INFOTEC - MCDI

Matemáticas para la Ciencia de Datos

Profesor: Dra. Briceyda B. Delgado López

Alumno: Miroslava Sandria Yong

Tarea 8. Optimización.

Instrucciones

Optimización

Monterrey, al ser una zona industrial, requiere de diversos proveedores que satisfagan la demanda de ciertos productos. Tal es el caso de cierta empresa que produce solenoides.

Se ha recibido una orden de compra cuya demanda para los próximos seis meses es de **250, 280, 300, 270, 270 y 320 unidades**. La capacidad de producción de la planta no es capaz de satisfacer la demanda por mes de este solenoide debido a que debe satisfacer a otros clientes, teniendo una capacidad actual de unidades por mes de **220, 300, 220, 350, 290 y 230**.

No se permite satisfacer la demanda de un mes en un periodo posterior al suyo, pero se puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda inmediata. La capacidad de tiempo extra en cada periodo es la mitad de la capacidad regular.

El costo de producción unitario por cada mes es de **105.00, 113.00, 99.00, 126.00, 119.00 y 93.00 respectivamente**. El tiempo extra tiene un costo de 40 % más que el costo normal en ese periodo por unidad producida.

La empresa permite inventariar producto que puede ser utilizado para satisfacer una demanda posterior con un costo de almacenamiento de **5 por unidad/mes**.

Objetivo

Formular un modelo de producción que permita a la empresa cumplir con la demanda de cada mes minimizando los costos incurridos en el cumplimiento.

Primera Etapa del Reporte

Incluya los siguientes puntos en formato libre (máximo 8 páginas):

1. **Investigar los métodos más comunes de optimización.**
2. **Investigar los conceptos básicos de la programación lineal.**
3. **Investigar qué es un grafo.**
4. **Desarrollar un grafo que relacione el periodo de producción con el mes de demanda probado en la situación problema.**
5. **Elaborar una tabla de costos, incluidos los costos extras por mes, como una matriz de tamaño 12 × 6.**
6. **Definir las doce restricciones de capacidad para cada periodo (6 para la producción normal y 6 para la producción con tiempo extra).**
7. **Definir las seis restricciones de demanda para cada mes.**
8. **Definir la función objetivo para minimizar los costos de producción.**

Métodos más comunes de Optimización

1. **Programación Lineal (PL)**

La **Programación Lineal (PL)** es una técnica matemática utilizada para optimizar una función lineal (una función cuyo grado es 1) sujeta a un conjunto de restricciones también lineales. El objetivo es encontrar el valor máximo o mínimo de una función objetivo, como el costo o la ganancia, respetando limitaciones en los recursos disponibles.

Características:

- **Función objetivo lineal:** La relación entre las variables es de primer grado (es decir, no tiene potencias, raíces o términos no lineales).
- **Restricciones lineales:** Las restricciones del problema también son expresadas por ecuaciones o desigualdades lineales.

Ejemplo:

Supongamos que una empresa produce dos productos, (P_1) y (P_2). La función objetivo podría ser maximizar la ganancia, dada por:

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$$

donde x_1 y x_2 son las cantidades producidas de P_1 y P_2, respectivamente, y c_1 y c_2 son las ganancias unitarias. Las restricciones podrían ser limitaciones de tiempo de producción o de recursos, como:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \leq b$$

El problema de programación lineal es encontrar los valores de x_1 y x_2 que maximizan Z, cumpliendo con las restricciones.

Método de Resolución:

- El **Método Simplex** es el algoritmo más utilizado para resolver problemas de programación lineal.

---

2. **Programación Entera**

La **Programación Entera** es una extensión de la programación lineal donde las variables de decisión deben tomar valores enteros (números completos), en lugar de ser números reales. Este tipo de optimización es útil cuando las decisiones son discretas, como en problemas de asignación de recursos o de planificación donde no se puede dividir una unidad.

Características:

- **Variables enteras:** Las variables de decisión solo pueden tomar valores enteros.
- **Problemas discretos:** Es útil en situaciones donde se deben tomar decisiones como "sí o no" (por ejemplo, comprar o no comprar), o donde no se puede fraccionar una cantidad (por ejemplo, asignar a personas a tareas específicas).

