

1.12.7 Standardní fotometrický systém

Převod hvězdných velikostí na standardní fotometrický systém se provádí proto, aby bylo možné porovnávat měření z různých observatoří, získaná různými dalekohledy, detektory záření, redukčními algoritmy.

Hvězdné velikosti tedy máme jednak *instrumentální* (u, b, v, r, i) a jednak *standardní* (U, B, V, R, I). Příklad převodních vztahů může být takovýto:

$$U = v + A_u(b - v) + B_u(u - b) - X_u M_{\text{air}}, \quad (246)$$

$$B = v + A_b(b - v) - X_b M_{\text{air}}, \quad (247)$$

$$V = v + A_v(v - r) - X_v M_{\text{air}}, \quad (248)$$

$$R = v + A_r(v - r) - X_r M_{\text{air}}, \quad (249)$$

$$I = v + A_i(v - r) + B_i(r - i) - X_i M_{\text{air}}, \quad (250)$$

kde rozdíly ($b - v$), ($v - r$), ... se nazývají barevné indexy, A, B barevné koeficienty, X extinkční koeficienty, $M_{\text{air}} \simeq \sec z$ vzdušná hmota a z zenitová vzdálenost. Základní princip transformace je tento:

- změříme $ubvri$ pro nějaké standardní pole hvězd, u kterých známe $UBVRI$;
- spočteme optimální koeficienty $A_{ubvri}, B_{ui}, X_{ubvri}$ (z přeurené⁵² soustavy rovnic metodou nejmenších čtverců);
- nejlépe ve stejné výšce nad obzorem změříme $ubvri$ pro neznámé pole;
- z rovnic vypočítáme $UBVRI$ pro neznámé srovnávací hvězdy.

Extinkční koeficienty se mohou měnit každou noc, i v průběhu noci. Barevné koeficienty bývají stabilnější, určují se alespoň jednou za sezónu, nebo při jakékoliv změně konfigurace dalekohledu či detektoru.

Máme-li již standardní srovnávací hvězdy ve stejném zorném poli jako hvězdu neznámou, pak by stačilo měřit jen rozdíly jasností, tj. relativní instrumentální hvězdné velikosti $\Delta u, \Delta b, \Delta v, \Delta r, \Delta i$. Pro relativní standardní hvězdné velikosti $\Delta U, \Delta B, \Delta V, \Delta R, \Delta I$ můžeme použít vztahů podobných jako (246)–(250), v nichž ale můžeme vynechat extinkční koeficienty X_{ubvri} , neboť rozdíly vzdušných hmot ΔM_{air} bývají v rámci malých zorných polí zanedbatelné.

1.13 Rozptyl záření

Rozptyl záření na povrchu reálných materiálů je podstatně složitější problém, než se zdá na první pohled. Rozhodně se nejedná o nějaký jednoduchý odraz, kde úhel dopadu je roven úhlu odrazu. Nejprve připomeneme zavedení potřebných radiometrických veličin, pak probereme různé používané zákony rozptylu a popíšeme závislost jasnosti planety (respektive koule) na fázovém úhlu.

⁵² Soustava je přeurená, protože standardních hvězd je hodně, tudíž rovnic je hodně, tj. více než 12 neznámých koeficientů.

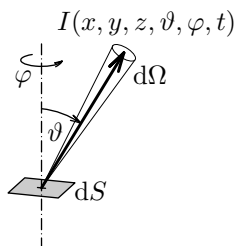
1.13.1 Definice radiometrických veličin

Veličiny, jež budeme v následujícím používat, shrnuje tab. 7. Důležité je všimnout si příslušných jednotek, které jsou pro nás nápovědou, jaký mají veličiny fyzikální význam.

veličina	jednotka	\longleftrightarrow	odpovídající veličina	jednotka
energie E	J	\longleftrightarrow	světelná energie	$\text{lm} \cdot \text{s}$
výkon P	$\text{W} \equiv \text{J/s}$	\longleftrightarrow	světelný výkon	$\text{cd} \cdot \text{sr} \equiv \text{lm}$
tok Φ	W/m^2	\longleftrightarrow	světelný tok (osvětlení)	$\text{cd} \cdot \text{sr/m}^2 = \text{lm/m}^2 \equiv \text{lx}$
intenzita (zář) I	$\text{W/m}^2/\text{sr}$	\longleftrightarrow	světelná intenzita (jas)	$\text{cd/m}^2 \equiv \text{nit}$
zářivost J	W/sr	\longleftrightarrow	svítivost	$\text{cd} \simeq \frac{1}{683} \text{ W/sr}$ (na 555 nm)

Tabulka 7: Radiometrické a odpovídající fotometrické veličiny. Na definice veličin a jednotek je třeba dát velký pozor, neboť zde nepanuje jednotnost. Například světelný *výkon* se často zmatečně označuje „světelný tok“ a zde zavedený *tok* jako „hustota toku“! Anglicky se radiometrické veličiny nazývají: radiant energy, radiant power, irradiance, *radiance*, radiant *intensity*. Pro fotometrické ekvivalenty máme: luminous energy, luminous power, illuminance, luminance, luminous intensity.

