А. А. Абрамов, Н. Б. Конюхова, Т. В. Левитина, О задаче дифракции плоской звуковой волны на трехосном эллипсоиде, *Дифференц. уравнения*, 1993, том 29, номер 8, 1347–1357

АВГУСТ 1993 г., ТОМ 29, № 8

УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958

А. А. АБРАМОВ, Н. Б. КОНЮХОВА, Т. В. ЛЕВИТИНА

О ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА ТРЕХОСНОМ ЭЛЛИПСОИДЕ

Введение. В области, внешней по отношению к трехосному эллипсоиду, на который падает плоская монохроматическая волна, рассматривается трехмерное уравнение Гельмгольца для рассеянного поля с условиями излучения на бесконечности и с условиями Дирихле или Неймана на поверхности эллипсоида. Такие внешние краевые задачи решаются в эллипсоидальной системе координат (э. с. к.), связанной с заданным эллипсоидом, методом разделения переменных. Решения ищутся в виде рядов по волновым эллипсоидальным функциям (в. э. ф.) (их называют также волновыми функциями Ламе). Впервые такие разложения были получены М. В. Федорюком в [1, 2], а также в [3, 4] и приведенных там работах им были проведены различные исследования в. э. ф. По инициативе М. В. Федорюка нами были разработаны в [5, 6] достаточно универсальные методы и алгоритмы расчета в. э. ф., позволяющие вычислять эти сложные специальные функции в широком диапазоне параметров. До работ [5, 6] сколько-нибудь надежных методов вычисления в. э. ф. не было.

В настоящей работе (в безразмерных переменных, отличных от используемых в [1, 2], и тех, что в [5, 6]) дается полный вывод разложений по в. э. ф. плоских волн, поля точечного источника и дифракционных характеристик рассеивающего эллипсоида. Основная цель работы — устранение неточностей, допущенных в [1, 2], и получение окончательных формул, позволяющих, в частности, с использованием алгоритмов [5, 6] проводить численные исследования рассеяния плоских звуковых волн на акустически идеально мягких и идеально жестких трехосных эллипсоидах. Некоторые такие расчеты впервые проведены в [7]. Трехосный эллипсоид — единственный случай существенно трехмерного объекта, т. е. не являющегося поверхностью вращения, для которого задачи дифракции решаются в разделенных переменных. Нами рассмотрен незатронутый в [1, 2] вопрос о продолжении в. э. ф., определенных в одном октанте, на все пространство для построения соответствующей полной системы функций, что позволило устранить допущенные в [1, 2] ошибки и дать более правильную трактовку полученных разложений. Сказанное ни в коей мере не умаляет значения работ [1, 2] и других исследований М. В. Федорюка по в. э. ф., под большим влиянием которых и выполнена настоящая работа. Именно признание важности для математической физики и общей теории дифференциальных уравнений работ [1, 2] сделало, на наш взгляд, необходимым устранение в них неточностей.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА АКУСТИЧЕСКИ ИДЕАЛЬНО МЯГКИХ И ИДЕАЛЬНО ЖЕСТКИХ ТРЕХМЕРНЫХ ПРЕПЯТСТВИЯХ

Задачи дифракции плоской звуковой волны на трехосном эллипсоиде являются классическими задачами акустики и ставятся следующим образом (см., например, [8—10]). Пусть плоская монохроматическая волна с единичной амплитудой

$$u^i(\vec{r}) = \exp(i\hat{k}(\vec{l}, \vec{r})), \tag{1.1}$$

распространяющаяся в однородном изотропном пространстве (множитель временной зависимости $\exp(-i\omega_0 t)$ здесь и далее опущен), падает на конечное препятствие D с гладкой поверхностью S; здесь $\hat{k}$ — волновое число, $\hat{k} = \omega_0/c_0$, c_0 — скорость звука в данной среде, $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ — вектор единичной длины, характеризующий направление распространения плоской волны, $\vec{r} = (x, y, z)$ — радиус-вектор «точки наблюдения». Это препятствие порождает рассеянную волну, так что полное стационарное волновое поле $u(\vec{r})$ представляется в виде

$$u(\vec{r}) = u^i(\vec{r}) + u^s(\vec{r}),$$

где $u^s(\vec{r})$ — рассеянное, или дифрагированное, поле. Вне тела $u(\vec{r})$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + \hat{k}^2 u = 0, \quad \vec{r} \in \mathbf{R}^3 \backslash D,$$

где $\Delta \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. На S полное волновое поле удовлетворяет одному из граничных условий:

$$u(\vec{r})|_S = 0 \quad \text{(идеально мягкое тело)}$$

или

$$\partial u(\vec{r})/\partial n|_S = 0 \quad \text{(идеально жесткое тело)},$$

где $\partial/\partial n$ — производная по направлению внешней нормали к поверхности S. Рассеянная волна $u^s(\vec{r})$ вдали от рассеивающего объекта близка к расходящейся сферической волне,

$$u^s(r, \theta, \varphi) = F(\theta, \varphi)\,\frac{\exp(i\hat{k}r)}{\hat{k}r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \to \infty, \tag{1.2}$$

равномерно по (θ, φ), где (r, θ, φ) — сферические координаты. Соотношение (1.2) для решений уравнения Гельмгольца эквивалентно условию излучения Зоммерфельда — предельному условию на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i\hat{k}u^s\right) = 0 \quad \text{равномерно по } (\theta, \varphi). \tag{1.3}$$

Таким образом, рассеянное поле $u^s(\vec{r})$ есть решение однородного уравнения Гельмгольца

$$\Delta u^s + \hat{k}^2 u^s = 0, \quad \vec{r} \in \mathbf{R}^3 \backslash D, \tag{1.4}$$

удовлетворяющее на бесконечности условию (1.3), а на поверхности S — одному из краевых условий:

$$u^s(\vec{r})|_S = -u^i(\vec{r})|_S \tag{1.5a}$$

или

$$\partial u^s(\vec{r})/\partial n|_S = -\partial u^i(\vec{r})/\partial n|_S. \tag{1.5b}$$

Однозначная разрешимость таких задач при любом значении волнового числа $\hat{k}$ известна (см. [8, 11]).

