \left(\frac{1}{\pi - \omega T} - \frac{1}{\pi + \omega T} + \frac{2}{\omega T} \right).$$

Abb. 9 zeigt die FT der drei Fenster-Funktionen, $W(\omega)$. Um die störende Wirkung zu beurteilen, schaut man sich an, wie schnell $W(\omega)$ dauerhaft auf Null absinkt. Schon auf den ersten Blick scheidet das Rechteck-Fenster da eigentlich aus. Die FT weist für höhere ω immer wieder erhebliche Beiträge aus.

Um die Fenster quantitativ zu bewerten, bedient an sich der audio-technischen Begriffswelt. Das Auftreten von Nebenmaxima im Spektrum wird als *Übersprechen auf Nachbaranäle* (englisch: amplitude leakage) umgedeutet. Man berechnet die *Übersprechdämpfung*, also das Verhältnis der Höhe des ersten Nebenmaximums zur Höhe des Zentralmaximums in dB ($20 \cdot \log(W(\omega)/W(0))$). Bei normierten Peaks ist das einfach aus dem Diagramm lesen Sie ab (oder ausrechnen):

- Rechteck: -13,3 dB;
- Parzen: -26,5dB und
- Hann: -31,5 dB



9 Normierte FT dreier Fenster-Funktionen: Rechteck-Fenster (schwarz), Parzen-Fenster (rot) und Hann-Fenster (rot punktiert)

6 Anhang

5.1 Weitere wichtige Themen der Fourier-Analysis

Die Auswahl der in diesem Skript besprochenen Themen wurde nach besten Wissen vorgenommen um die typische Praktikumsfrage zu beantworten: Was sollten Sie in einem ersten praktischen Zugang ausprobiert haben? Dennoch bleibt die Auswahl eine Auswahl.

Um das Skript nicht zu überlasten, sei hier, ohne weitere Erklärungen, eine Liste weiterer wichtiger Themen zusammengestellt:

- Das Gibbssche Überschwingerproblem
- Diverse Verschiebungssätze
- Faltung (Unterschied zwischen Gewichten und Falten), Kreuz- und Autokorrelation
- Weitere Fensterfunktionen
- Einzelheiten der FFT
- Digitale Datenfilter

Bitte konsultieren Sie die Lehrbuchliteratur. Vor allem das Buch von Tilman Butz ist für Anfänger gut geeignet. Es finden sich mehrere Exemplare zum Ausleihen im PhysikPraktikum.

5.2 Hinweise zu Funktionen

Orthogonalität und Vollständigkeit von Funktionenmengen; das Kronecker Delta

Ein System von Funktionen $\{F_k(x)\}$ heißt auf dem Intervall $[a,b]$ *orthogonal*, wenn

$$\int_a^b dx F_k(x) F_l(x) = c_k \cdot \delta_{k,l}.$$

$\delta_{k,l}$ ist das *Kroneckersymbol*, $\delta_{k,l} = 1$ für $k = l$ und in allen anderen Fällen null. Das System $\{\sin nx, \cos nx\}$ ist orthogonal über dem Intervall $[-\pi, \pi]$.

Das Funktionensystem $\{F_k(x)\}$ heißt *vollständig* über dem Intervall $[a,b]$, wenn die Entwicklung

$$f_n = \sum_{i=1}^n c_i F_i(x) \text{ in } [a,b] \text{ im Mittel gegen } f(x) \text{ konvergiert. Wenn also } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dt (f(x) - f_n(x))^2 = 0 \text{ ist.}$$

f kann dann durch die f_n vollständig approximiert werden.

Man definiert die mittlere quadratische Abweichung der Näherung durch

$$\delta_n^2 = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b dt (f(x) - f_n(x))^2.$$

Die Vollständigkeitsbedingung kann also auch als $\lim \delta_n^2 = 0$ geschrieben werden.

