Příklady

1. Jakou trajektorii popisuje laserový paprsek v CD přehrávači vzhledem
   a) k tělesu přehrávače,
   b) ke zdroji laserového paprsku,
   c) k CD desce?

2. Najděte velikost odchylky od vertikály tělesa padajícího volným pádem, vyvolané otáčením Země (za předpokladu malé velikosti úhlové rychlosti rotace).

   Řešení:

   V homogenním tíhovém poli $U = -m\vec{g}\cdot\vec{r}$ zanedbáme odstředivou sílu, úměrnou kvadrátu úhlové velikosti Ω, jako veličinu druhého řádu. Za uvedeného předpokladu má pohybová rovnice tvar

   $$\dot{\vec{v}} = 2\left(\vec{v}\times\vec{\Omega}\right)+\vec{g}\,. \tag{2.1}$$

   Uvedenou rovnici budeme řešit metodou postupných aproximací (poruchovým počtem). Položíme $\vec{v}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, kde $\vec{v}_1$ je řešení v nultém přiblížení $\dot{\vec{v}}_1=\vec{g}$, tj. $\vec{v}_1=\vec{g}t+\vec{v}_0$. Uvedené řešení dosadíme do pravé strany do rovnice (2.1) a dostaneme pohybovou rovnici v prvém přiblížení pro $\vec{v}_2$

   $\dot{\vec{v}}_2 = 2\left(\vec{v}_1\times\vec{\Omega}\right)=2t\left(\vec{g}\times\vec{\Omega}\right)+2\left(\vec{v}_0\times\vec{\Omega}\right).$

   Po integraci dostaneme

   $\vec{r}=\vec{h}+\vec{v}_0t+\tfrac{1}{2}\vec{g}t^2+\tfrac{1}{3}t^3\left(\vec{g}\times\vec{\Omega}\right)+t^2\left(\vec{v}_0\times\vec{\Omega}\right),$

   kde $\vec{h}$ je počáteční poloha tělesa. Zvolíme osu z ve směru vertikály, a osu x ve směru poledníku s orientací směrem k pólu, potom $\vec{g}\equiv\left(0,0,-g\right)$ a $\vec{\Omega}\equiv\left(\Omega\cos\varphi,0,\Omega\sin\varphi\right)$, kde φ je zeměpisná šířka, kterou zvolíme z důvodů jednoznačnosti severní. Položíme-li $\vec{v}_0=0$, dostaneme

   $x=0;\ y=-\tfrac{1}{3}t^3 g\,\Omega\cos\varphi\,.$

   Dosadíme-li dobu pádu $t\approx\sqrt{2h/g}$, dostaneme

   $$x=0;\ y=-\frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}g\,\Omega\cos\varphi\,.$$

   Těleso se odchýlí po dopadu východním směrem.

3. Dva automobily současně vyjely z místa *A* a za hodinu dojely do místa *B*. První automobil, projel první polovinu dráhy rychlostí v_1 = *60 km/h* a druhou polovinu rychlostí v_2 = *90km/h*. Druhý automobil projel celou dráhu rovnoměrně zrychleným pohybem. V kterém okamžiku byly rychlosti obou automobilů stejné? Setkají se automobily během cesty?

4. Balón o hmotnosti *M* je bez pohybu nad zemským povrchem. Z balónu visí provazový žebří, na kterém stojí člověk o hmotnosti *m*. V určitém okamžiku začne člověk po žebříku vystupovat stálou rychlostí vzhledem k žebříku.
   a) Vysvětlete fyzikálně danou situaci.
   b) Jakou rychlostí se při výstupu člověka pohybuje balón vzhledem k Zemi?

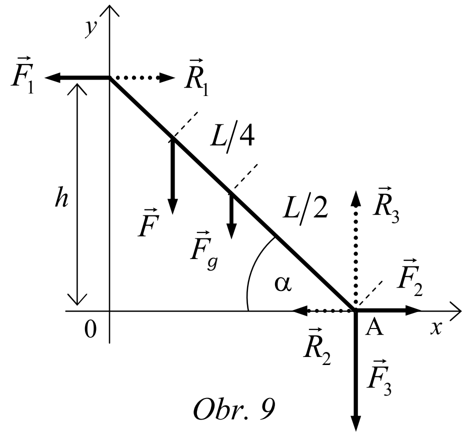
5. Vrtulník letí rychlostí *540 km/h*. Vrtule při jedné otáčce vykoná posuvný pohyb po dráze *4,8 m*. Vypočtěte úhlovou rychlost vrtule

6. Hmotnost parašutisty s padákem je $m = 100\ kg$. Otevřený padák je brzděn odporem vzduchu úměrným v^2 a ploše S průmětu padáku do vodorovné roviny ($F_R = k.S.v^2$). Při rychlosti $3\ m/s$ je brzdící síla rovna $100\ N$ na jednotku plochy průmětu padáku do vodorovné roviny. Jak velký musí být průmět padáku do vodorovné roviny, aby rychlost dopadu parašutisty byla bezpečná $v_m \leq 1{,}2$ m/s? *($S \geq 62{,}5\ m^2$)*

7. Odvoďte závislost změny tíhového zrychlení v závislosti na zeměpisné šířce $t = g_e\left(1+\beta \sin^2 \vartheta\right)$, kde g_e je tíhové zrychlení na rovníku, β konstanta a θ zeměpisná šířka daného místa.

8. Po otevření panákuje počáteční rychlost výsadkáře $20\ m/s$. Na jaké hodnotě se ustálí jeho rychlost, působí-li na jeho pohyb odporová síla určení vztahem $F = kv$, kde $k = 100\ N.s/m$ a v je rychlost výsadkáře? Jeho celková hmotnost je $90\ kg$.

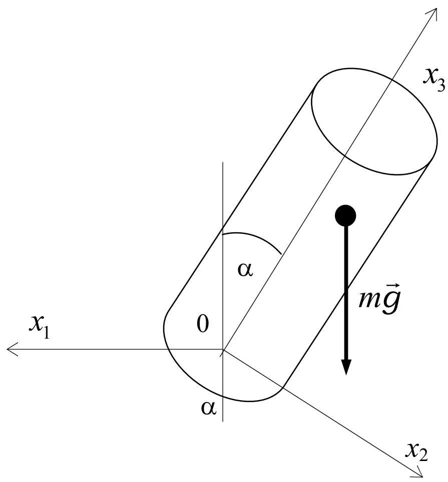
9. Žebřík délky L a hmotnosti M je šikmo opřen o hladkou stěnu, viz obr. 1. Ve vzdálenosti $L/4$ od jeho horního konce je umístěno závaží hmotnosti m. Určete a) sílu $\vec{F}_1$, kterou působí žebřík na stěnu, b) vodorovnou a svislou složku síly, kterou žebřík působí na vodorovnou rovinu $\vec{F}_2, \vec{F}_3$.



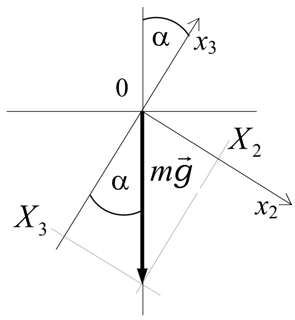
Obr. 9

10. Částice se pohybuje v homogenním tíhovém poli po stěně hladkého válce poloměru R, jehož osa symetrie svírá se svislým směrem úhel α, viz obr. 10.1. Nalezněte reakci vazby jako funkci polohy částice ve válcových souřadnicích.

Řešení:



Obr. 10.1



Obr. 10.2

Zvolme kartézskou a válcovou souřadnicovou soustavu tak, že, $\vec{x}_1 \perp \vec{g}$*, viz obr. 10.2. Vazebná podmínka pro pohyb částice po stěně válcové plochy o poloměru* R *má ve válcových souřadnicích tvar* $f = \rho - R = 0 \Rightarrow \dot{f} = \dot{\rho} = \ddot{f} = \ddot{\rho} = 0$.

Určíme složky tíhové síly $\vec{F}_g\left(X_1, X_2, X_3\right)$ *ve válcových souřadnicích. Kartézské souřadnice tíhové síly* $\vec{F}_g\left(X_1, X_2, X_3\right)$ *jsou*

$X_1 = 0$; $X_2 = mg \sin\alpha$; $X_3 = -mg\cos\alpha$.

Kartézské složky bázových vektorů válcové souřadnicové soustavy jsou určeny vztahy

$\vec{e}_\rho(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$, $\vec{e}_\varphi(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0)$, $\vec{e}_z(0, 0, 1)$.

