# Newtonová metóda riešenie rovníc

Miroslav Kurka
Dept. of Biophysics
Pavol Jozef Šafárik University in Košice
Slovakia

10. decembra 2022

## 1 Úloha

Vypočítajte daný integrál so zadanou presnosťou pomocou lichobežníkovej a Simpsonovej metódy. Koľko delení intervalu je potrebných pri jednotlivých metódach k dosiahnutiu požadovanej presnosti? Následne preveďte výpočty s využitím funkcií softvéru Octave trapz a quadv. Porovnajte aj z presným riešením.

$$\int_0^5 \frac{x}{(4+x^2)}\,dx$$

### 1.1 Teória

Obidve metódy používajú delenie intervalu na menšie časti. Integrál potom aproximujú následovne:

- Lichobežníková metóda je založená na aproximácii integrálu sčítaním lichobežníkov pod krivkou cez podintervaly.[1]
- Simpsonova metóda je založená na aproximácii integrálu za pomoci parabolickej krivky.[1]

#### 1.1.1 Lichobežníková metóda

Lichobežníková metóda je definovaná ako

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

kde $h = \frac{b-a}{n}$ je velkosť kroku a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sú rovnomerne vzdialené podintervaly v intervale $[a, b]$.[1]

## 1.2 Simpsonova metóda

Simpsonova metóda je definovaná ako

$$\int_a^b f(x), dx \approx \frac{h}{3} \left( f(x_0) + 4[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{n-2})] + f(x_n) \right)$$

kde $h = \frac{b-a}{n}$ je velkosť kroku a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sú rovnomerne vzdialené podintervaly v intervale $[a, b]$.[1]

### 1.2.1 Algoritmus

V prvom kroku inicializujeme našu funkciu, ktorú budeme aproximovať. Následne definujeme hornú, dolnú hranicu integrálu a presnosť epsilon. Zvolíme náhodné číslo počtu intervalov prvej iterácie, toto číslo musí byť násobok 2 kvôli Simpsonovej metóde. Vypočítame h a vygenerujeme pole od dolnej po hornú hranicu s krokom h. Za využitia vstavanej funkcie *arrayfun* namapujeme zadanú funkciu z úlohy na body vzniknutých podintervalov. Toto vráti hodnoty funkcie v daných bodoch. Inicializujeme prvú iteráciu lichobeznikovej a Simpsonovej metody. Pri Simpsonovej metóde v sumách používame trik s krokom indexu poľa aby sme dostali párne body a následne nepárne. Taktiež vytvoríme pomocné premenné do ktorých budeme ukladať predošlé hodnoty aproximovaných integrálov. V cyckle while, ktorý sa zastaví ak obidve metódy splnia definovanú presnost, presunieme predošlé hodnoty integrálov do pomocných premenných. Ďalej zvýšime počet intervalov o dvojnásobok a znova prepocítame krok h. Vypocitame aproximované hodnoty integrálov. Iterujeme pokiaľ obidve metódy dosiahnu definovanú presnosť.
Výsledky a počet intervalov vypíšeme na obrazovku. Zobrazíme výsledky z Octave funkcií *trapz*, *quadv* a analytické riešenie.

## 1.3 Výsledky

V tabulke nižšie sú získane výsledky z našej implementácie vstavaných funkcií a počet potrebnych intervalov. V porovnaní vidíme rozdiely v presnosti, ktoré sa avšak objavujú až pri 5. desatinom čísle.

| **Hodnota** | **Výsledok** |
|---|---|
| I_simpson | 0.990 500 77 |
| I_trapezoid | 0.990 411 22 |
| number_of_intervals | 80 |
| matlab_trapezoid | 0.990 411 22 |
| matlab_simpson | 0.990 500 69 |
| analytical_solution | 0.990 500 73 |

## 1.4 Záver

Na požadovanú presnosť je potrebnych 80 intervalov. Zistili sme že najbližšie riešenie k analytickému je Simpsonova metóda implementovaná cez funkciu *quadv*. Lichobežníková metóda je menej presná ako Simpsonova metóda. Výsledky z Octave funkcie *trapz*, sú rovnaké ako výsledky z našej vlastnej implementácie.

## Literatúra

[1] Buša, J., Pirč, V. and Schrötter, Š. (no date) *Numerické metódy, pravdepodobnosť a matematická štatistika*