22-Ehtimolni geometrik va statistik tariflariga doir masalalar

Reja:

2.1 Ehtimolning ta'riflari
2.2 Hodisa ehtimollarini bevosita hisoblash
2.3 Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari
2.4 To'la ehtimol. Beyes formulasi
2.5 Erkli sinovlar ketma-ketligi.

Ta'rif. *A* hodisaning ma'lum shartlar asosida ro'y berishini ifodalovchi *P(A)* miqdoriy qiymatga (songa) *A* hodisaning ***ehtimoli*** deyiladi. Bunda *P(A)* miqdor quyidagi ehtimolning asosiy xossalarini qanoatlantirishi kerak:

1^o. Ixtiyoriy *A* hodisaning ehtimoli manfiymas: $P(A) \geq 0$.

2^o. $P(\Omega) = 1$.

3^o. Agar $A_1, A_2, A_3, ...$ o'zaro kesishmaydigan (ozaro erkli) hoisalar bo'lsa, $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$.[1]

Ta'rif. *(Ehtimolning klassik ta'rifi).* Tajriba natijasida ***A*** hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diradigan elementar hodisalar soni *m* ning tajribadagi barcha elementar hodisalar soni *n* ga nisbatiga *A* hodisaning ehtimoli deyiladi. Demak,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{k}{n} \qquad (2.1)$$

2.1.-misol. Tajriba o'yin soqqasini bir marta tashlashdan iborat. Juft ochko tushish (*A* hodisa) ehtimolini toping.

Yechish. Tajribada juft ochkolar tushish elementar hodisalar soni 3 tadan iborat: $m = N(A) = 3 \; (\{2;4;6\})$.

Jami elementar hodisalar soni: $n = N(\Omega) = 6 \; (\{1;2;3;4;5;6\})$.

Ta'rifga ko'ra juft ochkolar tushish ehtimoli:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

---

[1] Jay L. Devore, Kenneth N. Berk. Modern Mathematical Statistics with Applications (Second Edition).- Springer Science+Business Media, LLC 2012. Page 48.

Ehtimollarni hisoblashda ko'pincha *kombinatorika elementlari*dan foydalanishga to'g'ri keladi.

1) *n* ta elementning *o'rin almashtirishlar soni* P_n quyidagicha hisoblanadi:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n! \qquad (2.2)$$

n! ("en faktorial") – *n* gacha bo'lgan sonlar ko'paytmasi.

2.1.-misol. 5 nafar talabalarning bir-birini takrorlamaydigan holda o'zaro o'rinlarini almashtirishlar soni $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5! = 120$ ga teng.

2) *n* ta elementdan *m* talab ($0 < m \le n$) *o'rinlashtirishlar soni*

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \qquad (2.3)$$

2.2.-misol. O'n nafar assistent u yoki bu imtihonni tekshirishga berkitilgan. Birinchi imtihon to'rtta savoldan tashkil topgan bo'lib professor har bir savolni tekshirish uchun alohida assistent tanlamoqchi. Professor nechta usul bilan assistentlarni tanlashi mumkin?

Yechish. Jami assistentlar soni *n=10,* birinchi imtihondagi savollar soni *m=4, n-m+1=10-4+1=7.* Demak, professor

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

usul bilan assistent tanlashi mumkin. ■[2]

3) *n* ta elementdan *m* talab *gruppalashlar soni:*

$$C_n^n = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} \qquad (2.4)$$

.

2.3.-misol. "36 dan 6" o'yinidagi jami kombinatsiyalar sonini toping.

Yechish. $C_{36}^6 = \dfrac{36!}{(36-6)!\cdot 6!} = \dfrac{30!\cdot 31 \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{30!\cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 1947792$.■

2.4.-misol.[3] Institut omboriga 25 ta printer keltirildi. Printerlarning 10 tasi lazerli va 15 tasi purkovchi printerlar. Mutaxassislar tavakkaliga 6 ta printer olishdi. Olingan printerlarning 3 tasi lazerli printer bo'lish ehtimolini toping.

