

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Абрамов, А. Л. Дышко, Н. Б. Конюхова, Т. В. Ле-  
витина, О численно-аналитическом исследовании задач  
дифракции плоской звуковой волны на идеальных вытя-  
нутых сфероидах и трехосных эллипсоидах, *Ж. вычисл.  
матем. и матем. физ.*, 1995, том 35, номер 9, 1374–1400

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-  
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 193.150.107.16

14 февраля 2024 г., 13:35:08



*Посвящается светлой памяти М. В. Федорюка*

УДК 519.6:535.4

© 1995 г. А. А. АБРАМОВ, А. Л. ДЫШКО, Н. Б. КОНЮХОВА,  
Т. В. ЛЕВИТИНА

(Москва)

## О ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОМ ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ИДЕАЛЬНЫХ ВЫТЯНУТЫХ СФЕРОИДАХ И ТРЕХОСНЫХ ЭЛЛИпсоИДАХ <sup>1)</sup>

Для трехмерных рассеивателей указанной геометрии решаются внешние задачи Дирихле и Неймана для уравнения Гельмгольца; задачи решаются методом разделения переменных в вытянутой сфероидальной и эллипсоидальной системах координат. Возникающие здесь сложные специальные функции вычисляются с помощью амплитудно-фазовых методов, позволяющих проводить расчеты для указанных классических задач дифракции в широком диапазоне изменения параметров.

### Введение

В вытянутой сфероидальной системе координат (в. с. с. к.) и в эллипсоидальной системе координат (э. с. к.) методом разделения переменных решаются внешние задачи Дирихле и Неймана для трехмерного уравнения Гельмгольца с условиями излучения на бесконечности; такие задачи, где граничные условия Дирихле (Неймана) задаются на поверхности вытянутого сфероида или трехосного эллипсоида, описывают рассеяние плоской звуковой волны на идеально мягком (идеально жестком) трехмерном препятствии указанной геометрии. Отраженное поле и дифракционные характеристики рассеивателей представляются в виде рядов по вытянутым сфероидальным функциям (в. с. ф.) или волновым эллипсоидальным функциям (в. э. ф.) соответственно; для трехосных эллипсоидов такие разложения впервые получены <sup>2)</sup> в [1], [2]. Для расчета указанных сложных специальных функций в настоящей работе используются новые методы и алгоритмы [4]—[6], позволяющие вычислять эти функции в широком диапазоне изменения параметров. Расчеты дифракционных характеристик трехосных эллипсоидов проводятся впервые; то же относится к некоторым расчетам для

<sup>1)</sup> Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 94-01-01475-а), а также частично финансировалась Международным научным фондом совместно с Правительством РФ (грант J8K100).

<sup>2)</sup> В [3] было получено решение задачи рассеяния плоской волны на идеально мягком трехосном эллипсоиде в виде рядов по в. э. ф., однако только для случаев падения волны по одной из главных осей эллипсоида. В отличие от [1], [2], коэффициенты рядов [3] не выписаны явно, а выражаются через сложные для вычислений интегралы по поверхности эллипсоида.

сфероидов больших волновых размеров. Дается краткое описание результатов сравнения точных расчетов с известными асимптотическими формулами: для тонких сфероидов — с асимптотическими формулами [7]—[9] для амплитуды рассеяния в дальней зоне, для толстых сфероидов — с приближениями геометрической акустики [10] для поперечных сечений рассеяния.

Отметим, что ввиду неточностей, допущенных в [1], [2], и для полноты изложения в данной работе, наряду с [11], приводится полный вывод разложения плоских волн и рассеянного поля по в. э. ф. Аккуратное рассмотрение вопроса о продолжении в. э. ф., определенных в одном октанте, на все пространство для построения соответствующей полной системы функций позволило устранить допущенные в [1], [2] ошибки и дать более правильную трактовку полученных разложений; этим объясняется также достаточно подробное описание в § 2 разделения переменных в э. с. к. Как уже было отмечено в [11], сказанное ни в коей мере не умаляет значения работ [1], [2] и других исследований по в. э. ф. М. В. Федорюка, под большим влиянием которого были выполнены работы [4]—[6], [11] и данная работа. Именно признание важности для математической физики работ [1], [2] сделало необходимым устранение в них неточностей.

## § 1. Постановка задач

Задачи дифракции плоской звуковой волны на акустически идеально мягких и идеально жестких трехмерных препятствиях являются классическими задачами акустики и ставятся следующим образом (см., например, [12]—[14]). Пусть плоская монохроматическая волна с единичной амплитудой

$$(1.1) \quad u^i(\mathbf{r}) = \exp[i\hat{k}(l, \mathbf{r})],$$

распространяющаяся в однородном изотропном пространстве (множитель временной зависимости  $\exp(-i\omega_0 t)$  здесь и далее опущен), падает на конечное препятствие  $D$  с гладкой поверхностью  $S$ ; здесь  $\hat{k}$  — волновое число,  $\hat{k} = \omega_0/c_0$ ,  $c_0$  — скорость звука в данной среде,  $l = (l_x, l_y, l_z)$  — вектор единичной длины, характеризующий направление распространения плоской волны,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор «точки наблюдения». Это препятствие порождает рассеянную волну, так что полное стационарное волновое поле  $u(\mathbf{r})$  представляется в виде  $u(\mathbf{r}) = u^i(\mathbf{r}) + u^s(\mathbf{r})$ , где  $u^s(\mathbf{r})$  — рассеянное (или дифрагированное) поле. Вне тела  $u(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + \hat{k}^2 u = 0, \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

где  $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  — оператор Лапласа. На поверхности  $S$  полное волновое поле удовлетворяет одному из граничных условий:

$$u(\mathbf{r})|_S = 0 \quad (\text{идеально мягкое тело})$$

или

$$\partial u(\mathbf{r})/\partial n|_S = 0 \quad (\text{идеально жесткое тело}),$$

где  $\partial/\partial n$  — производная по направлению внешней нормали к поверхности  $S$ .

Рассеянная волна  $u^s(r)$  вдали от рассеивающего объекта близка к расходящейся сферической волне:

$$(1.2) \quad u^s(r, \theta, \varphi) = F(\theta, \varphi) \frac{\exp(i\hat{k}r)}{\hat{k}r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty,$$

равномерно по  $(\theta, \varphi)$ , где  $(r, \theta, \varphi)$  — сферические координаты. Соотношение (1.2) для решений уравнения Гельмгольца эквивалентно условию излучения Зоммерфельда — предельному условию на бесконечности:

$$(1.3) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial u^s}{\partial r} - i\hat{k}u^s \right) = 0 \text{ равномерно по } (\theta, \varphi).$$

Таким образом, рассеянное поле  $u^s(r)$  есть решение однородного уравнения Гельмгольца

$$(1.4) \quad \Delta u^s + \hat{k}^2 u^s = 0, \quad r \in \mathbb{R}^3 \setminus D,$$

удовлетворяющее на бесконечности условию (1.3), а на поверхности  $S$  — одному из краевых условий:

$$(1.5a) \quad u^s(r)|_S = -u^i(r)|_S$$

или

$$(1.5b) \quad \partial u^s(r)/\partial n|_S = -\partial u^i(r)/\partial n|_S.$$

Однозначная разрешимость таких задач при любом значении волнового числа  $\hat{k}$  известна (см. [12], [15]).

Функция  $F(\theta, \varphi)$  в асимптотическом представлении (1.2) называется амплитудой рассеяния в дальней зоне и является одной из основных дифракционных характеристик рассеивающего тела. С ней связаны также другие характеристики рассеивающей поверхности: эффективный поперечник рассеяния (или полное поперечное сечение рассеяния)

$$(1.6) \quad Q = \frac{1}{\hat{k}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |F(\theta, \varphi)|^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

и дифференциальное поперечное сечение рассеяния

$$(1.7) \quad \sigma(\theta, \varphi) = \frac{4\pi}{\hat{k}^2} |F(\theta, \varphi)|^2.$$

Формулы (1.6), (1.7) являются следствиями общих определений этих величин (см. [10, с. 7]):

$$\sigma(\theta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} (4\pi r^2) \frac{|u^s(r, \theta, \varphi)|^2}{|u^i(r, \theta, \varphi)|^2},$$

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sigma(\theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

## § 2. Разделение переменных в вытянутой сфероидальной и в эллипсоидальной системах координат

В том случае, когда рассеивающая поверхность может быть отождествлена с координатной поверхностью ортогональной криволинейной системы координат (с. к.), допускающей разделение переменных в уравнении Гельмгольца, сформулированные выше задачи решаются «точно» методом Фурье: решения представляются в виде рядов по специальным функциям, соответствующим данной с. к.

Всего существует 11 с. к., допускающих разделение переменных в трехмерном уравнении Гельмгольца (см. [16]). Высшей является э. с. к., остальные десять получаются из нее как вырожденные случаи с помощью различных предельных переходов по параметрам. При разделении переменных частные решения уравнения Гельмгольца представляются в виде произведений так называемых угловых и радиальных функций: для э. с. к. — это угловые волновые эллипсоидальные функции (у. в. э. ф.) и радиальные волновые эллипсоидальные функции (р. в. э. ф.), для в. с. с. к. — это вытянутые угловые сфероидальные функции (в. у. с. ф.) и вытянутые радиальные сфероидальные функции (в. р. с. ф.). Для сопоставления заметим, что для сферы угловые функции — это полиномы и присоединенные функции Лежандра и тригонометрические функции, а радиальные функции — это функции Бесселя и Ханкеля.

*Разделение переменных для (1.4) в э. с. к.* Координатные поверхности э. с. к. представляют собой однопараметрическое семейство софокусных поверхностей второго порядка. Значение параметра  $\kappa$ , характеризующего координатную поверхность, входит в уравнение

$$(2.1) \quad \frac{x^2}{a^2 + \kappa} + \frac{y^2}{b^2 + \kappa} + \frac{z^2}{c^2 + \kappa} = 1,$$

где  $a, b, c$  фиксированы,  $a > b > c > 0$ . Если тело  $D$  — эллипсоид  $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leq 1$ , то его поверхность  $S$  есть координатная поверхность (2.1) при  $\kappa = 0$ . Вообще поверхность, задаваемая уравнением (2.1), является эллипсоидом, если  $\lambda = \kappa > -c^2$  (этот эллипсоид лежит внутри  $S$  при  $\lambda < 0$  и вне  $S$  при  $\lambda > 0$ ), однополостным гиперboloидом, если  $-c^2 > \mu = \kappa > -b^2$ , и двухполостным гиперboloидом при  $-b^2 > \nu = \kappa > -a^2$ ; э. с. к. ортогональна.

Внутри каждого координатного октанта имеет место взаимно однозначное соответствие между декартовыми координатами  $x, y, z$  и эллипсоидальными координатами  $\lambda, \mu, \nu$ , выражаемое соотношениями

$$x^2 = (a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)(a^2 + \nu) / [(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)],$$

$$y^2 = (b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)(b^2 + \nu) / [(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)],$$

$$z^2 = (c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)(c^2 + \nu) / [(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)].$$

В безразмерных переменных (отличных от использованных в [1], [2])

$$\xi_j = (\eta_j + a^2) / (a^2 - b^2), \quad j = 1, 2, 3, \quad \eta_1 = \nu, \quad \eta_2 = \mu, \quad \eta_3 = \lambda,$$

оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta \equiv 4(a^2 - b^2)^{-1} [(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1)]^{-1} [(\xi_3 - \xi_2) L_1 +$$

$$+ (\xi_1 - \xi_3) L_2 + (\xi_2 - \xi_1) L_3],$$

где  $0 < \xi_1 < 1$ ,  $1 < \xi_2 < \rho^2$ ,  $\rho^2 < \xi_3 < \infty$ ,  $\rho^2 = (a^2 - c^2)/(a^2 - b^2)$ ,  $\rho^2 > 1$ ,

$$L_i = \sqrt{f(\xi_i)} \frac{d}{d\xi_i} \left\{ \sqrt{f(\xi_i)} \frac{d}{d\xi_i} \right\}, \quad i = 1, 2, 3,$$

и уравнение (1.4) допускает разделение переменных, т. е. имеет частные решения вида  $w = \Lambda(\xi_1) \Lambda(\xi_2) \Lambda(\xi_3)$ . Здесь  $\Lambda(\xi)$  — решения (на указанных трех интервалах) волнового уравнения Ламе

$$(2.2) \quad \sqrt{f(\xi)} \frac{d}{d\xi} \left\{ \sqrt{f(\xi)} \frac{d\Lambda}{d\xi} \right\} + \frac{1}{4} q(\xi, h, l) \Lambda = 0,$$

где  $f(\xi) = \xi(\xi - 1)(\xi - \rho^2)$ ,  $q(\xi, h, l) = hp^2 - lp^2\xi + \omega^2\xi^2$ ,  $h, l$  — параметры разделения (их связь с параметрами разделения в переменных  $\lambda, \mu, \nu$  см. в [11]),  $\omega^2 = \hat{k}^2(a^2 - b^2)$ ,  $\omega > 0$ .

