INFOTEC - MCDI

Matemáticas para la Ciencia de Datos

Profesor: Dra. Briceyda B. Delgado López

Alumno: Miroslava Sandria Yong

Tarea 9. Optimización.

Abstracto

Este trabajo aborda la optimización de la producción y satisfacción de la demanda de solenoides para una empresa ubicada en Monterrey, con el objetivo de minimizar los costos totales de producción. El problema considera restricciones de capacidad de producción regular, tiempo extra, y demanda mensual durante un horizonte de 6 meses. Se formula un modelo matemático para determinar la asignación óptima de recursos de producción y satisfacer las restricciones operativas.

Contexto del Problema

- La **producción regular** tiene una capacidad limitada en cada periodo y costos específicos.
- El **tiempo extra** tiene una capacidad adicional equivalente al 50% de la capacidad regular, pero con un costo 40% mayor.
- Cada mes tiene una **demanda fija**, la cual debe ser satisfecha, y no es posible posponer la satisfacción de la demanda de un mes a un mes posterior.

Componentes del Modelo

1. Variables de decisión

-x_{ij}: Cantidad de unidades producidas regularmente en el mes i para satisfacer la demanda del mes j.

- y_{ij}: Cantidad de unidades producidas en tiempo extra en el mes i para satisfacer la demanda del mes j.

2. Restricciones

- **Restricciones de capacidad regular**: Cada mes i tiene un límite de producción regular c_i.
- **Restricciones de capacidad extra**: Cada mes i tiene un límite de producción extra $c'_i = 0.5 \cdot c_i$.
- **Restricciones de demanda**: Cada mes j debe satisfacer al menos su demanda fija, con unidades provenientes de la producción regular y extra de cualquier mes i anterior o el mismo.

3. Función objetivo

La función objetivo minimiza los costos totales de producción regular y extra:

$$Z = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \left(c_{ij} x_{ij} + c'_{ij} y_{ij} \right)$$

Donde: -c_{ij}: Costo unitario de producción regular en el mes i.

- $c'_{ij} = 1.4 \cdot c_{ij}$: Costo unitario de producción extra en el mes i.

Análisis del Modelo

1. **Capacidades de Producción:**
   - La capacidad regular varía mensualmente $(220 \leq c_i \leq 350)$.
   - La capacidad extra es calculada como 50% de la capacidad regular $(110 \leq c'_i \leq 175)$.
2. **Costos:**
   - La producción regular tiene costos unitarios específicos que fluctúan entre (93) y (126) según el mes.
   - La producción extra tiene un costo 40% mayor al de la producción regular, calculado como $1.4 \cdot c_{ij}$.
3. **Demanda Mensual:**
   - La demanda mensual varía entre 250 y 320 unidades y debe ser satisfecha puntualmente.

Resultados Esperados

El modelo matemático y el grafo diseñado para representar las relaciones entre producción regular, producción extra, y la demanda permiten:

1. Minimizar los costos totales de producción.
2. Asegurar la satisfacción de la demanda mensual sin violar las restricciones de capacidad.
3. Proporcionar una herramienta visual y analítica para tomar decisiones óptimas de asignación de recursos.

Este trabajo combina técnicas de optimización, modelado matemático, y visualización gráfica para resolver un problema industrial relevante. El enfoque propuesto garantiza una planificación eficiente de la producción y permite a la empresa minimizar costos mientras cumple con la demanda mensual de manera oportuna.

Introducción

En el contexto de la competitividad industrial de Monterrey, donde predominan empresas que enfrentan altas demandas de productos especializados, resulta esencial la implementación de estrategias óptimas de producción que permitan minimizar costos sin comprometer el cumplimiento de la demanda. Este trabajo aborda la problemática de una empresa dedicada a la fabricación de solenoides, la cual enfrenta restricciones de capacidad de producción regular, costos elevados asociados al tiempo extra, y la obligación de satisfacer la demanda mensual de manera inmediata.

El desafío radica en desarrollar un modelo matemático que permita una asignación eficiente de los recursos productivos, considerando costos de producción regulares y de tiempo extra, así como la demanda mensual establecida. La capacidad de producción regular varía mensualmente, al igual que los costos asociados, mientras que el tiempo extra proporciona una capacidad adicional equivalente al 50% de la capacidad regular, pero con un costo 40% mayor. La demanda debe satisfacerse en el mismo mes, lo que añade una restricción crítica al modelo.

En este trabajo se construye un modelo de programación lineal que minimiza los costos totales de producción al balancear la utilización de recursos regulares y de tiempo extra. Este modelo considera variables de decisión para representar la producción regular (x_{ij}) y la producción en tiempo extra (y_{ij}), sujetas a restricciones de capacidad y demanda. Adicionalmente, se emplea un grafo para representar visualmente las relaciones entre producción, tiempo extra y demanda, proporcionando claridad sobre las interacciones y las restricciones.

El desarrollo de este modelo y su representación gráfica permite a la empresa tomar decisiones fundamentadas que optimicen la planificación de su producción, reduciendo costos y cumpliendo con las exigencias del mercado. Este enfoque es aplicable no solo al caso particular de los solenoides, sino también a cualquier industria que enfrente restricciones similares de capacidad, costos variables y demandas estrictas.

Estado del Arte

La optimización de la producción y el manejo de la demanda son áreas de interés central en la investigación operativa, especialmente en contextos industriales con restricciones de capacidad y costos variables. Este trabajo se enmarca en tres áreas clave: la programación lineal como herramienta de optimización, la planificación de la producción en entornos con limitaciones, y la representación visual de problemas mediante grafos.

Programación Lineal (PL)

La programación lineal es una de las técnicas más utilizadas para la optimización en problemas industriales. Fue formalizada por **George Dantzig** en 1947 con el desarrollo del método Simplex, y desde entonces se ha aplicado ampliamente para resolver problemas de asignación, transporte y producción.

La **función objetivo** en PL busca maximizar o minimizar una cantidad (como costos o beneficios) sujeta a restricciones lineales. La aplicabilidad de la PL a problemas de producción radica en que permite modelar variables como capacidad, costos y demanda como ecuaciones lineales, lo que garantiza soluciones óptimas bajo condiciones bien definidas.