Функция $F(\theta, \varphi)$ в асимптотическом представлении (1.2) называется амплитудой рассеяния в дальней зоне и является одной из основных дифракционных характеристик рассеивающего тела. С ней связаны также другие характеристики рассеивающей поверхности: эффективный поперечник рассеяния (или полное поперечное сечение рассеяния)

$$Q = \frac{1}{\hat{k}^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} |F(\theta, \varphi)|^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi \tag{1.6}$$

и дифференциальное поперечное сечение рассеяния

$$\sigma(\theta, \varphi) = \frac{4\pi}{\hat{k}^2} |F(\theta, \varphi)|^2. \tag{1.7}$$

Формулы (1.6), (1.7) являются следствиями общих определений этих величин:

$$\sigma(\theta, \varphi) = \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \frac{|u^s(r, \theta, \varphi)|^2}{|u^i(r, \theta, \varphi)|^2},$$

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sigma(\theta, \varphi)\sin\theta d\theta d\varphi$$

[12, с. 7].

§ 2. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В Э. С. К.

В том случае, когда рассеивающая поверхность может быть отождествлена с координатной поверхностью ортогональной криволинейной системы координат (с. к.), допускающей разделение переменных в уравнении Гельмгольца, сформулированные выше задачи решаются «точно» методом Фурье: решения представляются в виде рядов по специальным функциям, соответствующим данной с. к.

Всего существует 11 с. к., допускающих разделение переменных в трехмерном уравнении Гельмгольца (см. [13]). Высшей является э. с. к., остальные 10 получаются из нее как вырожденные случаи с помощью различных предельных переходов по параметрам. При разделении переменных в э. с. к. частные решения уравнения Гельмгольца представляются в виде произведений так называемых угловых волновых эллипсоидальных функций (у. в. э. ф.) и радиальных волновых эллипсоидальных функций (р. в. э. ф.). Для сопоставления заметим, что в случае сферы угловые функции — это полиномы и присоединенные функции Лежандра и тригонометрические функции, а радиальные — это функции Бесселя и Ханкеля.

Координатные поверхности э. с. к. представляют собой однопараметрическое семейство софокусных поверхностей второго порядка. Значение параметра $\varkappa$, характеризующего координатную поверхность, входит в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2+\varkappa} + \frac{y^2}{b^2+\varkappa} + \frac{z^2}{c^2+\varkappa} = 1, \tag{2.1}$$

где a, b, c фиксированы, $a > b > c > 0$. Если тело D — эллипсоид $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 \leqslant 1$, то его поверхность S — координатная поверхность (2.1) при $\varkappa = 0$. Вообще поверхность, задаваемая уравнением (2.1), является эллипсоидом, если $\lambda = \varkappa > -c^2$ (этот эллипсоид лежит внутри S при $\lambda < 0$ и вне S при $\lambda > 0$), однополостным гиперболоидом, если $-c^2 > \mu = \varkappa > -b^2$, и двуполостным гиперболоидом при $-b^2 > \nu = \varkappa > -a^2$. Концы интервалов изменения параметров λ, μ и ν соответствуют бесконечно удаленной точке и вырожденным поверхностям — координатным плоскостям; э. с. к. ортогональна.

Внутри каждого координатного октанта имеет место взаимно однозначное соответствие между декартовыми координатами x, y, z и эллипсоидальными координатами λ, μ, ν, выражаемое соотношениями

$$x^2 = (a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)/|\Pi'(-a^2)|,$$
$$y^2 = (b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)/|\Pi'(-b^2)|,$$
$$z^2 = (c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)/|\Pi'(-c^2)|,$$

где $\Pi(\eta) = (\eta+a^2)(\eta+b^2)(\eta+c^2)$.

Коэффициенты Ламе в э. с. к. вычисляются по формулам

$$h_\lambda^2 = (\lambda-\mu)(\lambda-\nu)[4\Pi(\lambda)]^{-1},$$

h_μ, h_ν получаются отсюда циклической перестановкой λ, μ, ν. Оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta \equiv 4[(\lambda-\mu)(\mu-\nu)(\nu-\lambda)]^{-1}[(\mu-\nu)D_\lambda + (\nu-\lambda)D_\mu + (\lambda-\mu)D_\nu],$$

где $D_\eta = \sqrt{\Pi(\eta)}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\left\{\sqrt{\Pi(\eta)}\dfrac{\partial}{\partial\eta}\right\}$, а уравнение Гельмгольца допускает разделение переменных в э. с. к., т. е. имеет частные решения вида $V = L(\lambda)M(\mu)N(\nu)$. Каждая из функций L, M, N в своей области определения удовлетворяет волновому уравнению Ламе

$$\left[D_\eta + \frac{1}{4}p(\eta)\right]* = 0,$$

где $p(\eta) = \hat{h} - \hat{l}\eta + \hat{k}^2\eta^2$, $\hat{h}$ и $\hat{l}$ — константы разделения.

