Линейная алгебра

Илья Панов

25 июля 2025 г.

Содержание

1 Введение

Конспект в основном составлялся по лекциям Поступашек для подготовки к поступлению в ШАД и AI Masters. Записи лекций у вас есть (я их пронумеровал, смотрите по порядку), домашки есть в конце каждой секции (курс рекомендует выполнять хотя бы по 10 заданий из дз), учебники и сборники задач - в репозитории.

2 Аналитическая геометрия

Сейчас мы начнём с повторения 10-11 класса школы, повыводим всякое для плоскости, потом заметим, что для пространства у нас особо ничего не меняется.

Теорема

Три вектора (a, b, c) на плоскости всегда линейно зависимы

Доказательство:
Можем просто составить систему уравнений, решить её по Гауссу (или как Вам угодно).

$$\begin{cases} x \cdot x_a + y \cdot x_b = x_c \\ x \cdot y_a + y \cdot y_b = y_c \end{cases}$$

Получим, что решения у нас есть, если вектора не коллинеарны (в конце получим $x_a \cdot y_b - x_b \cdot y_a$ в знаменателе, если это выражение равно 0, то это равносильно коллинеарности векторов a и b без ограничения общности). Если какие-то два коллинеарны (а третий не коллинеарен), то колинеарные вектора связаны каким-то коэффициентом k, а третий вектор можем взять с нулевым коэффициентом.

Определение

Метод Гаусса, также известный как метод исключения Гаусса, это алгоритм решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) путем последовательного исключения переменных. В основе метода лежит преобразование системы уравнений к равносильной ступенчатой (треугольной) форме (то есть нолики у нас снизу выстраиваются), из которой затем последовательно находятся значения переменных.

Теорема

Угол между двумя векторами и равносильность определений скалярного произведения

Доказательство:
Если есть равносильность определений, то косинус угла выражается очевидно. Равносильность следует из теоремы косинусов: пусть хотим найти угол между векторами a и b, тогда проведем третий - c такой, что он соединяет концы двух других векторов. Пишем теорему косинусов для c, как раз получаем искомый

угол и связь определений скалярного.

Теорема

Неравенство КБШ: произведение длин векторов не меньше, чем модуль их скалярного произведения: $|a| \cdot |b| \geq |(a,b)|$

Доказательство:
Рассмотрим $t \in \mathbb{R}$, теперь возьмем скалярное произведение $(x - ty, x - ty)$, оно ≥ 0 по свойствам. По линейности раскрываем, получаем квадратный трёхчлен, который ≥ 0, значит у него $D \geq 0$ - это в точности неравенство КБШ.

Теорема

Пусть даны два вектора a и b, отложенные от одной точки, тогда проекция вектора a на вектор b можно найти по формуле $a^{‘} = \frac{(a,b)}{(b,b)} \cdot b$

Доказательство:
Что такое проекция, надеюсь, все представляют (просто уронили перпендикуляр). Длина проекция очевидным образом находится из прямоугольного треугольника $|a^{‘}| = |a| \cdot \cos\phi$

Теперь попробуем выразить сам вектор $a^{‘}$, он лежит на b, тогда чтобы получить вектор проекции, мы хотим использовать направление вектора b (единичный вектор) и умножить получившийся вектор на длину проекции: $a^{‘} = \frac{b}{|b|} \cdot |a^{‘}|$. Подставляем $|a^{‘}|$, $\cos\phi$ заменяем на $\frac{(a,b)}{|a| \cdot |b|}$, получили требуемое.

Теорема

Точка (x, y) принадлежит прямой l (прямая задана точкой (x_0, y_0) и направляющим вектором (α, β)) тогда и только тогда, когда $\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta}$. Это равенство мы будем называть каноническим уравнением прямой. В эту же теорему включим вывод других способов задать прямую

Доказательство:
Очев: если у нас точка (x, y) лежит на прямой, тогда у нас вектора $(x - x_0, y - y_0)$ и (α, β) колинеарны, тогда $\exists\ k \in \mathbb{R} \mid (x - x_0, y - y_0) = k \cdot (\alpha, \beta)$. Рассмотрев это равенство покоординатно, получим требуемое отношение. В обратную сторону аналогично, просто введём k, скажем про коллинеарность, дальше принадлежность точки прямой очевидна.

