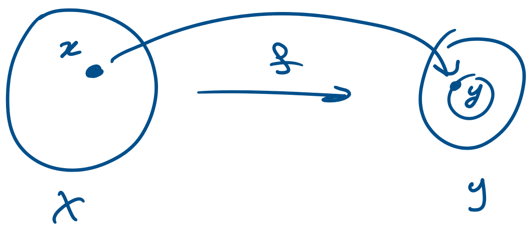
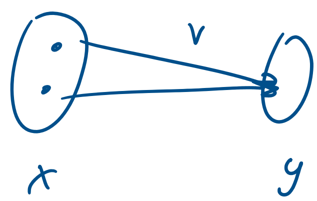
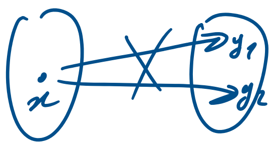
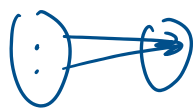
Линейная алгебра



$x \to \boxed{f} \to y$





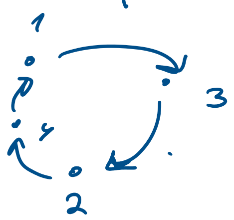


$6 \quad \underline{\{1, 2, \dots n\}} \to \underline{\{1, 2, \dots n\}}$

биекция $\qquad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$(1\,3\,2\,4)(5)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$



$\underline{f} \cdot \underline{g(x)} = h(x)$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h"'] & y \arrow[r, "f"] & z \end{tikzcd}$$

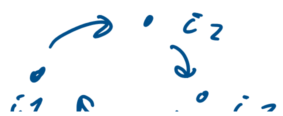
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$1 \mapsto 5 \mapsto 2$

$2 \mapsto 3 \to 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1\,2)\underline{(3)(4)(5)} = (1\,2)$$

$(i_1\, i_2\, i_3) \qquad i_1 \mapsto i_2 \mapsto i_3 \mapsto i_1$



$i_1 \quad i_3$

$[(1\,3\,5)(2\,4\,6\,7)] \cdot [(1\,4\,7)(2\,3\,5\,6)];$

$(1\,6\,4\,2\,5\,7\,3)$

$[(1\,3)(5\,7)(2\,4\,6)] \cdot [(1\,3\,5)(2\,4)(6\,7)].$

$(1)(2\,6\,5\,3\,7)(4)$

$(i_1 i_2)$ - транспозиция

$(1\,2\,3\,4\,5\,\ldots\,n) = \overbrace{(1\,2)(2\,3)\,(3\,4)\,\ldots\,(n-1\,n)}^{n-1}$

$(1\,2\,3) = (1\,2)(2\,3)$.

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad \shortparallel$

$\quad\quad\quad\quad\quad (1\,2\,3)$

$sgn(\sigma) = (-1)^k$

k – кол-во транспозиций

$sgn\,(i_1 i_2) = -1$

- $sgn(\sigma \cdot \tau) = sgn(\sigma)\,sgn(\tau)$

$sgn\,(1\,2\,3) = sgn(\,(1\,2)(2\,3)\,) = sgn\,(1\,2)\,)\,sgn(2\,3) = (-1)(-1) = 1$

$(1)(2\,6\,5\,3\,7)(4)$

$(2\,6\,5\,3\,7) = (2\,6)(6\,5)(5\,3)(3\,7)$

$(-1)^4$

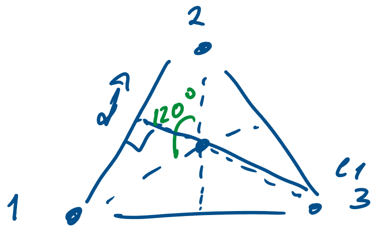
$(2\,6\,5\,3) = (2\,6)(6\,5)(5\,3) \quad (-1)^3 = -1$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\sigma \in S_2 = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{e}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (12)$$

$$S_3 = \{ e, (123), (132), (12), (23), (13) \}$$



360°

120°

240°

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

$1 \mapsto p_1$

$2 \mapsto p_2$

$3 \mapsto p_3$

$a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3}$

$$+a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

10.4. Пользуясь определением, вычислить следующие определители:

а) $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$;

а.) $a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

в) $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$; $\quad a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44}$