Ejemplo:

Un ejemplo clásico es el **Problema de la Mochila**, donde se tiene una mochila con una capacidad limitada y un conjunto de objetos con pesos y valores. El objetivo es maximizar el valor total de los objetos seleccionados, pero las decisiones de selección deben ser enteras (se elige el objeto o no).

Métodos de Resolución:

- La **Programación Entera Lineal (ILP)** se resuelve mediante técnicas como el **Método de Ramificación y Poda**, que explora las soluciones posibles de manera sistemática, descartando soluciones subóptimas.

---

3. **Programación Dinámica**

La **Programación Dinámica (PD)** es un enfoque que se utiliza para resolver problemas complejos dividiéndolos en subproblemas más simples y resolviendo cada subproblema una sola vez, almacenando los resultados para evitar cálculos repetidos. Es especialmente útil en problemas donde las decisiones de optimización se pueden tomar de manera secuencial.

Características:

- **Subestructura óptima:** El problema puede descomponerse en subproblemas que se resuelven independientemente y cuyas soluciones se combinan para formar la solución final.
- **Subproblemas solapados:** Se resuelven varias veces problemas similares durante el proceso, por lo que se guardan las soluciones intermedias (usando una tabla o matriz).

Ejemplo:

El **Problema del Viajante de Comercio (TSP)** es un ejemplo clásico donde el objetivo es encontrar la ruta más corta que pase por una serie de ciudades y regrese al punto de inicio. La programación dinámica puede usarse para resolverlo mediante una técnica conocida como **algoritmo de Held-Karp**, que explora todas las rutas posibles y almacena las soluciones parciales.

Métodos de Resolución:

- La programación dinámica suele utilizar una **tabla o matriz** donde se almacenan las soluciones de subproblemas y se usan para construir la solución global.

---

4. **Método de Simplex**

El **Método de Simplex** es un algoritmo utilizado para resolver problemas de programación lineal, especialmente cuando el número de restricciones es mayor que el número de variables. Aunque no garantiza encontrar la solución óptima en todos los casos (debido a que puede no ser eficiente en algunos problemas muy grandes), en la práctica, es uno de los métodos más eficaces y ampliamente utilizados.

Características:

- **Optimización de funciones lineales:** Funciona específicamente para problemas donde la función objetivo y las restricciones son lineales.
- **Movimiento entre vértices de la región factible:** El método avanza de un vértice a otro de la región factible del problema, moviéndose a lo largo de los bordes de un poliedro hasta llegar al óptimo.

Ejemplo:

Imaginemos una empresa que debe decidir la cantidad de dos productos a fabricar, sujeto a restricciones de recursos (tiempo, materiales). El método de Simplex avanzaría de una solución factible a otra mejor, hasta encontrar la óptima, donde la empresa obtiene la mayor ganancia posible sin exceder los recursos disponibles.

Método de Resolución:

- Comienza en una solución básica factible y se mueve iterativamente hacia soluciones mejores utilizando la matriz de coeficientes de las restricciones y la función objetivo. El proceso termina cuando no se puede mejorar más la solución.

---

5. **Heurísticas y Métodos Metaheurísticos**

Las **Heurísticas** son estrategias de solución que buscan encontrar soluciones buenas (aunque no necesariamente óptimas) para problemas complejos, con un coste computacional menor. Los **Métodos Metaheurísticos** son técnicas más avanzadas que intentan superar las limitaciones de las heurísticas tradicionales.

Características:

- **Heurísticas:** Son reglas generales que proporcionan soluciones aproximadas sin garantizar la óptima.
- **Metaheurísticas:** Son algoritmos más sofisticados que exploran de manera más amplia el espacio de soluciones y son capaces de escapar de óptimos locales, buscando óptimos globales.

Ejemplos:

- **Algoritmos Genéticos (GA):** Son una forma de búsqueda evolutiva que simula el proceso de selección natural, con operaciones como selección, cruzamiento y mutación. Son muy útiles para problemas de optimización combinatoria.

