

### 36-mavzu: ChDMni sun'iy bazis usuli bilan yeching.

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 12,$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 16,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$Z_{\min} = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

#### □ Vazifaning yechilishi

##### ① Qo'shimcha noma'lumlarni kiritamiz

Buning uchun ChDMda berilgan tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga keltiramiz. Buning uchun birinchi tenglamaga  $y_1$  qo'shimcha noma'lum manfiy ishora bilan, uchinchi tenglamaga esa  $y_2$  qo'shimcha noma'lum musbat ishora bilan kiritiladi.

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_1 = 12,$ $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 16,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 + y_2 = 30.$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$ $Z_{\min} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0y_1 + 0y_2$	yoki bu sistema quyidagicha tushuniladi: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_1 + 0y_2 = 12,$ $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 0y_1 + 0y_2 = 16,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 + 0y_1 + y_2 = 30.$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0.$ $Z_{\min} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0y_1 + 0y_2.$
--	---

Oddiy simpleks usulidan bizga ma'lumki, boshlang'ich tayanch rejani topish uchun, yuqoridagi tenglamalar sistemasi qo'shimcha noma'lumlarga nisbatan yechib olinadi:

$$\begin{aligned} -y_1 &= 12 - (x_1 + 2x_2 + 3x_3) \\ 0 &= 16 - (2x_1 + 3x_2 - 2x_3) \\ y_2 &= 30 - (x_1 + 2x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Boshlang'ich tayanch rejani topish uchun, asosiy noma'lumlar nolga tenglab olinadi, ya'ni  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ . Keyin  $y_1, y_2$  qo'shimcha noma'lumlarning qiymatlari topilib, ularning nomanfiyligi ( $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ ) tekshiriladi.

Yuqoridagi tenglamalar sistemasiga  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  ni qo'ysak:

$$y_1 = -12 < 0, 0 \neq 16, y_2 = 30 > 0.$$

Ko'rinish turibdiki, tenglamalar sistemasining birinchi va ikkinchi tenglamalarda qo'shimcha noma'lumlar uchun no'manfiylik talablari bajarilmaydi.

Bunday hollarda berilgan ChDMlari su'niy bazis usuli bilan yechiladi.

##### ② Su'niy noma'lumlar kiritish

Tenglamalar sistemasini birinchi va ikkinchi tenglamalariga mos ravishda  $z_1$  va  $z_2$  sun'iy noma'lumlarni musbat ishora bilan kiritamiz:

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_1 + z_1 = 12,$ $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + z_2 = 16,$ $x_1 + 2x_2 + x_3 + y_2 = 30.$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0,$ $z_1 \geq 0, z_2 \geq 0$	yoki bu sistemani quyidagicha tushunish mumkin: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1y_1 + 0y_2 + z_1 + 0z_2 = 12,$ $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0z_1 + 1z_2 = 16,$
--	--

$$\begin{array}{l}
 Z_{\min} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0y_1 + 0y_2 \\
 \quad + mz_1 + mz_2
 \end{array}
 \quad \left| \begin{array}{l}
 x_1 + 2x_2 + x_3 + 0y_1 + 1y_2 + 0z_1 + 0z_2 = \\
 30. \\
 x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, y_1 > 0, y_2 > 0, z_1 > 0, z_2 > 0 \\
 Z_{\min} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0y_1 + 0y_2 + mz_1 + mz_2
 \end{array} \right.$$

### ③ Boshlang‘ich simpleks jadvalini tuzish

1.1- simpleks jadval

Bazis	C <sub>j</sub>	B <sub>i</sub>	Asosiy noma.			Qo‘srimcha noma.		Sun’iy noma.	
			x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	z <sub>1</sub>	z <sub>2</sub>
			3	2	1	0	0	m	m
z <sub>1</sub>	m	12	1	2	3	-1	0	1	0
z <sub>2</sub>	m	16	2	[3]	-2	0	0	0	1
y <sub>1</sub>	0	30	1	2	1	0	1	0	0
Indeks qator	28m	3m-3	5m-2	m-1	-m	0	0	0	0