1. У. в. э. ф.  $\Lambda(\xi_1)$ ,  $\Lambda(\xi_2)$  являются собственными функциями (с. ф.) двух-параметрической самосопряженной краевой задачи: уравнение (2.2) рассматривается на интервалах  $0 < \xi_1 < 1$ ,  $1 < \xi_2 < \rho^2$ ; в каждой из конечных особых точек  $\xi_1^0 = 0$ ,  $\xi_2^0 = 1$ ,  $\xi_3^0 = \rho^2$  фиксируется одно из двух граничных условий:

$$(2.3a) \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_j^0} \Lambda(\xi) = 0$$

или

$$(2.3b) \quad \lim_{\xi \rightarrow \xi_j^0} \sqrt{|f(\xi)|} \frac{d\Lambda(\xi)}{d\xi} = 0, \quad j = 1, 2, 3,$$

причем условия при  $\xi_1 \rightarrow \xi_1^0 = 0$  и при  $\xi_2 \rightarrow \xi_2^0 = 1$  должны быть идентичны.

Известно, что имеется счетная последовательность пар вещественных чисел  $\{h_n^m, l_n^m\}$  — собственных значений (с. з.) задачи (2.2), (2.3),  $0 \leq m \leq n$ ; соответствующие им нетривиальные решения этой задачи  $\Lambda_{n,m}(\xi_1)$ ,  $\Lambda_{n,m}(\xi_2)$  определяются с точностью до множителя однозначно, они ровно  $m$  раз обращаются в нуль на интервале  $0 < \xi_1 < 1$  и  $n - m$  раз — на интервале  $1 < \xi_2 < \rho^2$ . Таким образом, имеется восемь различных типов у. в. э. ф., каждый из которых можно характеризовать тройкой индексов  $(i_1, i_2, i_3)$ : здесь  $i_j = 1$  при выполнении в точке  $\xi = \xi_j^0$  условия (2.3a) или  $i_j = 0$  при выполнении в этой точке условия (2.3b). Алгоритм численного поиска с. з.  $\{h_n^m, l_n^m\}$  и вычисления соответствующих им у. в. э. ф. см. в [5].

Произведение  $\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) = \Lambda_{n,m}(\xi_1) \Lambda_{n,m}(\xi_2)$  называется поверхностной волновой эллипсоидальной функцией (п. в. э. ф.). Известно, что  $\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)$  удовлетворяет уравнениям

$$(2.4a) \quad [4(\xi_2 L_1 - \xi_1 L_2) + \omega^2 \xi_1 \xi_2 (\xi_1 - \xi_2) - h_n^m \rho^2 (\xi_1 - \xi_2)] \Psi_n^m = 0,$$

$$(2.4b) \quad [4(L_1 - L_2) + \omega^2 (\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 - \xi_2) - l_n^m \rho^2 (\xi_1 - \xi_2)] \Psi_n^m = 0.$$

Для каждого фиксированного набора  $(i_1, i_2, i_3)$  п. в. э. ф., отвечающие

различным точкам спектра, ортогональны с весом  $\sigma(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2 - \xi_1)/\sqrt{-f(\xi_1)f(\xi_2)}$ : при  $m \neq m'$  или  $n \neq n'$  справедливо

$$(2.5) \quad \int_{\Pi} \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_{n'}^{m'}(\xi_1, \xi_2) \sigma(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = 0,$$

где  $\Pi = [0, 1] \times [1, \rho^2]$ . Эти функции образуют полную ортогональную систему в  $L^2(\Pi, \sigma)$  (см. [17]), т. е. полную по скалярному произведению с весом  $\sigma(\xi_1, \xi_2)$  на части эллипсоида  $S_d$ ,  $\xi_3 = d$ , лежащей внутри какого-либо координатного октанта (пусть, для определенности, первого, т. е. в области  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $z > 0$ ; обозначим ее  $(+, +, +)$ ). Для того чтобы построить систему, полную на всем  $S_d$ , следует каждую из функций  $\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)$  продолжить гладко на весь эллипсоид по правилу: продолжение по  $x$  (соответственно, по  $y$  или по  $z$ ) четное при  $i_1 = 0$  (соответственно, при  $i_2 = 0$  или  $i_3 = 0$ ) и нечетное при  $i_1 = 1$  (соответственно, при  $i_2 = 1$  или  $i_3 = 1$ ). Так, например, переход из октанта  $(+, +, +)$  в октант  $(-, +, +)$  осуществляется через часть плоскости  $x = 0$ , или (в эллипсоидальных координатах  $\xi_1 = 0$ ) по формуле  $w(x, y, z) = (-1)^{i_1} w(-x, y, z)$ . При переходе через плоскость  $y = 0$  имеем  $w(x, y, z) = (-1)^{i_2} w(x, -y, z)$ . Заметим, что совпадение граничных условий для у. в. э. ф. на правом конце отрезка  $[0, 1]$  и на левом конце отрезка  $[1, \rho^2]$  означает, что четность функции  $w$  по переменной  $y$  в области между ветвями критической гиперболы  $x^2/(a^2 - b^2) + z^2/(c^2 - b^2) = 1$ , где  $\xi_2 = 1$ , и вне ее, где  $\xi_1 = 1$ , одинакова. Подобным образом в плоскости  $z = 0$  выделяется область внешняя по отношению к эллипсу  $x^2/(a^2 - c^2) + y^2/(b^2 - c^2) = 1$ , где  $\xi_2 = \rho^2$ , и внутренняя, где  $\xi_3 = \rho^2$ . В дальнейшем выбор граничного условия для р. в. э. ф., отвечающего значению  $i_3$ , обеспечит одну и ту же четность по  $z$  в обеих указанных областях плоскости  $z = 0$ ; при этом  $w(x, y, z) = (-1)^{i_3} w(x, y, -z)$ . Очевидно, переход из первого координатного октанта  $(+, +, +)$  в любой другой может быть представлен композицией переходов через соответствующие координатные плоскости, при этом каждый раз исходная функция  $w$  умножается на  $(-1)^{i_i}$ ; например, при переходе из  $(+, +, +)$  в  $(-, +, -)$  имеем  $w(x, y, z) = (-1)^{i_1} (-1)^{i_3} w(-x, y, -z)$ .

Объединяя все указанным образом продолженные функции для всех наборов  $(i_1, i_2, i_3)$  и нормируя их условием

$$(2.6) \quad \int_{\Pi} [\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)]^2 \sigma(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = 1/8,$$

получаем полную ортонормированную систему на всем эллипсоиде  $S_d$ .

Полнота полученной системы функций следует из того факта, что каждая функция из  $L^2(S_d)$  может быть представлена в виде суммы восьми слагаемых различной четности относительно координатных плоскостей:  $u = v_0 + xv_1 + yv_2 + zv_3 + xuv_4 + xzv_5 + yzv_6 + xzuv_7$  (все  $v_i = v_i(x^2, y^2, z^2)$ ), причем такое представление единственно. Каждое из слагаемых разложим в ряд по системе функций  $\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)$ , удовлетворяющих соответствующим данной четности граничным ус-

ловиям; это разложение будет справедливо во всех координатных октантах. Суммируя полученные восемь рядов, получаем разложение заданной функции в ряд по п. в. э. ф. на всем эллипсоиде  $S_a$ . Ортогональность с весом  $\sigma(\xi_1, \xi_2)$  на всем эллипсоиде п. в. э. ф., отвечающих различным точкам спектра и одному и тому же набору  $(i_1, i_2, i_3)$ , следует из самосопряженности задачи (см. [17]); если же наборы граничных условий двух п. в. э. ф. различны, то ортогональность этих функций следует из того, что в половине октантов интеграл в левой части (2.5) будет иметь знак тот же, что и в первом октанте, а в оставшихся — противоположный, абсолютная величина этого интеграла не зависит от октанта. Здесь уместна следующая аналогия. Как известно, на отрезке  $[0, \pi]$  каждая из систем функций  $\{\sin(kx)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , и  $\{\cos(kx)\}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , является полной в  $L^2[0, \pi]$ . В то же время совокупность функций  $\{1, \cos(kx), \sin(kx), k = 1, 2, \dots\}$  представляет собой полную ортогональную систему в  $L^2[-\pi, \pi]$ ; связь между ней и системами  $\{\sin(kx)\}$ ,  $\{\cos(kx)\}$  очевидна: всякая функция, определенная на  $[-\pi, \pi]$ , является суммой четной и нечетной функций.

Далее под  $\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)$  будем понимать функции, определенные на поверхности некоторого эллипсоида, совпадающие с п. в. э. ф. на некотором октанте и продолженные на остальную часть эллипсоида в соответствии с  $(i_1, i_2, i_3)$ . Будем считать, что  $\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)$  нормированы условием (2.6). Введенные таким образом функции  $\Psi_n^m$  определены с точностью до знака однозначно.

**З а м е ч а н и е.** Остановимся несколько подробнее на вопросе о полноте в  $L^2(\Pi, \sigma)$  п. в. э. ф., отвечающих фиксированному набору  $(i_1, i_2, i_3)$ . С целью применения к задачам (2.2), (2.3) результатов общей теории многопараметрических самосопряженных спектральных задач избавимся от особых граничных точек с помощью введенной нами в [5] замены независимой переменной. Полагая

$$\zeta_1 = (2/\pi) \arcsin(\sqrt{\xi}), \quad 0 \leq \xi \leq 1,$$

$$\zeta_2 = (2/\pi) \arcsin(\sqrt{\xi - 1}/\sqrt{\rho^2 - 1}), \quad 1 \leq \xi \leq \rho^2,$$

и вводя обозначения  $\lambda_1 = h - l$ ,  $\lambda_2 = l$ ,  $k^2 = \rho^{-2}$ ,  $0 < k^2 < 1$ , получаем уравнения

$$\sqrt{f_1(\zeta_1)} \frac{d}{d\zeta_1} \left\{ \sqrt{f_1(\zeta_1)} \frac{d\tilde{\lambda}_1}{d\zeta_1} \right\} + \frac{\pi^2}{4} q_1(\zeta_1, \lambda_1, \lambda_2) \tilde{\lambda}_1 = 0, \quad 0 \leq \zeta_1 \leq 1,$$

$$\sqrt{f_2(\zeta_2)} \frac{d}{d\zeta_2} \left\{ \sqrt{f_2(\zeta_2)} \frac{d\tilde{\lambda}_2}{d\zeta_2} \right\} + \frac{\pi^2}{4} q_2(\zeta_2, \lambda_1, \lambda_2) \tilde{\lambda}_2 = 0, \quad 0 \leq \zeta_2 \leq 1,$$

где

$$f_1(\zeta_1) = 1 - k^2 \sin^2(\pi\zeta_1/2), \quad f_2(\zeta_2) = 1 - (1 - k^2) \cos^2(\pi\zeta_2/2),$$

$$q_1(\zeta_1, \lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1 + \lambda_2 \cos^2(\pi\zeta_1/2) + k^2 \omega^2 \sin^4(\pi\zeta_1/2),$$

$$q_2(\zeta_2, \lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1 + \lambda_2(\rho^2 - 1) \sin^2(\pi\zeta_2/2) - \\ - \rho^2 \omega^2 [1 - (1 - k^2) \cos^2(\pi\zeta_2/2)]^2;$$

граничные условия (2.3а) переходят, очевидно, в условия  $\tilde{\lambda}_j(0) = 0$ ,  $\tilde{\lambda}_j(1) = 0$ , а условия (2.3б) — в условия  $\tilde{\lambda}'_j(0) = 0$ ,  $\tilde{\lambda}'_j(1) = 0$ ,  $j = 1, 2$ .

