Линейная алгебра

6.9. Найти все значения λ, при которых вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3:

а) $a_1 = (2, 3, 5)$, $a_2 = (3, 7, 8)$, $a_3 = (1, -6, 1)$, $b = (7, -2, \lambda)$;

$$b = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 15 & 3 \\ 0 & 25 & 5 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 8 \\ 7 & -2 & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

1. (j) Почему у любого конечномерного векторного пространства существует базис?

$V = \langle e_1, \dots e_n \rangle$, $\dim V = n$

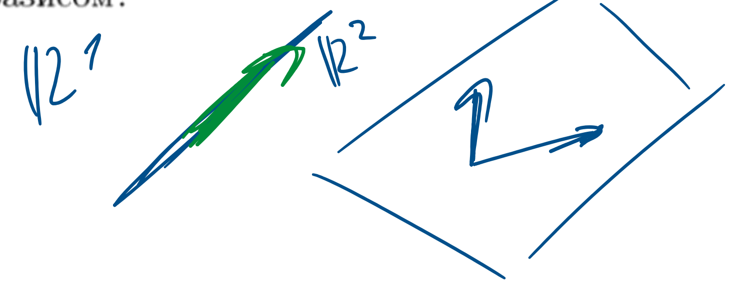
$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$e_1 = v_1 \neq 0$

$e_2 = v_2 \in V:\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

$e_3 = v_3 \in V:\ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

6.11. В каком случае система векторов обладает единственным базисом?



„0"-мерное

$\vec{0} + \vec{e} = \vec{e}$

„0" мерное $\qquad 0 + e = e$

$$\lambda \vec{0} = \vec{0}$$

• $\langle \cos x, \sin x \rangle$

$$\forall x \quad \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x \equiv 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$x \ne \frac{\pi}{2} + \pi k \quad \lambda_1 + \lambda_2 \operatorname{tg} x \equiv 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$ – противоречие

$f(x) \equiv 0$

$\Downarrow$

$f'(x) \equiv 0$

• $\langle \cos x, \sin x, 1 \rangle$

$$\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x + \lambda_3 \equiv 0$$

$$\forall x \quad -\lambda_1 \sin x + \lambda_2 \cos x \equiv 0$$

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi \qquad \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 0 \end{cases} \qquad \lambda_1 = \lambda_3 = 0$$

7.1. Найти ранг следующих матриц с помощью ~~окаймления ми~~но-ров и элементарных преобразований:

а) $\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; $\qquad$ б) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

$A_{n\times m} \quad \operatorname{rk} A \le \min(n;m)$

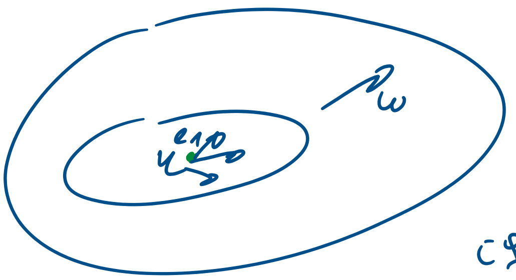
$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 = e_3$

• $u \subseteq w$

• $U \subseteq W$

a.) $\dim(U) \le \dim W$

$\begin{cases} \vec{0} \in U \\ \alpha \vec{u} \in U \\ u_1 + u_2 \in U \end{cases}$



$U = \langle e_1, \dots e_k \rangle$

if $U = W \Rightarrow \dim U = \dim W$

if $U \neq W \Rightarrow \exists w \in W \setminus U$

$\dim U = \dim \langle e_1, \dots e_k \rangle \le \dim \langle e_1, \dots e_k, w \rangle \le$

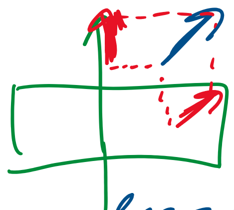
$\le \dim W$

$\exists V: \ W = U + V$

б.)

