# Εργασία Υπολογιστικά Μαθηματικά

## 5ο εξάμηνο 2020-2021

**Ομάδα:**

**Νεφέλη- Ελένη Κατσιλέρου Α.Μ:4385**

**Μύρων Κουφόπουλος Α.Μ:4398**

**Σταματίνα Λυμπέρη Α.Μ:4410**

## Πρόβλημα 1

### <u>Ερωτημα α</u>

Οι αρχικές συνθήκες μετά από αντικατάσταση είναι οι εξής :

$[f_z, \tau_z]^T$= $\left[1 * 9.81 + \frac{4410}{1000}\right]^T$=$[14.22]^T$

$[f_z, \tau_z]^T$= $\left[1 * 9.81, -\frac{4410}{1000}\right]^T$=$[9.81, -4.41]^T$

$z_0$=AM/1000=4410/1000=4.41

$\psi_0 =$0

Και

$C_z$= 3-(AM/5000)=3-(4410/5000)=3-0.882=2.118

$C_\psi$= 5+(AM/5000)=5+(4410/5000)=5+0.882=5.882

Οπου AM με το μεγαλύτερο των αριθμών μητρώου να είναι το 4410.

Ακόμα σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε οτι

M*$z''$= $f_z$- M*g- $C_z$*$|z'|$*$z'$ ⇔

$z''$=$\frac{f_z - \mathrm{M}*\mathrm{g} - C_z*|z'|*z'}{M}$ (1)

$I_z\psi''$= $\tau_z$-$C_\psi$*$|\psi'|$*$\psi'$ ⇔

$\psi''$= $\frac{\tau_z - C_\psi*|\psi'|*\psi'}{I_z}$ (2)

Ακόμα

z(0)= $z_0$

ψ(0)= $\psi_0$

$z'(0)$= $\psi'(0)$=0

## Μέθοδος Euler

Γνωρίζουμε οτι ο γενικός τύπος της μεθόδου Euler ειναι :

$y_{n+1} = y_n + h * f(t_n, x_n, y_n) \Leftrightarrow$

$y_{n+1} = y_n + h * y'_n$

Το όρισμα $t_n$χρησιμοποιείται κυρίως στην υλοποίηση του κώδικα στο β ερώτημα και δεν επηρεάζει την λύση μας στο συγκεκριμένο ερώτημα.

Αρχικά παρατηρούμε οτι το ψ δεν επηρεάζει την διαφορική εξίσωση (1) όπως και το z δεν επηρεαζει την διαφορική εξίσωση (2).

Άρα για την (1) έχουμε:

$z = z_1$ και

$z' = z_2$

Απο αυτές τις δυο σχέσεις έχουμε

$$z'_1 = z_2 = f_1(t, z_1, z_2)$$

$$z'_2 = z'' = f_2(t, z_1, z_2) = \frac{f_z - \mathrm{M}*\mathrm{g} - C_z*|z_2|*z_2}{M}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο της Euler προκυπτει οτι

$\boldsymbol{z_{1(n+1)} = z_{1(n)} + h * f_1(t, z_1, z_2) = z_{1(n)} + h * z_{2(n)}}$ **euler 1**

**ΓΙΑ ΤΗΝ EULER 2**

Χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο

$\boldsymbol{z_{2(n+1)} = z_{2(n)} + h * f_2(t, z_1, z_2) = z_{2(n)} + h * z'_{2(n)} = z_{2(n)} + h * z''_{(n)}}$

και με αντικαταστάση το $z''$ με την σχεση (1) προκυπτει οτι

$\boldsymbol{z_{2(n+1)} = z_{2(n)} + h * \left(\frac{f_z - \mathrm{M}*\mathrm{g} - C_z*|z'|*z'}{M}\right) \Leftrightarrow}$

(οπου $z'$ σύμφωνα με τις παραπανω σχεσεις για το z ειναι το $z_2$)

$\boldsymbol{z_{2(n+1)} = z_{2(n)} + h * \left(\frac{f_z - \mathrm{M}*\mathrm{g} - C_z*|z_2|*z_2}{M}\right)}$ **euler 2**

Άρα για την (2) αντίστοιχα  έχουμε:

$\psi = \psi_1$ και

$\psi' = \psi_2$

Απο αυτές τις δυο σχέσεις έχουμε

$$\psi_1' = \psi_2 = g_1(t, \psi_1, \psi_2)$$

$$\psi_2' = \psi'' = g_2(t, \psi_1, \psi_2) = \frac{\tau_z - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}$$

Οπότε χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο της Euler προκυπτει οτι :

**ΓΙΑ ΤΗΝ EULER 3**

$\boldsymbol{\psi}_{1(\boldsymbol{n}+1)} = \boldsymbol{\psi}_{1(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2)$= $\boldsymbol{\psi}_{1(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{\psi}_{2(\boldsymbol{n})}$ **euler 3**

**ΓΙΑ ΤΗΝ EULER 4**

$\boldsymbol{\psi}_{2(\boldsymbol{n}+1)} = \boldsymbol{\psi}_{2(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2)$=

$= \boldsymbol{\psi}_{2(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{\psi}'_{2(\boldsymbol{n})}$=$\boldsymbol{\psi}_{2(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{\psi}''_{(\boldsymbol{n})}$

και με αντικαταστάση το $\psi''$ με την σχεση (2) προκυπτει οτι

$\boldsymbol{\psi}_{2(\boldsymbol{n}+1)} = \boldsymbol{\psi}_{2(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{h} *( \frac{\tau_z - C_\psi * |\psi'| * \psi'}{I_z})\Leftrightarrow$

οπου $\psi'$ σύμφωνα με τις παραπανω σχεσεις για το ψ ειναι το $\psi_2$)

$\boldsymbol{\psi}_{2(\boldsymbol{n}+1)} = \boldsymbol{\psi}_{2(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{h} * \left(\frac{\boldsymbol{\tau_z} - \boldsymbol{C_\psi} * |\boldsymbol{\psi}_2| * \boldsymbol{\psi}_2{}'}{\boldsymbol{I_z}}\right)$ **euler 4**

## Τροποποιημένη Μέθοδος Euler

Γνωρίζουμε οτι ο γενικός τύπος της τροποποιημένης μεθόδου Euler ειναι :

$y_{n+1} = y_n + h * f\left(t_n + \frac{h}{2},\ x_n + \frac{h}{2},\ y_n + \frac{h}{2} * y_n'\right)$

Το όρισμα $t_n$ χρησιμοποιείται κυρίως στην υλοποίηση του κώδικα στο β ερώτημα και δεν επηρεάζει την λύση μας στο συγκεκριμένο ερώτημα.

Για την διαφορική εξίσωση (1) οσο και για την (2) ισχύουν οι σχέσεις που βγήκαν παραπάνω, δηλαδή για την διαφορική εξίσωση (1) εχουμε:

$z = z_1$ και

$z' = z_2$

$$z_1' = z_2 = f_1(t, z_1, z_2)$$
$$z_2' = z'' = f_2(t, z_1, z_2) = \frac{f_z - \mathrm{M} * \mathrm{g} - C_z * |z_2| * z_2}{M}$$

Σύμφωνα, λοιπόν με τις παραπάνω σχέση και την γενική μορφή της τροποποιημένης μεθόδου έχουμε:

**ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER 1**

$$\boldsymbol{z_{1(n+1)} = z_{1(n)} + h * f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, z_{1(n)} + \frac{h}{2}, z_{2(n)} + \frac{h}{2} * z'_{2(n)}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{z_{1(n+1)} = z_{1(n)} + h * f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, z_{1(n)} + \frac{h}{2}, z_{2(n)} + \frac{h}{2} * f_2(t, z_1, z_2)\right)} \Leftrightarrow$$

Και με αντικατάσταση την σχεση:

$$f_2(t, z_1, z_2) = z'' = \frac{f_z - \mathrm{M} * \mathrm{g} - C_z * |z_2| * z_2}{M}$$

Προκύπτει οτι :

$$\boldsymbol{z_{1(n+1)} = z_{1(n)} + h * f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, z_{1(n)} + \frac{h}{2}, z_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{f_z - \mathrm{M} * \mathrm{g} - C_z * |z_2| * z_2}{M}\right)\right)} \Leftrightarrow$$

Ακόμα ισχύει :

$$z_2 = f_1(t, z_1, z_2)$$

Και με αντικατάσταση στην παραπάνω σχέση προκύπτει τελικά ότι:

$$\boldsymbol{z_{1(n+1)} = z_{1(n)} + h * \left(z_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{f_z - \mathrm{M} * \mathrm{g} - C_z * |z_2| * z_2}{M}\right)\right)}$$ **τροποποιημένη Euler 1**

**ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER 2**

$$\boldsymbol{z_{2(n+1)} = z_{2(n)} + h * f_2\left(t_n + \frac{h}{2}, z_{1(n)} + \frac{h}{2}, z_{2(n)} + \frac{h}{2} * z'_{2(n)}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{z_{2(n+1)} = z_{2(n)} + h * f_2\left(t_n + \frac{h}{2}, z_{1(n)} + \frac{h}{2}, z_{2(n)} + \frac{h}{2} * f_2(t, z_1, z_2)\right)} \Leftrightarrow$$

Αντικαθιστούμε το $f_2(t, z_1, z_2)$ με το z''

$$\boldsymbol{z}_{2(\boldsymbol{n}+1)} = \boldsymbol{z}_{2(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{f}_2 \left(\boldsymbol{t_n} + \frac{\boldsymbol{h}}{2}, \boldsymbol{z}_{1(\boldsymbol{n})} + \frac{\boldsymbol{h}}{2}, \boldsymbol{z}_{2(\boldsymbol{n})} + \frac{\boldsymbol{h}}{2} * \frac{f_z - \mathrm{M}*\mathrm{g} - C_z*|z'|*z'}{M}\right) \Leftrightarrow$$

