26-mavzu. Uzluksiz tasodifiy miqdorlar

1. Taqsimot funksiyasi. Zichlik fuksiyasi
2. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va uni hisoblash
3. Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi va uni hisoblash
4. Uzluksiz tasodifiy miqdorning momentlari va ularni hisoblash

4.1. Taqsimot funksiyasi. Zichlik fuksiyasi

1-misol. Shina, tormoz diski yoki maxovik kabi aylanma jismlarning qochma yo'nalishining tayanch chiziqqa nisbati noaniq holat. Shinaning diffekt joyidan markazigacha bo'lgan chiziqning tayanch chizig'i bilan hosil qilgan burchagi (soat mili yo'nalishida) X ni qaraymiz. X ning mumkin bo'lfan qiymatlaridan biri quyidagicha:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{360}, & 0\le x<360 \\ 0, boshqa\, hollarda \end{cases}$$

Burchakning [90°; 180°] oraliqda bo'lish ehtimoli:

$$P(90\le X\le 180)=\int_{90}^{180}\frac{1}{360}dx=\left.\frac{x}{360}\right|_{90}^{180}=\frac{180}{360}-\frac{90}{360}=\frac{90}{360}=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

■

2-misol. X - t.m. quyidagi t.f. biln berilgan bo`lsa, uning qiymatlarining $(0,\frac{1}{3})$ oraliqda bo`lishi ehtimolini toping:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ agar \ \ x\le -1; \\ \dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}, \ agar \ \ -1<x\le \dfrac{1}{3}; \\ 1, \ agar \ \ x>\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

3-misol. U.t.m. X -ning t.q.ni quyidagi ko`rinishda bo`lsa, uning qiymatlari $(0,\frac{\pi}{4})$ oraliqda bo`lishi ehtimolini toping:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ \ agar \ \ x<0; \\ \sin x, \ agar \ \ 0<x\le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1, \ agar \ \ x>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4-misol. U.t.m. X -ning t.q.ni quyidagi ko`rinishda bo`lsa, uning z.f.sini toping:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \ agar \ x<0; \\ \sin x, \ agar \ 0<x\le \frac{\pi}{2}; \\ 1, \ agar \ x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

5-misol. Transport oqimida “vaqt progressi” deyilganda bitta avtomobil ma’lum nuqtadan o’tgandan keyin ketme-ket kelayotgan avtomobilning shu nuqtadan o’tishi orasidagi vaqtning farqi tushiniladi. X yuqori oqimli trassadagi tasodifiy tanlangan ikkita avtomobil orasidagi vaqt progressi bo’lsin. “The Statistical Properties of Freeway Traffic” (Transp. Res., 11: 221–228) maqolasida bu tasodifiy miqdor

$$f(x)=\begin{cases} 0{,}15e^{-0{,}15(x-0{,}5)}, \ x\ge 0{,}5 \\ 0, \ bosqa \ hollarda \end{cases}$$

Zichlik funksiyasi bilan berilgan. Ushbu trassada vaqt progressi 5 s bo’lish ehtimolini toping.

6-misol. X t.m. quyidagi zichlik funksiyasi bilan berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{8}+\frac{3}{8}x, \ 0\le x\le 2, \\ 0, boshqa \ \ hollarda. \end{cases}$$

X tasodifiy miqdorning (0; 1,5) oraliqqa tushish ehtimolini toping.

4.2. Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va uni hisoblash

X u.t.m.ning mumkin bo`lgan qimatlari $(-\infty,+\infty)$ oraliqdabo`lib, *f(x)* – uning z.f.si bo`lsa,

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

ga X y.t.m.ning matematik kutilishi deyiladi. Xysusan, *X* u.t.m.ning mumkin bo`lgan qimatlari $(a,b)$ oraliqda bo`lsa,

$$E(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx$$

bo`ladi.

7-misol. *X* -t.m.ning (0,1) oraliqdagi z.f.si *f(x) = 2x* bo`lib , oraliqdan tashqaridagi nuqtalarda *f(x) = 0* bo`lsin. *X* -t.m.ning matematik kutilishini toping.

