Autómatas celulares irregulares y geometría computacional para estimar el comportamiento a futuro de una zona geográfica

Abdiel E. Cáceres González

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados - IPN
Av. IPN 2508 c.p. 07350 Col. San Pedro Zacatenco
México D.F.

Abstract

Este documento muestra un plan de trabajo para desarrollar herramientas computacionales, relacionadas con geometría y autómatas celulares irregulares, para ser aplicados en la generación de datos que servirán para obtener información acerca de una zona geográfica y hacer inferencias acerca del futuro de esa zona; información que puede servir para tomar medidas de prevención de accidentes o de planificación y de estimación de riesgos.

Key words:

1 Introducción

La información es un privilegio y manejar la información es una gran responsabilidad. A medida que se cuente con mas y mejor información se podrán tomar mejores decisiones. El uso de la información abarca casi todas las áreas de desarrollo del ser humano, incluso aquellas más básicas y antiguas como la agricultura, que es una de las actividades que se podría ver beneficiada con este trabajo.

Por otro lado, el crecimiento del poder de cómputo hace posible idear procedimientos que nos permitan hacer modelos y predeterminar con cierto grado de confianza lo que en el futuro ocurra con relación al problema modelado.

Uniendo estos dos puntos de vista podemos idear sistemas de cómputo para modelar problemas de índole geométrica que a su vez pueden servir de herramientas para complementar otros sistemas de cómputo que sirvan para modelar condiciones geográficas en una región a través del tiempo.

2 Descripción del problema

El problema empieza por describir las características de una zona geográfica que nos permitan definir un autómata celular que nos de información acerca de los cambios geográficos debidos a la interacción de los mismos elementos que definen el sistema.

La primera parte del problema a resolver, es desarrollar una herramienta de cómputo basada en la teoría de geometría computacional, para hallar la mejor división de un mapa, considerando un conjunto de premisas, como la existencia de diversos elementos topográficos que aportan criterios y condiciones para hallar la solución.

Lo anterior contribuye para definir un autómata celular irregular; se pretende tomar cada evolución del autómata como un elemento de tipo dato para ser almacenado en un sistema de información, con el cual generar estimaciones respecto al comportamiento geográfico de esa zona.

En otras palabras, las evoluciones del autómata celular irregular mostrarán los estados de la zona geográfica en distintos pasos de tiempo, y cada estado global podrá ser almacenado en una base de datos que permita posteriormente hacer inferencias acerca de los datos guardados, que tienen que ver con el futuro de esa zona geográfica.

2.1 Objetivos

Bajo la anterior descripción del problema, se pretende que el trabajo final:

(1) Reciba un mapa de una zona geográfica
(2) Determinar y generar la mejor partición del mapa bajo condiciones predeterminadas, proporcionando un grafo de esa zona
(3) Definir un autómata celular irregular con el espacio celular propuesto por la herramienta de geometría computacional y hacer evoluciones obteniendo en cada paso temporal un elemento de tipo dato
(4) Hacer inferencias acerca de los experimentos obtenidos de las evoluciones del autómata celular irregular.

2.2 Planificación del desarrollo del trabajo

Este trabajo involucra algunas áreas de conocimiento diferentes, por un lado desarrollar habilidades en geometría computacional y topología digital para hallar los mejores algoritmos de división del plano y de ubicación de puntos en esas divisiones. así como su representación en una plataforma de cómputo adecuada.

Otra área de estudio son los autómatas celulares irregulares, en esta parte se debe hallar la regla de evoución local que mejor modele el problema, lo que a su vez genera los problemas de encontrar la mejor definición de la vecindad y definir los estados posibles de cada célula de ese espacio particionado.

De manera que el tiempo estimado para terminar el trabajo es de un año distribuido del siguiente modo:

4 meses Soporte teórico
  (1) Teoría y práctica de geometría computacional
  (2) Teoría y práctica de autómatas celulares regulares e irregulares
  (3) Teoría de dinámica.