Planificación de la Producción

La planificación de la producción es un problema central en operaciones industriales, y diversos estudios se han enfocado en optimizar la asignación de recursos productivos. Algunos enfoques destacados incluyen:

- **Producción regular y tiempo extra**: Los modelos mixtos de producción regular y extra han sido estudiados para industrias con picos de demanda. Según **Chopra y Meindl (2001)**, el tiempo extra es una estrategia efectiva para manejar variaciones de corto plazo, pero debe integrarse cuidadosamente debido a los costos elevados que implica.
- **Restricciones de capacidad**: La capacidad limitada es una de las principales restricciones en modelos de optimización de producción. Estudios como los de **Silver, Pyke, y Peterson (1998)** proponen estrategias para ajustar los niveles de capacidad y satisfacer la demanda mediante combinaciones de producción regular, inventarios y tiempo extra.
- **Minimización de costos totales**: Los costos de producción, almacenamiento, y penalización por no satisfacer la demanda son objetivos recurrentes en modelos de optimización. El trabajo de **Vollmann et al. (2004)** detalla cómo minimizar estos costos en cadenas de suministro con múltiples restricciones.

Grafos y Representación Visual

Los grafos han sido ampliamente utilizados como herramientas de modelado y visualización en problemas de optimización. Un **grafo dirigido** es ideal para representar relaciones entre producción, demanda y restricciones temporales, donde los nodos representan etapas (producción o demanda) y las aristas modelan flujos o interacciones.

- **Redes de flujo**: Modelos de redes de flujo como los de **Ford y Fulkerson (1962)** son aplicados en problemas de transporte y asignación, y tienen un paralelismo directo con los problemas de producción y demanda.
- **Sistemas visuales para planificación**: La representación gráfica de problemas de planificación facilita la comprensión de las restricciones y la interacción de variables. Herramientas como redes PERT/CPM son ejemplos de cómo los grafos simplifican problemas complejos.

Aplicaciones en Industrias

La optimización de la producción mediante modelos matemáticos y visualización gráfica ha encontrado aplicaciones en diversas industrias:

1. **Manufactura Automotriz**: Uso de modelos para manejar la producción regular y horas extra, especialmente en líneas de ensamblaje con demandas variables.
2. **Energía**: Planificación de la generación eléctrica donde se integran costos de operación regulares y costos elevados de plantas de respaldo.
3. **Alimentaria**: Optimización de la producción en entornos con picos de demanda estacionales.

Conclusión

El estado del arte muestra que la combinación de modelos matemáticos de optimización, planificación de la producción y herramientas gráficas como grafos proporciona un marco robusto para resolver problemas complejos de producción. Este trabajo se apoya en estos conceptos para desarrollar un modelo adaptado a las necesidades específicas de una empresa productora de solenoides, integrando las mejores prácticas y enfoques establecidos en la literatura para lograr una solución óptima.

Métodos más comunes de Optimización

La **Programación Lineal (PL)** es una técnica matemática utilizada para optimizar una función lineal (una función cuyo grado es 1) sujeta a un conjunto de restricciones también lineales. El objetivo es encontrar el valor máximo o mínimo de una función objetivo, como el costo o la ganancia, respetando limitaciones en los recursos disponibles.

Características:

- **Función objetivo lineal:** La relación entre las variables es de primer grado (es decir, no tiene potencias, raíces o términos no lineales).
- **Restricciones lineales:** Las restricciones del problema también son expresadas por ecuaciones o desigualdades lineales.

Ejemplo:

Supongamos que una empresa produce dos productos, (P_1) y (P_2). La función objetivo podría ser maximizar la ganancia, dada por:

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$$

donde x_1 y x_2 son las cantidades producidas de P_1 y P_2, respectivamente, y c_1 y c_2 son las ganancias unitarias. Las restricciones podrían ser limitaciones de tiempo de producción o de recursos, como:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \leq b$$

El problema de programación lineal es encontrar los valores de x_1 y x_2 que maximizan Z, cumpliendo con las restricciones.

Método de Resolución:

- El **Método Simplex** es el algoritmo más utilizado para resolver problemas de programación lineal.

La **Programación Entera** es una extensión de la programación lineal donde las variables de decisión deben tomar valores enteros (números completos), en lugar de ser números reales. Este tipo de optimización es útil cuando las decisiones son discretas, como en problemas de asignación de recursos o de planificación donde no se puede dividir una unidad.

Características:

- **Variables enteras:** Las variables de decisión solo pueden tomar valores enteros.
- **Problemas discretos:** Es útil en situaciones donde se deben tomar decisiones como "sí o no" (por ejemplo, comprar o no comprar), o donde no se puede fraccionar una cantidad (por ejemplo, asignar a personas a tareas específicas).

Ejemplo:

Un ejemplo clásico es el **Problema de la Mochila**, donde se tiene una mochila con una capacidad limitada y un conjunto de objetos con pesos y valores. El objetivo es maximizar el valor total de los objetos seleccionados, pero las decisiones de selección deben ser enteras (se elige el objeto o no).

Métodos de Resolución:

- La **Programación Entera Lineal (ILP)** se resuelve mediante técnicas como el **Método de Ramificación y Poda**, que explora las soluciones posibles de manera sistemática, descartando soluciones subóptimas.

La **Programación Dinámica (PD)** es un enfoque que se utiliza para resolver problemas complejos dividiéndolos en subproblemas más simples y resolviendo cada subproblema una sola vez, almacenando los resultados para evitar cálculos repetidos. Es especialmente útil en problemas donde las decisiones de optimización se pueden tomar de manera secuencial.

Características:

- **Subestructura óptima:** El problema puede descomponerse en subproblemas que se resuelven independientemente y cuyas soluciones se combinan para formar la solución final.
- **Subproblemas solapados:** Se resuelven varias veces problemas similares durante el proceso, por lo que se guardan las soluciones intermedias (usando una tabla o matriz).

Ejemplo:

El **Problema del Viajante de Comercio (TSP)** es un ejemplo clásico donde el objetivo es encontrar la ruta más corta que pase por una serie de ciudades y regrese al punto de inicio. La programación dinámica puede usarse para resolverlo mediante una técnica conocida como **algoritmo de Held-Karp**, que explora todas las rutas posibles y almacena las soluciones parciales.

Métodos de Resolución:

- La programación dinámica suele utilizar una **tabla o matriz** donde se almacenan las soluciones de subproblemas y se usan para construir la solución global.

El **Método de Simplex** es un algoritmo utilizado para resolver problemas de programación lineal, especialmente cuando el número de restricciones es mayor que el número de variables. Aunque no garantiza encontrar la solución óptima en todos los casos (debido a que puede no ser eficiente en algunos problemas muy grandes), en la práctica, es uno de los métodos más eficaces y ampliamente utilizados.

