Newtonová metóda riešenie rovníc

Miroslav Kurka
Dept. of Biophysics
Pavol Jozef Šafárik University in Košice
Slovakia

5. mája 2023

1 Úloha

Nájdite riešenie diferenciálnej rovnice (počiatočnej úlohy)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y^3}$$

kde $y(1) = 1$ je hodnota y v bode $x = 1$. Rovnicu riešte:

- Eulerovou metódou
- Heunovou metódou

s krokom $dx = 0.1$ a $dx = 0.01$ pre interval $[a, b] = [1, 10]$ a výsledné riešenia porovnajte s výsledkom obdŕžaným pomocou zabudovanej funkcie *lsode* v prostredí Octave. Nakoniec numerické výsledky porovnajte s presným riešením $y = (2x^2 - 1)^{1/4}$ a výsledky zobrazte do spoločných grafov v tvare rozdielu medzi presným riešením a približnými (numerickými) riešeniami

1.1 Teória

Úloha je založená na riešení diferenciálnej rovnice pomocou Runge-Kutta (RK) metód. Tie používajú aproximaciu derivacií kombináciou hodnôt funkcie f v niekoľkých strategických bodoch na intervale $[t_n, t_{n+1}]$[2]. Všeobecne sú dané rekurentným vzťahom:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^{r} \alpha_i k_i$$

1.1.1 Eulerova metóda

Jedná sa o RK metódu prvého rádu. Metóda je založená na princípe nahradenia krivky $y = f(x)$ jej dotyčnicou v bode $[x_i, f(x_i)]$ na intervale $<x_i, x_i + 1>$.

Keďže smernicu dotyčnice vieme vypočítať pomocou derivácie funkcie t.j. $k = y'(x_i) = f(x_i, y_i)$, dostávame rekurentný vzorec pre výpočet hodnoty funkcie v bode y_{i+1}[1]:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

kde $h = x_{i+1} - x_i$ je krok metódy.

1.1.2 Heuneho metóda

Je to RK metóda druhého rádu. Rozdiel s Eulerovou metódou je, že pri odvodení sa funkcia v integrály nahrádza Lagrangeovým interpolačným polynómom prvého stupňa[1]. Následne platí rekurentný vzorec:

$$y_{n+1} = y_n + h_n/2(k_1 + k_2)$$

, kde $k_2 = f(x_n + 1, y_n + h_n k_1)$ a $k_1 = f(x_n, y_n)$.

1.2 Algoritmus

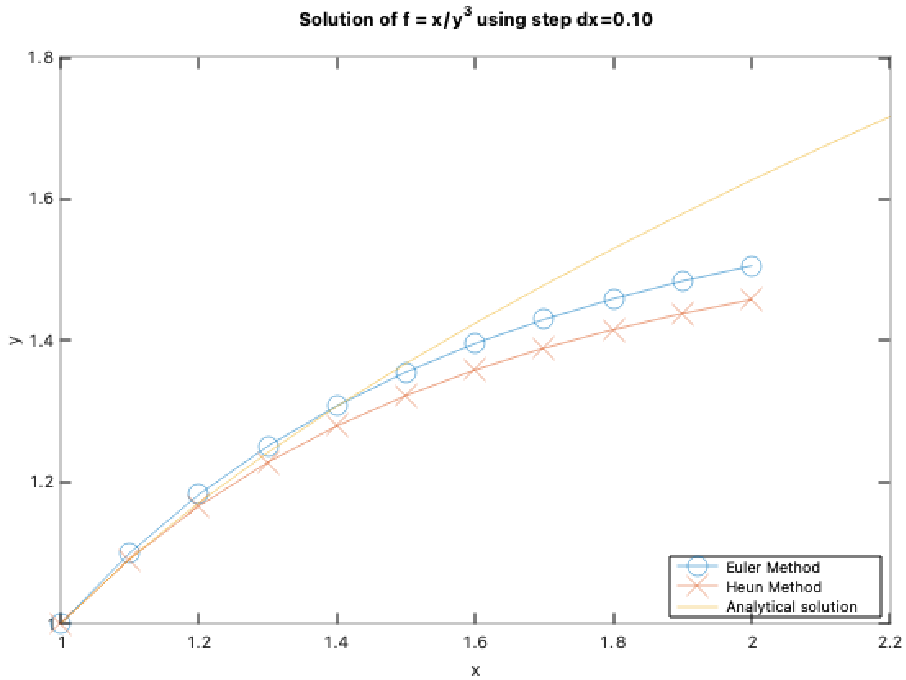
V našej implementácií najprv inicializujeme funkciu ktorú chceme aproximovať a počet bodov N=10 zo zadania[1] . Následne zavedieme krok intervalu v našom prípade dx[2] v teórii vyššie je to h. Potom nastavíme polia na ukladanie hodnôt pre body x a pre výsledky v bodoch x pre rekurentné vzťahy Eulerovej, Heuneho metóde a pre analytické riešenie diferenciálnej rovnice. Podľa zadania nastavíme prvý bod 1 a funkčnú hodnotu pre všetky prípady tiež ako 1. Vo for slučke v každom kroku aktualizujeme hodnotu bodu $x(i+1)$ o krok dx tj. Vypočítame nasledujúci bod. Ďalej sa podľa vzorca Eulerovej metódy z teórie vypočíta hodnota riešenia $y\_(euler)(i+1)$. K výpočtu Heuneho metódy potrebujeme hodnoty k_1 a k_2. Pre prehľadnosť riešenia sa inicializuje $y\_temp = k_2$. Tato predpočítaná hodnota je následne dosadená do rekurentného vzťahu Heuneho metódy pre bod x_i. Ako posledný krok sa vypočíta hodnota exaktného riešenia dif. rovnice pre následne porovnanie. Všetky hodnoty sa ukladajú do poli, ktoré sme si pripravili.

