Линейная алгебра

260. Написать ~~общее~~ уравнение прямой:

1) имеющей угловой коэффициент 4 и отсекающей на оси Ox отрезок, равный 5 (система координат прямоугольная);

2) проходящей через точку $(1, -2)$ параллельно оси Oy;

3) проходящей через точку $(-2, 3)$ параллельно вектору $(1, -2)$;

4) проходящей через две точки $(1, 2)$ и $(-3, 4)$;

5) отсекающей отрезок -2 на оси Ox и отрезок 7 на оси Oy;

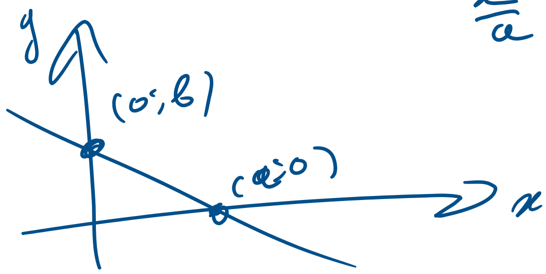
6) проходящей через точку $(1, 2)$ и параллельной оси Ox;

7) проходящей через точку с координатами $(-1, 1)$ и параллельной прямой $3x+2y-3=0$;

8) проходящей через точку $(1, 3)$ и перпендикулярной прямой $x=2+t$, $y=1-3t$.

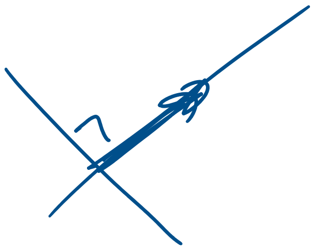
3.) $\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$

4.)



$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

8.)



$x - 3y + C = 0$

$1 - 9 + C = 0$

$C = 8$

271. В каждом из следующих случаев определить взаимное расположение прямых ℓ_1 и ℓ_2. Если прямые пересекаются, найти координаты точки пересечения:

1) $\ell_1: 3x-y-2=0$, $\quad \ell_2: 6x-2y-2=0$;

2) $\ell_1: x=1+2t,\ y=-3+t$, $\quad \ell_2: x=7-4t,\ y=-2t$;

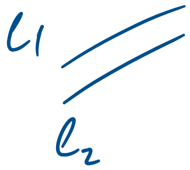
3) $\ell_1: 2x+3y+1=0$, $\quad \ell_2: x=1+3t,\ y=-2+2t$;

4) $\ell_1: x=1+t,\ y=-2-3t$, $\quad \ell_2: x=5-2t,\ y=1+t$;

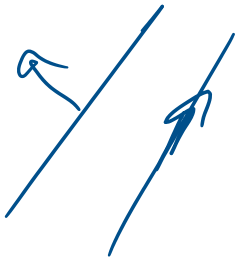
5) $\ell_1: x+2y+2=0$, $\quad \ell_2: x=-4t,\ y=-1+2t$;

6) $\ell_1: x=1+6t,\ y=2+4t$, $\quad \ell_2: 2x-3y+1=0$.

1.) $l_1 (3; -1)$



3.)



$l_2 (6; -2)$

$2 \cdot Ax + 2 \cdot By + 2 \cdot C = 0$

$(2;3) \perp (3;2)$

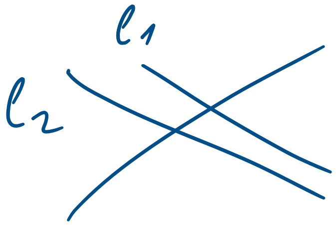
$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y + 1 = 0$

12

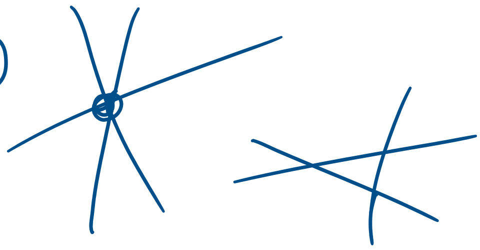
277. В каждом из следующих случаев определить взаимное расположение трех прямых:

1) $3x-y-2=0$;	$6x-2y-2=0$;	$3x-2y-2=0$;
2) $x+2y+3=0$;	$2x+3y+5=0$;	$x-y+7=0$;
3) $x-3y+5=0$;	$3x-y-1=0$;	$x-y+1=0$;
4) $x-2y+7=0$;	$2x-4y-1=0$;	$x=1+2t,\ y=-3+t$;
5) $x=2+5t,\ y=3-t$;	$x=-3-10t,\ y=4+2t$;	$2x-y-1=0$;
6) $x=1+3t,\ y=-1-6t$;	$x=2-t,\ y=3+2t$;	$2x+y-1=0$;
7) $2x+3y-1=0$;	$x=-1-3t,\ y=1+2t$;	$x=2+6t,\ y=-1-4t$.

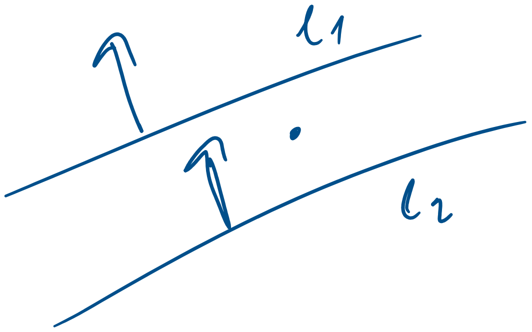
1.)



2.)



285. При каком необходимом и достаточном условии точка (x_0, y_0) лежит между двумя параллельными прямыми $Ax+By+C=0$ и $Ax+$ $+By+D=0$?



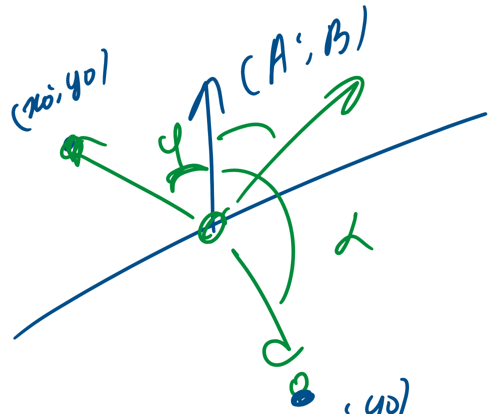
l_1 l_2

$-$ $+$

291. Доказать, что вектор с координатами (A, B) всегда направлен в сторону «положительной полуплоскости относительно прямой $Ax+By+C=0$. Верно ли, что он всегда ортогонален этой прямой?