(Отметим опечатки, допущенные в [5, с. 816]: в формуле (1.96) вместо  $\tau(1 - k^2)$  должно быть  $-\tau(1 - \rho^2)$ ; в [6, с. 1350, 5-я строка сверху] в формуле для  $\Delta$  вместо 4 должно быть -4.)



Составим определитель из коэффициентов при  $\lambda_j$ :

$$M(\zeta_1, \zeta_2) = \begin{vmatrix} 1 & \cos^2(\pi\zeta_1/2) \\ -1 & (\rho^2 - 1) \sin^2(\pi\zeta_2/2) \end{vmatrix} = (\rho^2 - 1) \sin^2(\pi\zeta_2/2) + \cos^2(\pi\zeta_1/2).$$

Этот определитель положителен всюду в прямоугольнике  $\tilde{\Pi} = [0, 1] \times [0, 1]$ , кроме точки  $\xi_1 = 1, \xi_2 = 0$ . При этом система о. д. у. для  $\tilde{\lambda}_j, j = 1, 2$ , является так называемой левоопределенной с вектором  $(0, 1)$ :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & (\rho^2 - 1) \sin^2(\pi\zeta_2/2) \end{vmatrix} = 1 > 0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos^2(\pi\zeta_1/2) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Тогда к полученной несингулярной задаче применимы общие теоремы о дискретности спектра и полноте с. ф. в  $L^2(\tilde{\Pi}, \tilde{\mathcal{S}})$ , где  $\tilde{\mathcal{S}}(\zeta_1, \zeta_2) = (\pi^4/16) M(\zeta_1, \zeta_2) / \sqrt{f_1(\zeta_1) f_2(\zeta_2)}$  (см. [17] и цитированную там литературу).

2. На интервале  $\rho^2 < \xi_3 < \infty$  решения волнового уравнения Ламе, удовлетворяющие одному из граничных условий (2.3) в точке  $\xi_3^0 = \rho^2$ , существуют при любых значениях  $(h, D)$ . Под р. в. э. ф. понимают функции, отвечающие с. з.  $\{h_n^m, l_n^m\}$  задачи (2.2), (2.3). Для решения задач дифракции среди этих функций выделяют р. в. э. ф. I рода, удовлетворяющие в точке  $\xi = \xi_3^0$  условию (2.3а) при  $i_3 = 1$  или (2.3б) при  $i_3 = 0$  и нормированные на бесконечности условием

$$(2.7) \quad \Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\omega\xi}} \cos(\omega\sqrt{\xi} + \delta_{n,m}) + O\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad \xi \rightarrow \infty,$$

где фаза  $\delta_{n,m}$  подлежит определению, и Р. в. э. ф. III рода, удовлетворяющие на бесконечности нормированному условию излучения

$$(2.8) \quad \Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\omega\xi}} \exp[i(\omega\sqrt{\xi} + \delta_{n,m})] + O\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad \xi \rightarrow \infty,$$

где  $\delta_{n,m}$  та же, что в (2.7). р. в. э. ф. III рода представляется в виде  $\Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi) = \Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi) + i\Lambda_{n,m}^{(2)}(\xi)$ , где р. в. э. ф. II рода  $\Lambda_{n,m}^{(2)}(\xi)$  при больших  $\xi$  имеет асимптотику

$$\Lambda_{n,m}^{(2)}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\omega\xi}} \sin(\omega\sqrt{\xi} + \delta_{n,m}) + O\left(\frac{1}{\xi}\right), \quad \xi \rightarrow \infty.$$

Функции  $\Lambda^{(3)}$  и пары функций  $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}$  определяются с точностью до знака однозначно. Замена  $\delta_{n,m}$  на  $\delta_{n,m} + \pi$  влечет изменение знака у  $\Lambda^{(3)}, \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}$ . Многочисленные расчеты показали, в частности, что если использовать методы и алгоритмы [6], то получим для фазы

$$\delta_{n,m} = -\pi [i_1 + i_2 + (1 - i_3)]/2 - \pi l.$$

Нам неизвестно аналитическое доказательство этой формулы.

Для вронскиана  $W$  фундаментальной системы  $\Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi)$ ,  $\Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi)$  справедливо

$$(2.9) \quad W_{n,m} = W\{\Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi), \Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi)\} = i/[2\sqrt{f(\xi)}].$$

*Разделение переменных для (1.4) в в.с.с.к.* В.с.с.к. получается вращением вокруг большой оси эллипсов плоской эллиптической системы координат, состоящей из взаимно ортогональных софокусных эллипсов и гипербол. Если  $d$  — фокусное расстояние этих эллипсов, а  $z$  — ось вращения, то связь между декартовыми координатами точки  $(x, y, z)$  и ее сфероидальными координатами  $(\xi, \eta, \varphi)$  дается формулами

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2} \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \varphi, & y &= \frac{d}{2} \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \varphi, \\ z &= \frac{d}{2} \xi \eta, & \xi &\in [1, \infty), \quad \eta \in [-1, 1], \quad \varphi \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Поверхность  $\xi = \xi_0$  есть вытянутый сфероид с фокусами в точках  $(0, 0, \pm d/2)$  и полуосями  $b$ ,  $b$ ,  $a$ :

$$a > b, \quad b = \frac{d}{2} \sqrt{\xi_0^2 - 1}, \quad a = \frac{d}{2} \xi_0, \quad \xi_0 > 1;$$

значение  $\eta = 0$  соответствует экватору сфероида (его пересечению с плоскостью  $z = 0$ ). При  $\xi_0 = 1$  получаем бесконечно тонкий стержень длины  $d$ ; при  $\xi \rightarrow \infty$  сфероидальные координаты асимптотически переходят в сферические  $r, \theta, \varphi$ , причем  $r = d\xi/2$ ,  $\eta = \cos \theta$ .

В в.с.с.к. оператор Лапласа имеет вид (см., например, [18])

$$\Delta = \frac{4}{d^2 (\xi^2 - \eta^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^2 - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} (1 - \eta^2) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right\}$$

и уравнение (1.4) допускает разделение переменных, т. е. имеет частные решения вида

$$u = S_{ml}(\eta) R_{ml}(\xi) \exp(\pm im\varphi), \quad m = 0, 1, \dots, \quad l = m, m+1, \dots$$

В.у.с.ф.  $S_{ml}(\eta)$  являются решениями сингулярных самосопряженных задач Штурма — Лиувилля

$$(2.10a) \quad \frac{d}{d\eta} (1 - \eta^2) \frac{d}{d\eta} S + \left[ \lambda + c^2 (1 - \eta^2) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] S = 0, \quad -1 < \eta < 1,$$

$$(2.10b) \quad S(\eta) \text{ ограничено при } \eta \rightarrow \pm(1 - 0),$$

где  $\lambda$  — константа разделения,  $c = \hat{k}d/2$  — безразмерный параметр, пропорциональный отношению фокусного расстояния к длине волны. Под  $S_{ml}(\eta)$  понимается далее с.ф. задачи (2.10), отвечающая с.з.  $\lambda = \lambda_{ml}(c)$  и нормированная требованием

$$\int_{-1}^1 S_{ml}^2(c, \eta) d\eta = 1, \quad m = 0, 1, \dots, \quad l = m, m+1, \dots$$

Известно, что при каждом фиксированном  $m$ ,  $m \geq 0$ , задача (2.10) имеет счетный набор с.з.  $\lambda_{ml}(c)$ , возрастающих при увеличении индекса  $l$  ( $\lambda_{ml}(c) \rightarrow \infty$  при  $l \rightarrow \infty$ ), а соответствующие им с.ф. образуют полную ортогональную систему в  $L^2[-1, 1]$  (нумерация с.ф. выбрана так, чтобы  $S_{ml}(\eta)$  имела  $l - m$  нулей на  $(-1, 1)$ ).

В.р.с.ф.  $R_{ml}(c, \xi)$  являются решениями уравнения

$$(2.11) \quad \frac{d}{d\xi}(\xi^2 - 1) \frac{d}{d\xi} R_{ml} + \left[ c^2(\xi^2 - 1) - \lambda_{ml}(c) - \frac{m^2}{\xi^2 - 1} \right] R_{ml} = 0, \quad 1 < \xi < \infty,$$

где  $\lambda_{ml}(c)$  — с.з. задачи (2.10). В задачах дифракции используются следующие в.р.с.ф., выделяемые граничными условиями:

в.р.с.ф. I рода  $R_{ml}^{(1)}(c, \xi)$  однозначно определяется как решение уравнения (2.11), ограниченное при  $\xi \rightarrow 1 + 0$  и нормированное на бесконечности условием

$$R_{ml}^{(1)}(c, \xi) = \frac{1}{c\xi} \cos \left( c\xi - \frac{l+1}{2} \pi \right) + O \left( \frac{1}{\xi^2} \right), \quad \xi \rightarrow \infty;$$

в.р.с.ф. II рода  $R_{ml}^{(2)}(c, \xi)$  однозначно определяется из уравнения (2.11) и условия на бесконечности

$$R_{ml}^{(2)}(c, \xi) = \frac{1}{c\xi} \sin \left( c\xi - \frac{l+1}{2} \pi \right) + O \left( \frac{1}{\xi^2} \right), \quad \xi \rightarrow \infty;$$

$$\text{в.р.с.ф. III рода } R_{ml}^{(3)}(c, \xi) = R_{ml}^{(1)}(c, \xi) + i R_{ml}^{(2)}(c, \xi).$$

Для вронскиана  $W$  функций  $R_{ml}^{(1)}(c, \xi)$ ,  $R_{ml}^{(3)}(c, \xi)$  справедливо

$$W[R_{ml}^{(1)}(c, \xi), R_{ml}^{(3)}(c, \xi)] = i/[c(\xi^2 - 1)].$$

### § 3. Разложения функции Грина и плоских волн по волновым эллипсоидальным и сфероидальным функциям

Разложения указанных величин по в.с.ф. известны (см. [18]) и приводятся ниже в п. 2; в п. 1 приведем, следуя [1], [2], [18], полный вывод разложений поля точечного источника и плоских звуковых волн по в.э.ф. по причинам, отмеченным во Введении.

#### 1. Функция влияния точечного источника

$$(3.1) \quad G(r, r') = -[4\pi |r - r'|]^{-1} \exp(i\hat{k} |r - r'|)$$

является решением уравнения

$$(3.2) \quad (\Delta + \hat{k}^2) G(r, r') = -\delta(r - r')$$

и удовлетворяет на бесконечности условиям излучения Зоммерфельда.

Занумеруем произвольным образом п.в.э.ф., определенные на всем эллипсоиде и нормированные условием (2.6), и тем же номером снабдим соответствующие

им р.в.э.ф. Следуя [1], [2], будем искать разложение функции Грина  $G(r, r')$  по в.э.ф. в виде

$$(3.3) \quad G(r, r') = \sum_n \Psi_n(\xi_1, \xi_2) \Psi_n(\xi_1', \xi_2') g_n(\xi_3, \xi_3'),$$

учитывая, что справедливо соотношение

$$(3.4) \quad \delta(r - r') = \delta(\xi_1 - \xi_1') \delta(\xi_2 - \xi_2') \delta(\xi_3 - \xi_3') / (h_1 h_2 h_3),$$

где  $h_j$  — коэффициенты Ламе э.с.к.:  $h_1^2 = (a^2 - b^2)(\xi_1 - \xi_2) \times (\xi_1 - \xi_3) / [4f(\xi_1)]$ ;  $h_2, h_3$  получаются отсюда циклической подстановкой индексов.