Οπου πάλι αντικαθιστούμε το $z'$ με το $z_2$ και προκύπτει η εξής σχέση

$$\boldsymbol{z}_{2(\boldsymbol{n}+1)} = \boldsymbol{z}_{2(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{f}_2 \left(\boldsymbol{t_n} + \frac{\boldsymbol{h}}{2}, \boldsymbol{z}_{1(\boldsymbol{n})} + \frac{\boldsymbol{h}}{2}, \boldsymbol{z}_{2(\boldsymbol{n})} + \frac{\boldsymbol{h}}{2} * \frac{f_z - \mathrm{M}*\mathrm{g} - C_z*|z_2|*z_2}{M}\right) \Leftrightarrow$$

και τώρα το $f_2$ το αντικαθιστούμε με την σχέση παραπάνω , το οποιο ειναι το $z''$, και το $z_2$ εσωτερικά της $f_2$ θα αντικατασταθεί απο την σχέση

$$\boldsymbol{z}_{2(\boldsymbol{n})} + \frac{\boldsymbol{h}}{2} * \frac{f_z - \mathrm{M}*\mathrm{g} - C_z * |z_2| * z_2}{M}$$

Άρα η τελική σχέση μετά απο αντικαταστάσεις ειναι η

$$\boldsymbol{z}_{2(\boldsymbol{n}+1)} = \boldsymbol{z}_{2(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{(}\frac{\boldsymbol{f_z} - \mathbf{M}*\mathbf{g} - C_z * \left|\boldsymbol{z}_{2(\boldsymbol{n})} + \frac{\boldsymbol{h}}{2} * \frac{\boldsymbol{f_z} - \boldsymbol{M}*\boldsymbol{g} - \boldsymbol{C_z}*|\boldsymbol{z}_2|*\boldsymbol{z}_2}{\boldsymbol{M}}\right| * \left(\boldsymbol{z}_{2(\boldsymbol{n})} + \frac{\boldsymbol{h}}{2} * \frac{\boldsymbol{f_z} - \boldsymbol{M}*\boldsymbol{g} - \boldsymbol{C_z}*|\boldsymbol{z}_2|*\boldsymbol{z}_2}{\boldsymbol{M}}\right)}{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{)}$$

**(Τροποποιημένη Euler 2)**

Για την διαφορικη εξίσωση (2) έχουμε

$\psi = \psi_1$ και

$\psi' = \psi_2$

$$\psi_1' = \psi_2 = g_1(t, \psi_1, \psi_2)$$

$$\psi_2' = \psi'' = g_2(t, \psi_1, \psi_2) = \frac{\tau_z - C_\psi*|\psi_2|*\psi_2}{I_z}$$

Σύμφωνα, λοιπόν με τις παραπάνω σχέση και την γενική μορφή της τροποποιημένης μεθόδου έχουμε:

**ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER 3**

$$\boldsymbol{\psi}_{1(\boldsymbol{n}+1)} = \boldsymbol{\psi}_{1(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{g}_1 \left(\boldsymbol{t_n} + \frac{\boldsymbol{h}}{2}, \boldsymbol{\psi}_{1(\boldsymbol{n})} + \frac{\boldsymbol{h}}{2}, \boldsymbol{\psi}_{2(\boldsymbol{n})} + \frac{\boldsymbol{h}}{2} * \boldsymbol{\psi}'_{2(\boldsymbol{n})}\right) \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\psi}_{1(\boldsymbol{n}+1)} = \boldsymbol{\psi}_{1(\boldsymbol{n})} + \boldsymbol{h} * \boldsymbol{g}_1 \left(\boldsymbol{t_n} + \frac{\boldsymbol{h}}{2}, \boldsymbol{\psi}_{1(\boldsymbol{n})} + \frac{\boldsymbol{h}}{2}, \boldsymbol{\psi}_{2(\boldsymbol{n})} + \frac{\boldsymbol{h}}{2} * \boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2)\right) \quad \Leftrightarrow$$

Και με αντικατάσταση την παρακάτω σχεση:

$$g_2(t, \psi_1, \psi_2) = \psi'' = \frac{\tau_z - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}$$

$$\boldsymbol{\psi_{1(n+1)} = \psi_{1(n)} + h * g_1\left(t_n + \frac{h}{2}, \psi_{1(n)} + \frac{h}{2}, \psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{\tau_z - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}\right)\right)}$$

Και τελικά το $\psi_2 = g_1(t, \psi_1, \psi_2)$,άρα

$\boldsymbol{\psi_{1(n+1)} = \psi_{1(n)} + h * \left(\psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{\tau_z - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}\right)\right)}$ **(τροποιημένη Euler 3)**

**ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER 4**

$$\boldsymbol{\psi_{2(n+1)} = \psi_{2(n)} + h * g_2\left(t_n + \frac{h}{2}, \psi_{1(n)} + \frac{h}{2}, \psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \psi'_{2(n)}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{\psi_{2(n+1)} = \psi_{2(n)} + h * g_2\left(t_n + \frac{h}{2}, \psi_{1(n)} + \frac{h}{2}, \psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * g_2(t, \psi_1, \psi_2)\right)} \Leftrightarrow$$

//Οπου $g_2(t, \psi_1, \psi_2) = \psi''$=$\frac{\tau_z - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}$

$$\boldsymbol{\psi_{2(n+1)} = \psi_{2(n)} + h * g_2(t_n + \frac{h}{2},\ \psi_{1(n)} + \frac{h}{2},}$$
$$\boldsymbol{\psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{\tau_z - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}\right)} \Leftrightarrow$$

// Οπου το εξωτερικό $g_2(t, \psi_1, \psi_2) = \psi''$=$\frac{\tau_z - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}$ και παλι το εσωτερικό $\psi_2$ είναι το $\psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{\tau_z - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}\right)$

Άρα η τελική σχέση μετά απο αντικαταστάσεις ειναι η

$$\boldsymbol{\psi_{2(n+1)} = \psi_{2(n)} +}$$
$$\boldsymbol{h} * \left[\frac{\boldsymbol{\tau_z - C_\psi} * \left|\psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{\tau_z - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}\right)\right| * \left(\psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{\tau_z - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}\right)\right)}{\boldsymbol{I_z}}\right]$$

**Τροποποιημενη Euler 4**

## Ερώτημα γ

Οι αρχικές συνθήκες που μας δίνονται σε αυτό το ερώτημα είναι οι εξής:

AM=4410

$K_{pz}$=5

$K_{dz}$= 15-(AM/1000)

$K_{p\psi}$=5

$K_{d\psi}$=20

$z_0$=AM/1000

$\psi_0$=0

$z_{des}$=AM/200

$\psi_{des}$=AM/3000

$C_z$= 3+(AM/5000)

$C_\psi$=5

Οι αρχικές είσοδοι πλέον είναι οι εξής:

$f_z$= M*g - $K_{pz}$*($z_{des}$- z) -$K_{dz}$*$z'$ και

$\tau_z$= $K_{p\psi}$*($\psi_{des}$ $-\psi$) - $K_{p\psi}$* $\psi'$

Με την αντικατάσταση των παραπάνω τύπων στις αρχικές μεθόδους έχουμε:

M*$z''$= $f_z$- M*g- $C_z$*|$z'$|*$z'$ ⇔

M*$z''$= M*g - $K_{pz}$*($z_{des}$- z) -$K_{dz}$*$z'$ - M*g- $C_z$*|$z'$|*$z'$ ⇔

$$z''=\frac{M*g - K_{pz}*(z_{des} - z) - K_{dz}*z' - M*g - C_z*|z'|*z'}{M} \quad (A)$$

Και

$I_z\psi''$= $\tau_z$-$C_\psi$*|$\psi'$|*$\psi'$ ⇔

$I_z\psi''$= $K_{p\psi}$*($\psi_{des}$ $-\psi$) - $K_{p\psi}$* $\psi'$ -$C_\psi$*|$\psi'$|*$\psi'$

$$\psi''=\frac{K_{p\psi}*(\psi_{des} - \psi) - K_{p\psi}*\psi' - C_\psi*|\psi'|*\psi'}{I_z} \quad (B)$$

## Μέθοδος Euler

Η γενική μορφή της μεθόδου είναι η εξής:

$y_{n+1} = y_n + h * f(t_n, x_n, y_n) \Leftrightarrow$

$y_{n+1} = y_n + h * y'_n$

Το όρισμα $\mathrm{t_n}$ χρησιμοποιείται κυρίως στην υλοποίηση του κώδικα στο β ερώτημα και δεν επηρεάζει την λύση μας στο συγκεκριμένο ερώτημα.

Ισχύουν τα εξής:

→Αρχικά παρατηρούμε οτι το ψ δεν επηρεάζει την διαφορική εξίσωση (A) όπως και το z δεν επηρεαζει την διαφορική εξίσωση (B).