- **Optimización por Enjambre de Partículas (PSO):** Es un algoritmo inspirado en el comportamiento de grupos de aves o peces, donde cada "partícula" busca una solución mientras se comunica con otras, ajustando su rumbo hacia mejores soluciones.

- **Recocido Simulado (Simulated Annealing):** Un algoritmo inspirado en el proceso de enfriamiento de un metal, donde se permite aceptar soluciones peores temporalmente para evitar caer en óptimos locales.

Método de Resolución:

- Las heurísticas y metaheurísticas no garantizan encontrar la solución óptima, pero son útiles cuando los problemas son demasiado complejos o grandes para ser resueltos con métodos exactos.

Conclusión

Cada uno de estos métodos de optimización tiene sus propias aplicaciones y ventajas dependiendo de la naturaleza del problema a resolver. Desde problemas lineales simples hasta situaciones complejas con restricciones no lineales o discreta, la elección del algoritmo adecuado es clave para obtener soluciones eficientes y efectivas.

Conceptos básicos de la programación lineal.

1. **Variables de Decisión**

Las **variables de decisión** son los elementos que representan las decisiones que debes tomar en un problema de optimización. En el contexto de la programación lineal, estas variables son las que se ajustan para encontrar la solución óptima.

Ejemplo:

Imagina que una empresa produce dos productos, (P_1) y (P_2). Las variables de decisión podrían ser las cantidades de cada producto a fabricar, es decir, (x_1) (cantidad de P_1) y x_2 (cantidad de P_2).

Las **variables de decisión** podrían ser de diferentes tipos dependiendo del problema:

- **Continuas:** Pueden tomar cualquier valor dentro de un rango (por ejemplo, 10.5 unidades).
- **Enteras:** Sólo pueden tomar valores enteros (por ejemplo, 10 o 11 unidades, pero no 10.5).
- **Binarias:** Sólo pueden tomar dos valores (por ejemplo, 0 o 1, donde 0 puede indicar no fabricar el producto y 1 significa fabricar).

Estas variables son las que se buscan optimizar (maximizar o minimizar) mediante la programación lineal.

---

2. **Función Objetivo**

La **función objetivo** es la fórmula matemática que se quiere maximizar o minimizar en el problema de optimización. En términos simples, es el valor que se quiere optimizar, ya sea un beneficio, una ganancia, un costo, o cualquier otro parámetro relevante para el problema.

Ejemplo:

Siguiendo el ejemplo de la empresa que produce dos productos, supongamos que la ganancia por unidad de P_1 es c_1 y la ganancia por unidad de P_2 es c_2. La **función objetivo** que queremos maximizar sería:

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$$

Donde:

- x_1 y x_2 son las variables de decisión (las cantidades a producir de P_1 y P_2),

- c_1 y c_2 son las ganancias por unidad de P_1 y P_2,

- Z es el valor total de la ganancia que queremos maximizar.

En otros casos, la función objetivo podría ser **minimizar** un costo, como el costo de producción, el consumo de recursos, etc. El proceso de programación lineal busca encontrar los valores de las variables de decisión que maximicen o minimicen esta función.

---

3. **Restricciones**

Las **restricciones** son las limitaciones o condiciones que restringen las posibles soluciones. En un problema de optimización, estas limitaciones suelen estar basadas en recursos disponibles, demandas, o cualquier otra condición relevante.

En la programación lineal, las restricciones se expresan como **ecuaciones** o **desigualdades lineales** que las soluciones deben cumplir.

Ejemplo:

En el caso de la empresa que produce productos, las restricciones podrían ser limitaciones en el tiempo de producción, la disponibilidad de materiales o los recursos humanos. Supongamos que tenemos dos recursos limitados: un **tiempo de máquina** y una **cantidad de material**.

Si a_1 es la cantidad de tiempo requerido para producir una unidad de P_1, y a_2 es la cantidad de material requerido para producir una unidad de P_1, entonces una posible restricción de tiempo y material podría ser:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \leq \text{Capacidad de tiempo disponible}$$

Y para el material, supongamos que b_1 y b_2 son las cantidades de material requeridas para P_1 y P_2, respectivamente, y la capacidad de material es limitada:

$$b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 \leq \text{Cantidad total de material disponible}$$

Las restricciones aseguran que las soluciones posibles sean **viables** dentro de las limitaciones del problema.