Características:

- **Optimización de funciones lineales:** Funciona específicamente para problemas donde la función objetivo y las restricciones son lineales.
- **Movimiento entre vértices de la región factible:** El método avanza de un vértice a otro de la región factible del problema, moviéndose a lo largo de los bordes de un poliedro hasta llegar al óptimo.

Ejemplo:

Imaginemos una empresa que debe decidir la cantidad de dos productos a fabricar, sujeto a restricciones de recursos (tiempo, materiales). El método de Simplex avanzaría de una solución factible a otra mejor, hasta encontrar la óptima, donde la empresa obtiene la mayor ganancia posible sin exceder los recursos disponibles.

Método de Resolución:

- Comienza en una solución básica factible y se mueve iterativamente hacia soluciones mejores utilizando la matriz de coeficientes de las restricciones y la función objetivo. El proceso termina cuando no se puede mejorar más la solución.

Las **Heurísticas** son estrategias de solución que buscan encontrar soluciones buenas (aunque no necesariamente óptimas) para problemas complejos, con un coste computacional menor. Los **Métodos Metaheurísticos** son técnicas más avanzadas que intentan superar las limitaciones de las heurísticas tradicionales.

Características:

- **Heurísticas:** Son reglas generales que proporcionan soluciones aproximadas sin garantizar la óptima.
- **Metaheurísticas:** Son algoritmos más sofisticados que exploran de manera más amplia el espacio de soluciones y son capaces de escapar de óptimos locales, buscando óptimos globales.

Ejemplos:

- **Algoritmos Genéticos (GA):** Son una forma de búsqueda evolutiva que simula el proceso de selección natural, con operaciones como selección, cruzamiento y mutación. Son muy útiles para problemas de optimización combinatoria.

- **Optimización por Enjambre de Partículas (PSO):** Es un algoritmo inspirado en el comportamiento de grupos de aves o peces, donde cada "partícula" busca una solución mientras se comunica con otras, ajustando su rumbo hacia mejores soluciones.

- **Recocido Simulado (Simulated Annealing):** Un algoritmo inspirado en el proceso de enfriamiento de un metal, donde se permite aceptar soluciones peores temporalmente para evitar caer en óptimos locales.

Método de Resolución:

- Las heurísticas y metaheurísticas no garantizan encontrar la solución óptima, pero son útiles cuando los problemas son demasiado complejos o grandes para ser resueltos con métodos exactos.

Conclusión

Cada uno de estos métodos de optimización tiene sus propias aplicaciones y ventajas dependiendo de la naturaleza del problema a resolver. Desde problemas lineales simples hasta situaciones complejas con restricciones no lineales o discreta, la elección del algoritmo adecuado es clave para obtener soluciones eficientes y efectivas.

Conceptos básicos de la programación lineal.

Las **variables de decisión** son los elementos que representan las decisiones que debes tomar en un problema de optimización. En el contexto de la programación lineal, estas variables son las que se ajustan para encontrar la solución óptima.

Ejemplo:

Imagina que una empresa produce dos productos, (P_1) y (P_2). Las variables de decisión podrían ser las cantidades de cada producto a fabricar, es decir, (x_1) (cantidad de P_1) y x_2 (cantidad de P_2).

Las **variables de decisión** podrían ser de diferentes tipos dependiendo del problema:

- **Continuas:** Pueden tomar cualquier valor dentro de un rango (por ejemplo, 10.5 unidades).
- **Enteras:** Sólo pueden tomar valores enteros (por ejemplo, 10 o 11 unidades, pero no 10.5).
- **Binarias:** Sólo pueden tomar dos valores (por ejemplo, 0 o 1, donde 0 puede indicar no fabricar el producto y 1 significa fabricar).

Estas variables son las que se buscan optimizar (maximizar o minimizar) mediante la programación lineal.

La **función objetivo** es la fórmula matemática que se quiere maximizar o minimizar en el problema de optimización. En términos simples, es el valor que se quiere optimizar, ya sea un beneficio, una ganancia, un costo, o cualquier otro parámetro relevante para el problema.

Ejemplo:

Siguiendo el ejemplo de la empresa que produce dos productos, supongamos que la ganancia por unidad de P_1 es c_1 y la ganancia por unidad de P_2 es c_2. La **función objetivo** que queremos maximizar sería:

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$$

Donde:

- x_1 y x_2 son las variables de decisión (las cantidades a producir de P_1 y P_2),
- c_1 y c_2 son las ganancias por unidad de P_1 y P_2,
- Z es el valor total de la ganancia que queremos maximizar.

En otros casos, la función objetivo podría ser **minimizar** un costo, como el costo de producción, el consumo de recursos, etc. El proceso de programación lineal busca encontrar los valores de las variables de decisión que maximicen o minimicen esta función.

Las **restricciones** son las limitaciones o condiciones que restringen las posibles soluciones. En un problema de optimización, estas limitaciones suelen estar basadas en recursos disponibles, demandas, o cualquier otra condición relevante.

En la programación lineal, las restricciones se expresan como **ecuaciones** o **desigualdades lineales** que las soluciones deben cumplir.

Ejemplo:

En el caso de la empresa que produce productos, las restricciones podrían ser limitaciones en el tiempo de producción, la disponibilidad de materiales o los recursos humanos. Supongamos que tenemos dos recursos limitados: un **tiempo de máquina** y una **cantidad de material**.

Si a_1 es la cantidad de tiempo requerido para producir una unidad de P_1, y a_2 es la cantidad de material requerido para producir una unidad de P_1, entonces una posible restricción de tiempo y material podría ser:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 \leq \text{Capacidad de tiempo disponible}$$

Y para el material, supongamos que b_1 y b_2 son las cantidades de material requeridas para P_1 y P_2, respectivamente, y la capacidad de material es limitada:

$$b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 \leq \text{Cantidad total de material disponible}$$

Las restricciones aseguran que las soluciones posibles sean **viables** dentro de las limitaciones del problema.

Una **solución factible** es cualquier combinación de valores de las variables de decisión que satisface todas las restricciones del problema, pero no necesariamente optimiza la función objetivo.

Ejemplo:

Siguiendo con el ejemplo anterior, una **solución factible** sería una combinación de x_1 y x_2 (cantidades de productos a fabricar) que cumple con las restricciones de tiempo y material. Si, por ejemplo, (x_1 = 10) y (x_2 = 15) son valores que cumplen con las restricciones de recursos, entonces $(x_1, x_2) = (10, 15)$ es una **solución factible**.

No todas las soluciones factibles necesariamente maximizan o minimizan la función objetivo, pero cumplen con las limitaciones del problema.