Indeks qatorida quyidagicha to‘ldiriladi:

$$\begin{aligned}
 B_i \text{ ustunda: } & 12m + 16m = 28m, \\
 x_1 \text{ ustunda: } & 1m + 2m - 3 = 3m - 3, \\
 x_2 \text{ ustunda: } & 2m + 3m - 2 = 5m - 2, \\
 x_3 \text{ ustunda: } & 3m - 2m - 1 = m - 1, \\
 y_1 \text{ ustunda: } & -1m + 0m - 0 = -m, \\
 y_2 \text{ ustunda: } & 0m + 0m - 0 = 0, \\
 z_1 \text{ ustunda: } & 1m + 0m - m = 0, \\
 z_2 \text{ ustunda: } & 0m + 1m - m = 0.
 \end{aligned}$$

Indeks qatorni ikkita **m+1** va **m+2** qatorlarga ajratib yozish:

- 1) **m** koeffitsentli sonlar **m+2** qatorga yoziladi.
- 2) ozod sonlar **m+1** qatorga yoziladi.

1.2- simpleks jadval

Bazis	C <sub>j</sub>	B <sub>i</sub>	Asosiy noma.			Qo‘srimcha noma.		Sun’iy noma.		B <sub>i</sub> /a <sub>ij</sub>
			x <sub>1</sub>	▼x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	z <sub>1</sub>	z <sub>2</sub>	
			3	2	1	0	0	m	m	
z <sub>1</sub>	m	12	1	2	3	-1	0	1	0	6
►	m	16	2	[3]	-2	0	0	0	1	16/3
z <sub>2</sub>	0	30	1	2	1	0	1	0	0	15
<b>m+1</b>	0	-3	-2	-1	0	0	0	0	0	
<b>m+2</b>	28m	3m	5m	m	-m	0	0	0	0	

### ④ Sun’iy bazis usuli bilan ChDMni minimumini topishda simpleks hisoblashlari

☞ Masala miinimumga yechilganda  $m+2$  indeks qatoridagi **musbat ishorali** sonlarning eng kattasi HQU bo‘ladi:  $\max [5m; 3m; m] = 5m$ .

Demak,  $[x_2]$  ustun HQU bo‘ladi.

☞ HQSni aniqlaymiz. Buning uchun  $[B_i]$  ustundagi sonlarni  $[x_2]$  ustunning mos elementlariga bo‘lib  $\min [B_i/a_{ij}]$  ni hisoblaymiz:

$$\min [B_i/a_{ij}] = \min [12/2; 16/3; 30/2] = \min [6; 16/3; 15] = 16/3.$$

Demak,  $[z_2]$  ustun HQS bo‘ladi.

☞ HQU va HQSlar kesishgan katakdagi [3] son HQE bo‘ladi.

☞  $z_2$  sun’iy noma’lum bazisdan chiqariladi, o‘rniga  $x_2$  asosiy noma’lum bazis (reja)ga kiritiladi.

☞ 1.2- simpleks jadvalida HQE ga ***birinchi marotaba*** Jordan chiqarish usullari qo‘llanilib, quyidagi jadvalni tuzamiz:

2- simpleks jadvali

Bazis	C <sub>j</sub>	B <sub>i</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	▼ x <sub>3</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	z <sub>1</sub>	z <sub>2</sub>	B <sub>i</sub> /a <sub>ij</sub>
			3	2	1	0	0	m	m	
► z <sub>1</sub>	m	4/3	-1/3	0	[13/3]	-1	0	1	-2/3	13/4
x <sub>2</sub>	2	16/3	2/3	1	-2/3	0	0	0	1/3	inf
y <sub>2</sub>	0	58/3	-1/3	0	7/3	0	1	0	-2/3	58/7
m+1		32/3	-5/3	0	-7/3	0	0	0	2/3	
m+2		4/3m	-1/3m	0	13/3m	-m	0	0	-5/3 m	

☞ Ikkinchchi simpleks jadvali optimal yechimlarni ifodalamaydi. Chunki,  $m+2$  indeks qatorida musbat ishorali ( $13/3m$ ) soni mavjud. Bu bazis yechimlardan  $z_1$  su’niy noma’lum chiqarilmaganligini bildiradi.