$\quad a\ b\ c\ d$

$$\begin{array}{c} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{array} \begin{vmatrix} A_1 + B_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} c_{1p_1} c_{2p_2} \dots c_{np_n} = \sum_{\sigma \in S_n} (a_{1p_1} + b_{1p_1}) a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n} + \sum_{\sigma \in S_n} b_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_n \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_n \end{vmatrix}$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) (\lambda c_{1p_1}) c_{2p_2} \dots c_{np_n}$$

$$\begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow[(3)-(1)]{(2)-(1)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{(3)+(2)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)(-1) = 1$$

$$a_{ij} \xrightarrow{T} a_{ji}$$

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_n \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix}$$

$$\det A = \det \overbrace{A^T}^{B}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{p_1 1} a_{p_2 1} \dots a_{p_n 1}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = - \overbrace{\begin{vmatrix} A_2 \\ A_1 \\ \\ A_n \end{vmatrix}}^{B}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \overset{\operatorname{sgn}\sigma}{d}\, a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

$$\det B = \sum_{\sigma \in S_n} \overset{\operatorname{sgn}\sigma}{d}\, a_{1p_2} a_{2p_1} \dots a_{np_n} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & & p_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ p_2 & p_1 & & p_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A_1 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} = 0 \qquad f(A_1, A_2) = -f(A_2; A_1)$$

$$f(x; x) = -f(x; x) \Rightarrow 2f(x; x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x; x) = 0$$

$$\xi(x;y) = -\xi(y;x)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$$

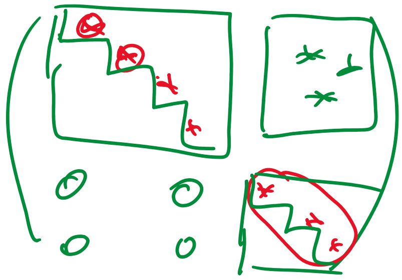
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \sin\alpha & & \\ \alpha & & \end{array} \\ \cos\delta \cdot & \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} = \sin\alpha\cos\delta + \sin\delta\cos\alpha \\ = \sin\beta\cos\delta + \cos\beta\cdot\sin\delta \\ = \sin\gamma\cos\delta + \cos\gamma\sin\delta \end{array}$$

$$\cos\delta \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_1 \end{vmatrix} + \sin\delta \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_2 \end{vmatrix} = 0$$

$A, B, C \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$

- $\begin{vmatrix} A & B \\ O & C \end{vmatrix} = \det A \cdot \det C$

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & & 0 \\ & & \\ 0 & & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{matrix}} \end{pmatrix} =$$



- $\begin{vmatrix} A & B \\ C & O \end{vmatrix}$

$1 \to n+1$

$2 \to n+2$

$\vdots$

$n \to 2n$

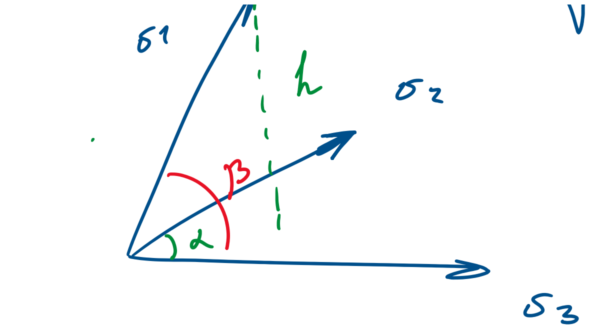
$$(-1)^n \begin{vmatrix} B & A \\ O & C \end{vmatrix} = (-1)^n \det B \det C$$

$$\begin{array}{ccc} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}^2 \le (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)(x_3^2+y_3^2+z_3^2)$$

$$V^2 \le |\sigma_1|^2 |\sigma_2|^2 |\sigma_3|^2$$

$$V = h \cdot S = h|\sigma_2||\sigma_3|\sin\alpha =$$



$$V = h \cdot S = h\,|\sigma_2||\sigma_3|\sin\alpha =$$

$$= |\sigma_1||\sigma_2||\sigma_3|\underbrace{\sin\beta}_{\le 1}\,\underbrace{\sin\alpha}_{\le 1} \le$$

$$\le |\sigma_1||\sigma_2||\sigma_3| =$$

$$= \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\,\sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2}$$

