23-mavzu: To'la ehtimol va Bayes formulalari.

$A_1, A_2, ..., A_k$ o'zaro erkli to'la hodisalar bo'lsin. U holda ixtiyoriy boshqa B hodisa uchun quyidagi o'rinli:

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B \setminus A_1) + P(A_2)\cdot P(B \setminus A_2) + \cdots + P(A_k)\cdot P(B \setminus A_k) = \\ = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)\cdot P(B \setminus A_i). \tag{9.4.1}$$

Bu formula *to'la ehtimol* formulasi deyiladi.

$A_1, A_2, ..., A_k$ o'zaro erkli to'la hodisalar bo'lib, ularning mos ehtimollari $P(A_i)$ $(i = 1,2,3,...,k)$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy boshqa $P(B)$ ehtimolli B hodisa uchun

$$P(A_j \setminus B) = \frac{P(A_j)P(B \setminus A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(A_i)\cdot P(B \setminus A_i)}, \quad j = 1,2,3,...,k \tag{9.4.2}$$

o'rinli bo'ladi. Bu formula *Beyes formulasi* deyiladi.

2.5.-misol.[1]Kamyob kasallik bilan kasallanish. Kasallikni aniqlash testi ishlab chiqilgan kamyob kasallik bilan katta yoshlilarning 1000 nafardan bittasi kasallanadi. Diagnostik test kasallangan kishi testdan o'tkazilsa 99% kasallanganligini ijobiy ko'rsatadi va kasallik bo'lmagan shaxslarda 2% ni ko'rsatadi. Tavakkaliga tekshirilgan shaxsning test natijasi ijobiy bo'lsa uning kassallanganlik ehtimolini toping.

Yechish.A_1 – hodisa tanlangan shaxs kassallangan, A_2 – hodisa tanlangan shaxs kassallanmagan, B – hodisa test ijobiy natija bergan. U holda,

$$P(A_1) = 0{,}001, \quad P(A_2) = 0{,}999, \quad P(B \setminus A_1) = 0{,}99, \quad P(B \setminus A_2) = 0{,}02.$$

Beyes teoremasiga ko'ra,

$$P(A_1 \setminus B) = \frac{P(A_1)\cdot P(B \setminus A_1)}{P(A_1)\cdot P(B \setminus A_1) + P(A_2)\cdot P(B \setminus A_2)} = \\ = \frac{0{,}001\cdot 0{,}99}{0{,}001\cdot 0{,}99 + 0{,}999\cdot 0{,}02} = 0{,}047$$

---

[1]Jay L. Devore, Kenneth N. Berk. Modern Mathematical Statistics with Applications (Second Edition).-Springer Science+Business Media, LLC 2012. Page 80.

Demak, tavakkaliga tekshirilgan shaxsda diagnostik test ijobiy natija berganda uning kasallangan chiqish ehtimoli 0,047 ga teng. Bu esa diagnostik testning [atoliklarga yo'l qo'yishi kattaligini ko'rsatadi. ■

Ikkita A va B hodisalar uchun $P(B \setminus A) = P(A)$ bo'lsa *o'zaro bog'liqmas* hodisalar, aks holda *o'zaro bog'liq hodisalar* deyiladi.

Erkli sinovlar ketma-ketligi

n ta $A_1, A_2, ..., A_n$ sinashlarning har birida *A*hodisa ro'y berish ehtimoli *p* ga, ro'y bermaslik ehtimoli *q=1-p* ga teng bo'lsin. U holda, *n* ta sinashning rosa *k* tasida *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{2.11}$$

(2.11) ***Bernulli formulasi*** deyiladi.

6.-misol.Yangi tug'ilgan buzoqlarning ma'lum bir kasallik bilan kasallanish ehtimoli *p=0,3* ga teng. Tavakkaliga tekshirilgan 5 ta buzoqning rosa ikkitasi kasallangan bo'lish ehtimolini toping.

Yechish. Masala shartiga ko'ra $n = 5,\ k = 2,\ p = 0{,}3,\ q = 1 - p = 0{,}7$. Bu qiymatlarni Bernulli formulasiga qo'yib hisoblaymiz:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^{5-2} = 10 \cdot 0{,}09 \cdot 0{,}343 = 0{,}3087 \text{.■}$$

Agar sinashlar soni yetarlicha katta bo'lsa Bernulli formulasidan foydalanish qiyinchilik tug'diradi (yoki umuman hisoblash imkoni bo'lmaydi). Bunday paytda *Laplasning lokal va integral teoremalaridan* foydalaniladi.

Laplasning lokal teoremasi.

n ta sinahning har birida *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli *p* ga (ro'y bermaslik ehtimoli *q=1-p* ga) teng bo'lib, *n* ta sinashning rosa *k* tasida *A* hodisaning ro'y berish ehtimoli

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) \tag{2.12}$$

ga tenng. Bunda, $\varphi(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ Laplas funksiyasi, $x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$ ga teng. Laplas funksiyasi qiymatlar jadvali ehtimollar nazariyasiga oid ko'pgina adabiyotlarda berilgan. Bundan tashqari bu funlsiya juft funksiya bo'lgani uchun x ning manfiy qiymatlarida ham hisoblanadi.

Laplasning integral teoremasi.

Teorema.n ta sinashning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lib, $0<p<1$ bo'lsa, u holda, A hodisaning n ta sinashda k_1 martadan k_2 martagacha ro'y berish ehtimoli quyidagi aniq integralga teng:

$$P_n(k_1;k_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x'}^{x''}e^{-\frac{y^2}{2}}dy=F(x'')-F(x'). \qquad (2.12)$$

Bunda, $x'=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $x''=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$ bo'lib, $F(x')$va $F(x'')$ funksiyalarning qiymatlari jadvaldan topiladi. Shuningdek $F(x)$ funksiya toq funksiyadir: $F(-x)=-F(x)$.

Nazorat uchun savollar.

1. Hodisaning ehtimoli deb nimaga aytiladi?
2. Ehtimolning klassik ta'rifini keltiring.
3. Shartli ehtimol deb nimaga aytiladi?
4. Qanday hodisalarga o'zaro bog'liq bo'lmagan hodisalar deyiladi.
5. Laplasning lokal teoremasi nimaani bildiradi?
6. Laplasning integral teoremasi nimani bildiradi?