Bu simplkis jadvalida  $x_3$  ustun HQU va  $z_1$  satr HQS bo‘ladi. Demak,  $z_1$  noma’lum bazisdan chiqarilib o‘rniga  $x_3$  noma’lum bazisga kiritiladi.

☞ Ikkinchchi simpleks jadvalida HQE ga ko‘ra ***ikkinchchi marotaba*** Jordan chiqarish usulini qo‘llab navbatdagi jadvalni tuzamiz:

Uchinchi simpleks jadvali

Bazis	C <sub>j</sub>	B <sub>i</sub>	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	z <sub>1</sub>	z <sub>2</sub>	B <sub>i</sub> /a <sub>ij</sub>
			3	2	1	0	0	m	m	
x <sub>3</sub>	1	4/13	-1/13	0	1	0	0	3/13	-2/13	0
x <sub>2</sub>	2	72/13	8/13	1	0	-3/13	0	2/13	3/13	0
y <sub>2</sub>	0	242/13	-2/13	0	0	-2/13	1	-7/13	-4/13	0
m+1		148/13	-24/13	0	0	-7/13	0	7/13	4/13	
m+2		0	0	0	0	0	0	m	m	

☞ Uchinchi simpleks jadvalida:

- 1)Bazis yechimlardan sun’iy noma’lumlar  $z_1$  va  $z_2$  to‘liq chiqarilgan.
- 2) $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$  ustunlardagi  $m+2$  indeks qatorning elementlari nolga teng.
- 3) $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$  ustunlardagi  $m+1$  indeks qatorning elementlari nol yoki manfiy ishorali sonlar.

### ☒ Xulosa

ChDM  $x_1=0, x_2=72/13, x_3=4/13, y_1=0, y_2 = 242/13$  qiymatlarda optimal yechimga ega:  $Z_{\min} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 148/13$ .

**5.2-vazifa. ChDMni sun'iy bazis usuli bilan yeching**

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 12,$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 16,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 30.$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,$$

$$Z_{\max} = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

**Vazifaning yechilishi**

**① Qo'shimcha noma'lumlarni kiritamiz**

Tengsizliklar sistemasini tenglamalar sistemasiga keltiramiz. Kushimcha noma'lumlarni kiritamiz:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_1 = 12,$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 16,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + y_2 = 30.$$

$$x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, y_1 > 0, y_2 > 0,$$

$$Z_{\max} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0y_1 + 0y_2$$

**② Su'niy noma'lumlar kiritamiz**

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - y_1 + z_1 = 12,$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + z_2 = 16,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + y_2 = 30.$$

$$x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, y_1 > 0, y_2 > 0,$$

$$z_1 > 0, z_2 > 0$$

$$Z_{\max} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0y_1 + 0y_2$$

$$- m z_1 - m z_2$$

yoki bu sistemani quyidagicha tushunish mumkin:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 1y_1 + 0y_2 + z_1 + 0z_2 = 12,$$

$$2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0y_1 + 0y_2 + 0z_1 + 1z_2 = 16,$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 0y_1 + 1y_2 + 0z_1 + 0z_2 = 30.$$

$$x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0, y_1 > 0, y_2 > 0, z_1 > 0, z_2 > 0$$

$$Z_{\max} = 0 + 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0y_1 + 0y_2 - mz_1 - mz_2$$

**③ Boshlang'ich simpleks jadvalini tuzish**

1- simpleks jadvali

Bazis	C <sub>j</sub>	B <sub>i</sub>	Asosiy noma'lum			Qo'shimcha noma.		Sun'iy noma.		B <sub>i</sub> /a <sub>ij</sub>
			x <sub>1</sub>	▼ x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	z <sub>1</sub>	z <sub>2</sub>	
			3	2	1	0	0	-m	-m	
z <sub>1</sub>	-m	12	1	2	3	-1	0	1	0	6
►z <sub>2</sub>	-m	16	2	[3]	-2	0	0	0	1	16/3
y <sub>2</sub>	0	30	1	2	1	0	1	0	0	15
m+1	0	-3	-2	-1	0	0	0	0	0	
m+2	-28m	-3m	-5m	-m	m	0	0	0	0	