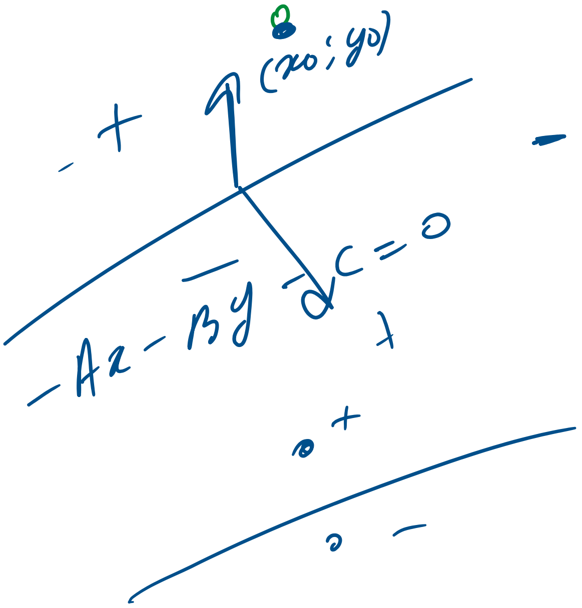
$\ldots y_0)$ $n(A;B)$

$Ax_0 + By_0 + C > 0$



$A x_0 + B y_0 + C > 0$

$A^2 + B^2 > 0$



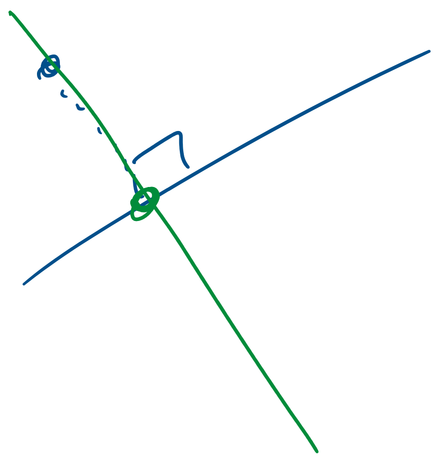
$A x_0 + B y_0 + C > 0$

$-A x_0 - B y_0 - C < 0$

295. Найти проекцию точки $(-3, 7)$ на прямую $5x - 4y + 2 = 0$.

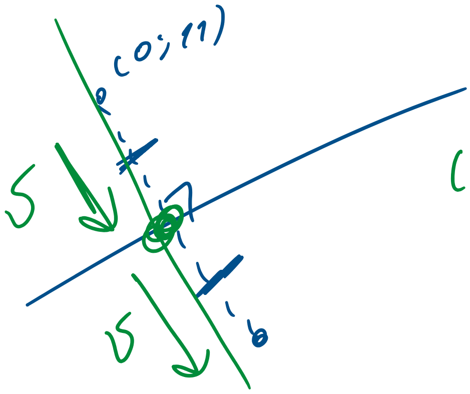
296. Найти точку, симметричную точке $(0, 11)$ относительно прямой $x + 7y - 52 = 0$.

295



$$\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 7 + (-4)t \end{cases}$$

296. Найти точку, симметричную точке $(0, 11)$ относительно прямой $x + 7y - 52 = 0$.



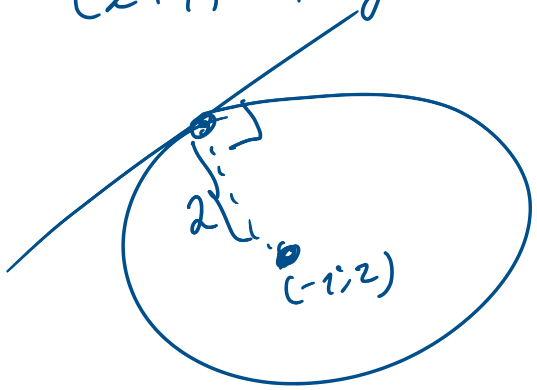
$(0;11) + 2\vec{b}$

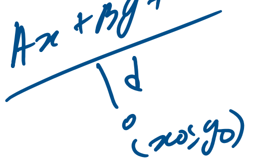
315. Составить уравнение касательных к окружности

$$x^2+y^2+2x-4y+1=0, \quad +1 \; +4$$

параллельных прямой $3x-4y=0$.

$(x+1)^2+(y-2)^2=4$





$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$A=3, \quad B=-4$

$$2=\frac{|3\cdot(-1)+(-8)+C|}{5}$$

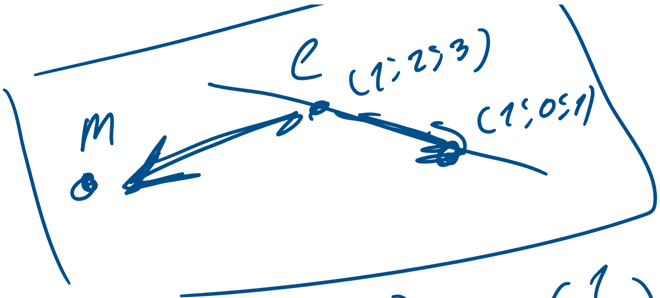
$10 = |C-5|$ $\left[\begin{array}{l} C=15 \\ C=-5 \end{array}\right.$

ресекающей ось Oy.

368. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M и содержащей прямую ℓ:

1) $M(1,0,-1), \quad \ell: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{1}$;

$(1;2;3) +$



(1;2;3) +

+(1;0;1)

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}u+v\begin{pmatrix}1-1\\0-2\\-1-3\end{pmatrix}$$

379. Определить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают. Если плоскости пересекаются, найти канонические уравнения линии пересечения:

1) $x+2y-z+1=0, \quad x+y-2z+1=0;$
2) $x-3y+7z+1=0, \quad 3x-9y+21z+3=0;$
3) $x-3y+2z+2=0, \quad 2x-6y+4z+5=0;$
4) $\begin{cases} x=1+2u+v, \\ y=3u+2v, \\ z=-1+u+v; \end{cases} \quad \begin{cases} x=4u+3v, \\ y=-2+u-4v, \\ z=3+u+2v; \end{cases}$

$$\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

380. Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли прямая ℓ в плоскости P, параллельна плоскости P или пересекает ее; в последнем случае найти точку пересечения прямой и плоскости:

1) $\ell: \frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{7}=\frac{z+1}{7}, \quad P: 7x+2y-z+7=0;$
2) $\ell: \frac{x}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{1}, \quad P: 5x-y+6z=0;$

$7-4+1+7\neq 0$

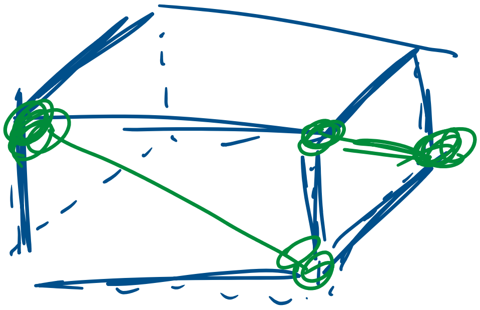
$(-1;7;7) \perp (7;2;-1)$

$-7+14-7=0$

$\boxed{\text{В}}$

381. Установить взаимное расположение двух прямых в каждом из следующих случаев (они могут: а) пересекаться, ~~б) быть параллельными~~, в) скрещиваться, ~~г) совпадать~~):

$$1)\ \begin{cases} x = 1 + 2t_1 \\ y = 7 + t_1 \\ z = 3 + 4t_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6 + 3t_2 \\ y = -1 - 2t_2 \\ z = -2 + t_2 \end{cases}$$

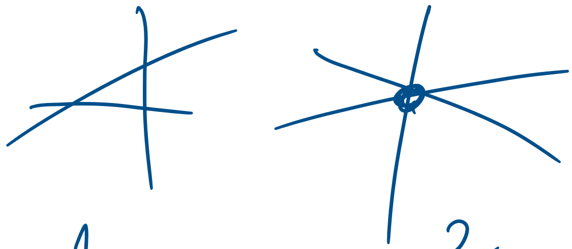


$$\begin{cases} 1 + 2t_1 = 6 + 3t_2 \\ 7 + t_1 = -1 - 2t_2 \\ 3 + 4t_1 = -2 + t_2 \end{cases}$$

389. Определить взаимное расположение трех плоскостей в каждом из следующих случаев:

1) $x + 2y - z + 7 = 0, \quad x + y - 2z + 4 = 0, \quad 5x + 3z + 2 = 0;$
2) $5x - 3y + 7z + 10 = 0, \quad x - y + 6z + 1 = 0, \quad 10x - 6y + 14z + 9 = 0;$
3) $x - 3y + 2z + 2 = 0, \quad 2x - 6y + 4z + 3 = 0, \quad 5x - 15y + 10z + 16 = 0;$

1.)



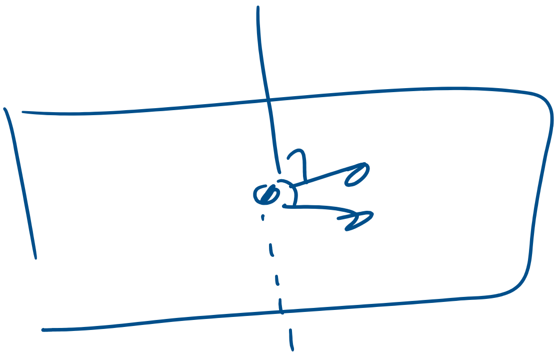
1. 2.