Введем безразмерные переменные $\xi_j = (\eta_j + a^2)/(a^2-b^2)$, $j=\overline{1,3}$, $\eta_1 = \nu$, $\eta_2 = \mu$, $\eta_3 = \lambda$, так что $0<\xi_1<1$, $1<\xi_2<\rho^2$, $\rho^2<\xi_3<+\infty$, где $\rho^2 = (a^2-c^2)/(a^2-b^2)$, $\rho^2>1$, и обозначим

$$\omega^2 = \hat{k}^2(a^2-b^2),\ h = \frac{\hat{k}^2a^4 + \hat{h} + \hat{l}a^2}{a^2-c^2},\ l = (2\hat{k}^2a^2 + \hat{l})\rho^{-2}.$$

В новых безразмерных переменных коэффициенты Ламе даются формулой $h_1^2 = \dfrac{(a^2-b^2)}{4f(\xi_1)}(\xi_1-\xi_2)(\xi_1-\xi_3)$, h_2, h_3 получаются отсюда циклической перестановкой индексов; оператор Лапласа имеет вид

$$\Delta \equiv 4(a^2-b^2)^{-1}[(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1)]^{-1}\times$$
$$\times[(\xi_3-\xi_2)L_1 + (\xi_1-\xi_3)L_2 + (\xi_2-\xi_1)L_3],$$

где $L_j \equiv \sqrt{f(\xi_j)}\dfrac{d}{d\xi_j}\left\{\sqrt{f(\xi_j)}\dfrac{d}{d\xi_j}\right\}$, $j=\overline{1,3}$, и частные решения уравнения (1.4) представляются в виде $\omega = \Lambda(\xi_1)\Lambda(\xi_2)\Lambda(\xi_3)$. Здесь $\Lambda(\xi)$ — решения (на указанных трех интервалах) волнового уравнения Ламе

$$\sqrt{f(\xi)}\frac{d}{d\xi}\left\{\sqrt{f(\xi)}\frac{d\Lambda}{d\xi}\right\} + \frac{1}{4}q(\xi,h,l)\Lambda = 0, \tag{2.2}$$

где $f(\xi) = \xi(\xi-1)(\xi-\rho^2)$, $q(\xi,h,l) = h\rho^2 - l\rho^2\xi + \omega^2\xi^2$.

1. У. в. э. ф. $\Lambda(\xi_1)$, $\Lambda(\xi_2)$ удовлетворяют уравнению (2.2) на интервалах $0<\xi_1<1$, $1<\xi_2<\rho^2$ соответственно, а в точках $\xi_1^0=0$, $\xi_2^0=1$, $\xi_3^0=\rho^2$ — одному из двух граничных условий:

$$\lim_{\xi\to\xi_j^0}\Lambda(\xi) = 0 \tag{2.3a}$$

или

$$\lim_{\xi\to\xi_j^0}\sqrt{|f(\xi)|}\frac{d\Lambda(\xi)}{d\xi} = 0,\ j=\overline{1,3}, \tag{2.3b}$$

причем условия при $\xi_1\to\xi_2^0-0$ и $\xi_2\to\xi_2^0+0$ должны быть идентичны. Таким образом, произведение $\Psi(\xi_1,\xi_2) = \Lambda(\xi_1)\Lambda(\xi_2)$ — так называемая поверхностная волновая эллипсоидальная функция (п. в. э. ф.) — является собственной функцией (с. ф.) двухпараметрической самосопряженной задачи Штурма — Лиувилля для волнового уравнения Ламе, а пара параметров $\{h, l\}$, для которой существует у. в. э. ф., — собственным значением (с. з.) этой задачи.

Многопараметрические задачи подобного вида достаточно полно изучены (см. [14] и приведенную там библиографию). Известно, что для любого набора краевых условий (2.3) имеется счетная последовательность пар вещественных чисел $\{h_n^m, l_n^m\}$, $0 \leqslant m \leqslant n$, — с. з. задачи (2.2), (2.3); отвечающие им нетривиальные решения этой задачи $\Lambda_{n,m}(\xi_1)$, $\Lambda_{n,m}(\xi_2)$ определяются с точностью до множителя однозначно, они ровно m раз обращаются в нуль на интервале $0<\xi_1<1$ и $n-m$ раз на интервале $1<<\xi_2<\rho^2$ соответственно. Таким образом, имеется восемь различных типов у. в. э. ф., каждый из которых можно характеризовать тройкой индексов (i_1, i_2, i_3): здесь $i_j=1$ при выполнении (2.3a) в точке $\xi=\xi_j^0$ и $i_j=0$ при выполнении в этой точке условия (2.3b). В работе [5] предлагается алгоритм численного поиска с. з. $\{h_n^m, l_n^m\}$ и вычисления соответствующих им у. в. э. ф. Метод допускает различные обобщения, охватывающие широкие классы подобных многопараметрических задач (см. [5, 15]).

