Seminar Nr. 6

Serii de puteri şi serii Taylor

Probleme rezolvate

Determinaţi mulţimea de convergenţă şi suma următoarelor serii de puteri:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$; **ii)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$; **iii)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; **iv)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^{2n}}{n \cdot 3^n}$;

v) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} \cdot x^{2n+1}$; **vi)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n}}{n}$; **vii)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1)(x-3)^n$.

Soluţie. **i)** Raza de convergenţă a seriei de puteri se determină cu formula $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. În cazul de faţă $a_n = \dfrac{1}{n \cdot 3^n}$, deci

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)3^{n+1}}{n \cdot 3^n}\right| = 3.$$

Intervalul de convergenţă este $I = (-3, 3)$. Pentru a determina mulţimea de convergenţă a seriei, studiem ce se întâmplă la capetele intervalului I. Astel, pentru $x = -3$ obţinem seria numerică $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ care este o serie convergentă (conform criteriului lui Leibniz). Pentru $x = 3$ seria devine $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ care este divergentă (seria armonică cu $\alpha = 1$.) Prin urmare mulţimea de convergenţă este $A_c = [-3, 3)$.

Fie $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$. Atunci $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n \cdot 3^n} = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^{m}$. Dar, se ştie că $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$. Înlocuind x cu $\frac{x}{3}$ în seria de mai sus rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = \frac{3}{3-x},$$

adică

$$S'(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{3-x} = \frac{1}{3-x}, x \in A_c.$$

Prin integrare termen cu termen în relaţia anterioară, se obţine

$$S(x) = -\ln(3-x) + C.$$

Cum $S(0) = 0$ şi $S(0) = -\ln 3 + C$ rezultă $C = \ln 3$, deci suma seriei este

$$S(x) = \ln \frac{3}{3-x}.$$

ii) Raza de convergenţă este $R = 1$, deci intervalul de convergenţă este $I = (-1, 1)$. La capetele intervalui se obţin seriile numerice $\sum_{n=0}^{\infty} n(-1)^n$, respectiv $\sum_{n=0}^{\infty} n$ care, evivent, sunt divergente (termenul general nu tinde la zero).

Se ştie că $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x| < 1$ şi aplicând teoreme de derivare rezultă $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$, care înmulţită cu x conduce la $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$.

iii) Raza de convergenţă se calculează din $R^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} = 1$, deci $I = (-1, 1)$. Pentru $x = -1$ se obţine seri numerică $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1}$ care e convergentă, iar pentru $x = 1$ se obţine seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$ care este de asemenea convergentă. Deci mulţimea de convergenţă este $A_c = [-1, 1]$.

Notăm cu $S(x)$ suma seriei, adică $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Derivând această relaţie se obţine

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{2n+1}$$

şi ţinând seama de relaţia $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ rezultă $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. Se obţine astfel, că $S'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, care prin integrare conduce la $S(x) = \arctan x + C$. Cum $S(0) = 0$ şi $S(0) = C$ avem $C = 0$, deci suma seriei este $S(x) = \arctan x$.

iv) Raza de convergenţă se calculează din

$$R^2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n-1}{n \cdot 3^n} \cdot \frac{(n+1) \cdot 3^{n+1}}{n}\right| = 3,$$

deci $R = \sqrt{3}$, iar intervalul de convergenţă este $I = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Pentru $x = -\sqrt{3}$, respectiv $x = \sqrt{3}$ se obţine seria numerică divergentă $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n}$. Mulţimea de convergenţă în acest caz, coincide cu intervalul de convergenţă.