∘ def: $\forall w \in W \ \exists u \in U$ и $\exists v \in V$:

$w = u + v$



$U = \langle e_1, \dots e_k \rangle$ дополнить до всего базиса W

$w = \underbrace{w_1 e_1 + \dots + w_k e_k}_{U} + \underbrace{w_{k+1} e_{k+1} + \dots + w_n e_n}_{V}$

$W \setminus U$

$V = \langle e_{k+1}, \dots e_n \rangle$

• $\dim V = n$ над полем из q элементов

a.) $(x_1; \dots x_n) = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n$

$q \cdot q \cdot \dots q = q^n$

б.) кол-во базисов? $|V| = q^n$

$(q^n - 1)(q^n - q)(q^n - q^2) \dots (q^n - q^{n-1})$

$$(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\dots(q^n-q^{n-1})$$

$$e_2 \neq \lambda_1 e_1, \quad e_3 \neq \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

$$e_n \neq \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n-1} e_{n-1}$$

7.5. Доказать, что ранг матрицы $(A|B)$, полученной приписыванием к матрице A матрицы B, не превосходит суммы рангов матриц A и B.

$$(A|B) = (A|0) + (0|B)$$

$$rk(A|B) = rk\big((A|0) + (0|B)\big) \le$$

$$\le rk(A|0) + rk(0|B) = rk A + rk B$$

12. (m) Доказать, что всякую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы меньшего числа таких матриц.

$$rk A = r$$

$$A = \tilde{A}_1 + \dots + \tilde{A}_r$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_r \\ A_{r+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_1^{r+1} A_1 \\ \lambda_1^{r+2} A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_2^{r+1} A_2 \\ \lambda_2^{r+2} A_2 \end{pmatrix} + \dots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_r \\ \lambda_r^{r+1} A_r \\ \lambda_r^{r+2} A_r \end{pmatrix}$$

$$A_j \in \{A_{r+1}, \dots A_n\} \Rightarrow A_j = \lambda_1^j A_1 + \lambda_2^j A_2 + \dots + \lambda_r^j A_r$$

$$rk(A) = rk(A_1 + \dots + A_k) \le rk A_1 + \dots + rk A_k = k$$

т.е. $k < r \Rightarrow rk(A) < r$

$rk(A) = rk(A_1 + \dots$

if $k < r \Rightarrow rk(A) < r$

$rk(A+B) \leq rkA + rkB$

7.7. Доказать, что всякую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы меньшего числа таких матриц.

7.10. Пусть A и B — матрицы с вещественными элементами с одинаковым числом строк. Доказать, что

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} = r(A) + r(B).$$

$$r\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -7B \end{pmatrix} = rk\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -7B \end{pmatrix} =$$

$$= rkA + rkB$$

17.1. Перемножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m+n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$e_{11} = 1 \cdot 1 + n \cdot 0 = 1$

$e_{12} = m + n$

$e_{21} = 0$, $e_{22} = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 15+28 & 18+32 \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = \{ i$ - строчка $\times$ на j-ый столбец $\}$

- $AB = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $AB = BA$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

- $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$

$$\parallel$$

$(A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

$\Rightarrow AB = BA$

- $A^2 = -E$ $\qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_n \end{pmatrix} (\sigma_1 \; \dots \; \sigma_n) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2 & \dots & \sigma_1\sigma_n \\ \sigma_2\sigma_1 & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_2\sigma_n \\ \vdots & & & \\ \sigma_n\sigma_1 & \dots & & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$ $\quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \quad \frac{\sigma_i}{\sigma_1}$

$$\parallel$$
$$A$$

$\forall i \; \sigma_i = 0$

$\text{rk}\, A =$

$(\sigma_1^2 \;\; \sigma_1\sigma_2\,))$ $\quad \underline{\sigma_2}$ $\quad$ - $\text{tr}\, A = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$

$$\begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \\ v_2 v_1 & v_2^2 \end{pmatrix} \quad \frac{v_2}{v_1}$$

- $\operatorname{tr} A = v_1^2 + \ldots + v_n^2$
- $\det A = 0$

- $A^T = A \Rightarrow (A^{-1})^T = A^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$a_{ij} \to a_{ji}$$

$$(AA^{-1})^T = E^T$$

$$(\underbrace{AB}_{C})^T = B^T A^T$$

$$(A^{-1})^T A^T = E$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$(A^{-1})^T \cdot A = E$$

$$(A^{-1})^T = A^{-1}$$

- $X \in \operatorname{mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$

$$\operatorname{rk}(X) < n \Rightarrow \exists v \neq 0 \ (v \in \mathbb{R}^n) : X(v) = 0$$

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 X_1 + \ldots + v_n X_n = 0$$