Άρα για την (A) έχουμε:

$z = z_1$ και

$z' = z_2$

Απο αυτές τις δυο σχέσεις έχουμε

$z'_1$= $z_2$=$f_1$(t,$z_1$,$z_2$)

$z'_2$= $z''$=$f_2$(t,$z_1$,$z_2$)= $\frac{\mathrm{M}*\mathrm{g} - \mathrm{K_{pz}}*(\mathrm{z_{des}}-z_1) - \mathrm{K_{dz}}*z_2 - \mathrm{M}*\mathrm{g} - C_z*|z_2|*z_2}{M}$

Κατ επέκταση έχουμε:

**$z_{1(n+1)}$= $z_{1(n)}$+ h*$f_1$(t,$z_1$,$z_2$)= $z_{1(n)}$+ h*$z_{2(n)}$** η οποία είναι η Euler 1

**ΓΙΑ ΤΗΝ EULER 2**

Χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο $z_{2(n+1)}$= $z_{2(n)}$+ h*$f_2$(t,$z_1$,$z_2$)= $z_{2(n)}$+ h*$z'_{2(n)}$ και με αντικαταστάση το $\mathrm{z}'_2$ =$z''$ από την παραπάνω σχέση (A) προκυπτει οτι

$z_{2(n+1)}$= $z_{2(n)}$+ h*$f_2$(t,$z_1$,$z_2$)= $z_{2(n)}$+ h*$z'_{2(n)}$=$z_{2(n)}$+ h*$z''$=

= $z_{2(n)}$+ h*($\frac{\mathrm{M}*\mathrm{g} - \mathrm{K_{pz}}*(\mathrm{z_{des}}-z_1) - \mathrm{K_{dz}}*z_2 - \mathrm{M}*\mathrm{g} - C_z*|z_2|*z_2}{M}$)

**ΓΙΑ ΤΗΝ EULER 3**

Άρα για την (2) αντίστοιχα έχουμε:

$\psi = \psi_1$ και

$\psi' = \psi_2$

Απο αυτές τις δυο σχέσεις έχουμε

$\psi_1'$= $\psi_2$=$g_1$(t,$\psi_1$,$\psi_2$)

$\psi_2'$= $\psi''$=$g_2$(t,$\psi_1$,$\psi_2$)= $\frac{\mathrm{K_{p\psi}}*(\psi_{\mathrm{des}} - \psi_1) \text{ - } \mathrm{K}_{p\psi}*\psi_2 \text{ -}C_\psi*|\psi_2|*\psi_2}{I_z}$

Οπότε χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο της Euler προκυπτει οτι :

$\psi_{1(n+1)} = \psi_{1(n)} + h * g_1(t, \psi_1, \psi_2)$= $\psi_{1(n)} + h * \psi_{2(n)}$ **euler 3**

**ΓΙΑ ΤΗΝ EULER 4**

Χρησιμοποιώντας τον γενικό τύπο $\psi_{2(n+1)}$= $\psi_{2(n)}$+ h*$g_2$(t,$\psi_1$,$\psi_2$)= $\psi_{2(n)}$+ h*$\psi'_{2(n)}$ και με αντικαταστάση το $\psi_2'$ =ψ′′ από την παραπάνω σχέση(Β) προκυπτει οτι

$\psi_{2(n+1)} = \psi_{2(n)} + h * g_2(t, \psi_1, \psi_2)$=$\psi_{2(n)}$+ h*$\psi'_{2(n)}$=$\psi_{2(n)}$+ h*$\psi''$=

= $\psi_{2(n)}$+ h*($\frac{\mathrm{K_{p\psi}}*(\psi_{\mathrm{des}} - \psi_1) \text{ -}\mathrm{K}_{p\psi}*\psi_2 \text{ -}C_\psi*|\psi_2|*\psi_2}{I_z}$)

## Τροποποιημένη Μέθοδος Euler

Γνωρίζουμε οτι ο γενικός τύπος της τροποποιημένης μεθόδου Euler ειναι :

$y_{n+1} = y_n + h * f\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} * y_n'\right)$

Το όρισμα $t_n$χρησιμοποιείται κυρίως στην υλοποίηση του κώδικα στο β ερώτημα και δεν επηρεάζει την λύση μας στο συγκεκριμένο ερώτημα.

Για την διαφορική εξίσωση (Α) οσο και για την (Β) ισχύουν οι σχέσεις που βγήκαν παραπάνω, δηλαδή για την διαφορική εξίσωση (Α) εχουμε:

$z = z_1$ και

$z' = z_2$

Απο αυτές τις δυο σχέσεις έχουμε

$z_1'$= $z_2$=$f_1$(t,$z_1$,$z_2$)

$z_2'$= $z''$=$f_2$(t,$z_1$,$z_2$)= $\frac{\mathrm{M*g} - \mathrm{K_{pz}}*(\mathrm{z_{des}} - z_1) \text{ -}\mathrm{K_{dz}}*z_2 \text{ - M*g} - C_z*|z_2|*z_2}{M}$

Σύμφωνα, λοιπόν με τις παραπάνω σχέση και την γενική μορφή της τροποποιημένης μεθόδου έχουμε:

**ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER 1**

$z_{1(n+1)} = z_{1(n)} + h * f_1\left(t_n + \frac{h}{2}, z_{1(n)} + \frac{h}{2}, z_{2(n)} + \frac{h}{2} * z'_{2(n)}\right)$⇔

$$z_{1(n+1)} = z_{1(n)} + h * f_1(t_n + \frac{h}{2}, z_{1(n)} + \frac{h}{2}, z_{2(n)} + \frac{h}{2}*(\frac{M*g + K_{pz}(z_{des}-z) - K_{dz}(z') - M*g - C_z*|z'|*z'}{M}))$$

Αντικαθιστούμε τα z=$z_1$ και $z'$=$z_2$:

$$z_{1(n+1)} = z_{1(n)} + h * f_1(t_n + \frac{h}{2}, z_{1(n)} + \frac{h}{2}, z_{2(n)} + \frac{h}{2}*(\frac{M*g + K_{pz}(z_{des}-z_1) - K_{dz}(z_2) - M*g - C_z*|z_2|*z_2}{M}))$$

Όπου τελικά αντικαταστήσαμε $f_1$(t,$z_1$,$z_2$)= $z_2$:

$$z_{1(n+1)} = z_{1(n)} + h *(z_{2(n)} + \frac{h}{2}*(\frac{M*g + K_{pz}(z_{des}-z_1) - K_{dz}(z_2) - M*g - C_z*|z_2|*z_2}{M}))$$

**ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER 2**

Πάλι, με την χρήση της γενικής μορφής της τροποποιημένης μεθόδου έχουμε:

$$z_{2(n+1)} = z_{2(n)} + h * f_2\left(t_n + \frac{h}{2}, z_{1(n)} + \frac{h}{2}, z_{2(n)} + \frac{h}{2} * z'_{2(n)}\right)$$

Αντικαθιστούμε το $z'_2$ με την $f_2$(t,$z_1$,$z_2$)= $z''$

$$z_{2(n+1)} = z_{2(n)} + h * f_2(t_n + \frac{h}{2}, z_{1(n)} + \frac{h}{2}, z_{2(n)} + \frac{h}{2}*(\frac{M*g + K_{pz}(z_{des}-z) - K_{dz}(z') - M*g - C_z*|z'|*z'}{M})) \Leftrightarrow$$

Αντικαθιστούμε τα z=$z_1$ και $z'$=$z_2$:

$$z_{2(n+1)} = z_{2(n)} + h * f_2(t_n + \frac{h}{2}, z_{1(n)} + \frac{h}{2}, z_{2(n)} + \frac{h}{2}*(\frac{M*g + K_{pz}(z_{des}-z_1) - K_{dz}(z_2) - M*g - C_z*|z_2|*z_2}{M})) \Leftrightarrow$$

Αντικαθιστούμε την εξωτερική $f_2$(t,$z_1$,$z_2$) με την $z''$ και όπου το $z_2$ μέσα στην $f_2$ το αντικαθιστούμε με το

$$\{z_{2(n)} + \frac{h}{2}*(\frac{M*g + K_{pz}(z_{des}-z_1) - K_{dz}(z_2) - M*g - C_z*|z_2|*z_2}{M})\}$$

$$z_{2(n+1)} = z_{2(n)} + \mathrm{h}* \{ \frac{M*g + K_{pz}(z_{des}-z_1) - K_{dz}(\mathrm{z}_{\mathrm{z(n)}} + \frac{\mathrm{h}}{2}*(\frac{M*g + K_{pz}(z_{des}-z_1) - K_{dz}(z_2) - M*g - C_z*|z_2|*z_2}{M})) - M*g}{M} - \frac{C_z*|\mathrm{z}_{\mathrm{z(n)}} + \frac{\mathrm{h}}{2}*(\frac{M*g + K_{pz}(z_{des}-z_1) - K_{dz}(z_2) - M*g - C_z*|z_2|*z_2}{M})|*\{\mathrm{z}_{\mathrm{z(n)}} + \frac{\mathrm{h}}{2}*(\frac{M*g + K_{pz}(z_{des}-z_1) - K_{dz}(z_2) - M*g - C_z*|z_2|*z_2}{M})\}}{\mathrm{M}} \}$$

Για την διαφορική εξίσωση (A) οσο και για την (B) ισχύουν οι σχέσεις που βγήκαν παραπάνω, δηλαδή για την διαφορική εξίσωση (B) εχουμε:

$\psi = \psi_1$ και

$\psi' = \psi_2$

Απο αυτές τις δυο σχέσεις έχουμε

$\psi_1'$= $\psi_2$=$g_1$(t,$\psi_1$,$\psi_2$)

$\psi_2'$= $\psi''$=$g_2$(t,$\psi_1$,$\psi_2$)= $\frac{K_{p\psi}*(\psi_{des} - \psi) - K_{p\psi}*\psi' - C_\psi*|\psi'|*\psi'}{I_z}$

Σύμφωνα, λοιπόν με τις παραπάνω σχέση και την γενική μορφή της τροποποιημένης μεθόδου έχουμε:

**ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER 3**

$$\psi_{1(n+1)} = \psi_{1(n)} + h * g_1\left(t_n + \frac{h}{2}, \psi_{1(n)} + \frac{h}{2}, \psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \psi'_{2(n)}\right) \Leftrightarrow$$

$$\psi_{1(n+1)} = \psi_{1(n)} + h * g_1(t_n + \frac{h}{2}, \psi_{1(n)} + \frac{h}{2}, \psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * g_2(\mathrm{t}, \psi_1, \psi_2)) \Leftrightarrow$$

$$\psi_{1(n+1)} = \psi_{1(n)} + h * g_1(t_n + \frac{h}{2}, \psi_{1(n)} + \frac{h}{2}, \psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * ((\ K_{p\psi} * (\psi_{des} - \psi) - K_{p\psi} * \psi' - C_\psi * |\psi'| * \psi')/I_z)) \Leftrightarrow$$

Με αντικατάσταση το ψ=$\psi_1$ και $\psi'$=$\psi_2$ έχουμε

$$\psi_{1(n+1)} = \psi_{1(n)} + h * g_1(t_n + \frac{h}{2}, \psi_{1(n)} + \frac{h}{2}, \psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * ((\ K_{p\psi} * (\psi_{des} - \psi_1) - K_{p\psi} * \psi_2 - C_\psi * |\ \psi_2\ | * \psi_2\ )/I_z)) \Leftrightarrow$$

Με αντικατάσταση το $g_1$(t,$\psi_1$,$\psi_2$)= $\psi'$ έχουμε

$$\psi_{1(n+1)} = \psi_{1(n)} + h * (\psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * ((\ K_{p\psi} * (\psi_{des} - \psi_1) - K_{p\psi} * \psi_2 - C_\psi * |\ \psi_2\ | * \psi_2\ )/I_z))$$

**ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗ EULER 4**

$$\psi_{2(n+1)} = \psi_{2(n)} + h * g_2\left(t_n + \frac{h}{2}, \psi_{1(n)} + \frac{h}{2}, \psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \psi'_{2(n)}\right) \Leftrightarrow$$

Με αντικατάσταση το $\psi_2'$=$\psi''$ έχουμε

$$\psi_{2(n+1)} = \psi_{2(n)} + h * g_2\left(t_n + \frac{h}{2}, \psi_{1(n)} + \frac{h}{2}, \psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{K_{p\psi} * (\psi_{des} - \psi) - K_{p\psi} * \psi' - C_\psi * |\psi'| * \psi'}{I_z}\right)\right)$$
$\Leftrightarrow$

Με αντικατάσταση το $\psi=\psi_1$ και $\psi'=\psi_2$ έχουμε

$$\psi_{2(n+1)} = \psi_{2(n)} + h * g_2\left(t_n + \frac{h}{2}, \psi_{1(n)} + \frac{h}{2}, \psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{K_{p\psi} * (\psi_{des} - \psi_1) - K_{p\psi} * \psi_2 - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}\right)\right) \Leftrightarrow$$

Αντικαθιστούμε την εξωτερική $g_2(t,\psi_1,\psi_2)$ με την $\psi''$ και όπου το $\psi_2$ μέσα στην $g_2$ το αντικαθιστούμε με το

$$\psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{K_{p\psi} * (\psi_{des} - \psi_1) - K_{p\psi} * \psi_2 - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}\right)$$

Με αντικατάσταση το $g_2(t,\psi_1,\psi_2) = \psi''$ έχουμε:

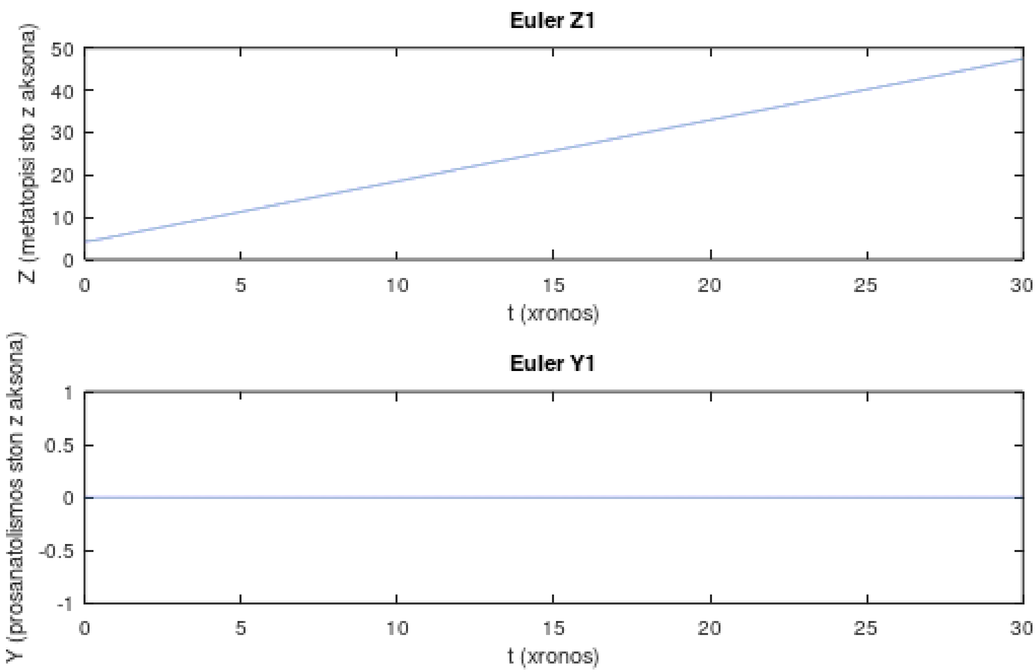
$$\psi_{2(n+1)} = \psi_{2(n)} + h * \left\{\frac{K_{p\psi} * (\psi_{des} - \psi_1) - K_{p\psi} * \left\{\psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{K_{p\psi} * (\psi_{des} - \psi_1) - K_{p\psi} * \psi_2 - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}\right)\right\}}{I_z} - \frac{C_\psi * \left|\psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{K_{p\psi} * (\psi_{des} - \psi_1) - K_{p\psi} * \psi_2 - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}\right)\right| * \left[\psi_{2(n)} + \frac{h}{2} * \left(\frac{K_{p\psi} * (\psi_{des} - \psi_1) - K_{p\psi} * \psi_2 - C_\psi * |\psi_2| * \psi_2}{I_z}\right)\right]}{I_z}\right\}$$

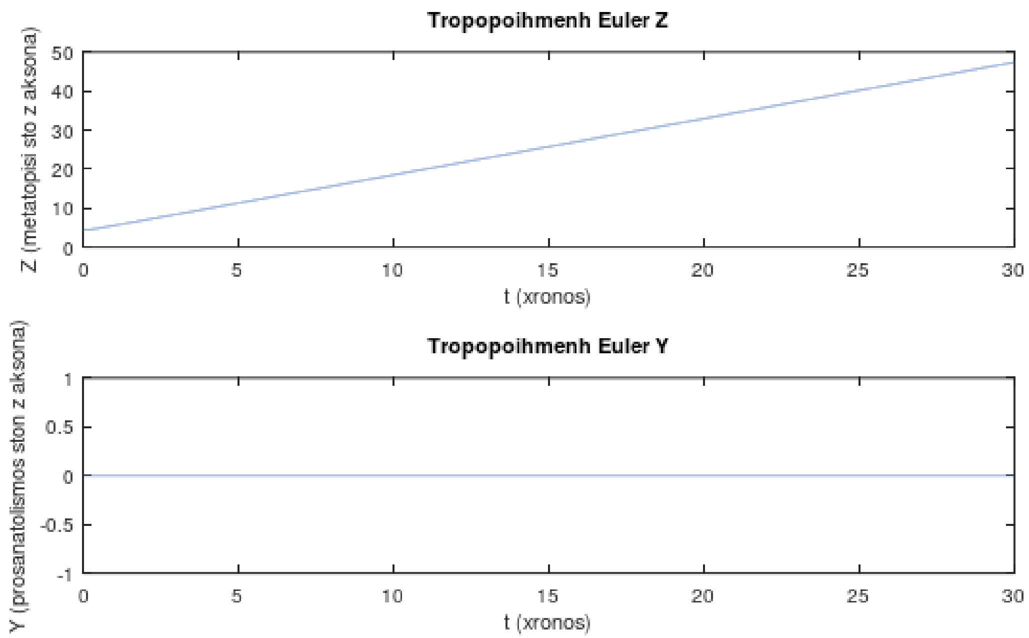
# Ερώτημα ε

Για τις γραφικες παραστάσεις του πρώτου ερωτήματος , με βάση και τον κώδικα που γράψαμε στο δεύτερο ερώτημα και με βάση τις αρχικές συνθήκες

$$[f_z, \tau_z]^T = \left[1 * 9.81 + \frac{4410}{1000}\right]^T = [14.22]^T$$

είναι οι εξής:




Παρατηρούμε ότι το τετρακόπτερο απο την χρονική στιγμή 0 μέχρι την χρονική στιγμή 30, για την περίπτωση του Euler, πραγματοποιεί ταυτόχρονα τα εξής:

→ Στον άξονα $y'y$ η γραφική παράσταση είναι μια σταθέρη ευθεία ,της μορφής y=b με b=0. Οπότε καταλαβαίνουμε ότι στον άξονα αυτόν δεν θα κινείται το τετρακόπτερο.