делит

$1 | 1$

$a_{21} = 0$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1$$

B. **Задача 16.19 б)** *Найти определитель матрицы (b_{ij}), где b_{ij} равен количеству общих делителей i и j.*

Задача 16.19 а) *Найти определитель матрицы, элементы которой заданы условием:*

$$A \qquad a_{ij} = \begin{cases} 1, & i|j \\ 0, & i\nmid j \end{cases}.$$

$$a^T_{ik} = a_{ki}$$

$$B = A^T A$$

$$b_{ij} = a^T_{i1}\cdot a_{1j} + \dots + a^T_{ik}a_{kj} + \dots + a^T_{in}a_{nj}$$

$k | j$

$k | i$

$$\det B = \det A^T \cdot \det A = \det A \cdot \det A = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\begin{array}{c} \\ i \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{1j} & a_{1n} \\ & a_{2j} & \\ \cancel{a_{i1}\,a_{i2}} & a_{ij} & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

$$\begin{pmatrix} \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \det A = a_{11} M_{11} = a_{11} A_{11}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n} =$$

$$= a_{11} \left(\sum_{\sigma \in S_n} a_{2p_2} \dots a_{np_n} \right) = a_{11} \underbrace{\det \begin{pmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}}_{M_{11}}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ & & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & a_{1n} \\ a_{21} & & 0 & a_{2n} \\ & & & \\ a_{n1} & & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j} & a_{2n} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & & a_{2n} \\ & 0 & & \end{vmatrix} =$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2j} & a_{2n} \\ a_{n1} & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{2n} \\ a_{n1} & \overset{0}{a_{nj}} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & & a_{1n} \\ \dots & & \dots & \dots & & \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} \dots & a_{in} \\ \dots & & \dots & \dots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{ij} & a_{i1} & \dots & & & \\ 0 & a_{n1} & \dots & & & \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{j-1+i-1} \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} \dots & a_{i,j-1}, \dots & a_{i,n} \\ 0 & & & \\ 0 & & M_{ij} & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

$$\det A = \det A^T = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+i} a^T_{ji} M^T_{ji} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}. = (-1)^{1+1} 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}} +$$

$$+ (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \Delta_{n-2}$$

$$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

• $f(n) = a f(n-1) + b f(n-2)$

$\cdot\, f(1) = \delta_1$

$\cdot\, f(2) = \delta_2$

$\bullet\ \lambda^2 = a\lambda + b$

$\lambda = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right)$

$\bullet\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \cdot\, f(n) = \underline{\underline{C_1 \cdot (\lambda_1)}}^n + \underline{\underline{C_2 (\lambda_2)}}^n$

$\bullet\ \lambda_1 = \lambda_2 \quad \bullet\, f(n) = C_1 (\lambda_1)^n + \underline{\underline{C_2\, n (\lambda_1)}}^n$

$\lambda^2 = a\lambda + b \;|\cdot \lambda^{n-2} \quad \Rightarrow \quad \lambda^n = a\lambda^{n-1} + b \cdot \lambda^{n-2}$

$f(n) = a f(n-1) + b f(n-2)$

$\bullet\ f(n) = a f(n-1) + b f(n-2)$

$f(1) = \delta_1$

$f(2) = \delta_2$

$g_1(n) = a g_1(n-1) + b g_1(n-2)$

$+$

$g_2(n) = a g_2(n-1) + b g_2(n-2)$

$f(3) = a\delta_1 + b\delta_2$

$f(4) = a f(3) + f(2)$

$h_1(n) = g_1(n) + g_2(n)$

$$f(n) = C_1 (\lambda_1)^n + C_2 (\lambda_2)^n$$

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \begin{cases} \cdot\, f(1) = C_1 \lambda_1 + C_2 \lambda_2 \\ \cdot\, f(2) = C_1 \lambda_1^2 + C_2 \lambda_2^2 \end{cases} \\ \delta_2 &= \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2^2 - \lambda_2 \lambda_1^2 = \lambda_1 \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} . = (-1)^{1+1} 2 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots \\ & & & 1 & 2 \end{vmatrix}}_{} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \Delta_{n-2}$$