---

[2] Jay L. Devore, Kenneth N. Berk. Modern Mathematical Statistics with Applications (Second Edition).- Springer Science+Business Media, LLC 2012. Page 48

[3] Jay L. Devore, Kenneth N. Berk. Modern Mathematical Statistics with Applications (Second Edition).- Springer Science+Business Media, LLC 2012. Page 48

Yechish. Keltirilgan printerlardan 6 tasi tavakkaliga tanlab olingan. Demak, jami elementar hodisalar soni yoki printerlarnin olish kombinatsiyasi $n = N(\Omega) = C_{25}^{3}$ ga teng. Masala shartiga ko'ra tanlangan 6 ta printerlarning 3 tasi lazerli (qolgan 3 tasi purkagichli) bo'lish hodisasining (A hodisa) elementar hodisalar kombinatsiyasi $m = N(A) = C_{10}^{3} \cdot C_{15}^{3}$ ga teng. Ehtimolning klassik ta'rifiga ko'ra:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^{3} \cdot C_{15}^{3}}{C_{25}^{6}} = \frac{\frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot \frac{15!}{12! \cdot 3!}}{\frac{25!}{19! \cdot 6!}} = 0{,}3083. \blacksquare$$

2.3. Hodisaning ehtimolini bevosita hisoblash

Hodisaning ehtimolini bevosita hisoblash quyidagi tartibda olib boriladi: 1) avval qaralayotgan tajribada ro`y berichi mumkin bo`lgan barcha elementar (teng imkoniyatli) holatlarni aniqlash kerak (agar buni aniqlash mumkin bo`lsa); 2) so`ngra hodisaning ro`y berishiga qulaylik tug`diradigan holatlar sonini hisoblash kerak; 3) nihoyat, qulaylik tug`diradigan holatlar sonini mumkin bo`lgan barcha elementar (teng imkoniyatli) holatlar soniga bo`lish kerak.

Hodisaning ehtimolini bevosita hisoblashda ko`pincha qaralayotgan tajribada ro`y berichi mumkin bo`lgan barcha elementar (teng imkoniyatli) holatlar sonini hisoblashda kombinatorika elementlaridan foydalaniladi:

Ta`rif .** Elementlarining tarkibi va tartibi bilan farq qiluvchi n ta elementdan m talab tuzilgan birlashmalarga ***o`rinlashtirishlar* deyiladi. Barcha n ta elementdan m talab tuzilgan o`rinlashtirishlar soni

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1), \qquad (0 \le m \le n)$$

ga teng va

$$A_n^1 = n \qquad \text{va} \qquad A_n^0 = 1.$$

Ta`rif.** Elementlarining joylashish o1rni bilan farq qiluvchi n ta elementdan tuzilgan birlashmalarga ***o`rin almashtirishlar* deyiladi. n ta elementdan tuzilgan o`rin almashtirishlar soni $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ga teng va $1! = 0! = 1$.

Ta`rif.** Bir – biridan hech bo`lmaganda bitta elementi bilan farq qiladigan *n* ta elementdan m talab tuzilgan birlashmalarga ***guruhlashlar* deyiladi. *n* ta elementdan *m* talab tuzilgan guruhlashlar soni

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{A_n^m}{P_n}$$

ga teng va $C_n^n = C_n^0 = 1$.

2.4-misol. Uch xil urug` *1,2,3* raqamlari bilan raqamlangan bo`lsin. Tasodifiy ravishda ketma – ket olingan *3* ta uruglarning raqamlari tartibidan *123* soni hosil bo`lishi ehtimolini toping.

Yechish. Tasodifiy ravishda ketma – ket olingan *3* ta uruglarning raqamlari tartibidan hosil bo`ladigan holatlar (sonlar) soni 3 ta turli elementlardan tuzilgan o`rin almashtirishlar soniga teng: $P_n = n! = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$ va ular *123, 132,213, 312, 231,321* lardan iborat. Bu holatlar teng imkoniyatli bo`lib, ulardan bitta holatda *123* hosil bo`ladi.Demak tasodifiy ravishda ketma – ket olingan 3 ta uruglarning raqamlari tartibidan *123* hosil bo`lishi uchun *1* ta qulaylik tug`diradigan holat mavjud ekan. Shunday qilib tasodifiy ravishda ketma – ket olingan *3* ta uruglarning raqamlari tartibidan *123* soni hosil bo`lishi hodisasini *A* deb belgilasak, u holda *A* hodisaning ro`y berish ehtimoli

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6} = 0{,}166$$

ga teng bo`ladi.