Из получившегося уравнения очевным образом получаем параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot \alpha \\ y = y_0 + t \cdot \beta \end{cases}$$

По сути заменили k на t. Далее получим общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$. Просто возьмём каноническое и крест-накрест перемножим. Получим $\beta x-\alpha y-x_o\beta+y_0\alpha=0$. Дальше мы просто занимаемся переобозначением.

Замечание

Также заметим, что вектор с координатами (A, B) (читать как $(\beta, -\alpha)$) - это нормаль-вектор нашей прямой. Проверяется через скалярное произведение (помним, что (α, β) - это направляющий вектор нашей прямой).

Теорема

Прямая $l : Ax + By + C = 0$ разбивает плоскость на 2 полуплоскости. Если мы возьмём какие-то 2 точки I_1, I_2 из разных полуплоскостей, тогда $l(I_1)\cdot l(I_2) < 0$

Доказательство:
Зафиксируем точку $(x_0, y_0) \in l$. Теперь рассмотрим скалярное произведение нормаль-вектора и (x_1-x_0, y_1-y_0) (если считать, что у точки I_1 координаты (x_1, y_1)). Аналогично для второй точки I_2. Тогда одно скалярное произведение будет > 0, а другое < 0 в силу свойства скалярного (если точнее, то просто пользуемся, что косинус тупого угла отрицательный).
Например, подробнее для точки I_1 из верхней полуплоскости (БОО): $A(x_1-x_0)+B(y_1-y_0) > 0$, раскроем скобки, обозначим $C=-Ax_0-By_0$. Потом мы всё это перемножим с выражением для второй точки: $Ax_2+Bx_2+C<0$. Получим то, что и хотели: $l(I_1)\cdot l(I_2) < 0$.

Теорема

Формула расстояния от точки (x_0, y_0) до прямой $l : Ax + By + C = 0$ - это $d(x_0, y_0) = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Доказательство:
Рассмотрим точку $(x, y) \in l$. Теперь построим вектор (x_0-x, y_0-y), спроецируем его на нормаль вектор (точнее мы хотим посмотреть на длину проекции): $|(A, B)|\cdot |\frac{A(x_0-x)+B(y_0-y)}{A^2+B^2}|$. $|(A, B)|$ - это внезапно $\sqrt{A^2+B^2}$. Сокращаем, вводим обозначение C, получаем требуемое.

Замечание

Обсудим взаимное расположение прямых: совпадают, параллельны или пересекаются. В терминах коэффициентов это соответственно $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$ или никакое из предыдущих равенств не выполняется.

В терминах матриц совпадение это:

$$rk\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix} = 1$$

$$rk \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 1$$

Аналогично для параллельности у нас ранг большой матрицы будет 2, а в случае пересечения у нас ранг и маленькой, и большой матрицы будет 2.

Определение

Ранг матрицы (rk) - это максимальный порядок минора матрицы, отличный от нуля. Иными словами, это число, равное максимальному количеству линейно независимых строк (или столбцов) в матрице. Ранг матрицы показывает размерность подпространства, натянутого на строки (или столбцы) матрицы.

Теорема

Площадь параллелограмма, построенного на векторах (a, c) и (b, d) - это определитель:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

Доказательство:
$S = |a| \cdot |b| \cdot \sin \phi$. Меняем синус на косинус по ОТТ, заносим всё под корень, раскрываем скобки, там у нас получается полный квадрат: $\sqrt{(ad - bc)^2}$, а это в точности определитель.

Замечание

Из такого геометрического смысла определителя становятся очевидны всякие свойства про линейность по строке, иммутабельность при транспонировании.