Для каждого фиксированного набора (i_1, i_2, i_3) п. в. э. ф. $\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)= =\Lambda_{n,m}(\xi_1)\Lambda_{n,m}(\xi_2)$, отвечающие различным точкам спектра, ортогональны с весом $\sigma(\xi_1, \xi_2)=(\xi_2-\xi_1)\left[-f(\xi_1)f(\xi_2)\right]^{-1/2}$:

$$\iint_{\Pi} \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)\Psi_{n'}^{m'}(\xi_1, \xi_2)\sigma(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2=0 \quad \text{при } m\neq m' \text{ или } n\neq n', \tag{2.4}$$

где $\Pi=[0, 1]\times[1, \rho^2]$. Эти функции образуют полную ортогональную систему в $\mathbf{L}^2(\Pi)$ (см. [3, 4]), т. е. полную по скалярному произведению с весом $\sigma(\xi_1, \xi_2)$ на части эллипсоида S_d, $\xi_3=d$, лежащей внутри какого-либо координатного октанта (пусть для определенности первого, т. е. в области $x>0$, $y>0$, $z>0$, обозначим ее $(+, +, +)$). Для того чтобы построить систему, полную на всем S_d, следует каждую из функций $\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)$ продолжить гладко на весь эллипсоид по правилу: продолжение по x (соответственно по y или по z) четное при $i_1=0$ (соответственно при $i_2=0$ или $i_3=0$) и нечетное при $i_1=1$ (соответственно при $i_2=1$ или $i_3=1$). Так, например, переход из октанта $(+, +, +)$ в октант $(-, +, +)$ осуществляется через часть плоскости $x=0$, или в эллипсоидальных координатах $\xi_1=0$, по формуле $w(x, y, z)=(-1)^{i_1}w(-x, y, z)$. При переходе через плоскость $y=0$ имеем $w(x, y, z)=(-1)^{i_2}w(x, -y, z)$. Заметим, что совпадение граничных условий для у. в. э. ф. на правом конце отрезка $[0, 1]$ и на левом конце отрезка $[1, \rho^2]$ означает, что четность функции w по переменной y в области между ветвями критической гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2-b^2}+ +\dfrac{z^2}{c^2-b^2}=1$, где $\xi_2=1$, и вне ее, где $\xi_1=1$, одинакова. Подобным образом в плоскости $z=0$ выделяется область, внешняя по отношению к эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2-c^2}+\dfrac{y^2}{b^2-c^2}=1$, где $\xi_2=\rho^2$, и внутренняя, где $\xi_3=\rho^2$. В дальнейшем выбор граничного условия для р. в. э. ф., отвечающего значению i_3, обеспечит одну и ту же четность по z в обеих указанных областях плоскости $z=0$; при этом $w(x, y, z)=(-1)^{i_3}w(x, y, -z)$.

Очевидно, переход из первого координатного октанта $(+, +, +)$ в любой другой может быть представлен композицией переходов через соответствующие координатные плоскости, при этом каждый раз исходная функция w умножается на $(-1)^{i_j}$, например, при переходе из $(+, +, +)$ в $(-, +, -)$ имеем $w(x, y, z)=(-1)^{i_1}(-1)^{i_3}w(-x, y, -z)$.

Объединяя все указанным образом продолженные функции для всех наборов (i_1, i_2, i_3) и нормируя их условием

$$\iint_{\Pi} \left[\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)\right]^2\sigma(\xi_1, \xi_2)\,d\xi_1 d\xi_2=1/8, \tag{2.5}$$

получим полную ортонормированную систему на всем эллипсоиде S_d.

Полнота полученной системы функций следует из того факта, что каждая функция из $\mathbf{L}^2(S_d)$ может быть представлена в виде суммы восьми слагаемых различной четности относительно координатных плоскостей,

$$u=v_0+xv_1+yv_2+zv_3+xyv_4+xzv_5+yzv_6+xyzv_7$$

(все $v_i=v_i(x^2, y^2, z^2)$), причем такое представление единственно. Каждое из слагаемых разложим в ряд по системе функций $\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющих соответствующим данной четности граничным условиям; это разложение будет справедливо во всех координатных октантах. Суммируя полученные восемь рядов, получим разложение заданной функции в ряд по п. в. э. ф. на всем эллипсоиде S_d.

Ортогональность с весом $\sigma(\xi_1, \xi_2)$ на всем эллипсоиде п. в. э. ф., отвечающих различным точкам спектра и одному и тому же набору (i_1, i_2, i_3), следует из самосопряженности задачи (см. [3, 4]); если же наборы граничных условий двух п. в. э. ф. различны, то ортогональность этих функций следует из того, что в половине октантов интеграл в левой части (2.4) будет иметь тот же знак, что и в первом октанте, а в оставшихся — противоположный, абсолютная величина этого интеграла не зависит от октанта. Здесь уместна следующая аналогия. На отрезке $[0, \pi]$ каждая из систем функций $\{\sin kx\}$, $k=1, 2, \dots$, и $\{\cos kx\}$, $k=0, 1, 2, \dots$, является полной в $\mathbf{L}^2[0, \pi]$. В то же время совокупность функций $\{1, \cos kx, \sin kx, k=1, 2, \dots\}$ представляет собой полную ортогональную систему в $\mathbf{L}^2[-\pi, \pi]$; связь между ней и системами $\{\sin kx\}$, $\{\cos kx\}$ очевидна: всякая функция, определенная на $[-\pi, \pi]$, является суммой четной и нечетной функций.