---

4. **Solución Factible**

Una **solución factible** es cualquier combinación de valores de las variables de decisión que satisface todas las restricciones del problema, pero no necesariamente optimiza la función objetivo.

Ejemplo:

Siguiendo con el ejemplo anterior, una **solución factible** sería una combinación de x_1 y x_2 (cantidades de productos a fabricar) que cumple con las restricciones de tiempo y material. Si, por ejemplo, (x_1 = 10) y (x_2 = 15) son valores que cumplen con las restricciones de recursos, entonces $(x_1, x_2) = (10, 15)$ es una **solución factible**.

No todas las soluciones factibles necesariamente maximizan o minimizan la función objetivo, pero cumplen con las limitaciones del problema.

---

5. **Solución Óptima**

Una **solución óptima** es la mejor solución dentro del conjunto de soluciones factibles. Es la solución que maximiza o minimiza la función objetivo, dependiendo de si el problema es de maximización o minimización.

Ejemplo:

Siguiendo con el ejemplo de la empresa, la **solución óptima** sería aquella combinación de x_1 y x_2 que no solo cumple con las restricciones de tiempo y material, sino que también maximiza la función objetivo de ganancia:

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$$

Es posible que haya varias soluciones factibles, pero solo una de ellas proporcionará el valor máximo (o mínimo) de la función objetivo, y esa será la **solución óptima**.

En resumen, la **solución óptima** es la que ofrece el mejor valor para el objetivo (ya sea maximizar ganancias o minimizar costos) dentro del conjunto de soluciones factibles.

Resumen de los Conceptos:

- **Variables de decisión:** Son las decisiones a tomar en el problema (por ejemplo, cuántas unidades producir).
- **Función objetivo:** Es la fórmula matemática que queremos maximizar o minimizar (por ejemplo, ganancia, costo, etc.).
- **Restricciones:** Son las limitaciones o condiciones que deben cumplirse (por ejemplo, limitación de recursos).
- **Solución factible:** Es cualquier conjunto de valores de las variables de decisión que cumplen con todas las restricciones.
- **Solución óptima:** Es la mejor solución factible, es decir, la que maximiza o minimiza la función objetivo.

Estos conceptos son los pilares de cualquier problema de **programación lineal**, y entenderlos bien es crucial para resolver estos problemas de optimización de manera efectiva.

Que es un Grafo

Un **grafo** es una estructura matemática que se utiliza para modelar relaciones entre objetos o entidades. En términos simples, un grafo se compone de **vértices** (también llamados **nodos**) y **aristas** (o **enlaces**) que conectan a estos vértices. A continuación, te explico en detalle cada uno de estos componentes y su aplicación en un problema práctico, como el de conectar **periodos de producción** con **meses de demanda**.

Componentes de un Grafo

1. **Vértices (o Nodos):**

   Los **vértices** representan las **entidades** o los **objetos** en el sistema que se modela con el grafo. En el contexto de un grafo, cada vértice puede representar algo concreto o abstracto dependiendo del problema que estamos resolviendo.

   ### Ejemplo:

   En el caso de un problema de **producción y demanda**, los **vértices** podrían representar:

- **Periodos de producción:** Un nodo podría representar un periodo de tiempo en el cual se realiza la producción, por ejemplo, **mes 1**, **mes 2**, etc.
- **Meses de demanda:** Los vértices también podrían representar **meses de demanda** o los **números de unidades solicitadas** en cada mes.

2. **Aristas (o Enlaces):**

   Las **aristas** son las conexiones o **relaciones** entre los vértices. Una arista conecta dos nodos y representa cómo están relacionados o cómo influye uno en el otro. En muchos problemas, las aristas tienen un **peso** o un **valor asociado**, que puede ser un costo, una capacidad, un tiempo de transición, o cualquier otra medida relevante para el problema.

   ### Ejemplo:

   En el problema de producción y demanda, las **aristas** podrían representar los **flujos de unidades** producidas en un determinado periodo de producción y enviadas a un mes específico de demanda.