Základní, nejpodrobnější veličinou je *intenzita*, která je definována jako energie vyzařovaná za jednotku času dt , z jednotkové plochy dS do jednotkového prostorového úhlu $d\Omega$ ve směru, který svírá s kolmicí k ploše úhel ϑ , přičemž dělíme $\cos \vartheta$, aby nám intenzita nezávisela na zmenšování plochy při pohledu z boku (obr. 94).



Obrázek 94: K definici intenzity I . Úhel ϑ se měří od kolmice k plošce dS . Element prostorového úhlu lze vyjádřit pomocí sférických souřadnic jako $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\phi$.

Vztahy mezi veličinami jsou následující:

$$E = \int P dt, \quad (\text{integrujeme např. přes expoziční dobu})$$

$$P = \int \Phi dS, \quad (\text{přes plochu detektoru, povrch zdroje})$$

$$\Phi = \int I \cos \vartheta d\Omega = \iint I \cos \vartheta \overbrace{\sin \vartheta d\vartheta d\phi}^{d\Omega}, \quad (\text{přes prostor, poloprostor})$$

$$P = \int J d\Omega, \quad (\text{přes všechny směry, směry vymezené detektorem})$$

$$J = \int I \cos \vartheta dS. \quad (\text{přes povrch zdroje})$$

U toků je třeba dávat pozor na kontext — někdy může jít o „tok na“ Φ_i (též osvětlení), jindy o „tok z“ Φ_e (též světlení). V obou případech je tok vztažený k poloprostoru (2π sr), nikoli k celému prostoru (4π sr). Pro tok od Slunce (tj. přibližně paralelní svazek paprsků v dostatečně velké vzdálenosti r od bodového zdroje) budeme mít $\Phi_\odot = P_\odot/(4\pi r^2)$, přičemž tok na určitou plošku dS planety bude záviset na úhlu ϑ_i mezi kolmicí k plošce a směrem ke zdroji:

$$\Phi_i = \mu_i \Phi_\odot ,$$

kde $\mu_i = \cos \vartheta_i$.

1.13.2 Dvousměrová distribuční funkce odrazu

Rozptyl popisujeme *dvousměrovou distribuční funkcí odrazu* f (dále jen funkce odrazu), která dává do souvislosti tok Φ_i na dané místo planety a intenzitu I rozptýleného záření (Lester aj. 1979, Fairbairn 2004):

$$I(\mu_e, \mu_i, \phi_e, \phi_i) = f(\mu_e, \mu_i, \phi_e, \phi_i) \Phi_i(\mu_i, \phi_i) ,$$

kde $\mu_i = \cos \vartheta_i$ označuje úhel od kolmice ke zdroji, $\mu_e = \cos \vartheta_e$ od kolmice k pozorovateli, ϕ_i, ϕ_e jsou azimutální úhly. Formálně má funkce odrazu rozměr sr^{-1} .

Často se předpokládá jednodušší tvar funkce odrazu $f = f(\mu_e, \mu_i, \alpha)$, kde α označuje *fázový úhel* mezi směrem ke zdroji a směrem k pozorovateli. Z kosinové věty ve sférickém trojúhelníku vyplývá:

$$\cos \alpha = \cos \vartheta_i \cos \vartheta_e + \sin \vartheta_i \sin \vartheta_e \cos(\phi_e - \phi_i) .$$

V této kapitole budeme diskutovat pouze *integrální* funkci odrazu, nicméně pokud bychom pomocí spektrografu nebo fotometrických filtrů rozlišovali jednotlivé vlnové délky, záviselo by f i na λ .

Lambertův rozptyl. Pro konstantní funkci odrazu:

$$f \equiv f_L = \text{konst.}$$

intenzita I vůbec nezávisí na směru pozorovatele. Rozptyl se pak označuje jako lambertovský a odpovídající zdroj jako *kosinový zářič*.

Geometrický rozptyl. Velmi idealizovaným případem je geometrický rozptyl, u kterého intenzita I nezávisí ani na směru pozorovatele *ani na směru zdroje*, tudíž f musí být nepřímo uměrné projekci plošky dS , na kterou dopadá tok Φ_i :

$$f_g = \frac{f_L}{\mu_i} .$$

Pro $\mu_i \rightarrow 0$ funkce diverguje, čili tento popis rozptylu pokládáme za nefyzikální.