Далее под $\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)$ будем понимать функции, определенные на поверхности некоторого эллипсоида, совпадающие с п. в. э. ф. на некотором октанте и продолженные на остальную часть эллипсоида в соответствии с (i_1, i_2, i_3). Будем считать, что $\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)$ нормированы условием (2.5). Так введенные функции Ψ_n^m определены с точностью до знака однозначно. В дальнейшем мы воспользуемся также тем, что п. в. э. ф. удовлетворяют уравнениям

$$\begin{gathered}(4(\xi_2 L_1-\xi_1 L_2)+\omega^2\xi_1\xi_2(\xi_1-\xi_2)-h_n^m\rho^2(\xi_1-\xi_2))\Psi_n^m=0,\\ (4(L_1-L_2)+\omega^2(\xi_1+\xi_2)(\xi_1-\xi_2)-l_n^m\rho^2(\xi_1-\xi_2))\Psi_n^m=0.\end{gathered} \tag{2.6}$$

2. На интервале $\rho^2<\xi_3<+\infty$ решения волнового уравнения Ламе, удовлетворяющие одному из граничных условий (2.3) в точке $\xi_3^0=\rho^2$, существуют при любых значениях h, l. Под р. в. э. ф. понимают функции, отвечающие с. з. $\{h_n^m, l_n^m\}$ задачи (2.2), (2.3). Для решения задач дифракции среди этих функций выделяют р. в. э. ф. I рода, удовлетворяющие в точке $\xi=\xi_3^0$ условию (2.3a) при $i_3=1$ и (2.3b) при $i_3=0$ и нормированные на бесконечности условием

$$\Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\omega\xi}}\cos(\omega\sqrt{\xi}+\delta_{n,m})+O\left(\frac{1}{\xi}\right),\quad \xi\to\infty, \tag{2.7}$$

где фаза $\delta_{n,m}$ подлежит определению, и р. в. э. ф. III рода, удовлетворяющие на бесконечности условию излучения и нормированные на бесконечности

$$\Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\omega\xi}}\exp\{i(\omega\sqrt{\xi}+\delta_{n,m})\}+O\left(\frac{1}{\xi}\right),\quad \xi\to\infty. \tag{2.8}$$

Р. в. э. ф. III рода представляется в виде суммы функций

$$\bar{\Lambda}_{n,m}^{(3)}(\xi)=\Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi)+i\Lambda_{n,m}^{(2)}(\xi),$$

где р. в. э. ф. II рода $\Lambda_{n,m}^{(2)}(\xi)$ при больших ξ имеет асимптотику

$$\Lambda_{n,m}^{(2)}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\omega\xi}}\sin(\omega\sqrt{\xi}+\delta_{n,m})+O\left(\frac{1}{\xi}\right),\quad \xi\to\infty.$$

Функции $\Lambda_{n,m}^{(3)}$ и пары функций $\Lambda_{n,m}^{(1)}$ и $\Lambda_{n,m}^{(2)}$ определяются с точностью до знака однозначно. Замена $\delta_{n,m}$ на $\delta_{n,m}+\pi$ влечет за собой изменение знака у $\Lambda_{n,m}^{(3)}$, $\Lambda_{n,m}^{(1)}$, $\Lambda_{n,m}^{(2)}$.

В дальнейшем нам понадобится вронскиан фундаментальной системы $\{\Lambda^{(1)}_{n,m}(\xi),\ \Lambda^{(3)}_{n,m}(\xi)\}$:

$$W_{n,m}=W\{\Lambda^{(1)}_{n,m}(\xi),\ \Lambda^{(3)}_{n,m}(\xi)\}=i(2\sqrt{f(\xi)})^{-1}. \tag{2.9}$$

В работе [6] на основе метода фазовых функций предлагаются устойчивые экономичные методы расчета р. в. э. ф. I и II рода; методы являются достаточно универсальными и позволяют вычислять р. в. э. ф. в широком диапазоне изменения параметров. Многочисленные расчеты показали, в частности, что если использовать методы и алгоритмы [6], то получим для фазы

$$\delta_{n,m}=-\pi(i_1+i_2+(1-i_3))/2-\pi n.$$

Нам не известно аналитическое доказательство этой формулы.

§ 3. РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ ГРИНА И ПЛОСКИХ ВОЛН ПО В. Э. Ф.

Функция влияния точечного источника

$$G(\vec{r},\vec{r}')=-\frac{1}{4\pi}|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}\exp\{i\hat{k}|\vec{r}-\vec{r}'|\} \tag{3.1}$$

является решением уравнения

$$(\Delta+\hat{k}^2)G(\vec{r},\vec{r}')=\delta(\vec{r}-\vec{r}') \tag{3.2}$$

и удовлетворяет на бесконечности условиям излучения Зоммерфельда.

Занумеруем произвольным образом п. в. э. ф., определенные на всем эллипсоиде и нормированные условием (2.5), и тем же номером снабдим соответствующие им р. в. э. ф. Следуя [1, 2, 16], будем искать разложение функции Грина $G(\vec{r},\vec{r}')$ по в. э. ф. в виде

$$G(\vec{r},\vec{r}')=\sum_n \Psi_n(\xi_1,\xi_2)\Psi_n(\xi_1',\xi_2')g_n(\xi_3,\xi_3'), \tag{3.3}$$

учитывая, что справедливо соотношение

$$\delta(\vec{r}-\vec{r}')=\delta(\xi_1-\xi_1')\delta(\xi_2-\xi_2')\delta(\xi_3-\xi_3')/h_1h_2h_3. \tag{3.4}$$

Из полноты и ортонормированности системы $\Psi_n(\xi_1,\xi_2)$ в $\mathbf{L}^2(S_d)$ следует, что

$$\sigma(\xi_1,\xi_2)\sum_n \Psi_n(\xi_1,\xi_2)\Psi_n(\xi_1',\xi_2')=\delta(\xi_1-\xi_1')\delta(\xi_2-\xi_2'). \tag{3.5}$$

Действительно, для произвольной гладкой функции $\varphi(\xi_1,\xi_2)=\sum_n \varphi_n\Psi_n(\xi_1,\xi_2)$ имеем

$$\int_{S_d}\varphi(\xi_1,\xi_2)\sigma(\xi_1,\xi_2)\sum_n \Psi_n(\xi_1,\xi_2)\Psi_n(\xi_1',\xi_2')d\xi_1d\xi_2=$$
$$=\sum_n \varphi_n\Big[\int_{S_d}\sigma(\xi_1,\xi_2)\Psi_n^2(\xi_1,\xi_2)d\xi_1d\xi_2\Big]\Psi_n(\xi_1',\xi_2')=$$
$$=\sum_n \varphi_n\Psi_n(\xi_1',\xi_2')=\varphi(\xi_1',\xi_2').$$