Из полноты и ортонормированности системы  $\Psi_n(\xi_1, \xi_2)$  в  $L^2(S_d)$  следует, что

$$(3.5) \quad \sigma(\xi_1, \xi_2) \sum_n \Psi_n(\xi_1, \xi_2) \Psi_n(\xi_1', \xi_2') = \delta(\xi_1 - \xi_1') \delta(\xi_2 - \xi_2').$$

Действительно, для произвольной гладкой функции  $\varphi(\xi_1, \xi_2) = \sum_n \varphi_n \Psi_n(\xi_1, \xi_2)$  имеем

$$\begin{aligned} \int_{S_d} \varphi(\xi_1, \xi_2) \sigma(\xi_1, \xi_2) \sum_n \Psi_n(\xi_1, \xi_2) \Psi_n(\xi_1', \xi_2') d\xi_1 d\xi_2 = \\ = \sum_n \varphi_n \left[ \int_{S_d} \sigma(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^2(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 \right] \Psi_n(\xi_1', \xi_2') = \\ = \sum_n \varphi_n \Psi_n(\xi_1', \xi_2') = \varphi(\xi_1', \xi_2'). \end{aligned}$$

Обозначим  $P = P(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = [(a^2 - b^2)(\xi_1 - \xi_2)(\xi_2 - \xi_3)(\xi_3 - \xi_1)]^{-1}$ . Подстановка (3.3) в левую часть (3.2) с учетом (2.4) дает

$$\begin{aligned} (\Delta + \hat{k}^2) \left[ \sum_n \Psi_n(\xi_1, \xi_2) \Psi_n(\xi_1', \xi_2') g_n(\xi_3, \xi_3') \right] = \\ = \sum_n \Psi_n(\xi_1', \xi_2') \{ 4P [(\xi_3 - \xi_2)L_1 + (\xi_1 - \xi_3)L_2 + (\xi_2 - \xi_1)L_3] + \\ + \frac{\omega^2}{a^2 - b^2} \} \Psi_n(\xi_1, \xi_2) g_n(\xi_3, \xi_3') = \\ = 4(\xi_2 - \xi_1)P \sum_n \Psi_n(\xi_1', \xi_2') \Psi_n(\xi_1, \xi_2) [L_3 + q(\xi_3, h, l)/4] g_n(\xi_3, \xi_3'). \end{aligned}$$

С другой стороны, из (3.4), (3.5) следует, что

$$\begin{aligned} \delta(r - r') = \sigma(\xi_1, \xi_2) \sum_n \Psi_n(\xi_1', \xi_2') \Psi_n(\xi_1, \xi_2) \delta(\xi_3 - \xi_3') / (h_1 h_2 h_3) = \\ = 8(\xi_2 - \xi_1) (P/\sqrt{a^2 - b^2}) \sqrt{f(\xi_3)} \delta(\xi_3 - \xi_3') \sum_n \Psi_n(\xi_1', \xi_2') \Psi_n(\xi_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Окончательно из (3.2) получаем, что функция  $g_n(\xi_3, \xi_3')$  является решением уравнения

$$\frac{d}{d\xi_3} \left( \sqrt{f(\xi_3)} \frac{dg_n}{d\xi_3} \right) + \frac{q(\xi_3, h, l)}{4\sqrt{f(\xi_3)}} g_n = 2\delta(\xi_3 - \xi_3') / \sqrt{a^2 - b^2},$$

удовлетворяющим в точке  $\xi_3^0 = \rho^2$  граничному условию (2.3а) или (2.3б) соответственно и условию излучения на бесконечности. Такое решение дается, с учетом (2.9), выражением (см. [12])

$$(3.6) \quad g_n(\xi_3, \xi_3') = \frac{4i}{\sqrt{a^2 - b^2}} \begin{cases} \Lambda_n^{(1)}(\xi_3) \Lambda_n^{(3)}(\xi_3'), & \xi_3 < \xi_3', \\ \Lambda_n^{(1)}(\xi_3') \Lambda_n^{(3)}(\xi_3), & \xi_3 > \xi_3'. \end{cases}$$

Выполнение для  $g_n$  условий излучения следует из (2.8) и справедливости соотношения

$$(3.7) \quad (a^2 - b^2) \xi_3 = r^2 + O(1), \quad r \rightarrow \infty$$

(соотношение (3.7) следует из (2.1), откуда  $\lambda = r^2 + O(1)$ ,  $r \rightarrow \infty$ ).

Согласно [2], ряд (3.3), где  $g_n$  вычисляются по (3.6), сходится абсолютно и равномерно по  $\xi_3$  на  $[\rho^2 + \delta, \xi_3' - \delta]$  и при  $\xi_3 \geq \xi_3' + \delta$  ( $0 < \delta$  мало) и его можно почленно дифференцировать любое число раз.

Для того чтобы получить разложение плоской волны (п.в.) по в.э.ф., зафиксируем  $r = (r, \varphi, \theta)$  и устремим  $r' = (r', \varphi', \theta')$  к бесконечности в направлении, заданном углами  $\varphi', \theta'$ , где  $(r, \varphi, \theta), (r', \varphi', \theta')$  — сферические координаты точки наблюдения и точки расположения монополярного источника излучения (углы  $\theta, \theta'$  отсчитываются от оси  $x$ ). При  $r' \rightarrow \infty$  справедливо

$$|r - r'| = r' - r [\cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')] + O(1/r'),$$

откуда

$$(3.8) \quad |r - r'|^{-1} \exp(i\hat{k} |r - r'|) = \\ = \exp\{i\hat{k}r' - i\hat{k}r [\cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos(\varphi - \varphi')]\} \{r' [1 + O(1/r')]\}^{-1}.$$

Тогда в (3.1) при  $r' \rightarrow \infty$  множителем входит выражение для п.в., распространяющейся в направлении, противоположном направлению вектора  $r'$ , т. е. в направлении  $l_0 = (1, \varphi_0, \theta_0)$ , где  $\theta_0 = \pi - \theta'$ ,  $\varphi_0 = \varphi' - \pi$ . В результате из (3.1), (3.8) получим

$$(3.9) \quad G(r, r') = -\frac{1}{4\pi} \exp[-i\hat{k}(l, r)] \frac{\exp(i\hat{k}r')}{r'} [1 + O(1/r')], \quad r' \rightarrow \infty,$$

где  $l = (1, \varphi', \theta')$ , а из (2.8), (3.7) следует

$$(3.10) \quad \Lambda_n^{(3)}(\xi_3(r')) = \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \exp(i\hat{k}r')}{\sqrt{\omega} r'} \exp(i\delta_n) [1 + O(1/r')], \quad r' \rightarrow \infty.$$

Подставив в (3.6) асимптотическую формулу (3.10) и сравнив ряд (3.3) с (3.9) при больших значениях  $r'$ , получим разложение п.в. в ряд по в.э.ф.:

$$(3.11) \quad \exp[-i\hat{k}(l, r)] = -\frac{16\pi i}{\sqrt{\omega}} \sum_n \exp(i\delta_n) \Psi_n(\xi_1, \xi_2) \Psi_n(\xi_1', \xi_2') \Lambda_n^{(1)}(\xi_3).$$

Здесь угловые эллипсоидальные координаты  $\xi_1', \xi_2'$  связаны с  $\theta', \varphi'$  соотношениями

$$\xi_1' \xi_2' = \rho^2 \cos^2 \theta',$$

$$(3.12) \quad (\xi_1' - 1)(\xi_2' - 1) = -(\rho^2 - 1) \sin^2 \theta' \cos^2 \varphi',$$

$$(\xi_1' - \rho^2)(\xi_2' - \rho^2) = \rho^2 (\rho^2 - 1) \sin^2 \theta' \sin^2 \varphi'.$$

Выражение (3.11) упрощается, если направление падения п.в. совпадает с какой-нибудь из координатных осей. Зафиксируем эти формулы, которые, в частности, приводят к удобным тестовым задачам для в.э.ф. и позволяют исследовать сходимость разложений по в.э.ф. с заданной точностью вычислений, т. е. оценить необходимое количество гармоник.

1.1. *Падение п.в. в отрицательном направлении оси x.* В этом случае  $l = (1, 0, 0)$  и из (3.12) получаем

$$(\xi_1' - 1)(\xi_2' - 1) = 0, \quad (\xi_1' - \rho^2)(\xi_2' - \rho^2) = 0,$$

откуда  $\xi_1' = 1, \xi_2' = \rho^2$ . Тогда в (3.11) отличны от нуля только слагаемые, соответствующие наборам  $(i_1, i_2, i_3)$ , равным  $(0, 0, 0)$  или  $(1, 0, 0)$ : только в этих случаях  $\Psi_n(1, \rho^2) \neq 0$ . Окончательно имеем

$$(3.13a) \quad \exp(-ikx) = \exp(-i\omega \sqrt{\xi_1 \xi_2 \xi_3 / \rho^2}) =$$

$$= -\frac{16\pi i}{\sqrt{\omega}} \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \exp(i\delta_{n,m}) \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(1, \rho^2) \Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3) \right]_{(0,0,0)} + \right.$$

$$\left. + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \exp(i\delta_{n,m}) \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(1, \rho^2) \Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3) \right]_{(1,0,0)} \right\}.$$

1.2. *Падение п.в. в отрицательном направлении оси y,  $l = (1, 0, \pi/2)$ .* Из (3.12) получим  $\xi_1' \xi_2' = 0$  и  $(\xi_1' - \rho^2)(\xi_2' - \rho^2) = 0$ , т. е.  $\xi_1' = 0, \xi_2' = \rho^2$ . Тогда справедливо

$$(3.13b) \quad \exp(-iky) = \exp[-i\omega \sqrt{-(\xi_1 - 1)(\xi_2 - 1)(\xi_3 - 1)/(\rho^2 - 1)}] =$$

$$= -\frac{16\pi i}{\sqrt{\omega}} \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \exp(i\delta_{n,m}) \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(0, \rho^2) \Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3) \right]_{(0,0,0)} + \right.$$

$$\left. + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \exp(i\delta_{n,m}) \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(0, \rho^2) \Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3) \right]_{(0,1,0)} \right\}.$$

1.3. *Падение п.в. в отрицательном направлении оси z,  $l = (1, \pi/2, \pi/2)$ .* Приведем окончательную формулу:

$$(3.13в) \quad \exp(-ikz) = \exp[-i\omega \sqrt{(\xi_1 - \rho^2)(\xi_2 - \rho^2)(\xi_3 - \rho^2)/[(\rho^2 - 1)\rho^2]}] =$$

$$= -\frac{16\pi i}{\sqrt{\omega}} \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \exp(i\delta_{n,m}) \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(0, 1) \Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3) \right]_{(0,0,0)} + \right.$$

$$\left. + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \exp(i\delta_{n,m}) \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(0, 1) \Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3) \right]_{(0,0,1)} \right\}.$$

2. Совершенно аналогично предыдущему, с очевидными упрощениями получаются разложения функции Грина и плоских звуковых волн по в.с.ф. (см. [18]).

Ограничимся приведением известных формул для п.в. Пусть п.в. падает в плоскости  $(x, z)$  под углом  $\theta_0$  к положительному направлению оси  $z$ :

$$u' = \exp [ik(x \sin \theta_0 + z \cos \theta_0)].$$

Тогда в в.с.с.к. имеем

$$(3.14a) \quad u'(\xi, \eta, \varphi) = \exp \{ic [\eta \xi \cos \theta_0 + \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \theta_0 \cos \varphi]\} = \\ = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} i^l (1 - \delta_{0m}) S_{ml}(c, \cos \theta_0) S_{ml}(c, \eta) R_{ml}^{(1)}(c, \xi) \cos(m\varphi),$$

где  $\delta_{0m}$  — символ Кронекера. Если  $\theta_0 = 0$ , т.е. п.в. падает в направлении оси  $z$ , формула (3.14a) упрощается и приобретает вид

$$(3.14b) \quad \exp(ic\xi\eta) = 2 \sum_{l=0}^{\infty} i^l S_{0l}(c, 1) S_{0l}(c, \eta) R_{0l}^{(1)}(c, \xi).$$

#### § 4. Решение задач дифракции методом разделения переменных

В том случае, когда рассеивающая поверхность  $S$  имеет форму сфероида или трехосного эллипсоида, разложения (3.11), (3.14) позволяют получить точные решения задач (1.3)—(1.5).