Pro válcové složky tíhové síly pak obdržíme

$X_\rho = \vec{F}_g \cdot \vec{e}_\rho = mg\sin\alpha\sin\varphi$; $X_\varphi = \vec{F}_g \cdot \vec{e}_\varphi = mg\sin\alpha\cos\varphi$; $X_z = \vec{F}_g \cdot \vec{e}_z = -mg\cos\alpha$

$\vec{F}_g = (mg\sin\alpha\sin\varphi,\ mg\sin\alpha\cos\varphi, -mg\cos\alpha)$.

D´Alembertova setrvačná síla ve válcových souřadnicích je určena vztahy

$$\vec{J}\left(-m\, a_\rho, -m\, a_\varphi, -m\, a_z\right) \equiv \left[-m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right), -m\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right), -m\ddot{z}\right].$$

Reakce vazby $\vec{R} = \left(\lambda\dfrac{\partial f}{\partial\rho}, \lambda\dfrac{\partial f}{\partial\varphi}, \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = (\lambda, 0, 0)$ $\vec{R}(\lambda;0;0)$.

Lagrangeovy rovnice I. druhu mají tvar

$$m\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\right) = mg\sin\alpha\sin\varphi + \lambda,$$

$$m\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\rho^2\dot{\varphi}\right) = mg\sin\alpha\cos\varphi,$$

$$m\ddot{z} = -\,mg\cos\alpha.$$

Z vazební podmínky plyne $\rho = R = konst. \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$. *Lagrangeovy rovnic I. druhu zapíšeme ve tvaru*

$$-\,mR\dot{\varphi}^2 = mg\sin\alpha\sin\varphi + \lambda,$$

$$R\ddot{\varphi} = g\sin\alpha\cos\varphi,$$

$$\ddot{z} = -\,g\cos\alpha.$$

Vynásobíme druhou rovnici $\dot{\varphi}$ *a po integraci dostaneme*

$R\dot{\varphi}^2 = 2g\sin\alpha\sin\varphi + C$.

Dosazením uvedeného výrazu do první z rovnice dostaneme

$\lambda = -\,3mg\sin\alpha\sin\varphi - mC$.

Reakci vazby můžeme tedy zapsat jako vektor $\vec{R} = -\left(3mg\sin\alpha\sin\varphi + mC\right)\vec{e}_\rho$.

Kartézské složky vektoru $\vec{R}$ *získáme pomocí vztahu*

$$\vec{R} = -\left(3mg\sin\alpha\sin\varphi + m\,C\right)\left(\cos\varphi\,\vec{i}_1 + \sin\varphi\,\vec{i}_2 + 0\,\vec{i}_3\right),$$

$$R_1 = -\left(3mg\sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi + Cm\cos\varphi\right), R_2 = -\left(3mg\sin\alpha\sin^2\varphi + Cm\sin\varphi\right), R_3 = 0.$$

11. Homogenní tyč délky l se opírá o dokonale hladkou stěnu, viz obr. 11, a je v této poloze udržována vnější silou. V určitém okamžiku tyč uvolníme, tak, že začne bez tření klouzat po podlaze i po stěně. V jaké výšce bude horní konec tyče, když se oddělí od stěny? Původní výška tohoto konce nad podlahou je h.

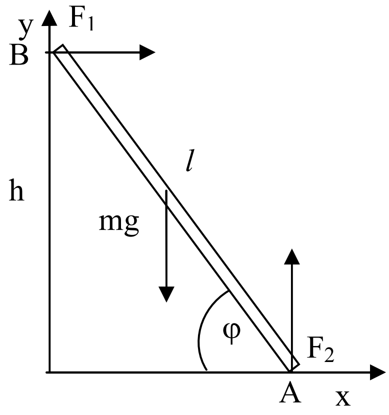
Řešení:

Existující vazby

$x_B = 0,\ y_A = 0,\ \sqrt{x_B^2 + y_A^2} = l$.

Reakce vazeb

$F_1 = \lambda_1, F_2 = \lambda_2$



Obr. 11

Lagrangeovy pohybové rovnice I. druhu pak jsou

$m\ddot{x} = \lambda_1,$

$m\ddot{y} = \lambda_2,$

$J\ddot{\varphi} = \frac{l}{2}mg\cos\varphi - \lambda_1 l\cos\varphi,$

kde uvažujeme otáčení v bodě A. V bodě, ve kterém tyč ztrácí kontakt se stěnou, platí $F_1 = \lambda_1 = \ddot{x} = 0$. *Z vazebních podmínek vyplývá*

$$tg\varphi = \frac{y_B}{x_A} = \frac{\sqrt{l^2 - x_A^2}}{x_A} \quad => \quad \varphi = arctg\frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{x}\,;\, x_A = x$$

a dále

$$\dot{\varphi} = \frac{-\dot{x}}{\sqrt{l^2 - x^2}},$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{-\ddot{x}\left(l^2 - x^2\right) + \dot{x}^2 x}{\left(l^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Moment setrvačnosti tyče, která se otáčí kolem bodu A je

$J = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$.*Pohybová rovnice pro rotaci tyče kolem bodu A pak má tvar*

$$\frac{1}{3}m\left[\frac{-\ddot{x}\left(l^2 - x^2\right) + \dot{x}^2 x}{\left(l^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right] = mg\frac{x}{2} - \lambda_1 x\,.$$

V okamžiku, kdy ztrácí tyč na vrcholu *kontakt se stěnou* $\lambda_1 = \ddot{x} = 0$ *pak platí*

$$\frac{1}{3}l^2\frac{\dot{x}^2}{\left(l^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{mg}{2}\,. \tag{11.1}$$

Zákon zachování energie tyče vzhledem k těžišti má tvar

$$\frac{1}{6}ml^2\frac{\dot{x}^2}{l^2 - x^2} + \frac{mg}{2}\sqrt{l^2 - x^2} = \frac{mgh}{2}$$

a tedy

$$\frac{1}{3}l^2\frac{\dot{x}^2}{l^2 - x^2} = g\left(h - \sqrt{l^2 - x^2}\right).$$

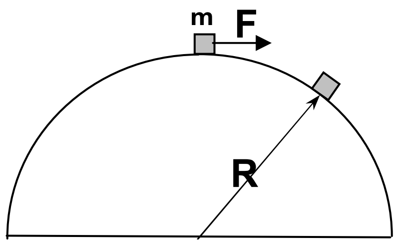
Dosazením do (11.1) dostaneme

$$\frac{g\left(h - \sqrt{l^2 - x^2}\right)}{\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{g}{2}$$

a konečně

$$y = \frac{2}{3}h\,.$$

12. Tělísko o hmotnosti m je polokoule o poloměru R, viz obr. 3.

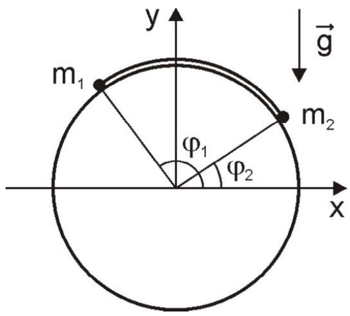


Obr. 12

a) Jak velkou rychlost musí mít těleso ve vodorovném směru, aby se od polokoule odtrhlo již na počátku pohybu?

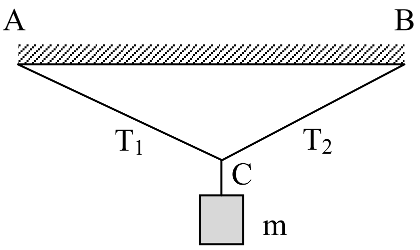
b) Ve kterém bodě se tělísko odtrhne od povrchu polokoule, jestliže ho vychýlíme z rovnovážné polohy. Jaká je výška tohoto bodu od vodorovné roviny (*tělísko se oddělí ve výšce 1/3R pod vrcholem polokoule*).

13. Uvažujte válec o poloměru R nacházející se v tíhovém poli, jehož osa symetrie je vodorovná, viz obr. 13. Přes vrchol válce je nataženo nehmotné vlákno délky $l = l/2\pi R$, na jehož koncích jsou upevněna tělíska o hmotnostech m_1 a m_2. Určete rovnovážnou polohu těles na válci.
($\varphi_2 = \arctan m_2/m_1$, $\varphi_1 = \varphi_2 + \pi/2$)

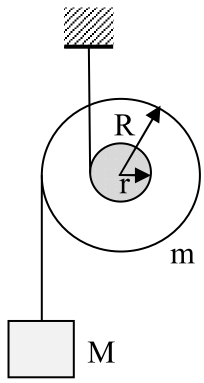


Obr. 13

14. Závaží o hmotnosti m je zavěšeno uprostřed drátu ABC, viz obr. 14, kde $AC = BC$, $AB = \sqrt{2}AC$. Určete napěťové síly v drátu T_1 a T_2.