(the first minor $= \Delta_{n-1}$)

$\Delta_1 = 2$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$

$\Delta_n = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$

$\lambda^2 = 2\lambda - 1 \iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$

$(\lambda - 1)^2 = 0$

$\Delta_n = C_1 (1)^n + C_2 n (1)^n$

$$\begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 3 = C_1 + 2C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C_2 = 1 \\ C_1 = 1 \end{matrix}$$

$\Delta_n = n + 1$

$A \cdot A^{-1} = E$

$A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \cdot A^{ad}, \quad A^{ad} = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & & A_{nn} \end{pmatrix}$

- $a_{i1} A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn} = \delta_{ij} \det A,$

$a_{1i} A_{1j} + a_{2i} A_{2j} + \dots + a_{ni} A_{nj} = \delta_{ij} \det A$

$i \neq j$

$$A' = (A_{(1)}, \dots A_{(i)}, \dots, A_{(i)} \dots A_{(n)}) =$$

$$= \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A'_{(j)} = A_{(i)} = A'_{(i)}$$

$$A'_{jk} = A_{jk}$$

$$0 = \det A' = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a'_{jk}}_{= a'_{ik} = a_{ik}} A'_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk}$$

$$C = A \cdot A^{ad} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ & & \\ A_{1n} & & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \det A & & \\ & \det A & \\ & & \ddots \det A \end{pmatrix} = (\det A) E$$

$$A \cdot \frac{A^{d}}{\det A} = E$$

$$\begin{cases} a_{11} x + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

$$x_k = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \overset{k}{b_1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & b_n & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}$$

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_k \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} B$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_k \\ x_n \end{pmatrix} \qquad X = A^{-1}B$$

$$\overset{\shortparallel}{X} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$x_k = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^{n} A_{ik} b_i = \frac{1}{\det A} \left(b_1 A_{1k} + b_2 A_{2k} + \dots + b_n A_{nk} \right)$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3 & x_3^2 & \dots & x_3^{n-1} \\ \dots & \dots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & & & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \\ 1 & x_n - x_1 & x_n(x_n - x_1) & \dots & \end{pmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1) \dots (x_n - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-2} \\ \vdots & & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

$$|W| = \prod_{i<j} (x_j - x_i)$$

г) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \sin\beta \\ \cos\alpha & \cos\beta \end{vmatrix}$; $= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha =$

$= \sin(\alpha-\beta)$

9.2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$;

2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -9 & -11 \\ 0 & -4 & -4 \end{vmatrix} = +4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 11 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot 2 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

10.1. Выяснить, какие из следующих произведений входят в развёрнутое выражение определителей соответствующих порядков и с какими знаками:

а) $a_{13}a_{22}a_{31}a_{46}a_{55}a_{64}$; $+$ б) $a_{31}a_{13}a_{52}a_{45}a_{24}$;

в) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{17}a_{73}a_{54}a_{62}$.

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \dots a_{np_n}$$

10.2. Выбрать значения i, j, k так, чтобы произведение

$$a_{51}a_{i6}a_{1j}a_{35}a_{44}a_{6k}$$

$i = 2$

входило в развёрнутое выражение определителя шестого порядка со знаком минус.

а.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\,3)(4\,6)$

10.2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ j & 6 & 5 & 4 & 1 & k \end{pmatrix}$

2

$$\begin{pmatrix} j & 6 & 5 & 4 & 1 & k \\ 2 & & & & & 3 \\ 3 & & & & & 2 \end{pmatrix}$$

11.1. Как изменится определитель порядка n, если:

а) у всех его элементов изменить знак на противоположный;

б) каждый его элемент a_{ik} умножить на c^{i-k} $(c \neq 0)$;

в) каждый его элемент заменить элементом, симметричным относительно побочной диагонали;

г) каждый его элемент заменить на симметричный относительно "центра" определителя;

д) его повернуть на 90° вокруг "центра" (против часовой стрелки)?

а.) $\det A = \sum\limits_{6} a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$

$(-1)^n$

б.) $\det A = \sum\limits_{6} c^{1-p_1} a_{1p_1} c^{2-p_2} a_{2p_2} \dots c^{n-p_n} a_{np_n}$

$= c^{1+2+\dots n-(p_1+\dots+p_n)}$

11.4. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечётного порядка равен 0.