Una **solución óptima** es la mejor solución dentro del conjunto de soluciones factibles. Es la solución que maximiza o minimiza la función objetivo, dependiendo de si el problema es de maximización o minimización.

Ejemplo:

Siguiendo con el ejemplo de la empresa, la **solución óptima** sería aquella combinación de x_1 y x_2 que no solo cumple con las restricciones de tiempo y material, sino que también maximiza la función objetivo de ganancia:

$$Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2$$

Es posible que haya varias soluciones factibles, pero solo una de ellas proporcionará el valor máximo (o mínimo) de la función objetivo, y esa será la **solución óptima**.

En resumen, la **solución óptima** es la que ofrece el mejor valor para el objetivo (ya sea maximizar ganancias o minimizar costos) dentro del conjunto de soluciones factibles.

Resumen de los Conceptos:

- **Variables de decisión:** Son las decisiones a tomar en el problema (por ejemplo, cuántas unidades producir).
- **Función objetivo:** Es la fórmula matemática que queremos maximizar o minimizar (por ejemplo, ganancia, costo, etc.).
- **Restricciones:** Son las limitaciones o condiciones que deben cumplirse (por ejemplo, limitación de recursos).
- **Solución factible:** Es cualquier conjunto de valores de las variables de decisión que cumplen con todas las restricciones.
- **Solución óptima:** Es la mejor solución factible, es decir, la que maximiza o minimiza la función objetivo.

Estos conceptos son los pilares de cualquier problema de **programación lineal**, y entenderlos bien es crucial para resolver estos problemas de optimización de manera efectiva.

Que es un Grafo

Un **grafo** es una estructura matemática que se utiliza para modelar relaciones entre objetos o entidades. En términos simples, un grafo se compone de **vértices** (también llamados **nodos**) y **aristas** (o **enlaces**) que conectan a estos vértices. A continuación, te explico en detalle cada uno de estos componentes y su aplicación en un problema práctico, como el de conectar **periodos de producción** con **meses de demanda**.

Componentes de un Grafo

1. **Vértices (o Nodos):**

   Los **vértices** representan las **entidades** o los **objetos** en el sistema que se modela con el grafo. En el contexto de un grafo, cada vértice puede representar algo concreto o abstracto dependiendo del problema que estamos resolviendo.

   ### Ejemplo:

   En el caso de un problema de **producción y demanda**, los **vértices** podrían representar:

   - **Periodos de producción:** Un nodo podría representar un periodo de tiempo en el cual se realiza la producción, por ejemplo, **mes 1**, **mes 2**, etc.
   - **Meses de demanda:** Los vértices también podrían representar **meses de demanda** o los **números de unidades solicitadas** en cada mes.
2. **Aristas (o Enlaces):**

   Las **aristas** son las conexiones o **relaciones** entre los vértices. Una arista conecta dos nodos y representa cómo están relacionados o cómo influye uno en el otro. En muchos problemas, las aristas tienen un **peso** o un **valor asociado**, que puede ser un costo, una capacidad, un tiempo de transición, o cualquier otra medida relevante para el problema.

   ### Ejemplo:

   En el problema de producción y demanda, las **aristas** podrían representar los **flujos de unidades** producidas en un determinado periodo de producción y enviadas a un mes específico de demanda.

   Si tenemos un periodo de producción (P_1) (mes 1) y un mes de demanda (D_1) (mes de enero), la arista entre estos dos vértices representaría las unidades producidas durante P_1 y que van a satisfacer la demanda en D_1.

Tipos de Grafos

Dependiendo del tipo de relaciones que se deseen modelar, los grafos pueden tener ciertas características:

- **Grafo dirigido (o digrafo):** En un grafo dirigido, las aristas tienen una **dirección**, es decir, las relaciones entre los vértices son unidireccionales. Por ejemplo, si un nodo A está conectado a un nodo B, la arista indica que existe una relación desde A hacia B, pero no necesariamente desde B hacia$A$.

- **Grafo no dirigido:** En un grafo no dirigido, las aristas no tienen una dirección específica, lo que indica que las relaciones entre los vértices son bidireccionales.

- **Grafo ponderado:** En un grafo ponderado, cada arista tiene un **peso** asociado. Este peso puede representar un costo, tiempo, capacidad de flujo, etc.

Ejemplo de Grafo Dirigido y Ponderado:

Supón que tenemos tres nodos:

- P_1: Periodo de producción 1
- P_2: Periodo de producción 2
- D_1: Demanda de unidades en el mes 1 (enero)

Y dos aristas:

- La arista de P_1 a D_1 indica que de P_1 se envían 50 unidades a satisfacer la demanda de D_1.
- La arista de P_2 a D_1 indica que de P_2 se envían 30 unidades a D_1.

Aquí, el grafo sería **dirigido** porque las unidades se mueven de un periodo de producción a un mes de demanda, y **ponderado** porque el número de unidades (50 y 30) representa el peso de las aristas.

Aplicación en el Problema de Producción y Demanda

Ahora que entendemos los componentes básicos de un grafo, veamos cómo se aplica en un **problema de producción y demanda**.

Supón que tienes varios periodos de producción (por ejemplo, los meses 1, 2, y 3) y varios meses de demanda (por ejemplo, enero, febrero y marzo). El objetivo es determinar cuántas unidades producir en cada periodo para satisfacer la demanda de cada mes, optimizando ciertos parámetros (como minimizar el costo de producción o maximizar la eficiencia).

Modelo de Grafo:

1. **Vértices:**

   - Los **nodos de producción** representan los **meses de producción**.
   - Los **nodos de demanda** representan los **meses de demanda**.
2. **Aristas:**

   - Las **aristas dirigidas** entre los nodos de producción y los nodos de demanda representan los **flujos de unidades producidas**.
   - El **peso de las aristas** podría ser el número de unidades de un producto que se producen en un mes de producción y se destinan a un mes de demanda.
3. **Objetivo:** El objetivo es **optimizar el flujo de unidades** desde los periodos de producción a los meses de demanda, asegurándose de que las demandas mensuales sean cubiertas mientras se minimizan los costos de producción o se maximizan los beneficios.

Ejemplo de Flujo en el Grafo:

Supongamos que tenemos los siguientes nodos:

- Periodos de producción: P_1 (enero), P_2 (febrero), P_3 (marzo).
- Meses de demanda: D_1 (enero), D_2 (febrero), D_3 (marzo).