2.3. Ehtimollarni qo'shish va ko'paytirish teoremalari

Shartli ehtimol.

Ixtiyoriy ikkita A va B hodisalar uchun B hodisa ro'y bergan degan shart asosidagi *shartli ehtimol*

$$P(A \setminus B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \qquad \textbf{(2.5)}$$

Misol 2.4. Raqamli videokamera sotib oluvchilarning 60%i qo'shimcha xotira kartasi, 40%i qoshimcha batareya va 30%i har ikkalasini xarid qiladi. Xaridorning tavakkaliga tanlashini qaraymiz: *A* – qo'shimcha xotira kartasi xarid qilish, *B* – qo'shimcha batareya xarid qilish, $A \cap B$ har ikkalasini xarid qilish hodisalari. U holda $P(A) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$ hamda

$P(A \cap B) = 0{,}3$. Qo'shimcha batareya olgan xaridor qo'shimcha qo'shimcha xotira kartasi ham sotib olish ehtimoli:

$$P(A \setminus B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}4} = 0{,}75.$$

Qo'shimcha xotira kartasi sotib olgan xaridorning qo'shimcha batareya ham sotib olish ehtimoli:

$$P(B \setminus A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{0{,}3}{0{,}6} = 0{,}5.$$[4]■

Ikkita o'zaro erkli *A* va *B* hodisalar yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig'indisiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (2.6)$$

Ikkita o'zaro erkli hodisalar ko'paytmasining (birgalikda ro'y berish) ehtimoli shu hodisalar ehtimollari ko'paytmasiga teng:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (2.7)$$

Ikkita o'zaro bog'lia hodisalar yig'indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollari yig'indisidan ularning birgalikda ro'y berish ehtimoli ayirmasiga teng:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (2.8)$$

Ikkita o'zaro bog'liq hodisalarning ko'paytmasi ehtimoli ularning bittasi ehtimolini shu hodisa ro'y berdi degan shartli ehtimol ko'paytmasiga teng:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B \setminus A) \quad \text{yoki} \quad P(AB) = P(B) \cdot P(A \setminus B)$$

2.4. To'la ehtimol. Beyes formulasi

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ o'zaro erkli to'la hodisalar bo'lsin. U holda ixtiyoriy boshqa *B* hodisa uchun quyidagi o'rinli:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1) \cdot P(B \setminus A_1) + P(A_2) \cdot P(B \setminus A_2) + \cdots + P(A_k) \cdot P(B \setminus A_k) = \\ &= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) \cdot P(B \setminus A_i). \end{aligned} \qquad (2.9)$$

Bu formula *to'la ehtimol* formulasi deyiladi.

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ o'zaro erkli to'la hodisalar bo'lib, ularning mos ehtimollari $P(A_i)$ $(i = 1,2,3,\ldots,k)$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy boshqa $P(B)$ ehtimolli *B* hodisa uchun

---

[4] Jay L. Devore, Kenneth N. Berk. Modern Mathematical Statistics with Applications (Second Edition).- Springer Science+Business Media, LLC 2012. Page 76.

$$P(A_j \setminus B)=\frac{P(A_j)P(B \setminus A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)\cdot P(B \setminus A_i)}, \quad j=1,2,3,...,k \tag{2.10}$$

o'rinli bo'ladi. Bu formula *Beyes formulasi* deyiladi.

2.5.-misol.[5] Kamyob kasallik bilan kasallanish. Kasallikni aniqlash testi ishlab chiqilgan kamyob kasallik bilan katta yoshlilarning 1000 nafardan bittasi kasallanadi. Diagnostik test kasallangan kishi testdan o'tkazilsa 99% kasallanganligini ijobiy ko'rsatadi va kasallik bo'lmagan shaxslarda 2% ni ko'rsatadi. Tavakkaliga tekshirilgan shaxsning test natijasi ijobiy bo'lsa uning kassallanganlik ehtimolini toping.