$A^T = -A$

$\det A^T = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A$

$\det A$

$\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$

- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$

11.5. Числа 20604, 53227, 25755, 20927 и 289 делятся на 17. Дока-

11.5. Числа 20604, 53227, 25755, 20927 и 289 делятся на 17. Доказать, что также делится на 17 определитель

$$\begin{array}{ccccc} I & II & III & IV & V \\ \left|\begin{array}{ccccc} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 9 \end{array}\right| . \end{array}$$

$$V + I \cdot 10^4 + II \cdot 10^3 + \dots + VI \cdot 10$$

11.7. Чему равен определитель, у которого сумма строк с чётными номерами равна сумме строк с нечётными номерами?

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}$$

12.1. Разлагая по третьей строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

16.1. Найти наибольшее значение определителя третьего порядка, составленного:

а) из чисел 0 и 1;

б) из чисел 1 и −1.

а.) {max миог 2×2} = 1

1.) сф $\exists$ $\{0, 0, 1\}$ $\quad \begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{0} \end{vmatrix}$

2.) $\exists$ $\{1, 1, 1\} \Rightarrow$ оставшиеся: $\{1, 1, 0\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & & \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

3.) все строчки из $\{0, 1, 1\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 + (-1)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\overset{\leq 1}{e}} \overset{\leq 1}{O_2} + (-1)^{\overset{\leq 1}{b}} \overset{\leq 1}{O_2} + 0\, O_2$$

б) из чисел 1 и −1.

15. Все элементы определителя третьего порядка являются квадратами нечётных чисел. Докажите, что определитель делится на 64.

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4\underbrace{k(k+1)} + 1$$

16. Вычислите определитель матрицы $A = (a_{i,j})$ размером $n \times n$ с общим членом $a_{i,j} = \max(i,j)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 3 & 3 & 4 & & n \\ 4 & 4 & 4 & 4 & \dots & n \\ & & \dots & & & \\ n & n & n & n & & n \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= n(-1)^{n-1}$$

17. Вычислите определитель

$$\begin{array}{c} \\ 1. \\ 2. \\ 3. \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots & 0 \\ & & & \dots & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} \end{vmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{vmatrix} -(1+2+\dots+n) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{n} \end{vmatrix} = -\frac{(n)(n+1)}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \dots =$$

$$= -\frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n!}$$

18. Имеется числовая матрица $A = (a_{i,j})$ размером 99×99. Известно, что если $i + j$ чётно, то $a_{i,j} = 0$. Докажите, что определитель матрицы A равен нулю.

$\sum \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n}$

нечетных больше чем четных

$\exists\, a_{ii_k}$: $i + i_k$ – четн

$\exists\ a_i; i_k:$ $\quad i + i_k - \text{четн}$

нечет $\quad$ нечет

$2k+1 + 2m+1 = 2(m+k)+2$

20. Пусть $A = (a_{i,j})$ — матрица размером $n \times n$ с общим членом $a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} k^{i+j}$. Вычислите определитель этой матрицы.

$A = B^T B$

$$|B| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ \dots & \dots & & \dots \\ n & n^2 & \dots & n^n \end{pmatrix} \right| = n! \prod_{1 \le i < j \le n} (j-i) =$$

$$= 1!\, 2! \dots (n-1)!\, n!$$

$\det A = \det B^T \cdot \det B = (\det B)^2$

$$|A| = \left(\prod_{k=1}^{n} k! \right)^2$$

21. Пусть $A = (a_{i,j})$ — матрица размером $n \times n$ с общим членом $a_{i,j} = C_{i+j-2}^{i-1}$. Вычислите определитель этой матрицы.

$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$

из n вычесть $n-1$

из $n-1$ вычесть $n-2$

$\vdots$

из 2 вычесть 1

26. Все элементы определителя четвёртого порядка равны 1 или -1. Найдите наибольшее возможное значение этого определителя.