$\operatorname{rk}(X) < n \Rightarrow X_1 \ldots X_n$ — лин зав $\Rightarrow$

$\exists v_1, \ldots v_n$, что $v_1 X_1 + \ldots + v_n X_n = 0$

X — обр, if $\exists X^{-1}$ $\quad X \cdot X^{-1} = E = X^{-1} \cdot X$

22. **(m)** Доказать, что матрица $E - AB$ обратима тогда и только тогда, когда $E - BA$ обратима

$\exists \quad E - AB$ − обр, но $E - BA$ − необр

$\Downarrow$

$\exists\, \text{б} \neq 0 \quad (E - BA)\text{б} = 0$

$E\text{б} - BA\text{б} \Rightarrow BA\text{б} = E\text{б} \Rightarrow$

$A\text{б} \neq 0$

$A\, B\, \underbrace{A\text{б}}_{u} = \underbrace{A\text{б}}_{u \neq 0}$

$ABu = u \Rightarrow (AB - E)u = 0$

$(E - AB)u = 0$

20. **(m)** Пусть A и B — квадратные матрицы одинакового размера, причём матрица A — невырожденная. Возможно ли равенство $AB - BA = A$

$tr(AB - BA) = tr(A)$

$tr(AB) - tr(BA) = tr(A)$

$tr(AB) - tr(BA) = tr(A) \Rightarrow tr(A) = 0$

$A^{-1}(AB) - A^{-1}BA = E$

$B - A^{-1}BA = E$

$tr(B) - \underbrace{tr(A^{-1}BA)}_{= tr(B)} = tr(E)$

$n = tr(E) > 0$

$$0 = tr(E) > 0$$
$$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; \shortparallel$$
$$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; n$$

17. (m) Пусть B - квадратная матрица. Доказать, что матричное уравнение $AX = B$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица A невырождена.

$\Leftarrow$ $\exists A^{-1}$, то $X = A^{-1}B$

$\Rightarrow$ $\exists$ ед реш $AX = B \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = B \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1A_1 + \dots + x_nA_n = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} AX_1 = B_1 \\ AX_2 = B_2 \\ \dots \\ AX_n = B_n \end{cases}$$

25. (j) Может ли два вектора, состоящие из +1 и -1, в пространстве нечетной размерности быть ортогональны друг другу?

$u, v \in \mathbb{R}^{2n+1} \overset{?}{=}> (v ; u) = 0$

$n = 2$ $\quad u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \dots + u_nv_n = 0$

$n=3$ $\quad u_1\sigma_1+u_2\sigma_2+u_3\sigma_3+\dots+u_n\sigma_n=0$

$u_1 = \pm 1,\ u_2 = \pm 1,\ u_3 = \pm 1,\ u_n = \pm 1$

$2k+1+2m=2(k+m)+1$

$2k+1+2l+1=2(k+l+1)$

27. (m) а) Докажите, что $tr(AB^T)$ является скалярным произвдением на пространстве матриц m на n

б) Докажите, что симметрическая и кососимметричесая матрица ортогональны друг

1. $(a;b)=(b;a)$
2. $(a+c;b)=(a;b)+(a;c)$
3. $(\lambda a;b)=\lambda(a;b)$
4. $(a;a)\geq 0$ и $(a;a)=0 \Leftrightarrow a=0$

$tr(AB)$ $\quad \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $tr(A^2)<0$

4. $tr(A\cdot A^T)=\sum_i c_{ii}=\sum_i\sum_j a_{ij}(\underbrace{a^T_{ji}}_{=a_{ij}})=$

$=\underbrace{\sum_i\sum_j (a_{ij})^2}_{\text{сумма всех эл. матрицы}}\geq 0$

$\cdot\ tr(A\cdot B^T)$

$$\left.\begin{matrix} A^T = A \\ B^T = -B \end{matrix}\right) \Rightarrow tr(A\cdot B^T) = 0$$

$$tr(AB^T) = tr(A(-B)) =$$
$$= -tr(AB)$$

$$tr((AB^T)^T) = tr((B^T)^T A^T) = tr(BA) =$$
$$= tr(AB)$$

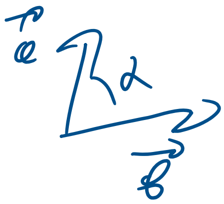
$$(XY)^T = Y^T X^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в) Найдите угол между единичной матрицей и матрицей из ~~всех единиц~~ относительно этого скалярного произвдения

$$|a| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} = \sqrt{(a;a)}$$

$$(a;b) = |a||b| \cos\alpha$$



$$\cos\alpha = \frac{(a;b)}{|a||b|}$$

$$\cos\alpha = \frac{tr(A\cdot B^T)}{\sqrt{tr(A\cdot A^T)}\sqrt{tr(B\cdot B^T)}}$$

