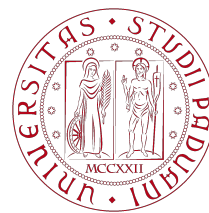


Final Report

Physics of Complex Networks: Structure and Dynamics



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Areas of physics by complexity



Newton's
Mechanics

Electro-
Magnetism

Special
Relativity

Quantum Mechanics
General Relativity

Quantum
Field Theory

Complexity
Science

Project # 18: Turing Patterns

Zara, Miriam

Last update: June 29, 2024

Contents

1	Task title...	1
1.1	A section...	1
1.2	Another section...	1
2	Task title...	5
2.1	A section...	5
2.2	Another section...	5
3	Task title...	6
3.1	A section...	6
3.2	Another section...	6
4	Appendix	7
5	Bibliography	9

1 | Task title...

Task leader(s): *Author name(s)...*

Structure as¹:

- *A short (max 1 page) explanation of the task, including references. Include mathematical concepts.*
- *Max 2 pages for the whole task (including figures)*
- *It is possible to use appendices for supplementary material, at the end of the report. Max 5 pages per task*

A total of 3 pages + 5 supplementary pages per task

1.1 | A section...

Reference examples: book [2], article [3], website [1]

1.2 | Another section...

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

¹Remove this part from the report

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.

Nulla malesuada porttitor diam. Donec felis erat, congue non, volutpat at, tincidunt tristique, libero. Vivamus viverra fermentum felis. Donec nonummy pellentesque ante. Phasellus adipiscing semper elit. Proin fermentum massa ac quam. Sed diam turpis, molestie vitae, placerat a, molestie nec, leo. Maecenas lacinia. Nam ipsum ligula, eleifend at, accumsan nec, suscipit a, ipsum. Morbi blandit ligula feugiat magna. Nunc eleifend consequat lorem. Sed lacinia nulla vitae enim. Pellentesque tincidunt purus vel magna. Integer non enim. Praesent euismod nunc eu purus. Donec bibendum quam in tellus. Nullam cursus pulvinar lectus. Donec et mi. Nam vulputate metus eu enim. Vestibulum pellentesque felis eu massa.

Quisque ullamcorper placerat ipsum. Cras nibh. Morbi vel justo vitae lacus tincidunt ultrices. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In hac habitasse platea dictumst. Integer tempus convallis augue. Etiam facilisis. Nunc elementum fermentum wisi. Aenean placerat. Ut imperdiet, enim sed gravida sollicitudin, felis odio placerat quam, ac pulvinar elit purus eget enim. Nunc vitae tortor. Proin tempus nibh sit amet nisl. Vivamus quis tortor vitae risus porta vehicula.

2 | Task title...

Task leader(s): *Author name(s)...*

Structure as¹:

- *A short (max 1 page) explanation of the task, including references. Include mathematical concepts.*
- *Max 2 pages for the whole task (including figures)*
- *It is possible to use appendices for supplementary material, at the end of the report. Max 5 pages per task*

A total of 3 pages + 5 supplementary pages per task

2.1 | A section...

Reference examples: book [2], article [3], website [1]

2.2 | Another section...

¹Remove this part from the report

3 | Task title...

Task leader(s): *Author name(s)...*

Structure as¹:

- *A short (max 1 page) explanation of the task, including references. Include mathematical concepts.*
- *Max 2 pages for the whole task (including figures)*
- *It is possible to use appendices for supplementary material, at the end of the report. Max 5 pages per task*

A total of 3 pages + 5 supplementary pages per task

3.1 | A section...

Reference examples: book [2], article [3], website [1]

3.2 | Another section...

¹Remove this part from the report

4 | Appendix

This section contains an elementary introduction to reaction-diffusion systems for pattern formation.

An activator- inhibitor system is described by the following set of equations:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x}, t) = f(u, v) + D_{\text{act}}\nabla^2u(\mathbf{x}, t) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v(\mathbf{x}, t) = g(u, v) + D_{\text{inh}}\nabla^2v(\mathbf{x}, t) \quad (4.2)$$

where $u(\mathbf{x}, t)$ is the local density of the activator and $v(\mathbf{x}, t)$ is the local density of the inhibitor. D_u and D_v are the diffusion coefficients of the ligands or morphogens. The reactions are encoded in the functions $f(u, v)$ and $g(u, v)$. Various functional forms have been proposed for these functions. Qualitatively, those functions should describe the following facts:

