РЕГРЕССИЯНИНГ ХУСУСИЙ ТЕНГЛАМАСИ

1. Регрессиянинг хусусий тенгламасининг ёзилиши ва эластикликнинг хусусий коэффициентини аниқлаш
2. Кўп омилли корреляция
3. Хусусий корреляция

1. Регрессиянинг хусусий тенгламасининг ёзилиши ва эластикликнинг хусусий коэффициентини аниқлаш

$y = a + b_i \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + ... + b_p \cdot x_p + \varepsilon$ - кўп омилли регрессия чизиқли тенгламаси асосида регрессиянинг хусусий тенгламаларини қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} y_{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3, \dots, x_p} = f(x_1), \\ y_{x_2 \cdot x_1 \cdot x_3 \dots x_p} = f(x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_{x_p \cdot x_1 \cdot x_2 \dots x_{p-1}} = f(x_p). \end{cases}, \qquad (6.1)$$

яъни ушбу тенгламалар система натижавий белгини мос x омил белги билан, кўп ўлчовли регрессияда эътиборга олинувчи қолган белгиларини ўртача қийматида ушлаб турган ҳолда, боғланишини ифодалайдиган регрессия тенгламаларидан иборат.

ε- назорат қилиб бўлмайдиган омиллар таъсирида натижавий кўрсаткичнинг ўзгаришини ифодаловчи микдор.

Регрессиянинг хусусий тенгламалари қуйидаги кўринишга эга:

$$\begin{cases} y_{x_1 \cdot x_2, x_3 \ldots x_p} = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot \overline{x}_2 + b_3 \cdot \overline{x}_3 + \ldots + b_p \cdot \overline{x}_p + \varepsilon \\ y_{x_2 \cdot x_1, x_3 \ldots x_p} = a + b_1 \cdot \overline{x}_1 + b_2 \cdot \overline{x}_2 + b_3 \cdot \overline{x}_3 + \ldots + b_p \cdot \overline{x}_p + \varepsilon \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{x_p \cdot x_1, x_2, \ldots x_{p-1}} = a + b_1 \cdot \overline{x}_1 + b_2 \cdot \overline{x}_2 + \ldots + b_{p-1} \overline{x}_{p-1} + b_p \cdot \overline{x}_p + \varepsilon \end{cases} \qquad (6.2)$$

Ушбу тенгламаларга мос омилларнинг ўртача қийматларини қўйиб чиқсак, улар жуфт чизиқли регрессия тенгламасининг кўринишини олиб қуйидагича ифодаланади:

$$\begin{cases} \hat{y}_{x_1 \cdot x_2, x_3 \ldots x_p} = A_1 + b_1 \cdot x_1, \\ \hat{y}_{x_2 \cdot x_1, x_3 \ldots x_p} = A_2 + b_2 \cdot x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \hat{y}_{x_p \cdot x_1, x_2, \ldots x_{p-1}} = A_p + b_p \cdot x_p \end{cases},$$

бу ерда,

$$\begin{cases} A_1 = a + b_2 \cdot \bar{x}_2 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \ldots + b_p \cdot \bar{x}_p \\ A_2 = a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_3 \cdot \bar{x}_3 + \ldots + b_p \cdot \bar{x}_p \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_p = a + b_1 \cdot \bar{x}_1 + b_2 \cdot \bar{x}_2 + \ldots + b_{p-1} \bar{x}_{p-1} \end{cases}$$

Жуфт регрессиядан регрессиянинг хусусий тенгламасини фарқи шундан иборатки, у омилларни натижага алоҳида –алоҳида таъсирини тавсифлайди, чунки бир омилни таъсирини ўрганилаётганда қолганлари ўзгармас ҳолда ушлаб турилади. Қолган омилларни таъсир даражаси кўп омилли регрессия тенгламасининг озод ҳадида ҳисобга олинади. Бундай ҳолат регрессиянинг хусусий тенгламаси асосида эластикликнинг хусусий коэффициентини аниқлаш имконини беради, у қуйидагича ифодаланади:

$$Э_{yx_i} = bi \frac{x_i}{\hat{y}_{x_i \cdot x_1 x_1 \ldots x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot x_p}}, \qquad (6.3)$$

бу ерда: bi- кўп омилли регрессия тенгламасида x_i омил учун регрессия коэффициенти;

$\hat{y}_{x_i \cdot x_1 \cdot x_2 \ldots x_{i-1} \cdot x_{i+1} \cdot x_p}$ - регрессиянинг хусусий тенгламаси.