1.3 Výsledky

Na Obr.1 sú zobrazene riešenia pre väčší krok intervalu. Z grafu vidíme, že Eulerova metóda pri intervale 10 bodov kde podintervaly sú väčšie ma vyššiu chybu aproximácie ako Heuneho metóda.

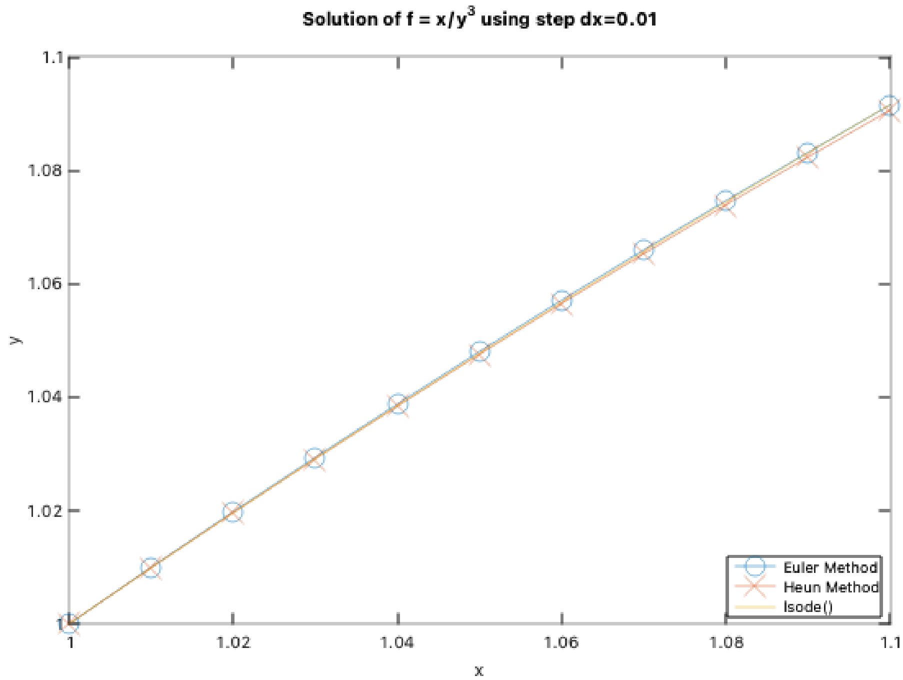
[1] Zo zadania mi nebolo celkom jasné či ide o [1,10] v zmysle matlab poľa tj. 10 bodov alebo interval v matematike viz. matlab zdrojak.