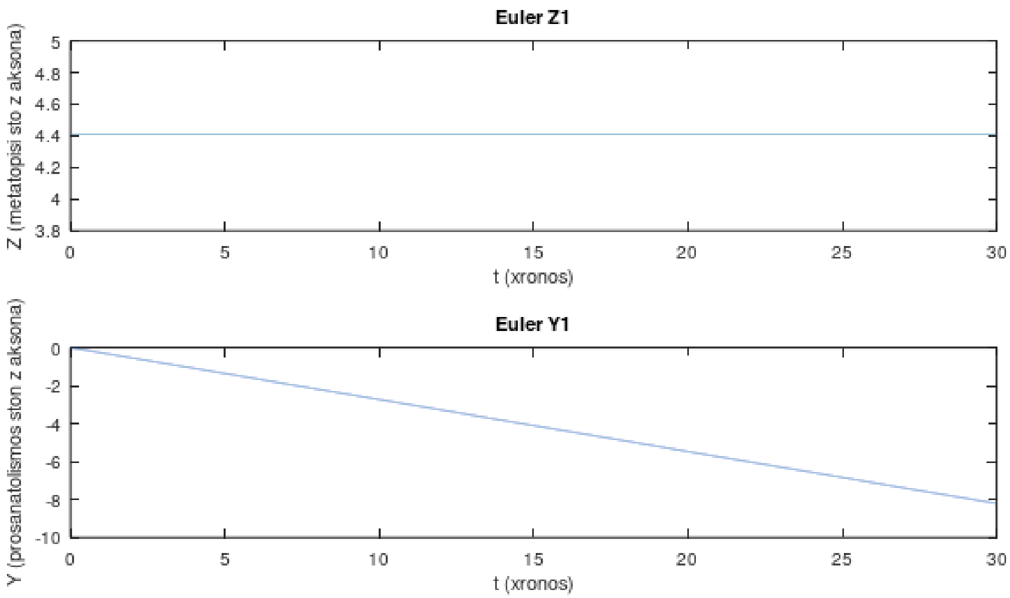
→ Στον άξονα $z'z$ η γραφική παράσταση είναι μια σταθερή ευθεία, η οποία είναι της μορφής y=a*x+b με a>0 και η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως αύξουσα απο το 0 μέχρι το 30.

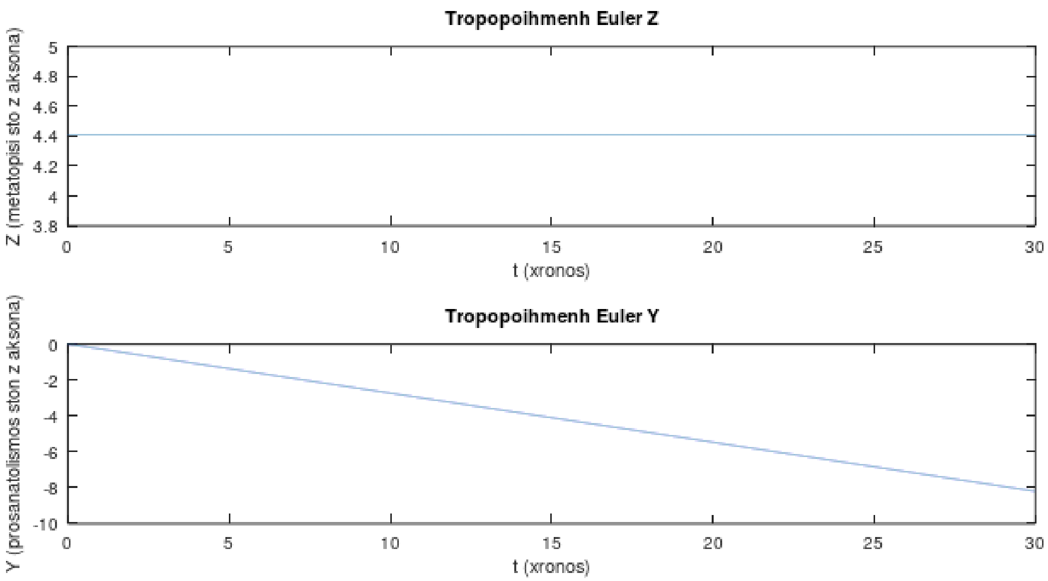
Οπότε συμπεραίνουμε οτι το τετρακόπτερο κινείται ανοδικά στον $z'z$ με σταθερή ταχύτητα, ξεκινώντας από την θέση 4,41.

Για την περίπτωση της τροποποιημένης Euler ισχύουν τα ίδια, αλλά με μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με την Euler, καθώς έχει τάξη ακρίβειας 2.

Για τις γραφικες παραστάσεις του πρώτου ερωτήματος , με βάση και τον κώδικα που γράψαμε στο δεύτερο ερώτημα και με βάση τις αρχικές συνθήκες

$[f_z, \tau_z]^T$= $\left[1 * 9.81, -\frac{4410}{1000}\right]^T$ =$[9.81, -4.41]^T$ είναι οι εξής:





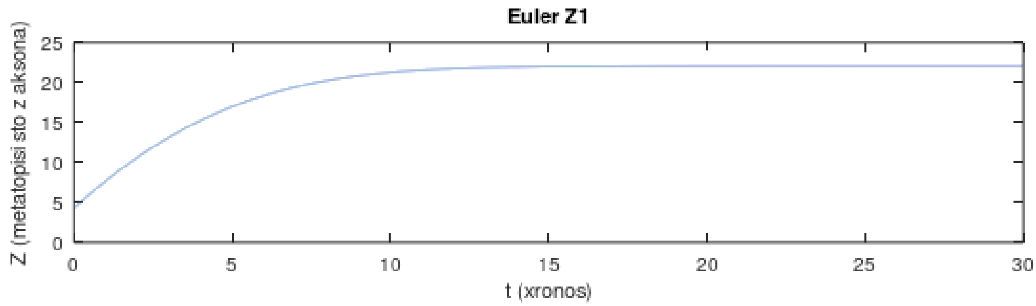

Παρατηρούμε ότι το τετρακόπτερο απο την χρονική στιγμή 0 μέχρι την χρονική στιγμή 30, για την περίπτωση του Euler, πραγματοποιεί ταυτόχρονα τα εξής:

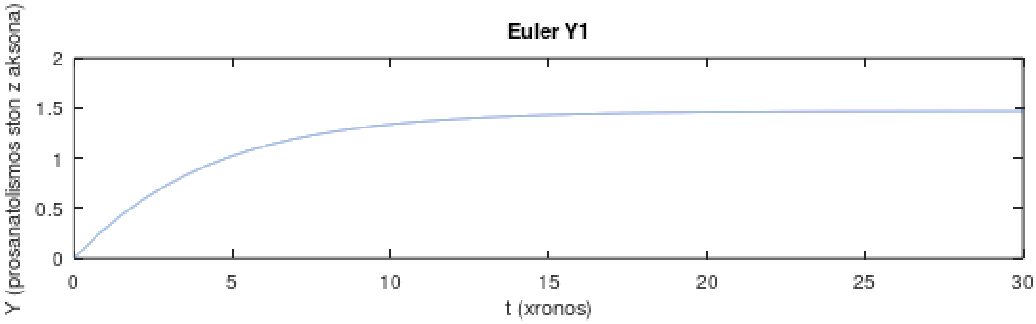
→ Στον άξονα $z'z$ η γραφική παράσταση είναι μια σταθέρη ευθεία ,της μορφής y=b με 4,41. Οπότε καταλαβαίνουμε ότι στον άξονα αυτόν δεν θα κινείται το τετρακόπτερο.

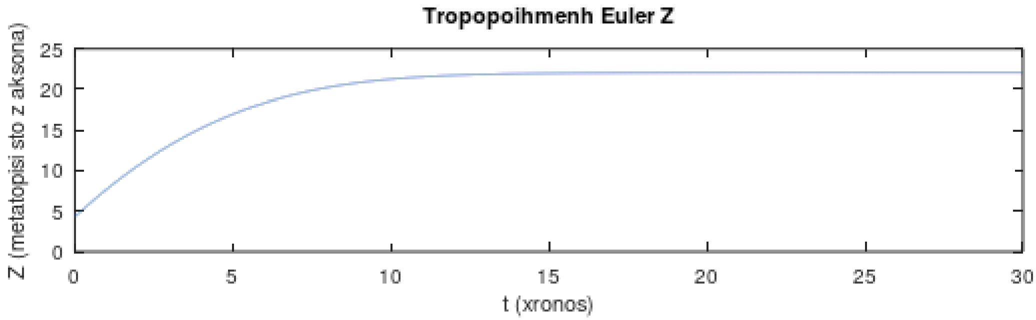
→ Στον άξονα $y'y$ η γραφική παράσταση είναι μια σταθερή ευθεία, η οποία είναι της μορφής y=a*x+b με a<0 και η συνάρτηση αυτή είναι γνησίως φθίνουσα απο το 0 μέχρι το 30. Οπότε συμπεραίνουμε οτι το τετρακόπτερο κινείται προς τον $y'$ με σταθερή ταχύτητα.

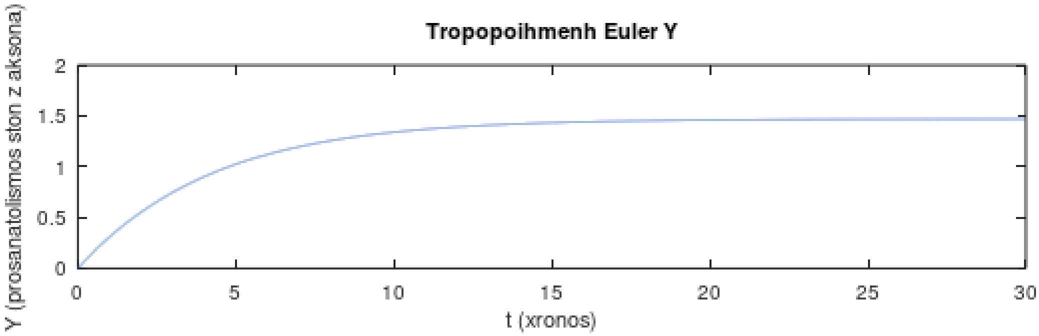
Για την περίπτωση της τροποποιημένης Euler ισχύουν τα ίδια, αλλά με μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με την Euler, καθώς έχει τάξη ακρίβειας 2.