1. *Характеристики рассеяния трехосного эллипсоида.* Будем искать разложение рассеянной волны  $u^s(r)$  в виде

$$(4.1) \quad u^s(r) = \sum_n u_n \Psi_n(\xi_1, \xi_2) \Psi_n(\xi_1', \xi_2') \Lambda_n^{(3)}(\xi_3).$$

Каждое слагаемое в (4.1) является решением уравнения (1.4) и удовлетворяет условию (1.3). Подстановка (3.11) и (4.1) в граничные условия (1.5) дает  $u_n = (16\pi i / \sqrt{\omega}) \exp(i\delta_n) w_n(\xi_3^*)$ , где  $\xi_3^* = a^2/(a^2 - b^2) \rightarrow$  значение  $\xi_3$ , соответствующее эллипсоиду  $S$ ,

$$w_n(\xi_3^*) = \begin{cases} \Lambda_n^{(1)}(\xi_3^*) / \Lambda_n^{(3)}(\xi_3^*) & \text{для задачи Дирихле,} \\ \frac{d}{d\xi_3} \Lambda_n^{(1)}(\xi_3^*) \left[ \frac{d}{d\xi_3} \Lambda_n^{(3)}(\xi_3^*) \right]^{-1} & \text{для задачи Неймана.} \end{cases}$$

Из (3.10) следует, что  $\Lambda_n^{(3)}(\xi_3) = \sqrt{\omega} \exp(i\delta_n) \exp(ikr)/(\hat{k}r) + O(1/r^2)$ ,  $r \rightarrow \infty$ , так что для амплитуды рассеяния в (1.2) справедливо

$$(4.2) \quad F(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = \sqrt{\omega} \sum_n u_n \exp(i\delta_n) \Psi_n(\xi_1, \xi_2) \Psi_n(\xi_1', \xi_2'),$$

где угловые эллипсоидальные координаты  $\xi_1, \xi_2$  связаны с угловыми сферическими координатами  $\theta, \varphi$  такими же соотношениями, что и  $\xi_1', \xi_2'$  с  $\theta', \varphi'$  (см. формулы (3.12)).

Исходя из (1.6), выведем формулу для полного поперечного сечения рассеяния, устранив неточности, допущенные в [1], [2]. Учитывая, что

$$Q = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{k^2 r^2} \iint_{\xi_3 = r^2/(a^2 - b^2)} |F|^2 h_1 h_2 d\xi_1 d\xi_2,$$

и используя разложения (4.2), выражения для коэффициентов Ламе  $h_1, h_2$  и соотношения (2.5), (3.7), получаем

$$(4.3) \quad Q = \frac{64\pi^2 (a^2 - b^2)}{\omega} \sum_n |w_n(\xi_3^*)|^2 \Psi_n^2(\xi_1', \xi_2').$$

Ряд (4.1) упрощается, если п.в. падает по какой-либо из главных осей эллипсоида. Ограничимся случаем падения п.в. по наибольшей оси  $S$ :  $u^i(r) = \exp(-ikx)$ . Рассеянная волна вычисляется по формуле

$$u^s(r) = \frac{16\pi i}{\sqrt{\omega}} \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \exp(i\delta_{n,m}) \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(1, \rho^2) w_{n,m}(\xi_3^*) \Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi_3) \right]_{(0,0,0)} + \right. \\ \left. + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \exp(i\delta_{n,m}) \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(1, \rho^2) w_{n,m}(\xi_3^*) \Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi_3) \right]_{(1,0,0)} \right\},$$

где

$$w_{n,m}(\xi_3^*) = \begin{cases} \Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3^*) / \Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi_3^*) & \text{для задачи Дирихле} \\ & \text{(мягкий эллипсоид),} \\ \frac{d}{d\xi_3} \Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3^*) \left[ \frac{d}{d\xi_3} \Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi_3^*) \right]^{-1} & \text{для задачи Неймана} \\ & \text{(жесткий эллипсоид);} \end{cases}$$

отсюда и из (4.2) для амплитуды рассеяния имеем

$$(4.4) \quad F(\theta, \varphi, 0, 0) = \\ = 16\pi i \left\{ \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \exp(2i\delta_{n,m}) \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(1, \rho^2) w_{n,m}(\xi_3^*) \right]_{(0,0,0)} + \right. \\ \left. + \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \exp(2i\delta_{n,m}) \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(1, \rho^2) w_{n,m}(\xi_3^*) \right]_{(1,0,0)} \right\};$$

для поперечника в формуле (4.3) следует положить  $\xi_1' = 1, \xi_2' = \rho^2$  и взять в.э.ф., отвечающие наборам  $(0, 0, 0)$  и  $(1, 0, 0)$ .

2. *Характеристики рассеяния вытянутого сфероида.* Приведем основные формулы, характеризующие рассеяние п.в. на вытянутом сфероиде. Для определенности будем считать, что п.в. падает в плоскости  $(x, z)$  под углом  $\theta_0$  к положительному направлению оси  $z$  (см. формулу (3.14)). Обозначим

$$\chi_{ml}(c, \xi) = \begin{cases} \frac{d}{d\xi} R_{ml}^{(1)}(c, \xi) \left[ \frac{d}{d\xi} R_{ml}^{(3)}(c, \xi) \right]^{-1} & \text{для жесткого сфероида,} \\ R_{ml}^{(1)}(c, \xi) / R_{ml}^{(3)}(c, \xi) & \text{для мягкого сфероида.} \end{cases}$$



Тогда для решения задач (1.3)—(1.5) в в. с. с. к. справедливо

$$u^s(\xi, \eta, \varphi) = -2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} i^l (2 - \delta_{0m}) S_{ml}(c, \cos \theta_0) S_{ml}(c, \eta) \times \\ \times R_{ml}^{(3)}(c, \xi) \chi_{ml}(c, \xi_0) \cos(m\varphi).$$

Учитывая асимптотическую связь сфероидальных координат со сферическими, получаем разложение для амплитуды рассеяния в дальней зоне:

$$(4.5a) \quad F(\theta, \varphi) = \\ = 2i \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) S_{ml}(c, \cos \theta_0) S_{ml}(c, \cos \theta) \chi_{ml}(c, \xi_0) \cos(m\varphi).$$

В случае падения п. в. по оси  $z$  формула (4.5a) упрощается:

$$(4.5b) \quad F(\theta) = 2i \sum_{l=0}^{\infty} S_{0l}(c, 1) S_{0l}(c, \cos \theta) \chi_{0l}(c, \xi_0).$$

С учетом ортонормированности в. у. с. ф. на отрезке  $[-1, 1]$  имеем для полного поперечного сечения рассеяния

$$(4.6a) \quad Q = \frac{8\pi}{k^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) S_{ml}^2(c, \cos \theta_0) \operatorname{Re} \chi_{ml}(c, \xi_0).$$

Для падения п. в. по оси  $z$  имеем

$$(4.6b) \quad Q = \frac{8\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} S_{0l}^2(c, 1) \operatorname{Re} \chi_{0l}(c, \xi_0).$$

Поперечник  $Q$  принято нормировать на величину  $2A$ , где  $A$  — площадь геометрической тени сфероида:  $A = (\pi d^2/4) \sqrt{(\xi_0^2 - 1)(\xi_0^2 - \cos^2 \theta_0)}$ .

### § 5. Численные результаты, сравнение с приближенными формулами

Под диаграммой рассеяния (д. р.) будем понимать для сфероидов график  $|F(\theta, \varphi)|$  при фиксированном  $\varphi$  как функции  $\theta$  в полярной системе координат (см. (1.2), (4.5)), для трехосных эллипсоидов — пространственный график поверхности  $|F(\theta, \varphi)|$  как функции  $\theta, \varphi$  в сферической системе координат (см. (4.2), (4.4)).

1. *Расчеты для вытянутых сфероидов.* Кратко опишем некоторые результаты исследований [19], [20] ввиду малодоступности этих изданий, уделив основное внимание тонким сфероидам, т. е. с малым волновым размером  $\hat{k}b = c \sqrt{\xi_0^2 - 1}$  при  $\hat{k}a = c\xi_0 \approx 1$ , и вытянутым сфероидам, т. е. с большим волновым размером  $\hat{k}a$  при  $\hat{k}b \approx 1$ . Данные точных расчетов для этих случаев почти отсутствуют в литературе, что объясняется повышенной трудностью вычислений: для тонких сфероидов необходимо вычислять в. р. с. ф. с достаточной точностью вблизи особой точки  $\xi = 1$  уравнения (2.11); увеличение параметра  $c$  приводит к резким изменениям и сильным осцилляциям в. с. ф., к росту числа гармоник

в разложениях по в. с. ф., к увеличению как нижней, так и верхней границ диапазона номеров существенных гармоник в этих разложениях и необходимости выявления этого диапазона. (Очевидно, что для достаточно вытянутых сфероидов традиционно использовавшиеся разложения по цилиндрическим функциям и функциям Лежандра сходятся плохо, см. [18].)

Асимптотические формулы дифракционных характеристик тонких и вытянутых тел получены в работах М. В. Федорюка и его учеников (см. [7]—[9], [19], [21]—[23] и библиографию в них). В соответствии с общей классификацией для тел вращения, для сфероидов различают следующие асимптотические области параметров: 1)  $\hat{k}a \ll 1$ ,  $\hat{k}b \ll 1$  — область длинноволнового рэлеевского приближения (малые волновые размеры сфероида); 2)  $\hat{k}a \approx 1$ ,  $\hat{k}b \ll 1$  — приближение тонкого тела; 3)  $\hat{k}a \gg 1$ ,  $\hat{k}b \approx 1$  — приближение вытянутого тела; 4)  $\hat{k}a \gg 1$ ,  $\hat{k}b \ll 1$  — приближение тонкого вытянутого тела; 5)  $\hat{k}a \gg 1$ ,  $\hat{k}b \gg 1$ ,  $a/b \approx 1$  — геометрикоакустическое приближение.