Такую же формулу, кстати, можно вывести для $\mathbb{R}^3$, но это будет просто более глиномесно:

$$V = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Вот теперь мы плавно перешли к пространствам. Будем волшебным образом перетаскивать формулы из плоскости, натягивать их на пространство, также будем что-то новое вводить.

Замечание

Каноническое уравнение прямой в $\mathbb{R}^3$ - это $\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}$.

Уравнение плоскости можно построить по трём точкам, зафиксируем первую точку, от неё проведём 2 вектора к двум оставшимся, теперь возьмём какую-то точку (x, y, z), вектор от первой точки к новой должен быть ЛНЗ. Получили 3 вектора, которые образовали плоскость. Объём, натянутый на эти 3 вектора, равен 0, тогда мы просто пишем объём через определитель, раскрываем, получаем: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Давайте до кучи напишем параметрическое уравнение плоскости:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

где u и v - базисные векторы плоскости, а (x_0, y_0, z_0) - какая-то начальная точка.

Теорема

Формула перехода к новому базису.

Доказательство:
Рассмотрим вектор (x, y) в базисе $\{e_1, e_2\}$. Тогда наш вектор $a = xe_1 + ye_2$, а в другом базисе наш вектор - это $a = x^{`}e_1^{`} + y^{`}e_2^{`}$. Хотим узнать $(x_1^{`}, y_2^{`})$. $e_1^{`} = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$ и $e_2^{`} = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$. Подставим и преобразуем, потом воспользуемся единственностью представления вектора в данном базисе, тогда $x = x^{`}a_{11} + y^{`}a_{12}$, аналогично для y.

Замечание

Вопрос исследования взаимного расположения прямой и плоскости, плоскости и плоскости довольно тривиальный, просто пользуемся параметрическим уравнением плоскости и прямой, а дальше очев: сводим задачу к исследованию расположения направляющего вектора прямой и нормаль-вектора плоскости и тд и тп, просто системы уравнений.

Определение

Угол между прямой и плоскостью - это угол между прямой и проекцией прямой на данную плоскость.

Теорема

Формула расстояния от точки (x_0, y_0, z_0) до плоскости $\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$ - это $d(x_0, y_0, z_0) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Доказательство:
Выводится также, как и для двумерного случая.

Замечание

Расстояние между плоскостями или прямыми, или прямыми и плоскостями - это длина общего перпендикуляра. Задача сводится к расстоянию от точки до плоскости/прямой.

Домашнее задание

Из Смирнова решайте все задачи из 3.1-3.4, 4.1-4.4 и 474-482. Не обяз решать всё, решайте пока не почувствуете, что прониклись. Задачи халява, все идеи есть в лекциях.

3 Векторные пространства и матрицы

Определение

Пусть у нас есть векторное пространство размерности n, тогда набор векторов $\{e_1, \ldots, e_n\}$ будет называться **базисом** этого пространства, если они все линейно независимы: $\sum \lambda_i \cdot e_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$.

Теорема

У любого конечномерного векторного пространства существует базис.

Доказательство:
Просто предъявляем алгоритм. Возьмём $e_1 = v_1 \neq 0$, потом возьмём $e_2 = v_2 \in V$ такой, что $\lambda_1 \cdot e_1 + \lambda_2 \cdot e_2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$. Если такой не нашёлся, тогда у нас базис из 1 вектора, имеем просто одномернопространство. Потом возьмём $e_3 = v_3 \in V \ \ldots$ и тд.

Замечание

Система векторов обладает единственным базисом только в случае 0-мерного пространства.

Определение

Векторное пространство W представимо в виде **прямой суммы** пространств U и V, если $\forall w \in W \ \exists u \in U \ \& \ \exists v \in V \mid w = u + v$. Очень важно, что U и V пересекаются только по нулевому вектору.

Теорема

а) Размерность подпространства не превосходит размерности пространства.
б) W - векторное пространство, U - его подпространство, тогда $\exists V$ такое, что $W = U + V$.