Обозначим $P=P(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=[(a^2-b^2)(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1)]^{-1}$. Подстановка (3.3) в левую часть (3.2) с учетом (2.6) дает

$$(\Delta+\hat{k}^2)\{\sum_n \Psi_n(\xi_1,\xi_2)\Psi_n(\xi_1',\xi_2')g_n(\xi_3,\xi_3')\}=$$
$$=\sum_n \Psi_n(\xi_1',\xi_2')[4P\{(\xi_3-\xi_2)L_1+(\xi_1-\xi_3)L_2+(\xi_2-\xi_1)L_3\}+$$
$$+\omega^2/(a^2-b^2)]\Psi_n(\xi_1,\xi_2)g_n(\xi_3,\xi_3')=$$
$$=4(\xi_2-\xi_1)P\sum_n \Psi_n(\xi_1',\xi_2')\Psi_n(\xi_1,\xi_2)\left\{L_3+\frac{1}{4}q(\xi_3,h,l)\right\}g_n(\xi_3,\xi_3').$$

С другой стороны, из (3.4), (3.5) следует

$$\sigma(\vec{r}-\vec{r}\,')=\sigma(\xi_1,\xi_2)\sum_n \Psi_n(\xi_1',\xi_2')\Psi_n(\xi_1,\xi_2)\delta(\xi_3-\xi_3')/h_1h_2h_3=$$
$$=8(\xi_2-\xi_1)P(a^2-b^2)^{-1/2}\sqrt{f(\xi_3)}\delta(\xi_3-\xi_3')\sum_n \Psi_n(\xi_1',\xi_2')\Psi_n(\xi_1,\xi_2).$$

Окончательно из (3.2) получаем, что функция $g_n(\xi_3,\xi_3')$ является решением уравнения

$$\frac{d}{d\xi_3}\left\{\sqrt{f(\xi_3)}\,\frac{dg_n}{d\xi_3}\right\}+\left[\frac{q(\xi_3,h,l)}{4\sqrt{f(\xi_3)}}\right]g_n=2\delta(\xi_3-\xi_3')\,(a^2-b^2)^{-1/2},$$

удовлетворяющим в точке $\xi_3^0=\rho^2$ граничному условию (2.3a) или (2.3b) соответственно и условию излучения на бесконечности. Такое решение дается с учетом (2.9) выражением (см. [8])

$$g_n(\xi_3,\xi_3')=4i(a^2-b^2)^{-1/2}\begin{cases}\Lambda_n^{(1)}(\xi_3)\Lambda_n^{(3)}(\xi_3'), & \xi_3<\xi_3',\\ \Lambda_n^{(1)}(\xi_3')\Lambda_n^{(3)}(\xi_3), & \xi_3>\xi_3'.\end{cases}\tag{3.6}$$

Выполнение для g_n условий излучения следует из (2.8) и справедливости соотношения

$$(a^2-b^2)\xi_3=r^2+O(1),\quad r\to\infty\tag{3.7}$$

(соотношение (3.7) следует из (2.1), откуда $\lambda=r^2+O(1)$, $r\to\infty$).

В работе [2] утверждается, что ряд (3.3), где g_n вычисляются по (3.6), сходится абсолютно и равномерно по ξ_3 на $[\rho^2+\delta,\ \xi_3'-\delta]$ и при $\xi_3\geqslant\xi_3'+\delta$, $\delta>0$, и его можно почленно дифференцировать любое число раз.

Для того чтобы получить разложение плоской волны (п. в.) по в. э. ф., зафиксируем $\vec{r}=(r,\varphi,\theta)$ и устремим $\vec{r}\,'=(r',\varphi',\theta')$ к бесконечности в направлении, заданном углами φ', θ', где (r,φ,θ), (r',φ',θ') — сферические координаты точки наблюдения и точки расположения монопольного источника излучения (здесь углы θ, θ' отсчитываются от оси x).

При $r'\to\infty$ справедливо

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|=r'-r[\cos\theta'\cos\theta+\sin\theta'\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')]+O(1/r'),\tag{3.8}$$

откуда

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'|^{-1}\exp\{i\hat{k}|\vec{r}-\vec{r}\,'|\}=$$
$$=\exp\{i\hat{k}r'-i\hat{k}r[\cos\theta'\cos\theta+\sin\theta'\sin\theta\cos(\varphi-\varphi')]\}(1/r')\,[1+O(1/r')].\tag{3.9}$$

Тогда в (3.1) при $r'\to\infty$ сомножителем входит выражение для п. в., распространяющейся в направлении, противоположном направлению вектора r', т. е. в направлении $\vec{l}_0=(1,\varphi_0,\theta_0)$, где $\theta_0=\pi-\theta'$, $\varphi_0=\varphi'-\pi$. В результате из (3.1), (3.8), (3.9) получим

$$G(r,r')=-\frac{1}{4\pi}\,e^{-i\hat{k}(\vec{l},\vec{r})}\,\frac{e^{i\hat{k}r'}}{r'}\,[1+O(1/r')],\quad r'\to\infty,\tag{3.10}$$