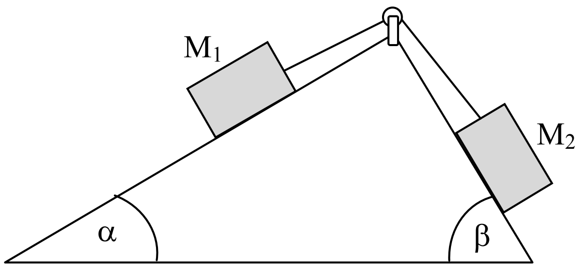
Obr. 14



Obr. 15

15. Cívka má hmotnost m a její velký a malý poloměr jsou R a r, viz obr. 15. Pomocí vlákna navinutého na menší poloměr cívky je cívka zavěšena na trámci. Na větším poloměru cívky je zavěšeno závaží o hmotnosti M. Jaká musí být hmotnost závaží, aby byla cívka v rovnováze?
($M = mr/(R - r)$)

16. Dvě nakloněné hladké roviny, které svírají s vodorovnou rovinou úhly α, β tvoří nehybný klín. Na těchto rovinách leží hranoly o stejné hmotnosti spojené vláknem přes kladku, viz obr. 16. Jakou rychlost budou mít hranoly, projdou-li od začátku pohybu vzdálenost d?



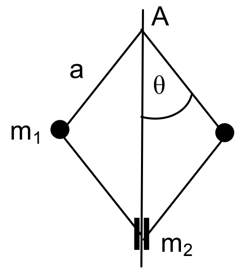
Obr. 16

17. O vnitřní stěny rotačního paraboloidu $x^2 + y^2 = 2pz$ se opírá homogenní tyč délky a. Určete její rovnovážnou polohu.

(*pro* $a \le = 2p$ *je v rovnovážné poloze tyč vodorovná. Pro* $a > 2p$ *existují dvě rovnovážné polohy, v jedné je tyč vodorovná, ve druhé tyč prochází ohniskem paraboly).*

18. Sestavte Lagrangeovu funkci elektronu, který se nachází v homogenním elektrickém poli $\vec{E} \equiv (E,0,0), E = const.$, kde E je intenzita elektrického pole. $\left(L = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - eEx\right)$

Nápověda: Vztah mezi potenciální energií elektronu a intenzitou elektrického pole je $-eE = -dV/dx$.



Obr. 13

19. Sestavte Lagrangeovu funkci soustavy zobrazené na obr 19. Bod m_2 se pohybuje po vertikální ose a celá soustava se otáčí s konstantní úhlovou rychlostí Ω kolem svislé osy.

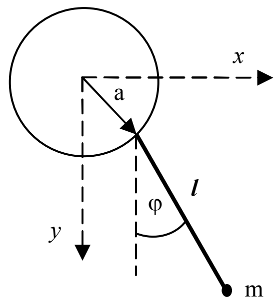
Nápověda: $dl_1 = a^2 d\vartheta^2 + a^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$; $dl_2 = -2a \sin \vartheta d\vartheta$

$(L = m_1 a^2 \left(d\dot{\vartheta}^2 + \Omega^2 s\,\mathrm{in}^2 \vartheta\right) + 2m_2 a^2 s\,\mathrm{in}^2 \vartheta \dot{\vartheta}^2 + 2ga(m_1 + m_2)\cos\vartheta)$

20. Sestavte Lagrangeovu funkci pro matematické kyvadlo, jehož bod závěsu se rovnoměrně pohybuje po vertikální kružnici s konstantní frekvencí γ.

Nápověda: $x = a\cos\gamma t + l\sin\varphi$; $y = -\sin\gamma t + l\cos\varphi$

$(L = ml^2\dot{\varphi}^2/2 + mla\gamma\dot{\varphi}\sin(\varphi - \gamma)t + mgl\cos\varphi)$



Obr. 20

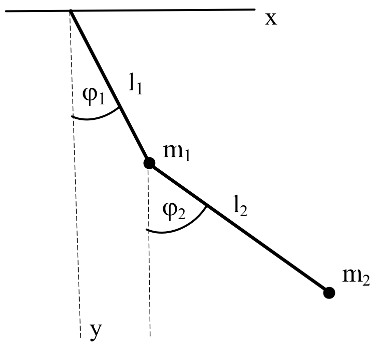
21. Sestavte Lagrangeovu funkci soustavy na obr. 22, která se nachází v homogenním gravitačním poli.

$(L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) +$

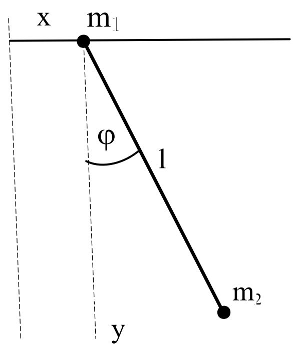
$+ (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2)$

22. Sestavte Lagrangeovu funkci pro rovinné kyvadlo o hmotností m_2, jehož bod závěsu o hmotností m_1 se může pohybovat po horizontální přímce, viz obr. 23.

$[L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi\right) + m_2 g l\cos\varphi]$



Obr. 22



Obr. 23

23. Určete vliv otáčení Země na malé výchylky kyvadla (tzv. Foucaultovo kyvadlo).

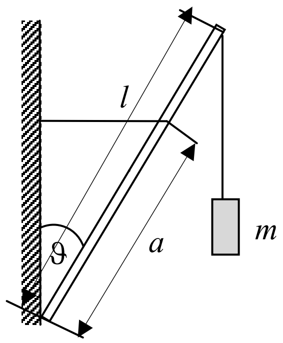
Řešení:

$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega\dot{y}$; $\ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega\dot{x}$,

$\ddot{\xi} + 2\Omega i\dot{\xi} + \omega^2\xi = 0$; $\xi = x + iy$,

$\xi = x + iy = e^{-\Omega it}(x_0 + iy_0) = e^{-\Omega it}\cos(\omega t + \varphi_0)$.

24. Zvedací zařízení tvoří homogenní tyč délky l a hmotnosti M, která je svým dolním koncem kloubově spojena se svislou stěnou. Ve vzdálenosti a od dolního konce tyče je upevněn vodorovný napjatý drát, který přidržuje tyč pod úhlem ϑ ke stěně. Na horním konci tyče visí závaží o hmotnosti m, viz obr. 24. Určete sílu, která napíná vodorovný drát.



Obr. 24

25. Po nakloněné rovině o výšce h a úhlem sklonu φ se kutálí bez tření válec o hmotnosti m a poloměru R. Porovnejte jeho rychlost na konci nakloněné roviny s rychlostí, kterou by dosáhl volným pádem z výšky h. Moment setrvačnosti válce je $J_T = {}^1/_2\, mR^2$.
($v_{VP} = \sqrt{2gh}$; $v_{RP} = \sqrt{4gh/3}$)

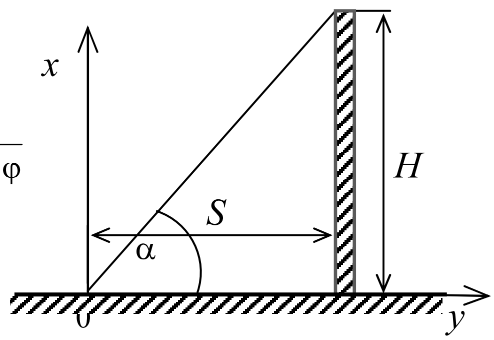
26. Koule valící se po vodorovné rovině rychlostí $v_0 = 5\ m/s$ dorazí k nakloněné rovině, po níž se začne valit bez klouzání vzhůru. Nakloněná rovina svírá s vodorovnou rovinou úhel 37^0. Jak dlouho bude koule na nakloněné rovině? Moment setrvačnosti koule je $J_T = {}^2/_5 mR^2$. ($t = 2{,}33\ s$)

27. Míč je třeba přehodit přes svislou stěnu o výšce H, nacházející se ve vzdálenosti S od místa hodu. Pod jakým úhlem φ je třeba míč hodit, aby velikost jeho počáteční rychlosti byla minimální, viz obr. 27?