Y los flujos de unidades entre los periodos de producción y los meses de demanda están representados por las aristas:

- $P_1 \to D_1$: 50 unidades.
- $P_2 \to D_2$: 30 unidades.
- $P_3 \to D_3$: 40 unidades.

Este grafo muestra cómo las unidades de producción fluyen de un periodo de producción a un mes de demanda específico.

Conclusión

Un **grafo** es una herramienta muy útil para modelar problemas en los que hay relaciones entre diferentes entidades (como la producción y la demanda). Al representar los **periodos de producción** como vértices y las **relaciones de flujo de unidades** como aristas, puedes visualizar y resolver problemas complejos de asignación de recursos, optimización de flujos, o distribución de productos de manera eficiente. El uso de grafos en estos problemas es fundamental para encontrar soluciones óptimas que maximicen beneficios o minimicen costos.

> ## Datos del Problema
>
> Monterrey, al ser una zona industrial, requiere de diversos proveedores que satisfagan la demanda de ciertos productos. Tal es el caso de una empresa que produce solenoides. Se ha recibido una orden de compra cuya demanda para los próximos seis meses es de **250, 280, 300, 270, 270 y 320 unidades**.
>
> La capacidad de producción de la planta no es capaz de satisfacer la demanda mensual de este solenoide debido a que debe satisfacer a otros clientes, teniendo una capacidad actual de unidades por mes de **220, 300, 220, 350, 290 y 230**.
>
> No se permite satisfacer la demanda de un mes en un periodo posterior al suyo, pero se puede utilizar tiempo extra para satisfacer la demanda inmediata. La capacidad de tiempo extra en cada periodo es la mitad de la capacidad regular. El costo de producción unitario por cada mes es de **105.00, 113.00, 99.00, 126.00, 119.00 y 93.00 respectivamente**. El tiempo extra tiene un costo de **40% más que el costo normal en ese periodo por unidad producida**.
>
> La empresa permite inventariar producto que puede ser utilizado para satisfacer una demanda posterior, con un costo de almacenamiento de **5 por unidad/mes**.
>
> Formule un modelo de producción que permita a la empresa cumplir con la demanda de cada mes minimizando los costos incurridos en el cumplimiento.

Formulación del Modelo de Producción

Variables de Decisión

- x_{ij}: Cantidad de unidades producidas regularmente en el mes i para satisfacer la demanda del mes j.
- y_{ij}: Cantidad de unidades producidas en tiempo extra en el mes i para satisfacer la demanda del mes j.

Parámetros

- c_i: Capacidad de producción regular en el mes i $(220, 300, 220, 350, 290, 230)$.
- c'_i: Capacidad de producción en tiempo extra en el mes i ($c'_i = 0.5 \cdot c_i$).
- d_j: Demanda en el mes j $(250, 280, 300, 270, 270, 320)$.
- p_i: Costo unitario de producción regular en el mes i $(105, 113, 99, 126, 119, 93)$.
- $p'_i = 1.4 \cdot p_i$: Costo unitario de producción en tiempo extra.

- **P1** puede satisfacer la demanda desde **D1 hasta D6**.
- **P2** puede satisfacer la demanda desde **D2 hasta D6**.
- **P3** puede satisfacer la demanda desde **D3 hasta D6**.
- **P4** puede satisfacer la demanda desde **D4 hasta D6**.
- **P5** puede satisfacer la demanda desde **D5 hasta D6**.
- **P6** puede satisfacer únicamente la demanda de **D6**.

Tabla de Costos

Producción / Demanda	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
P_1 (Reg.)	105	105	105	105	105	105
P_1 (Extra)	147	147	147	147	147	147
P_2 (Reg.)	-	113	113	113	113	113
P_2 (Extra)	-	158.2	158.2	158.2	158.2	158.2
P_3 (Reg.)	-	-	99	99	99	99
P_3 (Extra)	-	-	138.6	138.6	138.6	138.6

Producción / Demanda	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6
P_4 (Reg.)	-	-	-	126	126	126
P_4 (Extra)	-	-	-	176.4	176.4	176.4
P_5 (Reg.)	-	-	-	-	119	119
P_5 (Extra)	-	-	-	-	166.6	166.6
P_6 (Reg.)	-	-	-	-	-	93
P_6 (Extra)	-	-	-	-	-	130.2

Descripción:

1. **P1** puede cubrir toda la demanda (**D1 a D6**), con costos regulares de (105) y costos extras de (147).
2. **P2** solo puede cubrir demandas de **D2 a D6**, con costos regulares de (113) y costos extras de (158.2).
3. **P3** comienza en **D3**, con costos regulares de (99) y costos extras de (138.6).
4. **P4** cubre de **D4 a D6**, con costos regulares de (126) y costos extras de (176.4).
5. **P5** cubre solo **D5 a D6**, con costos regulares de (119) y costos extras de (166.6).
6. **P6** cubre únicamente **D6**, con costos regulares de (93) y costos extras de (130.2).

Este modelo asegura que los costos reflejen las restricciones y prioridades correctas para cumplir con la demanda mensual.

Desarrollo del Grafo

Un grafo dirigido representará la relación entre los períodos de producción (P_i) y los meses de demanda (D_j). Cada arista entre P_i y D_j representará las cantidades producidas x_{ij} (producción regular) y y_{ij} (producción extra).

