Zadanie 2

Miroslav Kurka
Dept. of Biophysics
Pavol Jozef Šafárik University in Košice
Slovakia

8. apríla 2023

1 Úloha

Numericky riešte problém ideálneho kyvadla hmotnosti m, pripevneného k pevnému čapu tuhou tyčou dĺžky L (viď obrázok a prednášky). Predpokladajme, že uhol vychýlenia θ je malý, takže platí $\sin(\theta) \cong \theta$. V takom prípade je možné popísať pohyb kyvadla sústavou diferenciálnych rovníc

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{L}\theta$$
$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

Vyriešte úlohu pre $t \in [0, 20]$ s počiatočnými podmienkami $\theta(0) = 0.1$ a $\omega(0) = 0$ a krokom $\Delta t = 0.02$ pomocou metód nižšie. Porovnajte výsledky s výsledkami získanými pomocou funkcie lsode(). Výsledky zobrazte v grafe.

- Eulorovou metódou
- Metódou Runge-Kutta 4. rádu
- lsode()

1.1 Teória

Úloha je založená na riešení diferenciálnej rovnice pomocou Runge-Kutta (RK) metód. Tie používajú aproximaciu derivacií kombináciou hodnôt funkcie f v niekoľkých strategických bodoch na intervale $[t_n, t_{n+1}]$[2]. Všeobecne sú dané rekurentným vzťahom:

$$y_{n+1} = y_n + h_n \sum_{i=1}^{r} \alpha_i k_i \tag{1}$$

1.1.1 Eulerova metóda

Jedná sa o RK metódu prvého rádu. Metóda je založená na princípe nahradenia krivky $y = f(x)$ jej dotyčnicou v bode $[x_i, f(x_i)]$ na intervale $<x_i, x_i + 1>$. Keďže smernicu dotyčnice vieme vypočítať pomocou derivácie funkcie t.j. $k = y'(x_i) = f(x_i, y_i)$, dostávame rekurentný vzorec pre výpočet hodnoty funkcie v bode y_{i+1}[1]:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \tag{2}$$

kde $h = x_{i+1} - x_i$ je krok metódy.
Podľa rovnice 2.23 z knihy [2] je možné metódu zapísať v maticovej forme pre našu sústavu dvoch rovníc popisujúcich pohyb kyvadla:

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta t \cdot \mathbf{V} \cdot \mathbf{x}_i \tag{3}$$

kde $\mathbf{V}$ je rovné:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{L} & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

1.1.2 RK metóda 4. rádu

Runge-Kuttova metóda 4. stupňa (RK4) je vylepšenie jednoduchšej Eulerovej metódy, ktorá používa iba jedno odhadnutie sklonu funkcie na začiatku každého kroku na aktualizáciu riešenia.
RK4 je metóda vyššieho stupňa, čo znamená, že používa štyri odhady (nazvané k_1, k_2, k_3 a k_4) v rôznych bodoch v každom kroku na zlepšenie presnosti riešenia. Tie sa používajú na aktualizáciu riešenia v každom kroku.[2]

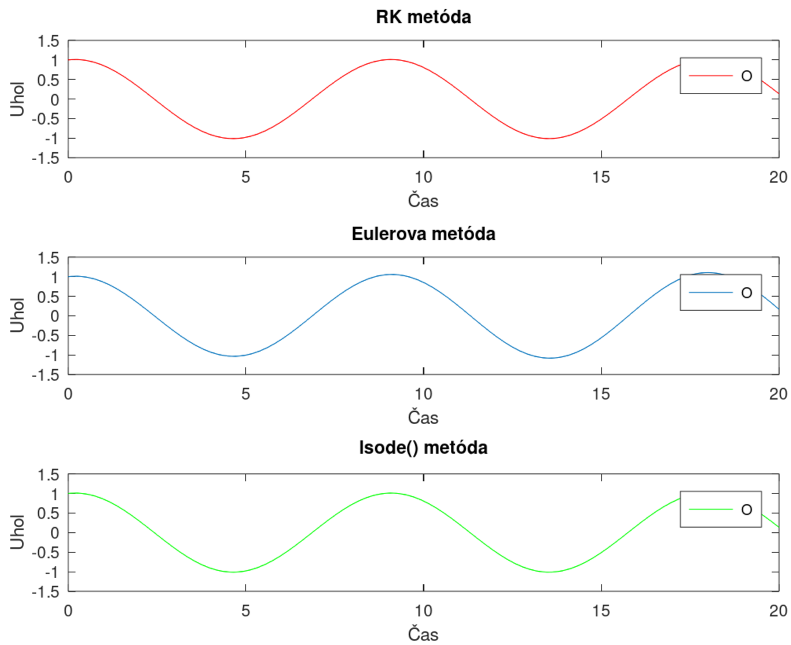
$$x_{n+1} = x_n + h_n \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \tag{5}$$

, kde

$$k_1 = f(t_n, x_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{h_n}{2}, x_n + \frac{h_n}{2} k_1)$$
$$k_3 = f(t_n + \frac{h_n}{2}, x_n + \frac{h_n}{2} k_2)$$
$$k_4 = f(t_{n+1}, x_n + h_n k_3)$$

1.2 Výsledky

Na Obr.1 sú zobrazene riešenia pre úlohy. Výsledkom sú zmeny uhla θ v čase t, kde θ predstavuje vychýlenie kyvadla. Os x zobrazuje čas t v sekundách. Os y popisuje veľkosť uhla vychýlenia v radiánoch. Najväčšie nadobúdane hodnoty sú 1 a -1 rad, ktoré sa opakujú s periódou.



Obr. 1: Graf riešení metód s krokom dx=0.01

1.3 Záver a diskusia

Z teórie vyplýva, že presnosť riešenia by sa mala líšiť podlá toho akú metódu zvolíme. Najmenej presná je Eulerova metóda. Následne o niečo presnejšia Runge-Kutte metóda 4. radu a najpresnejšia vstavaná lsode() funkcia. Z výsledkov na grafe je avšak zrejme, že pri výbere dostatočne veľkého intervalu, v našom prípade t=20, sú chyby týchto metód zanedbateľne. Riešenia sú totožné.

Literatúra

[1] *Eulerova a Heunova metóda* Dostupné z `http://matematikabezproblemov.webjet.sk/domov/studijne-materialy/matematika-vs/numericka-matematika/eulerova-heunova-metoda/`

[2] Žukovič, M. (2015) *Počítačová fyzika I* Dostupné z `https://ufv.science.upjs.sk/zukovic/download/POF1/Literatura/Pocitacova%20fyzika%20I.pdf`