*Για τις γραφικες παραστάσεις του γ' ερωτήματος , με βάση και τον κώδικα που γράψαμε στο δ ερώτημα έχουμε* :




Παρατηρούμε ότι το τετρακόπτερο απο την χρονική στιγμή 0 μέχρι την χρονική στιγμή 30, για την περίπτωση του Euler, πραγματοποιεί ταυτόχρονα τα εξής:

→ Στον άξονα $z'z$ η γραφική παράσταση είναι μια καμπύλη που ξεκινάει απο την θέση 4,41 έχοντας την μεγαλύτερη αρχική ταχύτητα γιατί έχουμε την μεγαλύτερη κλίση. Το τετρακόπτερο, όσο προχωράει ο χρόνος, πραγματοποιεί ανοδική πορεία και η ταχύτητα του μειώνεται διότι μικραίνει η κλίση. Όταν φτάσει στα περίπου 10s σταματάει να κίνειται και παραμένει στο ύψος που έχει φτάσει με μηδενική ταχύτητα μέχρι τα 30s.

→ Στον άξονα $y'y$ η γραφική παράσταση είναι μια καμπύλη που ξεκινάει απο το 0 και όσο προχωράει ο χρόνος, εφόσον έχουμε θετική κλίση ,όπως παρατηρούμε και στην γραφική, τετρακόπτερο κινείται προς τον άξονα του y (απομακρύνεται από τον παρατηρητή).

Συνδυάζοντας τις δυο παραπάνω κίνησεις του τετρακόπτερου , καθώς γίνονται στον ίδιο χρόνο, καταλαβαίνουμε ότι το τετρακόπτερο θα κινείται ανοδικά,δηλαδή ως προς τον z , και δεξιά ως προς τον άξονα y , δηλαδή πάνω σε εναν νοητό άξονα ανάμεσα σε αυτούς τους δυο.

Για την περίπτωση της τροποποιημένης Euler ισχύουν τα ίδια, αλλά με μεγαλύτερη ακρίβεια σε σχέση με την Euler, καθώς έχει τάξη ακρίβειας 2.

## Πρόβλημα 2

**A)** Σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε :

M=1kg

$C_z$= 3+(AM/5000)= 3+ 4410/5000=3,882

$K_{pz}$= 5

$K_{dz}$=15

M*$z''$= $f_z$- M*g- $C_z$*$z'$ (5)

$f_z$=M*g+ $K_{pz}$*($z_{des}$- z) -$K_{dz}$*($z'$) (6)

Με αντικατάσταση της (6) στην (5) έχουμε :

M*$z''$= M*g+ $K_{pz}$*($z_{des}$- z) -$K_{dz}$*($z'$) - M*g-$C_z$*$z'$ ⇔

M*$z''$= $K_{pz}$*($z_{des}$- z) -$K_{dz}$*($z'$) - $C_z$*$z'$ ⇔

M*$z''$= $K_{pz}$*$z_{des}$ -$K_{pz}$*z - $K_{dz}$*($z'$) - $C_z$*$z'$ ⇔

M*$z''$= $K_{pz}$*$z_{des}$ -$K_{pz}$*z –($K_{dz}$ +$C_z$)*$z'$ <=>

$K_{pz}$*$z_{des}$= M*$z''$+$K_{pz}$*z +($K_{dz}$ +$C_z$)*$z'$ (7)

Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό LaPlace για την Δ.Ε (7) έχουμε:

Όπου $z''$=$s^2$* Z(s)

$z'$=s* Z(s)

z=Z(s) και $z_{des}$= A(s)

Άρα $K_{pz}$*$A(s)$= M*$s^2$* Z(s) +$K_{pz}$*Z(s) +($K_{dz}$ +$C_z$)*s* Z(s) ⇔

$K_{pz}$*$A(s)$= Z(s) *[M*$s^2$ +$K_{pz}$+($K_{dz}$ +$C_z$)*s] ⇔

$\frac{Z(s)}{A(s)}$=$\frac{K_{pz}}{M*s^2 + K_{pz}+(K_{dz} + C_z)*s}$ = H(s) (8) η οποία είναι και η συνάρτηση μεταφοράς.

Για να βρούμε τα μηδενικά πρέπει H(s)=0 . Δηλαδή να μηδενιστεί ο αριθμητής της (8). Όμως το $K_{pz}$ δεν μηδενίζεται στην συγκεκριμένη περίπτωση διότι $K_{pz}$=5.

Άρα πρέπει, για να μηδενιστεί το κλάσμα, ο παρονομαστής να τείνει στο άπειρο.Χρησιμοποιούμε το όριο και παίρνουμε τον μεγαλύτερο σε βαθμό εκθέτη.

H(s)= $K_{pz}$/(M*$s^2$)=0. Άρα το s τείνει στο άπειρο το οποίο συνεπάγεται οτι ειναι διπλο μηδενικό.

Για να υπολογίσουμε αντίστοιχα τους πόλους πρέπει η συνάρτηση H(s) να τείνει στο άπειρο , οπότε οι ρίζες του παρονομαστή πρέπει να είναι ίσες με 0.

Κατ' επέκταση M*$s^2$ +$K_{pz}$+($K_{dz}$ +$C_z$)*s = 0 όπου λύνουμε την εξίσωση για να βρούμε τις ρίζες της.

Η διακρίνουσα της συνάρτησης αυτής είναι :

Δ= $(K_{dz} + C_z)^2$- 4*M*$K_{pz}$= $(15 + 3{,}882)^2$- 4*1*5= $(18{,}882)^2$- 4*5= 356,529-20= =336,529>0

Η διακρίνουσα είναι θετική άρα θα βρούμε πραγματικές ρίζες.

Οι ρίζες ειναι :

$s_{1,2}$= $\frac{-(K_{dz} + C_z) \pm \sqrt{\Delta}}{2*M}$=$\frac{-18{,}882 \pm \sqrt{336{,}529}}{2}$=$\frac{-18{,}882 \pm 18.344}{2}$

$s_1$=$\frac{-18{,}882 + 18.344}{2}$=-0.274

$s_2$=$\frac{-18{,}882 - 18.344}{2}$=-18.613

## B)

Η συνάρτηση μεταφοράς που βρήκαμε στο προηγούμενο ερώτημα είναι

H(s)= $\frac{K_{pz}}{M*s^2 + (K_{dz}+C_Z)+ K_{pz}}$

***$1^η$ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ***

Για $K_{pz}$=5 , το οποίο είναι σταθερό, μεταβάλλουμε την τιμή του $K_{dz}$.

**<u>Μηδενικά:</u>** H(s)=0, δηλαδή μηδενίζουμε τον αριθμητή. Εφόσον όμως είναι σταθερό το $K_{pz}$ ,θα έχουμε πάλι ενα διπλό μηδενικό και το $K_{pz}$ δεν επηρεάζει την λύση μας γιατί δεν βρίσκεται στον μεγιστοβάθμιο όρο του παρονομαστή. Ισχύει και για σχεδόν μηδενική τιμή του $K_{\mathrm{dz}}$ , δηλαδη $K_{\mathrm{dz}} = 0.1$ , και για πολύ μεγάλη τιμή του $K_{\mathrm{dz}}$, δηλαδή $K_{\mathrm{dz}}$=1000.

**<u>Πόλοι:</u>**

**<u>$1^η$ περίπτωση ($\boldsymbol{K_{dz}} = 0{,}1$):</u>**

H(s)->∞, οπότε οι ρίζες του παρονομαστή πρέπει να είναι ίσες με 0.

Για $K_{dz}$ να τείνει στο 0, θεωρούμε μία σχεδόν μηδενική τιμή, 0,1 και έχουμε:

$$M * s^2 + (K_{dz} + C_Z) + K_{pz} = 0$$

Και λύνουμε αυτή την εξίσωση.

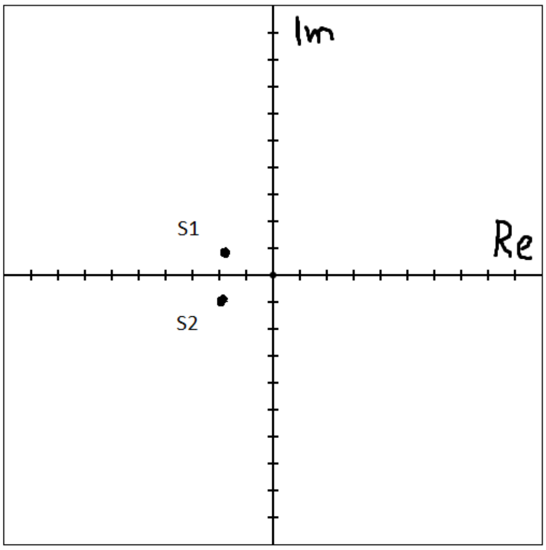
Δ= $(K_{dz} + C_Z)^2$-4*M*$K_{pz}$= $(0.1 + 3.882)^2$- 4*1*5=15.856-20=-4.143<0 άρα οι ρίζες που προκύπτουν είναι

$s_{1,2} = \frac{-3.982 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-3{,}982 \pm i*2.035}{2}$

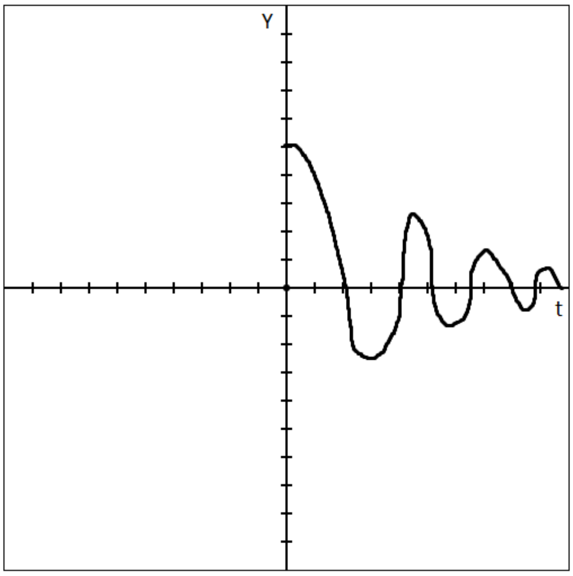
$s_1 = -1.991 + i * 1.017$ και

$$s_2 = -1.991 - i * 1.017$$

Οι πόλοι στο μιγαδικό επίπεδο απεικονίζονται προσεγγιστικά ως εξής :




Λόγω αυτού συνεπάγεται ότι η μορφή της απόκρισης που θα έχουμε θα είναι υποαπόσβεση και η γραφική της παράσταση, πάλι προσεγγιστικά θα έχει την εξής μορφή:




Το συγκεκριμένο σύστημα είναι ευσταθές διότι οι πόλοι ανήκουν στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο, με βάση τις ρίζες που βρήκαμε.