Yechish. A_1 – hodisa tanlangan shaxs kassallangan, A_2 – hodisa tanlangan shaxs kassallanmagan, B – hodisa test ijobiy natija bergan. U holda,

$$P(A_1)=0{,}001, \quad P(A_2)=0{,}999, \quad P(B \setminus A_1)=0{,}99, \quad P(B \setminus A_2)=0{,}02.$$

Beyes teoremasiga ko'ra,

$$P(A_1 \setminus B)=\frac{P(A_1)\cdot P(B \setminus A_1)}{P(A_1)\cdot P(B \setminus A_1)+P(A_2)\cdot P(B \setminus A_2)}=$$
$$=\frac{0{,}001\cdot 0{,}99}{0{,}001\cdot 0{,}99+0{,}999\cdot 0{,}02}=0{,}047$$

Demak, tavakkaliga tekshirilgan shaxsda diagnostik test ijobiy natija berganda uning kasallangan chiqish ehtimoli 0,047 ga teng. Bu esa diagnostik testning [atoliklarga yo'l qo'yishi kattaligini ko'rsatadi. ■

Ikkita *A* va *B* hodisalar uchun $P(B \setminus A)=P(A)$ bo'lsa *o'zaro bog'liqmas* hodisalar, aks holda *o'zaro bog'liq hodisalar* deyiladi.

2.5 Erkli sinovlar ketma-ketligi

n ta $A_1, A_2, ..., A_n$ sinashlarning har birida *A* hodisa ro'y berish ehtimoli *p* ga, ro'y bermaslik ehtimoli *q=1-p* ga teng bo'lsin. U holda, *n* ta sinashning rosa *k* tasida *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli:

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k} \tag{2.11}$$

[5] Jay L. Devore, Kenneth N. Berk. Modern Mathematical Statistics with Applications (Second Edition).- Springer Science+Business Media, LLC 2012. Page 80.

(2.11) ***Bernulli formulasi*** deyiladi.

2.6.-misol. Yangi tug'ilgan buzoqlarning ma'lum bir kasallik bilan kasallanish ehtimoli *p=0,3* ga teng. Tavakkaliga tekshirilgan 5 ta buzoqning rosa ikkitasi kasallangan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Masala shartiga ko'ra $n = 5,\ k = 2,\ p = 0{,}3,\ q = 1 - p = 0{,}7$. Bu qiymatlarni Bernulli formulasiga qo'yib hisoblaymiz:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^{5-2} = 10 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}343 = 0{,}3087. \blacksquare$$

Agar sinashlar soni yetarlicha katta bo'lsa Bernulli formulasidan foydalanish qiyinchilik tug'diradi (yoki umuman hisoblash imkoni bo'lmaydi). Bunday paytda *Laplasning lokal va integral teoremalaridan* foydalaniladi.

Laplasning lokal teoremasi.

n ta sinahning har birida *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli *p* ga (ro'y bermaslik ehtimoli *q=1-p* ga) teng bo'lib, *n* ta sinashning rosa *k* tasida *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \qquad (2.12)$$

ga tenng. Bunda, $\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ Laplas funksiyasi, $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$ ga teng. Laplas funksiyasi qiymatlar jadvali ehtimollar nazariyasiga oid ko'pgina adabiyotlarda berilgan. Bundan tashqari bu funlsiya juft funksiya bo'lgani uchun *x* ning manfiy qiymatlarida ham hisoblanadi.

Teorema. *n* ta sinashning har birida *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli *p* ga teng bo'lib, *0<p<1* bo'lsa, u holda, *A* hodisaning *n* ta sinashda k_1 martadan k_2 martagacha ro'y berish ehtimoli quyidagi aniq integralga teng:

$$P_n(k_1;k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{x''} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = F(x'') - F(x'). \qquad (2.12)$$

Bunda, $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$ bo'lib, $F(x')$ va $F(x'')$ funksiyalarning qiymatlari jadvaldan topiladi. Shuningdek $F(x)$ funksiya toq funksiyadir: $F(-x) = -F(x)$.