   Si tenemos un periodo de producción (P_1) (mes 1) y un mes de demanda (D_1) (mes de enero), la arista entre estos dos vértices representaría las unidades producidas durante P_1 y que van a satisfacer la demanda en D_1.

Tipos de Grafos

Dependiendo del tipo de relaciones que se deseen modelar, los grafos pueden tener ciertas características:

- **Grafo dirigido (o digrafo):** En un grafo dirigido, las aristas tienen una **dirección**, es decir, las relaciones entre los vértices son unidireccionales. Por ejemplo, si un nodo A está conectado a un nodo B, la arista indica que existe una relación desde A hacia B, pero no necesariamente desde B hacia$A$.

- **Grafo no dirigido:** En un grafo no dirigido, las aristas no tienen una dirección específica, lo que indica que las relaciones entre los vértices son bidireccionales.

- **Grafo ponderado:** En un grafo ponderado, cada arista tiene un **peso** asociado. Este peso puede representar un costo, tiempo, capacidad de flujo, etc.

Ejemplo de Grafo Dirigido y Ponderado:

Supón que tenemos tres nodos:

- P_1: Periodo de producción 1
- P_2: Periodo de producción 2
- D_1: Demanda de unidades en el mes 1 (enero)

Y dos aristas:

- La arista de P_1 a D_1 indica que de P_1 se envían 50 unidades a satisfacer la demanda de D_1.
- La arista de P_2 a D_1 indica que de P_2 se envían 30 unidades a D_1.

Aquí, el grafo sería **dirigido** porque las unidades se mueven de un periodo de producción a un mes de demanda, y **ponderado** porque el número de unidades (50 y 30) representa el peso de las aristas.

Aplicación en el Problema de Producción y Demanda

Ahora que entendemos los componentes básicos de un grafo, veamos cómo se aplica en un **problema de producción y demanda**.

Supón que tienes varios periodos de producción (por ejemplo, los meses 1, 2, y 3) y varios meses de demanda (por ejemplo, enero, febrero y marzo). El objetivo es determinar cuántas unidades producir en cada periodo para satisfacer la demanda de cada mes, optimizando ciertos parámetros (como minimizar el costo de producción o maximizar la eficiencia).

Modelo de Grafo:

1. **Vértices:**
   - Los **nodos de producción** representan los **meses de producción**.
   - Los **nodos de demanda** representan los **meses de demanda**.
2. **Aristas:**
   - Las **aristas dirigidas** entre los nodos de producción y los nodos de demanda representan los **flujos de unidades producidas**.
   - El **peso de las aristas** podría ser el número de unidades de un producto que se producen en un mes de producción y se destinan a un mes de demanda.
3. **Objetivo:** El objetivo es **optimizar el flujo de unidades** desde los periodos de producción a los meses de demanda, asegurándose de que las demandas mensuales sean cubiertas mientras se minimizan los costos de producción o se maximizan los beneficios.

Ejemplo de Flujo en el Grafo:

Supongamos que tenemos los siguientes nodos:

- Periodos de producción: P_1 (enero), P_2 (febrero), P_3 (marzo).
- Meses de demanda: D_1 (enero), D_2 (febrero), D_3 (marzo).

Y los flujos de unidades entre los periodos de producción y los meses de demanda están representados por las aristas:

- $P_1 \rightarrow D_1$: 50 unidades.
- $P_2 \rightarrow D_2$: 30 unidades.
- $P_3 \rightarrow D_3$: 40 unidades.

Este grafo muestra cómo las unidades de producción fluyen de un periodo de producción a un mes de demanda específico.

Conclusión

Un **grafo** es una herramienta muy útil para modelar problemas en los que hay relaciones entre diferentes entidades (como la producción y la demanda). Al representar los **periodos de producción** como vértices y las **relaciones de flujo de unidades** como aristas, puedes visualizar y resolver problemas complejos de asignación de recursos, optimización de flujos, o distribución de productos de manera eficiente. El uso de grafos en estos problemas es fundamental para encontrar soluciones óptimas que maximicen beneficios o minimicen costos.