Yechish. Ushbu formuladan foydalanamiz:

$$E(X)=\int_{a}^{b} xf(x)dx.$$

Demak, *a = 0, b = 1* va *f(x) = 2x* larni o`rniga qo`ycak,

$$E(X) = 2\int_0^1 x \cdot x dx = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_{x=1} = \frac{2}{3}.$$

8-misol. Taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, \ agar \ x \le 0, \\ \frac{x}{4}, \ agar \ 0 < x \le 4, \\ 1, \ agar \ x > 4. \end{cases}$$

ko`rinishda bo`lgan u.t.m.ning matematik kutilishini toping.

Javob: 2

9-misol. Zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ agar \, x \le 0, \\ \cos x, \ agar \ 0 < x \le \frac{\pi}{2}, \\ 0, \ agar \ x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

ko`rinishda bo`lgan X u.t.m.ning funksiyasi $Y = \varphi(X) = X^2$ ning matematik kutilishini toping.

Javob: $\frac{\pi^2 - 8}{4}$

10-misol. Zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ agar \ x \le 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, \ agar \ 0 < x \le \pi, \\ 0, \ agar \ x > \pi. \end{cases}$$

ko`rinishda bo`lgan X u.t.m.ning funksiyasi $Y = \varphi(X) = X^2$ ning matematik kutilishini toping.

Javob: $\frac{\pi^2 - 4}{2}$

11-misol. Zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ agar \ x \le 0, \\ x + 0{,}5, \ agar \ 0 < x \le 1, \\ 0, \ agar \ x > 1. \end{cases}$$

ko`rinishda bo`lgan X u.t.m.ning funksiyasi $Y = \varphi(X) = X^3$ ning matematik kutilishini toping.

Javob: $\frac{13}{40}$

12-misol. Zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}0, \ agar \ x\le 0,\\ \frac{3}{4}(x^2+2x), \ agar \ \ 0<x\le 1,\\ 0, \ agar \ \ x>1.\end{cases}$$

ko`rinishda bo`lgan X u.t.m.ning matematik kutilishini toping.

Javob: $\frac{11}{16}$

13-misol. Zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{b-a}$$

ko`rinishda bo`lgan X u.t.m.ga (a,b) oraliqda tekis taqsimlabgan tasodifiy miqdor deyiladi.Shu t.m.ning matematik kutilishini toping.

Javob: $\frac{a+b}{2}$

14-misol. Zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{b-3}$$

ko`rinishda bo`lgan $(3,b)$ oraliqda tekis taqcimlabgan tasodifiy miqdorning matematik kutilishini 5 ga teng bo`lsa, b nig qiymatini toping.

Javob: 7

4.3. Uzluksiz tasodifiy miqdorning dispersiyasi va uni hisoblash

X u.t.m.ning mumkin bo`lgan qimatlari $(-\infty,+\infty)$ oraliqda bo`lib, $f(x)$ – uning z.f.si bo`lsa,

$$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-E(X))^2 f(x)dx$$

ga X y.t.m.ning dispersiyasi deyiladi. Xysusan, X u.t.m.ning mumkin bo`lgan qimatlari $(a,b)$ oraliqda bo`lsa,

$$V(X)=\int_{a}^{b}(x-E(X))^2 f(x)dx$$

bo`ladi.

X u.t.m.ning dispersiyasini hisoblash uchun yuqoridagi formulalarga teng kuchli bo`lgan quyidagi formulalardan foydalanish mumkin:

$$V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-\left[E(X)\right]^2$$

va

$$V(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left[E(X)\right]^2.$$

X u.t.m.ning o`rtacha kvadratik chetlanishi deb, ushbu

$$\sigma(X)=\sqrt{E(X)}$$

miqdorga aytiladi.

15-misol. Zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}0, \ agar \ x\le 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, \ agar \ 0<x\le\pi, \\ 0, \ agar \ x>\pi.\end{cases}$$

ko`rinishda bo`lgan X u.t.m.ning dispersiyasini va o`rtacha kvadratik hetlanishini toping.

Yechish. X u.t.m.ning dispersiyasini

$$V(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-\left[E(X)\right]^2$$

formuladan foydalanib topamiz.Taqsimot egri chizig`i $x=\frac{\pi}{2}$ to`g`ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo`lganligi tufayli $E(X)=\frac{\pi}{2}$ bo`ladi. Shuningdek $a=0, b=\pi, f(x)=\frac{1}{2}\sin x$ bo`lib, bularni formulaga qo`ysak

$$V(X)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2\sin xdx-(\frac{\pi}{2})^2$$

bo`ladi. Tenglikning o`ng tomonidagi integralni ikki marta bo`laklab integrallab,

$$\int_0^{\pi} x^2\sin xdx=\pi^2-4$$

ni topamiz. Buni hisobga olsak, X u.t.m.ning dispersiyasi

$$V(X)=\frac{\pi^2-8}{4}$$

bo`ladi.