**2η περίπτωση ($K_{dz} = 1000$):**

H(s)->∞, οπότε οι ρίζες του παρονομαστή πρέπει να είναι ίσες με 0.

Για $K_{dz}$ να τείνει στο ∞, θεωρούμε μία πολύ μεγάλη τιμή, 1000 και έχουμε:

$$M * s^2 \; + \; (K_{dz} + C_Z) + \; K_{pz} = 0$$

Και λύνουμε αυτή την εξίσωση.

Δ= $(K_{dz} + C_Z)$ $^2$-4*Μ*$K_{pz}$=$(1000 + 3{,}882)$ $^2$-4*1*5= 1.007.779,069-20=1.007.759,069

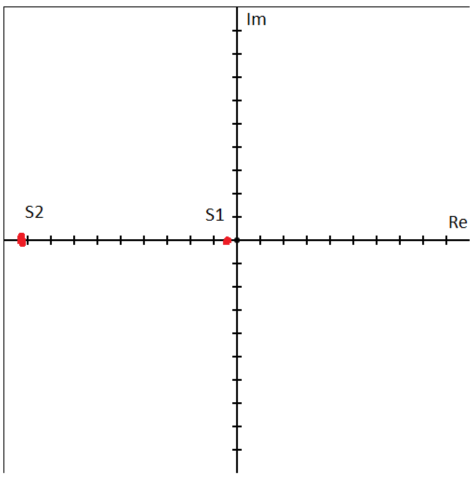
άρα οι ρίζες που προκύπτουν είναι

$s_{1,2} = \frac{-1.003{,}882 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-1.003{,}882 \pm 1.003{,}881}{2}$

$s_1 = -0{,}0005$και

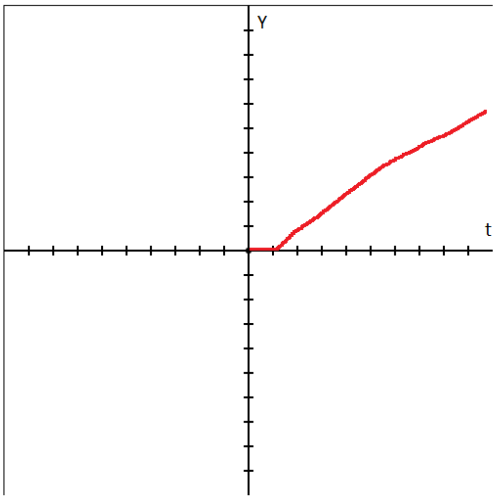
$$s_2 = -1.003{,}8815$$

Οι πόλοι στο μιγαδικό επίπεδο απεικονίζονται προσεγγιστικά πάνω στον άξονα των Real ως εξής :




#Ο άξονα των Real , λόγω περιορισμένου χώρου , εκτείνεται μέχρι το 1003 όπου και εντοπίζουμε την δεύτερη ρίζα.

Η γραφική παράσταση είναι της μορφής :




Και παρατηρούμε ότι έχουμε υπεραπόσβεση. Το σύστημα είναι ευσταθές γιατί δεν υπάρχουν πόλοι που ανήκουν στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο.

***2η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ***

Για $K_{dz}$=15 , το οποίο είναι σταθερό, μεταβάλλουμε την τιμή του $K_{pz}$.

**Μηδενικά:** H(s)=0, δηλαδή μηδενίζουμε τον αριθμητή. Το $K_{pz}$ αλλάζει, αλλά και πάλι θα έχει μια σταθερή τιμή , το οποιό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι θα έχουμε πάλι ενα διπλό μηδενικό και το $K_{dz}$ δεν επηρεάζει την λύση μας γιατί δεν βρίσκεται στον μεγιστοβάθμιο όρο του παρονομαστή. Ισχύει και για σχεδόν μηδενική τιμή του $K_{pz}$ , δηλαδη $K_{pz}$= 0.1 , και για πολύ μεγάλη τιμή του $K_{pz}$, δηλαδή $K_{pz}$=1000.

**Πόλοι:**

**1η περίπτωση ($K_{pz} = 0{,}1$):**

H(s)->∞, οπότε οι ρίζες του παρονομαστή πρέπει να είναι ίσες με 0.

Για $K_{pz}$ να τείνει στο 0, θεωρούμε μία σχεδόν μηδενική τιμή, 0,1 και έχουμε:

$$M * s^2 + (K_{dz} + C_Z) + K_{pz} = 0$$

Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση για να βρούμε τις λύσεις.

Δ= $(K_{dz} + C_Z)^2$-4*M*$K_{pz}$= $(15 + 3{,}882)^2$-4*1*0,1= 356,529-0,4=356,129>0

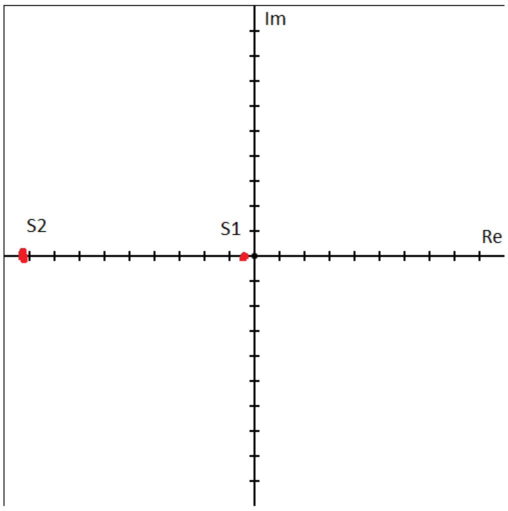
άρα οι ρίζες που προκύπτουν είναι

$s_{1,2} = \frac{-18{,}882 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-18{,}882 \pm 18{,}871}{2}$

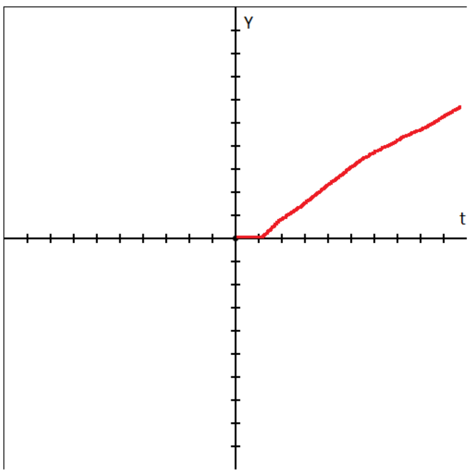
$s_1 = -0{,}0055$ και

$$s_2 = -18{,}8765$$

Οι πόλοι στο μιγαδικό επίπεδο απεικονίζονται προσεγγιστικά πάνω στον άξονα των Real ως εξής :




Η γραφική παράσταση προσεγγιστικά ειναι της μορφής:




Έχουμε υπεραπόσβεση και το σύστημα ειναι ευσταθές, γιατί δεν υπάρχουν πόλοι που ανήκουν στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο.

**2η περίπτωση ($K_{pz} = 1000$):**

H(s)->∞, οπότε οι ρίζες του παρονομαστή πρέπει να είναι ίσες με 0.

Για $K_{pz}$ να τείνει στο 0, θεωρούμε μία πολύ μεγάλη τιμή,1000 και έχουμε:

$$M * s^2 + (K_{dz} + C_Z) + K_{pz} = 0$$

Λύνουμε την παραπάνω εξίσωση για να βρούμε τις λύσεις.