417. Найти уравнение плоскости, которая проходит через точку (1, 1, 1) и перпендикулярной прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-2}.$$

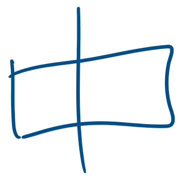
$2x + 3y - 2z + D = 0$

$2 + 3 - 2 + \underset{}{D} = 0, \quad D = -3$



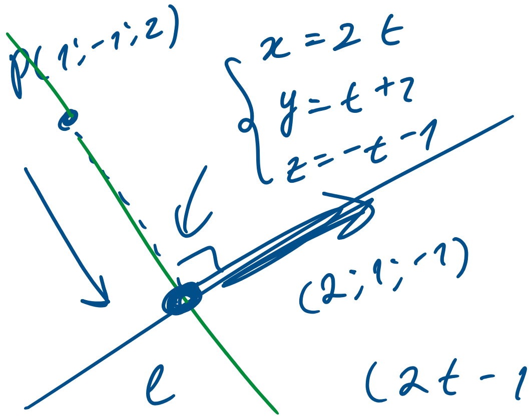
427. Найти уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $P(1, -1, 2)$ на прямую

$$\ell: \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}, = t$$



и расстояние от точки P до прямой ℓ.

$$\frac{x-x_0}{2} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\beta}$$



$$\begin{cases} x = 2t \\ y = t+2 \\ z = -t-1 \end{cases}$$

$$2\alpha + \beta - 1\gamma = 0$$

$$(2t-1;\ t+2;\ -t-3) \perp (2;1;-1)$$

$$4t - 2 + t + 2 + t + 3 = 0$$

$$6t + 3 = 0 \Rightarrow t = -2$$

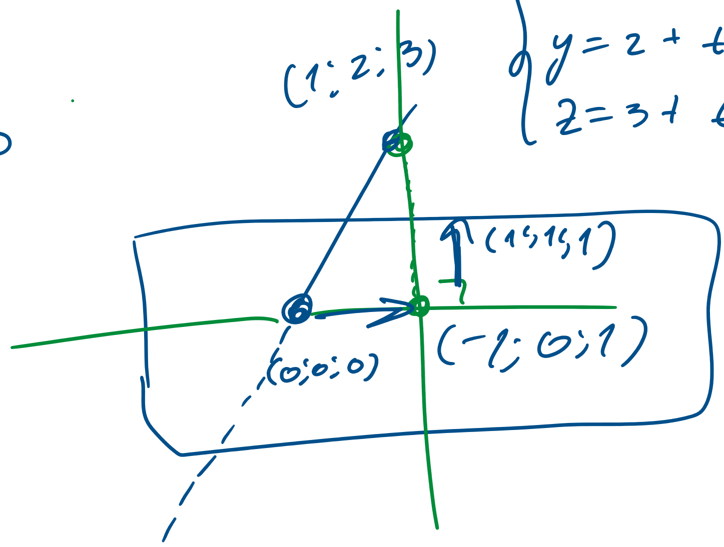
$$\sqrt{(\ )^2 + (\ )^2 + (\ )^2}$$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+t \end{cases}$$

0

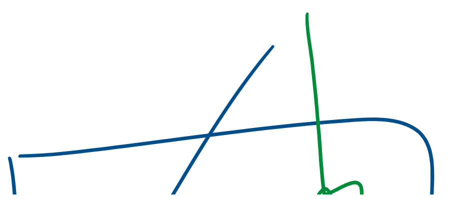
$$x + y + z = 0$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$$