Lommelův–Seeligerův zákon. V případě, že záření dopadající na povrch je pohlcováno s hloubkou exponenciálně a každý objemový element rozptyluje světlo izotropně, je možné odvodit funkci odrazu:

$$f_{LS} = \frac{f_L}{\mu_i + \mu_e}.$$

Lummeho–Bowellův zákon. Problémem výše uvedených zákonů rozptylu je, že neodpovídají pozorování planetek! Nedokáží totiž popsat *opoziční jev*, tj. zvýšenou intenzitu I pro malé fázové úhly $\alpha \lesssim 5^\circ$ až 10° .⁵³ Jev si vysvětlujeme jako důsledek toho, že když Slunce zasvítlí kolmo, vymizí stíny a paprsky se odrazí i od děr v povrchu. Uplatňuje se zde též *koherentní zpětný rozptyl*. Odpovídající zákon může mít tvar (Lumme a Bowell 1981):

$$f_{LB} = \frac{f_L}{\mu_i + \mu_e} (2\Phi_1 + \Phi_M),$$

kde funkce $\Phi_1(\alpha, \rho_{\text{bulk}}, g, r_{\text{ough}}, q)$ popisuje jednoduchý rozptyl, Φ_M stínění a makroskopické nerovnosti, ρ_{bulk} označuje objemovou hustotu (ovlivněnou makroporozitou), g faktor asymetrie, r_{ough} drsnost povrchu a q plochu pokrytou dírami.

Hapkeho model. Nepoužívanějším zákonem je model Hapkeho (2002):

$$f_H = \frac{f_L}{\mu_i + \mu_e} \{ [1 + B(\alpha, B_0, h)] P(\alpha, g) + H(\mu_i)H(\mu_e) - 1 \} S(\bar{\vartheta}),$$

kde jako parametry vystupují B_0 amplituda opozičního nárůstu jasnosti, h jeho šířka, g faktor asymetrie rozptylu, $\bar{\vartheta}$ průměrný sklon makroskopických nerovností, a funkce:

$$\begin{aligned} B(\alpha, B_0, h) &= \frac{B_0}{1 + \frac{1}{h} \tan \frac{\alpha}{2}}, \\ P(\alpha, g) &= \frac{1 - g^2}{(1 + 2g \cos \alpha + g^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ H(\mu) &\simeq 1 - A_w \mu \left(r_0 + \frac{1 - 2r_0 \mu}{2} \ln \frac{1 + \mu}{\mu} \right)^{-1}, \quad r_0 \equiv \frac{1 - \sqrt{1 - A_w}}{1 + \sqrt{1 - A_w}}, \end{aligned}$$

kde $A_w = 4\pi f_L$. Tvar funkcí $S(\bar{\vartheta})$ uvádí např. Spjuth (2009).

1.13.3 Zářivost koule

Uvažujme nyní pro jednoduchost o planetce jako o kouli s poloměrem R , kterou osvětluje Slunce tokem Φ_\odot . Integrál přes osvětlenou a viditelnou část povrchu koule

⁵³ Až poletíte letadlem nad krajinou, všimněte si, že kolem stínu letadla je zřetelná jasná skvrna. To je opoziční jev na povrchu Země.

dá zářivost:

$$\begin{aligned}
 J(\alpha) &= \int I(\mu_e, \mu_i, \alpha) \mu_e dS = \\
 &= \int_{\phi=\alpha-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\vartheta=0}^{\pi} f(\mu_e, \mu_i, \alpha) \overbrace{\Phi_{\odot} \sin \vartheta \cos \phi}^{\Phi_i} \overbrace{\sin \vartheta \cos(\alpha - \phi)}^{\mu_e} \overbrace{R d\vartheta R \sin \vartheta d\phi}^{dS} \quad (251)
 \end{aligned}$$

Výkon rozptýlený planetkou je pak:

$$P_e = \int J(\alpha) d\Omega = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} J(\alpha) \sin(\alpha) d\phi d\alpha = 2\pi \int_0^{\pi} J(\alpha) \sin \alpha d\alpha .$$

Je přitom vhodné zavést *fázovou funkci* jako:

$$\Psi(\alpha) \equiv \frac{J(\alpha)}{J(0)}$$

a pro výkon psát:

$$P_e = 2\pi J(0) \int_0^{\pi} \Psi(\alpha) \sin(\alpha) d\alpha . \quad (252)$$

1.13.4 Albeda

Je nesmírně důležité rozlišovat jedno albedo od druhého albeda, protože jich existuje celá řada a často se pletou!