4 meses Desarrollo de las herramientas de cómputo.
  (1) Herramienta de geometría computacional
  (2) Herramienta de autómatas celulares irregulares

4 meses Estudio de los resultados experimentales y Procedimiento de inferencia.
  (1) colección de datos muestrales
  (2) inferencia acerca de los datos coleccionados
  (3) conclusiones

3 Descripción de la A a la Z

3.1 Autómatas celulares irregulares

Para entender loa autómatas celulares irregulares (*acI*), primero debemos saber lo que son los autómatas celulares regulares, o simplemente autómatas celulares (*ac*).

Un *ac* es un sistéma dinámico discreto que se crea al definir:

(1) Un espacio reticulado uniforme. Esto es un espacio de dimensión d (figura 1) dividido en casillas de igual forma y tamaño. A cada una de esas casillas se le conoce como **célula**, que es un término que ha sido tomado de

las ciencias biológicas por ser la unidad menor que en conjunto, establece un sistema.

$$G^d = \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{d-\text{veces}} \tag{1}$$

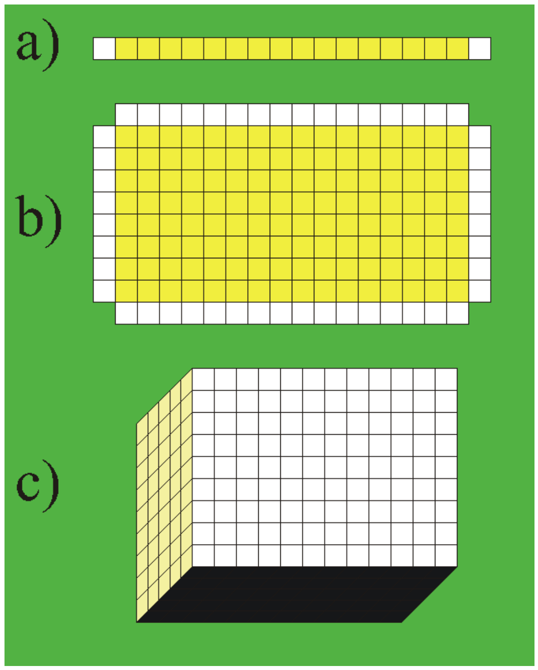

Fig. 1. Ejemplos de espacios celulares: a) G^1, b) G^2, c) G^3

(2) Un conjunto finito de células dentro del mismo espacio celular, que se llama **vecindad**. Existe una vecindad asociada a cada célula del espacio celular. El número de células de la vecindad es constante. La ubicación de las células de la vecindad en el espacio celular es arbitrario, pero debe ser igual para cada célula (por esta razón se llaman "regulares", desde luego, ahora ya se empieza a ver porqué los otros se llaman "irregulares").

En la figura 2, se pueden apreciar diferentes maneras de definir vecindades regulares en espacios celulares regulares tambien: en (a) es una vecindad "isotrópica" (porque tiene el mismo número de vecinos en todas direcciones) de radio 1, osea, una célula a la derecha, una célula a la izquierda y claro, la célula central. En (b) es también una vecindad isotrópica de radio 2 en un espacio celular 1-d.

En espacios celulares bidimensionales tambien hay muchas posibilidades, por ejemplos: En (c) se ha definido una vecindad isotrópica "ortogonal" también conocida como "vecindad de von Neumann", y en (d) la "vecindad de Moore".