Мисол. Республиканинг қатор ҳудудларида маълум бир махсулот импорти ҳажми(y)ни шу маҳсулотнинг ишлаб чиқариш ҳажми($x1$), заҳиралари ҳажмининг ўзгариши($x2$) ва ички бозордаги истеъмоли($x3$)га нисбатан кўп омилли регрессияси қуйидаги тенглама билан ифодаланган бўлсин:

$$\hat{y} = -66{,}028 + 0{,}135 \cdot x_1 + 0{,}476 \cdot x_2 + 0{,}343 \cdot x_3 .$$

Омилларнинг ўртача қийматлари қуйидагича бўлсин:

$$\bar{y} = 31{,}5; \quad \bar{x}_1 = 245{,}7; \quad \bar{x}_2 = 3{,}7; \quad \bar{x}_3 = 182{,}5.$$

Берилган маълумотлар асосида тўплам бўйича ўртача эластиклик кўрсаткичини (6.3) дан фойдаланиб топиш мумкин, яъни

$$\bar{Э}_{x_i} = b_i \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}_{x_i}} .$$

Қаралаңаётган мисолдаги биринчи кўрсаткич учун ўртача эластиклик коэффициенти қуйидагига тенг:

$$\overline{Э}_{y_{x_1}} = 0{,}135 \cdot \frac{245{,}7}{31{,}5} = 1{,}053\%,$$

яъни, маҳаллий ишлаб чиқариш ҳажми 1%га ўсганда, захира ҳажми ва истеъмол ўзгармаган ҳолда импорт ҳажми регионлар тўплами бўйича 1,053%га ўсади.

Иккинчи ўзгарувчи учун эластиклик коэффициенти тенг:

$$\overline{Э}_{y_{x_2}} = 0{,}476 \cdot \frac{3{,}7}{31{,}5} = 0{,}056\%$$

яъни, захиранинг ўзгариши 1%га ўсганда, ишлаб чиқариш ва ички истеъмол ўзгармаганда, импорт ҳажми ўртача 0,056% га кўпаяди.

Учинчи ўзгарувчи учун эса эластиклик коэффициенти қуйидагига тенг:

$$\overline{Э}_{y_{x_3}} = 0{,}343 \cdot \frac{182{,}5}{31{,}5} = 1{,}987\%$$

яъни, ички истеъмолни 1% га ўсиши, ишлаб чиқариш ҳажми ва захира миқдори ўзгармаган ҳолда, импорт ҳажмини 1,987% га ортишини кўрсатади.

- Эластикликнинг ўртача кўрсаткичларини бир-бирлари билан таққослаш мумкин ва мос равишда омилларни натижага таъсир кучига қараб тартиб билан жойлаштириш (занжирлаш) мумкин. Мисолимизда натижага (импорт ҳажмига) энг кўп таъсир этувчи ўзгарувчи, бу маҳсулотни истеъмол ҳажми - *х3*, энг кам таъсир этувчи омил эса захираларнинг ўзгариши - *х2* . Барча регионлар бўйича эластикликнинг ўртача кўрсаткичи билан бир қаторда регрессиянинг хусусий тенгламаси асосида ҳар бир регион учун хусусий эластиклик коэффициентларини ҳисоблаш мумкин.
- Бизнинг мисолимиз учун регрессиянинг хусусий тенгламаси қуйидагилардан иборат бўлади:

- биринчи омил учун,

$$\hat{y}_{x_1\cdot x_2\cdot x_3} = a + b_1\cdot x_1 + b_2\cdot \bar{x}_2 + b_3\cdot \bar{x}_3,$$

яъни $\hat{y}_{x_1\cdot x_2\cdot x_3} = -66{,}028 + 0{,}135\cdot x_1 + 0{,}476\cdot 3{,}7 + 0{,}343\cdot 182{,}5 = -1{,}669 + 0{,}135\cdot x_1;$

- иккинчи омил учун,

$$\hat{y}_{x_2\cdot x_1\cdot x_3} = a + b_1\cdot \bar{x}_1 + b_2\cdot x_2 + b_3\cdot \bar{x}_3,$$

яъни $\hat{y}_{x_2\cdot x_1\cdot x_3} = -66{,}028 + 0{,}135\cdot 245{,}7 + 0{,}476\cdot x_2 + 0{,}343\cdot 182{,}5 = 29{,}739 + 0{,}476\cdot x_2;$

-учинчи омил учун,

$$\hat{y}_{x_3\cdot x_1\cdot x_2} = a + b_1\bar{x}_1 + b_2\cdot \bar{x}_2 + b_3 x_3,$$

яъни $\hat{y}_{x_3\cdot x_1\cdot x_2} = -66{,}028 + 0{,}135\cdot 245{,}7 + 0{,}476\cdot 3{,}7 + 0{,}343\cdot x_3 = -31{,}097 + 0{,}343\cdot x_3$

Ушбу тенгламаларга мос омилларнинг регионлар бўйича ҳақиқий қийматларини қўйиб, битта омилни берилган қийматида бошқа колган омилларнинг ўртача қийматида моделлаштирилувчи $\hat{y}$ кўрсаткичнинг қийматини топамиз. Бу натижавий белгининг ҳисобланган қиймати юқоридаги келтирилган формулалар бўйича эластикликнинг хусусий коэффициентларини топиш учун қўлланилади.