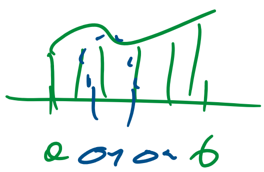
35. (m) Рассмторим пространство бесконечно дифференицруемых функций на отрезке $[a;b]$

а) Докажите, что $(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ является скалярным произвдением на этом пространстве

б) Опишите пространство ортогональное пространству постоянных функций и приведите пример хотя бы одного подпространсntва (отличного от нулевого), которое ортогонально пространству постоянных функций

в) Найдите угол между e^x и x относительно этого скалярного произвдения

а.) 4. $\int_a^b f^2 dx \geq 0$



$$\int^b f^2 dx = 0 \Leftrightarrow f = 0$$

$$\int_a^b f^2 dx = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$$

$3 \int_a^b f^2 dx = 0$, но $\exists x_0 \; f^2(x_0) > 0$

$\exists \; (\sigma_1 ; \sigma_2) \ni \forall x \quad f^2(x) > 0$

$$\int_a^b f^2 dx \geq \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} f^2(x) dx > 0$$

Базис и векторные пространства

1. (j) Найти размерность
а) комплексных чисел
б) многочленов степени n с корнем в нуле
в) непрерывных функций

2. (j) При каких значениях параметра а вектор $(a, 4, -1, -2)$ лежит в линейной оболочке векторов $(1, a, 3, 0), (-2, 1, 2, 2)$ и $(0, 1, 1, 3)$? В ответ запишите сумму этих значений.

3. (j) Пусть
$k(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$
$l(x) = 3x^3 + x^2 - x - 1$
$m(x) = x^3 + x^2 + 2$
$n(x) = 7x^3 + ax^2 + 5$
Найдите значение параметра a, для которого множество (k, l, m, n) будет линейно зависимым.

4. (j) Доказать линейную независимость векторов
а) e^x, e^{2x}
б) $e^x, e^{2x}, 1$
в) $\cos(x), \sin(x), e^x, e^{2x}, 1$

5. (j)
а) Докажите, что функции $det(X), det(X + E)$ и $det(X - E)$ на пространстве комплексных матриц 3×3 линейно независимы.
б) Докажите, что найдется $m \in N$, для которого набор функций
$det(X - mE), det(X - (m - 1)E), det(X - (m - 2)E), \ldots, det(X + mE)$
линейно зависим.

6. (m) Пусть V n-мерное пространснтво над полем из q элементов. Найти
а) количество векторов
б) количество базисов
в) количество невырожденных матриц
г) количесвто вырожденных матриц
д) количество подпространств
е) количество линейных отображений

7. (j) Пусть U и v подпространства веткорного пространства W всегда ли
а) $U \cup V$ - тоже подпространство?
б) $U \cap V$ - тоже подпространство?
в) $V \setminus U$ - тоже подпространство?
Докажите или приведите контрпример.

8. (j) Рассмотри подпространства $U =< (1,1,1,1),(-1,-2,0,1) >$ и $V =< (-1,-1,1,-1),(2,2,0,1)$.

а) Докажите, что эти подпространства раскладывают в прямую сумму пространство R^4.

б) Найдите проекцию вектора (4, 2, 4, 4) на пространства U и V

9. (m) Рассмотрим в векторном W пространстве размерности n два подпространства: $x_1 + \ldots + x_n = 0$ и $x_1 = \ldots = x_n$. Докажите, что они образуют прямую сумму и найти проекции единичных векторов на эти подпространства.

10. (m)

а) Докажите, что любую матрицу можно представить в виде суммы симметричной и кососимметричной.

б) При чем это можно сделать единственным образом.

в) Найдите проекцию верхнетреугольной матрицы из всех единиц на оба этих подпростарнства (симметричных матриц и кососимметричных матриц).

11. (m)

а) Доказать, что любую матрицу можно представить как верхнетреугольной и кососимметричной матрицы и причем единственным образом.

б) Найти проекцию матрицы из всех единиц на эти подпространства.