Δ= $(K_{dz} + C_Z)^2$-4*M*$K_{pz}$= $(15 + 3{,}882)^2$-4*1*1000= 356,529-4000=-3.643,471<0

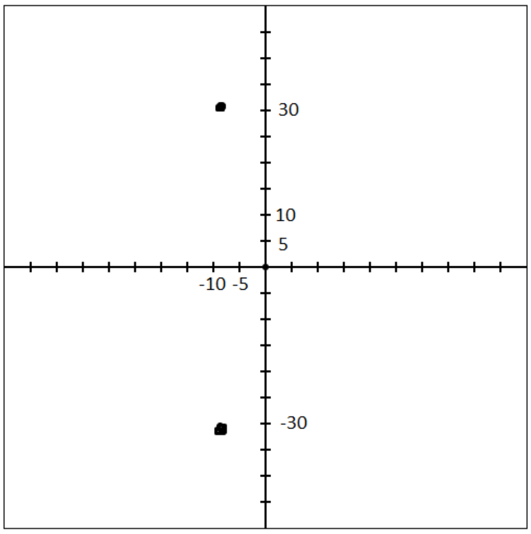
άρα οι ρίζες που προκύπτουν είναι

$s_{1,2} = \frac{-18{,}882 \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-18{,}882 \pm i * 60{,}3611}{2}$

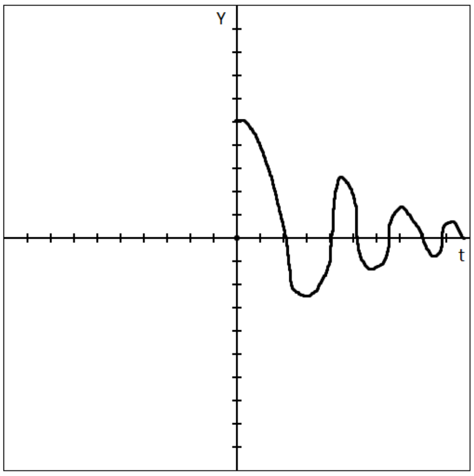
$s_1 = -9{,}441 + i * 30.180$ και

$$s_2 = -9{,}441 - i * 30.180$$

Οι πόλοι στο μιγαδικό επίπεδο απεικονίζονται προσεγγιστικά ως εξής :




Η Γραφική παράσταση προσεγγιστικά είναι της μορφής:




Έχουμε υποαπόσβεση ως μορφή απόκρισης και το συγκεκριμένο σύστημα ειναι ευσταθές, γιατί οι πόλοι ανήκουν στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

**Γ)** Σύμφωνα με τα δεδομένα της εκφώνησης έχουμε :

M=1kg

$C_z$= 3+(AM/5000)= 3+ 4410/5000=3,882

$K_{pz}$= 5

$K_{dz}$=15

$z_{des}$= 4410/200= 22,05

M*$z''$= $f_z$- M*g- $C_z$*$z'$ (5)

$f_z$=M*g+ $K_{pz}$*($z_{des}$- z) -$K_{dz}$*($z'$) (6)

Με αντικατάσταση της $f_z$ στην (5) έχουμε :

M*$z''$= M*g+ $K_{pz}$*($z_{des}$- z) -$K_{dz}$*($z'$) - M*g-$C_z$*$z'$ ⇔

M*$z''$= M*g+ $K_{pz}$*($z_{des}$- z) -$K_{dz}$*($z'$) - M*g-$C_z$*$z'$ ⇔

M*$z''$= $K_{pz}$*($z_{des}$- z) -$K_{dz}$*($z'$) - $C_z$*$z'$ ⇔

M*$z''$= $K_{pz}$*$z_{des}$ -$K_{pz}$*z - $K_{dz}$*($z'$) - $C_z$*$z'$ ⇔

M*$z''$= $K_{pz}$*$z_{des}$ -$K_{pz}$*z –($K_{dz}$ +$C_z$)*$z'$ ⇔

$K_{pz}$*$z_{des}$= M*$z''$+$K_{pz}$*z +($K_{dz}$ +$C_z$)*$z'$ ⇔

$z''$+ 8,8*$z'$ +5*z =110,25 (10)

Η συνάρτηση (10) είναι μη ομογενής.

Βρίσκουμε την Χαρακτηριστική Εξίσωση:

$r^2$ +8,8*r +5=0

Δ=$8{,}8^2 - 4*1*5$= 77,44-20=57,44

Οι ρίζες είναι

$r_{1,2} = \frac{-8{,}8\pm\sqrt{\Delta}}{2}=\frac{-8{,}8\pm7{,}578}{2}$

$r_1 = \frac{-8{,}8+7{,}578}{2}$= -0.611

$r_2 = \frac{-8{,}8-7{,}578}{2}$= -8.189

Προκύπτει οτι η Γενική Λύση είναι

z(t)= $c_1$ *$e^{r_1*t}$+ $c_2$ *$e^{r_2*t}$=$c_1$ *$e^{(-0{,}611)*t}$+ $c_2$ *$e^{(-8.189)*t}$

Στην συνέχεια βρίσκουμε την μερική λύση:

Ισχύει Z(t)= A διότι η συνάρτηση είναι μη ομογενής και όπου A=110,25

Αρα $Z'(t)$= 0 και $Z''(t)$= 0 , οπότε με αντικατάσταση στην (10) έχουμε:

Z$''$(t)+8,8Z$'$(t) +5Z(t)=110,25 ⇔

5Z(t)=110,25⇔

5A=110,25⇔

A=22.05

Τελικά προκύπτει οτι η Γενική Λύση είναι:

z(t)= A+ $c_1$*$e^{(-0611)*t}$+ $c_2$ *$e^{(-8{,}189)*t}$= 22,05+$c_1$*$e^{(-0{,}611)*t}$+ $c_2$ *$e^{(-8{,}189)*t}$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε:

$z'(t)$= -0,611*$c_1$*$e^{(-0{,}611)*t}$-8,189* $c_2$ *$e^{(-8{,}189)*t}$

Για να βρούμε τα $c_1$ και $c_2$ θα λύσουμε το εξής σύστημα:

z(0)=4,41 => 22.05+$c_1$+$c_2$=4.41 => $c_1$+$c_2$= -17.84 (11)

$z'(0)$=0 => -0,611*$c_1$-8,189*$c_2$=0 (12)

(11) => $c_1$=-$c_2$ -17.84

Η (12) μα αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης γίνεται ως εξής :

=> -0,611*(-$c_2$ -17.84)-8,189*$c_2$=0 =>

10.9+0.611*$c_2$-8,189*$c_2$=0 =>

10,9 -7,578*$c_2$=0 =>

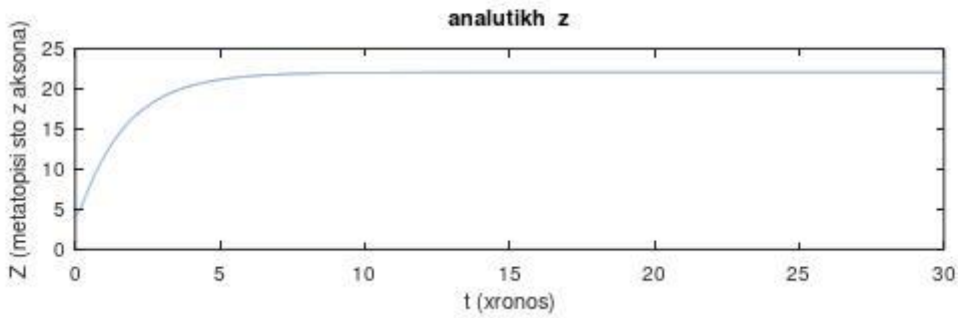
$c_2$=1,4383 και $c_1$= -19,2783

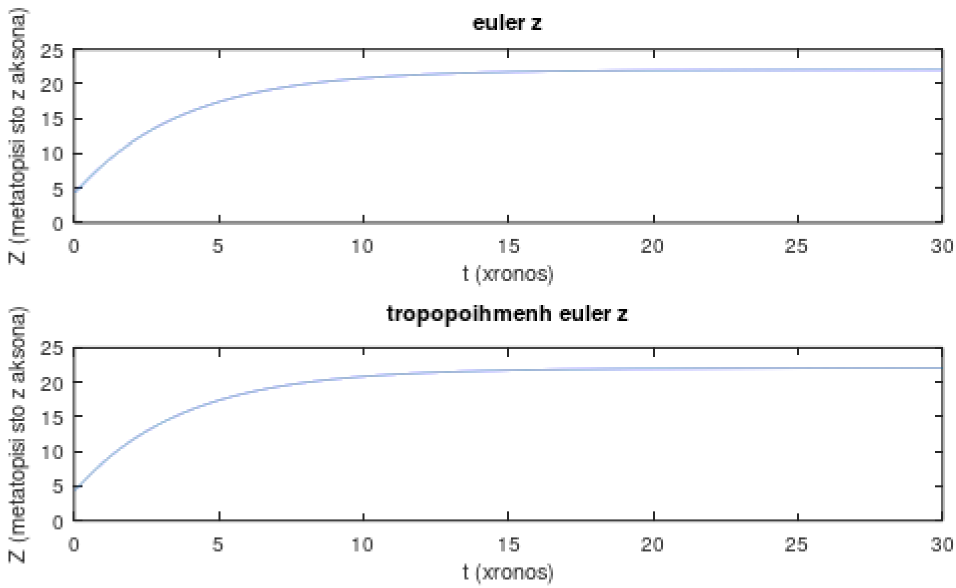
Τελικά, με αντικατάσταση των $c_1$ και $c_2$ η αναλυτική λύση είναι :

z(t)= 22,05-19,2783*$e^{(-0,611)*t}$+ 1,4383 *$e^{(-8,189)*t}$

## Δ-Ε)

Για τις γραφικες παραστάσεις του προβλήματος αυτού έχουμε :




Η αναλυτική λύση της παραπάνω συνάρτησης είναι η ακριβής λύση της εξίσωσης. Η Euler , λόγω τάξης ακρίβειας 1 , προσεγγίζει την αναλυτική λύση με σφάλμα. Η τροποποιημένη Euler, λογω τάξης ακρίβειας 2, , προσεγγίζει την αναλυτική λύση καλύτερα δηλαδή με μικρότερο σφάλμα. Το συμπέρασμα που καταλήγουμε είναι η τροποποιήμενη Euler έχει μεγαλύτερη ακρίβεια ως προς την αναλυτική λύση σε σχέση με την Euler.

Στην γραφική παράσταση της αναλυτικής λύσης βλέπουμε οτι στον άξονα z’z ξεκινάμε απο την θέση 4,41 και η κλίση είναι πιο μεγάλη σε σχέση με την euler και την τροποποιημένη Euler. Επίσης παρατηρούμε οτι η πρώτη γραφική σταθεροποιείται σχέδον στον μισό χρόνο σε σχέση με τις αλλές δυο.