Albedo jednoduchého rozptylu. Albedo týkající se *pouze jedné částice* označujeme jako albedo A_w jednoduchého rozptylu. Hodnota A_w je poměr výkonu rozptýleného lomeno (rozptýleného plus absorbovaného). Pro soubor izotropně se chovajících částic pochopitelně platí:

$$f_L = \frac{A_w}{4\pi \text{ sr}} .$$

Hemisférické albedo. Poměr výkonu P_e rozptýleného *jednou ploškou* planetky do poloprostoru ku výkonu P_i dopadajícímu na plošku označujeme jako hemisférické albedo:

$$A_h \equiv \frac{P_e}{P_i} .$$

Pro případ Lambertova rozptylu máme $I = f_L \Phi_i$ a:

$$\Phi_e = \int I \cos \vartheta d\Omega = f_L \Phi_i \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\phi = 2\pi f_L \Phi_i \left[-\frac{1}{4} \cos \vartheta \right]_0^{\pi/2} = \pi f_L \Phi_i ,$$

tudíž:

$$A_{hL} = \frac{\Phi_e dS}{\Phi_i dS} = \pi f_L.$$

Normálové albedo. V případě, že je ploška planetky ozářena *kolmo* a pozorujeme ji také kolmo, hovoříme o normálovém albedu. Jde o poměr intenzity záření od (obecně) rozptylujícího povrchu a od bezztrátového lambertovského povrchu (s $A_{hL} = 1$, a tedy $f_L = \frac{1}{\pi}$):

$$A_n \equiv \frac{I(\mu_i = \mu_e = 1)}{I_L} = \frac{f(\mu_i = \mu_e = 1)\Phi_{\uparrow}}{f_L\Phi_{\uparrow}} = f(\mu_i = \mu_e = 1)\pi.$$

Bondovo albedo pro kouli. V obecném případě neznáme tvar planetky, proto nelze přesně posoudit, kolik záření celkem rozptýlí. Nicméně si dovolíme předpokládat, že jde o *kouli*, a pak je možno výkony dopadající i rozptýlené vyčíslit. Pro kouli definujeme Bondovo albedo (obdobně jako hemisférické):

$$A_B = \frac{P_e}{P_i},$$

přičemž přijatý výkon $P_i = \pi R^2 \Phi_{\odot}$ a pro rozptýlený použijeme vztah (252):

$$A_B = \overbrace{\frac{J(0)}{R^2 \Phi_{\odot}}}^{A_g} \overbrace{2 \int_0^{\pi} \Psi(\alpha) \sin \alpha d\alpha}^q, \quad (253)$$

kde A_g označíme jako geometrické albedo a q *fázový integrál*:

$$q = 2 \int_0^{\pi} \Psi(\alpha) \sin \alpha d\alpha. \quad (254)$$

Geometrické albedo pro kouli. Pro úplnost zopakujme definici geometrického albeda:

$$A_g = \frac{J(\alpha = 0)}{R^2 \Phi_{\odot}}$$

a uveďme jeho interpretaci: poměr zářivosti koule pozorované při fázovém úhlu $\alpha = 0$ a zářivosti bezztrátového lambertovského *disku* o stejném poloměru.

Nakonec zdůrazněme, že **pro šišatou planetku nemá smysl hovořit o albedu**, jakožto o jednom čísle, protože výkon rozptýleného záření závisí na aktuálním natočení planetky! Snad bychom mohli použít hodnotu A_w , jakožto parametr vstupující do zákona rozptylu, ale v každém případě bychom museli integrovat přes onu šišku (čili podstatně složitěji než v (251)).

1.13.5 Fázové funkce, integrály a albedo pro různé funkce odrazu

Zkusme nyní dosazovat různá f do vztahu (251). Pro Lambertův rozptyl bychom dostali následující výsledky pro zářivost koule, fázovou funkci, fázový integrál, geometrické a Bondovo albedo:

$$\begin{aligned} J_L(0) &= \frac{2}{3} \pi R^2 \Phi_{\odot} f_L, \\ \Psi_L(\alpha) &= \frac{1}{\pi} ((\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha), \\ q_L &= \frac{3}{2}, \\ A_{gL} &= \frac{2}{3} \pi f_L, \\ A_{BL} &= \pi f_L. \end{aligned}$$

Detailní výpočet pro toto jednoduché $f = f_L$ vypadá následovně:

$$J(\alpha) = f_L \Phi_{\odot} R^2 \int_{\alpha-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \cos \phi \cos(\alpha - \phi) d\vartheta d\phi,$$

kde:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta d\vartheta &= \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta = [-\cos \vartheta]_0^{\pi} - \left[-\frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^{\pi} = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \\ \int_{\alpha-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos \alpha \cos \phi + \sin \alpha \sin \phi}_{\cos \phi \cos(\alpha - \phi)} d\phi &= \cos \alpha \int_{\alpha-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\cos^2 \phi}_{\frac{1}{2}(1 + \cos 2\phi)} d\phi + \sin \alpha \int_{\alpha-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{\sin \phi \cos \phi}_{\frac{1}{2} \sin 2\phi} d\phi = \\ &= \cos \alpha \left[\frac{\phi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\phi \right]_{\alpha-\pi/2}^{\pi/2} + \sin \alpha \left[-\frac{1}{4} \cos 2\phi \right]_{\alpha-\pi/2}^{\pi/2} = \\ &= \cos \alpha \left[\frac{\pi}{4} + 0 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right] + \\ &+ \sin \alpha \left[0 + \frac{1}{2} \cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{2} (\pi - \alpha) \cos \alpha + \frac{1}{2} \sin \alpha, \end{aligned}$$