☞ Indeks qatorida quyidagicha to'ldiriladi:

$$B_i \text{ ustunda: } 12(-m) + 16(-m) = -28m,$$

$$\begin{aligned}
 x_1 \text{ ustunda: } & 1(-m)+2(-m) - 3 = -3m - 3, \\
 x_2 \text{ ustunda: } & 2(-m)+3(-m) - 2 = -5m - 2, \\
 x_3 \text{ ustunda: } & 3(-m)- 2(-m) - 1 = -m - 1, \\
 y_1 \text{ ustunda: } & 1(-m)+0(-m) - 0 = -m, \\
 y_2 \text{ ustunda: } & 0(-m)+0(-m) - 0 = 0, \\
 z_1 \text{ ustunda: } & 1(-m)+0(-m) -(-m) = 0, \\
 z_2 \text{ ustunda: } & 0(-m)+1(-m) - (-m) = 0.
 \end{aligned}$$

#### ④ Sun'iy bazis usuli bilan ChDMni maksimumini topishda simpleks hisoblashlari

☞ Sun'iy bazis usuli bilan ChDM maksimumga yechilganda hal qiluvchi ustunni tanlash **m+2** indeks qator orqali amalga oshiriladi. hal qiluvchi ustunni tanlash uchun **m+2** qatordagi **m** koffitsientli manfiy ishorali sonlarning absolyut qiymati bo'yicha eng kattasi olinadi. Demak,  $[x_2]$  ustun HQU bo'ladi.

☞ HQSni aniqlaymiz. Buning uchun  $[B_i]$  ustundagi sonlarni  $[x_2]$  ustunning mos elementlariga bo'lib  $\min [B_i/a_{ij}]$  ni hisoblaymiz:

$$\min [B_i/a_{ij}] = \min [12/2; 16/3; 30/2] = \min [6; 16/3; 15] = 16/3.$$

Demak, ustun  $[z_2]$  HQS bo'ladi.

☞ Birinchi simpleks jadvalida  $z_2$  sun'iy noma'lum bazisdan chiqarilib,  $x_1$  asosiy noma'lum bazisga kiritiladi.

☞ Birinchi simpleks jadvalida HQE ga ko'ra **birinchi marotaba** Jordan chiqarish usullari qo'llaymiz.

2- simpleks jadvali

Bazi s	C <sub>j</sub>	B <sub>i</sub>	Asosiy noma'lum			Qo'shimcha noma.		Sun'iy noma.		B <sub>i</sub> /a <sub>ij</sub>
			x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	▼ x <sub>3</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	z <sub>1</sub>	z <sub>2</sub>	
			3	2	1	0	0	-m	-m	
► z <sub>1</sub>	-m	4/3	-1/3	0	[13/3]	-1	0	0	-2/3	4/13
x <sub>2</sub>	2	16/3	2/3	0	-2/3	0	0	0	1/3	inf
y <sub>2</sub>	0	58/3	-1/3	0	7/3	0	1	0	-2/3	58/7
m+1		32/3	-5/3	0	-7/3	0	0	0	2/3	
m+2		-4/3m	-1/3	0	-13/3m	m	0	0	5/3m	

☞ Ikkinchi simpleks jadvalida  $z_1$  sun'iy noma'lum bazisdan chiqarilib,  $x_3$  asosiy noma'lum bazisga kiritiladi. **Ikkinchi marotaba** Jordan chiqarish usullari qo'llaymiz.

3- simpleks jadvali

Bazi s	C <sub>j</sub>	B <sub>i</sub>	Asosiy noma'lum			Qo'shimcha noma.		Sun'iy noma.		B <sub>i</sub> /a <sub>ij</sub>
			▼ x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>	y <sub>1</sub>	y <sub>2</sub>	z <sub>1</sub>	z <sub>2</sub>	
			3	2	1	0	0	-m	=-m	
x <sub>3</sub>	1	4/13	-1/13	0	1	-3/13	0	3/13	-2/13	inf

$\blacktriangleright$ $x_2$	2	72/13	[8/13]	1	0	-2/13	0	2/13	3/13	9
$y_2$	0	242/1 3	-2/13	0	0	7/13	1	- 7/13	- 4/13	inf
$m+1$		148/1 3	- 24/1 3	0	0	-7/13	0	7/13	4/13	
$m+2$	0	0	0	0	0	0	0	m	m	

☞ Uchinchi simplks jadvalida  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$  ustunlardagi  $m+2$  indeks qatorning barcha sonlar nolga teng va musbat. Lekin shu ustunlardagi  $m+1$  indeks qatorda (-24/13 va -7/13) **manfiy ishorali** sonlar mavjud. Demak, topilgan yechim optimal emas. Bunday hollarda masalani yechish davom ettiriladi.