Řešení:

Trajektorie míče bude procházet bodem o souřadnicích S, H, musí tedy platit

$$H = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}S^2 + S\,\mathrm{tg}\,\varphi\,.$$



Obr. 27

$$v_0^2 = \frac{gS^2}{2\left(S\,\mathrm{tg}\,\varphi - H\right)\cos^2\varphi} = \frac{gS^2}{2S\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos^2\varphi - 2H\cos^2\varphi}$$

$$v_0^2 = \frac{gS^2}{S\sin 2\varphi - 2H\cos^2\varphi}\,.$$

$$\cos^2\varphi = \frac{\cos 2\varphi + 1}{2}$$

$$v_0^2 = \frac{gS^2}{S\sin 2\varphi - H\cos 2\varphi - H}\,.$$

Položíme $\dfrac{H}{\sqrt{S^2+H^2}} = \sin\alpha$ *a* $\dfrac{S}{\sqrt{S^2+H^2}} = \cos\alpha$,

$$v_0^2 = \frac{gS^2}{\sqrt{S^2+H^2}\,\sin\left(2\varphi-\alpha\right) - H}; \qquad \sin\left(2\varphi-\alpha\right) = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4},$$

a tedy

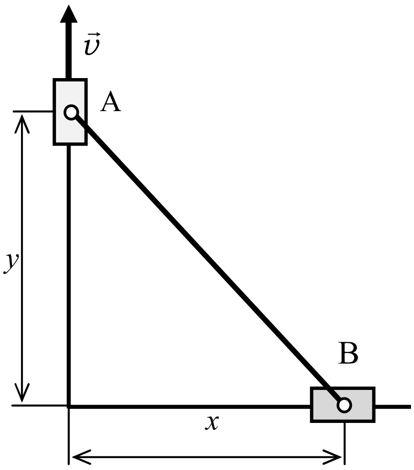
$$v_{0,\min} = \sqrt{\frac{gS^2}{\sqrt{S^2+H^2} - H}} = \sqrt{\frac{gS^2\left(\sqrt{S^2+H^2}+H\right)}{S^2}} = \sqrt{g\left(\sqrt{S^2+H^2}+H\right)}\,.$$

28. Dvě kolejničky jsou spolu pevně spojeny tak, že svírají pravý úhel. Po každé kolejničce se může pohybovat vozík. Vozíky jsou spolu kloubovitě spojeny čepem délky l. Vozík A

začíná svůj pohyb z průsečíků kolejniček a pohybuje se vzhůru stálou rychlostí v. Najděte zákon pohybu vozíčku B a určete jeho rychlost.

Řešení:
Pohyb vozíku A popisuje rovnice je $y = \upsilon t$. *Pohyb vozíku B rovnice* $x = \sqrt{l^2 - \upsilon^2 t^2}$ *.Derivací podle času dostaneme*

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{-\upsilon^2 t}{\sqrt{l^2 - \upsilon^2 t^2}}.$$



Obr. 28

29. Z bodu A, nacházejícího se na břehu řeky, je nutnou doplout do bodu B po přímce AB, viz obr. 29. Šířka řeky je AC = *1 km* a BC = *2 km*. Maximální rychlost loďky vzhledem k vodě je $u_{max} = 5\ km.h^{-1}$ a rychlost proudu řeky je $v_0 = 2\ km.h^{-1}$. Může loďka urazit vzdálenost AB za 30 minut?

Řešení:
Úhel α nechť určuje směr rychlosti $\vec{u}$ *loďky vzhledem k břehu. Pak platí*

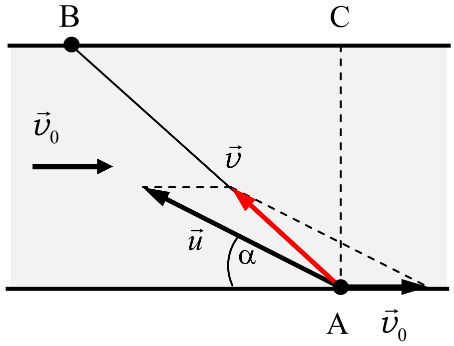
$$(u\cos\alpha - \upsilon_0)t = \mathrm{BC} = S \quad ; \quad u\,t\sin\alpha = \mathrm{AC} = d.$$

Z těchto vztahů vyloučením α dostaneme

$$u\,t\cos\alpha - \upsilon_0 t = S \quad ; \quad \cos^2\alpha = \frac{S^2 + 2S\upsilon_0 t + \upsilon_0^2 t^2}{u^2 t^2},$$

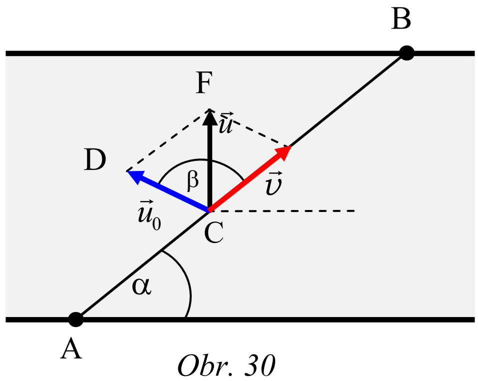
$$ut\sin\alpha = d \quad ; \quad \sin^2\alpha = \frac{d^2}{u^2 t^2}$$

$$\left(u^2 - \upsilon_0^2\right)t^2 - 2S\upsilon_0 t - \left(S^2 + d^2\right) = 0 \quad => \quad t = 5/7 > 30\,\mathrm{min}.$$



Obr. 29

30. Po řece z bodu A do bodu B na protilehlém břehu pluje podél přímky AB svírající s břehem úhel α motorový člun, viz obr. 30. Vítr vanoucí rychlostí $\vec{u}$ kolmo k břehům stáčí vlajku na stožáru člunu tak, že svírá se směrem pohybu člunu úhel β. Určete rychlost člunu vzhledem k břehům.



Obr. 30

Řešení:
Označme $\vec{u}_0$ *vektor rychlosti větru vzhledem ke člunu, jehož směr udává směr vlajky na stožáru. Je-li* $\vec{\upsilon}$ *rychlost člunu vzhledem k břehům, platí* $\vec{u}_0 = \vec{u} - \vec{\upsilon}$. *Platí* $\angle DCF = \alpha + \beta - \pi/2$ *a* $\angle FDC = \pi - \beta$, *plyne to z hodnoty součtu vnitřních úhlů rovnoběžníka. Ze sinové věty pro* $\blacktriangle FCD$ *plyne*

$$\frac{\upsilon}{\sin(\alpha + \beta - \pi/2)} = \frac{u}{\sin(\pi - \beta)} \Rightarrow \upsilon = \frac{\sin(\alpha + \beta - \pi/2)}{\sin(\pi - \beta)}u = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\beta}u.$$

31. Sestavte Hamiltonovu funkci pro hmotný bod v dekartských, válcových a kulových souřadnicích.

($H = \dfrac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U\left(x, y, z\right)$, $H = \dfrac{1}{2m}\left(p_r^2 + \dfrac{p_\varphi^2}{r^2} + p_z^2\right) + U\left(r, \varphi, z\right)$,

$H = \dfrac{1}{2m}\left(p_r^2 + \dfrac{p_\vartheta^2}{r^2} + \dfrac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \vartheta}\right) + U\left(r, \vartheta, \varphi\right)$).

32. Sestavte Hamiltonovu funkci částice v soustavě, která se rovnoměrně otáčí.

Řešení:

$$L\left(r, v\right) = \frac{1}{2}mv^2 - U\left(r\right),$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \quad ; \quad v^2 = v_0^2 + 2\vec{v}_0.\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) + \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right)^2,$$

$$L = \frac{m}{2}v_0^2 + m\vec{v}_0.\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) + \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right)^2 - U\left(r\right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \vec{p} = m\vec{v}_0 + m\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right) \quad ; \quad m\vec{v}_0 = \vec{p} - m\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right),$$

$$H\left(r, p\right) = \vec{p}.\vec{v}_0 - L = \frac{m}{2}v_0^2 - \frac{m}{2}\left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right)^2 + U\left(r\right) = \frac{p^2}{2m} - \vec{\Omega}.\left(\vec{p} \times \vec{r}\right) + U\left(r\right).$$

33. Pomocí Lagrangeových rovnic určete zrychlení tělesa hmotnosti m_1 na obr. 33. Kladky i lano považujte za nehmotné.

Řešení:

$$-dy_1 = 2dy_2 \quad ; \quad C - y_1 = 2y_2 \quad ; \quad -\dot{y}_1 = 2\dot{y}_2,$$

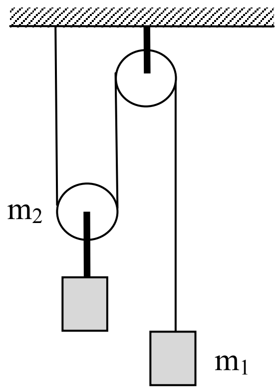
$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{1}{4}m_2\right)\dot{y}_1^2,$$

$$V = m_1 g\, y_1 + m_2 g\, y_2 = m_1 g\, y_1 + \frac{1}{2}m_2 g\left(C - y_1\right),$$

$$L = \frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{1}{4}m_2\right)\dot{y}_1^2 - g\left(m_1 - \frac{1}{2}m_2\right)y_1,$$

$$\frac{1}{2}\left(m_1 + \frac{1}{4}m_2\right)\ddot{y}_1 + g\left(m_1 - \frac{1}{2}m_2\right) = 0,$$

$$\ddot{y}_1 = -g\frac{4\left(2m_1 - m_2\right)}{4m_1 + m_2}.$$



Obr. 33

34. Vypočtěte hlavní hodnoty momentu setrvačnosti spojitých homogenních těles:

   a) Tenké tyče o délce l ($J_1 = J_2 = 1/12\, ml^2; J_3 = 0$),

   b) Koule o poměru R ($J_1 = J_2 = J_3 = 2/5\, mR^2$),

   c) Kruhového válce o poloměru R a výšce h ($J_1 = J_2 = m/4\left(R^2 + h^2/3\right); J_3 = m/2\, R^2$),

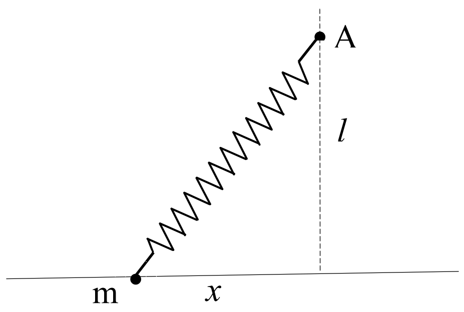
   d) Hranol o stranách *a, b, c*
   ($J_1 = m/12\left(b^2 + c^2\right); J_2 = m/12\left(a^2 + c^2\right); J_3 = m/12\left(a^2 + b^2\right)$).