в) Доказать, что любую матрицу можно представить как верхнетреугольной и симметрической матрицы и причем единственным образом.

г) Найти проекцию матрицы из всех единиц на эти подпространства.

12. (m) Векторы $e_1, \ldots, e_{m+1}$ в R^n линейно независимы. Докажите, что среди их линейных комбинаций есть ненулевой вектор, у которого первые m координат нулевые.

13. (m) Найдите расстояние от матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

до линейной оболочки матриц

$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

если скалярное произведение на матрицах задано следующим образом:

$\langle X, Y \rangle = tr(X^T Y)$

Ранг матрицы

14. (j) Найдите, при каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x+y+5z=1 \\ 2x+3y+13z=4 \\ x+4y+15z=2 \\ 6y+21z=a \end{cases}$$

имеет решение.

15. (j) Рассмотрим набор $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ все λ отличны от нуля и матрицу n на n такую, что $a_{ij} = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}$

а) Найдите след матрицы a_{ij}

б) Найдите ранг матрицы a_{ij}

в) Найдите определитель матрицы a_{ij}

16. (j) Докажите, что любая матрица ранга 1 представима как проивздение vv^T, где v-вектор столбец

17. (j) Почему элементарные преобразования не меняют ранг матрицы?

18. (j) Доказать, что ранг матрицы (A|B), полученной приписыванием к матрице A матрицы B, не превосходит суммы рангов матриц A и B.

19. (m) Найти ранг матрицы $A = a_{ij}$ размером $n \times n$ $(n > 3)$, где
$a_{ij} = i + j - 2ij$.

20. (m)

Докажите, что если $|a_{ii}| > |a_{ik}|$ при $i = 1, \dots n$, то матрица $A = |a_{ij}|$ невырожденная.

21. (m) Найдите ранг матрицы $n \times n$. Если $a_{ij} =$

а) $\sin i + \sin j$

б) $\ln i + \ln j$

в) $e^i + e^j$

22. (m)

а) Доказать, что всякую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы меньшего числа таких матриц.

б) Единственное ли такое представление?

23. (m) Квадратная матрица A размера 20 на 20 невырождена. Какое наименьшее значение может иметь ранг подматрицы 12 на 13 матрицы A? (Подматрица получается вычеркиванием из A некоторых строк и столбцов)

24. (m) Доказать, что если ранг матрицы равен r, то минор, стоящий на пересечении любых r линейно независимых строк и линейно независимых столбцов, отличен от 0.

25. (m) Пусть A, B - матрицы размеров $m \times n$ и $m \times k$ соответственно. Доказать, что матричное уравнение AX = B, где X - матрица размера $n \times k$, имеет решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы A совпадает с рангом расширенной матрицы (A|B).

26. (m) Пусть B - квадратная матрица. Доказать, что матричное уравнение $AX = B$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица A невырождена.

27. (s) Пусть $A = (a_{ij})$ - матрица размера 2 на n,
$\delta_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}$ Найдите ранг матрицы $\Delta = \delta_{ij}$

Матрицы

28. (j) Матрицы A и B таковы, что AB + A + B=0. Доказать, AB = BA.

29. (j) Всегда ли выполняется равенство $tr(ABC) = tr(ACB)$

30. (j) Пусть A и B — квадратные матрицы одинакового размера. Верно ли, что если $ABA = A$, то $BAB = B$?

31. (j) Доказать, что матрица, обратная к кососимметрической, является кососимметрической.

32. (j) Доказать, что если матрицы A и B обе симметрические или кососимметрические, то их коммутатор $[A, B]$ - кососимметрическая матрица.

33. (j) Пусть матрица A порядка 2 нильпотентна.
а) Найдите A^2
б) Найдите $tr(A)$

34. (j) Докажите, что любая матрица X является корнем уравнения $X^2 - tr(x)X + det(X)$

35. (j) При каких λ имеет решение уравнение $XY - YX = \lambda E$

36. (j) Решить уравнение $AX + X + A = 0$, где A - нильпотентная матрица.

37. (j) Пусть заданы 3 матрицы размера 2×2 (F (обратимая, диагональная), Y и X) из действительных чисел. Для любых натуральных $m \leq 4$ выполнено следующее равенство
$F^m X - Y = 0_{2\times 2}$
где $0_{2\times 2}$ - нулевая матрица.
Найдите максимально и минимально возможные значения следа матрицы XY.

