Kurvendiskussion

Die zu diskutierende Funktion ist

$$f(x) = -tx + x^3.$$

Die Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -t + 3x^2 \\ f''(x) &= 6x \\ f'''(x) &= 6 \\ \int f(x)\,\mathrm{dx} &= -\frac{tx^2}{2} + \frac{x^4}{4} \end{aligned}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse. $f(0) = 0$

Nullstellen Die Nullstellenmenge $\mathcal{N}$ ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{N} = \{(0 &\quad , \quad 0), \\ (-\sqrt{t} &\quad , \quad 0), \\ (\sqrt{t} &\quad , \quad 0)\} \end{aligned}$$

Extrema Die Menge der potenziellen Extrema $\mathcal{E}$ ist:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = \{(-\frac{\sqrt{3}\sqrt{t}}{3} &\quad , \quad \frac{2\sqrt{3}}{9}t^{\frac{3}{2}}), \\ (\frac{\sqrt{3}\sqrt{t}}{3} &\quad , \quad -\frac{2\sqrt{3}}{9}t^{\frac{3}{2}})\} \end{aligned}$$

Einsetzen in die zweite Ableitung liefert:

$$\begin{aligned} f''(-\frac{\sqrt{3}\sqrt{t}}{3}) &= -2\sqrt{3}\sqrt{t} \\ f''(\frac{\sqrt{3}\sqrt{t}}{3}) &= 2\sqrt{3}\sqrt{t} \end{aligned}$$

Wendepunkte Die Menge der potenziellen Wendepunkte $\mathcal{W}$ ist:

$$\mathcal{W} = \{(0 \quad , \quad 0)\}$$

Einsetzen in die dritte Ableitung liefert:

$$f'''(0) = 6$$

Wendetangenten Die Wendetangenten sind:

$$\text{Die Tangente an } (0,0) \quad \text{ist} \quad t(x) = -t \cdot x + 0$$