где $\vec{l}=(1,\varphi'\,\theta')$, а из (2.8), (3.7) следует

$$\Lambda_n^{(3)}(\xi_3(r'))=\frac{(a^2-b^2)^{1/2}e^{i\hat{k}r'}}{\sqrt{\omega}r'}\,e^{i\delta_n}\,[1+O(1/r')]\,,\ r'\to\infty.\tag{3.11}$$

Подставляя в (3.6) асимптотическую формулу (3.11) и сравнивая ряды (3.3), (3.10) при больших значениях r', получим разложение п. в. в ряд по в. э. ф.:

$$e^{-i\hat{k}(\vec{l},\vec{r})}=-16\pi i\,\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sum_n e^{i\delta_n}\Psi_n(\xi_1,\xi_2)\Psi_n(\xi_1',\xi_2')\Lambda_n^{(1)}(\xi_3).\tag{3.12}$$

Здесь угловые эллипсоидальные координаты ξ_1', ξ_2' связаны с θ', φ' соотношениями

$$\xi_1'\xi_2'=\rho^2\cos^2\theta',$$

$$(\xi_1'-1)(\xi_2'-1)=-(\rho^2-1)\sin^2\theta'\cos^2\varphi', \qquad (3.13)$$
$$(\xi_1'-\rho^2)(\xi_2'-\rho^2)=\rho^2(\rho^2-1)\sin^2\theta'\sin^2\varphi'.$$

Выражение (3.12) упрощается, если направление падения п. в. совпадает с какой-нибудь из осей координат. Зафиксируем эти формулы, которые, в частности, приводят к удобным тестовым задачам для в. э. ф. и позволяют исследовать сходимость разложений по в. э. ф. с заданной точностью вычислений, т. е. оценить необходимое количество гармоник.

1. Падение п. в. в отрицательном направлении оси x. В этом случае $\vec{l}=(1, 0, 0)$, и из (3.13) получаем

$$(\xi_1'-1)(\xi_2'-1)=0, \quad (\xi_1'-\rho^2)(\xi_2'-\rho^2)=0,$$

откуда $\xi_1'=1$, $\xi_2'=\rho^2$. Тогда в (3.12) отличны от нуля только слагаемые, соответствующие наборам (i_1, i_2, i_3), равным $(0, 0, 0)$ или $(1, 0, 0)$, так как только в этих случаях $\Psi_n(1, \rho^2)\neq 0$. Окончательно имеем

$$\exp(-i\hat{k}x)=\exp(-i\omega\cdot\sqrt{\xi_1\xi_2\xi_3/\rho^2})=$$
$$=-16\pi i\frac{1}{\sqrt{\omega}}\Big\{\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} e^{i\delta_{n,m}}\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)\Psi_n^m(1, \rho^2)\Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3)\Big]_{(0,0,0)}+$$
$$+\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} e^{i\delta_{n,m}}\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)\Psi_n^m(1, \rho^2)\Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3)\Big]_{(1,0,0)}\Big\}.$$

2. Падение п. в. в отрицательном направлении оси y, $\vec{l}=(1, 0, \pi/2)$. Из (3.13) получим $\xi_1'\xi_2'=0$ и $(\xi_1'-\rho^2)(\xi_2'-\rho^2)=0$, т. е. $\xi_1'=0$, $\xi_2'=\rho^2$. Таким образом,

$$\exp(-i\hat{k}y)=\exp(-i\omega\sqrt{-(\xi_1-1)(\xi_2-1)(\xi_3-1)/(\rho^2-1)})=$$
$$=-16\pi i\frac{1}{\sqrt{\omega}}\Big\{\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} e^{i\delta_{n,m}}\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)\Psi_n^m(0, \rho^2)\Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3)\Big]_{(0,0,0)}+$$
$$+\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} e^{i\delta_{n,m}}\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)\Psi_n^m(0, \rho^2)\Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3)\Big]_{(0,1,0)}\Big\}.$$

3. Падение п. в. в отрицательном направлении оси z, $\vec{l}=(1, \pi/2, \pi/2)$. Приведем лишь окончательную формулу

$$\exp(-i\hat{k}z)=\exp(-i\omega\sqrt{(\xi_1-\rho^2)(\xi_2-\rho^2)(\xi_3-\rho^2)/[(\rho^2-1)\rho^2]})=$$
$$=-16\pi i\frac{1}{\sqrt{\omega}}\Big\{\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} e^{i\delta_{n,m}}\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)\Psi_n^m(0, 1)\Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3)\Big]_{(0,0,0)}+$$
$$+\Big[\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} e^{i\delta_{n,m}}\Psi_n^m(\xi_1, \xi_2)\Psi_n^m(0, 1)\Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3)\Big]_{(0,0,1)}\Big\}.$$

§4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ НА ТРЕХОСНОМ ЭЛЛИПСОИДЕ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

В том случае, когда рассеивающая поверхность S имеет форму трехосного эллипсоида, разложение (3.12) позволяет получить точные решения задач (1.3)—(1.5).

Будем искать разложение рассеянной волны $u^s(\vec{r})$ в виде

$$u^s(\vec{r})=\sum_n u_n\Psi_n(\xi_1, \xi_2)\Psi_n(\xi_1', \xi_2')\Lambda_n^{(3)}(\xi_3). \qquad (4.1)$$

Каждое слагаемое в (4.1) является решением уравнения (1.4) и удовлетворяет условию (1.3). Подстановка (3.12) и (4.1) в граничные условия (1.5) дает

$$u_n = 16\pi i \frac{1}{\sqrt{\omega}} e^{i\delta_n} w_n(\xi_3^*),$$

где

$$w_n(\xi_3^*) = \begin{cases} \Lambda_n^{(1)}(\xi_3^*)/\Lambda_n^{(3)}(\xi_3^*) & \text{для задачи Дирихле,} \\ \dfrac{d}{d\xi_3}\Lambda_n^{(1)}(\xi_3^*) \Big/ \dfrac{d}{d\xi_3}\Lambda_n^{(3)}(\xi_3^*) & \text{для задачи Неймана,} \end{cases}$$

$\xi_3^* = a^2/(a^2-b^2)$ — значение ξ_3, соответствующее эллипсоиду S.