35. Určete frekvenci kmitů hmotného bodu o hmotnosti m, který se pohybuje po přímce a je upevněn k pružině, jejíž druhý konec je v bodě A ve vzdálenosti l od přímky, viz obr. 35. Pro natažení pružiny na délku l je nutná síla F_0.

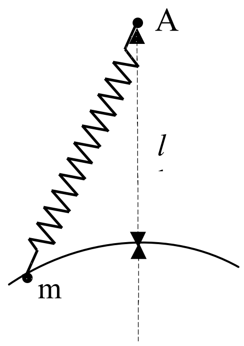
Nápověda: $\delta l = \sqrt{l^2 + x^2} - l \approx x^2/2l$, $U = F\delta l$. $\left(\omega = \sqrt{F_0/ml}\right)$

36. Určete frekvenci kmitů hmotného bodu o hmotnosti m, který se pohybuje po oblouku kružnice o poloměru r a je upevněn k pružině, jejíž druhý konec je v bodě A ve vzdálenosti l od oblouku, viz obr. 36. Pro natažení pružiny na délku l je nutná síla F_0 .

Nápověda: $\delta l = \sqrt{r^2 + (l+r)^2 - 2r(l+r)\cos\varphi} \approx r(l+r)\varphi^2/2l$. $\left(\omega = \sqrt{F_0(r+l)/mrl}\right)$.



Obr. 35



Obr. 36

37. Najděte kinetickou energii soustavy na obr. 37. OA a AB jsou tenké homogenní tyče o délce l, které jsou kloubově spojeny v bodě A. Tyč OA se otáčí v rovině obrázku kolem bodu O *a* konec B tyče AB klouže podél osy x.

Řešení:

Rychlost těžiště tyče OA je $l\dot{\varphi}/2$ *a tedy celková kinetická energie tyče OA je*

$$T_1 = \frac{ml^2}{8}\dot{\varphi}^2 + \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2.$$

Kartézské souřadnice těžiště tyče AB jsou

$$X = \frac{3l}{2}\cos\varphi \quad ; \quad Y = \frac{l}{2}\sin\varphi.$$

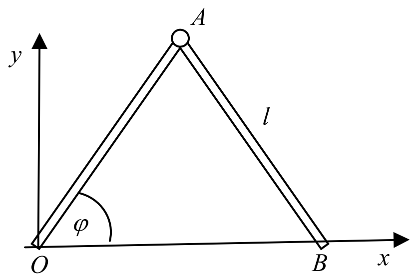
Protože úhlová rychlost tyče AB je stejná jako u tyče OA $-\ \dot{\varphi}$ *, je celková kinetická energie tyče AB*

$$T_2 = \frac{m}{2}\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) + \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{ml^2}{8}\left(1 + 8\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{J}{2}\dot{\varphi}^2.$$

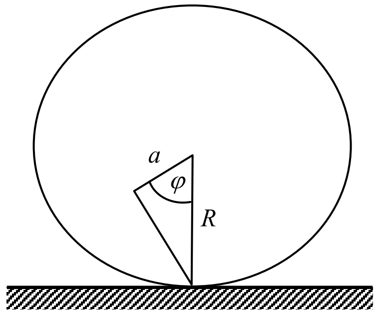
Celková kinetická energie soustavy je

$$T = \frac{ml^2}{3}\left(1 + 3\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2.$$

38. Najděte kinetickou energii válce o poloměru R, který se kutálí po vodorovné rovině, viz obr. 38. Hmotnost válce je rozdělena v jeho objemu tak, že jedna z hlavních os setrvačnosti je rovnoběžná s osou válce a je od ní vzdálena na vzdálenost a. Moment setrvačnosti vzhledem k této ose je J.



Obr. 37

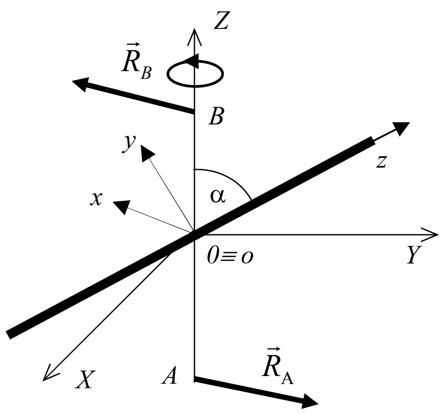


Obr. 38

39. Určete rychlost dopadu konce tenké tyče, jejíž spodní konec je spojen kloubem s podložkou a která padá volně v tíhovém poli Země z polohy, kdy stojí kolmo k podložce. ($v=\sqrt{3g\,l}$)

40. Homogenní tyč o hmotnosti m a délce l rotuje konstantní rychlostí kolem svislé (pevné) osy procházející jejím (hmotným) středem. Vzdálenosti opor osy otáčení v bodech A, B od středu tyče jsou stejné a rovny a. Úhel α mezi tyčí a osou otáčení je stálý. Určete reakce $\vec{R}_{\mathrm{A}},\vec{R}_{\mathrm{B}}$ opor a pohybový zákon rotující tyče.

Řešení:



Obr. 40.1

Určení Eulerových úhlů

Zavedeme pevnou laboratorní vztažnou soustavu XYZ a rotující soustavu xyz, totožnou s hlavními osami rotace tyče. Počátek obou soustav nechť je v těžišti, viz obr. 40.1.

Potom pro Eulerovy úhly platí $\vartheta=\alpha$, $\varphi=\varphi(t)$ *a ztotožníme-li osu x s uzlovou přímkou* $\psi=0$. *Osy Z, z a y leží v jedné rovině, která rotuje kolem osy Z. Orientaci soustavy xyz volíme tak, aby byla pravotočivá. Pro složku* ω_x *potom platí* $\omega_x=0$.

Složky tenzoru setrvačnosti tyče v soustavě xyz jsou

$$I_x=I_y=I=ml^2/12 \text{ a } I_z=0. \qquad (1)$$

Vtištěné síly mají v soustavě xyz složky

$\vec{F}_g\equiv(0\,;-mg\sin\alpha\,;-mg\cos\alpha)$, $\vec{R}_{\mathrm{A}}\equiv\left(R_{\mathrm{Ax}},R_{\mathrm{Ay}},R_{Az}\right)$, $\vec{R}_{\mathrm{B}}\equiv\left(R_{\mathrm{Bx}},R_{\mathrm{By}},R_{\mathrm{Bz}}\right)$.