38. (j) Может ли при элементарных преобразованиях матрицы A измениться ранг матрицы A^2?

39. (m) Пусть X и Y — квадратные матрицы одинакового размера, причем $XY = \lambda X + \mu Y$ для некоторых $\lambda, \mu \neq 0$. Докажите, что матрицы X и Y коммутируют.

40. (m) Доказать, что любая матрица со следом 0 является суммой коммутаторов матриц со следом 0.

41. (m) Матрицы A и B не коммутируют между собой, т. е. $AB \neq BA$. Может ли оказаться, что матрицы A^2 и B^2 коммутируют?

42. (m) Пусть A - квадратная матрица. Доказать, что матричное уравнение $AX = B$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица A невырождена.

43. (s) Пусть квдаартичная матрица перестановочка со всеми невырожденными матрицами. Доказать, что такой матрицей может быть только скалярная матрица.

44. (s) При каких натуральных N существует квадратная матрица порядка N с элементами $0, 1$ такая, что ее квадрат — это матрица из одних единиц?

45. (s) Найдите все такие матрицы A, для которых все элементы матриц A и A^{-1} неотрицательны.

Ортогональность и скалярное проивздение

46. (j) С помощью процесса ортогонализации построить ортоганальный базис линейной оболочки системы векторов евклидова пространства:

а) ((1, 2, 2, -1), (1, 1, -5, 3), (3, 2, 8, -7));

б) ((1, 1, -1, -2), (5, 8, -2, -3), (3, 9, 3, 8));

47. (j) На пространстве многочленов от переменной x с вещественными коэффициентами задано скалярное произведение

$\langle u, v\rangle = \int_2^6 u(x)v(x)dx$

Найдите длину ортогональной проекции многочлена $y = 1 + x^4$ на линейную оболочку многочленов $x^3 - 1$ и $x^2 + x$.

48. (m) Даны точки B (1, 2, -3) и C (2, 2, 1), а также плоскости $\alpha : x + y + z = 0$ и $\beta : 2x + 3y = 0$. Найдите координаты точки A, если известно, что её ортогональная проекция на α совпадает с проекцией точки B, а на β - с проекцией точки C.

49. (m) евклидовом пространстве R^4 найти расстояние от точки (-3, -1, -2, 5) до гиперплоскости

$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 4$

50. (m) В евклидовом пространстве R^4 найти ортогональную проекцию вектора (6, 2, 5, 1) на линейную оболочку векторов (1, - 1, 1, 0), (1,0, 1, 1).

51. (m) Найдите расстояние от матрицы

$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$

до линейной оболочки матриц

$B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

если скалярное произведение на матрицах задано следующим образом:

$\langle X, Y\rangle = tr(X^T Y)$

52. (m) Найдите растояние относительно скалярного произвдения $(A; B) = tr(AB^T)$ на пространстве квдартичных матриц

а) от единичной матрицы до пространства кососимметрических матриц

б) от верхнетреугольной матрицы до пространства симметрических и до пространства кососимметрический матриц

53. (m) Рассмторим пространство бесконечно дифференицруемых функций на отрезке $[a; b]$

а) Докажите, что $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ является скалярным произвдением на этом пространстве

б) Опишите пространство ортогональное пространству постоянных функций и приведите пример хотя бы одного подпространснтва (отличного от нулевого), которое ортогонально пространству постоянных функций

в) Найдите угол между e^x и x относительно этого скалярного произвдения

54. (s) Верно ли, что для любых двух неколлинеарных векторов v, w в $\mathbf{R}^n$ найдётся скалярное произведение, относительно которого w является ортогональной проекцией вектора v на некоторое $(n-1)$-мерное подпространство?

55. (s) Существует ли скалярное произведение на пространстве матриц $n \times n$ $(n > 1)$, относительно которого матрица из всех единиц была бы ортогональна любой верхнетреугольной матрице?

56. (s) Пусть A и B - матрицы размера $m \times n$ и $k \times n$ соответственно, причём если $AX = 0$ для некоторого столбца X, то $BX = 0$. Докажите, что $B = CA$, где C - матрица размера $k \times m$.

57. (s) Матрица A порядка n такова, что для любой матрицы X порядка n с нулевым следом $tr(AX) = 0$. Докажите, что $A = \lambda E$.