Das **Kroneckersymbol** $\delta_{k,l}$ spielt auch bei der DFT eine wichtige Rolle; ein Beispiel geht so:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-i2\pi \frac{n \cdot k}{N}\right) \exp\left(2\pi \frac{n' \cdot k}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(i2\pi \frac{(n'-n) \cdot k}{N}\right) = N \cdot \delta_{nn'}.$$

Die Schwankung von Funktionen

Man wähle m Stellen x_l auf dem Intervall $[a, b]$ beliebig aus. Als *Schwankung* σ versteht man die Abweichungen benachbarter Funktionswerte:

$$\sigma = |f(x_1) - f(x_2)| + |f(x_2) - f(x_3)| + |f(x_3) - f(x_4)| + \dots + |f(x_{m-1}) - f(x_m)|.$$

Beschränkt heißt diese Schwankung dann, wenn $\sigma < M$ für eine endliche Konstante M , unabhängig von der Wahl der Stellen x_l . Funktionen mit beschränkter Schwankung haben konvergierende Fourierreihen.

5.3 Ein heuristischer Weg zur Deltafunktion

Denkt man sich eine beliebige „Anspitzung“ der Frequenzverteilung gelangt man zum Konzept der Delta-„Funktion“ $\delta(x - x_0)$ (die Anführungsstriche drücken eine Mahnung aus: $\delta(x - x_0)$ hat keine Funktionswerte, ist damit keine richtige Funktion). Man legt die Integraleigenschaften fest und definiert so $\delta(x - x_0)$

1. $x \neq x_0 \Rightarrow \delta(x - x_0) = 0$
2. $x_0 \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b dx \delta(x - x_0) \cdot f(x) = f(x_0)$

Eigenschaft (2) setzt voraus, dass $f(x)$ im Intervall keine Sprünge aufweist. Die genannte „Anspitzung“ der Frequenzverteilung zur „Delta-Zacke“ kann durch einen Grenzprozess von Funktionenfolgen mathematisch korrekt beschrieben werden. Man betrachte die Folge zunehmend schärferer Gaussverteilungen

$$F_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \exp(-n^2 x^2).$$

Für jede n gilt $\int_{-\infty}^{\infty} dx F_n(x) = 1$ unabhängig von n . Mithilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung wird Merkmal (2) plausibel. Danach findet man eine Stelle \tilde{x} mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx F_n(x) f(x) = f(\tilde{x}) \int_{-\infty}^{\infty} dx F_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(0).$$

Zentriert man mit der Variablentransformation $x \rightarrow x - x_0$ die Funktionen der Folge um x_0 hat man eine Veranschaulichung der „Delta-Zacke“ $\delta(x - x_0)$. Alle Funktionenfolgen $\{\phi_n\}$ mit diesen Eigenschaften heißen *Deltafolgen*:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_n(x) f(x) = f(0) \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_n(x) = 1.$$

Eine im Zusammenhang mit der FT wichtige Deltafolge liefert die Integraldarstellung der Deltafunktion:

$$\phi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n dk \exp(ikx) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin nx}{x} \Rightarrow \delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikx).$$

Weitere Eigenschaften:

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x); a \neq 0$$

$$x\delta(x) = 0$$

$$\delta(g(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_n)}{|g'(x_n)|}; \text{ wobei } g(x_n) = 0 \text{ und } g'(x_n) \neq 0$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a)$$

$$\int dy \delta(x-y)\delta(y-a) = \delta(x-a)$$

5.4 Parsevals Gleichung für nichtperiodische Funktionen

Die Erweiterung der *Parsevalsche Beziehung* für den kontinuierlichen Fall lautet:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |F(\omega)|^2$$

Mithilfe der Deltafunktion ist die Begründung einfach:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) f^*(t) &= \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' F(\omega) F^*(\omega') \exp(i\omega t) \exp(-i\omega' t) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' F(\omega) F^*(\omega') \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp(i(\omega - \omega')t)}_{\delta(\omega - \omega')} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega F(\omega) F^*(\omega) \end{aligned}$$

Impressum

Fourier-Analyse zeitabhängiger Signale

herausgegeben und bearbeitet von

Rüdiger Scholz

Korrektur und kritische Durchsicht

Kim Weber

© 2014 Rüdiger Scholz · Leibniz Universität Hannover

www.uni-hannover.de

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Genehmigung des Herausgebers.

Hinweis zu §52a: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung gescannt und in ein Netzwerk gestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und Hochschulen und andere Bildungseinrichtungen.

Trotz sorgfältigster Bearbeitung sind Fehler nie auszuschließen. Für Schäden, die durch Fehler im Werk oder seinen Teilen entstanden sind, kann keine Haftung übernommen werden.

Bildverzeichnis

All Abbildungen: R. Scholz/Archiv PhysikPraktikum