Масалан, агар регионда $x_1 = 160{,}2;\ x_2 = 4{,}0;\ x_3 = 190{,}5$ бўлса, у ҳолда эластикликнинг хусусий коэффициентлари қуйидагиларга тенг бўлади:

$$Э_{yx_1} = b_1 \cdot \frac{x_1}{\hat{y}_{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3}}, \quad \text{ёки} \quad Э_{yx_1} = 0{,}135 \cdot \frac{160{,}2}{-1{,}669 + 0{,}135 \cdot 160{,}2} = 1{,}084\%;$$

$$Э_{yx_2} = b_2 \frac{x_2}{\hat{y}_{x_2 \cdot x_1 \cdot x_3}}, \quad \text{ёки} \quad Э_{yx_2} = 0{,}476 \cdot \frac{4{,}0}{29{,}739 + 0{,}476 \cdot 4{,}0} = 0{,}060\%;$$

$$Э_{yx_3} = b_3 \frac{x_3}{\hat{y}_{x_3 \cdot x_1 \cdot x_2}}, \quad \text{ёки} \quad Э_{yx_3} = 0{,}343 \cdot \frac{190{,}5}{-31{,}097 + 0{,}343 \cdot 190{,}5} = 1{,}908\%.$$

Кўриниб турибдики, регионлар учун эластикликнинг хусусий коэффициентлари, регионларнинг барчаси бўйича ҳисобланган ўртача эластиклик кўрсаткичларидан фарқ қилади. Улар алоҳида ҳудудларни ривожлантириш учун қарорлар қабул қилишда фойдаланилади.

6.2. Кўп омилли корреляция

- Кўп омилли регрессия тенгламасининг амалий аҳамияти кўп омилли корреляция коэффициенти ва унинг квадрати -детерминация коэффициенти ёрдамида баҳоланади.
- Кўп омилли корреляция коэффициенти қаралаётган омиллар тўпламини ўрганилаётган белгига боғланиш даражасини тавсифлайди, яъни омилларни биргаликда натижавий белгига таъсир кучини тавсифлаб беради.
- Кўп омилли корреляциякўрсаткичи ўзаро боғланиш шаклларидан қатъий назар кўп ўлчовли корреляция индекси каби аниқланиши мумкин:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_p} = \sqrt{1 - \frac{\sigma^2_{қол}}{\sigma^2_y}}, \qquad (6.4)$$

бу ерда: $\sigma^2_{қол} - y = f(x_1, x_2 \dots x_p)$ тенглама учун колдик дисперсия,

$$\sigma^2_{қол} = \frac{\sum(y - \bar{y}_{x_1, x_2, \dots, x_p})^2}{n};$$

σ^2_y -натижавий белгининг умумий дисперсияси, $\sigma_y = \frac{\sum(y - \bar{y})^2}{n}$.

- Кўп омилли корреляция индексини тузиш методикаси жуфт боғланишникига ўхшаш. Унинг ўзгариш чегараси ҳам *0* дан *1* гача. У *1* га қанчалик яқин бўлса натижавий белгининг барча омиллар билан боғланиш даражаси шунчалик юқори бўлади. Кўп омилли корреляция индексининг қиймати жуфт омилли корреляциялар индексларининг максимал қийматидан катта ёки унга тенг бўлиши керак, яъни,

$$R_{yx_1x_2\dots x_p} \geq R_{yx_i(\max)} \quad (i = \overline{1, p}).$$

Боғланиш чизикли бўлганда корреляция индекси формуласини жуфт корреляция коэффициенти оркали қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_p} = \sqrt{\sum \beta_{x_i} \cdot r_{yx_i}}, \qquad (6.5)$$

бу ерда: β_{x_i} -регрессиянинг стандартлашган коэффициенти;

r_{yx_i} -натижанинг ҳар бир омил билан жуфт корреляция коэффициенти.

Чизикли регрессия учун кўп омилли корреляция индекси формуласи *кўп омилли корреляция чизиқли коэффициенти* ёки *корреляция коэффициенти тўплами* деб номланади.

Чизиқсиз боғланиш учун ҳам кўп омилли корреляция индекси корреляция коэффициенти тўпламига тенг бўлиши мумкин. Фирма учун даромад модели y қуйидаги кўринишга эга бўлса:

$$y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot \ln x_2 + b_3 \cdot \ln x_3 + b_4 \cdot \ln x_4 + \varepsilon,$$

бу ерда: x_1-реклама учун харажатлар;

x_2-фирма капитали;

x_3-регион бўйича сотилган маълум бир гуруҳ товарларнифирманинг умумий маҳсулотларидаги улуши;

x_4-фирманинг аввалги йилга нисбатан сотилган маҳсулотлари ҳажмининг кўпайиш фоизи.