O'rtacha kvadratik chetlanishi

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{\pi^2-8}{4}}=\frac{\sqrt{\pi^2-8}}{2}$$

bo`ladi.

16-misol. Zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}0, & agar\ x\le 0,\\ 1, & agar\ 0<x\le 1,\\ 0, & agar\ x>1.\end{cases}$$

ko`rinishda bo`lgan X u.t.m.ning dispersiyasini va o`rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Javob: $\frac{1}{12};\frac{1}{2\sqrt{3}}$

17-misol. Zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{b-a}$$

ko`rinishda bo`lgan (a,b) oraliqda tekis taqcimlabgan tasodifiy miqdorning dispersiyasi va o`rtacha kvadratik chetlanishini toping.

Javob: $\frac{(b-a)^2}{12};\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$

4.4. Uzluksiz tasodifiy miqdorning momentlari va ularni hisoblash

X u.t.m.ning ***k - tartibli boshlang`ich nazariy momenti*** deb,

$$\nu_k=\int_{-\infty}^{\infty}x^k f(x)dx$$

miqdorga aytiladi. Bu yerda k = 1,2,3,….

X u.t.m.ning ***k - tartibli markaziy nazariy momenti*** deb,

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^k f(x)dx$$

miqdorga aytiladi.Bu yerda k = 1,2,3,….

Xysusan, X u.t.m.ning mumkin bo`lgan qimatlari $(a,b)$ oraliqda bo`lsa, u holda

$$\nu_k=\int_a^b x^k f(x)dx;\ \mu_k=\int_a^b (x-M(X))^k f(x)dx.$$

Ko`rinib turibdiki X t.m.ning 1 – boshlang`ich nazariy momenti uning matematik kutilishiga teng:

$$\nu_1=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=M(X)\ \text{va}\ \mu_1=0.$$

Shuningdek $k=2$ da $\mu_2=D(X)$ bo`ladi.

T.m.ning markaziy momentlari boshlang`ich momentlari bilan quyidagicha bog`langan:

$$\mu_2=\nu_2-\nu_1^2,$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

18-misol. X t.m. quyidagi zichlik funksiyasiga ega bo`lsa, uning birinchi, ikkinchi, uchinchi, to`rtinchi tartibli boshlang`ich uchinchi tartibli markaziy momenlarini toping:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ agar \ x \le 0, \\ 0{,}5x, \ agar \ 0 < x \le 2, \\ 0, \ agar \ x > 2. \end{cases}$$

Yechish. X u.t.m.ning birinchi, ikkinchi, uchinchi va to`rtinchi tartibli boshlang`ich momenlarini topish uchun ushbu

$$\nu_л = \int_a^b x^k f(x)dx$$

formuladan foydalanamiz:

$$\nu_1 = \int_0^2 x(0{,}5x)dx = \frac{4}{3}; \quad \nu_2 = \int x^2(0{,}5x)dx = 2;$$

$$\nu_3 = \int x^3(0{,}5x)dx = 3{,}2; \ \nu_4 = \int x^4(0{,}5)dx = \frac{16}{3}.$$

X u.t.m.ning uchinchi tartibli markaziy momentini topish uchun

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$

bog`lanishdan foydalanamiz:

$$\mu_3 = 3{,}2 - 3\cdot\frac{4}{3}\cdot 2 + 2\cdot(\frac{4}{3})^3 = -\frac{8}{135}.$$

Demak X u.t.m.ning uchinchi tartibli markaziy momenti $\mu_3 = -\frac{8}{135}$ bo`ladi.

19-misol. X t.m. quyidagi zichlik funksiyasiga ega bo`lsa, uning birinchi, ikkinchi, uchinchi, to`rtinchi tartibli boshlang`ich va markaziy momenlarini toping:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ agar \ x \le 0, \\ 2x, \ agar \ 0 < x \le 1, \\ 0, \ agar \ x > 1. \end{cases}$$

Javob: $\frac{2}{3};\frac{1}{2};\frac{2}{5};\frac{1}{3};0;\frac{1}{18};-\frac{1}{135};\frac{1}{135}$