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 \end{vmatrix} \overset{?}{\leq} |\sigma_1|\,|\sigma_2|\,|\sigma_3|\,|\sigma_4| \leq 2^4 = 16$$

$\sqrt{4}$ $\quad \sigma_4 \quad \sigma_4 \quad \sigma_4$

$(\sigma_i, \sigma_j) = 0$, $i \neq j$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

35. Пусть A и B — ортогональные матрицы. Докажите, что

$$\det(B^T A - A^T B) = \det(A + B) \cdot \det(A - B).$$

$\boxed{A \cdot A^T = E} \Rightarrow (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -1 \end{array}\right.$

$\det(A^T + B^T)\det(A - B) \pm \det((A^T + B^T)(A - B)) =$

$= \det(A^T A + B^T A - A^T B - B^T B) =$

$= \det(B^T A - A^T B)$

51. Найдите все квадратные действительные матрицы размером 3×3, удовлетворяющие уравнению $X^2 + I = 0$.

$X^2 = -E$

$(\det X)^2 = \det(-E) = (-1)^3 \det E = -1$

53. Существует ли невырожденная квадратная матрица A третьего порядка с действительными элементами такая, что $A^3 + 2A' = 0$?

$$(\det A)^3 = \det(-2A^T)$$

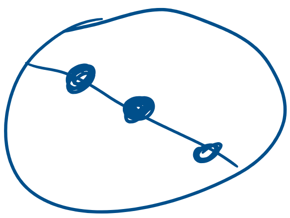
$$(\det A)^3 = (-2)^3 \det A$$

$$x^3 = -8x \Rightarrow x^2 = -8$$

62. Первоначально таблица 5×5 пуста. Аня выбирает любую клетку и записывает в неё любое число от 1 до 25. Затем Ваня в другую клетку записывает число от 1 до 25, отличное от записанного Аней. И далее игроки по очереди записывают в незанятые клетки числа от 1 до 25, отличные от ранее записанных. Если определитель соответствующей матрицы делится на 25, выигрывает Аня; в противном случае побеждает Ваня. Кто выигрывает при правильной игре?

$(25; 25; 25; 25; 25)$

$$\begin{pmatrix} & & 25-k & m & \\ & & k & 25-m & \\ 25 & & & x & \\ 25-y & & & 25-x & \\ y & & & & \end{pmatrix}$$



$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5}$$

6

$a \quad a_{42} \, a_{51}$

$a_{41} \, a_{52}$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}. = (-1)^{n+n} a_n \Delta_{n-1} +$$

$$+ (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & \vdots \\ & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_n \Delta_{n-1} + (-1)^{n+2}(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= a_n \Delta_{n-1} - a_1 a_2 \dots a_{n-1} =$$

$$= a_n (a_{n-1} \Delta_{n-2} - a_1 a_2 \dots a_{n-2}) - a_1 a_2 \dots a_{n-1} =$$

$$= a_0 a_1 \dots a_n - \sum_{i=1}^{n} \hat{a}_0 a_1 \dots \hat{a}_i \dots a_n =$$

$$= a_0 \dots a_n - a_1 \dots a_n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

$\Delta_n =$

Задача 1* *Вычислить определитель*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_2 & \dots & 1+x_n \\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1+x_1^n & 1+x_2^n & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1+x_1^n & 1+x_2^n & \dots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1+x_1 & 1+x_2 & \dots & 1+x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \dots & 1+x_n^2 \\ 0 & 1+x_1^n & & & 1+x_n^n \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & & & & \\ -1 & x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

$$(1; 1; \dots 1) = (2; 0; \dots 0) + (-1; 1, \dots 1)$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & x_1 & x_2 \dots & x_n \\ -1 & & & \\ -1 & x_1^n & x_2^n \dots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & x_1 & & x_n \\ \vdots & & & \\ -1 & x_1^n & x_2^n \dots & x_n^n \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ & & & \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x_1 & \dots & x_n \\ 1 & x_1^2 & \dots & x_n^2 \\ 1 & x_1^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