Так как, например, метод сращивания асимптотических разложений, развитый в [7]—[9], [19] для тонких тел, не является строго обоснованным, сравнение приближенных формул с точными расчетами представляется существенным, в частности, для выявления границ применимости этих формул. Методы и алгоритмы [4], [6] расчета в. с. ф. позволяют осуществлять такое сравнение, на чем мы коротко остановимся (подробнее см. [19], [20]). Приведенные в этом пункте результаты соответствуют абсолютной точности  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

1.1. О сходимости разложений для плоской волны. Сходимость дифракционных рядов дополнительно контролировалась выполнением равенств (3.14) для п. в. Как показали подробные численные исследования для случая падения п. в. по оси  $z$ , ряды (3.14б) достаточно быстро сходятся и при больших значениях параметра  $s$ , а наибольший вклад вносят слагаемые с номерами  $l \sim s$ , для которых  $\lambda_{0l}(s)$  близко к 0, где  $\lambda_{0l}(s)$  — с. з. задачи (2.10). Ряды (3.14а) по крайней мере быстро сходятся для умеренных значений  $s$  и при значениях  $\theta_0$ , близких к 0 или к  $\pi/2$  (см. [20]). Из асимптотических формул [18] для  $\lambda_{mi}(s)$  и опыта вычислений приближенно получено, что суммирование рядов (3.14), (4.5), (4.6) целесообразно начинать с гармоник с номерами  $l \sim 0.7s$  и продолжать в сторону уменьшения или в сторону увеличения  $l$ , в зависимости от величины  $\tan \theta_0$  модуля очередного слагаемого. Такой способ счета позволяет

при заданной точности выявить основной диапазон существенных гармоник в разложениях и не проводить лишних вычислений. Расположение этого диапазона связано с поведением в. у. с. ф. при  $\eta \sim 1 - 0$  и в. р. с. ф. при  $\xi \sim 1 + 0$  и зависит от перемещения точки поворота в уравнениях для в. у. с. ф. и в. р. с. ф. с одного интервала на другой: при  $l \ll s$  малы в. у. с. ф., а при  $l \gg s$  малы в. р. с. ф. Границы численно найденных диапазонов опровергают существующие в литературе гипотезы (см. об этом в [20]) о необходимости суммирования  $\sim 1.5s \div 2s$  гармоник для сходимости разложений п. в. и дифракционных рядов. Для больших  $s$  количество гармоник оказывается примерно на порядок меньше. В табл. 1 приведены диапазоны основных гармоник  $l_{\min} \div l_{\max}$  в разложении

Таблица 1

$b : a$	$\xi_0$	$c$					
		10	20	30	40	50	100
1 : 111.8	1.00004	0 ÷ 9	2 ÷ 19	10 ÷ 27	15 ÷ 39	21 ÷ 46	49 ÷ 77
1 : 10	1.005	0 ÷ 14	6 ÷ 23	11 ÷ 28	16 ÷ 35	22 ÷ 42	54 ÷ 78
1 : 5	1.02	0 ÷ 14	7 ÷ 24	13 ÷ 32	17 ÷ 37	23 ÷ 45	57 ÷ 79
1 : 2.4	1.1	1 ÷ 18	7 ÷ 26	13 ÷ 34	19 ÷ 45	23 ÷ 54	58 ÷ 94
1 : 1.5	1.34164	2 ÷ 21	8 ÷ 34	—	—	—	58 ÷ 128

Таблица 2

$c$	$l_{\min} \div l_{\max}$	Мягкий сфероид				Жесткий сфероид				
		$\frac{Q}{2A}$	$\frac{\tilde{Q}}{2A}$	$M$	$R$	$\frac{Q}{2A}$	$\frac{\tilde{Q}}{2A}$	$M$	$R$	$\theta_M$
1	0 ÷ 5	17.14	22.50	0.38	-0.31	0.00	—	0.004	—	$\pi$
5	0 ÷ 9	7.37	8.35	2.59	-0.13	0.02	—	0.10	—	0.94
12	1 ÷ 15	4.67	5.10	7.71	-0.09	0.05	—	0.56	—	0.59
25	8 ÷ 25	3.30	3.51	20.00	-0.06	0.09	—	2.25	—	0.40
35	14 ÷ 32	2.86	3.01	31.38	-0.05	0.11	—	4.24	—	0.33
45	20 ÷ 40	2.58	2.70	44.26	-0.05	0.14	—	6.77	—	0.29
100	54 ÷ 78	1.95	2.00	138.66	-0.03	0.25	0.13	28.95	0.47	0.18
150	85 ÷ 111	1.73	1.76	257.12	-0.02	0.34	0.34	59.02	0.00	0.14

Таблица 3

$\xi_0$	$l_{\min} \div l_{\max}$	Мягкий сфероид				Жесткий сфероид				
		$\frac{Q}{2A}$	$\frac{\tilde{Q}}{2A}$	$M$	$ R $	$\frac{Q}{2A}$	$\frac{\tilde{Q}}{2A}$	$M$	$ R $	$\theta_M$
1.342	58 ÷ 128	1.07	1.07	4291.98	0.00	0.94	0.94	3783.16	0.00	0.00
1.155	58 ÷ 102	1.11	1.11	1870.22	0.00	0.90	0.91	1519.84	0.01	0.00
1.005	54 ÷ 78	1.95	2.00	138.66	0.03	0.25	0.13	28.95	0.47	0.18
1.0005	53 ÷ 76	5.20	5.62	60.83	0.08	0.04	—	3.89	—	0.20

п. в. для вытянутых сфероидов при  $\theta_0 = 0$ ; см. также вторые столбцы табл. 2 ( $\xi_0 = 1.005$ ) и 3 ( $c = 100$ ).

1.2. О приближенных формулах для амплитуды рассеяния тонких и вытянутых сфероидов. В случае идеально мягкого тонкого сфероида ( $\xi_0 \rightarrow 1$ ) амплитуда рассеяния представляется в виде ряда по обратным степеням «большого логарифма» (см. [9], [19]):

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad F(\theta, \varphi) = & \sum_{p=1}^{\infty} \frac{c\xi_0}{[\ln(\xi_0^2 - 1)]^p} \int_{-1}^1 G_{p-1}(x) \exp[ic\xi_0(\cos\theta_0 - \\
 & - \cos\theta)x] dx - \frac{1}{2}(\xi_0^2 - 1)(c\xi_0)^3 \sin\theta \sin\theta_0 \int_{-1}^1 \{ \cos\varphi + \\
 & + \frac{1}{8}(\xi_0^2 - 1)(c\xi_0)^2 \sin\theta_0 [2\sin\theta \cos(2\varphi) - \sin\theta_0 \cos\varphi] (1 - x^2) + \\
 & + \frac{1}{192}(\xi_0^2 - 1)^2 (c\xi_0)^4 \sin\theta_0 [4\sin^2\theta \cos(3\varphi) - 4\sin\theta \sin\theta_0 \cos(2\varphi) + \\
 & + \sin^2\theta_0 \cos\varphi] (1 - x^2)^2 \} (1 - x^2) \exp[ic\xi_0(\cos\theta_0 - \cos\theta)x] dx,
 \end{aligned}$$

где  $G_p(x)$  вычисляются рекуррентно:  $G_0(x) \equiv 1$ ,

$$\begin{aligned}
 G_p(x) = & G_{p-1}(x) \ln 4 + \\
 & + \int_{-1}^1 \frac{\exp\{ic\xi_0[|t-x| + (t-x)\cos\theta_0]\} G_{p-1}(t) - G_{p-1}(x)}{|t-x|} dt, \\
 & p = 1, 2, \dots
 \end{aligned}$$

Диапазон применимости суммы первых четырех членов ряда (5.1) численно исследован в [19]. Проводилось сравнение с вычислением амплитуды рассеяния с помощью разложений (4.5). Расчеты показали практически полное совпадение результатов для значений  $c \leq 10$ ,  $\xi_0 \approx 1.0005$  ( $b:a = 1:31.6$ ). По мере роста толщины сфероида результаты расходятся все больше, оставаясь хорошими только для сфероидов малого волнового размера  $kb$ , например для  $\xi_0 = 1.005$  ( $b:a = 1:10$ ) при  $c \leq 5$ . Погрешность оказывается наименьшей при  $\theta_0 = 0$  и нарастает по мере увеличения  $\theta_0$ , достигая максимума при  $\theta_0 = \pi/2$ . Для расширения границ применимости ряда (5.1) нужно более детально исследовать его сходимость.

Асимптотические формулы [7], [8] для амплитуды рассеяния тонкого жесткого сфероида имеют вид

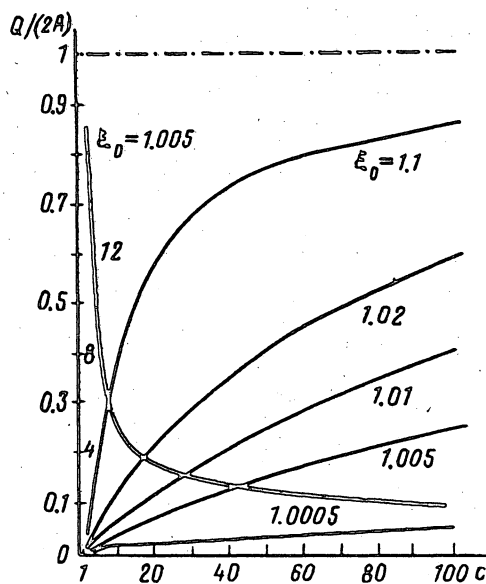
$$(5.2a) \quad F(\theta, \varphi, \varepsilon) = \varepsilon^2 F_0(\theta, \varphi) + O(\varepsilon^4), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где  $\varepsilon^2 = (\xi_0^2 - 1)/\xi_0^2$ ,

$$\begin{aligned}
 (5.2b) \quad F_0(\theta, \varphi) = & -\frac{c^2 \xi_0^2}{\Omega^3} (\sin\Omega - \Omega \cos\Omega) [\Omega \cos\theta_0 + \\
 & + c\xi_0(2\sin\theta \sin\theta_0 \cos\varphi - \sin^2\theta_0)], \quad \Omega = c\xi_0(\cos\theta_0 - \cos\theta).
 \end{aligned}$$

Диапазон применимости формул (5.2) достаточно подробно численно исследован в [19], [20], [24]. Они дают практически точную д. р. при  $kb \leq 0.2$ . С ростом величины  $kb$  усиливается излучение вперед, в направлении падения п. в., не учитываемое асимптотической формулой.

1.3. О формулах геометрической акустики для толстых сфероидов. В случае падения п. в. по оси  $z$  проведено сравнение результатов расчетов нормированных



Фиг. 1

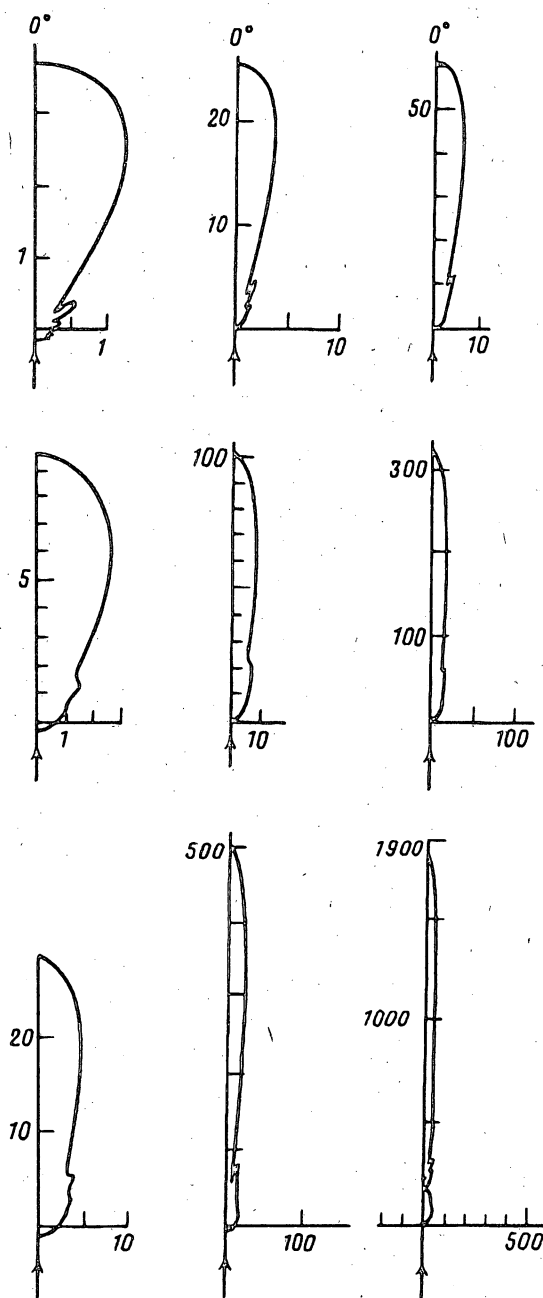
полных поперечных сечений рассеяния  $Q/(2A)$  со следующими приближенными формулами геометрической акустики (см. [10]):

$$(5.3) \quad \frac{\tilde{Q}}{2A} \approx \begin{cases} 1 + 0.9962 [c (\xi_0 - 1/\xi_0)]^{-2/3} & \text{для мягкого сфероида,} \\ 1 - 0.8640 [c (\xi_0 - 1/\xi_0)]^{-2/3} & \text{для жесткого сфероида.} \end{cases}$$

Результаты сравнения точных расчетов по формулам (4.66) с асимптотическими формулами (5.3) при различных  $c$  и  $\xi_0 = 1.005$  приведены в табл. 2 (см. также [20], [24], где указано, что для жестких сфероидов погрешность формулы (5.3) не превышает 10% при  $kb \leq 0.2$ ). Обозначения в табл. 2 и 3:  $l_{\min}, l_{\max}$  — номера начальной и конечной суммируемых гармоник в разложении (3.146) для п. в.;  $M = \max_{0 \leq \theta \leq \pi} |F(\theta)|$ ;  $R = (Q - \tilde{Q})/Q$ ;  $\theta_M: |F(\theta_M)| = M$  (для мягких сфероидов  $\theta_M = 0$ ). Видно, что формулы (5.3) для мягких сфероидов дают хорошее приближение точного решения при меньших волновых размерах рассеивателя, чем для жестких сфероидов. Табл. 3 содержит данные сравнения формул (4.66) и (5.3) при  $c = 100$  и растущей вытянутости тела.