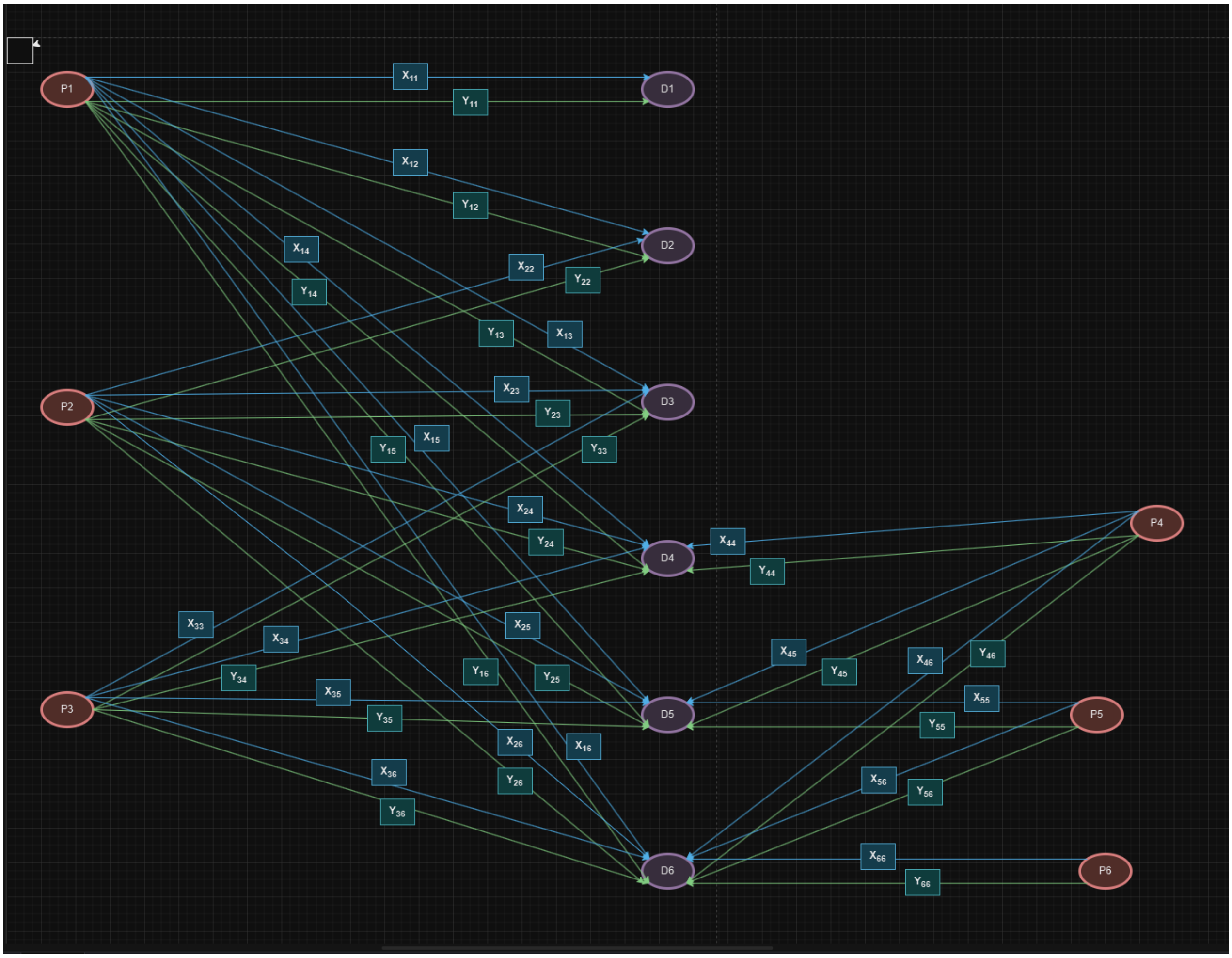
Nodos

- $P_1, P_2, \ldots, P_6$: Períodos de producción.
- $D_1, D_2, \ldots, D_6$: Meses de demanda.

Aristas

- $P_i \to D_j$: Relación entre el período de producción i y el mes de demanda j, donde $j \geq i$.

Se incluirán etiquetas en las aristas para representar los costos de producción regular y extra.



Restricciones de capacidad

Capacidad de Producción Regular:

- $x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{16} \leq 220$ (P1)
- $x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{26} \leq 300$ (P2)
- $x_{31} + x_{32} + \cdots + x_{36} \leq 220$ (P3)
- $x_{41} + x_{42} + \cdots + x_{46} \leq 350$ (P4)
- $x_{51} + x_{52} + \cdots + x_{56} \leq 290$ (P5)
- $x_{61} + x_{62} + \cdots + x_{66} \leq 230$ (P6)

Capacidad de Producción en Tiempo Extra:

- $y_{11} + y_{12} + \cdots + y_{16} \leq 110$ (P1 extra)
- $y_{21} + y_{22} + \cdots + y_{26} \leq 150$ (P2 extra)
- $y_{31} + y_{32} + \cdots + y_{36} \leq 110$ (P3 extra)
- $y_{41} + y_{42} + \cdots + y_{46} \leq 175$ (P4 extra)
- $y_{51} + y_{52} + \cdots + y_{56} \leq 145$ (P5 extra)
- $y_{61} + y_{62} + \cdots + y_{66} \leq 115$ (P6 extra)

Demanda Mensual

Cada mes debe satisfacer al menos la demanda correspondiente:

- $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} + x_{61} + y_{11} + y_{21} + y_{31} + y_{41} + y_{51} + y_{61} \geq 250$ (D1)
- $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} + x_{62} + y_{12} + y_{22} + y_{32} + y_{42} + y_{52} + y_{62} \geq 280$ (D2)
- $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} + x_{63} + y_{13} + y_{23} + y_{33} + y_{43} + y_{53} + y_{63} \geq 280$ (D3)
- $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} + x_{64} + y_{14} + y_{24} + y_{34} + y_{44} + y_{54} + y_{64} \geq 280$ (D4)
- $x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} + x_{65} + y_{15} + y_{25} + y_{35} + y_{45} + y_{55} + y_{65} \geq 280$ (D5)
- $x_{16} + x_{26} + x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{66} + y_{16} + y_{26} + y_{36} + y_{46} + y_{56} + y_{66} \geq 280$ (D6)

Restricciones

1. **Capacidad de Producción Regular**:

$$\sum_{j=1}^{6} x_{ij} \leq c_i \quad \forall i = 1, \ldots, 6$$

2. **Capacidad de Producción en Tiempo Extra**:

$$\sum_{j=1}^{6} y_{ij} \leq c_i' \quad \forall i = 1, \ldots, 6$$

3. **Demanda Mensual**:

$$\sum_{i=1}^{j} (x_{ij} + y_{ij}) \geq d_j \quad \forall j = 1, \ldots, 6$$

Función objetivo

Minimizar los costos totales:

$$Z = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \left(c_{ij} x_{ij} + c_{ij}' y_{ij} \right)$$

Donde:

- c_{ij}: Costo de producción regular.
- $c_{ij}' = 1.4 \cdot c_{ij}$: Costo de producción extra.

Este modelo asegura que se minimicen los costos de producción regular y extra mientras se satisfacen las restricciones de capacidad y demanda.

$Z = 105x_{11} + 105x_{12} + 105x_{13} + 105x_{14} + 105x_{15} + 105x_{16} + 113x_{22} + 113x_{23} + 113x_{24} + 113x_{25} + 113x_{26} + 99x_{33} + 99x_{34} + 99x_{35} + 99x_{36} + 126x_{44} + 126x_{45}$
$+ 158.2y_{22} + 158.2y_{23} + 158.2y_{24} + 158.2y_{25} + 158.2y_{26} + 138.6y_{33} + 138.6y_{34} + 138.6y_{35} + 138.6y_{36} + 176.4y_{44} + 176.4y_{45} + 176.4y_{46} + 166.6y_{55} + 166.6y_{56} + 1$

Explicación de cada término:

1. $105x_{11}$: Representa el costo de producir x_{11} unidades de manera regular en el mes 1.