Pro moment vtištěných sil vzhledem k těžišti v soustavě xyz platí

$\vec{M}=\vec{r}_{\mathrm{A}}\times\vec{R}_{\mathrm{A}}+\vec{r}_{\mathrm{B}}\times\vec{R}_{\mathrm{B}}$; $\vec{r}_{\mathrm{A}}\equiv(0;-a\sin\alpha;-a\cos\alpha)$, $\vec{r}_{\mathrm{B}}\equiv(0;a\sin\alpha;a\cos\alpha)$,

$$\begin{aligned}&M_x=a\left[\left(R_{\mathrm{Ay}}-R_{\mathrm{By}}\right)\cos\alpha+\left(R_{\mathrm{Bz}}-R_{\mathrm{Az}}\right)\sin\alpha\right],\ M_y=a\left(R_{\mathrm{Bx}}-R_{\mathrm{Ax}}\right)\cos\alpha,\\&M_z=a\left(R_{\mathrm{Ax}}-R_{\mathrm{Bx}}\right)\sin\alpha.\end{aligned} \qquad (2)$$

Rovnováha tyče vůči translaci

Výslednice vtištěných sil $\vec{F}=\vec{F}_g+\vec{R}_{\mathrm{A}}+\vec{R}_{\mathrm{B}}=\vec{0}$ *a tedy*

$$\begin{aligned}&R_{\mathrm{A1}}+R_{\mathrm{B1}}=0,\\&-mg\sin\alpha+R_{\mathrm{Ay}}+R_{\mathrm{By}}=0,\end{aligned} \qquad (3)$$

$$-mg\cos\alpha + R_{\mathrm{Az}} + R_{\mathrm{Bz}} = 0.$$

Eulerovy kinematické rovnice

$$\omega_x = \dot{\varphi}\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}\cos\psi,$$

$$\omega_y = \dot{\varphi}\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}\sin\psi,$$

$$\omega_z = \dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi}.$$

$$\varphi = \varphi(t),\ \vartheta = \alpha,\ \psi = 0 \ \Rightarrow\ \omega_x = 0;\ \omega_y = \dot{\varphi}\sin\alpha;\ \omega_z = \dot{\varphi}\cos\alpha \ \Rightarrow\ \omega = \dot{\varphi} = const.$$

Eulerovy dynamické rovnice

$$I_x\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t} + \left(I_z - I_y\right)\omega_y\omega_z = M_x,$$

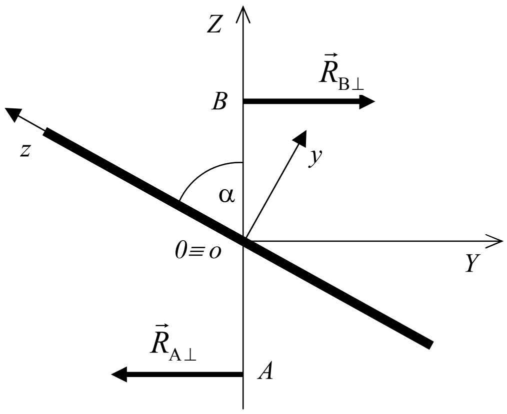
$$I_y\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t} + \left(I_x - I_z\right)\omega_x\omega_z = M_y,$$

$$I_z\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} + \left(I_y - I_x\right)\omega_x\omega_y = M_z.$$

Dosazením z rovnic (1), (2) se Eulerovy dynamické rovnice zredukují na rovnici

$$I\omega^2\sin 2\alpha/2 = a\left(R_{\mathrm{By}} - R_{\mathrm{Ay}}\right)\cos\alpha + a\left(R_{\mathrm{Az}} - R_{\mathrm{Bz}}\right)\sin\alpha. \qquad (4)$$

Reakce opor



Obr. 40.2

Pro složky reakcí rovnoběžných s osou otáčení platí

$$R_{\mathrm{AZ}} + R_{\mathrm{BZ}} = mg.$$

Složky $R_{\mathrm{A}\perp}$ a $R_{\mathrm{B}\perp}$, kolmé na osu otáčení určíme následující úvahou:

„Zastavíme“ rotující tyč v okamžiku, kdy $R_{\mathrm{B}\perp} = R_{\mathrm{BY}}$ a $X \equiv x$. X-ové složky v obou soustavách hledaných vektorů jsou v daném okamžiku v obou soustavách nulové, viz obr. 40.2. Z obrázku plyne

$$R_{\mathrm{B}\perp} = -R_{\mathrm{A}\perp};\ R_{\mathrm{B}\perp} = R_{\mathrm{BY}},$$

$$R_{\mathrm{By}} = R_{\mathrm{BY}}\cos\alpha\ ;\ -R_{\mathrm{Bz}} = R_{\mathrm{BY}}\sin\alpha.$$

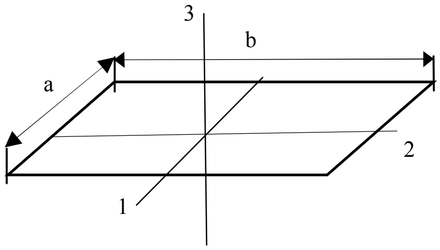
Dosazením uvedených vztahů do rovnice (4) dostaneme pro složky reakcí, kolmých na osu rotace vztahy

$$R_{\mathrm{B}\perp} = \frac{I\omega^2}{4a}\sin 2\alpha,\ R_{\mathrm{A}\perp} = -\frac{I\omega^2}{4a}\sin 2\alpha.$$

Pro jednotlivé Eulerovy úhly pak platí časové závislosti

$$\varphi = \omega t + \omega_0,\ \vartheta = \alpha;\ \psi = 0.$$

41. Určete hlavní momenty setrvačnosti desky, viz obr. 41 o hmotnosti m.



Obr. 41

$(J_1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} bx^2 dx = \frac{1}{12} ma^2 \; , J_2 = \frac{1}{12} mb^2 \; ; J_3 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left(x^2 + y^2\right) dx dy = \frac{1}{12} m\left(a^2 + b^2\right))$

42. Na rameni o délce l a hmotnosti m, které je opřeno o podložku v bodě B je zavěšeno břemeno o hmotnosti M. Rameno je jištěno lanem, které je upevněno k podložce v bodě A**,** viz obr. 42. Určete reakce podložky v bodech A a B a napětí T jistícího lana.

Řešení:

Rovnice rovnováhy pro tyč AC

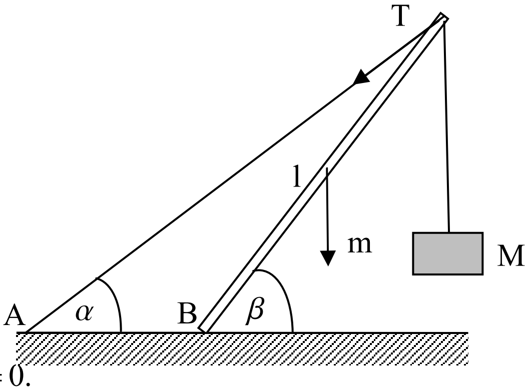
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad => \quad R_A - F + R_C \sin\alpha = 0,$$

$$T - R_C \cos\alpha = 0,$$

$$\sum_i \vec{M}_i = 0 \quad => \quad F\frac{l}{2}\cos\alpha - R_C\, l \sin\left(\pi - 2\alpha\right) = 0.$$

Rovnice rovnováhy pro tyč BC

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad => \quad R_B - R_C \sin\alpha = 0, \quad T - R_C \cos\alpha = 0.$$



Obr. 42

Řešení uvedeného systému rovnic je

$$R_A = \frac{3}{4}F,\; R_B = \frac{1}{4}F,\; R_C = \frac{1}{4\sin\alpha}F,\; T = \frac{1}{4}F\cot g\alpha \; ,$$

kde α je úhel CAB, viz obr. 42.2.

43. Určete výšku, na které se ustálí hladina vody v nádrži, do které vtéká voda v množství $\dot{V}$ *[l/s]* otvorem o ploše S_1 a vytéká otvorem o ploše S_2, platí-li $S_1 > S_2$.
$(\, h = \dot{V}^2 / 2g\, S_2^2 \,)$

44. Homogenní obruč hmotnosti m a poloměru R rotuje kolem osy procházející středem křivosti kolmo na rovinu obruče a má frekvenci f_1. Jakou frekvenci bude mít obruč při jinak stejných podmínkách, zmenšíme-li její poloměr na polovinu. ($f_2 = 4f$)

45. Dokažte, že vlastní frekvence reverzního kyvadla je $f = \sqrt{g/l}/2\pi$, kde l je vzdálenost závěsu kyvadla, ve kterých kyvadlo kývě se stejnou vlastní frekvencí.

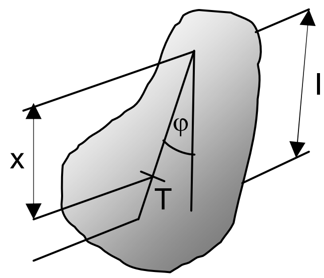
Řešení:

$$L = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + mgx\cos\varphi \quad => \quad J\ddot{\varphi} + mg\varphi = 0 \quad => \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx}}$$

$$\sqrt{\frac{J_1}{mgx}} = \sqrt{\frac{J_2}{mg\left(l - x\right)}} \quad ; \quad J_1 = J_0 + mx^2,\, J_2 = J_0 + m\left(l - x\right)^2,$$

$$\frac{J_0 + mx^2}{mgx} = \frac{J_0 + m\left(l - x\right)^2}{mg\left(l - x\right)} \quad => \quad J_0 = mx\left(l - x\right)$$

$$\frac{J_0 + mx^2}{mgx} = \frac{mx\left(l - x\right) + mx^2}{mgx} = \frac{l}{g}$$



Obr. 45

46. Sestavte pohybové rovnice soustavy, jejíž Lagrangeova funkce má tvar

$$L(x,\dot{x}) = e^{-x^2-\dot{x}^2} + 2\dot{x}e^{-x^2}\int_0^{\dot{x}} e^{-y^2}dy \cdot$$