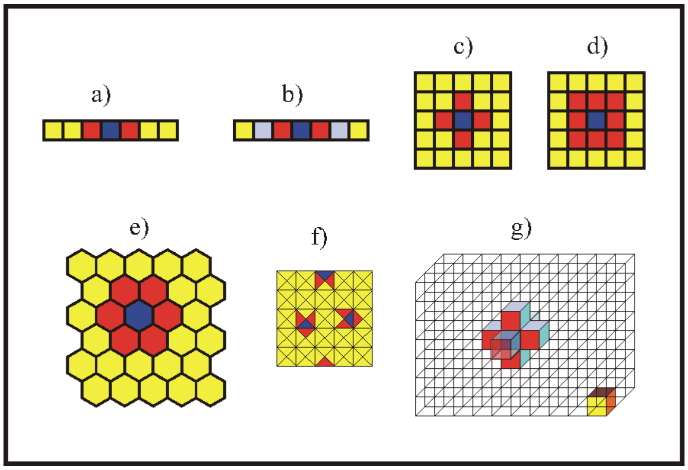

Fig. 2. Ejemplos de configuraciones de vecindades regulares

En la misma figura 2 en las partes (e) y (f) se muestran espacios celulares hexagonales y triangulares, ambos regulares. Finalmente en (g) se muestra una vecindad de von Neumann en 3 dimensiones.

Como cada célula debe tener su vecindad que es igual para todas (por eso es regular, recordemos) hay entonces un problema que se debe resolver en las fronteras del espacio celular, ¡ah bueno! es que en principio el espacio celular tiene extensión infinita, pero obviamente por necesidades computacionales requerimos que la extensión del espacio celular sea finita. Entonces, el problema de las vecindades está en las células de las fronteras que no tienen vecindades completas.

Hay varias soluciones a este problema, una de ellas, que es la más usada y que, cuando se crean espacios celulares suficientemente grandes, simula un espacio celular infinito, se llama, **condiciones de frontera periodicas** . Esta visión de las fronteras conecta una frontera con su lado opuesto, formando en espacios unidimensionales un anillo, en espacios bidimensionales un espacio toroidal, y así para las demás, (véase la figura 3).

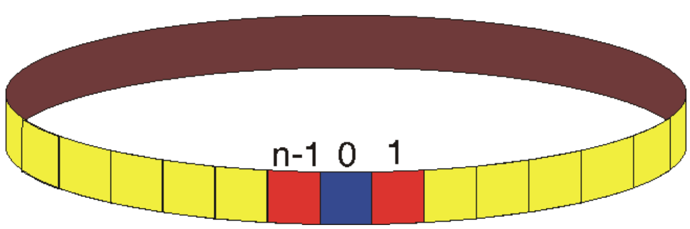

Fig. 3. Espacio celular con condiciones de frontera periodicas

(3) Un conjunto finito de estados (normalmente de cardinalidad pequeña). Cada célula puede presentarse en uno de los estados de ese conjunto de estados.

Suele nombrarse K el conjunto de estados, $K = \{0, 1\}$ es el conjunto más pequeño que podemos definir, claro que los símbolos 0 y 1 son solamente representaciones (apagado-prendido, bajo-alto, etc.) Se espera que los estados puedan ser representados por cantidades discretas.

Para mayor comodidad visual a la hora de estudiar el comportamiento dinámico del sistema, se ha optado por renombrar los estados, y en lugar de tener números, se les asigna un color, seleccionado bajo las preferencias de alguna persona.

(4) Una regla de actualización de estados, que se llama **regla de evolución local** que asocia una configuración de vecindad con el estado de una célula llamada **célula central** o bien, **célula en transición**.

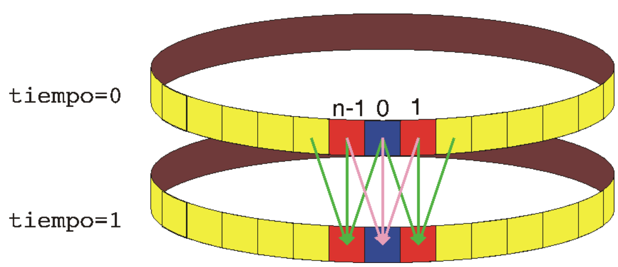

Fig. 4. La regla de evolución local se aplica a cada configuración de vecindad y actualiza el estado de la célula central para el siguiente momento en el tiempo

Llamaremos $\phi : K^{\nu} \to K$ la regla de evolución local, en donde ν es la cardinalidad del conjunto de células que pertenecen a la vecindad.