На фиг. 1 приведены графики зависимости  $Q/(2A)$  от величины  $c$  для жестких сфероидов при  $1.0005 \leq \xi_0 \leq 1.01$  (тонкие кривые и левая шкала на оси ординат) и для мягкого сфероида при  $\xi_0 = 1.005$  (жирная кривая и правая шкала на оси ординат).

1.4. О диаграммах рассеяния. Графики на фиг. 2, 3 отражают динамику изменения д. р. при  $\theta_0 = 0$  с ростом  $c$  (слева направо) и ростом  $\xi_0$  (сверху вниз): фиг. 2 — для мягких сфероидов, фиг. 3 — для жестких. Значения параметра  $c = 10, 50, 100$ ; значения  $\xi_0 = 1.0005$  ( $b/a = 1 : 31.6$ ),  $1.02$  ( $b/a = 1 : 5$ ),  $1.1547$  ( $b/a = 1 : 2$ ). Графики на фиг. 4 представляют д. р. для мягкого (правые графики) и жесткого (левые графики) сфероидов при  $\varphi = 0$ ,  $c = 20$ ,  $\xi_0 = 1.005$



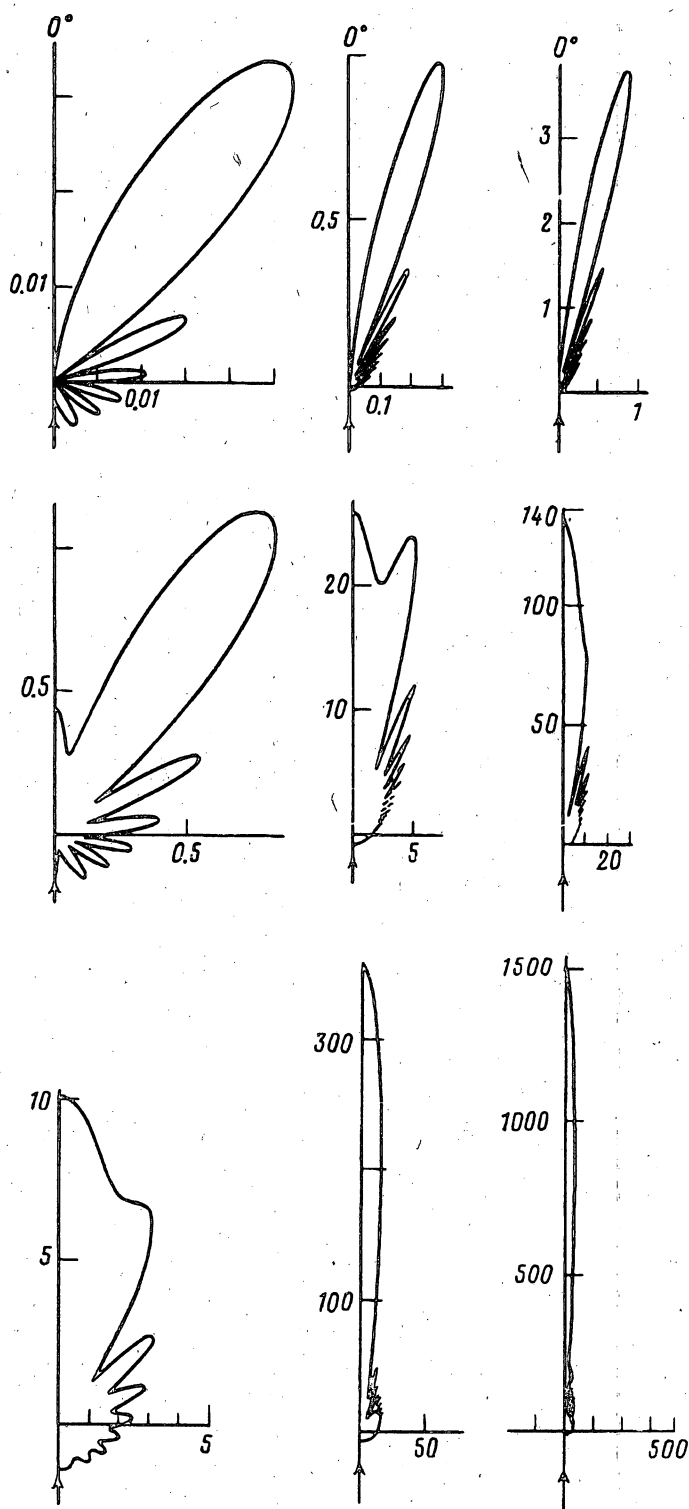
Фиг. 2

( $\hat{k}a = 20.1$ ,  $\hat{k}b = 2.001$ ):  $a$  — для  $\theta_0 = \pi/3$ ,  $b$  — для  $\theta_0 = \pi/4$ ,  $c$  — для  $\theta_0 = \pi/6$ .

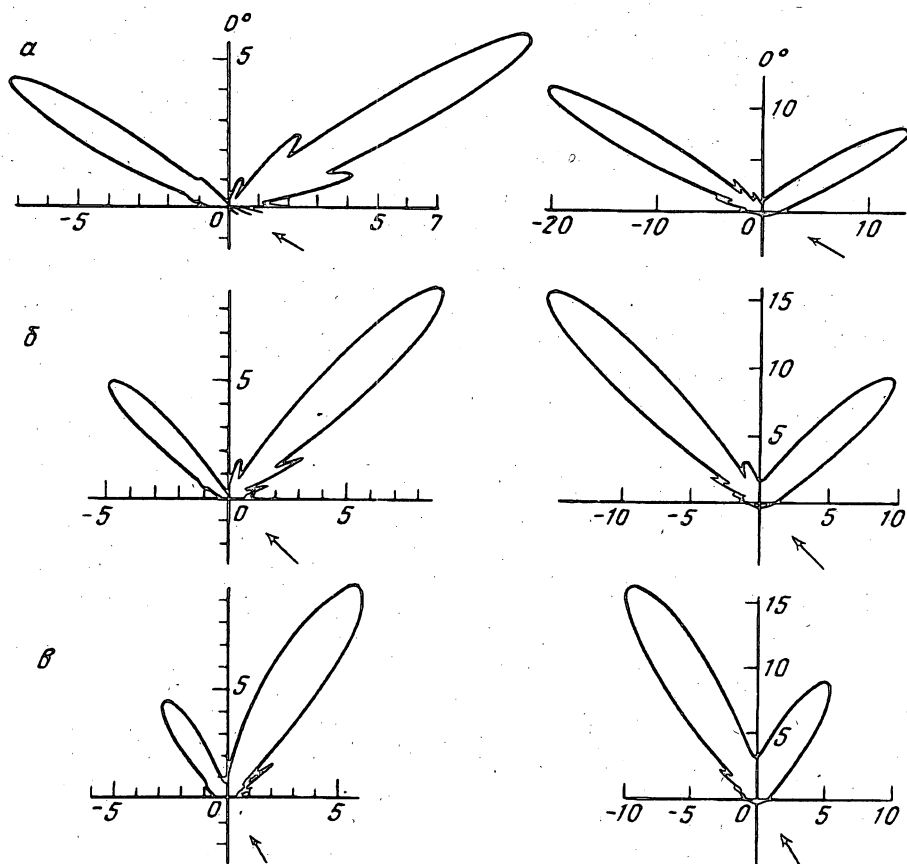
Стрелки указывают направление падения п. в.

О сравнении различных приближенных формул с точными расчетами [19], [20] см. также в [21]—[23].

2. Расчеты для трехосного эллипсоида. Предложенные алгоритмы вычисления



Фиг. 3



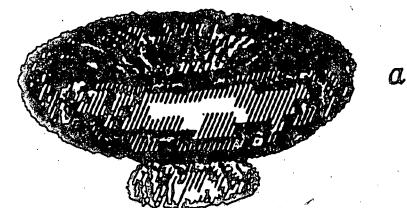
Фиг. 4

п. в. и диаграмм рассеяния трехосных эллипсоидов в виде рядов по в. э. ф. реализованы в виде комплекса программ на языке «3L parallel C» для многопроцессорной ЭВМ на базе сети транспьютеров. В основе параллельной программной реализации лежит концепция farmpr-processor: отдельные коэффициенты ряда вычисляются независимо друг от друга и одинаковым образом на «рядовых» вычислителях, получающих задания от головного процессора и возвращающих ему результаты счета. Распараллеливание позволяет существенно ускорить вычисления.

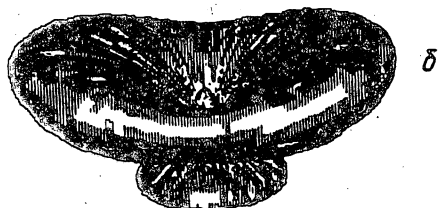
Расчеты проводились для жестких эллипсоидов при падении п. в. в отрицательном направлении оси  $x$  (см. формулы (3.13а), (4.4)). На фиг. 5, 6 приведены результаты некоторых таких расчетов — графики  $|F(\theta, \varphi, 0, 0)|$ .

Фиг. 5 позволяет проследить зависимость д. р. от геометрических параметров эллипсоида. Здесь  $\omega^2 = 10$ , а значения  $\rho^2$  и  $\xi_3^*$  возрастают (от  $a$  к  $\delta$ ) так, что величины  $\xi_3^* - \rho^2$  и  $\hat{k}_c$  остаются неизменными:  $\xi_3^* - \rho^2 = 0.1$ ,  $\hat{k}_c = 1.0$  (параметр  $\xi_3^* - \rho^2 = c^2/(a^2 - b^2)$  характеризует «толщину» эллипсоида  $S$ , случаю  $\xi_3^* - \rho^2 = 0$  соответствует фокальный эллипс). Значения остальных параметров