Řešení:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -2xe^{-(x^2+\dot{x}^2)} - 4x\dot{x}e^{-x^2}\int_0^{\dot{x}} e^{-y^2}dy,$$

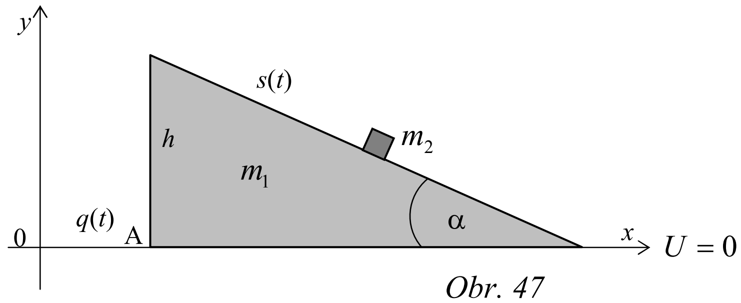
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -2\dot{x}e^{-(x^2+\dot{x}^2)} + 2e^{-x^2}\int_0^{\dot{x}} e^{-y^2}dy + 2\dot{x}e^{-(x^2+\dot{x}^2)} = 2e^{-x^2}\int_0^{\dot{x}} e^{-y^2}dy,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -4x\dot{x}e^{-x^2}\int_0^{\dot{x}} e^{-y^2}dy + 2\ddot{x}e^{-(x^2+\dot{x}^2)},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad => \quad \ddot{x} + x = 0.$$

47. Po nakloněné rovině hranolu o hmotnosti m_1 se sklonem α a výšce h klouže krychlička o hmotnosti m_2, viz obr. 45. Hranol se může pohybovat po hladké vodorovné rovině. Určete zrychlení a_{h} hranolu. Tření zanedbejte.

Řešení:



Obr. 47

Hranol a částice tvoří soustavu se dvěma stupni volnosti $n = 2$.
Obecné souřadnice
$s = s(t),\ q = q(t)$.
Souřadnice bodu A reprezentujícího hranol jsou $q(t),\ y_1 = 0$. *Souřadnice částice jsou* $x_2(t) = q(t) + s(t)\cos\alpha,\ y_2(t) = h - s(t)\sin\alpha$.*Lagrangeova funkce dané soustavy je*

$$L = \frac{m_1}{2}\dot{q}^2 + \frac{m_2}{2}\left(\dot{q}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{q}\,\dot{s}\cos\alpha\right) - \left(m_1 g\, h_{\mathrm{T}_1} + m_2 g\, s\sin\alpha\right).$$

Pohybové rovnice mají tvar

$$(m_1 + m_2)\ddot{q} + m_2\ddot{s}\cos\alpha = 0,$$

$$\ddot{s} + \ddot{q}\cos\alpha - g\sin\alpha = 0.$$

Zrychlení hranolu $\ddot{q}$ *je tedy rovno*

$$\ddot{q} = a_{\mathrm{T}_1} = -\frac{m_2\sin\alpha\cos\alpha}{m_1 + m_2\sin^2\alpha}g.$$

48. Jakou délku musí mít hliníkový drát zavěšený ve svislé poloze, aby se přetrhl působením vlastní tíhové síly. Hustota hliníku je ρ = *2,7.10*^{3} *kg/m*^{3}, pevnost v tahu σ_t = *45 MPa. (1667 m).*

49. Těleso o hmotnosti *M* je taženo rovnoměrným zrychleným pohybem svisle vzhůru. Určete zrychlení, při kterém se tažné lano přetrhne, jestliže jeho pevnost v tahu je σ_t. ($a = S\sigma_t / M - g$)

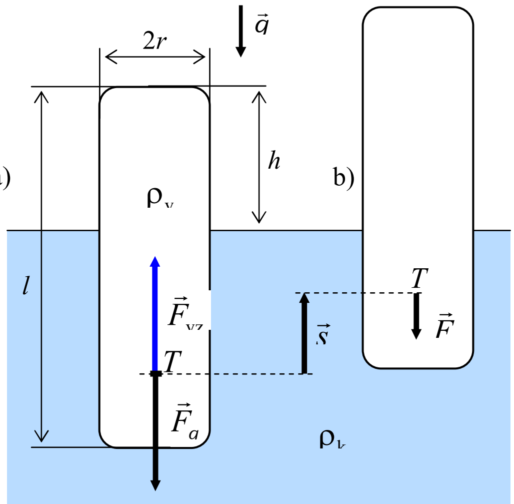
50. Dutý uzavřený váleček plave na hladině klidné kapaliny tak, že je částečně ponořen s podélnou osou kolmo k hladině, viz obr. 50. Ukažte, že pohyb válečku je při porušení rovnováhy periodický. Váleček má poloměr r, délku l a hmotnost *m*, hustota kapaliny je ρ_k.

Řešení:

Na obr. 50 a) je váleček v rovnovážné poloze v homogenním tíhovém poli, kdy výslednice tíhové a vztlakové síly je nulová

$$\vec{F}_g = -\vec{F}_{VZ} \quad => \quad \pi r^2 l \rho_v g = \pi r^2 (l-h) \rho_k g.$$

Obr. 50 b) zachycuje stav po porušení rovnovážného stavu povytažením válečku z kapaliny. Vynořená část válečku má délku $h + s < l$. *Velikost vztlakové síly je v tomto případě menší než velikost tíhové síly a výslednice sil* $\vec{F}$ *míří do kapaliny.*



Obr. 50

$$F = F_{VZ} - F_g = \pi r^2 \rho_k g (l - h - s) - \pi r^2 \rho_v g l = -k\, s \quad F = -k\, s \quad ; \quad k = \pi r^2 \rho_k g > 0.$$

Potenciální energie V a kinetická energie T jsou určeny vztahy

$$dV = -F ds = k s\, ds \quad => \quad V = \frac{1}{2} k s^2 \quad ; \quad T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2.$$

Lagrangeova funkce $L(s, \dot{s})$ *a z ní vyplývající pohybová rovnice jsou potom*

$$L = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{1}{2} k s^2 \quad => \quad m\ddot{s} + ks = 0.$$

Uvedená pohybová rovnice je rovnicí lineárního harmonického oscilátoru.

51. Skleněná trubice ve tvaru písmene *U*, je naplněna kapalinou tak, že celková délka kapalinového sloupce je *l,* viz obr. 51. Nakloněním trubice a jejím vrácením do původní polohy se sloupec kapaliny rozkmitá. Určete vlastní frekvenci jeho pohybu. Tlumení zanedbejte.

Řešení:

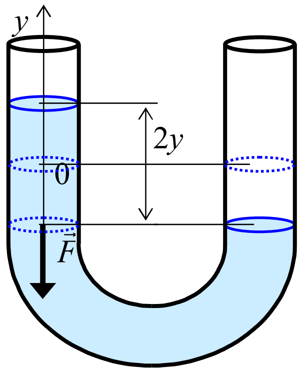
$$F = -2S\rho g y \quad \Rightarrow \quad F = -ky \quad ; \quad k = 2S\rho g > 0,$$

$$T = \frac{1}{2} S l \rho \dot{y}^2 \quad ; \quad V = -\int F dy = \frac{1}{2} k\, y^2,$$

$$L = \frac{1}{2} S l \rho \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k\, y^2,$$

$$S l \rho \ddot{y} + ky = 0 \quad => \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0.$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad => \quad f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{2l}}.$$



Obr. 51

52. Při jak velké rychlosti vlaku dojde k maximálnímu rozkmitání vagónů následkem nárazů kol na spoje mezi kolejnicemi? Délka kolejnice je *l*, péra vagónu jsou zatížena jeho tíhou *G* a silou o velikosti *F* se péra dále stlačí o *h*.

Řešení:

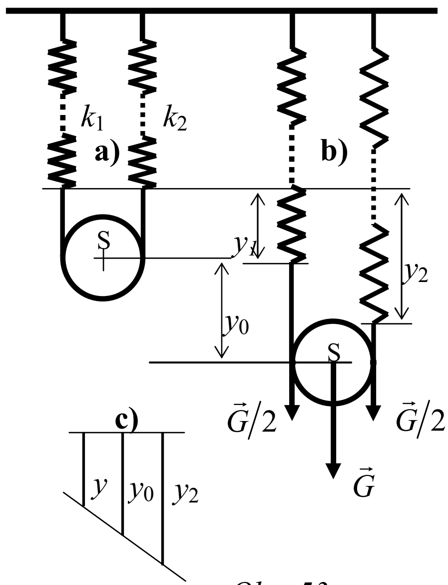
Silové impulsy působící na vagón při nárazech kol na kolejnicové spoje můžeme považovat za působení periodické harmonické budicí síly, jejíž frekvenci určíme jako podíl $f = \upsilon/l$. *Vlastní frekvenci f_0 oscilátoru tvořeného vagónem hmotnosti* $m = G/g$ *a jeho péry o tuhosti* $k = F/h$ *určíme ze vztahu*

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Fg}{Gh}}\,.$$

Při rezonanci budicí síly a vagónu platí

$$f = f_0 \Rightarrow \frac{\upsilon}{l} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4Fg}{Gh}} \quad \Rightarrow \quad \upsilon = \frac{l}{2\pi}\sqrt{\frac{F\,g}{G\,h}}\,.$$

53. Kladka zanedbatelné hmotnosti je zavěšena na dvou stejně dlouhých pružinách o tuhostech k_1, k_2, viz obr. 53 a). Zavěšením závaží o hmotnosti m na tuto kladku poklesne její těžiště o y_0, viz obr. 53 b). Určete vlastní frekvenci oscilátoru tvořeného oběma pružinami a závažím.



