Domaca Uloha 1 - LSM

Miro Kurka

November 24, 2022

1 Úloha 1

- Majme tabuľku nameraných dát. Nájdite polynóm stupňa n   n_max, ktorý najlepšie aproximuje funkčnú závislosť y(t) v zmysle (neváženej) metódy najmenších štvorcov. Zobrazte závislosť rezíduí, t.j. súčet štvorcov, na stupni polynómu pre všetky skúmané polynómy.
- Porovnajte výsledky s výsledkami obdŕžanými využitím zabudovanej fitovacej funkcie polyfit

Data:

```
t_i = [2 2.5 3 3.5 4 4.5 5]
y_i = [7.14 6.56 5.98 5.55 5.71 6.01 6.53]
```

1.1 Teoretický úvod

Cielom LS metódy je dosiahnúť takú aproximačnú funkciu, ktorá sa najbližšie modeluje namerané dáta. Narozdiel napríklad od interpolácie splajnami, pri LS nie je potrebné aby funkcia prechádzala nameraními bodmy, metóda je založená na minimalizacií súčtu vzdialenosti štvorcou medzi skutočnou hodnotou a aproximačnou funkciou.

Uveďme príklad ak máme dva namerané body[1]

Zvoľme aproximačnú funkciu $\varphi(x_i) = a_0 + a_1 x$. Teraz odčítajme hodnotu $\varphi(x_i)$ od skutočnej nameranej hodnoty y_i. Dostávame $a_0 + a_1 x - y_i$, vezmime štvorec tejto hodnoty $(a_0 + a_1 x_i - y_i)^2$, to spravíme pre každú hodnotu. Následne sčítame takto získané hodnoty, chceme aby suma mocnín vzdialeností (residue) bola čo najmenšia $R = \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i)^2$. Máme definovanú minimalizačnú úlohu, pre lokálne extrémy platí, že derivácia je rovná nule. Najprv zderivujeme podľa a_0 a upravíme:

$$2 \sum_{i=0}^{n} (a_0 + a_1 x_i - y_i) = 0$$

$$2(a_0 n + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i - \sum_{i=0}^{n} y_i) = 0$$

$$a_0 n + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i = \sum_{i=0}^{n} y_i$$

[1] V skutočnosti je nezmyselné robiť aproximáciu z dvoch bodov kvôli podmienenosti ale pre n bodov už LaTeX-ove rovnice sú príliš zdlhavé na písanie.

Nasledne zderivujeme podla a_1:

$$2\sum_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i - y_i)x_i = 0$$

$$2(a_0\sum_{i=0}^{n} x_i + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \sum_{i=0}^{n} y_i x_i) = 0$$

$$a_0\sum_{i=0}^{n} x_i + a_1\sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i x_i$$

Dostávame sústavu rovníc, môžeme zapísať v maticovom tvare:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=0}^{n} x_i \\ \sum_{i=0}^{n} x_i & \sum_{i=0}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \sum_{i=0}^{n} y_i x_i \end{pmatrix}$$

Všeobecne platí:

$$\begin{pmatrix} n & \cdots & \sum_{i=0}^{n} x_i^k \\ \vdots & \ddots & \\ \sum_{i=0}^{n} x_i^k & & \sum_{i=0}^{n} x_i^{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{n} y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{n} y_i x_i^k \end{pmatrix}$$

Dostávame maticovú rovnicu v tvare $\mathbf{V}a = \mathbf{Y}$, kde riešením dostávame a vektor, kde elementy sú hľadané najmenšie konštanty pre aproximačný polynóm.