Como ya lo saben, hay dos maneras de describir los elementos relacionados en una función: de forma extensional (nombreando cada elemento); y la otra de forma intencional (nombrando una regla que defina todos los elementos).

Cuando es fácil, podemos describir cada elemento del dominio de la función y establecer el elemento relacionado. Por ejemplo, en un ac de dimensión 1, con una vecindad de radio $r = 1$, se tienen vecindades de $2r + 1 = 3$ células (véase la figura 4). Y las reglas de evolución local se pueden describir como se muestra en la tabla 1.

Otro modo de establecer las reglas de evolución local es dar un criterio, por ejemplo:

$$\phi(\alpha_0\alpha_1\alpha_2) = \begin{cases} 1 \text{ si } \sum_{k=0}^{2} \alpha_k = 2 \\ 0 \ e.o.c. \end{cases} \tag{2}$$

$\phi(000)$	$\rightarrow$	α_0
$\phi(001)$	$\rightarrow$	α_1
$\phi(010)$	$\rightarrow$	α_2
$\phi(011)$	$\rightarrow$	α_3
$\phi(100)$	$\rightarrow$	α_4
$\phi(101)$	$\rightarrow$	α_5
$\phi(110)$	$\rightarrow$	α_6
$\phi(111)$	$\rightarrow$	α_7

Con cada $\alpha_i \in K = \{0, 1\}$

Table 1
Reglas de evolución local para una vecindad de 3 células y un conjunto de 2 estados.

En particular, el ejemplo mostrado en la ecuación (2) se conoce como una **regla totalística**. Claramente las reglas totaísticas dependen del número de estados y del número de células en la vecindad.

(5) La **regla de evolución global** es una función que toma un espacio celular y aplica las reglas de evolución local a cada célula del espacio celular y de ese modo transforma el espacio celular.

El estado del espacio celular global G^d es transformado por la aplicación de las reglas de evolución local, generando una nueva configuación de G^d (quizás se llegue de nuevo a la misma configuración). Esto nos da la oportunidad de incluir el concepto de **tiempo** y de este modo, crear la dinámica del sistema.

Decimos que $G^d_{t=0}$ es la **configuración inicial** del espacio celular, y entonces:

$$G^d_{t+1} = \Phi(G^d_t) \tag{3}$$

En donde la regla de evolución local ϕ se aplica a cada vecindad del espacio celular en el tiempo t.

$$G^d_{t+1} = \phi(\overrightarrow{x_c}) \quad \forall\, x_c \in G^d_t \tag{4}$$

Donde $\overrightarrow{x_c} =< x_0, x_1, \ldots, x_c, \ldots, x_{\nu-1} >$ es una secuencia de células que determinan la configuración de la vecindad de la célula x_c.

Entonces, $G^d_2 = \Phi(\Phi(G^d_0))$, es decir, el la configuración del espacio celular en el t-ésimo momento del tiempo, está dado por las t primeras aplicaciones de la función de evolución global, a partir de la confguración inicial G^d_0. Lo que también se puede expresar como $G^d_t = \Phi^t(G^d_0)$

Todos los autómatas celulares, ya sean regulares o irregulares, deben tener estas cinco características que acabamos de mencionar. En resumen, un autómata celular está definido por la tupla:

$$(G^d, \overrightarrow{x_c}, K, \phi) \tag{5}$$

La función de evolución global Φ, puede no especificarse, porque precisamente es la aplicación de la regla de evolución local ϕ para cada célula del espacio celular.

3.2 Ajá, ¿y luego?

Cuando es posible, las configuraciones del espacio celular que son seguidas con respecto al tiempo, se agrupan, para ver el comportamiento global del sistema de un solo vistazo. A esta extensión dimensional (las d dimensiones más el tiempo) se le llama **diagrama espacio-temporal**.