[2] značenie ponechávame podľa cvičení

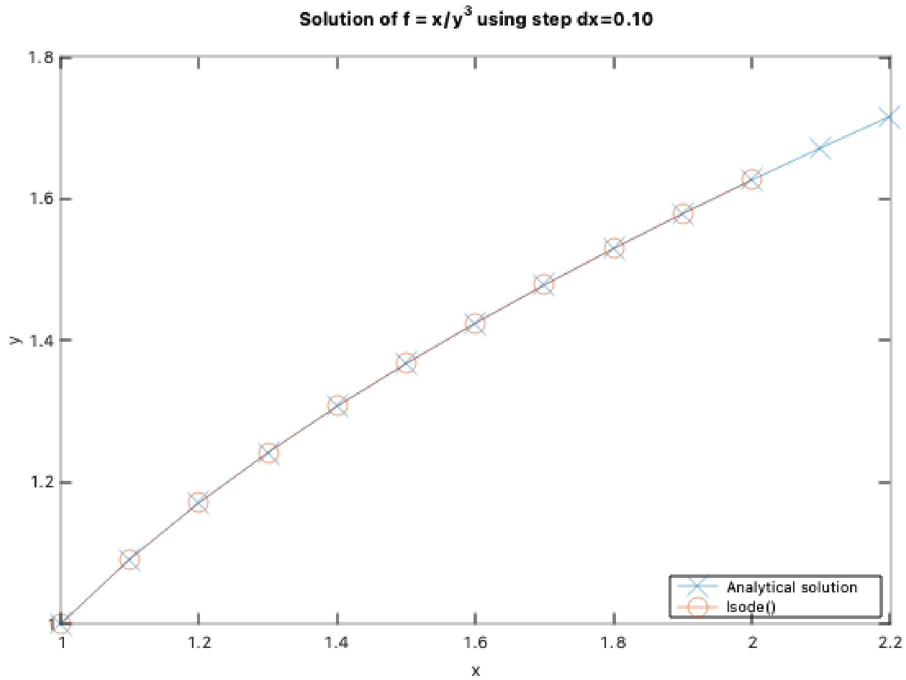


Obr. 1: Graf riešenií metód s krokom dx=0.1

Z Obr.2 je zrejmé, že pri zväčšení kroku intervalu sa aproximácia pomocou Eulerovej metódy zlepšila a to z dôvodu, že veľkosti podintervalov v intervale 10 bodov sa výrazne zmenšili. Avšak opäť Heuneho metóda poskytuje presnejšie riešenie. Tento výsledok je zrejmý z teórie.

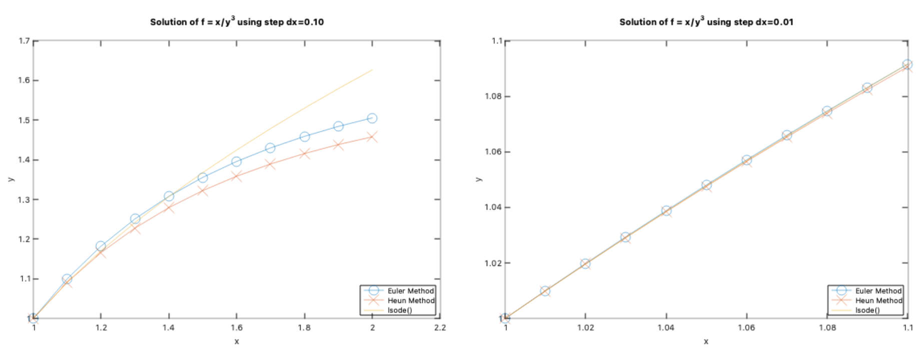


Obr. 2: Graf riešení metód s krokom dx=0.01



Obr. 3: Porovnanie analytického a lsode() riešenia s krokom dx=0.1

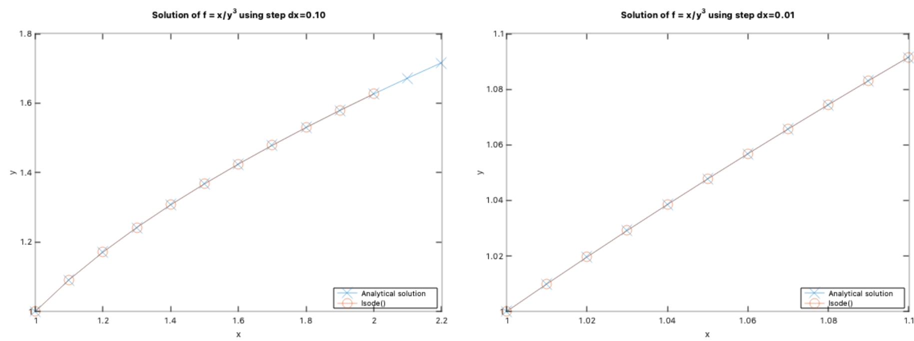
V grafe 3, vidíme že analytické riešenie je totožné s výsledkom vstavanehj funkcie lsode().



(a) Vysoká odchylka pri kroku intervalu 0.1

(b) Nízka odchylka pri kroku intervalu 0.01

Obr. 4: Porovnanie lsode(), Euler a Heuneho riešenia s rozlyčnými krokmi intervalu



(a) Analytické a lsode() riešenie pri kroku intervalu 0.1

(b) Analytické a lsode() riešenie pri kroku intervalu 0.01

Obr. 5: Porovnanie lsode() a analytického riešenia s rozlyčnými krokmi intervalu

Pri riešení diferenciálnej rovnice pomocou vstavenej metódy $lsode()$ je pri kroku $dx = 0.01$ riešenie takmer totožné s Heuneho a Eulerovou metódou. Pri zväčšení kroku avšak nastáva odchylka medzi riešeniami. V grafe na Obr. 5 vidíme porovnanie analytického riešenia a $lsode()$ pri kroku $dx = 0.1$ a $dx = 0.01$, ktoré sú skoro totožné.

Literatúra

[1] *Eulerova a Heunova metóda* Dostupné z `http://matematikabezproblemov.webjet.sk/domov/studijne-materialy/matematika-vs/numericka-matematika/eulerova-heunova-metoda/`

[2] Žukovič, M. (2015) *Počítačová fyzika I* Dostupné z `https://ufv.science.upjs.sk/zukovic/download/POF1/Literatura/Pocitacova%20fyzika%20I.pdf`