Доказательство:
а) очевидно, пытливый читатеть может самостоятельно привести доказательство этого пункта.
б) Выбираем базис в U, потом дополняем его до всего базиса W, тогда $\forall w \in W \ w = \sum_{i=1}^{k} w_i \cdot e_i + \sum_{i=k+1}^{n} w_i \cdot e_i$, где $k = dimU, n = dimV$. Тогда первая сумма у нас лежит в U, а вот то, что осталось мы определим как V, тогда базис нового пространства - это просто те, вектора, которыми мы дополнили базис U до базиса W.

Замечание

Если V - в.п. ($dimV = n$) над полем из q элементов, тогда всего векторов у нас q^n (потому что $v = \sum q_i \cdot v_i$), а способов выбрать базис - $(q^n - 1)(q^n - q) \ldots (q^n - q^{n-1})$ (первым берём любой **ненулевой** вектор, потом берем вектор, который ЛНЗ с первым, то есть $e_2 \neq \lambda_1 \cdot e_1$, на место лямбды q вариантов и тд).

Теорема

Ранг матрицы $A|B$ (*это приписывание матрицы B справа от матрицы A*) не превосходит суммы рангов матриц А и В.

Доказательство:
$A|B = A|0 + 0|B$, тогда $rk(A|B) = rk((A|0) + (0|B)) \leq rk(A|0) + rk(0|B) = rk(A) + rk(B)$.

Теорема

Всякую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга 1, но нельзя представить в виде суммы меньшего числа таких матриц.

Доказательство:
$rkA = r, A = \sum A_i^{'}$. Без ограничения общности будем считать, что у нас ЛНЗ первые r строчек матрицы:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \ldots \\ A_r \\ A_{r+1} \\ \ldots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \\ \lambda_1^{r+1} A_1 \\ \lambda_1^{r+2} A_1 \\ \ldots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ A_2 \\ \ldots \\ 0 \\ \lambda_2^{r+1} A_2 \\ \lambda_2^{r+2} A_2 \\ \ldots \end{pmatrix} + \ldots$$

$rkA = rk(\sum A_k) \leq \sum rk(A_k) = k$, если k $<$ r, тогда $rkA < r$ - противоречие.

Теорема

$A^T A = AA^T \Rightarrow (A^{-1})^T = A^{-1}$.

Доказательство:
$A^{-1}A = E$, транспонируем $(A^{-1}A)^T = E^T \Leftrightarrow A^T(A^{-1})^T = E^T$, домножим слева на A^{-1}, получим $(A^{-1})^T = A^{-1}$

Далее в лекции разобраны несколько опорных задач, связанных с коммутативностью и обратимостью матрицы. Доказательства как правило проводились через **след матрицы**, потому что работать с числами куда приятнее и понятнее, чем с матрицами. Не считаю нужным конспетировать эти задачи. Может быть кто-то захочет продолжить моё дело и откроет пул реквест.

Определение

Следом квадратной матрицы A (dimA = n) мы будем называть $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

След становится удобным инструментом в доказательстве теорем про матрицы благодаря ряду свойств:

1. $tr(\alpha A + \beta B) = \alpha \cdot tr(A) + \beta \cdot tr(B)$
2. $tr(C^{-1}AC) = tr(A)$, в частности $tr(AB) = tr(BA)$
3. $tr(A) = tr(A^T)$
4. **След матрицы** равен сумме её собственных значений.

Замечание

Строковый и столбцовый ранг совпадают.

Определение

Симметрические матрицы: $A = A^T$, кососимметрические матрицы: $A^T = -A$. Также заметим, что в последнем случае у нас обязательно на диагонали должны быть нули, т.к. $a_{ii} = -a_{ii} \Leftrightarrow a_{ii} = 0$, а остальные элементы $a_{ij} = -a_{ji}$.