Obr. 53

Řešení:

Po zavěšení závaží se ustaví rovnovážný stav

$$k_1 y_1 = k_2 y_2 = \frac{G}{2} = \frac{mg}{2},$$

při kterém platí pro prodloužení obou pružin

$$y_1 = \frac{mg}{2k_1}\,;\, y_2 = \frac{mg}{2k_2}\,.$$

Z obr. 53 c) je zřejmé, že pokles o délce y_0 *je střední příčkou lichoběžníka, jehož základny mají délky* y_1, y_2, *takže platí*

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{mg\left(k_1 + k_2\right)}{4k_1 k_2}\,.$$

Výsledná tuhost oscilátoru musí splňovat podmínku

$$ky_0 = G = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{y_0} = \frac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2}\,.$$

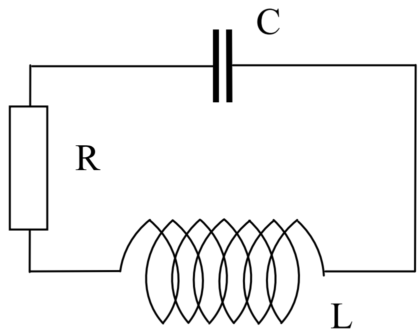
Pro výslednou tuhost oscilátoru tedy platí $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$.

Pro periodu vlastních kmitů oscilátoru konečně dostáváme

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \pi\sqrt{m\frac{\left(k_1 + k_2\right)}{k_1 k_2}}\,.$$

54. Určete časovou závislost proudu i v obvodu na obr. 54.1.

Řešení:
Na uvedený obvod použijeme II. Kirchhofův zákon



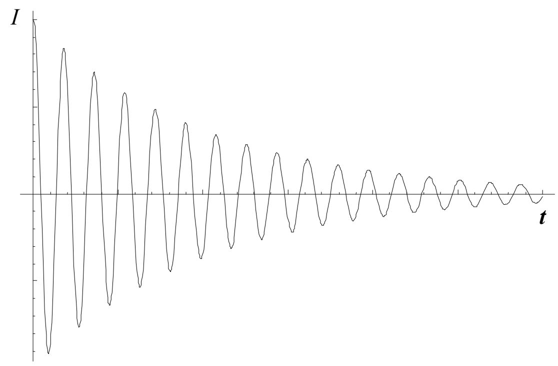
Obr. 54.1

$$u_C = u_L + u_R \quad => \quad -\frac{1}{C}\int i\,dt = R\,i + L\frac{di}{dt}.$$

Derivací uvedené rovnice dostaneme

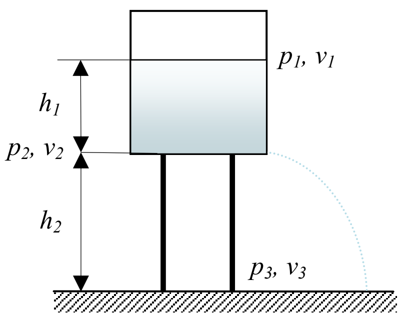
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \omega^2 i = 0 \quad ; \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Uvedená rovnice je rovnice lineárního harmonického oscilátoru s tlumením. Časový průběh proudu $i(t)$ uvedeného obvodu je na obr. 54.2.



Obr. 54.2

55. Válcová nádrž o poloměru *90 cm* stojí na podstavci vysokém *6 m* a je do výšky *3 m* naplněna vodou. U dna je nádrž utěsněna zátkou o ploše *6,3 cm²*, viz obr. 55.1. Určete:
    1. Jakou rychlostí dopadne proud vody na zem, když zátku odstraníme?
    2. Jak dlouho potrvá, než se nádrž zcela vyprázdní?



Obr. 55.1

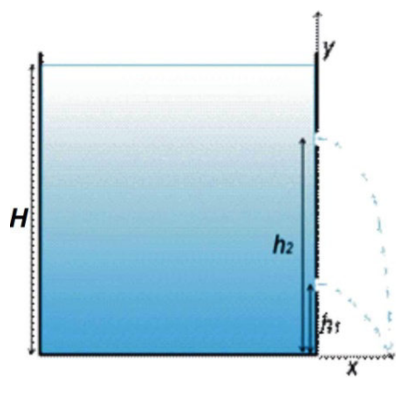
56. Nádrž má ve stěně dva otvory, jeden ve výšce h_1 ode dna a druhý ve výšce h_2. V jaké výšce H musí být hladina vody v nádobě, chceme-li, aby voda z obou otvorů stříkala do stejné vzdálenosti x? Odpor vzduchu zanedbejte.

    Řešení:

$$\rho g H = \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 \,; \rho g H = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2,$$

$$\frac{H - h_1}{H - h_2} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2,$$

$$\frac{1}{2}g t_1^2 = h_1, \frac{1}{2}g t_2^2 = h_2 \quad ; \quad x_1 = v_1 t_1, \, x_2 = v_2 t_2,$$



$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2 = \frac{h_2}{h_1},$$

$$\frac{H-h_1}{H-h_2} = \frac{h_2}{h_1} \quad => \quad h_1\left(H-h_1\right) = h_2\left(H-h_2\right),$$

$$H = h_1 - h_2 .$$

57. Jaká musí být výška otvoru h ode dna nádoby, která je do výšky H naplněna vodou, aby vytékající proud vody dostříkl nejdále? Odpor vzduchu zanedbejte.

Řešení:

$$\rho g H = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h\,,\ x = vt \quad => \quad x = \sqrt{4\left(H-h\right)h}$$

$$\frac{dx}{dh} = \frac{-4h + 4\left(H-h\right)}{2\sqrt{4\left(H-h\right)h}} = 0 \quad => \quad h = \frac{1}{2}H .$$

58. Řetěz délky l je položen rovně na stole tak, že jeho část délky a visí volně přes hranu stolu. V okamžiku $t = 0$ řetěz uvolníme, tak že začne bez tření klouzat ze stolu. Vyšetřete pohyb řetězu. Za jakou dobu sklouzne řetěz celý ze stolu?

Řešení:

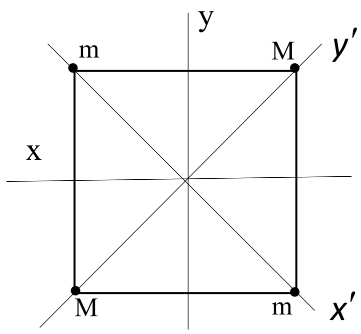
$$L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}m\frac{y}{l}y \quad => \quad \ddot{y} - \frac{g}{l}y = 0 \quad => \quad \ddot{y} - \omega^2 y = 0\,,\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}\,,$$

$$y = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} \quad => \quad a = C_1 + C_2\,,\ 0 = C_1 - C_2\,,$$

$$y = a\cosh\sqrt{\frac{g}{l}}t \quad ; \quad t_l = \sqrt{\frac{l}{g}}\mathrm{Arc}\cosh\left(\frac{l}{a}\right).$$

59. Ve vrcholech čtverce o délce strany $2a$ jsou rozloženy hmotnosti m a M., viz obr. 60. Určete složky tenzoru setrvačnosti vzhledem ke vztažné soustavě:

   a) x, y, z
   b) x', y', z'



Obr. 60

Řešení:

Pro danou vztažnou soustavu xyz jsou složky tenzoru setrvačnosti určeny vztahy

$$\begin{pmatrix} \sum m\left(y^2+z^2\right) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m\left(x^2+z^2\right) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m\left(y^2+z^2\right) \end{pmatrix}.$$

Potom

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 2a^2\left(m+M\right) & 2a^2\left(m-M\right) & 0 \\ 2a^2\left(m-M\right) & 2a^2\left(m+M\right) & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2\left(m+M\right) \end{pmatrix},$$

b) $$\begin{pmatrix} 4a^2m & 0 & 0 \\ 0 & 4a^2M & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2\left(m+M\right) \end{pmatrix}.$$

.