Kurvendiskussion

Die zu diskutierende Funktion ist
$$f(x) = tx^2 + t - x^4 - 2x^2.$$

Die Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2tx - 4x^3 - 4x \\
f''(x) &= 2t - 12x^2 - 4 \\
f'''(x) &= -24x \\
\int f(x)\,\mathrm{dx} &= \frac{tx^3}{3} + tx - \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3}
\end{aligned}$$

Schnittpunkt mit der y-Achse. $f(0) = t$

Nullstellen Die Nullstellenmenge $\mathcal{N}$ ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N} = \{(-\frac{1}{2}\sqrt{2t - 2\sqrt{t^2+4} - 4} &,\quad 0), \\
(\frac{1}{2}\sqrt{2t - 2\sqrt{t^2+4} - 4} &,\quad 0), \\
(-\frac{1}{2}\sqrt{2t + 2\sqrt{t^2+4} - 4} &,\quad 0), \\
(\frac{1}{2}\sqrt{2t + 2\sqrt{t^2+4} - 4} &,\quad 0)\}
\end{aligned}$$

Extrema Die Menge der potenziellen Extrema $\mathcal{E}$ ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} = \{(0 &,\quad t), \\
(-\frac{1}{2}\sqrt{2t-4} &,\quad \frac{t^2}{4} + 1), \\
(\frac{1}{2}\sqrt{2t-4} &,\quad \frac{t^2}{4} + 1)\}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die zweite Ableitung liefert:

$$\begin{aligned}
f''(0) &= 2t - 4 \\
f''(-\frac{1}{2}\sqrt{2t-4}) &= -4t + 8 \\
f''(\frac{1}{2}\sqrt{2t-4}) &= -4t + 8
\end{aligned}$$

Wendepunkte Die Menge der potenziellen Wendepunkte $\mathcal{W}$ ist:

$$\begin{aligned}
\mathcal{W} = \{(-\frac{1}{6}\sqrt{6t-12} &,\quad t + \frac{5}{36}\left(t-2\right)^2), \\
(\frac{1}{6}\sqrt{6t-12} &,\quad t + \frac{5}{36}\left(t-2\right)^2)\}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die dritte Ableitung liefert:

$$\begin{aligned}
f'''(-\frac{1}{6}\sqrt{6t-12}) &= 4\sqrt{6t-12} \\
f'''(\frac{1}{6}\sqrt{6t-12}) &= -4\sqrt{6t-12}
\end{aligned}$$

Wendetangenten Die Wendetangenten sind:

Die Tangente an $(-\frac{1}{6}\sqrt{6t-12}, t + \frac{5}{36}\left(t-2\right)^2)$ ist $t(x) = -\frac{2\sqrt{6}}{9}\left(t-2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot x + t - \frac{1}{12}\left(t-2\right)^2$

Die Tangente an $(\frac{1}{6}\sqrt{6t-12}, t + \frac{5}{36}\left(t-2\right)^2)$ ist $t(x) = \frac{2\sqrt{6}}{9}\left(t-2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot x + t - \frac{1}{12}\left(t-2\right)^2$