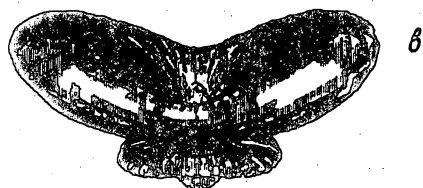




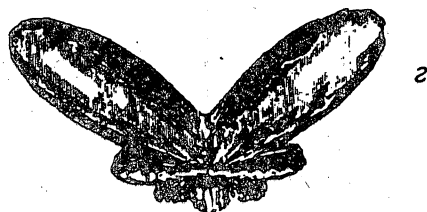
a



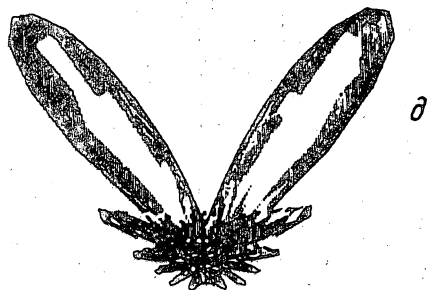
b



v

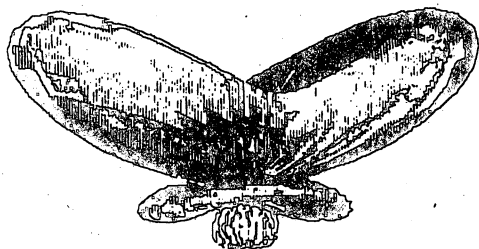


z

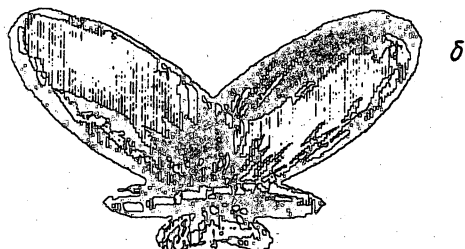


d

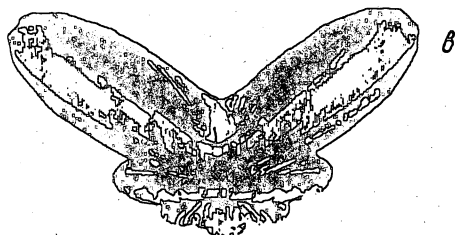
Фиг. 5



a



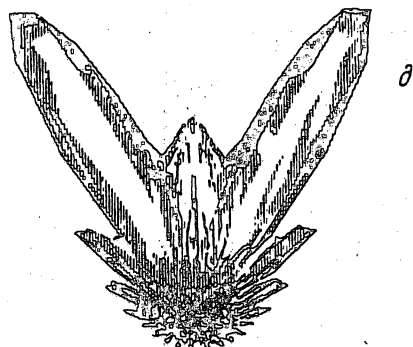
b



v



z



d

Фиг. 6

Таблица 4

	$\rho^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - b^2}$	$\xi_3^* = \frac{a^2}{a^2 - b^2}$	$\xi_3^* - \rho^2$	$n_{\min}$	$n_{\max}$	$(n; m)_{\text{принс}}$
5.0	1.1	1.2	0.1	0	2	0; 0
	3.0	3.1	0.1	0	3	0; 0
	9.0	9.1	0.1	0	4	2; 2
	2.0	3.0	1.0	0	3	1; 1
	9.0	10.0	1.0	0	5	2; 2
	2.0	5.0	3.0	0	4	2; 2
	9.0	12.0	3.0	0	5	3; 3
	2.0	10.0	8.0	0	4	3; 2
10.0	2.0	3.0	1.0	0	4	2; 2
25.0	2.0	3.0	1.0	0	6	2; 2
	5.0	6.0	1.0	1	7	4; 3
	9.0	10.0	1.0	2	9	5; 4
	2.0	5.0	3.0	0	7	4; 3
	5.0	8.0	3.0	1	9	5; 4
	9.0	12.0	3.0	2	10	6; 4
50.0	2.0	3.0	1.0	1	8	4; 3
100.0	2.0	3.0	1.0	2	11	5; 3
200.0	2.0	3.0	1.0	4	14	7; 5

на фиг. 5: *a* — при  $\rho^2 = 1.1$ ,  $\xi_3^* = 1.2$  ( $\hat{k}a = 3.46$ ,  $\hat{k}b = 1.41$ ),  $|F|_{\max} = 0.61$ ; *б* — при  $\rho^2 = 1.6$ ,  $\xi_3^* = 1.7$  ( $\hat{k}a = 4.412$ ,  $\hat{k}b = 2.65$ ),  $|F|_{\max} = 0.98$ ; *в* — при  $\rho^2 = 2.0$ ,  $\xi_3^* = 2.1$  ( $\hat{k}a = 4.58$ ,  $\hat{k}b = 3.32$ ),  $|F|_{\max} = 1.37$ ; *г* — при  $\rho^2 = 4.0$ ,  $\xi_3^* = 4.1$  ( $\hat{k}a = 6.40$ ,  $\hat{k}b = 5.57$ ),  $|F|_{\max} = 2.38$ ; *д* — при  $\rho^2 = 10.0$ ,  $\xi_3^* = 10.1$  ( $\hat{k}a = 10.05$ ,  $\hat{k}b = 9.54$ ),  $|F|_{\max} = 4.22$ . Фиг. 5, *a* соответствует эллипсоиду, близкому к вытянутому сфероиду. Как видно, д. р. существенно зависят от величины  $\rho^2$ : с ростом  $\rho^2$  усложняется «рельеф» д. р., увеличивается количество «лепестков», растут размеры главных лепестков.

Сходным образом влияет на д. р. увеличение частоты падающей п. в. при неизменных геометрических размерах эллипсоида. На графиках фиг. 6, для которых  $\rho^2 = 2.0$ ,  $\xi_3^* = 2.1$ , значения  $\omega^2$  возрастают от *a* к *д*: *a* — при  $\omega^2 = 10$  ( $\hat{k}a = 4.58$ ,  $\hat{k}b = 3.32$ ,  $\hat{k}c = 1.0$ ),  $|F|_{\max} = 1.37$ ; *б* — при  $\omega^2 = 15$  ( $\hat{k}a = 5.61$ ,  $\hat{k}b = 4.06$ ,  $\hat{k}c = 1.22$ ),  $|F|_{\max} = 2.04$ ; *в* — при  $\omega^2 = 20$  ( $\hat{k}a = 6.48$ ,  $\hat{k}b = 4.69$ ,  $\hat{k}c = 1.41$ ),  $|F|_{\max} = 2.71$ ; *г* — при  $\omega^2 = 50$  ( $\hat{k}a = 10.25$ ,  $\hat{k}b = 7.42$ ,  $\hat{k}c = 2.24$ ),  $|F|_{\max} = 6.57$ ; *д* — при  $\omega^2 = 100$  ( $\hat{k}a = 14.49$ ,  $\hat{k}b = 10.49$ ,  $\hat{k}c = 3.16$ ),  $|F|_{\max} = 12.73$ .

Сравнение с результатами [19], [20] и п. 1 (см. выше) для вытянутых

сфероидов дополнительно подтверждает достоверность расчетов дифракционных характеристик трехосных эллипсоидов.

Вычисление п. в. в виде ряда по в. э. ф. использовалось для контроля правильности вычислений в. э. ф. и определения скорости сходимости рядов. В [20] было замечено, что основной вклад в ряды по сфероидальным функциям дают гармоники с номерами, сравнимыми с величиной  $c = kd/2$ . Аналогичная ситуация имеет место и в случае трехосного эллипсоида. При  $n \gg \omega$  р. в. э. ф. I рода обращаются в нуль все в большей окрестности точки  $\xi_3 = \rho^2$  справа от нее, в то время как при  $n \ll \omega$  в окрестности этой точки слева в нуль обращаются у. в. э. ф. Это связано с расположением точек поворота волнового уравнения Ламе (см. по этому поводу [25]).

Табл. 4 иллюстрирует зависимость сходимости ряда (3.13а) для п. в. от входных параметров задачи. Все данные приведены для вычислений с точностью  $\varepsilon = 0.0001$  в точках с координатами  $\xi_1 = 0.5$ ,  $\xi_2 = 0.5$  ( $1 + \rho^2$ ) (значения  $\xi_3^*$  см. в табл. 4). Обозначения:  $n_{\min}$  и  $n_{\max}$  — минимальное и максимальное значения номера  $n$  гармоник, дающих существенный по сравнению с указанной точностью вклад в ряды (3.13а), (4.4);  $(n, m)_{\text{принс}}$  — номер максимального по абсолютной величине члена ряда.

Как видно из табл. 4, с ростом частоты  $\omega$  для достижения одной и той же точности вычислений требуются гармоники с большими номерами  $n$ , растут номера главного члена ряда, становится меньше вклад младших гармоник. Аналогично влияет на поведение ряда увеличение значения  $\rho^2$ ; это влияние тем заметнее, чем больше величина  $\xi_3^* - \rho^2$ .

Отметим в заключение, что приведенные в [19], [20], [24] и в настоящей работе данные о диапазонах номеров гармоник, дающих основной вклад в разложения п. в. и дифракционных характеристик по в. с. ф. или в. э. ф., представляют самостоятельный интерес для задач эхолокации, проблемы гашения звуковых волн и других задач акустики и электродинамики. Это обстоятельство уже неоднократно отмечалось физиками, так как использование в разложениях неправильного набора гармоник (например, суммирование при больших  $c$  или  $\omega$  только первых гармоник) зачастую приводит к неверным результатам и практическим выводам.

Графики д. р. трехосных эллипсоидов построены с помощью графической программы, специально разработанной для этого в ВЦ РАН А. Фатыховым, которому авторы выражают свою благодарность.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Федорюк М. В. Дифракция звуковых волн на трехосном эллипсоиде // Акустич. ж. 1988. Т. 34. № 1. С. 160—164.
2. Федорюк М. В. Дифракция волн на трехосном эллипсоиде // Дифференц. ур-ния. 1989. Т. 25. № 11. С. 1990—1995.
3. Sleeman B. D. The scalar scattering of a plane wave by an ellipsoid // J. Inst. Math. Applics. 1967. V. 3. P. 4—15.
4. Абрамов А. А., Дышко А. Л., Конюхова Н. Б. и др. Вычисление вытянутых сфероидальных

- функций решением соответствующих дифференциальных уравнений//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т. 24. № 1. С. 3—18.
5. Абрамов А. А., Дышко А. Л., Конюхова Н. Б., Левитана Т. В. Вычисление угловых волновых функций Ламе решением вспомогательных дифференциальных уравнений//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 6. С. 813—830.
  6. Абрамов А. А., Дышко А. Л., Конюхова Н. Б., Левитина Т. В. Вычисление радиальных волновых функций для сфероидов и трехосных эллипсоидов модифицированным методом фазовых функций//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31. № 2. С. 212—234.
  7. Федорюк М. В. Рассеяние звуковых волн тонким акустически жестким телом вращения//Акустич. ж. 1981. Т. 27. № 4. С. 605—609.
  8. Бойко А. И. Рассеяние плоских волн тонким телом вращения//Акустич. ж. 1983. Т. 29. № 3. С. 321—325.
  9. Бойко А. И., Дышко А. Л., Тэтюхин М. Ю. Рассеяние плоской волны на вытянутом акустически мягком теле вращения//Акустич. ж. 1993. Т. 38. № 5. С. 834—843.
  10. Bowan J. J., Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1969.
  11. Абрамов А. А., Конюхова Н. Б., Левитина Т. В. О задаче дифракции плоской звуковой волны на трехосном эллипсоиде//Дифференц. ур-ния. 1993. Т. 29. № 8. С. 1347—1357.
  12. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
  13. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.
  14. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М.: Мир, 1964.
  15. Векуа И. Н. О метагармонических функциях//Тр. Тбилисс. матем. ин-та. Тбилиси, 1943. Т. 12. С. 105—174.
  16. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. М.: Мир, 1981.
  17. Källström A., Sleeman B. D. A left definite multiparameter eigenvalue problem in ordinary differential equations//Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. 74. 1974/75. № 11. P. 145—155.
  18. Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М.: Наука, 1976.
  19. Бойко А. И., Дышко А. Л., Тэтюхин М. Ю. Дифракция плоских звуковых волн на мягких и жестких вытянутых сфероидов//Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ РАН, 1993.
  20. Конюхова Н. Б., Пак Т. В. Дифракция плоской звуковой волны на жестком вытянутом сфероиде//Сообщ. по прикл. матем. М.: ВЦ АН СССР, 1986.
  21. Валуева В. Н. Дифракция звуковых волн на вытянутых телах: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. М.: Акустич. ин-т АН СССР, 1989. 142 с.
  22. Тэтюхин М. Ю., Федорюк М. В. Рассеяние плоской звуковой волны на протяженном теле произвольной формы//Акустич. ж. 1986. Т. 32. № 6. С. 811—815.
  23. Тэтюхин М. Ю. Дифракция на упругом вытянутом теле произвольной формы//Акустич. ж. 1989. Т. 35. № 2. С. 339—342.
  24. Конюхова Н. Б., Пак Т. В. О дифракции плоской звуковой волны на жестких вытянутых сфероидов//Волны и дифракция. Тбилиси: Изд-во Тбилисс. ун-та, 1985. Т. 1. С. 281—284.
  25. Федорюк М. В. Волновые функции Ламе//Изв. АН СССР. Сер. матем. 1988. Т. 52. № 4. С. 853—874.

Поступила в редакцию 21.03.94  
Переработанный вариант 11.01.95