Supongamos entonces que queremos ver el comportamiento de un sistema que ahora describo:

Tenemos una población de 50 bichos, todos ellos formados en una fila, los bichos no pueden cambiar de lugar y ningún bicho se come a otro bicho [1], cuando la comida se les reparte, a intervalos de tiempo regulares, algunos bichos deciden comer y algunos deciden no comer. Si un bicho decide no comer, entonces su comida se desaparece en ese instante.

Los buchos solamente pueden saber lo que ocurre con los otros bichos vecinos inmediatos, es decir, solamente conocen a su vecino de la derecha y a su vecino de la izquierda.

La única manera de saber que un bicho está vivo, es ver que esté comiendo. Si un bicho no come, suponemos que está muerto.

Nuestros bichos se comportan así:

[1] Porque lo único que ellos comen es alimento especial para bichos, que su dueño generosamente les proporciona.

(1) Un bicho que NO está comiendo, permanecerá sin comer en el siguiente momento de tiempo, si ninguno de sus vecinos está comiendo.
(2) Un bicho que NO está comiendo, comerá en el siguiente momento de tiempo, si exactamente uno de sus vecinos está comiendo.
(3) Un bicho que SI está comiendo, permanecerá sin comer en el siguiente momento de tiempo.

Claramente tenemos que esto define un autómata celular si hacemos:

(1) $d = 1$ para tener un espacio unidimensional $G = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ (la fila de bichos, con $n = 50$). Donde arbitrariamente decidimos cerrar las fronteras para crear un anillo de bichos.
(2) Una vecindad isotrópica de radio $r = 1$. $\overrightarrow{x_c} = x_{c-1}x_cx_{c+1}$ con las operaciones módulo $n = 50$, que es el tamaño del espacio celular.
(3) El conjunto de estados es $K = \{\text{no-comer}, \text{comer}\}$, que podemos renombrar como $K = \{0, 1\}$, claro cuando no-comer $= 0$ y comer $= 1$.
(4) Las reglas de evolución local entonces estarán determinadas por:

$\phi(0,0,0)$	$\rightarrow$	0	
$\phi(x_{c-1},0,x_{c+1})$	$\rightarrow$	1	Si $x_{c-1} \otimes x_{c+1} = 1$
$\phi(x_{c-1},1,x_{c+1})$	$\rightarrow$	0	

De manera extensa, podemos ver lo que sucede con todas las configuraciones de veindades, esto lo hacemos porque es fácil hacerlo, claro.

$\phi(000)$	$\rightarrow$	0
$\phi(001)$	$\rightarrow$	1
$\phi(010)$	$\rightarrow$	0
$\phi(011)$	$\rightarrow$	0
$\phi(100)$	$\rightarrow$	1
$\phi(101)$	$\rightarrow$	0
$\phi(110)$	$\rightarrow$	0
$\phi(111)$	$\rightarrow$	0

Table 2
Reglas de evolución local para el ejemplo de los bichos

La pregunta entonces puede ser: ¿Cuál es el porcentaje de bichos que comen en cada vez que se les da alimento? Quizás para respondernos esto, podríamos visualizar mejor el sistema con un diagrama espacio-temporal que nos de información del estado global del espacio celular en varios momentos de tiempo.

El diagrama espacio-temporal que se muestra en la figura 5. En ese diagrama el tiempo corre de arriba hacia abajo. Los cuadros obscuros simbolizan un bicho comiendo, y los cuadros claros significan bichos que no estan comiendo.

Fig. 5. Evolución del autómata celular que modela el sistema de los bichos

Al inicio, en el tiempo $t = 0$, los bichos que comen y que no comen se han señalado aleatoriamente con una distribución uniforme.

Hmmmmm... y esos triángulos?

Ahora podemos empezar a hacer preguntas acerca del comportamiento global del espacio celular, y quizás también podamos dar las respuestas. Para eso, necesitamos usar otro tipo de herramientas como mecánica estadística, teoría de grafos, y otras mas.

3.3 Que bonitos triángulos, pero ¿Qué tiene que ver todo esto con las zonas geográficas?

Haaa... Aquí es donde empezamos con los autómatas celulares irregulares.