čili:

$$J(\alpha) = \frac{2}{3} f_L \Phi_{\odot} R^2 ((\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha),$$

$$\Psi(\alpha) = \frac{J(\alpha)}{J(0)} = \frac{1}{\pi} ((\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha).$$

Odtud:

$$q = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{\pi} ((\pi - \alpha) \cos \alpha + \sin \alpha) \sin \alpha d\alpha = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left[\overbrace{\pi \cos \alpha \sin \alpha}^0 - \alpha \overbrace{\cos \alpha \sin \alpha}^{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} + \sin^2 \alpha \right] d\alpha,$$

kde:

$$\int_0^\pi \alpha \sin 2\alpha d\alpha = \left[\alpha \left(-\frac{\cos 2\alpha}{2} \right) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \overbrace{-\frac{\cos 2\alpha}{2}}^0 d\alpha = -\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^\pi \sin^2 \alpha d\alpha = \int_0^\pi \frac{1 - \overbrace{\cos 2\alpha}^0}{2} d\alpha = \left[\frac{\alpha}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2},$$

$$q = \frac{2}{\pi} \left(0 + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{3}{2}.$$

Pro geometrický rozptyl by vyšlo:

$$J_g(0) = \pi R^2 \Phi_\odot f_L,$$

$$\Psi_g(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha),$$

$$q_g = 2,$$

$$A_{gg} = \pi f_L,$$

$$A_{Bg} = 2\pi f_L.$$

V případě Lommelova–Seeligerova zákona bychom měli více práce:

$$I_{LS} = \frac{1}{2} \pi R^2 \Phi_\odot f_L,$$

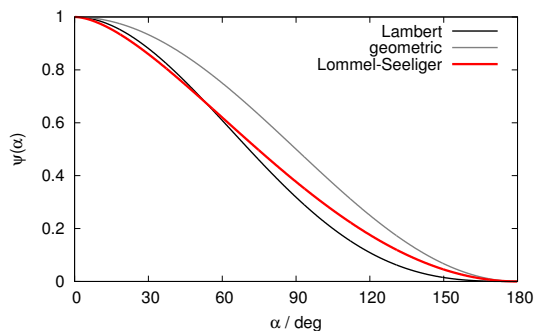
$$\Psi_{LS}(\alpha) = 1 + \sin \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} \ln \left(\tan \frac{\alpha}{4} \right),$$

$$q_{LS} = \frac{16}{3}(1 - \ln 2),$$

$$A_{gLS} = \frac{\pi}{2} f_L,$$

$$A_{BLS} = \frac{8}{3} \pi (1 - \ln 2) f_L.$$

Získané fázové funkce shrnuje obr. 95.



Obrázek 95: Fázové funkce $\Psi(\alpha)$ pro rozptyl Lambertův, geometrický a Lommelův–Seeligerův.

1.13.6 Zjevná a absolutní jasnost planety

Pozorovaná jasnost planety se pochopitelně mění se vzdáleností od Země i od Slunce. Označíme-li Δ vzdálenost planeta–Země, r Slunce–planeta, máme pro tok záření rozptýleného planetkou přijímaný v místě pozorovatele (detektorem o plošce dS):

$$\Phi = \frac{P}{dS} = \frac{J(\alpha)d\Omega}{dS} = \frac{J(0)\Psi(\alpha)\frac{dS}{\Delta^2}}{dS} = \frac{A_g R^2 \Phi_{\odot} \Psi(\alpha)}{\Delta^2},$$

kde tok od Slunce:

$$\Phi_{\odot} = \frac{P_{\odot}}{4\pi r^2}.$$

Budeme-li toky poměřovat tokem na 1 AU:

$$\Phi_{\odot \text{ 1 AU}} = \frac{P_{\odot}}{4\pi(1 \text{ AU})^2},$$

pak dosazením do Pogsonovy rovnice odvodíme rozdíl:

$$m - m_{\odot} = -2,5 \log_{10} \frac{\Phi}{\Phi_{\odot \text{ 1 AU}}},$$

odkud vyjádříme *zjevnou hvězdnou velikost* planety:

$$m = \overbrace{m_{\odot} - 2,5 \log(A_g [R]_{\text{AU}}^2)}^H + 5 \log([r]_{\text{AU}} [\Delta]_{\text{AU}}) - 2,5 \log \Psi(\alpha).$$

Členy nezávislé na vzdálenosti a fázovém úhlu logicky označíme jako *absolutní hvězdnou velikost* planety:

$$H \equiv m_{\odot} - 2,5 \log(A_g [R]_{\text{AU}}^2). \quad (255)$$

Pro $r = \Delta = 1 \text{ AU}$ a $\alpha = 0$ by bylo (nepozorovatelné) $m = H$.