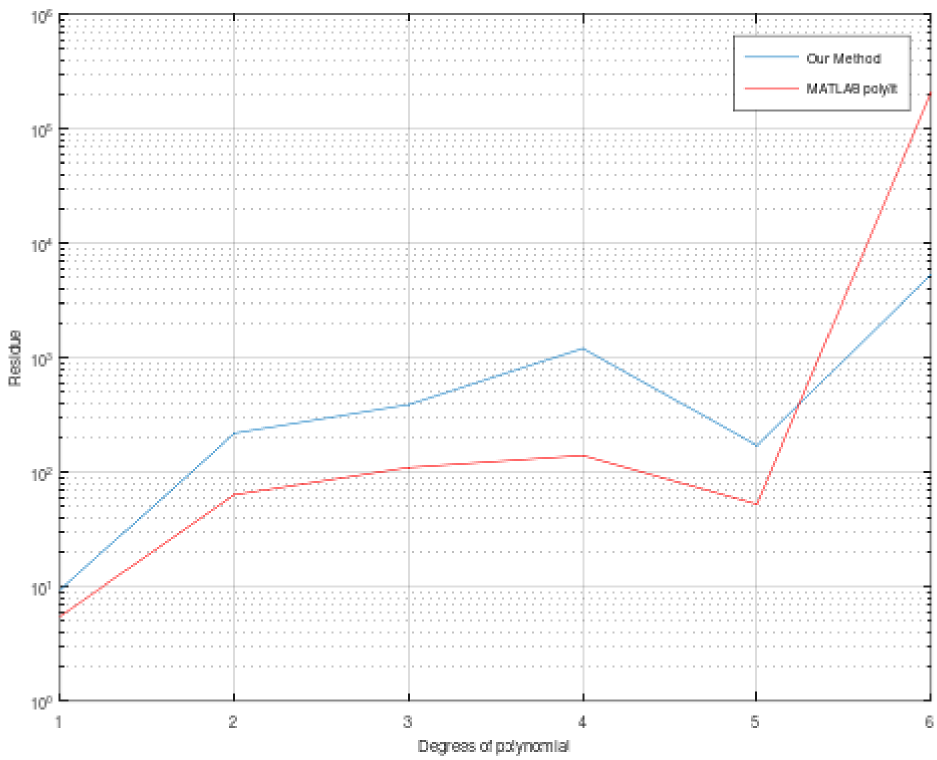
1.1.1 Popis programu

[2]:
```
#declares plotting env for jupyter octave kernel
graphics_toolkit ("qt");
```

[10]:
```
#Released under MIT License
#Copyright (c) 2022 Miroslav Kurka

t_i = [2 2.5 3 3.5 4 4.5 5]; # t_i is our x_i value
y_i = [7.14 6.56 5.98 5.55 5.71 6.01 6.53];
residues=[];
#n= length(t_i)
n=columns(t_i);
k= n-1; # degree of the polynomial
# init matrices
V=zeros(n,n);
Y=zeros(n,1);




# fill Y matrix
```

```
for i=1:n
   Y(i)=sum(y_i.*(t_i.^(i-1))); # i-1 so we can get t_i^0 = 1, hence the n not
 ↪k in the for loop range
endfor

# fill the V matrix

for i=1:n
  for j=1:n
    if i==1 && j==1
      V(i,j)=k;
    else
      V(i,j)=sum(t_i.^(i+j)-2);
    endif
    endfor
endfor


st=7;
# get each degree polynomial by slicing the V
for pos=1:st
    if st-pos==0, break; end # end for loop since 0x0 doesnt exist, and
 ↪indexing is nightmare in matlab
    V=V(1:st-pos,1:st-pos); # reverse slicing, we reduce matrix from to 6x6 to
 ↪5x5 ...
    Y=Y(1:st-pos);
    a_coefficients=V\Y;
    lst_func=polyval(flip(a_coefficients),y_i);
    residues(pos)= sum((y_i-lst_func).^2);
endfor
# flip the residues since by slicing we got 6x6 ie k=6 first
residues=flip(residues);
poly_degrees=(1:k);
semilogy(poly_degrees,residues)
grid on
hold on


# task b) compare with polyfit

matlab_residues=[];

for i=1:6
    a_matlab_coefficients=polyfit(t_i,y_i,i);
    mat_func=polyval(a_matlab_coefficients,y_i);
    matlab_residues(i)=sum((y_i-mat_func).^2);
```

```
endfor

semilogy(poly_degrees, matlab_residues,"red")
legend("Our Method","MATLAB polyfit")
xlabel("Degrees of polynomial")
ylabel("Residue")
hold off
```



1.1.2 Záver

Z grafu je viditeľné, že najlepší “fit” je pri polynóme so stupnňom 5 v oboch prípadoch. Taktiež, je zretelné, že implementovaná funkcia v MATLAB knižnici je presnejšia. Dôvodom je najskôr optimalnejšia implementácia algoritmu LSM alebo výber iného “fitovacieho” algoritmu.