

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4.7.1

ДВОЙНОЕ ЛУЧЕПРЕЛОМЛЕНИЕ

Цель работы: изучение зависимости показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякопреломляющем кристалле. Определение главных показателей преломления в кристалле.

Оборудование: гелий-неоновый лазер, поляризатор, вращающийся столик с неподвижным лимбом, призма из исландского шпата, поляроид.

УСТАНОВКА

Выразим показатель преломления необыкновенной волны через главные показатели

$$\frac{1}{n^2(\theta)} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2}.$$

Считая, что

$$n_o - n_e \ll n_o, n_e$$

$$n(\theta) \approx n_e + (n_o - n_e) \cos^2 \theta.$$

Призма из исландского шпата:

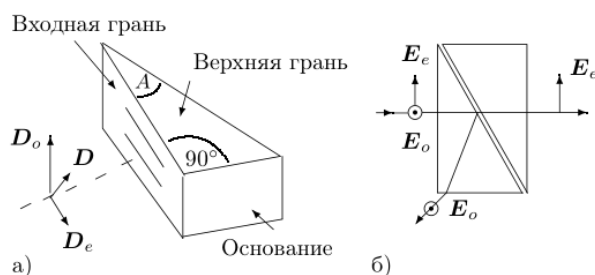


Рис. 1. а) Исследуемая призма из исландского шпата. Штриховкой указано направление оптической оси кристалла. б) Ход лучей в поляризационной призме

Согласно закону Снеллиуса и геометрическим соображениям

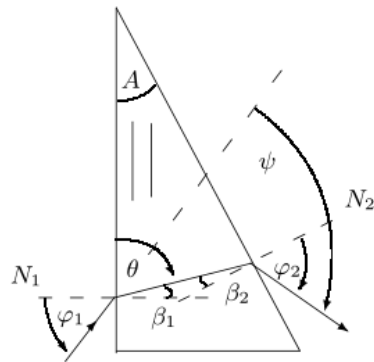


Рис. 2. Ход лучей в призме

$$\sin \varphi_1 = n \sin \beta_1;$$

$$\sin \varphi_2 = n \sin \beta_2 = n \sin(A - \beta_1).$$

Тогда,

$$n = \frac{1}{\sin A} \sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos A};$$

$$\cos \theta = \frac{\sin \varphi_1}{n}.$$

При минимальном угле отклонения луча призмой показатель преломления равен

$$n = \frac{\sin(\frac{\psi_m + A}{2})}{\sin(\frac{A}{2})},$$

Схема экспериментальной установки:

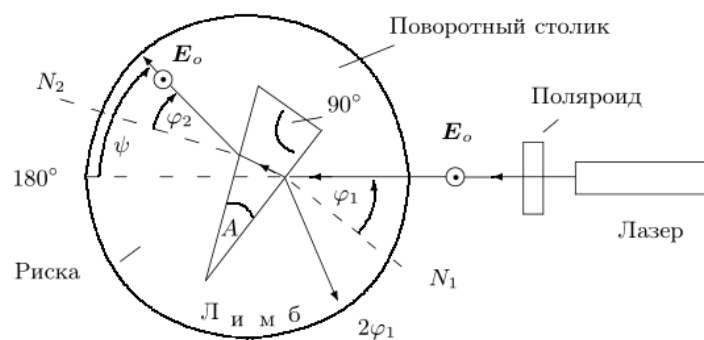


Рис. 3. Схема экспериментальной установки

ХОД РАБОТЫ

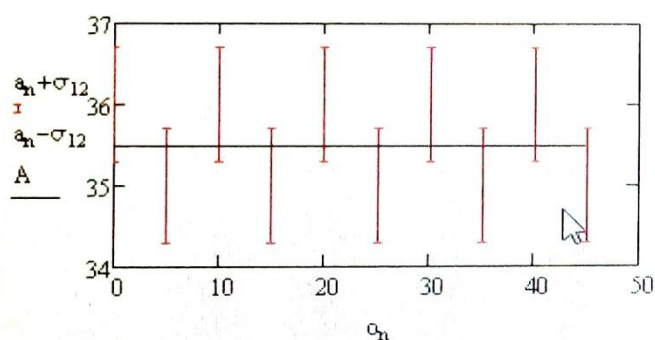
Определим угол A при вершине призмы.

$$A = 35.5^\circ$$

Снимем зависимость углов отклонения на выходе из призмы для обыкновенной и необыкновенной волн от угла падения луча на призму.