из i-го столбце выносим x_i

$$= 2 x_1 \dots x_n V(x_1, \dots x_n) - V(1; x_1 \dots x_n)$$

Задача 11.10 е) *Вычислить определитель*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

$$a_{ij} = x_i y_j + \delta_{ij}$$

$$(x_n y_1; \dots x_n y_{n-1}, 1 + x_n y_n) = (0, 0 \dots 0, 1) +$$

$(x_n y_1; \ldots\ x_n y_{n-1},\ 1 + x_n y_n) = (0, 0, \ldots 0, 1) +$

$+ (x_n y_1, \ldots, x_n y_n) =$

$$= \Delta_{n-1} + x_n \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \ldots & x_1y_{n-1} & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \ldots & x_2y_{n-1} & x_2y_n \\ \vdots & & & & \\ x_{n-1}y_1 & x_{n-1}y_2 & \ldots & 1+x_{n-1}y_{n-1} & x_{n-1}y_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & & y_n \end{vmatrix}$$

$$= \Delta_{n-1} + x_n \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & & 0 \\ & & & 1 & 0 \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_{n-1} & y_n \end{vmatrix} = \Delta_{n-1} + x_n y_n$$

$\Delta_1 = 1 + x_1 y_1$, $\Delta_n = 1 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$

o) *Вычислить определитель*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & x & \ldots & x & x \\ y & a & \ldots & x & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ y & y & \ldots & a & x \\ y & y & \ldots & y & a \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a-x & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \\ y-x & a-x & & & 0 & x \\ 0 & y-a & a-x & \ldots & 0 & x \\ & & & & 0 & x \\ & & & & a-x & x \\ & & & & y-a & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a-x-y & x-a & 0 & \ldots & & 0 \\ y-a & 2a-x-y & x-a & & & \\ & y-a & 2a-x-y & \ldots & & \\ & & & 2a-x-y & x-a & \\ & & & & 2a-x-y & x-a \\ & & & & y-a & a \end{vmatrix} =$$

из сой вычтем с+1

$= (2a-x-y)\Delta_{n-1} - (x-a)(y-a)\Delta_{n-2}$

$$= (2a - x - y) D_{n-1} - (x-a)(y-a) D_{n-2}$$

$$D_n = C_1 (a-x)^n + C_2 (a-y)^n$$

$$\begin{cases} C_1 (a-x) + C_2 (a-y) = D_1 = a \\ C_1 (a-x)^2 + C_2 (a-y)^2 = a^2 - xy = D_2 \end{cases}$$

$$C_1 = \frac{-y}{x-y} \qquad C_2 = \frac{x}{x-y}$$

$$D_n = \frac{x(a-y)^n - y(a-x)^n}{x-y}$$

1. $a = x = y$ $\qquad D_n = 0$

2. $a = x + y$

$$D_n = \begin{vmatrix} x-y & 0 & \dots & 0 \\ y-x & x-y & & \\ & & \ddots & \\ & & & x-y \\ & & y-x & x \end{vmatrix} = x(x-y)^{n-1}$$

3. $x \neq y$, $a = y$

4. $x = y \neq a$ $\qquad D = C_1 (a-x)^n + C_2 n (a-x)^n$

$$\lim_{y \to x} \frac{x(a-y)^n - y(a-x)^n}{x-y} = n x (a-x)^{n-1} + (a-x)^n$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n-x \end{vmatrix} = 0$$

$x = 0, 1, \ldots n-1$

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ x^{n-1} & 1 & x & \cdots & x^{n-2} \\ x^{n-2} & x^{n-1} & 1 & \cdots & x^{n-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x^2 & x^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix} =$$

$k = 1, \ldots n-1$ заменим k-ую строчку на её сумму с $k-1$ умнож на $(-x)$

$$= \begin{vmatrix} 1-x^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1-x^n & \ldots & 0 \\ & & & \\ x & x^2 & x^3 \ldots & 1 \end{vmatrix} = (1-x^n)^{n-1}$$

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix} = |C+E|$$

$C = (a_i + b_j)_{ij}$

$$C = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & \ldots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & \ldots & a_2+b_n \\ \\ a_n+b_1 & \ldots & a_n+b_n \end{pmatrix}$$

стие

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots & 0 \\ & \ldots & 1 & \\ 0 & 0 & & 0\ 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rk} C \le \operatorname{rk}(a_i)_{ij} + \operatorname{rk}(b_j)_{ij} \le 1+1=2$

$n \geq 2$

$$= \det E + \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 1 \ldots & & \\ & & \underset{\text{"}}{\overset{a_i+b_i}{a_i+b_i}} & \\ & & & 1 \end{vmatrix} + \sum_{i<j} \underbrace{\begin{vmatrix} a_i+b_i & a_i+b_j \\ a_j+b_i & a_j+b_j \end{vmatrix}}_{\text{"}}$$

$\sum_{i} (a_i - a_j)(b_j - b_i)$

$$\sum_{i<j}(a_i - a_j)(b_j - b_i)$$

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

ие.