Grafo para Relacionar Periodos de Producción con Meses de Demanda

El siguiente grafo relaciona la capacidad de producción en un periodo con la demanda correspondiente. Las aristas indican posibles flujos de unidades producidas, permitiendo tiempo extra o almacenamiento:

1. Nodos de producción: $P_1, P_2, \ldots, P_6$
2. Nodos de demanda: $D_1, D_2, \ldots, D_6$

Cada nodo P_i está conectado a su nodo D_i, y las aristas tienen pesos asociados al costo de producción o tiempo extra.

In [31]:

```python
# Crear un grafo con nodos bien separados
grafo = nx.DiGraph()

# Nodos de producción y demanda
nodos_produccion = [f"P{t}" for t in range(1, 7)]
nodos_demanda = [f"D{t}" for t in range(1, 7)]

# Cantidades de producción regular y demanda
produccion_regular = [220, 300, 220, 350, 290, 230]
demanda = [250, 280, 300, 270, 270, 320]

# Agregar nodos al grafo
grafo.add_nodes_from(nodos_produccion, layer=0)
grafo.add_nodes_from(nodos_demanda, layer=1)

# Agregar aristas con las cantidades
for t in range(6):
    grafo.add_edge(nodos_produccion[t], nodos_demanda[t], weight=f"Prod: {produccion_regular[t]}, Dem: {demanda[t]}")
    for j in range(t + 1, 6):
        grafo.add_edge(nodos_produccion[t], nodos_demanda[j], weight="Inventario")

# Crear posiciones para los nodos: producción a la izquierda y demanda a la derecha
pos = {}
for i, nodo in enumerate(nodos_produccion):
    pos[nodo] = (-1, 5 - i)  # Nodos de producción a la izquierda
for i, nodo in enumerate(nodos_demanda):
    pos[nodo] = (0.1, 5 - i)  # Nodos de demanda a la derecha

# Dibujar el grafo
plt.figure(figsize=(14, 10))
nx.draw(
    grafo,
    pos,
    with_labels=True,
    node_size=2000,
    node_color="skyblue",
    font_size=10,
    font_weight="bold",
    arrowsize=15,
)

# Añadir etiquetas de las cantidades en las aristas
edge_labels = nx.get_edge_attributes(grafo, "weight")
nx.draw_networkx_edge_labels(
    grafo,
    pos,
    edge_labels=edge_labels,
    font_size=8,
    label_pos=0.1,
    font_color="red",
)

plt.title("Grafo que relaciona la producción y la demanda")
plt.show()
```

