Zadanie 3

Miroslav Kurka
Dept. of Biophysics
Pavol Jozef Šafárik University in Košice
Slovakia

5. mája 2023

1 Úloha

Majme tyč dĺžky $L = 3,5m$ pripojenú na potrubie s horúcou kvapalinou. Jedna strana je pripojená na potrubie a druhá k stene. Vypočítajte rozloženie teploty pozdĺž tyče v rôznych časoch. Teplota T sa šíri podľa rovnice vedenia tepla (v 1D v smere osi x):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = b\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

kde $b = 0,0001$ m^{2}s^{-1} je difúzny koeficient. Teplota tyče na začiatku je daná rovnicou:

$$T(t = 0, x) = 20\cos\left(\frac{2\pi x}{5}\right)$$

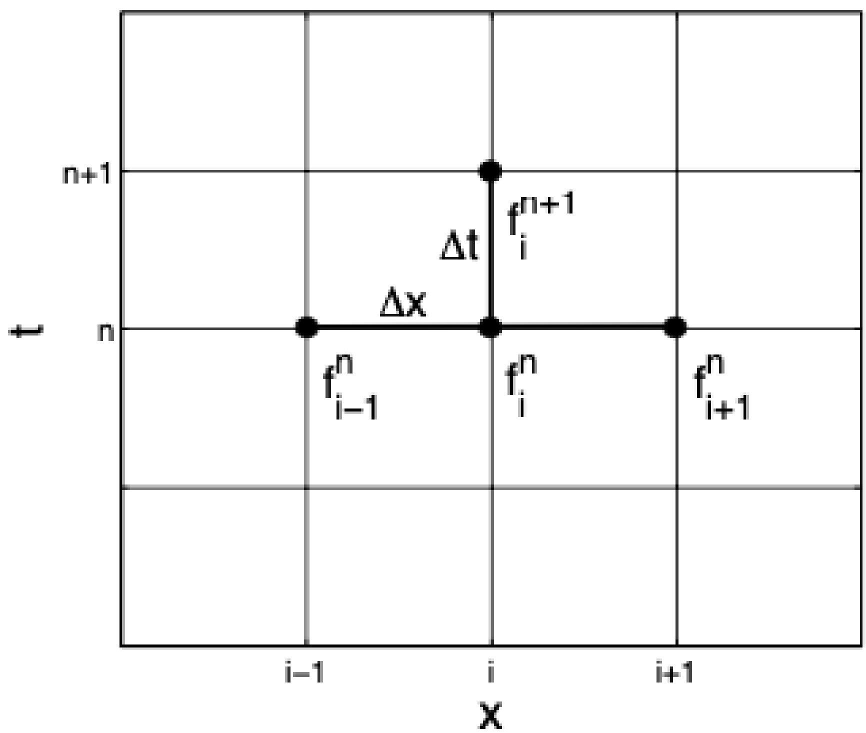
Potom v potrubí začne prúdiť horúca kvapalina a teplota v tyči začne stúpať. Predpokladáme že teplota horúceho konca tyče v $x = 0$ stúpa s časom t podľa rovnice:

$$T(t, x = 0) = 30\tanh(0,005t) + 20$$

Teplota na konci tyče v $x = L$ (pri stene) ostáva stále rovnaká $T_s = 20C$.
Na numerické riešenie použite explicitnú FTCS metódu pre hodnoty $\alpha = 0,2; 0,5a1$. Pre jednotlivé prípady okomentujte stabilitu numerického riešenia. Vykreslite rozdelenie teploty pozdĺž tyče pre 5 reprezentatívnych hodnôt času $t \in [0, 2000]$

1.1 Teória

Úloha je založená na riešení diferenciálnej rovnice pomocou FTCS metódy. Táto využíva doprednú časovú a centrálnu priestorovú diferenciu pre aproximáciu prislušných derivácií (viz. Obr. 1)[1].