Fie

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^{2n}}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{2n}}{n \cdot 3^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n \cdot 3^n} =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{x^{2n}}{3^n} = S_1(x) - S_2(x).$$

Pentru calculul primei sume $S_1(x)$ folosim dezvoltarea

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n,$$

de unde rezultă $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$. Înlocuind pe x cu $\frac{x^2}{3}$ avem $S_1(x) = \frac{x^2}{3-x^2}$, $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Pentru calculul lui $S_2(x)$ vom deriva egalitatea $S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{x^{2n}}{3^n}$ deci

$$S_2'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n} \cdot \frac{x^{2n-1}}{3^n} = \frac{2x}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{3^{n-1}} = \frac{2x}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{3}\right)^{n-1}.$$

Avem $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{3}} = \frac{3}{3-x^2}$, deci $S_2'(x) = \frac{2x}{3-x^2}$, de unde prin integrare se obţine

$$S_2(x) = -\ln(3-x^2) + C.$$

Cum $S_2(0) = 0$ şi $S_2(0) = -\ln 3 + C$ rezultă $C = \ln 3$, deci $S_2(x) = \ln \frac{3}{3-x^2}$, iar

$$S(x) = \frac{x^2}{3-x^2} - \ln \frac{3}{3-x^2}.$$

v) Raza de convergenţă se calculează din $R^2 = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{n+2} \right| = 2$, deci $R = \sqrt{2}$, iar intervalul de convergenţă este $I = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Pentru $x = -\sqrt{2}$, respectiv $x = \sqrt{2}$ se obţin două serii numerice divergente $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)\sqrt{2}$, respectiv $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)\sqrt{2}$. Mulţimea de convergenţă în acest caz, coincide cu intervalul de convergenţă.

Fie $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} \cdot x^{2n+1}$, care prin integrare termen cu termen conduce la

$$\int S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} \cdot \int x^{2n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+2} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^{n+1} = \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^n.$$

Înlocuind pe x cu $\dfrac{x^2}{2}$ în dezvoltarea $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x}$ rezultă

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \frac{2}{2+x^2},$$

deci

$$\int S(x)dx = \frac{x^2}{2+x^2},$$

adică

$$S(x) = \frac{4x}{(2+x^2)^2}.$$

vi) Se constată uşor că mulţimea de convergenţă este $A_c = (4;6)$. Notăm cu $S(x)$ suma seriei, deci $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-5)^{2n}}{n}$. Prin derivare termen cu termen se obţine

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n(x-5)^{2n-1}}{n} = 2(x-5)\sum_{n=1}^{\infty}(x-5)^{2n-2} = \frac{2(x-5)}{1-(x-5)^2}.$$

Prin integrare se obţine

$$S(x) = -\ln(1-(x-5)^2) + C,$$

iar pentru $x = 5$ rezultă $S(5) = 0$, $S(5) = C$, deci $C = 0$. Suma seriei din enunţ este

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n}}{n} = \ln\frac{1}{-x^2+10x-24}.$$

vii) Raza de convergenţă este $R = 1$, iar intervalul coincide cu mulţimea de convergenţă $A_c = (2;4)$. Fie $S(x)$ suma seriei,

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n-1)(x-3)^n = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(x-3)^n - \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(x-3)^n.$$

Fie $S_1(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(x-3)^n$ şi $S_2(x) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(x-3)^n$. Se ştie că $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(x-3)^n = \frac{1}{x-2} + x - 4$, atunci prin derivare se obţine

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(x-3)^{n-1} = -\frac{1}{(x-2)^2} + 1,$$

care înmulţită cu $x-3$ conduce la $S_1(x) = -\frac{x-3}{(x-2)^2} + x - 3$. Prin urmare, $S(x) = S_1(x) - S_2(x)$, adică $S(x) = \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2$.

2. *Să se dezvolte după*

i) *puterile lui x funcţia* $f(x) = \frac{1}{3x+4}$, $x \neq -\frac{4}{3}$;

ii) *puterile lui $x-1$ funcţia* $g(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \neq -1$.

Soluţie. **i)** Din dezvoltarea cunoscută $\frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n$, $y \in (-1,1)$ prin înlocuirea lui y cu $\frac{3}{4}x$ avem:

$$\frac{1}{3x+4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+\frac{3x}{4}} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{4^{n+1}} \cdot x^n,$$

oricare ar fi $x \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

ii) Funcţia $\frac{1}{1+x}$ poate fi scrisă sub forma

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{(x-2)+3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}.$$

În dezvoltarea $\frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n y^n$, $y \in (-1,1)$ înlocuim pe y cu $\frac{x-2}{3}$ şi obţinem dezvoltarea în serie după puterile lui $x-2$ a funcţiei g :

$$\frac{1}{1+x}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{x-2}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(x-2)^n}{3^{n+1}},$$

cu $\left|\dfrac{x-2}{3}\right|<1$, deci $x\in(-1,5)$.