x_1 омил чизиқли, x_2, x_3, x_4- омиллар логарифмик шаклда берилгани билан боғланиш зичлигини баҳолаш чизиқли кўп омилли корреляция коэффициенти ёрдамида амалга оширилиши мумкин. Агар қаралаётган модель стандартлаштирилган қуйидаги кўринишда бўлса:

$$t_y = -0{,}4 \cdot t_{x_1} + 0{,}5 \cdot t_{x_2} + 0{,}4 \cdot t_{x_3} + 0{,}3 \cdot t_{x_4},$$

даромадни унга таъсир этувчи ҳар бир омил билан жуфт корреляцияси эса

$$r_{yx_1} = -0{,}6;\quad r_{y\ln x_2} = 0{,}7;\quad r_{y\ln x_3} = 0{,}6;\quad r_{y\ln x_4} = 0{,}4.$$

бўлса, у ҳолда кўп омилли детерминация коэффициенти (6.5) қуйидагига тенг бўлади:

$$R^2_{yx_1x_2x_3x_4} = -0{,}4\cdot(-0{,}6) + 0{,}5\cdot 0{,}7 + 0{,}4\cdot 0{,}6 + 0{,}3\cdot 0{,}4 = 0{,}95.$$

Худди шундай натижани натижавий белгининг қолдиқ ва умумий дисперсиялари нисбати бўйича аниқланган кўп омилли детерминация индекси орқали ҳам олиш мумкин.

6.3. Хусусий корреляция

Юқорида кўриб ўтилганидек, кўп омилли чизиқли регрессияда қатнашувчи омилларни ранжирлаш регрессиянинг стандартлаштирилган коэффициентлари(β) орқали ҳам амалга оширилиши мумкин. Бунга, чизиқли боғланишлар учун, хусусий корреляция коэффициентлари орқали ҳам эришиш мумкин. Ўрганилаётган белгилар чизиқли боғланишларда бўлмаган ҳолатларда эса бу вазифани ҳусусий детерминация коэффициентлари бажаради.

Бундан ташқари, ҳусусий корреляция коэффициентлари омилларни саралаш муаммоларини ечишда қўлланилади, яъни у ёки бу омилни моделга киритиш масаласи хусусий корреляция коэффициентлари орқали исботлаб берилади.

Хусусий корреляция коэффициенти(ёки индекси) натижа билан регрессия тенгламасига киритилган битта омил орасидаги боғланишнинг зичлигини, бошқа омиллар таъсири ўзгармаган ҳолда, тавсифлайди. Хусусий корреляция коэффициентлари таҳлил учун моделга киритилган янги омил ҳисобига камайган қолдиқ дисперсияни янги омил киритилмасдан олдинги қолдиқ дисперсияга бўлган нисбатига тенг.

Мисол. Фараз килайлик, маҳсулот хажми(y)нинг меҳнат харажатлари(x_1)га боғликлиги

$$\hat{y}_{x_1} = 27{,}5 + 3{,}5 \cdot x_1, \quad r_{yx_1} = 0{,}58$$

тенглама билан ифодалансин.

Ушбу тенгламага x_1 нинг ҳақиқий қийматларини қўйиб, маҳсулот ҳажми $\hat{y}_{x_1}$ нинг назарий қиймати ва унга мос келувчи қолдиқ дисперсия S^2 қийматини топамиз:

$$S^2_{yx_1} = \frac{\sum(y_i - \hat{y}_{x_1})^2}{n}.$$

Регрессия тенгламасига қўшимча x_2-ишлаб чиқаришни техник таъминланганлик даражаси омилини киритиб, қуйидаги регрессия тенгламасини оламиз:

$$\hat{y}_{x_1x_2} = 20{,}2 + 2{,}8 \cdot x_1 + 0{,}2 \cdot x_2 \quad . \qquad (6.6)$$

Табиийки, бу тенглама учун қолдиқ дисперсия камаяди, Фараз қилайлик аввалги қолдиқ дисперсия $S^2_{yx_1} = 6$ бўлган бўлса, иккинчи омил киритилгандан сўнг $S^2_{yx_1x_2} = 3{,}7$ бўлган. Демак, моделга қанча кўп омил киритилса қолдиқ дисперсиянинг қиймати шунча камаяди. x_2 қўшимча омилнинг киритилиши натижасида қолдиқ дисперсиянинг камайиши $S^2_{yx_1} - S^2_{yx_1x_2} = 2{,}3$ га тенг бўлади.

Қўшимча омил киритилишига қадар бўлган дисперсия-$S^2_{yx_1}$ да бу камайишнинг ҳиссаси қанча кўп бўлса, y билан x_2 орасидаги боғланиш, x_1 омилининг таъсири ўзгармас бўлганда, шунча зич бўлади. Бу миқдорни квадрат илдиз остидан чиқарсак, бизга y ни x_2 билан боғланиш зичлигини “тоза” кўринишда ифодаловчи хусусий корреляция индексини беради.