1.13.7 HG systém

Abychom postihli změny jasnosti s fázovým úhlem, musíme něco předpokládat o funkci rozptylu. Podle doporučení IAU se používá Lummeho–Bowellův zákon, parametrizovaný dvěma veličinami H a G . Zavedme nejprve *redukovanou jasnost* planety, korigovanou o vzdálenost, ale bez započtení fáze:

$$H_{\text{red}}(\alpha) \equiv m - 5 \log([r]_{\text{AU}} [\Delta]_{\text{AU}}).$$

Střední redukovaná jasnost v HG systému (nezohledňující nesférický tvar, rotaci ani proměnné albedo na povrchu) je pak zavedena jako (Bowell aj. 1989):

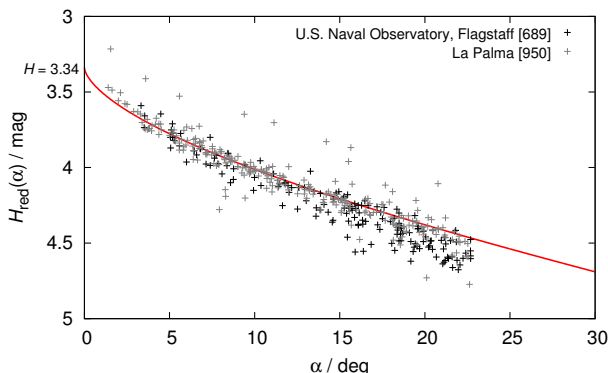
$$\bar{H}_{\text{red}}(\alpha) \equiv H - 2,5 \log [(1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha)], \quad (256)$$

kde funkce:

$$\Phi_i \equiv \exp \left[-A_i \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^{B_i} \right], \quad i = 1, 2$$

a parametry $A_1 = 3,33$, $A_2 = 1,87$, $B_1 = 0,63$, $B_2 = 1,22$, určenými jako optimální hodnoty metodou nejmenších čtverců pro určitý soubor planetek.

Všimněme si, že absolutní jasnost $H(\alpha = 0)$ udávaná v katalogu je *extrapolace* pro $\alpha = 0$. Gradient G fázové křivky je blízký nule pro strmé závislosti, jedničky pro ploché. Příklad reálných měření je uveden na obr. 96.



Obrázek 96: Redukované hvězdné velikosti planety (1) Ceres změřené na observatořích U.S. Naval Observatory, Flagstaff (označení MPC 689) a La Palma (950). Červeně je znázorněna odpovídající fázová křivka $\bar{H}_{\text{red}}(\alpha)$ dle (256), pro parametry $H = 3,34$ mag a $G = 0,12$. Rozptyl měřených hvězdných velikostí je obvykle způsoben především rotací planety okolo své osy, při které se jasnost může měnit, dále fotonovým šumem nebo systematickými odchylkami fotometrických přístrojů různých observatořích.

Nakonec pro kouli odvodíme vztah mezi absolutní jasností H a průměrem D , který se často používá pro první odhad velikosti planetek. Podle (255) je:

$$10^{0,4(H-m_{\odot})} = \frac{4(1 \text{ AU})^2}{D^2 A_g},$$

odkud ($m_{\odot} \doteq -26,76$ mag):

$$D = \frac{2 \text{ AU} \cdot 10^{0,2m_{\odot}}}{\sqrt{A_g}} 10^{-0,2H} \doteq \frac{1 \, 329 \text{ km}}{\sqrt{A_g}} 10^{-0,2H}. \quad (257)$$

Příslušné fotometrické veličiny (m_{\odot} , A_g , H) jsou zde vztaženy k Johnsonově systému V; v jiných spektrálních oborech jsou jejich hodnoty samozřejmě jiné.

1.13.8 Měření albeda, jednoduché termální modely

Měření albeda je nejčastěji založeno na *dvou* měřeních toku, a to ve vizuální a v infračervené oblasti. Ve vizuálním oboru pozorujeme rozptýlené záření od Slunce,

kdežto v dalekém infračerveném (na vlnových délkách $\lambda \simeq 10 \mu\text{m}$) tepelné záření planety. Samotné vizuální měření pro určení albeda nestačí, protože malá světla planetka dává stejný tok jako velká tmavá a z jednoho čísla ještě nikdo dvě nevymyslel.