Замечание

Рассмотрми пространства симметрических матриц (U) и кососимметрических матриц (V). Размерность первого пространства - это $\frac{n^2+n}{2}$ (потому что такая матрицы задаётся с помощью n чисел на диагонали + количество чисел над диагональю, для этого нужно из всех чисел матрицы вычесть диагональ и поделить пополам - $\frac{n^2-n}{2}$. Размерность второго пространства тогда - это $\frac{n^2-n}{2}$ (раз на диагонали только нули).

Теперь сложим эти размерности $\frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$. Получили размерность всего пространства квадратных матриц $M_n(\mathbb{R})$. Также заметим, что пространства симметрических и кососимметрических матриц пересекаются только по нулевой матрице (то есть $A = -A$). Тогда $A \in M_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists U, V \; A = U \oplus V$ причём U - симметрическая матрица, а V - кососимметрическая матрица.

Теорема

$rk(A+B) \leq rk(A) + rk(B)$

Доказательство:
Идейно: $rk(A+B) = rk(A) + rk(B) - rk(A \cap B) \leq rk(A) + rk(B)$

Замечание

$tr(AB) = tr(BA)$, но $rk(AB) \neq rk(BA)$

Определение

$\mathbb{R}_n[x]$ - пространство многочленов, базисом которого может быть, например, $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$.

Скалярное произведение двух функций f и g - это $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$.

Замечание

А скалярное произведение матриц - это tr их произведения. Можете прогнать по свойствам скалярного произведения и убедиться в этом.

Теорема

Рассмотрим набор векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ со следующим свойством:

$$\begin{cases} (e_i, e_i) = 1 \\ (e_i, e_j) = 0 \end{cases}$$

Докажем, что этот набор векторов является базисом.

Доказательство:
Проверим ЛНЗ. Хотим $\sum \lambda_i e_i = 0 \Rightarrow \forall i\ \lambda_i = 0$. Рассмотрим скалярное произведение $\forall i\ (e_i, \sum \lambda_i e_i) = 0$, раскроем по свойству линейности, получим что-то такое: $\sum \lambda_j (e_i, e_j) = \lambda_i (e_i, e_i) = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0$.

Определение

Набор векторов из теоремы выше называется **ортонормированным базисом**.

Определение

$W^\perp := \{w^\perp \in W^\perp \mid \forall w \in W\ (w^\perp, w) = 0\}$

Замечание

$V = W \oplus W^\perp$. Очевидно, что W и $W^\perp$ пересекаются только по нулю, если бы мы нашли какой-то $x \in W, W^\perp$, то получили бы что-то в духе $(x, x) = 0$, а отсюда по свойству скалярного произведения получаем, что $x = 0$.

Теорема

Метод Грама–Шмидта: Любой базис $\{e_1, ..., e_n\}$ евклидова пространства можно преобразовать в ортонормированный базис $\{f_1, ..., f_n\}$ следующим образом:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= e_1,\\
u_2 &= e_2 - \frac{(e_2, u_1)}{(u_1, u_1)}u_1,\\
u_3 &= e_3 - \frac{(e_3, u_1)}{(u_1, u_1)}u_1 - \frac{(e_3, u_2)}{(u_2, u_2)}u_2,\\
&\vdots\\
f_i &= \frac{u_i}{\|u_i\|}.
\end{aligned}
$$

Теорема

Пусть A - матрица размера $n \times n$. Если для любой матрицы X размера $n \times n$ справедливо равенство $tr(AX) = 0$, то $A = 0$.

Доказательство:
Попробуем $X = A^T$. $tr(AA^T) = \sum a_{ij}^2 = 0 \;\Rightarrow\; \forall i, j \; a_{ij} = 0$. Либо можно сказать, что у нас $tr(AX)$ - это скалярное произведение на пространстве матриц, причём у нас $\forall X \; tr(AX) = 0$, то есть A перпендикулярно любому вектору, а это возможно в том случае, если A - это нулевой вектор.

Домашнее задание

Домашка есть в `Векторные пространства 102.pdf`