Демак, x_2 омилни y натижага тоза таъсирини қуйидагича аниқлаш мумкин:

$$r_{yx_2x_1} = \sqrt{\frac{S^2_{yx_1} - S^2_{yx_1x_2}}{S^2_{yx_1}}}.$$

x_1 омилнинг y натижага хусусий таъсири ҳам худди шу каби аниқланилади:

$$r_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{S^2_{yx_2} - S^2_{yx_1x_2}}{S^2_{yx_2}}}.$$

Агар $S^2_{yx_2} = 5$ деб олсак, у ҳолда (6.6) тенглама учун хусусий корреляция коэффициентлари қуйидагича бўлади:

$$r_{yx_1x_2}=\sqrt{\frac{5-3{,}7}{5}}=0{,}51 \text{ ва } r_{yx_2x_1}=\sqrt{\frac{6-3{,}7}{6}}=0{,}619.$$

Олинган натижаларни таққослаб кўрсак, маҳсулот ҳажмига кўпроқ корхонанинг техник таъминоти таъсир этишини кўришимиз мумкин.

Агар қолдиқ дисперсияни $S^2_{qol_1}=\sigma^2_y(1-r)^2$ кўринишда детерминация коэффициенти орқали ифодаласак, у ҳолда хусусий корреляция коэффициенти формуласи қуйидагича кўринишга эга бўлади:

$$r_{yx_1x_2}=\sqrt{\frac{S^2_{yx_2}-S^2_{yx_1x_2}}{S^2_{yx_2}}}=\sqrt{1-\frac{S_{yx_1x_2}}{S^2_{yx_2}}}=\sqrt{1-\frac{1-R^2_{yx_1x_2}}{1-R^2_{yx_2}}},$$

ва мос равишда x_2 учун

$$r_{yx_2x_1}=\sqrt{1-\frac{1-R^2_{yx_1x_2}}{1-R^2_{yx_1}}}.$$

Юқоридаги хусусий корреляция коэффициентлари биринчи тартибли хусусий корреляция коэффициентлари(индекслари) деб аталади. Улар икки ўзгарувчининг боғланиш зичлигини, омиллардан бири ўзгармас бўлган ҳолда, аниқлаш имконини беради.

Агар p дона омиллардан иборат бўлган регрессияни кўрадиган бўлсак, у ҳолда биринчи тартибли хусусий корреляция коэффицинетларидан ташқари иккинчи, учинчи ва ҳ.к. (p-1)-тартибли хусусий корреляция коэффициентларини аниқлаш мумкин. Яъни, натижавий белгига x_1 омилнинг таъсирини қолган омилларни қуйидаги турлича боғлиқ бўлмаган ҳолатларидаги таъсирини баҳолаш мумкин:

$r_{yx_1 \cdot x_2}$ - x_2 омилни ўзгарманган ҳолда таъсирида;

$r_{yx_1 \cdot x_2 x_3}$ - x_2 ва x_3 омиллар ўзгармаган ҳолда таъсирида;

$r_{yx_1 \cdot x_2 x_3 \dots x_p}$ - регрессия тенгламасига киритилган барча омилларни ўзгармаган ҳолатдаги таъсирида.

Умумий кўринишда p омилли $y = a + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + ... + b_p \cdot x_p + \varepsilon$, тенглама учун y га x_i– омилни, бошқа омиллар ўзгармаган ҳолатда, таъсир кучини ўлчовчи хусусий корреляция коэффициентини қуйидаги формула бўйича аниқлаш мумкин:

$$r_{yx_i \cdot x_1 x_2 ... x_{i-1} x_{i+1} ... x_p} = \sqrt{1 - \frac{1 - R^2_{yx_1 x_2 ... x_i ... x_p}}{1 - R^2_{yx_1 x_2 ... x_{i-1} x_{i+1} ... x_p}}},$$

бу ерда: $R^2_{yx_1 x_2 ... x_p}$ - p омиллар комплексининг натижа билан кўп омиллидетерминация коэффициенти;

$R_{yx_1 x_2 ... x_{i-1} x_{i+1} ... x_p}$ - x_iомилни моделга киритилмаган ҳолатдаги детерминация коэффициенти.

i=1бўлганда хусусий корреляция коэффициенти қуйидаги кўринишни олади:

$$r_{yx_1 x_2 ... x_p} = \sqrt{1 - \frac{1 - R^2_{yx_1 x_2 ... x_p}}{1 - R^2_{yx_2 ... x_p}}}.$$

Ушбу хусусий корреляция коэффициенти y ва x_1ни боғланиш зичлигини, регрессия тенгламасига киритилган бошқа омиллар ўзгармаган ҳолда, ўлчаш(аниқлаш) имкониятини беради.

Хусусий корреляция коэффициентининг тартиби натижавий белгига таъсири ўзгармас ҳолатда ушлаб туриладиган омиллар сони билан аниқланилади. Масалан, $r_{yx_1x_2}$ - биринчи тартибли хусусий корреляция коэффициенти. Бундан келиб чиққан ҳолда жуфт корреляция коэффиценти нолинчи тартибли коэффициент дейилади.