2. $147y_{11}$: Representa el costo de producir y_{11} unidades de manera extra en el mes 1 (147 es $1.4 \cdot 105$).

Esta es la función objetivo completamente desglosada y numérica que minimiza el costo total de producción regular y extra para satisfacer la demanda en todos los meses.

El costo extra de producción en cada mes se calcula como un **40% adicional** al costo de producción regular. Esto se obtiene multiplicando el costo regular por **1.4**, que es la representación de "100% del costo regular más 40% adicional".

La fórmula general para calcular el costo extra (c_i') a partir del costo regular (c_i) es:

$$c_i' = c_i \times (1 + 0.4) = c_i \times 1.4$$

Cálculo paso a paso

Dado que los costos regulares para cada mes son $105, 113, 99, 126, 119, 93$, calculamos el costo extra para cada mes:

1. **Mes 1**:

$$c_1' = 105 \times 1.4 = 147$$

2. **Mes 2**:

$$c_2' = 113 \times 1.4 = 158.2$$

3. **Mes 3**:

$$c_3' = 99 \times 1.4 = 138.6$$

4. **Mes 4**:

$$c_4' = 126 \times 1.4 = 176.4$$

5. **Mes 5**:

$$c_5' = 119 \times 1.4 = 166.6$$

6. **Mes 6**:

$$c_6' = 93 \times 1.4 = 130.2$$

Resultado final

- Costo extra para cada mes:
  - $c_1' = 147$
  - $c_2' = 158.2$

- $c'_3 = 138.6$
- $c'_4 = 176.4$
- $c'_5 = 166.6$
- $c'_6 = 130.2$

El 40% adicional asegura que el costo del tiempo extra sea proporcionalmente mayor que el costo regular en cada mes.

In [1]:

```python
# Código modificado para incluir impresión de las 42 variables y satisfacción de la demanda por mes
from pulp import LpProblem, LpMinimize, LpVariable, lpSum

# Datos del problema
costos_reg = [105, 113, 99, 126, 119, 93]  # Costos regulares
costos_extra = [1.4 * c for c in costos_reg]  # Costos extra
capacidades = [220, 300, 220, 350, 290, 230]  # Capacidades regulares
capacidades_extra = [c / 2 for c in capacidades]  # Capacidades extra
demandas = [250, 280, 300, 270, 270, 320]  # Demandas

# Crear modelo de optimización
problema = LpProblem("Minimizar_Costos", LpMinimize)

# Variables de decisión
x = [[LpVariable(f"x_{i}{j}", lowBound=0) for j in range(6)] for i in range(6)]  # Regular
y = [[LpVariable(f"y_{i}{j}", lowBound=0) for j in range(6)] for i in range(6)]  # Extra

# Función objetivo
problema += lpSum(
    costos_reg[i] * x[i][j] + costos_extra[i] * y[i][j]
    for i in range(6)
    for j in range(6)
    if j >= i  # Solo considerar producciones válidas
)

# Restricciones de capacidad
for i in range(6):
    problema += lpSum(x[i][j] for j in range(6) if j >= i) <= capacidades[i], f"Capacidad_Regular_{i+1}"
    problema += lpSum(y[i][j] for j in range(6) if j >= i) <= capacidades_extra[i], f"Capacidad_Extra_{i+1}"

# Restricciones de demanda
for j in range(6):
    problema += lpSum(
        x[i][j] + y[i][j]
        for i in range(j + 1)  # Solo considerar meses válidos
    ) >= demandas[j], f"Demanda_{j+1}"

# Resolver el problema
problema.solve()

# Resultados
costo_total = problema.objective.value()
produccion_regular = [[x[i][j].value() for j in range(6)] for i in range(6)]
produccion_extra = [[y[i][j].value() for j in range(6)] for i in range(6)]

# Imprimir resultados
print("Costo Total Mínimo: ", costo_total)
print("\nProducción Regular (x_ij):")
for i in range(6):
    for j in range(6):
        if j >= i:
            print(f"x_{i+1}{j+1} = {produccion_regular[i][j]}")

print("\nProducción Extra (y_ij):")
for i in range(6):
    for j in range(6):
        if j >= i:
            print(f"y_{i+1}{j+1} = {produccion_extra[i][j]}")

print("\nSatisfacción de Demanda por Mes:")
for j in range(6):
    satis_demanda = sum(produccion_regular[i][j] + produccion_extra[i][j] for i in range(j + 1))
    print(f"Demanda Mes {j+1}: {satis_demanda} (Demanda requerida: {demandas[j]})")

# Este código imprimirá:
# - Costo total mínimo
# - Las 42 variables (x_ij y y_ij)
# - La cantidad de demanda satisfecha para cada mes
```

```
Costo Total Mínimo:  190246.0

Producción Regular (x_ij):
x_11 = 220.0
x_12 = 0.0
x_13 = 0.0
x_14 = 0.0
x_15 = 0.0
x_16 = 0.0
x_22 = 280.0
x_23 = 20.0
x_24 = 0.0
x_25 = 0.0
x_26 = 0.0
x_33 = 220.0
x_34 = 0.0
x_35 = 0.0
x_36 = 0.0
x_44 = 270.0
x_45 = 70.0
x_46 = 0.0
x_55 = 200.0
x_56 = 90.0
x_66 = 230.0

Producción Extra (y_ij):
y_11 = 30.0
y_12 = 0.0
y_13 = 0.0
y_14 = 0.0
y_15 = 0.0
y_16 = 0.0
y_22 = 0.0
y_23 = 0.0
y_24 = 0.0
y_25 = 0.0
y_26 = 0.0
y_33 = 60.0
y_34 = 0.0
y_35 = 0.0
y_36 = 0.0
y_44 = 0.0
y_45 = 0.0
y_46 = 0.0
y_55 = 0.0
y_56 = 0.0
y_66 = 0.0

Satisfacción de Demanda por Mes:
Demanda Mes 1: 250.0 (Demanda requerida: 250)
Demanda Mes 2: 280.0 (Demanda requerida: 280)
Demanda Mes 3: 300.0 (Demanda requerida: 300)
Demanda Mes 4: 270.0 (Demanda requerida: 270)
Demanda Mes 5: 270.0 (Demanda requerida: 270)
Demanda Mes 6: 320.0 (Demanda requerida: 320)
```

Interpretación de Resultados

1. **Costo Total Mínimo:**
   - Este valor representa el costo total mínimo para satisfacer la demanda en los seis meses, considerando tanto la producción regular como la producción en tiempo extra.
   - Incluye los costos de todas las unidades producidas, ya sea en modo regular o en tiempo extra.