	0	1	2
0	0	297	153
1	10	303	158
2	20	307	163
3	30	313	168
4	40	317	173
5	50	323	178
6	60	327	183
7	70	333	188
8	80	337	193
9	90	343	198

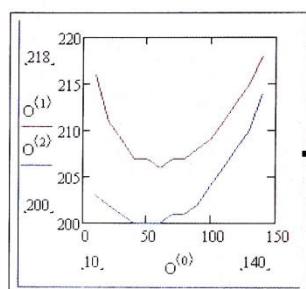
$$\bar{a} = \text{mean}(a) \quad A = 35.5 \quad \sigma_A = \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{N}} \quad \sigma_A = 0.236$$



Значение χ^2 для полученных данных и его значение для вероятности реализации гипотезы (преломляющий угол призмы не зависит от угла ее поворота) 5%.

$$\sum_{n=0}^N \left(\frac{a_n - A}{\sigma_{12}} \right)^2 = 5 \quad N + 2\sqrt{2N} = 17.485$$

Отсчеты углов для обыкновенной и необыкновенной волны, град



	0	1	2
0	10	216	203
1	20	211	202
2	30	209	201
3	40	207	200
4	50	207	200
5	60	206	200
6	70	207	201
7	80	207	201
8	90	208	202
9	100	209	204
10	110	211	206
11	120	213	208
12	130	215	210
13	140	218	214

$n_o = 1.655$ $n_e = 1.485$ Табличные значения показателя преломления для обыкновенной и необыкновенной волны на длине волны 0.63 мкм.

Введите, рассчитанный в программе А преломляющий угол призмы и его ошибку, град

$$A_{\text{вв}} = 35.50 \quad \sigma_A = 0.24$$

$\sigma_{\alpha} = 0.5$ Среднеквадратическая ошибка измерения отсчетов углов, град (0.5 град.) Ошибки для всех углов одинаковы, независимы между собой и в различных точках.

$$\alpha_0 = 0^{(0)} \quad \phi_0 = \frac{\alpha_0}{2} \quad \text{Угол падения луча лазера на большой катет призмы, град.}$$

$\alpha_o = 0^{(1)}$ $\alpha_e = 0^{(2)}$ Измеренный отсчет угла преломления для обыкновенной и необыкновенной волны, град

Отсчеты углов преломленных лучей, вычисленные для данного угла поворота призмы по табличным значениям показателя преломления.

$$F\alpha(A, n_o, n_e) := \left[180 - A + \phi_0 + \left(\arcsin \left(-\cos(P(A)) \cdot \sin(P(\phi_0)) + \frac{n_e}{n_o} \sin(P(A)) \sqrt{n_o^2 - \sin^2(P(\phi_0))} \right) \right) \frac{180}{\pi} \right]$$

$$\beta_o := F\alpha(A, n_o, n_o) \quad \beta_e := F\alpha(A, n_o, n_e) \quad \text{Теоретические отсчеты углов}$$

ИСПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ Контролируется по минимальному значению X2 для отсчета углов обыкновенного луча.

$\alpha_0 = -1.8$ ВВЕДИТЕ смещение отсчетов углов, возможные значения 0, +/-0.5, +/-1 град

$$\alpha_o := \alpha_o + \alpha_0 \quad \alpha_e := \alpha_e + \alpha_0$$

Получившиеся значения X2.

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (\alpha_{o_n} - \beta_{o_n})^2 = 24.343$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (\alpha_{e_n} - \beta_{e_n})^2 = 20.363$$

$$N + 1 + 2 \sqrt{2(N + 1)} = 24.583 \quad \text{Значение X2, при котором вероятность реализации гипотезы менее 5% (гипотеза отвергается)}$$

ИСПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ. Контролируется по минимальному значению χ^2 для отсчета углов обыкновенного луча

$\alpha_0 = -1.8$ ВВЕДИТЕ смещение отсчетов углов, возможные значения 0, +0.5, +1 град.

$\alpha_0 = \alpha_0 + \alpha_0$ $\alpha_e = \alpha_e + \alpha_0$

Получившиеся значения χ^2

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (\alpha_{0n} - \beta_{0n})^2 = 24.343 \quad \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N (\alpha_{en} - \beta_{en})^2 = 20.363$$

$N + 1 + 2\sqrt{2(N+1)} = 24.583$ Значение χ^2 , при котором вероятность реализации гипотезы менее 5% (гипотеза отвергается).

ОБРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

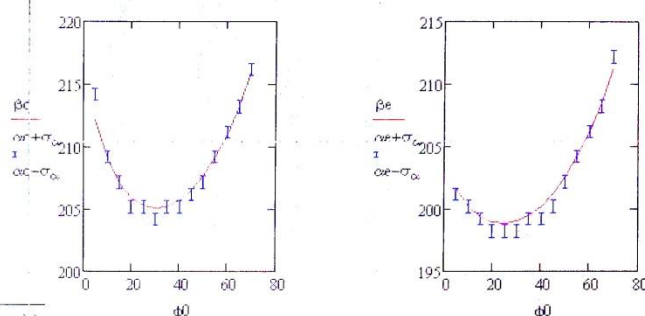
Значения показателя преломления, вычисленные по отсчетам углов

$$F(\alpha, \alpha_0, A) = \frac{\sin^2\left(P\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\right) + \sin^2\left(P\left(\alpha + A - \frac{\alpha_0}{2}\right)\right) - 2 \cos(P(A)) \sin\left(P\left(\frac{\alpha_0}{2}\right)\right) \sin\left(P\left(\alpha + A - \frac{\alpha_0}{2}\right)\right)}{\sin^2(P(A))}$$

Набор ошибок показателей преломления

$$\Sigma(\alpha, \alpha_0, A) = \sqrt{\left[\left(\frac{d}{d\alpha} F(\alpha, \alpha_0, A)\right)^2 + \left(\frac{d}{d\alpha_0} F(\alpha, \alpha_0, A)\right)^2\right] \sigma_{\alpha}^2 + \left(\frac{d}{dA} F(\alpha, \alpha_0, A)\right)^2 \sigma_A^2}$$

Экспериментальные и теоретические отсчеты углов



$n_0 = F(\alpha_0, \alpha_0, A)$ $n_e = F(\alpha_e, \alpha_0, A)$

$$\sigma_0 = \Sigma(\alpha_0, \alpha_0, A) \quad \sigma_e = \Sigma(\alpha_e, \alpha_0, A)$$

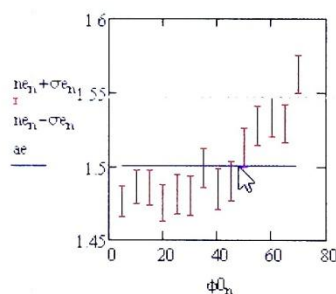
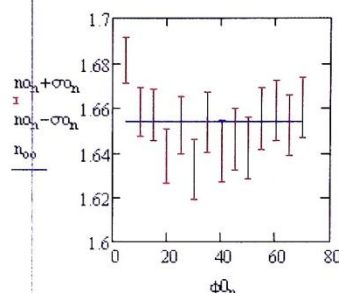
Проверка гипотезы о независимости показателя преломления обыкновенной и необыкновенной волны от угла падения луча на большой катет (оба показателя преломления - константы). Наилучшая константа и значение χ^2 .

$$n_{00} = \frac{\sum_{n=0}^N \frac{n_{0n}}{(\sigma_{0n})^2}}{\sum_{n=0}^N \frac{1}{(\sigma_{0n})^2}} \quad n_{00} = 1.654 \quad \chi^2_{00} = \sum_{n=0}^N \frac{(n_{0n} - n_{00})^2}{(\sigma_{0n})^2} \quad \chi^2_{00} = 14.066$$

$$\sigma_{n0} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{n=0}^N \frac{1}{(\sigma_{0n})^2}}} \quad \sigma_{n0} = 3.389 \times 10^{-3} \quad \text{Ошибка среднего значения показателя преломления обыкновенной волны.}$$

$$n_e = \frac{\sum_{n=0}^N \frac{n_{en}}{(\sigma_{en})^2}}{\sum_{n=0}^N \frac{1}{(\sigma_{en})^2}} \quad n_e = 1.5 \quad \chi^2_e = \sum_{n=0}^N \frac{(n_{en} - n_e)^2}{(\sigma_{en})^2} \quad \chi^2_e = 58.527$$

$$n_e = 1.485$$



Число степеней свободы (среднее значение) и дисперсия (среднеквадратическое отклонение) χ^2 -распределения (гипотеза с 1 параметром).

$$m_{\chi} = N + 1 - 1 \quad m_{\chi} = 13 \quad \sigma_{\chi} = \sqrt{2 m_{\chi}} \quad \sigma_{\chi} = 5.099$$

$m_{\chi} + 2 \sigma_{\chi} = 23.198$ Значение χ^2 , при котором вероятность реализации гипотезы менее 5% (гипотеза отвергается).

$$Y = \chi^2 \quad H(Y, m) = \frac{Y^{\frac{m-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) 2^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{Y}{2}} \quad \chi^2 - \text{распределение с } m \text{ степенями свободы}$$