Юқорироқ тартибли хусусий корреляция коэффициентларини қуйи тартибли хусусий корреляция коэффициентлари орқали қуйидаги реккурент формула ёрдамида аниқлаш мумкин:

$$r_{yx_i \cdot x_1x_2\ldots x_p} = \frac{r_{yx_i \cdot x_1 \cdot x_2\ldots x_{p-1}} - r_{yx_p \cdot x_1x_2\ldots x_{p-1}} \cdot r_{x_ix_p \cdot x_1x_2\ldots x_{p-1}}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_p \cdot x_1x_2\ldots x_{p-1}}) \cdot (1 - r^2_{x_ix_p x_1x_2\ldots x_{p-1}})}}.$$

Икки омиллида ва i=1 бўлганда ушбу формула қуйидаги кўринишда бўлади:

$$r_{yx_1\cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2}\cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx_2})\cdot(1-r^2_{x_1x_2})}}.$$

Мос равишда i=2 ва омил иккита бўлганда y ни x_2 омил билан хусусий корреляция коэффициентини қуйидаги формула билан аниқлаш мумкин:

$$r_{yx_2\cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1}\cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1-r^2_{yx_1})\cdot(1-r^2_{x_1x_2})}}.$$

Уч омилли регрессия тенгламаси учун иккинчи тартибли хусусий корреляция коэффициенти биринчи тартибли хусусий корреляция коэффициенти асосида аниқланилади.

$$y = a + b_1\cdot x_1 + b_2\cdot x_2 + \ldots + b_p\cdot x_p + \varepsilon,$$

тенгламада ҳар бири реккурент формула асосида аниқланадиган учта иккинчи тартибли хусусий корреляция коэффициентини аниқлаш мумкин, улар:

$$r_{yx_1\cdot x_2\cdot x_3};\quad r_{yx_2\cdot x_1\cdot x_3};\quad r_{yx_3\cdot x_1\cdot x_2};$$

Масалан, $i=1$ бўлганда $r_{yx_1\cdot x_2 x_3}$ ни ҳисоблаш учун қуйидаги формула қўлланилади:

$$r_{yx_1\cdot x_2x_3}=\frac{r_{yx_1x_2}-r_{yx_3x_2}\cdot r_{x_1x_2x_3}}{\sqrt{(1-r^2_{yx_3x_2})\cdot(1-r^2_{x_1x_2x_3})}}.$$

Мисол. Фараз қилайлик, газета тиражи(y)ни газетани сотишдан тушадиган даромад(x_1)га, редакция ходимлари сони(x_2)га, регионда тарқатиладиган бошқа газеталар орасида газетанинг рейтирги(x_3)га боғлиқлиги ўрганилаётган бўлсин. Бу ҳолатда жуфт корреляция коэффициентлари матрицаси қуйидагича бўлган бўлсин:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ r_{yx_1}=0{,}69 & 1 & & \\ r_{yx_2}=0{,}58 & r_{x_1x_2}=0{,}46 & 1 & \\ r_{yx_3}=0{,}55 & r_{x_1x_3}=0{,}50 & r_{x_2x_3}=0{,}41 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ушбу маълумотлардан келиб чиққан ҳолда биринчи ва иккинчи тартибли хусусий корреляция коэффициентларини топамиз.

Натижавий белги(y)нинг x_1 ва x_2 га боғлиқлигининг биринчи тартибли хусусий корреляция коэффициентларини ҳисоблаймиз.

$$r_{yx_1 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_2}) \cdot (1 - r^2_{x_1x_2})}} = \frac{0{,}69 - 0{,}58 \cdot 0{,}46}{\sqrt{(1 - 0{,}58^2) \cdot (1 - 0{,}46^2)}} = 0{,}585,$$

бу натижа x_2 омилни бир хил даражада ушлаб турилганда y ва x_1 ларнинг корреляцияси анча паст (0,585 0,69га нисбатан) эканлигини кўрсатади.

$$r_{yx_2 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_1}) \cdot (1 - r^2_{x_1x_2})}} = \frac{0{,}58 - 0{,}69 \cdot 0{,}46}{\sqrt{(1 - 0{,}69^2) \cdot (1 - 0{,}46^2)}} = 0{,}409,$$

яъни, x_1 омилни бир хил даражада ушлаб турилганда натижавий белги y га x_2 омилнинг таъсири унча юқори эмас (0,409 0,58га нисбатан).

$$r_{yx_1 \cdot x_3} = \frac{r_{yx_1} - r_{yx_3} \cdot r_{x_1x_3}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_3}) \cdot (1 - r^2_{x_1x_3})}} = \frac{0{,}69 - 0{,}55 \cdot 0{,}50}{\sqrt{(1 - 0{,}55^2) \cdot (1 - 0{,}50^2)}} = 0{,}574,$$