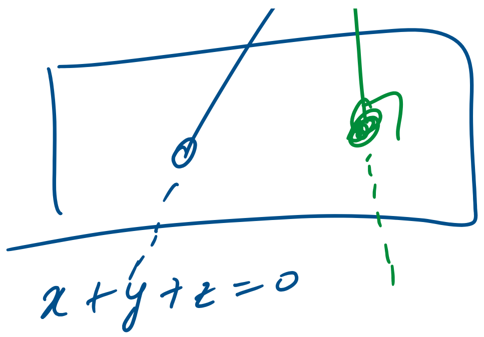


$$6 + 3t = 0 \Rightarrow t = -2$$

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$



$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$



$$\begin{cases} y = t \\ z = t \end{cases}$$

Задача 478. Написать формулы преобразования координат на плоскости, принимая за новые оси Ox' и Oy' прямые $x - 3y + 2 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$ соответственно, а за единичную точку новой системы – точку $(2, 3)$.

$$\begin{cases} x - 3y + 2 = 0 \\ 3x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \qquad x = -\frac{1}{11}, \quad y = \frac{7}{11}$$

$O'x'$ $\qquad \overline{A_1A_2} = (2; \frac{2}{3})$

$A_1 = (-2; 0)$, $A_2 = (0; \frac{2}{3})$

$\overline{e_1} = \lambda(2; \frac{2}{3})$ $\qquad \overline{e_2} = \mu(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2})$

$O x'y'$

$(2;3) = O' + 1 \cdot \overline{e_1} + 1 \cdot \overline{e_2} \iff (2,3) = (-\frac{1}{11}; \frac{7}{11}) + \lambda(2; 2/3)$

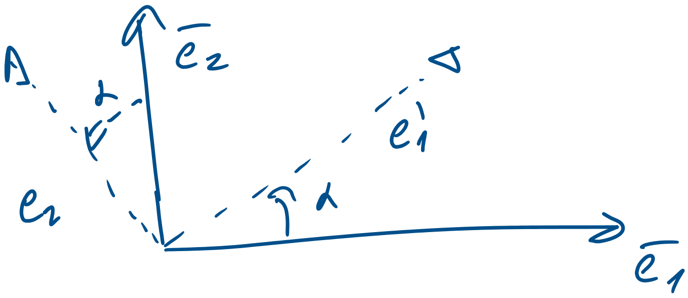
$+ \mu(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2})$

$\lambda = \frac{3}{2}$, $\mu = -\frac{30}{11}$ $\qquad \overline{e_1} = (3; 1)$

$\overline{e_2} = (-\frac{10}{11}, \frac{15}{11})$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -10/11 \\ 1 & \frac{15}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/11 \\ 7/11 \end{pmatrix}$$

Задача 488. Новая прямоугольная система координат плоскости получена из старой переносом начала в точку $O'(4,-3)$ и поворотом на угол α таким, что $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$. Найти новые координаты точки M, зная ее старые координаты $(5,10)$.



$e_1' = (\cos\alpha ; \sin\alpha)$ $\qquad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

$e_2' = (-\sin\alpha ; \cos\alpha)$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$A^{-1} = A^T = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$(7; -11)$

Задача 492. В пространстве даны две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. Координаты (x, y, z) и (x', y', z') произвольной точки M относительно этих двух систем связаны между собой следующими формулами перехода:

$$x = x' + 2y' - z' + 1$$
$$y = y' + 2z' - 2$$
$$z = -y' - z' + 1$$

1) Найти координаты начала второй системы и единичных векторов ее осей относительно первой.
2) Выразить координаты (x', y', z') через координаты (x, y, z).
3) Какие координаты в системе координат $Oxyz$ имеет единичная точка E' системы координат $O'x'y'z'$?

$x' = 0$

4) Написать уравнение координатных плоскостей $\boxed{O'y'z'}$, $\boxed{O'x'z'}$ и $\boxed{O'x'y'}$ в системе координат $Oxyz$.

$y' = 0$ $z' = 0$

5) Написать уравнение плоскости $x - 2y + 3z + 1 = 0$ в системе координат $O'x'y'z'$.
6) Написать уравнение прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{2}$ в системе координат $O'x'y'z'$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{O'}$$

e_1' e_2' e_3'

C^{-1} 6.) $\begin{cases} -3(x-2) = y+2 \\ 2(y+2) = -3z \end{cases}$