Obr. 1: Diskretizačná schéma pre FTCS metódu (Prevzaté z [1])

$$\frac{\partial T}{\partial t} = b\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

podľa diskretizačnej schémy 1 možeme prepísať ako:

$$\frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{dt} = b\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{dx^2} \tag{2}$$

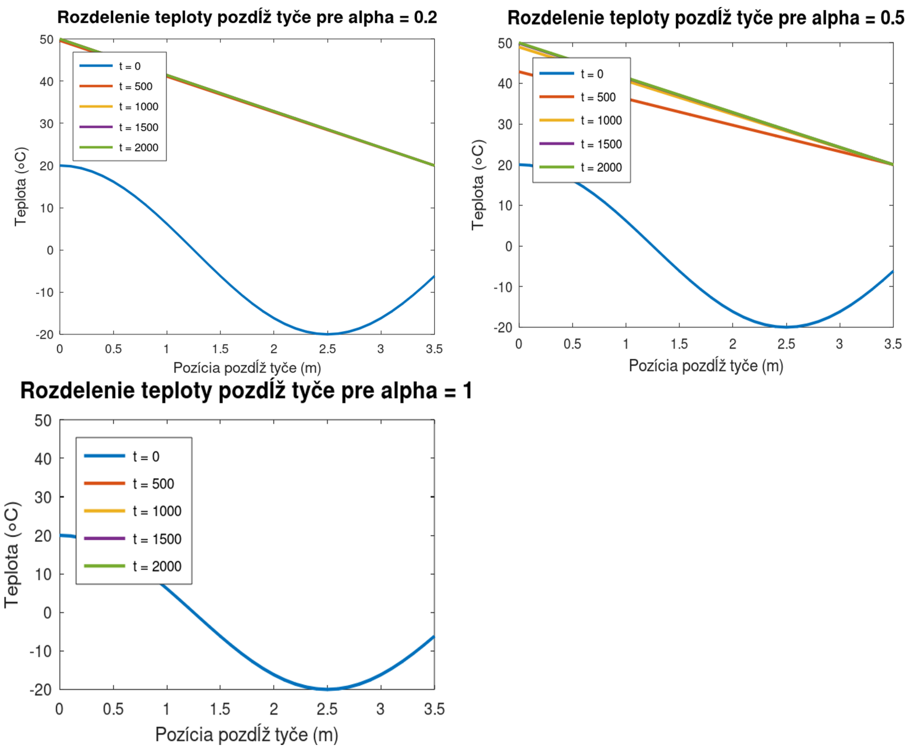
Následne si vyjadríme $T_{i,j+1}$:

$$T_{i,j+1} = T_{i,j} + \alpha(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}) \tag{3}$$

kde $\alpha = \frac{bdt}{dx^2}$.
Pre FCTS metódu platí $\Delta t \leq \frac{\Delta x^2}{2\alpha}$ tzv. podmienka stability. Ak táto podmienka nie je splnená metóda sa stane nestabilnou.[2]

1.2 Výsledky

Na Obr.2 sú zobrazene riešenia pre rôzne hodnoty alfa. Na grafoch je zobrazená teplota v čase pre rôzne body tyče. Farebne sú zobrazené rôzne časy t z intervalu $[0, 2000]$. Tie sú konkrétne 0, 500, 1000, 1500 a 2000 podľa zadania. Časový krok je $dt = \frac{dx^2}{2\alpha}$ a priestorový krok je $dx = 0.1$ pre všetky tri grafy. Na vytvorenie grafov bolo nutné použiť knižnicu qtplot, pretoze octave základná knižnica nevie vykreslovať tak vysoké hodnoty float hodnôt aké sú pre $\alpha = 1$.



Obr. 2: Riešenia pre rôzne hodnoty α

1.3 Záver a Diskusia

Z grafov na Obr. 2 je zrejmé, že pre $\alpha = 0.2$ a $\alpha = 0.5$ sú riešenia stabilné. Pre $\alpha = 1$ je riešenie nestabilné.

Literatúra

[1] Žukovič, M. (2015) *Počítačová fyzika I* Dostupné z `https://ufv.science.upjs.sk/zukovic/download/POF1/Literatura/Pocitacova%20fyzika%20I.pdf`

[2] Wikipedia (2019) *Forward Time Centered Space method* Dostupné z `https://en.wikipedia.org/wiki/FTCS_scheme`