бу натижа x_3 омилни бир хил даражада ушлаб турганда натижавий белги y га x_1 омилнинг корреляцияси жуфт корреляцияга нисбатан x_1 ва x_3 омиллар орасида ўртача бўлсада боғлиқлик борлиги сабабли анча камайганлигини (0,574 0,69га нисбатан) кўрсатади;

$$r_{yx_2 \cdot x_3} = \frac{r_{yx_2} - r_{yx_3} \cdot r_{x_2x_3}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_3}) \cdot (1 - r^2_{x_2x_3})}} = \frac{0{,}58 - 0{,}55 \cdot 0{,}41}{\sqrt{(1 - 0{,}55^2) \cdot (1 - 0{,}41^2)}} = 0{,}465,$$

яъни, x_3 омилни бир хил даражада ушлаб турилганда натижавий белги y га x_2 омилнинг таъсири унча юқори эмас (0,465 0,58га нисбатан);

$$r_{yx_3 \cdot x_1} = \frac{r_{yx_3} - r_{yx_1} \cdot r_{x_3x_1}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_1}) \cdot (1 - r^2_{x_1x_3})}} = \frac{0{,}55 - 0{,}69 \cdot 0{,}50}{\sqrt{(1 - 0{,}69^2) \cdot (1 - 0{,}50^2)}} = 0{,}327,$$

бу натижадан x_1 омилни y га таъсири бирдек бўлиб турганда, x_3 нинг y билан корреляцияси камайганлигини кўрсатади (0,327 0,55га нисбатан);

$$r_{yx_3 \cdot x_2} = \frac{r_{yx_3} - r_{yx_2} \cdot r_{x_3x_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_2}) \cdot (1 - r^2_{x_2x_3})}} = \frac{0{,}55 - 0{,}58 \cdot 0{,}41}{\sqrt{(1 - 0{,}58^2) \cdot (1 - 0{,}41^2)}} = 0{,}420,$$

яъни, x_2 омилнинг таъсири ўзгармаган ҳолда x_3 омилнинг y натижавий белгини таъсири унча ахамиятга эга эмас(0,55 0,420га нисбатан).

Иккинчи тартибли хусусий корреляция коэффициентларини ҳисоблаб чиқамиз.

$$r_{yx_1 \cdot x_2 x_3} = \frac{r_{yx_1 x_2} - r_{yx_3 \cdot x_2} \cdot r_{x_1 x_3 x_2}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_3 x_2}) \cdot (1 - r^2_{x_1 x_3 x_2})}} = \frac{0,585 - 0,420 \cdot 0,385}{\sqrt{(1 - 0,420^2) \cdot (1 - 0,385^2)}} = 0,505,$$

бу натижа x_2 ва x_3 омиллар ўзгармас бўлган ҳолда x_1 нинг y билан корреляцияси биринчи тартибли хусусий корреляцияга нисбатан(x_2 омил ўзгармас бўлган ҳолда) янада камайганлигини кўрсатади: 0,69; 0,585 ва 0,505.

$$r_{yx_2 \cdot x_1 x_3} = \frac{r_{yx_2 x_1} - r_{yx_3 x_1} \cdot r_{x_2 x_3 x_1}}{\sqrt{(1 - r^2_{yx_3 x_1}) \cdot (1 - r^2_{x_2 x_3 x_1})}} = \frac{0,409 - 0,327 \cdot 0,234}{\sqrt{(1 - 0,327^2) \cdot (1 - 0,234^2)}} = 0,362,$$

бу ҳолатда аввалги ҳисоблашларга қараганда x_1 омилни таъсири ўзгармас бўлганда x_2 билан y нинг корреляцияси 0,409 бўлган эди, x_1 ва x_3 омилларнинг таъсирлари ўзгармас бўлган ҳолатда эса корреляция 0,362гача камайганини кўриш мумкин.

$$r_{yx_3\cdot x_1x_2}=\frac{r_{yx_3\cdot x_1}-r_{yx_2\cdot x_1}\cdot r_{x_2x_3\cdot x_1}}{\sqrt{(1-r^2_{yx_2\cdot x_1})\cdot(1-r^2_{x_2x_3\cdot x_1})}}=\frac{0{,}327-0{,}409\cdot 0{,}234}{\sqrt{(1-0{,}409^2)\cdot(1-0{,}234^2)}}=0{,}261,$$

бу ҳолатда эса x_1 омил ўзгармас бўлаганда x_3 билан y нинг жуфт корреляцияси 0,55дан 0,327га камайган эди, x_1 ва x_2 омилларнинг ўзгармаган ҳолатида x_3 нинг y билан корреляцияси 0,261га тенг бўлди. Ҳисоблаш натижаларидан y нинг x_1, x_2 ва x_3 омиллар билан иккинчи тартибли хусусий корреляцияси(0,505; 0,362 ва 0,261) жуфт корреляциясига нисбатан(0,69; 0,58 ва 0,55) камайганлигини кўриш мумкин.