Grafo que relaciona la producción y la demanda

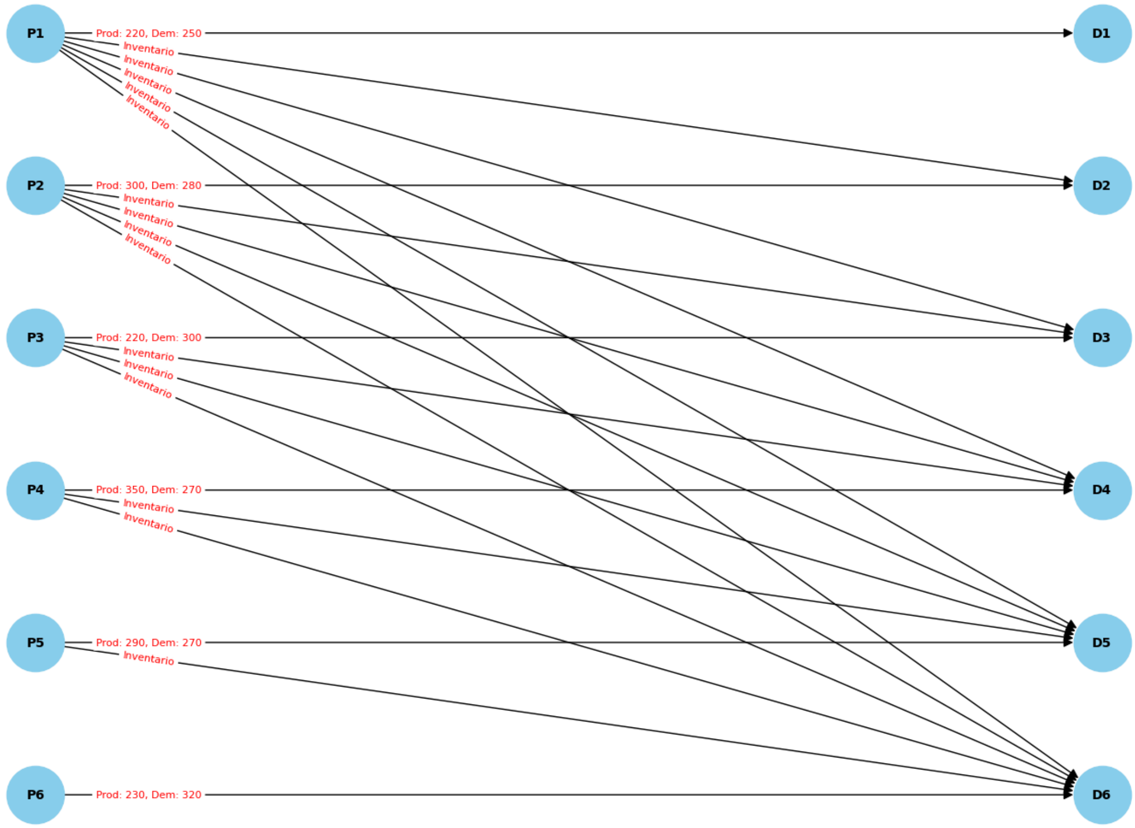

Tabla de Costos (Matriz)

Cada columna representa un mes de demanda, y cada fila un tipo de producción (normal o extra) en ese mes.

Mes	Normal ($/unidad)	Extra ($/unidad)	Capacidad Regular	Capacidad Extra	Almacenamiento ($/unidad)
1	105.00	147.00	220	110	5
2	113.00	158.20	300	150	5
3	99.00	138.60	220	110	5
4	126.00	176.40	350	175	5
5	119.00	166.60	290	145	5
6	93.00	130.20	230	115	5

Restricciones de Capacidad

Producción Normal (x_i):

1. $(x_1 \leq 220$
2. $x_2 \leq 300$
3. $x_3 \leq 220$
4. $x_4 \leq 350$
5. $x_5 \leq 290$
6. $x_6 \leq 230$

Producción Extra (y_i):

7. $y_1 \leq 110$
8. $y_2 \leq 150$

9. $y_3 \leq 110$
10. $y_4 \leq 175$
11. $y_5 \leq 145$
12. $y_6 \leq 115$

Restricciones de Demanda para cada mes

1. $x_1 + y_1 + i_0 - i_1 = 250$
2. $x_2 + y_2 + i_1 - i_2 = 280$
3. $x_3 + y_3 + i_2 - i_3 = 300$
4. $x_4 + y_4 + i_3 - i_4 = 270$
5. $x_5 + y_5 + i_4 - i_5 = 270$
6. $x_6 + y_6 + i_5 = 320$

Donde i_k representa el inventario al final del mes k.

Función Objetivo

Minimizar el costo total, compuesto por:

- Producción normal: $\sum_{i=1}^{6} c_i x_i$
- Producción extra:$\sum_{i=1}^{6} (c_i \times 1.4) y_i$
- Almacenamiento: $\sum_{i=1}^{5} 5 i_i$

Función objetivo:

$$\text{Minimizar: } Z = \sum_{i=1}^{6} c_i x_i + \sum_{i=1}^{6} (c_i \times 1.4) y_i + \sum_{i=1}^{5} 5 i_i$$

Donde:

- c_i: Costo normal de producción en el mes i.
- x_i: Producción normal en el mes$i$.
- y_i: Producción extra en el mes i.
- i_i: Inventario final en el mes i.

Referencias

Taha, H. A. (2011). *Investigación de operaciones*. México: Pearson Educación.

Sandblom, C., & Eiselt, H. A. (2010). *Operations Research: A Model-Based Approach*. Germany: Springer Berlin Heidelberg.

URL al repositorio de codigo de este documento (Github) : https://github.com/mirossy29/Maestria/blob/main/Matematicas/MiroslavaSandria-TAREA-8-Optimizacion.ipynb