Jednoduché metody, které zde použijeme, dovolují odvodit hodnoty albeda a průměru, které charakterizují „ekvivalentní koule“, nikoli planety samotné, mající složitější tvar.

Model STM pro pomalu rotující kouli. V nejjednodušším možném případě předpokládáme lokální termodynamickou rovnováhu neboli nulovou tepelnou vodivost povrchu planety. Pak je možno pro subsolární teplotu použít vztah obdobný (223):

$$(1 - A_h)\Phi_\odot = \eta\epsilon\sigma T_\star^4,$$

kam jsme ovšem doplnili parametr $\eta = 0,756$, který slouží jako oprava modelu STM, aby jeho výsledky souhlasily s měřením zákrytů hvězd planetkami (1) Ceres a (2) Pallas, které dávají absolutní hodnoty průměrů v kilometrech. Trochu odvážné je použít stejné škálování i pro všechny ostatní planety.

Postup pro výpočet albeda a průměru koule je následující (Delbò 2004):

1. geometrické albedo A_g nejprve odhadneme;
2. z měřené absolutní hvězdné velikosti H vypočítáme průměr D podle (257);
3. Bondovo albedo odvodíme ze známé rovnice $A_B = A_g q$, avšak namísto výpočtu fázového integrálu (254) využijeme přibližného vztahu ke gradientu G , platného pro Lummeho–Bowellův rozptyl (Bowell aj. 1989):

$$q \doteq 0,290 + 0,684 G;$$

4. teď se budeme chvíli tvářit nekonzistentně, že platí jednoduchý Lambertův rozptyl (pro který je $A_{hL} = A_{BL}$ a $I = f_L \Phi_i$) a subsolární teplotu T_\star vypočteme pro A_B , zmiňované η a obvyklé $\epsilon = 0,9$. Rozložení teploty na povrchu je pak určeno $\Phi_i = \Phi_\odot \cos(\vartheta_\star)$, kde ϑ_\star označuje úhlovou vzdálenost od subsolárního bodu:

$$T(\vartheta_\star) = T_\star \cos^{\frac{1}{4}}(\vartheta_\star).$$

5. monochromatická intenzita pro absolutně černé těleso je dána Planckovou funkcí a je nezávislá na směru (čili opět lambertovská):

$$I \equiv B(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp \frac{hc}{kT\lambda} - 1}.$$

Monochromatickou zářivost $J(\lambda)$ získáme integrací přes viděnou polokouli, pro nulový fázový úhel bychom měli:

$$\begin{aligned} J(\lambda, \alpha = 0) &= \int \epsilon B(\lambda, T(\vartheta_\star)) \cos \vartheta_\star dS = \\ &= \epsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} B(\lambda, T(\vartheta_\star)) \cos \vartheta_\star R^2 \sin \vartheta_\star d\vartheta_\star d\phi = \\ &= \epsilon 2\pi \frac{D^2}{4} \int_0^{\pi/2} B(\lambda, T(\vartheta_\star)) \cos \vartheta_\star \sin \vartheta_\star d\vartheta_\star, \end{aligned}$$

a monochromatický tok $\Phi(\lambda)$ měřený detektorem o plošce dS ve vzdálenosti Δ by měl být ($d\Omega = dS/\Delta^2$):

$$\Phi(\lambda) = \frac{J(\lambda, \alpha = 0)d\Omega}{dS} = J(\lambda, \alpha = 0) \frac{1 \text{ sr}}{\Delta^2}.$$

6. pozorovaný tok lze přeskálovat na nulový fázový úhel (Lebofsky a Spencer 1989):

$$\Phi'_{\text{obs}}(\lambda_i) = \Phi_{\text{obs}}(\lambda_i) 10^{-\beta|\alpha|/2.5},$$

kde hodnota $\beta \doteq 0,01 \text{ mag/deg}$.

7. spočteme odchylku modelu od pozorování:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[\Phi(\lambda_i) - \Phi'_{\text{obs}}(\lambda_i)]^2}{\sigma_i^2},$$

a tuto funkci minimalizujeme vzhledem k A_g .

Model NEATM pro kouli. Pro blízkozemní asteroidy, pozorované na velkých fázových úhlech, model STM vůbec nefungoval (χ^2 vycházelo podstatně větší než počet měření N). Proto byl jako drobné zlepšení zaveden model NEATM, ve kterém je parametr η volný a hledá se i jeho optimální hodnota. Již tedy není pro všechny koule stejná. Měření infračerveného toku musejí být pořízena alespoň ve čtyřech nebo pěti kanálech, pro dobré pokrytí Planckovy křivky. Zářivost $J(\alpha)$ se počítá pro daný fázový úhel α podle vztahu (251) a v metrice χ^2 používáme přímo pozorovaný tok $\Phi_{\text{obs}}(\lambda_i)$.