$\int_{\chi^2}^{\infty} H(Y, m) dY$ Вероятность реализации гипотезы.

$$\int_{\chi^2_{20}}^{1000} H(Y, m_{\chi}) dY = 0.369 \quad \text{Вероятность реализации гипотезы для обыкновенной волны.}$$

Расчет зависимости показателя преломления необыкновенной волны от угла между волновым вектором и оптической осью кристалла, от угла падения на большой катет

$$\frac{1}{n(\theta)^2} = \frac{\cos(\theta)^2}{n_o^2} + \frac{\sin(\theta)^2}{n_e^2} = \frac{1}{n_e^2} + \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) \cos(\theta)^2 = \frac{1}{n_e^2} + \left(\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} \right) \frac{\sin\left(\frac{\cos\theta}{2}\right)^2}{n(\theta)^2} \quad \text{Гипотеза}$$

$$y = \frac{1}{n^2} \quad \sigma_y = \left(\frac{2}{n^3} \cdot \sigma_e \right) \quad \text{Величина обратная квадрату показателя преломления и ее ошибка}$$

$$x = \frac{\sin\left(P\left(\frac{\cos\theta}{2}\right)\right)^2}{n^2} \quad \text{Независимая переменная}$$

$$I = 1 \quad i = 0 \quad I \quad j = 0 \quad 1$$

$$B_{1,j} = \sum_{n=0}^N \frac{(x_n)^{1+j}}{(\sigma_{y_n})^2} \quad b_1 = \sum_{n=0}^N \frac{y_n (x_n)^1}{(\sigma_{y_n})^2} \quad c = B^{-1} b \quad Y = c_0 + c_1 x \quad \text{наилучшая прямая}$$

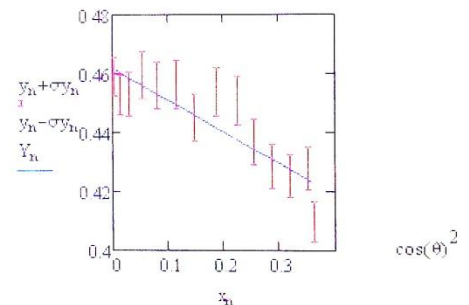
$$\frac{1}{n(\theta)^2}$$

Получившееся значение χ^2_e и его величина, при которой вероятность реализации гипотезы менее 5% (гипотеза отвергается)

$$\chi^2_e = \sum_{n=0}^N \frac{(y_n - Y_n)^2}{(\sigma_{y_n})^2} \quad \chi^2_e = 12.082 \quad N - 1 + 2 \sqrt{2(N-1)} = 21.798$$

Параметры гипотезы и их ошибки

$$\sigma_{c_0} = \sqrt{(B^{-1})_{0,0}} \quad \sigma_{c_1} = \sqrt{(B^{-1})_{1,1}} \quad c = \begin{pmatrix} 0.462 \\ -0.108 \end{pmatrix} \quad \sigma_c = \begin{pmatrix} 3.357 \times 10^{-3} \\ 0.015 \end{pmatrix}$$



$$n_{ee} = \sqrt{\frac{1}{c_0}} \quad \sigma_{n_{ee}} = \frac{1}{2 c_0} \sqrt{\frac{(B^{-1})_{0,0}}{c_0}} \quad \text{Оценка показателя преломления } n_e \text{ и ее ошибка}$$

$$n_{oo} = 1.654 \quad \text{показатель преломления обыкновенной волны } \sigma_{n_{oo}} = 3.389 \times 10^{-3} \quad \text{его ошибка} \quad n_o = 1.655 \quad \text{табличное значение}$$

$$n_{ee} = 1.471 \quad \text{показатель преломления необыкновенной волны } \sigma_{n_{ee}} = 5.347 \times 10^{-3} \quad \text{его ошибка} \quad n_e = 1.485 \quad \text{табличное значение}$$

$$c_1 = -0.108 \quad \text{относительная разность показателей преломления } \sqrt{(B^{-1})_{1,1}} = 0.015 \quad \text{ее ошибка} \quad \frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} = -0.088 \quad \text{табличное значение}$$

$$n_{oo} - n_{ee} = 0.182 \quad \text{разность показателей преломления } \sqrt{\sigma_{n_{oo}}^2 + \sigma_{n_{ee}}^2} = 6.331 \times 10^{-3} \quad \text{ее ошибка} \quad n_o - n_e = 0.17 \quad \text{табличное значение}$$