Реккурент формула билан ҳисобланган хусусий корреляция коэффициентлари -1 дан +1гача бўлган оралиқда ўзгаради, кўп омилли детерминация коэффициенти формуласида ҳисобланганлари эса 0 дан 1гача оралиқда ўзгаради. Уларни бир-бирлари билан таққослаш омилларни натижа билан боғланиш кучи бўйича ранжирлаш(тартиблаштириш) имконини беради. Хусусий корреляция коэффициентлари стандартлаштирилган регрессия коэффициентлари (β-коэффициентлар) асосида, омилларни натижага таъсири бўйича ранжирланганлигини тасдиқлаган ҳолда, кўп омилли детерминация коэффициентларидан фарқли равишда ҳар бир омилни натижа билан боғланиш зичлигини аниқ ўлчамини тоза ҳолда беради.

Агар $\hat{t}_y = \beta_{x_1} \cdot t_{x_1} + \beta_{x_2} \cdot t_{x_2} + \beta_{x_3} \cdot t_{x_3}$ стандартлаштирилган регрессия тенгламасидан $\beta_{x_1} > \beta_{x_2} > \beta_{x_3}$ эканлиги келиб чиқса, яъни натижага таъсир кучи бўйича омилларнинг тартиби x_1, x_2, x_3 бўлса, хусусий корреляция коэффициентлари ҳам худди шу тартибда $r_{yx_1 \cdot x_2x_3} > r_{yx_2 \cdot x_1x_3} > r_{yx_3 \cdot x_1x_2}$ бўлади.

Хусусий корреляция ва регрессиянинг стандартлаштирилган коэффициентларининг ўзаро мувофиқлиги икки омилли таҳлилда уларнинг формулаларини таққослаганда яққол кўринади. Стандартлаштирилган масштабдаги $\hat{t}_y = \beta_{x_1} \cdot t_{x_1} + \beta_{x_2} \cdot t_{x_2}$ регрессия тенгламаси учун β-коэффициентлар қуйидаги нормал тенгламалар системасининг ечимидан келиб чиқиб қуйидаги формулалар ёрдамида аниқланиши мумкин:

$$\begin{cases} \beta_{x_1} = \dfrac{r_{yx_1} - r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}, \\ \beta_{x_2} = \dfrac{r_{yx_2} - r_{yx_1} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2} \end{cases}$$

Уларни $r_{yx_1x_2}$ ва $r_{yx_2x_1}$ хусусий корреляция коэффициентларини ҳисоблашнинг реккурент формулалари билан таққослаб, қуйидагиларни олиш мумкин:

$$r_{yx_1x_2} = \beta_{x_1} \cdot \sqrt{\frac{1 - r_{x_1x_2}^2}{1 - r_{yx_2}}}, \quad r_{yx_2x_1} = \beta_{x_2} \cdot \sqrt{\frac{1 - r_{x_1x_2}^2}{1 - r_{yx_1}}}.$$

Бошқача айтганда, икки омилли таҳлилда хусусий корреляция коэффициентлари регрессиянинг стандартлаштирилган коэффициентларини фиксирланган омилнинг омил ва натижа бўйича қолдиқ дисперсиялари улушларининг нисбатларини квадрат илдиздан чиқарилганига кўпайтирилганига тенг.

Юқоридаги хусусий корреляция коэффициенти формулаларидан бу кўрсаткичларни корреляция коэффициентлари билан боғлиқлигини кўриш мумкин. Хусусий корреляция коэффициентларини(кетма-кет биринчи, иккинчи ва юқори тартибларини) билган ҳолда қуйидаги формуладан фойдаланиб корреляция коэффициентлари тўпламини аниқлаш мумкин:

$$R_{yx_1x_2\ldots x_p} = (1-(1-r^2_{yx_1})\cdot(1-r^2_{yx_2\cdot x_1})\cdot(1-r^2_{yx_3\cdot x_1x_2})\ldots(1-r_{yx_p\cdot x_1x_2\ldots x_{p-1}}))^{1/2}.$$

Натижавий белги ўрганилаётган омилларга тўлиқ боғлиқ бўлганда уларни биргаликдаги таъсири коэффициенти бирга тенг бўлади.Таҳлилга омилларни кетма-кет киритилиши натижасида ҳосил бўлган натижавий белгининг қолдиқ вариацияси улуши бирдан айрилади ($1-r^2$). Натижада илдиз остидан чиқарилган ифода барча ўрганилаётган омилларни биргаликдаги таъсирини тавсифлайди.

Юқорида келтирилган уч омилли мисолда кўп омилли корреляция коэффициенти қиймати 0,770га тенг.

$$R_{yx_1x_2x_3} = (1-(1-0{,}69)\cdot(1-0{,}409)\cdot(1-0{,}261))^{1/2} = 0{,}770.$$

Кўп омилли корреляция коэффициенти қиймати ҳар доим хусусий корреляция коэффициентининг қийматидан катта(ёки тенг) бўлади. Бизнинг мисолимизда хусусий корреляция коэффициенти 0,505га, кўп омилли корреляция коэффициенти 0,770га тенг.

ЭЪТИБОРИНГИЗ УЧУН РАҲМАТ !