Je potřeba varovat, že při použití jednoduchých termálních modelů hrozí *systematické chyby*. Pro přesnější výsledky je nezbytné zohlednit tvar planetek (viz kap. 3.7.3) i konečnou tepelnou vodivost a odpovídající fázový posun maxima teploty (viz kap. 1.11.2). Jako odstrašující příklad vezměme planetku (45) Eugenia, pro níž byl z měření družicí IRAS a z modelu STM nejprve odvozen efektivní průměr 244 km. Tato planetka však byla pozorována od pólu, čili průřez se jevil podstatně větší než při pozorování od rovníku. Pozdější analýza tvaru a polohy pólu hodnotu efektivního průměru snížila na hodnotu okolo 200 km.

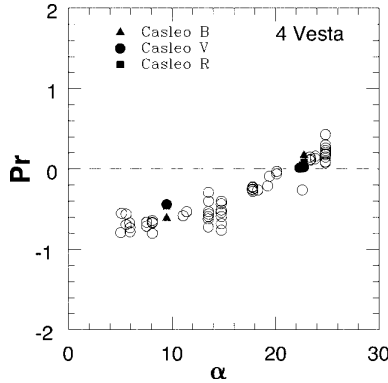
1.13.9 Polarimetrie

Dalším zdrojem informací o vlastnostech povrchu jsou polarizační měření. Lyot (1924) jako první změřil negativní lineární polarizaci Měsíce. Již dříve bylo známo, že meziplanetární prach na malých fázových úhlech způsobuje polarizaci rozptýleného záření (Wright 1874).

Zavedeme *stupeň polarizace* jako poměr toků měřených polarizačními filtry v rovině kolmé a rovnoběžné vzhledem k rovině Slunce–planetka–Země:

$$\Pi \equiv \frac{\Phi_{\perp} - \Phi_{\parallel}}{\Phi_{\perp} + \Phi_{\parallel}}.$$

Pro planetky bývá pozorováno Π záporné pro fázové úhly $\alpha \lesssim 20^\circ$ (dosahuje přitom hodnoty $\Pi \simeq -1\%$) a kladné pro $\alpha \gtrsim 20^\circ$ (viz obr. 97). Důležitá je pozorovaná korelace stupně polarizace s albedem (Cellino aj. 1999), která umožňuje z jednodušších polarizačních měření odhadovat albedo planetek bez složitých měření v infračerveném oboru.



Obrázek 97: Stupeň polarizace Π (v procentech) v závislosti na fázovém úhlu α pro planetku (4) Vesta. Převzato z Cellino aj. (1999).

Pro podrobnější popis polarizace se používají *Stokesovy parametry*. V případě rovinné vlny se složkami elektrického pole:

$$\begin{aligned} E_x &= a_1 \cos(2\pi\nu t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_1), \\ E_y &= a_2 \cos(2\pi\nu t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_2), \end{aligned}$$

jsou Stokesovy parametry definovány jako (Landi Degl’Innocenti a Landolfi 2004):

$$\begin{aligned} I &= a_1^2 + a_2^2, \\ Q &= a_1^2 - a_2^2, \\ U &= 2a_1a_2 \cos(\phi_2 - \phi_1), \\ V &= 2a_1a_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \end{aligned}$$

a mají význam intenzity, lineární polarizace, lineární polarizace vzhledem k osám otočeným o 45° , a kruhové polarizace. Důležité je, že na rozdíl od amplitud a fází jsou Stokesovy parametry přímo měřitelné veličiny.

Často se sdružují do čtveřice nazývané *Stokesův vektor* (I, Q, U, V) . V případě, že je roven $(1, 0, 0, 0)$, je záření nepolarizované, pro $(1, 1, 0, 0)$ je polarizované lineárně horizontálně, $(1, -1, 0, 0)$ vertikálně, $(1, 0, 1, 0)$ v úhlu $+45^\circ$, $(1, 0, -1, 0)$ -45° , $(1, 0, 0, -1)$ kruhově levotočivě, a $(1, 0, 0, 1)$ pravotočivě.

Měření probíhá pomocí vzájemně natočených polarizačních filtrů, polarizátoru a analyzátoru. Signály na detektoru jsou pak (pro osy obou filtrů natočené stejně):

$I = s(0^\circ) + s(90^\circ)$, $Q = s(0^\circ) - s(90^\circ)$, $U = s(45^\circ) - s(135^\circ)$. Stupeň polarizace může být spočten jako:

$$\Pi \equiv \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I}.$$