

1. Bevezető

Az $\frac{1}{n^2}$ sorösszege:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Az $n!$ (n faktoriális) a számok szorzata 1-től n -ig, azaz

$$n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Konvenció szerint $0! = 1$

Legyen $0 \leq k \leq n$. A binomiális együttható

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

ahol a faktoriális (1) szerint definiáljuk.

Az előjel- azaz szignum függvényt a következőképpen definiáljuk:

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0, \\ -1, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

2. Determináns

Legyen

$$[n] := \{1, 2, \dots, n\}$$

a természetes számok halmaza 1-től n -ig.

Egy n -edrendű permutáció σ egy bijekció $[n]$ -ből $[n]$ -be. Az n -edrendű permutációk halmazát, az ún. szimmetrikus csoportot, S_n -nel jelöljük.

Egy $\sigma \in S_n$ permutációban inverzióknak nevezünk egy (i, j) párt, ha $i < j$ de $\sigma_i > \sigma_j$.

Egy $\sigma \in S_n$ permutáció paritásának az inverziók számát nevezzük:

$$\mathcal{I}(\sigma) := |\{(i, j) | i, j \in [n], i < j, \sigma_i > \sigma_j\}|$$

Legyen $A \in R^{n \times n}$, egy $n \times n$ -es (négyzetes) valós mátrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Az A mátrix determinánsát a következőképpen definiáljuk:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathcal{I}(\sigma)} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma_i}$$

3. Logikai azonosság

Készítsük el a következő táblázatot, formulákat és levezetést. Ügyeljünk a számozásra és igazításra is! Tekintsük az $L = \{0, 1\}$ halmazt, és rajta a következő, igazságtáblával definiált műveleteket:

x	\bar{x}	x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$
0	1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	1	1

Legyenek $a, b, c, d \in L$. Belátjuk a következő azonosságot:

$$(a \wedge b \wedge c) \rightarrow d = a \rightarrow (b \rightarrow (c \rightarrow d)). \quad (1)$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b) \cdot \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{(n+1)-k} b^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^{(n+1)-k} b^k = \binom{n+1}{0} a^{n+1-0} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1-(n+1)} b^{n+1}$$