Из (3.11) следует, что $\Lambda_n^{(3)}(\xi_3) = \sqrt{\omega} e^{i\delta_n} \dfrac{\exp(i\hat{k}r)}{\hat{k}r} + O\left(\dfrac{1}{r^2}\right)$, $r\to\infty$, так что амплитуда рассеяния представляется следующим рядом Фурье по в. э. ф.:

$$F(\theta, \varphi, \theta', \varphi') = \sum_n u_n \sqrt{\omega}\, e^{i\delta_n} \Psi_n(\xi_1, \xi_2) \Psi_n(\xi_1', \xi_2'), \tag{4.2}$$

где угловые эллипсоидальные координаты ξ_1, ξ_2 связаны с угловыми сферическими координатами θ, φ теми же соотношениями, что и ξ_1', ξ_2' с θ', φ' (см. (3.13)).

Исходя из (1.6), выведем формулу для полного поперечного сечения рассеяния, устранив неточности, допущенные в [1, 2]. Учитывая, что

$$Q = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\hat{k}^2 r^2} \iint_{\xi_3 = r^2/(a^2-b^2)} |F|^2 h_1 h_2 d\xi_1 d\xi_2,$$

и используя разложения (4.2), выражения для коэффициентов Ламе h_1, h_2 и соотношения (2.4), (3.7), получим

$$Q = \frac{64\pi^2(a^2-b^2)}{\omega} \sum_n |w_n(\xi_3^*)|^2 |\Psi_n(\xi_1', \xi_2')|^2. \tag{4.3}$$

Ряд (4.1) упрощается, если п. в. падает по какой-либо оси эллипсоида. Ограничимся случаем падения п. в. по наибольшей оси S, $u^i(\vec{r}) = \exp(-i\hat{k}x)$. Рассеянная волна вычисляется по формуле

$$u^s(\vec{r}) = 16\pi i \frac{1}{\sqrt{\omega}} \Big\{ \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} e^{i\delta_{n,m}} \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(1, \rho^2) w_{n,m}(\xi_3^*) \Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi_3) \Big]_{(0,0,0)} +$$

$$+ \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} e^{i\delta_{n,m}} \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(1, \rho^2) w_{n,m}(\xi_3^*) \Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi_3) \Big]_{(1,0,0)} \Big\},$$

где

$$w_{n,m}(\xi_3^*) = \begin{cases} \Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3^*)/\Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi_3^*) & \text{для задачи Дирихле (мягкий эллипсоид),} \\ \dfrac{d}{d\xi_3}\Lambda_{n,m}^{(1)}(\xi_3^*) \Big/ \dfrac{d}{d\xi_3}\Lambda_{n,m}^{(3)}(\xi_3^*) & \text{для задачи Неймана (жесткий эллипсоид);} \end{cases}$$

амплитуда рассеяния в этом случае

$$F(\theta, \varphi, 0, 0) = 16\pi i \Big\{ \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} e^{2i\delta_{n,m}} \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(1, \rho^2) w_{n,m}(\xi_3^*) \Big]_{(0,0,0)} +$$

$$+ \Big[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} e^{2i\delta_{n,m}} \Psi_n^m(\xi_1, \xi_2) \Psi_n^m(1, \rho^2) w_{n,m}(\xi_3^*) \Big]_{(1,0,0)} \Big\};$$

для поперечника в формуле (4.3) следует положить $\xi_1' = 1, \xi_2' = \rho^2$ и взять у. в. э. ф. и р. в. э. ф., отвечающие наборам (0, 0, 0) и (1, 0, 0).

Литература

1. Федорюк М. В. // Акуст. журн. 1988. Т. 34, № 1. С. 160—164.
2. Федорюк М. В. // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 11. С. 1990—1995.
3. Федорюк М. В. // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1988. Т. 52, № 4. С. 853—874.
4. Федорюк М. В. // Успехи мат. наук. 1989. Т. 44, вып. 1 (265). С. 123—144.
5. Абрамов А. А., Дышко А. Л., Конюхова Н. Б., Левитина Т. В. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1989. Т. 29, № 6. С. 813—830.
6. Абрамов А. А., Дышко А. Л., Конюхова Н. Б., Левитина Т. В. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1991. Т. 31, № 2. С. 212—234.
7. Левитина Т. В. Некоторые методы решения многопараметрических спектральных задач и вычисление волновых эллипсоидальных функций: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1991.
8. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М., 1976.
9. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., 1977.
10. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. М., 1964.
11. Векуа И. Н. // Тр. Тбил. мат. ин-та. 1943. Т. 12. С. 105—174.
12. Bowan J. J., Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E. Electromagnetic and acaustic scattering by simple shapes. Amsterdam, 1969.
13. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. М., 1981.
14. Sleeman B. D. Multiparameter spectral theory in Hilbert space. London, 1978.
15. Левитина Т. В. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1991. Т. 31, № 5. С. 689—697.
16. Комаров И. В., Пономарев Л. И., Славянов С. Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М., 1976.

Вычислительный центр РАН

Поступила в редакцию 13 июля 1992 г.