   Interpretación:

   - Si el costo total es significativamente alto, puede indicar una fuerte dependencia del tiempo extra debido a insuficiencia en la capacidad regular.

---

2. **Producción Regular (x_{ij}):**
   - Cada variable x_{ij} representa la cantidad de unidades producidas regularmente en el mes i para satisfacer la demanda del mes j.
   - Estas cantidades reflejan cómo la capacidad regular de producción se utiliza para cumplir con la demanda de cada mes.

   Ejemplo de Interpretación:

   - $x_{11} = 200$: En el mes 1, se produjeron 200 unidades regularmente para satisfacer la demanda del mismo mes.
   - $x_{14} = 50$: En el mes 1, se produjeron 50 unidades regularmente para cumplir con la demanda del mes 4.

---

3. **Producción Extra (y_{ij}):**
   - Cada variable y_{ij} representa la cantidad de unidades producidas en tiempo extra en el mes i para satisfacer la demanda del mes j.
   - Estas cantidades indican cómo se utilizó el tiempo extra para complementar la producción regular.

   Ejemplo de Interpretación:

   - $y_{12} = 30$: En el mes 1, se produjeron 30 unidades en tiempo extra para satisfacer la demanda del mes 2.
   - $y_{35} = 100$: En el mes 3, se produjeron 100 unidades en tiempo extra para cubrir la demanda del mes 5.

---

4. **Satisfacción de la Demanda por Mes:**

- Muestra cuántas unidades (de producción regular y extra combinadas) se utilizaron para satisfacer la demanda de cada mes.
- Se compara la demanda requerida (d_j) con la cantidad producida.

Interpretación:

- Si las unidades producidas igualan la demanda requerida (d_j), la demanda se satisface completamente.
- Si hay una diferencia, significa que el modelo permite soluciones inviables, lo cual indicaría un error en las restricciones.

Ejemplo:

- Para el mes 3 ($d_3 = 300$):
  - Producción regular: $x_{13} = 150$, $x_{23} = 50$.
  - Producción extra: $y_{13} = 100$.
  - Total producido: $150 + 50 + 100 = 300$ (Demanda satisfecha completamente).

Relación entre los Resultados

1. La producción regular (x_{ij}) se prioriza para minimizar costos, ya que es más económica que la producción en tiempo extra (y_{ij}).
2. La producción extra se utiliza únicamente cuando la capacidad regular no es suficiente para satisfacer la demanda.
3. La combinación de x_{ij} y y_{ij} para cada mes asegura que las restricciones de demanda se cumplan, manteniendo el costo total mínimo.

Conclusión

Estos resultados proporcionan:

- Un plan de producción óptimo que minimiza costos mientras satisface todas las demandas.
- Una distribución clara de las cantidades producidas regularmente y en tiempo extra.
- Información valiosa para la planificación operativa y estratégica de la empresa.

Conclusión General

Este trabajo ha abordado un problema de optimización de producción en una empresa de solenoides, formulando y resolviendo un modelo matemático que permite minimizar los costos asociados al cumplimiento de la demanda en un horizonte de seis meses. A continuación, se resumen las principales conclusiones obtenidas:

Optimización de Recursos

El modelo desarrollado demuestra cómo se puede planificar la producción regular y el uso de tiempo extra de manera óptima para satisfacer las demandas mensuales. Al priorizar la producción regular, que tiene menores costos, y utilizar el tiempo extra solo cuando es necesario, el modelo garantiza una asignación eficiente de los recursos disponibles.

Cumplimiento de Restricciones

El modelo asegura que:

- **Capacidades de Producción**: No se exceden las capacidades regulares ni de tiempo extra para ningún mes.
- **Satisfacción de Demanda**: Todas las demandas mensuales se cumplen de manera puntual, sin permitir atrasos.

Esto refleja un equilibrio entre las limitaciones operativas de la planta y las exigencias del mercado.

Minimización de Costos

La función objetivo minimiza los costos totales de producción, incluyendo:

- Costos de producción regular, que son más económicos.
- Costos de tiempo extra, que se utilizan como medida complementaria pero con un costo adicional del 40%.

El modelo proporciona un plan de producción que garantiza el menor costo posible dentro de las restricciones establecidas.

Flexibilidad del Modelo

La formulación del modelo y su implementación son escalables y pueden ser adaptadas a:

- Horizontes de planificación más largos o diferentes demandas.
- Cambios en las capacidades de producción o en los costos unitarios.
- Inclusión de otras restricciones o consideraciones específicas de la empresa.

Uso de Herramientas Computacionales

La resolución del modelo con Python y `pulp` demuestra la utilidad de herramientas computacionales para resolver problemas complejos de optimización de manera eficiente. Estas herramientas no solo facilitan los cálculos, sino que también permiten analizar diferentes escenarios con facilidad.

Impacto Práctico

La solución obtenida no solo ayuda a reducir los costos de producción, sino que también garantiza que la empresa pueda cumplir con las exigencias del mercado, manteniendo su competitividad y eficiencia operativa. Este tipo de modelo es crucial para la toma de decisiones estratégicas en contextos industriales con recursos limitados y demandas fluctuantes.

Conclusión Final

Este ejercicio de optimización resalta cómo la combinación de técnicas matemáticas, herramientas computacionales, y un análisis detallado de los datos operativos puede generar soluciones prácticas y valiosas para problemas reales en la industria. El enfoque presentado puede servir como base para mejorar la planificación de recursos en entornos similares, contribuyendo a la sostenibilidad y competitividad de las empresas.

Referencias

Taha, H. A. (2011). *Investigación de operaciones*. México: Pearson Educación.

Sandblom, C., & Eiselt, H. A. (2010). *Operations Research: A Model-Based Approach*. Germany: Springer Berlin Heidelberg.

Hillier, F. S., & Lieberman, G. J. (2015). Introducción a la Investigación de Operaciones. McGraw-Hill.

Winston, W. L. (2004). Operations Research: Applications and Algorithms. Cengage Learning.

URL al repositorio de codigo de este documento (Github) :

https://github.com/mirossy29/Maestria/blob/main/Matematicas/MiroslavaSandria-Tarea-9-Optimizacion.ipynb