- the activator u enhances its own production and the production of the inhibitor v ;
- the inhibitor v suppresses the production of both the activator u and itself,

Mathematically, these conditions translate to the following relations on the partial derivatives:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} > 0, & \frac{\partial f}{\partial v} < 0 \\ \frac{\partial g}{\partial u} > 0, & \frac{\partial g}{\partial v} < 0 \end{cases}$$

It is required that, in absence of diffusion, a uniform stationary state exists, i.e. (\bar{u}, \bar{v}) where $f(\bar{u}, \bar{v}) = g(\bar{u}, \bar{v}) = 0$.

$$\rightarrow \begin{pmatrix} u(\mathbf{x}, t) \\ v(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix} \quad \forall \mathbf{x}, t$$

Also, it is required that this equilibrium is linearly stable under the effect of small perturbations. Indeed, the key idea of the Turing model is that the instability is driven by diffusion, and appears only above a certain threshold function of the diffusion parameters.

The linear stability requirement is satisfied if the jacobian matrix of $F(u, v) = (f(u, v), g(u, v))$ evaluated at the fixed point (\bar{u}, \bar{v}) , $J_F(\bar{u}, \bar{v})$, has all eigenvalues with negative real parts $\mathcal{Re}(\lambda_i) < 0$. Say

$$J_F(\bar{u}, \bar{v}) := \begin{pmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{pmatrix}$$

Then

$$\mathcal{Re}\{\lambda_i\} < 0 \iff J_F(\bar{u}, \bar{v}) < 0 \quad (\text{neg. def.}) \iff \begin{cases} \text{tr}(J_F) < 0 \\ \det(J_F) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f_u + g_v < 0 \\ f_u \cdot g_v - f_v \cdot g_u > 0 \end{cases}$$

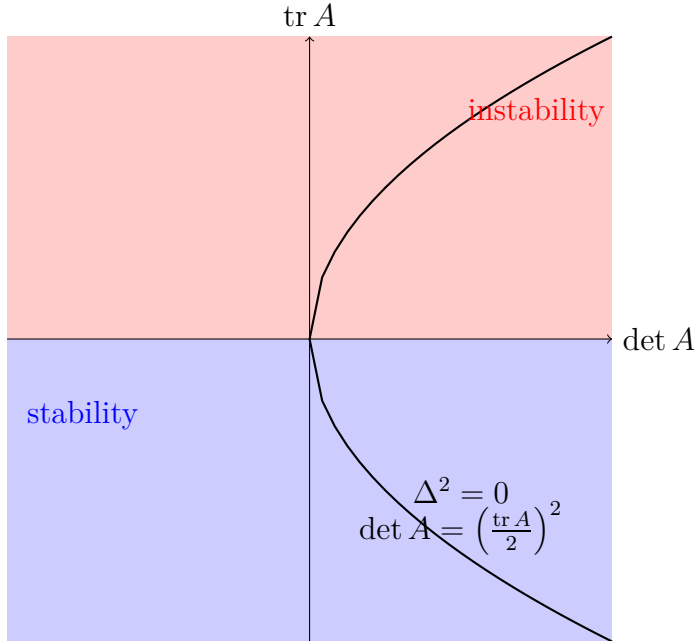
Various functional forms for $F(u, v)$ have been proposed. Among the best known:

- original Turing (1952) linear functions $f(u, v)$:

$$\begin{cases} f(u, v) = a_f \cdot u + b_f \cdot v + c_f \\ g(u, v) = a_g \cdot u + b_g \cdot v + c_g \end{cases} \quad (4.3)$$

where a coefficients are positive, b coefficients are negative and for c , I dont know yet.

- the Geiger-Meinhardt (1972)



5 | Bibliography

- [1] Protecting critical infrastructure from a cyber pandemic — weforum.org. <https://www.weforum.org/agenda/2021/10/protecting-critical-infrastructure-from-cyber-pandemic/>. [Accessed 29-Mar-2023].
- [2] Alain Barrat, Marc Barthélemy, and Alessandro Vespignani. *Dynamical processes on complex networks*. Cambridge university press, 2008.
- [3] Manlio De Domenico, Albert Solé-Ribalta, Emanuele Cozzo, Mikko Kivelä, Yamir Moreno, Mason A Porter, Sergio Gómez, and Alex Arenas. Mathematical formulation of multilayer networks. *Physical Review X*, 3(4):041022, 2013.