$n = 2 \quad (x-1)(x+1)$

$$n = 3 \quad \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+2)$$

из каждой строчки, кроме последней,
вычтем предыдущую

:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 1-x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 1-x & 0 & & 0 \\ & & & & & \\ & & & & x-1 & 1-x \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & x \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} & & & x-1 & 1-x \\ 1 & 1 \dots & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & x \end{vmatrix} =$$

к последнему столбцу прибавить все остальные

$$= (x-1)^{n-1}(x+n-1)$$

Определители

12. (j) Пусть A – квадратная матрица нечетного порядка, A^t – транспонированная к ней. Доказать, что $|A - A^t| = 0$.

13. (j) Доказать, что если A – матрица размером $n \times n$, $A^2 = A$, то матрица $B = 2A - E$ (E – единичная) удовлетворяет условию $B^2 = E$. Найти $|A|$ и $|B|$.

14. (j) Найдите определитель $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{25} & \dots & \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} & 1 & \frac{1}{5} & \dots & \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\ \left(\frac{1}{5}\right)^{n-2} & \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} & 1 & \dots & \left(\frac{1}{5}\right)^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{1}{5}\right) & \left(\frac{1}{25}\right) & \left(\frac{1}{5}\right)^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}$

15. (j) При каких значениях параметра a максимален определитель матрицы, обратной к этой?
$\begin{pmatrix} a & -7 & -3 \\ 4 & -10 & a^2 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$

16. (m) Пусть $A = ||a_{ij}||$ и $= ||b_{ij}l$ - квадратные матрицы порядка $n > 2$. Известно, что $a_{ii} > b_{ii} > 0$ при любом $i = 1, \dots, n$. Выберете верное утверждение:
а) $det(A) > det(B)$
б) $det(A - B) > 0$
в) $det(A) < det(B)$
г) $det(A) > det(A - B)$
д) все четыре утверждения а, б, в, г ложные

17. (m) Найдите детерменант матрицы $n-$ порядка A, $a_{ij} = (-1)^{|i-j|}$ если $i \neq j$ и $a_{ii} = 2$.

18. (m) Пусть известен ранг матрицы A, чему равен ранг присоединенной матрицы?

19. (j) Пусть известен определитель матрицы A, чему равен определитель присоединенной матрицы?

20. (m) Пусть A – матрица $n \times n$ такая, что $A^2 = A, E-$ единичная $n \times n$ матрица. Доказать, что определитель матрицы $E - A$ равен 0 или 1.

21. (m) Пусть задан определитель матрицы . В предыдущих задачах строили присоединенную матрицу по следующему правилу: заменяем элемент a_{ij} на соответствующий минор M_{ij}.Найти определитель этой матрицы в случае замены не на минор, а на алгебраическое дополнение.

22. (m) Пусть $x^{\downarrow n} = x(x-1)\dots(x-n+1)$. Найти определитель матрицы $n+1 \times n+1$ с общим элементов $a_{ij} = x_i^{\downarrow j-1}$, $j = 2, 3, \dots$, первый столбец единицы.

23. (m) Вычислить определитель матрицы Вандермонда
а) но без предпоследнего столбца
б) но без второго и предпоследнего столбца

24. (m) Пусть дана матрица, где каждый эдемент $_{ij}(x)$ рассматривается как фукнция от x. Напишите какую-нибудь аналитическую формулу производной по x от детерменанта этой матрицы.

25. (s) Дана матрица из нулей и единиц, причем для каждой строки матрицы верно следующее: если в строке есть единицы, то они все идут подряд (неразрывной группой из единиц). Докажите, что определитель такой матрицы может быть равен только ± 1 или 0.

26. (s) Найдите максимальное значение определителя матрицы (а) второго (б) третьего порядка, если сумма квадратов всех ее элементов не превосходит 1.

27. (s) Пусть G - дерево, а $A(G)$ - его матрица смежности. Какие значения может принимать $det(A(G))$?