☞ Bu yerda  $m+1$  indeks qatoridagi manfiy ishorali sonlarning absolyut qiymati bo'yicha eng kattasi HQU bo'ladi. Keyin HQS va HQElar topilib, tegishli simpleks jadvalida Jordan almashtirishlari amalga oshiriladi. Bu sonlarning absolyut qiymati bo'yicha eng kattasi turgan ustun HQU bo'ladi. Demak,  $x_1$  ustunni XQU qilib tanlaymiz.

☞ Uchinchi simpleks jadvalida  $x_2$  noma'lum bazisdan chiqarilib,  $x_1$  noma'lum bazisga kiritiladi. **Uchinchi marotaba** Jordan chiqarish usullari qo'llaymiz.

4- simpleks jadval

Bazi s	C j	$B_i$	Asosiy noma'lumlar			Qo'shimcha noma'lumlar		Sun'iy noma'lumlar	
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$z_1$	$z_2$
			$s_1=3$	$s_2=2$	$s_3=1$	$s_4=0$	$s_5=0$	$s_6=-m$	$s_7=-m$
$x_3$	1	1	0	1/8	1	-1/4	0	1/4	-1/8
$x_1$	3	9	1	13/8	0	-1/4	0	1/4	3/8
$y_2$	0	2 0	0	1/4	0	1/2	1	-1/2	-1/4
$m+1$	2 8	0	3	0	-1	0	1	1	1
$m+2$	0	0	0	0	0	0	m	m	m

☞ To'rtinchchi simpleks jadvalida:

- 1) Bazis yechimlardan sun'iy noma'lumlar  $z_1$  va  $z_2$  to'liq chiqarilgan.
- 2)  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$  ustunlardagi  $m+2$  indeks qatorning elementlari nolga teng.
- 3)  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$  ustunlardagi  $m+1$  indeks qatorning elementlari ichida faqat  $x_4$  ustunda **manfiy ishorali** (-1) soni bor. Bu ustunda faqat  $y_2$  satr XQS bulishi mumkin. Chunki, qolgan elementlar  $B_i$  ustunning mos elementlari bilan qarama-qarshi ishorali. Bu yerda  $y_2$  qo'shimcha noma'lum o'rniiga bazis yechimga  $y_1$  qo'shimcha noma'lumini bazisga kirimiz.

5- simpleks jadval

Bazis	C <sub>j</sub>	$B_i$	Asosiy noma'lumlar			Qo'shimcha noma'lumlar		Sun'iy noma'lumlar	
			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$z_1$	$z_2$

			$s_1=3$	$s_2=2$	$s_3=1$	$s_4=0$	$s_5=0$	$s_6=-m$	$s_7=-m$
$x_3$	<b>1</b>	<b>11</b>	<b>0</b>	$\frac{1}{4}$	<b>1</b>	<b>0</b>	$\frac{1}{2}$	<b>0</b>	<b>-1/4</b>
$x_1$	<b>3</b>	<b>19</b>	<b>1</b>	<b>7/4</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	$\frac{1}{2}$	<b>0</b>	$\frac{1}{4}$
$y_1$	<b>0</b>	<b>40</b>	<b>0</b>	<b>1/2</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>-1</b>	<b>-1/2</b>
$m+1$	<b>68</b>	<b>0</b>	<b>7/2</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>2</b>	<b>0</b>	<b>1/2</b>
$m+2$	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	<b>m</b>	<b>m</b>

☞ Beshinchchi simpleks jadvalida:

- 1) Bazis yechimlardan sun'iy noma'lumlar  $z_1$  va  $z_2$  to'liq chiqarilgan.
- 2)  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$  ustunlardagi **m+2** indeks qatorning elementlari nolga teng.
- 3)  $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2$  ustunlardagi **m+1** indeks qatorining elementlari **musbat** ishorali.