Pentru $x=-1$ se obţine seria numerică $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ care e convergentă, iar pentru $x=5$ se obţine seria convergentă $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n}$, deci mulţimea de convergenţă este $A_c=[-1,5]$.

3. *Să se dezvolte în serie de puteri funcţiile următoare, specificându-se intervalul pe care are loc dezvoltarea:*

i) $f:\mathbb{R}\setminus\{-2,;3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$ *după puterile lui* x;

ii) $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$ *după puterile lui* x *şi apoi după puterile lui* $x-3$. *Să se deducă apoi, suma seriei numerice* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}$.

Soluţie. **i)** Descompunem $f(x)$ în fracţii simple:

$$\frac{2x-1}{(x+2)(x-3)}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-3},$$

şi utilizând dezvoltările cunoscute:

$\boxed{\displaystyle\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,|x|<1,}$ respectiv

$\boxed{\displaystyle\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n,|x|<1,}$ obţinem

$$\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2(1+\frac{x}{2})}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n,\quad |x|<2,$$

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{-3(1-\frac{x}{3})} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{3}\right)^n, \quad |x| < 3,$$

deci

$$\frac{2x-1}{x^2-x-6} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}}\right]x^n, \ |x| < 2.$$

ii)

- dezvoltarea în serie după puterile lui x:

  Se observă că $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$, $|x| < 1$. Prin integrare, rezultă

  $$f(x) = \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)dx + C = \sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

  Pentru $x = 0$ rezultă $f(0) = 0$, şi $f(0) = C$, deci $C = 0$. Prin urmare

  $$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}, \ x \in (-1, 1).$$

  Pentru $x = 1$ se obţine seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1}$ care este convergentă conform criteriului lui Leibniz, deci intervalul pe care are loc dezvoltarea este $(-1, 1]$. De asemenea se obţine suma seriei numerice $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n+1} = \ln 2$.

- dezvoltarea în serie după puterile lui $x - 3$:

Se observă că $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{4+(x-3)} = \dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^n$, $x \in (-1, 7)$. Prin integrare, rezultă

$$f(x) = \int\left(\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{4}\right)^n\right)dx + C =$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\int(-1)^n\left(\frac{x-3}{4}\right)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}} + C.$$

Pentru $x = 3$ rezultă $f(3) = \ln 4$, şi $f(3) = C$, deci $C = \ln 4$. Prin urmare

$$\ln(1+x) = \ln 4 + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)4^{n+1}},\ x \in (-1, 7].$$

Probleme propuse

1. *Să se dezvolte după puterile lui x funcţiile:*

i) $\sinh x$, **ii)** $\cosh x$; **iii)** $\cos^3 x$; **iv)** $\sin^2 x$.

Indicaţie. i) şi **ii)** Reamintim că $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ şi folosim $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

iii) şi **iv)** Folosim formulele trigonometrice

$$\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4},\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

şi dezvoltările în serie Mac-Laurin ale funcţiilor sinus şi cosinus.

2. *Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcţiile:*

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$;

iii) $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(1-x)$.

Folosind rezultatele obţinute să se determine apoi, suma seriilor numerice: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)2^{2n}}$.

3. *Să se dezvolte în serie de puteri funcţiile următoare, specificându-se intervalul pe care are loc dezvoltarea:*

i) $f : \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x-6}$ *după puterile lui $x+1$ şi $x-2$.*

ii) $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{7}{4}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{4x+7}$ *după puterile lui x, $x+2$ şi $x-1$.*

iii) $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{5}{3}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{5-3x}$ *după puterile lui x şi $x-1$.*

iv) $f : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{2+3x}$ *după puterile lui* x, $x+4$ *şi* $x-5$.